

ゼミ用ノート
会田先生の資料”Rough path analysis:An Introduction”

基礎工学研究科システム創成専攻
学籍番号 29C17095
百合川尚学

2018 年 4 月 20 日

目次

0.1	導入	1
0.2	連続性定理	5
0.3	Young 積分	16

0.1 導入

以下, d 次元ベクトル $x \in \mathbb{R}^d$ と (m, d) 行列 $a \in \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^d$ について, 成分を込めて表現する場合は $x = (x^1, \dots, x^d)$, $a = (a_{ij}^j)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq d}$ と書く. また $T > 0$ を固定し $C^1 = C^1([0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d)$ とおく. (端点においては片側微分を考える.) 区間 $[s, t] \subset [0, T]$ の分割を $D = \{s = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t\}$ で表現し, 分割の全体を $\delta[s, t]$ とおく. $|D|$ により $\max_{1 \leq i \leq N} |t_i - t_{i-1}|$ を表し,

$$\sum_D = \sum_{i=1}^N$$

と略記する.

定理 0.1.1 (Riemann-Stieltjes 積分). $[s, t] \subset [0, T]$ とし, $D \in \delta[s, t]$ についてのみ考えるとき, 任意の $x \in C^1$, $f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ に対して次の極限が存在する: ^{*1}

$$\lim_{|D| \rightarrow 0} \sum_D f(x_{s_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) \in \mathbb{R}^m.$$

s_{i-1} は区間 $[t_{i-1}, t_i]$ に属する任意の点であり, 極限は s_{i-1} の取り方に依らない.

証明. 各 x^j は C^1 -級であるから, 平均値の定理より $\sum_D f(x_{s_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})$ の第 k 成分を

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^d \sum_D f_j^k(x_{s_{i-1}})(x_{t_i}^j - x_{t_{i-1}}^j) \\ &= \sum_{j=1}^d \sum_D f_j^k(x_{s_{i-1}}) \dot{x}_{\xi_i}^j(t_i - t_{i-1}), \quad (\exists \xi_i \in [t_{i-1}, t_i]) \end{aligned}$$

と表現できる. 各 j, k について

$$\lim_{|D| \rightarrow 0} \sum_D f_j^k(x_{s_{i-1}}) \dot{x}_{\xi_i}^j(t_i - t_{i-1})$$

^{*1} 極限の存在を保証する条件としては, f の有界性と微分可能性は必要ない.

は通常の連続関数の Riemann 積分

$$\int_s^t f_j^k(x_u) \dot{x}_u^j du$$

に収束する. ■

定義 0.1.2 (C^1 -級のパスに対する汎関数). $x \in C^1$ と $f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ に対して, $[s, t] \subset [0, T]$ における Riemann-Stieltjes 積分を I で表現する:

$$I_{s,t}(x) = \int_s^t f(x_u) dx_u := \lim_{|D| \rightarrow 0} \sum_D f(x_{t_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}),$$

$$\left[\int_s^t f(x_u) dx_u \right]^k = \sum_{j=1}^d \int_s^t f_j^k(x_u) dx_u^j, \quad (k = 1, \dots, m).$$

ただし $D \in \delta[s, t]$ のみを考える.

C^1 は次で定めるノルム $\|\cdot\|_{C^1}$ により Banach 空間となる:

$$\|x\|_{C^1} := \sup_{t \in [0, T]} |x(t)| + \sup_{t \in [0, T]} |\dot{x}(t)|.$$

定理 0.1.3 ($\|\cdot\|_{C^1}$ に関する連続性). $[s, t] \subset [0, T]$ とし, C^1 には $\|\cdot\|_{C^1}$ でノルム位相を入れる. このとき, $C^1 \ni x \mapsto I_{s,t}(x) \in \mathbb{R}^m$ は連続である.

証明. C^1 の第一可算性により点列連続性と連続性は一致するから, $x^n \rightarrow x$ のとき $I_{s,t}(x^n) \rightarrow I_{s,t}(x)$ が従うことを示せばよい. 各 j, k について

$$\int_s^t f_j^k(x_u^n) dx_u^{n,j} \rightarrow \int_s^t f_j^k(x_u) dx_u^j, \quad (n \rightarrow \infty) \quad (1)$$

が成り立つことを示せば十分である. 連続性より $M := \sup_{u \in [s, t]} |f(x_u)| < \infty$ が定まり

$$\begin{aligned} \left| \int_s^t f_j^k(x_u^n) dx_u^{n,j} - \int_s^t f_j^k(x_u) dx_u^j \right| &= \left| \int_s^t f_j^k(x_u^n) \dot{x}_u^{n,j} du - \int_s^t f_j^k(x_u) \dot{x}_u^j du \right| \\ &\leq \int_s^t \left| f_j^k(x_u^n) \dot{x}_u^{n,j} - f_j^k(x_u^n) \dot{x}_u^j \right| du + \int_s^t \left| f_j^k(x_u^n) \dot{x}_u^j - f_j^k(x_u) \dot{x}_u^j \right| du \\ &\leq M \|x^n - x\|_{C^1} (t - s) + \sup_{u \in [s, t]} |f_j^k(x_u^n) - f_j^k(x_u)| \|x\|_{C^1} (t - s) \end{aligned} \quad (2)$$

が成り立つ. いま, 任意に $\epsilon > 0$ を取れば, 或る $\epsilon > \delta > 0$ が存在して $v, w \in x([s, t])$, $|v - w| < \delta$ なら $|f_j^k(v) - f_j^k(w)| < \epsilon$ を満たす (一様連続). すなわち $\|x^n - x\|_{C^1} < \delta$ なら

$$\sup_{t \in [s, t]} |f_j^k(x_t^n) - f_j^k(x_t)| < \epsilon$$

が成立する. $\|x^n - x\|_{C^1} \rightarrow 0$ の仮定より, 或る自然数 N が存在して $\|x^n - x\|_{C^1} < \delta$ ($n > N$) が満たされるから, $(2) < \epsilon[M(t - s) + \|x\|_{C^1}(t - s)]$ ($n > N$) が成り立ち (1) が従う. ■

定義 0.1.4 (p -variation). $[0, T]$ 上の \mathbb{R}^d 値関数 x に対し, p -variation を次で定める:

$$\|x\|_{p,[s,t]} := \left\{ \sup_{D \in \delta[s,t]} \sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^p \right\}^{1/p}.$$

特に, $\|\cdot\|_{p,[0,T]}$ を $\|\cdot\|_p$ と表記する. また $p \geq 1$ として, 線形空間 $B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$ を

$$B_{p,T}(\mathbb{R}^d) := \left\{ x : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d ; \quad x_0 = 0, x : \text{continuous}, \|x\|_p < \infty \right\}$$

により定める.

次の結果によれば, $0 < p < 1$ に対し $B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$ を定めても 0 の定数関数のみの空間でしかない.

定理 0.1.5 ($0 < p < 1$ に対して有界 p -variation なら定数). $x : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ を連続関数とする. このとき, $p \in (0, 1)$ に対し $\|x\|_p < \infty$ が成り立つなら x は定数関数である.

証明. $t \in [0, T]$ を任意に取り固定する. このとき全ての $D \in \delta[0, t]$ に対して,

$$\begin{aligned} |x_t - x_0| &\leq \sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}| \leq \max_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^{1-p} \sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^p \\ &\leq \max_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^{1-p} \|x\|_p \end{aligned}$$

が成り立ち, x の一様連続性から右辺は $|D| \longrightarrow 0$ で 0 に収束し, $x_t = x_0$ が従う. ■

$p \geq 1$ の場合, Minkowski の不等式によれば, 任意の $D \in \delta[s, t]$ に対し

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_D |(x_{t_i} + y_{t_i}) - (x_{t_{i-1}} + y_{t_{i-1}})|^p \right\}^{1/p} &\leq \left\{ \sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^p \right\}^{1/p} + \left\{ \sum_D |y_{t_i} - y_{t_{i-1}}|^p \right\}^{1/p} \\ &\leq \|x\|_{p,[s,t]} + \|y\|_{p,[s,t]} \end{aligned}$$

が成り立ち $\|x + y\|_{p,[s,t]} \leq \|x\|_{p,[s,t]} + \|y\|_{p,[s,t]}$ を得る.

