ゼミ用ノート
会田先生資料”Rough path analysis:An Introduction”

基礎工学研究科システム創成専攻
学籍番号 29C17095
百合川尚学

2018 年 4 月 10 日

目次

0.1 導入

以下，d 次元ベクトル $x \in \mathbb{R}^d$ と (m,d) 行列 $a \in \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^d$ について，成分を込めて表現する場合は $x = (x^1, \cdots, x^d)$, $a = (a^i_j)_{1 \le i \le m, 1 \le j \le d}$ と書く．また $T > 0$ を固定し $C^1 = C^1([0,T] \to \mathbb{R}^d)$ とおく．（端点においては片側微分を考える．）区間 $[s,t] \subset [0,T]$ の分割を $D = \{s = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t\}$ で表現し，分割の全体を $\delta[s,t]$ とおく．$|D|$ により $\max_{1 \le i \le N} |t_i - t_{i-1}|$ を表し，

$$\sum_D = \sum_{i=1}^N$$

と略記する．

定理 0.1.1 (Riemann-Stieltjes 積分). $[s,t] \subset [0,T]$ とし，$D \in \delta[s,t]$ についてのみ考えるとき，任意の $x \in C^1$, $f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ に対して次の極限が存在する:[*1]

$$\lim_{|D| \to 0} \sum_D f(x_{s_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) \in \mathbb{R}^m.$$

ここで s_{i-1} は区間 $[t_{i-1}, t_i]$ に属する任意の点であり，極限は s_{i-1} の取り方に依らず確定する．

証明. 各 x^j は C^1-級であるから，平均値の定理より $\sum_D f(x_{s_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})$ の第 k 成分を

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^d \sum_D f^k_j(x_{s_{i-1}})(x^j_{t_i} - x^j_{t_{i-1}}) \\ &= \sum_{j=1}^d \sum_D f^k_j(x_{s_{i-1}}) \dot{x}^j_{\xi_i}(t_i - t_{i-1}), \quad ({}^\exists \xi_i \in [t_{i-1}, t_i]) \end{aligned}$$

と表現できる．各 j,k について

$$\lim_{|D| \to 0} \sum_D f^k_j(x_{s_{i-1}}) \dot{x}^j_{\xi_i}(t_i - t_{i-1})$$

*1 極限の存在を保証する条件としては，f の有界性と微分可能性は必要ない．

が確定すれば，第 k 成分の極限が確定し定理の主張を得る．いま，$t \longrightarrow f_j^k(x_t)$ 及び $t \longmapsto (d/dt)x_t^j$ は（$[s,t]$ 上一様）連続であるから，分割 D による各区間 $[t_{i-1}, t_i]$ において次の最大最小値が定まる:

$$M_i := \sup_{t_{i-1} \le t \le t_i} f_j^k(x_t)\dot{x}_t^j, \quad m_i := \inf_{t_{i-1} \le t \le t_i} f_j^k(x_t)\dot{x}_t^j.$$

ここで

$$S_D := \sum_D M_i(t_i - t_{i-1}), \quad s_D := \sum_D m_i(t_i - t_{i-1}), \quad \Sigma_D := \sum_D f_j^k(x_{s_{i-1}})\dot{x}_{\xi_i}^j(t_i - t_{i-1})$$

とおいて

$$S := \inf_{D \in \delta[s,t]} S_D, \quad s := \sup_{D \in \delta[s,t]} s_D$$

を定めれば

$$s_D \le s \le S \le S_D, \quad s_D \le \Sigma_D \le S_D$$

が満たされる．実際，任意の $D_1, D_2 \in \delta[s,t]$ に対して，分割の合併を D_3 とすれば

$$s_{D_1} \le s_{D_3} \le S_{D_3} \le S_{D_2}$$

が成立し $s \le S_D$ $(\forall D \in \delta[s,t])$ すなわち $s \le S$ が出る．一方で一様連続性から

$$0 \le S - s \le S_D - s_D = \sum_D (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \longrightarrow 0 \quad (|D| \longrightarrow 0)$$

が従い $s = S$ を得る．以上より

$$|S - \Sigma_D| \le |S - S_D| + |S_D - \Sigma_D| \le |S - S_D| + |S_D - s_D| \longrightarrow 0 \quad (|D| \longrightarrow 0)$$

