

関数解析レポート

百合川

2017 年 7 月 23 日

(約束及び定義)

- 係数体は複素数体 \mathbb{C} .
- 位相空間 X, Y に対し, $C(X, Y) = \{f \mid f \text{ は } X \text{ から } Y \text{ への連続写像}\}; C(X) = C(X, \mathbb{C})$. $C_b(X) = \{f \in C(X) \mid f \text{ は有界}\}$ は $\|u\| = \sup_{x \in X} |u(x)|$ をノルム (sup-norm) として Banach 空間である.
- s を複素数列全体のなす線形空間とする. $l^\infty = \{a = (a_n)_{n=1}^\infty \in s \mid \|a\|_\infty = \sup_n |a_n| < \infty\}$, $c_0 = \{a = (a_n)_{n=1}^\infty \in s \mid \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0\}$. このとき l^∞ は $\|a\|_\infty$ をノルムとして Banach 空間である.

[4]. $k \in \mathbb{N}_0$, $I = [a, b]$ とする. $C^k(I)$ は $\|f\|_k = \sum_{j=1}^k \sup_{x \in I} |f^{(j)}(x)|$ をノルムとして Banach 空間であることを示せ.

証明. 以下の手順で示す.

- $\|f\|_k$ が $C^k(I)$ におけるノルムをなすこと.
- $C^k(I)$ の $\|\cdot\|_k$ による Cauchy 列を取ると, 各 $j (= 0, 1, 2, \dots, k)$ 階導関数列に対しそれぞれ或る I 上の連続関数 f^j が存在し, それぞれの導関数列はこの関数に I 上で一様収束する.
- 各 $j = 0, 1, 2, \dots, k-1$, について f^j は I 上連続微分可能で $f^{j+1}(x) = \frac{d}{dx} f^j(x) (\forall x \in I)$ が成り立っている.

(i) について, $\forall f, g \in C^k(I)$ に対し, 正值性 $\|f\|_k \geq 0$ は右辺の各項が ≥ 0 であることから成り立つ. また $\|f\|_k = 0$ の場合, 右辺で $\sup_{x \in I} |f^{(j)}(x)| = 0 (j = 0, 1, 2, \dots, k)$ が成り立ち, 特に f は I 上で零写像であるとわかるから $f = 0$ である. 逆に f が I 上で零写像ならば全ての導関数が零写像になるため右辺は 0 になり, 従って $\|f\|_k = 0$ となる. 同次性は

$$\|\alpha f\|_k = \sum_{j=1}^k \sup_{x \in I} |(\alpha f^{(j)})(x)| = \sum_{j=1}^k \sup_{x \in I} |\alpha f^{(j)}(x)| = \sum_{j=1}^k \sup_{x \in I} |\alpha| |f^{(j)}(x)| = |\alpha| \sum_{j=1}^k \sup_{x \in I} |f^{(j)}(x)| = |\alpha| \|f\|_k, \quad (\forall \alpha \in \mathbb{C})$$

により示される. 三角不等式は

$$\|f + g\|_k = \sum_{j=1}^k \sup_{x \in I} |(f^{(j)} + g^{(j)})(x)| \leq \sum_{j=1}^k \sup_{x \in I} |f^{(j)}(x) + g^{(j)}(x)| \leq \sum_{j=1}^k \left(\sup_{x \in I} |f^{(j)}(x)| + \sup_{x \in I} |g^{(j)}(x)| \right) = \|f\|_k + \|g\|_k$$

により示される.

(ii) について, $f_n \in C^k(I) (n = 1, 2, 3, \dots)$ を $C^k(I)$ の $\|\cdot\|_k$ による Cauchy 列とする. 任意の $\epsilon > 0$ に対し或る $N \in \mathbb{N}$ が存在して全ての $n, m > N$ で

$$\epsilon > \|f_n - f_m\|_k = \sum_{j=1}^k \sup_{x \in I} |f_n^{(j)}(x) - f_m^{(j)}(x)|$$

が成り立っているから, 各 $j = 0, 1, 2, \dots, k$ について $(f_n^{(j)})_{n=1}^{+\infty}$ は sup-norm に関して Cauchy 列をなしている. $(C(I), \text{sup-norm})$ が Banach 空間であることが認められているから, 各 $j = 0, 1, 2, \dots, k$ についてそれぞれ或る I 上の連続関数 f^j が存在して $(f_n^{(j)})_{n=1}^{+\infty}$ は f^j に sup-norm で収束, 即ち I 上で一様収束する.

