ゼミ用ノート
会田先生の資料”Rough path analysis:An Introduction”

基礎工学研究科システム創成専攻
学籍番号 29C17095
百合川尚学

2018 年 5 月 7 日

目次

0.1　導入

以下，d 次元ベクトル $x \in \mathbb{R}^d$ と (m,d) 行列 $a \in \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^d$ について，成分を込めて表現する場合は $x = (x^1, \cdots, x^d)$，$a = (a^i_j)_{1\le i\le m, 1\le j\le d}$ と書く．また $T > 0$ を固定し $C^1 = C^1([0,T] \to \mathbb{R}^d)$ とおく．（端点においては片側微分を考える．）区間 $[s,t] \subset [0,T]$ の分割を $D = \{s = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t\}$ で表現し，分割の全体を $\delta[s,t]$ とおく．$|D| := \max_{1\le i\le N} |t_i - t_{i-1}|$ とし，

$$\sum_D = \sum_{i=1}^N$$

と略記する．

定理 0.1.1 (Riemann-Stieltjes 積分)．　$[s,t] \subset [0,T]$ とし，$D \in \delta[s,t]$ についてのみ考えるとき，任意の $x \in C^1$，$f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ に対して次の極限が存在する:[*1]

$$\lim_{|D|\to 0} \sum_D f(x_{s_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) \in \mathbb{R}^m.$$

s_{i-1} は区間 $[t_{i-1}, t_i]$ に属する任意の点であり，極限は s_{i-1} の取り方に依らない．

証明．　各 x^j は C^1-級であるから，平均値の定理より $\sum_D f(x_{s_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})$ の第 k 成分を

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^d \sum_D f^k_j(x_{s_{i-1}})(x^j_{t_i} - x^j_{t_{i-1}}) \\
&= \sum_{j=1}^d \sum_D f^k_j(x_{s_{i-1}})\dot{x}^j_{\xi_i}(t_i - t_{i-1}), \quad ({}^\exists \xi_i \in [t_{i-1}, t_i])
\end{aligned}$$

[*1] 極限の存在を保証する条件としては，f の有界性と微分可能性は必要ない．

と表現できる．各 j,k について

$$\lim_{|D|\to 0}\sum_D f_j^k(x_{s_{i-1}})\dot{x}^j_{\xi_i}(t_i-t_{i-1})$$

は通常の連続関数の Riemann 積分

$$\int_s^t f_j^k(x_u)\dot{x}_u^j\,du$$

に収束する． ∎

定義 0.1.2 (C^1-級のパスに対する汎関数)**.** $x\in C^1$ と $f\in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^m))$ に対して，$[s,t]\subset[0,T]$ における Riemann-Stieltjes 積分を I で表現する:

$$I_{s,t}(x)=\int_s^t f(x_u)\,dx_u\coloneqq\lim_{|D|\to 0}\sum_D f(x_{t_{i-1}})(x_{t_i}-x_{t_{i-1}}),$$

$$\left[\int_s^t f(x_u)\,dx_u\right]^k=\sum_{j=1}^d\int_s^t f_j^k(x_u)\,dx_u^j,\quad (k=1,\cdots,m).$$

ただし $D\in\delta[s,t]$ のみを考える．

C^1 は次で定めるノルム $\|\cdot\|_{C^1}$ により Banach 空間となる:

$$\|x\|_{C^1}\coloneqq\sup_{t\in[0,T]}|x(t)|+\sup_{t\in[0,T]}|\dot{x}(t)|.$$

定理 0.1.3 ($\|\cdot\|_{C^1}$ に関する連続性)**.** $[s,t]\subset[0,T]$ とし，C^1 には $\|\cdot\|_{C^1}$ でノルム位相を入れる．このとき，$C^1\ni x\longmapsto I_{s,t}(x)\in\mathbb{R}^m$ は連続である．

証明. C^1 の第一可算性により点列連続性と連続性は一致するから，$x^n\longrightarrow x$ のとき $I_{s,t}(x^n)\longrightarrow I_{s,t}(x)$ が従うことを示せばよい．

$$M\coloneqq\sup_{u\in[s,t]}|f(x_u)|<\infty$$

を定めれば

$$\begin{aligned}\left|\int_s^t f(x_u^n)\,dx_u^n-\int_s^t f(x_u)\,dx_u\right|&=\left|\int_s^t f(x_u^n)\dot{x}_u^n\,du-\int_s^t f(x_u)\dot{x}_u\,du\right|\\&\le\int_s^t\left|f(x_u^n)\dot{x}_u^n-f(x_u^n)\dot{x}_u\right|\,du+\int_s^t\left|f(x_u^n)\dot{x}_u-f(x_u)\dot{x}_u\right|\,du\\&\le M\|x^n-x\|_{C^1}(t-s)+\sup_{u\in[s,t]}\left|f(x_u^n)-f(x_u)\right|\|x\|_{C^1}(t-s)\end{aligned}\tag{1}$$

が成り立つ．いま，任意に $\epsilon>0$ を取れば，或る $\epsilon>\delta>0$ が存在して $v,w\in x([s,t])$, $|v-w|<\delta$ なら $|f(v)-f(w)|<\epsilon$ を満たす（一様連続）．すなわち $\left\|x^{(n)}-x\right\|_{C^1}<\delta$ なら

$$\sup_{t\in[s,t]}\left|f(x_t^n)-f(x_t)\right|<\epsilon$$

が成立する．$\|x^n - x\|_{C^1} \longrightarrow 0$ の仮定より，或る自然数 N が存在して $\|x^n - x\|_{C^1} < \delta$ $(n > N)$ が満たされるから，$(1) < \epsilon[M(t-s) + \|x\|_{C^1}(t-s)]$ $(n > N)$ が成り立ち $I_{s,t}(x^n) \longrightarrow I_{s,t}(x)$ が従う． ∎

定義 0.1.4 (p-variation). $(V, \|\cdot\|)$ を Banach 空間とし，$[0,T]$ 上の V 値関数 x と $[s,t] \subset [0,T]$ に対して p-variation を次で定める:

$$\|x\|_{p,[s,t]} := \left\{ \sup_{D \in \delta[s,t]} \sum_D \left\| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right\|^p \right\}^{1/p}.$$

特に，$\|\cdot\|_{p,[0,T]}$ を $\|\cdot\|_p$ と表記する．また $p \geq 1$ として，線形空間 $B_{p,T}(V)$ を

$$B_{p,T}(V) := \left\{ x : [0,T] \longrightarrow V \ ; \quad x_0 = 0,\ x : \text{continuous},\ \|x\|_p < \infty \right\}$$

により定める．

次の結果によれば，$0 < p < 1$ に対し $B_{p,T}(V)$ を定めても 0 の定数関数のみの空間でしかない．

定理 0.1.5 ($0 < p < 1$ に対して有界 p-variation なら定数). $x : [0,T] \longrightarrow V$ を連続関数とする．このとき，$p \in (0,1)$ に対し $\|x\|_p < \infty$ が成り立つなら x は定数関数である．

証明. $t \in [0,T]$ を任意に取り固定する．このとき全ての $D \in \delta[0,t]$ に対して，

$$\begin{aligned}
\|x_t - x_0\| \leq \sum_D \left\| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right\| &\leq \max_D \left\| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right\|^{1-p} \sum_D \left\| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right\|^p \\
&\leq \max_D \left\| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right\|^{1-p} \|x\|_p
\end{aligned}$$

が成り立ち，x の一様連続性から右辺は $|D| \longrightarrow 0$ で 0 に収束し，$x_t = x_0$ が従う． ∎

定理 0.1.6. $1 \leq p \leq q$ に対し $B_{p,T}(V) \subset B_{q,T}(V)$ が成立する．

証明. 任意の $x \in B_{p,T}(V)$ と $D \in \delta[0,T]$ に対し

$$\begin{aligned}
\sum_D \left\| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right\|^q &\leq \sum_D \left\| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right\|^p \left\| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right\|^{q-p} \\
&\leq 2^{q-p} \sup_{t \in [0,T]} \|x_t\|^{q-p} \sum_D \left\| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right\|^p \\
&\leq 2^{q-p} \sup_{t \in [0,T]} \|x_t\|^{q-p} \|x\|_p^p
\end{aligned}$$

が成立する． ∎

$p \geq 1$ の場合，Minkowski の不等式によれば，任意の $D \in \delta[s,t]$ に対し

$$\left\{ \sum_D \left\| (x_{t_i} + y_{t_i}) - (x_{t_{i-1}} + y_{t_{i-1}}) \right\|^p \right\}^{1/p} \leq \left\{ \sum_D \left\| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right\|^p \right\}^{1/p} + \left\{ \sum_D \left\| y_{t_i} - y_{t_{i-1}} \right\|^p \right\}^{1/p}$$
$$\leq \| x \|_{p,[s,t]} + \| y \|_{p,[s,t]}$$

