

# テンソル積のノルム

## 平井さん講義まとめ

基礎工学研究科システム創成専攻  
学籍番号 29C17095  
百合川尚学

2018 年 5 月 2 日

# 目次

0.1	notation . . . . .	1
0.2	テンソル積 . . . . .	1
0.3	テンソル積の内積 . . . . .	9
0.4	クロスノルム . . . . .	9

## 0.1 notation

以下, 零元のみの線型空間は考えない.  $E, E_i, F$  を体  $\mathbb{K}$  上の線形空間とすると,  $\text{Hom}(E, F)$  で  $E$  から  $F$  への  $\mathbb{K}$ -線型写像の全体を表し, 特に  $F = \mathbb{K}$  のとき  $E^\#$  と書く. また  $\text{Hom}^{(n)}(E_1 \times \cdots \times E_n, F)$  で  $E_1 \times \cdots \times E_n$  から  $F$  への  $\mathbb{K}$ - $n$  重線型写像の全体を表す.

## 0.2 テンソル積

$n \geq 2$  とする. 体  $\mathbb{K}$  上の線形空間の族  $(E_i)_{i=1}^n$  に対してテンソル積を定めたい.

$$\Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right) = \left\{ b : \bigoplus_{i=1}^n E_i \longrightarrow \mathbb{K} ; \quad \text{有限個の } e \in \bigoplus_{i=1}^n E_i \text{ を除いて } b(e) = 0. \right\}$$

により  $\mathbb{K}$ -線形空間  $\Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right)$  を定める. また  $e = (e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i$  に対する定義関数を

$$\mathbb{I}_{e_1, \dots, e_n}(x) = \begin{cases} 1, & x = e, \\ 0, & x \neq e \end{cases}$$

で表す.  $\Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right)$  の線型部分空間を

$$\begin{aligned} & \Lambda_0\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right) \\ &:= \text{Span} \left[ \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{I}_{e_1, \dots, e_i + e'_i, \dots, e_n} - \mathbb{I}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n} - \mathbb{I}_{e_1, \dots, e'_i, \dots, e_n}, \\ \mathbb{I}_{e_1, \dots, \lambda e_i, \dots, e_n} - \lambda \mathbb{I}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n} \end{array} ; \quad e_i, e'_i \in E_i, \lambda \in \mathbb{K}, 1 \leq i \leq n \right\} \right] \end{aligned}$$

により定め,  $b \in \Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right)$  の  $\Lambda_0\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right)$  に関する同値類を  $[b]$  と書く. そして

$$E_1 \otimes \cdots \otimes E_n = \bigotimes_{i=1}^n E_i := \Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right) / \Lambda_0\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right)$$

で定める商空間を  $(E_i)_{i=1}^n$  のテンソル積と定義する. また  $(e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i$  に対し

$$e_1 \otimes \cdots \otimes e_n := [\mathbb{I}_{e_1, \dots, e_n}]$$

により定める  $\otimes : \bigoplus_{i=1}^n E_i \rightarrow \bigotimes_{i=1}^n E_i$  をテンソル積の標準写像と呼ぶ。

定理 0.2.1 (標準写像の多重線型性).  $(E_i)_{i=1}^n$  を  $\mathbb{K}$ -線形空間の族とするととき,

$$\otimes : \bigoplus_{i=1}^n E_i \ni (e_1, \dots, e_n) \mapsto e_1 \otimes \dots \otimes e_n \in \bigotimes_{i=1}^n E_i$$

は  $n$  重線型写像である。また次が成り立つ:

$$\bigotimes_{i=1}^n E_i = \text{Span} \left[ \left\{ e_1 \otimes \dots \otimes e_n ; \quad (e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i \right\} \right]. \quad (1)$$

