ゼミ用ノート
会田先生の資料”Rough path analysis:An Introduction”

基礎工学研究科システム創成専攻
学籍番号 29C17095
百合川尚学

2018 年 5 月 9 日

目次

0.1　導入

以下，d 次元ベクトル $x \in \mathbb{R}^d$ と (m,d) 行列 $a \in \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^d$ について，成分を込めて表現する場合は $x = (x^1, \cdots, x^d)$, $a = (a^i_j)_{1\le i\le m, 1\le j\le d}$ と書く．また $T > 0$ を固定し $C^1 = C^1([0,T] \to \mathbb{R}^d)$ とおく．（端点においては片側微分を考える．）区間 $[s,t] \subset [0,T]$ の分割を $D = \{s = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t\}$ で表現し，分割の全体を $\delta[s,t]$ とおく．$|D| := \max_{1\le i\le N} |t_i - t_{i-1}|$ とし，

$$\sum_D = \sum_{i=1}^N$$

と略記する．

定理 0.1.1 (Riemann-Stieltjes 積分)．　$[s,t] \subset [0,T]$ とし，$D \in \delta[s,t]$ についてのみ考えるとき，任意の $x \in C^1$，$f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ に対して次の極限が存在する:[*1]

$$\lim_{|D|\to 0} \sum_D f(x_{s_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) \in \mathbb{R}^m.$$

s_{i-1} は区間 $[t_{i-1}, t_i]$ に属する任意の点であり，極限は s_{i-1} の取り方に依らない．

証明．　各 x^j は C^1-級であるから，平均値の定理より $\sum_D f(x_{s_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})$ の第 k 成分を

$$\sum_{j=1}^d \sum_D f^k_j(x_{s_{i-1}})(x^j_{t_i} - x^j_{t_{i-1}})$$

[*1] 極限の存在を保証する条件としては，f の有界性と微分可能性は必要ない．

$$= \sum_{j=1}^{d} \sum_{D} f_j^k(x_{s_{i-1}}) \dot{x}_{\xi_i}^j (t_i - t_{i-1}), \quad ({}^{\exists}\xi_i \in [t_{i-1}, t_i])$$

と表現できる．各 j, k について

$$\lim_{|D| \to 0} \sum_{D} f_j^k(x_{s_{i-1}}) \dot{x}_{\xi_i}^j (t_i - t_{i-1})$$

は通常の連続関数の Riemann 積分

$$\int_s^t f_j^k(x_u) \dot{x}_u^j \, du$$

に収束する. ∎

定義 0.1.2 (C^1-級のパスに対する汎関数). $x \in C^1$ と $f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ に対して，$[s, t] \subset [0, T]$ における Riemann-Stieltjes 積分を I で表現する:

$$I_{s,t}(x) = \int_s^t f(x_u) \, dx_u := \lim_{|D| \to 0} \sum_{D} f(x_{t_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}),$$

$$\left[\int_s^t f(x_u) \, dx_u \right]^k = \sum_{j=1}^{d} \int_s^t f_j^k(x_u) \, dx_u^j, \quad (k = 1, \cdots, m).$$

ただし $D \in \delta[s, t]$ のみを考える．

C^1 は次で定めるノルム $\|\cdot\|_{C^1}$ により Banach 空間となる:

$$\|x\|_{C^1} := \sup_{t \in [0,T]} |x(t)| + \sup_{t \in [0,T]} |\dot{x}(t)|.$$

定理 0.1.3 ($\|\cdot\|_{C^1}$ に関する連続性). $[s, t] \subset [0, T]$ とし，C^1 には $\|\cdot\|_{C^1}$ でノルム位相を入れる．このとき，$C^1 \ni x \longmapsto I_{s,t}(x) \in \mathbb{R}^m$ は連続である．

証明. C^1 の第一可算性により点列連続性と連続性は一致するから，$x^n \longrightarrow x$ のとき $I_{s,t}(x^n) \longrightarrow I_{s,t}(x)$ が従うことを示せばよい．

$$M := \sup_{u \in [s,t]} |f(x_u)| < \infty$$

を定めれば

$$\begin{aligned}
\left| \int_s^t f(x_u^n) \, dx_u^n - \int_s^t f(x_u) \, dx_u \right| &= \left| \int_s^t f(x_u^n) \dot{x}_u^n \, du - \int_s^t f(x_u) \dot{x}_u \, du \right| \\
&\leq \int_s^t \left| f(x_u^n) \dot{x}_u^n - f(x_u^n) \dot{x}_u \right| \, du + \int_s^t \left| f(x_u^n) \dot{x}_u - f(x_u) \dot{x}_u \right| \, du \\
&\leq M \|x^n - x\|_{C^1} (t - s) + \sup_{u \in [s,t]} \left| f(x_u^n) - f(x_u) \right| \|x\|_{C^1} (t - s) \qquad (1)
\end{aligned}$$

が成り立つ．いま，任意に $\epsilon > 0$ を取れば，或る $\epsilon > \delta > 0$ が存在して $v, w \in x([s,t])$, $|v - w| < \delta$ なら $|f(v) - f(w)| < \epsilon$ を満たす（一様連続）．すなわち $\left\| x^{(n)} - x \right\|_{C^1} < \delta$ なら

$$\sup_{t \in [s,t]} \left| f(x_t^n) - f(x_t) \right| < \epsilon$$

が成立する．$\| x^n - x \|_{C^1} \longrightarrow 0$ の仮定より，或る自然数 N が存在して $\| x^n - x \|_{C^1} < \delta \ (n > N)$ が満たされるから，$(1) < \epsilon[M(t-s) + \| x \|_{C^1} (t-s)] \ (n > N)$ が成り立ち $I_{s,t}(x^n) \longrightarrow I_{s,t}(x)$ が従う． ∎

定義 0.1.4 (p-variation). $(V, \| \cdot \|)$ をノルム空間とし，$[0,T]$ 上の V 値写像 x と $[s,t] \subset [0,T]$ に対して p-variation ($p > 0$) を次で定める:

$$\| x \|_{p,[s,t]} \coloneqq \left\{ \sup_{D \in \delta[s,t]} \sum_D \left\| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right\|^p \right\}^{1/p}.$$

特に，$\| \cdot \|_{p,[0,T]}$ を $\| \cdot \|_p$ と表記する．また $p \geq 1$ として，線型空間 $B_{p,T}(V)$ を

$$B_{p,T}(V) \coloneqq \left\{ x : [0,T] \longrightarrow V \ ; \quad x_0 = 0,\ x : \text{continuous},\ \| x \|_p < \infty \right\}$$

により定める．

次の結果によれば，$0 < p < 1$ に対し $B_{p,T}(V)$ を定めても零写像のみの空間でしかない．

定理 0.1.5 ($0 < p < 1$ に対して有界 p-variation なら定数). $x : [0,T] \longrightarrow V$ を連続写像とする．このとき，$p \in (0,1)$ に対し $\| x \|_p < \infty$ が成り立つなら x は定数写像である．

証明. $t \in [0,T]$ を任意に取り固定する．このとき全ての $D \in \delta[0,t]$ に対して，

$$\begin{aligned} \| x_t - x_0 \| &\leq \sum_D \left\| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right\| \leq \max_D \left\| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right\|^{1-p} \sum_D \left\| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right\|^p \\ &\leq \max_D \left\| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right\|^{1-p} \| x \|_p \end{aligned}$$

が成り立ち，x の一様連続性から右辺は $|D| \longrightarrow 0$ で 0 に収束し，$x_t = x_0$ が従う． ∎

定理 0.1.6 (p-variation の p に関する単調減少性). V をノルム空間とするとき，$x : [0,T] \longrightarrow V$ に対して $1 \leq p \leq q$ なら $\| x \|_p \geq \| x \|_q$ が成立する．特に $B_{p,T}(V) \subset B_{q,T}(V)$ が従う．

証明. $\left(\sum_i |a_i|^p\right)^{1/p} \leq \sum_i |a_i| \ (a_i \in \mathbb{R},\ p \geq 1)$ により，任意の $x \in B_{p,T}(V)$ と $D \in \delta[0,T]$ に対し

$$\left[\sum_D \left(\left\| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right\|^p \right)^{q/p} \right]^{p/q} \leq \sum_D \left\| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right\|^p$$

が満たされ $\| x \|_q \leq \| x \|_p$ が成立する． ∎

$p \geq 1$ の場合，Minkowski の不等式によれば，任意の $D \in \delta[s,t]$ に対し

$$\begin{aligned}\left\{\sum_D \left\| (x_{t_i}+y_{t_i})-(x_{t_{i-1}}+y_{t_{i-1}}) \right\|^p\right\}^{1/p} &\leq \left\{\sum_D \left\| x_{t_i}-x_{t_{i-1}} \right\|^p\right\}^{1/p} + \left\{\sum_D \left\| y_{t_i}-y_{t_{i-1}} \right\|^p\right\}^{1/p} \\ &\leq \| x \|_{p,[s,t]} + \| y \|_{p,[s,t]}\end{aligned}$$

が成り立ち $\| x+y \|_{p,[s,t]} \leq \| x \|_{p,[s,t]} + \| y \|_{p,[s,t]}$ を得る．

定理 0.1.7.　V が Banach 空間のとき，$B_{p,T}(V)$ は $\|\cdot\|_p$ をノルムとする Banach 空間である．

証明．　完備性を示す．

第一段　$(x^n)_{n=1}^{\infty} \subset B_{p,T}(V)$ を Cauchy 列とすれば，任意の $\epsilon > 0$ に対して或る $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ が存在し

$$\| x^n - x^m \|_p = \left\{\sup_{D\in\delta[0,T]} \sum_D \left\| \left(x^n_{t_i} - x^m_{t_i}\right) - \left(x^n_{t_{i-1}} - x^m_{t_{i-1}}\right) \right\|^p\right\}^{1/p} < \epsilon, \quad (n,m > n_\epsilon)$$

を満たす．いま，任意の $t \in [0,T]$ に対して $[0,T]$ の分割 $D = \{0 \leq t \leq T\}$ を考えれば

$$\left\| x^n_t - x^m_t \right\| < \epsilon, \quad (n,m > n_\epsilon)$$

が得られ，V の完備性より或る $x_t \in \mathbb{R}^d$ が存在して

$$\left\| x^n_t - x_t \right\| < \epsilon \quad (n > n_\epsilon)$$

を満たす．この収束は t に関して一様であるから，$t \longmapsto x_t$ は 0 出発かつ連続である．

第二段　$\| x^n - x \|_p \longrightarrow 0\ (n \longrightarrow \infty)$ を示す．前段によれば，任意の $D \in \delta[0,T]$ に対し

$$\sum_D \left\| (x^m_{t_i} - x^n_{t_i}) - (x^m_{t_{i-1}} - x^n_{t_{i-1}}) \right\|^p < \epsilon^p, \quad (n,m > n_\epsilon)$$

が成り立っている．D はせいぜい有限個の分割であるから，$m \longrightarrow \infty$ として

$$\sum_D \left\| (x_{t_i} - x^n_{t_i}) - (x_{t_{i-1}} - x^n_{t_{i-1}}) \right\|^p < \epsilon^p, \quad (n > n_\epsilon)$$

が従い，D の任意性より $\| x^n - x \|_p < \epsilon\ (n > n_\epsilon)$ を得る． ∎

定理 0.1.8.　$p \geq 1$ とする．また $x_0 = 0$ を満たす $x \in C^1$ の全体が作る線形空間を $\tilde{C}^1$ とおく．

(1)　$x \in C^1$ ならば $\| x \|_p < \infty$ が成り立つ．ただちに，$\|\cdot\|_p$ は $\tilde{C}^1$ においてノルムとなる．

(2)　$\tilde{C}^1$ において，$\|\cdot\|_{C^1}$ で導入する位相は $\|\cdot\|_p$ で導入する位相より強い．

証明．

$p = 1$ の場合　平均値の定理より，任意の $D \in \delta[0,T]$ に対し

$$\sum_D \left| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right| \leq \sum_D \| x \|_{C^1} (t_i - t_{i-1}) = \| x \|_{C^1}\, T < \infty$$

が成り立ち $\| x \|_1 < \infty$ が従う．

$p > 1$ の場合　q を p の共役指数とする．任意の $D \in \delta[0,T]$ に対し，Hölder の不等式より

$$\sum_D \left|x_{t_i} - x_{t_{i-1}}\right|^p = \sum_D \left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{x}_u \, du\right|^p \leq \sum_D (t_i - t_{i-1}) \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} |\dot{x}_u|^q \, du\right)^{p/q}$$
$$\leq \sum_D (t_i - t_{i-1}) \left(\int_0^T \|x\|_{C^1}^q \, du\right)^{p/q} = \|x\|_{C^1}^p T^p$$

が成立し，$\|x\|_p < \infty$ が従う．

以上より，$p \geq 1$ ならば $\|x\|_p \leq T\|x\|_{C^1}$ $(x \in C^1)$ が成り立ち (2) の主張を得る．■

次節の考察対象は主に定理 0.1.3 と定理 0.1.8 に関係する．定理 0.1.3 によれば，C^1 に $\|\cdot\|_{C^1}$ でノルム位相を導入した場合，$f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ に対して $C^1 \ni x \longmapsto I_{s,t}(x)$ は連続である．一方で定理 0.1.3 によれば，0 出発 C^1-パス空間 $\tilde{C}^1$ に $\|\cdot\|_p$ でノルム位相を導入した場合，$\tilde{C}^1 \ni x \longmapsto I_{s,t}(x)$ が連続であるという保証はない．しかし，次節以後の結果により，$1 \leq p < 3$ かつ $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ が満たされているなら $\tilde{C}^1 \ni x \longmapsto I_{s,t}(x)$ は或る意味での連続性を持つ．

0.2　連続性定理

定義 0.2.1 (記号の定義).　$x \in C^1$，$f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ に対し次を定める．

$$\begin{aligned}
\Delta_T &:= \{ (s,t) \ ; \quad 0 \leq s \leq t \leq T \}, \\
X^1 &: \Delta_T \longrightarrow \mathbb{R}^d \ \left((s,t) \longmapsto X^1_{s,t} = x_t - x_s\right), \\
X^2 &: \Delta_T \longrightarrow \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d \ \left((s,t) \longmapsto X^2_{s,t} = \int_s^t (x_u - x_s) \otimes dx_u\right), \\
\tilde{I}_{s,t}(x) &:= f(x_s)X^1_{s,t} = f(x_s)(x_t - x_s), \\
J_{s,t}(x) &:= f(x_s)X^1_{s,t} + (\nabla f)(x_s)X^2_{s,t}.
\end{aligned}$$

以降，$a, b, c, d \in \mathbb{R}^d$ に対して次の表現を使う:

$$[a \otimes b]^i_j = a^i b^j,$$
$$\left[(\nabla f)(x_s)X^2_{s,t}\right]^i = \sum_{j,k=1}^d \partial_k f^i_j(x_s) \int_s^t \left(x^k_u - x^k_s\right) dx^j_u,$$
$$\left[(\nabla f)(x_s)(a \otimes b)\right]^i = \sum_{j,k=1}^d \partial_k f^i_j(x_s) a^k b^j,$$
$$\left[(\nabla^2 f)(x_s)(a \otimes b \otimes c)\right]^i = \sum_{j,k,v=1}^d \partial_v \partial_k f^i_j(x_s) a^v b^k c^j,$$
$$\left[(\nabla^3 f)(x_s)(a \otimes b \otimes c \otimes d)\right]^i = \sum_{j,k,v,w=1}^d \partial_w \partial_v \partial_k f^i_j(x_s) a^w b^v c^k d^j.$$

