

ゼミ用ノート
会田先生の資料”Rough path analysis:An Introduction”

基礎工学研究科システム創成専攻
学籍番号 29C17095
百合川尚学

2018 年 5 月 9 日

目次

0.1	導入	1
0.2	連続性定理	5
0.3	Young 積分	19
0.4	The notion of rough path	20
.1	多重線型写像	23
.2	notation	24
.3	テンソル積	24
.4	テンソル積の内積	32
.5	クロスノルム	32

0.1 導入

以下, d 次元ベクトル $x \in \mathbb{R}^d$ と (m, d) 行列 $a \in \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^d$ について, 成分を込めて表現する場合は $x = (x^1, \dots, x^d)$, $a = (a_{ij}^j)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq d}$ と書く. また $T > 0$ を固定し $C^1 = C^1([0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d)$ とおく. (端点においては片側微分を考える.) 区間 $[s, t] \subset [0, T]$ の分割を $D = \{s = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t\}$ で表現し, 分割の全体を $\delta[s, t]$ とおく. $|D| := \max_{1 \leq i \leq N} |t_i - t_{i-1}|$ とし,

$$\sum_D = \sum_{i=1}^N$$

と略記する.

定理 0.1.1 (Riemann-Stieltjes 積分). $[s, t] \subset [0, T]$ とし, $D \in \delta[s, t]$ についてのみ考えるとき, 任意の $x \in C^1$, $f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ に対して次の極限が存在する:^{*1}

$$\lim_{|D| \rightarrow 0} \sum_D f(x_{s_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) \in \mathbb{R}^m.$$

s_{i-1} は区間 $[t_{i-1}, t_i]$ に属する任意の点であり, 極限は s_{i-1} の取り方に依らない.

証明. 各 x^j は C^1 -級であるから, 平均値の定理より $\sum_D f(x_{s_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})$ の第 k 成分を

$$\sum_{j=1}^d \sum_D f_j^k(x_{s_{i-1}})(x_{t_i}^j - x_{t_{i-1}}^j)$$

^{*1} 極限の存在を保証する条件としては, f の有界性と微分可能性は必要ない.

$$= \sum_{j=1}^d \sum_D f_j^k(x_{s_{i-1}}) \dot{x}_{\xi_i}^j(t_i - t_{i-1}), \quad (\exists \xi_i \in [t_{i-1}, t_i])$$

と表現できる．各 j, k について

$$\lim_{|D| \rightarrow 0} \sum_D f_j^k(x_{s_{i-1}}) \dot{x}_{\xi_i}^j(t_i - t_{i-1})$$

は通常の連続関数の Riemann 積分

$$\int_s^t f_j^k(x_u) \dot{x}_u^j du$$

に収束する．

定義 0.1.2 (C^1 -級のパスに対する汎関数). $x \in C^1$ と $f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ に対して, $[s, t] \subset [0, T]$ における Riemann-Stieltjes 積分を I で表現する:

$$I_{s,t}(x) = \int_s^t f(x_u) dx_u := \lim_{|D| \rightarrow 0} \sum_D f(x_{t_i})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}),$$

$$\left[\int_s^t f(x_u) dx_u \right]^k = \sum_{j=1}^d \int_s^t f_j^k(x_u) dx_u^j, \quad (k = 1, \dots, m).$$

ただし $D \in \delta[s, t]$ のみを考える．

C^1 は次で定めるノルム $\|\cdot\|_{C^1}$ により Banach 空間となる:

$$\|x\|_{C^1} := \sup_{t \in [0, T]} |x(t)| + \sup_{t \in [0, T]} |\dot{x}(t)|.$$

定理 0.1.3 ($\|\cdot\|_{C^1}$ に関する連続性). $[s, t] \subset [0, T]$ とし, C^1 には $\|\cdot\|_{C^1}$ でノルム位相を入れる．このとき, $C^1 \ni x \mapsto I_{s,t}(x) \in \mathbb{R}^m$ は連続である．

証明. C^1 の第一可算性により点列連続性と連続性は一致するから, $x^n \rightarrow x$ のとき $I_{s,t}(x^n) \rightarrow I_{s,t}(x)$ が従うことを示せばよい．

$$M := \sup_{u \in [s, t]} |f(x_u)| < \infty$$

を定めれば

$$\begin{aligned} \left| \int_s^t f(x_u^n) dx_u^n - \int_s^t f(x_u) dx_u \right| &= \left| \int_s^t f(x_u^n) \dot{x}_u^n du - \int_s^t f(x_u) \dot{x}_u du \right| \\ &\leq \int_s^t |f(x_u^n) \dot{x}_u^n - f(x_u^n) \dot{x}_u| du + \int_s^t |f(x_u^n) \dot{x}_u - f(x_u) \dot{x}_u| du \\ &\leq M \|x^n - x\|_{C^1} (t - s) + \sup_{u \in [s, t]} |f(x_u^n) - f(x_u)| \|x\|_{C^1} (t - s) \end{aligned} \quad (1)$$

が成り立つ。いま、任意に $\epsilon > 0$ を取れば、或る $\epsilon > \delta > 0$ が存在して $v, w \in x([s, t])$, $|v - w| < \delta$ なら $|f(v) - f(w)| < \epsilon$ を満たす (一様連続)。すなわち $\|x^{(n)} - x\|_{C^1} < \delta$ なら

$$\sup_{t \in [s, t]} |f(x_t^{(n)}) - f(x_t)| < \epsilon$$

が成立する。 $\|x^n - x\|_{C^1} \rightarrow 0$ の仮定より、或る自然数 N が存在して $\|x^n - x\|_{C^1} < \delta$ ($n > N$) が満たされるから、 $(1) < \epsilon[M(t-s) + \|x\|_{C^1}(t-s)]$ ($n > N$) が成り立ち $I_{s,t}(x^n) \rightarrow I_{s,t}(x)$ が従う。 ■

定義 0.1.4 (p -variation). $(V, \|\cdot\|)$ をノルム空間とし、 $[0, T]$ 上の V 値写像 x と $[s, t] \subset [0, T]$ に対して p -variation ($p > 0$) を次で定める:

$$\|x\|_{p,[s,t]} := \left\{ \sup_{D \in \delta[s,t]} \sum_D \|x_{t_i} - x_{t_{i-1}}\|^p \right\}^{1/p}.$$

特に、 $\|\cdot\|_{p,[0,T]}$ を $\|\cdot\|_p$ と表記する。また $p \geq 1$ として、線型空間 $B_{p,T}(V)$ を

$$B_{p,T}(V) := \left\{ x : [0, T] \rightarrow V ; \quad x_0 = 0, x : \text{continuous}, \|x\|_p < \infty \right\}$$

により定める。

次の結果によれば、 $0 < p < 1$ に対し $B_{p,T}(V)$ を定めても零写像のみの空間でしかない。

定理 0.1.5 ($0 < p < 1$ に対して有界 p -variation なら定数). $x : [0, T] \rightarrow V$ を連続写像とする。このとき、 $p \in (0, 1)$ に対し $\|x\|_p < \infty$ が成り立つなら x は定数写像である。

証明. $t \in [0, T]$ を任意に取り固定する。このとき全ての $D \in \delta[0, t]$ に対して、

$$\begin{aligned} \|x_t - x_0\| &\leq \sum_D \|x_{t_i} - x_{t_{i-1}}\| \leq \max_D \|x_{t_i} - x_{t_{i-1}}\|^{1-p} \sum_D \|x_{t_i} - x_{t_{i-1}}\|^p \\ &\leq \max_D \|x_{t_i} - x_{t_{i-1}}\|^{1-p} \|x\|_p \end{aligned}$$

が成り立ち、 x の一様連続性から右辺は $|D| \rightarrow 0$ で 0 に収束し、 $x_t = x_0$ が従う。 ■

定理 0.1.6 (p -variation の p に関する単調減少性). V をノルム空間とすると、 $x : [0, T] \rightarrow V$ に対して $1 \leq p \leq q$ なら $\|x\|_p \geq \|x\|_q$ が成立する。特に $B_{p,T}(V) \subset B_{q,T}(V)$ が従う。

証明. $(\sum_i |a_i|^p)^{1/p} \leq \sum_i |a_i|$ ($a_i \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$) により、任意の $x \in B_{p,T}(V)$ と $D \in \delta[0, T]$ に対し

$$\left[\sum_D (\|x_{t_i} - x_{t_{i-1}}\|^p)^{q/p} \right]^{p/q} \leq \sum_D \|x_{t_i} - x_{t_{i-1}}\|^p$$

が満たされ $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ が成立する。 ■

$p \geq 1$ の場合, Minkowski の不等式によれば, 任意の $D \in \delta[s, t]$ に対し

$$\left\{ \sum_D \left\| (x_{t_i} + y_{t_i}) - (x_{t_{i-1}} + y_{t_{i-1}}) \right\|^p \right\}^{1/p} \leq \left\{ \sum_D \left\| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right\|^p \right\}^{1/p} + \left\{ \sum_D \left\| y_{t_i} - y_{t_{i-1}} \right\|^p \right\}^{1/p} \\ \leq \|x\|_{p,[s,t]} + \|y\|_{p,[s,t]}$$

が成り立ち $\|x + y\|_{p,[s,t]} \leq \|x\|_{p,[s,t]} + \|y\|_{p,[s,t]}$ を得る.

定理 0.1.7. V が Banach 空間のとき, $B_{p,T}(V)$ は $\|\cdot\|_p$ をノルムとする Banach 空間である.

証明. 完備性を示す.

第一段 $(x^n)_{n=1}^\infty \subset B_{p,T}(V)$ を Cauchy 列とすれば, 任意の $\epsilon > 0$ に対して或る $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ が存在し

$$\|x^n - x^m\|_p = \left\{ \sup_{D \in \delta[0,T]} \sum_D \left\| (x_{t_i}^n - x_{t_i}^m) - (x_{t_{i-1}}^n - x_{t_{i-1}}^m) \right\|^p \right\}^{1/p} < \epsilon, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

を満たす. いま, 任意の $t \in [0, T]$ に対して $[0, T]$ の分割 $D = \{0 \leq t \leq T\}$ を考えれば

$$\|x_t^n - x_t^m\| < \epsilon, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

が得られ, V の完備性より或る $x_t \in \mathbb{R}^d$ が存在して

$$\|x_t^n - x_t\| < \epsilon \quad (n > n_\epsilon)$$

を満たす. この収束は t に関して一様であるから, $t \mapsto x_t$ は 0 出発かつ連続である.

第二段 $\|x^n - x\|_p \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) を示す. 前段によれば, 任意の $D \in \delta[0, T]$ に対し

$$\sum_D \left\| (x_{t_i}^m - x_{t_i}^n) - (x_{t_{i-1}}^m - x_{t_{i-1}}^n) \right\|^p < \epsilon^p, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

が成り立っている. D はせいぜい有限個の分割であるから, $m \rightarrow \infty$ として

$$\sum_D \left\| (x_{t_i} - x_{t_i}^n) - (x_{t_{i-1}} - x_{t_{i-1}}^n) \right\|^p < \epsilon^p, \quad (n > n_\epsilon)$$

が従い, D の任意性より $\|x^n - x\|_p < \epsilon$ ($n > n_\epsilon$) を得る. ■

定理 0.1.8. $p \geq 1$ とする. また $x_0 = 0$ を満たす $x \in C^1$ の全体が作る線形空間を \tilde{C}^1 とおく.

- (1) $x \in C^1$ ならば $\|x\|_p < \infty$ が成り立つ. ただちに, $\|\cdot\|_p$ は \tilde{C}^1 においてノルムとなる.
- (2) \tilde{C}^1 において, $\|\cdot\|_{C^1}$ で導入する位相は $\|\cdot\|_p$ で導入する位相より強い.

証明.

$p = 1$ の場合 平均値の定理より, 任意の $D \in \delta[0, T]$ に対し

$$\sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}| \leq \sum_D \|x\|_{C^1} (t_i - t_{i-1}) = \|x\|_{C^1} T < \infty$$

が成り立ち $\|x\|_1 < \infty$ が従う.

$p > 1$ の場合 q を p の共役指数とする．任意の $D \in \delta[0, T]$ に対し，Hölder の不等式より

$$\begin{aligned} \sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^p &= \sum_D \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{x}_u du \right|^p \leq \sum_D (t_i - t_{i-1}) \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} |\dot{x}_u|^q du \right)^{p/q} \\ &\leq \sum_D (t_i - t_{i-1}) \left(\int_0^T \|x\|_{C^1}^q du \right)^{p/q} = \|x\|_{C^1}^p T^p \end{aligned}$$

が成立し， $\|x\|_p < \infty$ が従う．

以上より， $p \geq 1$ ならば $\|x\|_p \leq T \|x\|_{C^1}$ ($x \in C^1$) が成り立ち (2) の主張を得る． ■

次節の考察対象は主に定理 0.1.3 と定理 0.1.8 に関係する．定理 0.1.3 によれば， C^1 に $\|\cdot\|_{C^1}$ でノルム位相を導入した場合， $f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ に対して $C^1 \ni x \mapsto I_{s,t}(x)$ は連続である．一方で定理 0.1.3 によれば，0 出発 C^1 -パス空間 \tilde{C}^1 に $\|\cdot\|_p$ でノルム位相を導入した場合， $\tilde{C}^1 \ni x \mapsto I_{s,t}(x)$ が連続であるという保証はない．しかし，次節以後の結果により， $1 \leq p < 3$ かつ $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ が満たされているなら $\tilde{C}^1 \ni x \mapsto I_{s,t}(x)$ は或る意味での連続性を持つ．

0.2 連続性定理

定義 0.2.1 (記号の定義). $x \in C^1$, $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ に対し次を定める．

$$\begin{aligned} \Delta_T &:= \{ (s, t) ; \quad 0 \leq s \leq t \leq T \}, \\ X^1 : \Delta_T &\longrightarrow \mathbb{R}^d \quad ((s, t) \mapsto X_{s,t}^1 = x_t - x_s), \\ X^2 : \Delta_T &\longrightarrow \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d \quad \left((s, t) \mapsto X_{s,t}^2 = \int_s^t (x_u - x_s) \otimes dx_u \right), \\ \tilde{I}_{s,t}(x) &:= f(x_s) X_{s,t}^1 = f(x_s)(x_t - x_s), \\ J_{s,t}(x) &:= f(x_s) X_{s,t}^1 + (\nabla f)(x_s) X_{s,t}^2. \end{aligned}$$

以降， $a, b, c, d \in \mathbb{R}^d$ に対して次の表現を使う：

$$\begin{aligned} [a \otimes b]_j^i &= a^i b^j, \\ [(\nabla f)(x_s) X_{s,t}^2]^i &= \sum_{j,k=1}^d \partial_k f_j^i(x_s) \int_s^t (x_u^k - x_s^k) dx_u^j, \\ [(\nabla f)(x_s)(a \otimes b)]^i &= \sum_{j,k=1}^d \partial_k f_j^i(x_s) a^k b^j, \\ [(\nabla^2 f)(x_s)(a \otimes b \otimes c)]^i &= \sum_{j,k,v=1}^d \partial_v \partial_k f_j^i(x_s) a^v b^k c^j, \\ [(\nabla^3 f)(x_s)(a \otimes b \otimes c \otimes d)]^i &= \sum_{j,k,v,w=1}^d \partial_w \partial_v \partial_k f_j^i(x_s) a^w b^v c^k d^j. \end{aligned}$$

