ゼミ用ノート
会田先生資料”Rough path analysis:An Introduction”

基礎工学研究科システム創成専攻
学籍番号 29C17095
百合川尚学

2018 年 4 月 8 日

目次

0.1　導入

以下，$x \in \mathbb{R}^d$ について成分を込めて表現する場合は $x = (x^1, \cdots, x^d)$ と書き，実 $m \times d$ 行列 a については $a = (a^i_j)_{1 \le i \le m, 1 \le j \le d}$ と表す．また $T > 0$ を固定し $C^1 = C^1([0,T] \to \mathbb{R}^d)$ とおく．ただし端点においては片側微分を考える．区間 $[s,t] \subset [0,T]$ の分割を $D = \{s = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t\}$ で表現し $|D| := \max_{1 \le i \le N} |t_i - t_{i-1}|$ とおく．また $[s,t]$ の分割の全体を $\delta[s,t]$ と書く．

定理 0.1.1 (Riemann-Stieltjes 積分). $[s,t] \subset [0,T]$ とし，$D \in \delta[s,t]$ についてのみ考えるとき，任意の $x \in C^1$，$f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ [*1] に対して次の極限が確定する:

$$\lim_{|D| \to 0} \sum_D f(x_{s_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) \in \mathbb{R}^m.$$

ここで s_{i-1} は区間 $[t_{i-1}, t_i]$ に属する任意の点である．極限は s_{i-1} の取り方にも依存しない．

証明. 各 x^j は C^1-級であるから，平均値の定理より $\sum_D f(x_{s_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})$ の第 k 成分を

$$\sum_{j=1}^d \sum_D f^k_j(x_{s_{i-1}})(x^j_{t_i} - x^j_{t_{i-1}}) = \sum_{j=1}^d \sum_D f^k_j(x_{s_{i-1}}) \frac{d}{dt} x^j(\xi_{i-1,j})(t_i - t_{i-1}), \quad ({}^\exists \xi_{i-1,j} \in [t_{i-1}, t_i])$$

と表現できる．各 j, k について

$$\lim_{|D| \to 0} \sum_D f^k_j(x_{s_{i-1}}) \frac{d}{dt} x^j(\xi_{i-1,j})(t_i - t_{i-1})$$

が確定すれば，第 k 成分の極限が確定し定理の主張を得る．いま，$t \longrightarrow f^k_j(x_t)$ 及び $t \longmapsto (d/dt)x^j_t$ は（[s,t] 上一様）連続であるから，分割 D による各区間 $[t_{i-1}, t_i]$ において次の最大最小値が定まる:

$$M_{i-1} := \sup_{t_{i-1} \le t \le t_i} f^k_j(x_t) \frac{d}{dt} x^j_t, \quad m_{i-1} := \inf_{t_{i-1} \le t \le t_i} f^k_j(x_t) \frac{d}{dt} x^j_t.$$

---

*1　極限の存在を保証する条件としては，f の有界性と微分可能性は必要ない．

ここで

$$S_D \coloneqq \sum_D M_{i-1}(t_i - t_{i-1}), \quad s_D \coloneqq \sum_D m_{i-1}(t_i - t_{i-1}), \quad \Sigma_D \coloneqq \sum_D f_j^k(x_{s_{i-1}})\frac{d}{dt}x^j(\xi_{i-1})(t_i - t_{i-1})$$

とおいて

$$S \coloneqq \inf_{D\in\delta[s,t]} S_D, \quad s \coloneqq \sup_{D\in\delta[s,t]} s_D$$

を定めれば

$$s_D \leq s \leq S \leq S_D, \quad s_D \leq \Sigma_D \leq S_D$$

が満たされる．実際，任意の $D_1, D_2 \in \delta[s,t]$ に対して，分割の合併を D_3 とすれば

$$s_{D_1} \leq s_{D_3} \leq S_{D_3} \leq S_{D_2}$$

が成立し $s \leq S_D$ $(\forall D \in \delta[s,t])$ すなわち $s \leq S$ が出る．一方で一様連続性から

$$0 \leq S - s \leq S_D - s_D = \sum_D (M_{i-1} - m_{i-1})(t_i - t_{i-1}) \longrightarrow 0 \quad (|D| \longrightarrow 0)$$

が従い $s = S$ を得る．以上より

$$|S - \Sigma_D| \leq |S - S_D| + |S_D - \Sigma_D| \leq |S - S_D| + |S_D - s_D| \longrightarrow 0 \quad (|D| \longrightarrow 0)$$

が成り立つ． ∎

定義 0.1.2. $I_{0,T}(x)$ の定義.

