ゼミ用ノート
会田先生の資料”Rough path analysis:An Introduction”

基礎工学研究科システム創成専攻
学籍番号 29C17095
百合川尚学

2018 年 4 月 20 日

目次

0.1　導入

以下，d 次元ベクトル $x \in \mathbb{R}^d$ と (m,d) 行列 $a \in \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^d$ について，成分を込めて表現する場合は $x = (x^1, \cdots, x^d)$, $a = (a^i_j)_{1\le i\le m, 1\le j\le d}$ と書く．また $T > 0$ を固定し $C^1 = C^1([0,T] \to \mathbb{R}^d)$ とおく．（端点においては片側微分を考える．）区間 $[s,t] \subset [0,T]$ の分割を $D = \{s = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t\}$ で表現し，分割の全体を $\delta[s,t]$ とおく．$|D| := \max_{1\le i\le N} |t_i - t_{i-1}|$ とし，

$$\sum_D = \sum_{i=1}^N$$

と略記する．

定理 0.1.1 (Riemann-Stieltjes 積分).　$[s,t] \subset [0,T]$ とし，$D \in \delta[s,t]$ についてのみ考えるとき，任意の $x \in C^1$，$f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ に対して次の極限が存在する:[*1]

$$\lim_{|D|\to 0} \sum_D f(x_{s_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) \in \mathbb{R}^m.$$

s_{i-1} は区間 $[t_{i-1}, t_i]$ に属する任意の点であり，極限は s_{i-1} の取り方に依らない．

証明．　各 x^j は C^1-級であるから，平均値の定理より $\sum_D f(x_{s_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})$ の第 k 成分を

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^d \sum_D f^k_j(x_{s_{i-1}})(x^j_{t_i} - x^j_{t_{i-1}})\\ &= \sum_{j=1}^d \sum_D f^k_j(x_{s_{i-1}})\dot{x}^j_{\xi_i}(t_i - t_{i-1}), \quad ({}^\exists \xi_i \in [t_{i-1}, t_i])\end{aligned}$$

と表現できる．各 j,k について

$$\lim_{|D|\to 0} \sum_D f^k_j(x_{s_{i-1}})\dot{x}^j_{\xi_i}(t_i - t_{i-1})$$

[*1] 極限の存在を保証する条件としては，f の有界性と微分可能性は必要ない．

は通常の連続関数の Riemann 積分

$$\int_s^t f_j^k(x_u)\dot{x}_u^j\,du$$

に収束する. ∎

定義 0.1.2 (C^1-**級のパスに対する汎関数**). $x \in C^1$ と $f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ に対して，$[s,t] \subset [0,T]$ における Riemann-Stieltjes 積分を I で表現する:

$$I_{s,t}(x) = \int_s^t f(x_u)\,dx_u \coloneqq \lim_{|D|\to 0}\sum_D f(x_{t_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}),$$

$$\left[\int_s^t f(x_u)\,dx_u\right]^k = \sum_{j=1}^d \int_s^t f_j^k(x_u)\,dx_u^j, \quad (k = 1, \cdots, m).$$

ただし $D \in \delta[s,t]$ のみを考える.

C^1 は次で定めるノルム $\|\cdot\|_{C^1}$ により Banach 空間となる:

$$\|x\|_{C^1} \coloneqq \sup_{t\in[0,T]}|x(t)| + \sup_{t\in[0,T]}|\dot{x}(t)|.$$

定理 0.1.3 ($\|\cdot\|_{C^1}$ **に関する連続性**). $[s,t] \subset [0,T]$ とし，C^1 には $\|\cdot\|_{C^1}$ でノルム位相を入れる．このとき，$C^1 \ni x \longmapsto I_{s,t}(x) \in \mathbb{R}^m$ は連続である.

証明. C^1 の第一可算性により点列連続性と連続性は一致するから，$x^n \longrightarrow x$ のとき $I_{s,t}(x^n) \longrightarrow I_{s,t}(x)$ が従うことを示せばよい．各 j,k について

$$\int_s^t f_j^k(x_u^n)\,dx_u^{n,j} \longrightarrow \int_s^t f_j^k(x_u)\,dx_u^j, \quad (n \longrightarrow \infty) \tag{1}$$

が成り立つことを示せば十分である．連続性より $M \coloneqq \sup_{u\in[s,t]}|f(x_u)| < \infty$ が定まり

$$\begin{aligned}\left|\int_s^t f_j^k(x_u^n)\,dx_u^{n,j} - \int_s^t f_j^k(x_u)\,dx_u^j\right| &= \left|\int_s^t f_j^k(x_u^n)\dot{x}_u^{n,j}\,du - \int_s^t f_j^k(x_u)\dot{x}_u^j\,du\right| \\ &\leq \int_s^t \left|f_j^k(x_u^n)\dot{x}_u^{n,j} - f_j^k(x_u^n)\dot{x}_u^j\right|du + \int_s^t \left|f_j^k(x_u^n)\dot{x}_u^j - f_j^k(x_u)\dot{x}_u^j\right|du \\ &\leq M\|x^n - x\|_{C^1}(t-s) + \sup_{u\in[s,t]}\left|f_j^k(x_u^n) - f_j^k(x_u)\right|\|x\|_{C^1}(t-s) \end{aligned} \tag{2}$$

が成り立つ．いま，任意に $\epsilon > 0$ を取れば，或る $\epsilon > \delta > 0$ が存在して $v,w \in x([s,t])$, $|v-w| < \delta$ なら $|f_j^k(v) - f_j^k(w)| < \epsilon$ を満たす（一様連続）．すなわち $\left\|x^{(n)} - x\right\|_{C^1} < \delta$ なら

$$\sup_{t\in[s,t]}\left|f_j^k(x_t^n) - f_j^k(x_t)\right| < \epsilon$$

が成立する．$\|x^n - x\|_{C^1} \longrightarrow 0$ の仮定より，或る自然数 N が存在して $\|x^n - x\|_{C^1} < \delta\ (n > N)$ が満たされるから，(2) $< \epsilon[M(t-s) + \|x\|_{C^1}(t-s)]\ (n > N)$ が成り立ち (1) が従う. ∎

定義 0.1.4 (p-variation). $[0,T]$ 上の $\mathbb{R}^d$ 値関数 x に対し，p-variation を次で定める:

$$\| x \|_{p,[s,t]} := \left\{ \sup_{D\in\delta[s,t]} \sum_D \left| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right|^p \right\}^{1/p}.$$

特に，$\|\cdot\|_{p,[0,T]}$ を $\|\cdot\|_p$ と表記する．また $p \geq 1$ として，線形空間 $B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$ を

$$B_{p,T}(\mathbb{R}^d) := \left\{ x : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^d \ ; \quad x_0 = 0,\ x : \text{continuous},\ \| x \|_p < \infty \right\}$$

により定める．

次の結果によれば，$0 < p < 1$ に対し $B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$ を定めても 0 の定数関数のみの空間でしかない．

定理 0.1.5 ($0 < p < 1$ **に対して有界** p-variation **なら定数**). $x : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ を連続関数とする．このとき，$p \in (0,1)$ に対し $\| x \|_p < \infty$ が成り立つなら x は定数関数である．

証明. $t \in [0,T]$ を任意に取り固定する．このとき全ての $D \in \delta[0,t]$ に対して，

$$\begin{aligned} |x_t - x_0| &\leq \sum_D \left| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right| \leq \max_D \left| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right|^{1-p} \sum_D \left| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right|^p \\ &\leq \max_D \left| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right|^{1-p} \| x \|_p \end{aligned}$$

が成り立ち，x の一様連続性から右辺は $|D| \longrightarrow 0$ で 0 に収束し，$x_t = x_0$ が従う． ∎

$p \geq 1$ の場合，Minkowski の不等式によれば，任意の $D \in \delta[s,t]$ に対し

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_D \left| (x_{t_i} + y_{t_i}) - (x_{t_{i-1}} + y_{t_{i-1}}) \right|^p \right\}^{1/p} &\leq \left\{ \sum_D \left| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right|^p \right\}^{1/p} + \left\{ \sum_D \left| y_{t_i} - y_{t_{i-1}} \right|^p \right\}^{1/p} \\ &\leq \| x \|_{p,[s,t]} + \| y \|_{p,[s,t]} \end{aligned}$$

