テンソル積のノルム
平井さん講義まとめ

基礎工学研究科システム創成専攻
学籍番号 29C17095
百合川尚学

2018 年 4 月 30 日

目次

0.1 notation 1

0.2 テンソル積 1

0.1 notation

以下, 零元のみの線型空間は考えない．E, E_i, F を体 $\mathbb{K}$ 上の線形空間とするとき, $\mathrm{Hom}\,(E, F)$ で E から F への $\mathbb{K}$-線型写像の全体を表し, 特に $F = \mathbb{K}$ のとき $E^{\#}$ と書く．また $\mathrm{Hom}^{(n)}\,(E_1 \times \cdots \times E_n, F)$ で $E_1 \times \cdots \times E_n$ から F への $\mathbb{K}$-n 重線型写像の全体を表す.

0.2 テンソル積

$n \geq 2$ とする．体 $\mathbb{K}$ 上の線形空間の族 $(E_i)_{i=1}^n$ に対してテンソル積を定めたい.

$$\Lambda\biggl(\bigoplus_{i=1}^n E_i\biggr) = \left\{ b : \bigoplus_{i=1}^n E_i \longrightarrow \mathbb{K} \ ; \quad \text{有限個の } e \in \textstyle\bigoplus_{i=1}^n E_i \text{ を除いて } b(e) = 0. \right\}$$

により $\mathbb{K}$-線形空間 $\Lambda\Bigl(\bigoplus_{i=1}^n E_i\Bigr)$ を定める．また $e = (e_1, \cdots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i$ に対する定義関数を

$$\mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_n}(x) = \begin{cases} 1, & x = e, \\ 0, & x \neq e \end{cases}$$

で表す．$\Lambda\Bigl(\bigoplus_{i=1}^n E_i\Bigr)$ の線型部分空間を

$$\begin{aligned} &\Lambda_0\biggl(\bigoplus_{i=1}^n E_i\biggr) \\ &:= \mathrm{Span}\left[\left\{ \begin{matrix} \mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_i + e_i', \cdots, e_n} - \mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_i, \cdots, e_n} - \mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_i', \cdots, e_n}, \\ \mathbb{1}_{e_1, \cdots, \lambda e_i, \cdots, e_n} - \lambda \mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_i, \cdots, e_n} \end{matrix} \ ; \quad e_i, e_i' \in E_i, \lambda \in \mathbb{K}, 1 \leq i \leq n \right\}\right] \end{aligned}$$

により定め，$b \in \Lambda\Bigl(\bigoplus_{i=1}^n E_i\Bigr)$ の $\Lambda_0\Bigl(\bigoplus_{i=1}^n E_i\Bigr)$ に関する同値類を $[b]$ と書く．そして

$$E_1 \otimes \cdots \otimes E_n = \bigotimes_{i=1}^n E_i := \Lambda\biggl(\bigoplus_{i=1}^n E_i\biggr) \Big/ \Lambda_0\biggl(\bigoplus_{i=1}^n E_i\biggr)$$

で定める商空間を $(E_i)_{i=1}^n$ のテンソル積と定義する．また $(e_1, \cdots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i$ に対し

$$e_1 \otimes \cdots \otimes e_n := [\mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_n}]$$

により定める $\otimes : \bigoplus_{i=1}^n E_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n E_i$ をテンソル積の標準写像と呼ぶ．

定理 0.2.1 (標準写像の多重線型性). $(E_i)_{i=1}^n$ を $\mathbb{K}$-線形空間の族とするとき，

$$\otimes : \bigoplus_{i=1}^n E_i \ni (e_1, \cdots, e_n) \longmapsto e_1 \otimes \cdots \otimes e_n \in \bigotimes_{i=1}^n E_i$$

は n 重線型写像である．また次が成り立つ:

$$\bigotimes_{i=1}^n E_i = \mathrm{Span}\left[\left\{\, e_1 \otimes \cdots \otimes e_n \ ; \quad (e_1, \cdots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i \right\}\right]. \tag{1}$$

