

# Kvantifikátory

## 8. prednáška · Matematika (4): Logika pre informatikov

---

Ján Klúka, Ján Mazák

Letný semester 2021/2022

Univerzita Komenského v Bratislave  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky  
Katedra aplikovanej informatiky

## Obsah 8. prednášky

---

### Kvantifikátory

Kvantifikácia

Kvantifikátory a premenné

Syntax relačnej logiky prvého rádu

Sémantika relačnej logiky prvého rádu

Aristotelovské formy

Zamlčané a zdanlivo opačné kvantifikátory

Nutné a postačujúce podmienky

Zložené kvantifikované vlastnosti

Konverzačné implikatóry

# Kvantifikátory

---

# Kvantifikátor

---

Kvantifikácia

Doteraz sme sa stretávali s prívlastkami, ktoré vyjadrovali vlastnosti alebo vzťahy **konkrétnych jednotlivých** objektov.

- Jurko kŕmi **veľkú Vierkinu myš** Ľufka.  
 $(\text{kŕmi}(\text{Jurko}, \text{Ľufko}) \wedge \text{veľký}(\text{Ľufko}) \wedge \text{patrí}(\text{Ľufko}, \text{Vierka}) \wedge \text{myš}(\text{Ľufko}))$

# Kvantifikované tvrdenia

---

V slovenských vetách sa ale používajú aj prívlastky ako

**každý, nejaká, tri, tí, všetky, žiadny, nijaké**

(gramaticky sú to zámená a číslovky).

- všetky veľké Jankine myši; nejaké dieťa; traja muži v črne;  
žiadny Bratislavčan; väčšina škrečkov; tá skriňa v kúte; ...

Nevyjadrujú vlastnosť konkrétnych objektov.

**Vyjadrujú počet (kvantitu) objektov**, ktoré majú nejaké vlastnosti alebo sú v nejakých vzťahoch.

Tvrdeniam, ktoré obsahujú tieto prívlastky,  
sa preto v logike **kvantifikované tvrdenia**.

# Kvantifikácia a logické dôsledky

Kvantifikujúci prívlastok výrazne mení logické vlastnosti tvrdenia:

**Všetky** myši sú sivé.

Ňufko je myš.

---

Ňufko je sivý.

Je logický dôsledok.

**Väčšina** myší je sivá.

Ňufko je myš.

---

Ňufko je sivý.

Nie je log. dôsledkom,  
ale je prijateľné.

**Žiadne** myši nie sú sivé.

Ňufko je myš.

---

Ňufko je sivý.

Nie je log. dôsledkom,  
ani prijateľné.  
Opak je pravdou.

Kvantifikácia sa nespráva ako funkcia na pravdivostných hodnotách —  
na rozdiel od logických spojok.

Vyjadruje vzťah súborov objektov

(tých, ktoré sú myšami, a tých, ktoré sú sivé).

Niektoré spojky a vzťahy implicitne vyjadrujú kvantifikáciu:

- Jurko kŕmi Ľufka, iba **keď** je noc.  
Jurko kŕmi Ľufka **vždy** v noci.  
V **každej** chvíli, v ktorej Jurko kŕmi Ľufka, je noc.
- V pondelok cvičí Klárka hru na flautu.  
V **každý** deň, ktorý je pondelkom, cvičí Klárka hru na flautu.
- Z  $P$  **logicky vyplýva**  $Q$ .  
V **každom** stave sveta, v ktorom je pravdivé  $P$ , je pravdivé aj  $Q$ .



# Kvantifikátory

---

Kvantifikátory a premenné

# Kvantifikátory logiky prvého rádu

---

Logika prvého rádu má iba dva symboly kvantifikátorov:  $\forall$  a  $\exists$ .

Zodpovedajú zámenám **všetko** a **niečo**.

S pomocou predikátov, výrokovologických spojok a rovnosti ale dokážu vyjadriť napr. kvantifikácie:

- všetky veľké Jankine myši; nejaké dieťa; traja muži v člne; žiadny Bratislavčan; zakaždým, keď.

Nedokážeme však nimi vyjadriť:

- väčšina škrečkov; málo študentov; nekonečne veľa prvočísel.

# Premenné

Na vyjadrenie toho, na ktoré argumenty predikátov sa vzťahuje kvantifikátor, sa používajú individuové premenné.

## *Individuová premenná*

- môže byť argumentom predikátu,  
**podobne** ako individuová konštanta;
- neoznačuje konkrétny objekt,  
**na rozdiel** od individuovej konštanty,  
ale prepája argumenty predikátov,  
na ktoré sa vzťahuje ten istý kvantifikátor.

V každom prvorádovom jazyku s kvantifikátormi je **nekonečne veľa** premenných — väčšinou malé písmená z konca abecedy, podľa potreby s dolnými indexmi:  $u$ ,  $v_4$ ,  $w$ ,  $x$ ,  $y_{37}$ ,  $z_{123}$ .

Možné argumenty predikátov a rovnosti, teda premenné a konštanty, súhrnne nazývame *termy*.

*Atomickými formulami* logiky prvého rádu s kvantifikátormi sú potom

- predikátové atómy  $\text{predikát}(\text{term}_1, \dots, \text{term}_k)$ ,  
kde  $k$  je arita predikátu;
- rovnostné atómy  $\text{term}_1 = \text{term}_2$ .

Možné argumenty predikátov a rovnosti, teda premenné a konštanty, súhrnne nazývame *termy*.

*Atomickými formulami* logiky prvého rádu s kvantifikátormi sú potom

- predikátové atómy  $\text{predikát}(\text{term}_1, \dots, \text{term}_k)$ ,  
kde  $k$  je arita predikátu;
- rovnostné atómy  $\text{term}_1 \doteq \text{term}_2$ .

# Všeobecný kvantifikátor

**Všeobecný kvantifikátor**  $\forall$  zodpovedá obratom všetko, každý/ktorýkoľvek/akýkoľvek/hociktorý/lubovoľný objekt, všetky objekty.

Vždy **viaže** premennú uvedenú bezprostredne za ním.

Postupnosť  $\forall x$  čítame „**pre každý objekt  $x$** “ (alebo trocha nepresne „pre každé  $x$ “).

**Oblasť platnosti** všeobecného kvantifikátora — **najkratšia ucelená** formula nasledujúca bezprostredne za viazanou premennou — vyjadruje vlastnosť, ktorú prisudzujeme všetkým objektom, napr.:

- $\forall x \text{ doma}(x)$  — Pre každý objekt  $x$  je pravda, že  $x$  je doma. (Všetko je doma.) Veta „ $x$  je doma“ je **výroková forma**, nie výrok. Jej pravdivosť sa dá jednoznačne určiť, iba keď poznáme hodnotu  $x$ .
- $\forall x (\text{človek}(x) \rightarrow \text{doma}(x))$  — Pre každý objekt  $x$  je pravda, že ak  $x$  je človek, tak  $x$  je doma. (Každý človek je doma.)

