

Kokonaisvaihtelumenetelmät röntgentomografiassa

Pentti Sunila

Sisältö

1	Johdanto	2
2	Inversio-ongelmat	3
2.1	Lineaariset inversio-ongelmat	4
2.2	Naiivi inversio	4
2.3	Regularisaatiomenetelmät	4
2.4	Inversiorikos	5
3	Röntgentomografia	6
3.1	Historiaa	6
3.2	Tomografia inversio-ongelmana	7
3.2.1	Radon-matriisi	8
4	Aineisto ja menetelmät	9
4.1	Käytetyt aineistot	10
4.1.1	Simuloitu data	10
4.1.2	Mitattu röntgendata	11
4.2	Menetelmät	12
4.2.1	Suodatettu takaisinprojektio (FBP)	12
4.2.2	TV-Regularisaatio	12
4.2.3	Chambolle-Pock -algoritmi	13
4.2.4	Moniresoluutiomenetelmä	14
5	Tulokset	15
5.1	Simuloitu aineisto	16
5.2	Mitattu aineisto	17
5.3	Parametrien valinta	18
6	Johtopäätökset	20

Luku 1

Johdanto

Tässä kandidaatintutkielmassa tutustutaan röntgentomografiaan TV-regularisaatioon perustuvilla menetelmillä. Esittelen aluksi tietokoneavusteisen tomografian perusteet ja sen käsittelemisen inversio-ongelmana. Esimerkkinä TV-menetelmästä käytän Chambolle-Pock-algoritmia [5]. Vertaan algoritmin toimivuutta yleisesti käytössä olevaan suodatetun takaisinprojektion menetelmään simuloidulla sekä mitatulla röntgendatalla. Laskentaan käytetään MATLAB-ohjelmistoa.

Aluksi esittelen inversio-ongelmiin liittyvät olennaiset käsitteet, joita tutkielmassa käytetään. Tämän jälkeen esitän, kuinka röntgentomografia on mallinnettavissa matemaattisena inversio-ongelmana. Neljännessä kappaleessa esittelen käyttämäni aineistot, sekä käyttämäni menetelmät inversio-ongelman ratkaisemiseksi. Laskennalliset tulokset esitetään viidennessä kappaleessa. Tulosten tulkinta ja loput johtopäätökset esitetään viimeisessä kappaleessa.

Luku 2

Inversio-ongelmat

Inversio-ongelmiksi kutsutaan ongelmia joissa pyritään selvittämään mitattujen vaikutusten perusteella ne aikaansaanut ilmiö. Suoraksi ongelmaksi voidaan kutsua siirtymistä ilmiöstä sen vaikutuksiin, inversio-ongelmissa kuljetaan toiseen suuntaan. Haasteena ovat tietenkin ilmiön tarkka matemaattinen mallintaminen sekä mittausvirheet, mutta myös mallinnuksen laskennallisuus. Ollakseen käyttökelpoisia, tulosten on oltava järkevässä ajassa laskettavissa käytössä olevalla laitteistolla.

Formaalimmin, tarkastelun alla ovat ongelmat joita voidaan mallintaa muodossa $\mathbf{m} = A\mathbf{f} + \epsilon$. Jossa $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^n$ on jonkin fysikaalisen suureen mittaustulos, $f \in \mathbb{R}^p$ on kiinnostuksen alla oleva suure, jota ei voi suoraan mitata ja $A \in \mathbb{R}^{n \times p}$ on ongelmallemme ominainen lineaarinen operaattori. Suure $\epsilon \in \mathbb{R}^n$ kuvastaa mittausvirhettä. On olemassa myös inversio-ongelmia, joissa suureen ja mittauksen välistä suhdetta ei voi ilmaista lineaarisen operaattorin avulla. Näitä ongelmia kutsutaan *epälineaarisiksi inversio-ongelmiksi*.

Lisäksi, inversio-ongelmia tutkittaessa keskitytään erityisesti ns. *huonosti aseteltuihin ongelmiin*, jotka ovat ongelmia jotka rikkovat ainakin yhden *Hadamardin ehdon*:

- I: **Olemassaolo**. Jokaiselle m on olemassa ainakin yksi f , joka toteuttaa yhtälön $\mathbf{m} = A\mathbf{f} + \epsilon$. Toisin sanoen, operaattori A on surjektio.
- II: **Yksikäsitteisyys**. Jokaiselle m on korkeintaan yksi f , joka toteuttaa yhtälön. Toisin sanoen, operaattori A on injektio.
- III: **Stabiilisuus**. Ratkaisu on jatkuva suhteessa mittaukseen. Toisin sanoen, A^{-1} on olemassa ja jatkuva, jolloin pienet muutokset vektorissa m eivät voi aiheuttaa mielivaltaisia muutoksia vektorissa f .

Ongelma joka toteuttaa kaikki Hadamardin ehdot on *hyvin aseteltu ongelma*.

2.1 Lineaariset inversio-ongelmat

Tutkielmassa käsitellään vain ns. lineaarisia inversio-ongelmia, eli ongelmia joissa operaattori A on lineaarinen ja malli $\mathbf{m} = A\mathbf{f} + \epsilon$ voidaan ilmaista matriisien ja vektorien avulla.

2.2 Naiivi inversio

Kun mallimme $\mathbf{m} = A\mathbf{f} + \epsilon$ on lineaarinen, vaikuttaa perustellulta käyttää inversioon suoraan matriisi-inversiota: $\hat{\mathbf{f}} = A^{-1}\mathbf{m}$. Tämä on perusteltua vain, jos ongelmamme on hyvin määritelty. Inversio-ongelmien saralla keskitymme huonosti aseteltuihin ongelmiin, joten ratkaisu on riittämätön, sillä matriisille ei välttämättä ole määritelty käänteismatriisia A^{-1} .

