

2016年11月25日

ゼミ資料

待ち行列理論と板の動きへの応用

学籍番号 : 201311324

百合川尚学

Index

1	Introduction of Queueing Theory	3
2	References	4
3	Poisson Arrival	5
3.1	Random Arrival	5
3.2	k – Erlang distribution	7
3.3	Poisson Arrival	8
4	Chapman – Kolmogorov Equation	11
4.1	Markov property	11
4.2	Chapman – Kolmogorov Equation	11
5	Foward Equations of Kolmogorov	14
6	Modified Bessel Function	17
6.1	Blank Time of Service	17
6.2	Modified Bessel Function	18
6.3	Finite Number of Customers in the System	19
6.4	Fluctuation of Number of Customers in the System	20
7	Transient Probability	24
7.1	Transient Probability	24
7.2	Transient Solution	28
8	Asymptotic Properties of Transient Probability	31
8.1	Asymptotic Distribution	31
8.2	Stationary Process	33

9	<i>Finch's Theorem</i>	40
10	<i>Operating Time of M/M/1</i>	41
11	<i>Alignment of Arrivals</i>	45
A-1	<i>Egorov's Theorem</i>	46
A-2	<i>Characteristic Function of k – Erlang Distribution</i>	47
A-3	<i>Glivenko's Theorem</i>	51
A-4	<i>Distribution of Sum of Exponentially distributed Variables</i>	52
A-5	<i>Landau Symbol</i>	53
A-6	<i>Properties of Modified Bessel Function of the First Kind</i>	54
A-7	<i>Abel's Continuity Theorem</i>	58
A-8	<i>Principle of Reflection</i>	60

1 Introduction of Queueing Theory

興味があること

- 観測を始めて t 時間経過した後のシステム内の客数.
- システムにいる客数が初期状態から0になるまでの時間の分布.
- システムを最良気配に見立てると、最良気配にかかる注文の数量の変化の分布を考えることになる.



2 References

参考文献：

1. Endo, Zuo, Kishimoto, Modelling Intra-day Stock Price Changes In Terms of a Continuous Double Auction System, The Japan Society for Industrial and Applied Mathematics, Vol.16 , No.3, 2006, pp.305-316.
2. Li, Hui, Endo, Kishimoto, A Quantitative Model for Intraday Stock Price Changes Based on Order Flows, J Syst Sci Complex, 2014, 27: 208-224.
3. Suzuki, Queueing, Shokabo, 1972, pp. 20-65.
4. Ahlfors, Complex Analysis, (Kasahara. Trans.), Gendai-Sugakusha, 2008, pp. 43-44.

上記文献1と2に従い，板は最良気配のみを考え，板が動くことは最良気配値が動くこととする．

注文の種類

上記文献1と2に従い，次の4種類のみを考える．

- 指値買い/売り注文 （最良買い/売り気配の数量を増加する．）
- 成行買い/売り注文 （最良買い/売り気配の数量を減少する．）

確率の表記

本稿では確率は全て文脈に応じた確率変数 X に対し $P(\{X \text{ の条件} \}) \equiv P(X^{-1}(E))$, ($E \subset \mathbb{R}$, $X^{-1}(E) \in \mathcal{D}(P)$) で表記される．確率空間から厳密に定義して議論を進めるには未だ知識が不足しているが，後学のためと思って，教科書に載っている内容や授業で聞いた事柄，その他で得た知識を思い出しながら， $M/M/1$ の理論体系を自分の頭で再構成して書き出しているのである．

3 Poisson Arrival

或るシステムがあり，そのシステムには或る確率分布に従った時間間隔で客が訪れ，或る確率分布に従った時間だけサービスを受け退場する．到着の時間間隔およびサービス時間は客ごとに独立であると考える．

到着時間の分布について

観測開始時刻を T_0 ，最初の客が到着する時刻を T_1 ，2番目の客が到着する時刻を T_2 ， \dots ，として系列 $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ を得る．各時間間隔 $T_n - T_{n-1}$ ， $n = 0, 1, 2, \dots$ はどの二つも互いに独立で同一な確率分布(到着分布)に従う．

3.1 Random Arrival

ランダムな到着

- 観測開始時点 T_0 を 0 とする．
- 時間間隔 $(0, T]$ の間に $A_{(0,T]}$ 人の到着があるとする．
- 客の到着は全て独立に発生し，各々の客の到着時点の選び方は $(0, T]$ 上の一様分布に従うとする．即ち一人の客が時間 $(\tau, \tau + t] \subset (0, T]$ に到着する確率は $\frac{t}{T}$ である．

この下で任意に考える時間間隔 $(\tau, \tau + t] \subset (0, T]$ での到着数の分布は以下の式で表現される．

$$P\left(\{A_{(\tau, \tau+t]} = n \mid A_{(0,T]} = x\}\right) = \frac{x!}{n!(x-n)!} \left(\frac{t}{T}\right)^n \left(\frac{T-t}{T}\right)^{x-n}.$$

この場合の到着率(単位時間当たりの到着客数)は $\frac{x}{T}$ ．時間を無限大に大きく考えたとき，客の到着が途絶えないという仮定を置く．つまり確率1で $\lim_{T \rightarrow \infty} A_{(0,T]} = \infty$ ．

このとき，到着率が $T \rightarrow \infty$ で或る一定値に収まると考える：確率1で $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A_{(0,T]}}{T} = \lambda < \infty$ ．つまり十分大きな時間経過を考えて， $x = \lambda T + o(T)$ も成立する．到着数の分布は次のように表される．

$$P\left(\{A_{(\tau, \tau+t]} = n\}\right) = \lim_{T \rightarrow \infty} P\left(\{A_{(\tau, \tau+t]} = n \mid A_{(0,T]} = x\}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{x!}{n!(x-n)!} \left(\frac{t}{T}\right)^n \left(\frac{T-t}{T}\right)^{x-n} \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{t^n}{n!} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^x \frac{x(x-1)(x-2) \cdots (x-n+1)}{(T-t)^n} \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{t^n}{n!} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\lambda T + o(T)} \frac{(\lambda T + o(T))(\lambda T + o(T) - 1)(\lambda T + o(T) - 2) \cdots (\lambda T + o(T) - n + 1)}{(T-t)^n} \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{t^n}{n!} \left(\left(1 - \frac{t}{T}\right)^{-\frac{T}{t}} \right)^{-\lambda t - o(1)t} \frac{(\lambda + o(1))(\lambda + o(1) - \frac{1}{T})(\lambda + o(1) - \frac{2}{T}) \cdots (\lambda + o(1) - \frac{n-1}{T})}{(1 - \frac{t}{T})^n} \\
&= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

客の到着がランダムで均質に発生する場合，或る時間の到着数の分布が *Poisson* 分布の形で表現される．逆に，客が *Poisson* 到着する場合に，一人の客が時間 $(\tau, \tau + t] \subset (0, T]$ に到着する確率が $\frac{t}{T}$ であることを示す．考えるものは，

- 事象： {時間 $(0, T]$ の間にただ一人の客の到着が観測された下で，その客が時間 $(\tau, \tau + t]$ の間に到着した}
- = 事象： {時間 $(0, T]$ の間にただ一人の客の到着が観測された下で，
時間 $(0, \tau]$, $(\tau + t, T]$ での客の到着は0，時間 $(\tau, \tau + t]$ の間に一人の到着が観測された}

となる．この確率を数式で表現すると以下ようになる：

Poisson 到着の仮定の下では重ならない時間帯の到着数は独立であることに注意して，

$$\begin{aligned}
P\left(\{A_{(\tau, \tau+t]} = 1 \mid A_{(0, T]} = 1\}\right) &= \frac{P\left(\{A_{(0, \tau]} = 0\}\right) P\left(\{A_{(\tau, \tau+t]} = 1\}\right) P\left(\{A_{(\tau+t, T]} = 0\}\right)}{P\left(\{A_{(0, T]} = 1\}\right)} \\
&= \frac{e^{-\lambda \tau} \lambda t e^{-\lambda t} e^{-\lambda(T-\tau-t)}}{\lambda T e^{-\lambda T}} \\
&= \frac{t}{T}.
\end{aligned}$$

この結果が，*Poisson* 到着がランダム到着であると云われる所以である．

3.2 k -Erlang distribution

到着分布の例： k -アーラン分布 (k -Erlang distribution)

分布関数を $E_k(x)$, $-\infty < x < \infty$ と表すと,

$$E_k(x) \equiv \begin{cases} 1 - e^{-\lambda k x} \left(1 + \frac{\lambda k x}{1!} + \cdots + \frac{(\lambda k x)^{k-1}}{(k-1)!} \right) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

平均 $\frac{1}{\lambda}$, 分散 $\frac{1}{k\lambda^2}$, 特性関数 $\phi_{E_k}(t) = \left(1 - \frac{it}{\lambda k}\right)^{-k}$ (i :虚数単位). ((A-2) 参照)

到着分布の平均の逆数を到着率と云う. これは単位時間当たりの平均到着客数を表す. (上の例だと到着率は λ .)

定理 1 k -アーラン分布の到着率を λ とする. ここで一定到着分布を

$$F(x) \equiv \begin{cases} 1 & x \geq \frac{1}{\lambda} \\ 0 & x < \frac{1}{\lambda} \end{cases}$$

とおく. k -アーラン分布は $k \rightarrow \infty$ で一定到着分布に分布収束する.

証明 1 k -アーラン分布の特性関数を $\phi_{E_k}(t)$, 一定到着の分布の特性関数を $\phi_F(t)$ と表す. $\phi_{E_k}(t)$ が $\phi_F(t)$ に各点収束すれば, Glivenko の定理により定理が示される.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \phi_{E_k}(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{it}{\lambda k}\right)^{-k} = e^{\frac{it}{\lambda}}.$$

一方, 一定到着の特性関数は, 一定到着分布が離散分布であるから,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) = e^{it \frac{1}{\lambda}} F\left(\frac{1}{\lambda}\right) = e^{\frac{it}{\lambda}}.$$

従って定理は証明された. (証明終)

$k = 1$ の場合, k -アーラン分布は指数分布 $E_X(\lambda)$ に一致する. 後述することであるが, 到着時間間隔が指数分布に従うとすると, 客は *Poisson* 到着する. この定理は, 時間間隔が k -アーラン分布に従う到着がランダム到着と一定到着の間にあることを示唆している.

3.3 *Poisson Arrival*

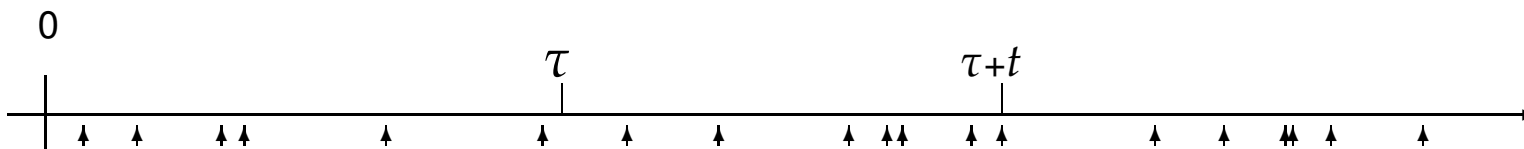
k -アーラン分布の $k = 1$ のとき, 客の到着時間間隔は到着率 λ の指数分布 $E_X(\lambda)$ に従う. 指数分布は無記憶性を有つ:

$$X(\omega) \sim E_X(\lambda),$$

$$P(\{X \leq \tau + t \mid X > \tau\}) = \frac{e^{\lambda\tau} - e^{\lambda(\tau+t)}}{e^{\lambda\tau}} = P(\{X \leq t\}). \quad (\tau, t > 0)$$

この性質から, 次の定理が成り立つ.

定理 2 到着時間間隔が独立に同一な指数分布に従うとき, 任意の時間区間 $(\tau, \tau + t]$ に到着する客数は同一な *Poisson* 過程に従い, 重ならない時間間隔では独立となる. また逆も成り立つ.