# Existenčný kvantifikátor

**Existenčný kvantifikátor**  $\exists$  zodpovedá obratom *niečo*,  
*nejaký/niektorý/akýsi/aspoň jeden objekt*,  
*je/existuje taký objekt*.

Vždy **viaže** premennú uvedenú bezprostredne za ním.

Postupnosť  $\exists x$  čítame „**pre nejaký objekt  $x$** “  
(alebo trocha nepresne „pre nejaké  $x$ “).


**Oblasť platnosti** existenčného kvantifikátora — je **najkratšia ucelená**  
formula nasledujúca bezprostredne za viazanou premennou —  
vyjadruje vlastnosť, o ktorej tvrdíme, že ju má aspoň jeden objekt:

- $\exists x \text{ doma}(x)$  — Pre nejaký objekt  $x$  je pravda, že  $x$  je doma.  
(Niečo je doma.)
- $\exists x (\text{človek}(x) \wedge \text{doma}(x))$  — Pre nejaký objekt  $x$  je pravda,  
že  $x$  je človek a  $x$  je doma. (Nekaký človek je doma.)

Neexistenciu v slovenčine zvyčajne vyjadruje *dvojitý zápor*: negatívne zámeno (nikto/nič/žiadne) a negatívne tvrdenie.

„Nikto nie je dokonalý“ môžeme sformalizovať

- s dôrazom na zámeno:  $\neg \exists x \text{ dokonalý}(x)$ ;
- s dôrazom na negatívne tvrdenie:  $\forall x \neg \text{dokonalý}(x)$ .

 V oboch prípadoch použijeme iba jednu negáciu!



# Kvantifikátory

---

Syntax relačnej logiky prvého rádu

# Symboly jazyka relačnej logiky prvého rádu

## Definícia 6.1

*Symbolmi jazyka  $\mathcal{L}$  relačnej logiky prvého rádu* sú:

*individuové premenné* z nejakej nekonečnej spočítateľnej množiny  $\mathcal{V}_{\mathcal{L}}$ ;

*mimologické symboly*, ktorými sú

*individuové konštanty* z nejakej spočítateľnej množiny  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ ;

*predikátové symboly* z nejakej spočítateľnej množiny  $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ ;

*logické symboly*, ktorými sú

*logické spojky*: unárna  $\neg$ , binárne  $\wedge, \vee, \rightarrow$ ,

*symbol rovnosti*  $\doteq$ ,

*kvantifikátory*: *existenčný*  $\exists$  a *všeobecný*  $\forall$ ;

*pomocné symboly*  $(, )$  a  $,$  (ľavá, pravá zátvorka a čiarka).

Množiny  $\mathcal{V}_{\mathcal{L}}, \mathcal{C}_{\mathcal{L}}, \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$  sú vzájomne disjunktné.

Logické a pomocné symboly sa nevyskytujú v symboloch z  $\mathcal{V}_{\mathcal{L}}, \mathcal{C}_{\mathcal{L}}, \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ .

Každému symbolu  $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$  je priradená *arita*  $\text{ar}(P) \in \mathbb{N}^+$ .

## Označovanie symbolov rôznych druhov

Keď budeme hovoriť o **ľubovoľnom** jazyku  $\mathcal{L}$ , často budeme potrebovať nejak označiť niektoré jeho konštanty alebo predikáty, aj keď nebudeme vedieť, aké konkrétne symboly to sú.

Na označenie symbolov použijeme **meta premenné**: premenné  $v$  (matematickej) slovenčine, pomocou ktorých budeme hovoriť **o** (po grécky *meta*) týchto symboloch.

### Dohoda 6.2

Individuové premenné budeme spravidla označovať meta premennými  $u, v, w, x, \dots, z$  s prípadnými dolnými indexmi.

Individuové konštanty budeme spravidla označovať meta premennými  $a, b, c, d$  s prípadnými dolnými indexmi.

Predikátové symboly budeme spravidla označovať meta premennými  $P, Q, R$  s prípadnými dolnými indexmi.

# Atomické formuly relačnej logiky prvého rádu

## Definícia 6.3 (Term)

Nech  $\mathcal{L}$  je jazyk relačnej logiky prvého rádu. Individuové premenné z  $\mathcal{V}_{\mathcal{L}}$  a konštanty z  $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$  súhrnne nazývame **termy** jazyka  $\mathcal{L}$ .

## Definícia 6.4 (Atomické formuly)

Nech  $\mathcal{L}$  je jazyk relačnej logiky prvého rádu.

**Rovnostný atóm** jazyka  $\mathcal{L}$  je každá postupnosť symbolov  $t_1 \doteq t_2$ , kde  $t_1$  a  $t_2$  sú termy jazyka  $\mathcal{L}$ .

**Predikátový atóm** jazyka  $\mathcal{L}$  je každá postupnosť symbolov  $P(t_1, \dots, t_n)$ , kde  $P$  je predikátový symbol s aritou  $n$  a  $t_1, \dots, t_n$  sú termy jazyka  $\mathcal{L}$ .

**Atomickými formulami** (skrátene **atómami**) jazyka  $\mathcal{L}$  súhrnne nazývame všetky rovnostné a predikátové atómy jazyka  $\mathcal{L}$ .  
Množinu všetkých atómov jazyka  $\mathcal{L}$  označujeme  $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ .

# Formuly jazyka relačnej logiky prvého rádu

## Definícia 6.5

Množina  $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$  všetkých **formúl** jazyka relačnej logiky prvého rádu  $\mathcal{L}$  je **najmenšia** množina postupností symbolov jazyka  $\mathcal{L}$ , ktorá spĺňa všetky nasledujúce podmienky:

1. Každý atóm z  $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$  je formulou z  $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ . Inak povedané,  $\mathcal{A}_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ .
2. Ak  $A$  patrí do  $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ , tak aj postupnosť symbolov  $\neg A$  patrí do  $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$  a nazývame ju **negácia** formuly  $A$ .
3. Ak  $A$  a  $B$  sú v  $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ , tak aj postupnosti symbolov  $(A \wedge B)$ ,  $(A \vee B)$  a  $(A \rightarrow B)$  patria do  $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$  a nazývame ich postupne **konjunkcia**, **disjunkcia** a **implikácia** formúl  $A$  a  $B$ .
4. Ak  $x$  je individuová premenná a  $A$  patrí do  $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ , tak aj postupnosti symbolov  $\exists x A$  a  $\forall x A$  patria do  $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$  a nazývame ich postupne **existenčná** a **všeobecná kvantifikácia** formuly  $A$  vzhľadom na  $x$ .

Každý prvok  $A$  množiny  $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$  nazývame **formulou** jazyka  $\mathcal{L}$ .

