2016/09/19

ゼミ発表
GARCH モデル

学籍番号：201311324 百合川尚学

GARCH モデルとは何か

- *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic* の頭文字をとったもの.
- 直訳すると”一般化された　自己回帰　条件付き　不均一分散”の確率過程.
- *Tim Bollerslev*教授によって考案されたモデル.

GARCH モデルの理論(1)

ϵ_t ：　数式上は実数値離散時間確率過程を表すとする. 応用上は金融資産のリターンの履歴を表す.

ψ_t ：　時点 t までの情報構造．時点 t までの過程の σ -集合を表す.

ϵ_t は時点 t での確率変数であるから，それぞれの時点で何らかの値を取る．これを $\epsilon_t(\omega_t)$ と表記すれば，時点を $t_0,\ t_1,\ \cdots, t_n$ として

$$\{\boldsymbol{\omega} \mid \boldsymbol{\omega} \equiv (\omega_0,\ \omega_1,\ \cdots, \omega_n)\}.$$

この集合を含む最小のσ加法族が即ち ψ_t である.

ϵ_t は，時点 $t-1$ までの履歴の情報 ψ_{t-1} が与えられた下で，正規分布 $N(0, h_t)$ に従うとする．(正規分布でなくてもよい)

$$\epsilon_t|\psi_{t-1} \sim N(0,\ h_t).$$

$GARCH$ モデルの式は以下の様に表される.

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i h_{t-i}.$$

GARCH モデルの理論(2)

$GARCH$ モデルは金融資産のリターンの履歴 ϵ とリターンの分散 h を使ったモデルである.

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i h_{t-i}.$$

$p,\ q$ はどの時点までの履歴をモデルに入れるかを表す,

$\alpha_0 \geq 0, \quad \alpha_i > 0, \quad \beta_i \geq 0.$

係数の非負性は，分散 h_t が負数にならない為にある.

$GARCH(p,\ q)$ で表されるリターンの確率過程 $\{\epsilon_t\}_t$ が広義定常，すなわち，時点に依存しない値が存在して,

$$E[\epsilon_t \mid \psi_{t-1}] = \mu < \infty,$$
$$V[\epsilon_t \mid \psi_{t-1}] = \sigma^2 < \infty,$$
$$Cov[\epsilon_t,\ \epsilon_{t-i} \mid \psi_{t-1}] = \rho_i < \infty.$$

と表せるための必要十分条件は

$$\sum_{i=1}^{q} \alpha_i + \sum_{i=1}^{p} \beta_i < 1$$

が成り立つことであり，

$$\epsilon_t \equiv \eta_t h_t^{\frac{1}{2}}, \quad \eta_t \sim N(0,\ 1)\ i.i.d.$$

を仮定すれば，

$$E[\epsilon_t \mid \psi_{t-1}] = 0,\ V[\epsilon_t \mid \psi_{t-1}] = \alpha_0 \left(1 - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i - \sum_{i=1}^{p} \beta_i\right)^{-1},\ Cov[\epsilon_t,\ \epsilon_s \mid \psi_{t-1}] = 0$$

が成り立つ．特に，$GARCH(1,\ 1)$では

$$E[\epsilon_t \mid \psi_{t-1}] = 0,\ V[\epsilon_t \mid \psi_{t-1}] = \alpha_0 (1 - \alpha_1 - \beta_1)^{-1},\ Cov[\epsilon_t,\ \epsilon_s \mid \psi_{t-1}] = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 + \beta_1 < 1$$

である．