証明. 任意の  $1 \leq i \leq n$ ,  $e_1 \in E_1, \dots, e_n \in E_n$ ,  $e_i, e'_i \in E_i$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$  に対して

$$\begin{aligned} e_1 \otimes \dots \otimes (e_i + e'_i) \otimes \dots \otimes e_n &= [\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i + e'_i, \dots, e_n}] \\ &= [\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n} + \mathbb{1}_{e_1, \dots, e'_i, \dots, e_n}] \\ &= [\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n}] + [\mathbb{1}_{e_1, \dots, e'_i, \dots, e_n}] \\ &= e_1 \otimes \dots \otimes e_i \otimes \dots \otimes e_n + e_1 \otimes \dots \otimes e'_i \otimes \dots \otimes e_n, \\ e_1 \otimes \dots \otimes (\lambda e_i) \otimes \dots \otimes e_n &= [\mathbb{1}_{e_1, \dots, \lambda e_i, \dots, e_n}] \\ &= [\lambda \mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n}] \\ &= \lambda [\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n}] \\ &= \lambda (e_1 \otimes \dots \otimes e_i \otimes \dots \otimes e_n) \end{aligned}$$

が成立するから  $\otimes$  は多重線型である。また任意に  $u = [b] \in E \otimes F$  を取れば

$$b = \sum_{j=1}^m k_j \mathbb{1}_{e_i^j, \dots, e_n^j}, \quad (k_j = b(e_i^j, \dots, e_n^j), j = 1, \dots, m)$$

と表せるから,

$$u = \left[ \sum_{j=1}^m k_j \mathbb{1}_{e_i^j, \dots, e_n^j} \right] = \left[ \sum_{j=1}^m \mathbb{1}_{k_j e_i^j, \dots, e_n^j} \right] = \sum_{j=1}^m (k_j e_1^j) \otimes \dots \otimes e_n^j$$

が従い (1) を得る。 ■

定理 0.2.2 ( $\dots \otimes 0 \otimes \dots$  は零ベクトル).  $(E_i)_{i=1}^n$  を  $\mathbb{K}$ -線形空間の族とし, テンソル積  $\bigotimes_{i=1}^n E_i$  を定める。このとき, 或る  $i$  で  $e_i = 0$  なら  $e_1 \otimes \dots \otimes e_n = 0$  が成り立つ。

証明.  $e_i = 0$  のとき,  $\lambda = 0$  とすれば

$$e_1 \otimes \dots \otimes e_n = [\mathbb{1}_{e_1, \dots, 0, \dots, e_n}] = [\mathbb{1}_{e_1, \dots, \lambda e_i, \dots, e_n} - \lambda \mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n}] = 0$$

が成立する。 ■

定理 0.2.3 (普遍性 (universality of tensor products)).  $(E_i)_{i=1}^n$  を  $\mathbb{K}$ -線形空間の族とする. このとき任意の  $\mathbb{K}$ -線形空間  $V$  に対して,  $T \in \text{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n E_i, V\right)$  ならば  $T \circ \otimes \in \text{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$  が満たされ, これで定める次の対応  $\Phi$  は線型同型である:

$$\begin{array}{ccc} \Phi : \text{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n E_i, V\right) & \longrightarrow & \text{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right) \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ T & \longmapsto & T \circ \otimes \end{array} \quad (2)$$

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=1}^n E_i & & \\ \downarrow \otimes & \searrow \Phi(T) & \\ \bigotimes_{i=1}^n E_i & \xrightarrow{T} & V \end{array} \quad \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \cup \end{array}$$

また  $\mathbb{K}$ -線形空間  $U_0$  と多重線型写像  $\iota : \bigoplus_{i=1}^n E_i \longrightarrow U_0$  が, 任意の  $\mathbb{K}$ -線形空間  $V$  に対し

( $\otimes$ )<sub>1</sub>  $U_0$  は  $\iota$  の像で生成される.

( $\otimes$ )<sub>2</sub> 任意の  $\delta \in \text{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$  に対して或る  $\tau \in \text{Hom}(U_0, V)$  が  $\delta = \tau \circ \iota$  を満たす.

を満たすなら, (2) において  $V = U_0$  とするとき  $T = \Phi^{-1}(\iota)$  は線型同型である.

