ゼミ用ノート
会田先生の資料”Rough path analysis:An Introduction”

基礎工学研究科システム創成専攻
学籍番号 29C17095
百合川尚学

2018 年 4 月 18 日

目次

0.1　導入

以下，d 次元ベクトル $x \in \mathbb{R}^d$ と (m,d) 行列 $a \in \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^d$ について，成分を込めて表現する場合は $x = (x^1, \cdots, x^d)$, $a = (a^i_j)_{1 \le i \le m, 1 \le j \le d}$ と書く．また $T > 0$ を固定し $C^1 = C^1([0,T] \to \mathbb{R}^d)$ とおく．（端点においては片側微分を考える．）区間 $[s,t] \subset [0,T]$ の分割を $D = \{s = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t\}$ で表現し，分割の全体を $\delta[s,t]$ とおく．$|D|$ により $\max_{1 \le i \le N} |t_i - t_{i-1}|$ を表し，

$$\sum_D = \sum_{i=1}^N$$

と略記する．

定理 0.1.1 (Riemann-Stieltjes 積分)**.**　$[s,t] \subset [0,T]$ とし，$D \in \delta[s,t]$ についてのみ考えるとき，任意の $x \in C^1$, $f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ に対して次の極限が存在する:*1

$$\lim_{|D| \to 0} \sum_D f(x_{s_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) \in \mathbb{R}^m.$$

s_{i-1} は区間 $[t_{i-1}, t_i]$ に属する任意の点であり，極限は s_{i-1} の取り方に依らない．

証明.　各 x^j は C^1-級であるから，平均値の定理より $\sum_D f(x_{s_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})$ の第 k 成分を

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^d \sum_D f^k_j(x_{s_{i-1}})(x^j_{t_i} - x^j_{t_{i-1}}) \\
&= \sum_{j=1}^d \sum_D f^k_j(x_{s_{i-1}})\dot{x}^j_{\xi_i}(t_i - t_{i-1}), \quad ({}^\exists \xi_i \in [t_{i-1}, t_i])
\end{aligned}$$

と表現できる．各 j, k について

$$\lim_{|D| \to 0} \sum_D f^k_j(x_{s_{i-1}})\dot{x}^j_{\xi_i}(t_i - t_{i-1})$$

*1　極限の存在を保証する条件としては，f の有界性と微分可能性は必要ない．

は通常の連続関数の Riemann 積分

$$\int_s^t f_j^k(x_u)\dot{x}_u^j\,du$$

に収束する． ∎

定義 0.1.2 (C^1-級のパスに対する汎関数)**.** $x \in C^1$ と $f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ に対して，$[s,t] \subset [0,T]$ における Riemann-Stieltjes 積分を I で表現する:

$$I_{s,t}(x) = \int_s^t f(x_u)\,dx_u := \lim_{|D|\to 0}\sum_D f(x_{t_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}),$$

$$\left[\int_s^t f(x_u)\,dx_u\right]^k = \sum_{j=1}^d \int_s^t f_j^k(x_u)\,dx_u^j, \quad (k = 1, \cdots, m).$$

ただし $D \in \delta[s,t]$ のみを考える．

C^1 は次で定めるノルム $\|\cdot\|_{C^1}$ により Banach 空間となる:

$$\|x\|_\infty := \sup_{t\in[0,T]}|x(t)|, \quad \left\|x'\right\|_\infty := \sup_{t\in[0,T]}|x'(t)|, \quad \|x\|_{C^1} := \|x\|_\infty + \left\|x'\right\|_\infty.$$

定理 0.1.3 ($\|\cdot\|_{C^1}$ に関する連続性)**.** $[s,t] \subset [0,T]$ とし，C^1 には $\|\cdot\|_{C^1}$ でノルム位相を入れる．このとき，$C^1 \ni x \longmapsto I_{s,t}(x) \in \mathbb{R}^m$ は連続である．

証明. C^1 の第一可算性により点列連続性と連続性は一致するから，$x^n \longrightarrow x$ のとき $I_{s,t}(x^n) \longrightarrow I_{s,t}(x)$ が従うことを示せばよい．各 j,k について

$$\int_s^t f_j^k(x_u^n)\,dx_u^{n,j} \longrightarrow \int_s^t f_j^k(x_u)\,dx_u^j, \quad (n \longrightarrow \infty) \tag{1}$$

が成り立つことを示せば十分である．連続性より $M := \sup_{u\in[s,t]}|f(x_u)| < \infty$ が定まり

$$\begin{aligned}
\left|\int_s^t f_j^k(x_u^n)\,dx_u^{n,j} - \int_s^t f_j^k(x_u)\,dx_u^j\right| &= \left|\int_s^t f_j^k(x_u^n)\dot{x}_u^{n,j}\,du - \int_s^t f_j^k(x_u)\dot{x}_u^j\,du\right| \\
&\leq \int_s^t \left|f_j^k(x_u^n)\dot{x}_u^{n,j} - f_j^k(x_u^n)\dot{x}_u^j\right|\,du + \int_s^t \left|f_j^k(x_u^n)\dot{x}_u^j - f_j^k(x_u)\dot{x}_u^j\right|\,du \\
&\leq M\|x^n - x\|_{C^1}(t-s) + \sup_{u\in[s,t]}\left|f_j^k(x_u^n) - f_j^k(x_u)\right|\|x\|_{C^1}(t-s)
\end{aligned} \tag{2}$$

が成り立つ．いま，任意に $\epsilon > 0$ を取れば，或る $\epsilon > \delta > 0$ が存在して $v, w \in x([s,t])$, $|v - w| < \delta$ なら $|f_j^k(v) - f_j^k(w)| < \epsilon$ を満たす（一様連続）．すなわち $\left\|x^{(n)} - x\right\|_{C^1} < \delta$ なら

$$\sup_{t\in[s,t]}\left|f_j^k(x_t^n) - f_j^k(x_t)\right| < \epsilon$$

が成立する．$\|x^n - x\|_{C^1} \longrightarrow 0$ の仮定より，或る自然数 N が存在して $\|x^n - x\|_{C^1} < \delta\ (n > N)$ が満たされるから，$(2) < \epsilon[M(t-s) + \|x\|_{C^1}(t-s)]$ が成り立ち (1) が従う． ∎

