

ゼミ用ノート  
会田先生資料”Rough path analysis:An Introduction”

基礎工学研究科システム創成専攻  
学籍番号 29C17095  
百合川尚学

2018 年 4 月 10 日

# 目次

0.1	導入 . . . . .	1
0.2	連続性定理の主張 . . . . .	7
0.3	連続性定理の証明 . . . . .	9

## 0.1 導入

以下,  $d$  次元ベクトル  $x \in \mathbb{R}^d$  と  $(m, d)$  行列  $a \in \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^d$  について, 成分を込めて表現する場合は  $x = (x^1, \dots, x^d)$ ,  $a = (a_{ij}^j)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq d}$  と書く. また  $T > 0$  を固定し  $C^1 = C^1([0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d)$  とおく. (端点においては片側微分を考える.) 区間  $[s, t] \subset [0, T]$  の分割を  $D = \{s = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t\}$  で表現し, 分割の全体を  $\delta[s, t]$  とおく.  $|D|$  により  $\max_{1 \leq i \leq N} |t_i - t_{i-1}|$  を表し,

$$\sum_D = \sum_{i=1}^N$$

と略記する.

定理 0.1.1 (Riemann-Stieltjes 積分).  $[s, t] \subset [0, T]$  とし,  $D \in \delta[s, t]$  についてのみ考えるとき, 任意の  $x \in C^1$ ,  $f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$  に対して次の極限が存在する:\*

$$\lim_{|D| \rightarrow 0} \sum_D f(x_{s_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) \in \mathbb{R}^m.$$

ここで  $s_{i-1}$  は区間  $[t_{i-1}, t_i]$  に属する任意の点であり, 極限は  $s_{i-1}$  の取り方に依らず確定する.

証明. 各  $x^j$  は  $C^1$ -級であるから, 平均値の定理より  $\sum_D f(x_{s_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})$  の第  $k$  成分を

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^d \sum_D f_j^k(x_{s_{i-1}})(x_{t_i}^j - x_{t_{i-1}}^j) \\ &= \sum_{j=1}^d \sum_D f_j^k(x_{s_{i-1}}) \dot{x}_{\xi_i}^j(t_i - t_{i-1}), \quad (\exists \xi_i \in [t_{i-1}, t_i]) \end{aligned}$$

と表現できる. 各  $j, k$  について

$$\lim_{|D| \rightarrow 0} \sum_D f_j^k(x_{s_{i-1}}) \dot{x}_{\xi_i}^j(t_i - t_{i-1})$$

\*1 極限の存在を保証する条件としては,  $f$  の有界性と微分可能性は必要ない.

が確定すれば、第  $k$  成分の極限が確定し定理の主張を得る。いま、 $t \rightarrow f_j^k(x_t)$  及び  $t \mapsto (d/dt)x_t^j$  は  $([s, t]$  上一様) 連続であるから、分割  $D$  による各区間  $[t_{i-1}, t_i]$  において次の最大最小値が定まる:

$$M_i := \sup_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} f_j^k(x_t) \dot{x}_t^j, \quad m_i := \inf_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} f_j^k(x_t) \dot{x}_t^j.$$

ここで

$$S_D := \sum_D M_i(t_i - t_{i-1}), \quad s_D := \sum_D m_i(t_i - t_{i-1}), \quad \Sigma_D := \sum_D f_j^k(x_{s_{i-1}}) \dot{x}_{\xi_i}^j(t_i - t_{i-1})$$

とにおいて

$$S := \inf_{D \in \delta[s, t]} S_D, \quad s := \sup_{D \in \delta[s, t]} s_D$$

を定めれば

$$s_D \leq s \leq S \leq S_D, \quad s_D \leq \Sigma_D \leq S_D$$

が満たされる。実際、任意の  $D_1, D_2 \in \delta[s, t]$  に対して、分割の合併を  $D_3$  とすれば

$$s_{D_1} \leq s_{D_3} \leq S_{D_3} \leq S_{D_2}$$

が成立し  $s \leq S_D$  ( $\forall D \in \delta[s, t]$ ) すなわち  $s \leq S$  が出る。一方で一様連続性から

$$0 \leq S - s \leq S_D - s_D = \sum_D (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \rightarrow 0 \quad (|D| \rightarrow 0)$$