後半の主張により,  $(E_i)_i$  のテンソル積を別の方法で導入しても, 商空間を用いて導入した  $\bigotimes_i E_i$  と線型同型に結ばれる. このとき, 別の方法で導入したテンソル積及び標準写像を  $\bigotimes_i \tilde{E}_i$ ,  $\tilde{\otimes}$  と表せば, 或る線型同型  $T : \bigotimes_i E_i \longrightarrow \bigotimes_i \tilde{E}_i$  がただ一つ存在して

$$T(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) = e_1 \tilde{\otimes} \cdots \tilde{\otimes} e_n$$

を満たす. 特に任意の並べ替え  $\varphi : \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$  に対し

$$\begin{array}{ccc} \bigotimes_{i=1}^n E_i & \cong & \bigotimes_{i=1}^n E_{\varphi(i)} \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ e_1 \otimes \cdots \otimes e_n & \longleftrightarrow & e_{\varphi(1)} \otimes \cdots \otimes e_{\varphi(n)} \end{array}$$

が成立する.

証明.

第一段  $T \in \text{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n E_i, V\right)$  の線型性と  $\otimes$  の多重線型性より  $T \circ \otimes$  は多重線型である.

第二段  $\Phi(T_1) = \Phi(T_2)$  ならば  $T_1$  と  $T_2$  は  $\{e_1 \otimes \cdots \otimes e_n ; (e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i\}$  の上で一致する. (1) より  $T_1 = T_2$  が成立し  $\Phi$  の単射性が従う.

第三段 次の二段で  $\Phi$  の全射性を示す. まず,  $\varphi \in \text{Hom}\left(\Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right), V\right)$  に対し

$$g : \bigoplus_{i=1}^n E_i \ni (e_1, \dots, e_n) \longmapsto \varphi(\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_n}) \in V$$

を対応させる次の写像が全単射であることを示す:

$$\begin{array}{ccc} F : \text{Hom}\left(\Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right), V\right) & \longrightarrow & \text{Map}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right) \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ \varphi & \longmapsto & g \end{array}$$

$F(\varphi_1) = F(\varphi_2)$  のとき, 任意の  $e \in \bigoplus_{i=1}^n E_i$  に対して  $\varphi_1(\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_n}) = \varphi_2(\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_n})$  が成り立ち,

$$\Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right) = \text{Span}\left[\left\{\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_n} ; \quad (e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i\right\}\right]$$

であるから  $\varphi_1 = \varphi_2$  が従い  $F$  の単射性を得る. また  $g \in \text{Map}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$  に対して

$$\varphi(a) := \sum_{\substack{e \in \bigoplus_{i=1}^n E_i \\ a(e) \neq 0}} a(e)g(e), \quad (a \in \Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right))$$

により  $\varphi$  を定めれば,  $\varphi \in \text{Hom}\left(\Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right), V\right)$  が満たされ  $F$  の全射性が従う.

第四段 任意に  $b \in \text{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$  を取り  $h := F^{-1}(b)$  とおけば,  $h$  の線型性より

$$\begin{aligned} & b(e_1, \dots, e_i + e'_i, \dots, e_n) - b(e_1, \dots, e_i, \dots, e_n) - b(e_1, \dots, e'_i, \dots, e_n) \\ &= h(\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i + e'_i, \dots, e_n} - \mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n} - \mathbb{1}_{e_1, \dots, e'_i, \dots, e_n}), \\ & b(e_1, \dots, \lambda e_i, \dots, e_n) - \lambda b(e_1, \dots, e_i, \dots, e_n) \\ &= h(\mathbb{1}_{e_1, \dots, \lambda e_i, \dots, e_n} - \lambda \mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n}) \end{aligned}$$

が成り立ち,  $b$  の双線型性により  $h$  は  $\Lambda_0\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right)$  上で 0 である. 従って

$$T([b]) := h(b), \quad (b \in \Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right))$$

で定める  $T$  は well-defined であり,  $T \in \text{Hom}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$  かつ

$$b(e_1, \dots, e_n) = h(\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_n}) = (T \circ \otimes)(e_1, \dots, e_n), \quad (\forall (e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i)$$

が満たされ  $\Phi$  の全射性が得られる.