定理 0.1.6. $B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$ は $\|\cdot\|_p$ をノルムとする Banach 空間である.

証明. 完備性を示す.

第一段 $(x^n)_{n=1}^\infty \subset B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$ を Cauchy 列とすれば, 任意の $\epsilon > 0$ に対して或る $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ が存在し

$$\|x^n - x^m\|_p = \left\{ \sup_{D \in \delta[0,T]} \sum_D \left| (x^n_{t_i} - x^m_{t_i}) - (x^n_{t_{i-1}} - x^m_{t_{i-1}}) \right|^p \right\}^{1/p} < \epsilon, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

を満たす. いま, 任意の $t \in [0, T]$ に対して $[0, T]$ の分割 $D = \{0 \leq t \leq T\}$ を考えれば

$$|x^n_t - x^m_t| < \epsilon, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

が得られ、実数の完備性より或る $x_t \in \mathbb{R}^d$ が存在して

$$|x_t^n - x_t| < \epsilon \quad (n > n_\epsilon)$$

を満たす。この収束は t に関して一様であるから、 $t \mapsto x_t$ は 0 出発かつ連続である。

第二段 $\|x^n - x\|_p \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) を示す。前段によれば、任意の $D \in \delta[0, T]$ に対し

$$\sum_D |(x_{t_i}^m - x_{t_i}^n) - (x_{t_{i-1}}^m - x_{t_{i-1}}^n)|^p < \epsilon^p, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

が成り立っている。 D はせいぜい有限個の分割であるから、 $m \rightarrow \infty$ として

$$\sum_D |(x_{t_i} - x_{t_i}^n) - (x_{t_{i-1}} - x_{t_{i-1}}^n)|^p < \epsilon^p, \quad (n > n_\epsilon)$$

が従い、 D の任意性より $\|x^n - x\|_p < \epsilon$ ($n > n_\epsilon$) を得る。 ■

定理 0.1.7. $p \geq 1$ とする。また $x_0 = 0$ を満たす $x \in C^1$ の全体が作る線形空間を \tilde{C}^1 とおく。

- (1) $x \in C^1$ ならば $\|x\|_p < \infty$ が成り立つ。ただし、 $\|\cdot\|_p$ は \tilde{C}^1 においてノルムとなる。
- (2) \tilde{C}^1 において、 $\|\cdot\|_{C^1}$ で導入する位相は $\|\cdot\|_p$ で導入する位相より強い。

証明.

$p = 1$ の場合 平均値の定理より、任意の $D \in \delta[0, T]$ に対し

$$\sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}| \leq \sum_D \|x\|_{C^1} (t_i - t_{i-1}) = \|x\|_{C^1} T < \infty$$

が成り立ち $\|x\|_1 < \infty$ が従う。

$p > 1$ の場合 q を p の共役指数とする。任意の $D \in \delta[0, T]$ に対し、Hölder の不等式より

$$\begin{aligned} \sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^p &= \sum_D \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{x}_u du \right|^p \leq \sum_D (t_i - t_{i-1}) \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} |\dot{x}_u|^q du \right)^{p/q} \\ &\leq \sum_D (t_i - t_{i-1}) \left(\int_0^T \|x\|_{C^1}^q du \right)^{p/q} = \|x\|_{C^1}^p T^p \end{aligned}$$

が成立し、 $\|x\|_p < \infty$ が従う。

以上より、 $p \geq 1$ ならば $\|x\|_p \leq T \|x\|_{C^1}$ ($x \in C^1$) が成り立ち (2) の主張を得る。 ■

次節の考察対象は主に定理 0.1.3 と定理 0.1.7 に関係する。定理 0.1.3 によれば、 C^1 に $\|\cdot\|_{C^1}$ でノルム位相を導入した場合、 $f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ に対して $C^1 \ni x \mapsto I_{s,t}(x)$ は連続である。一方で定理 0.1.3 によれば、0 出発 C^1 -パス空間 \tilde{C}^1 に $\|\cdot\|_p$ でノルム位相を導入した場合、 $\tilde{C}^1 \ni x \mapsto I_{s,t}(x)$ が連続であるという保証はない。しかし、次節以後の結果により、 $1 \leq p < 3$ かつ $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ が満たされているなら $\tilde{C}^1 \ni x \mapsto I_{s,t}(x)$ は或る意味での連続性を持つ。

0.2 連続性定理

定義 0.2.1 (記号の定義). $x \in C^1$, $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ に対し次を定める.

$$\begin{aligned}\Delta_T &:= \{ (s, t) ; \quad 0 \leq s \leq t \leq T \}, \\ X^1 : \Delta_T &\longrightarrow \mathbb{R}^d \quad ((s, t) \mapsto X_{s,t}^1 = x_t - x_s), \\ X^2 : \Delta_T &\longrightarrow \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d \quad \left((s, t) \mapsto X_{s,t}^2 = \int_s^t (x_u - x_s) \otimes dx_u \right), \\ \tilde{I}_{s,t}(x) &:= f(x_s) X_{s,t}^1 = f(x_s)(x_t - x_s), \\ J_{s,t}(x) &:= f(x_s) X_{s,t}^1 + (\nabla f)(x_s) X_{s,t}^2.\end{aligned}$$

以降, $a, b, c, d \in \mathbb{R}^d$ に対して次の表現を使う:

$$\begin{aligned}[(\nabla f)(x_s) X_{s,t}^2]^i &= \sum_{j,k=1}^d \partial_k f_j^i(x_s) \int_s^t (x_u^k - x_s^k) dx_u^j, \\ [(\nabla f)(x_s)(a \otimes b)]^i &= \sum_{j,k=1}^d \partial_k f_j^i(x_s) a^k b^j, \\ [(\nabla^2 f)(x_s)(a \otimes b \otimes c)]^i &= \sum_{j,k,v=1}^d \partial_v \partial_k f_j^i(x_s) a^v b^k c^j, \\ [(\nabla^3 f)(x_s)(a \otimes b \otimes c \otimes d)]^i &= \sum_{j,k,v,w=1}^d \partial_w \partial_v \partial_k f_j^i(x_s) a^w b^v c^k d^j.\end{aligned}$$

定理 0.2.2. $[s, t] \subset [0, T]$, $x \in C^1$, $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ とする. $D \in \delta[s, t]$ に対し

$$\tilde{I}_{s,t}(x, D) := \sum_D \tilde{I}_{t_{i-1}, t_i}(x), \quad J_{s,t}(x, D) := \sum_D J_{t_{i-1}, t_i}(x)$$

を定めるとき, 次が成立する:

$$I_{s,t}(x) = \lim_{|D| \rightarrow 0} \tilde{I}_{s,t}(x, D) = \lim_{|D| \rightarrow 0} J_{s,t}(x, D).$$

証明. 第一の等号は $I_{s,t}(x)$ の定義によるから, 第二の等号を証明する. まず,

$$\begin{aligned}I_{s,t}(x) &= \int_s^t f(x_u) dx_u \\ &= \int_s^t f(x_s) + f(x_u) - f(x_s) dx_u \\ &= \int_s^t f(x_s) dx_u + \int_s^t \int_0^1 (\nabla f)(x_s + \theta(x_u - x_s)) (X_{s,u}^1 \otimes \dot{x}_u) d\theta du \\ &= f(x_s) X_{s,t}^1 + (\nabla f)(x_s) X_{s,t}^2 \\ &\quad + \int_s^t \int_0^1 \{(\nabla f)(x_s + \theta(x_u - x_s)) - (\nabla f)(x_s)\} (X_{s,u}^1 \otimes \dot{x}_u) d\theta du\end{aligned}$$

$$= J_{s,t}(x) + \int_s^t \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_s + r(x_u - x_s)) (X_{s,u}^1 \otimes X_{s,u}^1 \otimes \dot{x}_u) dr d\theta du$$