## Príklad 6.6

Nech  $\mathcal{L}$  je prvorádový jazyk, v ktorom  $\mathcal{V}_{\mathcal{L}} = \{x, y, x_1, y_1, x_2, y_2, \dots\}$ ,

$\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Jurko}, \text{Vierka}, \text{Ňufko}\}$

$\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{myš}^1, \text{škrekčok}^1, \text{biely}^1, \text{patrí}^2\}$ .

Formulami v jazyku  $\mathcal{L}$  sú napríklad:

$\text{myš}(\text{Jurko})$ ,  $\text{myš}(x)$ ,  $\text{patrí}(y_2, \text{Vierka})$ ,  $\text{patrí}(x, y)$ ,

$(\text{myš}(x) \wedge \text{biely}(x))$ ,

$\exists y \text{patrí}(x, y)$ ,

$((\text{myš}(x) \wedge \text{biely}(x)) \rightarrow \exists y \text{patrí}(x, y))$ ,

$\forall x((\text{myš}(x) \wedge \text{biely}(x)) \rightarrow \exists y \text{patrí}(x, y))$

Stále platia doterajšie dohody:

## Dohoda 6.7

Formuly označujeme meta premennými  $A, B, C, X, Y, Z$ ,  
s prípadnými dolnými indexmi.

## Dohoda 6.8

Pre každú dvojicu formúl  $A, B \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$  je zápis  $(A \leftrightarrow B)$  skratka za  
formulu  $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$ .

# Oblasť platnosti kvantifikátora

## Dohoda 6.9

Nech  $\mathcal{L}$  je ľubovoľný jazyk logiky prvého rádu. Všetky symboly, termy a formuly v nasledujúcich definíciách a tvrdeniach sú v jazyku  $\mathcal{L}$ .

## Definícia 6.10 (Oblasť platnosti kvantifikátora)

Nech  $A$  je postupnosť symbolov, nech  $B$  je formula, nech  $Q \in \{\forall, \exists\}$ , nech  $x$  je premenná.

V postupnosti  $A = \dots Qx B \dots$  sa výskyt formuly  $Qx B$  nazýva **oblasť platnosti kvantifikátora  $Qx$  v  $A$** .

## Príklad 6.11

Vyznačme všetky oblasti platnosti kvantifikátora  $\forall x$  vo formule

$$((\forall x M(x) \wedge P(x, x)) \rightarrow (\forall x (P(x, y) \wedge \exists y M(y)) \vee \forall y M(y))).$$



# Voľné a viazané výskyty premenných

## Definícia 6.12 (Voľné a viazané výskyty premenných)

Nech  $A$  je postupnosť symbolov, nech  $x$  je premenná.

**Výskyt** premennej  $x$  v  $A$  je **viazaný** vtt  
sa nachádza v niektorej oblasti platnosti kvantifikátora  $\forall x$   
alebo  $\exists x$  v  $A$ .

**Výskyt** premennej  $x$  v  $A$  je **voľný** vtt  
sa nenachádza v žiadnej oblasti platnosti kvantifikátora  $\forall x$  ani  $\exists x$   
v  $A$ .

## Príklad 6.13

$$\begin{aligned}& \neg P(\underline{x}, \underline{y}) \wedge K(\underline{y}, \underline{x}) \\& \neg P(\underline{x}, \underline{y}) \wedge \exists \underline{y} K(\underline{y}, \underline{x}) \\& \exists \underline{y} (\neg P(\underline{x}, \underline{y}) \wedge K(\underline{y}, \underline{x})) \\& \forall \underline{x} \exists \underline{y} (\neg P(\underline{x}, \underline{y}) \wedge K(\underline{y}, \underline{x})) \\& \forall \underline{x} (\neg P(\underline{x}, \underline{y}) \wedge \exists \underline{y} K(\underline{y}, \underline{x}))\end{aligned}$$

# Voľné a viazané premenné

## Definícia 6.14 (Voľné a viazané premenné)

Nech  $A$  je formula alebo term, nech  $x$  je premenná.

**Premenná**  $x$  je **viazaná** v  $A$  vtt

$x$  sa vyskytuje v  $A$  a všetky výskyty  $x$  v  $A$  sú viazané.

**Premenná**  $x$  je **voľná** v  $A$  vtt  $x$  má v  $A$  aspoň jeden voľný výskyt.

Množinu voľných premenných formuly  $A$  označíme  $\text{free}(A)$ .

## Príklad 6.15

$$\text{free}(\neg P(\underline{x}, \underline{y}) \wedge K(\underline{y}, \underline{z})) = \{x, y, z\}$$

$$\text{free}(\neg P(\underline{x}, \underline{y}) \wedge \exists \underline{y} K(\underline{y}, \underline{z})) = \{x, y, z\}$$

$$\text{free}(\exists \underline{y} (\neg P(\underline{x}, \underline{y}) \wedge K(\underline{y}, \underline{z}))) = \{x, z\}$$

$$\text{free}(\exists \underline{y} (\neg P(\underline{x}, \underline{y}) \wedge \forall \underline{z} K(\underline{y}, \underline{z}))) = \{x\}$$

$$\text{free}(\exists \underline{y} \exists \underline{z} (\forall \underline{x} \neg P(\underline{x}, \underline{y}) \wedge K(\underline{y}, \underline{z}))) = \{\}$$

### Tvrdenie 6.16

Pre každú individuovú premennú  $x$ , každý symbol konštanty  $a$ , každú aritu  $n > 0$ , každý predikátový symbol  $P$  s aritou  $n$ , všetky termy  $t_1, t_2, \dots, t_n$  a všetky formuly  $A, B$  platí:

$$\text{free}(x) = \{x\}$$

$$\text{free}(a) = \{\}$$

$$\text{free}(t_1 \doteq t_2) = \text{free}(t_1) \cup \text{free}(t_2)$$

$$\text{free}(P(t_1, \dots, t_n)) = \text{free}(t_1) \cup \dots \cup \text{free}(t_n)$$

$$\text{free}(\neg A) = \text{free}(A)$$

$$\begin{aligned} \text{free}(A \wedge B) &= \text{free}(A \vee B) = \text{free}(A \rightarrow B) = \\ &= \text{free}(A) \cup \text{free}(B) \end{aligned}$$

$$\text{free}(\forall x A) = \text{free}(\exists x A) = \text{free}(A) \setminus \{x\}$$

## Definícia 6.17 (Uzavretá formula, teória)

Formula  $A$  jazyka  $\mathcal{L}$  je **uzavretá** vtt  
žiadna premenná nie je voľná v  $A$   
(teda  $\text{free}(A) = \emptyset$ ).

**Teóriou** v jazyku  $\mathcal{L}$  je každá  
spočítateľná množinu uzavretých formúl jazyka  $\mathcal{L}$ .

## Príklad 6.18

Ktoré z týchto formúl sú uzavreté?

