ゼミ用ノート
会田先生の資料 “Rough path analysis:An Introduction”

基礎工学研究科システム創成専攻
学籍番号 29C17095
百合川尚学

2018 年 6 月 1 日

目次

第 1 章 1

1.1 Introduction 1

1.2 A continuity theorem of line integrals as a functional of paths 5

1.3 Proof of continuity theorem 13

1.4 The notion of rough path 20

付録 A テンソル積・クロスノルム 32

A.1 ノルム空間上の有界多重線型写像 32

A.2 ノルム空間の完備拡大 36

A.3 テンソル積 39

A.4 クロスノルム 47

A.5 テンソル積の内積 53

参考文献 57

第 1 章

1.1 Introduction

以下，d 次元ベクトル $x \in \mathbb{R}^d$ と (m,d) 行列 $a \in \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^d$ について，成分を込めて表現する場合は $x = (x^1, \cdots, x^d)$, $a = (a^i_j)_{1\le i\le m, 1\le j\le d}$ と書く．また $T > 0$ を固定し $C^1 = C^1([0,T] \to \mathbb{R}^d)$ とおく．（端点においては片側微分を考える．）$[s,t] \subset [0,T]$ の有限分割を $D = \{s = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t\}$ で表現し，有限分割の全体を $\delta[s,t]$ とおく．$|D| := \max_{1\le i\le N} |t_i - t_{i-1}|$ とし，

$$\sum_D = \sum_{i=1}^N$$

と略記する．また線型空間を扱うときは零元のみの空間は考えない．

定理 1.1.1 (Riemann-Stieltjes 積分). $[s,t] \subset [0,T]$ とし，$D \in \delta[s,t]$ についてのみ考えるとき，任意の $x \in C^1$, $f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ に対して次の極限が存在する:*1

$$\lim_{|D|\to 0} \sum_D f(x_{s_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) \in \mathbb{R}^m.$$

s_{i-1} は区間 $[t_{i-1}, t_i]$ に属する任意の点であり，極限は s_{i-1} の取り方に依らない．

証明． 各 x^j は C^1-級であるから，平均値の定理より $\sum_D f(x_{s_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})$ の第 k 成分を

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^d \sum_D f^k_j(x_{s_{i-1}})(x^j_{t_i} - x^j_{t_{i-1}}) \\
&\quad = \sum_{j=1}^d \sum_D f^k_j(x_{s_{i-1}})\dot{x}^j_{\xi_i}(t_i - t_{i-1}), \quad (^\exists \xi_i \in [t_{i-1}, t_i])
\end{aligned}$$

と表現できる．各 j, k について

$$\lim_{|D|\to 0} \sum_D f^k_j(x_{s_{i-1}})\dot{x}^j_{\xi_i}(t_i - t_{i-1})$$

は通常の連続関数の Riemann 積分

$$\int_s^t f^k_j(x_u)\dot{x}^j_u \, du$$

*1 極限の存在を保証する条件としては，f の有界性と微分可能性は必要ない．

に収束する. ∎

定義 1.1.2 (C^1-級のパスに対する汎関数). $x \in C^1$ と $f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ に対して, $[s,t] \subset [0,T]$ における Riemann-Stieltjes 積分を I で表現する:

$$I_{s,t}(x) = \int_s^t f(x_u)\, dx_u \coloneqq \lim_{|D| \to 0} \sum_D f(x_{t_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}),$$

$$\left[\int_s^t f(x_u)\, dx_u\right]^k = \sum_{j=1}^d \int_s^t f_j^k(x_u)\, dx_u^j, \quad (k = 1, \cdots, m).$$

ただし $D \in \delta[s,t]$ のみを考える.

C^1 は次で定めるノルム $\|\cdot\|_{C^1}$ により Banach 空間となる:

$$\|x\|_{C^1} \coloneqq \sup_{t \in [0,T]} |x(t)| + \sup_{t \in [0,T]} |\dot{x}(t)|.$$

定理 1.1.3 ($\|\cdot\|_{C^1}$ に関する連続性). $[s,t] \subset [0,T]$ とし, C^1 には $\|\cdot\|_{C^1}$ でノルム位相を入れる. このとき, $C^1 \ni x \longmapsto I_{s,t}(x) \in \mathbb{R}^m$ は連続である.

証明. C^1 の第一可算性により点列連続性と連続性は一致するから, $x^n \longrightarrow x$ のとき $I_{s,t}(x^n) \longrightarrow I_{s,t}(x)$ が従うことを示せばよい. いま, $M \coloneqq \sup_{u \in [s,t]} |f(x_u)| < \infty$ とおけば

$$\begin{aligned}
\left|\int_s^t f(x_u^n)\, dx_u^n - \int_s^t f(x_u)\, dx_u\right| &= \left|\int_s^t f(x_u^n)\dot{x}_u^n\, du - \int_s^t f(x_u)\dot{x}_u\, du\right| \\
&\leq \int_s^t \left|f(x_u^n)\dot{x}_u^n - f(x_u^n)\dot{x}_u\right|\, du + \int_s^t \left|f(x_u^n)\dot{x}_u - f(x_u)\dot{x}_u\right|\, du \\
&\leq M\|x^n - x\|_{C^1}(t-s) + \sup_{u \in [s,t]} \left|f(x_u^n) - f(x_u)\right| \|x\|_{C^1}(t-s) \qquad (1.1)
\end{aligned}$$

が成り立つ. $\|x^n - x\|_{C^1} \longrightarrow 0$ の仮定より $(x^n)_{n=1}^\infty$ 及び x の値域は或るコンパクト集合 K に含まれるから, K 上での f の一様連続性より任意の $\epsilon > 0$ に対し或る $\epsilon > \delta > 0$ が存在して $v, w \in K$, $|v - w| < \delta$ なら $|f(v) - f(w)| < \epsilon$ が満たされる. すなわち $\|x^n - x\|_{C^1} < \delta$ なら

$$\sup_{u \in [s,t]} \left|f(x_u^n) - f(x_u)\right| < \epsilon$$

が成立する. $\|x^n - x\|_{C^1} \longrightarrow 0$ より, 或る自然数 N が存在して $\|x^n - x\|_{C^1} < \delta$ $(n > N)$ が満たされるから, (1.1) $<$ $\epsilon[M(t-s) + \|x\|_{C^1}(t-s)]$ $(n > N)$ が成り立ち $I_{s,t}(x^n) \longrightarrow I_{s,t}(x)$ が従う. ∎

定義 1.1.4 (p-variation). $(V, \|\cdot\|)$ をノルム空間とし，$[0,T]$ 上の V 値写像 x と $[s,t] \subset [0,T]$ に対して p-variation ($p > 0$) を次で定める:

$$\|x\|_{p,[s,t]} := \left\{ \sup_{D\in\delta[s,t]} \sum_D \left\| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right\|^p \right\}^{1/p}.$$

特に，$\|\cdot\|_{p,[0,T]}$ を $\|\cdot\|_p$ と表記する．また $p \geq 1$ として，線型空間 $B_{p,T}(V)$ を

$$B_{p,T}(V) := \left\{ x : [0,T] \longrightarrow V \ ; \quad x_0 = 0,\ x : \text{continuous},\ \|x\|_p < \infty \right\}$$

により定める．

次の結果によれば，$0 < p < 1$ に対し $B_{p,T}(V)$ を定めても零写像のみの空間でしかない．

定理 1.1.5 ($0 < p < 1$ に対して有界 p-variation なら定数). $x : [0,T] \longrightarrow V$ を連続写像とする．このとき，$p \in (0,1)$ に対し $\|x\|_p < \infty$ が成り立つなら x は定数写像である．

証明. $t \in [0,T]$ を任意に取り固定する．このとき全ての $D \in \delta[0,t]$ に対して，

$$\begin{aligned}\|x_t - x_0\| &\leq \sum_D \left\| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right\| \leq \max_D \left\| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right\|^{1-p} \sum_D \left\| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right\|^p \\ &\leq \max_D \left\| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right\|^{1-p} \|x\|_p\end{aligned}$$

が成り立ち，x の一様連続性から右辺は $|D| \longrightarrow 0$ で 0 に収束し，$x_t = x_0$ が従う． ∎

定理 1.1.6 (p-variation の p に関する単調減少性). V をノルム空間とするとき，$x : [0,T] \longrightarrow V$ に対して $1 \leq p \leq q$ なら $\|x\|_p \geq \|x\|_q$ が成立する．特に $B_{p,T}(V) \subset B_{q,T}(V)$ である．

証明. $a, b \geq 0,\ r \geq 1$ に対し $a^r + b^r \leq (a+b)^r$ が成り立つから

$$\left[\sum_{i=1}^n a_i^r \right]^{1/r} \leq \sum_{i=1}^n a_i, \quad (a_i \geq 0,\ n \geq 1,\ r \geq 1)$$

を得る．従って任意の $x : [0,T] \longrightarrow V$ と $D \in \delta[0,T]$ に対し

$$\left[\sum_D \left(\left\| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right\|^p \right)^{q/p} \right]^{p/q} \leq \sum_D \left\| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right\|^p$$

が満たされ $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ が成立する． ∎

$p \geq 1$ の場合，Minkowski の不等式によれば，任意の $D \in \delta[s,t]$ に対し

$$\begin{aligned}\left\{ \sum_D \left\| (x_{t_i} + y_{t_i}) - (x_{t_{i-1}} + y_{t_{i-1}}) \right\|^p \right\}^{1/p} &\leq \left\{ \sum_D \left\| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right\|^p \right\}^{1/p} + \left\{ \sum_D \left\| y_{t_i} - y_{t_{i-1}} \right\|^p \right\}^{1/p} \\ &\leq \|x\|_{p,[s,t]} + \|y\|_{p,[s,t]}\end{aligned}$$

が成り立ち $\| x+y \|_{p,[s,t]} \leq \| x \|_{p,[s,t]} + \| y \|_{p,[s,t]}$ を得る．

定理 1.1.7. V が Banach 空間のとき，$B_{p,T}(V)$ は $\| \cdot \|_p$ をノルムとする Banach 空間である．

証明. 完備性を示す．

第一段 $(x^n)_{n=1}^\infty \subset B_{p,T}(V)$ を Cauchy 列とすれば，任意の $\epsilon > 0$ に対して或る $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ が存在し

$$\| x^n - x^m \|_p = \left\{ \sup_{D \in \delta[0,T]} \sum_D \left\| \left(x_{t_i}^n - x_{t_i}^m \right) - \left(x_{t_{i-1}}^n - x_{t_{i-1}}^m \right) \right\|^p \right\}^{1/p} < \epsilon, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

を満たす．いま，任意の $t \in [0,T]$ に対して $[0,T]$ の分割 $D = \{0 \leq t \leq T\}$ を考えれば

$$\left\| x_t^n - x_t^m \right\| < \epsilon, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

が得られ，V の完備性より或る $x_t \in \mathbb{R}^d$ が存在して

$$\left\| x_t^n - x_t \right\| < \epsilon \quad (n > n_\epsilon)$$

を満たす．この収束は t に関して一様であるから，$t \longmapsto x_t$ は 0 出発かつ連続である．

第二段 $\| x^n - x \|_p \longrightarrow 0 \; (n \longrightarrow \infty)$ を示す．前段によれば，任意の $D \in \delta[0,T]$ に対し

$$\sum_D \left\| (x_{t_i}^m - x_{t_i}^n) - (x_{t_{i-1}}^m - x_{t_{i-1}}^n) \right\|^p < \epsilon^p, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

が成り立っている．D は有限分割であるから，$m \longrightarrow \infty$ として

$$\sum_D \left\| (x_{t_i} - x_{t_i}^n) - (x_{t_{i-1}} - x_{t_{i-1}}^n) \right\|^p < \epsilon^p, \quad (n > n_\epsilon)$$

が従い，D の任意性より $\| x^n - x \|_p < \epsilon \; (n > n_\epsilon)$ を得る． ∎

定理 1.1.8. $p \geq 1$ とする．また $x_0 = 0$ を満たす $x \in C^1$ の全体が作る線形空間を $\tilde{C}^1$ とおく．

(1) $x \in C^1$ ならば $\| x \|_p < \infty$ が成り立つ．ただちに，$\| \cdot \|_p$ は $\tilde{C}^1$ においてノルムとなる．

(2) $\tilde{C}^1$ において，$\| \cdot \|_{C^1}$ で導入する位相は $\| \cdot \|_p$ で導入する位相より強い．

証明.

$p = 1$ の場合 平均値の定理より，任意の $D \in \delta[0,T]$ に対し

$$\sum_D \left| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right| \leq \sum_D \| x \|_{C^1} (t_i - t_{i-1}) = \| x \|_{C^1} T < \infty$$

が成り立ち $\| x \|_1 < \infty$ が従う．

$p > 1$ の場合 q を p の共役指数とする．任意の $D \in \delta[0,T]$ に対し，Hölder の不等式より

$$\sum_D \left| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right|^p = \sum_D \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{x}_u \, du \right|^p \leq \sum_D (t_i - t_{i-1}) \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} |\dot{x}_u|^q \, du \right)^{p/q}$$
$$\leq \sum_D (t_i - t_{i-1}) \left(\int_0^T \| x \|_{C^1}^q \, du \right)^{p/q} = \| x \|_{C^1}^p \, T^p$$

が成立し，$\| x \|_p < \infty$ が従う．

以上より，$p \geq 1$ ならば $\| x \|_p \leq T \| x \|_{C^1}$ $(x \in C^1)$ が成り立ち (2) の主張を得る． ∎

次節の考察対象は主に定理 1.1.3 と定理 1.1.8 に関係する．定理 1.1.3 によれば，C^1 に $\| \cdot \|_{C^1}$ でノルム位相を導入した場合，$f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ に対して $C^1 \ni x \longmapsto I_{s,t}(x)$ は連続である．一方で定理 1.1.3 によれば，0 出発 C^1-パス空間 $\tilde{C}^1$ に $\| \cdot \|_p$ でノルム位相を導入した場合，$\tilde{C}^1 \ni x \longmapsto I_{s,t}(x)$ が連続であるという保証はない．しかし，次節以後の結果により，$1 \leq p < 3$ かつ $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ が満たされているなら $\tilde{C}^1 \ni x \longmapsto I_{s,t}(x)$ は或る意味での連続性を持つ．

1.2 A continuity theorem of line integrals as a functional of paths

定義 1.2.1 (記号の定義). $x \in C^1$, $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ に対し次を定める．

$$\begin{aligned}
\Delta_T &:= \{ (s,t) \; ; \quad 0 \leq s \leq t \leq T \}, \\
X^1 &: \Delta_T \longrightarrow \mathbb{R}^d \ \left((s,t) \longmapsto X^1_{s,t} = x_t - x_s \right), \\
X^2 &: \Delta_T \longrightarrow \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d \ \left((s,t) \longmapsto X^2_{s,t} = \int_s^t (x_u - x_s) \otimes dx_u \right), \\
\tilde{I}_{s,t}(x) &:= f(x_s) X^1_{s,t} = f(x_s)(x_t - x_s), \\
J_{s,t}(x) &:= f(x_s) X^1_{s,t} + (\nabla f)(x_s) X^2_{s,t}.
\end{aligned}$$

以降，$a, b, c, d \in \mathbb{R}^d$ に対して次の表現を使う:

$$\begin{aligned}
[a \otimes b]^i_j &= a^i b^j, \\
\left[(\nabla f)(x_s) X^2_{s,t} \right]^i &= \sum_{j,k=1}^d \partial_k f^i_j(x_s) \int_s^t \left(x^k_u - x^k_s \right) \, dx^j_u, \\
[(\nabla f)(x_s)(a \otimes b)]^i &= \sum_{j,k=1}^d \partial_k f^i_j(x_s) a^k b^j, \\
\left[(\nabla^2 f)(x_s)(a \otimes b \otimes c) \right]^i &= \sum_{j,k,v=1}^d \partial_v \partial_k f^i_j(x_s) a^v b^k c^j, \\
\left[(\nabla^3 f)(x_s)(a \otimes b \otimes c \otimes d) \right]^i &= \sum_{j,k,v,w=1}^d \partial_w \partial_v \partial_k f^i_j(x_s) a^w b^v c^k d^j.
\end{aligned}$$

定理 1.2.2. $[s,t] \subset [0,T],\ x \in C^1,\ f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ とする．$D \in \delta[s,t]$ に対し

$$\tilde{I}_{s,t}(x,D) \coloneqq \sum_D \tilde{I}_{t_{i-1},t_i}(x), \quad J_{s,t}(x,D) \coloneqq \sum_D J_{t_{i-1},t_i}(x)$$

を定めるとき，次が成立する:

$$I_{s,t}(x) = \lim_{|D|\to 0} \tilde{I}_{s,t}(x,D) = \lim_{|D|\to 0} J_{s,t}(x,D).$$

証明. 第一の等号は $I_{s,t}(x)$ の定義によるから，第二の等号を証明する．まず，

$$\begin{aligned}
I_{s,t}(x) &= \int_s^t f(x_u)\,dx_u \\
&= \int_s^t f(x_s) + f(x_u) - f(x_s)\,dx_u \\
&= \int_s^t f(x_s)\,dx_u + \int_s^t \int_0^1 (\nabla f)(x_s + \theta(x_u - x_s))\left(X^1_{s,u} \otimes \dot{x}_u\right)\,d\theta\,du \\
&= f(x_s)X^1_{s,t} + (\nabla f)(x_s)X^2_{s,t} \\
&\quad + \int_s^t \int_0^1 \{(\nabla f)(x_s + \theta(x_u - x_s)) - (\nabla f)(x_s)\}\left(X^1_{s,u} \otimes \dot{x}_u\right)\,d\theta\,du \\
&= J_{s,t}(x) + \int_s^t \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_s + r(x_u - x_s))\left(X^1_{s,u} \otimes X^1_{s,u} \otimes \dot{x}_u\right)\,dr\,d\theta\,du
\end{aligned}$$

が成り立つ．$[0,T] \ni t \longmapsto x_t$ の連続性より，最下段式中の $x_s + r(x_u - x_s)$ $(0 \le r \le 1,\ s \le u \le t)$ は或るコンパクト集合 K に含まれ，f が C^2-級関数であるから $M \coloneqq \sum_{i,j,k,v} \sup_{x\in K} \left|\partial_v \partial_k f^i_j(x)\right|$ として $M < \infty$ を定めれば

$$\begin{aligned}
&\left|\int_s^t \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_s + r(x_u - x_s))\left(X^1_{s,u} \otimes X^1_{s,u} \otimes \dot{x}_u\right)\,dr\,d\theta\,du\right| \\
&\quad \le \int_s^t \int_0^1 \int_0^\theta \left|(\nabla^2 f)(x_s + r(x_u - x_s))\left(X^1_{s,u} \otimes X^1_{s,u} \otimes \dot{x}_u\right)\right|\,dr\,d\theta\,du \\
&\quad \le M \int_s^t |X^1_{s,u}|^2 |\dot{x}_u|\,du \\
&\quad \le M \|x\|^3_{C^1} \int_s^t (u-s)^2\,du
\end{aligned}$$

となる．特に $D \in \delta[s,t]$ に対して

$$\begin{aligned}
\sum_D \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - t_{i-1})^2\,du &\le \sum_D |D| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - t_{i-1})\,du \\
&\le \sum_D |D| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u-s)\,du \le \frac{1}{2}(t-s)^2|D| \longrightarrow 0 \quad (|D| \longrightarrow 0)
\end{aligned}$$

が成立するから，

$$\left|I_{s,t}(x) - J_{s,t}(x,D)\right| \le \sum_D \left|I_{t_{i-1},t_i}(x) - J_{t_{i-1},t_i}(x)\right| \longrightarrow 0 \quad (|D| \longrightarrow 0)$$

が従い定理の主張を得る． ∎

定義 1.2.3 (コントロール関数). 関数 $\omega : \Delta_T \longrightarrow [0,\infty)$ が連続かつ任意の $s \le u \le t$ に対して

$$\omega(s,u) + \omega(u,t) \le \omega(s,t) \tag{1.2}$$

を満たすとき，ω をコントロール関数 (control function) と呼ぶ.

式 (1.2) から $\omega(t,t) = 0$ $(\forall t \in [0,T])$ が従う．つまりコントロール関数は対角線上で 0 になる.

定義 1.2.4 (ノルム空間値写像の p-variation). $(V, \|\cdot\|)$ をノルム空間，$p > 0$ とする．このとき連続写像 $\psi : \Delta_T \longrightarrow V$ に対する p-variation を

$$\|\psi\|_{p,[s,t]} := \left\{ \sup_{D \in \delta[s,t]} \sum_D \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p \right\}^{1/p}, \quad ((s,t) \subset [0,T])$$

で定める．特に $\|\cdot\|_{p,[0,T]}$ を $\|\cdot\|_p$ と書く.

再定義した p-variation に対しても定理 1.1.5，1.1.6，1.1.7 が成立する.

定理 1.2.5 (定理 1.1.5 のアナロジー). V をノルム空間，$X : \Delta_T \longrightarrow V$ を連続写像とする．このとき，$X_{t,t} = 0$ $(\forall t \in [0,T])$ かつ $p \in (0,1)$ に対し $\|X\|_p < \infty$ が満たされれば $X \equiv 0$ である.

証明. $(s,t) \in \Delta_T$ を任意に取り固定する．このとき全ての $D \in \delta[s,t]$ に対して，

$$\begin{aligned} \left\| X_{s,t} \right\| &\le \sum_D \left\| X_{t_{i-1},t_i} \right\| \le \max_D \left\| X_{t_{i-1},t_i} \right\|^{1-p} \sum_D \left\| X_{t_{i-1},t_i} \right\|^p \\ &\le \max_D \left\| X_{t_{i-1},t_i} \right\|^{1-p} \|X\|_p \end{aligned}$$

が成り立ち，X の一様連続性から右辺は $|D| \longrightarrow 0$ で 0 に収束し，$X_{s,t} = 0$ が従う. ∎

定理 1.2.6 (定理 1.1.6 のアナロジー). V をノルム空間とするとき，$x : [0,T] \longrightarrow V$ に対して $1 \le p \le q$ なら $\|X\|_p \ge \|X\|_q$ が成立する.

ノルム空間 $(V, \|\cdot\|)$ に対し

$$B_{p,T}(V) := \left\{ X : \Delta_T \longrightarrow V \ ; \quad \text{continuous, } \|X\|_p < \infty \right\} \tag{1.3}$$

として線型空間 $B_{p,T}(V)$ を定めれば，定理 1.1.7 のアナロジーを得る.

定理 1.2.7. V が Banach 空間のとき，$B_{p,T}(V)$ は $\|\cdot\|_p$ をノルムとする Banach 空間である.

証明. 完備性を示す.

