

ゼミ用ノート
会田先生資料”Rough path analysis:An Introduction”

基礎工学研究科システム創成専攻
学籍番号 29C17095
百合川尚学

2018 年 4 月 10 日

目次

0.1	導入	1
0.2	連続性定理の主張	7
0.3	連続性定理の証明	9

0.1 導入

以下, d 次元ベクトル $x \in \mathbb{R}^d$ と (m, d) 行列 $a \in \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^d$ について, 成分を込めて表現する場合は $x = (x^1, \dots, x^d)$, $a = (a_{ij}^j)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq d}$ と書く. また $T > 0$ を固定し $C^1 = C^1([0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d)$ とおく. (端点においては片側微分を考える.) 区間 $[s, t] \subset [0, T]$ の分割を $D = \{s = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t\}$ で表現し, 分割の全体を $\delta[s, t]$ とおく. $|D|$ により $\max_{1 \leq i \leq N} |t_i - t_{i-1}|$ を表し,

$$\sum_D = \sum_{i=1}^N$$

と略記する.

定理 0.1.1 (Riemann-Stieltjes 積分). $[s, t] \subset [0, T]$ とし, $D \in \delta[s, t]$ についてのみ考えるとき, 任意の $x \in C^1$, $f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ に対して次の極限が存在する:*

$$\lim_{|D| \rightarrow 0} \sum_D f(x_{s_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) \in \mathbb{R}^m.$$

ここで s_{i-1} は区間 $[t_{i-1}, t_i]$ に属する任意の点であり, 極限は s_{i-1} の取り方に依らず確定する.

証明. 各 x^j は C^1 -級であるから, 平均値の定理より $\sum_D f(x_{s_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})$ の第 k 成分を

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^d \sum_D f_j^k(x_{s_{i-1}})(x_{t_i}^j - x_{t_{i-1}}^j) \\ &= \sum_{j=1}^d \sum_D f_j^k(x_{s_{i-1}}) \frac{d}{dt} x_{\xi_i}^j (t_i - t_{i-1}), \quad (\exists \xi_i \in [t_{i-1}, t_i]) \end{aligned}$$

と表現できる. 各 j, k について

$$\lim_{|D| \rightarrow 0} \sum_D f_j^k(x_{s_{i-1}}) \frac{d}{dt} x_{\xi_i}^j (t_i - t_{i-1})$$

*1 極限の存在を保証する条件としては, f の有界性と微分可能性は必要ない.

が確定すれば、第 k 成分の極限が確定し定理の主張を得る。いま、 $t \rightarrow f_j^k(x_t)$ 及び $t \mapsto (d/dt)x_t^j$ は $([s, t]$ 上一様) 連続であるから、分割 D による各区間 $[t_{i-1}, t_i]$ において次の最大最小値が定まる:

$$M_i := \sup_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} f_j^k(x_t) \frac{d}{dt} x_t^j, \quad m_i := \inf_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} f_j^k(x_t) \frac{d}{dt} x_t^j.$$

ここで

$$S_D := \sum_D M_i(t_i - t_{i-1}), \quad s_D := \sum_D m_i(t_i - t_{i-1}), \quad \Sigma_D := \sum_D f_j^k(x_{s_{i-1}}) \frac{d}{dt} x_{\xi_i}^j(t_i - t_{i-1})$$

とにおいて

$$S := \inf_{D \in \delta[s, t]} S_D, \quad s := \sup_{D \in \delta[s, t]} s_D$$

を定めれば

$$s_D \leq s \leq S \leq S_D, \quad s_D \leq \Sigma_D \leq S_D$$

が満たされる。実際、任意の $D_1, D_2 \in \delta[s, t]$ に対して、分割の合併を D_3 とすれば

$$s_{D_1} \leq s_{D_3} \leq S_{D_3} \leq S_{D_2}$$

が成立し $s \leq S_D$ ($\forall D \in \delta[s, t]$) すなわち $s \leq S$ が出る。一方で一様連続性から

$$0 \leq S - s \leq S_D - s_D = \sum_D (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \rightarrow 0 \quad (|D| \rightarrow 0)$$

