ゼミ用ノート
会田先生の資料”Rough path analysis:An Introduction”

基礎工学研究科システム創成専攻
学籍番号 29C17095
百合川尚学

2018 年 5 月 10 日

目次

0.1 導入

以下，d 次元ベクトル $x \in \mathbb{R}^d$ と (m,d) 行列 $a \in \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^d$ について，成分を込めて表現する場合は $x = (x^1, \cdots, x^d)$，$a = (a^i_j)_{1 \le i \le m, 1 \le j \le d}$ と書く．また $T > 0$ を固定し $C^1 = C^1([0,T] \to \mathbb{R}^d)$ とおく．（端点においては片側微分を考える．）$[s,t] \subset [0,T]$ の有限分割を $D = \{s = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t\}$ で表現し，有限分割の全体を $\delta[s,t]$ とおく．$|D| := \max_{1 \le i \le N} |t_i - t_{i-1}|$ とし，

$$\sum_D = \sum_{i=1}^N$$

と略記する．また線型空間を扱うときは零元のみの空間は考えない．

定理 0.1.1 (Riemann-Stieltjes **積分**). $[s,t] \subset [0,T]$ とし，$D \in \delta[s,t]$ についてのみ考えるとき，任意の $x \in C^1$，$f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ に対して次の極限が存在する:[*1]

$$\lim_{|D| \to 0} \sum_D f(x_{s_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) \in \mathbb{R}^m.$$

s_{i-1} は区間 $[t_{i-1}, t_i]$ に属する任意の点であり，極限は s_{i-1} の取り方に依らない．

[*1] 極限の存在を保証する条件としては，f の有界性と微分可能性は必要ない．

証明.　各 x^j は C^1-級であるから，平均値の定理より $\sum_D f(x_{s_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})$ の第 k 成分を

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{d} \sum_{D} f_j^k(x_{s_{i-1}})(x_{t_i}^j - x_{t_{i-1}}^j) \\
&\quad = \sum_{j=1}^{d} \sum_{D} f_j^k(x_{s_{i-1}})\dot{x}_{\xi_i}^j(t_i - t_{i-1}), \quad ({}^{\exists}\xi_i \in [t_{i-1}, t_i])
\end{aligned}
$$

と表現できる．各 j, k について

$$
\lim_{|D|\to 0} \sum_{D} f_j^k(x_{s_{i-1}})\dot{x}_{\xi_i}^j(t_i - t_{i-1})
$$

は通常の連続関数の Riemann 積分

$$
\int_s^t f_j^k(x_u)\dot{x}_u^j \, du
$$

に収束する． ∎

定義 0.1.2 (C^1-級のパスに対する汎関数)**.**　$x \in C^1$ と $f \in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ に対して，$[s, t] \subset [0, T]$ における Riemann-Stieltjes 積分を I で表現する:

$$
I_{s,t}(x) = \int_s^t f(x_u) \, dx_u := \lim_{|D|\to 0} \sum_{D} f(x_{t_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}),
$$

$$
\left[\int_s^t f(x_u) \, dx_u\right]^k = \sum_{j=1}^{d} \int_s^t f_j^k(x_u) \, dx_u^j, \quad (k = 1, \cdots, m).
$$

ただし $D \in \delta[s, t]$ のみを考える．

C^1 は次で定めるノルム $\|\cdot\|_{C^1}$ により Banach 空間となる:

$$
\| x \|_{C^1} := \sup_{t\in[0,T]} |x(t)| + \sup_{t\in[0,T]} |\dot{x}(t)|.
$$

定理 0.1.3 ($\|\cdot\|_{C^1}$ に関する連続性)**.**　$[s, t] \subset [0, T]$ とし，C^1 には $\|\cdot\|_{C^1}$ でノルム位相を入れる．このとき，$C^1 \ni x \longmapsto I_{s,t}(x) \in \mathbb{R}^m$ は連続である．

証明.　C^1 の第一可算性により点列連続性と連続性は一致するから，$x^n \longrightarrow x$ のとき $I_{s,t}(x^n) \longrightarrow I_{s,t}(x)$ が従うことを示せばよい．いま，$M := \sup_{u\in[s,t]} |f(x_u)| < \infty$ とおけば

$$
\begin{aligned}
\left|\int_s^t f(x_u^n) \, dx_u^n - \int_s^t f(x_u) \, dx_u\right| &= \left|\int_s^t f(x_u^n)\dot{x}_u^n \, du - \int_s^t f(x_u)\dot{x}_u \, du\right| \\
&\le \int_s^t \left|f(x_u^n)\dot{x}_u^n - f(x_u^n)\dot{x}_u\right| \, du + \int_s^t \left|f(x_u^n)\dot{x}_u - f(x_u)\dot{x}_u\right| \, du \\
&\le M \| x^n - x \|_{C^1} (t - s) + \sup_{u\in[s,t]} \left|f(x_u^n) - f(x_u)\right| \| x \|_{C^1} (t - s) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．$\|x^n - x\|_{C^1} \longrightarrow 0$ の仮定より $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ 及び x の値域は或るコンパクト集合 K に含まれるから，K 上での f の一様連続性より任意の $\epsilon > 0$ に対し或る $\epsilon > \delta > 0$ が存在して $v, w \in K,\ |v-w| < \delta$ なら $|f(v) - f(w)| < \epsilon$ が満たされる．すなわち $\|x^n - x\|_{C^1} < \delta$ なら

$$\sup_{u \in [s,t]} \left| f(x_u^n) - f(x_u) \right| < \epsilon$$

が成立する．$\|x^n - x\|_{C^1} \longrightarrow 0$ より，或る自然数 N が存在して $\|x^n - x\|_{C^1} < \delta\ (n > N)$ が満たされるから，$(1) < \epsilon[M(t-s) + \|x\|_{C^1}(t-s)]\ (n > N)$ が成り立ち $I_{s,t}(x^n) \longrightarrow I_{s,t}(x)$ が従う． ∎

定義 0.1.4 (p-variation). $(V, \|\cdot\|)$ をノルム空間とし，$[0,T]$ 上の V 値写像 x と $[s,t] \subset [0,T]$ に対して p-variation $(p > 0)$ を次で定める:

$$\|x\|_{p,[s,t]} \coloneqq \left\{ \sup_{D \in \delta[s,t]} \sum_{D} \left\| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right\|^p \right\}^{1/p}.$$

特に，$\|\cdot\|_{p,[0,T]}$ を $\|\cdot\|_p$ と表記する．また $p \geq 1$ として，線型空間 $B_{p,T}(V)$ を

$$B_{p,T}(V) \coloneqq \left\{ x : [0,T] \longrightarrow V\ ;\quad x_0 = 0,\ x : \text{continuous},\ \|x\|_p < \infty \right\}$$

により定める．

次の結果によれば，$0 < p < 1$ に対し $B_{p,T}(V)$ を定めても零写像のみの空間でしかない．

定理 0.1.5 ($0 < p < 1$ に対して有界 p-variation なら定数). $x : [0,T] \longrightarrow V$ を連続写像とする．このとき，$p \in (0,1)$ に対し $\|x\|_p < \infty$ が成り立つなら x は定数写像である．

証明. $t \in [0,T]$ を任意に取り固定する．このとき全ての $D \in \delta[0,t]$ に対して，

$$\begin{aligned} \|x_t - x_0\| \leq \sum_D \left\| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right\| &\leq \max_D \left\| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right\|^{1-p} \sum_D \left\| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right\|^p \\ &\leq \max_D \left\| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right\|^{1-p} \|x\|_p \end{aligned}$$

が成り立ち，x の一様連続性から右辺は $|D| \longrightarrow 0$ で 0 に収束し，$x_t = x_0$ が従う． ∎

定理 0.1.6 (p-variation の p に関する単調減少性). V をノルム空間とするとき，$x : [0,T] \longrightarrow V$ に対して $1 \leq p \leq q$ なら $\|x\|_p \geq \|x\|_q$ が成立する．特に $B_{p,T}(V) \subset B_{q,T}(V)$ が従う．

証明. $a, b \geq 0,\ r \geq 1$ に対し $a^r + b^r \leq (a+b)^r$ が成り立つから

$$\left[\sum_{i=1}^n a_i^r \right]^{1/r} \leq \sum_{i=1}^n a_i, \quad (a_i \geq 0,\ n \geq 1,\ r \geq 1)$$

を得る．従って任意の $x:[0,T]\longrightarrow V$ と $D\in\delta[0,T]$ に対し

$$\left[\sum_D \left(\left\| x_{t_i}-x_{t_{i-1}}\right\|^p\right)^{q/p}\right]^{p/q} \leq \sum_D \left\| x_{t_i}-x_{t_{i-1}}\right\|^p$$

が満たされ $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ が成立する． ∎

$p\geq 1$ の場合，Minkowski の不等式によれば，任意の $D\in\delta[s,t]$ に対し

$$\begin{aligned}\left\{\sum_D \left\|(x_{t_i}+y_{t_i})-(x_{t_{i-1}}+y_{t_{i-1}})\right\|^p\right\}^{1/p} &\leq \left\{\sum_D \left\|x_{t_i}-x_{t_{i-1}}\right\|^p\right\}^{1/p}+\left\{\sum_D \left\|y_{t_i}-y_{t_{i-1}}\right\|^p\right\}^{1/p}\\ &\leq \|x\|_{p,[s,t]}+\|y\|_{p,[s,t]}\end{aligned}$$

が成り立ち $\|x+y\|_{p,[s,t]}\leq \|x\|_{p,[s,t]}+\|y\|_{p,[s,t]}$ を得る．

定理 0.1.7. V が Banach 空間のとき，$B_{p,T}(V)$ は $\|\cdot\|_p$ をノルムとする Banach 空間である．

証明. 完備性を示す．

第一段 $(x^n)_{n=1}^\infty\subset B_{p,T}(V)$ を Cauchy 列とすれば，任意の $\epsilon>0$ に対して或る $n_\epsilon\in\mathbb{N}$ が存在し

$$\|x^n-x^m\|_p=\left\{\sup_{D\in\delta[0,T]}\sum_D \left\|\left(x^n_{t_i}-x^m_{t_i}\right)-\left(x^n_{t_{i-1}}-x^m_{t_{i-1}}\right)\right\|^p\right\}^{1/p}<\epsilon,\quad (n,m>n_\epsilon)$$

を満たす．いま，任意の $t\in[0,T]$ に対して $[0,T]$ の分割 $D=\{0\leq t\leq T\}$ を考えれば

$$\left\|x^n_t-x^m_t\right\|<\epsilon,\quad (n,m>n_\epsilon)$$

が得られ，V の完備性より或る $x_t\in\mathbb{R}^d$ が存在して

$$\left\|x^n_t-x_t\right\|<\epsilon\quad (n>n_\epsilon)$$

を満たす．この収束は t に関して一様であるから，$t\longmapsto x_t$ は 0 出発かつ連続である．

第二段 $\|x^n-x\|_p\longrightarrow 0\ (n\longrightarrow\infty)$ を示す．前段によれば，任意の $D\in\delta[0,T]$ に対し

$$\sum_D \left\|(x^m_{t_i}-x^n_{t_i})-(x^m_{t_{i-1}}-x^n_{t_{i-1}})\right\|^p<\epsilon^p,\quad (n,m>n_\epsilon)$$

が成り立っている．D は有限分割であるから，$m\longrightarrow\infty$ として

$$\sum_D \left\|(x_{t_i}-x^n_{t_i})-(x_{t_{i-1}}-x^n_{t_{i-1}})\right\|^p<\epsilon^p,\quad (n>n_\epsilon)$$

が従い，D の任意性より $\|x^n-x\|_p<\epsilon\ (n>n_\epsilon)$ を得る． ∎

定理 0.1.8. $p\geq 1$ とする．また $x_0=0$ を満たす $x\in C^1$ の全体が作る線形空間を $\tilde{C}^1$ とおく．

(1) $x\in C^1$ ならば $\|x\|_p<\infty$ が成り立つ．ただちに，$\|\cdot\|_p$ は $\tilde{C}^1$ においてノルムとなる．

(2) $\tilde{C}^1$ において，$\|\cdot\|_{C^1}$ で導入する位相は $\|\cdot\|_p$ で導入する位相より強い．

証明.

$p=1$ の場合　平均値の定理より，任意の $D\in\delta[0,T]$ に対し

$$\sum_D \left|x_{t_i}-x_{t_{i-1}}\right| \le \sum_D \|x\|_{C^1}\,(t_i-t_{i-1}) = \|x\|_{C^1}\,T<\infty$$

が成り立ち $\|x\|_1<\infty$ が従う．

$p>1$ の場合　q を p の共役指数とする．任意の $D\in\delta[0,T]$ に対し，Hölder の不等式より

$$\begin{aligned}\sum_D \left|x_{t_i}-x_{t_{i-1}}\right|^p &= \sum_D \left|\int_{t_{i-1}}^{t_i}\dot{x}_u\,du\right|^p \le \sum_D (t_i-t_{i-1})\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i}|\dot{x}_u|^q\,du\right)^{p/q}\\ &\le \sum_D (t_i-t_{i-1})\left(\int_0^T \|x\|_{C^1}^q\;du\right)^{p/q} = \|x\|_{C^1}^p\,T^p\end{aligned}$$

が成立し，$\|x\|_p<\infty$ が従う．

以上より，$p\ge 1$ ならば $\|x\|_p\le T\,\|x\|_{C^1}$ $(x\in C^1)$ が成り立ち (2) の主張を得る． ∎

次節の考察対象は主に定理 0.1.3 と定理 0.1.8 に関係する．定理 0.1.3 によれば，C^1 に $\|\cdot\|_{C^1}$ でノルム位相を導入した場合，$f\in C(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^m))$ に対して $C^1\ni x\longmapsto I_{s,t}(x)$ は連続である．一方で定理 0.1.3 によれば，0 出発 C^1-パス空間 $\tilde{C}^1$ に $\|\cdot\|_p$ でノルム位相を導入した場合，$\tilde{C}^1\ni x\longmapsto I_{s,t}(x)$ が連続であるという保証はない．しかし，次節以後の結果により，$1\le p<3$ かつ $f\in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^m))$ が満たされているなら $\tilde{C}^1\ni x\longmapsto I_{s,t}(x)$ は或る意味での連続性を持つ．

0.2　連続性定理

定義 0.2.1 (記号の定義).　$x\in C^1$, $f\in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^m))$ に対し次を定める．

$$\begin{aligned}&\Delta_T := \{\,(s,t)\;;\quad 0\le s\le t\le T\,\},\\ &X^1 : \Delta_T \longrightarrow \mathbb{R}^d\ \left((s,t)\longmapsto X^1_{s,t}=x_t-x_s\right),\\ &X^2 : \Delta_T \longrightarrow \mathbb{R}^d\otimes\mathbb{R}^d\ \left((s,t)\longmapsto X^2_{s,t}=\int_s^t (x_u-x_s)\otimes dx_u\right),\\ &\tilde{I}_{s,t}(x) := f(x_s)X^1_{s,t} = f(x_s)(x_t-x_s),\\ &J_{s,t}(x) := f(x_s)X^1_{s,t} + (\nabla f)(x_s)X^2_{s,t}.\end{aligned}$$

以降，$a,b,c,d\in\mathbb{R}^d$ に対して次の表現を使う:

$$\begin{aligned}[a\otimes b]^i_j &= a^ib^j,\\ \left[(\nabla f)(x_s)X^2_{s,t}\right]^i &= \sum_{j,k=1}^d \partial_k f^i_j(x_s)\int_s^t \left(x^k_u-x^k_s\right)\,dx^j_u,\\ \left[(\nabla f)(x_s)(a\otimes b)\right]^i &= \sum_{j,k=1}^d \partial_k f^i_j(x_s)a^kb^j,\\ \left[(\nabla^2 f)(x_s)(a\otimes b\otimes c)\right]^i &= \sum_{j,k,v=1}^d \partial_v\partial_k f^i_j(x_s)a^vb^kc^j,\end{aligned}$$

$$\left[(\nabla^3 f)(x_s)(a\otimes b\otimes c\otimes d)\right]^i = \sum_{j,k,v,w=1}^{d} \partial_w\partial_v\partial_k f_j^i(x_s)a^w b^v c^k d^j.$$

定理 0.2.2. $[s,t]\subset[0,T]$, $x\in C^1$, $f\in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^m))$ とする．$D\in\delta[s,t]$ に対し

$$\tilde{I}_{s,t}(x,D) := \sum_D \tilde{I}_{t_{i-1},t_i}(x), \quad J_{s,t}(x,D) := \sum_D J_{t_{i-1},t_i}(x)$$

を定めるとき，次が成立する:

$$I_{s,t}(x) = \lim_{|D|\to 0}\tilde{I}_{s,t}(x,D) = \lim_{|D|\to 0} J_{s,t}(x,D).$$

証明. 第一の等号は $I_{s,t}(x)$ の定義によるから，第二の等号を証明する．まず，

$$\begin{aligned}
I_{s,t}(x) &= \int_s^t f(x_u)\,dx_u \\
&= \int_s^t f(x_s)+f(x_u)-f(x_s)\,dx_u \\
&= \int_s^t f(x_s)\,dx_u + \int_s^t\int_0^1 (\nabla f)(x_s+\theta(x_u-x_s))\left(X^1_{s,u}\otimes\dot{x}_u\right)\,d\theta\,du \\
&= f(x_s)X^1_{s,t} + (\nabla f)(x_s)X^2_{s,t} \\
&\quad + \int_s^t\int_0^1 \{(\nabla f)(x_s+\theta(x_u-x_s)) - (\nabla f)(x_s)\}\left(X^1_{s,u}\otimes\dot{x}_u\right)\,d\theta\,du \\
&= J_{s,t}(x) + \int_s^t\int_0^1\int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_s+r(x_u-x_s))\left(X^1_{s,u}\otimes X^1_{s,u}\otimes\dot{x}_u\right)\,dr\,d\theta\,du
\end{aligned}$$

