# ゼミ用ノート
# 会田先生の資料”Rough path analysis:An Introduction”

基礎工学研究科システム創成専攻
学籍番号 29C17095
百合川尚学

2018 年 5 月 8 日

# 目次



## 0.1 導入

以下，$d$ 次元ベクトル $x \in \mathbb{R}^d$ と $(m, d)$ 行列 $a \in \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^d$ について，成分を込めて表現する場合は $x = (x^1, \cdots, x^d)$, $a = (a^i_j)_{1\le i\le m, 1\le j\le d}$ と書く．また $T > 0$ を固定し $C^1 = C^1([0, T] \to \mathbb{R}^d)$ とおく．（端点においては片側微分を考える．）区間 $[s, t] \subset [0, T]$ の分割を $D = \{s = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t\}$ で表現し，分割の全体を $\delta[s, t]$ とおく．$|D| := \max_{1\le i\le N} |t_i - t_{i-1}|$ とし，

$$\sum_D = \sum_{i=1}^N$$

と略記する．

**定理 0.1.1 (Riemann-Stieltjes 積分).** $[s, t] \subset [0, T]$ とし，$D \in \delta[s, t]$ についてのみ考えるとき，任意の $x \in C^1$，$f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ に対して次の極限が存在する:[*1]

$$\lim_{|D|\to 0} \sum_D f(x_{s_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) \in \mathbb{R}^m.$$

$s_{i-1}$ は区間 $[t_{i-1}, t_i]$ に属する任意の点であり，極限は $s_{i-1}$ の取り方に依らない．

**証明.** 各 $x^j$ は $C^1$-級であるから，平均値の定理より $\sum_D f(x_{s_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})$ の第 $k$ 成分を

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^d \sum_D f^k_j(x_{s_{i-1}})(x^j_{t_i} - x^j_{t_{i-1}}) \\
&\quad = \sum_{j=1}^d \sum_D f^k_j(x_{s_{i-1}})\dot{x}^j_{\xi_i}(t_i - t_{i-1}), \quad ({}^\exists \xi_i \in [t_{i-1}, t_i])
\end{aligned}$$

[*1] 極限の存在を保証する条件としては，$f$ の有界性と微分可能性は必要ない．

と表現できる．各 $j,k$ について

$$\lim_{|D|\to 0}\sum_D f_j^k(x_{s_{i-1}})\dot{x}_{\xi_i}^j(t_i-t_{i-1})$$

は通常の連続関数の Riemann 積分

$$\int_s^t f_j^k(x_u)\dot{x}_u^j\,du$$

に収束する． ∎

**定義 0.1.2** ($C^1$-級のパスに対する汎関数)**.** $x\in C^1$ と $f\in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^m))$ に対して，$[s,t]\subset[0,T]$ における Riemann-Stieltjes 積分を $I$ で表現する:

$$I_{s,t}(x)=\int_s^t f(x_u)\,dx_u := \lim_{|D|\to 0}\sum_D f(x_{t_{i-1}})(x_{t_i}-x_{t_{i-1}}),$$
$$\left[\int_s^t f(x_u)\,dx_u\right]^k=\sum_{j=1}^d\int_s^t f_j^k(x_u)\,dx_u^j,\quad (k=1,\cdots,m).$$

ただし $D\in\delta[s,t]$ のみを考える．

$C^1$ は次で定めるノルム $\|\cdot\|_{C^1}$ により Banach 空間となる:

$$\|x\|_{C^1}:=\sup_{t\in[0,T]}|x(t)|+\sup_{t\in[0,T]}|\dot{x}(t)|.$$

**定理 0.1.3** ($\|\cdot\|_{C^1}$ に関する連続性)**.** $[s,t]\subset[0,T]$ とし，$C^1$ には $\|\cdot\|_{C^1}$ でノルム位相を入れる．このとき，$C^1\ni x\longmapsto I_{s,t}(x)\in\mathbb{R}^m$ は連続である．

**証明.** $C^1$ の第一可算性により点列連続性と連続性は一致するから，$x^n\longrightarrow x$ のとき $I_{s,t}(x^n)\longrightarrow I_{s,t}(x)$ が従うことを示せばよい．

$$M:=\sup_{u\in[s,t]}|f(x_u)|<\infty$$

を定めれば

$$\begin{aligned}\left|\int_s^t f(x_u^n)\,dx_u^n-\int_s^t f(x_u)\,dx_u\right|&=\left|\int_s^t f(x_u^n)\dot{x}_u^n\,du-\int_s^t f(x_u)\dot{x}_u\,du\right|\\&\leq\int_s^t\left|f(x_u^n)\dot{x}_u^n-f(x_u^n)\dot{x}_u\right|du+\int_s^t\left|f(x_u^n)\dot{x}_u-f(x_u)\dot{x}_u\right|du\\&\leq M\|x^n-x\|_{C^1}(t-s)+\sup_{u\in[s,t]}\left|f(x_u^n)-f(x_u)\right|\|x\|_{C^1}(t-s)\end{aligned}\tag{1}$$

が成り立つ．いま，任意に $\epsilon>0$ を取れば，或る $\epsilon>\delta>0$ が存在して $v,w\in x([s,t])$, $|v-w|<\delta$ なら $|f(v)-f(w)|<\epsilon$ を満たす（一様連続）．すなわち $\left\|x^{(n)}-x\right\|_{C^1}<\delta$ なら

$$\sup_{t\in[s,t]}\left|f(x_t^n)-f(x_t)\right|<\epsilon$$

が成立する．$\|x^n - x\|_{C^1} \longrightarrow 0$ の仮定より，或る自然数 $N$ が存在して $\|x^n - x\|_{C^1} < \delta\ (n > N)$ が満たされるから，$(1) < \epsilon[M(t-s) + \|x\|_{C^1}(t-s)]\ (n > N)$ が成り立ち $I_{s,t}(x^n) \longrightarrow I_{s,t}(x)$ が従う． ∎

**定義 0.1.4** ($p$-variation)．　$(V, \|\cdot\|)$ を Banach 空間とし，$[0,T]$ 上の $V$ 値関数 $x$ と $[s,t] \subset [0,T]$ に対して $p$-variation を次で定める:

$$\|x\|_{p,[s,t]} \coloneqq \left\{ \sup_{D \in \delta[s,t]} \sum_D \left\| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right\|^p \right\}^{1/p}.$$

特に，$\|\cdot\|_{p,[0,T]}$ を $\|\cdot\|_p$ と表記する．また $p \geq 1$ として，線形空間 $B_{p,T}(V)$ を

$$B_{p,T}(V) \coloneqq \left\{ x : [0,T] \longrightarrow V \ ; \quad x_0 = 0,\ x : \text{continuous},\ \|x\|_p < \infty \right\}$$

により定める．

次の結果によれば，$0 < p < 1$ に対し $B_{p,T}(V)$ を定めても 0 の定数関数のみの空間でしかない．

**定理 0.1.5** ($0 < p < 1$ に対して有界 $p$-variation なら定数)．　$x : [0,T] \longrightarrow V$ を連続関数とする．このとき，$p \in (0,1)$ に対し $\|x\|_p < \infty$ が成り立つなら $x$ は定数関数である．

**証明．**　$t \in [0,T]$ を任意に取り固定する．このとき全ての $D \in \delta[0,t]$ に対して，

$$\begin{aligned}
\|x_t - x_0\| &\leq \sum_D \left\| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right\| \leq \max_D \left\| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right\|^{1-p} \sum_D \left\| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right\|^p \\
&\leq \max_D \left\| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right\|^{1-p} \|x\|_p
\end{aligned}$$

が成り立ち，$x$ の一様連続性から右辺は $|D| \longrightarrow 0$ で 0 に収束し，$x_t = x_0$ が従う． ∎

**定理 0.1.6．**　$1 \leq p \leq q$ に対し $B_{p,T}(V) \subset B_{q,T}(V)$ が成立する．

**証明．**　任意の $x \in B_{p,T}(V)$ と $D \in \delta[0,T]$ に対し

$$\begin{aligned}
\sum_D \left\| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right\|^q &\leq \sum_D \left\| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right\|^p \left\| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right\|^{q-p} \\
&\leq 2^{q-p} \sup_{t \in [0,T]} \|x_t\|^{q-p} \sum_D \left\| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right\|^p \\
&\leq 2^{q-p} \sup_{t \in [0,T]} \|x_t\|^{q-p} \|x\|_p^p
\end{aligned}$$

が成立する． ∎

$p \geq 1$ の場合，Minkowski の不等式によれば，任意の $D \in \delta[s,t]$ に対し

$$\left\{\sum_D \left\| (x_{t_i} + y_{t_i}) - (x_{t_{i-1}} + y_{t_{i-1}}) \right\|^p \right\}^{1/p} \leq \left\{\sum_D \left\| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right\|^p \right\}^{1/p} + \left\{\sum_D \left\| y_{t_i} - y_{t_{i-1}} \right\|^p \right\}^{1/p}$$
$$\leq \| x \|_{p,[s,t]} + \| y \|_{p,[s,t]}$$

