

参考文献

- [1] Endo, Zuo, Kishimoto, Modelling Intra-day Stock Price Changes In Terms of a Continuous Double Auction System, The Japan Society for Industrial and Applied Mathematics, Vol.16 , No.3, 2006, pp.305-316.
- [2] Li, Hui, Endo, Kishimoto, A Quantitative Model for Intraday Stock Price Changes Based on Order Flows, J Syst Sci Complex, 2014, 27: 208-224.
- [3] 宮崎, 日本の証券市場での日中取引間隔と1約定あたり出来高に関する研究, 2011, 筑波大学システム情報工学研究科修士論文.

0.1 モデルの変数と式

遠藤[1]と李[2]に倣ってモデルで使う変数を定義する. 変数につける添え字 A と B はそれぞれ *ask* と *bid* の意味である. 待ち行列理論の結果により, 状態 $i \geq 1$ を初期状態とする $M/M/1$ のシステムで系内客数が0になるまでの時間の分布の Radon-Nikodym の意味での密度関数は以下の式で表せる.

$$r_i(t) = \begin{cases} \frac{i}{t} e^{-(\lambda+\mu)t} \rho^{\frac{i}{2}} I_i(2t \sqrt{\lambda\mu}) & (t > 0) \\ 0 & (t \leq 0) \end{cases} \quad (\rho = \lambda/\mu)$$

$\lambda > 0$: 到着率, $\mu > 0$: サービス率, $i \geq 1$: 初期状態, $I_k(x)$: 第一種変形 Bessel 関数 (定義は式(??)).

ここで変数の定義を以下の通りとする:

表1 モデルで扱う変数の定義

変数名	定義
r_A	最良売り気配数量の初期状態(板の移動直後の数量)
r_B	最良買い気配数量の初期状態(板の移動直後の数量)
λ_A	売り指値注文の到着率(1秒あたり注文数)
λ_B	買い指値注文の到着率(1秒あたり注文数)
μ_A	買い成行注文の到着率(1秒あたりの注文数とキャンセル数の和 ^{*1})
μ_B	売り成行注文の到着率(1秒あたりの注文数とキャンセル数の和)
ρ_A	λ_A/μ_A
ρ_B	λ_B/μ_B
T_A	最良売り気配数量が消滅するまでの時間
T_B	最良買い気配数量が消滅するまでの時間
T_U	最良買い気配板が消滅する前に最良売り気配の板が消滅する時間
T_D	最良売り気配板が消滅する前に最良買い気配の板が消滅する時間
T_M	最良買い気配板か最良売り気配のどちらかの板が消滅する時間

上下板の消滅時間の分布

上記の変数を用いて最良気配の板が消滅するまでの時間の分布の密度関数を表記する.

$$f_A(t) \equiv \begin{cases} \frac{r_A}{t} e^{-(\lambda_A + \mu_A)t} \rho_A^{\frac{-r_A}{2}} I_{r_A}(2t \sqrt{\lambda_A \mu_A}) & (t > 0) \\ 0 & (t \leq 0) \end{cases},$$

$$f_B(t) \equiv \begin{cases} \frac{r_B}{t} e^{-(\lambda_B + \mu_B)t} \rho_B^{\frac{-r_B}{2}} I_{r_B}(2t \sqrt{\lambda_B \mu_B}) & (t > 0) \\ 0 & (t \leq 0) \end{cases}.$$

^{*1} 板の厚みを減らすのは成行注文だけでなく、指値注文のキャンセルも重要な因子となる。モデルの仮定では注文もキャンセルもそれぞれ或るパラメータのPoisson到着をしてどの到着も独立であると仮定している。この下でなら、キャンセルを成行注文の中にも含めてもPoisson分布の再生性により成行注文がPoisson到着すると考えることは妥当である。

密度関数を用いて、板の消滅が有限時間内に発生する確率 $P(\{T < \infty\})$ と消滅までの平均時間を次のように表すことができる。これらは指値と成行の注文の到着率の比 (λ/μ) によって場合分けされる。

$$P_A \equiv P(\{T_A < \infty\}) = \int_0^\infty f_A(t)dt = \begin{cases} 1. & \rho_A \leq 1 \\ \rho_A^{-r_A}. & \rho_A > 1 \end{cases}$$

$$P_B \equiv P(\{T_B < \infty\}) = \int_0^\infty f_B(t)dt = \begin{cases} 1. & \rho_B \leq 1 \\ \rho_B^{-r_B}. & \rho_B > 1 \end{cases}$$

$$E[T_A] = \begin{cases} \frac{r_A}{\mu_A - \lambda_A}. & \rho_A < 1 \\ \infty. & \rho_A \geq 1 \end{cases}$$

$$E[T_B] = \begin{cases} \frac{r_B}{\mu_B - \lambda_B}. & \rho_B < 1 \\ \infty. & \rho_B \geq 1 \end{cases}$$

板が移動する時間間隔の分布

最良買い気配板が消滅する前に最良売り気配の板が消滅する(板が上に移動する)時間 T_U の分布は

$$\begin{aligned} P(\{T_U \leq t\}) &= P(\{\text{最良売り気配板が時間 } t \text{ 内に消滅する}\}) \\ &\quad - P(\{\text{最良買い気配板が消滅した後に最良売り気配板が時間 } t \text{ 内に消滅する}\}) \\ &= P(\{T_A \leq t\}) - P(\{T_B \leq T_A \leq t\}) \\ &= \int_0^t f_A(\tau)d\tau - \int_0^t f_A(\tau) \left(\int_0^\tau f_B(s)ds \right) d\tau, \quad (t > 0) \end{aligned}$$

と表される。最右辺を微分して T_U の分布の密度関数 $f_U(t)$ を得る(被積分関数が連続であるから微分可能)。

$$f_U(t) \equiv \begin{cases} f_A(t) - f_A(t) \left(\int_0^t f_B(\tau)d\tau \right), & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

同様にして最良売り気配板が消滅する前に最良買い気配の板が消滅する(板が下に移動する)時間 T_D の分布の密度関数は

$$f_D(t) \equiv \begin{cases} f_B(t) - f_B(t) \left(\int_0^t f_A(\tau) d\tau \right), & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases}$$

と表される. 有限時間内に板が上に動く確率 P_U , 下に動く確率 P_D , 変動(上に動く事象と下に動く事象の和事象)が起こる確率 P_M は次のように表現される.

$$\begin{aligned} P_U &\equiv P(\{T_U < \infty\}) = \int_0^\infty f_U(t) dt \\ &= \int_0^\infty f_A(t) dt - \int_0^\infty f_A(t) \left(\int_0^t f_B(\tau) d\tau \right) dt \\ &= P_A - \int_0^\infty f_A(t) \left(\int_0^t f_B(\tau) d\tau \right) dt, \\ P_D &\equiv P(\{T_D < \infty\}) = \int_0^\infty f_D(t) dt \\ &= \int_0^\infty f_B(t) dt - \int_0^\infty f_B(t) \left(\int_0^t f_A(\tau) d\tau \right) dt \\ &= P_B - \int_0^\infty f_B(t) \left(\int_0^t f_A(\tau) d\tau \right) dt. \end{aligned}$$

