関数解析 I レポート

基礎工学研究科システム創成専攻修士 1 年
学籍番号 29C17095
百合川尚学
選択番号 [4][5][9][10][11][12][13]

2017 年 8 月 1 日

(約束及び定義)

- 係数体は複素数体 $\mathbb{C}$.
- 位相空間 X, Y に対し, $C(X, Y) = \{f \mid f$ は X から Y への連続写像 $\}$; $C(X) = C(X, \mathbb{C})$. $C_b(X) = \{f \in C(X) \mid f$ は有界 $\}$ は $\|u\| = \sup_{x\in X} |u(x)|$ をノルム (sup-norm) として Banach 空間である.
- s を複素数列全体のなす線形空間とする. $l^\infty = \{a = (a_n)_{n=1}^\infty \in s \mid \|a\|_{l^\infty} = \sup_n |a_n| < \infty\}$, $c_0 = \{a = (a_n)_{n=1}^\infty \in \mid \lim_{n\to\infty} a_n = 0\}$. このとき l^∞ は $\|a\|_{l^\infty}$ をノルムとして Banach 空間である.

[4]. $k \in \mathbb{N}_0$, $I = [a, b]$ とする. $C^k(I)$ は $|f|_k = \sum_{j=0}^k \sup_{x\in I} \left|f^{(j)}(x)\right|$ をノルムとして Banach 空間であることを示せ.

証明. 以下の手順で示す.

(i) $|\cdot|_k$ が $C^k(I)$ におけるノルムである.

(ii) $C^k(I)$ の $|\cdot|_k$ による Cauchy 列を取ると, 各 $j\,(= 0, 1, 2, \cdots, k)$ 階導関数列に対し或る I 上の連続関数 f^j が存在し, j 階導関数列は f^j に I 上で一様収束する.

(iii) 各 $j = 0, 1, 2, \cdots, k-1$, について f^j は I 上連続微分可能で $f^{j+1}(x) = \frac{d}{dx} f^j(x)\ (\forall x \in I)$ が成り立っている.

(i) $f, g \in C^k(I)$ と $\alpha \in \mathbb{C}$ を任意に取る. 正値性 $|f|_k \geq 0$ は右辺の各項が ≥ 0 であることから成り立つ. また $|f|_k = 0$ の場合, 右辺で $\sup_{x\in I} |f^{(j)}(x)| = 0\ (j = 0, 1, 2, \cdots, k)$ が成り立ち, 特に f は I 上で零写像であるとわかるから $f = 0$ である. 逆に f が I 上で零写像ならば全ての導関数が零写像になるため右辺は 0 になり, 従って $|f|_k = 0$ となる. 同次性は

$$|\alpha f|_k = \sum_{j=0}^k \sup_{x\in I} \left|\left(\alpha f^{(j)}\right)(x)\right| = \sum_{j=0}^k \sup_{x\in I} \left|\alpha f^{(j)}(x)\right| = \sum_{j=0}^k \sup_{x\in I} |\alpha| \left|f^{(j)}(x)\right| = |\alpha| \sum_{j=0}^k \sup_{x\in I} \left|f^{(j)}(x)\right| = |\alpha||f|_k$$

により示される. 三角不等式は

$$\begin{aligned}
|f+g|_k &= \sum_{j=0}^k \sup_{x\in I} \left|(f+g)^{(j)}(x)\right| \\
&= \sum_{j=0}^k \sup_{x\in I} \left|\left(f^{(j)} + g^{(j)}\right)(x)\right| \\
&\leq \sum_{j=0}^k \sup_{x\in I} \left|f^{(j)}(x) + g^{(j)}(x)\right| \\
&\leq \sum_{j=0}^k \left(\sup_{x\in I} \left|f^{(j)}(x)\right| + \sup_{x\in I} \left|g^{(j)}(x)\right|\right) = |f|_k + |g|_k
\end{aligned}$$

により示される.

(ii) $f_n \in C^k(I)\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ を $C^k(I)$ の $|\cdot|_k$ による Cauchy 列とする. 任意の $\epsilon > 0$ に対し或

る $N \in \mathbb{N}$ が存在して全ての $n, m > N$ で

$$\epsilon > |f_n - f_m|_k = \sum_{j=0}^{k} \sup_{x \in I} \left| f_n^{(j)}(x) - f_m^{(j)}(x) \right|$$

が成り立っているから，各 $j = 0, 1, 2, \cdots, k$ について $\left(f_n^{(j)}\right)_{n=1}^{+\infty}$ は sup-norm に関して Cauchy 列をなしている．$(C(I),\ \sup - \mathrm{norm})$ が Banach 空間であることが認められているから，各 $j = 0, 1, 2, \cdots, k$ についてそれぞれ或る I 上の連続関数 f^j が存在して，$\left(f_n^{(j)}\right)_{n=1}^{+\infty}$ は f^j に sup-norm で収束，即ち I 上で一様収束する．

(iii) 上で取った $(f_n)_{n=1}^{+\infty} \subset C^k(I)$ について，全ての $n \in \mathbb{N}$ と $j = 0, 1, 2, \cdots, k-1$ に対して次の関係が成り立っている．

$$f_n^{(j)}(x) - f_n^{(j)}(b) = \int_b^x f_n^{(j+1)}(t)\,dt, \quad (\forall x \in I).$$

ここで (ii) の結果から，任意の $x \in I$ と $\epsilon > 0$ に対し或る $N = N(j, \epsilon) \in \mathbb{N}$ が存在して全ての $n > N$ で

$$\left| f^j(x) - f_n^{(j)}(x) \right| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \left| f_n^{(j+1)}(x) - f^{j+1}(x) \right| < \frac{\epsilon}{3(b-a)}$$

が成り立つようにできるから，同じ n について

$$\begin{aligned}
\left| \left(f^j(x) - f^j(b)\right) - \int_b^x f^{j+1}(t)\,dt \right| &= \left| \left(f^j(x) - f^j(b)\right) - \left(f_n^{(j)}(x) - f_n^{(j)}(b)\right) + \int_b^x f_n^{(j+1)}(t)\,dt - \int_b^x f^{j+1}(t)\,dt \right| \\
&\leq \left| f^j(x) - f_n^{(j)}(x) \right| + \left| f^j(b) - f_n^{(j)}(b) \right| + \int_b^x \left| f_n^{(j+1)}(t) - f^{j+1}(t) \right| dt \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + (b-a)\frac{\epsilon}{3(b-a)} = \epsilon
\end{aligned}$$

が成り立つ．ϵ は任意だから

$$f^j(x) - f^j(b) = \int_b^x f^{j+1}(t)\,dt, \quad (\forall x \in I,\ j = 0, 1, 2, \cdots, k-1)$$

が示されたことになる．右辺は連続関数 f^{j+1} の積分だから左辺 f^j は x に関して微分可能関数 (端点は片側微分を考える) となり，導関数は f^{j+1} である．ゆえに $f^0 \in C^k(I)$ が示される．表記を改めて $f := f^0,\ f^{(j)} := f^j\ (j = 1, 2, \cdots, k)$ と表せば，(ii) の結果より

$$|f_n - f|_k = \sum_{j=0}^{k} \sup_{x \in I} \left| f_n^{(j)}(x) - f^{(j)}(x) \right| \longrightarrow 0 \quad (n \to +\infty)$$

が成り立つことで $C^k(I)$ が $|\cdot|_k$ をノルムとして Banach 空間をなしていると示される． ∎

[5]. $X = C([0,1])$ を sup-norm の入った Banach 空間とする．$0 < a < 1$, $Y = \{f \in X\,;\ [0,\ a]$ 上で $f(t) = 0\}$ とおく．

(1) Y が X の閉線形部分空間であることを示せ．

(2) X/Y と $C([0,\ a])$(sup-norm を入れる) は Banach 空間として同型であることを示せ．

証明.