証明 2 (1) 任意の時間区間に到着する客数は同一な *Poisson* 過程に従う

観測開始時点をもとして, 時間 $(\tau, \tau + t]$ の間にシステムに到着する客数の総数を $A_{(\tau, \tau + t]}$ の分布を求める. $G_n(x)$ ($x \geq 0$) を, Gamma 分布 $G_A(n, \frac{1}{\lambda})$ の分布関数であるとする. ((A-4) 参照)

$$P(\{A_{(\tau, \tau + t]} = n\}) = P(\{A_{(\tau, \tau + t]} \geq n\}) - P(\{A_{(\tau, \tau + t]} \geq n + 1\})$$

$$\begin{aligned}
&= P(\{G_n(x) \leq t\}) - P(\{G_{n+1}(x) \leq t\}) \\
&= \int_0^t \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} dx - \int_0^t \frac{\lambda^{n+1}}{n!} x^n e^{-\lambda x} dx \\
&= \left[\frac{\lambda^n}{n!} x^n e^{-\lambda x} \right]_{x=0}^{x=t} + \int_0^t \frac{\lambda^{n+1}}{n!} x^n e^{-\lambda x} dx - \int_0^t \frac{\lambda^{n+1}}{n!} x^n e^{-\lambda x} dx \\
&= \frac{\lambda^n}{n!} t^n e^{-\lambda t}.
\end{aligned}$$

即ち、到着客数は時間間隔のみに依存する。

(2) 重ならない時間間隔では独立となる

任意の重ならない時間間隔 $(\tau_1, \tau_1 + t_1], (\tau_2, \tau_2 + t_2]$ に対して、到着客数をそれぞれ n_1, n_2 と表すと、同時確率は以下のように表される：

$$\begin{aligned}
&P(\{A_{(\tau_1, \tau_1 + t_1]} = n_1, A_{(\tau_2, \tau_2 + t_2]} = n_2\}) \\
&= P(\{A_{(\tau_1, \tau_1 + t_1]} = n_1\}) P(\{A_{(\tau_2, \tau_2 + t_2]} = n_2 \mid A_{(\tau_1, \tau_1 + t_1]} = n_1\}) \\
&= \{P(\{G_{n_1}(t_1) \leq t_1\}) - P(\{G_{n_1+1}(t_1) \leq t_1\})\} \{P(\{G_{n_2}(t_2) \leq t_2\}) - P(\{G_{n_2+1}(t_2) \leq t_2\})\} \\
&= P(\{A_{(\tau_1, \tau_1 + t_1]} = n_1\}) P(\{A_{(\tau_2, \tau_2 + t_2]} = n_2\}).
\end{aligned}$$

(3) 逆を示す

任意の時間区間 $(\tau, \tau + t]$ に到着する客数は同一な *Poisson* 過程に従い、重ならない時間間隔では独立となると仮定の下で、時間間隔を表す確率変数 $\{T_n - T_{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ の分布を導出する。最後に到着が観測されてから次の到着が観測されるまでの時間の分布は、

$$\begin{aligned}
P(\{T_n - T_{n-1} \leq t\}) &= 1 - \int_0^{\infty} P(\{A_{(\tau, \tau + t]} = 0 \mid A_{(0, \tau]} = n - 1\}) dP(\{A_{(0, \tau]} = n - 1\}) \\
&= 1 - P(\{A_{(0, t]} = 0\}) \int_0^{\infty} dP(\{A_{(0, \tau]} = n - 1\}) \\
&= 1 - e^{-\lambda t}.
\end{aligned}$$

(証明終)

一度にサービスを受ける人数を1として、サービス時間も到着時間間隔と同様に指数分布に従う下での待ち行列を $M/M/1$ (*Kendall's notation*) と表記する.

到着時間間隔の分布/サービス時間の分布/サーバー数.

4 Chapman – Kolmogorov Equation

システム内の状態:

観測時点 t にて, 系内客数が j であるとする. システム内の状態をこの客数 j で評価する.
客数は, サービスを待っている人とサービスを受けている人の和である.

4.1 Markov property

前節で見てきたとおり, 系内客数の変化は,

- 客は或る一定の到着率を有つ指数分布に従ってやってくる. どの二人の客も互いの到着時間に影響を与えることはない.
- 或る一定の平均時間を有つ指数分布に従って客は一人ずつサービスを受け, 終わったら退場する. どの二人の客も互いのサービス時間に影響を与えることはない.

の2つの事象に因る. また客の到着時間間隔とサービス時間は独立に動く. 任意に観測時刻の始点を置くとき, 始点を置く直前までシステムに向かっていた途中である客, またはサービスを受けている最中であった客もいるかもしれないが, 指数分布の無記憶性により, 観測始点以降に観測する到着時間, サービス時間の分布は観測始点に影響されない. 従って, 現時点から次に起こる系内客数の変化は, 現状のみに依存し過去の影響を受けない. これをマルコフ性 (Markov property) と云う.

4.2 Chapman – Kolmogorov Equation

観測始点を0とし, 時点0の系内客数を i と表す. この下で, 観測時点 $t \geq 0$ における系内客数 $Q(t)$ の分布を

$$P_{ij}(t) = P(\{Q(t) = j \mid Q(0) = i\})$$
$$P_{ij}(0) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

と表記する.

ここで, 到着時間間隔の分布を平均 $\frac{1}{\lambda}$ の指数分布 $E_X(\lambda)$, サービス時間の分布を $E_X(\mu)$ と設定する. 状態推移のグラフを示す.



最後に状態変化した時点から見て，平均 $\frac{1}{\lambda}$ 時間で次に客が到着し状態が上に変化するか，平均 $\frac{1}{\mu}$ 時間で次に客が退場し状態が下に変化する．また到着と退場は独立に動く．従って上グラフの時間軸に平行な線分は全て，その長さは，次の状態変化の方向によって指数分布 $E_X(\lambda)$ か $E_X(\mu)$ に完全に従う確率変数の実現値である．従って，任意に観測始点をおく場合，観測開始から状態変化までの時間の分布は観測始点に影響されない．

観測時点 t から時間 h だけ経過した後の系内状態を j とする．このとき， $P_{ij}(t)$ の無記憶性から以下の等式が成立する．

$$\begin{aligned}
 P_{ij}(t+h) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(\{Q(t+h) = j \mid Q(t) = k, Q(0) = i\}) P(\{Q(t) = k \mid Q(0) = i\}) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} P(\{Q(t+h) = j \mid Q(t) = k\}) P(\{Q(t) = k \mid Q(0) = i\}) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} P(\{Q(h) = j \mid Q(0) = k\}) P(\{Q(t) = k \mid Q(0) = i\}) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t) P_{kj}(h).
 \end{aligned}$$

これが *Chapman – Kolmogorov* の方程式である.

Chapman – Kolmogorov の方程式

任意の時間間隔 $t, h > 0$ と状態 $i, j \geq 0$ に対して,

$$P_{ij}(t + h) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t)P_{kj}(h).$$

5 Forward Equations of Kolmogorov

先ほど考えた経過時間 h の間に、状態が上下に何段変化するのかを記述する。経過時間 h の間の状態推移は以下の背反な事象に分割される。

- $\alpha_{h1} \equiv \{ \text{時間}h \text{の間に} n (= 0, 1, 2, \dots) \text{人の客のサービスが終わり, } n+1 \text{人来る.} \}$
- $\alpha_{h2} \equiv \{ \text{時間}h \text{の間に} n (= 0, 1, 2, \dots) \text{人の客の到着があり, } n+1 \text{人のサービスが終わる.} \}$
- $\alpha_{h3} \equiv \{ \text{時間}h \text{の間に} n (= 0, 1, 2, \dots) \text{人の客のサービスが終わり, } n \text{人来る.} \}$
- $\alpha_{h4} \equiv \{ \text{時間}h \text{の間に} n (= 0, 1, 2, \dots) \text{人の客の到着があり, } n \text{人のサービスが終わる.} \}$
- $\alpha_{h5} \equiv \{ \text{時間}h \text{の間に} n (= 0, 1, 2, \dots) \text{人の客のサービスが終わり, } n+2 \text{人以上来る.} \}$
- $\alpha_{h6} \equiv \{ \text{時間}h \text{の間に} n (= 0, 1, 2, \dots) \text{人の客の到着があり, } n+2 \text{人以上のサービスが終わる.} \}$

先ず時間 h の間に状態が上に一つだけ変化する事象を確率で表現する。

$$\begin{aligned} P_{i \rightarrow i+1}(h) &= P(\{\alpha_{h1}\}) \\ &= P(\{\{\text{時刻}h \text{の間に客のサービスは終わらず, 新しく系内に一人来る.}\}\}) \\ &\quad + P(\{\{\text{時間}h \text{の間に} n (= 1, 2, \dots) \text{人の客のサービスが終わり, } n+1 \text{人来る.}\}\}) \\ &= P(\{A_{(0,h]} = 1\})P(\{L_{(0,h]} = 0\}) + P(\{\{\text{時間}h \text{の間に} n (= 1, 2, \dots) \text{人の客のサービスが終わり, } n+1 \text{人来る.}\}\}) \\ &= \lambda h e^{-\lambda h} e^{-\mu h} + P(\{\{\text{時間}h \text{の間に} n (= 1, 2, \dots) \text{人の客のサービスが終わり, } n+1 \text{人来る.}\}\}) \\ &= \lambda h \left(1 - (\lambda + \mu)h + \frac{(\lambda + \mu)^2 h^2}{2!} - \frac{(\lambda + \mu)^3 h^3}{3!} + \dots \right) \\ &\quad + P(\{\{\text{時間}h \text{の間に} n (= 1, 2, \dots) \text{人の客のサービスが終わり, } n+1 \text{人来る.}\}\}) \\ &= \lambda h + o(h) + P(\{\{\text{時間}h \text{の間に} n (= 1, 2, \dots) \text{人の客のサービスが終わり, } n+1 \text{人来る.}\}\}). \end{aligned}$$

ここで、最終段第三項を考えると、

$$\begin{aligned} &P(\{\{\text{時間}h \text{の間に} n (= 1, 2, \dots) \text{人の客のサービスが終わり, } n+1 \text{人来る.}\}\}) \\ &\leq P(\{\{\text{時間}h \text{の間に少なくとも2人以上の到着がある.}\}\}) \\ &= e^{\lambda h} - 1 - \lambda h = o(h). \end{aligned}$$

従って、求めたい確率は次のように表現される。

$$P_{i \ i+1}(h) = \lambda h + o(h).$$

ここで、 $o(h)$ とは任意の $\epsilon > 0$ に対し或る $\delta > 0$ が存在して、 $|h| < \delta$ の下 $\frac{|o(h)|}{|h|} < \epsilon$ とできるような量である。((A-5) 参照)
時間 h の間に状態が下に一つだけ変化する事象も、パラメータが違う他は上への移動の場合と変わらないので、

$$P_{i \ i-1}(h) = \begin{cases} \mu h + o(h) & i \geq 1. \\ 0 & i = 0. \end{cases}$$

事象 α_{h3}, α_{h4} の確率を考えるより先に事象 α_{h5}, α_{h6} の確率を考える。事象 $\alpha_{h5} + \alpha_{h6}$ の確率は、時間 h の間の状態の変動が 2 以上となる事象の確率である。つい先ほどの式と同様にして、

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & |i - j| \geq 2 \\ P_{ij}(h) = P(\{\alpha_{h5} + \alpha_{h6}\}) & \leq P(\{\{\text{時間 } h \text{ の間に少なくとも 2 人以上の到着がある.}\}\}) \\ & + P(\{\{\text{時間 } h \text{ の間に少なくとも 2 人以上の退場がある.}\}\}) \\ & = o(h). \end{aligned} \tag{1}$$

最後に残ったのは、時間 h の間に状態が元に戻る事象の確率の表現である。簡単に書くと、

$$P_{ii}(h) = \begin{cases} 1 - (\lambda + \mu)h + o(h). & i \geq 1 \\ 1 - \lambda h + o(h). & i = 0 \end{cases}$$

変動の大きさの確率を *Chapman – Kolmogorov* の方程式に代入することで、*Kolmogorov* の前進方程式 (*Foward Equations of Kolmogorov*) を得る。

$$\begin{aligned} P_{ij}(t + h) &= \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t) P_{kj}(h) \\ &= \begin{cases} P_{i \ j+1}(t) P_{j+1 \ j}(h) + P_{ij}(t) P_{jj}(h) + P_{i \ j-1}(t) P_{j-1 \ j}(h) + o(h) & j \geq 1 \\ P_{i1}(t) P_{10}(h) + P_{i0}(t) P_{00}(h) + o(h) & j = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} P_{i,j+1}(t)\{\mu h + o(h)\} + P_{ij}(t)\{1 - (\lambda + \mu)h + o(h)\} + P_{i,j-1}(t)\{\lambda h + o(h)\} + o(h) & j \geq 1 \\ P_{i1}(t)\{\mu h + o(h)\} + P_{i0}(t)\{1 - \lambda h + o(h)\} + o(h) & j = 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \mu P_{i,j+1}(t)h + P_{ij}(t) - (\lambda + \mu)P_{ij}(t)h + \lambda P_{i,j-1}(t)h + o(h). & j \geq 1 \\ \mu P_{i1}(t)h + P_{i0}(t) - \lambda P_{i0}(t)h + o(h). & j = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

