Epic Mathematics

2019 年 6 月 30 日

このノートの在り処 https://github.com/gingernine/test/tree/master/Karatzas_Shreve_note

Stack Exchange account https://math.stackexchange.com/users/680871/sho

ブログ https://amateurmath.hatenablog.com

TA と修論の準備のために必要にせまられ，復習を兼ねて関数論の節を大幅に改訂．また指数関数や対数関数などの初等関数の章を新設．またいくつかの章の終わりに参考文献等についてのメモを付けた．

2019 年 6 月

目次

第 1 章

Martingales, Stopping Times, and Filtrations

1.1 Stochastic Processes and σ-Fields

Problem 1.5 修正

Let Y be a modification of X, and suppose that every sample path of both processes are right-continuous sample paths. Then X and Y are indistinguishable.

証明. X, Y のパスの右連続性より

$$\{X_t = Y_t, \ \forall t \geq 0\} = \bigcap_{r \in \mathbf{Q} \cap [0,\infty)} \{X_r = Y_r\}$$

が成立するから，$P(X_r = Y_r) = 1 \ (\forall r \geq 0)$ より

$$P(X_t = Y_t, \ \forall t \geq 0) = P\left(\bigcap_{r \in \mathbf{Q} \cap [0,\infty)} \{X_r = Y_r\} \right) = 1$$

が従う． ∎

Problem 1.7

Let X be a process with every sample path RCLL. Let A be the event that X is continuous on $[0, t_0)$. Show that $A \in \mathscr{F}^X_{t_0}$.

証明 (参照元:[3]). $[0, t_0)$ に属する有理数の全体を $\mathbf{Q}^* := \mathbf{Q} \cap [0, t_0)$ と表すとき，

$$A = \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{\substack{p,q \in \mathbf{Q}^* \\ |p-q|<1/n}} \left\{ \omega \in \Omega \mid \ \left| X_p(\omega) - X_q(\omega) \right| < \frac{1}{m} \right\}$$

が成立することを示せばよい．これが示されれば，$\omega \longmapsto \left(X_p(\omega), X_q(\omega) \right)$ の $\mathscr{F}^X_{t_0} / \mathscr{B}(\mathbf{R}^2)$-可測性と

$$\Phi : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \ni (x, y) \longmapsto |x - y| \in \mathbf{R}$$

の $\mathscr{B}(\mathbf{R}^2)/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測性より

$$\left\{\, \omega \in \Omega \mid \quad \left|X_p(\omega) - X_q(\omega)\right| < \frac{1}{m} \,\right\} = \left\{\, \omega \in \Omega \mid \quad \left(X_p(\omega), X_q(\omega)\right) \in \Phi^{-1}\left(B_{1/m}(0)\right) \,\right\} \in \mathscr{F}^X_{t_0}$$

が得られ $A \in \mathscr{F}^X_{t_0}$ が従う．$\left(B_{1/m}(0) = \{\, x \in \mathbf{R} \mid \quad |x| < 1/m \,\}.\right)$

第一段　$\omega \in A^c$ を任意にとる．このとき或る $s \in (0, t_0)$ が存在して，$t \longmapsto X_t(\omega)$ は $t = s$ において左側不連続である．従って或る $m \geq 1$ については，任意の $n \geq 1$ に対し $0 < s - u < 1/3n$ を満たす u が存在して

$$|X_u(\omega) - X_s(\omega)| \geq \frac{1}{m}$$

を満たす．一方でパスの右連続性より $0 < p - s,\ q - u < 1/3n$ を満たす $p, q \in \mathbf{Q}^*$ が存在して

$$\left|X_p(\omega) - X_s(\omega)\right| < \frac{1}{4m}, \quad \left|X_q(\omega) - X_u(\omega)\right| < \frac{1}{4m}$$

が成立する．このとき $0 < |p - q| < 1/n$ かつ

$$\left|X_p(\omega) - X_q(\omega)\right| \geq \left|X_p(\omega) - X_s(\omega)\right| - |X_s(\omega) - X_u(\omega)| - \left|X_q(\omega) - X_u(\omega)\right| \geq \frac{1}{2m}$$

が従い

$$\omega \in \bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{\substack{p,q \in \mathbf{Q}^* \\ |p-q| < 1/n}} \left\{\, \omega \in \Omega \mid \quad \left|X_p(\omega) - X_q(\omega)\right| \geq \frac{1}{m} \,\right\}$$

を得る．

第二段　任意に $\omega \in A$ を取る．各点で有限な左極限が存在するという仮定から，

$$X_{t_0}(\omega) \coloneqq \lim_{t \uparrow t_0} X_t(\omega)$$

と定めることにより[*1] $t \longmapsto X_t(\omega)$ は $[0, t_0]$ 上で一様連続となる．従って

$$\omega \in \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{\substack{p,q \in \mathbf{Q}^* \\ |p-q| < 1/n}} \left\{\, \omega \in \Omega \mid \quad \left|X_p(\omega) - X_q(\omega)\right| < \frac{1}{m} \,\right\}$$

を得る．∎

Lemma2 for Exercise 1.8

$T = \{1, 2, 3, \cdots\}$ を高々可算集合とし，S_i を第二可算公理を満たす位相空間，X_i を確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上の S_i-値確率変数とする $(i \in T)$．このとき，任意の並び替え $\pi : T \longrightarrow T$ に対して $S \coloneqq \prod_{i \in T} S_{\pi(i)}$ とおけば次が成立する:

$$\sigma(X_i;\ i \in T) = \left\{\, \left\{(X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, \cdots) \in A\right\} \mid \quad A \in \mathscr{B}(S) \,\right\}. \tag{1.1}$$

証明.

[*1] 実際 $X_{t_0}(\omega)$ は所与のものであるが，いまは $[0, t_0]$ 上での連続性を考えればよいから便宜上値を取り替える．

第一段　射影 $S \longrightarrow S_{\pi(n)}$ を p_n で表す．任意に $t_i \in T$ を取り $n := \pi^{-1}(i)$ とおけば，任意の $B \in \mathscr{B}(S_n)$ に対して

$$X_i^{-1}(B) = \left\{ (\cdots, X_{\pi(n)}, \cdots) \in p_n^{-1}(B) \right\} \in \left\{ \left\{ (X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, \cdots) \in A \right\} \mid \quad A \in \mathscr{B}(S) \right\}$$

が成り立つから $\sigma(X_i;\ i \in T) \subset \left\{ \left\{ (X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, \cdots) \in A \right\} \mid \quad A \in \mathscr{B}(S) \right\}$ が従う．

第二段　任意の有限部分集合 $j \in T$ と $B_j \in \mathscr{B}(S_{\pi(j)})$ に対し

$$\left\{ (X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, \cdots) \in p_j^{-1}(B_j) \right\} = X_{\pi(j)}^{-1}(B_j) \in \sigma(X_i;\ i \in T)$$

が成立するから

$$\left\{ p_i^{-1}(B_i) \mid \quad B_i \in \mathscr{B}(S_{\pi(i)}),\ i \in T \right\} \subset \left\{ A \in \mathscr{B}(S) \mid \quad \left\{ (X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, \cdots) \in A \right\} \in \sigma(X_i;\ i \in T) \right\}$$

が従う．右辺は σ-加法族であり，定理 G.1.26 より左辺は $\mathscr{B}(S)$ を生成するから前段と併せて (1.1) を得る． ∎

Lemma3 for Exercise 1.8

$X = \{ X_t \mid \quad 0 \leq t < \infty \}$ を確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上の $\mathbf{R}^d$-値確率過程とする．任意の空でない $S \subset [0, \infty)$ に対し

$$\mathcal{F}_S^X := \sigma(X_s;\ s \in S)$$

とおくとき，任意の空でない $T \subset [0, \infty)$ に対して次が成立する:

$$\mathcal{F}_T^X := \bigcup_{S \subset T:at\ most\ countable} \mathcal{F}_S^X. \tag{1.2}$$

証明．　便宜上

$$\mathcal{F} := \bigcup_{S \subset T:at\ most\ countable} \mathcal{F}_S^X$$

とおく．まず，任意の $S \subset T$ に対し $\mathcal{F}_S^X \subset \mathcal{F}_T^X$ が成り立つから

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_T^X$$

が従う．また $\sigma(X_t) = \mathcal{F}_{\{t\}}^X,\ (\forall t \in T)$ より

$$\bigcup_{t \in T} \sigma(X_t) \subset \mathcal{F}$$

が成り立つから，あとは $\mathcal{F}$ が σ-加法族であることを示せばよい．実際，$\mathcal{F}$ は σ-加法族の合併であるから Ω を含みかつ補演算で閉じる．また $B_n \in \mathcal{F},\ n = 1, 2, \cdots$ に対しては，$B_n \in \mathcal{F}_{S_n}^X$ を満たす高々可算集合 $S_n \subset T$ が対応して

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{S_n}^X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(X_s;\ s \in S_n) \subset \sigma\left(X_s;\ s \in \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \right)$$

が成り立つから，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \sigma\left(X_s;\ s \in \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \right) \subset \mathcal{F}$$

が従う．ゆえに $\mathcal{F}$ は σ-加法族であり (1.2) を得る． ∎

Exercise 1.8

Let X be a process whose sample paths are RCLL almost surely, and let A be the event that X is continuous on $[0, t_0)$. Show that A can fail to be in $\mathscr{F}^X_{t_0}$, but if $\{\, \mathscr{F}_t \mid \quad t \geq 0 \,\}$ is a fitration satisfying $\mathscr{F}^X_t \subset \mathscr{F}_t,\ t \geq 0$, and $\mathscr{F}^X_{t_0}$ contains all P-null sets of $\mathscr{F}$, then $A \in \mathscr{F}_{t_0}$.

証明.

第一段　高々可算な集合 $S = \{t_1, t_2, \cdots\} \subset [0, t_0]$ に対し，昇順に並び替えたものを $t_{\pi(1)} < t_{\pi(2)} < \cdots$ と表し

$$\mathcal{F}^X_S := \left\{ \left\{ (X_{t_{\pi(1)}}, X_{t_{\pi(2)}}, \cdots) \in B \right\} \mid \quad B \in \mathscr{B}((\mathbf{R}^d)^{\#S}) \right\}$$

とおく．ただし S が可算無限の場合は $(\mathbf{R}^d)^{\#S} = \mathbf{R}^\infty$ である．このとき (1.1) より

$$\sigma(X_s;\ s \in S) = \mathcal{F}^X_S$$

が成り立ち，(1.2) より

$$\mathscr{F}^X_{t_0} = \sigma(X_t;\ 0 \leq t \leq t_0) = \bigcup_{S \subset [0,t_0]:at\ most\ countable} \mathcal{F}^X_S$$

が満たされる．すなわち，$\mathscr{F}^X_{t_0}$ の任意の元は $\{(X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots) \in B\}$，$(t_1 < t_2 < \cdots)$ の形で表される．

第二段

Problem 1.10 unsolved

Let X be a process with every sample path LCRL, and let A be the event that X is continuous on $[0, x_0]$. Let X be adapted to a right-continuous filtration $(\mathscr{F}_t)_{t \geq 0}$. Show that $A \in \mathscr{F}_{t_0}$.

証明.

第一段　$\mathbf{Q}^* := \mathbf{Q} \cap [0, t_0]$ とおく．いま，任意の $n \geq 1$ と $r \in \mathbf{Q}^*$ に対し

$$B_n(r) := \bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{k \leq m} \left\{ \omega \in \Omega \mid \quad \left| X_r(\omega) - X_{r+\frac{1}{k}}(\omega) \right| \leq \frac{1}{n} \right\}$$

と定めるとき，

$$A = \bigcap_{r \in \mathbf{Q}^*} \bigcap_{n \geq 1} B_n(r)$$

が成立することを示す．これが示されれば，

$$\left\{ \omega \in \Omega \mid \quad \left| X_r(\omega) - X_{r+\frac{1}{k}}(\omega) \right| \leq \frac{1}{n} \right\} \in \mathscr{F}_{r+\frac{1}{k}}, \quad (\forall r \in \mathbf{Q}^*,\ k \geq 1)$$

とフィルトレーションの右連続性から

$$B_n(r) \in \bigcap_{k \geq m} \mathscr{F}_{r+\frac{1}{k}} = \mathscr{F}_{r+} = \mathscr{F}_r$$

が従い $A \in \mathscr{F}_{t_0}$ が出る．

第二段

Problem 1.16

If the process X is measurable and the random time T is finite, then the function X_T is a random variable.

証明.

$$\tau : \Omega \ni \omega \longmapsto (T(\omega), \omega) \in [0, \infty) \times \Omega$$

とおけば，任意の $A \in \mathscr{B}([0,\infty))$, $B \in \mathscr{F}$ に対して

$$\tau^{-1}(A \times B) = \{\, \omega \in \Omega \mid \quad (T(\omega), \omega) \in A \times B \,\} = T^{-1}(A) \cap B \in \mathscr{F}$$

が満たされる

$$\{\, A \times B \mid \quad A \in \mathscr{B}([0,\infty)),\ B \in \mathscr{F} \,\} \subset \left\{\, E \in \mathscr{B}([0,\infty)) \otimes \mathscr{F} \mid \quad \tau^{-1}(E) \in \mathscr{F} \,\right\}$$

が従い τ の $\mathscr{F}/\mathscr{B}([0,\infty)) \otimes \mathscr{F}$-可測性が出る．$X_T = X \circ \tau$ より X_T は可測 $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{R}^d)$ である． ∎

Problem 1.17

Let X be a measurable process and T a random time. Show that the collection of all sets of the form $\{X_T \in A\}$ and $\{X_T \in A\} \cup \{T = \infty\}; A \in \mathscr{B}(\mathbf{R})$, forms a sub-$\sigma$-field of $\mathscr{F}$.

証明.　X_T の定義域は $\{T < \infty\}$ であるから，

$$\mathscr{G} := \{\, \{T < \infty\} \cap E \mid \quad E \in \mathscr{F} \,\}$$

とおけば，前問の結果より X_T は可測 $\mathscr{G}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$ である．$\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ より

$$\mathscr{H} := \{\, \{X_T \in A\},\ \{X_T \in A\} \cup \{T = \infty\} \mid \quad A \in \mathscr{B}(\mathbf{R}) \,\}$$

に対して $\mathscr{H} \subset \mathscr{F}$ が成立する．あとは $\mathscr{H}$ が σ-加法族であることを示せばよい．実際，$A = \mathbf{R}$ のとき

$$\{X_T \in A\} \cup \{T = \infty\} = \{T < \infty\} \cup \{T = \infty\} = \Omega$$

となり $\Omega \in \mathscr{H}$ が従い，また

$$\begin{aligned} \{X_T \in A\}^c &= \{X_T \in A^c\} \cup \{T = \infty\}, \\ (\{X_T \in A\} \cup \{T = \infty\})^c &= \{X_T \in A^c\} \cap \{T < \infty\} = \{X_T \in A^c\} \end{aligned}$$

より $\mathscr{H}$ は補演算で閉じる．更に $B_n \in \mathscr{H}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を取れば，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \left\{ X_T \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}$$

或は

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \left\{ X_T \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\} \cup \{T = \infty\}$$

が成立し $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathscr{H}$ を得る． ∎

1.2 Stopping Times

$[0,\infty]$ の位相

$[0,\infty]$ の位相は $[-\infty,\infty]$ の相対位相である．$\emptyset \neq O \subset [-\infty,\infty]$ が開集合であるとは，任意の $x \in O$ に対し，

(O1)　$x \in \mathbf{R}$ なら或る $\epsilon > 0$ が存在して $B_\epsilon(x) \subset O$ が満たされる，
(O2)　$x = \infty$ なら或る $a \in \mathbf{R}$ が存在して $(a,\infty] \subset O$ が満たされる，
(O3)　$x = -\infty$ なら或る $a \in \mathbf{R}$ が存在して $[-\infty, a) \subset O$ が満たされる，

で定義される．この性質を満たす O の全体に $\emptyset$ を加えたものが $[-\infty,\infty]$ の位相であり，

$$[-\infty, r), \quad (r, r'), \quad (r, \infty], \quad (r, r' \in \mathbf{Q})$$

の全体が可算開基となる．従って $[0,\infty]$ の位相の可算開基は

$$[0, r), \quad (r, r'), \quad (r, \infty], \quad (r, r' \in \mathbf{Q} \cap [0,\infty))$$

の全体であり，写像 $\tau : \Omega \longrightarrow [0,\infty]$ が $\mathscr{F}/\mathscr{B}([0,\infty])$-可測性を持つかどうかを調べるには

$$\{\tau < a\} = \tau^{-1}([0,a)) \in \mathscr{F}, \quad (\forall a \in \mathbf{Q} \cap [0,\infty))$$

が満たされているかどうかを確認すれば十分である．

Problem 2.2

Let X be a stochastic process and T a stopping time of $\left\{\mathscr{F}_t^X\right\}$. Suppose that for some pair $\omega, \omega' \in \Omega$, we have $X_t(\omega) = X_t(\omega')$ for all $t \in [0, T(\omega)] \cap [0,\infty)$. Show that $T(\omega) = T(\omega')$.

証明 (参照元:[4]).　ω, ω' を分離しない集合族 $\mathscr{H}$ を

$$\mathscr{H} \coloneqq \{\, A \subset \Omega \mid \quad \{\omega, \omega'\} \subset A,\ or\ \{\omega, \omega'\} \subset \Omega \backslash A \,\}$$

により定めれば，$\mathscr{H}$ は σ-加法族である．このとき，$\{T = T(\omega)\} \in \mathscr{H}$ を示せばよい．

case1　$T(\omega) = \infty$ の場合，任意の $A \in \mathscr{B}(\mathbf{R}^d)$ 及び $0 \leq t < \infty$ に対して，仮定より

$$\omega \in X_t^{-1}(A) \quad \Leftrightarrow \quad \omega' \in X_t^{-1}(A)$$

が成り立ち

$$\sigma(X_t;\ 0 \leq t < \infty) \subset \mathscr{H}$$

となる．任意の $t \geq 0$ に対し $\{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t^X \subset \sigma(X_t;\ 0 \leq t < \infty)$ が満たされるから

$$\{T = \infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{T \leq n\}^c \in \sigma(X_t;\ 0 \leq t < \infty) \subset \mathscr{H}$$

が成立し，$\omega \in \{T = \infty\}$ より $\omega' \in \{T = \infty\}$ が従い $T(\omega) = T(\omega')$ を得る．

case2　$T(\omega) < \infty$ の場合，case1 と同様に任意の $0 \leq t \leq T(\omega)$ に対し $\sigma(X_t) \subset \mathscr{H}$ が満たされるから

$$\mathscr{F}_{T(\omega)}^X \subset \mathscr{H}$$

が成り立つ．$\{T = T(\omega)\} \in \mathscr{F}_{T(\omega)}^X$ より $\omega' \in \{T = T(\omega)\}$ が従い $T(\omega) = T(\omega')$ を得る．∎

Lemma for Proposition 2.3

$(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ を可測空間 $(\Omega, \mathscr{F})$ のフィルトレーションとするとき，任意の $t \geq 0$ 及び任意の点列 $s_1 > s_2 > \cdots > t, (s_n \downarrow t)$ に対して次が成立する:

$$\bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{s_n}.$$

証明.　先ず任意の $n \geq 1$ に対して

$$\bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_{s_n}$$

が成り立つから

$$\bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{s_n}$$

を得る．一方で，任意の $s > t$ に対し $s \geq s_n$ を満たす n が存在するから，

$$\mathscr{F}_s \supset \mathscr{F}_{s_n} \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{s_n}$$

が成立し

$$\bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{s_n}$$

が従う．∎

$(\mathscr{F}_{t+})_{t\geq 0}$ は右連続である．実際，任意の $t \geq 0$ で

$$\bigcap_{s>t} \mathscr{F}_{s+} = \bigcap_{s>t} \bigcap_{u>s} \mathscr{F}_u = \bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s = \mathscr{F}_{t+}$$

が成立する．

Corollary 2.4

T is an optional time of the filtration $\{\mathscr{F}_t\}$ if and only if it is a stopping time of the (right-continuous!) filtration $\{\mathscr{F}_{t+}\}$.

言い換えれば，確率時刻 T に対し

$$\{T < t\} \in \mathscr{F}_t,\ \forall t \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_{t+},\ \forall t \geq 0$$

が成り立つことを主張している．

証明.　T が $(\mathscr{F}_{t+})$-停止時刻であるとき，任意の $n \geq 1$ に対して $\{T \leq t - 1/n\} \in \mathscr{F}_{(t-1/n)+} \subset \mathscr{F}_t$ が満たされるから

$$\{T < t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{T \leq t - \frac{1}{n}\right\} \in \mathscr{F}_t$$

が従う．逆に T が $(\mathscr{F}_t)$-弱停止時刻[*2] のとき，任意の $m \geq 1$ に対し

$$\{T \leq t\} = \bigcap_{n=m}^{\infty} \left\{T < t + \frac{1}{n}\right\} \in \mathscr{F}_{t+1/m}$$

が成立するから

$$\{T \leq t\} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{t+1/n} = \mathscr{F}_{t+}$$

を得る．■

Problem 2.6

If the set Γ in Example 2.5 is open, show that H_Γ is an optional time.

証明.　$\{H_\Gamma < 0\} = \emptyset$ であるから，以下 $t > 0$ とする．$H_\Gamma(\omega) < t \Leftrightarrow \exists s < t,\ X_s(\omega) \in \Gamma$ より

$$\{H_\Gamma < t\} = \bigcup_{0 \leq s < t} \{X_s \in \Gamma\}$$

となる．また全てのパスが右連続であることと Γ が開集合であることにより

$$\bigcup_{0 \leq s < t} \{X_s \in \Gamma\} = \bigcup_{\substack{0 \leq r < t \\ r \in \mathbf{Q}}} \{X_r \in \Gamma\}$$

が成り立ち $\{H_\Gamma < t\} \in \mathscr{F}_t$ が従う．■

Problem 2.7

If the set Γ in Example 2.5 is closed and the sample paths of the process X are continuous, then H_Γ is a stopping time.

証明.

