テンソル積のノルム
平井さん講義まとめ

基礎工学研究科システム創成専攻
学籍番号 29C17095
百合川尚学

2018 年 5 月 8 日

目次

0.1 notation

以下, 零元のみの線型空間は考えない．E, E_i, F を体 $\mathbb{K}$ 上の線形空間とするとき, $\mathrm{Hom}\,(E, F)$ で E から F への $\mathbb{K}$-線型写像の全体を表し, 特に $F = \mathbb{K}$ のとき $E^{\#}$ と書く．また $\mathrm{Hom}^{(n)}\,(E_1 \times \cdots \times E_n, F)$ で $E_1 \times \cdots \times E_n$ から F への $\mathbb{K}$-n 重線型写像の全体を表す．また X をノルム空間と考えるときはノルムを $\|\cdot\|_X$ と書く．

0.2 テンソル積

$n \geq 2$ とする．体 $\mathbb{K}$ 上の線形空間の族 $(E_i)_{i=1}^n$ に対してテンソル積を定めたい．

$$\Lambda\Bigl(\bigoplus_{i=1}^n E_i\Bigr) = \left\{ b : \bigoplus_{i=1}^n E_i \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\quad \text{有限個の } e \in \textstyle\bigoplus_{i=1}^n E_i \text{ を除いて } b(e) = 0. \right\}$$

により $\mathbb{K}$-線形空間 $\Lambda\Bigl(\bigoplus_{i=1}^n E_i\Bigr)$ を定める．また $e = (e_1, \cdots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i$ に対する定義関数を

$$\mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_n}(x) = \begin{cases} 1, & x = e, \\ 0, & x \neq e \end{cases}$$

で表す．$\Lambda\Bigl(\bigoplus_{i=1}^n E_i\Bigr)$ の線型部分空間を

$$\begin{aligned} &\Lambda_0\Bigl(\bigoplus_{i=1}^n E_i\Bigr) \\ &:= \mathrm{Span}\left[\left\{ \begin{matrix} \mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i+e_i',\cdots,e_n} - \mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i,\cdots,e_n} - \mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i',\cdots,e_n}, \\ \mathbb{1}_{e_1,\cdots,\lambda e_i,\cdots,e_n} - \lambda\,\mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i,\cdots,e_n} \end{matrix}\ ;\quad e_i, e_i' \in E_i, \lambda \in \mathbb{K}, 1 \leq i \leq n \right\}\right] \end{aligned}$$

により定め，$b \in \Lambda\Bigl(\bigoplus_{i=1}^n E_i\Bigr)$ の $\Lambda_0\Bigl(\bigoplus_{i=1}^n E_i\Bigr)$ に関する同値類を $[b]$ と書く．そして

$$E_1 \otimes \cdots \otimes E_n = \bigotimes_{i=1}^n E_i := \Lambda\Bigl(\bigoplus_{i=1}^n E_i\Bigr) \Big/ \Lambda_0\Bigl(\bigoplus_{i=1}^n E_i\Bigr)$$

で定める商空間を $(E_i)_{i=1}^n$ のテンソル積と定義する．また $(e_1, \cdots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i$ に対し

$$e_1 \otimes \cdots \otimes e_n \coloneqq [\mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_n}]$$

により定める $\otimes : \bigoplus_{i=1}^n E_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n E_i$ をテンソル積の標準写像と呼ぶ.

定理 0.2.1 (標準写像の多重線型性). $(E_i)_{i=1}^n$ を $\mathbb{K}$-線形空間の族とするとき，

$$\otimes : \bigoplus_{i=1}^n E_i \ni (e_1, \cdots, e_n) \longmapsto e_1 \otimes \cdots \otimes e_n \in \bigotimes_{i=1}^n E_i$$

は n 重線型写像である．また次が成り立つ:

$$\bigotimes_{i=1}^n E_i = \mathrm{Span}\left[\left\{\ e_1 \otimes \cdots \otimes e_n\ ;\quad (e_1, \cdots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i\ \right\}\right]. \tag{1}$$

証明. 任意の $1 \leq i \leq n$, $e_1 \in E_1, \cdots, e_n \in E_n$, $e_i, e_i' \in E_i$, $\lambda \in \mathbb{K}$ に対して

$$\begin{aligned}
e_1 \otimes \cdots \otimes (e_i + e_i') \otimes \cdots \otimes e_n &= \left[\mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i+e_i',\cdots,e_n}\right] \\
&= \left[\mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i,\cdots,e_n} + \mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i',\cdots,e_n}\right] \\
&= \left[\mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i,\cdots,e_n}\right] + \left[\mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i',\cdots,e_n}\right] \\
&= e_1 \otimes \cdots \otimes e_i \otimes \cdots \otimes e_n + e_1 \otimes \cdots \otimes e_i' \otimes \cdots \otimes e_n, \\
e_1 \otimes \cdots \otimes (\lambda e_i) \otimes \cdots \otimes e_n &= \left[\mathbb{1}_{e_1,\cdots,\lambda e_i,\cdots,e_n}\right] \\
&= \left[\lambda \mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i,\cdots,e_n}\right] \\
&= \lambda \left[\mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i,\cdots,e_n}\right] \\
&= \lambda(e_1 \otimes \cdots \otimes e_i \otimes \cdots \otimes e_n)
\end{aligned}$$

が成立するから $\otimes$ は多重線型である．また任意に $u = [b] \in E \otimes F$ を取れば

$$b = \sum_{j=1}^m k_j \mathbb{1}_{e_i^j,\cdots,e_n^j}, \quad \left(k_j = b(e_i^j, \cdots, e_n^j),\ j = 1, \cdots, m\right)$$

と表せるから，

$$u = \left[\sum_{j=1}^m k_j \mathbb{1}_{e_i^j,\cdots,e_n^j}\right] = \left[\sum_{j=1}^m \mathbb{1}_{k_j e_i^j,\cdots,e_n^j}\right] = \sum_{j=1}^m (k_j e_1^j) \otimes \cdots \otimes e_n^j$$

が従い (1) を得る． ∎

定理 0.2.2 ($\cdots \otimes 0 \otimes \cdots$ は零ベクトル). $(E_i)_{i=1}^n$ を $\mathbb{K}$-線形空間の族とし，テンソル積 $\bigotimes_{i=1}^n E_i$ を定める．このとき，或る i で $e_i = 0$ なら $e_1 \otimes \cdots \otimes e_n = 0$ が成り立つ．

