Oscilador armónico amortiguado mediante el método de Verlet

Gines Gonzalez Guirado

October 2023

1 Introducción del problema.

Para obtener la solución numérica del oscilador armónico amortiguado, se ha partido de la ecuación diferencial en su forma original y se han normalizado tanto la posición como el tiempo.

Ecuación del oscilador armónico amortiguado:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha\frac{dx}{dt} + kx = 0 \tag{1}$$

donde $m \equiv$ masa del oscilador, $\alpha \equiv$ coeficiente de amortiguación y $k \equiv$ constante del muelle.

Normalizamos la posición, dividiendo por $x|_{t=0} = x_0$:

$$\frac{m}{x_0}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\alpha}{x_0}\frac{dx}{dt} + k\frac{x}{x_0} = 0 \quad \xrightarrow{x_{Norm}=\frac{x}{x_0}} \quad m\frac{d^2x_{Norm}}{dt^2} + \alpha\frac{dx_{Norm}}{dt} + kx_{Norm} = 0$$

$$\xrightarrow{\cdot\frac{1}{m}} \quad \frac{d^2x_{Norm}}{dt^2} + \frac{\alpha}{m}\frac{dx_{Norm}}{dt} + \frac{k}{m}x_{Norm} = 0 \quad \xrightarrow{k=\omega_0^2 m} \quad \frac{d^2x_{Norm}}{dt^2} + \frac{\alpha}{m}\frac{dx_{Norm}}{dt} + \omega_0^2 x_{Norm} = 0$$

$$\xrightarrow{\cdot\frac{1}{\omega_0^2}} \quad \frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2x_{Norm}}{dt^2}+\frac{\alpha}{m\omega_0^2}\frac{dx_{Norm}}{dt}+x_{Norm}=0 \quad \xrightarrow{\eta=\omega_0 t} \quad \frac{d^2x_{Norm}}{d\eta^2}+\frac{\alpha}{m\omega_0}\frac{dx_{Norm}}{d\eta}+x_{Norm}=0$$

$$\xrightarrow{\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}} \quad \frac{d^2x_{Norm}}{d\eta^2}+\frac{\alpha}{\sqrt{km}}\frac{dx_{Norm}}{d\eta}+x_{Norm}=0$$

Queremos diferenciar entre los diferentes comportamienos del oscilador, los cuáles vienen dados por:

$$\underbrace{\alpha^2 > 4km}_{\text{Sobreamortiguado}} \qquad \underbrace{\alpha^2 = 4km}_{\text{Amortiguado crítico}} \qquad \underbrace{\alpha^2 < 4km}_{\text{Subamortiguado}}$$

De esta forma, se puede hacer:

$$\frac{\alpha^2}{4km} > 1 \quad \xrightarrow{\sqrt{}} \quad \frac{\alpha}{2\sqrt{km}} > 1$$

Ahora, podemos introducir esto en la ecuación, nombrándolo $\beta_{Norm} = \frac{\alpha}{2\sqrt{km}}$:

$$\frac{d^2x_{Norm}}{d\eta^2}+2\beta_{Norm}\frac{dx_{Norm}}{d\eta}+x_{Norm}=0$$

El tiempo propio para un oscilador armónico se define como:

$$\tau=\frac{1}{\beta_{Norm}\omega_0}$$

Como el tiempo normalizado es $\eta=\omega_0 t$, el tiempo propio en este caso será:

$$\tau_{Norm}=\tau\cdot\omega_0=\frac{1}{\beta_{Norm}}$$

Por tanto, el método de Verlet para un oscilador armónico amortiguado con su ecuación normalizada, queda de la forma:

$$x_{Norm}^{(k+1)}=\frac{2-h^2}{1+h\beta_{Norm}}x_{Norm}^{(k)}-\frac{1-h\beta_{Norm}}{1+h\beta_{Norm}}x_{Norm}^{(k-1)} \tag{2}$$