定理 0.2.2. $[s, t] \subset [0, T]$, $x \in C^1$, $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ とする. $D \in \delta[s, t]$ に対し

$$\tilde{I}_{s,t}(x, D) := \sum_D \tilde{I}_{t_{i-1}, t_i}(x), \quad J_{s,t}(x, D) := \sum_D J_{t_{i-1}, t_i}(x)$$

を定めるとき, 次が成立する:

$$I_{s,t}(x) = \lim_{|D| \rightarrow 0} \tilde{I}_{s,t}(x, D) = \lim_{|D| \rightarrow 0} J_{s,t}(x, D).$$

証明. 第一の等号は $I_{s,t}(x)$ の定義によるから, 第二の等号を証明する. まず,

$$\begin{aligned} I_{s,t}(x) &= \int_s^t f(x_u) dx_u \\ &= \int_s^t f(x_s) + f(x_u) - f(x_s) dx_u \\ &= \int_s^t f(x_s) dx_u + \int_s^t \int_0^1 (\nabla f)(x_s + \theta(x_u - x_s)) (X_{s,u}^1 \otimes \dot{x}_u) d\theta du \\ &= f(x_s) X_{s,t}^1 + (\nabla f)(x_s) X_{s,t}^2 \\ &\quad + \int_s^t \int_0^1 \{(\nabla f)(x_s + \theta(x_u - x_s)) - (\nabla f)(x_s)\} (X_{s,u}^1 \otimes \dot{x}_u) d\theta du \\ &= J_{s,t}(x) + \int_s^t \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_s + r(x_u - x_s)) (X_{s,u}^1 \otimes X_{s,u}^1 \otimes \dot{x}_u) dr d\theta du \end{aligned}$$

が成り立つ. $[0, T] \ni t \mapsto x_t$ の連続性より, 最下段式中の $x_s + r(x_u - x_s)$ ($0 \leq r \leq 1$, $s \leq u \leq t$) は或るコンパクト集合 K に含まれ, f が C^2 -級関数であるから

$$M := \sum_{i,j,k,v} \sup_{x \in K} |\partial_v \partial_k f_j^i(x)|$$

として $M < \infty$ を定めれば

$$\begin{aligned} &\left| \int_s^t \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_s + r(x_u - x_s)) (X_{s,u}^1 \otimes X_{s,u}^1 \otimes \dot{x}_u) dr d\theta du \right| \\ &\leq \int_s^t \int_0^1 \int_0^\theta |(\nabla^2 f)(x_s + r(x_u - x_s)) (X_{s,u}^1 \otimes X_{s,u}^1 \otimes \dot{x}_u)| dr d\theta du \\ &\leq M \int_s^t |X_{s,u}^1|^2 |\dot{x}_u| du \\ &\leq M \|x\|_{C^1}^3 \int_s^t (u-s)^2 du \end{aligned}$$

が出る. 特に $D \in \delta[s, t]$ に対して

$$\begin{aligned} \sum_D \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - t_{i-1})^2 du &\leq \sum_D |D| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - t_{i-1}) du \\ &\leq \sum_D |D| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - s) du \leq \frac{1}{2} (t - s)^2 |D| \longrightarrow 0 \quad (|D| \longrightarrow 0) \end{aligned}$$

が成立するから,

$$|I_{s,t}(x) - J_{s,t}(x, D)| \leq \sum_D |I_{t_{i-1}, t_i}(x) - J_{t_{i-1}, t_i}(x)| \longrightarrow 0 \quad (|D| \longrightarrow 0)$$

が従い定理の主張を得る.

定義 0.2.3 (control function). 関数 $\omega : \Delta_T \rightarrow [0, \infty)$ が連続かつ任意の $s \leq u \leq t$ に対して

$$\omega(s, u) + \omega(u, t) \leq \omega(s, t) \quad (2)$$

を満たすとき, ω を control function と呼ぶ.

式 (2) から $\omega(t, t) = 0$ ($\forall t \in [0, T]$) が従う. つまり control function は対角線上で 0 になる.

定義 0.2.4 (ノルム空間値写像の p -variation). $(V, \|\cdot\|)$ をノルム空間, $p > 0$ とする. このとき連続写像 $\psi : \Delta_T \rightarrow V$ に対する p -variation を

$$\|\psi\|_{p, [s, t]} := \left\{ \sup_{D \in \delta[s, t]} \sum_D \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p \right\}^{1/p}, \quad ((s, t) \subset [0, T])$$

で定める. 特に $\|\cdot\|_{p, [0, T]}$ を $\|\cdot\|_p$ と書く.

定理 0.2.5 (p -variation が定める control function). $(V, \|\cdot\|)$ をノルム空間, $p > 0$ とする. $\|\psi\|_p < \infty$ かつ $\psi_{t, t} = 0$ ($\forall t \in [0, T]$) を満たす連続写像 $\psi : \Delta_T \rightarrow V$ に対して,

$$\omega : \Delta_T \ni (s, t) \mapsto \|\psi\|_{p, [s, t]}^p$$

により定める ω は control function である.

証明. $\|\psi\|_p < \infty$ の仮定より ω は $[0, \infty)$ 値であるから, 以下では式 (2) と連続性を示す.

第一段 ω が式 (2) を満たすことを示す. 実際, 任意に $D_1 \in \delta[s, u], D_2 \in \delta[u, t]$ を取れば

$$\sum_{D_1} \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p + \sum_{D_2} \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p = \sum_{D_1 \cup D_2} \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p \leq \|\psi\|_{p, [s, t]}^p$$

が成り立つ. 左辺の D_1, D_2 の取り方は独立であるから, それぞれに対し上限を取れば

$$\|\psi\|_{p, [s, u]}^p + \|\psi\|_{p, [u, t]}^p \leq \|\psi\|_{p, [s, t]}^p$$

が従う.

第二段 任意の $[s, t] \subset [0, T]$ について^{*2},

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow +0} \omega(s, t+h) &= \inf_{h>0} \omega(s, t+h), & \lim_{h \rightarrow +0} \omega(s-h, t) &= \inf_{h>0} \omega(s-h, t), \\ \lim_{h \rightarrow +0} \omega(s, t-h) &= \sup_{h>0} \omega(s, t-h), & \lim_{h \rightarrow +0} \omega(s+h, t) &= \sup_{h>0} \omega(s+h, t) \end{aligned}$$

が成立する. 実際 $\omega(s, t+h)$ について見れば, これは下に有界かつ $h \rightarrow +0$ に対し単調減少であるから極限が確定し下限に一致する. 残りの三つも同様の理由で成立する.

^{*2} 下段の二式については $s < t$ と仮定する. また上段についても, $t = T$ 或は $s = 0$ の場合を除く必要がある.

第三段 任意の $s \in [0, T]$ に対し, $(s, T] \ni t \mapsto \omega(s, t)$ の左連続性を示す. ここでは

$$\tilde{\omega}(s, t) := \begin{cases} \lim_{h \rightarrow +0} \omega(s, t-h), & (s < t), \\ 0, & (s = t), \end{cases} \quad (\forall (s, t) \in \Delta_T)$$

で定める $\tilde{\omega}$ が優加法性を持ち, かつ

$$\|\psi_{s,t}\|^p \leq \tilde{\omega}(s, t), \quad (\forall (s, t) \in \Delta_T)$$

を満たすことを示す. 実際これが示されれば, 任意の $D \in \delta[s, t]$ に対し

$$\sum_D \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p \leq \sum_D \tilde{\omega}(t_{i-1}, t_i) \leq \tilde{\omega}(s, t)$$

が成立し $\omega(s, t) \leq \tilde{\omega}(s, t)$ が従い, $\omega(s, t) \geq \omega(s, t-h) (\forall h > 0)$ と併せて

$$\omega(s, t) = \tilde{\omega}(s, t) = \lim_{h \rightarrow +0} \omega(s, t-h)$$

を得る. いま, 任意に $s < u < t$ を取れば, 十分小さい $h_1, h_2 > 0$ に対して

$$\omega(s, u-h_1) + \omega(u, t-h_2) \leq \omega(s, t-h_2)$$

が満たされ, $h_1 \rightarrow +0, h_2 \rightarrow +0$ として

$$\tilde{\omega}(s, u) + \tilde{\omega}(u, t) \leq \tilde{\omega}(s, t)$$

が成り立つから $\tilde{\omega}$ は優加法性を持つ. また, もし或る $(u, v) \in \Delta_T$ に対して

$$\|\psi_{u,v}\|^p > \tilde{\omega}(u, v)$$

が成り立つと仮定すると ($u = v$ なら両辺 0 になるから $u < v$ である)

$$\|\psi_{u,v}\|^p > \tilde{\omega}(u, v) \geq \omega(u, v-h) \geq \|\psi_{u,v-h}\|^p, \quad (\forall h > 0)$$

となる. 一方 ψ の連続性より $\|\psi_{u,v-h}\|^p \rightarrow \|\psi_{u,v}\|^p$ ($h \rightarrow +0$) が従い矛盾が生じる. 同様にして, 任意の $t \in (0, T]$ に対し $[0, t) \ni s \mapsto \omega(s, t)$ の右連続性も出る.

第四段 任意の $t \in [0, T]$ に対して次を示す:

$$\lim_{h \rightarrow +0} \omega(t, t+h) = \inf_{h > 0} \omega(t, t+h) = 0.$$

第一の等号は前段より従うから, 第二の等号を背理法により証明する. いま

$$\inf_{h > 0} \omega(t, t+h) =: \delta > 0$$

と仮定すれば, ψ の連続性より或る h_1 が存在して

$$\|\psi_{t,t+h}\|^p = \|\psi_{t,t+h} - \psi_{t,t}\|^p < \frac{\delta}{8}, \quad (\forall h < h_1) \quad (3)$$

が成立する. ここで任意に $h_0 < h_1$ を取り固定する. 一方で $\omega(t, t+h_0) \geq \delta$ より

$$\sum_{i=1}^N \|\psi_{\tau_{i-1}, \tau_i}\|^p > \frac{7\delta}{8}$$

を満たす $D = \{t = \tau_0 < \tau_1 < \cdots, \tau_N = t + h_0\} \in \delta[t, t + h_0]$ が存在し, (3) と併せて

$$\sum_{i=2}^N \|\psi_{\tau_{i-1}, \tau_i}\|^p > \frac{7\delta}{8} - \|\psi_{t, \tau_1}\|^p > \frac{7\delta}{8} - \frac{\delta}{8} = \frac{3\delta}{4}$$

を得る. また, $\omega(t, \tau_1) \geq \delta$ より或る $D' \in \delta[t, \tau_1]$ が存在して

$$\sum_{D'} \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p > \frac{3\delta}{4}$$

を満たすから, $D' \cup \{\tau_1 < \cdots, \tau_N = t + h_0\} \in \delta[t, t + h_0]$ に対して

$$\omega(t, t + h_0) > \sum_{D'} \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p + \sum_{i=2}^N \|\psi_{\tau_{i-1}, \tau_i}\|^p > \frac{3\delta}{2}$$

が従うが, $h_0 < h_1$ の任意性と単調減少性により

$$\delta = \inf_{h>0} \omega(t, t + h) = \inf_{h_1>h>0} \omega(t, t + h) \geq \frac{3\delta}{2}$$

となり矛盾が生じる. 同様にして

$$\lim_{h \rightarrow +0} \omega(t - h, t) = 0, \quad (\forall t \in (0, T))$$

も成立する.

第五段 任意に $s \in [0, T)$ を取り固定し, $[s, T) \ni t \mapsto \omega(s, t)$ が右連続であることを示す.

$$\lim_{h \rightarrow +0} \omega(s, t + h) \leq \omega(s, t) \quad (4)$$

を示せば, 第二段より逆向きの不等号も従い右連続性を得る. 任意に $h, \epsilon > 0$ を取れば,

$$\omega(s, t + h) - \epsilon \leq \sum_D \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p$$

を満たす $D \in \delta[s, t + h]$ が存在し,

$$D_1 := \{t_0 < \cdots < t_k\} = [s, t] \cap D, \quad D_2 := D \setminus (D_1 \cup \{t_{k+1}\})$$

とおくと

$$\begin{aligned} \omega(s, t + h) - \epsilon &\leq \sum_{i=1}^k \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p + \|\psi_{t_k, t_{k+1}}\|^p + \sum_{D_2} \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p \\ &= \sum_{i=1}^k \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p + \|\psi_{t_k, t}\|^p + \|\psi_{t_k, t_{k+1}}\|^p - \|\psi_{t_k, t}\|^p + \sum_{D_2} \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p \\ &\leq \omega(s, t) + \omega(t, t + h) + \|\psi_{t_k, t_{k+1}}\|^p - \|\psi_{t_k, t}\|^p \end{aligned}$$

が成り立つ. ψ の一様連続性より $\|\psi_{t_k, t_{k+1}}\|^p \rightarrow \|\psi_{t_k, t}\|^p$ ($h \rightarrow +0$) が成り立つから

$$\lim_{h \rightarrow +0} \omega(s, t + h) - \epsilon \leq \omega(s, t), \quad (\forall \epsilon > 0)$$

が従い (4) が出る. 同様に $(0, t] \ni s \mapsto \omega(s, t)$ ($\forall t \in (0, T)$) の左連続性も成立する.

第六段 ω の $(s, t) \in \Delta_T$ における連続性を示す. $h, k \geq 0$ とする.

(A) (s, t) を基準に第一象限の点について

$$\begin{aligned}
& |\omega(s, t) - \omega(s + h, t + k)| \\
& \leq |\omega(s, t) - \omega(s + h, t)| + |\omega(s + h, t) - \omega(s + h, t + k)| \\
& = |\omega(s, t) - \omega(s + h, t)| + \omega(s + h, t + k) - \omega(s + h, t) \\
& \leq |\omega(s, t) - \omega(s + h, t)| + \omega(s, t + k) - \omega(s + h, t) \\
& \leq |\omega(s, t) - \omega(s + h, t)| + |\omega(s, t + k) - \omega(s, t)| + |\omega(s, t) - \omega(s + h, t)|
\end{aligned}$$

が成り立つ。前段までに示した左右の連続性より、近づけ方に依らず $h, k \rightarrow +0$ とすれば、左辺をいくらでも 0 に近づけることができる。

(B) (s, t) を基準に第三象限の点について

$$\begin{aligned}
& |\omega(s, t) - \omega(s - h, t - k)| \\
& \leq |\omega(s, t) - \omega(s - h, t)| + |\omega(s - h, t) - \omega(s - h, t - k)| \\
& = |\omega(s, t) - \omega(s - h, t)| + \omega(s - h, t) - \omega(s - h, t - k) \\
& \leq |\omega(s, t) - \omega(s - h, t)| + \omega(s - h, t) - \omega(s, t - k) \\
& \leq |\omega(s, t) - \omega(s - h, t)| + |\omega(s - h, t) - \omega(s, t)| + |\omega(s, t) - \omega(s, t - k)|,
\end{aligned}$$

が成り立つ。(A) と同じく $h, k \rightarrow +0$ として左辺は 0 に収束する。

(C) $((h_n, k_n))_{n=1}^{\infty}$ を第一象限から $(0, 0)$ に近づく任意の点列とすると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega(s - h_n, t + k_n) = \omega(s, t), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \omega(s + h_n, t - k_n) = \omega(s, t)$$

が成り立つことを示す。これが示されれば

$$\lim_{h, k \rightarrow +0} \omega(s - h, t + k) = \omega(s, t), \quad \lim_{h, k \rightarrow +0} \omega(s + h, t - k) = \omega(s, t)$$

が従い、(A)(B) と併せて ω の連続性が出る。背理法で証明する。いま、

$$\alpha := \lim_{n \rightarrow \infty} \omega(s - h_n, t + k_n) > \omega(s, t)$$

と仮定して $\epsilon := \alpha - \omega(s, t)$ とおく。 $\lim_{t' \downarrow t} \omega(s, t') = \omega(s, t)$ より

$$0 \leq \omega(s, t') - \omega(s, t) < \frac{\epsilon}{3}$$

を満たす $t' > t$ が存在し、また $\lim_{s' \uparrow s} \omega(s', t') = \omega(s, t')$ より

$$0 \leq \omega(s', t') - \omega(s, t') < \frac{\epsilon}{3}$$

を満たす $s' < s$ も存在する。このとき或る n で $s' \leq s - h_n$, $t + k_n \leq t'$ かつ

$$|\omega(s - h_n, t + k_n) - \alpha| < \frac{\epsilon}{3}$$

が成立し、特に $(s - h_n, t + k_n) \in (s', t')$ より

$$\omega(s - h_n, t + k_n) \leq \omega(s', t')$$

となるはずであるが、一方で

$$\omega(s', t') < \frac{2}{3}\epsilon + \omega(s, t) = \alpha - \frac{\epsilon}{3} < \omega(s - h_n, t + k_n)$$

が従い矛盾が生じる。よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega(s - h_n, t + k_n) = \omega(s, t)$$

でなくてはならず、同様にして $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega(s + h_n, t - k_n) = \omega(s, t)$ も得られる。 ■

定理 0.2.6 (control function の例). 以下の関数 $\omega : \Delta_T \rightarrow [0, \infty)$ は control function である.