(iii) について, 上で取った $(f_n)_{n=1}^{+\infty} \subset C^k(I)$ について, 全ての $n \in \mathbb{N}$ と $j = 0, 1, 2, \dots, k-1$ に対して次の関係が成り立っている.

$$f_n^{(j)}(x) - f_n^{(j)}(b) = \int_b^x f_n^{(j+1)}(t) dt, \quad (\forall x \in I).$$

ここで (ii) の結果から, 任意の $x \in I$ と $\epsilon > 0$ に対し或る $N \in \mathbb{N}$ が存在して全ての $n > N$ で

$$\left| f^j(x) - f_n^{(j)}(x) \right| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \left| f_n^{(j+1)}(x) - f^{j+1}(x) \right| < \frac{\epsilon}{3(b-a)}$$

が成り立つようにできるから, 同じ n について

$$\begin{aligned} \left| (f^j(x) - f^j(b)) - \int_b^x f^{j+1}(t) dt \right| &= \left| (f^j(x) - f^j(b)) - (f_n^{(j)}(x) - f_n^{(j)}(b)) + \int_b^x f_n^{(j+1)}(t) dt - \int_b^x f^{j+1}(t) dt \right| \\ &\leq \left| f^j(x) - f_n^{(j)}(x) \right| + \left| f^j(b) - f_n^{(j)}(b) \right| + \int_b^x \left| f_n^{(j+1)}(t) - f^{j+1}(t) \right| dt \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + (b-a) \frac{\epsilon}{3(b-a)} = \epsilon \end{aligned}$$

が成り立つ. ϵ は任意だから

$$f^j(x) - f^j(b) = \int_b^x f^{j+1}(t) dt, \quad (\forall x \in I, j = 0, 1, 2, \dots, k-1)$$

が示されたことになる. 右辺は連続関数 f^{j+1} の積分だから左辺 f^j は x に関して微分可能関数 (端点は片側微分を考える) となり, 導関数は f^{j+1} である. ゆえに $f^0 \in C^k(I)$ が示される. 表記を改めて $f := f^0, f^{(j)} := f^j (j = 1, 2, \dots, k)$ とすれば

$$\|f_n - f\|_k = \sum_{j=1}^k \sup_{x \in I} \left| f_n^{(j)}(x) - f^{(j)}(x) \right| \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)$$

が成り立つから, $C^k(I)$ が $\|\cdot\|_k$ をノルムとして Banach 空間をなしていると示された. ■

[11].

- (1) c_0 は l^∞ の閉線形部分空間であることを示せ.
- (2) l^∞ と c_0 が可分であるかどうか判定せよ.

証明.

- (1) まず $c_0 \subset l^\infty$ であることを示す. $\forall a = (a_n)_{n=1}^\infty \in c_0$ は収束点列であるから

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N) |a_n| < \epsilon$$

となり

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \leq \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, \epsilon\} < +\infty$$

が成り立ち $a \in l^\infty$ であるとわかる. 従って $c_0 \subset l^\infty$ である. つぎに c_0 が l^∞ の線形部分空間であることを示す. $\forall a = (a_n)_{n=1}^\infty, b = (b_n)_{n=1}^\infty \in c_0, \alpha \in \mathbb{C}$ に対し

$$\begin{aligned} |a_n + b_n| &\leq |a_n| + |b_n| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow +\infty), \\ |\alpha a_n| &= |\alpha| |a_n| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow +\infty) \end{aligned}$$

が成り立つことにより $a + b \in c_0$ と $\alpha a \in c_0$ が示される．従って c_0 は s の線形部分空間であり，さらに l^∞ の線形部分空間でもある．最後に c_0 が l^∞ で閉集合となっていることを示す． l^∞ は $\|\cdot\|_{l^\infty}$ をノルムとして Banach 空間となっているから，その部分空間である c_0 が $\|\cdot\|_{l^\infty}$ をノルムとして Banach 空間をなしていることを示せばよい． $a^{(n)} = (a_m^{(n)})_{m=1}^\infty \in c_0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を $\|\cdot\|_{l^\infty}$ に関する Cauchy 列とする．($l^\infty, \|\cdot\|_{l^\infty}$) が完備であるから， $(a^n)_{n=1}^\infty$ は或る $a^* = (a_m^*)_{m=1}^\infty \in l^\infty$ に m に関して一様に収束している．つまり任意の $\epsilon > 0$ に対して或る $N \in \mathbb{N}$ が存在して，全ての $n > N$ について

$$\|a^{(n)} - a^*\|_{l^\infty} = \sup_{m \in \mathbb{N}} |a_m^{(n)} - a_m^*| < \epsilon$$

が成り立っている． $a^* = (a_m^*)_{m=1}^\infty$ が c_0 の元であることは帰謬法で示す． $a^* \notin c_0$ であると仮定すると，或る $\delta > 0$ に対しては，いかなる $N \in \mathbb{N}$ を取っても必ず $n > N$ なる自然数で

$$|a_n^*| \geq \delta$$

を満たすものが存在する． $(a_m^*)_{m=1}^\infty$ の部分列 $(a_{m_k}^*)_{k=1}^\infty$ を

$$|a_{m_k}^*| \geq \delta, \quad (m_k < m_{k+1}, k = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすものとして取ることが出来て，この部分添数列に対して或る $N_\delta \in \mathbb{N}$ を取れば，全ての $n > N_\delta$ で

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} |a_{m_k}^{(n)} - a_{m_k}^*| < \frac{\delta}{2}$$