第一段　$\mathbf{R}^d$ 上の Euclid 距離を ρ で表し，

$$\rho(x, \Gamma) := \inf_{y \in \Gamma} \rho(x, y), \quad \Gamma_n := \left\{x \in \mathbf{R}^d \mid \quad \rho(x, \Gamma) < \frac{1}{n}\right\}, \quad (x \in \mathbf{R}^d,\ n = 1, 2, \cdots)$$

とおく．$\mathbf{R}^d \ni x \longmapsto \rho(x, \Gamma)$ の連続性より Γ_n は開集合であるから，Problem 2.6 の結果より $T_n := H_{\Gamma_n}$ で定める T_n，$n = 1, 2, \cdots$ は $(\mathscr{F}_t)$-弱停止時刻であり，また $H := H_\Gamma$ とおけば次の (1) と (2) が成立する:

[*2] optional time の訳語がわからないので弱停止時刻と呼ぶ.

(1)　$\{H = 0\} = \{X_0 \in \Gamma\}$,

(2)　$H(\omega) \leq t \quad \Leftrightarrow \quad T_n(\omega) < t,\ \forall n = 1, 2, \cdots, \quad (\forall \omega \in \{H > 0\},\ \forall t > 0)$.

(1) と (2) 及び $T_n,\ n = 1, 2, \cdots$ が $(\mathscr{F}_t)$-弱停止時刻であることにより

$$\{H \leq t\} = \{H \leq t\} \cap \{H > 0\} + \{H = 0\} = \left\{\bigcap_{n=1}^{\infty} \{T_n < t\}\right\} \cap \{H > 0\} + \{H = 0\} \in \mathscr{F}_t, \quad (\forall t \geq 0)$$

が成立するから H は $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻である．

第二段　(1) を示す．実際，$X_0(\omega) \in \Gamma$ なら $H(\omega) = 0$ であり，$X_0(\omega) \notin \Gamma$ なら，Γ が閉であることとパスの連続性より

$$X_t(\omega) \notin \Gamma, \quad (0 \leq t \leq h)$$

を満たす $h > 0$ が存在して $H(\omega) \geq h > 0$ となる．

第三段　$\omega \in \{H > 0\},\ t > 0$ として (2) を示す．まずパスの連続性より

$$T_n(\omega) < t \quad \Leftrightarrow \quad \exists s \leq t, \quad X_s(\omega) \in \Gamma_n$$

が成り立つ．$H(\omega) \leq t$ の場合，$\beta \coloneqq H(\omega)$ とおけば，Γ が閉であることとパスの連続性より

$$X_\beta(\omega) \in \Gamma \subset \Gamma_n, \quad (\forall n = 1, 2, \cdots)$$

が満たされ $T_n(\omega) < t$ $(\forall n \geq 1)$ が従う．逆に，$H(\omega) > t$ のとき

$$X_s(\omega) \notin \Gamma, \quad (\forall s \in [0, t])$$

が満たされ，パスの連続性と ρ の連続性より $[0, t] \ni s \longmapsto \rho(X_s(\omega), \Gamma)$ は連続であるから，

$$d \coloneqq \min s \in [0, t] \rho(X_s(\omega), \Gamma) > 0$$

が定まる．このとき $1/n < d/2$ を満たす $n \geq 1$ を一つ取れば

$$X_s(\omega) \notin \Gamma_n, \quad (\forall s \in [0, t])$$

が成立する．実際，任意の $s \in [0, t],\ x \in \Gamma_n$ に対し

$$\rho(X_s(\omega), x) \geq \rho(X_s(\omega), \Gamma) - \rho(x, \Gamma) \geq d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2} > \frac{1}{n}$$

が満たされる．従って $T_n(\omega) \geq t$ となる．　■

Lemma 2.9 の式変形について

第一の式変形は

$$\begin{aligned}
\{T + S > t\} &= \{T = 0,\ T + S > t\} + \{0 < T < t,\ T + S > t\} + \{T \geq t,\ T + S > t\} \\
&= \{T = 0,\ T + S > t\} + \{0 < T < t,\ T + S > t\} + \{T \geq t,\ T + S > t,\ S = 0\} \\
&\quad + \{T \geq t,\ T + S > t,\ S > 0\} \\
&= \{T = 0,\ S > t\} + \{0 < T < t,\ T + S > t\} + \{T > t,\ S = 0\} + \{T \geq t,\ S > 0\}
\end{aligned}$$

である．

Problem 2.10

Let T, S be optional times; then $T+S$ is optional. It is a stopping time, if one of the following conditions holds:

(i)　$T>0,\ S>0$;

(ii)　$T>0$, T is a stopping time.

証明.　T, S が $(\mathscr{F}_t)$-弱停止時刻であるとすれば，任意の $t>0$ に対し

$$\begin{aligned}\{T+S<t\} &= \{T=0,\ T+S<t\} + \{0<T<t,\ T+S<t\} \\ &= \{T=0,\ S<t\} + \bigcup_{\substack{0<r<t \\ r\in\mathbf{Q}}} \{0<T<r,\ S<t-r\} \\ &\in \mathscr{F}_t\end{aligned}$$

が成り立つから $T+S$ も $(\mathscr{F}_t)$-弱停止時刻である．

(i)　この場合 $\{T+S\le 0\}=\emptyset$ である．また $t>0$ なら

$$\{T+S>t\} = \{0<T<t,\ T+S>t\} + \{T\ge t,\ T+S>t\} = \bigcup_{\substack{0<r<t \\ r\in\mathbf{Q}}} \{r<T<t,\ S>t-r\} + \{T\ge t\} \in \mathscr{F}_t$$

が成立する．

(ii)　この場合も $\{T+S\le 0\}=\emptyset$ であり，また $t>0$ のとき

$$\begin{aligned}\{T+S>t\} &= \{0<T<t,\ T+S>t\} + \{T\ge t,\ T+S>t\} \\ &= \{0<T<t,\ T+S>t\} + \{T\ge t,\ T+S>t,\ S=0\} + \{T\ge t,\ T+S>t,\ S>0\} \\ &= \{0<T<t,\ T+S>t\} + \{T>t,\ S=0\} + \{T\ge t,\ S>0\} \\ &\in \mathscr{F}_t\end{aligned}$$

が成立する．　∎

Problem 2.13

Verify that $\mathscr{F}_T$ is actually a σ-field and T is $\mathscr{F}_T$-measurable. Show that if $T(\omega)=t$ for some constant $t\ge 0$ and every $\omega\in\Omega$, then $\mathscr{F}_T=\mathscr{F}_t$.

証明.

第一段　$\mathscr{F}_T$ が σ-加法族であることを示す．実際，$\Omega\cap\{T\le t\}=\{T\le t\}\in\mathscr{F}_t,\ (\forall t\ge 0)$ より $\Omega\in\mathscr{F}_T$ が従い，また

$$A^c\cap\{T\le t\} = \{T\le t\} - A\cap\{T\le t\}, \quad \left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\}\cap\{T\le t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap\{T\le t\})$$

より $\mathscr{F}_T$ は補演算と可算和で閉じる．

第二段　任意の $\alpha \geq 0$ に対し

$$\{T \leq \alpha\} \cap \{T \leq t\} = \{T \leq \alpha \wedge t\} \in \mathscr{F}_{\alpha \wedge t} \subset \mathscr{F}_t$$

が成立し T の $\mathscr{F}_T/\mathscr{B}([0,\infty])$-可測性が出る．

第三段　$A \in \mathscr{F}_T$ なら $A = A \cap \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t$ となり，$A \in \mathscr{F}_t$ については，任意の $s \geq 0$ に対し $s \geq t$ なら

$$A \cap \{T \leq s\} = A \in \mathscr{F} \subset \mathscr{F}_s,$$

$s < t$ なら

$$A \cap \{T \leq s\} = \emptyset \in \mathscr{F}_s$$

が成り立ち $A \in \mathscr{F}_T$ が従う． ∎

Exercise 2.14

Let T be a stopping time and S a random time such that $S \geq T$ on Ω. If S is $\mathscr{F}_T$-measurable, then it is also a stopping time.

証明．　任意の $t \geq 0$ に対し

$$\{S \leq t\} = \{S \leq t\} \cap \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t$$

が成立する． ∎

Problem 2.17 修正

Let T, S be stopping times and Z an $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-measurable, integrable random variable. Then

$$A \in \mathscr{F}_T \quad \Longrightarrow \quad A \cap \{T \leq S\}, A \cap \{T < S\} \in \mathscr{F}_{S \wedge T},$$

and we have

(i)　$\mathbb{1}_{\{T \leq S\}} E\left(Z \mid \mathscr{F}_T\right) = \mathbb{1}_{\{T \leq S\}} E\left(Z \mid \mathscr{F}_{S \wedge T}\right)$, P-a.s.

(ii)　$\mathbb{1}_{\{T < S\}} E\left(Z \mid \mathscr{F}_T\right) = \mathbb{1}_{\{T < S\}} E\left(Z \mid \mathscr{F}_{S \wedge T}\right)$, P-a.s.

(iii)　$E\left(E\left(Z \mid \mathscr{F}_T\right) \mid \mathscr{F}_S\right) = E\left(Z \mid \mathscr{F}_{S \wedge T}\right)$, P-a.s.

証明．

第一段　任意の $A \in \mathscr{F}_T$ に対し $A \cap \{T \leq S\} \in \mathscr{F}_{S \wedge T}$ が成り立つ．実際，

$$A \cap \{T \leq S\} \cap \{S \wedge T \leq t\} = \Big[A \cap \{T \leq t\}\Big] \cap \{T \leq S\} \cap \{S \wedge T \leq t\} \in \mathscr{F}_t, \quad (\forall t \geq 0)$$

が成立する．同様に $A \cap \{T < S\} \in \mathscr{F}_{S \wedge T}$ も得られる．

第二段　任意の $A \in \mathscr{F}_T$ に対し，前段の結果より

$$\int_{A \cap \{T \le S\}} Z \, dP = \int_{A \cap \{T \le S\}} E\,(Z \,|\, \mathscr{F}_{S \wedge T}) \, dP$$

が従う．$\mathbb{1}_{\{T \le S\}} E\,(Z \,|\, \mathscr{F}_{S \wedge T})$ も $\mathscr{F}_T / \mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測であるから (i) が得られ，同様に (ii) も出る．

第三段　任意の $B \in \mathscr{F}_S$ に対し，第一段と第二段の結果により

$$\begin{aligned}
\int_B E\,(E\,(Z \,|\, \mathscr{F}_T) \,|\, \mathscr{F}_S) \, dP &= \int_B E\,(Z \,|\, \mathscr{F}_T) \, dP = \int_{B \cap \{S < T\}} E\,(Z \,|\, \mathscr{F}_T) \, dP + \int_{B \cap \{T \le S\}} E\,(Z \,|\, \mathscr{F}_T) \, dP \\
&= \int_{B \cap \{S < T\}} Z \, dP + \int_{B \cap \{T \le S\}} E\,(Z \,|\, \mathscr{F}_{S \wedge T}) \, dP \\
&= \int_{B \cap \{S < T\}} E\,(Z \,|\, \mathscr{F}_{S \wedge T}) \, dP + \int_{B \cap \{T \le S\}} E\,(Z \,|\, \mathscr{F}_{S \wedge T}) \, dP \\
&= \int_B E\,(Z \,|\, \mathscr{F}_{S \wedge T}) \, dP
\end{aligned}$$

が成り立つ．$E\,(Z \,|\, \mathscr{F}_{S \wedge T})$ も $\mathscr{F}_S / \mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測であるから (iii) を得る． ∎

Proposition 2.18 修正

Let $X = \{\, X_t, \mathscr{F}_t \,|\, \ 0 \le t < \infty \,\}$ be a progressively measurable process, and let T be a stopping time of the filtration $\{\mathscr{F}_t\}$. Then the random variable $X_T \mathbb{1}_{\{T < \infty\}}$ is $\mathscr{F}_T$-measurable, and the "stopped process" $\{\, X_{T \wedge t}, \mathscr{F}_t \,|\, \ 0 \le t < \infty \,\}$ is progressively measurable.

証明.

第一段　停止過程の発展的可測性を示す．$t \ge 0$ を固定する．このとき，全ての $\omega \in \Omega$ に対して $[0,t] \ni s \longmapsto T(\omega) \wedge s$ は連続であり，かつ全ての $s \in [0,t]$ に対し $\Omega \ni \omega \longmapsto T(\omega) \wedge s$ は $\mathscr{F}_t / \mathscr{B}([0,t])$-可測であるから，$[0,t] \times \Omega \ni (s,\omega) \longmapsto T(\omega) \wedge s$ は $\mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t / \mathscr{B}([0,t])$-可測である．従って，任意の $A \in \mathscr{B}([0,t])$ と $B \in \mathscr{F}_t$ に対し

$$\begin{aligned}
\{\, (s,\omega) \in [0,t] \times \Omega \,|\, \ (T(\omega) \wedge s, \omega) \in A \times B \,\} &= \{\, (s,\omega) \in [0,t] \times \Omega \,|\, \ T(\omega) \wedge s \in A \,\} \cap ([0,t] \times B) \\
&\in \mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t
\end{aligned}$$

が成り立つから，任意の $E \in \mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t$ に対して

$$\{\, (s,\omega) \in [0,t] \times \Omega \,|\, \ (T(\omega) \wedge s, \omega) \in E \,\} \in \mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t$$

が満たされ $(s,\omega) \longmapsto (T(\omega) \wedge s, \omega)$ の $\mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t / \mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t$-可測性を得る．

$$X(s,\omega) = X|_{[0,t] \times \Omega}(s,\omega), \quad (\forall (s,\omega) \in [0,t] \times \Omega)$$

かつ $X|_{[0,t] \times \Omega}$ は $\mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t / \mathscr{B}(\mathbf{R}^d)$-可測であるから，$[0,t] \times \Omega \ni (s,\omega) \longmapsto X(T(\omega) \wedge s, \omega) = X|_{[0,t] \times \Omega}(T(\omega) \wedge s, \omega)$ の $\mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t / \mathscr{B}(\mathbf{R}^d)$-可測性が出る．

第二段　定理 G.4.1 (P. 474) より $\omega \longmapsto X(T(\omega) \wedge t, \omega)$ は $\mathscr{F}_t / \mathscr{B}(\mathbf{R}^d)$ であるから，任意の $B \in \mathscr{B}(\mathbf{R}^d)$ に対し

$$\left\{ X_T \mathbb{1}_{\{T < \infty\}} \in B \right\} \cap \{T \le t\} = \{X_{T \wedge t} \in B\} \cap \{T \le t\} \in \mathscr{F}_t, \quad (\forall t \ge 0)$$

が成立し $X_T \mathbb{1}_{\{T < \infty\}}$ の $\mathscr{F}_T / \mathscr{B}(\mathbf{R}^d)$-可測性を得る． ∎

Problem 2.19

Under the same assumption as in Proposition 2.18, and with $f(t,x);[0,\infty)\times\mathbf{R}^d\longrightarrow\mathbf{R}$ a bounded, $\mathscr{B}([0,\infty))\otimes\mathscr{B}(\mathbf{R}^d)$-measurable function, show that the process $Y_t=\int_0^t f(s,X_s)\,ds;\ t\geq 0$ is progressively measurable with respect to $\{\mathscr{F}_t\}$, and Y_T is an $\mathscr{F}_T$-measurable random variable.

証明. $[0,t]\times\Omega\ \ni\ (s,\omega)\ \longmapsto\ f(s,X_s(\omega))$ が $\mathscr{B}([0,t])\otimes\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測であれば，Fuini の定理より $\{\,Y_t,\mathscr{F}_t \mid \ 0\leq t<\infty\,\}$ は適合過程となり，可積分性より $t\ \longmapsto\ Y_t(\omega)$, $(\forall\omega\in\Omega)$ が連続であるから Y の発展的可測性が従う．実際，

$$[0,t]\times\Omega\ni(s,\omega)\longmapsto(s,X_s(\omega))=\big(s,X|_{[0,t]\times\Omega}(s,\omega)\big)$$

による $A\times B$, $(A\in\mathscr{B}([0,\infty))$, $B\in\mathscr{B}(\mathbf{R}^d))$ の引き戻しは

$$\{([0,t]\cap A)\times\Omega\}\cap X|_{[0,t]\times\Omega}^{-1}(B)\in\mathscr{B}([0,t])\otimes\mathscr{F}_t$$

となるから，$[0,t]\times\Omega\ni(s,\omega)\longmapsto f(s,X_s(\omega))$ は $\mathscr{B}([0,t])\otimes\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測である． ∎

Problem 2.21

Verify that the class $\mathscr{F}_{T+}$ is indeed a σ-field with respect to which T is measurable, that it coincides with $\{\,A\in\mathscr{F}\mid \ A\cap\{T<t\}\in\mathscr{F}_t,\ \forall t\geq 0\,\}$, and that if T is a stopping time (so that both $\mathscr{F}_T,\mathscr{F}_{T+}$ are defined), then $\mathscr{F}_T\subset\mathscr{F}_{T+}$.

証明.

第一段　$\Omega\cap\{T\leq t\}=\{T\leq t\}\in\mathscr{F}_t$, $(\forall t\geq 0)$ より $\Omega\in\mathscr{F}_{T+}$ が従い，また

$$A^c\cap\{T\leq t\}=\{T\leq t\}-A\cap\{T\leq t\},\quad \left\{\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right\}\cap\{T\leq t\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap\{T\leq t\})$$

より $\mathscr{F}_{T+}$ は補演算と可算和で閉じるから $\mathscr{F}_{T+}$ は σ-加法族である．また，

$$\{T<\alpha\}\cap\{T\leq t\}=\begin{cases}\{T<\alpha\}, & (\alpha\leq t),\\ \{T\leq t\}, & (\alpha>t),\end{cases}\in\mathscr{F}_{t+},\quad(\forall t\geq 0)$$

より $(\mathscr{F}_t)$-弱停止時刻 T は $\mathscr{F}_{T+}/\mathscr{B}([0,\infty])$-可測である．

第二段　任意の $t\geq 0$ に対し

$$A\cap\{T<t\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}A\cap\left\{T\leq t-\frac{1}{n}\right\},\quad A\cap\{T\leq t\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}A\cap\left\{T<t+\frac{1}{n}\right\}$$

が成り立ち $\mathscr{F}_{T+}=\{\,A\in\mathscr{F}\mid \ A\cap\{T<t\}\in\mathscr{F}_t,\ \forall t\geq 0\,\}$ が従う．

第三段　T が $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻であるとき，任意の $A\in\mathscr{F}_T$ に対し

$$A\cap\{T\leq t\}\in\mathscr{F}_t\subset\mathscr{F}_{t+},\quad(\forall t\geq 0)$$

となり $\mathscr{F}_T\subset\mathscr{F}_{T+}$ が成り立つ． ∎

Lemma: 弱停止時刻の可測性

T を $(\mathscr{F}_t)$-弱停止時刻とすれば，任意の $t \geq 0$ に対し $T \wedge t$ は $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}([0,\infty))$-可測である．

証明．　任意の $\alpha \geq 0$ に対し

$$\{T \wedge t \leq \alpha\} = \begin{cases} \Omega, & (t \leq \alpha), \\ \{T \leq \alpha\}, & (t > \alpha), \end{cases} \in \mathscr{F}_t$$

が成立する．∎

Probelem 2.22

Verify that analogues of Lemmas 2.15 and 2.16 hold if T and S are assumed to be optional and $\mathscr{F}_T$, $\mathscr{F}_S$ and $\mathscr{F}_{T\wedge S}$ are replaced by $\mathscr{F}_{T+}$, $\mathscr{F}_{S+}$ and $\mathscr{F}_{(T\wedge S)+}$, respectively. Prove that if S is an optional time and T is a positive stopping time with $S \leq T$, and $S < T$ on $\{S < \infty\}$, then $\mathscr{F}_{S+} \subset \mathscr{F}_T$.

証明．

第一段　$T \wedge t$, $S \wedge t$ は $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}([0,\infty))$-可測であるから、任意の $A \in \mathscr{F}_{S+}$ に対して

$$A \cap \{S \leq T\} \cap \{T \leq t\} = (A \cap \{S \leq t\}) \cap \{S \wedge t \leq T \wedge t\} \cap \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_{t+}, \quad (\forall t \geq 0)$$

となり $A \cap \{S \leq T\} \in \mathscr{F}_{T+}$ が成立する．特に，Ω 上で $S \leq T$ なら $\mathscr{F}_{S+} \subset \mathscr{F}_{T+}$ が従う．

第二段　前段の結果より $\mathscr{F}_{(T\wedge S)+} \subset \mathscr{F}_{T+} \cap \mathscr{F}_{S+}$ が満たされる．一方で，任意の $A \in \mathscr{F}_{T+} \cap \mathscr{F}_{S+}$ に対し

$$A \cap \{T \wedge S \leq t\} = (A \cap \{T \leq t\}) \cup (A \cap \{S \leq t\}) \in \mathscr{F}_{t+}, \quad (\forall t \geq 0)$$

が成り立ち $\mathscr{F}_{(T\wedge S)+} = \mathscr{F}_{T+} \cap \mathscr{F}_{S+}$ を得る．また

$$\{S < T\} \cap \{T \wedge S \leq t\} = \left(\bigcup_{\substack{0 \leq r \leq t \\ r \in \mathbf{Q} \cup \{t\}}} \{S \leq r\} \cap \{r < T\} \right) \cap \{S \leq t\} \in \mathscr{F}_{t+}, \quad (\forall t \geq 0)$$

により $\{S < T\} \in \mathscr{F}_{(T\wedge S)+}$ 及び $\{T < S\} \in \mathscr{F}_{(T\wedge S)+}$ となり，$\{T \leq S\}, \{S \leq T\}, \{T = S\} \in \mathscr{F}_{(T\wedge S)+}$ が従う．

第三段　T が停止時刻で $\{T < \infty\}$ 上で $S < T$ が満たされているとき．任意の $A \in \mathscr{F}_{S+}$ に対し

$$A \cap \{T \leq t\} = A \cap \{S < t\} \cap \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t, \quad (\forall t \geq 0)$$

が成り立ち $\mathscr{F}_{S+} \subset \mathscr{F}_T$ となる．∎

Problem 2.23

Show that if $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a sequence of optional times and $T = \inf_{n\geq 1} T_n$, then $\mathscr{F}_{T+} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{T_n+}$. Besides, if each T_n is a positive stopping time and $T < T_n$ on $\{T < \infty\}$, then we have $\mathscr{F}_{T+} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{T_n}$.