が成り立ち $\| x + y \|_{p,[s,t]} \leq \| x \|_{p,[s,t]} + \| y \|_{p,[s,t]}$ を得る．

定理 0.1.6. $B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$ は $\|\cdot\|_p$ をノルムとする Banach 空間である．

証明. 完備性を示す．

第一段 $(x^n)_{n=1}^\infty \subset B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$ を Cauchy 列とすれば，任意の $\epsilon > 0$ に対して或る $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ が存在し

$$\| x^n - x^m \|_p = \left\{ \sup_{D\in\delta[0,T]} \sum_D \left| \left(x^n_{t_i} - x^m_{t_i} \right) - \left(x^n_{t_{i-1}} - x^m_{t_{i-1}} \right) \right|^p \right\}^{1/p} < \epsilon, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

を満たす．いま，任意の $t \in [0,T]$ に対して $[0,T]$ の分割 $D = \{0 \leq t \leq T\}$ を考えれば

$$|x^n_t - x^m_t| < \epsilon, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

が得られ，実数の完備性より或る $x_t \in \mathbb{R}^d$ が存在して

$$|x_t^n - x_t| < \epsilon \quad (n > n_\epsilon)$$

を満たす．この収束は t に関して一様であるから，$t \longmapsto x_t$ は 0 出発かつ連続である．

第二段　$\| x^n - x \|_p \longrightarrow 0 \ (n \longrightarrow \infty)$ を示す．前段によれば，任意の $D \in \delta[0,T]$ に対し

$$\sum_D \left|(x_{t_i}^m - x_{t_i}^n) - (x_{t_{i-1}}^m - x_{t_{i-1}}^n)\right|^p < \epsilon^p, \quad (n,m > n_\epsilon)$$

が成り立っている．D はせいぜい有限個の分割であるから，$m \longrightarrow \infty$ として

$$\sum_D \left|(x_{t_i} - x_{t_i}^n) - (x_{t_{i-1}} - x_{t_{i-1}}^n)\right|^p < \epsilon^p, \quad (n > n_\epsilon)$$

が従い，D の任意性より $\| x^n - x \|_p < \epsilon \ (n > n_\epsilon)$ を得る．■

定理 0.1.7.　$p \geq 1$ とする．また $x_0 = 0$ を満たす $x \in C^1$ の全体が作る線形空間を $\tilde{C}^1$ とおく．

(1)　$x \in C^1$ ならば $\| x \|_p < \infty$ が成り立つ．ただちに，$\| \cdot \|_p$ は $\tilde{C}^1$ においてノルムとなる．

(2)　$\tilde{C}^1$ において，$\| \cdot \|_{C^1}$ で導入する位相は $\| \cdot \|_p$ で導入する位相より強い．

証明.

$p = 1$ の場合　平均値の定理より，任意の $D \in \delta[0,T]$ に対し

$$\sum_D \left|x_{t_i} - x_{t_{i-1}}\right| \leq \sum_D \| x \|_{C^1} (t_i - t_{i-1}) = \| x \|_{C^1} T < \infty$$

が成り立ち $\| x \|_1 < \infty$ が従う．

$p > 1$ の場合　q を p の共役指数とする．任意の $D \in \delta[0,T]$ に対し，Hölder の不等式より

$$\begin{aligned}\sum_D \left|x_{t_i} - x_{t_{i-1}}\right|^p &= \sum_D \left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{x}_u \, du\right|^p \leq \sum_D (t_i - t_{i-1}) \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} |\dot{x}_u|^q \, du\right)^{p/q} \\ &\leq \sum_D (t_i - t_{i-1}) \left(\int_0^T \| x \|_{C^1}^q \, du\right)^{p/q} = \| x \|_{C^1}^p T^p\end{aligned}$$

が成立し，$\| x \|_p < \infty$ が従う．

以上より，$p \geq 1$ ならば $\| x \|_p \leq T \| x \|_{C^1} \ (x \in C^1)$ が成り立ち (2) の主張を得る．■

次節の考察対象は主に定理 0.1.3 と定理 0.1.7 に関係する．定理 0.1.3 によれば，C^1 に $\| \cdot \|_{C^1}$ でノルム位相を導入した場合，$f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ に対して $C^1 \ni x \longmapsto I_{s,t}(x)$ は連続である．一方で定理 0.1.3 によれば，0 出発 C^1-パス空間 $\tilde{C}^1$ に $\| \cdot \|_p$ でノルム位相を導入した場合，$\tilde{C}^1 \ni x \longmapsto I_{s,t}(x)$ が連続であるという保証はない．しかし，次節以後の結果により，$1 \leq p < 3$ かつ $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ が満たされているなら $\tilde{C}^1 \ni x \longmapsto I_{s,t}(x)$ は或る意味での連続性を持つ．

0.2 連続性定理

定義 0.2.1 (記号の定義). $x \in C^1$, $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ に対し次を定める．

$$\begin{aligned}
&\Delta_T := \{\ (s,t)\ ;\quad 0 \le s \le t \le T\ \},\\
&X^1 : \Delta_T \longrightarrow \mathbb{R}^d\ \left((s,t) \longmapsto X^1_{s,t} = x_t - x_s\right),\\
&X^2 : \Delta_T \longrightarrow \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d\ \left((s,t) \longmapsto X^2_{s,t} = \int_s^t (x_u - x_s) \otimes dx_u\right),
\end{aligned}$$

$$\tilde{I}_{s,t}(x) := f(x_s) X^1_{s,t} = f(x_s)(x_t - x_s),$$

$$J_{s,t}(x) := f(x_s) X^1_{s,t} + (\nabla f)(x_s) X^2_{s,t}.$$

以降，$a, b, c, d \in \mathbb{R}^d$ に対して次の表現を使う:

$$\begin{aligned}
[a \otimes b]^i_j &= a^i b^j,\\
\left[(\nabla f)(x_s) X^2_{s,t}\right]^i &= \sum_{j,k=1}^d \partial_k f^i_j(x_s) \int_s^t \left(x^k_u - x^k_s\right)\, dx^j_u,\\
[(\nabla f)(x_s)(a \otimes b)]^i &= \sum_{j,k=1}^d \partial_k f^i_j(x_s) a^k b^j,\\
\left[(\nabla^2 f)(x_s)(a \otimes b \otimes c)\right]^i &= \sum_{j,k,v=1}^d \partial_v \partial_k f^i_j(x_s) a^v b^k c^j,\\
\left[(\nabla^3 f)(x_s)(a \otimes b \otimes c \otimes d)\right]^i &= \sum_{j,k,v,w=1}^d \partial_w \partial_v \partial_k f^i_j(x_s) a^w b^v c^k d^j.
\end{aligned}$$

定理 0.2.2. $[s,t] \subset [0,T]$, $x \in C^1$, $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ とする．$D \in \delta[s,t]$ に対し

$$\tilde{I}_{s,t}(x, D) := \sum_D \tilde{I}_{t_{i-1},t_i}(x), \quad J_{s,t}(x, D) := \sum_D J_{t_{i-1},t_i}(x)$$

を定めるとき，次が成立する:

$$I_{s,t}(x) = \lim_{|D|\to 0} \tilde{I}_{s,t}(x, D) = \lim_{|D|\to 0} J_{s,t}(x, D).$$