第一段　$(X^n)_{n=1}^{\infty}$ を $B_{p,T}(V)$ の Cauchy 列とすれば，任意の $\epsilon > 0$ に対して或る $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ が存在し

$$\| X^n - X^m \|_p = \left\{ \sup_{D \in \delta[0,T]} \sum_D \left\| X^n_{t_{i-1},t_i} - X^m_{t_{i-1},t_i} \right\|^p \right\}^{1/p} < \epsilon, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

を満たす．任意の $(s,t) \in \Delta_T$ に対して分割 $D = \{0 \le s \le t \le T\}$ を取れば

$$\left\| X^n_{s,t} - X^m_{s,t} \right\| < \epsilon, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

が成り立ち，V の完備性より或る $X_{s,t} \in \mathbb{R}^d$ が存在して

$$\left\| X^n_{s,t} - X_{s,t} \right\| < \epsilon \quad (n > n_\epsilon)$$

となる．この収束は (s,t) に関して一様であるから X は連続である．

第二段　$\| X^n - X \|_p \longrightarrow 0 \ (n \longrightarrow \infty)$ を示す．前段より，任意の $D \in \delta[0,T]$ に対し

$$\sum_D \left\| X^n_{t_{i-1},t_i} - X^m_{t_{i-1},t_i} \right\|^p < \epsilon^p, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

が満たされる．D は有限分割であるから，$m \longrightarrow \infty$ として

$$\sum_D \left\| X^n_{t_{i-1},t_i} - X_{t_{i-1},t_i} \right\|^p < \epsilon^p, \quad (n > n_\epsilon)$$

が従い，D の任意性より $\| X^n - X \|_p < \epsilon \ (n > n_\epsilon)$ を得る．　■

定理 1.2.8 (p-変動が定めるコントロール関数)．　$(V, \|\cdot\|)$ をノルム空間，$p > 0$ とする．このとき，$\|\psi\|_p < \infty$ かつ $\psi_{t,t} = 0 \ (\forall t \in [0,T])$ を満たす連続写像 $\psi : \Delta_T \longrightarrow V$ に対して，

$$\omega : \Delta_T \ni (s,t) \longmapsto \|\psi\|^p_{p,[s,t]}$$

により定める ω はコントロール関数である．

証明 (参考:[3](pp. 96-98))．　$\|\psi\|_p < \infty$ の仮定より ω は $[0,\infty)$ 値であるから，以下では式 (1.2) と連続性を示す．

第一段　ω が式 (1.2) を満たすことを示す．実際，任意に $D_1 \in \delta[s,u], D_2 \in \delta[u,t]$ を取れば

$$\sum_{D_1} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p + \sum_{D_2} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p = \sum_{D_1 \cup D_2} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p \le \|\psi\|^p_{p:[s,t]}$$

が成り立つ．左辺の D_1, D_2 の取り方は独立であるから，それぞれに対し上限を取れば

$$\|\psi\|^p_{p:[s,u]} + \|\psi\|^p_{p:[u,t]} \le \|\psi\|^p_{p:[s,t]}$$

が従う．

第二段　任意の $[s,t] \subset [0,T]$ について[*2]，

$$\begin{aligned} &\lim_{h \to +0} \omega(s, t+h) = \inf_{h>0} \omega(s, t+h), & &\lim_{h \to +0} \omega(s-h, t) = \inf_{h>0} \omega(s-h, t), \\ &\lim_{h \to +0} \omega(s, t-h) = \sup_{h>0} \omega(s, t-h), & &\lim_{h \to +0} \omega(s+h, t) = \sup_{h>0} \omega(s+h, t) \end{aligned}$$

[*2] 下段の二式については $s < t$ と仮定する．また上段についても，$t = T$ 或は $s = 0$ の場合を除く必要がある．

が成立する．実際 $\omega(s,t+h)$ について見れば，これは下に有界かつ $h\to+0$ に対し単調減少であるから極限が確定し下限に一致する．残りの三つも同様の理由で成立する．

第三段　任意の $s\in[0,T)$ に対し，$(s,T]\ni t\longmapsto\omega(s,t)$ の左連続性を示す．ここでは

$$\tilde{\omega}(s,t):=\begin{cases}\lim_{h\to+0}\omega(s,t-h), & (s<t),\\ 0, & (s=t),\end{cases}\quad(\forall(s,t)\in\Delta_T)$$

で定める $\tilde{\omega}$ が優加法性を持ち，かつ

$$\left\|\psi_{s,t}\right\|^p\le\tilde{\omega}(s,t),\quad(\forall(s,t)\in\Delta_T)$$

を満たすことを示す．実際これが示されれば，任意の $D\in\delta[s,t]$ に対し

$$\sum_D\left\|\psi_{t_{i-1},t_i}\right\|^p\le\sum_D\tilde{\omega}(t_{i-1},t_i)\le\tilde{\omega}(s,t)$$

が成立し $\omega(s,t)\le\tilde{\omega}(s,t)$ が従い，$\omega(s,t)\ge\omega(s,t-h)$ $(\forall h>0)$ と併せて

$$\omega(s,t)=\tilde{\omega}(s,t)=\lim_{h\to+0}\omega(s,t-h)$$

を得る．いま，任意に $s<u<t$ を取れば，十分小さい $h_1,h_2>0$ に対して

$$\omega(s,u-h_1)+\omega(u,t-h_2)\le\omega(s,t-h_2)$$

が満たされ，$h_1\longrightarrow+0,\ h_2\longrightarrow+0$ として

$$\tilde{\omega}(s,u)+\tilde{\omega}(u,t)\le\tilde{\omega}(s,t)$$

が成り立つから $\tilde{\omega}$ は優加法性を持つ．また，もし或る $(u,v)\in\Delta_T$ に対して

$$\left\|\psi_{u,v}\right\|^p>\tilde{\omega}(u,v)$$

が成り立つと仮定すると ($u=v$ なら両辺 0 になるから $u<v$ である)

$$\left\|\psi_{u,v}\right\|^p>\tilde{\omega}(u,v)\ge\omega(u,v-h)\ge\left\|\psi_{u,v-h}\right\|^p,\quad(\forall h>0)$$

となる．一方 ψ の連続性より $\left\|\psi_{u,v-h}\right\|^p\longrightarrow\left\|\psi_{u,v}\right\|^p$ $(h\longrightarrow+0)$ が従い矛盾が生じる．同様にして，任意の $t\in(0,T]$ に対し $[0,t)\ni s\longmapsto\omega(s,t)$ の右連続性も出る．

第四段　任意の $t\in[0,T)$ に対して次を示す:

$$\lim_{h\to+0}\omega(t,t+h)=\inf_{h>0}\omega(t,t+h)=0.$$

第一の等号は前段より従うから，第二の等号を背理法により証明する．いま

$$\inf_{h>0}\omega(t,t+h)=:\delta>0$$

と仮定すれば，ψ の連続性より或る h_1 が存在して

$$\left\|\psi_{t,t+h}\right\|^p=\left\|\psi_{t,t+h}-\psi_{t,t}\right\|^p<\frac{\delta}{8},\quad(\forall h<h_1)\tag{1.4}$$

が成立する．ここで任意に $h_0<h_1$ を取り固定する．一方で $\omega(t,t+h_0)\ge\delta$ より

$$\sum_{i=1}^N\left\|\psi_{\tau_{i-1},\tau_i}\right\|^p>\frac{7\delta}{8}$$

を満たす $D = \{t = \tau_0 < \tau_1 < \cdots, \tau_N = t + h_0\} \in \delta[t, t+h_0]$ が存在し，(1.4) と併せて

$$\sum_{i=2}^{N} \left\| \psi_{\tau_{i-1},\tau_i} \right\|^p > \frac{7\delta}{8} - \left\| \psi_{t,\tau_1} \right\|^p > \frac{7\delta}{8} - \frac{\delta}{8} = \frac{3\delta}{4}$$

を得る．また，$\omega(t, \tau_1) \geq \delta$ より或る $D' \in \delta[t, \tau_1]$ が存在して

$$\sum_{D'} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p > \frac{3\delta}{4}$$

を満たすから，$D' \cup \{\tau_1 < \cdots, \tau_N = t + h_0\} \in \delta[t, t+h_0]$ に対して

$$\omega(t, t+h_0) > \sum_{D'} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p + \sum_{i=2}^{N} \left\| \psi_{\tau_{i-1},\tau_i} \right\|^p > \frac{3\delta}{2}$$

が従うが，$h_0 < h_1$ の任意性と単調減少性により

$$\delta = \inf_{h>0} \omega(t, t+h) = \inf_{h_1>h>0} \omega(t, t+h) \geq \frac{3\delta}{2}$$

となり矛盾が生じる．同様にして

$$\lim_{h \to +0} \omega(t-h, t) = 0, \quad (\forall t \in (0, T])$$

も成立する．

第五段　任意に $s \in [0, T)$ を取り固定し，$[s, T) \ni t \longmapsto \omega(s, t)$ が右連続であることを示す．

$$\lim_{h \to +0} \omega(s, t+h) \leq \omega(s, t) \tag{1.5}$$

を示せば，第二段より逆向きの不等号も従い右連続性を得る．任意に $h, \epsilon > 0$ を取れば，

$$\omega(s, t+h) - \epsilon \leq \sum_{D} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p$$

を満たす $D \in \delta[s, t+h]$ が存在し，

$$D_1 \coloneqq \{t_0 < \cdots < t_k\} = [s, t] \cap D, \quad D_2 \coloneqq D \setminus (D_1 \cup \{t_{k+1}\})$$

とおくと

$$\begin{aligned}
\omega(s, t+h) - \epsilon &\leq \sum_{i=1}^{k} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p + \left\| \psi_{t_k,t_{k+1}} \right\|^p + \sum_{D_2} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p \\
&= \sum_{i=1}^{k} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p + \left\| \psi_{t_k,t} \right\|^p + \left\| \psi_{t_k,t_{k+1}} \right\|^p - \left\| \psi_{t_k,t} \right\|^p + \sum_{D_2} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p \\
&\leq \omega(s, t) + \omega(t, t+h) + \left\| \psi_{t_k,t_{k+1}} \right\|^p - \left\| \psi_{t_k,t} \right\|^p
\end{aligned}$$

が成り立つ．ψ の一様連続性より $\left\| \psi_{t_k,t_{k+1}} \right\|^p \longrightarrow \left\| \psi_{t_k,t} \right\|^p$ $(h \longrightarrow +0)$ が成り立つから

$$\lim_{h \to +0} \omega(s, t+h) - \epsilon \leq \omega(s, t), \quad (\forall \epsilon > 0)$$

が従い (1.5) が出る．同様に $(0, t] \ni s \longmapsto \omega(s, t)$ $(\forall t \in (0, T])$ の左連続性も成立する．

第六段　ω の $(s, t) \in \Delta_T$ における連続性を示す．$h, k \geq 0$ とする．

(A) (s,t) を基準に第一象限の点について

$$\begin{aligned}
&|\omega(s,t)-\omega(s+h,t+k)| \\
&\quad \le |\omega(s,t)-\omega(s+h,t)| + |\omega(s+h,t)-\omega(s+h,t+k)| \\
&\quad = |\omega(s,t)-\omega(s+h,t)| + \omega(s+h,t+k)-\omega(s+h,t) \\
&\quad \le |\omega(s,t)-\omega(s+h,t)| + \omega(s,t+k)-\omega(s+h,t) \\
&\quad \le |\omega(s,t)-\omega(s+h,t)| + |\omega(s,t+k)-\omega(s,t)| + |\omega(s,t)-\omega(s+h,t)|
\end{aligned}$$

が成り立つ．前段までに示した左右の連続性より，近づけ方に依らず $h,k \longrightarrow +0$ とすれば，左辺をいくらでも 0 に近づけることができる．

(B) (s,t) を基準に第三象限の点について

$$\begin{aligned}
&|\omega(s,t)-\omega(s-h,t-k)| \\
&\quad \le |\omega(s,t)-\omega(s-h,t)| + |\omega(s-h,t)-\omega(s-h,t-k)| \\
&\quad = |\omega(s,t)-\omega(s-h,t)| + \omega(s-h,t)-\omega(s-h,t-k) \\
&\quad \le |\omega(s,t)-\omega(s-h,t)| + \omega(s-h,t)-\omega(s,t-k) \\
&\quad \le |\omega(s,t)-\omega(s-h,t)| + |\omega(s-h,t)-\omega(s,t)| + |\omega(s,t)-\omega(s,t-k)|,
\end{aligned}$$

が成り立つ．(A) と同じく $h,k \longrightarrow +0$ として左辺は 0 に収束する．

(C) $((h_n,k_n))_{n=1}^{\infty}$ を第一象限から $(0,0)$ に近づく任意の点列とするとき，

$$\lim_{n\to\infty}\omega(s-h_n,t+k_n)=\omega(s,t), \quad \lim_{n\to\infty}\omega(s+h_n,t-k_n)=\omega(s,t)$$

が成り立つことを示す．これが示されれば

$$\lim_{h,k\to+0}\omega(s-h,t+k)=\omega(s,t), \quad \lim_{h,k\to+0}\omega(s+h,t-k)=\omega(s,t)$$

が従い，(A)(B) と併せて ω の連続性が出る．背理法で証明する．いま，

$$\alpha \coloneqq \lim_{n\to\infty}\omega(s-h_n,t+k_n) > \omega(s,t)$$

と仮定して $\epsilon \coloneqq \alpha-\omega(s,t)$ とおく．$\lim_{t'\downarrow t}\omega(s,t')=\omega(s,t)$ より

$$0 \le \omega(s,t')-\omega(s,t) < \frac{\epsilon}{3}$$

を満たす $t'>t$ が存在し，また $\lim_{s'\uparrow s}\omega(s',t')=\omega(s,t')$ より

$$0 \le \omega(s',t')-\omega(s,t') < \frac{\epsilon}{3}$$

を満たす $s'<s$ も存在する．このとき或る n で $s' \le s-h_n$，$t+k_n \le t'$ かつ

$$|\omega(s-h_n,t+k_n)-\alpha| < \frac{\epsilon}{3}$$

が成立し，特に $(s-h_n,t+k_n) \subset (s',t')$ より

$$\omega(s-h_n,t+k_n) \le \omega(s',t')$$

となるはずであるが，一方で

$$\omega(s',t') < \frac{2}{3}\epsilon+\omega(s,t) = \alpha-\frac{\epsilon}{3} < \omega(s-h_n,t+k_n)$$

が従い矛盾が生じる．よって

$$\lim_{n\to\infty}\omega(s-h_n,t+k_n)=\omega(s,t)$$

でなくてはならず，同様にして $\lim_{n\to\infty}\omega(s+h_n,t-k_n)=\omega(s,t)$ も得られる． ∎

定理 1.2.9 (control function の例). 以下の関数 $\omega : \Delta_T \longrightarrow [0,\infty)$ は control function である．

(1) $\omega : (s,t) \longmapsto \left\| X^1 \right\|_{p:[s,t]}^p, \quad (p \geq 1,\ x \in B_{p,T}(\mathbb{R}^d)).$

(2) $\omega : (s,t) \longmapsto \left\| X^2 \right\|_{p:[s,t]}^p, \quad (p \geq 1,\ x \in C^1).$

行列 $a = (a^i_j)$ のノルムは $|a| = \sqrt{\sum_{i,j} |a^i_j|^2}$ として考える．

定理 1.2.10.

(1) $\omega : (s,t) \longmapsto X^1_{s,t} = x_t - x_s$ は連続であるから，前定理より ω は control function である．

(2) 任意の $[s,t] \subset [0,T]$ に対して $\left\| X^2 \right\|_{p:[s,t]}^p < \infty$ を示せば，あとは上と同じ理由により定理の主張が得られる．実際，任意の分割 $D = \{s = t_0 < \cdots < t_N = t\}$ に対し

$$\begin{aligned}
\left\| X^2_{t_{i-1},t_i} \right\| &\leq \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (x_u - x_{t_{i-1}}) \otimes \dot{x}_u \, du \right| \\
&\leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left| (x_u - x_{t_{i-1}}) \otimes \dot{x}_u \right| \, du \\
&\leq \| x \|_{C^1}^2 \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u-s)\, du \right\}^{1/p} \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u-s)\, du \right\}^{1-1/p} \\
&\leq \| x \|_{C^1}^2 \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u-s)\, du \right\}^{1/p} \left\{ \int_{s}^{t} (u-s)\, du \right\}^{1-1/p}
\end{aligned}$$

が成り立つから，

$$\begin{aligned}
\sum_D \left\| X^2_{t_{i-1},t_i} \right\|^p &\leq \sum_D \| x \|_{C^1}^{2p} \left\{ \frac{1}{2}(t-s)^2 \right\}^{p-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u-s)\, du \\
&= \| x \|_{C^1}^{2p} \left\{ \frac{1}{2}(t-s)^2 \right\}^{p-1} \int_{s}^{t} (u-s)\, du = \| x \|_{C^1}^{2p} \left\{ \frac{1}{2}(t-s)^2 \right\}^{p}
\end{aligned}$$

により $\left\| X^2 \right\|_{p:[s,t]}^p < \infty$ が従う． ∎

補題 1.2.11. ω を Δ_T 上の control function とする．$D = \{s = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t\}$ について，$N \geq 2$ の場合或る $1 \leq i \leq N-1$ が存在して次を満たす:

$$\omega(t_{i-1}, t_{i+1}) \leq \frac{2\omega(s,t)}{N-1}. \tag{1.6}$$

証明. (会田先生のテキスト．) ∎

1.3 Proof of continuity theorem

定理 1.3.1 (1 ≤ p < 2 の場合の連続性定理). $1 \le p < 2$ とし，$x_0 = y_0$ を満たす $x, y \in C^1$ と $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$, $0 < \epsilon, R < \infty$ を任意に取る．このとき，

$$\left\| X^1 \right\|_p, \left\| Y^1 \right\|_p \le R, \quad \left\| X^1 - Y^1 \right\|_p \le \epsilon$$

なら，或る定数 $C = C(p, R, f)$ が存在し，任意の $0 \le s \le t \le T$ に対して次が成立する:

$$\left| I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y) \right| \le \epsilon C.$$

系 1.3.2 (p-variation による閉球上の Lipschitz 連続性). $1 \le p < 2$ とし，$x_0 = y_0$ を満たす $x, y \in C^1$ と $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$, $0 < R < \infty$ を任意に取る．このとき，

$$\left\| X^1 \right\|_p, \left\| Y^1 \right\|_p \le R$$

なら，或る定数 $C = C(p, R, f)$ が存在して次を満たす:

$$\left| I_{0,T}(x) - I_{0,T}(y) \right| \le C \left\| X^1 - Y^1 \right\|_p.$$

証明 (系 1.3.2). 定理 1.3.1 において，$\epsilon = \left\| X^1 - Y^1 \right\|_p$ $(x \neq y)$ [*3] として証明が通る． ∎

証明 (定理 1.3.1). $[s, t] \subset [0, T]$ とする．

第一段 $\omega : \Delta_T \longrightarrow [0, \infty)$ を

$$\omega(\alpha, \beta) = \left\| X^1 \right\|_{p,[\alpha,\beta]}^p + \left\| Y^1 \right\|_{p,[\alpha,\beta]}^p + \epsilon^{-p} \left\| X^1 - Y^1 \right\|_{p,[\alpha,\beta]}^p, \quad ((\alpha, \beta) \in \Delta_T)$$

で定めれば，定理 1.2.9 により $1 \le p$ の下で ω は control function である．

第二段 任意に $[s, t]$ の分割 $D = \{s = t_0 < \cdots < t_N = t\}$ $(N \ge 2)$ を取れば，補題 1.2.11 より (1.6) を満たす $t_{(0)}$ が存在する．ここで，$D_{-0} := D$, $D_{-1} := D \backslash \{t_{(0)}\}$ と定める．$N \ge 3$ ならば D_{-1} についても (1.6) を満たす $t_{(1)}$ が存在するから，$D_{-2} := D_{-1} \backslash \{t_{(1)}\}$ と定める．この操作を繰り返せば $t_{(k)}, D_{-k}$ $(k = 0, 1, \cdots, N-1)$ が得られ，

$$\begin{aligned} &\tilde{I}_{s,t}(x, D) - \tilde{I}_{s,t}(y, D) \\ &\quad = \sum_{k=0}^{N-2} \left[\left\{ \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1}) \right\} - \left\{ \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k-1}) \right\} \right] \\ &\quad\quad + \left\{ \tilde{I}_{s,t}(x) - \tilde{I}_{s,t}(y) \right\} \end{aligned} \tag{1.7}$$

と表現できる．

第三段 式 (1.7) について，次を満たす定数 C_1 が存在することを示す:

$$|(1.7)| \le \epsilon C_1 \tag{1.8}$$

[*3] $x = y$ なら $\left\| X^1 - Y^1 \right\|_p = 0$ かつ $I_{s,t}(x) = I_{s,t}(y)$ が成り立つ．

見やすくするために $t_k = t_{(k)}$ と書き直せば，

$$
\begin{aligned}
&\left\{\tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1})\right\} - \left\{\tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k-1})\right\} \\
&= \{f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}})\}\, X^1_{t_k,t_{k+1}} - \{f(y_{t_k}) - f(y_{t_{k-1}})\}\, Y^1_{t_k,t_{k+1}} \\
&= \{f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}})\}\left(X^1_{t_k,t_{k+1}} - Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right) \\
&\quad + \{f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}})\}\, Y^1_{t_k,t_{k+1}} - \{f(y_{t_k}) - f(y_{t_{k-1}})\}\, Y^1_{t_k,t_{k+1}} \\
&= \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}))X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes \left(X^1_{t_k,t_{k+1}} - Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right)\, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}))X^1_{t_{i_k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{i_k+1}}\, d\theta \\
&\quad - \int_0^1 (\nabla f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))Y^1_{t_{i_k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{i_k+1}}\, d\theta \\
&= \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}))X^1_{t_{i_k-1},t_k} \otimes \left(X^1_{t_k,t_{i_k+1}} - Y^1_{t_k,t_{i_k+1}}\right)\, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}))\left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right) \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}}\, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}))Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}}\, d\theta \\
&\quad - \int_0^1 (\nabla f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}}\, d\theta \\
&= \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}))X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes \left(X^1_{t_k,t_{k+1}} - Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right)\, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}))\left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right) \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}}\, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}} + r(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) - y_{t_{k-1}} - \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})))) \\
&\qquad\quad \left(X^1_{0,t_{k-1}} - Y^1_{0,t_{k-1}}\right) \otimes Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta\ ^{*4} \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}} + r(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) - y_{t_{k-1}} - \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})))) \\
&\qquad\quad \theta\left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right) \otimes Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta
\end{aligned}
$$

が成り立つ．補題 1.2.11 より

$$
\begin{aligned}
\left|X^1_{t_{k-1},t_k}\right|, \left|Y^1_{t_{k-1},t_k}\right|, \left|X^1_{t_k,t_{k+1}}\right|, \left|Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| &\le \omega(t_{k-1}, t_{k+1})^{1/p} \le \left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1}\right)^{1/p}, \\
\left|X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right|, \left|X^1_{t_k,t_{k+1}} - Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| &\le \epsilon\omega(t_{k-1}, t_{k+1})^{1/p} \le \epsilon\left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1}\right)^{1/p}
\end{aligned}
$$

が満たされ，また

$$
\left|X^1_{0,t_{k-1}} - Y^1_{0,t_{k-1}}\right| \le \epsilon\omega(0, t_{k-1})^{1/p} \le \epsilon\omega(0, T)^{1/p} \le \epsilon\,(2R^p + 1)^{1/p}
$$

でもあるから，

$$
M := \sum_{i,j} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f^i_j(x)| + \sum_{i,j,k} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial_k f^i_j(x)| + \sum_{i,j,k,v} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial_v \partial_k f^i_j(x)| \tag{1.9}
$$

---

*4 $x_0 = y_0$ の仮定より $x_{t_{k-1}} - y_{t_{k-1}} = X^1_{0,t_{k-1}} - Y^1_{0,t_{k-1}}$ が成り立つ．

と定めて

$$
\begin{aligned}
&\left|\left\{\tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1})\right\} - \left\{\tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k-1})\right\}\right| \\
&\leq M\left|X^1_{t_{k-1},t_k}\right|\left|X^1_{t_k,t_{k+1}} - Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\quad + M\left|X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right|\left|Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\quad + M\left|X^1_{0,t_{k-1}} - Y^1_{0,t_{k-1}}\right|\left|Y^1_{t_{k-1},t_k}\right|\left|Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\quad + M\left|X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right|\left|Y^1_{t_{k-1},t_k}\right|\left|Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\leq \epsilon M\left[2 + 2\left(2R^p + 1\right)^{1/p}\right]\left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1}\right)^{2/p} \\
&\leq \epsilon M\left[2 + 2\left(2R^p + 1\right)^{1/p}\right]2^{2/p}\left(2R^p + 1\right)^{2/p}\left(\frac{1}{N-k-1}\right)^{2/p}
\end{aligned}
$$

を得る．

$$
C_1' \coloneqq M\left[2 + 2\left(2R^p + 1\right)^{1/p}\right]2^{2/p}\left(2R^p + 1\right)^{2/p}
$$

とおけば

$$
|(1.7)| \leq \sum_{k=0}^{N-2} \epsilon C_1'\left(\frac{1}{N-k-1}\right)^{2/p} < \epsilon C_1'\zeta\left(\frac{2}{p}\right)
$$

が成立し，$p < 2$ より $\zeta(2/p) < \infty$ であるから $C_1 \coloneqq C_1'\zeta(2/p)$ とおいて (1.8) が従う．

第四段　$x_0 = y_0$ の仮定により $x_s - y_s = X^1_{0,s} - Y^1_{0,s}$ が成り立ち

$$
\begin{aligned}
\left|\tilde{I}_{s,t}(x) - \tilde{I}_{s,t}(y)\right| &= \left|f(x_s)X^1_{s,t} - f(y_s)Y^1_{s,t}\right| \\
&\leq \left|f(x_s)X^1_{s,t} - f(x_s)Y^1_{s,t}\right| + \left|f(x_s)Y^1_{s,t} - f(y_s)Y^1_{s,t}\right| \\
&\leq M\left|X^1_{s,t} - Y^1_{s,t}\right| + \left|\int_0^1 (\nabla f)(y_s + \theta(x_s - y_s))\left[\left(X^1_{0,s} - Y^1_{0,s}\right)\otimes Y^1_{s,t}\right]\,d\theta\right| \\
&\leq M\left|X^1_{s,t} - Y^1_{s,t}\right| + M\left|X^1_{0,s} - Y^1_{0,s}\right|\left|Y^1_{s,t}\right| \\
&\leq M\epsilon\omega(s,t)^{1/p} + M\epsilon\omega(0,s)^{1/p}\omega(s,t)^{1/p} \\
&\leq \epsilon M\left[\left(2R^p + 1\right)^{1/p} + \left(2R^p + 1\right)^{2/p}\right]
\end{aligned}
$$

が従う．ここで $C_2 \coloneqq M\left[\left(2R^p + 1\right)^{1/p} + \left(2R^p + 1\right)^{2/p}\right]$ とおく．

第五段　第二段と第三段より，任意の $D \in \delta[s,t]$ に対し

$$
\left|\tilde{I}_{s,t}(x, D) - \tilde{I}_{s,t}(y, D)\right| \leq \epsilon(C_1 + C_2)
$$

が成立し．定理 1.2.2 により $|D| \longrightarrow 0$ として

$$
\left|I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y)\right| \leq \epsilon(C_1 + C_2)
$$

が出る． ∎

定理 1.3.3 ($2 \le p < 3$ の場合の連続性定理). $2 \le p < 3$ とし，$x_0 = y_0$ を満たす $x, y \in C^1$ と $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$, $0 < \epsilon, R < \infty$ を任意に取る．このとき，

$$\left\| X^1 \right\|_p, \left\| Y^1 \right\|_p, \left\| X^2 \right\|_{p/2}, \left\| Y^2 \right\|_{p/2} \le R < \infty,$$
$$\left\| X^1 - Y^1 \right\|_p, \left\| X^2 - Y^2 \right\|_{p/2} \le \epsilon$$

なら，或る定数 $C = C(p, R, f)$ が存在し，任意の $0 \le s \le t \le T$ に対して次が成立する:

$$\left| I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y) \right| \le \epsilon C.$$

系 1.3.4. $1 \le p < 2$ とし，$x_0 = y_0$ を満たす $x, y \in C^1$ と $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$, $0 < R < \infty$ を任意に取る．このとき，

$$\left\| X^1 \right\|_p, \left\| Y^1 \right\|_p, \left\| X^2 \right\|_{p/2}, \left\| Y^2 \right\|_{p/2} \le R$$

なら，或る定数 $C = C(p, R, f)$ が存在して次を満たす:

$$\left| I_{0,T}(x) - I_{0,T}(y) \right| \le C \left(\left\| X^1 - Y^1 \right\|_p + \left\| X^2 - Y^2 \right\|_{p/2} \right).$$

証明 (系 1.3.4). 定理 1.3.3 において，$\epsilon = \left\| X^1 - Y^1 \right\|_p + \left\| X^2 - Y^2 \right\|_{p/2}$ $(x \ne y)$ として証明が通る． ∎

証明 (定理 1.3.4). $[s, t] \subset [0, T]$ とする．

第一段 $\omega : \Delta_T \longrightarrow [0, \infty)$ を

$$\begin{aligned}\omega(\alpha, \beta) = &\left\| X^1 \right\|_{p,[\alpha,\beta]}^p + \left\| Y^1 \right\|_{p,[\alpha,\beta]}^p + \left\| X^2 \right\|_{p/2,[\alpha,\beta]}^{p/2} + \left\| Y^2 \right\|_{p/2,[\alpha,\beta]}^{p/2} \\ &+ \epsilon^{-p} \left\| X^1 - Y^1 \right\|_{p,[\alpha,\beta]}^p + \epsilon^{-p/2} \left\| X^2 - Y^2 \right\|_{p/2,[\alpha,\beta]}^{p/2}, \quad ((\alpha, \beta) \in \Delta_T)\end{aligned}$$

で定めれば，定理 1.2.9 により $2 \le p$ の下で ω は control function である．

第二段 $D \in \delta[s, t]$ に対し，定理 1.3.1 の証明と同様にして $t_{(k)}, D_{-k}$ を構成すれば

$$\begin{aligned}&J_{s,t}(x, D) - J_{s,t}(y, D) \\ &\quad = \sum_{k=0}^{N-2} \left[\{J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})\} - \{J_{s,t}(y, D_{-k}) - J_{s,t}(y, D_{-k-1})\} \right] \\ &\qquad + \{J_{s,t}(x) - J_{s,t}(y)\}\end{aligned} \tag{1.10}$$

と表現できる．

第三段 $J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})$ を変形する．以降 $t_k = t_{(k)}$ と書き直せば

$$\begin{aligned}&J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1}) \\ &\quad = J_{t_{k-1},t_k}(x) + J_{t_k,t_{k+1}}(x) - J_{t_{k-1},t_{k+1}}(x) \\ &\quad = f(x_{t_{k-1}}) X^1_{t_{k-1},t_k} + f(x_{t_k}) X^1_{t_k,t_{k+1}} - f(x_{t_{k-1}}) X^1_{t_{k-1},t_{k+1}} \\ &\qquad\quad + (\nabla f)(x_{t_{k-1}}) X^2_{t_{k-1},t_k} + (\nabla f)(x_{t_k}) X^2_{t_k,t_{k+1}} - (\nabla f)(x_{t_{k-1}}) X^2_{t_{k-1},t_{k+1}} \\ &\quad = \{f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}})\} X^1_{t_k,t_{k+1}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X^2_{t_{k-1},t_k} + (\nabla f)(x_{t_k})X^2_{t_k,t_{k+1}} - (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X^2_{t_{k-1},t_{k+1}} \\
= &\int_0^1 \{(\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) - (\nabla f)(x_{t_{k-1}})\} X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_k,t_{k+1}}\, d\theta \\
&+ (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_k,t_{k+1}} \\
&+ (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X^2_{t_{k-1},t_k} + (\nabla f)(x_{t_k})X^2_{t_k,t_{k+1}} - (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X^2_{t_{k-1},t_{k+1}} \\
= &\int_0^1 \int_0^\theta (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}))X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta \\
&+ (\nabla f)(x_{t_{k-1}})\left(X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_k,t_{k+1}} + X^2_{t_{k-1},t_k} - X^2_{t_{k-1},t_{k+1}}\right) \\
&+ (\nabla f)(x_{t_k})X^2_{t_k,t_{k+1}} \\
= &\int_0^1 \int_0^\theta (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}))X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta \\
&+ \{(\nabla f)(x_{t_k}) - (\nabla f)(x_{t_{k-1}})\} X^2_{t_k,t_{k+1}} \\
= &\int_0^1 \int_0^\theta (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}))X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta \\
&+ \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}))X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^2_{t_k,t_{k+1}}\, d\theta
\end{aligned}
$$

を得る.