ここで最終式の第二項について, 被積分関数が非負で可積分であるから Fubini の定理の適用で積分の順序交換が正当化される:

$$\int_0^\infty f_B(t) \left(\int_0^t f_A(\tau) d\tau \right) dt = \int_0^\infty f_A(t) \left(\int_t^\infty f_B(\tau) d\tau \right) dt$$

この変形式を元の式に代入することで、 P_M は次の表現になる。

$$\begin{aligned}
P_M &= P(\{T_M < \infty\}) \equiv P_U + P_D \\
&= P_A - \int_0^\infty f_A(t) \left(\int_0^t f_B(\tau) d\tau \right) dt + P_B - \int_0^\infty f_A(t) \left(\int_t^\infty f_B(\tau) d\tau \right) dt \\
&= P_A + P_B - \int_0^\infty f_A(t) \left(\int_0^\infty f_B(\tau) d\tau \right) dt \\
&= P_A + P_B - P_A P_B \\
&= \begin{cases} 1, & \rho_A \leq 1 \text{ or } \rho_B \leq 1, \\ \alpha(< 1), & \rho_A > 1 \text{ and } \rho_B > 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

変動が起こるまでの時間 T_M の平均値は次のように表せる。

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty t dP(\{T_M \leq t\}) &= \int_0^\infty t d(P(\{T_U \leq t\}) + P(\{T_D \leq t\})) \\
&= \int_0^\infty t f_U(t) dt + \int_0^\infty t f_D(t) dt.
\end{aligned}$$

状態推移行列

「板が上昇する」「板が下降する」を二種類の状態と見做して、直前に上昇し続けて上昇する確率 p_{UU} 、直前に上昇し次に下降する確率 p_{UD} 、直前に下降し続けて下降する確率 p_{DD} 、直前に下降し次に上昇する確率 p_{DU} の四つの転移確率を定義する。注文の時間間隔が独立に指数分布に従っていると仮定している下で、その無記憶性からこの状態推移はMarkov過程と考えることができる。転移行列 P は次のように表せる。

$$P \equiv \begin{pmatrix} p_{UU} & p_{UD} \\ p_{DU} & p_{DD} \end{pmatrix}.$$

(1)

$f_A(t)(f_B(t))$ は $r_A(r_B)$ に、 $f_U(t)$ と $f_D(t)$ は r_A と r_B の両方に依存する関数であったから、応用のために
 $f_A(t | r_A), f_B(t | r_B), f_U(t | r_A, r_B), f_D(t | r_A, r_B)$ と表記し直す。ここで、板が上昇した直後の上下板の初期状態をそれぞれ r_A^U, r_B^U ,

板が下降した直後の上下板の初期状態をそれぞれ r_A^D, r_B^D と表記すると、先の転移確率は次の式で表せる。

$$\begin{aligned} p_{UU} &= \int_0^\infty f_U(t | r_A^U, r_B^U) dt = \int_0^\infty f_A(t | r_A^U) dt - \int_0^\infty f_A(t | r_A^U) \left(\int_0^t f_B(\tau | r_B^U) d\tau \right) dt, \\ p_{UD} &= \int_0^\infty f_D(t | r_A^U, r_B^U) dt = \int_0^\infty f_B(t | r_B^U) dt - \int_0^\infty f_B(t | r_B^U) \left(\int_0^t f_A(\tau | r_A^U) d\tau \right) dt, \\ p_{DU} &= \int_0^\infty f_U(t | r_A^D, r_B^D) dt = \int_0^\infty f_A(t | r_A^D) dt - \int_0^\infty f_A(t | r_A^D) \left(\int_0^t f_B(\tau | r_B^D) d\tau \right) dt, \\ p_{DD} &= \int_0^\infty f_D(t | r_A^D, r_B^D) dt = \int_0^\infty f_B(t | r_B^D) dt - \int_0^\infty f_B(t | r_B^D) \left(\int_0^t f_A(\tau | r_A^D) d\tau \right) dt. \end{aligned}$$

先の転移行列を有つ Markov 過程の定常分布を計算しておく。考えている状態は「上昇する」と「下降する」の二種類であるから、上昇する確率を p_U 、下降する確率を p_D と表記しておく。この分布 $\pi \equiv (p_U, p_D)$ が定常となる場合を考える。定常分布と転移行列 P を用いて次の関係 (平衡方程式) が成り立つ。

$$\pi P = \pi.$$

この式を満たすような分布 π を求める。これは行列 P についての固有値問題を解くことにもなると示しておく。表記の便宜を図って

$$(x, y) \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix} = \lambda(x, y), \quad (0 \leq a, b, x, y \leq 1, x + y = 1), \quad (2)$$

を解く。固有方程式は

$$\begin{aligned} \lambda^2 - (a+b)\lambda + ab - (1-a)(1-b) &= \lambda^2 - (a+b)\lambda + a+b-1 \\ &= (\lambda-1)(\lambda-a-b+1) \\ &= 0, \end{aligned}$$

であるから、定常分布の計算は式(2)にて行列の固有値1の固有ベクトルを計算することと同じである。連立方程式を解けば結果は $(1-a)x = (1-b)y$ であると判り、 a, b を p_{UU}, p_{DD} で置き換えれば次の結果を得る。

$$p_U = \frac{1 - p_{DD}}{1 - p_{UU} + 1 - p_{DD}} = \frac{p_{DU}}{p_{UD} + p_{DU}},$$

$$p_D = \frac{1 - p_{UU}}{1 - p_{UU} + 1 - p_{DD}} = \frac{p_{UD}}{p_{UD} + p_{DU}}.$$

確率的初期状態

板の初期状態が或る分布に従っていると考える。板の初期状態がその分布に従う確率変数 R_A, R_B で与えられ両者の分布が独立である場合に、上下板それぞれについて先に消滅する時間の密度関数 f_U^R, f_D^R は先の $f_U(t | r_A, r_B), f_D(t | r_A, r_B)$ を用いて次のように表現できる。

$$f_U^R(t) \equiv \int_0^\infty \int_1^\infty f_U(t | r_A, r_B) dP(\{R_A = r_A\}) dP(\{R_B = r_B\}),$$

$$f_D^R(t) \equiv \int_0^\infty \int_1^\infty f_D(t | r_A, r_B) dP(\{R_A = r_A\}) dP(\{R_B = r_B\}).$$

これもFubiniの定理による。

$$\begin{aligned} P(\{T_U \leq t\}) &= \int_0^\infty \int_1^\infty \left(\int_0^t f_U(\tau | r_A, r_B) d\tau \right) dP(\{R_A = r_A\}) dP(\{R_B = r_B\}) \\ &= \int_0^t \left(\int_0^\infty \int_1^\infty f_U(\tau | r_A, r_B) dP(\{R_A = r_A\}) dP(\{R_B = r_B\}) \right) d\tau, \\ \Rightarrow f_U^R(t) &= \int_0^\infty \int_1^\infty f_U(t | r_A, r_B) dP(\{R_A = r_A\}) dP(\{R_B = r_B\}). \blacksquare \end{aligned}$$

0.2 抽出データ

実際のデータから取り出した、指値/成行注文の頻度、一回の注文枚数、最良気配値の上昇/下降回数を表にしたものを掲示する。注文の頻度と板の上下変動回数については、各日の前場後場毎に数えられたものから平均、標準偏差などを計算している。