証明. 第一の等号は $I_{s,t}(x)$ の定義によるから，第二の等号を証明する．まず，

$$\begin{aligned}
I_{s,t}(x) &= \int_s^t f(x_u)\, dx_u\\
&= \int_s^t f(x_s) + f(x_u) - f(x_s)\, dx_u\\
&= \int_s^t f(x_s)\, dx_u + \int_s^t \int_0^1 (\nabla f)(x_s + \theta(x_u - x_s)) \left(X^1_{s,u} \otimes \dot{x}_u\right)\, d\theta\, du\\
&= f(x_s) X^1_{s,t} + (\nabla f)(x_s) X^2_{s,t}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_s^t \int_0^1 \{(\nabla f)(x_s+\theta(x_u-x_s))-(\nabla f)(x_s)\}\left(X_{s,u}^1\otimes \dot{x}_u\right)\,d\theta\,du\\
&=J_{s,t}(x)+\int_s^t\int_0^1\int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_s+r(x_u-x_s))\left(X_{s,u}^1\otimes X_{s,u}^1\otimes \dot{x}_u\right)\,dr\,d\theta\,du
\end{aligned}
$$

が成り立つ．$[0,T]\ni t\longmapsto x_t$ の連続性より，最下段式中の $x_s+r(x_u-x_s)$ $(0\le r\le 1,\ s\le u\le t)$ は或るコンパクト集合 K に含まれ，f が C^2-級関数であるから

$$
M := \sum_{i,j,k,v} \sup_{x\in K}\left|\partial_v\partial_k f_j^i(x)\right|
$$

として $M<\infty$ を定めれば

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_s^t\int_0^1\int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_s+r(x_u-x_s))\left(X_{s,u}^1\otimes X_{s,u}^1\otimes \dot{x}_u\right)\,dr\,d\theta\,du\right|\\
&\quad\le \int_s^t\int_0^1\int_0^\theta \left|(\nabla^2 f)(x_s+r(x_u-x_s))\left(X_{s,u}^1\otimes X_{s,u}^1\otimes \dot{x}_u\right)\right|\,dr\,d\theta\,du\\
&\quad\le M\int_s^t |X_{s,u}^1|^2|\dot{x}_u|\,du\\
&\quad\le M\|x\|_{C^1}^3\int_s^t (u-s)^2\,du
\end{aligned}
$$

が出る．特に $D\in\delta[s,t]$ に対して

$$
\begin{aligned}
\sum_D\int_{t_{i-1}}^{t_i}(u-t_{i-1})^2\,du &\le \sum_D |D|\int_{t_{i-1}}^{t_i}(u-t_{i-1})\,du\\
&\le \sum_D |D|\int_{t_{i-1}}^{t_i}(u-s)\,du \le \frac{1}{2}(t-s)^2|D|\longrightarrow 0 \quad (|D|\longrightarrow 0)
\end{aligned}
$$

が成立するから，

$$
\left|I_{s,t}(x)-J_{s,t}(x,D)\right| \le \sum_D\left|I_{t_{i-1},t_i}(x)-J_{t_{i-1},t_i}(x)\right|\longrightarrow 0 \quad (|D|\longrightarrow 0)
$$

が従い定理の主張を得る． ∎

定義 0.2.3 (control function). 関数 $\omega:\Delta_T\longrightarrow[0,\infty)$ が連続かつ任意の $0\le s\le u\le t\le T$ に対して

$$
\omega(s,u)+\omega(u,t)\le\omega(s,t) \tag{3}
$$

を満たすとき，ω を control function と呼ぶ．

式 (3) から $\omega(t,t)=0$ $(\forall t\in[0,T])$ が従う．

定義 0.2.4 (ノルム空間値写像の p-variation). $(V,\|\cdot\|)$ をノルム空間，$p\ge 1$ とする．このとき連続写像 $\psi:\Delta_T\longrightarrow V$ に対する p-variation を

$$
\|\psi\|_{p,[s,t]} := \left\{\sup_{D\in\delta[s,t]}\sum_D\left\|\psi_{t_{i-1},t_i}\right\|^p\right\}^{1/p},\quad ((s,t)\subset[0,T])
$$

で定める．特に $\|\cdot\|_{p,[0,T]}$ を $\|\cdot\|_p$ と書く．

定理 0.2.5. $(V, \|\cdot\|)$ をノルム空間，$p \geq 1$ とする．$\|\psi\|_p < \infty$ かつ $\psi_{t,t} = 0\ (\forall t \in [0,T])$ を満たす連続写像 $\psi : \Delta_T \longrightarrow V$ に対して

$$\omega : \Delta_T \ni (s,t) \longmapsto \|\psi\|_{p,[s,t]}^p$$

により定める ω は control function である．

証明. $\|\psi\|_p < \infty$ の仮定より ω は $[0,\infty)$ 値であるから，以下では式 (3) の成立と連続性を示す．

第一段 ω が式 (3) を満たすことを示す．実際，任意に $D_1 \in \delta[s,u], D_2 \in \delta[u,t]$ を取れば

$$\sum_{D_1} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p + \sum_{D_2} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p = \sum_{D_1 \cup D_2} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p \leq \|\psi\|_{p:[s,t]}^p$$

が成り立つ．左辺の D_1, D_2 の取り方は独立であるから，それぞれに対し上限を取れば

$$\|\psi\|_{p:[s,u]}^p + \|\psi\|_{p:[u,t]}^p \leq \|\psi\|_{p:[s,t]}^p$$

が従う．

第二段 任意の $[s,t] \subset [0,T]$ について，

$$\lim_{h \to +0} \omega(s,t+h) = \inf_{h>0} \omega(s,t+h), \qquad \lim_{h \to +0} \omega(s-h,t) = \inf_{h>0} \omega(s-h,t),$$
$$\lim_{h \to +0} \omega(s,t-h) = \sup_{h>0} \omega(s,t-h), \qquad \lim_{h \to +0} \omega(s+h,t) = \sup_{h>0} \omega(s+h,t)$$

が成立する．実際 $\omega(s,t+h)$ について見れば，これは下に有界かつ $h \to +0$ に対し単調減少であるから極限が確定し下限に一致する．残りの三つも同様の理由で成立する．

第二段 任意の $t \in [0,T)$ に対して次を示す:

$$\lim_{h \to +0} \omega(t,t+h) = \inf_{h>0} \omega(t,t+h) = 0.$$

第一の等号は前段より従うから，第二の等号を背理法により証明する．いま

$$\inf_{h>0} \omega(t,t+h) =: \delta > 0$$

と仮定する．ψ の連続性より或る h_1 が存在して

$$\left\| \psi_{t,t+h} \right\|^p = \left\| \psi_{t,t+h} - \psi_{t,t} \right\|^p < \frac{\delta}{8}, \quad (\forall h < h_1) \tag{4}$$

が成立するから，任意に $h_0 < h_1$ を取り固定する．一方で $\omega(t,t+h_0) \geq \delta$ より

$$\sum_{i=1}^N \left\| \psi_{\tau_{i-1},\tau_i} \right\|^p > \frac{7\delta}{8}$$

を満たす $D = \{t = \tau_0 < \tau_1 < \cdots, \tau_N = t + h_0\} \in \delta[t,t+h_0]$ が存在し，(4) と併せて

$$\sum_{i=2}^N \left\| \psi_{\tau_{i-1},\tau_i} \right\|^p > \frac{7\delta}{8} - \left\| \psi_{t,\tau_1} \right\|^p > \frac{7\delta}{8} - \frac{\delta}{8} = \frac{3\delta}{4}$$

を得る．また，$\omega(t,\tau_1) \geq \delta$ より或る $D' \in \delta[t,\tau_1]$ が存在して

$$\sum_{D'} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p > \frac{3\delta}{4}$$

を満たすから，$D' \cup \{\tau_1 < \cdots, \tau_N = t + h_0\} \in \delta[t, t+h_0]$ より

$$\omega(t, t+h_0) > \sum_{D'} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p + \sum_{i=2}^{N} \left\| \psi_{\tau_{i-1},\tau_i} \right\|^p > \frac{3\delta}{2}$$

が従うが，$h_0 < h_1$ の任意性と単調減少性により

$$\delta = \inf_{h>0} \omega(t, t+h) = \inf_{h_1 > h > 0} \omega(t, t+h) \geq \frac{3\delta}{2}$$