後は微分の定義に従うだけである.

$$\begin{cases} \frac{P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t)}{h} = \mu P_{i,j+1}(t) - (\lambda + \mu)P_{ij}(t) + \lambda P_{i,j-1}(t) + \frac{o(h)}{h}. & j \geq 1 \\ \frac{P_{i0}(t+h) - P_{i0}(t)}{h} = \mu P_{i1}(t) - \lambda P_{i0}(t) + \frac{o(h)}{h}. & j = 0 \end{cases}$$

ランダウの記号が利いて, 任意の $\epsilon > 0$ に対し或る適当な $\delta > 0$ が存在し, $0 < h < \delta$ の下で,

$$\begin{cases} \left| \frac{P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t)}{h} - \mu P_{i,j+1}(t) + (\lambda + \mu)P_{ij}(t) - \lambda P_{i,j-1}(t) \right| = \left| \frac{o(h)}{h} \right| < \epsilon. & j \geq 1 \\ \left| \frac{P_{i0}(t+h) - P_{i0}(t)}{h} - \mu P_{i1}(t) + \lambda P_{i0}(t) \right| = \left| \frac{o(h)}{h} \right| < \epsilon. & j = 0 \end{cases}$$

Kolmogorov の前進方程式

$$\begin{cases} \frac{dP_{ij}(t)}{dt} = \mu P_{i,j+1}(t) - (\lambda + \mu)P_{ij}(t) + \lambda P_{i,j-1}(t). & j \geq 1 \\ \frac{dP_{i0}(t)}{dt} = \mu P_{i1}(t) - \lambda P_{i0}(t). & j = 0 \end{cases} \quad (2)$$

6 Modified Bessel Function

観測開始時点	観測開始時点 T_0 を 0 とする.
到着時間間隔	平均 $\frac{1}{\lambda}$ の指数分布 $E_X(\lambda)$ に従う.
サービス終了時間間隔	平均 $\frac{1}{\mu}$ の指数分布 $E_X(\mu)$ に従う.

観測を開始して t 時間経過後のシステム内の客数に興味がある. 板の動きへの応用では板の移動直後の状態から観測を始めて(上下どちらかの板が消滅するまでの時間内で) t 時間経過後の板の厚みが客数に対応する.

6.1 Blank Time of Service

Poisson 到着の下, 客の到着数 $A_{(0,t]}$ は

$$P\left(\left\{A_{(0,t]} = n\right\}\right) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

と表された.

ところで時間 $(0, t]$ でのサービス終了数が同様に $P_O(\mu t)$ に従うことは否定される. サービスは, 系内客数が 0 となる空白時間が発生するかも知れないからである.

サービス終了数も同様に *Poisson* 分布の形式で表現可能にするため, システム内の全ての客のサービス終了直後, 架空人物のサービスを開始することにする. 架空人物のサービスでサービス時間の空白を埋める. 架空人物のサービス中に実際に客が到着した場合, 架空人物のサービス終了時点を実際の客のサービス終了時点とする. 架空人物の登場が実際のシステム稼動に問題がないことは以下のように示される:

実際の客が時刻 τ に到着するとき, 指数分布の無記憶性により, 架空人物の残りサービス時間も同分布に従う.

$$P(\{\text{架空人物のサービス時間} \leq \tau + t \mid \text{架空人物のサービス時間} > \tau\})$$

$$= 1 - e^{-\lambda t}$$

$$= P(\{\text{到着した客のサービス時間} \leq t\}).$$

6.2 Modified Bessel Function

架空サービスを考慮することで，時間 $(0, t]$ でのサービス終了数を $L_{(0,t]}$ と表すと，これは以下のように表現される．

$$P\left(\{L_{(0,t]} = n\}\right) = e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$A_{(0,t]}$ と $L_{(0,t]}$ の差は，時間 $(0, t]$ での架空人物も含めた状態の変化量を表す．これを $C_{(0,t]}$ と表し，その分布を計算する．架空人物を考慮すると状態変化量が非負である保証は無い．到着数とサービス終了数が独立であることに注意して，以下の計算ができる．

$$\begin{aligned} P\left(\{C_{(0,t]} = k\}\right) &= P\left(\{A_{(0,t]} - L_{(0,t]} = k\}\right) \\ &= \sum_{n=\max\{k, 0\}}^{\infty} P\left(\{A_{(0,t]} = n\}\right) P\left(\{L_{(0,t]} = n - k \mid A_{(0,t]} = n\}\right) \quad (k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots) \\ &= \sum_{n=\max\{k, 0\}}^{\infty} P\left(\{A_{(0,t]} = n\}\right) P\left(\{L_{(0,t]} = n - k\}\right) \quad (A_{(0,t]} \text{ と } L_{(0,t]} \text{ は独立.}) \\ &= \sum_{n=\max\{k, 0\}}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)t} \sum_{n=\max\{k, 0\}}^{\infty} \frac{t^{2n-k} \lambda^{\frac{2n-k}{2}} \mu^{\frac{2n-k}{2}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{k}{2}}}{n!(n-k)!} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)t} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{k}{2}} \sum_{n=\max\{k, 0\}}^{\infty} \frac{t^{2n-k} \lambda^{\frac{2n-k}{2}} \mu^{\frac{2n-k}{2}}}{n!(n-k)!} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)t} \rho^{\frac{k}{2}} I_{-k}(2t \sqrt{\lambda\mu}). \quad (\rho \equiv \frac{\lambda}{\mu}, I_{-k}(x) : \text{第一種変形 Bessel 関数}) \end{aligned} \tag{3}$$

第一種変形 Bessel 関数 (*Modified Bessel function of the first kind*)

$$\begin{aligned} I_k(x) &= \sum_{n=\max\{-k, 0\}}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k}}{n!(n+k)!}, \\ I_k(x) &= \sum_{n=\max\{-k, 0\}}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k}}{n!(n+k)!} \\ &= \sum_{m=\max\{k, 0\}}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-k}}{(m-k)!m!} \\ &= I_{-k}(x). \end{aligned} \tag{4}$$

Bessel 関数の対称性から,

$$P\left(\{C_{(0,t]} = k\}\right) = \rho^k P\left(\{C_{(0,t]} = -k\}\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{5}$$

が成り立つ.

6.3 Finite Number of Customers in the System

有限時間内での状態の変動量 $C_{(0,t]}$ が無限となる確率が 0 であることを示す.

確率母関数 (*Probability generating function*)

$|z| < 1$ の下で, $C_{(0,t]}$ の確率母関数は次のように計算される.

$$E\left[z^{C_{(0,t]}}\right] = E\left[z^{A_{(0,t]} - L_{(0,t]}}\right]$$

$$\begin{aligned}
&= E \left[z^{A_{(0,t]}} \right] E \left[z^{-L_{(0,t]}} \right] \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t z)^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\mu t} \frac{\left(\frac{\mu t}{z}\right)^n}{n!} \right) \\
&= e^{(-\lambda + \lambda z + \frac{\mu}{z} - \mu)t}.
\end{aligned}$$

確率の和

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty} P(\{C_{(0,t]} = k\}) &= \lim_{z \rightarrow 1} E \left[z^{C_{(0,t]}} \right] && ((A-7) 参照) \\
&= \lim_{z \rightarrow 1} e^{(-\lambda + \lambda z + \frac{\mu}{z} - \mu)t} \\
&= 1. \quad (t < \infty) && (6)
\end{aligned}$$

従って、 $C_{(0,t]} = \infty$ 又は $C_{(0,t]} = -\infty$ となる確率は0となる:

$$\begin{aligned}
P(\{C_{(0,t]} = \infty\}) + P(\{C_{(0,t]} = -\infty\}) &= 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(\{C_{(0,t]} = k\}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

確率の和の計算で、総和記号に ∞ が入っているからと $P(\{C_{(0,t]} = \infty\})$ が総和に含まれていると考えてはならない。 ∞ は数ではない。総和は特定の数を指定して計算するものだが、 ∞ とはどの数よりも大きいという概念である。

6.4 Fluctuation of Number of Customers in the System

興味は架空人物の発生を間引いた実際のシステムの系内客数の変化にある。

前章と同じく、観測始点時刻を $T_0 = 0$ とする。 t 時間後の系内客数を $Q(t)$ で表し、 $Q(t)$ の時間変動を追跡する。

下の図は板の動きを待ち行列に見立てた例である。待ち行列理論と板の動きは二つの時系列グラフによって繋がる。



$Q(t)$ の初期状態は $Q(0) \geq 0$ と表せる。架空人物を考慮した時間 $(0, t]$ での状態変化量の確率変数 $C_{(0,t]}$ を用いて、時間の順を追って $Q(t)$ の挙動を見る。ここで $Q(t)$ が 0 になる時点列 $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ と、0 になってから初めて増加する時点列 $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ を用意する。便宜のため $Z_0 = U_0 = T_0 = 0$, $C_{(0,U_0-0]} = -Q(0)$ と設定する。

$$Q(t) = \begin{cases} Q(0) + C_{(0,t]} & t \in (0, Z_1] \\ 0 & t \in (Z_1, U_1] \\ C_{(0,t]} - C_{(0,U_1-0]} & t \in (U_1, Z_2] \\ 0 & t \in (Z_2, U_2] \\ C_{(0,t]} - C_{(0,U_2-0]} & t \in (U_2, Z_3] \\ 0 & t \in (Z_3, U_3] \\ C_{(0,t]} - C_{(0,U_3-0]} & t \in (U_3, Z_4] \\ \vdots & \\ Q(t) = C_{(0,t]} - C_{(0,U_n-0]} & t \in (U_n, Z_{n+1}] \\ 0 & t \in (Z_{n+1}, U_{n+1}] \\ \vdots & \end{cases} = \begin{cases} C_{(0,t]} - C_{(0,U_n-0]} & t \in (U_n, Z_{n+1}] \\ 0 & t \in (Z_{n+1}, U_{n+1}] \end{cases}$$

$C_{(0,U_n-0]}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ について精しく考える. $C_{(0,t]}$ は $Q(0)$ から出立して $Q(t) = 0$ となった後も, 時点 U_1 まで単調非増加な動きを続ける. 従って $C_{(0,U_1-0]} \leq 0$ は確率 1 で起こる. この間 $Q(t)$ は状態 0 を維持する. 時点 U_1 後は $C_{(0,U_1-0]}$ を基準として $C_{(0,t]}$ は単調非減少な動きに転じ, $Q(t)$ は再び動き始める. $Q(t)$ の動きは $C_{(0,t]} - C_{(0,U_1-0]}$ に完全に一致する. 再び $Q(t) = 0$ となる時点 Z_2 以降も, $C_{(0,t]}$ は時点 U_2 まで単調非増加な動きを続ける. 即ち $C_{(0,U_2-0]} \leq C_{(0,U_1-0]}$ が確率 1 で起こる. 帰納的に考えて, $C_{(0,U_{n+1}-0]} \leq C_{(0,U_n-0]}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ が成立する. この議論から, 先ほどの $Q(t)$ は次の表現に直すことができる. 視覚で確認するために最後に図を入れた.