が成り立つ． ■

上の証明において，各 k, j ごとに定まる極限 S を

$$\int_s^t f_j^k(x_u)\, dx_u^j$$

と書く．

定義 0.1.2 (C^1-級のパスに対する汎関数). $x \in C^1$ と $f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ に対して，$[s,t] \subset [0,T]$ における Riemann-Stieltjes 積分を次で表現する:

$$I_{s,t}^f(x) = \int_s^t f(x_u)\, dx_u := \lim_{|D| \to 0} \sum_D f(x_{t_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}),$$

$$\left[\int_s^t f(x_u)\, dx_u\right]^k = \sum_{j=1}^d \int_s^t f_j^k(x_u)\, dx_u^j, \quad (k = 1, \cdots, m).$$

ただし $D \in \delta[s,t]$ のみを考える．

定理 0.1.3 (I の加法性・線型性・絶対値). 任意の $x \in C^1$, $f, g \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して次が成立する:

(1) $I^f_{s,u}(x) + I^f_{u,t}(x) = I^f_{s,t}(x)$,

(2) $I^{(\alpha f + \beta g)}_{s,t}(x) = \alpha I^f_{s,t}(x) + \beta I^g_{s,t}(x)$.

(3) $\left| I^f_{s,t}(x) \right| \leq \int_s^t |f(x_u)||\dot{x}_u|\, du$.

証明.

(1) 各 k, j に対して

$$\int_s^u f^k_j(x_r)\, dx^j_r + \int_u^t f^k_j(x_r)\, dx^j_r = \int_s^t f^k_j(x_r)\, dx^j_r \tag{1}$$

が成り立つことを示せばよい．以下，分割 D に対する Riemann 和 $\sum_D f^k_j(x_{t_{i-1}})(x^j_{t_i} - x^j_{t_{i-1}})$ を Σ_D と略記する．定理 0.1.1 より，任意の $\epsilon > 0$ に対して或る $\delta > 0$ が存在し，

$$|D_1|, |D_2|, |D_3| < \delta, \quad (D_1 \in \delta[s, u],\ D_2 \in \delta[u, t],\ D_3 \in \delta[s, t])$$

である限り

$$\left| \int_s^u f^k_j(x_r)\, dx^j_r - \Sigma_{D_1} \right| < \epsilon, \quad \left| \int_u^t f^k_j(x_r)\, dx^j_r - \Sigma_{D_2} \right| < \epsilon, \quad \left| \int_s^t f^k_j(x_r)\, dx^j_r - \Sigma_{D_3} \right| < \epsilon$$

が成立する．$|D_1|, |D_2| < \delta/2$ を満たす D_1, D_2 を取り D_3 をその合併とすれば，$|D_3| < \delta$ かつ

$$\Sigma_{D_1} + \Sigma_{D_2} = \Sigma_{D_3}$$

が成り立ち，

$$\begin{aligned}
&\left| \int_s^u f^k_j(x_r)\, dx^j_r + \int_u^t f^k_j(x_r)\, dx^j_r - \int_s^t f^k_j(x_r)\, dx^j_r \right| \\
&\quad \leq \left| \int_s^u f^k_j(x_r)\, dx^j_r - \Sigma_{D_1} \right| + \left| \int_u^t f^k_j(x_r)\, dx^j_r - \Sigma_{D_2} \right| + \left| \int_s^t f^k_j(x_r)\, dx^j_r - \Sigma_{D_3} \right| \\
&\quad < 3\epsilon
\end{aligned}$$

が従い (1) を得る．

(2) 略. ∎

C^1 において次でノルム $\|\cdot\|_{C^1}$ を定める:

$$\|x\|_\infty := \sup_{t \in [0,T]} |x(t)|, \quad \left\| x' \right\|_\infty := \sup_{t \in [0,T]} |x'(t)|, \quad \|x\|_{C^1} := \|x\|_\infty + \left\| x' \right\|_\infty.$$

定理 0.1.4 ($\|\cdot\|_{C^1}$ に関する連続性). $[s, t] \subset [0, T]$ とし，C^1 には $\|\cdot\|_{C^1}$ でノルム位相を入れる．このとき，$f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ に対し $C^1 \ni x \longmapsto I^f_{s,t}(x) \in \mathbb{R}^m$ は連続である．