となり矛盾が生じる．同様にして

$$\lim_{h \to +0} \omega(t-h, t) = 0, \quad (\forall t \in (0, T])$$

も成立する．

第三段　任意に $s \in [0, T)$ を取り固定し，$[s, T) \ni t \longmapsto \omega(s, t)$ が右連続であることを示す．

$$\lim_{h \to +0} \omega(s, t+h) \leq \omega(s, t) \tag{5}$$

を示せば，第二段より逆向きの不等号も従い右連続性を得る．任意に $h, \epsilon > 0$ を取れば，

$$\omega(s, t+h) - \epsilon \leq \sum_{D} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p$$

を満たす $D \in \delta[s, t+h]$ が存在する．$D_1 := [s, t] \cap D,\ D_2 := D \backslash D_1$ とおいて D_2 の最小元を

$$\omega(s, t+h) - \epsilon \leq \sum_{D_1} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p + \sum_{D_2} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p \leq \omega(s, t) + \omega(t, t+h)$$

が成り立つ．$h \longrightarrow +0$ として

$$\lim_{h \to +0} \omega(s, t+h) - \epsilon \leq \omega(s, t)$$

が従い，ϵ の任意性より (5) が出る．同様にして $s \longmapsto \omega(s, t)$ の左連続性も成立する:

$$\lim_{h \to +0} \omega(s-h, t) = \omega(s, t).$$

第四段　$t \longmapsto \omega(s, t)$ の左連続性を示す．

定理 0.2.6 (control function の例).　以下の関数 $\omega : \Delta_T \longrightarrow [0, \infty)$ は control function である．

(1)　$\omega := \left(\omega_1^r + \omega_2^r\right)^{1/r}, \quad (0 < r \leq 1,\ \omega_1, \omega_2 : \text{control function}).$

(2)　$\omega : (s, t) \longmapsto \left\| X^1 \right\|_{p:[s,t]}^p, \quad (p \geq 1,\ x \in B_{p,T}(\mathbb{R}^d)).$

(3)　$\omega : (s, t) \longmapsto \left\| X^2 \right\|_{p:[s,t]}^p, \quad (p \geq 1,\ x \in C^1).$

行列 $a = (a^i_j)$ のノルムは $|a| = \sqrt{\sum_{i,j} |a^i_j|^2}$ として考える．

定理 0.2.7.

(1)

(2)

(3) 任意の $[s,t] \subset [0,T]$ に対して $\left\| X^2 \right\|_{p:[s,t]}^p < \infty$ を示せば，あとは上と同じ理由により定理の主張が得られる．実際，任意の分割 $D = \{s = t_0 < \cdots < t_N = t\}$ に対し

$$\begin{aligned}
\left\| X^2_{t_{i-1},t_i} \right\| &\le \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (x_u - x_{t_{i-1}}) \otimes \dot{x}_u \, du \right| \\
&\le \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left| (x_u - x_{t_{i-1}}) \otimes \dot{x}_u \right| \, du \\
&\le \| x \|_{C^1}^2 \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u-s) \, du \right\}^{1/p} \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u-s) \, du \right\}^{1-1/p} \\
&\le \| x \|_{C^1}^2 \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u-s) \, du \right\}^{1/p} \left\{ \int_{s}^{t} (u-s) \, du \right\}^{1-1/p}
\end{aligned}$$

が成り立つから，

$$\begin{aligned}
\sum_D \left\| X^2_{t_{i-1},t_i} \right\|^p &\le \sum_D \| x \|_{C^1}^{2p} \left\{ \frac{1}{2}(t-s)^2 \right\}^{p-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u-s) \, du \\
&= \| x \|_{C^1}^{2p} \left\{ \frac{1}{2}(t-s)^2 \right\}^{p-1} \int_{s}^{t} (u-s) \, du = \| x \|_{C^1}^{2p} \left\{ \frac{1}{2}(t-s)^2 \right\}^{p}
\end{aligned}$$

により $\left\| X^2 \right\|_{p:[s,t]}^p < \infty$ が従う． ∎

証明.

$$\begin{aligned}
&\omega_1(s,u)\omega_2(s,u) + \omega_1(u,t)\omega_2(u,t) \\
&= \{\omega_1(s,u) + \omega_1(u,t)\}\,\omega_2(s,u) + \omega_1(u,t)\,\{\omega_2(u,t) - \omega_2(s,u)\} \\
&\le \omega_1(s,t)\omega_2(s,u) + \omega_1(u,t)\,\{\omega_2(u,t) - \omega_2(s,u)\} \\
&\le \omega_1(s,t)\omega_2(s,u) + \omega_1(u,t)\omega_2(u,t) \\
&\le \omega_1(s,t)\,\{\omega_2(s,u) + \omega_2(u,t)\} \\
&\le \omega_1(s,t)\omega_2(s,t)
\end{aligned}$$

補題 0.2.8 (division point). ω を Δ_T 上の control function とする．$D = \{s = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t\}$ について，$N \ge 2$ の場合或る $1 \le i \le N-1$ が存在して次を満たす:

$$\omega(t_{i-1}, t_{i+1}) \le \frac{2\omega(s,t)}{N-1}.$$

以後この t_i を D の division point と呼ぶ.

証明. ∎

定理 0.2.9 ($1 \le p < 2$ の場合の連続性定理). $1 \le p < 2$ とし，$x_0 = y_0$ を満たす $x, y \in C^1$ と $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$, $0 < \epsilon, R < \infty$ を任意に取る．このとき，

$$\left\| X^1 \right\|_p, \left\| Y^1 \right\|_p \le R, \quad \left\| X^1 - Y^1 \right\|_p \le \epsilon$$

なら，或る定数 $C = C(p, R, f)$ が存在し，任意の $0 \le s \le t \le T$ に対して次が成立する:

$$\left| I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y) \right| \le \epsilon C.$$

証明. $[s, t] \subset [0, T]$ とする．

第一段　$\omega : \Delta_T \longrightarrow [0, \infty)$ を

$$\omega(\alpha, \beta) = \left\| X^1 \right\|_{p,[\alpha,\beta]}^p + \left\| Y^1 \right\|_{p,[\alpha,\beta]}^p + \epsilon^{-p} \left\| X^1 - Y^1 \right\|_{p,[\alpha,\beta]}^p, \quad ((\alpha, \beta) \in \Delta_T)$$

で定めれば，定理 0.2.6 により $1 \le p$ の下で ω は control function である．

第二段　任意に $[s, t]$ の分割 $D = \{s = t_0 < \cdots < t_N = t\}$ $(N \ge 2)$ を取れば，補題 0.2.8 より division point $t_{(0)}$ が存在する．$D_{-0} := D$, $D_{-1} := D \backslash \{t_{(0)}\}$ と定め，D_{-1} の division point $t_{(1)}$ を除き $D_{-2} := D_{-1} \backslash \{t_{(1)}\}$ と定める．この操作を繰り返せば $t_{(k)}, D_{-k}$ $(k = 0, 1, \cdots, N-1)$ が得られ，

$$\begin{aligned}
&\tilde{I}_{s,t}(x, D) - \tilde{I}_{s,t}(y, D) \\
&\quad = \sum_{k=0}^{N-2} \left[\left\{ \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1}) \right\} - \left\{ \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k-1}) \right\} \right] \\
&\quad\quad + \left\{ \tilde{I}_{s,t}(x) - \tilde{I}_{s,t}(y) \right\}
\end{aligned} \tag{6}$$

