

ゼミ用ノート  
会田先生の資料”Rough path analysis:An Introduction”

基礎工学研究科システム創成専攻  
学籍番号 29C17095  
百合川尚学

2018 年 4 月 19 日

# 目次

0.1	導入 . . . . .	1
0.2	連続性定理 . . . . .	5

## 0.1 導入

以下,  $d$  次元ベクトル  $x \in \mathbb{R}^d$  と  $(m, d)$  行列  $a \in \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^d$  について, 成分を込めて表現する場合は  $x = (x^1, \dots, x^d)$ ,  $a = (a_{jl}^i)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq d}$  と書く. また  $T > 0$  を固定し  $C^1 = C^1([0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d)$  とおく. (端点においては片側微分を考える.) 区間  $[s, t] \subset [0, T]$  の分割を  $D = \{s = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t\}$  で表現し, 分割の全体を  $\delta[s, t]$  とおく.  $|D|$  により  $\max_{1 \leq i \leq N} |t_i - t_{i-1}|$  を表し,

$$\sum_D = \sum_{i=1}^N$$

と略記する.

**定理 0.1.1 (Riemann-Stieltjes 積分).**  $[s, t] \subset [0, T]$  とし,  $D \in \delta[s, t]$  についてのみ考えるとき, 任意の  $x \in C^1$ ,  $f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$  に対して次の極限が存在する: <sup>\*1</sup>

$$\lim_{|D| \rightarrow 0} \sum_D f(x_{s_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) \in \mathbb{R}^m.$$

$s_{i-1}$  は区間  $[t_{i-1}, t_i]$  に属する任意の点であり, 極限は  $s_{i-1}$  の取り方に依らない.

**証明.** 各  $x^j$  は  $C^1$ -級であるから, 平均値の定理より  $\sum_D f(x_{s_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})$  の第  $k$  成分を

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^d \sum_D f_j^k(x_{s_{i-1}})(x_{t_i}^j - x_{t_{i-1}}^j) \\ &= \sum_{j=1}^d \sum_D f_j^k(x_{s_{i-1}}) \dot{x}_{\xi_i}^j(t_i - t_{i-1}), \quad (\exists \xi_i \in [t_{i-1}, t_i]) \end{aligned}$$

と表現できる. 各  $j, k$  について

$$\lim_{|D| \rightarrow 0} \sum_D f_j^k(x_{s_{i-1}}) \dot{x}_{\xi_i}^j(t_i - t_{i-1})$$

<sup>\*1</sup> 極限の存在を保証する条件としては,  $f$  の有界性と微分可能性は必要ない.

は通常の連続関数の Riemann 積分

$$\int_s^t f_j^k(x_u) \dot{x}_u^j du$$

に収束する. ■

**定義 0.1.2** ( $C^1$ -級のパスに対する汎関数).  $x \in C^1$  と  $f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$  に対して,  $[s, t] \subset [0, T]$  における Riemann-Stieltjes 積分を  $I$  で表現する:

$$I_{s,t}(x) = \int_s^t f(x_u) dx_u := \lim_{|D| \rightarrow 0} \sum_D f(x_{t_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}),$$

$$\left[ \int_s^t f(x_u) dx_u \right]^k = \sum_{j=1}^d \int_s^t f_j^k(x_u) dx_u^j, \quad (k = 1, \dots, m).$$

ただし  $D \in \delta[s, t]$  のみを考える.

$C^1$  は次で定めるノルム  $\|\cdot\|_{C^1}$  により Banach 空間となる:

$$\|x\|_{C^1} := \sup_{t \in [0, T]} |x(t)| + \sup_{t \in [0, T]} |\dot{x}(t)|.$$

**定理 0.1.3** ( $\|\cdot\|_{C^1}$  に関する連続性).  $[s, t] \subset [0, T]$  とし,  $C^1$  には  $\|\cdot\|_{C^1}$  でノルム位相を入れる. このとき,  $C^1 \ni x \mapsto I_{s,t}(x) \in \mathbb{R}^m$  は連続である.

**証明.**  $C^1$  の第一可算性により点列連続性と連続性は一致するから,  $x^n \rightarrow x$  のとき  $I_{s,t}(x^n) \rightarrow I_{s,t}(x)$  が従うことを示せばよい. 各  $j, k$  について

$$\int_s^t f_j^k(x_u^n) dx_u^{n,j} \rightarrow \int_s^t f_j^k(x_u) dx_u^j, \quad (n \rightarrow \infty) \quad (1)$$

が成り立つことを示せば十分である. 連続性より  $M := \sup_{u \in [s, t]} |f(x_u)| < \infty$  が定まり

$$\begin{aligned} \left| \int_s^t f_j^k(x_u^n) dx_u^{n,j} - \int_s^t f_j^k(x_u) dx_u^j \right| &= \left| \int_s^t f_j^k(x_u^n) \dot{x}_u^{n,j} du - \int_s^t f_j^k(x_u) \dot{x}_u^j du \right| \\ &\leq \int_s^t \left| f_j^k(x_u^n) \dot{x}_u^{n,j} - f_j^k(x_u^n) \dot{x}_u^j \right| du + \int_s^t \left| f_j^k(x_u^n) \dot{x}_u^j - f_j^k(x_u) \dot{x}_u^j \right| du \\ &\leq M \|x^n - x\|_{C^1} (t - s) + \sup_{u \in [s, t]} |f_j^k(x_u^n) - f_j^k(x_u)| \|x\|_{C^1} (t - s) \end{aligned} \quad (2)$$

が成り立つ. いま, 任意に  $\epsilon > 0$  を取れば, 或る  $\epsilon > \delta > 0$  が存在して  $v, w \in x([s, t])$ ,  $|v - w| < \delta$  なら  $|f_j^k(v) - f_j^k(w)| < \epsilon$  を満たす (一様連続). すなわち  $\|x^n - x\|_{C^1} < \delta$  なら

$$\sup_{t \in [s, t]} |f_j^k(x_t^n) - f_j^k(x_t)| < \epsilon$$

が成立する.  $\|x^n - x\|_{C^1} \rightarrow 0$  の仮定より, 或る自然数  $N$  が存在して  $\|x^n - x\|_{C^1} < \delta$  ( $n > N$ ) が満たされるから,  $(2) < \epsilon[M(t - s) + \|x\|_{C^1}(t - s)]$  ( $n > N$ ) が成り立ち (1) が従う. ■

定義 0.1.4 ( $p$ -variation).  $[0, T]$  上の  $\mathbb{R}^d$  値関数  $x$  に対し,  $p$ -variation を次で定める:

$$\|x\|_{p,[s,t]} := \left\{ \sup_{D \in \delta[s,t]} \sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^p \right\}^{1/p}.$$

特に,  $\|\cdot\|_{p,[0,T]}$  を  $\|\cdot\|_p$  と表記する. また  $p \geq 1$  として, 線形空間  $B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$  を

$$B_{p,T}(\mathbb{R}^d) := \left\{ x : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d ; \quad x_0 = 0, x : \text{continuous}, \|x\|_p < \infty \right\}$$

により定める.

次の結果によれば,  $0 < p < 1$  に対し  $B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$  を定めても  $0$  の定数関数のみの空間でしかない.

定理 0.1.5 ( $0 < p < 1$  に対して有界  $p$ -variation なら定数).  $x : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$  を連続関数とする. このとき,  $p \in (0, 1)$  に対し  $\|x\|_p < \infty$  が成り立つなら  $x$  は定数関数である.