証明. 任意の $1 \le i \le n$, $e_1 \in E_1, \cdots, e_n \in E_n$, $e_i, e_i' \in E_i$, $\lambda \in \mathbb{K}$ に対して

$$\begin{aligned}
e_1 \otimes \cdots \otimes (e_i + e_i') \otimes \cdots \otimes e_n &= \left[\, \mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_i + e_i', \cdots, e_n} \right] \\
&= \left[\, \mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_i, \cdots, e_n} + \mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_i', \cdots, e_n} \right] \\
&= \left[\, \mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_i, \cdots, e_n} \right] + \left[\, \mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_i', \cdots, e_n} \right] \\
&= e_1 \otimes \cdots \otimes e_i \otimes \cdots \otimes e_n + e_1 \otimes \cdots \otimes e_i' \otimes \cdots \otimes e_n, \\
e_1 \otimes \cdots \otimes (\lambda e_i) \otimes \cdots \otimes e_n &= [\,\mathbb{1}_{e_1, \cdots, \lambda e_i, \cdots, e_n}] \\
&= [\lambda \mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_i, \cdots, e_n}] \\
&= \lambda\, [\,\mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_i, \cdots, e_n}] \\
&= \lambda (e_1 \otimes \cdots \otimes e_i \otimes \cdots \otimes e_n)
\end{aligned}$$

が成立するから $\otimes$ は多重線型である．また任意に $u = [b] \in E \otimes F$ を取れば

$$b = \sum_{j=1}^m k_j \mathbb{1}_{e_i^j, \cdots, e_n^j}, \quad \left(k_j = b(e_i^j, \cdots, e_n^j),\ j = 1, \cdots, m\right)$$

と表せるから，

$$u = \left[\sum_{j=1}^m k_j \mathbb{1}_{e_i^j, \cdots, e_n^j}\right] = \left[\sum_{j=1}^m \mathbb{1}_{k_j e_i^j, \cdots, e_n^j}\right] = \sum_{j=1}^m (k_j e_1^j) \otimes \cdots \otimes e_n^j$$

が従い (1) を得る． ∎

定理 0.2.2 ($\cdots \otimes 0 \otimes \cdots$ は零ベクトル). $(E_i)_{i=1}^n$ を $\mathbb{K}$-線形空間の族とし，テンソル積 $\bigotimes_{i=1}^n E_i$ を定める．このとき，或る i で $e_i = 0$ なら $e_1 \otimes \cdots \otimes e_n = 0$ が成り立つ．

証明. $e_i = 0$ のとき，$\lambda = 0$ とすれば

$$e_1 \otimes \cdots \otimes e_n = [\,\mathbb{1}_{e_1, \cdots, 0, \cdots, e_n}] = [\,\mathbb{1}_{e_1, \cdots, \lambda e_i, \cdots, e_n} - \lambda \mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_i, \cdots, e_n}] = 0$$

が成立する． ∎

定理 0.2.3 (普遍性 (universality of tensor products)). $(E_i)_{i=1}^n$ を $\mathbb{K}$-線形空間の族とする．このとき任意の $\mathbb{K}$-線型空間 V に対して，$T \in \mathrm{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n E_i, V\right)$ ならば $T \circ \otimes \in \mathrm{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$ が満たされ，これで定める次の対応 Φ は線型同型である:

$$\begin{array}{rccc} \Phi : \mathrm{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n E_i, V\right) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right) \\ \Uparrow & & \Uparrow \\ T & \longmapsto & T \circ \otimes \end{array} \tag{2}$$

また $\mathbb{K}$-線型空間 U_0 と多重線型写像 $\iota : \bigoplus_{i=1}^n E_i \longrightarrow U_0$ が，任意の $\mathbb{K}$-線型空間 V に対し

$(\otimes)_1$ U_0 は ι の像で生成される．

$(\otimes)_2$ 任意の $\delta \in \mathrm{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$ に対して或る $\tau \in \mathrm{Hom}(U_0, V)$ が $\delta = \tau \circ \iota$ を満たす．

を満たすなら，(2) において $V = U_0$ とするとき $T = \Phi^{-1}(\iota)$ は線型同型である．

後半の主張により，$(E_i)_i$ のテンソル積を別の方法で導入しても，商空間を用いて導入した $\bigotimes_i E_i$ と線型同型に結ばれる．このとき，別の方法で導入したテンソル積及び標準写像を $\tilde{\bigotimes}_i E_i$, $\tilde{\otimes}$ と表せば，或る線型同型 $T : \bigotimes_i E_i \longrightarrow \tilde{\bigotimes}_i E_i$ がただ一つ存在して

$$T(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) = e_1 \tilde{\otimes} \cdots \tilde{\otimes} e_n$$

を満たす．

証明.