と表現できる．

第二段　式 (6) について，次を満たす定数 C_1 が存在することを示す:

$$|(6)| \le \epsilon C_1 \tag{7}$$

見やすくするために $t_k = t_{(k)}$ と書き直せば，

$$\begin{aligned}
&\left\{ \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1}) \right\} - \left\{ \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k-1}) \right\} \\
&= \{f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}})\} X^1_{t_k, t_{k+1}} - \{f(y_{t_k}) - f(y_{t_{k-1}})\} Y^1_{t_k, t_{k+1}} \\
&= \{f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}})\} \left(X^1_{t_k, t_{k+1}} - Y^1_{t_k, t_{k+1}} \right) \\
&\quad + \{f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}})\} Y^1_{t_k, t_{k+1}} - \{f(y_{t_k}) - f(y_{t_{k-1}})\} Y^1_{t_k, t_{k+1}} \\
&= \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X^1_{t_{k-1}, t_k} \otimes \left(X^1_{t_k, t_{k+1}} - Y^1_{t_k, t_{k+1}} \right) \, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X^1_{t_{i_k - 1}, t_k} \otimes Y^1_{t_k, t_{i_k + 1}} \, d\theta \\
&\quad - \int_0^1 (\nabla f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) Y^1_{t_{i_k - 1}, t_k} \otimes Y^1_{t_k, t_{i_k + 1}} \, d\theta \\
&= \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X^1_{t_{i_k - 1}, t_k} \otimes \left(X^1_{t_k, t_{i_k + 1}} - Y^1_{t_k, t_{i_k + 1}} \right) \, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) \left(X^1_{t_{k-1}, t_k} - Y^1_{t_{k-1}, t_k} \right) \otimes Y^1_{t_k, t_{k+1}} \, d\theta
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}))Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}}\, d\theta \\
&- \int_0^1 (\nabla f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}}\, d\theta \\
= &\int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}))X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes \left(X^1_{t_k,t_{k+1}} - Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right)\, d\theta \\
&+ \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}))\left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right) \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}}\, d\theta \\
&+ \int_0^1 \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}} + r(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) - y_{t_{k-1}} - \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})))) \\
&\qquad \left(X^1_{0,t_{k-1}} - Y^1_{0,t_{k-1}}\right) \otimes Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta\ {}^{*2} \\
&+ \int_0^1 \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}} + r(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) - y_{t_{k-1}} - \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})))) \\
&\qquad \theta\left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right) \otimes Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta
\end{aligned}
$$

が成り立つ．補題 0.2.8 より

$$
\begin{aligned}
&\left|X^1_{t_{k-1},t_k}\right|, \left|Y^1_{t_{k-1},t_k}\right|, \left|X^1_{t_k,t_{k+1}}\right|, \left|Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \le \omega(t_{k-1}, t_{k+1})^{1/p} \le \left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1}\right)^{1/p}, \\
&\left|X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right|, \left|X^1_{t_k,t_{k+1}} - Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \le \epsilon\omega(t_{k-1}, t_{k+1})^{1/p} \le \epsilon\left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1}\right)^{1/p}
\end{aligned}
$$

が満たされ，また

$$
\left|X^1_{0,t_{k-1}} - Y^1_{0,t_{k-1}}\right| \le \epsilon\omega(0, t_{k-1})^{1/p} \le \epsilon\omega(0,T)^{1/p} \le \epsilon\,(2R^p + 1)^{1/p}
$$

でもあるから，

$$
M := \sum_{i,j} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f^i_j(x)| + \sum_{i,j,k} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial_k f^i_j(x)| + \sum_{i,j,k,v} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial_v \partial_k f^i_j(x)| \tag{8}
$$

と定めて

$$
\begin{aligned}
&\left|\left\{\tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1})\right\} - \left\{\tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k-1})\right\}\right| \\
&\le M\left|X^1_{t_{k-1},t_k}\right|\left|X^1_{t_k,t_{k+1}} - Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\quad + M\left|X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right|\left|Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\quad + M\left|X^1_{0,t_{k-1}} - Y^1_{0,t_{k-1}}\right|\left|Y^1_{t_{k-1},t_k}\right|\left|Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\quad + M\left|X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right|\left|Y^1_{t_{k-1},t_k}\right|\left|Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\le \epsilon M\left[2 + 2\,(2R^p + 1)^{1/p}\right]\left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1}\right)^{2/p} \\
&\le \epsilon M\left[2 + 2\,(2R^p + 1)^{1/p}\right]2^{2/p}\,(2R^p + 1)^{2/p}\left(\frac{1}{N-k-1}\right)^{2/p}
\end{aligned}
$$

を得る．

$$
C_1' := M\left[2 + 2\,(2R^p + 1)^{1/p}\right]2^{2/p}\,(2R^p + 1)^{2/p}
$$

---

*2 $x_0 = y_0$ の仮定より $x_{t_{k-1}} - y_{t_{k-1}} = X^1_{0,t_{k-1}} - Y^1_{0,t_{k-1}}$ が成り立つ．

とおけば

$$
|(6)| \leq \sum_{k=0}^{N-2} \epsilon C_1' \left(\frac{1}{N-k-1}\right)^{2/p} < \epsilon C_1' \zeta\left(\frac{2}{p}\right)
$$

が成立し，$p < 2$ より $\zeta(2/p) < \infty$ であるから $C_1 \coloneqq C_1'\zeta(2/p)$ とおいて (7) が従う．

第三段　$x_0 = y_0$ の仮定により $x_s - y_s = X_{0,s}^1 - Y_{0,s}^1$ が成り立ち

$$
\begin{aligned}
\left|\tilde{I}_{s,t}(x) - \tilde{I}_{s,t}(y)\right| &= \left|f(x_s)X_{s,t}^1 - f(y_s)Y_{s,t}^1\right| \\
&\leq \left|f(x_s)X_{s,t}^1 - f(x_s)Y_{s,t}^1\right| + \left|f(x_s)Y_{s,t}^1 - f(y_s)Y_{s,t}^1\right| \\
&\leq M\left|X_{s,t}^1 - Y_{s,t}^1\right| + \left|\int_0^1 (\nabla f)(y_s + \theta(x_s - y_s))\left[\left(X_{0,s}^1 - Y_{0,s}^1\right) \otimes Y_{s,t}^1\right] d\theta\right| \\
&\leq M\left|X_{s,t}^1 - Y_{s,t}^1\right| + M\left|X_{0,s}^1 - Y_{0,s}^1\right|\left|Y_{s,t}^1\right| \\
&\leq M\epsilon\omega(s,t)^{1/p} + M\epsilon\omega(0,s)^{1/p}\omega(s,t)^{1/p} \\
&\leq \epsilon M\left[(2R^p + 1)^{1/p} + (2R^p + 1)^{2/p}\right]
\end{aligned}
$$

が従う．ここで $C_2 \coloneqq M\left[(2R^p + 1)^{1/p} + (2R^p + 1)^{2/p}\right]$ とおく．

第四段　第二段と第三段より，任意の $D \in \delta[s,t]$ に対し

$$
\left|\tilde{I}_{s,t}(x, D) - \tilde{I}_{s,t}(y, D)\right| \leq \epsilon(C_1 + C_2)
$$

が成立し．定理 0.2.2 により $|D| \longrightarrow 0$ として

$$
\left|I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y)\right| \leq \epsilon(C_1 + C_2)
$$

が出る． ∎

定理 0.2.10 ($2 \leq p < 3$ **の場合の連続性定理**).　$2 \leq p < 3$ とし，$x_0 = y_0$ を満たす $x, y \in C^1$ と $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$, $0 < \epsilon, R < \infty$ を任意に取る．このとき，

$$
\begin{aligned}
&\left\| X^1 \right\|_p, \left\| Y^1 \right\|_p, \left\| X^2 \right\|_{p/2}, \left\| Y^2 \right\|_{p/2} \leq R < \infty, \\
&\left\| X^1 - Y^1 \right\|_p, \left\| X^2 - Y^2 \right\|_{p/2} \leq \epsilon
\end{aligned}
$$

なら，或る定数 $C = C(p, R, f)$ が存在し，任意の $0 \leq s \leq t \leq T$ に対して次が成立する:

$$
\left|I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y)\right| \leq \epsilon C.
$$

証明.　$[s,t] \subset [0,T]$ とする．

第一段　$\omega : \Delta_T \longrightarrow [0,\infty)$ を

$$
\begin{aligned}
\omega(\alpha,\beta) = &\left\| X^1 \right\|_{p,[\alpha,\beta]}^p + \left\| Y^1 \right\|_{p,[\alpha,\beta]}^p + \left\| X^2 \right\|_{p/2,[\alpha,\beta]}^{p/2} + \left\| Y^2 \right\|_{p/2,[\alpha,\beta]}^{p/2} \\
&+ \epsilon^{-p}\left\| X^1 - Y^1 \right\|_{p,[\alpha,\beta]}^p + \epsilon^{-p/2}\left\| X^2 - Y^2 \right\|_{p/2,[\alpha,\beta]}^{p/2}, \quad ((\alpha,\beta) \in \Delta_T)
\end{aligned}
$$