証明.　$T \leq T_n$, $(\forall n \geq 1)$ より $\mathscr{F}_{T+} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{T_n+}$ が成り立つ．一方で $A \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{T_n+}$ に対し

$$A \cap \{T < t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap \{T_n < t\} \in \mathscr{F}_t, \quad (\forall t > 0) \tag{1.3}$$

が成り立つから，Problem 2.21 より $A \in \mathscr{F}_{T+}$ が従う．また $\{T < \infty\}$ 上で $T < T_n$, $(\forall n \geq 1)$ であるとき，Problem 2.22 より $\mathscr{F}_{T+} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{T_n}$ が従い，また T_n, $n \geq 1$ が停止時刻の場合も (1.3) は成立するので $\mathscr{F}_{T+} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{T_n}$ が出る． ∎

Problem 2.24 修正

Given an optional time T of the filtration $\{\mathscr{F}_t\}$, consider the sequence $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ of random times given by

$$T_n(\omega) = \begin{cases} +\infty; & \text{on } \{\, \omega \mid \quad T(\omega) \geq n \,\} \\ \dfrac{k}{2^n}; & \text{on } \left\{\, \omega \mid \quad \frac{k-1}{2^n} \leq T(\omega) < \frac{k}{2^n} \,\right\} \text{ for } k = 1, \cdots, n2^n, \end{cases}$$

for $n \geq 1$. Obviously $T_n \geq T_{n+1} \geq T$, for every $n \geq 1$. Show that each T_n is a stopping time, that $\lim_{n\to\infty} T_n = T$, and that for every $A \in \mathscr{F}_{T+}$ we have $A \cap \{T_n = (k/2^n)\} \in \mathscr{F}_{k/2^n}$; $n \geq 1, 1 \leq k \leq n2^n$.

証明.

第一段　$T_n(\omega) < \infty$ を満たす $\omega \in \Omega$ に対し，或る $1 \leq j \leq (n+1)2^{n+1}$, $1 \leq k \leq n2^n$ が存在して

$$\frac{j-1}{2^{n+1}} \leq T(\omega) < \frac{j}{2^{n+1}}, \quad \frac{k-1}{2^n} \leq T(\omega) < \frac{k}{2^n}$$

となる．このとき

$$\frac{2k-2}{2^{n+1}} \leq T(\omega) < \frac{2k-1}{2^{n+1}}$$

または

$$\frac{2k-1}{2^{n+1}} \leq T(\omega) < \frac{2k}{2^{n+1}}$$

のどちらかであるから，すなわち $j = 2k-1$ 或は $j = 2k$ であり

$$T(\omega) < \frac{j}{2^{n+1}} = T_{n+1}(\omega) \leq \frac{2k}{2^{n+1}} = T_n(\omega)$$

が成立する．$T_n(\omega) = \infty$ の場合も併せて $T_n \geq T_{n+1} \geq T$ $(\forall n \geq 1)$ を得る．

第二段　任意の $t \geq 0$ に対して

$$\{T_n \leq t\} = \bigcup_{k/2^n \leq n \wedge t} \left\{ \omega \mid \quad \frac{k-1}{2^n} \leq T(\omega) < \frac{k}{2^n} \right\} \in \mathscr{F}_t, \quad (\forall t \geq 0)$$

が成り立つから T_n は $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻である．また $\{T < \infty\}$ 上では $T(\omega) < n$ のとき

$$0 < T_n(\omega) - T(\omega) \leq \frac{1}{2^n} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

となる．

第三段　任意の $A \in \mathscr{F}_{T+}$ に対して，Problem 2.21 より

$$A \cap \left\{ T_n = \frac{k}{2^n} \right\} = A \cap \left\{ T < \frac{k}{2^n} \right\} - A \cap \left\{ T < \frac{k-1}{2^n} \right\} \in \mathscr{F}_{k/2^n}$$

が成り立つ． ∎

1.3　Continuous Time Martingales

1.3.1　Fundamental Inequalities

Proposition 3.6

Let $\{ X_t, \mathscr{F}_t \mid \quad 0 \leq t < \infty \}$ be a martingale (respectively, submartingale), and $\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ a convex (respectively, convex nondecreasing) function, such that $E\left|\varphi(X_t)\right| < \infty$ holds for every $t \geq 0$. Then $\left\{ \varphi(X_t), \mathscr{F}_t \mid \quad 0 \leq t < \infty \right\}$ is a submartingale.

証明．　$(X_t)_{t \geq 0}$ がマルチンゲールであり φ が凸であるとき，Jensen の不等式より P-a.s. の $\omega \in \Omega$ に対し

$$\varphi(X_s(\omega)) = \varphi(E\left(X_t \mid \mathscr{F}_s\right)(\omega)) \leq E\left(\varphi(X_t) \middle| \mathscr{F}_s\right)(\omega)$$

が成り立つ．$(X_t)_{t \geq 0}$ が劣マルチンゲールであり φ が凸かつ単調増大であるとき，P-a.s. の $\omega \in \Omega$ に対し

$$\varphi(X_s(\omega)) \leq \varphi(E\left(X_t \mid \mathscr{F}_s\right)(\omega)) \leq E\left(\varphi(X_t) \middle| \mathscr{F}_s\right)(\omega)$$

が成り立つ． ∎

Theorem 3.8 (i)

Let $\{ X_t, \mathscr{F}_t \mid \quad 0 \leq t < \infty \}$ be a submartingale whose every path is right-continuous, let $[\sigma, \tau]$ be a subinterval of $[0, \infty)$, and let $\alpha < \beta,\ \lambda > 0$ be real numbers. We have the following results:

(i)　First submartingale inequality:

$$\lambda \cdot P\left[\sup_{\sigma \leq t \leq \tau} X_t > \lambda \right] \leq \int_{\sup\limits_{\sigma \leq t \leq \tau} X_t > \lambda} X_\tau \, dP, \tag{1.4}$$

and

$$\lambda \cdot P\left[\sup_{\sigma \leq t \leq \tau} X_t \geq \lambda \right] \leq E(X_\tau^+).$$

証明．　$n \geq 1$ に対し $[\sigma, \tau]$ を 2^n 等分に分割し

$$E_n := \left\{ \max k = 0, 1, \cdots, 2^n X_{\sigma + \frac{k}{2^n}(\tau - \sigma)} > \lambda \right\},$$

$$E_n^0 := \{ X_\sigma > \lambda \}, \quad E_n^m := \left\{ \max k = 0, 1, \cdots, m - 1 X_{\sigma + \frac{k}{2^n}(\tau - \sigma)} \leq \lambda,\ X_{\sigma + \frac{m}{2^n}(\tau - \sigma)} > \lambda \right\}, \quad (1 \leq m \leq 2^n)$$

とおけば，

$$E_n^m \in \mathscr{F}_{\sigma+\frac{m}{2^n}(\tau-\sigma)} \subset \mathscr{F}_\tau, \quad E_n = \sum_{m=0}^{2^n} E_n^m, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

かつ，$E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots$ と X のパスの右連続性より

$$\left\{ \sup_{\sigma \le t \le \tau} X_t > \lambda \right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \max k = 0, 1, \cdots, 2^n X_{\sigma+\frac{k}{2^n}(\tau-\sigma)} > \lambda \right\} = \lim_{n\to\infty} E_n$$

が満たされ，また $\sup_{\sigma\le t\le\tau} X_t$ の $\mathscr{F}_\tau/\mathscr{B}([-\infty,\infty])$-可測性も従う．Chebyshev の不等式と劣マルチンゲール性より

$$P(E_n) = \sum_{m=0}^{2^n} P(E_n^m) \le \frac{1}{\lambda} \sum_{m=0}^{2^n} \int_{E_n^m} X_{\sigma+\frac{m}{2^n}(\tau-\sigma)}\, dP \le \frac{1}{\lambda} \sum_{m=0}^{2^n} \int_{E_n^m} X_\tau\, dP = \frac{1}{\lambda} \int_{E_n} X_\tau\, dP$$

となるから，$n \longrightarrow \infty$ として，測度の連続性と Lebesgue の収束定理より

$$P\left[\sup_{\sigma \le t \le \tau} X_t > \lambda \right] \le \frac{1}{\lambda} \int_{\sup\limits_{\sigma \le t \le \tau} X_t > \lambda} X_\tau\, dP \le \frac{1}{\lambda} E(X_\tau^+)$$

を得る．特に，任意の $m \in \mathbf{N}$, $(\lambda > 1/m)$ に対して

$$P\left[\sup_{\sigma \le t \le \tau} X_t > \lambda - \frac{1}{m} \right] \le \frac{1}{\lambda - 1/m} E(X_\tau^+)$$

が成り立ち，$m \longrightarrow \infty$ として

$$P\left[\sup_{\sigma \le t \le \tau} X_t \ge \lambda \right] \le \frac{1}{\lambda} E(X_\tau^+)$$

が従う． ∎

Theorem 3.8 (ii)

Second submartingale inequality:

$$\lambda \cdot P\left[\sup_{\sigma \le t \le \tau} X_t \le -\lambda \right] \le E(X_\tau^+) - E(X_\sigma).$$

証明． $n \ge 1$ に対し $[\sigma, \tau]$ を 2^n 等分に分割し

$$E_n := \left\{ \min k = 0, 1, \cdots, 2^n X_{\sigma+\frac{k}{2^n}(\tau-\sigma)} < -\lambda \right\},$$
$$E_n^0 := \{X_\sigma < -\lambda\}, \quad E_n^m := \left\{ \min k = 0, 1, \cdots, m-1 X_{\sigma+\frac{k}{2^n}(\tau-\sigma)} \ge -\lambda,\ X_{\sigma+\frac{m}{2^n}(\tau-\sigma)} < -\lambda \right\}, \quad (1 \le m \le 2^n)$$

として，また

$$T(\omega) := \begin{cases} \sigma + \frac{m}{2^n}(\tau - \sigma), & (\omega \in E_n^m,\ m = 0, 1, \cdots, 2^n), \\ \tau, & (\omega \in \Omega \backslash E_n), \end{cases} \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

により $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻を定めれば，任意抽出定理 (P. 32) より

$$E(X_\sigma) \leq E(X_T) = \sum_{m=0}^{2^n} \int_{E_n^m} X_{\sigma+\frac{m}{2^n}(\tau-\sigma)}\, dP + \int_{\Omega\setminus E_n} X_\tau\, dP \leq \sum_{m=0}^{2^n} (-\lambda) P(E_n^m) + E(X_\tau^+)$$
$$= -\lambda P(E_n) + E(X_\tau^+)$$

が成立する．移項して $n \longrightarrow \infty$ とすれば

$$P\left[\inf_{\sigma\leq t\leq\tau} X_t < -\lambda\right] \leq \frac{1}{\lambda}\left\{E(X_\tau^+) - E(X_\sigma)\right\}$$

が得られ，(i) の証明と同様にして

$$P\left[\inf_{\sigma\leq t\leq\tau} X_t \leq -\lambda\right] \leq \frac{1}{\lambda}\left\{E(X_\tau^+) - E(X_\sigma)\right\}$$

が従う． ∎

Lemma: Theorem 3.8 (iii)

確率過程 $X = \{\, X_t \mid \quad 0 \leq t < \infty \,\}$ のすべてのパスが右連続であるとき，$[\sigma, \tau]$ の 2^n 等分点を

$$F_n := \left\{\, \tau_i^n \mid \quad \tau_i^n = \sigma + \frac{i}{2^n}(\tau - \sigma),\ i = 0, 1, \cdots, 2^n \,\right\}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

とおけば次が成立する:

$$U_{[\sigma,\tau]}(\alpha, \beta; X) = \sup_{n\in\mathbf{N}} U_{F_n}(\alpha, \beta; X), \quad D_{[\sigma,\tau]}(\alpha, \beta; X) = \sup_{n\in\mathbf{N}} D_{F_n}(\alpha, \beta; X).$$

Karatzas-Shreve 本文中では

$$\tau_1(\omega) = \min\{\, t \in F \mid \quad X_t(\omega) \leq \alpha \,\}$$

と定めているが，

$$\tau_1(\omega) = \min\{\, t \in F \mid \quad X_t(\omega) < \alpha \,\}$$

と定める方がよい．実際，こうでないと今の補題が従わない．また $\sigma_0 \equiv 0$，$\tau_0 \equiv 0$ と考える．

証明． $U_{[\sigma,\tau]}(\alpha, \beta; X) \leq \sup_{n\in\mathbf{N}} U_{F_n}(\alpha, \beta; X)$ が成立すれば主張を得る．いま，任意に有限部分集合 $F \subset [\sigma, \tau]$ を取り

$$\tau_1(\omega) := \min\{\, t \in F \mid \quad X_t(\omega) < \alpha \,\}, \quad \sigma_1(\omega) := \min\left\{\, t \in F \mid \quad t \geq \tau_1(\omega),\ X_t(\omega) > \beta \,\right\}, \cdots$$

を定め，$\omega \in \Omega$ を任意に取り $U_F(\alpha, \beta; X(\omega)) = j \geq 1$ と仮定する．このとき

$$X_{\tau_i(\omega)}(\omega) < \alpha, \quad X_{\sigma_i(\omega)}(\omega) > \beta, \quad (i = 1, \cdots, j)$$

が満たされ，$t \longrightarrow X_t(\omega)$ の右連続性より，十分大きい $n \in \mathbf{N}$ に対して或る $t_i, s_i \in F_n$，$(1 \leq i \leq j)$ が

$$\tau_1(\omega) \leq t_1 < \sigma_1(\omega) \leq s_1 < \cdots < \tau_j(\omega) \leq t_j < \sigma_j(\omega) \leq s_j$$

かつ

$$X_{t_i}(\omega) < \alpha, \quad X_{s_i}(\omega) > \beta, \quad (\forall i = 1, \cdots, j)$$

を満たす．これにより

$$U_F(\alpha, \beta; X(\omega)) = j \leq U_{F_n}(\alpha, \beta; X(\omega))$$

が従い，ω の任意性より $U_F(\alpha, \beta; X) \leq \sup_{n \in \mathbf{N}} U_{F_n}(\alpha, \beta; X)$ が出る． ∎

Theorem 3.8 (iii)

Upcrossing and downcrossing inequalities:

$$EU_{[\sigma,\tau]}(\alpha, \beta; X) \leq \frac{E(X_\tau^+) + |\alpha|}{\beta - \alpha}, \quad ED_{[\sigma,\tau]}(\alpha, \beta; X) \leq \frac{E(X_\tau - \alpha)^+}{\beta - \alpha}.$$

証明.

第一段 有限部分集合 $F = \{t_1, \cdots, t_n\} \subset [\sigma, \tau]$ に対し

$$\tau_1(\omega) \coloneqq \min\{\, t \in F \mid \quad X_t(\omega) < \alpha \,\}, \quad \sigma_1(\omega) \coloneqq \min\left\{\, t \in F \mid \quad t \geq \tau_1(\omega),\ X_t(\omega) > \beta \,\right\}, \cdots$$

で定める τ_i, σ_i, $(i = 1, 2, \cdots)$ が $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻であることを示す．実際，任意の $t_j \in F$ に対して

$$\begin{aligned}
\left\{\tau_1 = t_j\right\} &= \left[\bigcap_{k=1}^{j-1} \left\{X_{t_k} \geq \alpha\right\}\right] \cap \left\{X_{t_j} < \alpha\right\} \in \mathscr{F}_{t_j}, \\
&\ \ \vdots \\
\left\{\tau_i = t_j\right\} &= \bigcup_{r=1}^{j-1} \left[\{\sigma_{i-1} = t_r\} \cap \bigcap_{k=r}^{j-1} \left\{X_{t_k} \geq \alpha\right\}\right] \cap \left\{X_{t_j} < \alpha\right\} \in \mathscr{F}_{t_j}, \\
\left\{\sigma_i = t_j\right\} &= \bigcup_{r=1}^{j-1} \left[\{\tau_i = t_r\} \cap \bigcap_{k=r}^{j-1} \left\{X_{t_k} \leq \beta\right\}\right] \cap \left\{X_{t_j} > \beta\right\} \in \mathscr{F}_{t_j}
\end{aligned}$$

が成立するから $\{\tau_i \leq t\} \in \mathscr{F}_t$ $(\forall t \geq 0)$ が満たされる．

$$\tau_1(\omega) \coloneqq \min\left\{\, t \in F \mid \quad X_t(\omega) > \beta \,\right\}, \quad \sigma_1(\omega) \coloneqq \min\{\, t \in F \mid \quad t \geq \tau_1(\omega),\ X_t(\omega) < \alpha \,\}, \cdots$$

により τ_i, σ_i, $(i = 1, 2, \cdots)$ を定めてもこれらは $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻となる．特に，

$$\left\{U_F(\alpha, \beta; X) = j\right\} = \left\{\sigma_j < \infty\right\} \cap \left\{\sigma_{j+1} = \infty\right\} \in \mathscr{F}, \quad (j = 0, 1, 2, \cdots)$$

が成立するから $U_F(\alpha, \beta; X)$ 及び $D_F(\alpha, \beta; X)$ の可測性が得られる．

第二段 補題の有限部分集合 $F_n \subset [\sigma, \tau]$ に対し

$$EU_{F_n}(\alpha, \beta; X) \leq \frac{E(X_\tau^+) + |\alpha|}{\beta - \alpha} \tag{1.5}$$

が成立することを示せば，単調収束定理より

$$EU_{[\sigma,\tau]}(\alpha,\beta;X) = E\left(\sup_{n\in\mathbf{N}} U_{F_n}(\alpha,\beta;X)\right) \leq \frac{E(X_\tau^+)+|\alpha|}{\beta-\alpha}$$

が従う．実際，$j = U_{F_n}(\alpha,\beta;X(\omega))$ ならば $\sigma_j(\omega) \leq \tau < \tau_{j+1}(\omega)$ 或は $\tau_{j+1}(\omega) \leq \tau < \sigma_{j+1}(\omega)$ であるから

$$Z(\omega) \coloneqq \sum_{i=1}^{\infty} \left(X_{\tau_{i+1}(\omega)\wedge\tau}(\omega) - X_{\sigma_i(\omega)\wedge\tau}(\omega)\right) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{j} \left(X_{\tau_{i+1}(\omega)}(\omega) - X_{\sigma_i(\omega)}(\omega)\right), & (\star 1), \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{j-1} \left(X_{\tau_{i+1}(\omega)}(\omega) - X_{\sigma_i(\omega)}(\omega)\right) + \left(X_\tau(\omega) - X_{\sigma_j(\omega)}(\omega)\right), & (\star 2) \end{cases}$$

となり，$X_{\tau_i} < \alpha$，$X_{\sigma_i} > \beta$ より

$$\begin{aligned}(\star 2) &= \sum_{i=1}^{j-1} \left(X_{\tau_{i+1}(\omega)}(\omega) - X_{\sigma_i(\omega)}(\omega)\right) + (X_\tau(\omega)-\alpha) + \left(\alpha - X_{\sigma_j(\omega)}(\omega)\right) \leq j(\alpha-\beta) + X_\tau^+(\omega) + |\alpha| \\ &= U_{F_n}(\alpha,\beta;X(\omega))(\alpha-\beta) + X_\tau^+(\omega) + |\alpha|\end{aligned}$$

及び

$$(\star 1) \leq j(\alpha-\beta) \leq j(\alpha-\beta) + X_\tau^+(\omega) + |\alpha| = U_{F_n}(\alpha,\beta;X(\omega))(\alpha-\beta) + X_\tau^+(\omega) + |\alpha|$$

が満たされ

$$EZ \leq (\alpha-\beta)EU_{F_n}(\alpha,\beta;X) + E(X_\tau^+) + |\alpha|$$

が従う．$\{\, X_t, \mathscr{F}_t \mid \quad 0 \leq t < \infty \,\}$ の劣マルチンゲール性と任意抽出定理 (P. 32) より

$$E\left(X_{\tau_{i+1}\wedge\tau} - X_{\sigma_i\wedge\tau}\right) \geq 0, \quad (i = 1, \cdots, j)$$

が成り立つから，$EZ \geq 0$ となり (1.5) が得られる．

第三段　$j = D_{F_n}(\alpha,\beta;X(\omega))$ ならば $\sigma_j(\omega) \leq \tau < \tau_{j+1}(\omega)$ 或は $\tau_{j+1}(\omega) \leq \tau < \sigma_{j+1}(\omega)$ であるから

$$Z(\omega) \coloneqq \sum_{i=1}^{\infty} \left(X_{\sigma_i(\omega)\wedge\tau}(\omega) - X_{\tau_i(\omega)\wedge\tau}(\omega)\right) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{j} \left(X_{\sigma_i(\omega)}(\omega) - X_{\tau_i(\omega)}(\omega)\right) + \left(X_\tau(\omega) - X_{\tau_{j+1}(\omega)}(\omega)\right), & (\star 3), \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{j} \left(X_{\sigma_i(\omega)}(\omega) - X_{\tau_i(\omega)}(\omega)\right), & (\star 4) \end{cases}$$

となり，$X_{\tau_i} > \beta$，$X_{\sigma_i} < \alpha$ より

$$(\star 4) \leq \sum_{i=1}^{j} \left(X_{\sigma_i(\omega)}(\omega) - X_{\tau_i(\omega)}(\omega)\right) + (X_\tau(\omega)-\alpha)^+ = D_{F_n}(\alpha,\beta;X(\omega))(\alpha-\beta) + (X_\tau(\omega)-\alpha)^+$$

及び

$$(\star 3) \leq j(\alpha-\beta) \leq j(\alpha-\beta) + (X_\tau(\omega)-\alpha)^+ = D_{F_n}(\alpha,\beta;X(\omega))(\alpha-\beta) + (X_\tau(\omega)-\alpha)^+$$

が満たされ

$$EZ \leq (\alpha-\beta)ED_{F_n}(\alpha,\beta;X) + E(X_\tau-\alpha)^+$$

が従う．$\{\, X_t, \mathscr{F}_t \mid \quad 0 \leq t < \infty \,\}$ の劣マルチンゲール性と任意抽出定理 (P. 32) より

$$E\left(X_{\sigma_i \wedge \tau} - X_{\tau_i \wedge \tau}\right) \geq 0, \quad (i = 1, \cdots, j+1)$$

が成り立つから，$EZ \geq 0$ となり

$$ED_{F_n}(\alpha, \beta; X) \leq \frac{E(X_\tau - \alpha)^+}{\beta - \alpha}$$

が得られる． ∎

Theorem 3.8 (iv)

Doob's maximal inequality:

$$E\left(\sup_{\sigma \leq t \leq \tau} X_t\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E\left(X_\tau\right)^p, \quad p > 1,$$

provided $X_t \geq 0$ a.s.P for every $t \geq 0$, and $E\left(X_\tau\right)^p < \infty$.