が成り立ち $\| x + y \|_{p,[s,t]} \leq \| x \|_{p,[s,t]} + \| y \|_{p,[s,t]}$ を得る．

**定理 0.1.7.** $B_{p,T}(V)$ は $\| \cdot \|_p$ をノルムとする Banach 空間である．

証明． 完備性を示す．

**第一段** $(x^n)_{n=1}^{\infty} \subset B_{p,T}(V)$ を Cauchy 列とすれば，任意の $\epsilon > 0$ に対して或る $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ が存在し

$$\| x^n - x^m \|_p = \left\{ \sup_{D \in \delta[0,T]} \sum_D \left\| \left( x^n_{t_i} - x^m_{t_i} \right) - \left( x^n_{t_{i-1}} - x^m_{t_{i-1}} \right) \right\|^p \right\}^{1/p} < \epsilon, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

を満たす．いま，任意の $t \in [0,T]$ に対して $[0,T]$ の分割 $D = \{0 \leq t \leq T\}$ を考えれば

$$\left\| x^n_t - x^m_t \right\| < \epsilon, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

が得られ，$V$ の完備性より或る $x_t \in \mathbb{R}^d$ が存在して

$$\left\| x^n_t - x_t \right\| < \epsilon \quad (n > n_\epsilon)$$

を満たす．この収束は $t$ に関して一様であるから，$t \longmapsto x_t$ は 0 出発かつ連続である．

**第二段** $\| x^n - x \|_p \longrightarrow 0 \ (n \longrightarrow \infty)$ を示す．前段によれば，任意の $D \in \delta[0,T]$ に対し

$$\sum_D \left\| (x^m_{t_i} - x^n_{t_i}) - (x^m_{t_{i-1}} - x^n_{t_{i-1}}) \right\|^p < \epsilon^p, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

が成り立っている．$D$ はせいぜい有限個の分割であるから，$m \longrightarrow \infty$ として

$$\sum_D \left\| (x_{t_i} - x^n_{t_i}) - (x_{t_{i-1}} - x^n_{t_{i-1}}) \right\|^p < \epsilon^p, \quad (n > n_\epsilon)$$

が従い，$D$ の任意性より $\| x^n - x \|_p < \epsilon \ (n > n_\epsilon)$ を得る． ∎

**定理 0.1.8.** $p \geq 1$ とする．また $x_0 = 0$ を満たす $x \in C^1$ の全体が作る線形空間を $\tilde{C}^1$ とおく．

(1) $x \in C^1$ ならば $\| x \|_p < \infty$ が成り立つ．ただちに，$\| \cdot \|_p$ は $\tilde{C}^1$ においてノルムとなる．

(2) $\tilde{C}^1$ において，$\| \cdot \|_{C^1}$ で導入する位相は $\| \cdot \|_p$ で導入する位相より強い．

証明．

**$p = 1$ の場合** 平均値の定理より，任意の $D \in \delta[0,T]$ に対し

$$\sum_D \left| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right| \leq \sum_D \| x \|_{C^1} (t_i - t_{i-1}) = \| x \|_{C^1} T < \infty$$

が成り立ち $\| x \|_1 < \infty$ が従う．

$p > 1$ の場合　$q$ を $p$ の共役指数とする．任意の $D \in \delta[0,T]$ に対し，Hölder の不等式より

$$\sum_D \left|x_{t_i} - x_{t_{i-1}}\right|^p = \sum_D \left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{x}_u\, du\right|^p \leq \sum_D (t_i - t_{i-1}) \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} |\dot{x}_u|^q\, du\right)^{p/q}$$
$$\leq \sum_D (t_i - t_{i-1}) \left(\int_0^T \|x\|_{C^1}^q\, du\right)^{p/q} = \|x\|_{C^1}^p\, T^p$$

が成立し，$\|x\|_p < \infty$ が従う．

以上より，$p \geq 1$ ならば $\|x\|_p \leq T\|x\|_{C^1}$ $(x \in C^1)$ が成り立ち (2) の主張を得る．∎

次節の考察対象は主に定理 0.1.3 と定理 0.1.8 に関係する．定理 0.1.3 によれば，$C^1$ に $\|\cdot\|_{C^1}$ でノルム位相を導入した場合，$f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ に対して $C^1 \ni x \longmapsto I_{s,t}(x)$ は連続である．一方で定理 0.1.3 によれば，0 出発 $C^1$-パス空間 $\tilde{C}^1$ に $\|\cdot\|_p$ でノルム位相を導入した場合，$\tilde{C}^1 \ni x \longmapsto I_{s,t}(x)$ が連続であるという保証はない．しかし，次節以後の結果により，$1 \leq p < 3$ かつ $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ が満たされているなら $\tilde{C}^1 \ni x \longmapsto I_{s,t}(x)$ は或る意味での連続性を持つ．

## 0.2　連続性定理

**定義 0.2.1 (記号の定義).**　$x \in C^1$，$f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ に対し次を定める．

$$\begin{aligned}
\Delta_T &\coloneqq \{\, (s,t)\ ;\quad 0 \leq s \leq t \leq T \,\},\\
X^1 &: \Delta_T \longrightarrow \mathbb{R}^d\ \left((s,t) \longmapsto X^1_{s,t} = x_t - x_s\right),\\
X^2 &: \Delta_T \longrightarrow \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d\ \left((s,t) \longmapsto X^2_{s,t} = \int_s^t (x_u - x_s) \otimes dx_u\right),\\
\tilde{I}_{s,t}(x) &\coloneqq f(x_s)X^1_{s,t} = f(x_s)(x_t - x_s),\\
J_{s,t}(x) &\coloneqq f(x_s)X^1_{s,t} + (\nabla f)(x_s)X^2_{s,t}.
\end{aligned}$$

以降，$a, b, c, d \in \mathbb{R}^d$ に対して次の表現を使う:

$$[a \otimes b]^i_j = a^i b^j,$$
$$\left[(\nabla f)(x_s)X^2_{s,t}\right]^i = \sum_{j,k=1}^d \partial_k f^i_j(x_s) \int_s^t \left(x^k_u - x^k_s\right)\, dx^j_u,$$
$$\left[(\nabla f)(x_s)(a \otimes b)\right]^i = \sum_{j,k=1}^d \partial_k f^i_j(x_s) a^k b^j,$$
$$\left[(\nabla^2 f)(x_s)(a \otimes b \otimes c)\right]^i = \sum_{j,k,v=1}^d \partial_v \partial_k f^i_j(x_s) a^v b^k c^j,$$
$$\left[(\nabla^3 f)(x_s)(a \otimes b \otimes c \otimes d)\right]^i = \sum_{j,k,v,w=1}^d \partial_w \partial_v \partial_k f^i_j(x_s) a^w b^v c^k d^j.$$

**定理 0.2.2.** $[s,t] \subset [0,T]$, $x \in C^1$, $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ とする．$D \in \delta[s,t]$ に対し

$$\tilde{I}_{s,t}(x,D) \coloneqq \sum_D \tilde{I}_{t_{i-1},t_i}(x), \quad J_{s,t}(x,D) \coloneqq \sum_D J_{t_{i-1},t_i}(x)$$

を定めるとき，次が成立する:

$$I_{s,t}(x) = \lim_{|D|\to 0} \tilde{I}_{s,t}(x,D) = \lim_{|D|\to 0} J_{s,t}(x,D).$$

*証明.* 第一の等号は $I_{s,t}(x)$ の定義によるから，第二の等号を証明する．まず，

$$\begin{aligned}
I_{s,t}(x) &= \int_s^t f(x_u)\,dx_u \\
&= \int_s^t f(x_s) + f(x_u) - f(x_s)\,dx_u \\
&= \int_s^t f(x_s)\,dx_u + \int_s^t \int_0^1 (\nabla f)(x_s + \theta(x_u - x_s)) \left(X^1_{s,u} \otimes \dot{x}_u\right)\,d\theta\,du \\
&= f(x_s)X^1_{s,t} + (\nabla f)(x_s)X^2_{s,t} \\
&\quad + \int_s^t \int_0^1 \{(\nabla f)(x_s + \theta(x_u - x_s)) - (\nabla f)(x_s)\} \left(X^1_{s,u} \otimes \dot{x}_u\right)\,d\theta\,du \\
&= J_{s,t}(x) + \int_s^t \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_s + r(x_u - x_s)) \left(X^1_{s,u} \otimes X^1_{s,u} \otimes \dot{x}_u\right)\,dr\,d\theta\,du
\end{aligned}$$

が成り立つ．$[0,T] \ni t \longmapsto x_t$ の連続性より，最下段式中の $x_s + r(x_u - x_s)$ $(0 \le r \le 1,\ s \le u \le t)$ は或るコンパクト集合 $K$ に含まれ，$f$ が $C^2$-級関数であるから

$$M \coloneqq \sum_{i,j,k,v} \sup_{x\in K} \left|\partial_v \partial_k f^i_j(x)\right|$$

として $M < \infty$ を定めれば

$$\begin{aligned}
&\left|\int_s^t \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_s + r(x_u - x_s)) \left(X^1_{s,u} \otimes X^1_{s,u} \otimes \dot{x}_u\right)\,dr\,d\theta\,du\right| \\
&\quad \le \int_s^t \int_0^1 \int_0^\theta \left|(\nabla^2 f)(x_s + r(x_u - x_s)) \left(X^1_{s,u} \otimes X^1_{s,u} \otimes \dot{x}_u\right)\right|\,dr\,d\theta\,du \\
&\quad \le M \int_s^t |X^1_{s,u}|^2 |\dot{x}_u|\,du \\
&\quad \le M \|x\|^3_{C^1} \int_s^t (u-s)^2\,du
\end{aligned}$$

