

ゼミ用ノート
会田先生の資料 “Rough path analysis:An Introduction”

基礎工学研究科システム創成専攻
学籍番号 29C17095
百合川尚学

2018 年 6 月 26 日

目次

第 1 章	1
1.1 Introduction	1
1.2 A continuity theorem of line integrals as a functional of paths	5
1.3 Proof of continuity theorem	13
1.4 The notion of rough path	20
1.5 2018/06/15 課題	32
付録 A テンソル積・クロスノルム	34
A.1 ノルム空間上の有界多重線型写像	34
A.2 ノルム空間の完備拡大	38
A.3 テンソル積	41
A.4 クロスノルム	49
A.5 テンソル積の内積	55
参考文献	59

第 1 章

1.1 Introduction

以下, d 次元ベクトル $x \in \mathbb{R}^d$ と (m, d) 行列 $a \in \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^d$ について, 成分を込めて表現する場合は $x = (x^1, \dots, x^d)$, $a = (a_j^i)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq d}$ と書く. また $T > 0$ を固定し $C^1 = C^1([0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d)$ とおく. (端点においては片側微分を考える.) $[s, t] \subset [0, T]$ の有限分割を $D = \{s = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t\}$ で表現し, 有限分割の全体を $\delta[s, t]$ とおく. $|D| := \max_{1 \leq i \leq N} |t_i - t_{i-1}|$ とし,

$$\sum_D = \sum_{i=1}^N$$

と略記する. また線型空間を扱うときは零元のための空間は考えない.

定理 1.1.1 (Riemann-Stieltjes 積分). $[s, t] \subset [0, T]$ とし, $D \in \delta[s, t]$ についてのみ考えるとき, 任意の $x \in C^1$, $f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ に対して次の極限が存在する:*

$$\lim_{|D| \rightarrow 0} \sum_D f(x_{s_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) \in \mathbb{R}^m.$$

s_{i-1} は区間 $[t_{i-1}, t_i]$ に属する任意の点であり, 極限は s_{i-1} の取り方に依らない.

証明. 各 x^j は C^1 -級であるから, 平均値の定理より $\sum_D f(x_{s_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})$ の第 k 成分を

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^d \sum_D f_j^k(x_{s_{i-1}})(x_{t_i}^j - x_{t_{i-1}}^j) \\ &= \sum_{j=1}^d \sum_D f_j^k(x_{s_{i-1}}) \dot{x}_{\xi_i}^j(t_i - t_{i-1}), \quad (\exists \xi_i \in [t_{i-1}, t_i]) \end{aligned}$$

と表現できる. 各 j, k について

$$\lim_{|D| \rightarrow 0} \sum_D f_j^k(x_{s_{i-1}}) \dot{x}_{\xi_i}^j(t_i - t_{i-1})$$

は通常の連続関数の Riemann 積分

$$\int_s^t f_j^k(x_u) \dot{x}_u^j du$$

*1 極限の存在を保証する条件としては, f の有界性と微分可能性は必要ない.

に収束する。

定義 1.1.2 (C^1 -級のパスに対する汎関数). $x \in C^1$ と $f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ に対して, $[s, t] \subset [0, T]$ における Riemann-Stieltjes 積分を I で表現する:

$$I_{s,t}(x) = \int_s^t f(x_u) dx_u := \lim_{|D| \rightarrow 0} \sum_D f(x_{t_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}),$$

$$\left[\int_s^t f(x_u) dx_u \right]^k = \sum_{j=1}^d \int_s^t f_j^k(x_u) dx_u^j, \quad (k = 1, \dots, m).$$

ただし $D \in \delta[s, t]$ のみを考える。

C^1 は次で定めるノルム $\|\cdot\|_{C^1}$ により Banach 空間となる:

$$\|x\|_{C^1} := \sup_{t \in [0, T]} |x(t)| + \sup_{t \in [0, T]} |\dot{x}(t)|.$$

定理 1.1.3 ($\|\cdot\|_{C^1}$ に関する連続性). $[s, t] \subset [0, T]$ とし, C^1 には $\|\cdot\|_{C^1}$ でノルム位相を入れる. このとき, $C^1 \ni x \mapsto I_{s,t}(x) \in \mathbb{R}^m$ は連続である.

証明. C^1 の第一可算性により点列連続性と連続性は一致するから, $x^n \rightarrow x$ のとき $I_{s,t}(x^n) \rightarrow I_{s,t}(x)$ が従うことを示せばよい. いま, $M := \sup_{u \in [s, t]} |f(x_u)| < \infty$ とおけば

$$\begin{aligned} \left| \int_s^t f(x_u^n) dx_u^n - \int_s^t f(x_u) dx_u \right| &= \left| \int_s^t f(x_u^n) \dot{x}_u^n du - \int_s^t f(x_u) \dot{x}_u du \right| \\ &\leq \int_s^t |f(x_u^n) \dot{x}_u^n - f(x_u^n) \dot{x}_u| du + \int_s^t |f(x_u^n) \dot{x}_u - f(x_u) \dot{x}_u| du \\ &\leq M \|x^n - x\|_{C^1} (t - s) + \sup_{u \in [s, t]} |f(x_u^n) - f(x_u)| \|x\|_{C^1} (t - s) \end{aligned} \quad (1.1)$$

が成り立つ. $\|x^n - x\|_{C^1} \rightarrow 0$ の仮定より $(x^n)_{n=1}^\infty$ 及び x の値域は或るコンパクト集合 K に含まれるから, K 上での f の一様連続性より任意の $\epsilon > 0$ に対し或る $\delta > 0$ が存在して $v, w \in K$, $|v - w| < \delta$ なら $|f(v) - f(w)| < \epsilon$ が満たされる. すなわち $\|x^n - x\|_{C^1} < \delta$ なら

$$\sup_{u \in [s, t]} |f(x_u^n) - f(x_u)| < \epsilon$$

が成立する. $\|x^n - x\|_{C^1} \rightarrow 0$ より, 或る自然数 N が存在して $\|x^n - x\|_{C^1} < \delta$ ($n > N$) が満たされるから, (1.1) $< \epsilon[M(t - s) + \|x\|_{C^1}(t - s)]$ ($n > N$) が成り立ち $I_{s,t}(x^n) \rightarrow I_{s,t}(x)$ が従う. ■

定義 1.1.4 (p -variation). $(V, \|\cdot\|)$ をノルム空間とし, $[0, T]$ 上の V 値写像 x と $[s, t] \subset [0, T]$ に対して p -variation ($p > 0$) を次で定める:

$$\|x\|_{p,[s,t]} := \left\{ \sup_{D \in \delta[s,t]} \sum_D \|x_{t_i} - x_{t_{i-1}}\|^p \right\}^{1/p}.$$

特に, $\|\cdot\|_{p,[0,T]}$ を $\|\cdot\|_p$ と表記する. また $p \geq 1$ として, 線型空間 $B_{p,T}(V)$ を

$$B_{p,T}(V) := \left\{ x : [0, T] \longrightarrow V ; \quad x_0 = 0, x : \text{continuous}, \|x\|_p < \infty \right\}$$

により定める.

次の結果によれば, $0 < p < 1$ に対し $B_{p,T}(V)$ を定めても零写像のみの空間でしかない.

定理 1.1.5 ($0 < p < 1$ に対して有界 p -variation なら定数). $x : [0, T] \longrightarrow V$ を連続写像とする. このとき, $p \in (0, 1)$ に対し $\|x\|_p < \infty$ が成り立つなら x は定数写像である.

証明. $t \in [0, T]$ を任意に取り固定する. このとき全ての $D \in \delta[0, t]$ に対して,

$$\begin{aligned} \|x_t - x_0\| &\leq \sum_D \|x_{t_i} - x_{t_{i-1}}\| \leq \max_D \|x_{t_i} - x_{t_{i-1}}\|^{1-p} \sum_D \|x_{t_i} - x_{t_{i-1}}\|^p \\ &\leq \max_D \|x_{t_i} - x_{t_{i-1}}\|^{1-p} \|x\|_p^p \end{aligned}$$

が成り立ち, x の一様連続性から右辺は $|D| \longrightarrow 0$ で 0 に収束し, $x_t = x_0$ が従う. ■

定理 1.1.6 (p -variation の p に関する単調減少性). V をノルム空間とすると, $x : [0, T] \longrightarrow V$ に対して $1 \leq p \leq q$ なら $\|x\|_p \geq \|x\|_q$ が成立する. 特に $B_{p,T}(V) \subset B_{q,T}(V)$ である.

証明. $a, b \geq 0, r \geq 1$ に対し $a^r + b^r \leq (a+b)^r$ が成り立つから

$$\left[\sum_{i=1}^n a_i^r \right]^{1/r} \leq \sum_{i=1}^n a_i, \quad (a_i \geq 0, n \geq 1, r \geq 1)$$

を得る. 従って任意の $x : [0, T] \longrightarrow V$ と $D \in \delta[0, T]$ に対し

$$\left[\sum_D (\|x_{t_i} - x_{t_{i-1}}\|^p)^{q/p} \right]^{p/q} \leq \sum_D \|x_{t_i} - x_{t_{i-1}}\|^p$$

が満たされ $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ が成立する. ■

$p \geq 1$ の場合, Minkowski の不等式によれば, 任意の $D \in \delta[s, t]$ に対し

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_D \|(x_{t_i} + y_{t_i}) - (x_{t_{i-1}} + y_{t_{i-1}})\|^p \right\}^{1/p} &\leq \left\{ \sum_D \|x_{t_i} - x_{t_{i-1}}\|^p \right\}^{1/p} + \left\{ \sum_D \|y_{t_i} - y_{t_{i-1}}\|^p \right\}^{1/p} \\ &\leq \|x\|_{p,[s,t]} + \|y\|_{p,[s,t]} \end{aligned}$$

が成り立ち $\|x + y\|_{p,[s,t]} \leq \|x\|_{p,[s,t]} + \|y\|_{p,[s,t]}$ を得る.

定理 1.1.7. V が Banach 空間のとき, $B_{p,T}(V)$ は $\|\cdot\|_p$ をノルムとする Banach 空間である.

証明. 完備性を示す.

第一段 $(x^n)_{n=1}^\infty \subset B_{p,T}(V)$ を Cauchy 列とすれば, 任意の $\epsilon > 0$ に対して或る $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ が存在し

$$\|x^n - x^m\|_p = \left\{ \sup_{D \in \delta[0,T]} \sum_D \left\| (x_{t_i}^n - x_{t_i}^m) - (x_{t_{i-1}}^n - x_{t_{i-1}}^m) \right\|^p \right\}^{1/p} < \epsilon, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

を満たす. いま, 任意の $t \in [0, T]$ に対して $[0, T]$ の分割 $D = \{0 \leq t \leq T\}$ を考えれば

$$\|x_t^n - x_t^m\| < \epsilon, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

が得られ, V の完備性より或る $x_t \in \mathbb{R}^d$ が存在して

$$\|x_t^n - x_t\| < \epsilon \quad (n > n_\epsilon)$$

を満たす. この収束は t に関して一様であるから, $t \mapsto x_t$ は 0 出発かつ連続である.

第二段 $\|x^n - x\|_p \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) を示す. 前段によれば, 任意の $D \in \delta[0, T]$ に対し

$$\sum_D \left\| (x_{t_i}^m - x_{t_i}^n) - (x_{t_{i-1}}^m - x_{t_{i-1}}^n) \right\|^p < \epsilon^p, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

が成り立っている. D は有限分割であるから, $m \rightarrow \infty$ として

$$\sum_D \left\| (x_{t_i} - x_{t_i}^n) - (x_{t_{i-1}} - x_{t_{i-1}}^n) \right\|^p < \epsilon^p, \quad (n > n_\epsilon)$$

が従い, D の任意性より $\|x^n - x\|_p < \epsilon$ ($n > n_\epsilon$) を得る. ■

定理 1.1.8. $p \geq 1$ とする. また $x_0 = 0$ を満たす $x \in C^1$ の全体が作る線形空間を \tilde{C}^1 とおく.

- (1) $x \in C^1$ ならば $\|x\|_p < \infty$ が成り立つ. ただちに, $\|\cdot\|_p$ は \tilde{C}^1 においてノルムとなる.
- (2) \tilde{C}^1 において, $\|\cdot\|_{C^1}$ で導入する位相は $\|\cdot\|_p$ で導入する位相より強い.

証明.

$p = 1$ の場合 平均値の定理より, 任意の $D \in \delta[0, T]$ に対し

$$\sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}| \leq \sum_D \|x\|_{C^1} (t_i - t_{i-1}) = \|x\|_{C^1} T < \infty$$

が成り立ち $\|x\|_1 < \infty$ が従う.

$p > 1$ の場合 q を p の共役指数とする. 任意の $D \in \delta[0, T]$ に対し, Hölder の不等式より

$$\begin{aligned} \sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^p &= \sum_D \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{x}_u du \right|^p \leq \sum_D (t_i - t_{i-1}) \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} |\dot{x}_u|^q du \right)^{p/q} \\ &\leq \sum_D (t_i - t_{i-1}) \left(\int_0^T \|x\|_{C^1}^q du \right)^{p/q} = \|x\|_{C^1}^p T^p \end{aligned}$$

が成立し, $\|x\|_p < \infty$ が従う.

以上より, $p \geq 1$ ならば $\|x\|_p \leq T \|x\|_{C^1}$ ($x \in C^1$) が成り立ち (2) の主張を得る. ■

次節の考察対象は主に定理 1.1.3 と定理 1.1.8 に関する. 定理 1.1.3 によれば, C^1 に $\|\cdot\|_{C^1}$ でノルム位相を導入した場合, $f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ に対して $C^1 \ni x \mapsto I_{s,t}(x)$ は連続である. 一方で定理 1.1.3 によれば, 0 出発 C^1 -パス空間 \tilde{C}^1 に $\|\cdot\|_p$ でノルム位相を導入した場合, $\tilde{C}^1 \ni x \mapsto I_{s,t}(x)$ が連続であるという保証はない. しかし, 次節以後の結果により, $1 \leq p < 3$ かつ $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ が満たされているなら $\tilde{C}^1 \ni x \mapsto I_{s,t}(x)$ は或る意味での連続性を持つ.

1.2 A continuity theorem of line integrals as a functional of paths

定義 1.2.1 (記号の定義). $x \in C^1$, $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ に対し次を定める.

$$\begin{aligned} \Delta_T &:= \{ (s, t) ; \quad 0 \leq s \leq t \leq T \}, \\ X^1 : \Delta_T &\longrightarrow \mathbb{R}^d \quad \left((s, t) \mapsto X_{s,t}^1 = x_t - x_s \right), \\ X^2 : \Delta_T &\longrightarrow \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d \quad \left((s, t) \mapsto X_{s,t}^2 = \int_s^t (x_u - x_s) \otimes dx_u \right), \\ \tilde{I}_{s,t}(x) &:= f(x_s) X_{s,t}^1 = f(x_s)(x_t - x_s), \\ J_{s,t}(x) &:= f(x_s) X_{s,t}^1 + (\nabla f)(x_s) X_{s,t}^2. \end{aligned}$$

以降, $a, b, c, d \in \mathbb{R}^d$ に対して次の表現を使う:

$$\begin{aligned} [a \otimes b]_j^i &= a^i b^j, \\ [(\nabla f)(x_s) X_{s,t}^2]^i &= \sum_{j,k=1}^d \partial_k f_j^i(x_s) \int_s^t (x_u^k - x_s^k) dx_u^j, \\ [(\nabla f)(x_s)(a \otimes b)]^i &= \sum_{j,k=1}^d \partial_k f_j^i(x_s) a^k b^j, \\ [(\nabla^2 f)(x_s)(a \otimes b \otimes c)]^i &= \sum_{j,k,v=1}^d \partial_v \partial_k f_j^i(x_s) a^v b^k c^j, \\ [(\nabla^3 f)(x_s)(a \otimes b \otimes c \otimes d)]^i &= \sum_{j,k,v,w=1}^d \partial_w \partial_v \partial_k f_j^i(x_s) a^w b^v c^k d^j. \end{aligned}$$

定理 1.2.2. $[s, t] \subset [0, T]$, $x \in C^1$, $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ とする. $D \in \delta[s, t]$ に対し

$$\tilde{I}_{s,t}(x, D) := \sum_D \tilde{I}_{t_{i-1}, t_i}(x), \quad J_{s,t}(x, D) := \sum_D J_{t_{i-1}, t_i}(x)$$

を定めるとき, 次が成立する:

$$I_{s,t}(x) = \lim_{|D| \rightarrow 0} \tilde{I}_{s,t}(x, D) = \lim_{|D| \rightarrow 0} J_{s,t}(x, D).$$

証明. 第一の等号は $I_{s,t}(x)$ の定義によるから, 第二の等号を証明する. まず,

$$\begin{aligned} I_{s,t}(x) &= \int_s^t f(x_u) dx_u \\ &= \int_s^t f(x_s) + f(x_u) - f(x_s) dx_u \\ &= \int_s^t f(x_s) dx_u + \int_s^t \int_0^1 (\nabla f)(x_s + \theta(x_u - x_s)) (X_{s,u}^1 \otimes \dot{x}_u) d\theta du \\ &= f(x_s) X_{s,t}^1 + (\nabla f)(x_s) X_{s,t}^2 \\ &\quad + \int_s^t \int_0^1 \{(\nabla f)(x_s + \theta(x_u - x_s)) - (\nabla f)(x_s)\} (X_{s,u}^1 \otimes \dot{x}_u) d\theta du \\ &= J_{s,t}(x) + \int_s^t \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_s + r(x_u - x_s)) (X_{s,u}^1 \otimes X_{s,u}^1 \otimes \dot{x}_u) dr d\theta du \end{aligned}$$

が成り立つ. $[0, T] \ni t \mapsto x_t$ の連続性より, 最下段式中の $x_s + r(x_u - x_s)$ ($0 \leq r \leq 1$, $s \leq u \leq t$) は或るコンパクト集合 K に含まれ, f が C^2 -級関数であるから $M := \sum_{i,j,k,v} \sup_{x \in K} |\partial_v \partial_k f_j^i(x)|$ として $M < \infty$ を定めれば

$$\begin{aligned} &\left| \int_s^t \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_s + r(x_u - x_s)) (X_{s,u}^1 \otimes X_{s,u}^1 \otimes \dot{x}_u) dr d\theta du \right| \\ &\leq \int_s^t \int_0^1 \int_0^\theta |(\nabla^2 f)(x_s + r(x_u - x_s)) (X_{s,u}^1 \otimes X_{s,u}^1 \otimes \dot{x}_u)| dr d\theta du \\ &\leq M \int_s^t |X_{s,u}^1|^2 |\dot{x}_u| du \\ &\leq M \|x\|_{C^1}^3 \int_s^t (u-s)^2 du \end{aligned}$$

となる. 特に $D \in \delta[s, t]$ に対して

$$\begin{aligned} \sum_D \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - t_{i-1})^2 du &\leq \sum_D |D| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - t_{i-1}) du \\ &\leq \sum_D |D| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - s) du \leq \frac{1}{2} (t - s)^2 |D| \rightarrow 0 \quad (|D| \rightarrow 0) \end{aligned}$$

が成立するから,

$$|I_{s,t}(x) - J_{s,t}(x, D)| \leq \sum_D |I_{t_{i-1}, t_i}(x) - J_{t_{i-1}, t_i}(x)| \rightarrow 0 \quad (|D| \rightarrow 0)$$

が従い定理の主張を得る. ■

定義 1.2.3 (コントロール関数). 関数 $\omega : \Delta_T \rightarrow [0, \infty)$ が連続かつ任意の $s \leq u \leq t$ に対して

$$\omega(s, u) + \omega(u, t) \leq \omega(s, t) \quad (1.2)$$

を満たすとき, ω をコントロール関数 (control function) と呼ぶ.

式 (1.2) から $\omega(t, t) = 0$ ($\forall t \in [0, T]$) が従う. つまりコントロール関数は対角線上で 0 になる.

定義 1.2.4 (ノルム空間値写像の p -variation). $(V, \|\cdot\|)$ をノルム空間, $p > 0$ とする. このとき連続写像 $\psi : \Delta_T \rightarrow V$ に対する p -variation を

$$\|\psi\|_{p, [s, t]} := \left\{ \sup_{D \in \delta[s, t]} \sum_D \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p \right\}^{1/p}, \quad ((s, t) \subset [0, T])$$

で定める. 特に $\|\cdot\|_{p, [0, T]}$ を $\|\cdot\|_p$ と書く.

再定義した p -variation に対しても定理 1.1.5, 1.1.6, 1.1.7 が成立する.

定理 1.2.5 (定理 1.1.5 のアナロジー). V をノルム空間, $X : \Delta_T \rightarrow V$ を連続写像とする. このとき, $X_{t,t} = 0$ ($\forall t \in [0, T]$) かつ $p \in (0, 1)$ に対し $\|X\|_p < \infty$ が満たされれば $X \equiv 0$ である.

証明. $(s, t) \in \Delta_T$ を任意に取り固定する. このとき全ての $D \in \delta[s, t]$ に対して,

$$\begin{aligned} \|X_{s,t}\| &\leq \sum_D \|X_{t_{i-1}, t_i}\| \leq \max_D \|X_{t_{i-1}, t_i}\|^{1-p} \sum_D \|X_{t_{i-1}, t_i}\|^p \\ &\leq \max_D \|X_{t_{i-1}, t_i}\|^{1-p} \|X\|_p \end{aligned}$$

が成り立ち, X の一様連続性から右辺は $|D| \rightarrow 0$ で 0 に収束し, $X_{s,t} = 0$ が従う. ■

定理 1.2.6 (定理 1.1.6 のアナロジー). V をノルム空間とすると, $x : [0, T] \rightarrow V$ に対して $1 \leq p \leq q$ なら $\|X\|_p \geq \|X\|_q$ が成立する.

ノルム空間 $(V, \|\cdot\|)$ に対し

$$B_{p,T}(V) := \left\{ X : \Delta_T \rightarrow V ; \quad \text{continuous, } \|X\|_p < \infty \right\} \quad (1.3)$$

として線型空間 $B_{p,T}(V)$ を定めれば, 定理 1.1.7 のアナロジーを得る.

定理 1.2.7. V が Banach 空間のとき, $B_{p,T}(V)$ は $\|\cdot\|_p$ をノルムとする Banach 空間である.

証明. 完備性を示す.

第一段 $(X^n)_{n=1}^\infty$ を $B_{p,T}(V)$ の Cauchy 列とすれば, 任意の $\epsilon > 0$ に対して或る $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ が存在し

$$\|X^n - X^m\|_p = \left\{ \sup_{D \in \delta[0,T]} \sum_D \|X^n_{t_{i-1}, t_i} - X^m_{t_{i-1}, t_i}\|^p \right\}^{1/p} < \epsilon, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

を満たす. 任意の $(s, t) \in \Delta_T$ に対して分割 $D = \{0 \leq s \leq t \leq T\}$ を取れば

$$\|X^n_{s,t} - X^m_{s,t}\| < \epsilon, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

が成り立ち, V の完備性より或る $X_{s,t} \in \mathbb{R}^d$ が存在して

$$\|X^n_{s,t} - X_{s,t}\| < \epsilon \quad (n > n_\epsilon)$$

となる. この収束は (s, t) に関して一様であるから X は連続である.

第二段 $\|X^n - X\|_p \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) を示す. 前段より, 任意の $D \in \delta[0, T]$ に対し

$$\sum_D \|X^n_{t_{i-1}, t_i} - X^m_{t_{i-1}, t_i}\|^p < \epsilon^p, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

が満たされる. D は有限分割であるから, $m \rightarrow \infty$ として

$$\sum_D \|X^n_{t_{i-1}, t_i} - X_{t_{i-1}, t_i}\|^p < \epsilon^p, \quad (n > n_\epsilon)$$

が従い, D の任意性より $\|X^n - X\|_p < \epsilon$ ($n > n_\epsilon$) を得る. ■

定理 1.2.8 (p -変動が定めるコントロール関数). $(V, \|\cdot\|)$ をノルム空間, $p > 0$ とする. このとき, $\|\psi\|_p < \infty$ かつ $\psi_{t,t} = 0$ ($\forall t \in [0, T]$) を満たす連続写像 $\psi : \Delta_T \rightarrow V$ に対して,

$$\omega : \Delta_T \ni (s, t) \mapsto \|\psi\|_{p,[s,t]}^p$$

により定める ω はコントロール関数である.

証明 (参考:[3](pp. 96-98)). $\|\psi\|_p < \infty$ の仮定より ω は $[0, \infty)$ 値であるから, 以下では式 (1.2) と連続性を示す.

第一段 ω が式 (1.2) を満たすことを示す. 実際, 任意に $D_1 \in \delta[s, u], D_2 \in \delta[u, t]$ を取れば

$$\sum_{D_1} \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p + \sum_{D_2} \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p = \sum_{D_1 \cup D_2} \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p \leq \|\psi\|_{p,[s,t]}^p$$

が成り立つ. 左辺の D_1, D_2 の取り方は独立であるから, それぞれに対し上限を取れば

$$\|\psi\|_{p,[s,u]}^p + \|\psi\|_{p,[u,t]}^p \leq \|\psi\|_{p,[s,t]}^p$$

が従う.

第二段 任意の $[s, t] \subset [0, T]$ について^{*2},

$$\lim_{h \rightarrow +0} \omega(s, t+h) = \inf_{h>0} \omega(s, t+h),$$

$$\lim_{h \rightarrow +0} \omega(s, t-h) = \sup_{h>0} \omega(s, t-h),$$

$$\lim_{h \rightarrow +0} \omega(s-h, t) = \inf_{h>0} \omega(s-h, t),$$

$$\lim_{h \rightarrow +0} \omega(s+h, t) = \sup_{h>0} \omega(s+h, t)$$

^{*2} 下段の二式については $s < t$ と仮定する. また上段についても, $t = T$ 或は $s = 0$ の場合を除く必要がある.

