

テンソル積のノルム

平井さん講義まとめ

基礎工学研究科システム創成専攻
学籍番号 29C17095
百合川尚学

2018 年 5 月 2 日

目次

0.1	一時的	1
0.2	notation	1
0.3	テンソル積	2
0.4	テンソル積の内積	10
0.5	クロスノルム	10

0.1 一時的

定理 0.1.1 (可測関数列の各点極限の可測性). (X, \mathcal{M}) を可測空間, E を位相空間とし, $C(E, \mathbb{R})$ により連続写像 $E \rightarrow \mathbb{R}$ の全体を表す. このとき

$$\mathfrak{B}(E) = \sigma \left[\bigcup_{g \in C(E, \mathbb{R})} \left\{ g^{-1}(B) ; B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \right\} \right]$$

が満たされているなら, 各点収束する $\mathcal{M}/\mathfrak{B}(E)$ -可測関数列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ に対し $f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ で定める f は $\mathcal{M}/\mathfrak{B}(E)$ -可測である.

証明. 任意の連続写像 $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ に対し

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(f_n(x)) = g(f(x))$$

が成立するから $g \circ f$ は可測 $\mathcal{M}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であり,

$$\bigcup_{g \in C(E, \mathbb{R})} \left\{ g^{-1}(B) ; B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \right\} \subset \left\{ A \in \mathfrak{B}(E) ; f^{-1}(A) \in \mathcal{M} \right\}$$

より f の $\mathcal{M}/\mathfrak{B}(E)$ -可測性が出る.

0.2 notation

以下, 零元のみ線型空間は考えない. E, E_i, F を体 \mathbb{K} 上の線形空間とすると, $\text{Hom}(E, F)$ で E から F への \mathbb{K} -線型写像の全体を表し, 特に $F = \mathbb{K}$ のとき $E^\#$ と書く. また $\text{Hom}^{(n)}(E_1 \times \cdots \times E_n, F)$ で $E_1 \times \cdots \times E_n$ から F への \mathbb{K} - n 重線型写像の全体を表す.

0.3 テンソル積

$n \geq 2$ とする. 体 \mathbb{K} 上の線形空間の族 $(E_i)_{i=1}^n$ に対してテンソル積を定めたい.

$$\Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right) = \left\{ b : \bigoplus_{i=1}^n E_i \longrightarrow \mathbb{K} ; \quad \text{有限個の } e \in \bigoplus_{i=1}^n E_i \text{ を除いて } b(e) = 0. \right\}$$

により \mathbb{K} -線形空間 $\Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right)$ を定める. また $e = (e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i$ に対する定義関数を

$$\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_n}(x) = \begin{cases} 1, & x = e, \\ 0, & x \neq e \end{cases}$$

で表す. $\Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right)$ の線型部分空間を

$$\begin{aligned} \Lambda_0\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right) \\ := \text{Span} \left[\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i + e'_i, \dots, e_n} - \mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n} - \mathbb{1}_{e_1, \dots, e'_i, \dots, e_n}, \\ \mathbb{1}_{e_1, \dots, \lambda e_i, \dots, e_n} - \lambda \mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n} \end{array} ; \quad e_i, e'_i \in E_i, \lambda \in \mathbb{K}, 1 \leq i \leq n \right\} \right] \end{aligned}$$

により定め, $b \in \Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right)$ の $\Lambda_0\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right)$ に関する同値類を $[b]$ と書く. そして

$$E_1 \otimes \cdots \otimes E_n = \bigotimes_{i=1}^n E_i := \Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right) / \Lambda_0\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right)$$

で定める商空間を $(E_i)_{i=1}^n$ のテンソル積と定義する. また $(e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i$ に対し

$$e_1 \otimes \cdots \otimes e_n := [\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_n}]$$

により定める $\otimes : \bigoplus_{i=1}^n E_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n E_i$ をテンソル積の標準写像と呼ぶ.

