

本稿は *GARCH* 理論の習得の覚書である。論文には理論部分の証明が *Appendix* として載せられている。その証明を読まない
とモデルが何を表しているのかわからないので自分でも読んで書いて覚えようとするのだけれども、省略されている部分を懇切丁寧
に補ってもらわないと僕が付いて行けないので、後学のために証明にくだいほど詳解を付けておくのである。本文中のわかりづ
らかった部分も補完したものを載せてある。

本稿の参照論文:

Tim Bollerslev(1986), “*GENERALIZED AUTOREGRESSIVE CONDITIONAL HETEROSKEDASTICITY*”.

§1 . Appendix の Appendix

GARCH モデル:

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i},$$

$$\alpha_0 \geq 0, \quad \alpha_i > 0, \quad \beta_i \geq 0.$$

定理 1 *GARCH*(p, q) 過程について、広義定常である為の必要十分条件は $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i < 1$ である:

$$E[\epsilon_t] = 0, \quad V[\epsilon_t] = \alpha_0 \left(1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i - \sum_{i=1}^p \beta_i \right)^{-1}, \quad Cov[\epsilon_t, \epsilon_s] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i < 1.$$

証明 1 ϵ_t は次の様に表されると仮定する:

$$\epsilon_t \equiv \eta_t h_t^{\frac{1}{2}}, \quad \eta_t \sim N(0, 1) \text{ i.i.d.}$$

各時点の ϵ_* を繰り返し h_t に代入する:

$$\begin{aligned} h_t &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i} \\ &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 h_{t-i} + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i} \\ &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 \left(\alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 h_{t-i-j} + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-i-j} \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^p \beta_i \left(\alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 h_{t-i-j} + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-i-j} \right) \\ &= \alpha_0 + \alpha_0 \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \right) \\ &\quad + \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \right) \sum_{j=1}^q \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 h_{t-i-j} \\ &\quad + \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \right) \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-i-j} \\ &= \alpha_0 + \alpha_0 \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \right) \\ &\quad + \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \right) \sum_{j=1}^q \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 \left(\alpha_0 + \sum_{l=1}^q \alpha_l \eta_{t-i-j-l}^2 h_{t-i-j-l} + \sum_{l=1}^p \beta_l h_{t-i-j-l} \right) \\ &\quad + \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \right) \sum_{j=1}^p \beta_j \left(\alpha_0 + \sum_{l=1}^q \alpha_l \eta_{t-i-j-l}^2 h_{t-i-j-l} + \sum_{l=1}^p \beta_l h_{t-i-j-l} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha_0 + \alpha_0 \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \right) + \alpha_0 \left(\left(\sum_{j=1}^q \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \right) \sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \left(\sum_{j=1}^q \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \right) \sum_{i=1}^p \beta_i \right) \\
&\quad + \left(\left(\sum_{j=1}^q \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \right) \sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \left(\sum_{j=1}^q \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \right) \sum_{i=1}^p \beta_i \right) \sum_{l=1}^q \alpha_l \eta_{t-i-j-l}^2 h_{t-i-j-l} \\
&\quad + \left(\left(\sum_{j=1}^q \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \right) \sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \left(\sum_{j=1}^q \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \right) \sum_{i=1}^p \beta_i \right) \sum_{l=1}^p \beta_l h_{t-i-j-l} \\
&= \alpha_0 M(t, 0) + \alpha_0 M(t, 1) + \alpha_0 M(t, 2) \\
&\quad + M(t, 2) \sum_{l=1}^q \alpha_l \eta_{t-i-j-l}^2 \left(\alpha_0 + \sum_{r=1}^q \alpha_r \eta_{t-i-j-l-r}^2 h_{t-i-j-l-r} + \sum_{r=1}^p \beta_r h_{t-i-j-l-r} \right) \\
&\quad + M(t, 2) \sum_{l=1}^p \beta_l \left(\alpha_0 + \sum_{r=1}^q \alpha_r \eta_{t-i-j-l-r}^2 h_{t-i-j-l-r} + \sum_{r=1}^p \beta_r h_{t-i-j-l-r} \right) \\
&\quad \vdots \\
&= \alpha_0 \sum_{k=0}^{\infty} M(t, k).
\end{aligned}$$