定義 0.1.4 (p-variation). $[0,T]$ 上の $\mathbb{R}^d$ 値関数 x に対し，p-variation を次で定める:

$$\|x\|_{p,[s,t]} \coloneqq \left\{ \sup_{D\in\delta[s,t]} \sum_D \left|x_{t_i} - x_{t_{i-1}}\right|^p \right\}^{1/p}.$$

特に，$\|\cdot\|_{p,[0,T]}$ を $\|\cdot\|_p$ と表記する．また $p \geq 1$ として，線形空間 $B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$ を

$$B_{p,T}(\mathbb{R}^d) \coloneqq \left\{ x : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^d \ ; \quad x_0 = 0,\ x : \text{continuous},\ \|x\|_p < \infty \right\}$$

により定める．

次の結果によれば，$0 < p < 1$ に対し $B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$ を定めても 0 の定数関数のみの空間でしかない．

定理 0.1.5 ($0 < p < 1$ に対して有界 p-variation なら定数). $x : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ を連続関数とする．このとき，$p \in (0,1)$ に対し $\|x\|_p < \infty$ が成り立つなら x は定数関数である．

証明. $t \in [0,T]$ を任意に取り固定する．このとき全ての $D \in \delta[0,t]$ に対して，

$$\begin{aligned} |x_t - x_0| &\leq \sum_D \left|x_{t_i} - x_{t_{i-1}}\right| \leq \max_D \left|x_{t_i} - x_{t_{i-1}}\right|^{1-p} \sum_D \left|x_{t_i} - x_{t_{i-1}}\right|^p \\ &\leq \max_D \left|x_{t_i} - x_{t_{i-1}}\right|^{1-p} \|x\|_p \end{aligned}$$

が成り立ち，x の一様連続性から右辺は $|D| \longrightarrow 0$ で 0 に収束し，$x_t = x_0$ が従う． ∎

$p \geq 1$ の場合，Minkowski の不等式によれば，任意の $D \in \delta[s,t]$ に対し

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_D \left|(x_{t_i} + y_{t_i}) - (x_{t_{i-1}} + y_{t_{i-1}})\right|^p \right\}^{1/p} &\leq \left\{ \sum_D \left|x_{t_i} - x_{t_{i-1}}\right|^p \right\}^{1/p} + \left\{ \sum_D \left|y_{t_i} - y_{t_{i-1}}\right|^p \right\}^{1/p} \\ &\leq \|x\|_{p,[s,t]} + \|y\|_{p,[s,t]} \end{aligned}$$

が成り立ち $\|x+y\|_{p,[s,t]} \leq \|x\|_{p,[s,t]} + \|y\|_{p,[s,t]}$ を得る．

定理 0.1.6. $B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$ は $\|\cdot\|_p$ をノルムとする Banach 空間である．

証明. 完備性を示す．

第一段 $(x^n)_{n=1}^\infty \subset B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$ を Cauchy 列とすれば，任意の $\epsilon > 0$ に対して或る $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ が存在し

$$\|x^n - x^m\|_p = \left\{ \sup_{D\in\delta[0,T]} \sum_D \left|\left(x^n_{t_i} - x^m_{t_i}\right) - \left(x^n_{t_{i-1}} - x^m_{t_{i-1}}\right)\right|^p \right\}^{1/p} < \epsilon, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

を満たす．いま，任意の $t \in [0,T]$ に対して $[0,T]$ の分割 $D = \{0 \leq t \leq T\}$ を考えれば

$$|x^n_t - x^m_t| < \epsilon, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

が得られ，実数の完備性より或る $x_t \in \mathbb{R}^d$ が存在して

$$|x_t^n - x_t| < \epsilon \quad (n > n_\epsilon)$$

を満たす．この収束は t に関して一様であるから，$t \longmapsto x_t$ は 0 出発かつ連続である．

第二段　$\| x^n - x \|_p \longrightarrow 0 \ (n \longrightarrow \infty)$ を示す．前段によれば，任意の $D \in \delta[0,T]$ に対し

$$\sum_D \left| (x_{t_i}^m - x_{t_i}^n) - (x_{t_{i-1}}^m - x_{t_{i-1}}^n) \right|^p < \epsilon^p, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

が成り立っている．D はせいぜい有限個の分割であるから，$m \longrightarrow \infty$ として

$$\sum_D \left| (x_{t_i} - x_{t_i}^n) - (x_{t_{i-1}} - x_{t_{i-1}}^n) \right|^p < \epsilon^p, \quad (n > n_\epsilon)$$

が従い，D の任意性より $\| x^n - x \|_p < \epsilon \ (n > n_\epsilon)$ を得る．　■

定理 0.1.7.　$p \geq 1$ とする．また $x_0 = 0$ を満たす $x \in C^1$ の全体が作る線形空間を $\tilde{C}^1$ とおく．

(1)　$x \in C^1$ ならば $\| x \|_p < \infty$ が成り立つ．ただちに，$\| \cdot \|_p$ は $\tilde{C}^1$ においてノルムとなる．

(2)　$\tilde{C}^1$ において，$\| \cdot \|_{C^1}$ で導入する位相は $\| \cdot \|_p$ で導入する位相より強い．

証明.

$p = 1$ の場合　平均値の定理より，任意の $D \in \delta[0,T]$ に対し

$$\sum_D \left| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right| \leq \sum_D \sum_{j=1}^d \left| x_{t_i}^j - x_{t_{i-1}}^j \right| \leq \sum_D \sum_{j=1}^d \| x \|_{C^1} (t_i - t_{i-1}) = d \| x \|_{C^1} T < \infty$$

が成り立ち $\| x \|_1 < \infty$ が従う．

$p > 1$ の場合　q を p の共役指数とする．任意の $D \in \delta[0,T]$ に対し，Hölder の不等式より

$$\begin{aligned} \sum_D \left| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right|^p &\leq \sum_D \sum_{j=1}^d \left| x_{t_i}^j - x_{t_{i-1}}^j \right|^p = \sum_D \sum_{j=1}^d \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{x}_u^j \, du \right|^p \\ &\leq \sum_D \sum_{j=1}^d (t_i - t_{i-1}) \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} |\dot{x}_u^j|^q \, du \right)^{p/q} \leq \sum_D \sum_{j=1}^d (t_i - t_{i-1}) \left(\| x \|_{C^1}^q \int_0^T du \right)^{p/q} \leq d \| x \|_{C^1}^p T^p \end{aligned}$$