で定めれば，定理 0.2.6 により $2 \leq p$ の下で ω は control function である．

第二段　$D \in \delta[s,t]$ に対し，定理 0.2.9 の証明と同様にして t_{i_k}, D_{-k} を構成すれば

$$
\begin{aligned}
&J_{s,t}(x,D) - J_{s,t}(y,D) \\
&\quad = \sum_{k=0}^{N-2} \left[\{J_{s,t}(x,D_{-k}) - J_{s,t}(x,D_{-k-1})\} - \{J_{s,t}(y,D_{-k}) - J_{s,t}(y,D_{-k-1})\}\right] \\
&\quad\quad + \{J_{s,t}(x) - J_{s,t}(y)\}
\end{aligned} \tag{9}
$$

と表現できる．

第三段　$J_{s,t}(x,D_{-k}) - J_{s,t}(x,D_{-k-1})$ を変形する．以降 $t_i = t_{i_k}$ と書き直せば

$$
\begin{aligned}
&J_{s,t}(x,D_{-k}) - J_{s,t}(x,D_{-k-1}) \\
&\quad = J_{t_i-1,t_i}(x) + J_{t_i,t_i+1}(x) - J_{t_i-1,t_i+1}(x) \\
&\quad = f(x_{t_i-1})X^1_{t_i-1,t_i} + f(x_{t_i})X^1_{t_i,t_i+1} - f(x_{t_i-1})X^1_{t_i-1,t_i+1} \\
&\quad\quad + (\nabla f)(x_{t_i-1})X^2_{t_i-1,t_i} + (\nabla f)(x_{t_i})X^2_{t_i,t_i+1} - (\nabla f)(x_{t_i-1})X^2_{t_i-1,t_i+1} \\
&\quad = \{f(x_{t_i}) - f(x_{t_i-1})\}\, X^1_{t_i,t_i+1} \\
&\quad\quad + (\nabla f)(x_{t_i-1})X^2_{t_i-1,t_i} + (\nabla f)(x_{t_i})X^2_{t_i,t_i+1} - (\nabla f)(x_{t_i-1})X^2_{t_i-1,t_i+1} \\
&\quad = \int_0^1 \{(\nabla f)(x_{t_i-1} + \theta(x_{t_i} - x_{t_i-1})) - (\nabla f)(x_{t_i-1})\}\, X^1_{t_i-1,t_i} \otimes X^1_{t_i,t_i+1}\, d\theta \\
&\quad\quad + (\nabla f)(x_{t_i-1})X^1_{t_i-1,t_i} \otimes X^1_{t_i,t_i+1} \\
&\quad\quad + (\nabla f)(x_{t_i-1})X^2_{t_i-1,t_i} + (\nabla f)(x_{t_i})X^2_{t_i,t_i+1} - (\nabla f)(x_{t_i-1})X^2_{t_i-1,t_i+1} \\
&\quad = \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla f)(x_{t_i-1} + r(x_{t_i} - x_{t_i-1}))X^1_{t_i-1,t_i} \otimes X^1_{t_i-1,t_i} \otimes X^1_{t_i,t_i+1}\, dr\, d\theta \\
&\quad\quad + (\nabla f)(x_{t_i-1})\left(X^1_{t_i-1,t_i} \otimes X^1_{t_i,t_i+1} + X^2_{t_i-1,t_i} - X^2_{t_i-1,t_i+1}\right) \\
&\quad\quad + (\nabla f)(x_{t_i})X^2_{t_i,t_i+1} \\
&\quad = \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla f)(x_{t_i-1} + r(x_{t_i} - x_{t_i-1}))X^1_{t_i-1,t_i} \otimes X^1_{t_i-1,t_i} \otimes X^1_{t_i,t_i+1}\, dr\, d\theta \\
&\quad\quad + \{(\nabla f)(x_{t_i}) - (\nabla f)(x_{t_i-1})\}\, X^2_{t_i,t_i+1} \\
&\quad = \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla f)(x_{t_i-1} + r(x_{t_i} - x_{t_i-1}))X^1_{t_i-1,t_i} \otimes X^1_{t_i-1,t_i} \otimes X^1_{t_i,t_i+1}\, dr\, d\theta \\
&\quad\quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_i-1} + \theta(x_{t_i} - x_{t_i-1}))X^1_{t_i-1,t_i} \otimes X^2_{t_i,t_i+1}\, d\theta
\end{aligned}
$$

を得る．

第四段　式 (9) について，次を満たす定数 C_1 が存在することを示す:

$$
|(9)| \leq \epsilon C_1. \tag{10}
$$

実際，前段の結果より

$$
\begin{aligned}
&\{J_{s,t}(x,D_{-k}) - J_{s,t}(x,D_{-k-1})\} - \{J_{s,t}(y,D_{-k}) - J_{s,t}(y,D_{-k-1})\} \\
&= \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_i-1} + r(x_{t_i} - x_{t_i-1}))X^1_{t_i-1,t_i} \otimes X^1_{t_i-1,t_i} \otimes X^1_{t_i,t_i+1}\, dr\, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_i-1} + \theta(x_{t_i} - x_{t_i-1}))X^1_{t_i-1,t_i} \otimes X^2_{t_i,t_i+1}\, d\theta \\
&\quad - \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(y_{t_i-1} + r(y_{t_i} - y_{t_i-1}))Y^1_{t_i-1,t_i} \otimes Y^1_{t_i-1,t_i} \otimes Y^1_{t_i,t_i+1}\, dr\, d\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_i-1} + \theta(y_{t_i} - y_{t_i-1}))Y^1_{t_i-1,t_i} \otimes Y^2_{t_i,t_i+1}\, d\theta \\
&= \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_i-1} + r(x_{t_i} - x_{t_i-1}))X^1_{t_i-1,t_i} \otimes X^1_{t_i-1,t_i} \otimes \left(X^1_{t_i,t_i+1} - Y^1_{t_i,t_i+1}\right) dr\, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_i-1} + r(x_{t_i} - x_{t_i-1}))X^1_{t_i-1,t_i} \otimes \left(X^1_{t_i-1,t_i} - Y^1_{t_i-1,t_i}\right) \otimes Y^1_{t_i,t_i+1}\, dr\, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^\theta \left\{(\nabla^2 f)(x_{t_i-1} + r(x_{t_i} - x_{t_i-1})) - (\nabla^2 f)(y_{t_i-1} + r(y_{t_i} - y_{t_i-1}))\right\} \\
&\qquad\qquad X^1_{t_i-1,t_i} \otimes Y^1_{t_i-1,t_i} \otimes Y^1_{t_i,t_i+1}\, dr\, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(y_{t_i-1} + r(y_{t_i} - y_{t_i-1}))\left(X^1_{t_i-1,t_i} - Y^1_{t_i-1,t_i}\right) \otimes Y^1_{t_i-1,t_i} \otimes Y^1_{t_i,t_i+1}\, dr\, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_i-1} + \theta(x_{t_i} - x_{t_i-1}))X^1_{t_i-1,t_i} \otimes \left(X^2_{t_i,t_i+1} - Y^2_{t_i,t_i+1}\right) d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \left\{(\nabla^2 f)(x_{t_i-1} + \theta(x_{t_i} - x_{t_i-1})) - (\nabla^2 f)(y_{t_i-1} + \theta(y_{t_i} - y_{t_i-1}))\right\} \\
&\qquad\qquad X^1_{t_i-1,t_i} \otimes Y^2_{t_i,t_i+1}\, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_i-1} + \theta(y_{t_i} - y_{t_i-1}))\left(X^1_{t_i-1,t_i} - Y^1_{t_i-1,t_i}\right) \otimes Y^2_{t_i,t_i+1}\, d\theta \\
&= \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_i-1} + r(x_{t_i} - x_{t_i-1}))X^1_{t_i-1,t_i} \otimes X^1_{t_i-1,t_i} \otimes \left(X^1_{t_i,t_i+1} - Y^1_{t_i,t_i+1}\right) dr\, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_i-1} + r(x_{t_i} - x_{t_i-1}))X^1_{t_i-1,t_i} \otimes \left(X^1_{t_i-1,t_i} - Y^1_{t_i-1,t_i}\right) \otimes Y^1_{t_i,t_i+1}\, dr\, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^\theta \int_0^1 (\nabla^3 f)(y_{t_i-1} + r(y_{t_i} - y_{t_i-1}) + u(x_{t_i-1} + r(x_{t_i} - x_{t_i-1}) - y_{t_i-1} - r(y_{t_i} - y_{t_i-1}))) \\
&\qquad\qquad \left\{\left(X^1_{0,t_i-1} - Y^1_{0,t_i-1}\right) + r\left(X^1_{t_i-1,t_i} - Y^1_{t_i-1,t_i}\right)\right\} \otimes X^1_{t_i-1,t_i} \otimes Y^1_{t_i-1,t_i} \otimes Y^1_{t_i,t_i+1}\, du\, dr\, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(y_{t_i-1} + r(y_{t_i} - y_{t_i-1}))\left(X^1_{t_i-1,t_i} - Y^1_{t_i-1,t_i}\right) \otimes Y^1_{t_i-1,t_i} \otimes Y^1_{t_i,t_i+1}\, dr\, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_i-1} + \theta(x_{t_i} - x_{t_i-1}))X^1_{t_i-1,t_i} \otimes \left(X^2_{t_i,t_i+1} - Y^2_{t_i,t_i+1}\right) d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^1 (\nabla^3 f)(y_{t_i-1} + \theta(y_{t_i} - y_{t_i-1}) + r(x_{t_i-1} + \theta(x_{t_i} - x_{t_i-1}) - y_{t_i-1} - \theta(y_{t_i} - y_{t_i-1}))) \\
&\qquad\qquad \left\{\left(X^1_{0,t_i-1} - Y^1_{0,t_i-1}\right) + \theta\left(X^1_{t_i-1,t_i} - Y^1_{t_i-1,t_i}\right)\right\} \otimes X^1_{t_i-1,t_i} \otimes Y^2_{t_i,t_i+1}\, dr\, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_i-1} + \theta(y_{t_i} - y_{t_i-1}))\left(X^1_{t_i-1,t_i} - Y^1_{t_i-1,t_i}\right) \otimes Y^2_{t_i,t_i+1}\, d\theta
\end{aligned}
$$