- $\exists x P(x, x)$ ,
- $\exists y P(x, y)$ ,
- $((M(x) \wedge B(x)) \rightarrow \exists y P(x, y))$ ,
- $\forall x ((M(x) \wedge B(x)) \rightarrow \exists y P(x, y))$ .

# Kvantifikátory

---

Sémantika relačnej logiky prvého rádu

## Definícia 6.19

Nech  $\mathcal{L}$  je jazyk relačnej logiky prvého rádu.

**Štruktúrou** pre jazyk  $\mathcal{L}$  nazývame dvojicu  $\mathcal{M} = (D, i)$ , kde  $D$  je ľubovoľná **neprázdna** množina nazývaná **doména** štruktúry  $\mathcal{M}$ ;  $i$  je zobrazenie, nazývané **interpretačná funkcia** štruktúry  $\mathcal{M}$ , ktoré

- každej individuovej konštante  $c$  jazyka  $\mathcal{L}$  priraduje prvok  $i(c) \in D$ ;
- každému predikátovému symbolu  $P$  jazyka  $\mathcal{L}$  s aritou  $n$  priraduje množinu  $i(P) \subseteq D^n$ .

## Dohoda 6.20

Štruktúry označujeme veľkými *písanými* písmenami  $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \dots$

# Ohodnotenie individuových premenných

## Definícia 6.21

Nech  $\mathcal{M} = (D, i)$  je štruktúra pre jazyk  $\mathcal{L}$ .

**Ohodnotenie individuových premenných** je ľubovoľná funkcia  $e : \mathcal{V}_{\mathcal{L}} \rightarrow D$  (priraduje premenným prvky domény).

Nech ďalej  $x$  je individuová premenná z  $\mathcal{L}$  a  $d$  je prvok  $D$ . Zápisom  $e(x/d)$  označíme ohodnotenie individuových premenných, ktoré premennej  $x$  priraduje hodnotu  $d$  a všetkým ostatným premenným rovnakú hodnotu ako im priraduje  $e$ , čiže  $e(x/d) = e'$ , kde

$$e'(y) = \begin{cases} d, & \text{ak } y = x, \\ e(y), & \text{ak } y \neq x, \end{cases}$$

alebo množinovo zapísané  $e(x/d) = e \setminus \{x \mapsto e(x)\} \cup \{x \mapsto d\}$ .

# Príklad ohodnotenia individuových premenných

Nech

$$\mathcal{V}_{\mathcal{L}} = \{x_1, y_1, x_2, y_2, \dots\}$$

$$D = \{\text{👤}_{\text{Alica}}, \text{👤}_{\text{Bonifác}}, \text{👤}_{\text{Cyril}}, \text{👤}_{\text{Eva}}, \text{👤}_{\text{František}}\}.$$

Ohodnotením (individuových) premenných je napríklad

$$e = \{x_1 \mapsto \text{👤}_{\text{Eva}}, y_1 \mapsto \text{👤}_{\text{Bonifác}}, x_2 \mapsto \text{👤}_{\text{Alica}}, y_2 \mapsto \text{👤}_{\text{Bonifác}}, \\ x_3 \mapsto \text{👤}_{\text{Eva}}, y_3 \mapsto \text{👤}_{\text{Cyril}}, \dots\}$$

Potom

$$e(y_2 / \text{👤}_{\text{Alica}}) = \{x_1 \mapsto \text{👤}_{\text{Eva}}, y_1 \mapsto \text{👤}_{\text{Bonifác}}, x_2 \mapsto \text{👤}_{\text{Alica}}, y_2 \mapsto \text{👤}_{\text{Alica}}, \\ x_3 \mapsto \text{👤}_{\text{Eva}}, y_3 \mapsto \text{👤}_{\text{Cyril}}, \dots\}$$



## Definícia 6.22

Nech  $\mathcal{M} = (D, i)$  je štruktúra,  $e$  je ohodnotenie premenných.

*Hodnotou termu  $t$  v štruktúre  $\mathcal{M}$  pri ohodnotení premenných  $e$*  je prvok  $t^{\mathcal{M}}[e]$  z  $D$  určený nasledovne:

- $t^{\mathcal{M}}[e] = e(x)$ , ak  $t$  je premenná  $x \in \mathcal{V}_{\mathcal{L}}$ ,
- $t^{\mathcal{M}}[e] = i(a)$ , ak  $t$  je konštanta  $a \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ .

# Splnenie atomickej formuly v štruktúre

Určenie významu **atomickej** formuly, napr.  $\text{patrí}(x, \text{Jurko})$ ,  
v danej štruktúre, napr.  $\mathcal{M} = (D, i)$ , kde

$$D = \{\text{ĽViera}, \text{ĽJuraj}, \text{ĽEva}, \text{Ľ}, \text{Ľ}, \text{Ľ}, \text{Ľ}, \text{Ľ}, \text{Ľ}, \text{Ľ}\}$$

$$i(\text{Vierka}) = \text{ĽViera}, \quad i(\text{biely}) = \{\text{Ľ}, \text{Ľ}\}, \quad i(\text{patrí}) = \{(\text{Ľ}, \text{ĽViera}),$$

$$i(\text{Jurko}) = \text{ĽJuraj}, \quad \text{Ľ}, \quad (\text{Ľ}, \text{ĽJuraj}),$$

$$i(\text{Ľufko}) = \text{Ľ}, \quad \text{Ľ}\} \quad (\text{Ľ}, \text{ĽJuraj}),$$
$$\quad \quad \quad (\text{Ľ}, \text{ĽEva})\}$$

pri ohodnotení premenných, napr.

$$e = \{x \mapsto \text{Ľ}, y \mapsto \text{ĽEva}, x_1 \mapsto \text{Ľ}, y_1 \mapsto \text{ĽViera}, x_2 \mapsto \text{Ľ}, \dots\}:$$

1. vyhodnotíme termy, ktoré sa vyskytujú vo formule:

$$x^{\mathcal{M}}[e] = e(x) = \text{Ľ} \quad \text{Vierka}^{\mathcal{M}}[e] = i(\text{Vierka}) = \text{ĽViera},$$






2. zistíme, či  $(\text{Ľ}, \text{ĽViera}) \in i(\text{patrí})$ : **nie**

Štruktúra  $\mathcal{M}$  **nesplňa** formulu  $\text{patrí}(x, \text{Vierka})$  pri ohodnotení  $e$   
 $\mathcal{M} \not\models \text{patrí}(x, \text{Vierka})[e]$

# Splnenie existenčne kvantifikovanej formuly

$\mathcal{M} \models \exists y \text{patrí}(y, \text{Vierka})[e]$ ?