第四段 式 (1.10) について，次を満たす定数 C_1 が存在することを示す:

$$
|(1.10)| \leq \epsilon C_1. \tag{1.11}
$$

実際，前段の結果より

$$
\begin{aligned}
&\{J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})\} - \{J_{s,t}(y, D_{-k}) - J_{s,t}(y, D_{-k-1})\} \\
= &\int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}))X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta \\
&+ \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}))X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^2_{t_k,t_{k+1}}\, d\theta \\
&- \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta \\
&- \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^2_{t_k,t_{k+1}}\, d\theta \\
= &\int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}))X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes \left(X^1_{t_k,t_{k+1}} - Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right)\, dr\, d\theta \\
&+ \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}))X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes \left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right) \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta \\
&+ \int_0^1 \int_0^\theta \left\{(\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) - (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))\right\} \\
&\qquad\qquad X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta \\
&+ \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))\left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right) \otimes Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta \\
&+ \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}))X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes \left(X^2_{t_k,t_{k+1}} - Y^2_{t_k,t_{k+1}}\right)\, d\theta \\
&+ \int_0^1 \left\{(\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) - (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^2_{t_k,t_{k+1}}\, d\theta \\
&+ \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) \left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right) \otimes Y^2_{t_k,t_{k+1}}\, d\theta \\
= &\int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes \left(X^1_{t_k,t_{k+1}} - Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right)\, dr\, d\theta \\
&+ \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes \left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right) \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta \\
&+ \int_0^1 \int_0^\theta \int_0^1 (\nabla^3 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}) + u(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) - y_{t_{k-1}} - r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))) \\
&\qquad \left\{\left(X^1_{0,t_{k-1}} - Y^1_{0,t_{k-1}}\right) + r\left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right)\right\} \otimes X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}}\, du\, dr\, d\theta \\
&+ \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) \left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right) \otimes Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta \\
&+ \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes \left(X^2_{t_k,t_{k+1}} - Y^2_{t_k,t_{k+1}}\right)\, d\theta \\
&+ \int_0^1 \int_0^1 (\nabla^3 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}) + r(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) - y_{t_{k-1}} - \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))) \\
&\qquad \left\{\left(X^1_{0,t_{k-1}} - Y^1_{0,t_{k-1}}\right) + \theta\left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right)\right\} \otimes X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^2_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta \\
&+ \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) \left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right) \otimes Y^2_{t_k,t_{k+1}}\, d\theta
\end{aligned}
$$

が成り立つから,

$$
\begin{aligned}
M \coloneqq &\sum_{i,j} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f^i_j(x)| + \sum_{i,j,k} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial_k f^i_j(x)| \\
&+ \sum_{i,j,k,v} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial_v \partial_k f^i_j(x)| + \sum_{i,j,k,v,w} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial_w \partial_v \partial_k f^i_j(x)|
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

とおいて

$$
\begin{aligned}
&\left|\{J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})\} - \{J_{s,t}(y, D_{-k}) - J_{s,t}(y, D_{-k-1})\}\right| \\
&\le M \left|X^1_{t_{k-1},t_k}\right| \left|X^1_{t_{k-1},t_k}\right| \left|X^1_{t_k,t_{k+1}} - Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\quad + M \left|X^1_{t_{k-1},t_k}\right| \left|X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right| \left|Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\quad + M \left|X^1_{0,t_{k-1}} - Y^1_{0,t_{k-1}}\right| \left|X^1_{t_{k-1},t_k}\right| \left|Y^1_{t_{k-1},t_k}\right| \left|Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\quad + M \left|X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right| \left|X^1_{t_{k-1},t_k}\right| \left|Y^1_{t_{k-1},t_k}\right| \left|Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\quad + M \left|X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right| \left|Y^1_{t_{k-1},t_k}\right| \left|Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\quad + M \left|X^1_{t_{k-1},t_k}\right| \left|X^2_{t_k,t_{k+1}} - Y^2_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\quad + M \left|X^1_{0,t_{k-1}} - Y^1_{0,t_{k-1}}\right| \left|X^1_{t_{k-1},t_k}\right| \left|Y^2_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\quad + M \left|X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right| \left|X^1_{t_{k-1},t_k}\right| \left|Y^2_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\quad + M \left|X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right| \left|Y^2_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\le \epsilon M \left[5 + 2\omega(0, t_{k-1})^{1/p} + 2\omega(t_{k-1}, t_k)^{1/p}\right] \left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1}\right)^{3/p} \\
&\le \epsilon M \left[2 + 4\left(2R^p + 2R^{p/2} + 2\right)^{1/p}\right] 2^{3/p} \left(2R^p + 2R^{p/2} + 2\right)^{3/p} \left(\frac{1}{N-k-1}\right)^{3/p}
\end{aligned}
$$

を得る．ここで

$$
C'_1 \coloneqq M\left[2 + 4\left(2R^p + 2R^{p/2} + 2\right)^{1/p}\right] 2^{3/p} \left(2R^p + 2R^{p/2} + 2\right)^{3/p}
$$

と定めれば

$$|(1.10)| \le \sum_{k=0}^{N-2} \epsilon C_1' \left(\frac{1}{N-k-1}\right)^{3/p} < \epsilon C_1' \zeta\left(\frac{3}{p}\right)$$

が成立し，$p < 3$ より $\zeta(3/p) < \infty$ であるから $C_1 \coloneqq C_1' \zeta(3/p)$ とおいて (1.11) が出る．

第五段　$x_0 = y_0$ の仮定により

$$\begin{aligned}
&\left|J_{s,t}(x) - J_{s,t}(y)\right| \\
&\le \left|f(x_s)X^1_{s,t} - f(y_s)Y^1_{s,t}\right| + \left|(\nabla f)(x_s)X^2_{s,t} - (\nabla f)(y_s)Y^2_{s,t}\right| \\
&\le \left|f(x_s)X^1_{s,t} - f(x_s)Y^1_{s,t}\right| + \left|f(x_s)Y^1_{s,t} - f(y_s)Y^1_{s,t}\right| \\
&\qquad + \left|(\nabla f)(x_s)X^2_{s,t} - (\nabla f)(x_s)Y^2_{s,t}\right| + \left|(\nabla f)(x_s)Y^2_{s,t} - (\nabla f)(y_s)Y^2_{s,t}\right| \\
&\le M\left|X^1_{s,t} - Y^1_{s,t}\right| + \left|\int_0^1 (\nabla f)(y_s + \theta(x_s - y_s))(x_s - y_s) \otimes Y^1_{s,t}\, d\theta\right| \\
&\qquad + M\left|X^2_{s,t} - Y^2_{s,t}\right| + \left|\int_0^1 (\nabla^2 f)(y_s + \theta(x_s - y_s))(x_s - y_s) \otimes Y^2_{s,t}\, d\theta\right| \\
&\le M\left|X^1_{s,t} - Y^1_{s,t}\right| + M\left|X^1_{0,s} - Y^1_{0,s}\right|\left|Y^1_{s,t}\right| \\
&\qquad + M\left|X^2_{s,t} - Y^2_{s,t}\right| + M\left|X^1_{0,s} - Y^1_{0,s}\right|\left|Y^2_{s,t}\right| \\
&\le \epsilon M\omega(s,t)^{1/p} + \epsilon M\omega(0,s)^{1/p}\omega(s,t)^{1/p} \\
&\quad + \epsilon M\omega(s,t)^{2/p} + \epsilon M\omega(0,s)^{1/p}\omega(s,t)^{2/p} \\
&\le \epsilon M\left[\omega(0,T)^{1/p} + 2\omega(0,T)^{2/p} + \omega(0,T)^{3/p}\right] \\
&\le \epsilon M\left[\left(2R^p + 2R^{p/2} + 2\right)^{1/p} + 2\left(2R^p + 2R^{p/2} + 2\right)^{2/p} + \left(2R^p + 2R^{p/2} + 2\right)^{3/p}\right]
\end{aligned}$$

が従う．ここで最下段の ϵ の係数を C_2 とおく．

第六段　以上より，任意の $D \in \delta[s,t]$ に対し

$$\left|J_{s,t}(x,D) - J_{s,t}(y,D)\right| \le \epsilon(C_1 + C_2)$$

が成り立ち，定理 1.2.2 により $|D| \longrightarrow 0$ として

$$\left|I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y)\right| \le \epsilon(C_1 + C_2)$$

が出る． ∎

系 1.3.5 (パスが 0 出発なら f の有界性は要らない)．定理 1.3.1 と定理 1.3.3 について，$x, y \in \tilde{C}^1$ ならば $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ として主張が成り立つ．

証明．　$x_0 = 0$ なら

$$\left\|X^1\right\|_p \le R \quad \Rightarrow \quad |x_t| \le R \quad (\forall t \in [0,T])$$

が成り立つから，式 (1.9) と (1.12) において $\sup_{x \in \mathbb{R}^d}$ を $\sup_{|x| \le 9R}$ に替えればよい． ∎

1.4 The notion of rough path

$(V, \|\cdot\|)$ を $\mathbb{R}$ 上の Banach 空間とする $(V \neq \{0\})$．また $\otimes_a$ により代数的テンソル積，或はその標準写像を表す．$k \geq 2$ の場合，k 重テンソル積 $V^{\otimes_a k} = V \otimes_a \cdots \otimes_a V$ にプロジェクティブノルム $\pi_k(\cdot)$ を導入し，その完備拡大を $(V^{\otimes k}, |\cdot|_k)$ と書く[*5]．$k = 0, 1$ に対しては $V^{\otimes 0} := \mathbb{R}$, $V^{\otimes 1} := V$ とし，$|\cdot|_0 = \pi_0(\cdot) := \mathbb{R}$ の絶対値，及び $|\cdot|_1 = \pi_1(\cdot) := \|\cdot\|$ と定める．定理 A.3.4 と定理 A.3.9 により，任意の $0 \leq j \leq k$ に対し $V^{\otimes_a k}$ と $V^{\otimes_a j} \otimes_a V^{\otimes_a k-j}$ は線型同型となる．この同型写像を

$$F_{j,k} : V^{\otimes_a k} \longrightarrow V^{\otimes_a j} \otimes_a V^{\otimes_a k-j}, \quad 0 \leq j \leq k$$

書けば，$F_{j,k}$ は

$$\begin{aligned}
F_{0,k}(v) &= 1 \otimes_a v, && (\forall v \in V^{\otimes_a k}),\\
F_{j,k}(v_1 \otimes_a \cdots \otimes_a v_k) &= (v_1 \otimes_a \cdots \otimes_a v_j) \otimes_a (v_{j+1} \otimes_a \cdots \otimes_a v_k), && (\forall v_1 \otimes_a \cdots \otimes_a v_k \in V^{\otimes_a k},\ 1 \leq j \leq k-1),\\
F_{k,k}(v) &= v \otimes_a 1, && (\forall v \in V^{\otimes_a k})
\end{aligned}$$

を満たす．また $V^{\otimes_a j} \otimes_a V^{\otimes_a k-j}$ 上にもプロジェクティブノルムを導入し，これを $\pi_{j,k}$ と書く．

定理 1.4.1. このとき次式が成立する．特に，$F_{j,k}$, $(0 \leq j \leq k)$ は等長同型である．

$$\pi_k \circ F_{j,k}^{-1} = \pi_{j,k}, \quad 0 \leq j \leq k.$$

証明.

第一段 $j = 0$ のとき，任意の $v \in V^{\otimes_a k}$ に対し

$$\pi_{0,k}(F_{0,k}(v)) = \pi_{0,k}(1 \otimes_a v) = \pi_0(1)\,\pi_k(v) = \pi_k(v)$$

が成り立ち $\pi_k \circ F_{0,k}^{-1} = \pi_{0,k}$ を得る．同様にして $\pi_k \circ F_{k,k}^{-1} = \pi_{k,k}$ も出る．

第二段 $\pi_k \circ F_{j,k}^{-1} \leq \pi_{j,k}$, $(1 \leq j \leq k-1)$ が成り立つことを示す．$v \in V^{\otimes_a j} \otimes_a V^{\otimes_a k-j}$ の分割

$$v = \sum_r u^r \otimes_a v^r, \quad (u^r \in V^{\otimes_a j},\ v^r \in V^{\otimes_a k-j})$$

を任意に取り，一旦固定する．このとき u^r, v^r の任意の分割

$$u^r = \sum_{n(r)} u_1^{n(r)} \otimes_a \cdots \otimes_a u_j^{n(r)}, \quad v^r = \sum_{m(r)} v_{j+1}^{m(r)} \otimes_a \cdots \otimes_a v_k^{m(r)}, \quad (v_i^{n(r)}, v_i^{m(r)} \in V)$$

に対して

$$\begin{aligned}
\pi_k\left(F_{j,k}^{-1}(v)\right) &\leq \sum_r \sum_{n(r),m(r)} \pi_k\left(u_1^{n(r)} \otimes_a \cdots \otimes_a u_j^{n(r)} \otimes_a v_{j+1}^{m(r)} \otimes_a \cdots \otimes_a v_k^{m(r)}\right)\\
&= \sum_r \sum_{n(r),m(r)} \left\|u_1^{n(r)}\right\| \cdots \left\|u_j^{n(r)}\right\| \left\|v_{j+1}^{m(r)}\right\| \cdots \left\|v_k^{m(r)}\right\|\\
&= \sum_r \left\{\sum_{n(r)} \left\|u_1^{n(r)}\right\| \cdots \left\|u_j^{n(r)}\right\|\right\} \left\{\sum_{m(r)} \left\|v_{j+1}^{m(r)}\right\| \cdots \left\|v_k^{m(r)}\right\|\right\}
\end{aligned}$$

[*5] V が有限次元なら $V^{\otimes_a k}$ も有限次元であるから $V^{\otimes k} = V^{\otimes_a k}$, $|\cdot|_k = \pi_k(\cdot)$ でよい．しかし一般に $\left(V^{\otimes_a k}, \pi_k(\cdot)\right)$ は完備ではない ([6] (p. 17), [7])．

が成り立つから，分割の任意性と定理 A.4.7 より

$$\pi_k\left(F_{j,k}^{-1}(v)\right) \leq \sum_r \pi_j\,(u^r)\,\pi_{k-j}\,(v^r)$$

を得る．v の分割について下限を取れば，再び定理 A.4.7 により

$$\pi_k\left(F_{j,k}^{-1}(v)\right) \leq \pi_{j,k}\,(v)$$

が出る．

第三段　$\pi_k \circ F_{j,k}^{-1} \geq \pi_{j,k}$, $(1 \leq j \leq k-1)$ が成り立つことを示す．$v \in V^{\otimes_a k}$ の任意の分割

$$v = \sum_n v_1^n \otimes_a \cdots \otimes_a v_k^n, \quad (v_i^n \in V,\ i = 1, \cdots, k)$$

を取れば，

$$\begin{aligned}\pi_{j,k}\left(F_{j,k}(v)\right) &\leq \sum_n \pi_{j,k}\left(\left(v_1^n \otimes_a \cdots \otimes_a v_j^n\right) \otimes_a \left(v_j^n \otimes_a \cdots \otimes_a v_k^n\right)\right)\\ &= \sum_n \pi_j\left(v_1^n \otimes_a \cdots \otimes_a v_j^n\right)\pi_{k-j}\left(v_j^n \otimes_a \cdots \otimes_a v_k^n\right)\\ &= \sum_n \left\| v_1^n \right\| \cdots \left\| v_k^n \right\|\end{aligned}$$

が成立する．従って定理 A.4.7 より

$$\pi_{j,k}\left(F_{j,k}(v)\right) \leq \pi_k\,(v)$$

が得られる． ∎

$V^{\otimes_a i}$ の $V^{\otimes i}$ への等長埋め込みを J_i で表し (J_i の終集合を $J_i V^{\otimes_a i}$ と考える[*6]．$i = 0, 1$ の場合 J_i は恒等写像),

$$\begin{aligned}J_j V^{\otimes_a j} \times J_{k-j} V^{\otimes_a k-j} \ni (u, v) &\longmapsto (J_j^{-1} u, J_{k-j}^{-1} v) && \in V^{\otimes_a j} \times V^{\otimes_a k-j}\\ &\longmapsto F_{j,k}^{-1}(J_j^{-1} u \otimes_a J_{k-j}^{-1} v) && \in V^{\otimes_a k}\\ &\longmapsto J_k F_{j,k}^{-1}(J_j^{-1} u \otimes_a J_{k-j}^{-1} v) && \in V^{\otimes k}\end{aligned} \tag{1.13}$$

の対応関係により定まる写像 : $J_j V^{\otimes_a j} \times J_{k-j} V^{\otimes_a k-j} \longrightarrow V^{\otimes k}$ を $\varphi_{j,k}$ と書けば，$\varphi_{j,k}$ は有界双線型写像である．実際，$\otimes_a$ の双線型性と埋め込み及び $F_{j,k}^{-1}$ の線型性より $\varphi_{j,k}$ の双線型性が従い，また

$$\begin{aligned}\left|\varphi_{j,k}(u, v)\right|_k &= \pi_k\left(F_{j,k}^{-1}(J_j^{-1} u \otimes_a J_{k-j}^{-1} v)\right)\\ &= \pi_{j,k}\left(J_j^{-1} u \otimes_a J_{k-j}^{-1} v\right)\\ &= \pi_j\left(J_j^{-1} u\right)\pi_{k-j}\left(J_{k-j}^{-1} v\right)\\ &= |\,u\,|_j\,|\,v\,|_{k-j}\end{aligned}$$

が任意の $(u, v) \in J_j V^{\otimes_a j} \times J_{k-j} V^{\otimes_a k-j}$ に対して成り立つから $\left\|\varphi_{j,k}\right\|_{L^{(2)}\left(J_j V^{\otimes_a j} \times J_{k-j} V^{\otimes_a k-j}, V^{\otimes k}\right)} = 1$ を得る．従って，定理 A.1.4 より $\varphi_{j,k}$ は $V^{\otimes j} \times V^{\otimes k-j}$ 上の或るただ一つの双線型写像 $\psi_{j,k}$ にノルム保存拡張される．

定理 1.4.2.　$0 \leq j \leq k$ とする．このとき，$\psi_{j,k} : V^{\otimes j} \times V^{\otimes k-j} \longrightarrow V^{\otimes k}$ は次を満たす:

$$\left|\psi_{j,k}(u, v)\right|_k = |\,u\,|_j\,|\,v\,|_{k-j}, \quad (\forall (u, v) \in V^{\otimes j} \times V^{\otimes k-j}).$$

[*6] J_i の終集合を $J_i V^{\otimes_a i}$ と考えれば全単射であるから逆写像 J_i^{-1} が存在する．

証明． (u,v) に直積ノルムで収束する点列 $(u_n,v_n)\in J_jV^{\otimes_a j}\times J_{k-j}V^{\otimes_a k-j}$ $(n=1,2,\cdots)$ を取れば

$$\left|\varphi_{j,k}(u_n,v_n)-\psi_{j,k}(u,v)\right|_k \longrightarrow 0,\quad (n\longrightarrow\infty)$$

が成り立つ．また

$$\begin{aligned}\left||u_n|_j|v_n|_{k-j}-|u|_j|v|_{k-j}\right| &\leq \left||u_n|_j|v_n|_{k-j}-|u_n|_j|v|_{k-j}\right|+\left||u_n|_j|v|_{k-j}-|u|_j|v|_{k-j}\right|\\ &\leq |u_n|_j|v_n-v|_{k-j}+|u_n-u|_j|v|_{k-j}\\ &\longrightarrow 0,\quad (n\longrightarrow\infty)\end{aligned}$$

も成立するから

$$\begin{aligned}\left|\left|\psi_{j,k}(u,v)\right|_k-|u|_j|v|_{k-j}\right| &\leq \left|\varphi_{j,k}(u_n,v_n)-\psi_{j,k}(u,v)\right|_k+\left||u_n|_j|v_n|_{k-j}-|u|_j|v|_{k-j}\right|\\ &\longrightarrow 0,\quad (n\longrightarrow\infty)\end{aligned}$$

が従い $\left|\psi_{j,k}(u,v)\right|_k=|u|_j|v|_{k-j}$ が得られる． ∎

$T(V):=\bigoplus_{k=0}^{\infty}V^{\otimes k}$ とおく．また上で定めた双線型写像 $\psi_{j,k}$ を $\otimes_{j,k}$ と書き直す:

$$u\otimes_{j,k}v=\psi_{j,k}(u,v),\quad (\forall(u,v)\in V^{\otimes j}\times V^{\otimes k-j},\ 0\leq j\leq k,\ k\geq 0).$$

このとき，任意の $a=(a_k)_{k=0}^{\infty}$, $b=(b_k)_{k=0}^{\infty}\in T(V)$ に対し

$$c_k:=\sum_{j=0}^{k}a_j\otimes_{j,k}b_{k-j},\quad (k=0,1,2,\cdots)$$

で $c_k\in V^{\otimes k}$ を定めれば，有限個の k を除いて $c_k=0$ となり $c=(c_k)_{k=0}^{\infty}\in T(V)$ が満たされる．これで定まる二項算法を

$$c=a\otimes b$$

と書けば，以下の主張により $T(V)$ は $\otimes$ を乗法として代数となる．

補題 1.4.3. 任意の $0\leq r\leq j\leq k$, $(r,j,k\in\mathbb{N})$ と任意の $a_r\in V^{\otimes r}, b_{j-r}\in V^{\otimes j-r}, c_{k-j}\in V^{\otimes k-j}$ に対して

$$\left(a_r\otimes_{r,j}b_{j-r}\right)\otimes_{j,k}c_{k-j}=a_r\otimes_{r,k}\left(b_{j-r}\otimes_{j-r,k-r}c_{k-j}\right)\tag{1.14}$$

が成立する．

証明.