定理 0.2.2. $[s,t] \subset [0,T]$, $x \in C^1$, $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ とする．$D \in \delta[s,t]$ に対し

$$\tilde{I}_{s,t}(x,D) := \sum_D \tilde{I}_{t_{i-1},t_i}(x), \quad J_{s,t}(x,D) := \sum_D J_{t_{i-1},t_i}(x)$$

を定めるとき，次が成立する:

$$I_{s,t}(x) = \lim_{|D|\to 0} \tilde{I}_{s,t}(x,D) = \lim_{|D|\to 0} J_{s,t}(x,D).$$

証明. 第一の等号は $I_{s,t}(x)$ の定義によるから，第二の等号を証明する．まず，

$$\begin{aligned}
I_{s,t}(x) &= \int_s^t f(x_u)\,dx_u \\
&= \int_s^t f(x_s) + f(x_u) - f(x_s)\,dx_u \\
&= \int_s^t f(x_s)\,dx_u + \int_s^t \int_0^1 (\nabla f)(x_s + \theta(x_u - x_s))\left(X^1_{s,u} \otimes \dot{x}_u\right)\,d\theta\,du \\
&= f(x_s)X^1_{s,t} + (\nabla f)(x_s)X^2_{s,t} \\
&\quad + \int_s^t \int_0^1 \{(\nabla f)(x_s + \theta(x_u - x_s)) - (\nabla f)(x_s)\}\left(X^1_{s,u} \otimes \dot{x}_u\right)\,d\theta\,du \\
&= J_{s,t}(x) + \int_s^t \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_s + r(x_u - x_s))\left(X^1_{s,u} \otimes X^1_{s,u} \otimes \dot{x}_u\right)\,dr\,d\theta\,du
\end{aligned}$$

が成り立つ．$[0,T] \ni t \longmapsto x_t$ の連続性より，最下段式中の $x_s + r(x_u - x_s)$ $(0 \leq r \leq 1,\ s \leq u \leq t)$ は或るコンパクト集合 K に含まれ，f が C^2-級関数であるから

$$M := \sum_{i,j,k,v} \sup_{x\in K} \left|\partial_v \partial_k f^i_j(x)\right|$$

として $M < \infty$ を定めれば

$$\begin{aligned}
&\left|\int_s^t \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_s + r(x_u - x_s))\left(X^1_{s,u} \otimes X^1_{s,u} \otimes \dot{x}_u\right)\,dr\,d\theta\,du\right| \\
&\quad \leq \int_s^t \int_0^1 \int_0^\theta \left|(\nabla^2 f)(x_s + r(x_u - x_s))\left(X^1_{s,u} \otimes X^1_{s,u} \otimes \dot{x}_u\right)\right|\,dr\,d\theta\,du \\
&\quad \leq M \int_s^t |X^1_{s,u}|^2 |\dot{x}_u|\,du \\
&\quad \leq M \|x\|^3_{C^1} \int_s^t (u-s)^2\,du
\end{aligned}$$

が出る．特に $D \in \delta[s,t]$ に対して

$$\begin{aligned}
\sum_D \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - t_{i-1})^2\,du &\leq \sum_D |D| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - t_{i-1})\,du \\
&\leq \sum_D |D| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u-s)\,du \leq \frac{1}{2}(t-s)^2|D| \longrightarrow 0 \quad (|D| \longrightarrow 0)
\end{aligned}$$

が成立するから，

$$\left|I_{s,t}(x) - J_{s,t}(x,D)\right| \leq \sum_D \left|I_{t_{i-1},t_i}(x) - J_{t_{i-1},t_i}(x)\right| \longrightarrow 0 \quad (|D| \longrightarrow 0)$$

が従い定理の主張を得る． ∎

定義 0.2.3 (control function). 関数 $\omega : \Delta_T \longrightarrow [0,\infty)$ が連続かつ任意の $s \le u \le t$ に対して

$$\omega(s,u) + \omega(u,t) \le \omega(s,t) \tag{2}$$

を満たすとき，ω を control function と呼ぶ．

式 (2) から $\omega(t,t) = 0$ $(\forall t \in [0,T])$ が従う．つまり control function は対角線上で 0 になる．

定義 0.2.4 (ノルム空間値写像の p-variation). $(V, \|\cdot\|)$ をノルム空間，$p > 0$ とする．このとき連続写像 $\psi : \Delta_T \longrightarrow V$ に対する p-variation を

$$\|\psi\|_{p,[s,t]} \coloneqq \left\{ \sup_{D \in \delta[s,t]} \sum_D \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p \right\}^{1/p}, \quad ((s,t) \subset [0,T])$$

で定める．特に $\|\cdot\|_{p,[0,T]}$ を $\|\cdot\|_p$ と書く．

定理 0.2.5 (p-variation が定める control function). $(V, \|\cdot\|)$ をノルム空間，$p > 0$ とする．$\|\psi\|_p < \infty$ かつ $\psi_{t,t} = 0$ $(\forall t \in [0,T])$ を満たす連続写像 $\psi : \Delta_T \longrightarrow V$ に対して，

$$\omega : \Delta_T \ni (s,t) \longmapsto \|\psi\|^p_{p,[s,t]}$$

により定める ω は control function である．

証明． $\|\psi\|_p < \infty$ の仮定より ω は $[0,\infty)$ 値であるから，以下では式 (2) と連続性を示す．

第一段 ω が式 (2) を満たすことを示す．実際，任意に $D_1 \in \delta[s,u], D_2 \in \delta[u,t]$ を取れば

$$\sum_{D_1} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p + \sum_{D_2} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p = \sum_{D_1 \cup D_2} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p \le \|\psi\|^p_{p:[s,t]}$$

が成り立つ．左辺の D_1, D_2 の取り方は独立であるから，それぞれに対し上限を取れば

$$\|\psi\|^p_{p:[s,u]} + \|\psi\|^p_{p:[u,t]} \le \|\psi\|^p_{p:[s,t]}$$

が従う．

第二段 任意の $[s,t] \subset [0,T]$ について[*2]，

$$\begin{aligned} &\lim_{h\to+0} \omega(s,t+h) = \inf_{h>0} \omega(s,t+h), && \lim_{h\to+0} \omega(s-h,t) = \inf_{h>0} \omega(s-h,t), \\ &\lim_{h\to+0} \omega(s,t-h) = \sup_{h>0} \omega(s,t-h), && \lim_{h\to+0} \omega(s+h,t) = \sup_{h>0} \omega(s+h,t) \end{aligned}$$

が成立する．実際 $\omega(s,t+h)$ について見れば，これは下に有界かつ $h \to +0$ に対し単調減少であるから極限が確定し下限に一致する．残りの三つも同様の理由で成立する．

[*2] 下段の二式については $s < t$ と仮定する．また上段についても，$t = T$ 或は $s = 0$ の場合を除く必要がある．

第三段　任意の $s \in [0,T)$ に対し，$(s,T] \ni t \longmapsto \omega(s,t)$ の左連続性を示す．ここでは

$$\tilde{\omega}(s,t) \coloneqq \begin{cases} \lim_{h\to+0} \omega(s,t-h), & (s<t), \\ 0, & (s=t), \end{cases} \quad (\forall (s,t) \in \Delta_T)$$

で定める $\tilde{\omega}$ が優加法性を持ち，かつ

$$\left\| \psi_{s,t} \right\|^p \leq \tilde{\omega}(s,t), \quad (\forall (s,t) \in \Delta_T)$$

を満たすことを示す．実際これが示されれば，任意の $D \in \delta[s,t]$ に対し

$$\sum_D \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p \leq \sum_D \tilde{\omega}(t_{i-1},t_i) \leq \tilde{\omega}(s,t)$$

が成立し $\omega(s,t) \leq \tilde{\omega}(s,t)$ が従い，$\omega(s,t) \geq \omega(s,t-h)$ $(\forall h > 0)$ と併せて

$$\omega(s,t) = \tilde{\omega}(s,t) = \lim_{h\to+0} \omega(s,t-h)$$

を得る．いま，任意に $s < u < t$ を取れば，十分小さい $h_1, h_2 > 0$ に対して

$$\omega(s,u-h_1) + \omega(u,t-h_2) \leq \omega(s,t-h_2)$$

が満たされ，$h_1 \longrightarrow +0,\ h_2 \longrightarrow +0$ として

$$\tilde{\omega}(s,u) + \tilde{\omega}(u,t) \leq \tilde{\omega}(s,t)$$

が成り立つから $\tilde{\omega}$ は優加法性を持つ．また，もし或る $(u,v) \in \Delta_T$ に対して

$$\left\| \psi_{u,v} \right\|^p > \tilde{\omega}(u,v)$$

が成り立つと仮定すると ($u = v$ なら両辺 0 になるから $u < v$ である)

$$\left\| \psi_{u,v} \right\|^p > \tilde{\omega}(u,v) \geq \omega(u,v-h) \geq \left\| \psi_{u,v-h} \right\|^p, \quad (\forall h > 0)$$

となる．一方 ψ の連続性より $\left\| \psi_{u,v-h} \right\|^p \longrightarrow \left\| \psi_{u,v} \right\|^p$ $(h \longrightarrow +0)$ が従い矛盾が生じる．同様にして，任意の $t \in (0,T]$ に対し $[0,t) \ni s \longmapsto \omega(s,t)$ の右連続性も出る．

第四段　任意の $t \in [0,T)$ に対して次を示す:

$$\lim_{h\to+0} \omega(t,t+h) = \inf_{h>0} \omega(t,t+h) = 0.$$

第一の等号は前段より従うから，第二の等号を背理法により証明する．いま

$$\inf_{h>0} \omega(t,t+h) =: \delta > 0$$

と仮定すれば，ψ の連続性より或る h_1 が存在して

$$\left\| \psi_{t,t+h} \right\|^p = \left\| \psi_{t,t+h} - \psi_{t,t} \right\|^p < \frac{\delta}{8}, \quad (\forall h < h_1) \tag{3}$$

が成立する．ここで任意に $h_0 < h_1$ を取り固定する．一方で $\omega(t,t+h_0) \geq \delta$ より

$$\sum_{i=1}^N \left\| \psi_{\tau_{i-1},\tau_i} \right\|^p > \frac{7\delta}{8}$$

を満たす $D = \{t = \tau_0 < \tau_1 < \cdots, \tau_N = t + h_0\} \in \delta[t, t+h_0]$ が存在し，(3) と併せて

$$\sum_{i=2}^{N} \left\| \psi_{\tau_{i-1},\tau_i} \right\|^p > \frac{7\delta}{8} - \left\| \psi_{t,\tau_1} \right\|^p > \frac{7\delta}{8} - \frac{\delta}{8} = \frac{3\delta}{4}$$

を得る．また，$\omega(t, \tau_1) \geq \delta$ より或る $D' \in \delta[t, \tau_1]$ が存在して

$$\sum_{D'} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p > \frac{3\delta}{4}$$

を満たすから，$D' \cup \{\tau_1 < \cdots, \tau_N = t + h_0\} \in \delta[t, t+h_0]$ に対して

$$\omega(t, t+h_0) > \sum_{D'} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p + \sum_{i=2}^{N} \left\| \psi_{\tau_{i-1},\tau_i} \right\|^p > \frac{3\delta}{2}$$

が従うが，$h_0 < h_1$ の任意性と単調減少性により

$$\delta = \inf_{h>0} \omega(t, t+h) = \inf_{h_1>h>0} \omega(t, t+h) \geq \frac{3\delta}{2}$$

となり矛盾が生じる．同様にして

$$\lim_{h \to +0} \omega(t-h, t) = 0, \quad (\forall t \in (0, T])$$

も成立する．

第五段　任意に $s \in [0, T)$ を取り固定し，$[s, T) \ni t \longmapsto \omega(s, t)$ が右連続であることを示す．

$$\lim_{h \to +0} \omega(s, t+h) \leq \omega(s, t) \tag{4}$$

を示せば，第二段より逆向きの不等号も従い右連続性を得る．任意に $h, \epsilon > 0$ を取れば，

$$\omega(s, t+h) - \epsilon \leq \sum_{D} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p$$

を満たす $D \in \delta[s, t+h]$ が存在し，

$$D_1 \coloneqq \{t_0 < \cdots < t_k\} = [s, t] \cap D, \quad D_2 \coloneqq D \backslash (D_1 \cup \{t_{k+1}\})$$

とおくと

$$\begin{aligned}
\omega(s, t+h) - \epsilon &\leq \sum_{i=1}^{k} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p + \left\| \psi_{t_k,t_{k+1}} \right\|^p + \sum_{D_2} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p \\
&= \sum_{i=1}^{k} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p + \left\| \psi_{t_k,t} \right\|^p + \left\| \psi_{t_k,t_{k+1}} \right\|^p - \left\| \psi_{t_k,t} \right\|^p + \sum_{D_2} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p \\
&\leq \omega(s, t) + \omega(t, t+h) + \left\| \psi_{t_k,t_{k+1}} \right\|^p - \left\| \psi_{t_k,t} \right\|^p
\end{aligned}$$

が成り立つ．ψ の一様連続性より $\left\| \psi_{t_k,t_{k+1}} \right\|^p \longrightarrow \left\| \psi_{t_k,t} \right\|^p$ $(h \longrightarrow +0)$ が成り立つから

$$\lim_{h \to +0} \omega(s, t+h) - \epsilon \leq \omega(s, t), \quad (\forall \epsilon > 0)$$

が従い (4) が出る．同様に $(0, t] \ni s \longmapsto \omega(s, t)$ $(\forall t \in (0, T])$ の左連続性も成立する．

第六段　ω の $(s, t) \in \Delta_T$ における連続性を示す．$h, k \geq 0$ とする．

(A)　(s,t) を基準に第一象限の点について

$$\begin{aligned}
&|\omega(s,t)-\omega(s+h,t+k)| \\
&\qquad \leq |\omega(s,t)-\omega(s+h,t)| + |\omega(s+h,t)-\omega(s+h,t+k)| \\
&\qquad = |\omega(s,t)-\omega(s+h,t)| + \omega(s+h,t+k)-\omega(s+h,t) \\
&\qquad \leq |\omega(s,t)-\omega(s+h,t)| + \omega(s,t+k)-\omega(s+h,t) \\
&\qquad \leq |\omega(s,t)-\omega(s+h,t)| + |\omega(s,t+k)-\omega(s,t)| + |\omega(s,t)-\omega(s+h,t)|
\end{aligned}$$

が成り立つ．前段までに示した左右の連続性より，近づけ方に依らず $h,k \longrightarrow +0$ とすれば，左辺をいくらでも 0 に近づけることができる．

(B)　(s,t) を基準に第三象限の点について

$$\begin{aligned}
&|\omega(s,t)-\omega(s-h,t-k)| \\
&\qquad \leq |\omega(s,t)-\omega(s-h,t)| + |\omega(s-h,t)-\omega(s-h,t-k)| \\
&\qquad = |\omega(s,t)-\omega(s-h,t)| + \omega(s-h,t)-\omega(s-h,t-k) \\
&\qquad \leq |\omega(s,t)-\omega(s-h,t)| + \omega(s-h,t)-\omega(s,t-k) \\
&\qquad \leq |\omega(s,t)-\omega(s-h,t)| + |\omega(s-h,t)-\omega(s,t)| + |\omega(s,t)-\omega(s,t-k)|,
\end{aligned}$$

が成り立つ．(A) と同じく $h,k \longrightarrow +0$ として左辺は 0 に収束する．

(C)　$((h_n,k_n))_{n=1}^{\infty}$ を第一象限から $(0,0)$ に近づく任意の点列とするとき，

$$\lim_{n\to\infty}\omega(s-h_n,t+k_n)=\omega(s,t), \quad \lim_{n\to\infty}\omega(s+h_n,t-k_n)=\omega(s,t)$$