が成り立ち $\| x + y \|_{p,[s,t]} \leq \| x \|_{p,[s,t]} + \| y \|_{p,[s,t]}$ を得る．

定理 0.1.7. $B_{p,T}(V)$ は $\|\cdot\|_p$ をノルムとする Banach 空間である．

証明. 完備性を示す．

第一段 $(x^n)_{n=1}^{\infty} \subset B_{p,T}(V)$ を Cauchy 列とすれば，任意の $\epsilon > 0$ に対して或る $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ が存在し

$$\| x^n - x^m \|_p = \left\{ \sup_{D \in \delta[0,T]} \sum_D \left\| \left(x^n_{t_i} - x^m_{t_i} \right) - \left(x^n_{t_{i-1}} - x^m_{t_{i-1}} \right) \right\|^p \right\}^{1/p} < \epsilon, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

を満たす．いま，任意の $t \in [0,T]$ に対して $[0,T]$ の分割 $D = \{0 \leq t \leq T\}$ を考えれば

$$\left\| x^n_t - x^m_t \right\| < \epsilon, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

が得られ，V の完備性より或る $x_t \in \mathbb{R}^d$ が存在して

$$\left\| x^n_t - x_t \right\| < \epsilon \quad (n > n_\epsilon)$$

を満たす．この収束は t に関して一様であるから，$t \longmapsto x_t$ は 0 出発かつ連続である．

第二段 $\| x^n - x \|_p \longrightarrow 0 \ (n \longrightarrow \infty)$ を示す．前段によれば，任意の $D \in \delta[0,T]$ に対し

$$\sum_D \left\| (x^m_{t_i} - x^n_{t_i}) - (x^m_{t_{i-1}} - x^n_{t_{i-1}}) \right\|^p < \epsilon^p, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

が成り立っている．D はせいぜい有限個の分割であるから，$m \longrightarrow \infty$ として

$$\sum_D \left\| (x_{t_i} - x^n_{t_i}) - (x_{t_{i-1}} - x^n_{t_{i-1}}) \right\|^p < \epsilon^p, \quad (n > n_\epsilon)$$

が従い，D の任意性より $\| x^n - x \|_p < \epsilon \ (n > n_\epsilon)$ を得る． ∎

定理 0.1.8. $p \geq 1$ とする．また $x_0 = 0$ を満たす $x \in C^1$ の全体が作る線形空間を $\tilde{C}^1$ とおく．

(1) $x \in C^1$ ならば $\| x \|_p < \infty$ が成り立つ．ただちに，$\|\cdot\|_p$ は $\tilde{C}^1$ においてノルムとなる．

(2) $\tilde{C}^1$ において，$\|\cdot\|_{C^1}$ で導入する位相は $\|\cdot\|_p$ で導入する位相より強い．

証明.

$p = 1$ の場合 平均値の定理より，任意の $D \in \delta[0,T]$ に対し

$$\sum_D \left| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right| \leq \sum_D \| x \|_{C^1} (t_i - t_{i-1}) = \| x \|_{C^1} T < \infty$$

が成り立ち $\| x \|_1 < \infty$ が従う．

$p>1$ の場合　q を p の共役指数とする．任意の $D\in\delta[0,T]$ に対し，Hölder の不等式より

$$\begin{aligned}\sum_D\left|x_{t_i}-x_{t_{i-1}}\right|^p &= \sum_D\left|\int_{t_{i-1}}^{t_i}\dot{x}_u\,du\right|^p \le \sum_D(t_i-t_{i-1})\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i}|\dot{x}_u|^q\,du\right)^{p/q}\\ &\le \sum_D(t_i-t_{i-1})\left(\int_0^T\|x\|_{C^1}^q\ du\right)^{p/q} = \|x\|_{C^1}^p\,T^p\end{aligned}$$

が成立し，$\|x\|_p<\infty$ が従う．

以上より，$p\ge 1$ ならば $\|x\|_p\le T\|x\|_{C^1}$ $(x\in C^1)$ が成り立ち (2) の主張を得る．∎

次節の考察対象は主に定理 0.1.3 と定理 0.1.8 に関係する．定理 0.1.3 によれば，C^1 に $\|\cdot\|_{C^1}$ でノルム位相を導入した場合，$f\in C(\mathbb{R}^d,L(\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^m))$ に対して $C^1\ni x\longmapsto I_{s,t}(x)$ は連続である．一方で定理 0.1.3 によれば，0 出発 C^1-パス空間 $\tilde{C}^1$ に $\|\cdot\|_p$ でノルム位相を導入した場合，$\tilde{C}^1\ni x\longmapsto I_{s,t}(x)$ が連続であるという保証はない．しかし，次節以後の結果により，$1\le p<3$ かつ $f\in C^2(\mathbb{R}^d,L(\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^m))$ が満たされているなら $\tilde{C}^1\ni x\longmapsto I_{s,t}(x)$ は或る意味での連続性を持つ．

0.2　連続性定理

定義 0.2.1 (記号の定義).　$x\in C^1$，$f\in C^2(\mathbb{R}^d,L(\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^m))$ に対し次を定める．

$$\begin{aligned}&\Delta_T := \{\,(s,t)\ ;\quad 0\le s\le t\le T\,\},\\ &X^1:\Delta_T\longrightarrow\mathbb{R}^d\ \left((s,t)\longmapsto X^1_{s,t}=x_t-x_s\right),\\ &X^2:\Delta_T\longrightarrow\mathbb{R}^d\otimes\mathbb{R}^d\ \left((s,t)\longmapsto X^2_{s,t}=\int_s^t(x_u-x_s)\otimes dx_u\right),\\ &\tilde{I}_{s,t}(x) := f(x_s)X^1_{s,t}=f(x_s)(x_t-x_s),\\ &J_{s,t}(x) := f(x_s)X^1_{s,t}+(\nabla f)(x_s)X^2_{s,t}.\end{aligned}$$

以降，$a,b,c,d\in\mathbb{R}^d$ に対して次の表現を使う:

$$\begin{aligned}[a\otimes b]^i_j &= a^ib^j,\\ \left[(\nabla f)(x_s)X^2_{s,t}\right]^i &= \sum_{j,k=1}^d\partial_kf^i_j(x_s)\int_s^t\left(x^k_u-x^k_s\right)\,dx^j_u,\\ \left[(\nabla f)(x_s)(a\otimes b)\right]^i &= \sum_{j,k=1}^d\partial_kf^i_j(x_s)a^kb^j,\\ \left[(\nabla^2 f)(x_s)(a\otimes b\otimes c)\right]^i &= \sum_{j,k,v=1}^d\partial_v\partial_kf^i_j(x_s)a^vb^kc^j,\\ \left[(\nabla^3 f)(x_s)(a\otimes b\otimes c\otimes d)\right]^i &= \sum_{j,k,v,w=1}^d\partial_w\partial_v\partial_kf^i_j(x_s)a^wb^vc^kd^j.\end{aligned}$$

定理 0.2.2. $[s,t] \subset [0,T]$, $x \in C^1$, $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ とする．$D \in \delta[s,t]$ に対し

$$\tilde{I}_{s,t}(x,D) := \sum_D \tilde{I}_{t_{i-1},t_i}(x), \quad J_{s,t}(x,D) := \sum_D J_{t_{i-1},t_i}(x)$$

を定めるとき，次が成立する:

$$I_{s,t}(x) = \lim_{|D|\to 0} \tilde{I}_{s,t}(x,D) = \lim_{|D|\to 0} J_{s,t}(x,D).$$

証明. 第一の等号は $I_{s,t}(x)$ の定義によるから，第二の等号を証明する．まず，

$$\begin{aligned}
I_{s,t}(x) &= \int_s^t f(x_u)\,dx_u \\
&= \int_s^t f(x_s) + f(x_u) - f(x_s)\,dx_u \\
&= \int_s^t f(x_s)\,dx_u + \int_s^t \int_0^1 (\nabla f)(x_s + \theta(x_u - x_s))\left(X^1_{s,u} \otimes \dot{x}_u\right)\,d\theta\,du \\
&= f(x_s)X^1_{s,t} + (\nabla f)(x_s)X^2_{s,t} \\
&\quad + \int_s^t \int_0^1 \{(\nabla f)(x_s + \theta(x_u - x_s)) - (\nabla f)(x_s)\}\left(X^1_{s,u} \otimes \dot{x}_u\right)\,d\theta\,du \\
&= J_{s,t}(x) + \int_s^t \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_s + r(x_u - x_s))\left(X^1_{s,u} \otimes X^1_{s,u} \otimes \dot{x}_u\right)\,dr\,d\theta\,du
\end{aligned}$$

が成り立つ．$[0,T] \ni t \longmapsto x_t$ の連続性より，最下段式中の $x_s + r(x_u - x_s)$ $(0 \le r \le 1,\ s \le u \le t)$ は或るコンパクト集合 K に含まれ，f が C^2-級関数であるから

$$M := \sum_{i,j,k,v} \sup_{x \in K} \left|\partial_v \partial_k f^i_j(x)\right|$$

として $M < \infty$ を定めれば

$$\begin{aligned}
&\left|\int_s^t \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_s + r(x_u - x_s))\left(X^1_{s,u} \otimes X^1_{s,u} \otimes \dot{x}_u\right)\,dr\,d\theta\,du\right| \\
&\quad \le \int_s^t \int_0^1 \int_0^\theta \left|(\nabla^2 f)(x_s + r(x_u - x_s))\left(X^1_{s,u} \otimes X^1_{s,u} \otimes \dot{x}_u\right)\right|\,dr\,d\theta\,du \\
&\quad \le M \int_s^t |X^1_{s,u}|^2 |\dot{x}_u|\,du \\
&\quad \le M \|x\|^3_{C^1} \int_s^t (u-s)^2\,du
\end{aligned}$$

