時系列解析

2017 年 8 月 4 日

1 Markov 連鎖

基礎となる確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$.

- E: 集合,
- $(E, \mathcal{E})$: 可測空間,
- $(X_n)_{n=1}^{+\infty}$ ： E-値確率過程.

注意. 2 章 ~ 10 章は E が高々可算集合であるとして考える.

2 Markov 連鎖

定義 (Markov 性). $\forall n \in \mathbb{N},\ i_0, i_1, \cdots, i_n \in E$,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left(X_n = i_n \mid X_0 = i_0,\ X_1 = i_1,\ \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}\right) \\
&\qquad = \mathrm{P}\left(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}\right).
\end{aligned}$$

$(X_n)_{n=1}^{+\infty}$ が Markov 性を持つ場合，これを Markov 連鎖という．以後 $(X_n)_{n=1}^{+\infty}$ は Markov 連鎖.

3 Markov 行列

定義 (Markov 行列). (i, j) 成分 $(\forall i, j \in E)$ を $\mathrm{P}\left(X_1 = j \mid X_0 = i\right)$ とする確率行列．行列を P，(i, j) 成分を $[P]_{ij}$ と表記．計算規則は以下.

$$\begin{aligned}
P^0 &= I, && (I：\text{恒等写像}), \\
[P^n]_{ij} &= \sum_{k \in E} [P^{n-1}]_{ik} [P]_{kj}, && (\forall i, j \in E,\ n \in \mathbb{N}).
\end{aligned}$$

定義から次が成立

$$[P^n]_{ij} = \mathrm{P}\left(X_n = j \mid X_0 = i\right),\ (\forall n \in \mathbb{N},\ i, j \in E).$$

4 Chapman-Kolmogorov 方程式

命題 (Chapman-Kolmogorov 方程式). 任意の $n, m = 0, 1, 2, \cdots$ と $i, j \in E$ に対し次が成立.

$$[P^{n+m}]_{ij} = \sum_{k \in E} [P^n]_{ik} [P^m]_{kj}.$$

この命題は以降の命題の証明において基礎的である.

5 既約性・再帰性

定義 (既約性). P が既約である

$$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \ \forall i, j \in E,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \text{s.t.} \quad [P^n]_{ij} > 0.$$

定義 (再帰性). P が再帰的である

$$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\ \mathrm{P}\left(\exists n \geq 1,\ X_n = i \mid X_0 = i\right) = 1 \quad (\forall i \in E).$$

P が非再帰的である

$$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\ \mathrm{P}\left(\forall n \geq 1,\ X_n \neq i \mid X_0 = i\right) > 0 \quad (\forall i \in E).$$

6 離散空間上の Markov 連鎖

定義 (到達時刻と到達回数). $\forall i \in E,\ \omega \in \Omega,$

到達時刻　$\tau_i(\omega) \coloneqq \inf\{n \geq 1 \mid X_n(\omega) = i\},$
到達回数　$\eta_i(\omega) \coloneqq \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{(X_n = i)}(\omega).$

$p_{ij} \coloneqq \mathrm{P}\left(\tau_j < \infty \,\middle|\, X_0 = i\right), \quad (\forall i, j \in E)$
と表記すれば次が成立:

$$p_{ii} = \mathrm{P}\left(\exists n \geq 1,\ X_n = j \mid X_0 = i\right),$$
$$p_{ii} < 1 \Leftrightarrow \mathrm{E}\left[\eta_i \mid X_0 = i\right] < +\infty, \quad (\forall i \in E).$$

7 正再帰性

定義 (不変確率測度). E 上の確率測度 $\pi = ([\pi]_i)_{i\in E}$, $(\sum_{i\in E}[\pi]_i = 1)$ が P に対して不変確率測度である

$$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\ [\pi]_i = [\pi P]_i (= \sum_{j\in E}[\pi]_j[P]_{ji}), \quad (\forall i \in E).$$

定義 (正再帰性). P は正再帰的
$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$　P が既約かつ不変確率測度が存在.