定理 0.3.1 (標準写像の多重線型性). $(E_i)_{i=1}^n$ を \mathbb{K} -線形空間の族とすると,

$$\otimes : \bigoplus_{i=1}^n E_i \ni (e_1, \dots, e_n) \longmapsto e_1 \otimes \cdots \otimes e_n \in \bigotimes_{i=1}^n E_i$$

は n 重線型写像である. また次が成り立つ:

$$\bigotimes_{i=1}^n E_i = \text{Span} \left[\left\{ e_1 \otimes \cdots \otimes e_n ; \quad (e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i \right\} \right]. \quad (1)$$

証明. 任意の $1 \leq i \leq n$, $e_1 \in E_1, \dots, e_n \in E_n$, $e_i, e'_i \in E_i$, $\lambda \in \mathbb{K}$ に対して

$$\begin{aligned}
e_1 \otimes \cdots \otimes (e_i + e'_i) \otimes \cdots \otimes e_n &= [\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i + e'_i, \dots, e_n}] \\
&= [\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n} + \mathbb{1}_{e_1, \dots, e'_i, \dots, e_n}] \\
&= [\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n}] + [\mathbb{1}_{e_1, \dots, e'_i, \dots, e_n}] \\
&= e_1 \otimes \cdots \otimes e_i \otimes \cdots \otimes e_n + e_1 \otimes \cdots \otimes e'_i \otimes \cdots \otimes e_n, \\
e_1 \otimes \cdots \otimes (\lambda e_i) \otimes \cdots \otimes e_n &= [\mathbb{1}_{e_1, \dots, \lambda e_i, \dots, e_n}] \\
&= [\lambda \mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n}] \\
&= \lambda [\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n}] \\
&= \lambda (e_1 \otimes \cdots \otimes e_i \otimes \cdots \otimes e_n)
\end{aligned}$$

が成立するから \otimes は多重線型である. また任意に $u = [b] \in E \otimes F$ を取れば

$$b = \sum_{j=1}^m k_j \mathbb{1}_{e_i^j, \dots, e_n^j}, \quad (k_j = b(e_i^j, \dots, e_n^j), j = 1, \dots, m)$$

と表せるから,

$$u = \left[\sum_{j=1}^m k_j \mathbb{1}_{e_i^j, \dots, e_n^j} \right] = \left[\sum_{j=1}^m \mathbb{1}_{k_j e_i^j, \dots, e_n^j} \right] = \sum_{j=1}^m (k_j e_1^j) \otimes \cdots \otimes e_n^j$$

が従い (1) を得る. ■

定理 0.3.2 ($\cdots \otimes 0 \otimes \cdots$ は零ベクトル). $(E_i)_{i=1}^n$ を \mathbb{K} -線形空間の族とし, テンソル積 $\bigotimes_{i=1}^n E_i$ を定める. このとき, 或る i で $e_i = 0$ なら $e_1 \otimes \cdots \otimes e_n = 0$ が成り立つ.

証明. $e_i = 0$ のとき, $\lambda = 0$ とすれば

$$e_1 \otimes \cdots \otimes e_n = [\mathbb{1}_{e_1, \dots, 0, \dots, e_n}] = [\mathbb{1}_{e_1, \dots, \lambda e_i, \dots, e_n} - \lambda \mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n}] = 0$$

が成立する. ■

定理 0.3.3 (普遍性 (universality of tensor products)). $(E_i)_{i=1}^n$ を \mathbb{K} -線形空間の族とする. このとき任意の \mathbb{K} -線形空間 V に対して, $T \in \text{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n E_i, V\right)$ ならば $T \circ \otimes \in \text{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$ が満たされ, これで定める次の対応 Φ は線型同型である:

$$\begin{array}{ccc} \Phi : \text{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n E_i, V\right) & \longrightarrow & \text{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right) \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ T & \longmapsto & T \circ \otimes \end{array} \quad (2)$$

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=1}^n E_i & & \\ \downarrow \otimes & \searrow \Phi(T) & \\ \bigotimes_{i=1}^n E_i & \xrightarrow{T} & V \end{array} \quad \begin{array}{c} \cup \\ \circlearrowright \end{array}$$

また \mathbb{K} -線形空間 U_0 と多重線型写像 $\iota : \bigoplus_{i=1}^n E_i \longrightarrow U_0$ が, 任意の \mathbb{K} -線形空間 V に対し

(\otimes)₁ U_0 は ι の像で生成される.