が成立し，$\| x \|_p < \infty$ が従う．

以上より，$p \geq 1$ ならば $\| x \|_p \leq dT \| x \|_{C^1} \ (x \in C^1)$ が成り立ち (2) の主張を得る．　■

次節の考察対象は主に定理 0.1.3 と定理 0.1.7 に関係する．定理 0.1.3 によれば，C^1 に $\| \cdot \|_{C^1}$ でノルム位相を導入した場合，$f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ に対して $C^1 \ni x \longmapsto I_{s,t}(x)$ は連続である．一方で定理 0.1.3 によれば，0 出発 C^1-パス空間 $\tilde{C}^1$ に $\| \cdot \|_p$ でノルム位相を導入した場合，$\tilde{C}^1 \ni x \longmapsto I_{s,t}(x)$ が連続であるという保証はない．しかし，次節以後の結果により，$1 \leq p < 3$ かつ $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ が満たされているなら $\tilde{C}^1 \ni x \longmapsto I_{s,t}(x)$ は或る意味での連続性を持つ．

0.2 連続性定理の主張

定義 0.2.1 (記号の定義). $x \in C^1$, $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ に対し次を定める．

$$\begin{aligned}
&\Delta_T := \{\, (s,t)\ ;\quad 0 \le s \le t \le T \,\},\\
&X^1 : \Delta_T \longrightarrow \mathbb{R}^d \ \Big((s,t) \longmapsto X^1_{s,t} = x_t - x_s\Big),\\
&X^2 : \Delta_T \longrightarrow \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d \ \left((s,t) \longmapsto X^2_{s,t} = \int_s^t (x_u - x_s) \otimes dx_u\right),\\
&\tilde{I}_{s,t}(x) := f(x_s)X^1_{s,t} = f(x_s)(x_t - x_s),\\
&J_{s,t}(x) := f(x_s)X^1_{s,t} + (\nabla f)(x_s)X^2_{s,t},\\
&\qquad \text{where } \left[(\nabla f)(x_s)X^2_{s,t}\right]^i = \sum_{j,k=1}^d \partial_k f^i_j(x_s) \int_s^t \left(x^k_u - x^k_s\right)\, dx^j_u.
\end{aligned}$$

定理 0.2.2. $[s,t] \subset [0,T]$, $x \in C^1$, $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ とする．$D \in \delta[s,t]$ に対し

$$\tilde{I}_{s,t}(x,D) := \sum_D \tilde{I}_{t_{i-1},t_i}(x), \quad J_{s,t}(x,D) := \sum_D J_{t_{i-1},t_i}(x)$$

を定めるとき，次が成立する:

$$I_{s,t}(x) = \lim_{|D|\to 0} \tilde{I}_{s,t}(x,D) = \lim_{|D|\to 0} J_{s,t}(x,D).$$

証明. 第一の等号は $I_{s,t}(x)$ の定義によるから，第二の等号を証明する．各 $1 \le i \le m$ について

$$\begin{aligned}
[I_{s,t}(x)]^i &= \sum_{j=1}^d \int_s^t f^i_j(x_u)\, dx^j_u\\
&= \sum_{j=1}^d \int_s^t f^i_j(x_s) + f^i_j(x_u) - f^i_j(x_s)\, dx^j_u\\
&= \sum_{j=1}^d \int_s^t f^i_j(x_s) + \sum_{k=1}^d \left\{\int_0^1 \partial_k f^i_j(x_s + \theta(x_u - x_s))\, d\theta\right\} (x^k_u - x^k_s)\, dx^j_u\\
&= \sum_{j=1}^d \int_s^t f^i_j(x_s)\, dx^j_u + \sum_{j,k=1}^d \partial_k f^i_j(x_s) \int_s^t (x^k_u - x^k_s)\, dx^j_u\\
&\quad + \sum_{j,k=1}^d \int_s^t \left\{\int_0^1 \partial_k f^i_j(x_s + \theta(x_u - x_s)) - \partial_k f^i_j(x_s)\, d\theta\right\} (x^k_u - x^k_s)\, dx^j_u,\\
&= [J_{s,t}(x)]^i + \sum_{j,k,\ell=1}^d \int_s^t \left\{\int_0^1 \left(\int_0^\theta \partial_\ell \partial_k f^i_j(x_s + r(x_u - x_s))\, dr\right) d\theta\right\} (x^\ell_u - x^\ell_s)(x^k_u - x^k_s)\, dx^j_u
\end{aligned}$$

が成り立つ．$x([0,T])$ はコンパクトであるから，$x_s + r(x_u - x_s)$ $(0 \le r \le 1,\ s \le u \le t)$ も或るコンパ

クト集合に含まれる．$\partial_\ell \partial_k f^i_j$ のそのコンパクト集合上での最大値を M とおけば

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_s^t \left\{ \int_0^1 \left(\int_0^\theta \partial_\ell \partial_k f^i_j(x_s + r(x_u - x_s))\, dr \right) d\theta \right\} (x^\ell_u - x^\ell_s)(x^k_u - x^k_s)\, dx^j_u \right| \\
&\qquad \le M \int_s^t |x^\ell_u - x^\ell_s||x^k_u - x^k_s||\dot{x}^j_u|\, du \\
&\qquad \le M \| x \|^3_{C^1} \int_s^t (u-s)^2\, du
\end{aligned}
$$

となるから，特に $D \in \delta[s,t]$ に対して

$$
\begin{aligned}
\sum_D \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - t_{i-1})^2\, du &\le \sum_D |D| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - t_{i-1})\, du \\
&\le \sum_D |D| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - s)\, du \le \frac{1}{2}(t-s)^2 |D| \longrightarrow 0 \quad (|D| \longrightarrow 0)
\end{aligned}
$$

が成立する．これにより

$$
\left| [I_{s,t}(x,D)]^i - [J_{s,t}(x,D)]^i \right| \longrightarrow 0 \quad (|D| \longrightarrow 0)
$$

