

ゼミ用ノート
会田先生の資料”Rough path analysis:An Introduction”

基礎工学研究科システム創成専攻
学籍番号 29C17095
百合川尚学

2018 年 4 月 20 日

目次

0.1	導入	1
0.2	連続性定理	5
0.3	Young 積分	18

0.1 導入

以下, d 次元ベクトル $x \in \mathbb{R}^d$ と (m, d) 行列 $a \in \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^d$ について, 成分を込めて表現する場合は $x = (x^1, \dots, x^d)$, $a = (a_{ij}^j)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq d}$ と書く. また $T > 0$ を固定し $C^1 = C^1([0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d)$ とおく. (端点においては片側微分を考える.) 区間 $[s, t] \subset [0, T]$ の分割を $D = \{s = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t\}$ で表現し, 分割の全体を $\delta[s, t]$ とおく. $|D| := \max_{1 \leq i \leq N} |t_i - t_{i-1}|$ とし,

$$\sum_D = \sum_{i=1}^N$$

と略記する.

定理 0.1.1 (Riemann-Stieltjes 積分). $[s, t] \subset [0, T]$ とし, $D \in \delta[s, t]$ についてのみ考えるとき, 任意の $x \in C^1$, $f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ に対して次の極限が存在する:*

$$\lim_{|D| \rightarrow 0} \sum_D f(x_{s_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) \in \mathbb{R}^m.$$

s_{i-1} は区間 $[t_{i-1}, t_i]$ に属する任意の点であり, 極限は s_{i-1} の取り方に依らない.

証明. 各 x^j は C^1 -級であるから, 平均値の定理より $\sum_D f(x_{s_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})$ の第 k 成分を

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^d \sum_D f_j^k(x_{s_{i-1}})(x_{t_i}^j - x_{t_{i-1}}^j) \\ &= \sum_{j=1}^d \sum_D f_j^k(x_{s_{i-1}}) \dot{x}_{\xi_i}^j(t_i - t_{i-1}), \quad (\exists \xi_i \in [t_{i-1}, t_i]) \end{aligned}$$

と表現できる. 各 j, k について

$$\lim_{|D| \rightarrow 0} \sum_D f_j^k(x_{s_{i-1}}) \dot{x}_{\xi_i}^j(t_i - t_{i-1})$$

*1 極限の存在を保証する条件としては, f の有界性と微分可能性は必要ない.

は通常の連続関数の Riemann 積分

$$\int_s^t f_j^k(x_u) \dot{x}_u^j du$$

に収束する. ■

定義 0.1.2 (C^1 -級のパスに対する汎関数). $x \in C^1$ と $f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ に対して, $[s, t] \subset [0, T]$ における Riemann-Stieltjes 積分を I で表現する:

$$I_{s,t}(x) = \int_s^t f(x_u) dx_u := \lim_{|D| \rightarrow 0} \sum_D f(x_{t_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}),$$

$$\left[\int_s^t f(x_u) dx_u \right]^k = \sum_{j=1}^d \int_s^t f_j^k(x_u) dx_u^j, \quad (k = 1, \dots, m).$$

ただし $D \in \delta[s, t]$ のみを考える.

C^1 は次で定めるノルム $\|\cdot\|_{C^1}$ により Banach 空間となる:

$$\|x\|_{C^1} := \sup_{t \in [0, T]} |x(t)| + \sup_{t \in [0, T]} |\dot{x}(t)|.$$

定理 0.1.3 ($\|\cdot\|_{C^1}$ に関する連続性). $[s, t] \subset [0, T]$ とし, C^1 には $\|\cdot\|_{C^1}$ でノルム位相を入れる. このとき, $C^1 \ni x \mapsto I_{s,t}(x) \in \mathbb{R}^m$ は連続である.

証明. C^1 の第一可算性により点列連続性と連続性は一致するから, $x^n \rightarrow x$ のとき $I_{s,t}(x^n) \rightarrow I_{s,t}(x)$ が従うことを示せばよい.

$$M := \sup_{u \in [s, t]} |f(x_u)| < \infty$$

を定めれば

$$\begin{aligned} \left| \int_s^t f(x_u^n) dx_u^n - \int_s^t f(x_u) dx_u \right| &= \left| \int_s^t f(x_u^n) \dot{x}_u^n du - \int_s^t f(x_u) \dot{x}_u du \right| \\ &\leq \int_s^t |f(x_u^n) \dot{x}_u^n - f(x_u^n) \dot{x}_u| du + \int_s^t |f(x_u^n) \dot{x}_u - f(x_u) \dot{x}_u| du \\ &\leq M \|x^n - x\|_{C^1} (t - s) + \sup_{u \in [s, t]} |f(x_u^n) - f(x_u)| \|x\|_{C^1} (t - s) \end{aligned} \quad (1)$$

が成り立つ. いま, 任意に $\epsilon > 0$ を取れば, 或る $\epsilon > \delta > 0$ が存在して $v, w \in x([s, t])$, $|v - w| < \delta$ なら $|f(v) - f(w)| < \epsilon$ を満たす (一様連続). すなわち $\|x^{(n)} - x\|_{C^1} < \delta$ なら

$$\sup_{t \in [s, t]} |f(x_t^n) - f(x_t)| < \epsilon$$

が成立する. $\|x^n - x\|_{C^1} \rightarrow 0$ の仮定より, 或る自然数 N が存在して $\|x^n - x\|_{C^1} < \delta$ ($n > N$) が満たされるから, $(1) < \epsilon[M(t - s) + \|x\|_{C^1}(t - s)]$ ($n > N$) が成り立ち $I_{s,t}(x^n) \rightarrow I_{s,t}(x)$ が従う. ■

定義 0.1.4 (p -variation). $[0, T]$ 上の \mathbb{R}^d 値関数 x に対し, p -variation を次で定める:

$$\|x\|_{p,[s,t]} := \left\{ \sup_{D \in \delta[s,t]} \sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^p \right\}^{1/p}.$$

特に, $\|\cdot\|_{p,[0,T]}$ を $\|\cdot\|_p$ と表記する. また $p \geq 1$ として, 線形空間 $B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$ を

$$B_{p,T}(\mathbb{R}^d) := \left\{ x : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d ; \quad x_0 = 0, x : \text{continuous}, \|x\|_p < \infty \right\}$$

により定める.

次の結果によれば, $0 < p < 1$ に対し $B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$ を定めても 0 の定数関数のみの空間でしかない.

定理 0.1.5 ($0 < p < 1$ に対して有界 p -variation なら定数). $x : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ を連続関数とする. このとき, $p \in (0, 1)$ に対し $\|x\|_p < \infty$ が成り立つなら x は定数関数である.

証明. $t \in [0, T]$ を任意に取り固定する. このとき全ての $D \in \delta[0, t]$ に対して,

$$\begin{aligned} |x_t - x_0| &\leq \sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}| \leq \max_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^{1-p} \sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^p \\ &\leq \max_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^{1-p} \|x\|_p \end{aligned}$$

が成り立ち, x の一様連続性から右辺は $|D| \longrightarrow 0$ で 0 に収束し, $x_t = x_0$ が従う. ■

定理 0.1.6. $1 \leq p \leq q$ に対し $B_{p,T}(\mathbb{R}^d) \subset B_{q,T}(\mathbb{R}^d)$ が成立する.

