

ゼミ用ノート  
会田先生の資料 “Rough path analysis:An Introduction”

基礎工学研究科システム創成専攻  
学籍番号 29C17095  
百合川尚学

2018 年 6 月 1 日

# 目次

第 1 章	1
1.1 Introduction . . . . .	1
1.2 A continuity theorem of line integrals as a functional of paths . . . . .	5
1.3 Proof of continuity theorem . . . . .	13
1.4 The notion of rough path . . . . .	20
付録 A テンソル積・クロスノルム	32
A.1 ノルム空間上の有界多重線型写像 . . . . .	32
A.2 ノルム空間の完備拡大 . . . . .	36
A.3 テンソル積 . . . . .	39
A.4 クロスノルム . . . . .	47
A.5 テンソル積の内積 . . . . .	53
参考文献	57

# 第 1 章

## 1.1 Introduction

以下,  $d$  次元ベクトル  $x \in \mathbb{R}^d$  と  $(m, d)$  行列  $a \in \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^d$  について, 成分を込めて表現する場合は  $x = (x^1, \dots, x^d)$ ,  $a = (a_j^i)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq d}$  と書く. また  $T > 0$  を固定し  $C^1 = C^1([0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d)$  とおく. (端点においては片側微分を考える.)  $[s, t] \subset [0, T]$  の有限分割を  $D = \{s = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t\}$  で表現し, 有限分割の全体を  $\delta[s, t]$  とおく.  $|D| := \max_{1 \leq i \leq N} |t_i - t_{i-1}|$  とし,

$$\sum_D = \sum_{i=1}^N$$

と略記する. また線型空間を扱うときは零元のための空間は考えない.

**定理 1.1.1 (Riemann-Stieltjes 積分).**  $[s, t] \subset [0, T]$  とし,  $D \in \delta[s, t]$  についてのみ考えるとき, 任意の  $x \in C^1$ ,  $f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$  に対して次の極限が存在する:<sup>\*1</sup>

$$\lim_{|D| \rightarrow 0} \sum_D f(x_{s_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) \in \mathbb{R}^m.$$

$s_{i-1}$  は区間  $[t_{i-1}, t_i]$  に属する任意の点であり, 極限は  $s_{i-1}$  の取り方に依らない.

**証明.** 各  $x^j$  は  $C^1$ -級であるから, 平均値の定理より  $\sum_D f(x_{s_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})$  の第  $k$  成分を

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^d \sum_D f_j^k(x_{s_{i-1}})(x_{t_i}^j - x_{t_{i-1}}^j) \\ &= \sum_{j=1}^d \sum_D f_j^k(x_{s_{i-1}}) \dot{x}_{\xi_i}^j(t_i - t_{i-1}), \quad (\exists \xi_i \in [t_{i-1}, t_i]) \end{aligned}$$

と表現できる. 各  $j, k$  について

$$\lim_{|D| \rightarrow 0} \sum_D f_j^k(x_{s_{i-1}}) \dot{x}_{\xi_i}^j(t_i - t_{i-1})$$

は通常の連続関数の Riemann 積分

$$\int_s^t f_j^k(x_u) \dot{x}_u^j du$$

<sup>\*1</sup> 極限の存在を保証する条件としては,  $f$  の有界性と微分可能性は必要ない.

に収束する。

**定義 1.1.2** ( $C^1$ -級のパスに対する汎関数).  $x \in C^1$  と  $f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$  に対して,  $[s, t] \subset [0, T]$  における Riemann-Stieltjes 積分を  $I$  で表現する:

$$I_{s,t}(x) = \int_s^t f(x_u) dx_u := \lim_{|D| \rightarrow 0} \sum_D f(x_{t_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}),$$

$$\left[ \int_s^t f(x_u) dx_u \right]^k = \sum_{j=1}^d \int_s^t f_j^k(x_u) dx_u^j, \quad (k = 1, \dots, m).$$

ただし  $D \in \delta[s, t]$  のみを考える。

$C^1$  は次で定めるノルム  $\|\cdot\|_{C^1}$  により Banach 空間となる:

$$\|x\|_{C^1} := \sup_{t \in [0, T]} |x(t)| + \sup_{t \in [0, T]} |\dot{x}(t)|.$$

**定理 1.1.3** ( $\|\cdot\|_{C^1}$  に関する連続性).  $[s, t] \subset [0, T]$  とし,  $C^1$  には  $\|\cdot\|_{C^1}$  でノルム位相を入れる. このとき,  $C^1 \ni x \mapsto I_{s,t}(x) \in \mathbb{R}^m$  は連続である。

**証明.**  $C^1$  の第一可算性により点列連続性と連続性は一致するから,  $x^n \rightarrow x$  のとき  $I_{s,t}(x^n) \rightarrow I_{s,t}(x)$  が従うことを示せばよい. いま,  $M := \sup_{u \in [s, t]} |f(x_u)| < \infty$  とおけば

$$\begin{aligned} \left| \int_s^t f(x_u^n) dx_u^n - \int_s^t f(x_u) dx_u \right| &= \left| \int_s^t f(x_u^n) \dot{x}_u^n du - \int_s^t f(x_u) \dot{x}_u du \right| \\ &\leq \int_s^t |f(x_u^n) \dot{x}_u^n - f(x_u^n) \dot{x}_u| du + \int_s^t |f(x_u^n) \dot{x}_u - f(x_u) \dot{x}_u| du \\ &\leq M \|x^n - x\|_{C^1} (t - s) + \sup_{u \in [s, t]} |f(x_u^n) - f(x_u)| \|x\|_{C^1} (t - s) \end{aligned} \quad (1.1)$$

が成り立つ.  $\|x^n - x\|_{C^1} \rightarrow 0$  の仮定より  $(x^n)_{n=1}^\infty$  及び  $x$  の値域は或るコンパクト集合  $K$  に含まれるから,  $K$  上での  $f$  の一様連続性より任意の  $\epsilon > 0$  に対し或る  $\delta > 0$  が存在して  $v, w \in K$ ,  $|v - w| < \delta$  なら  $|f(v) - f(w)| < \epsilon$  が満たされる. すなわち  $\|x^n - x\|_{C^1} < \delta$  なら

$$\sup_{u \in [s, t]} |f(x_u^n) - f(x_u)| < \epsilon$$

が成立する.  $\|x^n - x\|_{C^1} \rightarrow 0$  より, 或る自然数  $N$  が存在して  $\|x^n - x\|_{C^1} < \delta$  ( $n > N$ ) が満たされるから, (1.1)  $< \epsilon[M(t - s) + \|x\|_{C^1}(t - s)]$  ( $n > N$ ) が成り立ち  $I_{s,t}(x^n) \rightarrow I_{s,t}(x)$  が従う。

**定義 1.1.4 ( $p$ -variation).**  $(V, \|\cdot\|)$  をノルム空間とし,  $[0, T]$  上の  $V$  値写像  $x$  と  $[s, t] \subset [0, T]$  に対して  $p$ -variation ( $p > 0$ ) を次で定める:

$$\|x\|_{p,[s,t]} := \left\{ \sup_{D \in \delta[s,t]} \sum_D \|x_{t_i} - x_{t_{i-1}}\|^p \right\}^{1/p}.$$

特に,  $\|\cdot\|_{p,[0,T]}$  を  $\|\cdot\|_p$  と表記する. また  $p \geq 1$  として, 線型空間  $B_{p,T}(V)$  を

$$B_{p,T}(V) := \left\{ x : [0, T] \longrightarrow V ; \quad x_0 = 0, x : \text{continuous}, \|x\|_p < \infty \right\}$$

により定める.

次の結果によれば,  $0 < p < 1$  に対し  $B_{p,T}(V)$  を定めても零写像のみの空間でしかない.

**定理 1.1.5 ( $0 < p < 1$  に対して有界  $p$ -variation なら定数).**  $x : [0, T] \longrightarrow V$  を連続写像とする. このとき,  $p \in (0, 1)$  に対し  $\|x\|_p < \infty$  が成り立つなら  $x$  は定数写像である.

**証明.**  $t \in [0, T]$  を任意に取り固定する. このとき全ての  $D \in \delta[0, t]$  に対して,

$$\begin{aligned} \|x_t - x_0\| &\leq \sum_D \|x_{t_i} - x_{t_{i-1}}\| \leq \max_D \|x_{t_i} - x_{t_{i-1}}\|^{1-p} \sum_D \|x_{t_i} - x_{t_{i-1}}\|^p \\ &\leq \max_D \|x_{t_i} - x_{t_{i-1}}\|^{1-p} \|x\|_p^p \end{aligned}$$

が成り立ち,  $x$  の一様連続性から右辺は  $|D| \rightarrow 0$  で 0 に収束し,  $x_t = x_0$  が従う. ■

**定理 1.1.6 ( $p$ -variation の  $p$  に関する単調減少性).**  $V$  をノルム空間とすると,  $x : [0, T] \longrightarrow V$  に対して  $1 \leq p \leq q$  なら  $\|x\|_p \geq \|x\|_q$  が成立する. 特に  $B_{p,T}(V) \subset B_{q,T}(V)$  である.

**証明.**  $a, b \geq 0, r \geq 1$  に対し  $a^r + b^r \leq (a+b)^r$  が成り立つから

$$\left[ \sum_{i=1}^n a_i^r \right]^{1/r} \leq \sum_{i=1}^n a_i, \quad (a_i \geq 0, n \geq 1, r \geq 1)$$

を得る. 従って任意の  $x : [0, T] \longrightarrow V$  と  $D \in \delta[0, T]$  に対し

$$\left[ \sum_D (\|x_{t_i} - x_{t_{i-1}}\|^p)^{q/p} \right]^{p/q} \leq \sum_D \|x_{t_i} - x_{t_{i-1}}\|^p$$

が満たされ  $\|x\|_q \leq \|x\|_p$  が成立する. ■

$p \geq 1$  の場合, Minkowski の不等式によれば, 任意の  $D \in \delta[s, t]$  に対し

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_D \|(x_{t_i} + y_{t_i}) - (x_{t_{i-1}} + y_{t_{i-1}})\|^p \right\}^{1/p} &\leq \left\{ \sum_D \|x_{t_i} - x_{t_{i-1}}\|^p \right\}^{1/p} + \left\{ \sum_D \|y_{t_i} - y_{t_{i-1}}\|^p \right\}^{1/p} \\ &\leq \|x\|_{p,[s,t]} + \|y\|_{p,[s,t]} \end{aligned}$$

が成り立ち  $\|x + y\|_{p,[s,t]} \leq \|x\|_{p,[s,t]} + \|y\|_{p,[s,t]}$  を得る.

定理 1.1.7.  $V$  が Banach 空間のとき,  $B_{p,T}(V)$  は  $\|\cdot\|_p$  をノルムとする Banach 空間である.

証明. 完備性を示す.

第一段  $(x^n)_{n=1}^\infty \subset B_{p,T}(V)$  を Cauchy 列とすれば, 任意の  $\epsilon > 0$  に対して或る  $n_\epsilon \in \mathbb{N}$  が存在し

$$\|x^n - x^m\|_p = \left\{ \sup_{D \in \delta[0,T]} \sum_D \left\| (x_{t_i}^n - x_{t_i}^m) - (x_{t_{i-1}}^n - x_{t_{i-1}}^m) \right\|^p \right\}^{1/p} < \epsilon, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

を満たす. いま, 任意の  $t \in [0, T]$  に対して  $[0, T]$  の分割  $D = \{0 \leq t \leq T\}$  を考えれば

$$\|x_t^n - x_t^m\| < \epsilon, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

が得られ,  $V$  の完備性より或る  $x_t \in \mathbb{R}^d$  が存在して

$$\|x_t^n - x_t\| < \epsilon \quad (n > n_\epsilon)$$

を満たす. この収束は  $t$  に関して一様であるから,  $t \mapsto x_t$  は 0 出発かつ連続である.

第二段  $\|x^n - x\|_p \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) を示す. 前段によれば, 任意の  $D \in \delta[0, T]$  に対し

$$\sum_D \left\| (x_{t_i}^m - x_{t_i}^n) - (x_{t_{i-1}}^m - x_{t_{i-1}}^n) \right\|^p < \epsilon^p, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

が成り立っている.  $D$  は有限分割であるから,  $m \rightarrow \infty$  として

$$\sum_D \left\| (x_{t_i} - x_{t_i}^n) - (x_{t_{i-1}} - x_{t_{i-1}}^n) \right\|^p < \epsilon^p, \quad (n > n_\epsilon)$$

が従い,  $D$  の任意性より  $\|x^n - x\|_p < \epsilon$  ( $n > n_\epsilon$ ) を得る. ■

定理 1.1.8.  $p \geq 1$  とする. また  $x_0 = 0$  を満たす  $x \in C^1$  の全体が作る線形空間を  $\tilde{C}^1$  とおく.

- (1)  $x \in C^1$  ならば  $\|x\|_p < \infty$  が成り立つ. ただちに,  $\|\cdot\|_p$  は  $\tilde{C}^1$  においてノルムとなる.
- (2)  $\tilde{C}^1$  において,  $\|\cdot\|_{C^1}$  で導入する位相は  $\|\cdot\|_p$  で導入する位相より強い.

証明.

$p = 1$  の場合 平均値の定理より, 任意の  $D \in \delta[0, T]$  に対し

$$\sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}| \leq \sum_D \|x\|_{C^1} (t_i - t_{i-1}) = \|x\|_{C^1} T < \infty$$

が成り立ち  $\|x\|_1 < \infty$  が従う.

$p > 1$  の場合  $q$  を  $p$  の共役指数とする. 任意の  $D \in \delta[0, T]$  に対し, Hölder の不等式より

$$\begin{aligned} \sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^p &= \sum_D \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{x}_u du \right|^p \leq \sum_D (t_i - t_{i-1}) \left( \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\dot{x}_u|^q du \right)^{p/q} \\ &\leq \sum_D (t_i - t_{i-1}) \left( \int_0^T \|x\|_{C^1}^q du \right)^{p/q} = \|x\|_{C^1}^p T^p \end{aligned}$$

が成立し,  $\|x\|_p < \infty$  が従う.

以上より,  $p \geq 1$  ならば  $\|x\|_p \leq T \|x\|_{C^1}$  ( $x \in C^1$ ) が成り立ち (2) の主張を得る. ■

次節の考察対象は主に定理 1.1.3 と定理 1.1.8 に関する. 定理 1.1.3 によれば,  $C^1$  に  $\|\cdot\|_{C^1}$  でノルム位相を導入した場合,  $f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$  に対して  $C^1 \ni x \mapsto I_{s,t}(x)$  は連続である. 一方で定理 1.1.3 によれば, 0 出発  $C^1$ -パス空間  $\tilde{C}^1$  に  $\|\cdot\|_p$  でノルム位相を導入した場合,  $\tilde{C}^1 \ni x \mapsto I_{s,t}(x)$  が連続であるという保証はない. しかし, 次節以後の結果により,  $1 \leq p < 3$  かつ  $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$  が満たされているなら  $\tilde{C}^1 \ni x \mapsto I_{s,t}(x)$  は或る意味での連続性を持つ.

## 1.2 A continuity theorem of line integrals as a functional of paths

定義 1.2.1 (記号の定義).  $x \in C^1$ ,  $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$  に対し次を定める.

$$\begin{aligned} \Delta_T &:= \{ (s, t) ; \quad 0 \leq s \leq t \leq T \}, \\ X^1 : \Delta_T &\longrightarrow \mathbb{R}^d \quad \left( (s, t) \mapsto X_{s,t}^1 = x_t - x_s \right), \\ X^2 : \Delta_T &\longrightarrow \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d \quad \left( (s, t) \mapsto X_{s,t}^2 = \int_s^t (x_u - x_s) \otimes dx_u \right), \\ \tilde{I}_{s,t}(x) &:= f(x_s) X_{s,t}^1 = f(x_s)(x_t - x_s), \\ J_{s,t}(x) &:= f(x_s) X_{s,t}^1 + (\nabla f)(x_s) X_{s,t}^2. \end{aligned}$$

以降,  $a, b, c, d \in \mathbb{R}^d$  に対して次の表現を使う:

$$\begin{aligned} [a \otimes b]_j^i &= a^i b^j, \\ [(\nabla f)(x_s) X_{s,t}^2]^i &= \sum_{j,k=1}^d \partial_k f_j^i(x_s) \int_s^t (x_u^k - x_s^k) dx_u^j, \\ [(\nabla f)(x_s)(a \otimes b)]^i &= \sum_{j,k=1}^d \partial_k f_j^i(x_s) a^k b^j, \\ [(\nabla^2 f)(x_s)(a \otimes b \otimes c)]^i &= \sum_{j,k,v=1}^d \partial_v \partial_k f_j^i(x_s) a^v b^k c^j, \\ [(\nabla^3 f)(x_s)(a \otimes b \otimes c \otimes d)]^i &= \sum_{j,k,v,w=1}^d \partial_w \partial_v \partial_k f_j^i(x_s) a^w b^v c^k d^j. \end{aligned}$$

定理 1.2.2.  $[s, t] \subset [0, T]$ ,  $x \in C^1$ ,  $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$  とする.  $D \in \delta[s, t]$  に対し

$$\tilde{I}_{s,t}(x, D) := \sum_D \tilde{I}_{t_{i-1}, t_i}(x), \quad J_{s,t}(x, D) := \sum_D J_{t_{i-1}, t_i}(x)$$

を定めるとき, 次が成立する:

$$I_{s,t}(x) = \lim_{|D| \rightarrow 0} \tilde{I}_{s,t}(x, D) = \lim_{|D| \rightarrow 0} J_{s,t}(x, D).$$

証明. 第一の等号は  $I_{s,t}(x)$  の定義によるから, 第二の等号を証明する. まず,

$$\begin{aligned} I_{s,t}(x) &= \int_s^t f(x_u) dx_u \\ &= \int_s^t f(x_s) + f(x_u) - f(x_s) dx_u \\ &= \int_s^t f(x_s) dx_u + \int_s^t \int_0^1 (\nabla f)(x_s + \theta(x_u - x_s)) (X_{s,u}^1 \otimes \dot{x}_u) d\theta du \\ &= f(x_s) X_{s,t}^1 + (\nabla f)(x_s) X_{s,t}^2 \\ &\quad + \int_s^t \int_0^1 \{(\nabla f)(x_s + \theta(x_u - x_s)) - (\nabla f)(x_s)\} (X_{s,u}^1 \otimes \dot{x}_u) d\theta du \\ &= J_{s,t}(x) + \int_s^t \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_s + r(x_u - x_s)) (X_{s,u}^1 \otimes X_{s,u}^1 \otimes \dot{x}_u) dr d\theta du \end{aligned}$$

が成り立つ.  $[0, T] \ni t \mapsto x_t$  の連続性より, 最下段式中の  $x_s + r(x_u - x_s)$  ( $0 \leq r \leq 1$ ,  $s \leq u \leq t$ ) は或るコンパクト集合  $K$  に含まれ,  $f$  が  $C^2$ -級関数であるから  $M := \sum_{i,j,k,v} \sup_{x \in K} |\partial_v \partial_k f_j^i(x)|$  として  $M < \infty$  を定めれば

$$\begin{aligned} &\left| \int_s^t \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_s + r(x_u - x_s)) (X_{s,u}^1 \otimes X_{s,u}^1 \otimes \dot{x}_u) dr d\theta du \right| \\ &\leq \int_s^t \int_0^1 \int_0^\theta |(\nabla^2 f)(x_s + r(x_u - x_s)) (X_{s,u}^1 \otimes X_{s,u}^1 \otimes \dot{x}_u)| dr d\theta du \\ &\leq M \int_s^t |X_{s,u}^1|^2 |\dot{x}_u| du \\ &\leq M \|x\|_{C^1}^3 \int_s^t (u-s)^2 du \end{aligned}$$

となる. 特に  $D \in \delta[s, t]$  に対して

$$\begin{aligned} \sum_D \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - t_{i-1})^2 du &\leq \sum_D |D| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - t_{i-1}) du \\ &\leq \sum_D |D| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - s) du \leq \frac{1}{2} (t - s)^2 |D| \rightarrow 0 \quad (|D| \rightarrow 0) \end{aligned}$$

が成立するから,

$$|I_{s,t}(x) - J_{s,t}(x, D)| \leq \sum_D |I_{t_{i-1}, t_i}(x) - J_{t_{i-1}, t_i}(x)| \rightarrow 0 \quad (|D| \rightarrow 0)$$

が従い定理の主張を得る. ■



定義 1.2.3 (コントロール関数). 関数  $\omega : \Delta_T \rightarrow [0, \infty)$  が連続かつ任意の  $s \leq u \leq t$  に対して

$$\omega(s, u) + \omega(u, t) \leq \omega(s, t) \quad (1.2)$$

を満たすとき,  $\omega$  をコントロール関数 (control function) と呼ぶ.

式 (1.2) から  $\omega(t, t) = 0$  ( $\forall t \in [0, T]$ ) が従う. つまりコントロール関数は対角線上で 0 になる.

定義 1.2.4 (ノルム空間値写像の  $p$ -variation).  $(V, \|\cdot\|)$  をノルム空間,  $p > 0$  とする. このとき連続写像  $\psi : \Delta_T \rightarrow V$  に対する  $p$ -variation を

$$\|\psi\|_{p, [s, t]} := \left\{ \sup_{D \in \delta[s, t]} \sum_D \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p \right\}^{1/p}, \quad ((s, t) \subset [0, T])$$

で定める. 特に  $\|\cdot\|_{p, [0, T]}$  を  $\|\cdot\|_p$  と書く.

再定義した  $p$ -variation に対しても定理 1.1.5, 1.1.6, 1.1.7 が成立する.

定理 1.2.5 (定理 1.1.5 のアナロジー).  $V$  をノルム空間,  $X : \Delta_T \rightarrow V$  を連続写像とする. このとき,  $X_{t,t} = 0$  ( $\forall t \in [0, T]$ ) かつ  $p \in (0, 1)$  に対し  $\|X\|_p < \infty$  が満たされれば  $X \equiv 0$  である.

証明.  $(s, t) \in \Delta_T$  を任意に取り固定する. このとき全ての  $D \in \delta[s, t]$  に対して,

$$\begin{aligned} \|X_{s,t}\| &\leq \sum_D \|X_{t_{i-1}, t_i}\| \leq \max_D \|X_{t_{i-1}, t_i}\|^{1-p} \sum_D \|X_{t_{i-1}, t_i}\|^p \\ &\leq \max_D \|X_{t_{i-1}, t_i}\|^{1-p} \|X\|_p \end{aligned}$$

が成り立ち,  $X$  の一様連続性から右辺は  $|D| \rightarrow 0$  で 0 に収束し,  $X_{s,t} = 0$  が従う. ■

定理 1.2.6 (定理 1.1.6 のアナロジー).  $V$  をノルム空間とすると,  $x : [0, T] \rightarrow V$  に対して  $1 \leq p \leq q$  なら  $\|X\|_p \geq \|X\|_q$  が成立する.

ノルム空間  $(V, \|\cdot\|)$  に対し

$$B_{p,T}(V) := \left\{ X : \Delta_T \rightarrow V ; \quad \text{continuous, } \|X\|_p < \infty \right\} \quad (1.3)$$

として線型空間  $B_{p,T}(V)$  を定めれば, 定理 1.1.7 のアナロジーを得る.

定理 1.2.7.  $V$  が Banach 空間のとき,  $B_{p,T}(V)$  は  $\|\cdot\|_p$  をノルムとする Banach 空間である.

証明. 完備性を示す.

第一段  $(X^n)_{n=1}^\infty$  を  $B_{p,T}(V)$  の Cauchy 列とすれば, 任意の  $\epsilon > 0$  に対して或る  $n_\epsilon \in \mathbb{N}$  が存在し

$$\|X^n - X^m\|_p = \left\{ \sup_{D \in \delta[0,T]} \sum_D \|X^n_{t_{i-1}, t_i} - X^m_{t_{i-1}, t_i}\|^p \right\}^{1/p} < \epsilon, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

を満たす. 任意の  $(s, t) \in \Delta_T$  に対して分割  $D = \{0 \leq s \leq t \leq T\}$  を取れば

$$\|X^n_{s,t} - X^m_{s,t}\| < \epsilon, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

が成り立ち,  $V$  の完備性より或る  $X_{s,t} \in \mathbb{R}^d$  が存在して

$$\|X^n_{s,t} - X_{s,t}\| < \epsilon \quad (n > n_\epsilon)$$

となる. この収束は  $(s, t)$  に関して一様であるから  $X$  は連続である.

第二段  $\|X^n - X\|_p \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) を示す. 前段より, 任意の  $D \in \delta[0, T]$  に対し

$$\sum_D \|X^n_{t_{i-1}, t_i} - X^m_{t_{i-1}, t_i}\|^p < \epsilon^p, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

が満たされる.  $D$  は有限分割であるから,  $m \rightarrow \infty$  として

$$\sum_D \|X^n_{t_{i-1}, t_i} - X_{t_{i-1}, t_i}\|^p < \epsilon^p, \quad (n > n_\epsilon)$$

が従い,  $D$  の任意性より  $\|X^n - X\|_p < \epsilon$  ( $n > n_\epsilon$ ) を得る. ■

定理 1.2.8 ( $p$ -変動が定めるコントロール関数).  $(V, \|\cdot\|)$  をノルム空間,  $p > 0$  とする. このとき,  $\|\psi\|_p < \infty$  かつ  $\psi_{t,t} = 0$  ( $\forall t \in [0, T]$ ) を満たす連続写像  $\psi : \Delta_T \rightarrow V$  に対して,

$$\omega : \Delta_T \ni (s, t) \mapsto \|\psi\|_{p,[s,t]}^p$$

により定める  $\omega$  はコントロール関数である.