証明. $e_i = 0$ のとき，$\lambda = 0$ とすれば

$$e_1 \otimes \cdots \otimes e_n = [\mathbb{1}_{e_1,\cdots,0,\cdots,e_n}] = [\mathbb{1}_{e_1,\cdots,\lambda e_i,\cdots,e_n} - \lambda \mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i,\cdots,e_n}] = 0$$

が成立する． ∎

定理 0.2.3 (普遍性 (universality of tensor products)). $(E_i)_{i=1}^n$ を $\mathbb{K}$-線形空間の族とする．このとき任意の $\mathbb{K}$-線型空間 V に対して，$T \in \mathrm{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n E_i, V\right)$ ならば $T \circ \otimes \in \mathrm{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$ が満たされ，これで定める次の対応 Φ は線型同型である:

$$\begin{array}{rcccc} \Phi : & \mathrm{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n E_i, V\right) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right) \\ & \Cup & & \Cup \\ & T & \longmapsto & T \circ \otimes \end{array} \tag{2}$$

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i=1}^n E_i \arrow[d, "\otimes"'] \arrow[dr, "\Phi(T)"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"' near start, shift right=3] & \\
\bigotimes_{i=1}^n E_i \arrow[r, "T"] & V
\end{tikzcd}$$

また $\mathbb{K}$-線型空間 U_0 と多重線型写像 $\iota : \bigoplus_{i=1}^n E_i \longrightarrow U_0$ が，任意の $\mathbb{K}$-線型空間 V に対し

$(\otimes)_1$　U_0 は ι の像で生成される．

$(\otimes)_2$　任意の $\delta \in \mathrm{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$ に対して或る $\tau \in \mathrm{Hom}(U_0, V)$ が $\delta = \tau \circ \iota$ を満たす．

を満たすなら，(2) において $V = U_0$ とするとき $T = \Phi^{-1}(\iota)$ は線型同型である．

後半の主張により，$(E_i)_i$ のテンソル積を別の方法で導入しても，商空間を用いて導入した $\bigotimes_i E_i$ と線型同型に結ばれる．このとき，別の方法で導入したテンソル積及び標準写像を $\tilde{\bigotimes}_i E_i$, $\tilde{\otimes}$ と表せば，或る線型同型 $T : \bigotimes_i E_i \longrightarrow \tilde{\bigotimes}_i E_i$ がただ一つ存在して

$$T(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) = e_1 \tilde{\otimes} \cdots \tilde{\otimes} e_n$$

を満たす．特に任意の並べ替え $\varphi : \{1, \cdots, n\} \longrightarrow \{1, \cdots, n\}$ に対し

$$\begin{array}{ccc} \bigotimes_{i=1}^n E_i & \cong & \bigotimes_{i=1}^n E_{\varphi(i)} \\ \Cup & & \Cup \\ e_1 \otimes \cdots \otimes e_n & \longleftrightarrow & e_{\varphi(1)} \otimes \cdots \otimes e_{\varphi(n)} \end{array}$$

が成立する．

証明.

第一段　$T \in \mathrm{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n E_i, V\right)$ の線型性と $\otimes$ の多重線型性より $T \circ \otimes$ は多重線型である．

第二段　$\Phi(T_1) = \Phi(T_2)$ ならば T_1 と T_2 は $\left\{ e_1 \otimes \cdots \otimes e_n \ ; \quad (e_1, \cdots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i \right\}$ の上で一致する．(1) より $T_1 = T_2$ が成立し Φ の単射性が従う．

第三段　次の二段で Φ の全射性を示す．まず，$\varphi \in \mathrm{Hom}\left(\Lambda(\bigoplus_{i=1}^n E_i), V\right)$ に対し

$$g : \bigoplus_{i=1}^n E_i \ni (e_1, \cdots, e_n) \longmapsto \varphi(\mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_n}) \in V$$

を対応させる次の写像が全単射であることを示す:

$$\begin{array}{cccc} F: \mathrm{Hom}\left(\Lambda(\bigoplus_{i=1}^n E_i), V\right) & \longrightarrow & \mathrm{Map}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \varphi & \longmapsto & g \end{array}$$

$F(\varphi_1) = F(\varphi_2)$ のとき，任意の $e \in \bigoplus_{i=1}^n E_i$ に対して $\varphi_1(\mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_n}) = \varphi_2(\mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_n})$ が成り立ち，

$$\Lambda\Bigl(\bigoplus_{i=1}^n E_i\Bigr) = \mathrm{Span}\left[\left\{\ \mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_n}\ ;\quad (e_1,\cdots,e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i\ \right\}\right]$$

であるから $\varphi_1 = \varphi_2$ が従い F の単射性を得る．また $g \in \mathrm{Map}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$ に対して

$$\varphi(a) := \sum_{\substack{e \in \bigoplus_{i=1}^n E_i \\ a(e) \neq 0}} a(e)g(e), \quad (a \in \Lambda(\bigoplus_{i=1}^n E_i))$$

により φ を定めれば，$\varphi \in \mathrm{Hom}\left(\Lambda(\bigoplus_{i=1}^n E_i), V\right)$ が満たされ F の全射性が従う．

第四段　任意に $b \in \mathrm{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$ を取り $h := F^{-1}(b)$ とおけば，h の線型性より

$$\begin{aligned} &b(e_1,\cdots,e_i+e_i',\cdots,e_n) - b(e_1,\cdots,e_i,\cdots,e_n) - b(e_1,\cdots,e_i',\cdots,e_n) \\ &\qquad = h(\mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i+e_i',\cdots,e_n} - \mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i,\cdots,e_n} - \mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i',\cdots,e_n}), \\ &b(e_1,\cdots,\lambda e_i,\cdots,e_n) - \lambda b(e_1,\cdots,e_i,\cdots,e_n) \\ &\qquad = h(\mathbb{1}_{e_1,\cdots,\lambda e_i,\cdots,e_n} - \lambda \mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i,\cdots,e_n}) \end{aligned}$$