- (1) $\omega : (s, t) \mapsto \|X^1\|_{p:[s,t]}^p, \quad (p \geq 1, x \in B_{p,T}(\mathbb{R}^d)).$
- (2) $\omega : (s, t) \mapsto \|X^2\|_{p:[s,t]}^p, \quad (p \geq 1, x \in C^1).$

行列 $a = (a_j^i)$ のノルムは $|a| = \sqrt{\sum_{i,j} |a_j^i|^2}$ として考える.

定理 0.2.7.

- (1) $\omega : (s, t) \mapsto X_{s,t}^1 = x_t - x_s$ は連続であるから, 前定理より ω は control function である.
- (2) 任意の $[s, t] \subset [0, T]$ に対して $\|X^2\|_{p:[s,t]}^p < \infty$ を示せば, あとは上と同じ理由により定理の主張が得られる. 実際, 任意の分割 $D = \{s = t_0 < \dots < t_N = t\}$ に対し

$$\begin{aligned} \|X_{t_{i-1}, t_i}^2\| &\leq \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (x_u - x_{t_{i-1}}) \otimes \dot{x}_u du \right\| \\ &\leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} |(x_u - x_{t_{i-1}}) \otimes \dot{x}_u| du \\ &\leq \|x\|_{C^1}^2 \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - s) du \right\}^{1/p} \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - s) du \right\}^{1-1/p} \\ &\leq \|x\|_{C^1}^2 \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - s) du \right\}^{1/p} \left\{ \int_s^t (u - s) du \right\}^{1-1/p} \end{aligned}$$

が成り立つから,

$$\begin{aligned} \sum_D \|X_{t_{i-1}, t_i}^2\|^p &\leq \sum_D \|x\|_{C^1}^{2p} \left\{ \frac{1}{2}(t - s)^2 \right\}^{p-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - s) du \\ &= \|x\|_{C^1}^{2p} \left\{ \frac{1}{2}(t - s)^2 \right\}^{p-1} \int_s^t (u - s) du = \|x\|_{C^1}^{2p} \left\{ \frac{1}{2}(t - s)^2 \right\}^p \end{aligned}$$

により $\|X^2\|_{p:[s,t]}^p < \infty$ が従う. ■

補題 0.2.8. ω を Δ_T 上の control function とする. $D = \{s = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t\}$ について, $N \geq 2$ の場合或る $1 \leq i \leq N - 1$ が存在して次を満たす:

$$\omega(t_{i-1}, t_{i+1}) \leq \frac{2\omega(s, t)}{N - 1}. \quad (5)$$

証明. (会田先生のテキスト.) ■

定理 0.2.9 ($1 \leq p < 2$ の場合の連続性定理). $1 \leq p < 2$ とし, $x_0 = y_0$ を満たす $x, y \in C^1$ と $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$, $0 < \epsilon, R < \infty$ を任意に取る. このとき,

$$\|X^1\|_p, \|Y^1\|_p \leq R, \quad \|X^1 - Y^1\|_p \leq \epsilon$$

なら, 或る定数 $C = C(p, R, f)$ が存在し, 任意の $0 \leq s \leq t \leq T$ に対して次が成立する:

$$|I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y)| \leq \epsilon C.$$

系 0.2.10 (p -variation による閉球上の Lipschitz 連続性). $1 \leq p < 2$ とし, $x_0 = y_0$ を満たす $x, y \in C^1$ と $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$, $0 < R < \infty$ を任意に取る. このとき,

$$\|X^1\|_p, \|Y^1\|_p \leq R$$

なら, 或る定数 $C = C(p, R, f)$ が存在して次を満たす:

$$|I_{0,T}(x) - I_{0,T}(y)| \leq C \|X^1 - Y^1\|_p.$$

証明 (系 0.2.10). 定理 0.2.9 において, $\epsilon = \|X^1 - Y^1\|_p (x \neq y)^{*3}$ として証明が通る. ■

証明 (定理 0.2.9). $[s, t] \subset [0, T]$ とする.

第一段 $\omega : \Delta_T \rightarrow [0, \infty)$ を

$$\omega(\alpha, \beta) = \|X^1\|_{p, [\alpha, \beta]}^p + \|Y^1\|_{p, [\alpha, \beta]}^p + \epsilon^{-p} \|X^1 - Y^1\|_{p, [\alpha, \beta]}^p, \quad ((\alpha, \beta) \in \Delta_T)$$

で定めれば, 定理 0.2.6 により $1 \leq p$ の下で ω は control function である.

第二段 任意に $[s, t]$ の分割 $D = \{s = t_0 < \dots < t_N = t\}$ ($N \geq 2$) を取れば, 補題 0.2.8 より (5) を満たす $t_{(0)}$ が存在する. ここで, $D_{-0} := D$, $D_{-1} := D \setminus \{t_{(0)}\}$ と定める. $N \geq 3$ ならば D_{-1} についても (5) を満たす $t_{(1)}$ が存在するから, $D_{-2} := D_{-1} \setminus \{t_{(1)}\}$ と定める. この操作を繰り返せば $t_{(k)}, D_{-k}$ ($k = 0, 1, \dots, N-1$) が得られ,

$$\begin{aligned} & \tilde{I}_{s,t}(x, D) - \tilde{I}_{s,t}(y, D) \\ &= \sum_{k=0}^{N-2} \left[\left\{ \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1}) \right\} - \left\{ \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k-1}) \right\} \right] \\ & \quad + \left\{ \tilde{I}_{s,t}(x) - \tilde{I}_{s,t}(y) \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

と表現できる.

第三段 式 (6) について, 次を満たす定数 C_1 が存在することを示す:

$$|(6)| \leq \epsilon C_1 \quad (7)$$

^{*3} $x = y$ なら $\|X^1 - Y^1\|_p = 0$ かつ $I_{s,t}(x) = I_{s,t}(y)$ が成り立つ.

見やすくするために $t_k = t_{(k)}$ と書き直せば,

$$\begin{aligned}
& \left\{ \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1}) \right\} - \left\{ \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k-1}) \right\} \\
&= \{f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}})\} X_{t_k, t_{k+1}}^1 - \{f(y_{t_k}) - f(y_{t_{k-1}})\} Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \\
&= \{f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}})\} (X_{t_k, t_{k+1}}^1 - Y_{t_k, t_{k+1}}^1) \\
&\quad + \{f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}})\} Y_{t_k, t_{k+1}}^1 - \{f(y_{t_k}) - f(y_{t_{k-1}})\} Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \\
&= \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes (X_{t_k, t_{k+1}}^1 - Y_{t_k, t_{k+1}}^1) d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 d\theta \\
&\quad - \int_0^1 (\nabla f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 d\theta \\
&= \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes (X_{t_k, t_{k+1}}^1 - Y_{t_k, t_{k+1}}^1) d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) (X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 d\theta \\
&\quad - \int_0^1 (\nabla f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 d\theta \\
&= \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes (X_{t_k, t_{k+1}}^1 - Y_{t_k, t_{k+1}}^1) d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) (X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}) + r(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) - y_{t_{k-1}} - \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))) \\
&\quad \quad (X_{0, t_{k-1}}^1 - Y_{0, t_{k-1}}^1) \otimes Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta^{*4} \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}) + r(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) - y_{t_{k-1}} - \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))) \\
&\quad \quad \theta(X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \otimes Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta
\end{aligned}$$

が成り立つ. 補題 0.2.8 より

$$\begin{aligned}
& |X_{t_{k-1}, t_k}^1|, |Y_{t_{k-1}, t_k}^1|, |X_{t_k, t_{k+1}}^1|, |Y_{t_k, t_{k+1}}^1| \leq \omega(t_{k-1}, t_{k+1})^{1/p} \leq \left(\frac{2\omega(s, t)}{N - k - 1} \right)^{1/p}, \\
& |X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1|, |X_{t_k, t_{k+1}}^1 - Y_{t_k, t_{k+1}}^1| \leq \epsilon \omega(t_{k-1}, t_{k+1})^{1/p} \leq \epsilon \left(\frac{2\omega(s, t)}{N - k - 1} \right)^{1/p}
\end{aligned}$$

が満たされ, また

$$|X_{0, t_{k-1}}^1 - Y_{0, t_{k-1}}^1| \leq \epsilon \omega(0, t_{k-1})^{1/p} \leq \epsilon \omega(0, T)^{1/p} \leq \epsilon (2R^p + 1)^{1/p}$$

でもあるから,

$$M := \sum_{i,j} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f_j^i(x)| + \sum_{i,j,k} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial_k f_j^i(x)| + \sum_{i,j,k,v} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial_v \partial_k f_j^i(x)| \quad (8)$$

^{*4} $x_0 = y_0$ の仮定より $x_{t_{k-1}} - y_{t_{k-1}} = X_{0, t_{k-1}}^1 - Y_{0, t_{k-1}}^1$ が成り立つ.

と定めて

$$\begin{aligned}
& \left| \left\{ \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1}) \right\} - \left\{ \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k-1}) \right\} \right| \\
& \leq M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| X_{t_k, t_{k+1}}^1 - Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \right| \\
& \quad + M \left| X_{0, t_{k-1}}^1 - Y_{0, t_{k-1}}^1 \right| \left| Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \right| \\
& \leq \epsilon M \left[2 + 2(2R^p + 1)^{1/p} \right] \left(\frac{2\omega(s, t)}{N - k - 1} \right)^{2/p} \\
& \leq \epsilon M \left[2 + 2(2R^p + 1)^{1/p} \right] 2^{2/p} (2R^p + 1)^{2/p} \left(\frac{1}{N - k - 1} \right)^{2/p}
\end{aligned}$$

を得る.

$$C'_1 := M \left[2 + 2(2R^p + 1)^{1/p} \right] 2^{2/p} (2R^p + 1)^{2/p}$$

とおけば

$$|(6)| \leq \sum_{k=0}^{N-2} \epsilon C'_1 \left(\frac{1}{N - k - 1} \right)^{2/p} < \epsilon C'_1 \zeta\left(\frac{2}{p}\right)$$

が成立し, $p < 2$ より $\zeta(2/p) < \infty$ であるから $C_1 := C'_1 \zeta(2/p)$ とおいて (7) が従う.

第四段 $x_0 = y_0$ の仮定により $x_s - y_s = X_{0,s}^1 - Y_{0,s}^1$ が成り立ち

$$\begin{aligned}
\left| \tilde{I}_{s,t}(x) - \tilde{I}_{s,t}(y) \right| &= \left| f(x_s) X_{s,t}^1 - f(y_s) Y_{s,t}^1 \right| \\
&\leq \left| f(x_s) X_{s,t}^1 - f(x_s) Y_{s,t}^1 \right| + \left| f(x_s) Y_{s,t}^1 - f(y_s) Y_{s,t}^1 \right| \\
&\leq M \left| X_{s,t}^1 - Y_{s,t}^1 \right| + \left| \int_0^1 (\nabla f)(y_s + \theta(x_s - y_s)) \left[(X_{0,s}^1 - Y_{0,s}^1) \otimes Y_{s,t}^1 \right] d\theta \right| \\
&\leq M \left| X_{s,t}^1 - Y_{s,t}^1 \right| + M \left| X_{0,s}^1 - Y_{0,s}^1 \right| \left| Y_{s,t}^1 \right| \\
&\leq M \epsilon \omega(s, t)^{1/p} + M \epsilon \omega(0, s)^{1/p} \omega(s, t)^{1/p} \\
&\leq \epsilon M \left[(2R^p + 1)^{1/p} + (2R^p + 1)^{2/p} \right]
\end{aligned}$$

が従う. ここで $C_2 := M \left[(2R^p + 1)^{1/p} + (2R^p + 1)^{2/p} \right]$ とおく.

第五段 第二段と第三段より, 任意の $D \in \delta[s, t]$ に対し

$$\left| \tilde{I}_{s,t}(x, D) - \tilde{I}_{s,t}(y, D) \right| \leq \epsilon(C_1 + C_2)$$

が成立し. 定理 0.2.2 により $|D| \rightarrow 0$ として

$$\left| I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y) \right| \leq \epsilon(C_1 + C_2)$$

が出る. ■

定理 0.2.11 ($2 \leq p < 3$ の場合の連続性定理). $2 \leq p < 3$ とし, $x_0 = y_0$ を満たす $x, y \in C^1$ と $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$, $0 < \epsilon, R < \infty$ を任意に取る. このとき,

$$\begin{aligned} & \|X^1\|_p, \|Y^1\|_p, \|X^2\|_{p/2}, \|Y^2\|_{p/2} \leq R < \infty, \\ & \|X^1 - Y^1\|_p, \|X^2 - Y^2\|_{p/2} \leq \epsilon \end{aligned}$$

なら, 或る定数 $C = C(p, R, f)$ が存在し, 任意の $0 \leq s \leq t \leq T$ に対して次が成立する:

$$|I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y)| \leq \epsilon C.$$

系 0.2.12. $1 \leq p < 2$ とし, $x_0 = y_0$ を満たす $x, y \in C^1$ と $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$, $0 < R < \infty$ を任意に取る. このとき,

$$\|X^1\|_p, \|Y^1\|_p, \|X^2\|_{p/2}, \|Y^2\|_{p/2} \leq R$$

なら, 或る定数 $C = C(p, R, f)$ が存在して次を満たす:

$$|I_{0,T}(x) - I_{0,T}(y)| \leq C (\|X^1 - Y^1\|_p + \|X^2 - Y^2\|_{p/2}).$$

証明 (系 0.2.12). 定理 0.2.11 において, $\epsilon = \|X^1 - Y^1\|_p + \|X^2 - Y^2\|_{p/2}$ ($x \neq y$) として証明が通る. ■

証明 (定理 0.2.12). $[s, t] \subset [0, T]$ とする.