が成立することになる． $n > N_\delta$ なる n に対し数列 $a_n = (a_m^{(n)})_{m=1}^\infty$ は c_0 の元であるから，或る $N_\delta^n \in \mathbb{N}$ が存在して全ての $p > N_\delta^n$ に対し

$$|a_p^{(n)}| < \frac{\delta}{2}$$

となるはずであるが，或る $k \in \mathbb{N}$ について $m_k > N_\delta^n$ となるような添数 m_k が存在することに注意すれば，ここにおいて

$$\frac{\delta}{2} \leq |a_{m_k}^*| - \frac{\delta}{2} < |a_{m_k}^{(n)}| < \frac{\delta}{2}$$

と矛盾が出る．従って $a^* \in c_0$ であるべきで，これは c_0 が $\|\cdot\|_{l^\infty}$ をノルムとして完備であることを示したことになる．ゆえに c_0 は l^∞ の閉線形部分空間である．

- (2) 結論は， l^∞ は可分ではなく c_0 は可分である．順番に示す． l^∞ の部分集合として 0 と 1 のみで成る数列全体

$$M := \{a \in l^\infty \mid a = (a_n)_{n=1}^{+\infty}, a_n \in \{0, 1\}, n = 1, 2, 3, \dots\}$$

を考える．また任意の $a = (a_n)_{n=1}^\infty, b = (b_n)_{n=1}^\infty \in M$ に対し

$$\|a - b\|_{l^\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n| = \begin{cases} 1 & (a \neq b) \\ 0 & (a = b) \end{cases}$$

が成り立つから， M の異なる 2 元の $\|\cdot\|_{l^\infty}$ による距離は 1 で固定されている．もし l^∞ が可分であるとすれば， $\|\cdot\|_{l^\infty}$ に関して l^∞ で稠密な可算部分集合 C が存在することになる．任

意の $a \in M$ に対してその $1/2$ 近傍 (sup-norm) の内部に C の元が存在していることになるから、そのうちの一つを c_a と表し対応を付ける. $a \in M$ に対応する $c_a \in C$ は他の M の元の $1/2$ 近傍に属することはない. もし c_a が或る $a \neq b \in M$ の $1/2$ 近傍に入ると

$$1 = \|a - b\|_{l^\infty} \leq \|a - c_a\|_{l^\infty} + \|b - c_a\|_{l^\infty} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

と矛盾ができるからである. 即ち M から C への対応関係 $M \ni a \mapsto c_a \in C$ は単射である. ここで M の濃度 $2^{\mathbb{N}}$ が連続体濃度であることに注意すれば, 単射の存在により C の濃度が連続体濃度以上であることになり C が可算集合であることに反する. 従って l^∞ は可分ではない. 一方で c_0 は $\|\cdot\|_{l^\infty}$ をノルムとして可分なノルム空間をなす. c_0 の可算部分集合を

$$S := \left\{ a \in c_0 \left| a = (\alpha_n + i\beta_n)_{n=1}^{+\infty}, \begin{cases} \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{Q}, & n = 1, 2, \dots, N, \\ \alpha_n = \beta_n = 0, & n \geq N + 1, \end{cases} (N = 1, 2, 3, \dots) \right. \right\}$$

として取る. ただし i は $i^2 = -1$ なる虚数単位で \mathbb{Q} は有理数全体である. 任意の $a = (a_n)_{n=1}^{+\infty} \in c_0$ について, 任意の正数 $\epsilon > 0$ に対して或る $N \in \mathbb{N}$ を取れば全ての $n > N$ で

$$|a_n| < \epsilon$$

が成り立つから, 後は $(a_n)_{n=1}^N$ の部分で

$$\sup_{n=1,2,\dots,N} |a_n - b_n| < \epsilon$$

となるように S の元 $b = (b_n)_{n=1}^{+\infty}$ ($b_n = 0, n > N$) を取れば

$$\|a - b\|_{l^\infty} < \epsilon$$

が成り立つ. 即ち S が c_0 において $\|\cdot\|_{l^\infty}$ に関して稠密であるとわかり, c_0 が可分であると示された. ■

[5]. $X = C([0, 1])$ を sup-norm の入った Banach 空間とする. $0 < a < 1$, $Y = \{f \in X; [0, a] \text{ 上で } f(t) = 0\}$ とおく.

- (1) Y が X の閉線形部分空間であることを示せ.
- (2) X/Y と $C([0, a])$ (sup-norm を入れる) は Banach 空間として同型であることを示せ.

証明.

- (1) Y が X の線形部分空間であることは, 任意の $f, g \in Y$ と任意の複素数 $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t) = 0, \quad (\forall t \in [0, a])$$

$$(\alpha f)(t) = \alpha f(t) = 0, \quad (\forall t \in [0, a])$$

が成り立つことから示される. 後は sup-norm に関して Y が閉集合となっていることを示せばよい. $f_n \in Y$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を sup-norm に関する Cauchy 列とする. $(C([0, 1]), \text{sup-norm})$ の完備性から $(f_n)_{n=1}^\infty$ は或る $f \in C([0, 1])$ に $[0, 1]$ 上で一様に収束するが, もし或る $x \in [0, a]$ について $|f(x)| > 0$ であるならば, この x において $f_n(x) = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) であることから

$$0 < |f(x)| = |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{t \in [0, 1]} |f_n(t) - f(t)|, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

となり $(f_n)_{n=1}^\infty$ が f に収束することに反する. 従って f も $[0, a]$ 上で 0 でなくてはならず, f は Y に属することになる. これは Y が sup-norm の下で完備ノルム空間となっていることを主張し, 以上より Y は X の閉線形部分空間であると示された.