が成り立ち，b の双線型性により h は $\Lambda_0(\bigoplus_{i=1}^n E_i)$ 上で 0 である．従って

$$T([b]) := h(b), \quad (b \in \Lambda(\bigoplus_{i=1}^n E_i))$$

で定める T は well-defined であり，$T \in \mathrm{Hom}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$ かつ

$$b(e_1,\cdots,e_n) = h(\mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_n}) = (T \circ \otimes)(e_1,\cdots,e_n), \quad (\forall (e_1,\cdots,e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i)$$

が満たされ Φ の全射性が得られる．

第五段　$(\otimes)_1, (\otimes)_2$ の下で $\mathrm{Hom}\left(U_0, \bigotimes_{i=1}^n E_i\right) \ni \tau \longmapsto \tau \circ \iota \in \mathrm{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, \bigotimes_{i=1}^n E_i\right)$ は全単射であるから，$\tau \circ \iota = \otimes$ を満たす $\tau \in \mathrm{Hom}\left(U_0, \bigotimes_{i=1}^n E_i\right)$ がただ一つ存在する．同様にして $\iota = T \circ \otimes$ を満たす $T \in \mathrm{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n E_i, U_0\right)$ がただ一つ存在し，併せれば

$$\otimes = \tau \circ \iota = (\tau \circ T) \circ \otimes, \quad \iota = T \circ \otimes = (T \circ \tau) \circ \iota$$

が成り立ち，$T \longmapsto T \circ \otimes$, $\tau \longmapsto \tau \circ \iota$ が一対一であるから $\tau \circ T$, $T \circ \tau$ はそれぞれ恒等写像に一致して $T^{-1} = \tau$ が従う．すなわち T は $\bigotimes_{i=1}^n E_i$ から U_0 への線型同型である． ■

定理 0.2.4 (スカラーとのテンソル積).　E を $\mathbb{K}$-線型空間とするとき，$\mathbb{K} \otimes E$ と E は $f(\alpha \otimes e) = \alpha e$ を満たす線型写像 $f: \mathbb{K} \otimes E \longmapsto E$ により同型となる．

証明．　スカラ倍 $\iota : (\alpha, e) \longmapsto \alpha e$ は双線型である．また定理 0.2.3 の $(\otimes)_1, (\otimes)_2$ について，

$$E = \mathrm{Span}\left[\{\, \alpha e \ ; \quad \alpha \in \mathbb{K},\ e \in E \,\}\right]$$

より $(\otimes)_1$ が得られ，かつ任意の双線型写像 $\delta : \mathbb{K} \times E \longrightarrow V$ に対し

$$f(e) \coloneqq \delta(1, e), \quad (\forall e \in E)$$

で線型写像 $f : E \longrightarrow V$ を定めれば，

$$f \circ \iota(\alpha, e) = f(\alpha e) = \delta(1, \alpha e) = \alpha\delta(1, e) = \delta(\alpha, e)$$

が成り立つから $(\otimes)_2$ が満たされる．∎

定義 0.2.5 (線型写像のテンソル積)．　$(E_i)_{i=1}^n$ と $(F_i)_{i=1}^n$ を $\mathbb{K}$-線型空間の族とする．$f_i : E_i \longrightarrow F_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ が線型写像であるとき，

$$b : \bigoplus_{i=1}^n E_i \ni (e_1, \cdots, e_n) \longmapsto f_1(e_1) \otimes \cdots \otimes f_n(e_n) \in \bigotimes_{i=1}^n F_i$$

により定める b は n 重線型であり，定理 0.2.3 より $b = g \circ \otimes$ を満たす $g : \bigotimes_{i=1}^n E_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n F_i$ がただ一つ存在する．g を $f_1 \otimes \cdots \otimes f_n$ と表記して線型写像のテンソル積と定義する．いま，

$$f_1 \otimes \cdots \otimes f_n(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) = f_1(e_1) \otimes \cdots \otimes f_n(e_n), \quad (\forall (e_1, \cdots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i)$$

が成り立つ．

定理 0.2.6 (零写像のテンソル積は零写像)．　$\mathbb{K}$-線型空間の族 $(E_i)_{i=1}^n$ と $(F_i)_{i=1}^n$ と線型写像 $f_i : E_i \longrightarrow F_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ について，或る f_i が零写像なら $f_1 \otimes \cdots \otimes f_n = 0$ となる．

証明．　$f_i = 0$ とすると，定理 0.2.2 より $f_1 \otimes \cdots \otimes f_n$ は $\{\, e_1 \otimes \cdots \otimes e_n \ ; \quad e_i \in E_i \,\}$ 上で 0 となる．この空間は $\bigotimes_{i=1}^n E_i$ を生成するから $f_1 \otimes \cdots \otimes f_n = 0$ が従う．∎

定理 0.2.7 (テンソル積の基底)．　$(E_i)_{i=1}^n$ を $\mathbb{K}$-線型空間の族とし，E_i の基底を $\left(u^i_{\lambda_i}\right)_{\lambda_i \in \Lambda_i}$ とする $(i = 1, \cdots, n)$．このとき $\left(u^1_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes u^n_{\lambda_n}\right)_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n}$ は $\bigotimes_{i=1}^n E_i$ の基底となる．

証明．

第一段　各 $u^i_{\lambda_i}$ の生成する一次元空間を $W^i_{\lambda_i} \coloneqq \mathbb{K}u^i_{\lambda_i}$ と表し

$$V_i \coloneqq \bigoplus_{\lambda_i \in \Lambda_i} W^i_{\lambda_i}, \quad (i = 1, \cdots, n)$$

とおく．$\left(u^i_{\lambda_i}\right)_{\lambda_i\in\Lambda_i}$ は E_i の基底であるから，任意の $e_i\in E_i$ に対し $v_i\in V_i$ がただ一つ定まり，

$$f_i : E_i \ni e_i \longmapsto v_i \in V_i$$

により定める線型写像 f_i は同型写像である．このとき，写像のテンソル積

$$f_1\otimes\cdots\otimes f_n : \bigotimes_{i=1}^n E_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n V_i$$

は線型同型となる．実際，f_i の逆写像 f_i^{-1} のテンソル積

$$f_1^{-1}\otimes\cdots\otimes f_n^{-1} : \bigotimes_{i=1}^n V_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n E_i$$