第五段  $(\otimes)_1, (\otimes)_2$  の下で  $\text{Hom}\left(U_0, \bigotimes_{i=1}^n E_i\right) \ni \tau \mapsto \tau \circ \iota \in \text{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, \bigotimes_{i=1}^n E_i\right)$  は全単射であるから,  $\tau \circ \iota = \otimes$  を満たす  $\tau \in \text{Hom}\left(U_0, \bigotimes_{i=1}^n E_i\right)$  がただ一つ存在する. 同様にして  $\iota = T \circ \otimes$  を満たす  $T \in \text{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n E_i, U_0\right)$  がただ一つ存在し, 併せれば

$$\otimes = \tau \circ \iota = (\tau \circ T) \circ \otimes, \quad \iota = T \circ \otimes = (T \circ \tau) \circ \iota$$

が成り立ち,  $T \mapsto T \circ \otimes, \tau \mapsto \tau \circ \iota$  が一対一であるから  $\tau \circ T, T \circ \tau$  はそれぞれ恒等写像に一致して  $T^{-1} = \tau$  が従う. すなわち  $T$  は  $\bigotimes_{i=1}^n E_i$  から  $U_0$  への線型同型である. ■

定理 0.2.4 (スカラーとのテンソル積).  $E$  を  $\mathbb{K}$ -線型空間とすると,  $\mathbb{K} \otimes E$  と  $E$  は  $f(\alpha \otimes e) = \alpha e$  を満たす線型写像  $f: \mathbb{K} \otimes E \rightarrow E$  により同型となる.

証明. スカラ倍  $\iota: (\alpha, e) \mapsto \alpha e$  は双線型である. また定理 0.2.3 の  $(\otimes)_1, (\otimes)_2$  について,

$$E = \text{Span}[\{\alpha e ; \quad \alpha \in \mathbb{K}, e \in E\}]$$

より  $(\otimes)_1$  が得られ, かつ任意の双線型写像  $\delta: \mathbb{K} \times E \rightarrow V$  に対し

$$f(e) := \delta(1, e), \quad (\forall e \in E)$$

で線型写像  $f: E \rightarrow V$  を定めれば,

$$f \circ \iota(\alpha, e) = f(\alpha e) = \delta(1, \alpha e) = \alpha \delta(1, e) = \delta(\alpha, e)$$

が成り立つから  $(\otimes)_2$  が満たされる. ■

**定義 0.2.5 (線型写像のテンソル積).**  $(E_i)_{i=1}^n$  と  $(F_i)_{i=1}^n$  を  $\mathbb{K}$ -線型空間の族とする.  $f_i: E_i \rightarrow F_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) が線型写像であるとき,

$$b: \bigoplus_{i=1}^n E_i \ni (e_1, \dots, e_n) \mapsto f_1(e_1) \otimes \dots \otimes f_n(e_n) \in \bigotimes_{i=1}^n F_i$$

により定める  $b$  は  $n$  重線型であり, 定理 0.2.3 より  $b = g \circ \otimes$  を満たす  $g: \bigotimes_{i=1}^n E_i \rightarrow \bigotimes_{i=1}^n F_i$  がただ一つ存在する.  $g$  を  $f_1 \otimes \dots \otimes f_n$  と表記して線型写像のテンソル積と定義する. いま,

$$f_1 \otimes \dots \otimes f_n(e_1 \otimes \dots \otimes e_n) = f_1(e_1) \otimes \dots \otimes f_n(e_n), \quad (\forall (e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i)$$

が成り立つ.

**定理 0.2.6 (テンソル積の基底).**  $(E_i)_{i=1}^n$  を  $\mathbb{K}$ -線型空間の族とし,  $E_i$  の基底を  $(u_{\lambda_i}^i)_{\lambda_i \in \Lambda_i}$  とする ( $i = 1, \dots, n$ ). このとき  $(u_{\lambda_1}^1 \otimes \dots \otimes u_{\lambda_n}^n)_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$  は  $\bigotimes_{i=1}^n E_i$  の基底となる.