証明.  $t \in [0, T]$  を任意に取り固定する. このとき全ての  $D \in \delta[0, t]$  に対して,

$$\begin{aligned} |x_t - x_0| &\leq \sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}| \leq \max_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^{1-p} \sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^p \\ &\leq \max_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^{1-p} \|x\|_p \end{aligned}$$

が成り立ち,  $x$  の一様連続性から右辺は  $|D| \longrightarrow 0$  で  $0$  に収束し,  $x_t = x_0$  が従う. ■

$p \geq 1$  の場合, Minkowski の不等式によれば, 任意の  $D \in \delta[s, t]$  に対し

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_D |(x_{t_i} + y_{t_i}) - (x_{t_{i-1}} + y_{t_{i-1}})|^p \right\}^{1/p} &\leq \left\{ \sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^p \right\}^{1/p} + \left\{ \sum_D |y_{t_i} - y_{t_{i-1}}|^p \right\}^{1/p} \\ &\leq \|x\|_{p,[s,t]} + \|y\|_{p,[s,t]} \end{aligned}$$

が成り立ち  $\|x + y\|_{p,[s,t]} \leq \|x\|_{p,[s,t]} + \|y\|_{p,[s,t]}$  を得る.

定理 0.1.6.  $B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$  は  $\|\cdot\|_p$  をノルムとする Banach 空間である.

証明. 完備性を示す.

第一段  $(x^n)_{n=1}^\infty \subset B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$  を Cauchy 列とすれば, 任意の  $\epsilon > 0$  に対して或る  $n_\epsilon \in \mathbb{N}$  が存在し

$$\|x^n - x^m\|_p = \left\{ \sup_{D \in \delta[0,T]} \sum_D \left| (x^n_{t_i} - x^m_{t_i}) - (x^n_{t_{i-1}} - x^m_{t_{i-1}}) \right|^p \right\}^{1/p} < \epsilon, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

を満たす. いま, 任意の  $t \in [0, T]$  に対して  $[0, T]$  の分割  $D = \{0 \leq t \leq T\}$  を考えれば

$$|x^n_t - x^m_t| < \epsilon, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

が得られ、実数の完備性より或る  $x_t \in \mathbb{R}^d$  が存在して

$$|x_t^n - x_t| < \epsilon \quad (n > n_\epsilon)$$

を満たす。この収束は  $t$  に関して一様であるから、 $t \mapsto x_t$  は 0 出発かつ連続である。

第二段  $\|x^n - x\|_p \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) を示す。前段によれば、任意の  $D \in \delta[0, T]$  に対し

$$\sum_D |(x_{t_i}^m - x_{t_i}^n) - (x_{t_{i-1}}^m - x_{t_{i-1}}^n)|^p < \epsilon^p, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

が成り立っている。  $D$  はせいぜい有限個の分割であるから、 $m \rightarrow \infty$  として

$$\sum_D |(x_{t_i} - x_{t_i}^n) - (x_{t_{i-1}} - x_{t_{i-1}}^n)|^p < \epsilon^p, \quad (n > n_\epsilon)$$

が従い、 $D$  の任意性より  $\|x^n - x\|_p < \epsilon$  ( $n > n_\epsilon$ ) を得る。 ■

**定理 0.1.7.**  $p \geq 1$  とする。また  $x_0 = 0$  を満たす  $x \in C^1$  の全体が作る線形空間を  $\tilde{C}^1$  とおく。

- (1)  $x \in C^1$  ならば  $\|x\|_p < \infty$  が成り立つ。ただし、 $\|\cdot\|_p$  は  $\tilde{C}^1$  においてノルムとなる。
- (2)  $\tilde{C}^1$  において、 $\|\cdot\|_{C^1}$  で導入する位相は  $\|\cdot\|_p$  で導入する位相より強い。

**証明.**

$p = 1$  の場合 平均値の定理より、任意の  $D \in \delta[0, T]$  に対し

$$\sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}| \leq \sum_D \|x\|_{C^1} (t_i - t_{i-1}) = \|x\|_{C^1} T < \infty$$

が成り立ち  $\|x\|_1 < \infty$  が従う。

$p > 1$  の場合  $q$  を  $p$  の共役指数とする。任意の  $D \in \delta[0, T]$  に対し、Hölder の不等式より

$$\begin{aligned} \sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^p &= \sum_D \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{x}_u du \right|^p \leq \sum_D (t_i - t_{i-1}) \left( \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\dot{x}_u|^q du \right)^{p/q} \\ &\leq \sum_D (t_i - t_{i-1}) \left( \|x\|_{C^1}^q \int_0^T du \right)^{p/q} = \|x\|_{C^1}^p T^p \end{aligned}$$

が成立し、 $\|x\|_p < \infty$  が従う。

以上より、 $p \geq 1$  ならば  $\|x\|_p \leq T \|x\|_{C^1}$  ( $x \in C^1$ ) が成り立ち (2) の主張を得る。 ■

次節の考察対象は主に定理 0.1.3 と定理 0.1.7 に関係する。定理 0.1.3 によれば、 $C^1$  に  $\|\cdot\|_{C^1}$  でノルム位相を導入した場合、 $f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$  に対して  $C^1 \ni x \mapsto I_{s,t}(x)$  は連続である。一方で定理 0.1.3 によれば、0 出発  $C^1$ -パス空間  $\tilde{C}^1$  に  $\|\cdot\|_p$  でノルム位相を導入した場合、 $\tilde{C}^1 \ni x \mapsto I_{s,t}(x)$  が連続であるという保証はない。しかし、次節以後の結果により、 $1 \leq p < 3$  かつ  $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$  が満たされているなら  $\tilde{C}^1 \ni x \mapsto I_{s,t}(x)$  は或る意味での連続性を持つ。

## 0.2 連続性定理

定義 0.2.1 (記号の定義).  $x \in C^1$ ,  $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$  に対し次を定める.

$$\begin{aligned}\Delta_T &:= \{ (s, t) ; \quad 0 \leq s \leq t \leq T \}, \\ X^1 : \Delta_T &\longrightarrow \mathbb{R}^d \quad ((s, t) \longmapsto X_{s,t}^1 = x_t - x_s), \\ X^2 : \Delta_T &\longrightarrow \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d \quad \left( (s, t) \longmapsto X_{s,t}^2 = \int_s^t (x_u - x_s) \otimes dx_u \right), \\ \tilde{I}_{s,t}(x) &:= f(x_s) X_{s,t}^1 = f(x_s)(x_t - x_s), \\ J_{s,t}(x) &:= f(x_s) X_{s,t}^1 + (\nabla f)(x_s) X_{s,t}^2, \\ \text{where } [(\nabla f)(x_s) X_{s,t}^2]^i &= \sum_{j,k=1}^d \partial_k f_j^i(x_s) \int_s^t (x_u^k - x_s^k) dx_u^j.\end{aligned}$$

定理 0.2.2.  $[s, t] \subset [0, T]$ ,  $x \in C^1$ ,  $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$  とする.  $D \in \delta[s, t]$  に対し

$$\tilde{I}_{s,t}(x, D) := \sum_D \tilde{I}_{t_{i-1}, t_i}(x), \quad J_{s,t}(x, D) := \sum_D J_{t_{i-1}, t_i}(x)$$

を定めるとき, 次が成立する:

$$I_{s,t}(x) = \lim_{|D| \rightarrow 0} \tilde{I}_{s,t}(x, D) = \lim_{|D| \rightarrow 0} J_{s,t}(x, D).$$