証明． パスの右連続性より

$$A := \{\, \omega \mid \quad X_t(\omega) < 0,\ \exists t \in [0, \infty) \,\} = \{\, \omega \mid \quad X_r(\omega) < 0,\ \exists r \in [0, \infty) \cap \mathbf{Q} \,\}$$

が成り立ち，仮定より $P(A) = 0$ である．ここで

$$Y_n(\omega) := \begin{cases} n \wedge \sup_{\sigma \leq t \leq \tau} X_t(\omega), & (\omega \in \Omega \backslash A), \\ 0, & (\omega \in A), \end{cases} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

で Y_n を定めれば，$\sup_{\sigma \leq t \leq \tau} X_t$ の $\mathscr{F}_\tau / \mathscr{B}([-\infty, \infty])$-可測性より Y_n も $\mathscr{F}_\tau / \mathscr{B}([-\infty, \infty])$-可測である．このとき

$$[0, n) \ni \lambda \longmapsto \mathbb{1}_{\{\, (\lambda, \omega) \mid \quad \lambda < Y_n(\omega) \,\}}(\lambda, \omega)$$

は任意の $\omega \in \Omega$ に対し右連続，

$$\Omega \ni \omega \longmapsto \mathbb{1}_{\{\, (\lambda, \omega) \mid \quad \lambda < Y_n(\omega) \,\}}(\lambda, \omega)$$

は任意の $\lambda \in [0, n)$ に対し可測 $\mathscr{F}_\tau / \mathscr{B}([0, \infty))$ であるから

$$[0, n) \times \Omega \ni (\lambda, \omega) \longmapsto \mathbb{1}_{\{\, (\lambda, \omega) \mid \quad \lambda < Y_n(\omega) \,\}}(\lambda, \omega)$$

は $\mathscr{B}([0,n))\otimes\mathscr{F}_\tau/\mathscr{B}([0,\infty))$-可測である．$q$ を p の共役指数として，Fubini の定理と (1.4) 及び Hölder の不等式より

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega Y_n^p\,dP &= p\int_\Omega\int_{[0,n)} \lambda^{p-1}1\!\!1_{\{(\lambda,\omega)|\quad \lambda<Y_n(\omega)\}}(\lambda,\omega)\,d\lambda\,dP \\
&= p\int_{[0,n)} \lambda^{p-1}P(Y_n>\lambda)\,d\lambda \\
&= p\int_{[0,n)} \lambda^{p-1}P\left(\sup_{\sigma\le t\le\tau} X_t>\lambda\right)d\lambda \\
&\le p\int_{[0,n)} \lambda^{p-2}\int_{\sup\limits_{\sigma\le t\le\tau} X_t>\lambda} X_\tau(\omega)\,dP\,d\lambda \\
&= p\int_\Omega X_\tau\int_{[0,n)} \lambda^{p-2}1\!\!1_{\{(\lambda,\omega)|\quad \lambda<Y_n(\omega)\}}(\lambda,\omega)\,d\lambda\,dP \\
&= \frac{p}{p-1}\int_\Omega X_\tau Y_n^{p-1}\,dP \\
&\le \frac{p}{p-1}\left\{\int_\Omega X_\tau^p\,dP\right\}^{1/p}\left\{\int_\Omega Y_n^p\,dP\right\}^{1/q}
\end{aligned}
$$

が成り立つから，$\left\{\int_\Omega Y_n^p\,dP\right\}^{1/q}$ を移項して両辺を p 乗すれば

$$
\int_\Omega Y_n^p\,dP \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_\Omega X_\tau^p\,dP
$$

が得られる．$n\longrightarrow\infty$ として，単調収束定理より主張が従う． ∎

Theorem 3.8 (v)

Regularity of the paths: Almost every sample path $\{\,X_t(\omega)\mid\quad 0\le t<\infty\,\}$ is bounded on compact intervals; is free of discontinuities of the second kind, i.e., admits left-hand limits everywhere on $(0,\infty)$; and if the filtration $(\mathscr{F}_t)$ satisfies the usual conditions, then the jumps are exhausted by a sequence of stopping times (Proposition 2.26).

証明.

第一段　コンパクト区間 $[\sigma,\tau]$ 上で P-a.s. にパスが有界であることを示す．実際，任意の $N\in\mathbf{N}$ に対して

$$
\begin{aligned}
P\left(\sup_{t\in[\sigma,\tau]} X_t\ge N\right) &\le \frac{1}{N}EX_\tau^+, \\
P\left(\inf_{t\in[\sigma,\tau]} X_t\le -N\right) &\le \frac{1}{N}\left\{EX_\tau^+-EX_\sigma\right\}
\end{aligned}
$$

が成り立つから，

$$
\begin{aligned}
P\left(\sup_{t\in[\sigma,\tau]} X_t=\infty\right) &= \lim_{N\to\infty}P\left(\sup_{t\in[\sigma,\tau]} X_t\ge N\right)=0, \\
P\left(\inf_{t\in[\sigma,\tau]} X_t=-\infty\right) &= \lim_{N\to\infty}P\left(\inf_{t\in[\sigma,\tau]} X_t\le -N\right)=0
\end{aligned}
$$

となる．ここで

$$B^{(n)} := \left\{ -\infty = \inf_{t\in[0,n]} X_t \right\} \cup \left\{ \sup_{t\in[0,n]} X_t = +\infty \right\}, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

により P-零集合を定める．

第二段　P-a.s. にパスが各点で左極限を持つことを示す．いま，$n \geq 1$ として $\alpha < \beta$ に対し

$$A^{(n)}_{\alpha,\beta} := \left\{ \omega \in \Omega \mid \quad U_{[0,n]}(\alpha, \beta; X(\omega)) = \infty \right\}$$

とおくとき，

$$\left\{ \omega \in \Omega \mid \quad \lim_{s\uparrow t} \inf_{s<u<t} X_u(\omega) < \lim_{s\uparrow t} \sup_{s<u<t} X_u(\omega),\ \exists t \in (0, n] \right\} \subset \bigcup_{\substack{\alpha<\beta \\ \alpha,\beta\in\mathbf{Q}}} A^{(n)}_{\alpha,\beta} =: A^{(n)} \tag{1.6}$$

が成り立つ．実際或る $t \in (0, n]$ で

$$\lim_{s\uparrow t} \inf_{s<u<t} X_u(\omega) < \lim_{s\uparrow t} \sup_{s<u<t} X_u(\omega)$$

となる場合，

$$\lim_{s\uparrow t} \inf_{s<u<t} X_u(\omega) < \alpha < \beta < \lim_{s\uparrow t} \sup_{s<u<t} X_u(\omega)$$

を満たす $\alpha, \beta \in \mathbf{Q}$ を取れば，任意の $N \in \mathbf{N}$ に対し或る点列 $0 < s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \cdots < s_N < t_N < t$ が存在して

$$X_{s_i}(\omega) < \alpha, \quad X_{t_i}(\omega) > \beta, \quad (i = 1, \cdots, N)$$

を満たす．従って $\{s_1, t_1, \cdots, s_N, t_N\}$ を含む有限集合 $F \subset [0, n]$ に対し

$$N \leq U_F(\alpha, \beta; X(\omega)) \leq U_{[0,n]}(\alpha, \beta; X(\omega))$$

が成り立ち，N の任意性より

$$U_{[0,n]}(\alpha, \beta; X(\omega)) = \infty$$

が従い (1.6) が出る．すなわち $\omega \notin \left(A^{(n)} \cup B^{(n)}\right)$ なら任意の $t \in (0, n]$ で $\lim_{s\uparrow t} X_s(\omega)$ が有限確定する．

$$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(A^{(n)} \cup B^{(n)}\right)$$

により零集合を定めれば $\omega \in \Omega \backslash A$ に対するパスは RCLL である．∎

Problem 3.11

Let $\{\mathscr{F}_n\}_{n=1}^\infty$ be a decreasing sequence of sub-σ-fields of $\mathscr{F}$ (i.e.,$\mathscr{F}_{n+1} \subset \mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}$, $\forall n \geq 1$), and let $\{ X_n, \mathscr{F}_n \mid \quad n \geq 1 \}$ be a backward submartingale; i.e., $E|X_n| < \infty$, X_n is $\mathscr{F}_n$-measurable, and $E\left(X_n \mid \mathscr{F}_{n+1}\right) \geq X_{n+1}$ a.s.P, for every $n \geq 1$. Then $l := \lim_{n\to\infty} E(X_n) > -\infty$ implies that the sequence $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ is uniformly integrable.

証明． $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ は，或る $(\mathscr{F}_n)$-後退マルチンゲール $(M_n)_{n=1}^{\infty}$ と単調増大列 $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ を用いて

$$X_n = M_n - A_n, \quad (\forall n \geq 1)$$

と分解できる．実際，

$$\begin{aligned} A_0 &\coloneqq 0, \\ A_n &\coloneqq \sum_{i=1}^{n-1} E\left(X_i - X_{i+1} \mid \mathscr{F}_{i+1}\right), \quad (n = 2, 3, \cdots) \end{aligned}$$

とおけば，$(X_n)_{n=1}^{\infty}$ の後退劣マルチンゲール性により

$$E \coloneqq \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\, \omega \ni \Omega \mid \quad E\left(X_n - X_{n+1} \mid \mathscr{F}_{n+1}\right)(\omega) < 0 \,\}$$

で定まる P-零集合 E に対し

$$0 \leq A_1(\omega) \leq A_2(\omega) \leq \cdots \quad (\forall \omega \in \Omega \backslash E)$$

が満たされ

$$A_\infty(\omega) \coloneqq \lim_{n \to \infty} A_n(\omega) \mathbb{1}_{\Omega \backslash E}(\omega), \quad (\omega \in \Omega)$$

が ∞ まで含めて確定する．すなわち A_∞ は可測 $\mathscr{F}/\mathscr{B}([0, \infty])$ である．また $EX_1 \geq EX_2 \geq \cdots \geq l > -\infty$ の仮定より

$$\int_\Omega A_n \, dP = \sum_{i=1}^{n-1} \int_\Omega E\left(X_i - X_{i+1} \mid \mathscr{F}_{i+1}\right) \, dP = \int_\Omega X_1 - X_n \, dP \leq \int_\Omega X_1 \, dP - l, \quad (\forall n \geq 1)$$

となるから，単調収束定理より A_∞ の可積分性が出る．一方で

$$M_n \coloneqq X_n + A_n, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

により $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定めれば

$$\begin{aligned} E\left(M_n - M_{n+1} \mid \mathscr{F}_{n+1}\right) &= E\left((X_n - X_{n+1}) + (A_n - A_{n+1}) \mid \mathscr{F}_{n+1}\right) \\ &= E\left((X_n - X_{n+1}) - E\left(X_n - X_{n+1} \mid \mathscr{F}_{n+1}\right) \mid \mathscr{F}_{n+1}\right) = 0, \quad P\text{-a.s.}, \quad n = 1, 2, \cdots \end{aligned}$$

となるから

$$E\left(M_1 \mid \mathscr{F}_n\right) = M_n, \quad P\text{-a.s.}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

が従う．このとき，任意の $\lambda > 0$ に対して

$$\begin{aligned} \int_{|X_n| > \lambda} |X_n| \, dP &= \int_{|M_n - A_n| > \lambda} |M_n - A_n| \, dP \\ &\leq 2 \int_{|M_n| > \lambda/2} |M_n| \, dP + 2 \int_{|A_n| > \lambda/2} |A_n| \, dP \\ &\leq 2 \int_{|M_n| > \lambda/2} |M_n| \, dP + 2 \int_{A_\infty > \lambda/2} A_\infty \, dP, \quad (\forall n \geq 1) \end{aligned}$$

が満たされ[3]，$(M_n = E(M_1 \mid \mathscr{F}_n))_{n=1}^{\infty}$ の一様可積分性 (補題) と A_∞ の可積分性より

$$\sup_{n\geq 1}\int_{|X_n|>\lambda} |X_n|\, dP \leq \sup_{n\geq 1}\int_{|M_n|>\lambda/2} |M_n|\, dP + 2\int_{A_\infty>\lambda/2} A_\infty\, dP \longrightarrow 0 \quad (\lambda \longrightarrow \infty)$$

が成立し $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ の一様可積分性が出る. ∎

Proposition 3.14 (i)

Let $X = \{X_t, \mathscr{F}_t \mid \ 0 \leq t < \infty\}$ be a submartingale. We have the following:

(i) There is an event $\Omega^* \in \mathscr{F}$ with $P(\Omega^*) = 1$, such that for every $\omega \in \Omega^*$:

$$\text{the limits } X_{t+}(\omega) := \lim_{\substack{s\downarrow t\\ s\in\mathbf{Q}}} X_s(\omega), \quad X_{t-}(\omega) := \lim_{\substack{s\uparrow t\\ s\in\mathbf{Q}}} X_s(\omega)$$

exist for all $t \geq 0$ (respectively, $t > 0$).

Proposition 3.14 (ii)

(ii) The limits in (i) satisfy

$$E(X_{t+} \mid \mathscr{F}_s) \geq X_s \quad \text{a.s.}P, \text{ for all } 0 \leq s \leq t.$$

証明. $0 \leq s \leq t$ とする．$t_n \downarrow t$ を満たす単調減少な有理点列 $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ を取れば，$(X_{t_n})_{n=1}^{\infty}$ は $(\mathscr{F}_{t_n})$-後退劣マルチンゲールであり，かつ

$$-\infty < EX_t \leq \cdots \leq EX_{t_2} \leq EX_{t_1}$$

が満たされているから $(X_{t_n})_{n=1}^{\infty}$ は一様可積分である (Problem 3.11)．いま，後退劣マルチンゲール性より

$$\int_A X_s\, dP \leq \int_A X_{t_n}\, dP, \quad (\forall A \in \mathscr{F}_s,\ n = 1, 2, \cdots)$$

が従い，また (i) より $X_{t_n} \longrightarrow X_{t+}$ P-a.s. が成り立つから，一様可積分性と平均収束の補題より

$$E|X_{t+}| < \infty, \quad E|X_{t_n} - X_{t+}| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \tag{1.7}$$

となり

$$\int_A X_s\, dP \leq \int_A X_{t+}\, dP, \quad (\forall A \in \mathscr{F}_s)$$

が得られる. ∎

[3] 任意の $x, y \in \mathbf{R}$ と $\lambda > 0$ に対して次が成り立つ:

$$|x+y|\mathbb{1}_{|x+y|>\lambda} = |x+y|\mathbb{1}_{|x+y|>\lambda \wedge |x|\geq|y|} + |x+y|\mathbb{1}_{|x+y|>\lambda\wedge|x|<|y|} \leq (|x|+|y|)\mathbb{1}_{|x|+|y|>\lambda\wedge|x|\geq|y|} + (|x|+|y|)\mathbb{1}_{|x|+|y|>\lambda\wedge|x|<|y|} \leq 2|x|\mathbb{1}_{2|x|>\lambda} + 2|y|\mathbb{1}_{2|y|>\lambda}.$$

Proposition 3.14 (iii)

(iii) If $\mathscr{F}_0$ contains all the P-negligible events in $\mathscr{F}$, then $\{ X_{t+}, \mathscr{F}_{t+} \mid 0 \leq t < \infty \}$ is a submartingale with every path RCLL. [*4]

証明.

第一段 (1.7) より X_{t+} は可積分である.

第二段 $(X_{t+})_{t \geq 0}$ が $(\mathscr{F}_{t+})$-適合であることを示す．任意に $t < u$ を取るとき，$u_n \downarrow t$ を満たす単調減少な有理点列 $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ に対し或る $N \geq 1$ が存在して $t < u_n < u$ $(\forall n > N)$ となるから $X_{u_n} \mathbb{1}_{\Omega^*}$ $(n > N)$ は $\mathscr{F}_u / \mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測性を持つ[*5].

$$X_{t+} = \lim_{\substack{n \to \infty \\ n > N}} X_{u_n} \mathbb{1}_{\Omega^*}$$

より X_{t+} の $\mathscr{F}_u / \mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測性が従い，$t < u$ の任意性より $\mathscr{F}_{t+} / \mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測性を得る.

第三段 任意の $0 \leq s < t$ に対し $E(X_{t+} \mid \mathscr{F}_{s+}) \geq X_{s+}$ P-a.s. が成り立つことを示す．実際，$s_n \downarrow s$ を満たす単調減少な有理点列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (s, t]$ を取れば，(ii) の結果より任意の $A \in \mathscr{F}_{s+} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{s_n}$ と $n \geq 1$ に対し

$$\int_A X_{t+} \, dP \geq \int_A X_{s_n} \, dP$$

が成立し，また $(X_{s_n})_{n=1}^{\infty}$ の一様可積分性より

$$E\,|X_{s_n} - X_{s+}| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

となり

$$\int_A X_{t+} \, dP \geq \int_A X_{s+} \, dP, \quad (\forall A \in \mathscr{F}_{s+})$$

が従う.

第四段 $\{ X_{t+} \mid 0 \leq t < \infty \}$ の右連続性を示す．任意の $t \geq 0$, $\omega \in \Omega^*$, $\epsilon > 0$ に対し，或る $\delta > 0$ が存在して

$$|X_{t+}(\omega) - X_r(\omega)| < \epsilon, \quad (r \in (t, t+\delta) \cap \mathbf{Q})$$

が成立する．このとき，任意の $s \in (t, t+\delta)$ に対し

$$|X_{s+}(\omega) - X_u(\omega)| < \epsilon$$

を満たす $u \in (s, t+\delta) \cap \mathbf{Q}$ が存在するから

$$|X_{t+}(\omega) - X_{s+}(\omega)| \leq |X_{t+}(\omega) - X_u(\omega)| + |X_u(\omega) - X_{s+}(\omega)| < 2\epsilon$$

が従い $[0, \infty) \ni t \longmapsto X_{t+}(\omega)$ の右連続性が得られる.

[*4] $(X_{t+})_{t \geq 0}$ が $(\mathscr{F}_{t+})$-適合であることを保証するためには $(\mathscr{F}_t)_{t \geq 0}$ の完備性が要る．また P-almost ではなく全てのパスが RCLL となる.

[*5] フィルトレーションの完備性の仮定より $\mathbb{1}_{\Omega^*}$ は $\mathscr{F}_u / \mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測となる.

第五段　$\{ X_{t+} \mid \quad 0 \leq t < \infty \}$ が各点で有限な左極限を持つことを示す．任意の $t > 0,\ \omega \in \Omega^*,\ \epsilon > 0$ に対し，或る $\delta > 0$ が存在して

$$|X_{t-}(\omega) - X_r(\omega)| < \epsilon, \quad (r \in (t-\delta, t) \cap \mathbf{Q})$$

が成立する．このとき，任意の $s \in (t-\delta, t)$ に対し

$$|X_{s+}(\omega) - X_u(\omega)| < \epsilon$$

を満たす $u \in (s, t) \cap \mathbf{Q}$ が存在するから

$$|X_{t-}(\omega) - X_{s+}(\omega)| \leq |X_{t-}(\omega) - X_u(\omega)| + |X_u(\omega) - X_{s+}(\omega)| < 2\epsilon$$

が従い

$$\lim_{s \uparrow t} X_{s+}(\omega) = X_{t-}(\omega)$$

を得る．∎

1.3.2　Convergence Results

Problem 3.16

Let $\{ X_t, \mathscr{F}_t \mid \quad 0 \leq t < \infty \}$ be a right-continuous, nonnegative supermatingale; then $X_\infty(\omega) = \lim_{t\to\infty} X_t(\omega)$ exists for P-a.e. $\omega \in \Omega$, and $\{ X_t, \mathscr{F}_t \mid \quad 0 \leq t \leq \infty \}$ is a supermartingale.

証明．　$\{ -X_t, \mathscr{F}_t \mid \quad 0 \leq t < \infty \}$ は右連続な $(\mathscr{F}_t)$-劣マルチンゲールとなり

$$\sup_{t \geq 0} E(-X_t)^+ = 0$$

が満たされるから，劣マルチンゲール収束定理により或る P-零集合 A が存在して

$$Z_\infty \coloneqq \lim_{t\to\infty} (-X_t) \mathbb{1}_{\Omega \setminus A}$$

により $\mathscr{F}_\infty / \mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測な可積分関数 Z_∞ が定まる．すなわち

$$X_\infty \coloneqq \lim_{t\to\infty} X_t \mathbb{1}_{\Omega \setminus A}$$

により $\mathscr{F}_\infty / \mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測関数が定まり，かつ $X_\infty = -Z_\infty$ より X_∞ は可積分である．また Fatou の補題により任意の $t \geq 0$ 及び $A \in \mathscr{F}_t$ に対し

$$\int_A X_\infty \, dP \leq \liminf_{\substack{n\to\infty \\ n > t}} \int_A X_n \, dP \leq \int_A X_t \, dP$$

が成立するから $\{ X_t, \mathscr{F}_t \mid \quad 0 \leq t \leq \infty \}$ は優マルチンゲールである．∎

Exercise 3.18

Suppose that the filtration $\{\mathscr{F}_t\}$ satisfies the usual conditions. Then every right-continuous, uniformly integrable supermartingale $\{ X_t, \mathscr{F}_t \mid \quad 0 \leq t < \infty \}$ admits the Riesz decomposition $X_t = M_t + Z_t$, a.s. P, as the sum of a right-continuous, uniformly integrable martingale $\{ M_t, \mathscr{F}_t \mid \quad 0 \leq t < \infty \}$ and a potential $\{ Z_t, \mathscr{F}_t \mid \quad 0 \leq t < \infty \}$.

