

ゼミ用ノート  
会田先生の資料”Rough path analysis:An Introduction”

基礎工学研究科システム創成専攻  
学籍番号 29C17095  
百合川尚学

2018 年 4 月 27 日

# 目次

0.1	導入 . . . . .	1
0.2	連続性定理 . . . . .	5
0.3	Young 積分 . . . . .	19
0.4	The notion of rough path . . . . .	21

## 0.1 導入

以下,  $d$  次元ベクトル  $x \in \mathbb{R}^d$  と  $(m, d)$  行列  $a \in \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^d$  について, 成分を込めて表現する場合は  $x = (x^1, \dots, x^d)$ ,  $a = (a_j^i)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq d}$  と書く. また  $T > 0$  を固定し  $C^1 = C^1([0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d)$  とおく. (端点においては片側微分を考える.) 区間  $[s, t] \subset [0, T]$  の分割を  $D = \{s = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t\}$  で表現し, 分割の全体を  $\delta[s, t]$  とおく.  $|D| := \max_{1 \leq i \leq N} |t_i - t_{i-1}|$  とし,

$$\sum_D = \sum_{i=1}^N$$

と略記する.

定理 0.1.1 (Riemann-Stieltjes 積分).  $[s, t] \subset [0, T]$  とし,  $D \in \delta[s, t]$  についてのみ考えるとき, 任意の  $x \in C^1$ ,  $f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$  に対して次の極限が存在する:\*

$$\lim_{|D| \rightarrow 0} \sum_D f(x_{s_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) \in \mathbb{R}^m.$$

$s_{i-1}$  は区間  $[t_{i-1}, t_i]$  に属する任意の点であり, 極限は  $s_{i-1}$  の取り方に依らない.

証明. 各  $x^j$  は  $C^1$ -級であるから, 平均値の定理より  $\sum_D f(x_{s_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})$  の第  $k$  成分を

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^d \sum_D f_j^k(x_{s_{i-1}})(x_{t_i}^j - x_{t_{i-1}}^j) \\ &= \sum_{j=1}^d \sum_D f_j^k(x_{s_{i-1}}) \dot{x}_{\xi_i}^j (t_i - t_{i-1}), \quad (\exists \xi_i \in [t_{i-1}, t_i]) \end{aligned}$$

\*1 極限の存在を保証する条件としては,  $f$  の有界性と微分可能性は必要ない.

と表現できる. 各  $j, k$  について

$$\lim_{|D| \rightarrow 0} \sum_D f_j^k(x_{s_{i-1}}) \dot{x}_{\xi_i}^j (t_i - t_{i-1})$$

は通常の連続関数の Riemann 積分

$$\int_s^t f_j^k(x_u) \dot{x}_u^j du$$

に収束する. ■

**定義 0.1.2** ( $C^1$ -級のパスに対する汎関数).  $x \in C^1$  と  $f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$  に対して,  $[s, t] \subset [0, T]$  における Riemann-Stieltjes 積分を  $I$  で表現する:

$$I_{s,t}(x) = \int_s^t f(x_u) dx_u := \lim_{|D| \rightarrow 0} \sum_D f(x_{t_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}),$$

$$\left[ \int_s^t f(x_u) dx_u \right]^k = \sum_{j=1}^d \int_s^t f_j^k(x_u) dx_u^j, \quad (k = 1, \dots, m).$$

ただし  $D \in \delta[s, t]$  のみを考える.

$C^1$  は次で定めるノルム  $\|\cdot\|_{C^1}$  により Banach 空間となる:

$$\|x\|_{C^1} := \sup_{t \in [0, T]} |x(t)| + \sup_{t \in [0, T]} |\dot{x}(t)|.$$

**定理 0.1.3** ( $\|\cdot\|_{C^1}$  に関する連続性).  $[s, t] \subset [0, T]$  とし,  $C^1$  には  $\|\cdot\|_{C^1}$  でノルム位相を入れる. このとき,  $C^1 \ni x \mapsto I_{s,t}(x) \in \mathbb{R}^m$  は連続である.

**証明.**  $C^1$  の第一可算性により点列連続性と連続性は一致するから,  $x^n \rightarrow x$  のとき  $I_{s,t}(x^n) \rightarrow I_{s,t}(x)$  が従うことを示せばよい.

$$M := \sup_{u \in [s, t]} |f(x_u)| < \infty$$

を定めれば

$$\begin{aligned} \left| \int_s^t f(x_u^n) dx_u^n - \int_s^t f(x_u) dx_u \right| &= \left| \int_s^t f(x_u^n) \dot{x}_u^n du - \int_s^t f(x_u) \dot{x}_u du \right| \\ &\leq \int_s^t |f(x_u^n) \dot{x}_u^n - f(x_u^n) \dot{x}_u| du + \int_s^t |f(x_u^n) \dot{x}_u - f(x_u) \dot{x}_u| du \\ &\leq M \|x^n - x\|_{C^1} (t - s) + \sup_{u \in [s, t]} |f(x_u^n) - f(x_u)| \|x\|_{C^1} (t - s) \end{aligned} \quad (1)$$

が成り立つ. いま, 任意に  $\epsilon > 0$  を取れば, 或る  $\epsilon > \delta > 0$  が存在して  $v, w \in x([s, t])$ ,  $|v - w| < \delta$  なら  $|f(v) - f(w)| < \epsilon$  を満たす (一様連続). すなわち  $\|x^{(n)} - x\|_{C^1} < \delta$  なら

$$\sup_{t \in [s, t]} |f(x_t^n) - f(x_t)| < \epsilon$$

が成立する.  $\|x^n - x\|_{C^1} \rightarrow 0$  の仮定より, 或る自然数  $N$  が存在して  $\|x^n - x\|_{C^1} < \delta$  ( $n > N$ ) が満たされるから,  $(1) < \epsilon[M(t-s) + \|x\|_{C^1}(t-s)]$  ( $n > N$ ) が成り立ち  $I_{s,t}(x^n) \rightarrow I_{s,t}(x)$  が従う. ■

**定義 0.1.4 ( $p$ -variation).**  $[0, T]$  上の  $\mathbb{R}^d$  値関数  $x$  に対し,  $p$ -variation を次で定める:

$$\|x\|_{p,[s,t]} := \left\{ \sup_{D \in \delta[s,t]} \sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^p \right\}^{1/p}.$$

特に,  $\|\cdot\|_{p,[0,T]}$  を  $\|\cdot\|_p$  と表記する. また  $p \geq 1$  として, 線形空間  $B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$  を

$$B_{p,T}(\mathbb{R}^d) := \left\{ x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d ; \quad x_0 = 0, x : \text{continuous}, \|x\|_p < \infty \right\}$$

により定める.

次の結果によれば,  $0 < p < 1$  に対し  $B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$  を定めても  $0$  の定数関数のみの空間でしかない.

**定理 0.1.5** ( $0 < p < 1$  に対して有界  $p$ -variation なら定数).  $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  を連続関数とする. このとき,  $p \in (0, 1)$  に対し  $\|x\|_p < \infty$  が成り立つなら  $x$  は定数関数である.

**証明.**  $t \in [0, T]$  を任意に取り固定する. このとき全ての  $D \in \delta[0, t]$  に対して,

$$\begin{aligned} |x_t - x_0| &\leq \sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}| \leq \max_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^{1-p} \sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^p \\ &\leq \max_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^{1-p} \|x\|_p \end{aligned}$$

が成り立ち,  $x$  の一様連続性から右辺は  $|D| \rightarrow 0$  で  $0$  に収束し,  $x_t = x_0$  が従う. ■

**定理 0.1.6.**  $1 \leq p \leq q$  に対し  $B_{p,T}(\mathbb{R}^d) \subset B_{q,T}(\mathbb{R}^d)$  が成立する.

**証明.** 任意の  $x \in B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$  と  $D \in \delta[0, T]$  に対し

$$\begin{aligned} \sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^q &\leq \sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^p |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^{q-p} \\ &\leq 2^{q-p} \sup_{t \in [0, T]} |x_t|^{q-p} \sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^p \\ &\leq 2^{q-p} \sup_{t \in [0, T]} |x_t|^{q-p} \|x\|_p^p \end{aligned}$$

が成立する. ■

$p \geq 1$  の場合, Minkowski の不等式によれば, 任意の  $D \in \delta[s, t]$  に対し

$$\left\{ \sum_D |(x_{t_i} + y_{t_i}) - (x_{t_{i-1}} + y_{t_{i-1}})|^p \right\}^{1/p} \leq \left\{ \sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^p \right\}^{1/p} + \left\{ \sum_D |y_{t_i} - y_{t_{i-1}}|^p \right\}^{1/p}$$

$$\leq \|x\|_{p,[s,t]} + \|y\|_{p,[s,t]}$$

が成り立ち  $\|x+y\|_{p,[s,t]} \leq \|x\|_{p,[s,t]} + \|y\|_{p,[s,t]}$  を得る.