**証明.**

**第一段** 各  $u_{\lambda_i}^i$  の生成する一次元空間を  $W_{\lambda_i}^i := \mathbb{K}u_{\lambda_i}^i$  と表し

$$V_i := \bigoplus_{\lambda_i \in \Lambda_i} W_{\lambda_i}^i, \quad (i = 1, \dots, n)$$

とおく.  $(u_{\lambda_i}^i)_{\lambda_i \in \Lambda_i}$  は  $E_i$  の基底であるから, 任意の  $e_i \in E_i$  に対し  $v_i \in V_i$  がただ一つ定まり,

$$f_i: E_i \ni e_i \mapsto v_i \in V_i$$

により定める線型写像  $f_i$  は同型写像である. このとき, 写像のテンソル積

$$f_1 \otimes \dots \otimes f_n: \bigotimes_{i=1}^n E_i \rightarrow \bigotimes_{i=1}^n V_i$$

は線型同型となる. 実際,  $f_i$  の逆写像  $f_i^{-1}$  のテンソル積

$$f_1^{-1} \otimes \dots \otimes f_n^{-1}: \bigotimes_{i=1}^n V_i \rightarrow \bigotimes_{i=1}^n E_i$$

によって、全ての  $(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) \in \bigotimes_{i=1}^n E_i$  及び  $(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \in \bigotimes_{i=1}^n V_i$  に対し

$$\begin{aligned} & f_1^{-1} \otimes \cdots \otimes f_n^{-1} \circ f_1 \otimes \cdots \otimes f_n(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) \\ &= f_1^{-1} \otimes \cdots \otimes f_n^{-1}(f_1(e_1) \otimes \cdots \otimes f_n(e_n)) = (e_1 \otimes \cdots \otimes e_n), \\ & f_1 \otimes \cdots \otimes f_n \circ f_1^{-1} \otimes \cdots \otimes f_n^{-1}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \\ &= f_1 \otimes \cdots \otimes f_n(f_1^{-1}(v_1) \otimes \cdots \otimes f_n^{-1}(v_n)) = (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \end{aligned}$$

が成立し、それぞれ  $\bigotimes_{i=1}^n E_i$  と  $\bigotimes_{i=1}^n V_i$  を生成するから

$$(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)^{-1} = f_1^{-1} \otimes \cdots \otimes f_n^{-1}$$

の関係を得る.

第二段  $\bigotimes_{i=1}^n V_i$  と  $\bigoplus_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} W_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes W_{\lambda_n}^n$  が線型同型であることを示す. 先ず

$$g : \sum_j (v_1^j \otimes \cdots \otimes v_n^j) \mapsto \sum_j (v_1^j(\lambda_1) \otimes \cdots \otimes v_n^j(\lambda_n))_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$$

により線型写像  $g : \bigotimes_{i=1}^n V_i \longrightarrow \bigoplus_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} W_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes W_{\lambda_n}^n$  を定める. また

$$\iota_{\lambda_i} : W_{\lambda_i}^i \longrightarrow V_i, \quad (\lambda_i \in \Lambda_i, i = 1, \dots, n)$$

を次の標準単射として定める:

$$\iota_{\lambda_i}(u)(\lambda) = \begin{cases} u, & (\lambda = \lambda_i), \\ 0, & (\lambda \neq \lambda_i), \end{cases} \quad (\lambda \in \Lambda_i, u \in W_{\lambda_i}^i).$$

$\iota_{\lambda_i}$  は線型であるから  $\iota_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \iota_{\lambda_n} : W_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes W_{\lambda_n}^n \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n V_i$  を定義出来て,

$$h : w \mapsto \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} \iota_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \iota_{\lambda_n} (w(\lambda_1, \dots, \lambda_n))$$

により線型写像  $h : W_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes W_{\lambda_n}^n \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n V_i$  が定めれば  $g^{-1} = h$  が成り立つ. 実際,

$$\begin{aligned} g \circ h(w) &= g \left( \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} \iota_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \iota_{\lambda_n} (w(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) \right) \\ &= \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} g(\iota_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \iota_{\lambda_n} (w(\lambda_1, \dots, \lambda_n))) \\ &= w \end{aligned}$$