Jokaiselle matriisille on kuitenkin määritelty yksikäsitteinen singulaariarvohajotelma, jonka avulla jopa kääntymättömille matriiseille voidaan määrittää *Mooren-Penrosen käänteismatriisi*. Se on matriisi, joka antaa pienimmän neliösumman ratkaisun yhtälölle $Ax = y$.

Määritelmä 2.1 (Mooren-Penrosen käänteismatriisi). Olkoon $A = U\Sigma V^T$ matriisin A singulaariarvohajotelma. Tällöin matriisin A Mooren-Penrosen käänteismatriisi on $A^+ = V\Sigma^{-1}U^T$, jossa $\Sigma^{-1} = \text{diag}(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_k})$ ja luvut σ_n ovat matriisin A singulaariarvot.

Näin ollen sitä voidaan käyttää jokaisen lineaarisen inversio-ongelman ns. naiiviin inversioon. On kuitenkin mahdollista, että ratkaisuna tämä on harvinaisen toimimaton, erityisesti tämä käänteismatriisi voi olla äärimmäisen kohinariippuvainen. Tämä seuraa sen konstruktiosta singulaariarvohajotelman kautta: jos matriisilla on erittäin pieniä singulaariarvoja, niiden käänteismatriisissa esiintyvät käänteisluvut voivat olla valtavia. Tämän ongelman välttämiseksi voidaan käyttää ns. TSVD-menetelmää (*truncated singular value decomposition*), jossa käänteismatriisin muodostamisessa käytetään vain osaa matriisin singulaariarvoista. Tämä menetelmä on yksi yksinkertaisimmista regularisaatiomenetelmistä.

2.3 Regularisaatiomenetelmät

Regularisaatiomenetelmillä viitataan menetelmiin joilla voidaan kompensoida mittausvirhettä ja täydellisen datan puutetta käyttämällä esitietoja ongelma-alueesta ja sen ominaisuuksista. Yleisesti ottaen, tämä tarkoittaa regularisaatiotermin lisäämistä inversio-ongelman ratkaisulausekkeeseen. Regularisaatiotermi on inversio-ongelman ratkaisun virhearvon minimointilausekkeeseen lisättävä termi (ns. rangaistusfunktio, *penalty function*),

jolla rajoitetaan ratkaisun \hat{f} rakennetta. Voimme esimerkiksi regularisoida ratkaisua sen vektorinormin suhteen valitsemalla painottavan arvon $\alpha \in \mathbb{R}^+$, ja ratkaisemalla lausekkeen $\arg \min_x \|Ax - m\|_2^2 + \alpha \|x\|_2^2$. Regularisaatiota painottavaa termiä α kutsutaan *regularisaatioparametriksi*.

2.4 Inversiorikos

Inversiorikoksella viitataan tapaukseen, jossa samaa mallia ($\mathbf{m} = A\mathbf{f} + \epsilon$, sidotulla operaattorilla A) käytetään sekä datan simuloimiseen, että inversio-ongelman ratkaisemiseen. Luodaan siis malli tutkittavasta ilmiöstä, eli simuloidaan suure \mathbf{f} , josta lasketaan ongelman invertoimista varten tulos \mathbf{m} . Tällöin ongelmaa ratkaistaessa on tyypillistä saada äärimmäisen hyviä tuloksia, vaikka ratkaisumalli olisikin täysin kelvoton oikeaa dataa käsitellessä. Tämän vuoksi simuloitun datan kanssa työskennellessä on kiinnitettävä erityistä huomiota inversiorikoksen välttämiseen. Tässä tutkielmassa simuloitu data lasketaan korkeammasta resoluutiosta interpoloimalla ja lisäämällä kohinaa. Näin vältetään saman matriisin A käyttäminen.

Luku 3

Röntgentomografia

Röntgentomografia on tekniikka jossa kappaleen sisäistä rakennetta tutkitaan mittaamalla sen läpi ammuttujen röntgensäteiden vahvuuden muutoksia. Sillä on lukuisia sovelluksia, etenkin lääketieteen alalla, jossa tekniikkaa käytetään esimerkiksi hampaiden ja suun kuvaukseen, sekä kasvaimien toteamiseen ja tutkimiseen. Tietokoneavusteisessa tomografiassa (*computed tomography, CT*) tomografia toteutetaan tietokoneella laskennallisten menetelmien avulla.

Tomografiamittauksessa olennaisia käsitteitä ovat röntgensäteiden *lähde* sekä kappaleen läpi kulkeneet säteet keräävä *mittari*. Mitattava suure, josta olemme kiinnostuneita on kappaleen sisäinen *attenuaatio*. Attenuaatio kuvaa kappaleen tiheyden aiheuttamaa vastusta sen läpi kulkeville röntgensäteille. Esimerkiksi, luulla on korkeampi attenuaatioarvo kuin ihokudoksella.

3.1 Historiaa

Röntgensäteily on elektromagneettisen säteilyn muoto jota käytetään laajalti erityisesti lääketieteellisessä kuvantamisessa. Sillä on äärimmäisen suuri läpäisykyky, jonka vuoksi sillä voidaan tutkia kappaleiden sisäistä rakennetta, esimerkiksi luiden rakennetta. Röntgensäteilyn olemassaolon keksi saksalainen tutkija Wilhelm Röntgen vuonna 1895. Hän sai löydöstään historian ensimmäisen Nobelin fysiikanpalkinnon jonka jälkeen röntgenkuvaus levisi laajalti. Alun perin kuvaus perustui analogiseen teknologiaan jossa läpivalaisu tallennettiin valokuvausfilmille. Moderni (tietokoneistettu) röntgentomografia perustuu filmiä herkempien elektronisten ilmaisimien käyttöön, joiden avulla mittaustuloksia voidaan käsitellä digitaalisesti. Se pohjaa laajalti Godsfrey Hounsfieldin ja Allan McLeod Cormackin 1970-luvulla tekemiin tutkimuksiin. Matemaattisesti se taas perustuu ns. Radonmuunnokseen ja sen inversioon, suodatetun takaisinprojektion menetelmässä. Näihin

käsitteisiin tutustutaan tarkemmin seuraavissa osioissa.