が成立する．実際 $\omega(s, t+h)$ について見れば，これは下に有界かつ $h \rightarrow +0$ に対し単調減少であるから極限が確定し下限に一致する．残りの三つも同様の理由で成立する．

第三段 任意の $s \in [0, T)$ に対し， $(s, T) \ni t \mapsto \omega(s, t)$ の左連続性を示す．ここでは

$$\tilde{\omega}(s, t) := \begin{cases} \lim_{h \rightarrow +0} \omega(s, t-h), & (s < t), \\ 0, & (s = t), \end{cases} \quad (\forall (s, t) \in \Delta_T)$$

で定める $\tilde{\omega}$ が優加法性を持ち，かつ

$$\|\psi_{s,t}\|^p \leq \tilde{\omega}(s, t), \quad (\forall (s, t) \in \Delta_T)$$

を満たすことを示す．実際これが示されれば，任意の $D \in \delta[s, t]$ に対し

$$\sum_D \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p \leq \sum_D \tilde{\omega}(t_{i-1}, t_i) \leq \tilde{\omega}(s, t)$$

が成立し $\omega(s, t) \leq \tilde{\omega}(s, t)$ が従い， $\omega(s, t) \geq \omega(s, t-h) (\forall h > 0)$ と併せて

$$\omega(s, t) = \tilde{\omega}(s, t) = \lim_{h \rightarrow +0} \omega(s, t-h)$$

を得る．いま，任意に $s < u < t$ を取れば，十分小さい $h_1, h_2 > 0$ に対して

$$\omega(s, u-h_1) + \omega(u, t-h_2) \leq \omega(s, t-h_2)$$

が満たされ， $h_1 \rightarrow +0, h_2 \rightarrow +0$ として

$$\tilde{\omega}(s, u) + \tilde{\omega}(u, t) \leq \tilde{\omega}(s, t)$$

が成り立つから $\tilde{\omega}$ は優加法性を持つ．また，もし或る $(u, v) \in \Delta_T$ に対して

$$\|\psi_{u,v}\|^p > \tilde{\omega}(u, v)$$

が成り立つと仮定すると ($u = v$ なら両辺 0 になるから $u < v$ である)

$$\|\psi_{u,v}\|^p > \tilde{\omega}(u, v) \geq \omega(u, v-h) \geq \|\psi_{u,v-h}\|^p, \quad (\forall h > 0)$$

となる．一方 ψ の連続性より $\|\psi_{u,v-h}\|^p \rightarrow \|\psi_{u,v}\|^p$ ($h \rightarrow +0$) が従い矛盾が生じる．同様にして，任意の $t \in (0, T]$ に対し $[0, t) \ni s \mapsto \omega(s, t)$ の右連続性も出る．

第四段 任意の $t \in [0, T)$ に対して次を示す：

$$\lim_{h \rightarrow +0} \omega(t, t+h) = \inf_{h > 0} \omega(t, t+h) = 0.$$

第一の等号は前段より従うから，第二の等号を背理法により証明する．いま

$$\inf_{h > 0} \omega(t, t+h) =: \delta > 0$$

と仮定すれば， ψ の連続性より或る h_1 が存在して

$$\|\psi_{t,t+h}\|^p = \|\psi_{t,t+h} - \psi_{t,t}\|^p < \frac{\delta}{8}, \quad (\forall h < h_1) \quad (1.4)$$

が成立する．ここで任意に $h_0 < h_1$ を取り固定する．一方で $\omega(t, t+h_0) \geq \delta$ より

$$\sum_{i=1}^N \|\psi_{\tau_{i-1}, \tau_i}\|^p > \frac{7\delta}{8}$$

を満たす $D = \{t = \tau_0 < \tau_1 < \cdots, \tau_N = t + h_0\} \in \delta[t, t + h_0]$ が存在し, (1.4) と併せて

$$\sum_{i=2}^N \|\psi_{\tau_{i-1}, \tau_i}\|^p > \frac{7\delta}{8} - \|\psi_{t, \tau_1}\|^p > \frac{7\delta}{8} - \frac{\delta}{8} = \frac{3\delta}{4}$$

を得る. また, $\omega(t, \tau_1) \geq \delta$ より或る $D' \in \delta[t, \tau_1]$ が存在して

$$\sum_{D'} \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p > \frac{3\delta}{4}$$

を満たすから, $D' \cup \{\tau_1 < \cdots, \tau_N = t + h_0\} \in \delta[t, t + h_0]$ に対して

$$\omega(t, t + h_0) > \sum_{D'} \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p + \sum_{i=2}^N \|\psi_{\tau_{i-1}, \tau_i}\|^p > \frac{3\delta}{2}$$

が従うが, $h_0 < h_1$ の任意性と単調減少性により

$$\delta = \inf_{h>0} \omega(t, t + h) = \inf_{h_1>h>0} \omega(t, t + h) \geq \frac{3\delta}{2}$$

となり矛盾が生じる. 同様にして

$$\lim_{h \rightarrow +0} \omega(t - h, t) = 0, \quad (\forall t \in (0, T))$$

も成立する.

第五段 任意に $s \in [0, T)$ を取り固定し, $[s, T) \ni t \mapsto \omega(s, t)$ が右連続であることを示す.

$$\lim_{h \rightarrow +0} \omega(s, t + h) \leq \omega(s, t) \tag{1.5}$$

を示せば, 第二段より逆向きの不等号も従い右連続性を得る. 任意に $h, \epsilon > 0$ を取れば,

$$\omega(s, t + h) - \epsilon \leq \sum_D \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p$$

を満たす $D \in \delta[s, t + h]$ が存在し,

$$D_1 := \{t_0 < \cdots < t_k\} = [s, t] \cap D, \quad D_2 := D \setminus (D_1 \cup \{t_{k+1}\})$$

とおくと

$$\begin{aligned} \omega(s, t + h) - \epsilon &\leq \sum_{i=1}^k \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p + \|\psi_{t_k, t_{k+1}}\|^p + \sum_{D_2} \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p \\ &= \sum_{i=1}^k \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p + \|\psi_{t_k, t}\|^p + \|\psi_{t_k, t_{k+1}}\|^p - \|\psi_{t_k, t}\|^p + \sum_{D_2} \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p \\ &\leq \omega(s, t) + \omega(t, t + h) + \|\psi_{t_k, t_{k+1}}\|^p - \|\psi_{t_k, t}\|^p \end{aligned}$$

が成り立つ. ψ の一様連続性より $\|\psi_{t_k, t_{k+1}}\|^p \rightarrow \|\psi_{t_k, t}\|^p$ ($h \rightarrow +0$) が成り立つから

$$\lim_{h \rightarrow +0} \omega(s, t + h) - \epsilon \leq \omega(s, t), \quad (\forall \epsilon > 0)$$

が従い (1.5) が出る. 同様に $(0, t] \ni s \mapsto \omega(s, t)$ ($\forall t \in (0, T)$) の左連続性も成立する.

第六段 ω の $(s, t) \in \Delta_T$ における連続性を示す. $h, k \geq 0$ とする.

(A) (s, t) を基準に第一象限の点について

$$\begin{aligned}
 & |\omega(s, t) - \omega(s + h, t + k)| \\
 & \leq |\omega(s, t) - \omega(s + h, t)| + |\omega(s + h, t) - \omega(s + h, t + k)| \\
 & = |\omega(s, t) - \omega(s + h, t)| + \omega(s + h, t + k) - \omega(s + h, t) \\
 & \leq |\omega(s, t) - \omega(s + h, t)| + \omega(s, t + k) - \omega(s + h, t) \\
 & \leq |\omega(s, t) - \omega(s + h, t)| + |\omega(s, t + k) - \omega(s, t)| + |\omega(s, t) - \omega(s + h, t)|
 \end{aligned}$$

が成り立つ。前段までに示した左右の連続性より、近づけ方に依らず $h, k \rightarrow +0$ とすれば、左辺をいくらでも 0 に近づけることができる。

(B) (s, t) を基準に第三象限の点について

$$\begin{aligned}
 & |\omega(s, t) - \omega(s - h, t - k)| \\
 & \leq |\omega(s, t) - \omega(s - h, t)| + |\omega(s - h, t) - \omega(s - h, t - k)| \\
 & = |\omega(s, t) - \omega(s - h, t)| + \omega(s - h, t) - \omega(s - h, t - k) \\
 & \leq |\omega(s, t) - \omega(s - h, t)| + \omega(s - h, t) - \omega(s, t - k) \\
 & \leq |\omega(s, t) - \omega(s - h, t)| + |\omega(s - h, t) - \omega(s, t)| + |\omega(s, t) - \omega(s, t - k)|,
 \end{aligned}$$

が成り立つ。(A) と同じく $h, k \rightarrow +0$ として左辺は 0 に収束する。

(C) $((h_n, k_n))_{n=1}^{\infty}$ を第一象限から $(0, 0)$ に近づく任意の点列とすると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega(s - h_n, t + k_n) = \omega(s, t), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \omega(s + h_n, t - k_n) = \omega(s, t)$$

が成り立つことを示す。これが示されれば

$$\lim_{h, k \rightarrow +0} \omega(s - h, t + k) = \omega(s, t), \quad \lim_{h, k \rightarrow +0} \omega(s + h, t - k) = \omega(s, t)$$

が従い、(A)(B) と併せて ω の連続性が出る。背理法で証明する。いま、

$$\alpha := \lim_{n \rightarrow \infty} \omega(s - h_n, t + k_n) > \omega(s, t)$$

と仮定して $\epsilon := \alpha - \omega(s, t)$ とおく。 $\lim_{t' \downarrow t} \omega(s, t') = \omega(s, t)$ より

$$0 \leq \omega(s, t') - \omega(s, t) < \frac{\epsilon}{3}$$

を満たす $t' > t$ が存在し、また $\lim_{s' \uparrow s} \omega(s', t') = \omega(s, t')$ より

$$0 \leq \omega(s', t') - \omega(s, t') < \frac{\epsilon}{3}$$

を満たす $s' < s$ も存在する。このとき或る n で $s' \leq s - h_n$, $t + k_n \leq t'$ かつ

$$|\omega(s - h_n, t + k_n) - \alpha| < \frac{\epsilon}{3}$$

が成立し、特に $(s - h_n, t + k_n) \in (s', t')$ より

$$\omega(s - h_n, t + k_n) \leq \omega(s', t')$$

となるはずであるが、一方で

$$\omega(s', t') < \frac{2}{3}\epsilon + \omega(s, t) = \alpha - \frac{\epsilon}{3} < \omega(s - h_n, t + k_n)$$

が従い矛盾が生じる。よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega(s - h_n, t + k_n) = \omega(s, t)$$

でなくてはならず、同様にして $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega(s + h_n, t - k_n) = \omega(s, t)$ も得られる。 ■

定理 1.2.9 (control function の例). 以下の関数 $\omega : \Delta_T \rightarrow [0, \infty)$ は control function である.

- (1) $\omega : (s, t) \mapsto \|X^1\|_{p;[s,t]}^p, \quad (p \geq 1, x \in B_{p,T}(\mathbb{R}^d)).$
- (2) $\omega : (s, t) \mapsto \|X^2\|_{p;[s,t]}^p, \quad (p \geq 1, x \in C^1).$

行列 $a = (a_j^i)$ のノルムは $|a| = \sqrt{\sum_{i,j} |a_j^i|^2}$ として考える.

定理 1.2.10.

- (1) $\omega : (s, t) \mapsto X_{s,t}^1 = x_t - x_s$ は連続であるから, 前定理より ω は control function である.
- (2) 任意の $[s, t] \subset [0, T]$ に対して $\|X^2\|_{p;[s,t]}^p < \infty$ を示せば, あとは上と同じ理由により定理の主張が得られる. 実際, 任意の分割 $D = \{s = t_0 < \dots < t_N = t\}$ に対し

$$\begin{aligned} \|X_{t_{i-1}, t_i}^2\| &\leq \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (x_u - x_{t_{i-1}}) \otimes \dot{x}_u \, du \right| \\ &\leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} |(x_u - x_{t_{i-1}}) \otimes \dot{x}_u| \, du \\ &\leq \|x\|_{C^1}^2 \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - s) \, du \right\}^{1/p} \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - s) \, du \right\}^{1-1/p} \\ &\leq \|x\|_{C^1}^2 \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - s) \, du \right\}^{1/p} \left\{ \int_s^t (u - s) \, du \right\}^{1-1/p} \end{aligned}$$

が成り立つから,

$$\begin{aligned} \sum_D \|X_{t_{i-1}, t_i}^2\|^p &\leq \sum_D \|x\|_{C^1}^{2p} \left\{ \frac{1}{2}(t - s)^2 \right\}^{p-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - s) \, du \\ &= \|x\|_{C^1}^{2p} \left\{ \frac{1}{2}(t - s)^2 \right\}^{p-1} \int_s^t (u - s) \, du = \|x\|_{C^1}^{2p} \left\{ \frac{1}{2}(t - s)^2 \right\}^p \end{aligned}$$

により $\|X^2\|_{p;[s,t]}^p < \infty$ が従う. ■

補題 1.2.11. ω を Δ_T 上の control function とする. $D = \{s = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t\}$ について, $N \geq 2$ の場合或る $1 \leq i \leq N-1$ が存在して次を満たす:

$$\omega(t_{i-1}, t_{i+1}) \leq \frac{2\omega(s, t)}{N-1}. \quad (1.6)$$

証明. (会田先生のテキスト.) ■

1.3 Proof of continuity theorem

定理 1.3.1 ($1 \leq p < 2$ の場合の連続性定理). $1 \leq p < 2$ とし, $x_0 = y_0$ を満たす $x, y \in C^1$ と $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$, $0 < \epsilon, R < \infty$ を任意に取る. このとき,

$$\|X^1\|_p, \|Y^1\|_p \leq R, \quad \|X^1 - Y^1\|_p \leq \epsilon$$

なら, 或る定数 $C = C(p, R, f)$ が存在し, 任意の $0 \leq s \leq t \leq T$ に対して次が成立する:

$$|I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y)| \leq \epsilon C.$$

系 1.3.2 (p -variation による閉球上の Lipschitz 連続性). $1 \leq p < 2$ とし, $x_0 = y_0$ を満たす $x, y \in C^1$ と $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$, $0 < R < \infty$ を任意に取る. このとき,

$$\|X^1\|_p, \|Y^1\|_p \leq R$$

なら, 或る定数 $C = C(p, R, f)$ が存在して次を満たす:

$$|I_{0,T}(x) - I_{0,T}(y)| \leq C \|X^1 - Y^1\|_p.$$

証明 (系 1.3.2). 定理 1.3.1 において, $\epsilon = \|X^1 - Y^1\|_p$ ($x \neq y$)^{*3} として証明が通る. ■

証明 (定理 1.3.1). $[s, t] \subset [0, T]$ とする.

第一段 $\omega : \Delta_T \rightarrow [0, \infty)$ を

$$\omega(\alpha, \beta) = \|X^1\|_{p, [\alpha, \beta]}^p + \|Y^1\|_{p, [\alpha, \beta]}^p + \epsilon^{-p} \|X^1 - Y^1\|_{p, [\alpha, \beta]}^p, \quad ((\alpha, \beta) \in \Delta_T)$$

で定めれば, 定理 1.2.9 により $1 \leq p$ の下で ω は control function である.

第二段 任意に $[s, t]$ の分割 $D = \{s = t_0 < \dots < t_N = t\}$ ($N \geq 2$) を取れば, 補題 1.2.11 より (1.6) を満たす $t_{(0)}$ が存在する. ここで, $D_{-0} := D$, $D_{-1} := D \setminus \{t_{(0)}\}$ と定める. $N \geq 3$ ならば D_{-1} についても (1.6) を満たす $t_{(1)}$ が存在するから, $D_{-2} := D_{-1} \setminus \{t_{(1)}\}$ と定める. この操作を繰り返せば $t_{(k)}, D_{-k}$ ($k = 0, 1, \dots, N-1$) が得られ,

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{s,t}(x, D) - \tilde{I}_{s,t}(y, D) &= \sum_{k=0}^{N-2} \left[\left\{ \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1}) \right\} - \left\{ \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k-1}) \right\} \right] \\ &\quad + \left\{ \tilde{I}_{s,t}(x) - \tilde{I}_{s,t}(y) \right\} \end{aligned} \quad (1.7)$$

と表現できる.

第三段 式 (1.7) について, 次を満たす定数 C_1 が存在することを示す:

$$|(1.7)| \leq \epsilon C_1 \quad (1.8)$$

^{*3} $x = y$ なら $\|X^1 - Y^1\|_p = 0$ かつ $I_{s,t}(x) = I_{s,t}(y)$ が成り立つ.

見やすくするために $t_k = t_{(k)}$ と書き直せば,

$$\begin{aligned}
& \left\{ \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1}) \right\} - \left\{ \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k-1}) \right\} \\
&= \{f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}})\} X_{t_k, t_{k+1}}^1 - \{f(y_{t_k}) - f(y_{t_{k-1}})\} Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \\
&= \{f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}})\} (X_{t_k, t_{k+1}}^1 - Y_{t_k, t_{k+1}}^1) \\
&\quad + \{f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}})\} Y_{t_k, t_{k+1}}^1 - \{f(y_{t_k}) - f(y_{t_{k-1}})\} Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \\
&= \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes (X_{t_k, t_{k+1}}^1 - Y_{t_k, t_{k+1}}^1) d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 d\theta \\
&\quad - \int_0^1 (\nabla f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 d\theta \\
&= \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes (X_{t_k, t_{k+1}}^1 - Y_{t_k, t_{k+1}}^1) d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) (X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 d\theta \\
&\quad - \int_0^1 (\nabla f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 d\theta \\
&= \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes (X_{t_k, t_{k+1}}^1 - Y_{t_k, t_{k+1}}^1) d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) (X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}) + r(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) - y_{t_{k-1}} - \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))) \\
&\quad \quad (X_{0, t_{k-1}}^1 - Y_{0, t_{k-1}}^1) \otimes Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta^{*4} \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}) + r(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) - y_{t_{k-1}} - \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))) \\
&\quad \quad \theta (X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \otimes Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta
\end{aligned}$$

が成り立つ. 補題 1.2.11 より

$$\begin{aligned}
& |X_{t_{k-1}, t_k}^1|, |Y_{t_{k-1}, t_k}^1|, |X_{t_k, t_{k+1}}^1|, |Y_{t_k, t_{k+1}}^1| \leq \omega(t_{k-1}, t_{k+1})^{1/p} \leq \left(\frac{2\omega(s, t)}{N - k - 1} \right)^{1/p}, \\
& |X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1|, |X_{t_k, t_{k+1}}^1 - Y_{t_k, t_{k+1}}^1| \leq \epsilon \omega(t_{k-1}, t_{k+1})^{1/p} \leq \epsilon \left(\frac{2\omega(s, t)}{N - k - 1} \right)^{1/p}
\end{aligned}$$

が満たされ, また

$$|X_{0, t_{k-1}}^1 - Y_{0, t_{k-1}}^1| \leq \epsilon \omega(0, t_{k-1})^{1/p} \leq \epsilon \omega(0, T)^{1/p} \leq \epsilon (2R^p + 1)^{1/p}$$

でもあるから,

$$M := \sum_{i,j} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f_j^i(x)| + \sum_{i,j,k} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial_k f_j^i(x)| + \sum_{i,j,k,v} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial_v \partial_k f_j^i(x)| \quad (1.9)$$

^{*4} $x_0 = y_0$ の仮定より $x_{t_{k-1}} - y_{t_{k-1}} = X_{0, t_{k-1}}^1 - Y_{0, t_{k-1}}^1$ が成り立つ.

と定めて

$$\begin{aligned}
& \left| \left\{ \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1}) \right\} - \left\{ \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k-1}) \right\} \right| \\
& \leq M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| X_{t_k, t_{k+1}}^1 - Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \right| \\
& \quad + M \left| X_{0, t_{k-1}}^1 - Y_{0, t_{k-1}}^1 \right| \left| Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \right| \\
& \leq \epsilon M \left[2 + 2(2R^p + 1)^{1/p} \right] \left(\frac{2\omega(s, t)}{N - k - 1} \right)^{2/p} \\
& \leq \epsilon M \left[2 + 2(2R^p + 1)^{1/p} \right] 2^{2/p} (2R^p + 1)^{2/p} \left(\frac{1}{N - k - 1} \right)^{2/p}
\end{aligned}$$

を得る.

$$C'_1 := M \left[2 + 2(2R^p + 1)^{1/p} \right] 2^{2/p} (2R^p + 1)^{2/p}$$

とおけば

$$|(1.7)| \leq \sum_{k=0}^{N-2} \epsilon C'_1 \left(\frac{1}{N - k - 1} \right)^{2/p} < \epsilon C'_1 \zeta \left(\frac{2}{p} \right)$$

が成立し, $p < 2$ より $\zeta(2/p) < \infty$ であるから $C_1 := C'_1 \zeta(2/p)$ において (1.8) が従う.

第四段 $x_0 = y_0$ の仮定により $x_s - y_s = X_{0,s}^1 - Y_{0,s}^1$ が成り立ち

$$\begin{aligned}
\left| \tilde{I}_{s,t}(x) - \tilde{I}_{s,t}(y) \right| &= \left| f(x_s) X_{s,t}^1 - f(y_s) Y_{s,t}^1 \right| \\
&\leq \left| f(x_s) X_{s,t}^1 - f(x_s) Y_{s,t}^1 \right| + \left| f(x_s) Y_{s,t}^1 - f(y_s) Y_{s,t}^1 \right| \\
&\leq M \left| X_{s,t}^1 - Y_{s,t}^1 \right| + \left| \int_0^1 (\nabla f)(y_s + \theta(x_s - y_s)) \left[(X_{0,s}^1 - Y_{0,s}^1) \otimes Y_{s,t}^1 \right] d\theta \right| \\
&\leq M \left| X_{s,t}^1 - Y_{s,t}^1 \right| + M \left| X_{0,s}^1 - Y_{0,s}^1 \right| \left| Y_{s,t}^1 \right| \\
&\leq M \epsilon \omega(s, t)^{1/p} + M \epsilon \omega(0, s)^{1/p} \omega(s, t)^{1/p} \\
&\leq \epsilon M \left[(2R^p + 1)^{1/p} + (2R^p + 1)^{2/p} \right]
\end{aligned}$$

が従う. ここで $C_2 := M \left[(2R^p + 1)^{1/p} + (2R^p + 1)^{2/p} \right]$ とおく.

第五段 第二段と第三段より, 任意の $D \in \delta[s, t]$ に対し

$$\left| \tilde{I}_{s,t}(x, D) - \tilde{I}_{s,t}(y, D) \right| \leq \epsilon(C_1 + C_2)$$

が成立し. 定理 1.2.2 により $|D| \rightarrow 0$ として

$$\left| I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y) \right| \leq \epsilon(C_1 + C_2)$$

が出る.

■

定理 1.3.3 ($2 \leq p < 3$ の場合の連続性定理). $2 \leq p < 3$ とし, $x_0 = y_0$ を満たす $x, y \in C^1$ と $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$, $0 < \epsilon, R < \infty$ を任意に取る. このとき,

$$\begin{aligned} & \|X^1\|_p, \|Y^1\|_p, \|X^2\|_{p/2}, \|Y^2\|_{p/2} \leq R < \infty, \\ & \|X^1 - Y^1\|_p, \|X^2 - Y^2\|_{p/2} \leq \epsilon \end{aligned}$$

なら, 或る定数 $C = C(p, R, f)$ が存在し, 任意の $0 \leq s \leq t \leq T$ に対して次が成立する:

$$|I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y)| \leq \epsilon C.$$

系 1.3.4. $1 \leq p < 2$ とし, $x_0 = y_0$ を満たす $x, y \in C^1$ と $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$, $0 < R < \infty$ を任意に取る. このとき,

$$\|X^1\|_p, \|Y^1\|_p, \|X^2\|_{p/2}, \|Y^2\|_{p/2} \leq R$$

なら, 或る定数 $C = C(p, R, f)$ が存在して次を満たす:

$$|I_{0,T}(x) - I_{0,T}(y)| \leq C(\|X^1 - Y^1\|_p + \|X^2 - Y^2\|_{p/2}).$$

証明 (系 1.3.4). 定理 1.3.3 において, $\epsilon = \|X^1 - Y^1\|_p + \|X^2 - Y^2\|_{p/2}$ ($x \neq y$) として証明が通る. ■

証明 (定理 1.3.4). $[s, t] \subset [0, T]$ とする.

第一段 $\omega : \Delta_T \rightarrow [0, \infty)$ を

$$\begin{aligned} \omega(\alpha, \beta) &= \|X^1\|_{p, [\alpha, \beta]}^p + \|Y^1\|_{p, [\alpha, \beta]}^p + \|X^2\|_{p/2, [\alpha, \beta]}^{p/2} + \|Y^2\|_{p/2, [\alpha, \beta]}^{p/2} \\ &\quad + \epsilon^{-p} \|X^1 - Y^1\|_{p, [\alpha, \beta]}^p + \epsilon^{-p/2} \|X^2 - Y^2\|_{p/2, [\alpha, \beta]}^{p/2}, \quad ((\alpha, \beta) \in \Delta_T) \end{aligned}$$

で定めれば, 定理 1.2.9 により $2 \leq p$ の下で ω は control function である.