によって，全ての $(e_1\otimes\cdots\otimes e_n)\in\bigotimes_{i=1}^n E_i$ 及び $(v_1\otimes\cdots\otimes v_n)\in\bigotimes_{i=1}^n V_i$ に対し

$$\begin{aligned}
&f_1^{-1}\otimes\cdots\otimes f_n^{-1}\circ f_1\otimes\cdots\otimes f_n(e_1\otimes\cdots\otimes e_n)\\
&\qquad = f_1^{-1}\otimes\cdots\otimes f_n^{-1}\left(f_1(e_1)\otimes\cdots\otimes f_n(e_n)\right) = (e_1\otimes\cdots\otimes e_n),\\
&f_1\otimes\cdots\otimes f_n\circ f_1^{-1}\otimes\cdots\otimes f_n^{-1}(v_1\otimes\cdots\otimes v_n)\\
&\qquad = f_1\otimes\cdots\otimes f_n\left(f_1^{-1}(v_1)\otimes\cdots\otimes f_n^{-1}(v_n)\right) = (v_1\otimes\cdots\otimes v_n)
\end{aligned}$$

が成立し，それぞれ $\bigotimes_{i=1}^n E_i$ と $\bigotimes_{i=1}^n V_i$ を生成するから

$$(f_1\otimes\cdots\otimes f_n)^{-1} = f_1^{-1}\otimes\cdots\otimes f_n^{-1}$$

の関係を得る．

第二段　$\bigotimes_{i=1}^n V_i$ と $\bigoplus_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n} W^1_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes W^n_{\lambda_n}$ が線型同型であることを示す．先ず

$$g : \sum_j (v_1^j\otimes\cdots\otimes v_n^j) \longmapsto \sum_j \left(v_1^j(\lambda_1)\otimes\cdots\otimes v_n^j(\lambda_n)\right)_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n}$$

により線型写像 $g : \bigotimes_{i=1}^n V_i \longrightarrow \bigoplus_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n} W^1_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes W^n_{\lambda_n}$ を定める．また

$$\iota_{\lambda_i} : W^i_{\lambda_i} \longrightarrow V_i, \quad (\lambda_i\in\Lambda_i,\ i=1,\cdots,n)$$

を次の標準単射として定める:

$$\iota_{\lambda_i}(u)(\lambda) = \begin{cases} u, & (\lambda=\lambda_i),\\ 0, & (\lambda\neq\lambda_i),\end{cases} \quad (\lambda\in\Lambda_i,\ u\in W^i_{\lambda_i}).$$

ι_{λ_i} は線型であるから $\iota_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes\iota_{\lambda_n} : W^1_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes W^n_{\lambda_n} \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n V_i$ を定義出来て，

$$h : w \longmapsto \sum_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n} \iota_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes\iota_{\lambda_n}\left(w(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\right)$$

により線型写像 $h : W^1_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes W^n_{\lambda_n} \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n V_i$ が定めれば $g^{-1}=h$ が成り立つ．実際，

$$\begin{aligned}
g\circ h(w) &= g\left(\sum_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n} \iota_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes\iota_{\lambda_n}\left(w(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\right)\right)\\
&= \sum_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n} g\left(\iota_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes\iota_{\lambda_n}\left(w(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\right)\right)\\
&= w
\end{aligned}$$

が任意の $w \in \bigoplus_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n} W^1_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes W^n_{\lambda_n}$ に対して成立し，かつ任意の $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ に対し

$$
\begin{aligned}
h \circ g(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) &= \sum_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n} \iota_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \iota_{\lambda_n} (v_1(\lambda_1) \otimes \cdots \otimes v_n(\lambda_n)) \\
&= \sum_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n} \iota_{\lambda_1}(v_1(\lambda_1)) \otimes \cdots \otimes \iota_{\lambda_n}(v_n(\lambda_n)) \\
&= \left(\sum_{\lambda_1 \in \Lambda_1} \iota_{\lambda_1}(v_1(\lambda_1))\right) \otimes \cdots \otimes \left(\sum_{\lambda_n \in \Lambda_n} \iota_{\lambda_n}(v_n(\lambda_n))\right) \\
&= v_1 \otimes \cdots \otimes v_n
\end{aligned}
$$

が成り立つから $g^{-1} = h$ が従う．よって g は線型同型である．

第三段　いま，$g \circ f_1 \otimes \cdots \otimes f_n$ によって $\bigotimes_{i=1}^n E_i$ と $\bigoplus_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n} W^1_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes W^n_{\lambda_n}$ は同型に対応し，

$$
w_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n}(\nu_1, \cdots, \nu_n) := \begin{cases} u^1_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes u^n_{\lambda_n}, & (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = (\nu_1, \cdots, \nu_n), \\ 0, & (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \neq (\nu_1, \cdots, \nu_n) \end{cases}
$$

として $w_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n}$ を定めれば

$$
u^1_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes u^n_{\lambda_n} \xmapsto{g \circ f_1 \otimes \cdots \otimes f_n} w_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n}
$$

が成り立つ．$(w_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n})$ の一次独立性から $\left(u^1_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes u^n_{\lambda_n}\right)_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n}$ の一次独立性が従う．

定理 0.2.8 (結合律).　$(E_i)_{i=1}^n$ を $\mathbb{K}$-線型空間の族とする．任意の $k = 1, \cdots, n-1$ に対し，

$$
\bigotimes_{i=1}^n E_i = \left(\bigotimes_{i=1}^k E_i\right) \bigotimes \left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i\right)
$$

が成立する．

証明.

第一段　n 重線型写像 $f : \bigoplus_{i=1}^n E_i \longrightarrow \left(\bigotimes_{i=1}^k E_i\right) \bigotimes \left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i\right)$ を

$$
f(e_1, \cdots, e_n) = (e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n), \quad (\forall (e_1, \cdots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i)
$$

により定めれば，定理 0.2.3 より

$$
F : (e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) \longmapsto (e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n)
$$

を満たす線型写像 $F : \bigotimes_{i=1}^n E_i \longrightarrow \left(\bigotimes_{i=1}^k E_i\right) \bigotimes \left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i\right)$ が存在する:

$$
\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i=1}^n E_i \arrow[d, "\otimes"'] \arrow[dr, "f"] & \\
\bigotimes_{i=1}^n E_i \arrow[r, "F"] & \left(\bigotimes_{i=1}^k E_i\right) \bigotimes \left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i\right)
\end{tikzcd}
$$

