


§1 . GENERAKIZED AUTOREGRESSIVE CONDITIONAL HETEROSLEDASTICITY

GARCH モデル:

$$\begin{aligned} h_t &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i} \\ &= \alpha_0 + A(L)\epsilon_t^2 + B(L)h_t. \end{aligned}$$



定理 1 *GARCH*(p, q) 過程について、広義定常である為の必要十分条件は $A(1) + B(1) < 1$ である:

$$E[\epsilon_t] = 0, V[\epsilon_t] = \alpha_0(1 - A(1) - B(1))^{-1}, Cov[\epsilon_t, \epsilon_s] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A(1) + B(1) < 1.$$

証明 1 ϵ_t は次の様に表されると仮定する:

$$\epsilon_t \equiv \eta_t h_t^{\frac{1}{2}}, \quad \eta_t \sim N(0, 1) \text{ i.i.d.}$$

各時点の ϵ_* を繰り返し h_t に代入する:

$$\begin{aligned} h_t &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i} \\ &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 h_{t-i} + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i} \\ &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 \left(\alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 h_{t-i-j} + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-i-j} \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^p \beta_i \left(\alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 h_{t-i-j} + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-i-j} \right) \\ &= \alpha_0 + \alpha_0 \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \right) \\ &\quad + \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \right) \sum_{j=1}^q \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 h_{t-i-j} \\ &\quad + \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \right) \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-i-j} \\ &= \alpha_0 + \alpha_0 \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \right) \\ &\quad + \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \right) \sum_{j=1}^q \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 \left(\alpha_0 + \sum_{l=1}^q \alpha_l \eta_{t-i-j-l}^2 h_{t-i-j-l} + \sum_{l=1}^p \beta_l h_{t-i-j-l} \right) \\ &\quad + \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \right) \sum_{j=1}^p \beta_j \left(\alpha_0 + \sum_{l=1}^q \alpha_l \eta_{t-i-j-l}^2 h_{t-i-j-l} + \sum_{l=1}^p \beta_l h_{t-i-j-l} \right) \\ &= \alpha_0 + \alpha_0 \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \right) + \alpha_0 \left(\left(\sum_{j=1}^q \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \right) \sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \left(\sum_{j=1}^q \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \right) \sum_{i=1}^p \beta_i \right) \\ &\quad + \left(\left(\sum_{j=1}^q \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \right) \sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \left(\sum_{j=1}^q \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \right) \sum_{i=1}^p \beta_i \right) \sum_{l=1}^q \alpha_l \eta_{t-i-j-l}^2 h_{t-i-j-l} \\ &\quad + \left(\left(\sum_{j=1}^q \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \right) \sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \left(\sum_{j=1}^q \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \right) \sum_{i=1}^p \beta_i \right) \sum_{l=1}^p \beta_l h_{t-i-j-l} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha_0 M(t, 0) + \alpha_0 M(t, 1) + \alpha_0 M(t, 2) \\
&\quad + M(t, 2) \sum_{l=1}^q \alpha_l \eta_{t-i-j-l}^2 \left(\alpha_0 + \sum_{r=1}^q \alpha_r \eta_{t-i-j-l-r}^2 h_{t-i-j-l-r} + \sum_{r=1}^p \beta_r h_{t-i-j-l-r} \right) \\
&\quad + M(t, 2) \sum_{l=1}^p \beta_l \left(\alpha_0 + \sum_{r=1}^q \alpha_r \eta_{t-i-j-l-r}^2 h_{t-i-j-l-r} + \sum_{r=1}^p \beta_r h_{t-i-j-l-r} \right) \\
&\quad \vdots \\
&= \alpha_0 \sum_{k=0}^{\infty} M(t, k).
\end{aligned}$$