が出る．特に $D \in \delta[s,t]$ に対して

$$\begin{aligned}
\sum_D \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - t_{i-1})^2\,du &\le \sum_D |D| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - t_{i-1})\,du \\
&\le \sum_D |D| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - s)\,du \le \frac{1}{2}(t-s)^2|D| \longrightarrow 0 \quad (|D| \longrightarrow 0)
\end{aligned}$$

が成立するから，

$$\left|I_{s,t}(x) - J_{s,t}(x,D)\right| \le \sum_D \left|I_{t_{i-1},t_i}(x) - J_{t_{i-1},t_i}(x)\right| \longrightarrow 0 \quad (|D| \longrightarrow 0)$$

が従い定理の主張を得る． ∎

定義 0.2.3 (control function)．　関数 $\omega : \Delta_T \longrightarrow [0,\infty)$ が連続かつ任意の $s \le u \le t$ に対して

$$\omega(s,u) + \omega(u,t) \le \omega(s,t) \tag{2}$$

を満たすとき，ω を control function と呼ぶ．

式 (2) から $\omega(t,t) = 0$ $(\forall t \in [0,T])$ が従う．つまり control function は" 対角線上で 0 になる"．

定義 0.2.4 (ノルム空間値写像の p-variation)．　$(V, \|\cdot\|)$ をノルム空間，$p \ge 1$ とする．このとき連続写像 $\psi : \Delta_T \longrightarrow V$ に対する p-variation を

$$\|\psi\|_{p,[s,t]} \coloneqq \left\{ \sup_{D \in \delta[s,t]} \sum_D \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p \right\}^{1/p}, \quad ((s,t) \subset [0,T])$$

で定める．特に $\|\cdot\|_{p,[0,T]}$ を $\|\cdot\|_p$ と書く．

定理 0.2.5 (p-variation が定める control function)．　$(V, \|\cdot\|)$ をノルム空間，$p \ge 1$ とする．$\|\psi\|_p < \infty$ かつ $\psi_{t,t} = 0$ $(\forall t \in [0,T])$ を満たす連続写像 $\psi : \Delta_T \longrightarrow V$ に対して，

$$\omega : \Delta_T \ni (s,t) \longmapsto \|\psi\|_{p,[s,t]}^p$$

により定める ω は control function である．

証明．　$\|\psi\|_p < \infty$ の仮定より ω は $[0,\infty)$ 値であるから，以下では式 (2) の成立と連続性を示す．

第一段　ω が式 (2) を満たすことを示す．実際，任意に $D_1 \in \delta[s,u], D_2 \in \delta[u,t]$ を取れば

$$\sum_{D_1} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p + \sum_{D_2} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p = \sum_{D_1 \cup D_2} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p \le \|\psi\|_{p:[s,t]}^p$$

が成り立つ．左辺の D_1, D_2 の取り方は独立であるから，それぞれに対し上限を取れば

$$\|\psi\|_{p:[s,u]}^p + \|\psi\|_{p:[u,t]}^p \le \|\psi\|_{p:[s,t]}^p$$

が従う．

第二段　任意の $[s,t] \subset [0,T]$ について[*2]，

$$\lim_{h \to +0} \omega(s, t+h) = \inf_{h>0} \omega(s,t+h), \qquad \lim_{h \to +0} \omega(s-h, t) = \inf_{h>0} \omega(s-h,t),$$
$$\lim_{h \to +0} \omega(s, t-h) = \sup_{h>0} \omega(s,t-h), \qquad \lim_{h \to +0} \omega(s+h, t) = \sup_{h>0} \omega(s+h,t)$$

が成立する．実際 $\omega(s,t+h)$ について見れば，これは下に有界かつ $h \to +0$ に対し単調減少であるから極限が確定し下限に一致する．残りの三つも同様の理由で成立する．

---

*2 下段の二式については $s < t$ と仮定する．また上段についても，$t = T$ 或は $s = 0$ の場合を除く必要がある．

第三段　任意の $s \in [0,T)$ に対し，$(s,T] \ni t \longmapsto \omega(s,t)$ の左連続性を示す．ここでは

$$\tilde{\omega}(s,t) \coloneqq \begin{cases} \lim_{h \to +0} \omega(s,t-h), & (s < t), \\ 0, & (s = t), \end{cases} \quad (\forall (s,t) \in \Delta_T)$$

で定める $\tilde{\omega}$ が優加法性を持ち，かつ

$$\left\| \psi_{s,t} \right\|^p \leq \tilde{\omega}(s,t), \quad (\forall (s,t) \in \Delta_T)$$

を満たすことを示す．実際これが示されれば，任意の $D \in \delta[s,t]$ に対し

$$\sum_D \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p \leq \sum_D \tilde{\omega}(t_{i-1},t_i) \leq \tilde{\omega}(s,t)$$

が成立し $\omega(s,t) \leq \tilde{\omega}(s,t)$ が従い，$\omega(s,t) \geq \omega(s,t-h)$ $(\forall h > 0)$ と併せて

$$\omega(s,t) = \tilde{\omega}(s,t) = \lim_{h \to +0} \omega(s,t-h)$$

を得る．いま，任意に $s < u < t$ を取れば，十分小さい $h_1, h_2 > 0$ に対して

$$\omega(s,u-h_1) + \omega(u,t-h_2) \leq \omega(s,t-h_2)$$

が満たされ，$h_1 \longrightarrow +0,\ h_2 \longrightarrow +0$ として

$$\tilde{\omega}(s,u) + \tilde{\omega}(u,t) \leq \tilde{\omega}(s,t)$$

が成り立ち $\tilde{\omega}$ は優加法性を持つ．また，もし或る $[u,v] \subset [0,T]$ に対して

$$\left\| \psi_{u,v} \right\|^p > \tilde{\omega}(u,v)$$

が成り立つと仮定すると

$$\left\| \psi_{u,v} \right\|^p > \tilde{\omega}(u,v) \geq \omega(u,v-h) \geq \left\| \psi_{u,v-h} \right\|^p, \quad (\forall h > 0)$$

となる．一方 ψ の連続性より $\left\| \psi_{u,v-h} \right\|^p \longrightarrow \left\| \psi_{u,v} \right\|^p$ $(h \longrightarrow +0)$ が従い矛盾が生じる．同様にして，任意の $t \in (0,T]$ に対し $[0,t) \ni s \longmapsto \omega(s,t)$ の右連続性も出る．

第四段　任意の $t \in [0,T)$ に対して次を示す:

$$\lim_{h \to +0} \omega(t,t+h) = \inf_{h>0} \omega(t,t+h) = 0.$$

第一の等号は前段より従うから，第二の等号を背理法により証明する．いま

$$\inf_{h>0} \omega(t,t+h) =: \delta > 0$$

と仮定する．ψ の連続性より或る h_1 が存在して

$$\left\| \psi_{t,t+h} \right\|^p = \left\| \psi_{t,t+h} - \psi_{t,t} \right\|^p < \frac{\delta}{8}, \quad (\forall h < h_1) \tag{3}$$

が成立するから，任意に $h_0 < h_1$ を取り固定する．一方で $\omega(t,t+h_0) \geq \delta$ より

$$\sum_{i=1}^N \left\| \psi_{\tau_{i-1},\tau_i} \right\|^p > \frac{7\delta}{8}$$

を満たす $D=\{t=\tau_0<\tau_1<\cdots,\tau_N=t+h_0\}\in\delta[t,t+h_0]$ が存在し，(3) と併せて

$$\sum_{i=2}^{N}\left\|\psi_{\tau_{i-1},\tau_i}\right\|^p>\frac{7\delta}{8}-\left\|\psi_{t,\tau_1}\right\|^p>\frac{7\delta}{8}-\frac{\delta}{8}=\frac{3\delta}{4}$$

を得る．また，$\omega(t,\tau_1)\geq\delta$ より或る $D'\in\delta[t,\tau_1]$ が存在して

$$\sum_{D'}\left\|\psi_{t_{i-1},t_i}\right\|^p>\frac{3\delta}{4}$$

を満たすから，$D'\cup\{\tau_1<\cdots,\tau_N=t+h_0\}\in\delta[t,t+h_0]$ より

$$\omega(t,t+h_0)>\sum_{D'}\left\|\psi_{t_{i-1},t_i}\right\|^p+\sum_{i=2}^{N}\left\|\psi_{\tau_{i-1},\tau_i}\right\|^p>\frac{3\delta}{2}$$

が従うが，$h_0<h_1$ の任意性と単調減少性により

$$\delta=\inf_{h>0}\omega(t,t+h)=\inf_{h_1>h>0}\omega(t,t+h)\geq\frac{3\delta}{2}$$