が任意の  $w \in \bigoplus_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} W_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes W_{\lambda_n}^n$  に対して成立し、かつ任意の  $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$  に対し

$$\begin{aligned} h \circ g(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) &= \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} \iota_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \iota_{\lambda_n} (v_1(\lambda_1) \otimes \cdots \otimes v_n(\lambda_n)) \\ &= \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} \iota_{\lambda_1}(v_1(\lambda_1)) \otimes \cdots \otimes \iota_{\lambda_n}(v_n(\lambda_n)) \\ &= \left( \sum_{\lambda_1 \in \Lambda_1} \iota_{\lambda_1}(v_1(\lambda_1)) \right) \otimes \cdots \otimes \left( \sum_{\lambda_n \in \Lambda_n} \iota_{\lambda_n}(v_n(\lambda_n)) \right) \\ &= v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \end{aligned}$$

が成り立つから  $g^{-1} = h$  が従う. よって  $g$  は線型同型である.

第三段 いま,  $g \circ f_1 \otimes \cdots \otimes f_n$  によって  $\bigotimes_{i=1}^n E_i$  と  $\bigoplus_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} W_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes W_{\lambda_n}^n$  は同型に対応し,

$$w_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}(v_1, \dots, v_n) := \begin{cases} u_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes u_{\lambda_n}^n, & (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (v_1, \dots, v_n), \\ 0, & (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (v_1, \dots, v_n) \end{cases}$$

として  $w_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$  を定めれば

$$u_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes u_{\lambda_n}^n \xrightarrow{g \circ f_1 \otimes \cdots \otimes f_n} w_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$$

が成り立つ.  $(w_{\lambda_1, \dots, \lambda_n})$  の一次独立性から  $(u_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes u_{\lambda_n}^n)_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$  の一次独立性が従う.

定理 0.2.7 (結合律).  $(E_i)_{i=1}^n$  を  $\mathbb{K}$ -線型空間の族とする. 任意の  $k = 1, \dots, n-1$  に対し,

$$\bigotimes_{i=1}^n E_i = \left( \bigotimes_{i=1}^k E_i \right) \otimes \left( \bigotimes_{i=k+1}^n E_i \right)$$

が成立する.

証明.

第一段  $n$  重線型写像  $f: \bigoplus_{i=1}^n E_i \rightarrow \left( \bigotimes_{i=1}^k E_i \right) \otimes \left( \bigotimes_{i=k+1}^n E_i \right)$  を

$$f(e_1, \dots, e_n) = (e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n), \quad (\forall (e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i)$$

により定めれば, 定理 0.2.3 より

$$F: (e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) \mapsto (e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n)$$

を満たす線型写像  $F: \bigotimes_{i=1}^n E_i \rightarrow \left( \bigotimes_{i=1}^k E_i \right) \otimes \left( \bigotimes_{i=k+1}^n E_i \right)$  が存在する:

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=1}^n E_i & & \\ \downarrow \otimes & \searrow f & \\ \bigotimes_{i=1}^n E_i & \xrightarrow{F} & \left( \bigotimes_{i=1}^k E_i \right) \otimes \left( \bigotimes_{i=k+1}^n E_i \right) \end{array}$$

以降は  $F$  の逆写像を構成し  $F$  が全単射であることを示す.

第二段  $u_{k+1} \in E_{k+1}, \dots, u_n \in E_n$  を固定し

$$\Phi_{u_{k+1}, \dots, u_n}(e_1, \dots, e_n) := e_1 \otimes \cdots \otimes e_k \otimes u_{k+1} \otimes \cdots \otimes u_n$$

によって  $n$  重線型  $\Phi_{u_{k+1}, \dots, u_n}: \bigoplus_{i=1}^k E_i \rightarrow \bigotimes_{i=1}^n E_i$  を定めれば, 定理 0.2.3 より

$$G_{u_{k+1}, \dots, u_n}(e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) = e_1 \otimes \cdots \otimes e_k \otimes u_{k+1} \otimes \cdots \otimes u_n$$



を満たす線型写像  $G_{u_{k+1}, \dots, u_n} : \bigotimes_{i=1}^k E_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n E_i$  が存在する.