証明 (参考:[3](pp. 96-98)).  $\|\psi\|_p < \infty$  の仮定より  $\omega$  は  $[0, \infty)$  値であるから, 以下では式 (1.2) と連続性を示す.

第一段  $\omega$  が式 (1.2) を満たすことを示す. 実際, 任意に  $D_1 \in \delta[s, u], D_2 \in \delta[u, t]$  を取れば

$$\sum_{D_1} \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p + \sum_{D_2} \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p = \sum_{D_1 \cup D_2} \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p \leq \|\psi\|_{p,[s,t]}^p$$

が成り立つ. 左辺の  $D_1, D_2$  の取り方は独立であるから, それぞれに対し上限を取れば

$$\|\psi\|_{p,[s,u]}^p + \|\psi\|_{p,[u,t]}^p \leq \|\psi\|_{p,[s,t]}^p$$

が従う.

第二段 任意の  $[s, t] \subset [0, T]$  について<sup>\*2</sup>,

$$\lim_{h \rightarrow +0} \omega(s, t+h) = \inf_{h>0} \omega(s, t+h),$$

$$\lim_{h \rightarrow +0} \omega(s, t-h) = \sup_{h>0} \omega(s, t-h),$$

$$\lim_{h \rightarrow +0} \omega(s-h, t) = \inf_{h>0} \omega(s-h, t),$$

$$\lim_{h \rightarrow +0} \omega(s+h, t) = \sup_{h>0} \omega(s+h, t)$$

<sup>\*2</sup> 下段の二式については  $s < t$  と仮定する. また上段についても,  $t = T$  或は  $s = 0$  の場合を除く必要がある.

が成立する．実際  $\omega(s, t+h)$  について見れば，これは下に有界かつ  $h \rightarrow +0$  に対し単調減少であるから極限が確定し下限に一致する．残りの三つも同様の理由で成立する．

第三段 任意の  $s \in [0, T)$  に対し， $(s, T) \ni t \mapsto \omega(s, t)$  の左連続性を示す．ここでは

$$\tilde{\omega}(s, t) := \begin{cases} \lim_{h \rightarrow +0} \omega(s, t-h), & (s < t), \\ 0, & (s = t), \end{cases} \quad (\forall (s, t) \in \Delta_T)$$

で定める  $\tilde{\omega}$  が優加法性を持ち，かつ

$$\|\psi_{s,t}\|^p \leq \tilde{\omega}(s, t), \quad (\forall (s, t) \in \Delta_T)$$

を満たすことを示す．実際これが示されれば，任意の  $D \in \delta[s, t]$  に対し

$$\sum_D \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p \leq \sum_D \tilde{\omega}(t_{i-1}, t_i) \leq \tilde{\omega}(s, t)$$

が成立し  $\omega(s, t) \leq \tilde{\omega}(s, t)$  が従い， $\omega(s, t) \geq \omega(s, t-h)$  ( $\forall h > 0$ ) と併せて

$$\omega(s, t) = \tilde{\omega}(s, t) = \lim_{h \rightarrow +0} \omega(s, t-h)$$

を得る．いま，任意に  $s < u < t$  を取れば，十分小さい  $h_1, h_2 > 0$  に対して

$$\omega(s, u-h_1) + \omega(u, t-h_2) \leq \omega(s, t-h_2)$$

が満たされ， $h_1 \rightarrow +0, h_2 \rightarrow +0$  として

$$\tilde{\omega}(s, u) + \tilde{\omega}(u, t) \leq \tilde{\omega}(s, t)$$

が成り立つから  $\tilde{\omega}$  は優加法性を持つ．また，もし或る  $(u, v) \in \Delta_T$  に対して

$$\|\psi_{u,v}\|^p > \tilde{\omega}(u, v)$$

が成り立つと仮定すると ( $u = v$  なら両辺 0 になるから  $u < v$  である)

$$\|\psi_{u,v}\|^p > \tilde{\omega}(u, v) \geq \omega(u, v-h) \geq \|\psi_{u,v-h}\|^p, \quad (\forall h > 0)$$

となる．一方  $\psi$  の連続性より  $\|\psi_{u,v-h}\|^p \rightarrow \|\psi_{u,v}\|^p$  ( $h \rightarrow +0$ ) が従い矛盾が生じる．同様にして，任意の  $t \in (0, T]$  に対し  $[0, t) \ni s \mapsto \omega(s, t)$  の右連続性も出る．

第四段 任意の  $t \in [0, T)$  に対して次を示す：

$$\lim_{h \rightarrow +0} \omega(t, t+h) = \inf_{h > 0} \omega(t, t+h) = 0.$$

第一の等号は前段より従うから，第二の等号を背理法により証明する．いま

$$\inf_{h > 0} \omega(t, t+h) =: \delta > 0$$

と仮定すれば， $\psi$  の連続性より或る  $h_1$  が存在して

$$\|\psi_{t,t+h}\|^p = \|\psi_{t,t+h} - \psi_{t,t}\|^p < \frac{\delta}{8}, \quad (\forall h < h_1) \quad (1.4)$$

が成立する．ここで任意に  $h_0 < h_1$  を取り固定する．一方で  $\omega(t, t+h_0) \geq \delta$  より

$$\sum_{i=1}^N \|\psi_{\tau_{i-1}, \tau_i}\|^p > \frac{7\delta}{8}$$

を満たす  $D = \{t = \tau_0 < \tau_1 < \cdots, \tau_N = t + h_0\} \in \delta[t, t + h_0]$  が存在し, (1.4) と併せて

$$\sum_{i=2}^N \|\psi_{\tau_{i-1}, \tau_i}\|^p > \frac{7\delta}{8} - \|\psi_{t, \tau_1}\|^p > \frac{7\delta}{8} - \frac{\delta}{8} = \frac{3\delta}{4}$$

を得る. また,  $\omega(t, \tau_1) \geq \delta$  より或る  $D' \in \delta[t, \tau_1]$  が存在して

$$\sum_{D'} \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p > \frac{3\delta}{4}$$

を満たすから,  $D' \cup \{\tau_1 < \cdots, \tau_N = t + h_0\} \in \delta[t, t + h_0]$  に対して

$$\omega(t, t + h_0) > \sum_{D'} \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p + \sum_{i=2}^N \|\psi_{\tau_{i-1}, \tau_i}\|^p > \frac{3\delta}{2}$$

が従うが,  $h_0 < h_1$  の任意性と単調減少性により

$$\delta = \inf_{h>0} \omega(t, t + h) = \inf_{h_1>h>0} \omega(t, t + h) \geq \frac{3\delta}{2}$$

となり矛盾が生じる. 同様にして

$$\lim_{h \rightarrow +0} \omega(t - h, t) = 0, \quad (\forall t \in (0, T))$$

も成立する.

第五段 任意に  $s \in [0, T)$  を取り固定し,  $[s, T) \ni t \mapsto \omega(s, t)$  が右連続であることを示す.

$$\lim_{h \rightarrow +0} \omega(s, t + h) \leq \omega(s, t) \tag{1.5}$$

を示せば, 第二段より逆向きの不等号も従い右連続性を得る. 任意に  $h, \epsilon > 0$  を取れば,

$$\omega(s, t + h) - \epsilon \leq \sum_D \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p$$

を満たす  $D \in \delta[s, t + h]$  が存在し,

$$D_1 := \{t_0 < \cdots < t_k\} = [s, t] \cap D, \quad D_2 := D \setminus (D_1 \cup \{t_{k+1}\})$$

とおくと

$$\begin{aligned} \omega(s, t + h) - \epsilon &\leq \sum_{i=1}^k \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p + \|\psi_{t_k, t_{k+1}}\|^p + \sum_{D_2} \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p \\ &= \sum_{i=1}^k \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p + \|\psi_{t_k, t}\|^p + \|\psi_{t_k, t_{k+1}}\|^p - \|\psi_{t_k, t}\|^p + \sum_{D_2} \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p \\ &\leq \omega(s, t) + \omega(t, t + h) + \|\psi_{t_k, t_{k+1}}\|^p - \|\psi_{t_k, t}\|^p \end{aligned}$$

が成り立つ.  $\psi$  の一様連続性より  $\|\psi_{t_k, t_{k+1}}\|^p \rightarrow \|\psi_{t_k, t}\|^p$  ( $h \rightarrow +0$ ) が成り立つから

$$\lim_{h \rightarrow +0} \omega(s, t + h) - \epsilon \leq \omega(s, t), \quad (\forall \epsilon > 0)$$

が従い (1.5) が出る. 同様に  $(0, t] \ni s \mapsto \omega(s, t)$  ( $\forall t \in (0, T)$ ) の左連続性も成立する.

第六段  $\omega$  の  $(s, t) \in \Delta_T$  における連続性を示す.  $h, k \geq 0$  とする.

(A)  $(s, t)$  を基準に第一象限の点について

$$\begin{aligned}
 & |\omega(s, t) - \omega(s + h, t + k)| \\
 & \leq |\omega(s, t) - \omega(s + h, t)| + |\omega(s + h, t) - \omega(s + h, t + k)| \\
 & = |\omega(s, t) - \omega(s + h, t)| + \omega(s + h, t + k) - \omega(s + h, t) \\
 & \leq |\omega(s, t) - \omega(s + h, t)| + \omega(s, t + k) - \omega(s + h, t) \\
 & \leq |\omega(s, t) - \omega(s + h, t)| + |\omega(s, t + k) - \omega(s, t)| + |\omega(s, t) - \omega(s + h, t)|
 \end{aligned}$$

が成り立つ。前段までに示した左右の連続性より、近づけ方に依らず  $h, k \rightarrow +0$  とすれば、左辺をいくらでも 0 に近づけることができる。

(B)  $(s, t)$  を基準に第三象限の点について

$$\begin{aligned}
 & |\omega(s, t) - \omega(s - h, t - k)| \\
 & \leq |\omega(s, t) - \omega(s - h, t)| + |\omega(s - h, t) - \omega(s - h, t - k)| \\
 & = |\omega(s, t) - \omega(s - h, t)| + \omega(s - h, t) - \omega(s - h, t - k) \\
 & \leq |\omega(s, t) - \omega(s - h, t)| + \omega(s - h, t) - \omega(s, t - k) \\
 & \leq |\omega(s, t) - \omega(s - h, t)| + |\omega(s - h, t) - \omega(s, t)| + |\omega(s, t) - \omega(s, t - k)|,
 \end{aligned}$$

が成り立つ。(A) と同じく  $h, k \rightarrow +0$  として左辺は 0 に収束する。

(C)  $((h_n, k_n))_{n=1}^{\infty}$  を第一象限から  $(0, 0)$  に近づく任意の点列とすると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega(s - h_n, t + k_n) = \omega(s, t), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \omega(s + h_n, t - k_n) = \omega(s, t)$$

が成り立つことを示す。これが示されれば

$$\lim_{h, k \rightarrow +0} \omega(s - h, t + k) = \omega(s, t), \quad \lim_{h, k \rightarrow +0} \omega(s + h, t - k) = \omega(s, t)$$

が従い、(A)(B) と併せて  $\omega$  の連続性が出る。背理法で証明する。いま、

$$\alpha := \lim_{n \rightarrow \infty} \omega(s - h_n, t + k_n) > \omega(s, t)$$

と仮定して  $\epsilon := \alpha - \omega(s, t)$  とおく。  $\lim_{t' \downarrow t} \omega(s, t') = \omega(s, t)$  より

$$0 \leq \omega(s, t') - \omega(s, t) < \frac{\epsilon}{3}$$

を満たす  $t' > t$  が存在し、また  $\lim_{s' \uparrow s} \omega(s', t') = \omega(s, t')$  より

$$0 \leq \omega(s', t') - \omega(s, t') < \frac{\epsilon}{3}$$

を満たす  $s' < s$  も存在する。このとき或る  $n$  で  $s' \leq s - h_n, t + k_n \leq t'$  かつ

$$|\omega(s - h_n, t + k_n) - \alpha| < \frac{\epsilon}{3}$$

が成立し、特に  $(s - h_n, t + k_n) \in (s', t')$  より

$$\omega(s - h_n, t + k_n) \leq \omega(s', t')$$

となるはずであるが、一方で

$$\omega(s', t') < \frac{2}{3}\epsilon + \omega(s, t) = \alpha - \frac{\epsilon}{3} < \omega(s - h_n, t + k_n)$$

が従い矛盾が生じる。よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega(s - h_n, t + k_n) = \omega(s, t)$$

でなくてはならず、同様にして  $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega(s + h_n, t - k_n) = \omega(s, t)$  も得られる。 ■

定理 1.2.9 (control function の例). 以下の関数  $\omega : \Delta_T \rightarrow [0, \infty)$  は control function である.

- (1)  $\omega : (s, t) \mapsto \|X^1\|_{p;[s,t]}^p, \quad (p \geq 1, x \in B_{p,T}(\mathbb{R}^d)).$
- (2)  $\omega : (s, t) \mapsto \|X^2\|_{p;[s,t]}^p, \quad (p \geq 1, x \in C^1).$

行列  $a = (a_j^i)$  のノルムは  $|a| = \sqrt{\sum_{i,j} |a_j^i|^2}$  として考える.

定理 1.2.10.

- (1)  $\omega : (s, t) \mapsto X_{s,t}^1 = x_t - x_s$  は連続であるから, 前定理より  $\omega$  は control function である.
- (2) 任意の  $[s, t] \subset [0, T]$  に対して  $\|X^2\|_{p;[s,t]}^p < \infty$  を示せば, あとは上と同じ理由により定理の主張が得られる. 実際, 任意の分割  $D = \{s = t_0 < \dots < t_N = t\}$  に対し

$$\begin{aligned} \|X_{t_{i-1}, t_i}^2\| &\leq \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (x_u - x_{t_{i-1}}) \otimes \dot{x}_u \, du \right| \\ &\leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} |(x_u - x_{t_{i-1}}) \otimes \dot{x}_u| \, du \\ &\leq \|x\|_{C^1}^2 \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - s) \, du \right\}^{1/p} \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - s) \, du \right\}^{1-1/p} \\ &\leq \|x\|_{C^1}^2 \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - s) \, du \right\}^{1/p} \left\{ \int_s^t (u - s) \, du \right\}^{1-1/p} \end{aligned}$$

が成り立つから,

$$\begin{aligned} \sum_D \|X_{t_{i-1}, t_i}^2\|^p &\leq \sum_D \|x\|_{C^1}^{2p} \left\{ \frac{1}{2}(t - s)^2 \right\}^{p-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - s) \, du \\ &= \|x\|_{C^1}^{2p} \left\{ \frac{1}{2}(t - s)^2 \right\}^{p-1} \int_s^t (u - s) \, du = \|x\|_{C^1}^{2p} \left\{ \frac{1}{2}(t - s)^2 \right\}^p \end{aligned}$$

により  $\|X^2\|_{p;[s,t]}^p < \infty$  が従う. ■

補題 1.2.11.  $\omega$  を  $\Delta_T$  上の control function とする.  $D = \{s = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t\}$  について,  $N \geq 2$  の場合或る  $1 \leq i \leq N-1$  が存在して次を満たす:

$$\omega(t_{i-1}, t_{i+1}) \leq \frac{2\omega(s, t)}{N-1}. \quad (1.6)$$

証明. (会田先生のテキスト.) ■

### 1.3 Proof of continuity theorem

定理 1.3.1 ( $1 \leq p < 2$  の場合の連続性定理).  $1 \leq p < 2$  とし,  $x_0 = y_0$  を満たす  $x, y \in C^1$  と  $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ ,  $0 < \epsilon, R < \infty$  を任意に取る. このとき,

$$\|X^1\|_p, \|Y^1\|_p \leq R, \quad \|X^1 - Y^1\|_p \leq \epsilon$$

なら, 或る定数  $C = C(p, R, f)$  が存在し, 任意の  $0 \leq s \leq t \leq T$  に対して次が成立する:

$$|I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y)| \leq \epsilon C.$$

系 1.3.2 ( $p$ -variation による閉球上の Lipschitz 連続性).  $1 \leq p < 2$  とし,  $x_0 = y_0$  を満たす  $x, y \in C^1$  と  $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ ,  $0 < R < \infty$  を任意に取る. このとき,

$$\|X^1\|_p, \|Y^1\|_p \leq R$$

なら, 或る定数  $C = C(p, R, f)$  が存在して次を満たす:

$$|I_{0,T}(x) - I_{0,T}(y)| \leq C \|X^1 - Y^1\|_p.$$

証明 (系 1.3.2). 定理 1.3.1 において,  $\epsilon = \|X^1 - Y^1\|_p$  ( $x \neq y$ )<sup>\*3</sup> として証明が通る. ■

証明 (定理 1.3.1).  $[s, t] \subset [0, T]$  とする.

第一段  $\omega : \Delta_T \rightarrow [0, \infty)$  を

$$\omega(\alpha, \beta) = \|X^1\|_{p, [\alpha, \beta]}^p + \|Y^1\|_{p, [\alpha, \beta]}^p + \epsilon^{-p} \|X^1 - Y^1\|_{p, [\alpha, \beta]}^p, \quad ((\alpha, \beta) \in \Delta_T)$$

で定めれば, 定理 1.2.9 により  $1 \leq p$  の下で  $\omega$  は control function である.

第二段 任意に  $[s, t]$  の分割  $D = \{s = t_0 < \dots < t_N = t\}$  ( $N \geq 2$ ) を取れば, 補題 1.2.11 より (1.6) を満たす  $t_{(0)}$  が存在する. ここで,  $D_{-0} := D$ ,  $D_{-1} := D \setminus \{t_{(0)}\}$  と定める.  $N \geq 3$  ならば  $D_{-1}$  についても (1.6) を満たす  $t_{(1)}$  が存在するから,  $D_{-2} := D_{-1} \setminus \{t_{(1)}\}$  と定める. この操作を繰り返せば  $t_{(k)}, D_{-k}$  ( $k = 0, 1, \dots, N-1$ ) が得られ,

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{s,t}(x, D) - \tilde{I}_{s,t}(y, D) &= \sum_{k=0}^{N-2} \left[ \left\{ \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1}) \right\} - \left\{ \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k-1}) \right\} \right] \\ &\quad + \left\{ \tilde{I}_{s,t}(x) - \tilde{I}_{s,t}(y) \right\} \end{aligned} \quad (1.7)$$

と表現できる.

第三段 式 (1.7) について, 次を満たす定数  $C_1$  が存在することを示す:

$$|(1.7)| \leq \epsilon C_1 \quad (1.8)$$

<sup>\*3</sup>  $x = y$  なら  $\|X^1 - Y^1\|_p = 0$  かつ  $I_{s,t}(x) = I_{s,t}(y)$  が成り立つ.

見やすくするために  $t_k = t_{(k)}$  と書き直せば,

$$\begin{aligned}
& \left\{ \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1}) \right\} - \left\{ \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k-1}) \right\} \\
&= \{f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}})\} X_{t_k, t_{k+1}}^1 - \{f(y_{t_k}) - f(y_{t_{k-1}})\} Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \\
&= \{f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}})\} (X_{t_k, t_{k+1}}^1 - Y_{t_k, t_{k+1}}^1) \\
&\quad + \{f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}})\} Y_{t_k, t_{k+1}}^1 - \{f(y_{t_k}) - f(y_{t_{k-1}})\} Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \\
&= \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes (X_{t_k, t_{k+1}}^1 - Y_{t_k, t_{k+1}}^1) d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 d\theta \\
&\quad - \int_0^1 (\nabla f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 d\theta \\
&= \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes (X_{t_k, t_{k+1}}^1 - Y_{t_k, t_{k+1}}^1) d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) (X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 d\theta \\
&\quad - \int_0^1 (\nabla f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 d\theta \\
&= \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes (X_{t_k, t_{k+1}}^1 - Y_{t_k, t_{k+1}}^1) d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) (X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}) + r(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) - y_{t_{k-1}} - \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))) \\
&\quad \quad (X_{0, t_{k-1}}^1 - Y_{0, t_{k-1}}^1) \otimes Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta^{*4} \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}) + r(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) - y_{t_{k-1}} - \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))) \\
&\quad \quad \theta (X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \otimes Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta
\end{aligned}$$

が成り立つ. 補題 1.2.11 より

$$\begin{aligned}
& |X_{t_{k-1}, t_k}^1|, |Y_{t_{k-1}, t_k}^1|, |X_{t_k, t_{k+1}}^1|, |Y_{t_k, t_{k+1}}^1| \leq \omega(t_{k-1}, t_{k+1})^{1/p} \leq \left( \frac{2\omega(s, t)}{N - k - 1} \right)^{1/p}, \\
& |X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1|, |X_{t_k, t_{k+1}}^1 - Y_{t_k, t_{k+1}}^1| \leq \epsilon \omega(t_{k-1}, t_{k+1})^{1/p} \leq \epsilon \left( \frac{2\omega(s, t)}{N - k - 1} \right)^{1/p}
\end{aligned}$$

が満たされ, また

$$|X_{0, t_{k-1}}^1 - Y_{0, t_{k-1}}^1| \leq \epsilon \omega(0, t_{k-1})^{1/p} \leq \epsilon \omega(0, T)^{1/p} \leq \epsilon (2R^p + 1)^{1/p}$$

でもあるから,

$$M := \sum_{i,j} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f_j^i(x)| + \sum_{i,j,k} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial_k f_j^i(x)| + \sum_{i,j,k,v} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial_v \partial_k f_j^i(x)| \quad (1.9)$$

<sup>\*4</sup>  $x_0 = y_0$  の仮定より  $x_{t_{k-1}} - y_{t_{k-1}} = X_{0, t_{k-1}}^1 - Y_{0, t_{k-1}}^1$  が成り立つ.



と定めて

$$\begin{aligned}
& \left| \left\{ \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1}) \right\} - \left\{ \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k-1}) \right\} \right| \\
& \leq M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| X_{t_k, t_{k+1}}^1 - Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \right| \\
& \quad + M \left| X_{0, t_{k-1}}^1 - Y_{0, t_{k-1}}^1 \right| \left| Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \right| \\
& \leq \epsilon M \left[ 2 + 2(2R^p + 1)^{1/p} \right] \left( \frac{2\omega(s, t)}{N - k - 1} \right)^{2/p} \\
& \leq \epsilon M \left[ 2 + 2(2R^p + 1)^{1/p} \right] 2^{2/p} (2R^p + 1)^{2/p} \left( \frac{1}{N - k - 1} \right)^{2/p}
\end{aligned}$$

を得る.

$$C'_1 := M \left[ 2 + 2(2R^p + 1)^{1/p} \right] 2^{2/p} (2R^p + 1)^{2/p}$$

とおけば

$$|(1.7)| \leq \sum_{k=0}^{N-2} \epsilon C'_1 \left( \frac{1}{N - k - 1} \right)^{2/p} < \epsilon C'_1 \zeta \left( \frac{2}{p} \right)$$

が成立し,  $p < 2$  より  $\zeta(2/p) < \infty$  であるから  $C_1 := C'_1 \zeta(2/p)$  において (1.8) が従う.

第四段  $x_0 = y_0$  の仮定により  $x_s - y_s = X_{0,s}^1 - Y_{0,s}^1$  が成り立ち

$$\begin{aligned}
\left| \tilde{I}_{s,t}(x) - \tilde{I}_{s,t}(y) \right| &= \left| f(x_s) X_{s,t}^1 - f(y_s) Y_{s,t}^1 \right| \\
&\leq \left| f(x_s) X_{s,t}^1 - f(x_s) Y_{s,t}^1 \right| + \left| f(x_s) Y_{s,t}^1 - f(y_s) Y_{s,t}^1 \right| \\
&\leq M \left| X_{s,t}^1 - Y_{s,t}^1 \right| + \left| \int_0^1 (\nabla f)(y_s + \theta(x_s - y_s)) \left[ (X_{0,s}^1 - Y_{0,s}^1) \otimes Y_{s,t}^1 \right] d\theta \right| \\
&\leq M \left| X_{s,t}^1 - Y_{s,t}^1 \right| + M \left| X_{0,s}^1 - Y_{0,s}^1 \right| \left| Y_{s,t}^1 \right| \\
&\leq M \epsilon \omega(s, t)^{1/p} + M \epsilon \omega(0, s)^{1/p} \omega(s, t)^{1/p} \\
&\leq \epsilon M \left[ (2R^p + 1)^{1/p} + (2R^p + 1)^{2/p} \right]
\end{aligned}$$

が従う. ここで  $C_2 := M \left[ (2R^p + 1)^{1/p} + (2R^p + 1)^{2/p} \right]$  とおく.

第五段 第二段と第三段より, 任意の  $D \in \delta[s, t]$  に対し

$$\left| \tilde{I}_{s,t}(x, D) - \tilde{I}_{s,t}(y, D) \right| \leq \epsilon(C_1 + C_2)$$

が成立し. 定理 1.2.2 により  $|D| \rightarrow 0$  として

$$\left| I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y) \right| \leq \epsilon(C_1 + C_2)$$

が出る.