1. Vyskúšame **všetky** ohodnotenia, ktoré postupne priradujú kvantifikovanej premennej  $y$  jednotlivé prvky domény:

$m$	$e(y/m)$	$\mathcal{M} \models^? \text{patrí}(y, \text{Vierka})[e(y/m)]$
 Viera	$\{x \mapsto \text{B}, y \mapsto \text{Viera}, x_1 \mapsto \dots\}$	$\neq$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\{x \mapsto \text{B}, y \mapsto \text{B}, x_1 \mapsto \dots\}$	$\neq$
	$\{x \mapsto \text{B}, y \mapsto \text{cat}, x_1 \mapsto \dots\}$	$\models$
	$\{x \mapsto \text{B}, y \mapsto \text{bird}, x_1 \mapsto \dots\}$	$\neq$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\{x \mapsto \text{B}, y \mapsto \text{spider}, x_1 \mapsto \dots\}$	$\neq$

2.  $\mathcal{M} \models \exists y \text{patrí}(y, \text{Vierka})[e]$  vtt

**pre aspoň jedno**  $m \in M$  je  $\mathcal{M} \models \text{patrí}(y, \text{Vierka})[e(y/m)]$ .








Pravá strana je **pravdivá** pre  $m = \text{cat}$  – **svedok**.

Takže  $\mathcal{M} \models \exists y \text{patrí}(y, \text{Vierka})[e]$ .

# Splnenie všeobecne kvantifikovanej formuly

$\mathcal{M} \models \forall x(\text{biely}(x) \rightarrow \text{patrí}(x, y)) [e] \quad B = \text{biely}, P = \text{patrí}$

1. Vyskúšame **všetky** ohodnotenia, ktoré postupne priradujú kvantifikovanej premennej jednotlivé prvky domény:

$m$	$\mathcal{M} \models? (B(x) \rightarrow P(x, y)) [e(x/m)]$
 Viera	$\models$ lebo $\mathcal{M} \not\models B(x) [e(x/m)]$
$\vdots$	$\vdots$
	$\models$ lebo $\mathcal{M} \not\models B(x) [e(x/m)]$
	$\models$ lebo $\mathcal{M} \models B(x) [e(x/m)]$ a $\mathcal{M} \models P(x, y) [e(x/m)]$
	$\not\models$ lebo $\mathcal{M} \models B(x) [e(x/m)]$ a $\mathcal{M} \not\models P(x, y) [e(x/m)]$
	$\not\models$ lebo $\mathcal{M} \models B(x) [e(x/m)]$ a $\mathcal{M} \not\models P(x, y) [e(x/m)]$
	$\models$ lebo $\mathcal{M} \not\models B(x) [e(x/m)]$
	$\models$ lebo $\mathcal{M} \not\models B(x) [e(x/m)]$

2.  $\mathcal{M} \models \forall x(\text{biely}(x) \rightarrow \text{patrí}(x, y)) [e]$  vtt

**pre všetky  $m \in M$**  je  $\mathcal{M} \models (\text{biely}(x) \rightarrow \text{patrí}(x, y)) [e(x/m)]$ .

pravá strana je **nepravdivá** pre  $m = \text{lion}$  a  $m = \text{bird}$  – **kontrapríklady**.

Takže  $\mathcal{M} \not\models \forall x(\text{biely}(x) \rightarrow \text{patrí}(x, y)) [e]$ .

## Splnenie všeobecne kvantifikovanej implikácie

⚠ Naša  $\mathcal{M}$  spĺňa implikáciu ( $\text{biely}(x) \rightarrow \text{patrí}(x, y)$ ) pri  $e(x/m)$  pre väčšinu  $m \in D$  preto, že jej antecedent  $\text{biely}(x)$  je nesplnený.

To zodpovedá čítaniu formuly  $\forall x(\text{biely}(x) \rightarrow \text{patrí}(x, y))$  ako výroku „všetko biele patrí  $y$ “:

- Objekty, ktoré **nie sú biele, neovplyvňujú** pravdivosť tohto výroku ani pravdivosť implikácie ( $\text{biely}(x) \rightarrow \text{patrí}(x, y)$ ).
- Výrok aj implikácia sú nepravdivé **iba** vtedy, keď nejaký biely objekt nepatrí  $y$ .

Ak by nič nebolo biele,

teda by  $\mathcal{M} \not\models \text{biely}(x)[e(x/m)]$  **pre všetky**  $m \in D$ ,

tak by aj formula  $\forall x(\text{biely}(x) \rightarrow \text{patrí}(x, y))$

aj tvrdenie „všetko biele patrí  $y$ “

boli **triviálne** splnené.

## Nezávislosť od ohodnotenia viazanej premennej

Pri vyhodnocovaní splnenia kvantifikovanej formuly štruktúrou pri danom ohodnotení  $e$

$$\mathcal{M} \models \exists y \text{patrí}(y, \text{Vierka})[e]$$

$$\mathcal{M} \models \forall x(\text{biely}(x) \rightarrow \text{patrí}(x, y))[e]$$

**nezáleží** na tom, akú hodnotu priraduje pôvodné ohodnotenie  $e$  viazanej premennej.

Priamu podformulu kvantifikovanej formuly vyhodnocujeme pri **nových** ohodnoteniach  $e(y/m)$  (resp.  $e(x/m)$ ) postupne pre všetky  $m \in D$ .

# Splnenie formuly v štruktúre

## Definícia 6.23

Nech  $\mathcal{M} = (D, i)$  je štruktúra,  $e$  je ohodnotenie premenných.

Relácia **štruktúra  $\mathcal{M}$  spĺňa formulu  $A$  pri ohodnotení  $e$**

(skrátene  $\mathcal{M} \models A[e]$ ) má nasledovnú indukčnú definíciu:

- $\mathcal{M} \models t_1 \doteq t_2[e]$  vtt  $t_1^{\mathcal{M}}[e] = t_2^{\mathcal{M}}[e]$ ,
- $\mathcal{M} \models P(t_1, \dots, t_n)[e]$  vtt  $(t_1^{\mathcal{M}}[e], \dots, t_n^{\mathcal{M}}[e]) \in i(P)$ ,
- $\mathcal{M} \models \neg A[e]$  vtt  $\mathcal{M} \not\models A[e]$ ,
- $\mathcal{M} \models (A \wedge B)[e]$  vtt  $\mathcal{M} \models A[e]$  a zároveň  $\mathcal{M} \models B[e]$ ,
- $\mathcal{M} \models (A \vee B)[e]$  vtt  $\mathcal{M} \models A[e]$  alebo  $\mathcal{M} \models B[e]$ ,
- $\mathcal{M} \models (A \rightarrow B)[e]$  vtt  $\mathcal{M} \not\models A[e]$  alebo  $\mathcal{M} \models B[e]$ ,
- ▶  $\mathcal{M} \models \exists x A[e]$  vtt pre **nejaký** prvok  $m \in D$  máme  $\mathcal{M} \models A[e(x/m)]$ ,
- ▶  $\mathcal{M} \models \forall x A[e]$  vtt pre **každý** prvok  $m \in D$  máme  $\mathcal{M} \models A[e(x/m)]$ ,

pre všetky arity  $n > 0$ , všetky predikátové symboly  $P$  s aritou  $n$ , všetky termy  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , všetky premenné  $x$  a všetky formuly  $A, B$ .