8 再帰性の諸命題

命題. P が既約の下，(i) ~ (iv) が順に示される:

(i)　P が再帰的 $\Leftrightarrow \mathrm{E}\left[\eta_i \mid X_0 = i\right] = +\infty,\ (\forall i \in E)$.
(ii)　P は再帰的であるか非再帰的のどちらか．特に E が有限集合なら P は再帰的.
(iii)　P が正再帰的 $\Rightarrow$ P は再帰的.
(iv)　E が有限集合なら P は正再帰的.

9 周期

定義 ($i \in E$ の周期). $\mathcal{N}_i \coloneqq \{n \geq 1 \mid [p^n]_{ii} > 0\}$ の最大公約数を $i \in E$ の周期といい d_i と表す.

命題 (既約なら周期は unique). P が既約ならば $d_i = d_j$ $(\forall i, j \in E)$. この場合 d_i を P の周期という.

定義 (非周期性). P が既約の下,

$$P \text{ は非周期的} \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad P \text{ の周期が } 1.$$

10 Ergodicity

命題 (周期に関する一命題). P : 既約, 非周期的,

$$\forall i, j \in E,\ \exists n_{ij} \in \mathbb{N},\ \text{s.t. } [P^n]_{ij} > 0\ (\forall n \geq n_{ij}).$$

定理 (Ergodicity). P が既約で非周期的かつ正再帰的であるとする. P の不変確率測度を π で表すとき次が成立.

$$\lim_{n \to +\infty} [P^n]_{ij} = [\pi]_j, \quad (\forall i, j \in E).$$

証明.

第一段　直積空間 $E \times E$ 上の Markov 連鎖を考える. $E \times E$ の Markov 行列を Q と表し

$$[Q]_{ik,jl} := [P]_{ij}[P]_{kl}, \quad (\forall (i,k),(j,l) \in E \times E)$$

と定義する. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 上の E-値確率過程 $(X_n)_{n=1}^{+\infty}, (Y_n)_{n=1}^{+\infty}$ がそれぞれ Markov 行列 P を持つ独立な Markov 連鎖であるとすれば, $Z_n = (X_n, Y_n)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ は $E \times E$ 上の Markov 連鎖で Markov 行列 Q を持つ. なぜならば任意の $n \in \mathbb{N}$ と $(i,j), (i_0, j_0), \cdots, (i_{n-1}, j_{n-1}) \in E \times E$ に対して

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(Z_n = (i,j) \mid Z_0 = (i_0, j_0), Z_1 = (i_1, j_1), \cdots, Z_{n-1} = (i_{n-1}, j_{n-1})) \\
&= \frac{\mathrm{P}(Z_n = (i,j), Z_0 = (i_0, j_0), \cdots, Z_{n-1} = (i_{n-1}, j_{n-1}))}{\mathrm{P}(Z_0 = (i_0, j_0), \cdots, Z_{n-1} = (i_{n-1}, j_{n-1}))} \\
&= \frac{\mathrm{P}((X_n = i, X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}) \cap (Y_n = j, Y_0 = j_0, \cdots, Y_{n-1} = j_{n-1}))}{\mathrm{P}((X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}) \cap (Y_0 = j_0, \cdots, Y_{n-1} = j_{n-1}))} \\
&= \frac{\mathrm{P}(X_n = i, X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1})\,\mathrm{P}(Y_n = j, Y_0 = j_0, \cdots, Y_{n-1} = j_{n-1})}{\mathrm{P}(X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1})\,\mathrm{P}(Y_0 = j_0, \cdots, Y_{n-1} = j_{n-1})} \\
&= \mathrm{P}(X_n = i \mid X_{n-1} = i_{n-1})\,\mathrm{P}(Y_n = j \mid Y_{n-1} = j_{n-1}) \\
&= \frac{\mathrm{P}(X_n = i, Y_n = j, X_{n-1} = i_{n-1}, Y_{n-1} = j_{n-1})}{\mathrm{P}(X_{n-1} = i_{n-1}, Y_{n-1} = j_{n-1})} \\
&= \mathrm{P}(Z_n = (i,j) \mid Z_{n-1} = (i_{n-1}, j_{n-1}))
\end{aligned}$$

が成立するからである. また Q は既約かつ再帰的である. P が既約であるから, 前命題により任意の $(i,k),(j,l) \in E \times E$ に対して或る $n_{ij}, n_{kl} \in \mathbb{N}$ が存在し $[P^n]_{ij} > 0$ $(\forall n \geq n_{ij})$ と $[P^n]_{kl} > 0$ $(\forall n \geq n_{kl})$ が成立する. 従って $\forall n \geq \max\left\{n_{ij}, n_{kl}\right\}$ に対して

$$[Q^n]_{ik,jl} := [P^n]_{ij}[P^n]_{kl} > 0$$

が成立するから Q は既約である.