となり矛盾が生じる．同様にして

$$\lim_{h\to+0}\omega(t-h,t)=0,\quad(\forall t\in(0,T])$$

も成立する．

第五段　任意に $s\in[0,T)$ を取り固定し，$[s,T)\ni t\longmapsto\omega(s,t)$ が右連続であることを示す．

$$\lim_{h\to+0}\omega(s,t+h)\leq\omega(s,t)\tag{4}$$

を示せば，第二段より逆向きの不等号も従い右連続性を得る．任意に $h,\epsilon>0$ を取れば，

$$\omega(s,t+h)-\epsilon\leq\sum_{D}\left\|\psi_{t_{i-1},t_i}\right\|^p$$

を満たす $D\in\delta[s,t+h]$ が存在する．$D_1:=[s,t]\cap D$ とおいて $D_1=\{t_0<\cdots<t_k\}$ と表されているとする．このとき $D_2:=D\backslash(D_1\cup\{t_{k+1}\})$ として

$$\begin{aligned}\omega(s,t+h)-\epsilon&\leq\sum_{i=1}^{k}\left\|\psi_{t_{i-1},t_i}\right\|^p+\left\|\psi_{t_k,t_{k+1}}\right\|^p+\sum_{D_2}\left\|\psi_{t_{i-1},t_i}\right\|^p\\&=\sum_{i=1}^{k}\left\|\psi_{t_{i-1},t_i}\right\|^p+\left\|\psi_{t_k,t}\right\|^p+\left\|\psi_{t_k,t_{k+1}}\right\|^p-\left\|\psi_{t_k,t}\right\|^p+\sum_{D_2}\left\|\psi_{t_{i-1},t_i}\right\|^p\\&\leq\omega(s,t)+\omega(t,t+h)+\left\|\psi_{t_k,t_{k+1}}\right\|^p-\left\|\psi_{t_k,t}\right\|^p\end{aligned}$$

が成り立つ．ψ の (一様) 連続性より $\left\|\psi_{t_k,t_{k+1}}\right\|^p\longrightarrow\left\|\psi_{t_k,t}\right\|^p$ $(h\longrightarrow+0)$ が成り立つから

$$\lim_{h\to+0}\omega(s,t+h)-\epsilon\leq\omega(s,t)$$

が従い，ϵ の任意性より (4) が出る．同様にして $s\longmapsto\omega(s,t)$ の左連続性も成立する．

第六段　ω の $(s,t)\in\Delta_T$ における連続性を示す．$h,k\geq 0$ として考えれば，

$$
\begin{aligned}
&|\omega(s,t)-\omega(s-h,t-k)| \\
&\qquad \leq |\omega(s,t)-\omega(s-h,t)| + |\omega(s-h,t)-\omega(s-h,t-k)| \\
&\qquad = |\omega(s,t)-\omega(s-h,t)| + \omega(s-h,t)-\omega(s-h,t-k) \\
&\qquad \leq |\omega(s,t)-\omega(s-h,t)| + \omega(s-h,t)-\omega(s,t-k) \\
&\qquad \leq |\omega(s,t)-\omega(s-h,t)| + |\omega(s-h,t)-\omega(s,t)| + |\omega(s,t)-\omega(s,t-k)|, \\
&|\omega(s,t)-\omega(s+h,t+k)| \\
&\qquad \leq |\omega(s,t)-\omega(s+h,t)| + |\omega(s+h,t)-\omega(s+h,t+k)| \\
&\qquad = |\omega(s,t)-\omega(s+h,t)| + \omega(s+h,t+k)-\omega(s+h,t) \\
&\qquad \leq |\omega(s,t)-\omega(s+h,t)| + \omega(s,t+k)-\omega(s+h,t) \\
&\qquad \leq |\omega(s,t)-\omega(s-h,t)| + |\omega(s,t+k)-\omega(s,t)| + |\omega(s,t)-\omega(s+h,t)|
\end{aligned}
$$

が成り立ち，値の差は上述した連続性により縮まる．また $|\omega(s,t)-\omega(s-h,t+k)|$ については，$h,k\longrightarrow +0$ として $\omega(s-h,t+k)$ は単調減少に $\omega(s,t)$ に近づく．単調性より極限は h,k の近づけ方に依らず

$$
\omega(s,t) = \lim_{h\to+0}\lim_{k\to+0}\omega(s-h,t+k) = \lim_{h,k\to+0}\omega(s-h,t+k)
$$

となり，同様に

$$
\omega(s,t) = \lim_{h\to+0}\lim_{k\to+0}\omega(s+h,t-k) = \lim_{h,k\to+0}\omega(s+h,t-k)
$$

も得られ，$\omega(s-h,t-k)$ は $h,k\to 0$ (近づけ方に依らない) として $\omega(s,t)$ に収束し ω の連続性が出る．∎

定理 0.2.6 (control function の例)．　以下の関数 $\omega:\Delta_T\longrightarrow[0,\infty)$ は control function である．

(1)　$\omega:(s,t)\longmapsto \left\| X^1 \right\|_{p:[s,t]}^p,\quad (p\geq 1,\ x\in B_{p,T}(\mathbb{R}^d)).$

(2)　$\omega:(s,t)\longmapsto \left\| X^2 \right\|_{p:[s,t]}^p,\quad (p\geq 1,\ x\in C^1).$

行列 $a=(a^i_j)$ のノルムは $|a|=\sqrt{\sum_{i,j}|a^i_j|^2}$ として考える．

定理 0.2.7.

(1)　$\omega:(s,t)\longmapsto X^1_{s,t}=x_t-x_s$ は連続であるから，前定理より ω は control function である．

(2)　任意の $[s,t]\subset[0,T]$ に対して $\left\| X^2 \right\|_{p:[s,t]}^p<\infty$ を示せば，あとは上と同じ理由により定理の主張が得られる．実際，任意の分割 $D=\{s=t_0<\cdots<t_N=t\}$ に対し

$$
\begin{aligned}
\left\| X^2_{t_{i-1},t_i} \right\| &\leq \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (x_u - x_{t_{i-1}})\otimes \dot{x}_u\, du \right| \\
&\leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left| (x_u - x_{t_{i-1}})\otimes \dot{x}_u \right| du \\
&\leq \| x \|_{C^1}^2 \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u-s)\, du \right\}^{1/p} \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u-s)\, du \right\}^{1-1/p} \\
&\leq \| x \|_{C^1}^2 \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u-s)\, du \right\}^{1/p} \left\{ \int_{s}^{t} (u-s)\, du \right\}^{1-1/p}
\end{aligned}
$$

が成り立つから，

$$\begin{aligned}\sum_D \left\| X^2_{t_{i-1},t_i} \right\|^p &\le \sum_D \| x \|_{C^1}^{2p} \left\{ \frac{1}{2}(t-s)^2 \right\}^{p-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u-s)\, du \\ &= \| x \|_{C^1}^{2p} \left\{ \frac{1}{2}(t-s)^2 \right\}^{p-1} \int_s^t (u-s)\, du = \| x \|_{C^1}^{2p} \left\{ \frac{1}{2}(t-s)^2 \right\}^{p}\end{aligned}$$

により $\left\| X^2 \right\|_{p:[s,t]}^p < \infty$ が従う． ∎

補題 0.2.8. ω を Δ_T 上の control function とする．$D = \{s = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t\}$ について，$N \ge 2$ の場合或る $1 \le i \le N-1$ が存在して次を満たす:

$$\omega(t_{i-1}, t_{i+1}) \le \frac{2\omega(s,t)}{N-1}. \tag{5}$$

証明. (会田先生のテキスト．) ∎

定理 0.2.9 ($1 \le p < 2$ の場合の連続性定理). $1 \le p < 2$ とし，$x_0 = y_0$ を満たす $x, y \in C^1$ と $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$, $0 < \epsilon, R < \infty$ を任意に取る．このとき，

$$\left\| X^1 \right\|_p, \left\| Y^1 \right\|_p \le R, \quad \left\| X^1 - Y^1 \right\|_p \le \epsilon$$

なら，或る定数 $C = C(p, R, f)$ が存在し，任意の $0 \le s \le t \le T$ に対して次が成立する:

$$\left| I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y) \right| \le \epsilon C.$$

系 0.2.10 (p-variation による閉球上の Lipschitz 連続性). $1 \le p < 2$ とし，$x_0 = y_0$ を満たす $x, y \in C^1$ と $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$, $0 < R < \infty$ を任意に取る．このとき，

$$\left\| X^1 \right\|_p, \left\| Y^1 \right\|_p \le R$$

なら，或る定数 $C = C(p, R, f)$ が存在して次を満たす:

$$\left| I_{0,T}(x) - I_{0,T}(y) \right| \le C \left\| X^1 - Y^1 \right\|_p.$$

証明 (系 0.2.10). 定理 0.2.9 において，$\epsilon = \left\| X^1 - Y^1 \right\|_p$ $(x \ne y)$ [*3] として証明が通る． ∎

証明 (定理 0.2.9). $[s,t] \subset [0,T]$ とする．

[*3] $x = y$ なら $\left\| X^1 - Y^1 \right\|_p = 0$ かつ $I_{s,t}(x) = I_{s,t}(y)$ が成り立つ．

第一段　$\omega : \Delta_T \longrightarrow [0,\infty)$ を

$$\omega(\alpha,\beta) = \left\| X^1 \right\|_{p,[\alpha,\beta]}^p + \left\| Y^1 \right\|_{p,[\alpha,\beta]}^p + \epsilon^{-p} \left\| X^1 - Y^1 \right\|_{p,[\alpha,\beta]}^p, \quad ((\alpha,\beta) \in \Delta_T)$$