### Príklad 6.24

Nech  $\mathcal{M} = (D, i)$ , kde

$D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$i(\text{Jurko}) = 1$	$i(\text{myš}) = \{3, 4\}$	$i(\text{patrí}) = \{(3, 2),$
$i(\text{Vierka}) = 2$	$i(\text{škrekčok}) = \{5\}$	$(4, 2),$
$i(\text{Ňufko}) = 4$	$i(\text{biely}) = \{4, 5\}$	$(5, 1)\}$ .

Nech  $e = \{x \mapsto 3, y \mapsto 5, \dots\}$ .

Zistime, či

- $\mathcal{M} \models ((\text{myš}(x) \wedge \text{biely}(x)) \rightarrow \exists y \text{patrí}(x, y)) [e]$
- $\mathcal{M} \models \forall x ((\text{myš}(x) \wedge \text{biely}(x)) \rightarrow \exists y \text{patrí}(x, y)) [e]$



## Pravdivosť uzavretej formuly

Neuzavreté formuly zodpovedajú výrokovým formám.

Uzavreté formuly zodpovedajú výrokom.

Ich pravdivosť nezávisí od ohodnotenia, iba od štruktúry.

### Definícia 6.25

Nech  $X$  je **uzavretá** formula jazyka  $\mathcal{L}$ , nech  $\mathcal{M}$  je štruktúra pre  $\mathcal{L}$ .

Formula  $X$  je **pravdivá** v štruktúre  $\mathcal{M}$  (skrátene  $\mathcal{M} \models X$ )

vtt  $\mathcal{M}$  spĺňa formulu  $X$  pri každom ohodnotení  $e$ .

Vtedy tiež hovoríme, že  $\mathcal{M}$  je **modelom** formuly  $X$ .

### Definícia 6.26

Nech  $T$  je teória v jazyku  $\mathcal{L}$ , nech  $\mathcal{M}$  je štruktúra pre  $\mathcal{L}$ .

**Teória  $T$  je pravdivá v štruktúre  $\mathcal{M}$**  (skrátene  $\mathcal{M} \models T$ ) vtt pre všetky formuly  $X$  z  $T$  platí  $\mathcal{M} \models X$ .

Vtedy tiež hovoríme, že  $\mathcal{M}$  je **modelom** teórie  $T$ .

# Kvantifikátory

---

Aristotelovské formy

# Štyri aristotelovské formy

---

Dávno pred kodifikáciou logiky prvého rádu sa kvantifikovanými tvrdeniami zaoberal staroveký grécky filozof Aristoteles.

Študoval najmä tvrdenia v tvaroch:

- Všetky  $P$  sú  $Q$ .
- Niektoré  $P$  sú  $Q$ .
- Žiadne  $P$  nie sú  $Q$ .
- Niektoré  $P$  nie sú  $Q$ .

ktorým dnes hovoríme **obmedzená kvantifikácia**.

## Všetky $P$ sú $Q$

Formu „Všetky  $P$  sú  $Q$ “ (napr. „Všetky myši sú sivé“) formalizujeme

$$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \quad \checkmark$$

teda „Pre každý objekt  $x$  je pravda, že  
ak  $x$  má vlastnosť  $P$ , tak  $x$  má vlastnosť  $Q$ .“,  
ekvivalentne „Pre každý objekt  $x$  je pravda, že  
 $x$  nemá vlastnosť  $P$  alebo  $x$  má vlastnosť  $Q$ .“

Študenti túto formu niekedy nesprávne sformalizujú ako

$$\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \quad \times$$

Pritom táto formalizácia neprejde jednoduchou skúškou —  
stačí si ju prečítať:

„Každý objekt  $x$  má súčasne vlastnosť  $P$  aj vlastnosť  $Q$ ,“  
prirodzenejšie „Všetko je  $P$  aj  $Q$ “ (napr. „Všetko je myš a je to sivé“).

Forma „Všetky  $P$  sú  $Q$ “ sa v prirodzených vetách niekedy rozpoznáva ťažšie, napríklad keď je  $P$  alebo  $Q$  vzťah:

- Všetky myši kŕmi Jurko.  
Všetky myši sú také, že ich kŕmi Jurko.  
 $\forall x(\text{myš}(x) \rightarrow \text{kŕmi}(\text{Jurko}, x))$
- Jurko kŕmi iba myši.  
Všetko, čo Jurko kŕmi, sú myši.  
 $\forall x(\text{kŕmi}(\text{Jurko}, x) \rightarrow \text{myš}(x)).$

## Niektoré $P$ sú $Q$

Formu „Niektoré  $P$  sú  $Q$ “ (napr. „Niektoré myši sú biele“)  
formalizujeme

$$\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \quad \checkmark$$

teda „Existuje aspoň taký jeden objekt  $x$ , že  
 $x$  má vlastnosť  $P$  a  $x$  má vlastnosť  $Q$ .“

Študenti túto formu niekedy **nesprávne** sformalizujú ako

$$\exists x (P(x) \rightarrow Q(x)) \quad \times$$

Ani táto formalizácia neprejde čítacou skúškou:

„Existuje objekt  $x$ , ktorý nemá vlastnosť  $P$  alebo má vlastnosť  $Q$ .“

prirodzenejšie „Niečo nie je  $P$  alebo je  $Q$ “ (napr. „Niečo nie je myš  
alebo je to biele“ — je pravdivé vo svete, kde sú všetky myši sivé a je  
tam jeden človek).

## Niektoré $P$ sú $Q$ – varianty

Forma „Niektoré  $P$  sú  $Q$ “ sa v prirodzených vetách niekedy rozpoznáva ťažšie, napríklad keď je  $P$  alebo  $Q$  vzťah.

- Jurko kŕmi nejaké myši.

Jurko kŕmi (nejakú) myš.

Niečo z toho, čo Jurko kŕmi, sú myši.

$\exists x(\text{kŕmi}(\text{Jurko}, x) \wedge \text{myš}(x))$

Niektorých študentov prekvapuje, že pri tejto forme nezáleží na poradí  $P$  a  $Q$ .

- Njaké myši kŕmi Jurko.

Niektoré myši sú také, že ich kŕmi Jurko.