が成り立つ． $[0, T] \ni t \mapsto x_t$ の連続性より，最下段式中の $x_s + r(x_u - x_s)$ ($0 \leq r \leq 1$, $s \leq u \leq t$) は或るコンパクト集合 K に含まれ， f が C^2 -級関数であるから

$$M := \sum_{i,j,k,v} \sup_{x \in K} |\partial_v \partial_k f_j^i(x)|$$

として $M < \infty$ を定めれば

$$\begin{aligned} & \left| \int_s^t \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_s + r(x_u - x_s)) (X_{s,u}^1 \otimes X_{s,u}^1 \otimes \dot{x}_u) dr d\theta du \right| \\ & \leq \int_s^t \int_0^1 \int_0^\theta \left| (\nabla^2 f)(x_s + r(x_u - x_s)) (X_{s,u}^1 \otimes X_{s,u}^1 \otimes \dot{x}_u) \right| dr d\theta du \\ & \leq M \int_s^t |X_{s,u}^1|^2 |\dot{x}_u| du \\ & \leq M \|x\|_{C^1}^3 \int_s^t (u-s)^2 du \end{aligned}$$

が出る．特に $D \in \delta[s, t]$ に対して

$$\begin{aligned} \sum_D \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - t_{i-1})^2 du & \leq \sum_D |D| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - t_{i-1}) du \\ & \leq \sum_D |D| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - s) du \leq \frac{1}{2} (t - s)^2 |D| \longrightarrow 0 \quad (|D| \longrightarrow 0) \end{aligned}$$

が成立するから，

$$|I_{s,t}(x) - J_{s,t}(x, D)| \leq \sum_D |I_{t_{i-1}, t_i}(x) - J_{t_{i-1}, t_i}(x)| \longrightarrow 0 \quad (|D| \longrightarrow 0)$$

が従い定理の主張を得る． ■

定義 0.2.3 (control function). 関数 $\omega : \Delta_T \longrightarrow [0, \infty)$ が連続かつ任意の $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$ に対して

$$\omega(s, u) + \omega(u, t) \leq \omega(s, t) \tag{3}$$

を満たすとき， ω を **control function** と呼ぶ．

式 (3) から $\omega(t, t) = 0$ ($\forall t \in [0, T]$) が従う．

定義 0.2.4 (ノルム空間値写像の p -variation). $(V, \|\cdot\|)$ をノルム空間， $p \geq 1$ とする．このとき連続写像 $\psi : \Delta_T \longrightarrow V$ に対する p -variation を

$$\|\psi\|_{p, [s, t]} := \left\{ \sup_{D \in \delta[s, t]} \sum_D \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p \right\}^{1/p}, \quad ((s, t) \subset [0, T])$$

で定める．特に $\|\cdot\|_{p, [0, T]}$ を $\|\cdot\|_p$ と書く．

定理 0.2.5. $(V, \|\cdot\|)$ をノルム空間, $p \geq 1$ とする. $\|\psi\|_p < \infty$ かつ $\psi_{t,t} = 0$ ($\forall t \in [0, T]$) を満たす連続写像 $\psi : \Delta_T \rightarrow V$ に対して

$$\omega : \Delta_T \ni (s, t) \mapsto \|\psi\|_{p, [s, t]}^p$$

により定める ω は control function である.

証明. $\|\psi\|_p < \infty$ の仮定より ω は $[0, \infty)$ 値であるから, 以下では式 (3) の成立と連続性を示す.

第一段 ω が式 (3) を満たすことを示す. 実際, 任意に $D_1 \in \delta[s, u], D_2 \in \delta[u, t]$ を取れば

$$\sum_{D_1} \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p + \sum_{D_2} \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p = \sum_{D_1 \cup D_2} \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p \leq \|\psi\|_{p, [s, t]}^p$$

が成り立つ. 左辺の D_1, D_2 の取り方は独立であるから, それぞれに対し上限を取れば

$$\|\psi\|_{p, [s, u]}^p + \|\psi\|_{p, [u, t]}^p \leq \|\psi\|_{p, [s, t]}^p$$

が従う.

第二段 任意の $[s, t] \subset [0, T]$ について,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow +0} \omega(s, t+h) &= \inf_{h>0} \omega(s, t+h), & \lim_{h \rightarrow +0} \omega(s-h, t) &= \inf_{h>0} \omega(s-h, t), \\ \lim_{h \rightarrow +0} \omega(s, t-h) &= \sup_{h>0} \omega(s, t-h), & \lim_{h \rightarrow +0} \omega(s+h, t) &= \sup_{h>0} \omega(s+h, t) \end{aligned}$$

が成立する. 実際 $\omega(s, t+h)$ について見れば, これは下に有界かつ $h \rightarrow +0$ に対し単調減少であるから極限が確定し下限に一致する. 残りの三つも同様の理由で成立する.

第二段 任意の $t \in [0, T]$ に対して次を示す:

$$\lim_{h \rightarrow +0} \omega(t, t+h) = \inf_{h>0} \omega(t, t+h) = 0.$$

第一の等号は前段より従うから, 第二の等号を背理法により証明する. いま

$$\inf_{h>0} \omega(t, t+h) =: \delta > 0$$

と仮定する. ψ の連続性より或る h_1 が存在して

$$\|\psi_{t, t+h}\|^p = \|\psi_{t, t+h} - \psi_{t, t}\|^p < \frac{\delta}{8}, \quad (\forall h < h_1) \quad (4)$$

が成立するから, 任意に $h_0 < h_1$ を取り固定する. 一方で $\omega(t, t+h_0) \geq \delta$ より

$$\sum_{i=1}^N \|\psi_{\tau_{i-1}, \tau_i}\|^p > \frac{7\delta}{8}$$

を満たす $D = \{t = \tau_0 < \tau_1 < \dots, \tau_N = t+h_0\} \in \delta[t, t+h_0]$ が存在し, (4) と併せて

$$\sum_{i=2}^N \|\psi_{\tau_{i-1}, \tau_i}\|^p > \frac{7\delta}{8} - \|\psi_{t, \tau_1}\|^p > \frac{7\delta}{8} - \frac{\delta}{8} = \frac{3\delta}{4}$$

を得る. また, $\omega(t, \tau_1) \geq \delta$ より或る $D' \in \delta[t, \tau_1]$ が存在して

$$\sum_{D'} \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p > \frac{3\delta}{4}$$

を満たすから, $D' \cup \{\tau_1 < \cdots, \tau_N = t + h_0\} \in \delta[t, t + h_0]$ より

$$\omega(t, t + h_0) > \sum_{D'} \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p + \sum_{i=2}^N \|\psi_{\tau_{i-1}, \tau_i}\|^p > \frac{3\delta}{2}$$

が従うが, $h_0 < h_1$ の任意性と単調減少性により

$$\delta = \inf_{h>0} \omega(t, t + h) = \inf_{h_1>h>0} \omega(t, t + h) \geq \frac{3\delta}{2}$$

となり矛盾が生じる. 同様にして

$$\lim_{h \rightarrow +0} \omega(t - h, t) = 0, \quad (\forall t \in (0, T))$$

も成立する.

第三段 任意に $s \in [0, T)$ を取り固定し, $[s, T) \ni t \mapsto \omega(s, t)$ が右連続であることを示す.

$$\lim_{h \rightarrow +0} \omega(s, t + h) \leq \omega(s, t) \quad (5)$$

を示せば, 第二段より逆向きの不等号も従い右連続性を得る. 任意に $h, \epsilon > 0$ を取れば,

$$\omega(s, t + h) - \epsilon \leq \sum_D \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p$$

を満たす $D \in \delta[s, t + h]$ が存在する. $D_1 := [s, t] \cap D$, $D_2 := D \setminus D_1$ において D_2 の最小元を

$$\omega(s, t + h) - \epsilon \leq \sum_{D_1} \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p + \sum_{D_2} \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p \leq \omega(s, t) + \omega(t, t + h)$$

が成り立つ. $h \rightarrow +0$ として

$$\lim_{h \rightarrow +0} \omega(s, t + h) - \epsilon \leq \omega(s, t)$$

が従い, ϵ の任意性より (5) が出る. 同様にして $s \mapsto \omega(s, t)$ の左連続性も成立する:

$$\lim_{h \rightarrow +0} \omega(s - h, t) = \omega(s, t).$$

第四段 $t \mapsto \omega(s, t)$ の左連続性を示す.

定理 0.2.6 (control function の例). 以下の関数 $\omega : \Delta_T \rightarrow [0, \infty)$ は control function である.

