

ゼミ用ノート  
会田先生の資料”Rough path analysis:An Introduction”

基礎工学研究科システム創成専攻  
学籍番号 29C17095  
百合川尚学

2018 年 5 月 9 日

# 目次

0.1	導入 . . . . .	1
0.2	連続性定理 . . . . .	5
0.3	The notion of rough path . . . . .	19
.1	ノルム空間の完備拡大 . . . . .	22
.2	多重線型写像 . . . . .	22
.3	notation . . . . .	23
.4	テンソル積 . . . . .	23
.5	テンソル積の内積 . . . . .	31
.6	クロスノルム . . . . .	31

## 0.1 導入

以下,  $d$  次元ベクトル  $x \in \mathbb{R}^d$  と  $(m, d)$  行列  $a \in \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^d$  について, 成分を込めて表現する場合は  $x = (x^1, \dots, x^d)$ ,  $a = (a_{ij}^j)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq d}$  と書く. また  $T > 0$  を固定し  $C^1 = C^1([0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d)$  とおく. (端点においては片側微分を考える.) 区間  $[s, t] \subset [0, T]$  の分割を  $D = \{s = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t\}$  で表現し, 分割の全体を  $\delta[s, t]$  とおく.  $|D| := \max_{1 \leq i \leq N} |t_i - t_{i-1}|$  とし,

$$\sum_D = \sum_{i=1}^N$$

と略記する.

定理 0.1.1 (Riemann-Stieltjes 積分).  $[s, t] \subset [0, T]$  とし,  $D \in \delta[s, t]$  についてのみ考えるとき, 任意の  $x \in C^1$ ,  $f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$  に対して次の極限が存在する:\*

$$\lim_{|D| \rightarrow 0} \sum_D f(x_{s_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) \in \mathbb{R}^m.$$

$s_{i-1}$  は区間  $[t_{i-1}, t_i]$  に属する任意の点であり, 極限は  $s_{i-1}$  の取り方に依らない.

証明. 各  $x^j$  は  $C^1$ -級であるから, 平均値の定理より  $\sum_D f(x_{s_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})$  の第  $k$  成分を

$$\sum_{j=1}^d \sum_D f_j^k(x_{s_{i-1}})(x_{t_i}^j - x_{t_{i-1}}^j)$$

\*1 極限の存在を保証する条件としては,  $f$  の有界性と微分可能性は必要ない.

$$= \sum_{j=1}^d \sum_D f_j^k(x_{s_{i-1}}) \dot{x}_{\xi_i}^j(t_i - t_{i-1}), \quad (\exists \xi_i \in [t_{i-1}, t_i])$$

と表現できる．各  $j, k$  について

$$\lim_{|D| \rightarrow 0} \sum_D f_j^k(x_{s_{i-1}}) \dot{x}_{\xi_i}^j(t_i - t_{i-1})$$

は通常の連続関数の Riemann 積分

$$\int_s^t f_j^k(x_u) \dot{x}_u^j du$$

に収束する．

**定義 0.1.2** ( $C^1$ -級のパスに対する汎関数).  $x \in C^1$  と  $f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$  に対して,  $[s, t] \subset [0, T]$  における Riemann-Stieltjes 積分を  $I$  で表現する:

$$I_{s,t}(x) = \int_s^t f(x_u) dx_u := \lim_{|D| \rightarrow 0} \sum_D f(x_{t_i})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}),$$

$$\left[ \int_s^t f(x_u) dx_u \right]^k = \sum_{j=1}^d \int_s^t f_j^k(x_u) dx_u^j, \quad (k = 1, \dots, m).$$

ただし  $D \in \delta[s, t]$  のみを考える．

$C^1$  は次で定めるノルム  $\|\cdot\|_{C^1}$  により Banach 空間となる:

$$\|x\|_{C^1} := \sup_{t \in [0, T]} |x(t)| + \sup_{t \in [0, T]} |\dot{x}(t)|.$$

**定理 0.1.3** ( $\|\cdot\|_{C^1}$  に関する連続性).  $[s, t] \subset [0, T]$  とし,  $C^1$  には  $\|\cdot\|_{C^1}$  でノルム位相を入れる．このとき,  $C^1 \ni x \mapsto I_{s,t}(x) \in \mathbb{R}^m$  は連続である．

**証明.**  $C^1$  の第一可算性により点列連続性と連続性は一致するから,  $x^n \rightarrow x$  のとき  $I_{s,t}(x^n) \rightarrow I_{s,t}(x)$  が従うことを示せばよい．

$$M := \sup_{u \in [s, t]} |f(x_u)| < \infty$$

を定めれば

$$\begin{aligned} \left| \int_s^t f(x_u^n) dx_u^n - \int_s^t f(x_u) dx_u \right| &= \left| \int_s^t f(x_u^n) \dot{x}_u^n du - \int_s^t f(x_u) \dot{x}_u du \right| \\ &\leq \int_s^t |f(x_u^n) \dot{x}_u^n - f(x_u^n) \dot{x}_u| du + \int_s^t |f(x_u^n) \dot{x}_u - f(x_u) \dot{x}_u| du \\ &\leq M \|x^n - x\|_{C^1} (t - s) + \sup_{u \in [s, t]} |f(x_u^n) - f(x_u)| \|x\|_{C^1} (t - s) \end{aligned} \quad (1)$$

が成り立つ。いま、任意に  $\epsilon > 0$  を取れば、或る  $\epsilon > \delta > 0$  が存在して  $v, w \in x([s, t])$ ,  $|v - w| < \delta$  なら  $|f(v) - f(w)| < \epsilon$  を満たす (一様連続)。すなわち  $\|x^{(n)} - x\|_{C^1} < \delta$  なら

$$\sup_{t \in [s, t]} |f(x_t^{(n)}) - f(x_t)| < \epsilon$$

が成立する。  $\|x^n - x\|_{C^1} \rightarrow 0$  の仮定より、或る自然数  $N$  が存在して  $\|x^n - x\|_{C^1} < \delta$  ( $n > N$ ) が満たされるから、  $(1) < \epsilon[M(t-s) + \|x\|_{C^1}(t-s)]$  ( $n > N$ ) が成り立ち  $I_{s,t}(x^n) \rightarrow I_{s,t}(x)$  が従う。 ■

**定義 0.1.4 ( $p$ -variation).**  $(V, \|\cdot\|)$  をノルム空間とし、  $[0, T]$  上の  $V$  値写像  $x$  と  $[s, t] \subset [0, T]$  に対して  $p$ -variation ( $p > 0$ ) を次で定める:

$$\|x\|_{p,[s,t]} := \left\{ \sup_{D \in \delta[s,t]} \sum_D \|x_{t_i} - x_{t_{i-1}}\|^p \right\}^{1/p}.$$

特に、  $\|\cdot\|_{p,[0,T]}$  を  $\|\cdot\|_p$  と表記する。また  $p \geq 1$  として、線型空間  $B_{p,T}(V)$  を

$$B_{p,T}(V) := \left\{ x : [0, T] \rightarrow V ; \quad x_0 = 0, x : \text{continuous}, \|x\|_p < \infty \right\}$$

により定める。

次の結果によれば、  $0 < p < 1$  に対し  $B_{p,T}(V)$  を定めても零写像のみの空間でしかない。

**定理 0.1.5** ( $0 < p < 1$  に対して有界  $p$ -variation なら定数).  $x : [0, T] \rightarrow V$  を連続写像とする。このとき、  $p \in (0, 1)$  に対し  $\|x\|_p < \infty$  が成り立つなら  $x$  は定数写像である。

**証明.**  $t \in [0, T]$  を任意に取り固定する。このとき全ての  $D \in \delta[0, t]$  に対して、

$$\begin{aligned} \|x_t - x_0\| &\leq \sum_D \|x_{t_i} - x_{t_{i-1}}\| \leq \max_D \|x_{t_i} - x_{t_{i-1}}\|^{1-p} \sum_D \|x_{t_i} - x_{t_{i-1}}\|^p \\ &\leq \max_D \|x_{t_i} - x_{t_{i-1}}\|^{1-p} \|x\|_p \end{aligned}$$

が成り立ち、  $x$  の一様連続性から右辺は  $|D| \rightarrow 0$  で 0 に収束し、  $x_t = x_0$  が従う。 ■

**定理 0.1.6 ( $p$ -variation の  $p$  に関する単調減少性).**  $V$  をノルム空間とすると、  $x : [0, T] \rightarrow V$  に対して  $1 \leq p \leq q$  なら  $\|x\|_p \geq \|x\|_q$  が成立する。特に  $B_{p,T}(V) \subset B_{q,T}(V)$  が従う。

**証明.**  $(\sum_i |a_i|^p)^{1/p} \leq \sum_i |a_i|$  ( $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $p \geq 1$ ) により、任意の  $x \in B_{p,T}(V)$  と  $D \in \delta[0, T]$  に対し

$$\left[ \sum_D (\|x_{t_i} - x_{t_{i-1}}\|^p)^{q/p} \right]^{p/q} \leq \sum_D \|x_{t_i} - x_{t_{i-1}}\|^p$$

が満たされ  $\|x\|_q \leq \|x\|_p$  が成立する。 ■

$p \geq 1$  の場合, Minkowski の不等式によれば, 任意の  $D \in \delta[s, t]$  に対し

$$\left\{ \sum_D \left\| (x_{t_i} + y_{t_i}) - (x_{t_{i-1}} + y_{t_{i-1}}) \right\|^p \right\}^{1/p} \leq \left\{ \sum_D \left\| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right\|^p \right\}^{1/p} + \left\{ \sum_D \left\| y_{t_i} - y_{t_{i-1}} \right\|^p \right\}^{1/p} \\ \leq \|x\|_{p,[s,t]} + \|y\|_{p,[s,t]}$$

が成り立ち  $\|x + y\|_{p,[s,t]} \leq \|x\|_{p,[s,t]} + \|y\|_{p,[s,t]}$  を得る.

定理 0.1.7.  $V$  が Banach 空間のとき,  $B_{p,T}(V)$  は  $\|\cdot\|_p$  をノルムとする Banach 空間である.

証明. 完備性を示す.

第一段  $(x^n)_{n=1}^\infty \subset B_{p,T}(V)$  を Cauchy 列とすれば, 任意の  $\epsilon > 0$  に対して或る  $n_\epsilon \in \mathbb{N}$  が存在し

$$\|x^n - x^m\|_p = \left\{ \sup_{D \in \delta[0,T]} \sum_D \left\| (x_{t_i}^n - x_{t_i}^m) - (x_{t_{i-1}}^n - x_{t_{i-1}}^m) \right\|^p \right\}^{1/p} < \epsilon, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

を満たす. いま, 任意の  $t \in [0, T]$  に対して  $[0, T]$  の分割  $D = \{0 \leq t \leq T\}$  を考えれば

$$\|x_t^n - x_t^m\| < \epsilon, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

が得られ,  $V$  の完備性より或る  $x_t \in \mathbb{R}^d$  が存在して

$$\|x_t^n - x_t\| < \epsilon \quad (n > n_\epsilon)$$

を満たす. この収束は  $t$  に関して一様であるから,  $t \mapsto x_t$  は 0 出発かつ連続である.

第二段  $\|x^n - x\|_p \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) を示す. 前段によれば, 任意の  $D \in \delta[0, T]$  に対し

$$\sum_D \left\| (x_{t_i}^m - x_{t_i}^n) - (x_{t_{i-1}}^m - x_{t_{i-1}}^n) \right\|^p < \epsilon^p, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

が成り立っている.  $D$  はせいぜい有限個の分割であるから,  $m \rightarrow \infty$  として

$$\sum_D \left\| (x_{t_i} - x_{t_i}^n) - (x_{t_{i-1}} - x_{t_{i-1}}^n) \right\|^p < \epsilon^p, \quad (n > n_\epsilon)$$

が従い,  $D$  の任意性より  $\|x^n - x\|_p < \epsilon$  ( $n > n_\epsilon$ ) を得る. ■

定理 0.1.8.  $p \geq 1$  とする. また  $x_0 = 0$  を満たす  $x \in C^1$  の全体が作る線形空間を  $\tilde{C}^1$  とおく.

- (1)  $x \in C^1$  ならば  $\|x\|_p < \infty$  が成り立つ. ただちに,  $\|\cdot\|_p$  は  $\tilde{C}^1$  においてノルムとなる.
- (2)  $\tilde{C}^1$  において,  $\|\cdot\|_{C^1}$  で導入する位相は  $\|\cdot\|_p$  で導入する位相より強い.

証明.

$p = 1$  の場合 平均値の定理より, 任意の  $D \in \delta[0, T]$  に対し

$$\sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}| \leq \sum_D \|x\|_{C^1} (t_i - t_{i-1}) = \|x\|_{C^1} T < \infty$$

が成り立ち  $\|x\|_1 < \infty$  が従う.

$p > 1$  の場合  $q$  を  $p$  の共役指数とする．任意の  $D \in \delta[0, T]$  に対し，Hölder の不等式より

$$\begin{aligned} \sum_D |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^p &= \sum_D \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{x}_u du \right|^p \leq \sum_D (t_i - t_{i-1}) \left( \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\dot{x}_u|^q du \right)^{p/q} \\ &\leq \sum_D (t_i - t_{i-1}) \left( \int_0^T \|x\|_{C^1}^q du \right)^{p/q} = \|x\|_{C^1}^p T^p \end{aligned}$$

が成立し， $\|x\|_p < \infty$  が従う．

以上より， $p \geq 1$  ならば  $\|x\|_p \leq T \|x\|_{C^1}$  ( $x \in C^1$ ) が成り立ち (2) の主張を得る． ■

次節の考察対象は主に定理 0.1.3 と定理 0.1.8 に関係する．定理 0.1.3 によれば， $C^1$  に  $\|\cdot\|_{C^1}$  でノルム位相を導入した場合， $f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$  に対して  $C^1 \ni x \mapsto I_{s,t}(x)$  は連続である．一方で定理 0.1.3 によれば，0 出発  $C^1$ -パス空間  $\tilde{C}^1$  に  $\|\cdot\|_p$  でノルム位相を導入した場合， $\tilde{C}^1 \ni x \mapsto I_{s,t}(x)$  が連続であるという保証はない．しかし，次節以後の結果により， $1 \leq p < 3$  かつ  $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$  が満たされているなら  $\tilde{C}^1 \ni x \mapsto I_{s,t}(x)$  は或る意味での連続性を持つ．

## 0.2 連続性定理

定義 0.2.1 (記号の定義).  $x \in C^1$ ,  $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$  に対し次を定める．

$$\begin{aligned} \Delta_T &:= \{ (s, t) ; \quad 0 \leq s \leq t \leq T \}, \\ X^1 : \Delta_T &\longrightarrow \mathbb{R}^d \quad \left( (s, t) \mapsto X_{s,t}^1 = x_t - x_s \right), \\ X^2 : \Delta_T &\longrightarrow \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d \quad \left( (s, t) \mapsto X_{s,t}^2 = \int_s^t (x_u - x_s) \otimes dx_u \right), \\ \tilde{I}_{s,t}(x) &:= f(x_s) X_{s,t}^1 = f(x_s)(x_t - x_s), \\ J_{s,t}(x) &:= f(x_s) X_{s,t}^1 + (\nabla f)(x_s) X_{s,t}^2. \end{aligned}$$