$\exists x(\text{kŕmi}(\text{Jurko}, x) \wedge \text{myš}(x))$

Je ale **vernejšie** poradie pri formalizácii zachovať:

$\exists x(\text{myš}(x) \wedge \text{kŕmi}(\text{Jurko}, x))$

## Žiadne $P$ nie sú $Q$

Formu „Žiadne  $P$  nie sú  $Q$ “ (napr. „Žiadne myši nie sú červené“)  
formalizujeme (s dôrazom na „nie sú  $Q$ “)

$$\forall x (P(x) \rightarrow \neg Q(x)) \quad \checkmark$$

teda „Pre každý objekt  $x$  je pravda, že  
ak  $x$  má vlastnosť  $P$ , tak  $x$  nemá vlastnosť  $Q$ ,“  
„Každé  $P$  nie je  $Q$ ,“  
alebo rovnako správne (s dôrazom na „žiadne“)

$$\neg \exists x (P(x) \wedge Q(x)) \quad \checkmark$$

teda „Nie je pravda, že existuje taký objekt  $x$ , že  
 $x$  má vlastnosť  $P$  a  $x$  má vlastnosť  $Q$ .“

Ani pri tejto forme nezáleží na poradí  $P$  a  $Q$ ,  
ale je **vernejšie** ho pri formalizácii zachovať.



# Niektoré $P$ nie sú $Q$

---

Formu „Niektoré  $P$  nie sú  $Q$ “ (napr. „Niektoré myši nie sú sivé“)  
formalizujeme

$$\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x)) \quad \checkmark$$

teda „Pre nejaký objekt  $x$  je pravda, že  
 $x$  má vlastnosť  $P$  a  $x$  nemá vlastnosť  $Q$ .“

# Kvantifikátory

---

Zamlčané a zdanlivo opačné  
kvantifikátory

# Zamľčaný všeobecný kvantifikátor

Niekedy kvantifikátor nie je explicitne vyjadrený príslušným zámenom.

Použitie všeobecného podstatného mena (zvyčajne, ale nie nutne v množnom čísle) v úlohe **podmetu** zvyčajne chápeme ako **všeobecnú** kvantifikáciu:

- Myši sú sivé.

$$\forall x(\text{myš}(x) \rightarrow \text{sivý}(x))$$

- Myš je hlodavec.

$$\forall x(\text{myš}(x) \rightarrow \text{hlodavec}(x))$$

- Kto je zodpovedný, ten je doma.

$$\forall x(\text{zodpovedný}(x) \rightarrow \text{doma}(x))$$

## Zamľčaný existenčný kvantifikátor

---

Použitie všeobecného podstatného mena v úlohe **predmetu pozitívneho** prísudku zvyčajne chápeme ako **existenčnú** kvantifikáciu:

- Jurko kŕmi myš.

$$\exists x(\text{kŕmi}(\text{Jurko}, x) \wedge \text{myš}(x))$$

- Bonifác si kúpil syr.

$$\exists x(\text{kúpil}(\text{Bonifác}, x) \wedge \text{syr}(x))$$

Použitie všeobecného podstatného mena v úlohe **predmetu negatívneho** prísudku zvyčajne chápeme ako vyjadrenie **neexistencie**:

- Bonifác si nekúpil syr.

$$\neg \exists x (\text{kúpil}(\text{Bonifác}, x) \wedge \text{syr}(x))$$

$$\forall x (\text{kúpil}(\text{Bonifác}, x) \rightarrow \neg \text{syr}(x))$$

- Jurko nekŕmi myši.

$$\forall x (\text{myš}(x) \rightarrow \neg \text{kŕmi}(\text{Jurko}, x))$$

$$\forall x (\text{kŕmi}(\text{Jurko}, x) \rightarrow \neg \text{myš}(x))$$

$$\neg \exists x (\text{kŕmi}(\text{Jurko}, x) \wedge \text{myš}(x))$$

# Zdanlivá existencia

V podmienkach sa občas vyskytujú neurčité zámená (niekto/niečo/niektorý/...), na ktoré sa ale odkazujeme v podmienenej vete:

- Ak je **niekto** doma, tak (**on**) je zodpovedný.
- Ak Jurko **niečo** kŕmi, má **to** rád.

Také tvrdenie nezodpovedá implikácii s existenčným kvantifikátorom:

✗  $(\exists x \text{ doma}(x) \rightarrow \text{zodpovedný}(x))$

✗  $\exists x(\text{doma}(x) \rightarrow \text{zodpovedný}(x))$

ale zodpovedá **všeobecne kvantifikovanej implikácii**:

✓  $\forall x(\text{doma}(x) \rightarrow \text{zodpovedný}(x))$

✓  $\forall x(\text{kŕmi}(\text{Jurko}, x) \rightarrow \text{má\_rád}(\text{Jurko}, x))$

# Kvantifikátory

---

Nutné a postačujúce podmienky

# Nutné a postačujúce podmienky

---

Tvrdenia so (zamlčanou) všeobecnou kvantifikáciou majú často formu podradovacích súvetí:

1. Zodpovedný je **každý, kto** je doma.
2. Zodpovedný je **iba ten, kto** je doma.

pričom

- hlavná veta („Zodpovedný je ...“) vyjadruje nejakú **vlastnosť**,
- vedľajšia veta („kto je doma“) vyjadruje **podmienku**, ktorá súvisí s touto vlastnosťou.

Aký je rozdiel medzi týmito podmienkami?



Prvé tvrdenie „Zodpovedný je **každý, kto** je doma.“:

- Hovorí, že na to, aby niekto bol zodpovedný, **stačí**, aby platila podmienka, že je doma.
- Inak povedané: Nie je možné, aby bol niekto doma, ale považovali sme ho za nezodpovedného.
- Byť doma je teda **postačujúcou** podmienkou zodpovednosti.
- Ekvivalentne:  
„Pre každého platí, že je zodpovedný, ak je doma.“  
„Pre každého platí, že ak je doma, tak je zodpovedný.“
- Formalizácia je teda  $\forall x(\text{doma}(x) \rightarrow \text{zodpovedný}(x))$

Druhé tvrdenie „Zodpovedný je **iba ten, kto** je doma.“:

- Hovorí, že na to, aby niekto bol zodpovedný, je **nevyhnutné** aby bol doma.
- Inak povedané: Keby niekto nebol doma, nebol by zodpovedný.  
Nie je možné, aby bol niekto zodpovedný, ale nebol doma.
- Byť doma je teda **nutnou** podmienkou zodpovednosti.
- Ekvivalentne:  
„Pre každého platí, že je zodpovedný, **iba** ak je doma.“  
„Pre každého platí, že ak **nie** je doma, tak **nie** je zodpovedný.“  
„Pre každého platí, že ak je zodpovedný, tak je doma.“
- Formalizácia je teda  $\forall x(\text{zodpovedný}(x) \rightarrow \text{doma}(x))$

# Kvantifikátory

---

**Zložené kvantifikované vlastnosti**

# Zložené kvantifikované vlastnosti

---

Často potrebujeme kvantifikovať objekty, ktoré majú zložené vlastnosti:

1. nejaká Jankina biela myš,
2. každý biely potkan, ktorého kŕmi Jurko.