が成り立つことを示す．これが示されれば

$$\lim_{h,k\to+0}\omega(s-h,t+k)=\omega(s,t), \quad \lim_{h,k\to+0}\omega(s+h,t-k)=\omega(s,t)$$

が従い，(A)(B) と併せて ω の連続性が出る．背理法で証明する．いま，

$$\alpha := \lim_{n\to\infty}\omega(s-h_n,t+k_n) > \omega(s,t)$$

と仮定して $\epsilon := \alpha-\omega(s,t)$ とおく．$\lim_{t'\downarrow t}\omega(s,t')=\omega(s,t)$ より

$$0 \leq \omega(s,t')-\omega(s,t) < \frac{\epsilon}{3}$$

を満たす $t'>t$ が存在し，また $\lim_{s'\uparrow s}\omega(s',t')=\omega(s,t')$ より

$$0 \leq \omega(s',t')-\omega(s,t') < \frac{\epsilon}{3}$$

を満たす $s'<s$ も存在する．このとき或る n で $s' \leq s-h_n$, $t+k_n \leq t'$ かつ

$$|\omega(s-h_n,t+k_n)-\alpha| < \frac{\epsilon}{3}$$

が成立し，特に $(s-h_n,t+k_n) \subset (s',t')$ より

$$\omega(s-h_n,t+k_n) \leq \omega(s',t')$$

となるはずであるが，一方で

$$\omega(s',t') < \frac{2}{3}\epsilon+\omega(s,t) = \alpha-\frac{\epsilon}{3} < \omega(s-h_n,t+k_n)$$

が従い矛盾が生じる．よって

$$\lim_{n\to\infty}\omega(s-h_n,t+k_n)=\omega(s,t)$$

でなくてはならず，同様にして $\lim_{n\to\infty}\omega(s+h_n,t-k_n)=\omega(s,t)$ も得られる．　■

定理 0.2.6 (control function の例). 以下の関数 $\omega : \Delta_T \longrightarrow [0,\infty)$ は control function である．

(1) $\omega : (s,t) \longmapsto \left\| X^1 \right\|_{p:[s,t]}^p, \quad (p \geq 1,\ x \in B_{p,T}(\mathbb{R}^d))$.

(2) $\omega : (s,t) \longmapsto \left\| X^2 \right\|_{p:[s,t]}^p, \quad (p \geq 1,\ x \in C^1)$.

行列 $a = (a^i_j)$ のノルムは $|a| = \sqrt{\sum_{i,j} |a^i_j|^2}$ として考える．

定理 0.2.7.

(1) $\omega : (s,t) \longmapsto X^1_{s,t} = x_t - x_s$ は連続であるから，前定理より ω は control function である．

(2) 任意の $[s,t] \subset [0,T]$ に対して $\left\| X^2 \right\|_{p:[s,t]}^p < \infty$ を示せば，あとは上と同じ理由により定理の主張が得られる．実際，任意の分割 $D = \{s = t_0 < \cdots < t_N = t\}$ に対し

$$
\begin{aligned}
\left\| X^2_{t_{i-1},t_i} \right\| &\leq \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (x_u - x_{t_{i-1}}) \otimes \dot{x}_u \, du \right| \\
&\leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left| (x_u - x_{t_{i-1}}) \otimes \dot{x}_u \right| \, du \\
&\leq \| x \|_{C^1}^2 \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u-s)\, du \right\}^{1/p} \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u-s)\, du \right\}^{1-1/p} \\
&\leq \| x \|_{C^1}^2 \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u-s)\, du \right\}^{1/p} \left\{ \int_{s}^{t} (u-s)\, du \right\}^{1-1/p}
\end{aligned}
$$

が成り立つから，

$$
\begin{aligned}
\sum_D \left\| X^2_{t_{i-1},t_i} \right\|^p &\leq \sum_D \| x \|_{C^1}^{2p} \left\{ \frac{1}{2}(t-s)^2 \right\}^{p-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u-s)\, du \\
&= \| x \|_{C^1}^{2p} \left\{ \frac{1}{2}(t-s)^2 \right\}^{p-1} \int_s^t (u-s)\, du = \| x \|_{C^1}^{2p} \left\{ \frac{1}{2}(t-s)^2 \right\}^{p}
\end{aligned}
$$

により $\left\| X^2 \right\|_{p:[s,t]}^p < \infty$ が従う． ∎

補題 0.2.8. ω を Δ_T 上の control function とする．$D = \{s = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t\}$ について，$N \geq 2$ の場合或る $1 \leq i \leq N-1$ が存在して次を満たす:

$$
\omega(t_{i-1}, t_{i+1}) \leq \frac{2\omega(s,t)}{N-1}. \tag{5}
$$

証明. (会田先生のテキスト．) ∎

定理 0.2.9 ($1 \le p < 2$ の場合の連続性定理). $1 \le p < 2$ とし，$x_0 = y_0$ を満たす $x, y \in C^1$ と $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$, $0 < \epsilon, R < \infty$ を任意に取る．このとき，

$$\left\| X^1 \right\|_p, \left\| Y^1 \right\|_p \le R, \quad \left\| X^1 - Y^1 \right\|_p \le \epsilon$$

なら，或る定数 $C = C(p, R, f)$ が存在し，任意の $0 \le s \le t \le T$ に対して次が成立する:

$$\left| I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y) \right| \le \epsilon C.$$

系 0.2.10 (p-variation による閉球上の Lipschitz 連続性). $1 \le p < 2$ とし，$x_0 = y_0$ を満たす $x, y \in C^1$ と $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$, $0 < R < \infty$ を任意に取る．このとき，

$$\left\| X^1 \right\|_p, \left\| Y^1 \right\|_p \le R$$

なら，或る定数 $C = C(p, R, f)$ が存在して次を満たす:

$$\left| I_{0,T}(x) - I_{0,T}(y) \right| \le C \left\| X^1 - Y^1 \right\|_p.$$

証明 (系 0.2.10). 定理 0.2.9 において，$\epsilon = \left\| X^1 - Y^1 \right\|_p$ $(x \ne y)$ [*3] として証明が通る． ∎

証明 (定理 0.2.9). $[s, t] \subset [0, T]$ とする．

第一段 $\omega : \Delta_T \longrightarrow [0, \infty)$ を

$$\omega(\alpha, \beta) = \left\| X^1 \right\|_{p,[\alpha,\beta]}^p + \left\| Y^1 \right\|_{p,[\alpha,\beta]}^p + \epsilon^{-p} \left\| X^1 - Y^1 \right\|_{p,[\alpha,\beta]}^p, \quad ((\alpha, \beta) \in \Delta_T)$$

で定めれば，定理 0.2.6 により $1 \le p$ の下で ω は control function である．

第二段 任意に $[s, t]$ の分割 $D = \{s = t_0 < \cdots < t_N = t\}$ $(N \ge 2)$ を取れば，補題 0.2.8 より (5) を満たす $t_{(0)}$ が存在する．ここで，$D_{-0} := D$, $D_{-1} := D \backslash \{t_{(0)}\}$ と定める．$N \ge 3$ ならば D_{-1} についても (5) を満たす $t_{(1)}$ が存在するから，$D_{-2} := D_{-1} \backslash \{t_{(1)}\}$ と定める．この操作を繰り返せば $t_{(k)}, D_{-k}$ $(k = 0, 1, \cdots, N-1)$ が得られ，

$$\begin{aligned} &\tilde{I}_{s,t}(x, D) - \tilde{I}_{s,t}(y, D) \\ &\quad = \sum_{k=0}^{N-2} \left[\left\{ \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1}) \right\} - \left\{ \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k-1}) \right\} \right] \\ &\qquad + \left\{ \tilde{I}_{s,t}(x) - \tilde{I}_{s,t}(y) \right\} \end{aligned} \tag{6}$$

と表現できる．

第三段 式 (6) について，次を満たす定数 C_1 が存在することを示す:

$$|(6)| \le \epsilon C_1 \tag{7}$$

[*3] $x = y$ なら $\left\| X^1 - Y^1 \right\|_p = 0$ かつ $I_{s,t}(x) = I_{s,t}(y)$ が成り立つ．

見やすくするために $t_k = t_{(k)}$ と書き直せば，

$$
\begin{aligned}
&\left\{\tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1})\right\} - \left\{\tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k-1})\right\} \\
&= \{f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}})\} X^1_{t_k,t_{k+1}} - \{f(y_{t_k}) - f(y_{t_{k-1}})\} Y^1_{t_k,t_{k+1}} \\
&= \{f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}})\} \left(X^1_{t_k,t_{k+1}} - Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right) \\
&\quad + \{f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}})\} Y^1_{t_k,t_{k+1}} - \{f(y_{t_k}) - f(y_{t_{k-1}})\} Y^1_{t_k,t_{k+1}} \\
&= \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes \left(X^1_{t_k,t_{k+1}} - Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right) \, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X^1_{t_{i_k}-1,t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{i_k+1}} \, d\theta \\
&\quad - \int_0^1 (\nabla f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) Y^1_{t_{i_k}-1,t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{i_k+1}} \, d\theta \\
&= \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X^1_{t_{i_k}-1,t_k} \otimes \left(X^1_{t_k,t_{i_k+1}} - Y^1_{t_k,t_{i_k+1}}\right) \, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) \left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right) \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}} \, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}} \, d\theta \\
&\quad - \int_0^1 (\nabla f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}} \, d\theta \\
&= \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes \left(X^1_{t_k,t_{k+1}} - Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right) \, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) \left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right) \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}} \, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}} + r(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) - y_{t_{k-1}} - \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})))) \\
&\qquad\qquad \left(X^1_{0,t_{k-1}} - Y^1_{0,t_{k-1}}\right) \otimes Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}} \, dr \, d\theta \,{}^{*4} \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}} + r(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) - y_{t_{k-1}} - \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})))) \\
&\qquad\qquad \theta\left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right) \otimes Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}} \, dr \, d\theta
\end{aligned}
$$

が成り立つ．補題 0.2.8 より

$$
\begin{aligned}
&\left|X^1_{t_{k-1},t_k}\right|, \left|Y^1_{t_{k-1},t_k}\right|, \left|X^1_{t_k,t_{k+1}}\right|, \left|Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \le \omega(t_{k-1}, t_{k+1})^{1/p} \le \left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1}\right)^{1/p}, \\
&\left|X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right|, \left|X^1_{t_k,t_{k+1}} - Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \le \epsilon\omega(t_{k-1}, t_{k+1})^{1/p} \le \epsilon\left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1}\right)^{1/p}
\end{aligned}
$$

が満たされ，また

$$
\left|X^1_{0,t_{k-1}} - Y^1_{0,t_{k-1}}\right| \le \epsilon\omega(0, t_{k-1})^{1/p} \le \epsilon\omega(0,T)^{1/p} \le \epsilon\,(2R^p + 1)^{1/p}
$$

でもあるから，

$$
M := \sum_{i,j} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f^i_j(x)| + \sum_{i,j,k} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial_k f^i_j(x)| + \sum_{i,j,k,v} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial_v \partial_k f^i_j(x)| \tag{8}
$$

*4 $x_0 = y_0$ の仮定より $x_{t_{k-1}} - y_{t_{k-1}} = X^1_{0,t_{k-1}} - Y^1_{0,t_{k-1}}$ が成り立つ．

と定めて

$$
\begin{aligned}
&\left|\left\{\tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1})\right\} - \left\{\tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k-1})\right\}\right| \\
&\leq M\left|X^1_{t_{k-1},t_k}\right|\left|X^1_{t_k,t_{k+1}} - Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\quad + M\left|X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right|\left|Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\quad + M\left|X^1_{0,t_{k-1}} - Y^1_{0,t_{k-1}}\right|\left|Y^1_{t_{k-1},t_k}\right|\left|Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\quad + M\left|X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right|\left|Y^1_{t_{k-1},t_k}\right|\left|Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\leq \epsilon M\left[2 + 2\,(2R^p + 1)^{1/p}\right]\left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1}\right)^{2/p} \\
&\leq \epsilon M\left[2 + 2\,(2R^p + 1)^{1/p}\right]2^{2/p}\,(2R^p + 1)^{2/p}\left(\frac{1}{N-k-1}\right)^{2/p}
\end{aligned}
$$

を得る．

$$
C'_1 \coloneqq M\left[2 + 2\,(2R^p + 1)^{1/p}\right]2^{2/p}\,(2R^p + 1)^{2/p}
$$

とおけば

$$
|(6)| \leq \sum_{k=0}^{N-2} \epsilon C'_1\left(\frac{1}{N-k-1}\right)^{2/p} < \epsilon C'_1 \zeta\left(\frac{2}{p}\right)
$$

が成立し，$p < 2$ より $\zeta(2/p) < \infty$ であるから $C_1 \coloneqq C'_1\zeta(2/p)$ とおいて (7) が従う．

第四段　$x_0 = y_0$ の仮定により $x_s - y_s = X^1_{0,s} - Y^1_{0,s}$ が成り立ち

$$
\begin{aligned}
\left|\tilde{I}_{s,t}(x) - \tilde{I}_{s,t}(y)\right| &= \left|f(x_s)X^1_{s,t} - f(y_s)Y^1_{s,t}\right| \\
&\leq \left|f(x_s)X^1_{s,t} - f(x_s)Y^1_{s,t}\right| + \left|f(x_s)Y^1_{s,t} - f(y_s)Y^1_{s,t}\right| \\
&\leq M\left|X^1_{s,t} - Y^1_{s,t}\right| + \left|\int_0^1 (\nabla f)(y_s + \theta(x_s - y_s))\left[\left(X^1_{0,s} - Y^1_{0,s}\right)\otimes Y^1_{s,t}\right]\,d\theta\right| \\
&\leq M\left|X^1_{s,t} - Y^1_{s,t}\right| + M\left|X^1_{0,s} - Y^1_{0,s}\right|\left|Y^1_{s,t}\right| \\
&\leq M\epsilon\omega(s,t)^{1/p} + M\epsilon\omega(0,s)^{1/p}\omega(s,t)^{1/p} \\
&\leq \epsilon M\left[(2R^p + 1)^{1/p} + (2R^p + 1)^{2/p}\right]
\end{aligned}
$$

が従う．ここで $C_2 \coloneqq M\left[(2R^p + 1)^{1/p} + (2R^p + 1)^{2/p}\right]$ とおく．

第五段　第二段と第三段より，任意の $D \in \delta[s,t]$ に対し

$$
\left|\tilde{I}_{s,t}(x, D) - \tilde{I}_{s,t}(y, D)\right| \leq \epsilon(C_1 + C_2)
$$

が成立し．定理 0.2.2 により $|D| \longrightarrow 0$ として

$$
\left|I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y)\right| \leq \epsilon(C_1 + C_2)
$$

が出る． ∎

定理 0.2.11 ($2 \leq p < 3$ の場合の連続性定理). $2 \leq p < 3$ とし，$x_0 = y_0$ を満たす $x, y \in C^1$ と $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$, $0 < \epsilon, R < \infty$ を任意に取る．このとき，

$$
\begin{aligned}
&\left\| X^1 \right\|_p, \left\| Y^1 \right\|_p, \left\| X^2 \right\|_{p/2}, \left\| Y^2 \right\|_{p/2} \leq R < \infty, \\
&\left\| X^1 - Y^1 \right\|_p, \left\| X^2 - Y^2 \right\|_{p/2} \leq \epsilon
\end{aligned}
$$