(1) Y が X の線形部分空間であることは，任意の $f, g \in Y$ と任意の複素数 $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t) = 0, \quad (\forall t \in [0,\ a])$$
$$(\alpha f)(t) = \alpha f(t) = 0, \quad (\forall t \in [0,\ a])$$

が成り立つことで示される．後は sup-norm に関して Y が閉集合となっていることを示せばよい．$f_n \in Y$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を sup-norm に関する Cauchy 列とする．$(C([0,\ 1]),\ \mathrm{sup-norm})$ の完備性から $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ は或る $f \in C([0,\ 1])$ に $[0,\ 1]$ 上で一様に収束するが，もし或る $x \in [0,\ a]$ について $|f(x)| > 0$ であるならば，この x において $f_n(x) = 0$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ であることから

$$0 < |f(x)| = |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{t \in [0,\ 1]} |f_n(t) - f(t)|, \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

となり $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ が f に収束することに反する．従って f も $[0,\ a]$ 上で 0 でなくてはならず，f は Y に属することになる．これは Y が sup-norm の下で完備ノルム空間となっていることを主張し，以上より Y は X の閉線形部分空間であると示された．

(2) X の sup-norm を $\|\cdot\|$ で表し，X を Y で割った商空間 X/Y の元を $[f]$ (代表元 $f \in X$) で表す．Y が閉線形部分空間であるから X/Y は

$$\|[f]\|_{X/Y} := \inf_{g \in Y} \|f - g\|, \qquad ([f] \in X/Y)$$

をノルムとしてノルム空間となり，さらに $(X,\ \|\cdot\|)$ が Banach 空間であるから $(X/Y,\ \|\cdot\|_{X/Y})$ も Banach 空間となる．任意の $[f] \in X/Y$ について $f_1, f_2 \in [f]$ は $f_1 - f_2 \in Y$ を満たすから即ち

$$f_1(t) = f_2(t) \quad (\forall t \in [0,\ a])$$

が成り立っている．ここで

$$\|[f]\|_{X/Y} = \inf_{g \in Y} \|f - g\| = \inf_{g \in Y} \sup_{t \in [0,\ 1]} |f(t) - g(t)| = \sup_{t \in [0,\ a]} |f(t)| \tag{1}$$

が成り立つことを示す．任意の $g \in Y$ に対して

$$\sup_{t \in [0,\ a]} |f(t)| = \sup_{t \in [0,\ a]} |f(t) - g(t)| \leq \sup_{t \in [0,\ 1]} |f(t) - g(t)|$$

が成り立つから

$$\sup_{t \in [0,\ a]} |f(t)| \leq \inf_{g \in Y} \sup_{t \in [0,\ 1]} |f(t) - g(t)| = \|[f]\|_{X/Y} \tag{2}$$

の関係がまず示される．後は式 (2) 右辺の inf を実現する $g \in Y$ の存在を言えばよい．例えば区間 $[a,\ 1]$ 上で f と $|f(a)|$ の距離を保ち続ける連続関数 g により inf は実現される．つまり $f(a)$ の正負に応じて

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0,\ a] \\ f(t) - |f(a)| & t \in [a,\ 1] \end{cases}, \qquad (f(a) \geq 0)$$

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0,\ a] \\ f(t) + |f(a)| & t \in [a,\ 1] \end{cases}, \qquad (f(a) < 0)$$

となるような $g \in Y$ を考えればよい．X/Y と $C([0,\ a])$ が Banach 空間として同型であることを示すために，まず X/Y から $C([0,\ a])$ への線形全単射が存在することを示す．$[f]$ $(\in X/Y)$ の代表元の定義域を $[0,\ a]$ に制限した関数は $C([0,\ a])$ の或る元に一致し，$[f_1] \neq [f_2]$ $([f_1],[f_2] \in X/Y)$ ならば対応する $C([0,\ a])$ の元も違う．一方で $C([0,\ a])$ の任意の元は定義域を $[0,\ 1]$ に拡張 (例えば $[a,\ 1]$ 上では適当な一次関数でおく) すれば $X = C([0,\ 1])$ の元となるから X/Y の或る同値類に属することになる．従って写像 $X/Y \ni [f] \longmapsto f|_{[0,\ a]} \in C([0,\ a])$ は X/Y から $C([0,\ a])$ への全単射である．この写像を T と表す．式 (1) により T は $\|[f]\|_{X/Y} = \left\| f|_{[0,\ a]} \right\| = \|T[f]\|$ の意味で等長である．そして T の線型性は

$$
\begin{aligned}
&T([f]+[h]) = T[f+h] = (f+h)|_{[0,\ a]} = f|_{[0,\ a]} + h|_{[0,\ a]} = T[f] + T[h],\\
&T(\alpha[f]) = T[\alpha f] = (\alpha f)|_{[0,\ a]} = \alpha f|_{[0,\ a]} = \alpha T[f]
\end{aligned}
$$

により示される．ゆえに T は $X/Y \longmapsto C([0,\ a])$ の同型写像であり，X/Y と $C([0,\ a])$ が Banach 空間として同型であることが示された． ∎

[6]. $I = [0,\ 1]$ とし，$X = C(I)$ を sup-norm の入った Banach 空間とする．$K \in C(I \times I)$ とし，$A = \sup_{(t,s)\in I\times I} |K(t,s)|$ とおく．$u \in X$ に対して $Tu : I \longmapsto \mathbb{C}$ を次で定める:

$$Tu(t) = \int_0^t K(t,s)u(s)\,ds,\ (t \in I).$$

(1) $u \in X$ ならば $Tu \in X$ を示せ．

(2) 写像 $X \ni u \longmapsto Tu \in X$ を同じ記号 T であらわすとき，$T \in B(X)$ 及び $\|T^n\| \leq A^n/n!$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ を示せ．

(3) $I - T$ は逆作用素を持ち，$(I-T)^{-1} \in B(X)$ であることを示せ．ただし I は X の高等写像である．

証明． X における sup-norm を $\|\cdot\|_X$ と表す．また $T^0 = I$(恒等写像) として考える．

(1) $u \in X$ に対して Tu が I 上で連続であることを示せばよい．任意の正数 $\epsilon > 0$ に対して $\delta = \epsilon/A\|u\|_X$ と取れば，$t \in [0,\ 1)$ と $t+h \in [0,\ 1] \cap (t, t+\delta)$ に対して

$$
\begin{aligned}
|Tu(t+h) - Tu(t)| &= \left| \int_0^{t+h} K(t,s)u(s)\,ds - \int_0^t K(t,s)u(s)\,ds \right|\\
&\leq \left| \int_t^{t+h} K(t,s)u(s)\,ds \right|\\
&\leq \int_t^{t+h} |K(t,s)||u(s)|\,ds\\
&\leq \int_t^{t+h} \sup_{(t,s)\in I\times I} |K(t,s)| \sup_{s\in I} |u(s)|\,ds\\
&\leq A\|u\|_X h < \epsilon
\end{aligned}
$$

が成り立つことにより Tu が $[0,\ 1)$ 上右連続であることが示される．同様にして Tu が $(0,\ 1]$ 上で左連続であることも示されるから，$Tu \in X$ が示される．

(2) (1) の結果より $X \ni u \longmapsto Tu \in X$ が判っているから，後は写像 $T : X \longmapsto X$ の線型性を示せば，T が X を定義域とする線型作用素であること，即ち $T \in B(X)$ が示される．T の線型性は，任意の $u, v \in X,\ \alpha \in \mathbb{C},\ t \in I$ に対して

$$\begin{aligned}
T(u+v)(t) &= \int_0^t K(t,s)(u+v)(s)\,ds \\
&= \int_0^t K(t,s)(u(s)+v(s))\,ds \\
&= \int_0^t K(t,s)u(s)\,ds + \int_0^t K(t,s)v(s)\,ds = Tu(t) + Tv(t), \\
T(\alpha u)(t) &= \int_0^t K(t,s)(\alpha u)(s)\,ds \\
&= \int_0^t K(t,s)(\alpha u(s))\,ds \\
&= \alpha \int_0^t K(t,s)u(s)\,ds = \alpha Tu(t)
\end{aligned}$$

