

2016年11月17日

ゼミ資料

待ち行列理論と板の動きへの応用

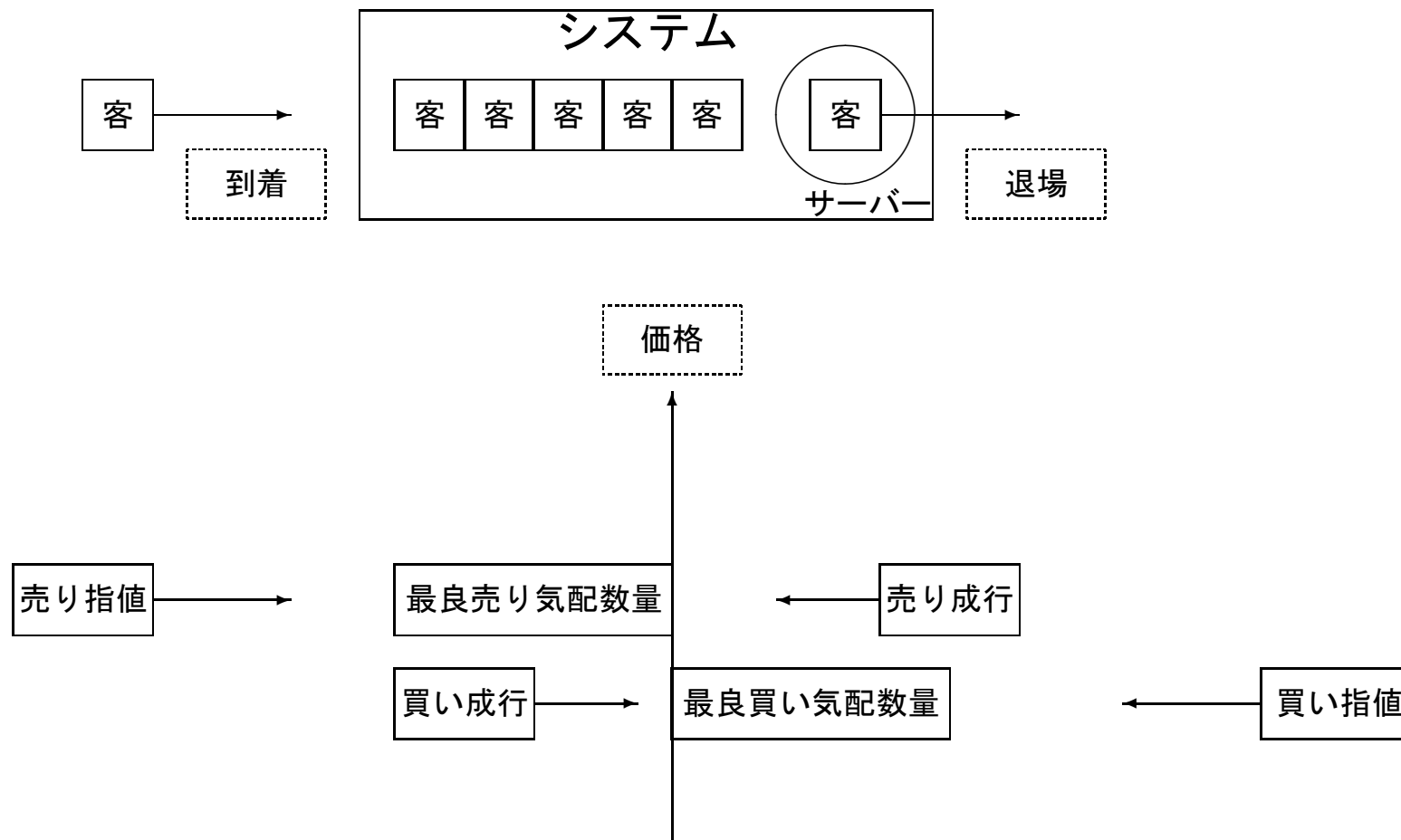
学籍番号 : 201311324

百合川尚学

1 待ち行列理論の導入

興味があること

- 観測を始めて t 時間経過した後のシステム内の客数.
- システムにいる客数が初期状態から0になるまでの時間の分布.
- システムを最良気配に見立てると、最良気配にかかる注文の数量の変化の分布を考えることになる.