証明. C^1 の各点は可算な基本近傍系を持つから $x \longmapsto I_{s,t}(x)$ の点列連続性と連続性は一致する. すなわち $x^n \longrightarrow x$ なら $I^f_{s,t}(x^n) \longrightarrow I^f_{s,t}(x)$ が従うことを示せばよい. 今回も各 j, k について

$$\int_s^t f^k_j(x^n_u)\,dx^{n,j}_u \longrightarrow \int_s^t f^k_j(x_u)\,dx^j_u, \quad (n \longrightarrow \infty) \tag{2}$$

が成り立つことを示せば十分である.

第一段　$t \longmapsto x_t$ の連続性より $x([s,t])$ は $\mathbb{R}^d$ のコンパクト集合であるから, $t \longmapsto f(x_t)$ は $[s,t]$ 上で有界である. ここで $M := \sup_{t\in[s,t]} |f(x_t)|$ とおく.

第二段　任意の分割 $D \in \delta[s,t]$ に対し, 平均値の定理を使うと以下のように式変形される:

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_D f^k_j(x^n_{t_{i-1}})(x^{n,j}_{t_i} - x^{n,j}_{t_{i-1}}) - \sum_D f^k_j(x_{t_{i-1}})(x^j_{t_i} - x^j_{t_{i-1}})\right| \\
&\leq \sum_D \left| f^k_j(x^n_{t_{i-1}})\dot{x}^{n,j}_{\xi_i} - f^k_j(x_{t_{i-1}})\dot{x}^j_{\eta_i}\right|(t_i - t_{i-1}) \\
&\leq \sum_D \left| f^k_j(x^n_{t_{i-1}})\dot{x}^{n,j}_{\xi_i} + f^k_j(x_{t_{i-1}})\dot{x}^{n,j}_{\eta_i}\right. \\
&\qquad \left. - f^k_j(x_{t_{i-1}})\dot{x}^{n,j}_{\eta_i} - f^k_j(x_{t_{i-1}})\dot{x}^j_{\eta_i}\right|(t_i - t_{i-1}) \\
&\leq \sum_D \left| f^k_j(x^n_{t_{i-1}})\dot{x}^{n,j}_{\xi_i} - f^k_j(x_{t_{i-1}})\dot{x}^{n,j}_{\eta_i}\right|(t_i - t_{i-1}) \\
&\qquad + \sum_D \left| f^k_j(x_{t_{i-1}})\dot{x}^{n,j}_{\eta_i} - f^k_j(x_{t_{i-1}})\dot{x}^j_{\eta_i}\right|(t_i - t_{i-1}).
\end{aligned}$$

ここで最終式第二項については

$$\begin{aligned}
&\sum_D \left| f^k_j(x_{t_{i-1}})\dot{x}^{n,j}_{\eta_i} - f^k_j(x_{t_{i-1}})\dot{x}^j_{\eta_i}\right|(t_i - t_{i-1}) \\
&\qquad \leq \sum_D M \, \| x^n - x \|_{C^1} (t_i - t_{i-1}) = M(t-s) \, \| x^n - x \|_{C^1}
\end{aligned}$$

が成り立ち, 第一項については

$$\begin{aligned}
&\sum_D \left| f^k_j(x^n_{t_{i-1}})\dot{x}^{n,j}_{\xi_i} - f^k_j(x_{t_{i-1}})\dot{x}^{n,j}_{\eta_i}\right|(t_i - t_{i-1}) \\
&\leq \sum_D \left| f^k_j(x^n_{t_{i-1}})\dot{x}^{n,j}_{\xi_i} - f^k_j(x^n_{t_{i-1}})\dot{x}^j_{\xi_i}\right. \\
&\qquad + f^k_j(x^n_{t_{i-1}})\dot{x}^j_{\xi_i} - f^k_j(x^n_{t_{i-1}})\dot{x}^j_{\eta_i} \\
&\qquad + f^k_j(x^n_{t_{i-1}})\dot{x}^j_{\eta_i} - f^k_j(x^n_{t_{i-1}})\dot{x}^{n,j}_{\eta_i} \\
&\qquad \left. + f^k_j(x^n_{t_{i-1}})\dot{x}^{n,j}_{\eta_i} - f^k_j(x_{t_{i-1}})\dot{x}^{n,j}_{\eta_i}\right|(t_i - t_{i-1}) \\
&\leq 2M(t-s) \, \| x^n - x \|_{C^1} + M(t-s) \sup_{|\xi-\eta|\leq|D|} \left| x^j_\xi - x^j_\eta \right| \\
&\qquad + \| x \|_{C^1} (t-s) \sup_{t\in[0,T]} \left| f^k_j(x^n_t) - f^k_j(x_t)\right|
\end{aligned}$$