第一段　$T \in \mathrm{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n E_i, V\right)$ の線型性と $\otimes$ の多重線型性より $T \circ \otimes$ は多重線型である．

第二段　$\Phi(T_1) = \Phi(T_2)$ ならば T_1 と T_2 は $\left\{ e_1 \otimes \cdots \otimes e_n \ ; \quad (e_1, \cdots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i \right\}$ の上で一致する．(1) より $T_1 = T_2$ が成立し Φ の単射性が従う．

第三段　次の二段で Φ の全射性を示す．まず，$\varphi \in \mathrm{Hom}\left(\Lambda(\bigoplus_{i=1}^n E_i), V\right)$ に対し

$$g : \bigoplus_{i=1}^n E_i \ni (e_1, \cdots, e_n) \longmapsto \varphi(\mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_n}) \in V$$

を対応させる次の写像が全単射であることを示す:

$$\begin{array}{rccc} F : \mathrm{Hom}\left(\Lambda(\bigoplus_{i=1}^n E_i), V\right) & \longrightarrow & \mathrm{Map}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right) \\ \Uparrow & & \Uparrow \\ \varphi & \longmapsto & g \end{array}$$

$F(\varphi_1) = F(\varphi_2)$ のとき，任意の $e \in \bigoplus_{i=1}^n E_i$ に対して $\varphi_1(\mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_n}) = \varphi_2(\mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_n})$ が成り立ち，

$$\Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right) = \mathrm{Span}\left[\left\{ \mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_n} \ ; \quad (e_1, \cdots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i \right\}\right]$$

であるから $\varphi_1 = \varphi_2$ が従い F の単射性を得る．また $g \in \mathrm{Map}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$ に対して

$$\varphi(a) := \sum_{\substack{e \in \bigoplus_{i=1}^n E_i \\ a(e) \neq 0}} a(e)g(e), \quad (a \in \Lambda(\bigoplus_{i=1}^n E_i))$$

により φ を定めれば，$\varphi \in \mathrm{Hom}\left(\Lambda(\bigoplus_{i=1}^n E_i), V\right)$ が満たされ F の全射性が従う．

第四段　任意に $b \in \mathrm{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$ を取り $h := F^{-1}(b)$ とおけば，h の線型性より

$$\begin{aligned} &b(e_1, \cdots, e_i + e_i', \cdots, e_n) - b(e_1, \cdots, e_i, \cdots, e_n) - b(e_1, \cdots, e_i', \cdots, e_n) \\ &\qquad = h(\mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_i + e_i', \cdots, e_n} - \mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_i, \cdots, e_n} - \mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_i', \cdots, e_n}), \\ &b(e_1, \cdots, \lambda e_i, \cdots, e_n) - \lambda b(e_1, \cdots, e_i, \cdots, e_n) \\ &\qquad = h(\mathbb{1}_{e_1, \cdots, \lambda e_i, \cdots, e_n} - \lambda \mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_i, \cdots, e_n}) \end{aligned}$$

が成り立ち，b の双線型性により h は $\Lambda_0(\bigoplus_{i=1}^n E_i)$ 上で 0 である．従って

$$T([b]) := h(b), \quad (b \in \Lambda(\bigoplus_{i=1}^n E_i))$$

で定める T は well-defined であり，$T \in \mathrm{Hom}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$ かつ

$$b(e_1, \cdots, e_n) = h(\mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_n}) = (T \circ \otimes)(e_1, \cdots, e_n), \quad (\forall (e_1, \cdots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i)$$

