2016年11月17日

ゼミ資料
待ち行列理論と板の動きへの応用

学籍番号：201311324

百合川尚学

1 待ち行列理論の導入

興味があること

- 観測を始めてt時間経過した後のシステム内の客数.
- システムにいる客数が初期状態から0になるまでの時間の分布.
- システムを最良気配に見立てると，最良気配にかかる注文の数量の変化の分布を考えることになる.

客

2　基礎理論まとめ

参考文献：

1. Suzuki, Queueing, Shokabo, 1972, pp. 20-65.
2. Endo, Zuo, Kishimoto, Modelling Intra-day Stock Price Changes In Terms of a Continuous Double Auction System, The Japan Society for Industrial and Applied Mathematics, Vol.16 , No.3, 2006, pp.305-316.
3. Li, Hui, Endo, Kishimoto, A Quantitative Model for Intraday Stock Price Changes Based on Order Flows, J Syst Sci Complex, 2014, 27: 208-224.

上記文献2と3に従い，板は最良気配のみを考え，板が動くことは最良気配値が動くこととする.

注文の種類

上記文献2と3に従い，次の4種類のみを考える.

- 指値買い/売り注文　(最良買い/売り気配の数量を増加する．)
- 成行買い/売り注文　(最良買い/売り気配の数量を減少する．)

客

3　基礎理論まとめ

或るシステムがあり，そのシステムには或る確率分布に従った時間間隔で客が訪れ，或る確率分布に従った時間だけサービスを受け退場する．到着の時間間隔およびサービス時間は客ごとに独立であると考える．

到着時間の分布について

観測開始時刻をT_0，始めの客が到着する時刻をT_1，2番目の客が到着する時刻をT_2，$\cdots$，として系列$\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$を得る．各時間間隔$T_n - T_{n-1}, n = 0, 1, 2, \cdots$ はどの二つも互いに独立で同一な確率分布(到着分布)に従う．

到着分布の例：$k-$アーラン分布 $(k - Erlang\ distribution)$

分布関数を$E_k(x)$，$-\infty < x < \infty$と表すと，

$$E_k(x) \equiv \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda k x)\left(1 + \frac{\lambda k x}{1!} + \cdots + \frac{(\lambda k x)^{k-1}}{(k-1)!}\right) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \tag{1}$$

平均 $\frac{1}{\lambda}$，分散 $\frac{1}{k\lambda^2}$，特性関数 $\phi_{E_k}(t) = \left(1 - \frac{it}{\lambda k}\right)^{-k}$($i$:虚数単位)．(付録1参照)

到着分布の平均の逆数を到着率と云う．これは単位時間当たりの平均到着客数を表す．(上の例だと到着率はλ．)

4　基礎理論まとめ

定理 1　$k-$アーラン分布の到着率をλとする．ここで一定到着分布を

$$F(x) \equiv \begin{cases} 1 & x \geq \frac{1}{\lambda} \\ 0 & x < \frac{1}{\lambda} \end{cases} \tag{2}$$

とおく．$k-$アーラン分布は$k \to \infty$で一定到着分布に分布収束する．

証明 1　$k-$アーラン分布の特性関数を$\phi_{E_k}(t)$，一定到着の分布の特性関数を$\phi_F(t)$と表す．$\phi_{E_k}(t)$が$\phi_F(t)$に各点収束すれば，$Glivenko$の定理により定理が示される．

$$\lim_{k\to\infty} \phi_{E_k}(t) = \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{it}{\lambda k}\right)^{-k} = \exp\left(\tfrac{it}{\lambda}\right). \tag{3}$$

一方，一定到着の特性関数は，一定到着分布が離散分布であるから，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp{(itx)} dF(x) = \exp\left(it\tfrac{1}{\lambda}\right) F(\frac{1}{\lambda}) = \exp\left(\tfrac{it}{\lambda}\right). \tag{4}$$

従って定理は証明された．

(証明終)

5 基礎理論まとめ

$k-$アーラン分布の$k=1$のとき，客の到着時間間隔は到着率λの指数分布$E_X(\lambda)$に従う．指数分布はマルコフ性を有つ:

$$X(\omega) \sim E_X(\lambda), \tag{5}$$

$$\Pr\left(X \le \tau + t | X > \tau\right) = \frac{\exp\left(\lambda\tau\right) - \exp\left(\lambda(\tau+t)\right)}{\exp\left(\lambda(\tau)\right)} = \Pr\left(X \le t\right). \quad (\tau, t > 0) \tag{6}$$

この性質から，次の定理が成り立つ．

定理 2　到着時間間隔が独立に同一な指数分布に従うとき，任意の時間区間$(\tau, \tau+t]$に到着する客数は同一な$Poisson$分布に従い，重ならない時間間隔では独立となる．また逆も成り立つ．