が成り立つ．$[0,T]\ni t\longmapsto x_t$ の連続性より，最下段式中の $x_s+r(x_u-x_s)$ $(0\le r\le 1,\ s\le u\le t)$ は或るコンパクト集合 K に含まれ，f が C^2-級関数であるから

$$M := \sum_{i,j,k,v}\sup_{x\in K}\left|\partial_v\partial_k f_j^i(x)\right|$$

として $M<\infty$ を定めれば

$$\begin{aligned}
&\left|\int_s^t\int_0^1\int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_s+r(x_u-x_s))\left(X^1_{s,u}\otimes X^1_{s,u}\otimes\dot{x}_u\right)\,dr\,d\theta\,du\right| \\
&\quad\le \int_s^t\int_0^1\int_0^\theta \left|(\nabla^2 f)(x_s+r(x_u-x_s))\left(X^1_{s,u}\otimes X^1_{s,u}\otimes\dot{x}_u\right)\right|\,dr\,d\theta\,du \\
&\quad\le M\int_s^t |X^1_{s,u}|^2|\dot{x}_u|\,du \\
&\quad\le M\|x\|^3_{C^1}\int_s^t (u-s)^2\,du
\end{aligned}$$

が出る．特に $D\in\delta[s,t]$ に対して

$$\begin{aligned}
\sum_D\int_{t_{i-1}}^{t_i}(u-t_{i-1})^2\,du &\le \sum_D |D|\int_{t_{i-1}}^{t_i}(u-t_{i-1})\,du \\
&\le \sum_D |D|\int_{t_{i-1}}^{t_i}(u-s)\,du \le \frac{1}{2}(t-s)^2|D| \longrightarrow 0 \quad (|D|\longrightarrow 0)
\end{aligned}$$

が成立するから，

$$\left|I_{s,t}(x) - J_{s,t}(x,D)\right| \le \sum_D \left|I_{t_{i-1},t_i}(x) - J_{t_{i-1},t_i}(x)\right| \longrightarrow 0 \quad (|D| \longrightarrow 0)$$

が従い定理の主張を得る． ∎

定義 0.2.3 (control function). 関数 $\omega : \Delta_T \longrightarrow [0,\infty)$ が連続かつ任意の $s \le u \le t$ に対して

$$\omega(s,u) + \omega(u,t) \le \omega(s,t) \tag{2}$$

を満たすとき，ω を control function と呼ぶ．

式 (2) から $\omega(t,t) = 0\ (\forall t \in [0,T])$ が従う．つまり control function は対角線上で 0 になる．

定義 0.2.4 (ノルム空間値写像の p-variation). $(V, \|\cdot\|)$ をノルム空間，$p > 0$ とする．このとき連続写像 $\psi : \Delta_T \longrightarrow V$ に対する p-variation を

$$\|\psi\|_{p,[s,t]} \coloneqq \left\{ \sup_{D \in \delta[s,t]} \sum_D \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p \right\}^{1/p}, \quad ((s,t) \subset [0,T])$$

で定める．特に $\|\cdot\|_{p,[0,T]}$ を $\|\cdot\|_p$ と書く．

再定義した p-variation に対しても定理 0.1.5，0.1.6，0.1.7 が成立する．

定理 0.2.5 (定理 0.1.5 のアナロジー). V をノルム空間，$X : \Delta_T \longrightarrow V$ を連続写像とする．このとき，$X_{t,t} = 0\ (\forall t \in [0,T])$ かつ $p \in (0,1)$ に対し $\|X\|_p < \infty$ が満たされれば $X \equiv 0$ である．

証明. $(s,t) \in \Delta_T$ を任意に取り固定する．このとき全ての $D \in \delta[s,t]$ に対して，

$$\begin{aligned} \left\| X_{s,t} \right\| \le \sum_D \left\| X_{t_{i-1},t_i} \right\| &\le \max_D \left\| X_{t_{i-1},t_i} \right\|^{1-p} \sum_D \left\| X_{t_{i-1},t_i} \right\|^p \\ &\le \max_D \left\| X_{t_{i-1},t_i} \right\|^{1-p} \|X\|_p \end{aligned}$$

が成り立ち，X の一様連続性から右辺は $|D| \longrightarrow 0$ で 0 に収束し，$X_{s,t} = 0$ が従う． ∎

定理 0.2.6 (定理 0.1.6 のアナロジー). V をノルム空間とするとき，$x : [0,T] \longrightarrow V$ に対して $1 \le p \le q$ なら $\|X\|_p \ge \|X\|_q$ が成立する．

ノルム空間 $(V, \|\cdot\|)$ に対し

$$\tilde{B}_{p,T}(V) \coloneqq \left\{ X : \Delta_T \longrightarrow V \ ; \quad \text{continuous, } \|X\|_p < \infty \right\}$$

により線型空間を定めれば，定理 0.1.7 のアナロジーを得る．

定理 0.2.7. V が Banach 空間のとき，$\tilde{B}_{p,T}(V)$ は $\|\cdot\|_p$ をノルムとする Banach 空間である．

証明. 完備性を示す.

第一段 $(X^n)_{n=1}^{\infty} \subset \tilde{B}_{p,T}(V)$ を Cauchy 列とすれば，任意の $\epsilon > 0$ に対して或る $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ が存在し

$$\| X^n - X^m \|_p = \left\{ \sup_{D \in \delta[0,T]} \sum_D \left\| X^n_{t_{i-1},t_i} - X^m_{t_{i-1},t_i} \right\|^p \right\}^{1/p} < \epsilon, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

を満たす．任意の $(s,t) \in \Delta_T$ に対して分割 $D = \{0 \leq s \leq t \leq T\}$ を取れば

$$\left\| X^n_{s,t} - X^m_{s,t} \right\| < \epsilon, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

が成り立ち，V の完備性より或る $X_{s,t} \in \mathbb{R}^d$ が存在して

$$\left\| X^n_{s,t} - X_{s,t} \right\| < \epsilon \quad (n > n_\epsilon)$$

となる．この収束は (s,t) に関して一様であるから X は連続である．

第二段 $\| X^n - X \|_p \longrightarrow 0 \ (n \longrightarrow \infty)$ を示す．前段より，任意の $D \in \delta[0,T]$ に対し

$$\sum_D \left\| X^n_{t_{i-1},t_i} - X^m_{t_{i-1},t_i} \right\|^p < \epsilon^p, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

が満たされる．D は有限分割であるから，$m \longrightarrow \infty$ として

$$\sum_D \left\| X^n_{t_{i-1},t_i} - X_{t_{i-1},t_i} \right\|^p < \epsilon^p, \quad (n > n_\epsilon)$$

が従い，D の任意性より $\| X^n - X \|_p < \epsilon \ (n > n_\epsilon)$ を得る． ∎

定理 0.2.8 (p-variation が定める control function). $(V, \| \cdot \|)$ をノルム空間，$p > 0$ とする．$\| \psi \|_p < \infty$ かつ $\psi_{t,t} = 0 \ (\forall t \in [0,T])$ を満たす連続写像 $\psi : \Delta_T \longrightarrow V$ に対して，

$$\omega : \Delta_T \ni (s,t) \longmapsto \| \psi \|^p_{p,[s,t]}$$

により定める ω は control function である．

証明. $\| \psi \|_p < \infty$ の仮定より ω は $[0,\infty)$ 値であるから，以下では式 (2) と連続性を示す．

第一段 ω が式 (2) を満たすことを示す．実際，任意に $D_1 \in \delta[s,u], D_2 \in \delta[u,t]$ を取れば

$$\sum_{D_1} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p + \sum_{D_2} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p = \sum_{D_1 \cup D_2} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p \leq \| \psi \|^p_{p:[s,t]}$$

が成り立つ．左辺の D_1, D_2 の取り方は独立であるから，それぞれに対し上限を取れば

$$\| \psi \|^p_{p:[s,u]} + \| \psi \|^p_{p:[u,t]} \leq \| \psi \|^p_{p:[s,t]}$$

が従う．

第二段　任意の $[s,t]\subset[0,T]$ について[*2],

$$\lim_{h\to+0}\omega(s,t+h)=\inf_{h>0}\omega(s,t+h),\qquad \lim_{h\to+0}\omega(s-h,t)=\inf_{h>0}\omega(s-h,t),$$
$$\lim_{h\to+0}\omega(s,t-h)=\sup_{h>0}\omega(s,t-h),\qquad \lim_{h\to+0}\omega(s+h,t)=\sup_{h>0}\omega(s+h,t)$$

が成立する．実際 $\omega(s,t+h)$ について見れば，これは下に有界かつ $h\to+0$ に対し単調減少であるから極限が確定し下限に一致する．残りの三つも同様の理由で成立する．

第三段　任意の $s\in[0,T)$ に対し，$(s,T]\ni t\longmapsto\omega(s,t)$ の左連続性を示す．ここでは

$$\tilde{\omega}(s,t)\coloneqq\begin{cases}\lim_{h\to+0}\omega(s,t-h), & (s<t),\\ 0, & (s=t),\end{cases}\qquad (\forall(s,t)\in\Delta_T)$$

で定める $\tilde{\omega}$ が優加法性を持ち，かつ

$$\left\|\psi_{s,t}\right\|^p\leq\tilde{\omega}(s,t),\quad (\forall(s,t)\in\Delta_T)$$

を満たすことを示す．実際これが示されれば，任意の $D\in\delta[s,t]$ に対し

$$\sum_D\left\|\psi_{t_{i-1},t_i}\right\|^p\leq\sum_D\tilde{\omega}(t_{i-1},t_i)\leq\tilde{\omega}(s,t)$$

が成立し $\omega(s,t)\leq\tilde{\omega}(s,t)$ が従い，$\omega(s,t)\geq\omega(s,t-h)\ (\forall h>0)$ と併せて

$$\omega(s,t)=\tilde{\omega}(s,t)=\lim_{h\to+0}\omega(s,t-h)$$

を得る．いま，任意に $s<u<t$ を取れば，十分小さい $h_1,h_2>0$ に対して

$$\omega(s,u-h_1)+\omega(u,t-h_2)\leq\omega(s,t-h_2)$$

が満たされ，$h_1\longrightarrow+0,\ h_2\longrightarrow+0$ として

$$\tilde{\omega}(s,u)+\tilde{\omega}(u,t)\leq\tilde{\omega}(s,t)$$

が成り立つから $\tilde{\omega}$ は優加法性を持つ．また，もし或る $(u,v)\in\Delta_T$ に対して

$$\left\|\psi_{u,v}\right\|^p>\tilde{\omega}(u,v)$$

が成り立つと仮定すると ($u=v$ なら両辺 0 になるから $u<v$ である)

$$\left\|\psi_{u,v}\right\|^p>\tilde{\omega}(u,v)\geq\omega(u,v-h)\geq\left\|\psi_{u,v-h}\right\|^p,\quad(\forall h>0)$$

となる．一方 ψ の連続性より $\left\|\psi_{u,v-h}\right\|^p\longrightarrow\left\|\psi_{u,v}\right\|^p\ (h\longrightarrow+0)$ が従い矛盾が生じる．同様にして，任意の $t\in(0,T]$ に対し $[0,t)\ni s\longmapsto\omega(s,t)$ の右連続性も出る．

第四段　任意の $t\in[0,T)$ に対して次を示す:

$$\lim_{h\to+0}\omega(t,t+h)=\inf_{h>0}\omega(t,t+h)=0.$$

第一の等号は前段より従うから，第二の等号を背理法により証明する．いま

$$\inf_{h>0}\omega(t,t+h)=:\delta>0$$

[*2] 下段の二式については $s<t$ と仮定する．また上段についても，$t=T$ 或は $s=0$ の場合を除く必要がある．

と仮定すれば，ψ の連続性より或る h_1 が存在して

$$\left\| \psi_{t,t+h} \right\|^p = \left\| \psi_{t,t+h} - \psi_{t,t} \right\|^p < \frac{\delta}{8}, \quad (\forall h < h_1) \tag{3}$$

が成立する．ここで任意に $h_0 < h_1$ を取り固定する．一方で $\omega(t, t+h_0) \geq \delta$ より

$$\sum_{i=1}^{N} \left\| \psi_{\tau_{i-1},\tau_i} \right\|^p > \frac{7\delta}{8}$$

を満たす $D = \{t = \tau_0 < \tau_1 < \cdots, \tau_N = t + h_0\} \in \delta[t, t+h_0]$ が存在し，(3) と併せて

$$\sum_{i=2}^{N} \left\| \psi_{\tau_{i-1},\tau_i} \right\|^p > \frac{7\delta}{8} - \left\| \psi_{t,\tau_1} \right\|^p > \frac{7\delta}{8} - \frac{\delta}{8} = \frac{3\delta}{4}$$

を得る．また，$\omega(t, \tau_1) \geq \delta$ より或る $D' \in \delta[t, \tau_1]$ が存在して

$$\sum_{D'} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p > \frac{3\delta}{4}$$

を満たすから，$D' \cup \{\tau_1 < \cdots, \tau_N = t + h_0\} \in \delta[t, t+h_0]$ に対して

$$\omega(t, t+h_0) > \sum_{D'} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p + \sum_{i=2}^{N} \left\| \psi_{\tau_{i-1},\tau_i} \right\|^p > \frac{3\delta}{2}$$

が従うが，$h_0 < h_1$ の任意性と単調減少性により

$$\delta = \inf_{h>0} \omega(t, t+h) = \inf_{h_1>h>0} \omega(t, t+h) \geq \frac{3\delta}{2}$$

となり矛盾が生じる．同様にして

$$\lim_{h \to +0} \omega(t-h, t) = 0, \quad (\forall t \in (0, T])$$

も成立する．

第五段　任意に $s \in [0, T)$ を取り固定し，$[s, T) \ni t \longmapsto \omega(s, t)$ が右連続であることを示す．

$$\lim_{h \to +0} \omega(s, t+h) \leq \omega(s, t) \tag{4}$$

を示せば，第二段より逆向きの不等号も従い右連続性を得る．任意に $h, \epsilon > 0$ を取れば，

$$\omega(s, t+h) - \epsilon \leq \sum_{D} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p$$

を満たす $D \in \delta[s, t+h]$ が存在し，

$$D_1 \coloneqq \{t_0 < \cdots < t_k\} = [s, t] \cap D, \quad D_2 \coloneqq D \backslash (D_1 \cup \{t_{k+1}\})$$

とおくと

$$\begin{aligned}
\omega(s, t+h) - \epsilon &\leq \sum_{i=1}^{k} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p + \left\| \psi_{t_k,t_{k+1}} \right\|^p + \sum_{D_2} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p \\
&= \sum_{i=1}^{k} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p + \left\| \psi_{t_k,t} \right\|^p + \left\| \psi_{t_k,t_{k+1}} \right\|^p - \left\| \psi_{t_k,t} \right\|^p + \sum_{D_2} \left\| \psi_{t_{i-1},t_i} \right\|^p \\
&\leq \omega(s, t) + \omega(t, t+h) + \left\| \psi_{t_k,t_{k+1}} \right\|^p - \left\| \psi_{t_k,t} \right\|^p
\end{aligned}$$

が成り立つ．ψ の一様連続性より $\left\|\psi_{t_k,t_{k+1}}\right\|^p \longrightarrow \left\|\psi_{t_k,t}\right\|^p$ $(h \longrightarrow +0)$ が成り立つから

$$\lim_{h\to+0} \omega(s,t+h) - \epsilon \le \omega(s,t), \quad (\forall\epsilon > 0)$$

が従い (4) が出る．同様に $(0,t] \ni s \longmapsto \omega(s,t)$ $(\forall t \in (0,T])$ の左連続性も成立する．

第六段　ω の $(s,t) \in \Delta_T$ における連続性を示す．$h,k \ge 0$ とする．

(A)　(s,t) を基準に第一象限の点について

$$\begin{aligned}
&|\omega(s,t) - \omega(s+h,t+k)| \\
&\quad \le |\omega(s,t) - \omega(s+h,t)| + |\omega(s+h,t) - \omega(s+h,t+k)| \\
&\quad = |\omega(s,t) - \omega(s+h,t)| + \omega(s+h,t+k) - \omega(s+h,t) \\
&\quad \le |\omega(s,t) - \omega(s+h,t)| + \omega(s,t+k) - \omega(s+h,t) \\
&\quad \le |\omega(s,t) - \omega(s+h,t)| + |\omega(s,t+k) - \omega(s,t)| + |\omega(s,t) - \omega(s+h,t)|
\end{aligned}$$

が成り立つ．前段までに示した左右の連続性より，近づけ方に依らず $h,k \longrightarrow +0$ とすれば，左辺をいくらでも 0 に近づけることができる．

(B)　(s,t) を基準に第三象限の点について

$$\begin{aligned}
&|\omega(s,t) - \omega(s-h,t-k)| \\
&\quad \le |\omega(s,t) - \omega(s-h,t)| + |\omega(s-h,t) - \omega(s-h,t-k)| \\
&\quad = |\omega(s,t) - \omega(s-h,t)| + \omega(s-h,t) - \omega(s-h,t-k) \\
&\quad \le |\omega(s,t) - \omega(s-h,t)| + \omega(s-h,t) - \omega(s,t-k) \\
&\quad \le |\omega(s,t) - \omega(s-h,t)| + |\omega(s-h,t) - \omega(s,t)| + |\omega(s,t) - \omega(s,t-k)|,
\end{aligned}$$

が成り立つ．(A) と同じく $h,k \longrightarrow +0$ として左辺は 0 に収束する．

(C)　$((h_n,k_n))_{n=1}^{\infty}$ を第一象限から $(0,0)$ に近づく任意の点列とするとき，

$$\lim_{n\to\infty} \omega(s-h_n,t+k_n) = \omega(s,t), \quad \lim_{n\to\infty} \omega(s+h_n,t-k_n) = \omega(s,t)$$

が成り立つことを示す．これが示されれば

$$\lim_{h,k\to+0} \omega(s-h,t+k) = \omega(s,t), \quad \lim_{h,k\to+0} \omega(s+h,t-k) = \omega(s,t)$$

が従い，(A)(B) と併せて ω の連続性が出る．背理法で証明する．いま，

$$\alpha \coloneqq \lim_{n\to\infty} \omega(s-h_n,t+k_n) > \omega(s,t)$$

と仮定して $\epsilon \coloneqq \alpha - \omega(s,t)$ とおく．$\lim_{t'\downarrow t} \omega(s,t') = \omega(s,t)$ より

$$0 \le \omega(s,t') - \omega(s,t) < \frac{\epsilon}{3}$$

を満たす $t' > t$ が存在し，また $\lim_{s'\uparrow s} \omega(s',t') = \omega(s,t')$ より

$$0 \le \omega(s',t') - \omega(s,t') < \frac{\epsilon}{3}$$

を満たす $s' < s$ も存在する．このとき或る n で $s' \le s - h_n$, $t + k_n \le t'$ かつ

$$|\omega(s-h_n,t+k_n) - \alpha| < \frac{\epsilon}{3}$$

が成立し，特に $(s-h_n, t+k_n) \subset (s', t')$ より

$$\omega(s-h_n, t+k_n) \leq \omega(s', t')$$

となるはずであるが，一方で

$$\omega(s', t') < \frac{2}{3}\epsilon + \omega(s,t) = \alpha - \frac{\epsilon}{3} < \omega(s-h_n, t+k_n)$$

が従い矛盾が生じる．よって

$$\lim_{n\to\infty} \omega(s-h_n, t+k_n) = \omega(s,t)$$

でなくてはならず，同様にして $\lim_{n\to\infty} \omega(s+h_n, t-k_n) = \omega(s,t)$ も得られる． ∎

定理 0.2.9 (control function の例).　以下の関数 $\omega : \Delta_T \longrightarrow [0,\infty)$ は control function である．

(1)　$\omega : (s,t) \longmapsto \left\| X^1 \right\|_{p:[s,t]}^p, \quad (p \geq 1,\ x \in B_{p,T}(\mathbb{R}^d)).$

(2)　$\omega : (s,t) \longmapsto \left\| X^2 \right\|_{p:[s,t]}^p, \quad (p \geq 1,\ x \in C^1).$

行列 $a = (a^i_j)$ のノルムは $|a| = \sqrt{\sum_{i,j} |a^i_j|^2}$ として考える．

定理 0.2.10.