3.2 Tomografia inversio-ongelmana

Röntgentomografiaa voidaan tarkastella (lineaarisena) inversio-ongelmana. Röntgenmittauksen voi siis ilmaista muodossa $\mathbf{m} = A\mathbf{f} + \epsilon$, jossa \mathbf{m} kuvaa mittauksen tulosta. Matriisi A on tässä tapauksessa *diskreetti Radon-muunnos* vektorisoidusta kuvasta \mathbf{f} , joka mallintaa kappaleen attenuaatioarvoja tasossa. Matriisi A on yhdelle röntgenkuvaukselle ominainen, ja riippuu käytettyjen säteiden määrästä, sekä kuvauksessa käytetyistä kulmista. Mallin diskretisoimiseksi jaetaan yksikköneliö useimmiten neliön muotoisiksi pikseleiksi joilla jokaisella on tietty attenuaatioarvo. Kappale nähdään pikseleistä koostuvana kuvana, ja \mathbf{f} on pikselien muodostama vektori. Tämän mallin puitteissa voidaan mittaustulokseen \mathbf{m} soveltaa ratkaisumenetelmiä, kuten aiemmin mainittua Radon-muunnokseen perustuvaa suodatettua takaisinprojektiota, tai yleisempiä inversio-ongelmien ratkaisumenetelmiä, kuten TSVD-menetelmää tai TV-regularisaatiota, johon tutkielmassa keskitytään.

Tarkemmin, tässä tutkielmassa käsitellään siis diskreettiä tapausta, jossa yksikköneliö jaetaan $n \times n$ pikseliksi, joille jokaiselle määritetään ei-negatiivinen attenuaatioarvo suljetulla välillä $[0, 1]$. Saatu pikseleistä koostuva kuva yhdistetään sarakkeittain yhdeksi vektoriksi $f \in \mathbb{R}^n$. Tämä on diskretisoitu versio jatkuvasta tapauksesta, jossa attenuaatiofunktio f on tasossa määritelty funktio kompaktilla kantajalla. Näin mitattujen röntgensäteiden kohtaamaa attenuaatiota voidaan mallintaa funktion viivaintegraaleilla. Nämä integraalit voidaan laskea funktion Radon-muunnoksen kautta.

Määritelmä 3.1 (Radon-muunnos). Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ei-negatiivinen funktio jolla on kompakti kantaja, sekä olkoot kulma $\theta \in [0, 2\pi[$ ja etäisyysluku $s \in \mathbb{R}$. Funktion f Radon-muunnos on

$$(3.2) \quad Rf(s, \theta) = \int_{x \cdot \vec{\theta} = s} f(x) dx^\perp$$

Jossa $\vec{\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$ on kulman θ suuntainen yksikkövektori ja dx^\perp on suoran $x \cdot \vec{\theta} = s$ mukainen yksiulotteinen Lebesguen mitta.

Määritelmän integraali tulkitaan Lebesguen integraalina suoran $x \cdot \vec{\theta} = s$ ylitse sen määrittämän mitan dx^\perp mukaisesti. Kulma θ on siis suoran suunnan määrittävä normaali ja luku s määrittää sen etäisyyden origosta.

Jos siis funktio f kuvaa kappaleen attenuaatioarvoja tasossa, antaa Radon-muunnos sen lävitse kulkevan (yhden) säteen kohtaaman attenuaation mallissamme. Käytetyt suorat syntyvät kuvaamalla kappaletta eri kulmista. Tässä tutkielmassa käytetään *parallel*

beam -tomografiaa, jossa käytettävä säteily koostuu useista vierekkäisistä samansuuntaisista röntgensäteistä, joita pyöritetään kappaleen ympäri. Vaihtoehtoinen malli on ns. *fan beam* -tomografia, jossa säteet ovat viuhkamaisesti aseteltuja. Kun kappaletta näin läpivalaistetaan useista kulmista, saadaan kuvauksen tuloksena *sinogrammi*. Sinogrammia vastaa mallissamme mittaus \mathbf{m} .

3.2.1 Radon-matriisi

Mallimme $\mathbf{m} = A\mathbf{f} + \epsilon$ matriisia A kutsutaan röntgentomografian tapauksessa mittauksen *Radon-matriisiksi*. Sen rakenne riippuu kuvauksessa käytettyjen säteiden lukumäärästä, sekä niiden kulmista suhteessa kappaleeseen. Diskretisoidussa mallissa vektori \mathbf{f} koostuu mustavalkoisen kuvan pikseliarvoista, joista jokainen kuvaa attenuaatiota yhden pikselin alueella. Matriisin A jokainen rivi vastaa yhden säteen kohtaamaa potentiaalista attenuaatiota kulkiessaan kuvaustason pikselien läpi. Sen alkion $a_{i,j}$ arvo tulkitaan pituudeksi, jonka säde i kulkee pikselin j lävitse.

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \\ f_9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix}$$

Kuva 3.1: Esimerkki matriisin A konstruoimisesta tapauksessa, jossa kuva koostuu 3×3 pikselistä, ja mittaus tehdään kuvan mukaisesti suunnatuilla kuudella säteellä [3].

