確率微分方程式

基礎工学研究科システム創成専攻修士 1 年
学籍番号 29C17095
百合川尚学

2017 年 10 月 15 日

レポート問題 1.

1 10/11

基礎の確率空間を $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ とする．$\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ を部分 σ-加法族とし，Hilbert 空間 $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ とその閉部分空間 $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ を考える．任意の $f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ に対して，射影定理により一意に定まる射影 $g \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ を

$$g = \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}]$$

と表現する．$\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ のときは $\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}]$ を $\mathrm{E}[f]$ と書いて f の期待値と呼ぶ．

レポート問題 2.
Hilbert 空間 $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ における内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$，ノルムを $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)}$ と表示する．次の C1 ~ C6 を示せ．扱う関数は全て $\mathbb{R}$ 値と考える．(係数体を実数体として Hilbert 空間を扱う．)

C1 $\forall f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

$$\mathrm{E}[f] = \int_\Omega f(x)\, \mu(dx)$$

C2 $\forall f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, $\forall h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$

$$\int_\Omega f(x) h(x)\, \mu(dx) = \int_\Omega \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x) h(x)\, \mu(dx)$$

C3 $\forall f_1, f_2 \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

$$\mathrm{E}[f_1 + f_2 \mid \mathcal{G}] = \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}] + \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}]$$

C4 $\forall f_1, f_2 \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

$$f_1 \le f_2 \quad \text{a.s.} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}] \le \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}] \quad \text{a.s.}$$

C5 $\forall f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, $\forall g \in \mathrm{L}^\infty(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$

$$\mathrm{E}[gf \mid \mathcal{G}] = g\, \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}]$$

C6 $\mathcal{H}$ が $\mathcal{G}$ の部分 σ-加法族ならば $\forall f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

$$\mathrm{E}\big[\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \,\big|\, \mathcal{H}\big] = \mathrm{E}[f \mid \mathcal{H}]$$

証明. C1 $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ とすれば，$\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ の元は $\mathcal{G}$-可測でなくてはならないから Ω 上の定数関数である．従って任意の $g \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ に或る定数 $\alpha \in \mathbb{R}$ が対応して $g(x) = \alpha\ (\forall x \in \Omega)$ と表せる．Hilbert 空間 $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ におけるノルムを $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)}$ と表示すれば，射影定理より任意の $f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ の $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ への射影 $\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] = \mathrm{E}[f]$ はノルム $\|f - g\|_{\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)}$

を最小にする $g \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ である．$g(x) = \alpha\ (\forall x \in \Omega)$ としてノルムを直接計算すれば，

$$
\begin{aligned}
\| f - g \|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)} &= \int_\Omega |f(x) - \alpha|^2\, \mu(dx) \\
&= \int_\Omega |f(x)|^2 - 2\alpha f(x) + |\alpha|^2\, \mu(dx) \\
&= \int_\Omega |f(x)|^2\, \mu(dx) - 2\alpha \int_\Omega f(x)\, \mu(dx) + |\alpha|^2 \\
&= \left|\alpha - \int_\Omega f(x)\, \mu(dx)\right|^2 - \left|\int_\Omega f(x)\, \mu(dx)\right|^2 + \int_\Omega |f(x)|^2\, \mu(dx) \\
&= \left|\alpha - \int_\Omega f(x)\, \mu(dx)\right|^2 + \int_\Omega |f(x) - \beta|^2\ \mu(dx) \qquad \left(\beta := \int_\Omega f(x)\, \mu(dx)\right)
\end{aligned}
$$

と表現できて最終式は $\alpha = \int_\Omega f(x)\, \mu(dx)$ となることで最小となる．すなわち

$$\mathrm{E}[f] = \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] = \int_\Omega f(x)\, \mu(dx).$$

C2　射影定理により，$f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ の $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ への射影 $\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}]$ は

$$\langle f - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h \rangle = 0 \quad (\forall h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu))$$

を満たし，内積の線型性から

$$\langle f, h \rangle = \langle \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h \rangle \quad (\forall h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu))$$

が成り立つ．積分の形式で表示することにより

$$\int_\Omega f(x) h(x)\, \mu(dx) = \int_\Omega \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x) h(x)\, \mu(dx) \quad (\forall h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu))$$

が示された．

C3　射影定理により任意の $h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ に対して

$$\langle (f_1 + f_2) - \mathrm{E}[f_1 + f_2 \mid \mathcal{G}], h \rangle = 0,\ \langle f_1 - \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}], h \rangle = 0,\ \langle f_2 - \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}], h \rangle = 0$$