が従い $s = S$ を得る。以上より

$$|S - \Sigma_D| \leq |S - S_D| + |S_D - \Sigma_D| \leq |S - S_D| + |S_D - s_D| \rightarrow 0 \quad (|D| \rightarrow 0)$$

が成り立つ。 ■

上の証明において、各 k, j ごとに定まる極限 S を

$$\int_s^t f_j^k(x_u) dx_u^j$$

と書く。

定義 0.1.2 (C^1 -級のパスに対する汎関数). $x \in C^1$ と $f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ に対して、 $[s, t] \subset [0, T]$ における Riemann-Stieltjes 積分を次で表現する:

$$I_{s,t}^f(x) = \int_s^t f(x_u) dx_u := \lim_{|D| \rightarrow 0} \sum_D f(x_{t_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}),$$

$$\left[\int_s^t f(x_u) dx_u \right]^k = \sum_{j=1}^d \int_s^t f_j^k(x_u) dx_u^j, \quad (k = 1, \dots, m).$$

ただし $D \in \delta[s, t]$ のみを考える。

定理 0.1.3 (I の加法性・線型性・絶対値). 任意の $x \in C^1$, $f, g \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して次が成立する:

- (1) $I_{s,u}^f(x) + I_{u,t}^f(x) = I_{s,t}^f(x)$,
- (2) $I_{s,t}^{(\alpha f + \beta g)}(x) = \alpha I_{s,t}^f(x) + \beta I_{s,t}^g(x)$.
- (3) $\left| I_{s,t}^f(x) \right| \leq \int_s^t |f(x_u)| |\dot{x}_u| du$.

証明.

(1) 各 k, j に対して

$$\int_s^u f_j^k(x_r) dx_r^j + \int_u^t f_j^k(x_r) dx_r^j = \int_s^t f_j^k(x_r) dx_r^j \quad (1)$$

が成り立つことを示せばよい. 以下, 分割 D に対する Riemann 和 $\sum_D f_j^k(x_{t_{i-1}})(x_{t_i}^j - x_{t_{i-1}}^j)$ を Σ_D と略記する. 定理 0.1.1 より, 任意の $\epsilon > 0$ に対して或る $\delta > 0$ が存在し,

$$|D_1|, |D_2|, |D_3| < \delta, \quad (D_1 \in \delta[s, u], D_2 \in \delta[u, t], D_3 \in \delta[s, t])$$

である限り

$$\left| \int_s^u f_j^k(x_r) dx_r^j - \Sigma_{D_1} \right| < \epsilon, \quad \left| \int_u^t f_j^k(x_r) dx_r^j - \Sigma_{D_2} \right| < \epsilon, \quad \left| \int_s^t f_j^k(x_r) dx_r^j - \Sigma_{D_3} \right| < \epsilon$$

が成立する. $|D_1|, |D_2| < \delta/2$ を満たす D_1, D_2 を取り D_3 をその合併とすれば, $|D_3| < \delta$ かつ

$$\Sigma_{D_1} + \Sigma_{D_2} = \Sigma_{D_3}$$

が成り立ち,

$$\begin{aligned} & \left| \int_s^u f_j^k(x_r) dx_r^j + \int_u^t f_j^k(x_r) dx_r^j - \int_s^t f_j^k(x_r) dx_r^j \right| \\ & \leq \left| \int_s^u f_j^k(x_r) dx_r^j - \Sigma_{D_1} \right| + \left| \int_u^t f_j^k(x_r) dx_r^j - \Sigma_{D_2} \right| + \left| \int_s^t f_j^k(x_r) dx_r^j - \Sigma_{D_3} \right| \\ & < 3\epsilon \end{aligned}$$

が従い (1) を得る.

(2) 略. ■

C^1 において次でノルム $\|\cdot\|_{C^1}$ を定める:

$$\|x\|_\infty := \sup_{t \in [0, T]} |x(t)|, \quad \|x'\|_\infty := \sup_{t \in [0, T]} |x'(t)|, \quad \|x\|_{C^1} := \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty.$$

定理 0.1.4 ($\|\cdot\|_{C^1}$ に関する連続性). $[s, t] \subset [0, T]$ とし, C^1 には $\|\cdot\|_{C^1}$ でノルム位相を入れる. このとき, $f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ に対し $C^1 \ni x \mapsto I_{s,t}^f(x) \in \mathbb{R}^m$ は連続である.