表2 指値/成行注文の頻度、一回の注文枚数、最良気配値の上昇/下降回数 (2007年)

	Mean	S.D.	Median	Kurtosis	Skewness	Minimum	Maximum
Arrival Frequency of Market Buy Orders	1874.5512295082	907.457993347613	1820.5	5.11767451501856	0.675337509991397	71	6360
Arrival Frequency of Market sell Orders	1885.09221311475	953.983272328056	1821	6.79006081829123	0.984428247560377	71	8120
Arrival Frequency of canceled Buy Orders	1665.64344262295	548.418678697007	1591.5	4.34069326524823	1.0223638226889	664	3738
Arrival Frequency of canceled sell Orders	1619.41803278689	547.114909569955	1536.5	4.37945019113223	1.02533665819909	579	3781
Arrival Frequency of limit Buy Orders	3653.97336065574	1181.78855390768	3652	4.05675797950432	0.270126754158371	732	8157
Arrival Frequency of limit sell Orders	3563.19057377049	1145.30183541394	3508	4.68143888199017	0.408568143055593	620	9012
Average Pieces of One Market Buy Order	12.5206451488378	2.77323438747951	12.4681411546065	3.09574522739222	-0.251787164006476	3.56578947368421	19.3492990654206
Average Pieces of One Market sell Order	12.4193657939448	2.9010116850716	12.4853634546859	3.03603809159898	-0.467023405948823	3.66887417218543	18.7199881726789
Average Pieces of One canceled Buy Order	9.67245218614441	2.00315704051638	9.37503694441844	5.71568254649852	1.32236478548353	5.98338870431894	19.3528114663727
Average Pieces of One canceled sell Order	9.81634156546921	2.22155817463813	9.34956284664529	5.43345907724932	1.3486729418014	4.8828903654485	19.7518610421836
Average Pieces of One limit Buy Order	9.14417038292241	1.68568811350152	8.89759617833488	4.28773924054411	0.915406332348662	5.73312765136907	15.9323899371069
Average Pieces of One limit sell Order	9.40128432350844	1.90029143582777	9.10787585849688	3.73751115997436	0.927845553013401	5.66795366795367	16.4413665743306
Upmovement Times Of the Best Bid	120.290983606557	75.1582407362664	101	14.0082219500023	2.43447280583046	17	719
Downmovement Times Of the Best Bid	92.8709016393443	55.685698856088	82	20.9273670184347	2.97402869075286	14	610
Upmovement Times Of the Best Ask	93.0409836065574	54.7743397619828	80	16.8868891795264	2.67172775656591	12	558
Downmovement Times Of the Best Ask	119.463114754098	75.5175617154362	99.5	18.1165736972318	2.71213913991385	14	794

上表に示したデータの抽出方法を記述する。全てデータはザラバ開始後～場の引けまでの間から抽出する。これは寄付の約定が確認された直後から引けの約定が確認される直前までのことである。まず成行注文について、注文回数は約定の回数に等しい。約上の直後で板が上下しない場合は約定枚数を注文枚数と数える。しかし約上の前後のデータを見てみると板にかかる累積枚数の変化量と約定枚数が一致しない場合がある。この場合はその増減に応じて指値注文または注文のキャンセルがあったと判断して、その回数と枚数を記録する。約定を挟んで板が上下する場合、成行注文枚数と約定枚数が一致するとは限らない。板にかかる枚数より多い成行注文が来れば、余りの注文枚数は上下した後の板の厚み(初期デプス)となるのである。余りの成行注文

枚数があるかないかは板の移動直後の上下最良気配値の差額で判断する。通常上下板は1ティック10円離れているから、移動直後も1ティックの差であるなら成行注文枚数は約定枚数と余り枚数の和と見做す。約定直後で板が2ティック以上離れている場合、成行注文の余りは無かったとして約定枚数を成行注文枚数とする。約定を挟まずに板が上下する場合もある。例えば板が2ティック以上離れている下で買い板が上昇したらそれは指値注文として記録し、その他にも直前に約定がなくて買い板が下降すれば注文のキャンセルとして記録する。売りの場合は逆を考えれば良い。約定も板の上下も無い下での板の累積枚数の変化は、その増減に応じて指値注文または注文のキャンセルとして記録する。上下板の初期デプス(後述)に関しては、上下板が同時に動いたときのみを記録する。表0.1に掲載したモデル式内のパラメータについても、実際のデータから抽出したものを掲示しておく。

初期デプス

板の移動直後の上下板の厚み、すなわち待ち行列の初期状態を表すパラメータについて1枚単位(1枚=1000株)で表示する。データは最良気配値が1ティック離れている箇所のみを抽出した。これはモデルが上下の最良気配値の差額を常に10円と仮定しているためである。

表3 最良気配の移動直後の最良気配の厚み(枚) (2007年)

Initial Depth	Best Ask (After Up)	Best Bid (After Up)	Best Ask (After Down)	Best Bid (After Down)
Mean	420.484997	40.29340868	40.31588898	421.7710303
S.D.	218.9372442	63.17343688	63.39659637	211.8249755

板の移動直後の厚みの頻度図を見ると、これは或る確率分布に従っていると推測される。Gamma分布に従っていると仮定した下で、最尤法により推定したパラメータで計算される密度関数と実際の観測された分布を下図に表す。

$$\text{密度関数} : f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, \quad (x > 0).$$

表4 Gamma分布推定パラメータ

	板上昇直後		板下降直後	
	α	β	α	β
Best bid	0.680112458	59.24521486	3.849663935	109.5604804
Best ask	3.805877022	110.4830751	0.673427365	59.86672222

