テンソル積のノルム
平井さん講義まとめ

基礎工学研究科システム創成専攻
学籍番号 29C17095
百合川尚学

2018 年 4 月 27 日

目次

0.1　テンソル積の導入

E, F を体 $\mathbb{K}$ 上の線形空間とするとき，テンソル積 $E \otimes F$ を定めたい．

$$\Lambda(E) = \{\, f : E \longrightarrow \mathbb{K} \ ; \quad \text{有限個の } e \in E \text{ を除いて } f(e) = 0. \,\}$$

により $\mathbb{K}$-線形空間 $\Lambda(E)$ を定める．また $e \in E$ に対する定義関数を

$$\mathbb{1}_e(x) = \begin{cases} 1, & x = e, \\ 0, & x \neq e \end{cases}$$

で表し，同様にして $\Lambda(E \times F)$ 及び $(e, f) \in E \times F$ に対し $\mathbb{1}_{e,f}$ を定める．$\Lambda(E \times F)$ に対し

$$\Lambda_0(E \times F) := \operatorname{span}\left[\left\{ \begin{array}{c} \mathbb{1}_{(e+e',f)} - \mathbb{1}_{(e,f)} - \mathbb{1}_{(e',f)}, \\ \mathbb{1}_{(e,f+f')} - \mathbb{1}_{(e,f)} - \mathbb{1}_{(e,f')}, \\ \mathbb{1}_{(\lambda e,f)} - \lambda \mathbb{1}_{(e,f)}, \\ \mathbb{1}_{(e,\lambda f)} - \lambda \mathbb{1}_{(e,f)} \end{array} \ ; \quad e, e' \in E, f, f' \in F, \lambda \in \mathbb{K} \right\}\right]$$

により線型部分空間を定め，$b \in \Lambda(E \times F)$ の $\Lambda_0(E \times F)$ に関する同値類を $[b]$ と書く．

定義 0.1.1 (テンソル積).　$\mathbb{K}$-線形空間 E, F に対し

$$E \otimes F := \Lambda(E \times F)/\Lambda_0(E \times F)$$

で定める商空間を E と F のテンソル積という．また $(e, f) \in E \times F$ に対するテンソル積を

$$e \otimes f := \left[\mathbb{1}_{(e,f)}\right]$$

により定める．

定理 0.1.2 (テンソル積は双線型・元の表現).　E, F を $\mathbb{K}$-線形空間とするとき，

$$\otimes : E \times F \ni (e, f) \longmapsto e \otimes f \in E \otimes F$$

は双線型である．また任意の $u \in E \otimes F$ は，或る有限個の $e_i \otimes f_i \in E \otimes F$ により

$$u = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes f_i$$

と書ける．

証明. $e, e' \in E,\ f, f' \in F,\ \lambda \in \mathbb{K}$ とする．$\Lambda_0(E \times F)$ の定義より

$$\mathbb{1}_{(e+e',f)} \equiv \mathbb{1}_{(e,f)} + \mathbb{1}_{(e',f)}, \qquad (\mathrm{mod}\ \Lambda_0(E \times F))$$

が満たされ $(e+e') \otimes f = e \otimes f + e' \otimes f$ が成立する．同様にして

$$\begin{aligned} e \otimes (f + f') &= e \otimes f + e \otimes f', \\ (\lambda e) \otimes f &= \lambda e \otimes f, \\ e \otimes (\lambda f) &= \lambda e \otimes f \end{aligned}$$

が従うので $\otimes$ は双線型である．また任意の $u \in E \otimes F$ に対し，その代表を $b \in \Lambda(E \times F)$ とすれば

$$b = \sum_{i=1}^{n} k_i \mathbb{1}_{(e_i, f_i)}, \quad (k_i = b(e_i, f_i),\ i = 1, 2, \cdots, n)$$