第一段 $\omega : \Delta_T \rightarrow [0, \infty)$ を

$$\begin{aligned} \omega(\alpha, \beta) &= \|X^1\|_{p, [\alpha, \beta]}^p + \|Y^1\|_{p, [\alpha, \beta]}^p + \|X^2\|_{p/2, [\alpha, \beta]}^{p/2} + \|Y^2\|_{p/2, [\alpha, \beta]}^{p/2} \\ &\quad + \epsilon^{-p} \|X^1 - Y^1\|_{p, [\alpha, \beta]}^p + \epsilon^{-p/2} \|X^2 - Y^2\|_{p/2, [\alpha, \beta]}^{p/2}, \quad ((\alpha, \beta) \in \Delta_T) \end{aligned}$$

で定めれば, 定理 0.2.6 により $2 \leq p$ の下で ω は control function である.

第二段 $D \in \delta[s, t]$ に対し, 定理 0.2.9 の証明と同様にして $t_{(k)}, D_{-k}$ を構成すれば

$$\begin{aligned} & J_{s,t}(x, D) - J_{s,t}(y, D) \\ &= \sum_{k=0}^{N-2} [\{J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})\} - \{J_{s,t}(y, D_{-k}) - J_{s,t}(y, D_{-k-1})\}] \\ &\quad + \{J_{s,t}(x) - J_{s,t}(y)\} \end{aligned} \tag{9}$$

と表現できる.

第三段 $J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})$ を変形する. 以降 $t_k = t_{(k)}$ と書き直せば

$$\begin{aligned} & J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1}) \\ &= J_{t_{k-1}, t_k}(x) + J_{t_k, t_{k+1}}(x) - J_{t_{k-1}, t_{k+1}}(x) \\ &= f(x_{t_{k-1}})X_{t_{k-1}, t_k}^1 + f(x_{t_k})X_{t_k, t_{k+1}}^1 - f(x_{t_{k-1}})X_{t_{k-1}, t_{k+1}}^1 \\ &\quad + (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X_{t_{k-1}, t_k}^2 + (\nabla f)(x_{t_k})X_{t_k, t_{k+1}}^2 - (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X_{t_{k-1}, t_{k+1}}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \{f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}})\} X_{t_k, t_{k+1}}^1 \\
&\quad + (\nabla f)(x_{t_{k-1}}) X_{t_{k-1}, t_k}^2 + (\nabla f)(x_{t_k}) X_{t_k, t_{k+1}}^2 - (\nabla f)(x_{t_{k-1}}) X_{t_{k-1}, t_{k+1}}^2 \\
&= \int_0^1 \{(\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) - (\nabla f)(x_{t_{k-1}})\} X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_k, t_{k+1}}^1 d\theta \\
&\quad + (\nabla f)(x_{t_{k-1}}) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_k, t_{k+1}}^1 \\
&\quad + (\nabla f)(x_{t_{k-1}}) X_{t_{k-1}, t_k}^2 + (\nabla f)(x_{t_k}) X_{t_k, t_{k+1}}^2 - (\nabla f)(x_{t_{k-1}}) X_{t_{k-1}, t_{k+1}}^2 \\
&= \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
&\quad + (\nabla f)(x_{t_{k-1}}) (X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_k, t_{k+1}}^1 + X_{t_{k-1}, t_k}^2 - X_{t_{k-1}, t_{k+1}}^2) \\
&\quad + (\nabla f)(x_{t_k}) X_{t_k, t_{k+1}}^2 \\
&= \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
&\quad + \{(\nabla f)(x_{t_k}) - (\nabla f)(x_{t_{k-1}})\} X_{t_k, t_{k+1}}^2 \\
&= \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_k, t_{k+1}}^2 d\theta
\end{aligned}$$

を得る.

第四段 式 (9) について, 次を満たす定数 C_1 が存在することを示す:

$$|(9)| \leq \epsilon C_1. \quad (10)$$

実際, 前段の結果より

$$\begin{aligned}
&\{J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})\} - \{J_{s,t}(y, D_{-k}) - J_{s,t}(y, D_{-k-1})\} \\
&= \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_k, t_{k+1}}^2 d\theta \\
&\quad - \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
&\quad - \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^2 d\theta \\
&= \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes (X_{t_k, t_{k+1}}^1 - Y_{t_k, t_{k+1}}^1) dr d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes (X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^\theta \{(\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) - (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))\} \\
&\quad \quad X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) (X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \otimes Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes (X_{t_k, t_{k+1}}^2 - Y_{t_k, t_{k+1}}^2) d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \{(\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) - (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^2 d\theta \\
& + \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) (X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^2 d\theta \\
= & \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes (X_{t_k, t_{k+1}}^1 - Y_{t_k, t_{k+1}}^1) dr d\theta \\
& + \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes (X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
& + \int_0^1 \int_0^\theta \int_0^1 (\nabla^3 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}) + u(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) - y_{t_{k-1}} - r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))) \\
& \quad \left\{ (X_{0, t_{k-1}}^1 - Y_{0, t_{k-1}}^1) + r(X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \right\} \otimes X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 du dr d\theta \\
& + \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) (X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \otimes Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
& + \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes (X_{t_k, t_{k+1}}^2 - Y_{t_k, t_{k+1}}^2) d\theta \\
& + \int_0^1 \int_0^1 (\nabla^3 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}) + r(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) - y_{t_{k-1}} - \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))) \\
& \quad \left\{ (X_{0, t_{k-1}}^1 - Y_{0, t_{k-1}}^1) + \theta(X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \right\} \otimes X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^2 dr d\theta \\
& + \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) (X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^2 d\theta
\end{aligned}$$

が成り立つから,

$$\begin{aligned}
M := & \sum_{i,j} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f_j^i(x)| + \sum_{i,j,k} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial_k f_j^i(x)| \\
& + \sum_{i,j,k,v} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial_v \partial_k f_j^i(x)| + \sum_{i,j,k,v,w} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial_w \partial_v \partial_k f_j^i(x)|
\end{aligned} \tag{11}$$

において

$$\begin{aligned}
& \left| \{J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})\} - \{J_{s,t}(y, D_{-k}) - J_{s,t}(y, D_{-k-1})\} \right| \\
& \leq M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| X_{t_k, t_{k+1}}^1 - Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \right| \\
& \quad + M \left| X_{0, t_{k-1}}^1 - Y_{0, t_{k-1}}^1 \right| \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| X_{t_k, t_{k+1}}^2 - Y_{t_k, t_{k+1}}^2 \right| \\
& \quad + M \left| X_{0, t_{k-1}}^1 - Y_{0, t_{k-1}}^1 \right| \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^2 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^2 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^2 \right| \\
& \leq \epsilon M \left[5 + 2\omega(0, t_{k-1})^{1/p} + 2\omega(t_{k-1}, t_k)^{1/p} \right] \left(\frac{2\omega(s, t)}{N - k - 1} \right)^{3/p} \\
& \leq \epsilon M \left[2 + 4 \left(2R^p + 2R^{p/2} + 2 \right)^{1/p} \right] 2^{3/p} \left(2R^p + 2R^{p/2} + 2 \right)^{3/p} \left(\frac{1}{N - k - 1} \right)^{3/p}
\end{aligned}$$

を得る. ここで

$$C'_1 := M \left[2 + 4 \left(2R^p + 2R^{p/2} + 2 \right)^{1/p} \right] 2^{3/p} \left(2R^p + 2R^{p/2} + 2 \right)^{3/p}$$

と定めれば

$$|(9)| \leq \sum_{k=0}^{N-2} \epsilon C'_1 \left(\frac{1}{N-k-1} \right)^{3/p} < \epsilon C'_1 \zeta \left(\frac{3}{p} \right)$$

が成立し、 $p < 3$ より $\zeta(3/p) < \infty$ であるから $C_1 := C'_1 \zeta(3/p)$ とおいて (10) が出る。

第五段 $x_0 = y_0$ の仮定により

$$\begin{aligned} & |J_{s,t}(x) - J_{s,t}(y)| \\ & \leq |f(x_s)X_{s,t}^1 - f(y_s)Y_{s,t}^1| + |(\nabla f)(x_s)X_{s,t}^2 - (\nabla f)(y_s)Y_{s,t}^2| \\ & \leq |f(x_s)X_{s,t}^1 - f(x_s)Y_{s,t}^1| + |f(x_s)Y_{s,t}^1 - f(y_s)Y_{s,t}^1| \\ & \quad + |(\nabla f)(x_s)X_{s,t}^2 - (\nabla f)(x_s)Y_{s,t}^2| + |(\nabla f)(x_s)Y_{s,t}^2 - (\nabla f)(y_s)Y_{s,t}^2| \\ & \leq M |X_{s,t}^1 - Y_{s,t}^1| + \left| \int_0^1 (\nabla f)(y_s + \theta(x_s - y_s))(x_s - y_s) \otimes Y_{s,t}^1 d\theta \right| \\ & \quad + M |X_{s,t}^2 - Y_{s,t}^2| + \left| \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_s + \theta(x_s - y_s))(x_s - y_s) \otimes Y_{s,t}^2 d\theta \right| \\ & \leq M |X_{s,t}^1 - Y_{s,t}^1| + M |X_{0,s}^1 - Y_{0,s}^1| |Y_{s,t}^1| \\ & \quad + M |X_{s,t}^2 - Y_{s,t}^2| + M |X_{0,s}^1 - Y_{0,s}^1| |Y_{s,t}^2| \\ & \leq \epsilon M \omega(s, t)^{1/p} + \epsilon M \omega(0, s)^{1/p} \omega(s, t)^{1/p} \\ & \quad + \epsilon M \omega(s, t)^{2/p} + \epsilon M \omega(0, s)^{1/p} \omega(s, t)^{2/p} \\ & \leq \epsilon M \left[\omega(0, T)^{1/p} + 2\omega(0, T)^{2/p} + \omega(0, T)^{3/p} \right] \\ & \leq \epsilon M \left[(2R^p + 2R^{p/2} + 2)^{1/p} + 2(2R^p + 2R^{p/2} + 2)^{2/p} + (2R^p + 2R^{p/2} + 2)^{3/p} \right] \end{aligned}$$

が従う。ここで最下段の ϵ の係数を C_2 とおく。

第六段 以上より、任意の $D \in \delta[s, t]$ に対し

$$|J_{s,t}(x, D) - J_{s,t}(y, D)| \leq \epsilon(C_1 + C_2)$$

が成り立ち、定理 0.2.2 により $|D| \rightarrow 0$ として

$$|I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y)| \leq \epsilon(C_1 + C_2)$$

が出る。 ■

系 0.2.13 (パスが 0 出発なら f の有界性は要らない). 定理 0.2.9 と定理 0.2.11 について、 $x, y \in \tilde{C}^1$ ならば $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ として主張が成り立つ。

証明. $x_0 = 0$ なら

$$\|X^1\|_p \leq R \quad \Rightarrow \quad |x_t| \leq R \quad (\forall t \in [0, T])$$

が成り立つから、式 (8) と (11) において $\sup_{x \in \mathbb{R}^d}$ を $\sup_{|x| \leq 9R}$ に替えればよい。 ■

0.3 Young 積分

補題 0.3.1. $x \in C^1$, $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ とする.

(1) $1 \leq p < 2$ の場合, 或る control function ω が存在して

$$|X_{s,t}^1| \leq \omega(s, t)^{1/p}, \quad (0 \leq \forall s \leq \forall t \leq T)$$

を満たすとき, ある定数 $C = C(p, f)$ があり

$$|I_{s,t}(x)| \leq C (\omega(s, t)^{1/p} + \omega(s, t)^{2/p}).$$

が成立する.

(2) $2 \leq p < 3$ の場合, 或る control function ω が存在して

$$|X_{s,t}^1| \leq \omega(s, t)^{1/p}, \quad |X_{s,t}^2| \leq \omega(s, t)^{2/p}, \quad (0 \leq \forall s \leq \forall t \leq T)$$

を満たすとき, ある定数 $C = C(p, f)$ があり

$$|I_{s,t}(x)| \leq C (\omega(s, t)^{1/p} + \omega(s, t)^{2/p} + \omega(s, t)^{3/p}).$$

が成立する.

証明.

(1) $D = \{s = t_0 < \cdots < t_N = t\}$ ($N \geq 2$) に対し, 補題 0.2.8 により存在する i を取り $D_{-1} := D \setminus \{i\}$ と書く. 補題 0.2.8 の添数を除く作業を続けて D_{-k} ($k = 1, \dots, N-1$) を構成する.

$$M := \max_{\substack{t \in [0, T] \\ 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j, k \leq d}} |\partial_k f_j^i(x_t)|, \quad M' := \max_{t \in [0, T]} |f(x_t)|$$

とおけば $M, M' < \infty$ であり, $|X_{t_i, t_{i+1}}^1| \leq \omega(t_i, t_{i+1})^{1/p} \leq \omega(t_{i-1}, t_{i+1})^{1/p}$ と補題 0.2.8 により

$$\begin{aligned} |\tilde{I}_{s,t}(x, D) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-1})| &= |\tilde{I}_{t_{i-1}, t_i}(x) + \tilde{I}_{t_i, t_{i+1}}(x) - \tilde{I}_{t_{i-1}, t_{i+1}}(x)| \\ &\leq |\{f(x_{t_i}) - f(x_{t_{i-1}})\} X_{t_i, t_{i+1}}^1| \\ &\leq \left| \left\{ \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{i-1}} + \theta(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})) d\theta \right\} X_{t_{i-1}, t_i}^1 \otimes X_{t_i, t_{i+1}}^1 \right| \\ &\leq md^2 M |X_{t_i, t_{i+1}}^1|^2 \\ &\leq md^2 M \left(\frac{2\omega(s, t)}{N-1} \right)^{2/p} \end{aligned}$$

が成立する. 同様に

$$|\tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1})| \leq md^2 M \left(\frac{2\omega(s, t)}{N-k-1} \right)^{2/p}, \quad (k = 0, \dots, N-2)$$

が成り立ち ($D_{-0} = D$)

$$\begin{aligned} |\tilde{I}_{s,t}(x, D) - f(x_s)X_{s,t}^1| &\leq \sum_{k=0}^{N-2} |\tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1})| \\ &\leq md^2 M(2\omega(s, t))^{2/p} \sum_{k=0}^{N-2} \left(\frac{1}{N-k-1} \right)^{2/p} \\ &\leq md^2 M(2\omega(s, t))^{2/p} \zeta\left(\frac{2}{p}\right) \end{aligned}$$

が従う。いま、仮定より $p < 2$ であるから $\zeta(2/p) < \infty$ であり、定理 0.2.2 より

$$|I_{s,t}(x)| \leq M' \omega(s, t)^{1/p} + md^2 M(2\omega(s, t))^{2/p} \zeta\left(\frac{2}{p}\right)$$

を得る。

(2) (1) と同様に D_{-k} ($k = 1, \dots, N-1$) を構成する。会田先生のノートの通りに

$$\begin{aligned} J_{s,t}(x, D) - J_{s,t}(x, D_{-1}) &= \left\{ \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{i-1}} + \theta(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})) dr d\theta \right\} X_{t_{i-1}, t_i}^1 \otimes X_{t_{i-1}, t_i}^1 \otimes X_{t_i, t_{i+1}}^1 \\ &\quad + \left\{ \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{i-1}} + \theta(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})) d\theta \right\} X_{t_{i-1}, t_i}^1 \otimes X_{t_i, t_{i+1}}^2 \end{aligned}$$

を得る。ここで (1) の M, M' に加えて

$$M'' := \max_{\substack{t \in [0, T] \\ 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j, k, v \leq d}} |\partial_v \partial_k f_j^i(x_t)|$$

とおけば

$$\begin{aligned} |J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})| &\leq md^2 M \left(\frac{2\omega(s, t)}{N-k-1} \right)^{3/p} + md^2 M'' \left(\frac{2\omega(s, t)}{N-k-1} \right)^{1/p} \left(\frac{2\omega(s, t)}{N-k-1} \right)^{2/p} \\ &\leq md^2 (M + M'') \left(\frac{2\omega(s, t)}{N-k-1} \right)^{3/p} \end{aligned}$$

が成立し、会田先生のノートの通りに

$$|J_{s,t}(x, D) - (f(x_s)X_{s,t}^1 + (\nabla f)(x_s)X_{s,t}^2)| \leq 2^{3/p} md^2 (M + M'') \zeta\left(\frac{3}{p}\right) \omega(s, t)^{3/p}$$

が従い、 $p < 3$ の仮定より $\zeta(3/p) < \infty$ である。(1) と同じく定理 0.2.2 より

$$|I_{s,t}(x)| \leq M' \omega(s, t)^{1/p} + md^2 M \omega(s, t)^{2/p} + 2^{3/p} md^2 (M + M'') \zeta\left(\frac{3}{p}\right) \omega(s, t)^{3/p}$$

となる。 ■

0.4 The notion of rough path

$(V, \|\cdot\|)$ を \mathbb{R} -Banach 空間とする。 $k \geq 2$ の場合、代数的 k 重テンソル積 $V^{\otimes_a k} = V \otimes_a \dots \otimes_a V$ にクロスノルム (定義.5.1) α_k を導入し、その完備化を $V^{\otimes k}$ と表しノルムを $|\cdot|_k$ と書く。

$V^{\otimes 0} = \mathbb{R}$ とし $T(V) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} V^{\otimes k}$ とおく.