第一段 $a_r\in J_rV^{\otimes_a r}$, $b_{j-r}\in J_{j-r}V^{\otimes_a j-r}$, $c_{k-j}\in J_{k-j}V^{\otimes_a k-j}$ として (1.14) を示す．この場合，(1.13) の対応関係により

$$\begin{aligned}\left(a_r\otimes_{r,j}b_{j-r}\right)\otimes_{j,k}c_{k-j}&=J_kF_{j,k}^{-1}\left[\left\{F_{r,j}^{-1}\left(J_r^{-1}a_r\otimes_a J_{j-r}^{-1}b_{j-r}\right)\right\}\otimes_a J_{k-j}^{-1}c_{k-j}\right],\\ a_r\otimes_{r,k}\left(b_{j-r}\otimes_{j-r,k-r}c_{k-j}\right)&=J_kF_{r,k}^{-1}\left[J_r^{-1}a_r\otimes_a\left\{F_{j-r,k-r}^{-1}\left(J_{j-r}^{-1}b_{j-r}\otimes_a J_{k-j}^{-1}c_{k-j}\right)\right\}\right]\end{aligned}$$

となる．ここで

$$J_r^{-1}a_r=\sum_{i_1=1}^{I_1}v_1^{i_1}\otimes_a\cdots\otimes_a v_r^{i_1},\quad J_{j-r}^{-1}b_{j-r}=\sum_{i_2=1}^{I_2}v_{r+1}^{i_2}\otimes_a\cdots\otimes_a v_j^{i_2},\quad J_{k-j}^{-1}c_{k-j}=\sum_{i_3=1}^{I_3}v_{j+1}^{i_3}\otimes_a\cdots\otimes_a v_k^{i_3}$$

と表現できるから

$$
\begin{aligned}
&F_{j,k}^{-1}\left[\left\{F_{r,j}^{-1}\left(J_r^{-1}a_r \otimes_a J_{j-r}^{-1}b_{j-r}\right)\right\}\otimes_a J_{k-j}^{-1}c_{k-j}\right] \\
&= \sum_{i_1=1}^{I_1}\sum_{i_2=1}^{I_2}\sum_{i_3=1}^{I_3} v_1^{i_1}\otimes_a\cdots\otimes_a v_r^{i_1}\otimes_a v_{r+1}^{i_2}\otimes_a\cdots\otimes_a v_j^{i_2}\otimes_a v_{j+1}^{i_3}\otimes_a\cdots\otimes_a v_k^{i_3} \\
&= F_{r,k}^{-1}\left[J_r^{-1}a_r\otimes_a\left\{F_{j-r,k-r}^{-1}\left(J_{j-r}^{-1}b_{j-r}\otimes_a J_{k-j}^{-1}c_{k-j}\right)\right\}\right]
\end{aligned}
$$

が成立し，J_k の単射性から (1.14) が得られる．

第二段　一般に $a_r \in V^{\otimes r}$, $b_{j-r}\in V^{\otimes j-r}$, $c_{k-j}\in V^{\otimes k-j}$ の場合，

$$
\left|a_r^n - a_r\right|_r \longrightarrow 0, \quad \left|b_{j-r}^n - b_{j-r}\right|_{j-r}\longrightarrow 0, \quad \left|c_{k-j}^n - c_{k-j}\right|_{k-j}\longrightarrow 0, \quad (n\longrightarrow\infty)
$$

を満たす点列 $\{a_r^n\}_{n=1}^\infty \subset J_rV^{\otimes_a r}$, $\left\{b_{j-r}^n\right\}_{n=1}^\infty\subset J_{j-r}V^{\otimes_a j-r}$, $\left\{c_{k-j}^n\right\}_{n=1}^\infty\subset J_{k-j}V^{\otimes_a k-j}$ を取れば，前段の結果より

$$
\begin{aligned}
&\left|\left(a_r\otimes_{r,j} b_{j-r}\right)\otimes_{j,k} c_{k-j} - a_r\otimes_{r,k}\left(b_{j-r}\otimes_{j-r,k-r} c_{k-j}\right)\right|_k \\
&\le \left|\left(a_r\otimes_{r,j} b_{j-r}\right)\otimes_{j,k} c_{k-j} - \left(a_r^n\otimes_{r,j} b_{j-r}^n\right)\otimes_{j,k} c_{k-j}^n\right|_k \\
&\quad + \left|a_r\otimes_{r,k}\left(b_{j-r}\otimes_{j-r,k-r} c_{k-j}\right) - a_r^n\otimes_{r,k}\left(b_{j-r}^n\otimes_{j-r,k-r} c_{k-j}^n\right)\right|_k \\
&\le \left|a_r\otimes_{r,j} b_{j-r}\right|_j\left|c_{k-j}-c_{k-j}^n\right|_{k-j} + \left|a_r\otimes_{r,j} b_{j-r} - a_r^n\otimes_{r,j} b_{j-r}^n\right|_j\left|c_{k-j}^n\right|_{k-j} \\
&\quad + |a_r|_r\left|b_{j-r}\otimes_{j-r,k-r} c_{k-j} - b_{j-r}^n\otimes_{j-r,k-r} c_{k-j}^n\right|_{k-r} + \left|a_r - a_r^n\right|_r\left|b_{j-r}^n\otimes_{j-r,k-r} c_{k-j}^n\right|_{k-r} \\
&\le |a_r|_r\left|b_{j-r}\right|_{j-r}\left|c_{k-j}-c_{k-j}^n\right|_{k-j} + \left\{\left|a_r - a_r^n\right|_r\left|b_{j-r}\right|_{j-r} + \left|a_r^n\right|_r\left|b_{j-r}-b_{j-r}^n\right|_{j-r}\right\}\left|c_{k-j}^n\right|_{k-j} \\
&\quad + |a_r|_r\left\{\left|b_{j-r}-b_{j-r}^n\right|_{j-r}\left|c_{k-j}\right|_{k-j} + \left|b_{j-r}^n\right|_{j-r}\left|c_{k-j}-c_{k-j}^n\right|_{k-j}\right\} + \left|a_r - a_r^n\right|_r\left|b_{j-r}^n\right|_{j-r}\left|c_{k-j}^n\right|_{k-j} \\
&\longrightarrow 0 \quad (n\longrightarrow\infty)
\end{aligned}
$$

が従い (1.14) が出る． ∎

定理 1.4.4 ($\otimes$ は $T(V)$ の乗法となる).　$\otimes$ は $T(V)$ において結合則を満たす双線型写像である．

証明.　$\otimes$ の双線型性は各 $\otimes_{j,k}$ の双線型性より従う．また任意の $a,b,c\in T(V)$ に対し，補題 1.4.3 より

$$
\begin{aligned}
((a\otimes b)\otimes c)_k &= \sum_{j=0}^k (a\otimes b)_j\otimes_{j,k} c_{k-j} \\
&= \sum_{j=0}^k\sum_{r=0}^j\left(a_r\otimes_{r,j} b_{j-r}\right)\otimes_{j,k} c_{k-j} = \sum_{j=0}^k\sum_{r=0}^j a_r\otimes_{r,k}\left(b_{j-r}\otimes_{j-r,k-r} c_{k-j}\right) = \sum_{r=0}^k\sum_{j=r}^k a_r\otimes_{r,k}\left(b_{j-r}\otimes_{j-r,k-r} c_{k-j}\right) \\
&= \sum_{r=0}^k a_r\otimes_{r,k}(b\otimes c)_{k-r} \\
&= (a\otimes(b\otimes c))_k, \quad (\forall k = 0,1,2,\cdots).
\end{aligned}
$$

が成立する． ∎

定理 1.4.5 ($T(V)$ の単位元). 任意の $k \geq 0$，および任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ と $v \in V^{\otimes k}$ に対し

$$\alpha \otimes_{0,k} v = v \otimes_{k,k} \alpha = \alpha v \tag{1.15}$$

が成立する．特に，$e_0 \coloneqq 1,\ e_k \coloneqq 0\ (k \geq 0)$ として定める $e = (e_k)_{k=1}^{\infty} \in T(V)$ は $\otimes$ に関する単位元である:

$$\text{i.e.} \quad e \otimes a = a \otimes e = a, \quad (\forall a \in T(V))$$

証明． $v \in J_k V^{\otimes_a k}$ の場合は (1.13) の対応関係により

$$\alpha \otimes_{0,k} v = J_k F_{0,k}^{-1}\left(\alpha \otimes_a J_k^{-1} v\right) = J_k\left(\alpha J_k^{-1} v\right) = J_k J_k^{-1} \alpha v = \alpha v$$

が成立する．一般の $v \in V^{\otimes k}$ に対しては，$\lim_{n\to\infty} |\, v - v_n \,|_k = 0$ を満たす $\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \subset J_k V^{\otimes_a k}$ を取れば

$$\left|\, \alpha v - \alpha \otimes_{0,k} v \,\right|_k \leq |\, \alpha v - \alpha v_n \,|_k + \left|\, \alpha \otimes_{0,k} v_n - \alpha \otimes_{0,k} v \,\right|_k = 2|\alpha|\, |\, v - v_n \,|_k \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成立し $\alpha v = \alpha \otimes_{0,k} v$ が得られる．同様にして $\alpha v = v \otimes_{k,k} \alpha$ も成り立つ．従って，任意の $a \in T(V)$ に対し

$$\begin{aligned}(e \otimes a)_k &= \sum_{j=0}^{k} e_j \otimes_{j,k} a_{k-j} = 1 \otimes_{0,k} a_k \\ &= a_k = a_k \otimes_{k,k} 1 = \sum_{j=0}^{k} a_j \otimes_{j,k} e_{k-j} = (a \otimes e)_k, \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)\end{aligned}$$

が満たされ $e \otimes a = a \otimes e = a$ が出る． ∎

$n \geq 0$ に対して

$$T^{(n)}(V) \coloneqq \bigoplus_{k=0}^{n} V^{\otimes k}$$

とおき，$T(V)$ の場合と同様に乗法 $\otimes$ を

$$a \otimes b, \quad \left((a \otimes b)_k \coloneqq \sum_{j=0}^{k} a_j \otimes_{j,k} b_{k-j},\ k = 1, \cdots, n\right), \quad a, b \in T^{(n)}(V)$$

により定め，次の直積ノルムでノルム位相を導入する:

$$|\, a \,| \coloneqq \sum_{k=0}^{n} |\, a_k \,|_k, \quad (a = (a_k)_{k=0}^{n} \in T^{(n)}(V)).$$

また，写像 $X : \Delta_T \longrightarrow T^{(n)}(V)$ に対して $X_{s,t} = (X_{s,t}^0, \cdots, X_{s,t}^n),\ ((s,t) \in \Delta_T)$ と表記し

$$C_0\left(\Delta_T, T^{(n)}(V)\right) \coloneqq \left\{\, X : \Delta_T \longrightarrow T^{(n)}(V)\ ; \quad \text{continuous},\ X^0 \equiv 1 \,\right\}$$

を定める．

定義 1.4.6 (有限 p-変動). $p \geq 1$ とする．$X : \Delta_T \longrightarrow T^{(n)}(V)$ に対して或るコントロール関数 ω が存在して

$$\left| X^i_{s,t} \right|_i \leq \omega(s,t)^{i/p}, \quad (\forall i = 1, \cdots, n,\ \forall (s,t) \in \Delta_T) \tag{1.16}$$

を満たすとき，X は有限 p-変動 (finite p-variation) であるという．[*7]

定義 1.4.7 (有限総 p-変動). $p \geq 1$ とする．$X \in C_0\left(\Delta_T, T^{(n)}(V)\right)$ が有限総 p-変動 (finite total p-variation) とは

$$\left\| X^i \right\|_{p/i} < \infty, \quad \forall i = 1, \cdots, n$$

が満たされることをいう．また次の線型空間を定める:

$$C_{0,p}\left(\Delta_T, T^{(n)}(V)\right) := \left\{ X \in C_0\left(\Delta_T, T^{(n)}(V)\right) \ ; \quad X \text{ has finite total } p\text{-variation} \right\}.$$

定義 1.4.8 (乗法的汎関数). 次の関係式 (Chen's identity) を満たす $X \in C_0\left(\Delta_T, T^{(n)}(V)\right)$ を n 次の乗法的汎関数 (multiplicative functional of degree n) と呼ぶ:

$$X_{s,u} \otimes X_{u,t} = X_{s,t}, \quad (\forall 0 \leq s \leq u \leq t \leq T).$$

補題 1.4.9. $X : \Delta_T \longrightarrow T^{(n)}(V)$ が $X^0 \equiv 1$ かつ Chen's identity を満たせば $X^k_{t,t} = 0,\ (0 \leq \forall t \leq T,\ 1 \leq \forall k \leq n)$.

証明. 任意に $t \in [0,T]$ を取る．$X^k_{t,t} = \sum_{j=0}^{k} X^j_{t,t} \otimes_{j,k} X^{k-j}_{t,t}$ と式 (1.15) より，先ず

$$X^1_{t,t} = X^0_{t,t} \otimes_{0,1} X^1_{t,t} + X^1_{t,t} \otimes_{1,1} X^0_{t,t} = X^1_{t,t} + X^1_{t,t}$$

が成り立ち $X^1_{t,t} = 0$ が従う．同様に

$$X^2_{t,t} = X^0_{t,t} \otimes_{0,2} X^2_{t,t} + X^1_{t,t} \otimes_{1,2} X^1_{t,t} + X^2_{t,t} \otimes_{2,2} X^0_{t,t} = X^2_{t,t} + X^2_{t,t}$$

より $X^2_{t,t} = 0$ が成立し，帰納的に $X^k_{t,t} = 0\ (1 \leq k \leq n)$ が出る． ∎

定理 1.4.10. n 次乗法的汎関数については有限 p-変動であることと有限総 p-変動であることは同値である．

[*7] $X : \Delta_T \longrightarrow T^{(n)}(V)$ が有限 p-変動であることと $\|X\|_p$ が有限であることは一致しない．実際，後述のシグネチャー $X = (X^0, \cdots, X^n)$ は有限 p-変動であるが，その定義より $X^0 \equiv 1$ が満たされているから

$$D \text{ の分割小区間の数} = \sum_D \left| X^0_{t_{i-1},t_i} \right|_0^p \leq \sum_D \left| X_{t_{i-1},t_i} \right|^p \leq \|X\|_p^p, \quad (\forall D \in \delta[0,T])$$

が成り立ち $\|X\|_p = \infty$ となる．

証明． $X \in C_0\left(\Delta_T, T^{(n)}(V)\right)$ を n 次乗法的とする．X が有限総 p-変動ならば，補題 1.4.9 と定理 1.2.8 により

$$\omega(s,t) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} \left\| X^i \right\|_{p/i,[s,t]}^{p/i}, \quad ((s,t) \in \Delta_T)$$

で定める ω はコントロール関数となる．このとき

$$\left| X^i_{s,t} \right|_i \leq \left\| X^i \right\|_{p/i,[s,t]} \leq \omega(s,t)^{i/p}, \quad (\forall i = 1, \cdots, n,\ \forall (s,t) \in \Delta_T)$$

が成り立つから X は有限 p-変動である．逆に X が有限 p-変動なら，(1.16) を満たす ω に対し

$$\sum_D \left| X^i_{t_{i-1},t_i} \right|_i^{p/i} \leq \sum_D \omega(t_{i-1},t_i) \leq \omega(0,T), \quad (\forall D \in \delta[0,T],\ \forall i = 1, \cdots, n)$$

が満たされ $\left\| X^i \right\|_{p/i} < \infty,\ i = 1, \cdots, n$ が従うので X は有限総 p-変動である． ∎

実際に乗法的汎関数を構成する．有界変動な連続写像 $x : [0,T] \longrightarrow V$ に対して

$$X^1_{s,t} \coloneqq x_t - x_s, \quad (\forall (s,t) \in \Delta_T)$$

とおけば，$X^1 : \Delta_T \longrightarrow V$ は連続かつ $\left\| X^1 \right\|_1 < \infty$ を満たす．このとき，

補題 1.4.11． 任意の $(s,t) \in \Delta_T$ と連続写像 $Y : \Delta_T \longrightarrow V^{\otimes k}$, $(k \geq 1)$ に対して次の積分が $V^{\otimes k+1}$ で確定する:

$$\int_s^t Y_{s,u} \otimes dx_u \coloneqq \lim_{|D| \to 0} \sum_D Y_{s,u_{i-1}} \otimes_{k,k+1} X^1_{u_{i-1},u_i}, \quad (D \in \delta[s,t]). \tag{1.17}$$

証明． $D = \{s = u_0 < \cdots < u_n = t\}$, $D' = \{s = v_0 < \cdots < v_m = t\} \in \delta[s,t]$ を任意に取り，共通細分を $D'' = \{s = w_0 < \cdots < w_r = t\}$ と表して

$$\begin{cases} \tilde{Y}_{s,w_\ell} \coloneqq Y_{s,u_i}, & (u_i \leq w_\ell < u_{i+1}), \\ \hat{Y}_{s,w_\ell} \coloneqq Y_{s,v_j}, & (v_j \leq w_\ell < v_{j+1}), \end{cases} \quad (\ell = 0, 1, \cdots, r)$$

で $\tilde{Y}, \hat{Y}$ を定めれば，定理 1.4.2 より

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_D Y_{s,u_{i-1}} \otimes_{k,k+1} X^1_{u_{i-1},u_i} - \sum_{D'} Y_{s,v_{j-1}} \otimes_{k,k+1} X^1_{v_{j-1},v_j} \right|_{k+1} \\
&\leq \left| \sum_D Y_{s,u_{i-1}} \otimes_{k,k+1} X^1_{u_{i-1},u_i} - \sum_{D''} Y_{s,w_{\ell-1}} \otimes_{k,k+1} X^1_{w_{\ell-1},w_\ell} \right|_{k+1} + \left| \sum_{D'} Y_{s,v_{j-1}} \otimes_{k,k+1} X^1_{v_{j-1},v_j} - \sum_{D''} Y_{s,w_{\ell-1}} \otimes_{k,k+1} X^1_{w_{\ell-1},w_\ell} \right|_{k+1} \\
&= \left| \sum_{D''} \tilde{Y}_{s,w_{\ell-1}} \otimes_{k,k+1} X^1_{w_{\ell-1},w_\ell} - \sum_{D''} Y_{s,w_{\ell-1}} \otimes_{k,k+1} X^1_{w_{\ell-1},w_\ell} \right|_{k+1} + \left| \sum_{D''} \hat{Y}_{s,w_{\ell-1}} \otimes_{k,k+1} X^1_{w_{\ell-1},w_\ell} - \sum_{D''} Y_{s,w_{\ell-1}} \otimes_{k,k+1} X^1_{w_{\ell-1},w_\ell} \right|_{k+1} \\
&= \left| \sum_{D''} \left(\tilde{Y}_{s,w_{\ell-1}} - Y_{s,w_{\ell-1}} \right) \otimes_{k,k+1} X^1_{w_{\ell-1},w_\ell} \right|_{k+1} + \left| \sum_{D''} \left(\hat{Y}_{s,w_{\ell-1}} - Y_{s,w_{\ell-1}} \right) \otimes_{k,k+1} X^1_{w_{\ell-1},w_\ell} \right|_{k+1} \\
&\leq \sum_{D''} \left| \tilde{Y}_{s,w_{\ell-1}} - Y_{s,w_{\ell-1}} \right|_k \left| X^1_{w_{\ell-1},w_\ell} \right|_1 + \sum_{D''} \left| \hat{Y}_{s,w_{\ell-1}} - Y_{s,w_{\ell-1}} \right|_k \left| X^1_{w_{\ell-1},w_\ell} \right|_1 \\
&\leq \max_k \left| \tilde{Y}_{s,w_{\ell-1}} - Y_{s,w_{\ell-1}} \right|_k \left\| X^1 \right\|_{1,[s,t]} + \max_k \left| \hat{Y}_{s,w_{\ell-1}} - Y_{s,w_{\ell-1}} \right|_k \left\| X^1 \right\|_{1,[s,t]}
\end{aligned}$$

が成立する．いま，$[s,t] \ni u \longmapsto Y_{s,u}$ は一様連続であるから，$|D|, |D'| \longrightarrow 0$ として右辺は 0 に収束する．従って $|D_n| \longrightarrow 0$ $(n \longrightarrow \infty)$ を満たす細分列 $D_n \in \delta[s,t]$ を取れば，$\left(\sum_{D_n} Y_{s,u_{i-1}} \otimes_{k,k+1} X^1_{u_{i-1},u_i}\right)_{n=1}^{\infty}$ は $V^{\otimes k+1}$ の Cauchy 列となり $V^{\otimes k+1}$ で収束する．別の細分列 $\tilde{D}_m \in \delta[s,t]$, $(|\tilde{D}_m| \longrightarrow 0)$ を取っても

$$\left| \sum_{D_n} Y_{s,u_{i-1}} \otimes_{k,k+1} X^1_{u_{i-1},u_i} - \sum_{\tilde{D}_m} Y_{s,v_{j-1}} \otimes_{k,k+1} X^1_{v_{j-1},v_j} \right|_{k+1} \longrightarrow 0, \quad (n,m \longrightarrow \infty)$$

が成り立つから，極限は細分列に依らず確定する．従って補題の主張が得られる． ∎

補題 1.4.12. (1.17) の積分を

$$Z_{s,t} := \int_s^t Y_{s,u} \otimes dx_u, \quad (\forall (s,t) \in \Delta_T)$$

とおけば，$Z : \Delta_T \longrightarrow V^{\otimes k+1}$ は連続かつ有界変動である．

証明.

第一段 Z が有界変動であることを示す．いま，任意に $(s,t) \in \Delta_T$ $(s < t)$ *8を取る．

$$M := \sup_{(x,y)\in\Delta_T} \left| Y_{x,y} \right|_k$$

とおけば Y の連続性より $M < \infty$ となり，任意の $\epsilon > 0$ に対し或る $D \in \delta[s,t]$ が存在して

$$\left| Z_{s,t} \right|_{k+1} \leq \epsilon + \left| \sum_D Y_{s,u_{i-1}} \otimes_{k,k+1} X^1_{u_{i-1},u_i} \right|_{k+1} \leq \epsilon + \sum_D \left| Y_{s,u_{i-1}} \right|_k \left| X^1_{t_{i-1},t_i} \right|_1 \leq \epsilon + M \left\| X^1 \right\|_{1,[s,t]}$$

が成立する．$\epsilon > 0$ と (s,t) の任意性より

$$\left| Z_{s,t} \right|_{k+1} \leq M \left\| X^1 \right\|_{1,[s,t]}, \quad (\forall (s,t) \in \Delta_T)$$

が従い $\| Z \|_1 \leq M \left\| X^1 \right\|_1$ (1-変動ノルム) を得る．

第二段 点 (s,s) $(\forall s \in [0,T])$ において Z が連続であること示す．実際，定理 1.2.8 より

$$\Delta_T \ni (s,t) \longmapsto \left\| X^1 \right\|_{1,[s,t]} \tag{1.18}$$

はコントロール関数であるから，

$$\left| Z_{t,u} - Z_{s,s} \right|_{k+1} = \left| Z_{t,u} \right|_{k+1} \leq M \left\| X^1 \right\|_{1,[t,u]} \longrightarrow 0 \quad ((t,u) \longrightarrow (s,s))$$

が成立し Z の (s,s) における連続性を得る．

第三段 $s < t$ を満たす点 $(s,t) \in \Delta_T$ において Z が連続であること示す．いま，任意に $\epsilon > 0$ を取れば，

(i) (1.18) がコントロール関数であるから，或る $\eta_1 > 0$ が存在して $|s-a|, |t-b| < \eta_1$ ならば

$$\left\| X^1 \right\|_{1,[s\wedge a, s\vee a]} < \epsilon, \quad \left\| X^1 \right\|_{1,[t\wedge b, t\vee b]} < \epsilon$$

が満たされる．

*8 $s = t$ なら，$X^1_{s,t} = 0$ より $Z_{s,t} = 0$ が成り立つ．

(ii) 或る $\eta_2 > 0$ が存在して $|s-a|, |t-b| < \eta_2$ ならば $[s,t] \cap [a,b] \neq \emptyset$ が満たされる．

(iii) Y は Δ_T 上一様連続であるから，或る $\eta_3 > 0$ が存在して $|s-a| < \eta_3$ なら

$$\sup\left\{ \left| Y_{s,u} - Y_{a,u} \right|_k \ ; \quad (s \vee a) \leq u \leq T \right\} < \epsilon$$

が満たされる．

(iv) 補題 1.4.11 より或る $\eta_4 > 0$ が存在して $|D_1|, |D_2| < \eta_4$, $(D_1 \in \delta[s,t],\ D_2 \in \delta[a,b])$ なら

$$\left| Z_{s,t} - \sum_{D_1} Y_{s,u_{i-1}} \otimes_{k,k+1} X^1_{u_{i-1},u_i} \right|_{k+1} < \epsilon, \quad \left| Z_{a,b} - \sum_{D_2} Y_{a,v_{j-1}} \otimes_{k,k+1} X^1_{v_{j-1},v_j} \right|_{k+1} < \epsilon$$

が満たされる．

ここで $\eta \coloneqq \eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \eta_3$ として，$|s-a|, |t-b| < \eta$, $|D_1|, |D_2| < \eta_4$ を満たす $(a,b), D_1, D_2$ を取り

$$\begin{aligned}
&\Omega_3 \coloneqq (D_1 \cup D_2) \cap [s,t] \cap [a,b], \\
&\Omega_1 \coloneqq D_1 \cup \Omega_3, \quad \Omega_1^< \coloneqq \Omega_1 \cap [0,a], \quad \Omega_1^> \coloneqq \Omega_1 \cap [b,T], \\
&\Omega_2 \coloneqq D_2 \cup \Omega_3, \quad \Omega_2^< \coloneqq \Omega_2 \cap [0,s], \quad \Omega_2^> \coloneqq \Omega_2 \cap [t,T]
\end{aligned}$$

とおけば，$\Omega_1 = \Omega_1^< \cup \Omega_3 \cup \Omega_1^>$, $\Omega_2 = \Omega_2^< \cup \Omega_3 \cup \Omega_2^>$ と分割できる．このとき (i)(ii)(iii) が満たされるから

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{\Omega_1} Y_{s,u_{i-1}} \otimes_{k,k+1} X^1_{u_{i-1},u_i} - \sum_{\Omega_2} Y_{a,v_{j-1}} \otimes_{k,k+1} X^1_{v_{j-1},v_j} \right|_{k+1} \\
&\leq \left| \sum_{\Omega_3} Y_{s,u_{i-1}} \otimes_{k,k+1} X^1_{u_{i-1},u_i} - \sum_{\Omega_3} Y_{a,u_{i-1}} \otimes_{k,k+1} X^1_{u_{i-1},u_i} \right|_{k+1} \\
&\qquad + \left| \sum_{\Omega_1^<} Y_{s,u_{i-1}} \otimes_{k,k+1} X^1_{u_{i-1},u_i} \right|_{k+1} + \left| \sum_{\Omega_1^>} Y_{s,u_{i-1}} \otimes_{k,k+1} X^1_{u_{i-1},u_i} \right|_{k+1} \\
&\qquad + \left| \sum_{\Omega_2^<} Y_{a,u_{i-1}} \otimes_{k,k+1} X^1_{u_{i-1},u_i} \right|_{k+1} + \left| \sum_{\Omega_2^>} Y_{a,v_{j-1}} \otimes_{k,k+1} X^1_{v_{j-1},v_j} \right|_{k+1} \\
&\leq \sum_{\Omega_3} \left| Y_{s,u_{i-1}} - Y_{a,u_{i-1}} \right|_k \left| X^1_{u_{i-1},u_i} \right|_1 + \sum_{\Omega_1^<} \left| Y_{s,u_{i-1}} \right|_k \left| X^1_{u_{i-1},u_i} \right|_1 + \sum_{\Omega_1^>} \left| Y_{s,u_{i-1}} \right|_k \left| X^1_{u_{i-1},u_i} \right|_1 \\
&\qquad + \sum_{\Omega_2^<} \left| Y_{a,v_{j-1}} \right|_k \left| X^1_{v_{j-1},v_i} \right|_1 + \sum_{\Omega_2^>} \left| Y_{a,v_{j-1}} \right|_k \left| X^1_{v_{j-1},v_i} \right|_1 \\
&\leq \sup_{u \in [s \vee a, T]} \left| Y_{s,u} - Y_{a,u} \right|_k \left\| X^1 \right\|_1 + M \left(\left\| X^1 \right\|_{1,[s,s\vee a]} + \left\| X^1 \right\|_{1,[a,s\vee a]} + \left\| X^1 \right\|_{1,[t,t\vee b]} + \left\| X^1 \right\|_{1,[b,t\vee b]} \right) \\
&< \left(\left\| X^1 \right\|_1 + 4M \right) \epsilon
\end{aligned}$$

が成立し，(iv) と併せれば

$$\left| Z_{s,t} - Z_{a,b} \right|_{k+1} < \left(\left\| X^1 \right\|_1 + 4M + 2 \right) \epsilon, \quad (|s-a|, |t-b| < \eta)$$

が従い Z の (s,t) における連続性が得られる． ∎

定義 1.4.13 (パスのシグネチャー). 有界変動な連続写像 $x : [0, T] \longrightarrow V$ に対して $X^1_{s,t} \coloneqq x_t - x_s$, $(\forall (s,t) \in \Delta_T)$ とおけば，補題 1.4.11 と補題 1.4.12 により逐次的に次を構成することができる:

$$V^{\otimes i+1} \ni X^{i+1}_{s,t} \coloneqq \int_s^t X^i_{s,u} \otimes dx_u, \quad (\forall (s,t) \in \Delta_T,\ i = 1, 2, \cdots)$$

ここで $S(x) : \Delta_T \ni (s,t) \longmapsto (1, X^1_{s,t}, X^2_{s,t}, \cdots) =: S(x)_{[s,t]}$ とおき，特に $S(x)_{[0,T]}$ をパス x のシグネチャー (signature of path x) と呼ぶ.