以降は F の逆写像を構成し F が全単射であることを示す．

第二段　$u_{k+1}\in E_{k+1},\cdots,u_n\in E_n$ を固定し

$$\Phi_{u_{k+1},\cdots,u_n}(e_1,\cdots,e_n)\coloneqq e_1\otimes\cdots e_k\otimes u_{k+1}\otimes\cdots\otimes u_n$$

によって n 重線型 $\Phi_{u_{k+1},\cdots,u_n}:\bigoplus_{i=1}^k E_i\longrightarrow\bigotimes_{i=1}^n E_i$ を定めれば，定理 0.2.3 より

$$G_{u_{k+1},\cdots,u_n}(e_1\otimes\cdots\otimes e_k)=e_1\otimes\cdots e_k\otimes u_{k+1}\otimes\cdots\otimes u_n$$

を満たす線型写像 $G_{u_{k+1},\cdots,u_n}:\bigotimes_{i=1}^k E_i\longrightarrow\bigotimes_{i=1}^n E_i$ が存在する．

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i=1}^k E_i \arrow[d, "\otimes"'] \arrow[dr, "\Phi_{u_{k+1},\cdots,u_n}"] & \\
\bigotimes_{i=1}^k E_i \arrow[r, "G_{u_{k+1},\cdots,u_n}"] & \bigotimes_{i=1}^n E_i
\end{tikzcd}$$

第三段　任意の $v\in\bigotimes_{i=1}^k E_i$ に対して

$$\Psi_v:\bigoplus_{i=k+1}^n E_i\ni(u_{k+1},\cdots,u_n)\longmapsto G_{u_{k+1},\cdots,u_n}(v)$$

を定めれば，Ψ_v は n 重線型であるから，定理 0.2.3 より

$$H_v(u_{k+1}\otimes\cdots\otimes u_n)=\Psi_v(u_{k+1},\cdots,u_n)$$

を満たす線型写像 $H_v:\bigotimes_{i=k+1}^n E_i\longrightarrow\bigotimes_{i=1}^n E_i$ が存在する．

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i=k+1}^n E_i \arrow[d, "\otimes"'] \arrow[dr, "\Psi_v"] & \\
\bigotimes_{i=k+1}^n E_i \arrow[r, "H_v"] & \bigotimes_{i=1}^n E_i
\end{tikzcd}$$

いま，$v\longmapsto\Psi_v$ は線型であり，かつ Ψ_v と H_v は線型同型で結ばれているから $v\longmapsto H_v$ の線型性が従う．

第四段　H_v の線型性と $v\longmapsto H_v$ の線型性より

$$\Gamma:\left(\bigotimes_{i=1}^k E_i\right)\times\left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i\right)\ni(v,w)\longmapsto H_v(w)$$

により定める Γ は

$$\begin{aligned}
\Gamma(e_1\otimes\cdots\otimes e_k,e_{k+1}\otimes\cdots\otimes e_n)&=H_{e_1\otimes\cdots\otimes e_k}(e_{k+1}\otimes\cdots\otimes e_n))\\
&=\Psi_{e_1\otimes\cdots\otimes e_k}(e_{k+1},\cdots,e_n))\\
&=G_{e_{k+1},\cdots,e_n}(e_1\otimes\cdots\otimes e_k))\\
&=\Phi_{e_{k+1},\cdots,e_n}(e_1,\cdots,e_k))\\
&=e_1\otimes\cdots\otimes e_n
\end{aligned}\tag{3}$$

を満たす双線型であり，定理 0.2.3 より

$$\begin{tikzcd}
\left(\bigotimes_{i=1}^k E_i\right)\times\left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i\right) \arrow[d, "\otimes"'] \arrow[dr, "\Gamma"] & \\
\left(\bigotimes_{i=1}^k E_i\right)\bigotimes\left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i\right) \arrow[r, "G"] & \bigotimes_{i=1}^n E_i
\end{tikzcd}$$

を可換にする線型写像 G が存在する．この G は F の逆写像である．実際，(3) より

$$\begin{aligned}
F \circ G\left((e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n)\right) &= F\left(\Gamma(e_1 \otimes \cdots \otimes e_k, e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n)\right) \\
&= F(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) \\
&= (e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n)
\end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned}
G \circ F\left(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n\right) &= G\left((e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n)\right) \\
&= \Gamma\left(e_1 \otimes \cdots \otimes e_k, e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n\right) \\
&= e_1 \otimes \cdots \otimes e_n
\end{aligned}$$

が得られ $F^{-1} = G$ が従う． ∎

0.3 テンソル積の内積

0.4 クロスノルム

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ と考える．

定義 0.4.1 (クロスノルム). $\mathbb{K}$-Banach 空間 X, Y のテンソル積 $X \otimes Y$ において

$$\begin{aligned}
&\alpha(x \otimes y) \leq \| x \|_X \| y \|_Y , && (x \otimes y \in X \otimes Y), \\
&\sup_{\substack{v \in X \otimes Y \\ v \neq 0}} |x^* \otimes y^*(v)| \leq \| x^* \|_{X^*} \| y^* \|_{Y^*} \, \alpha(v), && (x^* \in X^*, y^* \in Y^*)
\end{aligned} \tag{4}$$

を満たすようなノルム $\alpha : X \otimes Y \longrightarrow [0, \infty)$ をクロスノルム (cross norm) と呼ぶ．

定理 0.4.2. $\mathbb{K}$-Banach 空間のテンソル積 $X \otimes Y$ 上のクロスノルム α は次を満たす:

$$\begin{aligned}
&\alpha(x \otimes y) = \| x \|_X \| y \|_Y , && (x \otimes y \in X \otimes Y), \\
&\| x^* \otimes y^* \|_{(X \otimes Y, \alpha)^*} = \| x^* \|_{X^*} \| y^* \|_{Y^*} , && (x^* \in X^*, y^* \in Y^*).
\end{aligned}$$

証明. 先ず，Hahn-Banach の定理より

$$\begin{aligned}
\| x \|_X \| y \|_Y &= \sup_{\| x^* \|_{X^*} \leq 1} |\langle x, x^* \rangle| \sup_{\| y^* \|_{Y^*} \leq 1} |\langle y, y^* \rangle| \\
&= \sup_{\| x^* \|_{X^*} \leq 1, \| y^* \|_{Y^*} \leq 1} |x^* \otimes y^*(x \otimes y)| \\
&\leq \sup_{\| x^* \|_{X^*} \leq 1, \| y^* \|_{Y^*} \leq 1} \| x^* \|_{X^*} \| y^* \|_{Y^*} \, \alpha(x \otimes y) \\
&= \alpha(x \otimes y)
\end{aligned}$$