が成り立っている．従って任意の $h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ に対して

$$
\begin{aligned}
0 &= \langle (f_1 + f_2) - \mathrm{E}[f_1 + f_2 \mid \mathcal{G}], h \rangle - \langle f_1 - \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}], h \rangle - \langle f_2 - \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}], h \rangle \\
&= \langle (f_1 + f_2) - \mathrm{E}[f_1 + f_2 \mid \mathcal{G}], h \rangle - \langle (f_1 + f_2) - (\mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}] + \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}]), h \rangle \\
&= \langle \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}] + \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}] - \mathrm{E}[f_1 + f_2 \mid \mathcal{G}], h \rangle
\end{aligned}
$$

となり，特に $h = \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}] + \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}] - \mathrm{E}[f_1 + f_2 \mid \mathcal{G}] \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ とすれば

$$\left\| \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}] + \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}] - \mathrm{E}[f_1 + f_2 \mid \mathcal{G}] \right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)} = 0$$

が成り立つことになるから

$$\mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}] + \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}] = \mathrm{E}[f_1 + f_2 \mid \mathcal{G}]$$

が示された．

C4　「任意の $f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ に対して，$f \geq 0$ a.s. ならば $\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \geq 0$ a.s.」—(※) を示せばよい．これが示されれば $f_1, f_2 \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ で $f_1 \leq f_2$ a.s. となるものに対し

$$0 \leq f_2 - f_1 \text{ a.s.} \quad \Rightarrow 0 \leq \mathrm{E}[f_2 - f_1 \mid \mathcal{G}] = \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}] - \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}] \text{ a.s.}$$

が成り立つ．しかし，この場合本題に入る前に次の命題を証明する必要がある．これは等号 $\mathrm{E}[f_2 - f_1 \mid \mathcal{G}] = \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}] - \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}]$ が成り立つことを保証するためである．

命題． 考えている空間は今までと同じ Hilbert 空間 $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$，$\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ である．任意の実数 α と任意の $f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ に対して次が成立する:

$$\mathrm{E}[\alpha f \mid \mathcal{G}] = \alpha \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}].$$

証明． 射影定理より

$$\langle f - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h \rangle = 0, \quad \langle \alpha f - \mathrm{E}[\alpha f \mid \mathcal{G}], h \rangle = 0 \quad (\forall h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu))$$

が成り立っているから

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{E}[\alpha f \mid \mathcal{G}] - \alpha \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h \rangle &= \langle \mathrm{E}[\alpha f \mid \mathcal{G}] - \alpha f, h \rangle - \langle \alpha \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] - \alpha f, h \rangle \\ &= \langle \mathrm{E}[\alpha f \mid \mathcal{G}] - \alpha f, h \rangle - \alpha \langle f - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h \rangle = 0. \quad (\forall h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)) \end{aligned}$$

特に $h = \mathrm{E}[\alpha f \mid \mathcal{G}] - \alpha \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ として

$$\left\| \mathrm{E}[\alpha f \mid \mathcal{G}] - \alpha \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)} = 0$$

だから $\mathrm{E}[\alpha f \mid \mathcal{G}] = \alpha \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}]$ が成り立つ． ∎

次に (※) を示す．

$$\begin{aligned} A &:= \{x \in \Omega \mid \quad f(x) < 0\} && (\in \mathcal{F}), \\ B &:= \{x \in \Omega \mid \quad \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x) < 0\} && (\in \mathcal{G}) \end{aligned}$$

として $\mu(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu(B) = 0$ が成り立つと言えればよく，$\mu(A) = 0$ の下で $\mu(B) > 0$ と仮定しては不合理であることを以下に記述する．
$\mu(A) = 0,\ \mu(B) > 0$ であるとする．$\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ の元を

$$h(x) := \begin{cases} \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x) & (x \in B^c) \\ 0 & (x \in B) \end{cases}$$

として定義すると

$$\begin{aligned} \| f - h \|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)} &= \int_{\Omega} |f(x) - h(x)|^2 \, \mu(dx) \\ &= \int_{A^c \cap B^c} |f(x) - h(x)|^2 \, \mu(dx) + \int_{A^c \cap B} |f(x) - h(x)|^2 \, \mu(dx) \\ &= \int_{A^c \cap B^c} |f(x) - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x)|^2 \, \mu(dx) + \int_{A^c \cap B} |f(x)|^2 \, \mu(dx) \\ &< \int_{A^c \cap B^c} |f(x) - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x)|^2 \, \mu(dx) + \int_{A^c \cap B} |f(x) - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x)|^2 \, \mu(dx) \\ &= \left\| f - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)} \end{aligned}$$