証明. C^1 の各点は可算な基本近傍系を持つから $x \mapsto I_{s,t}(x)$ の点列連続性と連続性は一致する. すなわち $x^n \rightarrow x$ なら $I_{s,t}^f(x^n) \rightarrow I_{s,t}^f(x)$ が従うことを示せばよい. 今回も各 j, k について

$$\int_s^t f_j^k(x_u^n) dx_u^{n,j} \rightarrow \int_s^t f_j^k(x_u) dx_u^j, \quad (n \rightarrow \infty) \quad (2)$$

が成り立つことを示せば十分である.

第一段 $t \mapsto x_t$ の連続性より $x([s, t])$ は \mathbb{R}^d のコンパクト集合であるから, $t \mapsto f(x_t)$ は $[s, t]$ 上で有界である. ここで $M := \sup_{t \in [s, t]} |f(x_t)|$ とおく.

第二段 任意の分割 $D \in \delta[s, t]$ に対し, 平均値の定理を使うと以下のように式変形される:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_D f_j^k(x_{t_{i-1}}^n)(x_{t_i}^{n,j} - x_{t_{i-1}}^{n,j}) - \sum_D f_j^k(x_{t_{i-1}})(x_{t_i}^j - x_{t_{i-1}}^j) \right| \\ & \leq \sum_D \left| f_j^k(x_{t_{i-1}}^n) \frac{d}{dt} x_{\xi_i}^{n,j} - f_j^k(x_{t_{i-1}}) \frac{d}{dt} x_{\eta_i}^j \right| (t_i - t_{i-1}) \\ & \leq \sum_D \left| f_j^k(x_{t_{i-1}}^n) \frac{d}{dt} x_{\xi_i}^{n,j} + f_j^k(x_{t_{i-1}}) \frac{d}{dt} x_{\eta_i}^{n,j} \right. \\ & \quad \left. - f_j^k(x_{t_{i-1}}) \frac{d}{dt} x_{\eta_i}^{n,j} - f_j^k(x_{t_{i-1}}) \frac{d}{dt} x_{\eta_i}^j \right| (t_i - t_{i-1}) \\ & \leq \sum_D \left| f_j^k(x_{t_{i-1}}^n) \frac{d}{dt} x_{\xi_i}^{n,j} - f_j^k(x_{t_{i-1}}) \frac{d}{dt} x_{\eta_i}^{n,j} \right| (t_i - t_{i-1}) \\ & \quad + \sum_D \left| f_j^k(x_{t_{i-1}}) \frac{d}{dt} x_{\eta_i}^{n,j} - f_j^k(x_{t_{i-1}}) \frac{d}{dt} x_{\eta_i}^j \right| (t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

ここで最終式第二項については

$$\begin{aligned} & \sum_D \left| f_j^k(x_{t_{i-1}}) \frac{d}{dt} x_{\eta_i}^{n,j} - f_j^k(x_{t_{i-1}}) \frac{d}{dt} x_{\eta_i}^j \right| (t_i - t_{i-1}) \\ & \leq \sum_D M \|x^n - x\|_{C^1} (t_i - t_{i-1}) = M(t - s) \|x^n - x\|_{C^1} \end{aligned}$$