上式で記述されている通り、 $M(t, k)$ は以下の規則で表される：

$$\begin{aligned}
M(t, 0) &= 1, \\
M(t, 1) &= \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \right), \\
M(t, 2) &= \left(\left(\sum_{j=1}^q \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \right) \sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \left(\sum_{j=1}^q \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \right) \sum_{i=1}^p \beta_i \right) \\
&= M(t-i, 1) \sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 + M(t-i, 1) \sum_{i=1}^p \beta_i \\
M(t, 3) &= M(t, 2) \sum_{l=1}^q \alpha_l \eta_{t-i-j-l}^2 + M(t, 2) \sum_{l=1}^p \beta_l \\
&= \left(\left(\sum_{j=1}^q \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \right) \sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \left(\sum_{j=1}^q \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \right) \sum_{i=1}^p \beta_i \right) \sum_{l=1}^q \alpha_l \eta_{t-i-j-l}^2 \\
&\quad + \left(\left(\sum_{j=1}^q \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \right) \sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \left(\sum_{j=1}^q \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \right) \sum_{i=1}^p \beta_i \right) \sum_{l=1}^p \beta_l \\
&= \sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 \left(\left(\sum_{j=1}^q \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \right) \left(\sum_{l=1}^q \alpha_l \eta_{t-i-j-l}^2 + \sum_{l=1}^p \beta_l \right) \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^p \beta_i \left(\left(\sum_{j=1}^q \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \right) \left(\sum_{l=1}^q \alpha_l \eta_{t-i-j-l}^2 + \sum_{l=1}^p \beta_l \right) \right) \\
&= M(t-i, 2) \sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 + M(t-i, 2) \sum_{i=1}^p \beta_i \\
&\quad \vdots \\
M(t, k+1) &= M(t-i, k) \sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 + M(t-i, k) \sum_{i=1}^p \beta_i \\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

η_t は独立に分布 $N(0, 1)$ に従うという仮定の下、 $M(t, k)$ のモーメントは時点 t に依存しない：

$$E[M(t, k)^r] = E[M(s, k)^r], \quad t \neq s, r \in \mathbb{N}.$$

従って 1 次モーメントの計算は次の結果を得る。 $k \geq 1$ として、

$$\begin{aligned}
E[M(t, k)] &= E \left[M(t-i, k-1) \sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 + M(t-i, k-1) \sum_{i=1}^p \beta_i \right] \\
&= \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i E[\eta_{t-i}^2] + \sum_{i=1}^p \beta_i \right) E[M(t, k-1)] \\
&= \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i \right)^2 E[M(t, k-2)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \vdots \\
& = \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i \right)^k E[M(t, 0)] \\
& = \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i \right)^k.
\end{aligned}$$

最終的に ϵ_t^2 の 1 次モーメントは,

$$E[\epsilon_t^2 \mid \psi_{t-1}] = E[h_t] = E \left[\alpha_0 \sum_{k=0}^{\infty} M(t, k) \right] = \alpha_0 E \left[\sum_{k=0}^{\infty} M(t, k) \right]$$

ここで定理の広義定常性の仮定から $E[h_t] < \infty$ でなければならず, 従って $\sum_{k=0}^{\infty} M(t, k) (\geq 0)$ は可積分である必要がある. よって $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i < 1$ である. 逆に, $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i < 1$ が仮定されていれば無限級数が可積分である為,

$$\alpha_0 E \left[\sum_{k=0}^{\infty} M(t, k) \right] = \alpha_0 \left(1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i - \sum_{i=1}^p \beta_i \right)^{-1} < \infty$$

が正当化される. そしてこれは時点に依存しない分散である. また,

$$\begin{aligned}
E[\epsilon_t \mid \psi_{t-1}] &= E[\eta_t] E[h_t^{\frac{1}{2}}] = 0, \\
Cov[\epsilon_t, \epsilon_s] &= Cov[\eta_t h_t^{\frac{1}{2}}, \eta_s h_s^{\frac{1}{2}}] \\
&= E[\eta_t h_t^{\frac{1}{2}} \eta_s h_s^{\frac{1}{2}}] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

であることも従うので, 定理が示されるのである. □

定理 2 hoge

証明 2

定理 3

証明 3