■

定理 1.3.3 ( $2 \leq p < 3$  の場合の連続性定理).  $2 \leq p < 3$  とし,  $x_0 = y_0$  を満たす  $x, y \in C^1$  と  $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ ,  $0 < \epsilon, R < \infty$  を任意に取る. このとき,

$$\begin{aligned} & \|X^1\|_p, \|Y^1\|_p, \|X^2\|_{p/2}, \|Y^2\|_{p/2} \leq R < \infty, \\ & \|X^1 - Y^1\|_p, \|X^2 - Y^2\|_{p/2} \leq \epsilon \end{aligned}$$

なら, 或る定数  $C = C(p, R, f)$  が存在し, 任意の  $0 \leq s \leq t \leq T$  に対して次が成立する:

$$|I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y)| \leq \epsilon C.$$

系 1.3.4.  $1 \leq p < 2$  とし,  $x_0 = y_0$  を満たす  $x, y \in C^1$  と  $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ ,  $0 < R < \infty$  を任意に取る. このとき,

$$\|X^1\|_p, \|Y^1\|_p, \|X^2\|_{p/2}, \|Y^2\|_{p/2} \leq R$$

なら, 或る定数  $C = C(p, R, f)$  が存在して次を満たす:

$$|I_{0,T}(x) - I_{0,T}(y)| \leq C(\|X^1 - Y^1\|_p + \|X^2 - Y^2\|_{p/2}).$$

証明 (系 1.3.4). 定理 1.3.3 において,  $\epsilon = \|X^1 - Y^1\|_p + \|X^2 - Y^2\|_{p/2}$  ( $x \neq y$ ) として証明が通る. ■

証明 (定理 1.3.4).  $[s, t] \subset [0, T]$  とする.

第一段  $\omega : \Delta_T \rightarrow [0, \infty)$  を

$$\begin{aligned} \omega(\alpha, \beta) &= \|X^1\|_{p, [\alpha, \beta]}^p + \|Y^1\|_{p, [\alpha, \beta]}^p + \|X^2\|_{p/2, [\alpha, \beta]}^{p/2} + \|Y^2\|_{p/2, [\alpha, \beta]}^{p/2} \\ &\quad + \epsilon^{-p} \|X^1 - Y^1\|_{p, [\alpha, \beta]}^p + \epsilon^{-p/2} \|X^2 - Y^2\|_{p/2, [\alpha, \beta]}^{p/2}, \quad ((\alpha, \beta) \in \Delta_T) \end{aligned}$$

で定めれば, 定理 1.2.9 により  $2 \leq p$  の下で  $\omega$  は control function である.

第二段  $D \in \delta[s, t]$  に対し, 定理 1.3.1 の証明と同様にして  $t_{(k)}, D_{-k}$  を構成すれば

$$\begin{aligned} & J_{s,t}(x, D) - J_{s,t}(y, D) \\ &= \sum_{k=0}^{N-2} [\{J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})\} - \{J_{s,t}(y, D_{-k}) - J_{s,t}(y, D_{-k-1})\}] \\ &\quad + \{J_{s,t}(x) - J_{s,t}(y)\} \end{aligned} \tag{1.10}$$

と表現できる.

第三段  $J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})$  を変形する. 以降  $t_k = t_{(k)}$  と書き直せば

$$\begin{aligned} & J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1}) \\ &= J_{t_{k-1}, t_k}(x) + J_{t_k, t_{k+1}}(x) - J_{t_{k-1}, t_{k+1}}(x) \\ &= f(x_{t_{k-1}})X_{t_{k-1}, t_k}^1 + f(x_{t_k})X_{t_k, t_{k+1}}^1 - f(x_{t_{k-1}})X_{t_{k-1}, t_{k+1}}^1 \\ &\quad + (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X_{t_{k-1}, t_k}^2 + (\nabla f)(x_{t_k})X_{t_k, t_{k+1}}^2 - (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X_{t_{k-1}, t_{k+1}}^2 \\ &= \{f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}})\}X_{t_k, t_{k+1}}^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X_{t_{k-1},t_k}^2 + (\nabla f)(x_{t_k})X_{t_k,t_{k+1}}^2 - (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X_{t_{k-1},t_{k+1}}^2 \\
& = \int_0^1 \{(\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) - (\nabla f)(x_{t_{k-1}})\} X_{t_{k-1},t_k}^1 \otimes X_{t_k,t_{k+1}}^1 d\theta \\
& \quad + (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X_{t_{k-1},t_k}^1 \otimes X_{t_k,t_{k+1}}^1 \\
& \quad + (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X_{t_{k-1},t_k}^2 + (\nabla f)(x_{t_k})X_{t_k,t_{k+1}}^2 - (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X_{t_{k-1},t_{k+1}}^2 \\
& = \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1},t_k}^1 \otimes X_{t_{k-1},t_k}^1 \otimes X_{t_k,t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
& \quad + (\nabla f)(x_{t_{k-1}}) (X_{t_{k-1},t_k}^1 \otimes X_{t_k,t_{k+1}}^1 + X_{t_{k-1},t_k}^2 - X_{t_{k-1},t_{k+1}}^2) \\
& \quad + (\nabla f)(x_{t_k})X_{t_k,t_{k+1}}^2 \\
& = \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1},t_k}^1 \otimes X_{t_{k-1},t_k}^1 \otimes X_{t_k,t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
& \quad + \{(\nabla f)(x_{t_k}) - (\nabla f)(x_{t_{k-1}})\} X_{t_k,t_{k+1}}^2 \\
& = \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1},t_k}^1 \otimes X_{t_{k-1},t_k}^1 \otimes X_{t_k,t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
& \quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1},t_k}^1 \otimes X_{t_k,t_{k+1}}^2 d\theta
\end{aligned}$$

を得る.

第四段 式 (1.10) について, 次を満たす定数  $C_1$  が存在することを示す:

$$|(1.10)| \leq \epsilon C_1. \quad (1.11)$$

実際, 前段の結果より

$$\begin{aligned}
& \{J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})\} - \{J_{s,t}(y, D_{-k}) - J_{s,t}(y, D_{-k-1})\} \\
& = \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1},t_k}^1 \otimes X_{t_{k-1},t_k}^1 \otimes X_{t_k,t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
& \quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1},t_k}^1 \otimes X_{t_k,t_{k+1}}^2 d\theta \\
& \quad - \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) Y_{t_{k-1},t_k}^1 \otimes Y_{t_{k-1},t_k}^1 \otimes Y_{t_k,t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
& \quad - \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) Y_{t_{k-1},t_k}^1 \otimes Y_{t_k,t_{k+1}}^2 d\theta \\
& = \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1},t_k}^1 \otimes X_{t_{k-1},t_k}^1 \otimes (X_{t_k,t_{k+1}}^1 - Y_{t_k,t_{k+1}}^1) dr d\theta \\
& \quad + \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1},t_k}^1 \otimes (X_{t_{k-1},t_k}^1 - Y_{t_{k-1},t_k}^1) \otimes Y_{t_k,t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
& \quad + \int_0^1 \int_0^\theta \{(\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) - (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))\} \\
& \quad \quad X_{t_{k-1},t_k}^1 \otimes Y_{t_{k-1},t_k}^1 \otimes Y_{t_k,t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
& \quad + \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) (X_{t_{k-1},t_k}^1 - Y_{t_{k-1},t_k}^1) \otimes Y_{t_{k-1},t_k}^1 \otimes Y_{t_k,t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
& \quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1},t_k}^1 \otimes (X_{t_k,t_{k+1}}^2 - Y_{t_k,t_{k+1}}^2) d\theta \\
& \quad + \int_0^1 \{(\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) - (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^2 d\theta \\
& + \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) (X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^2 d\theta \\
& = \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes (X_{t_k, t_{k+1}}^1 - Y_{t_k, t_{k+1}}^1) dr d\theta \\
& + \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes (X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
& + \int_0^1 \int_0^\theta \int_0^1 (\nabla^3 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}) + u(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) - y_{t_{k-1}} - r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))) \\
& \quad \left\{ (X_{0, t_{k-1}}^1 - Y_{0, t_{k-1}}^1) + r(X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \right\} \otimes X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 du dr d\theta \\
& + \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) (X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \otimes Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
& + \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes (X_{t_k, t_{k+1}}^2 - Y_{t_k, t_{k+1}}^2) d\theta \\
& + \int_0^1 \int_0^1 (\nabla^3 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}) + r(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) - y_{t_{k-1}} - \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))) \\
& \quad \left\{ (X_{0, t_{k-1}}^1 - Y_{0, t_{k-1}}^1) + \theta(X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \right\} \otimes X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^2 dr d\theta \\
& + \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) (X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^2 d\theta
\end{aligned}$$

が成り立つから,

$$\begin{aligned}
M &:= \sum_{i,j} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f_j^i(x)| + \sum_{i,j,k} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial_k f_j^i(x)| \\
&+ \sum_{i,j,k,v} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial_v \partial_k f_j^i(x)| + \sum_{i,j,k,v,w} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial_w \partial_v \partial_k f_j^i(x)|
\end{aligned} \tag{1.12}$$

とにおいて

$$\begin{aligned}
& \left| \{J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})\} - \{J_{s,t}(y, D_{-k}) - J_{s,t}(y, D_{-k-1})\} \right| \\
& \leq M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| X_{t_k, t_{k+1}}^1 - Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \right| \\
& \quad + M \left| X_{0, t_{k-1}}^1 - Y_{0, t_{k-1}}^1 \right| \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| X_{t_k, t_{k+1}}^2 - Y_{t_k, t_{k+1}}^2 \right| \\
& \quad + M \left| X_{0, t_{k-1}}^1 - Y_{0, t_{k-1}}^1 \right| \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^2 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^2 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^2 \right| \\
& \leq \epsilon M \left[ 5 + 2\omega(0, t_{k-1})^{1/p} + 2\omega(t_{k-1}, t_k)^{1/p} \right] \left( \frac{2\omega(s, t)}{N - k - 1} \right)^{3/p} \\
& \leq \epsilon M \left[ 2 + 4(2R^p + 2R^{p/2} + 2)^{1/p} \right] 2^{3/p} (2R^p + 2R^{p/2} + 2)^{3/p} \left( \frac{1}{N - k - 1} \right)^{3/p}
\end{aligned}$$

を得る. ここで

$$C'_1 := M \left[ 2 + 4(2R^p + 2R^{p/2} + 2)^{1/p} \right] 2^{3/p} (2R^p + 2R^{p/2} + 2)^{3/p}$$

と定めれば

$$|(1.10)| \leq \sum_{k=0}^{N-2} \epsilon C'_1 \left( \frac{1}{N-k-1} \right)^{3/p} < \epsilon C'_1 \zeta \left( \frac{3}{p} \right)$$

が成立し、 $p < 3$  より  $\zeta(3/p) < \infty$  であるから  $C_1 := C'_1 \zeta(3/p)$  とおいて (1.11) が出る。

第五段  $x_0 = y_0$  の仮定により

$$\begin{aligned} & |J_{s,t}(x) - J_{s,t}(y)| \\ & \leq |f(x_s)X_{s,t}^1 - f(y_s)Y_{s,t}^1| + |(\nabla f)(x_s)X_{s,t}^2 - (\nabla f)(y_s)Y_{s,t}^2| \\ & \leq |f(x_s)X_{s,t}^1 - f(x_s)Y_{s,t}^1| + |f(x_s)Y_{s,t}^1 - f(y_s)Y_{s,t}^1| \\ & \quad + |(\nabla f)(x_s)X_{s,t}^2 - (\nabla f)(x_s)Y_{s,t}^2| + |(\nabla f)(x_s)Y_{s,t}^2 - (\nabla f)(y_s)Y_{s,t}^2| \\ & \leq M |X_{s,t}^1 - Y_{s,t}^1| + \left| \int_0^1 (\nabla f)(y_s + \theta(x_s - y_s))(x_s - y_s) \otimes Y_{s,t}^1 d\theta \right| \\ & \quad + M |X_{s,t}^2 - Y_{s,t}^2| + \left| \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_s + \theta(x_s - y_s))(x_s - y_s) \otimes Y_{s,t}^2 d\theta \right| \\ & \leq M |X_{s,t}^1 - Y_{s,t}^1| + M |X_{0,s}^1 - Y_{0,s}^1| |Y_{s,t}^1| \\ & \quad + M |X_{s,t}^2 - Y_{s,t}^2| + M |X_{0,s}^1 - Y_{0,s}^1| |Y_{s,t}^2| \\ & \leq \epsilon M \omega(s, t)^{1/p} + \epsilon M \omega(0, s)^{1/p} \omega(s, t)^{1/p} \\ & \quad + \epsilon M \omega(s, t)^{2/p} + \epsilon M \omega(0, s)^{1/p} \omega(s, t)^{2/p} \\ & \leq \epsilon M \left[ \omega(0, T)^{1/p} + 2\omega(0, T)^{2/p} + \omega(0, T)^{3/p} \right] \\ & \leq \epsilon M \left[ (2R^p + 2R^{p/2} + 2)^{1/p} + 2(2R^p + 2R^{p/2} + 2)^{2/p} + (2R^p + 2R^{p/2} + 2)^{3/p} \right] \end{aligned}$$

が従う。ここで最下段の  $\epsilon$  の係数を  $C_2$  とおく。

第六段 以上より、任意の  $D \in \delta[s, t]$  に対し

$$|J_{s,t}(x, D) - J_{s,t}(y, D)| \leq \epsilon(C_1 + C_2)$$

が成り立ち、定理 1.2.2 により  $|D| \rightarrow 0$  として

$$|I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y)| \leq \epsilon(C_1 + C_2)$$

が出る。 ■

系 1.3.5 (パスが 0 出発なら  $f$  の有界性は要らない). 定理 1.3.1 と定理 1.3.3 について、 $x, y \in \tilde{C}^1$  ならば  $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$  として主張が成り立つ。

証明.  $x_0 = 0$  なら

$$\|X^1\|_p \leq R \quad \Rightarrow \quad |x_t| \leq R \quad (\forall t \in [0, T])$$

が成り立つから、式 (1.9) と (1.12) において  $\sup_{x \in \mathbb{R}^d}$  を  $\sup_{|x| \leq 9R}$  に替えればよい。 ■

## 1.4 The notion of rough path

$(V, \|\cdot\|)$  を  $\mathbb{R}$  上の Banach 空間とする ( $V \neq \{0\}$ ). また  $\otimes_a$  により代数的テンソル積, 或はその標準写像を表す.  $k \geq 2$  の場合,  $k$  重テンソル積  $V^{\otimes_a k} = V \otimes_a \cdots \otimes_a V$  にプロジェクトイブノルム  $\pi_k(\cdot)$  を導入し, その完備拡大を  $(V^{\otimes k}, |\cdot|_k)$  と書く<sup>\*5</sup>.  $k = 0, 1$  に対しては  $V^{\otimes 0} := \mathbb{R}$ ,  $V^{\otimes 1} := V$  とし,  $|\cdot|_0 = \pi_0(\cdot) := \mathbb{R}$  の絶対値, 及び  $|\cdot|_1 = \pi_1(\cdot) := \|\cdot\|$  と定める. 定理 A.3.4 と定理 A.3.9 より, 任意の  $0 \leq j \leq k$  に対し  $V^{\otimes_a k}$  と  $V^{\otimes_a j} \otimes_a V^{\otimes_a k-j}$  は線型同型となる. この同型写像を

$$F_{j,k} : V^{\otimes_a k} \longrightarrow V^{\otimes_a j} \otimes_a V^{\otimes_a k-j}, \quad 0 \leq j \leq k$$

書けば,  $F_{j,k}$  は

$$\begin{aligned} F_{0,k}(v) &= 1 \otimes_a v, & (\forall v \in V^{\otimes_a k}), \\ F_{j,k}(v_1 \otimes_a \cdots \otimes_a v_k) &= (v_1 \otimes_a \cdots \otimes_a v_j) \otimes_a (v_{j+1} \otimes_a \cdots \otimes_a v_k), & (\forall v_1 \otimes_a \cdots \otimes_a v_k \in V^{\otimes_a k}, 1 \leq j \leq k-1), \\ F_{k,k}(v) &= v \otimes_a 1, & (\forall v \in V^{\otimes_a k}) \end{aligned}$$

を満たす. また  $V^{\otimes_a j} \otimes_a V^{\otimes_a k-j}$  上にもプロジェクトイブノルムを導入し, これを  $\pi_{j,k}$  と書く.

定理 1.4.1. このとき次式が成立する. 特に,  $F_{j,k}$ , ( $0 \leq j \leq k$ ) は等長同型である.

$$\pi_k \circ F_{j,k}^{-1} = \pi_{j,k}, \quad 0 \leq j \leq k.$$

証明.

第一段  $j = 0$  のとき, 任意の  $v \in V^{\otimes_a k}$  に対し

$$\pi_{0,k}(F_{0,k}(v)) = \pi_{0,k}(1 \otimes_a v) = \pi_0(1)\pi_k(v) = \pi_k(v)$$

が成り立ち  $\pi_k \circ F_{0,k}^{-1} = \pi_{0,k}$  を得る. 同様にして  $\pi_k \circ F_{k,k}^{-1} = \pi_{k,k}$  も出る.

第二段  $\pi_k \circ F_{j,k}^{-1} \leq \pi_{j,k}$ , ( $1 \leq j \leq k-1$ ) が成り立つことを示す.  $v \in V^{\otimes_a j} \otimes_a V^{\otimes_a k-j}$  の分割

$$v = \sum_r u^r \otimes_a v^r, \quad (u^r \in V^{\otimes_a j}, v^r \in V^{\otimes_a k-j})$$

を任意に取り, 一旦固定する. このとき  $u^r, v^r$  の任意の分割

$$u^r = \sum_{n(r)} u_1^{n(r)} \otimes_a \cdots \otimes_a u_j^{n(r)}, \quad v^r = \sum_{m(r)} v_{j+1}^{m(r)} \otimes_a \cdots \otimes_a v_k^{m(r)}, \quad (v_i^{n(r)}, v_i^{m(r)} \in V)$$

に対して

$$\begin{aligned} \pi_k(F_{j,k}^{-1}(v)) &\leq \sum_r \sum_{n(r), m(r)} \pi_k(u_1^{n(r)} \otimes_a \cdots \otimes_a u_j^{n(r)} \otimes_a v_{j+1}^{m(r)} \otimes_a \cdots \otimes_a v_k^{m(r)}) \\ &= \sum_r \sum_{n(r), m(r)} \|u_1^{n(r)}\| \cdots \|u_j^{n(r)}\| \|v_{j+1}^{m(r)}\| \cdots \|v_k^{m(r)}\| \\ &= \sum_r \left\{ \sum_{n(r)} \|u_1^{n(r)}\| \cdots \|u_j^{n(r)}\| \right\} \left\{ \sum_{m(r)} \|v_{j+1}^{m(r)}\| \cdots \|v_k^{m(r)}\| \right\} \end{aligned}$$

<sup>\*5</sup>  $V$  が有限次元なら  $V^{\otimes_a k}$  も有限次元であるから  $V^{\otimes k} = V^{\otimes_a k}$ ,  $|\cdot|_k = \pi_k(\cdot)$  でよい. しかし一般に  $(V^{\otimes_a k}, \pi_k(\cdot))$  は完備ではない ([6] (p. 17), [7]).

が成り立つから、分割の任意性と定理 A.4.7 より

$$\pi_k(F_{j,k}^{-1}(v)) \leq \sum_r \pi_j(u^r) \pi_{k-j}(v^r)$$

を得る.  $v$  の分割について下限を取れば、再び定理 A.4.7 により

$$\pi_k(F_{j,k}^{-1}(v)) \leq \pi_{j,k}(v)$$

が出る.

第三段  $\pi_k \circ F_{j,k}^{-1} \geq \pi_{j,k}$ , ( $1 \leq j \leq k-1$ ) が成り立つことを示す.  $v \in V^{\otimes k}$  の任意の分割

$$v = \sum_n v_1^n \otimes_a \cdots \otimes_a v_k^n, \quad (v_i^n \in V, i = 1, \dots, k)$$

を取れば,

$$\begin{aligned} \pi_{j,k}(F_{j,k}(v)) &\leq \sum_n \pi_{j,k}((v_1^n \otimes_a \cdots \otimes_a v_j^n) \otimes_a (v_{j+1}^n \otimes_a \cdots \otimes_a v_k^n)) \\ &= \sum_n \pi_j(v_1^n \otimes_a \cdots \otimes_a v_j^n) \pi_{k-j}(v_{j+1}^n \otimes_a \cdots \otimes_a v_k^n) \\ &= \sum_n \|v_1^n\| \cdots \|v_k^n\| \end{aligned}$$

が成立する. 従って定理 A.4.7 より

$$\pi_{j,k}(F_{j,k}(v)) \leq \pi_k(v)$$

が得られる. ■

$V^{\otimes i}$  の  $V^{\otimes i}$  への等長埋め込みを  $J_i$  で表し ( $J_i$  の終集合を  $J_i V^{\otimes i}$  と考える<sup>\*6</sup>.  $i = 0, 1$  の場合  $J_i$  は恒等写像),

$$\begin{aligned} J_j V^{\otimes j} \times J_{k-j} V^{\otimes k-j} \ni (u, v) &\longmapsto (J_j^{-1} u, J_{k-j}^{-1} v) && \in V^{\otimes j} \times V^{\otimes k-j} \\ &\longmapsto F_{j,k}^{-1}(J_j^{-1} u \otimes_a J_{k-j}^{-1} v) && \in V^{\otimes k} \\ &\longmapsto J_k F_{j,k}^{-1}(J_j^{-1} u \otimes_a J_{k-j}^{-1} v) && \in V^{\otimes k} \end{aligned} \quad (1.13)$$

の対応関係により定まる写像:  $J_j V^{\otimes j} \times J_{k-j} V^{\otimes k-j} \longrightarrow V^{\otimes k}$  を  $\varphi_{j,k}$  と書けば,  $\varphi_{j,k}$  は有界双線型写像である. 実際,  $\otimes_a$  の双線型性と埋め込み及び  $F_{j,k}^{-1}$  の線型性より  $\varphi_{j,k}$  の双線型性が従い, また

$$\begin{aligned} |\varphi_{j,k}(u, v)|_k &= \pi_k(F_{j,k}^{-1}(J_j^{-1} u \otimes_a J_{k-j}^{-1} v)) \\ &= \pi_{j,k}(J_j^{-1} u \otimes_a J_{k-j}^{-1} v) \\ &= \pi_j(J_j^{-1} u) \pi_{k-j}(J_{k-j}^{-1} v) \\ &= |u|_j |v|_{k-j} \end{aligned}$$

が任意の  $(u, v) \in J_j V^{\otimes j} \times J_{k-j} V^{\otimes k-j}$  に対して成り立つから  $\|\varphi_{j,k}\|_{L^{(2)}(J_j V^{\otimes j} \times J_{k-j} V^{\otimes k-j}, V^{\otimes k})} = 1$  を得る. 従って, 定理 A.1.4 より  $\varphi_{j,k}$  は  $V^{\otimes j} \times V^{\otimes k-j}$  上の或るただ一つの双線型写像  $\psi_{j,k}$  にノルム保存拡張される.

定理 1.4.2.  $0 \leq j \leq k$  とする. このとき,  $\psi_{j,k}: V^{\otimes j} \times V^{\otimes k-j} \longrightarrow V^{\otimes k}$  は次を満たす:

$$|\psi_{j,k}(u, v)|_k = |u|_j |v|_{k-j}, \quad (\forall (u, v) \in V^{\otimes j} \times V^{\otimes k-j}).$$

<sup>\*6</sup>  $J_i$  の終集合を  $J_i V^{\otimes i}$  と考えれば全単射であるから逆写像  $J_i^{-1}$  が存在する.

証明.  $(u, v)$  に直積ノルムで収束する点列  $(u_n, v_n) \in J_j V^{\otimes a j} \times J_{k-j} V^{\otimes a k-j}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) を取れば

$$\|\varphi_{j,k}(u_n, v_n) - \psi_{j,k}(u, v)\|_k \longrightarrow 0, \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成り立つ. また

$$\begin{aligned} \|u_n|_j|v_n|_{k-j} - |u|_j|v|_{k-j}\| &\leq \|u_n|_j|v_n|_{k-j} - |u_n|_j|v|_{k-j}\| + \|u_n|_j|v|_{k-j} - |u|_j|v|_{k-j}\| \\ &\leq \|u_n|_j|v_n - v|_{k-j} + |u_n - u|_j|v|_{k-j}\| \\ &\longrightarrow 0, \quad (n \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

も成立するから

$$\begin{aligned} \|\psi_{j,k}(u, v)\|_k - \|u|_j|v|_{k-j}\| &\leq \|\varphi_{j,k}(u_n, v_n) - \psi_{j,k}(u, v)\|_k + \|u_n|_j|v_n|_{k-j} - |u|_j|v|_{k-j}\| \\ &\longrightarrow 0, \quad (n \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

が従い  $\|\psi_{j,k}(u, v)\|_k = \|u|_j|v|_{k-j}$  が得られる. ■

$T(V) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} V^{\otimes k}$  とおく. また上で定めた双線型写像  $\psi_{j,k}$  を  $\otimes_{j,k}$  と書き直す:

$$u \otimes_{j,k} v = \psi_{j,k}(u, v), \quad (\forall (u, v) \in V^{\otimes j} \times V^{\otimes k-j}, 0 \leq j \leq k, k \geq 0).$$

このとき, 任意の  $a = (a_k)_{k=0}^{\infty}, b = (b_k)_{k=0}^{\infty} \in T(V)$  に対し

$$c_k := \sum_{j=0}^k a_j \otimes_{j,k} b_{k-j}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

で  $c_k \in V^{\otimes k}$  を定めれば, 有限個の  $k$  を除いて  $c_k = 0$  となり  $c = (c_k)_{k=0}^{\infty} \in T(V)$  が満たされる. これで定まる二項算法を

$$c = a \otimes b$$

と書けば, 以下の主張により  $T(V)$  は  $\otimes$  を乗法として代数となる.