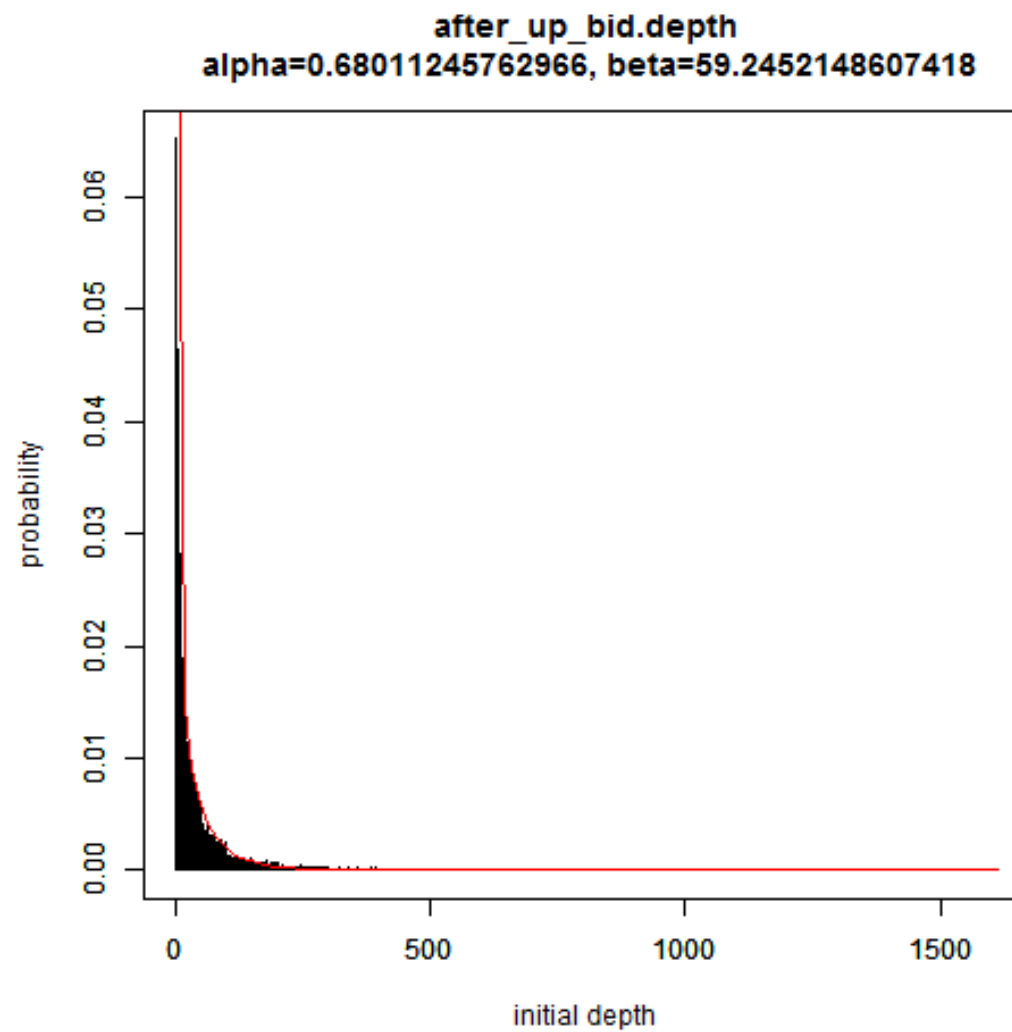


図1 板上昇直後初期デプス (Best bid)

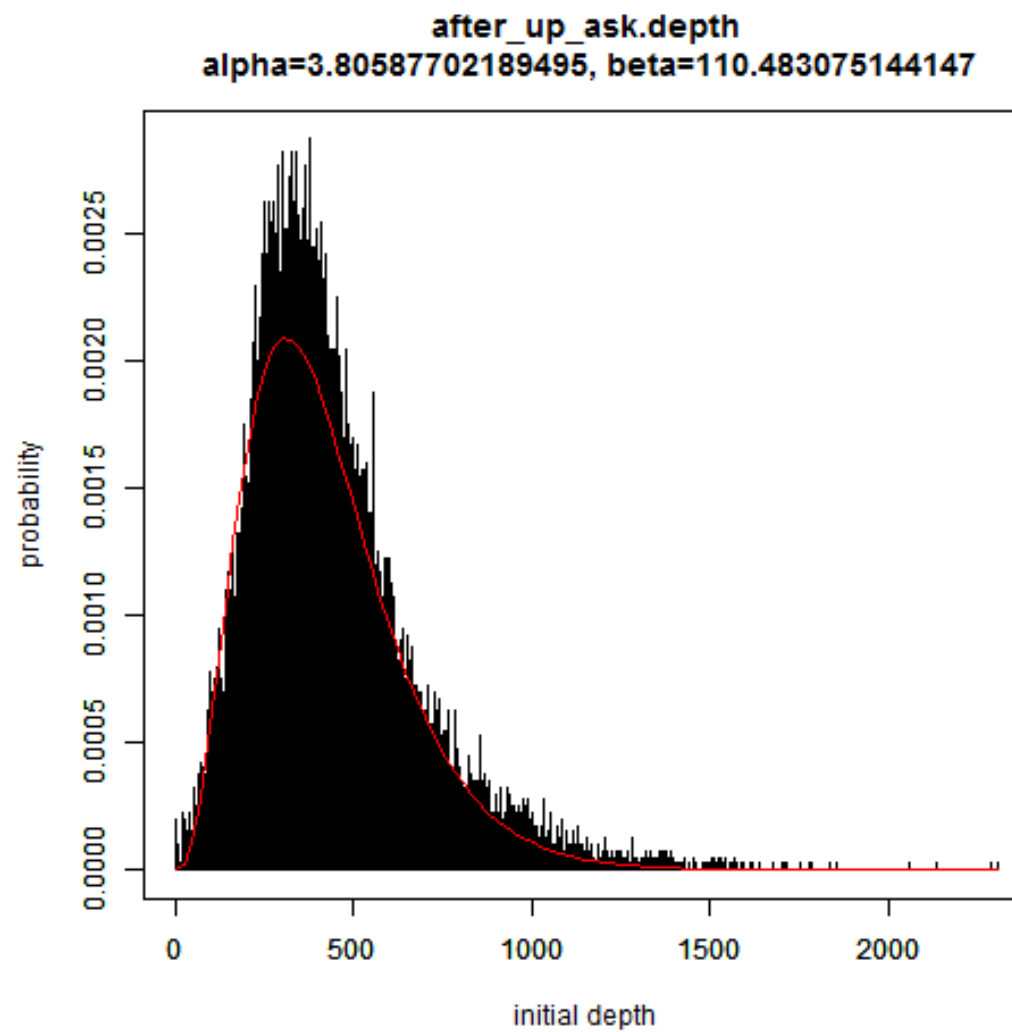


図2 板上昇直後初期デプス (Best ask)