定理 0.1.7.  $B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$  は  $\|\cdot\|_p$  をノルムとする Banach 空間である.

証明. 完備性を示す.

第一段  $(x^n)_{n=1}^\infty \subset B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$  を Cauchy 列とすれば, 任意の  $\epsilon > 0$  に対して或る  $n_\epsilon \in \mathbb{N}$  が存在し

$$\|x^n - x^m\|_p = \left\{ \sup_{D \in \delta[0,T]} \sum_D \left| (x_{t_i}^n - x_{t_i}^m) - (x_{t_{i-1}}^n - x_{t_{i-1}}^m) \right|^p \right\}^{1/p} < \epsilon, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

を満たす. いま, 任意の  $t \in [0, T]$  に対して  $[0, T]$  の分割  $D = \{0 \leq t \leq T\}$  を考えれば

$$|x_t^n - x_t^m| < \epsilon, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

が得られ, 実数の完備性より或る  $x_t \in \mathbb{R}^d$  が存在して

$$|x_t^n - x_t| < \epsilon \quad (n > n_\epsilon)$$

を満たす. この収束は  $t$  に関して一様であるから,  $t \mapsto x_t$  は 0 出発かつ連続である.

第二段  $\|x^n - x\|_p \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$  を示す. 前段によれば, 任意の  $D \in \delta[0, T]$  に対し

$$\sum_D \left| (x_{t_i}^m - x_{t_i}^n) - (x_{t_{i-1}}^m - x_{t_{i-1}}^n) \right|^p < \epsilon^p, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

が成り立っている.  $D$  はせいぜい有限個の分割であるから,  $m \rightarrow \infty$  として

$$\sum_D \left| (x_{t_i} - x_{t_i}^n) - (x_{t_{i-1}} - x_{t_{i-1}}^n) \right|^p < \epsilon^p, \quad (n > n_\epsilon)$$

が従い,  $D$  の任意性より  $\|x^n - x\|_p < \epsilon \ (n > n_\epsilon)$  を得る. ■

定理 0.1.8.  $p \geq 1$  とする. また  $x_0 = 0$  を満たす  $x \in C^1$  の全体が作る線形空間を  $\tilde{C}^1$  とおく.

- (1)  $x \in C^1$  ならば  $\|x\|_p < \infty$  が成り立つ. ただちに,  $\|\cdot\|_p$  は  $\tilde{C}^1$  においてノルムとなる.
- (2)  $\tilde{C}^1$  において,  $\|\cdot\|_{C^1}$  で導入する位相は  $\|\cdot\|_p$  で導入する位相より強い.

証明.

$p = 1$  の場合 平均値の定理より, 任意の  $D \in \delta[0, T]$  に対し

$$\sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}| \leq \sum_D \|x\|_{C^1} (t_i - t_{i-1}) = \|x\|_{C^1} T < \infty$$

が成り立ち  $\|x\|_1 < \infty$  が従う.

$p > 1$  の場合  $q$  を  $p$  の共役指数とする．任意の  $D \in \delta[0, T]$  に対し，Hölder の不等式より

$$\begin{aligned} \sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^p &= \sum_D \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{x}_u du \right|^p \leq \sum_D (t_i - t_{i-1}) \left( \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\dot{x}_u|^q du \right)^{p/q} \\ &\leq \sum_D (t_i - t_{i-1}) \left( \int_0^T \|x\|_{C^1}^q du \right)^{p/q} = \|x\|_{C^1}^p T^p \end{aligned}$$

が成立し， $\|x\|_p < \infty$  が従う．

以上より， $p \geq 1$  ならば  $\|x\|_p \leq T \|x\|_{C^1}$  ( $x \in C^1$ ) が成り立ち (2) の主張を得る． ■

次節の考察対象は主に定理 0.1.3 と定理 0.1.8 に関係する．定理 0.1.3 によれば， $C^1$  に  $\|\cdot\|_{C^1}$  でノルム位相を導入した場合， $f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$  に対して  $C^1 \ni x \mapsto I_{s,t}(x)$  は連続である．一方で定理 0.1.3 によれば，0 出発  $C^1$ -パス空間  $\tilde{C}^1$  に  $\|\cdot\|_p$  でノルム位相を導入した場合， $\tilde{C}^1 \ni x \mapsto I_{s,t}(x)$  が連続であるという保証はない．しかし，次節以後の結果により， $1 \leq p < 3$  かつ  $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$  が満たされているなら  $\tilde{C}^1 \ni x \mapsto I_{s,t}(x)$  は或る意味での連続性を持つ．

## 0.2 連続性定理

定義 0.2.1 (記号の定義).  $x \in C^1$ ,  $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$  に対し次を定める．

$$\begin{aligned} \Delta_T &:= \{ (s, t) ; \quad 0 \leq s \leq t \leq T \}, \\ X^1 : \Delta_T &\longrightarrow \mathbb{R}^d \quad ((s, t) \mapsto X_{s,t}^1 = x_t - x_s), \\ X^2 : \Delta_T &\longrightarrow \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d \quad \left( (s, t) \mapsto X_{s,t}^2 = \int_s^t (x_u - x_s) \otimes dx_u \right), \\ \tilde{I}_{s,t}(x) &:= f(x_s) X_{s,t}^1 = f(x_s)(x_t - x_s), \\ J_{s,t}(x) &:= f(x_s) X_{s,t}^1 + (\nabla f)(x_s) X_{s,t}^2. \end{aligned}$$

以降， $a, b, c, d \in \mathbb{R}^d$  に対して次の表現を使う：

$$\begin{aligned} [a \otimes b]_j^i &= a^i b^j, \\ [(\nabla f)(x_s) X_{s,t}^2]^i &= \sum_{j,k=1}^d \partial_k f_j^i(x_s) \int_s^t (x_u^k - x_s^k) dx_u^j, \\ [(\nabla f)(x_s)(a \otimes b)]^i &= \sum_{j,k=1}^d \partial_k f_j^i(x_s) a^k b^j, \\ [(\nabla^2 f)(x_s)(a \otimes b \otimes c)]^i &= \sum_{j,k,v=1}^d \partial_v \partial_k f_j^i(x_s) a^v b^k c^j, \\ [(\nabla^3 f)(x_s)(a \otimes b \otimes c \otimes d)]^i &= \sum_{j,k,v,w=1}^d \partial_w \partial_v \partial_k f_j^i(x_s) a^w b^v c^k d^j. \end{aligned}$$

定理 0.2.2.  $[s, t] \subset [0, T]$ ,  $x \in C^1$ ,  $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$  とする.  $D \in \delta[s, t]$  に対し

$$\tilde{I}_{s,t}(x, D) := \sum_D \tilde{I}_{t_{i-1}, t_i}(x), \quad J_{s,t}(x, D) := \sum_D J_{t_{i-1}, t_i}(x)$$

を定めるとき, 次が成立する:

$$I_{s,t}(x) = \lim_{|D| \rightarrow 0} \tilde{I}_{s,t}(x, D) = \lim_{|D| \rightarrow 0} J_{s,t}(x, D).$$

証明. 第一の等号は  $I_{s,t}(x)$  の定義によるから, 第二の等号を証明する. まず,

$$\begin{aligned} I_{s,t}(x) &= \int_s^t f(x_u) dx_u \\ &= \int_s^t f(x_s) + f(x_u) - f(x_s) dx_u \\ &= \int_s^t f(x_s) dx_u + \int_s^t \int_0^1 (\nabla f)(x_s + \theta(x_u - x_s)) (X_{s,u}^1 \otimes \dot{x}_u) d\theta du \\ &= f(x_s) X_{s,t}^1 + (\nabla f)(x_s) X_{s,t}^2 \\ &\quad + \int_s^t \int_0^1 \{(\nabla f)(x_s + \theta(x_u - x_s)) - (\nabla f)(x_s)\} (X_{s,u}^1 \otimes \dot{x}_u) d\theta du \\ &= J_{s,t}(x) + \int_s^t \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_s + r(x_u - x_s)) (X_{s,u}^1 \otimes X_{s,u}^1 \otimes \dot{x}_u) dr d\theta du \end{aligned}$$