2 *References*

参考文献：

1. Suzuki, Queueing, Shokabo, 1972, pp. 20-65.
2. Endo, Zuo, Kishimoto, Modelling Intra-day Stock Price Changes In Terms of a Continuous Double Auction System, The Japan Society for Industrial and Applied Mathematics, Vol.16 , No.3, 2006, pp.305-316.
3. Li, Hui, Endo, Kishimoto, A Quantitative Model for Intraday Stock Price Changes Based on Order Flows, J Syst Sci Complex, 2014, 27: 208-224.

上記文献2と3に従い，板は最良気配のみを考え，板が動くことは最良気配値が動くこととする．

注文の種類

上記文献2と3に従い，次の4種類のみを考える．

- 指値買い/売り注文 （最良買い/売り気配の数量を増加する．）
- 成行買い/売り注文 （最良買い/売り気配の数量を減少する．）

客

3 基礎理論まとめ *Poisson Arrival*

或るシステムがあり，そのシステムには或る確率分布に従った時間間隔で客が訪れ，或る確率分布に従った時間だけサービスを受け退場する．到着の時間間隔およびサービス時間は客ごとに独立であると考える．

到着時間の分布について

観測開始時刻を T_0 ，始めの客が到着する時刻を T_1 ，2番目の客が到着する時刻を T_2 ， \dots ，として系列 $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ を得る．各時間間隔 $T_n - T_{n-1}, n = 0, 1, 2, \dots$ はどの二つも互いに独立で同一な確率分布(到着分布)に従う．

到着分布の例： k -アーラン分布 (k -Erlang distribution)

分布関数を $E_k(x)$ ， $-\infty < x < \infty$ と表すと，

$$E_k(x) \equiv \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda k x) \left(1 + \frac{\lambda k x}{1!} + \dots + \frac{(\lambda k x)^{k-1}}{(k-1)!} \right) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

平均 $\frac{1}{\lambda}$ ，分散 $\frac{1}{k\lambda^2}$ ，特性関数 $\phi_{E_k}(t) = \left(1 - \frac{it}{\lambda k}\right)^{-k}$ (i :虚数単位)．(付録1参照)

到着分布の平均の逆数を到着率と云う．これは単位時間当たりの平均到着客数を表す．(上の例だと到着率は λ ．)

定理 1 k -アーラン分布の到着率を λ とする. ここで一定到着分布を

$$F(x) \equiv \begin{cases} 1 & x \geq \frac{1}{\lambda} \\ 0 & x < \frac{1}{\lambda} \end{cases} \quad (2)$$

とおく. k -アーラン分布は $k \rightarrow \infty$ で一定到着分布に分布収束する.

証明 1 k -アーラン分布の特性関数を $\phi_{E_k}(t)$, 一定到着の分布の特性関数を $\phi_F(t)$ と表す. $\phi_{E_k}(t)$ が $\phi_F(t)$ に各点収束すれば, *Glivenko* の定理により定理が示される.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \phi_{E_k}(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{it}{\lambda k} \right)^{-k} = \exp \left(\frac{it}{\lambda} \right). \quad (3)$$

一方, 一定到着の特性関数は, 一定到着分布が離散分布であるから,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx) dF(x) = \exp \left(it \frac{1}{\lambda} \right) F \left(\frac{1}{\lambda} \right) = \exp \left(\frac{it}{\lambda} \right). \quad (4)$$

従って定理は証明された.

(証明終)

5 基礎理論まとめ *Poisson Arrival*

k -アーラン分布の $k = 1$ のとき、客の到着時間間隔は到着率 λ の指数分布 $E_X(\lambda)$ に従う。指数分布はマルコフ性を有つ:

$$X(\omega) \sim E_X(\lambda), \quad (5)$$

$$\Pr(X \leq \tau + t | X > \tau) = \frac{\exp(\lambda\tau) - \exp(\lambda(\tau + t))}{\exp(\lambda\tau)} = \Pr(X \leq t). \quad (\tau, t > 0) \quad (6)$$

この性質から、次の定理が成り立つ。

定理 2 到着時間間隔が独立に同一な指数分布に従うとき、任意の時間区間 $(\tau, \tau + t]$ に到着する客数は同一な *Poisson* 過程に従い、重ならない時間間隔では独立となる。また逆も成り立つ。

証明 2 (1) 任意の時間区間に到着する客数は同一な *Poisson* 過程に従う

観測開始時点を 0 として、時間 $(\tau, \tau + t]$ の間にシステムに到着する客数の総数を $N(\tau, \tau + t]$ と表す。 $G_n(x)$ ($x \geq 0$) を、