が従い定理の主張を得る． ∎

定理 0.2.3 ($2 \le p < 3$ の場合の連続性定理)**.** $2 \le p < 3$, $x, y \in C^1$, $f \in C^2_b(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m)), 0 < R < \infty$ とし，$x_0 = y_0$ を仮定する．任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\left\| X^1 \right\|_p, \left\| Y^1 \right\|_p, \left\| X^2 \right\|_{p/2}, \left\| Y^2 \right\|_{p/2} \le R < \infty, \\
&\left\| X^1 - Y^1 \right\|_p, \left\| X^2 - Y^2 \right\|_{p/2} \le \epsilon
\end{aligned}
$$

が満たされている場合，或る定数 $C = C(p, R, f)$ が存在して次が成り立つ:

$$
\left| I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y) \right| \le \epsilon C.
$$

0.3 連続性定理の証明

定義 0.3.1 (control function)**.** 関数 $\omega : \Delta_T \longrightarrow [0, \infty)$ が連続かつ任意の $0 \le s \le u \le t \le T$ に対して

$$
\omega(s,u) + \omega(u,t) \le \omega(s,t) \tag{3}
$$

を満たすとき，ω を control function と呼ぶ.

定義 0.3.2 (ノルム空間値写像の p-variation). $(V, \|\cdot\|)$ をノルム空間とするとき，$p \geq 1$, $[s,t] \subset [0,T]$, $\psi : \Delta_T \longrightarrow V$ に対して

$$\|\psi\|_{p,[s,t]} \coloneqq \left\{ \sup_{D \in \delta[s,t]} \sum_D \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p \right\}^{1/p}$$

と定める．特に $\|\cdot\|_{p,[0,T]}$ を $\|\cdot\|_p$ と書く．

定理 0.3.3 (control function の例). 以下の関数 $\omega : \Delta_T \longrightarrow [0,\infty)$ は control function である．

(1) $\omega \coloneqq \left(\omega_1^r + \omega_2^r\right)^{1/r}$, $(0 < r \leq 1,\ \omega_1, \omega_2 : \text{control function})$.

(2) $\omega : (s,t) \longmapsto \left\| X^1 \right\|_{p:[s,t]}^p$, $(p \geq 1,\ x \in B_{p,T}(\mathbb{R}^d))$.

(3) $\omega : (s,t) \longmapsto \left\| X^2 \right\|_{p:[s,t]}^p$, $(p \geq 1,\ x \in C^1)$.

行列 $a = (a^i_j)$ のノルムは $|a| = \sqrt{\sum_{i,j} |a^i_j|^2}$ として考える．

定理 0.3.4.

(1)

(2) 任意の $D_1 \in \delta[s,u], D_2 \in \delta[u,t]$ に対して合併 $D_1 \cup D_2$ は $[s,t]$ の分割であるから，

$$\sum_{D_1} \left| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right|^p + \sum_{D_2} \left| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right|^p \leq \sup_{D \in \delta[s,t]} \sum_D \left| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right|^p = \left\| X^1 \right\|_{p:[s,t]}^p$$

が成り立つ．左辺の D_1, D_2 の取り方は独立であるから，それぞれに対し上限を取れば

$$\left\| X^1 \right\|_{p:[s,u]}^p + \left\| X^1 \right\|_{p:[u,t]}^p \leq \left\| X^1 \right\|_{p:[s,t]}^p$$

が得られる．

(3) 任意の $[s,t] \subset [0,T]$ に対して $\left\| X^2 \right\|_{p:[s,t]}^p < \infty$ を示せば，あとは上と同じ理由により (3) が成り立つ．$p \geq 1$ かつ $x \in C^1$ の下では，$D = \{s = t_0 < \cdots < t_N = t\}$ に対し

$$\begin{aligned}
\left\| X^2_{t_{i-1},t_i} \right\| &\leq \sum_{k,j=1}^d \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (x_u^k - x_{t_{i-1}}^k)\, dx_u^j \right| \leq \sum_{k,j=1}^d \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|x\|_{C^1}^2 (u - t_{i-1})\, du \\
&\leq d^2 \|x\|_{C^1}^2 \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u-s)\, du \right\}^{1/p} \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u-s)\, du \right\}^{1-1/p} \\
&\leq d^2 \|x\|_{C^1}^2 \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u-s)\, du \right\}^{1/p} \left\{ \int_s^t (u-s)\, du \right\}^{1-1/p}
\end{aligned}$$

が成り立つから，

$$\begin{aligned}
\sum_D \left\| X^2_{t_{i-1},t_i} \right\|^p &\leq \sum_D d^{2p} \|x\|_{C^1}^{2p} \left\{ \frac{1}{2}(t-s)^2 \right\}^{p-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u-s)\, du \\
&= d^{2p} \|x\|_{C^1}^{2p} \left\{ \frac{1}{2}(t-s)^2 \right\}^{p-1} \int_s^t (u-s)\, du = d^{2p} \|x\|_{C^1}^{2p} \left\{ \frac{1}{2}(t-s)^2 \right\}^p
\end{aligned}$$

により $\left\| X^2 \right\|_{p:[s,t]}^p < \infty$ を得る． ∎

補題 0.3.5 (division point). ω を Δ_T 上の control function とする．$D = \{s = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t\}$ について，$N \geq 2$ の場合或る $1 \leq i \leq N-1$ が存在して次を満たす:

$$\omega(t_{i-1}, t_{i+1}) \leq \frac{2\omega(s,t)}{N-1}.$$

以後この t_i を D の division point と呼ぶ.

定理 0.3.6 ($1 \leq p < 2$ の場合の連続性定理). $1 \leq p < 2$ とし，$x_0 = y_0$ を満たす $x, y \in C^1$ と $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$, $0 < \epsilon, R < \infty$ を任意に取る．このとき，

$$\left\| X^1 \right\|_p, \left\| Y^1 \right\|_p \leq R, \quad \left\| X^1 - Y^1 \right\|_p \leq \epsilon$$

なら，或る定数 $C = C(p, R, f)$ が存在し，任意の $0 \leq s \leq t \leq T$ に対して次が成立する:

$$\left| I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y) \right| \leq \epsilon C.$$

証明.