が成り立つ.  $[0, T] \ni t \mapsto x_t$  の連続性より, 最下段式中の  $x_s + r(x_u - x_s)$  ( $0 \leq r \leq 1$ ,  $s \leq u \leq t$ ) は或るコンパクト集合  $K$  に含まれ,  $f$  が  $C^2$ -級関数であるから

$$M := \sum_{i,j,k,v} \sup_{x \in K} |\partial_v \partial_k f_j^i(x)|$$

として  $M < \infty$  を定めれば

$$\begin{aligned} &\left| \int_s^t \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_s + r(x_u - x_s)) (X_{s,u}^1 \otimes X_{s,u}^1 \otimes \dot{x}_u) dr d\theta du \right| \\ &\leq \int_s^t \int_0^1 \int_0^\theta |(\nabla^2 f)(x_s + r(x_u - x_s)) (X_{s,u}^1 \otimes X_{s,u}^1 \otimes \dot{x}_u)| dr d\theta du \\ &\leq M \int_s^t |X_{s,u}^1|^2 |\dot{x}_u| du \\ &\leq M \|x\|_{C^1}^3 \int_s^t (u-s)^2 du \end{aligned}$$

が出る. 特に  $D \in \delta[s, t]$  に対して

$$\begin{aligned} \sum_D \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - t_{i-1})^2 du &\leq \sum_D |D| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - t_{i-1}) du \\ &\leq \sum_D |D| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - s) du \leq \frac{1}{2} (t - s)^2 |D| \longrightarrow 0 \quad (|D| \longrightarrow 0) \end{aligned}$$

が成立するから,

$$|I_{s,t}(x) - J_{s,t}(x, D)| \leq \sum_D |I_{t_{i-1}, t_i}(x) - J_{t_{i-1}, t_i}(x)| \longrightarrow 0 \quad (|D| \longrightarrow 0)$$

が従い定理の主張を得る.

定義 0.2.3 (control function). 関数  $\omega : \Delta_T \rightarrow [0, \infty)$  が連続かつ任意の  $s \leq u \leq t$  に対して

$$\omega(s, u) + \omega(u, t) \leq \omega(s, t) \quad (2)$$

を満たすとき,  $\omega$  を control function と呼ぶ.

式 (2) から  $\omega(t, t) = 0$  ( $\forall t \in [0, T]$ ) が従う. つまり control function は”対角線上で 0 になる”.

定義 0.2.4 (ノルム空間値写像の  $p$ -variation).  $(V, \|\cdot\|)$  をノルム空間,  $p \geq 1$  とする. このとき連続写像  $\psi : \Delta_T \rightarrow V$  に対する  $p$ -variation を

$$\|\psi\|_{p,[s,t]} := \left\{ \sup_{D \in \delta[s,t]} \sum_D \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p \right\}^{1/p}, \quad ((s, t) \subset [0, T])$$

で定める. 特に  $\|\cdot\|_{p,[0,T]}$  を  $\|\cdot\|_p$  と書く.

定理 0.2.5 ( $p$ -variation が定める control function).  $(V, \|\cdot\|)$  をノルム空間,  $p \geq 1$  とする.  $\|\psi\|_p < \infty$  かつ  $\psi_{t,t} = 0$  ( $\forall t \in [0, T]$ ) を満たす連続写像  $\psi : \Delta_T \rightarrow V$  に対して,

$$\omega : \Delta_T \ni (s, t) \mapsto \|\psi\|_{p,[s,t]}^p$$

により定める  $\omega$  は control function である.

証明.  $\|\psi\|_p < \infty$  の仮定より  $\omega$  は  $[0, \infty)$  値であるから, 以下では式 (2) の成立と連続性を示す.

第一段  $\omega$  が式 (2) を満たすことを示す. 実際, 任意に  $D_1 \in \delta[s, u], D_2 \in \delta[u, t]$  を取れば

$$\sum_{D_1} \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p + \sum_{D_2} \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p = \sum_{D_1 \cup D_2} \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p \leq \|\psi\|_{p,[s,t]}^p$$

が成り立つ. 左辺の  $D_1, D_2$  の取り方は独立であるから, それぞれに対し上限を取れば

$$\|\psi\|_{p,[s,u]}^p + \|\psi\|_{p,[u,t]}^p \leq \|\psi\|_{p,[s,t]}^p$$

が従う.

第二段 任意の  $[s, t] \subset [0, T]$  について\*2,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow +0} \omega(s, t+h) &= \inf_{h>0} \omega(s, t+h), & \lim_{h \rightarrow +0} \omega(s-h, t) &= \inf_{h>0} \omega(s-h, t), \\ \lim_{h \rightarrow +0} \omega(s, t-h) &= \sup_{h>0} \omega(s, t-h), & \lim_{h \rightarrow +0} \omega(s+h, t) &= \sup_{h>0} \omega(s+h, t) \end{aligned}$$

が成立する. 実際  $\omega(s, t+h)$  について見れば, これは下に有界かつ  $h \rightarrow +0$  に対し単調減少であるから極限が確定し下限に一致する. 残りの三つも同様の理由で成立する.

\*2 下段の二式については  $s < t$  と仮定する. また上段についても,  $t = T$  或は  $s = 0$  の場合を除く必要がある.



第三段 任意の  $s \in [0, T]$  に対し,  $(s, T] \ni t \mapsto \omega(s, t)$  の左連続性を示す. ここでは

$$\tilde{\omega}(s, t) := \begin{cases} \lim_{h \rightarrow +0} \omega(s, t-h), & (s < t), \\ 0, & (s = t), \end{cases} \quad (\forall (s, t) \in \Delta_T)$$

で定める  $\tilde{\omega}$  が優加法性を持ち, かつ

$$\|\psi_{s,t}\|^p \leq \tilde{\omega}(s, t), \quad (\forall (s, t) \in \Delta_T)$$

を満たすことを示す. 実際これが示されれば, 任意の  $D \in \delta[s, t]$  に対し

$$\sum_D \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p \leq \sum_D \tilde{\omega}(t_{i-1}, t_i) \leq \tilde{\omega}(s, t)$$

が成立し  $\omega(s, t) \leq \tilde{\omega}(s, t)$  が従い,  $\omega(s, t) \geq \omega(s, t-h) (\forall h > 0)$  と併せて

$$\omega(s, t) = \tilde{\omega}(s, t) = \lim_{h \rightarrow +0} \omega(s, t-h)$$

を得る. いま, 任意に  $s < u < t$  を取れば, 十分小さい  $h_1, h_2 > 0$  に対して

$$\omega(s, u-h_1) + \omega(u, t-h_2) \leq \omega(s, t-h_2)$$

が満たされ,  $h_1 \rightarrow +0, h_2 \rightarrow +0$  として

$$\tilde{\omega}(s, u) + \tilde{\omega}(u, t) \leq \tilde{\omega}(s, t)$$

が成り立ち  $\tilde{\omega}$  は優加法性を持つ. また, もし或る  $[u, v] \subset [0, T]$  に対して

$$\|\psi_{u,v}\|^p > \tilde{\omega}(u, v)$$

が成り立つと仮定すると

$$\|\psi_{u,v}\|^p > \tilde{\omega}(u, v) \geq \omega(u, v-h) \geq \|\psi_{u,v-h}\|^p, \quad (\forall h > 0)$$

となる. 一方  $\psi$  の連続性より  $\|\psi_{u,v-h}\|^p \rightarrow \|\psi_{u,v}\|^p (h \rightarrow +0)$  が従い矛盾が生じる. 同様にして, 任意の  $t \in (0, T]$  に対し  $[0, t) \ni s \mapsto \omega(s, t)$  の右連続性も出る.