- (2) X の sup-norm を $\|\cdot\|$ で表現する. X を Y で割った商空間 X/Y の元を $[f]$ (代表元 $f \in X$) で表現して, Y が閉線形部分空間であるから X/Y は

$$\|[f]\|_{X/Y} := \inf_{g \in Y} \|f - g\|, \quad ([f] \in X/Y)$$

をノルムとしてノルム空間となり, さらに $(X, \|\cdot\|)$ が Banach 空間であるから $(X/Y, \|\cdot\|_{X/Y})$ も Banach 空間となる. 任意の $[f] \in X/Y$ について $f_1, f_2 \in [f]$ は $f_1 - f_2 \in Y$ を満たすから即ち

$$f_1(t) = f_2(t) \quad (\forall t \in [0, a])$$

が成り立っている.

$$\|[f]\|_{X/Y} = \inf_{g \in Y} \|f - g\| = \inf_{g \in Y} \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) - g(t)| = \sup_{t \in [0, a]} |f(t)|$$

が成り立つことに注意する.

$$\sup_{t \in [0, a]} |f(t)| = \sup_{t \in [0, a]} |f(t) - g(t)| \leq \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) - g(t)| \quad (\forall g \in Y)$$

$$\sup_{t \in [0, a]} |f(t)| \leq \inf_{g \in Y} \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) - g(t)|$$

$[f]$ の元の定義域を $[0, a]$ に制限した関数は $C([0, a])$ の或る元に一致する. $C([0, a])$ の任意の元は定義域を $[0, 1]$ に拡張 (例えば $[a, 1]$ 上では適当な一次関数でおく) すれば $X = C([0, 1])$ の或る元に一致するから或る X/Y の或る元 (同値類) に属するしていることになる. 写像 $X/Y \ni [f] \mapsto f|_{[0, a]} \in C([0, a])$ は X/Y から $C([0, a])$ への全単射である. この写像を T と表すとする. T は次の意味で等長である. $\|[f]\|_{X/Y} = \|f|_{[0, a]}\| = \|T[f]\|$. T の線型性は

$$\begin{aligned} T([f] + [h]) &= T[f + h] = (f + h)|_{[0, a]} = f|_{[0, a]} + h|_{[0, a]} = T[f] + T[h], \\ T(\alpha[f]) &= T[\alpha f] = (\alpha f)|_{[0, a]} = \alpha f|_{[0, a]} = \alpha T[f] \end{aligned}$$

により示される. ゆえに T は $X/Y \mapsto C([0, a])$ の同型写像であり, X/Y と $C([0, a])$ が Banach 空間として同型であることが示された. ■

[6]. $I = [0, 1]$ とし, $X = C(I)$ を sup-norm の入った Banach 空間とする. $K \in C(I \times I)$ とし, $A = \sup_{(t,s) \in I \times I} |K(t, s)|$ とおく. $u \in X$ に対して $Tu : I \mapsto \mathbb{C}$ を次で定める:

$$Tu(t) = \int_0^t K(t, s)u(s) ds, \quad (t \in I).$$

- (1) $u \in X$ ならば $Tu \in X$ を示せ.
(2) 写像 $X \ni u \mapsto Tu \in X$ を同じ記号 T であらわすとき, $T \in B(X)$ 及び $\|T^n\| \leq A^n/n!$ ($n \in \mathbb{N}_0$) を示せ.

- (3) $I - T$ は逆作用素を持ち, $(I - T)^{-1} \in B(X)$ であることを示せ. ただし I は X の高等写像である.

証明. X における sup-norm を $\|\cdot\|_X$ と表す. また $T^0 = I$ (恒等写像) として考える.

- (1) $u \in X$ に対して Tu が I 上で連続であることを示せばよい. 任意の正数 $\epsilon > 0$ に対して $\delta = \epsilon/A\|u\|_X$ と取れば, $t \in [0, 1]$ と $t+h \in [0, 1] \cap (t, t+\delta)$ に対して

$$\begin{aligned} |Tu(t+h) - Tu(t)| &= \left| \int_0^{t+h} K(t, s)u(s) ds - \int_0^t K(t, s)u(s) ds \right| \\ &\leq \left| \int_t^{t+h} K(t, s)u(s) ds \right| \\ &\leq \int_t^{t+h} |K(t, s)||u(s)| ds \\ &\leq \int_t^{t+h} \sup_{s \in I} |K(t, s)||u(s)| ds \\ &\leq A\|u\|_X h < \epsilon \end{aligned}$$

が成り立つことにより Tu が $[0, 1]$ 上右連続であることが示される. 同様に Tu が $(0, 1]$ 上で左連続であることも示されるから, $Tu \in X$ が示される.