が成り立つから，

$$
\begin{aligned}
M := &\sum_{i,j} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f^i_j(x)| + \sum_{i,j,k} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial_k f^i_j(x)| \\
&+ \sum_{i,j,k,v} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial_v \partial_k f^i_j(x)| + \sum_{i,j,k,v,w} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial_w \partial_v \partial_k f^i_j(x)|
\end{aligned} \tag{11}
$$

とおいて

$$
\begin{aligned}
&\left|\{J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})\} - \{J_{s,t}(y, D_{-k}) - J_{s,t}(y, D_{-k-1})\}\right| \\
&\le M \left|X^1_{t_i-1,t_i}\right| \left|X^1_{t_i-1,t_i}\right| \left|X^1_{t_i,t_i+1} - Y^1_{t_i,t_i+1}\right| \\
&\quad + M \left|X^1_{t_i-1,t_i}\right| \left|X^1_{t_i-1,t_i} - Y^1_{t_i-1,t_i}\right| \left|Y^1_{t_i,t_i+1}\right|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + M\left|X^1_{0,t_i-1} - Y^1_{0,t_i-1}\right|\left|X^1_{t_i-1,t_i}\right|\left|Y^1_{t_i-1,t_i}\right|\left|Y^1_{t_i,t_i+1}\right| \\
&\quad + M\left|X^1_{t_i-1,t_i} - Y^1_{t_i-1,t_i}\right|\left|X^1_{t_i-1,t_i}\right|\left|Y^1_{t_i-1,t_i}\right|\left|Y^1_{t_i,t_i+1}\right| \\
&\quad + M\left|X^1_{t_i-1,t_i} - Y^1_{t_i-1,t_i}\right|\left|Y^1_{t_i-1,t_i}\right|\left|Y^1_{t_i,t_i+1}\right| \\
&\quad + M\left|X^1_{t_i-1,t_i}\right|\left|X^2_{t_i,t_i+1} - Y^2_{t_i,t_i+1}\right| \\
&\quad + M\left|X^1_{0,t_i-1} - Y^1_{0,t_i-1}\right|\left|X^1_{t_i-1,t_i}\right|\left|Y^2_{t_i,t_i+1}\right| \\
&\quad + M\left|X^1_{t_i-1,t_i} - Y^1_{t_i-1,t_i}\right|\left|X^1_{t_i-1,t_i}\right|\left|Y^2_{t_i,t_i+1}\right| \\
&\quad + M\left|X^1_{t_i-1,t_i} - Y^1_{t_i-1,t_i}\right|\left|Y^2_{t_i,t_i+1}\right| \\
&\le \epsilon M\left[5 + 2\omega(0,t_i-1)^{1/p} + 2\omega(t_i-1,t_i)^{1/p}\right]\left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1}\right)^{3/p} \\
&\le \epsilon M\left[2 + 4\left(2R^p + 2R^{p/2} + 2\right)^{1/p}\right]2^{3/p}\left(2R^p + 2R^{p/2} + 2\right)^{3/p}\left(\frac{1}{N-k-1}\right)^{3/p}
\end{aligned}
$$

を得る．ここで

$$C_1' \coloneqq M\left[2 + 4\left(2R^p + 2R^{p/2} + 2\right)^{1/p}\right]2^{3/p}\left(2R^p + 2R^{p/2} + 2\right)^{3/p}$$

と定めれば

$$|(9)| \le \sum_{k=0}^{N-2} \epsilon C_1'\left(\frac{1}{N-k-1}\right)^{3/p} < \epsilon C_1'\zeta\left(\frac{3}{p}\right)$$

が成立し，$p < 3$ より $\zeta(3/p) < \infty$ であるから $C_1 \coloneqq C_1'\zeta(3/p)$ とおいて (10) が出る．

第五段　$x_0 = y_0$ の仮定により

$$
\begin{aligned}
&\left|J_{s,t}(x) - J_{s,t}(y)\right| \\
&\le \left|f(x_s)X^1_{s,t} - f(y_s)Y^1_{s,t}\right| + \left|(\nabla f)(x_s)X^2_{s,t} - (\nabla f)(y_s)Y^2_{s,t}\right| \\
&\le \left|f(x_s)X^1_{s,t} - f(x_s)Y^1_{s,t}\right| + \left|f(x_s)Y^1_{s,t} - f(y_s)Y^1_{s,t}\right| \\
&\quad + \left|(\nabla f)(x_s)X^2_{s,t} - (\nabla f)(x_s)Y^2_{s,t}\right| + \left|(\nabla f)(x_s)Y^2_{s,t} - (\nabla f)(y_s)Y^2_{s,t}\right| \\
&\le M\left|X^1_{s,t} - Y^1_{s,t}\right| + \left|\int_0^1 (\nabla f)(y_s + \theta(x_s - y_s))(x_s - y_s) \otimes Y^1_{s,t}\, d\theta\right| \\
&\quad + M\left|X^2_{s,t} - Y^2_{s,t}\right| + \left|\int_0^1 (\nabla^2 f)(y_s + \theta(x_s - y_s))(x_s - y_s) \otimes Y^2_{s,t}\, d\theta\right| \\
&\le M\left|X^1_{s,t} - Y^1_{s,t}\right| + M\left|X^1_{0,s} - Y^1_{0,s}\right|\left|Y^1_{s,t}\right| \\
&\quad + M\left|X^2_{s,t} - Y^2_{s,t}\right| + M\left|X^1_{0,s} - Y^1_{0,s}\right|\left|Y^2_{s,t}\right| \\
&\le \epsilon M\omega(s,t)^{1/p} + \epsilon M\omega(0,s)^{1/p}\omega(s,t)^{1/p} \\
&\quad + \epsilon M\omega(s,t)^{2/p} + \epsilon M\omega(0,s)^{1/p}\omega(s,t)^{2/p} \\
&\le \epsilon M\left[\omega(0,T)^{1/p} + 2\omega(0,T)^{2/p} + \omega(0,T)^{3/p}\right] \\
&\le \epsilon M\left[\left(2R^p + 2R^{p/2} + 2\right)^{1/p} + 2\left(2R^p + 2R^{p/2} + 2\right)^{2/p} + \left(2R^p + 2R^{p/2} + 2\right)^{3/p}\right]
\end{aligned}
$$