なら，或る定数 $C = C(p, R, f)$ が存在し，任意の $0 \leq s \leq t \leq T$ に対して次が成立する:

$$
\left| I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y) \right| \leq \epsilon C.
$$

系 0.2.12. $1 \leq p < 2$ とし，$x_0 = y_0$ を満たす $x, y \in C^1$ と $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$, $0 < R < \infty$ を任意に取る．このとき，

$$
\left\| X^1 \right\|_p, \left\| Y^1 \right\|_p, \left\| X^2 \right\|_{p/2}, \left\| Y^2 \right\|_{p/2} \leq R
$$

なら，或る定数 $C = C(p, R, f)$ が存在して次を満たす:

$$
\left| I_{0,T}(x) - I_{0,T}(y) \right| \leq C \left(\left\| X^1 - Y^1 \right\|_p + \left\| X^2 - Y^2 \right\|_{p/2} \right).
$$

証明 (系 0.2.12). 定理 0.2.11 において，$\epsilon = \left\| X^1 - Y^1 \right\|_p + \left\| X^2 - Y^2 \right\|_{p/2}$ $(x \neq y)$ として証明が通る． ■

証明 (定理 0.2.12). $[s, t] \subset [0, T]$ とする．

第一段 $\omega : \Delta_T \longrightarrow [0, \infty)$ を

$$
\begin{aligned}
\omega(\alpha, \beta) = &\left\| X^1 \right\|_{p,[\alpha,\beta]}^p + \left\| Y^1 \right\|_{p,[\alpha,\beta]}^p + \left\| X^2 \right\|_{p/2,[\alpha,\beta]}^{p/2} + \left\| Y^2 \right\|_{p/2,[\alpha,\beta]}^{p/2} \\
&+ \epsilon^{-p} \left\| X^1 - Y^1 \right\|_{p,[\alpha,\beta]}^p + \epsilon^{-p/2} \left\| X^2 - Y^2 \right\|_{p/2,[\alpha,\beta]}^{p/2}, \quad ((\alpha, \beta) \in \Delta_T)
\end{aligned}
$$

で定めれば，定理 0.2.6 により $2 \leq p$ の下で ω は control function である．

第二段 $D \in \delta[s, t]$ に対し，定理 0.2.9 の証明と同様にして $t_{(k)}, D_{-k}$ を構成すれば

$$
\begin{aligned}
&J_{s,t}(x, D) - J_{s,t}(y, D) \\
&\quad = \sum_{k=0}^{N-2} \left[\{ J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1}) \} - \{ J_{s,t}(y, D_{-k}) - J_{s,t}(y, D_{-k-1}) \} \right] \\
&\quad\quad + \{ J_{s,t}(x) - J_{s,t}(y) \}
\end{aligned} \tag{9}
$$

と表現できる．

第三段 $J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})$ を変形する．以降 $t_k = t_{(k)}$ と書き直せば

$$
\begin{aligned}
&J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1}) \\
&\quad = J_{t_{k-1},t_k}(x) + J_{t_k,t_{k+1}}(x) - J_{t_{k-1},t_{k+1}}(x) \\
&\quad = f(x_{t_{k-1}}) X^1_{t_{k-1},t_k} + f(x_{t_k}) X^1_{t_k,t_{k+1}} - f(x_{t_{k-1}}) X^1_{t_{k-1},t_{k+1}} \\
&\quad\quad + (\nabla f)(x_{t_{k-1}}) X^2_{t_{k-1},t_k} + (\nabla f)(x_{t_k}) X^2_{t_k,t_{k+1}} - (\nabla f)(x_{t_{k-1}}) X^2_{t_{k-1},t_{k+1}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \{f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}})\} X^1_{t_k,t_{k+1}} \\
&\qquad + (\nabla f)(x_{t_{k-1}}) X^2_{t_{k-1},t_k} + (\nabla f)(x_{t_k}) X^2_{t_k,t_{k+1}} - (\nabla f)(x_{t_{k-1}}) X^2_{t_{k-1},t_{k+1}} \\
&= \int_0^1 \{(\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) - (\nabla f)(x_{t_{k-1}})\} X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_k,t_{k+1}}\, d\theta \\
&\qquad + (\nabla f)(x_{t_{k-1}}) X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_k,t_{k+1}} \\
&\qquad + (\nabla f)(x_{t_{k-1}}) X^2_{t_{k-1},t_k} + (\nabla f)(x_{t_k}) X^2_{t_k,t_{k+1}} - (\nabla f)(x_{t_{k-1}}) X^2_{t_{k-1},t_{k+1}} \\
&= \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta \\
&\qquad + (\nabla f)(x_{t_{k-1}}) \left(X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_k,t_{k+1}} + X^2_{t_{k-1},t_k} - X^2_{t_{k-1},t_{k+1}} \right) \\
&\qquad + (\nabla f)(x_{t_k}) X^2_{t_k,t_{k+1}} \\
&= \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta \\
&\qquad + \{(\nabla f)(x_{t_k}) - (\nabla f)(x_{t_{k-1}})\} X^2_{t_k,t_{k+1}} \\
&= \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta \\
&\qquad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^2_{t_k,t_{k+1}}\, d\theta
\end{aligned}
$$

を得る．

第四段　式 (9) について，次を満たす定数 C_1 が存在することを示す:

$$
|(9)| \leq \epsilon C_1. \tag{10}
$$

実際，前段の結果より

$$
\begin{aligned}
&\{J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})\} - \{J_{s,t}(y, D_{-k}) - J_{s,t}(y, D_{-k-1})\} \\
&= \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^2_{t_k,t_{k+1}}\, d\theta \\
&\quad - \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta \\
&\quad - \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^2_{t_k,t_{k+1}}\, d\theta \\
&= \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes \left(X^1_{t_k,t_{k+1}} - Y^1_{t_k,t_{k+1}} \right) dr\, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes \left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k} \right) \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^\theta \left\{ (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) - (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) \right\} \\
&\qquad\qquad X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) \left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k} \right) \otimes Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes \left(X^2_{t_k,t_{k+1}} - Y^2_{t_k,t_{k+1}} \right) d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \left\{ (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) - (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) \right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^2_{t_k,t_{k+1}}\, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))\left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right) \otimes Y^2_{t_k,t_{k+1}}\, d\theta \\
&= \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}))X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes \left(X^1_{t_k,t_{k+1}} - Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right)\, dr\, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}))X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes \left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right) \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^\theta \int_0^1 (\nabla^3 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}) + u(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) - y_{t_{k-1}} - r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))) \\
&\qquad \left\{\left(X^1_{0,t_{k-1}} - Y^1_{0,t_{k-1}}\right) + r\left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right)\right\} \otimes X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}}\, du\, dr\, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))\left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right) \otimes Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}))X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes \left(X^2_{t_k,t_{k+1}} - Y^2_{t_k,t_{k+1}}\right)\, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^1 (\nabla^3 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}) + r(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) - y_{t_{k-1}} - \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))) \\
&\qquad \left\{\left(X^1_{0,t_{k-1}} - Y^1_{0,t_{k-1}}\right) + \theta\left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right)\right\} \otimes X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^2_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))\left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right) \otimes Y^2_{t_k,t_{k+1}}\, d\theta
\end{aligned}
$$

が成り立つから，

$$
\begin{aligned}
M &:= \sum_{i,j} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f^i_j(x)| + \sum_{i,j,k} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial_k f^i_j(x)| \\
&\quad + \sum_{i,j,k,v} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial_v \partial_k f^i_j(x)| + \sum_{i,j,k,v,w} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial_w \partial_v \partial_k f^i_j(x)|
\end{aligned}
\tag{11}
$$

とおいて

$$
\begin{aligned}
&\left|\{J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})\} - \{J_{s,t}(y, D_{-k}) - J_{s,t}(y, D_{-k-1})\}\right| \\
&\le M\left|X^1_{t_{k-1},t_k}\right|\left|X^1_{t_{k-1},t_k}\right|\left|X^1_{t_k,t_{k+1}} - Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\quad + M\left|X^1_{t_{k-1},t_k}\right|\left|X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right|\left|Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\quad + M\left|X^1_{0,t_{k-1}} - Y^1_{0,t_{k-1}}\right|\left|X^1_{t_{k-1},t_k}\right|\left|Y^1_{t_{k-1},t_k}\right|\left|Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\quad + M\left|X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right|\left|X^1_{t_{k-1},t_k}\right|\left|Y^1_{t_{k-1},t_k}\right|\left|Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\quad + M\left|X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right|\left|Y^1_{t_{k-1},t_k}\right|\left|Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\quad + M\left|X^1_{t_{k-1},t_k}\right|\left|X^2_{t_k,t_{k+1}} - Y^2_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\quad + M\left|X^1_{0,t_{k-1}} - Y^1_{0,t_{k-1}}\right|\left|X^1_{t_{k-1},t_k}\right|\left|Y^2_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\quad + M\left|X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right|\left|X^1_{t_{k-1},t_k}\right|\left|Y^2_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\quad + M\left|X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right|\left|Y^2_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\le \epsilon M\left[5 + 2\omega(0, t_{k-1})^{1/p} + 2\omega(t_{k-1}, t_k)^{1/p}\right]\left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1}\right)^{3/p} \\
&\le \epsilon M\left[2 + 4\left(2R^p + 2R^{p/2} + 2\right)^{1/p}\right] 2^{3/p}\left(2R^p + 2R^{p/2} + 2\right)^{3/p}\left(\frac{1}{N-k-1}\right)^{3/p}
\end{aligned}
$$

を得る．ここで

$$
C'_1 := M\left[2 + 4\left(2R^p + 2R^{p/2} + 2\right)^{1/p}\right] 2^{3/p}\left(2R^p + 2R^{p/2} + 2\right)^{3/p}
$$

と定めれば

$$|(9)| \le \sum_{k=0}^{N-2} \epsilon C_1' \left(\frac{1}{N-k-1} \right)^{3/p} < \epsilon C_1' \zeta\left(\frac{3}{p}\right)$$

が成立し，$p < 3$ より $\zeta(3/p) < \infty$ であるから $C_1 \coloneqq C_1' \zeta(3/p)$ とおいて (10) が出る．

第五段 $x_0 = y_0$ の仮定により

$$\begin{aligned}
&\left| J_{s,t}(x) - J_{s,t}(y) \right| \\
&\le \left| f(x_s) X^1_{s,t} - f(y_s) Y^1_{s,t} \right| + \left| (\nabla f)(x_s) X^2_{s,t} - (\nabla f)(y_s) Y^2_{s,t} \right| \\
&\le \left| f(x_s) X^1_{s,t} - f(x_s) Y^1_{s,t} \right| + \left| f(x_s) Y^1_{s,t} - f(y_s) Y^1_{s,t} \right| \\
&\qquad + \left| (\nabla f)(x_s) X^2_{s,t} - (\nabla f)(x_s) Y^2_{s,t} \right| + \left| (\nabla f)(x_s) Y^2_{s,t} - (\nabla f)(y_s) Y^2_{s,t} \right| \\
&\le M \left| X^1_{s,t} - Y^1_{s,t} \right| + \left| \int_0^1 (\nabla f)(y_s + \theta(x_s - y_s))(x_s - y_s) \otimes Y^1_{s,t} \, d\theta \right| \\
&\qquad + M \left| X^2_{s,t} - Y^2_{s,t} \right| + \left| \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_s + \theta(x_s - y_s))(x_s - y_s) \otimes Y^2_{s,t} \, d\theta \right| \\
&\le M \left| X^1_{s,t} - Y^1_{s,t} \right| + M \left| X^1_{0,s} - Y^1_{0,s} \right| \left| Y^1_{s,t} \right| \\
&\qquad + M \left| X^2_{s,t} - Y^2_{s,t} \right| + M \left| X^1_{0,s} - Y^1_{0,s} \right| \left| Y^2_{s,t} \right| \\
&\le \epsilon M \omega(s,t)^{1/p} + \epsilon M \omega(0,s)^{1/p} \omega(s,t)^{1/p} \\
&\quad + \epsilon M \omega(s,t)^{2/p} + \epsilon M \omega(0,s)^{1/p} \omega(s,t)^{2/p} \\
&\le \epsilon M \left[\omega(0,T)^{1/p} + 2\omega(0,T)^{2/p} + \omega(0,T)^{3/p} \right] \\
&\le \epsilon M \left[\left(2R^p + 2R^{p/2} + 2 \right)^{1/p} + 2 \left(2R^p + 2R^{p/2} + 2 \right)^{2/p} + \left(2R^p + 2R^{p/2} + 2 \right)^{3/p} \right]
\end{aligned}$$

が従う．ここで最下段の ϵ の係数を C_2 とおく．

第六段 以上より，任意の $D \in \delta[s,t]$ に対し

$$\left| J_{s,t}(x, D) - J_{s,t}(y, D) \right| \le \epsilon (C_1 + C_2)$$

が成り立ち，定理 0.2.2 により $|D| \longrightarrow 0$ として

$$\left| I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y) \right| \le \epsilon (C_1 + C_2)$$

が出る． ∎

系 0.2.13 (パスが 0 出発なら f の有界性は要らない). 定理 0.2.9 と定理 0.2.11 について，$x, y \in \tilde{C}^1$ ならば $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ として主張が成り立つ．

証明. $x_0 = 0$ なら

$$\left\| X^1 \right\|_p \le R \quad \Rightarrow \quad |x_t| \le R \quad (\forall t \in [0, T])$$

が成り立つから，式 (8) と (11) において $\sup_{x \in \mathbb{R}^d}$ を $\sup_{|x| \le 9R}$ に替えればよい． ∎

0.3 Young 積分

補題 0.3.1. $x \in C^1$, $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ とする．

(1) $1 \le p < 2$ の場合，或る control function ω が存在して

$$\left|X^1_{s,t}\right| \le \omega(s,t)^{1/p}, \quad (0 \le \forall s \le \forall t \le T)$$

を満たすとき，ある定数 $C = C(p, f)$ があり

$$\left|I_{s,t}(x)\right| \le C\left(\omega(s,t)^{1/p} + \omega(s,t)^{2/p}\right).$$

が成立する．

(2) $2 \le p < 3$ の場合，或る control function ω が存在して

$$\left|X^1_{s,t}\right| \le \omega(s,t)^{1/p}, \quad \left|X^2_{s,t}\right| \le \omega(s,t)^{2/p}, \quad (0 \le \forall s \le \forall t \le T)$$

を満たすとき，ある定数 $C = C(p, f)$ があり

$$\left|I_{s,t}(x)\right| \le C\left(\omega(s,t)^{1/p} + \omega(s,t)^{2/p} + \omega(s,t)^{3/p}\right).$$

が成立する．

証明.