証明. 任意の $x \in B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$ と $D \in \delta[0, T]$ に対し

$$\begin{aligned} \sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^q &\leq \sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^p |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^{q-p} \\ &\leq 2^{q-p} \sup_{t \in [0, T]} |x_t|^{q-p} \sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^p \\ &\leq 2^{q-p} \sup_{t \in [0, T]} |x_t|^{q-p} \|x\|_p^p \end{aligned}$$

が成立する. ■

$p \geq 1$ の場合, Minkowski の不等式によれば, 任意の $D \in \delta[s, t]$ に対し

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_D |(x_{t_i} + y_{t_i}) - (x_{t_{i-1}} + y_{t_{i-1}})|^p \right\}^{1/p} &\leq \left\{ \sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^p \right\}^{1/p} + \left\{ \sum_D |y_{t_i} - y_{t_{i-1}}|^p \right\}^{1/p} \\ &\leq \|x\|_{p,[s,t]} + \|y\|_{p,[s,t]} \end{aligned}$$

が成り立ち $\|x + y\|_{p,[s,t]} \leq \|x\|_{p,[s,t]} + \|y\|_{p,[s,t]}$ を得る.

定理 0.1.7. $B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$ は $\|\cdot\|_p$ をノルムとする Banach 空間である.

証明. 完備性を示す.

第一段 $(x^n)_{n=1}^\infty \subset B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$ を Cauchy 列とすれば, 任意の $\epsilon > 0$ に対して或る $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ が存在し

$$\|x^n - x^m\|_p = \left\{ \sup_{D \in \delta[0,T]} \sum_D \left| (x^n_{t_i} - x^m_{t_i}) - (x^n_{t_{i-1}} - x^m_{t_{i-1}}) \right|^p \right\}^{1/p} < \epsilon, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

を満たす. いま, 任意の $t \in [0, T]$ に対して $[0, T]$ の分割 $D = \{0 \leq t \leq T\}$ を考えれば

$$|x^n_t - x^m_t| < \epsilon, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

が得られ, 実数の完備性より或る $x_t \in \mathbb{R}^d$ が存在して

$$|x^n_t - x_t| < \epsilon \quad (n > n_\epsilon)$$

を満たす. この収束は t に関して一様であるから, $t \mapsto x_t$ は 0 出発かつ連続である.

第二段 $\|x^n - x\|_p \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$ を示す. 前段によれば, 任意の $D \in \delta[0, T]$ に対し

$$\sum_D \left| (x^n_{t_i} - x^n_{t_i}) - (x^m_{t_i} - x^m_{t_i}) \right|^p < \epsilon^p, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

が成り立っている. D はせいぜい有限個の分割であるから, $m \rightarrow \infty$ として

$$\sum_D \left| (x^n_{t_i} - x^n_{t_i}) - (x_{t_{i-1}} - x_{t_{i-1}}) \right|^p < \epsilon^p, \quad (n > n_\epsilon)$$

が従い, D の任意性より $\|x^n - x\|_p < \epsilon \ (n > n_\epsilon)$ を得る. ■

定理 0.1.8. $p \geq 1$ とする. また $x_0 = 0$ を満たす $x \in C^1$ の全体が作る線形空間を \tilde{C}^1 とおく.

- (1) $x \in C^1$ ならば $\|x\|_p < \infty$ が成り立つ. ただちに, $\|\cdot\|_p$ は \tilde{C}^1 においてノルムとなる.
- (2) \tilde{C}^1 において, $\|\cdot\|_{C^1}$ で導入する位相は $\|\cdot\|_p$ で導入する位相より強い.

証明.

$p = 1$ の場合 平均値の定理より, 任意の $D \in \delta[0, T]$ に対し

$$\sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}| \leq \sum_D \|x\|_{C^1} (t_i - t_{i-1}) = \|x\|_{C^1} T < \infty$$

が成り立ち $\|x\|_1 < \infty$ が従う.

$p > 1$ の場合 q を p の共役指数とする. 任意の $D \in \delta[0, T]$ に対し, Hölder の不等式より

$$\begin{aligned} \sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^p &= \sum_D \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{x}_u du \right|^p \leq \sum_D (t_i - t_{i-1}) \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} |\dot{x}_u|^q du \right)^{p/q} \\ &\leq \sum_D (t_i - t_{i-1}) \left(\int_0^T \|x\|_{C^1}^q du \right)^{p/q} = \|x\|_{C^1}^p T^p \end{aligned}$$

が成立し, $\|x\|_p < \infty$ が従う.

以上より, $p \geq 1$ ならば $\|x\|_p \leq T \|x\|_{C^1}$ ($x \in C^1$) が成り立ち (2) の主張を得る. ■

次節の考察対象は主に定理 0.1.3 と定理 0.1.8 に関する. 定理 0.1.3 によれば, C^1 に $\|\cdot\|_{C^1}$ でノルム位相を導入した場合, $f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ に対して $C^1 \ni x \mapsto I_{s,t}(x)$ は連続である. 一方で定理 0.1.3 によれば, 0 出発 C^1 -パス空間 \tilde{C}^1 に $\|\cdot\|_p$ でノルム位相を導入した場合, $\tilde{C}^1 \ni x \mapsto I_{s,t}(x)$ が連続であるという保証はない. しかし, 次節以後の結果により, $1 \leq p < 3$ かつ $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ が満たされているなら $\tilde{C}^1 \ni x \mapsto I_{s,t}(x)$ は或る意味での連続性を持つ.

0.2 連続性定理

定義 0.2.1 (記号の定義). $x \in C^1$, $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ に対し次を定める.

$$\begin{aligned}\Delta_T &:= \{ (s, t) ; \quad 0 \leq s \leq t \leq T \}, \\ X^1 : \Delta_T &\longrightarrow \mathbb{R}^d \quad \left((s, t) \mapsto X_{s,t}^1 = x_t - x_s \right), \\ X^2 : \Delta_T &\longrightarrow \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d \quad \left((s, t) \mapsto X_{s,t}^2 = \int_s^t (x_u - x_s) \otimes dx_u \right), \\ \tilde{I}_{s,t}(x) &:= f(x_s) X_{s,t}^1 = f(x_s)(x_t - x_s), \\ J_{s,t}(x) &:= f(x_s) X_{s,t}^1 + (\nabla f)(x_s) X_{s,t}^2.\end{aligned}$$

以降, $a, b, c, d \in \mathbb{R}^d$ に対して次の表現を使う:

$$\begin{aligned}[a \otimes b]_j^i &= a^i b^j, \\ [(\nabla f)(x_s) X_{s,t}^2]^i &= \sum_{j,k=1}^d \partial_k f_j^i(x_s) \int_s^t (x_u^k - x_s^k) dx_u^j, \\ [(\nabla f)(x_s)(a \otimes b)]^i &= \sum_{j,k=1}^d \partial_k f_j^i(x_s) a^k b^j, \\ [(\nabla^2 f)(x_s)(a \otimes b \otimes c)]^i &= \sum_{j,k,v=1}^d \partial_v \partial_k f_j^i(x_s) a^v b^k c^j, \\ [(\nabla^3 f)(x_s)(a \otimes b \otimes c \otimes d)]^i &= \sum_{j,k,v,w=1}^d \partial_w \partial_v \partial_k f_j^i(x_s) a^w b^v c^k d^j.\end{aligned}$$

定理 0.2.2. $[s, t] \subset [0, T]$, $x \in C^1$, $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ とする. $D \in \delta[s, t]$ に対し

$$\tilde{I}_{s,t}(x, D) := \sum_D \tilde{I}_{t_{i-1}, t_i}(x), \quad J_{s,t}(x, D) := \sum_D J_{t_{i-1}, t_i}(x)$$

を定めるとき, 次が成立する:

$$I_{s,t}(x) = \lim_{|D| \rightarrow 0} \tilde{I}_{s,t}(x, D) = \lim_{|D| \rightarrow 0} J_{s,t}(x, D).$$