Necesitamos conocer al menos $x_{Norm}^{(0)} = \frac{x_0}{x_0}$ y $x_{Norm}^{(1)}$ para comenzar a iterar, entonces, como conocemos x_0 y v_0, podemos hallar $x_{Norm}^{(1)}$ de la siguiente forma:

$$\underbrace{\frac{d^2 x_{Norm}}{d\eta^2}}_{a_0} + 2\beta_{Norm} \underbrace{\frac{dx_{Norm}}{d\eta}}_{v_0} + \underbrace{x_{Norm}}_{x_{Norm}^{(0)}} = 0 \quad \Longrightarrow a_0 = -2\beta_{Norm} v_0 - x_{Norm}^{(0)}$$

Usando un desarrollo en serie de Taylor, tenemos:

$$x_{Norm}^{(1)} = x_{Norm}^{(0)} + hv_0 + \frac{1}{2}h^2 a_0 + \mathcal{O}(h^3)$$

Ahora, podemos utilizar el método de Verlet correctamente.

Además, se ha obtenido la solución analítica de la EDO normalizada para poder representar gráficamente tanto la solución numérica como la analítica y comprobar que ambas coinciden.

Para obtener la frecuencia de la solución analítica de la EDO normalizada se parte de la solución:

$$x_{Norm} = e^{rt} \qquad ; \qquad \dot{x_{Norm}} = re^{rt} \qquad ; \qquad \ddot{x_{Norm}} = r^2 e^{rt}$$

Entonces, la EDO nos queda de la forma:

$$r^2 + 2\beta_{Norm} r + 1 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado queda:

$$r = -\beta_{Norm} \pm \sqrt{\beta_{Norm}^2 - 1}$$

Como en el caso subamortiguado $\beta_{Norm}^2 < 1$, tenemos que:

$$r = -\beta_{Norm} \pm i\sqrt{1 - \beta_{Norm}^2}$$

donde $\omega_{Norm} = \sqrt{1 - \beta_{Norm}^2}$

Y la solución analítica es:

$$x_{\mathrm{Norm}}(t) = Ae^{-\beta_{\mathrm{Norm}} t} \cos\left(\omega_{\mathrm{Norm}} t\right) = Ae^{-\frac{t}{\tau_{\mathrm{Norm}}}} \cos\left(\omega_{\mathrm{Norm}} t\right) \tag{3}$$

2 Explicación del código e instrucciones de uso.

El código se ha realizado en Octave, donde he generado una función para representar la EDO normalizada del oscilador armónico amortiguado, resuelta mediante el método de Verlet.

1. Defino las condiciones iniciales del problema x_0 y v_0. También, defino las constantes que se van a utilizar tanto para resolver la EDO numéricamente como para representar la solución analítica. Está comentado en el código lo que es cada constante.

2. Defino el número de puntos, n, con los que voy a representar la solución. Además, defino el vector tiempo, t, poniendo como su valor máximo un múltiplo del período del oscilador armónico amortiguado normalizado, el cual es $T_{Norm} = \frac{2\pi}{\omega_{Norm}}$. También defino el paso del tiempo, h, para obtener la solución numérica.

3. Entonces, genero un bucle *if* para que si el sistema es sobreamortiguado o críticamente amortiguado reporte un error en pantalla. De esta forma, se asegura que el sistema es subamortiguado como se pide en el ejercicio.

4. Genero el vector de posición y asigno las primeras dos posiciones iniciales, a partir de las condiciones iniciales y un desarrollo en serie de Taylor para obtener la segunda posición.

5. A continuación, aplico un bucle para resolver el sistema mediante el método de Verlet con la ecuación 2.

6. Finalmente, defino la exponencial de la solución analítica y la solución analítico con la ecuación 3, para comprobar que coincide la solución numérica con ésta. Y las represento gráficamente con diferentes colores, de azul la solución numérica y de

amarillo la solución analítica.

Por último, para usar el código, hay que introducir la masa, el coeficiente de amortiguamiento y la constante elástica. Entonces, se llama a la función `oscillator(mass, damping, elastic_k)` y se obtiene el resultado.