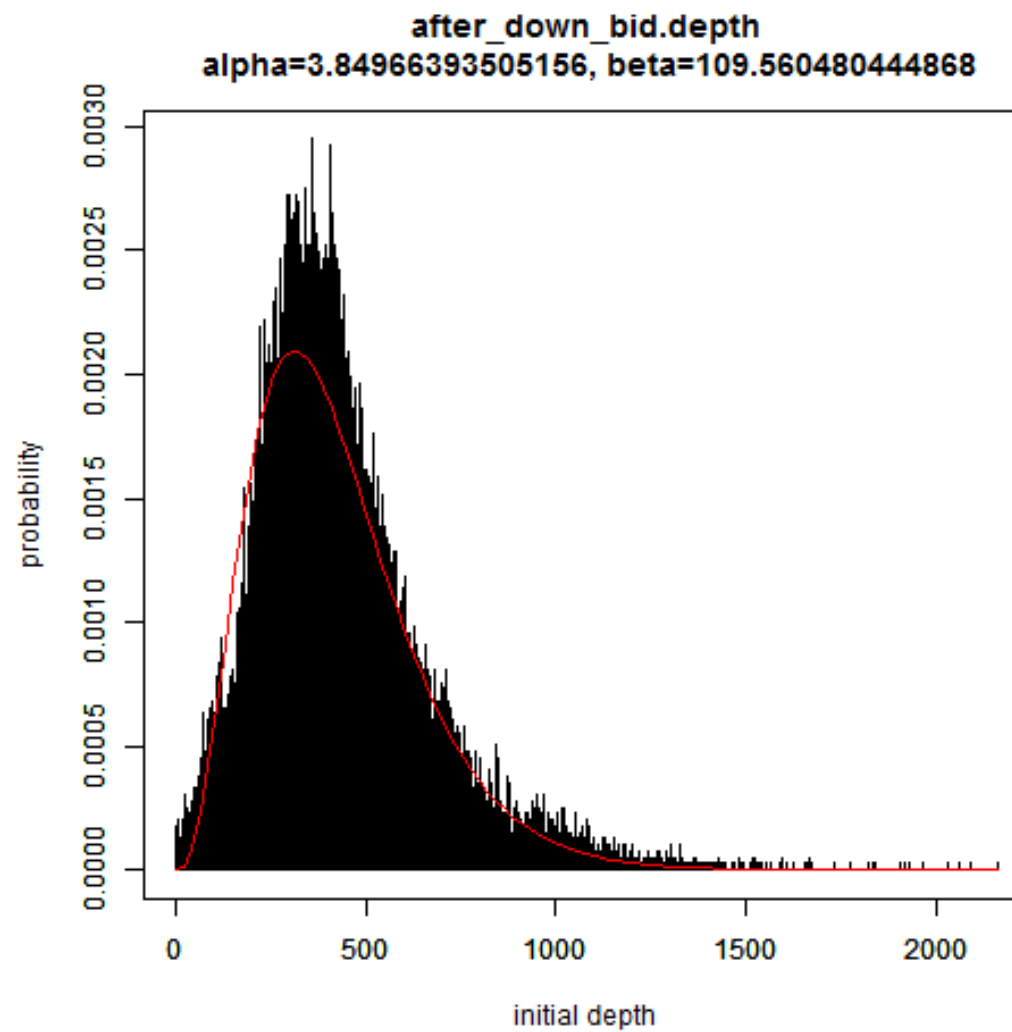


図3 板下降直後初期デプス (Best bid)

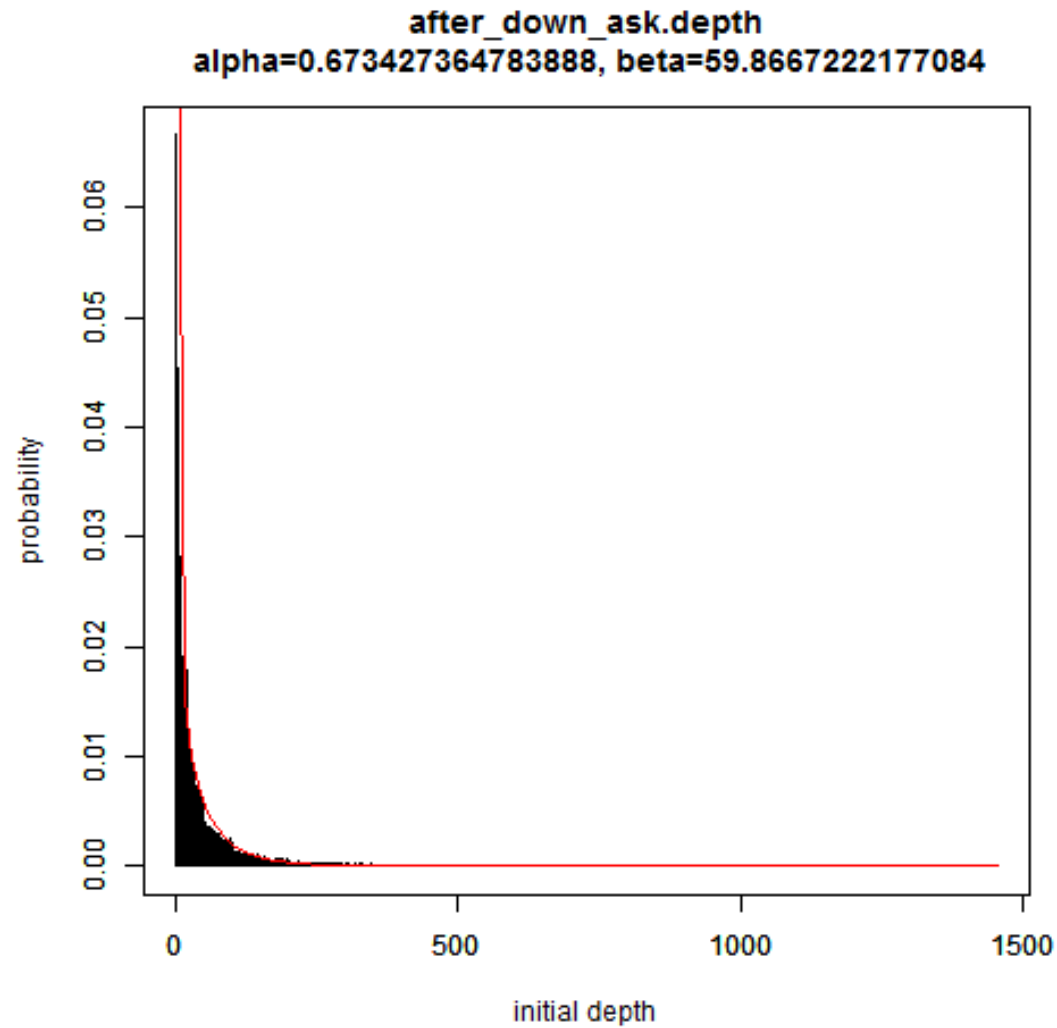


図4 板下降直後初期デプス (Best ask)

到着率

$M/M/1$ の待ち行列理論では一度に複数単位到着する確率は0としている。実際の注文は一度に複数単位到着することが多いから、理論に合わせるために複数単位の到着を一単位の到着の複数回ということに読み直す必要がある。到着数の単位について、

本研究においては1枚一単位、10枚一単位、30枚一単位の三つの場合を考える。到着率とは一秒あたりの到着数のことである。以下に示す到着率は、(1)単純に到着数を測ったもの、(2)毎度1枚ずつ到着すると見做して到着率を測ったもの(N 枚の到着は1枚の到着の N 回分)、(3)10枚累積した時点を一回の到着として到着数を測ったもの、(4)30枚累積した時点を一回の到着として到着数を測ったもの、の四種類を計算した。[3]に倣い、注文の到着率の最尤推定量を次の式で計算する。

$$\frac{\text{観測時間内の到着数}}{\text{観測時間}}.$$

観測時間はザラバ全体(昼休みがある場合は午前午後で分ける)とし、時間単位は秒である。データの到着時間は秒単位まで切り捨てられているが、実際の到着時間は実数秒であると考える。

表5 指値/成行注文の到着率 単純に到着数を測ったもの (2007年)

Arrival Rate Per Second	λ_B	λ_A	μ_A	μ_B
Mean	0.440430079307341	0.429770731607785	0.42123513769926	0.42834751029013
S.D.	0.139350721669983	0.134820939951023	0.151662215771227	0.160366521869234

表6 指値/成行注文の到着率 一回の到着は1枚として到着数を測ったもの (2007年)

Arrival Rate Per Second	λ_B	λ_A	μ_A	μ_B
Mean	4.04720476425838	4.03655030768043	4.86637047632663	4.89119891472509
S.D.	1.63421331941915	1.62678973960703	2.06954754281546	2.18770444650317

表7 指値/成行注文の到着率 10枚累積した時点を一回の到着として到着数を測ったもの (2007年)