が成り立ち $\alpha(x\otimes y)=\|x\|_X\|y\|_Y$ を得る．また $\alpha(x\otimes y)\le\|x\|_X\|y\|_Y$ であるから

$$\begin{aligned}
\|x^*\|_{X^*}\|y^*\|_{Y^*} &= \sup_{\|x\|_X\le 1}|\langle x,x^*\rangle|\sup_{\|y\|_Y\le 1}|\langle y,y^*\rangle| \\
&= \sup_{\|x\|_X\le 1,\|y\|_Y\le 1}|x^*\otimes y^*(x\otimes y)| \\
&\le \sup_{\alpha(x\otimes y)\le 1}|x^*\otimes y^*(x\otimes y)| \\
&\le \sup_{\alpha(v)\le 1}|x^*\otimes y^*(v)| \\
&= \|x^*\otimes y^*\|_{(X\otimes Y,\alpha)^*}
\end{aligned}$$

が成立し $\|x^*\otimes y^*\|_{(X\otimes Y,\alpha)^*}=\|x^*\|_{X^*}\|y^*\|_{Y^*}$ が出る． ∎

$(X\otimes Y,\alpha)$ の完備化を $X\hat{\otimes}_\alpha Y$ と書く．以下，実際クロスノルムが存在することを示す．

定義 0.4.3 (インジェクティブノルム). $\mathbb{K}$-Banach 空間 X,Y に対し

$$\epsilon(v):=\sup_{\|x^*\|_{X^*}\le 1,\|y^*\|_{Y^*}\le 1}|x^*\otimes y^*(v)|,\quad (v\in X\otimes Y)$$

により定める ϵ をインジェクティブノルム (injective norm) と呼ぶ.

定理 0.4.4 (インジェクティブノルムは最小のクロスノルム). $\mathbb{K}$-Banach 空間 X,Y のテンソル積 $X\otimes Y$ において，インジェクティブノルムは最小のクロスノルムである．

証明.

第一段 ϵ が $X\otimes Y$ 上のノルムであることを示す．実際，

$$|x^*\otimes y^*(u+v)|\le|x^*\otimes y^*(u)|+|x^*\otimes y^*(v)|,\quad (u,v\in X\otimes Y)$$

より $\epsilon(u+v)\le\epsilon(u)+\epsilon(v)$ が従い，またスカラー α に対し

$$\epsilon(\alpha v)=\sup_{\|x^*\|_{X^*}\le 1,\|y^*\|_{Y^*}\le 1}|x^*\otimes y^*(\alpha v)|=|\alpha|\sup_{\|x^*\|_{X^*}\le 1,\|y^*\|_{Y^*}\le 1}|x^*\otimes y^*(v)|=|\alpha|\epsilon(v)$$

も成立する．次に $v=0\Leftrightarrow\epsilon(v)=0$ を示す．$v=0$ ならば任意の $x^*\otimes y^*$ に対し $x^*\otimes y^*(v)=0$ が成り立ち $\epsilon(v)=0$ が出る．逆に $v\neq 0$ とする．定理 0.2.1 より

$$v=\sum_{i=1}^n x_i\otimes y_i,\quad (x_i\in X,\ y_i\in Y,\ i=1,\cdots,n)$$

と表現できるが，このとき $(x_i\otimes y_i)_{i=1}^n$ を構成し直して

$$v=\sum_{k=1}^{\ell}x_{i_k}\otimes\tilde{y}_{i_k},\quad (x_{i_k}\neq x_{i_j}\ (k\neq j)) \tag{5}$$

と書ける．実際，$i_1:=1$ として

$$\tilde{y}_{i_1}:=\sum_{x_1=x_i}y_i$$

により $\tilde{y}_{i_1}$ を定め，$x_i \neq x_1$ を満たす最小の i を i_2 として再び

$$\tilde{y}_{i_2} \coloneqq \sum_{x_{i_2}=x_i} y_i$$

により $\tilde{y}_{i_2}$ を定め，この操作を有限回繰り返して (5) を得る．いま，$v \neq 0$ の仮定と定理 0.2.2 により，或る k に対し $x_{i_k}, \tilde{y}_{i_k} \neq 0$ が満たされている．

$$L \coloneqq \mathrm{Span}\left[\left\{\ x_{i_j}\ ;\quad 1 \leq j \leq \ell,\ j \neq k\ \right\}\right]$$

により X の有限次元部分空間，すなわち閉部分空間を定めれば x_{i_k} と L との距離 d は正であり，Hahn-Banach の定理より或る $x_k^* \in X^*$ が存在して，$\left\| x_k^* \right\|_{X^*} = 1$ かつ

$$\begin{aligned}
&\left\langle x, x_k^* \right\rangle = 0, \quad (\forall x \in L), \\
&\left\langle x_{i_k}, x_k^* \right\rangle = d > 0
\end{aligned}$$

を満たす．一方 $\tilde{y}_{i_k}$ に対しても，Hahn-Banach の定理より或る $y_k^* \in Y^*$ が存在して $\left\langle \tilde{y}_{i_k}, y_k^* \right\rangle = \left\| \tilde{y}_{i_k} \right\|_Y$ かつ $\left\| y_k^* \right\|_{Y^*} = 1$ を満たすから，

$$0 < d \left\| \tilde{y}_{i_k} \right\|_Y = \left| x_k^* \otimes y_k^*(v) \right| \leq \epsilon(v)$$

が成立する．対偶により $\epsilon(v) = 0$ ならば $v = 0$ が従う．

第二段　ϵ がクロスノルムであることを示す．先ず Hahn-Banach の定理より

$$\begin{aligned}
\epsilon(x \otimes y) &= \sup_{\|x^*\|_{X^*} \leq 1, \|y^*\|_{Y^*} \leq 1} |x^* \otimes y^*(x \otimes y)| \\
&= \sup_{\|x^*\|_{X^*} \leq 1} |\langle x, x^* \rangle| \sup_{\|y^*\|_{Y^*} \leq 1} |\langle y, y^* \rangle| \\
&= \|x\|_X \|y\|_Y, \quad (\forall (x, y) \in X \times Y)
\end{aligned}$$