が成り立ち, 第一項については

$$\begin{aligned} & \sum_D \left| f_j^k(x_{t_{i-1}}^n) \frac{d}{dt} x_{\xi_i}^{n,j} - f_j^k(x_{t_{i-1}}) \frac{d}{dt} x_{\eta_i}^{n,j} \right| (t_i - t_{i-1}) \\ & \leq \sum_D \left| f_j^k(x_{t_{i-1}}^n) \frac{d}{dt} x_{\xi_i}^{n,j} - f_j^k(x_{t_{i-1}}^n) \frac{d}{dt} x_{\xi_i}^j \right. \\ & \quad + f_j^k(x_{t_{i-1}}^n) \frac{d}{dt} x_{\xi_i}^j - f_j^k(x_{t_{i-1}}^n) \frac{d}{dt} x_{\eta_i}^j \\ & \quad + f_j^k(x_{t_{i-1}}^n) \frac{d}{dt} x_{\eta_i}^j - f_j^k(x_{t_{i-1}}^n) \frac{d}{dt} x_{\eta_i}^{n,j} \\ & \quad \left. + f_j^k(x_{t_{i-1}}^n) \frac{d}{dt} x_{\eta_i}^{n,j} - f_j^k(x_{t_{i-1}}) \frac{d}{dt} x_{\eta_i}^{n,j} \right| (t_i - t_{i-1}) \\ & \leq 2M(t - s) \|x^n - x\|_{C^1} + M(t - s) \sup_{|\xi - \eta| \leq |D|} |x_{\xi}^j - x_{\eta}^j| \\ & \quad + \|x\|_{C^1} (t - s) \sup_{t \in [0, T]} |f_j^k(x_t^n) - f_j^k(x_t)| \end{aligned}$$

とできる. いま, 任意に $\epsilon > 0$ を取れば, 或る $\epsilon > \delta > 0$ が存在して $v, w \in x([s, t])$, $|v - w| < \delta$ なら $|f_j^k(v) - f_j^k(w)| < \epsilon$ が成り立つ (一樣連続). すなわち $\|x^{(n)} - x\|_{C^1} < \delta$ なら

$$\sup_{t \in [s, t]} |f_j^k(x_t^n) - f_j^k(x_t)| < \epsilon$$

が成立する． $\|x^n - x\|_{C^1} \rightarrow 0$ の仮定より，或る自然数 N が存在して $\|x^n - x\|_{C^1} < \delta$ ($n > N$) が満たされるから，ここで $n > N$ を任意に一つ選び固定する．

第三段 定理 0.1.1 より，前段の ϵ に対し或る $\delta_1 > 0$ が存在して， $|D| < \delta_1$ なら

$$\left| \int_s^t f_j^k(x_u^n) dx_u^{n,j} - \sum_D f_j^k(x_{t_{i-1}}^n)(x_{t_i}^n - x_{t_{i-1}}^n) \right| < \epsilon,$$

$$\left| \int_s^t f_j^k(x_u) dx_u^j - \sum_D f_j^k(x_{t_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) \right| < \epsilon,$$

が成り立つ．一方で x^j は一様連続であるから，或る $\delta_2 > 0$ が存在して $|D| < \delta_2$ なら

$$\sup_{|\xi - \eta| \leq |D|} |x_\xi^j - x_\eta^j| < \epsilon$$

が満たされる．よって $|D| < \delta \wedge \delta_1 \wedge \delta_2$ ならば

$$\left| \int_s^t f_j^k(x_u^n) dx_u^{n,j} - \int_s^t f_j^k(x_u) dx_u^j \right| < [2 + 4M(t-s) + \|x\|_{C^1}(t-s)] \epsilon$$

が出る． $n > N$ は任意であったから (2) が従う．

定義 0.1.5 (p -variation). $[0, T]$ 上の \mathbb{R}^d 値関数 x に対し， p -variation を次で定める：

$$\|x\|_{p,[s,t]} := \left\{ \sup_{D \in \delta[s,t]} \sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^p \right\}^{1/p}.$$

特に， $\|\cdot\|_{p,[0,T]}$ を $\|\cdot\|_p$ と表記する．また $p \geq 1$ として，線形空間 $B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$ を

$$B_{p,T}(\mathbb{R}^d) := \left\{ x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d ; \quad x_0 = 0, x : \text{continuous}, \|x\|_p < \infty \right\}$$

により定める．

次の結果によれば， $0 < p < 1$ に対し $B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$ を定めても 0 の定数関数のみの空間でしかない．

定理 0.1.6 ($0 < p < 1$ に対して有界 p -variation なら定数). $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ を連続関数とする．このとき， $p \in (0, 1)$ に対し $\|x\|_p < \infty$ が成り立つなら x は定数関数である．