C^1 において次でノルム $\|\cdot\|_{C^1}$ を定める:

$$\|x\|_\infty \coloneqq \sup_{t\in[0,T]} |x(t)|, \quad \left\|x'\right\|_\infty \coloneqq \sup_{t\in[0,T]} |x'(t)|,$$
$$\|x\|_{C^1} \coloneqq \|x\|_\infty + \|x\|_\infty .$$

定理 0.1.3. $x \longmapsto I_{0,T}(x)$ は連続である.

証明. C^1 は次のノルムで Banach 空間になる．ゆえに $x \longmapsto I_{0,T}(x)$ は距離空間から距離空間への対応であり点列連続性と連続性が一致するから，$x_n \longrightarrow x$ なら $I_{0,T}(x_n) \longrightarrow I_{0,T}(x)$ が従うことを示せばよい．実際，f, x の連続性より

$$\sum_{i=1}^N f(x_{s_{i-1}}^{(n)})(x_{t_i}^{(n)} - x_{t_{i-1}}^{(n)}) \longrightarrow \sum_{i=1}^N f(x_{s_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})$$

が成り立つ．

定義 0.1.4 (p-variation). $[0,T]$ 上の $\mathbb{R}^d$ 値関数 x に対し p-variation ノルムを次で定める:

$$\|x\|_p := \left\{ \sup_D \sum_{i=1}^N \left| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right|^p \right\}^{1/p}.$$

また線形空間 $B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$ を

$$B_{p,T}(\mathbb{R}^d) := \left\{ x : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^d \ ; \quad x_0 = 0,\ x : \text{continuous},\ \|x\|_p < \infty \right\}$$

により定める.

定理 0.1.5. $\tilde{C}^1 := \left\{ x \in C^1 \ ; \quad x_0 = 0 \right\}$ とおくと，$\tilde{C}^1 \subset B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$ が成り立つ.

証明. $x \in \tilde{C}^1$ に対して

$$M := \sum_{j=1}^d \sup_{x \in [0,T]} |x^j(t)|$$

とおけば，x' の連続性より $M < \infty$ が定まる．平均値の定理より，$|D| < 1$ を満たす分割 D に対して

$$\left\{ \sum_{i=1}^N |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^p \right\}^{1/p} \leq \left\{ \sum_{i=1}^N \|x\|_{C^1}^p (t_i - t_{i-1})^p \right\}^{1/p} \leq MT < \infty$$

が成立し $\|x\|_p \leq MT < \infty$ が従う[*2].

定理 0.1.6. $B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$ は Banach 空間である.

証明. $(x^n)_{n=1}^\infty \subset B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$ を Cauchy 列とする．つまり任意の $\epsilon > 0$ に対して或る $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ が存在し

$$\|x^n - x^m\|_p = \left\{ \sup_D \sum_{i=1}^N \left| \left(x_{t_i}^n - x_{t_i}^m \right) - \left(x_{t_{i-1}}^n - x_{t_{i-1}}^m \right) \right|^p \right\}^{1/p} < \epsilon, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

を満たす．いま，任意の $t \in [0,T]$ に対して $[0,T]$ の分割 $\{0 = t_0 \leq t \leq T\}$ を考えれば

$$|x_t^n - x_t^m| < \epsilon, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

が得られ，実数の完備性より或る $x_t \in \mathbb{R}^d$ が存在して

$$|x_t^n - x_t| < \epsilon \quad (n > n_\epsilon)$$

を満たす．実際，もし或る $n > n_\epsilon$ で $|x_t^n - x_t| =: \alpha \geq \epsilon$ が成り立つと，任意の $m > n_\epsilon$ に対して

$$|x_t^m - x_t| \geq |x_t^n - x_t| - |x_t^n - x_t^m| > \alpha - \epsilon$$

[*2] $S_D \geq 0$ ならば $(\sup_D S_D)^{1/p} = \sup_D S_D^{1/p}$ が成り立つ.