**補題 1.4.3.** 任意の  $0 \leq r \leq j \leq k$ ,  $(r, j, k \in \mathbb{N})$  と任意の  $a_r \in V^{\otimes r}, b_{j-r} \in V^{\otimes j-r}, c_{k-j} \in V^{\otimes k-j}$  に対して

$$(a_r \otimes_{r,j} b_{j-r}) \otimes_{j,k} c_{k-j} = a_r \otimes_{r,k} (b_{j-r} \otimes_{j-r,k-r} c_{k-j}) \quad (1.14)$$

が成立する.

証明.

第一段  $a_r \in J_r V^{\otimes a r}, b_{j-r} \in J_{j-r} V^{\otimes a j-r}, c_{k-j} \in J_{k-j} V^{\otimes a k-j}$  として (1.14) を示す. この場合, (1.13) の対応関係により

$$\begin{aligned} (a_r \otimes_{r,j} b_{j-r}) \otimes_{j,k} c_{k-j} &= J_k F_{j,k}^{-1} \left[ \left\{ F_{r,j}^{-1} (J_r^{-1} a_r \otimes_a J_{j-r}^{-1} b_{j-r}) \right\} \otimes_a J_{k-j}^{-1} c_{k-j} \right], \\ a_r \otimes_{r,k} (b_{j-r} \otimes_{j-r,k-r} c_{k-j}) &= J_k F_{r,k}^{-1} \left[ J_r^{-1} a_r \otimes_a \left\{ F_{j-r,k-r}^{-1} (J_{j-r}^{-1} b_{j-r} \otimes_a J_{k-j}^{-1} c_{k-j}) \right\} \right] \end{aligned}$$

となる. ここで

$$J_r^{-1} a_r = \sum_{i_1=1}^{I_1} v_1^{i_1} \otimes_a \cdots \otimes_a v_r^{i_1}, \quad J_{j-r}^{-1} b_{j-r} = \sum_{i_2=1}^{I_2} v_{r+1}^{i_2} \otimes_a \cdots \otimes_a v_j^{i_2}, \quad J_{k-j}^{-1} c_{k-j} = \sum_{i_3=1}^{I_3} v_{j+1}^{i_3} \otimes_a \cdots \otimes_a v_k^{i_3}$$



と表現できるから

$$\begin{aligned}
 & F_{j,k}^{-1} \left[ \left\{ F_{r,j}^{-1} \left( J_r^{-1} a_r \otimes_a J_{j-r}^{-1} b_{j-r} \right) \right\} \otimes_a J_{k-j}^{-1} c_{k-j} \right] \\
 &= \sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{i_2=1}^{I_2} \sum_{i_3=1}^{I_3} v_1^{i_1} \otimes_a \cdots \otimes_a v_r^{i_1} \otimes_a v_{r+1}^{i_2} \otimes_a \cdots \otimes_a v_j^{i_2} \otimes_a v_{j+1}^{i_3} \otimes_a \cdots \otimes_a v_k^{i_3} \\
 &= F_{r,k}^{-1} \left[ J_r^{-1} a_r \otimes_a \left\{ F_{j-r,k-r}^{-1} \left( J_{j-r}^{-1} b_{j-r} \otimes_a J_{k-j}^{-1} c_{k-j} \right) \right\} \right]
 \end{aligned}$$

が成立し,  $J_k$  の単射性から (1.14) が得られる.

第二段 一般に  $a_r \in V^{\otimes r}$ ,  $b_{j-r} \in V^{\otimes j-r}$ ,  $c_{k-j} \in V^{\otimes k-j}$  の場合,

$$|a_r^n - a_r|_r \rightarrow 0, \quad |b_{j-r}^n - b_{j-r}|_{j-r} \rightarrow 0, \quad |c_{k-j}^n - c_{k-j}|_{k-j} \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty)$$

を満たす点列  $\{a_r^n\}_{n=1}^\infty \subset J_r V^{\otimes a_r}$ ,  $\{b_{j-r}^n\}_{n=1}^\infty \subset J_{j-r} V^{\otimes a_{j-r}}$ ,  $\{c_{k-j}^n\}_{n=1}^\infty \subset J_{k-j} V^{\otimes a_{k-j}}$  を取れば, 前段の結果より

$$\begin{aligned}
 & \left| (a_r \otimes_{r,j} b_{j-r}) \otimes_{j,k} c_{k-j} - a_r \otimes_{r,k} (b_{j-r} \otimes_{j-r,k-r} c_{k-j}) \right|_k \\
 & \leq \left| (a_r \otimes_{r,j} b_{j-r}) \otimes_{j,k} c_{k-j} - (a_r^n \otimes_{r,j} b_{j-r}^n) \otimes_{j,k} c_{k-j}^n \right|_k \\
 & \quad + \left| a_r \otimes_{r,k} (b_{j-r} \otimes_{j-r,k-r} c_{k-j}) - a_r^n \otimes_{r,k} (b_{j-r}^n \otimes_{j-r,k-r} c_{k-j}^n) \right|_k \\
 & \leq |a_r \otimes_{r,j} b_{j-r}|_j |c_{k-j} - c_{k-j}^n|_{k-j} + |a_r \otimes_{r,j} b_{j-r} - a_r^n \otimes_{r,j} b_{j-r}^n|_j |c_{k-j}^n|_{k-j} \\
 & \quad + |a_r|_r |b_{j-r} \otimes_{j-r,k-r} c_{k-j} - b_{j-r}^n \otimes_{j-r,k-r} c_{k-j}^n|_{k-r} + |a_r - a_r^n|_r |b_{j-r}^n \otimes_{j-r,k-r} c_{k-j}^n|_{k-r} \\
 & \leq |a_r|_r |b_{j-r}|_{j-r} |c_{k-j} - c_{k-j}^n|_{k-j} + \left\{ |a_r - a_r^n|_r |b_{j-r}|_{j-r} + |a_r^n|_r |b_{j-r} - b_{j-r}^n|_{j-r} \right\} |c_{k-j}^n|_{k-j} \\
 & \quad + |a_r|_r \left\{ |b_{j-r} - b_{j-r}^n|_{j-r} |c_{k-j}|_{k-j} + |b_{j-r}^n|_{j-r} |c_{k-j} - c_{k-j}^n|_{k-j} \right\} + |a_r - a_r^n|_r |b_{j-r}^n|_{j-r} |c_{k-j}^n|_{k-j} \\
 & \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)
 \end{aligned}$$

が従い (1.14) が出る. ■

定理 1.4.4 ( $\otimes$  は  $T(V)$  の乗法となる).  $\otimes$  は  $T(V)$  において結合則を満たす双線型写像である.

証明.  $\otimes$  の双線型性は各  $\otimes_{j,k}$  の双線型性より従う. また任意の  $a, b, c \in T(V)$  に対し, 補題 1.4.3 より

$$\begin{aligned}
 ((a \otimes b) \otimes c)_k &= \sum_{j=0}^k (a \otimes b)_j \otimes_{j,k} c_{k-j} \\
 &= \sum_{j=0}^k \sum_{r=0}^j (a_r \otimes_{r,j} b_{j-r}) \otimes_{j,k} c_{k-j} = \sum_{j=0}^k \sum_{r=0}^j a_r \otimes_{r,k} (b_{j-r} \otimes_{j-r,k-r} c_{k-j}) = \sum_{r=0}^k \sum_{j=r}^k a_r \otimes_{r,k} (b_{j-r} \otimes_{j-r,k-r} c_{k-j}) \\
 &= \sum_{r=0}^k a_r \otimes_{r,k} (b \otimes c)_{k-r} \\
 &= (a \otimes (b \otimes c))_k, \quad (\forall k = 0, 1, 2, \dots).
 \end{aligned}$$

が成立する. ■

定理 1.4.5 ( $T(V)$  の単位元). 任意の  $k \geq 0$ , および任意の  $\alpha \in \mathbb{R}$  と  $v \in V^{\otimes k}$  に対し

$$\alpha \otimes_{0,k} v = v \otimes_{k,k} \alpha = \alpha v \quad (1.15)$$

が成立する. 特に,  $e_0 := 1$ ,  $e_k := 0$  ( $k \geq 0$ ) として定める  $e = (e_k)_{k=1}^\infty \in T(V)$  は  $\otimes$  に関する単位元である:

$$\text{i.e. } e \otimes a = a \otimes e = a, \quad (\forall a \in T(V))$$

証明.  $v \in J_k V^{\otimes k}$  の場合は (1.13) の対応関係により

$$\alpha \otimes_{0,k} v = J_k F_{0,k}^{-1} (\alpha \otimes_a J_k^{-1} v) = J_k (\alpha J_k^{-1} v) = J_k J_k^{-1} \alpha v = \alpha v$$

が成立する. 一般の  $v \in V^{\otimes k}$  に対しては,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v - v_n\|_k = 0$  を満たす  $\{v_n\}_{n=1}^\infty \subset J_k V^{\otimes k}$  を取れば

$$\|\alpha v - \alpha \otimes_{0,k} v\|_k \leq \|\alpha v - \alpha v_n\|_k + \|\alpha \otimes_{0,k} v_n - \alpha \otimes_{0,k} v\|_k = 2\|\alpha\| \|v - v_n\|_k \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成立し  $\alpha v = \alpha \otimes_{0,k} v$  が得られる. 同様に  $\alpha v = v \otimes_{k,k} \alpha$  も成り立つ. 従って, 任意の  $a \in T(V)$  に対し

$$\begin{aligned} (e \otimes a)_k &= \sum_{j=0}^k e_j \otimes_{j,k} a_{k-j} = 1 \otimes_{0,k} a_k \\ &= a_k = a_k \otimes_{k,k} 1 = \sum_{j=0}^k a_j \otimes_{j,k} e_{k-j} = (a \otimes e)_k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

が満たされ  $e \otimes a = a \otimes e = a$  が出る. ■

$n \geq 0$  に対して

$$T^{(n)}(V) := \bigoplus_{k=0}^n V^{\otimes k}$$

とおき,  $T(V)$  の場合と同様に乗法  $\otimes$  を

$$a \otimes b, \quad \left( (a \otimes b)_k := \sum_{j=0}^k a_j \otimes_{j,k} b_{k-j}, \quad k = 1, \dots, n \right), \quad a, b \in T^{(n)}(V)$$

により定め, 次の直積ノルムでノルム位相を導入する:

$$\|a\| := \sum_{k=0}^n \|a_k\|_k, \quad (a = (a_k)_{k=0}^n \in T^{(n)}(V)).$$

また, 写像  $X: \Delta_T \rightarrow T^{(n)}(V)$  に対して  $X_{s,t} = (X_{s,t}^0, \dots, X_{s,t}^n)$ ,  $((s, t) \in \Delta_T)$  と表記し

$$C_0(\Delta_T, T^{(n)}(V)) := \left\{ X: \Delta_T \rightarrow T^{(n)}(V); \quad \text{continuous, } X^0 \equiv 1 \right\}$$

を定める.

定義 1.4.6 (有限  $p$ -変動).  $p \geq 1$  とする.  $X : \Delta_T \rightarrow T^{(n)}(V)$  に対して或るコントロール関数  $\omega$  が存在して

$$|X_{s,t}^i|_i \leq \omega(s,t)^{1/p}, \quad (\forall i = 1, \dots, n, \forall (s,t) \in \Delta_T) \quad (1.16)$$

を満たすとき,  $X$  は有限  $p$ -変動 (finite  $p$ -variation) であるという.\*7

定義 1.4.7 (有限総  $p$ -変動).  $p \geq 1$  とする.  $X \in C_0(\Delta_T, T^{(n)}(V))$  が有限総  $p$ -変動 (finite total  $p$ -variation) とは

$$\|X^i\|_{p/i} < \infty, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

が満たされることをいう. また次の線型空間を定める:

$$C_{0,p}(\Delta_T, T^{(n)}(V)) := \{X \in C_0(\Delta_T, T^{(n)}(V)) ; X \text{ has finite total } p\text{-variation}\}.$$

定義 1.4.8 (乗法的汎関数). 次の関係式 (Chen's identity) を満たす  $X \in C_0(\Delta_T, T^{(n)}(V))$  を  $n$  次の乗法的汎関数 (multiplicative functional of degree  $n$ ) と呼ぶ:

$$X_{s,u} \otimes X_{u,t} = X_{s,t}, \quad (\forall 0 \leq s \leq u \leq t \leq T).$$

補題 1.4.9.  $X : \Delta_T \rightarrow T^{(n)}(V)$  が  $X^0 \equiv 1$  かつ Chen's identity を満たせば  $X_{t,t}^k = 0$ , ( $0 \leq \forall t \leq T$ ,  $1 \leq \forall k \leq n$ ).

証明. 任意に  $t \in [0, T]$  を取る.  $X_{t,t}^k = \sum_{j=0}^k X_{t,t}^j \otimes_{j,k} X_{t,t}^{k-j}$  と式 (1.15) より, 先ず

$$X_{t,t}^1 = X_{t,t}^0 \otimes_{0,1} X_{t,t}^1 + X_{t,t}^1 \otimes_{1,1} X_{t,t}^0 = X_{t,t}^1 + X_{t,t}^1$$

が成り立ち  $X_{t,t}^1 = 0$  が従う. 同様に

$$X_{t,t}^2 = X_{t,t}^0 \otimes_{0,2} X_{t,t}^2 + X_{t,t}^1 \otimes_{1,2} X_{t,t}^1 + X_{t,t}^2 \otimes_{2,2} X_{t,t}^0 = X_{t,t}^2 + X_{t,t}^2$$

より  $X_{t,t}^2 = 0$  が成立し, 帰納的に  $X_{t,t}^k = 0$  ( $1 \leq k \leq n$ ) が出る. ■

定理 1.4.10.  $n$  次乗法的汎関数については有限  $p$ -変動であることと有限総  $p$ -変動であることは同値である.

\*7  $X : \Delta_T \rightarrow T^{(n)}(V)$  が有限  $p$ -変動であることと  $\|X\|_p$  が有限であることは一致しない. 実際, 後述のシグネチャー  $X = (X^0, \dots, X^n)$  は有限  $p$ -変動であるが, その定義より  $X^0 \equiv 1$  が満たされているから

$$D \text{ の分割小区間の数} = \sum_D |X_{t_{i-1}, t_i}^0|_0^p \leq \sum_D |X_{t_{i-1}, t_i}|^p \leq \|X\|_p^p, \quad (\forall D \in \delta[0, T])$$

が成り立ち  $\|X\|_p = \infty$  となる.

証明.  $X \in C_0(\Delta_T, T^{(n)}(V))$  を  $n$  次乗法的とする.  $X$  が有限総  $p$ -変動ならば, 補題 1.4.9 と定理 1.2.8 より

$$\omega(s, t) := \sum_{i=1}^n \|X^i\|_{p/i, [s, t]}^{p/i}, \quad ((s, t) \in \Delta_T)$$

で定める  $\omega$  はコントロール関数となる. このとき

$$|X_{s, t}^i|_i \leq \|X^i\|_{p/i, [s, t]} \leq \omega(s, t)^{i/p}, \quad (\forall i = 1, \dots, n, \forall (s, t) \in \Delta_T)$$

が成り立つから  $X$  は有限  $p$ -変動である. 逆に  $X$  が有限  $p$ -変動なら, (1.16) を満たす  $\omega$  に対し

$$\sum_D |X_{t_{i-1}, t_i}^i|_i^{p/i} \leq \sum_D \omega(t_{i-1}, t_i) \leq \omega(0, T), \quad (\forall D \in \delta[0, T], \forall i = 1, \dots, n)$$

が満たされ  $\|X^i\|_{p/i} < \infty$ ,  $i = 1, \dots, n$  が従うので  $X$  は有限総  $p$ -変動である. ■

実際に乗法的汎関数を構成する. 有界変動な連続写像  $x: [0, T] \rightarrow V$  に対して

$$X_{s, t}^1 := x_t - x_s, \quad (\forall (s, t) \in \Delta_T)$$

とおけば,  $X^1: \Delta_T \rightarrow V$  は連続かつ  $\|X^1\|_1 < \infty$  を満たす. このとき,

補題 1.4.11. 任意の  $(s, t) \in \Delta_T$  と連続写像  $Y: \Delta_T \rightarrow V^{\otimes k}$ ,  $(k \geq 1)$  に対して次の積分が  $V^{\otimes k+1}$  で確定する:

$$\int_s^t Y_{s, u} \otimes dx_u := \lim_{|D| \rightarrow 0} \sum_D Y_{s, u_{i-1}} \otimes_{k, k+1} X_{u_{i-1}, u_i}^1, \quad (D \in \delta[s, t]). \quad (1.17)$$

証明.  $D = \{s = u_0 < \dots < u_n = t\}$ ,  $D' = \{s = v_0 < \dots < v_m = t\} \in \delta[s, t]$  を任意に取り, 共通細分を  $D'' = \{s = w_0 < \dots < w_r = t\}$  と表して

$$\begin{cases} \tilde{Y}_{s, w_\ell} := Y_{s, u_i}, & (u_i \leq w_\ell < u_{i+1}), \\ \hat{Y}_{s, w_\ell} := Y_{s, v_j}, & (v_j \leq w_\ell < v_{j+1}), \end{cases} \quad (\ell = 0, 1, \dots, r)$$

で  $\tilde{Y}, \hat{Y}$  を定めれば, 定理 1.4.2 より

$$\begin{aligned} & \left| \sum_D Y_{s, u_{i-1}} \otimes_{k, k+1} X_{u_{i-1}, u_i}^1 - \sum_{D'} Y_{s, v_{j-1}} \otimes_{k, k+1} X_{v_{j-1}, v_j}^1 \right|_{k+1} \\ & \leq \left| \sum_D Y_{s, u_{i-1}} \otimes_{k, k+1} X_{u_{i-1}, u_i}^1 - \sum_{D''} Y_{s, w_{\ell-1}} \otimes_{k, k+1} X_{w_{\ell-1}, w_\ell}^1 \right|_{k+1} + \left| \sum_{D'} Y_{s, v_{j-1}} \otimes_{k, k+1} X_{v_{j-1}, v_j}^1 - \sum_{D''} Y_{s, w_{\ell-1}} \otimes_{k, k+1} X_{w_{\ell-1}, w_\ell}^1 \right|_{k+1} \\ & = \left| \sum_{D''} \tilde{Y}_{s, w_{\ell-1}} \otimes_{k, k+1} X_{w_{\ell-1}, w_\ell}^1 - \sum_{D''} Y_{s, w_{\ell-1}} \otimes_{k, k+1} X_{w_{\ell-1}, w_\ell}^1 \right|_{k+1} + \left| \sum_{D''} \hat{Y}_{s, w_{\ell-1}} \otimes_{k, k+1} X_{w_{\ell-1}, w_\ell}^1 - \sum_{D''} Y_{s, w_{\ell-1}} \otimes_{k, k+1} X_{w_{\ell-1}, w_\ell}^1 \right|_{k+1} \\ & = \left| \sum_{D''} (\tilde{Y}_{s, w_{\ell-1}} - Y_{s, w_{\ell-1}}) \otimes_{k, k+1} X_{w_{\ell-1}, w_\ell}^1 \right|_{k+1} + \left| \sum_{D''} (\hat{Y}_{s, w_{\ell-1}} - Y_{s, w_{\ell-1}}) \otimes_{k, k+1} X_{w_{\ell-1}, w_\ell}^1 \right|_{k+1} \\ & \leq \sum_{D''} |\tilde{Y}_{s, w_{\ell-1}} - Y_{s, w_{\ell-1}}|_k \|X_{w_{\ell-1}, w_\ell}^1\|_1 + \sum_{D''} |\hat{Y}_{s, w_{\ell-1}} - Y_{s, w_{\ell-1}}|_k \|X_{w_{\ell-1}, w_\ell}^1\|_1 \\ & \leq \max_k |\tilde{Y}_{s, w_{\ell-1}} - Y_{s, w_{\ell-1}}|_k \|X^1\|_{1, [s, t]} + \max_k |\hat{Y}_{s, w_{\ell-1}} - Y_{s, w_{\ell-1}}|_k \|X^1\|_{1, [s, t]} \end{aligned}$$

が成立する. いま,  $[s, t] \ni u \mapsto Y_{s,u}$  は一様連続であるから,  $|D|, |D'| \rightarrow 0$  として右辺は 0 に収束する. 従って  $|D_n| \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) を満たす細分列  $D_n \in \delta[s, t]$  を取れば,  $\left(\sum_{D_n} Y_{s,u_{i-1}} \otimes_{k,k+1} X_{u_{i-1},u_i}^1\right)_{n=1}^\infty$  は  $V^{\otimes k+1}$  の Cauchy 列となり  $V^{\otimes k+1}$  で収束する. 別の細分列  $\tilde{D}_m \in \delta[s, t]$ , ( $|\tilde{D}_m| \rightarrow 0$ ) を取っても

$$\left| \sum_{D_n} Y_{s,u_{i-1}} \otimes_{k,k+1} X_{u_{i-1},u_i}^1 - \sum_{\tilde{D}_m} Y_{s,v_{j-1}} \otimes_{k,k+1} X_{v_{j-1},v_j}^1 \right|_{k+1} \rightarrow 0, \quad (n, m \rightarrow \infty)$$

が成り立つから, 極限は細分列に依らず確定する. 従って補題の主張が得られる. ■

補題 1.4.12. (1.17) の積分を

$$Z_{s,t} := \int_s^t Y_{s,u} \otimes dx_u, \quad (\forall (s, t) \in \Delta_T)$$

とおけば,  $Z : \Delta_T \rightarrow V^{\otimes k+1}$  は連続かつ有界変動である.

証明.

第一段  $Z$  が有界変動であることを示す. いま, 任意に  $(s, t) \in \Delta_T$  ( $s < t$ ) <sup>\*8</sup> を取る.

$$M := \sup_{(x,y) \in \Delta_T} |Y_{x,y}|_k$$

とおけば  $Y$  の連続性より  $M < \infty$  となり, 任意の  $\epsilon > 0$  に対し或る  $D \in \delta[s, t]$  が存在して

$$|Z_{s,t}|_{k+1} \leq \epsilon + \left| \sum_D Y_{s,u_{i-1}} \otimes_{k,k+1} X_{u_{i-1},u_i}^1 \right|_{k+1} \leq \epsilon + \sum_D |Y_{s,u_{i-1}}|_k |X_{u_{i-1},u_i}^1|_1 \leq \epsilon + M \|X^1\|_{1,[s,t]}$$

が成立する.  $\epsilon > 0$  と  $(s, t)$  の任意性より

$$|Z_{s,t}|_{k+1} \leq M \|X^1\|_{1,[s,t]}, \quad (\forall (s, t) \in \Delta_T)$$

が従い  $\|Z\|_1 \leq M \|X^1\|_1$  (1-変動ノルム) を得る.

第二段 点  $(s, s)$  ( $\forall s \in [0, T]$ ) において  $Z$  が連続であること示す. 実際, 定理 1.2.8 より

$$\Delta_T \ni (s, t) \mapsto \|X^1\|_{1,[s,t]} \tag{1.18}$$

はコントロール関数であるから,

$$|Z_{t,u} - Z_{s,s}|_{k+1} = |Z_{t,u}|_{k+1} \leq M \|X^1\|_{1,[t,u]} \rightarrow 0 \quad ((t, u) \rightarrow (s, s))$$

が成立し  $Z$  の  $(s, s)$  における連続性を得る.

第三段  $s < t$  を満たす点  $(s, t) \in \Delta_T$  において  $Z$  が連続であること示す. いま, 任意に  $\epsilon > 0$  を取れば,

(i) (1.18) がコントロール関数であるから, 或る  $\eta_1 > 0$  が存在して  $|s - a|, |t - b| < \eta_1$  ならば

$$\|X^1\|_{1,[s \wedge a, s \vee a]} < \epsilon, \quad \|X^1\|_{1,[t \wedge b, t \vee b]} < \epsilon$$

が満たされる.

<sup>\*8</sup>  $s = t$  なら,  $X_{s,t}^1 = 0$  より  $Z_{s,t} = 0$  が成り立つ.