と表せるから

$$u = \left[\sum_{i=1}^{n} k_i \mathbb{1}_{(e_i, f_i)} \right] = \left[\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{(k_i e_i, f_i)} \right] = \sum_{i=1}^{n} (k_i e_i) \otimes f_i$$

を得る． ∎

定理 0.1.3 (テンソル積の普遍性). E, F, V を $\mathbb{K}$-線形空間とするとき，$\mathrm{Hom}\,(E \otimes F, V)$ と $\mathrm{Hom}^{(2)}\,(E \times F, V)$ は次の写像 Φ により線型同型である:

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathrm{Hom}\,(E \otimes F, V) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}^{(2)}\,(E \times F, V) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & T & \longmapsto & T \circ \otimes \end{array}$$

証明.

第一段 始めの二段で Φ の全射性を示す．$f \in \mathrm{Hom}\,(\Lambda(E \times F), V)$ に対し

$$g : E \times F \ni (e, f) \longmapsto f(\mathbb{1}_{e,f}) \in V$$

を対応させる次の写像が線形同型であることを示す:

$$\begin{array}{rccc} F : & \mathrm{Hom}\,(\Lambda(E \times F), V) & \longrightarrow & \mathrm{Map}\,(E \times F, V) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & f & \longmapsto & g \end{array}$$

実際 $g = F(f)$ の定め方より F は線型である．また $F(f_1) = F(f_2)$ なら

$$f_1(\mathbb{1}_{e,f}) = f_2(\mathbb{1}_{e,f}), \quad (\forall (e, f) \in E \times F)$$

が成り立ち，$\Lambda(E \times F)$ は $\mathbb{1}_{e,f}$ $((e, f) \in E \times F)$ で生成されるから $f_1 = f_2$ が従い単射性を得る．いま，

$$\sum_{e \in E \times F} \psi(e) g(e) \coloneqq \sum_{\substack{e \in E \\ \psi(e) \neq 0}} \psi(e) g(e), \quad (\psi \in \Lambda(E),\ g \in \mathrm{Map}\,(E, V))$$

により総和記号を定める．そして任意の $g \in \mathrm{Map}\,(E, V)$ に対して

$$f(\psi) \coloneqq \sum_{e \in E} \psi(e) g(e), \quad (\psi \in \mathrm{Hom}\,(\Lambda(E), V))$$

で f を作れば，$f \in \mathrm{Hom}\,(\Lambda(E), V)$ が満たされ F の全射性が従う．

第二段　任意に $b \in \mathrm{Hom}^{(2)}\,(E \times F, V)$ を取り $h \coloneqq F^{-1}(b)$ とおけば，h の線型性より

$$\begin{aligned} b(e+e', f) - b(e, f) - b(e', f) &= h(\mathbb{1}_{e+e', f} - \mathbb{1}_{e,f} - \mathbb{1}_{e', f}), \\ b(e, f+f') - b(e, f) - b(e, f') &= h(\mathbb{1}_{e, f+f'} - \mathbb{1}_{e,f} - \mathbb{1}_{e, f'}), \\ b(\lambda e, f) - \lambda b(e, f) &= h(\mathbb{1}_{\lambda e, f} - \lambda \mathbb{1}_{e,f}), \\ b(e, \lambda f) - \lambda b(e, f) &= h(\mathbb{1}_{e, \lambda f} - \lambda \mathbb{1}_{e,f}) \end{aligned}$$

が成り立ち，b の双線型性により h は $\Lambda_0(E \times F)$ 上で 0 である．従って

$$T([b]) \coloneqq h(b), \quad (b \in \Lambda(E \times F))$$

で定める T は well-defined であり，$T \in \mathrm{Hom}\,(E \otimes F, V)$ かつ

$$b(e, f) = h(\mathbb{1}_{e,f}) = (T \circ \otimes)(e, f), \quad (\forall (e, f) \in E \times F)$$

が満たされ Φ の全射性が得られる．

第三段