が出る．特に $D \in \delta[s,t]$ に対して

$$\begin{aligned}
\sum_D \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - t_{i-1})^2\,du &\le \sum_D |D| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - t_{i-1})\,du \\
&\le \sum_D |D| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - s)\,du \le \frac{1}{2}(t-s)^2 |D| \longrightarrow 0 \quad (|D| \longrightarrow 0)
\end{aligned}$$

が成立するから，

$$\left|I_{s,t}(x) - J_{s,t}(x,D)\right| \le \sum_D \left|I_{t_{i-1},t_i}(x) - J_{t_{i-1},t_i}(x)\right| \longrightarrow 0 \quad (|D| \longrightarrow 0)$$

が従い定理の主張を得る． ∎

**定義 0.2.3** (control function). 関数 $\omega : \Delta_T \longrightarrow [0,\infty)$ が連続かつ任意の $s \le u \le t$ に対して

$$\omega(s,u) + \omega(u,t) \le \omega(s,t) \tag{2}$$

を満たすとき，$\omega$ を control function と呼ぶ．

式 (2) から $\omega(t,t) = 0$ $(\forall t \in [0,T])$ が従う．つまり control function は" 対角線上で 0 になる"．

**定義 0.2.4** (ノルム空間値写像の $p$-variation). $(V, \|\cdot\|)$ をノルム空間，$p \ge 1$ とする．このとき連続写像 $\psi : \Delta_T \longrightarrow V$ に対する $p$-variation を

$$\|\psi\|_{p,[s,t]} \coloneqq \left\{ \sup_{D \in \delta[s,t]} \sum_{D} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p \right\}^{1/p}, \quad ((s,t) \subset [0,T])$$

で定める．特に $\|\cdot\|_{p,[0,T]}$ を $\|\cdot\|_p$ と書く．

**定理 0.2.5** ($p$-variation が定める control function). $(V, \|\cdot\|)$ をノルム空間，$p \ge 1$ とする．$\|\psi\|_p < \infty$ かつ $\psi_{t,t} = 0$ $(\forall t \in [0,T])$ を満たす連続写像 $\psi : \Delta_T \longrightarrow V$ に対して，

$$\omega : \Delta_T \ni (s,t) \longmapsto \|\psi\|_{p,[s,t]}^p$$

により定める $\omega$ は control function である．

**証明．** $\|\psi\|_p < \infty$ の仮定より $\omega$ は $[0,\infty)$ 値であるから，以下では式 (2) の成立と連続性を示す．

**第一段** $\omega$ が式 (2) を満たすことを示す．実際，任意に $D_1 \in \delta[s,u], D_2 \in \delta[u,t]$ を取れば

$$\sum_{D_1} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p + \sum_{D_2} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p = \sum_{D_1 \cup D_2} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p \le \|\psi\|_{p:[s,t]}^p$$

が成り立つ．左辺の $D_1, D_2$ の取り方は独立であるから，それぞれに対し上限を取れば

$$\|\psi\|_{p:[s,u]}^p + \|\psi\|_{p:[u,t]}^p \le \|\psi\|_{p:[s,t]}^p$$

が従う．

**第二段** 任意の $[s,t] \subset [0,T]$ について[*2]，

$$\begin{aligned} \lim_{h \to +0} \omega(s,t+h) &= \inf_{h>0} \omega(s,t+h), & \lim_{h \to +0} \omega(s-h,t) &= \inf_{h>0} \omega(s-h,t), \\ \lim_{h \to +0} \omega(s,t-h) &= \sup_{h>0} \omega(s,t-h), & \lim_{h \to +0} \omega(s+h,t) &= \sup_{h>0} \omega(s+h,t) \end{aligned}$$

が成立する．実際 $\omega(s,t+h)$ について見れば，これは下に有界かつ $h \to +0$ に対し単調減少であるから極限が確定し下限に一致する．残りの三つも同様の理由で成立する．

---

[*2] 下段の二式については $s < t$ と仮定する．また上段についても，$t = T$ 或は $s = 0$ の場合を除く必要がある．

**第三段**　任意の $s \in [0,T)$ に対し，$(s,T] \ni t \longmapsto \omega(s,t)$ の左連続性を示す．ここでは

$$\tilde{\omega}(s,t) := \begin{cases} \lim_{h\to+0} \omega(s,t-h), & (s<t), \\ 0, & (s=t), \end{cases} \quad (\forall (s,t) \in \Delta_T)$$

で定める $\tilde{\omega}$ が優加法性を持ち，かつ

$$\left\| \psi_{s,t} \right\|^p \leq \tilde{\omega}(s,t), \quad (\forall (s,t) \in \Delta_T)$$

を満たすことを示す．実際これが示されれば，任意の $D \in \delta[s,t]$ に対し

$$\sum_D \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p \leq \sum_D \tilde{\omega}(t_{i-1},t_i) \leq \tilde{\omega}(s,t)$$

が成立し $\omega(s,t) \leq \tilde{\omega}(s,t)$ が従い，$\omega(s,t) \geq \omega(s,t-h)$ $(\forall h>0)$ と併せて

$$\omega(s,t) = \tilde{\omega}(s,t) = \lim_{h\to+0} \omega(s,t-h)$$

を得る．いま，任意に $s<u<t$ を取れば，十分小さい $h_1, h_2 > 0$ に対して

$$\omega(s,u-h_1) + \omega(u,t-h_2) \leq \omega(s,t-h_2)$$

が満たされ，$h_1 \longrightarrow +0,\ h_2 \longrightarrow +0$ として

$$\tilde{\omega}(s,u) + \tilde{\omega}(u,t) \leq \tilde{\omega}(s,t)$$

が成り立ち $\tilde{\omega}$ は優加法性を持つ．また，もし或る $[u,v] \subset [0,T]$ に対して

$$\left\| \psi_{u,v} \right\|^p > \tilde{\omega}(u,v)$$

が成り立つと仮定すると

$$\left\| \psi_{u,v} \right\|^p > \tilde{\omega}(u,v) \geq \omega(u,v-h) \geq \left\| \psi_{u,v-h} \right\|^p, \quad (\forall h>0)$$

となる．一方 $\psi$ の連続性より $\left\| \psi_{u,v-h} \right\|^p \longrightarrow \left\| \psi_{u,v} \right\|^p$ $(h \longrightarrow +0)$ が従い矛盾が生じる．同様にして，任意の $t \in (0,T]$ に対し $[0,t) \ni s \longmapsto \omega(s,t)$ の右連続性も出る．

**第四段**　任意の $t \in [0,T)$ に対して次を示す:

$$\lim_{h\to+0} \omega(t,t+h) = \inf_{h>0} \omega(t,t+h) = 0.$$

第一の等号は前段より従うから，第二の等号を背理法により証明する．いま

$$\inf_{h>0} \omega(t,t+h) =: \delta > 0$$

と仮定する．$\psi$ の連続性より或る $h_1$ が存在して

$$\left\| \psi_{t,t+h} \right\|^p = \left\| \psi_{t,t+h} - \psi_{t,t} \right\|^p < \frac{\delta}{8}, \quad (\forall h < h_1) \tag{3}$$

が成立するから，任意に $h_0 < h_1$ を取り固定する．一方で $\omega(t,t+h_0) \geq \delta$ より

$$\sum_{i=1}^N \left\| \psi_{\tau_{i-1},\tau_i} \right\|^p > \frac{7\delta}{8}$$

を満たす $D = \{t = \tau_0 < \tau_1 < \cdots, \tau_N = t + h_0\} \in \delta[t, t+h_0]$ が存在し，(3) と併せて

$$\sum_{i=2}^{N} \left\| \psi_{\tau_{i-1},\tau_i} \right\|^p > \frac{7\delta}{8} - \left\| \psi_{t,\tau_1} \right\|^p > \frac{7\delta}{8} - \frac{\delta}{8} = \frac{3\delta}{4}$$

を得る．また，$\omega(t, \tau_1) \geq \delta$ より或る $D' \in \delta[t, \tau_1]$ が存在して

$$\sum_{D'} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p > \frac{3\delta}{4}$$

を満たすから，$D' \cup \{\tau_1 < \cdots, \tau_N = t + h_0\} \in \delta[t, t+h_0]$ より

$$\omega(t, t+h_0) > \sum_{D'} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p + \sum_{i=2}^{N} \left\| \psi_{\tau_{i-1},\tau_i} \right\|^p > \frac{3\delta}{2}$$

が従うが，$h_0 < h_1$ の任意性と単調減少性により

$$\delta = \inf_{h>0} \omega(t, t+h) = \inf_{h_1>h>0} \omega(t, t+h) \geq \frac{3\delta}{2}$$

となり矛盾が生じる．同様にして

$$\lim_{h \to +0} \omega(t-h, t) = 0, \quad (\forall t \in (0, T])$$

も成立する．

**第五段**　任意に $s \in [0, T)$ を取り固定し，$[s, T) \ni t \longmapsto \omega(s, t)$ が右連続であることを示す．

$$\lim_{h \to +0} \omega(s, t+h) \leq \omega(s, t) \tag{4}$$

を示せば，第二段より逆向きの不等号も従い右連続性を得る．任意に $h, \epsilon > 0$ を取れば，

$$\omega(s, t+h) - \epsilon \leq \sum_{D} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p$$