とできる. いま, 任意に $\epsilon > 0$ を取れば, 或る $\epsilon > \delta > 0$ が存在して $v, w \in x([s,t])$, $|v-w| < \delta$ なら $|f^k_j(v) - f^k_j(w)| < \epsilon$ が成り立つ (一様連続). すなわち $\left\| x^{(n)} - x \right\|_{C^1} < \delta$ なら

$$\sup_{t\in[s,t]} \left| f^k_j(x^n_t) - f^k_j(x_t)\right| < \epsilon$$

が成立する．$\|x^n - x\|_{C^1} \longrightarrow 0$ の仮定より，或る自然数 N が存在して $\|x^n - x\|_{C^1} < \delta\ (n > N)$ が満たされるから，ここで $n > N$ を任意に一つ選び固定する．

第三段　定理 0.1.1 より，前段の ϵ に対し或る $\delta_1 > 0$ が存在して，$|D| < \delta_1$ なら

$$\left| \int_s^t f_j^k(x_u^n)\, dx_u^{n,j} - \sum_D f_j^k(x_{t_{i-1}}^n)(x_{t_i}^n - x_{t_{i-1}}^n) \right| < \epsilon,$$
$$\left| \int_s^t f_j^k(x_u)\, dx_u^{j} - \sum_D f_j^k(x_{t_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) \right| < \epsilon,$$

が成り立つ．一方で x^j は一様連続であるから，或る $\delta_2 > 0$ が存在して $|D| < \delta_2$ なら

$$\sup_{|\xi - \eta| \le |D|} \left| x_\xi^j - x_\eta^j \right| < \epsilon$$

が満たされる．よって $|D| < \delta \wedge \delta_1 \wedge \delta_2$ ならば

$$\left| \int_s^t f_j^k(x_u^n)\, dx_u^{n,j} - \int_s^t f_j^k(x_u)\, dx_u^{j} \right| < [2 + 4M(t-s) + \|x\|_{C^1}(t-s)]\,\epsilon$$

が出る．$n > N$ は任意であったから (2) が従う．∎

定義 0.1.5 (p-variation).　$[0,T]$ 上の $\mathbb{R}^d$ 値関数 x に対し，p-variation を次で定める:

$$\|x\|_{p,[s,t]} \coloneqq \left\{ \sup_{D \in \delta[s,t]} \sum_D \left| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right|^p \right\}^{1/p}.$$

特に，$\|\cdot\|_{p,[0,T]}$ を $\|\cdot\|_p$ と表記する．また $p \ge 1$ として，線形空間 $B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$ を

$$B_{p,T}(\mathbb{R}^d) \coloneqq \left\{ x : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^d \ ; \quad x_0 = 0,\ x : \text{continuous},\ \|x\|_p < \infty \right\}$$

により定める．

次の結果によれば，$0 < p < 1$ に対し $B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$ を定めても 0 の定数関数のみの空間でしかない．

定理 0.1.6 ($0 < p < 1$ に対して有界 p-variation なら定数).　$x : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ を連続関数とする．このとき，$p \in (0,1)$ に対し $\|x\|_p < \infty$ が成り立つなら x は定数関数である．

証明.　$t \in [0,T]$ を任意に取り固定する．このとき全ての $D \in \delta[0,t]$ に対して，

$$\begin{aligned} |x_t - x_0| &\le \sum_D \left| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right| \le \max_D \left| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right|^{1-p} \sum_D \left| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right|^p \\ &\le \max_D \left| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right|^{1-p} \|x\|_p \end{aligned}$$