証明． $t \in [0, T]$ を任意に取り固定する．このとき全ての $D \in \delta[0, t]$ に対して，

$$\begin{aligned} |x_t - x_0| &\leq \sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}| \leq \max_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^{1-p} \sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^p \\ &\leq \max_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^{1-p} \|x\|_p \end{aligned}$$

が成り立ち， x の一様連続性から右辺は $|D| \rightarrow 0$ で 0 に収束し， $x_t = x_0$ が従う．

$p \geq 1$ の場合, Minkowski の不等式によれば, 任意の $D \in \delta[s, t]$ に対し

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_D |(x_{t_i} + y_{t_i}) - (x_{t_{i-1}} + y_{t_{i-1}})|^p \right\}^{1/p} &\leq \left\{ \sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^p \right\}^{1/p} + \left\{ \sum_D |y_{t_i} - y_{t_{i-1}}|^p \right\}^{1/p} \\ &\leq \|x\|_{p,[s,t]} + \|y\|_{p,[s,t]} \end{aligned}$$

が成り立ち $\|x + y\|_{p,[s,t]} \leq \|x\|_{p,[s,t]} + \|y\|_{p,[s,t]}$ を得る.

定理 0.1.7. $B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$ は $\|\cdot\|_p$ をノルムとする Banach 空間である.

証明. 完備性を示す.

第一段 $(x^n)_{n=1}^\infty \subset B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$ を Cauchy 列とすれば, 任意の $\epsilon > 0$ に対して或る $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ が存在し

$$\|x^n - x^m\|_p = \left\{ \sup_{D \in \delta[0,T]} \sum_D |(x_{t_i}^n - x_{t_i}^m) - (x_{t_{i-1}}^n - x_{t_{i-1}}^m)|^p \right\}^{1/p} < \epsilon, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

を満たす. いま, 任意の $t \in [0, T]$ に対して $[0, T]$ の分割 $D = \{0 \leq t \leq T\}$ を考えれば

$$|x_t^n - x_t^m| < \epsilon, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

が得られ, 実数の完備性より或る $x_t \in \mathbb{R}^d$ が存在して

$$|x_t^n - x_t| < \epsilon \quad (n > n_\epsilon)$$

を満たす. この収束は t に関して一様であるから, $t \mapsto x_t$ は 0 出発かつ連続である.

第二段 $\|x^n - x\|_p \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$ を示す. 前段によれば, 任意の $D \in \delta[0, T]$ に対し

$$\sum_D |(x_{t_i}^m - x_{t_i}^n) - (x_{t_{i-1}}^m - x_{t_{i-1}}^n)|^p < \epsilon^p, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

が成り立っている. D はせいぜい有限個の分割であるから, $m \rightarrow \infty$ として

$$\sum_D |(x_{t_i} - x_{t_i}^n) - (x_{t_{i-1}} - x_{t_{i-1}}^n)|^p < \epsilon^p, \quad (n > n_\epsilon)$$

が従い, D の任意性より $\|x^n - x\|_p < \epsilon \ (n > n_\epsilon)$ を得る. ■

定理 0.1.8. $p \geq 1$ とする. また $x_0 = 0$ を満たす $x \in C^1$ の全体が作る線形空間を \tilde{C}^1 とおく.

- (1) $x \in C^1$ ならば $\|x\|_p < \infty$ が成り立つ. ただちに, $\|\cdot\|_p$ は \tilde{C}^1 においてノルムとなる.
- (2) \tilde{C}^1 において, $\|\cdot\|_{C^1}$ で導入する位相は $\|\cdot\|_p$ で導入する位相より強い.

証明.

$p = 1$ の場合 平均値の定理より, 任意の $D \in \delta[0, T]$ に対し

$$\sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}| \leq \sum_D \sum_{j=1}^d |x_{t_i}^j - x_{t_{i-1}}^j| \leq \sum_D \sum_{j=1}^d \|x\|_{C^1} (t_i - t_{i-1}) = d \|x\|_{C^1} T < \infty$$

が成り立ち $\|x\|_1 < \infty$ が従う.