を満たす $D \in \delta[s, t+h]$ が存在する．$D_1 := [s, t] \cap D$ とおいて $D_1 = \{t_0 < \cdots < t_k\}$ と表されているとする．このとき $D_2 := D \backslash (D_1 \cup \{t_{k+1}\})$ として

$$\begin{aligned}
\omega(s, t+h) - \epsilon &\leq \sum_{i=1}^{k} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p + \left\| \psi_{t_k,t_{k+1}} \right\|^p + \sum_{D_2} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p \\
&= \sum_{i=1}^{k} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p + \left\| \psi_{t_k,t} \right\|^p + \left\| \psi_{t_k,t_{k+1}} \right\|^p - \left\| \psi_{t_k,t} \right\|^p + \sum_{D_2} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p \\
&\leq \omega(s, t) + \omega(t, t+h) + \left\| \psi_{t_k,t_{k+1}} \right\|^p - \left\| \psi_{t_k,t} \right\|^p
\end{aligned}$$

が成り立つ．$\psi$ の (一様) 連続性より $\left\| \psi_{t_k,t_{k+1}} \right\|^p \longrightarrow \left\| \psi_{t_k,t} \right\|^p$ $(h \longrightarrow +0)$ が成り立つから

$$\lim_{h \to +0} \omega(s, t+h) - \epsilon \leq \omega(s, t)$$

が従い，$\epsilon$ の任意性より (4) が出る．同様にして $s \longmapsto \omega(s, t)$ の左連続性も成立する．

第六段　$\omega$ の $(s,t)\in\Delta_T$ における連続性を示す．$h,k\geq 0$ として考えれば，

$$
\begin{aligned}
&|\omega(s,t)-\omega(s-h,t-k)| \\
&\qquad \leq |\omega(s,t)-\omega(s-h,t)|+|\omega(s-h,t)-\omega(s-h,t-k)| \\
&\qquad = |\omega(s,t)-\omega(s-h,t)|+\omega(s-h,t)-\omega(s-h,t-k) \\
&\qquad \leq |\omega(s,t)-\omega(s-h,t)|+\omega(s-h,t)-\omega(s,t-k) \\
&\qquad \leq |\omega(s,t)-\omega(s-h,t)|+|\omega(s-h,t)-\omega(s,t)|+|\omega(s,t)-\omega(s,t-k)|, \\
&|\omega(s,t)-\omega(s+h,t+k)| \\
&\qquad \leq |\omega(s,t)-\omega(s+h,t)|+|\omega(s+h,t)-\omega(s+h,t+k)| \\
&\qquad = |\omega(s,t)-\omega(s+h,t)|+\omega(s+h,t+k)-\omega(s+h,t) \\
&\qquad \leq |\omega(s,t)-\omega(s+h,t)|+\omega(s,t+k)-\omega(s+h,t) \\
&\qquad \leq |\omega(s,t)-\omega(s-h,t)|+|\omega(s,t+k)-\omega(s,t)|+|\omega(s,t)-\omega(s+h,t)|
\end{aligned}
$$

が成り立ち，値の差は上述した連続性により縮まる．また $|\omega(s,t)-\omega(s-h,t+k)|$ については，$h,k\longrightarrow +0$ として $\omega(s-h,t+k)$ は単調減少に $\omega(s,t)$ に近づく．単調性より極限は $h,k$ の近づけ方に依らず

$$
\omega(s,t)=\lim_{h\to+0}\lim_{k\to+0}\omega(s-h,t+k)=\lim_{h,k\to+0}\omega(s-h,t+k)
$$

となり，同様に

$$
\omega(s,t)=\lim_{h\to+0}\lim_{k\to+0}\omega(s+h,t-k)=\lim_{h,k\to+0}\omega(s+h,t-k)
$$

も得られ，$\omega(s-h,t-k)$ は $h,k\to 0$ (近づけ方に依らない) として $\omega(s,t)$ に収束し $\omega$ の連続性が出る． ∎

**定理 0.2.6 (control function の例).**　以下の関数 $\omega:\Delta_T\longrightarrow[0,\infty)$ は control function である．

(1)　$\omega:(s,t)\longmapsto \left\| X^1 \right\|_{p:[s,t]}^p,\quad (p\geq 1,\ x\in B_{p,T}(\mathbb{R}^d)).$

(2)　$\omega:(s,t)\longmapsto \left\| X^2 \right\|_{p:[s,t]}^p,\quad (p\geq 1,\ x\in C^1).$

行列 $a=(a^i_j)$ のノルムは $|a|=\sqrt{\sum_{i,j}|a^i_j|^2}$ として考える．

**定理 0.2.7.**

(1)　$\omega:(s,t)\longmapsto X^1_{s,t}=x_t-x_s$ は連続であるから，前定理より $\omega$ は control function である．

(2)　任意の $[s,t]\subset[0,T]$ に対して $\left\|X^2\right\|_{p:[s,t]}^p<\infty$ を示せば，あとは上と同じ理由により定理の主張が得られる．実際，任意の分割 $D=\{s=t_0<\cdots<t_N=t\}$ に対し

$$
\begin{aligned}
\left\| X^2_{t_{i-1},t_i} \right\| &\leq \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (x_u-x_{t_{i-1}})\otimes\dot{x}_u\,du \right| \\
&\leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left|(x_u-x_{t_{i-1}})\otimes\dot{x}_u\right|\,du \\
&\leq \|x\|_{C^1}^2 \left\{\int_{t_{i-1}}^{t_i}(u-s)\,du\right\}^{1/p}\left\{\int_{t_{i-1}}^{t_i}(u-s)\,du\right\}^{1-1/p} \\
&\leq \|x\|_{C^1}^2 \left\{\int_{t_{i-1}}^{t_i}(u-s)\,du\right\}^{1/p}\left\{\int_{s}^{t}(u-s)\,du\right\}^{1-1/p}
\end{aligned}
$$

が成り立つから，

$$\sum_D \left\| X^2_{t_{i-1},t_i} \right\|^p \leq \sum_D \| x \|_{C^1}^{2p} \left\{ \frac{1}{2}(t-s)^2 \right\}^{p-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u-s)\, du$$

$$= \| x \|_{C^1}^{2p} \left\{ \frac{1}{2}(t-s)^2 \right\}^{p-1} \int_s^t (u-s)\, du = \| x \|_{C^1}^{2p} \left\{ \frac{1}{2}(t-s)^2 \right\}^p$$

により $\left\| X^2 \right\|_{p:[s,t]}^p < \infty$ が従う． ∎

**補題 0.2.8.** $\omega$ を $\Delta_T$ 上の control function とする．$D = \{s = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t\}$ について，$N \geq 2$ の場合或る $1 \leq i \leq N-1$ が存在して次を満たす:

$$\omega(t_{i-1}, t_{i+1}) \leq \frac{2\omega(s,t)}{N-1}. \tag{5}$$

*証明.* (会田先生のテキスト．) ∎

**定理 0.2.9** ($1 \leq p < 2$ の場合の連続性定理)**.** $1 \leq p < 2$ とし，$x_0 = y_0$ を満たす $x, y \in C^1$ と $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$, $0 < \epsilon, R < \infty$ を任意に取る．このとき，

$$\left\| X^1 \right\|_p, \left\| Y^1 \right\|_p \leq R, \quad \left\| X^1 - Y^1 \right\|_p \leq \epsilon$$

なら，或る定数 $C = C(p, R, f)$ が存在し，任意の $0 \leq s \leq t \leq T$ に対して次が成立する:

$$\left| I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y) \right| \leq \epsilon C.$$

**系 0.2.10** ($p$-variation による閉球上の Lipschitz 連続性)**.** $1 \leq p < 2$ とし，$x_0 = y_0$ を満たす $x, y \in C^1$ と $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$, $0 < R < \infty$ を任意に取る．このとき，

$$\left\| X^1 \right\|_p, \left\| Y^1 \right\|_p \leq R$$

なら，或る定数 $C = C(p, R, f)$ が存在して次を満たす:

$$\left| I_{0,T}(x) - I_{0,T}(y) \right| \leq C \left\| X^1 - Y^1 \right\|_p.$$

*証明* (系 0.2.10)*.* 定理 0.2.9 において，$\epsilon = \left\| X^1 - Y^1 \right\|_p$ $(x \neq y)$ [*3] として証明が通る． ∎

*証明* (定理 0.2.9)*.* $[s,t] \subset [0,T]$ とする．

[*3] $x = y$ なら $\left\| X^1 - Y^1 \right\|_p = 0$ かつ $I_{s,t}(x) = I_{s,t}(y)$ が成り立つ．

第一段　$\omega : \Delta_T \longrightarrow [0,\infty)$ を

$$\omega(\alpha,\beta) = \left\| X^1 \right\|_{p,[\alpha,\beta]}^p + \left\| Y^1 \right\|_{p,[\alpha,\beta]}^p + \epsilon^{-p} \left\| X^1 - Y^1 \right\|_{p,[\alpha,\beta]}^p, \quad ((\alpha,\beta) \in \Delta_T)$$