第一段　control function ω を

$$\omega(\alpha,\beta) = \left\| X^1 \right\|_{p,[\alpha,\beta]}^p + \left\| Y^1 \right\|_{p,[\alpha,\beta]}^p + \epsilon^{-p} \left\| X^1 - Y^1 \right\|_{p,[\alpha,\beta]}^p, \quad ((\alpha,\beta) \in \Delta_T)$$

により定める．任意に $[s,t] \subset [0,T]$ を固定し $D = \{s = t_0 < \cdots, t_N = t\} \in \delta[s,t]$ $(N \geq 2)$ を取れば division point t_{i_1} が存在する．$D_{-1} \coloneqq D \backslash \{t_{i_1}\}$ と定め，再び division point t_{i_2} を除き $D_{-2} \coloneqq D_{-1} \backslash \{t_{i_2}\}$ と定める．繰り返せば t_{i_k}, D_{-k} $(k = 1, \cdots, N-1)$ が得られ，

$$\begin{aligned}\tilde{I}_{s,t}(x, D) - \tilde{I}_{s,t}(y, D) = &\sum_{k=0}^{N-2} \left[\left\{ \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1}) \right\} - \left\{ \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k-1}) \right\} \right] \\ &+ \left\{ \tilde{I}_{s,t}(x) - \tilde{I}_{s,t}(y) \right\}\end{aligned} \tag{4}$$

と表現できる．ただし $D = D_{-0}$ と見做す.

第二段　式 (4) について，或る定数 C_1 が存在して

$$|(4)| \leq \epsilon C_1 \tag{5}$$

が成り立つことを示す．ここで

$$M \coloneqq \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq d}} |f_j^i(x)| + \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j,k \leq d}} |\partial_k f_j^i(x)| + \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j,k,v \leq d}} |\partial_v \partial_k f_j^i(x)|$$

とおく．各 $k = 0, 1, \cdots, N-2$ に対し

$$\begin{aligned}&\left\{ \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1}) \right\} - \left\{ \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k-1}) \right\} \\ &= \left\{ f(x_{t_{i_k}}) - f(x_{t_{i_k-1}}) \right\} X^1_{t_{i_k}, t_{i_k+1}} - \left\{ f(y_{t_{i_k}}) - f(y_{t_{i_k-1}}) \right\} Y^1_{t_{i_k}, t_{i_k+1}} \\ &= \left\{ f(x_{t_{i_k}}) - f(x_{t_{i_k-1}}) \right\} \left(X^1_{t_{i_k}, t_{i_k+1}} - Y^1_{t_{i_k}, t_{i_k+1}} \right) \\ &\quad + \left\{ f(x_{t_{i_k}}) - f(x_{t_{i_k-1}}) \right\} Y^1_{t_{i_k}, t_{i_k+1}} - \left\{ f(y_{t_{i_k}}) - f(y_{t_{i_k-1}}) \right\} Y^1_{t_{i_k}, t_{i_k+1}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{i_k}-1} + \theta(x_{t_{i_k}} - x_{t_{i_k}-1}))X^1_{t_{i_k-1},t_{i_k}} \otimes \left(X^1_{t_{i_k},t_{i_{k+1}}} - Y^1_{t_{i_k},t_{i_{k+1}}}\right)\, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{i_k}-1} + \theta(x_{t_{i_k}} - x_{t_{i_k}-1}))X^1_{t_{i_k-1},t_{i_k}} \otimes Y^1_{t_{i_k},t_{i_{k+1}}}\, d\theta \\
&\quad - \int_0^1 (\nabla f)(y_{t_{i_k}-1} + \theta(y_{t_{i_k}} - y_{t_{i_k}-1}))Y^1_{t_{i_k-1},t_{i_k}} \otimes Y^1_{t_{i_k},t_{i_{k+1}}}\, d\theta \\
&= \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{i_k}-1} + \theta(x_{t_{i_k}} - x_{t_{i_k}-1}))X^1_{t_{i_k-1},t_{i_k}} \otimes \left(X^1_{t_{i_k},t_{i_{k+1}}} - Y^1_{t_{i_k},t_{i_{k+1}}}\right)\, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{i_k}-1} + \theta(x_{t_{i_k}} - x_{t_{i_k}-1}))\left(X^1_{t_{i_k-1},t_{i_k}} - Y^1_{t_{i_k-1},t_{i_k}}\right) \otimes Y^1_{t_{i_k},t_{i_{k+1}}}\, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{i_k}-1} + \theta(x_{t_{i_k}} - x_{t_{i_k}-1}))Y^1_{t_{i_k-1},t_{i_k}} \otimes Y^1_{t_{i_k},t_{i_{k+1}}}\, d\theta \\
&\quad - \int_0^1 (\nabla f)(y_{t_{i_k}-1} + \theta(y_{t_{i_k}} - y_{t_{i_k}-1}))Y^1_{t_{i_k-1},t_{i_k}} \otimes Y^1_{t_{i_k},t_{i_{k+1}}}\, d\theta \\
&= \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{i_k}-1} + \theta(x_{t_{i_k}} - x_{t_{i_k}-1}))X^1_{t_{i_k-1},t_{i_k}} \otimes \left(X^1_{t_{i_k},t_{i_{k+1}}} - Y^1_{t_{i_k},t_{i_{k+1}}}\right)\, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{i_k}-1} + \theta(x_{t_{i_k}} - x_{t_{i_k}-1}))\left(X^1_{t_{i_k-1},t_{i_k}} - Y^1_{t_{i_k-1},t_{i_k}}\right) \otimes Y^1_{t_{i_k},t_{i_{k+1}}}\, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^1 (\nabla^2 f)(\tilde{y} + r(\tilde{x} - \tilde{y}))\left(X^1_{0,t_{i_k}-1} - Y^1_{0,t_{i_k}-1}\right) \otimes Y^1_{t_{i_k-1},t_{i_k}} \otimes Y^1_{t_{i_k},t_{i_{k+1}}}\, dr\, d\theta\ {}^{*2} \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^1 (\nabla^2 f)(\tilde{y} + r(\tilde{x} - \tilde{y}))\theta\left(X^1_{t_{i_k}-1,t_{i_k}} - Y^1_{t_{i_k}-1,t_{i_k}}\right) \otimes Y^1_{t_{i_k-1},t_{i_k}} \otimes Y^1_{t_{i_k},t_{i_{k+1}}}\, dr\, d\theta
\end{aligned}
$$