証明. 第一の等号は $I_{s,t}(x)$ の定義によるから, 第二の等号を証明する. まず,

$$\begin{aligned}
I_{s,t}(x) &= \int_s^t f(x_u) dx_u \\
&= \int_s^t f(x_s) + f(x_u) - f(x_s) dx_u \\
&= \int_s^t f(x_s) dx_u + \int_s^t \int_0^1 (\nabla f)(x_s + \theta(x_u - x_s)) (X_{s,u}^1 \otimes \dot{x}_u) d\theta du \\
&= f(x_s) X_{s,t}^1 + (\nabla f)(x_s) X_{s,t}^2 \\
&\quad + \int_s^t \int_0^1 \{(\nabla f)(x_s + \theta(x_u - x_s)) - (\nabla f)(x_s)\} (X_{s,u}^1 \otimes \dot{x}_u) d\theta du \\
&= J_{s,t}(x) + \int_s^t \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_s + r(x_u - x_s)) (X_{s,u}^1 \otimes X_{s,u}^1 \otimes \dot{x}_u) dr d\theta du
\end{aligned}$$

が成り立つ. $[0, T] \ni t \mapsto x_t$ の連続性より, 最下段式中の $x_s + r(x_u - x_s)$ ($0 \leq r \leq 1, s \leq u \leq t$) は或るコンパクト集合 K に含まれ, f が C^2 -級関数であるから

$$M := \sum_{i,j,k,v} \sup_{x \in K} |\partial_v \partial_k f_j^i(x)|$$

として $M < \infty$ を定めれば

$$\begin{aligned}
&\left| \int_s^t \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_s + r(x_u - x_s)) (X_{s,u}^1 \otimes X_{s,u}^1 \otimes \dot{x}_u) dr d\theta du \right| \\
&\leq \int_s^t \int_0^1 \int_0^\theta |(\nabla^2 f)(x_s + r(x_u - x_s)) (X_{s,u}^1 \otimes X_{s,u}^1 \otimes \dot{x}_u)| dr d\theta du \\
&\leq M \int_s^t |X_{s,u}^1|^2 |\dot{x}_u| du \\
&\leq M \|x\|_{C^1}^3 \int_s^t (u-s)^2 du
\end{aligned}$$

が出る. 特に $D \in \delta[s, t]$ に対して

$$\begin{aligned}
\sum_D \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - t_{i-1})^2 du &\leq \sum_D |D| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - t_{i-1}) du \\
&\leq \sum_D |D| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - s) du \leq \frac{1}{2} (t - s)^2 |D| \longrightarrow 0 \quad (|D| \longrightarrow 0)
\end{aligned}$$

が成立するから,

$$|I_{s,t}(x) - J_{s,t}(x, D)| \leq \sum_D |I_{t_{i-1}, t_i}(x) - J_{t_{i-1}, t_i}(x)| \longrightarrow 0 \quad (|D| \longrightarrow 0)$$

が従い定理の主張を得る. ■

定義 0.2.3 (control function). 関数 $\omega : \Delta_T \longrightarrow [0, \infty)$ が連続かつ任意の $s \leq u \leq t$ に対して

$$\omega(s, u) + \omega(u, t) \leq \omega(s, t) \tag{2}$$

を満たすとき, ω を control function と呼ぶ.

式 (2) から $\omega(t, t) = 0$ ($\forall t \in [0, T]$) が従う。つまり control function は”対角線上で 0 になる”。

定義 0.2.4 (ノルム空間値写像の p -variation). $(V, \|\cdot\|)$ をノルム空間, $p \geq 1$ とする。このとき連続写像 $\psi : \Delta_T \rightarrow V$ に対する p -variation を

$$\|\psi\|_{p,[s,t]} := \left\{ \sup_{D \in \delta[s,t]} \sum_D \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p \right\}^{1/p}, \quad ((s, t) \subset [0, T])$$

で定める。特に $\|\cdot\|_{p,[0,T]}$ を $\|\cdot\|_p$ と書く。

定理 0.2.5 (p -variation が定める control function). $(V, \|\cdot\|)$ をノルム空間, $p \geq 1$ とする。 $\|\psi\|_p < \infty$ かつ $\psi_{t,t} = 0$ ($\forall t \in [0, T]$) を満たす連続写像 $\psi : \Delta_T \rightarrow V$ に対して,

$$\omega : \Delta_T \ni (s, t) \mapsto \|\psi\|_{p,[s,t]}^p$$

により定める ω は control function である。

証明. $\|\psi\|_p < \infty$ の仮定より ω は $[0, \infty)$ 値であるから, 以下では式 (2) の成立と連続性を示す。

第一段 ω が式 (2) を満たすことを示す。実際, 任意に $D_1 \in \delta[s, u], D_2 \in \delta[u, t]$ を取れば

$$\sum_{D_1} \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p + \sum_{D_2} \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p = \sum_{D_1 \cup D_2} \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p \leq \|\psi\|_{p,[s,t]}^p$$

が成り立つ。左辺の D_1, D_2 の取り方は独立であるから, それぞれに対し上限を取れば

$$\|\psi\|_{p,[s,u]}^p + \|\psi\|_{p,[u,t]}^p \leq \|\psi\|_{p,[s,t]}^p$$

が従う。

第二段 任意の $[s, t] \subset [0, T]$ について^{*2},

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow +0} \omega(s, t+h) &= \inf_{h>0} \omega(s, t+h), & \lim_{h \rightarrow +0} \omega(s-h, t) &= \inf_{h>0} \omega(s-h, t), \\ \lim_{h \rightarrow +0} \omega(s, t-h) &= \sup_{h>0} \omega(s, t-h), & \lim_{h \rightarrow +0} \omega(s+h, t) &= \sup_{h>0} \omega(s+h, t) \end{aligned}$$

が成立する。実際 $\omega(s, t+h)$ について見れば, これは下に有界かつ $h \rightarrow +0$ に対し単調減少であるから極限が確定し下限に一致する。残りの三つも同様の理由で成立する。

第三段 任意の $s \in [0, T]$ に対し, $(s, T] \ni t \mapsto \omega(s, t)$ の左連続性を示す。ここでは

$$\tilde{\omega}(s, t) := \begin{cases} \lim_{h \rightarrow +0} \omega(s, t-h), & (s < t), \\ 0, & (s = t), \end{cases} \quad (\forall (s, t) \in \Delta_T)$$

で定める $\tilde{\omega}$ が優加法性を持ち, かつ

$$\|\psi_{s,t}\|^p \leq \tilde{\omega}(s, t), \quad (\forall (s, t) \in \Delta_T)$$

を満たすことを示す。実際これが示されれば, 任意の $D \in \delta[s, t]$ に対し

$$\sum_D \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p \leq \sum_D \tilde{\omega}(t_{i-1}, t_i) \leq \tilde{\omega}(s, t)$$

^{*2} 下段の二式については $s < t$ と仮定する。また上段についても, $t = T$ 或は $s = 0$ の場合を除く必要がある。

が成立し $\omega(s, t) \leq \tilde{\omega}(s, t)$ が従い、 $\omega(s, t) \geq \omega(s, t - h) (\forall h > 0)$ と併せて

$$\omega(s, t) = \tilde{\omega}(s, t) = \lim_{h \rightarrow +0} \omega(s, t - h)$$

を得る。いま、任意に $s < u < t$ を取れば、十分小さい $h_1, h_2 > 0$ に対して

$$\omega(s, u - h_1) + \omega(u, t - h_2) \leq \omega(s, t - h_2)$$

が満たされ、 $h_1 \rightarrow +0, h_2 \rightarrow +0$ として

$$\tilde{\omega}(s, u) + \tilde{\omega}(u, t) \leq \tilde{\omega}(s, t)$$

が成り立ち $\tilde{\omega}$ は優加法性を持つ。また、もし或る $[u, v] \subset [0, T]$ に対して

$$\|\psi_{u,v}\|^p > \tilde{\omega}(u, v)$$

が成り立つと仮定すると

$$\|\psi_{u,v}\|^p > \tilde{\omega}(u, v) \geq \omega(u, v - h) \geq \|\psi_{u,v-h}\|^p, \quad (\forall h > 0)$$