が従い  $s = S$  を得る。以上より

$$|S - \Sigma_D| \leq |S - S_D| + |S_D - \Sigma_D| \leq |S - S_D| + |S_D - s_D| \rightarrow 0 \quad (|D| \rightarrow 0)$$

が成り立つ。 ■

上の証明において、各  $k, j$  ごとに定まる極限  $S$  を

$$\int_s^t f_j^k(x_u) dx_u^j$$

と書く。

定義 0.1.2 ( $C^1$ -級のパスに対する汎関数).  $x \in C^1$  と  $f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$  に対して、 $[s, t] \subset [0, T]$  における Riemann-Stieltjes 積分を次で表現する:

$$I_{s,t}^f(x) = \int_s^t f(x_u) dx_u := \lim_{|D| \rightarrow 0} \sum_D f(x_{t_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}),$$

$$\left[ \int_s^t f(x_u) dx_u \right]^k = \sum_{j=1}^d \int_s^t f_j^k(x_u) dx_u^j, \quad (k = 1, \dots, m).$$

ただし  $D \in \delta[s, t]$  のみを考える。

定理 0.1.3 ( $I$  の加法性・線型性・絶対値). 任意の  $x \in C^1$ ,  $f, g \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  に対して次が成立する:

- (1)  $I_{s,u}^f(x) + I_{u,t}^f(x) = I_{s,t}^f(x)$ ,
- (2)  $I_{s,t}^{(\alpha f + \beta g)}(x) = \alpha I_{s,t}^f(x) + \beta I_{s,t}^g(x)$ .
- (3)  $\left| I_{s,t}^f(x) \right| \leq \int_s^t |f(x_u)| |\dot{x}_u| du$ .

証明.

(1) 各  $k, j$  に対して

$$\int_s^u f_j^k(x_r) dx_r^j + \int_u^t f_j^k(x_r) dx_r^j = \int_s^t f_j^k(x_r) dx_r^j \quad (1)$$

が成り立つことを示せばよい. 以下, 分割  $D$  に対する Riemann 和  $\sum_D f_j^k(x_{t_{i-1}})(x_{t_i}^j - x_{t_{i-1}}^j)$  を  $\Sigma_D$  と略記する. 定理 0.1.1 より, 任意の  $\epsilon > 0$  に対して或る  $\delta > 0$  が存在し,

$$|D_1|, |D_2|, |D_3| < \delta, \quad (D_1 \in \delta[s, u], D_2 \in \delta[u, t], D_3 \in \delta[s, t])$$

である限り

$$\left| \int_s^u f_j^k(x_r) dx_r^j - \Sigma_{D_1} \right| < \epsilon, \quad \left| \int_u^t f_j^k(x_r) dx_r^j - \Sigma_{D_2} \right| < \epsilon, \quad \left| \int_s^t f_j^k(x_r) dx_r^j - \Sigma_{D_3} \right| < \epsilon$$

が成立する.  $|D_1|, |D_2| < \delta/2$  を満たす  $D_1, D_2$  を取り  $D_3$  をその合併とすれば,  $|D_3| < \delta$  かつ

$$\Sigma_{D_1} + \Sigma_{D_2} = \Sigma_{D_3}$$

が成り立ち,

$$\begin{aligned} & \left| \int_s^u f_j^k(x_r) dx_r^j + \int_u^t f_j^k(x_r) dx_r^j - \int_s^t f_j^k(x_r) dx_r^j \right| \\ & \leq \left| \int_s^u f_j^k(x_r) dx_r^j - \Sigma_{D_1} \right| + \left| \int_u^t f_j^k(x_r) dx_r^j - \Sigma_{D_2} \right| + \left| \int_s^t f_j^k(x_r) dx_r^j - \Sigma_{D_3} \right| \\ & < 3\epsilon \end{aligned}$$

が従い (1) を得る.