上式で記述されている通り、 $M(t, k)$ は以下の規則で表される：

$$\begin{aligned}
M(t, 0) &= 1, \\
M(t, 1) &= \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \right), \\
M(t, 2) &= \left(\left(\sum_{j=1}^q \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \right) \sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \left(\sum_{j=1}^q \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \right) \sum_{i=1}^p \beta_i \right) \\
&= M(t-i, 1) \sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 + M(t-i, 1) \sum_{i=1}^p \beta_i \\
M(t, 3) &= M(t, 2) \sum_{l=1}^q \alpha_l \eta_{t-i-j-l}^2 + M(t, 2) \sum_{l=1}^p \beta_l \\
&= \left(\left(\sum_{j=1}^q \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \right) \sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \left(\sum_{j=1}^q \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \right) \sum_{i=1}^p \beta_i \right) \sum_{l=1}^q \alpha_l \eta_{t-i-j-l}^2 \\
&\quad + \left(\left(\sum_{j=1}^q \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \right) \sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \left(\sum_{j=1}^q \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \right) \sum_{i=1}^p \beta_i \right) \sum_{l=1}^p \beta_l \\
&= \sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 \left(\left(\sum_{j=1}^q \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \right) \left(\sum_{l=1}^q \alpha_l \eta_{t-i-j-l}^2 + \sum_{l=1}^p \beta_l \right) \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^p \beta_i \left(\left(\sum_{j=1}^q \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \right) \left(\sum_{l=1}^q \alpha_l \eta_{t-i-j-l}^2 + \sum_{l=1}^p \beta_l \right) \right) \\
&= M(t-i, 2) \sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 + M(t-i, 2) \sum_{i=1}^p \beta_i \\
&\quad \vdots \\
M(t, k+1) &= M(t-i, k) \sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 + M(t-i, k) \sum_{i=1}^p \beta_i \\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

η_t は独立に分布 $N(0, 1)$ に従うという仮定の下、 $M(t, k)$ のモーメントは時点 t に依存しない：

$$E[M(t, k)^r] = E[M(s, k)^r], \quad t \neq s, r \in \mathbb{N}.$$

従って 1 次モーメントの計算は次の結果を得る。 $k \geq 1$ として、

$$\begin{aligned}
E[M(t, k)] &= E \left[M(t-i, k-1) \sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 + M(t-i, k-1) \sum_{i=1}^p \beta_i \right] \\
&= \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i E[\eta_{t-i}^2] + \sum_{i=1}^p \beta_i \right) E[M(t, k-1)] \\
&= \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i \right)^2 E[M(t, k-2)] \\
&\vdots \\
&= \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i \right)^k E[M(t, 0)] \\
&= \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i \right)^k.
\end{aligned}$$

最終的に ϵ_t^2 の 1 次モーメントは、

$$E[\epsilon_t^2] = E[E[\epsilon_t^2 \mid \psi_{t-1}]] = E[h_t] = E \left[\alpha_0 \sum_{k=0}^{\infty} M(t, k) \right] = \alpha_0 E \left[\sum_{k=0}^{\infty} M(t, k) \right].$$

ここで定理の広義定常性の仮定から $E[h_t] < \infty$ でなければならず、従って $\sum_{k=0}^{\infty} M(t, k) (\geq 0)$ は可積分である必要がある。正項級数が可積分なら *Lebesgue* の収束定理により項別積分に持ち込むことができ、よって $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i < 1$ である。逆に、 $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i < 1$ が仮定されていれば無限級数が可積分である為、

$$\alpha_0 E \left[\sum_{k=0}^{\infty} M(t, k) \right] = \alpha_0 \sum_{k=0}^{\infty} E[M(t, k)] = \alpha_0 \left(1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i - \sum_{i=1}^p \beta_i \right)^{-1} < \infty$$

が正当化される。そしてこれは時点に依存しない分散である。また、時点 $t-1$ までの情報が与えられた下で h_t は決定されること、 η_t が時点に関して独立に標準正規分布に従うことに注意すれば、

$$\begin{aligned}
E[\epsilon_t \mid \psi_{t-1}] &= E[\eta_t] h_t^{\frac{1}{2}} = 0 \\
&\Rightarrow E[\epsilon_t] = 0, \\
Cov[\epsilon_t, \epsilon_s \mid \psi_{t-1}] &= Cov[\eta_t h_t^{\frac{1}{2}}, \eta_s h_s^{\frac{1}{2}} \mid \psi_{t-1}] \\
&= E[\eta_t h_t^{\frac{1}{2}} \eta_s h_s^{\frac{1}{2}} \mid \psi_{t-1}] \\
&= 0 \\
&\Rightarrow Cov[\epsilon_t, \epsilon_s] = 0.
\end{aligned}$$