となる。一方 ψ の連続性より $\|\psi_{u,v-h}\|^p \rightarrow \|\psi_{u,v}\|^p (h \rightarrow +0)$ が従い矛盾が生じる。同様にして、任意の $t \in (0, T]$ に対し $[0, t) \ni s \mapsto \omega(s, t)$ の右連続性も出る。

第四段 任意の $t \in [0, T)$ に対して次を示す:

$$\lim_{h \rightarrow +0} \omega(t, t + h) = \inf_{h > 0} \omega(t, t + h) = 0.$$

第一の等号は前段より従うから、第二の等号を背理法により証明する。いま

$$\inf_{h > 0} \omega(t, t + h) =: \delta > 0$$

と仮定する。 ψ の連続性より或る h_1 が存在して

$$\|\psi_{t,t+h}\|^p = \|\psi_{t,t+h} - \psi_{t,t}\|^p < \frac{\delta}{8}, \quad (\forall h < h_1) \quad (3)$$

が成立するから、任意に $h_0 < h_1$ を取り固定する。一方で $\omega(t, t + h_0) \geq \delta$ より

$$\sum_{i=1}^N \|\psi_{\tau_{i-1}, \tau_i}\|^p > \frac{7\delta}{8}$$

を満たす $D = \{t = \tau_0 < \tau_1 < \cdots, \tau_N = t + h_0\} \in \delta[t, t + h_0]$ が存在し、(3) と併せて

$$\sum_{i=2}^N \|\psi_{\tau_{i-1}, \tau_i}\|^p > \frac{7\delta}{8} - \|\psi_{t, \tau_1}\|^p > \frac{7\delta}{8} - \frac{\delta}{8} = \frac{3\delta}{4}$$

を得る。また、 $\omega(t, \tau_1) \geq \delta$ より或る $D' \in \delta[t, \tau_1]$ が存在して

$$\sum_{D'} \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p > \frac{3\delta}{4}$$

を満たすから、 $D' \cup \{\tau_1 < \cdots, \tau_N = t + h_0\} \in \delta[t, t + h_0]$ より

$$\omega(t, t + h_0) > \sum_{D'} \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p + \sum_{i=2}^N \|\psi_{\tau_{i-1}, \tau_i}\|^p > \frac{3\delta}{2}$$

が従うが, $h_0 < h_1$ の任意性と単調減少性により

$$\delta = \inf_{h>0} \omega(t, t+h) = \inf_{h_1>h>0} \omega(t, t+h) \geq \frac{3\delta}{2}$$

となり矛盾が生じる. 同様にして

$$\lim_{h \rightarrow +0} \omega(t-h, t) = 0, \quad (\forall t \in (0, T))$$

も成立する.

第五段 任意に $s \in [0, T)$ を取り固定し, $[s, T) \ni t \mapsto \omega(s, t)$ が右連続であることを示す.

$$\lim_{h \rightarrow +0} \omega(s, t+h) \leq \omega(s, t) \quad (4)$$

を示せば, 第二段より逆向きの不等号も従い右連続性を得る. 任意に $h, \epsilon > 0$ を取れば,

$$\omega(s, t+h) - \epsilon \leq \sum_D \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p$$

を満たす $D \in \delta[s, t+h]$ が存在する. $D_1 := [s, t] \cap D$ において $D_1 = \{t_0 < \dots < t_k\}$ と表されているとする. このとき $D_2 := D \setminus (D_1 \cup \{t_{k+1}\})$ として

$$\begin{aligned} \omega(s, t+h) - \epsilon &\leq \sum_{i=1}^k \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p + \|\psi_{t_k, t_{k+1}}\|^p + \sum_{D_2} \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p \\ &= \sum_{i=1}^k \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p + \|\psi_{t_k, t}\|^p + \|\psi_{t_k, t_{k+1}}\|^p - \|\psi_{t_k, t}\|^p + \sum_{D_2} \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p \\ &\leq \omega(s, t) + \omega(t, t+h) + \|\psi_{t_k, t_{k+1}}\|^p - \|\psi_{t_k, t}\|^p \end{aligned}$$

が成り立つ. ψ の (一様) 連続性より $\|\psi_{t_k, t_{k+1}}\|^p \rightarrow \|\psi_{t_k, t}\|^p$ ($h \rightarrow +0$) が成り立つから

$$\lim_{h \rightarrow +0} \omega(s, t+h) - \epsilon \leq \omega(s, t)$$

が従い, ϵ の任意性より (4) が出る. 同様にして $s \mapsto \omega(s, t)$ の左連続性も成立する.

第六段 ω の $(s, t) \in \Delta_T$ における連続性を示す. $h, k \geq 0$ として考えれば,

$$\begin{aligned} &|\omega(s, t) - \omega(s-h, t-k)| \\ &\leq |\omega(s, t) - \omega(s-h, t)| + |\omega(s-h, t) - \omega(s-h, t-k)| \\ &= |\omega(s, t) - \omega(s-h, t)| + \omega(s-h, t) - \omega(s-h, t-k) \\ &\leq |\omega(s, t) - \omega(s-h, t)| + \omega(s-h, t) - \omega(s, t-k) \\ &\leq |\omega(s, t) - \omega(s-h, t)| + |\omega(s-h, t) - \omega(s, t)| + |\omega(s, t) - \omega(s, t-k)|, \\ &|\omega(s, t) - \omega(s+h, t+k)| \\ &\leq |\omega(s, t) - \omega(s+h, t)| + |\omega(s+h, t) - \omega(s+h, t+k)| \\ &= |\omega(s, t) - \omega(s+h, t)| + \omega(s+h, t+k) - \omega(s+h, t) \\ &\leq |\omega(s, t) - \omega(s+h, t)| + \omega(s, t+k) - \omega(s+h, t) \\ &\leq |\omega(s, t) - \omega(s-h, t)| + |\omega(s, t+k) - \omega(s, t)| + |\omega(s, t) - \omega(s+h, t)| \end{aligned}$$

が成り立ち, 値の差は上述した連続性により縮まる. また $|\omega(s, t) - \omega(s-h, t+k)|$ については, $h, k \rightarrow +0$ として $\omega(s-h, t+k)$ は単調減少に $\omega(s, t)$ に近づく. 単調性より極限は h, k の近づけ方に依らず

$$\omega(s, t) = \lim_{h \rightarrow +0} \lim_{k \rightarrow +0} \omega(s-h, t+k) = \lim_{h, k \rightarrow +0} \omega(s-h, t+k)$$

となり、同様に

$$\omega(s, t) = \lim_{h \rightarrow +0} \lim_{k \rightarrow +0} \omega(s + h, t - k) = \lim_{h, k \rightarrow +0} \omega(s + h, t - k)$$

も得られ、 $\omega(s - h, t - k)$ は $h, k \rightarrow 0$ (近づけ方に依らない) として $\omega(s, t)$ に収束し ω の連続性が出る。 ■

定理 0.2.6 (control function の例). 以下の関数 $\omega : \Delta_T \rightarrow [0, \infty)$ は control function である.

- (1) $\omega : (s, t) \mapsto \|X^1\|_{p:[s,t]}^p, \quad (p \geq 1, x \in B_{p,T}(\mathbb{R}^d)).$
- (2) $\omega : (s, t) \mapsto \|X^2\|_{p:[s,t]}^p, \quad (p \geq 1, x \in C^1).$

行列 $a = (a_j^i)$ のノルムは $|a| = \sqrt{\sum_{i,j} |a_j^i|^2}$ として考える.