- (2) (1) の結果より $X \ni u \mapsto Tu \in X$ が判っているから, 後は写像 $T : X \mapsto X$ の線型性を示せば, T が X を定義域とする線型作用素であること, 即ち $T \in B(X)$ が示される. T の線型性は, 任意の $u, v \in X$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $t \in I$ に対して

$$T(u+v)(t) = \int_0^t K(t, s)(u+v)(s) ds = \int_0^t K(t, s)(u(s) + v(s)) ds = \int_0^t K(t, s)u(s) ds + \int_0^t K(t, s)v(s) ds = Tu(t) + Tv(t)$$

$$T(\alpha u)(t) = \int_0^t K(t, s)(\alpha u)(s) ds = \int_0^t K(t, s)(\alpha u(s)) ds = \alpha \int_0^t K(t, s)u(s) ds = \alpha Tu(t)$$

が成り立つことにより示される. 次に $\|T^n\| \leq A^n/n!$ ($n \in \mathbb{N}_0$) を示すが, その準備に次のことを示す.

$$|T^n u(t)| \leq \frac{A^n}{n!} \|u\|_X t^n, \quad (t \in I, n = 1, 2, 3, \dots). \quad (1)$$

証明は数学的帰納法による. $n = 1$ のとき

$$|Tu(t)| = \left| \int_0^t K(t, s)u(s) ds \right| \leq \int_0^t |K(t, s)||u(s)| ds \leq \int_0^t \sup_{s \in I} |K(t, s)||T^k u(s)| ds \leq A\|u\|_X \int_0^t ds = A\|u\|_X t$$

が成り立つ. $n = k$ のとき (1) を仮定すると,

$$|T^{k+1} u(t)| = |T(T^k u)(t)| = \left| \int_0^t K(t, s)T^k u(s) ds \right| \leq \int_0^t |K(t, s)||T^k u(s)| ds \leq \int_0^t \sup_{s \in I} |K(t, s)| \frac{A^k}{k!} \|u\|_X s^k ds \leq \frac{A^{k+1}}{(k+1)!} t^{k+1}$$

となることにより (1) が任意の $n \in \mathbb{N}$ で成立すると示された. 従って $t \in I$ についての上限を取れば

$$\|T^n u\|_X = \sup_{t \in I} |T^n u(t)| \leq \sup_{t \in I} \frac{A^n}{n!} \|u\|_X t^n = \frac{A^n}{n!} \|u\|_X, \quad (\forall u \in X, n = 1, 2, 3, \dots)$$

となる. $n = 0$ の場合は, $\|Iu\|_X = \|u\|_X$ ($\forall u \in X$) により $\|T^0\| = \|I\| = 1$ である. 以上より $\|T^n\| \leq A^n/n!$ ($n \in \mathbb{N}_0$) となることが示された.

- (3) $(X, \|\cdot\|_X)$ が Banach 空間であるから $B(X)$ も作用素ノルムの下で Banach 空間となっている. 従って級数

$$\sum_{n=0}^{+\infty} T^n \quad (2)$$

が収束することの十分条件は

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|T^n\| < +\infty$$

が成り立つことである. 今, (2) の結果より

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|T^n\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} = e^A < +\infty$$

が成り立っているから (2) は収束する. つまり

$$T^* := \sum_{n=0}^{+\infty} T^n$$

と表せば T^* は $B(X)$ の元であり, 部分和を $T_N := \sum_{n=0}^N T^n$ ($N = 0, 1, 2, \dots$) と表現して $T_N \rightarrow T^*$ ($N \rightarrow +\infty$) が成り立っていることになる. これと

$$\|(TT^* - TT_N)u\|_X = \|TT^*u - TT_Nu\|_X = \|T(T^*u) - T(T_Nu)\|_X = \|T(T^*u - T_Nu)\|_X = \|T(T^* - T_N)u\|_X$$

と

$$\|(T^*T - T_NT)u\|_X = \|T^*Tu - T_NT u\|_X = \|T^*(Tu) - T_N(Tu)\|_X = \|(T^* - T_N)Tu\|_X$$

から,

$$\|TT^* - TT_N\| \leq \|T\| \|T^* - T_N\| \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow +\infty) \quad (3)$$

と

$$\|T^*T - T_NT\| \leq \|T^* - T_N\| \|T\| \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow +\infty) \quad (4)$$

が成り立つ. (3) により

$$TT^* = \lim_{N \rightarrow \infty} TT_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{N+1} T^n = \sum_{n=1}^{+\infty} T^n = T^* - I$$

が成り立つから $I = T^* - TT^* = (I - T)T^*$ と表現でき, また (4) により

$$T^*T = \lim_{N \rightarrow \infty} T_NT = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{N+1} T^n = \sum_{n=1}^{+\infty} T^n = T^* - I$$