が満たされ Φ の全射性が得られる．

第五段　$(\otimes)_1, (\otimes)_2$ の下で $\mathrm{Hom}\left(U_0, \bigotimes_{i=1}^n E_i\right) \ni \tau \longmapsto \tau \circ \iota \in \mathrm{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, \bigotimes_{i=1}^n E_i\right)$ は全単射であるから，$\tau \circ \iota = \otimes$ を満たす $\tau \in \mathrm{Hom}\left(U_0, \bigotimes_{i=1}^n E_i\right)$ がただ一つ存在する．同様にして $\iota = T \circ \otimes$ を満たす $T \in \mathrm{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n E_i, U_0\right)$ がただ一つ存在し，併せれば

$$\otimes = \tau \circ \iota = (\tau \circ T) \circ \otimes, \quad \iota = T \circ \otimes = (T \circ \tau) \circ \iota$$

が成り立ち，$T \longmapsto T \circ \otimes$, $\tau \longmapsto \tau \circ \iota$ が一対一であるから $\tau \circ T$, $T \circ \tau$ はそれぞれ恒等写像に一致して $T^{-1} = \tau$ が従う．すなわち T は $\bigotimes_{i=1}^n E_i$ から U_0 への線型同型である． ∎

定義 0.2.4 (線型写像のテンソル積).　$(E_i)_{i=1}^n$ と $(F_i)_{i=1}^n$ を $\mathbb{K}$-線型空間の族とする．$f_i : E_i \longrightarrow F_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ が線型写像であるとき，

$$b : \bigoplus_{i=1}^n E_i \ni (e_1, \cdots, e_n) \longmapsto f_1(e_1) \otimes \cdots \otimes f_n(e_n) \in \bigotimes_{i=1}^n F_i$$

により定める b は n 重線型であり，定理 0.2.3 より $b = g \circ \otimes$ を満たす $g : \bigotimes_{i=1}^n E_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n F_i$ がただ一つ存在する．g を $f_1 \otimes \cdots \otimes f_n$ と表記して線型写像のテンソル積と定義する．いま，

$$f_1 \otimes \cdots \otimes f_n(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) = f_1(e_1) \otimes \cdots \otimes f_n(e_n), \quad (\forall (e_1, \cdots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i)$$

が成り立つ．

定理 0.2.5 (テンソル積の基底).　$(E_i)_{i=1}^n$ を $\mathbb{K}$-線型空間の族とし，各々の基底を $\left(u_{\lambda_i}^i\right)_{\lambda_i \in \Lambda_i}$ $(i = 1, \cdots, n)$ とする．このとき $\left(u_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes u_{\lambda_n}^n\right)_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n}$ は $\bigotimes_{i=1}^n E_i$ の基底となる．

証明.

第一段　各 $u^i_{\lambda_i}$ の生成する一次元空間を $W^i_{\lambda_i} \coloneqq \mathbb{K}u^i_{\lambda_i}$ と表し

$$V_i \coloneqq \bigoplus_{\lambda_i \in \Lambda_i} W^i_{\lambda_i}, \quad (i = 1, \cdots, n)$$

とおく．$\left(u^i_{\lambda_i}\right)_{\lambda_i \in \Lambda_i}$ は E_i の基底であるから，任意の $e_i \in E_i$ に対し $v_i \in V_i$ がただ一つ定まり，

$$f_i : E_i \ni e_i \longmapsto v_i \in V_i$$

により定める線型写像 f_i は同型写像である．このとき，写像のテンソル積

$$f_1 \otimes \cdots \otimes f_n : \bigotimes_{i=1}^n E_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n V_i$$

は線型同型となる．実際，f_i の逆写像 f_i^{-1} のテンソル積

$$f_1^{-1} \otimes \cdots \otimes f_n^{-1} : \bigotimes_{i=1}^n V_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n E_i$$

によって，全ての $(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) \in \bigotimes_{i=1}^n E_i$ 及び $(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \in \bigotimes_{i=1}^n V_i$ に対し

$$\begin{aligned}
&f_1^{-1} \otimes \cdots \otimes f_n^{-1} \circ f_1 \otimes \cdots \otimes f_n(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) \\
&\qquad = f_1^{-1} \otimes \cdots \otimes f_n^{-1} \left(f_1(e_1) \otimes \cdots \otimes f_n(e_n)\right) = (e_1 \otimes \cdots \otimes e_n), \\
&f_1 \otimes \cdots \otimes f_n \circ f_1^{-1} \otimes \cdots \otimes f_n^{-1}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \\
&\qquad = f_1 \otimes \cdots \otimes f_n \left(f_1^{-1}(v_1) \otimes \cdots \otimes f_n^{-1}(v_n)\right) = (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)
\end{aligned}$$