証明. 第一の等号は  $I_{s,t}(x)$  の定義によるから, 第二の等号を証明する. 各  $1 \leq i \leq m$  について

$$\begin{aligned}[I_{s,t}(x)]^i &= \sum_{j=1}^d \int_s^t f_j^i(x_u) dx_u^j \\ &= \sum_{j=1}^d \int_s^t f_j^i(x_s) + f_j^i(x_u) - f_j^i(x_s) dx_u^j \\ &= \sum_{j=1}^d \int_s^t f_j^i(x_s) + \sum_{k=1}^d \left\{ \int_0^1 \partial_k f_j^i(x_s + \theta(x_u - x_s)) d\theta \right\} (x_u^k - x_s^k) dx_u^j \\ &= \sum_{j=1}^d \int_s^t f_j^i(x_s) dx_u^j + \sum_{j,k=1}^d \partial_k f_j^i(x_s) \int_s^t (x_u^k - x_s^k) dx_u^j \\ &\quad + \sum_{j,k=1}^d \int_s^t \left\{ \int_0^1 \partial_k f_j^i(x_s + \theta(x_u - x_s)) - \partial_k f_j^i(x_s) d\theta \right\} (x_u^k - x_s^k) dx_u^j, \\ &= [J_{s,t}(x)]^i + \sum_{j,k,\ell=1}^d \int_s^t \left\{ \int_0^1 \left( \int_0^\theta \partial_\ell \partial_k f_j^i(x_s + r(x_u - x_s)) dr \right) d\theta \right\} (x_u^\ell - x_s^\ell)(x_u^k - x_s^k) dx_u^j\end{aligned}$$

が成り立つ.  $x([0, T])$  はコンパクトであるから,  $x_s + r(x_u - x_s)$  ( $0 \leq r \leq 1$ ,  $s \leq u \leq t$ ) も或るコンパ

クト集合に含まれる． $\partial_\ell \partial_k f_j^i$  のそのコンパクト集合上での最大値を  $M$  とおけば

$$\begin{aligned} & \left| \int_s^t \left\{ \int_0^1 \left( \int_0^\theta \partial_\ell \partial_k f_j^i(x_s + r(x_u - x_s)) dr \right) d\theta \right\} (x_u^\ell - x_s^\ell)(x_u^k - x_s^k) dx_u^j \right| \\ & \leq M \int_s^t |x_u^\ell - x_s^\ell| |x_u^k - x_s^k| |x_u^j| du \\ & \leq M \|x\|_{C^1}^3 \int_s^t (u - s)^2 du \end{aligned}$$

となるから，特に  $D \in \delta[s, t]$  に対して

$$\begin{aligned} \sum_D \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - t_{i-1})^2 du & \leq \sum_D |D| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - t_{i-1}) du \\ & \leq \sum_D |D| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - s) du \leq \frac{1}{2} (t - s)^2 |D| \longrightarrow 0 \quad (|D| \longrightarrow 0) \end{aligned}$$

が成立する．これにより

$$|[I_{s,t}(x, D)]^i - [J_{s,t}(x, D)]^i| \longrightarrow 0 \quad (|D| \longrightarrow 0)$$

が従い定理の主張を得る．

**定義 0.2.3 (control function).** 関数  $\omega : \Delta_T \longrightarrow [0, \infty)$  が連続かつ任意の  $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$  に対して

$$\omega(s, u) + \omega(u, t) \leq \omega(s, t) \quad (3)$$

を満たすとき， $\omega$  を control function と呼ぶ．

**定義 0.2.4 (ノルム空間値写像の  $p$ -variation).**  $(V, \|\cdot\|)$  をノルム空間とすると， $p \geq 1$ ,  $[s, t] \subset [0, T]$ ,  $\psi : \Delta_T \longrightarrow V$  に対して

$$\|\psi\|_{p, [s, t]} := \left\{ \sup_{D \in \delta[s, t]} \sum_D \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p \right\}^{1/p}$$

と定める．特に  $\|\cdot\|_{p, [0, T]}$  を  $\|\cdot\|_p$  と書く．

**定理 0.2.5 (control function の例).** 以下の関数  $\omega : \Delta_T \longrightarrow [0, \infty)$  は control function である．

- (1)  $\omega := (\omega_1^r + \omega_2^r)^{1/r}$ ,  $(0 < r \leq 1, \omega_1, \omega_2 : \text{control function})$ .
- (2)  $\omega : (s, t) \mapsto \|X^1\|_{p, [s, t]}^p$ ,  $(p \geq 1, x \in B_{p, T}(\mathbb{R}^d))$ .
- (3)  $\omega : (s, t) \mapsto \|X^2\|_{p, [s, t]}^p$ ,  $(p \geq 1, x \in C^1)$ .

行列  $a = (a_j^i)$  のノルムは  $|a| = \sqrt{\sum_{i,j} |a_j^i|^2}$  として考える．

**定理 0.2.6.**

(1)

(2) 任意の  $D_1 \in \delta[s, u], D_2 \in \delta[u, t]$  に対して合併  $D_1 \cup D_2$  は  $[s, t]$  の分割であるから,

$$\sum_{D_1} |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^p + \sum_{D_2} |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^p \leq \sup_{D \in \delta[s, t]} \sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^p = \|X^1\|_{p;[s, t]}^p$$

が成り立つ. 左辺の  $D_1, D_2$  の取り方は独立であるから, それぞれに対し上限を取れば

$$\|X^1\|_{p;[s, u]}^p + \|X^1\|_{p;[u, t]}^p \leq \|X^1\|_{p;[s, t]}^p$$

が得られる.

(3) 任意の  $[s, t] \subset [0, T]$  に対して  $\|X^2\|_{p;[s, t]}^p < \infty$  を示せば, あとは上と同じ理由により (3) が成り立つ.  $p \geq 1$  かつ  $x \in C^1$  の下では,  $D = \{s = t_0 < \dots < t_N = t\}$  に対し

$$\begin{aligned} \|X_{t_{i-1}, t_i}^2\| &\leq \sum_{k, j=1}^d \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (x_u^k - x_{t_{i-1}}^k) dx_u^j \right| \leq \sum_{k, j=1}^d \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|x\|_{C^1}^2 (u - t_{i-1}) du \\ &\leq d^2 \|x\|_{C^1}^2 \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - s) du \right\}^{1/p} \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - s) du \right\}^{1-1/p} \\ &\leq d^2 \|x\|_{C^1}^2 \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - s) du \right\}^{1/p} \left\{ \int_s^t (u - s) du \right\}^{1-1/p} \end{aligned}$$

が成り立つから,

$$\begin{aligned} \sum_D \|X_{t_{i-1}, t_i}^2\|^p &\leq \sum_D d^{2p} \|x\|_{C^1}^{2p} \left\{ \frac{1}{2}(t - s)^2 \right\}^{p-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - s) du \\ &= d^{2p} \|x\|_{C^1}^{2p} \left\{ \frac{1}{2}(t - s)^2 \right\}^{p-1} \int_s^t (u - s) du = d^{2p} \|x\|_{C^1}^{2p} \left\{ \frac{1}{2}(t - s)^2 \right\}^p \end{aligned}$$

により  $\|X^2\|_{p;[s, t]}^p < \infty$  を得る. ■

補題 0.2.7 (division point).  $\omega$  を  $\Delta_T$  上の control function とする.  $D = \{s = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t\}$  について,  $N \geq 2$  の場合或る  $1 \leq i \leq N - 1$  が存在して次を満たす:

$$\omega(t_{i-1}, t_{i+1}) \leq \frac{2\omega(s, t)}{N - 1}.$$

以後この  $t_i$  を  $D$  の division point と呼ぶ.

