Rough path 勉強メモ
Rough path analysis:An Introduction

基礎工学研究科システム創成専攻修士 1 年
学籍番号 29C17095
百合川尚学

2018 年 4 月 6 日

目次

第 1 章

Notation

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$,

λ:Lebesgue measure.

第 2 章

Introduction

以下，$x \in \mathbb{R}^d$ に対して，各成分を x^i $(1 \leq i \leq d)$ とし $x = (x^1, \cdots, x^d)$ と表す．また実数の $d \times m$ 行列 f を $f = (f_{kj})$ と表す．$C^1 = C^1([0,T] \to \mathbb{R}^d)$ とおく．ただし端点においては片側微分を考える．区間 $[0,T]$ の分割を $D = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T\}$ で表現し $|D| \coloneqq \max_{1 \leq i \leq N} |t_i - t_{i-1}|$ とおく．また $\sup_D \cdots$ などと書く場合は，任意の分割数，分点で構成される全ての D にわたる上限を考える．

定理 2.0.1. 任意の $x \in C^1$，$f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m))$ に対し，次の極限が確定する:

$$\lim_{|D| \to 0} \sum_{i=1}^N f(x_{s_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) \in \mathbb{R}^m.$$

証明. $x = (x^1, \cdots, x^d), f = (f_{kj})_{1 \leq k \leq m, 1 \leq j \leq d}$ と書けば，

$$\sum_{i=1}^N f(x_{s_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})$$

の第 k $(1 \leq k \leq m)$ 成分は

$$\sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^N f_{kj}(x_{s_{i-1}})(x_{t_i}^j - x_{t_{i-1}}^j)$$

と表現できる．従って

$$\lim_{|D| \to 0} \sum_{i=1}^N f_{kj}(x_{s_{i-1}})(x_{t_i}^j - x_{t_{i-1}}^j)$$

が確定すれば各成分の極限が確定し主張を得る．x が C^1 級なので x^j も C^1 級である．また $f_{kj} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ も C_b^∞ に属する．分割 D に対し

$$S_D \coloneqq \sum_{i=1}^N M_i(t_i - t_{i-1}),$$
$$S_d \coloneqq \sum_{i=1}^N m_i(t_i - t_{i-1})$$

とおき，

$$S := \inf_D S_D, \quad s := \sup_D s_D$$

とおけば，

$$s_D \leq s \leq S \leq S_D, \quad s_D \leq \Sigma_D \leq S_D$$

が成立する．$s = S$ なら $\Sigma_D \longrightarrow S$ が従う．

定義 2.0.2. $I_{0,T}(x)$ の定義.

C^1 において次でノルム $\|\cdot\|_{C^1}$ を定める:

$$\|x\|_\infty := \sup_{t\in[0,T]} |x(t)|, \quad \left\|x'\right\|_\infty := \sup_{t\in[0,T]} |x'(t)|,$$
$$\|x\|_{C^1} := \|x\|_\infty + \|x\|_\infty .$$

定理 2.0.3. $x \longmapsto I_{0,T}(x)$ は連続である．

証明. C^1 は次のノルムで Banach 空間になる．ゆえに $x \longmapsto I_{0,T}(x)$ は距離空間から距離空間への対応であり点列連続性と連続性が一致するから，$x_n \longrightarrow x$ なら $I_{0,T}(x_n) \longrightarrow I_{0,T}(x)$ が従うことを示せばよい．実際，f, x の連続性より

$$\sum_{i=1}^N f(x^{(n)}_{s_{i-1}})(x^{(n)}_{t_i} - x^{(n)}_{t_{i-1}}) \longrightarrow \sum_{i=1}^N f(x_{s_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})$$

が成り立つ．

定義 2.0.4 (p-variation). $[0, T]$ 上の $\mathbb{R}^d$ 値関数 x に対し p-variation ノルムを次で定める:

$$\|x\|_p := \left\{\sup_D \sum_{i=1}^N \left|x_{t_i} - x_{t_{i-1}}\right|^p\right\}^{1/p}.$$

また線形空間 $B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$ を

$$B_{p,T}(\mathbb{R}^d) := \left\{\, x : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d \;;\quad x_0 = 0,\ x : \text{continuous},\ \|x\|_p < \infty \,\right\}$$

により定める．

定理 2.0.5. $\tilde{C}^1 := \left\{\, x \in C^1 \;;\quad x_0 = 0 \,\right\}$ とおくと，$\tilde{C}^1 \subset B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$ が成り立つ．