定理 0.2.7.

- (1) $\omega : (s, t) \mapsto X_{s,t}^1 = x_t - x_s$ は連続であるから、前定理より ω は control function である.
- (2) 任意の $[s, t] \subset [0, T]$ に対して $\|X^2\|_{p:[s,t]}^p < \infty$ を示せば、あとは上と同じ理由により定理の主張が得られる. 実際、任意の分割 $D = \{s = t_0 < \dots < t_N = t\}$ に対し

$$\begin{aligned} \|X_{t_{i-1}, t_i}^2\| &\leq \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (x_u - x_{t_{i-1}}) \otimes \dot{x}_u du \right| \\ &\leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} |(x_u - x_{t_{i-1}}) \otimes \dot{x}_u| du \\ &\leq \|x\|_{C^1}^2 \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - s) du \right\}^{1/p} \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - s) du \right\}^{1-1/p} \\ &\leq \|x\|_{C^1}^2 \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - s) du \right\}^{1/p} \left\{ \int_s^t (u - s) du \right\}^{1-1/p} \end{aligned}$$

が成り立つから、

$$\begin{aligned} \sum_D \|X_{t_{i-1}, t_i}^2\|^p &\leq \sum_D \|x\|_{C^1}^{2p} \left\{ \frac{1}{2}(t - s)^2 \right\}^{p-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - s) du \\ &= \|x\|_{C^1}^{2p} \left\{ \frac{1}{2}(t - s)^2 \right\}^{p-1} \int_s^t (u - s) du = \|x\|_{C^1}^{2p} \left\{ \frac{1}{2}(t - s)^2 \right\}^p \end{aligned}$$

により $\|X^2\|_{p:[s,t]}^p < \infty$ が従う. ■

補題 0.2.8. ω を Δ_T 上の control function とする. $D = \{s = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t\}$ について、 $N \geq 2$ の場合或る $1 \leq i \leq N - 1$ が存在して次を満たす:

$$\omega(t_{i-1}, t_{i+1}) \leq \frac{2\omega(s, t)}{N - 1}. \quad (5)$$

証明. (会田先生のテキスト.) ■

定理 0.2.9 ($1 \leq p < 2$ の場合の連続性定理). $1 \leq p < 2$ とし, $x_0 = y_0$ を満たす $x, y \in C^1$ と $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$, $0 < \epsilon, R < \infty$ を任意に取る. このとき,

$$\|X^1\|_p, \|Y^1\|_p \leq R, \quad \|X^1 - Y^1\|_p \leq \epsilon$$

なら, 或る定数 $C = C(p, R, f)$ が存在し, 任意の $0 \leq s \leq t \leq T$ に対して次が成立する:

$$|I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y)| \leq \epsilon C.$$

系 0.2.10 (p -variation による閉球上の Lipschitz 連続性). $1 \leq p < 2$ とし, $x_0 = y_0$ を満たす $x, y \in C^1$ と $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$, $0 < R < \infty$ を任意に取る. このとき,

$$\|X^1\|_p, \|Y^1\|_p \leq R$$

なら, 或る定数 $C = C(p, R, f)$ が存在して次を満たす:

$$|I_{0,T}(x) - I_{0,T}(y)| \leq C \|X^1 - Y^1\|_p.$$

証明 (系 0.2.10). 定理 0.2.9 において, $\epsilon = \|X^1 - Y^1\|_p (x \neq y)^{*3}$ として証明が通る. ■

証明 (定理 0.2.9). $[s, t] \subset [0, T]$ とする.

第一段 $\omega : \Delta_T \rightarrow [0, \infty)$ を

$$\omega(\alpha, \beta) = \|X^1\|_{p, [\alpha, \beta]}^p + \|Y^1\|_{p, [\alpha, \beta]}^p + \epsilon^{-p} \|X^1 - Y^1\|_{p, [\alpha, \beta]}^p, \quad ((\alpha, \beta) \in \Delta_T)$$

で定めれば, 定理 0.2.6 により $1 \leq p$ の下で ω は control function である.

第二段 任意に $[s, t]$ の分割 $D = \{s = t_0 < \dots < t_N = t\}$ ($N \geq 2$) を取れば, 補題 0.2.8 より (5) を満たす $t_{(0)}$ が存在する. ここで, $D_{-0} := D$, $D_{-1} := D \setminus \{t_{(0)}\}$ と定める. $N \geq 3$ ならば D_{-1} についても (5) を満たす $t_{(1)}$ が存在するから, $D_{-2} := D_{-1} \setminus \{t_{(1)}\}$ と定める. この操作を繰り返せば $t_{(k)}, D_{-k}$ ($k = 0, 1, \dots, N-1$) が得られ,

$$\begin{aligned} & \tilde{I}_{s,t}(x, D) - \tilde{I}_{s,t}(y, D) \\ &= \sum_{k=0}^{N-2} \left[\left\{ \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1}) \right\} - \left\{ \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k-1}) \right\} \right] \\ & \quad + \left\{ \tilde{I}_{s,t}(x) - \tilde{I}_{s,t}(y) \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

と表現できる.

第三段 式 (6) について, 次を満たす定数 C_1 が存在することを示す:

$$|(6)| \leq \epsilon C_1 \quad (7)$$

^{*3} $x = y$ なら $\|X^1 - Y^1\|_p = 0$ かつ $I_{s,t}(x) = I_{s,t}(y)$ が成り立つ.

見やすくするために $t_k = t_{(k)}$ と書き直せば,

$$\begin{aligned}
& \left\{ \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1}) \right\} - \left\{ \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k-1}) \right\} \\
&= \{f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}})\} X_{t_k, t_{k+1}}^1 - \{f(y_{t_k}) - f(y_{t_{k-1}})\} Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \\
&= \{f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}})\} (X_{t_k, t_{k+1}}^1 - Y_{t_k, t_{k+1}}^1) \\
&\quad + \{f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}})\} Y_{t_k, t_{k+1}}^1 - \{f(y_{t_k}) - f(y_{t_{k-1}})\} Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \\
&= \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes (X_{t_k, t_{k+1}}^1 - Y_{t_k, t_{k+1}}^1) d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 d\theta \\
&\quad - \int_0^1 (\nabla f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 d\theta \\
&= \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes (X_{t_k, t_{k+1}}^1 - Y_{t_k, t_{k+1}}^1) d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) (X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 d\theta \\
&\quad - \int_0^1 (\nabla f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 d\theta \\
&= \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes (X_{t_k, t_{k+1}}^1 - Y_{t_k, t_{k+1}}^1) d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) (X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}) + r(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) - y_{t_{k-1}} - \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))) \\
&\quad \quad (X_{0, t_{k-1}}^1 - Y_{0, t_{k-1}}^1) \otimes Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta^{*4} \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}) + r(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) - y_{t_{k-1}} - \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))) \\
&\quad \quad \theta(X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \otimes Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta
\end{aligned}$$

が成り立つ. 補題 0.2.8 より

$$\begin{aligned}
& |X_{t_{k-1}, t_k}^1|, |Y_{t_{k-1}, t_k}^1|, |X_{t_k, t_{k+1}}^1|, |Y_{t_k, t_{k+1}}^1| \leq \omega(t_{k-1}, t_{k+1})^{1/p} \leq \left(\frac{2\omega(s, t)}{N - k - 1} \right)^{1/p}, \\
& |X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1|, |X_{t_k, t_{k+1}}^1 - Y_{t_k, t_{k+1}}^1| \leq \epsilon \omega(t_{k-1}, t_{k+1})^{1/p} \leq \epsilon \left(\frac{2\omega(s, t)}{N - k - 1} \right)^{1/p}
\end{aligned}$$

が満たされ, また

$$|X_{0, t_{k-1}}^1 - Y_{0, t_{k-1}}^1| \leq \epsilon \omega(0, t_{k-1})^{1/p} \leq \epsilon \omega(0, T)^{1/p} \leq \epsilon (2R^p + 1)^{1/p}$$

でもあるから,

$$M := \sum_{i,j} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f_j^i(x)| + \sum_{i,j,k} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial_k f_j^i(x)| + \sum_{i,j,k,v} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial_v \partial_k f_j^i(x)| \quad (8)$$

^{*4} $x_0 = y_0$ の仮定より $x_{t_{k-1}} - y_{t_{k-1}} = X_{0, t_{k-1}}^1 - Y_{0, t_{k-1}}^1$ が成り立つ.

