テンソル積のノルム
平井さん講義まとめ

基礎工学研究科システム創成専攻
学籍番号 29C17095
百合川尚学

2018 年 5 月 2 日

目次

0.1 一時的

定理 0.1.1 (可測関数列の各点極限の可測性). E を位相空間とし，$C(E,\mathbb{R})$ により連続写像 $E \longrightarrow \mathbb{R}$ の全体を表す．

$$\mathfrak{B}(E) = \sigma\left[\bigcup_{g\in C(E,\mathbb{R})}\left\{ g^{-1}(B) \ ; \quad B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \right\}\right]$$

が満たされている場合，可測空間 $(X,\mathcal{M})$ 上の E-値可測関数列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ が各点で収束しているなら，$f := \lim_{n\to\infty} f_n$ で定める f は $\mathcal{M}/\mathfrak{B}(E)$-可測である．

証明. 任意の連続写像 $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ に対し

$$\lim_{n\to\infty} g\left(f_n(x)\right) = g\left(f(x)\right)$$

が成立するから $g \circ f$ は可測 $\mathcal{M}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であり，

$$\bigcup_{g\in C(E,\mathbb{R})}\left\{ g^{-1}(B) \ ; \quad B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \right\} \subset \left\{ A \in \mathfrak{B}(E) \ ; \quad f^{-1}(A) \in \mathcal{M} \right\}$$

より f の $\mathcal{M}/\mathfrak{B}(E)$-可測性が出る．

0.2 notation

以下，零元のみの線型空間は考えない．E, E_i, F を体 $\mathbb{K}$ 上の線形空間とするとき，$\mathrm{Hom}\,(E,F)$ で E から F への $\mathbb{K}$-線型写像の全体を表し，特に $F = \mathbb{K}$ のとき $E^{\#}$ と書く．また $\mathrm{Hom}^{(n)}\,(E_1 \times \cdots \times E_n, F)$ で $E_1 \times \cdots \times E_n$ から F への $\mathbb{K}$-n 重線型写像の全体を表す．

0.3　テンソル積

$n \geq 2$ とする．体 $\mathbb{K}$ 上の線形空間の族 $(E_i)_{i=1}^n$ に対してテンソル積を定めたい．

$$\Lambda\Big(\bigoplus_{i=1}^n E_i\Big) = \left\{ b : \bigoplus_{i=1}^n E_i \longrightarrow \mathbb{K} \ ; \quad \text{有限個の } e \in \textstyle\bigoplus_{i=1}^n E_i \text{ を除いて } b(e) = 0. \right\}$$

により $\mathbb{K}$-線形空間 $\Lambda\Big(\bigoplus_{i=1}^n E_i\Big)$ を定める．また $e = (e_1, \cdots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i$ に対する定義関数を

$$\mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_n}(x) = \begin{cases} 1, & x = e, \\ 0, & x \neq e \end{cases}$$

で表す．$\Lambda\Big(\bigoplus_{i=1}^n E_i\Big)$ の線型部分空間を

$$\begin{aligned} &\Lambda_0\Big(\bigoplus_{i=1}^n E_i\Big) \\ &:= \mathrm{Span}\left[\left\{ \begin{matrix} \mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i+e_i',\cdots,e_n} - \mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i,\cdots,e_n} - \mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i',\cdots,e_n}, \\ \mathbb{1}_{e_1,\cdots,\lambda e_i,\cdots,e_n} - \lambda \mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i,\cdots,e_n} \end{matrix} \ ; \quad e_i, e_i' \in E_i, \lambda \in \mathbb{K}, 1 \leq i \leq n \right\}\right] \end{aligned}$$

により定め，$b \in \Lambda\Big(\bigoplus_{i=1}^n E_i\Big)$ の $\Lambda_0\Big(\bigoplus_{i=1}^n E_i\Big)$ に関する同値類を $[b]$ と書く．そして

$$E_1 \otimes \cdots \otimes E_n = \bigotimes_{i=1}^n E_i := \Lambda\Big(\bigoplus_{i=1}^n E_i\Big) / \Lambda_0\Big(\bigoplus_{i=1}^n E_i\Big)$$

で定める商空間を $(E_i)_{i=1}^n$ のテンソル積と定義する．また $(e_1, \cdots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i$ に対し

$$e_1 \otimes \cdots \otimes e_n := [\mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_n}]$$