証明．　$x \in \tilde{C}^1$ に対して

$$M := \sum_{j=1}^{d} \sup_{x\in[0,T]} |x^j(t)|$$

とおけば，x' の連続性より $M < \infty$ が定まる．平均値の定理より，$|D| < 1$ を満たす分割 D に対して

$$\left\{ \sum_{i=1}^{N} |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^p \right\}^{1/p} \leq \left\{ \sum_{i=1}^{N} \| x \|_{C^1}^p \, (t_i - t_{i-1})^p \right\}^{1/p} \leq MT < \infty$$

が成立し $\| x \|_p \leq MT < \infty$ が従う[*1]．

定理 2.0.6.　$B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$ は Banach 空間である．

証明．　$(x^n)_{n=1}^{\infty} \subset B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$ を Cauchy 列とする．つまり任意の $\epsilon > 0$ に対して或る $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ が存在し

$$\| x^n - x^m \|_p = \left\{ \sup_D \sum_{i=1}^{N} \left| \left(x_{t_i}^n - x_{t_i}^m \right) - \left(x_{t_{i-1}}^n - x_{t_{i-1}}^m \right) \right|^p \right\}^{1/p} < \epsilon, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

を満たす．いま，任意の $t \in [0, T]$ に対して $[0, T]$ の分割 $\{0 = t_0 \leq t \leq T\}$ を考えれば

$$|x_t^n - x_t^m| < \epsilon, \quad (n, m > n_\epsilon)$$

が得られ，実数の完備性より或る $x_t \in \mathbb{R}^d$ が存在して

$$|x_t^n - x_t| < \epsilon \quad (n > n_\epsilon)$$

を満たす．実際，もし或る $n > n_\epsilon$ で $|x_t^n - x_t| =: \alpha \geq \epsilon$ が成り立つと，任意の $m > n_\epsilon$ に対して

$$|x_t^m - x_t| \geq |x_t^n - x_t| - |x_t^n - x_t^m| > \alpha - \epsilon$$

が従い $x_t^m \longrightarrow x_t$ に反する．ゆえに収束は t に関して一様であり，$t \longmapsto x_t$ は 0 出発かつ連続である．あとは $\| x^n - x \|_p \longrightarrow 0 \; (n \longrightarrow \infty)$ であればよい．

定理 2.0.7.　C^1 空間において，$\| \, \|_{C^1}$ で定まる位相は $\| \, \|_p$ で定まる位相より強い．特に，$B_{p,T}(\mathbb{R}^d)$ 上で考える写像 $x \longmapsto I_{p,T}(x)$ は $\| \cdot \|_p$ の定める位相により連続である．

証明．　任意の $x \in \tilde{C}^1$ に対して

$$\| x \|_p \leq T \| x \|_{C^1}$$

[*1] $S_D \geq 0$ ならば $(\sup_D S_D)^{1/p} = \sup_D S_D^{1/p}$ が成り立つ．

を満たすことを証明する．実際，任意の分割 D に対して

$$\sum_{i=1}^{N} |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}| \leq \sum_{i=1}^{N} \| x \|_{C^1} (t_i - t_{i-1}) = T \| x \|_{C^1}$$

が成り立つ． ∎

C^1 パス $[0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ に対し $f(x) = (f^i_j(x))$ の積分を

$$I_{s,t}(x) \coloneqq \int_s^t f(x_u)\, dx_u = \left(\sum_{j=1}^{d} \int_s^t f^i_j(x_u)\, dx^j_u \right)_i$$

により定める．このとき次が成り立つ

$$\begin{aligned}
I_{s,t}(x)_i &= \sum_{j=1}^{d} \int_s^t f^i_j(x_u)\, dx_u \\
&= \sum_{j=1}^{d} \int_s^t f^i_j(x_s) + f^i_j(x_u) - f^i_j(x_s)\, dx_u \\
&= \sum_{j=1}^{d} \int_s^t f^i_j(x_s) + \sum_{k=1}^{d} \left\{ \int_0^1 \partial_k f^i_j(x_s + \theta(x_u - x_s))\, d\theta \right\} (x^k_u - x^k_s)\, dx_u \\
&= \sum_{j=1}^{d} \int_s^t f^i_j(x_s) + \sum_{k=1}^{d} \left\{ \int_0^1 \partial_k f^i_j(x_s)\, d\theta \right\} (x^k_u - x^k_s)\, dx_u \\
&\quad + \sum_{j=1}^{d} \int_s^t \sum_{k=1}^{d} \left\{ \int_0^1 \partial_k f^i_j(x_s + \theta(x_u - x_s)) - \partial_k f^i_j(x_s)\, d\theta \right\} (x^k_u - x^k_s)\, dx_u
\end{aligned}$$