ゼミ用ノート
会田先生資料”Rough path analysis:An Introduction”

基礎工学研究科システム創成専攻
学籍番号 29C17095
百合川尚学

2018 年 4 月 8 日

目次

0.1　導入

以下，$x \in \mathbb{R}^d$ について成分を込めて表現する場合は $x = (x^1, \cdots, x^d)$ と書き，実 $m \times d$ 行列 a については $a = (a^i_j)_{1 \le i \le m, 1 \le j \le d}$ と表す．また $T > 0$ を固定し $C^1 = C^1([0, T] \to \mathbb{R}^d)$ とおく．ただし端点においては片側微分を考える．区間 $[s, t] \subset [0, T]$ の分割を $D = \{s = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t\}$ で表現し $|D| := \max_{1 \le i \le N} |t_i - t_{i-1}|$ とおく．また $[s, t]$ の分割の全体を $\delta[s, t]$ と書く．

定理 0.1.1 (Riemann-Stieltjes 積分).　$[s, t] \subset [0, T]$ とし，$D \in \delta[s, t]$ についてのみ考えるとき，任意の $x \in C^1$，$f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ に対して次の極限が確定する:[*1]

$$\lim_{|D| \to 0} \sum_D f(x_{s_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) \in \mathbb{R}^m.$$

ここで s_{i-1} は区間 $[t_{i-1}, t_i]$ に属する任意の点である．極限は s_{i-1} の取り方にも依存しない．

証明.　各 x^j は C^1-級であるから，平均値の定理より $\sum_D f(x_{s_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})$ の第 k 成分を

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^d \sum_D f^k_j(x_{s_{i-1}})(x^j_{t_i} - x^j_{t_{i-1}}) \\
&\quad = \sum_{j=1}^d \sum_D f^k_j(x_{s_{i-1}}) \tfrac{d}{dt} x^j(\xi_{i-1,j})(t_i - t_{i-1}), \quad ({}^\exists \xi_{i-1,j} \in [t_{i-1}, t_i])
\end{aligned}$$

と表現できる．各 j, k について

$$\lim_{|D| \to 0} \sum_D f^k_j(x_{s_{i-1}}) \tfrac{d}{dt} x^j(\xi_{i-1,j})(t_i - t_{i-1})$$

が確定すれば，第 k 成分の極限が確定し定理の主張を得る．いま，$t \longrightarrow f^k_j(x_t)$ 及び $t \longmapsto (d/dt)x^j_t$ は（$[s, t]$ 上一様）連続であるから，分割 D による各区間 $[t_{i-1}, t_i]$ において次の最大最小値が定まる:

$$M_{i-1} := \sup_{t_{i-1} \le t \le t_i} f^k_j(x_t) \tfrac{d}{dt} x^j_t, \quad m_{i-1} := \inf_{t_{i-1} \le t \le t_i} f^k_j(x_t) \tfrac{d}{dt} x^j_t.$$

[*1] 極限の存在を保証する条件としては，f の有界性と微分可能性は必要ない．

ここで

$$S_D := \sum_D M_{i-1}(t_i - t_{i-1}), \quad s_D := \sum_D m_{i-1}(t_i - t_{i-1}), \quad \Sigma_D := \sum_D f_j^k(x_{s_{i-1}}) \tfrac{d}{dt} x^j(\xi_{i-1})(t_i - t_{i-1})$$

とおいて

$$S := \inf_{D \in \delta[s,t]} S_D, \quad s := \sup_{D \in \delta[s,t]} s_D$$

を定めれば

$$s_D \leq s \leq S \leq S_D, \quad s_D \leq \Sigma_D \leq S_D$$

が満たされる．実際，任意の $D_1, D_2 \in \delta[s,t]$ に対して，分割の合併を D_3 とすれば

$$s_{D_1} \leq s_{D_3} \leq S_{D_3} \leq S_{D_2}$$

が成立し $s \leq S_D$ $(\forall D \in \delta[s,t])$ すなわち $s \leq S$ が出る．一方で一様連続性から

$$0 \leq S - s \leq S_D - s_D = \sum_D (M_{i-1} - m_{i-1})(t_i - t_{i-1}) \longrightarrow 0 \quad (|D| \longrightarrow 0)$$