(1)　$\omega : (s,t) \longmapsto X^1_{s,t} = x_t - x_s$ は連続であるから，前定理より ω は control function である．

(2)　任意の $[s,t] \subset [0,T]$ に対して $\left\| X^2 \right\|_{p:[s,t]}^p < \infty$ を示せば，あとは上と同じ理由により定理の主張が得られる．実際，任意の分割 $D = \{s = t_0 < \cdots < t_N = t\}$ に対し

$$\begin{aligned}
\left\| X^2_{t_{i-1},t_i} \right\| &\leq \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (x_u - x_{t_{i-1}}) \otimes \dot{x}_u \, du \right| \\
&\leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left| (x_u - x_{t_{i-1}}) \otimes \dot{x}_u \right| \, du \\
&\leq \| x \|_{C^1}^2 \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u-s)\, du \right\}^{1/p} \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u-s)\, du \right\}^{1-1/p} \\
&\leq \| x \|_{C^1}^2 \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u-s)\, du \right\}^{1/p} \left\{ \int_{s}^{t} (u-s)\, du \right\}^{1-1/p}
\end{aligned}$$

が成り立つから，

$$\begin{aligned}
\sum_D \left\| X^2_{t_{i-1},t_i} \right\|^p &\leq \sum_D \| x \|_{C^1}^{2p} \left\{ \frac{1}{2}(t-s)^2 \right\}^{p-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u-s)\, du \\
&= \| x \|_{C^1}^{2p} \left\{ \frac{1}{2}(t-s)^2 \right\}^{p-1} \int_s^t (u-s)\, du = \| x \|_{C^1}^{2p} \left\{ \frac{1}{2}(t-s)^2 \right\}^{p}
\end{aligned}$$

により $\left\| X^2 \right\|_{p:[s,t]}^p < \infty$ が従う． ∎

補題 0.2.11. ω を Δ_T 上の control function とする．$D = \{s = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t\}$ について，$N \geq 2$ の場合或る $1 \leq i \leq N-1$ が存在して次を満たす:

$$\omega(t_{i-1}, t_{i+1}) \leq \frac{2\omega(s,t)}{N-1}. \tag{5}$$

証明. (会田先生のテキスト．) ∎

定理 0.2.12 ($1 \leq p < 2$ の場合の連続性定理). $1 \leq p < 2$ とし，$x_0 = y_0$ を満たす $x, y \in C^1$ と $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$, $0 < \epsilon, R < \infty$ を任意に取る．このとき，

$$\left\| X^1 \right\|_p, \left\| Y^1 \right\|_p \leq R, \quad \left\| X^1 - Y^1 \right\|_p \leq \epsilon$$

なら，或る定数 $C = C(p, R, f)$ が存在し，任意の $0 \leq s \leq t \leq T$ に対して次が成立する:

$$\left| I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y) \right| \leq \epsilon C.$$

系 0.2.13 (p-variation による閉球上の Lipschitz 連続性). $1 \leq p < 2$ とし，$x_0 = y_0$ を満たす $x, y \in C^1$ と $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$, $0 < R < \infty$ を任意に取る．このとき，

$$\left\| X^1 \right\|_p, \left\| Y^1 \right\|_p \leq R$$

なら，或る定数 $C = C(p, R, f)$ が存在して次を満たす:

$$\left| I_{0,T}(x) - I_{0,T}(y) \right| \leq C \left\| X^1 - Y^1 \right\|_p.$$

証明 (系 0.2.13). 定理 0.2.12 において，$\epsilon = \left\| X^1 - Y^1 \right\|_p$ $(x \neq y)$ [*3] として証明が通る． ∎

証明 (定理 0.2.12). $[s, t] \subset [0, T]$ とする．

第一段 $\omega : \Delta_T \longrightarrow [0, \infty)$ を

$$\omega(\alpha, \beta) = \left\| X^1 \right\|_{p,[\alpha,\beta]}^p + \left\| Y^1 \right\|_{p,[\alpha,\beta]}^p + \epsilon^{-p} \left\| X^1 - Y^1 \right\|_{p,[\alpha,\beta]}^p, \quad ((\alpha, \beta) \in \Delta_T)$$

で定めれば，定理 0.2.9 により $1 \leq p$ の下で ω は control function である．

第二段 任意に $[s, t]$ の分割 $D = \{s = t_0 < \cdots < t_N = t\}$ $(N \geq 2)$ を取れば，補題 0.2.11 より (5) を満たす $t_{(0)}$ が存在する．ここで，$D_{-0} \coloneqq D$, $D_{-1} \coloneqq D \backslash \{t_{(0)}\}$ と定める．$N \geq 3$ ならば D_{-1} についても (5) を満たす $t_{(1)}$ が存在するから，$D_{-2} \coloneqq D_{-1} \backslash \{t_{(1)}\}$ と定める．この操作を繰り返せ

*3 $x = y$ なら $\left\| X^1 - Y^1 \right\|_p = 0$ かつ $I_{s,t}(x) = I_{s,t}(y)$ が成り立つ．

ば $t_{(k)}, D_{-k}$ $(k = 0, 1, \cdots, N-1)$ が得られ，

$$
\begin{aligned}
&\tilde{I}_{s,t}(x, D) - \tilde{I}_{s,t}(y, D) \\
&\quad = \sum_{k=0}^{N-2} \left[\left\{ \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1}) \right\} - \left\{ \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k-1}) \right\} \right] \\
&\qquad + \left\{ \tilde{I}_{s,t}(x) - \tilde{I}_{s,t}(y) \right\}
\end{aligned} \tag{6}
$$

と表現できる．

第三段　式 (6) について，次を満たす定数 C_1 が存在することを示す:

$$
|(6)| \le \epsilon C_1 \tag{7}
$$

見やすくするために $t_k = t_{(k)}$ と書き直せば，

$$
\begin{aligned}
&\left\{ \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x, D_{-k-1}) \right\} - \left\{ \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(y, D_{-k-1}) \right\} \\
&= \{ f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}}) \} X^1_{t_k, t_{k+1}} - \{ f(y_{t_k}) - f(y_{t_{k-1}}) \} Y^1_{t_k, t_{k+1}} \\
&= \{ f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}}) \} \left(X^1_{t_k, t_{k+1}} - Y^1_{t_k, t_{k+1}} \right) \\
&\quad + \{ f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}}) \} Y^1_{t_k, t_{k+1}} - \{ f(y_{t_k}) - f(y_{t_{k-1}}) \} Y^1_{t_k, t_{k+1}} \\
&= \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X^1_{t_{k-1}, t_k} \otimes \left(X^1_{t_k, t_{k+1}} - Y^1_{t_k, t_{k+1}} \right) \, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X^1_{t_{i_k - 1}, t_k} \otimes Y^1_{t_k, t_{i_k + 1}} \, d\theta \\
&\quad - \int_0^1 (\nabla f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) Y^1_{t_{i_k - 1}, t_k} \otimes Y^1_{t_k, t_{i_k + 1}} \, d\theta \\
&= \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X^1_{t_{i_k - 1}, t_k} \otimes \left(X^1_{t_k, t_{i_k + 1}} - Y^1_{t_k, t_{i_k + 1}} \right) \, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) \left(X^1_{t_{k-1}, t_k} - Y^1_{t_{k-1}, t_k} \right) \otimes Y^1_{t_k, t_{k+1}} \, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) Y^1_{t_{k-1}, t_k} \otimes Y^1_{t_k, t_{k+1}} \, d\theta \\
&\quad - \int_0^1 (\nabla f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) Y^1_{t_{k-1}, t_k} \otimes Y^1_{t_k, t_{k+1}} \, d\theta \\
&= \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X^1_{t_{k-1}, t_k} \otimes \left(X^1_{t_k, t_{k+1}} - Y^1_{t_k, t_{k+1}} \right) \, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) \left(X^1_{t_{k-1}, t_k} - Y^1_{t_{k-1}, t_k} \right) \otimes Y^1_{t_k, t_{k+1}} \, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}} + r(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) - y_{t_{k-1}} - \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})))) \\
&\qquad\quad \left(X^1_{0, t_{k-1}} - Y^1_{0, t_{k-1}} \right) \otimes Y^1_{t_{k-1}, t_k} \otimes Y^1_{t_k, t_{k+1}} \, dr \, d\theta \ {}^{*4} \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}} + r(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) - y_{t_{k-1}} - \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})))) \\
&\qquad\quad \theta \left(X^1_{t_{k-1}, t_k} - Y^1_{t_{k-1}, t_k} \right) \otimes Y^1_{t_{k-1}, t_k} \otimes Y^1_{t_k, t_{k+1}} \, dr \, d\theta
\end{aligned}
$$

が成り立つ．補題 0.2.11 より

$$
\left|X^1_{t_{k-1},t_k}\right|, \left|Y^1_{t_{k-1},t_k}\right|, \left|X^1_{t_k,t_{k+1}}\right|, \left|Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \le \omega(t_{k-1},t_{k+1})^{1/p} \le \left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1}\right)^{1/p},
$$

$$
\left|X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right|, \left|X^1_{t_k,t_{k+1}} - Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \le \epsilon\omega(t_{k-1},t_{k+1})^{1/p} \le \epsilon\left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1}\right)^{1/p}
$$

が満たされ，また

$$
\left|X^1_{0,t_{k-1}} - Y^1_{0,t_{k-1}}\right| \le \epsilon\omega(0,t_{k-1})^{1/p} \le \epsilon\omega(0,T)^{1/p} \le \epsilon\,(2R^p+1)^{1/p}
$$

でもあるから，

$$
M := \sum_{i,j}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|f^i_j(x)| + \sum_{i,j,k}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|\partial_k f^i_j(x)| + \sum_{i,j,k,v}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|\partial_v\partial_k f^i_j(x)| \tag{8}
$$

と定めて

$$
\begin{aligned}
&\left|\left\{\tilde{I}_{s,t}(x,D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(x,D_{-k-1})\right\} - \left\{\tilde{I}_{s,t}(y,D_{-k}) - \tilde{I}_{s,t}(y,D_{-k-1})\right\}\right| \\
&\le M\left|X^1_{t_{k-1},t_k}\right|\left|X^1_{t_k,t_{k+1}} - Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\quad + M\left|X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right|\left|Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\quad + M\left|X^1_{0,t_{k-1}} - Y^1_{0,t_{k-1}}\right|\left|Y^1_{t_{k-1},t_k}\right|\left|Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\quad + M\left|X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right|\left|Y^1_{t_{k-1},t_k}\right|\left|Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right| \\
&\le \epsilon M\left[2+2\,(2R^p+1)^{1/p}\right]\left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1}\right)^{2/p} \\
&\le \epsilon M\left[2+2\,(2R^p+1)^{1/p}\right]2^{2/p}\,(2R^p+1)^{2/p}\left(\frac{1}{N-k-1}\right)^{2/p}
\end{aligned}
$$

を得る．

$$
C'_1 := M\left[2+2\,(2R^p+1)^{1/p}\right]2^{2/p}\,(2R^p+1)^{2/p}
$$

とおけば

$$
|(6)| \le \sum_{k=0}^{N-2}\epsilon C'_1\left(\frac{1}{N-k-1}\right)^{2/p} < \epsilon C'_1\zeta\left(\frac{2}{p}\right)
$$

が成立し，$p<2$ より $\zeta(2/p)<\infty$ であるから $C_1 := C'_1\zeta(2/p)$ とおいて (7) が従う．

第四段　$x_0 = y_0$ の仮定により $x_s - y_s = X^1_{0,s} - Y^1_{0,s}$ が成り立ち

$$
\begin{aligned}
\left|\tilde{I}_{s,t}(x) - \tilde{I}_{s,t}(y)\right| &= \left|f(x_s)X^1_{s,t} - f(y_s)Y^1_{s,t}\right| \\
&\le \left|f(x_s)X^1_{s,t} - f(x_s)Y^1_{s,t}\right| + \left|f(x_s)Y^1_{s,t} - f(y_s)Y^1_{s,t}\right| \\
&\le M\left|X^1_{s,t} - Y^1_{s,t}\right| + \left|\int_0^1(\nabla f)(y_s+\theta(x_s-y_s))\left[\left(X^1_{0,s} - Y^1_{0,s}\right)\otimes Y^1_{s,t}\right]\,d\theta\right| \\
&\le M\left|X^1_{s,t} - Y^1_{s,t}\right| + M\left|X^1_{0,s} - Y^1_{0,s}\right|\left|Y^1_{s,t}\right| \\
&\le M\epsilon\omega(s,t)^{1/p} + M\epsilon\omega(0,s)^{1/p}\omega(s,t)^{1/p} \\
&\le \epsilon M\left[(2R^p+1)^{1/p} + (2R^p+1)^{2/p}\right]
\end{aligned}
$$

が従う．ここで $C_2 := M\left[(2R^p+1)^{1/p} + (2R^p+1)^{2/p}\right]$ とおく．

---

*4　$x_0 = y_0$ の仮定より $x_{t_{k-1}} - y_{t_{k-1}} = X^1_{0,t_{k-1}} - Y^1_{0,t_{k-1}}$ が成り立つ．

第五段　第二段と第三段より，任意の $D \in \delta[s,t]$ に対し

$$\left|\tilde{I}_{s,t}(x,D) - \tilde{I}_{s,t}(y,D)\right| \leq \epsilon(C_1 + C_2)$$

が成立し．定理 0.2.2 により $|D| \longrightarrow 0$ として

$$\left|I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y)\right| \leq \epsilon(C_1 + C_2)$$

が出る． ∎

定理 0.2.14 ($2 \leq p < 3$ の場合の連続性定理).　$2 \leq p < 3$ とし，$x_0 = y_0$ を満たす $x, y \in C^1$ と $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$, $0 < \epsilon, R < \infty$ を任意に取る．このとき，

$$\begin{aligned} &\left\| X^1 \right\|_p, \left\| Y^1 \right\|_p, \left\| X^2 \right\|_{p/2}, \left\| Y^2 \right\|_{p/2} \leq R < \infty, \\ &\left\| X^1 - Y^1 \right\|_p, \left\| X^2 - Y^2 \right\|_{p/2} \leq \epsilon \end{aligned}$$

なら，或る定数 $C = C(p, R, f)$ が存在し，任意の $0 \leq s \leq t \leq T$ に対して次が成立する:

$$\left|I_{s,t}(x) - I_{s,t}(y)\right| \leq \epsilon C.$$

系 0.2.15.　$1 \leq p < 2$ とし，$x_0 = y_0$ を満たす $x, y \in C^1$ と $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$, $0 < R < \infty$ を任意に取る．このとき，

$$\left\| X^1 \right\|_p, \left\| Y^1 \right\|_p, \left\| X^2 \right\|_{p/2}, \left\| Y^2 \right\|_{p/2} \leq R$$

なら，或る定数 $C = C(p, R, f)$ が存在して次を満たす:

$$\left|I_{0,T}(x) - I_{0,T}(y)\right| \leq C\left(\left\| X^1 - Y^1 \right\|_p + \left\| X^2 - Y^2 \right\|_{p/2}\right).$$

証明 (系 0.2.15).　定理 0.2.14 において，$\epsilon = \left\| X^1 - Y^1 \right\|_p + \left\| X^2 - Y^2 \right\|_{p/2}$ $(x \neq y)$ として証明が通る． ∎

証明 (定理 0.2.15).　$[s,t] \subset [0,T]$ とする．

第一段　$\omega : \Delta_T \longrightarrow [0,\infty)$ を

$$\begin{aligned} \omega(\alpha,\beta) = &\left\| X^1 \right\|_{p,[\alpha,\beta]}^p + \left\| Y^1 \right\|_{p,[\alpha,\beta]}^p + \left\| X^2 \right\|_{p/2,[\alpha,\beta]}^{p/2} + \left\| Y^2 \right\|_{p/2,[\alpha,\beta]}^{p/2} \\ &+ \epsilon^{-p} \left\| X^1 - Y^1 \right\|_{p,[\alpha,\beta]}^p + \epsilon^{-p/2} \left\| X^2 - Y^2 \right\|_{p/2,[\alpha,\beta]}^{p/2}, \quad ((\alpha,\beta) \in \Delta_T) \end{aligned}$$

で定めれば，定理 0.2.9 により $2 \leq p$ の下で ω は control function である．

第二段　$D \in \delta[s,t]$ に対し，定理 0.2.12 の証明と同様にして $t_{(k)}, D_{-k}$ を構成すれば

$$\begin{aligned} &J_{s,t}(x,D) - J_{s,t}(y,D) \\ &\quad = \sum_{k=0}^{N-2} \left[\{J_{s,t}(x,D_{-k}) - J_{s,t}(x,D_{-k-1})\} - \{J_{s,t}(y,D_{-k}) - J_{s,t}(y,D_{-k-1})\}\right] \\ &\quad\quad + \{J_{s,t}(x) - J_{s,t}(y)\} \end{aligned} \tag{9}$$