と定めて

$$\begin{aligned}
& \left| \left\{ \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1}) \right\} - \left\{ \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k-1}) \right\} \right| \\
& \leq M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| X_{t_k, t_{k+1}}^1 - Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \right| \\
& \quad + M \left| X_{0, t_{k-1}}^1 - Y_{0, t_{k-1}}^1 \right| \left| Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \right| \\
& \leq \epsilon M \left[2 + 2(2R^p + 1)^{1/p} \right] \left(\frac{2\omega(s, t)}{N - k - 1} \right)^{2/p} \\
& \leq \epsilon M \left[2 + 2(2R^p + 1)^{1/p} \right] 2^{2/p} (2R^p + 1)^{2/p} \left(\frac{1}{N - k - 1} \right)^{2/p}
\end{aligned}$$

を得る.

$$C'_1 := M \left[2 + 2(2R^p + 1)^{1/p} \right] 2^{2/p} (2R^p + 1)^{2/p}$$

とおけば

$$|(6)| \leq \sum_{k=0}^{N-2} \epsilon C'_1 \left(\frac{1}{N - k - 1} \right)^{2/p} < \epsilon C'_1 \zeta\left(\frac{2}{p}\right)$$

が成立し, $p < 2$ より $\zeta(2/p) < \infty$ であるから $C_1 := C'_1 \zeta(2/p)$ とおいて (7) が従う.

第四段 $x_0 = y_0$ の仮定により $x_s - y_s = X_{0,s}^1 - Y_{0,s}^1$ が成り立ち

$$\begin{aligned}
\left| \tilde{I}_{s,t}(x) - \tilde{I}_{s,t}(y) \right| &= \left| f(x_s) X_{s,t}^1 - f(y_s) Y_{s,t}^1 \right| \\
&\leq \left| f(x_s) X_{s,t}^1 - f(x_s) Y_{s,t}^1 \right| + \left| f(x_s) Y_{s,t}^1 - f(y_s) Y_{s,t}^1 \right| \\
&\leq M \left| X_{s,t}^1 - Y_{s,t}^1 \right| + \left| \int_0^1 (\nabla f)(y_s + \theta(x_s - y_s)) \left[(X_{0,s}^1 - Y_{0,s}^1) \otimes Y_{s,t}^1 \right] d\theta \right| \\
&\leq M \left| X_{s,t}^1 - Y_{s,t}^1 \right| + M \left| X_{0,s}^1 - Y_{0,s}^1 \right| \left| Y_{s,t}^1 \right| \\
&\leq M \epsilon \omega(s, t)^{1/p} + M \epsilon \omega(0, s)^{1/p} \omega(s, t)^{1/p} \\
&\leq \epsilon M \left[(2R^p + 1)^{1/p} + (2R^p + 1)^{2/p} \right]
\end{aligned}$$

が従う. ここで $C_2 := M \left[(2R^p + 1)^{1/p} + (2R^p + 1)^{2/p} \right]$ とおく.

第五段 第二段と第三段より, 任意の $D \in \delta[s, t]$ に対し

$$\left| \tilde{I}_{s,t}(x, D) - \tilde{I}_{s,t}(y, D) \right| \leq \epsilon(C_1 + C_2)$$

が成立し. 定理 0.2.2 により $|D| \rightarrow 0$ として

$$\left| I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y) \right| \leq \epsilon(C_1 + C_2)$$

が出る. ■

定理 0.2.11 ($2 \leq p < 3$ の場合の連続性定理). $2 \leq p < 3$ とし, $x_0 = y_0$ を満たす $x, y \in C^1$ と $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$, $0 < \epsilon, R < \infty$ を任意に取る. このとき,

$$\begin{aligned} & \|X^1\|_p, \|Y^1\|_p, \|X^2\|_{p/2}, \|Y^2\|_{p/2} \leq R < \infty, \\ & \|X^1 - Y^1\|_p, \|X^2 - Y^2\|_{p/2} \leq \epsilon \end{aligned}$$

なら, 或る定数 $C = C(p, R, f)$ が存在し, 任意の $0 \leq s \leq t \leq T$ に対して次が成立する:

$$|I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y)| \leq \epsilon C.$$

系 0.2.12. $1 \leq p < 2$ とし, $x_0 = y_0$ を満たす $x, y \in C^1$ と $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$, $0 < R < \infty$ を任意に取る. このとき,

$$\|X^1\|_p, \|Y^1\|_p, \|X^2\|_{p/2}, \|Y^2\|_{p/2} \leq R$$

なら, 或る定数 $C = C(p, R, f)$ が存在して次を満たす:

$$|I_{0,T}(x) - I_{0,T}(y)| \leq C (\|X^1 - Y^1\|_p + \|X^2 - Y^2\|_{p/2}).$$

証明 (系 0.2.12). 定理 0.2.11 において, $\epsilon = \|X^1 - Y^1\|_p + \|X^2 - Y^2\|_{p/2}$ ($x \neq y$) として証明が通る. ■

証明 (定理 0.2.12). $[s, t] \subset [0, T]$ とする.

第一段 $\omega : \Delta_T \rightarrow [0, \infty)$ を

$$\begin{aligned} \omega(\alpha, \beta) &= \|X^1\|_{p, [\alpha, \beta]}^p + \|Y^1\|_{p, [\alpha, \beta]}^p + \|X^2\|_{p/2, [\alpha, \beta]}^{p/2} + \|Y^2\|_{p/2, [\alpha, \beta]}^{p/2} \\ &\quad + \epsilon^{-p} \|X^1 - Y^1\|_{p, [\alpha, \beta]}^p + \epsilon^{-p/2} \|X^2 - Y^2\|_{p/2, [\alpha, \beta]}^{p/2}, \quad ((\alpha, \beta) \in \Delta_T) \end{aligned}$$

で定めれば, 定理 0.2.6 により $2 \leq p$ の下で ω は control function である.

第二段 $D \in \delta[s, t]$ に対し, 定理 0.2.9 の証明と同様にして $t_{(k)}, D_{-k}$ を構成すれば

$$\begin{aligned} & J_{s,t}(x, D) - J_{s,t}(y, D) \\ &= \sum_{k=0}^{N-2} [\{J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})\} - \{J_{s,t}(y, D_{-k}) - J_{s,t}(y, D_{-k-1})\}] \\ &\quad + \{J_{s,t}(x) - J_{s,t}(y)\} \end{aligned} \tag{9}$$

と表現できる.

