テンソル積のノルム
平井さん講義まとめ

基礎工学研究科システム創成専攻
学籍番号 29C17095
百合川尚学

2018 年 4 月 27 日

目次

0.1 テンソル積の導入

E, F を体 $\mathbb{K}$ 上の線形空間とするとき，テンソル積 $E \otimes F$ を定めたい．

$$\Lambda(E) = \{\, f : E \longrightarrow \mathbb{K} \ ; \quad \text{有限個の } e \in E \text{ を除いて } f(e) = 0. \,\}$$

により $\mathbb{K}$-線形空間 $\Lambda(E)$ を定める．また $e \in E$ に対する定義関数を

$$\mathbb{1}_e(x) = \begin{cases} 1, & x = e, \\ 0, & x \neq e \end{cases}$$

で表し，同様にして $\Lambda(E \times F)$ 及び $(e, f) \in E \times F$ に対し $\mathbb{1}_{e,f}$ を定める．$\Lambda(E \times F)$ に対し

$$\Lambda_0(E \times F) \coloneqq \mathrm{Span}\left[\left\{ \begin{matrix} \mathbb{1}_{(e+e',f)} - \mathbb{1}_{(e,f)} - \mathbb{1}_{(e',f)}, \\ \mathbb{1}_{(e,f+f')} - \mathbb{1}_{(e,f)} - \mathbb{1}_{(e,f')}, \\ \mathbb{1}_{(\lambda e,f)} - \lambda \mathbb{1}_{(e,f)}, \\ \mathbb{1}_{(e,\lambda f)} - \lambda \mathbb{1}_{(e,f)} \end{matrix} \ ; \quad e, e' \in E, f, f' \in F, \lambda \in \mathbb{K} \right\}\right]$$

により線型部分空間を定め，$b \in \Lambda(E \times F)$ の $\Lambda_0(E \times F)$ に関する同値類を $[b]$ と書く．

定義 0.1.1 (テンソル積). $\mathbb{K}$-線形空間 E, F に対し

$$E \otimes F \coloneqq \Lambda(E \times F) / \Lambda_0(E \times F)$$

で定める商空間を E と F のテンソル積という．また $(e, f) \in E \times F$ に対するテンソル積を

$$e \otimes f \coloneqq \left[\mathbb{1}_{(e,f)} \right]$$

により定める．

定理 0.1.2 (テンソル積は双線型). E, F を $\mathbb{K}$-線形空間とするとき，

$$\otimes : E \times F \ni (e, f) \longmapsto e \otimes f \in E \otimes F$$

は双線型である．また次が成り立つ:

$$E \otimes F = \mathrm{Span}\left[\{\, e \otimes f \ ; \quad (e, f) \in E \times F \,\}\right]. \tag{1}$$

証明． $e, e' \in E,\ f, f' \in F,\ \lambda \in \mathbb{K}$ とする．$\Lambda_0(E \times F)$ の定義より

$$\mathbb{1}_{(e+e',f)} \equiv \mathbb{1}_{(e,f)} + \mathbb{1}_{(e',f)}, \qquad (\mathrm{mod}\ \Lambda_0(E \times F))$$

が満たされ $(e+e') \otimes f = e \otimes f + e' \otimes f$ が成立する．同様にして

$$\begin{aligned} e \otimes (f + f') &= e \otimes f + e \otimes f', \\ (\lambda e) \otimes f &= \lambda e \otimes f, \\ e \otimes (\lambda f) &= \lambda e \otimes f \end{aligned}$$

が従うので $\otimes$ は双線型である．また任意に $u = [b] \in E \otimes F$ を取れば

$$b = \sum_{i=1}^{n} k_i \mathbb{1}_{(e_i, f_i)}, \quad (k_i = b(e_i, f_i),\ i = 1, 2, \cdots, n)$$

と表せるから，

$$u = \left[\sum_{i=1}^{n} k_i \mathbb{1}_{(e_i, f_i)} \right] = \left[\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{(k_i e_i, f_i)} \right] = \sum_{i=1}^{n} (k_i e_i) \otimes f_i$$

が従い (1) を得る． ∎

定理 0.1.3 (テンソル積の普遍性). E, F, V を $\mathbb{K}$-線形空間とするとき，$\mathrm{Hom}\,(E \otimes F, V)$ と $\mathrm{Hom}^{(2)}\,(E \times F, V)$ は次の写像 Φ により線型同型である:

$$\begin{array}{cccc} \Phi : \mathrm{Hom}\,(E \otimes F, V) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}^{(2)}\,(E \times F, V) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ T & \longmapsto & T \circ \otimes \end{array}$$