が成り立ち，x の一様連続性から右辺は $|D| \longrightarrow 0$ で 0 に収束し，$x_t = x_0$ が従う．∎

$p \geq 1$ の場合，Minkowski の不等式によれば，任意の $D \in \delta[s,t]$ に対し

$$\begin{aligned}\left\{\sum_D \left|(x_{t_i}+y_{t_i})-(x_{t_{i-1}}+y_{t_{i-1}})\right|^p\right\}^{1/p} &\leq \left\{\sum_D \left|x_{t_i}-x_{t_{i-1}}\right|^p\right\}^{1/p}+\left\{\sum_D \left|y_{t_i}-y_{t_{i-1}}\right|^p\right\}^{1/p} \\ &\leq \|x\|_{p,[s,t]}+\|y\|_{p,[s,t]}\end{aligned}$$

が成り立ち $\|x+y\|_{p,[s,t]} \leq \|x\|_{p,[s,t]}+\|y\|_{p,[s,t]}$ を得る．

定理 0.1.7. $B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$ は $\|\cdot\|_p$ をノルムとする Banach 空間である．

証明. 完備性を示す．

第一段 $(x^n)_{n=1}^\infty \subset B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$ を Cauchy 列とすれば，任意の $\epsilon > 0$ に対して或る $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ が存在し

$$\|x^n - x^m\|_p = \left\{\sup_{D\in\delta[0,T]} \sum_D \left|\left(x_{t_i}^n - x_{t_i}^m\right)-\left(x_{t_{i-1}}^n - x_{t_{i-1}}^m\right)\right|^p\right\}^{1/p} < \epsilon, \quad (n,m > n_\epsilon)$$

を満たす．いま，任意の $t \in [0,T]$ に対して $[0,T]$ の分割 $D = \{0 \leq t \leq T\}$ を考えれば

$$|x_t^n - x_t^m| < \epsilon, \quad (n,m > n_\epsilon)$$

が得られ，実数の完備性より或る $x_t \in \mathbb{R}^d$ が存在して

$$|x_t^n - x_t| < \epsilon \quad (n > n_\epsilon)$$

を満たす．この収束は t に関して一様であるから，$t \longmapsto x_t$ は 0 出発かつ連続である．

第二段 $\|x^n - x\|_p \longrightarrow 0\ (n \longrightarrow \infty)$ を示す．前段によれば，任意の $D \in \delta[0,T]$ に対し

$$\sum_D \left|(x_{t_i}^m - x_{t_i}^n)-(x_{t_{i-1}}^m - x_{t_{i-1}}^n)\right|^p < \epsilon^p, \quad (n,m > n_\epsilon)$$

が成り立っている．D はせいぜい有限個の分割であるから，$m \longrightarrow \infty$ として

$$\sum_D \left|(x_{t_i} - x_{t_i}^n)-(x_{t_{i-1}} - x_{t_{i-1}}^n)\right|^p < \epsilon^p, \quad (n > n_\epsilon)$$

が従い，D の任意性より $\|x^n - x\|_p < \epsilon\ (n > n_\epsilon)$ を得る． ∎

定理 0.1.8. $p \geq 1$ とする．また $x_0 = 0$ を満たす $x \in C^1$ の全体が作る線形空間を $\tilde{C}^1$ とおく．

(1) $x \in C^1$ ならば $\|x\|_p < \infty$ が成り立つ．ただちに，$\|\cdot\|_p$ は $\tilde{C}^1$ においてノルムとなる．

(2) $\tilde{C}^1$ において，$\|\cdot\|_{C^1}$ で導入する位相は $\|\cdot\|_p$ で導入する位相より強い．

証明.

$p=1$ **の場合**　平均値の定理より，任意の $D \in \delta[0,T]$ に対し

$$\sum_D \left| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right| \le \sum_D \sum_{j=1}^d \left| x_{t_i}^j - x_{t_{i-1}}^j \right| \le \sum_D \sum_{j=1}^d \| x \|_{C^1} (t_i - t_{i-1}) = d \| x \|_{C^1} T < \infty$$

が成り立ち $\| x \|_1 < \infty$ が従う．

$p>1$ **の場合**　q を p の共役指数とする．任意の $D \in \delta[0,T]$ に対し，Hölder の不等式より

$$\begin{aligned}\sum_D \left| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right|^p \le \sum_D \sum_{j=1}^d \left| x_{t_i}^j - x_{t_{i-1}}^j \right|^p &= \sum_D \sum_{j=1}^d \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{x}_u^j \, du \right|^p \\ &\le \sum_D \sum_{j=1}^d (t_i - t_{i-1}) \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} |\dot{x}_u^j|^q \, du \right)^{p/q} \le d \| x \|_{C^1}^p T^p\end{aligned}$$