証明 2　(1) 任意の時間区間に到着する客数は$Poisson$分布に従う

観測開始時点を0として，時間$(\tau, \tau+t]$の間にシステムに到着する客数の総数を$N(\tau, \tau+t]$と表す．$G_n(x)$ $(x \ge 0)$を，

客

$Gamma$分布$G_A(n, \frac{1}{\lambda})$の分布関数であるとする．

$$\begin{aligned}
\Pr\left(N(\tau, \tau+t] = n\right) &= \Pr\left(N(\tau, \tau+t] \ge n\right) - \Pr\left(N(\tau, \tau+t] \ge n+1\right) & (7)\\
&= \Pr\left(G_n(x) \le t\right) - \Pr\left(G_{n+1}(x) \le t\right) \qquad \text{(付録2参照)} & (8)\\
&= \int_0^t \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} \exp\left(-\lambda x\right) dx - \int_0^t \frac{\lambda^{n+1}}{n!} x^n \exp\left(-\lambda x\right) dx & (9)\\
&= \left[\frac{\lambda^n}{n!} x^n \exp\left(-\lambda x\right)\right]_{x=0}^{x=t} + \int_0^t \frac{\lambda^{n+1}}{n!} x^n \exp\left(-\lambda x\right) dx - \int_0^t \frac{\lambda^{n+1}}{n!} x^n \exp\left(-\lambda x\right) dx & (10)
\end{aligned}$$

$$= \frac{\lambda^n}{n!} t^n \exp(-\lambda t). \tag{11}$$

(2) 重ならない時間間隔では独立となる

任意の重ならない時間間隔$(\tau_1, \tau_1 + t_1], (\tau_2, \tau_2 + t_2]$に対して，到着客数をそれぞれ$n_1, n_2$と表すと，同時確率は以下のように表される:

$$\Pr(N(\tau_1, \tau_1 + t_1] = n_1, N(\tau_2, \tau_2 + t_2] = n_2) \tag{12}$$
$$= \Pr(N(\tau_1, \tau_1 + t_1] = n_1) \Pr(N(\tau_2, \tau_2 + t_2] = n_2 | N(\tau_1, \tau_1 + t_1] = n_1) \tag{13}$$
$$= \{\Pr(G_{n1}(t_1) \le t_1) - \Pr(G_{n_1+1}(t_1) \le t_1)\} \{\Pr(G_{n2}(t_2) \le t_2) - \Pr(G_{n_2+1}(t_2) \le t_2)\} \tag{14}$$
$$= \Pr(N(\tau_1, \tau_1 + t_1] = n_1) \Pr(N(\tau_2, \tau_2 + t_2] = n_2). \tag{15}$$

(3) 逆を示す

任意の時間区間$(\tau, \tau + t]$に到着する客数は同一な$Poisson$分布に従い，重ならない時間間隔では独立となると仮定の下で，時間間隔を表す確率変数Tの分布を導出する．最後に到着が観測された時刻τを始点として次の到着が観測されるまでの時間の分布は，

$$\Pr(T \le t) = 1 - \Pr(N(\tau, \tau + t] = 0) = 1 - \exp(-\lambda t). \tag{16}$$

(証明終)

6　付録1

到着分布の例：$k-$アーラン分布 $(k-Erlang\ distribution)$

$$E_k(x) \equiv \begin{cases} 1-\exp\left(-\lambda kx\right)\left(1+\frac{\lambda kx}{1!}+\cdots+\frac{(\lambda kx)^{k-1}}{(k-1)!}\right) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \tag{17}$$

平均，分散，特性関数を計算する．密度関数

$$f(x) = E_k'(x) \tag{18}$$

$$= \begin{cases} \lambda k\exp\left(-\lambda kx\right)\left(1+\frac{\lambda kx}{1!}+\cdots+\frac{(\lambda kx)^{k-1}}{(k-1)!}\right)-\lambda k\exp\left(-\lambda kx\right)\left(1+\frac{\lambda kx}{1!}+\cdots+\frac{(\lambda kx)^{k-2}}{(k-2)!}\right) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \tag{19}$$

$$= \begin{cases} \lambda k\exp\left(-\lambda kx\right)\frac{(\lambda kx)^{k-1}}{(k-1)!} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}. \tag{20}$$