が成り立つことにより示される．次に $\| T^n \| \leq A^n/n!\ (n \in \mathbb{N}_0)$ を示すが，その準備に次のことを示す．

$$|T^n u(t)| \leq \frac{A^n}{n!} \| u \|_X\, t^n, \quad (t \in I,\ n = 1, 2, 3, \cdots). \tag{3}$$

証明は数学的帰納法による．$n = 1$ のとき

$$\begin{aligned}
|Tu(t)| &= \left| \int_0^t K(t,s)u(s)\,ds \right| \\
&\leq \int_0^t |K(t,s)||u(s)|\,ds \\
&\leq \int_0^t \sup_{(t,s)\in I\times I} |K(t,s)| \sup_{s\in I} |u(s)|\,ds \\
&\leq A \| u \|_X \int_0^t ds \\
&= A \| u \|_X\, t
\end{aligned}$$

が成り立つ．$n = k$ のとき (3) を仮定すると，

$$\begin{aligned}
|T^{k+1}u(t)| = |T(T^k u)(t)| &= \left| \int_0^t K(t,s)T^k u(s)\,ds \right| \\
&\leq \int_0^t |K(t,s)||T^k u(s)|\,ds \\
&\leq \int_0^t \sup_{(t,s)\in I\times I} |K(t,s)| \frac{A^k}{k!} \| u \|_X\, s^k\,ds \\
&\leq \frac{A^{k+1}}{(k+1)!} \| u \|_X\, t^{k+1}
\end{aligned}$$

となることにより (3) が任意の $n \in \mathbb{N}$ で成立すると示された．従って $t \in I$ についての上限を取れば

$$\| T^n u \|_X = \sup_{t\in I} |T^n u(t)| \leq \sup_{t\in I} \frac{A^n}{n!} \| u \|_X\, t^n = \frac{A^n}{n!} \| u \|_X, \quad (\forall u \in X,\ n = 1, 2, 3, \cdots)$$

となる．$n=0$ の場合は，$\| Iu \|_X = \| u \|_X$ $(\forall u \in X)$ により $\left\| T^0 \right\| = \| I \| = 1$ である．以上より $\| T^n \| \leq A^n/n!$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ となることが示された．

(3) $(X, \|\cdot\|_X)$ が Banach 空間であるから $B(X)$ も作用素ノルムの下で Banach 空間となっている．従って級数

$$\sum_{n=0}^{+\infty} T^n \tag{4}$$

が収束することの十分条件は

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \| T^n \| < +\infty$$

が成り立つことである．今，(2) の結果より

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \| T^n \| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} = e^A < +\infty$$

が成り立っているから (4) は収束する．つまり

$$T^* \coloneqq \sum_{n=0}^{+\infty} T^n$$

と表せば T^* は $B(X)$ の元であり，部分和を $T_N \coloneqq \sum_{n=0}^{N} T^n$ $(N = 0, 1, 2, \cdots)$ と表現して $\| T_N - T^* \| \to 0$ $(N \to +\infty)$ が成り立っていることになる．任意の $u \in X$ に対して

$$\| (TT^* - TT_N)u \|_X = \| TT^*u - TT_Nu \|_X = \| T(T^*u) - T(T_Nu) \|_X = \| T(T^*u - T_Nu) \|_X = \| T(T^* - T_N)u \|_X$$

と

$$\| (T^*T - T_NT)u \|_X = \| T^*Tu - T_NTu \|_X = \| T^*(Tu) - T_N(Tu) \|_X = \| (T^* - T_N)Tu \|_X$$

が成り立つことから，

$$\| TT^* - TT_N \| \leq \| T \| \| T^* - T_N \| \longrightarrow 0 \ (N \longrightarrow +\infty) \tag{5}$$

と

$$\| T^*T - T_NT \| \leq \| T^* - T_N \| \| T \| \longrightarrow 0 \ (N \longrightarrow +\infty) \tag{6}$$

が成り立つ．(5) により

$$TT^* = \lim_{N\to\infty} TT_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N+1} T^n = \sum_{n=1}^{+\infty} T^n = T^* - I$$

が成り立つから $I = T^* - TT^* = (I - T)T^*$ と表現でき，また (6) により

$$T^*T = \lim_{N\to\infty} T_NT = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N+1} T^n = \sum_{n=1}^{+\infty} T^n = T^* - I$$

も成り立つから $I = T^* - T^*T = T^*(I - T)$ と表現できる．ゆえに $I = (I - T)T^* = T^*(I - T)$ が成り立ち，この等式は $I - T$ が $X \longmapsto X$ の全単射であり $T^* \in B(X)$ を逆写像にもつことを示している． ∎

[9]. $(S,\mathfrak{M},\mu)$ は $\sigma-$ 有限な測度空間，$X=\mathrm{L}^2(S,\mathfrak{M},\mu)=\mathrm{L}^2(\mu)$ とする．可測関数 $a:S\to\mathbb{C}$ に対して，X 上の掛け算作用素 M_a を次で定める：

$$D(M_a)=\{u\in X\,|\,au\in X\},\quad (M_au)(x)=a(x)u(x)\ (x\in S).$$

(1) $D(M_a)$ が X で稠密であることを示せ．

(2) $a\in\mathrm{L}^\infty(S,\mathfrak{M},\mu)$ ならば $M_a\in B(X)$ であり，$\|M_a\|=\|a\|_{\mathrm{L}^\infty(\mu)}$ が成り立つことを示せ．

(3) 逆に $M_a\in B(X)$ ならば $a\in\mathrm{L}^\infty(S,\mathfrak{M},\mu)$ であることを示せ．

証明.

(1) 任意の $v\in X$ に対して $v_n:=v\mathbb{1}_{(|a|\le n)}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ として関数列 $(v_n)_{n=1}^\infty$ を作る．ただし $\mathbb{1}_{(|a|\le n)}$ は定義関数で $|a(x)|\le n$ となる $x\in S$ の集合の上で 1，その外では 0 となるものである．全ての $x\in S$ で $|v_n(x)|\le|v(x)|$ となるから $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset X$ である．さらに全ての $n\in\mathbb{N}$ について

$$\int_S|a(x)v_n(x)|^2\mu(dx)=\int_{(|a|\le n)}|a(x)v(x)|^2\mu(dx)\le n^2\int_S|v(x)|^2\mu(dx)$$

が成り立つから $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset D(M_a)$ でもある．X のノルムを $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^2(\mu)}$ で表せば

$$\|v-v_n\|_{\mathrm{L}^2(\mu)}^2=\int_S|v(x)-v_n(x)|^2\,\mu(dx)=\int_S\mathbb{1}_{(|a|>n)}(x)|v(x)|^2\,\mu(dx)\tag{7}$$

となり，a は $\mathbb{C}$ 値であるから各点 $x\in S$ で $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{1}_{(|a|>n)}(x)=0$ が成り立つ．式 (7) の右辺の被積分関数は n に関係なく可積分関数 $|v|^2$ で抑えられ各点で $n\to+\infty$ で 0 に収束するから，Lebesgue の収束定理を適用すれば

$$\lim_{n\to+\infty}\|v-v_n\|_{\mathrm{L}^2(\mu)}^2=\lim_{n\to+\infty}\int_S\mathbb{1}_{(|a|>n)}(x)|v(x)|^2\,\mu(dx)=\int_S\lim_{n\to+\infty}\mathbb{1}_{(|a|>n)}(x)|v(x)|^2\,\mu(dx)=0$$

が成立する．これはノルム空間 $X=\left(X,\ \|\cdot\|_{\mathrm{L}^2(\mu)}\right)$ において v の任意の近傍に $D(M_a)$ の元 v_n が存在することを表していて，v は任意に選んでいたから $D(M_a)$ は X で稠密であると示された．

(2) 任意の $a\in\mathrm{L}^\infty(S,\mathfrak{M},\mu)$ に対して，$\|a\|_{\mathrm{L}^\infty(\mu)}$ は

$$\|a\|_{\mathrm{L}^\infty(\mu)}=\inf\{b\in[0,+\infty)\,|\,\mu(x\in S\,|\,|a(x)|>b)=0\}$$