(\otimes)₂ 任意の $\delta \in \text{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$ に対して或る $\tau \in \text{Hom}(U_0, V)$ が $\delta = \tau \circ \iota$ を満たす.

を満たすなら, (2) において $V = U_0$ とするとき $T = \Phi^{-1}(\iota)$ は線型同型である.

後半の主張により, $(E_i)_i$ のテンソル積を別の方法で導入しても, 商空間を用いて導入した $\bigotimes_i E_i$ と線型同型に結ばれる. このとき, 別の方法で導入したテンソル積及び標準写像を $\bigotimes_i \tilde{E}_i$, $\tilde{\otimes}$ と表せば, 或る線型同型 $T : \bigotimes_i E_i \longrightarrow \bigotimes_i \tilde{E}_i$ がただ一つ存在して

$$T(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) = e_1 \tilde{\otimes} \cdots \tilde{\otimes} e_n$$

を満たす. 特に任意の並べ替え $\varphi : \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$ に対し

$$\begin{array}{ccc} \bigotimes_{i=1}^n E_i & \cong & \bigotimes_{i=1}^n E_{\varphi(i)} \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ e_1 \otimes \cdots \otimes e_n & \longleftrightarrow & e_{\varphi(1)} \otimes \cdots \otimes e_{\varphi(n)} \end{array}$$

が成立する.

証明.

第一段 $T \in \text{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n E_i, V\right)$ の線型性と \otimes の多重線型性より $T \circ \otimes$ は多重線型である.

第二段 $\Phi(T_1) = \Phi(T_2)$ ならば T_1 と T_2 は $\{e_1 \otimes \cdots \otimes e_n ; (e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i\}$ の上で一致する. (1) より $T_1 = T_2$ が成立し Φ の単射性が従う.

第三段 次の二段で Φ の全射性を示す. まず, $\varphi \in \text{Hom}\left(\Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right), V\right)$ に対し

$$g : \bigoplus_{i=1}^n E_i \ni (e_1, \dots, e_n) \longmapsto \varphi(\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_n}) \in V$$

を対応させる次の写像が全単射であることを示す:

$$\begin{array}{ccc} F : \text{Hom}\left(\Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right), V\right) & \longrightarrow & \text{Map}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right) \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ \varphi & \longmapsto & g \end{array}$$

$F(\varphi_1) = F(\varphi_2)$ のとき, 任意の $e \in \bigoplus_{i=1}^n E_i$ に対して $\varphi_1(\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_n}) = \varphi_2(\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_n})$ が成り立ち,

$$\Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right) = \text{Span}\left[\left\{\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_n} ; \quad (e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i\right\}\right]$$

であるから $\varphi_1 = \varphi_2$ が従い F の単射性を得る. また $g \in \text{Map}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$ に対して

$$\varphi(a) := \sum_{\substack{e \in \bigoplus_{i=1}^n E_i \\ a(e) \neq 0}} a(e)g(e), \quad (a \in \Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right))$$

により φ を定めれば, $\varphi \in \text{Hom}\left(\Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right), V\right)$ が満たされ F の全射性が従う.

第四段 任意に $b \in \text{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$ を取り $h := F^{-1}(b)$ とおけば, h の線型性より

$$\begin{aligned} & b(e_1, \dots, e_i + e'_i, \dots, e_n) - b(e_1, \dots, e_i, \dots, e_n) - b(e_1, \dots, e'_i, \dots, e_n) \\ &= h(\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i + e'_i, \dots, e_n} - \mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n} - \mathbb{1}_{e_1, \dots, e'_i, \dots, e_n}), \\ & b(e_1, \dots, \lambda e_i, \dots, e_n) - \lambda b(e_1, \dots, e_i, \dots, e_n) \\ &= h(\mathbb{1}_{e_1, \dots, \lambda e_i, \dots, e_n} - \lambda \mathbb{1}_{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n}) \end{aligned}$$