定理 1.4.14 (逐次積分により定まる乗法的汎関数). 任意の $n \geq 1$ に対し，$S(x)_{[s,t]}$ の最初の $n+1$ 個[*9]の元の族を $S_n(x)_{[s,t]} = (X^0_{s,t}, X^1_{s,t}, \cdots, X^n_{s,t})$, $(\forall (s,t) \in \Delta_T)$ と書けば，$S_n(x)$ は n 次乗法的である.

証明. 補題 1.4.12 より $S_n(x) \in C_0\left(\Delta_T, T^{(n)}(V)\right)$ であるから，以下では任意の $k \geq 0$ と $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$ に対して

$$X^k_{s,t} = \sum_{j=0}^{k} X^j_{s,u} \otimes_{j,k} X^{k-j}_{u,t}. \tag{1.19}$$

が成り立つことを数学的帰納法で示す．$k = 0$ ならシグネチャーの定義より両辺 1 であるから (1.19) は満たされる.

第一段 $k = 1$ の場合，$X^1_{s,t} = x_t - x_s$, $(\forall (s,t) \in \Delta_T)$ より

$$\sum_{j=0}^{1} X^j_{s,u} \otimes_{j,k} X^{k-j}_{u,t} = X^0_{s,u} \otimes_{0,1} X^1_{u,t} + X^1_{s,u} \otimes_{1,1} X^0_{u,t} = X^1_{u,t} + X^1_{s,u} = X^1_{s,t}$$

となる.

第二段 $k = m-1$ $(m \geq 2)$ まで式 (1.19) が満たされていると仮定するとき，任意の $D \in \delta[u,t]$ に対して

$$\sum_D \left\{ X^{m-1}_{s,u_{i-1}} - X^{m-1}_{u,u_{i-1}} \right\} \otimes_{m-1,m} X^1_{u_{i-1},u_i} = \sum_{j=1}^{m-1} X^j_{s,u} \otimes_{j,m} \left\{ \sum_D X^{m-1-j}_{u,u_{i-1}} \otimes_{m-1-j,m-j} X^1_{u_{i-1},u_i} \right\} \tag{1.20}$$

となることを次段で示す．実際これが示されれば，$D' \in \delta[s,u]$ に対し

$$\begin{aligned}
\left| X^m_{s,t} - \sum_{j=0}^{m} X^j_{s,u} \otimes_{j,m} X^{m-j}_{u,t} \right|_m &\leq \left| X^m_{s,t} - \sum_{D'} X^{m-1}_{s,u_{i-1}} \otimes_{m-1,m} X^1_{u_{i-1},u_i} - \sum_D X^{m-1}_{s,u_{i-1}} \otimes_{m-1,m} X^1_{u_{i-1},u_i} \right|_m \\
&\quad + \left| \sum_{D'} X^{m-1}_{s,u_{i-1}} \otimes_{m-1,m} X^1_{u_{i-1},u_i} - X^m_{s,u} \right|_m + \left| \sum_D X^{m-1}_{u,u_{i-1}} \otimes_{m-1,m} X^1_{u_{i-1},u_i} - X^m_{u,t} \right|_m \\
&\quad + \left| \sum_D \left\{ X^{m-1}_{s,u_{i-1}} - X^{m-1}_{u,u_{i-1}} \right\} \otimes_{m-1,m} X^1_{u_{i-1},u_i} - \sum_{j=1}^{m-1} X^j_{s,u} \otimes_{j,m} X^{m-j}_{u,t} \right|_m \\
&= \left| X^m_{s,t} - \sum_{D'} X^{m-1}_{s,u_{i-1}} \otimes_{m-1,m} X^1_{u_{i-1},u_i} - \sum_D X^{m-1}_{s,u_{i-1}} \otimes_{m-1,m} X^1_{u_{i-1},u_i} \right|_m \\
&\quad + \left| \sum_{D'} X^{m-1}_{s,u_{i-1}} \otimes_{m-1,m} X^1_{u_{i-1},u_i} - X^m_{s,u} \right|_m + \left| \sum_D X^{m-1}_{u,u_{i-1}} \otimes_{m-1,m} X^1_{u_{i-1},u_i} - X^m_{u,t} \right|_m \\
&\quad + \left| \sum_{j=1}^{m-1} X^j_{s,u} \otimes_{j,m} \left\{ \sum_D X^{m-1-j}_{u,u_{i-1}} \otimes_{m-1-j,m-j} X^1_{u_{i-1},u_i} \right\} - \sum_{j=1}^{m-1} X^j_{s,u} \otimes_{j,m} X^{m-j}_{u,t} \right|_m
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \left| X^m_{s,t} - \sum_{D'} X^{m-1}_{s,u_{i-1}} \otimes_{m-1,m} X^1_{u_{i-1},u_i} - \sum_{D} X^{m-1}_{s,u_{i-1}} \otimes_{m-1,m} X^1_{u_{i-1},u_i} \right|_m \\
&\quad + \left| \sum_{D'} X^{m-1}_{s,u_{i-1}} \otimes_{m-1,m} X^1_{u_{i-1},u_i} - X^m_{s,u} \right|_m + \left| \sum_{D} X^{m-1}_{u,u_{i-1}} \otimes_{m-1,m} X^1_{u_{i-1},u_i} - X^m_{u,t} \right|_m \\
&\quad + \sum_{j=1}^{m-1} \left| X^j_{s,u} \right|_j \left| \left\{ \sum_{D} X^{m-1-j}_{u,u_{i-1}} \otimes_{m-1-j,m-j} X^1_{u_{i-1},u_i} \right\} - X^{m-j}_{u,t} \right|_{m-j} \\
&\longrightarrow 0 \quad (|D'|, |D| \longrightarrow 0)
\end{aligned}
$$

が従い，$k = m$ の場合も (1.19) が成り立つ．

第三段　式 (1.20) を示す．仮定より $k = m-1$ のとき (1.19) は満たされているから，補題 1.4.3 と併せれば

$$
\begin{aligned}
\sum_D \left\{ X^{m-1}_{s,u_{i-1}} - X^{m-1}_{u,u_{i-1}} \right\} \otimes_{m-1,m} X^1_{u_{i-1},u_i} &= \sum_D \left\{ \sum_{j=0}^{m-1} X^j_{s,u} \otimes_{j,m-1} X^{m-1-j}_{u,u_{i-1}} - X^{m-1}_{u,u_{i-1}} \right\} \otimes_{m-1,m} X^1_{u_{i-1},u_i} \\
&= \sum_D \left\{ \sum_{j=1}^{m-1} X^j_{s,u} \otimes_{j,m-1} X^{m-1-j}_{u,u_{i-1}} \right\} \otimes_{m-1,m} X^1_{u_{i-1},u_i} \\
&= \sum_D \sum_{j=1}^{m-1} \left\{ X^j_{s,u} \otimes_{j,m-1} X^{m-1-j}_{u,u_{i-1}} \right\} \otimes_{m-1,m} X^1_{u_{i-1},u_i} \\
&= \sum_{j=1}^{m-1} \sum_D X^j_{s,u} \otimes_{j,m-j} \left\{ X^{m-1-j}_{u,u_{i-1}} \otimes_{m-1-j,m-j} X^1_{u_{i-1},u_i} \right\} \\
&= \sum_{j=1}^{m-1} X^j_{s,u} \otimes_{j,m} \left\{ \sum_D X^{m-1-j}_{u,u_{i-1}} \otimes_{m-1-j,m-j} X^1_{u_{i-1},u_i} \right\}
\end{aligned}
$$

が成立する． ∎

定義 1.4.15 (p-ラフパス)**.**　$p \ge 1$ とし，p を超えない最大の整数を $[p]$ で表す．有限 p-変動を持つ $[p]$ 次乗法的汎関数を p-ラフパス (p-rough path) と呼び，その全体を $\Omega_p(V)$ と書く:

$$
\Omega_p(V) = \left\{ X \in C_0\left(\Delta_T, T^{([p])}(V)\right) \;;\; [p] \text{ 次乗法的，有限 } p\text{-変動．} \right\}.
$$

定理 1.4.16.　$\Omega_p(V)$ は次で定める距離により完備距離空間となる:

$$
d_p(X, Y) \coloneqq \max_{1 \le i \le [p]} \left\| X^i - Y^i \right\|_{p/i}.
$$

ただし $X_{s,t} = (X^0_{s,t}, X^1_{s,t}, \cdots, X^{[p]}_{s,t})$, $((s,t) \in \Delta_T)$ に対して $X^i : \Delta_T \ni (s,t) \longmapsto X^i_{s,t} \in V^{\otimes i}$, $(1 \le i \le [p])$ である．

$X \in \Omega_p(V)$ は $X^0 \equiv 1$ を満たすから，$\max_{1 \le i \le [p]} \|\cdot\|_{p/i}$ は $\Omega_p(V)$ においてノルムとはならない．

証明.　完備性を示す．

第一段　極限を構成する．任意の $Y \in \Omega_p(V)$ に対して，定理 1.4.10 より Y は有限総 p-変動であり

$$
Y^i \in B_{p/i,T}\left(V^{\otimes i}\right), {}^{*10} \quad (\forall i = 1, \cdots, [p])
$$

となるから，任意の Cauchy 列 $\left\{X^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \Omega_p(V)$ に対して

$$\left\| X^{(k),i} - X^i \right\|_{p/i} \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty,\ \forall i = 1, \cdots, [p]) \tag{1.21}$$

を満たす $X^i \in B_{p/i,T}\left(V^{\otimes i}\right)$ が存在する (定理 1.2.7)．ここで $X : \Delta_T \longrightarrow T^{([p])}(V)$ を

$$X_{s,t} := (1, X^1_{s,t}, \cdots, X^n_{s,t}), \quad (\forall (s,t) \in \Delta_T)$$

により定めれば，X^i, $i = 1, \cdots, n$ の連続性より $X \in C_0\left(\Delta_T, T^{([p])}(V)\right)$ が従う．

第二段 X が Chen's identity を満たすことを示す．これが示されれば，前段の結果と定理 1.4.10 より X は有限 p-変動となり $X \in \Omega_p(V)$ が従う．任意の $1 \leq i \leq [p]$ と $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$ に対して次が成立すればよい:

$$X^i_{s,t} = \sum_{j=0}^{i} X^j_{s,u} \otimes_{j,i} X^{i-j}_{u,t}. \tag{1.22}$$

実際，(1.21) より

$$\left| X^{(k),i}_{s,t} - X^i_{s,t} \right|_i \leq \left\| X^{(k),i} - X^i \right\|_{p/i} \longrightarrow 0, \quad (k \longrightarrow \infty,\ \forall (s,t) \in \Delta_T,\ \forall i = 1, \cdots, [p])$$

が成り立つから，任意の $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$ に対して

$$\begin{aligned}
\left| X^i_{s,t} - \sum_{j=0}^{i} X^j_{s,u} \otimes_{j,i} X^{i-j}_{u,t} \right|_i &\leq \left| X^i_{s,t} - X^{(k),i}_{s,t} \right|_i + \left| \sum_{j=0}^{i} X^j_{s,u} \otimes_{j,i} X^{i-j}_{u,t} - \sum_{j=0}^{i} X^{(k),j}_{s,u} \otimes_{j,i} X^{(k),i-j}_{u,t} \right|_i \\
&\leq \left| X^i_{s,t} - X^{(k),i}_{s,t} \right|_i + \sum_{j=0}^{i} \left| X^j_{s,u} - X^{(k),j}_{s,u} \right|_j \left| X^{i-j}_{u,t} \right|_{i-j} \\
&\quad + \sum_{j=0}^{i} \left| X^{(k),j}_{s,u} \right|_j \left| X^{i-j}_{u,t} - X^{(k),i-j}_{u,t} \right|_{i-j} \\
&\longrightarrow 0, \quad (k \longrightarrow \infty)
\end{aligned}$$

が従い (1.22) を得る．(1.21) より $d_p(X^{(k)}, X) \longrightarrow 0$ $(k \longrightarrow \infty)$ が成り立ち定理の主張が得られる． ∎

有界変動かつ連続な $x : [0,T] \longrightarrow V$ で定める $S(x)$ は，任意の $p \geq 1$ に対して $S_{[p]}(x) \in \Omega_p(V)$ を満たす．実際，定理 1.4.14 より $S_{[p]}(x)$ は $[p]$ 次乗法的であり，また定理 1.4.12 と定理 1.2.6 より

$$\left\| X^i \right\|_{p/i} \leq \left\| X^i \right\|_1 < \infty, \quad (\forall i = 1, \cdots, [p])$$

が満たされる．乗法的汎関数に対して有限総 p-変動と有限 p-変動は同値になるから $S_{[p]}(x) \in \Omega_p(V)$ が従う．

定義 1.4.17 (スムースラフパス). $p \geq 1$ とする．このとき有界変動かつ連続な $x : [0,T] \longrightarrow V$ で定める $S(x)$ は $S_{[p]}(x) \in \Omega_p(V)$ を満たす．この $S_{[p]}(x)$ をスムースラフパス (smooth rough path) と呼び，スムースラフパス全体の d_p による位相での閉包を $G\Omega_p(V)$ と書き，その元を p-ジオメトリックラフパス (p-geometric rough path) と呼ぶ．

[*10] $B_{p/i,T}\left(V^{\otimes i}\right)$ の定義は (p. 7) の (1.3).

付録 A

テンソル積・クロスノルム

以下，零元のみの線型空間は考えない．すなわち以下で扱う全ての線型空間には基底が存在する．E, E_i, F を体 $\mathbb{K}$ 上の線形空間とするとき，$\mathrm{Hom}\,(E, F)$ で E から F への $\mathbb{K}$-線型写像の全体を表す．また $\mathrm{Hom}^{(n)}\,(E_1 \times \cdots \times E_n, F)$ で $E_1 \times \cdots \times E_n$ から F への $\mathbb{K}$-n 重線型写像の全体を表す．X をノルム空間と考えるときは，特に指定しなければノルムを $\|\cdot\|_X$ と書いてノルム位相を導入する．X に何らかのノルム $\|\ \|$ が定まっているとき，$(X, \|\ \|)$ の位相的双対空間を $(X, \|\ \|)^*$ と書く．ノルム空間の族 $(X_i)_{i=1}^n$ の直和 $\bigoplus_{i=1}^n X_i$ には直積ノルム $\|\cdot\|_{X_1} + \cdots + \|\cdot\|_{X_n}$ により位相を導入する．

A.1　ノルム空間上の有界多重線型写像

[参考:[9]] $\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ と考える．また $n \geq 1$ とする．

定義 A.1.1 (**有界な多重線型写像**). $(X_i)_{i=1}^n$ 及び Y を全て $\mathbb{K}$ 上のノルム空間とするとき，有界な n 重線型写像の全体を $L^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Y\right)$ で表す．つまり任意の $f \in L^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Y\right)$ に対して次を満たす定数 $C \geq 0$ が存在する:

$$\|f(x_1, \cdots, x_n)\|_Y \leq C \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}, \quad (\forall x_i \in X_i,\ i = 1, \cdots, n). \tag{A.1}$$

定理 A.1.2 (**有界** $\Leftrightarrow$ **連続**). $(X_i)_{i=1}^n$ 及び Y を全て $\mathbb{K}$ 上のノルム空間とする．任意の $f \in \mathrm{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Y\right)$ に対して，f が連続であることと f が有界であることは一致する．

証明.

第一段　$f \in \mathrm{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Y\right)$ が連続であるとする．このとき f は $0 \in \bigoplus_{i=1}^n X_i$ で連続であるから，或る $\delta_1, \cdots, \delta_n > 0$ が存在して $\|x_1\|_{X_1} \leq \delta_1, \cdots, \|x_n\|_{X_n} \leq \delta_n$ が満たされている限り

$$\|f(x_1, \cdots, x_n)\|_Y \leq 1$$

が成立する．よって任意の $x_i \in X_i$ $(x_i \neq 0,\ i = 1, \cdots, n)$ に対して

$$\frac{\delta_1 \cdots \delta_n}{\|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}} \|f(x_1, \cdots, x_n)\|_Y = \left\| f\!\left(\delta_1 \frac{x_1}{\|x_1\|_{X_1}}, \cdots, \delta_n \frac{x_n}{\|x_n\|_{X_n}}\right) \right\|_Y \leq 1$$

が従い

$$\|f(x_1, \cdots, x_n)\|_Y \leq \frac{1}{\delta_1 \cdots \delta_n} \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}$$

を得る．或る i で $x_i = 0$ であっても上の不等式は満たされるから f は有界である．

第二段　f が有界であるとする．このとき或る定数 $C \geq 0$ が存在して (A.1) を満たし，

$$\begin{aligned}\| f(x_1, \cdots, x_n) - f(y_1, \cdots, y_n) \|_Y &\leq \| f(x_1, x_2, \cdots, x_n) - f(y_1, x_2, \cdots, x_n) \\ &\quad + f(y_1, x_2, \cdots, x_n) - f(y_1, y_2, \cdots, x_n) \\ &\quad \cdots \\ &\quad + f(y_1, \cdots, y_{n-1}, x_n) - f(y_1, \cdots, y_n) \|_Y \\ &\leq C \| x_1 - y_1 \|_{X_1} \| x_2 \|_{X_2} \cdots \| x_n \|_{X_n} \\ &\quad + C \| y_1 \|_{X_1} \| x_2 - y_2 \|_{X_2} \cdots \| x_n \|_{X_n} \\ &\quad + C \| y_1 \|_{X_1} \cdots \| y_{n-1} \|_{X_{n-1}} \| x_n - y_n \|_{X_n} \\ &\longrightarrow 0 \quad \left(\| (x_1, \cdots, x_n) - (y_1, \cdots, y_n) \|_{\bigoplus_{i=1}^n X_i} \longrightarrow 0 \right)\end{aligned}$$

が成り立つから f の連続性が出る． ∎

$(X_i)_{i=1}^n$ 及び Y を全て $\mathbb{K}$ 上のノルム空間とする．このとき $f \in L^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Y\right)$ の作用素ノルムは次で定まる:

$$\| f \|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Y)} := \inf\left\{ C \geq 0 \ ; \quad \| f(x_1, \cdots, x_n) \|_Y \leq C \| x_1 \|_{X_1} \cdots \| x_n \|_{X_n}, \ (\forall x_i \in X_i, \ i = 1, \cdots, n) \right\}.$$

下限の定義より次が成立する:

$$\| f(x_1, \cdots, x_n) \|_Y \leq \| f \|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Y)} \| x_1 \|_{X_1} \cdots \| x_n \|_{X_n}, \quad (\forall x_i \in X_i, \ i = 1, \cdots, n). \tag{A.2}$$

実際，(A.2) が満たされない場合，或る $(u_1, \cdots, u_n) \in \bigoplus_{i=1}^n X_i$ $(u_i \neq 0, \ i = 1, \cdots, n)$ が存在して

$$\frac{\| f(u_1, \cdots, u_n) \|_Y}{\| u_1 \|_{X_1} \cdots \| u_n \|_{X_n}} > \| f \|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Y)}$$

が成立するが，実数の連続性より

$$\frac{\| f(u_1, \cdots, u_n) \|_Y}{\| u_1 \|_{X_1} \cdots \| u_n \|_{X_n}} > \delta > \| f \|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Y)}$$

を満たす δ が存在し，

$$\begin{aligned}\| f \|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Y)} &< \delta \\ &\leq \inf\left\{ C \geq 0 \ ; \quad \| f(x_1, \cdots, x_n) \|_Y \leq C \| x_1 \|_{X_1} \cdots \| x_n \|_{X_n}, \ (\forall x_i \in X_i, \ i = 1, \cdots, n) \right\} \\ &= \| f \|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Y)}\end{aligned}$$

が従い矛盾が生じる．

定理 A.1.3 (多重線型写像の作用素ノルム).　$(X_i)_{i=1}^n$ 及び Y を全て $\mathbb{K}$ 上のノルム空間とする．このとき，任意の $f \in L^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Y\right)$ に対して次が成立する:

$$\| f \|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Y)} = \sup_{\substack{\| x_i \|_{X_i} = 1 \\ i=1,\cdots,n}} \| f(x_1, \cdots, x_n) \|_Y = \sup_{\substack{\| x_i \|_{X_i} \leq 1 \\ i=1,\cdots,n}} \| f(x_1, \cdots, x_n) \|_Y = \sup_{\substack{\| x_i \|_{X_i} \neq 0 \\ i=1,\cdots,n}} \frac{\| f(x_1, \cdots, x_n) \|_Y}{\| x_1 \|_{X_1} \cdots \| x_n \|_{X_n}}.$$

証明.　(第四式) $\leq$ (第一式) $\leq$ (第二式) $\leq$ (第三式) $\leq$ (第四式) を示す．

第一段　式 (A.2) より次を得る:

$$\sup_{\substack{\|x_i\|_{X_i}\neq 0\\ i=1,\cdots,n}} \frac{\|f(x_1,\cdots,x_n)\|_Y}{\|x_1\|_{X_1}\cdots\|x_n\|_{X_n}} \leq \|f\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i,Y)}\,.$$

第二段　任意の $0\neq x_i\in X_i$ $(i=1,\cdots,n)$ に対して

$$\begin{aligned}\|f(x_1,\cdots,x_n)\|_Y &= \|x_1\|_{X_1}\cdots\|x_n\|_{X_n}\left\|f\left(\frac{x_1}{\|x_1\|_{X_1}},\cdots,\frac{x_n}{\|x_n\|_{X_n}}\right)\right\|_Y\\ &\leq \|x_1\|_{X_1}\cdots\|x_n\|_{X_n}\sup_{\substack{\|x_i\|_{X_i}=1\\ i=1,\cdots,n}}\|f(x_1,\cdots,x_n)\|_Y\end{aligned}$$

が成立するから

$$\|f\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i,Y)} \leq \sup_{\substack{\|x_i\|_{X_i}=1\\ i=1,\cdots,n}}\|f(x_1,\cdots,x_n)\|_Y$$

が従う.

第三段　上限を取る範囲の大小より

$$\sup_{\substack{\|x_i\|_{X_i}=1\\ i=1,\cdots,n}}\|f(x_1,\cdots,x_n)\|_Y \leq \sup_{\substack{\|x_i\|_{X_i}\leq 1\\ i=1,\cdots,n}}\|f(x_1,\cdots,x_n)\|_Y$$

が出る.