第四段 任意の  $t \in [0, T]$  に対して次を示す:

$$\lim_{h \rightarrow +0} \omega(t, t+h) = \inf_{h>0} \omega(t, t+h) = 0.$$

第一の等号は前段より従うから, 第二の等号を背理法により証明する. いま

$$\inf_{h>0} \omega(t, t+h) =: \delta > 0$$

と仮定する.  $\psi$  の連続性より或る  $h_1$  が存在して

$$\|\psi_{t,t+h}\|^p = \|\psi_{t,t+h} - \psi_{t,t}\|^p < \frac{\delta}{8}, \quad (\forall h < h_1) \quad (3)$$

が成立するから, 任意に  $h_0 < h_1$  を取り固定する. 一方で  $\omega(t, t+h_0) \geq \delta$  より

$$\sum_{i=1}^N \|\psi_{\tau_{i-1}, \tau_i}\|^p > \frac{7\delta}{8}$$

を満たす  $D = \{t = \tau_0 < \tau_1 < \cdots, \tau_N = t + h_0\} \in \delta[t, t + h_0]$  が存在し, (3) と併せて

$$\sum_{i=2}^N \|\psi_{\tau_{i-1}, \tau_i}\|^p > \frac{7\delta}{8} - \|\psi_{t, \tau_1}\|^p > \frac{7\delta}{8} - \frac{\delta}{8} = \frac{3\delta}{4}$$

を得る. また,  $\omega(t, \tau_1) \geq \delta$  より或る  $D' \in \delta[t, \tau_1]$  が存在して

$$\sum_{D'} \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p > \frac{3\delta}{4}$$

を満たすから,  $D' \cup \{\tau_1 < \cdots, \tau_N = t + h_0\} \in \delta[t, t + h_0]$  より

$$\omega(t, t + h_0) > \sum_{D'} \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p + \sum_{i=2}^N \|\psi_{\tau_{i-1}, \tau_i}\|^p > \frac{3\delta}{2}$$

が従うが,  $h_0 < h_1$  の任意性と単調減少性により

$$\delta = \inf_{h>0} \omega(t, t + h) = \inf_{h_1>h>0} \omega(t, t + h) \geq \frac{3\delta}{2}$$

となり矛盾が生じる. 同様にして

$$\lim_{h \rightarrow +0} \omega(t - h, t) = 0, \quad (\forall t \in (0, T))$$

も成立する.

**第五段** 任意に  $s \in [0, T)$  を取り固定し,  $[s, T) \ni t \mapsto \omega(s, t)$  が右連続であることを示す.

$$\lim_{h \rightarrow +0} \omega(s, t + h) \leq \omega(s, t) \tag{4}$$

を示せば, 第二段より逆向きの不等号も従い右連続性を得る. 任意に  $h, \epsilon > 0$  を取れば,

$$\omega(s, t + h) - \epsilon \leq \sum_D \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p$$

を満たす  $D \in \delta[s, t + h]$  が存在する.  $D_1 := [s, t] \cap D$  において  $D_1 = \{t_0 < \cdots < t_k\}$  と表されているとする. このとき  $D_2 := D \setminus (D_1 \cup \{t_{k+1}\})$  として

$$\begin{aligned} \omega(s, t + h) - \epsilon &\leq \sum_{i=1}^k \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p + \|\psi_{t_k, t_{k+1}}\|^p + \sum_{D_2} \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p \\ &= \sum_{i=1}^k \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p + \|\psi_{t_k, t}\|^p + \|\psi_{t_k, t_{k+1}}\|^p - \|\psi_{t_k, t}\|^p + \sum_{D_2} \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p \\ &\leq \omega(s, t) + \omega(t, t + h) + \|\psi_{t_k, t_{k+1}}\|^p - \|\psi_{t_k, t}\|^p \end{aligned}$$

が成り立つ.  $\psi$  の (一樣) 連続性より  $\|\psi_{t_k, t_{k+1}}\|^p \rightarrow \|\psi_{t_k, t}\|^p$  ( $h \rightarrow +0$ ) が成り立つから

$$\lim_{h \rightarrow +0} \omega(s, t + h) - \epsilon \leq \omega(s, t)$$

が従い,  $\epsilon$  の任意性より (4) が出る. 同様にして  $s \mapsto \omega(s, t)$  の左連続性も成立する.

第六段  $\omega$  の  $(s, t) \in \Delta_T$  における連続性を示す.  $h, k \geq 0$  として考えれば,

$$\begin{aligned}
& |\omega(s, t) - \omega(s - h, t - k)| \\
& \leq |\omega(s, t) - \omega(s - h, t)| + |\omega(s - h, t) - \omega(s - h, t - k)| \\
& = |\omega(s, t) - \omega(s - h, t)| + |\omega(s - h, t) - \omega(s - h, t - k)| \\
& \leq |\omega(s, t) - \omega(s - h, t)| + |\omega(s - h, t) - \omega(s, t - k)| \\
& \leq |\omega(s, t) - \omega(s - h, t)| + |\omega(s - h, t) - \omega(s, t)| + |\omega(s, t) - \omega(s, t - k)|, \\
& |\omega(s, t) - \omega(s + h, t + k)| \\
& \leq |\omega(s, t) - \omega(s + h, t)| + |\omega(s + h, t) - \omega(s + h, t + k)| \\
& = |\omega(s, t) - \omega(s + h, t)| + |\omega(s + h, t + k) - \omega(s + h, t)| \\
& \leq |\omega(s, t) - \omega(s + h, t)| + |\omega(s, t + k) - \omega(s + h, t)| \\
& \leq |\omega(s, t) - \omega(s - h, t)| + |\omega(s, t + k) - \omega(s, t)| + |\omega(s, t) - \omega(s + h, t)|
\end{aligned}$$

が成り立ち, 値の差は上述した連続性により縮まる. また  $|\omega(s, t) - \omega(s - h, t + k)|$  については,  $h, k \rightarrow +0$  として  $\omega(s - h, t + k)$  は単調減少に  $\omega(s, t)$  に近づく. 単調性より極限は  $h, k$  の近づけ方に依らず

$$\omega(s, t) = \lim_{h \rightarrow +0} \lim_{k \rightarrow +0} \omega(s - h, t + k) = \lim_{h, k \rightarrow +0} \omega(s - h, t + k)$$

となり, 同様に

$$\omega(s, t) = \lim_{h \rightarrow +0} \lim_{k \rightarrow +0} \omega(s + h, t - k) = \lim_{h, k \rightarrow +0} \omega(s + h, t - k)$$

も得られ,  $\omega(s - h, t - k)$  は  $h, k \rightarrow 0$  (近づけ方に依らない) として  $\omega(s, t)$  に収束し  $\omega$  の連続性が出る. ■

定理 0.2.6 (control function の例). 以下の関数  $\omega : \Delta_T \rightarrow [0, \infty)$  は control function である.

- (1)  $\omega : (s, t) \mapsto \|X^1\|_{p;[s,t]}^p, \quad (p \geq 1, x \in B_{p,T}(\mathbb{R}^d)).$
- (2)  $\omega : (s, t) \mapsto \|X^2\|_{p;[s,t]}^p, \quad (p \geq 1, x \in C^1).$

行列  $a = (a_j^i)$  のノルムは  $|a| = \sqrt{\sum_{i,j} |a_j^i|^2}$  として考える.

定理 0.2.7.