が成り立つ．補題 0.3.5 より

$$
\begin{aligned}
&\left|X^1_{t_{i_k}-1,t_{i_k}}\right|, \left|Y^1_{t_{i_k}-1,t_{i_k}}\right| \le \omega(t_{i_k}-1, t_{i_k})^{1/p} \le \left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1}\right)^{1/p}, \\
&\left|X^1_{t_{i_k},t_{i_k}+1}\right|, \left|Y^1_{t_{i_k},t_{i_k}+1}\right| \le \omega(t_{i_k}, t_{i_k}+1)^{1/p} \le \left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1}\right)^{1/p}, \\
&\left|X^1_{t_{i_k}-1,t_{i_k}} - Y^1_{t_{i_k}-1,t_{i_k}}\right| \le \epsilon\omega(t_{i_k}-1, t_{i_k})^{1/p} \le \epsilon\left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1}\right)^{1/p}, \\
&\left|X^1_{t_{i_k},t_{i_k}+1} - Y^1_{t_{i_k},t_{i_k}+1}\right| \le \epsilon\omega(t_{i_k}, t_{i_k}+1)^{1/p} \le \epsilon\left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1}\right)^{1/p}
\end{aligned}
$$

が満たされ，また

$$
\left|X^1_{0,t_{i_k}-1} - Y^1_{0,t_{i_k}-1}\right| \le \epsilon\omega(0,T)^{1/p} \le \epsilon\,(2R^p+1)^{1/p}
$$

でもあるから，

$$
\begin{aligned}
&\left|\left\{\tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1})\right\} - \left\{\tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k-1})\right\}\right| \\
&\le mdM\left|X^1_{t_{i_k}-1,t_{i_k}}\right|\left|X^1_{t_{i_k},t_{i_k}+1} - Y^1_{t_{i_k},t_{i_k}+1}\right| \\
&\quad + mdM\left|X^1_{t_{i_k}-1,t_{i_k}} - Y^1_{t_{i_k}-1,t_{i_k}}\right|\left|Y^1_{t_{i_k},t_{i_k}+1}\right| \\
&\quad + md^2M\left|X^1_{0,t_{i_k}-1} - Y^1_{0,t_{i_k}-1}\right|\left|Y^1_{t_{i_k}-1,t_{i_k}}\right|\left|Y^1_{t_{i_k},t_{i_k}+1}\right|
\end{aligned}
$$

---

*2 $\tilde{x} = x_{t_{i_k}-1} + \theta(x_{t_{i_k}} - x_{t_{i_k}-1})$, $\tilde{y} = y_{t_{i_k}-1} + \theta(y_{t_{i_k}} - y_{t_{i_k}-1})$ とおいた．また $x_0 = y_0$ の仮定より $x_{t_{i_k}-1} - y_{t_{i_k}-1} = X^1_{0,t_{i_k}-1} - Y^1_{0,t_{i_k}-1}$ が出る．

$$
\begin{aligned}
&+ md^2 M \left|X^1_{t_{i_k}-1,t_{i_k}} - Y^1_{t_{i_k}-1,t_{i_k}}\right| \left|Y^1_{t_{i_k}-1,t_{i_k}}\right| \left|Y^1_{t_{i_k},t_{i_k}+1}\right| \\
&\leq \epsilon md^2 M \left[2 + 2\left(2R^p + 1\right)^{1/p}\right] \left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1}\right)^{2/p} \\
&\leq \epsilon md^2 M \left[2 + 2\left(2R^p + 1\right)^{1/p}\right] 2^{2/p} \left(2R^p + 1\right)^{2/p} \left(\frac{1}{N-k-1}\right)^{2/p}
\end{aligned}
$$

を得る．

$$
C_1' \coloneqq md^2 M \left[2 + 2\left(2R^p + 1\right)^{1/p}\right] 2^{2/p} \left(2R^p + 1\right)^{2/p}
$$

と定めれば

$$
|(4)| \leq \sum_{k=0}^{N-2} \epsilon C_1' \left(\frac{1}{N-k-1}\right)^{2/p} < \epsilon C_1' \zeta\left(\frac{2}{p}\right)
$$

が成立し，$p < 2$ より $\zeta(2/p) < \infty$ であるから $C_1 \coloneqq C_1' \zeta(2/p)$ とおいて (0.3) が従う．

第三段　$x_0 = y_0$ の仮定により

$$
\begin{aligned}
\left|\tilde{I}_{s,t}(x) - \tilde{I}_{s,t}(y)\right| &= \left|f(x_s)X^1_{s,t} - f(y_s)Y^1_{s,t}\right| \\
&\leq \left|f(x_s)X^1_{s,t} - f(x_s)Y^1_{s,t}\right| + \left|f(x_s)Y^1_{s,t} - f(y_s)Y^1_{s,t}\right| \\
&\leq mdM \left|X^1_{s,t} - Y^1_{s,t}\right| + \left|\left\{\int_0^1 (\nabla f)(y_s + \theta(x_s - y_s))\, d\theta\right\} (x_s - y_s) \otimes Y^1_{s,t}\right| \\
&\leq mdM \left|X^1_{s,t} - Y^1_{s,t}\right| + md^2 M \left|X^1_{0,s} - Y^1_{0,s}\right| \left|Y^1_{s,t}\right| \\
&\leq M\epsilon\omega(s,t)^{1/p} + md^2 M\epsilon\omega(0,s)^{1/p}\omega(s,t)^{1/p} \\
&\leq \epsilon C_2
\end{aligned}
$$

が成立する．ここで $C_2 = mdM\left(2R^p + 1\right)^{1/p} + md^2 M\left(2R^p + 1\right)^{2/p}$ とした．

第四段　第二段と第三段より，任意の $D \in \delta[s,t]$ に対し

$$
\left|\tilde{I}_{s,t}(x,D) - \tilde{I}_{s,t}(y,D)\right| \leq \epsilon(C_1 + C_2)
$$

が満たされる．定理 0.2.2 により $|D| \longrightarrow 0$ として

$$
\left|I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y)\right| \leq \epsilon(C_1 + C_2)
$$

が成立する．　∎

補題 0.3.7. $x \in C^1,\ f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ とする．