(2) 略. ■

$C^1$  において次でノルム  $\|\cdot\|_{C^1}$  を定める:

$$\|x\|_\infty := \sup_{t \in [0, T]} |x(t)|, \quad \|x'\|_\infty := \sup_{t \in [0, T]} |x'(t)|, \quad \|x\|_{C^1} := \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty.$$

定理 0.1.4 ( $\|\cdot\|_{C^1}$  に関する連続性).  $[s, t] \subset [0, T]$  とし,  $C^1$  には  $\|\cdot\|_{C^1}$  でノルム位相を入れる. このとき,  $f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$  に対し  $C^1 \ni x \mapsto I_{s,t}^f(x) \in \mathbb{R}^m$  は連続である.

証明.  $C^1$  の各点は可算な基本近傍系を持つから  $x \mapsto I_{s,t}(x)$  の点列連続性と連続性は一致する. すなわち  $x^n \rightarrow x$  なら  $I_{s,t}^f(x^n) \rightarrow I_{s,t}^f(x)$  が従うことを示せばよい. 今回も各  $j, k$  について

$$\int_s^t f_j^k(x_u^n) dx_u^{n,j} \rightarrow \int_s^t f_j^k(x_u) dx_u^j, \quad (n \rightarrow \infty) \quad (2)$$

が成り立つことを示せば十分である.

第一段  $t \mapsto x_t$  の連続性より  $x([s, t])$  は  $\mathbb{R}^d$  のコンパクト集合であるから,  $t \mapsto f(x_t)$  は  $[s, t]$  上で有界である. ここで  $M := \sup_{t \in [s, t]} |f(x_t)|$  とおく.

第二段 任意の分割  $D \in \delta[s, t]$  に対し, 平均値の定理を使うと以下のように式変形される:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_D f_j^k(x_{t_{i-1}}^n)(x_{t_i}^{n,j} - x_{t_{i-1}}^{n,j}) - \sum_D f_j^k(x_{t_{i-1}})(x_{t_i}^j - x_{t_{i-1}}^j) \right| \\ & \leq \sum_D \left| f_j^k(x_{t_{i-1}}^n) \dot{x}_{\xi_i}^{n,j} - f_j^k(x_{t_{i-1}}) \dot{x}_{\eta_i}^j \right| (t_i - t_{i-1}) \\ & \leq \sum_D \left| f_j^k(x_{t_{i-1}}^n) \dot{x}_{\xi_i}^{n,j} + f_j^k(x_{t_{i-1}}) \dot{x}_{\eta_i}^{n,j} \right. \\ & \quad \left. - f_j^k(x_{t_{i-1}}) \dot{x}_{\eta_i}^{n,j} - f_j^k(x_{t_{i-1}}) \dot{x}_{\eta_i}^j \right| (t_i - t_{i-1}) \\ & \leq \sum_D \left| f_j^k(x_{t_{i-1}}^n) \dot{x}_{\xi_i}^{n,j} - f_j^k(x_{t_{i-1}}) \dot{x}_{\eta_i}^{n,j} \right| (t_i - t_{i-1}) \\ & \quad + \sum_D \left| f_j^k(x_{t_{i-1}}) \dot{x}_{\eta_i}^{n,j} - f_j^k(x_{t_{i-1}}) \dot{x}_{\eta_i}^j \right| (t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

ここで最終式第二項については

$$\begin{aligned} & \sum_D \left| f_j^k(x_{t_{i-1}}) \dot{x}_{\eta_i}^{n,j} - f_j^k(x_{t_{i-1}}) \dot{x}_{\eta_i}^j \right| (t_i - t_{i-1}) \\ & \leq \sum_D M \|x^n - x\|_{C^1} (t_i - t_{i-1}) = M(t - s) \|x^n - x\|_{C^1} \end{aligned}$$