以降， $a, b, c, d \in \mathbb{R}^d$  に対して次の表現を使う：

$$\begin{aligned} [a \otimes b]_j^i &= a^i b^j, \\ [(\nabla f)(x_s) X_{s,t}^2]^i &= \sum_{j,k=1}^d \partial_k f_j^i(x_s) \int_s^t (x_u^k - x_s^k) dx_u^j, \\ [(\nabla f)(x_s)(a \otimes b)]^i &= \sum_{j,k=1}^d \partial_k f_j^i(x_s) a^k b^j, \\ [(\nabla^2 f)(x_s)(a \otimes b \otimes c)]^i &= \sum_{j,k,v=1}^d \partial_v \partial_k f_j^i(x_s) a^v b^k c^j, \\ [(\nabla^3 f)(x_s)(a \otimes b \otimes c \otimes d)]^i &= \sum_{j,k,v,w=1}^d \partial_w \partial_v \partial_k f_j^i(x_s) a^w b^v c^k d^j. \end{aligned}$$

定理 0.2.2.  $[s, t] \subset [0, T]$ ,  $x \in C^1$ ,  $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$  とする.  $D \in \delta[s, t]$  に対し

$$\tilde{I}_{s,t}(x, D) := \sum_D \tilde{I}_{t_{i-1}, t_i}(x), \quad J_{s,t}(x, D) := \sum_D J_{t_{i-1}, t_i}(x)$$

を定めるとき, 次が成立する:

$$I_{s,t}(x) = \lim_{|D| \rightarrow 0} \tilde{I}_{s,t}(x, D) = \lim_{|D| \rightarrow 0} J_{s,t}(x, D).$$

証明. 第一の等号は  $I_{s,t}(x)$  の定義によるから, 第二の等号を証明する. まず,

$$\begin{aligned} I_{s,t}(x) &= \int_s^t f(x_u) dx_u \\ &= \int_s^t f(x_s) + f(x_u) - f(x_s) dx_u \\ &= \int_s^t f(x_s) dx_u + \int_s^t \int_0^1 (\nabla f)(x_s + \theta(x_u - x_s)) (X_{s,u}^1 \otimes \dot{x}_u) d\theta du \\ &= f(x_s) X_{s,t}^1 + (\nabla f)(x_s) X_{s,t}^2 \\ &\quad + \int_s^t \int_0^1 \{(\nabla f)(x_s + \theta(x_u - x_s)) - (\nabla f)(x_s)\} (X_{s,u}^1 \otimes \dot{x}_u) d\theta du \\ &= J_{s,t}(x) + \int_s^t \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_s + r(x_u - x_s)) (X_{s,u}^1 \otimes X_{s,u}^1 \otimes \dot{x}_u) dr d\theta du \end{aligned}$$

が成り立つ.  $[0, T] \ni t \mapsto x_t$  の連続性より, 最下段式中の  $x_s + r(x_u - x_s)$  ( $0 \leq r \leq 1$ ,  $s \leq u \leq t$ ) は或るコンパクト集合  $K$  に含まれ,  $f$  が  $C^2$ -級関数であるから

$$M := \sum_{i,j,k,v} \sup_{x \in K} |\partial_v \partial_k f_j^i(x)|$$

として  $M < \infty$  を定めれば

$$\begin{aligned} &\left| \int_s^t \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_s + r(x_u - x_s)) (X_{s,u}^1 \otimes X_{s,u}^1 \otimes \dot{x}_u) dr d\theta du \right| \\ &\leq \int_s^t \int_0^1 \int_0^\theta |(\nabla^2 f)(x_s + r(x_u - x_s)) (X_{s,u}^1 \otimes X_{s,u}^1 \otimes \dot{x}_u)| dr d\theta du \\ &\leq M \int_s^t |X_{s,u}^1|^2 |\dot{x}_u| du \\ &\leq M \|x\|_{C^1}^3 \int_s^t (u-s)^2 du \end{aligned}$$

が出る. 特に  $D \in \delta[s, t]$  に対して

$$\begin{aligned} \sum_D \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - t_{i-1})^2 du &\leq \sum_D |D| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - t_{i-1}) du \\ &\leq \sum_D |D| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - s) du \leq \frac{1}{2} (t - s)^2 |D| \longrightarrow 0 \quad (|D| \longrightarrow 0) \end{aligned}$$

が成立するから,

$$|I_{s,t}(x) - J_{s,t}(x, D)| \leq \sum_D |I_{t_{i-1}, t_i}(x) - J_{t_{i-1}, t_i}(x)| \longrightarrow 0 \quad (|D| \longrightarrow 0)$$

が従い定理の主張を得る.

定義 0.2.3 (control function). 関数  $\omega : \Delta_T \rightarrow [0, \infty)$  が連続かつ任意の  $s \leq u \leq t$  に対して

$$\omega(s, u) + \omega(u, t) \leq \omega(s, t) \quad (2)$$

を満たすとき,  $\omega$  を control function と呼ぶ.

式 (2) から  $\omega(t, t) = 0$  ( $\forall t \in [0, T]$ ) が従う. つまり control function は対角線上で 0 になる.

定義 0.2.4 (ノルム空間値写像の  $p$ -variation).  $(V, \|\cdot\|)$  をノルム空間,  $p > 0$  とする. このとき連続写像  $\psi : \Delta_T \rightarrow V$  に対する  $p$ -variation を

$$\|\psi\|_{p,[s,t]} := \left\{ \sup_{D \in \delta[s,t]} \sum_D \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p \right\}^{1/p}, \quad ((s, t) \subset [0, T])$$

で定める. 特に  $\|\cdot\|_{p,[0,T]}$  を  $\|\cdot\|_p$  と書く.

定理 0.2.5 ( $p$ -variation が定める control function).  $(V, \|\cdot\|)$  をノルム空間,  $p > 0$  とする.  $\|\psi\|_p < \infty$  かつ  $\psi_{t,t} = 0$  ( $\forall t \in [0, T]$ ) を満たす連続写像  $\psi : \Delta_T \rightarrow V$  に対して,

$$\omega : \Delta_T \ni (s, t) \mapsto \|\psi\|_{p,[s,t]}^p$$

により定める  $\omega$  は control function である.

証明.  $\|\psi\|_p < \infty$  の仮定より  $\omega$  は  $[0, \infty)$  値であるから, 以下では式 (2) と連続性を示す.

第一段  $\omega$  が式 (2) を満たすことを示す. 実際, 任意に  $D_1 \in \delta[s, u], D_2 \in \delta[u, t]$  を取れば

$$\sum_{D_1} \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p + \sum_{D_2} \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p = \sum_{D_1 \cup D_2} \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p \leq \|\psi\|_{p,[s,t]}^p$$

が成り立つ. 左辺の  $D_1, D_2$  の取り方は独立であるから, それぞれに対し上限を取れば

$$\|\psi\|_{p,[s,u]}^p + \|\psi\|_{p,[u,t]}^p \leq \|\psi\|_{p,[s,t]}^p$$

が従う.

第二段 任意の  $[s, t] \subset [0, T]$  について<sup>\*2</sup>,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow +0} \omega(s, t+h) &= \inf_{h>0} \omega(s, t+h), & \lim_{h \rightarrow +0} \omega(s-h, t) &= \inf_{h>0} \omega(s-h, t), \\ \lim_{h \rightarrow +0} \omega(s, t-h) &= \sup_{h>0} \omega(s, t-h), & \lim_{h \rightarrow +0} \omega(s+h, t) &= \sup_{h>0} \omega(s+h, t) \end{aligned}$$

が成立する. 実際  $\omega(s, t+h)$  について見れば, これは下に有界かつ  $h \rightarrow +0$  に対し単調減少であるから極限が確定し下限に一致する. 残りの三つも同様の理由で成立する.

<sup>\*2</sup> 下段の二式については  $s < t$  と仮定する. また上段についても,  $t = T$  或は  $s = 0$  の場合を除く必要がある.



第三段 任意の  $s \in [0, T]$  に対し,  $(s, T] \ni t \mapsto \omega(s, t)$  の左連続性を示す. ここでは

$$\tilde{\omega}(s, t) := \begin{cases} \lim_{h \rightarrow +0} \omega(s, t-h), & (s < t), \\ 0, & (s = t), \end{cases} \quad (\forall (s, t) \in \Delta_T)$$

で定める  $\tilde{\omega}$  が優加法性を持ち, かつ

$$\|\psi_{s,t}\|^p \leq \tilde{\omega}(s, t), \quad (\forall (s, t) \in \Delta_T)$$

を満たすことを示す. 実際これが示されれば, 任意の  $D \in \delta[s, t]$  に対し

$$\sum_D \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p \leq \sum_D \tilde{\omega}(t_{i-1}, t_i) \leq \tilde{\omega}(s, t)$$

が成立し  $\omega(s, t) \leq \tilde{\omega}(s, t)$  が従い,  $\omega(s, t) \geq \omega(s, t-h) (\forall h > 0)$  と併せて

$$\omega(s, t) = \tilde{\omega}(s, t) = \lim_{h \rightarrow +0} \omega(s, t-h)$$

を得る. いま, 任意に  $s < u < t$  を取れば, 十分小さい  $h_1, h_2 > 0$  に対して

$$\omega(s, u-h_1) + \omega(u, t-h_2) \leq \omega(s, t-h_2)$$

が満たされ,  $h_1 \rightarrow +0, h_2 \rightarrow +0$  として

$$\tilde{\omega}(s, u) + \tilde{\omega}(u, t) \leq \tilde{\omega}(s, t)$$

が成り立つから  $\tilde{\omega}$  は優加法性を持つ. また, もし或る  $(u, v) \in \Delta_T$  に対して

$$\|\psi_{u,v}\|^p > \tilde{\omega}(u, v)$$

が成り立つと仮定すると ( $u = v$  なら両辺 0 になるから  $u < v$  である)

$$\|\psi_{u,v}\|^p > \tilde{\omega}(u, v) \geq \omega(u, v-h) \geq \|\psi_{u,v-h}\|^p, \quad (\forall h > 0)$$

となる. 一方  $\psi$  の連続性より  $\|\psi_{u,v-h}\|^p \rightarrow \|\psi_{u,v}\|^p$  ( $h \rightarrow +0$ ) が従い矛盾が生じる. 同様にして, 任意の  $t \in (0, T]$  に対し  $[0, t) \ni s \mapsto \omega(s, t)$  の右連続性も出る.

第四段 任意の  $t \in [0, T]$  に対して次を示す:

$$\lim_{h \rightarrow +0} \omega(t, t+h) = \inf_{h > 0} \omega(t, t+h) = 0.$$

第一の等号は前段より従うから, 第二の等号を背理法により証明する. いま

$$\inf_{h > 0} \omega(t, t+h) =: \delta > 0$$

と仮定すれば,  $\psi$  の連続性より或る  $h_1$  が存在して

$$\|\psi_{t,t+h}\|^p = \|\psi_{t,t+h} - \psi_{t,t}\|^p < \frac{\delta}{8}, \quad (\forall h < h_1) \quad (3)$$

が成立する. ここで任意に  $h_0 < h_1$  を取り固定する. 一方で  $\omega(t, t+h_0) \geq \delta$  より

$$\sum_{i=1}^N \|\psi_{\tau_{i-1}, \tau_i}\|^p > \frac{7\delta}{8}$$

を満たす  $D = \{t = \tau_0 < \tau_1 < \cdots, \tau_N = t + h_0\} \in \delta[t, t + h_0]$  が存在し, (3) と併せて

$$\sum_{i=2}^N \|\psi_{\tau_{i-1}, \tau_i}\|^p > \frac{7\delta}{8} - \|\psi_{t, \tau_1}\|^p > \frac{7\delta}{8} - \frac{\delta}{8} = \frac{3\delta}{4}$$

を得る. また,  $\omega(t, \tau_1) \geq \delta$  より或る  $D' \in \delta[t, \tau_1]$  が存在して

$$\sum_{D'} \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p > \frac{3\delta}{4}$$

を満たすから,  $D' \cup \{\tau_1 < \cdots, \tau_N = t + h_0\} \in \delta[t, t + h_0]$  に対して

$$\omega(t, t + h_0) > \sum_{D'} \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p + \sum_{i=2}^N \|\psi_{\tau_{i-1}, \tau_i}\|^p > \frac{3\delta}{2}$$

が従うが,  $h_0 < h_1$  の任意性と単調減少性により

$$\delta = \inf_{h>0} \omega(t, t + h) = \inf_{h_1>h>0} \omega(t, t + h) \geq \frac{3\delta}{2}$$

となり矛盾が生じる. 同様にして

$$\lim_{h \rightarrow +0} \omega(t - h, t) = 0, \quad (\forall t \in (0, T))$$

も成立する.

第五段 任意に  $s \in [0, T)$  を取り固定し,  $[s, T) \ni t \mapsto \omega(s, t)$  が右連続であることを示す.

$$\lim_{h \rightarrow +0} \omega(s, t + h) \leq \omega(s, t) \quad (4)$$

を示せば, 第二段より逆向きの不等号も従い右連続性を得る. 任意に  $h, \epsilon > 0$  を取れば,

$$\omega(s, t + h) - \epsilon \leq \sum_D \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p$$

を満たす  $D \in \delta[s, t + h]$  が存在し,

$$D_1 := \{t_0 < \cdots < t_k\} = [s, t] \cap D, \quad D_2 := D \setminus (D_1 \cup \{t_{k+1}\})$$

とおくと

$$\begin{aligned} \omega(s, t + h) - \epsilon &\leq \sum_{i=1}^k \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p + \|\psi_{t_k, t_{k+1}}\|^p + \sum_{D_2} \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p \\ &= \sum_{i=1}^k \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p + \|\psi_{t_k, t}\|^p + \|\psi_{t_k, t_{k+1}}\|^p - \|\psi_{t_k, t}\|^p + \sum_{D_2} \|\psi_{t_{i-1}, t_i}\|^p \\ &\leq \omega(s, t) + \omega(t, t + h) + \|\psi_{t_k, t_{k+1}}\|^p - \|\psi_{t_k, t}\|^p \end{aligned}$$

が成り立つ.  $\psi$  の一様連続性より  $\|\psi_{t_k, t_{k+1}}\|^p \rightarrow \|\psi_{t_k, t}\|^p$  ( $h \rightarrow +0$ ) が成り立つから

$$\lim_{h \rightarrow +0} \omega(s, t + h) - \epsilon \leq \omega(s, t), \quad (\forall \epsilon > 0)$$

が従い (4) が出る. 同様に  $(0, t] \ni s \mapsto \omega(s, t)$  ( $\forall t \in (0, T)$ ) の左連続性も成立する.

第六段  $\omega$  の  $(s, t) \in \Delta_T$  における連続性を示す.  $h, k \geq 0$  とする.