初期状態 $Q(0)$. 系内容数 $Q(t)$ は時間 $(0, t]$ での到着数とサービス終了数の差 $C_{(0,t]}$ を用いて以下の表現になる:

$$Q(t) = \max \left\{ C_{(0,t]} - \inf_{\tau \in (0,t]} C_{(0,\tau]}, Q(0) + C_{(0,t]} \right\}.$$



7 Transient Probability

前章では架空人物を入れたシステム内の状態推移と実際の系内客数の状態推移の関係を見た。この章では時間 $(0, t]$ において実際の系内客数の状態推移の確率を計算する。

7.1 Transient Probability

$Q(0) = i$ とする。 t 時間後に系内客数が $Q(t) = j$ となっている確率は、 *Chapman – Kolmogorov* 方程式の章での表記に倣って $P_{ij}(t) = P(\{Q(t) = j \mid Q(0) = i\})$ と表される。 $Q(t)$ が状態 i から j に推移する間に、 $C_{(0,t]}$ が上昇する回数と下降する回数をそれぞれ u, d と表す。 当然、次の関係が成り立つ：

$$\begin{aligned} u &= A_{(0,t]}, \\ d &= L_{(0,t]}, \\ j &= \max \left\{ i + u - d, C_{(0,t]} - \inf_{\tau \in (0,t]} C_{(0,\tau]} \right\}. \end{aligned}$$

Poisson 分布に従う到着と退場の下で、一度に到着するまたは退場する客数が二人以上となる確率は0である。 (*Kolmogorov* の前進方程式の章参照) 従って $Q(t)$ が一度に2ステップ以上移動することはない。これにより $Q(t)$ が状態 i から状態 j に行き着くまでのステップ数が $u + d$ で表される。 $C_{(0,t]}$ の変化時間間隔を無視してステップ数だけに注目すると、 u 回の上昇と d 回の下降を経て状態 j に行き着くまでの経路の数は

$$\frac{(u + d)!}{u!d!}$$

通りある。

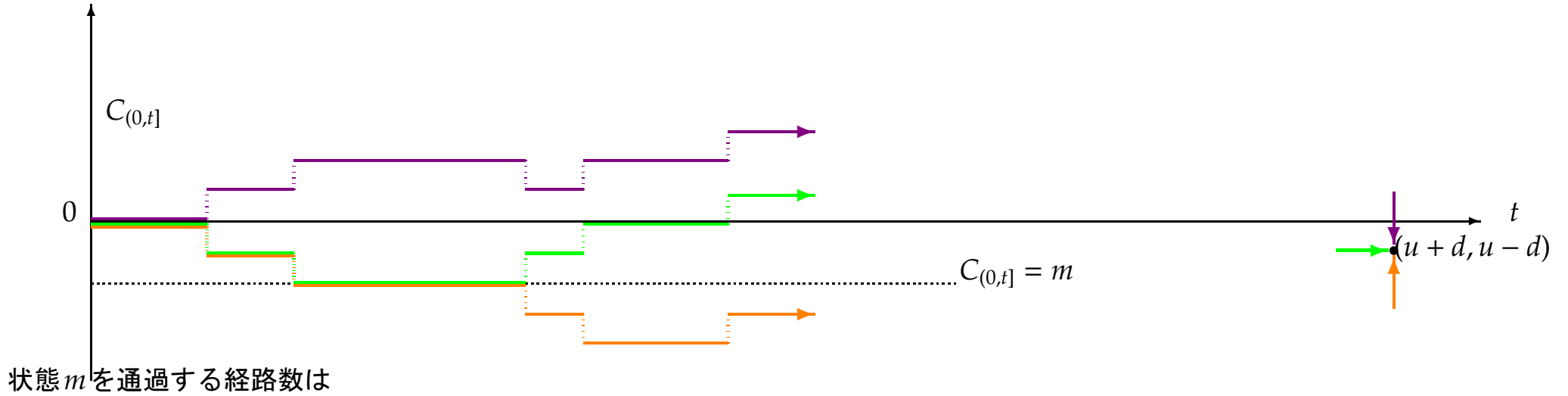
表記を簡単に、 $\alpha_t \equiv A_{(0,t]}$, $\beta_t \equiv L_{(0,t]}$, $\gamma_t \equiv \inf_{\tau \in (0,t]} C_{(0,\tau]}$ とする。

$Q(t)$ とは違い、 $C_{(0,t]}$ は状態0から推移を始めて状態 $u - d$ に辿り着く。即ち γ_t は0以下且つ $u - d$ 以下となる：

$$\gamma_t \leq \min \{0, u - d\}.$$

γ_t の分布を導く。 任意の $m > \min \{0, u - d\}$ については $P(\{\gamma_t \leq m \mid \alpha_t = u, \beta_t = d\}) = 1$ であるから、考えるべきは $m \leq \min \{0, u - d\}$ の場合でよい。ここで、事象 $\{\gamma_t \leq m \mid \alpha_t = u, \beta_t = d\}$ は客の到着/サービス終了"時間"には関係せず、到着/

サービス終了"数"にのみ関係する事に注意する. 即ち, $\{\gamma_t \leq m \mid \alpha_t = u, \beta_t = d\}$ とは, 状態変動の時点列が与えられた下で考えられる $\frac{(u+d)!}{u!d!}$ 通りの上下変動の中, $C_{(0,t]}$ が状態 m を取る経路が選ばれる事象のことである.



$$\frac{(u+d)!}{(u-m)!(d+m)!} \quad (7)$$

と表すことができる. (A-8) 参照.

$\{\gamma_t \leq m \mid \alpha_t = u, \beta_t = d\}$ の確率は

$$P(\{\gamma_t \leq m \mid \alpha_t = u, \beta_t = d\}) = \begin{cases} \frac{\frac{(u+d)!}{(u-m)!(d+m)!}}{\frac{(u+d)!}{u!d!}} = \frac{u!d!}{(u-m)!(d+m)!} \cdot & m \leq \min\{0, u-d\} \\ 1. & m > \min\{0, u-d\} \end{cases}$$

これを用いて状態変異の確率 $P_{ij}(t) = P(\{Q(t) = j \mid Q(0) = i\})$ を表現する. ただしこれを直接計算するのではなく, 先ずは事象 $\{Q(t) \leq j \mid Q(0) = i, \alpha_t = u, \beta_t = d\}$ と事象 $\{\alpha_t = u, \beta_t = d \mid Q(0) = i\}$ に分解して考える.

$Q(t) = \max \{C_{(0,t]} - \gamma_t, Q(0) + C_{(0,t]}\} = \max \{u - d - \gamma_t, i + u - d\}$ であることから, 次の関係が出る.

$$\{Q(t) \leq j \mid Q(0) = i, \alpha_t = u, \beta_t = d\} = \{u - d - j \leq \gamma_t, i + u - d \leq j\}.$$

$i + u - d \leq j$ は γ_t に関係なく成立するから, $\sum_{\langle j-i \rangle}$ を $\{u, d \mid u - d \leq j - i, u, d \geq 0\}$ を満たす u, d についての総和記号として,

$P(\{Q(t) \leq j \mid Q(0) = i\})$ は以下のように表現される.

$$\begin{aligned} P(\{Q(t) \leq j \mid Q(0) = i\}) &= \sum_{\langle j-i \rangle} P(\{\alpha_t = u, \beta_t = d \mid Q(0) = i\}) P(\{Q(t) \leq j \mid Q(0) = i, \alpha_t = u, \beta_t = d\}) \\ &= \sum_{\langle j-i \rangle} P(\{\alpha_t = u\}) P(\{\beta_t = d\}) P(\{\gamma_t \geq u - d - j \mid \alpha_t = u, \beta_t = d\}) \\ &= \sum_{\langle j-i \rangle} P(\{\alpha_t = u\}) P(\{\beta_t = d\}) \\ &\quad - \sum_{\langle j-i \rangle} P(\{\alpha_t = u\}) P(\{\beta_t = d\}) P(\{\gamma_t \leq u - d - j - 1 \mid \alpha_t = u, \beta_t = d\}) \\ &= \sum_{\langle j-i \rangle} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^u}{u!} e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^d}{d!} \\ &\quad - \sum_{\langle j-i \rangle} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^u}{u!} e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^d}{d!} \frac{u!d!}{(d+j+1)!(u-j-1)!} \\ &= \sum_{\langle j-i \rangle} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^u}{u!} e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^d}{d!} \\ &\quad - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{j+1} \sum_{(u-j-1)-(d+j+1) \leq -j-i-2} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{u-j-1}}{(u-j-1)!} e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^{d+j+1}}{(d+j+1)!}. \end{aligned}$$

ここで,

$$\sum_{<j-i>} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^u}{u!} e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^d}{d!} = \sum_{k=-\infty}^{j-i} P(\{A_{(0,t]} - L_{(0,t]} = k\}) = \sum_{k=-\infty}^{j-i} P(\{C_{(0,t]} = k\})$$

が成り立つから, 簡略するために

$$K_{j-i}(t) \equiv \sum_{k=-\infty}^{j-i} P(\{C_{(0,t]} = k\})$$

とおくと, $P(\{Q(t) \leq j \mid Q(0) = i\})$ は次のように書き換えられる.

$$P(\{Q(t) \leq j \mid Q(0) = i\}) = K_{j-i} - \rho^{j+1} K_{-j-i-2}(t). \quad (8)$$

ようやく $P(\{Q(t) = j \mid Q(0) = i\})$ を導出する準備が整った. 最終結果は以下のようになる.

$$\begin{aligned} P(\{Q(t) = j \mid Q(0) = i\}) &= P(\{Q(t) \leq j \mid Q(0) = i\}) - P(\{Q(t) \leq j-1 \mid Q(0) = i\}) \\ &= K_{j-i}(t) - \rho^{j+1} K_{-j-i-2}(t) - K_{j-i-1}(t) + \rho^j K_{-j-i-1}(t) \\ &= P(\{C_{(0,t]} = j-i\}) + \rho^j P(\{C_{(0,t]} = -j-i-1\}) + (1-\rho)\rho^j K_{-j-i-2}(t) \\ &= P(\{C_{(0,t]} = j-i\}) + \rho^{-i-1} P(\{C_{(0,t]} = j+i+1\}) + (1-\rho)\rho^j K_{-j-i-2}(t). \end{aligned}$$

最終段は式 (5) の関係を使った.

遷移確率 (*Transient probability*)

実際の系内客数の状態遷移確率 $P(\{Q(t) = j \mid Q(0) = i\})$ は、架空人物のサービスを考慮した状態変動量の確率変数 $C_{(0,t]}$ を用いて次のように表される:

$$\begin{aligned} P_{ij}(t) &= P(\{Q(t) = j \mid Q(0) = i\}) \\ &= P(\{C_{(0,t]} = j - i\}) + \rho^{-i-1} P(\{C_{(0,t]} = j + i + 1\}) + (1 - \rho)\rho^j K_{-j-i-2}(t), \\ \text{s.t. } K_{j-i}(t) &= \sum_{k=-\infty}^{j-i} P(\{C_{(0,t]} = k\}), \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}. \end{aligned} \tag{9}$$

7.2 Transient Solution

有限時間内での系内客数は有限値であることを示す。初期状態を任意に i として、

$$\begin{aligned} P(\{Q(t) < \infty \mid Q(0) = i\}) &= \sum_{j=0}^{\infty} P(\{Q(t) = j \mid Q(0) = i\}) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} P(\{C_{(0,t]} = j - i\}) + \rho^{-i-1} \sum_{j=0}^{\infty} P(\{C_{(0,t]} = j + i + 1\}) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{\infty} (1 - \rho)\rho^j K_{-j-i-2}(t) \\ &= \sum_{l=-i}^{\infty} P(\{C_{(0,t]} = l\}) + \rho^{-i-1} \sum_{l=i+1}^{\infty} P(\{C_{(0,t]} = l\}) \\ &\quad + (1 - \rho) \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \sum_{k=-\infty}^{-j-i-2} P(\{C_{(0,t]} = k\}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{l=-i}^{\infty} P(\{C_{(0,t]} = l\}) + \rho^{-i-1} \sum_{l=i+1}^{\infty} P(\{C_{(0,t]} = l\}) \\
&\quad + (1-\rho) \sum_{k=-\infty}^{-i-2} P(\{C_{(0,t]} = k\}) \sum_{j=0}^{-i-2-k} \rho^j \\
&= \sum_{l=-i}^{\infty} P(\{C_{(0,t]} = l\}) + \rho^{-i-1} \sum_{l=i+1}^{\infty} P(\{C_{(0,t]} = l\}) \\
&\quad + (1-\rho) \sum_{k=-\infty}^{-i-2} P(\{C_{(0,t]} = k\}) \frac{1-\rho^{-i-k-1}}{1-\rho} \\
&= \left(\sum_{k=-\infty}^{-i-2} P(\{C_{(0,t]} = k\}) + \sum_{l=-i}^{\infty} P(\{C_{(0,t]} = l\}) \right) \\
&\quad + \rho^{-i-1} \left(\sum_{l=i+1}^{\infty} P(\{C_{(0,t]} = l\}) - \sum_{k=-\infty}^{-i-2} \rho^{-k} P(\{C_{(0,t]} = k\}) \right) \\
&= \left(\sum_{k=-\infty}^{-i-2} P(\{C_{(0,t]} = k\}) + \sum_{l=-i}^{\infty} P(\{C_{(0,t]} = l\}) \right) \\
&\quad + \rho^{-i-1} \left(\sum_{l=i+1}^{\infty} P(\{C_{(0,t]} = l\}) - \sum_{k=i+2}^{\infty} P(\{C_{(0,t]} = k\}) \right) \\
&= 1 - P(\{C_{(0,t]} = -i-1\}) + \rho^{-i-1} P(\{C_{(0,t]} = i+1\}) \\
&= 1 - P(\{C_{(0,t]} = -i-1\}) + P(\{C_{(0,t]} = -i-1\}) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

最後の三段の式変形は、式 (5) と (6) を使った。

従って、次が成り立つ.

$$P(\{Q(t) = \infty \mid Q(0) = i\}) = 1 - P(\{Q(t) < \infty \mid Q(0) = i\}) = 0.$$

有限時解 (*Transient Solution*)

有限時間内では系内容数は有限である. 遷移確率は別名有限時解という.