で定めれば，定理 0.2.6 により $1 \leq p$ の下で ω は control function である．

第二段　任意に $[s,t]$ の分割 $D = \{s = t_0 < \cdots < t_N = t\}$ $(N \geq 2)$ を取れば，補題 0.2.8 より (5) を満たす $t_{(0)}$ が存在する．ここで，$D_{-0} \coloneqq D$, $D_{-1} \coloneqq D \backslash \{t_{(0)}\}$ と定める．$N \geq 3$ ならば D_{-1} についても (5) を満たす $t_{(1)}$ が存在するから，$D_{-2} \coloneqq D_{-1} \backslash \{t_{(1)}\}$ と定める．この操作を繰り返せば $t_{(k)}, D_{-k}$ $(k = 0,1,\cdots,N-1)$ が得られ，

$$\begin{aligned}
&\tilde{I}_{s,t}(x,D) - \tilde{I}_{s,t}(y,D) \\
&\quad = \sum_{k=0}^{N-2} \left[\left\{ \tilde{I}_{s,t}(x,D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x,D_{-k-1}) \right\} - \left\{ \tilde{I}_{s,t}(y,D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(y,D_{-k-1}) \right\} \right] \\
&\quad\quad + \left\{ \tilde{I}_{s,t}(x) - \tilde{I}_{s,t}(y) \right\}
\end{aligned} \tag{6}$$

と表現できる．

第三段　式 (6) について，次を満たす定数 C_1 が存在することを示す:

$$|(6)| \leq \epsilon C_1 \tag{7}$$

見やすくするために $t_k = t_{(k)}$ と書き直せば，

$$\begin{aligned}
&\left\{ \tilde{I}_{s,t}(x,D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x,D_{-k-1}) \right\} - \left\{ \tilde{I}_{s,t}(y,D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(y,D_{-k-1}) \right\} \\
&= \{f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}})\} X^1_{t_k,t_{k+1}} - \{f(y_{t_k}) - f(y_{t_{k-1}})\} Y^1_{t_k,t_{k+1}} \\
&= \{f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}})\} \left(X^1_{t_k,t_{k+1}} - Y^1_{t_k,t_{k+1}} \right) \\
&\quad + \{f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}})\} Y^1_{t_k,t_{k+1}} - \{f(y_{t_k}) - f(y_{t_{k-1}})\} Y^1_{t_k,t_{k+1}} \\
&= \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes \left(X^1_{t_k,t_{k+1}} - Y^1_{t_k,t_{k+1}} \right) \, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X^1_{t_{i_k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{i_k+1}} \, d\theta \\
&\quad - \int_0^1 (\nabla f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) Y^1_{t_{i_k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{i_k+1}} \, d\theta \\
&= \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X^1_{t_{i_k-1},t_k} \otimes \left(X^1_{t_k,t_{i_k+1}} - Y^1_{t_k,t_{i_k+1}} \right) \, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) \left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k} \right) \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}} \, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}} \, d\theta \\
&\quad - \int_0^1 (\nabla f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}} \, d\theta \\
&= \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes \left(X^1_{t_k,t_{k+1}} - Y^1_{t_k,t_{k+1}} \right) \, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) \left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k} \right) \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}} \, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}} + r(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) - y_{t_{k-1}} - \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\left(X^1_{0,t_{k-1}} - Y^1_{0,t_{k-1}}\right) \otimes Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}}\ dr\, d\theta\ ^{*4} \\
+ \int_0^1 \int_0^1 &(\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}} + r(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) - y_{t_{k-1}} - \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})))\\
&\theta\left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right) \otimes Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}}\ dr\, d\theta
\end{aligned}
$$

が成り立つ．補題 0.2.8 より

$$
\begin{aligned}
\left|X^1_{t_{k-1},t_k}\right|, \left|Y^1_{t_{k-1},t_k}\right|, \left|X^1_{t_k,t_{k+1}}\right|, \left|Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| &\le \omega(t_{k-1}, t_{k+1})^{1/p} \le \left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1}\right)^{1/p}, \\
\left|X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right|, \left|X^1_{t_k,t_{k+1}} - Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| &\le \epsilon\omega(t_{k-1}, t_{k+1})^{1/p} \le \epsilon\left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1}\right)^{1/p}
\end{aligned}
$$

が満たされ，また

$$
\left|X^1_{0,t_{k-1}} - Y^1_{0,t_{k-1}}\right| \le \epsilon\omega(0, t_{k-1})^{1/p} \le \epsilon\omega(0,T)^{1/p} \le \epsilon\,(2R^p + 1)^{1/p}
$$

でもあるから，

$$
M := \sum_{i,j} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f^i_j(x)| + \sum_{i,j,k} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial_k f^i_j(x)| + \sum_{i,j,k,v} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial_v\partial_k f^i_j(x)| \tag{8}
$$

と定めて

$$
\begin{aligned}
&\left|\left\{\tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1})\right\} - \left\{\tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k-1})\right\}\right| \\
&\le M\left|X^1_{t_{k-1},t_k}\right|\left|X^1_{t_k,t_{k+1}} - Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\quad + M\left|X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right|\left|Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\quad + M\left|X^1_{0,t_{k-1}} - Y^1_{0,t_{k-1}}\right|\left|Y^1_{t_{k-1},t_k}\right|\left|Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\quad + M\left|X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right|\left|Y^1_{t_{k-1},t_k}\right|\left|Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\le \epsilon M\left[2 + 2\,(2R^p+1)^{1/p}\right]\left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1}\right)^{2/p} \\
&\le \epsilon M\left[2 + 2\,(2R^p+1)^{1/p}\right]2^{2/p}\,(2R^p+1)^{2/p}\left(\frac{1}{N-k-1}\right)^{2/p}
\end{aligned}
$$

を得る．

$$
C'_1 := M\left[2 + 2\,(2R^p+1)^{1/p}\right]2^{2/p}\,(2R^p+1)^{2/p}
$$

とおけば

$$
|(6)| \le \sum_{k=0}^{N-2} \epsilon C'_1\left(\frac{1}{N-k-1}\right)^{2/p} < \epsilon C'_1 \zeta\left(\frac{2}{p}\right)
$$

が成立し，$p < 2$ より $\zeta(2/p) < \infty$ であるから $C_1 := C'_1\zeta(2/p)$ とおいて (7) が従う．

*4 $x_0 = y_0$ の仮定より $x_{t_{k-1}} - y_{t_{k-1}} = X^1_{0,t_{k-1}} - Y^1_{0,t_{k-1}}$ が成り立つ．

第四段　$x_0 = y_0$ の仮定により $x_s - y_s = X^1_{0,s} - Y^1_{0,s}$ が成り立ち

$$\begin{aligned}
\left|\tilde{I}_{s,t}(x) - \tilde{I}_{s,t}(y)\right| &= \left|f(x_s)X^1_{s,t} - f(y_s)Y^1_{s,t}\right| \\
&\leq \left|f(x_s)X^1_{s,t} - f(x_s)Y^1_{s,t}\right| + \left|f(x_s)Y^1_{s,t} - f(y_s)Y^1_{s,t}\right| \\
&\leq M\left|X^1_{s,t} - Y^1_{s,t}\right| + \left|\int_0^1 (\nabla f)(y_s + \theta(x_s - y_s))\left[\left(X^1_{0,s} - Y^1_{0,s}\right) \otimes Y^1_{s,t}\right]\, d\theta\right| \\
&\leq M\left|X^1_{s,t} - Y^1_{s,t}\right| + M\left|X^1_{0,s} - Y^1_{0,s}\right|\left|Y^1_{s,t}\right| \\
&\leq M\epsilon\omega(s,t)^{1/p} + M\epsilon\omega(0,s)^{1/p}\omega(s,t)^{1/p} \\
&\leq \epsilon M\left[(2R^p + 1)^{1/p} + (2R^p + 1)^{2/p}\right]
\end{aligned}$$

が従う．ここで $C_2 \coloneqq M\left[(2R^p + 1)^{1/p} + (2R^p + 1)^{2/p}\right]$ とおく．

第五段　第二段と第三段より，任意の $D \in \delta[s,t]$ に対し

$$\left|\tilde{I}_{s,t}(x,D) - \tilde{I}_{s,t}(y,D)\right| \leq \epsilon(C_1 + C_2)$$

が成立し．定理 0.2.2 により $|D| \longrightarrow 0$ として

$$\left|I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y)\right| \leq \epsilon(C_1 + C_2)$$

が出る．∎

定理 0.2.11 ($2 \leq p < 3$ **の場合の連続性定理**)**.**　$2 \leq p < 3$ とし，$x_0 = y_0$ を満たす $x, y \in C^1$ と $f \in C^2_b(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$, $0 < \epsilon, R < \infty$ を任意に取る．このとき，

$$\begin{aligned}
&\left\| X^1 \right\|_p, \left\| Y^1 \right\|_p, \left\| X^2 \right\|_{p/2}, \left\| Y^2 \right\|_{p/2} \leq R < \infty, \\
&\left\| X^1 - Y^1 \right\|_p, \left\| X^2 - Y^2 \right\|_{p/2} \leq \epsilon
\end{aligned}$$