$p > 1$ の場合 q を p の共役指数とする. 任意の $D \in \delta[0, T]$ に対し, Hölder の不等式より

$$\begin{aligned} \sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^p &\leq \sum_D \sum_{j=1}^d |x_{t_i}^j - x_{t_{i-1}}^j|^p = \sum_D \sum_{j=1}^d \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{d}{du} x_u^j du \right|^p \\ &\leq \sum_D \sum_{j=1}^d (t_i - t_{i-1}) \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left| \frac{d}{du} x_u^j \right|^q du \right)^{p/q} \leq d \|x\|_{C^1}^p T^p \end{aligned}$$

が成立し, $\|x\|_p < \infty$ が従う.

以上より, $p \geq 1$ ならば $\|x\|_p \leq dT \|x\|_{C^1}$ ($x \in C^1$) が成り立ち (2) の主張を得る. ■

以上が会田先生の資料の Introduction の部分の補完である. 次節の考察対象は主に定理 0.1.4 と定理 0.1.8 に関する. 定理 0.1.4 によれば, C^1 に $\|\cdot\|_{C^1}$ でノルム位相を導入した場合, $f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ に対して $C^1 \ni x \mapsto I_{s,t}^f(x)$ は連続である. 一方で定理 0.1.4 によれば, 0 出発 C^1 -パス空間 \tilde{C}^1 に $\|\cdot\|_p$ でノルム位相を導入した場合, $\tilde{C}^1 \ni x \mapsto I_{s,t}^f(x)$ が連続であるという保証はない. しかし, 次節以後の結果により, $1 \leq p < 3$ かつ $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ が満たされているなら $\tilde{C}^1 \ni x \mapsto I_{s,t}^f(x)$ は或る意味での連続性を持つ.

0.2 連続性定理の主張

定義 0.2.1 (記号の定義). $x \in C^1$, $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ に対し次を定める.

$$\begin{aligned} \Delta_T &:= \{ (s, t) ; \quad 0 \leq s \leq t \leq T \}, \\ X^1 : \Delta_T &\longrightarrow \mathbb{R}^d \quad ((s, t) \mapsto X_{s,t}^1 = x_t - x_s), \\ X^2 : \Delta_T &\longrightarrow \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^d \quad \left((s, t) \mapsto X_{s,t}^2 = \int_s^t (x_u - x_s) \otimes dx_u \right), \\ \tilde{I}_{s,t}^f(x) &:= f(x_s) X_{s,t}^1 = f(x_s)(x_t - x_s), \\ J_{s,t}^f(x) &:= f(x_s) X_{s,t}^1 + (\nabla f)(x_s) X_{s,t}^2, \\ \text{where } [(\nabla f)(x_s) X_{s,t}^2]^i &= \sum_{j,k=1}^d \partial_k f_j^i(x_s) \int_s^t (x_u^k - x_s^k) dx_u^j. \end{aligned}$$

定理 0.2.2. $[s, t] \subset [0, T]$, $x \in C^1$, $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ とする. $D \in \delta[s, t]$ に対し

$$\tilde{I}_{s,t}^f(x, D) := \sum_D \tilde{I}_{t_{i-1}, t_i}^f(x), \quad J_{s,t}^f(x, D) := \sum_D J_{t_{i-1}, t_i}^f(x)$$

を定めるとき, 次が成立する:

$$I_{s,t}^f(x) = \lim_{|D| \rightarrow 0} \tilde{I}_{s,t}^f(x, D) = \lim_{|D| \rightarrow 0} J_{s,t}^f(x, D).$$