により定める $\otimes : \bigoplus_{i=1}^n E_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n E_i$ をテンソル積の標準写像と呼ぶ．

定理 0.3.1 (標準写像の多重線型性).　$(E_i)_{i=1}^n$ を $\mathbb{K}$-線形空間の族とするとき，

$$\otimes : \bigoplus_{i=1}^n E_i \ni (e_1, \cdots, e_n) \longmapsto e_1 \otimes \cdots \otimes e_n \in \bigotimes_{i=1}^n E_i$$

は n 重線型写像である．また次が成り立つ:

$$\bigotimes_{i=1}^n E_i = \mathrm{Span}\left[\left\{ e_1 \otimes \cdots \otimes e_n \ ; \quad (e_1, \cdots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i \right\}\right]. \tag{1}$$

証明. 任意の $1 \le i \le n,\ e_1 \in E_1, \cdots, e_n \in E_n,\ e_i, e_i' \in E_i,\ \lambda \in \mathbb{K}$ に対して

$$\begin{aligned} e_1 \otimes \cdots \otimes (e_i + e_i') \otimes \cdots \otimes e_n &= \left[\mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_i + e_i', \cdots, e_n} \right] \\ &= \left[\mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_i, \cdots, e_n} + \mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_i', \cdots, e_n} \right] \\ &= \left[\mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_i, \cdots, e_n} \right] + \left[\mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_i', \cdots, e_n} \right] \\ &= e_1 \otimes \cdots \otimes e_i \otimes \cdots \otimes e_n + e_1 \otimes \cdots \otimes e_i' \otimes \cdots \otimes e_n, \\ e_1 \otimes \cdots \otimes (\lambda e_i) \otimes \cdots \otimes e_n &= \left[\mathbb{1}_{e_1, \cdots, \lambda e_i, \cdots, e_n} \right] \\ &= \left[\lambda \mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_i, \cdots, e_n} \right] \\ &= \lambda \left[\mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_i, \cdots, e_n} \right] \\ &= \lambda (e_1 \otimes \cdots \otimes e_i \otimes \cdots \otimes e_n) \end{aligned}$$

が成立するから $\otimes$ は多重線型である．また任意に $u = [b] \in E \otimes F$ を取れば

$$b = \sum_{j=1}^{m} k_j \mathbb{1}_{e_i^j, \cdots, e_n^j}, \quad \left(k_j = b(e_i^j, \cdots, e_n^j),\ j = 1, \cdots, m \right)$$

と表せるから，

$$u = \left[\sum_{j=1}^{m} k_j \mathbb{1}_{e_i^j, \cdots, e_n^j} \right] = \left[\sum_{j=1}^{m} \mathbb{1}_{k_j e_i^j, \cdots, e_n^j} \right] = \sum_{j=1}^{m} (k_j e_1^j) \otimes \cdots \otimes e_n^j$$

が従い (1) を得る． ∎

定理 0.3.2 ($\cdots \otimes 0 \otimes \cdots$ は零ベクトル)**.** $(E_i)_{i=1}^n$ を $\mathbb{K}$-線形空間の族とし，テンソル積 $\bigotimes_{i=1}^n E_i$ を定める．このとき，或る i で $e_i = 0$ なら $e_1 \otimes \cdots \otimes e_n = 0$ が成り立つ．

証明. $e_i = 0$ のとき，$\lambda = 0$ とすれば

$$e_1 \otimes \cdots \otimes e_n = \left[\mathbb{1}_{e_1, \cdots, 0, \cdots, e_n} \right] = \left[\mathbb{1}_{e_1, \cdots, \lambda e_i, \cdots, e_n} - \lambda \mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_i, \cdots, e_n} \right] = 0$$

が成立する． ∎

定理 0.3.3 (普遍性 (universality of tensor products)). $(E_i)_{i=1}^n$ を $\mathbb{K}$-線形空間の族とする．このとき任意の $\mathbb{K}$-線型空間 V に対して，$T \in \mathrm{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n E_i, V\right)$ ならば $T \circ \otimes \in \mathrm{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$ が満たされ，これで定める次の対応 Φ は線型同型である:

$$\begin{array}{cccc} \Phi : \mathrm{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n E_i, V\right) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right) \\ \Cup & & \Cup \\ T & \longmapsto & T \circ \otimes \end{array} \tag{2}$$