注意. 先の式変形と同様に，$(X_n)_{n=1}^{+\infty}, (Y_n)_{n=1}^{+\infty}$ の独立性から任意の $n \in \mathbb{N},\ (i,k),(j,l) \in E \times E$ に対して

$$[Q^n]_{ik,jl} = \mathrm{P}(Z_n = (j,l) \mid Z_0 = (i,k)) = \mathrm{P}(X_n = j \mid X_0 = i)\,\mathrm{P}(Y_n = l \mid Y_0 = k) = [P^n]_{ij}[P^n]_{kl}$$

が導かれる．

次に再帰性を示す．これには Q に対して $E \times E$ 上の不変確率測度が存在することを言えばよい．

$$[\mu]_{ik} = [\pi]_i[\pi]_k \quad (\forall (i,k) \in E \times E)$$

として $\mu = ([\mu]_{ik})_{i,k \in E}$ を定義すればこれは $E \times E$ 上の確率測度であり，任意の $(j,l) \in E \times E$ に対して

$$[\mu Q]_{jl} = \sum_{(i,k) \in E \times E} [\mu]_{ik}[Q]_{ik,jl} = \sum_{i,k \in E} [\pi]_i[\pi]_k[P]_{ij}[P]_{jl} = \sum_{i \in E} [\pi]_i[P]_{ij} \sum_{k \in E} [\pi]_k[P]_{kl} = [\pi]_j[\pi]_l = [\mu]_{jl}$$

が成り立つから μ が Q の不変確率測度であることが判る．ゆえに Q は正再帰的で既約すなわち再帰的である．

第二段

$$\lim_{n \to +\infty} \left| [P^n]_{ij} - [P^n]_{kj} \right| = 0 \quad (\forall i,j,k \in E) \tag{1}$$

を示す．$(Z_n)_{n=1}^{+\infty} = ((X_n, Y_n))_{n=1}^{+\infty}$ に対しても同様に

$$\tau_{ik}(\omega) \coloneqq \inf\{n \geq 1 \mid Z_n(\omega) = (i,k)\} \quad (\forall i,k \in E,\ \omega \in \Omega)$$

として到達時刻を定義する．$(X_n)_{n=1}^{+\infty}, (Y_n)_{n=1}^{+\infty}$ の独立性から

$$\begin{aligned}
[P^n]_{ij} &= \frac{\mathrm{P}(X_n = j, X_0 = i)}{\mathrm{P}(X_0 = i)} = \frac{\mathrm{P}(X_n = j, X_0 = i, Y_0 = k)}{\mathrm{P}(X_0 = i, Y_0 = k)} = \mathrm{P}(X_n = j \mid (X_0, Y_0) = (i,k)), \\
[P^n]_{kj} &= \frac{\mathrm{P}(Y_n = j, Y_0 = k)}{\mathrm{P}(Y_0 = k)} = \frac{\mathrm{P}(Y_n = j, X_0 = i, Y_0 = k)}{\mathrm{P}(X_0 = i, Y_0 = k)} = \mathrm{P}(Y_n = j \mid (X_0, Y_0) = (i,k))
\end{aligned}$$

が成立する．

$$\mathrm{P}(X_n = j \mid (X_0, Y_0) = (i,k)) = \mathrm{P}\left(X_n = j, \tau_{jj} > n \,\middle|\, (X_0, Y_0) = (i,k)\right) + \mathrm{P}\left(X_n = j, \tau_{jj} \leq n \,\middle|\, (X_0, Y_0) = (i,k)\right),$$

$$\mathrm{P}(Y_n = j \mid (X_0, Y_0) = (i,k)) = \mathrm{P}\left(Y_n = j, \tau_{jj} > n \,\middle|\, (X_0, Y_0) = (i,k)\right) + \mathrm{P}\left(Y_n = j, \tau_{jj} \leq n \,\middle|\, (X_0, Y_0) = (i,k)\right)$$