Arrival Rate Per Second	λ_B	λ_A	μ_A	μ_B
Mean	0.404665416528414	0.403597612483072	0.486585672358297	0.489064243868232
S.D.	0.163421290234038	0.162676317541532	0.206955155383898	0.218769843276613

表8 指値/成行注文の到着率 30枚累積した時点を一回の到着として到着数を測ったもの (2007年)

Arrival Rate Per Second	λ_B	λ_A	μ_A	μ_B
Mean	0.134847084292512	0.134493211764554	0.162157327962169	0.162979523115285
S.D.	0.0544755143646112	0.0542254514351687	0.0689828043027468	0.07292086367212

推移確率行列

式(1)で定義される転移確率の理論値を計算する。到着率のパラメータは先述の三種類のものを使った。行列要素の括弧の中の数値は標準偏差を表す。

実際に観測された推移確率

上下板が同時に動いた箇所のみ勘定した結果を示しておく。

$$\begin{pmatrix} p_{UU} & p_{UD} \\ p_{DU} & p_{DD} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.323 & 0.677 \\ (0.298) & (0.298) \\ 0.682 & 0.318 \\ (0.284) & (0.284) \end{pmatrix}.$$

10枚累積した時点を一回の到着として測った到着数による到着率(10枚を一単位として計算)

$$\begin{pmatrix} p_{UU} & p_{UD} \\ p_{DU} & p_{DD} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0567 & 0.941 \\ (0.0936) & (0.0929) \\ 0.946 & 0.0535 \\ (0.0802) & (0.0826) \end{pmatrix}.$$

30枚累積した時点を一回の到着として測った到着数による到着率(30枚を一単位として計算)

$$\begin{pmatrix} p_{UU} & p_{UD} \\ p_{DU} & p_{DD} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.06799 & 0.922 \\ (0.0655) & (0.0793) \\ 0.922 & 0.0655 \\ (0.0876) & (0.0647) \end{pmatrix}.$$

転移確率から計算されるモデル上の分散と Realized volatility との比較

先に計算した転移確率 $p_{UU}, p_{UD}, p_{DU}, p_{DD}$ に期待される変動回数の情報を与えれば、一つのセッションでの板の変動の仕方を確率で表現することができるようになる。確率で変動を表現できればモデル上の価格の分散を計算することもできる。この寸法で

板の変動から計算される volatility を算出し、実際に観測される Realized volatility と比較することでモデルと現実の整合度の一つの評価指標を得る。遠藤[1]の結果から、板の変動が一次の Markov 過程をなすと考えて良いことが示唆されている。離散時間 Markov 過程の式で表現すれば、時点 n での状態を表す確率変数 X_n からなる確率過程 $\{X_n\}$ の転移確率は

$$P(\{X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n\}) = P(\{X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n\})$$

で表現できるから、 m 時点先までの状態の列 $\{i_n, i_{n+1}, i_{n+2}, \dots, i_{n+m}\}$ に対する確率を

$$\begin{aligned} &P(\{X_{n+m} = i_{n+m}, X_{n+m-1} = i_{n+m-1}, X_{n+m-2} = i_{n+m-2}, \dots, X_n = i_n\}) \\ &= P(\{X_n = i_n\}) P(\{X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n\}) P(\{X_{n+2} = i_{n+2} \mid X_{n+1} = i_{n+1}\}) \cdots P(\{X_{n+m} = i_{n+m} \mid X_{n+m-1} = i_{n+m-1}\}) \end{aligned}$$

と計算することができる。本研究で考える板の変動の状態は $Up, Down$ の二種類である。また転移確率の計算に用いたパラメータは一つのセッション(一日の前場と後場)毎に計算しているので、一つのセッションにおける Markov 過程は時間に関して一様と見做す。この下でならば、例えば板が $\{Up \rightarrow Down \rightarrow Down \rightarrow Up \rightarrow Down\}$ の順で5回移動すれば、その確率は初期分布 p_U と転移確率 $p_{UU}, p_{UD}, p_{DU}, p_{DD}$ を用いて

$$P(\{Up \rightarrow Down \rightarrow Down \rightarrow Up \rightarrow Down\}) = p_U \times p_{UD} \times p_{DD} \times p_{DU} \times p_{UD}$$

と表現される。一般に $T(\geq 1)$ ステップ後に価格が N ティックだけ変動する確率を計算したい。 T は一つのセッションでの板の変動回数を表すと考えている。 T ステップで動く幅は高々 T ティックであるから N は $[-T, T]$ の範囲に収まる。 T ステップの中上昇回数と下降回数の差が N となれば良いから、板の上昇回数は $(N + T)/2$ 、下降回数は $(T - N)/2$ と計算される。簡便にするため u 回上昇し d 回下降したとする。 $d \times u$ の格子を用意して考えれば、考えるべきは左下隅のノードから右上隅のノードまでの最短経路の選択方法である。格子の作り方から、格子を上方向に進行することは板が上昇する状態に対応し、格子を右方向に進行することは板が下降する状態に対応する。格子の各ノードにて、経路を右方向または左方向に曲がるかまたは直進するかの四種類の選択が転移確率に対応する。

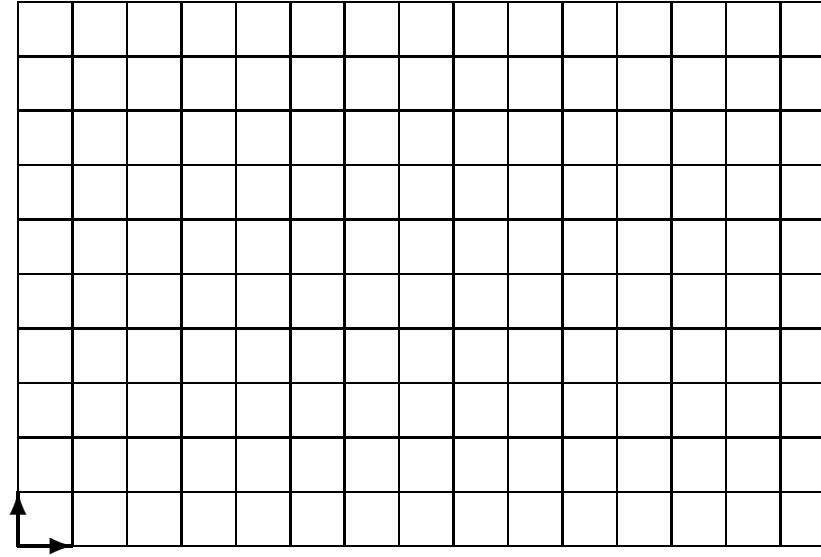


表9 格子のノードに於ける進行方向の選択と転移確率との対応表

進行方向	転移確率
上方向に直進($\uparrow\uparrow$)	p_{UU}
右方向に右折($\uparrow\rightarrow$)	p_{UD}
上方向に左折($\rightarrow\uparrow$)	p_{DU}
右方向に直進($\rightarrow\rightarrow$)	p_{DD}

注意すべきは、格子上を動く時、初めの動きの方向が上か右か定まった下では、最終的な位置と到達までの曲がる回数が等しい経路は、そこを通る確率が等しいということである。解説しておく。 u または d が 0 である場合は板が T 回上昇するまたは T 回下降するだけであるから、確率はそれぞれ

$$p_U \times p_{UU}^{T-1}, \quad p_D \times p_{DD}^{T-1},$$

となる。以降の議論は $u \geq 1$ かつ $d \geq 1$ の場合で考える。初めの方向選択での場合分けが必要なのは初めの動きの向きが Markov 連鎖の転移確率ではなく初期分布で与えられるためである。格子上の進行方向の上、右を U, D に対応させて表現する

と、 u 回上がって d 回下がる経路は u 個の U と d 個の D の順列で表現できる。

例: $UUDDDDUD \cdots U$.