と表される．特に

$$N_m:=\left\{x\in S\ \middle|\ |a(x)|\ge\|a\|_{\mathrm{L}^\infty(\mu)}+1/m\right\},\quad(m=1,2,3,\cdots)$$

と置けば $\mu(N_m)=0$ $(m=1,2,3,\cdots)$ であって，μ 零集合 N を

$$N:=\bigcup_{m=1}^\infty N_m$$

で定めれば

$$|a(x)|\le\|a\|_{\mathrm{L}^\infty(\mu)},\quad(\forall x\in S\cap N^c)\tag{8}$$

が成り立つ．また $0 < c < \|a\|_{\mathrm{L}^\infty(\mu)}$ となるような任意の c については

$$\mu(\ \{x \in S \mid |a(x)| > c\}\ ) > 0 \tag{9}$$

が成り立つことにも注意しておく．全ての $u \in X$ に対して，(8) により

$$\begin{aligned}
\|M_a u\|^2_{\mathrm{L}^2(\mu)} &= \int_S |a(x)u(x)|^2\,\mu(dx) \\
&= \int_{S\cap N^c} |a(x)u(x)|^2\,\mu(dx) \\
&\leq \int_{S\cap N^c} \|a\|^2_{\mathrm{L}^\infty(\mu)}\,|u(x)|^2\,\mu(dx) \\
&= \int_S \|a\|^2_{\mathrm{L}^\infty(\mu)}\,|u(x)|^2\,\mu(dx) = \|a\|^2_{\mathrm{L}^\infty(\mu)}\,\|u\|_{\mathrm{L}^2(\mu)}
\end{aligned}$$

が成り立っていることから，$\|M_a\| \leq \|a\|_{\mathrm{L}^\infty(\mu)}$ であり $M_a \in B(X)$ が示される．さらに，$(S, \mathfrak{M}, \mu)$ が $\sigma-$ 有限な測度空間であるという条件の下では，$\|M_a\| = \|a\|_{\mathrm{L}^\infty(\mu)}$ であることが次のように示される．$\|a\|_{\mathrm{L}^\infty(\mu)} = 0$ ならば明らかに M_a は零作用素で $0 = \|M_a\| = \|a\|_{\mathrm{L}^\infty(\mu)}$ である．$\|a\|_{\mathrm{L}^\infty(\mu)} > 0$ である場合，$\|a\|_{\mathrm{L}^\infty(\mu)} > \epsilon > 0$ を満たすような ϵ を任意に取り，

$$G_\epsilon := \left\{x \in S \cap N^c \;\middle|\; \|a\|_{\mathrm{L}^\infty(\mu)} - \epsilon < |a(x)|\right\}$$

として μ 可測集合 G_ϵ を作る．(9) により，$\mu(G_\epsilon) > 0$ であることが次で示される．

$$\begin{aligned}
\mu(G_\epsilon) &= \mu\left(\left\{x \in S \;\middle|\; \|a\|_{\mathrm{L}^\infty(\mu)} - \epsilon < |a(x)|\right\} \cap N^c\right) \\
&= \mu\left(\left\{x \in S \;\middle|\; \|a\|_{\mathrm{L}^\infty(\mu)} - \epsilon < |a(x)|\right\}\right) & (\because \mu(N) = 0) \\
&> 0. & (\because (9)).
\end{aligned}$$

$\sigma-$ 有限の仮定より，単調増大な μ 可測集合列 $S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \cdots$ で $\mu(S_k) < +\infty$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ と $\cup_{k=1}^\infty S_k = S$ を満たすものが存在して

$$0 < \mu(G_\epsilon) = \lim_{k\to\infty} \mu(S_k \cap G_\epsilon)$$

となるから，必ず或る S_k に対して

$$r_\epsilon := \mu(S_k \cap G_\epsilon) > 0$$

となっている．

$$u_\epsilon(x) := \begin{cases} 1/\sqrt{r_\epsilon} & x \in S_k \cap G_\epsilon \\ 0 & x \notin S_k \cap G_\epsilon \end{cases}$$

と定義すれば，$\mu(S_k \cap G_\epsilon) < +\infty$ であるから $u_\epsilon \in X$ であって

$$\|u_\epsilon\|_{\mathrm{L}^2(\mu)} = 1$$

となっている．この u_ϵ に対して

$$\left(\|a\|_{\mathrm{L}^\infty(\mu)} - \epsilon\right)^2 < \int_{S_k\cap G_\epsilon} |a(x)u_\epsilon(x)|^2\,\mu(dx) = \int_S |a(x)u_\epsilon(x)|^2\,\mu(dx) \leq \|a\|^2_{\mathrm{L}^\infty(\mu)}$$

により

$$\|a\|_{\mathrm{L}^\infty(\mu)} - \epsilon < \|M_a u_\epsilon\|_{\mathrm{L}^2(\mu)} \leq \|a\|_{\mathrm{L}^\infty(\mu)}$$

が成り立っているから，先に示した $\| M_a \| \leq \| a \|_{\mathrm{L}^\infty(\mu)}$ と合わせて

$$\| a \|_{\mathrm{L}^\infty(\mu)} - \epsilon < \sup_{0 \neq u \in X} \frac{\| M_a u \|_{\mathrm{L}^2(\mu)}}{\| u \|_{\mathrm{L}^2(\mu)}} = \| M_a \| \leq \| a \|_{\mathrm{L}^\infty(\mu)}$$

である．$\epsilon > 0$ は任意に取っていたから，$\epsilon \to 0$ で考えれば

$$\| a \|_{\mathrm{L}^\infty(\mu)} = \| M_a \|$$

が示されたことになる．

(3) $M_a \in B(X)$ ならば

$$\int_S |a(x)u(x)|^2 \, \mu(dx) = \| M_a u \|^2_{\mathrm{L}^2(\mu)} \leq \| M_a \|^2 \, \| u \|^2_{\mathrm{L}^2(\mu)} = \| M_a \|^2 \int_S |u(x)|^2 \, \mu(dx)$$

が成立している．$(S, \mathfrak{M}, \mu)$ が $\sigma-$ 有限な測度空間であるという条件の下では

$$\mu\left(\{ x \in S \mid |a(x)| > \| M_a \| \} \right) = 0$$

が成り立つことを示す．これが示されれば μ-零集合を除いて a は有界となるから $a \in \mathrm{L}^\infty(S, \mathfrak{M}, \mu)$ が従う．$\sigma-$ 有限の仮定より，単調増大な μ 可測集合列 $S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \cdots$ で $\mu(S_k) < +\infty$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ と $\cup_{k=1}^\infty S_k = S$ を満たすものが存在する．μ 可測集合

$$G := \{ x \in S \mid |a(x)| > \| M_a \| \}$$

について，これが仮に $\mu(G) > 0$ であるとすると

$$0 < \mu(G) = \lim_{k \to \infty} \mu(S_k \cap G)$$

により或る $K \in \mathbb{N}$ が存在して $\mu(S_k \cap G) > 0$ $(\forall k > K)$ が成立する．$k > K$ を満たす k を選んで

$$u(x) = \begin{cases} 1 & x \in S_k \cap G \\ 0 & x \notin S_k \cap G \end{cases}$$

と置けば，$\mu(S_k \cap G) < +\infty$ であることから $u \in X$ であって，

$$\| u \|^2_{\mathrm{L}^2(\mu)} = \int_S |u(x)|^2 \, \mu(dx) = \int_{S_k \cap G} |u(x)|^2 \, \mu(dx) = \mu(S_k \cap G)$$

が成り立っている．G 上で $|a(x)| > \| M_a \|$ であるから

$$\begin{aligned} \| M_a \|^2 \, \| u \|^2_{\mathrm{L}^2(\mu)} &= \| M_a \|^2 \int_S |u(x)|^2 \, \mu(dx) \\ &= \| M_a \|^2 \int_{S_k \cap G} |u(x)|^2 \, \mu(dx) \\ &< \int_{S_k \cap G} |a(x)u(x)|^2 \, \mu(dx) \\ &= \int_S |a(x)u(x)|^2 \, \mu(dx) \\ &\leq \| M_a \|^2 \, \| u \|^2_{\mathrm{L}^2(\mu)} \end{aligned}$$