証明. 第一の等号は $I_{s,t}^f(x)$ の定義によるから, 第二の等号を証明する. 各 $1 \leq i \leq m$ について

$$\begin{aligned} [I_{s,t}(x)]^i &= \sum_{j=1}^d \int_s^t f_j^i(x_u) dx_u^j \\ &= \sum_{j=1}^d \int_s^t f_j^i(x_s) + f_j^i(x_u) - f_j^i(x_s) dx_u^j \\ &= \sum_{j=1}^d \int_s^t f_j^i(x_s) + \sum_{k=1}^d \left\{ \int_0^1 \partial_k f_j^i(x_s + \theta(x_u - x_s)) d\theta \right\} (x_u^k - x_s^k) dx_u^j \\ &= \sum_{j=1}^d \int_s^t f_j^i(x_s) dx_u^j + \sum_{j,k=1}^d \partial_k f_j^i(x_s) \int_s^t (x_u^k - x_s^k) dx_u^j \\ &\quad + \sum_{j,k=1}^d \int_s^t \left\{ \int_0^1 \partial_k f_j^i(x_s + \theta(x_u - x_s)) - \partial_k f_j^i(x_s) d\theta \right\} (x_u^k - x_s^k) dx_u^j, \\ &= [J_{s,t}^f(x)]^i + \sum_{j,k,\ell=1}^d \int_s^t \left\{ \int_0^1 \left(\int_0^\theta \partial_\ell \partial_k f_j^i(x_s + r(x_u - x_s)) dr \right) d\theta \right\} (x_u^\ell - x_s^\ell)(x_u^k - x_s^k) dx_u^j \end{aligned}$$

が成り立つ. $x([0, T])$ はコンパクトであるから, 原点中心の半径 $3w$ の閉球に含まれる. 従って $x_s + r(x_u - x_s)$ ($0 \leq r \leq 1$) は半径 $3w$ の閉球に属し, $\partial_\ell \partial_k f_j^i$ のその球上での最大値を M とおけば

$$\begin{aligned} &\left| \int_s^t \left\{ \int_0^1 \left(\int_0^\theta \partial_\ell \partial_k f_j^i(x_s + r(x_u - x_s)) dr \right) d\theta \right\} (x_u^\ell - x_s^\ell)(x_u^k - x_s^k) dx_u^j \right| \\ &\leq M \int_s^t |x_u^\ell - x_s^\ell| |x_u^k - x_s^k| |x_u^j| du \\ &\leq M \|x\|_{C^1}^3 \int_s^t (u - s)^2 du \end{aligned}$$

となるから, 特に $D \in \delta[s, t]$ に対して

$$\begin{aligned} \sum_D \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - t_{i-1})^2 du &\leq \sum_D |D| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - t_{i-1}) du \\ &\leq \sum_D |D| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - s) du \leq \sum_D |D| \int_s^t (u - s) du \longrightarrow 0 \quad (|D| \longrightarrow 0) \end{aligned}$$

が成立する. これにより

$$|[I_{s,t}(x, D)]^i - [J_{s,t}(x, D)]^i| \longrightarrow 0 \quad (|D| \longrightarrow 0)$$

が従い定理の主張を得る. ■

0.3 連続性定理の証明

定義 0.3.1 (control function). 関数 $\omega : \Delta_T \rightarrow [0, \infty)$ が任意の $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$ に対して

$$\omega(s, u) + \omega(u, t) \leq \omega(s, t)$$

を満たすとき, ω を control function と呼ぶ.

定理 0.3.2 (control function の例). 以下の関数 $\omega : \Delta_T \rightarrow [0, \infty)$ は control function である.

- (1) $\omega := (\omega_1^{1/p} + \omega_2^{1/p})^p$, ($p \geq 1$, ω_1, ω_2 : control function).
- (2) $\omega : (s, t) \mapsto \|X^1\|_{p:[s,t]}^p$, ($p \geq 1$, $x \in B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$).
- (3)

定理 0.3.3.

- (1)
- (2) 任意の $D_1 \in \delta[s, u], D_2 \in \delta[u, t]$ に対して合併 $D_1 \cup D_2$ は $[s, t]$ の分割であるから,

$$\sum_{D_1} |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^p + \sum_{D_2} |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^p \leq \sup_{D \in \delta[s,t]} \sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^p = \|X^1\|_{p:[s,t]}^p$$

が成り立つ. 左辺の D_1, D_2 の取り方は独立であるから, それぞれに対し上限を取れば

$$\|X^1\|_{p:[s,u]}^p + \|X^1\|_{p:[u,t]}^p \leq \|X^1\|_{p:[s,t]}^p$$

が得られる.