

ε 計算とクラスの導入による具体的で直観的な集合論の構築

関根深澤研修士二年 百合川尚学

学籍番号 : 29C17095

2020 年 2 月 3 日

本論文ではクラス (class) を扱うための **ZF** 集合論の一つの拡張を提示したが、そこでの主要な定理は、**ZF** 集合論のどの命題に対しても「**ZF** 集合論で証明可能」ならば「本論文の集合論で証明可能」であり、逆に「本論文の集合論で証明可能」ならば「**ZF** 集合論で証明可能」であるということである。これを精密に言い直せば、**ZF** 集合論の任意の命題 ψ に対して「 Γ から ψ への **HK** の証明で \mathcal{L}_\in の式の列であるものが取れる」とこと「 Σ から ψ への **HE** の証明で \mathcal{L} の文の列であるものが取れる」ことが同値であるということになる。以下で記号を解説する。

\mathcal{L}_\in とは **ZF** 集合論の言語のことである。本論文ではもう二つの言語 \mathcal{L}_ε と \mathcal{L} があり、項および式の形成規則はそれぞれの言語の中で指定される。 Γ とは \mathcal{L}_\in の文で書かれた **ZF** 集合論の公理系 (外延性・相等性・置換・対・合併・冪・正則性・無限) であり、ここで文とは変項の自由な出現が無い式を指す。**HK** とは古典論理の Hilbert 流証明体系のことであり、「 Γ からの **HK** の証明で \mathcal{L}_\in の式の列であるもの」とは、 \mathcal{L}_\in の式の列 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ で、各 φ_i について以下のいずれかが満たされるものである：(1) **HK** の公理である。(2) Γ の公理である。(3) 列の前の式から三段論法で得られる。(4) 列の前の式から汎化で得られる。

一方で \mathcal{L} も Σ も **HE** も本論文特有のものである。 \mathcal{L} とは \mathcal{L}_\in の語彙を拡張した言語であり、拡張の中間に \mathcal{L}_ε がある。 \mathcal{L}_ε は \mathcal{L}_\in に ε を追加した言語であるが、この ε とは数論の無矛盾性の考察過程で Hilbert[1] が発案したものである。 \mathcal{L} には $\{x \mid \varphi\}$ の形の項 (内包項) を追加し、正式にクラスが扱えるようになる。 Σ とは本論文における集合論の公理系であり、 Γ の「外延性」と「相等性」がクラスに対する言明に変更され、また「内包性」と「要素」の公理が新たに追加される。内包性公理は

$$\forall u (u \in \{x \mid \varphi(x)\} \leftrightarrow \varphi(u))$$

なる式を指し、 $\{x \mid \varphi(x)\}$ に対して「 φ である x の全体」の意味を与える。要素の公理は

$$a \in b \rightarrow \exists x (a = x)$$

なる式を指し、これによって要素となりうるものは集合に限られる。右辺の $\exists x (a = x)$ は「 a は集合である」の意味の式であり、竹内 [2] の集合の定義を引用したものである。**HE** とは **HK** の量化の公理を改造した証明体系である。**HE** では **HK** の公理である $\forall y (\psi \rightarrow \varphi(x/y)) \rightarrow (\psi \rightarrow \forall x \varphi)$ と $\forall y (\varphi(x/y) \rightarrow \psi) \rightarrow (\exists x \varphi \rightarrow \psi)$ が削除され、代わりに

$$\begin{aligned} &\rightarrow \forall x \varphi \rightarrow \exists x \rightarrow \varphi, \\ &\exists x \varphi \rightarrow \varphi(x/\varepsilon x \varphi) \end{aligned}$$

が公理となる。**HE** の証明は全て文で行う。「 Σ からの **HE** の証明で \mathcal{L} の文の列であるもの」とは、 \mathcal{L} の文の列 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ で、各 φ_i について以下のいずれかが満たされるものである：(1) **HE** の公理である。(2) Σ の公理である。(3) 列の前の式から三段論法で得られる。 ε 項の作用によって **HE** では汎化は不要になる。

なお、 $\varepsilon x \varphi$ なる形の項を ε 項と呼ぶが、特に φ に x のみ自由に現れている場合は主要 ε 項と呼ぶ。また $\{x \mid \varphi\}$ なる内包項に関しては φ に x が自由に現れている場合に正則内包項と呼ぶ。そして扱う \mathcal{L} の式には次の制限を付ける：(1) 式に現れる ε 項は主要 ε 項である。(2) 式に現れる内包項は正則内包項である。**HE** の量化公理と外延性公理および集合の定義式によって、主要 ε 項は全て集合となり、また集合であるクラスはいずれかの主要 ε 項と等しいものに限られる。

参考文献

- [1] D. Hilbert and P. Bernays, 数学の基礎 (吉田夏彦, 瀧野昌訳), 丸善出版株式会社, 2012, pp. 23-63, ISBN 978-4-621-06405-4.
- [2] 竹内外史, 現代集合論入門, 増強版, 日本評論社, 2016, p. 159, ISBN 978-4-535-60116-1.