第四段　$0<\|x_i\|_{X_i}\leq 1$ $(i=1,\cdots,n)$ ならば

$$\begin{aligned}\|f(x_1,\cdots,x_n)\|_Y &= \|x_1\|_{X_1}\cdots\|x_n\|_{X_n}\frac{\|f(x_1,\cdots,x_n)\|_Y}{\|x_1\|_{X_1}\cdots\|x_n\|_{X_n}}\\ &\leq \frac{\|f(x_1,\cdots,x_n)\|_Y}{\|x_1\|_{X_1}\cdots\|x_n\|_{X_n}}\\ &\leq \sup_{\substack{\|x_i\|_{X_i}\neq 0\\ i=1,\cdots,n}}\frac{\|f(x_1,\cdots,x_n)\|_Y}{\|x_1\|_{X_1}\cdots\|x_n\|_{X_n}}\end{aligned}$$

が成立するから

$$\sup_{\substack{\|x_i\|_{X_i}\leq 1\\ i=1,\cdots,n}}\|f(x_1,\cdots,x_n)\|_Y \leq \sup_{\substack{\|x_i\|_{X_i}\neq 0\\ i=1,\cdots,n}}\frac{\|f(x_1,\cdots,x_n)\|_Y}{\|x_1\|_{X_1}\cdots\|x_n\|_{X_n}}$$

が得られる. ∎

定理 A.1.4 (有界な多重線型写像の一意拡張).　$n\geq 1$ とする. $(X_i)_{i=1}^n$ をノルム空間, Z を Banach 空間, Y_i を X_i の稠密な部分空間とする $(i=1,\cdots,n)$. このとき, 有界 n 重線型写像 $b:\bigoplus_{i=1}^n Y_i\longrightarrow Z$ は $(X_i)_{i=1}^n$ 上の Z 値 n 重線型写像 $\tilde{b}$ に一意に拡張され, b と $\tilde{b}$ の作用素ノルムは一致する.

証明.　$\bigoplus_{i=1}^n Y_i$ は $\bigoplus_{i=1}^n X_i$ で稠密であるから, 任意の $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\bigoplus_{i=1}^n X_i$ に対して

$$\left\|x-x^k\right\|_{\bigoplus_{i=1}^n X_i} = \sum_{i=1}^n\left\|x_i-x_i^k\right\|_{X_i}\longrightarrow 0,\quad (k\longrightarrow\infty)$$

を満たす点列 $x^k = (x_1^k, \cdots, x_n^k) \in \bigoplus_{i=1}^n Y_i$ $(k = 1, 2, \cdots)$ が存在する．

$$M_i \coloneqq \sup_{k \geq 1} \left\| x_i^k \right\|_{X_i}, \quad (i = 1, \cdots, n)$$

とおけば，$M_i < \infty$ $(i = 1, \cdots, n)$ より

$$\begin{aligned}
\left\| b(x^k) - b(x^\ell) \right\|_Z &= \Big\| b(x_1^k, x_2^k, \cdots, x_n^k) - b(x_1^\ell, x_2^k, \cdots, x_n^k) \\
&\quad + b(x_1^\ell, x_2^k, \cdots, x_n^k) - b(x_1^\ell, x_2^\ell, \cdots, x_n^k) \\
&\quad \cdots \\
&\quad + b(x_1^\ell, \cdots, x_{n-1}^\ell, x_n^k) - b(x_1^\ell, \cdots, x_n^\ell) \Big\|_Z \\
&\leq \| b \|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n Y_i, Z)} \left\| x_1^k - x_1^\ell \right\|_{X_1} M_2 \cdots M_n \\
&\quad + \| b \|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n Y_i, Z)} M_1 \left\| x_2^k - x_2^\ell \right\|_{X_2} M_3 \cdots M_n \\
&\quad \cdots \\
&\quad + \| b \|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n Y_i, Z)} M_1 \cdots M_{n-1} \left\| x_n^k - x_n^\ell \right\|_{X_n} \\
&\longrightarrow 0, \quad (k, \ell \longrightarrow \infty)
\end{aligned}$$

が成り立ち，Z の完備性より $\lim_{k\to\infty} b(x^k)$ が存在する．別の収束列 $\bigoplus_{i=1}^n Y_i \ni y^m \longrightarrow x$ を取れば

$$\left\| x_i^k - y_i^m \right\|_{X_i} \leq \left\| x_i^k - x_i \right\|_{X_i} + \left\| x_i - y_i^m \right\|_{X_i} \longrightarrow 0, \quad (k, m \longrightarrow \infty,\ i = 1, \cdots, n)$$

より $\left\| b(x^k) - b(y^m) \right\|_Z \longrightarrow 0$ $(k, m \longrightarrow \infty)$ が従い

$$\lim_{k\to\infty} b(x^k) = \lim_{m\to\infty} b(y^m)$$

が得られ，これにより写像 $\tilde{b} : x \longmapsto \lim_{k\to\infty} b(x^k)$ が定まる．この $\tilde{b}$ は b の拡張であり，有界かつ n 重線型性を持つ．先ず n 重線型性を示す．$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ と $y = (y_1, x_2, \cdots, x_n)$ に対し

$$\left\| x - x^k \right\|_{\bigoplus_{i=1}^n X_i} \longrightarrow 0, \quad \left\| y - y^k \right\|_{\bigoplus_{i=1}^n X_i} \longrightarrow 0$$

を満たす点列 $(x^k)_{k=1}^\infty, (y^k)_{m=1}^\infty \subset \bigoplus_{i=1}^n Y_i$ を取れば

$$\begin{aligned}
&\left\| \tilde{b}(\alpha x_1 + \beta y_1, x_2, \cdots, x_n) - \alpha \tilde{b}(x_1, \cdots, x_n) - \beta \tilde{b}(y_1, \cdots, x_n) \right\|_Z \\
&\leq \left\| \tilde{b}(\alpha x_1 + \beta y_1, x_2, \cdots, x_n) - b(\alpha x_1^k + \beta y_1^k, x_2^k, \cdots, x_n^k) \right\|_Z \\
&\quad + |\alpha| \left\| \tilde{b}(x_1, \cdots, x_n) - b(x_1^k, \cdots, x_n^k) \right\|_Z \\
&\quad + |\beta| \left\| \tilde{b}(y_1, \cdots, x_n) - b(y_1^k, \cdots, x_n^k) \right\|_Z \\
&\longrightarrow 0, \quad (k \longrightarrow \infty)
\end{aligned}$$

が成り立ち，$\tilde{b}$ の第一成分に関する線型性を得る．他の成分も同じである．また任意の $x \in \bigoplus_{i=1}^\infty X_i$ に対して収束列 $(x^k)_{k=1}^\infty \subset \bigoplus_{i=1}^n Y_i$ を取れば，任意の $\epsilon > 0$ に対し或る k が存在して

$$\left\| \tilde{b}(x) \right\|_Z \leq \left\| b(x^k) \right\|_Z + \epsilon$$

かつ

$$\left\| x_i^k \right\|_{X_i} \leq \| x_i \|_{X_i} + \epsilon, \quad (i = 1, \cdots, n)$$

が満たされ

$$\left\| \tilde{b}(x) \right\|_Z \leq \left\| b(x^k) \right\|_Z + \epsilon \leq \| b \|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n Y_i, Z)} \prod_{i=1}^n \Big(\| x_i \|_{X_i} + \epsilon \Big) + \epsilon$$

が従う．x 及び ϵ の任意性より $\left\|\tilde{b}\right\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^{n} X_i, Z)} \leq \|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^{n} Y_i, Z)}$ が成り立ち，$\tilde{b}$ は b の拡張だから

$$\left\|\tilde{b}\right\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^{n} X_i, Z)} = \|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^{n} Y_i, Z)}$$

が出る．拡張の一意性は $\bigoplus_{i=1}^{n} Y_i$ の稠密性と $\tilde{b}$ の連続性による． ∎

A.2　ノルム空間の完備拡大

[参考:[10](pp. 268-273)] $\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}$ 或は $\mathbb{C}$ と考える．

定理 A.2.1 (ノルム空間の完備化).　$(X, \|\cdot\|_X)$ を $\mathbb{K}$ 上のノルム空間とするとき，次の (e1) と (e2) を満たす $\mathbb{K}$-Banach 空間 $(Y, \|\cdot\|_Y)$ と線型等長写像 $J : X \longrightarrow Y$ ($\|x\|_X = \|Jx\|_Y$) が存在する:

(e1)　JX は Y において稠密である．

(e2)　別の $\mathbb{K}$-Banach 空間 $(Z, \|\cdot\|_Z)$ と線型等長 $K : X \longrightarrow Z$ が存在して (e1) を満たすとき，$F \circ J = K$ を満たす等長同型 $F : Y \longrightarrow Z$ が存在する．

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "F"] & & Z \\ & X \arrow[ul, hook, "J"] \arrow[ur, hook', "K"'] \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] & \end{tikzcd}$$

(e3)　X が内積空間なら Y は Hilbert 空間であり，それぞれ内積を $\langle\cdot,\cdot\rangle_X, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y$ と書けば次が成り立つ:

$$\langle Jx, Jx'\rangle_Y = \langle x, x'\rangle_X, \quad (\forall x, x' \in X).$$

証明.

第一段　X の Cauchy 列の全体を $Cauchy(X)$ で表す．任意の $(x_n), (x'_n) \in Cauchy(X)$ に対し

$$\left| \left\| x_n - x'_n \right\|_X - \left\| x_m - x'_m \right\|_X \right| \leq \| x_n - x_m \|_X + \left\| x'_n - x'_m \right\|_X$$

が成り立つから，$\left(\left\| x_n - x'_n \right\|_X\right)_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{R}$ の Cauchy 列をなして収束し，

$$(x_n)\, R\, (x'_n) \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad \lim_{n\to\infty} \left\| x_n - x'_n \right\|_X = 0$$

により $Cauchy(X)$ に同値関係 R が定まる．$Cauchy(X)$ は，$0 \in X$ の列を零元と定め，

$$(x_n) + (x'_n) \coloneqq (x_n + x'_n), \quad \alpha(x_n) \coloneqq (\alpha x_n)$$

を線型演算とすれば線型空間となり，

$$N \coloneqq \{\, (x_n) \in Cauchy(X) \;;\quad (x_n)\, R\, (0) \,\}$$

は部分空間となるから，次の商

$$Y \coloneqq Cauchy(X)/N$$

は適当な線型演算により線型空間となる．(x_n) の R に関する同値類を $[(x_n)]$ と表すとき

$$\| [(x_n)] \|_Y \coloneqq \lim_{n\to\infty} \| x_n \|_X \tag{A.3}$$

は well-defined であり，$\|\cdot\|_Y$ は Y においてノルムとなる．

第二段　任意の $x \in X$ に対し $x_n = x\ (\forall n \geq 1)$ を満たす (x_n) を ζ_x と書けば，

$$J : X \ni x \longmapsto [\zeta_x] \in Y \tag{A.4}$$

により等長線型が定まる．実際，任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $u, v \in X$ に対して

$$\| J(\alpha u + \beta v) - \alpha Ju - \beta Jv \|_Y = \left\| [\zeta_{\alpha u+\beta v}] - \alpha[\zeta_u] - \beta[\zeta_v] \right\|_Y = \left\| [\zeta_{\alpha u+\beta v} - \alpha\zeta_u - \beta\zeta_v] \right\|_Y = 0$$

が成り立つから J は線型であり，

$$\| Jx \|_Y = \lim_{n\to\infty} \| x_n \|_X = \| x \|_X, \quad (\forall x \in X)$$

より等長性も得られる．

第三段　(e1) を示す．いま，任意に $y = [(x_n)] \in Y$ と $\epsilon > 0$ を取る．このとき或る $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\| x_n - x_m \|_X < \frac{\epsilon}{2}, \quad (\forall n, m > N)$$

を満たす．$m > N$ を満たす m を任意に一つ選んで

$$\epsilon_m \coloneqq \lim_{n\to\infty} \| x_n - x_m \|_X$$

とおけば，また或る $N' \in \mathbb{N}\ (N' > N)$ が存在して

$$|\epsilon_m - \| x_n - x_m \|_X| < \frac{\epsilon}{2}, \quad (\forall n > N')$$

が成立し

$$\epsilon_m < \frac{\epsilon}{2} + \| x_n - x_m \|_X < \epsilon, \quad (\forall m > N)$$

が従う．すなわち，JX の点列 $[\zeta_{x_1}], [\zeta_{x_2}], \cdots$ は y にノルム収束する:

$$\left\| y - [\zeta_{x_m}] \right\|_Y = \lim_{n\to\infty} \| x_n - x_m \|_X \longrightarrow 0 \quad (m \longrightarrow \infty).$$

第四段　$(Y, \|\cdot\|_Y)$ の完備性を示す．(y_n) を Y の Cauchy 列とすれば，

$$\| y_n - Jx_n \|_Y < \frac{1}{n}, \quad (\forall n = 1, 2, \cdots)$$

を満たす $\{x_1, x_2, \cdots\} \subset X$ が存在する．このとき

$$\| x_n - x_m \|_X = \| Jx_n - Jx_m \|_Y < \frac{1}{n} + \| y_n - y_m \|_Y + \frac{1}{m} \longrightarrow 0 \quad (n, m \longrightarrow \infty)$$

より $(x_n) \in \mathit{Cauchy}(X)$ が従い，$y \coloneqq [(x_n)]$ とおけば

$$\| y - y_m \|_Y \leq \| y - Jx_m \|_Y + \| Jx_m - y_m \|_Y < \lim_{n\to\infty} \| x_n - x_m \|_X + \frac{1}{m} \longrightarrow 0 \quad (m \longrightarrow \infty)$$

が成り立ち Y の完備性が出る．

第五段　$(Y, \|\cdot\|_Y)$ とは別の Banach 空間 $(Z, \|\cdot\|_Z)$ と線型等長 $K : X \longrightarrow Z$ が存在して (e1) を満たすとき，

$$\tilde{F} : JX \ni y \longmapsto K \circ J^{-1}(y), \quad \tilde{G} : KX \ni z \longmapsto J \circ K^{-1}(z)$$

により定める等長線型 $\tilde{F}, \tilde{G}$ は

$$\begin{aligned} \tilde{F} \circ \tilde{G}(z) &= z, \quad (\forall z \in KX), \\ \tilde{G} \circ \tilde{F}(y) &= y, \quad (\forall y \in JX) \end{aligned}$$

を満たす．定理 A.1.4 より $\tilde{F}, \tilde{G}$ は Y, Z 上の線型写像 F, G に一意的にノルム保存拡張され，このとき，任意の $y \in Y$ 及び $z \in Z$ それぞれ対しノルム収束する JX の点列 (y_n)，KX の点列 (z_n) を取れば，

$$\begin{aligned} \| F \circ G(z) - z \|_Z &\leq \left\| F \circ G(z) - \tilde{F} \circ \tilde{G}(z_n) \right\|_Z + \| z_n - z \|_Z \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty), \\ \| G \circ F(y) - y \|_Y &\leq \left\| G \circ F(y) - \tilde{G} \circ \tilde{F}(y_n) \right\|_Y + \| y_n - y \|_Y \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

が成り立ち $F = G^{-1}$ が従う．よって $F : Y \longrightarrow Z$ は等長同型であり

$$F \circ J = \tilde{F} \circ J = \left(K \circ J^{-1}\right) \circ J = K \circ \left(J^{-1} \circ J\right) = K$$

を満たす．

第六段　X が内積空間の場合，X の内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ と書く．いま，任意の $(x_n), (x'_n) \in Cauchy(X)$ に対して

$$\left| \langle x_n, x'_n \rangle_X - \langle x_m, x'_m \rangle_X \right| \leq \| x_n - x_m \|_X \left\| x'_n \right\|_X + \| x_m \|_X \left\| x'_n - x'_m \right\|_X \longrightarrow 0 \quad (n, m \longrightarrow \infty)$$

が成り立つから $\lim_{n\to\infty} \langle x_n, x'_n \rangle_X$ は $\mathbb{K}$ で収束する．ここで

$$b(y, y') := \lim_{n\to\infty} \langle x_n, x'_n \rangle_X, \quad (\forall y = [(x_n)],\ y' = [(x'_n)] \in Y)$$

と定めれば，b は well-defined であり $Y \times Y$ 上の半双線型となる．実際，$[(x_n)] = [(\tilde{x}_n)]$, $[(x'_n)] = [(\tilde{x}'_n)]$ に対して

$$\left| \langle x_n, x'_n \rangle_X - \langle \tilde{x}_n, \tilde{x}'_n \rangle_X \right| \leq \| x_n - \tilde{x}_n \|_X \left\| x'_n \right\|_X + \| \tilde{x}_n \|_X \left\| x'_n - \tilde{x}'_n \right\|_X \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成り立つから b は well-defined であり，また任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ と $y, y', y_1 = [(x^1_n)]$, $y_2 = [(x^2_n)] \in Y$ に対し

$$\begin{aligned} \left| b(\alpha y_1 + \beta y_2, y') - \alpha b(y_1, y') - \beta b(y_2, y') \right| &\leq \left| b(\alpha y_1 + \beta y_2, y') - \left\langle \alpha x^1_n + \beta x^2_n, x'_n \right\rangle_X \right| \\ &\quad + \left| \alpha b(y_1, y') - \alpha \left\langle x^1_n, x'_n \right\rangle_X \right| + \left| \beta b(y_2, y') - \beta \left\langle x^2_n, x'_n \right\rangle_X \right| \\ &\longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

かつ $b(y, y') = \overline{b(y', y)}$ (共役対称性) が満たされ b の半双線型性が出る．また

$$b(y, y) = \lim_{n\to\infty} \| x_n \|_X^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = [(x_n)] = 0, \quad (\forall y = [(x_n)] \in Y)$$

も得られる．従って

$$\left\langle y, y' \right\rangle_Y := b(y, y'), \quad (\forall y, y' \in Y)$$

とおけば $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y$ は Y の内積となる．(A.3) で定めるノルムと $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y$ により導入するノルムは一致するから，前段の結果により Y は $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y$ を内積とする Hilbert 空間である．また (A.4) で定める等長線型 J について

$$\left\langle Jx, Jx' \right\rangle_Y = \lim_{n\to\infty} \left\langle x, x' \right\rangle_X = \left\langle x, x' \right\rangle_X, \quad (\forall x, x' \in X)$$

が成立する．∎

A.3 テンソル積

[参考:[4], [8]] $n \geq 2$ として，体 $\mathbb{K}$ 上の線形空間の族 $(E_i)_{i=1}^n$ に対してテンソル積を定義する．

$$\Lambda\Big(\bigoplus_{i=1}^n E_i\Big) = \left\{ b : \bigoplus_{i=1}^n E_i \longrightarrow \mathbb{K} \ ; \quad \text{有限個の } e \in \textstyle\bigoplus_{i=1}^n E_i \text{ を除いて } b(e) = 0. \right\}$$

により $\mathbb{K}$-線形空間 $\Lambda\Big(\bigoplus_{i=1}^n E_i\Big)$ を定める．また $e = (e_1, \cdots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i$ に対する定義関数を

$$\mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_n}(x) = \begin{cases} 1, & x = e, \\ 0, & x \neq e \end{cases}$$

で表す．$\Lambda\Big(\bigoplus_{i=1}^n E_i\Big)$ の線型部分空間を

$$\begin{aligned} &\Lambda_0\Big(\bigoplus_{i=1}^n E_i\Big) \\ &\coloneqq \mathrm{Span}\left[\left\{ \begin{matrix} \mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i+e_i',\cdots,e_n} - \mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i,\cdots,e_n} - \mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i',\cdots,e_n}, \\ \mathbb{1}_{e_1,\cdots,\lambda e_i,\cdots,e_n} - \lambda \mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i,\cdots,e_n} \end{matrix} \ ; \quad e_i, e_i' \in E_i, \lambda \in \mathbb{K}, 1 \leq i \leq n \right\}\right] \end{aligned}$$

により定め，$b \in \Lambda\Big(\bigoplus_{i=1}^n E_i\Big)$ の $\Lambda_0\Big(\bigoplus_{i=1}^n E_i\Big)$ に関する同値類を $[b]$ と書く．そして

$$E_1 \otimes \cdots \otimes E_n = \bigotimes_{i=1}^n E_i \coloneqq \Lambda\Big(\bigoplus_{i=1}^n E_i\Big) \Big/ \Lambda_0\Big(\bigoplus_{i=1}^n E_i\Big)$$

で定める商空間を $(E_i)_{i=1}^n$ のテンソル積と定義する．また $(e_1, \cdots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i$ に対し

$$e_1 \otimes \cdots \otimes e_n \coloneqq [\mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_n}]$$

により定める $\otimes : \bigoplus_{i=1}^n E_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n E_i$ をテンソル積の標準写像と呼ぶ.

定理 A.3.1 (標準写像の多重線型性). $(E_i)_{i=1}^n$ を $\mathbb{K}$-線形空間の族とするとき，

$$\otimes : \bigoplus_{i=1}^n E_i \ni (e_1, \cdots, e_n) \longmapsto e_1 \otimes \cdots \otimes e_n \in \bigotimes_{i=1}^n E_i$$

は n 重線型写像である．また次が成り立つ:

$$\bigotimes_{i=1}^n E_i = \mathrm{Span}\left[\left\{ e_1 \otimes \cdots \otimes e_n \ ; \quad (e_1, \cdots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i \right\}\right]. \tag{A.5}$$

証明.　任意の $1 \leq i \leq n$, $e_1 \in E_1, \cdots, e_n \in E_n$, $e_i, e'_i \in E_i$, $\lambda \in \mathbb{K}$ に対して

$$\begin{aligned} e_1 \otimes \cdots \otimes (e_i + e'_i) \otimes \cdots \otimes e_n &= \left[\mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i+e'_i,\cdots,e_n}\right] \\ &= \left[\mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i,\cdots,e_n} + \mathbb{1}_{e_1,\cdots,e'_i,\cdots,e_n}\right] \\ &= \left[\mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i,\cdots,e_n}\right] + \left[\mathbb{1}_{e_1,\cdots,e'_i,\cdots,e_n}\right] \\ &= e_1 \otimes \cdots \otimes e_i \otimes \cdots \otimes e_n + e_1 \otimes \cdots \otimes e'_i \otimes \cdots \otimes e_n, \\ e_1 \otimes \cdots \otimes (\lambda e_i) \otimes \cdots \otimes e_n &= \left[\mathbb{1}_{e_1,\cdots,\lambda e_i,\cdots,e_n}\right] \\ &= \left[\lambda \mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i,\cdots,e_n}\right] \\ &= \lambda \left[\mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i,\cdots,e_n}\right] \\ &= \lambda(e_1 \otimes \cdots \otimes e_i \otimes \cdots \otimes e_n) \end{aligned}$$

が成立するから $\otimes$ は n 重線型である．また任意に $u = [b] \in E \otimes F$ を取れば

$$b = \sum_{j=1}^{m} k_j \mathbb{1}_{e^j_i,\cdots,e^j_n}, \quad \left(k_j = b(e^j_i, \cdots, e^j_n),\ j = 1, \cdots, m\right)$$

と表せるから，

$$u = \left[\sum_{j=1}^{m} k_j \mathbb{1}_{e^j_i,\cdots,e^j_n}\right] = \left[\sum_{j=1}^{m} \mathbb{1}_{k_j e^j_i,\cdots,e^j_n}\right] = \sum_{j=1}^{m} (k_j e^j_1) \otimes \cdots \otimes e^j_n$$

が従い (A.5) を得る．∎

定理 A.3.2 ($\cdots \otimes 0 \otimes \cdots$ **は零ベクトル**).　$(E_i)_{i=1}^n$ を $\mathbb{K}$-線形空間の族とし，テンソル積 $\bigotimes_{i=1}^n E_i$ を定める．このとき，或る i で $e_i = 0$ なら $e_1 \otimes \cdots \otimes e_n = 0$ が成り立つ．

証明.　$e_i = 0$ のとき，$\lambda = 0$ とすれば

$$e_1 \otimes \cdots \otimes e_n = \left[\mathbb{1}_{e_1,\cdots,0,\cdots,e_n}\right] = \left[\mathbb{1}_{e_1,\cdots,\lambda e_i,\cdots,e_n} - \lambda \mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i,\cdots,e_n}\right] = 0$$

が成立する．∎

定理 A.3.3 (普遍性 (universality of tensor products)).　$(E_i)_{i=1}^n$ を $\mathbb{K}$-線形空間の族とする．このとき任意の $\mathbb{K}$-線型空間 V に対して，$T \in \mathrm{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n E_i, V\right)$ ならば $T \circ \otimes \in \mathrm{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$ が満たされ，これで定める次の対応 Φ_V は線型同型である:

$$\begin{array}{ccc} \Phi_V : \mathrm{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n E_i, V\right) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right) \\ \mathrel{\rotatebox{90}{$\in$}} & & \mathrel{\rotatebox{90}{$\in$}} \\ T & \longmapsto & T \circ \otimes \end{array} \tag{A.6}$$

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{i=1}^n E_i \arrow[d, "\otimes"'] \arrow[dr, "\Phi(T)"] \arrow[d, phantom, shift left=4ex, "\circlearrowright"] & \\ \bigotimes_{i=1}^n E_i \arrow[r, "T"] & V \end{tikzcd}$$

また $\mathbb{K}$-線型空間 U_0 と n 重線型写像 $\iota : \bigoplus_{i=1}^n E_i \longrightarrow U_0$ が，任意の $\mathbb{K}$-線型空間 V に対し

$(\otimes)_1$　U_0 は ι の像で生成される．
$(\otimes)_2$　任意の $\delta \in \mathrm{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$ に対して $\delta = \tau \circ \iota$ を満たす $\tau \in \mathrm{Hom}(U_0, V)$ が存在する．

を満たすなら，(A.6) において $V = U_0$ とするとき $T = \Phi_{U_0}^{-1}(\iota) : \bigotimes_{i=1}^n E_i \longrightarrow U_0$ は線型同型である．

後半の主張により，$(E_i)_i$ のテンソル積を別の方法で導入しても，商空間を用いて導入した $\bigotimes_i E_i$ と線型同型に結ばれる．このとき，別の方法で導入したテンソル積及び標準写像を $\widetilde{\bigotimes}_i E_i$, $\tilde{\otimes}$ と表せば，或る線型同型 $T : \bigotimes_i E_i \longrightarrow \widetilde{\bigotimes}_i E_i$ がただ一つ存在して

$$T(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) = e_1 \tilde{\otimes} \cdots \tilde{\otimes} e_n$$

を満たす．特に任意の並べ替え $\varphi : \{1, \cdots, n\} \longrightarrow \{1, \cdots, n\}$ に対し

$$\begin{array}{ccc} \bigotimes_{i=1}^n E_i & \cong & \bigotimes_{i=1}^n E_{\varphi(i)} \\ \mathrel{\rotatebox{90}{$\in$}} & & \mathrel{\rotatebox{90}{$\in$}} \\ e_1 \otimes \cdots \otimes e_n & \longleftrightarrow & e_{\varphi(1)} \otimes \cdots \otimes e_{\varphi(n)} \end{array}$$

が成立する．

証明.