で定めれば，定理 0.2.6 により $1 \leq p$ の下で $\omega$ は control function である．

第二段　任意に $[s,t]$ の分割 $D = \{s = t_0 < \cdots < t_N = t\}$ $(N \geq 2)$ を取れば，補題 0.2.8 より (5) を満たす $t_{(0)}$ が存在する．ここで，$D_{-0} \coloneqq D$, $D_{-1} \coloneqq D \backslash \{t_{(0)}\}$ と定める．$N \geq 3$ ならば $D_{-1}$ についても (5) を満たす $t_{(1)}$ が存在するから，$D_{-2} \coloneqq D_{-1} \backslash \{t_{(1)}\}$ と定める．この操作を繰り返せば $t_{(k)}, D_{-k}$ $(k = 0,1,\cdots,N-1)$ が得られ，

$$\begin{aligned}
&\tilde{I}_{s,t}(x,D) - \tilde{I}_{s,t}(y,D) \\
&\quad = \sum_{k=0}^{N-2} \left[ \left\{ \tilde{I}_{s,t}(x,D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x,D_{-k-1}) \right\} - \left\{ \tilde{I}_{s,t}(y,D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(y,D_{-k-1}) \right\} \right] \\
&\quad + \left\{ \tilde{I}_{s,t}(x) - \tilde{I}_{s,t}(y) \right\}
\end{aligned} \tag{6}$$

と表現できる．

第三段　式 (6) について，次を満たす定数 $C_1$ が存在することを示す:

$$|(6)| \leq \epsilon C_1 \tag{7}$$

見やすくするために $t_k = t_{(k)}$ と書き直せば，

$$\begin{aligned}
&\left\{ \tilde{I}_{s,t}(x,D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x,D_{-k-1}) \right\} - \left\{ \tilde{I}_{s,t}(y,D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(y,D_{-k-1}) \right\} \\
&= \{f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}})\} X^1_{t_k,t_{k+1}} - \{f(y_{t_k}) - f(y_{t_{k-1}})\} Y^1_{t_k,t_{k+1}} \\
&= \{f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}})\} \left( X^1_{t_k,t_{k+1}} - Y^1_{t_k,t_{k+1}} \right) \\
&\quad + \{f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}})\} Y^1_{t_k,t_{k+1}} - \{f(y_{t_k}) - f(y_{t_{k-1}})\} Y^1_{t_k,t_{k+1}} \\
&= \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes \left( X^1_{t_k,t_{k+1}} - Y^1_{t_k,t_{k+1}} \right) d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X^1_{t_{i_k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{i_k+1}} d\theta \\
&\quad - \int_0^1 (\nabla f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) Y^1_{t_{i_k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{i_k+1}} d\theta \\
&= \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X^1_{t_{i_k-1},t_k} \otimes \left( X^1_{t_k,t_{i_k+1}} - Y^1_{t_k,t_{i_k+1}} \right) d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) \left( X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k} \right) \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}} d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}} d\theta \\
&\quad - \int_0^1 (\nabla f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}} d\theta \\
&= \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes \left( X^1_{t_k,t_{k+1}} - Y^1_{t_k,t_{k+1}} \right) d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) \left( X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k} \right) \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}} d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}} + r(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) - y_{t_{k-1}} - \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})))
\end{aligned}$$

$$
\left(X^1_{0,t_{k-1}} - Y^1_{0,t_{k-1}}\right) \otimes Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}}\ dr\, d\theta
$$ [*4]

$$
+ \int_0^1 \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}} + r(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) - y_{t_{k-1}} - \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))) \\
\theta\left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right) \otimes Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}}\ dr\, d\theta
$$

が成り立つ．補題 0.2.8 より

$$
\begin{aligned}
&\left|X^1_{t_{k-1},t_k}\right|, \left|Y^1_{t_{k-1},t_k}\right|, \left|X^1_{t_k,t_{k+1}}\right|, \left|Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \le \omega(t_{k-1}, t_{k+1})^{1/p} \le \left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1}\right)^{1/p}, \\
&\left|X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right|, \left|X^1_{t_k,t_{k+1}} - Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \le \epsilon\omega(t_{k-1}, t_{k+1})^{1/p} \le \epsilon\left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1}\right)^{1/p}
\end{aligned}
$$

が満たされ，また

$$
\left|X^1_{0,t_{k-1}} - Y^1_{0,t_{k-1}}\right| \le \epsilon\omega(0, t_{k-1})^{1/p} \le \epsilon\omega(0,T)^{1/p} \le \epsilon\,(2R^p + 1)^{1/p}
$$

でもあるから，

$$
M \coloneqq \sum_{i,j} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f^i_j(x)| + \sum_{i,j,k} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial_k f^i_j(x)| + \sum_{i,j,k,v} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial_v \partial_k f^i_j(x)| \tag{8}
$$

と定めて

$$
\begin{aligned}
&\left|\left\{\tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1})\right\} - \left\{\tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k-1})\right\}\right| \\
&\le M\left|X^1_{t_{k-1},t_k}\right|\left|X^1_{t_k,t_{k+1}} - Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\quad + M\left|X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right|\left|Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\quad + M\left|X^1_{0,t_{k-1}} - Y^1_{0,t_{k-1}}\right|\left|Y^1_{t_{k-1},t_k}\right|\left|Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\quad + M\left|X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right|\left|Y^1_{t_{k-1},t_k}\right|\left|Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\le \epsilon M\left[2 + 2\,(2R^p+1)^{1/p}\right]\left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1}\right)^{2/p} \\
&\le \epsilon M\left[2 + 2\,(2R^p+1)^{1/p}\right] 2^{2/p}\,(2R^p+1)^{2/p}\left(\frac{1}{N-k-1}\right)^{2/p}
\end{aligned}
$$

を得る．

$$
C'_1 \coloneqq M\left[2 + 2\,(2R^p+1)^{1/p}\right] 2^{2/p}\,(2R^p+1)^{2/p}
$$

とおけば

$$
|(6)| \le \sum_{k=0}^{N-2} \epsilon C'_1 \left(\frac{1}{N-k-1}\right)^{2/p} < \epsilon C'_1 \zeta\!\left(\frac{2}{p}\right)
$$

が成立し，$p < 2$ より $\zeta(2/p) < \infty$ であるから $C_1 \coloneqq C'_1\zeta(2/p)$ とおいて (7) が従う．

[*4] $x_0 = y_0$ の仮定より $x_{t_{k-1}} - y_{t_{k-1}} = X^1_{0,t_{k-1}} - Y^1_{0,t_{k-1}}$ が成り立つ．

**第四段**　$x_0 = y_0$ の仮定により $x_s - y_s = X^1_{0,s} - Y^1_{0,s}$ が成り立ち

$$\begin{aligned}
\left|\tilde{I}_{s,t}(x) - \tilde{I}_{s,t}(y)\right| &= \left|f(x_s)X^1_{s,t} - f(y_s)Y^1_{s,t}\right| \\
&\le \left|f(x_s)X^1_{s,t} - f(x_s)Y^1_{s,t}\right| + \left|f(x_s)Y^1_{s,t} - f(y_s)Y^1_{s,t}\right| \\
&\le M\left|X^1_{s,t} - Y^1_{s,t}\right| + \left|\int_0^1 (\nabla f)(y_s + \theta(x_s - y_s))\left[\left(X^1_{0,s} - Y^1_{0,s}\right) \otimes Y^1_{s,t}\right] d\theta\right| \\
&\le M\left|X^1_{s,t} - Y^1_{s,t}\right| + M\left|X^1_{0,s} - Y^1_{0,s}\right|\left|Y^1_{s,t}\right| \\
&\le M\epsilon\omega(s,t)^{1/p} + M\epsilon\omega(0,s)^{1/p}\omega(s,t)^{1/p} \\
&\le \epsilon M\left[(2R^p + 1)^{1/p} + (2R^p + 1)^{2/p}\right]
\end{aligned}$$

が従う．ここで $C_2 := M\left[(2R^p + 1)^{1/p} + (2R^p + 1)^{2/p}\right]$ とおく．

**第五段**　第二段と第三段より，任意の $D \in \delta[s,t]$ に対し

$$\left|\tilde{I}_{s,t}(x, D) - \tilde{I}_{s,t}(y, D)\right| \le \epsilon(C_1 + C_2)$$

が成立し．定理 0.2.2 により $|D| \longrightarrow 0$ として

$$\left|I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y)\right| \le \epsilon(C_1 + C_2)$$

が出る． ∎

**定理 0.2.11** ($2 \le p < 3$ の場合の連続性定理)**.**　$2 \le p < 3$ とし，$x_0 = y_0$ を満たす $x, y \in C^1$ と $f \in C^2_b(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$, $0 < \epsilon, R < \infty$ を任意に取る．このとき，

$$\begin{aligned}
&\left\| X^1 \right\|_p, \left\| Y^1 \right\|_p, \left\| X^2 \right\|_{p/2}, \left\| Y^2 \right\|_{p/2} \le R < \infty, \\
&\left\| X^1 - Y^1 \right\|_p, \left\| X^2 - Y^2 \right\|_{p/2} \le \epsilon
\end{aligned}$$

なら，或る定数 $C = C(p, R, f)$ が存在し，任意の $0 \le s \le t \le T$ に対して次が成立する:

$$\left|I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y)\right| \le \epsilon C.$$