- (1)  $\omega : (s, t) \mapsto X_{s,t}^1 = x_t - x_s$  は連続であるから, 前定理より  $\omega$  は control function である.
- (2) 任意の  $[s, t] \subset [0, T]$  に対して  $\|X^2\|_{p;[s,t]}^p < \infty$  を示せば, あとは上と同じ理由により定理の主張が得られる. 実際, 任意の分割  $D = \{s = t_0 < \dots < t_N = t\}$  に対し

$$\begin{aligned}
\|X_{t_{i-1}, t_i}^2\| & \leq \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (x_u - x_{t_{i-1}}) \otimes \dot{x}_u \, du \right| \\
& \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} |(x_u - x_{t_{i-1}}) \otimes \dot{x}_u| \, du \\
& \leq \|x\|_{C^1}^2 \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - s) \, du \right\}^{1/p} \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - s) \, du \right\}^{1-1/p} \\
& \leq \|x\|_{C^1}^2 \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - s) \, du \right\}^{1/p} \left\{ \int_s^t (u - s) \, du \right\}^{1-1/p}
\end{aligned}$$

が成り立つから,

$$\begin{aligned}\sum_D \|X_{t_{i-1}, t_i}^2\|^p &\leq \sum_D \|x\|_{C^1}^{2p} \left\{ \frac{1}{2}(t-s)^2 \right\}^{p-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u-s) du \\ &= \|x\|_{C^1}^{2p} \left\{ \frac{1}{2}(t-s)^2 \right\}^{p-1} \int_s^t (u-s) du = \|x\|_{C^1}^{2p} \left\{ \frac{1}{2}(t-s)^2 \right\}^p\end{aligned}$$

により  $\|X^2\|_{p:[s,t]}^p < \infty$  が従う. ■

**補題 0.2.8.**  $\omega$  を  $\Delta_T$  上の control function とする.  $D = \{s = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t\}$  について,  $N \geq 2$  の場合或る  $1 \leq i \leq N-1$  が存在して次を満たす:

$$\omega(t_{i-1}, t_{i+1}) \leq \frac{2\omega(s, t)}{N-1}. \quad (5)$$

**証明.** (会田先生のテキスト.) ■

**定理 0.2.9** ( $1 \leq p < 2$  の場合の連続性定理).  $1 \leq p < 2$  とし,  $x_0 = y_0$  を満たす  $x, y \in C^1$  と  $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ ,  $0 < \epsilon, R < \infty$  を任意に取る. このとき,

$$\|X^1\|_p, \|Y^1\|_p \leq R, \quad \|X^1 - Y^1\|_p \leq \epsilon$$

なら, 或る定数  $C = C(p, R, f)$  が存在し, 任意の  $0 \leq s \leq t \leq T$  に対して次が成立する:

$$|I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y)| \leq \epsilon C.$$

**系 0.2.10** ( $p$ -variation による閉球上の Lipschitz 連続性).  $1 \leq p < 2$  とし,  $x_0 = y_0$  を満たす  $x, y \in C^1$  と  $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ ,  $0 < R < \infty$  を任意に取る. このとき,

$$\|X^1\|_p, \|Y^1\|_p \leq R$$

なら, 或る定数  $C = C(p, R, f)$  が存在して次を満たす:

$$|I_{0,T}(x) - I_{0,T}(y)| \leq C \|X^1 - Y^1\|_p.$$

**証明 (系 0.2.10).** 定理 0.2.9 において,  $\epsilon = \|X^1 - Y^1\|_p$  ( $x \neq y$ )<sup>\*3</sup> として証明が通る. ■

**証明 (定理 0.2.9).**  $[s, t] \subset [0, T]$  とする.

---

<sup>\*3</sup>  $x = y$  なら  $\|X^1 - Y^1\|_p = 0$  かつ  $I_{s,t}(x) = I_{s,t}(y)$  が成り立つ.

第一段  $\omega : \Delta_T \longrightarrow [0, \infty)$  を

$$\omega(\alpha, \beta) = \|X^1\|_{p, [\alpha, \beta]}^p + \|Y^1\|_{p, [\alpha, \beta]}^p + \epsilon^{-p} \|X^1 - Y^1\|_{p, [\alpha, \beta]}^p, \quad ((\alpha, \beta) \in \Delta_T)$$

で定めれば、定理 0.2.6 により  $1 \leq p$  の下で  $\omega$  は control function である。

第二段 任意に  $[s, t]$  の分割  $D = \{s = t_0 < \dots < t_N = t\}$  ( $N \geq 2$ ) を取れば、補題 0.2.8 より (5) を満たす  $t_{(0)}$  が存在する。ここで、 $D_{-0} := D$ ,  $D_{-1} := D \setminus \{t_{(0)}\}$  と定める。  $N \geq 3$  ならば  $D_{-1}$  についても (5) を満たす  $t_{(1)}$  が存在するから、 $D_{-2} := D_{-1} \setminus \{t_{(1)}\}$  と定める。この操作を繰り返せば  $t_{(k)}$ ,  $D_{-k}$  ( $k = 0, 1, \dots, N-1$ ) が得られ、

$$\begin{aligned} & \tilde{I}_{s,t}(x, D) - \tilde{I}_{s,t}(y, D) \\ &= \sum_{k=0}^{N-2} \left[ \left\{ \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1}) \right\} - \left\{ \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k-1}) \right\} \right] \\ & \quad + \left\{ \tilde{I}_{s,t}(x) - \tilde{I}_{s,t}(y) \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

と表現できる。

第三段 式 (6) について、次を満たす定数  $C_1$  が存在することを示す：

$$|(6)| \leq \epsilon C_1 \quad (7)$$

見やすくするために  $t_k = t_{(k)}$  と書き直せば、

$$\begin{aligned} & \left\{ \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1}) \right\} - \left\{ \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k-1}) \right\} \\ &= \{f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}})\} X_{t_k, t_{k+1}}^1 - \{f(y_{t_k}) - f(y_{t_{k-1}})\} Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \\ &= \{f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}})\} (X_{t_k, t_{k+1}}^1 - Y_{t_k, t_{k+1}}^1) \\ & \quad + \{f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}})\} Y_{t_k, t_{k+1}}^1 - \{f(y_{t_k}) - f(y_{t_{k-1}})\} Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \\ &= \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes (X_{t_k, t_{k+1}}^1 - Y_{t_k, t_{k+1}}^1) d\theta \\ & \quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 d\theta \\ & \quad - \int_0^1 (\nabla f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 d\theta \\ &= \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes (X_{t_k, t_{k+1}}^1 - Y_{t_k, t_{k+1}}^1) d\theta \\ & \quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) (X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 d\theta \\ & \quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 d\theta \\ & \quad - \int_0^1 (\nabla f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 d\theta \\ &= \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes (X_{t_k, t_{k+1}}^1 - Y_{t_k, t_{k+1}}^1) d\theta \\ & \quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) (X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 d\theta \\ & \quad + \int_0^1 \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}) + r(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) - y_{t_{k-1}} - \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (X_{0,t_{k-1}}^1 - Y_{0,t_{k-1}}^1) \otimes Y_{t_{k-1},t_k}^1 \otimes Y_{t_k,t_{k+1}}^1 dr d\theta^{*4} \\
& + \int_0^1 \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}} + r(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) - y_{t_{k-1}} - \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))) \\
& \quad \theta(X_{t_{k-1},t_k}^1 - Y_{t_{k-1},t_k}^1) \otimes Y_{t_{k-1},t_k}^1 \otimes Y_{t_k,t_{k+1}}^1 dr d\theta
\end{aligned}$$

が成り立つ. 補題 0.2.8 より

$$\begin{aligned}
& |X_{t_{k-1},t_k}^1|, |Y_{t_{k-1},t_k}^1|, |X_{t_k,t_{k+1}}^1|, |Y_{t_k,t_{k+1}}^1| \leq \omega(t_{k-1}, t_{k+1})^{1/p} \leq \left( \frac{2\omega(s, t)}{N-k-1} \right)^{1/p}, \\
& |X_{t_{k-1},t_k}^1 - Y_{t_{k-1},t_k}^1|, |X_{t_k,t_{k+1}}^1 - Y_{t_k,t_{k+1}}^1| \leq \epsilon \omega(t_{k-1}, t_{k+1})^{1/p} \leq \epsilon \left( \frac{2\omega(s, t)}{N-k-1} \right)^{1/p}
\end{aligned}$$

が満たされ, また

$$|X_{0,t_{k-1}}^1 - Y_{0,t_{k-1}}^1| \leq \epsilon \omega(0, t_{k-1})^{1/p} \leq \epsilon \omega(0, T)^{1/p} \leq \epsilon (2R^p + 1)^{1/p}$$

でもあるから,

$$M := \sum_{i,j} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f_j^i(x)| + \sum_{i,j,k} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial_k f_j^i(x)| + \sum_{i,j,k,v} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial_v \partial_k f_j^i(x)| \quad (8)$$