なら，或る定数 $C = C(p,R,f)$ が存在し，任意の $0 \leq s \leq t \leq T$ に対して次が成立する:

$$\left|I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y)\right| \leq \epsilon C.$$

系 0.2.12.　$1 \leq p < 2$ とし，$x_0 = y_0$ を満たす $x, y \in C^1$ と $f \in C^2_b(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$, $0 < R < \infty$ を任意に取る．このとき，

$$\left\| X^1 \right\|_p, \left\| Y^1 \right\|_p, \left\| X^2 \right\|_{p/2}, \left\| Y^2 \right\|_{p/2} \leq R$$

なら，或る定数 $C = C(p,R,f)$ が存在して次を満たす:

$$\left|I_{0,T}(x) - I_{0,T}(y)\right| \leq C\left(\left\| X^1 - Y^1 \right\|_p + \left\| X^2 - Y^2 \right\|_{p/2}\right).$$

証明 (系 0.2.12)**.**　定理 0.2.11 において，$\epsilon = \left\| X^1 - Y^1 \right\|_p + \left\| X^2 - Y^2 \right\|_{p/2}$ $(x \neq y)$ として証明が通る．∎

証明 (定理 0.2.12)**.**　$[s,t] \subset [0,T]$ とする．

第一段　$\omega : \Delta_T \longrightarrow [0,\infty)$ を

$$\omega(\alpha,\beta) = \left\| X^1 \right\|_{p,[\alpha,\beta]}^{p} + \left\| Y^1 \right\|_{p,[\alpha,\beta]}^{p} + \left\| X^2 \right\|_{p/2,[\alpha,\beta]}^{p/2} + \left\| Y^2 \right\|_{p/2,[\alpha,\beta]}^{p/2} + \epsilon^{-p} \left\| X^1 - Y^1 \right\|_{p,[\alpha,\beta]}^{p} + \epsilon^{-p/2} \left\| X^2 - Y^2 \right\|_{p/2,[\alpha,\beta]}^{p/2}, \quad ((\alpha,\beta) \in \Delta_T)$$

で定めれば，定理 0.2.6 により $2 \le p$ の下で ω は control function である．

第二段　$D \in \delta[s,t]$ に対し，定理 0.2.9 の証明と同様にして $t_{(k)}, D_{-k}$ を構成すれば

$$\begin{aligned} &J_{s,t}(x,D) - J_{s,t}(y,D) \\ &\quad = \sum_{k=0}^{N-2} \left[\{J_{s,t}(x,D_{-k}) - J_{s,t}(x,D_{-k-1})\} - \{J_{s,t}(y,D_{-k}) - J_{s,t}(y,D_{-k-1})\} \right] \\ &\qquad + \{J_{s,t}(x) - J_{s,t}(y)\} \end{aligned} \tag{9}$$

と表現できる．

第三段　$J_{s,t}(x,D_{-k}) - J_{s,t}(x,D_{-k-1})$ を変形する．以降 $t_k = t_{(k)}$ と書き直せば

$$\begin{aligned} &J_{s,t}(x,D_{-k}) - J_{s,t}(x,D_{-k-1}) \\ &\quad = J_{t_{k-1},t_k}(x) + J_{t_k,t_{k+1}}(x) - J_{t_{k-1},t_{k+1}}(x) \\ &\quad = f(x_{t_{k-1}})X^1_{t_{k-1},t_k} + f(x_{t_k})X^1_{t_k,t_{k+1}} - f(x_{t_{k-1}})X^1_{t_{k-1},t_{k+1}} \\ &\qquad + (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X^2_{t_{k-1},t_k} + (\nabla f)(x_{t_k})X^2_{t_k,t_{k+1}} - (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X^2_{t_{k-1},t_{k+1}} \\ &\quad = \{f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}})\} X^1_{t_k,t_{k+1}} \\ &\qquad + (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X^2_{t_{k-1},t_k} + (\nabla f)(x_{t_k})X^2_{t_k,t_{k+1}} - (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X^2_{t_{k-1},t_{k+1}} \\ &\quad = \int_0^1 \{(\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) - (\nabla f)(x_{t_{k-1}})\} X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_k,t_{k+1}}\, d\theta \\ &\qquad + (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_k,t_{k+1}} \\ &\qquad + (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X^2_{t_{k-1},t_k} + (\nabla f)(x_{t_k})X^2_{t_k,t_{k+1}} - (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X^2_{t_{k-1},t_{k+1}} \\ &\quad = \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}))X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta \\ &\qquad + (\nabla f)(x_{t_{k-1}})\left(X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_k,t_{k+1}} + X^2_{t_{k-1},t_k} - X^2_{t_{k-1},t_{k+1}}\right) \\ &\qquad + (\nabla f)(x_{t_k})X^2_{t_k,t_{k+1}} \\ &\quad = \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}))X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta \\ &\qquad + \{(\nabla f)(x_{t_k}) - (\nabla f)(x_{t_{k-1}})\} X^2_{t_k,t_{k+1}} \\ &\quad = \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}))X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta \\ &\qquad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}))X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^2_{t_k,t_{k+1}}\, d\theta \end{aligned}$$

を得る．

第四段　式 (9) について，次を満たす定数 C_1 が存在することを示す:

$$|(9)| \le \epsilon C_1. \tag{10}$$

実際，前段の結果より

$$
\begin{aligned}
&\{J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})\} - \{J_{s,t}(y, D_{-k}) - J_{s,t}(y, D_{-k-1})\} \\
&= \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_k,t_{k+1}} \, dr \, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^2_{t_k,t_{k+1}} \, d\theta \\
&\quad - \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}} \, dr \, d\theta \\
&\quad - \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^2_{t_k,t_{k+1}} \, d\theta \\
&= \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes \left(X^1_{t_k,t_{k+1}} - Y^1_{t_k,t_{k+1}} \right) dr \, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes \left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k} \right) \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}} \, dr \, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^\theta \left\{ (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) - (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) \right\} \\
&\qquad\qquad X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}} \, dr \, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) \left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k} \right) \otimes Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}} \, dr \, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes \left(X^2_{t_k,t_{k+1}} - Y^2_{t_k,t_{k+1}} \right) d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \left\{ (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) - (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) \right\} \\
&\qquad\qquad X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^2_{t_k,t_{k+1}} \, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) \left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k} \right) \otimes Y^2_{t_k,t_{k+1}} \, d\theta \\
&= \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes \left(X^1_{t_k,t_{k+1}} - Y^1_{t_k,t_{k+1}} \right) dr \, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes \left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k} \right) \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}} \, dr \, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^\theta \int_0^1 (\nabla^3 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}) + u(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) - y_{t_{k-1}} - r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))) \\
&\qquad\qquad \left\{ \left(X^1_{0,t_{k-1}} - Y^1_{0,t_{k-1}} \right) + r \left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k} \right) \right\} \otimes X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}} \, du \, dr \, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) \left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k} \right) \otimes Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}} \, dr \, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes \left(X^2_{t_k,t_{k+1}} - Y^2_{t_k,t_{k+1}} \right) d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^1 (\nabla^3 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}) + r(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) - y_{t_{k-1}} - \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))) \\
&\qquad\qquad \left\{ \left(X^1_{0,t_{k-1}} - Y^1_{0,t_{k-1}} \right) + \theta \left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k} \right) \right\} \otimes X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^2_{t_k,t_{k+1}} \, dr \, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) \left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k} \right) \otimes Y^2_{t_k,t_{k+1}} \, d\theta
\end{aligned}
$$

が成り立つから，

$$M := \sum_{i,j} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f_j^i(x)| + \sum_{i,j,k} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial_k f_j^i(x)| \\ + \sum_{i,j,k,v} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial_v \partial_k f_j^i(x)| + \sum_{i,j,k,v,w} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial_w \partial_v \partial_k f_j^i(x)| \tag{11}$$

とおいて

$$\begin{aligned}
&\left|\{J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})\} - \{J_{s,t}(y, D_{-k}) - J_{s,t}(y, D_{-k-1})\}\right| \\
&\le M \left|X^1_{t_{k-1},t_k}\right| \left|X^1_{t_{k-1},t_k}\right| \left|X^1_{t_k,t_{k+1}} - Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\quad + M \left|X^1_{t_{k-1},t_k}\right| \left|X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right| \left|Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\quad + M \left|X^1_{0,t_{k-1}} - Y^1_{0,t_{k-1}}\right| \left|X^1_{t_{k-1},t_k}\right| \left|Y^1_{t_{k-1},t_k}\right| \left|Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\quad + M \left|X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right| \left|X^1_{t_{k-1},t_k}\right| \left|Y^1_{t_{k-1},t_k}\right| \left|Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\quad + M \left|X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right| \left|Y^1_{t_{k-1},t_k}\right| \left|Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\quad + M \left|X^1_{t_{k-1},t_k}\right| \left|X^2_{t_k,t_{k+1}} - Y^2_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\quad + M \left|X^1_{0,t_{k-1}} - Y^1_{0,t_{k-1}}\right| \left|X^1_{t_{k-1},t_k}\right| \left|Y^2_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\quad + M \left|X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right| \left|X^1_{t_{k-1},t_k}\right| \left|Y^2_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\quad + M \left|X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right| \left|Y^2_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\le \epsilon M \left[5 + 2\omega(0, t_{k-1})^{1/p} + 2\omega(t_{k-1}, t_k)^{1/p}\right] \left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1}\right)^{3/p} \\
&\le \epsilon M \left[2 + 4\left(2R^p + 2R^{p/2} + 2\right)^{1/p}\right] 2^{3/p} \left(2R^p + 2R^{p/2} + 2\right)^{3/p} \left(\frac{1}{N-k-1}\right)^{3/p}
\end{aligned}$$