が成り立ち, b の双線型性により h は $\Lambda_0\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right)$ 上で 0 である. 従って

$$T([b]) := h(b), \quad (b \in \Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right))$$

で定める T は well-defined であり, $T \in \text{Hom}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$ かつ

$$b(e_1, \dots, e_n) = h(\mathbb{1}_{e_1, \dots, e_n}) = (T \circ \otimes)(e_1, \dots, e_n), \quad (\forall (e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i)$$

が満たされ Φ の全射性が得られる.

第五段 $(\otimes)_1, (\otimes)_2$ の下で $\text{Hom}\left(U_0, \bigotimes_{i=1}^n E_i\right) \ni \tau \mapsto \tau \circ \iota \in \text{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, \bigotimes_{i=1}^n E_i\right)$ は全単射であるから, $\tau \circ \iota = \otimes$ を満たす $\tau \in \text{Hom}\left(U_0, \bigotimes_{i=1}^n E_i\right)$ がただ一つ存在する. 同様にして $\iota = T \circ \otimes$ を満たす $T \in \text{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n E_i, U_0\right)$ がただ一つ存在し, 併せれば

$$\otimes = \tau \circ \iota = (\tau \circ T) \circ \otimes, \quad \iota = T \circ \otimes = (T \circ \tau) \circ \iota$$

が成り立ち, $T \mapsto T \circ \otimes, \tau \mapsto \tau \circ \iota$ が一対一であるから $\tau \circ T, T \circ \tau$ はそれぞれ恒等写像に一致して $T^{-1} = \tau$ が従う. すなわち T は $\bigotimes_{i=1}^n E_i$ から U_0 への線型同型である. ■

定理 0.3.4 (スカラーとのテンソル積). E を \mathbb{K} -線型空間とすると, $\mathbb{K} \otimes E$ と E は $f(\alpha \otimes e) = \alpha e$ を満たす線型写像 $f: \mathbb{K} \otimes E \rightarrow E$ により同型となる.

証明. スカラ倍 $\iota: (\alpha, e) \mapsto \alpha e$ は双線型である. また定理 0.3.3 の $(\otimes)_1, (\otimes)_2$ について,

$$E = \text{Span}[\{\alpha e ; \quad \alpha \in \mathbb{K}, e \in E\}]$$

より $(\otimes)_1$ が得られ, かつ任意の双線型写像 $\delta: \mathbb{K} \times E \rightarrow V$ に対し

$$f(e) := \delta(1, e), \quad (\forall e \in E)$$

で線型写像 $f: E \rightarrow V$ を定めれば,

$$f \circ \iota(\alpha, e) = f(\alpha e) = \delta(1, \alpha e) = \alpha \delta(1, e) = \delta(\alpha, e)$$

が成り立つから $(\otimes)_2$ が満たされる. ■

定義 0.3.5 (線型写像のテンソル積). $(E_i)_{i=1}^n$ と $(F_i)_{i=1}^n$ を \mathbb{K} -線型空間の族とする. $f_i: E_i \rightarrow F_i$ ($i = 1, \dots, n$) が線型写像であるとき,

$$b: \bigoplus_{i=1}^n E_i \ni (e_1, \dots, e_n) \mapsto f_1(e_1) \otimes \dots \otimes f_n(e_n) \in \bigotimes_{i=1}^n F_i$$

により定める b は n 重線型であり, 定理 0.3.3 より $b = g \circ \otimes$ を満たす $g: \bigotimes_{i=1}^n E_i \rightarrow \bigotimes_{i=1}^n F_i$ がただ一つ存在する. g を $f_1 \otimes \dots \otimes f_n$ と表記して線型写像のテンソル積と定義する. いま,

$$f_1 \otimes \dots \otimes f_n(e_1 \otimes \dots \otimes e_n) = f_1(e_1) \otimes \dots \otimes f_n(e_n), \quad (\forall (e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i)$$

が成り立つ.