条件を満たす二つの分解 $X_t = M_t + Z_t = M_t' + Z_t'$ a.s. $P, (\forall t \geq 0)$ が存在する場合，次の意味で分解は一意である:

$$P\left(M_t = M_t',\ Z_t = Z_t',\ \forall t \geq 0\right) = 1. \tag{1.8}$$

証明.

第一段　M を構成する．いま，$t \geq 0$ を固定する．$n > t$ を満たす $n \in \mathbf{N}$ と任意の $A \in \mathscr{F}_t$ に対し

$$\begin{aligned}\int_A E\left(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_t\right)\, dP &= \int_A X_{n+1}\, dP = \int_A E\left(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n\right)\, dP \\ &\leq \int_A X_n\, dP = \int_A E\left(X_n \mid \mathscr{F}_t\right)\, dP\end{aligned}$$

が成り立つから

$$E := \bigcup_{n>t} \{ \omega \in \Omega \mid \quad E\left(X_n \mid \mathscr{F}_t\right)(\omega) < E\left(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_t\right)(\omega) \}$$

として P-零集合が定まる．また，同様に優マルチンゲール性より

$$F := \bigcup_{n>t} \{ \omega \in \Omega \mid \quad E\left(X_n \mid \mathscr{F}_t\right)(\omega) > X_t(\omega) \}$$

も P-零集合である．このとき，単調減少性より

$$X_t^* := \lim_{n\to\infty} E\left(X_n \mid \mathscr{F}_t\right) \mathbb{1}_{\Omega \setminus (E \cup F)}$$

が $-\infty$ まで込めて確定し，X_t^* は $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}([-\infty, \infty])$-可測であり

$$X_t(\omega) \geq X_t^*(\omega), \quad (\forall \omega \in \Omega \setminus (E \cup F))$$

を満たす．単調収束定理と $\sup_{n\geq 1} E|X_n| < \infty$ (一様可積分性) より

$$E\left(X_t - X_t^*\right) = \int_{\Omega\setminus(E\cup F)} \lim_{n\to\infty} \left(X_t - E\left(X_n \mid \mathscr{F}_t\right)\right)\, dP = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega\setminus(E\cup F)} X_t - E\left(X_n \mid \mathscr{F}_t\right)\, dP = EX_t - \lim_{n\to\infty} EX_n < \infty$$

が成立するから X_t^* は可積分性であり P-a.s. に $|X_t^*| < \infty$ となる．ここで

$$X_t^{**} := X_t^* \mathbb{1}_{|X_t^*|<\infty}$$

により $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測な可積分関数を定めれば，単調収束定理より

$$EX_t^{**} = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega E\left(X_n \mid \mathscr{F}_t\right)\, dP = \lim_{n\to\infty} EX_n \tag{1.9}$$

となる．任意の $t \geq 0$ に対し X_t^{**} を定めれば，任意の $0 \leq s < t$ 及び $A \in \mathscr{F}_s$ に対して

$$\int_A X_t^{**}\, dP = \lim_{n\to\infty} \int_A E\left(X_n \mid \mathscr{F}_t\right)\, dP = \lim_{n\to\infty} \int_A E\left(X_n \mid \mathscr{F}_s\right)\, dP = \int_A X_s^{**}\, dP \tag{1.10}$$

が成り立つから $\left\{ X_t^{**}, \mathscr{F}_t \mid \quad 0 \leq t < \infty \right\}$ はマルチンゲールである．マルチンゲール性より $[0, \infty) \ni t \longmapsto EX_t^{**}$ は定数であるから Theorem 3.13 により右連続な修正 $\{ M_t, \mathscr{F}_t \mid \quad 0 \leq t < \infty \}$ が存在する．

第二段　まず $\lim_{t\to\infty} EX_t$ が存在することを示す．任意の単調増大列 $(t_k)_{k=1}^\infty$，$t_k \uparrow \infty$ に対し優マルチンゲール性より

$$\lim_{k\to\infty} EX_{t_k} = \inf_{k\geq 1} EX_{t_k}$$

が確定し，任意の $n \in \mathbf{N}$ に対し $n < t_k$ を満たす k が存在するから

$$\inf_{n\geq 1} EX_n \geq \inf_{k\geq 1} EX_{t_k}$$

が従う．逆に任意の t_k に対し $t_k < n$ を満たす n が存在するから

$$\lim_{n\to\infty} EX_n = \inf_{n\geq 1} EX_n = \inf_{k\geq 1} EX_{t_k} = \lim_{k\to\infty} EX_{t_k}$$

が成立し，$(t_k)_{k=1}^\infty$ の任意性から $\lim_{t\to\infty} EX_t$ が存在して

$$\lim_{t\to\infty} EX_t = \lim_{n\to\infty} EX_n \tag{1.11}$$

となる．右連続な優マルチンゲール $\{ Z_t, \mathscr{F}_t \mid \quad 0 \leq t < \infty \}$ を

$$Z_t := X_t - M_t, \quad (\forall t \geq 0)$$

により定めれば，(1.9) より任意の $t \geq 0$ に対し

$$E(X_t - M_t) = EX_t - EM_t = EX_t - \lim_{n\to\infty} EX_n$$

が成り立ち，(1.11) より

$$\lim_{t\to\infty} E(X_t - M_t) = \lim_{t\to\infty} EX_t - \lim_{n\to\infty} EX_n = 0$$

が満たされるから $\{ Z_t, \mathscr{F}_t \mid \quad 0 \leq t < \infty \}$ はポテンシャルである．

第三段　分解の一意性を示す．任意の $t \geq 0$ 及び $A \in \mathscr{F}_t$ に対し，(1.10) と M' のマルチンゲール性より

$$\int_A M_t \, dP = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n>t}} \int_A X_n \, dP = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n>t}} \left\{ \int_A M'_n - Z'_n \, dP \right\} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n>t}} \left\{ \int_A M'_t \, dP - \int_A Z'_n \, dP \right\}$$

が成立する．またポテンシャルは非負であるから

$$0 \leq \int_A Z'_n \, dP \leq \int_\Omega Z'_n \, dP \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成り立ち，$M_t = M'_t$ P-a.s. 及び $Z_t = Z'_t$ P-a.s. が従う．パスの右連続性より (1.8) が出る．∎

Problem 3.19

Assume that $\mathscr{F}_\infty$ contains all the P-negligible events in $\mathscr{F}$ [*6]. Then the following three conditions are equivalent for a nonnegative, right-continuous submartingale $\{ X_t, \mathscr{F}_t \mid \quad 0 \leq t < \infty \}$:

(a) it is a uniformly integrable family of random variables;

(b) it converges in L^1, as $t \longrightarrow \infty$;

(c) it converges P a.s. (as $t \longrightarrow \infty$) to an integrable random variable X_∞, such that $\{ X_t, \mathscr{F}_t \mid \quad 0 \leq t \leq \infty \}$ is a submartingale.

Observe that the implications (a) ⇒ (b) ⇒ (c) hold without the assumption of nonnegativity.

証明.

第一段　(a) ⇒ (b) を示す．実際，一様可積分性の同値条件の補題より

$$\sup_{t \geq 0} EX_t^+ \leq \sup_{t \geq 0} E|X_t| < \infty$$

となるから，劣マルチンゲール収束定理より或る $\mathscr{F}_\infty/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測な可積分関数 X_∞ が存在して

$$\lim_{t \to \infty} X_t = X_\infty \quad P\text{-a.s.}$$

が満たされる．一様可積分性と平均収束の補題より，$t_n \uparrow \infty$ となる任意の単調増大列 $(t_n)_{n=1}^\infty$ に対して

$$E|X_{t_n} - X_\infty| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成立するから

$$E|X_t - X_\infty| \longrightarrow 0 \quad (t \longrightarrow \infty)$$

が従う．

第二段　(b) ⇒ (c) を示す．(b) の下で，或る可積分関数 X_* が存在して

$$E|X_n - X_*| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が満たされるから，或る部分列 $\left(X_{n_k}\right)_{k=1}^\infty$ と P-零集合 E が存在して

$$\lim_{k \to \infty} X_{n_k}(\omega) = X_*(\omega), \quad (\forall \omega \in \Omega \backslash E)$$

となる．$X_{n_k} \mathbb{1}_{\Omega \backslash E}$ は全て $\mathscr{F}_\infty/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測であるから，

$$X_\infty := \lim_{k \to \infty} X_{n_k} \mathbb{1}_{\Omega \backslash E}$$

とおけば X_∞ は $\mathscr{F}_\infty/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測，かつ $X_\infty = X^*$ P-a.s. より可積分であり

$$E|X_n - X_\infty| = E|X_n - X_*| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \tag{1.12}$$

を満たす．任意の $t \geq 0$ 及び $A \in \mathscr{F}_t$ に対し

$$\int_A X_t \, dP \leq \int_A X_n \, dP, \quad (\forall n > t) \tag{1.13}$$

が成り立つから，(1.12) より

$$\int_A X_t \, dP \leq \int_A X_\infty \, dP \tag{1.14}$$

が出る．

---

*6　証明の第二段で出てくる E が $\mathscr{F}_\infty$ に属していなければならない．

第三段　$X_t \geq 0\ (\forall t \geq 0)$ を仮定して (c) ⟹ (a) を示す．実際，劣マルチンゲール性より

$$\int_{|X_t|>\lambda} |x_t|\,dP = \int_{X_t>\lambda} X_t\,dP \leq \int_{X_t>\lambda} X_\infty\,dP$$

かつ

$$P(X_t > \lambda) \leq \frac{1}{\lambda} E X_t \leq \frac{1}{\lambda} E X_\infty$$

が成り立ち，X_∞ の可積分性より

$$\sup_{t \geq 0} \int_{|X_t|>\lambda} |x_t|\,dP \longrightarrow 0 \quad (\lambda \longrightarrow \infty)$$

となる．■

Problem 3.20

Assume that $\mathscr{F}_\infty$ contains all the P-negligible events in $\mathscr{F}$. Then the following four conditions are equivalent for a right-continuous martingale $\{ X_t, \mathscr{F}_t \mid 0 \leq t < \infty \}$:

(a),(b) as in Problem 3.19;

(c) it converges P a.s. (as $t \to \infty$) to an integrable random variable X_∞, such that $\{ X_t, \mathscr{F}_t \mid 0 \leq t \leq \infty \}$ is a martingale;

(d) there exists an integrable random variable Y, such that $X_t = E(Y \mid \mathscr{F}_t)$ a.s. P, for every $t \geq 0$.

Besides, if (d) holds and X_∞ is the random variable in (c), then

$$E(Y \mid \mathscr{F}_\infty) = X_\infty \quad \text{a.s. } P. \tag{1.15}$$

証明.

第一段　マルチンゲールは劣マルチンゲールであるから，Problem 3.19 より (a) ⟹ (b) が従う．また今の仮定の下では (1.13) と (1.14) の不等号が等号に代わり (b) ⟹ (c) となる．$Y := X_\infty$ として (c) ⟹ (d) が得られ，一様可積分性と条件付き期待値に関する補題 (P. 561) より (d) ⟹ (a) が出る．

第二段　(1.15) を示す．いま，任意の $t \geq 0$ 及び $A \in \mathscr{F}_t$ に対し

$$\int_A Y\,dP = \int_A X_t\,dP = \int_A X_\infty\,dP$$

が成立するから

$$\int_A Y\,dP = \int_A X_\infty\,dP, \quad \left(\forall A \in \bigcup_{t \geq 0} \mathscr{F}_t\right)$$

が従う．Y と X_∞ の可積分性より

$$\mathscr{D} := \left\{ A \in \mathscr{F}_\infty \mid \int_A Y\,dP = \int_A X_\infty\,dP \right\}$$

は Dynkin 族をなし乗法族 $\bigcup_{t \geq 0} \mathscr{F}_t$ を含むから，Dynkin 族定理より

$$\int_A Y \, dP = \int_A X_\infty \, dP, \quad (\forall A \in \mathscr{F}_\infty)$$

が成立する．∎

1.3.3 The Optional Sampling Theorem

Lemma: 離散時間の任意抽出定理

$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty$ とし，$\left\{ X_{t_i}, \mathscr{F}_{t_i} \mid \quad i = 0, \cdots, n \right\}$ を劣マルチンゲール，$S, T : \Omega \longrightarrow \{t_0, t_1, \cdots, t_n, \infty\}$ を $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻[*7]，Y を $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測関数として

$$X_T(\omega) := Y(\omega), \ (\forall \omega \in \{T = \infty\}), \quad X_S(\omega) := Y(\omega), \ (\forall \omega \in \{S = \infty\})$$

とおく．このとき，

(a) $S, T < \infty$, a.s. P.

(b) Y が可積分かつ $E\left(Y \,\middle|\, \mathscr{F}_{t_i}\right) \geq X_{t_i}$ a.s. P, $(i = 0, \cdots, n)$.

のいずれかのが満たされていれば次が成り立つ:

$$E\left(X_T \,|\, \mathscr{F}_S\right) \geq X_{S \wedge T} \quad \text{a.s. } P. \tag{1.16}$$

証明.

第一段　X_S が $\mathscr{F}_S/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測であることを示す．任意の $t \geq 0$ に対して

$$\{X_S \in B\} \cap \{S \leq t\} = \{X_{S \wedge t} \in B\} \cap \{S \leq t\}, \quad (\forall B \in \mathscr{B}(\mathbf{R}))$$

となるから $X_{S \wedge t}$ の $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測性を言えばよい．$t_m \leq t < t_{m+1}$ の場合 ($m = n$ なら $t_{m+1} = \infty$),

$$X_{S \wedge t} = \sum_{t_i \leq t} X_{t_i} 1\!\!1_{\{S = t_i\}} = \sum_{i=0}^{m} X_{t_i} 1\!\!1_{\{S = t_i\}}$$

と分解できる．連続写像 $\varphi : \mathbf{R}^2 \ni (x, y) \longmapsto xy$ と $\psi : \mathbf{R}^{m+1} \ni (x_0, x_1, \cdots, x_m) \longmapsto x_0 + x_1 + \cdots + x_m$ を用いれば,

$$\left\{ X_{t_i} 1\!\!1_{\{S = t_i\}} \in B \right\} = \left\{ \left(X_{t_i}, 1\!\!1_{\{S = t_i\}} \right) \in \varphi^{-1}(B) \right\}, \quad (\forall B \in \mathscr{B}(\mathbf{R}))$$

かつ

$$\{X_{S \wedge t} \in B\} = \left\{ \left(X_{t_0} 1\!\!1_{\{S = t_0\}}, \cdots, X_{t_m} 1\!\!1_{\{S = t_m\}} \right) \in \psi^{-1}(B) \right\}, \quad (\forall B \in \mathscr{B}(\mathbf{R}))$$

[*7] $\left\{\mathscr{F}_{t_i}\right\}_{i=0}^{n}$ は $\{\mathscr{F}_t\}_{t \geq 0}$ の部分集合と考える．

が成り立つ．いま，$\mathbf{R}$ の第二可算性より $\mathscr{B}(\mathbf{R}^2) = \mathscr{B}(\mathbf{R}) \otimes \mathscr{B}(\mathbf{R})$ が満たされ，かつ任意の $E, F \in \mathscr{B}(\mathbf{R})$ に対して

$$\left\{ \left(X_{t_i}, \mathbb{1}_{\{S=t_i\}} \right) \in E \times F \right\} = X_{t_i}^{-1}(E) \cap \left\{ \mathbb{1}_{\{S=t_i\}} \in F \right\} \in \mathscr{F}_t, \quad (\forall t_i \leq t)$$

となるから $X_{t_i} \mathbb{1}_{\{S=t_i\}}$ の $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測性が従う．同様に $\mathscr{B}(\mathbf{R}^{m+1}) = \mathscr{B}(\mathbf{R}) \otimes \cdots \otimes \mathscr{B}(\mathbf{R})$ と

$$\left\{ \left(X_{t_0} \mathbb{1}_{\{S=t_0\}}, \cdots, X_{t_m} \mathbb{1}_{\{S=t_m\}} \right) \in E_0 \times \cdots \times E_m \right\} = \bigcap_{i=0}^{m} \left\{ X_{t_i} \mathbb{1}_{\{S=t_i\}} \in E_i \right\} \in \mathscr{F}_t, \quad (\forall E_i \in \mathscr{B}(\mathbf{R}),\ i = 0, \cdots, m)$$

より $X_{S \wedge t}$ は $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測である．これより X_T の $\mathscr{F}_T/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測性及び $X_{S \wedge T}$ の $\mathscr{F}_{S \wedge T}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測性も出る．

第二段　$S \leq T$ と仮定して (1.16) を示す．先ず

$$\int_\Omega |X_S| \, dP = \sum_{i=0}^{n} \int_{\{S=t_i\}} |X_{t_i}| \, dP + \int_{\{S=\infty\}} |Y| \, dP$$

より (a),(b) いずれの場合も X_S, X_T は可積分である．また，劣マルチンゲール性より任意の $A \in \mathscr{F}_S$ に対して

$$\begin{aligned}
\int_{A \cap \{S=t_i\}} X_{t_i} \, dP &= \int_{A \cap \{S=t_i\} \cap \{T=t_i\}} X_{t_i} \, dP + \int_{A \cap \{S=t_i\} \cap \{T>t_i\}} X_{t_i} \, dP \\
&\leq \int_{A \cap \{S=t_i\} \cap \{T=t_i\}} X_T \, dP + \int_{A \cap \{S=t_i\} \cap \{T>t_i\}} X_{t_{i+1}} \, dP \\
&= \int_{A \cap \{S=t_i\} \cap \{T=t_i\}} X_T \, dP + \int_{A \cap \{S=t_i\} \cap \{T=t_{i+1}\}} X_T \, dP + \int_{A \cap \{S=t_i\} \cap \{T>t_{i+1}\}} X_{t_{i+1}} \, dP \\
&\cdots \\
&\leq \sum_{j=i}^{n} \int_{A \cap \{S=t_i\} \cap \{T=t_j\}} X_T \, dP + \int_{A \cap \{S=t_i\} \cap \{T>t_n\}} X_{t_n} \, dP
\end{aligned}$$

及び

$$\int_{A \cap \{S=\infty\}} X_S \, dP = \int_{A \cap \{S=\infty\}} Y \, dP = \int_{A \cap \{S=\infty\}} X_T \, dP$$

が成り立つから，(a) の場合は

$$\int_{A \cap \{S=t_i\}} X_{t_i} \, dP \leq \sum_{j=i}^{n} \int_{A \cap \{S=t_i\} \cap \{T=t_j\}} X_T \, dP = \int_{A \cap \{S=t_i\}} X_T \, dP,$$

(b) の場合は

$$\begin{aligned}
\int_{A \cap \{S=t_i\}} X_{t_i} \, dP &\leq \sum_{j=i}^{n} \int_{A \cap \{S=t_i\} \cap \{T=t_j\}} X_T \, dP + \int_{A \cap \{S=t_i\} \cap \{T>t_n\}} X_{t_n} \, dP \\
&\leq \sum_{j=i}^{n} \int_{A \cap \{S=t_i\} \cap \{T=t_j\}} X_T \, dP + \int_{A \cap \{S=t_i\} \cap \{T>t_n\}} Y \, dP \\
&= \sum_{j=i}^{n} \int_{A \cap \{S=t_i\} \cap \{T=t_j\}} X_T \, dP + \int_{A \cap \{S=t_i\} \cap \{T=\infty\}} Y \, dP \\
&= \int_{A \cap \{S=t_i\}} X_T \, dP
\end{aligned}$$

となり，いずれの場合も

$$\int_A X_S \, dP = \sum_{i=0}^{n} \int_{A\cap\{S=t_i\}} X_{t_i} \, dP + \int_{A\cap\{S=\infty\}} X_S \, dP \leq \sum_{i=0}^{n} \int_{A\cap\{S=t_i\}} X_T \, dP + \int_{A\cap\{S=\infty\}} X_T \, dP = \int_A X_T \, dP$$

が成立する．X_S の $\mathscr{F}_S/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測性より (1.16) を得る．

第三段　一般の S, T に対して (1.16) を示す．任意の $A \in \mathscr{F}_S$ に対し，Problem 2.17 (P. 11) と前段の結果より

$$\begin{aligned}
\int_A E\left(X_T \,|\, \mathscr{F}_S\right) \, dP &= \int_{A\cap\{S\leq T\}} E\left(X_T \,|\, \mathscr{F}_S\right) \, dP + \int_{A\cap\{S>T\}} E\left(X_T \,|\, \mathscr{F}_S\right) \, dP \\
&= \int_{A\cap\{S\leq T\}} E\left(X_T \,|\, \mathscr{F}_{S\wedge T}\right) \, dP + \int_{A\cap\{S>T\}} X_T \, dP \\
&\geq \int_{A\cap\{S\leq T\}} X_{S\wedge T} \, dP + \int_{A\cap\{S>T\}} X_{S\wedge T} \, dP \\
&= \int_A X_{S\wedge T} \, dP
\end{aligned}$$

となり，$X_{S\wedge T}$ の $\mathscr{F}_{S\wedge T}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測性より (1.16) が出る．∎

Theorem 3.22 修正

Let $\{ X_t, \mathscr{F}_t \mid \ 0 \leq t < \infty \}$ be a right-continuous submartingale, S, T be two optional times of the filtration $\{\mathscr{F}_t\}$, and Y be a $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-measurable function, and set

$$X_U(\omega) := Y(\omega) \quad (\forall \omega \in \{U = \infty\}).$$

for any random time U. Then, under either of the following two conditions;

(a)　There exists an $N \in \mathbf{N}$ such that $S, T < N$ a.s. P,

(b)　Y is integrable and $X_t \leq E\left(Y \,|\, \mathscr{F}_t\right)$ a.s. P, for every $t \geq 0$,

we have

$$E\left(X_T \,|\, \mathscr{F}_{S+}\right) \geq X_{S\wedge T} \quad \text{a.s. } P.$$

If S is a stopping time, then $\mathscr{F}_S$ can replace $\mathscr{F}_{S+}$ above. In particular, $EX_T \geq EX_0$, and for a martingale with a last element we have $EX_T = EX_0$.

この修正により Problem 3.23 と Problem 3.24 の主張が従う．

証明.