第二段 $D \in \delta[s, t]$ に対し, 定理 1.3.1 の証明と同様にして $t_{(k)}, D_{-k}$ を構成すれば

$$\begin{aligned} & J_{s,t}(x, D) - J_{s,t}(y, D) \\ &= \sum_{k=0}^{N-2} [\{J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})\} - \{J_{s,t}(y, D_{-k}) - J_{s,t}(y, D_{-k-1})\}] \\ &\quad + \{J_{s,t}(x) - J_{s,t}(y)\} \end{aligned} \tag{1.10}$$

と表現できる.

第三段 $J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})$ を変形する. 以降 $t_k = t_{(k)}$ と書き直せば

$$\begin{aligned} & J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1}) \\ &= J_{t_{k-1}, t_k}(x) + J_{t_k, t_{k+1}}(x) - J_{t_{k-1}, t_{k+1}}(x) \\ &= f(x_{t_{k-1}})X_{t_{k-1}, t_k}^1 + f(x_{t_k})X_{t_k, t_{k+1}}^1 - f(x_{t_{k-1}})X_{t_{k-1}, t_{k+1}}^1 \\ &\quad + (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X_{t_{k-1}, t_k}^2 + (\nabla f)(x_{t_k})X_{t_k, t_{k+1}}^2 - (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X_{t_{k-1}, t_{k+1}}^2 \\ &= \{f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}})\}X_{t_k, t_{k+1}}^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X_{t_{k-1},t_k}^2 + (\nabla f)(x_{t_k})X_{t_k,t_{k+1}}^2 - (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X_{t_{k-1},t_{k+1}}^2 \\
& = \int_0^1 \{(\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) - (\nabla f)(x_{t_{k-1}})\} X_{t_{k-1},t_k}^1 \otimes X_{t_k,t_{k+1}}^1 d\theta \\
& \quad + (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X_{t_{k-1},t_k}^1 \otimes X_{t_k,t_{k+1}}^1 \\
& \quad + (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X_{t_{k-1},t_k}^2 + (\nabla f)(x_{t_k})X_{t_k,t_{k+1}}^2 - (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X_{t_{k-1},t_{k+1}}^2 \\
& = \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1},t_k}^1 \otimes X_{t_{k-1},t_k}^1 \otimes X_{t_k,t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
& \quad + (\nabla f)(x_{t_{k-1}}) (X_{t_{k-1},t_k}^1 \otimes X_{t_k,t_{k+1}}^1 + X_{t_{k-1},t_k}^2 - X_{t_{k-1},t_{k+1}}^2) \\
& \quad + (\nabla f)(x_{t_k})X_{t_k,t_{k+1}}^2 \\
& = \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1},t_k}^1 \otimes X_{t_{k-1},t_k}^1 \otimes X_{t_k,t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
& \quad + \{(\nabla f)(x_{t_k}) - (\nabla f)(x_{t_{k-1}})\} X_{t_k,t_{k+1}}^2 \\
& = \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1},t_k}^1 \otimes X_{t_{k-1},t_k}^1 \otimes X_{t_k,t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
& \quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1},t_k}^1 \otimes X_{t_k,t_{k+1}}^2 d\theta
\end{aligned}$$

を得る.

第四段 式 (1.10) について, 次を満たす定数 C_1 が存在することを示す:

$$|(1.10)| \leq \epsilon C_1. \quad (1.11)$$

実際, 前段の結果より

$$\begin{aligned}
& \{J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})\} - \{J_{s,t}(y, D_{-k}) - J_{s,t}(y, D_{-k-1})\} \\
& = \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1},t_k}^1 \otimes X_{t_{k-1},t_k}^1 \otimes X_{t_k,t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
& \quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1},t_k}^1 \otimes X_{t_k,t_{k+1}}^2 d\theta \\
& \quad - \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) Y_{t_{k-1},t_k}^1 \otimes Y_{t_{k-1},t_k}^1 \otimes Y_{t_k,t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
& \quad - \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) Y_{t_{k-1},t_k}^1 \otimes Y_{t_k,t_{k+1}}^2 d\theta \\
& = \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1},t_k}^1 \otimes X_{t_{k-1},t_k}^1 \otimes (X_{t_k,t_{k+1}}^1 - Y_{t_k,t_{k+1}}^1) dr d\theta \\
& \quad + \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1},t_k}^1 \otimes (X_{t_{k-1},t_k}^1 - Y_{t_{k-1},t_k}^1) \otimes Y_{t_k,t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
& \quad + \int_0^1 \int_0^\theta \{(\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) - (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))\} \\
& \quad \quad X_{t_{k-1},t_k}^1 \otimes Y_{t_{k-1},t_k}^1 \otimes Y_{t_k,t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
& \quad + \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) (X_{t_{k-1},t_k}^1 - Y_{t_{k-1},t_k}^1) \otimes Y_{t_{k-1},t_k}^1 \otimes Y_{t_k,t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
& \quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1},t_k}^1 \otimes (X_{t_k,t_{k+1}}^2 - Y_{t_k,t_{k+1}}^2) d\theta \\
& \quad + \int_0^1 \{(\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) - (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^2 d\theta \\
& + \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) (X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^2 d\theta \\
& = \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes (X_{t_k, t_{k+1}}^1 - Y_{t_k, t_{k+1}}^1) dr d\theta \\
& + \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes (X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
& + \int_0^1 \int_0^\theta \int_0^1 (\nabla^3 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}) + u(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) - y_{t_{k-1}} - r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))) \\
& \quad \{ (X_{0, t_{k-1}}^1 - Y_{0, t_{k-1}}^1) + r(X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \} \otimes X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 du dr d\theta \\
& + \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) (X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \otimes Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
& + \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes (X_{t_k, t_{k+1}}^2 - Y_{t_k, t_{k+1}}^2) d\theta \\
& + \int_0^1 \int_0^1 (\nabla^3 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}) + r(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) - y_{t_{k-1}} - \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))) \\
& \quad \{ (X_{0, t_{k-1}}^1 - Y_{0, t_{k-1}}^1) + \theta(X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \} \otimes X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^2 dr d\theta \\
& + \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) (X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^2 d\theta
\end{aligned}$$

が成り立つから,

$$\begin{aligned}
M &:= \sum_{i,j} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f_j^i(x)| + \sum_{i,j,k} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial_k f_j^i(x)| \\
&+ \sum_{i,j,k,v} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial_v \partial_k f_j^i(x)| + \sum_{i,j,k,v,w} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial_w \partial_v \partial_k f_j^i(x)|
\end{aligned} \tag{1.12}$$

とにおいて

$$\begin{aligned}
& \left| \{J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})\} - \{J_{s,t}(y, D_{-k}) - J_{s,t}(y, D_{-k-1})\} \right| \\
& \leq M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| X_{t_k, t_{k+1}}^1 - Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \right| \\
& \quad + M \left| X_{0, t_{k-1}}^1 - Y_{0, t_{k-1}}^1 \right| \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| X_{t_k, t_{k+1}}^2 - Y_{t_k, t_{k+1}}^2 \right| \\
& \quad + M \left| X_{0, t_{k-1}}^1 - Y_{0, t_{k-1}}^1 \right| \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^2 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^2 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^2 \right| \\
& \leq \epsilon M \left[5 + 2\omega(0, t_{k-1})^{1/p} + 2\omega(t_{k-1}, t_k)^{1/p} \right] \left(\frac{2\omega(s, t)}{N - k - 1} \right)^{3/p} \\
& \leq \epsilon M \left[2 + 4(2R^p + 2R^{p/2} + 2)^{1/p} \right] 2^{3/p} (2R^p + 2R^{p/2} + 2)^{3/p} \left(\frac{1}{N - k - 1} \right)^{3/p}
\end{aligned}$$

を得る. ここで

$$C'_1 := M \left[2 + 4(2R^p + 2R^{p/2} + 2)^{1/p} \right] 2^{3/p} (2R^p + 2R^{p/2} + 2)^{3/p}$$

と定めれば

$$|(1.10)| \leq \sum_{k=0}^{N-2} \epsilon C'_1 \left(\frac{1}{N-k-1} \right)^{3/p} < \epsilon C'_1 \zeta \left(\frac{3}{p} \right)$$

が成立し、 $p < 3$ より $\zeta(3/p) < \infty$ であるから $C_1 := C'_1 \zeta(3/p)$ とおいて (1.11) が³出る。

第五段 $x_0 = y_0$ の仮定により

$$\begin{aligned} & |J_{s,t}(x) - J_{s,t}(y)| \\ & \leq |f(x_s)X_{s,t}^1 - f(y_s)Y_{s,t}^1| + |(\nabla f)(x_s)X_{s,t}^2 - (\nabla f)(y_s)Y_{s,t}^2| \\ & \leq |f(x_s)X_{s,t}^1 - f(x_s)Y_{s,t}^1| + |f(x_s)Y_{s,t}^1 - f(y_s)Y_{s,t}^1| \\ & \quad + |(\nabla f)(x_s)X_{s,t}^2 - (\nabla f)(x_s)Y_{s,t}^2| + |(\nabla f)(x_s)Y_{s,t}^2 - (\nabla f)(y_s)Y_{s,t}^2| \\ & \leq M |X_{s,t}^1 - Y_{s,t}^1| + \left| \int_0^1 (\nabla f)(y_s + \theta(x_s - y_s))(x_s - y_s) \otimes Y_{s,t}^1 d\theta \right| \\ & \quad + M |X_{s,t}^2 - Y_{s,t}^2| + \left| \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_s + \theta(x_s - y_s))(x_s - y_s) \otimes Y_{s,t}^2 d\theta \right| \\ & \leq M |X_{s,t}^1 - Y_{s,t}^1| + M |X_{0,s}^1 - Y_{0,s}^1| |Y_{s,t}^1| \\ & \quad + M |X_{s,t}^2 - Y_{s,t}^2| + M |X_{0,s}^1 - Y_{0,s}^1| |Y_{s,t}^2| \\ & \leq \epsilon M \omega(s, t)^{1/p} + \epsilon M \omega(0, s)^{1/p} \omega(s, t)^{1/p} \\ & \quad + \epsilon M \omega(s, t)^{2/p} + \epsilon M \omega(0, s)^{1/p} \omega(s, t)^{2/p} \\ & \leq \epsilon M \left[\omega(0, T)^{1/p} + 2\omega(0, T)^{2/p} + \omega(0, T)^{3/p} \right] \\ & \leq \epsilon M \left[(2R^p + 2R^{p/2} + 2)^{1/p} + 2(2R^p + 2R^{p/2} + 2)^{2/p} + (2R^p + 2R^{p/2} + 2)^{3/p} \right] \end{aligned}$$

が従う。ここで最下段の ϵ の係数を C_2 とおく。

第六段 以上より、任意の $D \in \delta[s, t]$ に対し

$$|J_{s,t}(x, D) - J_{s,t}(y, D)| \leq \epsilon(C_1 + C_2)$$

が成り立ち、定理 1.2.2 により $|D| \rightarrow 0$ として

$$|I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y)| \leq \epsilon(C_1 + C_2)$$

が出る。 ■

系 1.3.5 (パスが 0 出発なら f の有界性は要らない). 定理 1.3.1 と定理 1.3.3 について、 $x, y \in \tilde{C}^1$ ならば $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ として主張が成り立つ。

証明. $x_0 = 0$ なら

$$\|X^1\|_p \leq R \quad \Rightarrow \quad |x_t| \leq R \quad (\forall t \in [0, T])$$

が成り立つから、式 (1.9) と (1.12) において $\sup_{x \in \mathbb{R}^d}$ を $\sup_{|x| \leq 9R}$ に替えればよい。 ■

1.4 The notion of rough path

$(V, \|\cdot\|)$ を \mathbb{R} 上の Banach 空間とする ($V \neq \{0\}$). また \otimes_a により代数的テンソル積, 或はその標準写像を表す. $k \geq 2$ の場合, k 重テンソル積 $V^{\otimes_a k} = V \otimes_a \cdots \otimes_a V$ にプロジェクトイブノルム $\pi_k(\cdot)$ を導入し, その完備拡大を $(V^{\otimes k}, |\cdot|_k)$ と書く^{*5}. $k = 0, 1$ に対しては $V^{\otimes 0} := \mathbb{R}$, $V^{\otimes 1} := V$ とし, $|\cdot|_0 = \pi_0(\cdot) := \mathbb{R}$ の絶対値, 及び $|\cdot|_1 = \pi_1(\cdot) := \|\cdot\|$ と定める. 定理 A.3.4 と定理 A.3.9 より, 任意の $0 \leq j \leq k$ に対し $V^{\otimes_a k}$ と $V^{\otimes_a j} \otimes_a V^{\otimes_a k-j}$ は線型同型となる. この同型写像を

$$F_{j,k} : V^{\otimes_a k} \longrightarrow V^{\otimes_a j} \otimes_a V^{\otimes_a k-j}, \quad 0 \leq j \leq k$$

書けば, $F_{j,k}$ は

$$\begin{aligned} F_{0,k}(v) &= 1 \otimes_a v, & (\forall v \in V^{\otimes_a k}), \\ F_{j,k}(v_1 \otimes_a \cdots \otimes_a v_k) &= (v_1 \otimes_a \cdots \otimes_a v_j) \otimes_a (v_{j+1} \otimes_a \cdots \otimes_a v_k), & (\forall v_1 \otimes_a \cdots \otimes_a v_k \in V^{\otimes_a k}, 1 \leq j \leq k-1), \\ F_{k,k}(v) &= v \otimes_a 1, & (\forall v \in V^{\otimes_a k}) \end{aligned}$$

を満たす. また $V^{\otimes_a j} \otimes_a V^{\otimes_a k-j}$ 上にもプロジェクトイブノルムを導入し, これを $\pi_{j,k}$ と書く.

定理 1.4.1. このとき次式が成立する. 特に, $F_{j,k}$, ($0 \leq j \leq k$) は等長同型である.

$$\pi_k \circ F_{j,k}^{-1} = \pi_{j,k}, \quad 0 \leq j \leq k.$$

証明.

第一段 $j = 0$ のとき, 任意の $v \in V^{\otimes_a k}$ に対し

$$\pi_{0,k}(F_{0,k}(v)) = \pi_{0,k}(1 \otimes_a v) = \pi_0(1)\pi_k(v) = \pi_k(v)$$

が成り立ち $\pi_k \circ F_{0,k}^{-1} = \pi_{0,k}$ を得る. 同様に $\pi_k \circ F_{k,k}^{-1} = \pi_{k,k}$ も出る.

第二段 $\pi_k \circ F_{j,k}^{-1} \leq \pi_{j,k}$, ($1 \leq j \leq k-1$) が成り立つことを示す. $v \in V^{\otimes_a j} \otimes_a V^{\otimes_a k-j}$ の分割

$$v = \sum_r u^r \otimes_a v^r, \quad (u^r \in V^{\otimes_a j}, v^r \in V^{\otimes_a k-j})$$

を任意に取り, 一旦固定する. このとき u^r, v^r の任意の分割

$$u^r = \sum_{n(r)} u_1^{n(r)} \otimes_a \cdots \otimes_a u_j^{n(r)}, \quad v^r = \sum_{m(r)} v_{j+1}^{m(r)} \otimes_a \cdots \otimes_a v_k^{m(r)}, \quad (v_i^{n(r)}, v_i^{m(r)} \in V)$$

に対して

$$\begin{aligned} \pi_k(F_{j,k}^{-1}(v)) &\leq \sum_r \sum_{n(r), m(r)} \pi_k(u_1^{n(r)} \otimes_a \cdots \otimes_a u_j^{n(r)} \otimes_a v_{j+1}^{m(r)} \otimes_a \cdots \otimes_a v_k^{m(r)}) \\ &= \sum_r \sum_{n(r), m(r)} \|u_1^{n(r)}\| \cdots \|u_j^{n(r)}\| \|v_{j+1}^{m(r)}\| \cdots \|v_k^{m(r)}\| \\ &= \sum_r \left\{ \sum_{n(r)} \|u_1^{n(r)}\| \cdots \|u_j^{n(r)}\| \right\} \left\{ \sum_{m(r)} \|v_{j+1}^{m(r)}\| \cdots \|v_k^{m(r)}\| \right\} \end{aligned}$$

^{*5} V が有限次元なら $V^{\otimes_a k}$ も有限次元であるから $V^{\otimes k} = V^{\otimes_a k}$, $|\cdot|_k = \pi_k(\cdot)$ でよい. しかし一般に $(V^{\otimes_a k}, \pi_k(\cdot))$ は完備ではない ([6] (p. 17), [7]).

が成り立つから、分割の任意性と定理 A.4.7 より

$$\pi_k(F_{j,k}^{-1}(v)) \leq \sum_r \pi_j(u^r) \pi_{k-j}(v^r)$$

を得る. v の分割について下限を取れば、再び定理 A.4.7 より

$$\pi_k(F_{j,k}^{-1}(v)) \leq \pi_{j,k}(v)$$

が出る.

第三段 $\pi_k \circ F_{j,k}^{-1} \geq \pi_{j,k}$, ($1 \leq j \leq k-1$) が成り立つことを示す. $v \in V^{\otimes k}$ の任意の分割

$$v = \sum_n v_1^n \otimes_a \cdots \otimes_a v_k^n, \quad (v_i^n \in V, i = 1, \dots, k)$$

を取れば,

$$\begin{aligned} \pi_{j,k}(F_{j,k}(v)) &\leq \sum_n \pi_{j,k}((v_1^n \otimes_a \cdots \otimes_a v_j^n) \otimes_a (v_{j+1}^n \otimes_a \cdots \otimes_a v_k^n)) \\ &= \sum_n \pi_j(v_1^n \otimes_a \cdots \otimes_a v_j^n) \pi_{k-j}(v_{j+1}^n \otimes_a \cdots \otimes_a v_k^n) \\ &= \sum_n \|v_1^n\| \cdots \|v_k^n\| \end{aligned}$$

が成立する. 従って定理 A.4.7 より

$$\pi_{j,k}(F_{j,k}(v)) \leq \pi_k(v)$$

が得られる. ■

$V^{\otimes i}$ の $V^{\otimes i}$ への等長埋め込みを J_i で表し (J_i の終集合を $J_i V^{\otimes i}$ と考える^{*6}. $i = 0, 1$ の場合 J_i は恒等写像),

$$\begin{aligned} J_j V^{\otimes j} \times J_{k-j} V^{\otimes k-j} \ni (u, v) &\longmapsto (J_j^{-1} u, J_{k-j}^{-1} v) && \in V^{\otimes j} \times V^{\otimes k-j} \\ &\longmapsto F_{j,k}^{-1}(J_j^{-1} u \otimes_a J_{k-j}^{-1} v) && \in V^{\otimes k} \\ &\longmapsto J_k F_{j,k}^{-1}(J_j^{-1} u \otimes_a J_{k-j}^{-1} v) && \in V^{\otimes k} \end{aligned} \quad (1.13)$$

の対応関係により定まる写像: $J_j V^{\otimes j} \times J_{k-j} V^{\otimes k-j} \longrightarrow V^{\otimes k}$ を $\varphi_{j,k}$ と書けば, $\varphi_{j,k}$ は有界双線型写像である. 実際, \otimes_a の双線型性と埋め込み及び $F_{j,k}^{-1}$ の線型性より $\varphi_{j,k}$ の双線型性が従い, また

$$\begin{aligned} |\varphi_{j,k}(u, v)|_k &= \pi_k(F_{j,k}^{-1}(J_j^{-1} u \otimes_a J_{k-j}^{-1} v)) \\ &= \pi_{j,k}(J_j^{-1} u \otimes_a J_{k-j}^{-1} v) \\ &= \pi_j(J_j^{-1} u) \pi_{k-j}(J_{k-j}^{-1} v) \\ &= |u|_j |v|_{k-j} \end{aligned}$$

が任意の $(u, v) \in J_j V^{\otimes j} \times J_{k-j} V^{\otimes k-j}$ に対して成り立つから $\|\varphi_{j,k}\|_{L^{(2)}(J_j V^{\otimes j} \times J_{k-j} V^{\otimes k-j}, V^{\otimes k})} = 1$ を得る. 従って, 定理 A.1.4 より $\varphi_{j,k}$ は $V^{\otimes j} \times V^{\otimes k-j}$ 上の或るただ一つの変換型写像 $\psi_{j,k}$ にノルム保存拡張される.

定理 1.4.2. $0 \leq j \leq k$ とする. このとき, $\psi_{j,k}: V^{\otimes j} \times V^{\otimes k-j} \longrightarrow V^{\otimes k}$ は次を満たす:

$$|\psi_{j,k}(u, v)|_k = |u|_j |v|_{k-j}, \quad (\forall (u, v) \in V^{\otimes j} \times V^{\otimes k-j}).$$

^{*6} J_i の終集合を $J_i V^{\otimes i}$ と考えれば全単射であるから逆写像 J_i^{-1} が存在する.

証明. (u, v) に直積ノルムで収束する点列 $(u_n, v_n) \in J_j V^{\otimes a j} \times J_{k-j} V^{\otimes a k-j}$ ($n = 1, 2, \dots$) を取れば

$$\|\varphi_{j,k}(u_n, v_n) - \psi_{j,k}(u, v)\|_k \longrightarrow 0, \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成り立つ. また

$$\begin{aligned} \|u_n|_j|v_n|_{k-j} - |u|_j|v|_{k-j}\| &\leq \|u_n|_j|v_n|_{k-j} - |u_n|_j|v|_{k-j}\| + \|u_n|_j|v|_{k-j} - |u|_j|v|_{k-j}\| \\ &\leq \|u_n|_j|v_n - v|_{k-j} + |u_n - u|_j|v|_{k-j}\| \\ &\longrightarrow 0, \quad (n \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

も成立するから

$$\begin{aligned} \|\psi_{j,k}(u, v)\|_k - \|u|_j|v|_{k-j}\| &\leq \|\varphi_{j,k}(u_n, v_n) - \psi_{j,k}(u, v)\|_k + \|u_n|_j|v_n|_{k-j} - |u|_j|v|_{k-j}\| \\ &\longrightarrow 0, \quad (n \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

が従い $\|\psi_{j,k}(u, v)\|_k = \|u|_j|v|_{k-j}$ が得られる. ■

$T(V) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} V^{\otimes k}$ とおく. また上で定めた双線型写像 $\psi_{j,k}$ を $\otimes_{j,k}$ と書き直す:

$$u \otimes_{j,k} v = \psi_{j,k}(u, v), \quad (\forall (u, v) \in V^{\otimes j} \times V^{\otimes k-j}, 0 \leq j \leq k, k \geq 0).$$

このとき, 任意の $a = (a_k)_{k=0}^{\infty}, b = (b_k)_{k=0}^{\infty} \in T(V)$ に対し

$$c_k := \sum_{j=0}^k a_j \otimes_{j,k} b_{k-j}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

で $c_k \in V^{\otimes k}$ を定めれば, 有限個の k を除いて $c_k = 0$ となり $c = (c_k)_{k=0}^{\infty} \in T(V)$ が満たされる. これで定まる二項算法を

$$c = a \otimes b$$

と書けば, 以下の主張により $T(V)$ は \otimes を乗法として代数となる.

補題 1.4.3. 任意の $0 \leq r \leq j \leq k$, $(r, j, k \in \mathbb{N})$ と任意の $a_r \in V^{\otimes r}, b_{j-r} \in V^{\otimes j-r}, c_{k-j} \in V^{\otimes k-j}$ に対して

$$(a_r \otimes_{r,j} b_{j-r}) \otimes_{j,k} c_{k-j} = a_r \otimes_{r,k} (b_{j-r} \otimes_{j-r,k-r} c_{k-j}) \quad (1.14)$$

が成立する.

証明.

第一段 $a_r \in J_r V^{\otimes a r}, b_{j-r} \in J_{j-r} V^{\otimes a j-r}, c_{k-j} \in J_{k-j} V^{\otimes a k-j}$ として (1.14) を示す. この場合, (1.13) の対応関係により

$$\begin{aligned} (a_r \otimes_{r,j} b_{j-r}) \otimes_{j,k} c_{k-j} &= J_k F_{j,k}^{-1} \left[\left\{ F_{r,j}^{-1} (J_r^{-1} a_r \otimes_a J_{j-r}^{-1} b_{j-r}) \right\} \otimes_a J_{k-j}^{-1} c_{k-j} \right], \\ a_r \otimes_{r,k} (b_{j-r} \otimes_{j-r,k-r} c_{k-j}) &= J_k F_{r,k}^{-1} \left[J_r^{-1} a_r \otimes_a \left\{ F_{j-r,k-r}^{-1} (J_{j-r}^{-1} b_{j-r} \otimes_a J_{k-j}^{-1} c_{k-j}) \right\} \right] \end{aligned}$$

となる. ここで

$$J_r^{-1} a_r = \sum_{i_1=1}^{I_1} v_1^{i_1} \otimes_a \cdots \otimes_a v_r^{i_1}, \quad J_{j-r}^{-1} b_{j-r} = \sum_{i_2=1}^{I_2} v_{r+1}^{i_2} \otimes_a \cdots \otimes_a v_j^{i_2}, \quad J_{k-j}^{-1} c_{k-j} = \sum_{i_3=1}^{I_3} v_{j+1}^{i_3} \otimes_a \cdots \otimes_a v_k^{i_3}$$

と表現できるから

$$\begin{aligned}
 & F_{j,k}^{-1} \left[\left\{ F_{r,j}^{-1} \left(J_r^{-1} a_r \otimes_a J_{j-r}^{-1} b_{j-r} \right) \right\} \otimes_a J_{k-j}^{-1} c_{k-j} \right] \\
 &= \sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{i_2=1}^{I_2} \sum_{i_3=1}^{I_3} v_1^{i_1} \otimes_a \cdots \otimes_a v_r^{i_1} \otimes_a v_{r+1}^{i_2} \otimes_a \cdots \otimes_a v_j^{i_2} \otimes_a v_{j+1}^{i_3} \otimes_a \cdots \otimes_a v_k^{i_3} \\
 &= F_{r,k}^{-1} \left[J_r^{-1} a_r \otimes_a \left\{ F_{j-r,k-r}^{-1} \left(J_{j-r}^{-1} b_{j-r} \otimes_a J_{k-j}^{-1} c_{k-j} \right) \right\} \right]
 \end{aligned}$$

が成立し (1.14) が得られる.