も成り立つから $I = T^* - T^*T = T^*(I - T)$ と表現できる. ゆえに $I = (I - T)T^* = T^*(I - T)$ が成り立ち, この等式は $I - T$ が $X \mapsto X$ の全単射であり $T^* \in B(X)$ を逆写像にもつことを示している. ■

[9]. (S, \mathfrak{M}, μ) は σ -有限な測度空間, $X = L^2(S, \mathfrak{M}, \mu) = L^2(\mu)$ とする. 可測関数 $a : S \rightarrow \mathbb{C}$ に対して, X 上の掛け算作用素 M_a を次で定める:

$$D(M_a) = \{u \in X \mid au \in X\}, \quad (M_a u)(x) = a(x)u(x) \quad (x \in S).$$

- (1)
- (2) $a \in L^\infty(S, \mathfrak{M}, \mu)$ ならば $M_a \in B(X)$ であり, $\|M_a\| = \|a\|_{L^\infty(\mu)}$ が成り立つことを示せ.
- (3) 逆に $M_a \in B(X)$ ならば $a \in L^\infty(S, \mathfrak{M}, \mu)$ であることを示せ.

証明.

- (1)
- (2) $a \in L^\infty(S, \mathfrak{M}, \mu)$ ならば, $\|\cdot\|_{L^\infty(\mu)}$ の定義より

$$\|a\|_{L^\infty(\mu)} = \inf \{b \in [0, +\infty) \mid \mu(\{x \in S \mid |a(x)| > b\}) = 0\} < +\infty$$

である. 特に

$$N_m := \left\{x \in S \mid |a(x)| \geq \|a\|_{L^\infty(\mu)} + \frac{1}{m}\right\}, \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

と置けば $\mu(N_m) = 0$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) であって, μ 零集合 N を

$$N := \bigcup_{m=1}^{\infty} N_m$$

で定めれば

$$|a(x)| \leq \|a\|_{L^\infty(\mu)}, \quad (\forall x \in S \cap N^c)$$

が成り立つ. また $0 < c < \|a\|_{L^\infty(\mu)}$ となるような任意の c については

$$\mu(\{x \in S \mid |a(x)| > c\}) > 0 \tag{5}$$

が成り立つことにも注意しておく. 全ての $u \in X$ に対して

$$\begin{aligned} \|M_a u\|_{L^2(\mu)}^2 &= \int_S |a(x)u(x)|^2 \mu(dx) \\ &= \int_{S/N} |a(x)u(x)|^2 \mu(dx) \\ &\leq \int_{S/N} \|a\|_{L^\infty(\mu)}^2 |u(x)|^2 \mu(dx) \\ &= \int_S \|a\|_{L^\infty(\mu)}^2 |u(x)|^2 \mu(dx) = \|a\|_{L^\infty(\mu)}^2 \|u\|_{L^2(\mu)}^2 \end{aligned}$$

が成り立っていることから, $\|M_a\| \leq \|a\|_{L^\infty(\mu)}$ であり $M_a \in B(X)$ が示される. さらに, (S, \mathfrak{M}, μ) が σ -有限な測度空間であるという条件の下では, $\|M_a\| = \|a\|_{L^\infty(\mu)}$ であることが次のように示される. $\|a\|_{L^\infty(\mu)} = 0$ ならば明らかに M_a は零作用素で $0 = \|M_a\| = \|a\|_{L^\infty(\mu)}$ である. $\|a\|_{L^\infty(\mu)} > 0$ である場合, $\|a\|_{L^\infty(\mu)} > 1/n_0$ を満たすような $n_0 \in \mathbb{N}$ を一つ取り, $n > n_0$ なる全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$G_n := \left\{x \in S \cap N^c \mid \|a\|_{L^\infty(\mu)} - \frac{1}{n} < |a(x)| \leq \|a\|_{L^\infty(\mu)}\right\}$$

として μ 可測集合の族 $(G_n)_{n>n_0}$ を作る. (5) により全ての $n > n_0$ に対して $\mu(G_n) > 0$ である. これは次で示される.

$$\begin{aligned}
\mu(G_n) &= \mu\left(\left\{x \in S \mid \|a\|_{L^\infty(\mu)} - \frac{1}{n} < |a(x)| \leq \|a\|_{L^\infty(\mu)}\right\} \cap N^c\right) \\
&= \mu\left(\left\{x \in S \mid \|a\|_{L^\infty(\mu)} - \frac{1}{n} < |a(x)| \leq \|a\|_{L^\infty(\mu)}\right\}\right) \quad (\because \mu(N) = 0) \\
&= \mu\left(\left\{x \in S \mid \|a\|_{L^\infty(\mu)} - \frac{1}{n} < |a(x)|\right\} \cap \left\{x \in S \mid |a(x)| \leq \|a\|_{L^\infty(\mu)}\right\}\right) \\
&= \mu\left(\left\{x \in S \mid \|a\|_{L^\infty(\mu)} - \frac{1}{n} < |a(x)|\right\}\right) \quad (\because \mu\left(\left\{x \in S \mid |a(x)| > \|a\|_{L^\infty(\mu)}\right\}\right) = 0) \\
&> 0. \quad (\because (5))
\end{aligned}$$