第一段　X_S の $\mathscr{F}_{S+}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測性を示す．Corollary 2.4 より S は $(\mathscr{F}_{t+})$-停止時刻であり，$\{ X_t, \mathscr{F}_{t+} \mid \ 0 \leq t < \infty \}$ は発展的可測である．従って Proposition 2.18 (P. 12) より任意の $t \geq 0$ に対し $X_{S\wedge t}$ は $\mathscr{F}_{t+}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測であり，

$$\{X_S \in B\} \cap \{S \leq t\} = \{X_{S\wedge t} \in B\} \cap \{S \leq t\} \in \mathscr{F}_{t+}, \quad (\forall B \in \mathscr{B}(\mathbf{R}))$$

より X_S の $\mathscr{F}_{S+}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測性が出る．$S$ が $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻のときは，$X_{S\wedge t}$ は $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測性を持ち

$$\{X_S \in B\} \cap \{S \leq t\} = \{X_{S\wedge t} \in B\} \cap \{S \leq t\} \in \mathscr{F}_t, \quad (\forall B \in \mathscr{B}(\mathbf{R}))$$

が従うから X_S は $\mathscr{F}_S/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測である．

第二段　任意の $n \geq N$ に対し

$$S_n(\omega) := \begin{cases} \infty & \text{if } S(\omega) \geq n, \\ \dfrac{k}{2^n} & \text{if } \dfrac{k-1}{2^n} \leq S(\omega) < \dfrac{k}{2^n} \text{ for } k = 1, \cdots, n2^n, \end{cases}$$

により停止時刻 S_n が定まる (Problem 2.24 修正版，P. 15)．同様に $(T_n)_{n \geq N}$ も構成すれば，補題より

$$\int_A X_{T_n}\, dP \geq \int_A X_{S_n \wedge T_n}\, dP, \quad (\forall A \in \mathscr{F}_{S_n}, \ \forall n \geq N)$$

が成立する．また $S(\omega) < \infty$ なら $S_n(\omega) \downarrow S(\omega)$，かつ $S(\omega) = \infty$ なら $S_n(\omega) = \infty$ であるから

$$S = \inf_{n \geq N} S_n$$

が満たされ，Problem 2.23 より

$$\mathscr{F}_{S+} = \bigcap_{n \geq N} \mathscr{F}_{S_n}$$

となり

$$\int_A X_{T_n}\, dP \geq \int_A X_{S_n \wedge T_n}\, dP, \quad (\forall A \in \mathscr{F}_{S+}, \ \forall n \geq N) \tag{1.17}$$

が成立する．S が停止時刻の場合は $\mathscr{F}_S \subset \mathscr{F}_{S+}$ であるから，(1.17) を $\mathscr{F}_S$ に置き換えて成立する．

第三段　$(S_n)_{n \geq N}, (T_n)_{n \geq N}$ は単調減少列であるから $(\mathscr{F}_{T_n})_{n \geq N}$ と $(\mathscr{F}_{S_n \wedge T_n})_{n \geq N}$ も単調減少列であり，$\{ X_{T_n}, \mathscr{F}_{T_n} \mid \ n \geq N \}$ 及び $\{ X_{S_n \wedge T_n}, \mathscr{F}_{S_n \wedge T_n} \mid \ n \geq N \}$ は後退劣マルチンゲールとなる．かつ

$$\lim_{n \to \infty} EX_{T_n} \geq EX_0, \quad \lim_{n \to \infty} EX_{S_n \wedge T_n} \geq EX_0$$

が満たされているから，Problem 3.11 より $(X_{T_n})_{n \geq N}, (X_{S_n \wedge T_n})_{n \geq N}$ は一様可積分である．また $\{X_t\}$ の右連続性より

$$X_{T_n}(\omega) \longrightarrow X_T(\omega), \quad X_{S_n \wedge T_n}(\omega) \longrightarrow X_{S \wedge T}(\omega), \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

が成り立つから，一様可積分性と平均収束の補題 (P. 561) より $X_T, X_{S \wedge T}$ の可積分性及び

$$E\,|X_T - X_{T_n}| \longrightarrow 0, \quad E\,|X_{S \wedge T} - X_{S_n \wedge T_n}| \longrightarrow 0, \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が従い

$$\int_A X_T\, dP \geq \int_A X_{S \wedge T}\, dP, \quad (\forall A \in \mathscr{F}_{S+})$$

が得られる．S が停止時刻の場合は $\mathscr{F}_{S+}$ を $\mathscr{F}_S$ に置き換えて成立する．∎

Problem 3.25

A submartingale of constant expectation, i.e., with $E(X_t) = E(X_0)$ for every $t \geq 0$, is a martingale.

証明.　任意の $0 \le s < t$ に対し，

$$E\left(X_t \mid \mathscr{F}_s\right) - X_s \ge 0, \quad \text{a.s. } P$$

かつ

$$E\left(E\left(X_t \mid \mathscr{F}_s\right) - X_s\right) = EX_t - EX_s = EX_0 - EX_0 = 0$$

より

$$E\left(X_t \mid \mathscr{F}_s\right) - X_s = 0, \quad \text{a.s. } P$$

が従う. ∎

Problem 3.26

A right-continuous process $\{X_t, \mathscr{F}_t \mid \ 0 \le t < \infty\}$ with $E|X_t| < \infty$; $0 \le t < \infty$ is a submartingale if and only if for every pair $S \le T$ of bounded stopping times of the filtration $\{\mathscr{F}_t\}$ we have

$$E(X_T) \ge E(X_S). \tag{1.18}$$

証明.　(⇒) は任意抽出定理より従う．(⇐) を示す．任意の $0 \le s < t$ 及び $A \in \mathscr{F}_s$ に対し，

$$T(\omega) := t, \quad S(\omega) := \begin{cases} s, & (\omega \in A), \\ t, & (\omega \in \Omega \backslash A) \end{cases}, \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

により $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻 $S \le T$ を定めれば，(1.18) より

$$\int_A X_t \, dP = \int_\Omega X_T \, dP - \int_{\Omega \backslash A} X_t \, dP \ge \int_\Omega X_S \, dP - \int_{\Omega \backslash A} X_t \, dP = \int_A X_s \, dP$$

が成り立ち，$A \in \mathscr{F}_s$ の任意性より $E\left(X_t \mid \mathscr{F}_s\right) \ge X_s$ a.s. P となる. ∎

Problem 3.27

Let T be a bounded stopping time of the filtration $\{\mathscr{F}_t\}$, which satisfies the usual conditions, and define $\tilde{\mathscr{F}}_t = \mathscr{F}_{T+t}$; $t \ge 0$. Then $\{\tilde{\mathscr{F}}_t\}$ also satisfies the usual conditions.

(i) If $X = \{X_t, \mathscr{F}_t \mid \ 0 \le t < \infty\}$ is a right-continuous submartingale, then so is $\tilde{X} = \left\{\tilde{X}_t := X_{T+t} - X_T, \tilde{\mathscr{F}}_t \mid \ 0 \le t < \infty\right\}$.

(ii) $\tilde{X} = \left\{\tilde{X}_t, \tilde{\mathscr{F}}_t \mid \ 0 \le t < \infty\right\}$ is a right-continuous submartingale, with $\tilde{X}_0 = 0$[*8], then $X = \left\{X_t := \tilde{X}_{(t-T)\vee 0}, \mathscr{F}_t \mid \ 0 \le t < \infty\right\}$ is also a submartingale.

証明.

[*8] $\tilde{X}_0 = 0$ a.s. P だと $X_t = \tilde{X}_{(t-T)\vee 0}$ が $(\mathscr{F}_t)$-適合となるかわからない.

第一段　$\{\tilde{\mathscr{F}}_t\}$ が通常の条件 (usual conditions) を満たすことを示す．実際，

$$\{\,N \in \mathscr{F} \mid \quad P(N) = 0\,\} \subset \mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}_{T+t}, \quad (\forall t \geq 0)$$

より $\{\tilde{\mathscr{F}}_t\}$ は完備であり，また任意の $t \geq 0$ に対して $T + t = \inf_{n\geq 1}(T + t + 1/n)$ より

$$\tilde{\mathscr{F}}_{t+} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{\mathscr{F}}_{t+\frac{1}{n}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{T+t+\frac{1}{n}} = \mathscr{F}_{(T+t)+}$$

となるが (Problem 2.23)，$\{\mathscr{F}_t\}$ の右連続性より

$$A \cap \{T + t \leq s\} \in \mathscr{F}_{s+},\ \forall s \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad A \cap \{T + t \leq s\} \in \mathscr{F}_s,\ \forall s \geq 0$$

が成立するから $\mathscr{F}_{(T+t)+} = \mathscr{F}_{T+t}$ が満たされ

$$\tilde{\mathscr{F}}_{t+} = \mathscr{F}_{T+t} = \tilde{\mathscr{F}}_t$$

を得る．

(i) の証明　X の右連続性より $\tilde{X}$ は右連続である．また任意抽出定理より X_{T+t} は $\mathscr{F}_{T+t}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測かつ可積分であり

$$E\left(\tilde{X}_t \,\middle|\, \tilde{\mathscr{F}}_s\right) = E\left(X_{T+t} - X_T \mid \mathscr{F}_{T+s}\right) \geq X_{T+s} - X_T = \tilde{X}_s, \quad \text{a.s. } P,\ (0 \leq s < t)$$

が成立するから，$\tilde{X}$ は右連続劣マルチンゲールである．

(ii) の証明　$S_1 \leq S_2$ を有界な $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻とするとき，$(S_j - T) \vee 0\ (j = 1, 2)$ は $(\tilde{\mathscr{F}}_t)$-停止時刻である．実際，

$$\{(S_j - T) \vee 0 \leq t\} \cap \{T + t \leq u\} = \{S_j \wedge u \leq (T + t) \wedge u\} \cap \{T + t \leq u\} \in \mathscr{F}_u, \quad (\forall u \geq 0)$$

より $\{(S_j - T) \vee 0 \leq t\} \in \mathscr{F}_{T+t} = \tilde{\mathscr{F}}_t\ (\forall t \geq 0)$ が成立する．$[0, \infty) \ni t \longmapsto \tilde{X}_{(t-T)\vee 0}(\omega)$ は右連続であり，また $\tilde{X}_{t-T}$ が $\tilde{\mathscr{F}}_{t-T} = \mathscr{F}_t$-可測かつ可積分であるから

$$X_t = \tilde{X}_{(t-T)\vee 0} = \tilde{X}_{t-T}\mathbb{1}_{\{T\leq t\}}$$

は $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測かつ可積分である．従って X は右連続可積分適合過程であり，Problem 3.26 より

$$EX_{S_1} = E\tilde{X}_{(S_1-T)\vee 0} \leq E\tilde{X}_{(S_2-T)\vee 0} = EX_{S_2}$$

が成り立つから，同じく Problem 3.26 より X の劣マルチンゲール性が出る． ∎

Problem 3.28

Let $Z = \{\,Z_t, \mathscr{F}_t \mid \quad 0 \leq t < \infty\,\}$ be a continuous, nonnegative martingale with $Z_\infty := \lim_{t\to\infty} Z_t = 0$, a.s. P. Then for every $s \geq 0,\ b > 0$:

(i) $\displaystyle P\left[\sup_{t>s} Z_t \geq b \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right] = \frac{1}{b}Z_s, \quad \text{a.s. on } \{Z_s < b\}.$

(ii) $\displaystyle P\left[\sup_{t\geq s} Z_t \geq b\right] = P[Z_s \geq b] + \frac{1}{b}E[Z_s \mathbb{1}_{\{Z_s<b\}}].$

証明.

第一段　$\inf\{\, t \in [s,\infty) \mid \quad Z_t(\omega) = b\,\} = \inf\{\, t \in [0,\infty) \mid \quad Z_{t+s}(\omega) = b\,\} + s$ と Problem 2.7 より

$$T(\omega) := \inf\{\, t \in [s,\infty) \mid \quad Z_t(\omega) = b\,\}, \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

により $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻が定まる．このとき

$$Z_T(\omega) = b, \quad (\forall \omega \in \{T < \infty\} \cap \{Z_s < b\}) \tag{1.19}$$

と

$$T(\omega) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sup_{t>s} Z_t(\omega) \geq b, \quad (\text{a.s.}\omega \in \{Z_s < b\}) \tag{1.20}$$

が成立する．実際，$\omega \in \{T < \infty\} \cap \{Z_s < b\}$ に対し，$Z_T(\omega) < b$ なら

$$\sup_{s \leq t \leq T(\omega)} Z_t(\omega) < b$$

となり，$t \longmapsto Z_t(\omega)$ の連続性より $T(\omega) < T(\omega)$ が従い矛盾が生じる．逆に $Z_T(\omega) > b$ なら中間値の定理より

$$Z_t(\omega) = b, \quad s < \exists t < T(\omega)$$

となるから，$T(\omega) \leq t < T(\omega)$ という矛盾が生じ，(1.19) が出る．これにより，$\omega \in \{Z_s < b\}$ に対し

$$T(\omega) < \infty \quad \Rightarrow \quad b = Z_T(\omega) \leq \sup_{t>s} Z_t(\omega)$$

が成立する．一方で a.s.$\omega \in \{Z_s < b\}$ で $Z_t(\omega) \longrightarrow 0$ となるから，$0 < \epsilon < b$ に対し或る t_0 が存在して

$$Z_t(\omega) < \epsilon, \quad (\forall t > t_0)$$

が満たされる．この場合

$$\sup_{t>s} Z_t(\omega) \geq b \quad \Rightarrow \quad \sup_{t \in [s,t_0]} Z_t(\omega) \geq b$$

となるから，連続性より $Z_t(\omega) = b$ を満たす $t \in (s, t_0)$ が存在し，$T(\omega) \leq t$ が従い (1.20) が得られる．

第二段　(i) を示す．任意の $A \in \mathscr{F}_s$ と $n > s$ に対し，任意抽出定理と (1.19) より

$$\begin{aligned}
\int_{A \cap \{Z_s < b\}} Z_s \, dP &= \int_{A \cap \{Z_s < b\}} Z_{T \wedge n} \, dP \\
&= \int_{A \cap \{Z_s < b\}} Z_T \mathbb{1}_{\{T \leq n\}} \, dP + \int_{A \cap \{Z_s < b\}} Z_n \mathbb{1}_{\{T > n\}} \, dP \\
&= bP\left[A \cap \{Z_s < b\} \cap \{T \leq n\}\right] + \int_{A \cap \{Z_s < b\}} Z_n \mathbb{1}_{\{T > n\}} \, dP
\end{aligned}$$

が成立する．ここで

$$P\left[A \cap \{Z_s < b\} \cap \{T \leq n\}\right] \longrightarrow P\left[A \cap \{Z_s < b\} \cap \{T < \infty\}\right], \quad (n \longrightarrow \infty)$$

かつ $Z_n \mathbb{1}_{\{T>n\} \cap \{Z_s < b\}} < b$, $(\forall n > s)$ 及び

$$Z_n \mathbb{1}_{\{T>n\}} \longrightarrow Z_\infty \mathbb{1}_{\{T=\infty\}}, \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成り立つから，$Z_\infty = 0$ a.s. P と Lebesgue の収束定理より

$$\int_{A \cap \{Z_s < b\}} Z_s \, dP = bP\left[A \cap \{Z_s < b\} \cap \{T < \infty\}\right] = b \int_{A \cap \{Z_s < b\}} \mathbb{1}_{\{T < \infty\}} \, dP$$

が得られる．更に (1.20) より

$$\int_{A\cap\{Z_s<b\}} Z_s \, dP = b \int_{A\cap\{Z_s<b\}} \mathbb{1}_{\{\sup_{t>s} Z_t(\omega)\geq b\}} \, dP = b \int_{A\cap\{Z_s<b\}} P\left[\sup_{t>s} Z_t \geq b \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right] dP$$

となるから，$A \in \mathscr{F}_s$ の任意性より

$$P\left[\sup_{t>s} Z_t \geq b \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right] \mathbb{1}_{\{Z_s<b\}} = \frac{1}{b} Z_s \mathbb{1}_{\{Z_s<b\}}, \quad \text{a.s. } P$$

が出る．

第三段　(iii) を示す．$t \longmapsto Z_t(\omega)$ の連続性より

$$\sup_{t>s} Z_t(\omega) \geq b \quad \Leftrightarrow \quad \sup_{t\geq s} Z_t(\omega) \geq b, \quad (\forall \omega \in \{Z_s < b\})$$

となるから

$$\begin{aligned}
P\left[\sup_{t\geq s} Z_t \geq b\right] &= P\left[\left\{\sup_{t\geq s} Z_t \geq b\right\} \cap \{Z_s \geq b\}\right] + P\left[\left\{\sup_{t\geq s} Z_t \geq b\right\} \cap \{Z_s < b\}\right] \\
&= P\left[Z_s \geq b\right] + P\left[\left\{\sup_{t>s} Z_t \geq b\right\} \cap \{Z_s < b\}\right] \\
&= P[Z_s \geq b] + \frac{1}{b} E[Z_s \mathbb{1}_{\{Z_s<b\}}]
\end{aligned}$$

が成立する． ∎

Problem 3.29 修正

Let $\{X_t, \mathscr{F}_t \mid 0 \leq t < \infty\}$ be a continuous, nonnegative supermartingale and $T = \inf\{t \in [0,\tau] \mid X_t = 0\}$ $(\inf \emptyset = \tau)$ for some $\tau > 0$. Show that

$$X_{T+t} = 0; \quad 0 \leq t < \infty \quad \text{hold a.s. } \{T < \tau\}.$$

証明．　(1.19) より

$$X_T(\omega) = 0, \quad (\forall \omega \in \{T < \tau\})$$

が満たされ，かつ $\{T < \tau\} \in \mathscr{F}_T$ であるから，任意抽出定理より

$$0 \leq E\left(X_{T+t}\mathbb{1}_{\{T<\tau\}}\right) \leq E\left(X_T \mathbb{1}_{\{T<\tau\}}\right) = 0, \quad 0 \leq t < \infty$$

が成立し

$$X_{T+t}\mathbb{1}_{\{T<\tau\}} = 0, \quad \text{a.s. } P, \quad 0 \leq t < \infty$$

となる．パスの連続性より

$$\left\{X_{T+t}\mathbb{1}_{\{T<\tau\}} = 0,\ 0 \leq t < \infty\right\} = \bigcap_{r\in\mathbf{Q}\cap[0,\tau)} \left\{X_{T+r}\mathbb{1}_{\{T<\tau\}} = 0\right\}$$

が成り立ち主張が従う． ∎

Exercise 3.30

Suppose that the filtration $\{\mathscr{F}_t\}$ satisfies the usual conditions and let $X^{(n)} = \left\{ X_t^{(n)}, \mathscr{F}_t \mid \quad 0 \leq t < \infty \right\}$, $n \geq 1$ be an increasing sequence of right-continuous supermartingales, such that the random variable $\xi_t := \lim_{n\to\infty} X_t^{(n)}$ is nonnegative and integrable for every $0 \leq t < \infty$. Then there exists an RCLL supermartingale $X = \{ X_t, \mathscr{F}_t \mid \quad 0 \leq t < \infty \}$ which is a modification of the process $\xi = \{ \xi_t, \mathscr{F}_t \mid \quad 0 \leq t < \infty \}$.

1.4 The Doob-Meyer Decomposition

martingale transform

If $A = \{ A_n, \mathscr{F}_n \mid \quad n = 0, 1, \cdots \}$ is predictable with $E|A_n| < \infty$ for every n, and if $\{ M_n, \mathscr{F}_n \mid \quad n = 0, 1, \cdots \}$ is bounded martingale, then the martingale transform of A by M defined by

$$Y_0 = 0 \quad \text{and} \quad Y_n = \sum_{k=1}^{n} A_k(M_k - M_{k-1}); \quad n \geq 1,$$

is itself a martingale.

証明．$A_k(M_k - M_{k-1})$ $(k \leq n)$ は $\mathscr{F}_n/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測であるから $(Y_n)_{n=1}^{\infty}$ は $(\mathscr{F}_n)$-適合である．また

$$E|Y_n| = E\left|\sum_{k=1}^{n} A_k(M_k - M_{k-1})\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \left\{ \operatorname*{ess.sup}_{\omega\in\Omega} \left(|M_k(\omega)| + |M_{k-1}(\omega)|\right) \right\} E|A_k| < \infty$$

が成り立つ．更に任意の $n \geq 0$ に対し

$$E\left(Y_{n+1} - Y_n \mid \mathscr{F}_n\right) = E\left(A_{n+1}(M_{n+1} - M_n) \mid \mathscr{F}_n\right) = A_{n+1} E\left(M_{n+1} - M_n \mid \mathscr{F}_n\right) = 0, \quad \text{a.s. } P$$

が満たされる．∎

Doob's decomposition

Any submartingale $\{ X_n, \mathscr{F}_n \mid \quad n = 0, 1, \cdots \}$ admits the unique decomposition $X_n = M_n + A_n$ as the summation of a martingale $\{M_n, \mathscr{F}_n\}$ and an predictable and increasing sequence $\{A_n, \mathscr{F}_n\}$, where

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} E\left(X_{k+1} - X_k \mid \mathscr{F}_k\right), \quad \text{a.s. } P, \ n \geq 1.$$

証明．

第一段　Doob 分解が存在するとして，分解の一意性を示す．実際，分解が存在すれば

$$A_{n+1} - A_n = E\left(A_{n+1} - A_n \mid \mathscr{F}_n\right) = E\left(X_{n+1} - X_n \mid \mathscr{F}_n\right) - E\left(M_{n+1} - M_n \mid \mathscr{F}_n\right) = E\left(X_{n+1} - X_n \mid \mathscr{F}_n\right), \quad \text{a.s. } P$$

が成立し，A_n $(n \geq 1)$ は

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} E\left(X_{k+1} - X_k \,|\, \mathscr{F}_k\right), \quad \text{a.s. } P$$

を満たすことになり分解の一意性が出る．

第二段　分解可能性を示す．

$$A_0 := 0, \quad A_n := \sum_{k=0}^{n-1} E\left(X_{k+1} - X_k \,|\, \mathscr{F}_k\right), \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

と定めれば (A_n) は可予測かつ可積分であり，

$$A_{n+1} - A_n = E\left(X_{k+1} - X_k \,|\, \mathscr{F}_k\right) \geq 0, \quad \text{a.s. } P \ (\forall n \geq 1)$$

より増大過程である．また $M_n := X_n - A_n$ により $(\mathscr{F}_n)$-適合かつ可積分な過程を定めれば，

$$\begin{aligned} E\left(M_{n+1} - M_n \,|\, \mathscr{F}_n\right) &= E\left((X_{n+1} - X_n) - (A_{n+1} - A_n) \,|\, \mathscr{F}_n\right) \\ &= E\left(X_{n+1} - X_n \,|\, \mathscr{F}_n\right) - E\left(E\left(X_{n+1} - X_n \,|\, \mathscr{F}_n\right) \,|\, \mathscr{F}_n\right) = 0, \quad \text{a.s. } P \end{aligned}$$

が成り立つから $\{M_n, \mathscr{F}_n\}$ はマルチンゲールである． ■

Proposition 4.3 修正

An increasing random sequence A has a predictable modification if and only if it is natural.

