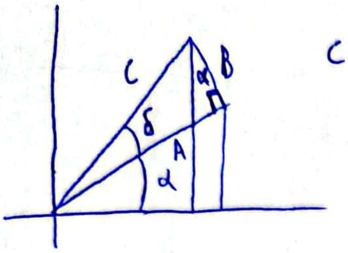
Homework 1.

1.4. Let $\cos(\delta) = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ and $\sin(\delta) = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Use the above identities to derive the following:

$$A\cos(\alpha) \mp B\sin(\alpha) = \sqrt{A^2+B^2}\cos\left(\alpha \pm \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)\right)$$



$C = \sqrt{A^2+B^2}$

$$A\cos(\alpha) \mp B\sin(\alpha) = \sqrt{A^2+B^2}\cos(\delta)\cos(\alpha) \mp \sqrt{A^2+B^2}\sin(\delta)\sin(\alpha) = \sqrt{A^2+B^2}\left(\cos(\delta)\cos(\alpha) \mp \sin(\delta)\sin(\alpha)\right)$$

Sabemos que:

$$\left.\begin{array}{l} A = \cos(\delta)\sqrt{A^2+B^2} \\ B = \sin(\delta)\sqrt{A^2+B^2} \end{array}\right\}$$

Teniendo en cuenta que:
$$\left\{\begin{array}{l} \cos(\alpha \pm \delta) = \cos(\alpha)\cos(\delta) \mp \sin(\alpha)\sin(\delta) \\ \tan(\delta) = \frac{B}{A} \Rightarrow \delta = \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right) \end{array}\right.$$

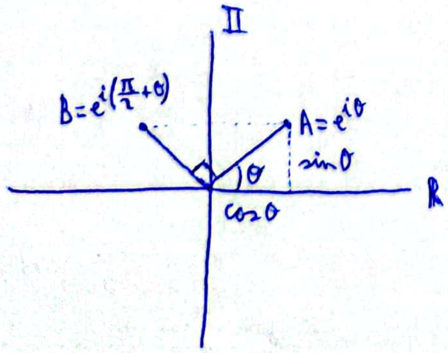
Finalmente, nos queda:

$$\boxed{A\cos(\alpha) \mp B\sin(\alpha) = \sqrt{A^2+B^2}\cos(\alpha \pm \delta) = \sqrt{A^2+B^2}\cos\left(\alpha \pm \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)\right)}$$

Homework 2.

2.2. Given the unit phasor $A = e^{i\theta}$, sea $B = i\cdot A$. Sketch A and B in the complex plane. How are the two phasors related?

$$\left.\begin{array}{l} e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \\ \text{Entonces: } i = e^{i\frac{\pi}{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow B = i\cdot A = i\cdot e^{i\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\theta} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)} = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$



También podemos ver que:

$$\left.\begin{array}{l} B = i e^{i\theta} = i\cos(\theta) - \sin(\theta) \\ B = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} -\sin(\theta) = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \\ \cos(\theta) = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \end{array}$$

2.4. In a vision experiment two grating are added together to produce a visual stimulus. The spatial luminance profiles of the gratings are:

first grating: $L(x) = 1 + 0.5\cos(x)$, second grating: $L(x) = 1 + 0.5\sin(x)$

• Use the trigonometric identity $A\cos(\alpha) \mp B\sin(\alpha) = \sqrt{A^2+B^2}\cos\left(\alpha \pm \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)\right)$, to determine the amplitude and phase of the visual stimulus.

$$\boxed{L_1(x) + L_2(x) = 2 + 0.5\cos(x) + 0.5\sin(x) = 2 + \sqrt{0.5^2+0.5^2}\cos\left(x - \tan^{-1}\left(\frac{0.5}{0.5}\right)\right) = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$$

La fase es $-\frac{\pi}{4}$ y la amplitud $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2.6. Three vectors: $\vec{C}_0 = (\cos 0^\circ, \cos 0^\circ, \cos 0^\circ) = (1,1,1)$

$\vec{C}_1 = (\cos 0^\circ, \cos 120^\circ, \cos 240^\circ) = (1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

$\vec{S}_1 = (\sin 0^\circ, \sin 120^\circ, \sin 240^\circ) = (0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

• Verify that these 3 vectors form an orthogonal basis for 3-dimensional space.
• Find the length of each of these vectors.

Los tres vectores forman una base si son linealmente independientes, es decir, sólo se cumple lo siguiente si a, b y c son nulos.

$$a(1,1,1) + b\left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) + c\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (0,0,0)$$

De esto obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} a + b &= 0 \\ a - \tfrac{1}{2}b + \tfrac{\sqrt{3}}{2}c &= 0 \\ a - \tfrac{1}{2}b - \tfrac{\sqrt{3}}{2}c &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Calculo el determinante para ver cómo es el sistema:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \neq 0$$

Por tanto, la solución es única y es la trivial $a = b = c = 0$. Así que los vectores son linealmente independientes y forman una base.

Para ver si son ortogonales, hacemos el producto escalar de cada uno de ellos por los demás.

$\vec{C}_0 \cdot \vec{C}_1 = (1,1,1)\cdot(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$; $\vec{C}_0 \cdot \vec{S}_1 = (1,1,1)\cdot(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

$\vec{C}_1 \cdot \vec{S}_1 = (1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})\cdot(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$

Como todos los productos escalares son nulos, los vectores forman una base ortogonal.

Longitud: $|\vec{C}_0 \cdot \vec{C}_0| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$; $|\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_1| = \frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$; $|\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_1| = \frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

Los vectores no están normalizados.

Homework 3.