ここで

$$(c_i)_{i=0}^{\infty} = (a_i)_{i=0}^{\infty} \otimes (b_i)_{i=0}^{\infty}$$

を

$$c_i = \sum_{j=0}^i a_j \otimes b_{i-j}$$

により定めれば

各テンソル積におけるノルムを $\|\cdot\|_k$ と表す.

連続かつ有界変動なパス $x : [0, T] \rightarrow V$ に対して次の積分

$$\int_s^t X_{s,u}^1 \otimes dx_u$$

を定めたい. ただし $X_{s,t}^1 = x_t - x_s$ ($(s, t) \in \Delta_T$) である. いま, 細分 $D = \{s = u_0 < \cdots < u_n = t\}$, $D' = \{s = v_0 < \cdots < v_m = t\} \in \delta[s, t]$ に対して, 共通細分を $D'' = \{s = w_0 < w_1 \leq \cdots \leq w_k = t\}$ と表し

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{s,w_k}^1 &:= X_{s,u_i}^1, & (u_i \leq w_k \leq u_{i+1}), \\ \hat{X}_{s,w_k}^1 &:= X_{s,v_j}^1, & (v_j \leq w_k \leq v_{j+1}) \end{aligned}$$

により \tilde{X}^1, \hat{X}^1 を定める. このとき

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_D X_{s,u_{i-1}}^1 \otimes X_{u_{i-1},u_i}^1 - \sum_{D'} X_{s,v_{j-1}}^1 \otimes X_{v_{j-1},v_j}^1 \right\|_{V^{\otimes 2}} \\ &= \left\| \sum_D X_{s,u_{i-1}}^1 \otimes X_{u_{i-1},u_i}^1 - \sum_{D''} X_{s,w_{k-1}}^1 \otimes X_{w_{k-1},w_k}^1 \right\|_{V^{\otimes 2}} \\ & \quad + \left\| \sum_{D'} X_{s,v_{j-1}}^1 \otimes X_{v_{j-1},v_j}^1 - \sum_{D''} X_{s,w_{k-1}}^1 \otimes X_{w_{k-1},w_k}^1 \right\|_{V^{\otimes 2}} \\ &= \left\| \sum_{D''} \tilde{X}_{s,w_{k-1}}^1 \otimes X_{w_{k-1},w_k}^1 - \sum_{D''} X_{s,w_{k-1}}^1 \otimes X_{w_{k-1},w_k}^1 \right\|_{V^{\otimes 2}} \\ & \quad + \left\| \sum_{D''} \hat{X}_{s,w_{k-1}}^1 \otimes X_{w_{k-1},w_k}^1 - \sum_{D''} X_{s,w_{k-1}}^1 \otimes X_{w_{k-1},w_k}^1 \right\|_{V^{\otimes 2}} \\ &= \left\| \sum_{D''} (\tilde{X}_{s,w_{k-1}}^1 - X_{s,w_{k-1}}^1) \otimes X_{w_{k-1},w_k}^1 \right\|_{V^{\otimes 2}} \\ & \quad + \left\| \sum_{D''} (\hat{X}_{s,w_{k-1}}^1 - X_{s,w_{k-1}}^1) \otimes X_{w_{k-1},w_k}^1 \right\|_{V^{\otimes 2}} \\ &\leq \sum_{D''} \|\tilde{X}_{s,w_{k-1}}^1 - X_{s,w_{k-1}}^1\| \|X_{w_{k-1},w_k}^1\| + \sum_{D''} \|\hat{X}_{s,w_{k-1}}^1 - X_{s,w_{k-1}}^1\| \|X_{w_{k-1},w_k}^1\| \\ &\leq \max_k \|\tilde{X}_{s,w_{k-1}}^1 - X_{s,w_{k-1}}^1\| \|X^1\|_{1,[s,t]} + \max_k \|\hat{X}_{s,w_{k-1}}^1 - X_{s,w_{k-1}}^1\| \|X^1\|_{1,[s,t]} \end{aligned}$$

が成立する. いま, $[s, t] \ni u \mapsto X_{s,u}^1$ は一様連続であるから $|D|, |D'| \rightarrow 0$ として右辺は 0 に収束する. 従って $D_n \in \delta[s, t]$ を $|D_n| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) を満たす細分列とすれば $\left(\sum_{D_n} X_{s,u_{i-1}}^1 \otimes X_{u_{i-1},u_i}^1 \right)_{n=1}^{\infty}$

は $V^{\otimes 2}$ の Cauchy 列となり $\in V^{\otimes 2}$ で収束する．別の細分列 $(D_m)_{m=1}^{\infty}$ ($|D_m| \rightarrow 0$) を取っても

$$\left\| \sum_{D_n} X_{s,u_{i-1}}^1 \otimes X_{u_{i-1},u_i}^1 - \sum_{D_m} X_{s,v_{j-1}}^1 \otimes X_{v_{j-1},v_j}^1 \right\|_{V^{\otimes 2}} \rightarrow 0, \quad (n, m \rightarrow \infty)$$

が成り立つから極限は細分列に依らず定まり，従って $\lim_{|D| \rightarrow 0} \sum_D X_{s,u_{i-1}}^1 \otimes X_{u_{i-1},u_i}^1$ が確定する．ここで

$$X_{s,t}^2 = \int_s^t X_{s,u}^1 \otimes dx_u := \lim_{|D| \rightarrow 0} \sum_D X_{s,u_{i-1}}^1 \otimes X_{u_{i-1},u_i}^1$$

と定める．このとき $\Delta_T \ni (s, t) \mapsto X_{s,t}^2 \in V^{\otimes 2}$ は連続である．

定理 0.4.1. $\Omega_p(V)$ は次で定める距離

$$d_p(X, Y) := \max_{1 \leq i \leq [p]} \|X^i - Y^i\|_{p/i}$$

により完備距離空間となる．

証明. $(X^k)_{k=1}^{\infty}$ を Cauchy 列とすれば，任意の $\epsilon > 0$ に対し或る $K \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\|X^{k,i} - X^{\ell,i}\|_{p/i} < \epsilon, \quad (\forall k, \ell > K, 1 \leq i \leq [p])$$

が成立する．よって定理 (0.1.7) より各 i に対し或る $X^i \in B_{p/i,T}(V)$ が存在して

$$\|X^{k,i} - X^i\|_{p/i} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty, 1 \leq i \leq [p])$$

を満たす． $X : \Delta_T \rightarrow T^{(n)}(V)$ を

$$X_{s,t} := (1, X_{s,t}^1, \dots, X_{s,t}^n), \quad ((s, t) \in \Delta_T)$$

により定めれば， X^i の連続性より X も連続である．さらに任意の $D \in \delta[0, T]$ に対して

$$\begin{aligned} \sum_D \|X_{t_{i-1},t_i}^k - X_{t_{i-1},t_i}\|^p &= \sum_D (\|X_{t_{i-1},t_i}^{k,1} - X_{t_{i-1},t_i}^1\| + \dots + \|X_{t_{i-1},t_i}^{k,n} - X_{t_{i-1},t_i}^n\|)^p \\ &\leq (n+1)^p \sum_D (\|X_{t_{i-1},t_i}^{k,1} - X_{t_{i-1},t_i}^1\|^p + \dots + \|X_{t_{i-1},t_i}^{k,n} - X_{t_{i-1},t_i}^n\|^p) \\ &\leq (n+1)^p (\|X_{t_{i-1},t_i}^{k,1} - X_{t_{i-1},t_i}^1\|_p^p + \dots + \|X_{t_{i-1},t_i}^{k,n} - X_{t_{i-1},t_i}^n\|_p^p) \end{aligned}$$

が成立するから，定理より

$$\sup_D \sum_D \|X_{t_{i-1},t_i}^k - X_{t_{i-1},t_i}\|^p \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

が従い X の p -variation の有界性が出る．

■

.1 多重線型写像

定理 .1.1 (多重線型写像の一意拡張). $(X_i)_{i=1}^n$ をノルム空間, Z を Banach 空間, Y_i を X_i の稠密な部分空間とする ($i = 1, \dots, n$). このとき, 有界 n 重線型写像 $b: \bigoplus_{i=1}^n Y_i \rightarrow Z$ は $(X_i)_{i=1}^n$ 上の Z 値 n 重線型写像 \tilde{b} に一意に拡張され, b と \tilde{b} の作用素ノルムは一致する.

証明. $\bigoplus_{i=1}^n Y_i$ は $\bigoplus_{i=1}^n X_i$ で稠密であるから, 任意の $x = (x_1, \dots, x_n) \in \bigoplus_{i=1}^n X_i$ に対して

$$\|x - x^k\|_{\bigoplus_{i=1}^n X_i} = \sum_{i=1}^n \|x_i - x_i^k\|_{X_i} \rightarrow 0, \quad (k \rightarrow \infty)$$

を満たす点列 $x^k = (x_1^k, \dots, x_n^k) \in \bigoplus_{i=1}^n Y_i$ ($k = 1, 2, \dots$) が存在する.

$$M_i := \sup_{k \geq 1} \|x_i^k\|_{X_i}, \quad (i = 1, \dots, n)$$

とおけば, $M_i < \infty$ ($i = 1, \dots, n$) より

$$\begin{aligned} \|b(x^k) - b(x^\ell)\|_Z &= \|b(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k) - b(x_1^\ell, x_2^\ell, \dots, x_n^\ell) \\ &\quad + b(x_1^\ell, x_2^k, \dots, x_n^k) - b(x_1^\ell, x_2^\ell, \dots, x_n^k) \\ &\quad \dots \\ &\quad + b(x_1^\ell, \dots, x_{n-1}^\ell, x_n^k) - b(x_1^\ell, \dots, x_n^\ell)\|_Z \\ &\leq \|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n Y_i, Z)} \|x_1^k - x_1^\ell\|_{X_1} M_2 \cdots M_n \\ &\quad + \|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n Y_i, Z)} M_1 \|x_2^k - x_2^\ell\|_{X_2} M_3 \cdots M_n \\ &\quad \dots \\ &\quad + \|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n Y_i, Z)} M_1 \cdots M_{n-1} \|x_n^k - x_n^\ell\|_{X_n} \\ &\rightarrow 0, \quad (k, \ell \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

が成り立ち, Z の完備性より $\lim_{k \rightarrow \infty} b(x^k)$ が存在する. 別の収束列 $\bigoplus_{i=1}^n Y_i \ni y^m \rightarrow x$ を取れば

$$\|x_i^k - y_i^m\|_{X_i} \leq \|x_i^k - x_i\|_{X_i} + \|x_i - y_i^m\|_{X_i} \rightarrow 0, \quad (k, m \rightarrow \infty, i = 1, \dots, n)$$

より $\|b(x^k) - b(y^m)\|_Z \rightarrow 0$ ($k, m \rightarrow \infty$) が従い

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b(x^k) = \lim_{m \rightarrow \infty} b(y^m)$$

が得られ, これにより写像 $\tilde{b}: x \mapsto \lim_{k \rightarrow \infty} b(x^k)$ が定まる. この \tilde{b} は b の拡張であり, 有界かつ n 重線型性を持つ. 先ず n 重線型性を示す. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ と $y = (y_1, x_2, \dots, x_n)$ に対し

$$\|x - x^k\|_{\bigoplus_{i=1}^n X_i} \rightarrow 0, \quad \|y - y^k\|_{\bigoplus_{i=1}^n X_i} \rightarrow 0$$

を満たす点列 $(x^k)_{k=1}^\infty, (y^k)_{k=1}^\infty \subset \bigoplus_{i=1}^n Y_i$ を取れば

$$\begin{aligned} &\|\tilde{b}(\alpha x_1 + \beta y_1, x_2, \dots, x_n) - \alpha \tilde{b}(x_1, \dots, x_n) - \beta \tilde{b}(y_1, \dots, x_n)\|_Z \\ &\leq \|\tilde{b}(\alpha x_1 + \beta y_1, x_2, \dots, x_n) - b(\alpha x_1^k + \beta y_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)\|_Z \\ &\quad + |\alpha| \|\tilde{b}(x_1, \dots, x_n) - b(x_1^k, \dots, x_n^k)\|_Z \\ &\quad + |\beta| \|\tilde{b}(y_1, \dots, x_n) - b(y_1^k, \dots, x_n^k)\|_Z \\ &\rightarrow 0, \quad (k \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

が成り立ち, \tilde{b} の第一成分に関する線型性を得る. 他の成分も同じである. また任意の $x \in \bigoplus_{i=1}^{\infty} X_i$ に対して収束列 $(x^k)_{k=1}^{\infty} \subset \bigoplus_{i=1}^n Y_i$ を取れば, 任意の $\epsilon > 0$ に対し或る k が存在して

$$\|\tilde{b}(x)\|_Z \leq \|b(x^k)\|_Z + \epsilon$$

かつ

$$\|x_i^k\|_{X_i} \leq \|x_i\|_{X_i} + \epsilon, \quad (i = 1, \dots, n)$$

が満たされ

$$\|\tilde{b}(x)\|_Z \leq \|b(x^k)\|_Z + \epsilon \leq \|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n Y_i, Z)} \prod_{i=1}^n (\|x_i\|_{X_i} + \epsilon) + \epsilon$$

が従う. x 及び ϵ の任意性より $\|\tilde{b}\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Z)} \leq \|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n Y_i, Z)}$ が成り立ち, \tilde{b} は b の拡張だから

$$\|\tilde{b}\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Z)} = \|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n Y_i, Z)}$$

が出る. 拡張の一意性は $\bigoplus_{i=1}^n Y_i$ の稠密性と \tilde{b} の連続性による. ■

.2 notation

以下, 零元のみ線型空間は考えない. E, E_i, F を体 \mathbb{K} 上の線形空間とすると, $\text{Hom}(E, F)$ で E から F への \mathbb{K} -線型写像の全体を表し, 特に $F = \mathbb{K}$ のとき $E^\#$ と書く. また $\text{Hom}^{(n)}(E_1 \times \dots \times E_n, F)$ で $E_1 \times \dots \times E_n$ から F への \mathbb{K} - n 重線型写像の全体を表す. また X をノルム空間と考えるときはノルムを $\|\cdot\|_X$ と書く. ノルム空間 $(X_i, \|\cdot\|_{X_i})_{i=1}^n$ の直積 $\bigoplus_{i=1}^n X_i$ には直積ノルム $\|\cdot\|_{X_1} + \dots + \|\cdot\|_{X_n}$ により位相を導入する.