第二段 一般に $a_r \in V^{\otimes r}$, $b_{j-r} \in V^{\otimes j-r}$, $c_{k-j} \in V^{\otimes k-j}$ の場合,

$$|a_r^n - a_r|_r \rightarrow 0, \quad |b_{j-r}^n - b_{j-r}|_{j-r} \rightarrow 0, \quad |c_{k-j}^n - c_{k-j}|_{k-j} \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty)$$

を満たす点列 $\{a_r^n\}_{n=1}^\infty \subset J_r V^{\otimes a_r}$, $\{b_{j-r}^n\}_{n=1}^\infty \subset J_{j-r} V^{\otimes a_{j-r}}$, $\{c_{k-j}^n\}_{n=1}^\infty \subset J_{k-j} V^{\otimes a_{k-j}}$ を取れば, 前段の結果より

$$\begin{aligned}
 & \left| (a_r \otimes_{r,j} b_{j-r}) \otimes_{j,k} c_{k-j} - a_r \otimes_{r,k} (b_{j-r} \otimes_{j-r,k-r} c_{k-j}) \right|_k \\
 & \leq \left| (a_r \otimes_{r,j} b_{j-r}) \otimes_{j,k} c_{k-j} - (a_r^n \otimes_{r,j} b_{j-r}^n) \otimes_{j,k} c_{k-j}^n \right|_k \\
 & \quad + \left| a_r \otimes_{r,k} (b_{j-r} \otimes_{j-r,k-r} c_{k-j}) - a_r^n \otimes_{r,k} (b_{j-r}^n \otimes_{j-r,k-r} c_{k-j}^n) \right|_k \\
 & \leq |a_r \otimes_{r,j} b_{j-r}|_j |c_{k-j} - c_{k-j}^n|_{k-j} + |a_r \otimes_{r,j} b_{j-r} - a_r^n \otimes_{r,j} b_{j-r}^n|_j |c_{k-j}^n|_{k-j} \\
 & \quad + |a_r|_r |b_{j-r} \otimes_{j-r,k-r} c_{k-j} - b_{j-r}^n \otimes_{j-r,k-r} c_{k-j}^n|_{k-r} + |a_r - a_r^n|_r |b_{j-r}^n \otimes_{j-r,k-r} c_{k-j}^n|_{k-r} \\
 & \leq |a_r|_r |b_{j-r}|_{j-r} |c_{k-j} - c_{k-j}^n|_{k-j} + \left\{ |a_r - a_r^n|_r |b_{j-r}|_{j-r} + |a_r^n|_r |b_{j-r} - b_{j-r}^n|_{j-r} \right\} |c_{k-j}^n|_{k-j} \\
 & \quad + |a_r|_r \left\{ |b_{j-r} - b_{j-r}^n|_{j-r} |c_{k-j}|_{k-j} + |b_{j-r}^n|_{j-r} |c_{k-j} - c_{k-j}^n|_{k-j} \right\} + |a_r - a_r^n|_r |b_{j-r}^n|_{j-r} |c_{k-j}^n|_{k-j} \\
 & \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)
 \end{aligned}$$

が従い (1.14) が出る. ■

定理 1.4.4 (\otimes は $T(V)$ の乗法となる). \otimes は $T(V)$ において結合則を満たす双線型写像である.

証明. \otimes の双線型性は各 $\otimes_{j,k}$ の双線型性より従う. また任意の $a, b, c \in T(V)$ に対し, 補題 1.4.3 より

$$\begin{aligned}
 ((a \otimes b) \otimes c)_k &= \sum_{j=0}^k (a \otimes b)_j \otimes_{j,k} c_{k-j} \\
 &= \sum_{j=0}^k \sum_{r=0}^j (a_r \otimes_{r,j} b_{j-r}) \otimes_{j,k} c_{k-j} = \sum_{j=0}^k \sum_{r=0}^j a_r \otimes_{r,k} (b_{j-r} \otimes_{j-r,k-r} c_{k-j}) = \sum_{r=0}^k \sum_{j=r}^k a_r \otimes_{r,k} (b_{j-r} \otimes_{j-r,k-r} c_{k-j}) \\
 &= \sum_{r=0}^k a_r \otimes_{r,k} (b \otimes c)_{k-r} \\
 &= (a \otimes (b \otimes c))_k, \quad (\forall k = 0, 1, 2, \dots).
 \end{aligned}$$

が成立する. ■

定理 1.4.5 ($T(V)$ の単位元). 任意の $k \geq 0$, および任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ と $v \in V^{\otimes k}$ に対し

$$\alpha \otimes_{0,k} v = v \otimes_{k,k} \alpha = \alpha v \quad (1.15)$$

が成立する. 特に, $e_0 := 1$, $e_k := 0$ ($k \geq 0$) として定める $e = (e_k)_{k=1}^\infty \in T(V)$ は \otimes に関する単位元である:

$$\text{i.e. } e \otimes a = a \otimes e = a, \quad (\forall a \in T(V))$$

証明. $v \in J_k V^{\otimes k}$ の場合は (1.13) の対応関係により

$$\alpha \otimes_{0,k} v = J_k F_{0,k}^{-1} (\alpha \otimes_a J_k^{-1} v) = J_k (\alpha J_k^{-1} v) = J_k J_k^{-1} \alpha v = \alpha v$$

が成立する. 一般の $v \in V^{\otimes k}$ に対しては, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v - v_n\|_k = 0$ を満たす $\{v_n\}_{n=1}^\infty \subset J_k V^{\otimes k}$ を取れば

$$\|\alpha v - \alpha \otimes_{0,k} v\|_k \leq \|\alpha v - \alpha v_n\|_k + \|\alpha \otimes_{0,k} v_n - \alpha \otimes_{0,k} v\|_k = 2\|\alpha\| \|v - v_n\|_k \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成立し $\alpha v = \alpha \otimes_{0,k} v$ が得られる. 同様に $\alpha v = v \otimes_{k,k} \alpha$ も成り立つ. 従って, 任意の $a \in T(V)$ に対し

$$\begin{aligned} (e \otimes a)_k &= \sum_{j=0}^k e_j \otimes_{j,k} a_{k-j} = 1 \otimes_{0,k} a_k \\ &= a_k = a_k \otimes_{k,k} 1 = \sum_{j=0}^k a_j \otimes_{j,k} e_{k-j} = (a \otimes e)_k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

が満たされ $e \otimes a = a \otimes e = a$ が出る. ■

$n \geq 0$ に対して

$$T^{(n)}(V) := \bigoplus_{k=0}^n V^{\otimes k}$$

とおき, $T(V)$ の場合と同様に乗法 \otimes を

$$a \otimes b := \left(\sum_{j=0}^k a_j \otimes_{j,k} b_{k-j} \right)_{k=0}^n, \quad a, b \in T^{(n)}(V)$$

により定め, 次の直積ノルムでノルム位相を導入する:

$$\|a\| := \sum_{k=0}^n \|a_k\|_k, \quad (a = (a_k)_{k=0}^n \in T^{(n)}(V)).$$

また, 写像 $X: \Delta_T \rightarrow T^{(n)}(V)$ に対して $X_{s,t} = (X_{s,t}^0, \dots, X_{s,t}^n)$, $((s, t) \in \Delta_T)$ と表記し

$$C_0(\Delta_T, T^{(n)}(V)) := \left\{ X: \Delta_T \rightarrow T^{(n)}(V) ; \text{ continuous, } X^0 \equiv 1 \right\}$$

を定める.

定義 1.4.6 (有限 p -変動). $p \geq 1$ とする. $X : \Delta_T \rightarrow T^{(n)}(V)$ に対して或るコントロール関数 ω が存在して

$$|X_{s,t}^i|_i \leq \omega(s,t)^{1/p}, \quad (\forall i = 1, \dots, n, \forall (s,t) \in \Delta_T) \quad (1.16)$$

を満たすとき, X は有限 p -変動 (finite p -variation) であるという.*7

定義 1.4.7 (有限総 p -変動). $p \geq 1$ とする. $X \in C_0(\Delta_T, T^{(n)}(V))$ が有限総 p -変動 (finite total p -variation) とは

$$\|X^i\|_{p/i} < \infty, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

が満たされることをいう. また次の線型空間を定める:

$$C_{0,p}(\Delta_T, T^{(n)}(V)) := \{X \in C_0(\Delta_T, T^{(n)}(V)) ; X \text{ has finite total } p\text{-variation}\}.$$

定義 1.4.8 (乗法的汎関数). 次の関係式 (Chen's identity) を満たす $X \in C_0(\Delta_T, T^{(n)}(V))$ を n 次の乗法的汎関数 (multiplicative functional of degree n) と呼ぶ:

$$X_{s,u} \otimes X_{u,t} = X_{s,t}, \quad (\forall 0 \leq s \leq u \leq t \leq T).$$

補題 1.4.9. $X : \Delta_T \rightarrow T^{(n)}(V)$ が $X^0 \equiv 1$ かつ Chen's identity を満たせば $X_{t,t}^k = 0$, ($0 \leq \forall t \leq T$, $1 \leq \forall k \leq n$).

証明. 任意に $t \in [0, T]$ を取る. $X_{t,t}^k = \sum_{j=0}^k X_{t,t}^j \otimes_{j,k} X_{t,t}^{k-j}$ と式 (1.15) より, 先ず

$$X_{t,t}^1 = X_{t,t}^0 \otimes_{0,1} X_{t,t}^1 + X_{t,t}^1 \otimes_{1,1} X_{t,t}^0 = X_{t,t}^1 + X_{t,t}^1$$

が成り立ち $X_{t,t}^1 = 0$ が従う. 同様に

$$X_{t,t}^2 = X_{t,t}^0 \otimes_{0,2} X_{t,t}^2 + X_{t,t}^1 \otimes_{1,2} X_{t,t}^1 + X_{t,t}^2 \otimes_{2,2} X_{t,t}^0 = X_{t,t}^2 + X_{t,t}^2$$

より $X_{t,t}^2 = 0$ が成立し, 帰納的に $X_{t,t}^k = 0$ ($1 \leq k \leq n$) が出る. ■

定理 1.4.10. n 次乗法的汎関数については有限 p -変動であることと有限総 p -変動であることは同値である.

*7 $X : \Delta_T \rightarrow T^{(n)}(V)$ が有限 p -変動であることと $\|X\|_p$ が有限であることは一致しない. 実際, 後述のシグネチャー $X = (X^0, \dots, X^n)$ は有限 p -変動であるが, その定義より $X^0 \equiv 1$ が満たされているから

$$D \text{ の分割小区間の数} = \sum_D |X_{t_{i-1}, t_i}^0|_0^p \leq \sum_D |X_{t_{i-1}, t_i}|^p \leq \|X\|_p^p, \quad (\forall D \in \delta[0, T])$$

が成り立ち $\|X\|_p = \infty$ となる.

証明. $X \in C_0(\Delta_T, T^{(n)}(V))$ を n 次乗法的とする. X が有限総 p -変動ならば, 補題 1.4.9 と定理 1.2.8 より

$$\omega(s, t) := \sum_{i=1}^n \|X^i\|_{p/i, [s, t]}^{p/i}, \quad ((s, t) \in \Delta_T)$$

で定める ω はコントロール関数となる. このとき

$$|X_{s, t}^i|_i \leq \|X^i\|_{p/i, [s, t]} \leq \omega(s, t)^{i/p}, \quad (\forall i = 1, \dots, n, \forall (s, t) \in \Delta_T)$$

が成り立つから X は有限 p -変動である. 逆に X が有限 p -変動なら, (1.16) を満たす ω に対し

$$\sum_D |X_{t_{i-1}, t_i}^i|_i^{p/i} \leq \sum_D \omega(t_{i-1}, t_i) \leq \omega(0, T), \quad (\forall D \in \delta[0, T], \forall i = 1, \dots, n)$$

が満たされ $\|X^i\|_{p/i} < \infty$, $i = 1, \dots, n$ が従うので X は有限総 p -変動である. ■

実際に乗法的汎関数を構成する. 有界変動な連続写像 $x: [0, T] \rightarrow V$ に対して

$$X_{s, t}^1 := x_t - x_s, \quad (\forall (s, t) \in \Delta_T)$$

とおけば, $X^1: \Delta_T \rightarrow V$ は連続かつ $\|X^1\|_1 < \infty$ を満たす. このとき,

補題 1.4.11. 任意の $(s, t) \in \Delta_T$ と連続写像 $Y: \Delta_T \rightarrow V^{\otimes k}$, ($k \geq 1$) に対して次の積分が $V^{\otimes k+1}$ で確定する:

$$\int_s^t Y_{s, u} \otimes dx_u := \lim_{|D| \rightarrow 0} \sum_D Y_{s, u_{i-1}} \otimes_{k, k+1} X_{u_{i-1}, u_i}^1, \quad (D \in \delta[s, t]). \quad (1.17)$$

証明. $D = \{s = u_0 < \dots < u_n = t\}$, $D' = \{s = v_0 < \dots < v_m = t\} \in \delta[s, t]$ を任意に取り, 共通細分を $D'' = \{s = w_0 < \dots < w_r = t\}$ と表して

$$\begin{cases} \tilde{Y}_{s, w_\ell} := Y_{s, u_i}, & (u_i \leq w_\ell < u_{i+1}), \\ \hat{Y}_{s, w_\ell} := Y_{s, v_j}, & (v_j \leq w_\ell < v_{j+1}), \end{cases} \quad (\ell = 0, 1, \dots, r)$$

で \tilde{Y}, \hat{Y} を定めれば, 定理 1.4.2 より

$$\begin{aligned} & \left| \sum_D Y_{s, u_{i-1}} \otimes_{k, k+1} X_{u_{i-1}, u_i}^1 - \sum_{D'} Y_{s, v_{j-1}} \otimes_{k, k+1} X_{v_{j-1}, v_j}^1 \right|_{k+1} \\ & \leq \left| \sum_D Y_{s, u_{i-1}} \otimes_{k, k+1} X_{u_{i-1}, u_i}^1 - \sum_{D''} Y_{s, w_{\ell-1}} \otimes_{k, k+1} X_{w_{\ell-1}, w_\ell}^1 \right|_{k+1} + \left| \sum_{D'} Y_{s, v_{j-1}} \otimes_{k, k+1} X_{v_{j-1}, v_j}^1 - \sum_{D''} Y_{s, w_{\ell-1}} \otimes_{k, k+1} X_{w_{\ell-1}, w_\ell}^1 \right|_{k+1} \\ & = \left| \sum_{D''} \tilde{Y}_{s, w_{\ell-1}} \otimes_{k, k+1} X_{w_{\ell-1}, w_\ell}^1 - \sum_{D''} Y_{s, w_{\ell-1}} \otimes_{k, k+1} X_{w_{\ell-1}, w_\ell}^1 \right|_{k+1} + \left| \sum_{D''} \hat{Y}_{s, w_{\ell-1}} \otimes_{k, k+1} X_{w_{\ell-1}, w_\ell}^1 - \sum_{D''} Y_{s, w_{\ell-1}} \otimes_{k, k+1} X_{w_{\ell-1}, w_\ell}^1 \right|_{k+1} \\ & = \left| \sum_{D''} (\tilde{Y}_{s, w_{\ell-1}} - Y_{s, w_{\ell-1}}) \otimes_{k, k+1} X_{w_{\ell-1}, w_\ell}^1 \right|_{k+1} + \left| \sum_{D''} (\hat{Y}_{s, w_{\ell-1}} - Y_{s, w_{\ell-1}}) \otimes_{k, k+1} X_{w_{\ell-1}, w_\ell}^1 \right|_{k+1} \\ & \leq \sum_{D''} |\tilde{Y}_{s, w_{\ell-1}} - Y_{s, w_{\ell-1}}|_k \|X_{w_{\ell-1}, w_\ell}^1\|_1 + \sum_{D''} |\hat{Y}_{s, w_{\ell-1}} - Y_{s, w_{\ell-1}}|_k \|X_{w_{\ell-1}, w_\ell}^1\|_1 \\ & \leq \max_k |\tilde{Y}_{s, w_{\ell-1}} - Y_{s, w_{\ell-1}}|_k \|X^1\|_{1, [s, t]} + \max_k |\hat{Y}_{s, w_{\ell-1}} - Y_{s, w_{\ell-1}}|_k \|X^1\|_{1, [s, t]} \end{aligned}$$

が成立する. いま, $[s, t] \ni u \mapsto Y_{s,u}$ は一様連続であるから, $|D|, |D'| \rightarrow 0$ として右辺は 0 に収束する. 従って $|D_n| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) を満たす細分列 $D_n \in \delta[s, t]$ を取れば, $\left(\sum_{D_n} Y_{s,u_{i-1}} \otimes_{k,k+1} X_{u_{i-1},u_i}^1\right)_{n=1}^\infty$ は $V^{\otimes k+1}$ の Cauchy 列となり $V^{\otimes k+1}$ で収束する. 別の細分列 $\tilde{D}_m \in \delta[s, t]$, ($|\tilde{D}_m| \rightarrow 0$) を取っても

$$\left| \sum_{D_n} Y_{s,u_{i-1}} \otimes_{k,k+1} X_{u_{i-1},u_i}^1 - \sum_{\tilde{D}_m} Y_{s,v_{j-1}} \otimes_{k,k+1} X_{v_{j-1},v_j}^1 \right|_{k+1} \rightarrow 0, \quad (n, m \rightarrow \infty)$$

が成り立つから, 極限は細分列に依らず確定する. 従って補題の主張が得られる. ■

補題 1.4.12. (1.17) の積分を

$$Z_{s,t} := \int_s^t Y_{s,u} \otimes dx_u, \quad (\forall (s, t) \in \Delta_T)$$

とおけば, $Z : \Delta_T \rightarrow V^{\otimes k+1}$ は連続かつ有界変動である.

証明.

第一段 Z が有界変動であることを示す. いま, 任意に $(s, t) \in \Delta_T$ ($s < t$) ^{*8} を取る.

$$M := \sup_{(x,y) \in \Delta_T} |Y_{x,y}|_k$$

とおけば Y の連続性より $M < \infty$ となり, 任意の $\epsilon > 0$ に対し或る $D \in \delta[s, t]$ が存在して

$$|Z_{s,t}|_{k+1} \leq \epsilon + \left| \sum_D Y_{s,u_{i-1}} \otimes_{k,k+1} X_{u_{i-1},u_i}^1 \right|_{k+1} \leq \epsilon + \sum_D |Y_{s,u_{i-1}}|_k |X_{u_{i-1},u_i}^1|_1 \leq \epsilon + M \|X^1\|_{1,[s,t]}$$

が成立する. $\epsilon > 0$ と (s, t) の任意性より

$$|Z_{s,t}|_{k+1} \leq M \|X^1\|_{1,[s,t]}, \quad (\forall (s, t) \in \Delta_T)$$

が従い $\|Z\|_1 \leq M \|X^1\|_1$ (1-変動ノルム) を得る.

第二段 点 (s, s) ($\forall s \in [0, T]$) において Z が連続であること示す. 実際, 定理 1.2.8 より

$$\Delta_T \ni (s, t) \mapsto \|X^1\|_{1,[s,t]} \tag{1.18}$$

はコントロール関数であるから,

$$|Z_{t,u} - Z_{s,s}|_{k+1} = |Z_{t,u}|_{k+1} \leq M \|X^1\|_{1,[t,u]} \rightarrow 0 \quad ((t, u) \rightarrow (s, s))$$

が成立し Z の (s, s) における連続性を得る.

第三段 $s < t$ を満たす点 $(s, t) \in \Delta_T$ において Z が連続であること示す. いま, 任意に $\epsilon > 0$ を取れば,

(i) (1.18) がコントロール関数であるから, 或る $\eta_1 > 0$ が存在して $|s - a|, |t - b| < \eta_1$ ならば

$$\|X^1\|_{1,[s \wedge a, s \vee a]} < \epsilon, \quad \|X^1\|_{1,[t \wedge b, t \vee b]} < \epsilon$$

が満たされる.

^{*8} $s = t$ なら, $X_{s,t}^1 = 0$ より $Z_{s,t} = 0$ が成り立つ.

- (ii) 或る $\eta_2 > 0$ が存在して $|s-a|, |t-b| < \eta_2$ ならば $[s, t] \cap [a, b] \neq \emptyset$ が満たされる。
 (iii) Y は Δ_T 上一様連続であるから、或る $\eta_3 > 0$ が存在して $|s-a| < \eta_3$ なら

$$\sup \left\{ \|Y_{s,u} - Y_{a,u}\|_k ; \quad (s \vee a) \leq u \leq T \right\} < \epsilon$$

が満たされる。

- (iv) 補題 1.4.11 より或る $\eta_4 > 0$ が存在して $|D_1|, |D_2| < \eta_4$, ($D_1 \in \delta[s, t]$, $D_2 \in \delta[a, b]$) なら

$$\left\| Z_{s,t} - \sum_{D_1} Y_{s,u_{i-1}} \otimes_{k,k+1} X_{u_{i-1},u_i}^1 \right\|_{k+1} < \epsilon, \quad \left\| Z_{a,b} - \sum_{D_2} Y_{a,v_{j-1}} \otimes_{k,k+1} X_{v_{j-1},v_j}^1 \right\|_{k+1} < \epsilon$$

が満たされる。

ここで $\eta := \eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \eta_3$ として、 $|s-a|, |t-b| < \eta$, $|D_1|, |D_2| < \eta_4$ を満たす $(a, b), D_1, D_2$ を取り

$$\begin{aligned} \Omega_3 &:= (D_1 \cup D_2) \cap [s, t] \cap [a, b], \\ \Omega_1 &:= D_1 \cup \Omega_3, \quad \Omega_1^< := \Omega_1 \cap [0, a], \quad \Omega_1^> := \Omega_1 \cap [b, T], \\ \Omega_2 &:= D_2 \cup \Omega_3, \quad \Omega_2^< := \Omega_2 \cap [0, s], \quad \Omega_2^> := \Omega_2 \cap [t, T] \end{aligned}$$

とおけば、 $\Omega_1 = \Omega_1^< \cup \Omega_3 \cup \Omega_1^>$, $\Omega_2 = \Omega_2^< \cup \Omega_3 \cup \Omega_2^>$ と分割できる。このとき (i)(ii)(iii) が満たされるから

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{\Omega_1} Y_{s,u_{i-1}} \otimes_{k,k+1} X_{u_{i-1},u_i}^1 - \sum_{\Omega_2} Y_{a,v_{j-1}} \otimes_{k,k+1} X_{v_{j-1},v_j}^1 \right\|_{k+1} \\ & \leq \left\| \sum_{\Omega_3} Y_{s,u_{i-1}} \otimes_{k,k+1} X_{u_{i-1},u_i}^1 - \sum_{\Omega_3} Y_{a,u_{i-1}} \otimes_{k,k+1} X_{u_{i-1},u_i}^1 \right\|_{k+1} \\ & \quad + \left\| \sum_{\Omega_1^<} Y_{s,u_{i-1}} \otimes_{k,k+1} X_{u_{i-1},u_i}^1 \right\|_{k+1} + \left\| \sum_{\Omega_1^>} Y_{s,u_{i-1}} \otimes_{k,k+1} X_{u_{i-1},u_i}^1 \right\|_{k+1} \\ & \quad + \left\| \sum_{\Omega_2^<} Y_{a,u_{i-1}} \otimes_{k,k+1} X_{u_{i-1},u_i}^1 \right\|_{k+1} + \left\| \sum_{\Omega_2^>} Y_{a,v_{j-1}} \otimes_{k,k+1} X_{v_{j-1},v_j}^1 \right\|_{k+1} \\ & \leq \sum_{\Omega_3} \|Y_{s,u_{i-1}} - Y_{a,u_{i-1}}\|_k \|X_{u_{i-1},u_i}^1\|_1 + \sum_{\Omega_1^<} \|Y_{s,u_{i-1}}\|_k \|X_{u_{i-1},u_i}^1\|_1 + \sum_{\Omega_1^>} \|Y_{s,u_{i-1}}\|_k \|X_{u_{i-1},u_i}^1\|_1 \\ & \quad + \sum_{\Omega_2^<} \|Y_{a,u_{i-1}}\|_k \|X_{u_{i-1},u_i}^1\|_1 + \sum_{\Omega_2^>} \|Y_{a,v_{j-1}}\|_k \|X_{v_{j-1},v_j}^1\|_1 \\ & \leq \sup_{u \in [s \vee a, T]} \|Y_{s,u} - Y_{a,u}\|_k \|X^1\|_1 + M (\|X^1\|_{1,[s,s \vee a]} + \|X^1\|_{1,[a,s \vee a]} + \|X^1\|_{1,[t,t \vee b]} + \|X^1\|_{1,[b,t \vee b]}) \\ & < (\|X^1\|_1 + 4M) \epsilon \end{aligned}$$

が成立し、(iv) と併せれば

$$\|Z_{s,t} - Z_{a,b}\|_{k+1} < (\|X^1\|_1 + 4M + 2) \epsilon, \quad (|s-a|, |t-b| < \eta)$$

が従い Z の (s, t) における連続性が得られる。 ■

定義 1.4.13 (パスのシグネチャー). 有界変動な連続写像 $x : [0, T] \rightarrow V$ に対して $X_{s,t}^1 := x_t - x_s$, $(\forall (s, t) \in \Delta_T)$ とおけば, 補題 1.4.11 と補題 1.4.12 により逐次的に次を構成することができる:

$$V^{\otimes i+1} \ni X_{s,t}^{i+1} := \int_s^t X_{s,u}^i \otimes dx_u, \quad (\forall (s, t) \in \Delta_T, i = 1, 2, \dots)$$

ここで $S(x) : \Delta_T \ni (s, t) \mapsto (1, X_{s,t}^1, X_{s,t}^2, \dots) =: S(x)_{[s,t]}$ とおき, 特に $S(x)_{[0,T]}$ をパス x のシグネチャー (signature of path x) と呼ぶ.