が従い $x_t^m \longrightarrow x_t$ に反する．ゆえに収束は t に関して一様であり，$t \longmapsto x_t$ は 0 出発かつ連続である．あとは $\| x^n - x \|_p \longrightarrow 0 \ (n \longrightarrow \infty)$ であればよい．

定理 0.1.7. C^1 空間において，$\| \ \|_{C^1}$ で定まる位相は $\| \ \|_p$ で定まる位相より強い．特に，$B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$ 上で考える写像 $x \longmapsto I_{p,T}(x)$ は $\| \cdot \|_p$ の定める位相により連続である．

証明. 任意の $x \in \tilde{C}^1$ に対して

$$\| x \|_p \leq T \| x \|_{C^1}$$

を満たすことを証明する．実際，任意の分割 D に対して

$$\sum_{i=1}^{N} |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}| \leq \sum_{i=1}^{N} \| x \|_{C^1} (t_i - t_{i-1}) = T \| x \|_{C^1}$$

が成り立つ． ∎

C^1 パス $[0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ に対し $f(x) = (f_j^i(x))$ の積分を

$$I_{s,t}(x) \coloneqq \int_s^t f(x_u)\, dx_u = \left(\sum_{j=1}^{d} \int_s^t f_j^i(x_u)\, dx_u^j \right)_i$$

により定める．このとき次が成り立つ

$$\begin{aligned}
I_{s,t}(x)_i &= \sum_{j=1}^{d} \int_s^t f_j^i(x_u)\, dx_u \\
&= \sum_{j=1}^{d} \int_s^t f_j^i(x_s) + f_j^i(x_u) - f_j^i(x_s)\, dx_u \\
&= \sum_{j=1}^{d} \int_s^t f_j^i(x_s) + \sum_{k=1}^{d} \left\{ \int_0^1 \partial_k f_j^i(x_s + \theta(x_u - x_s))\, d\theta \right\} (x_u^k - x_s^k)\, dx_u \\
&= \sum_{j=1}^{d} \int_s^t f_j^i(x_s) + \sum_{k=1}^{d} \left\{ \int_0^1 \partial_k f_j^i(x_s)\, d\theta \right\} (x_u^k - x_s^k)\, dx_u \\
&\quad + \sum_{j=1}^{d} \int_s^t \sum_{k=1}^{d} \left\{ \int_0^1 \partial_k f_j^i(x_s + \theta(x_u - x_s)) - \partial_k f_j^i(x_s)\, d\theta \right\} (x_u^k - x_s^k)\, dx_u
\end{aligned}$$

0.2　連続性定理の証明

定義 0.2.1 (control function).　関数 $\omega : \Delta_T \longrightarrow [0,\infty)$ が任意の $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$ に対して

$$\omega(s,u) + \omega(u,t) \leq \omega(s,t)$$

を満たすとき，ω を control function と呼ぶ．

定理 0.2.2 (control function の例).　以下の関数 $\omega : \Delta_T \longrightarrow [0,\infty)$ は control function である．

(1)　$\omega \coloneqq \left(\omega_1^{1/p} + \omega_2^{1/p}\right)^p, \quad (p \geq 1,\ \omega_1, \omega_2 : \text{control function}).$

(2)　$\omega : (s,t) \longmapsto \left\| X^1 \right\|_{p:[s,t]}^p, \quad (p \geq 1,\ x \in B_{p,T}(\mathbb{R}^d)).$

(3)

定理 0.2.3.

(1)

(2)　任意の $D_1 \in \delta[s,u], D_2 \in \delta[u,t]$ に対して合併 $D_1 \cup D_2$ は $[s,t]$ の分割であるから，

$$\sum_{D_1} \left| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right|^p + \sum_{D_2} \left| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right|^p \leq \sup_{D \in \delta[s,t]} \sum_D \left| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right|^p = \left\| X^1 \right\|_{p:[s,t]}^p$$

が成り立つ．左辺の D_1, D_2 の取り方は独立であるから，それぞれに対し上限を取れば

$$\left\| X^1 \right\|_{p:[s,u]}^p + \left\| X^1 \right\|_{p:[u,t]}^p \leq \left\| X^1 \right\|_{p:[s,t]}^p$$

が得られる．