(1) $1 \le p < 2$ の場合，或る control function ω が存在して

$$\left|X^1_{s,t}\right| \le \omega(s,t)^{1/p}, \quad (0 \le \forall s \le \forall t \le T)$$

を満たすとき，ある定数 $C = C(p,f)$ があり

$$\left|I_{s,t}(x)\right| \le C\left(\omega(s,t)^{1/p} + \omega(s,t)^{2/p}\right).$$

が成立する．

(2) $2 \le p < 3$ の場合，或る control function ω が存在して

$$\left|X^1_{s,t}\right| \le \omega(s,t)^{1/p}, \quad \left|X^2_{s,t}\right| \le \omega(s,t)^{2/p}, \quad (0 \le \forall s \le \forall t \le T)$$

を満たすとき，ある定数 $C = C(p,f)$ があり

$$\left|I_{s,t}(x)\right| \le C\left(\omega(s,t)^{1/p} + \omega(s,t)^{2/p} + \omega(s,t)^{3/p}\right).$$

が成立する．

証明.

(1) $D = \{s = t_0 < \cdots < t_N = t\}$ $(N \ge 2)$ に対し，補題 0.3.5 により存在する i を取り $D_{-1} := D \backslash \{i\}$ と書く．補題 0.3.5 の添数を除く作業を続けて D_{-k} $(k = 1, \cdots, N-1)$ を構成する．

$$M := \max_{\substack{t \in [0,T] \\ 1 \le i \le m \\ 1 \le j,k \le d}} \left|\partial_k f^i_j(x_t)\right|, \quad M' := \max_{t \in [0,T]} |f(x_t)|$$

とおけば $M, M' < \infty$ であり，$\left|X^1_{t_i,t_{i+1}}\right| \le \omega(t_i, t_{i+1})^{1/p} \le \omega(t_{i-1}, t_{i+1})^{1/p}$ と補題 0.3.5 により

$$\begin{aligned}
\left|\tilde{I}_{s,t}(x,D) - \tilde{I}_{s,t}(x,D_{-1})\right| &= \left|\tilde{I}_{t_{i-1},t_i}(x) + \tilde{I}_{t_i,t_{i+1}}(x) - \tilde{I}_{t_{i-1},t_{i+1}}(x)\right| \\
&\le \left|\{f(x_{t_i}) - f(x_{t_{i-1}})\} X^1_{t_i,t_{i+1}}\right| \\
&\le \left|\left\{\int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{i-1}} + \theta(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}))\, d\theta\right\} X^1_{t_{i-1},t_i} \otimes X^1_{t_i,t_{i+1}}\right| \\
&\le md^2 M \left|X^1_{t_i,t_{i+1}}\right|^2 \\
&\le md^2 M \left(\frac{2\omega(s,t)}{N-1}\right)^{2/p}
\end{aligned}$$

が成立する．同様に

$$\left|\tilde{I}_{s,t}(x,D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x,D_{-k-1})\right| \le md^2 M \left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1}\right)^{2/p}, \quad (k = 0, \cdots, N-2)$$

が成り立ち $(D_{-0} = D)$

$$\left|\tilde{I}_{s,t}(x,D) - f(x_s)X^1_{s,t}\right| \le \sum_{k=0}^{N-2} \left|\tilde{I}_{s,t}(x,D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x,D_{-k-1})\right|$$

$$
\begin{aligned}
&\le md^2 M(2\omega(s,t))^{2/p} \sum_{k=0}^{N-2} \left(\frac{1}{N-k-1} \right)^{2/p} \\
&\le md^2 M(2\omega(s,t))^{2/p} \zeta\!\left(\frac{2}{p}\right)
\end{aligned}
$$

が従う．いま，仮定より $p < 2$ であるから $\zeta(2/p) < \infty$ であり，定理 0.2.2 より

$$
\left| I_{s,t}(x) \right| \le M' \omega(s,t)^{1/p} + md^2 M(2\omega(s,t))^{2/p} \zeta\!\left(\frac{2}{p}\right)
$$

を得る．

(2) (1) と同様に D_{-k} $(k = 1, \cdots, N-1)$ を構成する．会田先生のノートの通りに

$$
\begin{aligned}
J_{s,t}(x,D) - J_{s,t}(x,D_{-1}) = &\left\{ \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{i-1}} + \theta(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}))\, dr\, d\theta \right\} X^1_{t_{i-1},t_i} \otimes X^1_{t_{i-1},t_i} \otimes X^1_{t_i,t_{i+1}} \\
&+ \left\{ \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{i-1}} + \theta(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}))\, d\theta \right\} X^1_{t_{i-1},t_i} \otimes X^2_{t_i,t_{i+1}}
\end{aligned}
$$

を得る．ここで (1) の M, M' に加えて

$$
M'' \coloneqq \max_{\substack{t\in[0,T] \\ 1\le i\le m \\ 1\le j,k,v\le d}} \left| \partial_v \partial_k f^i_j(x_t) \right|
$$

とおけば

$$
\begin{aligned}
\left| J_{s,t}(x,D_{-k}) - J_{s,t}(x,D_{-k-1}) \right| &\le md^2 M \left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1} \right)^{3/p} + md^2 M'' \left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1} \right)^{1/p} \left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1} \right)^{2/p} \\
&\le md^2 (M + M'') \left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1} \right)^{3/p}
\end{aligned}
$$

が成立し，会田先生のノートの通りに

$$
\left| J_{s,t}(x,D) - \left(f(x_s) X^1_{s,t} + (\nabla f)(x_s) X^2_{s,t} \right) \right| \le 2^{3/p} md^2 (M + M'') \zeta\!\left(\frac{3}{p}\right) \omega(s,t)^{3/p}
$$

が従い，$p < 3$ の仮定より $\zeta(3/p) < \infty$ である．(1) と同じく定理 0.2.2 より

$$
\left| I_{s,t}(x) \right| \le M' \omega(s,t)^{1/p} + md^2 M \omega(s,t)^{2/p} + 2^{3/p} md^2 (M + M'') \zeta\!\left(\frac{3}{p}\right) \omega(s,t)^{3/p}
$$

となる． ∎

補題 0.3.8 (定理 0.3.6，0.2.3 のキーレンマ). $x, y \in C^1$, $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ とし，$x_0 = y_0$ を仮定する．

(1) $1 \leq p < 2$ の場合，任意の $\epsilon > 0$ に対し或る control function ω が存在して

$$\left|X_{s,t}^1\right|, \left|Y_{s,t}^1\right| \leq \omega(s,t)^{1/p},$$
$$\left|X_{s,t}^1 - Y_{s,t}^1\right| \leq \epsilon\omega(s,t)^{1/p}, \quad (0 \leq \forall s \leq \forall t \leq T)$$

を満たすとき，ある定数 $C = C(p, f, \omega(0,T))$ があり

$$\left|I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y)\right| \leq \epsilon C\omega(s,t)^{1/p}.$$

が成立する．

(2)

証明.