が成り立ち, 第一項については

$$\begin{aligned} & \sum_D \left| f_j^k(x_{t_{i-1}}^n) \dot{x}_{\xi_i}^{n,j} - f_j^k(x_{t_{i-1}}) \dot{x}_{\eta_i}^{n,j} \right| (t_i - t_{i-1}) \\ & \leq \sum_D \left| f_j^k(x_{t_{i-1}}^n) \dot{x}_{\xi_i}^{n,j} - f_j^k(x_{t_{i-1}}^n) \dot{x}_{\xi_i}^j \right. \\ & \quad + f_j^k(x_{t_{i-1}}^n) \dot{x}_{\xi_i}^j - f_j^k(x_{t_{i-1}}^n) \dot{x}_{\eta_i}^j \\ & \quad + f_j^k(x_{t_{i-1}}^n) \dot{x}_{\eta_i}^j - f_j^k(x_{t_{i-1}}^n) \dot{x}_{\eta_i}^{n,j} \\ & \quad \left. + f_j^k(x_{t_{i-1}}^n) \dot{x}_{\eta_i}^{n,j} - f_j^k(x_{t_{i-1}}) \dot{x}_{\eta_i}^{n,j} \right| (t_i - t_{i-1}) \\ & \leq 2M(t - s) \|x^n - x\|_{C^1} + M(t - s) \sup_{|\xi - \eta| \leq |D|} |x_{\xi}^j - x_{\eta}^j| \\ & \quad + \|x\|_{C^1} (t - s) \sup_{t \in [0, T]} |f_j^k(x_t^n) - f_j^k(x_t)| \end{aligned}$$

とできる. いま, 任意に  $\epsilon > 0$  を取れば, 或る  $\epsilon > \delta > 0$  が存在して  $v, w \in x([s, t])$ ,  $|v - w| < \delta$  なら  $|f_j^k(v) - f_j^k(w)| < \epsilon$  が成り立つ (一樣連続). すなわち  $\|x^{(n)} - x\|_{C^1} < \delta$  なら

$$\sup_{t \in [s, t]} |f_j^k(x_t^n) - f_j^k(x_t)| < \epsilon$$

が成立する． $\|x^n - x\|_{C^1} \rightarrow 0$  の仮定より，或る自然数  $N$  が存在して  $\|x^n - x\|_{C^1} < \delta$  ( $n > N$ ) が満たされるから，ここで  $n > N$  を任意に一つ選び固定する．

第三段 定理 0.1.1 より，前段の  $\epsilon$  に対し或る  $\delta_1 > 0$  が存在して， $|D| < \delta_1$  なら

$$\left| \int_s^t f_j^k(x_u^n) dx_u^{n,j} - \sum_D f_j^k(x_{t_{i-1}}^n)(x_{t_i}^n - x_{t_{i-1}}^n) \right| < \epsilon,$$

$$\left| \int_s^t f_j^k(x_u) dx_u^j - \sum_D f_j^k(x_{t_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) \right| < \epsilon,$$

が成り立つ．一方で  $x^j$  は一様連続であるから，或る  $\delta_2 > 0$  が存在して  $|D| < \delta_2$  なら

$$\sup_{|\xi - \eta| \leq |D|} |x_\xi^j - x_\eta^j| < \epsilon$$

が満たされる．よって  $|D| < \delta \wedge \delta_1 \wedge \delta_2$  ならば

$$\left| \int_s^t f_j^k(x_u^n) dx_u^{n,j} - \int_s^t f_j^k(x_u) dx_u^j \right| < [2 + 4M(t-s) + \|x\|_{C^1}(t-s)] \epsilon$$

が出る． $n > N$  は任意であったから (2) が従う．

定義 0.1.5 ( $p$ -variation).  $[0, T]$  上の  $\mathbb{R}^d$  値関数  $x$  に対し， $p$ -variation を次で定める：

$$\|x\|_{p,[s,t]} := \left\{ \sup_{D \in \delta[s,t]} \sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^p \right\}^{1/p}.$$

特に， $\|\cdot\|_{p,[0,T]}$  を  $\|\cdot\|_p$  と表記する．また  $p \geq 1$  として，線形空間  $B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$  を

$$B_{p,T}(\mathbb{R}^d) := \left\{ x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d ; \quad x_0 = 0, x : \text{continuous}, \|x\|_p < \infty \right\}$$

により定める．

次の結果によれば， $0 < p < 1$  に対し  $B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$  を定めても 0 の定数関数のみの空間でしかない．

定理 0.1.6 ( $0 < p < 1$  に対して有界  $p$ -variation なら定数).  $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  を連続関数とする．このとき， $p \in (0, 1)$  に対し  $\|x\|_p < \infty$  が成り立つなら  $x$  は定数関数である．

証明． $t \in [0, T]$  を任意に取り固定する．このとき全ての  $D \in \delta[0, t]$  に対して，

$$\begin{aligned} |x_t - x_0| &\leq \sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}| \leq \max_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^{1-p} \sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^p \\ &\leq \max_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^{1-p} \|x\|_p \end{aligned}$$