8 Asymptotic Properties of Transient Probability

この章では遷移確率 $P_{ij}(t) = P(\{Q(t) = j \mid Q(0) = i\})$ の漸近的性質を考える。

8.1 Asymptotic Distribution

極限分布 (Asymptotic distribution)

確率過程 $\{X_t \mid t \in T\}$, (T : 時間集合) の任意時点における分布 $P(\{X_t \leq x\})$, ($x \in \mathbb{R}$) の $t \rightarrow \infty$ での漸近的な分布のことを極限分布と言う。

定理 3 前に定義したとおり $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ とする。 $\rho < 1$ である場合 $P_{ij}(t)$ は $t \rightarrow \infty$ で極限分布 $\lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t) = (1 - \rho)\rho^j$, ($i, j \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$) を持ち、またこの極限分布を持つのは $\rho < 1$ である場合に限られる。

証明 3 必要性

$\rho < 1$ を仮定する。

式 (3) と (4) より、任意の整数 k に対して、

$$P(\{C_{(0,t]} = k\}) = e^{-(\lambda+\mu)t} \rho^{\frac{k}{2}} I_k(2t \sqrt{\lambda\mu}).$$

ここで第一種変形 Bessel 関数の性質 ((A-6) 参照) を使うと、

$$\begin{aligned} e^{-(\lambda+\mu)t} \rho^{\frac{k}{2}} I_k(2t \sqrt{\lambda\mu}) &= e^{-(\lambda+\mu)t} \rho^{\frac{k}{2}} \frac{e^{2t \sqrt{\lambda\mu}}}{\sqrt{2\pi 2t \sqrt{\lambda\mu}}} \left\{ 1 - \frac{4k^2 - 1}{16t \sqrt{\lambda\mu}} + o\left(\frac{1}{t^2}\right) \right\} \\ &= \frac{e^{-(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\mu})^2 t} \rho^{\frac{k}{2}}}{2(\pi t)^{\frac{1}{2}} (\lambda\mu)^{\frac{1}{4}}} + \rho^{\frac{k}{2}} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \end{aligned} \tag{10}$$

最右辺は二項とも任意の $\epsilon > 0$ に対し $\forall t > T$, s.t. (項) $< \epsilon$ なる $T > 0$ が存在する. これにより, 式(9)の第一項と第二項を任意の $\epsilon > 0$ で抑えるような $T > 0$ が存在する. 第三項であるが, これは次のようになる.

$$\begin{aligned}
(1 - \rho)\rho^j K_{-j-i-2}(t) &= (1 - \rho)\rho^j \left(1 - \sum_{k=-j-i-1}^{\infty} P(\{C_{(0,t]} = k\}) \right) \\
\sum_{k=-j-i-1}^{\infty} P(\{C_{(0,t]} = k\}) &= \sum_{k=-j-i-1}^{\infty} \frac{e^{-(\sqrt{\lambda}-\sqrt{\mu})^2 t} \rho^{\frac{k}{2}}}{2(\pi t)^{\frac{1}{2}} (\lambda\mu)^{\frac{1}{4}}} + \sum_{k=-j-i-1}^{\infty} \rho^{\frac{k}{2}} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \\
&= \frac{e^{-(\sqrt{\lambda}-\sqrt{\mu})^2 t}}{2(\pi t)^{\frac{1}{2}} (\lambda\mu)^{\frac{1}{4}}} \sum_{k=-j-i-1}^{\infty} \rho^{\frac{k}{2}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \sum_{k=-j-i-1}^{\infty} \rho^{\frac{k}{2}} \\
&= \frac{e^{-(\sqrt{\lambda}-\sqrt{\mu})^2 t}}{2(\pi t)^{\frac{1}{2}} (\lambda\mu)^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{(1 - \sqrt{\rho})(\sqrt{\rho})^{j+i+1}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \frac{1}{(1 - \sqrt{\rho})(\sqrt{\rho})^{j+i+1}} \quad (\because |\rho| < 1)
\end{aligned}$$

最終段第一項は"任意の $\epsilon > 0$ に対し $\forall t > T$, s.t. (項) $< \epsilon$ なる $T > 0$ が存在する"ことは言える. 第二項についても同様である. 以上の議論をまとめると次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
&\forall \epsilon > 0, \quad \exists T > 0, \quad \forall t > T, \\
&\text{s.t.} \quad |P_{ij}(t) - (1 - \rho)\rho^j| < \epsilon.
\end{aligned}$$

十分性

$\rho \geq 1$ の下では極限が $\lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t) = (1 - \rho)\rho^j$ とはならないことを示す.

ρ に関係なく式(10)は成立するので, 式(9)の第一項と第二項を任意の $\epsilon > 0$ で抑えるような $T > 0$ が存在する.

$\rho = 1$ なら,

$$(1 - \rho)\rho^j K_{-j-i-2}(t) = 0.$$

$\rho > 1$ なら,

$$\begin{aligned}
(1 - \rho)\rho^j K_{-j-i-2}(t) &= (1 - \rho)\rho^j \sum_{k=-\infty}^{-j-i-2} \frac{e^{-(\sqrt{\lambda}-\sqrt{\mu})^2 t} \rho^{\frac{k}{2}}}{2(\pi t)^{\frac{1}{2}} (\lambda\mu)^{\frac{1}{4}}} + \sum_{k=-\infty}^{-j-i-2} \rho^{\frac{k}{2}} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \\
&= \frac{e^{-(\sqrt{\lambda}-\sqrt{\mu})^2 t}}{2(\pi t)^{\frac{1}{2}} (\lambda\mu)^{\frac{1}{4}}} \sum_{k=j+i+2}^{\infty} \rho^{\frac{-k}{2}} + \sum_{k=j+i+2}^{\infty} \rho^{\frac{-k}{2}} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \\
&= \frac{e^{-(\sqrt{\lambda}-\sqrt{\mu})^2 t}}{2(\pi t)^{\frac{1}{2}} (\lambda\mu)^{\frac{1}{4}}} \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\right)^{j+i+2}}{1 - \frac{1}{\sqrt{\rho}}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\right)^{j+i+2}}{1 - \frac{1}{\sqrt{\rho}}}.
\end{aligned}$$

従って,

$$\begin{aligned}
&\forall \epsilon > 0, \quad \exists T > 0, \quad \forall t > T, \\
&s.t. \quad |P_{ij}(t)| < \epsilon
\end{aligned}$$

が成り立ち, $\rho \geq 1$ の下では $\lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t) = 0$, ($i, i \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$) となる.

(証明終)

8.2 Stationary Process

定常過程 (Stationary process)

確率過程 $\{X_t \mid t \in T\}$, (T : 時間集合) の任意時点における分布 $P(\{X_t \leq x\})$, ($x \in \mathbb{R}$) が時点 t に関係ない或る一つの分布に従うとき, これを定常過程と言う.

強定常過程 (Strictly stationary process)

確率過程 $\{X_t \mid t \in T\}$, (T : 時間集合) について, 任意の正実数 h , 任意の有限時点列 $\{t_1, t_2, \dots, t_n\} \subset T$, 及び任意の有限の実数集合 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ に対して,

$$\begin{aligned} P(\{X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2, X_{t_3} \leq x_3, \dots, X_{t_n} \leq x_n\}) \\ = P(\{X_{t_1+h} \leq x_1, X_{t_2+h} \leq x_2, X_{t_3+h} \leq x_3, \dots, X_{t_n+h} \leq x_n\}) \end{aligned}$$

が成立するとき, 確率過程 $\{X_t \mid t \in T\}$ は強定常であるという.

定理 4 $Q(t)$ の初期分布として幾何分布 $P(\{Q(0) = i\}) = (1 - \rho)\rho^i$, ($i = 0, 1, 2, \dots$) が与えられるとき, 任意時点の $Q(t)$ の分布は幾何分布 $P(\{Q(t) = j\}) = (1 - \rho)\rho^j$, ($j = 0, 1, 2, \dots$) に従う.

証明 4 任意の状態 $j \in \{0, 1, 2, \dots\}$ に対して以下の等式が成り立つ. 簡略のため,

$$p_k \equiv P(\{C_{(0,t]} = k\})$$

と表記する.

$$\begin{aligned} P(\{Q(t) \leq j\}) &= \sum_{i=0}^{\infty} P(\{Q(0) = i\}) P(\{Q(t) \leq j \mid Q(0) = i\}) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (1 - \rho)\rho^i (K_{j-i} - \rho^{j+1} K_{-j-i-2}(t)) \end{aligned} \quad (\because \text{式(8)})$$

$$\begin{aligned}
&= (1 - \rho) \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \sum_{k=-\infty}^{j-i} p_k - (1 - \rho) \rho^{j+1} \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \sum_{k=-\infty}^{-j-i-2} p_k \\
&= (1 - \rho) \sum_{k=-\infty}^j p_k \sum_{i=0}^{j-k} \rho^i - (1 - \rho) \rho^{j+1} \sum_{k=-\infty}^{-j-2} p_k \sum_{i=0}^{-j-2-k} \rho^i \\
&= \sum_{k=-\infty}^j p_k (1 - \rho^{j-k+1}) - \rho^{j+1} \sum_{k=-\infty}^{-j-2} p_k (1 - \rho^{-j-k-1}) \\
&= \left(\sum_{k=-\infty}^j p_k + \rho^{j+1} \sum_{k=-\infty}^{-j-2} p_k \rho^{-j-k-1} \right) \\
&\quad - \left(\sum_{k=-\infty}^j p_k \rho^{j-k+1} + \rho^{j+1} \sum_{k=-\infty}^{-j-2} p_k \right) \\
&= \left(\sum_{k=-\infty}^j p_k + \rho^{j+1} \sum_{k=-\infty}^{-j-2} \rho^k p_{-k} \rho^{-j-k-1} \right) \\
&\quad - \left(\sum_{k=-\infty}^j \rho^k p_{-k} \rho^{j-k+1} + \rho^{j+1} \sum_{k=-\infty}^{-j-2} p_k \right) \\
&= \left(\sum_{k=-\infty}^j p_k + \sum_{k=j+2}^{\infty} p_k \right) \\
&\quad - \left(\rho^{j+1} \sum_{k=-j}^{\infty} p_k + \rho^{j+1} \sum_{k=-\infty}^{-j-2} p_k \right) \\
&= (1 - p_{j+1}) - \rho^{j+1} (1 - p_{-j-1}) \\
&= 1 - \rho^{j+1} - p_{j+1} + p_{j+1}
\end{aligned}$$

(\(\because\) 式(5))

(\(\because\) 式(5))

$$= 1 - \rho^{j+1}.$$

正項級数の総和であるから総和の順序交換は正当化される。以上より定理は示される。

$$P(\{Q(t) = j\}) = P(\{Q(t) \leq j\}) - P(\{Q(t) \leq j-1\})^+ = (1 - \rho)\rho^j, \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

が成り立つ。 ($^+ P(\{Q(t) \leq -1\}) = 0$.) (証明終)

定理 5 確率過程 $\{Q(t), t \geq 0\}$ は強定常過程である。

証明 5 (4.1) で述べたとおり, $\{Q(t), t \geq 0\}$ はマルコフ性を有つ。従って次の式変形が正当化される。

任意の正実数 h , 任意の有限時点列 $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$, 及び過程が取り得る任意の状態集合 $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ に対して,

$$\begin{aligned} & P(\{Q(t_1) = s_1, Q(t_2) = s_2, Q(t_3) = s_3, \dots, Q(t_n) = s_n\}) \\ &= P(\{Q(t_1) = s_1 \mid Q(t_2) = s_2, Q(t_3) = s_3, \dots, Q(t_n) = s_n\}) P(\{Q(t_2) = s_2, Q(t_3) = s_3, \dots, Q(t_n) = s_n\}) \\ &= P(\{Q(t_1) = s_1 \mid Q(t_2) = s_2\}) P(\{Q(t_2) = s_2 \mid Q(t_3) = s_3, \dots, Q(t_n) = s_n\}) \\ &\quad P(\{Q(t_3) = s_3, \dots, Q(t_n) = s_n\}) \\ &\quad \vdots \\ &= P(\{Q(t_1) = s_1 \mid Q(t_2) = s_2\}) P(\{Q(t_2) = s_2 \mid Q(t_3) = s_3\}) \\ &\quad \cdots P(\{Q(t_{n-1}) = s_{n-1} \mid Q(t_n) = s_n\}) P(\{Q(t_n) = s_n\}) \\ &= P(\{Q(t_1 - t_2) = s_1 \mid Q(0) = s_2\}) P(\{Q(t_2 - t_3) = s_2 \mid Q(0) = s_3\}) \\ &\quad \cdots P(\{Q(t_{n-1} - t_n) = s_{n-1} \mid Q(0) = s_n\}) P(\{Q(0) = s_n\}). \end{aligned}$$

最終段の式変形は, 遷移確率が時間差のみに依存する (指数分布のマルコフ性から) ことから成り立つ。最後の式は, 始めの同時分布は時点に依存せず時間差のみに依存することを示している。従って, 各時点を h だけ進めても確率は同じである。(証明終)

極限分布の存在と定常分布の関係をもう少し見る. *Kolmogorov* の前進方程式 (式 (2)) より

$$\begin{cases} \frac{dP_{ij}(t)}{dt} = \mu P_{i,j+1}(t) - (\lambda + \mu)P_{ij}(t) + \lambda P_{i,j-1}(t) & j \geq 1 \\ \frac{dP_{i0}(t)}{dt} = \mu P_{i1}(t) - \lambda P_{i0}(t) & j = 0 \end{cases}$$

が成り立ち, 定理 (3) により右辺の極限が存在するので左辺も極限が存在する. 左辺の極限は 0 であることを示す.