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=1}^k E_i & & \\ \downarrow \otimes & \searrow \Phi_{u_{k+1}, \dots, u_n} & \\ \bigotimes_{i=1}^k E_i & \xrightarrow{G_{u_{k+1}, \dots, u_n}} & \bigotimes_{i=1}^n E_i \end{array}$$

第三段 任意の  $v \in \bigotimes_{i=k+1}^n E_i$  に対して

$$\Psi_v : \bigoplus_{i=k+1}^n E_i \ni (u_{k+1}, \dots, u_n) \longmapsto G_{u_{k+1}, \dots, u_n}(v)$$

を定めれば,  $\Psi_v$  は  $n$  重線型であるから, 定理 0.2.3 より

$$H_v(u_{k+1} \otimes \dots \otimes u_n) = \Psi_v(u_{k+1}, \dots, u_n)$$

を満たす線型写像  $H_v : \bigotimes_{i=k+1}^n E_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n E_i$  が存在する.

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=k+1}^n E_i & & \\ \downarrow \otimes & \searrow \Psi_v & \\ \bigotimes_{i=k+1}^n E_i & \xrightarrow{H_v} & \bigotimes_{i=1}^n E_i \end{array}$$

いま,  $v \mapsto \Psi_v$  は線型であり, かつ  $\Psi_v$  と  $H_v$  は線型同型で結ばれているから  $v \mapsto H_v$  の線型性が従う.

第四段  $H_v$  の線型性と  $v \mapsto H_v$  の線型性より

$$\Gamma : \left( \bigotimes_{i=1}^k E_i \right) \times \left( \bigotimes_{i=k+1}^n E_i \right) \ni (v, w) \longmapsto H_v(w)$$

により定める  $\Gamma$  は

$$\begin{aligned} \Gamma(e_1 \otimes \dots \otimes e_k, e_{k+1} \otimes \dots \otimes e_n) &= H_{e_1 \otimes \dots \otimes e_k}(e_{k+1} \otimes \dots \otimes e_n) \\ &= \Psi_{e_1 \otimes \dots \otimes e_k}(e_{k+1}, \dots, e_n) \\ &= G_{e_{k+1}, \dots, e_n}(e_1 \otimes \dots \otimes e_k) \\ &= \Phi_{e_{k+1}, \dots, e_n}(e_1, \dots, e_k) \\ &= e_1 \otimes \dots \otimes e_n \end{aligned} \tag{3}$$

を満たす双線型であり, 定理 0.2.3 より

$$\begin{array}{ccc} \left( \bigotimes_{i=1}^k E_i \right) \times \left( \bigotimes_{i=k+1}^n E_i \right) & & \\ \downarrow \otimes & \searrow \Gamma & \\ \left( \bigotimes_{i=1}^k E_i \right) \otimes \left( \bigotimes_{i=k+1}^n E_i \right) & \xrightarrow{G} & \bigotimes_{i=1}^n E_i \end{array}$$

を可換にする線型写像  $G$  が存在する. この  $G$  は  $F$  の逆写像である. 実際, (3) より

$$\begin{aligned} F \circ G((e_1 \otimes \dots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \dots \otimes e_n)) &= F(\Gamma(e_1 \otimes \dots \otimes e_k, e_{k+1} \otimes \dots \otimes e_n)) \\ &= F(e_1 \otimes \dots \otimes e_n) \\ &= (e_1 \otimes \dots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \dots \otimes e_n) \end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned} G \circ F(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) &= G((e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n)) \\ &= \Gamma(e_1 \otimes \cdots \otimes e_k, e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n) \\ &= e_1 \otimes \cdots \otimes e_n \end{aligned}$$

が得られ  $F^{-1} = G$  が従う.

■

### 0.3 テンソル積の内積

### 0.4 クロスノルム