が成り立つ．これは $\mu(A)=0$ であること，$\mu(A^c\cap B)=\mu(B)-\mu(A\cap B)=\mu(B)>0$ であること，それから $A^c\cap B$ の上で

$$|f(x)-\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}](x)|^2-|f(x)|^2=(f(x)-\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}](x)+f(x))(-\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}](x))>0$$
$$(\because f(x)\geq 0,\ \mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}](x)<0,\quad \forall x\in A^c\cap B)$$

が成り立っていることによる．上の結果，すなわち

$$\|f-h\|_{\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)}<\left\|f-\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}]\right\|_{\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)}$$

を満たす $h\in\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ が存在することは $\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}]$ が f の射影であることに違反している．以上より $\mu(B)=0$ でなくてはならず，(※) が示された．

C5　$\left\|\mathrm{E}[gf\,|\,\mathcal{G}]-g\,\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}]\right\|_{\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)}=0$ が成り立つことを示す．任意の $h\in\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ に対して

$$\langle\mathrm{E}[gf\,|\,\mathcal{G}]-g\,\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}],h\rangle=\langle\mathrm{E}[gf\,|\,\mathcal{G}]-gf,h\rangle+\langle gf-g\,\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}],h\rangle$$

を考えると，右辺が 0 になることが次のように証明される．先ず右辺第一項について，gf は $\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ に入る．g は或る μ-零集合 $E\in\mathcal{G}$ を除いて有界であるから，或る正数 α によって $|g(x)|\leq\alpha\ (\forall x\in E^c)$ と抑えられ，

$$\int_\Omega|g(x)f(x)|^2\,\mu(dx)=\int_{E^c}|g(x)|^2|f(x)|^2\,\mu(dx)\leq\alpha^2\int_{E^c}|f(x)|^2\,\mu(dx)=\alpha^2\int_\Omega|f(x)|^2\,\mu(dx)<\infty$$

が成り立つからである．従って射影定理により

$$\langle\mathrm{E}[gf\,|\,\mathcal{G}]-gf,h\rangle=0\quad(\forall h\in\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu)).$$

右辺第二項について，

$$\langle gf-g\,\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}],h\rangle=\int_\Omega(f(x)-\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}](x))\,g(x)h(x)\,\mu(dx)=\langle f-\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}],gh\rangle$$

であって，先と同様の理由で $gh\in\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu)\ \ (\forall h\in\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu))$ が成り立つから射影定理より

$$\langle gf-g\,\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}],h\rangle=0\quad(\forall h\in\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu))$$

であると判明した．始めの式に戻れば

$$\langle\mathrm{E}[gf\,|\,\mathcal{G}]-g\,\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}],h\rangle=0\quad(\forall h\in\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu))$$

が成り立つことになり，特に $h=\mathrm{E}[gf\,|\,\mathcal{G}]-g\,\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}]\in\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ に対しては

$$\left\|\mathrm{E}[gf\,|\,\mathcal{G}]-g\,\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}]\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)}=0$$

となることから $\mathrm{E}[gf\,|\,\mathcal{G}]=g\,\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}]$ が示された．

C6　任意の $h\in\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{H},\mu)\subset\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ に対し，射影定理より

$$\begin{aligned}&\Big\langle\mathrm{E}\big[\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}]\,\big|\,\mathcal{H}\big]-\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{H}],h\Big\rangle\\&\quad=\Big\langle\mathrm{E}\big[\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}]\,\big|\,\mathcal{H}\big]-\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}],h\Big\rangle+\langle\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}]-f,h\rangle+\langle f-\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{H}],h\rangle=0\end{aligned}$$

が成り立つ．特に $h = \mathrm{E}[\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \bigm| \mathcal{H}] - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{H}] \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{H}, \mu)$ とすれば

$$\left\| \mathrm{E}[\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \bigm| \mathcal{H}] - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{H}] \right\|_{\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)}^2 = 0$$

ということになるので $\mathrm{E}[\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \bigm| \mathcal{H}] = \mathrm{E}[f \mid \mathcal{H}]$ であることが示された.

∎