(A)  $(s, t)$  を基準に第一象限の点について

$$\begin{aligned}
& |\omega(s, t) - \omega(s + h, t + k)| \\
& \leq |\omega(s, t) - \omega(s + h, t)| + |\omega(s + h, t) - \omega(s + h, t + k)| \\
& = |\omega(s, t) - \omega(s + h, t)| + \omega(s + h, t + k) - \omega(s + h, t) \\
& \leq |\omega(s, t) - \omega(s + h, t)| + \omega(s, t + k) - \omega(s + h, t) \\
& \leq |\omega(s, t) - \omega(s + h, t)| + |\omega(s, t + k) - \omega(s, t)| + |\omega(s, t) - \omega(s + h, t)|
\end{aligned}$$

が成り立つ。前段までに示した左右の連続性より、近づけ方に依らず  $h, k \rightarrow +0$  とすれば、左辺をいくらでも 0 に近づけることができる。

(B)  $(s, t)$  を基準に第三象限の点について

$$\begin{aligned}
& |\omega(s, t) - \omega(s - h, t - k)| \\
& \leq |\omega(s, t) - \omega(s - h, t)| + |\omega(s - h, t) - \omega(s - h, t - k)| \\
& = |\omega(s, t) - \omega(s - h, t)| + \omega(s - h, t) - \omega(s - h, t - k) \\
& \leq |\omega(s, t) - \omega(s - h, t)| + \omega(s - h, t) - \omega(s, t - k) \\
& \leq |\omega(s, t) - \omega(s - h, t)| + |\omega(s - h, t) - \omega(s, t)| + |\omega(s, t) - \omega(s, t - k)|,
\end{aligned}$$

が成り立つ。(A) と同じく  $h, k \rightarrow +0$  として左辺は 0 に収束する。

(C)  $((h_n, k_n))_{n=1}^{\infty}$  を第一象限から  $(0, 0)$  に近づく任意の点列とすると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega(s - h_n, t + k_n) = \omega(s, t), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \omega(s + h_n, t - k_n) = \omega(s, t)$$

が成り立つことを示す。これが示されれば

$$\lim_{h, k \rightarrow +0} \omega(s - h, t + k) = \omega(s, t), \quad \lim_{h, k \rightarrow +0} \omega(s + h, t - k) = \omega(s, t)$$

が従い、(A)(B) と併せて  $\omega$  の連続性が出る。背理法で証明する。いま、

$$\alpha := \lim_{n \rightarrow \infty} \omega(s - h_n, t + k_n) > \omega(s, t)$$

と仮定して  $\epsilon := \alpha - \omega(s, t)$  とおく。  $\lim_{t' \downarrow t} \omega(s, t') = \omega(s, t)$  より

$$0 \leq \omega(s, t') - \omega(s, t) < \frac{\epsilon}{3}$$

を満たす  $t' > t$  が存在し、また  $\lim_{s' \uparrow s} \omega(s', t') = \omega(s, t')$  より

$$0 \leq \omega(s', t') - \omega(s, t') < \frac{\epsilon}{3}$$

を満たす  $s' < s$  も存在する。このとき或る  $n$  で  $s' \leq s - h_n$ ,  $t + k_n \leq t'$  かつ

$$|\omega(s - h_n, t + k_n) - \alpha| < \frac{\epsilon}{3}$$

が成立し、特に  $(s - h_n, t + k_n) \in (s', t')$  より

$$\omega(s - h_n, t + k_n) \leq \omega(s', t')$$

となるはずであるが、一方で

$$\omega(s', t') < \frac{2}{3}\epsilon + \omega(s, t) = \alpha - \frac{\epsilon}{3} < \omega(s - h_n, t + k_n)$$

が従い矛盾が生じる。よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega(s - h_n, t + k_n) = \omega(s, t)$$

でなくてはならず、同様にして  $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega(s + h_n, t - k_n) = \omega(s, t)$  も得られる。 ■

定理 0.2.6 (control function の例). 以下の関数  $\omega : \Delta_T \rightarrow [0, \infty)$  は control function である.

- (1)  $\omega : (s, t) \mapsto \|X^1\|_{p:[s,t]}^p, \quad (p \geq 1, x \in B_{p,T}(\mathbb{R}^d)).$
- (2)  $\omega : (s, t) \mapsto \|X^2\|_{p:[s,t]}^p, \quad (p \geq 1, x \in C^1).$

行列  $a = (a_j^i)$  のノルムは  $|a| = \sqrt{\sum_{i,j} |a_j^i|^2}$  として考える.

定理 0.2.7.

- (1)  $\omega : (s, t) \mapsto X_{s,t}^1 = x_t - x_s$  は連続であるから, 前定理より  $\omega$  は control function である.
- (2) 任意の  $[s, t] \subset [0, T]$  に対して  $\|X^2\|_{p:[s,t]}^p < \infty$  を示せば, あとは上と同じ理由により定理の主張が得られる. 実際, 任意の分割  $D = \{s = t_0 < \dots < t_N = t\}$  に対し

$$\begin{aligned} \|X_{t_{i-1}, t_i}^2\| &\leq \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (x_u - x_{t_{i-1}}) \otimes \dot{x}_u du \right\| \\ &\leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} |(x_u - x_{t_{i-1}}) \otimes \dot{x}_u| du \\ &\leq \|x\|_{C^1}^2 \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - s) du \right\}^{1/p} \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - s) du \right\}^{1-1/p} \\ &\leq \|x\|_{C^1}^2 \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - s) du \right\}^{1/p} \left\{ \int_s^t (u - s) du \right\}^{1-1/p} \end{aligned}$$

が成り立つから,

$$\begin{aligned} \sum_D \|X_{t_{i-1}, t_i}^2\|^p &\leq \sum_D \|x\|_{C^1}^{2p} \left\{ \frac{1}{2}(t - s)^2 \right\}^{p-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - s) du \\ &= \|x\|_{C^1}^{2p} \left\{ \frac{1}{2}(t - s)^2 \right\}^{p-1} \int_s^t (u - s) du = \|x\|_{C^1}^{2p} \left\{ \frac{1}{2}(t - s)^2 \right\}^p \end{aligned}$$

により  $\|X^2\|_{p:[s,t]}^p < \infty$  が従う. ■

補題 0.2.8.  $\omega$  を  $\Delta_T$  上の control function とする.  $D = \{s = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t\}$  について,  $N \geq 2$  の場合或る  $1 \leq i \leq N - 1$  が存在して次を満たす:

$$\omega(t_{i-1}, t_{i+1}) \leq \frac{2\omega(s, t)}{N - 1}. \quad (5)$$

証明. (会田先生のテキスト.) ■

定理 0.2.9 ( $1 \leq p < 2$  の場合の連続性定理).  $1 \leq p < 2$  とし,  $x_0 = y_0$  を満たす  $x, y \in C^1$  と  $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ ,  $0 < \epsilon, R < \infty$  を任意に取る. このとき,

$$\|X^1\|_p, \|Y^1\|_p \leq R, \quad \|X^1 - Y^1\|_p \leq \epsilon$$

なら, 或る定数  $C = C(p, R, f)$  が存在し, 任意の  $0 \leq s \leq t \leq T$  に対して次が成立する:

$$|I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y)| \leq \epsilon C.$$

系 0.2.10 ( $p$ -variation による閉球上の Lipschitz 連続性).  $1 \leq p < 2$  とし,  $x_0 = y_0$  を満たす  $x, y \in C^1$  と  $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ ,  $0 < R < \infty$  を任意に取る. このとき,

$$\|X^1\|_p, \|Y^1\|_p \leq R$$

なら, 或る定数  $C = C(p, R, f)$  が存在して次を満たす:

$$|I_{0,T}(x) - I_{0,T}(y)| \leq C \|X^1 - Y^1\|_p.$$

証明 (系 0.2.10). 定理 0.2.9 において,  $\epsilon = \|X^1 - Y^1\|_p (x \neq y)^{*3}$  として証明が通る. ■

証明 (定理 0.2.9).  $[s, t] \subset [0, T]$  とする.

第一段  $\omega : \Delta_T \rightarrow [0, \infty)$  を

$$\omega(\alpha, \beta) = \|X^1\|_{p, [\alpha, \beta]}^p + \|Y^1\|_{p, [\alpha, \beta]}^p + \epsilon^{-p} \|X^1 - Y^1\|_{p, [\alpha, \beta]}^p, \quad ((\alpha, \beta) \in \Delta_T)$$

で定めれば, 定理 0.2.6 により  $1 \leq p$  の下で  $\omega$  は control function である.

第二段 任意に  $[s, t]$  の分割  $D = \{s = t_0 < \dots < t_N = t\}$  ( $N \geq 2$ ) を取れば, 補題 0.2.8 より (5) を満たす  $t_{(0)}$  が存在する. ここで,  $D_{-0} := D$ ,  $D_{-1} := D \setminus \{t_{(0)}\}$  と定める.  $N \geq 3$  ならば  $D_{-1}$  についても (5) を満たす  $t_{(1)}$  が存在するから,  $D_{-2} := D_{-1} \setminus \{t_{(1)}\}$  と定める. この操作を繰り返せば  $t_{(k)}, D_{-k}$  ( $k = 0, 1, \dots, N-1$ ) が得られ,

$$\begin{aligned} & \tilde{I}_{s,t}(x, D) - \tilde{I}_{s,t}(y, D) \\ &= \sum_{k=0}^{N-2} \left[ \left\{ \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1}) \right\} - \left\{ \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k-1}) \right\} \right] \\ & \quad + \left\{ \tilde{I}_{s,t}(x) - \tilde{I}_{s,t}(y) \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

と表現できる.

第三段 式 (6) について, 次を満たす定数  $C_1$  が存在することを示す:

$$|(6)| \leq \epsilon C_1 \quad (7)$$

---

<sup>\*3</sup>  $x = y$  なら  $\|X^1 - Y^1\|_p = 0$  かつ  $I_{s,t}(x) = I_{s,t}(y)$  が成り立つ.

見やすくするために  $t_k = t_{(k)}$  と書き直せば,

$$\begin{aligned}
& \left\{ \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1}) \right\} - \left\{ \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k-1}) \right\} \\
&= \{f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}})\} X_{t_k, t_{k+1}}^1 - \{f(y_{t_k}) - f(y_{t_{k-1}})\} Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \\
&= \{f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}})\} (X_{t_k, t_{k+1}}^1 - Y_{t_k, t_{k+1}}^1) \\
&\quad + \{f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}})\} Y_{t_k, t_{k+1}}^1 - \{f(y_{t_k}) - f(y_{t_{k-1}})\} Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \\
&= \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes (X_{t_k, t_{k+1}}^1 - Y_{t_k, t_{k+1}}^1) d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 d\theta \\
&\quad - \int_0^1 (\nabla f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 d\theta \\
&= \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes (X_{t_k, t_{k+1}}^1 - Y_{t_k, t_{k+1}}^1) d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) (X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 d\theta \\
&\quad - \int_0^1 (\nabla f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 d\theta \\
&= \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes (X_{t_k, t_{k+1}}^1 - Y_{t_k, t_{k+1}}^1) d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) (X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}) + r(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) - y_{t_{k-1}} - \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))) \\
&\quad \quad (X_{0, t_{k-1}}^1 - Y_{0, t_{k-1}}^1) \otimes Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta^{*4} \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}) + r(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) - y_{t_{k-1}} - \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))) \\
&\quad \quad \theta(X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \otimes Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta
\end{aligned}$$

が成り立つ. 補題 0.2.8 より

$$\begin{aligned}
& |X_{t_{k-1}, t_k}^1|, |Y_{t_{k-1}, t_k}^1|, |X_{t_k, t_{k+1}}^1|, |Y_{t_k, t_{k+1}}^1| \leq \omega(t_{k-1}, t_{k+1})^{1/p} \leq \left( \frac{2\omega(s, t)}{N - k - 1} \right)^{1/p}, \\
& |X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1|, |X_{t_k, t_{k+1}}^1 - Y_{t_k, t_{k+1}}^1| \leq \epsilon \omega(t_{k-1}, t_{k+1})^{1/p} \leq \epsilon \left( \frac{2\omega(s, t)}{N - k - 1} \right)^{1/p}
\end{aligned}$$

が満たされ, また

$$|X_{0, t_{k-1}}^1 - Y_{0, t_{k-1}}^1| \leq \epsilon \omega(0, t_{k-1})^{1/p} \leq \epsilon \omega(0, T)^{1/p} \leq \epsilon (2R^p + 1)^{1/p}$$

でもあるから,

$$M := \sum_{i,j} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f_j^i(x)| + \sum_{i,j,k} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial_k f_j^i(x)| + \sum_{i,j,k,v} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial_v \partial_k f_j^i(x)| \quad (8)$$

---

<sup>\*4</sup>  $x_0 = y_0$  の仮定より  $x_{t_{k-1}} - y_{t_{k-1}} = X_{0, t_{k-1}}^1 - Y_{0, t_{k-1}}^1$  が成り立つ.

と定めて

$$\begin{aligned}
& \left| \left\{ \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1}) \right\} - \left\{ \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k-1}) \right\} \right| \\
& \leq M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| X_{t_k, t_{k+1}}^1 - Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \right| \\
& \quad + M \left| X_{0, t_{k-1}}^1 - Y_{0, t_{k-1}}^1 \right| \left| Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \right| \\
& \leq \epsilon M \left[ 2 + 2(2R^p + 1)^{1/p} \right] \left( \frac{2\omega(s, t)}{N - k - 1} \right)^{2/p} \\
& \leq \epsilon M \left[ 2 + 2(2R^p + 1)^{1/p} \right] 2^{2/p} (2R^p + 1)^{2/p} \left( \frac{1}{N - k - 1} \right)^{2/p}
\end{aligned}$$

を得る.

$$C'_1 := M \left[ 2 + 2(2R^p + 1)^{1/p} \right] 2^{2/p} (2R^p + 1)^{2/p}$$

とおけば

$$|(6)| \leq \sum_{k=0}^{N-2} \epsilon C'_1 \left( \frac{1}{N - k - 1} \right)^{2/p} < \epsilon C'_1 \zeta\left(\frac{2}{p}\right)$$

が成立し,  $p < 2$  より  $\zeta(2/p) < \infty$  であるから  $C_1 := C'_1 \zeta(2/p)$  とおいて (7) が従う.

第四段  $x_0 = y_0$  の仮定により  $x_s - y_s = X_{0,s}^1 - Y_{0,s}^1$  が成り立ち

$$\begin{aligned}
\left| \tilde{I}_{s,t}(x) - \tilde{I}_{s,t}(y) \right| &= \left| f(x_s) X_{s,t}^1 - f(y_s) Y_{s,t}^1 \right| \\
&\leq \left| f(x_s) X_{s,t}^1 - f(x_s) Y_{s,t}^1 \right| + \left| f(x_s) Y_{s,t}^1 - f(y_s) Y_{s,t}^1 \right| \\
&\leq M \left| X_{s,t}^1 - Y_{s,t}^1 \right| + \left| \int_0^1 (\nabla f)(y_s + \theta(x_s - y_s)) \left[ (X_{0,s}^1 - Y_{0,s}^1) \otimes Y_{s,t}^1 \right] d\theta \right| \\
&\leq M \left| X_{s,t}^1 - Y_{s,t}^1 \right| + M \left| X_{0,s}^1 - Y_{0,s}^1 \right| \left| Y_{s,t}^1 \right| \\
&\leq M \epsilon \omega(s, t)^{1/p} + M \epsilon \omega(0, s)^{1/p} \omega(s, t)^{1/p} \\
&\leq \epsilon M \left[ (2R^p + 1)^{1/p} + (2R^p + 1)^{2/p} \right]
\end{aligned}$$

が従う. ここで  $C_2 := M \left[ (2R^p + 1)^{1/p} + (2R^p + 1)^{2/p} \right]$  とおく.

第五段 第二段と第三段より, 任意の  $D \in \delta[s, t]$  に対し

$$\left| \tilde{I}_{s,t}(x, D) - \tilde{I}_{s,t}(y, D) \right| \leq \epsilon(C_1 + C_2)$$

が成立し. 定理 0.2.2 により  $|D| \rightarrow 0$  として

$$\left| I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y) \right| \leq \epsilon(C_1 + C_2)$$

が出る. ■

定理 0.2.11 ( $2 \leq p < 3$  の場合の連続性定理).  $2 \leq p < 3$  とし,  $x_0 = y_0$  を満たす  $x, y \in C^1$  と  $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ ,  $0 < \epsilon, R < \infty$  を任意に取る. このとき,

$$\begin{aligned} & \|X^1\|_p, \|Y^1\|_p, \|X^2\|_{p/2}, \|Y^2\|_{p/2} \leq R < \infty, \\ & \|X^1 - Y^1\|_p, \|X^2 - Y^2\|_{p/2} \leq \epsilon \end{aligned}$$

なら, 或る定数  $C = C(p, R, f)$  が存在し, 任意の  $0 \leq s \leq t \leq T$  に対して次が成立する:

$$|I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y)| \leq \epsilon C.$$

系 0.2.12.  $1 \leq p < 2$  とし,  $x_0 = y_0$  を満たす  $x, y \in C^1$  と  $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$ ,  $0 < R < \infty$  を任意に取る. このとき,

$$\|X^1\|_p, \|Y^1\|_p, \|X^2\|_{p/2}, \|Y^2\|_{p/2} \leq R$$

なら, 或る定数  $C = C(p, R, f)$  が存在して次を満たす:

$$|I_{0,T}(x) - I_{0,T}(y)| \leq C (\|X^1 - Y^1\|_p + \|X^2 - Y^2\|_{p/2}).$$

証明 (系 0.2.12). 定理 0.2.11 において,  $\epsilon = \|X^1 - Y^1\|_p + \|X^2 - Y^2\|_{p/2}$  ( $x \neq y$ ) として証明が通る. ■

証明 (定理 0.2.12).  $[s, t] \subset [0, T]$  とする.