と定めて

$$\begin{aligned}
& \left| \left\{ \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1}) \right\} - \left\{ \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k-1}) \right\} \right| \\
& \leq M |X_{t_{k-1},t_k}^1| |X_{t_k,t_{k+1}}^1 - Y_{t_k,t_{k+1}}^1| \\
& \quad + M |X_{t_{k-1},t_k}^1 - Y_{t_{k-1},t_k}^1| |Y_{t_k,t_{k+1}}^1| \\
& \quad + M |X_{0,t_{k-1}}^1 - Y_{0,t_{k-1}}^1| |Y_{t_{k-1},t_k}^1| |Y_{t_k,t_{k+1}}^1| \\
& \quad + M |X_{t_{k-1},t_k}^1 - Y_{t_{k-1},t_k}^1| |Y_{t_{k-1},t_k}^1| |Y_{t_k,t_{k+1}}^1| \\
& \leq \epsilon M \left[ 2 + 2(2R^p + 1)^{1/p} \right] \left( \frac{2\omega(s, t)}{N-k-1} \right)^{2/p} \\
& \leq \epsilon M \left[ 2 + 2(2R^p + 1)^{1/p} \right] 2^{2/p} (2R^p + 1)^{2/p} \left( \frac{1}{N-k-1} \right)^{2/p}
\end{aligned}$$

を得る.

$$C'_1 := M \left[ 2 + 2(2R^p + 1)^{1/p} \right] 2^{2/p} (2R^p + 1)^{2/p}$$

とおけば

$$|(6)| \leq \sum_{k=0}^{N-2} \epsilon C'_1 \left( \frac{1}{N-k-1} \right)^{2/p} < \epsilon C'_1 \zeta\left(\frac{2}{p}\right)$$

が成立し,  $p < 2$  より  $\zeta(2/p) < \infty$  であるから  $C_1 := C'_1 \zeta(2/p)$  とおいて (7) が従う.

---

<sup>\*4</sup>  $x_0 = y_0$  の仮定より  $x_{t_{k-1}} - y_{t_{k-1}} = X_{0,t_{k-1}}^1 - Y_{0,t_{k-1}}^1$  が成り立つ.

第四段  $x_0 = y_0$  の仮定により  $x_s - y_s = X_{0,s}^1 - Y_{0,s}^1$  が成り立ち

$$\begin{aligned}
|\tilde{I}_{s,t}(x) - \tilde{I}_{s,t}(y)| &= |f(x_s)X_{s,t}^1 - f(y_s)Y_{s,t}^1| \\
&\leq |f(x_s)X_{s,t}^1 - f(x_s)Y_{s,t}^1| + |f(x_s)Y_{s,t}^1 - f(y_s)Y_{s,t}^1| \\
&\leq M|X_{s,t}^1 - Y_{s,t}^1| + \left| \int_0^1 (\nabla f)(y_s + \theta(x_s - y_s)) \left[ (X_{0,s}^1 - Y_{0,s}^1) \otimes Y_{s,t}^1 \right] d\theta \right| \\
&\leq M|X_{s,t}^1 - Y_{s,t}^1| + M|X_{0,s}^1 - Y_{0,s}^1| |Y_{s,t}^1| \\
&\leq M\epsilon\omega(s, t)^{1/p} + M\epsilon\omega(0, s)^{1/p}\omega(s, t)^{1/p} \\
&\leq \epsilon M \left[ (2R^p + 1)^{1/p} + (2R^p + 1)^{2/p} \right]
\end{aligned}$$

が従う．ここで  $C_2 := M \left[ (2R^p + 1)^{1/p} + (2R^p + 1)^{2/p} \right]$  とおく．

第五段 第二段と第三段より，任意の  $D \in \delta[s, t]$  に対し

$$|\tilde{I}_{s,t}(x, D) - \tilde{I}_{s,t}(y, D)| \leq \epsilon(C_1 + C_2)$$

が成立し．定理 0.2.2 により  $|D| \rightarrow 0$  として

$$|I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y)| \leq \epsilon(C_1 + C_2)$$

が出る．

定理 0.2.11 ( $2 \leq p < 3$  の場合の連続性定理).  $2 \leq p < 3$  とし,  $x_0 = y_0$  を満たす  $x, y \in C^1$  と  $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ ,  $0 < \epsilon, R < \infty$  を任意に取る．このとき,

$$\begin{aligned}
&\|X^1\|_p, \|Y^1\|_p, \|X^2\|_{p/2}, \|Y^2\|_{p/2} \leq R < \infty, \\
&\|X^1 - Y^1\|_p, \|X^2 - Y^2\|_{p/2} \leq \epsilon
\end{aligned}$$

なら, 或る定数  $C = C(p, R, f)$  が存在し, 任意の  $0 \leq s \leq t \leq T$  に対して次が成立する:

$$|I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y)| \leq \epsilon C.$$

系 0.2.12.  $1 \leq p < 2$  とし,  $x_0 = y_0$  を満たす  $x, y \in C^1$  と  $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ ,  $0 < R < \infty$  を任意に取る．このとき,

$$\|X^1\|_p, \|Y^1\|_p, \|X^2\|_{p/2}, \|Y^2\|_{p/2} \leq R$$

なら, 或る定数  $C = C(p, R, f)$  が存在して次を満たす:

$$|I_{0,T}(x) - I_{0,T}(y)| \leq C \left( \|X^1 - Y^1\|_p + \|X^2 - Y^2\|_{p/2} \right).$$

証明 (系 0.2.12). 定理 0.2.11 において,  $\epsilon = \|X^1 - Y^1\|_p + \|X^2 - Y^2\|_{p/2}$  ( $x \neq y$ ) として証明が通る．

証明 (定理 0.2.12).  $[s, t] \subset [0, T]$  とする．

第一段  $\omega : \Delta_T \longrightarrow [0, \infty)$  を

$$\begin{aligned} \omega(\alpha, \beta) = & \|X^1\|_{p, [\alpha, \beta]}^p + \|Y^1\|_{p, [\alpha, \beta]}^p + \|X^2\|_{p/2, [\alpha, \beta]}^{p/2} + \|Y^2\|_{p/2, [\alpha, \beta]}^{p/2} \\ & + \epsilon^{-p} \|X^1 - Y^1\|_{p, [\alpha, \beta]}^p + \epsilon^{-p/2} \|X^2 - Y^2\|_{p/2, [\alpha, \beta]}^{p/2}, \quad ((\alpha, \beta) \in \Delta_T) \end{aligned}$$

で定めれば、定理 0.2.6 により  $2 \leq p$  の下で  $\omega$  は control function である。

第二段  $D \in \delta[s, t]$  に対し、定理 0.2.9 の証明と同様にして  $t_{(k)}, D_{-k}$  を構成すれば

$$\begin{aligned} & J_{s,t}(x, D) - J_{s,t}(y, D) \\ &= \sum_{k=0}^{N-2} [\{J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})\} - \{J_{s,t}(y, D_{-k}) - J_{s,t}(y, D_{-k-1})\}] \\ & \quad + \{J_{s,t}(x) - J_{s,t}(y)\} \end{aligned} \tag{9}$$

と表現できる。

第三段  $J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})$  を変形する。以降  $t_k = t_{(k)}$  と書き直せば

$$\begin{aligned} & J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1}) \\ &= J_{t_{k-1}, t_k}(x) + J_{t_k, t_{k+1}}(x) - J_{t_{k-1}, t_{k+1}}(x) \\ &= f(x_{t_{k-1}})X_{t_{k-1}, t_k}^1 + f(x_{t_k})X_{t_k, t_{k+1}}^1 - f(x_{t_{k-1}})X_{t_{k-1}, t_{k+1}}^1 \\ & \quad + (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X_{t_{k-1}, t_k}^2 + (\nabla f)(x_{t_k})X_{t_k, t_{k+1}}^2 - (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X_{t_{k-1}, t_{k+1}}^2 \\ &= \{f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}})\} X_{t_k, t_{k+1}}^1 \\ & \quad + (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X_{t_{k-1}, t_k}^2 + (\nabla f)(x_{t_k})X_{t_k, t_{k+1}}^2 - (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X_{t_{k-1}, t_{k+1}}^2 \\ &= \int_0^1 \{(\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) - (\nabla f)(x_{t_{k-1}})\} X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_k, t_{k+1}}^1 d\theta \\ & \quad + (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_k, t_{k+1}}^1 \\ & \quad + (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X_{t_{k-1}, t_k}^2 + (\nabla f)(x_{t_k})X_{t_k, t_{k+1}}^2 - (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X_{t_{k-1}, t_{k+1}}^2 \\ &= \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta \\ & \quad + (\nabla f)(x_{t_{k-1}}) (X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_k, t_{k+1}}^1 + X_{t_{k-1}, t_k}^2 - X_{t_{k-1}, t_{k+1}}^2) \\ & \quad + (\nabla f)(x_{t_k})X_{t_k, t_{k+1}}^2 \\ &= \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta \\ & \quad + \{(\nabla f)(x_{t_k}) - (\nabla f)(x_{t_{k-1}})\} X_{t_k, t_{k+1}}^2 \\ &= \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta \\ & \quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_k, t_{k+1}}^2 d\theta \end{aligned}$$