証明． A が可予測な修正 $\tilde{A}$ を持つとき，任意の有界マルチンゲール M に対して

$$\tilde{Y}_0 := 0, \quad \tilde{Y}_n := \sum_{k=1}^{n} \tilde{A}_k (M_k - M_{k-1}); \quad n \geq 1$$

は $(\mathscr{F}_n)$-マルチンゲールとなる．このとき $M_n \tilde{A}_n$ と $\sum_{k=1}^{n} M_{k-1}(\tilde{A}_k - \tilde{A}_{k-1})$ は可積分であり

$$0 = E\tilde{Y}_n = E\left[M_n \tilde{A}_n - \sum_{k=1}^{n} M_{k-1}(\tilde{A}_k - \tilde{A}_{k-1})\right] = E(M_n A_n) - E\sum_{k=1}^{n} M_{k-1}(A_k - A_{k-1}), \quad (\forall n \geq 1)$$

が成り立つから A はナチュラルである．逆に A がナチュラルであるとき，有界マルチンゲール M に対して

$$\begin{aligned} 0 &= E\left[M_n A_n - \sum_{k=1}^{n} M_{k-1}(A_k - A_{k-1})\right] \\ &= E\left[A_n (M_n - M_{n-1})\right] - E\left[M_{n-1} A_{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} M_{k-1}(A_k - A_{k-1})\right] \\ &= E\left[A_n (M_n - M_{n-1})\right], \quad (\forall n \geq 1) \end{aligned}$$

が成り立つ．一方で

$$\begin{aligned} E\left[M_{n-1}(A_n - E\left(A_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right))\right] &= E\left[E\left(M_{n-1}(A_n - E\left(A_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right)) \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right)\right] \\ &= E\left[M_{n-1} E\left(A_n - E\left(A_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right) \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right)\right] = 0, \quad (\forall n \geq 1) \end{aligned}$$

及び

$$
\begin{aligned}
E\left[E\left(A_n \mid \mathscr{F}_{n-1}\right)\left(M_n - M_{n-1}\right)\right] &= E\left[E\left(E\left(A_n \mid \mathscr{F}_{n-1}\right)\left(M_n - M_{n-1}\right) \mid \mathscr{F}_{n-1}\right)\right] \\
&= E\left[E\left(A_n \mid \mathscr{F}_{n-1}\right) E\left(M_n - M_{n-1} \mid \mathscr{F}_{n-1}\right)\right] = 0, \quad (\forall n \geq 1)
\end{aligned}
$$

となるから

$$
\begin{aligned}
E\left[M_n\left(A_n - E\left(A_n \mid \mathscr{F}_{n-1}\right)\right)\right] &= E\left[A_n\left(M_n - M_{n-1}\right)\right] \\
&\quad + E\left[M_{n-1}\left(A_n - E\left(A_n \mid \mathscr{F}_{n-1}\right)\right)\right] \\
&\quad - E\left[E\left(A_n \mid \mathscr{F}_{n-1}\right)\left(M_n - M_{n-1}\right)\right] \\
&= 0, \quad (\forall n \geq 1)
\end{aligned}
$$

が従う．ここで各 $n \geq 1$ に対し，$\mathscr{B}(\mathbf{R})/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測関数 $\mathrm{sgn} = 1\!\!1_{(0,\infty)} - 1\!\!1_{(-\infty,0)}$ を用いて

$$
M_k^{(n)} := \begin{cases} \mathrm{sgn}\left(A_n - E\left(A_n \mid \mathscr{F}_{n-1}\right)\right), & (k \geq n), \\ E\left(\mathrm{sgn}\left(A_n - E\left(A_n \mid \mathscr{F}_{n-1}\right)\right) \mid \mathscr{F}_k\right), & (0 \leq k < n) \end{cases}
$$

により有界マルチンゲール $M^{(n)} = \left\{ M_k^{(n)}, \mathscr{F}_k \mid \quad k = 0, 1, \cdots \right\}$ を定めれば，

$$
0 = E\left[M_n^{(n)}\left(A_n - E\left(A_n \mid \mathscr{F}_{n-1}\right)\right)\right] = E\left|A_n - E\left(A_n \mid \mathscr{F}_{n-1}\right)\right|, \quad (\forall n \geq 1)
$$

が得られ

$$
\tilde{A}_0 := 0, \quad \tilde{A}_n := E\left(A_n \mid \mathscr{F}_{n-1}\right); \quad n \geq 1
$$

は A の可予測な修正となる． ■

区別不能性によるパスの同値類

区間[*9] $I \subset [0, \infty)$ の上で右連続な確率過程の全体を $RCSP(I)$ と書く．また $RCSP([0, \infty))$ は $RCSP$ と書く．任意の $M = \{ M_t \mid \quad t \in I \}, N = \{ N_t \mid \quad t \in I \} \in RCSP(I)$ に対し，

$$
\{M_t = N_t, \ \forall t \in I\} = \begin{cases} \displaystyle\bigcap_{r \in (I \cap \mathbf{Q}) \cup \{\sup I\}} \{M_r = N_r\}, & (\sup I \in I), \\ \displaystyle\bigcap_{r \in I \cap \mathbf{Q}} \{M_r = N_r\}, & (\sup I \notin I) \end{cases}
$$

となるから $\{M_t = N_t, \ \forall t \in I\}$ は可測であり，このとき，

$$
M \sim N \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad P(M_t = N_t, \ \forall t \in I) = 1 \tag{1.21}
$$

により同値関係 $\sim$ が定まる．

---

*9 この場合区間は $[a, b], (a, b), [a, b), (a, b], [a, \infty), (a, \infty)$, $(0 \leq a < b < \infty)$ のいずれかと考える．

Definition 4.4 修正

Let $I \subset [0,\infty)$ be an interval. An adapted process $A = \{A_t, \mathscr{F}_t \mid \quad t \in I\}$ is called increasing if for all $\omega \in \Omega$ we have

(a) $A_0(\omega) = 0$

(b) $t \longmapsto A_t(\omega)$ is nondecreasing, right-continuous function,

and $E(A_t) < \infty$ holds for every $t \in I$. An increasing process is called integrable if $E(A_\infty) < \infty$, where $A_\infty = \lim_{t \to \sup I} A_t$. Since A is nondecreasing, $A_\infty = A_{(\sup I)-}$ if $\sup I \in I$.

Definition 4.5 修正

Let $I \subset [0,\infty)$ be an interval and $\alpha := \inf I$. An increasing processs $A = \{A_t, \mathscr{F}_t \mid \quad t \in I\}$ is called natural if for every bounded, $RCLL$ martingale $\{M_t, \mathscr{F}_t \mid \quad t \in I\}$ we have

$$E \int_{(\alpha,t]} M_s\, dA_s = E \int_{(\alpha,t]} M_{s-}\, dA_s, \quad \text{for every } t \in (\alpha,\infty) \cap I.$$

Let us denote the subset of $RCSP(I)$ as

$$NAT(I) := \{A \in RCSP(I) \mid \quad \text{natural}\}, \quad NAT := NAT([0,\infty))$$

and the equivalent class of $A \in NAT$ in the meaning of (1.21) as $[A]_{NAT}$ ($\subset NAT$).

プロセスが $RCLL$ とは全てのパスが $RCLL$ であるということである．Theorem 3.8 によれば右連続な劣マルチンゲールは a.e. のパスが $RCLL$ であるから，(1.21) の意味で同値である．A も全てのパスが右連続かつ単調非減少であるから，全ての $\omega \in \Omega$ に対し $\int_{(0,t]} M_s(\omega)\, dA_s(\omega)$ と $\int_{(0,t]} M_{s-}(\omega)\, dA_s(\omega)$ が定義される．たぶん余計な煩雑さを回避できる．

$RCLL$ なパスの不連続点は高々可算個

(S,d) を距離空間とする．写像 $f : [0,\infty) \longrightarrow S$ について各点 $t \in [0,\infty)$ で右連続かつ各点 $t \in (0,\infty)$ で左極限が存在するとき，f の不連続点は存在しても高々可算個である．

証明． 各点 $t > 0$ における f の左極限を $f(t-)$ と書けば

$$f \text{ が } t \in (0,\infty) \text{ で不連続} \quad \Leftrightarrow \quad d(f(t), f(t-)) > 0$$

が成立するから，任意に $T > 0$ を選び固定して

$$D(n) := \left\{ t \in (0,T] \mid \quad \frac{1}{n+1} \leq d(f(t), f(t-)) < \frac{1}{n} \right\}, \quad E(n) := \left\{ t \in (0,T] \mid \quad n \leq d(f(t), f(t-)) < n+1 \right\}$$

とおけば

$$D_T := \left\{ t \in (0,T] \mid \quad f \text{ が } t \in (0,\infty) \text{ で不連続} \right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} D(n) \cup E(n)$$

となる．このとき $D(n), E(n)$ は全て有限集合である．実際，或る n に対し $D(n)$ が無限集合なら

$$\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D(n), \quad t_k \neq t_j \ (k \neq j)$$

を満たす可算集合が存在し，$[0,T]$ のコンパクト性より或る部分列 $(t_{k_m})_{m=1}^{\infty}$ は或る $y \in [0,T]$ に収束する．$y=0$ の場合，右連続の仮定より $1/2(n+1) > \epsilon > 0$ に対し或る $\delta > 0$ が存在して

$$d(f(0), f(t)) < \epsilon, \quad (\forall 0 < t < \delta)$$

が成り立つが，一方で $0 < t_{k_m} < \delta$ を満たす t_{k_m} が存在して

$$\frac{1}{n+1} - \epsilon < d(f(t_{k_m}), f(t_{k_m}-)) - d(f(0), f(t_{k_m}-)) \leq d(f(0), f(t_{k_m})) < \epsilon$$

となり矛盾が生じる．$y > 0$ の場合も，$1/2(n+1) > \epsilon > 0$ に対し或る $\delta > 0$ が存在して

$$d(f(y-), f(t)) < \epsilon, \quad (\forall t \in (y-\delta, y))$$

となるが，f が y で右連続であるから (或は $y = T$ のとき) $y - \delta < t_{k_m} \leq y$ を満たす t_{k_m} が存在して

$$\frac{1}{n+1} - \epsilon < d(f(t_{k_m}-), f(t_{k_m})) - d(f(t_{k_m}-), f(y-)) \leq d(f(y-), f(t_{k_m})) < \epsilon$$

が従い矛盾が生じる．よって任意の $n \geq 1$ に対して $D(n)$ は有限集合であり，同様に $E(n)$ も有限集合であるから D_T は高々可算集合である．f の不連続点の全体は $\bigcup_{T=1}^{\infty} D_T$ に一致するから高々可算個である． ∎

Remarks 4.6 (i) 修正

If A is an increasing and X a measurable process, then with $\omega \in \Omega$ fixed, the sample path $\{\, X_t(\omega) \mid \quad 0 \leq t < \infty \,\}$ is a measurable function from $[0,\infty)$ into $\mathbf{R}$. It follows that the Lebesgue-Stieltjes integrals

$$I_t^{\pm}(\omega) := \int_{(0,t]} X_s^{\pm}(\omega)\, dA_s(\omega)$$

are well defined. If X is bounded, right-continuous and adapted to the filtration $(\mathscr{F}_t)$, then I is finite, right-continuous and $(\mathscr{F}_t)$-progressively measurable.

証明． X が $\mathscr{B}([0,\infty)) \otimes \mathscr{F} / \mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測なら，補題 G.4.1 (P. 474) より $[0,\infty) \ni t \longmapsto X_t(\omega)$ は $\mathscr{B}([0,\infty))/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測である．また全ての $\omega \in \Omega$ に対し $t \longmapsto A_t(\omega)$ は右連続非減少であるから

$$\mu_\omega((a,b]) = A_b(\omega) - A_a(\omega), \quad (\forall (a,b] \subset [0,\infty)), \quad \mu_\omega(\{0\}) = 0$$

を満たす $([0,\infty), \mathscr{B}([0,\infty)))$ 上の σ-有限測度が唯一つ存在して

$$I_t^{\pm}(\omega) = \int_{(0,t]} X_s^{\pm}(\omega)\, dA_s(\omega) := \int_{(0,t]} X_s^{\pm}(\omega)\, \mu_\omega(ds), \quad (0 < t < \infty)$$

及び $I_t := I_t^+ - I_t^-$ が定義される．特に $\sup_{s \in (0,t]} |X_s^{\pm}| \leq B < \infty$ なら

$$\left| I_t^{\pm} \right| \leq B A_t$$

となるから $I_t^{\pm}$ は有限確定する．X が有界かつ右連続 $(\mathscr{F}_t)$-適合であるとき，$t > 0$ を固定し $t_j^{(n)} := tj/2^n$ として

$$X_s^{(n)\pm} := X_0 \mathbb{1}_{\{0\}}(s) + \sum_{j=0}^{2^n-1} X_{t_{j+1}^{(n)}} \mathbb{1}_{\left(t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)}\right]}(s)$$

とおけば右連続性より $X_s^{(n)\pm} \longrightarrow X_s^{\pm}$, $(\forall s \in [0,t])$ が成立し，かつ

$$I_t^{(n)\pm} := \int_{(0,t]} X_s^{(n)\pm}\, dA_s = \sum_{j=0}^{2^n-1} X_{t_{j+1}^{(n)}} \left(A_{t_j^{(n)}} - A_{t_{j+1}^{(n)}} \right)$$

となり $I_t^{(n)\pm}$ の $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測性が得られる．$X$ が有界であるから Lebesgue の収束定理より

$$I_t^{\pm} = \lim_{n\to\infty} \int_{(0,t]} X_s^{(n)\pm}\, dA_s = \lim_{n\to\infty} I_t^{(n)\pm}$$

が成り立ち，定理 G.2.11 より $I_t^{\pm}$ の $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測性が従う．また $t < T$ 及び $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (t,T]$, $t_n \downarrow t$ に対して，Lebesgue の収束定理より

$$\lim_{n\to\infty} I_{t_n}^{\pm} = \lim_{n\to\infty} \int_{(0,T]} \mathbb{1}_{(0,t_n]}(s) X_s^{\pm}\, dA_s = \int_{(0,T]} \mathbb{1}_{(0,t]}(s) X_s^{\pm}\, dA_s = I_t^{\pm}$$

が成立し $t \longmapsto I_t(\omega)$ の右連続性が出る．I は右連続 $(\mathscr{F}_t)$-適合過程であるから $(\mathscr{F}_t)$-発展的可測である．∎

Remark 4.6 (ii) 修正

Every continuous, increasing process is natural. Indeed then, for every $\omega \in \Omega$ we have

$$\int_{(0,t]} (M_s(\omega) - M_{s-}(\omega))\, dA_s(\omega) = 0 \quad \text{for every } 0 < t < \infty,$$

because every path $\{ M_s(\omega) \mid 0 \le s < \infty \}$ has only countably many discontinuities (Theorem 3.8(v)).

証明． $RCLL$ なパスの不連続点は高々可算個であり，連続な A で作る測度に対し一点集合は零集合となる．∎

Lemma 4.7 修正

If A is an increasing process and $\{ M_t, \mathscr{F}_t \mid 0 \le t < \infty \}$ is a bounded, $RCLL$ martingale, then

$$E(M_t A_t) = E \int_{(0,t]} M_s\, dA_s, \quad (\forall t > 0). \tag{1.22}$$

証明． $t_j^{(n)} := jt/2^n$, $(j = 0, 1, \cdots, 2^n)$ として

$$M_s^{(n)} := \sum_{j=1}^{2^n} \mathbb{1}_{\left(t_{j-1}^{(n)}, t_j^{(n)}\right]}(s) M_{t_j^{(n)}}, \quad (\forall s \in (0,t])$$

とおけば，M のパスの右連続性より任意の $s \in (0,t]$ で $\lim_{n\to\infty} M_s^{(n)} = M_s$ となる．また

$$E\left[A_{t_{j-1}^{(n)}} \left(M_{t_j^{(n)}} - M_{t_{j-1}^{(n)}} \right) \right] = E\left[A_{t_{j-1}^{(n)}} E\left(M_{t_j^{(n)}} - M_{t_{j-1}^{(n)}} \,\middle|\, \mathscr{F}_{t_{j-1}} \right) \right] = 0, \quad (j = 1, \cdots, 2^n)$$

が満たされるから任意の $n \geq 1$ で

$$E\int_{(0,t]} M_s^{(n)}\, dA_s = E\sum_{j=1}^{2^n} M_{t_j^{(n)}}\left(A_{t_j^{(n)}} - A_{t_{j-1}^{(n)}}\right)$$
$$= E(M_t A_t) - \sum_{j=1}^{2^n} E\left[A_{t_{j-1}^{(n)}}\left(M_{t_j^{(n)}} - M_{t_{j-1}^{(n)}}\right)\right]$$
$$= E(M_t A_t)$$

が成立する．仮定より $\sup_{s\geq 0}|M_s| \leq b < \infty$ を満たす b が存在して

$$\left|\int_{(0,t]} M_s^{(n)}\, dA_s\right| \leq b(A_t - A_0) = bA_t, \quad (\forall n \geq 1)$$

となり，A_t の可積分性と Lebesgue の収束定理より

$$\lim_{n\to\infty} E\int_{(0,t]} M_s^{(n)}\, dA_s = E\lim_{n\to\infty}\int_{(0,t]} M_s^{(n)}\, dA_s = E\int_{(0,t]} M_s\, dA_s$$

が従い (1.22) を得る． ∎

Definition 4.8 修正

Let us consider the class $\mathscr{S}(\mathscr{S}_a)$ such as

$$\mathscr{S} := \left\{T : \text{stopping time of } (\mathscr{F}_t) \mid \quad T < \infty\right\}, \quad \mathscr{S}_a := \left\{T : \text{stopping time of } (\mathscr{F}_t) \mid \quad T \leq a\right\}, \ (a > 0).$$

The right-continuous process $\{X_t, \mathscr{F}_t \mid \quad 0 \leq t < \infty\}$ is said to be of class D, if the family $\{X_T\}_{T\in\mathscr{S}}$ is uniformly integrable; of class DL, if the family $\{X_T\}_{T\in\mathscr{S}_a}$ is uniformly integrable, for every $0 < a < \infty$.

$T \in \mathscr{S}$(resp. $\mathscr{S}_a$), then $T(\omega) < \infty$ (resp. $\leq a$) for all $\omega \in \Omega$, not P-a.s. ω.

Problem 4.9 修正

$X = \{X_t, \mathscr{F}_t \mid \quad 0 \leq t < \infty\}$ is a right-continuous submartingale. Show that under any one of the following conditions, X is of class DL.

(a) $X_t \geq 0$ a.s. for every $t \geq 0$.

(b) X has the special form

$$X_t = M_t + A_t, \quad 0 \leq t < \infty$$

suggested by the Doob-Meyer decomposition, where $\{M_t, \mathscr{F}_t \mid \quad 0 \leq t < \infty\}$ is a martingale and $\{A_t, \mathscr{F}_t \mid \quad 0 \leq t < \infty\}$ is an increasing process.

Show also that if $\mathscr{F}_0$ contains all the P-negligible events in $\mathscr{F}$ and X is a uniformly integrable martingale, then it is of class D.

証明.

(a)　任意の $T \in \mathscr{S}_a$ に対して X_T は $\mathscr{F}_T/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測であるから (Proposition 2.18 修正)，任意抽出定理より

$$\int_{\{X_T > \lambda\}} X_T \, dP \leq \int_{\{X_T > \lambda\}} X_a \, dP, \quad (\forall \lambda > 0)$$

及び

$$P(X_T > \lambda) \leq \frac{EX_T}{\lambda} \leq \frac{EX_a}{\lambda}, \quad (\forall \lambda > 0)$$

が成立する．X_a が可積分であるから

$$\sup_{T \in \mathscr{S}_a} \int_{\{X_T > \lambda\}} X_T \, dP \longrightarrow 0 \quad (\lambda \longrightarrow \infty)$$

となり，$(X_T)_{T \in \mathscr{S}_a}$ の一様可積分性が得られる．

(b)　$a > 0$ とすれば，任意抽出定理より

$$M_T = E(M_a \,|\, \mathscr{F}_T), \text{ a.s. } P, \quad (\forall T \in \mathscr{S}_a)$$

が成り立つから，定理 I.3.4 (P. 561) より $(M_T)_{T \in \mathscr{S}_a}$ は一様可積分である．このとき

$$\begin{aligned}
\int_{\{|X_T| > \lambda\}} |X_T| \, dP &\leq 2 \int_{\{|M_T| > \lambda/2\}} |M_T| \, dP + 2 \int_{\{|A_T| > \lambda/2\}} |A_T| \, dP \\
&\leq 2 \sup_{T \in \mathscr{S}_a} \int_{\{|M_T| > \lambda/2\}} |M_T| \, dP + 2 \int_{\{A_a > \lambda/2\}} A_a \, dP \\
&\longrightarrow 0 \quad (\lambda \longrightarrow \infty)
\end{aligned}$$

が従い $(X_T)_{T \in \mathscr{S}_a}$ の一様可積分性が出る．

X が一様可積分なマルチンゲールであるとき，Problem 3.20 より

$$X_t = E(X_\infty \,|\, \mathscr{F}_t), \text{ a.s. } P, \quad (\forall t \geq 0)$$

を満たす $\mathscr{F}_\infty/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測可積分関数 X_∞ が存在し，任意抽出定理より

$$X_T = E(X_\infty \,|\, \mathscr{F}_T), \text{ a.s. } P, \quad (\forall T \in \mathscr{S})$$

が成り立つから X はクラス DL に属する．　■

Problem 4.11 修正

Let $(X, \mathscr{F}, \mu)$ be a measure space and $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a sequence of integrable complex functions on $(X, \mathscr{F}, \mu)$ which converges weakly in L^1 to an integrable complex function f. Then for each σ-field $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ where $(X, \mathscr{G}, \mu|_{\mathscr{G}})$ is σ-finite, the sequence $E(f_n \,|\, \mathscr{G})$ converges to $E(f \,|\, \mathscr{G})$ weakly in L^1.