が成立し，それぞれ $\bigotimes_{i=1}^n E_i$ と $\bigotimes_{i=1}^n V_i$ を生成するから

$$(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)^{-1} = f_1^{-1} \otimes \cdots \otimes f_n^{-1}$$

の関係を得る．

第二段　$\bigotimes_{i=1}^n V_i$ と $\bigoplus_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n} W^1_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes W^n_{\lambda_n}$ が線型同型であることを示す．先ず

$$g : \sum_j (v_1^j \otimes \cdots \otimes v_n^j) \longmapsto \sum_j \left(v_1^j(\lambda_1) \otimes \cdots \otimes v_n^j(\lambda_n)\right)_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n}$$

により線型写像 $g : \bigotimes_{i=1}^n V_i \longrightarrow \bigoplus_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n} W^1_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes W^n_{\lambda_n}$ を定める．また

$$\iota_{\lambda_i} : W^i_{\lambda_i} \longrightarrow V_i, \quad (\lambda_i \in \Lambda_i,\ i = 1, \cdots, n)$$

を次の標準単射として定める:

$$\iota_{\lambda_i}(u)(\lambda) = \begin{cases} u, & (\lambda = \lambda_i), \\ 0, & (\lambda \neq \lambda_i), \end{cases} \quad (\lambda \in \Lambda_i,\ u \in W^i_{\lambda_i}).$$

ι_{λ_i} は線型であるから $\iota_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \iota_{\lambda_n} : W^1_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes W^n_{\lambda_n} \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n V_i$ を定義出来て，

$$h : w \longmapsto \sum_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n} \iota_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \iota_{\lambda_n} \left(w(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)\right)$$

により線型写像 $h: W^1_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes W^n_{\lambda_n} \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n V_i$ が定めれば $g^{-1} = h$ が成り立つ．実際，

$$\begin{aligned} g \circ h(w) &= g\left(\sum_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n} \iota_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \iota_{\lambda_n} (w(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)) \right) \\ &= \sum_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n} g\left(\iota_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \iota_{\lambda_n} (w(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)) \right) \\ &= w \end{aligned}$$

が任意の $w \in \bigoplus_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n} W^1_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes W^n_{\lambda_n}$ に対して成立し，かつ任意の $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ に対し

$$\begin{aligned} h \circ g(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) &= \sum_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n} \iota_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \iota_{\lambda_n} (v_1(\lambda_1) \otimes \cdots \otimes v_n(\lambda_n)) \\ &= \sum_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n} \iota_{\lambda_1}(v_1(\lambda_1)) \otimes \cdots \otimes \iota_{\lambda_n}(v_n(\lambda_n)) \\ &= \left(\sum_{\lambda_1 \in \Lambda_1} \iota_{\lambda_1}(v_1(\lambda_1)) \right) \otimes \cdots \otimes \left(\sum_{\lambda_n \in \Lambda_n} \iota_{\lambda_n}(v_n(\lambda_n)) \right) \\ &= v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \end{aligned}$$

が成り立つから $g^{-1} = h$ が従う．よって g は線型同型である．

第三段　いま，$g \circ f_1 \otimes \cdots \otimes f_n$ によって $\bigotimes_{i=1}^n E_i$ と $\bigoplus_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n} W^1_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes W^n_{\lambda_n}$ は同型に対応し，

$$w_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n}(\nu_1, \cdots, \nu_n) := \begin{cases} u^1_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes u^n_{\lambda_n}, & (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = (\nu_1, \cdots, \nu_n), \\ 0, & (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \neq (\nu_1, \cdots, \nu_n) \end{cases}$$

として $w_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n}$ を定めれば

$$u^1_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes u^n_{\lambda_n} \xmapsto{g \circ f_1 \otimes \cdots \otimes f_n} w_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n}$$

が成り立つ．$(w_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n})$ の一次独立性から $\left(u^1_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes u^n_{\lambda_n} \right)_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n}$ の一次独立性が従う．