Luku 4

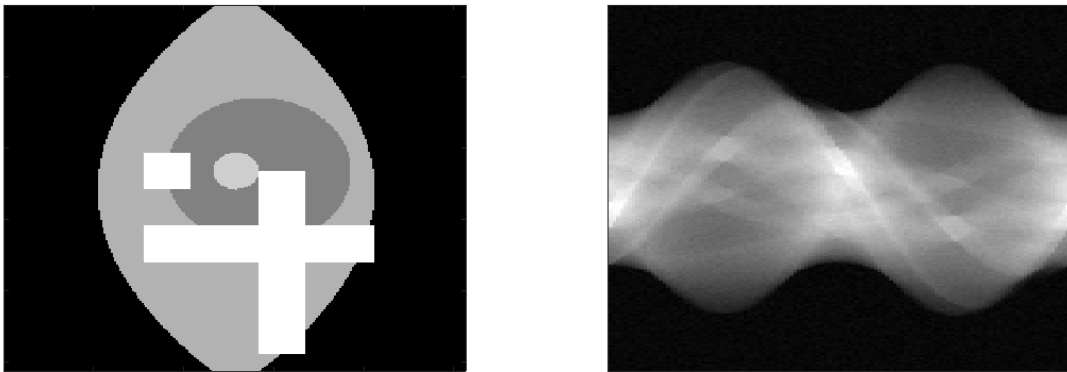
Aineisto ja menetelmät

Tässä osiossa esitellään tutkielmassa käytetyt aineistot, sekä niiden käsittelyyn liittyvät menetelmät. Aineisto koostuu simuloidusta datasta, sekä mitatusta röntgendatasta.

4.1 Käytetyt aineistot

4.1.1 Simuloitu data

Käytän tutkielmassani kahta aineistoa rekonstruktioalgoritmien testaamiseen. Ensimmäinen on MATLAB-ohjelmistolla simuloitu testaushahmo, joka sisältää muutamia eri attenuaatioarvoisia alueita sekä pyöreitä, että teräviä muotoja. Siitä muodostettiin sinogrammit käyttäen ohjelmistossa toteutettua Radon-muunnosta. Inversiorikoksen välttämiseksi käytettiin sinogrammin luonnissa interpolaatiota korkeammasta resoluutiosta. Aineistoon lisättiin myös pieni määrä (1% normaalijakautunutta) kohinaa.

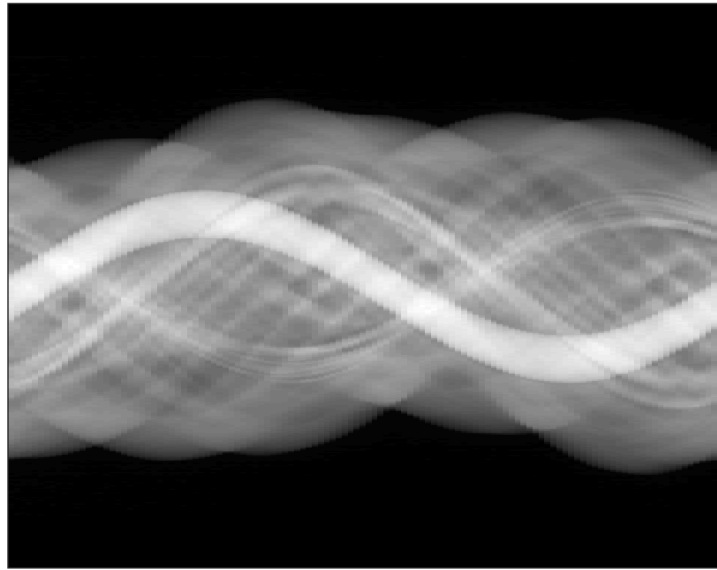


Kuva 4.1: Esimerkkinä käytetty simuloitu aineisto sekä siitä laskettu sinogrammi.

Kuvassa mustat alueet kuvastavat nolla-attenuaatiota ja kirkkaammat alueet korkeampaa attenuaatiota.

4.1.2 Mitattu röntgendata

Aitona röntgendatana käytän Finnish Inverse Problem Society (FIPS) avointa datasettiä lootuskasvin juuresta, jonka sisälle on aseteltu erinäisiä eri attenuaatioarvoja omaavia kappaleita. Kuvat on otettu käyttäen 120 eri kulmaa kappaleen ympäri. Aineisto on avoin ja dokumentoitu [2]. Se on saatavissa osoitteesta www.fips.fi/dataset.php.



Kuva 4.2: Lootusjuuresta mitattu sinogrammi.

4.2 Menetelmät

4.2.1 Suodatettu takaisinprojektiio (FBP)

Radon-muunnos liittyy läheisesti toiseen integraalimuunnokseen: fourier-muunnokseen. Tämän yhteyden kautta on mahdollista määritellä Radonin inversioyhtälö, joka laskee funktion arvon sen Radon-muunnoksen perusteella. Seuraavaa lausetta ei todisteta tai taustoiteta tässä tutkielmassa tarkemmin.

Määritelmä 4.1 (Radon-muunnoksen inversio). Olkoon f ja sen fourier-muunnos \hat{f} itseisesti integroituvia. Tällöin

$$(4.2) \quad f(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty e^{isx \cdot \vec{\theta}} \tilde{R}f(s, \vec{\theta}) |s| ds d\theta.$$

Jossa $\tilde{R}F(s, \vec{\theta})$ on Radon-muunnoksen Rf yksiulotteinen fourier-muunnos ensimmäisen parametrin suhteen.

Radon-muunnos ja sen suodatettu takaisinprojektiio ovat toteutettu MATLAB-ohjelmiston Image Processing Toolbox-kirjaston funktioilla `radon.m` sekä `iradon.m`. Tässä tutkielmassa suodatetulla takaisinprojektiolla viitataan juuri tähän MATLAB-ohjelmiston toteutukseen.