.3 テンソル積

$n \geq 2$ とする. 体 \mathbb{K} 上の線形空間の族 $(E_i)_{i=1}^n$ に対してテンソル積を定めたい.

$$\Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right) = \left\{ b : \bigoplus_{i=1}^n E_i \longrightarrow \mathbb{K} ; \quad \text{有限個の } e \in \bigoplus_{i=1}^n E_i \text{ を除いて } b(e) = 0. \right\}$$

により \mathbb{K} -線形空間 $\Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right)$ を定める. また $e = (e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i$ に対する定義関数を

$$\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_n}(x) = \begin{cases} 1, & x = e, \\ 0, & x \neq e \end{cases}$$

で表す. $\Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right)$ の線型部分空間を

$$\begin{aligned} & \Lambda_0\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right) \\ & := \text{Span} \left[\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i + e'_i, \dots, e_n} - \mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n} - \mathbb{1}_{e_1, \dots, e'_i, \dots, e_n}, \\ \mathbb{1}_{e_1, \dots, \lambda e_i, \dots, e_n} - \lambda \mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n} \end{array} ; \quad e_i, e'_i \in E_i, \lambda \in \mathbb{K}, 1 \leq i \leq n \right\} \right] \end{aligned}$$

により定め、 $b \in \Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right)$ の $\Lambda_0\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right)$ に関する同値類を $[b]$ と書く。そして

$$E_1 \otimes \cdots \otimes E_n = \bigotimes_{i=1}^n E_i := \Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right) / \Lambda_0\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right)$$

で定める商空間を $(E_i)_{i=1}^n$ のテンソル積と定義する。また $(e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i$ に対し

$$e_1 \otimes \cdots \otimes e_n := [\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_n}]$$

により定める $\otimes : \bigoplus_{i=1}^n E_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n E_i$ をテンソル積の標準写像と呼ぶ。

定理 .3.1 (標準写像の多重線型性). $(E_i)_{i=1}^n$ を \mathbb{K} -線形空間の族とするととき、

$$\otimes : \bigoplus_{i=1}^n E_i \ni (e_1, \dots, e_n) \longmapsto e_1 \otimes \cdots \otimes e_n \in \bigotimes_{i=1}^n E_i$$

は n 重線型写像である。また次が成り立つ:

$$\bigotimes_{i=1}^n E_i = \text{Span} \left[\left\{ e_1 \otimes \cdots \otimes e_n ; \quad (e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i \right\} \right]. \quad (12)$$

証明. 任意の $1 \leq i \leq n$, $e_1 \in E_1, \dots, e_n \in E_n$, $e_i, e'_i \in E_i$, $\lambda \in \mathbb{K}$ に対して

$$\begin{aligned} e_1 \otimes \cdots \otimes (e_i + e'_i) \otimes \cdots \otimes e_n &= [\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i + e'_i, \dots, e_n}] \\ &= [\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n} + \mathbb{1}_{e_1, \dots, e'_i, \dots, e_n}] \\ &= [\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n}] + [\mathbb{1}_{e_1, \dots, e'_i, \dots, e_n}] \\ &= e_1 \otimes \cdots \otimes e_i \otimes \cdots \otimes e_n + e_1 \otimes \cdots \otimes e'_i \otimes \cdots \otimes e_n, \\ e_1 \otimes \cdots \otimes (\lambda e_i) \otimes \cdots \otimes e_n &= [\mathbb{1}_{e_1, \dots, \lambda e_i, \dots, e_n}] \\ &= [\lambda \mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n}] \\ &= \lambda [\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n}] \\ &= \lambda (e_1 \otimes \cdots \otimes e_i \otimes \cdots \otimes e_n) \end{aligned}$$

が成立するから \otimes は多重線型である。また任意に $u = [b] \in E \otimes F$ を取れば

$$b = \sum_{j=1}^m k_j \mathbb{1}_{e_i^j, \dots, e_n^j}, \quad (k_j = b(e_i^j, \dots, e_n^j), j = 1, \dots, m)$$

と表せるから、

$$u = \left[\sum_{j=1}^m k_j \mathbb{1}_{e_i^j, \dots, e_n^j} \right] = \left[\sum_{j=1}^m \mathbb{1}_{k_j e_i^j, \dots, e_n^j} \right] = \sum_{j=1}^m (k_j e_1^j) \otimes \cdots \otimes e_n^j$$

が従い (12) を得る。 ■

定理 .3.2 ($\cdots \otimes 0 \otimes \cdots$ は零ベクトル). $(E_i)_{i=1}^n$ を \mathbb{K} -線形空間の族とし、テンソル積 $\bigotimes_{i=1}^n E_i$ を定める。このとき、或る i で $e_i = 0$ なら $e_1 \otimes \cdots \otimes e_n = 0$ が成り立つ。

証明. $e_i = 0$ のとき, $\lambda = 0$ とすれば

$$e_1 \otimes \cdots \otimes e_n = [\mathbb{1}_{e_1, \dots, 0, \dots, e_n}] = [\mathbb{1}_{e_1, \dots, \lambda e_i, \dots, e_n} - \lambda \mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n}] = 0$$

が成立する. ■

定理 .3.3 (普遍性 (universality of tensor products)). $(E_i)_{i=1}^n$ を \mathbb{K} -線形空間の族とする. このとき任意の \mathbb{K} -線形空間 V に対して, $T \in \text{Hom}(\bigotimes_{i=1}^n E_i, V)$ ならば $T \circ \otimes \in \text{Hom}^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V)$ が満たされ, これで定める次の対応 Φ は線型同型である:

$$\begin{array}{ccc} \Phi : \text{Hom}(\bigotimes_{i=1}^n E_i, V) & \longrightarrow & \text{Hom}^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V) \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ T & \longmapsto & T \circ \otimes \end{array} \quad (13)$$

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=1}^n E_i & & \\ \downarrow \otimes & \searrow \Phi(T) & \\ \bigotimes_{i=1}^n E_i & \xrightarrow{T} & V \end{array} \quad \begin{array}{c} \cup \\ \nearrow \end{array}$$

また \mathbb{K} -線形空間 U_0 と多重線型写像 $\iota : \bigoplus_{i=1}^n E_i \longrightarrow U_0$ が, 任意の \mathbb{K} -線形空間 V に対し

(\otimes)₁ U_0 は ι の像で生成される.

(\otimes)₂ 任意の $\delta \in \text{Hom}^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V)$ に対して或る $\tau \in \text{Hom}(U_0, V)$ が $\delta = \tau \circ \iota$ を満たす.

を満たすなら, (13) において $V = U_0$ とするとき $T = \Phi^{-1}(\iota)$ は線型同型である.

後半の主張により, $(E_i)_i$ のテンソル積を別の方法で導入しても, 商空間を用いて導入した $\bigotimes_i E_i$ と線型同型に結ばれる. このとき, 別の方法で導入したテンソル積及び標準写像を $\bigotimes_i \tilde{E}_i$, $\tilde{\otimes}$ と表せば, 或る線型同型 $T : \bigotimes_i E_i \longrightarrow \bigotimes_i \tilde{E}_i$ がただ一つ存在して

$$T(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) = e_1 \tilde{\otimes} \cdots \tilde{\otimes} e_n$$

を満たす. 特に任意の並べ替え $\varphi : \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$ に対し

$$\begin{array}{ccc} \bigotimes_{i=1}^n E_i & \cong & \bigotimes_{i=1}^n E_{\varphi(i)} \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ e_1 \otimes \cdots \otimes e_n & \longleftrightarrow & e_{\varphi(1)} \otimes \cdots \otimes e_{\varphi(n)} \end{array}$$

が成立する.

証明.

第一段 $T \in \text{Hom}(\bigotimes_{i=1}^n E_i, V)$ の線型性と \otimes の多重線型性より $T \circ \otimes$ は多重線型である.

第二段 $\Phi(T_1) = \Phi(T_2)$ ならば T_1 と T_2 は $\{e_1 \otimes \cdots \otimes e_n ; (e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i\}$ の上で一致する. (12) より $T_1 = T_2$ が成立し Φ の単射性が従う.

第三段 次の二段で Φ の全射性を示す．まず， $\varphi \in \text{Hom}\left(\Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right), V\right)$ に対し

$$g : \bigoplus_{i=1}^n E_i \ni (e_1, \dots, e_n) \mapsto \varphi(\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_n}) \in V$$

を対応させる次の写像が全単射であることを示す：

$$\begin{array}{ccc} F : \text{Hom}\left(\Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right), V\right) & \longrightarrow & \text{Map}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right) \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ \varphi & \longmapsto & g \end{array}$$

$F(\varphi_1) = F(\varphi_2)$ のとき， 任意の $e \in \bigoplus_{i=1}^n E_i$ に対して $\varphi_1(\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_n}) = \varphi_2(\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_n})$ が成り立ち，

$$\Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right) = \text{Span}\left[\left\{ \mathbb{1}_{e_1, \dots, e_n} ; \quad (e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i \right\}\right]$$

であるから $\varphi_1 = \varphi_2$ が従い F の単射性を得る． また $g \in \text{Map}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$ に対して

$$\varphi(a) := \sum_{\substack{e \in \bigoplus_{i=1}^n E_i \\ a(e) \neq 0}} a(e)g(e), \quad (a \in \Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right))$$

により φ を定めれば， $\varphi \in \text{Hom}\left(\Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right), V\right)$ が満たされ F の全射性が従う．

第四段 任意に $b \in \text{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$ を取り $h := F^{-1}(b)$ とおけば， h の線型性より

$$\begin{aligned} & b(e_1, \dots, e_i + e'_i, \dots, e_n) - b(e_1, \dots, e_i, \dots, e_n) - b(e_1, \dots, e'_i, \dots, e_n) \\ &= h(\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i + e'_i, \dots, e_n} - \mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n} - \mathbb{1}_{e_1, \dots, e'_i, \dots, e_n}), \\ & b(e_1, \dots, \lambda e_i, \dots, e_n) - \lambda b(e_1, \dots, e_i, \dots, e_n) \\ &= h(\mathbb{1}_{e_1, \dots, \lambda e_i, \dots, e_n} - \lambda \mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n}) \end{aligned}$$

が成り立ち， b の双線型性により h は $\Lambda_0\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right)$ 上で 0 である． 従って

$$T([b]) := h(b), \quad (b \in \Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right))$$

で定める T は well-defined であり， $T \in \text{Hom}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$ かつ

$$b(e_1, \dots, e_n) = h(\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_n}) = (T \circ \otimes)(e_1, \dots, e_n), \quad (\forall (e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i)$$

が満たされ Φ の全射性が得られる．

第五段 $(\otimes)_1, (\otimes)_2$ の下で $\text{Hom}\left(U_0, \bigotimes_{i=1}^n E_i\right) \ni \tau \mapsto \tau \circ \iota \in \text{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, \bigotimes_{i=1}^n E_i\right)$ は全単射であるから， $\tau \circ \iota = \otimes$ を満たす $\tau \in \text{Hom}\left(U_0, \bigotimes_{i=1}^n E_i\right)$ がただ一つ存在する． 同様にして $\iota = T \circ \otimes$ を満たす $T \in \text{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n E_i, U_0\right)$ がただ一つ存在し， 併せれば

$$\otimes = \tau \circ \iota = (\tau \circ T) \circ \otimes, \quad \iota = T \circ \otimes = (T \circ \tau) \circ \iota$$

が成り立ち， $T \mapsto T \circ \otimes, \tau \mapsto \tau \circ \iota$ が一対一であるから $\tau \circ T, T \circ \tau$ はそれぞれ恒等写像に一致して $T^{-1} = \tau$ が従う． すなわち T は $\bigotimes_{i=1}^n E_i$ から U_0 への線型同型である． ■

定理 .3.4 (スカラーとのテンソル積). E を \mathbb{K} -線型空間とすると、 $\mathbb{K} \otimes E$ と E は $f(\alpha \otimes e) = \alpha e$ を満たす線型写像 $f: \mathbb{K} \otimes E \rightarrow E$ により同型となる。

証明. スカラ倍 $\iota: (\alpha, e) \mapsto \alpha e$ は双線型である。また定理.3.3 の $(\otimes)_1, (\otimes)_2$ について、

$$E = \text{Span} [\{ \alpha e ; \quad \alpha \in \mathbb{K}, e \in E \}]$$

より $(\otimes)_1$ が得られ、かつ任意の双線型写像 $\delta: \mathbb{K} \times E \rightarrow V$ に対し

$$f(e) := \delta(1, e), \quad (\forall e \in E)$$

で線型写像 $f: E \rightarrow V$ を定めれば、

$$f \circ \iota(\alpha, e) = f(\alpha e) = \delta(1, \alpha e) = \alpha \delta(1, e) = \delta(\alpha, e)$$

が成り立つから $(\otimes)_2$ が満たされる。 ■

定義 .3.5 (線型写像のテンソル積). $(E_i)_{i=1}^n$ と $(F_i)_{i=1}^n$ を \mathbb{K} -線型空間の族とする。 $f_i: E_i \rightarrow F_i$ ($i = 1, \dots, n$) が線型写像であるとき、

$$b: \bigoplus_{i=1}^n E_i \ni (e_1, \dots, e_n) \mapsto f_1(e_1) \otimes \dots \otimes f_n(e_n) \in \bigotimes_{i=1}^n F_i$$

により定める b は n 重線型であり、定理.3.3 より $b = g \circ \otimes$ を満たす $g: \bigotimes_{i=1}^n E_i \rightarrow \bigotimes_{i=1}^n F_i$ がただ一つ存在する。 g を $f_1 \otimes \dots \otimes f_n$ と表記して線型写像のテンソル積と定義する。いま、

$$f_1 \otimes \dots \otimes f_n(e_1 \otimes \dots \otimes e_n) = f_1(e_1) \otimes \dots \otimes f_n(e_n), \quad (\forall (e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i)$$

が成り立つ。 $F_i = \mathbb{K}$ ($i = 1, \dots, n$) の場合は \otimes を \mathbb{K} の乗法と考える ($\bigotimes_{i=1}^n F_i = \mathbb{K}$)。

定理 .3.6 (零写像のテンソル積は零写像). \mathbb{K} -線型空間の族 $(E_i)_{i=1}^n$ と $(F_i)_{i=1}^n$ と線型写像 $f_i: E_i \rightarrow F_i$ ($i = 1, \dots, n$) について、或る f_i が零写像なら $f_1 \otimes \dots \otimes f_n = 0$ となる。

証明. $f_i = 0$ とすると、定理.3.2 より $f_1 \otimes \dots \otimes f_n$ は $\{ e_1 \otimes \dots \otimes e_n ; \quad e_i \in E_i \}$ 上で 0 となる。この空間は $\bigotimes_{i=1}^n E_i$ を生成するから $f_1 \otimes \dots \otimes f_n = 0$ が従う。 ■

定理 .3.7 (テンソル積の基底). $(E_i)_{i=1}^n$ を \mathbb{K} -線型空間の族とし、 E_i の基底を $(u_{\lambda_i}^i)_{\lambda_i \in \Lambda_i}$ とする ($i = 1, \dots, n$)。このとき $(u_{\lambda_1}^1 \otimes \dots \otimes u_{\lambda_n}^n)_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$ は $\bigotimes_{i=1}^n E_i$ の基底となる。

証明.