と表現できる．

第三段　$J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})$ を変形する．以降 $t_k = t_{(k)}$ と書き直せば

$$\begin{aligned}
&J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1}) \\
&\quad = J_{t_{k-1},t_k}(x) + J_{t_k,t_{k+1}}(x) - J_{t_{k-1},t_{k+1}}(x) \\
&\quad = f(x_{t_{k-1}})X^1_{t_{k-1},t_k} + f(x_{t_k})X^1_{t_k,t_{k+1}} - f(x_{t_{k-1}})X^1_{t_{k-1},t_{k+1}} \\
&\qquad\quad + (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X^2_{t_{k-1},t_k} + (\nabla f)(x_{t_k})X^2_{t_k,t_{k+1}} - (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X^2_{t_{k-1},t_{k+1}} \\
&\quad = \left\{f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}})\right\} X^1_{t_k,t_{k+1}} \\
&\qquad\quad + (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X^2_{t_{k-1},t_k} + (\nabla f)(x_{t_k})X^2_{t_k,t_{k+1}} - (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X^2_{t_{k-1},t_{k+1}} \\
&\quad = \int_0^1 \left\{(\nabla f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) - (\nabla f)(x_{t_{k-1}})\right\} X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_k,t_{k+1}}\, d\theta \\
&\qquad\quad + (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_k,t_{k+1}} \\
&\qquad\quad + (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X^2_{t_{k-1},t_k} + (\nabla f)(x_{t_k})X^2_{t_k,t_{k+1}} - (\nabla f)(x_{t_{k-1}})X^2_{t_{k-1},t_{k+1}} \\
&\quad = \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}))X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta \\
&\qquad\quad + (\nabla f)(x_{t_{k-1}})\left(X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_k,t_{k+1}} + X^2_{t_{k-1},t_k} - X^2_{t_{k-1},t_{k+1}}\right) \\
&\qquad\quad + (\nabla f)(x_{t_k})X^2_{t_k,t_{k+1}} \\
&\quad = \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}))X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta \\
&\qquad\quad + \left\{(\nabla f)(x_{t_k}) - (\nabla f)(x_{t_{k-1}})\right\} X^2_{t_k,t_{k+1}} \\
&\quad = \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}))X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta \\
&\qquad\quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}))X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^2_{t_k,t_{k+1}}\, d\theta
\end{aligned}$$

を得る．

第四段　式 (9) について，次を満たす定数 C_1 が存在することを示す:

$$|(9)| \leq \epsilon C_1. \tag{10}$$

実際，前段の結果より

$$\begin{aligned}
&\left\{J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1})\right\} - \left\{J_{s,t}(y, D_{-k}) - J_{s,t}(y, D_{-k-1})\right\} \\
&= \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}))X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}))X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^2_{t_k,t_{k+1}}\, d\theta \\
&\quad - \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta \\
&\quad - \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^2_{t_k,t_{k+1}}\, d\theta \\
&= \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}))X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes \left(X^1_{t_k,t_{k+1}} - Y^1_{t_k,t_{k+1}}\right)\, dr\, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}))X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes \left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k}\right) \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^\theta \left\{(\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) - (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta \\
&+ \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) \left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k} \right) \otimes Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta \\
&+ \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes \left(X^2_{t_k,t_{k+1}} - Y^2_{t_k,t_{k+1}} \right) d\theta \\
&+ \int_0^1 \left\{ (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) - (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) \right\} \\
&\qquad X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^2_{t_k,t_{k+1}}\, d\theta \\
&+ \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) \left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k} \right) \otimes Y^2_{t_k,t_{k+1}}\, d\theta \\
= &\int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes \left(X^1_{t_k,t_{k+1}} - Y^1_{t_k,t_{k+1}} \right) dr\, d\theta \\
&+ \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes \left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k} \right) \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta \\
&+ \int_0^1 \int_0^\theta \int_0^1 (\nabla^3 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}) + u(x_{t_{k-1}} + r(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) - y_{t_{k-1}} - r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))) \\
&\qquad \left\{ \left(X^1_{0,t_{k-1}} - Y^1_{0,t_{k-1}} \right) + r \left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k} \right) \right\} \otimes X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}}\, du\, dr\, d\theta \\
&+ \int_0^1 \int_0^\theta (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + r(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) \left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k} \right) \otimes Y^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^1_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta \\
&+ \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes \left(X^2_{t_k,t_{k+1}} - Y^2_{t_k,t_{k+1}} \right) d\theta \\
&+ \int_0^1 \int_0^1 (\nabla^3 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}) + r(x_{t_{k-1}} + \theta(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) - y_{t_{k-1}} - \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}}))) \\
&\qquad \left\{ \left(X^1_{0,t_{k-1}} - Y^1_{0,t_{k-1}} \right) + \theta \left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k} \right) \right\} \otimes X^1_{t_{k-1},t_k} \otimes Y^2_{t_k,t_{k+1}}\, dr\, d\theta \\
&+ \int_0^1 (\nabla^2 f)(y_{t_{k-1}} + \theta(y_{t_k} - y_{t_{k-1}})) \left(X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k} \right) \otimes Y^2_{t_k,t_{k+1}}\, d\theta
\end{aligned}
$$

が成り立つから,

$$
\begin{aligned}
M := &\sum_{i,j} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f^i_j(x)| + \sum_{i,j,k} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial_k f^i_j(x)| \\
&+ \sum_{i,j,k,v} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial_v \partial_k f^i_j(x)| + \sum_{i,j,k,v,w} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial_w \partial_v \partial_k f^i_j(x)|
\end{aligned} \tag{11}
$$

とおいて

$$
\begin{aligned}
&\left| \{ J_{s,t}(x, D_{-k}) - J_{s,t}(x, D_{-k-1}) \} - \{ J_{s,t}(y, D_{-k}) - J_{s,t}(y, D_{-k-1}) \} \right| \\
&\leq M \left| X^1_{t_{k-1},t_k} \right| \left| X^1_{t_{k-1},t_k} \right| \left| X^1_{t_k,t_{k+1}} - Y^1_{t_k,t_{k+1}} \right| \\
&\quad + M \left| X^1_{t_{k-1},t_k} \right| \left| X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k} \right| \left| Y^1_{t_k,t_{k+1}} \right| \\
&\quad + M \left| X^1_{0,t_{k-1}} - Y^1_{0,t_{k-1}} \right| \left| X^1_{t_{k-1},t_k} \right| \left| Y^1_{t_{k-1},t_k} \right| \left| Y^1_{t_k,t_{k+1}} \right| \\
&\quad + M \left| X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k} \right| \left| X^1_{t_{k-1},t_k} \right| \left| Y^1_{t_{k-1},t_k} \right| \left| Y^1_{t_k,t_{k+1}} \right| \\
&\quad + M \left| X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k} \right| \left| Y^1_{t_{k-1},t_k} \right| \left| Y^1_{t_k,t_{k+1}} \right| \\
&\quad + M \left| X^1_{t_{k-1},t_k} \right| \left| X^2_{t_k,t_{k+1}} - Y^2_{t_k,t_{k+1}} \right| \\
&\quad + M \left| X^1_{0,t_{k-1}} - Y^1_{0,t_{k-1}} \right| \left| X^1_{t_{k-1},t_k} \right| \left| Y^2_{t_k,t_{k+1}} \right| \\
&\quad + M \left| X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k} \right| \left| X^1_{t_{k-1},t_k} \right| \left| Y^2_{t_k,t_{k+1}} \right| \\
&\quad + M \left| X^1_{t_{k-1},t_k} - Y^1_{t_{k-1},t_k} \right| \left| Y^2_{t_k,t_{k+1}} \right|
\end{aligned}
$$

$$\leq \epsilon M\left[5+2\omega(0,t_{k-1})^{1/p}+2\omega(t_{k-1},t_k)^{1/p}\right]\left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k-1}\right)^{3/p}$$
$$\leq \epsilon M\left[2+4\left(2R^p+2R^{p/2}+2\right)^{1/p}\right]2^{3/p}\left(2R^p+2R^{p/2}+2\right)^{3/p}\left(\frac{1}{N-k-1}\right)^{3/p}$$

を得る．ここで

$$C_1' \coloneqq M\left[2+4\left(2R^p+2R^{p/2}+2\right)^{1/p}\right]2^{3/p}\left(2R^p+2R^{p/2}+2\right)^{3/p}$$

と定めれば

$$|(9)| \leq \sum_{k=0}^{N-2}\epsilon C_1'\left(\frac{1}{N-k-1}\right)^{3/p} < \epsilon C_1'\zeta\left(\frac{3}{p}\right)$$

が成立し，$p<3$ より $\zeta(3/p)<\infty$ であるから $C_1 \coloneqq C_1'\zeta(3/p)$ とおいて (10) が出る．

第五段　$x_0=y_0$ の仮定により

$$\begin{aligned}
&\left|J_{s,t}(x)-J_{s,t}(y)\right| \\
&\leq \left|f(x_s)X^1_{s,t}-f(y_s)Y^1_{s,t}\right| + \left|(\nabla f)(x_s)X^2_{s,t}-(\nabla f)(y_s)Y^2_{s,t}\right| \\
&\leq \left|f(x_s)X^1_{s,t}-f(x_s)Y^1_{s,t}\right| + \left|f(x_s)Y^1_{s,t}-f(y_s)Y^1_{s,t}\right| \\
&\qquad + \left|(\nabla f)(x_s)X^2_{s,t}-(\nabla f)(x_s)Y^2_{s,t}\right| + \left|(\nabla f)(x_s)Y^2_{s,t}-(\nabla f)(y_s)Y^2_{s,t}\right| \\
&\leq M\left|X^1_{s,t}-Y^1_{s,t}\right| + \left|\int_0^1(\nabla f)(y_s+\theta(x_s-y_s))(x_s-y_s)\otimes Y^1_{s,t}\,d\theta\right| \\
&\qquad + M\left|X^2_{s,t}-Y^2_{s,t}\right| + \left|\int_0^1(\nabla^2 f)(y_s+\theta(x_s-y_s))(x_s-y_s)\otimes Y^2_{s,t}\,d\theta\right| \\
&\leq M\left|X^1_{s,t}-Y^1_{s,t}\right| + M\left|X^1_{0,s}-Y^1_{0,s}\right|\left|Y^1_{s,t}\right| \\
&\qquad + M\left|X^2_{s,t}-Y^2_{s,t}\right| + M\left|X^1_{0,s}-Y^1_{0,s}\right|\left|Y^2_{s,t}\right| \\
&\leq \epsilon M\omega(s,t)^{1/p} + \epsilon M\omega(0,s)^{1/p}\omega(s,t)^{1/p} \\
&\quad + \epsilon M\omega(s,t)^{2/p} + \epsilon M\omega(0,s)^{1/p}\omega(s,t)^{2/p} \\
&\leq \epsilon M\left[\omega(0,T)^{1/p}+2\omega(0,T)^{2/p}+\omega(0,T)^{3/p}\right] \\
&\leq \epsilon M\left[\left(2R^p+2R^{p/2}+2\right)^{1/p}+2\left(2R^p+2R^{p/2}+2\right)^{2/p}+\left(2R^p+2R^{p/2}+2\right)^{3/p}\right]
\end{aligned}$$

が従う．ここで最下段の ϵ の係数を C_2 とおく．

第六段　以上より，任意の $D\in\delta[s,t]$ に対し

$$\left|J_{s,t}(x,D)-J_{s,t}(y,D)\right| \leq \epsilon(C_1+C_2)$$

が成り立ち，定理 0.2.2 により $|D|\longrightarrow 0$ として

$$\left|I_{s,t}(x)-I_{s,t}(y)\right| \leq \epsilon(C_1+C_2)$$

が出る． ∎

系 0.2.16 (パスが 0 出発なら f の有界性は要らない).　定理 0.2.12 と定理 0.2.14 について，$x,y\in\tilde{C}^1$ ならば $f\in C^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^m))$ として主張が成り立つ．

証明.　$x_0 = 0$ なら

$$\left\| X^1 \right\|_p \le R \quad \Rightarrow \quad |x_t| \le R \quad (\forall t \in [0, T])$$

が成り立つから，式 (8) と (11) において $\sup_{x \in \mathbb{R}^d}$ を $\sup_{|x| \le 9R}$ に替えればよい． ∎

0.3　The notion of rough path

$(V, \|\cdot\|)$ を $\mathbb{R}$-Banach 空間とする．また $\otimes_a$ により代数的テンソル積，或はその標準写像を表す．$k \ge 2$ の場合，k 重テンソル積 $V^{\otimes_a k} = V \otimes_a \cdots \otimes_a V$ にプロジェクティブノルム $\pi_k(\cdot)$ を導入し，その完備拡大を $(V^{\otimes k}, |\cdot|_k)$ と書く．定理 A.4.4 と定理 A.4.8 によれば，任意の $0 \le j \le k$ に対し $V^{\otimes_a k}$ と $V^{\otimes_a j} \otimes_a V^{\otimes_a k-j}$ は同型となる．特に $k \ge 3$ 及び $1 \le j \le k-1$ に対し，定理 A.4.8 における線型同型を

$$F_{j,k} : V^{\otimes_a k} \longrightarrow V^{\otimes_a j} \otimes_a V^{\otimes_a k-j}$$

と表し，$V^{\otimes_a j} \otimes_a V^{\otimes_a k-j}$ 上にプロジェクティブノルムを導入し，これを $\pi_{j,k}$ と書く．

定理 0.3.1.　このとき次が成立する．特に，$F_{j,k}$ は等長同型である．

$$\pi_k \circ F_{j,k}^{-1} = \pi_{j,k}.$$

証明.

第一段　$\pi_k \circ F_{j,k}^{-1} \le \pi_{j,k}$ が成り立つことを示す．$v \in V^{\otimes_a j} \otimes_a V^{\otimes_a k-j}$ の分割

$$v = \sum_r u^r \otimes_a v^r, \quad (u^r \in V^{\otimes_a j},\ v^r \in V^{\otimes_a k-j})$$

を任意に取り，一旦固定する．このとき u^r, v^r の任意の分割

$$u^r = \sum_{n(r)} u_1^{n(r)} \otimes_a \cdots \otimes_a u_j^{n(r)}, \quad v^r = \sum_{m(r)} v_{j+1}^{m(r)} \otimes_a \cdots \otimes_a v_k^{m(r)}, \quad (v_i^{n(r)}, v_i^{m(r)} \in V)$$

に対して

$$\begin{aligned}
\pi_k\left(F_{j,k}^{-1}(v)\right) &\le \sum_r \sum_{n(r),m(r)} \pi_k\left(u_1^{n(r)} \otimes_a \cdots \otimes_a u_j^{n(r)} \otimes_a v_{j+1}^{m(r)} \otimes_a \cdots \otimes_a v_k^{m(r)}\right) \\
&= \sum_r \sum_{n(r),m(r)} \left\| u_1^{n(r)} \right\| \cdots \left\| u_j^{n(r)} \right\| \left\| v_{j+1}^{m(r)} \right\| \cdots \left\| v_k^{m(r)} \right\| \\
&= \sum_r \left\{ \sum_{n(r)} \left\| u_1^{n(r)} \right\| \cdots \left\| u_j^{n(r)} \right\| \right\} \left\{ \sum_{m(r)} \left\| v_{j+1}^{m(r)} \right\| \cdots \left\| v_k^{m(r)} \right\| \right\}
\end{aligned}$$

が成り立つから，分割の任意性と定理 A.6.7 より

$$\pi_k\left(F_{j,k}^{-1}(v)\right) \le \sum_r \pi_j(u^r)\, \pi_{k-j}(v^r)$$

を得る．v の分割について下限を取れば，再び定理 A.6.7 により

$$\pi_k\left(F_{j,k}^{-1}(v)\right) \leq \pi_{j,k}(v)$$

が出る．

第二段 $\pi_k \circ F_{j,k}^{-1} \geq \pi_{j,k}$ が成り立つことを示す．$v \in V^{\otimes_a k}$ の任意の分割

$$v = \sum_n v_1^n \otimes_a \cdots \otimes_a v_k^n, \quad (v_i^n \in V,\ i = 1, \cdots, k)$$

を取れば，

$$\begin{aligned}
\pi_{j,k}\left(F_{j,k}(v)\right) &\leq \sum_n \pi_{j,k}\left(\left(v_1^n \otimes_a \cdots \otimes_a v_j^n\right) \otimes_a \left(v_j^n \otimes_a \cdots \otimes_a v_k^n\right)\right) \\
&= \sum_n \pi_j\left(v_1^n \otimes_a \cdots \otimes_a v_j^n\right) \pi_{k-j}\left(v_j^n \otimes_a \cdots \otimes_a v_k^n\right) \\
&= \sum_n \left\| v_1^n \right\| \cdots \left\| v_k^n \right\|
\end{aligned}$$

が成立する．従って定理 A.6.7 より

$$\pi_{j,k}\left(F_{j,k}(v)\right) \leq \pi_k(v)$$

が得られる． ∎

$V^{\otimes_a i}$ の $V^{\otimes i}$ への等長埋め込みを J_i で表し

$$\begin{aligned}
\varphi_{j,k} : J_j V^{\otimes_a j} \times J_{k-j} V^{\otimes_a k-j} \ni (u, v) &\longmapsto (J_j^{-1} u, J_{k-j}^{-1} v) && \in V^{\otimes_a j} \times V^{\otimes_a k-j} \\
&\longmapsto F_{j,k}^{-1}(J_j^{-1} u \otimes_a J_{k-j}^{-1} v) && \in V^{\otimes_a k} \\
&\longmapsto J_k F_{j,k}^{-1}(J_j^{-1} u \otimes_a J_{k-j}^{-1} v) && \in V^{\otimes k}
\end{aligned}$$

により $\varphi_{j,k} : J_j V^{\otimes_a j} \times J_{k-j} V^{\otimes_a k-j} \longrightarrow V^{\otimes k}$ を定めれば，$\varphi_{j,k}$ は有界双線型写像である．実際，$\otimes_a$ の双線型性と埋め込み及び $F_{j,k}^{-1}$ の線型性より $\varphi_{j,k}$ の双線型性が従い，また

$$\begin{aligned}
\left|\varphi_{j,k}(u, v)\right|_k &= \pi_k\left(F_{j,k}^{-1}(J_j^{-1} u \otimes_a J_{k-j}^{-1} v)\right) \\
&= \pi_{j,k}\left(J_j^{-1} u \otimes_a J_{k-j}^{-1} v\right) \\
&= \pi_j\left(J_j^{-1} u\right) \pi_{k-j}\left(J_{k-j}^{-1} v\right) \\
&= |u|_j |v|_{k-j}
\end{aligned}$$