- (ii) 或る  $\eta_2 > 0$  が存在して  $|s-a|, |t-b| < \eta_2$  ならば  $[s, t] \cap [a, b] \neq \emptyset$  が満たされる。  
 (iii)  $Y$  は  $\Delta_T$  上一様連続であるから、或る  $\eta_3 > 0$  が存在して  $|s-a| < \eta_3$  なら

$$\sup \left\{ \|Y_{s,u} - Y_{a,u}\|_k ; \quad (s \vee a) \leq u \leq T \right\} < \epsilon$$

が満たされる。

- (iv) 補題 1.4.11 より或る  $\eta_4 > 0$  が存在して  $|D_1|, |D_2| < \eta_4$ , ( $D_1 \in \delta[s, t]$ ,  $D_2 \in \delta[a, b]$ ) なら

$$\left\| Z_{s,t} - \sum_{D_1} Y_{s,u_{i-1}} \otimes_{k,k+1} X_{u_{i-1},u_i}^1 \right\|_{k+1} < \epsilon, \quad \left\| Z_{a,b} - \sum_{D_2} Y_{a,v_{j-1}} \otimes_{k,k+1} X_{v_{j-1},v_j}^1 \right\|_{k+1} < \epsilon$$

が満たされる。

ここで  $\eta := \eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \eta_3$  として、 $|s-a|, |t-b| < \eta$ ,  $|D_1|, |D_2| < \eta_4$  を満たす  $(a, b), D_1, D_2$  を取り

$$\begin{aligned} \Omega_3 &:= (D_1 \cup D_2) \cap [s, t] \cap [a, b], \\ \Omega_1 &:= D_1 \cup \Omega_3, \quad \Omega_1^< := \Omega_1 \cap [0, a], \quad \Omega_1^> := \Omega_1 \cap [b, T], \\ \Omega_2 &:= D_2 \cup \Omega_3, \quad \Omega_2^< := \Omega_2 \cap [0, s], \quad \Omega_2^> := \Omega_2 \cap [t, T] \end{aligned}$$

とおけば、 $\Omega_1 = \Omega_1^< \cup \Omega_3 \cup \Omega_1^>$ ,  $\Omega_2 = \Omega_2^< \cup \Omega_3 \cup \Omega_2^>$  と分割できる。このとき (i)(ii)(iii) が満たされるから

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{\Omega_1} Y_{s,u_{i-1}} \otimes_{k,k+1} X_{u_{i-1},u_i}^1 - \sum_{\Omega_2} Y_{a,v_{j-1}} \otimes_{k,k+1} X_{v_{j-1},v_j}^1 \right\|_{k+1} \\ & \leq \left\| \sum_{\Omega_3} Y_{s,u_{i-1}} \otimes_{k,k+1} X_{u_{i-1},u_i}^1 - \sum_{\Omega_3} Y_{a,u_{i-1}} \otimes_{k,k+1} X_{u_{i-1},u_i}^1 \right\|_{k+1} \\ & \quad + \left\| \sum_{\Omega_1^<} Y_{s,u_{i-1}} \otimes_{k,k+1} X_{u_{i-1},u_i}^1 \right\|_{k+1} + \left\| \sum_{\Omega_1^>} Y_{s,u_{i-1}} \otimes_{k,k+1} X_{u_{i-1},u_i}^1 \right\|_{k+1} \\ & \quad + \left\| \sum_{\Omega_2^<} Y_{a,u_{i-1}} \otimes_{k,k+1} X_{u_{i-1},u_i}^1 \right\|_{k+1} + \left\| \sum_{\Omega_2^>} Y_{a,v_{j-1}} \otimes_{k,k+1} X_{v_{j-1},v_j}^1 \right\|_{k+1} \\ & \leq \sum_{\Omega_3} \|Y_{s,u_{i-1}} - Y_{a,u_{i-1}}\|_k \|X_{u_{i-1},u_i}^1\|_1 + \sum_{\Omega_1^<} \|Y_{s,u_{i-1}}\|_k \|X_{u_{i-1},u_i}^1\|_1 + \sum_{\Omega_1^>} \|Y_{s,u_{i-1}}\|_k \|X_{u_{i-1},u_i}^1\|_1 \\ & \quad + \sum_{\Omega_2^<} \|Y_{a,u_{i-1}}\|_k \|X_{u_{i-1},u_i}^1\|_1 + \sum_{\Omega_2^>} \|Y_{a,v_{j-1}}\|_k \|X_{v_{j-1},v_j}^1\|_1 \\ & \leq \sup_{u \in [s \vee a, T]} \|Y_{s,u} - Y_{a,u}\|_k \|X^1\|_1 + M (\|X^1\|_{1,[s,s \vee a]} + \|X^1\|_{1,[a,s \vee a]} + \|X^1\|_{1,[t,t \vee b]} + \|X^1\|_{1,[b,t \vee b]}) \\ & < (\|X^1\|_1 + 4M) \epsilon \end{aligned}$$

が成立し、(iv) と併せれば

$$\|Z_{s,t} - Z_{a,b}\|_{k+1} < (\|X^1\|_1 + 4M + 2) \epsilon, \quad (|s-a|, |t-b| < \eta)$$

が従い  $Z$  の  $(s, t)$  における連続性が得られる。 ■

定義 1.4.13 (パスのシグネチャー). 有界変動な連続写像  $x : [0, T] \rightarrow V$  に対して  $X_{s,t}^1 := x_t - x_s$ ,  $(\forall (s, t) \in \Delta_T)$  とおけば, 補題 1.4.11 と補題 1.4.12 により逐次的に次を構成することができる:

$$V^{\otimes i+1} \ni X_{s,t}^{i+1} := \int_s^t X_{s,u}^i \otimes dx_u, \quad (\forall (s, t) \in \Delta_T, i = 1, 2, \dots)$$

ここで  $S(x) : \Delta_T \ni (s, t) \mapsto (1, X_{s,t}^1, X_{s,t}^2, \dots) =: S(x)_{[s,t]}$  とおき, 特に  $S(x)_{[0,T]}$  をパス  $x$  のシグネチャー (signature of path  $x$ ) と呼ぶ.

定理 1.4.14 (逐次積分により定まる乗法的汎関数). 任意の  $n \geq 1$  に対し,  $S(x)_{[s,t]}$  の最初の  $n+1$  個<sup>\*9</sup>の元の族を  $S_n(x)_{[s,t]} = (X_{s,t}^0, X_{s,t}^1, \dots, X_{s,t}^n)$ ,  $(\forall (s, t) \in \Delta_T)$  と書けば,  $S_n(x)$  は  $n$  次乗法的である.

証明. 補題 1.4.12 より  $S_n(x) \in C_0(\Delta_T, T^{(n)}(V))$  であるから, 以下では任意の  $k \geq 0$  と  $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$  に対して

$$X_{s,t}^k = \sum_{j=0}^k X_{s,u}^j \otimes_{j,k} X_{u,t}^{k-j}. \quad (1.19)$$

が成り立つことを数学的帰納法で示す.  $k=0$  ならシグネチャーの定義より両辺 1 であるから (1.19) は満たされる.

第一段  $k=1$  の場合,  $X_{s,t}^1 = x_t - x_s$ ,  $(\forall (s, t) \in \Delta_T)$  より

$$\sum_{j=0}^1 X_{s,u}^j \otimes_{j,k} X_{u,t}^{k-j} = X_{s,u}^0 \otimes_{0,1} X_{u,t}^1 + X_{s,u}^1 \otimes_{1,1} X_{u,t}^0 = X_{u,t}^1 + X_{s,u}^1 = X_{s,t}^1$$

となる.

第二段  $k=m-1$  ( $m \geq 2$ ) まで式 (1.19) が満たされていると仮定するとき, 任意の  $D \in \delta[u, t]$  に対して

$$\sum_D \{X_{s,u_{i-1}}^{m-1} - X_{u,u_{i-1}}^{m-1}\} \otimes_{m-1,m} X_{u_{i-1},u_i}^1 = \sum_{j=1}^{m-1} X_{s,u}^j \otimes_{j,m} \left\{ \sum_D X_{u,u_{i-1}}^{m-1-j} \otimes_{m-1-j,m-j} X_{u_{i-1},u_i}^1 \right\} \quad (1.20)$$

となることを次段で示す. 実際これが示されれば,  $D' \in \delta[s, u]$  に対し

$$\begin{aligned} \left| X_{s,t}^m - \sum_{j=0}^m X_{s,u}^j \otimes_{j,m} X_{u,t}^{m-j} \right|_m &\leq \left| X_{s,t}^m - \sum_{D'} X_{s,u_{i-1}}^{m-1} \otimes_{m-1,m} X_{u_{i-1},u_i}^1 - \sum_D X_{s,u_{i-1}}^{m-1} \otimes_{m-1,m} X_{u_{i-1},u_i}^1 \right|_m \\ &\quad + \left| \sum_{D'} X_{s,u_{i-1}}^{m-1} \otimes_{m-1,m} X_{u_{i-1},u_i}^1 - X_{s,u}^m \right|_m + \left| \sum_D X_{u,u_{i-1}}^{m-1} \otimes_{m-1,m} X_{u_{i-1},u_i}^1 - X_{u,t}^m \right|_m \\ &\quad + \left| \sum_D \{X_{s,u_{i-1}}^{m-1} - X_{u,u_{i-1}}^{m-1}\} \otimes_{m-1,m} X_{u_{i-1},u_i}^1 - \sum_{j=1}^{m-1} X_{s,u}^j \otimes_{j,m} X_{u,t}^{m-j} \right|_m \\ &= \left| X_{s,t}^m - \sum_{D'} X_{s,u_{i-1}}^{m-1} \otimes_{m-1,m} X_{u_{i-1},u_i}^1 - \sum_D X_{s,u_{i-1}}^{m-1} \otimes_{m-1,m} X_{u_{i-1},u_i}^1 \right|_m \\ &\quad + \left| \sum_{D'} X_{s,u_{i-1}}^{m-1} \otimes_{m-1,m} X_{u_{i-1},u_i}^1 - X_{s,u}^m \right|_m + \left| \sum_D X_{u,u_{i-1}}^{m-1} \otimes_{m-1,m} X_{u_{i-1},u_i}^1 - X_{u,t}^m \right|_m \\ &\quad + \left| \sum_{j=1}^{m-1} X_{s,u}^j \otimes_{j,m} \left\{ \sum_D X_{u,u_{i-1}}^{m-1-j} \otimes_{m-1-j,m-j} X_{u_{i-1},u_i}^1 \right\} - \sum_{j=1}^{m-1} X_{s,u}^j \otimes_{j,m} X_{u,t}^{m-j} \right|_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left| X_{s,t}^m - \sum_{D'} X_{s,u_{i-1}}^{m-1} \otimes_{m-1,m} X_{u_{i-1},u_i}^1 - \sum_D X_{s,u_{i-1}}^{m-1} \otimes_{m-1,m} X_{u_{i-1},u_i}^1 \right|_m \\
&\quad + \left| \sum_{D'} X_{s,u_{i-1}}^{m-1} \otimes_{m-1,m} X_{u_{i-1},u_i}^1 - X_{s,u}^m \right|_m + \left| \sum_D X_{u,u_{i-1}}^{m-1} \otimes_{m-1,m} X_{u_{i-1},u_i}^1 - X_{u,t}^m \right|_m \\
&\quad + \sum_{j=1}^{m-1} \left| X_{s,u}^j \right|_j \left| \left\{ \sum_D X_{u,u_{i-1}}^{m-1-j} \otimes_{m-1-j,m-j} X_{u_{i-1},u_i}^1 \right\} - X_{u,t}^{m-j} \right|_{m-j} \\
&\rightarrow 0 \quad (|D'|, |D| \rightarrow 0)
\end{aligned}$$

が従い、 $k = m$  の場合も (1.19) が成り立つ。

第三段 式 (1.20) を示す。仮定より  $k = m - 1$  のとき (1.19) は満たされているから、補題 1.4.3 と併せれば

$$\begin{aligned}
\sum_D \{X_{s,u_{i-1}}^{m-1} - X_{u,u_{i-1}}^{m-1}\} \otimes_{m-1,m} X_{u_{i-1},u_i}^1 &= \sum_D \left\{ \sum_{j=0}^{m-1} X_{s,u}^j \otimes_{j,m-1} X_{u,u_{i-1}}^{m-1-j} - X_{u,u_{i-1}}^{m-1} \right\} \otimes_{m-1,m} X_{u_{i-1},u_i}^1 \\
&= \sum_D \left\{ \sum_{j=1}^{m-1} X_{s,u}^j \otimes_{j,m-1} X_{u,u_{i-1}}^{m-1-j} \right\} \otimes_{m-1,m} X_{u_{i-1},u_i}^1 \\
&= \sum_D \sum_{j=1}^{m-1} \{X_{s,u}^j \otimes_{j,m-1} X_{u,u_{i-1}}^{m-1-j}\} \otimes_{m-1,m} X_{u_{i-1},u_i}^1 \\
&= \sum_{j=1}^{m-1} \sum_D X_{s,u}^j \otimes_{j,m-j} \{X_{u,u_{i-1}}^{m-1-j} \otimes_{m-1-j,m-j} X_{u_{i-1},u_i}^1\} \\
&= \sum_{j=1}^{m-1} X_{s,u}^j \otimes_{j,m} \left\{ \sum_D X_{u,u_{i-1}}^{m-1-j} \otimes_{m-1-j,m-j} X_{u_{i-1},u_i}^1 \right\}
\end{aligned}$$

が成立する。 ■

**定義 1.4.15** ( $p$ -ラフパス).  $p \geq 1$  とし、 $p$  を超えない最大の整数を  $[p]$  で表す。有限  $p$ -変動を持つ  $[p]$  次乗法的汎関数を  $p$ -ラフパス ( $p$ -rough path) と呼び、その全体を  $\Omega_p(V)$  と書く：

$$\Omega_p(V) = \left\{ X \in C_0(\Delta_T, T^{([p])}(V)) ; \quad [p] \text{ 次乗法的, 有限 } p\text{-変動.} \right\}.$$

**定理 1.4.16.**  $\Omega_p(V)$  は次で定める距離により完備距離空間となる：

$$d_p(X, Y) := \max_{1 \leq i \leq [p]} \|X^i - Y^i\|_{p/i}, \quad (X, Y \in \Omega_p(V)).$$

ただし  $X_{s,t} = (X_{s,t}^0, X_{s,t}^1, \dots, X_{s,t}^{[p]})$ ,  $((s, t) \in \Delta_T)$  に対して  $X^i : \Delta_T \ni (s, t) \mapsto X_{s,t}^i \in V^{\otimes i}$ ,  $(1 \leq i \leq [p])$  である。

$X \in \Omega_p(V)$  は  $X^0 \equiv 1$  を満たすから、 $\max_{1 \leq i \leq [p]} \|\cdot\|_{p/i}$  は  $\Omega_p(V)$  においてノルムとはならない。

**証明.** 完備性を示す。

**第一段** 極限を構成する。任意の  $Y \in \Omega_p(V)$  に対して、定理 1.4.10 より  $Y$  は有限総  $p$ -変動であり

$$Y^i \in B_{p/i,T}(V^{\otimes i}), \quad *10 \quad (\forall i = 1, \dots, [p])$$



となるから、任意の Cauchy 列  $\{X^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} \subset \Omega_p(V)$  に対して

$$\|X^{(k),i} - X^i\|_{p/i} \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty, \forall i = 1, \dots, [p]) \quad (1.21)$$

を満たす  $X^i \in B_{p/i,T}(V^{\otimes i})$  が存在する (定理 1.2.7). ここで  $X : \Delta_T \longrightarrow T^{([p])}(V)$  を

$$X_{s,t} := (1, X_{s,t}^1, \dots, X_{s,t}^n), \quad (\forall (s, t) \in \Delta_T)$$

により定めれば、 $X^i, i = 1, \dots, n$  の連続性より  $X \in C_0(\Delta_T, T^{([p])}(V))$  が従う.

第二段  $X$  が Chen's identity を満たすことを示す. これが示されれば、前段の結果と定理 1.4.10 より  $X$  は有限  $p$ -変動となり  $X \in \Omega_p(V)$  が従う. 任意の  $1 \leq i \leq [p]$  と  $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$  に対して次が成立すればよい:

$$X_{s,t}^i = \sum_{j=0}^i X_{s,u}^j \otimes_{j,i} X_{u,t}^{i-j}. \quad (1.22)$$

実際、(1.21) より

$$\|X_{s,t}^{(k),i} - X_{s,t}^i\|_i \leq \|X^{(k),i} - X^i\|_{p/i} \longrightarrow 0, \quad (k \longrightarrow \infty, \forall (s, t) \in \Delta_T, \forall i = 1, \dots, [p])$$

が成り立つから、任意の  $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$  に対して

$$\begin{aligned} \left\| X_{s,t}^i - \sum_{j=0}^i X_{s,u}^j \otimes_{j,i} X_{u,t}^{i-j} \right\|_i &\leq \|X_{s,t}^i - X_{s,t}^{(k),i}\|_i + \left\| \sum_{j=0}^i X_{s,u}^j \otimes_{j,i} X_{u,t}^{i-j} - \sum_{j=0}^i X_{s,u}^{(k),j} \otimes_{j,i} X_{u,t}^{(k),i-j} \right\|_i \\ &\leq \|X_{s,t}^i - X_{s,t}^{(k),i}\|_i + \sum_{j=0}^i \|X_{s,u}^j - X_{s,u}^{(k),j}\|_j \|X_{u,t}^{i-j}\|_{i-j} \\ &\quad + \sum_{j=0}^i \|X_{s,u}^{(k),j}\|_j \|X_{u,t}^{i-j} - X_{u,t}^{(k),i-j}\|_{i-j} \\ &\longrightarrow 0, \quad (k \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

が従い (1.22) を得る. (1.21) より  $d_p(X^{(k)}, X) \longrightarrow 0$  ( $k \longrightarrow \infty$ ) が成り立ち定理の主張が得られる. ■

有界変動かつ連続な  $x : [0, T] \longrightarrow V$  で定める  $S(x)$  は、任意の  $p \geq 1$  に対して  $S_{[p]}(x) \in \Omega_p(V)$  を満たす. 実際、定理 1.4.14 より  $S_{[p]}(x)$  は  $[p]$  次乗法的であり、また定理 1.4.12 と定理 1.2.6 より

$$\|X^i\|_{p/i} \leq \|X^i\|_1 < \infty, \quad (\forall i = 1, \dots, [p])$$

が満たされる. 乗法的汎関数に対して有限総  $p$ -変動と有限  $p$ -変動は同値になるから  $S_{[p]}(x) \in \Omega_p(V)$  が従う.

**定義 1.4.17 (スムーズラフパス).**  $p \geq 1$  とする. このとき有界変動かつ連続な  $x : [0, T] \longrightarrow V$  で定める  $S(x)$  は  $S_{[p]}(x) \in \Omega_p(V)$  を満たす. この  $S_{[p]}(x)$  をスムーズラフパス (smooth rough path) と呼び、スムーズラフパス全体の  $d_p$  による位相での閉包を  $G\Omega_p(V)$  と書き、その元を  $p$ -ジオメトリックラフパス ( $p$ -geometric rough path) と呼ぶ.

\*10  $B_{p/i,T}(V^{\otimes i})$  の定義は (p. 7) の (1.3).

## 付録 A

# テンソル積・クロスノルム

以下、零元のみ線型空間は考えない。すなわち以下で扱う全ての線型空間には基底が存在する。  $E, E_i, F$  を体  $\mathbb{K}$  上の線形空間とすると、  $\text{Hom}(E, F)$  で  $E$  から  $F$  への  $\mathbb{K}$ -線型写像の全体を表す。また  $\text{Hom}^{(n)}(E_1 \times \cdots \times E_n, F)$  で  $E_1 \times \cdots \times E_n$  から  $F$  への  $\mathbb{K}$ - $n$  重線型写像の全体を表す。  $X$  をノルム空間と考えるときは、特に指定しなければノルムを  $\|\cdot\|_X$  と書いてノルム位相を導入する。  $X$  に何らかのノルム  $\|\cdot\|$  が定まっているとき、  $(X, \|\cdot\|)$  の位相的対偶空間を  $(X, \|\cdot\|)^*$  と書く。ノルム空間の族  $(X_i)_{i=1}^n$  の直和  $\bigoplus_{i=1}^n X_i$  には直積ノルム  $\|\cdot\|_{X_1} + \cdots + \|\cdot\|_{X_n}$  により位相を導入する。

### A.1 ノルム空間上の有界多重線型写像

[参考:[9]]  $\mathbb{K}$  を  $\mathbb{R}$  または  $\mathbb{C}$  と考える。また  $n \geq 1$  とする。

**定義 A.1.1 (有界な多重線型写像).**  $(X_i)_{i=1}^n$  及び  $Y$  を全て  $\mathbb{K}$  上のノルム空間とすると、有界な  $n$  重線型写像の全体を  $L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Y)$  で表す。つまり任意の  $f \in L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Y)$  に対して次を満たす定数  $C \geq 0$  が存在する:

$$\|f(x_1, \dots, x_n)\|_Y \leq C \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}, \quad (\forall x_i \in X_i, i = 1, \dots, n). \quad (\text{A.1})$$

**定理 A.1.2 (有界  $\Leftrightarrow$  連続).**  $(X_i)_{i=1}^n$  及び  $Y$  を全て  $\mathbb{K}$  上のノルム空間とする。任意の  $f \in \text{Hom}^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Y)$  に対して、  $f$  が連続であることと  $f$  が有界であることは一致する。

証明.

**第一段**  $f \in \text{Hom}^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Y)$  が連続であるとする。このとき  $f$  は  $0 \in \bigoplus_{i=1}^n X_i$  で連続であるから、或る  $\delta_1, \dots, \delta_n > 0$  が存在して  $\|x_1\|_{X_1} \leq \delta_1, \dots, \|x_n\|_{X_n} \leq \delta_n$  が満たされている限り

$$\|f(x_1, \dots, x_n)\|_Y \leq 1$$

が成立する。よって任意の  $x_i \in X_i$  ( $x_i \neq 0, i = 1, \dots, n$ ) に対して

$$\frac{\delta_1 \cdots \delta_n}{\|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}} \|f(x_1, \dots, x_n)\|_Y = \left\| f\left(\delta_1 \frac{x_1}{\|x_1\|_{X_1}}, \dots, \delta_n \frac{x_n}{\|x_n\|_{X_n}}\right) \right\|_Y \leq 1$$

が従い

$$\|f(x_1, \dots, x_n)\|_Y \leq \frac{1}{\delta_1 \cdots \delta_n} \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}$$

を得る。或る  $i$  で  $x_i = 0$  であっても上の不等式は満たされるから  $f$  は有界である。

第二段  $f$  が有界であるとする。このとき或る定数  $C \geq 0$  が存在して (A.1) を満たし、

$$\begin{aligned} \|f(x_1, \dots, x_n) - f(y_1, \dots, y_n)\|_Y &\leq \|f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(y_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\quad + f(y_1, x_2, \dots, x_n) - f(y_1, y_2, \dots, x_n) \\ &\quad \dots \\ &\quad + f(y_1, \dots, y_{n-1}, x_n) - f(y_1, \dots, y_n)\|_Y \\ &\leq C \|x_1 - y_1\|_{X_1} \|x_2\|_{X_2} \cdots \|x_n\|_{X_n} \\ &\quad + C \|y_1\|_{X_1} \|x_2 - y_2\|_{X_2} \cdots \|x_n\|_{X_n} \\ &\quad + C \|y_1\|_{X_1} \cdots \|y_{n-1} - x_{n-1}\|_{X_{n-1}} \|x_n - y_n\|_{X_n} \\ &\rightarrow 0 \quad (\|(x_1, \dots, x_n) - (y_1, \dots, y_n)\|_{\bigoplus_{i=1}^n X_i} \rightarrow 0) \end{aligned}$$

が成り立つから  $f$  の連続性が出る。 ■

$(X_i)_{i=1}^n$  及び  $Y$  を全て  $\mathbb{K}$  上のノルム空間とする。このとき  $f \in L^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Y\right)$  の作用素ノルムは次で定まる：

$$\|f\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Y)} := \inf \left\{ C \geq 0 ; \quad \|f(x_1, \dots, x_n)\|_Y \leq C \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}, (\forall x_i \in X_i, i = 1, \dots, n) \right\}.$$

下限の定義より次が成立する：

$$\|f(x_1, \dots, x_n)\|_Y \leq \|f\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Y)} \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}, \quad (\forall x_i \in X_i, i = 1, \dots, n). \quad (\text{A.2})$$

実際、(A.2) が満たされない場合、或る  $(u_1, \dots, u_n) \in \bigoplus_{i=1}^n X_i$  ( $u_i \neq 0, i = 1, \dots, n$ ) が存在して

$$\frac{\|f(u_1, \dots, u_n)\|_Y}{\|u_1\|_{X_1} \cdots \|u_n\|_{X_n}} > \|f\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Y)}$$

が成立するが、実数の連続性より

$$\frac{\|f(u_1, \dots, u_n)\|_Y}{\|u_1\|_{X_1} \cdots \|u_n\|_{X_n}} > \delta > \|f\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Y)}$$

を満たす  $\delta$  が存在し、

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Y)} &< \delta \\ &\leq \inf \left\{ C \geq 0 ; \quad \|f(x_1, \dots, x_n)\|_Y \leq C \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}, (\forall x_i \in X_i, i = 1, \dots, n) \right\} \\ &= \|f\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Y)} \end{aligned}$$

が従い矛盾が生じる。

**定理 A.1.3 (多重線型写像の作用素ノルム).**  $(X_i)_{i=1}^n$  及び  $Y$  を全て  $\mathbb{K}$  上のノルム空間とする。このとき、任意の  $f \in L^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Y\right)$  に対して次が成立する：

$$\|f\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Y)} = \sup_{\substack{\|x_i\|_{X_i}=1 \\ i=1, \dots, n}} \|f(x_1, \dots, x_n)\|_Y = \sup_{\substack{\|x_i\|_{X_i} \leq 1 \\ i=1, \dots, n}} \|f(x_1, \dots, x_n)\|_Y = \sup_{\substack{\|x_i\|_{X_i} \neq 0 \\ i=1, \dots, n}} \frac{\|f(x_1, \dots, x_n)\|_Y}{\|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}}.$$

**証明.** (第四式)  $\leq$  (第一式)  $\leq$  (第二式)  $\leq$  (第三式)  $\leq$  (第四式) を示す。

第一段 式 (A.2) より次を得る:

$$\sup_{\substack{\|x_i\|_{X_i} \neq 0 \\ i=1, \dots, n}} \frac{\|f(x_1, \dots, x_n)\|_Y}{\|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}} \leq \|f\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Y)}.$$

第二段 任意の  $0 \neq x_i \in X_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) に対して

$$\begin{aligned} \|f(x_1, \dots, x_n)\|_Y &= \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n} \left\| f\left(\frac{x_1}{\|x_1\|_{X_1}}, \dots, \frac{x_n}{\|x_n\|_{X_n}}\right) \right\|_Y \\ &\leq \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n} \sup_{\substack{\|x_i\|_{X_i}=1 \\ i=1, \dots, n}} \|f(x_1, \dots, x_n)\|_Y \end{aligned}$$

が成立するから

$$\|f\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Y)} \leq \sup_{\substack{\|x_i\|_{X_i}=1 \\ i=1, \dots, n}} \|f(x_1, \dots, x_n)\|_Y$$

が従う.