を得る。

第四段 式 (9) について、次を満たす定数  $C_1$  が存在することを示す：

$$|(9)| \leq \epsilon C_1. \tag{10}$$



実際、前段の結果より

$$\begin{aligned}
& \{J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})\} - \{J_{s,t}(y, D_{-k}) - J_{s,t}(y, D_{-k-1})\} \\
&= \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_k, t_{k+1}}^2 d\theta \\
&\quad - \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
&\quad - \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^2 d\theta \\
&= \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes (X_{t_k, t_{k+1}}^1 - Y_{t_k, t_{k+1}}^1) dr d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes (X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^\theta \{(\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) - (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))\} \\
&\quad \quad X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) (X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \otimes Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes (X_{t_k, t_{k+1}}^2 - Y_{t_k, t_{k+1}}^2) d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \{(\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) - (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))\} \\
&\quad \quad X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^2 d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) (X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^2 d\theta \\
&= \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes (X_{t_k, t_{k+1}}^1 - Y_{t_k, t_{k+1}}^1) dr d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes (X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^\theta \int_0^1 (\nabla^3 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}) + u(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) - y_{t_{k-1}} - r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))) \\
&\quad \quad \{ (X_{0, t_{k-1}}^1 - Y_{0, t_{k-1}}^1) + r(X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \} \otimes X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 du dr d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) (X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \otimes Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes (X_{t_k, t_{k+1}}^2 - Y_{t_k, t_{k+1}}^2) d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^1 (\nabla^3 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}) + r(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) - y_{t_{k-1}} - \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))) \\
&\quad \quad \{ (X_{0, t_{k-1}}^1 - Y_{0, t_{k-1}}^1) + \theta(X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \} \otimes X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^2 dr d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) (X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^2 d\theta
\end{aligned}$$

が成り立つから,

$$\begin{aligned}
M &:= \sum_{i,j} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f_j^i(x)| + \sum_{i,j,k} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial_k f_j^i(x)| \\
&\quad + \sum_{i,j,k,v} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial_v \partial_k f_j^i(x)| + \sum_{i,j,k,v,w} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial_w \partial_v \partial_k f_j^i(x)|
\end{aligned} \tag{11}$$

において

$$\begin{aligned}
& \left| \{J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})\} - \{J_{s,t}(y, D_{-k}) - J_{s,t}(y, D_{-k-1})\} \right| \\
& \leq M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| X_{t_k, t_{k+1}}^1 - Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \right| \\
& \quad + M \left| X_{0, t_{k-1}}^1 - Y_{0, t_{k-1}}^1 \right| \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| X_{t_k, t_{k+1}}^2 - Y_{t_k, t_{k+1}}^2 \right| \\
& \quad + M \left| X_{0, t_{k-1}}^1 - Y_{0, t_{k-1}}^1 \right| \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^2 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^2 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^2 \right| \\
& \leq \epsilon M \left[ 5 + 2\omega(0, t_{k-1})^{1/p} + 2\omega(t_{k-1}, t_k)^{1/p} \right] \left( \frac{2\omega(s, t)}{N - k - 1} \right)^{3/p} \\
& \leq \epsilon M \left[ 2 + 4 \left( 2R^p + 2R^{p/2} + 2 \right)^{1/p} \right] 2^{3/p} \left( 2R^p + 2R^{p/2} + 2 \right)^{3/p} \left( \frac{1}{N - k - 1} \right)^{3/p}
\end{aligned}$$

を得る. ここで

$$C'_1 := M \left[ 2 + 4 \left( 2R^p + 2R^{p/2} + 2 \right)^{1/p} \right] 2^{3/p} \left( 2R^p + 2R^{p/2} + 2 \right)^{3/p}$$

と定めれば

$$|(9)| \leq \sum_{k=0}^{N-2} \epsilon C'_1 \left( \frac{1}{N - k - 1} \right)^{3/p} < \epsilon C'_1 \zeta\left(\frac{3}{p}\right)$$

が成立し,  $p < 3$  より  $\zeta(3/p) < \infty$  であるから  $C_1 := C'_1 \zeta(3/p)$  において (10) が出る.

第五段  $x_0 = y_0$  の仮定により

$$\begin{aligned}
& |J_{s,t}(x) - J_{s,t}(y)| \\
& \leq |f(x_s)X_{s,t}^1 - f(y_s)Y_{s,t}^1| + |(\nabla f)(x_s)X_{s,t}^2 - (\nabla f)(y_s)Y_{s,t}^2| \\
& \leq |f(x_s)X_{s,t}^1 - f(y_s)Y_{s,t}^1| + |f(x_s)Y_{s,t}^1 - f(y_s)Y_{s,t}^1| \\
& \quad + |(\nabla f)(x_s)X_{s,t}^2 - (\nabla f)(y_s)Y_{s,t}^2| + |(\nabla f)(x_s)Y_{s,t}^2 - (\nabla f)(y_s)Y_{s,t}^2| \\
& \leq M |X_{s,t}^1 - Y_{s,t}^1| + \left| \int_0^1 (\nabla f)(y_s + \theta(x_s - y_s))(x_s - y_s) \otimes Y_{s,t}^1 d\theta \right| \\
& \quad + M |X_{s,t}^2 - Y_{s,t}^2| + \left| \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_s + \theta(x_s - y_s))(x_s - y_s) \otimes Y_{s,t}^2 d\theta \right| \\
& \leq M |X_{s,t}^1 - Y_{s,t}^1| + M |X_{0,s}^1 - Y_{0,s}^1| |Y_{s,t}^1| \\
& \quad + M |X_{s,t}^2 - Y_{s,t}^2| + M |X_{0,s}^1 - Y_{0,s}^1| |Y_{s,t}^2|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \epsilon M \omega(s, t)^{1/p} + \epsilon M \omega(0, s)^{1/p} \omega(s, t)^{1/p} \\
&\quad + \epsilon M \omega(s, t)^{2/p} + \epsilon M \omega(0, s)^{1/p} \omega(s, t)^{2/p} \\
&\leq \epsilon M \left[ \omega(0, T)^{1/p} + 2\omega(0, T)^{2/p} + \omega(0, T)^{3/p} \right] \\
&\leq \epsilon M \left[ \left( 2R^p + 2R^{p/2} + 2 \right)^{1/p} + 2 \left( 2R^p + 2R^{p/2} + 2 \right)^{2/p} + \left( 2R^p + 2R^{p/2} + 2 \right)^{3/p} \right]
\end{aligned}$$

が従う。ここで最下段の  $\epsilon$  の係数を  $C_2$  とおく。

第六段 以上より、任意の  $D \in \delta[s, t]$  に対し

$$|J_{s,t}(x, D) - J_{s,t}(y, D)| \leq \epsilon(C_1 + C_2)$$

が成り立ち、定理 0.2.2 により  $|D| \rightarrow 0$  として

$$|I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y)| \leq \epsilon(C_1 + C_2)$$

が出る。 ■

系 0.2.13 (パスが 0 出発なら  $f$  の有界性は要らない). 定理 0.2.9 と定理 0.2.11 について,  $x, y \in \tilde{C}^1$  ならば  $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$  として主張が成り立つ.

証明.  $x_0 = 0$  なら

$$\|X^1\|_p \leq R \quad \Rightarrow \quad |x_t| \leq R \quad (\forall t \in [0, T])$$

が成り立つから、式 (8) と (11) において  $\sup_{x \in \mathbb{R}^d}$  を  $\sup_{|x| \leq 9R}$  に替えればよい. ■

### 0.3 Young 積分

補題 0.3.1.  $x \in C^1$ ,  $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$  とする.