Prvý druh kvantifikácií je zrejme existenčný a už vieme, že sa spravidla spája s konjunkciou.

Druhý druh kvantifikácií je zrejme všeobecný a vieme, že sa spravidla spája s implikáciou.

Použitie spojok ale závisí od pozície kvantifikácie vo vete.

## Zložené existenčne kvantifikované vlastnosti ako podmet

---

(Nejaká) Jankina biela myš je sýta.

- Veta má formu „Niektoré  $P$  sú  $Q$ ,“  
teda prekladáme ju ako  $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ .  
Pričom ale  $P$  je zložená vlastnosť.
- Vlastnosť  $P$  opisuje objekt,  
ktorý má zrejme byť súčasne Jankin, biely a má to byť myš.  
Preto  $P$  vytvoríme z jednotlivých predikátov konjunkciou.

$$\exists x((\text{patrí}(x, \text{Janka}) \wedge \text{biely}(x) \wedge \text{myš}(x)) \wedge \text{sýty}(x))$$

(Všetky) Jankine biele myši sú sýte.

- Veta má formu „Všetky  $P$  sú  $Q$ ,“  
teda prekladáme ju ako  $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ ,  
pričom  $P$  je zložená vlastnosť.
- Vlastnosť  $P$  opäť opisuje objekty,  
ktoré majú byť súčasne Jankine, biele a myši.  
Preto aj teraz  $P$  vytvoríme konjunkciou.

$$\forall x((\text{patrí}(x, \text{Janka}) \wedge \text{biely}(x) \wedge \text{myš}(x)) \rightarrow \text{sýty}(x))$$

Jurko má (nejakú) sýtu bielu myš.

- Aby sme zistili, ktorú aristotelovskú formu má veta, musíme ju preformulovať:  
(Nejaká) sýta biela myš je Jurkova.
- Veta má formu „Niektoré  $P$  sú  $Q$ ,“  
teda prekladáme ju ako  $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ ,  
pričom  $P$  je zložená vlastnosť.

$$\exists x((\text{sýty}(x) \wedge \text{myš}(x) \wedge \text{biely}(x)) \wedge \text{patrí}(x, \text{Jurko}))$$

Jurko má všetky sýte biele myši.

- Aj túto vetu musíme preformulovať:  
Všetky sýte biele myši sú Jurkove.
- Veta má formu „Všetky  $P$  sú  $Q$ ,“  
teda prekladáme ju ako  $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ .  
pričom  $P$  je zložená vlastnosť.

$$\forall x((\text{sýty}(x) \wedge \text{biely}(x) \wedge \text{myš}(x)) \rightarrow \text{patrí}(x, \text{Jurko}))$$



# Viacnásobné všeobecne kvantifikované prívlastky

Jurko má všetky myši a škrečky.

- Preformulujeme: Všetky myši a škrečky sú Jurkove.
- Veta má formu „Všetky  $P$  sú  $Q$ ,“  
teda prekladáme ju ako  $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ .
- $P$  je zložená vlastnosť. Ale ako je zložená?
- ✗ Keď „myši a škrečky“ sformalizujeme  $(\text{myš}(x) \wedge \text{škrečok}(x))$ ,  
 $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$  bude znamenať „Pre každé  $x$ ,  
ak  $x$  je myš a zároveň  $x$  je škrečok, tak  $x$  patrí Jurkovi.“
- Vieme ale, že nič nie je naraz myš aj škrečok,  
takže podmienke (v našom svete) nevyhovuje žiaden objekt,  
takže Jurkovi nemusí nič patriť.
- ✓ Intuitívny význam zachováme, keď „myši a škrečky“  
sformalizujeme  $(\text{myš}(x) \vee \text{škrečok}(x))$ .

$$\forall x((\text{myš}(x) \vee \text{škrečok}(x)) \rightarrow \text{patrí}(x, \text{Jurko}))$$

# Kvantifikátory

---

## Konverzačné implikatury

# Triviálne pravdivé všeobecne kvantifikované implikácie

Nie všetkým sa zdá intuitívne, že formula

$$\forall x(\text{myš}(x) \rightarrow \text{biela}(x))$$

je **pravdivá** vo svetoch, kde **nie sú žiadne myši**.

Dobry spôsob, ako to pochopiť je, že uvedomiť si, že vo svete, kde nie sú myši, **neexistuje kontrapríklad** pre túto formulu — myš, ktorá by nebola biela.

Hovoríme, že v takom svete je táto formula **triviálne pravdivá**.

Podobne je vo svetoch bez myší triviálne pravdivá ešte prekvapujúcejšia formula:

$$\forall x(\text{myš}(x) \rightarrow \text{človek}(x))$$

## Triviálne pravdivé všeobecne kvantifikované implikácie

---

Tvrdenie „Každý prvák, ktorý si zapísal logiku, z nej dostal A,“  
v sebe nesie implikatúru (domnelý dôsledok), že takí prváci existujú.

Ak je takéto tvrdenie nutne triviálne pravdivé, lebo objekty  
z predpokladu neexistujú (napr. prváci si logiku nemôžu zapisovať),  
intuitívne ho považujeme zavádzajúce.

Nič to ale nemení na fakte, že je pravdivé.

Existencia prváka, ktorý si zapísal logiku je skutočne iba implikatúra.

Dodatok „Ale žiadny prvák si ju nikdy nezapísal“ (negácia implikatúry),  
nie je s tvrdením v spore, ale objasňuje, že je triviálne pravdivé.

## „Niektoré“ neimplikuje „nie všetky“

Ďalšia implikatúra sa spája s tvrdeniami: „Niektoré  $P$  sú  $Q$ .“

Niekomu sa môže „Niektoré  $P$  sú  $Q$ “ zdať sporné s „Všetky  $P$  sú  $Q$ .“

— Prečo by sme hovorili „niektoré  $P$ “, keď to platí pre všetky  $P$ ?

Takýto človek považuje tvrdenie „Nie všetky  $P$  sú  $Q$ “ za dôsledok tvrdenia „Niektoré  $P$  sú  $Q$ “. Aj to je však iba implikatúra.

Keď ale na otázku „Dostal niekto Ačko?“ odpovieme

„Áno, niektorí študenti Ačko dostali. *Vlastne ho dostali všetci,*“

druhá veta prvú dopĺňa, ale neprotirečí jej,

hoci je negáciou implikatúry.

Ak chceme jasne vyjadriť domnelý význam, povieme

„Niektorí študenti Ačko dostali, **ale nie všetci**,“ čo formalizujeme formulou v tvare  $(\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \wedge \neg \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)))$ .