(1) $D = \{s = t_0 < \cdots < t_N = t\}$ $(N \ge 2)$ に対し，補題 0.2.8 により存在する i を取り $D_{-1} := D \backslash \{i\}$ と書く．補題 0.2.8 の添数を除く作業を続けて D_{-k} $(k = 1, \cdots, N-1)$ を構成する．

$$M := \max_{\substack{t\in[0,T]\\ 1\le i\le m\\ 1\le j,k\le d}} \left|\partial_k f^i_j(x_t)\right|, \quad M' := \max_{t\in[0,T]} |f(x_t)|$$

とおけば $M, M' < \infty$ であり，$\left|X^1_{t_i,t_{i+1}}\right| \le \omega(t_i, t_{i+1})^{1/p} \le \omega(t_{i-1}, t_{i+1})^{1/p}$ と補題 0.2.8 により

$$\begin{aligned}
\left|\tilde{I}_{s,t}(x,D) - \tilde{I}_{s,t}(x,D_{-1})\right| &= \left|\tilde{I}_{t_{i-1},t_i}(x) + \tilde{I}_{t_i,t_{i+1}}(x) - \tilde{I}_{t_{i-1},t_{i+1}}(x)\right| \\
&\le \left|\{f(x_{t_i}) - f(x_{t_{i-1}})\} X^1_{t_i,t_{i+1}}\right| \\
&\le \left|\left\{\int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{i-1}} + \theta(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}))\, d\theta\right\} X^1_{t_{i-1},t_i} \otimes X^1_{t_i,t_{i+1}}\right| \\
&\le md^2 M \left|X^1_{t_i,t_{i+1}}\right|^2 \\
&\le md^2 M \left(\frac{2\omega(s,t)}{N-1}\right)^{2/p}
\end{aligned}$$

が成立する．同様に

$$\left|\tilde{I}_{s,t}(x,D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x,D_{-k-1})\right| \le md^2 M \left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1}\right)^{2/p}, \quad (k = 0, \cdots, N-2)$$

が成り立ち ($D_{-0} = D$)

$$\left|\tilde{I}_{s,t}(x, D) - f(x_s)X^1_{s,t}\right| \leq \sum_{k=0}^{N-2} \left|\tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1})\right|$$
$$\leq md^2 M(2\omega(s,t))^{2/p} \sum_{k=0}^{N-2} \left(\frac{1}{N-k-1}\right)^{2/p}$$
$$\leq md^2 M(2\omega(s,t))^{2/p} \zeta\left(\frac{2}{p}\right)$$

が従う．いま，仮定より $p < 2$ であるから $\zeta(2/p) < \infty$ であり，定理 0.2.2 より

$$\left|I_{s,t}(x)\right| \leq M'\omega(s,t)^{1/p} + md^2 M(2\omega(s,t))^{2/p}\zeta\left(\frac{2}{p}\right)$$

を得る．

(2) (1) と同様に D_{-k} $(k = 1, \cdots, N-1)$ を構成する．会田先生のノートの通りに

$$J_{s,t}(x, D) - J_{s,t}(x, D_{-1}) = \left\{\int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{i-1}} + \theta(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}))\, dr\, d\theta\right\} X^1_{t_{i-1},t_i} \otimes X^1_{t_{i-1},t_i} \otimes X^1_{t_i,t_{i+1}}$$
$$+ \left\{\int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{i-1}} + \theta(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}))\, d\theta\right\} X^1_{t_{i-1},t_i} \otimes X^2_{t_i,t_{i+1}}$$

を得る．ここで (1) の M, M' に加えて

$$M'' := \max_{\substack{t\in[0,T] \\ 1\leq i\leq m \\ 1\leq j,k,\nu\leq d}} \left|\partial_\nu \partial_k f^i_j(x_t)\right|$$

とおけば

$$\left|J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})\right| \leq md^2 M\left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1}\right)^{3/p} + md^2 M''\left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1}\right)^{1/p}\left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1}\right)^{2/p}$$
$$\leq md^2(M + M'')\left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1}\right)^{3/p}$$

が成立し，会田先生のノートの通りに

$$\left|J_{s,t}(x, D) - \left(f(x_s)X^1_{s,t} + (\nabla f)(x_s)X^2_{s,t}\right)\right| \leq 2^{3/p} md^2(M + M'')\zeta\left(\frac{3}{p}\right)\omega(s,t)^{3/p}$$

が従い，$p < 3$ の仮定より $\zeta(3/p) < \infty$ である．(1) と同じく定理 0.2.2 より

$$\left|I_{s,t}(x)\right| \leq M'\omega(s,t)^{1/p} + md^2 M\omega(s,t)^{2/p} + 2^{3/p} md^2(M + M'')\zeta\left(\frac{3}{p}\right)\omega(s,t)^{3/p}$$

となる． ∎

0.4 The notion of rough path

$(V, \|\cdot\|)$ を $\mathbb{R}$-Banach 空間とする．$V^{\otimes 0} = \mathbb{R}$ とし $T(V) := \bigoplus_{k=0}^\infty V^{\otimes k}$ とおく．各テンソル積におけるノルムを $\|\ \|_k$ と表す．

連続かつ有界変動なパス $x : [0, T] \longrightarrow V$ に対して次の積分

$$\int_s^t X^1_{s,u} \otimes dx_u$$

を定めたい．ただし $X^1_{s,t} = x_t - x_s$ $((s,t) \in \Delta_T)$ である．いま，細分 $D = \{s = u_0 < \cdots < u_n = t\}, D' = \{s = v_0 < \cdots < v_m = t\} \in \delta[s,t]$ に対して，共通細分を $D'' = \{s = w_0 < w_1 \cdots \leq t\}$ と表し

$$\begin{aligned} \tilde{X}^1_{s,w_k} &\coloneqq X^1_{s,u_i}, \quad (u_i \leq w_k \leq u_{i+1}), \\ \hat{X}^1_{s,w_k} &\coloneqq X^1_{s,v_j}, \quad (v_j \leq w_k \leq v_{j+1}) \end{aligned}$$

により $\tilde{X}^1, \hat{X}^1$ を定める．このとき

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_D X^1_{s,u_{i-1}} \otimes X^1_{u_{i-1},u_i} - \sum_{D'} X^1_{s,v_{j-1}} \otimes X^1_{v_{j-1},v_j} \right\|_{V^{\otimes 2}} \\ &\quad = \left\| \sum_D X^1_{s,u_{i-1}} \otimes X^1_{u_{i-1},u_i} - \sum_{D''} X^1_{s,w_{k-1}} \otimes X^1_{w_{k-1},w_k} \right\|_{V^{\otimes 2}} \\ &\qquad + \left\| \sum_{D'} X^1_{s,v_{j-1}} \otimes X^1_{v_{j-1},v_j} - \sum_{D''} X^1_{s,w_{k-1}} \otimes X^1_{w_{k-1},w_k} \right\|_{V^{\otimes 2}} \\ &\quad = \left\| \sum_{D''} \tilde{X}^1_{s,w_{k-1}} \otimes X^1_{w_{k-1},w_k} - \sum_{D''} X^1_{s,w_{k-1}} \otimes X^1_{w_{k-1},w_k} \right\|_{V^{\otimes 2}} \\ &\qquad + \left\| \sum_{D''} \hat{X}^1_{s,w_{k-1}} \otimes X^1_{w_{k-1},w_k} - \sum_{D''} X^1_{s,w_{k-1}} \otimes X^1_{w_{k-1},w_k} \right\|_{V^{\otimes 2}} \\ &\quad = \left\| \sum_{D''} \left(\tilde{X}^1_{s,w_{k-1}} - X^1_{s,w_{k-1}} \right) \otimes X^1_{w_{k-1},w_k} \right\|_{V^{\otimes 2}} \\ &\qquad + \left\| \sum_{D''} \left(\hat{X}^1_{s,w_{k-1}} - X^1_{s,w_{k-1}} \right) \otimes X^1_{w_{k-1},w_k} \right\|_{V^{\otimes 2}} \\ &\quad \leq \sum_{D''} \left\| \tilde{X}^1_{s,w_{k-1}} - X^1_{s,w_{k-1}} \right\| \left\| X^1_{w_{k-1},w_k} \right\| + \sum_{D''} \left\| \hat{X}^1_{s,w_{k-1}} - X^1_{s,w_{k-1}} \right\| \left\| X^1_{w_{k-1},w_k} \right\| \\ &\quad \leq \max_k \left\| \tilde{X}^1_{s,w_{k-1}} - X^1_{s,w_{k-1}} \right\| \left\| X^1 \right\|_{1,[s,t]} + \max_k \left\| \hat{X}^1_{s,w_{k-1}} - X^1_{s,w_{k-1}} \right\| \left\| X^1 \right\|_{1,[s,t]} \end{aligned}$$

が成立する．いま，$[s,t] \ni u \longmapsto X^1_{s,u}$ は一様連続であるから $|D|, |D'| \longrightarrow 0$ として右辺は 0 に収束する．従って $D_n \in \delta[s,t]$ を $|D_n| \longrightarrow 0$ $(n \longrightarrow \infty)$ を満たす細分列とすれば $\left(\sum_{D_n} X^1_{s,u_{i-1}} \otimes X^1_{u_{i-1},u_i} \right)_{n=1}^{\infty}$ は $V^{\otimes 2}$ の Cauchy 列となり $\in V^{\otimes 2}$ で収束する．別の細分列 $(D_m)_{m=1}^{\infty}$ $(|D_m| \longrightarrow 0)$ を取っても

$$\left\| \sum_{D_n} X^1_{s,u_{i-1}} \otimes X^1_{u_{i-1},u_i} - \sum_{D_m} X^1_{s,v_{j-1}} \otimes X^1_{v_{j-1},v_j} \right\|_{V^{\otimes 2}} \longrightarrow 0, \quad (n, m \longrightarrow \infty)$$

が成り立つから極限は細分列に依らず定まり，従って $\lim_{|D| \to 0} \sum_D X^1_{s,u_{i-1}} \otimes X^1_{u_{i-1},u_i}$ が確定する．ここで

$$X^2_{s,t} = \int_s^t X^1_{s,u} \otimes dx_u \coloneqq \lim_{|D| \to 0} \sum_D X^1_{s,u_{i-1}} \otimes X^1_{u_{i-1},u_i}$$

と定める．このとき $\Delta_T \ni (s,t) \longmapsto X^2_{s,t} \in V^{\otimes 2}$ は連続である．

定理 0.4.1. $\Omega_p(V)$ は次で定める距離

$$d_p(X,Y) \coloneqq \max_{1\le i\le [p]} \left\| X^i - Y^i \right\|_{p/i}$$

により完備距離空間となる.

証明. $(X^k)_{k=1}^{\infty}$ を Cauchy 列とすれば，任意の $\epsilon > 0$ に対し或る $K \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\left\| X^{k,i} - X^{\ell,i} \right\|_{p/i} < \epsilon, \quad (\forall k,\ell > K,\ 1 \le i \le [p])$$

が成立する．よって定理 (0.1.7) より各 i に対し或る $X^i \in B_{p/i,T}(V)$ が存在して

$$\left\| X^{k,i} - X^i \right\|_{p/i} \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty,\ 1 \le i \le [p])$$

を満たす．$X : \Delta_T \longrightarrow T^{(n)}(V)$ を

$$X_{s,t} \coloneqq (1, X^1_{s,t}, \cdots, X^n_{s,t}), \quad ((s,t) \in \Delta_T)$$

により定めれば，X^i の連続性より X も連続である．さらに任意の $D \in \delta[0,T]$ に対して

$$\begin{aligned}
\sum_D \left\| X^k_{t_{i-1},t_i} - X_{t_{i-1},t_i} \right\|^p &= \sum_D \left(\left\| X^{k,1}_{t_{i-1},t_i} - X^1_{t_{i-1},t_i} \right\| + \cdots + \left\| X^{k,n}_{t_{i-1},t_i} - X^n_{t_{i-1},t_i} \right\| \right)^p \\
&\le (n+1)^p \sum_D \left(\left\| X^{k,1}_{t_{i-1},t_i} - X^1_{t_{i-1},t_i} \right\|^p + \cdots + \left\| X^{k,n}_{t_{i-1},t_i} - X^n_{t_{i-1},t_i} \right\|^p \right) \\
&\le (n+1)^p \left(\left\| X^{k,1}_{t_{i-1},t_i} - X^1_{t_{i-1},t_i} \right\|_p^p + \cdots + \left\| X^{k,n}_{t_{i-1},t_i} - X^n_{t_{i-1},t_i} \right\|_p^p \right)
\end{aligned}$$

が成立するから，定理より

$$\sup_D \sum_D \left\| X^k_{t_{i-1},t_i} - X_{t_{i-1},t_i} \right\|^p \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty)$$

が従い X の p-variation の有界性が出る. ∎

.1 notation

以下, 零元のみの線型空間は考えない．E, E_i, F を体 $\mathbb{K}$ 上の線形空間とするとき, $\mathrm{Hom}\,(E,F)$ で E から F への $\mathbb{K}$-線型写像の全体を表し, 特に $F = \mathbb{K}$ のとき $E^{\#}$ と書く．また $\mathrm{Hom}^{(n)}\,(E_1 \times \cdots \times E_n, F)$ で $E_1 \times \cdots \times E_n$ から F への $\mathbb{K}$-n 重線型写像の全体を表す．また X をノルム空間と考えるときはノルムを $\|\cdot\|_X$ と書く.

.2 テンソル積

$n \ge 2$ とする．体 $\mathbb{K}$ 上の線形空間の族 $(E_i)_{i=1}^n$ に対してテンソル積を定めたい.

$$\Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i \right) = \left\{ b : \bigoplus_{i=1}^n E_i \longrightarrow \mathbb{K} \ ; \quad \text{有限個の } e \in \textstyle\bigoplus_{i=1}^n E_i \text{ を除いて } b(e) = 0. \right\}$$

により $\mathbb{K}$-線形空間 $\Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right)$ を定める．また $e = (e_1, \cdots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i$ に対する定義関数を

$$\mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_n}(x) = \begin{cases} 1, & x = e, \\ 0, & x \neq e \end{cases}$$

で表す．$\Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right)$ の線型部分空間を

$$\begin{aligned}&\Lambda_0\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right) \\ &:= \mathrm{Span}\left[\left\{ \begin{array}{c} \mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i+e_i',\cdots,e_n} - \mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i,\cdots,e_n} - \mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i',\cdots,e_n}, \\ \mathbb{1}_{e_1,\cdots,\lambda e_i,\cdots,e_n} - \lambda \mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i,\cdots,e_n} \end{array} \ ; \quad e_i, e_i' \in E_i, \lambda \in \mathbb{K}, 1 \leq i \leq n \right\}\right]\end{aligned}$$

により定め，$b \in \Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right)$ の $\Lambda_0\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right)$ に関する同値類を $[b]$ と書く．そして

$$E_1 \otimes \cdots \otimes E_n = \bigotimes_{i=1}^n E_i := \Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right) / \Lambda_0\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right)$$

で定める商空間を $(E_i)_{i=1}^n$ のテンソル積と定義する．また $(e_1, \cdots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i$ に対し

$$e_1 \otimes \cdots \otimes e_n := [\mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_n}]$$

により定める $\otimes : \bigoplus_{i=1}^n E_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n E_i$ をテンソル積の標準写像と呼ぶ.