- (1) $\omega := (\omega_1^r + \omega_2^r)^{1/r}$, $(0 < r \leq 1, \omega_1, \omega_2 : \text{control function})$.
- (2) $\omega : (s, t) \mapsto \|X^1\|_{p; [s, t]}^p$, $(p \geq 1, x \in B_{p, T}(\mathbb{R}^d))$.
- (3) $\omega : (s, t) \mapsto \|X^2\|_{p; [s, t]}^p$, $(p \geq 1, x \in C^1)$.

行列 $a = (a_{ij}^i)$ のノルムは $|a| = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}^i|^2}$ として考える.

定理 0.2.7.

- (1)
- (2)

- (3) 任意の $[s, t] \subset [0, T]$ に対して $\|X^2\|_{p:[s,t]}^p < \infty$ を示せば、あとは上と同じ理由により (3) が成り立つ. $p \geq 1$ かつ $x \in C^1$ の下では、 $D = \{s = t_0 < \dots < t_N = t\}$ に対し

$$\begin{aligned} \|X_{t_{i-1}, t_i}^2\| &\leq \sum_{k,j=1}^d \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (x_u^k - x_{t_{i-1}}^k) dx_u^j \right| \leq \sum_{k,j=1}^d \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|x\|_{C^1}^2 (u - t_{i-1}) du \\ &\leq d^2 \|x\|_{C^1}^2 \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - s) du \right\}^{1/p} \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - s) du \right\}^{1-1/p} \\ &\leq d^2 \|x\|_{C^1}^2 \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - s) du \right\}^{1/p} \left\{ \int_s^t (u - s) du \right\}^{1-1/p} \end{aligned}$$

が成り立つから、

$$\begin{aligned} \sum_D \|X_{t_{i-1}, t_i}^2\|^p &\leq \sum_D d^{2p} \|x\|_{C^1}^{2p} \left\{ \frac{1}{2} (t - s)^2 \right\}^{p-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - s) du \\ &= d^{2p} \|x\|_{C^1}^{2p} \left\{ \frac{1}{2} (t - s)^2 \right\}^{p-1} \int_s^t (u - s) du = d^{2p} \|x\|_{C^1}^{2p} \left\{ \frac{1}{2} (t - s)^2 \right\}^p \end{aligned}$$

により $\|X^2\|_{p:[s,t]}^p < \infty$ を得る. ■

証明.

$$\begin{aligned} &\omega_1(s, u)\omega_2(s, u) + \omega_1(u, t)\omega_2(u, t) \\ &= \{\omega_1(s, u) + \omega_1(u, t)\} \omega_2(s, u) + \omega_1(u, t) \{\omega_2(u, t) - \omega_2(s, u)\} \\ &\leq \omega_1(s, t)\omega_2(s, u) + \omega_1(u, t) \{\omega_2(u, t) - \omega_2(s, u)\} \\ &\leq \omega_1(s, t)\omega_2(s, u) + \omega_1(u, t)\omega_2(u, t) \\ &\leq \omega_1(s, t) \{\omega_2(s, u) + \omega_2(u, t)\} \\ &\leq \omega_1(s, t)\omega_2(s, t) \end{aligned}$$

補題 0.2.8 (division point). ω を Δ_T 上の control function とする. $D = \{s = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t\}$ について、 $N \geq 2$ の場合或る $1 \leq i \leq N - 1$ が存在して次を満たす:

$$\omega(t_{i-1}, t_{i+1}) \leq \frac{2\omega(s, t)}{N - 1}.$$

以後この t_i を D の division point と呼ぶ.

証明. 会田先生のノート参照. ■

定理 0.2.9 ($1 \leq p < 2$ の場合の連続性定理). $1 \leq p < 2$ とし, $x_0 = y_0$ を満たす $x, y \in C^1$ と $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$, $0 < \epsilon, R < \infty$ を任意に取る. このとき,

$$\|X^1\|_p, \|Y^1\|_p \leq R, \quad \|X^1 - Y^1\|_p \leq \epsilon$$

なら, 或る定数 $C = C(p, R, f)$ が存在し, 任意の $0 \leq s \leq t \leq T$ に対して次が成立する:

$$|I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y)| \leq \epsilon C.$$

証明. $[s, t] \subset [0, T]$ とする.

第一段 $\omega : \Delta_T \rightarrow [0, \infty)$ を

$$\omega(\alpha, \beta) = \|X^1\|_{p, [\alpha, \beta]}^p + \|Y^1\|_{p, [\alpha, \beta]}^p + \epsilon^{-p} \|X^1 - Y^1\|_{p, [\alpha, \beta]}^p, \quad ((\alpha, \beta) \in \Delta_T)$$

で定めれば, 定理 0.2.6 より $1 \leq p$ の下で ω は control function である.

第一段 任意に $[s, t]$ の分割 $D = \{s = t_0 < \dots < t_N = t\}$ ($N \geq 2$) を取れば, 補題 0.2.8 より division point t_{i_1} が存在する. $D_{-1} := D \setminus \{t_{i_1}\}$ と定め, D_{-1} の division point t_{i_2} を除き $D_{-2} := D_{-1} \setminus \{t_{i_2}\}$ と定める. この操作を繰り返せば t_{i_k}, D_{-k} ($k = 1, \dots, N-1$) が得られ,

$$\begin{aligned} & \tilde{I}_{s,t}(x, D) - \tilde{I}_{s,t}(y, D) \\ &= \sum_{k=0}^{N-2} \left[\left\{ \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1}) \right\} - \left\{ \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k-1}) \right\} \right] \\ & \quad + \left\{ \tilde{I}_{s,t}(x) - \tilde{I}_{s,t}(y) \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

と表現できる. ただし $D = D_{-0}$ と見做す.

第二段 式 (6) について, 次を満たす定数 C_1 が存在することを示す:

$$|(6)| \leq \epsilon C_1 \quad (7)$$

実際, 前段の結果より

$$M := \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq d}} |f_j^i(x)| + \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j, k \leq d}} |\partial_k f_j^i(x)| + \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j, k, v \leq d}} |\partial_v \partial_k f_j^i(x)| \quad (8)$$