を得る．ここで

$$C_1' := M\left[2 + 4\left(2R^p + 2R^{p/2} + 2\right)^{1/p}\right] 2^{3/p} \left(2R^p + 2R^{p/2} + 2\right)^{3/p}$$

と定めれば

$$|(9)| \le \sum_{k=0}^{N-2} \epsilon C_1' \left(\frac{1}{N-k-1}\right)^{3/p} < \epsilon C_1' \zeta\left(\frac{3}{p}\right)$$

が成立し，$p < 3$ より $\zeta(3/p) < \infty$ であるから $C_1 := C_1'\zeta(3/p)$ とおいて (10) が出る．

第五段　$x_0 = y_0$ の仮定により

$$\begin{aligned}
&\left|J_{s,t}(x) - J_{s,t}(y)\right| \\
&\le \left|f(x_s)X^1_{s,t} - f(y_s)Y^1_{s,t}\right| + \left|(\nabla f)(x_s)X^2_{s,t} - (\nabla f)(y_s)Y^2_{s,t}\right| \\
&\le \left|f(x_s)X^1_{s,t} - f(x_s)Y^1_{s,t}\right| + \left|f(x_s)Y^1_{s,t} - f(y_s)Y^1_{s,t}\right| \\
&\quad + \left|(\nabla f)(x_s)X^2_{s,t} - (\nabla f)(x_s)Y^2_{s,t}\right| + \left|(\nabla f)(x_s)Y^2_{s,t} - (\nabla f)(y_s)Y^2_{s,t}\right| \\
&\le M\left|X^1_{s,t} - Y^1_{s,t}\right| + \left|\int_0^1 (\nabla f)(y_s + \theta(x_s - y_s))(x_s - y_s) \otimes Y^1_{s,t}\, d\theta\right| \\
&\quad + M\left|X^2_{s,t} - Y^2_{s,t}\right| + \left|\int_0^1 (\nabla^2 f)(y_s + \theta(x_s - y_s))(x_s - y_s) \otimes Y^2_{s,t}\, d\theta\right| \\
&\le M\left|X^1_{s,t} - Y^1_{s,t}\right| + M\left|X^1_{0,s} - Y^1_{0,s}\right|\left|Y^1_{s,t}\right| \\
&\quad + M\left|X^2_{s,t} - Y^2_{s,t}\right| + M\left|X^1_{0,s} - Y^1_{0,s}\right|\left|Y^2_{s,t}\right|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \epsilon M\omega(s,t)^{1/p} + \epsilon M\omega(0,s)^{1/p}\omega(s,t)^{1/p} \\
&\quad + \epsilon M\omega(s,t)^{2/p} + \epsilon M\omega(0,s)^{1/p}\omega(s,t)^{2/p} \\
&\le \epsilon M\left[\omega(0,T)^{1/p} + 2\omega(0,T)^{2/p} + \omega(0,T)^{3/p}\right] \\
&\le \epsilon M\left[\left(2R^p + 2R^{p/2} + 2\right)^{1/p} + 2\left(2R^p + 2R^{p/2} + 2\right)^{2/p} + \left(2R^p + 2R^{p/2} + 2\right)^{3/p}\right]
\end{aligned}
$$

が従う．ここで最下段の ϵ の係数を C_2 とおく．

第六段　以上より，任意の $D \in \delta[s,t]$ に対し

$$\left|J_{s,t}(x,D) - J_{s,t}(y,D)\right| \le \epsilon(C_1 + C_2)$$

が成り立ち，定理 0.2.2 により $|D| \longrightarrow 0$ として

$$\left|I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y)\right| \le \epsilon(C_1 + C_2)$$

が出る． ∎

系 0.2.13 (パスが 0 出発なら f の有界性は要らない). 定理 0.2.9 と定理 0.2.11 について，$x, y \in \tilde{C}^1$ ならば $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ として主張が成り立つ．

証明. $x_0 = 0$ なら

$$\left\|X^1\right\|_p \le R \quad \Rightarrow \quad |x_t| \le R \quad (\forall t \in [0,T])$$

が成り立つから，式 (8) と (11) において $\sup_{x\in\mathbb{R}^d}$ を $\sup_{|x|\le 9R}$ に替えればよい． ∎

0.3 Young 積分

補題 0.3.1. $x \in C^1$, $f \in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ とする．

(1) $1 \le p < 2$ の場合，或る control function ω が存在して

$$\left|X^1_{s,t}\right| \le \omega(s,t)^{1/p}, \quad (0 \le \forall s \le \forall t \le T)$$

を満たすとき，ある定数 $C = C(p,f)$ があり

$$\left|I_{s,t}(x)\right| \le C\left(\omega(s,t)^{1/p} + \omega(s,t)^{2/p}\right).$$

が成立する．

(2) $2 \le p < 3$ の場合，或る control function ω が存在して

$$\left|X^1_{s,t}\right| \le \omega(s,t)^{1/p}, \quad \left|X^2_{s,t}\right| \le \omega(s,t)^{2/p}, \quad (0 \le \forall s \le \forall t \le T)$$

を満たすとき，ある定数 $C = C(p,f)$ があり

$$\left|I_{s,t}(x)\right| \le C\left(\omega(s,t)^{1/p} + \omega(s,t)^{2/p} + \omega(s,t)^{3/p}\right).$$

が成立する．

証明.

(1) $D = \{s = t_0 < \cdots < t_N = t\}$ $(N \ge 2)$ に対し，補題 0.2.8 により存在する i を取り $D_{-1} := D \backslash \{i\}$ と書く．補題 0.2.8 の添数を除く作業を続けて D_{-k} $(k = 1, \cdots, N-1)$ を構成する．

$$M := \max_{\substack{t\in[0,T]\\1\le i\le m\\1\le j,k\le d}} \left|\partial_k f^i_j(x_t)\right|, \quad M' := \max_{t\in[0,T]} |f(x_t)|$$

とおけば $M, M' < \infty$ であり，$\left|X^1_{t_i,t_{i+1}}\right| \le \omega(t_i,t_{i+1})^{1/p} \le \omega(t_{i-1},t_{i+1})^{1/p}$ と補題 0.2.8 により

$$\begin{aligned}
\left|\tilde{I}_{s,t}(x,D) - \tilde{I}_{s,t}(x,D_{-1})\right| &= \left|\tilde{I}_{t_{i-1},t_i}(x) + \tilde{I}_{t_i,t_{i+1}}(x) - \tilde{I}_{t_{i-1},t_{i+1}}(x)\right| \\
&\le \left|\{f(x_{t_i}) - f(x_{t_{i-1}})\} X^1_{t_i,t_{i+1}}\right| \\
&\le \left|\left\{\int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{i-1}} + \theta(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}))\, d\theta\right\} X^1_{t_{i-1},t_i} \otimes X^1_{t_i,t_{i+1}}\right| \\
&\le md^2 M \left|X^1_{t_i,t_{i+1}}\right|^2 \\
&\le md^2 M \left(\frac{2\omega(s,t)}{N-1}\right)^{2/p}
\end{aligned}$$

が成立する．同様に

$$\left|\tilde{I}_{s,t}(x,D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x,D_{-k-1})\right| \le md^2 M \left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1}\right)^{2/p}, \quad (k = 0, \cdots, N-2)$$

が成り立ち $(D_{-0} = D)$

$$
\begin{aligned}
\left|\tilde{I}_{s,t}(x, D) - f(x_s)X^1_{s,t}\right| &\le \sum_{k=0}^{N-2} \left|\tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1})\right| \\
&\le md^2 M(2\omega(s,t))^{2/p} \sum_{k=0}^{N-2} \left(\frac{1}{N-k-1}\right)^{2/p} \\
&\le md^2 M(2\omega(s,t))^{2/p} \zeta\left(\frac{2}{p}\right)
\end{aligned}
$$

が従う．いま，仮定より $p < 2$ であるから $\zeta(2/p) < \infty$ であり，定理 0.2.2 より

$$
\left|I_{s,t}(x)\right| \le M'\omega(s,t)^{1/p} + md^2 M(2\omega(s,t))^{2/p} \zeta\left(\frac{2}{p}\right)
$$

を得る．

(2) (1) と同様に D_{-k} $(k = 1, \cdots, N-1)$ を構成する．会田先生のノートの通りに

$$
\begin{aligned}
J_{s,t}(x, D) - J_{s,t}(x, D_{-1}) = &\left\{\int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{i-1}} + \theta(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}))\, dr\, d\theta\right\} X^1_{t_{i-1},t_i} \otimes X^1_{t_{i-1},t_i} \otimes X^1_{t_i,t_{i+1}} \\
&+ \left\{\int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{i-1}} + \theta(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}))\, d\theta\right\} X^1_{t_{i-1},t_i} \otimes X^2_{t_i,t_{i+1}}
\end{aligned}
$$