第一段  $\omega : \Delta_T \rightarrow [0, \infty)$  を

$$\begin{aligned} \omega(\alpha, \beta) &= \|X^1\|_{p, [\alpha, \beta]}^p + \|Y^1\|_{p, [\alpha, \beta]}^p + \|X^2\|_{p/2, [\alpha, \beta]}^{p/2} + \|Y^2\|_{p/2, [\alpha, \beta]}^{p/2} \\ &\quad + \epsilon^{-p} \|X^1 - Y^1\|_{p, [\alpha, \beta]}^p + \epsilon^{-p/2} \|X^2 - Y^2\|_{p/2, [\alpha, \beta]}^{p/2}, \quad ((\alpha, \beta) \in \Delta_T) \end{aligned}$$

で定めれば, 定理 0.2.6 により  $2 \leq p$  の下で  $\omega$  は control function である.

第二段  $D \in \delta[s, t]$  に対し, 定理 0.2.9 の証明と同様にして  $t_{(k)}, D_{-k}$  を構成すれば

$$\begin{aligned} & J_{s,t}(x, D) - J_{s,t}(y, D) \\ &= \sum_{k=0}^{N-2} [\{J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})\} - \{J_{s,t}(y, D_{-k}) - J_{s,t}(y, D_{-k-1})\}] \\ &\quad + \{J_{s,t}(x) - J_{s,t}(y)\} \end{aligned} \tag{9}$$

と表現できる.

第三段  $J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})$  を変形する. 以降  $t_k = t_{(k)}$  と書き直せば

$$\begin{aligned} & J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1}) \\ &= J_{t_{k-1}, t_k}(x) + J_{t_k, t_{k+1}}(x) - J_{t_{k-1}, t_{k+1}}(x) \\ &= f(x_{t_{k-1}})X_{t_{k-1}, t_k}^1 + f(x_{t_k})X_{t_k, t_{k+1}}^1 - f(x_{t_{k-1}})X_{t_{k-1}, t_{k+1}}^1 \\ &\quad + (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X_{t_{k-1}, t_k}^2 + (\nabla f)(x_{t_k})X_{t_k, t_{k+1}}^2 - (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X_{t_{k-1}, t_{k+1}}^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \{f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}})\} X_{t_k, t_{k+1}}^1 \\
&\quad + (\nabla f)(x_{t_{k-1}}) X_{t_{k-1}, t_k}^2 + (\nabla f)(x_{t_k}) X_{t_k, t_{k+1}}^2 - (\nabla f)(x_{t_{k-1}}) X_{t_{k-1}, t_{k+1}}^2 \\
&= \int_0^1 \{(\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) - (\nabla f)(x_{t_{k-1}})\} X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_k, t_{k+1}}^1 d\theta \\
&\quad + (\nabla f)(x_{t_{k-1}}) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_k, t_{k+1}}^1 \\
&\quad + (\nabla f)(x_{t_{k-1}}) X_{t_{k-1}, t_k}^2 + (\nabla f)(x_{t_k}) X_{t_k, t_{k+1}}^2 - (\nabla f)(x_{t_{k-1}}) X_{t_{k-1}, t_{k+1}}^2 \\
&= \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
&\quad + (\nabla f)(x_{t_{k-1}}) (X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_k, t_{k+1}}^1 + X_{t_{k-1}, t_k}^2 - X_{t_{k-1}, t_{k+1}}^2) \\
&\quad + (\nabla f)(x_{t_k}) X_{t_k, t_{k+1}}^2 \\
&= \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
&\quad + \{(\nabla f)(x_{t_k}) - (\nabla f)(x_{t_{k-1}})\} X_{t_k, t_{k+1}}^2 \\
&= \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_k, t_{k+1}}^2 d\theta
\end{aligned}$$

を得る.

第四段 式 (9) について, 次を満たす定数  $C_1$  が存在することを示す:

$$|(9)| \leq \epsilon C_1. \quad (10)$$

実際, 前段の結果より

$$\begin{aligned}
&\{J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})\} - \{J_{s,t}(y, D_{-k}) - J_{s,t}(y, D_{-k-1})\} \\
&= \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_k, t_{k+1}}^2 d\theta \\
&\quad - \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
&\quad - \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^2 d\theta \\
&= \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes (X_{t_k, t_{k+1}}^1 - Y_{t_k, t_{k+1}}^1) dr d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes (X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^\theta \{(\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) - (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))\} \\
&\quad \quad X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) (X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \otimes Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes (X_{t_k, t_{k+1}}^2 - Y_{t_k, t_{k+1}}^2) d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \{(\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) - (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^2 d\theta \\
& + \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) (X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^2 d\theta \\
= & \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes (X_{t_k, t_{k+1}}^1 - Y_{t_k, t_{k+1}}^1) dr d\theta \\
& + \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes (X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
& + \int_0^1 \int_0^\theta \int_0^1 (\nabla^3 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}) + u(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) - y_{t_{k-1}} - r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))) \\
& \quad \left\{ (X_{0, t_{k-1}}^1 - Y_{0, t_{k-1}}^1) + r(X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \right\} \otimes X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 du dr d\theta \\
& + \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) (X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \otimes Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^1 dr d\theta \\
& + \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes (X_{t_k, t_{k+1}}^2 - Y_{t_k, t_{k+1}}^2) d\theta \\
& + \int_0^1 \int_0^1 (\nabla^3 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}) + r(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) - y_{t_{k-1}} - \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))) \\
& \quad \left\{ (X_{0, t_{k-1}}^1 - Y_{0, t_{k-1}}^1) + \theta(X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \right\} \otimes X_{t_{k-1}, t_k}^1 \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^2 dr d\theta \\
& + \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) (X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1) \otimes Y_{t_k, t_{k+1}}^2 d\theta
\end{aligned}$$

が成り立つから,

$$\begin{aligned}
M := & \sum_{i,j} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f_j^i(x)| + \sum_{i,j,k} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial_k f_j^i(x)| \\
& + \sum_{i,j,k,v} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial_v \partial_k f_j^i(x)| + \sum_{i,j,k,v,w} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial_w \partial_v \partial_k f_j^i(x)|
\end{aligned} \tag{11}$$

において

$$\begin{aligned}
& \left| \{J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})\} - \{J_{s,t}(y, D_{-k}) - J_{s,t}(y, D_{-k-1})\} \right| \\
& \leq M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| X_{t_k, t_{k+1}}^1 - Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \right| \\
& \quad + M \left| X_{0, t_{k-1}}^1 - Y_{0, t_{k-1}}^1 \right| \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^1 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| X_{t_k, t_{k+1}}^2 - Y_{t_k, t_{k+1}}^2 \right| \\
& \quad + M \left| X_{0, t_{k-1}}^1 - Y_{0, t_{k-1}}^1 \right| \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^2 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^2 \right| \\
& \quad + M \left| X_{t_{k-1}, t_k}^1 - Y_{t_{k-1}, t_k}^1 \right| \left| Y_{t_k, t_{k+1}}^2 \right| \\
& \leq \epsilon M \left[ 5 + 2\omega(0, t_{k-1})^{1/p} + 2\omega(t_{k-1}, t_k)^{1/p} \right] \left( \frac{2\omega(s, t)}{N - k - 1} \right)^{3/p} \\
& \leq \epsilon M \left[ 2 + 4 \left( 2R^p + 2R^{p/2} + 2 \right)^{1/p} \right] 2^{3/p} \left( 2R^p + 2R^{p/2} + 2 \right)^{3/p} \left( \frac{1}{N - k - 1} \right)^{3/p}
\end{aligned}$$

を得る. ここで

$$C'_1 := M \left[ 2 + 4 \left( 2R^p + 2R^{p/2} + 2 \right)^{1/p} \right] 2^{3/p} \left( 2R^p + 2R^{p/2} + 2 \right)^{3/p}$$

と定めれば

$$|(9)| \leq \sum_{k=0}^{N-2} \epsilon C'_1 \left( \frac{1}{N-k-1} \right)^{3/p} < \epsilon C'_1 \zeta \left( \frac{3}{p} \right)$$

が成立し、 $p < 3$  より  $\zeta(3/p) < \infty$  であるから  $C_1 := C'_1 \zeta(3/p)$  とおいて (10) が出る。

第五段  $x_0 = y_0$  の仮定により

$$\begin{aligned} & |J_{s,t}(x) - J_{s,t}(y)| \\ & \leq |f(x_s)X_{s,t}^1 - f(y_s)Y_{s,t}^1| + |(\nabla f)(x_s)X_{s,t}^2 - (\nabla f)(y_s)Y_{s,t}^2| \\ & \leq |f(x_s)X_{s,t}^1 - f(x_s)Y_{s,t}^1| + |f(x_s)Y_{s,t}^1 - f(y_s)Y_{s,t}^1| \\ & \quad + |(\nabla f)(x_s)X_{s,t}^2 - (\nabla f)(x_s)Y_{s,t}^2| + |(\nabla f)(x_s)Y_{s,t}^2 - (\nabla f)(y_s)Y_{s,t}^2| \\ & \leq M |X_{s,t}^1 - Y_{s,t}^1| + \left| \int_0^1 (\nabla f)(y_s + \theta(x_s - y_s))(x_s - y_s) \otimes Y_{s,t}^1 d\theta \right| \\ & \quad + M |X_{s,t}^2 - Y_{s,t}^2| + \left| \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_s + \theta(x_s - y_s))(x_s - y_s) \otimes Y_{s,t}^2 d\theta \right| \\ & \leq M |X_{s,t}^1 - Y_{s,t}^1| + M |X_{0,s}^1 - Y_{0,s}^1| |Y_{s,t}^1| \\ & \quad + M |X_{s,t}^2 - Y_{s,t}^2| + M |X_{0,s}^1 - Y_{0,s}^1| |Y_{s,t}^2| \\ & \leq \epsilon M \omega(s, t)^{1/p} + \epsilon M \omega(0, s)^{1/p} \omega(s, t)^{1/p} \\ & \quad + \epsilon M \omega(s, t)^{2/p} + \epsilon M \omega(0, s)^{1/p} \omega(s, t)^{2/p} \\ & \leq \epsilon M \left[ \omega(0, T)^{1/p} + 2\omega(0, T)^{2/p} + \omega(0, T)^{3/p} \right] \\ & \leq \epsilon M \left[ (2R^p + 2R^{p/2} + 2)^{1/p} + 2(2R^p + 2R^{p/2} + 2)^{2/p} + (2R^p + 2R^{p/2} + 2)^{3/p} \right] \end{aligned}$$

が従う。ここで最下段の  $\epsilon$  の係数を  $C_2$  とおく。

第六段 以上より、任意の  $D \in \delta[s, t]$  に対し

$$|J_{s,t}(x, D) - J_{s,t}(y, D)| \leq \epsilon(C_1 + C_2)$$

が成り立ち、定理 0.2.2 により  $|D| \rightarrow 0$  として

$$|I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y)| \leq \epsilon(C_1 + C_2)$$

が出る。 ■

系 0.2.13 (パスが 0 出発なら  $f$  の有界性は要らない). 定理 0.2.9 と定理 0.2.11 について、 $x, y \in \tilde{C}^1$  ならば  $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m))$  として主張が成り立つ。

証明.  $x_0 = 0$  なら

$$\|X^1\|_p \leq R \quad \Rightarrow \quad |x_t| \leq R \quad (\forall t \in [0, T])$$

が成り立つから、式 (8) と (11) において  $\sup_{x \in \mathbb{R}^d}$  を  $\sup_{|x| \leq 9R}$  に替えればよい。 ■

### 0.3 The notion of rough path

$(V, \|\cdot\|)$  を  $\mathbb{R}$ -Banach 空間とする. また  $\otimes_a$  により代数的テンソル積, 或はその標準写像を表す.  $k \geq 2$  の場合,  $k$  重テンソル積  $V^{\otimes k} = V \otimes_a \cdots \otimes_a V$  にクロスノルム (定義.6.1)  $\alpha_k(\cdot)$  を導入し, その完備拡大を  $(V^{\otimes k}, |\cdot|_k)$  と書く. 定理.4.4 と定理.4.8 によれば, 任意の  $0 \leq j \leq k$  に対し  $V^{\otimes k}$  と  $V^{\otimes j} \otimes_a V^{\otimes k-j}$  は同型となる. 特に  $k \geq 3$  及び  $1 \leq j \leq k-1$  に対し, 定理.4.8 における線型同型を

$$F_{j,k} : V^{\otimes k} \longrightarrow V^{\otimes j} \otimes_a V^{\otimes k-j}$$

と表し,  $V^{\otimes j} \otimes_a V^{\otimes k-j}$  上のノルムを

$$\alpha_{j,k}(v) := \alpha_k(F_{j,k}^{-1}(v)), \quad (\forall v \in V^{\otimes j} \otimes_a V^{\otimes k-j})$$

により定めれば,  $F_{j,k}$  は等長同型となる. 一方で  $V^{\otimes i}$  の  $V^{\otimes i}$  への等長埋め込みを  $J_i$  で表し

$$\begin{aligned} \varphi_{j,k} : J_j V^{\otimes j} \times J_{k-j} V^{\otimes k-j} \ni (u, v) &\longmapsto (J_j^{-1} u, J_{k-j}^{-1} v) && \in V^{\otimes j} \times V^{\otimes k-j} \\ &\longmapsto F_{j,k}^{-1}(J_j^{-1} u \otimes_a J_{k-j}^{-1} v) && \in V^{\otimes k} \\ &\longmapsto J_k F_{j,k}^{-1}(J_j^{-1} u \otimes_a J_{k-j}^{-1} v) && \in V^{\otimes k} \end{aligned}$$

により  $\varphi_{j,k} : J_j V^{\otimes j} \times J_{k-j} V^{\otimes k-j} \longrightarrow V^{\otimes k}$  を定めれば,  $\varphi_{j,k}$  は有界双線型写像である. 実際,  $\otimes_a$  の双線型性と埋め込み及び  $F_{j,k}^{-1}$  の線型性より  $\varphi_{j,k}$  の双線型性が従い, また

$$\begin{aligned} |\varphi_{j,k}(u, v)|_k &= \alpha_k(F_{j,k}^{-1}(J_j^{-1} u \otimes_a J_{k-j}^{-1} v)) \\ &= \alpha_j(J_j^{-1} u) \alpha_{k-j}(J_{k-j}^{-1} v) \\ &= |u|_j |v|_{k-j} \end{aligned}$$

が任意の  $(u, v) \in J_j V^{\otimes j} \times J_{k-j} V^{\otimes k-j}$  に対して成り立つから  $\|\varphi_{j,k}\|_{L^{(2)}(J_j V^{\otimes j} \times J_{k-j} V^{\otimes k-j}, V^{\otimes k})} = 1$  を得る. 定理.2.1 により  $\varphi_{j,k}$  は或る双線型写像  $\psi_{j,k} : V^{\otimes j} \times V^{\otimes k-j} \longrightarrow V^{\otimes k}$  にノルム保存拡張され,  $\psi_{j,k}$  も

$$|\psi_{j,k}(u, v)|_k = |u|_j |v|_{k-j}, \quad (\forall (u, v) \in V^{\otimes j} \times V^{\otimes k-j})$$

を満たす:

証明.  $(u, v)$  に直積ノルムで収束する点列  $(u_n, v_n) \in J_j V^{\otimes j} \times J_{k-j} V^{\otimes k-j}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) を取れば

$$|\varphi_{j,k}(u_n, v_n) - \psi_{j,k}(u, v)|_k \longrightarrow 0, \quad (k \longrightarrow \infty)$$

が成り立つ. また

$$\begin{aligned} ||u_n|_j |v_n|_{k-j} - |u|_j |v|_{k-j}| &\leq ||u_n|_j |v_n|_{k-j} - |u_n|_j |v|_{k-j}| + ||u_n|_j |v|_{k-j} - |u|_j |v|_{k-j}| \\ &\leq |u_n|_j |v_n - v|_{k-j} + |u_n - u|_j |v|_{k-j} \\ &\longrightarrow 0, \quad (k \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

も成立するから

$$\begin{aligned} ||\psi_{j,k}(u, v)|_k - |u|_j |v|_{k-j}| &\leq |\varphi_{j,k}(u_n, v_n) - \psi_{j,k}(u, v)|_k + ||u_n|_j |v_n|_{k-j} - |u|_j |v|_{k-j}| \\ &\longrightarrow 0, \quad (k \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

が従い  $|\psi_{j,k}(u, v)|_k = |u|_j |v|_{k-j}$  が得られる. ■

$V^{\otimes 0} = \mathbb{R}$  とし  $T(V) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} V^{\otimes k}$  とおく.