が任意の $(u, v) \in J_j V^{\otimes_a j} \times J_{k-j} V^{\otimes_a k-j}$ に対して成り立つから $\left\|\varphi_{j,k}\right\|_{L^{(2)}\left(J_j V^{\otimes_a j} \times J_{k-j} V^{\otimes_a k-j}, V^{\otimes k}\right)} = 1$ を得る．従って，定理 A.2.1 より $\varphi_{j,k}$ は $V^{\otimes j} \times V^{\otimes k-j}$ 上の或る唯一の双線型 $\psi_{j,k}$ にノルム保存拡張される．

定理 0.3.2. $\psi_{j,k}$ は次を満たす:

$$\left|\psi_{j,k}(u, v)\right|_k = |u|_j |v|_{k-j}, \quad (\forall (u, v) \in V^{\otimes j} \times V^{\otimes k-j}).$$

証明. (u, v) に直積ノルムで収束する点列 $(u_n, v_n) \in J_j V^{\otimes_a j} \times J_{k-j} V^{\otimes_a k-j}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を取れば

$$\left|\varphi_{j,k}(u_n, v_n) - \psi_{j,k}(u, v)\right|_k \longrightarrow 0, \quad (k \longrightarrow \infty)$$

が成り立つ．また

$$\begin{aligned}\left||u_n|_j|v_n|_{k-j}-|u|_j|v|_{k-j}\right| &\le \left||u_n|_j|v_n|_{k-j}-|u_n|_j|v|_{k-j}\right|+\left||u_n|_j|v|_{k-j}-|u|_j|v|_{k-j}\right| \\ &\le |u_n|_j|v_n-v|_{k-j}+|u_n-u|_j|v|_{k-j} \\ &\longrightarrow 0, \quad (k\longrightarrow\infty)\end{aligned}$$

も成立するから

$$\begin{aligned}\left|\left|\psi_{j,k}(u,v)\right|_k-|u|_j|v|_{k-j}\right| &\le \left|\varphi_{j,k}(u_n,v_n)-\psi_{j,k}(u,v)\right|_k+\left||u_n|_j|v_n|_{k-j}-|u|_j|v|_{k-j}\right| \\ &\longrightarrow 0, \quad (k\longrightarrow\infty)\end{aligned}$$

が従い $\left|\psi_{j,k}(u,v)\right|_k=|u|_j|v|_{k-j}$ が得られる． ∎

$V^{\otimes 0}=\mathbb{R}$ として $T(V):=\bigoplus_{k=0}^{\infty}V^{\otimes k}$ とおく．また上で定めた双線型写像 $\psi_{j,k}$ を $\otimes_{j,k}$ と書き直す:

$$u\otimes_{j,k}v=\psi_{j,k}(u,v), \quad (\forall(u,v)\in V^{\otimes j}\times V^{\otimes k-j}).$$

このとき，$(a^k)_{k=0}^{\infty},(b^k)_{k=0}^{\infty}\in T(V)$ に対する二項関係 $(a^k)_{k=0}^{\infty}\otimes(b^k)_{k=0}^{\infty}=:(c^k)_{k=0}^{\infty}$ を

$$c^k=\sum_{j=0}^{k}a^j\otimes_{j,k}b^{k-j}, \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

により定めれば，$c^k\in V^{\otimes k}$ $(k=0,1,\cdots)$ かつ有限個の k を除いて $c^k=0$ となるから $(c^k)_{k=0}^{\infty}\in T(V)$ が成立し，$\otimes$ は $T(V)$ において結合則?を満たす双線型な積となる．$n\ge 0$ に対して

$$T^{(n)}(V):=\bigoplus_{k=0}^{n}V^{\otimes k}$$

とおき，同様に $\otimes$ を

$$(c^k)_{k=0}^{n}=(a^k)_{k=0}^{n}\otimes(b^k)_{k=0}^{n}, \quad c^k=\sum_{j=0}^{k}a^j\otimes_{j,k}b^{k-j}, \quad (k=0,\cdots,n)$$

により定め，次の直積ノルムを導入する:

$$|a|:=\sum_{k=0}^{n}\left|a^k\right|_k, \quad (a=(a^k)_{k=0}^{n}\in T^{(n)}(V)).$$

いま，写像 $X:\Delta_T\longrightarrow T^{(n)}(V)$ に対して $X_{s,t}=(X_{s,t}^0,\cdots,X_{s,t}^n)$, $((s,t)\in\Delta_T)$ と書いて

$$C_0\left(\Delta_T,T^{(n)}(V)\right):=\left\{X:\Delta_T\longrightarrow T^{(n)}(V)\ ;\quad \text{continuous},\ X^0\equiv 1\right\}$$

とおく．

定義 0.3.3 (finite p-variation). $p\ge 1$ とする．$X:\Delta_T\longrightarrow T^{(n)}(V)$ に対して或るコントロール関数 ω が存在して

$$\left|X_{s,t}^i\right|_k\le\omega(s,t)^{i/p}, \quad (\forall i=1,\cdots,n,\ \forall(s,t)\in\Delta_T) \tag{12}$$

を満たすとき，X は有限 p-変動 (finite p-variation) を持つという．

(12) を満たす ω が存在する場合，$p \geq n$ ならば $\| X \|_p < \infty$ が成り立つ．実際，

$$\sum_D \left| X^i_{s,t} \right|_k^{p/i} \leq \omega(0,T), \quad (\forall D \in \delta[0,T],\ i = 1, \cdots, n)$$

となり $\left\| X^i \right\|_{p/i} < \infty$ $(i = 1, \cdots, n)$ が従い，$p/i \geq 1$ $(i = 1, \cdots, n)$ だから定理 0.2.6 により

$$\left\| X^i \right\|_p \leq \left\| X^i \right\|_{p/i} \ (i = 1, \cdots, n)$$

が満たされる．

$$d$$

定義 0.3.4 (finite total p-variation). $p \geq 1$ とする．$X \in C_0\left(\Delta_T, T^{(n)}(V)\right)$ が有限総 p-変動 (finite total p-variation) を持つとは，任意の $1 \leq i \leq n$ に対して

$$\left\| X^i \right\|_{p/i} < \infty$$

が満たされることをいう．また次を定める:

$$C_{0,p}\left(\Delta_T, T^{(n)}(V)\right) := \left\{ X \in C_0\left(\Delta_T, T^{(n)}(V)\right) \ ; \quad X \text{ has finite total } p\text{-variation} \right\}.$$

定義 0.3.5 (乗法的汎関数). 次の式 (Chen's identity) を満たす $X \in C_0\left(\Delta_T, T^{(n)}(V)\right)$ を n 次の乗法的汎関数 (multiplicative functional) と呼ぶ:

$$X_{s,u} \otimes X_{u,t} = X_{s,t}, \quad (\forall 0 \leq s \leq u \leq t \leq T).$$

$C_0\left(\Delta_T, T^{(n)}(V)\right)$ の定義で $X^0 \equiv 1$ としたが，$X : \Delta_T \longrightarrow T^{(n)}(V)$ が Chen's identity を満たすには $X^0 \equiv 1$ 或は 0 である必要がある．実際，$X^0_{s,t} = X^0_{s,t} \otimes_{0,0} X^0_{s,t} = X^0_{s,t} X^0_{s,t}$ が成り立たなければならない．

補題 0.3.6. $X : \Delta_T \longrightarrow T^{(n)}(V)$ が Chen's identity を満たせば $X^k_{t,t} = 0$ $(1 \leq k \leq n)$ が成り立つ．

証明. 任意に $t \in [0,T]$ を取る．$X^k_{t,t} = \sum_{j=0}^k X^j_{t,t} \otimes_{j,k} X^{k-j}_{t,t}$ より，先ず

$$X^1_{t,t} = X^0_{t,t} \otimes_{0,1} X^1_{t,t} + X^1_{t,t} \otimes_{0,1} X^0_{t,t} = X^1_{t,t} + X^1_{t,t}$$

が成り立ち $X^1_{t,t} = 0$ が従う．同様に

$$X^2_{t,t} = X^0_{t,t} \otimes_{0,1} X^2_{t,t} + X^1_{t,t} \otimes_{0,1} X^1_{t,t} + X^2_{t,t} \otimes_{0,1} X^0_{t,t} = X^2_{t,t} + X^2_{t,t}$$

より $X^2_{t,t} = 0$ が成立し，帰納的に $X^k_{t,t} = 0$ $(1 \leq k \leq n)$ が出る． ∎

定理 0.3.7.

連続かつ有界変動なパス $x:[0,T]\longrightarrow V$ に対して次の積分

$$\int_s^t X^1_{s,u}\otimes dx_u$$

を定めたい．ただし $X^1_{s,t}=x_t-x_s$ $((s,t)\in\Delta_T)$ である．いま，細分 $D=\{s=u_0<\cdots<u_n=t\}, D'=\{s=v_0<\cdots<v_m=t\}\in\delta[s,t]$ に対して，共通細分を $D''=\{s=w_0<w_1\cdots\leq t\}$ と表し

$$\begin{aligned}\tilde{X}^1_{s,w_k}&\coloneqq X^1_{s,u_i},\quad (u_i\leq w_k\leq u_{i+1}),\\ \hat{X}^1_{s,w_k}&\coloneqq X^1_{s,v_j},\quad (v_j\leq w_k\leq v_{j+1})\end{aligned}$$

により $\tilde{X}^1,\hat{X}^1$ を定める．このとき

$$\begin{aligned}&\left\|\sum_D X^1_{s,u_{i-1}}\otimes X^1_{u_{i-1},u_i}-\sum_{D'}X^1_{s,v_{j-1}}\otimes X^1_{v_{j-1},v_j}\right\|_{V^{\otimes2}}\\
&=\left\|\sum_D X^1_{s,u_{i-1}}\otimes X^1_{u_{i-1},u_i}-\sum_{D''}X^1_{s,w_{k-1}}\otimes X^1_{w_{k-1},w_k}\right\|_{V^{\otimes2}}\\
&\quad+\left\|\sum_{D'} X^1_{s,v_{j-1}}\otimes X^1_{v_{j-1},v_j}-\sum_{D''}X^1_{s,w_{k-1}}\otimes X^1_{w_{k-1},w_k}\right\|_{V^{\otimes2}}\\
&=\left\|\sum_{D''} \tilde{X}^1_{s,w_{k-1}}\otimes X^1_{w_{k-1},w_k}-\sum_{D''}X^1_{s,w_{k-1}}\otimes X^1_{w_{k-1},w_k}\right\|_{V^{\otimes2}}\\
&\quad+\left\|\sum_{D''} \hat{X}^1_{s,w_{k-1}}\otimes X^1_{w_{k-1},w_k}-\sum_{D''}X^1_{s,w_{k-1}}\otimes X^1_{w_{k-1},w_k}\right\|_{V^{\otimes2}}\\
&=\left\|\sum_{D''}\left(\tilde{X}^1_{s,w_{k-1}}-X^1_{s,w_{k-1}}\right)\otimes X^1_{w_{k-1},w_k}\right\|_{V^{\otimes2}}\\
&\quad+\left\|\sum_{D''}\left(\hat{X}^1_{s,w_{k-1}}-X^1_{s,w_{k-1}}\right)\otimes X^1_{w_{k-1},w_k}\right\|_{V^{\otimes2}}\\
&\leq\sum_{D''}\left\|\tilde{X}^1_{s,w_{k-1}}-X^1_{s,w_{k-1}}\right\|\left\|X^1_{w_{k-1},w_k}\right\|+\sum_{D''}\left\|\hat{X}^1_{s,w_{k-1}}-X^1_{s,w_{k-1}}\right\|\left\|X^1_{w_{k-1},w_k}\right\|\\
&\leq\max_k\left\|\tilde{X}^1_{s,w_{k-1}}-X^1_{s,w_{k-1}}\right\|\left\|X^1\right\|_{1,[s,t]}+\max_k\left\|\hat{X}^1_{s,w_{k-1}}-X^1_{s,w_{k-1}}\right\|\left\|X^1\right\|_{1,[s,t]}\end{aligned}$$

が成立する．いま，$[s,t]\ni u\longmapsto X^1_{s,u}$ は一様連続であるから $|D|,|D'|\longrightarrow 0$ として右辺は 0 に収束する．従って $D_n\in\delta[s,t]$ を $|D_n|\longrightarrow 0$ $(n\longrightarrow\infty)$ を満たす細分列とすれば $\left(\sum_{D_n}X^1_{s,u_{i-1}}\otimes X^1_{u_{i-1},u_i}\right)_{n=1}^\infty$ は $V^{\otimes2}$ の Cauchy 列となり $\in V^{\otimes2}$ で収束する．別の細分列 $(D_m)_{m=1}^\infty$ $(|D_m|\longrightarrow 0)$ を取っても

$$\left\|\sum_{D_n}X^1_{s,u_{i-1}}\otimes X^1_{u_{i-1},u_i}-\sum_{D_m}X^1_{s,v_{j-1}}\otimes X^1_{v_{j-1},v_j}\right\|_{V^{\otimes2}}\longrightarrow 0,\quad (n,m\longrightarrow\infty)$$

が成り立つから極限は細分列に依らず定まり，従って $\lim_{|D|\to0}\sum_D X^1_{s,u_{i-1}}\otimes X^1_{u_{i-1},u_i}$ が確定する．ここで

$$X^2_{s,t}=\int_s^t X^1_{s,u}\otimes dx_u\coloneqq\lim_{|D|\to0}\sum_D X^1_{s,u_{i-1}}\otimes X^1_{u_{i-1},u_i}$$

と定める．このとき $\Delta_T\ni(s,t)\longmapsto X^2_{s,t}\in V^{\otimes2}$ は連続である．

定理 0.3.8. $\Omega_p(V)$ は次で定める距離

$$d_p(X,Y) \coloneqq \max_{1\le i\le [p]} \left\| X^i - Y^i \right\|_{p/i}$$

により完備距離空間となる．

証明． $(X^k)_{k=1}^{\infty}$ を Cauchy 列とすれば，任意の $\epsilon > 0$ に対し或る $K \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\left\| X^{k,i} - X^{\ell,i} \right\|_{p/i} < \epsilon, \quad (\forall k,\ell > K,\ 1 \le i \le [p])$$

が成立する．よって定理 (0.1.7) より各 i に対し或る $X^i \in B_{p/i,T}(V)$ が存在して

$$\left\| X^{k,i} - X^i \right\|_{p/i} \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty,\ 1 \le i \le [p])$$

を満たす．$X : \Delta_T \longrightarrow T^{(n)}(V)$ を

$$X_{s,t} \coloneqq (1, X^1_{s,t}, \cdots, X^n_{s,t}), \quad ((s,t) \in \Delta_T)$$

により定めれば，X^i の連続性より X も連続である．さらに任意の $D \in \delta[0,T]$ に対して

$$\begin{aligned}
\sum_D \left\| X^k_{t_{i-1},t_i} - X_{t_{i-1},t_i} \right\|^p &= \sum_D \left(\left\| X^{k,1}_{t_{i-1},t_i} - X^1_{t_{i-1},t_i} \right\| + \cdots + \left\| X^{k,n}_{t_{i-1},t_i} - X^n_{t_{i-1},t_i} \right\| \right)^p \\
&\le (n+1)^p \sum_D \left(\left\| X^{k,1}_{t_{i-1},t_i} - X^1_{t_{i-1},t_i} \right\|^p + \cdots + \left\| X^{k,n}_{t_{i-1},t_i} - X^n_{t_{i-1},t_i} \right\|^p \right) \\
&\le (n+1)^p \left(\left\| X^{k,1}_{t_{i-1},t_i} - X^1_{t_{i-1},t_i} \right\|_p^p + \cdots + \left\| X^{k,n}_{t_{i-1},t_i} - X^n_{t_{i-1},t_i} \right\|_p^p \right)
\end{aligned}$$

が成立するから，定理より

$$\sup_D \sum_D \left\| X^k_{t_{i-1},t_i} - X_{t_{i-1},t_i} \right\|^p \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty)$$

が従い X の p-variation の有界性が出る． ∎

付録 A

多重線型写像・クロスノルム

A.1　ノルム空間の完備拡大

A.2　多重線型写像

定理 A.2.1 (多重線型写像の一意拡張).　$(X_i)_{i=1}^n$ をノルム空間，Z を Banach 空間，Y_i を X_i の稠密な部分空間とする $(i = 1, \cdots, n)$．このとき，有界 n 重線型写像 $b : \bigoplus_{i=1}^n Y_i \longrightarrow Z$ は $(X_i)_{i=1}^n$ 上の Z 値 n 重線型写像 $\tilde{b}$ に一意に拡張され，b と $\tilde{b}$ の作用素ノルムは一致する．

証明.　$\bigoplus_{i=1}^n Y_i$ は $\bigoplus_{i=1}^n X_i$ で稠密であるから，任意の $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \bigoplus_{i=1}^n X_i$ に対して

$$\left\| x - x^k \right\|_{\bigoplus_{i=1}^n X_i} = \sum_{i=1}^n \left\| x_i - x_i^k \right\|_{X_i} \longrightarrow 0, \quad (k \longrightarrow \infty)$$

を満たす点列 $x^k = (x_1^k, \cdots, x_n^k) \in \bigoplus_{i=1}^n Y_i$ $(k = 1, 2, \cdots)$ が存在する．

$$M_i \coloneqq \sup_{k \geq 1} \left\| x_i^k \right\|_{X_i}, \quad (i = 1, \cdots, n)$$

とおけば，$M_i < \infty$ $(i = 1, \cdots, n)$ より

$$\begin{aligned}
\left\| b(x^k) - b(x^\ell) \right\|_Z &= \Big\| b(x_1^k, x_2^k, \cdots, x_n^k) - b(x_1^\ell, x_2^k, \cdots, x_n^k) \\
&\quad + b(x_1^\ell, x_2^k, \cdots, x_n^k) - b(x_1^\ell, x_2^\ell, \cdots, x_n^k) \\
&\quad \cdots \\
&\quad + b(x_1^\ell, \cdots, x_{n-1}^\ell, x_n^k) - b(x_1^\ell, \cdots, x_n^\ell) \Big\|_Z \\
&\leq \| b \|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n Y_i, Z)} \left\| x_1^k - x_1^\ell \right\|_{X_1} M_2 \cdots M_n \\
&\quad + \| b \|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n Y_i, Z)} M_1 \left\| x_2^k - x_2^\ell \right\|_{X_2} M_3 \cdots M_n \\
&\quad \cdots \\
&\quad + \| b \|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n Y_i, Z)} M_1 \cdots M_{n-1} \left\| x_n^k - x_n^\ell \right\|_{X_n} \\
&\longrightarrow 0, \quad (k, \ell \longrightarrow \infty)
\end{aligned}$$