が従い $s = S$ を得る．以上より

$$|S - \Sigma_D| \leq |S - S_D| + |S_D - \Sigma_D| \leq |S - S_D| + |S_D - s_D| \longrightarrow 0 \quad (|D| \longrightarrow 0)$$

が成り立つ． ∎

上の証明において，各 k, j ごとに定まる極限 S を

$$S = \int_s^t f_j^k(x_u)\, dx_u^j$$

と書く．

定義 0.1.2 (C^1-級のパスに対する汎関数). $x \in C^1$ と $f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ に対して，$[s,t] \subset [0,T]$ における Riemann-Stieltjes 積分を次で表現する:

$$I_{s,t}(x) = \int_s^t f(x_u)\, dx_u := \lim_{|D| \to 0} \sum_D f(x_{s_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}),$$

$$\left(\int_s^t f(x_u)\, dx_u \right)_k = \sum_{j=1}^d \int_s^t f_j^k(x_u)\, dx_u^j, \quad (k = 1, \cdots, m).$$

ただし $D \in \delta[s,t]$ のみを考える．

定理 0.1.3 (Riemann-Stieltjes 積分の線型性). $x \in C^1$, $f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ とする．

(1) 任意の $0 \leq s < u < t \leq T$ に対し $I_{s,u}(x) + I_{u,t}(x) = I_{s,t}(x)$ が成り立つ．

(2) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ と $g \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ に対して

$$\int_s^t \alpha f(x_u) + \beta g(x_u)\, dx_u = \alpha \int_s^t f(x_u)\, dx_u + \beta \int_s^t g(x_u)\, dx_u.$$

が成り立つ．

証明.

(1) 各 k,j に対して

$$\int_s^u f_j^k(x_r)\,dx_r^j + \int_u^t f_j^k(x_r)\,dx_r^j = \int_s^t f_j^k(x_r)\,dx_r^j \tag{1}$$

が成り立つことを示せばよい．以下，分割 D に対する Riemann 和 $\sum_D f_j^k(x_{s_{i-1}})(x_{t_i}^j - x_{t_{i-1}}^j)$ を Σ_D と略記する．定理 0.1.1 より，任意の $\epsilon > 0$ に対して或る $\delta > 0$ が存在し，

$$|D_1|, |D_2|, |D_3| < \delta, \quad (D_1 \in \delta[s,u],\ D_2 \in \delta[u,t],\ D_3 \in \delta[s,t])$$

である限り

$$\left|\int_s^u f_j^k(x_r)\,dx_r^j - \Sigma_{D_1}\right| < \epsilon, \quad \left|\int_u^t f_j^k(x_r)\,dx_r^j - \Sigma_{D_2}\right| < \epsilon, \quad \left|\int_s^t f_j^k(x_r)\,dx_r^j - \Sigma_{D_3}\right| < \epsilon$$

が成立する．$|D_1|, |D_2| < \delta/2$ を満たす D_1, D_2 を取り D_3 をその合併とすれば，$|D_3| < \delta$ かつ

$$\Sigma_{D_1} + \Sigma_{D_2} = \Sigma_{D_3}$$

が成り立ち，

$$\begin{aligned}
&\left|\int_s^u f_j^k(x_r)\,dx_r^j + \int_u^t f_j^k(x_r)\,dx_r^j - \int_s^t f_j^k(x_r)\,dx_r^j\right| \\
&\quad \leq \left|\int_s^u f_j^k(x_r)\,dx_r^j - \Sigma_{D_1}\right| + \left|\int_u^t f_j^k(x_r)\,dx_r^j - \Sigma_{D_2}\right| + \left|\int_s^t f_j^k(x_r)\,dx_r^j - \Sigma_{D_3}\right| \\
&\quad < 3\epsilon
\end{aligned}$$

が従い (1) を得る．

(2)

C^1 において次でノルム $\|\cdot\|_{C^1}$ を定める:

$$\|x\|_\infty \coloneqq \sup_{t\in[0,T]} |x(t)|, \quad \left\|x'\right\|_\infty \coloneqq \sup_{t\in[0,T]} |x'(t)|, \quad \|x\|_{C^1} \coloneqq \|x\|_\infty + \left\|x'\right\|_\infty.$$