定理 1.4.14 (逐次積分により定まる乗法的汎関数). 任意の $n \geq 1$ に対し, $S(x)_{[s,t]}$ の最初の $n+1$ 個^{*9}の元の族を $S_n(x)_{[s,t]} = (X_{s,t}^0, X_{s,t}^1, \dots, X_{s,t}^n)$, $(\forall (s, t) \in \Delta_T)$ と書けば, $S_n(x)$ は n 次乗法的である.

証明. 補題 1.4.12 より $S_n(x) \in C_0(\Delta_T, T^{(n)}(V))$ であるから, 以下では任意の $k \geq 0$ と $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$ に対して

$$X_{s,t}^k = \sum_{j=0}^k X_{s,u}^j \otimes_{j,k} X_{u,t}^{k-j}. \quad (1.19)$$

が成り立つことを数学的帰納法で示す. $k=0$ ならシグネチャーの定義より両辺 1 であるから (1.19) は満たされる.

第一段 $k=1$ の場合, $X_{s,t}^1 = x_t - x_s$, $(\forall (s, t) \in \Delta_T)$ より

$$\sum_{j=0}^1 X_{s,u}^j \otimes_{j,k} X_{u,t}^{k-j} = X_{s,u}^0 \otimes_{0,1} X_{u,t}^1 + X_{s,u}^1 \otimes_{1,1} X_{u,t}^0 = X_{u,t}^1 + X_{s,u}^1 = X_{s,t}^1$$

となる.

第二段 $k=m-1$ ($m \geq 2$) まで式 (1.19) が満たされていると仮定するとき, 任意の $D \in \delta[u, t]$ に対して

$$\sum_D \{X_{s,u_{i-1}}^{m-1} - X_{u,u_{i-1}}^{m-1}\} \otimes_{m-1,m} X_{u_{i-1},u_i}^1 = \sum_{j=1}^{m-1} X_{s,u}^j \otimes_{j,m} \left\{ \sum_D X_{u,u_{i-1}}^{m-1-j} \otimes_{m-1-j,m-j} X_{u_{i-1},u_i}^1 \right\} \quad (1.20)$$

となることを次段で示す. 実際これが示されれば, $D' \in \delta[s, u]$ に対し

$$\begin{aligned} \left| X_{s,t}^m - \sum_{j=0}^m X_{s,u}^j \otimes_{j,m} X_{u,t}^{m-j} \right|_m &\leq \left| X_{s,t}^m - \sum_{D'} X_{s,u_{i-1}}^{m-1} \otimes_{m-1,m} X_{u_{i-1},u_i}^1 - \sum_D X_{s,u_{i-1}}^{m-1} \otimes_{m-1,m} X_{u_{i-1},u_i}^1 \right|_m \\ &\quad + \left| \sum_{D'} X_{s,u_{i-1}}^{m-1} \otimes_{m-1,m} X_{u_{i-1},u_i}^1 - X_{s,u}^m \right|_m + \left| \sum_D X_{u,u_{i-1}}^{m-1} \otimes_{m-1,m} X_{u_{i-1},u_i}^1 - X_{u,t}^m \right|_m \\ &\quad + \left| \sum_D \{X_{s,u_{i-1}}^{m-1} - X_{u,u_{i-1}}^{m-1}\} \otimes_{m-1,m} X_{u_{i-1},u_i}^1 - \sum_{j=1}^{m-1} X_{s,u}^j \otimes_{j,m} X_{u,t}^{m-j} \right|_m \\ &= \left| X_{s,t}^m - \sum_{D'} X_{s,u_{i-1}}^{m-1} \otimes_{m-1,m} X_{u_{i-1},u_i}^1 - \sum_D X_{s,u_{i-1}}^{m-1} \otimes_{m-1,m} X_{u_{i-1},u_i}^1 \right|_m \\ &\quad + \left| \sum_{D'} X_{s,u_{i-1}}^{m-1} \otimes_{m-1,m} X_{u_{i-1},u_i}^1 - X_{s,u}^m \right|_m + \left| \sum_D X_{u,u_{i-1}}^{m-1} \otimes_{m-1,m} X_{u_{i-1},u_i}^1 - X_{u,t}^m \right|_m \\ &\quad + \left| \sum_{j=1}^{m-1} X_{s,u}^j \otimes_{j,m} \left\{ \sum_D X_{u,u_{i-1}}^{m-1-j} \otimes_{m-1-j,m-j} X_{u_{i-1},u_i}^1 \right\} - \sum_{j=1}^{m-1} X_{s,u}^j \otimes_{j,m} X_{u,t}^{m-j} \right|_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left| X_{s,t}^m - \sum_{D'} X_{s,u_{i-1}}^{m-1} \otimes_{m-1,m} X_{u_{i-1},u_i}^1 - \sum_D X_{s,u_{i-1}}^{m-1} \otimes_{m-1,m} X_{u_{i-1},u_i}^1 \right|_m \\
&\quad + \left| \sum_{D'} X_{s,u_{i-1}}^{m-1} \otimes_{m-1,m} X_{u_{i-1},u_i}^1 - X_{s,u}^m \right|_m + \left| \sum_D X_{u,u_{i-1}}^{m-1} \otimes_{m-1,m} X_{u_{i-1},u_i}^1 - X_{u,t}^m \right|_m \\
&\quad + \sum_{j=1}^{m-1} \left| X_{s,u}^j \right|_j \left| \left\{ \sum_D X_{u,u_{i-1}}^{m-1-j} \otimes_{m-1-j,m-j} X_{u_{i-1},u_i}^1 \right\} - X_{u,t}^{m-j} \right|_{m-j} \\
&\rightarrow 0 \quad (|D'|, |D| \rightarrow 0)
\end{aligned}$$

が従い、 $k = m$ の場合も (1.19) が成り立つ。

第三段 式 (1.20) を示す。仮定より $k = m - 1$ のとき (1.19) は満たされているから、補題 1.4.3 と併せれば

$$\begin{aligned}
\sum_D \{X_{s,u_{i-1}}^{m-1} - X_{u,u_{i-1}}^{m-1}\} \otimes_{m-1,m} X_{u_{i-1},u_i}^1 &= \sum_D \left\{ \sum_{j=0}^{m-1} X_{s,u}^j \otimes_{j,m-1} X_{u,u_{i-1}}^{m-1-j} - X_{u,u_{i-1}}^{m-1} \right\} \otimes_{m-1,m} X_{u_{i-1},u_i}^1 \\
&= \sum_D \left\{ \sum_{j=1}^{m-1} X_{s,u}^j \otimes_{j,m-1} X_{u,u_{i-1}}^{m-1-j} \right\} \otimes_{m-1,m} X_{u_{i-1},u_i}^1 \\
&= \sum_D \sum_{j=1}^{m-1} \{X_{s,u}^j \otimes_{j,m-1} X_{u,u_{i-1}}^{m-1-j}\} \otimes_{m-1,m} X_{u_{i-1},u_i}^1 \\
&= \sum_{j=1}^{m-1} \sum_D X_{s,u}^j \otimes_{j,m-j} \{X_{u,u_{i-1}}^{m-1-j} \otimes_{m-1-j,m-j} X_{u_{i-1},u_i}^1\} \\
&= \sum_{j=1}^{m-1} X_{s,u}^j \otimes_{j,m} \left\{ \sum_D X_{u,u_{i-1}}^{m-1-j} \otimes_{m-1-j,m-j} X_{u_{i-1},u_i}^1 \right\}
\end{aligned}$$

が成立する。 ■

定義 1.4.15 (p -ラフパス). $p \geq 1$ とし、 p を超えない最大の整数を $[p]$ で表す。有限 p -変動を持つ $[p]$ 次乗法的汎関数を p -ラフパス (p -rough path) と呼び、その全体を $\Omega_p(V)$ と書く：

$$\Omega_p(V) = \left\{ X \in C_0(\Delta_T, T^{([p])}(V)) ; \quad [p] \text{ 次乗法的, 有限 } p\text{-変動.} \right\}.$$

定理 1.4.16. $\Omega_p(V)$ は次で定める距離により完備距離空間となる：

$$d_p(X, Y) := \max_{1 \leq i \leq [p]} \|X^i - Y^i\|_{p/i}, \quad (X, Y \in \Omega_p(V)).$$

ただし $X_{s,t} = (X_{s,t}^0, X_{s,t}^1, \dots, X_{s,t}^{[p]})$, $((s, t) \in \Delta_T)$ に対して $X^i : \Delta_T \ni (s, t) \mapsto X_{s,t}^i \in V^{\otimes i}$, $(1 \leq i \leq [p])$ である。

$X \in \Omega_p(V)$ は $X^0 \equiv 1$ を満たすから、 $\max_{1 \leq i \leq [p]} \|\cdot\|_{p/i}$ は $\Omega_p(V)$ においてノルムとはならない。

証明. 完備性を示す。

第一段 極限を構成する。任意の $Y \in \Omega_p(V)$ に対して、定理 1.4.10 より Y は有限総 p -変動であり

$$Y^i \in B_{p/i,T}(V^{\otimes i}), \quad *10 \quad (\forall i = 1, \dots, [p])$$

となるから、任意の Cauchy 列 $\{X^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} \subset \Omega_p(V)$ に対して

$$\|X^{(k),i} - X^i\|_{p/i} \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty, \forall i = 1, \dots, [p]) \quad (1.21)$$

を満たす $X^i \in B_{p/i,T}(V^{\otimes i})$ が存在する (定理 1.2.7). ここで $X : \Delta_T \longrightarrow T^{([p])}(V)$ を

$$X_{s,t} := (1, X_{s,t}^1, \dots, X_{s,t}^n), \quad (\forall (s, t) \in \Delta_T)$$

により定めれば、 $X^i, i = 1, \dots, n$ の連続性より $X \in C_0(\Delta_T, T^{([p])}(V))$ が従う.

第二段 X が Chen's identity を満たすことを示す. これが示されれば、前段の結果と定理 1.4.10 より X は有限 p -変動となり $X \in \Omega_p(V)$ が従う. 任意の $0 \leq i \leq [p]$ と $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$ に対して次が成立すればよい:

$$X_{s,t}^i = \sum_{j=0}^i X_{s,u}^j \otimes_{j,i} X_{u,t}^{i-j}. \quad (1.22)$$

実際、(1.21) より

$$\|X_{s,t}^{(k),i} - X_{s,t}^i\|_i \leq \|X^{(k),i} - X^i\|_{p/i} \longrightarrow 0, \quad (k \longrightarrow \infty, \forall (s, t) \in \Delta_T, \forall i = 1, \dots, [p])$$

が成り立つから、任意の $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$ に対して

$$\begin{aligned} \left\| X_{s,t}^i - \sum_{j=0}^i X_{s,u}^j \otimes_{j,i} X_{u,t}^{i-j} \right\|_i &\leq \|X_{s,t}^i - X_{s,t}^{(k),i}\|_i + \left\| \sum_{j=0}^i X_{s,u}^j \otimes_{j,i} X_{u,t}^{i-j} - \sum_{j=0}^i X_{s,u}^{(k),j} \otimes_{j,i} X_{u,t}^{(k),i-j} \right\|_i \\ &\leq \|X_{s,t}^i - X_{s,t}^{(k),i}\|_i + \sum_{j=0}^i \|X_{s,u}^j - X_{s,u}^{(k),j}\|_j \|X_{u,t}^{i-j}\|_{i-j} \\ &\quad + \sum_{j=0}^i \|X_{s,u}^{(k),j}\|_j \|X_{u,t}^{i-j} - X_{u,t}^{(k),i-j}\|_{i-j} \\ &\longrightarrow 0, \quad (k \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

が従い (1.22) を得る. (1.21) より $d_p(X^{(k)}, X) \longrightarrow 0$ ($k \longrightarrow \infty$) が成り立ち定理の主張が得られる. ■

有界変動かつ連続な $x : [0, T] \longrightarrow V$ で定める $S(x)$ は、任意の $p \geq 1$ に対して $S_{[p]}(x) \in \Omega_p(V)$ を満たす. 実際、定理 1.4.14 より $S_{[p]}(x)$ は $[p]$ 次乗法的であり、また定理 1.4.12 と定理 1.2.6 より

$$\|X^i\|_{p/i} \leq \|X^i\|_1 < \infty, \quad (\forall i = 1, \dots, [p])$$

が満たされる. 乗法的汎関数に対して有限総 p -変動と有限 p -変動は同値になるから $S_{[p]}(x) \in \Omega_p(V)$ が従う.

定義 1.4.17 (スムーズラフパス). $p \geq 1$ とする. このとき有界変動かつ連続な $x : [0, T] \longrightarrow V$ で定める $S(x)$ は $S_{[p]}(x) \in \Omega_p(V)$ を満たす. この $S_{[p]}(x)$ をスムーズラフパス (smooth rough path) と呼び、スムーズラフパス全体の d_p による位相での閉包を $G\Omega_p(V)$ と書き、その元を p -ジオメトリックラフパス (p -geometric rough path) と呼ぶ.

*10 $B_{p/i,T}(V^{\otimes i})$ の定義は (p. 7) の (1.3).

1.5 2018/06/15 課題

$x \in C^1([0, T] \rightarrow \mathbb{R})$, $f \in C^\infty(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ 及び連続なパス $\bar{x}: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ に対し, Riemann-Stieltjes 積分を

$$I_{s,t}(\bar{x}) := \int_s^t f(\bar{x}_u) dx_u, \quad (\forall [s, t] \subset [0, T])$$

とおく. このとき, 任意の $n \geq 1$ に対して

$$\begin{aligned} I_{s,t}(\bar{x}) &= \int_s^t f(\bar{x}_u) - f(\bar{x}_s) + f(\bar{x}_s) dx_u \\ &= f(\bar{x}_s)X_{s,t}^1 + \int_s^t \int_0^1 f^{(1)}(\bar{x}_s + \theta_1(\bar{x}_u - \bar{x}_s))(\bar{x}_u - \bar{x}_s) d\theta_1 dx_u \\ &= f(\bar{x}_s)X_{s,t}^1 + f^{(1)}(\bar{x}_s)X_{s,t}^2 + \int_s^t \int_0^1 \{f^{(1)}(\bar{x}_s + \theta_1(\bar{x}_u - \bar{x}_s)) - f^{(1)}(\bar{x}_s)\}(\bar{x}_u - \bar{x}_s) d\theta_1 dx_u \\ &= f(\bar{x}_s)X_{s,t}^1 + f^{(1)}(\bar{x}_s)X_{s,t}^2 + \int_s^t \int_0^1 \int_0^{\theta_1} f^{(2)}(\bar{x}_s + \theta_2(\bar{x}_u - \bar{x}_s))(\bar{x}_u - \bar{x}_s)^2 d\theta_2 d\theta_1 dx_u \\ &= f(\bar{x}_s)X_{s,t}^1 + f^{(1)}(\bar{x}_s)X_{s,t}^2 + \frac{1}{2}f^{(2)}(\bar{x}_s)X_{s,t}^3 \\ &\quad + \int_s^t \int_0^1 \int_0^{\theta_1} \{f^{(2)}(\bar{x}_s + \theta_2(\bar{x}_u - \bar{x}_s)) - f^{(2)}(\bar{x}_s)\}(\bar{x}_u - \bar{x}_s)^2 d\theta_2 d\theta_1 dx_u \\ &= \dots \\ &= f(\bar{x}_s)X_{s,t}^1 + f^{(1)}(\bar{x}_s)X_{s,t}^2 + \frac{1}{2}f^{(2)}(\bar{x}_s)X_{s,t}^3 + \dots + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(\bar{x}_s)X_{s,t}^n \\ &\quad + \int_s^t \int_0^1 \int_0^{\theta_1} \dots \int_0^{\theta_{n-1}} f^{(n)}(\bar{x}_s + \theta_n(\bar{x}_u - \bar{x}_s))(\bar{x}_u - \bar{x}_s)^n d\theta_n \dots d\theta_2 d\theta_1 dx_u \end{aligned}$$

が成立する. ここで

$$\begin{aligned} J_{s,t}^n(x) &:= f(\bar{x}_s)X_{s,t}^1 + f^{(1)}(\bar{x}_s)X_{s,t}^2 + \frac{1}{2}f^{(2)}(\bar{x}_s)X_{s,t}^3 + \dots + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(\bar{x}_s)X_{s,t}^n \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{(j-1)!}f^{(j-1)}(\bar{x}_s)X_{s,t}^j \end{aligned}$$

とおく.

定理 1.5.1. $[s, t] \subset [0, T]$, $x \in C^1([0, T] \rightarrow \mathbb{R})$, $f \in C^\infty(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$, $n \geq 1$ と連続なパス $\bar{x}: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ に対し

$$J_{s,t}^n(\bar{x}, D) := \sum_D J_{t_{i-1}, t_i}^n(\bar{x}), \quad (D \in \delta[s, t])$$

とおけば次が成立する:

$$I_{s,t}(\bar{x}) = \lim_{|D| \rightarrow 0} J_{s,t}^n(\bar{x}, D). \quad (1.23)$$

証明. 任意の $D \in \delta[s, t]$ に対して $I_{s,t}(\bar{x}) = \sum_D I_{t_{i-1}, t_i}(\bar{x})$ であるから,

$$\sum_D \int_{t_{i-1}}^{t_i} \int_0^1 \int_0^{\theta_1} \dots \int_0^{\theta_{n-1}} f^{(n)}(\bar{x}_{t_{i-1}} + \theta_n(\bar{x}_u - \bar{x}_{t_{i-1}}))(\bar{x}_u - \bar{x}_{t_{i-1}})^n d\theta_n \dots d\theta_2 d\theta_1 dx_u \rightarrow 0, \quad (|D| \rightarrow 0) \quad (1.24)$$

となることを示せば (1.23) が従う。実際これが示されれば

$$\begin{aligned} |I_{s,t}(\bar{x}) - J_{s,t}^n(\bar{x}, D)| &\leq \left| I_{s,t}(\bar{x}) - \sum_D I_{t_{i-1}, t_i}(\bar{x}) \right| + \left| \sum_D I_{t_{i-1}, t_i}(\bar{x}) - \sum_D J_{t_{i-1}, t_i}^n(\bar{x}) \right| \\ &= \left| \sum_D \int_{t_{i-1}}^{t_i} \int_0^1 \int_0^{\theta_1} \cdots \int_0^{\theta_{n-1}} f^{(n)}(\bar{x}_{t_{i-1}} + \theta_n(\bar{x}_u - \bar{x}_{t_{i-1}}))(\bar{x}_u - \bar{x}_{t_{i-1}})^n d\theta_n \cdots d\theta_2 d\theta_1 dx_u \right| \\ &\longrightarrow 0 \quad (|D| \longrightarrow 0) \end{aligned}$$

がでる。(1.24) を示す。 \bar{x} の連続性より

$$\{ \bar{x}_{t_{i-1}} + \theta_n(\bar{x}_u - \bar{x}_{t_{i-1}}) ; \quad u \in [t_{i-1}, t_i], \quad t_{i-1}, t_i \in D, \quad 0 \leq \theta_n \leq 1, \quad D \in \delta[s, t] \} \subset K$$

を満たすコンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}$ が存在するから、

$$M := \sup_{x \in K} |f^{(n)}(x)|$$

とおけば

$$\begin{aligned} &\left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \int_0^1 \int_0^{\theta_1} \cdots \int_0^{\theta_{n-1}} f^{(n)}(\bar{x}_{t_{i-1}} + \theta_n(\bar{x}_u - \bar{x}_{t_{i-1}}))(\bar{x}_u - \bar{x}_{t_{i-1}})^n d\theta_n \cdots d\theta_2 d\theta_1 dx_u \right| \\ &\leq \frac{1}{n!} M \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\bar{x}_u - \bar{x}_{t_{i-1}}|^n |\dot{x}_u| du \\ &\leq \frac{1}{n!} M \|x\|_{C^1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\bar{x}_u - \bar{x}_{t_{i-1}}|^n du \\ &\leq \frac{1}{n!} M \|x\|_{C^1} \sup_{\substack{t_{i-1} \leq u \leq t_i \\ t_{i-1}, t_i \in D}} |\bar{x}_u - \bar{x}_{t_{i-1}}| \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\bar{x}_u - \bar{x}_{t_{i-1}}|^{n-1} du \end{aligned}$$

が成立する。補題 1.4.12 より

$$v := \sup_{D \in \delta[s, t]} \sum_D \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\bar{x}_u - \bar{x}_{t_{i-1}}|^{n-1} du < \infty$$

が満たされ、 \bar{x} の一様連続性より

$$\begin{aligned} &\left| \sum_D \int_{t_{i-1}}^{t_i} \int_0^1 \int_0^{\theta_1} \cdots \int_0^{\theta_{n-1}} f^{(n)}(\bar{x}_{t_{i-1}} + \theta_n(\bar{x}_u - \bar{x}_{t_{i-1}}))(\bar{x}_u - \bar{x}_{t_{i-1}})^n d\theta_n \cdots d\theta_2 d\theta_1 dx_u \right| \\ &\leq \frac{1}{n!} M \|x\|_{C^1} v \sup_{\substack{t_{i-1} \leq u \leq t_i \\ t_{i-1}, t_i \in D}} |\bar{x}_u - \bar{x}_{t_{i-1}}| \longrightarrow 0 \quad (|D| \longrightarrow 0) \end{aligned}$$

となる。

付録 A

テンソル積・クロスノルム

以下、零元のみ線型空間は考えない。すなわち以下で扱う全ての線型空間には基底が存在する。 E, E_i, F を体 \mathbb{K} 上の線形空間とすると、 $\text{Hom}(E, F)$ で E から F への \mathbb{K} -線型写像の全体を表す。また $\text{Hom}^{(n)}(E_1 \times \cdots \times E_n, F)$ で $E_1 \times \cdots \times E_n$ から F への \mathbb{K} - n 重線型写像の全体を表す。 X をノルム空間と考えるときは、特に指定しなければノルムを $\|\cdot\|_X$ と書いてノルム位相を導入する。 X に何らかのノルム $\|\cdot\|$ が定まっているとき、 $(X, \|\cdot\|)$ の位相的対偶空間を $(X, \|\cdot\|)^*$ と書く。ノルム空間の族 $(X_i)_{i=1}^n$ の直和 $\bigoplus_{i=1}^n X_i$ には直積ノルム $\|\cdot\|_{X_1} + \cdots + \|\cdot\|_{X_n}$ により位相を導入する。

A.1 ノルム空間上の有界多重線型写像

[参考:[9]] \mathbb{K} を \mathbb{R} または \mathbb{C} と考える。また $n \geq 1$ とする。

定義 A.1.1 (有界な多重線型写像). $(X_i)_{i=1}^n$ 及び Y を全て \mathbb{K} 上のノルム空間とすると、有界な n 重線型写像の全体を $L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Y)$ で表す。つまり任意の $f \in L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Y)$ に対して次を満たす定数 $C \geq 0$ が存在する:

$$\|f(x_1, \dots, x_n)\|_Y \leq C \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}, \quad (\forall x_i \in X_i, i = 1, \dots, n). \quad (\text{A.1})$$

定理 A.1.2 (有界 \Leftrightarrow 連続). $(X_i)_{i=1}^n$ 及び Y を全て \mathbb{K} 上のノルム空間とする。任意の $f \in \text{Hom}^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Y)$ に対して、 f が連続であることと f が有界であることは一致する。

証明.