始めの状態で場合を分ける下では順列の総数でなくその半分の数を経路数とする。 $u \times d$ の格子上を最短経路で進む時、はじめに上方向に動いた下で1回曲がる経路数は、 $\{UUU \cdots U\}$ のグループも $\{DDD \cdots D\}$ のグループも分割しないで作る順列を考えて

$$\binom{u-1}{0} \times \binom{d-1}{0}$$

と表現できる。括弧は二項係数を表す。この確率は

$$p_U \times p_{UD}^1 p_{DU}^0 p_{UU}^{u-1-0} p_{DD}^{d-1-0}$$

である。はじめに上方向に動いた下で2回曲がる経路数は、 $\{UUU \cdots U\}$ のグループを二分割、 $\{DDD \cdots D\}$ のグループを分割しないで作る順列を考えて

$$\binom{u-1}{1} \times \binom{d-1}{0}$$

と表現できる。 $u-1$ 通りの経路ができるが、どの経路もそこを通る確率は

$$p_U \times p_{UD}^1 p_{DU}^1 p_{UU}^{u-1-1} p_{DD}^{d-1-0}$$

である。 $\{UUU \cdots U\}\{DDD \cdots D\}$ を並べて作る列には $u+d-1$ 個の U と D の結合関係がある。 $\{UUU \cdots U\}$ のグループも $\{DDD \cdots D\}$ のグループも分割しなければ、結合関係" UU "が $u-1$ 個、結合関係" DD "が $d-1$ 個、結合関係" UD "が1個ある。 $\{UUU \cdots U\}$ のグループを二分割、 $\{DDD \cdots D\}$ のグループは分割しない場合、 $UUU \cdots U$ の間に $DDD \cdots D$ の塊が食い込むから、結合関係" UU "は1個減り $u-2$ 個、結合関係" DD "は $d-1$ 個、結合関係" UD "が1個、結合関係" DU "が1個となる。結合関係と転移確率に対応し、それぞれの結合関係の個数は $u-1$ 通りの経路で等しいから、どの経路を通る確率も等しくなるのである。

はじめに上方向に動いた下で3回曲がる経路数は、 $\{UUU\cdots U\}$ のグループも $\{DDD\cdots D\}$ のグループも二分割して作る順列を考えて

$$\binom{u-1}{1} \times \binom{d-1}{1}$$

と表現できる．今度は結合関係“DD”の数が一つ減り結合関係“UD”の数が一つ増える．そして先と同じ理由でどの経路でも通る確率は等しく，それは

$$p_U \times p_{UD}^2 p_{DU}^1 p_{UU}^{u-1-1} p_{DD}^{d-1-1}$$

である．はじめに上方向に動いた下で4回曲がる経路数は、 $\{UUU\cdots U\}$ のグループを三分割， $\{DDD\cdots D\}$ のグループを二分割して作る順列を考えて

$$\binom{u-1}{2} \times \binom{d-1}{1}$$

と表現できる．今度は結合関係“UU”の数が一つ減り結合関係“DU”の数が一つ増える．そして先と同じ理由でどの経路でも通る確率は等しく，それは

$$p_U \times p_{UD}^2 p_{DU}^2 p_{UU}^{u-1-2} p_{DD}^{d-1-1}$$

である．帰納的に考えれば，一般に $2k+1$ ($k=0,1,2,\cdots$)回曲がる経路を通る確率は

$$p_U \times \binom{u-1}{k} \times \binom{d-1}{k} \times p_{UD}^{k+1} p_{DU}^k p_{UU}^{u-1-k} p_{DD}^{d-1-k}$$

で与えられ， $2k$ ($k=1,2,\cdots$)回曲がる経路を通る確率は

$$p_U \times \binom{u-1}{k} \times \binom{d-1}{k-1} \times p_{UD}^k p_{DU}^k p_{UU}^{u-1-k} p_{DD}^{d-1-(k-1)} = p_U \times \binom{u-1}{k} \times \binom{d-1}{k-1} \times p_{UD}^k p_{DU}^k p_{UU}^{u-1-k} p_{DD}^{d-k}$$

で与えられる。始めに格子状を右に進行する下での確率について、上の議論で U と D を入れ替えれば良い。つまり、始めに格子状を右に進行する下で $2k+1$ ($k=0,1,2,\dots$) 回曲がる経路を通る確率は

$$p_D \times \binom{u-1}{k} \times \binom{d-1}{k} \times p_{UD}^k p_{DU}^{k+1} p_{UU}^{u-1-k} p_{DD}^{d-1-k}$$

で与えられ、 $2k$ ($k=1,2,\dots$) 回曲がる経路を通る確率は

$$p_D \times \binom{u-1}{k-1} \times \binom{d-1}{k} \times p_{UD}^k p_{DU}^k p_{UU}^{u-k} p_{DD}^{d-1-k}$$

で与えられる。格子状を何回まで曲がることのできるかの問題を考えねばならない。場合分けした表を示す。

場合	曲がることのできる回数の最大値
初期状態が上昇で上昇下降回数が $u > d$	$2d$
初期状態が下降で上昇下降回数が $u > d$	$2d-1$
初期状態が上昇で上昇下降回数が $u < d$	$2u-1$
初期状態が下降で上昇下降回数が $u < d$	$2u$
初期状態が上昇で上昇下降回数が $u = d$	$2u-1$
初期状態が下降で上昇下降回数が $u = d$	$2u-1$

以上の準備の下で、 $u+d$ ステップ後に $u-d$ だけ今の位置からずれる確率を計算することができる。初めの表現に直せば、 T ステップの後に N だけ今の位置からずれる確率を表現できる。