が成立し，$\| x \|_p < \infty$ が従う．

以上より，$p \ge 1$ ならば $\| x \|_p \le dT \| x \|_{C^1}$ $(x \in C^1)$ が成り立ち (2) の主張を得る．　■

以上が会田先生の資料の Introduction の部分の補完である．次節の考察対象は主に定理 0.1.4 と定理 0.1.8 に関係する．定理 0.1.4 によれば，C^1 に $\| \cdot \|_{C^1}$ でノルム位相を導入した場合，$f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ に対して $C^1 \ni x \longmapsto I_{s,t}^f(x)$ は連続である．一方で定理 0.1.4 によれば，0 出発 C^1-パス空間 $\tilde{C}^1$ に $\| \cdot \|_p$ でノルム位相を導入した場合，$\tilde{C}^1 \ni x \longmapsto I_{s,t}^f(x)$ が連続であるという保証はない．しかし，次節以後の結果により，$1 \le p < 3$ かつ $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ が満たされているなら $\tilde{C}^1 \ni x \longmapsto I_{s,t}^f(x)$ は或る意味での連続性を持つ．

0.2　連続性定理の主張

定義 0.2.1 (記号の定義).　$x \in C^1$，$f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ に対し次を定める．

$$\begin{aligned}
\Delta_T &:= \{ (s,t) \; ; \quad 0 \le s \le t \le T \}, \\
X^1 &: \Delta_T \longrightarrow \mathbb{R}^d \; \left((s,t) \longmapsto X_{s,t}^1 = x_t - x_s \right), \\
X^2 &: \Delta_T \longrightarrow \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^d \; \left((s,t) \longmapsto X_{s,t}^2 = \int_s^t (x_u - x_s) \otimes dx_u \right), \\
\tilde{I}_{s,t}^f(x) &:= f(x_s) X_{s,t}^1 = f(x_s)(x_t - x_s), \\
J_{s,t}^f(x) &:= f(x_s) X_{s,t}^1 + (\nabla f)(x_s) X_{s,t}^2, \\
&\quad \text{where } \left[(\nabla f)(x_s) X_{s,t}^2 \right]^i = \sum_{j,k=1}^d \partial_k f_j^i(x_s) \int_s^t \left(x_u^k - x_s^k \right) dx_u^j.
\end{aligned}$$

定理 0.2.2. $[s,t]\subset[0,T]$, $x\in C^1$, $f\in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^m))$ とする．$D\in\delta[s,t]$ に対し

$$\tilde{I}^f_{s,t}(x,D) \coloneqq \sum_D \tilde{I}^f_{t_{i-1},t_i}(x), \quad J^f_{s,t}(x,D) \coloneqq \sum_D J^f_{t_{i-1},t_i}(x)$$

を定めるとき，次が成立する:

$$I^f_{s,t}(x) = \lim_{|D|\to 0}\tilde{I}^f_{s,t}(x,D) = \lim_{|D|\to 0} J^f_{s,t}(x,D).$$

証明. 第一の等号は $I^f_{s,t}(x)$ の定義によるから，第二の等号を証明する．各 $1\le i\le m$ について

$$\begin{aligned}
[I_{s,t}(x)]^i &= \sum_{j=1}^d \int_s^t f^i_j(x_u)\,dx^j_u \\
&= \sum_{j=1}^d \int_s^t f^i_j(x_s) + f^i_j(x_u) - f^i_j(x_s)\,dx^j_u \\
&= \sum_{j=1}^d \int_s^t f^i_j(x_s) + \sum_{k=1}^d \left\{\int_0^1 \partial_k f^i_j(x_s+\theta(x_u-x_s))\,d\theta\right\}(x^k_u - x^k_s)\,dx^j_u \\
&= \sum_{j=1}^d \int_s^t f^i_j(x_s)\,dx^j_u + \sum_{j,k=1}^d \partial_k f^i_j(x_s)\int_s^t (x^k_u-x^k_s)\,dx^j_u \\
&\quad + \sum_{j,k=1}^d \int_s^t \left\{\int_0^1 \partial_k f^i_j(x_s+\theta(x_u-x_s)) - \partial_k f^i_j(x_s)\,d\theta\right\}(x^k_u-x^k_s)\,dx^j_u, \\
&= \left[J^f_{s,t}(x)\right]^i + \sum_{j,k,\ell=1}^d \int_s^t \left\{\int_0^1\left(\int_0^\theta \partial_\ell\partial_k f^i_j(x_s+r(x_u-x_s))\,dr\right)d\theta\right\}(x^\ell_u-x^\ell_s)(x^k_u-x^k_s)\,dx^j_u
\end{aligned}$$