が従う．ここで最下段の ϵ の係数を C_2 とおく．

第六段　以上より，任意の $D \in \delta[s,t]$ に対し

$$\left|J_{s,t}(x,D) - J_{s,t}(y,D)\right| \le \epsilon(C_1 + C_2)$$

が成り立ち，定理 0.2.2 により $|D| \longrightarrow 0$ として

$$\left|I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y)\right| \le \epsilon(C_1 + C_2)$$

が出る． ∎

系 0.2.11 (パスが 0 出発なら f の有界性は要らない). 定理 0.2.9 と定理 0.2.10 について，$x, y \in \tilde{C}^1$ ならば $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ として主張が成り立つ．

証明. $x_0 = 0$ なら

$$\left\| X^1 \right\|_p \le R \quad \Rightarrow \quad |x_t| \le R \quad (\forall t \in [0,T])$$

が成り立つから，式 (8) と (11) において $\sup_{x \in \mathbb{R}^d}$ を $\sup_{|x| \le 9R}$ に替えればよい． ∎

0.3 Young 積分

補題 0.3.1. $x \in C^1,\ f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ とする．

(1) $1 \le p < 2$ の場合，或る control function ω が存在して

$$\left| X^1_{s,t} \right| \le \omega(s,t)^{1/p}, \quad (0 \le \forall s \le \forall t \le T)$$

を満たすとき，ある定数 $C = C(p, f)$ があり

$$\left| I_{s,t}(x) \right| \le C \left(\omega(s,t)^{1/p} + \omega(s,t)^{2/p} \right).$$

が成立する．

(2) $2 \le p < 3$ の場合，或る control function ω が存在して

$$\left| X^1_{s,t} \right| \le \omega(s,t)^{1/p}, \quad \left| X^2_{s,t} \right| \le \omega(s,t)^{2/p}, \quad (0 \le \forall s \le \forall t \le T)$$

を満たすとき，ある定数 $C = C(p, f)$ があり

$$\left| I_{s,t}(x) \right| \le C \left(\omega(s,t)^{1/p} + \omega(s,t)^{2/p} + \omega(s,t)^{3/p} \right).$$

が成立する．

証明.

(1) $D = \{s = t_0 < \cdots < t_N = t\}$ $(N \ge 2)$ に対し，補題 0.2.8 により存在する i を取り $D_{-1} := D \backslash \{i\}$ と書く．補題 0.2.8 の添数を除く作業を続けて D_{-k} $(k = 1, \cdots, N-1)$ を構成する．

$$M := \max_{\substack{t \in [0,T] \\ 1 \le i \le m \\ 1 \le j,k \le d}} \left| \partial_k f^i_j(x_t) \right|, \quad M' := \max_{t \in [0,T]} |f(x_t)|$$

とおけば $M, M' < \infty$ であり，$\left|X^1_{t_i,t_{i+1}}\right| \le \omega(t_i,t_{i+1})^{1/p} \le \omega(t_{i-1},t_{i+1})^{1/p}$ と補題 0.2.8 により

$$\begin{aligned}
\left|\tilde{I}_{s,t}(x,D) - \tilde{I}_{s,t}(x,D_{-1})\right| &= \left|\tilde{I}_{t_{i-1},t_i}(x) + \tilde{I}_{t_i,t_{i+1}}(x) - \tilde{I}_{t_{i-1},t_{i+1}}(x)\right| \\
&\le \left|\{f(x_{t_i}) - f(x_{t_{i-1}})\} X^1_{t_i,t_{i+1}}\right| \\
&\le \left|\left\{\int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{i-1}} + \theta(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}))\, d\theta\right\} X^1_{t_{i-1},t_i} \otimes X^1_{t_i,t_{i+1}}\right| \\
&\le md^2 M \left|X^1_{t_i,t_{i+1}}\right|^2 \\
&\le md^2 M \left(\frac{2\omega(s,t)}{N-1}\right)^{2/p}
\end{aligned}$$

が成立する．同様に

$$\left|\tilde{I}_{s,t}(x,D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x,D_{-k-1})\right| \le md^2 M \left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1}\right)^{2/p}, \quad (k = 0, \cdots, N-2)$$

が成り立ち ($D_{-0} = D$)

$$\begin{aligned}
\left|\tilde{I}_{s,t}(x,D) - f(x_s)X^1_{s,t}\right| &\le \sum_{k=0}^{N-2} \left|\tilde{I}_{s,t}(x,D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x,D_{-k-1})\right| \\
&\le md^2 M (2\omega(s,t))^{2/p} \sum_{k=0}^{N-2} \left(\frac{1}{N-k-1}\right)^{2/p} \\
&\le md^2 M (2\omega(s,t))^{2/p} \zeta\left(\frac{2}{p}\right)
\end{aligned}$$

が従う．いま，仮定より $p < 2$ であるから $\zeta(2/p) < \infty$ であり，定理 0.2.2 より

$$\left|I_{s,t}(x)\right| \le M' \omega(s,t)^{1/p} + md^2 M (2\omega(s,t))^{2/p} \zeta\left(\frac{2}{p}\right)$$

を得る．

(2) (1) と同様に D_{-k} $(k = 1, \cdots, N-1)$ を構成する．会田先生のノートの通りに

$$\begin{aligned}
J_{s,t}(x,D) - J_{s,t}(x,D_{-1}) = &\left\{\int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{i-1}} + \theta(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}))\, dr\, d\theta\right\} X^1_{t_{i-1},t_i} \otimes X^1_{t_{i-1},t_i} \otimes X^1_{t_i,t_{i+1}} \\
&+ \left\{\int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{i-1}} + \theta(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}))\, d\theta\right\} X^1_{t_{i-1},t_i} \otimes X^2_{t_i,t_{i+1}}
\end{aligned}$$

を得る．ここで (1) の M, M' に加えて

$$M'' := \max_{\substack{t \in [0,T] \\ 1 \le i \le m \\ 1 \le j,k,v \le d}} \left|\partial_v \partial_k f^i_j(x_t)\right|$$

とおけば

$$\begin{aligned}
\left|J_{s,t}(x,D_{-k}) - J_{s,t}(x,D_{-k-1})\right| &\le md^2 M \left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1}\right)^{3/p} + md^2 M'' \left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1}\right)^{1/p} \left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1}\right)^{2/p} \\
&\le md^2 (M + M'') \left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1}\right)^{3/p}
\end{aligned}$$

が成立し，会田先生のノートの通りに

$$\left|J_{s,t}(x, D) - \left(f(x_s)X^1_{s,t} + (\nabla f)(x_s)X^2_{s,t}\right)\right| \leq 2^{3/p} md^2(M + M'')\zeta\left(\frac{3}{p}\right)\omega(s,t)^{3/p}$$

が従い，$p < 3$ の仮定より $\zeta(3/p) < \infty$ である．(1) と同じく定理 0.2.2 より

$$\left|I_{s,t}(x)\right| \leq M'\omega(s,t)^{1/p} + md^2 M\omega(s,t)^{2/p} + 2^{3/p} md^2(M + M'')\zeta\left(\frac{3}{p}\right)\omega(s,t)^{3/p}$$

となる． ∎