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{i=1}^n E_i \arrow[d, "\otimes"'] \arrow[dr, "\Phi(T)"] & \\ \bigotimes_{i=1}^n E_i \arrow[r, "T"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & V \end{tikzcd}$$

また $\mathbb{K}$-線型空間 U_0 と多重線型写像 $\iota : \bigoplus_{i=1}^n E_i \longrightarrow U_0$ が，任意の $\mathbb{K}$-線型空間 V に対し

$(\otimes)_1$　U_0 は ι の像で生成される．

$(\otimes)_2$　任意の $\delta \in \mathrm{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$ に対して或る $\tau \in \mathrm{Hom}\,(U_0, V)$ が $\delta = \tau \circ \iota$ を満たす．

を満たすなら，(2) において $V = U_0$ とするとき $T = \Phi^{-1}(\iota)$ は線型同型である．

後半の主張により，$(E_i)_i$ のテンソル積を別の方法で導入しても，商空間を用いて導入した $\bigotimes_i E_i$ と線型同型に結ばれる．このとき，別の方法で導入したテンソル積及び標準写像を $\tilde{\bigotimes}_i E_i$, $\tilde{\otimes}$ と表せば，或る線型同型 $T : \bigotimes_i E_i \longrightarrow \tilde{\bigotimes}_i E_i$ がただ一つ存在して

$$T(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) = e_1 \tilde{\otimes} \cdots \tilde{\otimes} e_n$$

を満たす．特に任意の並べ替え $\varphi : \{1, \cdots, n\} \longrightarrow \{1, \cdots, n\}$ に対し

$$\begin{array}{ccc} \bigotimes_{i=1}^n E_i & \cong & \bigotimes_{i=1}^n E_{\varphi(i)} \\ \Cup & & \Cup \\ e_1 \otimes \cdots \otimes e_n & \longleftrightarrow & e_{\varphi(1)} \otimes \cdots \otimes e_{\varphi(n)} \end{array}$$

が成立する．

証明.

第一段　$T \in \mathrm{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n E_i, V\right)$ の線型性と $\otimes$ の多重線型性より $T \circ \otimes$ は多重線型である．

第二段　$\Phi(T_1) = \Phi(T_2)$ ならば T_1 と T_2 は $\left\{ e_1 \otimes \cdots \otimes e_n \ ; \quad (e_1, \cdots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i \right\}$ の上で一致する．(1) より $T_1 = T_2$ が成立し Φ の単射性が従う．

第三段　次の二段で Φ の全射性を示す．まず，$\varphi \in \mathrm{Hom}\left(\Lambda(\bigoplus_{i=1}^n E_i), V\right)$ に対し

$$g : \bigoplus_{i=1}^n E_i \ni (e_1, \cdots, e_n) \longmapsto \varphi(\mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_n}) \in V$$

を対応させる次の写像が全単射であることを示す:

$$\begin{array}{ccc} F : \mathrm{Hom}\left(\Lambda(\bigoplus_{i=1}^n E_i), V\right) & \longrightarrow & \mathrm{Map}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right) \\ \Cup & & \Cup \\ \varphi & \longmapsto & g \end{array}$$

$F(\varphi_1) = F(\varphi_2)$ のとき，任意の $e \in \bigoplus_{i=1}^n E_i$ に対して $\varphi_1(\mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_n}) = \varphi_2(\mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_n})$ が成り立ち，

$$\Lambda\Bigl(\bigoplus_{i=1}^n E_i\Bigr) = \mathrm{Span}\left[\left\{\ \mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_n}\ ;\quad (e_1,\cdots,e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i\ \right\}\right]$$

であるから $\varphi_1 = \varphi_2$ が従い F の単射性を得る．また $g \in \mathrm{Map}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$ に対して

$$\varphi(a) := \sum_{\substack{e\in\bigoplus_{i=1}^n E_i \\ a(e)\neq 0}} a(e)g(e), \quad (a \in \Lambda(\bigoplus_{i=1}^n E_i))$$

により φ を定めれば，$\varphi \in \mathrm{Hom}\left(\Lambda(\bigoplus_{i=1}^n E_i), V\right)$ が満たされ F の全射性が従う．