とおく. 各 $k = 0, 1, \dots, N-2$ に対し

$$\begin{aligned} & \left\{ \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1}) \right\} - \left\{ \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k-1}) \right\} \\ &= \left\{ f(x_{t_{i_k}}) - f(x_{t_{i_{k-1}}}) \right\} X_{t_{i_k}, t_{i_{k+1}}}^1 - \left\{ f(y_{t_{i_k}}) - f(y_{t_{i_{k-1}}}) \right\} Y_{t_{i_k}, t_{i_{k+1}}}^1 \\ &= \left\{ f(x_{t_{i_k}}) - f(x_{t_{i_{k-1}}}) \right\} (X_{t_{i_k}, t_{i_{k+1}}}^1 - Y_{t_{i_k}, t_{i_{k+1}}}^1) \\ & \quad + \left\{ f(x_{t_{i_k}}) - f(x_{t_{i_{k-1}}}) \right\} Y_{t_{i_k}, t_{i_{k+1}}}^1 - \left\{ f(y_{t_{i_k}}) - f(y_{t_{i_{k-1}}}) \right\} Y_{t_{i_k}, t_{i_{k+1}}}^1 \\ &= \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{i_{k-1}}} + \theta(x_{t_{i_k}} - x_{t_{i_{k-1}}})) X_{t_{i_{k-1}}, t_{i_k}}^1 \otimes (X_{t_{i_k}, t_{i_{k+1}}}^1 - Y_{t_{i_k}, t_{i_{k+1}}}^1) d\theta \\ & \quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{i_{k-1}}} + \theta(x_{t_{i_k}} - x_{t_{i_{k-1}}})) X_{t_{i_{k-1}}, t_{i_k}}^1 \otimes Y_{t_{i_k}, t_{i_{k+1}}}^1 d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^1 (\nabla f)(y_{t_{i_k}-1} + \theta(y_{t_{i_k}} - y_{t_{i_k}-1})) Y_{t_{i_k}-1, t_{i_k}}^1 \otimes Y_{t_{i_k}, t_{i_k}+1}^1 d\theta \\
& = \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{i_k}-1} + \theta(x_{t_{i_k}} - x_{t_{i_k}-1})) X_{t_{i_k}-1, t_{i_k}}^1 \otimes (X_{t_{i_k}, t_{i_k}+1}^1 - Y_{t_{i_k}, t_{i_k}+1}^1) d\theta \\
& \quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{i_k}-1} + \theta(x_{t_{i_k}} - x_{t_{i_k}-1})) (X_{t_{i_k}-1, t_{i_k}}^1 - Y_{t_{i_k}-1, t_{i_k}}^1) \otimes Y_{t_{i_k}, t_{i_k}+1}^1 d\theta \\
& \quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{i_k}-1} + \theta(x_{t_{i_k}} - x_{t_{i_k}-1})) Y_{t_{i_k}-1, t_{i_k}}^1 \otimes Y_{t_{i_k}, t_{i_k}+1}^1 d\theta \\
& \quad - \int_0^1 (\nabla f)(y_{t_{i_k}-1} + \theta(y_{t_{i_k}} - y_{t_{i_k}-1})) Y_{t_{i_k}-1, t_{i_k}}^1 \otimes Y_{t_{i_k}, t_{i_k}+1}^1 d\theta \\
& = \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{i_k}-1} + \theta(x_{t_{i_k}} - x_{t_{i_k}-1})) X_{t_{i_k}-1, t_{i_k}}^1 \otimes (X_{t_{i_k}, t_{i_k}+1}^1 - Y_{t_{i_k}, t_{i_k}+1}^1) d\theta \\
& \quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{i_k}-1} + \theta(x_{t_{i_k}} - x_{t_{i_k}-1})) (X_{t_{i_k}-1, t_{i_k}}^1 - Y_{t_{i_k}-1, t_{i_k}}^1) \otimes Y_{t_{i_k}, t_{i_k}+1}^1 d\theta \\
& \quad + \int_0^1 \int_0^1 (\nabla^2 f)(\tilde{y} + r(\tilde{x} - \tilde{y})) (X_{0, t_{i_k}-1}^1 - Y_{0, t_{i_k}-1}^1) \otimes Y_{t_{i_k}-1, t_{i_k}}^1 \otimes Y_{t_{i_k}, t_{i_k}+1}^1 dr d\theta^{*2} \\
& \quad + \int_0^1 \int_0^1 (\nabla^2 f)(\tilde{y} + r(\tilde{x} - \tilde{y})) \theta (X_{t_{i_k}-1, t_{i_k}}^1 - Y_{t_{i_k}-1, t_{i_k}}^1) \otimes Y_{t_{i_k}-1, t_{i_k}}^1 \otimes Y_{t_{i_k}, t_{i_k}+1}^1 dr d\theta
\end{aligned}$$

が成り立つ。補題 0.2.8 より

$$\begin{aligned}
& \left| X_{t_{i_k}-1, t_{i_k}}^1 \right|, \left| Y_{t_{i_k}-1, t_{i_k}}^1 \right| \leq \omega(t_{i_k} - 1, t_{i_k})^{1/p} \leq \left(\frac{2\omega(s, t)}{N - k - 1} \right)^{1/p}, \\
& \left| X_{t_{i_k}, t_{i_k}+1}^1 \right|, \left| Y_{t_{i_k}, t_{i_k}+1}^1 \right| \leq \omega(t_{i_k}, t_{i_k} + 1)^{1/p} \leq \left(\frac{2\omega(s, t)}{N - k - 1} \right)^{1/p}, \\
& \left| X_{t_{i_k}-1, t_{i_k}}^1 - Y_{t_{i_k}-1, t_{i_k}}^1 \right| \leq \epsilon \omega(t_{i_k} - 1, t_{i_k})^{1/p} \leq \epsilon \left(\frac{2\omega(s, t)}{N - k - 1} \right)^{1/p}, \\
& \left| X_{t_{i_k}, t_{i_k}+1}^1 - Y_{t_{i_k}, t_{i_k}+1}^1 \right| \leq \epsilon \omega(t_{i_k}, t_{i_k} + 1)^{1/p} \leq \epsilon \left(\frac{2\omega(s, t)}{N - k - 1} \right)^{1/p}
\end{aligned}$$

が満たされ、また

$$\left| X_{0, t_{i_k}-1}^1 - Y_{0, t_{i_k}-1}^1 \right| \leq \epsilon \omega(0, T)^{1/p} \leq \epsilon (2R^p + 1)^{1/p}$$

でもあるから、

$$\begin{aligned}
& \left| \left\{ \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1}) \right\} - \left\{ \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k-1}) \right\} \right| \\
& \leq mdM \left| X_{t_{i_k}-1, t_{i_k}}^1 \right| \left| X_{t_{i_k}, t_{i_k}+1}^1 - Y_{t_{i_k}, t_{i_k}+1}^1 \right| \\
& \quad + mdM \left| X_{t_{i_k}-1, t_{i_k}}^1 - Y_{t_{i_k}-1, t_{i_k}}^1 \right| \left| Y_{t_{i_k}, t_{i_k}+1}^1 \right| \\
& \quad + md^2M \left| X_{0, t_{i_k}-1}^1 - Y_{0, t_{i_k}-1}^1 \right| \left| Y_{t_{i_k}-1, t_{i_k}}^1 \right| \left| Y_{t_{i_k}, t_{i_k}+1}^1 \right| \\
& \quad + md^2M \left| X_{t_{i_k}-1, t_{i_k}}^1 - Y_{t_{i_k}-1, t_{i_k}}^1 \right| \left| Y_{t_{i_k}-1, t_{i_k}}^1 \right| \left| Y_{t_{i_k}, t_{i_k}+1}^1 \right| \\
& \leq \epsilon md^2M \left[2 + 2(2R^p + 1)^{1/p} \right] \left(\frac{2\omega(s, t)}{N - k - 1} \right)^{2/p}
\end{aligned}$$

^{*2} $\tilde{x} = x_{t_{i_k}-1} + \theta(x_{t_{i_k}} - x_{t_{i_k}-1})$, $\tilde{y} = y_{t_{i_k}-1} + \theta(y_{t_{i_k}} - y_{t_{i_k}-1})$ とおいた。また $x_0 = y_0$ の仮定より $x_{t_{i_k}-1} - y_{t_{i_k}-1} = X_{0, t_{i_k}-1}^1 - Y_{0, t_{i_k}-1}^1$ が³出る。

$$\leq \epsilon m d^2 M \left[2 + 2(2R^p + 1)^{1/p} \right] 2^{2/p} (2R^p + 1)^{2/p} \left(\frac{1}{N - k - 1} \right)^{2/p}$$

を得る.

$$C'_1 := m d^2 M \left[2 + 2(2R^p + 1)^{1/p} \right] 2^{2/p} (2R^p + 1)^{2/p}$$

と定めれば

$$|(6)| \leq \sum_{k=0}^{N-2} \epsilon C'_1 \left(\frac{1}{N - k - 1} \right)^{2/p} < \epsilon C'_1 \zeta \left(\frac{2}{p} \right)$$

が成立し, $p < 2$ より $\zeta(2/p) < \infty$ であるから $C_1 := C'_1 \zeta(2/p)$ とおいて (7) が従う.

第三段 $x_0 = y_0$ の仮定により

$$\begin{aligned} |\tilde{I}_{s,t}(x) - \tilde{I}_{s,t}(y)| &= |f(x_s)X_{s,t}^1 - f(y_s)Y_{s,t}^1| \\ &\leq |f(x_s)X_{s,t}^1 - f(x_s)Y_{s,t}^1| + |f(x_s)Y_{s,t}^1 - f(y_s)Y_{s,t}^1| \\ &\leq m d M |X_{s,t}^1 - Y_{s,t}^1| + \left| \left\{ \int_0^1 (\nabla f)(y_s + \theta(x_s - y_s)) d\theta \right\} (x_s - y_s) \otimes Y_{s,t}^1 \right| \\ &\leq m d M |X_{s,t}^1 - Y_{s,t}^1| + m d^2 M |X_{0,s}^1 - Y_{0,s}^1| |Y_{s,t}^1| \\ &\leq M \epsilon \omega(s, t)^{1/p} + m d^2 M \epsilon \omega(0, s)^{1/p} \omega(s, t)^{1/p} \\ &\leq \epsilon C_2 \end{aligned}$$

が成立する. ここで $C_2 = m d M (2R^p + 1)^{1/p} + m d^2 M (2R^p + 1)^{2/p}$ とした.