定理 0.3.6 (テンソル積の基底). $(E_i)_{i=1}^n$ を \mathbb{K} -線型空間の族とし, E_i の基底を $(u_{\lambda_i}^i)_{\lambda_i \in \Lambda_i}$ とする ($i = 1, \dots, n$). このとき $(u_{\lambda_1}^1 \otimes \dots \otimes u_{\lambda_n}^n)_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$ は $\bigotimes_{i=1}^n E_i$ の基底となる.

証明.

第一段 各 $u_{\lambda_i}^i$ の生成する一次元空間を $W_{\lambda_i}^i := \mathbb{K}u_{\lambda_i}^i$ と表し

$$V_i := \bigoplus_{\lambda_i \in \Lambda_i} W_{\lambda_i}^i, \quad (i = 1, \dots, n)$$

とおく. $(u_{\lambda_i}^i)_{\lambda_i \in \Lambda_i}$ は E_i の基底であるから, 任意の $e_i \in E_i$ に対し $v_i \in V_i$ がただ一つ定まり,

$$f_i: E_i \ni e_i \mapsto v_i \in V_i$$

により定める線型写像 f_i は同型写像である. このとき, 写像のテンソル積

$$f_1 \otimes \dots \otimes f_n: \bigotimes_{i=1}^n E_i \rightarrow \bigotimes_{i=1}^n V_i$$

は線型同型となる. 実際, f_i の逆写像 f_i^{-1} のテンソル積

$$f_1^{-1} \otimes \dots \otimes f_n^{-1}: \bigotimes_{i=1}^n V_i \rightarrow \bigotimes_{i=1}^n E_i$$

によって、全ての $(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) \in \bigotimes_{i=1}^n E_i$ 及び $(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \in \bigotimes_{i=1}^n V_i$ に対し

$$\begin{aligned} & f_1^{-1} \otimes \cdots \otimes f_n^{-1} \circ f_1 \otimes \cdots \otimes f_n(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) \\ &= f_1^{-1} \otimes \cdots \otimes f_n^{-1}(f_1(e_1) \otimes \cdots \otimes f_n(e_n)) = (e_1 \otimes \cdots \otimes e_n), \\ & f_1 \otimes \cdots \otimes f_n \circ f_1^{-1} \otimes \cdots \otimes f_n^{-1}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \\ &= f_1 \otimes \cdots \otimes f_n(f_1^{-1}(v_1) \otimes \cdots \otimes f_n^{-1}(v_n)) = (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \end{aligned}$$

が成立し、それぞれ $\bigotimes_{i=1}^n E_i$ と $\bigotimes_{i=1}^n V_i$ を生成するから

$$(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)^{-1} = f_1^{-1} \otimes \cdots \otimes f_n^{-1}$$

の関係を得る.

第二段 $\bigotimes_{i=1}^n V_i$ と $\bigoplus_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} W_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes W_{\lambda_n}^n$ が線型同型であることを示す. 先ず

$$g : \sum_j (v_1^j \otimes \cdots \otimes v_n^j) \mapsto \sum_j (v_1^j(\lambda_1) \otimes \cdots \otimes v_n^j(\lambda_n))_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$$

により線型写像 $g : \bigotimes_{i=1}^n V_i \longrightarrow \bigoplus_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} W_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes W_{\lambda_n}^n$ を定める. また

$$\iota_{\lambda_i} : W_{\lambda_i}^i \longrightarrow V_i, \quad (\lambda_i \in \Lambda_i, i = 1, \dots, n)$$

を次の標準単射として定める:

$$\iota_{\lambda_i}(u)(\lambda) = \begin{cases} u, & (\lambda = \lambda_i), \\ 0, & (\lambda \neq \lambda_i), \end{cases} \quad (\lambda \in \Lambda_i, u \in W_{\lambda_i}^i).$$