$u > d \geq 1$ の場合

$$\begin{aligned}
& p_U \sum_{k=0}^{d-1} \binom{u-1}{k} \binom{d-1}{k} p_{UD}^{k+1} p_{DU}^k p_{UU}^{u-1-k} p_{DD}^{d-1-k} + p_U \sum_{k=1}^d \binom{u-1}{k} \binom{d-1}{k-1} p_{UD}^k p_{DU}^k p_{UU}^{u-1-k} p_{DD}^{d-k} \\
& + p_D \sum_{k=0}^{d-1} \binom{u-1}{k} \binom{d-1}{k} p_{UD}^k p_{DU}^{k+1} p_{UU}^{u-1-k} p_{DD}^{d-1-k} + p_D \sum_{k=1}^{d-1} \binom{u-1}{k-1} \binom{d-1}{k} p_{UD}^k p_{DU}^k p_{UU}^{u-k} p_{DD}^{d-1-k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= p_U \sum_{k=0}^{d-1} \binom{u-1}{k} \binom{d-1}{k} p_{UD}^{k+1} p_{DU}^k p_{UU}^{u-1-k} p_{DD}^{d-1-k} + p_U \sum_{k=0}^{d-1} \binom{u-1}{k+1} \binom{d-1}{k} p_{UD}^{k+1} p_{DU}^{k+1} p_{UU}^{u-1-k-1} p_{DD}^{d-k-1} \\
&\quad + p_D \sum_{k=0}^{d-1} \binom{u-1}{k} \binom{d-1}{k} p_{UD}^k p_{DU}^{k+1} p_{UU}^{u-1-k} p_{DD}^{d-1-k} + p_D \sum_{k=0}^{d-2} \binom{u-1}{k} \binom{d-1}{k+1} p_{UD}^{k+1} p_{DU}^{k+1} p_{UU}^{u-k-1} p_{DD}^{d-1-k-1} \\
&= p_D \binom{u-1}{d-1} p_{UD}^{d-1} p_{DU}^d p_{UU}^{u-d} \\
&\quad + p_U \sum_{k=0}^{d-1} \binom{d-1}{k} p_{UD}^{k+1} p_{DU}^k p_{UU}^{u-2-k} p_{DD}^{d-1-k} \left(\binom{u-1}{k} p_{UU} + \binom{u-1}{k+1} p_{DU} \right) \\
&\quad + p_D \sum_{k=0}^{d-2} \binom{u-1}{k} p_{UD}^k p_{DU}^{k+1} p_{UU}^{u-1-k} p_{DD}^{d-2-k} \left(\binom{d-1}{k} p_{DD} + \binom{d-1}{k+1} p_{UD} \right).
\end{aligned}$$

ただし $d = 1$ の場合は最終段第三項を0としておく.

$1 \leq u < d$ の場合

$$\begin{aligned}
&p_U \sum_{k=0}^{u-1} \binom{u-1}{k} \binom{d-1}{k} p_{UD}^{k+1} p_{DU}^k p_{UU}^{u-1-k} p_{DD}^{d-1-k} + p_U \sum_{k=1}^{u-1} \binom{u-1}{k} \binom{d-1}{k-1} p_{UD}^k p_{DU}^k p_{UU}^{u-1-k} p_{DD}^{d-k} \\
&\quad + p_D \sum_{k=0}^{u-1} \binom{u-1}{k} \binom{d-1}{k} p_{UD}^k p_{DU}^{k+1} p_{UU}^{u-1-k} p_{DD}^{d-1-k} + p_D \sum_{k=1}^u \binom{u-1}{k-1} \binom{d-1}{k} p_{UD}^k p_{DU}^k p_{UU}^{u-k} p_{DD}^{d-1-k} \\
&= p_U \sum_{k=0}^{u-1} \binom{u-1}{k} \binom{d-1}{k} p_{UD}^{k+1} p_{DU}^k p_{UU}^{u-1-k} p_{DD}^{d-1-k} + p_U \sum_{k=0}^{u-2} \binom{u-1}{k+1} \binom{d-1}{k} p_{UD}^{k+1} p_{DU}^{k+1} p_{UU}^{u-1-k-1} p_{DD}^{d-k-1} \\
&\quad + p_D \sum_{k=0}^{u-1} \binom{u-1}{k} \binom{d-1}{k} p_{UD}^k p_{DU}^{k+1} p_{UU}^{u-1-k} p_{DD}^{d-1-k} + p_D \sum_{k=0}^{u-1} \binom{u-1}{k} \binom{d-1}{k+1} p_{UD}^{k+1} p_{DU}^{k+1} p_{UU}^{u-k-1} p_{DD}^{d-1-k-1} \\
&= p_U \binom{d-1}{u-1} p_{UD}^u p_{DU}^{u-1} p_{DD}^{d-u}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + p_U \sum_{k=0}^{u-2} \binom{d-1}{k} p_{UD}^{k+1} p_{DU}^k p_{UU}^{u-2-k} p_{DD}^{d-1-k} \left(\binom{u-1}{k} p_{UU} + \binom{u-1}{k+1} p_{DU} \right) \\
& + p_D \sum_{k=0}^{u-1} \binom{u-1}{k} p_{UD}^k p_{DU}^{k+1} p_{UU}^{u-1-k} p_{DD}^{d-2-k} \left(\binom{d-1}{k} p_{DD} + \binom{d-1}{k+1} p_{UD} \right).
\end{aligned}$$

ただし $u = 1$ の場合は最終段第二項を0としておく.

$u = d \geq 1$ の場合

$$\begin{aligned}
& p_U \sum_{k=0}^{u-1} \binom{u-1}{k} \binom{d-1}{k} p_{UD}^{k+1} p_{DU}^k p_{UU}^{u-1-k} p_{DD}^{d-1-k} + p_U \sum_{k=1}^{u-1} \binom{u-1}{k} \binom{d-1}{k-1} p_{UD}^k p_{DU}^k p_{UU}^{u-1-k} p_{DD}^{d-k} \\
& + p_D \sum_{k=0}^{u-1} \binom{u-1}{k} \binom{d-1}{k} p_{UD}^k p_{DU}^{k+1} p_{UU}^{u-1-k} p_{DD}^{d-1-k} + p_D \sum_{k=1}^{u-1} \binom{u-1}{k-1} \binom{d-1}{k} p_{UD}^k p_{DU}^k p_{UU}^{u-k} p_{DD}^{d-1-k} \\
& = p_U \sum_{k=0}^{u-1} \binom{u-1}{k} \binom{d-1}{k} p_{UD}^{k+1} p_{DU}^k p_{UU}^{u-1-k} p_{DD}^{d-1-k} + p_U \sum_{k=0}^{u-2} \binom{u-1}{k+1} \binom{d-1}{k} p_{UD}^{k+1} p_{DU}^{k+1} p_{UU}^{u-1-k-1} p_{DD}^{d-k-1} \\
& + p_D \sum_{k=0}^{u-1} \binom{u-1}{k} \binom{d-1}{k} p_{UD}^k p_{DU}^{k+1} p_{UU}^{u-1-k} p_{DD}^{d-1-k} + p_D \sum_{k=0}^{u-2} \binom{u-1}{k} \binom{d-1}{k+1} p_{UD}^{k+1} p_{DU}^{k+1} p_{UU}^{u-k-1} p_{DD}^{d-1-k-1} \\
& = p_U p_{UD}^u p_{DU}^{u-1} + p_D p_{UD}^{u-1} p_{DU}^u \\
& + p_U \sum_{k=0}^{u-2} \binom{d-1}{k} p_{UD}^{k+1} p_{DU}^k p_{UU}^{u-2-k} p_{DD}^{d-1-k} \left(\binom{u-1}{k} p_{UU} + \binom{u-1}{k+1} p_{DU} \right) \\
& + p_D \sum_{k=0}^{u-2} \binom{u-1}{k} p_{UD}^k p_{DU}^{k+1} p_{UU}^{u-1-k} p_{DD}^{d-2-k} \left(\binom{d-1}{k} p_{DD} + \binom{d-1}{k+1} p_{UD} \right).
\end{aligned}$$

ただし $u = d = 1$ の場合は最終段第二項と第三項を0としておく.