第三段 上限を取る範囲の大小より

$$\sup_{\substack{\|x_i\|_{X_i}=1 \\ i=1, \dots, n}} \|f(x_1, \dots, x_n)\|_Y \leq \sup_{\substack{\|x_i\|_{X_i} \leq 1 \\ i=1, \dots, n}} \|f(x_1, \dots, x_n)\|_Y$$

が出る.

第四段  $0 < \|x_i\|_{X_i} \leq 1$  ( $i = 1, \dots, n$ ) ならば

$$\begin{aligned} \|f(x_1, \dots, x_n)\|_Y &= \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n} \frac{\|f(x_1, \dots, x_n)\|_Y}{\|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}} \\ &\leq \frac{\|f(x_1, \dots, x_n)\|_Y}{\|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}} \\ &\leq \sup_{\substack{\|x_i\|_{X_i} \neq 0 \\ i=1, \dots, n}} \frac{\|f(x_1, \dots, x_n)\|_Y}{\|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}} \end{aligned}$$

が成立するから

$$\sup_{\substack{\|x_i\|_{X_i} \leq 1 \\ i=1, \dots, n}} \|f(x_1, \dots, x_n)\|_Y \leq \sup_{\substack{\|x_i\|_{X_i} \neq 0 \\ i=1, \dots, n}} \frac{\|f(x_1, \dots, x_n)\|_Y}{\|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}}$$

が得られる. ■

定理 A.1.4 (有界な多重線型写像の一意拡張).  $n \geq 1$  とする.  $(X_i)_{i=1}^n$  をノルム空間,  $Z$  を Banach 空間,  $Y_i$  を  $X_i$  の稠密な部分空間とする ( $i = 1, \dots, n$ ). このとき, 有界  $n$  重線型写像  $b: \bigoplus_{i=1}^n Y_i \rightarrow Z$  は  $(X_i)_{i=1}^n$  上の  $Z$  値  $n$  重線型写像  $\tilde{b}$  に一意に拡張され,  $b$  と  $\tilde{b}$  の作用素ノルムは一致する.

証明.  $\bigoplus_{i=1}^n Y_i$  は  $\bigoplus_{i=1}^n X_i$  で稠密であるから, 任意の  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \bigoplus_{i=1}^n X_i$  に対して

$$\|x - x^k\|_{\bigoplus_{i=1}^n X_i} = \sum_{i=1}^n \|x_i - x_i^k\|_{X_i} \rightarrow 0, \quad (k \rightarrow \infty)$$

を満たす点列  $x^k = (x_1^k, \dots, x_n^k) \in \bigoplus_{i=1}^n Y_i$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) が存在する.

$$M_i := \sup_{k \geq 1} \|x_i^k\|_{X_i}, \quad (i = 1, \dots, n)$$

とおけば,  $M_i < \infty$  ( $i = 1, \dots, n$ ) より

$$\begin{aligned} \|b(x^k) - b(x^\ell)\|_Z &= \|b(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k) - b(x_1^\ell, x_2^\ell, \dots, x_n^\ell) \\ &\quad + b(x_1^\ell, x_2^\ell, \dots, x_n^\ell) - b(x_1^\ell, x_2^\ell, \dots, x_n^\ell) \\ &\quad \dots \\ &\quad + b(x_1^\ell, \dots, x_{n-1}^\ell, x_n^k) - b(x_1^\ell, \dots, x_n^\ell)\|_Z \\ &\leq \|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n Y_i, Z)} \|x_1^k - x_1^\ell\|_{X_1} M_2 \cdots M_n \\ &\quad + \|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n Y_i, Z)} M_1 \|x_2^k - x_2^\ell\|_{X_2} M_3 \cdots M_n \\ &\quad \dots \\ &\quad + \|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n Y_i, Z)} M_1 \cdots M_{n-1} \|x_n^k - x_n^\ell\|_{X_n} \\ &\longrightarrow 0, \quad (k, \ell \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

が成り立ち,  $Z$  の完備性より  $\lim_{k \rightarrow \infty} b(x^k)$  が存在する. 別の収束列  $\bigoplus_{i=1}^n Y_i \ni y^m \longrightarrow x$  を取れば

$$\|x_i^k - y_i^m\|_{X_i} \leq \|x_i^k - x_i\|_{X_i} + \|x_i - y_i^m\|_{X_i} \longrightarrow 0, \quad (k, m \longrightarrow \infty, i = 1, \dots, n)$$

より  $\|b(x^k) - b(y^m)\|_Z \longrightarrow 0$  ( $k, m \longrightarrow \infty$ ) が従い

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b(x^k) = \lim_{m \rightarrow \infty} b(y^m)$$

が得られ, これにより写像  $\tilde{b}: x \mapsto \lim_{k \rightarrow \infty} b(x^k)$  が定まる. この  $\tilde{b}$  は  $b$  の拡張であり, 有界かつ  $n$  重線型性を持つ. 先ず  $n$  重線型性を示す.  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  と  $y = (y_1, x_2, \dots, x_n)$  に対し

$$\|x - x^k\|_{\bigoplus_{i=1}^n X_i} \longrightarrow 0, \quad \|y - y^k\|_{\bigoplus_{i=1}^n X_i} \longrightarrow 0$$

を満たす点列  $(x^k)_{k=1}^\infty, (y^k)_{m=1}^\infty \subset \bigoplus_{i=1}^n Y_i$  を取れば

$$\begin{aligned} &\|\tilde{b}(\alpha x_1 + \beta y_1, x_2, \dots, x_n) - \alpha \tilde{b}(x_1, \dots, x_n) - \beta \tilde{b}(y_1, \dots, x_n)\|_Z \\ &\leq \|\tilde{b}(\alpha x_1 + \beta y_1, x_2, \dots, x_n) - b(\alpha x_1^k + \beta y_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)\|_Z \\ &\quad + |\alpha| \|\tilde{b}(x_1, \dots, x_n) - b(x_1^k, \dots, x_n^k)\|_Z \\ &\quad + |\beta| \|\tilde{b}(y_1, \dots, x_n) - b(y_1^k, \dots, x_n^k)\|_Z \\ &\longrightarrow 0, \quad (k \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

が成り立ち,  $\tilde{b}$  の第一成分に関する線型性を得る. 他の成分も同じである. また任意の  $x \in \bigoplus_{i=1}^\infty X_i$  に対して収束列  $(x^k)_{k=1}^\infty \subset \bigoplus_{i=1}^n Y_i$  を取れば, 任意の  $\epsilon > 0$  に対し或る  $k$  が存在して

$$\|\tilde{b}(x)\|_Z \leq \|b(x^k)\|_Z + \epsilon$$

かつ

$$\|x_i^k\|_{X_i} \leq \|x_i\|_{X_i} + \epsilon, \quad (i = 1, \dots, n)$$

が満たされ

$$\|\tilde{b}(x)\|_Z \leq \|b(x^k)\|_Z + \epsilon \leq \|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n Y_i, Z)} \prod_{i=1}^n (\|x_i\|_{X_i} + \epsilon) + \epsilon$$

が従う． $x$  及び  $\epsilon$  の任意性より  $\|\tilde{b}\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Z)} \leq \|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n Y_i, Z)}$  が成り立ち， $\tilde{b}$  は  $b$  の拡張だから

$$\|\tilde{b}\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Z)} = \|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n Y_i, Z)}$$

が出る．拡張の一意性は  $\bigoplus_{i=1}^n Y_i$  の稠密性と  $\tilde{b}$  の連続性による．

## A.2 ノルム空間の完備拡大

[参考:[10](pp. 268-273)]  $\mathbb{K}$  を  $\mathbb{R}$  或は  $\mathbb{C}$  と考える．

定理 A.2.1 (ノルム空間の完備化)． $(X, \|\cdot\|_X)$  を  $\mathbb{K}$  上のノルム空間とすると、次の (e1) と (e2) を満たす  $\mathbb{K}$ -Banach 空間  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  と線型等長写像  $J : X \rightarrow Y$  ( $\|x\|_X = \|Jx\|_Y$ ) が存在する:

(e1)  $JX$  は  $Y$  において稠密である．

(e2) 別の  $\mathbb{K}$ -Banach 空間  $(Z, \|\cdot\|_Z)$  と線型等長  $K : X \rightarrow Z$  が存在して (e1) を満たすとき， $F \circ J = K$  を満たす等長同型  $F : Y \rightarrow Z$  が存在する．

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{F} & Z \\ & \swarrow J \quad \searrow K & \\ & X & \end{array}$$

(e3)  $X$  が内積空間なら  $Y$  は Hilbert 空間であり，それぞれ内積を  $\langle \cdot, \cdot \rangle_X, \langle \cdot, \cdot \rangle_Y$  と書けば次が成り立つ:

$$\langle Jx, Jx' \rangle_Y = \langle x, x' \rangle_X, \quad (\forall x, x' \in X).$$

証明.

第一段  $X$  の Cauchy 列の全体を  $\text{Cauchy}(X)$  で表す．任意の  $(x_n), (x'_n) \in \text{Cauchy}(X)$  に対し

$$|\|x_n - x'_n\|_X - \|x_m - x'_m\|_X| \leq \|x_n - x_m\|_X + \|x'_n - x'_m\|_X$$

が成り立つから， $(\|x_n - x'_n\|_X)_{n=1}^\infty$  は  $\mathbb{R}$  の Cauchy 列をなして収束し，

$$(x_n) R (x'_n) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x'_n\|_X = 0$$

により  $\text{Cauchy}(X)$  に同値関係  $R$  が定まる． $\text{Cauchy}(X)$  は， $0 \in X$  の列を零元と定め，

$$(x_n) + (x'_n) := (x_n + x'_n), \quad \alpha(x_n) := (\alpha x_n)$$

を線型演算とすれば線型空間となり，

$$N := \{ (x_n) \in \text{Cauchy}(X) ; (x_n) R (0) \}$$

は部分空間となるから，次の商

$$Y := \text{Cauchy}(X)/N$$

は適当な線型演算により線型空間となる.  $(x_n)$  の  $R$  に関する同値類を  $[(x_n)]$  と表すとき

$$\|[(x_n)]\|_Y := \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_X \quad (\text{A.3})$$

は well-defined であり,  $\|\cdot\|_Y$  は  $Y$  においてノルムとなる.

第二段 任意の  $x \in X$  に対し  $x_n = x$  ( $\forall n \geq 1$ ) を満たす  $(x_n)$  を  $\zeta_x$  と書けば,

$$J : X \ni x \mapsto [\zeta_x] \in Y \quad (\text{A.4})$$

により等長線型が定まる. 実際, 任意の  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ,  $u, v \in X$  に対して

$$\|J(\alpha u + \beta v) - \alpha J u - \beta J v\|_Y = \|[\zeta_{\alpha u + \beta v}] - \alpha[\zeta_u] - \beta[\zeta_v]\|_Y = \|[\zeta_{\alpha u + \beta v} - \alpha \zeta_u - \beta \zeta_v]\|_Y = 0$$

が成り立つから  $J$  は線型であり,

$$\|Jx\|_Y = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_X = \|x\|_X, \quad (\forall x \in X)$$

より等長性も得られる.

第三段 (e1) を示す. いま, 任意に  $y = [(x_n)] \in Y$  と  $\epsilon > 0$  を取る. このとき或る  $N \in \mathbb{N}$  が存在して

$$\|x_n - x_m\|_X < \frac{\epsilon}{2}, \quad (\forall n, m > N)$$

を満たす.  $m > N$  を満たす  $m$  を任意に一つ選んで

$$\epsilon_m := \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\|_X$$

とおけば, また或る  $N' \in \mathbb{N}$  ( $N' > N$ ) が存在して

$$|\epsilon_m - \|x_n - x_m\|| < \frac{\epsilon}{2}, \quad (\forall n > N')$$

が成立し

$$\epsilon_m < \frac{\epsilon}{2} + \|x_n - x_m\|_X < \epsilon, \quad (\forall m > N)$$

が従う. すなわち,  $JX$  の点列  $[\zeta_{x_1}], [\zeta_{x_2}], \dots$  は  $y$  にノルム収束する:

$$\|y - [\zeta_{x_m}]\|_Y = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\|_X \longrightarrow 0 \quad (m \longrightarrow \infty).$$

第四段  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  の完備性を示す.  $(y_n)$  を  $Y$  の Cauchy 列とすれば,

$$\|y_n - Jx_n\|_Y < \frac{1}{n}, \quad (\forall n = 1, 2, \dots)$$

を満たす  $\{x_1, x_2, \dots\} \subset X$  が存在する. このとき

$$\|x_n - x_m\|_X = \|Jx_n - Jx_m\|_Y < \frac{1}{n} + \|y_n - y_m\|_Y + \frac{1}{m} \longrightarrow 0 \quad (n, m \longrightarrow \infty)$$

より  $(x_n) \in \text{Cauchy}(X)$  が従い,  $y := [(x_n)]$  とおけば

$$\|y - y_m\|_Y \leq \|y - Jx_m\|_Y + \|Jx_m - y_m\|_Y < \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\|_X + \frac{1}{m} \longrightarrow 0 \quad (m \longrightarrow \infty)$$

が成り立ち  $Y$  の完備性が出る.

第五段  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  とは別の Banach 空間  $(Z, \|\cdot\|_Z)$  と線型等長  $K : X \rightarrow Z$  が存在して (e1) を満たすとき,

$$\tilde{F} : JX \ni y \mapsto K \circ J^{-1}(y), \quad \tilde{G} : KX \ni z \mapsto J \circ K^{-1}(z)$$

により定める等長線型  $\tilde{F}, \tilde{G}$  は

$$\begin{aligned} \tilde{F} \circ \tilde{G}(z) &= z, \quad (\forall z \in KX), \\ \tilde{G} \circ \tilde{F}(y) &= y, \quad (\forall y \in JX) \end{aligned}$$

を満たす. 定理 A.1.4 より  $\tilde{F}, \tilde{G}$  は  $Y, Z$  上の線型写像  $F, G$  に一意的にノルム保存拡張され, このとき, 任意の  $y \in Y$  及び  $z \in Z$  それぞれに対しノルム収束する  $JX$  の点列  $(y_n)$ ,  $KX$  の点列  $(z_n)$  を取れば,

$$\begin{aligned} \|F \circ G(z) - z\|_Z &\leq \|F \circ G(z) - \tilde{F} \circ \tilde{G}(z_n)\|_Z + \|z_n - z\|_Z \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \\ \|G \circ F(y) - y\|_Y &\leq \|G \circ F(y) - \tilde{G} \circ \tilde{F}(y_n)\|_Y + \|y_n - y\|_Y \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

が成り立ち  $F = G^{-1}$  が従う. よって  $F : Y \rightarrow Z$  は等長同型であり

$$F \circ J = \tilde{F} \circ J = (K \circ J^{-1}) \circ J = K \circ (J^{-1} \circ J) = K$$

を満たす.

第六段  $X$  が内積空間の場合,  $X$  の内積を  $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$  と書く. いま, 任意の  $(x_n), (x'_n) \in \text{Cauchy}(X)$  に対して

$$|\langle x_n, x'_n \rangle_X - \langle x_m, x'_m \rangle_X| \leq \|x_n - x_m\|_X \|x'_n\|_X + \|x_m\|_X \|x'_n - x'_m\|_X \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty)$$

が成り立つから  $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, x'_n \rangle_X$  は  $\mathbb{K}$  で収束する. ここで

$$b(y, y') := \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, x'_n \rangle_X, \quad (\forall y = [(x_n)], y' = [(x'_n)] \in Y)$$

と定めれば,  $b$  は well-defined であり  $Y \times Y$  上の半双線型となる. 実際,  $[(x_n)] = [(\tilde{x}_n)], [(x'_n)] = [(\tilde{x}'_n)]$  に対して

$$|\langle x_n, x'_n \rangle_X - \langle \tilde{x}_n, \tilde{x}'_n \rangle_X| \leq \|x_n - \tilde{x}_n\|_X \|x'_n\|_X + \|\tilde{x}_n\|_X \|x'_n - \tilde{x}'_n\|_X \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つから  $b$  は well-defined であり, また任意の  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  と  $y, y', y_1 = [(x_n^1)], y_2 = [(x_n^2)] \in Y$  に対し

$$\begin{aligned} |b(\alpha y_1 + \beta y_2, y') - \alpha b(y_1, y') - \beta b(y_2, y')| &\leq |b(\alpha y_1 + \beta y_2, y') - \langle \alpha x_n^1 + \beta x_n^2, x'_n \rangle_X| \\ &\quad + |\alpha b(y_1, y') - \alpha \langle x_n^1, x'_n \rangle_X| + |\beta b(y_2, y') - \beta \langle x_n^2, x'_n \rangle_X| \\ &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

かつ  $b(y, y') = \overline{b(y', y)}$  (共役対称性) が満たされ  $b$  の半双線型性が出る. また

$$b(y, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_X^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = [(x_n)] = 0, \quad (\forall y = [(x_n)] \in Y)$$

も得られる. 従って

$$\langle y, y' \rangle_Y := b(y, y'), \quad (\forall y, y' \in Y)$$

とおけば  $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y$  は  $Y$  の内積となる. (A.3) で定めるノルムと  $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y$  により導入するノルムは一致するから, 前段の結果により  $Y$  は  $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y$  を内積とする Hilbert 空間である. また (A.4) で定める等長線型  $J$  について

$$\langle Jx, Jx' \rangle_Y = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x, x' \rangle_X = \langle x, x' \rangle_X, \quad (\forall x, x' \in X)$$

が成立する.



### A.3 テンソル積

[参考:[4], [8]]  $n \geq 2$  として, 体  $\mathbb{K}$  上の線形空間の族  $(E_i)_{i=1}^n$  に対してテンソル積を定義する.

$$\Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right) = \left\{ b : \bigoplus_{i=1}^n E_i \longrightarrow \mathbb{K} ; \quad \text{有限個の } e \in \bigoplus_{i=1}^n E_i \text{ を除いて } b(e) = 0. \right\}$$

により  $\mathbb{K}$ -線形空間  $\Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right)$  を定める. また  $e = (e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i$  に対する定義関数を

$$\mathbb{I}_{e_1, \dots, e_n}(x) = \begin{cases} 1, & x = e, \\ 0, & x \neq e \end{cases}$$

で表す.  $\Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right)$  の線型部分空間を

$$\begin{aligned} \Lambda_0\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right) \\ := \text{Span} \left[ \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{I}_{e_1, \dots, e_i + e'_i, \dots, e_n} - \mathbb{I}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n} - \mathbb{I}_{e_1, \dots, e'_i, \dots, e_n}, \\ \mathbb{I}_{e_1, \dots, \lambda e_i, \dots, e_n} - \lambda \mathbb{I}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n} \end{array} ; \quad e_i, e'_i \in E_i, \lambda \in \mathbb{K}, 1 \leq i \leq n \right\} \right] \end{aligned}$$

により定め,  $b \in \Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right)$  の  $\Lambda_0\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right)$  に関する同値類を  $[b]$  と書く. そして

$$E_1 \otimes \cdots \otimes E_n = \bigotimes_{i=1}^n E_i := \Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right) / \Lambda_0\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right)$$

で定める商空間を  $(E_i)_{i=1}^n$  のテンソル積と定義する. また  $(e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i$  に対し

$$e_1 \otimes \cdots \otimes e_n := [\mathbb{I}_{e_1, \dots, e_n}]$$

により定める  $\otimes : \bigoplus_{i=1}^n E_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n E_i$  をテンソル積の標準写像と呼ぶ.

定理 A.3.1 (標準写像の多重線型性).  $(E_i)_{i=1}^n$  を  $\mathbb{K}$ -線形空間の族とすると,

$$\otimes : \bigoplus_{i=1}^n E_i \ni (e_1, \dots, e_n) \longmapsto e_1 \otimes \cdots \otimes e_n \in \bigotimes_{i=1}^n E_i$$

は  $n$  重線型写像である. また次が成り立つ:

$$\bigotimes_{i=1}^n E_i = \text{Span} \left[ \left\{ e_1 \otimes \cdots \otimes e_n ; \quad (e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i \right\} \right]. \quad (\text{A.5})$$

証明. 任意の  $1 \leq i \leq n$ ,  $e_1 \in E_1, \dots, e_n \in E_n$ ,  $e_i, e'_i \in E_i$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$  に対して

$$\begin{aligned}
 e_1 \otimes \cdots \otimes (e_i + e'_i) \otimes \cdots \otimes e_n &= [\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i + e'_i, \dots, e_n}] \\
 &= [\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n} + \mathbb{1}_{e_1, \dots, e'_i, \dots, e_n}] \\
 &= [\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n}] + [\mathbb{1}_{e_1, \dots, e'_i, \dots, e_n}] \\
 &= e_1 \otimes \cdots \otimes e_i \otimes \cdots \otimes e_n + e_1 \otimes \cdots \otimes e'_i \otimes \cdots \otimes e_n, \\
 e_1 \otimes \cdots \otimes (\lambda e_i) \otimes \cdots \otimes e_n &= [\mathbb{1}_{e_1, \dots, \lambda e_i, \dots, e_n}] \\
 &= [\lambda \mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n}] \\
 &= \lambda [\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n}] \\
 &= \lambda(e_1 \otimes \cdots \otimes e_i \otimes \cdots \otimes e_n)
 \end{aligned}$$

が成立するから  $\otimes$  は  $n$  重線型である. また任意に  $u = [b] \in E \otimes F$  を取れば

$$b = \sum_{j=1}^m k_j \mathbb{1}_{e_i^j, \dots, e_n^j}, \quad (k_j = b(e_i^j, \dots, e_n^j), j = 1, \dots, m)$$

と表せるから,

$$u = \left[ \sum_{j=1}^m k_j \mathbb{1}_{e_i^j, \dots, e_n^j} \right] = \left[ \sum_{j=1}^m \mathbb{1}_{k_j e_i^j, \dots, e_n^j} \right] = \sum_{j=1}^m (k_j e_1^j) \otimes \cdots \otimes e_n^j$$

が従い (A.5) を得る. ■

定理 A.3.2 ( $\cdots \otimes 0 \otimes \cdots$  は零ベクトル).  $(E_i)_{i=1}^n$  を  $\mathbb{K}$ -線形空間の族とし, テンソル積  $\bigotimes_{i=1}^n E_i$  を定める. このとき, 或る  $i$  で  $e_i = 0$  なら  $e_1 \otimes \cdots \otimes e_n = 0$  が成り立つ.

証明.  $e_i = 0$  のとき,  $\lambda = 0$  とすれば

$$e_1 \otimes \cdots \otimes e_n = [\mathbb{1}_{e_1, \dots, 0, \dots, e_n}] = [\mathbb{1}_{e_1, \dots, \lambda e_i, \dots, e_n} - \lambda \mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n}] = 0$$

が成立する. ■

定理 A.3.3 (普遍性 (universality of tensor products)).  $(E_i)_{i=1}^n$  を  $\mathbb{K}$ -線形空間の族とする. このとき任意の  $\mathbb{K}$ -線形空間  $V$  に対して,  $T \in \text{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n E_i, V\right)$  ならば  $T \circ \otimes \in \text{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$  が満たされ, これで定める次の対応  $\Phi_V$  は線型同型である:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n E_i, V\right) & \longrightarrow & \text{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right) \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ T & \longmapsto & T \circ \otimes \end{array} \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=1}^n E_i & & \\ \downarrow \otimes & \searrow \Phi(T) & \\ \bigotimes_{i=1}^n E_i & \xrightarrow{T} & V \end{array} \quad \begin{array}{c} \cup \\ \circlearrowright \end{array}$$

また  $\mathbb{K}$ -線形空間  $U_0$  と  $n$  重線型写像  $\iota: \bigoplus_{i=1}^n E_i \rightarrow U_0$  が, 任意の  $\mathbb{K}$ -線形空間  $V$  に対し

( $\otimes$ )<sub>1</sub>  $U_0$  は  $\iota$  の像で生成される.