定理 6 遷移確率について時間間隔 t の極限をとると 0 となる:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P'_{ij}(t) = 0. \quad (i, j \in \{0, 1, 2, \dots\})$$

証明 6

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P'_{ij}(t) = \alpha > 0$$

とする. 極限の定義から, 任意の $0 < \epsilon \ll \alpha$ に対し或る $T > 0$ が存在して, 全ての $t > T$ で

$$\alpha - \epsilon < P'_{ij}(t) < \alpha + \epsilon.$$

ここで任意に $T' > T$ を選んで

$$\int_T^{T'} P'_{ij}(t) dt = P_{ij}(T') - P_{ij}(T) > (\alpha - \epsilon)(T' - T).$$

T' はいくらでも大きくできるから $|P_{ij}(T') - P_{ij}(T)| \leq 1$ と矛盾する. $\alpha < 0$ としても同様に矛盾が生じる. (証明終)

$\rho < 1$ で考える. この定理と定理 (3) から, 極限分布を $p_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t)$ (初期状態には関係ない) と表記すると,

$$\begin{cases} 0 = \mu p_{j+1} - (\lambda + \mu)p_j + \lambda p_{j-1} & j \geq 1 \\ 0 = \mu p_1 - \lambda p_0 & j = 0 \end{cases}$$

の関係が出る。この式を順次解いて p_j を求めてもよいが、ここでは確率母関数に対応させた解法を示す。

$$\begin{aligned}
 0 &= \mu p_1 - \lambda p_0, \\
 0 &= \mu p_2 - (\lambda + \mu)p_1 + \lambda p_0, \\
 0 &= \mu p_3 - (\lambda + \mu)p_2 + \lambda p_1, \\
 0 &= \mu p_4 - (\lambda + \mu)p_3 + \lambda p_2, \\
 0 &= \mu p_5 - (\lambda + \mu)p_4 + \lambda p_3, \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

の各行に z^1, z^2, z^3, \dots , ($|z| < 1$) を掛けて各項の総和を取る。

$$\begin{aligned}
 \lambda p_0 z &= \mu p_1 z, \\
 0 &= \mu p_2 z^2 - (\lambda + \mu)p_1 z^2 + \lambda p_0 z^2, \\
 0 &= \mu p_3 z^3 - (\lambda + \mu)p_2 z^3 + \lambda p_1 z^3, \\
 0 &= \mu p_4 z^4 - (\lambda + \mu)p_3 z^4 + \lambda p_2 z^4, \\
 0 &= \mu p_5 z^5 - (\lambda + \mu)p_4 z^5 + \lambda p_3 z^5, \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

$z = 0$ の場合は当然等式は全て成立するので、 $0 < |z| < 1$ で考える。ここで、 $G(z) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} p_j z^j$ とおくと、

$$\begin{aligned}
 \lambda p_0 z &= \mu(G(z) - p_0) - (\lambda + \mu)z(G(z) - p_0) + \lambda z^2 G(z) \\
 &= G(z)\{\mu - (\lambda + \mu)z + \lambda z^2\} - \mu p_0 + (\lambda + \mu)z p_0, \\
 \Rightarrow G(z)(\lambda z - \mu)(z - 1) &= \mu(1 - z)p_0, \\
 \Rightarrow G(z) &= \frac{\mu p_0}{\mu - \lambda z}.
 \end{aligned}$$

最後の式変形は $z \neq 1$ から成立したものである. $\sum_{j=0}^{\infty} p_j = G(1)$ については *Abel* の連続性定理 ((A-7) 参照) により

$$G(1) = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) = \frac{\mu p_0}{\mu - \lambda} = \frac{p_0}{1 - \rho}$$

が云える. $G(1) = 1$ であるから $p_0 = 1 - \rho$ である.

9 *Finch's Theorem*

前章までは任意の時点における系内客数の分布に注目していたが，システムに向かう客の視点に立ち，客が到着時に見る系内客数に注目する：

客の到着時点は $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ で表現されてきた．注目するのは $A_n \equiv Q(T_n - 0)$ の確率法則である．

10 Operating Time of M/M/1

研究対象としている板の動きは最良気配にかかる数量が0になるときに起こる。この上下板の変動を待ち行列で表現してきた。*Introduction*でも述べたとおり、板が動いて直ぐ後から計測して板が消えるまでの時間に興味がある。待ち行列で考えるなら、

$\left\{ \begin{array}{ll} \text{観測開始時点を } T_0 = 0 \text{ とし,} & \text{(板移動直後)} \\ \text{このとき系内に } i \geq 1 \text{ 人の客がいるとき,} & \text{(移動直後の板の厚み)} \\ \text{初めて系内客数が0になる時間の分布に興味がある.} & \text{(どちらかの最良気配の数量が0になる時間)} \end{array} \right.$

$Q(0) = i$, 系内客数が初めて0になる時間を T_i で表す。

$$T_i = \inf\{t \mid Q(t) \leq 0, Q(0) = i\} = \inf\{t \mid i + C_{(0,t]} \leq 0\}.$$

T_i の分布を求める前に、観測開始から系内客数が0になるまでの分布 $P(\{Q(t) < j, t \in (0, T_i - 0] \mid Q(0) = i\})$ を求める。始めに系内客数が0になるまでの遷移確率を定義しておく。

$$\begin{aligned}
 {}^0p_{ij}(t) &\equiv P\left(\left\{Q(t) = j, Q(0) + \inf_{\tau \in (0,t]} C_{(0,\tau]} > 0 \mid Q(0) = i\right\}\right) \\
 &= P\left(\left\{i + C_{(0,t]} = j, i + \inf_{\tau \in (0,t]} C_{(0,\tau]} > 0 \mid Q(0) = i\right\}\right) \\
 &= P\left(\left\{C_{(0,t]} = j - i, i + \inf_{\tau \in (0,t]} C_{(0,\tau]} > 0 \mid Q(0) = i\right\}\right).
 \end{aligned}$$

ところで T_i を考慮しないで単純に計算される分布が以下の様に変形できる：

$$\begin{aligned}
 P(\{Q(t) < j \mid Q(0) = i\}) &= P\left(\left\{C_{(0,t]} - \inf_{\tau \in (0,t]} C_{(0,\tau]} < j, Q(0) + C_{(0,t]} < j \mid Q(0) = i\right\}\right) \\
 &= P\left(\left\{C_{(0,t]} - j < \inf_{\tau \in (0,t]} C_{(0,\tau]}, i + C_{(0,t]} < j \mid Q(0) = i\right\}\right) \\
 &= \sum_{v=i+1}^{\infty} P\left(\left\{C_{(0,t]} - j < \inf_{\tau \in (0,t]} C_{(0,\tau]}, C_{(0,t]} = j - v \mid Q(0) = i\right\}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{v=i+1}^{\infty} P\left(\left\{j - v - j < \inf_{\tau \in (0,t]} C_{(0,\tau]}, C_{(0,t]} = j - v \mid Q(0) = i\right\}\right) \\
&= \sum_{v=i+1}^{\infty} P\left(\left\{0 < v + \inf_{\tau \in (0,t]} C_{(0,\tau]}, C_{(0,t]} = j - v \mid Q(0) = i\right\}\right) \\
&= \sum_{v=i+1}^{\infty} {}^o p_{vj}(t).
\end{aligned}$$

$C_{(0,t]}$ 及び $\inf_{\tau \in (0,t]} C_{(0,\tau]}$ は初期状態に関係なく変化量で分布が決まることに注意する. 従って, T_i を考慮した遷移確率が式 (8) を用いて表現可能となる:

$$\begin{aligned}
{}^o p_{ij}(t) &= \sum_{v=i}^{\infty} {}^o p_{vj}(t) - \sum_{v=i+1}^{\infty} {}^o p_{vj}(t) \\
&= P\left(\{Q(t) < j \mid Q(0) = i - 1\}\right) - P\left(\{Q(t) < j \mid Q(0) = i\}\right) \\
&= P\left(\{Q(t) \leq j - 1 \mid Q(0) = i - 1\}\right) - P\left(\{Q(t) \leq j - 1 \mid Q(0) = i\}\right) \\
&= K_{j-i} - \rho^j K_{-j-i}(t) - (K_{j-i-1} - \rho^j K_{-j-i-1}(t)) \\
&= P\left(\{C_{(0,t]} = j - i\}\right) - \rho^j P\left(\{C_{(0,t]} = -j - i\}\right) \\
&= P\left(\{C_{(0,t]} = j - i\}\right) - \rho^{-i} P\left(\{C_{(0,t]} = j + i\}\right).
\end{aligned}$$

T_i の分布関数を $R_i(t) \equiv P(\{T_i \leq t\})$ と表す. $t < 0$ の場合は $R_i(t) = 0$ としておく. また $i \geq 1$ なら $R_i(0) = 0$ である. T_i の性質から, $i \geq 1$ の場合を考える. 任意の実数 $h > 0$ に対し,

$$\begin{aligned}
R_i(t+h) - R_i(t) &= P(\{\text{時点 } t \text{ までは系内には少なくとも一人いて, 時点 } (t, t+h] \text{ の間に系内客数が } 0 \text{ になる} \mid Q(0) = i\}) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} {}^o p_{ij}(t) P(\{\text{時点 } (t, t+h] \text{ の間に系内客数が } j \rightarrow 0 \text{ になる}\}) \\
&= {}^o p_{i1}(t) P(\{\text{時点 } (t, t+h] \text{ の間に系内客数が } 1 \rightarrow 0 \text{ になる}\})
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{j=2}^{\infty} {}^o p_{ij}(t) P(\{\text{時点}(t, t+h] \text{の間に系内客数が } j \rightarrow 0 \text{ になる}\}),$$

最終段第二項は時間 h の間に少なくとも2幅以上の状態遷移が要求される。級数自体も有限確定し、式(1)によりこの項は $h \rightarrow 0$ でいくらでも小さくできる項である。以下に続く。

$$\begin{aligned} &= {}^o p_{i1}(t) P(\{\text{時点}(t, t+h] \text{の間に系内客数が } 1 \rightarrow 0 \text{ になる}\}) + o(h) \\ &= {}^o p_{i1}(t) P(\{\text{誰も来ないうちに今のサービスが終了する(その後に客の到着があってもよい)}\}) \\ &\quad + {}^o p_{i1}(t) P(\{\text{今のサービスが終わらないうちに新しい客が到着して、それから状態0になる}\}) \\ &\quad + o(h), \end{aligned}$$