定理 .2.1 (標準写像の多重線型性). $(E_i)_{i=1}^n$ を $\mathbb{K}$-線形空間の族とするとき，

$$\otimes : \bigoplus_{i=1}^n E_i \ni (e_1, \cdots, e_n) \longmapsto e_1 \otimes \cdots \otimes e_n \in \bigotimes_{i=1}^n E_i$$

は n 重線型写像である．また次が成り立つ:

$$\bigotimes_{i=1}^n E_i = \mathrm{Span}\left[\left\{ e_1 \otimes \cdots \otimes e_n \ ; \quad (e_1, \cdots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i \right\}\right]. \tag{12}$$

証明. 任意の $1 \leq i \leq n$, $e_1 \in E_1, \cdots, e_n \in E_n$, $e_i, e_i' \in E_i$, $\lambda \in \mathbb{K}$ に対して

$$\begin{aligned} e_1 \otimes \cdots \otimes (e_i + e_i') \otimes \cdots \otimes e_n &= \left[\mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i+e_i',\cdots,e_n}\right] \\ &= \left[\mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i,\cdots,e_n} + \mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i',\cdots,e_n}\right] \\ &= \left[\mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i,\cdots,e_n}\right] + \left[\mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i',\cdots,e_n}\right] \\ &= e_1 \otimes \cdots \otimes e_i \otimes \cdots \otimes e_n + e_1 \otimes \cdots \otimes e_i' \otimes \cdots \otimes e_n, \\ e_1 \otimes \cdots \otimes (\lambda e_i) \otimes \cdots \otimes e_n &= \left[\mathbb{1}_{e_1,\cdots,\lambda e_i,\cdots,e_n}\right] \\ &= \left[\lambda \mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i,\cdots,e_n}\right] \\ &= \lambda \left[\mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i,\cdots,e_n}\right] \\ &= \lambda(e_1 \otimes \cdots \otimes e_i \otimes \cdots \otimes e_n) \end{aligned}$$

が成立するから $\otimes$ は多重線型である．また任意に $u = [b] \in E \otimes F$ を取れば

$$b = \sum_{j=1}^m k_j \mathbb{1}_{e_i^j,\cdots,e_n^j}, \quad \left(k_j = b(e_i^j, \cdots, e_n^j),\ j = 1, \cdots, m\right)$$

と表せるから，

$$u = \left[\sum_{j=1}^{m} k_j \mathbb{1}_{e_i^j,\cdots,e_n^j}\right] = \left[\sum_{j=1}^{m} \mathbb{1}_{k_j e_i^j,\cdots,e_n^j}\right] = \sum_{j=1}^{m} (k_j e_1^j) \otimes \cdots \otimes e_n^j$$

が従い (12) を得る． ∎

定理 .2.2 ($\cdots \otimes 0 \otimes \cdots$ **は零ベクトル**). $(E_i)_{i=1}^n$ を $\mathbb{K}$-線形空間の族とし，テンソル積 $\bigotimes_{i=1}^n E_i$ を定める．このとき，或る i で $e_i = 0$ なら $e_1 \otimes \cdots \otimes e_n = 0$ が成り立つ．

証明. $e_i = 0$ のとき，$\lambda = 0$ とすれば

$$e_1 \otimes \cdots \otimes e_n = [\mathbb{1}_{e_1,\cdots,0,\cdots,e_n}] = [\mathbb{1}_{e_1,\cdots,\lambda e_i,\cdots,e_n} - \lambda \mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i,\cdots,e_n}] = 0$$

が成立する． ∎

定理 .2.3 (**普遍性** (universality of tensor products)). $(E_i)_{i=1}^n$ を $\mathbb{K}$-線形空間の族とする．このとき任意の $\mathbb{K}$-線型空間 V に対して，$T \in \mathrm{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n E_i, V\right)$ ならば $T \circ \otimes \in \mathrm{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$ が満たされ，これで定める次の対応 Φ は線型同型である:

$$\begin{array}{cccc} \Phi : \mathrm{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n E_i, V\right) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ T & \longmapsto & T \circ \otimes \end{array} \tag{13}$$

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{i=1}^n E_i \arrow[d, "\otimes"'] \arrow[dr, "\Phi(T)"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"'] & \\ \bigotimes_{i=1}^n E_i \arrow[r, "T"] & V \end{tikzcd}$$

また $\mathbb{K}$-線型空間 U_0 と多重線型写像 $\iota : \bigoplus_{i=1}^n E_i \longrightarrow U_0$ が，任意の $\mathbb{K}$-線型空間 V に対し

$(\otimes)_1$ U_0 は ι の像で生成される．

$(\otimes)_2$ 任意の $\delta \in \mathrm{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$ に対して或る $\tau \in \mathrm{Hom}(U_0, V)$ が $\delta = \tau \circ \iota$ を満たす．

を満たすなら，(13) において $V = U_0$ とするとき $T = \Phi^{-1}(\iota)$ は線型同型である．

後半の主張により，$(E_i)_i$ のテンソル積を別の方法で導入しても，商空間を用いて導入した $\bigotimes_i E_i$ と線型同型に結ばれる．このとき，別の方法で導入したテンソル積及び標準写像を $\tilde{\bigotimes}_i E_i$, $\tilde{\otimes}$ と表せば，或る線型同型 $T : \bigotimes_i E_i \longrightarrow \tilde{\bigotimes}_i E_i$ がただ一つ存在して

$$T(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) = e_1 \tilde{\otimes} \cdots \tilde{\otimes} e_n$$

を満たす．特に任意の並べ替え $\varphi : \{1, \cdots, n\} \longrightarrow \{1, \cdots, n\}$ に対し

$$\begin{array}{ccc} \bigotimes_{i=1}^n E_i & \cong & \bigotimes_{i=1}^n E_{\varphi(i)} \\ \cup & & \cup \\ e_1 \otimes \cdots \otimes e_n & \longleftrightarrow & e_{\varphi(1)} \otimes \cdots \otimes e_{\varphi(n)} \end{array}$$

が成立する．

証明.

第一段　$T \in \mathrm{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n E_i, V\right)$ の線型性と $\otimes$ の多重線型性より $T \circ \otimes$ は多重線型である．

第二段　$\Phi(T_1) = \Phi(T_2)$ ならば T_1 と T_2 は $\left\{ e_1 \otimes \cdots \otimes e_n \ ; \quad (e_1, \cdots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i \right\}$ の上で一致する．(12) より $T_1 = T_2$ が成立し Φ の単射性が従う．

第三段　次の二段で Φ の全射性を示す．まず，$\varphi \in \mathrm{Hom}\left(\Lambda(\bigoplus_{i=1}^n E_i), V\right)$ に対し

$$g : \bigoplus_{i=1}^n E_i \ni (e_1, \cdots, e_n) \longmapsto \varphi(\mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_n}) \in V$$

を対応させる次の写像が全単射であることを示す:

$$\begin{array}{cccc} F : \mathrm{Hom}\left(\Lambda(\bigoplus_{i=1}^n E_i), V\right) & \longrightarrow & \mathrm{Map}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right) \\ \cup & & \cup \\ \varphi & \longmapsto & g \end{array}$$

$F(\varphi_1) = F(\varphi_2)$ のとき，任意の $e \in \bigoplus_{i=1}^n E_i$ に対して $\varphi_1(\mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_n}) = \varphi_2(\mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_n})$ が成り立ち，

$$\Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i\right) = \mathrm{Span}\left[\left\{ \mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_n} \ ; \quad (e_1, \cdots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i \right\}\right]$$

であるから $\varphi_1 = \varphi_2$ が従い F の単射性を得る．また $g \in \mathrm{Map}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$ に対して

$$\varphi(a) \coloneqq \sum_{\substack{e \in \bigoplus_{i=1}^n E_i \\ a(e) \neq 0}} a(e) g(e), \quad (a \in \Lambda(\bigoplus_{i=1}^n E_i))$$

により φ を定めれば，$\varphi \in \mathrm{Hom}\left(\Lambda(\bigoplus_{i=1}^n E_i), V\right)$ が満たされ F の全射性が従う．

第四段　任意に $b \in \mathrm{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$ を取り $h \coloneqq F^{-1}(b)$ とおけば，h の線型性より

$$\begin{aligned} & b(e_1, \cdots, e_i + e_i', \cdots, e_n) - b(e_1, \cdots, e_i, \cdots, e_n) - b(e_1, \cdots, e_i', \cdots, e_n) \\ & \quad = h(\mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_i + e_i', \cdots, e_n} - \mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_i, \cdots, e_n} - \mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_i', \cdots, e_n}), \\ & b(e_1, \cdots, \lambda e_i, \cdots, e_n) - \lambda b(e_1, \cdots, e_i, \cdots, e_n) \\ & \quad = h(\mathbb{1}_{e_1, \cdots, \lambda e_i, \cdots, e_n} - \lambda \mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_i, \cdots, e_n}) \end{aligned}$$

が成り立ち，b の双線型性により h は $\Lambda_0(\bigoplus_{i=1}^n E_i)$ 上で 0 である．従って

$$T([b]) \coloneqq h(b), \quad (b \in \Lambda(\bigoplus_{i=1}^n E_i))$$

で定める T は well-defined であり，$T \in \mathrm{Hom}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$ かつ

$$b(e_1, \cdots, e_n) = h(\mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_n}) = (T \circ \otimes)(e_1, \cdots, e_n), \quad (\forall (e_1, \cdots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i)$$

が満たされ Φ の全射性が得られる．

第五段　$(\otimes)_1, (\otimes)_2$ の下で $\mathrm{Hom}\left(U_0, \bigotimes_{i=1}^n E_i\right) \ni \tau \longmapsto \tau \circ \iota \in \mathrm{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, \bigotimes_{i=1}^n E_i\right)$ は全単射であるから，$\tau \circ \iota = \otimes$ を満たす $\tau \in \mathrm{Hom}\left(U_0, \bigotimes_{i=1}^n E_i\right)$ がただ一つ存在する．同様にして $\iota = T \circ \otimes$ を満たす $T \in \mathrm{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n E_i, U_0\right)$ がただ一つ存在し，併せれば

$$\otimes = \tau \circ \iota = (\tau \circ T) \circ \otimes, \quad \iota = T \circ \otimes = (T \circ \tau) \circ \iota$$

が成り立ち，$T \longmapsto T \circ \otimes$, $\tau \longmapsto \tau \circ \iota$ が一対一であるから $\tau \circ T$, $T \circ \tau$ はそれぞれ恒等写像に一致して $T^{-1} = \tau$ が従う．すなわち T は $\bigotimes_{i=1}^n E_i$ から U_0 への線型同型である． ∎

定理 .2.4 (スカラーとのテンソル積).　E を $\mathbb{K}$-線型空間とするとき，$\mathbb{K} \otimes E$ と E は $f(\alpha \otimes e) = \alpha e$ を満たす線型写像 $f : \mathbb{K} \otimes E \longmapsto E$ により同型となる．

証明.　スカラ倍 $\iota : (\alpha, e) \longmapsto \alpha e$ は双線型である．また定理.2.3 の $(\otimes)_1, (\otimes)_2$ について，

$$E = \mathrm{Span}\,[\{\ \alpha e\ ;\quad \alpha \in \mathbb{K},\ e \in E\ \}]$$

より $(\otimes)_1$ が得られ，かつ任意の双線型写像 $\delta : \mathbb{K} \times E \longrightarrow V$ に対し

$$f(e) := \delta(1, e), \quad (\forall e \in E)$$

で線型写像 $f : E \longrightarrow V$ を定めれば，

$$f \circ \iota(\alpha, e) = f(\alpha e) = \delta(1, \alpha e) = \alpha\delta(1, e) = \delta(\alpha, e)$$

が成り立つから $(\otimes)_2$ が満たされる． ∎

定義 .2.5 (線型写像のテンソル積).　$(E_i)_{i=1}^n$ と $(F_i)_{i=1}^n$ を $\mathbb{K}$-線型空間の族とする．$f_i : E_i \longrightarrow F_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ が線型写像であるとき，

$$b : \bigoplus_{i=1}^n E_i \ni (e_1, \cdots, e_n) \longmapsto f_1(e_1) \otimes \cdots \otimes f_n(e_n) \in \bigotimes_{i=1}^n F_i$$

により定める b は n 重線型であり，定理.2.3 より $b = g \circ \otimes$ を満たす $g : \bigotimes_{i=1}^n E_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n F_i$ がただ一つ存在する．g を $f_1 \otimes \cdots \otimes f_n$ と表記して線型写像のテンソル積と定義する．いま，

$$f_1 \otimes \cdots \otimes f_n(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) = f_1(e_1) \otimes \cdots \otimes f_n(e_n), \quad (\forall (e_1, \cdots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i)$$

が成り立つ．$F_i = \mathbb{K}$ $(i = 1, \cdots, n)$ の場合は $\otimes$ を $\mathbb{K}$ の乗法と考える $(\bigotimes_{i=1}^n F_i = \mathbb{K})$.

定理 .2.6 (零写像のテンソル積は零写像).　$\mathbb{K}$-線型空間の族 $(E_i)_{i=1}^n$ と $(F_i)_{i=1}^n$ と線型写像 $f_i : E_i \longrightarrow F_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ について，或る f_i が零写像なら $f_1 \otimes \cdots \otimes f_n = 0$ となる．

証明. $f_i = 0$ とすると，定理.2.2 より $f_1 \otimes \cdots \otimes f_n$ は $\{ e_1 \otimes \cdots \otimes e_n \ ; \quad e_i \in E_i \}$ 上で 0 となる．この空間は $\bigotimes_{i=1}^n E_i$ を生成するから $f_1 \otimes \cdots \otimes f_n = 0$ が従う． ∎

定理 .2.7 (テンソル積の基底). $(E_i)_{i=1}^n$ を $\mathbb{K}$-線型空間の族とし，E_i の基底を $\left(u^i_{\lambda_i}\right)_{\lambda_i \in \Lambda_i}$ とする $(i = 1, \cdots, n)$．このとき $\left(u^1_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes u^n_{\lambda_n}\right)_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n}$ は $\bigotimes_{i=1}^n E_i$ の基底となる．

証明.

第一段 各 $u^i_{\lambda_i}$ の生成する一次元空間を $W^i_{\lambda_i} \coloneqq \mathbb{K}u^i_{\lambda_i}$ と表し

$$V_i \coloneqq \bigoplus_{\lambda_i \in \Lambda_i} W^i_{\lambda_i}, \quad (i = 1, \cdots, n)$$

とおく．$\left(u^i_{\lambda_i}\right)_{\lambda_i \in \Lambda_i}$ は E_i の基底であるから，任意の $e_i \in E_i$ に対し $v_i \in V_i$ がただ一つ定まり，

$$f_i : E_i \ni e_i \longmapsto v_i \in V_i$$

により定める線型写像 f_i は同型写像である．このとき，写像のテンソル積

$$f_1 \otimes \cdots \otimes f_n : \bigotimes_{i=1}^n E_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n V_i$$

は線型同型となる．実際，f_i の逆写像 f_i^{-1} のテンソル積

$$f_1^{-1} \otimes \cdots \otimes f_n^{-1} : \bigotimes_{i=1}^n V_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n E_i$$

によって，全ての $(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) \in \bigotimes_{i=1}^n E_i$ 及び $(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \in \bigotimes_{i=1}^n V_i$ に対し

$$\begin{aligned}
&f_1^{-1} \otimes \cdots \otimes f_n^{-1} \circ f_1 \otimes \cdots \otimes f_n(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) \\
&\qquad = f_1^{-1} \otimes \cdots \otimes f_n^{-1} \left(f_1(e_1) \otimes \cdots \otimes f_n(e_n)\right) = (e_1 \otimes \cdots \otimes e_n), \\
&f_1 \otimes \cdots \otimes f_n \circ f_1^{-1} \otimes \cdots \otimes f_n^{-1}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \\
&\qquad = f_1 \otimes \cdots \otimes f_n \left(f_1^{-1}(v_1) \otimes \cdots \otimes f_n^{-1}(v_n)\right) = (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)
\end{aligned}$$

が成立し，それぞれ $\bigotimes_{i=1}^n E_i$ と $\bigotimes_{i=1}^n V_i$ を生成するから

$$(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)^{-1} = f_1^{-1} \otimes \cdots \otimes f_n^{-1}$$

の関係を得る．

第二段 $\bigotimes_{i=1}^n V_i$ と $\bigoplus_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n} W^1_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes W^n_{\lambda_n}$ が線型同型であることを示す．先ず

$$g : \sum_j (v^j_1 \otimes \cdots \otimes v^j_n) \longmapsto \sum_j \left(v^j_1(\lambda_1) \otimes \cdots \otimes v^j_n(\lambda_n)\right)_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n}$$