であることも従うので、定理が示されるのである。 □

定理 2 *GARCH*(1, 1) について、 $h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$ 過程の $2m$ 次のモーメント $E[\epsilon_t^{2m}]$ が存在する為の必要十分条件は

$$\mu(\alpha_1, \beta_1, m) \equiv \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} a_j \alpha_1^j \beta_1^{m-j} < 1, \quad a_0 = 1, \quad a_j = \prod_{i=1}^j (2i-1)$$

であり、このとき $2m$ 次のモーメントは次の様に表せる：

$$E[\epsilon_t^{2m}] = a_m \left[\sum_{n=0}^{m-1} a_n^{-1} E[\epsilon_t^{2n}] \alpha_0^{m-n} \binom{m}{m-n} \mu(\alpha_1, \beta_1, n) \right] \times [1 - \mu(\alpha_1, \beta_1, m)]^{-1}.$$

証明 2 標準正規分布に従う確率変数 X の $2m$ ($m \in \mathbb{N}$) 次のモーメントの計算を確認しておく.

$$\begin{aligned}
E[x^{2m}] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^{2m} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} (2x)^m e^{-x} \frac{1}{\sqrt{2x}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2^{m+\frac{1}{2}} \Gamma(m + \frac{1}{2}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2^{m+\frac{1}{2}} \frac{(2m-1)(2m-3)\cdots 1}{2^m} \sqrt{\pi} \\
&= \prod_{i=1}^m (2i-1).
\end{aligned}$$

η_t の正規性と, 情報構造 ψ_{t-1} が与えられた下で h_t が定数となることに注意すると以下の式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
a_m &\equiv E[\eta_t^{2m}] = \prod_{i=1}^m (2i-1), \\
E[\epsilon_t^{2m}] &= E[E[\epsilon_t^{2m} \mid \psi_{t-1}]] = E[E[\eta_t^{2m} h_t^m \mid \psi_{t-1}]] = E[h_t^m] E[\eta_t^{2m}] = a_m E[h_t^m].
\end{aligned}$$

$GARCH(1, 1)$ の下では $h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$ であるから,

$$\begin{aligned}
h_t^m &= (\alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1})^m \\
&= \sum_{n=0}^m m \binom{m}{n} \alpha_0^{m-n} \sum_{j=0}^n n \alpha_1^j \beta_1^{n-j} \epsilon_{t-1}^2 h_{t-1}^{n-j}.
\end{aligned}$$

従って, 時点 $t-2$ までの情報を与えると,

$$\begin{aligned}
E[h_t^m \mid \psi_{t-2}] &= \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} \alpha_0^{m-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \alpha_1^j \beta_1^{n-j} E[\epsilon_{t-1}^{2j} h_{t-1}^{n-j} \mid \psi_{t-2}] \\
&= \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} \alpha_0^{m-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \alpha_1^j \beta_1^{n-j} h_{t-1}^{n-j} E[\epsilon_{t-1}^{2j} \mid \psi_{t-2}] \\
&= \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} \alpha_0^{m-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \alpha_1^j \beta_1^{n-j} h_{t-1}^{n-j} a_j \\
&= \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} \alpha_0^{m-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a_j \alpha_1^j \beta_1^{n-j} h_{t-1}^n.
\end{aligned}$$

ここで m 次元ベクトル $\mathbf{w}_t \equiv (h_t^m, h_t^{m-1}, \dots, h_t)^T$ に対して, 期待値を取ると,