第四段　任意に $b \in \mathrm{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$ を取り $h := F^{-1}(b)$ とおけば，h の線型性より

$$\begin{aligned}
&b(e_1,\cdots,e_i+e_i',\cdots,e_n) - b(e_1,\cdots,e_i,\cdots,e_n) - b(e_1,\cdots,e_i',\cdots,e_n)\\
&\qquad = h(\mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i+e_i',\cdots,e_n} - \mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i,\cdots,e_n} - \mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i',\cdots,e_n}),\\
&b(e_1,\cdots,\lambda e_i,\cdots,e_n) - \lambda b(e_1,\cdots,e_i,\cdots,e_n)\\
&\qquad = h(\mathbb{1}_{e_1,\cdots,\lambda e_i,\cdots,e_n} - \lambda\mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i,\cdots,e_n})
\end{aligned}$$

が成り立ち，b の双線型性により h は $\Lambda_0(\bigoplus_{i=1}^n E_i)$ 上で 0 である．従って

$$T([b]) := h(b), \quad (b \in \Lambda(\bigoplus_{i=1}^n E_i))$$

で定める T は well-defined であり，$T \in \mathrm{Hom}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$ かつ

$$b(e_1,\cdots,e_n) = h(\mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_n}) = (T\circ\otimes)(e_1,\cdots,e_n), \quad (\forall(e_1,\cdots,e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i)$$

が満たされ Φ の全射性が得られる．

第五段　$(\otimes)_1, (\otimes)_2$ の下で $\mathrm{Hom}\left(U_0, \bigotimes_{i=1}^n E_i\right) \ni \tau \longmapsto \tau\circ\iota \in \mathrm{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, \bigotimes_{i=1}^n E_i\right)$ は全単射であるから，$\tau\circ\iota = \otimes$ を満たす $\tau \in \mathrm{Hom}\left(U_0, \bigotimes_{i=1}^n E_i\right)$ がただ一つ存在する．同様にして $\iota = T\circ\otimes$ を満たす $T \in \mathrm{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n E_i, U_0\right)$ がただ一つ存在し，併せれば

$$\otimes = \tau\circ\iota = (\tau\circ T)\circ\otimes, \quad \iota = T\circ\otimes = (T\circ\tau)\circ\iota$$

が成り立ち，$T \longmapsto T\circ\otimes$, $\tau \longmapsto \tau\circ\iota$ が一対一であるから $\tau\circ T$, $T\circ\tau$ はそれぞれ恒等写像に一致して $T^{-1} = \tau$ が従う．すなわち T は $\bigotimes_{i=1}^n E_i$ から U_0 への線型同型である．■

定理 0.3.4 (スカラーとのテンソル積).　E を $\mathbb{K}$-線型空間とするとき，$\mathbb{K}\otimes E$ と E は $f(\alpha\otimes e) = \alpha e$ を満たす線型写像 $f : \mathbb{K}\otimes E \longmapsto E$ により同型となる．

証明.　スカラ倍 $\iota : (\alpha, e) \longmapsto \alpha e$ は双線型である．また定理 0.3.3 の $(\otimes)_1, (\otimes)_2$ について，

$$E = \mathrm{Span}\left[\{\ \alpha e\ ;\quad \alpha\in\mathbb{K},\ e \in E\ \}\right]$$

より $(\otimes)_1$ が得られ，かつ任意の双線型写像 $\delta : \mathbb{K} \times E \longrightarrow V$ に対し

$$f(e) \coloneqq \delta(1, e), \quad (\forall e \in E)$$

で線型写像 $f : E \longrightarrow V$ を定めれば，

$$f \circ \iota(\alpha, e) = f(\alpha e) = \delta(1, \alpha e) = \alpha\delta(1, e) = \delta(\alpha, e)$$

が成り立つから $(\otimes)_2$ が満たされる． ∎

定義 0.3.5 (線型写像のテンソル積). $(E_i)_{i=1}^n$ と $(F_i)_{i=1}^n$ を $\mathbb{K}$-線型空間の族とする．$f_i : E_i \longrightarrow F_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ が線型写像であるとき，

$$b : \bigoplus_{i=1}^n E_i \ni (e_1, \cdots, e_n) \longmapsto f_1(e_1) \otimes \cdots \otimes f_n(e_n) \in \bigotimes_{i=1}^n F_i$$