証明． 全射性と単射性を示す．

第一段 始めの二段で Φ の全射性を示す．まず，$f \in \mathrm{Hom}\,(\Lambda(E \times F), V)$ に対し

$$g : E \times F \ni (e, f) \longmapsto f(\mathbb{1}_{e,f}) \in V$$

を対応させる次の写像が線形同型であることを示す:

$$\begin{array}{cccc} F : \mathrm{Hom}\,(\Lambda(E \times F), V) & \longrightarrow & \mathrm{Map}\,(E \times F, V) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ f & \longmapsto & g \end{array}$$

実際 $g = F(f)$ の定め方より F は線型である．また $F(f_1) = F(f_2)$ なら

$$f_1(\mathbb{1}_{e,f}) = f_2(\mathbb{1}_{e,f}), \quad (\forall (e, f) \in E \times F)$$

が成り立ち，$\mathrm{Span}\left[\left\{\ \mathbb{1}_{e,f}\ ;\quad (e, f) \in E \times F\ \right\}\right] = \Lambda(E \times F)$ より F の単射性を得る．いま，

$$\sum_{(e,f) \in E \times F} \psi(e, f) g(e, f) \coloneqq \sum_{\substack{(e,f) \in E \times F \\ \psi(e,f) \neq 0}} \psi(e, f) g(e, f), \quad (\psi \in \Lambda(E \times F),\ g \in \mathrm{Map}\,(E \times F, V))$$

により総和記号を定め，$g \in \mathrm{Map}\,(E \times F, V)$ に対して

$$f(\psi) := \sum_{(e,f)\in E\times F} \psi(e,f)g(e,f), \quad (\psi \in \mathrm{Hom}\,(\Lambda(E\times F), V))$$

で f を作れば，$f \in \mathrm{Hom}\,(\Lambda(E\times F), V)$ が満たされ F の全射性が従う．

第二段　任意に $b \in \mathrm{Hom}^{(2)}\,(E\times F, V)$ を取り $h := F^{-1}(b)$ とおけば，h の線型性より

$$\begin{aligned} b(e+e', f) - b(e,f) - b(e',f) &= h(\mathbb{1}_{e+e',f} - \mathbb{1}_{e,f} - \mathbb{1}_{e',f}), \\ b(e, f+f') - b(e,f) - b(e,f') &= h(\mathbb{1}_{e,f+f'} - \mathbb{1}_{e,f} - \mathbb{1}_{e,f'}), \\ b(\lambda e, f) - \lambda b(e,f) &= h(\mathbb{1}_{\lambda e,f} - \lambda \mathbb{1}_{e,f}), \\ b(e, \lambda f) - \lambda b(e,f) &= h(\mathbb{1}_{e,\lambda f} - \lambda \mathbb{1}_{e,f}) \end{aligned}$$

が成り立ち，b の双線型性により h は $\Lambda_0(E\times F)$ 上で 0 である．従って

$$T([b]) := h(b), \quad (b \in \Lambda(E\times F))$$

で定める T は well-defined であり，$T \in \mathrm{Hom}\,(E\otimes F, V)$ かつ

$$b(e,f) = h(\mathbb{1}_{e,f}) = (T\circ\otimes)(e,f), \quad (\forall (e,f) \in E\times F)$$

が満たされ Φ の全射性が得られる．

第三段　$\Phi(T_1) = \Phi(T_2)$ ならば T_1 と T_2 は $\{\, e\otimes f \;;\quad e\in E,\ f\in F \,\}$ の上で一致する．定理 0.1.2 より $\{\, e\otimes f \;;\quad e\in E,\ f\in F \,\}$ は $E\otimes F$ を生成するから Φ の単射性が従う．∎

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ のとき，E の弱位相を $\sigma(E, E^*)$ と書き，E^* の汎弱位相を $\sigma(E^*, E)$ と書く．また

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(E,F) &:= \{\, T : E \longrightarrow F \;;\quad \dim TE < \infty \,\}, \\ \mathcal{F}_{w^*}(E^*,F) &:= \left\{\, T \in \mathcal{F}(E^*,F) \;;\quad T^{-1}(A) \in \sigma(F^*,F), \quad \forall A \in \sigma(E,E^*) \,\right\} \\ &= \{\, T \in \mathcal{F}(E^*,F) \;;\quad T : w^*\text{-}w\text{-continuous} \,\} \end{aligned}$$

とおく．

定理 0.1.4.　$\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ と考える．E, F が $\mathbb{K}$-Banach 空間なら，

$$\begin{array}{rcl} i : E\otimes F & \longrightarrow & \mathcal{F}_{w^*}(E^*, F), \\ i(e\otimes f) : E^* \ni e^* & \longmapsto & \langle e^*, e\rangle f \end{array}$$

で定める i は線型同型である．