$$\begin{aligned}
E[\mathbf{w}_t \mid \psi_{t-2}] &= (E[h_t^m \mid \psi_{t-2}], E[h_t^{m-1} \mid \psi_{t-2}], E[h_t^{m-2} \mid \psi_{t-2}], \dots, E[h_t \mid \psi_{t-2}])^T \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^m h_{t-1}^n \binom{m}{n} \alpha_0^{m-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a_j \alpha_1^j \beta_1^{n-j} \\ \sum_{n=0}^{m-1} h_{t-1}^n \binom{m-1}{n} \alpha_0^{m-1-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a_j \alpha_1^j \beta_1^{n-j} \\ \sum_{n=0}^{m-2} h_{t-1}^n \binom{m-2}{n} \alpha_0^{m-2-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a_j \alpha_1^j \beta_1^{n-j} \\ \vdots \\ \sum_{n=0}^1 h_{t-1}^n \binom{1}{n} \alpha_0^{1-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a_j \alpha_1^j \beta_1^{n-j} \end{pmatrix} \\
&= a_0 \begin{pmatrix} \alpha_0^m \\ \alpha_0^{m-1} \\ \alpha_0^{m-2} \\ \vdots \\ \alpha_0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} a_j \alpha_1^j \beta_1^{m-j} & \binom{m-1}{m-1} \alpha_0 \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} a_j \alpha_1^j \beta_1^{m-1-j} & \binom{m-2}{m-2} \alpha_0^2 \sum_{j=0}^{m-2} \binom{m-2}{j} a_j \alpha_1^j \beta_1^{m-2-j} & \cdots & \binom{m-1}{1} \alpha_0^{m-1} \sum_{j=0}^1 \binom{1}{j} a_j \alpha_1^j \beta_1^{1-j} \\ 0 & \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} a_j \alpha_1^j \beta_1^{m-1-j} & \binom{m-2}{m-2} \alpha_0 \sum_{j=0}^{m-2} \binom{m-2}{j} a_j \alpha_1^j \beta_1^{m-2-j} & \cdots & \binom{m-1}{1} \alpha_0^{m-2} \sum_{j=0}^1 \binom{1}{j} a_j \alpha_1^j \beta_1^{1-j} \\ 0 & 0 & \sum_{j=0}^{m-2} \binom{m-2}{j} a_j \alpha_1^j \beta_1^{m-2-j} & \cdots & \binom{m-2}{1} \alpha_0^{m-3} \sum_{j=0}^1 \binom{1}{j} a_j \alpha_1^j \beta_1^{1-j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sum_{j=0}^1 \binom{1}{j} a_j \alpha_1^j \beta_1^{1-j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{t-1}^m \\ h_{t-1}^{m-1} \\ h_{t-1}^{m-2} \\ \vdots \\ h_{t-1} \end{pmatrix} \\
& = \mathbf{d} + \mathbf{C} \mathbf{w}_{t-1}.
\end{aligned}$$

ここで $m \times m$ 上三角行列 \mathbf{C} の対角成分に現れる級数を以下の様に特別に表記し直す．上三角行列なので行列式は対角成分のみから計算されるのである．

$$\mu(\alpha_1, \beta_1, n) \equiv \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a_j \alpha_1^j \beta_1^{n-j}$$

また，与えられる情報構造の鮮度を落としていくと，すなわち ψ_* の添え字の時点を後退させると以下の式が成り立つ：

$$\begin{aligned}
E[\mathbf{w}_t \mid \psi_{t-3}] &= E[E[\mathbf{w}_t \mid \psi_{t-2}] \mid \psi_{t-3}] \\
&= E[\mathbf{d} + \mathbf{C} \mathbf{w}_{t-1} \mid \psi_{t-3}] \\
&= \mathbf{d} + \mathbf{C} E[\mathbf{w}_{t-1} \mid \psi_{t-3}] \\
&= \mathbf{d} + \mathbf{C}(\mathbf{d} + \mathbf{C} \mathbf{w}_{t-2}) \\
&= (\mathbf{I} + \mathbf{C})\mathbf{d} + \mathbf{C}^2 \mathbf{w}_{t-2}, \\
E[\mathbf{w}_t \mid \psi_{t-4}] &= E[E[\mathbf{w}_t \mid \psi_{t-3}] \mid \psi_{t-4}] \\
&= E[(\mathbf{I} + \mathbf{C})\mathbf{d} + \mathbf{C}^2 \mathbf{w}_{t-2} \mid \psi_{t-4}] \\
&= (\mathbf{I} + \mathbf{C})\mathbf{d} + \mathbf{C}^2 E[\mathbf{w}_{t-2} \mid \psi_{t-4}] \\
&= (\mathbf{I} + \mathbf{C} + \mathbf{C}^2)\mathbf{d} + \mathbf{C}^3 \mathbf{w}_{t-3}, \\
&\vdots \\
E[\mathbf{w}_t \mid \psi_{t-k-1}] &= (\mathbf{I} + \mathbf{C} + \mathbf{C}^2 + \cdots + \mathbf{C}^{k-1})\mathbf{d} + \mathbf{C}^k \mathbf{w}_{t-k}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