単調増大な μ 可測集合列 $S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \cdots$, $\mu(S_k) < +\infty$ で $\bigcup_{k=1}^\infty S_k = S$ なるものに対して (σ -有限の仮定よりこのような集合列が存在する). 全ての $n > n_0$ に対して

$$0 < \mu(G_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(S_k \cap G_n)$$

となるから, 必ず或る S_{k_n} に対して

$$r_n := \mu(S_{k_n} \cap G_n) > 0$$

となっている.

$$u_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{r_n}} & x \in S_{k_n} \cap G_n \\ 0 & x \notin S_{k_n} \cap G_n \end{cases} \quad (n > n_0)$$

と定義すれば, $\mu(S_{k_n} \cap G_n) < +\infty$ であるから $u_n \in X$ ($n > n_0$) であって

$$\|u_n\|_{L^2(\mu)} = 1 \quad (n > n_0)$$

が満たされている. この u_n に対して

$$\|a\|_{L^\infty(\mu)} - \frac{1}{n} < \|M_a u_n\|_{L^2(\mu)} \leq \|a\|_{L^\infty(\mu)}$$

が成り立っているから

$$\|a\|_{L^\infty(\mu)} - \frac{1}{n} < \sup_{0 \neq u \in X} \frac{\|M_a u\|_{L^2(\mu)}}{\|u\|_{L^2(\mu)}} = \|M_a\| \leq \|a\|_{L^\infty(\mu)} \quad (n > n_0)$$

である. n は $n > n_0$ で任意に大きくできるから

$$\|a\|_{L^\infty(\mu)} = \|M_a\|$$

が示されたことになる.

(3) $M_a \in B(X)$ ならば M_a の作用素ノルム $\|M_a\|$ は有限な実数値で

$$\int_S |a(x)u(x)|^2 \mu(dx) = \|M_a u\|_{L^2(\mu)}^2 \leq \|M_a\|^2 \|u\|_{L^2(\mu)}^2 = \|M_a\|^2 \int_S |u(x)|^2 \mu(dx)$$

が成立している. (S, \mathfrak{M}, μ) が σ -有限な測度空間であるという条件の下では

$$\mu(\{x \in S \mid |a(x)| > \|M_a\|\}) = 0$$

が成り立つことを示す。これが示されれば $a \in L^\infty(S, \mathfrak{M}, \mu)$ が従う。問題の仮定により、ある μ 測度有限で単調増大な μ 可測集合列 $S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \cdots$ が存在して $\bigcup_{k=1}^\infty S_k = S$ が満たされている。

$$G := \{x \in S \mid |a(x)| > \|M_a\|\}$$

と置けばこれは μ 可測集合であり、 $\mu(G) > 0$ とすると

$$0 < \mu(G) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(S_k \cap G)$$

により或る $K \in \mathbb{N}$ が存在して $\mu(S_k \cap G) > 0$ ($\forall k > K$) が成立する。 $k > K$ を満たす k を選んで

$$u(x) = \begin{cases} 1 & x \in S_k \cap G \\ 0 & x \notin S_k \cap G \end{cases}$$

と置けば、 $\mu(S_k \cap G) < +\infty$ であることから $u \in X$ であって、

$$\|u\|_{L^2(\mu)}^2 = \int_S |u(x)|^2 \mu(dx) = \mu(S_k \cap G)$$

が成り立っている。 G 上で $|a(x)| > \|M_a\|$ であるから

$$\begin{aligned} \|M_a\|^2 \|u\|_{L^2(\mu)}^2 &= \|M_a\|^2 \int_S |u(x)|^2 \mu(dx) = \|M_a\|^2 \int_{S_k \cap G} |u(x)|^2 \mu(dx) \\ &< \int_{S_k \cap G} |a(x)u(x)|^2 \mu(dx) \\ &\leq \int_S |a(x)u(x)|^2 \mu(dx) \\ &\leq \|M_a\|^2 \|u\|_{L^2(\mu)}^2 \end{aligned}$$

となるが、最右辺と最左辺を $\|u\|_{L^2(\mu)}^2$ で割ると

$$\|M_a\| < \|M_a\|$$

と矛盾が出る。従って $\mu(G) = 0$ でなくてはならない。 ■

[12]. $a = (a_n)_{n=1}^\infty \in l^1$ に対して $T_a : c_0 \mapsto \mathbb{C}$ を次で定める：

$$T_a(x) = \sum_{n=1}^\infty a_n x_n \quad (x = (x_n) \in c_0).$$

- (1) $\forall a = (a_n) \in l^1, T_a \in c_0^*$ かつ $\|T_a\| = \|a\|_{l^1}$ であることを示せ。
- (2) $T : l^1 \ni a \mapsto T_a \in c_0^*$ は Banach 空間としての同系写像であることを示せ。

証明.

