§1 . GENERAKIZED AUTOREGRESSIVE CONDITIONAL HETEROSLEDASTICITY

$GARCH$ モデル:

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i h_{t-i}.$$

定理 1 $GARCH(p,\ q)$ 過程について，広義定常である為の必要十分条件は $\sum_{i=1}^{q} \alpha_i + \sum_{i=1}^{p} \beta_i < 1$ である:

$$E[\epsilon_t] = 0,\ V[\epsilon_t] = \alpha_0 \left(1 - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i - \sum_{i=1}^{p} \beta_i \right)^{-1},\ Cov[\epsilon_t,\ \epsilon_s] = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{q} \alpha_i + \sum_{i=1}^{p} \beta_i < 1.$$

証明 1 ϵ_t は次の様に表されると仮定する:

$$\epsilon_t \equiv \eta_t h_t^{\frac{1}{2}}, \qquad \eta_t \sim N(0,\ 1)\ i.i.d.$$

各時点の ϵ_* を繰り返し h_t に代入する:

$$\begin{aligned}
h_t &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i h_{t-i} \\
&= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \eta_{t-i}^2 h_{t-i} + \sum_{i=1}^{p} \beta_i h_{t-i} \\
&= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \eta_{t-i}^2 \left(\alpha_0 + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 h_{t-i-j} + \sum_{j=1}^{p} \beta_j h_{t-i-j} \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \left(\alpha_0 + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 h_{t-i-j} + \sum_{j=1}^{p} \beta_j h_{t-i-j} \right) \\
&= \alpha_0 + \alpha_0 \left(\sum_{i=1}^{q} \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \right) \\
&\quad + \left(\sum_{i=1}^{q} \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \right) \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 h_{t-i-j} \\
&\quad + \left(\sum_{i=1}^{q} \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \right) \sum_{j=1}^{p} \beta_j h_{t-i-j} \\
&= \alpha_0 + \alpha_0 \left(\sum_{i=1}^{q} \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \right) \\
&\quad + \left(\sum_{i=1}^{q} \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \right) \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 \left(\alpha_0 + \sum_{l=1}^{q} \alpha_l \eta_{t-i-j-l}^2 h_{t-i-j-l} + \sum_{l=1}^{p} \beta_l h_{t-i-j-l} \right) \\
&\quad + \left(\sum_{i=1}^{q} \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \right) \sum_{j=1}^{p} \beta_j \left(\alpha_0 + \sum_{l=1}^{q} \alpha_l \eta_{t-i-j-l}^2 h_{t-i-j-l} + \sum_{l=1}^{p} \beta_l h_{t-i-j-l} \right) \\
&= \alpha_0 + \alpha_0 \left(\sum_{i=1}^{q} \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \right) + \alpha_0 \left(\left(\sum_{j=1}^{q} \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \right) \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \left(\sum_{j=1}^{q} \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \right) \sum_{i=1}^{p} \beta_i \right) \\
&\quad + \left(\left(\sum_{j=1}^{q} \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \right) \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \left(\sum_{j=1}^{q} \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \right) \sum_{i=1}^{p} \beta_i \right) \sum_{l=1}^{q} \alpha_l \eta_{t-i-j-l}^2 h_{t-i-j-l} \\
&\quad + \left(\left(\sum_{j=1}^{q} \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \right) \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \left(\sum_{j=1}^{q} \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \right) \sum_{i=1}^{p} \beta_i \right) \sum_{l=1}^{p} \beta_l h_{t-i-j-l}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \alpha_0 M(t,\ 0) + \alpha_0 M(t,\ 1) + \alpha_0 M(t,\ 2) \\
&\quad + M(t,\ 2) \sum_{l=1}^{q} \alpha_l \eta_{t-i-j-l}^2 \left(\alpha_0 + \sum_{r=1}^{q} \alpha_r \eta_{t-i-j-l-r}^2 h_{t-i-j-l-r} + \sum_{r=1}^{p} \beta_r h_{t-i-j-l-r} \right) \\
&\quad + M(t,\ 2) \sum_{l=1}^{p} \beta_l \left(\alpha_0 + \sum_{r=1}^{q} \alpha_r \eta_{t-i-j-l-r}^2 h_{t-i-j-l-r} + \sum_{r=1}^{p} \beta_r h_{t-i-j-l-r} \right) \\
&\vdots \\
&= \alpha_0 \sum_{k=0}^{\infty} M(t,\ k).
\end{aligned}
$$

上式で記述されている通り，$M(t,\ k)$ は以下の規則で表される:

$$
\begin{aligned}
M(t,\ 0) &= 1, \\
M(t,\ 1) &= \left(\sum_{i=1}^{q} \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \right), \\
M(t,\ 2) &= \left(\left(\sum_{j=1}^{q} \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \right) \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \left(\sum_{j=1}^{q} \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \right) \sum_{i=1}^{p} \beta_i \right) \\
&= M(t-i,\ 1) \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \eta_{t-i}^2 + M(t-i,\ 1) \sum_{i=1}^{p} \beta_i \\
M(t,\ 3) &= M(t,\ 2) \sum_{l=1}^{q} \alpha_l \eta_{t-i-j-l}^2 + M(t,\ 2) \sum_{l=1}^{p} \beta_l \\
&= \left(\left(\sum_{j=1}^{q} \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \right) \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \left(\sum_{j=1}^{q} \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \right) \sum_{i=1}^{p} \beta_i \right) \sum_{l=1}^{q} \alpha_l \eta_{t-i-j-l}^2 \\
&\quad + \left(\left(\sum_{j=1}^{q} \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \right) \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \left(\sum_{j=1}^{q} \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \right) \sum_{i=1}^{p} \beta_i \right) \sum_{l=1}^{p} \beta_l \\
&= \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \eta_{t-i}^2 \left(\left(\sum_{j=1}^{q} \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \right) \left(\sum_{l=1}^{q} \alpha_l \eta_{t-i-j-l}^2 + \sum_{l=1}^{p} \beta_l \right) \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \left(\left(\sum_{j=1}^{q} \alpha_j \eta_{t-i-j}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \right) \left(\sum_{l=1}^{q} \alpha_l \eta_{t-i-j-l}^2 + \sum_{l=1}^{p} \beta_l \right) \right) \\
&= M(t-i,\ 2) \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \eta_{t-i}^2 + M(t-i,\ 2) \sum_{i=1}^{p} \beta_i \\
&\vdots \\
M(t,\ k+1) &= M(t-i,\ k) \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \eta_{t-i}^2 + M(t-i,\ k) \sum_{i=1}^{p} \beta_i \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

η_t は独立に分布 $N(0,\ 1)$ に従うという仮定の下，$M(t,\ k)$ のモーメントは時点 t に依存しない:

$$
E[M(t,\ k)^r] = E[M(s,\ k)^r], \qquad t \neq s,\ r \in \mathbb{N}.
$$

従って 1 次モーメントの計算は次の結果を得る．$k \geq 1$ として，

$$
\begin{aligned}
E[M(t,\ k)] &= E\left[M(t-i,\ k-1) \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \eta_{t-i}^2 + M(t-i,\ k-1) \sum_{i=1}^{p} \beta_i \right] \\
&= \left(\sum_{i=1}^{q} \alpha_i E[\eta_{t-i}^2] + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \right) E[M(t,\ k-1)] \\
&= \left(\sum_{i=1}^{q} \alpha_i + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \right)^2 E[M(t,\ k-2)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\vdots \\
&= \left(\sum_{i=1}^{q}\alpha_i + \sum_{i=1}^{p}\beta_i\right)^k E[M(t,\ 0)] \\
&= \left(\sum_{i=1}^{q}\alpha_i + \sum_{i=1}^{p}\beta_i\right)^k .
\end{aligned}
$$

最終的に ϵ_t^2 の 1 次モーメントは,

$$
E[\epsilon_t^2 \mid \psi_{t-1}] = E[h_t] = E\left[\alpha_0 \sum_{k=0}^{\infty} M(t,\ k)\right] = \alpha_0 E\left[\sum_{k=0}^{\infty} M(t,\ k)\right]
$$

ここで定理の広義定常性の仮定から $E[h_t] < \infty$ でなければならず，従って $\sum_{k=0}^{\infty} M(t,\ k)\ (\geq 0)$ は可積分である必要がある．よって $\sum_{i=1}^{q}\alpha_i + \sum_{i=1}^{p}\beta_i < 1$ である．逆に，$\sum_{i=1}^{q}\alpha_i + \sum_{i=1}^{p}\beta_i < 1$ が仮定されていれば無限級数が可積分である為,

$$
\alpha_0 E\left[\sum_{k=0}^{\infty} M(t,\ k)\right] = \alpha_0 \left(1 - \sum_{i=1}^{q}\alpha_i - \sum_{i=1}^{p}\beta_i\right)^{-1} < \infty
$$

が正当化される．そしてこれは時点に依存しない分散である．また,

$$
\begin{aligned}
E[\epsilon_t \mid \psi_{t-1}] &= E[\eta_t]E[h_t^{\frac{1}{2}}] = 0, \\
Cov[\epsilon_t,\ \epsilon_s] &= Cov[\eta_t h_t^{\frac{1}{2}},\ \eta_s h_s^{\frac{1}{2}}] \\
&= E[\eta_t h_t^{\frac{1}{2}}\ \eta_s h_s^{\frac{1}{2}}] \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

であることも従うので，定理が示されるのである． □

本稿の最初に示した $GARCH$ モデルの式の同値形を表記する:

$$
\begin{aligned}
\epsilon_t &\equiv \eta_t h_t^{\frac{1}{2}}, \qquad \eta_t \sim N(0,\ 1)\ i.i.d.\text{を仮定している下で}, \\
h_t &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q}\alpha_i\epsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p}\beta_i h_{t-i} \\
&= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q}\alpha_i\epsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p}\beta_i\epsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p}\beta_i(h_{t-i} - \epsilon_{t-i}^2) \\
&= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q}\alpha_i\epsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p}\beta_i\epsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p}\beta_i h_{t-i}(1 - \eta_{t-i}^2).
\end{aligned}
$$

定理 2 $GARCH(1,\ 1)$ について，$h_t = \alpha_0 + \alpha_1\epsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$過程の $2m$ 次のモーメント $E[\epsilon_t^{2m}]$ が存在する為の必要十分条件は

$$
\mu(\alpha_1,\ \beta_1,\ m) \equiv \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j} a_j \alpha_1^j \beta_1^{m-j} < 1, \qquad a_0 = 1,\ a_j = \prod_{i=1}^{j}(2j-1)
$$

であり，このとき $2m$ 次のモーメントは次の様に表せる：

証明 2

定理 3

証明 3