ここで

$$(c_i)_{i=0}^{\infty} = (a_i)_{i=0}^{\infty} \otimes (b_i)_{i=0}^{\infty}$$

を

$$c_i = \sum_{j=0}^i a_j \otimes b_{i-j}$$

により定めれば

各テンソル積におけるノルムを  $\|\cdot\|_k$  と表す.

連続かつ有界変動なパス  $x : [0, T] \rightarrow V$  に対して次の積分

$$\int_s^t X_{s,u}^1 \otimes dx_u$$

を定めたい. ただし  $X_{s,t}^1 = x_t - x_s$  ( $(s, t) \in \Delta_T$ ) である. いま, 細分  $D = \{s = u_0 < \cdots < u_n = t\}$ ,  $D' = \{s = v_0 < \cdots < v_m = t\} \in \delta[s, t]$  に対して, 共通細分を  $D'' = \{s = w_0 < w_1 \leq \cdots \leq w_k = t\}$  と表し

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{s,w_k}^1 &:= X_{s,u_i}^1, & (u_i \leq w_k \leq u_{i+1}), \\ \hat{X}_{s,w_k}^1 &:= X_{s,v_j}^1, & (v_j \leq w_k \leq v_{j+1}) \end{aligned}$$

により  $\tilde{X}^1, \hat{X}^1$  を定める. このとき

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_D X_{s,u_{i-1}}^1 \otimes X_{u_{i-1},u_i}^1 - \sum_{D'} X_{s,v_{j-1}}^1 \otimes X_{v_{j-1},v_j}^1 \right\|_{V^{\otimes 2}} \\ &= \left\| \sum_D X_{s,u_{i-1}}^1 \otimes X_{u_{i-1},u_i}^1 - \sum_{D''} X_{s,w_{k-1}}^1 \otimes X_{w_{k-1},w_k}^1 \right\|_{V^{\otimes 2}} \\ & \quad + \left\| \sum_{D'} X_{s,v_{j-1}}^1 \otimes X_{v_{j-1},v_j}^1 - \sum_{D''} X_{s,w_{k-1}}^1 \otimes X_{w_{k-1},w_k}^1 \right\|_{V^{\otimes 2}} \\ &= \left\| \sum_{D''} \tilde{X}_{s,w_{k-1}}^1 \otimes X_{w_{k-1},w_k}^1 - \sum_{D''} X_{s,w_{k-1}}^1 \otimes X_{w_{k-1},w_k}^1 \right\|_{V^{\otimes 2}} \\ & \quad + \left\| \sum_{D''} \hat{X}_{s,w_{k-1}}^1 \otimes X_{w_{k-1},w_k}^1 - \sum_{D''} X_{s,w_{k-1}}^1 \otimes X_{w_{k-1},w_k}^1 \right\|_{V^{\otimes 2}} \\ &= \left\| \sum_{D''} (\tilde{X}_{s,w_{k-1}}^1 - X_{s,w_{k-1}}^1) \otimes X_{w_{k-1},w_k}^1 \right\|_{V^{\otimes 2}} \\ & \quad + \left\| \sum_{D''} (\hat{X}_{s,w_{k-1}}^1 - X_{s,w_{k-1}}^1) \otimes X_{w_{k-1},w_k}^1 \right\|_{V^{\otimes 2}} \\ &\leq \sum_{D''} \|\tilde{X}_{s,w_{k-1}}^1 - X_{s,w_{k-1}}^1\| \|X_{w_{k-1},w_k}^1\| + \sum_{D''} \|\hat{X}_{s,w_{k-1}}^1 - X_{s,w_{k-1}}^1\| \|X_{w_{k-1},w_k}^1\| \\ &\leq \max_k \|\tilde{X}_{s,w_{k-1}}^1 - X_{s,w_{k-1}}^1\| \|X^1\|_{1,[s,t]} + \max_k \|\hat{X}_{s,w_{k-1}}^1 - X_{s,w_{k-1}}^1\| \|X^1\|_{1,[s,t]} \end{aligned}$$

が成立する. いま,  $[s, t] \ni u \mapsto X_{s,u}^1$  は一様連続であるから  $|D|, |D'| \rightarrow 0$  として右辺は 0 に収束する. 従って  $D_n \in \delta[s, t]$  を  $|D_n| \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) を満たす細分列とすれば  $\left( \sum_{D_n} X_{s,u_{i-1}}^1 \otimes X_{u_{i-1},u_i}^1 \right)_{n=1}^{\infty}$

は  $V^{\otimes 2}$  の Cauchy 列となり  $\in V^{\otimes 2}$  で収束する．別の細分列  $(D_m)_{m=1}^{\infty}$  ( $|D_m| \rightarrow 0$ ) を取っても

$$\left\| \sum_{D_n} X_{s,u_{i-1}}^1 \otimes X_{u_{i-1},u_i}^1 - \sum_{D_m} X_{s,v_{j-1}}^1 \otimes X_{v_{j-1},v_j}^1 \right\|_{V^{\otimes 2}} \rightarrow 0, \quad (n, m \rightarrow \infty)$$

が成り立つから極限は細分列に依らず定まり，従って  $\lim_{|D| \rightarrow 0} \sum_D X_{s,u_{i-1}}^1 \otimes X_{u_{i-1},u_i}^1$  が確定する．ここで

$$X_{s,t}^2 = \int_s^t X_{s,u}^1 \otimes dx_u := \lim_{|D| \rightarrow 0} \sum_D X_{s,u_{i-1}}^1 \otimes X_{u_{i-1},u_i}^1$$

と定める．このとき  $\Delta_T \ni (s, t) \mapsto X_{s,t}^2 \in V^{\otimes 2}$  は連続である．

定理 0.3.1.  $\Omega_p(V)$  は次で定める距離

$$d_p(X, Y) := \max_{1 \leq i \leq [p]} \|X^i - Y^i\|_{p/i}$$

により完備距離空間となる．

証明.  $(X^k)_{k=1}^{\infty}$  を Cauchy 列とすれば，任意の  $\epsilon > 0$  に対し或る  $K \in \mathbb{N}$  が存在して

$$\|X^{k,i} - X^{\ell,i}\|_{p/i} < \epsilon, \quad (\forall k, \ell > K, 1 \leq i \leq [p])$$

が成立する．よって定理 (0.1.7) より各  $i$  に対し或る  $X^i \in B_{p/i,T}(V)$  が存在して

$$\|X^{k,i} - X^i\|_{p/i} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty, 1 \leq i \leq [p])$$

を満たす． $X : \Delta_T \rightarrow T^{(n)}(V)$  を

$$X_{s,t} := (1, X_{s,t}^1, \dots, X_{s,t}^n), \quad ((s, t) \in \Delta_T)$$

により定めれば， $X^i$  の連続性より  $X$  も連続である．さらに任意の  $D \in \delta[0, T]$  に対して

$$\begin{aligned} \sum_D \|X_{t_{i-1},t_i}^k - X_{t_{i-1},t_i}\|^p &= \sum_D (\|X_{t_{i-1},t_i}^{k,1} - X_{t_{i-1},t_i}^1\| + \dots + \|X_{t_{i-1},t_i}^{k,n} - X_{t_{i-1},t_i}^n\|)^p \\ &\leq (n+1)^p \sum_D (\|X_{t_{i-1},t_i}^{k,1} - X_{t_{i-1},t_i}^1\|^p + \dots + \|X_{t_{i-1},t_i}^{k,n} - X_{t_{i-1},t_i}^n\|^p) \\ &\leq (n+1)^p (\|X_{t_{i-1},t_i}^{k,1} - X_{t_{i-1},t_i}^1\|_p^p + \dots + \|X_{t_{i-1},t_i}^{k,n} - X_{t_{i-1},t_i}^n\|_p^p) \end{aligned}$$

が成立するから，定理より

$$\sup_D \sum_D \|X_{t_{i-1},t_i}^k - X_{t_{i-1},t_i}\|^p \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

が従い  $X$  の  $p$ -variation の有界性が出る．

■

## .1 ノルム空間の完備拡大

## .2 多重線型写像

定理 .2.1 (多重線型写像の一意拡張).  $(X_i)_{i=1}^n$  をノルム空間,  $Z$  を Banach 空間,  $Y_i$  を  $X_i$  の稠密な部分空間とする ( $i = 1, \dots, n$ ). このとき, 有界  $n$  重線型写像  $b: \bigoplus_{i=1}^n Y_i \rightarrow Z$  は  $(X_i)_{i=1}^n$  上の  $Z$  値  $n$  重線型写像  $\tilde{b}$  に一意に拡張され,  $b$  と  $\tilde{b}$  の作用素ノルムは一致する.

証明.  $\bigoplus_{i=1}^n Y_i$  は  $\bigoplus_{i=1}^n X_i$  で稠密であるから, 任意の  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \bigoplus_{i=1}^n X_i$  に対して

$$\|x - x^k\|_{\bigoplus_{i=1}^n X_i} = \sum_{i=1}^n \|x_i - x_i^k\|_{X_i} \rightarrow 0, \quad (k \rightarrow \infty)$$

を満たす点列  $x^k = (x_1^k, \dots, x_n^k) \in \bigoplus_{i=1}^n Y_i$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) が存在する.

$$M_i := \sup_{k \geq 1} \|x_i^k\|_{X_i}, \quad (i = 1, \dots, n)$$

とおけば,  $M_i < \infty$  ( $i = 1, \dots, n$ ) より

$$\begin{aligned} \|b(x^k) - b(x^\ell)\|_Z &= \|b(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k) - b(x_1^\ell, x_2^\ell, \dots, x_n^\ell) \\ &\quad + b(x_1^\ell, x_2^k, \dots, x_n^k) - b(x_1^\ell, x_2^\ell, \dots, x_n^k) \\ &\quad \dots \\ &\quad + b(x_1^\ell, \dots, x_{n-1}^\ell, x_n^k) - b(x_1^\ell, \dots, x_{n-1}^\ell, x_n^\ell)\|_Z \\ &\leq \|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n Y_i, Z)} \|x_1^k - x_1^\ell\|_{X_1} M_2 \cdots M_n \\ &\quad + \|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n Y_i, Z)} M_1 \|x_2^k - x_2^\ell\|_{X_2} M_3 \cdots M_n \\ &\quad \dots \\ &\quad + \|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n Y_i, Z)} M_1 \cdots M_{n-1} \|x_n^k - x_n^\ell\|_{X_n} \\ &\rightarrow 0, \quad (k, \ell \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

が成り立ち,  $Z$  の完備性より  $\lim_{k \rightarrow \infty} b(x^k)$  が存在する. 別の収束列  $\bigoplus_{i=1}^n Y_i \ni y^m \rightarrow x$  を取れば

$$\|x_i^k - y_i^m\|_{X_i} \leq \|x_i^k - x_i\|_{X_i} + \|x_i - y_i^m\|_{X_i} \rightarrow 0, \quad (k, m \rightarrow \infty, i = 1, \dots, n)$$

より  $\|b(x^k) - b(y^m)\|_Z \rightarrow 0$  ( $k, m \rightarrow \infty$ ) が従い

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b(x^k) = \lim_{m \rightarrow \infty} b(y^m)$$

が得られ, これにより写像  $\tilde{b}: x \mapsto \lim_{k \rightarrow \infty} b(x^k)$  が定まる. この  $\tilde{b}$  は  $b$  の拡張であり, 有界かつ  $n$  重線型性を持つ. 先ず  $n$  重線型性を示す.  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  と  $y = (y_1, x_2, \dots, x_n)$  に対し

$$\|x - x^k\|_{\bigoplus_{i=1}^n X_i} \rightarrow 0, \quad \|y - y^k\|_{\bigoplus_{i=1}^n X_i} \rightarrow 0$$

を満たす点列  $(x^k)_{k=1}^\infty, (y^k)_{k=1}^\infty \subset \bigoplus_{i=1}^n Y_i$  を取れば

$$\begin{aligned} & \left\| \tilde{b}(\alpha x_1 + \beta y_1, x_2, \dots, x_n) - \alpha \tilde{b}(x_1, \dots, x_n) - \beta \tilde{b}(y_1, \dots, x_n) \right\|_Z \\ & \leq \left\| \tilde{b}(\alpha x_1 + \beta y_1, x_2, \dots, x_n) - b(\alpha x_1^k + \beta y_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k) \right\|_Z \\ & \quad + |\alpha| \left\| \tilde{b}(x_1, \dots, x_n) - b(x_1^k, \dots, x_n^k) \right\|_Z \\ & \quad + |\beta| \left\| \tilde{b}(y_1, \dots, x_n) - b(y_1^k, \dots, x_n^k) \right\|_Z \\ & \longrightarrow 0, \quad (k \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

が成り立ち,  $\tilde{b}$  の第一成分に関する線型性を得る. 他の成分も同じである. また任意の  $x \in \bigoplus_{i=1}^\infty X_i$  に対して収束列  $(x^k)_{k=1}^\infty \subset \bigoplus_{i=1}^n Y_i$  を取れば, 任意の  $\epsilon > 0$  に対し或る  $k$  が存在して

$$\left\| \tilde{b}(x) \right\|_Z \leq \left\| b(x^k) \right\|_Z + \epsilon$$

かつ

$$\left\| x_i^k \right\|_{X_i} \leq \left\| x_i \right\|_{X_i} + \epsilon, \quad (i = 1, \dots, n)$$

が満たされ

$$\left\| \tilde{b}(x) \right\|_Z \leq \left\| b(x^k) \right\|_Z + \epsilon \leq \|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n Y_i, Z)} \prod_{i=1}^n (\|x_i\|_{X_i} + \epsilon) + \epsilon$$

が従う.  $x$  及び  $\epsilon$  の任意性より  $\left\| \tilde{b} \right\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Z)} \leq \|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n Y_i, Z)}$  が成り立ち,  $\tilde{b}$  は  $b$  の拡張だから

$$\left\| \tilde{b} \right\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Z)} = \|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n Y_i, Z)}$$

が出る. 拡張の一意性は  $\bigoplus_{i=1}^n Y_i$  の稠密性と  $\tilde{b}$  の連続性による. ■

### .3 notation

以下, 零元のみ線型空間は考えない.  $E, E_i, F$  を体  $\mathbb{K}$  上の線形空間とすると,  $\text{Hom}(E, F)$  で  $E$  から  $F$  への  $\mathbb{K}$ -線型写像の全体を表し, 特に  $F = \mathbb{K}$  のとき  $E^\#$  と書く. また  $\text{Hom}^{(n)}(E_1 \times \dots \times E_n, F)$  で  $E_1 \times \dots \times E_n$  から  $F$  への  $\mathbb{K}$ - $n$  重線型写像の全体を表す. また  $X$  をノルム空間と考えるときはノルムを  $\|\cdot\|_X$  と書く. ノルム空間  $(X_i, \|\cdot\|_{X_i})_{i=1}^n$  の直積  $\bigoplus_{i=1}^n X_i$  には直積ノルム  $\|\cdot\|_{X_1} + \dots + \|\cdot\|_{X_n}$  により位相を導入する.