第一段 各 $u_{\lambda_i}^i$ の生成する一次元空間を $W_{\lambda_i}^i := \mathbb{K}u_{\lambda_i}^i$ と表し

$$V_i := \bigoplus_{\lambda_i \in \Lambda_i} W_{\lambda_i}^i, \quad (i = 1, \dots, n)$$

とおく. $(u_{\lambda_i}^i)_{\lambda_i \in \Lambda_i}$ は E_i の基底であるから, 任意の $e_i \in E_i$ に対し $v_i \in V_i$ がただ一つ定まり,

$$f_i : E_i \ni e_i \mapsto v_i \in V_i$$

により定める線型写像 f_i は同型写像である. このとき, 写像のテンソル積

$$f_1 \otimes \cdots \otimes f_n : \bigotimes_{i=1}^n E_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n V_i$$

は線型同型となる. 実際, f_i の逆写像 f_i^{-1} のテンソル積

$$f_1^{-1} \otimes \cdots \otimes f_n^{-1} : \bigotimes_{i=1}^n V_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n E_i$$

によって, 全ての $(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) \in \bigotimes_{i=1}^n E_i$ 及び $(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \in \bigotimes_{i=1}^n V_i$ に対し

$$\begin{aligned} & f_1^{-1} \otimes \cdots \otimes f_n^{-1} \circ f_1 \otimes \cdots \otimes f_n (e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) \\ &= f_1^{-1} \otimes \cdots \otimes f_n^{-1} (f_1(e_1) \otimes \cdots \otimes f_n(e_n)) = (e_1 \otimes \cdots \otimes e_n), \\ & f_1 \otimes \cdots \otimes f_n \circ f_1^{-1} \otimes \cdots \otimes f_n^{-1} (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \\ &= f_1 \otimes \cdots \otimes f_n (f_1^{-1}(v_1) \otimes \cdots \otimes f_n^{-1}(v_n)) = (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \end{aligned}$$

が成立し, それぞれ $\bigotimes_{i=1}^n E_i$ と $\bigotimes_{i=1}^n V_i$ を生成するから

$$(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)^{-1} = f_1^{-1} \otimes \cdots \otimes f_n^{-1}$$

の関係を得る.

第二段 $\bigotimes_{i=1}^n V_i$ と $\bigoplus_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} W_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes W_{\lambda_n}^n$ が線型同型であることを示す. 先ず

$$g : \sum_j (v_1^j \otimes \cdots \otimes v_n^j) \mapsto \sum_j (v_1^j(\lambda_1) \otimes \cdots \otimes v_n^j(\lambda_n))_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$$

により線型写像 $g : \bigotimes_{i=1}^n V_i \longrightarrow \bigoplus_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} W_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes W_{\lambda_n}^n$ を定める. また

$$\iota_{\lambda_i} : W_{\lambda_i}^i \longrightarrow V_i, \quad (\lambda_i \in \Lambda_i, i = 1, \dots, n)$$

を次の標準単射として定める:

$$\iota_{\lambda_i}(u)(\lambda) = \begin{cases} u, & (\lambda = \lambda_i), \\ 0, & (\lambda \neq \lambda_i), \end{cases} \quad (\lambda \in \Lambda_i, u \in W_{\lambda_i}^i).$$

ι_{λ_i} は線型であるから $\iota_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \iota_{\lambda_n} : W_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes W_{\lambda_n}^n \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n V_i$ を定義出来て,

$$h : w \mapsto \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} \iota_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \iota_{\lambda_n} (w(\lambda_1, \dots, \lambda_n))$$

により線型写像 $h: W_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes W_{\lambda_n}^n \rightarrow \bigotimes_{i=1}^n V_i$ が定めれば $g^{-1} = h$ が成り立つ。実際,

$$\begin{aligned} g \circ h(w) &= g\left(\sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} \iota_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \iota_{\lambda_n} (w(\lambda_1, \dots, \lambda_n))\right) \\ &= \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} g(\iota_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \iota_{\lambda_n} (w(\lambda_1, \dots, \lambda_n))) \\ &= w \end{aligned}$$

が任意の $w \in \bigoplus_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} W_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes W_{\lambda_n}^n$ に対して成立し, かつ任意の $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ に対し

$$\begin{aligned} h \circ g(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) &= \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} \iota_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \iota_{\lambda_n} (v_1(\lambda_1) \otimes \cdots \otimes v_n(\lambda_n)) \\ &= \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} \iota_{\lambda_1}(v_1(\lambda_1)) \otimes \cdots \otimes \iota_{\lambda_n}(v_n(\lambda_n)) \\ &= \left(\sum_{\lambda_1 \in \Lambda_1} \iota_{\lambda_1}(v_1(\lambda_1))\right) \otimes \cdots \otimes \left(\sum_{\lambda_n \in \Lambda_n} \iota_{\lambda_n}(v_n(\lambda_n))\right) \\ &= v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \end{aligned}$$

が成り立つから $g^{-1} = h$ が従う。よって g は線型同型である。

第三段 いま, $g \circ f_1 \otimes \cdots \otimes f_n$ によって $\bigotimes_{i=1}^n E_i$ と $\bigoplus_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} W_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes W_{\lambda_n}^n$ は同型に対応し,

$$w_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}(v_1, \dots, v_n) := \begin{cases} u_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes u_{\lambda_n}^n, & (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (v_1, \dots, v_n), \\ 0, & (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (v_1, \dots, v_n) \end{cases}$$

として $w_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$ を定めれば

$$u_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes u_{\lambda_n}^n \xrightarrow{g \circ f_1 \otimes \cdots \otimes f_n} w_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$$

が成り立つ。 $(w_{\lambda_1, \dots, \lambda_n})$ の一次独立性から $(u_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes u_{\lambda_n}^n)_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$ の一次独立性が従う。

定理 .3.8 (結合律). $(E_i)_{i=1}^n$ を \mathbb{K} -線型空間の族とし, $k \in \{1, \dots, n-1\}$ を任意に取る。このとき, 次の対応関係を満たす F は線型同型である:

$$\begin{array}{ccc} F: \bigotimes_{i=1}^n E_i & \longrightarrow & \left(\bigotimes_{i=1}^k E_i\right) \otimes \left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i\right) \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ e_1 \otimes \cdots \otimes e_n & \longmapsto & (e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n) \end{array}$$

証明.

第一段 n 重線型写像 $f: \bigoplus_{i=1}^n E_i \rightarrow \left(\bigotimes_{i=1}^k E_i\right) \otimes \left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i\right)$ を

$$f(e_1, \dots, e_n) = (e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n), \quad (\forall (e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i)$$

により定めれば, 定理.3.3 より

$$F: (e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) \longmapsto (e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n)$$

を満たす線型写像 $F : \bigotimes_{i=1}^n E_i \longrightarrow \left(\bigotimes_{i=1}^k E_i \right) \otimes \left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i \right)$ が存在する:

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=1}^n E_i & & \\ \downarrow \otimes & \searrow f & \\ \bigotimes_{i=1}^n E_i & \xrightarrow{F} & \left(\bigotimes_{i=1}^k E_i \right) \otimes \left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i \right) \end{array}$$

以降は F の逆写像を構成し F が全単射であることを示す.

第二段 $u_{k+1} \in E_{k+1}, \dots, u_n \in E_n$ を固定し

$$\Phi_{u_{k+1}, \dots, u_n}(e_1, \dots, e_k) := e_1 \otimes \dots \otimes e_k \otimes u_{k+1} \otimes \dots \otimes u_n$$

によって n 重線型 $\Phi_{u_{k+1}, \dots, u_n} : \bigoplus_{i=1}^k E_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n E_i$ を定めれば, 定理.3.3 より

$$G_{u_{k+1}, \dots, u_n}(e_1 \otimes \dots \otimes e_k) = e_1 \otimes \dots \otimes e_k \otimes u_{k+1} \otimes \dots \otimes u_n$$

を満たす線型写像 $G_{u_{k+1}, \dots, u_n} : \bigotimes_{i=1}^k E_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n E_i$ が存在する.

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=1}^k E_i & & \\ \downarrow \otimes & \searrow \Phi_{u_{k+1}, \dots, u_n} & \\ \bigotimes_{i=1}^k E_i & \xrightarrow{G_{u_{k+1}, \dots, u_n}} & \bigotimes_{i=1}^n E_i \end{array}$$

第三段 任意の $v \in \bigotimes_{i=1}^k E_i$ に対して

$$\Psi_v : \bigoplus_{i=k+1}^n E_i \ni (u_{k+1}, \dots, u_n) \longmapsto G_{u_{k+1}, \dots, u_n}(v)$$

を定めれば, Ψ_v は n 重線型であるから, 定理.3.3 より

$$H_v(u_{k+1} \otimes \dots \otimes u_n) = \Psi_v(u_{k+1}, \dots, u_n)$$

を満たす線型写像 $H_v : \bigotimes_{i=k+1}^n E_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n E_i$ が存在する.

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=k+1}^n E_i & & \\ \downarrow \otimes & \searrow \Psi_v & \\ \bigotimes_{i=k+1}^n E_i & \xrightarrow{H_v} & \bigotimes_{i=1}^n E_i \end{array}$$

いま, $v \mapsto \Psi_v$ は線型であり, かつ Ψ_v と H_v は線型同型で結ばれているから $v \mapsto H_v$ の線型性が従う.

第四段 H_v の線型性と $v \mapsto H_v$ の線型性より

$$\Gamma : \left(\bigotimes_{i=1}^k E_i \right) \times \left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i \right) \ni (v, w) \longmapsto H_v(w)$$

により定める Γ は

$$\begin{aligned} \Gamma(e_1 \otimes \dots \otimes e_k, e_{k+1} \otimes \dots \otimes e_n) &= H_{e_1 \otimes \dots \otimes e_k}(e_{k+1} \otimes \dots \otimes e_n) \\ &= \Psi_{e_1 \otimes \dots \otimes e_k}(e_{k+1}, \dots, e_n) \\ &= G_{e_{k+1}, \dots, e_n}(e_1 \otimes \dots \otimes e_k) \\ &= \Phi_{e_{k+1}, \dots, e_n}(e_1, \dots, e_k) \\ &= e_1 \otimes \dots \otimes e_n \end{aligned} \tag{14}$$

を満たす双線型であり, 定理.3.3 より

$$\begin{array}{ccc}
 \left(\bigotimes_{i=1}^k E_i \right) \times \left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i \right) & & \\
 \downarrow \otimes & \searrow \Gamma & \\
 \left(\bigotimes_{i=1}^k E_i \right) \otimes \left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i \right) & \xrightarrow{G} & \bigotimes_{i=1}^n E_i
 \end{array}$$

を可換にする線型写像 G が存在する. この G は F の逆写像である. 実際, (14) より

$$\begin{aligned}
 F \circ G((e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n)) &= F(\Gamma(e_1 \otimes \cdots \otimes e_k, e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n)) \\
 &= F(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) \\
 &= (e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n)
 \end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned}
 G \circ F(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) &= G((e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n)) \\
 &= \Gamma(e_1 \otimes \cdots \otimes e_k, e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n) \\
 &= e_1 \otimes \cdots \otimes e_n
 \end{aligned}$$

が得られ $F^{-1} = G$ が従う. ■

.4 テンソル積の内積

.5 クロスノルム

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ と考える. 以下では $n(\geq 2)$ 個の Banach 空間で構成するテンソル積におけるクロスノルムを考察する.

定義 .5.1 (クロスノルム). \mathbb{K} -Banach 空間の族 $(X_i)_{i=1}^n$ のテンソル積 $\bigotimes_{i=1}^n X_i$ において

$$\alpha(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \leq \|x_1\|_{X_1} \|x_2\|_{X_2} \cdots \|x_n\|_{X_n}, \quad (x_i \in X_i, i = 1, \dots, n), \quad (15)$$

$$\sup_{\substack{v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i \\ v \neq 0}} \left| x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v) \right| \leq \|x_1^*\|_{X_1^*} \|x_2^*\|_{X_2^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*} \alpha(v), \quad (x_i^* \in X_i^*, i = 1, \dots, n) \quad (16)$$

を満たすようなノルム $\alpha : \bigotimes_{i=1}^n X_i \rightarrow [0, \infty)$ をクロスノルム (cross norm) と呼ぶ.

定理 .5.2. \mathbb{K} -Banach 空間の族 $(X_i)_{i=1}^n$ に対するテンソル積 $\bigotimes_{i=1}^n X_i$ 上のクロスノルム α は次を満たす:

$$\begin{aligned}
 \alpha(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) &= \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}, & (x_i \in X_i, i = 1, \dots, n), \\
 \|x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*\|_{(\bigotimes_{i=1}^n X_i, \alpha)^*} &= \|x_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*}, & (x_i^* \in X_i^*, i = 1, \dots, n).
 \end{aligned}$$

証明. 先ず, Hahn-Banach の定理と式 (16) より

$$\begin{aligned}
\|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n} &= \sup_{\|x_1^*\|_{X_1^*} \leq 1} |\langle x_1, x_1^* \rangle| \cdots \sup_{\|x_n^*\|_{X_n^*} \leq 1} |\langle x_n, x_n^* \rangle| \\
&= \sup_{\substack{\|x_i^*\|_{X_i^*} \leq 1 \\ i=1, \dots, n}} |x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)| \\
&\leq \sup_{\substack{\|x_i^*\|_{X_i^*} \leq 1 \\ i=1, \dots, n}} \|x_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*} \alpha(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \\
&= \alpha(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)
\end{aligned}$$

が成り立ち定理の主張の第一式を得る. またこの結果より

$$\begin{aligned}
\|x_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*} &= \sup_{\|x_1\|_{X_1} \leq 1} |\langle x_1, x_1^* \rangle| \cdots \sup_{\|x_n\|_{X_n} \leq 1} |\langle x_n, x_n^* \rangle| \\
&= \sup_{\substack{\|x_i\|_{X_i} \leq 1 \\ i=1, \dots, n}} |x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)| \\
&\leq \sup_{\alpha(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \leq 1} |x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)| \\
&\leq \sup_{\alpha(v) \leq 1} |x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v)| \\
&= \|x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*\|_{(\bigotimes_{i=1}^n X_i, \alpha)^*}
\end{aligned}$$

が成立し主張の第二式も得られる. ■

以下, 実際クロスノルムが存在することを示す.