4.2.2 TV-Regularisaatio

TV-regularisaatio (Total Variation regularisation) on varsinkin kuvankäsittelyssä käytetty regularisaatiomenetelmä. Sen esittelivät Rudin, Osher ja Fatemi vuonna 1992 [8]. Se perustuu rekonstruktion totaali variaation eli kokonaisvaihtelun minimointiin, eli ideaan että (luonnolliset) kuvat ovat usein ainakin lokaalisti vakioita. Tämä on perusteltavissa, sillä kuvat koostuvat yhtenäisistä kappaleista, eivätkä mielivaltaisista pikseliarvoista. Kokonaisvaihtelu määritellään diskreetissä tapauksessa vektorille y seuraavasti, summaamalla vierekkäisten arvojen erotusten itseisarvot:

Määritelmä 4.3. $TV_1(y) = \sum_{i=1}^k |f(x_i) - f(x_{i-1})|$.

Kuvien käsittelyssä kohteena ovat yleensä kaksiulotteiset signaalit V joiden kokonaisvaihtelu määritellään seuraavasti:

Määritelmä 4.4. $TV(y) = \frac{1}{n} \sum_{i,j} |y_{i+1,j} - y_{i,j}| + |y_{i,j+1} - y_{i,j}|$.

Kokonaisvaihteluun perustuvassa TV-regularisatiossa optimointilausekkeen regularisatioterminä asetetaan rekonstruktion kokonaisvaihtelu. Tällöin ratkaistavana siis on: $\hat{m} = \arg \min_x \|Ax - m\|_2^2 + \lambda TV(x)$. Tämän rekonstruktion laskemiseen on monia menetelmiä. Tässä tutkielmassa käytetään Anton Chambollen ja Thomas Pockin vuonna 2010 esittämää algoritmia [5]. Muitakin tapoja on, esimerkiksi Borzelain-Borweinin iteraatiomenetelmä.

4.2.3 Chambolle-Pock -algoritmi

Algoritmi on kokonaisvaihteluongelmien ratkaisemiseen sopiva, ja perustuu konveksioptimisaation käsitteisiin. Se on ns. primaali-duaali -tyypin algoritmi, sillä se ratkaisee samaan aikaan konveksin minimisatiao-ongelman, sekä sen ns. duaalin, joka on maksimointi-ongelma. Konveksioptimisatiao on laaja soveltavan matematiikan ala, jota ei käsitellä tässä tutkielmassa sen tarkemmin. Tärkeintä on tietää konveksisuuden takaama ratkaisun yksikäsitteisyys. Tämän vuoksi konvergenssi lokaaliin optimiin ei ole ongelma.

Chambolle-Pock -algoritmi on yleiskäyttöinen optimisatiaoalgoritmi. Se on instantioitu kuvankäsittelyyn ja erityisesti CT-ongelmaan julkaisussa [6]. Tämän tutkielman yhteydessä käytetty toteutus perustuu julkaisun algoritmiin 4, joka esitetään alla.

$L \leftarrow \|(A, \nabla)\|_2; \tau \leftarrow 1/L; \sigma \leftarrow 1/L; \theta \leftarrow 1; n \leftarrow 0$

Initialize u_0, p_0 , and q_0 to zero values.

$\bar{u}_0 \leftarrow u_0$

repeat

$p_{n+1} \leftarrow (p_n + \sigma(A\bar{u}_n - g))/(1 + \sigma)$

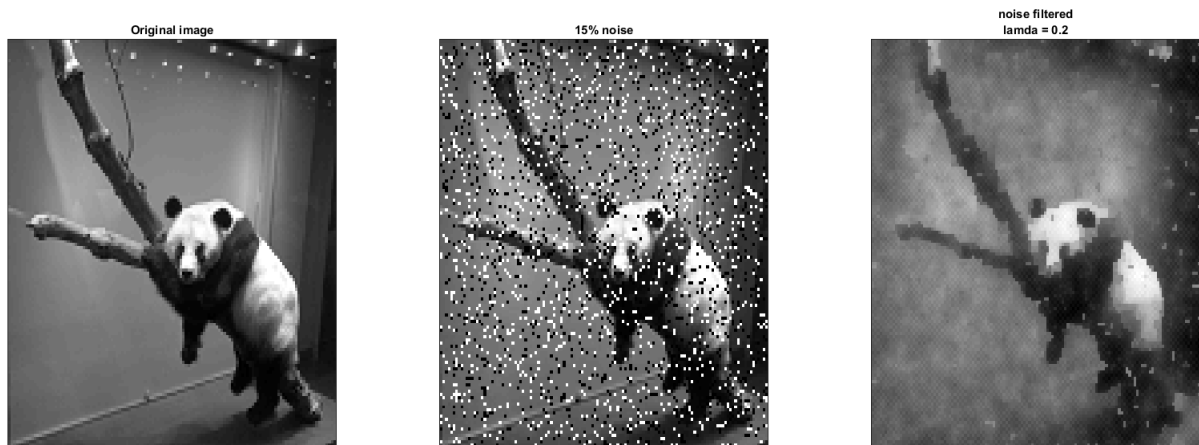
$q_{n+1} \leftarrow \lambda(q_n + \sigma \nabla \bar{u}_n) / \max(\lambda \mathbf{1}_l, |q_n + \sigma \nabla \bar{u}_n|)$

$u_{n+1} \leftarrow u_n - \tau A^T p_{n+1} + \tau \operatorname{div} q_{n+1}$

$\bar{u}_{n+1} \leftarrow u_{n+1} + \theta(u_{n+1} - u_n)$

$n \leftarrow n + 1$

until $n \geq N$



Kuva 4.3: Esimerkki algoritmin käytöstä kohinansuodatukseseen.

Huomautus

Koska kyseessä on yleiskäyttöinen regularisaatiomenetelmä, voi sitä käyttää myös muiden inversio-ongelmien ratkaisemiseen. Suodatettu takaisinprojektiio perustuu röntgentomografian Radon-muunnokseen pohjaavaan matemaattiseen malliin ja on käytettävissä vain siihen. Esimerkiksi, jos mallissamme matriisi $A = I$, pyrkii ratkaisu vain minimoimaan mittauksen kokonaisvaihtelun. Tämä erikoistapaus soveltuu esimerkiksi signaalin kohinansuodatukseseen.