を得る．ここで (1) の M, M' に加えて

$$
M'' := \max_{\substack{t\in[0,T] \\ 1\le i\le m \\ 1\le j,k,\nu\le d}} \left|\partial_\nu \partial_k f^i_j(x_t)\right|
$$

とおけば

$$
\begin{aligned}
\left|J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})\right| &\le md^2 M \left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1}\right)^{3/p} + md^2 M'' \left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1}\right)^{1/p} \left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1}\right)^{2/p} \\
&\le md^2(M + M'') \left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1}\right)^{3/p}
\end{aligned}
$$

が成立し，会田先生のノートの通りに

$$
\left|J_{s,t}(x, D) - \left(f(x_s)X^1_{s,t} + (\nabla f)(x_s)X^2_{s,t}\right)\right| \le 2^{3/p} md^2(M + M'')\zeta\left(\frac{3}{p}\right)\omega(s,t)^{3/p}
$$

が従い，$p < 3$ の仮定より $\zeta(3/p) < \infty$ である．(1) と同じく定理 0.2.2 より

$$
\left|I_{s,t}(x)\right| \le M'\omega(s,t)^{1/p} + md^2 M\omega(s,t)^{2/p} + 2^{3/p} md^2(M + M'')\zeta\left(\frac{3}{p}\right)\omega(s,t)^{3/p}
$$

となる． ∎

0.4 The notion of rough path

連続かつ有界変動なパス $x : [0, T] \longrightarrow V$ に対して次の積分

$$
\int_s^t X^1_{s,u} \otimes dx_u
$$

を定めたい．ただし $X^1_{s,t} = x_t - x_s$ $((s,t) \in \Delta_T)$ である．いま，細分 $D = \{s = u_0 < \cdots < u_n = t\}, D' = \{s = v_0 < \cdots < v_m = t\} \in \delta[s,t]$ に対して，共通細分を $D'' = \{s = w_0 < w_1 \cdots \leq t\}$ と表し

$$\begin{aligned} \tilde{X}^1_{s,w_k} &\coloneqq X^1_{s,u_i}, \quad (u_i \leq w_k \leq u_{i+1}), \\ \hat{X}^1_{s,w_k} &\coloneqq X^1_{s,v_j}, \quad (v_j \leq w_k \leq v_{j+1}) \end{aligned}$$

により $\tilde{X}^1, \hat{X}^1$ を定める．このとき

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_D X^1_{s,u_{i-1}} \otimes X^1_{u_{i-1},u_i} - \sum_{D'} X^1_{s,v_{j-1}} \otimes X^1_{v_{j-1},v_j} \right\|_{V^{\otimes 2}} \\ &= \left\| \sum_D X^1_{s,u_{i-1}} \otimes X^1_{u_{i-1},u_i} - \sum_{D''} X^1_{s,w_{k-1}} \otimes X^1_{w_{k-1},w_k} \right\|_{V^{\otimes 2}} \\ &\quad + \left\| \sum_{D'} X^1_{s,v_{j-1}} \otimes X^1_{v_{j-1},v_j} - \sum_{D''} X^1_{s,w_{k-1}} \otimes X^1_{w_{k-1},w_k} \right\|_{V^{\otimes 2}} \\ &= \left\| \sum_{D''} \tilde{X}^1_{s,w_{k-1}} \otimes X^1_{w_{k-1},w_k} - \sum_{D''} X^1_{s,w_{k-1}} \otimes X^1_{w_{k-1},w_k} \right\|_{V^{\otimes 2}} \\ &\quad + \left\| \sum_{D''} \hat{X}^1_{s,w_{k-1}} \otimes X^1_{w_{k-1},w_k} - \sum_{D''} X^1_{s,w_{k-1}} \otimes X^1_{w_{k-1},w_k} \right\|_{V^{\otimes 2}} \\ &= \left\| \sum_{D''} \left(\tilde{X}^1_{s,w_{k-1}} - X^1_{s,w_{k-1}} \right) \otimes X^1_{w_{k-1},w_k} \right\|_{V^{\otimes 2}} \\ &\quad + \left\| \sum_{D''} \left(\hat{X}^1_{s,w_{k-1}} - X^1_{s,w_{k-1}} \right) \otimes X^1_{w_{k-1},w_k} \right\|_{V^{\otimes 2}} \\ &\leq \sum_{D''} \left\| \tilde{X}^1_{s,w_{k-1}} - X^1_{s,w_{k-1}} \right\| \left\| X^1_{w_{k-1},w_k} \right\| + \sum_{D''} \left\| \hat{X}^1_{s,w_{k-1}} - X^1_{s,w_{k-1}} \right\| \left\| X^1_{w_{k-1},w_k} \right\| \\ &\leq \max_k \left\| \tilde{X}^1_{s,w_{k-1}} - X^1_{s,w_{k-1}} \right\| \left\| X^1 \right\|_{1,[s,t]} + \max_k \left\| \hat{X}^1_{s,w_{k-1}} - X^1_{s,w_{k-1}} \right\| \left\| X^1 \right\|_{1,[s,t]} \end{aligned}$$

が成立する．いま，$[s,t] \ni u \longmapsto X^1_{s,u}$ は一様連続であるから $|D|, |D'| \longrightarrow 0$ として右辺は 0 に収束する．従って $D_n \in \delta[s,t]$ を $|D_n| \longrightarrow 0$ $(n \longrightarrow \infty)$ を満たす細分列とすれば $\left(\sum_{D_n} X^1_{s,u_{i-1}} \otimes X^1_{u_{i-1},u_i} \right)_{n=1}^{\infty}$ は $V^{\otimes 2}$ の Cauchy 列となり $\in V^{\otimes 2}$ で収束する．別の細分列 $(D_m)_{m=1}^{\infty}$ $(|D_m| \longrightarrow 0)$ を取っても

$$\left\| \sum_{D_n} X^1_{s,u_{i-1}} \otimes X^1_{u_{i-1},u_i} - \sum_{D_m} X^1_{s,v_{j-1}} \otimes X^1_{v_{j-1},v_j} \right\|_{V^{\otimes 2}} \longrightarrow 0, \quad (n, m \longrightarrow \infty)$$

が成り立つから，極限は細分列に依らず定まり，従って $\lim_{|D| \to 0} \sum_D X^1_{s,u_{i-1}} \otimes X^1_{u_{i-1},u_i}$ が確定する．ここで

$$X^2_{s,t} = \int_s^t X^1_{s,u} \otimes dx_u \coloneqq \lim_{|D| \to 0} \sum_D X^1_{s,u_{i-1}} \otimes X^1_{u_{i-1},u_i}$$

と定める．このとき $\Delta_T \ni (s,t) \longmapsto X^2_{s,t} \in V^{\otimes 2}$ は連続である．

V を $\mathbb{R}$-上の Banach 空間とする．$T(V) \coloneqq$

定理 0.4.1. $\Omega_p(V)$ は次で定める距離

$$d_p(X,Y) \coloneqq \max_{1 \leq i \leq [p]} \left\| X^i - Y^i \right\|_{p/i}$$

により完備距離空間となる．

証明．$(X^k)_{k=1}^{\infty}$ を Cauchy 列とすれば，任意の $\epsilon > 0$ に対し或る $K \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\left\| X^{k,i} - X^{\ell,i} \right\|_{p/i} < \epsilon, \quad (\forall k, \ell > K,\ 1 \leq i \leq [p])$$

が成立する．よって定理 (0.1.7) より各 i に対し或る $X^i \in B_{p/i,T}(V)$ が存在して

$$\left\| X^{k,i} - X^i \right\|_{p/i} \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty,\ 1 \leq i \leq [p])$$

を満たす．$X : \Delta_T \longrightarrow T^{(n)}(V)$ を

$$X_{s,t} \coloneqq (1, X^1_{s,t}, \cdots, X^n_{s,t}), \quad ((s,t) \in \Delta_T)$$

により定めれば，X^i の連続性より X も連続である．さらに任意の $D \in \delta[0,T]$ に対して

$$\begin{aligned}
\sum_D \left\| X^k_{t_{i-1},t_i} - X_{t_{i-1},t_i} \right\|^p &= \sum_D \left(\left\| X^{k,1}_{t_{i-1},t_i} - X^1_{t_{i-1},t_i} \right\| + \cdots + \left\| X^{k,n}_{t_{i-1},t_i} - X^n_{t_{i-1},t_i} \right\| \right)^p \\
&\leq (n+1)^p \sum_D \left(\left\| X^{k,1}_{t_{i-1},t_i} - X^1_{t_{i-1},t_i} \right\|^p + \cdots + \left\| X^{k,n}_{t_{i-1},t_i} - X^n_{t_{i-1},t_i} \right\|^p \right) \\
&\leq (n+1)^p \left(\left\| X^{k,1}_{t_{i-1},t_i} - X^1_{t_{i-1},t_i} \right\|_p^p + \cdots + \left\| X^{k,n}_{t_{i-1},t_i} - X^n_{t_{i-1},t_i} \right\|_p^p \right)
\end{aligned}$$

が成立するから，定理より

$$\sup_D \sum_D \left\| X^k_{t_{i-1},t_i} - X_{t_{i-1},t_i} \right\|^p \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty)$$

が従い X の p-variation の有界性が出る． ∎