定理 0.2.8 ( $1 \leq p < 2$  の場合の連続性定理).  $1 \leq p < 2$  とし,  $x_0 = y_0$  を満たす  $x, y \in C^1$  と  $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ ,  $0 < \epsilon, R < \infty$  を任意に取る. このとき,

$$\|X^1\|_p, \|Y^1\|_p \leq R, \quad \|X^1 - Y^1\|_p \leq \epsilon$$

なら, 或る定数  $C = C(p, R, f)$  が存在し, 任意の  $0 \leq s \leq t \leq T$  に対して次が成立する:

$$|I_{s, t}(x) - I_{s, t}(y)| \leq \epsilon C.$$



証明. control function  $\omega$  を

$$\omega(\alpha, \beta) = \|X^1\|_{p, [\alpha, \beta]}^p + \|Y^1\|_{p, [\alpha, \beta]}^p + \epsilon^{-p} \|X^1 - Y^1\|_{p, [\alpha, \beta]}^p, \quad ((\alpha, \beta) \in \Delta_T)$$

により定める.

第一段 任意に  $[s, t] \subset [0, T]$  を固定し  $D = \{s = t_0 < \dots, t_N = t\} \in \delta[s, t]$  ( $N \geq 2$ ) を取れば division point  $t_{i_1}$  が存在する.  $D_{-1} := D \setminus \{t_{i_1}\}$  と定め,  $D_{-1}$  の division point  $t_{i_2}$  を除き  $D_{-2} := D_{-1} \setminus \{t_{i_2}\}$  と定める. 繰り返せば  $t_{i_k}, D_{-k}$  ( $k = 1, \dots, N-1$ ) が得られ,

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{s,t}(x, D) - \tilde{I}_{s,t}(y, D) &= \sum_{k=0}^{N-2} \left[ \left\{ \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1}) \right\} - \left\{ \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k-1}) \right\} \right] \\ &\quad + \left\{ \tilde{I}_{s,t}(x) - \tilde{I}_{s,t}(y) \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

と表現できる. ただし  $D = D_{-0}$  と見做す.

第二段 式 (4) について, 或る定数  $C_1$  が存在して

$$|(4)| \leq \epsilon C_1 \quad (5)$$

が成り立つことを示す. ここで

$$M := \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq d}} |f_j^i(x)| + \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j, k \leq d}} |\partial_k f_j^i(x)| + \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j, k, v \leq d}} |\partial_v \partial_k f_j^i(x)| \quad (6)$$

とおく. 各  $k = 0, 1, \dots, N-2$  に対し

$$\begin{aligned} &\left\{ \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1}) \right\} - \left\{ \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k-1}) \right\} \\ &= \left\{ f(x_{t_{i_k}}) - f(x_{t_{i_{k-1}}}) \right\} X_{t_{i_k}, t_{i_{k+1}}}^1 - \left\{ f(y_{t_{i_k}}) - f(y_{t_{i_{k-1}}}) \right\} Y_{t_{i_k}, t_{i_{k+1}}}^1 \\ &= \left\{ f(x_{t_{i_k}}) - f(x_{t_{i_{k-1}}}) \right\} \left( X_{t_{i_k}, t_{i_{k+1}}}^1 - Y_{t_{i_k}, t_{i_{k+1}}}^1 \right) \\ &\quad + \left\{ f(x_{t_{i_k}}) - f(x_{t_{i_{k-1}}}) \right\} Y_{t_{i_k}, t_{i_{k+1}}}^1 - \left\{ f(y_{t_{i_k}}) - f(y_{t_{i_{k-1}}}) \right\} Y_{t_{i_k}, t_{i_{k+1}}}^1 \\ &= \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{i_k-1}} + \theta(x_{t_{i_k}} - x_{t_{i_{k-1}}})) X_{t_{i_k-1}, t_{i_k}}^1 \otimes (X_{t_{i_k}, t_{i_{k+1}}}^1 - Y_{t_{i_k}, t_{i_{k+1}}}^1) d\theta \\ &\quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{i_k-1}} + \theta(x_{t_{i_k}} - x_{t_{i_{k-1}}})) X_{t_{i_k-1}, t_{i_k}}^1 \otimes Y_{t_{i_k}, t_{i_{k+1}}}^1 d\theta \\ &\quad - \int_0^1 (\nabla f)(y_{t_{i_k-1}} + \theta(y_{t_{i_k}} - y_{t_{i_{k-1}}})) Y_{t_{i_k-1}, t_{i_k}}^1 \otimes Y_{t_{i_k}, t_{i_{k+1}}}^1 d\theta \\ &= \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{i_k-1}} + \theta(x_{t_{i_k}} - x_{t_{i_{k-1}}})) X_{t_{i_k-1}, t_{i_k}}^1 \otimes (X_{t_{i_k}, t_{i_{k+1}}}^1 - Y_{t_{i_k}, t_{i_{k+1}}}^1) d\theta \\ &\quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{i_k-1}} + \theta(x_{t_{i_k}} - x_{t_{i_{k-1}}})) (X_{t_{i_k-1}, t_{i_k}}^1 - Y_{t_{i_k-1}, t_{i_k}}^1) \otimes Y_{t_{i_k}, t_{i_{k+1}}}^1 d\theta \\ &\quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{i_k-1}} + \theta(x_{t_{i_k}} - x_{t_{i_{k-1}}})) Y_{t_{i_k-1}, t_{i_k}}^1 \otimes Y_{t_{i_k}, t_{i_{k+1}}}^1 d\theta \\ &\quad - \int_0^1 (\nabla f)(y_{t_{i_k-1}} + \theta(y_{t_{i_k}} - y_{t_{i_{k-1}}})) Y_{t_{i_k-1}, t_{i_k}}^1 \otimes Y_{t_{i_k}, t_{i_{k+1}}}^1 d\theta \\ &= \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{i_k-1}} + \theta(x_{t_{i_k}} - x_{t_{i_{k-1}}})) X_{t_{i_k-1}, t_{i_k}}^1 \otimes (X_{t_{i_k}, t_{i_{k+1}}}^1 - Y_{t_{i_k}, t_{i_{k+1}}}^1) d\theta \\ &\quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{i_k-1}} + \theta(x_{t_{i_k}} - x_{t_{i_{k-1}}})) (X_{t_{i_k-1}, t_{i_k}}^1 - Y_{t_{i_k-1}, t_{i_k}}^1) \otimes Y_{t_{i_k}, t_{i_{k+1}}}^1 d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^1 \int_0^1 (\nabla^2 f)(\tilde{y} + r(\tilde{x} - \tilde{y})) (X_{0,t_{i_k}-1}^1 - Y_{0,t_{i_k}-1}^1) \otimes Y_{t_{i_k}-1,t_{i_k}}^1 \otimes Y_{t_{i_k},t_{i_k}+1}^1 dr d\theta^{*2} \\
& + \int_0^1 \int_0^1 (\nabla^2 f)(\tilde{y} + r(\tilde{x} - \tilde{y})) \theta (X_{t_{i_k}-1,t_{i_k}}^1 - Y_{t_{i_k}-1,t_{i_k}}^1) \otimes Y_{t_{i_k}-1,t_{i_k}}^1 \otimes Y_{t_{i_k},t_{i_k}+1}^1 dr d\theta
\end{aligned}$$