により定める b は n 重線型であり，定理 0.3.3 より $b = g \circ \otimes$ を満たす $g : \bigotimes_{i=1}^n E_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n F_i$ がただ一つ存在する．g を $f_1 \otimes \cdots \otimes f_n$ と表記して線型写像のテンソル積と定義する．いま，

$$f_1 \otimes \cdots \otimes f_n(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) = f_1(e_1) \otimes \cdots \otimes f_n(e_n), \quad (\forall (e_1, \cdots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i)$$

が成り立つ．

定理 0.3.6 (テンソル積の基底). $(E_i)_{i=1}^n$ を $\mathbb{K}$-線型空間の族とし，E_i の基底を $\left(u^i_{\lambda_i}\right)_{\lambda_i \in \Lambda_i}$ とする $(i = 1, \cdots, n)$．このとき $\left(u^1_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes u^n_{\lambda_n}\right)_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n}$ は $\bigotimes_{i=1}^n E_i$ の基底となる．

証明.

第一段　各 $u^i_{\lambda_i}$ の生成する一次元空間を $W^i_{\lambda_i} \coloneqq \mathbb{K}u^i_{\lambda_i}$ と表し

$$V_i \coloneqq \bigoplus_{\lambda_i \in \Lambda_i} W^i_{\lambda_i}, \quad (i = 1, \cdots, n)$$

とおく．$\left(u^i_{\lambda_i}\right)_{\lambda_i \in \Lambda_i}$ は E_i の基底であるから，任意の $e_i \in E_i$ に対し $v_i \in V_i$ がただ一つ定まり，

$$f_i : E_i \ni e_i \longmapsto v_i \in V_i$$

により定める線型写像 f_i は同型写像である．このとき，写像のテンソル積

$$f_1 \otimes \cdots \otimes f_n : \bigotimes_{i=1}^n E_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n V_i$$

は線型同型となる．実際，f_i の逆写像 f_i^{-1} のテンソル積

$$f_1^{-1} \otimes \cdots \otimes f_n^{-1} : \bigotimes_{i=1}^n V_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n E_i$$

によって，全ての $(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) \in \bigotimes_{i=1}^n E_i$ 及び $(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \in \bigotimes_{i=1}^n V_i$ に対し

$$\begin{aligned}
&f_1^{-1} \otimes \cdots \otimes f_n^{-1} \circ f_1 \otimes \cdots \otimes f_n(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) \\
&\qquad = f_1^{-1} \otimes \cdots \otimes f_n^{-1} \left(f_1(e_1) \otimes \cdots \otimes f_n(e_n)\right) = (e_1 \otimes \cdots \otimes e_n), \\
&f_1 \otimes \cdots \otimes f_n \circ f_1^{-1} \otimes \cdots \otimes f_n^{-1}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \\
&\qquad = f_1 \otimes \cdots \otimes f_n \left(f_1^{-1}(v_1) \otimes \cdots \otimes f_n^{-1}(v_n)\right) = (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)
\end{aligned}$$

が成立し，それぞれ $\bigotimes_{i=1}^n E_i$ と $\bigotimes_{i=1}^n V_i$ を生成するから

$$(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)^{-1} = f_1^{-1} \otimes \cdots \otimes f_n^{-1}$$

の関係を得る．

第二段 $\bigotimes_{i=1}^n V_i$ と $\bigoplus_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n} W_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes W_{\lambda_n}^n$ が線型同型であることを示す．先ず

$$g : \sum_j (v_1^j \otimes \cdots \otimes v_n^j) \longmapsto \sum_j \left(v_1^j(\lambda_1) \otimes \cdots \otimes v_n^j(\lambda_n)\right)_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n}$$

により線型写像 $g : \bigotimes_{i=1}^n V_i \longrightarrow \bigoplus_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n} W_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes W_{\lambda_n}^n$ を定める．また

$$\iota_{\lambda_i} : W_{\lambda_i}^i \longrightarrow V_i, \quad (\lambda_i \in \Lambda_i,\ i = 1, \cdots, n)$$