が成り立ち， $x$  の一様連続性から右辺は  $|D| \rightarrow 0$  で 0 に収束し， $x_t = x_0$  が従う．

$p \geq 1$  の場合, Minkowski の不等式によれば, 任意の  $D \in \delta[s, t]$  に対し

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_D |(x_{t_i} + y_{t_i}) - (x_{t_{i-1}} + y_{t_{i-1}})|^p \right\}^{1/p} &\leq \left\{ \sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^p \right\}^{1/p} + \left\{ \sum_D |y_{t_i} - y_{t_{i-1}}|^p \right\}^{1/p} \\ &\leq \|x\|_{p,[s,t]} + \|y\|_{p,[s,t]} \end{aligned}$$

が成り立ち  $\|x + y\|_{p,[s,t]} \leq \|x\|_{p,[s,t]} + \|y\|_{p,[s,t]}$  を得る.

**定理 0.1.7.**  $B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$  は  $\|\cdot\|_p$  をノルムとする Banach 空間である.

**証明.** 完備性を示す.

**第一段**  $(x^n)_{n=1}^\infty \subset B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$  を Cauchy 列とすれば, 任意の  $\epsilon > 0$  に対して或る  $n_\epsilon \in \mathbb{N}$  が存在し

$$\|x^n - x^m\|_p = \left\{ \sup_{D \in \delta[0,T]} \sum_D |(x_{t_i}^n - x_{t_i}^m) - (x_{t_{i-1}}^n - x_{t_{i-1}}^m)|^p \right\}^{1/p} < \epsilon, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

を満たす. いま, 任意の  $t \in [0, T]$  に対して  $[0, T]$  の分割  $D = \{0 \leq t \leq T\}$  を考えれば

$$|x_t^n - x_t^m| < \epsilon, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

が得られ, 実数の完備性より或る  $x_t \in \mathbb{R}^d$  が存在して

$$|x_t^n - x_t| < \epsilon \quad (n > n_\epsilon)$$

を満たす. この収束は  $t$  に関して一様であるから,  $t \mapsto x_t$  は 0 出発かつ連続である.

**第二段**  $\|x^n - x\|_p \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$  を示す. 前段によれば, 任意の  $D \in \delta[0, T]$  に対し

$$\sum_D |(x_{t_i}^m - x_{t_i}^n) - (x_{t_{i-1}}^m - x_{t_{i-1}}^n)|^p < \epsilon^p, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

が成り立っている.  $D$  はせいぜい有限個の分割であるから,  $m \rightarrow \infty$  として

$$\sum_D |(x_{t_i} - x_{t_i}^n) - (x_{t_{i-1}} - x_{t_{i-1}}^n)|^p < \epsilon^p, \quad (n > n_\epsilon)$$

が従い,  $D$  の任意性より  $\|x^n - x\|_p < \epsilon \ (n > n_\epsilon)$  を得る. ■

**定理 0.1.8.**  $p \geq 1$  とする. また  $x_0 = 0$  を満たす  $x \in C^1$  の全体が作る線形空間を  $\tilde{C}^1$  とおく.

- (1)  $x \in C^1$  ならば  $\|x\|_p < \infty$  が成り立つ. ただちに,  $\|\cdot\|_p$  は  $\tilde{C}^1$  においてノルムとなる.
- (2)  $\tilde{C}^1$  において,  $\|\cdot\|_{C^1}$  で導入する位相は  $\|\cdot\|_p$  で導入する位相より強い.

**証明.**

$p = 1$  の場合 平均値の定理より, 任意の  $D \in \delta[0, T]$  に対し

$$\sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}| \leq \sum_D \sum_{j=1}^d |x_{t_i}^j - x_{t_{i-1}}^j| \leq \sum_D \sum_{j=1}^d \|x\|_{C^1} (t_i - t_{i-1}) = d \|x\|_{C^1} T < \infty$$

が成り立ち  $\|x\|_1 < \infty$  が従う.