これは $k \rightarrow \infty$ まで考えると，情報が無い下での期待値，即ち $E[\mathbf{w}_t]$ を表すことになり， $E[h_t^m]$ が $E[\mathbf{w}_t]$ の第一成分であることから，行列の冪級数の収束が求める $E[e_t^{2m}]$ の存在の必要十分条件である：

ところで冪級数の収束の必要十分条件は行列 \mathbf{C} の全ての固有値が 1 より小さいことである．これを証明してみよう．ただし， \mathbf{C} のべき乗 \mathbf{C}^k の対角成分はひたすら対角成分の累乗になり 0 に収束する為， \mathbf{C}^k が零行列に収束していくということを注意しておく．

行列 \mathbf{A} のスペクトルノルムの定義は次の様に表される：

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}.$$

定義に基づけば

$$\|\mathbf{A}\mathbf{B}\| = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|,$$

が成り立ち，このことを利用すれば， $\|\mathbf{A}\| < \alpha$ であるとき，

$$\|\mathbf{A}^n\| = \|\mathbf{A}\mathbf{A}^{n-1}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{n-1}\| \leq \|\mathbf{A}\|^2 \|\mathbf{A}^{n-2}\| \cdots \leq \|\mathbf{A}\|^n < \alpha^n$$

と表すことが出来る．ここで冪級数の話に戻る．冪級数の全体ののルムを考えると，

$$\|\mathbf{I} + \mathbf{C} + \mathbf{C}^2 + \cdots\| \leq \|\mathbf{I}\| + \|\mathbf{C}\| + \|\mathbf{C}^2\| + \cdots,$$

従って実数値の冪級数の収束条件が適用できて， $\|\mathbf{C}\| < 1$ であるなら上式左辺が項数に関して *Cauchy* 列をなす．即ち或る有限な成分から構成される行列が存在し，冪級数はそれに収束する．対偶を考えれば行列の冪級数の収束の必要十分条件が $\|\mathbf{C}\| < 1$ であることがわかる．ところで， $\|\mathbf{C}\|$ の値は $\mathbf{C}\mathbf{C}^T$ の最大固有値に等しいのであった． \mathbf{C} が上三角行列であることから $\mathbf{C}\mathbf{C}^T$ は実対称行列になる． \mathbf{C} の成分を構成しているのは非負を仮定してある *GARCH*(1, 1) の係数と標準正規分布の偶数次モーメントであることから，その加算乗算で構成される $\mathbf{C}\mathbf{C}^T$ の成分は全て非負であり， $\mathbf{C}\mathbf{C}^T$ の行列式は \mathbf{C} の対角

成分の平方和よりも大きくなる:

上三角行列の固有値は全て対角成分 $\mu(\alpha_1, \beta_1, n)$ に等しい. *GARCH* モデルの仮定から α_1, β_1 は非負であり, a_j は標準正規分布の偶数次のモーメントであるから正数で, 即ち, $\mu(\alpha_1, \beta_1, n)$ は n に関して非負単調増大であり, $\mu(\alpha_1, \beta_1, m) < 1$ であることが冪級数の収束の十分条件を為す. よって $\mu(\alpha_1, \beta_1, m) < 1$ であることは $E[\epsilon_t^{2m}]$ の存在の十分条件となる. 一方, $E[\epsilon_t^{2m}]$ が存在すれば $2(m-1), 2(m-2), \dots, 2$ 次モーメントも存在することになるので,

$$E[\mathbf{w}_t] = \lim_{k \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}_t \mid \psi_{t-k-1}] < \infty,$$

即ち冪級数は収束し, $\mu(\alpha_1, \beta_1, m) < 1$ が従う.

最後に

$$E[\epsilon_t^{2m}] = a_m \left[\sum_{n=0}^{m-1} a_n^{-1} E[\epsilon_t^{2n}] \alpha_0^{m-n} \binom{m}{m-n} \mu(\alpha_1, \beta_1, n) \right] \times [1 - \mu(\alpha_1, \beta_1, m)]^{-1}$$

を示す.

$$\begin{aligned} E[\epsilon_t^{2m}] &= a_m E[h_t^m], \\ E[h_t^m \mid \psi_{t-2}] &= \sum_{n=0}^m h_{t-1}^n \binom{m}{n} \alpha_0^{m-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a_j \alpha_1^j \beta_1^{n-j} \end{aligned}$$