となるが，最右辺と最左辺を $\| u \|^2_{\mathrm{L}^2(\mu)}$ で割ると

$$\| M_a \| < \| M_a \|$$

と矛盾が出る．従って $\mu(G) = 0$ でなくてはならない． ∎

[10]. X をノルム空間，X_0 をその部分空間とする．$i\,:\,X_0 \to X$ を $i(x) = x\,(x \in X_0)$ なる包含写像とする．$T\,:\,X^* \ni x^* \longmapsto x^* \circ i \in X_0^*$ により線型写像を定める．

(1) T は連続かつ全射であることを示せ．

(2) X_0 が X で稠密ならば，T はノルム空間としての同型写像であることを示せ．

(3) X_0 が X で稠密でないならば，T は単射でないことを示せ．

証明． X, X^*, X_0^* におけるノルムをそれぞれ $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_{X^*}$, $\|\cdot\|_{X_0^*}$ で表現する．

(1) 任意の $x^* \in X^*$ と $u \in X_0$ に対して

$$|(x^* \circ i)\,(u)| = |x^*(u)| \leq \|\,x^*\,\|_{X^*}\,\|\,u\,\|_X$$

が成り立つから $\|\,x^* \circ i\,\|_{X_0^*} \leq \|\,x^*\,\|_{X^*}$ $(\forall x^* \in X^*)$ が成立する．従って

$$\|\,T x^*\,\|_{X_0^*} = \|\,x^* \circ i\,\|_{X_0^*} \leq \|\,x^*\,\|_{X^*} \quad (\forall x^* \in X^*)$$

となり T が有界作用素であることが示される．T が全射であることは Hahn-Banach の定理による．任意の $f_0 \in X_0^*$ に対して X 上のセミノルムとして $X \ni x \longmapsto \|\,f_0\,\|_{X_0^*}\,\|\,x\,\|_X \in \mathbb{C}$ を考えれば

$$|f_0(x)| \leq \|\,f_0\,\|_{X_0^*}\,\|\,x\,\|_X \quad (\forall x \in X_0)$$

が成り立っているから，Hahn-Banach の定理が適用されて X 上の線型汎関数 $f \in X^*$ で

$$\begin{cases} |f(x)| \leq \|\,f_0\,\|_{X_0^*}\,\|\,x\,\|_X & (\forall x \in X), \\ f(x) = f_0(x) & (\forall x \in X_0) \end{cases}$$

を満たすものが存在する．明らかに $f \circ i = f_0$ が成り立っているから T が全射であることが示された．

(2) X_0 が X で稠密であるなら，任意の $f_0 \in X_0^*$ はノルムを変えることなく $f \in X^*$ に一意に拡張されるということが示される．まずはこのことを証明する．これが示されれば，(1) の結果と合わせて

- $T\,:\,X \longmapsto X_0$ は線型全単射である．
- $\|\,T x^*\,\|_{X_0^*} = \|\,x^* \circ i\,\|_{X_0^*} = \|\,x^*\,\|_{X^*}$

が成り立つことが示され，T がノルム空間としての同型写像であると判る．X_0 が X で稠密であるということにより，任意の $x \in X$ に対して $x_k \in X_0\ (k = 1, 2, \cdots)$ で $\|\,x_k - x\,\|_X \longrightarrow 0\ (k \longrightarrow +\infty)$ となるものを取ることができる．任意に $f_0 \in X_0^*$ を取れば，任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|f_0(x_m) - f_0(x_n)| \leq \|\,f_0\,\|_{X_0^*}\,\|\,x_m - x_n\,\|_X$$

が成り立つから，右辺が X_0 の Cauchy 列をなすことにより $(f_0(x_n))_{n=1}^{+\infty}$ も $\mathbb{C}$ の Cauchy 列となる．$\mathbb{C}$ の完備性から $(f_0(x_n))_{n=1}^{+\infty}$ は或る $u \in \mathbb{C}$ に収束し，u は $x \in X$ に対して一意に定まる．なぜならば，x への別の収束列 $y_k \in X_0\ (k = 1, 2, \cdots)$ を取った場合の $(f_0(y_n))_{n=1}^{+\infty}$ の収束

先が $v \in \mathbb{C}$ であるとして，任意の $n, m \in \mathbb{N}$ に対して

$$
\begin{aligned}
|u - v| &= |u - f_0(x_n) + f_0(x_n) - f_0(y_m) + f_0(y_m) - v| \\
&\leq |u - f_0(x_n)| + |f_0(x_n) - f_0(y_m)| + |f_0(y_m) - v| \\
&\leq |u - f_0(x_n)| + \| f_0 \|_{X_0^*} \| x_n - y_m \|_X + |f_0(y_m) - v| \\
&\leq |u - f_0(x_n)| + \| f_0 \|_{X_0^*} (\| x_n - x \|_X + \| x - y_m \|_X) + |f_0(y_m) - v|
\end{aligned}
$$

となるから $n, m \longrightarrow +\infty$ で右辺は 0 に収束し，$u = v$ が示されるためである．つまり x に u を対応させる関係は $X \longmapsto \mathbb{C}$ の写像となり，この写像を f と表すことにする．f の線型性も次のように示される．任意の $x,\ y \in X,\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ に対して，x, y への収束列 $(x_k)_{k=1}^{+\infty},\ (y_k)_{k=1}^{+\infty} \subset X_0$ を取れば $(\alpha x_k + \beta y_k)_{k=1}^{+\infty}$ が $\alpha x + \beta y$ への収束列となるから

$$
\begin{aligned}
|f(\alpha x + \beta y) - \alpha f(x) - \beta f(y)| &= |f(\alpha x + \beta y) - f_0(\alpha x_k + \beta y_k) + \alpha f_0(x_k) + \beta f_0(y_k) - \alpha f(x) - \beta f(y)| \\
&\leq |f(\alpha x + \beta y) - f_0(\alpha x_k + \beta y_k)| + |\alpha f_0(x_k) - \alpha f(x)| + |\beta f_0(y_k) - \beta f(y)| \\
&\leq |f(\alpha x + \beta y) - f_0(\alpha x_k + \beta y_k)| + |\alpha||f_0(x_k) - f(x)| + |\beta||f_0(y_k) - f(y)| \\
&\longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow +\infty)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ゆえに $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)\ (\forall x,\ y \in X,\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{C})$ である．また f は有界な線型作用素である．なぜなら，任意に $x \in X$ と x への収束列 $x_k \in X_0\ (k = 1, 2, \cdots)$ を取れば，任意の $\epsilon > 0$ に対し或る $K \in \mathbb{N}$ が存在して全ての $k > K$ について

$$
|f(x)| < |f_0(x_k)| + \epsilon, \quad \| x \|_X < \| x_k \|_X + \epsilon / \| f_0 \|_{X_0^*}
$$

が成り立つようにできるから，この下で

$$
|f(x)| < |f_0(x)| + \epsilon < \| f_0 \|_{X_0^*} \| x \|_X + 2\epsilon
$$

となり $f \in X^*$ であることと $\| f \|_{X^*} \leq \| f_0 \|_{X_0^*}$ が判るからである．さらに

$$
\| f \|_{X^*} = \sup_{\substack{x \in X \\ \| x \|_X = 1}} |f(x)| \geq \sup_{\substack{x \in X_0 \\ \| x \|_X = 1}} |f(x)| = \sup_{\substack{x \in X_0 \\ \| x \|_X = 1}} |f_0(x)| = \| f_0 \|_{X_0^*}
$$