最終段第二項について、系内客数が0になるには少なくとも2幅以上の状態遷移が要求されるので $o(h)$ と表記して問題ない。続ける。

$$\begin{aligned} &= {}^o p_{i1}(t) \int_0^h P(\{A_{(0,h']} = 0\}) dP(\{\text{時間}(h', h' + dh'] \text{の間にサービスが終了する}\}) + o(h) \\ &= {}^o p_{i1}(t) \int_0^h P(\{A_{(0,h']} = 0\}) de^{-\mu h'} + o(h) \\ &= {}^o p_{i1}(t) \int_0^h e^{-\lambda h'} \mu e^{-\mu h'} dh' + o(h) \\ &= {}^o p_{i1}(t) \frac{\mu}{\lambda + \mu} (1 - e^{-(\lambda + \mu)h}) + o(h) \\ &= {}^o p_{i1}(t) \frac{\mu}{\lambda + \mu} ((\lambda + \mu)h + o(h)) + o(h) \\ &= {}^o p_{i1}(t)(\mu h + o(h)) + o(h) \\ &= {}^o p_{i1}(t)\mu h + o(h) \\ &= \{P(\{C_{(0,t]} = 1 - i\}) - \rho^{-i} P(\{C_{(0,t]} = 1 + i\})\} \mu h + o(h) \\ &= \{e^{-(\lambda + \mu)t} \rho^{\frac{1-i}{2}} I_{1-i}(2t \sqrt{\lambda \mu}) - \rho^{-i} e^{-(\lambda + \mu)t} \rho^{\frac{1+i}{2}} I_{1+i}(2t \sqrt{\lambda \mu})\} \mu h + o(h) \end{aligned} \quad (\because \text{式(3)})$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ e^{-(\lambda+\mu)t} \rho^{\frac{1-i}{2}} I_{1-i}(2t \sqrt{\lambda\mu}) - e^{-(\lambda+\mu)t} \rho^{\frac{1-i}{2}} I_{1+i}(2t \sqrt{\lambda\mu}) \right\} \mu h + o(h) \\
&= e^{-(\lambda+\mu)t} \rho^{\frac{1-i}{2}} \left(I_{i-1}(2t \sqrt{\lambda\mu}) - I_{i+1}(2t \sqrt{\lambda\mu}) \right) \mu h + o(h) \\
&= e^{-(\lambda+\mu)t} \rho^{\frac{1-i}{2}} \frac{2i}{2t \sqrt{\lambda\mu}} I_i(2t \sqrt{\lambda\mu}) \mu h + o(h) \quad (\because A-6) \\
&= \frac{i}{t} e^{-(\lambda+\mu)t} \rho^{\frac{-i}{2}} I_i(2t \sqrt{\lambda\mu}) h + o(h).
\end{aligned}$$

微分の定義に従えば、任意の $\epsilon > 0$ に対し或る $\delta > 0$ が存在して、全ての $h < \delta$ に対して

$$\left| \frac{R_i(t+h) - R_i(t)}{h} - \frac{i}{t} e^{-(\lambda+\mu)t} \rho^{\frac{-i}{2}} I_i(2t \sqrt{\lambda\mu}) \right| \leq \left| \frac{o(h)}{h} \right| < \epsilon$$

が成り立つ。すなわち T_i の分布関数は $t > 0$ で微分可能であり密度関数が存在する。この密度関数を $r_i(t)$ とおく。

稼働期間 (Operating time)

初期状態 $i (= 1, 2, 3, \dots)$ の下で、継続していたサービスが初めて終了するまでの時間を稼働期間と云う。特に $i = 1$ の場合はこれを全稼働期間と云い、その他の場合は系の長さ i によって生成された稼働期間と云う。

初期状態 $i (= 1, 2, 3, \dots)$ の下で、稼働期間 T_i の確率密度関数は次のように表される。

$$r_i(t) = \begin{cases} \frac{i}{t} e^{-(\lambda+\mu)t} \rho^{\frac{-i}{2}} I_i(2t \sqrt{\lambda\mu}) & (t > 0) \\ 0 & (t \leq 0) \end{cases}$$

11 *Alignment of Arrivals*

問題点：到着の整列性はpoisson到着の下では許容か？ただ，サービスは複数同時に行われるべきである．指数分布の無記憶性により，同時到着を整列に直しても，サービス時間分布は同一の指数分布に従ってくれる．その際サービス時間分布に実データから計算される率を適用するとサービス時間を多く見積もりすぎることになるだろう．その点に注意して，サービス時間の平均を適切に計算する下でなら， $M/M/\infty$ を考えてもよいのではないか？

A-1 *Egorov's Theorem*

A-2 Characteristic Function of k -Erlang Distribution

到着分布の例： k -アーラン分布 (k -Erlang distribution)

$$E_k(x) \equiv \begin{cases} 1 - e^{-\lambda kx} \left(1 + \frac{\lambda kx}{1!} + \cdots + \frac{(\lambda kx)^{k-1}}{(k-1)!} \right) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

平均，分散，特性関数を計算する．密度関数

$$\begin{aligned} f(x) &= E'_k(x) \\ &= \begin{cases} \lambda k e^{-\lambda kx} \left(1 + \frac{\lambda kx}{1!} + \cdots + \frac{(\lambda kx)^{k-1}}{(k-1)!} \right) - \lambda k e^{-\lambda kx} \left(1 + \frac{\lambda kx}{1!} + \cdots + \frac{(\lambda kx)^{k-2}}{(k-2)!} \right) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \lambda k e^{-\lambda kx} \frac{(\lambda kx)^{k-1}}{(k-1)!} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

これは Gamma 分布 $G_A(k, \frac{1}{\lambda k})$ の密度関数である．従って一般の Gamma 分布 $G_A(\alpha, \beta)$ について平均，分散，特性関数を計算する方が楽である．

特性関数：確率変数 $X \sim G_A(\alpha, \beta)$ について，

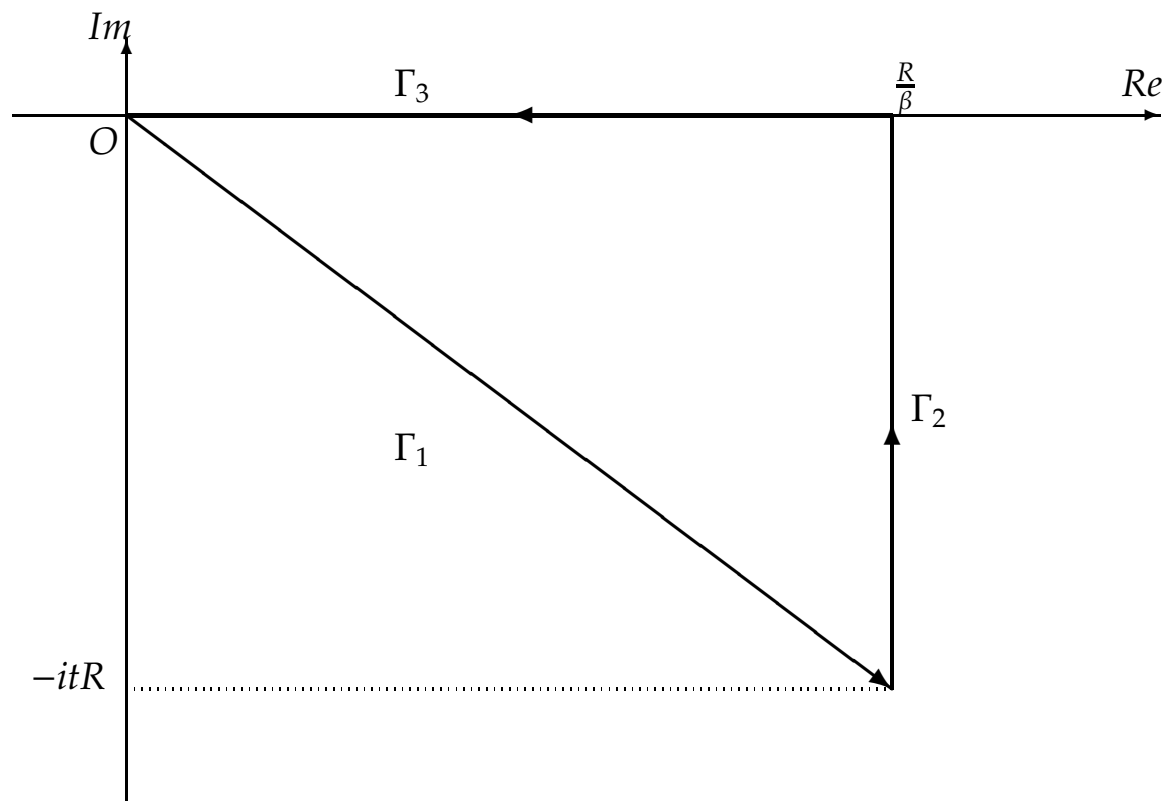
$$\begin{aligned} \phi(t) &= E[e^{itX}] \\ &= \int_0^\infty e^{itx} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{1}{\beta}-it\right)x} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{1}{\beta}-it\right)x} dx \end{aligned}$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \left(\frac{\beta}{1 - i\beta t} \right)^\alpha \int_0^{\frac{R}{\beta} - itR} z^{\alpha-1} e^{-z} dz.$$

ここで

$$\int_0^{\frac{R}{\beta} - itR} z^{\alpha-1} e^{-z} dz$$

について複素積分を考える.



積分路を $\Gamma \equiv \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ として, 被積分関数が \mathbb{C} の整関数であることから Γ および内部領域に孤立特異点は存在しない. 積分の向きは左回りとして, *Cauchy* の積分定理が成り立つので

$$\oint_{\Gamma} z^{\alpha-1} e^{-z} dz = 0$$

が成り立つ. Γ_2 上の積分は

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_2} z^{\alpha-1} e^{-z} dz \right| &= \left| \int_{-tR}^0 \left(\frac{R}{\beta} + iy \right)^{\alpha-1} e^{-\frac{R}{\beta} - iy} i dy \right| \\ &\leq \int_{-tR}^0 \left(\frac{R}{\beta} + |y| \right)^{\alpha-1} e^{-\frac{R}{\beta}} dy. \end{aligned}$$

任意の $\epsilon > 0$ に対し t について定まる或る $R_1(t)$ が存在して, $R > R_1(t)$ ならば

$$\int_{-tR}^0 \left(\frac{R}{\beta} + |y| \right)^{\alpha-1} e^{-\frac{R}{\beta}} dy < \epsilon$$

が成り立つ. Γ_3 上の積分は

$$\int_{\Gamma_3} z^{\alpha-1} e^{-z} dz = \int_{\frac{R}{\beta}}^0 z^{\alpha-1} e^{-z} dz = - \int_0^{\frac{R}{\beta}} z^{\alpha-1} e^{-z} dz.$$

これも広義積分は収束するので, 任意の $\epsilon > 0$ に対し或る R_2 が存在して, $R > R_2$ ならば

$$\Gamma(\alpha) - \epsilon < \int_0^{\frac{R}{\beta}} z^{\alpha-1} e^{-z} dx \leq \Gamma(\alpha).$$

従って, $R > \max \{R_1(t), R_2\}$ と置いて

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_1} z^{\alpha-1} e^{-z} dz - \Gamma(\alpha) \right| &= \left| - \int_{\Gamma_2} z^{\alpha-1} e^{-z} dz - \int_{\Gamma_3} z^{\alpha-1} e^{-z} dz - \Gamma(\alpha) \right| \\ &= \left| \int_{\Gamma_2} z^{\alpha-1} e^{-z} dz \right| + \left| \int_0^{\frac{R}{\beta}} z^{\alpha-1} e^{-z} dz - \Gamma(\alpha) \right| \\ &< 2\epsilon. \end{aligned}$$

ϵ は任意であるから

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \left(\frac{\beta}{1 - i\beta t} \right)^\alpha \int_0^{\frac{R}{\beta} - itR} z^{\alpha-1} e^{-z} dz = \left(\frac{1}{1 - i\beta t} \right)^\alpha$$

が成り立つ. $t \leq 0$ の場合も同じ結論となる. (証明終)

A-3 *Glivenko's Theorem*

A-4 Distribution of Sum of Exponentially distributed Variables

確率変数 $X(\omega), Y(\omega)$ を, それぞれ *Gamma* 分布 $G_A(n-1, \frac{1}{\lambda})$, 指数分布 $E_X(\lambda)$ に独立に従うとする. このとき和 $Z(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$ の分布を求める.

$$\begin{aligned} P(\{Z \leq z\}) &= \iint_{x,y \geq 0, x+y \leq z} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!} x^{n-2} e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda y} dx dy \\ &= \int_0^z \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!} x^{n-2} e^{-\lambda x} \left[1 - e^{-\lambda y} \right]_{y=0}^{y=z-x} dx \\ &= \int_0^z \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!} x^{n-2} (e^{-\lambda x} - e^{-\lambda z}) dx \\ &= \left[\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} (e^{-\lambda x} - e^{-\lambda z}) \right]_{x=0}^{x=z} + \int_0^z \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_0^z \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} dx. \end{aligned}$$

よって Z が *Gamma* 分布 $G_A(n, \frac{1}{\lambda})$ に従っていると示された. $G_A(1, \frac{1}{\lambda}) = E_X(\lambda)$ であることから, 独立に同一の指数分布に従う n 個の確率変数の和の分布は $G_A(n, \frac{1}{\lambda})$ であることが帰納的に示される.