を次の標準単射として定める:

$$\iota_{\lambda_i}(u)(\lambda) = \begin{cases} u, & (\lambda = \lambda_i), \\ 0, & (\lambda \neq \lambda_i), \end{cases} \quad (\lambda \in \Lambda_i,\ u \in W_{\lambda_i}^i).$$

ι_{λ_i} は線型であるから $\iota_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \iota_{\lambda_n} : W_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes W_{\lambda_n}^n \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n V_i$ を定義出来て，

$$h : w \longmapsto \sum_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n} \iota_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \iota_{\lambda_n} \left(w(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)\right)$$

により線型写像 $h : W_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes W_{\lambda_n}^n \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n V_i$ が定めれば $g^{-1} = h$ が成り立つ．実際，

$$\begin{aligned}
g \circ h(w) &= g\left(\sum_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n} \iota_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \iota_{\lambda_n} \left(w(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)\right)\right) \\
&= \sum_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n} g\left(\iota_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \iota_{\lambda_n} \left(w(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)\right)\right) \\
&= w
\end{aligned}$$

が任意の $w \in \bigoplus_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n} W_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes W_{\lambda_n}^n$ に対して成立し，かつ任意の $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ に対し

$$\begin{aligned}
h \circ g(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) &= \sum_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n} \iota_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \iota_{\lambda_n} \left(v_1(\lambda_1) \otimes \cdots \otimes v_n(\lambda_n)\right) \\
&= \sum_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n} \iota_{\lambda_1}(v_1(\lambda_1)) \otimes \cdots \otimes \iota_{\lambda_n}(v_n(\lambda_n)) \\
&= \left(\sum_{\lambda_1 \in \Lambda_1} \iota_{\lambda_1}(v_1(\lambda_1))\right) \otimes \cdots \otimes \left(\sum_{\lambda_n \in \Lambda_n} \iota_{\lambda_n}(v_n(\lambda_n))\right) \\
&= v_1 \otimes \cdots \otimes v_n
\end{aligned}$$

が成り立つから $g^{-1} = h$ が従う．よって g は線型同型である．

第三段　いま，$g \circ f_1 \otimes \cdots \otimes f_n$ によって $\bigotimes_{i=1}^n E_i$ と $\bigoplus_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n} W_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes W_{\lambda_n}^n$ は同型に対応し，

$$w_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n}(\nu_1, \cdots, \nu_n) \coloneqq \begin{cases} u_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes u_{\lambda_n}^n, & (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = (\nu_1, \cdots, \nu_n), \\ 0, & (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \neq (\nu_1, \cdots, \nu_n) \end{cases}$$

として $w_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n}$ を定めれば

$$u_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes u_{\lambda_n}^n \xmapsto{g \circ f_1 \otimes \cdots \otimes f_n} w_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n}$$

が成り立つ．$(w_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n})$ の一次独立性から $\left(u_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes u_{\lambda_n}^n\right)_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n}$ の一次独立性が従う．

定理 0.3.7 (結合律).　$(E_i)_{i=1}^n$ を $\mathbb{K}$-線型空間の族とする．任意の $k = 1, \cdots, n-1$ に対し，

$$\bigotimes_{i=1}^n E_i = \left(\bigotimes_{i=1}^k E_i\right) \bigotimes \left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i\right)$$

が成立する．

証明.

第一段　n 重線型写像 $f : \bigoplus_{i=1}^n E_i \longrightarrow \left(\bigotimes_{i=1}^k E_i\right) \bigotimes \left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i\right)$ を

$$f(e_1, \cdots, e_n) = (e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n), \quad (\forall (e_1, \cdots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i)$$

により定めれば，定理 0.3.3 より

$$F : (e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) \longmapsto (e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n)$$

を満たす線型写像 $F : \bigotimes_{i=1}^n E_i \longrightarrow \left(\bigotimes_{i=1}^k E_i\right) \bigotimes \left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i\right)$ が存在する:

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{i=1}^n E_i \arrow[d, "\otimes"'] \arrow[dr, "f"] & \\ \bigotimes_{i=1}^n E_i \arrow[r, "F"] & \left(\bigotimes_{i=1}^k E_i\right) \bigotimes \left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i\right) \end{tikzcd}$$