以降，C^1 には $\|\cdot\|_{C^1}$ によりノルム位相を導入する．

定理 0.1.4 (有界な f の Stieltjes 積分は x に関し連続). $[s,t] \subset [0,T]$ とする．$x \in C^1$ と $f \in C_b(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ により定める $I_{s,t}(x)$ について，$C^1 \ni x \longmapsto I_{s,t}(x) \in \mathbb{R}^m$ は連続である．

証明. C^1 の各点は可算な基本近傍系を持つから $x \longmapsto I_{0,T}(x)$ の点列連続性と連続性は一致する．すなわち $x^{(n)} \longrightarrow x$ なら $I_{0,T}(x^{(n)}) \longrightarrow I_{0,T}(x)$ が従うことを示せばよい．今回も各 j,k について

$$\int_s^t f_j^k(x_u^{(n)})\,dx_u^{(n),j} \longrightarrow \int_s^t f_j^k(x_u)\,dx_u^j, \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成り立つことを示せば十分である．

第一段

任意の分割 $D \in \delta[s,t]$ に対し，平均値の定理を使うと以下のように式変形される:

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_D f_j^k(x_{s_{i-1}}^{(n)})(x_{t_i}^{(n),j} - x_{t_{i-1}}^{(n),j}) - \sum_D f_j^k(x_{s_{i-1}})(x_{t_i}^j - x_{t_{i-1}}^j)\right| \\
&\le \sum_D \left| f_j^k(x_{s_{i-1}}^{(n)}) \tfrac{d}{dt} x_{\xi_{i-1},j}^{(n),j} - f_j^k(x_{s_{i-1}}) \tfrac{d}{dt} x_{\eta_{i-1},j}^j \right| (t_i - t_{i-1}) \\
&\le \sum_D \left| f_j^k(x_{s_{i-1}}^{(n)}) \tfrac{d}{dt} x_{\xi_{i-1},j}^{(n),j} + f_j^k(x_{s_{i-1}}) \tfrac{d}{dt} x_{\eta_{i-1},j}^{(n),j} \right. \\
&\qquad \left. - f_j^k(x_{s_{i-1}}) \tfrac{d}{dt} x_{\eta_{i-1},j}^{(n),j} - f_j^k(x_{s_{i-1}}) \tfrac{d}{dt} x_{\eta_{i-1},j}^j \right| (t_i - t_{i-1}) \\
&\le \sum_D \left| f_j^k(x_{s_{i-1}}^{(n)}) \tfrac{d}{dt} x_{\xi_{i-1},j}^{(n),j} - f_j^k(x_{s_{i-1}}) \tfrac{d}{dt} x_{\eta_{i-1},j}^{(n),j} \right| (t_i - t_{i-1}) \\
&\qquad + \sum_D \left| f_j^k(x_{s_{i-1}}) \tfrac{d}{dt} x_{\eta_{i-1},j}^{(n),j} - f_j^k(x_{s_{i-1}}) \tfrac{d}{dt} x_{\eta_{i-1},j}^j \right| (t_i - t_{i-1}).
\end{aligned}
$$

ここで最終式第二項については

$$
\begin{aligned}
&\sum_D \left| f_j^k(x_{s_{i-1}}) \tfrac{d}{dt} x_{\eta_{i-1},j}^{(n),j} - f_j^k(x_{s_{i-1}}) \tfrac{d}{dt} x_{\eta_{i-1},j}^j \right| (t_i - t_{i-1}) \\
&\qquad \le \sum_D \left\| f_j^k \right\|_\infty \left\| x^{(n)} - x \right\|_{C^1} (t_i - t_{i-1}) = \left\| f_j^k \right\|_\infty \left\| x^{(n)} - x \right\|_{C^1} (t - s)
\end{aligned}
$$