4.2.4 Moniresoluutiomenetelmä

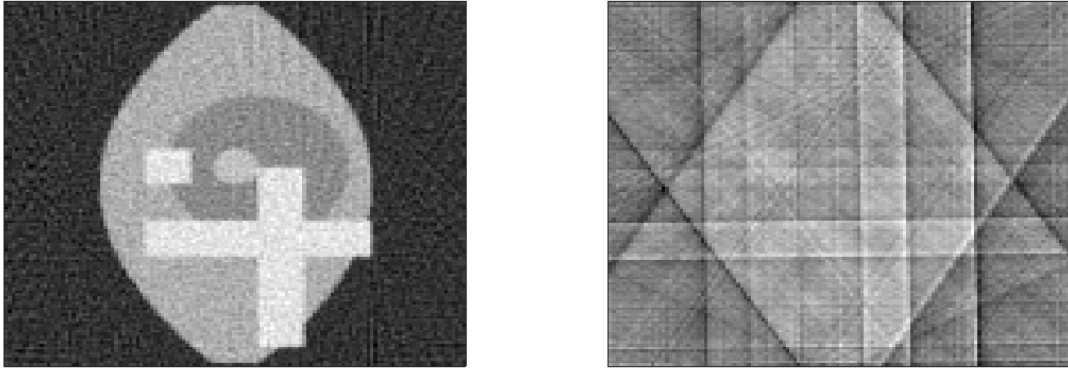
Toimiakseen, algoritmi tarvitsee hyvin valitun regularisaatioparametrin λ . Tämän parametrin valinnalla on suuri vaikutus rekonstruktion laatuun, ja sen valitsemiseksi on usein käytettävä heuristisia menetelmiä. Tässä tutkielmassa käytetään ns. moniresoluutiomenetelmää (Multiresolution Parameter Choice Method), joka on esitelty julkaisussa [7]. Se perustuu ideaan, että "hyvä" parametrin arvo toimii resoluutiosta riippumattomalla tavalla (TV-normin mielessä). Metodien toteutuksessa rekonstruktiot lasketaan usealla resoluutiolla ja parametrin arvo, jolla TV-arvot konvergoituvat kaikilla resoluutioilla, valitaan parhaana. Tässä tutkielmassa rekonstruktiot laskettiin resoluutioilla 128×128 sekä 256×256 .

Luku 5

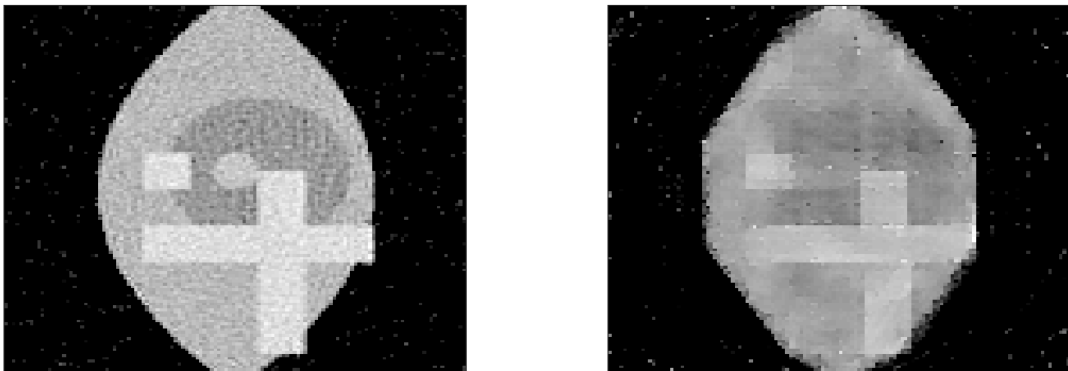
Tulokset

Kummastakin aineistosta laskettiin rekonstruktiot sekä suodatetulla takaisinprojektiolla, että Chambolle-Pock -algoritmilla moniresoluutiomenetelmää käyttäen. Aluksi esitellään laskennan tulokset. Aineistojen vertailun vuoksi kummankin kohdalla käytettiin 120 kulmaa tasaisesti jaettuna kappaleen ympäri, ja menetelmien tarkempaa vertailua varten laskettiin myös ns. harvat (sparse) rekonstruktiot 12 kulmalla ottamalla joka kymmenes alkuperäisistä 120 kulmasta. Kolmannessa osiossa perustellaan käytettyjen parametrien valinnat.

5.1 Simuloitu aineisto



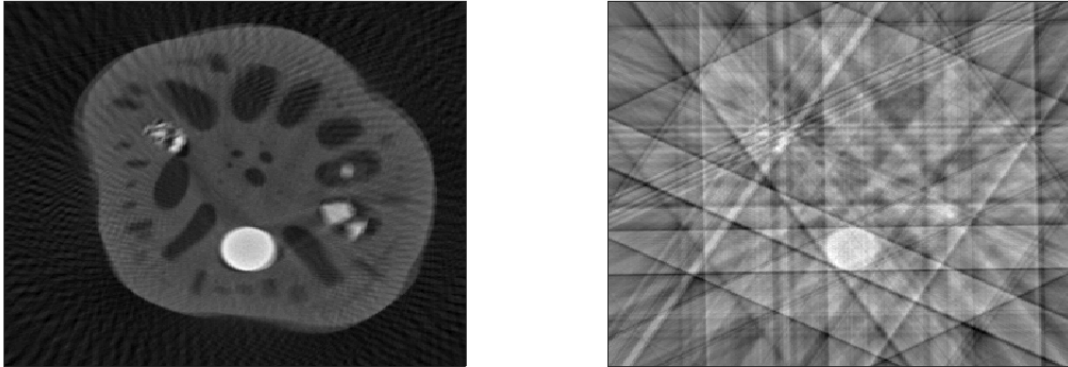
Kuva 5.1: Simuloidun kappaleen rekonstruktiot suodatetun takaisinprojektion menetelmällä. Ensimmäisessä rekonstruktiossa on käytetty kaikki 120 kulmaa, toisessa vain 12.