客

Gamma 分布 $G_A(n, \frac{1}{\lambda})$ の分布関数であるとする。

$$\Pr(N(\tau, \tau + t] = n) = \Pr(N(\tau, \tau + t] \geq n) - \Pr(N(\tau, \tau + t] \geq n + 1) \quad (7)$$

$$= \Pr(G_n(x) \leq t) - \Pr(G_{n+1}(x) \leq t) \quad (\text{付録 2 参照}) \quad (8)$$

$$= \int_0^t \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} \exp(-\lambda x) dx - \int_0^t \frac{\lambda^{n+1}}{n!} x^n \exp(-\lambda x) dx \quad (9)$$

$$= \left[\frac{\lambda^n}{n!} x^n \exp(-\lambda x) \right]_{x=0}^{x=t} + \int_0^t \frac{\lambda^{n+1}}{n!} x^n \exp(-\lambda x) dx - \int_0^t \frac{\lambda^{n+1}}{n!} x^n \exp(-\lambda x) dx \quad (10)$$

$$= \frac{\lambda^n}{n!} t^n \exp(-\lambda t). \quad (11)$$

即ち、到着客数は時間間隔のみに依存する.

(2) 重ならない時間間隔では独立となる

任意の重ならない時間間隔 $(\tau_1, \tau_1 + t_1], (\tau_2, \tau_2 + t_2]$ に対して、到着客数をそれぞれ n_1, n_2 と表すと、同時確率は以下のように表される:

$$\Pr(N(\tau_1, \tau_1 + t_1] = n_1, N(\tau_2, \tau_2 + t_2] = n_2) \quad (12)$$

$$= \Pr(N(\tau_1, \tau_1 + t_1] = n_1) \Pr(N(\tau_2, \tau_2 + t_2] = n_2 | N(\tau_1, \tau_1 + t_1] = n_1) \quad (13)$$

$$= \{\Pr(G_{n_1}(t_1) \leq t_1) - \Pr(G_{n_1+1}(t_1) \leq t_1)\} \{\Pr(G_{n_2}(t_2) \leq t_2) - \Pr(G_{n_2+1}(t_2) \leq t_2)\} \quad (14)$$

$$= \Pr(N(\tau_1, \tau_1 + t_1] = n_1) \Pr(N(\tau_2, \tau_2 + t_2] = n_2). \quad (15)$$

(3) 逆を示す

任意の時間区間 $(\tau, \tau + t]$ に到着する客数は同一な *Poisson* 過程に従い、重ならない時間間隔では独立となると仮定の下で、時間間隔を表す確率変数 $\{T_n - T_{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ の分布を導出する. 最後に到着が観測されてから次の到着が観測されるまでの時間の分布は,

$$\Pr(T_n - T_{n-1} \leq t) = 1 - \Pr(N(0, \tau] = n - 1) \Pr(N(\tau, \tau + t] = 0 | N(0, \tau] = n - 1) \quad (16)$$

$$= 1 - \Pr(N(\tau, \tau + t] = 0) \quad (17)$$

$$= 1 - \exp(-\lambda t). \quad (18)$$

(証明終)

一度にサービスを受ける人数を1として、サービス時間も到着時間間隔と同様に指数分布に従う下での待ち行列を $M/M/1$ (*Kendall's notation*) と表記する.

到着時間間隔の分布/サービス時間の分布/サーバー数.

7 付録1

到着分布の例： k -アーラン分布 (k - *Erlang distribution*)

$$E_k(x) \equiv \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda kx) \left(1 + \frac{\lambda kx}{1!} + \cdots + \frac{(\lambda kx)^{k-1}}{(k-1)!} \right) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (19)$$

平均，分散，特性関数を計算する．密度関数

$$f(x) = E'_k(x) \quad (20)$$

$$= \begin{cases} \lambda k \exp(-\lambda kx) \left(1 + \frac{\lambda kx}{1!} + \cdots + \frac{(\lambda kx)^{k-1}}{(k-1)!} \right) - \lambda k \exp(-\lambda kx) \left(1 + \frac{\lambda kx}{1!} + \cdots + \frac{(\lambda kx)^{k-2}}{(k-2)!} \right) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (21)$$

$$= \begin{cases} \lambda k \exp(-\lambda kx) \frac{(\lambda kx)^{k-1}}{(k-1)!} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}. \quad (22)$$