これは$Gamma$分布 $G_A(k, \frac{1}{\lambda k})$の密度関数である．従って一般の$Gamma$分布 $G_A(\alpha,\beta)$について平均，分散，特性関数を計算する方が楽である．
特性関数：確率変数 $X \sim G_A(\alpha,\beta)$ について，

$$\phi(t) = E[e^{itX}] \tag{21}$$

$$= \int_0^\infty e^{itx}\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}dx \tag{22}$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}x^{\alpha-1}e^{-(\frac{1}{\beta}-it)x}dx \tag{23}$$

$$= \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}x^{\alpha-1}e^{-(\frac{1}{\beta}-it)x}dx \tag{24}$$

$$= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}(\frac{\beta}{1-i\beta t})^\alpha\int_0^{\frac{R}{\beta}-itR}z^{\alpha-1}e^{-z}dz. \tag{25}$$

ここで

$$\int_0^{\frac{R}{\beta}-itR}z^{\alpha-1}e^{-z}dz$$

について複素積分を考える．積分路を$\Gamma \equiv \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$として，被積分関数が$C$の整関数であることから$\Gamma$および内部領域に孤立特異点は存在しない．積分の向きは左回りとして，$Cauchy$の積分定理が成り立つので

$$\oint_\Gamma z^{\alpha-1}e^{-z}dz = 0$$

が成り立つ．Γ_2 上の積分は

$$\left|\int_{\Gamma_2} z^{\alpha-1}e^{-z}dz\right| = \left|\int_{-tR}^{0}(\frac{R}{\beta}+iy)^{\alpha-1}e^{-\frac{R}{\beta}-iy}idy\right| \tag{26}$$
$$\leq \int_{-tR}^{0}(\frac{R}{\beta}+|y|)^{\alpha-1}e^{-\frac{R}{\beta}}dy.$$

(28)

任意の $\epsilon > 0$ に対し t について定まる或る $R_1(t)$ が存在して，$R > R_1(t)$ ならば

$$\int_{-tR}^{0}(\frac{R}{\beta}+|y|)^{\alpha-1}e^{-\frac{R}{\beta}}dy < \epsilon$$

が成り立つ．Γ_3 上の積分は

$$\int_{\frac{R}{\beta}}^{0} z^{\alpha-1}e^{-z}dz = -\int_{0}^{\frac{R}{\beta}} z^{\alpha-1}e^{-z}dz.$$

これも広義積分は収束するので，任意の $\epsilon > 0$ に対し或る R_2 が存在して，$R > R_2$ ならば

$$\Gamma(\alpha) - \epsilon < \int_{0}^{\lambda R} z^{\alpha-1}e^{-z}dx \leq \Gamma(\alpha).$$

従って，$R > max\{R_1(t), R_2\}$ と置いて

$$\left|\int_{\Gamma_1} z^{\alpha-1}e^{-z}dz - \Gamma(\alpha)\right| = \left|-\int_{\Gamma_2} z^{\alpha-1}e^{-z}dz - \int_{\Gamma_3} z^{\alpha-1}e^{-z}dz - \Gamma(\alpha)\right| < 2\epsilon. \tag{29}$$

ϵ は任意であるから

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}(\frac{\beta}{1-i\beta t})^{\alpha}\int_{0}^{\frac{R}{\beta}-itR} z^{\alpha-1}e^{-z}dz = (\frac{1}{1-i\beta t})^{\alpha}$$

が成り立つ．$t \leq 0$ の場合も同じ結論となる．

(証明終)

7　付録2

確率変数$X(\omega), Y(\omega)$を，それぞれ$Gamma$分布$G_A(n-1, \frac{1}{\lambda})$，指数分布$E_X(\lambda)$に独立に従うとする．このとき和$Z(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$の分布を求める．

$$
\begin{aligned}
\Pr(Z \leq z) &= \iint_{x,y\geq 0, x+y\leq z} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!} x^{n-2} \exp(-\lambda x) \lambda \exp(-\lambda y) dx dy & (30)\\
&= \int_0^z \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!} x^{n-2} \exp(-\lambda x) \left[1 - \exp(-\lambda y)\right]_{y=0}^{y=z-x} dx & (31)\\
&= \int_0^z \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!} x^{n-2} (\exp(-\lambda x) - \exp(-\lambda z)) dx & (32)\\
&= \left[\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} (\exp(-\lambda x) - \exp(-\lambda z))\right]_{x=0}^{x=z} + \int_0^z \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} \exp(-\lambda x) dx & (33)\\
&= \int_0^z \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} \exp(-\lambda x) dx. & (34)
\end{aligned}
$$

よってZが$Gamma$分布$G_A(n, \frac{1}{\lambda})$に従っていると示された．$G_A(1, \frac{1}{\lambda}) = E_X(\lambda)$であることから，独立に同一の指数分布に従う$n$個の確率変数の和の分布は$G_A(n, \frac{1}{\lambda})$であることが帰納的に示される．