$p > 1$  の場合  $q$  を  $p$  の共役指数とする. 任意の  $D \in \delta[0, T]$  に対し, Hölder の不等式より

$$\begin{aligned} \sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^p &\leq \sum_D \sum_{j=1}^d |x_{t_i}^j - x_{t_{i-1}}^j|^p = \sum_D \sum_{j=1}^d \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{x}_u^j du \right|^p \\ &\leq \sum_D \sum_{j=1}^d (t_i - t_{i-1}) \left( \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\dot{x}_u^j|^q du \right)^{p/q} \leq d \|x\|_{C^1}^p T^p \end{aligned}$$

が成立し,  $\|x\|_p < \infty$  が従う.

以上より,  $p \geq 1$  ならば  $\|x\|_p \leq dT \|x\|_{C^1}$  ( $x \in C^1$ ) が成り立ち (2) の主張を得る. ■

以上が会田先生の資料の Introduction の部分の補完である. 次節の考察対象は主に定理 0.1.4 と定理 0.1.8 に関する. 定理 0.1.4 によれば,  $C^1$  に  $\|\cdot\|_{C^1}$  でノルム位相を導入した場合,  $f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$  に対して  $C^1 \ni x \mapsto I_{s,t}^f(x)$  は連続である. 一方で定理 0.1.4 によれば, 0 出発  $C^1$ -パス空間  $\tilde{C}^1$  に  $\|\cdot\|_p$  でノルム位相を導入した場合,  $\tilde{C}^1 \ni x \mapsto I_{s,t}^f(x)$  が連続であるという保証はない. しかし, 次節以後の結果により,  $1 \leq p < 3$  かつ  $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$  が満たされているなら  $\tilde{C}^1 \ni x \mapsto I_{s,t}^f(x)$  は或る意味での連続性を持つ.

## 0.2 連続性定理の主張

定義 0.2.1 (記号の定義).  $x \in C^1$ ,  $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$  に対し次を定める.

$$\begin{aligned} \Delta_T &:= \{ (s, t) ; \quad 0 \leq s \leq t \leq T \}, \\ X^1 : \Delta_T &\longrightarrow \mathbb{R}^d \quad ((s, t) \mapsto X_{s,t}^1 = x_t - x_s), \\ X^2 : \Delta_T &\longrightarrow \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^d \quad \left( (s, t) \mapsto X_{s,t}^2 = \int_s^t (x_u - x_s) \otimes dx_u \right), \\ \tilde{I}_{s,t}^f(x) &:= f(x_s) X_{s,t}^1 = f(x_s)(x_t - x_s), \\ J_{s,t}^f(x) &:= f(x_s) X_{s,t}^1 + (\nabla f)(x_s) X_{s,t}^2, \\ \text{where } [(\nabla f)(x_s) X_{s,t}^2]^i &= \sum_{j,k=1}^d \partial_k f_j^i(x_s) \int_s^t (x_u^k - x_s^k) dx_u^j. \end{aligned}$$



定理 0.2.2.  $[s, t] \subset [0, T]$ ,  $x \in C^1$ ,  $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$  とする.  $D \in \delta[s, t]$  に対し

$$\tilde{I}_{s,t}^f(x, D) := \sum_D \tilde{I}_{t_{i-1}, t_i}^f(x), \quad J_{s,t}^f(x, D) := \sum_D J_{t_{i-1}, t_i}^f(x)$$

を定めるとき, 次が成立する:

$$I_{s,t}^f(x) = \lim_{|D| \rightarrow 0} \tilde{I}_{s,t}^f(x, D) = \lim_{|D| \rightarrow 0} J_{s,t}^f(x, D).$$