が成り立っていることにより,

$$\begin{aligned} E[\epsilon_t^{2m}] &= a_m E[h_t^m] \\ &= a_m E[E[h_t^m \mid \psi_{t-2}]] \\ &= a_m E \left[\sum_{n=0}^m h_{t-1}^n \binom{m}{n} \alpha_0^{m-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a_j \alpha_1^j \beta_1^{n-j} \right] \\ &= a_m \left[\sum_{n=0}^m E[h_{t-1}^n] \binom{m}{n} \alpha_0^{m-n} \mu(\alpha_1, \beta_1, n) \right] \\ &= a_m \left[\sum_{n=0}^{m-1} a_n^{-1} E[\epsilon_{t-1}^{2n}] \binom{m}{n} \alpha_0^{m-n} \mu(\alpha_1, \beta_1, n) \right] + a_m a_m^{-1} E[\epsilon_{t-1}^{2m}] \mu(\alpha_1, \beta_1, m). \end{aligned}$$

$E[\epsilon_t^{2m}]$ が時点に依らない値を持つことに注意しなければならない, というのも, 先述の行列の冪級数の収束の箇所で,

$$\begin{pmatrix} a_m^{-1} E[\epsilon_t^{2m}] \\ a_{m-1}^{-1} E[\epsilon_t^{2(m-1)}] \\ a_{m-2}^{-1} E[\epsilon_t^{2(m-2)}] \\ \vdots \\ a_1^{-1} E[\epsilon_t^2] \end{pmatrix} = E[\mathbf{w}_t] = \lim_{k \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}_t \mid \psi_{t-k-1}] = (\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1} \mathbf{d}$$

が成り立っているのである. 従って, 最右辺第二項を左辺に移せば, 求める式

$$E[\epsilon_t^{2m}] = a_m \left[\sum_{n=0}^{m-1} a_n^{-1} E[\epsilon_t^{2n}] \binom{m}{n} \alpha_0^{m-n} \mu(\alpha_1, \beta_1, n) \right] [1 - \mu(\alpha_1, \beta_1, m)]^{-1}$$

が導かれる. □

§2. 本文中のわかりづらい箇所の補完説明

GARCH モデル式の同値形

本稿の最初に示した *GARCH* モデルの式の同値形を表記する:

$$\begin{aligned} \epsilon_t &\equiv \eta_t h_t^{\frac{1}{2}}, & \eta_t &\sim N(0, 1) \text{ i.i.d. を仮定している下で,} \\ h_t &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i (h_{t-i} - \epsilon_{t-i}^2) \\
&= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i} (1 - \eta_{t-i}^2).
\end{aligned}$$

両辺に $\epsilon_t^2 - h_t$ を加えると,

$$\begin{aligned}
\epsilon_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i} (1 - \eta_{t-i}^2) + \epsilon_t^2 - h_t \\
&= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i} (1 - \eta_{t-i}^2) + h_t (\eta_t^2 - 1).
\end{aligned}$$

確率過程の自己相関係数

$GARCH(p, q)$ 過程に 4 次モーメントの存在を仮定する. 共分散を次の様に表記する.

$$\gamma_n \equiv \gamma_{-n} \equiv Cov [\epsilon_t^2, \epsilon_{t-n}^2].$$

上のスクリーンで表されるモデル式を利用すれば, 共分散の計算は以下の様に書き下せる:

$$\begin{aligned}
\gamma_n &= Cov [\epsilon_t^2, \epsilon_{t-n}^2] \\
&= Cov \left[\alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i} (1 - \eta_{t-i}^2) + h_t (\eta_t^2 - 1), \epsilon_{t-n}^2 \right] \\
&= Cov \left[\sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i} (1 - \eta_{t-i}^2) + h_t (\eta_t^2 - 1), \epsilon_{t-n}^2 \right].
\end{aligned}$$

ここで, モデルの定常性が仮定されていれば, 時点に依らず $E [\epsilon_t^2] = 0$,

$E [h_t (\eta_t^2 - 1)] = E [h_t] E [\eta_t^2 - 1] = 0$, $Cov [\epsilon_t^2, \epsilon_{t-n}^2] = E [\epsilon_t^2 \epsilon_{t-n}^2]$ が成り立つので, 共分散は