第一段　$T \in \mathrm{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n E_i, V\right)$ の線型性と $\otimes$ の n 重線型性より $T \circ \otimes$ は n 重線型である．

第二段　$\Phi_V(T_1) = \Phi_V(T_2)$ ならば T_1 と T_2 は $\left\{ e_1 \otimes \cdots \otimes e_n \ ; \quad (e_1, \cdots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i \right\}$ の上で一致する．(A.5) より $T_1 = T_2$ が成立し Φ_V の単射性が従う．

第三段　次の二段で Φ_V の全射性を示す．まず，$\varphi \in \mathrm{Hom}\left(\Lambda(\bigoplus_{i=1}^n E_i), V\right)$ に対し

$$g : \bigoplus_{i=1}^n E_i \ni (e_1, \cdots, e_n) \longmapsto \varphi(\mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_n}) \in V$$

を対応させる次の写像が全単射であることを示す:

$$\begin{array}{ccc} F : \mathrm{Hom}\left(\Lambda(\bigoplus_{i=1}^n E_i), V\right) & \longrightarrow & \mathrm{Map}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right) \\ \mathrel{\rotatebox{90}{$\in$}} & & \mathrel{\rotatebox{90}{$\in$}} \\ \varphi & \longmapsto & g \end{array}$$

$F(\varphi_1) = F(\varphi_2)$ のとき，任意の $e \in \bigoplus_{i=1}^n E_i$ に対して $\varphi_1(\mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_n}) = \varphi_2(\mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_n})$ が成り立ち，

$$\Lambda\Bigl(\bigoplus_{i=1}^n E_i\Bigr) = \mathrm{Span}\left[\left\{\ \mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_n}\ ;\quad (e_1,\cdots,e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i\ \right\}\right]$$

より $\varphi_1 = \varphi_2$ が従い F の単射性が得られる．また $g \in \mathrm{Map}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$ に対して

$$\begin{aligned}
&\varphi(0) := 0,\\
&\varphi(a) := \sum_{\substack{e\in\bigoplus_{i=1}^n E_i \\ a(e)\neq 0}} a(e)g(e), \quad \Bigl(\forall a \in \Lambda\Bigl(\bigoplus_{i=1}^n E_i\Bigr),\ a \neq 0\Bigr)
\end{aligned}$$

により φ を定めれば，$\varphi \in \mathrm{Hom}\left(\Lambda(\bigoplus_{i=1}^n E_i), V\right)$ より[*1] F の全射性が出る．

第四段　任意に $b \in \mathrm{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$ を取り $h := F^{-1}(b)$ とおけば，h の線型性より

$$\begin{aligned}
&b(e_1,\cdots,e_i+e_i',\cdots,e_n) - b(e_1,\cdots,e_i,\cdots,e_n) - b(e_1,\cdots,e_i',\cdots,e_n)\\
&\quad = h(\mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i+e_i',\cdots,e_n} - \mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i,\cdots,e_n} - \mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i',\cdots,e_n}),\\
&b(e_1,\cdots,\lambda e_i,\cdots,e_n) - \lambda b(e_1,\cdots,e_i,\cdots,e_n)\\
&\quad = h(\mathbb{1}_{e_1,\cdots,\lambda e_i,\cdots,e_n} - \lambda\mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i,\cdots,e_n})
\end{aligned}$$

が成り立ち，b の n 重線型性により h は $\Lambda_0(\bigoplus_{i=1}^n E_i)$ 上で 0 である．従って

$$T([b]) := h(b), \quad (b \in \Lambda(\bigoplus_{i=1}^n E_i))$$

で定める T は well-defined であり，$T \in \mathrm{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n E_i, V\right)$ かつ

$$b(e_1,\cdots,e_n) = h(\mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_n}) = (T\circ\otimes)(e_1,\cdots,e_n), \quad (\forall(e_1,\cdots,e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i)$$

が満たされ Φ_V の全射性が得られる．

第五段　$(\otimes)_1, (\otimes)_2$ の下で $\mathrm{Hom}\left(U_0, \bigotimes_{i=1}^n E_i\right) \ni \tau \longmapsto \tau\circ\iota \in \mathrm{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, \bigotimes_{i=1}^n E_i\right)$ は全単射であるから，$\tau\circ\iota = \otimes$ を満たす $\tau \in \mathrm{Hom}\left(U_0, \bigotimes_{i=1}^n E_i\right)$ がただ一つ存在する．同様にして $\iota = T\circ\otimes$ を満たす $T \in \mathrm{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n E_i, U_0\right)$ がただ一つ存在し，併せれば

$$\otimes = \tau\circ\iota = (\tau\circ T)\circ\otimes, \quad \iota = T\circ\otimes = (T\circ\tau)\circ\iota$$

が成り立つ．$T \longmapsto T\circ\otimes$, $\tau \longmapsto \tau\circ\iota$ が一対一であるから，$\tau\circ T$, $T\circ\tau$ はそれぞれ恒等写像に一致して $T^{-1} = \tau$ が従う．すなわち T は $\bigotimes_{i=1}^n E_i$ から U_0 への線型同型である． ∎

[*1] $(\{\, e\ ;\quad a(e)\neq 0\,\} \cup \{\, e\ ;\quad a'(e)\neq 0\,\}) \cap \{\, e\ ;\quad (a+a')(e)\neq 0\,\} = \{\, e\ ;\quad (a+a')(e)\neq 0\,\}$ より

$$\begin{aligned}
\varphi(a)+\varphi(a') &= \sum_{a(e)\neq 0} a(e)g(e) + \sum_{a'(e)\neq 0} a'(e)g(e) = \sum_{\substack{a(e)\neq 0\\(a+a')(e)=0}} a(e)g(e) + \sum_{\substack{a(e)\neq 0\\(a+a')(e)\neq 0}} a(e)g(e) + \sum_{\substack{a'(e)\neq 0\\(a+a')(e)=0}} a'(e)g(e) + \sum_{\substack{a'(e)\neq 0\\(a+a')(e)\neq 0}} a'(e)g(e)\\
&= \sum_{\substack{a(e)\neq 0\\(a+a')(e)\neq 0}} a(e)g(e) + \sum_{\substack{a'(e)\neq 0\\(a+a')(e)\neq 0}} a'(e)g(e) = \sum_{(a+a')(e)\neq 0} (a+a')(e)g(e) = \varphi(a+a')
\end{aligned}$$

φ の加法性を得る．スカラ倍は $\varphi(\beta a) = \sum_{(\beta a)(e)\neq 0}(\beta a)(e)g(e) = \beta\sum_{a(e)\neq 0} a(e)g(e) = \beta\varphi(a)$ $(\beta\neq 0)$ 及び $\varphi(0) = 0$ より従う．

定理 A.3.4 (スカラーとのテンソル積).　E を $\mathbb{K}$-線型空間とするとき，$\mathbb{K}\otimes E$ と E は線型写像 $f:\mathbb{K}\otimes E\ni 1\otimes e\longmapsto e\in E$ [*2] により同型となる．同様に $E\otimes\mathbb{K}$ と E は線型写像 $g:E\otimes\mathbb{K}\ni e\otimes 1\longmapsto e\in E$ により同型となる．

証明.　$\mathbb{K}\otimes E=\mathrm{Span}\,[\{\,\alpha\otimes e\ ;\quad \alpha\in\mathbb{K},\ e\in E\,\}]=\{\,1\otimes e\ ;\quad e\in E\,\}$ が成り立つから f は全単射となる．■

定義 A.3.5 (線型写像のテンソル積).　$(E_i)_{i=1}^n$ と $(F_i)_{i=1}^n$ を $\mathbb{K}$-線型空間の族とするとき，$f_i\in\mathrm{Hom}\,(E_i,F_i)$ に対し

$$b:\bigoplus_{i=1}^n E_i\ni(e_1,\cdots,e_n)\longmapsto f_1(e_1)\otimes\cdots\otimes f_n(e_n)\in\bigotimes_{i=1}^n F_i$$

により定める b は n 重線型であり，定理 A.3.3 より $b=g\circ\otimes$ を満たす $g\in\mathrm{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n E_i,\bigotimes_{i=1}^n F_i\right)$ がただ一つ存在する．この g を $f_1\otimes\cdots\otimes f_n$ と表記して線型写像のテンソル積と定義する．特に次が成り立つ:

$$f_1\otimes\cdots\otimes f_n(e_1\otimes\cdots\otimes e_n)=f_1(e_1)\otimes\cdots\otimes f_n(e_n),\quad (\forall(e_1,\cdots,e_n)\in\bigoplus_{i=1}^n E_i).$$

$n\geq 2$ とする．係数体 $\mathbb{K}$ の n 個の直和 $\mathbb{K}\oplus\cdots\oplus\mathbb{K}$ において，

$$\phi:\mathbb{K}\oplus\cdots\oplus\mathbb{K}\ni(x_1,\cdots,x_n)\longmapsto x_1\cdots x_n\in\mathbb{K}\ ^{*3}$$

で定める ϕ は n 重線型であるから，或る線型写像 $F:\mathbb{K}\otimes\cdots\otimes\mathbb{K}$ (n copies) $\longrightarrow\mathbb{K}$ が存在して

$$F(x_1\otimes\cdots\otimes x_n)=x_1\cdots x_n,\quad (\forall x_1\otimes\cdots\otimes x_n\in\mathbb{K}\otimes\cdots\otimes\mathbb{K}) \tag{A.7}$$

を満たす．またこの F に対して

$$\psi:\mathbb{K}\ni x\longmapsto x\otimes 1\otimes\cdots\otimes 1\in\mathbb{K}\otimes\cdots\otimes\mathbb{K}\ (n\text{ copies})$$

が逆写像となるから F は線型同型である．

定義 A.3.6 (線型形式のテンソル積).　$(E_i)_{i=1}^n$ を $\mathbb{K}$-線型空間の族とするとき，線型形式 $f_i\in\mathrm{Hom}\,(E_i,\mathbb{K})$ のテンソル積 $f_1\otimes\cdots\otimes f_n$ は，前定義 A.3.5 に従えば次の対応

$$\bigotimes_{i=1}^n E_i\ni e_1\otimes\cdots\otimes e_n\longmapsto f_1(e_1)\otimes\cdots\otimes f_n(e_n)\in\mathbb{K}\otimes\cdots\otimes\mathbb{K}\ (n\text{ copies})$$

を満たす線型写像であるが，以後便宜上，線型形式については，式 (A.7) の線型同型 F との合成 $F\circ(f_1\otimes\cdots\otimes f_n)$ を線型形式のテンソル積 $f_1\otimes\cdots\otimes f_n$ として再定義する．i.e.

$$f_1\otimes\cdots\otimes f_n(e_1\otimes\cdots\otimes e_n)=f_1(e_1)\cdots f_n(e_n),\quad (\forall e_1\otimes\cdots\otimes e_n\in\bigotimes_{i=1}^n E_i).$$

特に，$f_1\otimes\cdots\otimes f_n$ もまた $\bigotimes_{i=1}^n E_i$ 上の線型形式となっている．

[*2] 1 は $\mathbb{K}$ の単位元を表す．

[*3] $x_1\cdots x_n$ は $\mathbb{K}$ の乗法により $x_1,\cdots,x_n$ を掛け合わせたものである．

定理 A.3.7 (零写像のテンソル積は零写像).　$\mathbb{K}$-線型空間の族 $(E_i)_{i=1}^n$ と $(F_i)_{i=1}^n$ と線型写像 $f_i : E_i \longrightarrow F_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ について，或る f_i が零写像なら $f_1 \otimes \cdots \otimes f_n = 0$ となる．

証明．　$f_i = 0$ とすると，定理 A.3.2 より $f_1 \otimes \cdots \otimes f_n$ は $\{ e_1 \otimes \cdots \otimes e_n \ ; \quad e_i \in E_i \}$ 上で 0 となる．この空間は $\bigotimes_{i=1}^n E_i$ を生成するから $f_1 \otimes \cdots \otimes f_n = 0$ が従う． ∎

定理 A.3.8 (テンソル積の基底).　$(E_i)_{i=1}^n$ を $\mathbb{K}$-線型空間の族とし，E_i の基底を $\left\{u^i_{\lambda_i}\right\}_{\lambda_i \in \Lambda_i}$ とする $(i = 1, \cdots, n)$．このとき $\left\{u^1_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes u^n_{\lambda_n}\right\}_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n}$ は $\bigotimes_{i=1}^n E_i$ の基底となる．

証明．

第一段　任意の $e_1 \otimes \cdots \otimes e_n \in \bigotimes_{i=1}^n E_i$ は $\left\{u^1_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes u^n_{\lambda_n}\right\}_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n}$ の線型結合で表現されるから，式 (A.5) より

$$\bigotimes_{i=1}^n E_i = \mathrm{Span}\left[\left\{ u^1_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes u^n_{\lambda_n} \ ; \quad \lambda_i \in \Lambda_i,\ i = 1, \cdots, n \right\}\right]$$

が成立する．

第二段　$\left\{u^1_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes u^n_{\lambda_n}\right\}_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n}$ の一次独立性を示す．$\left\{u^i_{\lambda_i}\right\}_{\lambda_i \in \Lambda_i}$ に対する双対集合を $\left\{f^i_{\lambda_i}\right\}_{\lambda_i \in \Lambda_i}$ と書けば，各 $f^i_{\lambda_i}$ は

$$f^i_{\lambda_i}(u^i_\lambda) = \begin{cases} 1, & (\lambda = \lambda_i), \\ 0, & (\lambda \neq \lambda_i), \end{cases} \quad \forall \lambda \in \Lambda_i$$

を満たし，線型形式のテンソル積 $f^1_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes f^n_{\lambda_n}$ について

$$f^1_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes f^n_{\lambda_n}(u^1_{\nu_1} \otimes \cdots \otimes u^n_{\nu_n}) = \begin{cases} 1, & (\nu_1, \cdots, \nu_n) = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n), \\ 0, & (\nu_1, \cdots, \nu_n) \neq (\lambda_1, \cdots, \lambda_n), \end{cases} \quad \forall (\nu_1, \cdots, \nu_n) \in \prod_{i=1}^n \Lambda_i$$

が成立する．従って $\left\{u^1_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes u^n_{\lambda_n}\right\}_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n}$ は全て零ではなく，かつ

$$0 = \sum_{j=1}^k \alpha_j \left(u^1_{\lambda^{(j)}_1} \otimes \cdots \otimes u^n_{\lambda^{(j)}_n}\right), \quad (\alpha_j \in \mathbb{K},\ j = 1, \cdots, k)$$

を満たすような任意の線型結合に対し (ただし $i \neq j$ なら $(\lambda^{(i)}_1, \cdots, \lambda^{(i)}_n) \neq (\lambda^{(j)}_1, \cdots, \lambda^{(j)}_n)$)

$$\alpha_j = f^1_{\lambda^{(j)}_1} \otimes \cdots \otimes f^n_{\lambda^{(j)}_n}\left(\sum_{j=1}^k \alpha_j \left(u^1_{\lambda^{(j)}_1} \otimes \cdots \otimes u^n_{\lambda^{(j)}_n}\right)\right) = 0, \quad (j = 1, \cdots, k)$$

が従い $\left\{u^1_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes u^n_{\lambda_n}\right\}_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n}$ の一次独立性を得る． ∎

定理 A.3.9 (結合律).　$(E_i)_{i=1}^n$ を $\mathbb{K}$-線型空間の族とし，$k \in \{1, \cdots, n-1\}$ を任意に取る．このとき，次の対応関係を満たす F は線型同型である:

$$\begin{array}{cccc} F: \bigotimes_{i=1}^n E_i & \longrightarrow & \left(\bigotimes_{i=1}^k E_i\right) \bigotimes \left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i\right) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ e_1 \otimes \cdots \otimes e_n & \longmapsto & (e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n) \end{array}$$

証明.

第一段　n 重線型写像 $f: \bigoplus_{i=1}^n E_i \longrightarrow \left(\bigotimes_{i=1}^k E_i\right) \bigotimes \left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i\right)$ を

$$f(e_1, \cdots, e_n) = (e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n), \quad (\forall (e_1, \cdots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i)$$

により定めれば，定理 A.3.3 より

$$F(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) = (e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n), \quad (\forall (e_1, \cdots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i)$$

を満たす線型写像 $F: \bigotimes_{i=1}^n E_i \longrightarrow \left(\bigotimes_{i=1}^k E_i\right) \bigotimes \left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i\right)$ が存在する:

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{i=1}^n E_i \arrow[d, "\otimes"'] \arrow[dr, "f"] & \\ \bigotimes_{i=1}^n E_i \arrow[r, "F"] & \left(\bigotimes_{i=1}^k E_i\right) \bigotimes \left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i\right) \end{tikzcd}$$

以降は F の逆写像を構成し F が全単射であることを示す．

第二段　$u_{k+1} \in E_{k+1}, \cdots, u_n \in E_n$ を固定し

$$\Phi_{u_{k+1}, \cdots, u_n}(e_1, \cdots, e_n) \coloneqq e_1 \otimes \cdots \otimes e_k \otimes u_{k+1} \otimes \cdots \otimes u_n$$

によって k 重線型 $\Phi_{u_{k+1}, \cdots, u_n}: \bigoplus_{i=1}^k E_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n E_i$ を定めれば，定理 A.3.3 より

$$G_{u_{k+1}, \cdots, u_n}(e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) = e_1 \otimes \cdots \otimes e_k \otimes u_{k+1} \otimes \cdots \otimes u_n$$

を満たす線型写像 $G_{u_{k+1}, \cdots, u_n}: \bigotimes_{i=1}^k E_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n E_i$ が存在する．

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{i=1}^k E_i \arrow[d, "\otimes"'] \arrow[dr, "\Phi_{u_{k+1}, \cdots, u_n}"] & \\ \bigotimes_{i=1}^k E_i \arrow[r, "G_{u_{k+1}, \cdots, u_n}"] & \bigotimes_{i=1}^n E_i \end{tikzcd}$$

第三段　任意の $v \in \bigotimes_{i=1}^k E_i$ に対して

$$\Psi_v: \bigoplus_{i=k+1}^n E_i \ni (u_{k+1}, \cdots, u_n) \longmapsto G_{u_{k+1}, \cdots, u_n}(v)$$

を定めれば，Ψ_v は $n-k$ 重線型であるから，定理 A.3.3 より

$$H_v(u_{k+1}\otimes\cdots\otimes u_n)=\Psi_v(u_{k+1},\cdots,u_n)$$

を満たす線型写像 $H_v:\bigotimes_{i=k+1}^n E_i\longrightarrow\bigotimes_{i=1}^n E_i$ が存在する．

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i=k+1}^n E_i \arrow[d, "\otimes"'] \arrow[dr, "\Psi_v"] & \\
\bigotimes_{i=k+1}^n E_i \arrow[r, "H_v"] & \bigotimes_{i=1}^n E_i
\end{tikzcd}$$

いま，$v\longmapsto\Psi_v$ は線型であり，かつ Ψ_v と H_v は一対一対応であるから $v\longmapsto H_v$ の線型性が従う．

第四段　H_v の線型性と $v\longmapsto H_v$ の線型性より

$$\Gamma:\left(\bigotimes_{i=1}^k E_i\right)\times\left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i\right)\ni(v,w)\longmapsto H_v(w)$$

により定める Γ は

$$\begin{aligned}\Gamma(e_1\otimes\cdots\otimes e_k,e_{k+1}\otimes\cdots\otimes e_n)&=H_{e_1\otimes\cdots\otimes e_k}(e_{k+1}\otimes\cdots\otimes e_n)\\&=\Psi_{e_1\otimes\cdots\otimes e_k}(e_{k+1},\cdots,e_n)\\&=G_{e_{k+1},\cdots,e_n}(e_1\otimes\cdots\otimes e_k)\\&=\Phi_{e_{k+1},\cdots,e_n}(e_1,\cdots,e_k)\\&=e_1\otimes\cdots\otimes e_n\end{aligned}\tag{A.8}$$

を満たす双線型であり，定理 A.3.3 より

$$\begin{tikzcd}
\left(\bigotimes_{i=1}^k E_i\right)\times\left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i\right) \arrow[d, "\otimes"'] \arrow[dr, "\Gamma"] & \\
\left(\bigotimes_{i=1}^k E_i\right)\bigotimes\left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i\right) \arrow[r, "G"] & \bigotimes_{i=1}^n E_i
\end{tikzcd}$$

を可換にする線型写像 G が存在する．この G は F の逆写像である．実際，(A.8) より

$$\begin{aligned}F\circ G((e_1\otimes\cdots\otimes e_k)\otimes(e_{k+1}\otimes\cdots\otimes e_n))&=F(\Gamma(e_1\otimes\cdots\otimes e_k,e_{k+1}\otimes\cdots\otimes e_n))\\&=F(e_1\otimes\cdots\otimes e_n)\\&=(e_1\otimes\cdots\otimes e_k)\otimes(e_{k+1}\otimes\cdots\otimes e_n)\end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned}G\circ F(e_1\otimes\cdots\otimes e_n)&=G((e_1\otimes\cdots\otimes e_k)\otimes(e_{k+1}\otimes\cdots\otimes e_n))\\&=\Gamma(e_1\otimes\cdots\otimes e_k,e_{k+1}\otimes\cdots\otimes e_n)\\&=e_1\otimes\cdots\otimes e_n\end{aligned}$$

が満たされ $F^{-1}=G$ が従う． ∎

A.4　クロスノルム

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 或は $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ とし，$n \geq 2$ 個の Banach 空間で構成するテンソル積を考察対象とする．

定義 A.4.1 (クロスノルム).　$\mathbb{K}$-Banach 空間の族 $(X_i)_{i=1}^n$ のテンソル積 $\bigotimes_{i=1}^n X_i$ において

$$\alpha(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \leq \| x_1 \|_{X_1} \| x_2 \|_{X_2} \cdots \| x_n \|_{X_n}, \qquad (\forall x_i \in X_i,\ i = 1, \cdots, n), \tag{A.9}$$

$$\sup_{\substack{v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i \\ v \neq 0}} \left| x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v) \right| \leq \left\| x_1^* \right\|_{X_1^*} \left\| x_2^* \right\|_{X_2^*} \cdots \left\| x_n^* \right\|_{X_n^*} \alpha(v), \qquad (\forall x_i^* \in X_i^*,\ i = 1, \cdots, n) \tag{A.10}$$

を満たすようなノルム $\alpha : \bigotimes_{i=1}^n X_i \longrightarrow [0, \infty)$ をクロスノルム (cross norm) と呼ぶ[*4].

定理 A.4.2.　$\mathbb{K}$-Banach 空間の族 $(X_i)_{i=1}^n$ のテンソル積 $\bigotimes_{i=1}^n X_i$ 上のクロスノルム α は次を満たす:

$$\alpha(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \| x_1 \|_{X_1} \cdots \| x_n \|_{X_n}, \qquad (x_i \in X_i,\ i = 1, \cdots, n),$$

$$\left\| x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^* \right\|_{(\bigotimes_{i=1}^n X_i, \alpha)^*} = \left\| x_1^* \right\|_{X_1^*} \cdots \left\| x_n^* \right\|_{X_n^*}, \qquad (x_i^* \in X_i^*,\ i = 1, \cdots, n).$$

証明.　先ず，Hahn-Banach の定理と式 (A.10) より

$$\begin{aligned}
\| x_1 \|_{X_1} \cdots \| x_n \|_{X_n} &= \sup_{\| x_1^* \|_{X_1^*} \leq 1} \left| \langle x_1, x_1^* \rangle \right| \cdots \sup_{\| x_n^* \|_{X_n^*} \leq 1} \left| \langle x_n, x_n^* \rangle \right| \\
&= \sup_{\substack{\| x_i^* \|_{X_i^*} \leq 1 \\ i=1,\cdots,n}} \left| x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \right| \\
&\leq \sup_{\substack{\| x_i^* \|_{X_i^*} \leq 1 \\ i=1,\cdots,n}} \left\| x_1^* \right\|_{X_1^*} \cdots \left\| x_n^* \right\|_{X_n^*} \alpha(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \\
&= \alpha(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)
\end{aligned}$$

が成り立ち定理の主張の第一式を得る．またこの結果より

$$\begin{aligned}
\left\| x_1^* \right\|_{X_1^*} \cdots \left\| x_n^* \right\|_{X_n^*} &= \sup_{\| x_1 \|_{X_1} \leq 1} \left| \langle x_1, x_1^* \rangle \right| \cdots \sup_{\| x_n \|_{X_n} \leq 1} \left| \langle x_n, x_n^* \rangle \right| \\
&= \sup_{\substack{\| x_i \|_{X_i} \leq 1 \\ i=1,\cdots,n}} \left| x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \right| \\
&\leq \sup_{\alpha(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \leq 1} \left| x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \right| \\
&\leq \sup_{\alpha(v) \leq 1} \left| x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v) \right| \\
&= \left\| x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^* \right\|_{(\bigotimes_{i=1}^n X_i, \alpha)^*}
\end{aligned}$$

が成立し主張の第二式も得られる．∎

[*4] [5] ではこの二性質を満たすものをリーズナブルクロスノルムと分類するが，本稿ではクロスノルムと書くだけにする．

以下，実際クロスノルムが存在することを示す．

定義 A.4.3 (インジェクティブノルム).　$\mathbb{K}$-Banach 空間の族 $(X_i)_{i=1}^n$ に対し

$$\epsilon(v) := \sup_{\substack{\|x_i^*\|_{X_i^*} \le 1 \\ i=1,\cdots,n}} \left| x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v) \right|, \quad (v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

により定める ϵ をインジェクティブノルム (injective norm) と呼ぶ．

定理 A.4.4 (インジェクティブノルムは最小のクロスノルム).　$\mathbb{K}$-Banach 空間の族 $(X_i)_{i=1}^n$ のテンソル積 $\bigotimes_{i=1}^n X_i$ において，インジェクティブノルムは最小のクロスノルムである．

証明.