**系 0.2.12.**　$1 \le p < 2$ とし，$x_0 = y_0$ を満たす $x, y \in C^1$ と $f \in C^2_b(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$, $0 < R < \infty$ を任意に取る．このとき，

$$\left\| X^1 \right\|_p, \left\| Y^1 \right\|_p, \left\| X^2 \right\|_{p/2}, \left\| Y^2 \right\|_{p/2} \le R$$

なら，或る定数 $C = C(p, R, f)$ が存在して次を満たす:

$$\left|I_{0,T}(x) - I_{0,T}(y)\right| \le C\left(\left\| X^1 - Y^1 \right\|_p + \left\| X^2 - Y^2 \right\|_{p/2}\right).$$

**証明** (系 0.2.12)**.**　定理 0.2.11 において，$\epsilon = \left\| X^1 - Y^1 \right\|_p + \left\| X^2 - Y^2 \right\|_{p/2}$ $(x \ne y)$ として証明が通る． ∎

**証明** (定理 0.2.12)**.**　$[s,t] \subset [0,T]$ とする．

第一段　$\omega : \Delta_T \longrightarrow [0,\infty)$ を

$$\begin{aligned}\omega(\alpha,\beta) &= \left\| X^1 \right\|_{p,[\alpha,\beta]}^{p} + \left\| Y^1 \right\|_{p,[\alpha,\beta]}^{p} + \left\| X^2 \right\|_{p/2,[\alpha,\beta]}^{p/2} + \left\| Y^2 \right\|_{p/2,[\alpha,\beta]}^{p/2} \\ &\quad + \epsilon^{-p} \left\| X^1 - Y^1 \right\|_{p,[\alpha,\beta]}^{p} + \epsilon^{-p/2} \left\| X^2 - Y^2 \right\|_{p/2,[\alpha,\beta]}^{p/2}, \quad ((\alpha,\beta) \in \Delta_T)\end{aligned}$$

で定めれば，定理 0.2.6 により $2 \le p$ の下で $\omega$ は control function である．

第二段　$D \in \delta[s,t]$ に対し，定理 0.2.9 の証明と同様にして $t_{(k)}, D_{-k}$ を構成すれば

$$\begin{aligned}&J_{s,t}(x,D) - J_{s,t}(y,D) \\ &\quad = \sum_{k=0}^{N-2} \left[ \{J_{s,t}(x,D_{-k}) - J_{s,t}(x,D_{-k-1})\} - \{J_{s,t}(y,D_{-k}) - J_{s,t}(y,D_{-k-1})\} \right] \\ &\qquad + \{J_{s,t}(x) - J_{s,t}(y)\}\end{aligned} \tag{9}$$

と表現できる．

第三段　$J_{s,t}(x,D_{-k}) - J_{s,t}(x,D_{-k-1})$ を変形する．以降 $t_k = t_{(k)}$ と書き直せば

$$\begin{aligned}&J_{s,t}(x,D_{-k}) - J_{s,t}(x,D_{-k-1}) \\ &\quad = J_{t_{k-1},t_k}(x) + J_{t_k,t_{k+1}}(x) - J_{t_{k-1},t_{k+1}}(x) \\ &\quad = f(x_{t_{k-1}})X^1_{t_{k-1},t_k} + f(x_{t_k})X^1_{t_k,t_{k+1}} - f(x_{t_{k-1}})X^1_{t_{k-1},t_{k+1}} \\ &\qquad\quad + (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X^2_{t_{k-1},t_k} + (\nabla f)(x_{t_k})X^2_{t_k,t_{k+1}} - (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X^2_{t_{k-1},t_{k+1}} \\ &\quad = \{f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}})\} X^1_{t_k,t_{k+1}} \\ &\qquad\quad + (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X^2_{t_{k-1},t_k} + (\nabla f)(x_{t_k})X^2_{t_k,t_{k+1}} - (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X^2_{t_{k-1},t_{k+1}} \\ &\quad = \int_0^1 \{(\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) - (\nabla f)(x_{t_{k-1}})\} X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_k,t_{k+1}}\, d\theta \\ &\qquad\quad + (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_k,t_{k+1}} \\ &\qquad\quad + (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X^2_{t_{k-1},t_k} + (\nabla f)(x_{t_k})X^2_{t_k,t_{k+1}} - (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X^2_{t_{k-1},t_{k+1}} \\ &\quad = \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}))X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta \\ &\qquad\quad + (\nabla f)(x_{t_{k-1}})\left( X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_k,t_{k+1}} + X^2_{t_{k-1},t_k} - X^2_{t_{k-1},t_{k+1}} \right) \\ &\qquad\quad + (\nabla f)(x_{t_k})X^2_{t_k,t_{k+1}} \\ &\quad = \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}))X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta \\ &\qquad\quad + \{(\nabla f)(x_{t_k}) - (\nabla f)(x_{t_{k-1}})\} X^2_{t_k,t_{k+1}} \\ &\quad = \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}))X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta \\ &\qquad\quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}))X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^2_{t_k,t_{k+1}}\, d\theta\end{aligned}$$

を得る．

第四段　式 (9) について，次を満たす定数 $C_1$ が存在することを示す:

$$|(9)| \le \epsilon C_1. \tag{10}$$

実際，前段の結果より

$$
\begin{aligned}
&\{J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})\} - \{J_{s,t}(y, D_{-k}) - J_{s,t}(y, D_{-k-1})\} \\
&= \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}))X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}))X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^2_{t_k,t_{k+1}}\, d\theta \\
&\quad - \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta \\
&\quad - \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^2_{t_k,t_{k+1}}\, d\theta \\
&= \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}))X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes \left(X^1_{t_k,t_{k+1}} - Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right) dr\, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}))X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes \left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right) \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^\theta \left\{(\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) - (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))\right\} \\
&\qquad\qquad X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))\left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right) \otimes Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}))X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes \left(X^2_{t_k,t_{k+1}} - Y^2_{t_k,t_{k+1}}\right) d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \left\{(\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) - (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))\right\} \\
&\qquad\qquad X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^2_{t_k,t_{k+1}}\, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))\left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right) \otimes Y^2_{t_k,t_{k+1}}\, d\theta \\
&= \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}))X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes \left(X^1_{t_k,t_{k+1}} - Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right) dr\, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}))X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes \left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right) \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^\theta \int_0^1 (\nabla^3 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}) + u(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) - y_{t_{k-1}} - r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))) \\
&\qquad\qquad \left\{\left(X^1_{0,t_{k-1}} - Y^1_{0,t_{k-1}}\right) + r\left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right)\right\} \otimes X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}}\, du\, dr\, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))\left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right) \otimes Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}))X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes \left(X^2_{t_k,t_{k+1}} - Y^2_{t_k,t_{k+1}}\right) d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^1 (\nabla^3 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}) + r(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) - y_{t_{k-1}} - \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))) \\
&\qquad\qquad \left\{\left(X^1_{0,t_{k-1}} - Y^1_{0,t_{k-1}}\right) + \theta\left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right)\right\} \otimes X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^2_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))\left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right) \otimes Y^2_{t_k,t_{k+1}}\, d\theta
\end{aligned}
$$

が成り立つから，

$$
\begin{aligned}
M &:= \sum_{i,j} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f^i_j(x)| + \sum_{i,j,k} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial_k f^i_j(x)| \\
&\quad + \sum_{i,j,k,v} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial_v \partial_k f^i_j(x)| + \sum_{i,j,k,v,w} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial_w \partial_v \partial_k f^i_j(x)| \qquad (11)
\end{aligned}
$$

とおいて

$$
\begin{aligned}
&\left|\{J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})\} - \{J_{s,t}(y, D_{-k}) - J_{s,t}(y, D_{-k-1})\}\right| \\
&\le M \left|X^1_{t_{k-1},t_k}\right| \left|X^1_{t_{k-1},t_k}\right| \left|X^1_{t_k,t_{k+1}} - Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\quad + M \left|X^1_{t_{k-1},t_k}\right| \left|X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right| \left|Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\quad + M \left|X^1_{0,t_{k-1}} - Y^1_{0,t_{k-1}}\right| \left|X^1_{t_{k-1},t_k}\right| \left|Y^1_{t_{k-1},t_k}\right| \left|Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\quad + M \left|X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right| \left|X^1_{t_{k-1},t_k}\right| \left|Y^1_{t_{k-1},t_k}\right| \left|Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\quad + M \left|X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right| \left|Y^1_{t_{k-1},t_k}\right| \left|Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\quad + M \left|X^1_{t_{k-1},t_k}\right| \left|X^2_{t_k,t_{k+1}} - Y^2_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\quad + M \left|X^1_{0,t_{k-1}} - Y^1_{0,t_{k-1}}\right| \left|X^1_{t_{k-1},t_k}\right| \left|Y^2_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\quad + M \left|X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right| \left|X^1_{t_{k-1},t_k}\right| \left|Y^2_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\quad + M \left|X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right| \left|Y^2_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\le \epsilon M \left[5 + 2\omega(0, t_{k-1})^{1/p} + 2\omega(t_{k-1}, t_k)^{1/p}\right] \left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1}\right)^{3/p} \\
&\le \epsilon M \left[2 + 4\left(2R^p + 2R^{p/2} + 2\right)^{1/p}\right] 2^{3/p} \left(2R^p + 2R^{p/2} + 2\right)^{3/p} \left(\frac{1}{N-k-1}\right)^{3/p}
\end{aligned}
$$

