論文勉強メモ
A Fourier analytic approach to pathwise stochastic integration

基礎工学研究科システム創成専攻修士 1 年
学籍番号 29C17095
百合川尚学

2018 年 3 月 18 日

目次

第 1 章

Notation

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$,
λ:Lebesgue measure.

第 2 章

Preliminaries

2.1 p-variation

2.2 Ciesielski 同型

定義 2.2.1 (Haar 関数系). Haar 関数系 $(H_{pm},\ p \in \mathbb{N},\ 1 \le m \le 2^p)$ は次で定義される:

$$H_{pm}(t) := \begin{cases} \sqrt{2^p}, & t \in \left[\frac{m-1}{2^p}, \frac{2m-1}{2^{p+1}}\right), \\ -\sqrt{2^p}, & t \in \left[\frac{2m-1}{2^{p+1}}, \frac{m}{2^p}\right), \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases} \qquad (t \in [0,1]).$$

定理 2.2.2. Haar 関数系 $(H_{pm},\ p \in \mathbb{N},\ 1 \le m \le 2^p)$ に $H_{00} \equiv 1$ を加えたものを $\mathbb{H}$ とおくと，$\mathbb{H}$ は $\mathrm{L}^2([0,1],\lambda)$ における完全正規直交基底である．

証明. $\mathrm{L}^2([0,1],\lambda)$ のノルムと内積をそれぞれ $\|\cdot\|, \langle\cdot,\cdot\rangle$ で表す．$\mathbb{H}$ が正規直交系であることは積分により従うから，以下では $\mathbb{H}$ の完全性を示す．つまり $f \in \mathrm{L}^2([0,1],\lambda)$ が全ての $H_{pm} \in \mathbb{H}$ に対して $\left\langle f, H_{pm} \right\rangle = 0$ を満たすなら $f = 0$ が成り立つことを示す．

第一段 $p \in \mathbb{N}$ に対し $\mathfrak{I}_p := \left\{ \left[\frac{i-1}{2^{p+1}}, \frac{i}{2^{p+1}}\right) \ ;\quad i = 1,2,\cdots,2^{p+1} \right\}$ とおき，

$$\mathfrak{B}_p := \sigma\left[\mathfrak{I}_p\right]$$

によりフィルトレーション $\left(\mathfrak{B}_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ を定めれば，$\mathfrak{B}([0,1]) = \vee_{p\in\mathbb{N}}\mathfrak{B}_p$ が成り立つ．実際，$\subset$ の関係は $[0,1]$ の開集合が $\cup_{p\in\mathbb{N}}\mathfrak{I}_p$ の元の可算和で表現できることにより従う．

第二段 任意の $p \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mathrm{E}\left[f \,\middle|\, \mathfrak{B}_p\right] = \sum_{i=1}^{2^{p+1}} 2^{p+1}\left(\int_{\left[\frac{i-1}{2^{p+1}}, \frac{i}{2^{p+1}}\right)} f \ \mathrm{d}\lambda\right)\mathbb{1}_{\left[\frac{i-1}{2^{p+1}}, \frac{i}{2^{p+1}}\right)}, \quad \lambda\text{-a.e.}$$

が成り立つことを示す．実際，右辺を g_p と表せば

$$\{\emptyset\} \cup \mathfrak{I}_p \subset \left\{ E \in \mathfrak{B}_p \ ;\quad \int_E \mathrm{E}\left[f \,\middle|\, \mathfrak{B}_p\right] \mathrm{d}\lambda = \int_E g_p \ \mathrm{d}\lambda \right\}$$

が従うから，Dynkin 族定理により $\left\{ E \in \mathfrak{B}_p \ ; \quad \int_E \mathrm{E}\left[f \,\middle|\, \mathfrak{B}_p \right] \mathrm{d}\lambda = \int_E g_p \ \mathrm{d}\lambda \right\} = \mathfrak{B}_p$ となる．そして $\mathrm{E}\left[f \,\middle|\, \mathfrak{B}_p \right], g_p$ ともに $\mathfrak{B}_p$-可測であるから (**??**) が得られる．

第三段　$\left\langle f, H_{pm} \right\rangle = 0 \ (\forall H_{pm} \in \mathbb{H})$ が満たされているとき $g_p \equiv 0 \ (\forall p \in \mathbb{N})$ が出る．先ず

$$0 = \left\langle f, H_{pm} \right\rangle = \sqrt{2^{p+1}} \int_{\left[\frac{m-1}{2^{p+1}}, \frac{2m-1}{2^{p+2}} \right)} f \ \mathrm{d}\lambda - \sqrt{2^{p+1}} \int_{\left[\frac{2m-1}{2^{p+2}}, \frac{m}{2^{p+1}} \right)} f \ \mathrm{d}\lambda, \quad (\forall p, m)$$

により $\left\langle f, \mathbb{1}_{\left[\frac{m-1}{2^{p+1}}, \frac{2m-1}{2^{p+2}} \right)} \right\rangle =$

$$\begin{aligned} \int_{\left[\frac{m-1}{2^{p+1}}, \frac{m}{2^{p+1}} \right)} f \ \mathrm{d}\lambda &= 2 \int_{\left[\frac{2m-2}{2^{p+2}}, \frac{2m-1}{2^{p+2}} \right)} f \ \mathrm{d}\lambda \\ &= 2^2 \int_{\left[\frac{4m-4}{2^{p+3}}, \frac{4m-3}{2^{p+3}} \right)} f \ \mathrm{d}\lambda \\ &= \cdots \\ &= 2^k \int_{\left[\frac{2^k m - 2^k}{2^{p+k+1}}, \frac{2^k m - 2^k + 1}{2^{p+k+1}} \right)} f \ \mathrm{d}\lambda \\ &= \cdots \end{aligned}$$

一方で (**??**) の左辺は，マルチンゲール収束定理により λ-a.e. に $\mathrm{E}\left[f \,\middle|\, \mathfrak{B}_p \right] \longrightarrow f \ (p \longrightarrow \infty)$ が成り立つ．以上より $f \equiv 0$ が得られる． ∎