が成り立つ。補題 0.2.7 より

$$\begin{aligned}
& \left| X_{t_{i_k}-1,t_{i_k}}^1 \right|, \left| Y_{t_{i_k}-1,t_{i_k}}^1 \right| \leq \omega(t_{i_k} - 1, t_{i_k})^{1/p} \leq \left( \frac{2\omega(s, t)}{N - k - 1} \right)^{1/p}, \\
& \left| X_{t_{i_k},t_{i_k}+1}^1 \right|, \left| Y_{t_{i_k},t_{i_k}+1}^1 \right| \leq \omega(t_{i_k}, t_{i_k} + 1)^{1/p} \leq \left( \frac{2\omega(s, t)}{N - k - 1} \right)^{1/p}, \\
& \left| X_{t_{i_k}-1,t_{i_k}}^1 - Y_{t_{i_k}-1,t_{i_k}}^1 \right| \leq \epsilon \omega(t_{i_k} - 1, t_{i_k})^{1/p} \leq \epsilon \left( \frac{2\omega(s, t)}{N - k - 1} \right)^{1/p}, \\
& \left| X_{t_{i_k},t_{i_k}+1}^1 - Y_{t_{i_k},t_{i_k}+1}^1 \right| \leq \epsilon \omega(t_{i_k}, t_{i_k} + 1)^{1/p} \leq \epsilon \left( \frac{2\omega(s, t)}{N - k - 1} \right)^{1/p}
\end{aligned}$$

が満たされ、また

$$\left| X_{0,t_{i_k}-1}^1 - Y_{0,t_{i_k}-1}^1 \right| \leq \epsilon \omega(0, T)^{1/p} \leq \epsilon (2R^p + 1)^{1/p}$$

でもあるから、

$$\begin{aligned}
& \left| \left\{ \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1}) \right\} - \left\{ \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k-1}) \right\} \right| \\
& \leq mdM \left| X_{t_{i_k}-1,t_{i_k}}^1 \right| \left| X_{t_{i_k},t_{i_k}+1}^1 - Y_{t_{i_k},t_{i_k}+1}^1 \right| \\
& \quad + mdM \left| X_{t_{i_k}-1,t_{i_k}}^1 - Y_{t_{i_k}-1,t_{i_k}}^1 \right| \left| Y_{t_{i_k},t_{i_k}+1}^1 \right| \\
& \quad + md^2M \left| X_{0,t_{i_k}-1}^1 - Y_{0,t_{i_k}-1}^1 \right| \left| Y_{t_{i_k}-1,t_{i_k}}^1 \right| \left| Y_{t_{i_k},t_{i_k}+1}^1 \right| \\
& \quad + md^2M \left| X_{t_{i_k}-1,t_{i_k}}^1 - Y_{t_{i_k}-1,t_{i_k}}^1 \right| \left| Y_{t_{i_k}-1,t_{i_k}}^1 \right| \left| Y_{t_{i_k},t_{i_k}+1}^1 \right| \\
& \leq \epsilon md^2M \left[ 2 + 2(2R^p + 1)^{1/p} \right] \left( \frac{2\omega(s, t)}{N - k - 1} \right)^{2/p} \\
& \leq \epsilon md^2M \left[ 2 + 2(2R^p + 1)^{1/p} \right] 2^{2/p} (2R^p + 1)^{2/p} \left( \frac{1}{N - k - 1} \right)^{2/p}
\end{aligned}$$

を得る。

$$C'_1 := md^2M \left[ 2 + 2(2R^p + 1)^{1/p} \right] 2^{2/p} (2R^p + 1)^{2/p}$$

と定めれば

$$|(4)| \leq \sum_{k=0}^{N-2} \epsilon C'_1 \left( \frac{1}{N - k - 1} \right)^{2/p} < \epsilon C'_1 \zeta\left(\frac{2}{p}\right)$$

が成立し、 $p < 2$  より  $\zeta(2/p) < \infty$  であるから  $C_1 := C'_1 \zeta(2/p)$  とおいて (5) が従う。

---

<sup>\*2</sup>  $\tilde{x} = x_{t_{i_k}-1} + \theta(x_{t_{i_k}} - x_{t_{i_k}-1})$ ,  $\tilde{y} = y_{t_{i_k}-1} + \theta(y_{t_{i_k}} - y_{t_{i_k}-1})$  とおいた。また  $x_0 = y_0$  の仮定より  $x_{t_{i_k}-1} - y_{t_{i_k}-1} = X_{0,t_{i_k}-1}^1 - Y_{0,t_{i_k}-1}^1$  が<sup>3</sup>出る。

第三段  $x_0 = y_0$  の仮定により

$$\begin{aligned}
|\tilde{I}_{s,t}(x) - \tilde{I}_{s,t}(y)| &= |f(x_s)X_{s,t}^1 - f(y_s)Y_{s,t}^1| \\
&\leq |f(x_s)X_{s,t}^1 - f(x_s)Y_{s,t}^1| + |f(x_s)Y_{s,t}^1 - f(y_s)Y_{s,t}^1| \\
&\leq mdM|X_{s,t}^1 - Y_{s,t}^1| + \left| \left\{ \int_0^1 (\nabla f)(y_s + \theta(x_s - y_s)) d\theta \right\} (x_s - y_s) \otimes Y_{s,t}^1 \right| \\
&\leq mdM|X_{s,t}^1 - Y_{s,t}^1| + md^2M|X_{0,s}^1 - Y_{0,s}^1||Y_{s,t}^1| \\
&\leq M\epsilon\omega(s, t)^{1/p} + md^2M\epsilon\omega(0, s)^{1/p}\omega(s, t)^{1/p} \\
&\leq \epsilon C_2
\end{aligned}$$

が成立する．ここで  $C_2 = mdM(2R^p + 1)^{1/p} + md^2M(2R^p + 1)^{2/p}$  とした．

第四段 第二段と第三段より，任意の  $D \in \delta[s, t]$  に対し

$$|\tilde{I}_{s,t}(x, D) - \tilde{I}_{s,t}(y, D)| \leq \epsilon(C_1 + C_2)$$

が満たされる．定理 0.2.2 により  $|D| \rightarrow 0$  として

$$|I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y)| \leq \epsilon(C_1 + C_2)$$

が成立する． ■

定理 0.2.9 ( $2 \leq p < 3$  の場合の連続性定理).  $2 \leq p < 3$  とし,  $x_0 = y_0$  を満たす  $x, y \in C^1$  と  $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ ,  $0 < \epsilon, R < \infty$  を任意に取る．このとき,

$$\begin{aligned}
&\|X^1\|_p, \|Y^1\|_p, \|X^2\|_{p/2}, \|Y^2\|_{p/2} \leq R < \infty, \\
&\|X^1 - Y^1\|_p, \|X^2 - Y^2\|_{p/2} \leq \epsilon
\end{aligned}$$

なら，或る定数  $C = C(p, R, f)$  が存在し，任意の  $0 \leq s \leq t \leq T$  に対して次が成立する:

$$|I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y)| \leq \epsilon C.$$

証明.  $[s, t] \subset [0, T]$  とする．

第一段  $\omega : \Delta_T \rightarrow [0, \infty)$  を

$$\begin{aligned}
\omega(\alpha, \beta) &= \|X^1\|_{p, [\alpha, \beta]}^p + \|Y^1\|_{p, [\alpha, \beta]}^p + \|X^2\|_{p/2, [\alpha, \beta]}^{p/2} + \|Y^2\|_{p/2, [\alpha, \beta]}^{p/2} \\
&\quad + \epsilon^{-p} \|X^1 - Y^1\|_{p, [\alpha, \beta]}^p + \epsilon^{-p/2} \|X^2 - Y^2\|_{p/2, [\alpha, \beta]}^{p/2}, \quad ((\alpha, \beta) \in \Delta_T)
\end{aligned}$$