ι_{λ_i} は線型であるから $\iota_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \iota_{\lambda_n} : W_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes W_{\lambda_n}^n \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n V_i$ を定義出来て,

$$h : w \mapsto \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} \iota_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \iota_{\lambda_n} (w(\lambda_1, \dots, \lambda_n))$$

により線型写像 $h : W_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes W_{\lambda_n}^n \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n V_i$ が定めれば $g^{-1} = h$ が成り立つ. 実際,

$$\begin{aligned} g \circ h(w) &= g \left(\sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} \iota_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \iota_{\lambda_n} (w(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) \right) \\ &= \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} g(\iota_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \iota_{\lambda_n} (w(\lambda_1, \dots, \lambda_n))) \\ &= w \end{aligned}$$

が任意の $w \in \bigoplus_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} W_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes W_{\lambda_n}^n$ に対して成立し、かつ任意の $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ に対し

$$\begin{aligned} h \circ g(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) &= \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} \iota_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \iota_{\lambda_n} (v_1(\lambda_1) \otimes \cdots \otimes v_n(\lambda_n)) \\ &= \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} \iota_{\lambda_1}(v_1(\lambda_1)) \otimes \cdots \otimes \iota_{\lambda_n}(v_n(\lambda_n)) \\ &= \left(\sum_{\lambda_1 \in \Lambda_1} \iota_{\lambda_1}(v_1(\lambda_1)) \right) \otimes \cdots \otimes \left(\sum_{\lambda_n \in \Lambda_n} \iota_{\lambda_n}(v_n(\lambda_n)) \right) \\ &= v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \end{aligned}$$

が成り立つから $g^{-1} = h$ が従う. よって g は線型同型である.

第三段 いま, $g \circ f_1 \otimes \cdots \otimes f_n$ によって $\bigotimes_{i=1}^n E_i$ と $\bigoplus_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} W_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes W_{\lambda_n}^n$ は同型に対応し,

$$w_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}(v_1, \dots, v_n) := \begin{cases} u_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes u_{\lambda_n}^n, & (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (v_1, \dots, v_n), \\ 0, & (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (v_1, \dots, v_n) \end{cases}$$

として $w_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$ を定めれば

$$u_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes u_{\lambda_n}^n \xrightarrow{g \circ f_1 \otimes \cdots \otimes f_n} w_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$$

が成り立つ. $(w_{\lambda_1, \dots, \lambda_n})$ の一次独立性から $(u_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes u_{\lambda_n}^n)_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$ の一次独立性が従う.

定理 0.3.7 (結合律). $(E_i)_{i=1}^n$ を \mathbb{K} -線型空間の族とする. 任意の $k = 1, \dots, n-1$ に対し,

$$\bigotimes_{i=1}^n E_i = \left(\bigotimes_{i=1}^k E_i \right) \otimes \left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i \right)$$

が成立する.

証明.

第一段 n 重線型写像 $f: \bigoplus_{i=1}^n E_i \rightarrow \left(\bigotimes_{i=1}^k E_i \right) \otimes \left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i \right)$ を

$$f(e_1, \dots, e_n) = (e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n), \quad (\forall (e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i)$$

により定めれば, 定理 0.3.3 より

$$F: (e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) \mapsto (e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n)$$

を満たす線型写像 $F: \bigotimes_{i=1}^n E_i \rightarrow \left(\bigotimes_{i=1}^k E_i \right) \otimes \left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i \right)$ が存在する:

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=1}^n E_i & & \\ \downarrow \otimes & \searrow f & \\ \bigotimes_{i=1}^n E_i & \xrightarrow{F} & \left(\bigotimes_{i=1}^k E_i \right) \otimes \left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i \right) \end{array}$$

以降は F の逆写像を構成し F が全単射であることを示す.