も成り立つから結局 $\| f \|_{X^*} = \| f_0 \|_{X_0^*}$ であると判る．以上より任意の $f_0 \in X_0^*$ がノルムを変えないまま或る $f \in X^*$ に拡張されることが示された．拡張の一意性について，f_0 の X^* への別の拡張 g が存在したとする．つまり g は X 上の有界な線型汎関数で X_0 の上では f_0 と一致するものである．g が f に X 上で完全に一致することを示すには f と g が $X \backslash X_0$ で一致することを見ればよい．任意の $x \in X \backslash X_0$ に対して $x_k \in X_0\ (k = 1, 2, \cdots)$ で $x_k \longrightarrow x\ (k \longrightarrow +\infty)$ となるものを取れば

$$
\begin{aligned}
|f(x) - g(x)| &= |f(x) - f(x_k) + g(x_k) - g(x)| \\
&\leq |f(x) - f(x_k)| + |g(x_k) - g(x)| \\
&\leq \| f \|_{X^*} \| x_k - x \|_X + \| g \|_{X^*} \| x_k - x \|_X \\
&\longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow +\infty)
\end{aligned}
$$

が成り立つから $f(x) = g(x)\ (\forall x \in X \backslash X_0)$，すなわち $f(x) = g(x)\ (\forall x \in X)$ が成り立つと示された．任意の $x^* \in X^*$ は $x^* \circ i \in X_0^*$ を X^* の元に拡張したものであるから，つまり $x^*,\ y^* \in X^*$

に対して X_0 上で $x^* \circ i = y^* \circ i$ が成り立っているならば拡張の一意性により X 上で $x^* = y^*$ が成り立つから T は単射である．(全射であることは (1) で示した．) またノルムを変えない拡張であるから $\| Tx^* \|_{X_0^*} = \| x^* \circ i \|_{X_0^*} = \| x^* \|_{X^*}$ の意味で T は等長で，以上で T が $X^* \longrightarrow X_0^*$ の線形全単射，すなわち同型写像であることが示された．

(3) X_0 が X で稠密でない場合，X_0 の $\|\cdot\|_X$ による閉包を $[X_0]^a$ と表せば $X \setminus [X_0]^a \neq \emptyset$ である．任意の $x^*, y^* \in X^*$ に対して定義域を $[X_0]^a$ に制限したものを $x^*|_{[X_0]^a}, y^*|_{[X_0]^a}$ と表わせばこれは $[X_0]^a$ 上の有界な線型汎関数であり，もちろん $x^*|_{[X_0]^a} \circ i = x^* \circ i$ かつ $y^*|_{[X_0]^a} \circ i = y^* \circ i$ である．従って (2) の結果により

$$x^* \circ i = y^* \circ i \quad \Leftrightarrow \quad x^*|_{[X_0]^a} = y^*|_{[X_0]^a}$$

が成り立つ．つまり $X \setminus [X_0]^a$ の上での x^*, y^* の値に関係なく，両者が X_0 の上で一致するための必要十分条件は $[X_0]^a$ の上で一致していることである．T が単射でないことは，$[X_0]^a$ の上では一致し，その外側で一致しない X^* の元の組が存在することで示される．$x^* \in X^*$ を零写像であるとする．x^* に対して上記の性質を満たす $y^* \in X^*$ の存在を Hahn-Banach の定理により示す．$X \setminus [X_0]^a \neq \emptyset$ であるから $w \in X \setminus [X_0]^a$ を取ればこれは $w \neq 0$ でありかつ $d := \inf_{x \in [X_0]^a} \| w - x \|_X > 0$ を満たす．w と $[X_0]^a$ が生成する X の部分空間を

$$L := \{ \alpha w + x \mid \alpha \in \mathbb{C},\ x \in [X_0]^a \}$$

と表し，L 上の写像 f を

$$f(\alpha w + x) = \alpha d, \quad (\forall \alpha w + x \in L)$$

と定義する．$w \notin [X_0]^a$ により L の元 $\alpha w + x$ の表し方は一意で (つまり $\alpha w + x = \alpha' w + x' \Rightarrow \alpha = \alpha'$ かつ $x = x'$) あるから f が一価関数であることが保証されている．さらに f は明らかに線型性を持ち，

$$|\alpha| d \leq |\alpha| \left\| w + \alpha^{-1} x \right\|_X = \| \alpha w + x \|_X \quad (\forall \alpha \in \mathbb{C},\ x \in [X_0]^a)$$

により

$$|f(u)| \leq \| u \|_X \quad (\forall x \in L)$$

が成り立つから f は L 上の有界線型汎関数でもある．f の作用素ノルムを $\| f \|_L$ と表せば $|f(u)| \leq \| f \|_L \| u \|_X$ $(\forall x \in L)$ が成り立ち，右辺は明らかに L の上のセミノルムとなっているから，Hahn-Banach の定理により f は X 上の有界な線型汎関数 F に拡張される．(有界性は F が不等式 $|F(u)| \leq \| f \|_L \| u \|_X$ $(\forall u \in X)$ を満たすことによる．) F は少なくとも

$$\begin{cases} F(u) = 0 & u \in [X_0]^a, \\ F(u) = \alpha d & u \in L,\ \alpha \neq 0 \end{cases}$$

を満たす X^* の元であるから，$y^* = F$ と置けば x^*, y^* は $x^* \circ i = y^* \circ i$ であるけれども $x^* \neq y^*$ 満たす X^* の元の組である．以上で T が単射でないことが示された． ∎

[11].

(1) c_0 は l^∞ の閉線形部分空間であることを示せ．

(2) l^∞ と c_0 が可分であるかどうか判定せよ．

証明.

(1) まず $c_0 \subset l^\infty$ であることを示す．$\forall a = (a_n)_{n=1}^\infty \in c_0$ は収束点列である．任意の $\epsilon > 0$ に対して或る $N \in \mathbb{N}$ を取れば，N 以降の $n \in \mathbb{N}$ については $|a_n| < \epsilon$ で抑えられるから

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \leq \max\{|a_1|,\ |a_2|,\ \cdots,\ |a_N|,\ \epsilon\} < +\infty$$

が成り立ち $a \in l^\infty$ が判る．従って $c_0 \subset l^\infty$ である．つぎに c_0 が線型空間 l^∞ の線形部分空間であることを示す．任意の $a = (a_n)_{n=1}^\infty$, $b = (b_n)_{n=1}^\infty \in c_0$, $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し

$$\begin{aligned} |a_n + b_n| &\leq |a_n| + |b_n| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow +\infty), \\ |\alpha a_n| &= |\alpha||a_n| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow +\infty) \end{aligned}$$

が成り立つことにより $a + b \in c_0$ と $\alpha a \in c_0$ が示される．従って c_0 は l^∞ の線形部分空間である．最後に c_0 が l^∞ で閉集合となっていることを示す．l^∞ は $\|\cdot\|_{l^\infty}$ をノルムとして Banach 空間となっているから，その部分空間である c_0 が $\|\cdot\|_{l^\infty}$ をノルムとして Banach 空間をなしていることを示せばよい．$a^{(n)} = \left(a_m^{(n)}\right)_{m=1}^\infty \in c_0$ $(m = 1, 2, 3, \cdots)$ を $\|\cdot\|_{l^\infty}$ に関する Cauchy 列とする．$(l^\infty,\ \|\cdot\|_{l^\infty})$ が完備であるから，$\left(a^{(n)}\right)_{n=1}^\infty$ は或る $a^* = (a_m^*)_{m=1}^\infty \in l^\infty$ に m に関して一様に収束している．つまり任意の $\epsilon > 0$ に対して或る $N \in \mathbb{N}$ が存在して，全ての $n > N$ について

$$\left\| a^{(n)} - a^* \right\|_{l^\infty} = \sup_{m\in\mathbb{N}} \left| a_m^{(n)} - a_m^* \right| < \epsilon \tag{10}$$

が成り立っている．$a^* = (a_m^*)_{m=1}^\infty$ が c_0 の元であることは帰謬法で示す．$a^* \notin c_0$ であると仮定すると，或る $\delta > 0$ に対しては，いかなる $N \in \mathbb{N}$ を取っても必ず $n > N$ なる自然数で

$$|a_n^*| \geq \delta$$

を満たすものが存在する．$(a_m^*)_{m=1}^\infty$ の部分列 $(a_{m_k}^*)_{k=1}^\infty$ を

$$|a_{m_k}^*| \geq \delta, \qquad (m_k < m_{k+1},\ k = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たすものとして取ることが出来て，(10) により或る $N_\delta \in \mathbb{N}$ を取れば，全ての $n > N_\delta$ で