第一段 $f \in \text{Hom}^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Y)$ が連続であるとする。このとき f は $0 \in \bigoplus_{i=1}^n X_i$ で連続であるから、或る $\delta_1, \dots, \delta_n > 0$ が存在して $\|x_1\|_{X_1} \leq \delta_1, \dots, \|x_n\|_{X_n} \leq \delta_n$ が満たされている限り

$$\|f(x_1, \dots, x_n)\|_Y \leq 1$$

が成立する。よって任意の $x_i \in X_i$ ($x_i \neq 0, i = 1, \dots, n$) に対して

$$\frac{\delta_1 \cdots \delta_n}{\|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}} \|f(x_1, \dots, x_n)\|_Y = \left\| f\left(\delta_1 \frac{x_1}{\|x_1\|_{X_1}}, \dots, \delta_n \frac{x_n}{\|x_n\|_{X_n}}\right) \right\|_Y \leq 1$$

が従い

$$\|f(x_1, \dots, x_n)\|_Y \leq \frac{1}{\delta_1 \cdots \delta_n} \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}$$

を得る。或る i で $x_i = 0$ であっても上の不等式は満たされるから f は有界である。

第二段 f が有界であるとする。このとき或る定数 $C \geq 0$ が存在して (A.1) を満たし、

$$\begin{aligned} \|f(x_1, \dots, x_n) - f(y_1, \dots, y_n)\|_Y &\leq \|f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(y_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\quad + f(y_1, x_2, \dots, x_n) - f(y_1, y_2, \dots, x_n) \\ &\quad \dots \\ &\quad + f(y_1, \dots, y_{n-1}, x_n) - f(y_1, \dots, y_n)\|_Y \\ &\leq C \|x_1 - y_1\|_{X_1} \|x_2\|_{X_2} \cdots \|x_n\|_{X_n} \\ &\quad + C \|y_1\|_{X_1} \|x_2 - y_2\|_{X_2} \cdots \|x_n\|_{X_n} \\ &\quad + C \|y_1\|_{X_1} \cdots \|y_{n-1}\|_{X_{n-1}} \|x_n - y_n\|_{X_n} \\ &\longrightarrow 0 \quad (\|(x_1, \dots, x_n) - (y_1, \dots, y_n)\|_{\bigoplus_{i=1}^n X_i} \longrightarrow 0) \end{aligned}$$

が成り立つから f の連続性が出る。 ■

$(X_i)_{i=1}^n$ 及び Y を全て \mathbb{K} 上のノルム空間とする。このとき $f \in L^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Y\right)$ の作用素ノルムは次で定まる：

$$\|f\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Y)} := \inf \left\{ C \geq 0 ; \quad \|f(x_1, \dots, x_n)\|_Y \leq C \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}, (\forall x_i \in X_i, i = 1, \dots, n) \right\}.$$

下限の定義より次が成立する：

$$\|f(x_1, \dots, x_n)\|_Y \leq \|f\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Y)} \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}, \quad (\forall x_i \in X_i, i = 1, \dots, n). \quad (\text{A.2})$$

実際、(A.2) が満たされない場合、或る $(u_1, \dots, u_n) \in \bigoplus_{i=1}^n X_i$ ($u_i \neq 0, i = 1, \dots, n$) が存在して

$$\frac{\|f(u_1, \dots, u_n)\|_Y}{\|u_1\|_{X_1} \cdots \|u_n\|_{X_n}} > \|f\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Y)}$$

が成立するが、実数の連続性より

$$\frac{\|f(u_1, \dots, u_n)\|_Y}{\|u_1\|_{X_1} \cdots \|u_n\|_{X_n}} > \delta > \|f\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Y)}$$

を満たす δ が存在し、

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Y)} &< \delta \\ &\leq \inf \left\{ C \geq 0 ; \quad \|f(x_1, \dots, x_n)\|_Y \leq C \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}, (\forall x_i \in X_i, i = 1, \dots, n) \right\} \\ &= \|f\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Y)} \end{aligned}$$

が従い矛盾が生じる。

定理 A.1.3 (多重線型写像の作用素ノルム). $(X_i)_{i=1}^n$ 及び Y を全て \mathbb{K} 上のノルム空間とする。このとき、任意の $f \in L^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Y\right)$ に対して次が成立する：

$$\|f\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Y)} = \sup_{\substack{\|x_i\|_{X_i}=1 \\ i=1, \dots, n}} \|f(x_1, \dots, x_n)\|_Y = \sup_{\substack{\|x_i\|_{X_i} \leq 1 \\ i=1, \dots, n}} \|f(x_1, \dots, x_n)\|_Y = \sup_{\substack{\|x_i\|_{X_i} \neq 0 \\ i=1, \dots, n}} \frac{\|f(x_1, \dots, x_n)\|_Y}{\|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}}.$$

証明. (第四式) \leq (第一式) \leq (第二式) \leq (第三式) \leq (第四式) を示す。

第一段 式 (A.2) より次を得る:

$$\sup_{\substack{\|x_i\|_{X_i} \neq 0 \\ i=1, \dots, n}} \frac{\|f(x_1, \dots, x_n)\|_Y}{\|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}} \leq \|f\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Y)}.$$

第二段 任意の $0 \neq x_i \in X_i$ ($i = 1, \dots, n$) に対して

$$\begin{aligned} \|f(x_1, \dots, x_n)\|_Y &= \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n} \left\| f\left(\frac{x_1}{\|x_1\|_{X_1}}, \dots, \frac{x_n}{\|x_n\|_{X_n}}\right) \right\|_Y \\ &\leq \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n} \sup_{\substack{\|x_i\|_{X_i}=1 \\ i=1, \dots, n}} \|f(x_1, \dots, x_n)\|_Y \end{aligned}$$

が成立するから

$$\|f\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Y)} \leq \sup_{\substack{\|x_i\|_{X_i}=1 \\ i=1, \dots, n}} \|f(x_1, \dots, x_n)\|_Y$$

が従う.

第三段 上限を取る範囲の大小より

$$\sup_{\substack{\|x_i\|_{X_i}=1 \\ i=1, \dots, n}} \|f(x_1, \dots, x_n)\|_Y \leq \sup_{\substack{\|x_i\|_{X_i} \leq 1 \\ i=1, \dots, n}} \|f(x_1, \dots, x_n)\|_Y$$

が出る.

第四段 $0 < \|x_i\|_{X_i} \leq 1$ ($i = 1, \dots, n$) ならば

$$\begin{aligned} \|f(x_1, \dots, x_n)\|_Y &= \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n} \frac{\|f(x_1, \dots, x_n)\|_Y}{\|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}} \\ &\leq \frac{\|f(x_1, \dots, x_n)\|_Y}{\|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}} \\ &\leq \sup_{\substack{\|x_i\|_{X_i} \neq 0 \\ i=1, \dots, n}} \frac{\|f(x_1, \dots, x_n)\|_Y}{\|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}} \end{aligned}$$

が成立するから

$$\sup_{\substack{\|x_i\|_{X_i} \leq 1 \\ i=1, \dots, n}} \|f(x_1, \dots, x_n)\|_Y \leq \sup_{\substack{\|x_i\|_{X_i} \neq 0 \\ i=1, \dots, n}} \frac{\|f(x_1, \dots, x_n)\|_Y}{\|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}}$$

が得られる. ■

定理 A.1.4 (有界な多重線型写像の一意拡張). $n \geq 1$ とする. $(X_i)_{i=1}^n$ をノルム空間, Z を Banach 空間, Y_i を X_i の稠密な部分空間とする ($i = 1, \dots, n$). このとき, 有界 n 重線型写像 $b: \bigoplus_{i=1}^n Y_i \rightarrow Z$ は $(X_i)_{i=1}^n$ 上の Z 値 n 重線型写像 \tilde{b} に一意に拡張され, b と \tilde{b} の作用素ノルムは一致する.

証明. $\bigoplus_{i=1}^n Y_i$ は $\bigoplus_{i=1}^n X_i$ で稠密であるから, 任意の $x = (x_1, \dots, x_n) \in \bigoplus_{i=1}^n X_i$ に対して

$$\|x - x^k\|_{\bigoplus_{i=1}^n X_i} = \sum_{i=1}^n \|x_i - x_i^k\|_{X_i} \rightarrow 0, \quad (k \rightarrow \infty)$$

を満たす点列 $x^k = (x_1^k, \dots, x_n^k) \in \bigoplus_{i=1}^n Y_i$ ($k = 1, 2, \dots$) が存在する.

$$M_i := \sup_{k \geq 1} \|x_i^k\|_{X_i}, \quad (i = 1, \dots, n)$$

とおけば, $M_i < \infty$ ($i = 1, \dots, n$) より

$$\begin{aligned} \|b(x^k) - b(x^\ell)\|_Z &= \|b(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k) - b(x_1^\ell, x_2^\ell, \dots, x_n^\ell) \\ &\quad + b(x_1^\ell, x_2^\ell, \dots, x_n^\ell) - b(x_1^\ell, x_2^\ell, \dots, x_n^\ell) \\ &\quad \dots \\ &\quad + b(x_1^\ell, \dots, x_{n-1}^\ell, x_n^k) - b(x_1^\ell, \dots, x_n^\ell)\|_Z \\ &\leq \|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n Y_i, Z)} \|x_1^k - x_1^\ell\|_{X_1} M_2 \cdots M_n \\ &\quad + \|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n Y_i, Z)} M_1 \|x_2^k - x_2^\ell\|_{X_2} M_3 \cdots M_n \\ &\quad \dots \\ &\quad + \|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n Y_i, Z)} M_1 \cdots M_{n-1} \|x_n^k - x_n^\ell\|_{X_n} \\ &\longrightarrow 0, \quad (k, \ell \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

が成り立ち, Z の完備性より $\lim_{k \rightarrow \infty} b(x^k)$ が存在する. 別の収束列 $\bigoplus_{i=1}^n Y_i \ni y^m \longrightarrow x$ を取れば

$$\|x_i^k - y_i^m\|_{X_i} \leq \|x_i^k - x_i\|_{X_i} + \|x_i - y_i^m\|_{X_i} \longrightarrow 0, \quad (k, m \longrightarrow \infty, i = 1, \dots, n)$$

より $\|b(x^k) - b(y^m)\|_Z \longrightarrow 0$ ($k, m \longrightarrow \infty$) が従い

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b(x^k) = \lim_{m \rightarrow \infty} b(y^m)$$

が得られ, これにより写像 $\tilde{b}: x \mapsto \lim_{k \rightarrow \infty} b(x^k)$ が定まる. この \tilde{b} は b の拡張であり, 有界かつ n 重線型性を持つ. 先ず n 重線型性を示す. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ と $y = (y_1, x_2, \dots, x_n)$ に対し

$$\|x - x^k\|_{\bigoplus_{i=1}^n X_i} \longrightarrow 0, \quad \|y - y^k\|_{\bigoplus_{i=1}^n X_i} \longrightarrow 0$$

を満たす点列 $(x^k)_{k=1}^\infty, (y^k)_{m=1}^\infty \subset \bigoplus_{i=1}^n Y_i$ を取れば

$$\begin{aligned} &\|\tilde{b}(\alpha x_1 + \beta y_1, x_2, \dots, x_n) - \alpha \tilde{b}(x_1, \dots, x_n) - \beta \tilde{b}(y_1, \dots, x_n)\|_Z \\ &\leq \|\tilde{b}(\alpha x_1 + \beta y_1, x_2, \dots, x_n) - b(\alpha x_1^k + \beta y_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)\|_Z \\ &\quad + |\alpha| \|\tilde{b}(x_1, \dots, x_n) - b(x_1^k, \dots, x_n^k)\|_Z \\ &\quad + |\beta| \|\tilde{b}(y_1, \dots, x_n) - b(y_1^k, \dots, x_n^k)\|_Z \\ &\longrightarrow 0, \quad (k \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

が成り立ち, \tilde{b} の第一成分に関する線型性を得る. 他の成分も同じである. また任意の $x \in \bigoplus_{i=1}^\infty X_i$ に対して収束列 $(x^k)_{k=1}^\infty \subset \bigoplus_{i=1}^n Y_i$ を取れば, 任意の $\epsilon > 0$ に対し或る k が存在して

$$\|\tilde{b}(x)\|_Z \leq \|b(x^k)\|_Z + \epsilon$$

かつ

$$\|x_i^k\|_{X_i} \leq \|x_i\|_{X_i} + \epsilon, \quad (i = 1, \dots, n)$$

が満たされ

$$\|\tilde{b}(x)\|_Z \leq \|b(x^k)\|_Z + \epsilon \leq \|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n Y_i, Z)} \prod_{i=1}^n (\|x_i\|_{X_i} + \epsilon) + \epsilon$$

が従う. x 及び ϵ の任意性より $\|\tilde{b}\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Z)} \leq \|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n Y_i, Z)}$ が成り立ち, \tilde{b} は b の拡張だから

$$\|\tilde{b}\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Z)} = \|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n Y_i, Z)}$$

が出る. 拡張の一意性は $\bigoplus_{i=1}^n Y_i$ の稠密性と \tilde{b} の連続性による. ■

A.2 ノルム空間の完備拡大

[参考:[10](pp. 268-273)] \mathbb{K} を \mathbb{R} 或は \mathbb{C} と考える.

定理 A.2.1 (ノルム空間の完備化). $(X, \|\cdot\|_X)$ を \mathbb{K} 上のノルム空間とすると, 次の (e1) と (e2) を満たす \mathbb{K} -Banach 空間 $(Y, \|\cdot\|_Y)$ と線型等長写像 $J: X \rightarrow Y$ ($\|x\|_X = \|Jx\|_Y$) が存在する:

(e1) JX は Y において稠密である.

(e2) 別の \mathbb{K} -Banach 空間 $(Z, \|\cdot\|_Z)$ と線型等長 $K: X \rightarrow Z$ が存在して (e1) を満たすとき, $F \circ J = K$ を満たす等長同型 $F: Y \rightarrow Z$ が存在する.

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{F} & Z \\ & \searrow J & \nearrow K \\ & X & \end{array}$$

(e3) X が内積空間なら Y は Hilbert 空間であり, それぞれ内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle_X, \langle \cdot, \cdot \rangle_Y$ と書けば次が成り立つ:

$$\langle Jx, Jx' \rangle_Y = \langle x, x' \rangle_X, \quad (\forall x, x' \in X).$$

証明.

第一段 X の Cauchy 列の全体を $Cauchy(X)$ で表す. 任意の $(x_n), (x'_n) \in Cauchy(X)$ に対し

$$|\|x_n - x'_n\|_X - \|x_m - x'_m\|_X| \leq \|x_n - x_m\|_X + \|x'_n - x'_m\|_X$$

が成り立つから, $(\|x_n - x'_n\|_X)_{n=1}^\infty$ は \mathbb{R} の Cauchy 列をなして収束し,

$$(x_n) R (x'_n) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x'_n\|_X = 0$$

により $Cauchy(X)$ に同値関係 R が定まる. $Cauchy(X)$ は, $0 \in X$ の列を零元と定め,

$$(x_n) + (x'_n) := (x_n + x'_n), \quad \alpha(x_n) := (\alpha x_n)$$

を線型演算とすれば線型空間となり,

$$N := \{ (x_n) \in Cauchy(X) ; (x_n) R (0) \}$$

は部分空間となるから, 次の商

$$Y := Cauchy(X)/N$$

は適当な線型演算により線型空間となる. (x_n) の R に関する同値類を $[(x_n)]$ と表すとき

$$\|[(x_n)]\|_Y := \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_X \quad (\text{A.3})$$

は well-defined であり, $\|\cdot\|_Y$ は Y においてノルムとなる.

第二段 任意の $x \in X$ に対し $x_n = x$ ($\forall n \geq 1$) を満たす (x_n) を ζ_x と書けば,

$$J : X \ni x \mapsto [\zeta_x] \in Y \quad (\text{A.4})$$

により等長線型が定まる. 実際, 任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $u, v \in X$ に対して

$$\|J(\alpha u + \beta v) - \alpha Ju - \beta Jv\|_Y = \|[\zeta_{\alpha u + \beta v}] - \alpha[\zeta_u] - \beta[\zeta_v]\|_Y = \|[\zeta_{\alpha u + \beta v} - \alpha\zeta_u - \beta\zeta_v]\|_Y = 0$$

が成り立つから J は線型であり,

$$\|Jx\|_Y = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_X = \|x\|_X, \quad (\forall x \in X)$$

より等長性も得られる.

第三段 (e1) を示す. いま, 任意に $y = [(x_n)] \in Y$ と $\epsilon > 0$ を取る. このとき或る $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\|x_n - x_m\|_X < \frac{\epsilon}{2}, \quad (\forall n, m > N)$$

を満たす. $m > N$ を満たす m を任意に一つ選んで

$$\epsilon_m := \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\|_X$$

とおけば, また或る $N' \in \mathbb{N}$ ($N' > N$) が存在して

$$|\epsilon_m - \|x_n - x_m\|| < \frac{\epsilon}{2}, \quad (\forall n > N')$$

が成立し

$$\epsilon_m < \frac{\epsilon}{2} + \|x_n - x_m\|_X < \epsilon, \quad (\forall m > N)$$

が従う. すなわち, JX の点列 $[\zeta_{x_1}], [\zeta_{x_2}], \dots$ は y にノルム収束する:

$$\|y - [\zeta_{x_m}]\|_Y = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\|_X \longrightarrow 0 \quad (m \longrightarrow \infty).$$

第四段 $(Y, \|\cdot\|_Y)$ の完備性を示す. (y_n) を Y の Cauchy 列とすれば,

$$\|y_n - Jx_n\|_Y < \frac{1}{n}, \quad (\forall n = 1, 2, \dots)$$

を満たす $\{x_1, x_2, \dots\} \subset X$ が存在する. このとき

$$\|x_n - x_m\|_X = \|Jx_n - Jx_m\|_Y < \frac{1}{n} + \|y_n - y_m\|_Y + \frac{1}{m} \longrightarrow 0 \quad (n, m \longrightarrow \infty)$$

より $(x_n) \in \text{Cauchy}(X)$ が従い, $y := [(x_n)]$ とおけば

$$\|y - y_m\|_Y \leq \|y - Jx_m\|_Y + \|Jx_m - y_m\|_Y < \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\|_X + \frac{1}{m} \longrightarrow 0 \quad (m \longrightarrow \infty)$$

が成り立ち Y の完備性が出る.

第五段 $(Y, \|\cdot\|_Y)$ とは別の Banach 空間 $(Z, \|\cdot\|_Z)$ と線型等長 $K : X \rightarrow Z$ が存在して (e1) を満たすとき,

$$\tilde{F} : JX \ni y \mapsto K \circ J^{-1}(y), \quad \tilde{G} : KX \ni z \mapsto J \circ K^{-1}(z)$$

により定める等長線型 \tilde{F}, \tilde{G} は

$$\begin{aligned} \tilde{F} \circ \tilde{G}(z) &= z, \quad (\forall z \in KX), \\ \tilde{G} \circ \tilde{F}(y) &= y, \quad (\forall y \in JX) \end{aligned}$$

を満たす. 定理 A.1.4 より \tilde{F}, \tilde{G} は Y, Z 上の線型写像 F, G に一意的にノルム保存拡張され, このとき, 任意の $y \in Y$ 及び $z \in Z$ それぞれに対しノルム収束する JX の点列 (y_n) , KX の点列 (z_n) を取れば,

$$\begin{aligned} \|F \circ G(z) - z\|_Z &\leq \|F \circ G(z) - \tilde{F} \circ \tilde{G}(z_n)\|_Z + \|z_n - z\|_Z \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \\ \|G \circ F(y) - y\|_Y &\leq \|G \circ F(y) - \tilde{G} \circ \tilde{F}(y_n)\|_Y + \|y_n - y\|_Y \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

が成り立ち $F = G^{-1}$ が従う. よって $F : Y \rightarrow Z$ は等長同型であり

$$F \circ J = \tilde{F} \circ J = (K \circ J^{-1}) \circ J = K \circ (J^{-1} \circ J) = K$$

を満たす.

第六段 X が内積空間の場合, X の内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ と書く. いま, 任意の $(x_n), (x'_n) \in \text{Cauchy}(X)$ に対して

$$|\langle x_n, x'_n \rangle_X - \langle x_m, x'_m \rangle_X| \leq \|x_n - x_m\|_X \|x'_n\|_X + \|x_m\|_X \|x'_n - x'_m\|_X \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty)$$

が成り立つから $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, x'_n \rangle_X$ は \mathbb{K} で収束する. ここで

$$b(y, y') := \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, x'_n \rangle_X, \quad (\forall y = [(x_n)], y' = [(x'_n)] \in Y)$$

と定めれば, b は well-defined であり $Y \times Y$ 上の半双線型となる. 実際, $[(x_n)] = [(\tilde{x}_n)], [(x'_n)] = [(\tilde{x}'_n)]$ に対して

$$|\langle x_n, x'_n \rangle_X - \langle \tilde{x}_n, \tilde{x}'_n \rangle_X| \leq \|x_n - \tilde{x}_n\|_X \|x'_n\|_X + \|\tilde{x}_n\|_X \|x'_n - \tilde{x}'_n\|_X \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つから b は well-defined であり, また任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ と $y, y', y_1 = [(x_n^1)], y_2 = [(x_n^2)] \in Y$ に対し

$$\begin{aligned} |b(\alpha y_1 + \beta y_2, y') - \alpha b(y_1, y') - \beta b(y_2, y')| &\leq |b(\alpha y_1 + \beta y_2, y') - \langle \alpha x_n^1 + \beta x_n^2, x'_n \rangle_X| \\ &\quad + |\alpha b(y_1, y') - \alpha \langle x_n^1, x'_n \rangle_X| + |\beta b(y_2, y') - \beta \langle x_n^2, x'_n \rangle_X| \\ &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

かつ $b(y, y') = \overline{b(y', y)}$ (共役対称性) が満たされ b の半双線型性が出る. また

$$b(y, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_X^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = [(x_n)] = 0, \quad (\forall y = [(x_n)] \in Y)$$

も得られる. 従って

$$\langle y, y' \rangle_Y := b(y, y'), \quad (\forall y, y' \in Y)$$

とおけば $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y$ は Y の内積となる. (A.3) で定めるノルムと $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y$ により導入するノルムは一致するから, 前段の結果により Y は $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y$ を内積とする Hilbert 空間である. また (A.4) で定める等長線型 J について

$$\langle Jx, Jx' \rangle_Y = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x, x' \rangle_X = \langle x, x' \rangle_X, \quad (\forall x, x' \in X)$$

が成立する. ■

A.3 テンソル積

[参考:[4], [8]] $n \geq 2$ として, 体 \mathbb{K} 上の線形空間の族 $(E_i)_{i=1}^n$ に対してテンソル積を定義する.

$$\Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right) = \left\{ b : \bigoplus_{i=1}^n E_i \longrightarrow \mathbb{K} ; \quad \text{有限個の } e \in \bigoplus_{i=1}^n E_i \text{ を除いて } b(e) = 0. \right\}$$

により \mathbb{K} -線形空間 $\Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right)$ を定める. また $e = (e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i$ に対する定義関数を

$$\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_n}(x) = \begin{cases} 1, & x = e, \\ 0, & x \neq e \end{cases}$$

で表す. $\Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right)$ の線型部分空間を

$$\begin{aligned} \Lambda_0\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right) \\ := \text{Span} \left[\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i + e'_i, \dots, e_n} - \mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n} - \mathbb{1}_{e_1, \dots, e'_i, \dots, e_n}, \\ \mathbb{1}_{e_1, \dots, \lambda e_i, \dots, e_n} - \lambda \mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n} \end{array} ; \quad e_i, e'_i \in E_i, \lambda \in \mathbb{K}, 1 \leq i \leq n \right\} \right] \end{aligned}$$

により定め, $b \in \Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right)$ の $\Lambda_0\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right)$ に関する同値類を $[b]$ と書く. そして

$$E_1 \otimes \cdots \otimes E_n = \bigotimes_{i=1}^n E_i := \Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right) / \Lambda_0\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right)$$

で定める商空間を $(E_i)_{i=1}^n$ のテンソル積と定義する. また $(e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i$ に対し

$$e_1 \otimes \cdots \otimes e_n := [\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_n}]$$

により定める $\otimes : \bigoplus_{i=1}^n E_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n E_i$ をテンソル積の標準写像と呼ぶ.

定理 A.3.1 (標準写像の多重線型性). $(E_i)_{i=1}^n$ を \mathbb{K} -線形空間の族とすると,

$$\otimes : \bigoplus_{i=1}^n E_i \ni (e_1, \dots, e_n) \longmapsto e_1 \otimes \cdots \otimes e_n \in \bigotimes_{i=1}^n E_i$$

は n 重線型写像である. また次が成り立つ:

$$\bigotimes_{i=1}^n E_i = \text{Span} \left[\left\{ e_1 \otimes \cdots \otimes e_n ; \quad (e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i \right\} \right]. \quad (\text{A.5})$$

証明. 任意の $1 \leq i \leq n$, $e_1 \in E_1, \dots, e_n \in E_n$, $e_i, e'_i \in E_i$, $\lambda \in \mathbb{K}$ に対して

$$\begin{aligned}
 e_1 \otimes \cdots \otimes (e_i + e'_i) \otimes \cdots \otimes e_n &= [\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i + e'_i, \dots, e_n}] \\
 &= [\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n} + \mathbb{1}_{e_1, \dots, e'_i, \dots, e_n}] \\
 &= [\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n}] + [\mathbb{1}_{e_1, \dots, e'_i, \dots, e_n}] \\
 &= e_1 \otimes \cdots \otimes e_i \otimes \cdots \otimes e_n + e_1 \otimes \cdots \otimes e'_i \otimes \cdots \otimes e_n, \\
 e_1 \otimes \cdots \otimes (\lambda e_i) \otimes \cdots \otimes e_n &= [\mathbb{1}_{e_1, \dots, \lambda e_i, \dots, e_n}] \\
 &= [\lambda \mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n}] \\
 &= \lambda [\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n}] \\
 &= \lambda(e_1 \otimes \cdots \otimes e_i \otimes \cdots \otimes e_n)
 \end{aligned}$$

が成立するから \otimes は n 重線型である. また任意に $u = [b] \in E \otimes F$ を取れば

$$b = \sum_{j=1}^m k_j \mathbb{1}_{e_i^j, \dots, e_n^j}, \quad (k_j = b(e_i^j, \dots, e_n^j), j = 1, \dots, m)$$

と表せるから,

$$u = \left[\sum_{j=1}^m k_j \mathbb{1}_{e_i^j, \dots, e_n^j} \right] = \left[\sum_{j=1}^m \mathbb{1}_{k_j e_i^j, \dots, e_n^j} \right] = \sum_{j=1}^m (k_j e_1^j) \otimes \cdots \otimes e_n^j$$

が従い (A.5) を得る. ■

定理 A.3.2 ($\cdots \otimes 0 \otimes \cdots$ は零ベクトル). $(E_i)_{i=1}^n$ を \mathbb{K} -線形空間の族とし, テンソル積 $\bigotimes_{i=1}^n E_i$ を定める. このとき, 或る i で $e_i = 0$ なら $e_1 \otimes \cdots \otimes e_n = 0$ が成り立つ.