### .4 テンソル積

$n \geq 2$  として, 体  $\mathbb{K}$  上の線形空間の族  $(E_i)_{i=1}^n$  に対してテンソル積を定義する.

$$\Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right) = \left\{ b : \bigoplus_{i=1}^n E_i \longrightarrow \mathbb{K}; \quad \text{有限個の } e \in \bigoplus_{i=1}^n E_i \text{ を除いて } b(e) = 0. \right\}$$

により  $\mathbb{K}$ -線形空間  $\Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right)$  を定める. また  $e = (e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i$  に対する定義関数を

$$\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_n}(x) = \begin{cases} 1, & x = e, \\ 0, & x \neq e \end{cases}$$



で表す.  $\Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right)$  の線型部分空間を

$$\begin{aligned} \Lambda_0\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right) \\ := \text{Span}\left[\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i + e'_i, \dots, e_n} - \mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n} - \mathbb{1}_{e_1, \dots, e'_i, \dots, e_n}, \\ \mathbb{1}_{e_1, \dots, \lambda e_i, \dots, e_n} - \lambda \mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n} \end{array} ; \quad e_i, e'_i \in E_i, \lambda \in \mathbb{K}, 1 \leq i \leq n \right\}\right] \end{aligned}$$

により定め,  $b \in \Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right)$  の  $\Lambda_0\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right)$  に関する同値類を  $[b]$  と書く. そして

$$E_1 \otimes \cdots \otimes E_n = \bigotimes_{i=1}^n E_i := \Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right) / \Lambda_0\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right)$$

で定める商空間を  $(E_i)_{i=1}^n$  のテンソル積と定義する. また  $(e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i$  に対し

$$e_1 \otimes \cdots \otimes e_n := [\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_n}]$$

により定める  $\otimes : \bigoplus_{i=1}^n E_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n E_i$  をテンソル積の標準写像と呼ぶ.

**定理 .4.1 (標準写像の多重線型性).**  $(E_i)_{i=1}^n$  を  $\mathbb{K}$ -線形空間の族とするととき,

$$\otimes : \bigoplus_{i=1}^n E_i \ni (e_1, \dots, e_n) \longmapsto e_1 \otimes \cdots \otimes e_n \in \bigotimes_{i=1}^n E_i$$

は  $n$  重線型写像である. また次が成り立つ:

$$\bigotimes_{i=1}^n E_i = \text{Span}\left[\left\{ e_1 \otimes \cdots \otimes e_n ; \quad (e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i \right\}\right]. \quad (12)$$

**証明.** 任意の  $1 \leq i \leq n$ ,  $e_1 \in E_1, \dots, e_n \in E_n$ ,  $e_i, e'_i \in E_i$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$  に対して

$$\begin{aligned} e_1 \otimes \cdots \otimes (e_i + e'_i) \otimes \cdots \otimes e_n &= [\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i + e'_i, \dots, e_n}] \\ &= [\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n} + \mathbb{1}_{e_1, \dots, e'_i, \dots, e_n}] \\ &= [\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n}] + [\mathbb{1}_{e_1, \dots, e'_i, \dots, e_n}] \\ &= e_1 \otimes \cdots \otimes e_i \otimes \cdots \otimes e_n + e_1 \otimes \cdots \otimes e'_i \otimes \cdots \otimes e_n, \\ e_1 \otimes \cdots \otimes (\lambda e_i) \otimes \cdots \otimes e_n &= [\mathbb{1}_{e_1, \dots, \lambda e_i, \dots, e_n}] \\ &= [\lambda \mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n}] \\ &= \lambda [\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n}] \\ &= \lambda (e_1 \otimes \cdots \otimes e_i \otimes \cdots \otimes e_n) \end{aligned}$$

が成立するから  $\otimes$  は多重線型である. また任意に  $u = [b] \in E \otimes F$  を取れば

$$b = \sum_{j=1}^m k_j \mathbb{1}_{e_i^j, \dots, e_n^j}, \quad (k_j = b(e_i^j, \dots, e_n^j), j = 1, \dots, m)$$

と表せるから,

$$u = \left[ \sum_{j=1}^m k_j \mathbb{1}_{e_i^j, \dots, e_n^j} \right] = \left[ \sum_{j=1}^m \mathbb{1}_{k_j e_i^j, \dots, e_n^j} \right] = \sum_{j=1}^m (k_j e_1^j) \otimes \cdots \otimes e_n^j$$

が従い (12) を得る. ■

定理 .4.2 ( $\cdots \otimes 0 \otimes \cdots$  は零ベクトル).  $(E_i)_{i=1}^n$  を  $\mathbb{K}$ -線形空間の族とし, テンソル積  $\bigotimes_{i=1}^n E_i$  を定める. このとき, 或る  $i$  で  $e_i = 0$  なら  $e_1 \otimes \cdots \otimes e_n = 0$  が成り立つ.

証明.  $e_i = 0$  のとき,  $\lambda = 0$  とすれば

$$e_1 \otimes \cdots \otimes e_n = [\mathbb{1}_{e_1, \dots, 0, \dots, e_n}] = [\mathbb{1}_{e_1, \dots, \lambda e_i, \dots, e_n} - \lambda \mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n}] = 0$$

が成立する. ■

定理 .4.3 (普遍性 (universality of tensor products)).  $(E_i)_{i=1}^n$  を  $\mathbb{K}$ -線形空間の族とする. このとき任意の  $\mathbb{K}$ -線型空間  $V$  に対して,  $T \in \text{Hom}(\bigotimes_{i=1}^n E_i, V)$  ならば  $T \circ \otimes \in \text{Hom}^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V)$  が満たされ, これで定める次の対応  $\Phi$  は線型同型である:

$$\begin{array}{ccc} \Phi : \text{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n E_i, V\right) & \longrightarrow & \text{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right) \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ T & \longmapsto & T \circ \otimes \end{array} \quad (13)$$

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=1}^n E_i & & \\ \downarrow \otimes & \searrow \Phi(T) & \\ \bigotimes_{i=1}^n E_i & \xrightarrow{T} & V \end{array} \quad \begin{array}{c} \cup \\ \circlearrowright \end{array}$$

また  $\mathbb{K}$ -線型空間  $U_0$  と多重線型写像  $\iota : \bigoplus_{i=1}^n E_i \rightarrow U_0$  が, 任意の  $\mathbb{K}$ -線型空間  $V$  に対し

- ( $\otimes$ )<sub>1</sub>  $U_0$  は  $\iota$  の像で生成される.
- ( $\otimes$ )<sub>2</sub> 任意の  $\delta \in \text{Hom}^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V)$  に対して或る  $\tau \in \text{Hom}(U_0, V)$  が  $\delta = \tau \circ \iota$  を満たす.

を満たすなら, (13) において  $V = U_0$  とするとき  $T = \Phi^{-1}(\iota)$  は線型同型である.

後半の主張により,  $(E_i)_i$  のテンソル積を別の方法で導入しても, 商空間を用いて導入した  $\bigotimes_i E_i$  と線型同型に結ばれる. このとき, 別の方法で導入したテンソル積及び標準写像を  $\bigotimes_i \tilde{E}_i$ ,  $\tilde{\otimes}$  と表せば, 或る線型同型  $T : \bigotimes_i E_i \rightarrow \bigotimes_i \tilde{E}_i$  がただ一つ存在して

$$T(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) = e_1 \tilde{\otimes} \cdots \tilde{\otimes} e_n$$

を満たす. 特に任意の並べ替え  $\varphi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  に対し

$$\begin{array}{ccc} \bigotimes_{i=1}^n E_i & \cong & \bigotimes_{i=1}^n E_{\varphi(i)} \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ e_1 \otimes \cdots \otimes e_n & \longleftrightarrow & e_{\varphi(1)} \otimes \cdots \otimes e_{\varphi(n)} \end{array}$$

が成立する.

証明.

第一段  $T \in \text{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n E_i, V\right)$  の線型性と  $\otimes$  の多重線型性より  $T \circ \otimes$  は多重線型である.

第二段  $\Phi(T_1) = \Phi(T_2)$  ならば  $T_1$  と  $T_2$  は  $\left\{ e_1 \otimes \cdots \otimes e_n ; (e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i \right\}$  の上で一致する. (12) より  $T_1 = T_2$  が成立し  $\Phi$  の単射性が従う.

第三段 次の二段で  $\Phi$  の全射性を示す. まず,  $\varphi \in \text{Hom}\left(\Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right), V\right)$  に対し

$$g : \bigoplus_{i=1}^n E_i \ni (e_1, \dots, e_n) \mapsto \varphi(\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_n}) \in V$$

を対応させる次の写像が全単射であることを示す:

$$\begin{array}{ccc} F : \text{Hom}\left(\Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right), V\right) & \longrightarrow & \text{Map}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right) \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ \varphi & \longmapsto & g \end{array}$$

$F(\varphi_1) = F(\varphi_2)$  のとき, 任意の  $e \in \bigoplus_{i=1}^n E_i$  に対して  $\varphi_1(\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_n}) = \varphi_2(\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_n})$  が成り立ち,

$$\Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right) = \text{Span}\left[\left\{ \mathbb{1}_{e_1, \dots, e_n} ; (e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i \right\}\right]$$

であるから  $\varphi_1 = \varphi_2$  が従い  $F$  の単射性を得る. また  $g \in \text{Map}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$  に対して

$$\varphi(a) := \sum_{\substack{e \in \bigoplus_{i=1}^n E_i \\ a(e) \neq 0}} a(e)g(e), \quad (a \in \Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right))$$

により  $\varphi$  を定めれば,  $\varphi \in \text{Hom}\left(\Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right), V\right)$  が満たされ  $F$  の全射性が従う.

第四段 任意に  $b \in \text{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$  を取り  $h := F^{-1}(b)$  とおけば,  $h$  の線型性より

$$\begin{aligned} & b(e_1, \dots, e_i + e'_i, \dots, e_n) - b(e_1, \dots, e_i, \dots, e_n) - b(e_1, \dots, e'_i, \dots, e_n) \\ &= h(\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i + e'_i, \dots, e_n} - \mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n} - \mathbb{1}_{e_1, \dots, e'_i, \dots, e_n}), \\ & b(e_1, \dots, \lambda e_i, \dots, e_n) - \lambda b(e_1, \dots, e_i, \dots, e_n) \\ &= h(\mathbb{1}_{e_1, \dots, \lambda e_i, \dots, e_n} - \lambda \mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n}) \end{aligned}$$

が成り立ち,  $b$  の双線型性により  $h$  は  $\Lambda_0\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right)$  上で 0 である. 従って

$$T([b]) := h(b), \quad (b \in \Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right))$$

で定める  $T$  は well-defined であり,  $T \in \text{Hom}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$  かつ

$$b(e_1, \dots, e_n) = h(\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_n}) = (T \circ \otimes)(e_1, \dots, e_n), \quad (\forall (e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i)$$

が満たされ  $\Phi$  の全射性が得られる.

第五段  $(\otimes)_1, (\otimes)_2$  の下で  $\text{Hom}\left(U_0, \bigotimes_{i=1}^n E_i\right) \ni \tau \mapsto \tau \circ \iota \in \text{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, \bigotimes_{i=1}^n E_i\right)$  は全単射であるから,  $\tau \circ \iota = \otimes$  を満たす  $\tau \in \text{Hom}\left(U_0, \bigotimes_{i=1}^n E_i\right)$  がただ一つ存在する. 同様にして  $\iota = T \circ \otimes$  を満たす  $T \in \text{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n E_i, U_0\right)$  がただ一つ存在し, 併せれば

$$\otimes = \tau \circ \iota = (\tau \circ T) \circ \otimes, \quad \iota = T \circ \otimes = (T \circ \tau) \circ \iota$$

が成り立ち,  $T \mapsto T \circ \otimes, \tau \mapsto \tau \circ \iota$  が一対一であるから  $\tau \circ T, T \circ \tau$  はそれぞれ恒等写像に一致して  $T^{-1} = \tau$  が従う. すなわち  $T$  は  $\bigotimes_{i=1}^n E_i$  から  $U_0$  への線型同型である. ■

**定理 .4.4 (スカラーとのテンソル積).**  $E$  を  $\mathbb{K}$ -線型空間とすると,  $\mathbb{K} \otimes E$  と  $E$  は  $f(\alpha \otimes e) = \alpha e$  を満たす線型写像  $f: \mathbb{K} \otimes E \rightarrow E$  により同型となる.

**証明.** スカラ倍  $\iota: (\alpha, e) \mapsto \alpha e$  は双線型である. また定理.4.3 の  $(\otimes)_1, (\otimes)_2$  について,

$$E = \text{Span} [\{ \alpha e ; \quad \alpha \in \mathbb{K}, e \in E \}]$$

より  $(\otimes)_1$  が得られ, かつ任意の双線型写像  $\delta: \mathbb{K} \times E \rightarrow V$  に対し

$$f(e) := \delta(1, e), \quad (\forall e \in E)$$

で線型写像  $f: E \rightarrow V$  を定めれば,

$$f \circ \iota(\alpha, e) = f(\alpha e) = \delta(1, \alpha e) = \alpha \delta(1, e) = \delta(\alpha, e)$$

が成り立つから  $(\otimes)_2$  が満たされる. ■

**定義 .4.5 (線型写像のテンソル積).**  $(E_i)_{i=1}^n$  と  $(F_i)_{i=1}^n$  を  $\mathbb{K}$ -線型空間の族とする.  $f_i: E_i \rightarrow F_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) が線型写像であるとき,

$$b: \bigoplus_{i=1}^n E_i \ni (e_1, \dots, e_n) \mapsto f_1(e_1) \otimes \dots \otimes f_n(e_n) \in \bigotimes_{i=1}^n F_i$$

により定める  $b$  は  $n$  重線型であり, 定理.4.3 より  $b = g \circ \otimes$  を満たす  $g: \bigotimes_{i=1}^n E_i \rightarrow \bigotimes_{i=1}^n F_i$  がただ一つ存在する.  $g$  を  $f_1 \otimes \dots \otimes f_n$  と表記して線型写像のテンソル積と定義する. いま,

$$f_1 \otimes \dots \otimes f_n(e_1 \otimes \dots \otimes e_n) = f_1(e_1) \otimes \dots \otimes f_n(e_n), \quad (\forall (e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i)$$

が成り立つ.  $F_i = \mathbb{K}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) の場合は  $\otimes$  を  $\mathbb{K}$  の乗法と考える ( $\bigotimes_{i=1}^n F_i = \mathbb{K}$ ).

**定理 .4.6 (零写像のテンソル積は零写像).**  $\mathbb{K}$ -線型空間の族  $(E_i)_{i=1}^n$  と  $(F_i)_{i=1}^n$  と線型写像  $f_i: E_i \rightarrow F_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) について, 或る  $f_i$  が零写像なら  $f_1 \otimes \dots \otimes f_n = 0$  となる.