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left| a_{m_k}^{(n)} - a_{m_k}^* \right| < \frac{\delta}{2}$$

が成立することになる．$n > N_\delta$ 番目の数列 $a^{(n)} = \left(a_m^{(n)}\right)_{m=1}^\infty$ は c_0 の元であるから，或る $N_\delta^n \in \mathbb{N}$ が存在して全ての $p > N_\delta^n$ に対し

$$\left| a_p^{(n)} \right| < \frac{\delta}{2}$$

となるはずであるが，$m_1 < m_2 < m_3 < \cdots \to +\infty$ であるから $m_k > N_\delta^n$ となるような添数 m_k が存在してしまい，

$$\frac{\delta}{2} \leq \left| a_{m_k}^* \right| - \frac{\delta}{2} < \left| a_{m_k}^{(n)} \right| < \frac{\delta}{2}$$

と矛盾が出る．従って $a^* \in c_0$ であるべきで，これは c_0 が $\|\cdot\|_{l^\infty}$ をノルムとして完備であることを示したことになる．ゆえに c_0 は l^∞ の閉線形部分空間である．

(2) 結論は，l^∞ は可分ではなく c_0 は可分である．順番に示す．l^∞ の部分集合として 0 と 1 のみで成る数列全体

$$M := \left\{ a \in l^\infty \ \middle| \ a = (a_n)_{n=1}^{+\infty},\ a_n \in \{0,1\},\ n = 1,2,3,\cdots \right\}$$

を考える．また任意の $a = (a_n)_{n=1}^{\infty}$, $b = (b_n)_{n=1}^{\infty} \in M$ に対し

$$\| a - b \|_{l^\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n| = \begin{cases} 1 & (a = b) \\ 0 & (a \neq b) \end{cases}$$

が成り立つから，M の異なる 2 元の $\|\cdot\|_{l^\infty}$ による距離は 1 で固定されている．もし l^∞ が可分であるとすれば，$\|\cdot\|_{l^\infty}$ に関して l^∞ で稠密な可算部分集合 C が存在することになる．任意の $a \in M$ に対してその 1/2 近傍 (sup-norm) の内部に C の元が存在していることになるから，そのうちの一つを c_a と表し対応を付ける．$a \in M$ に対応する $c_a \in C$ は他の M の元の 1/2 近傍に属することはない．もし c_a が或る $a \neq b \in M$ の 1/2 近傍に入ると

$$1 = \| a - b \|_{l^\infty} \leq \| a - c_a \|_{l^\infty} + \| b - c_a \|_{l^\infty} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

と矛盾ができるからである．即ち M から C への対応関係 $M \ni a \longmapsto c_a \in C$ は単射である．ここで M の濃度 $2^{\mathbb{N}}$ が連続体濃度であることに注意すれば，単射の存在により C の濃度は連続体濃度以上で C が可算集合であることに反する．従って l^∞ は可分ではない．一方で c_0 は $\|\cdot\|_{l^\infty}$ をノルムとして可分なノルム空間をなす．c_0 の可算部分集合を

$$S := \left\{ b \in c_0 \ \middle| \ b = (\alpha_n + i\beta_n)_{n=1}^{+\infty},\ \begin{cases} \alpha_n,\ \beta_n \in \mathbb{Q}, & n = 1,2,\cdots,N, \\ \alpha_n = \beta_n = 0, & n \geq N+1, \end{cases} (N = 1,2,3,\cdots) \right\}$$

として取る．ただし i は $i^2 = -1$ なる虚数単位で $\mathbb{Q}$ は有理数全体である．任意の $a = (a_n)_{n=1}^{+\infty} \in c_0$ について，任意の正数 $\epsilon > 0$ に対して或る $N \in \mathbb{N}$ を取れば全ての $n > N$ で

$$|a_n| < \epsilon$$

が成り立つから，後は $(a_n)_{n=1}^{N}$ の部分で

$$\sup_{n=1,2,\cdots,N} |a_n - b_n| < \epsilon$$

となるように S の元 $b = (b_n)_{n=1}^{+\infty}$ $(b_n = 0,\ n > N)$ を取れば

$$\| a - b \|_{l^\infty} < \epsilon$$

が成り立つ．即ち S が c_0 において $\|\cdot\|_{l^\infty}$ に関して稠密であるとわかり，c_0 が可分であると示された． ∎

[12]. $a = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in l^1$ に対して $T_a : c_0 \longmapsto \mathbb{C}$ を次で定める:

$$T_a(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \ (x = (x_n) \in c_0).$$

(1) $\forall a = (a_n) \in l^1$, $T_a \in c_o^*$ かつ $\| T_a \| = \| a \|_{l^1}$ であることを示せ．

(2) $T : l^1 \ni a \longmapsto T_a \in c_0^*$ は Banach 空間としての同系写像であることを示せ．

証明.

(1)　設問 [11] の結果により，T_a の定義域である c_0 は $\|\cdot\|_{l^\infty}$ をノルムとして l^∞ の閉線型部分空間であり，よって Banach 空間である．このことに留意して以下進む．$a=(a_n)_{n=1}^\infty \in l^1$ を任意に取って固定する．任意の $x=(x_n)\in c_0$ に対して

$$\sum_{n=1}^\infty |a_n||x_n| \le \sum_{n=1}^\infty |a_n|\,\|x\|_{l^\infty} = \|a\|_{l^1}\,\|x\|_{l^\infty} < +\infty \tag{11}$$

となり級数 $T_a(x)$ $(\forall x\in c_0)$ は有限確定するから，任意の $x=(x_n), y=(y_n)\in c_0$, $\alpha\in\mathbb{C}$ に対して以下に示す式変形が正当化される．

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_nx_n+a_ny_n)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx_n+\sum_{n=1}^{+\infty}a_ny_n,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\alpha a_nx_n=\alpha\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx_n,\quad \left|\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx_n\right|\le\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n||x_n|.$$

従って任意に $x=(x_n), y=(y_n)\in c_0$ と $\alpha\in\mathbb{C}$ を取れば.

$$T_a(x+y)=\sum_{n=1}^\infty a_n(x_n+y_n)=\sum_{n=1}^\infty(a_nx_n+a_ny_n)=\sum_{n=1}^\infty a_nx_n+\sum_{n=1}^\infty a_ny_n=T_ax+T_ay,$$
$$T_a(\alpha x)=\sum_{n=1}^\infty a_n(\alpha x_n)=\sum_{n=1}^\infty(a_n\alpha)x_n=\sum_{n=1}^\infty(\alpha a_n)x_n=\sum_{n=1}^\infty\alpha(a_nx_n)=\alpha\sum_{n=1}^\infty a_nx_n=\alpha T_a(x)$$

により T_a の線型性が示されるから，T_a は $c_0\to\mathbb{C}$ の線型汎関数である．有界性は式 (11) により

$$|T_a(x)|\le\|a\|_{l^1}\,\|x\|_{l^\infty}$$

から $\|T_a\|\le\|a\|_{l^1}$ となるとわかる．ゆえに $T_a\in c_0^*$ $(\forall a\in l^1)$ である．また $\|T_a\|=\|a\|_{l^1}$ について，$a=0$ の場合は T_a が零作用素になるから明らかに成り立つ．$a\neq0$ の場合，任意の $\|a\|_{l^1} >> \epsilon>0$ に対して或る $N\in\mathbb{N}$ が存在して

$$\|a\|_{l^1}-\epsilon<\sum_{n=1}^N|a_n|$$

とできる．$x\in c_0$ を

$$x_n=\begin{cases}\overline{a_n}/|a_n| & a_n\neq0,\text{and n}\le\text{N}\\ 0 & a_n=0,\text{or n}>\text{N}\end{cases}$$

となっているもので取れば，

$$\|a\|_{l^1}-\epsilon<\sum_{n=1}^N|a_n|=\sum_{n=1}^\infty a_nx_n=T_a(x)=|T_a(x)|$$