確率変数の列 $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$ が独立に平均 $\frac{1}{\lambda}$ の指数分布 $E_X(\lambda)$ に従うとき, その和 $X_n \equiv \sum_{i=1}^n Y_i$ は平均 $\frac{n}{\lambda}$, 分散 $\frac{n}{\lambda^2}$ の *Gamma* 分布 $G_A(n, \frac{1}{\lambda})$ に従う.

A-5 Landau Symbol

Forward Equations of Kolmogorov の章でのランダウの記号 (Landau symbol) の扱いを精しく見る.
 $0 < h \ll 1$ として,

$$\begin{aligned} \left| \lambda h \left(-\lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2!} - \frac{(\lambda h)^3}{3!} + \cdots \right) \right| &\leq \lambda h \left(\lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2!} + \frac{(\lambda h)^3}{3!} + \cdots \right) \\ &= \lambda h^2 \left(\lambda + \frac{\lambda^2 h}{2!} + \frac{\lambda^3 h^2}{3!} + \cdots \right) \\ &< \lambda h^2 \left(\lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \cdots \right) \\ &= \lambda e^{\lambda} h^2 \end{aligned}$$

従って, 任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta \equiv \frac{\epsilon}{\lambda e^{\lambda}}$ と与えればよい.
 $e^{\lambda h} - 1 + \lambda h$ についても同様に,

$$\begin{aligned} e^{\lambda h} - 1 + \lambda h &= \left(\frac{(\lambda h)^2}{2!} + \frac{(\lambda h)^3}{3!} + \cdots \right) \\ &= h^2 \left(\frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3 h}{3!} + \cdots \right) \\ &< h^2 e^{\lambda} \end{aligned}$$

任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta \equiv \frac{\epsilon}{e^{\lambda}}$ と与えればよい.

A-6 Properties of Modified Bessel Function of the First Kind

定理 7 第一種変形 Bessel 関数について以下の性質がある.

$$(1) \quad I_0(0) = 1, \quad I_j(0) = 0, \quad (j = 1, 2, 3, \dots),$$

$$(2) \quad I_j(x) = I_{-j}(x), \quad (j = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

$$(3) \quad x\{I_{j-1}(x) - I_{j+1}(x)\} = 2jI_j(x),$$

$$(4) \quad I_j(x) < I_k(x), \quad (0 \leq k < j, \quad x > 0),$$

$$(5) \quad I_j(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left\{ 1 - \frac{4j^2 - 1}{8x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right\},$$

$$(6) \quad e^{\frac{x}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right)} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} y^j I_j(x).$$

証明 7

(1)

$$\begin{aligned} I_0(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n!n!} \\ &= 1 + x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1}}{n!n!} \\ &\Rightarrow I_0(0) = 1. \end{aligned}$$

$j \geq 1$ の場合,

$$\begin{aligned}
I_j(x) &= \sum_{n=\max\{-j, 0\}}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+j}}{n!(n+j)!} \\
&= \frac{x}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+j-1}}{n!(n+j)!} \\
&\Rightarrow I_j(0) = 0.
\end{aligned}$$

(2)

式(4)による.

(3)

$j = 0$ の場合, $I_{-1}(x) - I_1(x) = 0$ (対称性)から, 左辺は0, 右辺はもちろん0である.

$j \neq 0$ の場合, $j - 1, j + 1$ は共に非負または共に非正となり, 対称性から $j \geq 1$ の場合のみを考えればよい.

$$\begin{aligned}
\frac{j}{x} I_j(x) &= \frac{j}{x} \sum_{n=\max\{-j, 0\}}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+j}}{n!(n+j)!} \\
&= \frac{j}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+j}}{n!(n+j)!} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+j-1}}{n!(n+j-1)!} \frac{j}{n+j} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+j-1}}{n!(n+j-1)!} \left(1 - \frac{n}{n+j}\right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+j-1}}{n!(n+j-1)!} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+j-1}}{(n-1)!(n+j)!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+j-1}}{n!(n+j-1)!} - \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+j+1}}{(m)!(n+j+1)!} \\
&= \frac{1}{2}(I_{j-1}(x) - I_{j+1}(x)).
\end{aligned}$$

(4)

数学的帰納法による. $I_{k+1}(x) < I_k(x)$, $(k \geq 0, x > 0)$ が成り立つことを示せばよい.

$x \geq 2$ の場合 :

$$\begin{aligned}
I_k(x) - I_{k+1}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k}}{n!(n+k)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k+1}}{n!(n+k+1)!} \\
&\geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k}}{n!(n+k)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k}}{n!(n+k+1)!} && (\because \frac{x}{2} \geq 1) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k}}{n!(n+k)!} \left(1 - \frac{1}{n+k+1}\right) \\
&> 0. && (\because n+k+1 > 1, \text{ s.t. } n > 0)
\end{aligned}$$

$0 < x < 2$ の場合 :

$$\begin{aligned}
I_k(x) - I_{k+1}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k}}{n!(n+k)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k+1}}{n!(n+k+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k}}{n!(n+k+1)!} \left(n+k+1 - \frac{x}{2}\right)
\end{aligned}$$

> 0 .

$(\because n + k + 1 > 1 > \frac{x}{2}, \text{ s.t. } n > 0)$

従って, $I_{k+1}(x) < I_k(x)$, $(k \geq 0, x > 0)$ が示された.

(5)

(証明終)

A-7 Abel's Continuity Theorem

定理 8 $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ が有限値を持つとする. $f(z) \equiv \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^j$, ($|z| < 1$) とおくとき, $\frac{|1-z|}{1-|z|}$ が有界である範囲で $z \rightarrow 1$ ならば $f(z) \rightarrow f(1)$, ($z \rightarrow 1$) が成り立つ.

証明 8 $a_0 \equiv -\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ を加えて, $\sum_{j=0}^{\infty} a_j = 0$ とする. $s_n \equiv a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ とおき, $f(z)$ の有限項までの和を $f_n(z) \equiv \sum_{j=0}^n a_j z^j$ とおく.

$$\begin{aligned} f_n(z) &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \\ &= s_0 + (s_1 - s_0)z + (s_2 - s_1)z^2 + \cdots + (s_n - s_{n-1})z^n \\ &= (1-z)s_0 + (1-z)zs_1 + (1-z)z^2s_2 + \cdots + (1-z)z^{n-1}s_{n-1} + s_n z^n \\ &= (1-z) \sum_{j=0}^{n-1} s_j z^j + s_n z^n. \end{aligned}$$

ここで最終項について, $s_n \rightarrow 0$ から, 任意の $\epsilon > 0$ に対し或る $N \in \mathbb{N}$ が存在して全ての $n \geq N$ に対して $|s_n z^n| \leq |s_n| < \epsilon$ とできる. 従って,

$$a_0 + f(z) = (1-z) \sum_{j=0}^{\infty} s_j z^j.$$

定理の仮定により, 或る $M > 0$ が存在して $\frac{|1-z|}{1-|z|} < M$ を満たすので, 上の N を用いて,

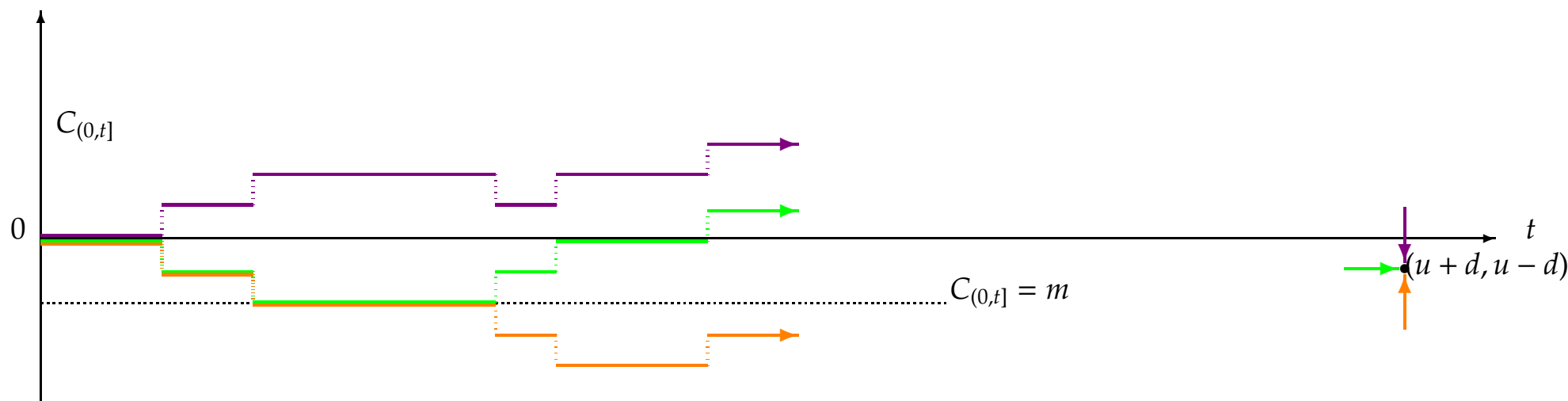
$$\begin{aligned} |a_0 + f(z)| &\leq |1-z| \sum_{j=0}^{\infty} |s_j| |z|^j \\ &\leq |1-z| \sum_{j=0}^{N-1} |s_j| + |1-z| \epsilon \sum_{j=N}^{\infty} |z|^j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |1-z| \sum_{j=0}^{N-1} |s_j| + |1-z|\epsilon \frac{|z|^N}{1-|z|} \\
&< |1-z| \sum_{j=0}^{N-1} |s_j| + M\epsilon.
\end{aligned}$$

$|1-z|$ をいくらでも小さくすることにより, $a_0 + \lim_{z \rightarrow 1} f(z) = 0$ が成り立から, $\lim_{z \rightarrow 1} f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j = f(1)$ が示された. (証明終)

A-8 Principle of Reflection

以下に使う記号等は全て(7.1)のものである.



鏡像の原理 (Principle of reflection)

上図の状態 m の線に関して、点 $(0,0)$ と対称な点 $(0,2m)$ から終着点 $(u+d, u-d)$ への経路を考える。以下に示すことは、どちらの点を始点としても、終着点までの経路数がまったく同じとなるということである。

$(0,0) \rightarrow (u+d, u-d)$ の各経路のについて、初めて状態 m に達するステップ数を T ，また対応する経路の集合を R_T と表す。

R_T に含まれる経路はどの二つを選んでも同一なものはないとする。 R_T の経路について T ステップ後の動きは任意であって最後にはどれも $(u+d, u-d)$ に行き着くものであるから、 R_T の全ての経路に対して、始めの T ステップは状態 m の線に関して対称、以後の動きは全く同じといった $(0,2m)$ を始点とする経路集合 R'_T を作る。

ここで点 $(0,0)$ と点 $(0,2m)$ それぞれから点 $(u+d, u-d)$ に行き着く全ての経路集合をそれぞれ R, R' とする。 R について、この集合は $T(=1, 2, \dots, u+d)$ によって互いに素な経路集合に分割され、その直和集合となっていることに注意する。点 $(0,0)$ から点 $(u+d, u-d)$ への経路を任意にとると、それは或る R_T に含まれる経路で、したがって始めの T ステップの動きが状態 m の線に関して対称で以降の動きが全く同じである R'_T の経路が唯一つ存在する。 R'_T も互いに素な集合族を形成しているから、この経路は R' に含まれしかも唯一つである。逆に、 R' から任意に一つ経路を取る。この経路はいずれかの R'_T に含まれることになり、したがって始めの T ステップが対称である R_T の経路が存在し、 R_T の作り方から、 T ステップ以後の動きが合致する経路は唯一つに定まる。つまり、 R と R' は一対一対応する経路の集合であるとわかる。(証明終)

では状態 m を通過する経路数を求める。これには上に述べた鏡像の原理を使うのが簡便である。 $(0, 0)$ から出発した経路が状態 m に達するまでに上昇した回数を a 、下降した回数を b とすると、 $m = a - b$ の関係が成り立つ。この経路に対し、点 $(0, 2m)$ を始点とする R' の経路が唯一つ対応する。この経路は上昇 b 回、下降 a 回によって状態 m に到達する。以後は $u - a$ 回の上昇が待っているから、この経路は全体で $b + u - a = u - m$ 回上昇することになる。これは a, b に関係なく決まるステップ数である。また点 $(0, 2m)$ を始点、 $(u + d, u - d)$ を終点とする全ての経路は必ず状態 m を通過する。従って全て状態 m を通過する経路は、点 $(0, 2m)$ を始点として $u + d$ ステップのうち $u - m$ 回上昇する経路全体と一対一対応し、求めたい経路数は $u + d$ ステップのうち $u - m$ 回上昇する経路数として求められ、これは式 (7) で与えられる。