が成り立ち，第一項については

$$
\begin{aligned}
&\sum_D \left| f_j^k(x_{s_{i-1}}^{(n)}) \tfrac{d}{dt} x_{\xi_{i-1},j}^{(n),j} - f_j^k(x_{s_{i-1}}) \tfrac{d}{dt} x_{\eta_{i-1},j}^{(n),j} \right| (t_i - t_{i-1}) \\
&\le \sum_D \left| f_j^k(x_{s_{i-1}}^{(n)}) \tfrac{d}{dt} x_{\xi_{i-1},j}^{(n),j} - f_j^k(x_{s_{i-1}}^{(n)}) \tfrac{d}{dt} x_{\xi_{i-1},j}^j \right. \\
&\qquad + f_j^k(x_{s_{i-1}}^{(n)}) \tfrac{d}{dt} x_{\xi_{i-1},j}^j - f_j^k(x_{s_{i-1}}^{(n)}) \tfrac{d}{dt} x_{\eta_{i-1},j}^j \\
&\qquad + f_j^k(x_{s_{i-1}}^{(n)}) \tfrac{d}{dt} x_{\eta_{i-1},j}^j - f_j^k(x_{s_{i-1}}^{(n)}) \tfrac{d}{dt} x_{\eta_{i-1},j}^{(n),j} \\
&\qquad \left. + f_j^k(x_{s_{i-1}}^{(n)}) \tfrac{d}{dt} x_{\eta_{i-1},j}^{(n),j} - f_j^k(x_{s_{i-1}}) \tfrac{d}{dt} x_{\eta_{i-1},j}^{(n),j} \right| (t_i - t_{i-1}) \\
&\le 2 \left\| f_j^k \right\|_\infty \left\| x^{(n)} - x \right\|_{C^1} (t - s) + \left\| f_j^k \right\|_\infty (t - s) \sup_{|\xi - \eta| \le |D|} \left| x_\xi^j - x_\eta^j \right| \\
&\qquad + \| x \|_{C^1} (t - s) \sup_{t \in [0,T]} \left| f_j^k(x_t^{(n)}) - f_j^k(x_t) \right|
\end{aligned}
$$

定義 0.1.5 (p-variation). $[0,T]$ 上の $\mathbb{R}^d$ 値関数 x に対し，p-variation を次で定める:

$$
\| x \|_p := \left\{ \sup_{D \in \delta[0,T]} \sum_D \left| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right|^p \right\}^{1/p}.
$$

また線形空間 $B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$ を

$$
B_{p,T}(\mathbb{R}^d) := \left\{ x : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^d \ ; \quad x_0 = 0,\ x : \text{continuous},\ \| x \|_p < \infty \right\}
$$

により定める.

定理 0.1.6. $\tilde{C}^1 := \left\{ x \in C^1 \ ; \quad x_0 = 0 \right\}$ とおくと，$\tilde{C}^1 \subset B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$ が成り立つ.

証明．　$x \in \tilde{C}^1$ に対して

$$M := \sum_{j=1}^{d} \sup_{x \in [0,T]} |x^j(t)|$$

とおけば，x' の連続性より $M < \infty$ が定まる．平均値の定理より，$|D| < 1$ を満たす分割 D に対して

$$\left\{ \sum_{i=1}^{N} |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^p \right\}^{1/p} \leq \left\{ \sum_{i=1}^{N} \| x \|_{C^1}^p (t_i - t_{i-1})^p \right\}^{1/p} \leq MT < \infty$$

が成立し $\| x \|_p \leq MT < \infty$ が従う[*2]．

定理 0.1.7.　$B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$ は Banach 空間である．

証明．　$(x^n)_{n=1}^{\infty} \subset B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$ を Cauchy 列とする．つまり任意の $\epsilon > 0$ に対して或る $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ が存在し

$$\| x^n - x^m \|_p = \left\{ \sup_D \sum_{i=1}^{N} \left| \left(x_{t_i}^n - x_{t_i}^m \right) - \left(x_{t_{i-1}}^n - x_{t_{i-1}}^m \right) \right|^p \right\}^{1/p} < \epsilon, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

を満たす．いま，任意の $t \in [0,T]$ に対して $[0,T]$ の分割 $\{0 = t_0 \leq t \leq T\}$ を考えれば

$$|x_t^n - x_t^m| < \epsilon, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

が得られ，実数の完備性より或る $x_t \in \mathbb{R}^d$ が存在して

$$|x_t^n - x_t| < \epsilon \quad (n > n_\epsilon)$$

を満たす．実際，もし或る $n > n_\epsilon$ で $|x_t^n - x_t| =: \alpha \geq \epsilon$ が成り立つと，任意の $m > n_\epsilon$ に対して

$$|x_t^m - x_t| \geq |x_t^n - x_t| - |x_t^n - x_t^m| > \alpha - \epsilon$$

が従い $x_t^m \longrightarrow x_t$ に反する．ゆえに収束は t に関して一様であり，$t \longmapsto x_t$ は 0 出発かつ連続である．あとは $\| x^n - x \|_p \longrightarrow 0 \ (n \longrightarrow \infty)$ であればよい．