$$\begin{aligned}
&Cov \left[\sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i} (1 - \eta_{t-i}^2) + h_t (\eta_t^2 - 1), \epsilon_{t-n}^2 \right] \\
&= E \left[\left\{ \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i} (1 - \eta_{t-i}^2) + h_t (\eta_t^2 - 1) \right\} \epsilon_{t-n}^2 \right] \\
&= \sum_{i=1}^q \alpha_i E [\epsilon_{t-i}^2 \epsilon_{t-n}^2] + \sum_{i=1}^p \beta_i E [\epsilon_{t-i}^2 \epsilon_{t-n}^2] + \sum_{i=1}^p \beta_i E [h_{t-i} (1 - \eta_{t-i}^2) \epsilon_{t-n}^2] + E [h_t (\eta_t^2 - 1) \epsilon_{t-n}^2] \\
&= \sum_{i=1}^q \alpha_i \gamma_{n-i} + \sum_{i=1}^p \beta_i \gamma_{n-i} + \sum_{i=1}^p \beta_i E [h_{t-i} (1 - \eta_{t-i}^2) \epsilon_{t-n}^2] + E [h_t] E [\eta_t^2 - 1] E [\epsilon_{t-n}^2] \\
&= \sum_{i=1}^q \alpha_i \gamma_{n-i} + \sum_{i=1}^p \beta_i \gamma_{n-i} + \sum_{i=1}^p \beta_i E [h_{t-i} (1 - \eta_{t-i}^2) \epsilon_{t-n}^2].
\end{aligned}$$

と表すことが出来る. 最右辺第二項には注意が必要で, $n \geq p+1$ でないと $(1 - \eta_{t-i}^2)$ と ϵ_{t-n}^2 との独立性が保証されない. ここで $n \geq p+1$ の下で再び共分散式に戻ろう.

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^q \alpha_i \gamma_{n-i} + \sum_{i=1}^p \beta_i \gamma_{n-i} + \sum_{i=1}^p \beta_i E [h_{t-i} (1 - \eta_{t-i}^2) \epsilon_{t-n}^2] = \sum_{i=1}^{max(p,q)} (\alpha_i + \beta_i) \gamma_{n-i} = \sum_{i=1}^m \phi_i \gamma_{n-i}, \\
&s.t. \quad n \geq p+1, \quad m \equiv max(p, q), \quad \phi_i \equiv \alpha_i + \beta_i, \quad \alpha_i \equiv 0 \quad (i \geq q+1), \quad \beta_i \equiv 0 \quad (i \geq p+1).
\end{aligned}$$

$\gamma_0^{-1} = E [\epsilon_t^4] < \infty$ が時点に依らない値であることに注意して, 時差 n の自己相関係数

$$\rho_n \equiv \frac{Cov [\epsilon_t^2, \epsilon_{t-n}^2]}{\sqrt{V [\epsilon_t^2] V [\epsilon_{t-n}^2]}} = \frac{Cov [\epsilon_t^2, \epsilon_{t-n}^2]}{V [\epsilon_t^2]} = \gamma_n \gamma_0^{-1}$$

に関して次の等式を得る.

$$\rho_n = \gamma_n \gamma_0^{-1} = \sum_{i=1}^m \phi_i \gamma_{n-i} \gamma_0^{-1} = \sum_{i=1}^m \phi_i \rho_{n-i}, \quad n \geq p+1.$$

この式が表していることは、自己相関係数 $\rho_p, \rho_{p-1}, \rho_{p-2}, \dots, \rho_{p+1-m}$ によって任意の時点 n での ρ_n が一意に定まるということである。

GARCH モデルのパラメータの最尤推定

GARCH モデルの式をベクトルの積で表現し直す:

$$\begin{aligned} h_t &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i} \\ &= \mathbf{z}_t^T \boldsymbol{\omega}_t, \\ s.t. \quad \mathbf{z}_t &\equiv (1, \epsilon_{t-1}^2, \dots, \epsilon_{t-q}^2, h_{t-1}, \dots, h_{t-p})^T, \\ \boldsymbol{\omega} &\equiv (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q, \beta_1, \dots, \beta_p)^T. \end{aligned}$$

推定するパラメータは $1 + q + p$ 個だけではない。ここで、時点 t における確率変数である ϵ_t が線形回帰式の誤差項であると考えて、

$$\epsilon_t = y_t - \mathbf{x}_t^T \mathbf{b}$$

と置くと、推定するパラメータの個数は $\dim(\mathbf{b}) + \dim(\boldsymbol{\omega})$ となる。モデルの母数空間が *Euclidean* 空間のコンパクトな部分空間と考える。そして確率過程 $\{\epsilon_t\}_t$ の二次モーメントが存在する母数空間であるとする。この母数空間を

$$\Theta \equiv \{\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{b}^T, \boldsymbol{\omega}^T)\}$$