が成り立つ．また 0 でない $x^* \in X^*$, $y^* \in Y^*$ に対しては

$$|x^* \otimes y^*(v)| \leq \|x^*\|_{X^*} \|y^*\|_{Y^*} \left(\frac{x^*}{\|x^*\|_{X^*}} \otimes \frac{y^*}{\|y^*\|_{Y^*}} \right)(v) \leq \|x^*\|_{X^*} \|y^*\|_{Y^*}\, \epsilon(v)$$

が成立し，$x^* = 0$ 或は $y^* = 0$ のときは定理 0.2.6 より $x^* \otimes y^* = 0$ が満たされ，

$$\|x^* \otimes y^*\|_{(X \otimes Y, \epsilon)} \leq \|x^*\|_{X^*} \|y^*\|_{Y^*}$$

を得る．

第三段　ϵ が最小のクロスノルムであることを示す．α を任意のクロスノルムとすれば

$$|x^* \otimes y^*(v)| \leq \|x^*\|_{X^*} \|y^*\|_{Y^*}\, \alpha(v), \quad (\forall v \in X \otimes Y)$$

が成り立つから，特に $\|x^*\|_{X^*} \leq 1$, $\|y^*\|_{Y^*} \leq 1$ の sup を取れば

$$\epsilon(v) \leq \alpha(v), \quad (\forall v \in X \otimes Y)$$

が従い ϵ の最小性が出る． ▮

定義 0.4.5 (プロジェクティブノルム). $\mathbb{K}$-Banach 空間 X, Y に対し，定理 0.2.3 により

$$
\begin{array}{cccc}
\Phi : \mathrm{Hom}\,(X \otimes Y, \mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}^{(2)}\,(X \times Y, \mathbb{K}) \\
\Psi & & \Psi \\
T & \longmapsto & T \circ \otimes
\end{array}
\tag{6}
$$

により定まる線型同型 Φ が存在する．これを用いて

$$\pi(v) := \sup_{\substack{b \in L^{(2)}(X \times Y, \mathbb{K}) \\ \|b\|_{L^{(2)}(X \times Y, \mathbb{K})} \leq 1}} \left| \Phi^{-1}(b)(v) \right|, \quad (v \in X \otimes Y)$$

により定める π をプロジェクティブノルム (projective norm) と呼ぶ．

定理 0.4.6 (プロジェクティブノルムは最大のクロスノルム). $\mathbb{K}$-Banach 空間 X, Y のテンソル積 $X \otimes Y$ 上にプロジェクティブノルム π を導入する．このときクロスノルムの定義の (4) を満たす任意のセミノルム p に対し $p \leq \pi$ が成立し，特に π は最大のクロスノルムである．

証明.

第一段　π がノルムであることを示す．$v \neq 0$ とすれば，定理 0.4.4 の証明と同様にして

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i, \quad (x_i \in X,\ y_i \in Y,\ x_i \neq x_j\ (i \neq j))$$

と表すことができ，或る i で $x_i, y_i \neq 0$ が満たされる．Hahn-Banach の定理より

$$\begin{aligned}
&\left\| x_i^* \right\|_{X^*} = \left\| y_i^* \right\|_{Y^*} = 1, \\
&\langle x_i, x_i^* \rangle > 0, \quad \left\langle x_j, x_i^* \right\rangle = 0, \quad (i \neq j) \\
&\langle y_i, y_i^* \rangle = \| y_i \|_Y
\end{aligned}$$

を満たす $x_i^* \in X^*$ と $y^* \in Y^*$ が存在するから，

$$b(x, y) := \langle x, x_i^* \rangle \langle y, y_i^* \rangle, \quad (x \in X,\ y \in Y)$$

により双線型写像 b を定めれば，$\|b\|_{L^{(2)}(X \times Y, \mathbb{K})} \leq \left\| x_i^* \right\|_{X^*} \left\| y_i^* \right\|_{Y^*} = 1$ かつ

$$0 < b(x_i, y_i) = |\Phi^{-1}(b)(v)| \leq \pi(v)$$

が成立する．$\pi(0) = 0$ と劣加法性及び同次性は $\Phi^{-1}(b)$ の線型性より従う．

第二段　π がクロスノルムであることを示す．先ず，任意の $x \in X,\ y \in Y$ に対して

$$\begin{aligned}
\pi(x \otimes y) &= \sup_{\substack{b \in L^{(2)}(X \times Y, \mathbb{K}) \\ \|b\|_{L^{(2)}(X \times Y, \mathbb{K})} \leq 1}} \left| \Phi^{-1}(b)(x \otimes y) \right| \\
&\leq \sup_{\substack{b \in L^{(2)}(X \times Y, \mathbb{K}) \\ \|b\|_{L^{(2)}(X \times Y, \mathbb{K})} \leq 1}} \|b\|_{L^{(2)}(X \times Y, \mathbb{K})} \|x\|_X \|y\|_Y \\
&= \|x\|_X \|y\|_Y
\end{aligned}$$

が成立する．また 0 でない $x^* \in X^*,\ y^* \in Y^*$ に対し

$$b(x,y) := \frac{x^*}{\|x^*\|_{X^*}}(x)\frac{y^*}{\|y^*\|_{Y^*}}(y), \quad (x \in X,\ y \in Y)$$

により $\|b\|_{L^{(2)}(X\times Y,\mathbb{K})} \leq 1$ を満たす有界双線型 b を定めれば，π の定義より

$$\left|\Phi^{-1}(b)(v)\right| \leq \pi(v), \quad (\forall v \in X \otimes Y)$$

が成り立つ．一方で写像のテンソル積の定義より

$$\Phi^{-1}(b) = \frac{x^*}{\|x^*\|_{X^*}} \otimes \frac{y^*}{\|y^*\|_{Y^*}} = \frac{1}{\|x^*\|_{X^*}\|y^*\|_{Y^*}} x^* \otimes y^*$$

が満たされるから

$$|x^* \otimes y^*(v)| \leq \|x^*\|_{X^*}\|y^*\|_{Y^*}\,\pi(v), \quad (\forall v \in X \otimes Y)$$

