論文勉強メモ
A Fourier analytic approach to pathwise stochastic integration

基礎工学研究科システム創成専攻修士 1 年
学籍番号 29C17095
百合川尚学

2018 年 3 月 17 日

目次

第 1 章

Notation

$\mathbb{N} = \{1, 2, \cdots\}$,
λ:Lebesgue measure.

第 2 章

Preliminaries

2.1 Ciesielski 同型

定義 2.1.1 (Haar 関数系). Haar 関数系 $(H_{pm},\ p \in \mathbb{N},\ 1 \leq m \leq 2^p)$ は次で定義される:

$$H_{pm}(t) := \begin{cases} \sqrt{2^p}, & t \in \left[\frac{m-1}{2^p}, \frac{2m-1}{2^{p+1}}\right), \\ -\sqrt{2^p}, & t \in \left[\frac{2m-1}{2^{p+1}}, \frac{m}{2^p}\right), \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases} \qquad (t \in [0,1]).$$

定理 2.1.2. Haar 関数系 $(H_{pm},\ p \in \mathbb{N},\ 1 \leq m \leq 2^p)$ に $H_{00} = 1$ を加えたものを $\mathbb{H}$ とおくと，$\mathbb{H}$ は $\mathrm{L}^2([0,1],\lambda)$ における完全正規直交基底である．

証明. $\mathrm{L}^2([0,1],\lambda)$ のノルムと内積をそれぞれ $\|\cdot\|, \langle\cdot,\cdot\rangle$ で表す．$\mathbb{H}$ が正規直交系であることは積分により従うから，以下では $\mathbb{H}$ の完全性を示す．つまり $f \in \mathrm{L}^2([0,1],\lambda)$ が全ての $H_{pm} \in \mathbb{H}$ に対して $\left\langle f, H_{pm} \right\rangle = 0$ を満たすなら $f = 0$ が成り立つことを示す．

第一段 $p \geq 0$ に対し $\mathfrak{I}_p := \left\{ \left[\frac{i-1}{2^{p+1}}, \frac{i}{2^{p+1}}\right) \ ;\quad i = 1,2,\cdots,2^{p+1} \right\}$ とおき，

$$\mathfrak{B}_p := \sigma\left[\mathfrak{I}_p\right]$$

によりフィルトレーション $\left(\mathfrak{B}_p\right)_p$ を定めれば，$\mathfrak{B}([0,1]) = \cup_p \mathfrak{B}_p$ が成り立つ．実際，$\subset$ の関係は $[0,1]$ の開集合が $[(i-1)/2^{p+1}, i/2^{p+1})$ 型の区間の可算和で表現できることにより従う．

第二段 任意の $p \in \mathbb{N}_0$ に対して

$$\mathrm{E}\left[f \,\middle|\, \mathfrak{B}_p\right] = \sum_{i=1}^{2^{p+1}} 2^{p+1}\left(\int_{\left[\frac{i-1}{2^{p+1}}, \frac{i}{2^{p+1}}\right)} f \ \mathrm{d}\lambda\right) 1\!\!1_{\left[\frac{i-1}{2^{p+1}}, \frac{i}{2^{p+1}}\right)}, \quad \lambda\text{-a.e.} \tag{2.1}$$

が成り立つことを示す．実際，右辺を g_p と表せば

$$\{\emptyset\} \cup \mathfrak{I}_p \subset \left\{ E \in \mathfrak{B}_p \ ;\quad \int_E \mathrm{E}\left[f \,\middle|\, \mathfrak{B}_p\right] \mathrm{d}\lambda = \int_E g_p \ \mathrm{d}\lambda \right\}$$

が従うから，Dynkin 族定理により $\left\{ E \in \mathfrak{B}_p \ ;\quad \int_E \mathrm{E}\left[f \,\middle|\, \mathfrak{B}_p\right] \mathrm{d}\lambda = \int_E g_p \ \mathrm{d}\lambda \right\} = \mathfrak{B}_p$ となる．そして $\mathrm{E}\left[f \,\middle|\, \mathfrak{B}_p\right], g_p$ ともに $\mathfrak{B}_p$-可測であるから (2.1) が得られる．

第三段 $\left\langle f, H_{pm} \right\rangle = 0\ (\forall H_{pm} \in \mathbb{H})$ ならば $g_p(t) \longrightarrow 0\ (p \longrightarrow \infty,\ \forall t \in [0,1])$ が出る．実際，

$$0 = \left\langle f, H_{pm} \right\rangle = \sqrt{2^{p+1}} \int_{\left[\frac{m-1}{2^{p+1}}, \frac{2m-1}{2^{p+2}}\right)} f \ \mathrm{d}\lambda - \sqrt{2^{p+1}} \int_{\left[\frac{2m-1}{2^{p+2}}, \frac{m}{2^{p+1}}\right)} f \ \mathrm{d}\lambda, \quad (\forall p, m)$$

が満たされているから

$$\begin{aligned}
\int_{\left[\frac{m-1}{2^{p+1}}, \frac{m}{2^{p+1}}\right)} f \ \mathrm{d}\lambda &= 2 \int_{\left[\frac{2m-2}{2^{p+2}}, \frac{2m-1}{2^{p+2}}\right)} f \ \mathrm{d}\lambda \\
&= 2^2 \int_{\left[\frac{4m-4}{2^{p+3}}, \frac{4m-3}{2^{p+3}}\right)} f \ \mathrm{d}\lambda \\
&= \cdots \\
&= 2^k \int_{\left[\frac{2^k m-2^k}{2^{p+k+1}}, \frac{2^k m-2^k+1}{2^{p+k+1}}\right)} f \ \mathrm{d}\lambda \\
&= \cdots
\end{aligned}$$

が従い，Hölder の不等式より

$$\left| \int_{\left[\frac{m-1}{2^{p+1}}, \frac{m}{2^{p+1}}\right)} f \ \mathrm{d}\lambda \right| = \left| 2^k \int_{\left[\frac{2^k m-2^k}{2^{p+k+1}}, \frac{2^k m-2^k+1}{2^{p+k+1}}\right)} f \ \mathrm{d}\lambda \right| \leq \frac{\| f \|}{2^{p+1}}$$