により線型写像 $g : \bigotimes_{i=1}^n V_i \longrightarrow \bigoplus_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n} W^1_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes W^n_{\lambda_n}$ を定める．また

$$\iota_{\lambda_i} : W^i_{\lambda_i} \longrightarrow V_i, \quad (\lambda_i \in \Lambda_i,\ i = 1, \cdots, n)$$

を次の標準単射として定める:

$$\iota_{\lambda_i}(u)(\lambda) = \begin{cases} u, & (\lambda = \lambda_i), \\ 0, & (\lambda \neq \lambda_i), \end{cases} \quad (\lambda \in \Lambda_i,\ u \in W^i_{\lambda_i}).$$

ι_{λ_i} は線型であるから $\iota_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \iota_{\lambda_n} : W^1_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes W^n_{\lambda_n} \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n V_i$ を定義出来て,

$$h : w \longmapsto \sum_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n} \iota_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \iota_{\lambda_n} (w(\lambda_1, \cdots, \lambda_n))$$

により線型写像 $h : W^1_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes W^n_{\lambda_n} \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n V_i$ が定めれば $g^{-1} = h$ が成り立つ．実際,

$$\begin{aligned} g \circ h(w) &= g\left(\sum_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n} \iota_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \iota_{\lambda_n} (w(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)) \right) \\ &= \sum_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n} g\left(\iota_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \iota_{\lambda_n} (w(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)) \right) \\ &= w \end{aligned}$$

が任意の $w \in \bigoplus_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n} W^1_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes W^n_{\lambda_n}$ に対して成立し，かつ任意の $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ に対し

$$\begin{aligned} h \circ g(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) &= \sum_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n} \iota_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \iota_{\lambda_n} (v_1(\lambda_1) \otimes \cdots \otimes v_n(\lambda_n)) \\ &= \sum_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n} \iota_{\lambda_1}(v_1(\lambda_1)) \otimes \cdots \otimes \iota_{\lambda_n}(v_n(\lambda_n)) \\ &= \left(\sum_{\lambda_1 \in \Lambda_1} \iota_{\lambda_1}(v_1(\lambda_1)) \right) \otimes \cdots \otimes \left(\sum_{\lambda_n \in \Lambda_n} \iota_{\lambda_n}(v_n(\lambda_n)) \right) \\ &= v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \end{aligned}$$

が成り立つから $g^{-1} = h$ が従う．よって g は線型同型である．

第三段　いま，$g \circ f_1 \otimes \cdots \otimes f_n$ によって $\bigotimes_{i=1}^n E_i$ と $\bigoplus_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n} W^1_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes W^n_{\lambda_n}$ は同型に対応し,

$$w_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n}(\nu_1, \cdots, \nu_n) := \begin{cases} u^1_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes u^n_{\lambda_n}, & (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = (\nu_1, \cdots, \nu_n), \\ 0, & (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \neq (\nu_1, \cdots, \nu_n) \end{cases}$$

として $w_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n}$ を定めれば

$$u^1_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes u^n_{\lambda_n} \xmapsto{g \circ f_1 \otimes \cdots \otimes f_n} w_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n}$$

が成り立つ．$(w_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n})$ の一次独立性から $\left(u^1_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes u^n_{\lambda_n} \right)_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n}$ の一次独立性が従う．

定理 .2.8 (結合律).　$(E_i)_{i=1}^n$ を $\mathbb{K}$-線型空間の族とし，$k \in \{1, \cdots, n-1\}$ を任意に取る．このとき，次の対応関係を満たす F は線型同型である:

$$\begin{array}{ccccc} F : \bigotimes_{i=1}^n E_i & \longrightarrow & \left(\bigotimes_{i=1}^k E_i \right) \bigotimes \left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i \right) \\ \Uplus & & \Uplus \\ e_1 \otimes \cdots \otimes e_n & \longmapsto & (e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n) \end{array}$$

証明.

第一段　n 重線型写像 $f:\bigoplus_{i=1}^n E_i \longrightarrow \left(\bigotimes_{i=1}^k E_i\right)\bigotimes\left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i\right)$ を

$$f(e_1,\cdots,e_n)=(e_1\otimes\cdots\otimes e_k)\otimes(e_{k+1}\otimes\cdots\otimes e_n),\quad (\forall(e_1,\cdots,e_n)\in\bigoplus_{i=1}^n E_i)$$

により定めれば，定理.2.3 より

$$F:(e_1\otimes\cdots\otimes e_n)\longmapsto(e_1\otimes\cdots\otimes e_k)\otimes(e_{k+1}\otimes\cdots\otimes e_n)$$

を満たす線型写像 $F:\bigotimes_{i=1}^n E_i \longrightarrow \left(\bigotimes_{i=1}^k E_i\right)\bigotimes\left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i\right)$ が存在する:

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i=1}^n E_i \arrow[d, "\otimes"'] \arrow[dr, "f"] & \\
\bigotimes_{i=1}^n E_i \arrow[r, "F"] & \left(\bigotimes_{i=1}^k E_i\right)\bigotimes\left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i\right)
\end{tikzcd}$$

以降は F の逆写像を構成し F が全単射であることを示す.

第二段　$u_{k+1}\in E_{k+1},\cdots,u_n\in E_n$ を固定し

$$\Phi_{u_{k+1},\cdots,u_n}(e_1,\cdots,e_n)\coloneqq e_1\otimes\cdots e_k\otimes u_{k+1}\otimes\cdots\otimes u_n$$

によって n 重線型 $\Phi_{u_{k+1},\cdots,u_n}:\bigoplus_{i=1}^k E_i\longrightarrow\bigotimes_{i=1}^n E_i$ を定めれば，定理.2.3 より

$$G_{u_{k+1},\cdots,u_n}(e_1\otimes\cdots\otimes e_k)=e_1\otimes\cdots e_k\otimes u_{k+1}\otimes\cdots\otimes u_n$$

を満たす線型写像 $G_{u_{k+1},\cdots,u_n}:\bigotimes_{i=1}^k E_i\longrightarrow\bigotimes_{i=1}^n E_i$ が存在する.

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i=1}^k E_i \arrow[d, "\otimes"'] \arrow[dr, "\Phi_{u_{k+1},\cdots,u_n}"] & \\
\bigotimes_{i=1}^k E_i \arrow[r, "G_{u_{k+1},\cdots,u_n}"] & \bigotimes_{i=1}^n E_i
\end{tikzcd}$$

第三段　任意の $v\in\bigotimes_{i=1}^k E_i$ に対して

$$\Psi_v:\bigoplus_{i=k+1}^n E_i\ni(u_{k+1},\cdots,u_n)\longmapsto G_{u_{k+1},\cdots,u_n}(v)$$

を定めれば，Ψ_v は n 重線型であるから，定理.2.3 より

$$H_v(u_{k+1}\otimes\cdots\otimes u_n)=\Psi_v(u_{k+1},\cdots,u_n)$$

を満たす線型写像 $H_v:\bigotimes_{i=k+1}^n E_i\longrightarrow\bigotimes_{i=1}^n E_i$ が存在する.

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i=k+1}^n E_i \arrow[d, "\otimes"'] \arrow[dr, "\Psi_v"] & \\
\bigotimes_{i=k+1}^n E_i \arrow[r, "H_v"] & \bigotimes_{i=1}^n E_i
\end{tikzcd}$$

いま，$v\longmapsto\Psi_v$ は線型であり，かつ Ψ_v と H_v は線型同型で結ばれているから $v\longmapsto H_v$ の線型性が従う.

第四段 H_v の線型性と $v \longmapsto H_v$ の線型性より

$$\Gamma : \left(\bigotimes_{i=1}^{k} E_i\right) \times \left(\bigotimes_{i=k+1}^{n} E_i\right) \ni (v, w) \longmapsto H_v(w)$$

により定める Γ は

$$\begin{aligned}
\Gamma(e_1 \otimes \cdots \otimes e_k, e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n) &= H_{e_1 \otimes \cdots \otimes e_k}(e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n)) \\
&= \Psi_{e_1 \otimes \cdots \otimes e_k}(e_{k+1}, \cdots, e_n)) \\
&= G_{e_{k+1}, \cdots, e_n}(e_1 \otimes \cdots \otimes e_k)) \\
&= \Phi_{e_{k+1}, \cdots, e_n}(e_1, \cdots, e_k)) \\
&= e_1 \otimes \cdots \otimes e_n
\end{aligned} \tag{14}$$

を満たす双線型であり，定理.2.3 より

$$\begin{tikzcd}
\left(\bigotimes_{i=1}^{k} E_i\right) \times \left(\bigotimes_{i=k+1}^{n} E_i\right) \arrow[d, "\otimes"'] \arrow[dr, "\Gamma"] & \\
\left(\bigotimes_{i=1}^{k} E_i\right) \bigotimes \left(\bigotimes_{i=k+1}^{n} E_i\right) \arrow[r, "G"] & \bigotimes_{i=1}^{n} E_i
\end{tikzcd}$$

を可換にする線型写像 G が存在する．この G は F の逆写像である．実際，(14) より

$$\begin{aligned}
F \circ G((e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n)) &= F(\Gamma(e_1 \otimes \cdots \otimes e_k, e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n)) \\
&= F(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) \\
&= (e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n)
\end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned}
G \circ F(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) &= G((e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n)) \\
&= \Gamma(e_1 \otimes \cdots \otimes e_k, e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n) \\
&= e_1 \otimes \cdots \otimes e_n
\end{aligned}$$

が得られ $F^{-1} = G$ が従う． ∎

.3 テンソル積の内積

.4 クロスノルム

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ と考える．以下では $n(\geq 2)$ 個の Banach 空間で構成するテンソル積におけるクロスノルムを考察する．

定義 .4.1 (クロスノルム). $\mathbb{K}$-Banach 空間の族 $(X_i)_{i=1}^n$ のテンソル積 $\bigotimes_{i=1}^n X_i$ において

$$\alpha(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \leq \| x_1 \|_{X_1} \| x_2 \|_{X_2} \cdots \| x_n \|_{X_n}, \qquad (x_i \in X_i,\ i = 1, \cdots, n), \tag{15}$$

$$\sup_{\substack{v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i \\ v \neq 0}} \left| x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v) \right| \leq \left\| x_1^* \right\|_{X_1^*} \left\| x_2^* \right\|_{X_2^*} \cdots \left\| x_n^* \right\|_{X_n^*} \alpha(v), \qquad (x_i^* \in X_i^*,\ i = 1, \cdots, n) \tag{16}$$

を満たすようなノルム $\alpha : \bigotimes_{i=1}^n X_i \longrightarrow [0, \infty)$ をクロスノルム (cross norm) と呼ぶ．

定理 .4.2. $\mathbb{K}$-Banach 空間の族 $(X_i)_{i=1}^n$ に対するテンソル積 $\bigotimes_{i=1}^n X_i$ 上のクロスノルム α は次を満たす:

$$\alpha(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \| x_1 \|_{X_1} \cdots \| x_n \|_{X_n}, \qquad (x_i \in X_i,\ i = 1, \cdots, n),$$
$$\left\| x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^* \right\|_{(\bigotimes_{i=1}^n X_i, \alpha)^*} = \left\| x_1^* \right\|_{X_1^*} \cdots \left\| x_n^* \right\|_{X_n^*}, \qquad (x_i^* \in X_i^*,\ i = 1, \cdots, n).$$

証明. 先ず，Hahn-Banach の定理と式 (16) より

$$\begin{aligned}
\| x_1 \|_{X_1} \cdots \| x_n \|_{X_n} &= \sup_{\| x_1^* \|_{X_1^*} \le 1} \left| \langle x_1, x_1^* \rangle \right| \cdots \sup_{\| x_n^* \|_{X_n^*} \le 1} \left| \langle x_n, x_n^* \rangle \right| \\
&= \sup_{\substack{\| x_i^* \|_{X_i^*} \le 1 \\ i=1,\cdots,n}} \left| x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \right| \\
&\le \sup_{\substack{\| x_i^* \|_{X_i^*} \le 1 \\ i=1,\cdots,n}} \left\| x_1^* \right\|_{X_1^*} \cdots \left\| x_n^* \right\|_{X_n^*} \alpha(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \\
&= \alpha(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)
\end{aligned}$$

が成り立ち定理の主張の第一式を得る．またこの結果より

$$\begin{aligned}
\left\| x_1^* \right\|_{X_1^*} \cdots \left\| x_n^* \right\|_{X_n^*} &= \sup_{\| x_1 \|_{X_1} \le 1} \left| \langle x_1, x_1^* \rangle \right| \cdots \sup_{\| x_n \|_{X_n} \le 1} \left| \langle x_n, x_n^* \rangle \right| \\
&= \sup_{\substack{\| x_i \|_{X_i} \le 1 \\ i=1,\cdots,n}} \left| x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \right| \\
&\le \sup_{\alpha(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \le 1} \left| x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \right| \\
&\le \sup_{\alpha(v) \le 1} \left| x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v) \right| \\
&= \left\| x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^* \right\|_{(\bigotimes_{i=1}^n X_i, \alpha)^*}
\end{aligned}$$

が成立し主張の第二式も得られる． ∎

以下，実際クロスノルムが存在することを示す．

定義 .4.3 (インジェクティブノルム). $\mathbb{K}$-Banach 空間の族 $(X_i)_{i=1}^n$ に対し

$$\epsilon(v) := \sup_{\substack{\| x_i^* \|_{X_i^*} \le 1 \\ i=1,\cdots,n}} \left| x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v) \right|, \quad \left(v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i\right)$$

により定める ϵ をインジェクティブノルム (injective norm) と呼ぶ．

定理 .4.4 (インジェクティブノルムは最小のクロスノルム). $\mathbb{K}$-Banach 空間の族 $(X_i)_{i=1}^n$ のテンソル積 $\bigotimes_{i=1}^n X_i$ において，インジェクティブノルムは最小のクロスノルムである．

証明.

