テンソル積のノルム
平井さん講義まとめ

基礎工学研究科システム創成専攻
学籍番号 29C17095
百合川尚学

2018 年 4 月 23 日

目次

0.1　テンソル積の導入

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ または $\mathbb{R}$ と考える．E, F を $\mathbb{K}$ 上の線形空間とするとき，テンソル積 $E \otimes F$ を定めたい．

$$\Lambda(E \times F) = \{\, b : E \times F \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\quad \text{有限個の } (e, f) \in E \times F \text{ を除いて } b(e, f) = 0.\,\}$$

により $\Lambda(E \times F)$ を定める．また $(e, f) \in E \times F$ に対する定義関数

$$\mathbb{1}_{(e,f)}(g, h) = \begin{cases} 1, & (e, f) = (g, h), \\ 0, & (e, f) \neq (g, h) \end{cases}$$

は $\mathbb{1}_{(e,f)} \in \Lambda(E \times F)$ を満たす．$\Lambda(E \times F)$ が $\mathbb{K}$-線形空間をなすことにより

$$\Lambda_0(E \times F) \coloneqq \operatorname{span}\left[\left\{ \begin{array}{c} \mathbb{1}_{(e+e',f)} - \mathbb{1}_{(e,f)} - \mathbb{1}_{(e',f)}, \\ \mathbb{1}_{(e,f+f')} - \mathbb{1}_{(e,f)} - \mathbb{1}_{(e,f')}, \\ \mathbb{1}_{(\lambda e,f)} - \lambda\, \mathbb{1}_{(e,f)}, \\ \mathbb{1}_{(e,\lambda f)} - \lambda\, \mathbb{1}_{(e,f)} \end{array} ;\quad e, e' \in E, f, f' \in F, \lambda \in \mathbb{K} \right\}\right]$$

は $\Lambda(E \times F)$ の線型部分空間である．$b \in \Lambda(E \times F)$ の $\Lambda_0(E \times F)$ に関する同値類を $[b]$ で表す．

定義 0.1.1 (テンソル積).　$\mathbb{K}$-線形空間 E, F のテンソル積を

$$E \otimes F \coloneqq \Lambda(E \times F)/\Lambda_0(E \times F)$$

で定める．また $(e, f) \in E \times F$ に対するテンソル積を

$$e \otimes f \coloneqq \left[\mathbb{1}_{(e,f)}\right]$$

により定める．

定理 0.1.2 (テンソル積は双線型・元の表現).　E, F を $\mathbb{K}$-線形空間とするとき，

$$\otimes : E \times F \ni (e, f) \longmapsto e \otimes f \in E \otimes F$$

は双線型である．また任意の $u \in E \otimes F$ は，或る有限個の $e_i \otimes f_i \in E \otimes F$ により

$$u = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes f_i$$

と書ける．

証明． $e, e' \in E,\ f, f' \in F,\ \lambda \in \mathbb{K}$ とする．$\Lambda_0(E \times F)$ の定義より

$$\mathbb{1}_{(e+e',f)} \equiv \mathbb{1}_{(e,f)} + \mathbb{1}_{(e',f)}, \qquad (\mathrm{mod}\ \Lambda_0(E \times F))$$

が満たされ $(e+e') \otimes f = e \otimes f + e' \otimes f$ が成立する．同様にして

$$\begin{aligned} e \otimes (f + f') &= e \otimes f + e \otimes f', \\ (\lambda e) \otimes f &= \lambda e \otimes f, \\ e \otimes (\lambda f) &= \lambda e \otimes f \end{aligned}$$

が従うので $\otimes$ は双線型である．また任意の $u \in E \otimes F$ に対し，その代表を $b \in \Lambda(E \times F)$ とすれば

$$b = \sum_{i=1}^{n} k_i \mathbb{1}_{(e_i, f_i)}, \quad (k_i = b(e_i, f_i),\ i = 1, 2, \cdots, n)$$

と表せるから

$$u = \left[\sum_{i=1}^{n} k_i \mathbb{1}_{(e_i, f_i)} \right] = \left[\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{(k_i e_i, f_i)} \right] = \sum_{i=1}^{n} (k_i e_i) \otimes f_i$$

を得る． ∎

定理 0.1.3. E, F, V を $\mathbb{K}$-線形空間とするとき，$\mathrm{Hom}\,(E \otimes F, V)$ と $\mathrm{Hom}^{(2)}\,(E \times F, V)$ は線型同型である．ただし Hom は線形写像全体，$\mathrm{Hom}^{(2)}$ は双線型写像全体を表す．

証明． 同型写像は

$$\Phi : \mathrm{Hom}\,(E \otimes F, V) \ni T \longmapsto T \circ \otimes \in \mathrm{Hom}^{(2)}\,(E \times F, V)$$

により与えられる．実際，