2016/09/22

ゼミ発表
GARCH モデル

学籍番号：201311324 百合川尚学

GARCH モデルとは何か

- *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic* の頭文字をとったもの.
- 直訳すると”一般化された　自己回帰　条件付き　不均一分散”の確率過程.
- *Tim Bollerslev* によって考案されたモデル.
- 例えば，*Black – Scholes* のオプション価格方程式はサンプルデータが一定の平均と分散を持つという強い仮定に基づくが，*GARCH* モデルはサンプルデータの分散が不均一な場合を想定している.
- モデル式は，確率過程の履歴の情報が与えられた下での確率変数の分散を求めるものである.
- *S&P500 index option* のサンプルデータからパラメータを求めて，インデックスのサンプル外の部分を計算したところ，他のモデルに比べて実際の値との差を小さくできた *Heston, Nandi*(2000).
- *GARCH* モデルがサンプル外の値を上手く言い当てたのは，インデックスの履歴とインデックスのボラティリティとの相関関係を活用できるからである *Heston, Nandi*(2000).

GARCH モデルの理論(1)

ϵ_t ： 数式上は実数値離散時間確率過程を表すとする.応用上は金融資産のリターンの履歴を表す.

ψ_t ： 時点 t までの情報構造．時点 t までの過程の σ -集合を表す.

ϵ_t は時点 t での確率変数であるから，それぞれの時点で何らかの値を取る．これを $\epsilon_t(\omega_t)$ と表記すれば，時点を t_0, t_1, $\cdots$,t_n として

$$\{\boldsymbol{\omega} \mid \boldsymbol{\omega} \equiv (\omega_0,\ \omega_1,\ \cdots ,\omega_n)\}.$$

この集合を含む最小のσ加法族が即ち ψ_t である.

ϵ_t は，時点 $t-1$ までの履歴の情報 ψ_{t-1} が与えられた下で， 正規分布 $N(0, h_t)$ に従うとする．(正規分布でなくてもよい)

$$\epsilon_t|\psi_{t-1} \sim N(0,\ h_t).$$

$GARCH(p,\ q)$ モデルの式は以下の様に表される:

時点 t でのボラティィリティ h_t について，

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i h_{t-i}.$$

GARCH モデルの理論(2)　定常性

$GARCH$ モデルは金融資産のリターンの履歴 ϵ とリターンの分散 h を使ったモデルである.

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i h_{t-i}.$$

$p,\ q$ はどの時点までの履歴をモデルに入れるかを表す,

$\alpha_0 \geq 0, \quad \alpha_i > 0, \quad \beta_i \geq 0.$

係数の非負性は，分散 h_t が負数にならない為にある.

$$\epsilon_t \equiv \eta_t h_t^{\frac{1}{2}}, \quad \eta_t \sim N(0,\ 1)\ i.i.d.$$

が成り立っているとの仮定の下，$GARCH(p,\ q)$ で表されるリターンの確率過程 $\{\epsilon_t\}_t$ が広義定常，すなわち，時点に依存しない値が存在して,

$$\begin{aligned} E[\epsilon_t] &= \mu < \infty, \\ V[\epsilon_t] &= \sigma^2 < \infty, \\ Cov[\epsilon_t,\ \epsilon_{t-i}] &= \rho_i < \infty. \end{aligned}$$

と表せるための必要十分条件は

$$\sum_{i=1}^{q}\alpha_i+\sum_{i=1}^{p}\beta_i<1$$

が成り立つことであり，計算すると

$$E[\epsilon_t]=0,\ V[\epsilon_t]=\alpha_0\left(1-\sum_{i=1}^{q}\alpha_i-\sum_{i=1}^{p}\beta_i\right)^{-1},\ Cov[\epsilon_t,\ \epsilon_s]=0$$

が成り立つ．特に，$GARCH(1,\ 1)$では

$$\alpha_1+\beta_1<1\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}E[\epsilon_t] & =0\\ V[\epsilon_t] & =\alpha_0\left(1-\alpha_1-\beta_1\right)^{-1}\\ Cov[\epsilon_t,\ \epsilon_s] & =0\end{cases}$$

である．

GARCH モデルの理論(3)　2m 次モーメントの存在

もう一つ重要な定理があり，それは次のものである:

$GARCH(1,\ 1)$ モデルについて，モデル式

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}.$$

に従う確率過程 $\{\epsilon_t\}_t$ の $2m$ 次のモーメント $E[\epsilon_t^{2m}]$ が存在する為の必要十分条件は，

$$\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} a_j \alpha_1^j \beta_1^{m-j} < 1,$$

$$s.t. \qquad a_0 = 1,\ a_j = \prod_{i=1}^{j} (2i-1)$$

が成り立つことである.

References

- [2]. *Steven L. Heston, Saikat Nandi* (2000), *A Closed – Form GARCH Option Valuation Model,*
- [1]. *Tim Bollerslev*, 1986, *Generalized Autoregressive Conditional Heteroschedasticity, Jo*
  327. *North – Holland*

- [2]. *Steven L. Heston, Saikat Nandi* (2000), *A Closed – Form GARCH Option Valuation Model,*