が成り立ち，Z の完備性より $\lim_{k\to\infty} b(x^k)$ が存在する．別の収束列 $\bigoplus_{i=1}^n Y_i \ni y^m \longrightarrow x$ を取れば

$$\left\| x_i^k - y_i^m \right\|_{X_i} \leq \left\| x_i^k - x_i \right\|_{X_i} + \left\| x_i - y_i^m \right\|_{X_i} \longrightarrow 0, \quad (k, m \longrightarrow \infty,\ i = 1, \cdots, n)$$

より $\left\| b(x^k) - b(y^m) \right\|_Z \longrightarrow 0 \ (k, m \longrightarrow \infty)$ が従い

$$\lim_{k\to\infty} b(x^k) = \lim_{m\to\infty} b(y^m)$$

が得られ，これにより写像 $\tilde{b} : x \longmapsto \lim_{k\to\infty} b(x^k)$ が定まる．この $\tilde{b}$ は b の拡張であり，有界かつ n 重線型性を持つ．先ず n 重線型性を示す．$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ と $y = (y_1, x_2, \cdots, x_n)$ に対し

$$\left\| x - x^k \right\|_{\bigoplus_{i=1}^n X_i} \longrightarrow 0, \quad \left\| y - y^k \right\|_{\bigoplus_{i=1}^n X_i} \longrightarrow 0$$

を満たす点列 $(x^k)_{k=1}^\infty, (y^k)_{m=1}^\infty \subset \bigoplus_{i=1}^n Y_i$ を取れば

$$\begin{aligned}
&\left\| \tilde{b}(\alpha x_1 + \beta y_1, x_2, \cdots, x_n) - \alpha\tilde{b}(x_1, \cdots, x_n) - \beta\tilde{b}(y_1, \cdots, x_n) \right\|_Z \\
&\leq \left\| \tilde{b}(\alpha x_1 + \beta y_1, x_2, \cdots, x_n) - b(\alpha x_1^k + \beta y_1^k, x_2^k, \cdots, x_n^k) \right\|_Z \\
&\quad + |\alpha| \left\| \tilde{b}(x_1, \cdots, x_n) - b(x_1^k, \cdots, x_n^k) \right\|_Z \\
&\quad + |\beta| \left\| \tilde{b}(y_1, \cdots, x_n) - b(y_1^k, \cdots, x_n^k) \right\|_Z \\
&\longrightarrow 0, \quad (k \longrightarrow \infty)
\end{aligned}$$

が成り立ち，$\tilde{b}$ の第一成分に関する線型性を得る．他の成分も同じである．また任意の $x \in \bigoplus_{i=1}^\infty X_i$ に対して収束列 $(x^k)_{k=1}^\infty \subset \bigoplus_{i=1}^n Y_i$ を取れば，任意の $\epsilon > 0$ に対し或る k が存在して

$$\left\| \tilde{b}(x) \right\|_Z \leq \left\| b(x^k) \right\|_Z + \epsilon$$

かつ

$$\left\| x_i^k \right\|_{X_i} \leq \| x_i \|_{X_i} + \epsilon, \quad (i = 1, \cdots, n)$$

が満たされ

$$\left\| \tilde{b}(x) \right\|_Z \leq \left\| b(x^k) \right\|_Z + \epsilon \leq \| b \|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n Y_i, Z)} \prod_{i=1}^n \left(\| x_i \|_{X_i} + \epsilon \right) + \epsilon$$

が従う．x 及び ϵ の任意性より $\left\| \tilde{b} \right\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Z)} \leq \| b \|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n Y_i, Z)}$ が成り立ち，$\tilde{b}$ は b の拡張だから

$$\left\| \tilde{b} \right\|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Z)} = \| b \|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n Y_i, Z)}$$

が出る．拡張の一意性は $\bigoplus_{i=1}^n Y_i$ の稠密性と $\tilde{b}$ の連続性による． ∎

A.3　notation

以下, 零元のみの線型空間は考えない．E, E_i, F を体 $\mathbb{K}$ 上の線形空間とするとき, $\mathrm{Hom}\,(E, F)$ で E から F への $\mathbb{K}$-線型写像の全体を表し, 特に $F = \mathbb{K}$ のとき $E^\#$ と書く．また $\mathrm{Hom}^{(n)}\,(E_1 \times \cdots \times E_n, F)$ で $E_1 \times \cdots \times E_n$ から F への $\mathbb{K}$-n 重線型写像の全体を表す．また X をノルム空間と考えるときはノルムを $\|\cdot\|_X$ と書く．ノルム空間 $\left((X_i, \|\cdot\|_{X_i})\right)_{i=1}^n$ の直積 $\bigoplus_{i=1}^n X_i$ には直積ノルム $\|\cdot\|_{X_1} + \cdots + \|\cdot\|_{X_n}$ により位相を導入する．

A.4 テンソル積

$n \geq 2$ として，体 $\mathbb{K}$ 上の線形空間の族 $(E_i)_{i=1}^n$ に対してテンソル積を定義する．

$$\Lambda\Bigl(\bigoplus_{i=1}^n E_i\Bigr) = \left\{ b : \bigoplus_{i=1}^n E_i \longrightarrow \mathbb{K} \ ; \quad \text{有限個の } e \in \textstyle\bigoplus_{i=1}^n E_i \text{ を除いて } b(e) = 0. \right\}$$

により $\mathbb{K}$-線形空間 $\Lambda\Bigl(\bigoplus_{i=1}^n E_i\Bigr)$ を定める．また $e = (e_1, \cdots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i$ に対する定義関数を

$$\mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_n}(x) = \begin{cases} 1, & x = e, \\ 0, & x \neq e \end{cases}$$

で表す．$\Lambda\Bigl(\bigoplus_{i=1}^n E_i\Bigr)$ の線型部分空間を

$$\begin{aligned}
&\Lambda_0\Bigl(\bigoplus_{i=1}^n E_i\Bigr) \\
&\coloneqq \mathrm{Span}\left[\left\{ \begin{matrix} \mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i+e_i',\cdots,e_n} - \mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i,\cdots,e_n} - \mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i',\cdots,e_n}, \\ \mathbb{1}_{e_1,\cdots,\lambda e_i,\cdots,e_n} - \lambda \mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i,\cdots,e_n} \end{matrix} \ ; \quad e_i, e_i' \in E_i, \lambda \in \mathbb{K}, 1 \leq i \leq n \right\}\right]
\end{aligned}$$

により定め，$b \in \Lambda\Bigl(\bigoplus_{i=1}^n E_i\Bigr)$ の $\Lambda_0\Bigl(\bigoplus_{i=1}^n E_i\Bigr)$ に関する同値類を $[b]$ と書く．そして

$$E_1 \otimes \cdots \otimes E_n = \bigotimes_{i=1}^n E_i \coloneqq \Lambda\Bigl(\bigoplus_{i=1}^n E_i\Bigr) \Big/ \Lambda_0\Bigl(\bigoplus_{i=1}^n E_i\Bigr)$$

で定める商空間を $(E_i)_{i=1}^n$ のテンソル積と定義する．また $(e_1, \cdots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i$ に対し

$$e_1 \otimes \cdots \otimes e_n \coloneqq [\mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_n}]$$

により定める $\otimes : \bigoplus_{i=1}^n E_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n E_i$ をテンソル積の標準写像と呼ぶ．

定理 A.4.1 (標準写像の多重線型性). $(E_i)_{i=1}^n$ を $\mathbb{K}$-線形空間の族とするとき，

$$\otimes : \bigoplus_{i=1}^n E_i \ni (e_1, \cdots, e_n) \longmapsto e_1 \otimes \cdots \otimes e_n \in \bigotimes_{i=1}^n E_i$$

は n 重線型写像である．また次が成り立つ:

$$\bigotimes_{i=1}^n E_i = \mathrm{Span}\left[\left\{ e_1 \otimes \cdots \otimes e_n \ ; \quad (e_1, \cdots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i \right\}\right]. \tag{A.1}$$

証明． 任意の $1 \leq i \leq n,\ e_1 \in E_1, \cdots, e_n \in E_n,\ e_i, e_i' \in E_i,\ \lambda \in \mathbb{K}$ に対して

$$\begin{aligned}
e_1 \otimes \cdots \otimes (e_i + e_i') \otimes \cdots \otimes e_n &= \left[\mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_i + e_i', \cdots, e_n} \right] \\
&= \left[\mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_i, \cdots, e_n} + \mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_i', \cdots, e_n} \right] \\
&= \left[\mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_i, \cdots, e_n} \right] + \left[\mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_i', \cdots, e_n} \right] \\
&= e_1 \otimes \cdots \otimes e_i \otimes \cdots \otimes e_n + e_1 \otimes \cdots \otimes e_i' \otimes \cdots \otimes e_n, \\
e_1 \otimes \cdots \otimes (\lambda e_i) \otimes \cdots \otimes e_n &= \left[\mathbb{1}_{e_1, \cdots, \lambda e_i, \cdots, e_n} \right] \\
&= \left[\lambda \mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_i, \cdots, e_n} \right] \\
&= \lambda \left[\mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_i, \cdots, e_n} \right] \\
&= \lambda (e_1 \otimes \cdots \otimes e_i \otimes \cdots \otimes e_n)
\end{aligned}$$

が成立するから $\otimes$ は多重線型である．また任意に $u = [b] \in E \otimes F$ を取れば

$$b = \sum_{j=1}^{m} k_j \mathbb{1}_{e_i^j, \cdots, e_n^j}, \quad \left(k_j = b(e_i^j, \cdots, e_n^j),\ j = 1, \cdots, m \right)$$

と表せるから，

$$u = \left[\sum_{j=1}^{m} k_j \mathbb{1}_{e_i^j, \cdots, e_n^j} \right] = \left[\sum_{j=1}^{m} \mathbb{1}_{k_j e_i^j, \cdots, e_n^j} \right] = \sum_{j=1}^{m} (k_j e_1^j) \otimes \cdots \otimes e_n^j$$

が従い (A.1) を得る． ∎

定理 A.4.2 ($\cdots \otimes 0 \otimes \cdots$ は零ベクトル). $(E_i)_{i=1}^n$ を $\mathbb{K}$-線形空間の族とし，テンソル積 $\bigotimes_{i=1}^n E_i$ を定める．このとき，或る i で $e_i = 0$ なら $e_1 \otimes \cdots \otimes e_n = 0$ が成り立つ．

証明． $e_i = 0$ のとき，$\lambda = 0$ とすれば

$$e_1 \otimes \cdots \otimes e_n = \left[\mathbb{1}_{e_1, \cdots, 0, \cdots, e_n} \right] = \left[\mathbb{1}_{e_1, \cdots, \lambda e_i, \cdots, e_n} - \lambda \mathbb{1}_{e_1, \cdots, e_i, \cdots, e_n} \right] = 0$$

が成立する． ∎

定理 A.4.3 (普遍性 (universality of tensor products)). $(E_i)_{i=1}^n$ を $\mathbb{K}$-線形空間の族とする．このとき任意の $\mathbb{K}$-線型空間 V に対して，$T \in \mathrm{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n E_i, V\right)$ ならば $T \circ \otimes \in \mathrm{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$ が満たされ，これで定める次の対応 Φ は線型同型である:

$$\begin{array}{cccc} \Phi : \mathrm{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n E_i, V\right) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right) \\ \Cup & & \Cup \\ T & \longmapsto & T \circ \otimes \end{array} \tag{A.2}$$

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{i=1}^n E_i \arrow[d, "\otimes"'] \arrow[dr, "\Phi(T)"] & \\ \bigotimes_{i=1}^n E_i \arrow[r, "T"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & V \end{tikzcd}$$

また $\mathbb{K}$-線型空間 U_0 と多重線型写像 $\iota : \bigoplus_{i=1}^n E_i \longrightarrow U_0$ が，任意の $\mathbb{K}$-線型空間 V に対し

$(\otimes)_1$　U_0 は ι の像で生成される．

$(\otimes)_2$　任意の $\delta \in \mathrm{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$ に対して或る $\tau \in \mathrm{Hom}(U_0, V)$ が $\delta = \tau \circ \iota$ を満たす．

を満たすなら，(A.2) において $V = U_0$ とするとき $T = \Phi^{-1}(\iota)$ は線型同型である．

後半の主張により，$(E_i)_i$ のテンソル積を別の方法で導入しても，商空間を用いて導入した $\bigotimes_i E_i$ と線型同型に結ばれる．このとき，別の方法で導入したテンソル積及び標準写像を $\tilde{\bigotimes}_i E_i$, $\tilde{\otimes}$ と表せば，或る線型同型 $T : \bigotimes_i E_i \longrightarrow \tilde{\bigotimes}_i E_i$ がただ一つ存在して

$$T(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) = e_1 \tilde{\otimes} \cdots \tilde{\otimes} e_n$$

を満たす．特に任意の並べ替え $\varphi : \{1, \cdots, n\} \longrightarrow \{1, \cdots, n\}$ に対し

$$\begin{array}{ccc} \bigotimes_{i=1}^n E_i & \cong & \bigotimes_{i=1}^n E_{\varphi(i)} \\ \Cup & & \Cup \\ e_1 \otimes \cdots \otimes e_n & \longleftrightarrow & e_{\varphi(1)} \otimes \cdots \otimes e_{\varphi(n)} \end{array}$$

が成立する．

証明.

第一段　$T \in \mathrm{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n E_i, V\right)$ の線型性と $\otimes$ の多重線型性より $T \circ \otimes$ は多重線型である．

第二段　$\Phi(T_1) = \Phi(T_2)$ ならば T_1 と T_2 は $\left\{ e_1 \otimes \cdots \otimes e_n \ ; \quad (e_1, \cdots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i \right\}$ の上で一致する．(A.1) より $T_1 = T_2$ が成立し Φ の単射性が従う．

第三段　次の二段で Φ の全射性を示す．まず，$\varphi \in \mathrm{Hom}\left(\Lambda(\bigoplus_{i=1}^n E_i), V\right)$ に対し

$$g : \bigoplus_{i=1}^n E_i \ni (e_1, \cdots, e_n) \longmapsto \varphi(1\!\!1_{e_1, \cdots, e_n}) \in V$$

を対応させる次の写像が全単射であることを示す:

$$\begin{array}{ccc} F : \mathrm{Hom}\left(\Lambda(\bigoplus_{i=1}^n E_i), V\right) & \longrightarrow & \mathrm{Map}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right) \\ \Cup & & \Cup \\ \varphi & \longmapsto & g \end{array}$$

$F(\varphi_1) = F(\varphi_2)$ のとき，任意の $e \in \bigoplus_{i=1}^n E_i$ に対して $\varphi_1(\mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_n}) = \varphi_2(\mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_n})$ が成り立ち，

$$\Lambda\Big(\bigoplus_{i=1}^n E_i\Big) = \mathrm{Span}\left[\left\{\ \mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_n}\ ;\quad (e_1,\cdots,e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i\ \right\}\right]$$

であるから $\varphi_1 = \varphi_2$ が従い F の単射性を得る．また $g \in \mathrm{Map}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$ に対して

$$\varphi(a) \coloneqq \sum_{\substack{e\in\bigoplus_{i=1}^n E_i \\ a(e)\neq 0}} a(e)g(e), \quad (a \in \Lambda(\bigoplus_{i=1}^n E_i))$$

により φ を定めれば，$\varphi \in \mathrm{Hom}\left(\Lambda(\bigoplus_{i=1}^n E_i), V\right)$ が満たされ F の全射性が従う．

第四段　任意に $b \in \mathrm{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$ を取り $h \coloneqq F^{-1}(b)$ とおけば，h の線型性より

$$\begin{aligned}
&b(e_1,\cdots,e_i+e_i',\cdots,e_n) - b(e_1,\cdots,e_i,\cdots,e_n) - b(e_1,\cdots,e_i',\cdots,e_n) \\
&\qquad = h(\mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i+e_i',\cdots,e_n} - \mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i,\cdots,e_n} - \mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i',\cdots,e_n}), \\
&b(e_1,\cdots,\lambda e_i,\cdots,e_n) - \lambda b(e_1,\cdots,e_i,\cdots,e_n) \\
&\qquad = h(\mathbb{1}_{e_1,\cdots,\lambda e_i,\cdots,e_n} - \lambda\mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_i,\cdots,e_n})
\end{aligned}$$

が成り立ち，b の双線型性により h は $\Lambda_0(\bigoplus_{i=1}^n E_i)$ 上で 0 である．従って

$$T([b]) \coloneqq h(b), \quad (b \in \Lambda(\bigoplus_{i=1}^n E_i))$$

で定める T は well-defined であり，$T \in \mathrm{Hom}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, V\right)$ かつ

$$b(e_1,\cdots,e_n) = h(\mathbb{1}_{e_1,\cdots,e_n}) = (T\circ\otimes)(e_1,\cdots,e_n), \quad (\forall(e_1,\cdots,e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i)$$

が満たされ Φ の全射性が得られる．

第五段　$(\otimes)_1, (\otimes)_2$ の下で $\mathrm{Hom}\left(U_0, \bigotimes_{i=1}^n E_i\right) \ni \tau \longmapsto \tau\circ\iota \in \mathrm{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n E_i, \bigotimes_{i=1}^n E_i\right)$ は全単射であるから，$\tau\circ\iota = \otimes$ を満たす $\tau \in \mathrm{Hom}\left(U_0, \bigotimes_{i=1}^n E_i\right)$ がただ一つ存在する．同様にして $\iota = T\circ\otimes$ を満たす $T \in \mathrm{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n E_i, U_0\right)$ がただ一つ存在し，併せれば

$$\otimes = \tau\circ\iota = (\tau\circ T)\circ\otimes, \quad \iota = T\circ\otimes = (T\circ\tau)\circ\iota$$

が成り立ち，$T \longmapsto T\circ\otimes$, $\tau \longmapsto \tau\circ\iota$ が一対一であるから $\tau\circ T$, $T\circ\tau$ はそれぞれ恒等写像に一致して $T^{-1} = \tau$ が従う．すなわち T は $\bigotimes_{i=1}^n E_i$ から U_0 への線型同型である． ∎

定理 A.4.4 (スカラーとのテンソル積).　E を $\mathbb{K}$-線型空間とするとき，$\mathbb{K}\otimes E$ と E は $f(\alpha\otimes e) = \alpha e$ を満たす線型写像 $f : \mathbb{K}\otimes E \longmapsto E$ により同型となる．