と分解できるが,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left(X_n = j, \tau_{jj} \le n \,\middle|\, (X_0, Y_0) = (i,k)\right) \\
&= \sum_{m=1}^{n} \mathrm{P}\left(X_n = j, \tau_{jj} = m \,\middle|\, (X_0, Y_0) = (i,k)\right) \\
&= \sum_{m=1}^{n} \mathrm{P}\left(X_n = j, (X_m, Y_m) = (j,j), (X_{m-1}, Y_{m-1}) \cdots (X_1, Y_1) \neq (j,j) \mid (X_0, Y_0) = (i,k)\right) \\
&= \sum_{m=1}^{n} \frac{\mathrm{P}\left(X_n = j, X_m = j, X_{m-1}, \cdots, X_1 \neq j\right)}{\mathrm{P}\left(X_0 = i\right)} \frac{\mathrm{P}\left(Y_m = j, Y_{m-1}, \cdots, Y_1 \neq j\right)}{\mathrm{P}\left(Y_0 = k\right)} \\
&= \sum_{m=1}^{n} \frac{\mathrm{P}\left(X_n = j, X_m = j, X_{m-1}, \cdots, X_1 \neq j\right)}{\mathrm{P}\left(X_m = j, X_{m-1}, \cdots, X_1 \neq j\right)} \frac{\mathrm{P}\left(X_m = j, X_{m-1}, \cdots, X_1 \neq j\right)}{\mathrm{P}\left(X_0 = i\right)} \frac{\mathrm{P}\left(Y_m = j, Y_{m-1}, \cdots, Y_1 \neq j\right)}{\mathrm{P}\left(Y_0 = k\right)} \\
&= \sum_{m=1}^{n} [P^{n-m}]_{jj} \frac{\mathrm{P}\left((X_m = j, X_{m-1}, \cdots, X_1 \neq j) \cap (Y_m = j, Y_{m-1}, \cdots, Y_1 \neq j)\right)}{\mathrm{P}\left((X_0 = i) \cap (Y_0 = k)\right)} \\
&= \sum_{m=1}^{n} [P^{n-m}]_{jj} \, \mathrm{P}\left(\tau_{jj} = m \,\middle|\, (X_0, Y_0) = (i,k)\right) \\
&= \mathrm{P}\left(Y_n = j, \tau_{jj} \le n \,\middle|\, (X_0, Y_0) = (i,k)\right)
\end{aligned}
$$

が成立することと，既約性 ($\mathrm{P}\left(\tau_{jj} < +\infty \,\middle|\, (X_0, Y_0) = (i,k)\right) = 1$) により

$$
\begin{aligned}
&\left|\mathrm{P}\left(X_n = j, \tau_{jj} > n \,\middle|\, (X_0, Y_0) = (i,k)\right) - \mathrm{P}\left(Y_n = j, \tau_{jj} > n \,\middle|\, (X_0, Y_0) = (i,k)\right)\right| \\
&\le 2\,\mathrm{P}\left(\tau_{jj} > n \,\middle|\, (X_0, Y_0) = (i,k)\right) \\
&= 2\left(1 - \mathrm{P}\left(\tau_{jj} \le n \,\middle|\, (X_0, Y_0) = (i,k)\right)\right) \\
&\longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow +\infty)
\end{aligned}
$$

が成り立つことから式 (10) が成立する.

第三段　$\sum$ を測度空間 $(E, \mathcal{E}, \pi)$ 上の積分と見做して Lebesgue の収束定理を使う.

$$
\begin{aligned}
\left|[P^n]_{ij} - [\pi]_j\right| &= \left|[P^n]_{ij} - [\pi P^n]_j\right| \\
&= \left|[P^n]_{ij} - \sum_{k \in E} [\pi]_k [P^n]_{kj}\right| \\
&= \left|\sum_{k \in E} [\pi]_k [P^n]_{ij} - \sum_{k \in E} [\pi]_k [P^n]_{kj}\right| \\
&\le \sum_{k \in E} [\pi]_k \left|[P^n]_{ij} - [P^n]_{kj}\right| \\
&\longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow +\infty).
\end{aligned}
$$

以上で命題の主張が示された.　∎