が成り立つ．$x([0,T])$ はコンパクトであるから，原点中心の半径 $^\exists w$ の閉球に含まれる．従って $x_s + r(x_u-x_s)$ $(0\le r\le 1)$ は半径 $3w$ の閉球に属し，$\partial_\ell\partial_k f^i_j$ のその球上での最大値を M とおけば

$$\begin{aligned}
&\left|\int_s^t \left\{\int_0^1\left(\int_0^\theta \partial_\ell\partial_k f^i_j(x_s+r(x_u-x_s))\,dr\right)d\theta\right\}(x^\ell_u-x^\ell_s)(x^k_u-x^k_s)\,dx^j_u\right| \\
&\quad\le M\int_s^t |x^\ell_u-x^\ell_s||x^k_u-x^k_s||\dot{x}^j_u|\,du \\
&\quad\le M\|x\|^3_{C^1}\int_s^t (u-s)^2\,du
\end{aligned}$$

となるから，特に $D\in\delta[s,t]$ に対して

$$\begin{aligned}
&\sum_D \int_{t_{i-1}}^{t_i}(u-t_{i-1})^2\,du \le \sum_D |D|\int_{t_{i-1}}^{t_i}(u-t_{i-1})\,du \\
&\quad\le \sum_D |D|\int_{t_{i-1}}^{t_i}(u-s)\,du \le \sum_D |D|\int_s^t (u-s)\,du \longrightarrow 0 \quad (|D|\longrightarrow 0)
\end{aligned}$$

が成立する．これにより

$$\left|[I_{s,t}(x,D)]^i - [J_{s,t}(x,D)]^i\right| \longrightarrow 0 \quad (|D|\longrightarrow 0)$$

が従い定理の主張を得る． ∎

定理 0.2.3 ($1 \leq p < 2$ の場合の連続性定理).

定理 0.2.4 ($2 \leq p < 3$ の場合の連続性定理).

0.3　連続性定理の証明

定義 0.3.1 (control function).　関数 $\omega : \Delta_T \longrightarrow [0, \infty)$ が任意の $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$ に対して

$$\omega(s, u) + \omega(u, t) \leq \omega(s, t)$$

を満たすとき，ω を control function と呼ぶ.

定理 0.3.2 (control function の例).　以下の関数 $\omega : \Delta_T \longrightarrow [0, \infty)$ は control function である.

(1)　$\omega := \left(\omega_1^{1/p} + \omega_2^{1/p}\right)^p$,　($p \geq 1,\ \omega_1, \omega_2$: control function).

(2)　$\omega : (s, t) \longmapsto \left\| X^1 \right\|_{p:[s,t]}^p$,　($p \geq 1,\ x \in B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$).

(3)

定理 0.3.3.

(1)

(2)　任意の $D_1 \in \delta[s, u], D_2 \in \delta[u, t]$ に対して合併 $D_1 \cup D_2$ は $[s, t]$ の分割であるから，

$$\sum_{D_1} \left| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right|^p + \sum_{D_2} \left| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right|^p \leq \sup_{D \in \delta[s,t]} \sum_{D} \left| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right|^p = \left\| X^1 \right\|_{p:[s,t]}^p$$

が成り立つ．左辺の D_1, D_2 の取り方は独立であるから，それぞれに対し上限を取れば

$$\left\| X^1 \right\|_{p:[s,u]}^p + \left\| X^1 \right\|_{p:[u,t]}^p \leq \left\| X^1 \right\|_{p:[s,t]}^p$$

が得られる.