により定めれば，定理 0.2.5 により  $2 \leq p$  の下で  $\omega$  は control function である．

第二段  $D \in \delta[s, t]$  に対し，定理 0.2.8 の証明と同様にして  $t_{i_k}, D_{-k}$  を構成すれば

$$\begin{aligned}
&J_{s,t}(x, D) - J_{s,t}(y, D) \\
&= \sum_{k=0}^{N-2} [\{J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})\} - \{J_{s,t}(y, D_{-k}) - J_{s,t}(y, D_{-k-1})\}] \\
&\quad + \{J_{s,t}(x) - J_{s,t}(y)\}
\end{aligned} \tag{7}$$

と表現できる．

第三段  $J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})$  を変形する．以降  $t_i = t_{i_k}$  と書き直せば

$$\begin{aligned}
& J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1}) \\
&= J_{t_i-1,t_i}(x) + J_{t_i,t_i+1}(x) - J_{t_i-1,t_i+1}(x) \\
&= f(x_{t_i-1})X_{t_i-1,t_i}^1 + f(x_{t_i})X_{t_i,t_i+1}^1 - f(x_{t_i-1})X_{t_i-1,t_i+1}^1 \\
&\quad + (\nabla f)(x_{t_i-1})X_{t_i-1,t_i}^2 + (\nabla f)(x_{t_i})X_{t_i,t_i+1}^2 - (\nabla f)(x_{t_i-1})X_{t_i-1,t_i+1}^2 \\
&= \{f(x_{t_i}) - f(x_{t_i-1})\} X_{t_i,t_i+1}^1 \\
&\quad + (\nabla f)(x_{t_i-1})X_{t_i-1,t_i}^2 + (\nabla f)(x_{t_i})X_{t_i,t_i+1}^2 - (\nabla f)(x_{t_i-1})X_{t_i-1,t_i+1}^2 \\
&= \int_0^1 \{(\nabla f)(x_{t_i-1} + \theta(x_{t_i} - x_{t_i-1})) - (\nabla f)(x_{t_i-1})\} X_{t_i-1,t_i}^1 \otimes X_{t_i,t_i+1}^1 d\theta \\
&\quad + (\nabla f)(x_{t_i-1})X_{t_i-1,t_i}^1 \otimes X_{t_i,t_i+1}^1 \\
&\quad + (\nabla f)(x_{t_i-1})X_{t_i-1,t_i}^2 + (\nabla f)(x_{t_i})X_{t_i,t_i+1}^2 - (\nabla f)(x_{t_i-1})X_{t_i-1,t_i+1}^2 \\
&= \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla f)(x_{t_i-1} + r(x_{t_i} - x_{t_i-1})) X_{t_i-1,t_i}^1 \otimes X_{t_i-1,t_i}^1 \otimes X_{t_i,t_i+1}^1 dr d\theta \\
&\quad + (\nabla f)(x_{t_i-1}) (X_{t_i-1,t_i}^1 \otimes X_{t_i,t_i+1}^1 + X_{t_i-1,t_i}^2 - X_{t_i-1,t_i+1}^2) \\
&\quad + (\nabla f)(x_{t_i})X_{t_i,t_i+1}^2 \\
&= \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla f)(x_{t_i-1} + r(x_{t_i} - x_{t_i-1})) X_{t_i-1,t_i}^1 \otimes X_{t_i-1,t_i}^1 \otimes X_{t_i,t_i+1}^1 dr d\theta \\
&\quad + \{(\nabla f)(x_{t_i}) - (\nabla f)(x_{t_i-1})\} X_{t_i,t_i+1}^2 \\
&= \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla f)(x_{t_i-1} + r(x_{t_i} - x_{t_i-1})) X_{t_i-1,t_i}^1 \otimes X_{t_i-1,t_i}^1 \otimes X_{t_i,t_i+1}^1 dr d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_i-1} + \theta(x_{t_i} - x_{t_i-1})) X_{t_i-1,t_i}^1 \otimes X_{t_i,t_i+1}^2 d\theta
\end{aligned}$$

を得る．

第四段 式 (7) について，次を満たす定数  $C_1$  が存在することを示す：

$$|(7)| \leq \epsilon C_1. \quad (8)$$

実際，前段の結果より

$$\begin{aligned}
& \{J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})\} - \{J_{s,t}(y, D_{-k}) - J_{s,t}(y, D_{-k-1})\} \\
&= \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_i-1} + r(x_{t_i} - x_{t_i-1})) X_{t_i-1,t_i}^1 \otimes X_{t_i-1,t_i}^1 \otimes X_{t_i,t_i+1}^1 dr d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_i-1} + \theta(x_{t_i} - x_{t_i-1})) X_{t_i-1,t_i}^1 \otimes X_{t_i,t_i+1}^2 d\theta \\
&\quad - \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(y_{t_i-1} + r(y_{t_i} - y_{t_i-1})) Y_{t_i-1,t_i}^1 \otimes Y_{t_i-1,t_i}^1 \otimes Y_{t_i,t_i+1}^1 dr d\theta \\
&\quad - \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_i-1} + \theta(y_{t_i} - y_{t_i-1})) Y_{t_i-1,t_i}^1 \otimes Y_{t_i,t_i+1}^2 d\theta \\
&= \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_i-1} + r(x_{t_i} - x_{t_i-1})) X_{t_i-1,t_i}^1 \otimes X_{t_i-1,t_i}^1 \otimes (X_{t_i,t_i+1}^1 - Y_{t_i,t_i+1}^1) dr d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_i-1} + r(x_{t_i} - x_{t_i-1})) X_{t_i-1,t_i}^1 \otimes (X_{t_i-1,t_i}^1 - Y_{t_i-1,t_i}^1) \otimes Y_{t_i,t_i+1}^1 dr d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^\theta \{(\nabla^2 f)(x_{t_i-1} + r(x_{t_i} - x_{t_i-1})) - (\nabla^2 f)(y_{t_i-1} + r(y_{t_i} - y_{t_i-1}))\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& X_{t_i-1,t_i}^1 \otimes Y_{t_i-1,t_i}^1 \otimes Y_{t_i,t_i+1}^1 dr d\theta \\
& + \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(y_{t_i-1} + r(y_{t_i} - y_{t_i-1})) (X_{t_i-1,t_i}^1 - Y_{t_i-1,t_i}^1) \otimes Y_{t_i-1,t_i}^1 \otimes Y_{t_i,t_i+1}^1 dr d\theta \\
& + \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_i-1} + \theta(x_{t_i} - x_{t_i-1})) X_{t_i-1,t_i}^1 \otimes (X_{t_i,t_i+1}^2 - Y_{t_i,t_i+1}^2) d\theta \\
& + \int_0^1 \{(\nabla^2 f)(x_{t_i-1} + \theta(x_{t_i} - x_{t_i-1})) - (\nabla^2 f)(y_{t_i-1} + \theta(y_{t_i} - y_{t_i-1}))\} \\
& \quad X_{t_i-1,t_i}^1 \otimes Y_{t_i,t_i+1}^2 d\theta \\
& + \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_i-1} + \theta(y_{t_i} - y_{t_i-1})) (X_{t_i-1,t_i}^1 - Y_{t_i-1,t_i}^1) \otimes Y_{t_i,t_i+1}^2 d\theta \\
& = \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_i-1} + r(x_{t_i} - x_{t_i-1})) X_{t_i-1,t_i}^1 \otimes X_{t_i-1,t_i}^1 \otimes (X_{t_i,t_i+1}^1 - Y_{t_i,t_i+1}^1) dr d\theta \\
& + \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_i-1} + r(x_{t_i} - x_{t_i-1})) X_{t_i-1,t_i}^1 \otimes (X_{t_i-1,t_i}^1 - Y_{t_i-1,t_i}^1) \otimes Y_{t_i,t_i+1}^1 dr d\theta \\
& + \int_0^1 \int_0^\theta \int_0^\theta (\nabla^3 f)(y_{t_i-1} + r(y_{t_i} - y_{t_i-1}) + u(x_{t_i-1} + r(x_{t_i} - x_{t_i-1}) - y_{t_i-1} - r(y_{t_i} - y_{t_i-1}))) \\
& \quad \{ (X_{0,t_i-1}^1 - Y_{0,t_i-1}^1) + r(X_{t_i-1,t_i}^1 - Y_{t_i-1,t_i}^1) \} \otimes X_{t_i-1,t_i}^1 \otimes Y_{t_i-1,t_i}^1 \otimes Y_{t_i,t_i+1}^1 du dr d\theta \\
& + \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(y_{t_i-1} + r(y_{t_i} - y_{t_i-1})) (X_{t_i-1,t_i}^1 - Y_{t_i-1,t_i}^1) \otimes Y_{t_i-1,t_i}^1 \otimes Y_{t_i,t_i+1}^1 dr d\theta \\
& + \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_i-1} + \theta(x_{t_i} - x_{t_i-1})) X_{t_i-1,t_i}^1 \otimes (X_{t_i,t_i+1}^2 - Y_{t_i,t_i+1}^2) d\theta \\
& + \int_0^1 \int_0^1 (\nabla^3 f)(y_{t_i-1} + \theta(y_{t_i} - y_{t_i-1}) + r(x_{t_i-1} + \theta(x_{t_i} - x_{t_i-1}) - y_{t_i-1} - \theta(y_{t_i} - y_{t_i-1}))) \\
& \quad \{ (X_{0,t_i-1}^1 - Y_{0,t_i-1}^1) + \theta(X_{t_i-1,t_i}^1 - Y_{t_i-1,t_i}^1) \} \otimes X_{t_i-1,t_i}^1 \otimes Y_{t_i,t_i+1}^2 dr d\theta \\
& + \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_i-1} + \theta(y_{t_i} - y_{t_i-1})) (X_{t_i-1,t_i}^1 - Y_{t_i-1,t_i}^1) \otimes Y_{t_i,t_i+1}^2 d\theta
\end{aligned}$$