第四段 第二段と第三段より, 任意の $D \in \delta[s, t]$ に対し

$$|\tilde{I}_{s,t}(x, D) - \tilde{I}_{s,t}(y, D)| \leq \epsilon(C_1 + C_2)$$

が満たされる. 定理 0.2.2 により $|D| \rightarrow 0$ として

$$|I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y)| \leq \epsilon(C_1 + C_2)$$

が成立する. ■

定理 0.2.10 ($2 \leq p < 3$ の場合の連続性定理). $2 \leq p < 3$ とし, $x_0 = y_0$ を満たす $x, y \in C^1$ と $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$, $0 < \epsilon, R < \infty$ を任意に取る. このとき,

$$\begin{aligned} \|X^1\|_p, \|Y^1\|_p, \|X^2\|_{p/2}, \|Y^2\|_{p/2} &\leq R < \infty, \\ \|X^1 - Y^1\|_p, \|X^2 - Y^2\|_{p/2} &\leq \epsilon \end{aligned}$$

なら, 或る定数 $C = C(p, R, f)$ が存在し, 任意の $0 \leq s \leq t \leq T$ に対して次が成立する:

$$|I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y)| \leq \epsilon C.$$

証明. $[s, t] \subset [0, T]$ とする.

第一段 $\omega : \Delta_T \longrightarrow [0, \infty)$ を

$$\begin{aligned} \omega(\alpha, \beta) = & \|X^1\|_{p, [\alpha, \beta]}^p + \|Y^1\|_{p, [\alpha, \beta]}^p + \|X^2\|_{p/2, [\alpha, \beta]}^{p/2} + \|Y^2\|_{p/2, [\alpha, \beta]}^{p/2} \\ & + \epsilon^{-p} \|X^1 - Y^1\|_{p, [\alpha, \beta]}^p + \epsilon^{-p/2} \|X^2 - Y^2\|_{p/2, [\alpha, \beta]}^{p/2}, \quad ((\alpha, \beta) \in \Delta_T) \end{aligned}$$

で定めれば、定理 0.2.6 により $2 \leq p$ の下で ω は control function である.

第二段 $D \in \delta[s, t]$ に対し、定理 0.2.9 の証明と同様にして t_{i_k}, D_{-k} を構成すれば

$$\begin{aligned} & J_{s,t}(x, D) - J_{s,t}(y, D) \\ &= \sum_{k=0}^{N-2} [\{J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})\} - \{J_{s,t}(y, D_{-k}) - J_{s,t}(y, D_{-k-1})\}] \\ & \quad + \{J_{s,t}(x) - J_{s,t}(y)\} \end{aligned} \quad (9)$$

と表現できる.

第三段 $J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})$ を変形する. 以降 $t_i = t_{i_k}$ と書き直せば

$$\begin{aligned} & J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1}) \\ &= J_{t_i-1, t_i}(x) + J_{t_i, t_i+1}(x) - J_{t_i-1, t_i+1}(x) \\ &= f(x_{t_i-1})X_{t_i-1, t_i}^1 + f(x_{t_i})X_{t_i, t_i+1}^1 - f(x_{t_i-1})X_{t_i-1, t_i+1}^1 \\ & \quad + (\nabla f)(x_{t_i-1})X_{t_i-1, t_i}^2 + (\nabla f)(x_{t_i})X_{t_i, t_i+1}^2 - (\nabla f)(x_{t_i-1})X_{t_i-1, t_i+1}^2 \\ &= \{f(x_{t_i}) - f(x_{t_i-1})\} X_{t_i, t_i+1}^1 \\ & \quad + (\nabla f)(x_{t_i-1})X_{t_i-1, t_i}^2 + (\nabla f)(x_{t_i})X_{t_i, t_i+1}^2 - (\nabla f)(x_{t_i-1})X_{t_i-1, t_i+1}^2 \\ &= \int_0^1 \{(\nabla f)(x_{t_i-1} + \theta(x_{t_i} - x_{t_i-1})) - (\nabla f)(x_{t_i-1})\} X_{t_i-1, t_i}^1 \otimes X_{t_i, t_i+1}^1 d\theta \\ & \quad + (\nabla f)(x_{t_i-1})X_{t_i-1, t_i}^1 \otimes X_{t_i, t_i+1}^1 \\ & \quad + (\nabla f)(x_{t_i-1})X_{t_i-1, t_i}^2 + (\nabla f)(x_{t_i})X_{t_i, t_i+1}^2 - (\nabla f)(x_{t_i-1})X_{t_i-1, t_i+1}^2 \\ &= \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla f)(x_{t_i-1} + r(x_{t_i} - x_{t_i-1})) X_{t_i-1, t_i}^1 \otimes X_{t_i-1, t_i}^1 \otimes X_{t_i, t_i+1}^1 dr d\theta \\ & \quad + (\nabla f)(x_{t_i-1}) (X_{t_i-1, t_i}^1 \otimes X_{t_i, t_i+1}^1 + X_{t_i-1, t_i}^2 - X_{t_i-1, t_i+1}^2) \\ & \quad + (\nabla f)(x_{t_i})X_{t_i, t_i+1}^2 \\ &= \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla f)(x_{t_i-1} + r(x_{t_i} - x_{t_i-1})) X_{t_i-1, t_i}^1 \otimes X_{t_i-1, t_i}^1 \otimes X_{t_i, t_i+1}^1 dr d\theta \\ & \quad + \{(\nabla f)(x_{t_i}) - (\nabla f)(x_{t_i-1})\} X_{t_i, t_i+1}^2 \\ &= \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla f)(x_{t_i-1} + r(x_{t_i} - x_{t_i-1})) X_{t_i-1, t_i}^1 \otimes X_{t_i-1, t_i}^1 \otimes X_{t_i, t_i+1}^1 dr d\theta \\ & \quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_i-1} + \theta(x_{t_i} - x_{t_i-1})) X_{t_i-1, t_i}^1 \otimes X_{t_i, t_i+1}^2 d\theta \end{aligned}$$

を得る.

第四段 式 (9) について、次を満たす定数 C_1 が存在することを示す:

$$|(9)| \leq \epsilon C_1. \quad (10)$$

実際、前段の結果より

$$\begin{aligned}
& \{J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})\} - \{J_{s,t}(y, D_{-k}) - J_{s,t}(y, D_{-k-1})\} \\
&= \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{i-1}} + r(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})) X_{t_{i-1}, t_i}^1 \otimes X_{t_{i-1}, t_i}^1 \otimes X_{t_i, t_{i+1}}^1 dr d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{i-1}} + \theta(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})) X_{t_{i-1}, t_i}^1 \otimes X_{t_i, t_{i+1}}^2 d\theta \\
&\quad - \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(y_{t_{i-1}} + r(y_{t_i} - y_{t_{i-1}})) Y_{t_{i-1}, t_i}^1 \otimes Y_{t_{i-1}, t_i}^1 \otimes Y_{t_i, t_{i+1}}^1 dr d\theta \\
&\quad - \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{i-1}} + \theta(y_{t_i} - y_{t_{i-1}})) Y_{t_{i-1}, t_i}^1 \otimes Y_{t_i, t_{i+1}}^2 d\theta \\
&= \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{i-1}} + r(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})) X_{t_{i-1}, t_i}^1 \otimes X_{t_{i-1}, t_i}^1 \otimes (X_{t_i, t_{i+1}}^1 - Y_{t_i, t_{i+1}}^1) dr d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{i-1}} + r(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})) X_{t_{i-1}, t_i}^1 \otimes (X_{t_{i-1}, t_i}^1 - Y_{t_{i-1}, t_i}^1) \otimes Y_{t_i, t_{i+1}}^1 dr d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^\theta \{(\nabla^2 f)(x_{t_{i-1}} + r(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})) - (\nabla^2 f)(y_{t_{i-1}} + r(y_{t_i} - y_{t_{i-1}}))\} \\
&\quad \quad X_{t_{i-1}, t_i}^1 \otimes Y_{t_{i-1}, t_i}^1 \otimes Y_{t_i, t_{i+1}}^1 dr d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(y_{t_{i-1}} + r(y_{t_i} - y_{t_{i-1}})) (X_{t_{i-1}, t_i}^1 - Y_{t_{i-1}, t_i}^1) \otimes Y_{t_{i-1}, t_i}^1 \otimes Y_{t_i, t_{i+1}}^1 dr d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{i-1}} + \theta(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})) X_{t_{i-1}, t_i}^1 \otimes (X_{t_i, t_{i+1}}^2 - Y_{t_i, t_{i+1}}^2) d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \{(\nabla^2 f)(x_{t_{i-1}} + \theta(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})) - (\nabla^2 f)(y_{t_{i-1}} + \theta(y_{t_i} - y_{t_{i-1}}))\} \\
&\quad \quad X_{t_{i-1}, t_i}^1 \otimes Y_{t_i, t_{i+1}}^2 d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{i-1}} + \theta(y_{t_i} - y_{t_{i-1}})) (X_{t_{i-1}, t_i}^1 - Y_{t_{i-1}, t_i}^1) \otimes Y_{t_i, t_{i+1}}^2 d\theta \\
&= \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{i-1}} + r(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})) X_{t_{i-1}, t_i}^1 \otimes X_{t_{i-1}, t_i}^1 \otimes (X_{t_i, t_{i+1}}^1 - Y_{t_i, t_{i+1}}^1) dr d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{i-1}} + r(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})) X_{t_{i-1}, t_i}^1 \otimes (X_{t_{i-1}, t_i}^1 - Y_{t_{i-1}, t_i}^1) \otimes Y_{t_i, t_{i+1}}^1 dr d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^\theta \int_0^1 (\nabla^3 f)(y_{t_{i-1}} + r(y_{t_i} - y_{t_{i-1}}) + u(x_{t_{i-1}} + r(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) - y_{t_{i-1}} - r(y_{t_i} - y_{t_{i-1}}))) \\
&\quad \quad \{ (X_{0, t_{i-1}}^1 - Y_{0, t_{i-1}}^1) + r(X_{t_{i-1}, t_i}^1 - Y_{t_{i-1}, t_i}^1) \} \otimes X_{t_{i-1}, t_i}^1 \otimes Y_{t_{i-1}, t_i}^1 \otimes Y_{t_i, t_{i+1}}^1 du dr d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(y_{t_{i-1}} + r(y_{t_i} - y_{t_{i-1}})) (X_{t_{i-1}, t_i}^1 - Y_{t_{i-1}, t_i}^1) \otimes Y_{t_{i-1}, t_i}^1 \otimes Y_{t_i, t_{i+1}}^1 dr d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{i-1}} + \theta(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})) X_{t_{i-1}, t_i}^1 \otimes (X_{t_i, t_{i+1}}^2 - Y_{t_i, t_{i+1}}^2) d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^1 (\nabla^3 f)(y_{t_{i-1}} + \theta(y_{t_i} - y_{t_{i-1}}) + r(x_{t_{i-1}} + \theta(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) - y_{t_{i-1}} - \theta(y_{t_i} - y_{t_{i-1}}))) \\
&\quad \quad \{ (X_{0, t_{i-1}}^1 - Y_{0, t_{i-1}}^1) + \theta(X_{t_{i-1}, t_i}^1 - Y_{t_{i-1}, t_i}^1) \} \otimes X_{t_{i-1}, t_i}^1 \otimes Y_{t_i, t_{i+1}}^2 dr d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{i-1}} + \theta(y_{t_i} - y_{t_{i-1}})) (X_{t_{i-1}, t_i}^1 - Y_{t_{i-1}, t_i}^1) \otimes Y_{t_i, t_{i+1}}^2 d\theta
\end{aligned}$$

が成り立つから,

$$\begin{aligned}
M &:= \sum_{i,j} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f_j^i(x)| + \sum_{i,j,k} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial_k f_j^i(x)| \\
&\quad + \sum_{i,j,k,v} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial_v \partial_k f_j^i(x)| + \sum_{i,j,k,v,w} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial_w \partial_v \partial_k f_j^i(x)|
\end{aligned} \tag{11}$$

において

$$\begin{aligned}
& \left| \{J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})\} - \{J_{s,t}(y, D_{-k}) - J_{s,t}(y, D_{-k-1})\} \right| \\
& \leq M \left| X_{t_i-1,t_i}^1 \right| \left| X_{t_i-1,t_i}^1 \right| \left| X_{t_i,t_i+1}^1 - Y_{t_i,t_i+1}^1 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_i-1,t_i}^1 \right| \left| X_{t_i-1,t_i}^1 - Y_{t_i-1,t_i}^1 \right| \left| Y_{t_i,t_i+1}^1 \right| \\
& \quad + M \left| X_{0,t_i-1}^1 - Y_{0,t_i-1}^1 \right| \left| X_{t_i-1,t_i}^1 \right| \left| Y_{t_i-1,t_i}^1 \right| \left| Y_{t_i,t_i+1}^1 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_i-1,t_i}^1 - Y_{t_i-1,t_i}^1 \right| \left| X_{t_i-1,t_i}^1 \right| \left| Y_{t_i-1,t_i}^1 \right| \left| Y_{t_i,t_i+1}^1 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_i-1,t_i}^1 - Y_{t_i-1,t_i}^1 \right| \left| Y_{t_i-1,t_i}^1 \right| \left| Y_{t_i,t_i+1}^1 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_i-1,t_i}^1 \right| \left| X_{t_i,t_i+1}^2 - Y_{t_i,t_i+1}^2 \right| \\
& \quad + M \left| X_{0,t_i-1}^1 - Y_{0,t_i-1}^1 \right| \left| X_{t_i-1,t_i}^1 \right| \left| Y_{t_i,t_i+1}^2 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_i-1,t_i}^1 - Y_{t_i-1,t_i}^1 \right| \left| X_{t_i-1,t_i}^1 \right| \left| Y_{t_i,t_i+1}^2 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_i-1,t_i}^1 - Y_{t_i-1,t_i}^1 \right| \left| Y_{t_i,t_i+1}^2 \right| \\
& \leq \epsilon M \left[5 + 2\omega(0, t_i - 1)^{1/p} + 2\omega(t_i - 1, t_i)^{1/p} \right] \left(\frac{2\omega(s, t)}{N - k - 1} \right)^{3/p} \\
& \leq \epsilon M \left[2 + 4 \left(2R^p + 2R^{p/2} + 2 \right)^{1/p} \right] 2^{3/p} \left(2R^p + 2R^{p/2} + 2 \right)^{3/p} \left(\frac{1}{N - k - 1} \right)^{3/p}
\end{aligned}$$

を得る. ここで

$$C'_1 := M \left[2 + 4 \left(2R^p + 2R^{p/2} + 2 \right)^{1/p} \right] 2^{3/p} \left(2R^p + 2R^{p/2} + 2 \right)^{3/p}$$

と定めれば

$$|(9)| \leq \sum_{k=0}^{N-2} \epsilon C'_1 \left(\frac{1}{N - k - 1} \right)^{3/p} < \epsilon C'_1 \zeta \left(\frac{3}{p} \right)$$

が成立し, $p < 3$ より $\zeta(3/p) < \infty$ であるから $C_1 := C'_1 \zeta(3/p)$ において (10) が出る.