証明. $e_i = 0$ のとき, $\lambda = 0$ とすれば

$$e_1 \otimes \cdots \otimes e_n = [\mathbb{1}_{e_1, \dots, 0, \dots, e_n}] = [\mathbb{1}_{e_1, \dots, \lambda e_i, \dots, e_n} - \lambda \mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n}] = 0$$

が成立する. ■

定理 A.3.3 (普遍性 (universality of tensor products)). $(E_i)_{i=1}^n$ を \mathbb{K} -線形空間の族とする. このとき任意の \mathbb{K} -線形空間 V に対して, $T \in \text{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n E_i, V\right)$ ならば $T \circ \otimes \in \text{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$ が満たされ, これで定める次の対応 Φ_V は線型同型である:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n E_i, V\right) & \longrightarrow & \text{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right) \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ T & \longmapsto & T \circ \otimes \end{array} \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=1}^n E_i & & \\ \downarrow \otimes & \searrow \Phi(T) & \\ \bigotimes_{i=1}^n E_i & \xrightarrow{T} & V \end{array} \quad \begin{array}{c} \cup \\ \circlearrowright \end{array}$$

また \mathbb{K} -線形空間 U_0 と n 重線型写像 $\iota: \bigoplus_{i=1}^n E_i \rightarrow U_0$ が, 任意の \mathbb{K} -線形空間 V に対し

(\otimes)₁ U_0 は ι の像で生成される.

(\otimes)₂ 任意の $\delta \in \text{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$ に対して $\delta = \tau \circ \iota$ を満たす $\tau \in \text{Hom}(U_0, V)$ が存在する.

を満たすなら, (A.6) において $V = U_0$ とするとき $T = \Phi_{U_0}^{-1}(\iota): \bigotimes_{i=1}^n E_i \rightarrow U_0$ は線型同型である.

後半の主張により, $(E_i)_i$ のテンソル積を別の方法で導入しても, 商空間を用いて導入した $\bigotimes_i E_i$ と線型同型に結ばれる. このとき, 別の方法で導入したテンソル積及び標準写像を $\bigotimes_i \tilde{E}_i$, $\tilde{\otimes}$ と表せば, 或る線型同型 $T: \bigotimes_i E_i \rightarrow \bigotimes_i \tilde{E}_i$ がただ一つ存在して

$$T(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) = e_1 \tilde{\otimes} \cdots \tilde{\otimes} e_n$$

を満たす. 特に任意の並べ替え $\varphi: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ に対し

$$\begin{array}{ccc} \bigotimes_{i=1}^n E_i & \cong & \bigotimes_{i=1}^n E_{\varphi(i)} \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ e_1 \otimes \cdots \otimes e_n & \longleftrightarrow & e_{\varphi(1)} \otimes \cdots \otimes e_{\varphi(n)} \end{array}$$

が成立する.

証明.

第一段 $T \in \text{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n E_i, V\right)$ の線型性と \otimes の n 重線型性より $T \circ \otimes$ は n 重線型である.

第二段 $\Phi_V(T_1) = \Phi_V(T_2)$ ならば T_1 と T_2 は $\left\{e_1 \otimes \cdots \otimes e_n; \quad (e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i\right\}$ の上で一致する. (A.5) より $T_1 = T_2$ が成立し Φ_V の単射性が従う.

第三段 次の二段で Φ_V の全射性を示す. まず, $\varphi \in \text{Hom}\left(\bigwedge\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right), V\right)$ に対し

$$g: \bigoplus_{i=1}^n E_i \ni (e_1, \dots, e_n) \mapsto \varphi(\mathbb{I}_{e_1, \dots, e_n}) \in V$$

を対応させる次の写像が全単射であることを示す:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}\left(\bigwedge\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right), V\right) & \longrightarrow & \text{Map}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right) \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ \varphi & \longmapsto & g \end{array}$$

$F(\varphi_1) = F(\varphi_2)$ のとき, 任意の $e \in \bigoplus_{i=1}^n E_i$ に対して $\varphi_1(\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_n}) = \varphi_2(\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_n})$ が成り立ち,

$$\Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right) = \text{Span} \left\{ \left\{ \mathbb{1}_{e_1, \dots, e_n} ; \quad (e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i \right\} \right\}$$

より $\varphi_1 = \varphi_2$ が従い F の単射性が得られる. また $g \in \text{Map}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$ に対して

$$\begin{aligned} \varphi(0) &:= 0, \\ \varphi(a) &:= \sum_{\substack{e \in \bigoplus_{i=1}^n E_i \\ a(e) \neq 0}} a(e)g(e), \quad \left(\forall a \in \Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right), a \neq 0 \right) \end{aligned}$$

により φ を定めれば, $\varphi \in \text{Hom}\left(\Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right), V\right)$ より ${}^{*1} F$ の全射性が出る.

第四段 任意に $b \in \text{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$ を取り $h := F^{-1}(b)$ とおけば, h の線型性より

$$\begin{aligned} &b(e_1, \dots, e_i + e'_i, \dots, e_n) - b(e_1, \dots, e_i, \dots, e_n) - b(e_1, \dots, e'_i, \dots, e_n) \\ &= h(\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i + e'_i, \dots, e_n} - \mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n} - \mathbb{1}_{e_1, \dots, e'_i, \dots, e_n}), \\ &b(e_1, \dots, \lambda e_i, \dots, e_n) - \lambda b(e_1, \dots, e_i, \dots, e_n) \\ &= h(\mathbb{1}_{e_1, \dots, \lambda e_i, \dots, e_n} - \lambda \mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n}) \end{aligned}$$

が成り立ち, b の n 重線型性により h は $\Lambda_0\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right)$ 上で 0 である. 従って

$$T([b]) := h(b), \quad (b \in \Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right))$$

で定める T は well-defined であり, $T \in \text{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n E_i, V\right)$ かつ

$$b(e_1, \dots, e_n) = h(\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_n}) = (T \circ \otimes)(e_1, \dots, e_n), \quad (\forall (e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i)$$

が満たされ Φ_V の全射性が得られる.

第五段 $(\otimes)_1, (\otimes)_2$ の下で $\text{Hom}\left(U_0, \bigotimes_{i=1}^n E_i\right) \ni \tau \mapsto \tau \circ \iota \in \text{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, \bigotimes_{i=1}^n E_i\right)$ は全単射であるから, $\tau \circ \iota = \otimes$ を満たす $\tau \in \text{Hom}\left(U_0, \bigotimes_{i=1}^n E_i\right)$ がただ一つ存在する. 同様にして $\iota = T \circ \otimes$ を満たす $T \in \text{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n E_i, U_0\right)$ がただ一つ存在し, 併せれば

$$\otimes = \tau \circ \iota = (\tau \circ T) \circ \otimes, \quad \iota = T \circ \otimes = (T \circ \tau) \circ \iota$$

が成り立つ. $T \mapsto T \circ \otimes, \tau \mapsto \tau \circ \iota$ が一対一であるから, $\tau \circ T, T \circ \tau$ はそれぞれ恒等写像に一致して $T^{-1} = \tau$ が従う. すなわち T は $\bigotimes_{i=1}^n E_i$ から U_0 への線型同型である. ■

^{*1} $(\{e ; a(e) \neq 0\} \cup \{e ; a'(e) \neq 0\}) \cap \{e ; (a+a')(e) \neq 0\} = \{e ; (a+a')(e) \neq 0\}$ より

$$\begin{aligned} \varphi(a) + \varphi(a') &= \sum_{a(e) \neq 0} a(e)g(e) + \sum_{a'(e) \neq 0} a'(e)g(e) = \sum_{\substack{a(e) \neq 0 \\ (a+a')(e) \neq 0}} a(e)g(e) + \sum_{\substack{a(e) \neq 0 \\ (a+a')(e) \neq 0}} a(e)g(e) + \sum_{\substack{a'(e) \neq 0 \\ (a+a')(e) \neq 0}} a'(e)g(e) + \sum_{\substack{a'(e) \neq 0 \\ (a+a')(e) \neq 0}} a'(e)g(e) \\ &= \sum_{\substack{a(e) \neq 0 \\ (a+a')(e) \neq 0}} a(e)g(e) + \sum_{\substack{a'(e) \neq 0 \\ (a+a')(e) \neq 0}} a'(e)g(e) = \sum_{(a+a')(e) \neq 0} (a+a')(e)g(e) = \varphi(a+a') \end{aligned}$$

φ の加法性を得る. スカラ倍は $\varphi(\beta a) = \sum_{(\beta a)(e) \neq 0} (\beta a)(e)g(e) = \beta \sum_{a(e) \neq 0} a(e)g(e) = \beta \varphi(a)$ ($\beta \neq 0$) 及び $\varphi(0) = 0$ より従う.

定理 A.3.4 (スカラーとのテンソル積). E を \mathbb{K} -線型空間とすると、 $\mathbb{K} \otimes E$ と E は線型写像 $f: \mathbb{K} \otimes E \ni 1 \otimes e \mapsto e \in E$ により同型となる. 同様に $E \otimes \mathbb{K}$ と E は線型写像 $g: E \otimes \mathbb{K} \ni e \otimes 1 \mapsto e \in E$ により同型となる.

証明. $\mathbb{K} \otimes E = \text{Span}[\{\alpha \otimes e; \alpha \in \mathbb{K}, e \in E\}] = \{1 \otimes e; e \in E\}$ が成り立つから f は全単射となる. ■

定義 A.3.5 (線型写像のテンソル積). $(E_i)_{i=1}^n$ と $(F_i)_{i=1}^n$ を \mathbb{K} -線型空間の族とすると、 $f_i \in \text{Hom}(E_i, F_i)$ に対し

$$b: \bigoplus_{i=1}^n E_i \ni (e_1, \dots, e_n) \mapsto f_1(e_1) \otimes \dots \otimes f_n(e_n) \in \bigotimes_{i=1}^n F_i$$

により定める b は n 重線型であり、定理 A.3.3 より $b = g \circ \otimes$ を満たす $g \in \text{Hom}(\bigotimes_{i=1}^n E_i, \bigotimes_{i=1}^n F_i)$ がただ一つ存在する. この g を $f_1 \otimes \dots \otimes f_n$ と表記して線型写像のテンソル積と定義する. 特に次が成り立つ:

$$f_1 \otimes \dots \otimes f_n(e_1 \otimes \dots \otimes e_n) = f_1(e_1) \otimes \dots \otimes f_n(e_n), \quad (\forall (e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i).$$

$n \geq 2$ とする. 係数体 \mathbb{K} の n 個の直和 $\mathbb{K} \oplus \dots \oplus \mathbb{K}$ において,

$$\phi: \mathbb{K} \oplus \dots \oplus \mathbb{K} \ni (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 \cdots x_n \in \mathbb{K}^{*3}$$

で定める ϕ は n 重線型であるから、或る線型写像 $F: \mathbb{K} \otimes \dots \otimes \mathbb{K} (n \text{ copies}) \rightarrow \mathbb{K}$ が存在して

$$F(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = x_1 \cdots x_n, \quad (\forall x_1 \otimes \dots \otimes x_n \in \mathbb{K} \otimes \dots \otimes \mathbb{K}) \quad (\text{A.7})$$

を満たす. またこの F に対して

$$\psi: \mathbb{K} \ni x \mapsto x \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 \in \mathbb{K} \otimes \dots \otimes \mathbb{K} (n \text{ copies})$$

が逆写像となるから F は線型同型である.

定義 A.3.6 (線型形式のテンソル積). $(E_i)_{i=1}^n$ を \mathbb{K} -線型空間の族とすると、線型形式 $f_i \in \text{Hom}(E_i, \mathbb{K})$ のテンソル積 $f_1 \otimes \dots \otimes f_n$ は、前定義 A.3.5 に従えば次の対応

$$\bigotimes_{i=1}^n E_i \ni e_1 \otimes \dots \otimes e_n \mapsto f_1(e_1) \otimes \dots \otimes f_n(e_n) \in \mathbb{K} \otimes \dots \otimes \mathbb{K} (n \text{ copies})$$

を満たす線型写像であるが、以後便宜上、線型形式については、式 (A.7) の線型同型 F との合成 $F \circ (f_1 \otimes \dots \otimes f_n)$ を線型形式のテンソル積 $f_1 \otimes \dots \otimes f_n$ として再定義する. i.e.

$$f_1 \otimes \dots \otimes f_n(e_1 \otimes \dots \otimes e_n) = f_1(e_1) \cdots f_n(e_n), \quad (\forall e_1 \otimes \dots \otimes e_n \in \bigotimes_{i=1}^n E_i).$$

特に、 $f_1 \otimes \dots \otimes f_n$ もまた $\bigotimes_{i=1}^n E_i$ 上の線型形式となっている.

*2 1 は \mathbb{K} の単位元を表す.

*3 $x_1 \cdots x_n$ は \mathbb{K} の乗法により x_1, \dots, x_n を掛け合わせたものである.

定理 A.3.7 (零写像のテンソル積は零写像). \mathbb{K} -線型空間の族 $(E_i)_{i=1}^n$ と $(F_i)_{i=1}^n$ と線型写像 $f_i : E_i \rightarrow F_i$ ($i = 1, \dots, n$) について, 或る f_i が零写像なら $f_1 \otimes \dots \otimes f_n = 0$ となる.

証明. $f_i = 0$ とすると, 定理 A.3.2 より $f_1 \otimes \dots \otimes f_n$ は $\{e_1 \otimes \dots \otimes e_n ; e_i \in E_i\}$ 上で 0 となる. この空間は $\bigotimes_{i=1}^n E_i$ を生成するから $f_1 \otimes \dots \otimes f_n = 0$ が従う. ■

定理 A.3.8 (テンソル積の基底). $(E_i)_{i=1}^n$ を \mathbb{K} -線型空間の族とし, E_i の基底を $\{u_{\lambda_i}^i\}_{\lambda_i \in \Lambda_i}$ とする ($i = 1, \dots, n$). このとき $\{u_{\lambda_1}^1 \otimes \dots \otimes u_{\lambda_n}^n\}_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$ は $\bigotimes_{i=1}^n E_i$ の基底となる.

証明.

第一段 任意の $e_1 \otimes \dots \otimes e_n \in \bigotimes_{i=1}^n E_i$ は $\{u_{\lambda_1}^1 \otimes \dots \otimes u_{\lambda_n}^n\}_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$ の線型結合で表現されるから, 式 (A.5) より

$$\bigotimes_{i=1}^n E_i = \text{Span} \left[\left\{ u_{\lambda_1}^1 \otimes \dots \otimes u_{\lambda_n}^n ; \lambda_i \in \Lambda_i, i = 1, \dots, n \right\} \right]$$

が成立する.

第二段 $\{u_{\lambda_1}^1 \otimes \dots \otimes u_{\lambda_n}^n\}_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$ の一次独立性を示す. $\{u_{\lambda_i}^i\}_{\lambda_i \in \Lambda_i}$ に対する双対集合を $\{f_{\lambda_i}^i\}_{\lambda_i \in \Lambda_i}$ と書けば, 各 $f_{\lambda_i}^i$ は

$$f_{\lambda_i}^i(u_{\lambda}^i) = \begin{cases} 1, & (\lambda = \lambda_i), \\ 0, & (\lambda \neq \lambda_i), \end{cases} \quad \forall \lambda \in \Lambda_i$$

を満たし, 線型形式のテンソル積 $f_{\lambda_1}^1 \otimes \dots \otimes f_{\lambda_n}^n$ について

$$f_{\lambda_1}^1 \otimes \dots \otimes f_{\lambda_n}^n(u_{\nu_1}^1 \otimes \dots \otimes u_{\nu_n}^n) = \begin{cases} 1, & (\nu_1, \dots, \nu_n) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n), \\ 0, & (\nu_1, \dots, \nu_n) \neq (\lambda_1, \dots, \lambda_n), \end{cases} \quad \forall (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \prod_{i=1}^n \Lambda_i$$

が成立する. 従って $\{u_{\lambda_1}^1 \otimes \dots \otimes u_{\lambda_n}^n\}_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$ は全て零ではなく, かつ

$$0 = \sum_{j=1}^k \alpha_j \left(u_{\lambda_1^{(j)}}^1 \otimes \dots \otimes u_{\lambda_n^{(j)}}^n \right), \quad (\alpha_j \in \mathbb{K}, j = 1, \dots, k)$$

を満たすような任意の線型結合に対し (ただし $i \neq j$ なら $(\lambda_1^{(i)}, \dots, \lambda_n^{(i)}) \neq (\lambda_1^{(j)}, \dots, \lambda_n^{(j)})$)

$$\alpha_j = f_{\lambda_1^{(j)}}^1 \otimes \dots \otimes f_{\lambda_n^{(j)}}^n \left(\sum_{j=1}^k \alpha_j \left(u_{\lambda_1^{(j)}}^1 \otimes \dots \otimes u_{\lambda_n^{(j)}}^n \right) \right) = 0, \quad (j = 1, \dots, k)$$

が従い $\{u_{\lambda_1}^1 \otimes \dots \otimes u_{\lambda_n}^n\}_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$ の一次独立性を得る. ■

定理 A.3.9 (結合律). $(E_i)_{i=1}^n$ を \mathbb{K} -線型空間の族とし, $k \in \{1, \dots, n-1\}$ を任意に取る. このとき, 次の対応関係を満たす F は線型同型である:

$$\begin{array}{ccc} F : \bigotimes_{i=1}^n E_i & \longrightarrow & \left(\bigotimes_{i=1}^k E_i \right) \otimes \left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i \right) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ e_1 \otimes \cdots \otimes e_n & \longmapsto & (e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n) \end{array}$$

証明.

第一段 n 重線型写像 $f : \bigoplus_{i=1}^n E_i \longrightarrow \left(\bigotimes_{i=1}^k E_i \right) \otimes \left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i \right)$ を

$$f(e_1, \dots, e_n) = (e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n), \quad (\forall (e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i)$$

により定めれば, 定理 A.3.3 より

$$F(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) = (e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n), \quad (\forall (e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i)$$

を満たす線型写像 $F : \bigotimes_{i=1}^n E_i \longrightarrow \left(\bigotimes_{i=1}^k E_i \right) \otimes \left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i \right)$ が存在する:

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=1}^n E_i & & \\ \downarrow \otimes & \searrow f & \\ \bigotimes_{i=1}^n E_i & \xrightarrow{F} & \left(\bigotimes_{i=1}^k E_i \right) \otimes \left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i \right) \end{array}$$

以降は F の逆写像を構成し F が全単射であることを示す.

第二段 $u_{k+1} \in E_{k+1}, \dots, u_n \in E_n$ を固定し

$$\Phi_{u_{k+1}, \dots, u_n}(e_1, \dots, e_n) := e_1 \otimes \cdots \otimes e_k \otimes u_{k+1} \otimes \cdots \otimes u_n$$

によって k 重線型 $\Phi_{u_{k+1}, \dots, u_n} : \bigoplus_{i=1}^k E_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n E_i$ を定めれば, 定理 A.3.3 より

$$G_{u_{k+1}, \dots, u_n}(e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) = e_1 \otimes \cdots \otimes e_k \otimes u_{k+1} \otimes \cdots \otimes u_n$$

を満たす線型写像 $G_{u_{k+1}, \dots, u_n} : \bigotimes_{i=1}^k E_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n E_i$ が存在する.

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=1}^k E_i & & \\ \downarrow \otimes & \searrow \Phi_{u_{k+1}, \dots, u_n} & \\ \bigotimes_{i=1}^k E_i & \xrightarrow{G_{u_{k+1}, \dots, u_n}} & \bigotimes_{i=1}^n E_i \end{array}$$

第三段 任意の $v \in \bigotimes_{i=1}^k E_i$ に対して

$$\Psi_v : \bigoplus_{i=k+1}^n E_i \ni (u_{k+1}, \dots, u_n) \longmapsto G_{u_{k+1}, \dots, u_n}(v)$$

を定めれば, Ψ_v は $n-k$ 重線型であるから, 定理 A.3.3 より

$$H_v(u_{k+1} \otimes \cdots \otimes u_n) = \Psi_v(u_{k+1}, \dots, u_n)$$

を満たす線型写像 $H_v: \bigotimes_{i=k+1}^n E_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n E_i$ が存在する.

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=k+1}^n E_i & & \\ \downarrow \otimes & \searrow \Psi_v & \\ \bigotimes_{i=k+1}^n E_i & \xrightarrow{H_v} & \bigotimes_{i=1}^n E_i \end{array}$$

いま, $v \mapsto \Psi_v$ は線型であり, かつ Ψ_v と H_v は一対一対応であるから $v \mapsto H_v$ の線型性が従う.

第四段 H_v の線型性と $v \mapsto H_v$ の線型性より

$$\Gamma: \left(\bigotimes_{i=1}^k E_i \right) \times \left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i \right) \ni (v, w) \mapsto H_v(w)$$

により定める Γ は

$$\begin{aligned} \Gamma(e_1 \otimes \cdots \otimes e_k, e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n) &= H_{e_1 \otimes \cdots \otimes e_k}(e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n) \\ &= \Psi_{e_1 \otimes \cdots \otimes e_k}(e_{k+1}, \dots, e_n) \\ &= G_{e_{k+1}, \dots, e_n}(e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \\ &= \Phi_{e_{k+1}, \dots, e_n}(e_1, \dots, e_k) \\ &= e_1 \otimes \cdots \otimes e_n \end{aligned} \tag{A.8}$$

を満たす双線型であり, 定理 A.3.3 より

$$\begin{array}{ccc} \left(\bigotimes_{i=1}^k E_i \right) \times \left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i \right) & & \\ \downarrow \otimes & \searrow \Gamma & \\ \left(\bigotimes_{i=1}^k E_i \right) \otimes \left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i \right) & \xrightarrow{G} & \bigotimes_{i=1}^n E_i \end{array}$$

を可換にする線型写像 G が存在する. この G は F の逆写像である. 実際, (A.8) より

$$\begin{aligned} F \circ G((e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n)) &= F(\Gamma(e_1 \otimes \cdots \otimes e_k, e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n)) \\ &= F(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) \\ &= (e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n) \end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned} G \circ F(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) &= G((e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n)) \\ &= \Gamma(e_1 \otimes \cdots \otimes e_k, e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n) \\ &= e_1 \otimes \cdots \otimes e_n \end{aligned}$$

が満たされ $F^{-1} = G$ が従う.

■

A.4 クロスノルム

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 或は $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ とし, $n \geq 2$ 個の Banach 空間で構成するテンソル積を考察対象とする.

定義 A.4.1 (クロスノルム). \mathbb{K} -Banach 空間の族 $(X_i)_{i=1}^n$ のテンソル積 $\bigotimes_{i=1}^n X_i$ において

$$\alpha(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \leq \|x_1\|_{X_1} \|x_2\|_{X_2} \cdots \|x_n\|_{X_n}, \quad (\forall x_i \in X_i, i = 1, \dots, n), \quad (\text{A.9})$$

$$\sup_{\substack{v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i \\ v \neq 0}} |x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v)| \leq \|x_1^*\|_{X_1^*} \|x_2^*\|_{X_2^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*} \alpha(v), \quad (\forall x_i^* \in X_i^*, i = 1, \dots, n) \quad (\text{A.10})$$

を満たすようなノルム $\alpha : \bigotimes_{i=1}^n X_i \rightarrow [0, \infty)$ をクロスノルム (cross norm) と呼ぶ^{*4}.

定理 A.4.2. \mathbb{K} -Banach 空間の族 $(X_i)_{i=1}^n$ のテンソル積 $\bigotimes_{i=1}^n X_i$ 上のクロスノルム α は次を満たす:

$$\begin{aligned} \alpha(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) &= \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}, & (x_i \in X_i, i = 1, \dots, n), \\ \|x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*\|_{(\bigotimes_{i=1}^n X_i, \alpha)^*} &= \|x_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*}, & (x_i^* \in X_i^*, i = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

証明. 先ず, Hahn-Banach の定理と式 (A.10) より

$$\begin{aligned} \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n} &= \sup_{\|x_1^*\|_{X_1^*} \leq 1} |\langle x_1, x_1^* \rangle| \cdots \sup_{\|x_n^*\|_{X_n^*} \leq 1} |\langle x_n, x_n^* \rangle| \\ &= \sup_{\substack{\|x_i^*\|_{X_i^*} \leq 1 \\ i=1, \dots, n}} |x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)| \\ &\leq \sup_{\substack{\|x_i^*\|_{X_i^*} \leq 1 \\ i=1, \dots, n}} \|x_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*} \alpha(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \\ &= \alpha(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \end{aligned}$$

が成り立ち定理の主張の第一式を得る. またこの結果より

$$\begin{aligned} \|x_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*} &= \sup_{\|x_1\|_{X_1} \leq 1} |\langle x_1, x_1^* \rangle| \cdots \sup_{\|x_n\|_{X_n} \leq 1} |\langle x_n, x_n^* \rangle| \\ &= \sup_{\substack{\|x_i\|_{X_i} \leq 1 \\ i=1, \dots, n}} |x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)| \\ &\leq \sup_{\alpha(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \leq 1} |x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)| \\ &\leq \sup_{\alpha(v) \leq 1} |x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v)| \\ &= \|x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*\|_{(\bigotimes_{i=1}^n X_i, \alpha)^*} \end{aligned}$$

が成立し主張の第二式も得られる. ■

^{*4} [5] ではこの二性質を満たすものをリーゾナブルクロスノルムと分類するが, 本稿ではクロスノルムと書くだけにする.