が成り立つから,

$$\begin{aligned}
M &:= \sum_{i,j} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f_j^i(x)| + \sum_{i,j,k} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial_k f_j^i(x)| \\
&+ \sum_{i,j,k,v} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial_v \partial_k f_j^i(x)| + \sum_{i,j,k,v,w} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial_w \partial_v \partial_k f_j^i(x)|
\end{aligned} \tag{9}$$

において

$$\begin{aligned}
& |\{J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})\} - \{J_{s,t}(y, D_{-k}) - J_{s,t}(y, D_{-k-1})\}| \\
& \leq M |X_{t_i-1,t_i}^1| |X_{t_i-1,t_i}^1| |X_{t_i,t_i+1}^1 - Y_{t_i,t_i+1}^1| \\
& \quad + M |X_{t_i-1,t_i}^1| |X_{t_i-1,t_i}^1 - Y_{t_i-1,t_i}^1| |Y_{t_i,t_i+1}^1| \\
& \quad + M |X_{0,t_i-1}^1 - Y_{0,t_i-1}^1| |X_{t_i-1,t_i}^1| |Y_{t_i-1,t_i}^1| |Y_{t_i,t_i+1}^1| \\
& \quad + M |X_{t_i-1,t_i}^1 - Y_{t_i-1,t_i}^1| |X_{t_i-1,t_i}^1| |Y_{t_i-1,t_i}^1| |Y_{t_i,t_i+1}^1| \\
& \quad + M |X_{t_i-1,t_i}^1 - Y_{t_i-1,t_i}^1| |Y_{t_i-1,t_i}^1| |Y_{t_i,t_i+1}^1| \\
& \quad + M |X_{t_i-1,t_i}^1| |X_{t_i,t_i+1}^2 - Y_{t_i,t_i+1}^2| \\
& \quad + M |X_{0,t_i-1}^1 - Y_{0,t_i-1}^1| |X_{t_i-1,t_i}^1| |Y_{t_i,t_i+1}^2| \\
& \quad + M |X_{t_i-1,t_i}^1 - Y_{t_i-1,t_i}^1| |X_{t_i-1,t_i}^1| |Y_{t_i,t_i+1}^2| \\
& \quad + M |X_{t_i-1,t_i}^1 - Y_{t_i-1,t_i}^1| |Y_{t_i,t_i+1}^2|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \epsilon M \left[ 5 + 2\omega(0, t_i - 1)^{1/p} + 2\omega(t_i - 1, t_i)^{1/p} \right] \left( \frac{2\omega(s, t)}{N - k - 1} \right)^{3/p} \\
&\leq \epsilon M \left[ 2 + 4 \left( 2R^p + 2R^{p/2} + 2 \right)^{1/p} \right] 2^{3/p} \left( 2R^p + 2R^{p/2} + 2 \right)^{3/p} \left( \frac{1}{N - k - 1} \right)^{3/p}
\end{aligned}$$

を得る．ここで

$$C'_1 := M \left[ 2 + 4 \left( 2R^p + 2R^{p/2} + 2 \right)^{1/p} \right] 2^{3/p} \left( 2R^p + 2R^{p/2} + 2 \right)^{3/p}$$

と定めれば

$$|(7)| \leq \sum_{k=0}^{N-2} \epsilon C'_1 \left( \frac{1}{N - k - 1} \right)^{3/p} < \epsilon C'_1 \zeta\left(\frac{3}{p}\right)$$

が成立し、 $p < 3$  より  $\zeta(3/p) < \infty$  であるから  $C_1 := C'_1 \zeta(3/p)$  とおいて (8) が出る．

第五段  $x_0 = y_0$  の仮定により

$$\begin{aligned}
&|J_{s,t}(x) - J_{s,t}(y)| \\
&\leq |f(x_s)X_{s,t}^1 - f(y_s)Y_{s,t}^1| + |(\nabla f)(x_s)X_{s,t}^2 - (\nabla f)(y_s)Y_{s,t}^2| \\
&\leq |f(x_s)X_{s,t}^1 - f(x_s)Y_{s,t}^1| + |f(x_s)Y_{s,t}^1 - f(y_s)Y_{s,t}^1| \\
&\quad + |(\nabla f)(x_s)X_{s,t}^2 - (\nabla f)(x_s)Y_{s,t}^2| + |(\nabla f)(x_s)Y_{s,t}^2 - (\nabla f)(y_s)Y_{s,t}^2| \\
&\leq M |X_{s,t}^1 - Y_{s,t}^1| + \left| \int_0^1 (\nabla f)(y_s + \theta(x_s - y_s))(x_s - y_s) \otimes Y_{s,t}^1 d\theta \right| \\
&\quad + M |X_{s,t}^2 - Y_{s,t}^2| + \left| \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_s + \theta(x_s - y_s))(x_s - y_s) \otimes Y_{s,t}^2 d\theta \right| \\
&\leq M |X_{s,t}^1 - Y_{s,t}^1| + M |X_{0,s}^1 - Y_{0,s}^1| |Y_{s,t}^1| \\
&\quad + M |X_{s,t}^2 - Y_{s,t}^2| + M |X_{0,s}^1 - Y_{0,s}^1| |Y_{s,t}^2| \\
&\leq \epsilon M \omega(s, t)^{1/p} + \epsilon M \omega(0, s)^{1/p} \omega(s, t)^{1/p} \\
&\quad + \epsilon M \omega(s, t)^{2/p} + \epsilon M \omega(0, s)^{1/p} \omega(s, t)^{2/p} \\
&\leq \epsilon M \left[ \omega(0, T)^{1/p} + 2\omega(0, T)^{2/p} + \omega(0, T)^{3/p} \right] \\
&\leq \epsilon M \left[ \left( 2R^p + 2R^{p/2} + 2 \right)^{1/p} + 2 \left( 2R^p + 2R^{p/2} + 2 \right)^{2/p} + \left( 2R^p + 2R^{p/2} + 2 \right)^{3/p} \right]
\end{aligned}$$