証明.　スカラ倍 $\iota : (\alpha, e) \longmapsto \alpha e$ は双線型である．また定理 A.4.3 の $(\otimes)_1, (\otimes)_2$ について，

$$E = \mathrm{Span}\,[\{\ \alpha e\ ;\quad \alpha\in\mathbb{K},\ e\in E\ \}]$$

より $(\otimes)_1$ が得られ，かつ任意の双線型写像 $\delta : \mathbb{K}\times E \longrightarrow V$ に対し

$$f(e) \coloneqq \delta(1, e), \quad (\forall e \in E)$$

で線型写像 $f : E \longrightarrow V$ を定めれば，

$$f \circ \iota(\alpha, e) = f(\alpha e) = \delta(1, \alpha e) = \alpha\delta(1, e) = \delta(\alpha, e)$$

が成り立つから $(\otimes)_2$ が満たされる． ∎

定義 A.4.5 (線型写像のテンソル積)． $(E_i)_{i=1}^n$ と $(F_i)_{i=1}^n$ を $\mathbb{K}$-線型空間の族とする．$f_i : E_i \longrightarrow F_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ が線型写像であるとき，

$$b : \bigoplus_{i=1}^n E_i \ni (e_1, \cdots, e_n) \longmapsto f_1(e_1)\otimes\cdots\otimes f_n(e_n) \in \bigotimes_{i=1}^n F_i$$

により定める b は n 重線型であり，定理 A.4.3 より $b = g\circ\otimes$ を満たす $g : \bigotimes_{i=1}^n E_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n F_i$ がただ一つ存在する．g を $f_1\otimes\cdots\otimes f_n$ と表記して線型写像のテンソル積と定義する．いま，

$$f_1\otimes\cdots\otimes f_n(e_1\otimes\cdots\otimes e_n) = f_1(e_1)\otimes\cdots\otimes f_n(e_n), \quad \left(\forall (e_1, \cdots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i\right)$$

が成り立つ．$F_i = \mathbb{K}$ $(i = 1, \cdots, n)$ の場合は $\otimes$ を $\mathbb{K}$ の乗法と考える ($\bigotimes_{i=1}^n F_i = \mathbb{K}$)．

定理 A.4.6 (零写像のテンソル積は零写像)． $\mathbb{K}$-線型空間の族 $(E_i)_{i=1}^n$ と $(F_i)_{i=1}^n$ と線型写像 $f_i : E_i \longrightarrow F_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ について，或る f_i が零写像なら $f_1\otimes\cdots\otimes f_n = 0$ となる．

証明． $f_i = 0$ とすると，定理 A.4.2 より $f_1\otimes\cdots\otimes f_n$ は $\{\, e_1\otimes\cdots\otimes e_n \;;\; e_i \in E_i \,\}$ 上で 0 となる．この空間は $\bigotimes_{i=1}^n E_i$ を生成するから $f_1\otimes\cdots\otimes f_n = 0$ が従う． ∎

定理 A.4.7 (テンソル積の基底)． $(E_i)_{i=1}^n$ を $\mathbb{K}$-線型空間の族とし，E_i の基底を $\left(u^i_{\lambda_i}\right)_{\lambda_i\in\Lambda_i}$ とする $(i = 1, \cdots, n)$．このとき $\left(u^1_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes u^n_{\lambda_n}\right)_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n}$ は $\bigotimes_{i=1}^n E_i$ の基底となる．

証明．

第一段　各 $u^i_{\lambda_i}$ の生成する一次元空間を $W^i_{\lambda_i} \coloneqq \mathbb{K}u^i_{\lambda_i}$ と表し

$$V_i \coloneqq \bigoplus_{\lambda_i\in\Lambda_i} W^i_{\lambda_i}, \quad (i = 1, \cdots, n)$$

とおく．$\left(u^i_{\lambda_i}\right)_{\lambda_i\in\Lambda_i}$ は E_i の基底であるから，任意の $e_i \in E_i$ に対し $v_i \in V_i$ がただ一つ定まり，

$$f_i : E_i \ni e_i \longmapsto v_i \in V_i$$

により定める線型写像 f_i は同型写像である．このとき，写像のテンソル積

$$f_1 \otimes \cdots \otimes f_n : \bigotimes_{i=1}^{n} E_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^{n} V_i$$

は線型同型となる．実際，f_i の逆写像 f_i^{-1} のテンソル積

$$f_1^{-1} \otimes \cdots \otimes f_n^{-1} : \bigotimes_{i=1}^{n} V_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^{n} E_i$$

によって，全ての $(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) \in \bigotimes_{i=1}^{n} E_i$ 及び $(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \in \bigotimes_{i=1}^{n} V_i$ に対し

$$\begin{aligned}
&f_1^{-1} \otimes \cdots \otimes f_n^{-1} \circ f_1 \otimes \cdots \otimes f_n(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) \\
&\qquad = f_1^{-1} \otimes \cdots \otimes f_n^{-1} \left(f_1(e_1) \otimes \cdots \otimes f_n(e_n)\right) = (e_1 \otimes \cdots \otimes e_n), \\
&f_1 \otimes \cdots \otimes f_n \circ f_1^{-1} \otimes \cdots \otimes f_n^{-1}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \\
&\qquad = f_1 \otimes \cdots \otimes f_n \left(f_1^{-1}(v_1) \otimes \cdots \otimes f_n^{-1}(v_n)\right) = (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)
\end{aligned}$$

が成立し，それぞれ $\bigotimes_{i=1}^{n} E_i$ と $\bigotimes_{i=1}^{n} V_i$ を生成するから

$$(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)^{-1} = f_1^{-1} \otimes \cdots \otimes f_n^{-1}$$

の関係を得る．

第二段　$\bigotimes_{i=1}^{n} V_i$ と $\bigoplus_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n} W_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes W_{\lambda_n}^n$ が線型同型であることを示す．先ず

$$g : \sum_j (v_1^j \otimes \cdots \otimes v_n^j) \longmapsto \sum_j \left(v_1^j(\lambda_1) \otimes \cdots \otimes v_n^j(\lambda_n)\right)_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n}$$

により線型写像 $g : \bigotimes_{i=1}^{n} V_i \longrightarrow \bigoplus_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n} W_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes W_{\lambda_n}^n$ を定める．また

$$\iota_{\lambda_i} : W_{\lambda_i}^i \longrightarrow V_i, \quad (\lambda_i \in \Lambda_i,\ i = 1, \cdots, n)$$

を次の標準単射として定める:

$$\iota_{\lambda_i}(u)(\lambda) = \begin{cases} u, & (\lambda = \lambda_i), \\ 0, & (\lambda \neq \lambda_i), \end{cases} \quad (\lambda \in \Lambda_i,\ u \in W_{\lambda_i}^i).$$

ι_{λ_i} は線型であるから $\iota_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \iota_{\lambda_n} : W_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes W_{\lambda_n}^n \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^{n} V_i$ を定義出来て，

$$h : w \longmapsto \sum_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n} \iota_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \iota_{\lambda_n} \left(w(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)\right)$$

により線型写像 $h : W_{\lambda_1}^1 \otimes \cdots \otimes W_{\lambda_n}^n \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^{n} V_i$ が定めれば $g^{-1} = h$ が成り立つ．実際，

$$\begin{aligned}
g \circ h(w) &= g\left(\sum_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n} \iota_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \iota_{\lambda_n} \left(w(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)\right)\right) \\
&= \sum_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n} g\left(\iota_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \iota_{\lambda_n} \left(w(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)\right)\right) \\
&= w
\end{aligned}$$

が任意の $w \in \bigoplus_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n} W^1_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes W^n_{\lambda_n}$ に対して成立し，かつ任意の $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ に対し

$$
\begin{aligned}
h \circ g(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) &= \sum_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n} \iota_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \iota_{\lambda_n} (v_1(\lambda_1) \otimes \cdots \otimes v_n(\lambda_n)) \\
&= \sum_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n} \iota_{\lambda_1}(v_1(\lambda_1)) \otimes \cdots \otimes \iota_{\lambda_n}(v_n(\lambda_n)) \\
&= \left(\sum_{\lambda_1 \in \Lambda_1} \iota_{\lambda_1}(v_1(\lambda_1)) \right) \otimes \cdots \otimes \left(\sum_{\lambda_n \in \Lambda_n} \iota_{\lambda_n}(v_n(\lambda_n)) \right) \\
&= v_1 \otimes \cdots \otimes v_n
\end{aligned}
$$

が成り立つから $g^{-1} = h$ が従う．よって g は線型同型である．

第三段　いま，$g \circ f_1 \otimes \cdots \otimes f_n$ によって $\bigotimes_{i=1}^n E_i$ と $\bigoplus_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n} W^1_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes W^n_{\lambda_n}$ は同型に対応し，

$$
w_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n}(\nu_1, \cdots, \nu_n) := \begin{cases} u^1_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes u^n_{\lambda_n}, & (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = (\nu_1, \cdots, \nu_n), \\ 0, & (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \neq (\nu_1, \cdots, \nu_n) \end{cases}
$$

として $w_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n}$ を定めれば

$$
u^1_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes u^n_{\lambda_n} \xmapsto{g \circ f_1 \otimes \cdots \otimes f_n} w_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n}
$$

が成り立つ．$(w_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n})$ の一次独立性から $\left(u^1_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes u^n_{\lambda_n}\right)_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n}$ の一次独立性が従う．

定理 A.4.8 (結合律).　$(E_i)_{i=1}^n$ を $\mathbb{K}$-線型空間の族とし，$k \in \{1, \cdots, n-1\}$ を任意に取る．このとき，次の対応関係を満たす F は線型同型である:

$$
\begin{array}{cccc}
F : \bigotimes_{i=1}^n E_i & \longrightarrow & \left(\bigotimes_{i=1}^k E_i\right) \bigotimes \left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i\right) \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
e_1 \otimes \cdots \otimes e_n & \longmapsto & (e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n)
\end{array}
$$

証明.

第一段　n 重線型写像 $f : \bigoplus_{i=1}^n E_i \longrightarrow \left(\bigotimes_{i=1}^k E_i\right) \bigotimes \left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i\right)$ を

$$
f(e_1, \cdots, e_n) = (e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n), \quad (\forall (e_1, \cdots, e_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i)
$$

により定めれば，定理 A.4.3 より

$$
F : (e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) \longmapsto (e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n)
$$

を満たす線型写像 $F : \bigotimes_{i=1}^n E_i \longrightarrow \left(\bigotimes_{i=1}^k E_i\right) \bigotimes \left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i\right)$ が存在する:

$$
\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i=1}^n E_i \arrow[d, "\otimes"'] \arrow[dr, "f"] & \\
\bigotimes_{i=1}^n E_i \arrow[r, "F"] & \left(\bigotimes_{i=1}^k E_i\right) \bigotimes \left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i\right)
\end{tikzcd}
$$

以降は F の逆写像を構成し F が全単射であることを示す．

第二段　$u_{k+1} \in E_{k+1}, \cdots, u_n \in E_n$ を固定し

$$\Phi_{u_{k+1},\cdots,u_n}(e_1, \cdots, e_n) \coloneqq e_1 \otimes \cdots e_k \otimes u_{k+1} \otimes \cdots \otimes u_n$$

によって n 重線型 $\Phi_{u_{k+1},\cdots,u_n} : \bigoplus_{i=1}^k E_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n E_i$ を定めれば，定理 A.4.3 より

$$G_{u_{k+1},\cdots,u_n}(e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) = e_1 \otimes \cdots e_k \otimes u_{k+1} \otimes \cdots \otimes u_n$$

を満たす線型写像 $G_{u_{k+1},\cdots,u_n} : \bigotimes_{i=1}^k E_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n E_i$ が存在する．

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i=1}^k E_i \arrow[d, "\otimes"'] \arrow[dr, "\Phi_{u_{k+1},\cdots,u_n}"] & \\
\bigotimes_{i=1}^k E_i \arrow[r, "G_{u_{k+1},\cdots,u_n}"] & \bigotimes_{i=1}^n E_i
\end{tikzcd}$$

第三段　任意の $v \in \bigotimes_{i=1}^k E_i$ に対して

$$\Psi_v : \bigoplus_{i=k+1}^{n} E_i \ni (u_{k+1}, \cdots, u_n) \longmapsto G_{u_{k+1},\cdots,u_n}(v)$$

を定めれば，Ψ_v は n 重線型であるから，定理 A.4.3 より

$$H_v(u_{k+1} \otimes \cdots \otimes u_n) = \Psi_v(u_{k+1}, \cdots, u_n)$$

を満たす線型写像 $H_v : \bigotimes_{i=k+1}^n E_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n E_i$ が存在する．

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i=k+1}^n E_i \arrow[d, "\otimes"'] \arrow[dr, "\Psi_v"] & \\
\bigotimes_{i=k+1}^n E_i \arrow[r, "H_v"] & \bigotimes_{i=1}^n E_i
\end{tikzcd}$$

いま，$v \longmapsto \Psi_v$ は線型であり，かつ Ψ_v と H_v は線型同型で結ばれているから $v \longmapsto H_v$ の線型性が従う．

第四段　H_v の線型性と $v \longmapsto H_v$ の線型性より

$$\Gamma : \left(\bigotimes_{i=1}^{k} E_i\right) \times \left(\bigotimes_{i=k+1}^{n} E_i\right) \ni (v, w) \longmapsto H_v(w)$$

により定める Γ は

$$\begin{aligned}
\Gamma(e_1 \otimes \cdots \otimes e_k, e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n) &= H_{e_1\otimes\cdots\otimes e_k}(e_{k+1} \otimes \cdots \otimes e_n)) \\
&= \Psi_{e_1\otimes\cdots\otimes e_k}(e_{k+1}, \cdots, e_n)) \\
&= G_{e_{k+1},\cdots,e_n}(e_1 \otimes \cdots \otimes e_k)) \\
&= \Phi_{e_{k+1},\cdots,e_n}(e_1, \cdots, e_k)) \\
&= e_1 \otimes \cdots \otimes e_n
\end{aligned} \tag{A.3}$$

を満たす双線型であり，定理 A.4.3 より

$$\begin{tikzcd}
\left(\bigotimes_{i=1}^k E_i\right) \times \left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i\right) \arrow[d, "\otimes"'] \arrow[dr, "\Gamma"] & \\
\left(\bigotimes_{i=1}^k E_i\right) \bigotimes \left(\bigotimes_{i=k+1}^n E_i\right) \arrow[r, "G"] & \bigotimes_{i=1}^n E_i
\end{tikzcd}$$

を可換にする線型写像 G が存在する．この G は F の逆写像である．実際，(A.3) より

$$\begin{aligned} F\circ G\left((e_1\otimes\cdots\otimes e_k)\otimes(e_{k+1}\otimes\cdots\otimes e_n)\right) &= F\left(\Gamma(e_1\otimes\cdots\otimes e_k, e_{k+1}\otimes\cdots\otimes e_n)\right) \\ &= F(e_1\otimes\cdots\otimes e_n) \\ &= (e_1\otimes\cdots\otimes e_k)\otimes(e_{k+1}\otimes\cdots\otimes e_n) \end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned} G\circ F\left(e_1\otimes\cdots\otimes e_n\right) &= G\left((e_1\otimes\cdots\otimes e_k)\otimes(e_{k+1}\otimes\cdots\otimes e_n)\right) \\ &= \Gamma\left(e_1\otimes\cdots\otimes e_k, e_{k+1}\otimes\cdots\otimes e_n\right) \\ &= e_1\otimes\cdots\otimes e_n \end{aligned}$$

が得られ $F^{-1} = G$ が従う． ∎

A.5 テンソル積の内積

A.6 クロスノルム

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ と考える．以下では $n(\geq 2)$ 個の Banach 空間で構成するテンソル積におけるクロスノルムを考察する．

定義 A.6.1 (クロスノルム). $\mathbb{K}$-Banach 空間の族 $(X_i)_{i=1}^n$ のテンソル積 $\bigotimes_{i=1}^n X_i$ において

$$\alpha(x_1\otimes\cdots\otimes x_n) \leq \|x_1\|_{X_1}\|x_2\|_{X_2}\cdots\|x_n\|_{X_n}, \qquad (x_i\in X_i), \tag{A.4}$$

$$\sup_{\substack{v\in\bigotimes_{i=1}^n X_i \\ v\neq 0}} \left|x_1^*\otimes\cdots\otimes x_n^*(v)\right| \leq \left\|x_1^*\right\|_{X_1^*}\left\|x_2^*\right\|_{X_2^*}\cdots\left\|x_n^*\right\|_{X_n^*}\alpha(v), \qquad (x_i^*\in X_i^*) \tag{A.5}$$

を満たすようなノルム $\alpha : \bigotimes_{i=1}^n X_i \longrightarrow [0,\infty)$ をクロスノルム (cross norm) と呼ぶ.

定理 A.6.2. $\mathbb{K}$-Banach 空間の族 $(X_i)_{i=1}^n$ に対するテンソル積 $\bigotimes_{i=1}^n X_i$ 上のクロスノルム α は次を満たす:

$$\alpha(x_1\otimes\cdots\otimes x_n) = \|x_1\|_{X_1}\cdots\|x_n\|_{X_n}, \qquad (x_i\in X_i,\ i=1,\cdots,n),$$

$$\left\|x_1^*\otimes\cdots\otimes x_n^*\right\|_{(\bigotimes_{i=1}^n X_i,\alpha)^*} = \left\|x_1^*\right\|_{X_1^*}\cdots\left\|x_n^*\right\|_{X_n^*}, \qquad (x_i^*\in X_i^*,\ i=1,\cdots,n).$$

証明. 先ず，Hahn-Banach の定理と式 (A.5) より

$$\begin{aligned} \|x_1\|_{X_1}\cdots\|x_n\|_{X_n} &= \sup_{\|x_1^*\|_{X_1^*}\leq 1}\left|\langle x_1, x_1^*\rangle\right|\cdots\sup_{\|x_n^*\|_{X_n^*}\leq 1}\left|\langle x_n, x_n^*\rangle\right| \\ &= \sup_{\substack{\|x_i^*\|_{X_i^*}\leq 1 \\ i=1,\cdots,n}}\left|x_1^*\otimes\cdots\otimes x_n^*(x_1\otimes\cdots\otimes x_n)\right| \\ &\leq \sup_{\substack{\|x_i^*\|_{X_i^*}\leq 1 \\ i=1,\cdots,n}}\left\|x_1^*\right\|_{X_1^*}\cdots\left\|x_n^*\right\|_{X_n^*}\alpha(x_1\otimes\cdots\otimes x_n) \\ &= \alpha(x_1\otimes\cdots\otimes x_n) \end{aligned}$$

が成り立ち定理の主張の第一式を得る．またこの結果より

$$\begin{aligned}
\| x_1^* \|_{X_1^*} \cdots \| x_n^* \|_{X_n^*} &= \sup_{\| x_1 \|_{X_1} \le 1} \left| \langle x_1, x_1^* \rangle \right| \cdots \sup_{\| x_n \|_{X_n} \le 1} \left| \langle x_n, x_n^* \rangle \right| \\
&= \sup_{\substack{\| x_i \|_{X_i} \le 1 \\ i=1,\cdots,n}} \left| x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \right| \\
&\le \sup_{\alpha(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \le 1} \left| x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \right| \\
&\le \sup_{\alpha(v) \le 1} \left| x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v) \right| \\
&= \| x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^* \|_{(\bigotimes_{i=1}^n X_i, \alpha)^*}
\end{aligned}$$

が成立し主張の第二式も得られる． ∎

以下，実際クロスノルムが存在することを示す．

定義 A.6.3 (インジェクティブノルム). $\mathbb{K}$-Banach 空間の族 $(X_i)_{i=1}^n$ に対し

$$\epsilon(v) := \sup_{\substack{\| x_i^* \|_{X_i^*} \le 1 \\ i=1,\cdots,n}} \left| x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v) \right|, \quad (v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

により定める ϵ をインジェクティブノルム (injective norm) と呼ぶ．

定理 A.6.4 (インジェクティブノルムは最小のクロスノルム). $\mathbb{K}$-Banach 空間の族 $(X_i)_{i=1}^n$ のテンソル積 $\bigotimes_{i=1}^n X_i$ において，インジェクティブノルムは最小のクロスノルムである．

証明.