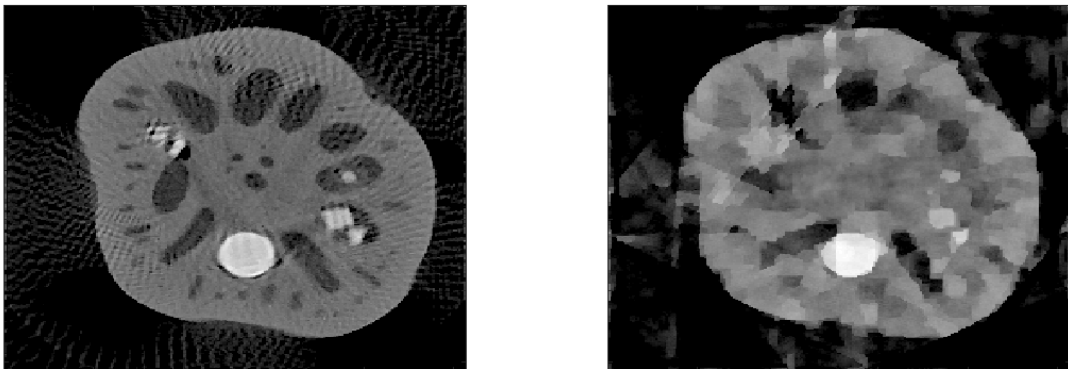
Kuva 5.2: Vastaavat rekonstruktiot kokonaisvaihtelumenetelmällä laskettuna. $\lambda = 0.1$.

5.2 Mitattu aineisto

Mitatusta lootusjuuri-aineistosta laskettiin vastaavat rekonstruktiot. Tulokset esitetään alla. Seuraavassa osiossa tutkitaan algoritmien käyttäytymistä tarkemmin.



Kuva 5.3: Suodatetun takaisinprojektion menetelmä.

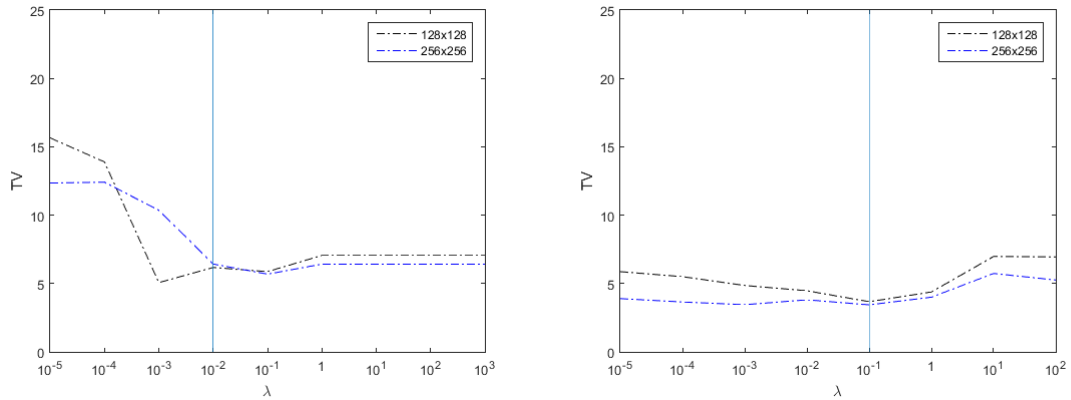


Kuva 5.4: Chambolle-Pock -algoritmi. $\lambda = 0.01$.

5.3 Parametrien valinta

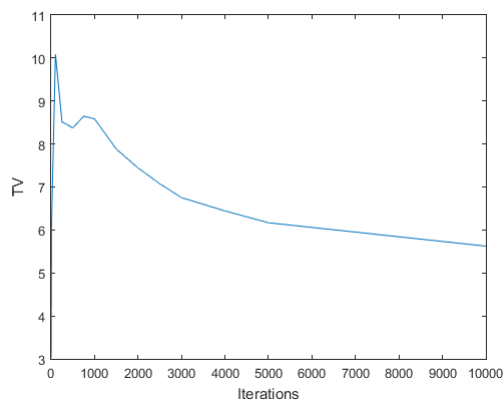
Moniresoluutiomenetelmää varten kummastakin aineistosta laskettiin rekonstruktiot usealla parametrin λ arvolla kahdella eri resoluutiolla. Parametrin λ arvoina käytettiin $\lambda = 10^p$, potenssin p arvoilla: $p = -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$. Jokaiselle rekonstruktiolle laskettiin sen TV-arvo, $TV(rec_\lambda)$, jossa rekonstruktio rec_λ on laskennallisesti ratkaistu arvo $rec_\lambda = \arg \min_x \|Ax - m\|_2^2 + \lambda TV(x)$.

Alla on kuvattuna $TV(rec_\lambda)$ parametrin λ funktiona tutkielmassa käytetyille aineistoille. Parametrin arvoksi valittiin lopulta arvo, jolla eri resoluutioiden TV-arvot yhtenevät. Arvoksi valittiin lootusjuuren kohdalla $\lambda = 0.01$, ja simuloidun aineiston tapauksessa $\lambda = 0.1$.



Kuva 5.5: Aineistoista lasketut TV-normin arvot moniresoluutiomenetelmää varten. Vasen kuva: lootusjuuri-aineisto, oikea kuva: simuloitu aineisto. Optimaaliseksi valittu parametrin arvo on korostettu pystyviivalla.