第三段 $J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})$ を変形する. 以降 $t_k = t_{(k)}$ と書き直せば

$$\begin{aligned} & J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1}) \\ &= J_{t_{k-1}, t_k}(x) + J_{t_k, t_{k+1}}(x) - J_{t_{k-1}, t_{k+1}}(x) \\ &= f(x_{t_{k-1}})X_{t_{k-1}, t_k}^1 + f(x_{t_k})X_{t_k, t_{k+1}}^1 - f(x_{t_{k-1}})X_{t_{k-1}, t_{k+1}}^1 \\ &\quad + (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X_{t_{k-1}, t_k}^2 + (\nabla f)(x_{t_k})X_{t_k, t_{k+1}}^2 - (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X_{t_{k-1}, t_{k+1}}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \{f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}})\} X_{t_k, t_{k+1}}^1 \\
&\quad + (\nabla f)(x_{t_{k-1}}) X_{t_{k-1}, t_k}^2 + (\nabla f)(x_{t_k}) X_{t_k, t_{k+1}}^2 - (\nabla f)(x_{t_{k-1}}) X_{t_{k-1}, t_{k+1}}^2 \\
&= \int_0^1 \{(\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) - (\nabla f)(x_{t_{k-1}})\} X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_k, t_{k+1}}^1 d\theta \\
&\quad + (\nabla f)(x_{t_{k-1}}) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_k, t_{k+1}}^1 \\
&\quad + (\nabla f)(x_{t_{k-1}}) X_{t_{k-1}, t_k}^2 + (\nabla f)(x_{t_k}) X_{t_k, t_{k+1}}^2 - (\nabla f)(x_{t_{k-1}}) X_{t_{k-1}, t_{k+1}}^2 \\
&= \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
&\quad + (\nabla f)(x_{t_{k-1}}) (X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_k, t_{k+1}}^1 + X_{t_{k-1}, t_k}^2 - X_{t_{k-1}, t_{k+1}}^2) \\
&\quad + (\nabla f)(x_{t_k}) X_{t_k, t_{k+1}}^2 \\
&= \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
&\quad + \{(\nabla f)(x_{t_k}) - (\nabla f)(x_{t_{k-1}})\} X_{t_k, t_{k+1}}^2 \\
&= \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_k, t_{k+1}}^2 d\theta
\end{aligned}$$

を得る.

第四段 式 (9) について, 次を満たす定数 C_1 が存在することを示す:

$$|(9)| \leq \epsilon C_1. \quad (10)$$

実際, 前段の結果より

$$\begin{aligned}
&\{J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})\} - \{J_{s,t}(y, D_{-k}) - J_{s,t}(y, D_{-k-1})\} \\
&= \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_k, t_{k+1}}^2 d\theta \\
&\quad - \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
&\quad - \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^2 d\theta \\
&= \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes (X_{t_k, t_{k+1}}^1 - Y_{t_k, t_{k+1}}^1) dr d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes (X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^\theta \{(\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) - (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))\} \\
&\quad \quad X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) (X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \otimes Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes (X_{t_k, t_{k+1}}^2 - Y_{t_k, t_{k+1}}^2) d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \{(\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) - (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^2 d\theta \\
& + \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) (X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^2 d\theta \\
= & \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes (X_{t_k, t_{k+1}}^1 - Y_{t_k, t_{k+1}}^1) dr d\theta \\
& + \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes (X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
& + \int_0^1 \int_0^\theta \int_0^1 (\nabla^3 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}) + u(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) - y_{t_{k-1}} - r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))) \\
& \quad \left\{ (X_{0, t_{k-1}}^1 - Y_{0, t_{k-1}}^1) + r(X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \right\} \otimes X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 du dr d\theta \\
& + \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) (X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \otimes Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
& + \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes (X_{t_k, t_{k+1}}^2 - Y_{t_k, t_{k+1}}^2) d\theta \\
& + \int_0^1 \int_0^1 (\nabla^3 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}) + r(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) - y_{t_{k-1}} - \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))) \\
& \quad \left\{ (X_{0, t_{k-1}}^1 - Y_{0, t_{k-1}}^1) + \theta(X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \right\} \otimes X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^2 dr d\theta \\
& + \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) (X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^2 d\theta
\end{aligned}$$

が成り立つから,

$$\begin{aligned}
M := & \sum_{i,j} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f_j^i(x)| + \sum_{i,j,k} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial_k f_j^i(x)| \\
& + \sum_{i,j,k,v} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial_v \partial_k f_j^i(x)| + \sum_{i,j,k,v,w} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial_w \partial_v \partial_k f_j^i(x)|
\end{aligned} \tag{11}$$

において

$$\begin{aligned}
& \left| \{J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})\} - \{J_{s,t}(y, D_{-k}) - J_{s,t}(y, D_{-k-1})\} \right| \\
& \leq M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| X_{t_k, t_{k+1}}^1 - Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \right| \\
& \quad + M \left| X_{0, t_{k-1}}^1 - Y_{0, t_{k-1}}^1 \right| \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| X_{t_k, t_{k+1}}^2 - Y_{t_k, t_{k+1}}^2 \right| \\
& \quad + M \left| X_{0, t_{k-1}}^1 - Y_{0, t_{k-1}}^1 \right| \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^2 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^2 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^2 \right| \\
& \leq \epsilon M \left[5 + 2\omega(0, t_{k-1})^{1/p} + 2\omega(t_{k-1}, t_k)^{1/p} \right] \left(\frac{2\omega(s, t)}{N - k - 1} \right)^{3/p} \\
& \leq \epsilon M \left[2 + 4 \left(2R^p + 2R^{p/2} + 2 \right)^{1/p} \right] 2^{3/p} \left(2R^p + 2R^{p/2} + 2 \right)^{3/p} \left(\frac{1}{N - k - 1} \right)^{3/p}
\end{aligned}$$

を得る. ここで

$$C'_1 := M \left[2 + 4 \left(2R^p + 2R^{p/2} + 2 \right)^{1/p} \right] 2^{3/p} \left(2R^p + 2R^{p/2} + 2 \right)^{3/p}$$

と定めれば

$$|(9)| \leq \sum_{k=0}^{N-2} \epsilon C'_1 \left(\frac{1}{N-k-1} \right)^{3/p} < \epsilon C'_1 \zeta \left(\frac{3}{p} \right)$$

が成立し, $p < 3$ より $\zeta(3/p) < \infty$ であるから $C_1 := C'_1 \zeta(3/p)$ とおいて (10) が出る.

第五段 $x_0 = y_0$ の仮定により

$$\begin{aligned} & |J_{s,t}(x) - J_{s,t}(y)| \\ & \leq |f(x_s)X_{s,t}^1 - f(y_s)Y_{s,t}^1| + |(\nabla f)(x_s)X_{s,t}^2 - (\nabla f)(y_s)Y_{s,t}^2| \\ & \leq |f(x_s)X_{s,t}^1 - f(x_s)Y_{s,t}^1| + |f(x_s)Y_{s,t}^1 - f(y_s)Y_{s,t}^1| \\ & \quad + |(\nabla f)(x_s)X_{s,t}^2 - (\nabla f)(x_s)Y_{s,t}^2| + |(\nabla f)(x_s)Y_{s,t}^2 - (\nabla f)(y_s)Y_{s,t}^2| \\ & \leq M|X_{s,t}^1 - Y_{s,t}^1| + \left| \int_0^1 (\nabla f)(y_s + \theta(x_s - y_s))(x_s - y_s) \otimes Y_{s,t}^1 d\theta \right| \\ & \quad + M|X_{s,t}^2 - Y_{s,t}^2| + \left| \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_s + \theta(x_s - y_s))(x_s - y_s) \otimes Y_{s,t}^2 d\theta \right| \\ & \leq M|X_{s,t}^1 - Y_{s,t}^1| + M|X_{0,s}^1 - Y_{0,s}^1| |Y_{s,t}^1| \\ & \quad + M|X_{s,t}^2 - Y_{s,t}^2| + M|X_{0,s}^1 - Y_{0,s}^1| |Y_{s,t}^2| \\ & \leq \epsilon M \omega(s, t)^{1/p} + \epsilon M \omega(0, s)^{1/p} \omega(s, t)^{1/p} \\ & \quad + \epsilon M \omega(s, t)^{2/p} + \epsilon M \omega(0, s)^{1/p} \omega(s, t)^{2/p} \\ & \leq \epsilon M \left[\omega(0, T)^{1/p} + 2\omega(0, T)^{2/p} + \omega(0, T)^{3/p} \right] \\ & \leq \epsilon M \left[(2R^p + 2R^{p/2} + 2)^{1/p} + 2(2R^p + 2R^{p/2} + 2)^{2/p} + (2R^p + 2R^{p/2} + 2)^{3/p} \right] \end{aligned}$$

が従う. ここで最下段の ϵ の係数を C_2 とおく.