3.1. Find the Fourier coefficients m and a such that the model $y(x) = m + a\cos x$ passes through the two data points $(x=0, y=3)$ and $(x=\pi, y=1)$

$$y(x) = m + a\cos(x) \begin{cases} (x=0, y=3): \; y(x=0) = 3 = m + a \\ (x=\pi, y=1): \; y(x=\pi) = 1 = m - a \end{cases}$$

La solución a este par de ecuaciones es:

$$\boxed{m = \frac{y(x=0) + y(x=\pi)}{2} = \frac{3+1}{2} = 2} \; ; \; \boxed{a = \frac{y(x=0) - y(x=\pi)}{2} = \frac{3-1}{2} = 1}$$

Por tanto, el modelo quedaría: $\boxed{y(x) = 2 + \cos(x)}$

3.2.

• Caso $D=4$: $\begin{cases} \vec{C}_0 = (1,1,1,1) \\ \vec{C}_1 = (1,0,-1,0) \\ \vec{S}_1 = (0,1,0,-1) \\ \vec{C}_2 = (1,-1,1,-1) \end{cases}$

Los 4 vectores forman una base si son linealmente independientes; es decir, sólo se cumple lo siguiente si a, b, c y d son nulos.

$$a(1,1,1,1) + b(1,0,-1,0) + c(0,1,0,-1) + d(1,-1,1,-1) = (0,0,0,0)$$

De esto obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} a + b + d = 0 \\ a + c + (-d) = 0 \\ a - b + d = 0 \\ a - c - d = 0 \end{array}\right\}$$

Calculo el determinante para ver de qué tipo es el sistema:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

Por tanto, la solución es única y es la trivial $a = b = c = d = 0$. Así que los vectores son linealmente independientes y forman una base.

Para ver si son ortogonales, hacemos el producto escalar de cada uno de ellos por los demás.

$\vec{C}_0 \cdot \vec{C}_1 = 1 - 1 = 0$, $\vec{C}_0 \cdot \vec{C}_2 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$, $\vec{C}_0 \cdot \vec{S}_1 = 1 - 1 = 0$, $\vec{C}_1 \cdot \vec{S}_1 = 0$, $\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_2 = 1 - 1 = 0$

$\vec{S}_1 \cdot \vec{C}_2 = -1 + 1 = 0$

Son ortogonales.

• Caso $D=5$: Es análogo y lo he hecho en Python.

$$\begin{cases} \vec{C}_0 = (1,1,1,1,1) \\ \vec{C}_1 = (1, 0.309, -0.809, -0.809, 0.309) \\ \vec{S}_1 = (0, 0.951, 0.588, -0.588, -0.951) \\ \vec{C}_2 = (1, -0.809, 0.309, 0.309, -0.809) \\ \vec{S}_2 = (0, 0.588, -0.951, 0.951, -0.588) \end{cases}$$

Los 5 vectores forman una base si son linealmente independientes, es decir, sólo se cumple lo siguiente si a, b, c, d, e son nulos.

$$a\vec{C}_0 + b\vec{C}_1 + c\vec{S}_1 + d\vec{C}_2 + e\vec{S}_2 = (0,0,0,0,0)$$

De esto se obtiene un sistema de ecuaciones y calculando el determinante para ver que tipo de sistema es, obtenemos que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0.309 & -0.809 & -0.809 & 0.309 \\ 0 & 0.951 & 0.588 & -0.588 & -0.951 \\ 1 & -0.809 & 0.309 & 0.309 & -0.809 \\ 0 & 0.588 & -0.951 & 0.951 & -0.588 \end{vmatrix} \simeq 14 \neq 0$$

Por tanto, la solución es única y es la trivial $a=b=c=d=e=0$. Así que los vectores son linealmente independientes y forman una base.

Vemos si son ortogonales:

$\vec{C}_0 \cdot \vec{C}_1 = 1 - 2\cdot 0.809 + 2\cdot 0.309 = 0$, $\vec{C}_0 \cdot \vec{S}_1 = 0$, $\vec{C}_0 \cdot \vec{C}_2 = 0$, $\vec{C}_0 \cdot \vec{S}_2 = 0$, $\vec{C}_1 \cdot \vec{S}_1 = 0$

$\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_2 = 0$, $\vec{C}_1 \cdot \vec{S}_2 = 0$, $\vec{S}_1 \cdot \vec{C}_2 = 0$, $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = 0$, $\vec{C}_2 \cdot \vec{S}_2 = 0$

Son ortogonales.

3.3.

(a) Caso $D=4$:

$|\vec{C}_0| = \sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2} = \sqrt{4} = 2$; $|\vec{C}_1| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$; $|\vec{C}_2| = \sqrt{4} = 2$; $|\vec{S}_1| = \sqrt{2}$

Caso $D=5$:

$|\vec{C}_0| = \sqrt{5}$; $|\vec{C}_1| = \sqrt{2.5}$; $|\vec{S}_1| = \sqrt{2.5}$; $|\vec{C}_2| = \sqrt{2.5}$; $|\vec{S}_2| = \sqrt{2.5}$

(b) Como se puede apreciar, se cumple que:

- $|\vec{C}_0| = \sqrt{D}$; $|\vec{C}_k| = \sqrt{\frac{D}{2}}$; $|\vec{S}_k| = \sqrt{\frac{D}{2}}$ (Impar)

- $|\vec{C}_0| = \sqrt{D}$; $|\vec{C}_k| = \sqrt{\frac{D}{2}}$; $|\vec{C}_{\frac{D}{2}}| = \sqrt{D}$; $|\vec{S}_k| = \sqrt{\frac{D}{2}}$ (Par)