定義 .5.3 (インジェクティブノルム). \mathbb{K} -Banach 空間の族 $(X_i)_{i=1}^n$ に対し

$$\epsilon(v) := \sup_{\substack{\|x_i^*\|_{X_i^*} \leq 1 \\ i=1, \dots, n}} |x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v)|, \quad (v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

により定める ϵ をインジェクティブノルム (injective norm) と呼ぶ.

定理 .5.4 (インジェクティブノルムは最小のクロスノルム). \mathbb{K} -Banach 空間の族 $(X_i)_{i=1}^n$ のテンソル積 $\bigotimes_{i=1}^n X_i$ において, インジェクティブノルムは最小のクロスノルムである.

証明.

第一段 ϵ が $\bigotimes_{i=1}^n X_i$ 上のノルムであることを示す. 劣加法性と同次性は $x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*$ の線型性より従う. $v = 0 \Leftrightarrow \epsilon(v) = 0$ については, $v = 0$ なら任意の $x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*$ について $x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v) = 0$ が成り立ち $\epsilon(v) = 0$ が出る. 逆に $v \neq 0$ とするとき, 定理.3.1 より

$$v = \sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j, \quad (x_i^j \in X_i, j = 1, \dots, m, i = 1, \dots, n)$$

と表現できるが, 定理.3.2 より $x_i^1 \neq 0$ ($i = 1, \dots, n$) と仮定できる. x_1^1 について, もし全ての $2 \leq j \leq m$ に対し $x_1^j = x_1^1$ が満たされているなら, $\hat{x}_1^* \in X_1^*$ を

$$\langle x_1^1, \hat{x}_1^* \rangle = \|x_1^1\|_{X_1}, \quad \|\hat{x}_1^*\|_{X_1^*} = 1$$

を満たすように選ぶ (Hahn-Banach の定理). $x_1^j \neq x_1^1$ を満たす j がある場合,

$$L_1 := \text{Span} \left[\left\{ x_1^j ; \quad 2 \leq j \leq m, x_1^1 \neq x_1^j \right\} \right]$$

により閉部分空間を定めれば x_1^1 と L_1 との距離 d_1 は正であり, Hahn-Banach の定理より

$$\langle x_1, \hat{x}_1^* \rangle = 0 \quad (\forall x_1 \in L_1), \quad \langle x_1^1, \hat{x}_1^* \rangle = d_1 > 0, \quad \|\hat{x}_1^*\|_{X_1^*} = 1$$

を満たす $\hat{x}_1^* \in X_1^*$ を取ることができる. 同様に $\hat{x}_i^* \in X_i^*$ ($i = 2, \dots, n$) を選べば

$$\hat{x}_1^* \otimes \dots \otimes \hat{x}_n^*(x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j) = \begin{cases} \hat{x}_1^* \otimes \dots \otimes \hat{x}_n^*(x_1^1 \otimes \dots \otimes x_n^1), & (x_i^j = x_i^1, i = 1, \dots, n), \\ 0, & (\text{o.w.}), \end{cases}$$

($j = 2, \dots, m$) が満たされるから

$$0 < \hat{x}_1^* \otimes \dots \otimes \hat{x}_n^*(x_1^1 \otimes \dots \otimes x_n^1) \leq |\hat{x}_1^* \otimes \dots \otimes \hat{x}_n^*(v)| \leq \epsilon(v)$$

が成立し, 対偶により $\epsilon(v) = 0 \Rightarrow v = 0$ が従う.

第二段 ϵ がクロスノルムであることを示す. 先ず Hahn-Banach の定理より

$$\begin{aligned} \epsilon(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) &= \sup_{\substack{\|x_i^*\|_{X_i^*} \leq 1 \\ i=1, \dots, n}} |x_1^* \otimes \dots \otimes x_n^*(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)| \\ &= \sup_{\|x_1^*\|_{X_1^*} \leq 1} |\langle x_1, x_1^* \rangle| \cdots \sup_{\|x_n^*\|_{X_n^*} \leq 1} |\langle x_n, x_n^* \rangle| \\ &= \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}, \quad (\forall x_i \in X_i, i = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

が成り立つ. また 0 でない $x_i^* \in X_i^*$, ($i = 1, \dots, n$) に対しては

$$\begin{aligned} |x_1^* \otimes \dots \otimes x_n^*(v)| &\leq \|x_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*} \left[\frac{x_1^*}{\|x_1^*\|_{X_1^*}} \otimes \dots \otimes \frac{x_n^*}{\|x_n^*\|_{X_n^*}} \right](v) \\ &\leq \|x_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*} \epsilon(v) \end{aligned}$$

が成立し, 或る i で x_i^* が零写像のときは定理.3.6 より $x_1^* \otimes \dots \otimes x_n^* = 0$ が満たされ,

$$\|x_1^* \otimes \dots \otimes x_n^*\|_{(\bigotimes_{i=1}^n X_i, \epsilon)} \leq \|x_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*}$$

を得る.

第三段 ϵ が最小のクロスノルムであることを示す. α を任意のクロスノルムとすれば

$$|x_1^* \otimes \dots \otimes x_n^*(v)| \leq \|x_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*} \alpha(v), \quad (\forall v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

が成り立つから, 特に $\|x_i^*\|_{X_i^*} \leq 1$, ($i = 1, \dots, n$) の範囲で \sup を取れば

$$\epsilon(v) \leq \alpha(v), \quad (\forall v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

が従い ϵ の最小性が出る. ■

定義 .5.5 (プロジェクトィブノルム). \mathbb{K} -Banach 空間の族 $(X_i)_{i=1}^n$ に対し, 定理.3.3 により

$$\begin{array}{ccc} \Phi : \text{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}\right) & \longrightarrow & \text{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}\right) \\ \downarrow & & \downarrow \\ T & \longmapsto & T \circ \otimes \end{array} \quad (17)$$

により線型同型 Φ が定まる. これを用いて

$$\pi(v) := \sup_{\substack{b \in L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}) \\ \|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K})} \leq 1}} |\Phi^{-1}(b)(v)|, \quad (v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

により定める π をプロジェクトィブノルム (projective norm) と呼ぶ.

定理 .5.6 (プロジェクトィブノルムは最大のクロスノルム). \mathbb{K} -Banach 空間の族 $(X_i)_{i=1}^n$ のテンソル積 $\bigotimes_{i=1}^n X_i$ 上にプロジェクトィブノルム π を導入する. このとき式 (15) を満たす任意のセミノルム p に対し $p \leq \pi$ が成立する. 特に π は最大のクロスノルムである.

証明.

第一段 π がノルムであることを示す. $v \neq 0$ とすれば, 定理.5.4 の証明と同様にして

$$0 < |\hat{x}_1^* \otimes \cdots \otimes \hat{x}_n^*(v)|, \quad \|\hat{x}_i^*\|_{X_i^*} = 1, \quad (i = 1, \dots, n)$$

を満たす $\hat{x}_i^* \in X_i^*$ ($i = 1, \dots, n$) が存在する.

$$b(x_1, \dots, x_n) := \langle x_1, \hat{x}_1^* \rangle \cdots \langle x_n, \hat{x}_n^* \rangle, \quad (x_i \in X_i, i = 1, \dots, n)$$

により n 重線型写像 b を定めれば, $\|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K})} \leq \|x_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*} = 1$ かつ

$$0 < |\hat{x}_1^* \otimes \cdots \otimes \hat{x}_n^*(v)| = |\Phi^{-1}(b)(v)| \leq \pi(v)$$

が成立する. $\pi(0) = 0$ と劣加法性及び同次性は $\Phi^{-1}(b)$ の線型性より従う.

第二段 π がクロスノルムであることを示す. 先ず, 任意の $x_i \in X_i$, ($i = 1, \dots, n$) に対して

$$\begin{aligned} \pi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) &= \sup_{\substack{b \in L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}) \\ \|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K})} \leq 1}} |\Phi^{-1}(b)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)| \\ &\leq \sup_{\substack{b \in L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}) \\ \|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K})} \leq 1}} \|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K})} \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n} \\ &= \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n} \end{aligned}$$

が成立する. また 0 でない $x_i^* \in X_i^*$, ($i = 1, \dots, n$) に対し

$$b(x_1, \dots, x_n) := \frac{x_1^*}{\|x_1^*\|_{X_1^*}}(x_1) \cdots \frac{x_n^*}{\|x_n^*\|_{X_n^*}}(x_n), \quad (x_i \in X_i, i = 1, \dots, n)$$

により $\|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K})} \leq 1$ を満たす有界 n 重線型 b を定めれば, π の定義より

$$|\Phi^{-1}(b)(v)| \leq \pi(v), \quad (\forall v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

が成り立つ. 一方で写像のテンソル積の定義より

$$\Phi^{-1}(b) = \frac{x_1^*}{\|x_1^*\|_{X_1^*}} \otimes \cdots \otimes \frac{x_n^*}{\|x_n^*\|_{X_n^*}} = \frac{1}{\|x_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*}} x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*$$

が満たされるから

$$|x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v)| \leq \|x_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*} \pi(v), \quad (\forall v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

が従う. 定理.3.6 より上式は $x_i^* = 0$ の場合も込めて成立するから

$$\|x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*\|_{(\bigotimes_{i=1}^n X_i, \pi)^*} \leq \|x_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*}$$

が得られる.

第三段 p を (15) を満たすセミノルムとし, $v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i$ を任意に取れば

$$p(v) = \phi_v(v), \quad |\phi_v(u)| \leq p(u) \quad (\forall u \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

を満たす $\phi_v \in (\bigotimes_{i=1}^n X_i, \pi)^*$ が存在する (Hahn-Banach の定理).

$$\begin{aligned} |(\phi_v \circ \otimes)(x_1, \dots, x_n)| &= |\phi_v(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)| \\ &\leq p(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \\ &\leq \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}, \quad (\forall x_i \in X_i, i = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

が成り立つから $\|\phi_v \circ \otimes\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K})} \leq 1$ が従い, π の定義より

$$p(v) = \phi_v(v) = \Phi^{-1}(\phi_v \circ \otimes)(v) \leq \pi(v)$$

が得られる. ■

定理 .5.7 (プロジェクトィブノルムの表現). \mathbb{K} -Banach 空間の族 $(X_i)_{i=1}^n$ のテンソル積 $\bigotimes_{i=1}^n X_i$ にプロジェクトノルム π を導入する. このとき次が成り立つ:

$$\pi(v) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \|x_i\|_{X_i} \cdots \|x_n\|_{X_n} ; \quad v = \sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j \right\}.$$

証明.

第一段 $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ 上のセミノルム λ を次で定める:

$$\lambda(v) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \|x_i\|_{X_i} \cdots \|x_n\|_{X_n} ; \quad v = \sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j \right\}, \quad (\forall v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i).$$

このとき λ が式 (15) かつ $\lambda \geq \pi$ を満たせば, 定理.5.6 より $\lambda = \pi$ が従う.

第二段 λ がセミノルムであることを示す。実際、任意に $u, v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i$ を取り、

$$u = \sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j, \quad v = \sum_{k=1}^r a_1^k \otimes \cdots \otimes a_n^k$$

を一つの表現とすれば、 λ の定め方より

$$\lambda(u+v) \leq \sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j + \sum_{k=1}^r a_1^k \otimes \cdots \otimes a_n^k$$

が成り立つ。右辺を移項して

$$\lambda(u+v) - \sum_{k=1}^r a_1^k \otimes \cdots \otimes a_n^k \leq \lambda(u) \leq \sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j$$

かつ

$$\lambda(u+v) - \lambda(u) \leq \lambda(v) \leq \sum_{k=1}^r a_1^k \otimes \cdots \otimes a_n^k$$

が従い λ の劣加法性を得る。また任意の $0 \neq \alpha \in \mathbb{K}$, $v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i$ に対し

$$v = \sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j$$

を一つの分割とすれば

$$\alpha v = \sum_{j=1}^m (\alpha x_1^j) \otimes \cdots \otimes x_n^j$$

は αv の一つの分割となるから

$$\lambda(\alpha v) \leq \sum_{j=1}^m \|\alpha x_1^j\|_{X_1} \cdots \|x_n^j\|_{X_n} = |\alpha| \sum_{j=1}^m \|x_1^j\|_{X_1} \cdots \|x_n^j\|_{X_n}$$

が成立し、 v の分割について下限を取れば $\lambda(\alpha v) \leq |\alpha| \lambda(v)$ が従う。逆に

$$\alpha v = \sum_{k=1}^r a_1^k \otimes \cdots \otimes a_n^k$$

に対しては

$$\lambda(v) \leq \sum_{k=1}^r \left\| \frac{1}{\alpha} a_1^k \right\|_{X_1} \cdots \|a_n^k\|_{X_n} = \frac{1}{|\alpha|} \sum_{k=1}^r \|a_1^k\|_{X_1} \cdots \|a_n^k\|_{X_n}$$

が成り立ち $|\alpha| \lambda(v) \leq \lambda(\alpha v)$ が従う。 $v = 0$ なら $v = 0 \otimes \cdots \otimes 0$ より $\lambda(v) = 0$ が満たされ

$$\lambda(\alpha v) = |\alpha| \lambda(v), \quad (\forall \alpha \in \mathbb{K}, v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

が得られる。

第三段 λ が式 (15) を満たすことを示す。実際 λ の定め方より

$$\lambda(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \leq \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}, \quad (\forall x_i \in X_i, i = 1, \dots, n)$$

が成り立つ。

第四段 $\lambda \geq \pi$ を示す. いま, 任意に $v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i$ を取り, 次の分割を持つとする:

$$v = \sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j.$$

$\|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K})} \leq 1$ を満たす $b \in L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K})$ と式 (17) の Φ に対し

$$\begin{aligned} |\Phi^{-1}(b)(v)| &\leq \sum_{j=1}^m |\Phi^{-1}(b)(x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j)| \\ &= \sum_{j=1}^m |b(x_1^j, \dots, x_n^j)| \leq \sum_{j=1}^m \|x_1^j\|_{X_1} \cdots \|x_n^j\|_{X_n} \end{aligned}$$

が成り立つから, b に無関係に

$$|\Phi^{-1}(b)(v)| \leq \lambda(v)$$

が満たされ

$$\pi(v) = \sup_{\substack{b \in L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}) \\ \|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K})} \leq 1}} |\Phi^{-1}(b)(v)| \leq \lambda(v)$$

が従う. ■

定理 .5.8. $\bigotimes_{i=1}^n X_i$ を \mathbb{K} -Banach 空間の族 $(X_i)_{i=1}^n$ のテンソル積とする. このとき $\bigotimes_{i=1}^n X_i$ 上の任意のノルム α に対し次が成立する:

$$\alpha \text{ がクロスノルム} \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon \leq \alpha \leq \pi.$$

証明. (\Rightarrow) はすでに示したから (\Leftarrow) を示す. 実際, 任意の $x_i \in X_i$, $(i = 1, \dots, n)$ に対して

$$\alpha(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \leq \pi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \leq \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}$$

が成立し, また任意の $x_i^* \in X_i^*$, $(i = 1, \dots, n)$ に対して

$$\begin{aligned} |x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v)| &\leq \|x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*\|_{(\bigotimes_{i=1}^n X_i, \epsilon)^*} \epsilon(v) \\ &\leq \|x_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*} \alpha(v), \quad (\forall v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i) \end{aligned}$$

が満たされ $\|x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*\|_{(\bigotimes_{i=1}^n X_i, \alpha)^*} \leq \|x_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*}$ が得られる. ■