第一段　ϵ が $\bigotimes_{i=1}^n X_i$ 上のノルムであることを示す．劣加法性と同次性は $x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*$ の線型性より従う．$v = 0 \Leftrightarrow \epsilon(v) = 0$ については，$v = 0$ なら任意の $x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*$ について $x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v) = 0$ が成り立ち $\epsilon(v) = 0$ が出る．逆に $v \neq 0$ とするとき，定理 A.3.1 より

$$v = \sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j, \quad (x_i^j \in X_i,\ j = 1, \cdots, m,\ i = 1, \cdots, n)$$

と表現できるが，定理 A.3.2 より $x_i^1 \neq 0\ (i = 1, \cdots, n)$ と仮定できる．x_1^1 について，もし全ての $2 \le j \le m$ に対し $x_1^j = x_1^1$ が満たされているなら，$\hat{x}_1^* \in X_1^*$ を

$$\left\langle x_1^1, \hat{x}_1^* \right\rangle = \left\| x_1^1 \right\|_{X_1}, \quad \left\| \hat{x}_1^* \right\|_{X_1^*} = 1$$

を満たすように選ぶ (Hahn-Banach の定理)．$x_1^j \neq x_1^1$ を満たす j がある場合，

$$L_1 := \mathrm{Span}\left[\left\{ x_1^j \ ; \quad 2 \le j \le m,\ x_1^1 \neq x_1^j \right\}\right]$$

により閉部分空間を定めれば x_1^1 と L_1 との距離 d_1 は正であり，Hahn-Banach の定理より

$$\langle x_1, \hat{x}_1^* \rangle = 0\ (\forall x_1 \in L_1), \quad \left\langle x_1^1, \hat{x}_1^* \right\rangle = d_1 > 0, \quad \left\| \hat{x}_1^* \right\|_{X_1^*} = 1$$

を満たす $\hat{x}_1^* \in X_1^*$ を取ることができる．同様に $\hat{x}_i^* \in X_i^*\ (i = 2, \cdots, n)$ を選べば

$$\hat{x}_1^* \otimes \cdots \otimes \hat{x}_n^*(x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j) = \begin{cases} \hat{x}_1^* \otimes \cdots \otimes \hat{x}_n^*(x_1^1 \otimes \cdots \otimes x_n^1), & (x_i^j = x_i^1,\ i = 1, \cdots, n), \\ 0, & (\text{o.w.}), \end{cases}$$

$(j = 2, \cdots, m)$ が満たされるから

$$0 < \hat{x}_1^* \otimes \cdots \otimes \hat{x}_n^*(x_1^1 \otimes \cdots \otimes x_n^1) \le \left| \hat{x}_1^* \otimes \cdots \otimes \hat{x}_n^*(v) \right| \le \epsilon(v)$$

が成立し，対偶により $\epsilon(v) = 0 \Rightarrow v = 0$ が従う．

第二段　ϵ がクロスノルムであることを示す．先ず Hahn-Banach の定理より

$$\begin{aligned}\epsilon(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) &= \sup_{\substack{\|x_i^*\|_{X_i^*} \le 1 \\ i=1,\cdots,n}} \left| x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \right| \\ &= \sup_{\|x_1^*\|_{X_1^*} \le 1} \left| \langle x_1, x_1^* \rangle \right| \cdots \sup_{\|x_n^*\|_{X_n^*} \le 1} \left| \langle x_n, x_n^* \rangle \right| \\ &= \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}, \quad (\forall x_i \in X_i,\ i = 1, \cdots, n)\end{aligned}$$

が成り立つ．また 0 でない $x_i^* \in X_i^*$, $(i = 1, \cdots, n)$ に対しては

$$\begin{aligned}\left| x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v) \right| &\le \left\| x_1^* \right\|_{X_1^*} \cdots \left\| x_n^* \right\|_{X_n^*} \left[\frac{x_1^*}{\left\| x_1^* \right\|_{X_1^*}} \otimes \cdots \otimes \frac{x_n^*}{\left\| x_n^* \right\|_{X_n^*}} \right](v) \\ &\le \left\| x_1^* \right\|_{X_1^*} \cdots \left\| x_n^* \right\|_{X_n^*} \epsilon(v)\end{aligned}$$

が成立し

$$\left\| x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^* \right\|_{(\bigotimes_{i=1}^n X_i, \epsilon)} \le \left\| x_1^* \right\|_{X_1^*} \cdots \left\| x_n^* \right\|_{X_n^*}$$

を得る．

第三段　ϵ が最小のクロスノルムであることを示す．α を任意のクロスノルムとすれば

$$\left| x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v) \right| \le \left\| x_1^* \right\|_{X_1^*} \cdots \left\| x_n^* \right\|_{X_n^*} \alpha(v), \quad (\forall v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

が成り立つから，特に $\left\| x_i^* \right\|_{X_i^*} \le 1$, $(i = 1, \cdots, n)$ の範囲で sup を取れば

$$\epsilon(v) \le \alpha(v), \quad (\forall v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

が従い ϵ の最小性が出る．　■

定義 A.4.5 (プロジェクティブノルム).　$\mathbb{K}$-Banach 空間の族 $(X_i)_{i=1}^n$ に対し，定理 A.3.3 により

$$\begin{array}{ccc}\Phi : \mathrm{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}\right) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}\right) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ T & \longmapsto & T \circ \otimes\end{array}$$

により線型同型 Φ が定まる．これを用いて

$$\pi(v) := \sup_{\substack{b \in L^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}\right) \\ \|b\|_{L^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}\right)} \le 1}} \left| \Phi^{-1}(b)(v) \right|, \quad (v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

により定める π をプロジェクティブノルム (projective norm) と呼ぶ．

定理 A.4.6 (プロジェクティブノルムは最大のクロスノルム).　$\mathbb{K}$-Banach 空間の族 $(X_i)_{i=1}^n$ のテンソル積 $\bigotimes_{i=1}^n X_i$ 上にプロジェクティブノルム π を導入する．このとき式 (A.9) を満たす任意のセミノルム p に対し $p \le \pi$ が成立する．特に π は最大のクロスノルムである．

証明.

第一段　π がノルムであることを示す．$v \neq 0$ とすれば，定理 A.4.4 の証明と同様にして

$$0 < \left|\hat{x}_1^* \otimes \cdots \otimes \hat{x}_n^*(v)\right|, \quad \left\| \hat{x}_i^* \right\|_{X_i^*} = 1, \quad (i = 1, \cdots, n)$$

を満たす $\hat{x}_i^* \in X_i^*$ $(i = 1, \cdots, n)$ が存在する．

$$b(x_1, \cdots, x_n) \coloneqq \langle x_1, \hat{x}_1^* \rangle \cdots \langle x_n, \hat{x}_n^* \rangle, \quad (x_i \in X_i,\ i = 1, \cdots, n)$$

により n 重線型写像 b を定めれば，$\| b \|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K})} \leq \left\| x_1^* \right\|_{X_1^*} \cdots \left\| x_n^* \right\|_{X_n^*} = 1$ かつ

$$0 < \left|\hat{x}_1^* \otimes \cdots \otimes \hat{x}_n^*(v)\right| = |\Phi^{-1}(b)(v)| \leq \pi(v)$$

が成立する．$\pi(0) = 0$ と劣加法性及び同次性は $\Phi^{-1}(b)$ の線型性より従う．

第二段　π がクロスノルムであることを示す．先ず，任意の $x_i \in X_i$, $(i = 1, \cdots, n)$ に対して

$$\begin{aligned}
\pi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) &= \sup_{\substack{b \in L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}) \\ \| b \|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K})} \leq 1}} \left|\Phi^{-1}(b)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)\right| \\
&\leq \sup_{\substack{b \in L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}) \\ \| b \|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K})} \leq 1}} \| b \|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K})} \| x_1 \|_{X_1} \cdots \| x_n \|_{X_n} \\
&= \| x_1 \|_{X_1} \cdots \| x_n \|_{X_n}
\end{aligned}$$

が成立する．また 0 でない $x_i^* \in X_i^*$, $(i = 1, \cdots, n)$ に対し

$$b(x_1, \cdots, x_n) \coloneqq \frac{x_1^*}{\left\| x_1^* \right\|_{X_1^*}}(x_1) \cdots \frac{x_n^*}{\left\| x_n^* \right\|_{X_n^*}}(x_n), \quad (x_i \in X_i,\ i = 1, \cdots, n)$$

により $\| b \|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K})} \leq 1$ を満たす有界 n 重線型 b を定めれば，π の定義より

$$\left|\Phi^{-1}(b)(v)\right| \leq \pi(v), \quad (\forall v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

が成り立つ．一方で線型形式のテンソル積の定義より

$$\Phi^{-1}(b) = \frac{x_1^*}{\left\| x_1^* \right\|_{X_1^*}} \otimes \cdots \otimes \frac{x_n^*}{\left\| x_n^* \right\|_{X_n^*}} = \frac{1}{\left\| x_1^* \right\|_{X_1^*} \cdots \left\| x_n^* \right\|_{X_n^*}} x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*$$

となり，

$$\left|x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v)\right| \leq \left\| x_1^* \right\|_{X_1^*} \cdots \left\| x_n^* \right\|_{X_n^*} \pi(v), \quad (\forall v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

が従い

$$\left\| x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^* \right\|_{(\bigotimes_{i=1}^n X_i, \pi)^*} \leq \left\| x_1^* \right\|_{X_1^*} \cdots \left\| x_n^* \right\|_{X_n^*}$$

が出る．

第三段　p を (A.9) を満たすセミノルムとし，$v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i$ を任意に取れば

$$p(v) = \phi_v(v), \quad |\phi_v(u)| \leq p(u) \quad (\forall u \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

を満たす $\phi_v \in (\bigotimes_{i=1}^n X_i, \pi)^*$ が存在する (Hahn-Banach の定理).

$$\begin{aligned} |(\phi_v \circ \otimes)(x_1, \cdots, x_n)| &= |\phi_v(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)| \\ &\leq p(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \\ &\leq \| x_1 \|_{X_1} \cdots \| x_n \|_{X_n}, \quad (\forall x_i \in X_i,\ i = 1, \cdots, n) \end{aligned}$$

が成り立つから $\| \phi_v \circ \otimes \|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K})} \leq 1$ が従い，π の定義より

$$p(v) = \phi_v(v) = \Phi^{-1}(\phi_v \circ \otimes)(v) \leq \pi(v)$$

が得られる. ∎

定理 A.4.7 (プロジェクティブノルムの表現).　$\mathbb{K}$-Banach 空間の族 $(X_i)_{i=1}^n$ のテンソル積 $\bigotimes_{i=1}^n X_i$ にプロジェクトノルム π を導入する．このとき次が成り立つ:

$$\pi(v) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^m \left\| x_1^j \right\|_{X_1} \cdots \left\| x_n^j \right\|_{X_n} \quad ; \quad v = \sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j \right\}.$$

証明.

第一段　$x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ 上のセミノルム λ を次で定める:

$$\lambda(v) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^m \left\| x_1^j \right\|_{X_1} \cdots \left\| x_n^j \right\|_{X_n} \quad ; \quad v = \sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j \right\}, \quad (\forall v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i).$$

いま，任意に $v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i$ を取れば，v の任意の分割

$$v = \sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j.$$

に対し

$$\pi(v) \leq \sum_{j=1}^m \pi\left(x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j\right) = \sum_{j=1}^m \left\| x_1^j \right\|_{X_1} \cdots \left\| x_n^j \right\|_{X_n}$$

が満たされ $\pi \leq \lambda$ が従う．よって λ が式 (A.9) を満たせば，定理 A.4.6 より $\lambda = \pi$ が得られる．

第二段　λ がセミノルムであることを示す．実際，任意に $u, v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i$ を取り，

$$u = \sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j, \quad v = \sum_{k=1}^r a_1^k \otimes \cdots \otimes a_n^k$$

を一つの表現とすれば，λ の定め方より

$$\lambda(u+v) \leq \sum_{j=1}^{m} x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j + \sum_{k=1}^{r} a_1^k \otimes \cdots \otimes a_n^k$$

が成り立つ．右辺を移項して

$$\lambda(u+v) - \sum_{k=1}^{r} a_1^k \otimes \cdots \otimes a_n^k \leq \lambda(u) \leq \sum_{j=1}^{m} x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j$$

かつ

$$\lambda(u+v) - \lambda(u) \leq \lambda(v) \leq \sum_{k=1}^{r} a_1^k \otimes \cdots \otimes a_n^k$$

が従い λ の劣加法性を得る．また任意の $0 \neq \alpha \in \mathbb{K}$, $v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i$ に対し

$$v = \sum_{j=1}^{m} x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j$$

を一つの分割とすれば

$$\alpha v = \sum_{j=1}^{m} \left(\alpha x_1^j\right) \otimes \cdots \otimes x_n^j$$

は αv の一つの分割となるから

$$\lambda(\alpha v) \leq \sum_{j=1}^{m} \left\| \alpha x_1^j \right\|_{X_1} \cdots \left\| x_n^j \right\|_{X_n} = |\alpha| \sum_{j=1}^{m} \left\| x_1^j \right\|_{X_1} \cdots \left\| x_n^j \right\|_{X_n}$$

が成立し，v の分割について下限を取れば $\lambda(\alpha v) \leq |\alpha|\lambda(v)$ が従う．逆に

$$\alpha v = \sum_{k=1}^{r} a_1^k \otimes \cdots \otimes a_n^k$$

に対しては

$$\lambda(v) \leq \sum_{k=1}^{r} \left\| \frac{1}{\alpha} a_1^k \right\|_{X_1} \cdots \left\| a_n^k \right\|_{X_n} = \frac{1}{|\alpha|} \sum_{k=1}^{r} \left\| a_1^k \right\|_{X_1} \cdots \left\| a_n^k \right\|_{X_n}$$

が成り立ち $|\alpha|\lambda(v) \leq \lambda(\alpha v)$ が従う．$v = 0$ なら $v = 0 \otimes \cdots \otimes 0$ より $\lambda(v) = 0$ が満たされ

$$\lambda(\alpha v) = |\alpha|\lambda(v), \quad (\forall \alpha \in \mathbb{K},\ v \in \bigotimes_{i=1}^{n} X_i)$$

が得られる．

第三段　λ が式 (A.9) を満たすことを示す．実際 λ の定め方より

$$\lambda(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \leq \| x_1 \|_{X_1} \cdots \| x_n \|_{X_n}, \quad (\forall x_i \in X_i,\ i = 1, \cdots, n)$$

が成り立つ．∎

定理 A.4.8. $\bigotimes_{i=1}^n X_i$ を $\mathbb{K}$-Banach 空間の族 $(X_i)_{i=1}^n$ のテンソル積とする．このとき $\bigotimes_{i=1}^n X_i$ 上の任意のノルム α に対し次が成立する:

$$\alpha \text{ がクロスノルム} \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon \le \alpha \le \pi.$$

証明. $(\Rightarrow)$ はすでに示したから $(\Leftarrow)$ を示す．実際，任意の $x_i \in X_i$, $(i = 1, \cdots, n)$ に対して

$$\alpha(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \le \pi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \le \| x_1 \|_{X_1} \cdots \| x_n \|_{X_n}$$

が成立し，また任意の $x_i^* \in X_i^*$, $(i = 1, \cdots, n)$ に対して

$$\begin{aligned} \left| x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v) \right| &\le \left\| x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^* \right\|_{(\bigotimes_{i=1}^n X_i, \epsilon)^*} \epsilon(v) \\ &\le \left\| x_1^* \right\|_{X_1^*} \cdots \left\| x_n^* \right\|_{X_n^*} \alpha(v), \quad (\forall v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i) \end{aligned}$$

が満たされ $\left\| x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^* \right\|_{(\bigotimes_{i=1}^n X_i, \alpha)^*} \le \left\| x_1^* \right\|_{X_1^*} \cdots \left\| x_n^* \right\|_{X_n^*}$ が得られる． ∎

A.5　テンソル積の内積

[参考:[5](pp. 1-24), [9]] $(H_i)_{i=1}^n$ を $\mathbb{R}$-Hilbert 空間の族として，$\bigotimes_{i=1}^n H_i$ に内積を導入する．H_i の内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_i}$ と書く．

第一段　任意に $y_i \in H_i$, $i = 1, \cdots, n$ を取り

$$\Phi_{y_1, \cdots, y_n} : \bigoplus_{i=1}^n H_i \ni (x_1, \cdots, x_n) \longmapsto \langle x_1, y_1 \rangle_{H_1} \cdots \langle x_n, y_n \rangle_{H_n}$$

とおけば，$\Phi_{y_1, \cdots, y_n}$ は n 重線型であるから或る $\Psi_{y_1, \cdots, y_n} \in \mathrm{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n H_i, \mathbb{R} \right)$ がただ一つ存在して

$$\Psi_{y_1, \cdots, y_n} \circ \otimes = \Phi_{y_1, \cdots, y_n}$$

を満たす．

第二段　任意の $u \in \bigotimes_{i=1}^n H_i$ に対し $\bigoplus_{i=1}^n H_i \ni (y_1, \cdots, y_n) \longmapsto \Psi_{y_1, \cdots, y_n}(u)$ は n 重線型である．実際，

$$u = \sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j$$

と表せるとき，任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ と $y_i, z_i \in H_i$ に対して

$$\begin{aligned} \Psi_{y_1, \cdots, \alpha y_i + \beta z_i, \cdots, y_n}(u) &= \sum_{j=1}^k \Psi_{y_1, \cdots, \alpha y_i + \beta z_i, \cdots, y_n}(x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j) \\ &= \sum_{j=1}^k \left\langle x_1^j, y_1 \right\rangle_{H_1} \cdots \left\langle x_i^j, \alpha y_i + \beta z_i \right\rangle_{H_i} \cdots \left\langle x_n^j, y_n \right\rangle_{H_n} \\ &= \alpha \sum_{j=1}^k \left\langle x_1^j, y_1 \right\rangle_{H_1} \cdots \left\langle x_i^j, y_i \right\rangle_{H_i} \cdots \left\langle x_n^j, y_n \right\rangle_{H_n} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\beta \sum_{j=1}^{k} \left\langle x_1^j, y_1 \right\rangle_{H_1} \cdots \left\langle x_i^j, z_i \right\rangle_{H_i} \cdots \left\langle x_n^j, y_n \right\rangle_{H_n} \\
&= \alpha \sum_{j=1}^{k} \Psi_{y_1,\cdots,y_i,\cdots,y_n}(x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j) + \beta \sum_{j=1}^{k} \Psi_{y_1,\cdots,z_i,\cdots,y_n}(x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j) \\
&= \alpha \Psi_{y_1,\cdots,y_i,\cdots,y_n}(u) + \beta \Psi_{y_1,\cdots,z_i,\cdots,y_n}(u)
\end{aligned}
$$

が成立する．従って或る $F_u \in \mathrm{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n H_i, \mathbb{R}\right)$ がただ一つ存在して

$$
F_u(y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) = \Psi_{y_1,\cdots,y_n}(u), \quad (\forall y_1 \otimes \cdots \otimes y_n \in \bigotimes_{i=1}^n H_i)
$$

を満たす．

第三段　任意の $v \in \bigotimes_{i=1}^n H_i$ に対し $\bigotimes_{i=1}^n H_i \ni u \longmapsto F_u(v)$ は線型性を持つ．実際，

$$
v = \sum_{j=1}^{k} x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j
$$

と表せるとき，任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ と $u, w \in \bigotimes_{i=1}^n H_i$ に対して

$$
\begin{aligned}
F_{\alpha u + \beta w}(v) &= \sum_{j=1}^{k} F_{\alpha u + \beta w}(x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \Psi_{x_1^j,\cdots,x_n^j}(\alpha u + \beta w) \\
&= \alpha \sum_{j=1}^{k} \Psi_{x_1^j,\cdots,x_n^j}(u) + \beta \sum_{j=1}^{k} \Psi_{x_1^j,\cdots,x_n^j}(w) \\
&= \alpha F_u(v) + \beta F_w(v)
\end{aligned}
$$

が成立する．従って

$$
s(u, v) := F_u(v), \quad (\forall u, v \in \bigotimes_{i=1}^n H_i) \tag{A.11}
$$

により定める $s : \bigotimes_{i=1}^n H_i \times \bigotimes_{i=1}^n H_i \longrightarrow \mathbb{R}$ は双線型形式である．

定理 A.5.1.　s は $\bigotimes_{i=1}^n H_i$ の内積となり，任意の $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$, $y_1 \otimes \cdots \otimes y_n \in \bigotimes_{i=1}^n H_i$ に対し次を満たす:

$$
s(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n, y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) = \langle x_1, y_1 \rangle_{H_1} \cdots \langle x_n, y_n \rangle_{H_n}. \tag{A.12}
$$

証明.　s は双線型性を持つように定めたから，後は対称性と正定値性及び $s(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$ を示せばよい．

第一段　任意の $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$, $y_1 \otimes \cdots \otimes y_n \in \bigotimes_{i=1}^n H_i$ に対し

$$
\begin{aligned}
s(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n, y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) &= F_{x_1 \otimes \cdots \otimes x_n}(y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) = \Psi_{y_1,\cdots,y_n}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \Phi_{y_1,\cdots,y_n}(x_1, \cdots, x_n) \\
&= \langle x_1, y_1 \rangle_{H_1} \cdots \langle x_n, y_n \rangle_{H_n}
\end{aligned}
$$

が成り立ち (A.12) を得る．また $s(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n, y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) = s(y_1 \otimes \cdots \otimes y_n, x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)$ も従う．

第二段　s の対称性を示す．任意の $u, v \in \bigotimes_{i=1}^n H_i$ に対し分割を

$$u = \sum_{j=1}^{k} x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j, \quad v = \sum_{r=1}^{m} y_1^r \otimes \cdots \otimes y_n^r$$

と表せば，前段の結果より

$$s(u, v) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{r=1}^{m} s(x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j, y_1^r \otimes \cdots \otimes y_n^r) = \sum_{r=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} s(y_1^r \otimes \cdots \otimes y_n^r, x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j) = s(v, u)$$

となる．

第三段　任意の $u \in \bigotimes_{i=1}^n H_i$ に対し $s(u, u) \geq 0$ が成り立つことを示す．実際，

第一段　$s(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$, $(u \in \bigotimes_{i=1}^n H_i)$ が成り立つことを示す．定理 A.3.8 より，基底 $\left\{e_{\lambda_i}^i\right\}_{\lambda_i \in \Lambda_i} \subset H_i$, $(i = 1, \cdots, n)$ に対し $\left\{e_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes e_{\lambda_n}^n\right\}_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n}$ は $\bigotimes_{i=1}^n H_i$ の基底となるから，任意の $u \in \bigotimes_{i=1}^n H_i$ は

$$u = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \left(e_{\lambda_1^{(j)}}^1 \otimes \cdots \otimes e_{\lambda_n^{(j)}}^n\right) = \sum_{j=1}^{k} e_{\lambda_1^{(j)}}^1 \otimes \cdots \otimes \left(\alpha_j e_{\lambda_n^{(j)}}^n\right), \quad (\alpha_j \neq 0,\ j = 1, \cdots, k)$$

と表現できる．

定義 A.5.2 (テンソル積上の内積).　式 (A.11) で定めた双線型形式 s を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ と書き直して $\bigotimes_{i=1}^n H_i$ の内積とする．また $\sigma(u) := \sqrt{\langle u, u \rangle}$, $(u \in \bigotimes_{i=1}^n H_i)$ によりノルム σ を導入する．

定理 A.5.3 (σ はクロスノルム).　σ はクロスノルムである．

証明.　定義 A.4.1 の (A.9) と (A.10) を満たすことを示せばよい．

第一段　式 (A.12) より (A.9) が従う．

第二段　任意に $x_i^* \in H_i^*$ を取れば，Riesz の Hilbert 空間の表現定理より或る $a_i \in H_i$ がただ一つ存在して

$$x_i^*(\cdot) = \langle \cdot, a_i \rangle_{H_i}, \quad \left\| x_i^* \right\|_{H_i^*} = \| a_i \|_{H_i}, \quad i = 1, \cdots, n$$

を満たす．Cauchy-Schwartz の不等式と併せれば，任意の

$$x = \sum_{j=1}^{k} x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j \in \bigotimes_{i=1}^{n} H_i$$

に対し

$$\begin{aligned}
(x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*)(x) &= \sum_{j=1}^{k} (x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*)(x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j) = \sum_{j=1}^{k} x_1^*(x_1^j) \cdots x_n^*(x_n^j) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \left\langle x_1^j, a_1 \right\rangle_{H_1} \cdots \left\langle x_n^j, a_n \right\rangle_{H_n} = \sum_{j=1}^{k} \left\langle x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j, a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \right\rangle = \langle x, a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \rangle \\
&\leq \sigma(x) \sigma(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sigma(x) \| a_1 \|_{H_1} \cdots \| a_n \|_{H_n} \\
&= \sigma(x) \left\| x_1^* \right\|_{H_1^*} \cdots \left\| x_n^* \right\|_{H_n^*}
\end{aligned}$$

が成立し (A.10) を得る．　∎

定理 A.5.4 (H_i が有限次元なら σ と π は同値).

参考文献

[1] S. Aida, Rough path analysis: an introduction.

[2] T. Lyons and Z. Qian, System control and rough paths, Oxford science publications, 2002.

[3] K. Friz and Nicholas B. Victor, Multidimensional stochastic processes as rough path: theory and applications, 2009.

[4] M. Sugiura and M. Yokonuma, ジョルダン標準形・テンソル代数, 岩波基礎数学選書, 1990.

[5] E. Cheney and W. Light, Approximation theory of tensor product spaces, Springer, 1985.

[6] R. Ryan, Introduction to tensor products of Banach spaces, Springer, 2002.

[7] mathoverFlow, available from https://mathoverflow.net/questions/277070/tensor-product-space-with-projective-norm-is-incomplete, 2018/05/24.

[8] Y. Hirai and K. Matsuura, 自主ゼミ： Normal approximations with Malliavin calculus: From Stein's Method to Universality 用ノート, 2015.

[9] Y. Hirai, 関数解析ノート：ノルム空間上の有界双線形写像, 2017.

[10] K. Matsuzaka, 集合・位相入門, 岩波書店, 2016.