**証明.**  $f_i = 0$  とすると, 定理.4.2 より  $f_1 \otimes \dots \otimes f_n$  は  $\{ e_1 \otimes \dots \otimes e_n ; \quad e_i \in E_i \}$  上で 0 となる. この空間は  $\bigotimes_{i=1}^n E_i$  を生成するから  $f_1 \otimes \dots \otimes f_n = 0$  が従う. ■

定理 .4.7 (テンソル積の基底).  $(E_i)_{i=1}^n$  を  $\mathbb{K}$ -線型空間の族とし,  $E_i$  の基底を  $(u_{\lambda_i}^i)_{\lambda_i \in \Lambda_i}$  とする ( $i = 1, \dots, n$ ). このとき  $(u_{\lambda_1}^1 \otimes \dots \otimes u_{\lambda_n}^n)_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$  は  $\bigotimes_{i=1}^n E_i$  の基底となる.

証明.

第一段 各  $u_{\lambda_i}^i$  の生成する一次元空間を  $W_{\lambda_i}^i := \mathbb{K}u_{\lambda_i}^i$  と表し

$$V_i := \bigoplus_{\lambda_i \in \Lambda_i} W_{\lambda_i}^i, \quad (i = 1, \dots, n)$$

とおく.  $(u_{\lambda_i}^i)_{\lambda_i \in \Lambda_i}$  は  $E_i$  の基底であるから, 任意の  $e_i \in E_i$  に対し  $v_i \in V_i$  がただ一つ定まり,

$$f_i : E_i \ni e_i \mapsto v_i \in V_i$$

により定める線型写像  $f_i$  は同型写像である. このとき, 写像のテンソル積

$$f_1 \otimes \dots \otimes f_n : \bigotimes_{i=1}^n E_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n V_i$$

は線型同型となる. 実際,  $f_i$  の逆写像  $f_i^{-1}$  のテンソル積

$$f_1^{-1} \otimes \dots \otimes f_n^{-1} : \bigotimes_{i=1}^n V_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n E_i$$

によって, 全ての  $(e_1 \otimes \dots \otimes e_n) \in \bigotimes_{i=1}^n E_i$  及び  $(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) \in \bigotimes_{i=1}^n V_i$  に対し

$$\begin{aligned} & f_1^{-1} \otimes \dots \otimes f_n^{-1} \circ f_1 \otimes \dots \otimes f_n (e_1 \otimes \dots \otimes e_n) \\ &= f_1^{-1} \otimes \dots \otimes f_n^{-1} (f_1(e_1) \otimes \dots \otimes f_n(e_n)) = (e_1 \otimes \dots \otimes e_n), \\ & f_1 \otimes \dots \otimes f_n \circ f_1^{-1} \otimes \dots \otimes f_n^{-1} (v_1 \otimes \dots \otimes v_n) \\ &= f_1 \otimes \dots \otimes f_n (f_1^{-1}(v_1) \otimes \dots \otimes f_n^{-1}(v_n)) = (v_1 \otimes \dots \otimes v_n) \end{aligned}$$

が成立し, それぞれ  $\bigotimes_{i=1}^n E_i$  と  $\bigotimes_{i=1}^n V_i$  を生成するから

$$(f_1 \otimes \dots \otimes f_n)^{-1} = f_1^{-1} \otimes \dots \otimes f_n^{-1}$$

の関係を得る.

第二段  $\bigotimes_{i=1}^n V_i$  と  $\bigoplus_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} W_{\lambda_1}^1 \otimes \dots \otimes W_{\lambda_n}^n$  が線型同型であることを示す. 先ず

$$g : \sum_j (v_1^j \otimes \dots \otimes v_n^j) \mapsto \sum_j (v_1^j(\lambda_1) \otimes \dots \otimes v_n^j(\lambda_n))_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$$

により線型写像  $g : \bigotimes_{i=1}^n V_i \longrightarrow \bigoplus_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} W_{\lambda_1}^1 \otimes \dots \otimes W_{\lambda_n}^n$  を定める. また

$$\iota_{\lambda_i} : W_{\lambda_i}^i \longrightarrow V_i, \quad (\lambda_i \in \Lambda_i, i = 1, \dots, n)$$

を次の標準単射として定める:

$$\iota_{\lambda_i}(u)(\lambda) = \begin{cases} u, & (\lambda = \lambda_i), \\ 0, & (\lambda \neq \lambda_i), \end{cases} \quad (\lambda \in \Lambda_i, u \in W_{\lambda_i}^i).$$

$\iota_{\lambda_i}$  は線型であるから  $\iota_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \iota_{\lambda_n} : W_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes W_{\lambda_n}^n \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n V_i$  を定義出来て,

$$h : w \longmapsto \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} \iota_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \iota_{\lambda_n} (w(\lambda_1, \dots, \lambda_n))$$

により線型写像  $h : W_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes W_{\lambda_n}^n \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n V_i$  が定めれば  $g^{-1} = h$  が成り立つ. 実際,

$$\begin{aligned} g \circ h(w) &= g \left( \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} \iota_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \iota_{\lambda_n} (w(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) \right) \\ &= \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} g(\iota_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \iota_{\lambda_n} (w(\lambda_1, \dots, \lambda_n))) \\ &= w \end{aligned}$$

が任意の  $w \in \bigoplus_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} W_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes W_{\lambda_n}^n$  に対して成立し, かつ任意の  $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$  に対し

$$\begin{aligned} h \circ g(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) &= \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} \iota_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \iota_{\lambda_n} (v_1(\lambda_1) \otimes \cdots \otimes v_n(\lambda_n)) \\ &= \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} \iota_{\lambda_1}(v_1(\lambda_1)) \otimes \cdots \otimes \iota_{\lambda_n}(v_n(\lambda_n)) \\ &= \left( \sum_{\lambda_1 \in \Lambda_1} \iota_{\lambda_1}(v_1(\lambda_1)) \right) \otimes \cdots \otimes \left( \sum_{\lambda_n \in \Lambda_n} \iota_{\lambda_n}(v_n(\lambda_n)) \right) \\ &= v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \end{aligned}$$

が成り立つから  $g^{-1} = h$  が従う. よって  $g$  は線型同型である.

第三段 いま,  $g \circ f_1 \otimes \cdots \otimes f_n$  によって  $\bigotimes_{i=1}^n E_i$  と  $\bigoplus_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} W_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes W_{\lambda_n}^n$  は同型に対応し,

$$w_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}(v_1, \dots, v_n) := \begin{cases} u_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes u_{\lambda_n}^n, & (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (v_1, \dots, v_n), \\ 0, & (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (v_1, \dots, v_n) \end{cases}$$

として  $w_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$  を定めれば

$$u_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes u_{\lambda_n}^n \xrightarrow{g \circ f_1 \otimes \cdots \otimes f_n} w_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$$

が成り立つ.  $(w_{\lambda_1, \dots, \lambda_n})$  の一次独立性から  $(u_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes u_{\lambda_n}^n)_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$  の一次独立性が従う.

定理 .4.8 (結合律).  $(E_i)_{i=1}^n$  を  $\mathbb{K}$ -線型空間の族とし,  $k \in \{1, \dots, n-1\}$  を任意に取る. このとき, 次の対応関係を満たす  $F$  は線型同型である:

$$\begin{array}{ccc} F : \bigotimes_{i=1}^n E_i & \longrightarrow & \left( \bigotimes_{i=1}^k E_i \right) \otimes \left( \bigotimes_{i=k+1}^n E_i \right) \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ e_1 \otimes \cdots \otimes e_n & \longmapsto & (e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n) \end{array}$$

証明.

第一段  $n$  重線型写像  $f : \bigoplus_{i=1}^n E_i \longrightarrow \left( \bigotimes_{i=1}^k E_i \right) \otimes \left( \bigotimes_{i=k+1}^n E_i \right)$  を

$$f(e_1, \dots, e_n) = (e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n), \quad (\forall (e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i)$$

により定めれば, 定理.4.3 より

$$F : (e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) \mapsto (e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n)$$

を満たす線型写像  $F : \bigotimes_{i=1}^n E_i \longrightarrow \left( \bigotimes_{i=1}^k E_i \right) \otimes \left( \bigotimes_{i=k+1}^n E_i \right)$  が存在する:

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=1}^n E_i & & \\ \downarrow \otimes & \searrow f & \\ \bigotimes_{i=1}^n E_i & \xrightarrow{F} & \left( \bigotimes_{i=1}^k E_i \right) \otimes \left( \bigotimes_{i=k+1}^n E_i \right) \end{array}$$

以降は  $F$  の逆写像を構成し  $F$  が全単射であることを示す.

第二段  $u_{k+1} \in E_{k+1}, \dots, u_n \in E_n$  を固定し

$$\Phi_{u_{k+1}, \dots, u_n}(e_1, \dots, e_n) := e_1 \otimes \cdots \otimes e_k \otimes u_{k+1} \otimes \cdots \otimes u_n$$

によって  $n$  重線型  $\Phi_{u_{k+1}, \dots, u_n} : \bigoplus_{i=1}^k E_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n E_i$  を定めれば, 定理.4.3 より

$$G_{u_{k+1}, \dots, u_n}(e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) = e_1 \otimes \cdots \otimes e_k \otimes u_{k+1} \otimes \cdots \otimes u_n$$

を満たす線型写像  $G_{u_{k+1}, \dots, u_n} : \bigotimes_{i=1}^k E_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n E_i$  が存在する.

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=1}^k E_i & & \\ \downarrow \otimes & \searrow \Phi_{u_{k+1}, \dots, u_n} & \\ \bigotimes_{i=1}^k E_i & \xrightarrow{G_{u_{k+1}, \dots, u_n}} & \bigotimes_{i=1}^n E_i \end{array}$$

第三段 任意の  $v \in \bigotimes_{i=1}^k E_i$  に対して

$$\Psi_v : \bigoplus_{i=k+1}^n E_i \ni (u_{k+1}, \dots, u_n) \mapsto G_{u_{k+1}, \dots, u_n}(v)$$

を定めれば,  $\Psi_v$  は  $n$  重線型であるから, 定理.4.3 より

$$H_v(u_{k+1} \otimes \cdots \otimes u_n) = \Psi_v(u_{k+1}, \dots, u_n)$$

を満たす線型写像  $H_v : \bigotimes_{i=k+1}^n E_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n E_i$  が存在する.

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=k+1}^n E_i & & \\ \downarrow \otimes & \searrow \Psi_v & \\ \bigotimes_{i=k+1}^n E_i & \xrightarrow{H_v} & \bigotimes_{i=1}^n E_i \end{array}$$

いま,  $v \mapsto \Psi_v$  は線型であり, かつ  $\Psi_v$  と  $H_v$  は線型同型で結ばれているから  $v \mapsto H_v$  の線型性が従う.

第四段  $H_v$  の線型性と  $v \mapsto H_v$  の線型性より

$$\Gamma : \left( \bigotimes_{i=1}^k E_i \right) \times \left( \bigotimes_{i=k+1}^n E_i \right) \ni (v, w) \mapsto H_v(w)$$

により定める  $\Gamma$  は

$$\begin{aligned}
\Gamma(e_1 \otimes \cdots \otimes e_k, e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n) &= H_{e_1 \otimes \cdots \otimes e_k}(e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n) \\
&= \Psi_{e_1 \otimes \cdots \otimes e_k}(e_{k+1}, \dots, e_n) \\
&= G_{e_{k+1}, \dots, e_n}(e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \\
&= \Phi_{e_{k+1}, \dots, e_n}(e_1, \dots, e_k) \\
&= e_1 \otimes \cdots \otimes e_n
\end{aligned} \tag{14}$$

を満たす双線型であり, 定理.4.3 より

$$\begin{array}{ccc}
\left(\bigotimes_{i=1}^k E_i\right) \times \left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i\right) & & \\
\downarrow \otimes & \searrow \Gamma & \\
\left(\bigotimes_{i=1}^k E_i\right) \otimes \left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i\right) & \xrightarrow{G} & \bigotimes_{i=1}^n E_i
\end{array}$$

を可換にする線型写像  $G$  が存在する. この  $G$  は  $F$  の逆写像である. 実際, (14) より

$$\begin{aligned}
F \circ G((e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n)) &= F(\Gamma(e_1 \otimes \cdots \otimes e_k, e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n)) \\
&= F(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) \\
&= (e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n)
\end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned}
G \circ F(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) &= G((e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n)) \\
&= \Gamma(e_1 \otimes \cdots \otimes e_k, e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n) \\
&= e_1 \otimes \cdots \otimes e_n
\end{aligned}$$

が得られ  $F^{-1} = G$  が従う. ■

## .5 テンソル積の内積

## .6 クロスノルム

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$  または  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  と考える. 以下では  $n(\geq 2)$  個の Banach 空間で構成するテンソル積におけるクロスノルムを考察する.

**定義 .6.1 (クロスノルム).**  $\mathbb{K}$ -Banach 空間の族  $(X_i)_{i=1}^n$  のテンソル積  $\bigotimes_{i=1}^n X_i$  において

$$\alpha(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \leq \|x_1\|_{X_1} \|x_2\|_{X_2} \cdots \|x_n\|_{X_n}, \quad (x_i \in X_i, i = 1, \dots, n), \tag{15}$$

$$\sup_{\substack{v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i \\ v \neq 0}} |x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v)| \leq \|x_1^*\|_{X_1^*} \|x_2^*\|_{X_2^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*} \alpha(v), \quad (x_i^* \in X_i^*, i = 1, \dots, n) \tag{16}$$

を満たすようなノルム  $\alpha : \bigotimes_{i=1}^n X_i \rightarrow [0, \infty)$  をクロスノルム (cross norm) と呼ぶ.



定理 .6.2.  $\mathbb{K}$ -Banach 空間の族  $(X_i)_{i=1}^n$  に対するテンソル積  $\bigotimes_{i=1}^n X_i$  上のクロスノルム  $\alpha$  は次を満たす:

$$\begin{aligned}\alpha(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) &= \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}, & (x_i \in X_i, i = 1, \dots, n), \\ \|x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*\|_{(\bigotimes_{i=1}^n X_i, \alpha)^*} &= \|x_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*}, & (x_i^* \in X_i^*, i = 1, \dots, n).\end{aligned}$$

証明. 先ず, Hahn-Banach の定理と式 (16) より

$$\begin{aligned}\|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n} &= \sup_{\|x_1^*\|_{X_1^*} \leq 1} |\langle x_1, x_1^* \rangle| \cdots \sup_{\|x_n^*\|_{X_n^*} \leq 1} |\langle x_n, x_n^* \rangle| \\ &= \sup_{\substack{\|x_i^*\|_{X_i^*} \leq 1 \\ i=1, \dots, n}} |x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)| \\ &\leq \sup_{\substack{\|x_i^*\|_{X_i^*} \leq 1 \\ i=1, \dots, n}} \|x_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*} \alpha(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \\ &= \alpha(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)\end{aligned}$$

が成り立ち定理の主張の第一式を得る. またこの結果より

$$\begin{aligned}\|x_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*} &= \sup_{\|x_1\|_{X_1} \leq 1} |\langle x_1, x_1^* \rangle| \cdots \sup_{\|x_n\|_{X_n} \leq 1} |\langle x_n, x_n^* \rangle| \\ &= \sup_{\substack{\|x_i\|_{X_i} \leq 1 \\ i=1, \dots, n}} |x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)| \\ &\leq \sup_{\alpha(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \leq 1} |x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)| \\ &\leq \sup_{\alpha(v) \leq 1} |x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v)| \\ &= \|x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*\|_{(\bigotimes_{i=1}^n X_i, \alpha)^*}\end{aligned}$$

が成立し主張の第二式も得られる. ■

以下, 実際クロスノルムが存在することを示す.