が従う．定理 0.2.6 より上式は $x^* = 0$ 或は $y^* = 0$ の場合も込めて成立するから

$$\|x^* \otimes y^*\|_{(X\otimes Y,\pi)^*} \leq \|x^*\|_{X^*}\|y^*\|_{Y^*}$$

が得られる．

第三段　p を (4) を満たすセミノルムとし，$v \in X \otimes Y$ を任意に取る．Hahn-Banach の定理より

$$p(v) = \phi_v(v), \quad |\phi_v(u)| \leq p(u) \quad (\forall u \in X \otimes Y)$$

を満たす $\phi_v \in (X \otimes Y, \pi)^*$ が存在する．

$$|(\phi_v \circ \otimes)(x,y)| = |\phi_v(x \otimes y)| \leq p(x \otimes y) \leq \|x\|_X \|y\|_Y, \quad (\forall x \in X,\ y \in Y)$$

が成り立つから $\|\phi_v \circ \otimes\|_{L^{(2)}(X\times Y,\mathbb{K})} \leq 1$ が従い，π の定義より

$$p(v) = \phi_v(v) = \Phi^{-1}(\phi_v \circ \otimes)(v) \leq \pi(v)$$

が得られる．∎

定理 0.4.7 (プロジェクティブノルムの表現).　$\mathbb{K}$-Banach 空間 X, Y のテンソル積 $X \otimes Y$ にプロジェクトノルム π を導入する．このとき次が成り立つ:

$$\pi(v) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_X \|y_i\|_Y \ ; \quad v = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \right\}.$$

証明.

第一段　$X \otimes Y$ 上のセミノルム λ を次で定める:

$$\lambda(v) := \inf\left\{ \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_X \|y_i\|_Y \ ; \quad v = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \right\}, \quad (\forall v \in X \otimes Y)$$

このとき λ が式 (4) かつ $\lambda \geq \pi$ を満たせば，定理 0.4.6 より $\lambda = \pi$ が従う．

第二段　λ がセミノルムであることを示す．実際，任意に $u, v \in X \otimes Y$ を取り，

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i, \quad v = \sum_{j=1}^{m} a_j \otimes b_j$$

を一つの表現とすれば，λ の定め方より

$$\lambda(u+v) \leq \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i + \sum_{j=1}^{m} a_j \otimes b_j$$

が成り立つ．右辺を移項して

$$\lambda(u+v) - \sum_{j=1}^{m} a_j \otimes b_j \leq \lambda(u) \leq \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$$

かつ

$$\lambda(u+v) - \lambda(u) \leq \lambda(v) \leq \sum_{j=1}^{m} a_j \otimes b_j$$

が従い λ の劣加法性を得る．また任意の $0 \neq \alpha \in \mathbb{K},\ v \in X \otimes Y$ に対し

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$$

を一つの分割とすれば

$$\alpha v = \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i) \otimes y_i$$

は αv の一つの分割となるから

$$\lambda(\alpha v) \leq \sum_{i=1}^{n} \| \alpha x_i \|_X \| y_i \|_Y = |\alpha| \sum_{i=1}^{n} \| x_i \|_X \| y_i \|_Y$$

が成立し，v の分割について下限を取れば $\lambda(\alpha v) \leq |\alpha| \lambda(v)$ が従う．逆に

$$\alpha v = \sum_{j=1}^{m} a_j \otimes b_j$$

とすれば

$$\lambda(v) \leq \sum_{j=1}^{m} \left\| \frac{1}{\alpha} a_j \right\|_X \left\| b_j \right\|_Y = \frac{1}{|\alpha|} \sum_{j=1}^{m} \left\| a_j \right\|_X \left\| b_j \right\|_Y$$

が成り立ち $|\alpha| \lambda(v) \leq \lambda(\alpha v)$ が従う．$v = 0$ なら $v = 0 \otimes y$ より $\lambda(v) = 0$ が満たされ

$$\lambda(\alpha v) = |\alpha| \lambda(v), \quad (\forall \alpha \in \mathbb{K},\ v \in X \otimes Y)$$

が出る．

第三段　λ は式 (4) を満たすことを示す．実際 λ の定め方より

$$\lambda(x \otimes y) \leq \| x \|_X \| y \|_Y, \quad (\forall x \in X,\ y \in Y)$$

が成り立つ．

第四段　$\lambda \geq \pi$ を示す．いま，任意に $v \in X \otimes Y$ を取り

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$$

を一つの分割とする．$\|b\|_{L^{(2)}(X\times Y,\mathbb{K})} \leq 1$ を満たす $b \in L^{(2)}(X \times Y, \mathbb{K})$ と式 (6) の Φ に対し

$$\left|\Phi^{-1}(b)(v)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left|\Phi^{-1}(b)(x_i \otimes y_i)\right| = \sum_{i=1}^{n} |b(x_i, y_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_X \|y_i\|_Y$$

が成り立つから，b に無関係に

$$\left|\Phi^{-1}(b)(v)\right| \leq \lambda(v)$$

が満たされ

$$\pi(v) = \sup_{\substack{b\in L^{(2)}(X\times Y,\mathbb{K}) \\ \|b\|_{L^{(2)}(X\times Y,\mathbb{K})}\leq 1}} \left|\Phi^{-1}(b)(v)\right| \leq \lambda(v)$$

が従う．　∎

定理 0.4.8.　$X \otimes Y$ を $\mathbb{K}$-Banach 空間 X, Y のテンソル積とし，ϵ, π をそれぞれインジェクティブノルムとクロスノルムとする．このとき $X \otimes Y$ 上の任意のノルム α に対し次が成立する:

$$\alpha \text{ がクロスノルム} \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon \leq \alpha \leq \pi.$$

証明.　($\Rightarrow$) はすでに示したから ($\Leftarrow$) を示す．実際，任意の $x \in X,\ y \in Y$ に対して

$$\alpha(x \otimes y) \leq \pi(x \otimes y) \leq \|x\|_X \|y\|_Y$$

が成立し，また任意の $x^* \in X^*,\ y^* \in Y^*$ に対して

$$|x^* \otimes y^*(v)| \leq \|x^* \otimes y^*\|_{(X\otimes Y,\epsilon)^*}\, \epsilon(v) \leq \|x^*\|_{X^*} \|y^*\|_{Y^*}\, \alpha(v), \quad (\forall v \in X \otimes Y)$$

が満たされ $\|x^* \otimes y^*\|_{(X\otimes Y,\alpha)^*} \leq \|x^*\|_{X^*} \|y^*\|_{Y^*}$ が得られる．　∎