第一段 ϵ が $\bigotimes_{i=1}^n X_i$ 上のノルムであることを示す．劣加法性と同次性は $x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*$ の線型性より従う．$v = 0 \Leftrightarrow \epsilon(v) = 0$ については, $v = 0$ なら任意の $x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*$ について $x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v) = 0$ が成り立ち $\epsilon(v) = 0$ が出る．逆に $v \neq 0$ とするとき，定理 A.4.1 より

$$v = \sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j, \quad (x_i^j \in X_i, \ j = 1, \cdots, m, \ i = 1, \cdots, n)$$

と表現できるが，定理 A.4.2 より $x_i^1 \neq 0 \ (i = 1, \cdots, n)$ と仮定できる．x_1^1 について，もし全ての $2 \le j \le m$ に対し $x_1^j = x_1^1$ が満たされているなら，$\hat{x}_1^* \in X_1^*$ を

$$\langle x_1^1, \hat{x}_1^* \rangle = \| x_1^1 \|_{X_1}, \quad \| \hat{x}_1^* \|_{X_1^*} = 1$$

を満たすように選ぶ (Hahn-Banach の定理)．$x_1^j \neq x_1^1$ を満たす j がある場合，

$$L_1 := \mathrm{Span}\left[\left\{ x_1^j \ ; \quad 2 \le j \le m, \ x_1^1 \neq x_1^j \right\} \right]$$

により閉部分空間を定めれば x_1^1 と L_1 との距離 d_1 は正であり，Hahn-Banach の定理より

$$\langle x_1, \hat{x}_1^* \rangle = 0 \ (\forall x_1 \in L_1), \quad \langle x_1^1, \hat{x}_1^* \rangle = d_1 > 0, \quad \| \hat{x}_1^* \|_{X_1^*} = 1$$

を満たす $\hat{x}_1^* \in X_1^*$ を取ることができる．同様に $\hat{x}_i^* \in X_i^*$ $(i = 2, \cdots, n)$ を選べば

$$\hat{x}_1^* \otimes \cdots \otimes \hat{x}_n^*(x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j) = \begin{cases} \hat{x}_1^* \otimes \cdots \otimes \hat{x}_n^*(x_1^1 \otimes \cdots \otimes x_n^1), & (x_i^j = x_i^1,\ i = 1, \cdots, n), \\ 0, & (\text{o.w.}), \end{cases}$$

$(j = 2, \cdots, m)$ が満たされるから

$$0 < \hat{x}_1^* \otimes \cdots \otimes \hat{x}_n^*(x_1^1 \otimes \cdots \otimes x_n^1) \leq \left| \hat{x}_1^* \otimes \cdots \otimes \hat{x}_n^*(v) \right| \leq \epsilon(v)$$

が成立し，対偶により $\epsilon(v) = 0 \Rightarrow v = 0$ が従う．

第二段　ϵ がクロスノルムであることを示す．先ず Hahn-Banach の定理より

$$\begin{aligned} \epsilon(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) &= \sup_{\substack{\|x_i^*\|_{X_i^*} \leq 1 \\ i=1,\cdots,n}} \left| x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \right| \\ &= \sup_{\|x_1^*\|_{X_1^*} \leq 1} \left| \langle x_1, x_1^* \rangle \right| \cdots \sup_{\|x_n^*\|_{X_n^*} \leq 1} \left| \langle x_n, x_n^* \rangle \right| \\ &= \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n}, \quad (\forall x_i \in X_i,\ i = 1, \cdots, n) \end{aligned}$$

が成り立つ．また 0 でない $x_i^* \in X_i^*$, $(i = 1, \cdots, n)$ に対しては

$$\begin{aligned} \left| x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v) \right| &\leq \left\| x_1^* \right\|_{X_1^*} \cdots \left\| x_n^* \right\|_{X_n^*} \left[\frac{x_1^*}{\left\| x_1^* \right\|_{X_1^*}} \otimes \cdots \otimes \frac{x_n^*}{\left\| x_n^* \right\|_{X_n^*}} \right](v) \\ &\leq \left\| x_1^* \right\|_{X_1^*} \cdots \left\| x_n^* \right\|_{X_n^*} \epsilon(v) \end{aligned}$$

が成立し，或る i で x_i^* が零写像のときは定理 A.4.6 より $x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^* = 0$ が満たされ，

$$\left\| x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^* \right\|_{(\bigotimes_{i=1}^n X_i, \epsilon)} \leq \left\| x_1^* \right\|_{X_1^*} \cdots \left\| x_n^* \right\|_{X_n^*}$$

を得る．

第三段　ϵ が最小のクロスノルムであることを示す．α を任意のクロスノルムとすれば

$$\left| x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v) \right| \leq \left\| x_1^* \right\|_{X_1^*} \cdots \left\| x_n^* \right\|_{X_n^*} \alpha(v), \quad (\forall v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

が成り立つから，特に $\left\| x_i^* \right\|_{X_i^*} \leq 1$, $(i = 1, \cdots, n)$ の範囲で sup を取れば

$$\epsilon(v) \leq \alpha(v), \quad (\forall v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

が従い ϵ の最小性が出る．■

定義 A.6.5 (プロジェクティブノルム). $\mathbb{K}$-Banach 空間の族 $(X_i)_{i=1}^n$ に対し，定理 A.4.3 により

$$\begin{array}{cccc} \Phi : \mathrm{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}\right) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}\right) \\ \cup & & \cup \\ T & \longmapsto & T \circ \otimes \end{array} \tag{A.6}$$

により線型同型 Φ が定まる．これを用いて

$$\pi(v) \coloneqq \sup_{\substack{b \in L^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}\right) \\ \|b\|_{L^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}\right)} \leq 1}} \left|\Phi^{-1}(b)(v)\right|, \quad \left(v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i\right)$$

により定める π をプロジェクティブノルム (projective norm) と呼ぶ.

定理 A.6.6 (プロジェクティブノルムは最大のクロスノルム). $\mathbb{K}$-Banach 空間の族 $(X_i)_{i=1}^n$ のテンソル積 $\bigotimes_{i=1}^n X_i$ 上にプロジェクティブノルム π を導入する．このとき式 (A.4) を満たす任意のセミノルム p に対し $p \leq \pi$ が成立する．特に π は最大のクロスノルムである.

証明.

第一段　π がノルムであることを示す．$v \neq 0$ とすれば，定理 A.6.4 の証明と同様にして

$$0 < \left|\hat{x}_1^* \otimes \cdots \otimes \hat{x}_n^*(v)\right|, \quad \left\|\hat{x}_i^*\right\|_{X_i^*} = 1, \quad (i = 1, \cdots, n)$$

を満たす $\hat{x}_i^* \in X_i^*$ $(i = 1, \cdots, n)$ が存在する.

$$b(x_1, \cdots, x_n) \coloneqq \langle x_1, \hat{x}_1^* \rangle \cdots \langle x_n, \hat{x}_n^* \rangle, \quad (x_i \in X_i,\ i = 1, \cdots, n)$$

により n 重線型写像 b を定めれば，$\|b\|_{L^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}\right)} \leq \left\|x_1^*\right\|_{X_1^*} \cdots \left\|x_n^*\right\|_{X_n^*} = 1$ かつ

$$0 < \left|\hat{x}_1^* \otimes \cdots \otimes \hat{x}_n^*(v)\right| = |\Phi^{-1}(b)(v)| \leq \pi(v)$$

が成立する．$\pi(0) = 0$ と劣加法性及び同次性は $\Phi^{-1}(b)$ の線型性より従う.

第二段　π がクロスノルムであることを示す．先ず，任意の $x_i \in X_i$, $(i = 1, \cdots, n)$ に対して

$$\begin{aligned} \pi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) &= \sup_{\substack{b \in L^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}\right) \\ \|b\|_{L^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}\right)} \leq 1}} \left|\Phi^{-1}(b)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)\right| \\ &\leq \sup_{\substack{b \in L^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}\right) \\ \|b\|_{L^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}\right)} \leq 1}} \|b\|_{L^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}\right)} \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n} \\ &= \|x_1\|_{X_1} \cdots \|x_n\|_{X_n} \end{aligned}$$

が成立する．また 0 でない $x_i^* \in X_i^*$, $(i = 1, \cdots, n)$ に対し

$$b(x_1, \cdots, x_n) \coloneqq \frac{x_1^*}{\left\|x_1^*\right\|_{X_1^*}}(x_1) \cdots \frac{x_n^*}{\left\|x_n^*\right\|_{X_n^*}}(x_n), \quad (x_i \in X_i,\ i = 1, \cdots, n)$$

により $\| b \|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K})} \leq 1$ を満たす有界 n 重線型 b を定めれば，π の定義より

$$\left|\Phi^{-1}(b)(v)\right| \leq \pi(v), \quad (\forall v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

が成り立つ．一方で写像のテンソル積の定義より

$$\Phi^{-1}(b) = \frac{x_1^*}{\| x_1^* \|_{X_1^*}} \otimes \cdots \otimes \frac{x_n^*}{\| x_n^* \|_{X_n^*}} = \frac{1}{\| x_1^* \|_{X_1^*} \cdots \| x_n^* \|_{X_n^*}} x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*$$

が満たされるから

$$\left|x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v)\right| \leq \| x_1^* \|_{X_1^*} \cdots \| x_n^* \|_{X_n^*} \pi(v), \quad (\forall v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

が従う．定理 A.4.6 より上式は $x_i^* = 0$ の場合も込めて成立するから

$$\| x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^* \|_{(\bigotimes_{i=1}^n X_i, \pi)^*} \leq \| x_1^* \|_{X_1^*} \cdots \| x_n^* \|_{X_n^*}$$

が得られる．

第三段　p を (A.4) を満たすセミノルムとし，$v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i$ を任意に取れば

$$p(v) = \phi_v(v), \quad |\phi_v(u)| \leq p(u) \quad (\forall u \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

を満たす $\phi_v \in (\bigotimes_{i=1}^n X_i, \pi)^*$ が存在する (Hahn-Banach の定理).

$$\begin{aligned} |(\phi_v \circ \otimes)(x_1, \cdots, x_n)| &= |\phi_v(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)| \\ &\leq p(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \\ &\leq \| x_1 \|_{X_1} \cdots \| x_n \|_{X_n}, \quad (\forall x_i \in X_i,\ i = 1, \cdots, n) \end{aligned}$$

が成り立つから $\| \phi_v \circ \otimes \|_{L^{(n)}(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K})} \leq 1$ が従い，π の定義より

$$p(v) = \phi_v(v) = \Phi^{-1}(\phi_v \circ \otimes)(v) \leq \pi(v)$$

が得られる．　■

定理 A.6.7 (プロジェクティブノルムの表現).　$\mathbb{K}$-Banach 空間の族 $(X_i)_{i=1}^n$ のテンソル積 $\bigotimes_{i=1}^n X_i$ にプロジェクトノルム π を導入する．このとき次が成り立つ:

$$\pi(v) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \| x_1 \|_{X_1} \cdots \| x_n \|_{X_n} \ ; \quad v = \sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j \right\}.$$

証明.

第一段　$x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ 上のセミノルム λ を次で定める:

$$\lambda(v) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \| x_1 \|_{X_1} \cdots \| x_n \|_{X_n} \ ; \quad v = \sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j \right\}, \quad (\forall v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i).$$

このとき λ が式 (A.4) かつ $\lambda \geq \pi$ を満たせば，定理 A.6.6 より $\lambda = \pi$ が従う．

第二段　λ がセミノルムであることを示す．実際，任意に $u, v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i$ を取り，

$$u = \sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j, \quad v = \sum_{k=1}^r a_1^k \otimes \cdots \otimes a_n^k$$

を一つの表現とすれば，λ の定め方より

$$\lambda(u+v) \leq \sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j + \sum_{k=1}^r a_1^k \otimes \cdots \otimes a_n^k$$

が成り立つ．右辺を移項して

$$\lambda(u+v) - \sum_{k=1}^r a_1^k \otimes \cdots \otimes a_n^k \leq \lambda(u) \leq \sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j$$

かつ

$$\lambda(u+v) - \lambda(u) \leq \lambda(v) \leq \sum_{k=1}^r a_1^k \otimes \cdots \otimes a_n^k$$

が従い λ の劣加法性を得る．また任意の $0 \neq \alpha \in \mathbb{K}$, $v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i$ に対し

$$v = \sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j$$

を一つの分割とすれば

$$\alpha v = \sum_{j=1}^m \left(\alpha x_1^j\right) \otimes \cdots \otimes x_n^j$$

は αv の一つの分割となるから

$$\lambda(\alpha v) \leq \sum_{j=1}^m \left\| \alpha x_1^j \right\|_{X_1} \cdots \left\| x_n^j \right\|_{X_n} = |\alpha| \sum_{j=1}^m \left\| x_1^j \right\|_{X_1} \cdots \left\| x_n^j \right\|_{X_n}$$

が成立し，v の分割について下限を取れば $\lambda(\alpha v) \leq |\alpha| \lambda(v)$ が従う．逆に

$$\alpha v = \sum_{k=1}^r a_1^k \otimes \cdots \otimes a_n^k$$

に対しては

$$\lambda(v) \leq \sum_{k=1}^r \left\| \frac{1}{\alpha} a_1^k \right\|_{X_1} \cdots \left\| a_n^k \right\|_{X_n} = \frac{1}{|\alpha|} \sum_{k=1}^r \left\| a_1^k \right\|_{X_1} \cdots \left\| a_n^k \right\|_{X_n}$$

が成り立ち $|\alpha| \lambda(v) \leq \lambda(\alpha v)$ が従う．$v = 0$ なら $v = 0 \otimes \cdots \otimes 0$ より $\lambda(v) = 0$ が満たされ

$$\lambda(\alpha v) = |\alpha| \lambda(v), \quad (\forall \alpha \in \mathbb{K},\ v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i)$$

が得られる．

第三段　λ が式 (A.4) を満たすことを示す．実際 λ の定め方より

$$\lambda(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \leq \| x_1 \|_{X_1} \cdots \| x_n \|_{X_n}, \quad (\forall x_i \in X_i,\ i = 1, \cdots, n)$$

が成り立つ．

第四段　$\lambda \geq \pi$ を示す．いま，任意に $v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i$ を取り，次の分割を持つとする:

$$v = \sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j.$$

$\| b \|_{L^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}\right)} \leq 1$ を満たす $b \in L^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}\right)$ と式 (A.6) の Φ に対し

$$\begin{aligned}\left|\Phi^{-1}(b)(v)\right| &\leq \sum_{j=1}^m \left|\Phi^{-1}(b)(x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j)\right| \\ &= \sum_{j=1}^m \left|b(x_1^j, \cdots, x_n^j)\right| \leq \sum_{j=1}^m \left\| x_1^j \right\|_{X_1} \cdots \left\| x_n^j \right\|_{X_n}\end{aligned}$$

が成り立つから，b に無関係に

$$\left|\Phi^{-1}(b)(v)\right| \leq \lambda(v)$$

が満たされ

$$\pi(v) = \sup_{\substack{b \in L^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}\right) \\ \| b \|_{L^{(n)}\left(\bigoplus_{i=1}^n X_i, \mathbb{K}\right)} \leq 1}} \left|\Phi^{-1}(b)(v)\right| \leq \lambda(v)$$

が従う． ∎

定理 A.6.8.　$\bigotimes_{i=1}^n X_i$ を $\mathbb{K}$-Banach 空間の族 $(X_i)_{i=1}^n$ のテンソル積とする．このとき $\bigotimes_{i=1}^n X_i$ 上の任意のノルム α に対し次が成立する:

$$\alpha \text{ がクロスノルム} \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon \leq \alpha \leq \pi.$$

証明.　$(\Rightarrow)$ はすでに示したから $(\Leftarrow)$ を示す．実際，任意の $x_i \in X_i$, $(i = 1, \cdots, n)$ に対して

$$\alpha(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \leq \pi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \leq \| x_1 \|_{X_1} \cdots \| x_n \|_{X_n}$$

が成立し，また任意の $x_i^* \in X_i^*$, $(i = 1, \cdots, n)$ に対して

$$\begin{aligned}\left|x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*(v)\right| &\leq \left\| x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^* \right\|_{\left(\bigotimes_{i=1}^n X_i, \epsilon\right)^*} \epsilon(v) \\ &\leq \left\| x_1^* \right\|_{X_1^*} \cdots \left\| x_n^* \right\|_{X_n^*} \alpha(v), \quad \left(\forall v \in \bigotimes_{i=1}^n X_i\right)\end{aligned}$$

が満たされ $\left\| x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^* \right\|_{\left(\bigotimes_{i=1}^n X_i, \alpha\right)^*} \leq \left\| x_1^* \right\|_{X_1^*} \cdots \left\| x_n^* \right\|_{X_n^*}$ が得られる． ∎