以下, 実際クロスノルムが存在することを示す.

定義 A.4.3 (インジェクティブノルム). \mathbb{K} -Banach 空間の族 $(X_i)_{i=1}^n$ に対し

$$\epsilon(v) := \sup_{\substack{\|x_i^*\|_{X_i^*} \leq 1 \\ i=1, \dots, n}} |x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v)|, \quad (v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

により定める ϵ をインジェクティブノルム (injective norm) と呼ぶ.

定理 A.4.4 (インジェクティブノルムは最小のクロスノルム). \mathbb{K} -Banach 空間の族 $(X_i)_{i=1}^n$ のテンソル積 $\bigotimes_{i=1}^n X_i$ において, インジェクティブノルムは最小のクロスノルムである.

証明.

第一段 ϵ が $\bigotimes_{i=1}^n X_i$ 上のノルムであることを示す. 劣加法性と同次性は $x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*$ の線型性より従う. $v = 0 \Leftrightarrow \epsilon(v) = 0$ については, $v = 0$ なら任意の $x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*$ について $x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v) = 0$ が成り立ち $\epsilon(v) = 0$ が出る. 逆に $v \neq 0$ とするとき, X_i の基底 $\{u_{\lambda_i}^i\}_{\lambda_i \in \Lambda_i}$, $(i = 1, \dots, n)$ を用いて

$$v = \sum_{j=1}^m c_j u_{\lambda_1^j}^1 \otimes \cdots \otimes u_{\lambda_n^j}^n, \quad (c_j \neq 0, j = 1, \dots, m)$$

と表現できる. $u_{\lambda_1^1}^1$ について, もし全ての $2 \leq j \leq m$ に対し $u_{\lambda_1^j}^1 = u_{\lambda_1^1}^1$ が満たされているなら, $\hat{x}_1^* \in X_1^*$ を

$$\langle u_{\lambda_1^1}^1, \hat{x}_1^* \rangle = \|u_{\lambda_1^1}^1\|_{X_1}, \quad \|\hat{x}_1^*\|_{X_1^*} = 1$$

を満たすように選ぶ (Hahn-Banach の定理). $u_{\lambda_1^j}^1 \neq u_{\lambda_1^1}^1$ を満たす j がある場合,

$$L_1 := \text{Span} \left[\left\{ u_{\lambda_1^j}^1; \quad 2 \leq j \leq m, u_{\lambda_1^j}^1 \neq u_{\lambda_1^1}^1 \right\} \right]$$

により閉部分空間を定めれば $u_{\lambda_1^1}^1$ と L_1 との距離 d_1 は正であり, Hahn-Banach の定理より

$$\langle x_1, \hat{x}_1^* \rangle = 0 \quad (\forall x_1 \in L_1), \quad \langle u_{\lambda_1^1}^1, \hat{x}_1^* \rangle = d_1 > 0, \quad \|\hat{x}_1^*\|_{X_1^*} = 1$$

を満たす $\hat{x}_1^* \in X_1^*$ を取ることができる. 同様に $\hat{x}_i^* \in X_i^*$ ($i = 2, \dots, n$) を選べば

$$\hat{x}_1^* \otimes \cdots \otimes \hat{x}_n^* \left(u_{\lambda_1^j}^1 \otimes \cdots \otimes u_{\lambda_n^j}^n \right) = \begin{cases} \hat{x}_1^* \otimes \cdots \otimes \hat{x}_n^* \left(u_{\lambda_1^1}^1 \otimes \cdots \otimes u_{\lambda_n^1}^n \right), & (u_{\lambda_i^j}^i = u_{\lambda_i^1}^i, i = 1, \dots, n), \\ 0, & (\text{o.w.}), \end{cases}$$

($j = 2, \dots, m$) が満たされるから

$$0 < |c_1| \hat{x}_1^* \otimes \cdots \otimes \hat{x}_n^* \left(u_{\lambda_1^1}^1 \otimes \cdots \otimes u_{\lambda_n^1}^n \right) \leq |\hat{x}_1^* \otimes \cdots \otimes \hat{x}_n^*(v)| \leq \epsilon(v)$$

が成立し, 対偶により $\epsilon(v) = 0 \Rightarrow v = 0$ が従う.

第二段 ϵ がクロスノルムであることを示す. 先ず Hahn-Banach の定理より

$$\begin{aligned}\epsilon(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) &= \sup_{\substack{\|x_i^*\|_{X_i^*} \leq 1 \\ i=1, \dots, n}} |x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)| \\ &= \sup_{\|x_1^*\|_{X_1^*} \leq 1} |\langle x_1, x_1^* \rangle| \cdots \sup_{\|x_n^*\|_{X_n^*} \leq 1} |\langle x_n, x_n^* \rangle| \\ &= \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}, \quad (\forall x_i \in X_i, i = 1, \dots, n)\end{aligned}$$

が成り立つ. また 0 でない $x_i^* \in X_i^*$, $(i = 1, \dots, n)$ に対しては

$$\begin{aligned}|x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v)| &\leq \|x_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*} \left[\frac{x_1^*}{\|x_1^*\|_{X_1^*}} \otimes \cdots \otimes \frac{x_n^*}{\|x_n^*\|_{X_n^*}} \right](v) \\ &\leq \|x_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*} \epsilon(v)\end{aligned}$$

が成立し

$$\|x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*\|_{(\bigotimes_{i=1}^n X_i, \epsilon)} \leq \|x_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*}$$

を得る.

第三段 ϵ が最小のクロスノルムであることを示す. α を任意のクロスノルムとすれば

$$|x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v)| \leq \|x_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*} \alpha(v), \quad (\forall v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

が成り立つから, 特に $\|x_i^*\|_{X_i^*} \leq 1$, $(i = 1, \dots, n)$ の範囲で \sup を取れば

$$\epsilon(v) \leq \alpha(v), \quad (\forall v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

が従い ϵ の最小性が出る. ■

定義 A.4.5 (プロジェクトィブノルム). \mathbb{K} -Banach 空間の族 $(X_i)_{i=1}^n$ に対し, 定理 A.3.3 により

$$\begin{array}{ccc} \Phi : \text{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}\right) & \longrightarrow & \text{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}\right) \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ T & \longmapsto & T \circ \otimes \end{array}$$

により線型同型 Φ が定まる. これを用いて

$$\pi(v) := \sup_{\substack{b \in L^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}\right) \\ \|b\|_{L^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}\right)} \leq 1}} |\Phi^{-1}(b)(v)|, \quad (v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

により定める π をプロジェクトィブノルム (projective norm) と呼ぶ.

定理 A.4.6 (プロジェクトィブノルムは最大のクロスノルム). \mathbb{K} -Banach 空間の族 $(X_i)_{i=1}^n$ のテンソル積 $\bigotimes_{i=1}^n X_i$ 上にプロジェクトィブノルム π を導入する. このとき式 (A.9) を満たす任意のセミノルム p に対し $p \leq \pi$ が成立する. 特に π は最大のクロスノルムである.

証明.

第一段 π がノルムであることを示す. $v \neq 0$ とすれば, 定理 A.4.4 の証明と同様にして

$$0 < |\hat{x}_1^* \otimes \cdots \otimes \hat{x}_n^*(v)|, \quad \|\hat{x}_i^*\|_{X_i^*} = 1, \quad (i = 1, \dots, n)$$

を満たす $\hat{x}_i^* \in X_i^*$ ($i = 1, \dots, n$) が存在する.

$$b(x_1, \dots, x_n) := \langle x_1, \hat{x}_1^* \rangle \cdots \langle x_n, \hat{x}_n^* \rangle, \quad (x_i \in X_i, i = 1, \dots, n)$$

により n 重線型写像 b を定めれば, $\|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K})} \leq \|\hat{x}_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|\hat{x}_n^*\|_{X_n^*} = 1$ かつ

$$0 < |\hat{x}_1^* \otimes \cdots \otimes \hat{x}_n^*(v)| = |\Phi^{-1}(b)(v)| \leq \pi(v)$$

が成立する. $\pi(0) = 0$ と劣加法性及び同次性は $\Phi^{-1}(b)$ の線型性より従う.

第二段 π がクロスノルムであることを示す. 先ず, 任意の $x_i \in X_i$, ($i = 1, \dots, n$) に対して

$$\begin{aligned} \pi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) &= \sup_{\substack{b \in L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}) \\ \|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K})} \leq 1}} |\Phi^{-1}(b)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)| \\ &\leq \sup_{\substack{b \in L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}) \\ \|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K})} \leq 1}} \|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K})} \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n} \\ &= \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n} \end{aligned}$$

が成立する. また 0 でない $x_i^* \in X_i^*$, ($i = 1, \dots, n$) に対し

$$b(x_1, \dots, x_n) := \frac{x_1^*}{\|x_1^*\|_{X_1^*}}(x_1) \cdots \frac{x_n^*}{\|x_n^*\|_{X_n^*}}(x_n), \quad (x_i \in X_i, i = 1, \dots, n)$$

により $\|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K})} \leq 1$ を満たす有界 n 重線型 b を定めれば, π の定義より

$$|\Phi^{-1}(b)(v)| \leq \pi(v), \quad (\forall v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

が成り立つ. 一方で線型形式のテンソル積の定義より

$$\Phi^{-1}(b) = \frac{x_1^*}{\|x_1^*\|_{X_1^*}} \otimes \cdots \otimes \frac{x_n^*}{\|x_n^*\|_{X_n^*}} = \frac{1}{\|x_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*}} x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*$$

となり,

$$|x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v)| \leq \|x_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*} \pi(v), \quad (\forall v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

が従い

$$\|x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*\|_{(\bigotimes_{i=1}^n X_i, \pi)^*} \leq \|x_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*}$$

が出る.

第三段 p を (A.9) を満たすセミノルムとし, $v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i$ を任意に取れば

$$p(v) = \phi_v(v), \quad |\phi_v(u)| \leq p(u) \quad (\forall u \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

を満たす $\phi_v \in (\bigotimes_{i=1}^n X_i, \pi)^*$ が存在する (Hahn-Banach の定理).

$$\begin{aligned} |(\phi_v \circ \otimes)(x_1, \dots, x_n)| &= |\phi_v(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)| \\ &\leq p(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) \\ &\leq \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}, \quad (\forall x_i \in X_i, i = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

が成り立つから $\|\phi_v \circ \otimes\|_{L^m(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K})} \leq 1$ が従い, π の定義より

$$p(v) = \phi_v(v) = \Phi^{-1}(\phi_v \circ \otimes)(v) \leq \pi(v)$$

が得られる. ■

定理 A.4.7 (プロジェクトィブノルムの表現). \mathbb{K} -Banach 空間の族 $(X_i)_{i=1}^n$ のテンソル積 $\bigotimes_{i=1}^n X_i$ にプロジェクトノルム π を導入する. このとき次が成り立つ:

$$\pi(v) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^m \|x_1^j\|_{X_1} \cdots \|x_n^j\|_{X_n} \ ; \ v = \sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j \right\}.$$

証明.

第一段 $x_1 \otimes \dots \otimes x_n$ 上のセミノルム λ を次で定める:

$$\lambda(v) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^m \|x_1^j\|_{X_1} \cdots \|x_n^j\|_{X_n} \ ; \ v = \sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j \right\}, \quad (\forall v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i).$$

いま, 任意に $v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i$ を取れば, v の任意の分割

$$v = \sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j.$$

に対し

$$\pi(v) \leq \sum_{j=1}^m \pi(x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j) = \sum_{j=1}^m \|x_1^j\|_{X_1} \cdots \|x_n^j\|_{X_n}$$

が満たされ $\pi \leq \lambda$ が従う. よって λ が式 (A.9) を満たせば, 定理 A.4.6 より $\lambda = \pi$ が得られる.

第二段 λ がセミノルムであることを示す. 実際, 任意に $u, v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i$ を取り,

$$u = \sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j, \quad v = \sum_{k=1}^r a_1^k \otimes \dots \otimes a_n^k$$

を一つの表現とすれば, λ の定め方より

$$\lambda(u+v) \leq \sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j + \sum_{k=1}^r a_1^k \otimes \cdots \otimes a_n^k$$

が成り立つ. 右辺を移項して

$$\lambda(u+v) - \sum_{k=1}^r a_1^k \otimes \cdots \otimes a_n^k \leq \lambda(u) \leq \sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j$$

かつ

$$\lambda(u+v) - \lambda(u) \leq \lambda(v) \leq \sum_{k=1}^r a_1^k \otimes \cdots \otimes a_n^k$$

が従い λ の劣加法性を得る. また任意の $0 \neq \alpha \in \mathbb{K}$, $v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i$ に対し

$$v = \sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j$$

を一つの分割とすれば

$$\alpha v = \sum_{j=1}^m (\alpha x_1^j) \otimes \cdots \otimes x_n^j$$

は αv の一つの分割となるから

$$\lambda(\alpha v) \leq \sum_{j=1}^m \|\alpha x_1^j\|_{X_1} \cdots \|x_n^j\|_{X_n} = |\alpha| \sum_{j=1}^m \|x_1^j\|_{X_1} \cdots \|x_n^j\|_{X_n}$$

が成立し, v の分割について下限を取れば $\lambda(\alpha v) \leq |\alpha| \lambda(v)$ が従う. 逆に

$$\alpha v = \sum_{k=1}^r a_1^k \otimes \cdots \otimes a_n^k$$

に対しては

$$\lambda(v) \leq \sum_{k=1}^r \left\| \frac{1}{\alpha} a_1^k \right\|_{X_1} \cdots \|a_n^k\|_{X_n} = \frac{1}{|\alpha|} \sum_{k=1}^r \|a_1^k\|_{X_1} \cdots \|a_n^k\|_{X_n}$$

が成り立ち $|\alpha| \lambda(v) \leq \lambda(\alpha v)$ が従う. $v = 0$ なら $v = 0 \otimes \cdots \otimes 0$ より $\lambda(v) = 0$ が満たされ

$$\lambda(\alpha v) = |\alpha| \lambda(v), \quad (\forall \alpha \in \mathbb{K}, v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

が得られる.

第三段 λ が式 (A.9) を満たすことを示す. 実際 λ の定め方より

$$\lambda(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \leq \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}, \quad (\forall x_i \in X_i, i = 1, \dots, n)$$

が成り立つ.

定理 A.4.8. $\bigotimes_{i=1}^n X_i$ を \mathbb{K} -Banach 空間の族 $(X_i)_{i=1}^n$ のテンソル積とする. このとき $\bigotimes_{i=1}^n X_i$ 上の任意のノルム α に対し次が成立する:

$$\alpha \text{ がクロスノルム} \iff \epsilon \leq \alpha \leq \pi.$$

証明. (\Rightarrow) はすでに示したから (\Leftarrow) を示す. 実際, 任意の $x_i \in X_i$, $(i = 1, \dots, n)$ に対して

$$\alpha(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \leq \pi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \leq \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}$$

が成立し, また任意の $x_i^* \in X_i^*$, $(i = 1, \dots, n)$ に対して

$$\begin{aligned} |x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v)| &\leq \|x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*\|_{(\bigotimes_{i=1}^n X_i, \epsilon)^*} \epsilon(v) \\ &\leq \|x_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*} \alpha(v), \quad (\forall v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i) \end{aligned}$$

が満たされ $\|x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*\|_{(\bigotimes_{i=1}^n X_i, \alpha)^*} \leq \|x_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*}$ が得られる. ■

A.5 テンソル積の内積

[参考:[5](pp. 1-24), [9]] $(H_i)_{i=1}^n$ を \mathbb{R} -Hilbert 空間の族として, $\bigotimes_{i=1}^n H_i$ に内積を導入する. H_i の内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_i}$ と書く.

第一段 任意に $y_i \in H_i$, $i = 1, \dots, n$ を取り

$$\Phi_{y_1, \dots, y_n} : \bigoplus_{i=1}^n H_i \ni (x_1, \dots, x_n) \mapsto \langle x_1, y_1 \rangle_{H_1} \cdots \langle x_n, y_n \rangle_{H_n}$$

とおけば, Φ_{y_1, \dots, y_n} は n 重線型であるから或る $\Psi_{y_1, \dots, y_n} \in \text{Hom}(\bigotimes_{i=1}^n H_i, \mathbb{R})$ がただ一つ存在して

$$\Psi_{y_1, \dots, y_n} \circ \otimes = \Phi_{y_1, \dots, y_n}$$

を満たす.

第二段 任意の $u \in \bigotimes_{i=1}^n H_i$ に対し $\bigoplus_{i=1}^n H_i \ni (y_1, \dots, y_n) \mapsto \Psi_{y_1, \dots, y_n}(u)$ は n 重線型である. 実際,

$$u = \sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j$$

と表せるとき, 任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ と $y_i, z_i \in H_i$ に対して

$$\begin{aligned} \Psi_{y_1, \dots, \alpha y_i + \beta z_i, \dots, y_n}(u) &= \sum_{j=1}^k \Psi_{y_1, \dots, \alpha y_i + \beta z_i, \dots, y_n}(x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j) \\ &= \sum_{j=1}^k \langle x_1^j, y_1 \rangle_{H_1} \cdots \langle x_i^j, \alpha y_i + \beta z_i \rangle_{H_i} \cdots \langle x_n^j, y_n \rangle_{H_n} \\ &= \alpha \sum_{j=1}^k \langle x_1^j, y_1 \rangle_{H_1} \cdots \langle x_i^j, y_i \rangle_{H_i} \cdots \langle x_n^j, y_n \rangle_{H_n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \beta \sum_{j=1}^k \langle x_1^j, y_1 \rangle_{H_1} \cdots \langle x_i^j, z_i \rangle_{H_i} \cdots \langle x_n^j, y_n \rangle_{H_n} \\
& = \alpha \sum_{j=1}^k \Psi_{y_1, \dots, y_i, \dots, y_n}(x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j) + \beta \sum_{j=1}^k \Psi_{y_1, \dots, z_i, \dots, y_n}(x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j) \\
& = \alpha \Psi_{y_1, \dots, y_i, \dots, y_n}(u) + \beta \Psi_{y_1, \dots, z_i, \dots, y_n}(u)
\end{aligned}$$

が成立する．従って或る $F_u \in \text{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n H_i, \mathbb{R}\right)$ がただ一つ存在して

$$F_u(y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) = \Psi_{y_1, \dots, y_n}(u), \quad (\forall y_1 \otimes \cdots \otimes y_n \in \bigotimes_{i=1}^n H_i)$$

を満たす．

第三段 任意の $v \in \bigotimes_{i=1}^n H_i$ に対し $\bigotimes_{i=1}^n H_i \ni u \mapsto F_u(v)$ は線型性を持つ．実際、

$$v = \sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j$$

と表せるとき、任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ と $u, w \in \bigotimes_{i=1}^n H_i$ に対して

$$\begin{aligned}
F_{\alpha u + \beta w}(v) &= \sum_{j=1}^k F_{\alpha u + \beta w}(x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j) \\
&= \sum_{j=1}^k \Psi_{x_1^j, \dots, x_n^j}(\alpha u + \beta w) \\
&= \alpha \sum_{j=1}^k \Psi_{x_1^j, \dots, x_n^j}(u) + \beta \sum_{j=1}^k \Psi_{x_1^j, \dots, x_n^j}(w) \\
&= \alpha F_u(v) + \beta F_w(v)
\end{aligned}$$

が成立する．従って

$$s(u, v) := F_u(v), \quad (\forall u, v \in \bigotimes_{i=1}^n H_i) \quad (\text{A.11})$$

により定める $s: \bigotimes_{i=1}^n H_i \times \bigotimes_{i=1}^n H_i \rightarrow \mathbb{R}$ は双線型形式である．

定理 A.5.1. s は $\bigotimes_{i=1}^n H_i$ の内積となり、任意の $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n, y_1 \otimes \cdots \otimes y_n \in \bigotimes_{i=1}^n H_i$ に対し次を満たす:

$$s(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n, y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) = \langle x_1, y_1 \rangle_{H_1} \cdots \langle x_n, y_n \rangle_{H_n}. \quad (\text{A.12})$$

証明. s は双線型性を持つように定めたから、後は対称性と正定値性及び $s(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$ を示せばよい．

第一段 任意の $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n, y_1 \otimes \cdots \otimes y_n \in \bigotimes_{i=1}^n H_i$ に対し

$$\begin{aligned}
s(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n, y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) &= F_{x_1 \otimes \cdots \otimes x_n}(y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) = \Psi_{y_1, \dots, y_n}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \Phi_{y_1, \dots, y_n}(x_1, \dots, x_n) \\
&= \langle x_1, y_1 \rangle_{H_1} \cdots \langle x_n, y_n \rangle_{H_n}
\end{aligned}$$

が成り立ち (A.12) を得る．また $s(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n, y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) = s(y_1 \otimes \cdots \otimes y_n, x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)$ も従う．

第二段 s の対称性を示す. 任意の $u, v \in \bigotimes_{i=1}^n H_i$ に対し分割を

$$u = \sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j, \quad v = \sum_{r=1}^m y_1^r \otimes \cdots \otimes y_n^r$$

と表せば, 前段の結果より

$$s(u, v) = \sum_{j=1}^k \sum_{r=1}^m s(x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j, y_1^r \otimes \cdots \otimes y_n^r) = \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^k s(y_1^r \otimes \cdots \otimes y_n^r, x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j) = s(v, u)$$

となる.

第三段 任意の $u \in \bigotimes_{i=1}^n H_i$ に対し $s(u, u) \geq 0$ が成り立つことを示す. 実際,

第一段 $s(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$, ($u \in \bigotimes_{i=1}^n H_i$) が成り立つことを示す. 定理 A.3.8 より, 基底 $\{e_{\lambda_i}^i\}_{\lambda_i \in \Lambda_i} \subset H_i$, ($i = 1, \dots, n$) に対し $\{e_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes e_{\lambda_n}^n\}_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$ は $\bigotimes_{i=1}^n H_i$ の基底となるから, 任意の $u \in \bigotimes_{i=1}^n H_i$ は

$$u = \sum_{j=1}^k \alpha_j (e_{\lambda_1^{(j)}}^1 \otimes \cdots \otimes e_{\lambda_n^{(j)}}^n) = \sum_{j=1}^k e_{\lambda_1^{(j)}}^1 \otimes \cdots \otimes (\alpha_j e_{\lambda_n^{(j)}}^n), \quad (\alpha_j \neq 0, j = 1, \dots, k)$$

と表現できる.

定義 A.5.2 (テンソル積上の内積). 式 (A.11) で定めた双線型形式 s を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ と書き直して $\bigotimes_{i=1}^n H_i$ の内積とする. また $\sigma(u) := \sqrt{\langle u, u \rangle}$, ($u \in \bigotimes_{i=1}^n H_i$) によりノルム σ を導入する.

定理 A.5.3 (σ はクロスノルム). σ はクロスノルムである.

証明. 定義 A.4.1 の (A.9) と (A.10) を満たすことを示せばよい.

第一段 式 (A.12) より (A.9) が従う.

第二段 任意に $x_i^* \in H_i^*$ を取れば, Riesz の Hilbert 空間の表現定理より或る $a_i \in H_i$ がただ一つ存在して

$$x_i^*(\cdot) = \langle \cdot, a_i \rangle_{H_i}, \quad \|x_i^*\|_{H_i^*} = \|a_i\|_{H_i}, \quad i = 1, \dots, n$$

を満たす. Cauchy-Schwartz の不等式と併せれば, 任意の

$$x = \sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j \in \bigotimes_{i=1}^n H_i$$

に対し

$$\begin{aligned} (x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*)(x) &= \sum_{j=1}^k (x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*)(x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j) = \sum_{j=1}^k x_1^*(x_1^j) \cdots x_n^*(x_n^j) \\ &= \sum_{j=1}^k \langle x_1^j, a_1 \rangle_{H_1} \cdots \langle x_n^j, a_n \rangle_{H_n} = \sum_{j=1}^k \langle x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j, a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \rangle = \langle x, a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \rangle \\ &\leq \sigma(x) \sigma(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sigma(x) \|a_1\|_{H_1} \cdots \|a_n\|_{H_n} \\ &= \sigma(x) \|x_1^*\|_{H_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{H_n^*} \end{aligned}$$

が成立し (A.10) を得る. ■

定理 A.5.4 (H_i が有限次元なら σ と π は同値).

参考文献

- [1] S. Aida, Rough path analysis: an introduction.
- [2] T. Lyons and Z. Qian, System control and rough paths, Oxford science publications, 2002.
- [3] K. Friz and Nicholas B. Victor, Multidimensional stochastic processes as rough path: theory and applications, 2009.
- [4] M. Sugiura and M. Yokonuma, ジョルダン標準形・テンソル代数, 岩波基礎数学選書, 1990.
- [5] E. Cheney and W. Light, Approximation theory of tensor product spaces, Springer, 1985.
- [6] R. Ryan, Introduction to tensor products of Banach spaces, Springer, 2002.
- [7] mathoverflow, available from <https://mathoverflow.net/questions/277070/tensor-product-space-with-projective-norm-is-incomplete>, 2018/05/24.
- [8] Y. Hirai and K. Matsuura, 自主ゼミ : Normal approximations with Malliavin calculus: From Stein's Method to Universality 用ノート, 2015.
- [9] Y. Hirai, 関数解析ノート : ノルム空間上の有界双線形写像, 2017.
- [10] K. Matsuzaka, 集合・位相入門, 岩波書店, 2016.