(1)  $1 \leq p < 2$  の場合, 或る control function  $\omega$  が存在して

$$|X_{s,t}^1| \leq \omega(s, t)^{1/p}, \quad (0 \leq \forall s \leq \forall t \leq T)$$

を満たすとき, ある定数  $C = C(p, f)$  があり

$$|I_{s,t}(x)| \leq C (\omega(s, t)^{1/p} + \omega(s, t)^{2/p}).$$

が成立する.

(2)  $2 \leq p < 3$  の場合, 或る control function  $\omega$  が存在して

$$|X_{s,t}^1| \leq \omega(s, t)^{1/p}, \quad |X_{s,t}^2| \leq \omega(s, t)^{2/p}, \quad (0 \leq \forall s \leq \forall t \leq T)$$

を満たすとき, ある定数  $C = C(p, f)$  があり

$$|I_{s,t}(x)| \leq C (\omega(s, t)^{1/p} + \omega(s, t)^{2/p} + \omega(s, t)^{3/p}).$$

が成立する.

証明.

(1)  $D = \{s = t_0 < \cdots < t_N = t\}$  ( $N \geq 2$ ) に対し, 補題 0.2.8 により存在する  $i$  を取り  $D_{-1} := D \setminus \{i\}$  と書く. 補題 0.2.8 の添数を除く作業を続けて  $D_{-k}$  ( $k = 1, \dots, N-1$ ) を構成する.

$$M := \max_{\substack{t \in [0, T] \\ 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j, k \leq d}} |\partial_k f_j^i(x_t)|, \quad M' := \max_{t \in [0, T]} |f(x_t)|$$

とおけば  $M, M' < \infty$  であり,  $|X_{t_i, t_{i+1}}^1| \leq \omega(t_i, t_{i+1})^{1/p} \leq \omega(t_{i-1}, t_{i+1})^{1/p}$  と補題 0.2.8 により

$$\begin{aligned} |\tilde{I}_{s,t}(x, D) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-1})| &= |\tilde{I}_{t_{i-1}, t_i}(x) + \tilde{I}_{t_i, t_{i+1}}(x) - \tilde{I}_{t_{i-1}, t_{i+1}}(x)| \\ &\leq |\{f(x_{t_i}) - f(x_{t_{i-1}})\} X_{t_i, t_{i+1}}^1| \\ &\leq \left| \left\{ \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{i-1}} + \theta(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})) d\theta \right\} X_{t_{i-1}, t_i}^1 \otimes X_{t_i, t_{i+1}}^1 \right| \\ &\leq md^2 M |X_{t_i, t_{i+1}}^1|^2 \\ &\leq md^2 M \left( \frac{2\omega(s, t)}{N-1} \right)^{2/p} \end{aligned}$$

が成立する. 同様に

$$|\tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1})| \leq md^2 M \left( \frac{2\omega(s, t)}{N-k-1} \right)^{2/p}, \quad (k = 0, \dots, N-2)$$

が成り立ち ( $D_{-0} = D$ )

$$\begin{aligned} |\tilde{I}_{s,t}(x, D) - f(x_s)X_{s,t}^1| &\leq \sum_{k=0}^{N-2} |\tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1})| \\ &\leq md^2 M(2\omega(s, t))^{2/p} \sum_{k=0}^{N-2} \left( \frac{1}{N-k-1} \right)^{2/p} \\ &\leq md^2 M(2\omega(s, t))^{2/p} \zeta\left(\frac{2}{p}\right) \end{aligned}$$

が従う。いま、仮定より  $p < 2$  であるから  $\zeta(2/p) < \infty$  であり、定理 0.2.2 より

$$|I_{s,t}(x)| \leq M' \omega(s, t)^{1/p} + md^2 M(2\omega(s, t))^{2/p} \zeta\left(\frac{2}{p}\right)$$

を得る。

(2) (1) と同様に  $D_{-k}$  ( $k = 1, \dots, N-1$ ) を構成する。会田先生のノートの通りに

$$\begin{aligned} J_{s,t}(x, D) - J_{s,t}(x, D_{-1}) &= \left\{ \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{i-1}} + \theta(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})) dr d\theta \right\} X_{t_{i-1}, t_i}^1 \otimes X_{t_{i-1}, t_i}^1 \otimes X_{t_i, t_{i+1}}^1 \\ &\quad + \left\{ \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{i-1}} + \theta(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})) d\theta \right\} X_{t_{i-1}, t_i}^1 \otimes X_{t_i, t_{i+1}}^2 \end{aligned}$$

を得る。ここで (1) の  $M, M'$  に加えて

$$M'' := \max_{\substack{t \in [0, T] \\ 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j, k, v \leq d}} |\partial_v \partial_k f_j^i(x_t)|$$

とおけば

$$\begin{aligned} |J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})| &\leq md^2 M \left( \frac{2\omega(s, t)}{N-k-1} \right)^{3/p} + md^2 M'' \left( \frac{2\omega(s, t)}{N-k-1} \right)^{1/p} \left( \frac{2\omega(s, t)}{N-k-1} \right)^{2/p} \\ &\leq md^2 (M + M'') \left( \frac{2\omega(s, t)}{N-k-1} \right)^{3/p} \end{aligned}$$

が成立し、会田先生のノートの通りに

$$|J_{s,t}(x, D) - (f(x_s)X_{s,t}^1 + (\nabla f)(x_s)X_{s,t}^2)| \leq 2^{3/p} md^2 (M + M'') \zeta\left(\frac{3}{p}\right) \omega(s, t)^{3/p}$$

が従い、 $p < 3$  の仮定より  $\zeta(3/p) < \infty$  である。(1) と同じく定理 0.2.2 より

$$|I_{s,t}(x)| \leq M' \omega(s, t)^{1/p} + md^2 M \omega(s, t)^{2/p} + 2^{3/p} md^2 (M + M'') \zeta\left(\frac{3}{p}\right) \omega(s, t)^{3/p}$$

となる。 ■

## 0.4 The notion of rough path

$V$  を  $\mathbb{K}$ -上の Banach 空間とする。  $T(V) :=$

定理 0.4.1.  $\Omega_p(V)$  は次で定める距離

$$d_p(X, Y) := \max_{1 \leq i \leq [p]} \|X^i - Y^i\|_{p/i}$$

により完備距離空間となる.

証明.  $(X^k)_{k=1}^\infty$  を Cauchy 列とすれば, 任意の  $\epsilon > 0$  に対し或る  $K \in \mathbb{N}$  が存在して

$$\|X^{k,i} - X^{\ell,i}\|_{p/i} < \epsilon, \quad (\forall k, \ell > K, 1 \leq i \leq [p])$$

が成立する. よって定理 (0.1.7) より各  $i$  に対し或る  $X^i \in B_{p/i,T}(V)$  が存在して

$$\|X^{k,i} - X^i\|_{p/i} \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty, 1 \leq i \leq [p])$$

を満たす.  $X : \Delta_T \longrightarrow T^{(n)}(V)$  を

$$X_{s,t} := (1, X_{s,t}^1, \dots, X_{s,t}^n), \quad ((s, t) \in \Delta_T)$$

により定めれば,  $X^i$  の連続性より  $X$  も連続である. さらに任意の  $D \in \delta[0, T]$  に対して

$$\begin{aligned} \sum_D \|X_{t_{i-1}, t_i}^k - X_{t_{i-1}, t_i}\|^p &= \sum_D (\|X_{t_{i-1}, t_i}^{k,1} - X_{t_{i-1}, t_i}^1\| + \dots + \|X_{t_{i-1}, t_i}^{k,n} - X_{t_{i-1}, t_i}^n\|)^p \\ &\leq (n+1)^p \sum_D (\|X_{t_{i-1}, t_i}^{k,1} - X_{t_{i-1}, t_i}^1\|^p + \dots + \|X_{t_{i-1}, t_i}^{k,n} - X_{t_{i-1}, t_i}^n\|^p) \\ &\leq (n+1)^p (\|X_{t_{i-1}, t_i}^{k,1} - X_{t_{i-1}, t_i}^1\|_p^p + \dots + \|X_{t_{i-1}, t_i}^{k,n} - X_{t_{i-1}, t_i}^n\|_p^p) \end{aligned}$$

が成立するから, 定理より

$$\sup_D \sum_D \|X_{t_{i-1}, t_i}^k - X_{t_{i-1}, t_i}\|^p \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty)$$

が従い  $X$  の  $p$ -variation の有界性が出る. ■