が成立する．ここで最下段の  $\epsilon$  の係数を  $C_2$  とおく．

第六段 以上より、任意の  $D \in \delta[s, t]$  に対し

$$|J_{s,t}(x, D) - J_{s,t}(y, D)| \leq \epsilon(C_1 + C_2)$$

が満たされる．定理 0.2.2 により  $|D| \rightarrow 0$  として

$$|I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y)| \leq \epsilon(C_1 + C_2)$$

が成立する．

系 0.2.10 (パスが 0 出発なら  $f$  の有界性は要らない). 定理 0.2.8 と定理 0.2.9 について、 $x, y \in \tilde{C}^1$  ならば  $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$  として主張が成り立つ．

証明.  $x_0 = 0$  なら

$$\|X^1\|_p \leq R \Rightarrow |x_t| \leq R \quad (\forall t \in [0, T])$$

が成り立つから, 式 (6) と (9) において  $\sup_{x \in \mathbb{R}^d}$  を  $\sup_{|x| \leq 9R}$  に替えればよい. ■

補題 0.2.11.  $x \in C^1$ ,  $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$  とする.

(1)  $1 \leq p < 2$  の場合, 或る control function  $\omega$  が存在して

$$|X_{s,t}^1| \leq \omega(s, t)^{1/p}, \quad (0 \leq \forall s \leq \forall t \leq T)$$

を満たすとき, ある定数  $C = C(p, f)$  があり

$$|I_{s,t}(x)| \leq C(\omega(s, t)^{1/p} + \omega(s, t)^{2/p}).$$

が成立する.

(2)  $2 \leq p < 3$  の場合, 或る control function  $\omega$  が存在して

$$|X_{s,t}^1| \leq \omega(s, t)^{1/p}, \quad |X_{s,t}^2| \leq \omega(s, t)^{2/p}, \quad (0 \leq \forall s \leq \forall t \leq T)$$

を満たすとき, ある定数  $C = C(p, f)$  があり

$$|I_{s,t}(x)| \leq C(\omega(s, t)^{1/p} + \omega(s, t)^{2/p} + \omega(s, t)^{3/p}).$$

が成立する.

証明.

(1)  $D = \{s = t_0 < \cdots < t_N = t\}$  ( $N \geq 2$ ) に対し, 補題 0.2.7 により存在する  $i$  を取り  $D_{-1} := D \setminus \{i\}$  と書く. 補題 0.2.7 の添数を除く作業を続けて  $D_{-k}$  ( $k = 1, \dots, N-1$ ) を構成する.

$$M := \max_{\substack{t \in [0, T] \\ 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j, k \leq d}} |\partial_k f_j^i(x_t)|, \quad M' := \max_{t \in [0, T]} |f(x_t)|$$

とおけば  $M, M' < \infty$  であり,  $|X_{t_i, t_{i+1}}^1| \leq \omega(t_i, t_{i+1})^{1/p} \leq \omega(t_{i-1}, t_{i+1})^{1/p}$  と補題 0.2.7 により

$$\begin{aligned} |\tilde{I}_{s,t}(x, D) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-1})| &= |\tilde{I}_{t_{i-1}, t_i}(x) + \tilde{I}_{t_i, t_{i+1}}(x) - \tilde{I}_{t_{i-1}, t_{i+1}}(x)| \\ &\leq |\{f(x_{t_i}) - f(x_{t_{i-1}})\} X_{t_i, t_{i+1}}^1| \\ &\leq \left| \left\{ \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{i-1}} + \theta(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})) d\theta \right\} X_{t_{i-1}, t_i}^1 \otimes X_{t_i, t_{i+1}}^1 \right| \\ &\leq md^2 M |X_{t_i, t_{i+1}}^1|^2 \\ &\leq md^2 M \left( \frac{2\omega(s, t)}{N-1} \right)^{2/p} \end{aligned}$$

が成立する. 同様に

$$|\tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1})| \leq md^2 M \left( \frac{2\omega(s, t)}{N-k-1} \right)^{2/p}, \quad (k = 0, \dots, N-2)$$

が成り立ち ( $D_{-0} = D$ )

$$\begin{aligned}
|\tilde{I}_{s,t}(x, D) - f(x_s)X_{s,t}^1| &\leq \sum_{k=0}^{N-2} |\tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1})| \\
&\leq md^2 M(2\omega(s, t))^{2/p} \sum_{k=0}^{N-2} \left( \frac{1}{N-k-1} \right)^{2/p} \\
&\leq md^2 M(2\omega(s, t))^{2/p} \zeta\left(\frac{2}{p}\right)
\end{aligned}$$

が従う。いま、仮定より  $p < 2$  であるから  $\zeta(2/p) < \infty$  であり、定理 0.2.2 より

$$|I_{s,t}(x)| \leq M' \omega(s, t)^{1/p} + md^2 M(2\omega(s, t))^{2/p} \zeta\left(\frac{2}{p}\right)$$

を得る。

(2) (1) と同様に  $D_{-k}$  ( $k = 1, \dots, N-1$ ) を構成する。会田先生のノート通りに

$$\begin{aligned}
J_{s,t}(x, D) - J_{s,t}(x, D_{-1}) &= \left\{ \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{i-1}} + \theta(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})) dr d\theta \right\} X_{t_{i-1}, t_i}^1 \otimes X_{t_{i-1}, t_i}^1 \otimes X_{t_i, t_{i+1}}^1 \\
&\quad + \left\{ \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{i-1}} + \theta(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})) d\theta \right\} X_{t_{i-1}, t_i}^1 \otimes X_{t_i, t_{i+1}}^2
\end{aligned}$$

を得る。ここで (1) の  $M, M'$  に加えて

$$M'' := \max_{\substack{t \in [0, T] \\ 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j, k, v \leq d}} |\partial_v \partial_k f_j^i(x_t)|$$

とおけば

$$\begin{aligned}
|J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})| &\leq md^2 M \left( \frac{2\omega(s, t)}{N-k-1} \right)^{3/p} + md^2 M'' \left( \frac{2\omega(s, t)}{N-k-1} \right)^{1/p} \left( \frac{2\omega(s, t)}{N-k-1} \right)^{2/p} \\
&\leq md^2 (M + M'') \left( \frac{2\omega(s, t)}{N-k-1} \right)^{3/p}
\end{aligned}$$

が成立し、会田先生のノート通りに

$$|J_{s,t}(x, D) - (f(x_s)X_{s,t}^1 + (\nabla f)(x_s)X_{s,t}^2)| \leq 2^{3/p} md^2 (M + M'') \zeta\left(\frac{3}{p}\right) \omega(s, t)^{3/p}$$

が従い、 $p < 3$  の仮定より  $\zeta(3/p) < \infty$  である。(1) と同じく定理 0.2.2 より

$$|I_{s,t}(x)| \leq M' \omega(s, t)^{1/p} + md^2 M \omega(s, t)^{2/p} + 2^{3/p} md^2 (M + M'') \zeta\left(\frac{3}{p}\right) \omega(s, t)^{3/p}$$

となる。 ■