を得る．ここで

$$
C'_1 := M \left[2 + 4\left(2R^p + 2R^{p/2} + 2\right)^{1/p}\right] 2^{3/p} \left(2R^p + 2R^{p/2} + 2\right)^{3/p}
$$

と定めれば

$$
|(9)| \le \sum_{k=0}^{N-2} \epsilon C'_1 \left(\frac{1}{N-k-1}\right)^{3/p} < \epsilon C'_1 \zeta\left(\frac{3}{p}\right)
$$

が成立し，$p < 3$ より $\zeta(3/p) < \infty$ であるから $C_1 := C'_1 \zeta(3/p)$ とおいて (10) が出る．

**第五段**　$x_0 = y_0$ の仮定により

$$
\begin{aligned}
&\left|J_{s,t}(x) - J_{s,t}(y)\right| \\
&\le \left|f(x_s)X^1_{s,t} - f(y_s)Y^1_{s,t}\right| + \left|(\nabla f)(x_s)X^2_{s,t} - (\nabla f)(y_s)Y^2_{s,t}\right| \\
&\le \left|f(x_s)X^1_{s,t} - f(x_s)Y^1_{s,t}\right| + \left|f(x_s)Y^1_{s,t} - f(y_s)Y^1_{s,t}\right| \\
&\quad + \left|(\nabla f)(x_s)X^2_{s,t} - (\nabla f)(x_s)Y^2_{s,t}\right| + \left|(\nabla f)(x_s)Y^2_{s,t} - (\nabla f)(y_s)Y^2_{s,t}\right| \\
&\le M \left|X^1_{s,t} - Y^1_{s,t}\right| + \left|\int_0^1 (\nabla f)(y_s + \theta(x_s - y_s))(x_s - y_s) \otimes Y^1_{s,t}\, d\theta\right| \\
&\quad + M \left|X^2_{s,t} - Y^2_{s,t}\right| + \left|\int_0^1 (\nabla^2 f)(y_s + \theta(x_s - y_s))(x_s - y_s) \otimes Y^2_{s,t}\, d\theta\right| \\
&\le M \left|X^1_{s,t} - Y^1_{s,t}\right| + M \left|X^1_{0,s} - Y^1_{0,s}\right| \left|Y^1_{s,t}\right| \\
&\quad + M \left|X^2_{s,t} - Y^2_{s,t}\right| + M \left|X^1_{0,s} - Y^1_{0,s}\right| \left|Y^2_{s,t}\right|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\le \epsilon M\omega(s,t)^{1/p} + \epsilon M\omega(0,s)^{1/p}\omega(s,t)^{1/p} \\
&\quad + \epsilon M\omega(s,t)^{2/p} + \epsilon M\omega(0,s)^{1/p}\omega(s,t)^{2/p} \\
&\le \epsilon M\left[\omega(0,T)^{1/p} + 2\omega(0,T)^{2/p} + \omega(0,T)^{3/p}\right] \\
&\le \epsilon M\left[\left(2R^p + 2R^{p/2} + 2\right)^{1/p} + 2\left(2R^p + 2R^{p/2} + 2\right)^{2/p} + \left(2R^p + 2R^{p/2} + 2\right)^{3/p}\right]
\end{aligned}
$$

が従う．ここで最下段の $\epsilon$ の係数を $C_2$ とおく．

**第六段**　以上より，任意の $D \in \delta[s,t]$ に対し

$$
\left|J_{s,t}(x,D) - J_{s,t}(y,D)\right| \le \epsilon(C_1 + C_2)
$$

が成り立ち，定理 0.2.2 により $|D| \longrightarrow 0$ として

$$
\left|I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y)\right| \le \epsilon(C_1 + C_2)
$$

が出る． ∎

**系 0.2.13 (パスが 0 出発なら $f$ の有界性は要らない).**　定理 0.2.9 と定理 0.2.11 について，$x, y \in \tilde{C}^1$ ならば $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ として主張が成り立つ．

**証明.**　$x_0 = 0$ なら

$$
\left\|X^1\right\|_p \le R \quad \Rightarrow \quad |x_t| \le R \quad (\forall t \in [0,T])
$$

が成り立つから，式 (8) と (11) において $\sup_{x\in\mathbb{R}^d}$ を $\sup_{|x|\le 9R}$ に替えればよい． ∎

## 0.3 Young 積分

補題 0.3.1. $x \in C^1$, $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ とする．

(1) $1 \le p < 2$ の場合，或る control function $\omega$ が存在して

$$\left|X^1_{s,t}\right| \le \omega(s,t)^{1/p}, \quad (0 \le \forall s \le \forall t \le T)$$

を満たすとき，ある定数 $C = C(p, f)$ があり

$$\left|I_{s,t}(x)\right| \le C\left(\omega(s,t)^{1/p} + \omega(s,t)^{2/p}\right).$$

が成立する．

(2) $2 \le p < 3$ の場合，或る control function $\omega$ が存在して

$$\left|X^1_{s,t}\right| \le \omega(s,t)^{1/p}, \quad \left|X^2_{s,t}\right| \le \omega(s,t)^{2/p}, \quad (0 \le \forall s \le \forall t \le T)$$

を満たすとき，ある定数 $C = C(p, f)$ があり

$$\left|I_{s,t}(x)\right| \le C\left(\omega(s,t)^{1/p} + \omega(s,t)^{2/p} + \omega(s,t)^{3/p}\right).$$

が成立する．

証明.

(1) $D = \{s = t_0 < \cdots < t_N = t\}$ $(N \ge 2)$ に対し，補題 0.2.8 により存在する $i$ を取り $D_{-1} := D \backslash \{i\}$ と書く．補題 0.2.8 の添数を除く作業を続けて $D_{-k}$ $(k = 1, \cdots, N-1)$ を構成する．

$$M := \max_{\substack{t \in [0,T] \\ 1 \le i \le m \\ 1 \le j,k \le d}} \left|\partial_k f^i_j(x_t)\right|, \quad M' := \max_{t \in [0,T]} |f(x_t)|$$

とおけば $M, M' < \infty$ であり，$\left|X^1_{t_i,t_{i+1}}\right| \le \omega(t_i, t_{i+1})^{1/p} \le \omega(t_{i-1}, t_{i+1})^{1/p}$ と補題 0.2.8 により

$$\begin{aligned}
\left|\tilde{I}_{s,t}(x, D) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-1})\right| &= \left|\tilde{I}_{t_{i-1},t_i}(x) + \tilde{I}_{t_i,t_{i+1}}(x) - \tilde{I}_{t_{i-1},t_{i+1}}(x)\right| \\
&\le \left|\{f(x_{t_i}) - f(x_{t_{i-1}})\} X^1_{t_i,t_{i+1}}\right| \\
&\le \left|\left\{\int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{i-1}} + \theta(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}))\, d\theta\right\} X^1_{t_{i-1},t_i} \otimes X^1_{t_i,t_{i+1}}\right| \\
&\le md^2 M \left|X^1_{t_i,t_{i+1}}\right|^2 \\
&\le md^2 M \left(\frac{2\omega(s,t)}{N-1}\right)^{2/p}
\end{aligned}$$

が成立する．同様に

$$\left|\tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1})\right| \le md^2 M \left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1}\right)^{2/p}, \quad (k = 0, \cdots, N-2)$$

が成り立ち ($D_{-0} = D$)

$$
\begin{aligned}
\left|\tilde{I}_{s,t}(x,D) - f(x_s)X^1_{s,t}\right| &\le \sum_{k=0}^{N-2}\left|\tilde{I}_{s,t}(x,D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x,D_{-k-1})\right| \\
&\le md^2 M(2\omega(s,t))^{2/p}\sum_{k=0}^{N-2}\left(\frac{1}{N-k-1}\right)^{2/p} \\
&\le md^2 M(2\omega(s,t))^{2/p}\zeta\left(\frac{2}{p}\right)
\end{aligned}
$$

が従う．いま，仮定より $p < 2$ であるから $\zeta(2/p) < \infty$ であり，定理 0.2.2 より

$$\left|I_{s,t}(x)\right| \le M'\omega(s,t)^{1/p} + md^2 M(2\omega(s,t))^{2/p}\zeta\left(\frac{2}{p}\right)$$

を得る．

(2) (1) と同様に $D_{-k}$ ($k = 1, \cdots, N-1$) を構成する．会田先生のノートの通りに

$$
\begin{aligned}
J_{s,t}(x,D) - J_{s,t}(x,D_{-1}) = &\left\{\int_0^1\int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{i-1}} + \theta(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}))\,dr\,d\theta\right\} X^1_{t_{i-1},t_i}\otimes X^1_{t_{i-1},t_i}\otimes X^1_{t_i,t_{i+1}} \\
&+ \left\{\int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{i-1}} + \theta(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}))\,d\theta\right\} X^1_{t_{i-1},t_i}\otimes X^2_{t_i,t_{i+1}}
\end{aligned}
$$

を得る．ここで (1) の $M, M'$ に加えて

$$M'' := \max_{\substack{t\in[0,T] \\ 1\le i\le m \\ 1\le j,k,v\le d}} \left|\partial_v\partial_k f^i_j(x_t)\right|$$

