2016年11月17日

ゼミ資料
待ち行列理論と板の動きへの応用

学籍番号：201311324

百合川尚学

1　待ち行列理論の導入

興味があること

- 観測を始めてt時間経過した後のシステム内の客数.
- システムにいる客数が初期状態から0になるまでの時間の分布.
- システムを最良気配に見立てると，最良気配にかかる注文の数量の変化の分布を考えることになる.

客

2　基礎理論まとめ

参考文献：

1. Suzuki, Queueing, Shokabo, 1972, pp. 20-65.
2. Endo, Zuo, Kishimoto, Modelling Intra-day Stock Price Changes In Terms of a Continuous Double Auction System, The Japan Society for Industrial and Applied Mathematics, Vol.16 , No.3, 2006, pp.305-316.
3. Li, Hui, Endo, Kishimoto, A Quantitative Model for Intraday Stock Price Changes Based on Order Flows, J Syst Sci Complex, 2014, 27: 208-224.

上記文献2と3に従い，板は最良気配のみを考え，板が動くことは最良気配値が動くこととする.

注文の種類：上記文献2と3に従い，次の4種類のみを考える.

- 指値買い/売り注文　(最良買い/売り気配の数量を増加する．)
- 成行買い/売り注文　(最良買い/売り気配の数量を減少する．)

3　基礎理論まとめ

或るシステムがあり，そのシステムには或る確率分布に従った時間間隔で客が訪れ，或る確率分布に従った時間だけサービスを受け退場する．到着の時間間隔およびサービス時間は客ごとに独立であると考える．

到着時間の分布について，
観測開始時刻をT_0，始めの客が到着する時刻をT_1，2番目の客が到着する時刻をT_2，$\cdots$，として系列$\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$を得る．各時間間隔$T_n - T_{n-1}, n = 0, 1, 2, \cdots$ はどの二つも互いに独立で同一な確率分布(到着分布)に従う．

到着分布の例：$k-$アーラン分布 $(k - Erlang\ distribution)$
　分布関数を$E_k(x)$，$-\infty < x < \infty$と表すと，

$$E_k(x) \equiv \begin{cases} 1 - \exp\left(-\lambda kx\right)\left(1 + \frac{\lambda kx}{1!} + \cdots + \frac{(\lambda kx)^{k-1}}{(k-1)!}\right) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \tag{1}$$

平均 $\frac{1}{\lambda}$，分散 $\frac{1}{k\lambda^2}$，特性関数 $\phi_{E_k}(t) = \left(1 - \frac{it}{\lambda k}\right)^{-k}$($i$:虚数単位)．(付録1参照)

4　付録1

到着分布の例：$k-$アーラン分布 $(k - Erlang\ distribution)$

$$E_k(x) \equiv \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda k x)\left(1 + \frac{\lambda k x}{1!} + \cdots + \frac{(\lambda k x)^{k-1}}{(k-1)!}\right) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \tag{2}$$

平均，分散，特性関数を計算する．密度関数

$$f(x) = E'_k(x) \tag{3}$$

$$= \begin{cases} \lambda k \exp(-\lambda k x)\left(1 + \frac{\lambda k x}{1!} + \cdots + \frac{(\lambda k x)^{k-1}}{(k-1)!}\right) - \lambda k \exp(-\lambda k x)\left(1 + \frac{\lambda k x}{1!} + \cdots + \frac{(\lambda k x)^{k-2}}{(k-2)!}\right) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \tag{4}$$

$$= \begin{cases} \lambda k \exp(-\lambda k x)\frac{(\lambda k x)^{k-1}}{(k-1)!} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}. \tag{5}$$

これは$Gamma$分布 $G_A(k, \frac{1}{\lambda k})$の密度関数である．従って一般の$Gamma$分布 $G_A(\alpha, \beta)$について平均，分散，特性関数を計算する方が楽である．
特性関数：確率変数 $X \sim G_A(\alpha, \beta)$ について，

$$\phi(t) = E[e^{itX}] \tag{6}$$

$$= \int_0^\infty e^{itx} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx \tag{7}$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-(\frac{1}{\beta} - it)x} dx \tag{8}$$

$$= \lim_{R \to \infty} \int_0^R \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-(\frac{1}{\beta} - it)x} dx \tag{9}$$

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}(\frac{\beta}{1-i\beta t})^\alpha \int_0^{\frac{R}{\beta}-itR} z^{\alpha-1}e^{-z}dz. \tag{10}$$

ここで

$$\int_0^{\frac{R}{\beta}-itR} z^{\alpha-1}e^{-z}dz$$

について複素積分を考える．積分路を$\Gamma \equiv \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$として，被積分関数が$C$の整関数であることから$\Gamma$および内部領域に孤立特異点は存在しない．積分の向きは左回りとして，$Cauchy$の積分定理が成り立つので

$$\oint_\Gamma z^{\alpha-1}e^{-z}dz = 0$$

が成り立つ．Γ_2上の積分は

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Gamma_2} z^{\alpha-1}e^{-z}dz\right| &= \left|\int_{-tR}^0 (\frac{R}{\beta}+iy)^{\alpha-1}e^{-\frac{R}{\beta}-iy}idy\right| \qquad (11)\\ &\le \int_{-tR}^0 (\frac{R}{\beta}+|y|)^{\alpha-1}e^{-\frac{R}{\beta}}dy.\end{aligned}$$

$$\tag{13}$$

任意の$\epsilon > 0$に対しtについて定まる或る$R_1(t)$が存在して，$R > R_1(t)$ならば

$$\int_{-tR}^0 (\frac{R}{\beta}+|y|)^{\alpha-1}e^{-\frac{R}{\beta}}dy < \epsilon$$

が成り立つ．Γ_3上の積分は

$$\int_{\frac{R}{\beta}}^0 z^{\alpha-1}e^{-z}dz = -\int_0^{\frac{R}{\beta}} z^{\alpha-1}e^{-z}dz.$$

これも広義積分は収束するので，任意の $\epsilon > 0$ に対し或る R_2 が存在して，$R > R_2$ ならば

$$\Gamma(\alpha) - \epsilon < \int_0^{\lambda R} z^{\alpha-1} e^{-z} dx \leq \Gamma(\alpha).$$

従って，$R > max\{R_1(t), R_2\}$ と置いて

$$\left|\int_{\Gamma_1} z^{\alpha-1} e^{-z} dz - \Gamma(\alpha)\right| = \left|-\int_{\Gamma_2} z^{\alpha-1} e^{-z} dz - \int_{\Gamma_3} z^{\alpha-1} e^{-z} dz - \Gamma(\alpha)\right| < 2\epsilon. \tag{14}$$

ϵ は任意であるから

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} (\frac{\beta}{1-i\beta t})^\alpha \int_0^{\frac{R}{\beta}-itR} z^{\alpha-1} e^{-z} dz = (\frac{1}{1-i\beta t})^\alpha$$

が成り立つ．$t \leq 0$ の場合も同じ結論となる．

5　付録2