とし、真のパラメータ $\boldsymbol{\theta}_0$ を Θ の内部に含むものとする。最尤推定とは、与えられた観測を基に尤度関数を最大にする $\hat{\boldsymbol{\theta}} \in \Theta$ を求めるものである。 T この時点の観測に対する対数尤度関数は

$$L_T(\boldsymbol{\theta}) = T^{-1} \sum_{t=1}^T l_t(\boldsymbol{\theta}) = T^{-1} \sum_{t=1}^T \left(-\frac{1}{2} \log h_t - \frac{1}{2} \epsilon_t^2 h_t^{-1} \right).$$

$\boldsymbol{\omega}$ に関して微分すると以下の様になる:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= (\omega_1, \omega_2, \dots) \text{ と表して,} \\ \frac{\partial l_t}{\partial \omega_1} &= -\frac{1}{2} h_t^{-1} \frac{\partial h_t}{\partial \omega_1} + \frac{1}{2} \frac{\epsilon_t^2}{h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \omega_1}, \\ &= \frac{1}{2} h_t^{-1} \frac{\partial h_t}{\partial \omega_1} \left(\frac{\epsilon_t^2}{h_t} - 1 \right), \\ \frac{\partial^2 l_t}{\partial \omega_1^2} &= \frac{1}{2} \frac{-1}{h_t^2} \left(\frac{\partial h_t}{\partial \omega_1} \right)^2 \left(\frac{\epsilon_t^2}{h_t} - 1 \right) + \frac{1}{2} h_t^{-1} \frac{\partial^2 h_t}{\partial \omega_1^2} \left(\frac{\epsilon_t^2}{h_t} - 1 \right) + \frac{1}{2} h_t^{-1} \frac{\partial h_t}{\partial \omega_1} \frac{-\epsilon_t^2}{h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \omega_1} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_t^2}{h_t} - 1 \right) \left(h_t^{-1} \frac{\partial^2 h_t}{\partial \omega_1^2} - \frac{1}{h_t^2} \left(\frac{\partial h_t}{\partial \omega_1} \right)^2 \right) - \frac{1}{2} h_t^{-1} \left(\frac{\partial h_t}{\partial \omega_1} \right)^2 \frac{\epsilon_t^2}{h_t^2} \\ &= \left(\frac{\epsilon_t^2}{h_t} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial \omega_1} \left[\frac{1}{2} h_t^{-1} \frac{\partial h_t}{\partial \omega_1} \right] - \frac{1}{2} h_t^{-2} \left(\frac{\partial h_t}{\partial \omega_1} \right)^2 \frac{\epsilon_t^2}{h_t} \quad \text{と計算できるから,} \\ \frac{\partial l_t}{\partial \boldsymbol{\omega}} &= \left(\frac{\partial l_t}{\partial \omega_1}, \frac{\partial l_t}{\partial \omega_2}, \dots \right) \\ &= \frac{1}{2} h_t^{-1} \frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\omega}} \left(\frac{\epsilon_t^2}{h_t} - 1 \right), \\ \frac{\partial^2 l_t}{\partial \boldsymbol{\omega} \partial \boldsymbol{\omega}^T} &= \left(\frac{\partial^2 l_t}{\partial \omega_1^2}, \frac{\partial^2 l_t}{\partial \omega_2^2}, \dots \right) \\ &= \left(\frac{\epsilon_t^2}{h_t} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\omega}^T} \left[\frac{1}{2} h_t^{-1} \frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\omega}} \right] - \frac{1}{2} h_t^{-2} \frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\omega}} \frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\omega}^T} \frac{\epsilon_t^2}{h_t}. \end{aligned}$$

ここで、 $\frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\omega}}$ は次のように示される。

$$\frac{\partial h_t}{\partial \omega_i} = \frac{\partial \mathbf{z}_t^T \boldsymbol{\omega}_t}{\partial \omega_i} = \begin{cases} z_i & (i \leq 1 + q) \\ z_i + \omega_i \frac{\partial z_i}{\partial \omega_i} & (i > 1 + q) \end{cases} = \begin{cases} z_i & (i \leq 1 + q) \\ z_i + \omega_i \frac{\partial h_i}{\partial \omega_i} & (i > 1 + q) \end{cases} \quad \text{であるから,}$$

$$\frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \mathbf{z}_t + \sum_{i=1}^p \beta_i \frac{\partial h_{t-i}}{\partial \boldsymbol{\omega}}.$$

証明 3