( $\otimes$ )<sub>2</sub> 任意の  $\delta \in \text{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$  に対して  $\delta = \tau \circ \iota$  を満たす  $\tau \in \text{Hom}(U_0, V)$  が存在する.

を満たすなら, (A.6) において  $V = U_0$  とするとき  $T = \Phi_{U_0}^{-1}(\iota): \bigotimes_{i=1}^n E_i \rightarrow U_0$  は線型同型である.

後半の主張により,  $(E_i)_i$  のテンソル積を別の方法で導入しても, 商空間を用いて導入した  $\bigotimes_i E_i$  と線型同型に結ばれる. このとき, 別の方法で導入したテンソル積及び標準写像を  $\bigotimes_i \tilde{E}_i$ ,  $\tilde{\otimes}$  と表せば, 或る線型同型  $T: \bigotimes_i E_i \rightarrow \bigotimes_i \tilde{E}_i$  がただ一つ存在して

$$T(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) = e_1 \tilde{\otimes} \cdots \tilde{\otimes} e_n$$

を満たす. 特に任意の並べ替え  $\varphi: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  に対し

$$\begin{array}{ccc} \bigotimes_{i=1}^n E_i & \cong & \bigotimes_{i=1}^n E_{\varphi(i)} \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ e_1 \otimes \cdots \otimes e_n & \longleftrightarrow & e_{\varphi(1)} \otimes \cdots \otimes e_{\varphi(n)} \end{array}$$

が成立する.

証明.

第一段  $T \in \text{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n E_i, V\right)$  の線型性と  $\otimes$  の  $n$  重線型性より  $T \circ \otimes$  は  $n$  重線型である.

第二段  $\Phi_V(T_1) = \Phi_V(T_2)$  ならば  $T_1$  と  $T_2$  は  $\left\{e_1 \otimes \cdots \otimes e_n; (e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i\right\}$  の上で一致する. (A.5) より  $T_1 = T_2$  が成立し  $\Phi_V$  の単射性が従う.

第三段 次の二段で  $\Phi_V$  の全射性を示す. まず,  $\varphi \in \text{Hom}\left(\bigwedge\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right), V\right)$  に対し

$$g: \bigoplus_{i=1}^n E_i \ni (e_1, \dots, e_n) \mapsto \varphi(\mathbb{I}_{e_1, \dots, e_n}) \in V$$

を対応させる次の写像が全単射であることを示す:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}\left(\bigwedge\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right), V\right) & \longrightarrow & \text{Map}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right) \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ \varphi & \longmapsto & g \end{array}$$

$F(\varphi_1) = F(\varphi_2)$  のとき, 任意の  $e \in \bigoplus_{i=1}^n E_i$  に対して  $\varphi_1(\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_n}) = \varphi_2(\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_n})$  が成り立ち,

$$\Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right) = \text{Span} \left[ \left\{ \mathbb{1}_{e_1, \dots, e_n} ; \quad (e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i \right\} \right]$$

より  $\varphi_1 = \varphi_2$  が従い  $F$  の単射性が得られる. また  $g \in \text{Map}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$  に対して

$$\begin{aligned} \varphi(0) &:= 0, \\ \varphi(a) &:= \sum_{\substack{e \in \bigoplus_{i=1}^n E_i \\ a(e) \neq 0}} a(e)g(e), \quad \left( \forall a \in \Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right), a \neq 0 \right) \end{aligned}$$

により  $\varphi$  を定めれば,  $\varphi \in \text{Hom}\left(\Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right), V\right)$  より  ${}^*1$   $F$  の全射性が出る.

第四段 任意に  $b \in \text{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$  を取り  $h := F^{-1}(b)$  とおけば,  $h$  の線型性より

$$\begin{aligned} & b(e_1, \dots, e_i + e'_i, \dots, e_n) - b(e_1, \dots, e_i, \dots, e_n) - b(e_1, \dots, e'_i, \dots, e_n) \\ &= h(\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i + e'_i, \dots, e_n} - \mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n} - \mathbb{1}_{e_1, \dots, e'_i, \dots, e_n}), \\ & b(e_1, \dots, \lambda e_i, \dots, e_n) - \lambda b(e_1, \dots, e_i, \dots, e_n) \\ &= h(\mathbb{1}_{e_1, \dots, \lambda e_i, \dots, e_n} - \lambda \mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n}) \end{aligned}$$

が成り立ち,  $b$  の  $n$  重線型性により  $h$  は  $\Lambda_0\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right)$  上で 0 である. 従って

$$T([b]) := h(b), \quad (b \in \Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right))$$

で定める  $T$  は well-defined であり,  $T \in \text{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n E_i, V\right)$  かつ

$$b(e_1, \dots, e_n) = h(\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_n}) = (T \circ \otimes)(e_1, \dots, e_n), \quad (\forall (e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i)$$

が満たされ  $\Phi_V$  の全射性が得られる.

第五段  $(\otimes)_1, (\otimes)_2$  の下で  $\text{Hom}\left(U_0, \bigotimes_{i=1}^n E_i\right) \ni \tau \mapsto \tau \circ \iota \in \text{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, \bigotimes_{i=1}^n E_i\right)$  は全単射であるから,  $\tau \circ \iota = \otimes$  を満たす  $\tau \in \text{Hom}\left(U_0, \bigotimes_{i=1}^n E_i\right)$  がただ一つ存在する. 同様にして  $\iota = T \circ \otimes$  を満たす  $T \in \text{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n E_i, U_0\right)$  がただ一つ存在し, 併せれば

$$\otimes = \tau \circ \iota = (\tau \circ T) \circ \otimes, \quad \iota = T \circ \otimes = (T \circ \tau) \circ \iota$$

が成り立つ.  $T \mapsto T \circ \otimes, \tau \mapsto \tau \circ \iota$  が一対一であるから,  $\tau \circ T, T \circ \tau$  はそれぞれ恒等写像に一致して  $T^{-1} = \tau$  が従う. すなわち  $T$  は  $\bigotimes_{i=1}^n E_i$  から  $U_0$  への線型同型である. ■

<sup>\*1</sup>  $(\{e ; a(e) \neq 0\} \cup \{e ; a'(e) \neq 0\}) \cap \{e ; (a+a')(e) \neq 0\} = \{e ; (a+a')(e) \neq 0\}$  より

$$\begin{aligned} \varphi(a) + \varphi(a') &= \sum_{a(e) \neq 0} a(e)g(e) + \sum_{a'(e) \neq 0} a'(e)g(e) = \sum_{\substack{a(e) \neq 0 \\ (a+a')(e) \neq 0}} a(e)g(e) + \sum_{\substack{a(e) \neq 0 \\ (a+a')(e) \neq 0}} a(e)g(e) + \sum_{\substack{a'(e) \neq 0 \\ (a+a')(e) \neq 0}} a'(e)g(e) + \sum_{\substack{a'(e) \neq 0 \\ (a+a')(e) \neq 0}} a'(e)g(e) \\ &= \sum_{\substack{a(e) \neq 0 \\ (a+a')(e) \neq 0}} a(e)g(e) + \sum_{\substack{a'(e) \neq 0 \\ (a+a')(e) \neq 0}} a'(e)g(e) = \sum_{(a+a')(e) \neq 0} (a+a')(e)g(e) = \varphi(a+a') \end{aligned}$$

$\varphi$  の加法性を得る. スカラ倍は  $\varphi(\beta a) = \sum_{(\beta a)(e) \neq 0} (\beta a)(e)g(e) = \beta \sum_{a(e) \neq 0} a(e)g(e) = \beta \varphi(a)$  ( $\beta \neq 0$ ) 及び  $\varphi(0) = 0$  より従う.

定理 A.3.4 (スカラーとのテンソル積).  $E$  を  $\mathbb{K}$ -線型空間とすると、 $\mathbb{K} \otimes E$  と  $E$  は線型写像  $f: \mathbb{K} \otimes E \ni 1 \otimes e \mapsto e \in E$  により同型となる. 同様に  $E \otimes \mathbb{K}$  と  $E$  は線型写像  $g: E \otimes \mathbb{K} \ni e \otimes 1 \mapsto e \in E$  により同型となる.

証明.  $\mathbb{K} \otimes E = \text{Span}[\{\alpha \otimes e; \alpha \in \mathbb{K}, e \in E\}] = \{1 \otimes e; e \in E\}$  が成り立つから  $f$  は全単射となる. ■

定義 A.3.5 (線型写像のテンソル積).  $(E_i)_{i=1}^n$  と  $(F_i)_{i=1}^n$  を  $\mathbb{K}$ -線型空間の族とすると、 $f_i \in \text{Hom}(E_i, F_i)$  に対し

$$b: \bigoplus_{i=1}^n E_i \ni (e_1, \dots, e_n) \mapsto f_1(e_1) \otimes \dots \otimes f_n(e_n) \in \bigotimes_{i=1}^n F_i$$

により定める  $b$  は  $n$  重線型であり、定理 A.3.3 より  $b = g \circ \otimes$  を満たす  $g \in \text{Hom}(\bigotimes_{i=1}^n E_i, \bigotimes_{i=1}^n F_i)$  がただ一つ存在する. この  $g$  を  $f_1 \otimes \dots \otimes f_n$  と表記して線型写像のテンソル積と定義する. 特に次が成り立つ:

$$f_1 \otimes \dots \otimes f_n(e_1 \otimes \dots \otimes e_n) = f_1(e_1) \otimes \dots \otimes f_n(e_n), \quad (\forall (e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i).$$

$n \geq 2$  とする. 係数体  $\mathbb{K}$  の  $n$  個の直和  $\mathbb{K} \oplus \dots \oplus \mathbb{K}$  において,

$$\phi: \mathbb{K} \oplus \dots \oplus \mathbb{K} \ni (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 \cdots x_n \in \mathbb{K}^{*3}$$

で定める  $\phi$  は  $n$  重線型であるから、或る線型写像  $F: \mathbb{K} \otimes \dots \otimes \mathbb{K} (n \text{ copies}) \rightarrow \mathbb{K}$  が存在して

$$F(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = x_1 \cdots x_n, \quad (\forall x_1 \otimes \dots \otimes x_n \in \mathbb{K} \otimes \dots \otimes \mathbb{K}) \quad (\text{A.7})$$

を満たす. またこの  $F$  に対して

$$\psi: \mathbb{K} \ni x \mapsto x \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 \in \mathbb{K} \otimes \dots \otimes \mathbb{K} (n \text{ copies})$$

が逆写像となるから  $F$  は線型同型である.

定義 A.3.6 (線型形式のテンソル積).  $(E_i)_{i=1}^n$  を  $\mathbb{K}$ -線型空間の族とすると、線型形式  $f_i \in \text{Hom}(E_i, \mathbb{K})$  のテンソル積  $f_1 \otimes \dots \otimes f_n$  は、前定義 A.3.5 に従えば次の対応

$$\bigotimes_{i=1}^n E_i \ni e_1 \otimes \dots \otimes e_n \mapsto f_1(e_1) \otimes \dots \otimes f_n(e_n) \in \mathbb{K} \otimes \dots \otimes \mathbb{K} (n \text{ copies})$$

を満たす線型写像であるが、以後便宜上、線型形式については、式 (A.7) の線型同型  $F$  との合成  $F \circ (f_1 \otimes \dots \otimes f_n)$  を線型形式のテンソル積  $f_1 \otimes \dots \otimes f_n$  として再定義する. i.e.

$$f_1 \otimes \dots \otimes f_n(e_1 \otimes \dots \otimes e_n) = f_1(e_1) \cdots f_n(e_n), \quad (\forall e_1 \otimes \dots \otimes e_n \in \bigotimes_{i=1}^n E_i).$$

特に、 $f_1 \otimes \dots \otimes f_n$  もまた  $\bigotimes_{i=1}^n E_i$  上の線型形式となっている.

\*2 1 は  $\mathbb{K}$  の単位元を表す.

\*3  $x_1 \cdots x_n$  は  $\mathbb{K}$  の乗法により  $x_1, \dots, x_n$  を掛け合わせたものである.

定理 A.3.7 (零写像のテンソル積は零写像).  $\mathbb{K}$ -線型空間の族  $(E_i)_{i=1}^n$  と  $(F_i)_{i=1}^n$  と線型写像  $f_i : E_i \rightarrow F_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) について, 或る  $f_i$  が零写像なら  $f_1 \otimes \dots \otimes f_n = 0$  となる.

証明.  $f_i = 0$  とすると, 定理 A.3.2 より  $f_1 \otimes \dots \otimes f_n$  は  $\{e_1 \otimes \dots \otimes e_n ; e_i \in E_i\}$  上で 0 となる. この空間は  $\bigotimes_{i=1}^n E_i$  を生成するから  $f_1 \otimes \dots \otimes f_n = 0$  が従う. ■

定理 A.3.8 (テンソル積の基底).  $(E_i)_{i=1}^n$  を  $\mathbb{K}$ -線型空間の族とし,  $E_i$  の基底を  $\{u_{\lambda_i}^i\}_{\lambda_i \in \Lambda_i}$  とする ( $i = 1, \dots, n$ ). このとき  $\{u_{\lambda_1}^1 \otimes \dots \otimes u_{\lambda_n}^n\}_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$  は  $\bigotimes_{i=1}^n E_i$  の基底となる.

証明.

第一段 任意の  $e_1 \otimes \dots \otimes e_n \in \bigotimes_{i=1}^n E_i$  は  $\{u_{\lambda_1}^1 \otimes \dots \otimes u_{\lambda_n}^n\}_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$  の線型結合で表現されるから, 式 (A.5) より

$$\bigotimes_{i=1}^n E_i = \text{Span} \left[ \left\{ u_{\lambda_1}^1 \otimes \dots \otimes u_{\lambda_n}^n ; \lambda_i \in \Lambda_i, i = 1, \dots, n \right\} \right]$$

が成立する.

第二段  $\{u_{\lambda_1}^1 \otimes \dots \otimes u_{\lambda_n}^n\}_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$  の一次独立性を示す.  $\{u_{\lambda_i}^i\}_{\lambda_i \in \Lambda_i}$  に対する双対集合を  $\{f_{\lambda_i}^i\}_{\lambda_i \in \Lambda_i}$  と書けば, 各  $f_{\lambda_i}^i$  は

$$f_{\lambda_i}^i(u_{\lambda}^i) = \begin{cases} 1, & (\lambda = \lambda_i), \\ 0, & (\lambda \neq \lambda_i), \end{cases} \quad \forall \lambda \in \Lambda_i$$

を満たし, 線型形式のテンソル積  $f_{\lambda_1}^1 \otimes \dots \otimes f_{\lambda_n}^n$  について

$$f_{\lambda_1}^1 \otimes \dots \otimes f_{\lambda_n}^n(u_{\nu_1}^1 \otimes \dots \otimes u_{\nu_n}^n) = \begin{cases} 1, & (\nu_1, \dots, \nu_n) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n), \\ 0, & (\nu_1, \dots, \nu_n) \neq (\lambda_1, \dots, \lambda_n), \end{cases} \quad \forall (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \prod_{i=1}^n \Lambda_i$$

が成立する. 従って  $\{u_{\lambda_1}^1 \otimes \dots \otimes u_{\lambda_n}^n\}_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$  は全て零ではなく, かつ

$$0 = \sum_{j=1}^k \alpha_j \left( u_{\lambda_1^{(j)}}^1 \otimes \dots \otimes u_{\lambda_n^{(j)}}^n \right), \quad (\alpha_j \in \mathbb{K}, j = 1, \dots, k)$$

を満たすような任意の線型結合に対し (ただし  $i \neq j$  なら  $(\lambda_1^{(i)}, \dots, \lambda_n^{(i)}) \neq (\lambda_1^{(j)}, \dots, \lambda_n^{(j)})$ )

$$\alpha_j = f_{\lambda_1^{(j)}}^1 \otimes \dots \otimes f_{\lambda_n^{(j)}}^n \left( \sum_{j=1}^k \alpha_j \left( u_{\lambda_1^{(j)}}^1 \otimes \dots \otimes u_{\lambda_n^{(j)}}^n \right) \right) = 0, \quad (j = 1, \dots, k)$$

が従い  $\{u_{\lambda_1}^1 \otimes \dots \otimes u_{\lambda_n}^n\}_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$  の一次独立性を得る. ■

定理 A.3.9 (結合律).  $(E_i)_{i=1}^n$  を  $\mathbb{K}$ -線型空間の族とし,  $k \in \{1, \dots, n-1\}$  を任意に取る. このとき, 次の対応関係を満たす  $F$  は線型同型である:

$$\begin{array}{ccc} F : \bigotimes_{i=1}^n E_i & \longrightarrow & \left( \bigotimes_{i=1}^k E_i \right) \otimes \left( \bigotimes_{i=k+1}^n E_i \right) \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ e_1 \otimes \cdots \otimes e_n & \longmapsto & (e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n) \end{array}$$

証明.

第一段  $n$  重線型写像  $f : \bigoplus_{i=1}^n E_i \longrightarrow \left( \bigotimes_{i=1}^k E_i \right) \otimes \left( \bigotimes_{i=k+1}^n E_i \right)$  を

$$f(e_1, \dots, e_n) = (e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n), \quad (\forall (e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i)$$

により定めれば, 定理 A.3.3 より

$$F(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) = (e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n), \quad (\forall (e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i)$$

を満たす線型写像  $F : \bigotimes_{i=1}^n E_i \longrightarrow \left( \bigotimes_{i=1}^k E_i \right) \otimes \left( \bigotimes_{i=k+1}^n E_i \right)$  が存在する:

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=1}^n E_i & & \\ \downarrow \otimes & \searrow f & \\ \bigotimes_{i=1}^n E_i & \xrightarrow{F} & \left( \bigotimes_{i=1}^k E_i \right) \otimes \left( \bigotimes_{i=k+1}^n E_i \right) \end{array}$$

以降は  $F$  の逆写像を構成し  $F$  が全単射であることを示す.

第二段  $u_{k+1} \in E_{k+1}, \dots, u_n \in E_n$  を固定し

$$\Phi_{u_{k+1}, \dots, u_n}(e_1, \dots, e_n) := e_1 \otimes \cdots \otimes e_k \otimes u_{k+1} \otimes \cdots \otimes u_n$$

によって  $k$  重線型  $\Phi_{u_{k+1}, \dots, u_n} : \bigoplus_{i=1}^k E_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n E_i$  を定めれば, 定理 A.3.3 より

$$G_{u_{k+1}, \dots, u_n}(e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) = e_1 \otimes \cdots \otimes e_k \otimes u_{k+1} \otimes \cdots \otimes u_n$$

を満たす線型写像  $G_{u_{k+1}, \dots, u_n} : \bigotimes_{i=1}^k E_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n E_i$  が存在する.

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=1}^k E_i & & \\ \downarrow \otimes & \searrow \Phi_{u_{k+1}, \dots, u_n} & \\ \bigotimes_{i=1}^k E_i & \xrightarrow{G_{u_{k+1}, \dots, u_n}} & \bigotimes_{i=1}^n E_i \end{array}$$

第三段 任意の  $v \in \bigotimes_{i=1}^k E_i$  に対して

$$\Psi_v : \bigoplus_{i=k+1}^n E_i \ni (u_{k+1}, \dots, u_n) \longmapsto G_{u_{k+1}, \dots, u_n}(v)$$

を定めれば,  $\Psi_v$  は  $n-k$  重線型であるから, 定理 A.3.3 より

$$H_v(u_{k+1} \otimes \cdots \otimes u_n) = \Psi_v(u_{k+1}, \dots, u_n)$$

を満たす線型写像  $H_v: \bigotimes_{i=k+1}^n E_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n E_i$  が存在する.

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=k+1}^n E_i & & \\ \downarrow \otimes & \searrow \Psi_v & \\ \bigotimes_{i=k+1}^n E_i & \xrightarrow{H_v} & \bigotimes_{i=1}^n E_i \end{array}$$

いま,  $v \mapsto \Psi_v$  は線型であり, かつ  $\Psi_v$  と  $H_v$  は一対一対応であるから  $v \mapsto H_v$  の線型性が従う.

第四段  $H_v$  の線型性と  $v \mapsto H_v$  の線型性より

$$\Gamma: \left( \bigotimes_{i=1}^k E_i \right) \times \left( \bigotimes_{i=k+1}^n E_i \right) \ni (v, w) \mapsto H_v(w)$$

により定める  $\Gamma$  は

$$\begin{aligned} \Gamma(e_1 \otimes \cdots \otimes e_k, e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n) &= H_{e_1 \otimes \cdots \otimes e_k}(e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n) \\ &= \Psi_{e_1 \otimes \cdots \otimes e_k}(e_{k+1}, \dots, e_n) \\ &= G_{e_{k+1}, \dots, e_n}(e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \\ &= \Phi_{e_{k+1}, \dots, e_n}(e_1, \dots, e_k) \\ &= e_1 \otimes \cdots \otimes e_n \end{aligned} \tag{A.8}$$

を満たす双線型であり, 定理 A.3.3 より

$$\begin{array}{ccc} \left( \bigotimes_{i=1}^k E_i \right) \times \left( \bigotimes_{i=k+1}^n E_i \right) & & \\ \downarrow \otimes & \searrow \Gamma & \\ \left( \bigotimes_{i=1}^k E_i \right) \otimes \left( \bigotimes_{i=k+1}^n E_i \right) & \xrightarrow{G} & \bigotimes_{i=1}^n E_i \end{array}$$

を可換にする線型写像  $G$  が存在する. この  $G$  は  $F$  の逆写像である. 実際, (A.8) より

$$\begin{aligned} F \circ G((e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n)) &= F(\Gamma(e_1 \otimes \cdots \otimes e_k, e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n)) \\ &= F(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) \\ &= (e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n) \end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned} G \circ F(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) &= G((e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n)) \\ &= \Gamma(e_1 \otimes \cdots \otimes e_k, e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n) \\ &= e_1 \otimes \cdots \otimes e_n \end{aligned}$$

が満たされ  $F^{-1} = G$  が従う.

■



## A.4 クロスノルム

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$  或は  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  とし,  $n \geq 2$  個の Banach 空間で構成するテンソル積を考察対象とする.

定義 A.4.1 (クロスノルム).  $\mathbb{K}$ -Banach 空間の族  $(X_i)_{i=1}^n$  のテンソル積  $\bigotimes_{i=1}^n X_i$  において

$$\alpha(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \leq \|x_1\|_{X_1} \|x_2\|_{X_2} \cdots \|x_n\|_{X_n}, \quad (\forall x_i \in X_i, i = 1, \dots, n), \quad (\text{A.9})$$

$$\sup_{\substack{v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i \\ v \neq 0}} |x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v)| \leq \|x_1^*\|_{X_1^*} \|x_2^*\|_{X_2^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*} \alpha(v), \quad (\forall x_i^* \in X_i^*, i = 1, \dots, n) \quad (\text{A.10})$$

を満たすようなノルム  $\alpha : \bigotimes_{i=1}^n X_i \rightarrow [0, \infty)$  をクロスノルム (cross norm) と呼ぶ<sup>\*4</sup>.

定理 A.4.2.  $\mathbb{K}$ -Banach 空間の族  $(X_i)_{i=1}^n$  のテンソル積  $\bigotimes_{i=1}^n X_i$  上のクロスノルム  $\alpha$  は次を満たす:

$$\begin{aligned} \alpha(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) &= \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}, & (x_i \in X_i, i = 1, \dots, n), \\ \|x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*\|_{(\bigotimes_{i=1}^n X_i, \alpha)^*} &= \|x_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*}, & (x_i^* \in X_i^*, i = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

証明. 先ず, Hahn-Banach の定理と式 (A.10) より

$$\begin{aligned} \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n} &= \sup_{\|x_1^*\|_{X_1^*} \leq 1} |\langle x_1, x_1^* \rangle| \cdots \sup_{\|x_n^*\|_{X_n^*} \leq 1} |\langle x_n, x_n^* \rangle| \\ &= \sup_{\substack{\|x_i^*\|_{X_i^*} \leq 1 \\ i=1, \dots, n}} |x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)| \\ &\leq \sup_{\substack{\|x_i^*\|_{X_i^*} \leq 1 \\ i=1, \dots, n}} \|x_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*} \alpha(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \\ &= \alpha(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \end{aligned}$$

が成り立ち定理の主張の第一式を得る. またこの結果より

$$\begin{aligned} \|x_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*} &= \sup_{\|x_1\|_{X_1} \leq 1} |\langle x_1, x_1^* \rangle| \cdots \sup_{\|x_n\|_{X_n} \leq 1} |\langle x_n, x_n^* \rangle| \\ &= \sup_{\substack{\|x_i\|_{X_i} \leq 1 \\ i=1, \dots, n}} |x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)| \\ &\leq \sup_{\alpha(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \leq 1} |x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)| \\ &\leq \sup_{\alpha(v) \leq 1} |x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v)| \\ &= \|x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*\|_{(\bigotimes_{i=1}^n X_i, \alpha)^*} \end{aligned}$$

が成立し主張の第二式も得られる. ■

<sup>\*4</sup> [5] ではこの二性質を満たすものをリーゾナブルクロスノルムと分類するが, 本稿ではクロスノルムと書くだけにする.

以下, 実際クロスノルムが存在することを示す.

**定義 A.4.3 (インジェクティブノルム).**  $\mathbb{K}$ -Banach 空間の族  $(X_i)_{i=1}^n$  に対し

$$\epsilon(v) := \sup_{\substack{\|x_i^*\|_{X_i^*} \leq 1 \\ i=1, \dots, n}} |x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v)|, \quad (v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

により定める  $\epsilon$  をインジェクティブノルム (injective norm) と呼ぶ.