が成立することになる．$\|x\|_{l^\infty}=1$ であることに注意すれば

$$\|a\|_{l^1}-\epsilon<T_a(x)=\frac{|T_a(x)|}{\|x\|_{l^\infty}}\le\sup_{0\neq y\in c_0}\frac{|T_a(y)|}{\|y\|_{l^\infty}}=\|T_a\|\le\|a\|_{l^1}$$

が成り立ち，ϵ が任意であるから，$a=0$ の場合と合わせて $\|T_a\|=\|a\|_{l^1}$ $(\forall a\in l^1)$ が示された．

(2) まず，l^1 は $\|\cdot\|_{l^1}$ をノルムとして Banach 空間となり，c_0^* は T_a の値域 $\mathbb{C}$ が Banach 空間であるから作用素ノルムにより Banach 空間となっている．写像 T が

$$\|Ta\| = \|T_a\| = \|a\|_{l^1} \quad (\forall a \in l^1)$$

の意味で等長であることは (1) で示してあるから，後は T が線型全単射であることを証明すればよい．任意の $a = (a_n), b = (b_n) \in l^1$, $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)x_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n x_n + b_n x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n, \\
&\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n)x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(a_n x_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n
\end{aligned}$$

が成り立つから

$$\begin{aligned}
T(a+b) &= T_{a+b} = T_a + T_b = Ta + Tb \\
T(\alpha a) &= T_{\alpha a} = \alpha T_a = \alpha Ta
\end{aligned}$$

も成り立つことにより T の線型性が示される．また $a = (a_n), b = (b_n) \in l^1$ に対して，$a \neq b$ であるなら或る $N \in \mathbb{N}$ 番目で $a_N \neq b_N$ となっているはずであるから，

$$x_N = \begin{cases} 1 & n = N \\ 0 & n \neq N \end{cases}$$

となる $x = (x_n) \in c_0$ に対して

$$T_a(x) = a_N \neq b_N = T_b(x)$$

となり，T が単射であることが示される．最後に T が全射であることを示す．任意に $L \in c_0^*$ を取る．或る $a \in l^1$ に対して L が T_a に一致することを見ればよい．Kronecker のデルタを用いて

$$e_n \coloneqq (\delta_{jn})_{j=1}^{\infty}$$

で表現される e_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ は c_0 の元であり，各 $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して

$$a_n \coloneqq L(e_n) \tag{12}$$

とおく．任意の $x = (x_n) \in c_0$ に対して

$$x^{(N)} = \sum_{n=1}^{N} x_n e_n, \quad (N = 1, 2, 3, \cdots)$$

として作られる数列の族 $\left(x^{(N)}\right)_{N=1}^{\infty}$ は l^∞ において収束し，$x^{(N)} \to x$ $(N \to +\infty)$ が成り立つ．これは $x = (x_n)$ が収束数列であることによる．任意の $\epsilon > 0$ に対して或る $N \in \mathbb{N}$ を選べば

$$|x_n| < \epsilon, \quad (\forall n > N)$$

が成り立つから，$n > N$ なる任意の自然数 n に対して

$$\left\| x - x^{(n)} \right\|_{l^\infty} = \sup_{m > n} |x_m| < \epsilon$$

となり，$x^{(N)} \to x\ (N \to +\infty)$ が示されるのである．L が有界線型汎関数であることも併せれば

$$\left|L(x) - L(x^{(N)})\right| \le \| L \| \left\| x - x^{(N)} \right\|_{l^\infty} \longrightarrow 0 \quad (N \longrightarrow +\infty)$$

により

$$L(x) = \lim_{N\to+\infty} L(x^{(N)}) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} L(x_n e_n) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n \quad (\forall x \in c_0)$$

が成り立つ．後は (12) で定義した複素数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ が l^1 に属していることを示せば，写像 $L : c_0 \longmapsto \mathbb{C}$ が $T_a : c_0 \longmapsto \mathbb{C}$ に一致していると証明される．これは次のように示される．$a_n \neq 0\ (\exists n \le M)$ となるような $M \in \mathbb{N}$ を取って，この M に対して $x = (x_n) \in c_0$ として

$$x_n = \begin{cases} \overline{a_n}/|a_n| & a_n \neq 0, \text{and n} \le \text{M} \\ 0 & a_n = 0, \text{or n} > \text{M} \end{cases}$$

となるものを取れば,

$$L(x) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n x_n = \sum_{n=1}^{M} |a_n|$$

が成り立つ．$\| x \|_{l^\infty} = 1$ であることに注意すれば

$$\sum_{n=1}^{M} |a_n| = L(x) = |L(x)| \le \| L \| \| x \|_{l^\infty} = \| L \|$$

となる．M は任意に大きく取って問題ないから,

$$\sum_{n=1}^{M'} |a_n| \le \| L \|, \quad (\forall M' \ge M)$$

が成り立ち，従って

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \le \| L \|$$

となることにより $a \in l^1$ であることが示された． ∎

[13]. $1 < p < \infty$ とする．l^p の点列 $x(1), x(2), x(3), \cdots$ (ただし $x(j) = (x(j)_n)_{n=1}^{\infty}$) と $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in l^p$ に対し，次の (i), (ii) が同値であることを示せ：

(i) $\quad$ w-$\lim\limits_{n\to\infty} x(j) = x.$

(ii) $\quad \{x(j); j \in \mathbb{N}\}$ は有界でかつ $\forall n \in \mathbb{N}\ \lim\limits_{j\to\infty} x(j)_n = x_n.$

証明.

l^p の共役空間　まず l^p の共役空間の任意の元 $f \in (l^p)^*$ が或る $v \in l^q$ に対応して

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n v_n, \quad \left(x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in l^p,\ v = (v_n)_{n=1}^{\infty} \in l^q\right)$$

で表現されることを示す．

(i) $\Rightarrow$ (ii)　任意の $f \in (l^p)^*$ に対して，f には或る $v = (v_n)_{n=1}^{\infty} \in l^q$ が対応して

$$f(x(j)) = \sum_{n=1}^{\infty} x(j)_n v_n$$

と表すことができる．弱収束の仮定より任意の $\epsilon > 0$ に対してある $J \in \mathbb{N}$ が存在して，全ての $j > J$ で

$$|f(x(j)) - f(x)| < \epsilon$$

が成り立っている．$x(j), x \in l^p$，$v \in l^q$ であるから Hölder の不等式により

$$|f(x(j)) - f(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} x(j)_n v_n - \sum_{n=1}^{\infty} x_n v_n\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} (x(j)_n - x_n)\, v_n\right| \leq \| x(j) - x \|_{l^p} \| v \|_{l^q}$$

と表現することができる．

(ii) $\Rightarrow$ (i)　$x(j)$ が有界であるから，或る正数 M が存在して

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \| x(j) \|_{l^p} \leq M$$

が成り立っている．即ち

$$\sup_{j,n \in \mathbb{N}} |x(j)_n| < +\infty$$

が成り立っていることになる．また $\forall n \in \mathbb{N}$ $\lim_{j\to\infty} x(j)_n = x_n$ の意味は $n \in \mathbb{N}$ に関して $x(j)$ が x に各点収束しているということである．$f \in (l^p)^*$ を任意に取り，$f(x(j))$，$f(x)$ が $v = (v_n)_{n=1}^{\infty} \in l^q$ を用いて

$$f(x(j)) = \sum_{n=1}^{\infty} x(j)_n v_n, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n v_n$$

と表現できているとする．測度空間 $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, v)$ $(v(n) = v_n)$ における積分の収束を考えているとみなせば，以上の仮定により Lebesgue の優収束定理が適用できて

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} x(j)_n v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{j\to\infty} x(j)_n v_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n v_n$$

が成り立つ．これは $f(x(j)) \longrightarrow f(x)$ $(j \longrightarrow +\infty)$ を意味していて，線型汎関数 $f \in (l^p)^*$ は任意に取っているから w-$\lim_{n\to\infty} x(j) = x$ が示されたことになる．