証明. 第一の等号は  $I_{s,t}^f(x)$  の定義によるから, 第二の等号を証明する. 各  $1 \leq i \leq m$  について

$$\begin{aligned} [I_{s,t}(x)]^i &= \sum_{j=1}^d \int_s^t f_j^i(x_u) dx_u^j \\ &= \sum_{j=1}^d \int_s^t f_j^i(x_s) + f_j^i(x_u) - f_j^i(x_s) dx_u^j \\ &= \sum_{j=1}^d \int_s^t f_j^i(x_s) + \sum_{k=1}^d \left\{ \int_0^1 \partial_k f_j^i(x_s + \theta(x_u - x_s)) d\theta \right\} (x_u^k - x_s^k) dx_u^j \\ &= \sum_{j=1}^d \int_s^t f_j^i(x_s) dx_u^j + \sum_{j,k=1}^d \partial_k f_j^i(x_s) \int_s^t (x_u^k - x_s^k) dx_u^j \\ &\quad + \sum_{j,k=1}^d \int_s^t \left\{ \int_0^1 \partial_k f_j^i(x_s + \theta(x_u - x_s)) - \partial_k f_j^i(x_s) d\theta \right\} (x_u^k - x_s^k) dx_u^j, \\ &= [J_{s,t}^f(x)]^i + \sum_{j,k,\ell=1}^d \int_s^t \left\{ \int_0^1 \left( \int_0^\theta \partial_\ell \partial_k f_j^i(x_s + r(x_u - x_s)) dr \right) d\theta \right\} (x_u^\ell - x_s^\ell)(x_u^k - x_s^k) dx_u^j \end{aligned}$$

が成り立つ.  $x([0, T])$  はコンパクトであるから, 原点中心の半径  $3w$  の閉球に含まれる. 従って  $x_s + r(x_u - x_s)$  ( $0 \leq r \leq 1$ ) は半径  $3w$  の閉球に属し,  $\partial_\ell \partial_k f_j^i$  のその球上での最大値を  $M$  とおけば

$$\begin{aligned} &\left| \int_s^t \left\{ \int_0^1 \left( \int_0^\theta \partial_\ell \partial_k f_j^i(x_s + r(x_u - x_s)) dr \right) d\theta \right\} (x_u^\ell - x_s^\ell)(x_u^k - x_s^k) dx_u^j \right| \\ &\leq M \int_s^t |x_u^\ell - x_s^\ell| |x_u^k - x_s^k| |x_u^j| du \\ &\leq M \|x\|_{C^1}^3 \int_s^t (u - s)^2 du \end{aligned}$$

となるから, 特に  $D \in \delta[s, t]$  に対して

$$\begin{aligned} \sum_D \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - t_{i-1})^2 du &\leq \sum_D |D| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - t_{i-1}) du \\ &\leq \sum_D |D| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - s) du \leq \frac{1}{2} (t - s)^2 |D| \rightarrow 0 \quad (|D| \rightarrow 0) \end{aligned}$$

が成立する. これにより

$$|[I_{s,t}(x, D)]^i - [J_{s,t}(x, D)]^i| \rightarrow 0 \quad (|D| \rightarrow 0)$$

が従い定理の主張を得る. ■

定理 0.2.3 ( $1 \leq p < 2$  の場合の連続性定理).

定理 0.2.4 ( $2 \leq p < 3$  の場合の連続性定理).

### 0.3 連続性定理の証明

定義 0.3.1 (control function). 関数  $\omega : \Delta_T \rightarrow [0, \infty)$  が任意の  $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$  に対して

$$\omega(s, u) + \omega(u, t) \leq \omega(s, t)$$

を満たすとき,  $\omega$  を control function と呼ぶ.

定理 0.3.2 (control function の例). 以下の関数  $\omega : \Delta_T \rightarrow [0, \infty)$  は control function である.

- (1)  $\omega := (\omega_1^{1/p} + \omega_2^{1/p})^p$ , ( $p \geq 1$ ,  $\omega_1, \omega_2$  : control function).
- (2)  $\omega : (s, t) \mapsto \|X^1\|_{p:[s,t]}^p$ , ( $p \geq 1$ ,  $x \in B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$ ).
- (3)

定理 0.3.3.

- (1)
- (2) 任意の  $D_1 \in \delta[s, u], D_2 \in \delta[u, t]$  に対して合併  $D_1 \cup D_2$  は  $[s, t]$  の分割であるから,

$$\sum_{D_1} |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^p + \sum_{D_2} |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^p \leq \sup_{D \in \delta[s,t]} \sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^p = \|X^1\|_{p:[s,t]}^p$$

が成り立つ. 左辺の  $D_1, D_2$  の取り方は独立であるから, それぞれに対し上限を取れば

$$\|X^1\|_{p:[s,u]}^p + \|X^1\|_{p:[u,t]}^p \leq \|X^1\|_{p:[s,t]}^p$$

が得られる.