**定理 A.4.4 (インジェクティブノルムは最小のクロスノルム).**  $\mathbb{K}$ -Banach 空間の族  $(X_i)_{i=1}^n$  のテンソル積  $\bigotimes_{i=1}^n X_i$  において, インジェクティブノルムは最小のクロスノルムである.

**証明.**

**第一段**  $\epsilon$  が  $\bigotimes_{i=1}^n X_i$  上のノルムであることを示す. 劣加法性と同次性は  $x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*$  の線型性より従う.  $v = 0 \Leftrightarrow \epsilon(v) = 0$  については,  $v = 0$  なら任意の  $x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*$  について  $x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v) = 0$  が成り立ち  $\epsilon(v) = 0$  が出る. 逆に  $v \neq 0$  とするとき, 定理 A.3.1 より

$$v = \sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j, \quad (x_i^j \in X_i, j = 1, \dots, m, i = 1, \dots, n)$$

と表現できるが, 定理 A.3.2 より  $x_i^1 \neq 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) と仮定できる.  $x_1^1$  について, もし全ての  $2 \leq j \leq m$  に対し  $x_1^j = x_1^1$  が満たされているなら,  $\hat{x}_1^* \in X_1^*$  を

$$\langle x_1^1, \hat{x}_1^* \rangle = \|x_1^1\|_{X_1}, \quad \|\hat{x}_1^*\|_{X_1^*} = 1$$

を満たすように選ぶ (Hahn-Banach の定理).  $x_1^j \neq x_1^1$  を満たす  $j$  がある場合,

$$L_1 := \text{Span} \left[ \left\{ x_1^j ; \quad 2 \leq j \leq m, x_1^j \neq x_1^1 \right\} \right]$$

により閉部分空間を定めれば  $x_1^1$  と  $L_1$  との距離  $d_1$  は正であり, Hahn-Banach の定理より

$$\langle x_1^1, \hat{x}_1^* \rangle = 0 \quad (\forall x_1^1 \in L_1), \quad \langle x_1^1, \hat{x}_1^* \rangle = d_1 > 0, \quad \|\hat{x}_1^*\|_{X_1^*} = 1$$

を満たす  $\hat{x}_1^* \in X_1^*$  を取ることができる. 同様に  $\hat{x}_i^* \in X_i^*$  ( $i = 2, \dots, n$ ) を選べば

$$\hat{x}_1^* \otimes \cdots \otimes \hat{x}_n^*(x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j) = \begin{cases} \hat{x}_1^* \otimes \cdots \otimes \hat{x}_n^*(x_1^1 \otimes \cdots \otimes x_n^1), & (x_i^j = x_i^1, i = 1, \dots, n), \\ 0, & (\text{o.w.}), \end{cases}$$

( $j = 2, \dots, m$ ) が満たされるから

$$0 < \hat{x}_1^* \otimes \cdots \otimes \hat{x}_n^*(x_1^1 \otimes \cdots \otimes x_n^1) \leq |\hat{x}_1^* \otimes \cdots \otimes \hat{x}_n^*(v)| \leq \epsilon(v)$$

が成立し, 対偶により  $\epsilon(v) = 0 \Rightarrow v = 0$  が従う.

第二段  $\epsilon$  がクロスノルムであることを示す. 先ず Hahn-Banach の定理より

$$\begin{aligned}\epsilon(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) &= \sup_{\substack{\|x_i^*\|_{X_i^*} \leq 1 \\ i=1, \dots, n}} |x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)| \\ &= \sup_{\|x_1^*\|_{X_1^*} \leq 1} |\langle x_1, x_1^* \rangle| \cdots \sup_{\|x_n^*\|_{X_n^*} \leq 1} |\langle x_n, x_n^* \rangle| \\ &= \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}, \quad (\forall x_i \in X_i, i = 1, \dots, n)\end{aligned}$$

が成り立つ. また 0 でない  $x_i^* \in X_i^*$ ,  $(i = 1, \dots, n)$  に対しては

$$\begin{aligned}|x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v)| &\leq \|x_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*} \left[ \frac{x_1^*}{\|x_1^*\|_{X_1^*}} \otimes \cdots \otimes \frac{x_n^*}{\|x_n^*\|_{X_n^*}} \right](v) \\ &\leq \|x_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*} \epsilon(v)\end{aligned}$$

が成立し

$$\|x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*\|_{(\bigotimes_{i=1}^n X_i, \epsilon)} \leq \|x_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*}$$

を得る.

第三段  $\epsilon$  が最小のクロスノルムであることを示す.  $\alpha$  を任意のクロスノルムとすれば

$$|x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v)| \leq \|x_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*} \alpha(v), \quad (\forall v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

が成り立つから, 特に  $\|x_i^*\|_{X_i^*} \leq 1$ ,  $(i = 1, \dots, n)$  の範囲で  $\sup$  を取れば

$$\epsilon(v) \leq \alpha(v), \quad (\forall v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

が従い  $\epsilon$  の最小性が出る. ■

定義 A.4.5 (プロジェクトィブノルム).  $\mathbb{K}$ -Banach 空間の族  $(X_i)_{i=1}^n$  に対し, 定理 A.3.3 により

$$\begin{array}{ccc} \Phi : \text{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}\right) & \longrightarrow & \text{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}\right) \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ T & \longmapsto & T \circ \otimes \end{array}$$

により線型同型  $\Phi$  が定まる. これを用いて

$$\pi(v) := \sup_{\substack{b \in L^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}\right) \\ \|b\|_{L^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}\right)} \leq 1}} |\Phi^{-1}(b)(v)|, \quad (v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

により定める  $\pi$  をプロジェクトィブノルム (projective norm) と呼ぶ.

定理 A.4.6 (プロジェクトィブノルムは最大のクロスノルム).  $\mathbb{K}$ -Banach 空間の族  $(X_i)_{i=1}^n$  のテンソル積  $\bigotimes_{i=1}^n X_i$  上にプロジェクトィブノルム  $\pi$  を導入する. このとき式 (A.9) を満たす任意のセミノルム  $p$  に対し  $p \leq \pi$  が成立する. 特に  $\pi$  は最大のクロスノルムである.

証明.

第一段  $\pi$  がノルムであることを示す.  $v \neq 0$  とすれば, 定理 A.4.4 の証明と同様にして

$$0 < |\hat{x}_1^* \otimes \cdots \otimes \hat{x}_n^*(v)|, \quad \|\hat{x}_i^*\|_{X_i^*} = 1, \quad (i = 1, \dots, n)$$

を満たす  $\hat{x}_i^* \in X_i^*$  ( $i = 1, \dots, n$ ) が存在する.

$$b(x_1, \dots, x_n) := \langle x_1, \hat{x}_1^* \rangle \cdots \langle x_n, \hat{x}_n^* \rangle, \quad (x_i \in X_i, i = 1, \dots, n)$$

により  $n$  重線型写像  $b$  を定めれば,  $\|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K})} \leq \|\hat{x}_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|\hat{x}_n^*\|_{X_n^*} = 1$  かつ

$$0 < |\hat{x}_1^* \otimes \cdots \otimes \hat{x}_n^*(v)| = |\Phi^{-1}(b)(v)| \leq \pi(v)$$

が成立する.  $\pi(0) = 0$  と劣加法性及び同次性は  $\Phi^{-1}(b)$  の線型性より従う.

第二段  $\pi$  がクロスノルムであることを示す. 先ず, 任意の  $x_i \in X_i$ , ( $i = 1, \dots, n$ ) に対して

$$\begin{aligned} \pi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) &= \sup_{\substack{b \in L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}) \\ \|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K})} \leq 1}} |\Phi^{-1}(b)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)| \\ &\leq \sup_{\substack{b \in L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}) \\ \|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K})} \leq 1}} \|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K})} \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n} \\ &= \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n} \end{aligned}$$

が成立する. また 0 でない  $x_i^* \in X_i^*$ , ( $i = 1, \dots, n$ ) に対し

$$b(x_1, \dots, x_n) := \frac{x_1^*}{\|x_1^*\|_{X_1^*}}(x_1) \cdots \frac{x_n^*}{\|x_n^*\|_{X_n^*}}(x_n), \quad (x_i \in X_i, i = 1, \dots, n)$$

により  $\|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K})} \leq 1$  を満たす有界  $n$  重線型  $b$  を定めれば,  $\pi$  の定義より

$$|\Phi^{-1}(b)(v)| \leq \pi(v), \quad (\forall v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

が成り立つ. 一方で線型形式のテンソル積の定義より

$$\Phi^{-1}(b) = \frac{x_1^*}{\|x_1^*\|_{X_1^*}} \otimes \cdots \otimes \frac{x_n^*}{\|x_n^*\|_{X_n^*}} = \frac{1}{\|x_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*}} x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*$$

となり,

$$|x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v)| \leq \|x_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*} \pi(v), \quad (\forall v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

が従い

$$\|x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*\|_{(\bigotimes_{i=1}^n X_i, \pi)^*} \leq \|x_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*}$$

が出る.

第三段  $p$  を (A.9) を満たすセミノルムとし,  $v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i$  を任意に取れば

$$p(v) = \phi_v(v), \quad |\phi_v(u)| \leq p(u) \quad (\forall u \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

を満たす  $\phi_v \in (\bigotimes_{i=1}^n X_i, \pi)^*$  が存在する (Hahn-Banach の定理).

$$\begin{aligned} |(\phi_v \circ \otimes)(x_1, \dots, x_n)| &= |\phi_v(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)| \\ &\leq p(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) \\ &\leq \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}, \quad (\forall x_i \in X_i, i = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

が成り立つから  $\|\phi_v \circ \otimes\|_{L^m(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K})} \leq 1$  が従い,  $\pi$  の定義より

$$p(v) = \phi_v(v) = \Phi^{-1}(\phi_v \circ \otimes)(v) \leq \pi(v)$$

が得られる. ■

定理 A.4.7 (プロジェクトィブノルムの表現).  $\mathbb{K}$ -Banach 空間の族  $(X_i)_{i=1}^n$  のテンソル積  $\bigotimes_{i=1}^n X_i$  にプロジェクトノルム  $\pi$  を導入する. このとき次が成り立つ:

$$\pi(v) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^m \|x_1^j\|_{X_1} \cdots \|x_n^j\|_{X_n} \ ; \ v = \sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j \right\}.$$

証明.

第一段  $x_1 \otimes \dots \otimes x_n$  上のセミノルム  $\lambda$  を次で定める:

$$\lambda(v) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^m \|x_1^j\|_{X_1} \cdots \|x_n^j\|_{X_n} \ ; \ v = \sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j \right\}, \quad (\forall v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i).$$

いま, 任意に  $v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i$  を取れば,  $v$  の任意の分割

$$v = \sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j.$$

に対し

$$\pi(v) \leq \sum_{j=1}^m \pi(x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j) = \sum_{j=1}^m \|x_1^j\|_{X_1} \cdots \|x_n^j\|_{X_n}$$

が満たされ  $\pi \leq \lambda$  が従う. よって  $\lambda$  が式 (A.9) を満たせば, 定理 A.4.6 より  $\lambda = \pi$  が得られる.

第二段  $\lambda$  がセミノルムであることを示す. 実際, 任意に  $u, v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i$  を取り,

$$u = \sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j, \quad v = \sum_{k=1}^r a_1^k \otimes \dots \otimes a_n^k$$

を一つの表現とすれば,  $\lambda$  の定め方より

$$\lambda(u+v) \leq \sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j + \sum_{k=1}^r a_1^k \otimes \cdots \otimes a_n^k$$

が成り立つ. 右辺を移項して

$$\lambda(u+v) - \sum_{k=1}^r a_1^k \otimes \cdots \otimes a_n^k \leq \lambda(u) \leq \sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j$$

かつ

$$\lambda(u+v) - \lambda(u) \leq \lambda(v) \leq \sum_{k=1}^r a_1^k \otimes \cdots \otimes a_n^k$$

が従い  $\lambda$  の劣加法性を得る. また任意の  $0 \neq \alpha \in \mathbb{K}$ ,  $v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i$  に対し

$$v = \sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j$$

を一つの分割とすれば

$$\alpha v = \sum_{j=1}^m (\alpha x_1^j) \otimes \cdots \otimes x_n^j$$

は  $\alpha v$  の一つの分割となるから

$$\lambda(\alpha v) \leq \sum_{j=1}^m \|\alpha x_1^j\|_{X_1} \cdots \|x_n^j\|_{X_n} = |\alpha| \sum_{j=1}^m \|x_1^j\|_{X_1} \cdots \|x_n^j\|_{X_n}$$

が成立し,  $v$  の分割について下限を取れば  $\lambda(\alpha v) \leq |\alpha| \lambda(v)$  が従う. 逆に

$$\alpha v = \sum_{k=1}^r a_1^k \otimes \cdots \otimes a_n^k$$

に対しては

$$\lambda(v) \leq \sum_{k=1}^r \left\| \frac{1}{\alpha} a_1^k \right\|_{X_1} \cdots \|a_n^k\|_{X_n} = \frac{1}{|\alpha|} \sum_{k=1}^r \|a_1^k\|_{X_1} \cdots \|a_n^k\|_{X_n}$$

が成り立ち  $|\alpha| \lambda(v) \leq \lambda(\alpha v)$  が従う.  $v = 0$  なら  $v = 0 \otimes \cdots \otimes 0$  より  $\lambda(v) = 0$  が満たされ

$$\lambda(\alpha v) = |\alpha| \lambda(v), \quad (\forall \alpha \in \mathbb{K}, v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

が得られる.

第三段  $\lambda$  が式 (A.9) を満たすことを示す. 実際  $\lambda$  の定め方より

$$\lambda(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \leq \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}, \quad (\forall x_i \in X_i, i = 1, \dots, n)$$

が成り立つ.

■

定理 A.4.8.  $\bigotimes_{i=1}^n X_i$  を  $\mathbb{K}$ -Banach 空間の族  $(X_i)_{i=1}^n$  のテンソル積とする. このとき  $\bigotimes_{i=1}^n X_i$  上の任意のノルム  $\alpha$  に対し次が成立する:

$$\alpha \text{ がクロスノルム} \iff \epsilon \leq \alpha \leq \pi.$$

証明.  $(\Rightarrow)$  はすでに示したから  $(\Leftarrow)$  を示す. 実際, 任意の  $x_i \in X_i$ ,  $(i = 1, \dots, n)$  に対して

$$\alpha(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \leq \pi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \leq \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}$$

が成立し, また任意の  $x_i^* \in X_i^*$ ,  $(i = 1, \dots, n)$  に対して

$$\begin{aligned} |x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v)| &\leq \|x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*\|_{(\bigotimes_{i=1}^n X_i, \epsilon)^*} \epsilon(v) \\ &\leq \|x_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*} \alpha(v), \quad (\forall v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i) \end{aligned}$$

が満たされ  $\|x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*\|_{(\bigotimes_{i=1}^n X_i, \alpha)^*} \leq \|x_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*}$  が得られる. ■

## A.5 テンソル積の内積

[参考:[5](pp. 1-24), [9]]  $(H_i)_{i=1}^n$  を  $\mathbb{R}$ -Hilbert 空間の族として,  $\bigotimes_{i=1}^n H_i$  に内積を導入する.  $H_i$  の内積を  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_i}$  と書く.

第一段 任意に  $y_i \in H_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  を取り

$$\Phi_{y_1, \dots, y_n} : \bigoplus_{i=1}^n H_i \ni (x_1, \dots, x_n) \mapsto \langle x_1, y_1 \rangle_{H_1} \cdots \langle x_n, y_n \rangle_{H_n}$$

とおけば,  $\Phi_{y_1, \dots, y_n}$  は  $n$  重線型であるから或る  $\Psi_{y_1, \dots, y_n} \in \text{Hom}(\bigotimes_{i=1}^n H_i, \mathbb{R})$  がただ一つ存在して

$$\Psi_{y_1, \dots, y_n} \circ \otimes = \Phi_{y_1, \dots, y_n}$$

を満たす.

第二段 任意の  $u \in \bigotimes_{i=1}^n H_i$  に対し  $\bigoplus_{i=1}^n H_i \ni (y_1, \dots, y_n) \mapsto \Psi_{y_1, \dots, y_n}(u)$  は  $n$  重線型である. 実際,

$$u = \sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j$$

と表せるとき, 任意の  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  と  $y_i, z_i \in H_i$  に対して

$$\begin{aligned} \Psi_{y_1, \dots, \alpha y_i + \beta z_i, \dots, y_n}(u) &= \sum_{j=1}^k \Psi_{y_1, \dots, \alpha y_i + \beta z_i, \dots, y_n}(x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j) \\ &= \sum_{j=1}^k \langle x_1^j, y_1 \rangle_{H_1} \cdots \langle x_i^j, \alpha y_i + \beta z_i \rangle_{H_i} \cdots \langle x_n^j, y_n \rangle_{H_n} \\ &= \alpha \sum_{j=1}^k \langle x_1^j, y_1 \rangle_{H_1} \cdots \langle x_i^j, y_i \rangle_{H_i} \cdots \langle x_n^j, y_n \rangle_{H_n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \beta \sum_{j=1}^k \langle x_1^j, y_1 \rangle_{H_1} \cdots \langle x_i^j, z_i \rangle_{H_i} \cdots \langle x_n^j, y_n \rangle_{H_n} \\
& = \alpha \sum_{j=1}^k \Psi_{y_1, \dots, y_i, \dots, y_n}(x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j) + \beta \sum_{j=1}^k \Psi_{y_1, \dots, z_i, \dots, y_n}(x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j) \\
& = \alpha \Psi_{y_1, \dots, y_i, \dots, y_n}(u) + \beta \Psi_{y_1, \dots, z_i, \dots, y_n}(u)
\end{aligned}$$

が成立する．従って或る  $F_u \in \text{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n H_i, \mathbb{R}\right)$  がただ一つ存在して

$$F_u(y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) = \Psi_{y_1, \dots, y_n}(u), \quad (\forall y_1 \otimes \cdots \otimes y_n \in \bigotimes_{i=1}^n H_i)$$

を満たす．

第三段 任意の  $v \in \bigotimes_{i=1}^n H_i$  に対し  $\bigotimes_{i=1}^n H_i \ni u \mapsto F_u(v)$  は線型性を持つ．実際、

$$v = \sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j$$

と表せるとき、任意の  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  と  $u, w \in \bigotimes_{i=1}^n H_i$  に対して

$$\begin{aligned}
F_{\alpha u + \beta w}(v) &= \sum_{j=1}^k F_{\alpha u + \beta w}(x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j) \\
&= \sum_{j=1}^k \Psi_{x_1^j, \dots, x_n^j}(\alpha u + \beta w) \\
&= \alpha \sum_{j=1}^k \Psi_{x_1^j, \dots, x_n^j}(u) + \beta \sum_{j=1}^k \Psi_{x_1^j, \dots, x_n^j}(w) \\
&= \alpha F_u(v) + \beta F_w(v)
\end{aligned}$$

が成立する．従って

$$s(u, v) := F_u(v), \quad (\forall u, v \in \bigotimes_{i=1}^n H_i) \quad (\text{A.11})$$

により定める  $s: \bigotimes_{i=1}^n H_i \times \bigotimes_{i=1}^n H_i \rightarrow \mathbb{R}$  は双線型形式である．

定理 A.5.1.  $s$  は  $\bigotimes_{i=1}^n H_i$  の内積となり、任意の  $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n, y_1 \otimes \cdots \otimes y_n \in \bigotimes_{i=1}^n H_i$  に対し次を満たす:

$$s(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n, y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) = \langle x_1, y_1 \rangle_{H_1} \cdots \langle x_n, y_n \rangle_{H_n}. \quad (\text{A.12})$$

証明.  $s$  は双線型性を持つように定めたから、後は対称性と正定値性及び  $s(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$  を示せばよい．

第一段 任意の  $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n, y_1 \otimes \cdots \otimes y_n \in \bigotimes_{i=1}^n H_i$  に対し

$$\begin{aligned}
s(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n, y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) &= F_{x_1 \otimes \cdots \otimes x_n}(y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) = \Psi_{y_1, \dots, y_n}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \Phi_{y_1, \dots, y_n}(x_1, \dots, x_n) \\
&= \langle x_1, y_1 \rangle_{H_1} \cdots \langle x_n, y_n \rangle_{H_n}
\end{aligned}$$

が成り立ち (A.12) を得る．また  $s(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n, y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) = s(y_1 \otimes \cdots \otimes y_n, x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)$  も従う．



第二段  $s$  の対称性を示す. 任意の  $u, v \in \bigotimes_{i=1}^n H_i$  に対し分割を

$$u = \sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j, \quad v = \sum_{r=1}^m y_1^r \otimes \cdots \otimes y_n^r$$

と表せば, 前段の結果より

$$s(u, v) = \sum_{j=1}^k \sum_{r=1}^m s(x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j, y_1^r \otimes \cdots \otimes y_n^r) = \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^k s(y_1^r \otimes \cdots \otimes y_n^r, x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j) = s(v, u)$$

となる.

第三段 任意の  $u \in \bigotimes_{i=1}^n H_i$  に対し  $s(u, u) \geq 0$  が成り立つことを示す. 実際,

第一段  $s(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$ , ( $u \in \bigotimes_{i=1}^n H_i$ ) が成り立つことを示す. 定理 A.3.8 より, 基底  $\{e_{\lambda_i}^i\}_{\lambda_i \in \Lambda_i} \subset H_i$ , ( $i = 1, \dots, n$ ) に対し  $\{e_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes e_{\lambda_n}^n\}_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$  は  $\bigotimes_{i=1}^n H_i$  の基底となるから, 任意の  $u \in \bigotimes_{i=1}^n H_i$  は

$$u = \sum_{j=1}^k \alpha_j (e_{\lambda_1^{(j)}}^1 \otimes \cdots \otimes e_{\lambda_n^{(j)}}^n) = \sum_{j=1}^k e_{\lambda_1^{(j)}}^1 \otimes \cdots \otimes (\alpha_j e_{\lambda_n^{(j)}}^n), \quad (\alpha_j \neq 0, j = 1, \dots, k)$$

と表現できる.

定義 A.5.2 (テンソル積上の内積). 式 (A.11) で定めた双線型形式  $s$  を  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  と書き直して  $\bigotimes_{i=1}^n H_i$  の内積とする. また  $\sigma(u) := \sqrt{\langle u, u \rangle}$ , ( $u \in \bigotimes_{i=1}^n H_i$ ) によりノルム  $\sigma$  を導入する.

定理 A.5.3 ( $\sigma$  はクロスノルム).  $\sigma$  はクロスノルムである.

証明. 定義 A.4.1 の (A.9) と (A.10) を満たすことを示せばよい.

第一段 式 (A.12) より (A.9) が従う.

第二段 任意に  $x_i^* \in H_i^*$  を取れば, Riesz の Hilbert 空間の表現定理より或る  $a_i \in H_i$  がただ一つ存在して

$$x_i^*(\cdot) = \langle \cdot, a_i \rangle_{H_i}, \quad \|x_i^*\|_{H_i^*} = \|a_i\|_{H_i}, \quad i = 1, \dots, n$$

を満たす. Cauchy-Schwartz の不等式と併せれば, 任意の

$$x = \sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j \in \bigotimes_{i=1}^n H_i$$

に対し

$$\begin{aligned} (x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*)(x) &= \sum_{j=1}^k (x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*)(x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j) = \sum_{j=1}^k x_1^*(x_1^j) \cdots x_n^*(x_n^j) \\ &= \sum_{j=1}^k \langle x_1^j, a_1 \rangle_{H_1} \cdots \langle x_n^j, a_n \rangle_{H_n} = \sum_{j=1}^k \langle x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j, a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \rangle = \langle x, a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \rangle \\ &\leq \sigma(x) \sigma(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sigma(x) \|a_1\|_{H_1} \cdots \|a_n\|_{H_n} \\ &= \sigma(x) \|x_1^*\|_{H_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{H_n^*} \end{aligned}$$

が成立し (A.10) を得る. ■

定理 A.5.4 ( $H_i$  が有限次元なら  $\sigma$  と  $\pi$  は同値).

## 参考文献

- [1] S. Aida, Rough path analysis: an introduction.
- [2] T. Lyons and Z. Qian, System control and rough paths, Oxford science publications, 2002.
- [3] K. Friz and Nicholas B. Victoir, Multidimensional stochastic processes as rough paths: theory and applications, 2009.
- [4] M. Sugiura and M. Yokonuma, ジョルダン標準形・テンソル代数, 岩波基礎数学選書, 1990.
- [5] E. Cheney and W. Light, Approximation theory of tensor product spaces, Springer, 1985.
- [6] R. Ryan, Introduction to tensor products of Banach spaces, Springer, 2002.
- [7] mathoverflow, available from <https://mathoverflow.net/questions/277070/tensor-product-space-with-projective-norm-is-incomplete>, 2018/05/24.
- [8] Y. Hirai and K. Matsuura, 自主ゼミ : Normal approximations with Malliavin calculus: From Stein's Method to Universality 用ノート, 2015.
- [9] Y. Hirai, 関数解析ノート : ノルム空間上の有界双線形写像, 2017.
- [10] K. Matsuzaka, 集合・位相入門, 岩波書店, 2016.