(1) 補題 0.3.7 と同様に D_{-k} $(k = 0, 1, \cdots, N-1)$ を作る．D_{-k} の division point を t_i と書けば

$$\begin{aligned}
&\left\{\tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1})\right\} - \left\{\tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k-1})\right\} \\
&= \left\{\int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{i-1}} + \theta(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}))\, d\theta\right\} X_{t_{i-1},t_i}^1 \otimes X_{t_i,t_{i+1}}^1 \\
&\quad - \left\{\int_0^1 (\nabla f)(y_{t_{i-1}} + \theta(y_{t_i} - y_{t_{i-1}}))\, d\theta\right\} Y_{t_{i-1},t_i}^1 \otimes Y_{t_i,t_{i+1}}^1 \\
&= \left\{\int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{i-1}} + \theta(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}))\, d\theta\right\} X_{t_{i-1},t_i}^1 \otimes \left(X_{t_i,t_{i+1}}^1 - Y_{t_i,t_{i+1}}^1\right) \\
&\quad + \left\{\int_0^1 (\Delta f)\left(x_{t_{i-1}} + \theta(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})\right) - (\nabla f)\left(y_{t_{i-1}} + \theta(y_{t_i} - y_{t_{i-1}})\right)\, d\theta\right\} X_{t_{i-1},t_i}^1 \otimes Y_{t_i,t_{i+1}}^1 \\
&\quad + \left\{\int_0^1 (\nabla f)(y_{t_{i-1}} + \theta(y_{t_i} - y_{t_{i-1}}))\, d\theta\right\} \left(X_{t_{i-1},t_i}^1 - Y_{t_{i-1}}^1\right) \otimes Y_{t_i,t_{i+1}}^1 \\
&= \left\{\int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{i-1}} + \theta(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}))\, d\theta\right\} X_{t_{i-1},t_i}^1 \otimes \left(X_{t_i,t_{i+1}}^1 - Y_{t_i,t_{i+1}}^1\right) \\
&\quad + \left\{\int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)\left(y_{t_{i-1}} + \theta(y_{t_i} - y_{t_{i-1}}) + r\left(x_{t_i} - x_{t_{i-1}} - y_{t_i} + y_{t_{i-1}}\right) + x_{t_{i-1}} - y_{t_{i-1}}\right)\, dr\, d\theta\right\} \\
&\qquad \left(X_{t_{i-1},t_i}^1 - Y_{t_{i-1},t_i}^1\right) \otimes X_{t_{i-1},t_i}^1 \otimes Y_{t_i,t_{i+1}}^1 \\
&\quad + \left\{\int_0^1 (\nabla f)(y_{t_{i-1}} + \theta(y_{t_i} - y_{t_{i-1}}))\, d\theta\right\} \left(X_{t_{i-1},t_i}^1 - Y_{t_{i-1}}^1\right) \otimes Y_{t_i,t_{i+1}}^1
\end{aligned}$$

が成り立つから，仮定より

$$\begin{aligned}
&\left|\left\{\tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1})\right\} - \left\{\tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k-1})\right\}\right| \\
&\quad \leq md^2 \|\nabla f\|_\infty \left|X_{t_{i-1},t_i}^1\right| \left|X_{t_i,t_{i+1}}^1 - Y_{t_i,t_{i+1}}^1\right| \\
&\quad + md^3 \left\|\nabla^2 f\right\|_\infty \left|X_{t_{i-1},t_i}^1 - Y_{t_{i-1},t_i}^1\right| \left|X_{t_{i-1},t_i}^1\right| \left|Y_{t_{i-1},t_i}^1\right| \\
&\quad + md^2 \|\nabla f\|_\infty \left|X_{t_{i-1},t_i}^1 - Y_{t_{i-1},t_i}^1\right| \left|Y_{t_{i-1},t_i}^1\right|
\end{aligned}$$

$x_0 = y_0$ の仮定により

$$\begin{aligned}
\left|\tilde{I}_{s,t}(x) - \tilde{I}_{s,t}(y)\right| &= \left|f(x_s)X^1_{s,t} - f(y_s)Y^1_{s,t}\right| \\
&\leq \left|f(x_s)X^1_{s,t} - f(x_s)Y^1_{s,t}\right| + \left|f(x_s)Y^1_{s,t} - f(y_s)Y^1_{s,t}\right| \\
&\leq M' \left|X^1_{s,t} - Y^1_{s,t}\right| + \left|\left\{\int_0^1 (\nabla f)(y_s + \theta(x_s - y_s))\, d\theta\right\}(x_s - y_s) \otimes Y^1_{s,t}\right| \\
&\leq M' \left|X^1_{s,t} - Y^1_{s,t}\right| + md^2 M \left|X^1_{0,s} - Y^1_{0,s}\right| \left|Y^1_{s,t}\right| \\
&\leq M' \epsilon \omega(s,t)^{1/p} + md^2 M \epsilon \omega(0,s)^{1/p} \omega(s,t)^{1/p}
\end{aligned}$$

が成立する．

証明 (定理 0.3.6). 1 ≤ p の場合，定理 0.3.3 より

$$\omega(s,t) \coloneqq \left\| X^1 \right\|^p_{p,[s,t]} + \left\| Y^1 \right\|^p_{p,[s,t]} + \left(\epsilon^{-1} \left\| X^1 - Y^1 \right\|^p_{p,[s,t]}\right)^p, \quad ((s,t) \in \Delta_T)$$

で control function が定まり，定理 0.3.8(1) の仮定を満たす． ∎