第六段 以上より, 任意の $D \in \delta[s, t]$ に対し

$$|J_{s,t}(x, D) - J_{s,t}(y, D)| \leq \epsilon(C_1 + C_2)$$

が成り立ち, 定理 0.2.2 により $|D| \rightarrow 0$ として

$$|I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y)| \leq \epsilon(C_1 + C_2)$$

が出る. ■

系 0.2.13 (パスが 0 出発なら f の有界性は要らない). 定理 0.2.9 と定理 0.2.11 について, $x, y \in \tilde{C}^1$ ならば $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ として主張が成り立つ.

証明. $x_0 = 0$ なら

$$\|X^1\|_p \leq R \quad \Rightarrow \quad |x_t| \leq R \quad (\forall t \in [0, T])$$

が成り立つから, 式 (8) と (11) において $\sup_{x \in \mathbb{R}^d}$ を $\sup_{|x| \leq 9R}$ に替えればよい. ■

0.3 Young 積分

補題 0.3.1. $x \in C^1$, $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ とする.

(1) $1 \leq p < 2$ の場合, 或る control function ω が存在して

$$|X_{s,t}^1| \leq \omega(s, t)^{1/p}, \quad (0 \leq \forall s \leq \forall t \leq T)$$

を満たすとき, ある定数 $C = C(p, f)$ があり

$$|I_{s,t}(x)| \leq C (\omega(s, t)^{1/p} + \omega(s, t)^{2/p}).$$

が成立する.

(2) $2 \leq p < 3$ の場合, 或る control function ω が存在して

$$|X_{s,t}^1| \leq \omega(s, t)^{1/p}, \quad |X_{s,t}^2| \leq \omega(s, t)^{2/p}, \quad (0 \leq \forall s \leq \forall t \leq T)$$

を満たすとき, ある定数 $C = C(p, f)$ があり

$$|I_{s,t}(x)| \leq C (\omega(s, t)^{1/p} + \omega(s, t)^{2/p} + \omega(s, t)^{3/p}).$$

が成立する.

証明.

(1) $D = \{s = t_0 < \cdots < t_N = t\}$ ($N \geq 2$) に対し, 補題 0.2.8 により存在する i を取り $D_{-1} := D \setminus \{i\}$ と書く. 補題 0.2.8 の添数を除く作業を続けて D_{-k} ($k = 1, \dots, N-1$) を構成する.

$$M := \max_{\substack{t \in [0, T] \\ 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j, k \leq d}} |\partial_k f_j^i(x_t)|, \quad M' := \max_{t \in [0, T]} |f(x_t)|$$

とおけば $M, M' < \infty$ であり, $|X_{t_i, t_{i+1}}^1| \leq \omega(t_i, t_{i+1})^{1/p} \leq \omega(t_{i-1}, t_{i+1})^{1/p}$ と補題 0.2.8 により

$$\begin{aligned} |\tilde{I}_{s,t}(x, D) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-1})| &= |\tilde{I}_{t_{i-1}, t_i}(x) + \tilde{I}_{t_i, t_{i+1}}(x) - \tilde{I}_{t_{i-1}, t_{i+1}}(x)| \\ &\leq |\{f(x_{t_i}) - f(x_{t_{i-1}})\} X_{t_i, t_{i+1}}^1| \\ &\leq \left| \left\{ \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{i-1}} + \theta(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})) d\theta \right\} X_{t_{i-1}, t_i}^1 \otimes X_{t_i, t_{i+1}}^1 \right| \\ &\leq md^2 M |X_{t_i, t_{i+1}}^1|^2 \\ &\leq md^2 M \left(\frac{2\omega(s, t)}{N-1} \right)^{2/p} \end{aligned}$$

が成立する. 同様に

$$|\tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1})| \leq md^2 M \left(\frac{2\omega(s, t)}{N-k-1} \right)^{2/p}, \quad (k = 0, \dots, N-2)$$

が成り立ち ($D_{-0} = D$)

$$\begin{aligned}
|\tilde{I}_{s,t}(x, D) - f(x_s)X_{s,t}^1| &\leq \sum_{k=0}^{N-2} |\tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1})| \\
&\leq md^2 M(2\omega(s, t))^{2/p} \sum_{k=0}^{N-2} \left(\frac{1}{N-k-1} \right)^{2/p} \\
&\leq md^2 M(2\omega(s, t))^{2/p} \zeta\left(\frac{2}{p}\right)
\end{aligned}$$

が従う. いま, 仮定より $p < 2$ であるから $\zeta(2/p) < \infty$ であり, 定理 0.2.2 より

$$|I_{s,t}(x)| \leq M' \omega(s, t)^{1/p} + md^2 M(2\omega(s, t))^{2/p} \zeta\left(\frac{2}{p}\right)$$

を得る.

(2) (1) と同様に D_{-k} ($k = 1, \dots, N-1$) を構成する. 会田先生のノートの通りに

$$\begin{aligned}
J_{s,t}(x, D) - J_{s,t}(x, D_{-1}) &= \left\{ \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{i-1}} + \theta(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})) dr d\theta \right\} X_{t_{i-1}, t_i}^1 \otimes X_{t_{i-1}, t_i}^1 \otimes X_{t_i, t_{i+1}}^1 \\
&\quad + \left\{ \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{i-1}} + \theta(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})) d\theta \right\} X_{t_{i-1}, t_i}^1 \otimes X_{t_i, t_{i+1}}^2
\end{aligned}$$

を得る. ここで (1) の M, M' に加えて

$$M'' := \max_{\substack{t \in [0, T] \\ 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j, k, v \leq d}} |\partial_v \partial_k f_j^i(x_t)|$$

とおけば

$$\begin{aligned}
|J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})| &\leq md^2 M \left(\frac{2\omega(s, t)}{N-k-1} \right)^{3/p} + md^2 M'' \left(\frac{2\omega(s, t)}{N-k-1} \right)^{1/p} \left(\frac{2\omega(s, t)}{N-k-1} \right)^{2/p} \\
&\leq md^2 (M + M'') \left(\frac{2\omega(s, t)}{N-k-1} \right)^{3/p}
\end{aligned}$$

が成立し, 会田先生のノートの通りに

$$|J_{s,t}(x, D) - (f(x_s)X_{s,t}^1 + (\nabla f)(x_s)X_{s,t}^2)| \leq 2^{3/p} md^2 (M + M'') \zeta\left(\frac{3}{p}\right) \omega(s, t)^{3/p}$$

が従い, $p < 3$ の仮定より $\zeta(3/p) < \infty$ である. (1) と同じく定理 0.2.2 より

$$|I_{s,t}(x)| \leq M' \omega(s, t)^{1/p} + md^2 M \omega(s, t)^{2/p} + 2^{3/p} md^2 (M + M'') \zeta\left(\frac{3}{p}\right) \omega(s, t)^{3/p}$$

となる. ■