第五段 $x_0 = y_0$ の仮定により

$$\begin{aligned}
& |J_{s,t}(x) - J_{s,t}(y)| \\
& \leq |f(x_s)X_{s,t}^1 - f(y_s)Y_{s,t}^1| + |(\nabla f)(x_s)X_{s,t}^2 - (\nabla f)(y_s)Y_{s,t}^2| \\
& \leq |f(x_s)X_{s,t}^1 - f(x_s)Y_{s,t}^1| + |f(x_s)Y_{s,t}^1 - f(y_s)Y_{s,t}^1| \\
& \quad + |(\nabla f)(x_s)X_{s,t}^2 - (\nabla f)(x_s)Y_{s,t}^2| + |(\nabla f)(x_s)Y_{s,t}^2 - (\nabla f)(y_s)Y_{s,t}^2| \\
& \leq M |X_{s,t}^1 - Y_{s,t}^1| + \left| \int_0^1 (\nabla f)(y_s + \theta(x_s - y_s))(x_s - y_s) \otimes Y_{s,t}^1 d\theta \right| \\
& \quad + M |X_{s,t}^2 - Y_{s,t}^2| + \left| \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_s + \theta(x_s - y_s))(x_s - y_s) \otimes Y_{s,t}^2 d\theta \right| \\
& \leq M |X_{s,t}^1 - Y_{s,t}^1| + M |X_{0,s}^1 - Y_{0,s}^1| |Y_{s,t}^1| \\
& \quad + M |X_{s,t}^2 - Y_{s,t}^2| + M |X_{0,s}^1 - Y_{0,s}^1| |Y_{s,t}^2|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \epsilon M \omega(s, t)^{1/p} + \epsilon M \omega(0, s)^{1/p} \omega(s, t)^{1/p} \\
&\quad + \epsilon M \omega(s, t)^{2/p} + \epsilon M \omega(0, s)^{1/p} \omega(s, t)^{2/p} \\
&\leq \epsilon M \left[\omega(0, T)^{1/p} + 2\omega(0, T)^{2/p} + \omega(0, T)^{3/p} \right] \\
&\leq \epsilon M \left[\left(2R^p + 2R^{p/2} + 2 \right)^{1/p} + 2 \left(2R^p + 2R^{p/2} + 2 \right)^{2/p} + \left(2R^p + 2R^{p/2} + 2 \right)^{3/p} \right]
\end{aligned}$$

が成立する．ここで最下段の ϵ の係数を C_2 とおく．

第六段 以上より，任意の $D \in \delta[s, t]$ に対し

$$|J_{s,t}(x, D) - J_{s,t}(y, D)| \leq \epsilon(C_1 + C_2)$$

が満たされる．定理 0.2.2 により $|D| \rightarrow 0$ として

$$|I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y)| \leq \epsilon(C_1 + C_2)$$

が成立する． ■

系 0.2.11 (パスが 0 出発なら f の有界性は要らない)．定理 0.2.9 と定理 0.2.10 について， $x, y \in \tilde{C}^1$ ならば $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ として主張が成り立つ．

証明． $x_0 = 0$ なら

$$\|X^1\|_p \leq R \quad \Rightarrow \quad |x_t| \leq R \quad (\forall t \in [0, T])$$

が成り立つから，式 (8) と (11) において $\sup_{x \in \mathbb{R}^d}$ を $\sup_{|x| \leq 9R}$ に替えればよい． ■

0.3 Young 積分

補題 0.3.1. $x \in C^1$, $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ とする.

(1) $1 \leq p < 2$ の場合, 或る control function ω が存在して

$$|X_{s,t}^1| \leq \omega(s, t)^{1/p}, \quad (0 \leq \forall s \leq \forall t \leq T)$$

を満たすとき, ある定数 $C = C(p, f)$ があり

$$|I_{s,t}(x)| \leq C (\omega(s, t)^{1/p} + \omega(s, t)^{2/p}).$$

が成立する.

(2) $2 \leq p < 3$ の場合, 或る control function ω が存在して

$$|X_{s,t}^1| \leq \omega(s, t)^{1/p}, \quad |X_{s,t}^2| \leq \omega(s, t)^{2/p}, \quad (0 \leq \forall s \leq \forall t \leq T)$$

を満たすとき, ある定数 $C = C(p, f)$ があり

$$|I_{s,t}(x)| \leq C (\omega(s, t)^{1/p} + \omega(s, t)^{2/p} + \omega(s, t)^{3/p}).$$

が成立する.

証明.

(1) $D = \{s = t_0 < \cdots < t_N = t\}$ ($N \geq 2$) に対し, 補題 0.2.8 により存在する i を取り $D_{-1} := D \setminus \{i\}$ と書く. 補題 0.2.8 の添数を除く作業を続けて D_{-k} ($k = 1, \dots, N-1$) を構成する.

$$M := \max_{\substack{t \in [0, T] \\ 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j, k \leq d}} |\partial_k f_j^i(x_t)|, \quad M' := \max_{t \in [0, T]} |f(x_t)|$$

とおけば $M, M' < \infty$ であり, $|X_{t_i, t_{i+1}}^1| \leq \omega(t_i, t_{i+1})^{1/p} \leq \omega(t_{i-1}, t_{i+1})^{1/p}$ と補題 0.2.8 により

$$\begin{aligned} |\tilde{I}_{s,t}(x, D) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-1})| &= |\tilde{I}_{t_{i-1}, t_i}(x) + \tilde{I}_{t_i, t_{i+1}}(x) - \tilde{I}_{t_{i-1}, t_{i+1}}(x)| \\ &\leq |\{f(x_{t_i}) - f(x_{t_{i-1}})\} X_{t_i, t_{i+1}}^1| \\ &\leq \left| \left\{ \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{i-1}} + \theta(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})) d\theta \right\} X_{t_{i-1}, t_i}^1 \otimes X_{t_i, t_{i+1}}^1 \right| \\ &\leq md^2 M |X_{t_i, t_{i+1}}^1|^2 \\ &\leq md^2 M \left(\frac{2\omega(s, t)}{N-1} \right)^{2/p} \end{aligned}$$

が成立する. 同様に

$$|\tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1})| \leq md^2 M \left(\frac{2\omega(s, t)}{N-k-1} \right)^{2/p}, \quad (k = 0, \dots, N-2)$$

が成り立ち ($D_{-0} = D$)

$$\begin{aligned}
|\tilde{I}_{s,t}(x, D) - f(x_s)X_{s,t}^1| &\leq \sum_{k=0}^{N-2} |\tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1})| \\
&\leq md^2 M(2\omega(s, t))^{2/p} \sum_{k=0}^{N-2} \left(\frac{1}{N-k-1} \right)^{2/p} \\
&\leq md^2 M(2\omega(s, t))^{2/p} \zeta\left(\frac{2}{p}\right)
\end{aligned}$$

が従う. いま, 仮定より $p < 2$ であるから $\zeta(2/p) < \infty$ であり, 定理 0.2.2 より

$$|I_{s,t}(x)| \leq M' \omega(s, t)^{1/p} + md^2 M(2\omega(s, t))^{2/p} \zeta\left(\frac{2}{p}\right)$$

を得る.

(2) (1) と同様に D_{-k} ($k = 1, \dots, N-1$) を構成する. 会田先生のノートの通りに

$$\begin{aligned}
J_{s,t}(x, D) - J_{s,t}(x, D_{-1}) &= \left\{ \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{i-1}} + \theta(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})) dr d\theta \right\} X_{t_{i-1}, t_i}^1 \otimes X_{t_{i-1}, t_i}^1 \otimes X_{t_i, t_{i+1}}^1 \\
&\quad + \left\{ \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{i-1}} + \theta(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})) d\theta \right\} X_{t_{i-1}, t_i}^1 \otimes X_{t_i, t_{i+1}}^2
\end{aligned}$$

を得る. ここで (1) の M, M' に加えて

$$M'' := \max_{\substack{t \in [0, T] \\ 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j, k, v \leq d}} |\partial_v \partial_k f_j^i(x_t)|$$

とおけば

$$\begin{aligned}
|J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})| &\leq md^2 M \left(\frac{2\omega(s, t)}{N-k-1} \right)^{3/p} + md^2 M'' \left(\frac{2\omega(s, t)}{N-k-1} \right)^{1/p} \left(\frac{2\omega(s, t)}{N-k-1} \right)^{2/p} \\
&\leq md^2 (M + M'') \left(\frac{2\omega(s, t)}{N-k-1} \right)^{3/p}
\end{aligned}$$

が成立し, 会田先生のノートの通りに

$$|J_{s,t}(x, D) - (f(x_s)X_{s,t}^1 + (\nabla f)(x_s)X_{s,t}^2)| \leq 2^{3/p} md^2 (M + M'') \zeta\left(\frac{3}{p}\right) \omega(s, t)^{3/p}$$

が従い, $p < 3$ の仮定より $\zeta(3/p) < \infty$ である. (1) と同じく定理 0.2.2 より

$$|I_{s,t}(x)| \leq M' \omega(s, t)^{1/p} + md^2 M \omega(s, t)^{2/p} + 2^{3/p} md^2 (M + M'') \zeta\left(\frac{3}{p}\right) \omega(s, t)^{3/p}$$

となる. ■