第二段 $u_{k+1} \in E_{k+1}, \dots, u_n \in E_n$ を固定し

$$\Phi_{u_{k+1}, \dots, u_n}(e_1, \dots, e_n) := e_1 \otimes \cdots \otimes e_k \otimes u_{k+1} \otimes \cdots \otimes u_n$$

によって n 重線型 $\Phi_{u_{k+1}, \dots, u_n}: \bigoplus_{i=1}^k E_i \rightarrow \bigotimes_{i=1}^n E_i$ を定めれば, 定理 0.3.3 より

$$G_{u_{k+1}, \dots, u_n}(e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) = e_1 \otimes \cdots \otimes e_k \otimes u_{k+1} \otimes \cdots \otimes u_n$$

を満たす線型写像 $G_{u_{k+1}, \dots, u_n} : \bigotimes_{i=1}^k E_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n E_i$ が存在する.

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=1}^k E_i & & \\ \downarrow \otimes & \searrow \Phi_{u_{k+1}, \dots, u_n} & \\ \bigotimes_{i=1}^k E_i & \xrightarrow{G_{u_{k+1}, \dots, u_n}} & \bigotimes_{i=1}^n E_i \end{array}$$

第三段 任意の $v \in \bigotimes_{i=k+1}^n E_i$ に対して

$$\Psi_v : \bigoplus_{i=k+1}^n E_i \ni (u_{k+1}, \dots, u_n) \longmapsto G_{u_{k+1}, \dots, u_n}(v)$$

を定めれば, Ψ_v は n 重線型であるから, 定理 0.3.3 より

$$H_v(u_{k+1} \otimes \dots \otimes u_n) = \Psi_v(u_{k+1}, \dots, u_n)$$

を満たす線型写像 $H_v : \bigotimes_{i=k+1}^n E_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n E_i$ が存在する.

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=k+1}^n E_i & & \\ \downarrow \otimes & \searrow \Psi_v & \\ \bigotimes_{i=k+1}^n E_i & \xrightarrow{H_v} & \bigotimes_{i=1}^n E_i \end{array}$$

いま, $v \mapsto \Psi_v$ は線型であり, かつ Ψ_v と H_v は線型同型で結ばれているから $v \mapsto H_v$ の線型性が従う.

第四段 H_v の線型性と $v \mapsto H_v$ の線型性より

$$\Gamma : \left(\bigotimes_{i=1}^k E_i \right) \times \left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i \right) \ni (v, w) \longmapsto H_v(w)$$

により定める Γ は

$$\begin{aligned} \Gamma(e_1 \otimes \dots \otimes e_k, e_{k+1} \otimes \dots \otimes e_n) &= H_{e_1 \otimes \dots \otimes e_k}(e_{k+1} \otimes \dots \otimes e_n) \\ &= \Psi_{e_1 \otimes \dots \otimes e_k}(e_{k+1}, \dots, e_n) \\ &= G_{e_{k+1}, \dots, e_n}(e_1 \otimes \dots \otimes e_k) \\ &= \Phi_{e_{k+1}, \dots, e_n}(e_1, \dots, e_k) \\ &= e_1 \otimes \dots \otimes e_n \end{aligned} \tag{3}$$

を満たす双線型であり, 定理 0.3.3 より

$$\begin{array}{ccc} \left(\bigotimes_{i=1}^k E_i \right) \times \left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i \right) & & \\ \downarrow \otimes & \searrow \Gamma & \\ \left(\bigotimes_{i=1}^k E_i \right) \otimes \left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i \right) & \xrightarrow{G} & \bigotimes_{i=1}^n E_i \end{array}$$

を可換にする線型写像 G が存在する. この G は F の逆写像である. 実際, (3) より

$$\begin{aligned} F \circ G((e_1 \otimes \dots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \dots \otimes e_n)) &= F(\Gamma(e_1 \otimes \dots \otimes e_k, e_{k+1} \otimes \dots \otimes e_n)) \\ &= F(e_1 \otimes \dots \otimes e_n) \\ &= (e_1 \otimes \dots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \dots \otimes e_n) \end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned} G \circ F(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) &= G((e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n)) \\ &= \Gamma(e_1 \otimes \cdots \otimes e_k, e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n) \\ &= e_1 \otimes \cdots \otimes e_n \end{aligned}$$

が得られ $F^{-1} = G$ が従う.

■

0.4 テンソル積の内積

0.5 クロスノルム