Toinen algoritmin toimintaan vaikuttava tekijä on iteraatioiden määrä N . Kummankin aineiston kohdalla käytettiin sidottua iteraatiomäärää $N = 2000$. Valinta perusteltiin empiirisesti tarkastelemalla rekonstruktioiden TV-arvojen konvergenssia sekä algoritmin suoritusaikaa, joka riippuu iteraatiomäärästä. Koska rekonstruktioita on laskettava useita, on tehtävä kompromissi iteraatioiden määrän sekä laskenta-ajan välillä. Silmämääräisesti rekonstruktioissa ei huomattu eroja noin 1000 iteraation jälkeen. Valittujen 3000 iteraation laskenta-aika resoluution 256×256 tapauksessa tutkielman tekemiseen käytetyllä i5-prosessorilla oli noin 40 sekuntia harvojen kulmien tapauksessa, sekä noin 5 minuuttia täysien kulmien tapauksessa.



Kuva 5.6: Rekonstruktioiden TV-arvot iteraatiomäärän funktiona.

Luku 6

Johtopäätökset

Tuloksista voi todeta, kuinka suodatetun takaisinprojektion menetelmällä muodostetut rekonstruktiot antavat tarkkoja tuloksia kun datan määrä ja laatu on riittävä, mutta harvojen kulmien tapauksessa tulokset ovat heikkoja. Kumpikin käytetty metodi antaa verrattain samanlaiset tulokset täysien kulmien tapauksessa. Eroja on kuitenkin huomattavissa: suodatetun takaisinprojektion menetelmällä luodut rekonstruktiot sisältävät häilyviä kohina-alueita, sekä kohina on jakautunut tasaisesti koko kuvassa; kokonaisvaihteluun perustuvat rekonstruktiot sisältävät terävämpiä värimuutoksia, sekä laajempia yhtenäisiä värialueita. Tämä on selitettävissä sillä, että kokonaisvaihteluun perustuva regularisaatio suosii lokaalisti vakioita ratkaisuja, jolloin vierekkäisten pikselien väriarvot yhtenevät.

Harvojen kulmien tapauksessa, ovat suodatetun takaisinprojektion menetelmällä luodut rekonstruktiot lähes hyödyttömiä. Niistä on havaittavissa yksittäisiä muotoja kappaleista: ristimäinen kuvio simuloidussa aineistossa, sekä korkeasti attenuoiva valkoinen muoto (pala liitua) lootusjuuri-aineistossa.

Regularisaatiota käyttäen on mahdollista rekonstruoida lähes koko kappale harvoista kulmista. Kummankin aineiston harvoissa Chambolle-Pock -rekonstruktioissa on havaittavissa suurin osa kappaleen yksityiskohdista. Kevyesti attenuoivat pyöreät muodot simuloidussa aineistossa häviävät, kuten myös osa lootusjuuren sisältämisestä rei'istä. Kappaleiden muoto sekä korkeammin attenuoivat yksityiskohdat ovat kuitenkin selvästi havaittavissa. Tällä on selkeitä implikaatioita sovelluksiin, sillä kappaleiden (mahdollisesti biologista materiaalia) rakennetta on mahdollista tutkia käyttämällä huomattavasti vähemmän säteilyä. Tässä tapauksessa vain kymmenesosalla alkuperäisestä datasta oli mahdollista rekonstruoida suurin osa kappaleiden rakenteesta.

Mitatusta aineistosta lasketuissa rekonstruktioissa on huomattavissa aaltomaista kohinaa myös kappaleen ulkopuolella. Tämä on selitettävissä ns. *beam hardening* sekä *beam scattering* -efektien vaikutuksena, jotka ovat korkeasti attenuoivien kappaleiden aiheuttamaa kohinaa signaalissa. Kohina syntyy, koska korkeasti attenuoivat kappaleet vaikuttavat

mitattavan kappaleen läpi kulkeviin röntgensäteisiin, joko vaikuttamalla säteen energiaan tai sen suuntaan. Radon-muunnokseen perustuva matemaattinen mallimme ei ota tätä huomioon, jolloin rekonstruktioihin saattaa syntyä kohina-artefakteja.

Tutkielmassa käytetty TV-regularisaatio on vain yksi esimerkki mahdollisista regularisaatiomenetelmistä. Eri menetelmät painottavat erilaisia kohtia inversio-ongelman ratkaisun muodostamisessa. TV-regularisaatio suosii paloittain vakioita ratkaisuja ja soveltuu täten hyvin kuva-ongelmiin. Kun ratkaisulta toivotaan erilaisia ominaisuuksia, on ongelman kanssa työskennellessä valittava ongelma-alueeseen sopiva regularisaatiomenetelmä, joka painottaa toivottuja ominaisuuksia. Regularisaatiomenetelmien käytön voidaan siis nähdä tuovan *a priori* -informaatiota ongelma-alueesta ratkaisemisen avuksi. Näin voidaan kompensoida täydellisen datan puutetta.

Kirjallisuutta

- [1] Jennifer Mueller ja Samuli Siltanen: Linear and Nonlinear Inverse Problems with Practical Applications. SIAM 2012.
- [2] Siltanen et al: Tomographic X-ray data of a lotus root filled with attenuating objects.
- [3] Samuli Siltanen, kurssimateriaali kurssille "Applications of matrix computations", Helsingin yliopisto, Syksy 2016
- [4] www.fips.fi/dataset.php
- [5] Antonin Chambolle ja Thomas Pock: A First-Order Primal-Dual Algorithm for Convex Problems with Applications to Imaging *J. Math. Imag. Vis.* (2011)
- [6] Sidky, Jörgensen ja Pan: Convex optimization problem prototyping for image reconstruction in computed tomography with the Chambolle–Pock algorithm *Phys. Med. Biol.* 57 (2012)
- [7] Niinimäki et al: Multiresolution Parameter Choice Method for Total Variation Regularized Tomography
- [8] Rudin, Osher ja Fatemi: Nonlinear total variation based noise removal algorithms.