定義 .6.3 (インジェクティブノルム).  $\mathbb{K}$ -Banach 空間の族  $(X_i)_{i=1}^n$  に対し

$$\epsilon(v) := \sup_{\substack{\|x_i^*\|_{X_i^*} \leq 1 \\ i=1, \dots, n}} |x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v)|, \quad (v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

により定める  $\epsilon$  をインジェクティブノルム (injective norm) と呼ぶ.

定理 .6.4 (インジェクティブノルムは最小のクロスノルム).  $\mathbb{K}$ -Banach 空間の族  $(X_i)_{i=1}^n$  のテンソル積  $\bigotimes_{i=1}^n X_i$  において, インジェクティブノルムは最小のクロスノルムである.

証明.

第一段  $\epsilon$  が  $\bigotimes_{i=1}^n X_i$  上のノルムであることを示す．劣加法性と同次性は  $x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*$  の線型性より従う． $v = 0 \Leftrightarrow \epsilon(v) = 0$  については， $v = 0$  なら任意の  $x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*$  について  $x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v) = 0$  が成り立ち  $\epsilon(v) = 0$  が出る．逆に  $v \neq 0$  とするとき，定理.4.1 より

$$v = \sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j, \quad (x_i^j \in X_i, j = 1, \dots, m, i = 1, \dots, n)$$

と表現できるが，定理.4.2 より  $x_i^1 \neq 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) と仮定できる． $x_1^1$  について，もし全ての  $2 \leq j \leq m$  に対し  $x_1^j = x_1^1$  が満たされているなら， $\hat{x}_1^* \in X_1^*$  を

$$\langle x_1^1, \hat{x}_1^* \rangle = \|x_1^1\|_{X_1}, \quad \|\hat{x}_1^*\|_{X_1^*} = 1$$

を満たすように選ぶ (Hahn-Banach の定理)． $x_1^j \neq x_1^1$  を満たす  $j$  がある場合，

$$L_1 := \text{Span} \left[ \left\{ x_1^j ; \quad 2 \leq j \leq m, x_1^1 \neq x_1^j \right\} \right]$$

により閉部分空間を定めれば  $x_1^1$  と  $L_1$  との距離  $d_1$  は正であり，Hahn-Banach の定理より

$$\langle x_1, \hat{x}_1^* \rangle = 0 \quad (\forall x_1 \in L_1), \quad \langle x_1^1, \hat{x}_1^* \rangle = d_1 > 0, \quad \|\hat{x}_1^*\|_{X_1^*} = 1$$

を満たす  $\hat{x}_1^* \in X_1^*$  を取ることができる．同様に  $\hat{x}_i^* \in X_i^*$  ( $i = 2, \dots, n$ ) を選べば

$$\hat{x}_1^* \otimes \cdots \otimes \hat{x}_n^*(x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j) = \begin{cases} \hat{x}_1^* \otimes \cdots \otimes \hat{x}_n^*(x_1^1 \otimes \cdots \otimes x_n^1), & (x_i^j = x_i^1, i = 1, \dots, n), \\ 0, & (\text{o.w.}), \end{cases}$$

( $j = 2, \dots, m$ ) が満たされるから

$$0 < \hat{x}_1^* \otimes \cdots \otimes \hat{x}_n^*(x_1^1 \otimes \cdots \otimes x_n^1) \leq |\hat{x}_1^* \otimes \cdots \otimes \hat{x}_n^*(v)| \leq \epsilon(v)$$

が成立し，対偶により  $\epsilon(v) = 0 \Rightarrow v = 0$  が従う．

第二段  $\epsilon$  がクロスノルムであることを示す．先ず Hahn-Banach の定理より

$$\begin{aligned} \epsilon(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) &= \sup_{\substack{\|x_i^*\|_{X_i^*} \leq 1 \\ i=1, \dots, n}} |x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)| \\ &= \sup_{\|x_1^*\|_{X_1^*} \leq 1} |\langle x_1, x_1^* \rangle| \cdots \sup_{\|x_n^*\|_{X_n^*} \leq 1} |\langle x_n, x_n^* \rangle| \\ &= \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}, \quad (\forall x_i \in X_i, i = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

が成り立つ．また 0 でない  $x_i^* \in X_i^*$ , ( $i = 1, \dots, n$ ) に対しては

$$\begin{aligned} |x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v)| &\leq \|x_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*} \left[ \frac{x_1^*}{\|x_1^*\|_{X_1^*}} \otimes \cdots \otimes \frac{x_n^*}{\|x_n^*\|_{X_n^*}} \right](v) \\ &\leq \|x_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*} \epsilon(v) \end{aligned}$$

が成立し，或る  $i$  で  $x_i^*$  が零写像のときは定理.4.6 より  $x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^* = 0$  が満たされ，

$$\|x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*\|_{(\bigotimes_{i=1}^n X_i, \epsilon)} \leq \|x_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*}$$

を得る．

第三段  $\epsilon$  が最小のクロスノルムであることを示す.  $\alpha$  を任意のクロスノルムとすれば

$$|x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v)| \leq \|x_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*} \alpha(v), \quad (\forall v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

が成り立つから, 特に  $\|x_i^*\|_{X_i^*} \leq 1, (i = 1, \dots, n)$  の範囲で  $\sup$  を取れば

$$\epsilon(v) \leq \alpha(v), \quad (\forall v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

が従い  $\epsilon$  の最小性が出る. ■

定義 .6.5 (プロジェクトィブノルム).  $\mathbb{K}$ -Banach 空間の族  $(X_i)_{i=1}^n$  に対し, 定理.4.3 より

$$\begin{array}{ccc} \Phi : \text{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}\right) & \longrightarrow & \text{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}\right) \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ T & \longmapsto & T \circ \otimes \end{array} \quad (17)$$

により線型同型  $\Phi$  が定まる. これを用いて

$$\pi(v) := \sup_{\substack{b \in L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}) \\ \|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K})} \leq 1}} |\Phi^{-1}(b)(v)|, \quad (v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

により定める  $\pi$  をプロジェクトィブノルム (projective norm) と呼ぶ.

定理 .6.6 (プロジェクトィブノルムは最大のクロスノルム).  $\mathbb{K}$ -Banach 空間の族  $(X_i)_{i=1}^n$  のテンソル積  $\bigotimes_{i=1}^n X_i$  上にプロジェクトィブノルム  $\pi$  を導入する. このとき式 (15) を満たす任意のセミノルム  $p$  に対し  $p \leq \pi$  が成立する. 特に  $\pi$  は最大のクロスノルムである.

証明.

第一段  $\pi$  がノルムであることを示す.  $v \neq 0$  とすれば, 定理.6.4 の証明と同様にして

$$0 < |\hat{x}_1^* \otimes \cdots \otimes \hat{x}_n^*(v)|, \quad \|\hat{x}_i^*\|_{X_i^*} = 1, \quad (i = 1, \dots, n)$$

を満たす  $\hat{x}_i^* \in X_i^* (i = 1, \dots, n)$  が存在する.

$$b(x_1, \dots, x_n) := \langle x_1, \hat{x}_1^* \rangle \cdots \langle x_n, \hat{x}_n^* \rangle, \quad (x_i \in X_i, i = 1, \dots, n)$$

により  $n$  重線型写像  $b$  を定めれば,  $\|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K})} \leq \|x_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*} = 1$  かつ

$$0 < |\hat{x}_1^* \otimes \cdots \otimes \hat{x}_n^*(v)| = |\Phi^{-1}(b)(v)| \leq \pi(v)$$

が成立する.  $\pi(0) = 0$  と劣加法性及び同次性は  $\Phi^{-1}(b)$  の線型性より従う.

第二段  $\pi$  がクロスノルムであることを示す．先ず，任意の  $x_i \in X_i$ , ( $i = 1, \dots, n$ ) に対して

$$\begin{aligned}\pi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) &= \sup_{\substack{b \in L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}) \\ \|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K})} \leq 1}} |\Phi^{-1}(b)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)| \\ &\leq \sup_{\substack{b \in L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}) \\ \|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K})} \leq 1}} \|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K})} \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n} \\ &= \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}\end{aligned}$$

が成立する．また 0 でない  $x_i^* \in X_i^*$ , ( $i = 1, \dots, n$ ) に対し

$$b(x_1, \dots, x_n) := \frac{x_1^*}{\|x_1^*\|_{X_1^*}}(x_1) \cdots \frac{x_n^*}{\|x_n^*\|_{X_n^*}}(x_n), \quad (x_i \in X_i, i = 1, \dots, n)$$

により  $\|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K})} \leq 1$  を満たす有界  $n$  重線型  $b$  を定めれば， $\pi$  の定義より

$$|\Phi^{-1}(b)(v)| \leq \pi(v), \quad (\forall v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

が成り立つ．一方で写像のテンソル積の定義より

$$\Phi^{-1}(b) = \frac{x_1^*}{\|x_1^*\|_{X_1^*}} \otimes \cdots \otimes \frac{x_n^*}{\|x_n^*\|_{X_n^*}} = \frac{1}{\|x_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*}} x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*$$

が満たされるから

$$|x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v)| \leq \|x_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*} \pi(v), \quad (\forall v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

が従う．定理.4.6 より上式は  $x_i^* = 0$  の場合も込めて成立するから

$$\|x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*\|_{(\bigotimes_{i=1}^n X_i, \pi)^*} \leq \|x_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*}$$

が得られる．

第三段  $p$  を (15) を満たすセミノルムとし， $v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i$  を任意に取れば

$$p(v) = \phi_v(v), \quad |\phi_v(u)| \leq p(u) \quad (\forall u \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

を満たす  $\phi_v \in (\bigotimes_{i=1}^n X_i, \pi)^*$  が存在する (Hahn-Banach の定理)．

$$\begin{aligned}|(\phi_v \circ \otimes)(x_1, \dots, x_n)| &= |\phi_v(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)| \\ &\leq p(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \\ &\leq \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}, \quad (\forall x_i \in X_i, i = 1, \dots, n)\end{aligned}$$

が成り立つから  $\|\phi_v \circ \otimes\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K})} \leq 1$  が従い， $\pi$  の定義より

$$p(v) = \phi_v(v) = \Phi^{-1}(\phi_v \circ \otimes)(v) \leq \pi(v)$$

が得られる．

定理 .6.7 (プロジェクトノルムの表現).  $\mathbb{K}$ -Banach 空間の族  $(X_i)_{i=1}^n$  のテンソル積  $\bigotimes_{i=1}^n X_i$  にプロジェクトノルム  $\pi$  を導入する. このとき次が成り立つ:

$$\pi(v) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n} ; \quad v = \sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j \right\}.$$

証明.

第一段  $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$  上のセミノルム  $\lambda$  を次で定める:

$$\lambda(v) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n} ; \quad v = \sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j \right\}, \quad (\forall v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i).$$

このとき  $\lambda$  が式 (15) かつ  $\lambda \geq \pi$  を満たせば, 定理.6.6 より  $\lambda = \pi$  が従う.

第二段  $\lambda$  がセミノルムであることを示す. 実際, 任意に  $u, v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i$  を取り,

$$u = \sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j, \quad v = \sum_{k=1}^r a_1^k \otimes \cdots \otimes a_n^k$$

を一つの表現とすれば,  $\lambda$  の定め方より

$$\lambda(u+v) \leq \sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j + \sum_{k=1}^r a_1^k \otimes \cdots \otimes a_n^k$$

が成り立つ. 右辺を移項して

$$\lambda(u+v) - \sum_{k=1}^r a_1^k \otimes \cdots \otimes a_n^k \leq \lambda(u) \leq \sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j$$

かつ

$$\lambda(u+v) - \lambda(u) \leq \lambda(v) \leq \sum_{k=1}^r a_1^k \otimes \cdots \otimes a_n^k$$

が従い  $\lambda$  の劣加法性を得る. また任意の  $0 \neq \alpha \in \mathbb{K}$ ,  $v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i$  に対し

$$v = \sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j$$

を一つの分割とすれば

$$\alpha v = \sum_{j=1}^m (\alpha x_1^j) \otimes \cdots \otimes x_n^j$$

は  $\alpha v$  の一つの分割となるから

$$\lambda(\alpha v) \leq \sum_{j=1}^m \|\alpha x_1^j\|_{X_1} \cdots \|x_n^j\|_{X_n} = |\alpha| \sum_{j=1}^m \|x_1^j\|_{X_1} \cdots \|x_n^j\|_{X_n}$$

が成立し、 $v$  の分割について下限を取れば  $\lambda(\alpha v) \leq |\alpha| \lambda(v)$  が従う。逆に

$$\alpha v = \sum_{k=1}^r a_1^k \otimes \cdots \otimes a_n^k$$

に対しては

$$\lambda(v) \leq \sum_{k=1}^r \left\| \frac{1}{\alpha} a_1^k \right\|_{X_1} \cdots \|a_n^k\|_{X_n} = \frac{1}{|\alpha|} \sum_{k=1}^r \|a_1^k\|_{X_1} \cdots \|a_n^k\|_{X_n}$$

が成り立ち  $|\alpha| \lambda(v) \leq \lambda(\alpha v)$  が従う。 $v = 0$  なら  $v = 0 \otimes \cdots \otimes 0$  より  $\lambda(v) = 0$  が満たされ

$$\lambda(\alpha v) = |\alpha| \lambda(v), \quad (\forall \alpha \in \mathbb{K}, v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

が得られる。

第三段  $\lambda$  が式 (15) を満たすことを示す。実際  $\lambda$  の定め方より

$$\lambda(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \leq \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}, \quad (\forall x_i \in X_i, i = 1, \dots, n)$$

が成り立つ。

第四段  $\lambda \geq \pi$  を示す。いま、任意に  $v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i$  を取り、次の分割を持つとする：

$$v = \sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j.$$

$\|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K})} \leq 1$  を満たす  $b \in L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K})$  と式 (17) の  $\Phi$  に対し

$$\begin{aligned} |\Phi^{-1}(b)(v)| &\leq \sum_{j=1}^m |\Phi^{-1}(b)(x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j)| \\ &= \sum_{j=1}^m |b(x_1^j, \dots, x_n^j)| \leq \sum_{j=1}^m \|x_1^j\|_{X_1} \cdots \|x_n^j\|_{X_n} \end{aligned}$$

が成り立つから、 $b$  に無関係に

$$|\Phi^{-1}(b)(v)| \leq \lambda(v)$$

が満たされ

$$\pi(v) = \sup_{\substack{b \in L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}) \\ \|b\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K})} \leq 1}} |\Phi^{-1}(b)(v)| \leq \lambda(v)$$

が従う。 ■

**定理 .6.8.**  $\bigotimes_{i=1}^n X_i$  を  $\mathbb{K}$ -Banach 空間の族  $(X_i)_{i=1}^n$  のテンソル積とする。このとき  $\bigotimes_{i=1}^n X_i$  上の任意のノルム  $\alpha$  に対し次が成立する：

$$\alpha \text{ がクロスノルム} \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon \leq \alpha \leq \pi.$$

証明.  $(\Rightarrow)$  はすでに示したから  $(\Leftarrow)$  を示す. 実際, 任意の  $x_i \in X_i$ ,  $(i = 1, \dots, n)$  に対して

$$\alpha(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \leq \pi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \leq \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}$$

が成立し, また任意の  $x_i^* \in X_i^*$ ,  $(i = 1, \dots, n)$  に対して

$$\begin{aligned} |x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v)| &\leq \|x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*\|_{(\bigotimes_{i=1}^n X_i, \epsilon)^*} \epsilon(v) \\ &\leq \|x_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*} \alpha(v), \quad (\forall v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i) \end{aligned}$$

が満たされ  $\|x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*\|_{(\bigotimes_{i=1}^n X_i, \alpha)^*} \leq \|x_1^*\|_{X_1^*} \cdots \|x_n^*\|_{X_n^*}$  が得られる. ■