とおけば

$$
\begin{aligned}
\left|J_{s,t}(x,D_{-k}) - J_{s,t}(x,D_{-k-1})\right| &\le md^2 M\left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1}\right)^{3/p} + md^2 M''\left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1}\right)^{1/p}\left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1}\right)^{2/p} \\
&\le md^2(M + M'')\left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1}\right)^{3/p}
\end{aligned}
$$

が成立し，会田先生のノートの通りに

$$\left|J_{s,t}(x,D) - \left(f(x_s)X^1_{s,t} + (\nabla f)(x_s)X^2_{s,t}\right)\right| \le 2^{3/p} md^2(M + M'')\zeta\left(\frac{3}{p}\right)\omega(s,t)^{3/p}$$

が従い，$p < 3$ の仮定より $\zeta(3/p) < \infty$ である．(1) と同じく定理 0.2.2 より

$$\left|I_{s,t}(x)\right| \le M'\omega(s,t)^{1/p} + md^2 M\omega(s,t)^{2/p} + 2^{3/p} md^2(M + M'')\zeta\left(\frac{3}{p}\right)\omega(s,t)^{3/p}$$

となる． ∎

## 0.4 The notion of rough path

連続かつ有界変動なパス $x : [0,T] \longrightarrow V$ に対して次の積分

$$\int_s^t X^1_{s,u}\otimes dx_u$$

を定めたい．ただし $X^1_{s,t} = x_t - x_s$ $((s,t) \in \Delta_T)$ である．いま，細分 $D = \{s = u_0 < \cdots < u_n = t\}, D' = \{s = v_0 < \cdots < v_m = t\} \in \delta[s,t]$ に対して，共通細分を $D'' = \{s = w_0 < w_1 \cdots \le t\}$ と表し

$$
\begin{aligned}
\tilde{X}^1_{s,w_k} &:= X^1_{s,u_i}, \quad (u_i \le w_k \le u_{i+1}),\\
\hat{X}^1_{s,w_k} &:= X^1_{s,v_j}, \quad (v_j \le w_k \le v_{j+1})
\end{aligned}
$$

により $\tilde{X}^1, \hat{X}^1$ を定める．このとき

$$
\begin{aligned}
&\left\| \sum_D X^1_{s,u_{i-1}} \otimes X^1_{u_{i-1},u_i} - \sum_{D'} X^1_{s,v_{j-1}} \otimes X^1_{v_{j-1},v_j} \right\|_{V^{\otimes 2}}\\
&\quad = \left\| \sum_D X^1_{s,u_{i-1}} \otimes X^1_{u_{i-1},u_i} - \sum_{D''} X^1_{s,w_{k-1}} \otimes X^1_{w_{k-1},w_k} \right\|_{V^{\otimes 2}}\\
&\qquad + \left\| \sum_{D'} X^1_{s,v_{j-1}} \otimes X^1_{v_{j-1},v_j} - \sum_{D''} X^1_{s,w_{k-1}} \otimes X^1_{w_{k-1},w_k} \right\|_{V^{\otimes 2}}\\
&\quad = \left\| \sum_{D''} \tilde{X}^1_{s,w_{k-1}} \otimes X^1_{w_{k-1},w_k} - \sum_{D''} X^1_{s,w_{k-1}} \otimes X^1_{w_{k-1},w_k} \right\|_{V^{\otimes 2}}\\
&\qquad + \left\| \sum_{D''} \hat{X}^1_{s,w_{k-1}} \otimes X^1_{w_{k-1},w_k} - \sum_{D''} X^1_{s,w_{k-1}} \otimes X^1_{w_{k-1},w_k} \right\|_{V^{\otimes 2}}\\
&\quad = \left\| \sum_{D''} \left( \tilde{X}^1_{s,w_{k-1}} - X^1_{s,w_{k-1}} \right) \otimes X^1_{w_{k-1},w_k} \right\|_{V^{\otimes 2}}\\
&\qquad + \left\| \sum_{D''} \left( \hat{X}^1_{s,w_{k-1}} - X^1_{s,w_{k-1}} \right) \otimes X^1_{w_{k-1},w_k} \right\|_{V^{\otimes 2}}\\
&\quad \le \sum_{D''} \left\| \tilde{X}^1_{s,w_{k-1}} - X^1_{s,w_{k-1}} \right\| \left\| X^1_{w_{k-1},w_k} \right\| + \sum_{D''} \left\| \hat{X}^1_{s,w_{k-1}} - X^1_{s,w_{k-1}} \right\| \left\| X^1_{w_{k-1},w_k} \right\|\\
&\quad \le \max_k \left\| \tilde{X}^1_{s,w_{k-1}} - X^1_{s,w_{k-1}} \right\| \left\| X^1 \right\|_{1,[s,t]} + \max_k \left\| \hat{X}^1_{s,w_{k-1}} - X^1_{s,w_{k-1}} \right\| \left\| X^1 \right\|_{1,[s,t]}
\end{aligned}
$$

が成立する．いま，$[s,t] \ni u \longmapsto X^1_{s,u}$ は一様連続であるから $|D|, |D'| \longrightarrow 0$ として右辺は 0 に収束する．従って $D_n \in \delta[s,t]$ を $|D_n| \longrightarrow 0$ $(n \longrightarrow \infty)$ を満たす細分列とすれば $\left( \sum_{D_n} X^1_{s,u_{i-1}} \otimes X^1_{u_{i-1},u_i} \right)_{n=1}^{\infty}$ は $V^{\otimes 2}$ の Cauchy 列となり $\in V^{\otimes 2}$ で収束する．別の細分列 $(D_m)_{m=1}^{\infty}$ $(|D_m| \longrightarrow 0)$ を取っても

$$
\left\| \sum_{D_n} X^1_{s,u_{i-1}} \otimes X^1_{u_{i-1},u_i} - \sum_{D_m} X^1_{s,v_{j-1}} \otimes X^1_{v_{j-1},v_j} \right\|_{V^{\otimes 2}} \longrightarrow 0, \quad (n, m \longrightarrow \infty)
$$

が成り立つから極限は細分列に依らず定まり，従って $\lim_{|D| \to 0} \sum_D X^1_{s,u_{i-1}} \otimes X^1_{u_{i-1},u_i}$ が確定する．ここで

$$
X^2_{s,t} = \int_s^t X^1_{s,u} \otimes dx_u := \lim_{|D| \to 0} \sum_D X^1_{s,u_{i-1}} \otimes X^1_{u_{i-1},u_i}
$$

と定める．このとき $\Delta_T \ni (s,t) \longmapsto X^2_{s,t} \in V^{\otimes 2}$ は連続である．

$V$ を $\mathbb{R}$-上の Banach 空間とする．$T(V) :=$

**定理 0.4.1.** $\Omega_p(V)$ は次で定める距離

$$
d_p(X, Y) := \max_{1 \le i \le [p]} \left\| X^i - Y^i \right\|_{p/i}
$$

により完備距離空間となる．

証明． $(X^k)_{k=1}^{\infty}$ を Cauchy 列とすれば，任意の $\epsilon > 0$ に対し或る $K \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\left\| X^{k,i} - X^{\ell,i} \right\|_{p/i} < \epsilon, \quad (\forall k, \ell > K,\ 1 \leq i \leq [p])$$

が成立する．よって定理 (0.1.7) より各 $i$ に対し或る $X^i \in B_{p/i,T}(V)$ が存在して

$$\left\| X^{k,i} - X^i \right\|_{p/i} \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty,\ 1 \leq i \leq [p])$$

を満たす．$X : \Delta_T \longrightarrow T^{(n)}(V)$ を

$$X_{s,t} \coloneqq (1, X^1_{s,t}, \cdots, X^n_{s,t}), \quad ((s,t) \in \Delta_T)$$

により定めれば，$X^i$ の連続性より $X$ も連続である．さらに任意の $D \in \delta[0,T]$ に対して

$$\begin{aligned}
\sum_D \left\| X^k_{t_{i-1},t_i} - X_{t_{i-1},t_i} \right\|^p &= \sum_D \left( \left\| X^{k,1}_{t_{i-1},t_i} - X^1_{t_{i-1},t_i} \right\| + \cdots + \left\| X^{k,n}_{t_{i-1},t_i} - X^n_{t_{i-1},t_i} \right\| \right)^p \\
&\leq (n+1)^p \sum_D \left( \left\| X^{k,1}_{t_{i-1},t_i} - X^1_{t_{i-1},t_i} \right\|^p + \cdots + \left\| X^{k,n}_{t_{i-1},t_i} - X^n_{t_{i-1},t_i} \right\|^p \right) \\
&\leq (n+1)^p \left( \left\| X^{k,1}_{t_{i-1},t_i} - X^1_{t_{i-1},t_i} \right\|_p^p + \cdots + \left\| X^{k,n}_{t_{i-1},t_i} - X^n_{t_{i-1},t_i} \right\|_p^p \right)
\end{aligned}$$

が成立するから，定理より

$$\sup_D \sum_D \left\| X^k_{t_{i-1},t_i} - X_{t_{i-1},t_i} \right\|^p \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty)$$

が従い $X$ の $p$-variation の有界性が出る． ∎