これは *Gamma* 分布 $G_A(k, \frac{1}{\lambda k})$ の密度関数である．従って一般の *Gamma* 分布 $G_A(\alpha, \beta)$ について平均，分散，特性関数を計算する方が楽である．
特性関数：確率変数 $X \sim G_A(\alpha, \beta)$ について，

$$\phi(t) = E[e^{itX}] \quad (23)$$

$$= \int_0^\infty e^{itx} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx \quad (24)$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-(\frac{1}{\beta} - it)x} dx \quad (25)$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-(\frac{1}{\beta} - it)x} dx \quad (26)$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \left(\frac{\beta}{1 - i\beta t} \right)^\alpha \int_0^{\frac{R}{\beta} - itR} z^{\alpha-1} e^{-z} dz. \quad (27)$$

ここで

$$\int_0^{\frac{R}{\beta} - itR} z^{\alpha-1} e^{-z} dz$$

について複素積分を考える．積分路を $\Gamma \equiv \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ として，被積分関数が C の整関数であることから Γ および内部領域に孤立特異点は存在しない．積分の向きは左回りとして，*Cauchy* の積分定理が成り立つので

$$\oint_{\Gamma} z^{\alpha-1} e^{-z} dz = 0$$

が成り立つ. Γ_2 上の積分は

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_2} z^{\alpha-1} e^{-z} dz \right| &= \left| \int_{-tR}^0 \left(\frac{R}{\beta} + iy \right)^{\alpha-1} e^{-\frac{R}{\beta} - iy} i dy \right| \\ &\leq \int_{-tR}^0 \left(\frac{R}{\beta} + |y| \right)^{\alpha-1} e^{-\frac{R}{\beta}} dy. \end{aligned} \quad (28)$$

(30)

任意の $\epsilon > 0$ に対し t について定まる或る $R_1(t)$ が存在して, $R > R_1(t)$ ならば

$$\int_{-tR}^0 \left(\frac{R}{\beta} + |y| \right)^{\alpha-1} e^{-\frac{R}{\beta}} dy < \epsilon$$

が成り立つ. Γ_3 上の積分は

$$\int_{\frac{R}{\beta}}^0 z^{\alpha-1} e^{-z} dz = - \int_0^{\frac{R}{\beta}} z^{\alpha-1} e^{-z} dz.$$

これも広義積分は収束するので, 任意の $\epsilon > 0$ に対し或る R_2 が存在して, $R > R_2$ ならば

$$\Gamma(\alpha) - \epsilon < \int_0^{\lambda R} z^{\alpha-1} e^{-z} dx \leq \Gamma(\alpha).$$

従って, $R > \max\{R_1(t), R_2\}$ と置いて

$$\left| \int_{\Gamma_1} z^{\alpha-1} e^{-z} dz - \Gamma(\alpha) \right| = \left| - \int_{\Gamma_2} z^{\alpha-1} e^{-z} dz - \int_{\Gamma_3} z^{\alpha-1} e^{-z} dz - \Gamma(\alpha) \right| < 2\epsilon. \quad (31)$$

ϵ は任意であるから

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \left(\frac{\beta}{1 - i\beta t} \right)^\alpha \int_0^{\frac{R}{\beta} - itR} z^{\alpha-1} e^{-z} dz = \left(\frac{1}{1 - i\beta t} \right)^\alpha$$

が成り立つ. $t \leq 0$ の場合も同じ結論となる.

(証明終)

8 付録2

確率変数 $X(\omega)$, $Y(\omega)$ を, それぞれ *Gamma* 分布 $G_A(n-1, \frac{1}{\lambda})$, 指数分布 $E_X(\lambda)$ に独立に従うとする. このとき和 $Z(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$ の分布を求める.

$$\Pr(Z \leq z) = \iint_{x, y \geq 0, x+y \leq z} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!} x^{n-2} \exp(-\lambda x) \lambda \exp(-\lambda y) dx dy \quad (32)$$

$$= \int_0^z \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!} x^{n-2} \exp(-\lambda x) [1 - \exp(-\lambda y)]_{y=0}^{y=z-x} dx \quad (33)$$

$$= \int_0^z \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!} x^{n-2} (\exp(-\lambda x) - \exp(-\lambda z)) dx \quad (34)$$

$$= \left[\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} (\exp(-\lambda x) - \exp(-\lambda z)) \right]_{x=0}^{x=z} + \int_0^z \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} \exp(-\lambda x) dx \quad (35)$$

$$= \int_0^z \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} \exp(-\lambda x) dx. \quad (36)$$

よって Z が *Gamma* 分布 $G_A(n, \frac{1}{\lambda})$ に従っていると示された. $G_A(1, \frac{1}{\lambda}) = E_X(\lambda)$ であることから, 独立に同一の指数分布に従う n 個の確率変数の和の分布は $G_A(n, \frac{1}{\lambda})$ であることが帰納的に示される.