定理 0.1.8.　C^1 空間において，$\| \ \|_{C^1}$ で定まる位相は $\| \ \|_p$ で定まる位相より強い．

証明．　任意の $x \in \tilde{C}^1$ に対して

$$\| x \|_p \leq T \| x \|_{C^1}$$

を満たすことを証明する．実際，任意の分割 D に対して

$$\sum_{i=1}^{N} |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}| \leq \sum_{i=1}^{N} \| x \|_{C^1} (t_i - t_{i-1}) = T \| x \|_{C^1}$$

が成り立つ．　■

[*2] $S_D \geq 0$ ならば $(\sup_D S_D)^{1/p} = \sup_D S_D^{1/p}$ が成り立つ．

C^1 パス $[0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ に対し $f(x) = (f^i_j(x))$ の積分を

$$I_{s,t}(x) \coloneqq \int_s^t f(x_u)\,dx_u = \left(\sum_{j=1}^d \int_s^t f^i_j(x_u)\,dx^j_u\right)_i$$

により定める．このとき次が成り立つ

$$\begin{aligned}
I_{s,t}(x)_i &= \sum_{j=1}^d \int_s^t f^i_j(x_u)\,dx_u \\
&= \sum_{j=1}^d \int_s^t f^i_j(x_s) + f^i_j(x_u) - f^i_j(x_s)\,dx_u \\
&= \sum_{j=1}^d \int_s^t f^i_j(x_s) + \sum_{k=1}^d \left\{\int_0^1 \partial_k f^i_j(x_s + \theta(x_u - x_s))\,d\theta\right\}(x^k_u - x^k_s)\,dx_u \\
&= \sum_{j=1}^d \int_s^t f^i_j(x_s) + \sum_{k=1}^d \left\{\int_0^1 \partial_k f^i_j(x_s)\,d\theta\right\}(x^k_u - x^k_s)\,dx_u \\
&\quad + \sum_{j=1}^d \int_s^t \sum_{k=1}^d \left\{\int_0^1 \partial_k f^i_j(x_s + \theta(x_u - x_s)) - \partial_k f^i_j(x_s)\,d\theta\right\}(x^k_u - x^k_s)\,dx_u
\end{aligned}$$

0.2 連続性定理の証明

定義 0.2.1 (control function). 関数 $\omega : \Delta_T \longrightarrow [0,\infty)$ が任意の $0 \le s \le u \le t \le T$ に対して

$$\omega(s,u) + \omega(u,t) \le \omega(s,t)$$

を満たすとき，ω を control function と呼ぶ.

定理 0.2.2 (control function の例). 以下の関数 $\omega : \Delta_T \longrightarrow [0,\infty)$ は control function である．

(1) $\omega \coloneqq \left(\omega_1^{1/p} + \omega_2^{1/p}\right)^p, \quad (p \ge 1,\ \omega_1, \omega_2 : \text{control function}).$

(2) $\omega : (s,t) \longmapsto \left\| X^1 \right\|^p_{p:[s,t]}, \quad (p \ge 1,\ x \in B_{p,T}(\mathbb{R}^d)).$

(3)

定理 0.2.3.

(1)

(2) 任意の $D_1 \in \delta[s,u], D_2 \in \delta[u,t]$ に対して合併 $D_1 \cup D_2$ は $[s,t]$ の分割であるから，

$$\sum_{D_1} \left|x_{t_i} - x_{t_{i-1}}\right|^p + \sum_{D_2} \left|x_{t_i} - x_{t_{i-1}}\right|^p \le \sup_{D \in \delta[s,t]} \sum_D \left|x_{t_i} - x_{t_{i-1}}\right|^p = \left\| X^1 \right\|^p_{p:[s,t]}$$

が成り立つ．左辺の D_1, D_2 の取り方は独立であるから，それぞれに対し上限を取れば

$$\left\| X^1 \right\|^p_{p:[s,u]} + \left\| X^1 \right\|^p_{p:[u,t]} \le \left\| X^1 \right\|^p_{p:[s,t]}$$

が得られる.