以降は F の逆写像を構成し F が全単射であることを示す．

第二段　$u_{k+1} \in E_{k+1}, \cdots, u_n \in E_n$ を固定し

$$\Phi_{u_{k+1}, \cdots, u_n}(e_1, \cdots, e_n) \coloneqq e_1 \otimes \cdots e_k \otimes u_{k+1} \otimes \cdots \otimes u_n$$

によって n 重線型 $\Phi_{u_{k+1}, \cdots, u_n} : \bigoplus_{i=1}^k E_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n E_i$ を定めれば，定理 0.3.3 より

$$G_{u_{k+1}, \cdots, u_n}(e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) = e_1 \otimes \cdots e_k \otimes u_{k+1} \otimes \cdots \otimes u_n$$

を満たす線型写像 $G_{u_{k+1},\cdots,u_n} : \bigotimes_{i=1}^k E_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n E_i$ が存在する．

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i=1}^k E_i \arrow[d, "\otimes"'] \arrow[dr, "\Phi_{u_{k+1},\cdots,u_n}"] & \\
\bigotimes_{i=1}^k E_i \arrow[r, "G_{u_{k+1},\cdots,u_n}"] & \bigotimes_{i=1}^n E_i
\end{tikzcd}$$

第三段　任意の $v \in \bigotimes_{i=1}^k E_i$ に対して

$$\Psi_v : \bigoplus_{i=k+1}^n E_i \ni (u_{k+1}, \cdots, u_n) \longmapsto G_{u_{k+1},\cdots,u_n}(v)$$

を定めれば，Ψ_v は n 重線型であるから，定理 0.3.3 より

$$H_v(u_{k+1} \otimes \cdots \otimes u_n) = \Psi_v(u_{k+1}, \cdots, u_n)$$

を満たす線型写像 $H_v : \bigotimes_{i=k+1}^n E_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n E_i$ が存在する．

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i=k+1}^n E_i \arrow[d, "\otimes"'] \arrow[dr, "\Psi_v"] & \\
\bigotimes_{i=k+1}^n E_i \arrow[r, "H_v"] & \bigotimes_{i=1}^n E_i
\end{tikzcd}$$

いま，$v \longmapsto \Psi_v$ は線型であり，かつ Ψ_v と H_v は線型同型で結ばれているから $v \longmapsto H_v$ の線型性が従う．

第四段　H_v の線型性と $v \longmapsto H_v$ の線型性より

$$\Gamma : \left(\bigotimes_{i=1}^k E_i\right) \times \left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i\right) \ni (v, w) \longmapsto H_v(w)$$

により定める Γ は

$$\begin{aligned}
\Gamma(e_1 \otimes \cdots \otimes e_k, e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n) &= H_{e_1\otimes\cdots\otimes e_k}(e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n)) \\
&= \Psi_{e_1\otimes\cdots\otimes e_k}(e_{k+1}, \cdots, e_n)) \\
&= G_{e_{k+1},\cdots,e_n}(e_1 \otimes \cdots \otimes e_k)) \\
&= \Phi_{e_{k+1},\cdots,e_n}(e_1, \cdots, e_k)) \\
&= e_1 \otimes \cdots \otimes e_n
\end{aligned} \tag{3}$$

を満たす双線型であり，定理 0.3.3 より

$$\begin{tikzcd}
\left(\bigotimes_{i=1}^k E_i\right) \times \left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i\right) \arrow[d, "\otimes"'] \arrow[dr, "\Gamma"] & \\
\left(\bigotimes_{i=1}^k E_i\right) \bigotimes \left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i\right) \arrow[r, "G"] & \bigotimes_{i=1}^n E_i
\end{tikzcd}$$

を可換にする線型写像 G が存在する．この G は F の逆写像である．実際，(3) より

$$\begin{aligned}
F \circ G\left((e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n)\right) &= F\left(\Gamma(e_1 \otimes \cdots \otimes e_k, e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n)\right) \\
&= F(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) \\
&= (e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n)
\end{aligned}$$

かつ

$$
\begin{aligned}
G \circ F\,(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) &= G\,((e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n)) \\
&= \Gamma\,(e_1 \otimes \cdots \otimes e_k, e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n) \\
&= e_1 \otimes \cdots \otimes e_n
\end{aligned}
$$

が得られ $F^{-1} = G$ が従う． ∎

0.4　テンソル積の内積

0.5　クロスノルム