第一段 ϵ が $\bigotimes_{i=1}^{n} X_i$ 上のノルムであることを示す．劣加法性と同次性は $x_1^*\otimes\cdots\otimes x_n^*$ の線型性より従う．$v=0 \Leftrightarrow \epsilon(v)=0$ については, $v=0$ なら任意の $x_1^*\otimes\cdots\otimes x_n^*$ について $x_1^*\otimes\cdots\otimes x_n^*(v)=0$ が成り立ち $\epsilon(v)=0$ が出る．逆に $v\neq 0$ とするとき，定理.2.1 より

$$v=\sum_{j=1}^{m} x_1^j\otimes\cdots\otimes x_n^j,\quad (x_i^j\in X_i,\ j=1,\cdots,m,\ i=1,\cdots,n)$$

と表現できるが，定理.2.2 より $x_i^1\neq 0\,(i=1,\cdots,n)$ と仮定できる．x_1^1 について，もし全ての $2\leq j\leq m$ に対し $x_1^j=x_1^1$ が満たされているなら，$\hat{x}_1^*\in X_1^*$ を

$$\left\langle x_1^1,\hat{x}_1^*\right\rangle=\|x_1^1\|_{X_1},\quad \|\hat{x}_1^*\|_{X_1^*}=1$$

を満たすように選ぶ (Hahn-Banach の定理)．$x_1^j\neq x_1^1$ を満たす j がある場合，

$$L_1 := \mathrm{Span}\left[\left\{\ x_1^j\ ;\quad 2\leq j\leq m,\ x_1^1\neq x_1^j\ \right\}\right]$$

により閉部分空間を定めれば x_1^1 と L_1 との距離 d_1 は正であり，Hahn-Banach の定理より

$$\langle x_1,\hat{x}_1^*\rangle=0\ (\forall x_1\in L_1),\quad \left\langle x_1^1,\hat{x}_1^*\right\rangle=d_1>0,\quad \|\hat{x}_1^*\|_{X_1^*}=1$$

を満たす $\hat{x}_1^*\in X_1^*$ を取ることができる．同様に $\hat{x}_i^*\in X_i^*\ (i=2,\cdots,n)$ を選べば

$$\hat{x}_1^*\otimes\cdots\otimes\hat{x}_n^*(x_1^j\otimes\cdots\otimes x_n^j)=\begin{cases}\hat{x}_1^*\otimes\cdots\otimes\hat{x}_n^*(x_1^1\otimes\cdots\otimes x_n^1), & (x_i^j=x_i^1,\ i=1,\cdots,n),\\ 0, & (\text{o.w.}),\end{cases}$$

$(j=2,\cdots,m)$ が満たされるから

$$0<\hat{x}_1^*\otimes\cdots\otimes\hat{x}_n^*(x_1^1\otimes\cdots\otimes x_n^1)\leq\left|\hat{x}_1^*\otimes\cdots\otimes\hat{x}_n^*(v)\right|\leq\epsilon(v)$$

が成立し，対偶により $\epsilon(v)=0\Rightarrow v=0$ が従う．

第二段 ϵ がクロスノルムであることを示す．先ず Hahn-Banach の定理より

$$\begin{aligned}\epsilon(x_1\otimes\cdots\otimes x_n)&=\sup_{\substack{\|x_i^*\|_{X_i^*}\leq 1\\ i=1,\cdots,n}}\left|x_1^*\otimes\cdots\otimes x_n^*(x_1\otimes\cdots\otimes x_n)\right|\\&=\sup_{\|x_1^*\|_{X_1^*}\leq 1}\left|\langle x_1,x_1^*\rangle\right|\cdots\sup_{\|x_n^*\|_{X_n^*}\leq 1}\left|\langle x_n,x_n^*\rangle\right|\\&=\|x_1\|_{X_1}\cdots\|x_n\|_{X_n},\quad (\forall x_i\in X_i,\ i=1,\cdots,n)\end{aligned}$$

が成り立つ．また 0 でない $x_i^*\in X_i^*$, $(i=1,\cdots,n)$ に対しては

$$\begin{aligned}\left|x_1^*\otimes\cdots\otimes x_n^*(v)\right|&\leq\|x_1^*\|_{X_1^*}\cdots\|x_n^*\|_{X_n^*}\left[\frac{x_1^*}{\|x_1^*\|_{X_1^*}}\otimes\cdots\otimes\frac{x_n^*}{\|x_n^*\|_{X_n^*}}\right](v)\\&\leq\|x_1^*\|_{X_1^*}\cdots\|x_n^*\|_{X_n^*}\,\epsilon(v)\end{aligned}$$

が成立し，或る i で x_i^* が零写像のときは定理.2.6 より $x_1^*\otimes\cdots\otimes x_n^*=0$ が満たされ，

$$\|x_1^*\otimes\cdots\otimes x_n^*\|_{(\bigotimes_{i=1}^{n}X_i,\epsilon)}\leq\|x_1^*\|_{X_1^*}\cdots\|x_n^*\|_{X_n^*}$$

を得る．

第三段　ϵ が最小のクロスノルムであることを示す．α を任意のクロスノルムとすれば

$$\left| x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v) \right| \leq \left\| x_1^* \right\|_{X_1^*} \cdots \left\| x_n^* \right\|_{X_n^*} \alpha(v), \quad (\forall v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

が成り立つから，特に $\left\| x_i^* \right\|_{X_i^*} \leq 1,\ (i = 1, \cdots, n)$ の範囲で sup を取れば

$$\epsilon(v) \leq \alpha(v), \quad (\forall v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

が従い ϵ の最小性が出る． ∎

定義 .4.5 (プロジェクティブノルム).　$\mathbb{K}$-Banach 空間の族 $(X_i)_{i=1}^n$ に対し，定理.2.3 により

$$\begin{array}{ccc} \Phi : \mathrm{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}\right) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}\right) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ T & \longmapsto & T \circ \otimes \end{array} \tag{17}$$

により線型同型 Φ が定まる．これを用いて

$$\pi(v) := \sup_{\substack{b \in L^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}\right) \\ \| b \|_{L^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}\right)} \leq 1}} \left| \Phi^{-1}(b)(v) \right|, \quad (v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

により定める π をプロジェクティブノルム (projective norm) と呼ぶ．

定理 .4.6 (プロジェクティブノルムは最大のクロスノルム).　$\mathbb{K}$-Banach 空間の族 $(X_i)_{i=1}^n$ のテンソル積 $\bigotimes_{i=1}^n X_i$ 上にプロジェクティブノルム π を導入する．このとき式 (15) を満たす任意のセミノルム p に対し $p \leq \pi$ が成立する．特に π は最大のクロスノルムである．

証明.

第一段　π がノルムであることを示す．$v \neq 0$ とすれば，定理.4.4 の証明と同様にして

$$0 < \left| \hat{x}_1^* \otimes \cdots \otimes \hat{x}_n^*(v) \right|, \quad \left\| \hat{x}_i^* \right\|_{X_i^*} = 1, \quad (i = 1, \cdots, n)$$

を満たす $\hat{x}_i^* \in X_i^*\ (i = 1, \cdots, n)$ が存在する．

$$b(x_1, \cdots, x_n) := \langle x_1, \hat{x}_1^* \rangle \cdots \langle x_n, \hat{x}_n^* \rangle, \quad (x_i \in X_i,\ i = 1, \cdots, n)$$

により n 重線型写像 b を定めれば，$\| b \|_{L^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}\right)} \leq \left\| x_1^* \right\|_{X_1^*} \cdots \left\| x_n^* \right\|_{X_n^*} = 1$ かつ

$$0 < \left| \hat{x}_1^* \otimes \cdots \otimes \hat{x}_n^*(v) \right| = |\Phi^{-1}(b)(v)| \leq \pi(v)$$

が成立する．$\pi(0) = 0$ と劣加法性及び同次性は $\Phi^{-1}(b)$ の線型性より従う．

第二段　π がクロスノルムであることを示す．先ず，任意の $x_i \in X_i$, $(i = 1, \cdots, n)$ に対して

$$\begin{aligned}\pi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) &= \sup_{\substack{b \in L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}) \\ \| b \|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K})} \leq 1}} \left| \Phi^{-1}(b)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \right| \\ &\leq \sup_{\substack{b \in L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}) \\ \| b \|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K})} \leq 1}} \| b \|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K})} \| x_1 \|_{X_1} \cdots \| x_n \|_{X_n} \\ &= \| x_1 \|_{X_1} \cdots \| x_n \|_{X_n}\end{aligned}$$

が成立する．また 0 でない $x_i^* \in X_i^*$, $(i = 1, \cdots, n)$ に対し

$$b(x_1, \cdots, x_n) := \frac{x_1^*}{\left\| x_1^* \right\|_{X_1^*}}(x_1) \cdots \frac{x_n^*}{\left\| x_n^* \right\|_{X_n^*}}(x_n), \quad (x_i \in X_i,\ i = 1, \cdots, n)$$

により $\| b \|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K})} \leq 1$ を満たす有界 n 重線型 b を定めれば，π の定義より

$$\left| \Phi^{-1}(b)(v) \right| \leq \pi(v), \quad (\forall v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

が成り立つ．一方で写像のテンソル積の定義より

$$\Phi^{-1}(b) = \frac{x_1^*}{\left\| x_1^* \right\|_{X_1^*}} \otimes \cdots \otimes \frac{x_n^*}{\left\| x_n^* \right\|_{X_n^*}} = \frac{1}{\left\| x_1^* \right\|_{X_1^*} \cdots \left\| x_n^* \right\|_{X_n^*}} x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*$$

が満たされるから

$$\left| x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v) \right| \leq \left\| x_1^* \right\|_{X_1^*} \cdots \left\| x_n^* \right\|_{X_n^*} \pi(v), \quad (\forall v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

が従う．定理.2.6 より上式は $x_i^* = 0$ の場合も込めて成立するから

$$\left\| x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^* \right\|_{(\bigotimes_{i=1}^n X_i, \pi)^*} \leq \left\| x_1^* \right\|_{X_1^*} \cdots \left\| x_n^* \right\|_{X_n^*}$$

が得られる．

第三段　p を (15) を満たすセミノルムとし，$v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i$ を任意に取れば

$$p(v) = \phi_v(v), \quad |\phi_v(u)| \leq p(u) \quad (\forall u \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

を満たす $\phi_v \in (\bigotimes_{i=1}^n X_i, \pi)^*$ が存在する (Hahn-Banach の定理).

$$\begin{aligned}|(\phi_v \circ \otimes)(x_1, \cdots, x_n)| &= |\phi_v(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)| \\ &\leq p(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \\ &\leq \| x_1 \|_{X_1} \cdots \| x_n \|_{X_n}, \quad (\forall x_i \in X_i,\ i = 1, \cdots, n)\end{aligned}$$

が成り立つから $\| \phi_v \circ \otimes \|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K})} \leq 1$ が従い，π の定義より

$$p(v) = \phi_v(v) = \Phi^{-1}(\phi_v \circ \otimes)(v) \leq \pi(v)$$

が得られる．　■

定理 .4.7 (プロジェクティブノルムの表現). $\mathbb{K}$-Banach 空間の族 $(X_i)_{i=1}^n$ のテンソル積 $\bigotimes_{i=1}^n X_i$ にプロジェクトノルム π を導入する．このとき次が成り立つ:

$$\pi(v) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^n \| x_1 \|_{X_1} \cdots \| x_n \|_{X_n} \quad ; \quad v = \sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j \right\}.$$

証明.

第一段　$x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ 上のセミノルム λ を次で定める:

$$\lambda(v) := \inf\left\{ \sum_{i=1}^n \| x_1 \|_{X_1} \cdots \| x_n \|_{X_n} \quad ; \quad v = \sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j \right\}, \quad (\forall v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i).$$

このとき λ が式 (15) かつ $\lambda \geq \pi$ を満たせば，定理.4.6 より $\lambda = \pi$ が従う．

第二段　λ がセミノルムであることを示す．実際，任意に $u, v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i$ を取り，

$$u = \sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j, \quad v = \sum_{k=1}^r a_1^k \otimes \cdots \otimes a_n^k$$

を一つの表現とすれば，λ の定め方より

$$\lambda(u+v) \leq \sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j + \sum_{k=1}^r a_1^k \otimes \cdots \otimes a_n^k$$

が成り立つ．右辺を移項して

$$\lambda(u+v) - \sum_{k=1}^r a_1^k \otimes \cdots \otimes a_n^k \leq \lambda(u) \leq \sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j$$

かつ

$$\lambda(u+v) - \lambda(u) \leq \lambda(v) \leq \sum_{k=1}^r a_1^k \otimes \cdots \otimes a_n^k$$

が従い λ の劣加法性を得る．また任意の $0 \neq \alpha \in \mathbb{K}$, $v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i$ に対し

$$v = \sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j$$

を一つの分割とすれば

$$\alpha v = \sum_{j=1}^m \left(\alpha x_1^j\right) \otimes \cdots \otimes x_n^j$$

は αv の一つの分割となるから

$$\lambda(\alpha v) \leq \sum_{j=1}^m \left\| \alpha x_1^j \right\|_{X_1} \cdots \left\| x_n^j \right\|_{X_n} = |\alpha| \sum_{j=1}^m \left\| x_1^j \right\|_{X_1} \cdots \left\| x_n^j \right\|_{X_n}$$

が成立し，v の分割について下限を取れば $\lambda(\alpha v) \le |\alpha|\lambda(v)$ が従う．逆に

$$\alpha v = \sum_{k=1}^{r} a_1^k \otimes \cdots \otimes a_n^k$$

とすれば

$$\lambda(v) \le \sum_{k=1}^{r} \left\| \frac{1}{\alpha} a_1^k \right\|_{X_1} \cdots \left\| a_n^k \right\|_{X_n} = \frac{1}{|\alpha|} \sum_{k=1}^{r} \left\| a_1^k \right\|_{X_1} \cdots \left\| a_n^k \right\|_{X_n}$$

が成り立ち $|\alpha|\lambda(v) \le \lambda(\alpha v)$ が従う．$v = 0$ なら $v = 0 \otimes \cdots \otimes 0$ より $\lambda(v) = 0$ が満たされ

$$\lambda(\alpha v) = |\alpha|\lambda(v), \quad (\forall \alpha \in \mathbb{K},\ v \in \bigotimes_{i=1}^{n} X_i)$$

が得られる．

第三段　λ が式 (15) を満たすことを示す．実際 λ の定め方より

$$\lambda(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \le \| x_1 \|_{X_1} \cdots \| x_n \|_{X_n}, \quad (\forall x_i \in X_i,\ i = 1, \cdots, n)$$

が成り立つ．

第四段　$\lambda \ge \pi$ を示す．いま，任意に $v \in \bigotimes_{i=1}^{n} X_i$ を取り，次の分割を持つとする:

$$v = \sum_{j=1}^{m} x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j.$$

$\| b \|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^{n} X_i, \mathbb{K})} \le 1$ を満たす $b \in L^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^{n} X_i, \mathbb{K}\right)$ と式 (17) の Φ に対し

$$\begin{aligned}\left|\Phi^{-1}(b)(v)\right| &\le \sum_{j=1}^{m} \left|\Phi^{-1}(b)(x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j)\right| \\ &= \sum_{j=1}^{m} \left|b(x_1^j, \cdots, x_n^j)\right| \le \sum_{j=1}^{m} \left\| x_1^j \right\|_{X_1} \cdots \left\| x_n^j \right\|_{X_n}\end{aligned}$$

が成り立つから，b に無関係に

$$\left|\Phi^{-1}(b)(v)\right| \le \lambda(v)$$

が満たされ

$$\pi(v) = \sup_{\substack{b \in L^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^{n} X_i, \mathbb{K}\right) \\ \| b \|_{L^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^{n} X_i, \mathbb{K}\right)} \le 1}} \left|\Phi^{-1}(b)(v)\right| \le \lambda(v)$$

が従う．　■

定理 .4.8.　$\bigotimes_{i=1}^{n} X_i$ を $\mathbb{K}$-Banach 空間の族 $(X_i)_{i=1}^{n}$ のテンソル積とする．このとき $\bigotimes_{i=1}^{n} X_i$ 上の任意のノルム α に対し次が成立する:

$$\alpha \text{ がクロスノルム} \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon \le \alpha \le \pi.$$

証明． $(\Rightarrow)$ はすでに示したから $(\Leftarrow)$ を示す．実際，任意の $x_i \in X_i$, $(i = 1, \cdots, n)$ に対して

$$\alpha(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \leq \pi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \leq \| x_1 \|_{X_1} \cdots \| x_n \|_{X_n}$$

が成立し，また任意の $x_i^* \in X_i^*$, $(i = 1, \cdots, n)$ に対して

$$\begin{aligned} \left| x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v) \right| &\leq \left\| x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^* \right\|_{(\bigotimes_{i=1}^n X_i, \epsilon)^*} \epsilon(v) \\ &\leq \left\| x_1^* \right\|_{X_1^*} \cdots \left\| x_n^* \right\|_{X_n^*} \alpha(v), \quad (\forall v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i) \end{aligned}$$

が満たされ $\left\| x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^* \right\|_{(\bigotimes_{i=1}^n X_i, \alpha)^*} \leq \left\| x_1^* \right\|_{X_1^*} \cdots \left\| x_n^* \right\|_{X_n^*}$ が得られる． ∎