- (1) 設問 [11] の結果により、 T_a の定義域である c_0 は $\|\cdot\|_\infty$ をノルムとして l^∞ の閉線型部分空間であり、よって Banach 空間である。このことに留意して以下進む。 $a = (a_n)_{n=1}^\infty \in l^1$ を任意に取って固定する。任意の $x = (x_n) \in c_0$ に対して

$$\sum_{n=1}^\infty |a_n| |x_n| \leq \sum_{n=1}^\infty |a_n| \|x\|_\infty = \|a\|_{l^1} \|x\|_\infty < +\infty$$

となり級数 $T_a(x)$ ($\forall x \in c_0$) は有限確定するから、級数の被積分項の和は級数の和に一致し、スカラ倍は級数全体のスカラ倍に一致する。よって任意に $x = (x_n), y = (y_n) \in c_0$ と $\alpha \in \mathbb{C}$ を取れば、

$$\begin{aligned} T_a(x+y) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n x_n + a_n y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n = T_a x + T_a y, \\ T_a(\alpha x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\alpha x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \alpha) x_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n) x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha (a_n x_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = \alpha T_a(x) \end{aligned}$$

により T_a の線型性が示されるから、 T_a は $c_0 \rightarrow \mathbb{C}$ の線型汎関数である。有界性は式により

$$|T_a(x)| \leq \|a\|_{l^1} \|x\|_{l^\infty}$$

から $\|T_a\| \leq \|a\|_{l^1}$ となるとわかる。ゆえに $T_a \in c_0^*$ ($\forall a \in l^1$) である。また $\|T_a\| = \|a\|_{l^1}$ について、 $a = 0$ の場合は T_a が零作用素になるから明らかに成り立つ。 $a \neq 0$ の場合、任意の $\|a\|_{l^1} > \epsilon > 0$ に対して或る $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\|a\|_{l^1} - \epsilon < \sum_{n=1}^N |a_n|$$

とできる。 $x \in c_0$ を

$$x_n = \begin{cases} 1 & a_n > 0, n \leq N \\ -1 & a_n \leq 0, n \leq N \\ 0 & n > N \end{cases}$$

となっているもので取れば、

$$\|a\|_{l^1} - \epsilon < \sum_{n=1}^N |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = T_a(x)$$

が成立することになる。

$$\|a\|_{l^1} - \epsilon < T_a(x) = \frac{|T_a(x)|}{\|x\|_{l^\infty}} \leq \sup_{0 \neq x \in c_0} \frac{|T_a(x)|}{\|x\|_{l^\infty}} = \|T_a\| \leq \|a\|_{l^1}$$

が成り立ち、 ϵ が任意であるから、 $a = 0$ の場合と合わせて $\|T_a\| = \|a\|_{l^1}$ ($\forall a \in l^1$) が示された。

- (2) まず、 l^1 は $\|\cdot\|_{l^1}$ をノルムとして Banach 空間となり、 c_0^* は T_a の値域 \mathbb{C} が Banach 空間であるから作用素ノルムにより Banach 空間となっている。写像 T が

$$\|Ta\| = \|T_a\| = \|a\|_{l^1} \quad (\forall a \in l^1)$$

の意味で等長であることは (1) で示してあるから、後は T が線型全単射であることを証明すればよい。任意の $a = (a_n), b = (b_n) \in l^1$, $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)x_n &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n x_n + b_n x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n, \\ \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n)x_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha (a_n x_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \end{aligned}$$

が成り立つから

$$\begin{aligned} T(a+b) &= T_{a+b} = T_a + T_b = Ta + Tb \\ T(\alpha a) &= T_{\alpha a} = \alpha T_a = \alpha Ta \end{aligned}$$

も成り立つことにより T の線型性が示される. また $a = (a_n), b = (b_n) \in l^1$ に対して, $a \neq b$ であるなら或る $N \in \mathbb{N}$ 番目で $a_N \neq b_N$ となっているはずであるから,

$$x_N = \begin{cases} 1 & n = N \\ 0 & n \neq N \end{cases}$$

となる $x = (x_n) \in c_0$ に対して

$$T_a(x) = a_N \neq b_N = T_b(x)$$

となり, T が単射であることが示される. 最後に T が全射であることを示す. 任意に $L \in c_0^*$ を取る. 或る $a \in l^1$ に対して L が T_a に一致することを見ればよい. Kronecker のデルタを用いて

$$e_n := (\delta_{jn})_{j=1}^\infty$$

で表現される e_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) は c_0 の元であり,

$$a_n := L(e_n) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

として複素数列 $(a_n)_{n=1}^\infty$ を作る. 任意の $x = (x_n) \in c_0$ は

$$x = \sum_{n=1}^\infty x_n e_n$$

で表現でき, 右辺の和は

$$\left\| \sum_{n=p+1}^q x_n e_n \right\|_{l^\infty} \leq \sum_{n=p+1}^q \|x_n e_n\|_{l^\infty} \leq \sum_{n=p+1}^q |x_n| \|e_n\|_{l^\infty} = \sum_{n=p+1}^q |x_n|$$