証明.　$\nu := \mu|_{\mathscr{G}}$ とおく．定理 I.1.4 より任意の $g \in L^\infty(\mu)$ と $F \in L^1(\mu)$ に対して

$$\begin{aligned}\int_X gE\left(F \mid \mathscr{G}\right)\,d\mu &= \int_X E\left(gE\left(F \mid \mathscr{G}\right) \middle| \mathscr{G}\right)\,d\nu \\ &= \int_X E\left(g \middle| \mathscr{G}\right) E\left(F \mid \mathscr{G}\right)\,d\nu \\ &= \int_X E\left(E\left(g \middle| \mathscr{G}\right) F \middle| \mathscr{G}\right)\,d\nu \\ &= \int_X E\left(g \middle| \mathscr{G}\right) F\,d\mu\end{aligned}$$

と $\left\| E\left(g \middle| \mathscr{G}\right)\right\|_{L^\infty(\nu)} \leq \left\| g \right\|_{L^\infty(\mu)}$ が成り立ち

$$\lim_{n\to\infty}\int_X gE\left(f_n \middle| \mathscr{G}\right)\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X E\left(g \middle| \mathscr{G}\right) f_n\,d\mu = \int_X E\left(g \middle| \mathscr{G}\right) f\,d\mu = \int_X gE\left(f \middle| \mathscr{G}\right)\,d\mu$$

となるから $E\left(f_n \middle| \mathscr{G}\right)$ は $E\left(f \middle| \mathscr{G}\right)$ に $L^1(\mu)$ で弱収束する． ∎

Lemma for theorem 4.10

Let $I \subset [0,\infty)$ be an interval and $\{ M_t, \mathscr{F}_t \mid \quad t \in I \}$ be a right-continuous martingale, where the filtration $(\mathscr{F}_t)_{t\in I}$ is usual. If M is a difference of two natural processes $\{ A_t, \mathscr{F}_t \mid \quad t \in I \}$ and $\{ B_t, \mathscr{F}_t \mid \quad t \in I \}$, namely

$$M_t = A_t - B_t; \quad \forall t \in I,$$

then $P\{ M_t = 0 \mid \quad \forall t \in I \} = 1$.

証明.　$a_0 := \inf I$ として任意に $a \in I \cap (a_0, \infty)$ を取り，

$$t_j^{(n)} := a_0 + \frac{j}{2^n}(a - a_0), \quad (j = 0, 1, \cdots, 2^n)$$

とおく．任意の有界かつ *RCLL* なマルチンゲール $\xi = \{ \xi_t, \mathscr{F}_t \mid \quad t \in I \}$ に対し

$$\xi_t^{(n)} := \sum_{j=1}^{2^n} \mathbb{1}_{\left(t_{j-1}^{(n)}, t_j^{(n)}\right]}(t)\,\xi_{t_{j-1}^{(n)}}, \quad (\forall t \in (a_0, a])$$

とおけば，任意の $\omega \in \Omega$ と $t \in (a_0, a]$ で

$$\lim_{n\to\infty} \xi_t^{(n)}(\omega) = \xi_{t-}(\omega)$$

が満たされるから Lebesgue の収束定理より

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{(a_0,a]} \xi_t^{(n)}(\omega)\,dA_t(\omega) &= \int_{(a_0,a]} \xi_{t-}(\omega)\,dA_t(\omega), \\ \lim_{n\to\infty}\int_{(a_0,a]} \xi_t^{(n)}(\omega)\,dB_t(\omega) &= \int_{(a_0,a]} \xi_{t-}(\omega)\,dB_t(\omega)\end{aligned}$$

が成立する．また A_a, B_a の可積性と ξ の有界性により，再び Lebesgue の収束定理を適用すれば

$$\begin{aligned}
E\left[\xi_a\left(A_a - B_a\right)\right] &= E\left[\xi_a A_a\right] - E\left[\xi_a B_a\right] = E\int_{(a_0,a]} \xi_{t-}\,dA_t - E\int_{(a_0,a]} \xi_{t-}\,dB_t \\
&= E\left[\lim_{n\to\infty}\int_{(a_0,a]} \xi_t^{(n)}\,dA_t\right] - E\left[\lim_{n\to\infty}\int_{(a_0,a]} \xi_t^{(n)}\,dB_t\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} E\left[\sum_{j=1}^{2^n} \xi_{t_{j-1}^{(n)}}\left(A_{t_j^{(n)}} - A_{t_{j-1}^{(n)}}\right)\right] - \lim_{n\to\infty} E\left[\sum_{j=1}^{2^n} \xi_{t_{j-1}^{(n)}}\left(B_{t_j^{(n)}} - B_{t_{j-1}^{(n)}}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} E\left[\sum_{j=1}^{2^n} \xi_{t_{j-1}^{(n)}}\left(M_{t_j^{(n)}} - M_{t_{j-1}^{(n)}}\right)\right]
\end{aligned}$$

が従い，このとき右辺は M のマルチンゲール性より

$$E\xi_{t_{j-1}^{(n)}}\left(M_{t_j^{(n)}} - M_{t_{j-1}^{(n)}}\right) = E\left[E\left(\xi_{t_{j-1}^{(n)}}\left(M_{t_j^{(n)}} - M_{t_{j-1}^{(n)}}\right)\middle|\mathscr{F}_{t_{j-1}^{(n)}}\right)\right] = E\left[\xi_{t_{j-1}^{(n)}} E\left(M_{t_j^{(n)}} - M_{t_{j-1}^{(n)}}\middle|\mathscr{F}_{t_{j-1}^{(n)}}\right)\right] = 0$$

となるから

$$E\left[\xi_a\left(A_a - B_a\right)\right] = 0$$

が得られる．ξ を有界マルチンゲール $\{\, E\left(\operatorname{sgn}\left(A_a - B_a\right) \mid \mathscr{F}_t\right), \mathscr{F}_t \mid \quad t \in I \,\}$ の $RCLL$ な修正とすれば (usual 条件より Theorem 3.13 を適用)

$$0 = E\left[\xi_a\left(A_a - B_a\right)\right] = E\left[\operatorname{sgn}\left(A_a - B_a\right)\left(A_a - B_a\right)\right] = E\left|A_a - B_a\right|$$

が成り立ち，$a > 0$ の任意性及び A, B のパスの右連続性より

$$P\left[\{\, A_t = B_t \mid \quad t \in I \,\}\right] = \begin{cases} P\left(\bigcap_{r\in(I\cap\mathbf{Q})\cup\{\sup I\}} \{A_r = B_r\}\right) = 1, & (\sup I \in I), \\ P\left(\bigcap_{r\in I\cap\mathbf{Q}} \{A_r = B_r\}\right) = 1, & (\sup I \notin I) \end{cases}$$

が出る．■

Theorem 4.10 (Doob-Meyer Decomposition) 修正

Let $\{\mathscr{F}_t\}$ satisfy the usual conditions. If the right-continuous submartingale $X = \{\, X_t, \mathscr{F}_t \mid \quad 0 \le t < \infty \,\}$ is of class DL, then there exists a unique $[A]_{NAT}$ where $X - A'$ is right-continuous martingale for every $A' \in [A]_{NAT}$. Further, if X is of class D, then M is a uniformly integrable martingale and A is integrable.

証明.

第一段　$[A]_{NAT}$ の一意性を示す．二つの右連続マルチンゲール M, M' とナチュラルな A, A' により

$$X_t = M_t + A_t = M'_t + A'_t, \quad \forall t \ge 0$$

と書けるとき，

$$B = \left\{ B_t := A_t - A'_t = M'_t - M_t, \mathscr{F}_t \mid \quad 0 \leq t < \infty \right\}$$

は Lemma の仮定を満たすマルチンゲールとなるから $[A]_{NAT} = [A']_{NAT}$ が従う．

第二段　任意の区間 $[0,a]$ 上で分解の存在を示せば $[0,\infty)$ での分解が得られる．実際任意の $n \geq 1$ に対し

$$X_t = M_t^n + A_t^n, \quad (t \in [0,n])$$

と分解されるなら，$m > n$ に対して

$$M_t^n + A_t^n = X_t = M_t^m + A_t^m, \quad (t \in [0,n])$$

となり，Lemma より或る P-零集合 $E_{n,m}$ が存在して，任意の $\omega \in \Omega \backslash E_{n,m}$ で

$$A_t^n(\omega) = A_t^m(\omega), \quad (\forall t \in [0,n])$$

が成立し，かつ $[0,n) \ni t \longmapsto A_t^n(\omega)$ が右連続非減少となる．ここで

$$E := \bigcup_{\substack{n,m \in \mathbf{N} \\ n<m}} E_{n,m}$$

により P-零集合を定めれば，任意の $\omega \in \Omega \backslash E$ 及び $t \geq 0$ に対して

$$A_t^n(\omega) = A_t^m(\omega), \quad (\forall m > n > t)$$

となり $\lim_{n\to\infty} A_t^n(\omega)$ が確定する．usual 条件より $E \in \mathscr{F}_0$ だから $A_t^n \mathbb{1}_{\Omega \backslash E}$ $(n > t)$ は $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測であり，

$$A_t := \lim_{n\to\infty} A_t^n \mathbb{1}_{\Omega \backslash E}, \quad (\forall t \geq 0)$$

で A_t を定めれば A_t は $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測となる．また任意の $n \geq 1$ で

$$A_t = A_t^n \mathbb{1}_{\Omega \backslash E}, \quad (\forall t \in [0,n))$$

が成り立つから A_t は可積分であり，$[0,\infty) \ni t \longmapsto A_t(\omega)$ は右連続かつ非減少である．$\{ \xi_t, \mathscr{F}_t \mid \quad 0 \leq t < \infty \}$ を有界 $RCLL$ マルチンゲールとすれば任意の $t > 0$ で

$$E\int_{(0,t]} \xi_s \, dA_s = E\int_{(0,t]} \xi_s \, dA_s^n = E\int_{(0,t]} \xi_{s-} \, dA_s^n = E\int_{(0,t]} \xi_{s-} \, dA_s, \quad (t < n)$$

が成立する．

$$M := X - A$$

とおけば $(M_t)_{t \geq 0}$ は $(\mathscr{F}_t)$-適合かつ可積分であり，任意の $0 \leq s < t$ 及び $t < n$ に対して

$$M_t = X_t - A_t^n \mathbb{1}_{\Omega \backslash E} = M_t^n, \quad M_s = X_s - A_s^n \mathbb{1}_{\Omega \backslash E} = M_s^n, \quad \text{a.s. } P$$

となるから $E(M_t \mid \mathscr{F}_s) = M_s$ a.s. P が満たされる．次段以降で $[0,a]$ 上で分解の存在を示す．

第三段　$\{ Z_t, \mathscr{F}_t \mid \quad 0 \leq t < \infty \}$ を $\{ E(X_a \mid \mathscr{F}_t), \mathscr{F}_t \mid \quad 0 \leq t < \infty \}$ の右連続な修正として (Theorem 3.13),

$$Y_t := X_t - Z_t, \quad (t \in [0,a])$$

により非正値の劣マルチンゲール $\{ Y_t, \mathscr{F}_t \mid \quad 0 \le t \le a \}$ を定め

$$\left\{ Y_{t_j^{(n)}}, \mathscr{F}_{t_j^{(n)}} \mid \quad t_j^{(n)} = \frac{j}{2^n} a,\ j = 0, 1, \cdots, 2^n \right\}, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

で離散化すれば，離散時の Doob 分解 (P. 40) より

$$A_0^{(n)} := 0, \quad A_{t_j^{(n)}}^{(n)} := \sum_{k=0}^{j-1} E\left(Y_{t_{k+1}^{(n)}} - Y_{t_k^{(n)}} \,\middle|\, \mathscr{F}_{t_k^{(n)}} \right);$$
$$M_{t_j^{(n)}}^{(n)} := Y_{t_j^{(n)}} - A_{t_j^{(n)}}^{(n)}$$

により可予測な増大過程 $A^{(n)}$ とマルチンゲール $M^{(n)}$ に分解され，$Y_a = 0$ a.s. P であるから

$$Y_{t_j^{(n)}} = A_{t_j^{(n)}}^{(n)} + M_{t_j^{(n)}}^{(n)} = A_{t_j^{(n)}}^{(n)} + E\left(M_a^{(n)} \,\middle|\, \mathscr{F}_{t_j^{(n)}} \right) = A_{t_j^{(n)}}^{(n)} - E\left(A_a^{(n)} \,\middle|\, \mathscr{F}_{t_j^{(n)}} \right), \quad \text{a.s. } P, \quad j = 0, 1, \cdots, 2^n$$

となる．

第四段　$(Y_T)_{T \in \mathscr{S}_a}$ が一様可積分であることを示す．先ず任意の $T \in \mathscr{S}_a$ に対し

$$Z_T = E(X_a \mid \mathscr{F}_T), \quad \text{a.s. } P \tag{1.23}$$

が成立する．実際，任意抽出定理より

$$\int_A Z_T \, dP = \int_A Z_a \, dP = \int_A X_a \, dP = \int_A E(X_a \mid \mathscr{F}_T) \, dP, \quad (\forall A \in \mathscr{F}_T)$$

が従い (1.23) が得られる．$(E(X_a \mid \mathscr{F}_T))_{T \in \mathscr{S}_a}$ は定理 I.3.4 より一様可積分であるから $(Z_T)_{T \in \mathscr{S}_a}$ も一様可積分であり，また X がクラス DL に属しているので $(Y_T)_{T \in \mathscr{S}_a}$ の一様可積分性が従う．

第五段　$\left(A_a^{(n)} \right)_{n=1}^{\infty}$ が一様可積分であることを示す．任意に $\lambda > 0$ を取り

$$T_\lambda^{(n)} := a \wedge \min \left\{ t_{j-1}^{(n)} \mid \quad A_{t_j^{(n)}}^{(n)} > \lambda \text{ for some } j,\ 1 \le j \le 2^n \right\}$$

とおけば，$A^{(n)}$ の可予測性より任意の $t \ge 0$ で

$$\left\{ T_\lambda^{(n)} \le t \right\} = \bigcup_{j : t_{j-1}^{(n)} \le t} \left\{ T_\lambda^{(n)} = t_{j-1}^{(n)} \right\} = \bigcup_{j : t_{j-1}^{(n)} \le t} \left[\bigcap_{k=1}^{j-1} \left\{ A_{t_k^{(n)}}^{(n)} \le \lambda \right\} \right] \cap \left\{ A_{t_j^{(n)}}^{(n)} > \lambda \right\} \in \mathscr{F}_t$$

が成り立つから $T_\lambda^{(n)} \in \mathscr{S}_a$ が満たされ，また

$$\mu < \lambda \quad \Longrightarrow \quad \left\{ T_\lambda^{(n)} < a \right\} \subset \left\{ T_\mu^{(n)} < a \right\} \tag{1.24}$$

及び

$$T_\lambda^{(n)}(\omega) < a \quad \Longrightarrow \quad A_{T_\lambda^{(n)}}^{(n)}(\omega) \le \lambda \tag{1.25}$$

も満たされる．

$$N := \bigcup_{k=1}^{2^n} \left\{ E\left(Y_{t_k^{(n)}} - Y_{t_{k-1}^{(n)}} \,\middle|\, \mathscr{F}_{t_{k-1}^{(n)}} \right) < 0 \right\}$$

により P-零集合を定めれば，$\Omega \backslash N$ の上で $A_0^{(n)} \leq A_{t_1^{(n)}}^{(n)} \leq \cdots \leq A_a^{(n)}$ となるから

$$\left\{T_\lambda^{(n)} < a\right\} \cap (\Omega \backslash N) = \left\{A_a^{(n)} > \lambda\right\} \cap (\Omega \backslash N) \tag{1.26}$$

が従う．任意に $\Lambda \in \mathscr{F}_{T_\lambda^{(n)}}$ を取れば，$\Lambda \cap \left\{T_\lambda^{(n)} = t_{j-1}^{(n)}\right\} \in \mathscr{F}_{t_{j-1}^{(n)}}$, $(j = 1, \cdots, 2^n)$ より

$$\begin{aligned}
\int_\Lambda Y_{T_\lambda^{(n)}}\, dP = \sum_{j=1}^{2^n} \int_{\Lambda \cap \left\{T_\lambda^{(n)} = t_{j-1}^{(n)}\right\}} Y_{t_{j-1}^{(n)}}\, dP &= \sum_{j=1}^{2^n} \int_{\Lambda \cap \left\{T_\lambda^{(n)} = t_{j-1}^{(n)}\right\}} A_{t_{j-1}^{(n)}}^{(n)} - E\left(A_a^{(n)} \,\middle|\, \mathscr{F}_{t_{j-1}^{(n)}}\right) dP \\
&= \sum_{j=1}^{2^n} \int_{\Lambda \cap \left\{T_\lambda^{(n)} = t_{j-1}^{(n)}\right\}} A_{T_\lambda^{(n)}}^{(n)} - A_a^{(n)}\, dP \\
&= \int_\Lambda A_{T_\lambda^{(n)}}^{(n)} - A_a^{(n)}\, dP
\end{aligned} \tag{1.27}$$

が成立するから，(1.25) と (1.26) と併せて

$$\int_{\left\{A_a^{(n)} > \lambda\right\}} A_a^{(n)}\, dP = \int_{\left\{T_\lambda^{(n)} < a\right\}} A_{T_\lambda^{(n)}}^{(n)}\, dP - \int_{\left\{T_\lambda^{(n)} < a\right\}} Y_{T_\lambda^{(n)}}\, dP \leq \lambda P\left(T_\lambda^{(n)} < a\right) - \int_{\left\{T_\lambda^{(n)} < a\right\}} Y_{T_\lambda^{(n)}}\, dP$$

となる．一方で (1.24)，(1.25)，(1.26)，(1.27) より

$$\begin{aligned}
\int_{\left\{T_{\lambda/2}^{(n)} < a\right\}} Y_{T_{\lambda/2}^{(n)}}\, dP &= \int_{\left\{T_{\lambda/2}^{(n)} < a\right\}} A_{T_{\lambda/2}^{(n)}}^{(n)} - A_a^{(n)}\, dP \\
&\leq \int_{\left\{T_\lambda^{(n)} < a\right\}} A_{T_{\lambda/2}^{(n)}}^{(n)} - A_a^{(n)}\, dP \\
&\leq -\frac{\lambda}{2} P\left(T_\lambda^{(n)} < a\right)
\end{aligned}$$

が成立するから

$$\int_{\left\{A_a^{(n)} > \lambda\right\}} A_a^{(n)}\, dP \leq -2 \int_{\left\{T_{\lambda/2}^{(n)} < a\right\}} Y_{T_{\lambda/2}^{(n)}}\, dP - \int_{\left\{T_\lambda^{(n)} < a\right\}} Y_{T_\lambda^{(n)}}\, dP$$

となる．ここで

$$P\left(T_\lambda^{(n)} < a\right) = P\left(A_a^{(n)} > \lambda\right) \leq \frac{EA_a^{(n)}}{\lambda} = \frac{-EM_a^{(n)}}{\lambda} = \frac{-EM_0^{(n)}}{\lambda} = \frac{-EY_0}{\lambda}$$

より $P\left(T_\lambda^{(n)} < a\right)$ は λ のみに依存して 0 に収束し，定理 I.3.2 と $(Y_T)_{T \in \mathscr{S}_a}$ の一様可積分性により

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \int_{\left\{A_a^{(n)} > \lambda\right\}} A_a^{(n)}\, dP \leq 2 \sup_{n \in \mathbf{N}} \int_{\left\{T_{\lambda/2}^{(n)} < a\right\}} \left|Y_{T_{\lambda/2}^{(n)}}\right| dP + \sup_{n \in \mathbf{N}} \int_{\left\{T_\lambda^{(n)} < a\right\}} \left|Y_{T_\lambda^{(n)}}\right| dP \longrightarrow 0 \quad (\lambda \longrightarrow \infty)$$

が従い $\left(A_a^{(n)}\right)_{n=1}^\infty$ が一様可積分性が出る．

第六段　Dunford-Pettis の定理 (P. 562) より $\left(A_a^{(n)}\right)_{n=1}^\infty$ の或る部分列 $\left(A_a^{(n_k)}\right)_{k=1}^\infty$ は $L^1(P)$ で弱収束する．つまり或る $A_a \in L^1(P)$ が存在して任意の $\xi \in L^\infty(P)$ に対し

$$E\left(\xi A_a^{(n_k)}\right) \longrightarrow E(\xi A_a) \quad (k \longrightarrow \infty)$$

が成立する．

$$\Pi_n := \left\{ t_j^{(n)} \mid \quad t_j^{(n)} = \frac{j}{2^n} a,\ j = 0, 1, \cdots, 2^n \right\}, \quad \Pi := \bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi_n$$

とすれば，任意の $t \in \Pi$ に対し或る $K \geq 1$ が存在して $t \in \Pi_{n_k}$ $(\forall k > K)$ となり，Problem 4.11 より

$$E\left(\xi A_t^{(n_k)}\right) = E\xi \left\{ Y_t + E\left(A_a^{(n_k)} \middle| \mathscr{F}_t \right) \right\} \longrightarrow E\xi \left\{ Y_t + E\left(A_a \mid \mathscr{F}_t \right) \right\} \quad (k > K,\ k \longrightarrow \infty) \tag{1.28}$$

が成り立つから $A_t^{(n_k)}$ は $Y_t + E\left(A_a \mid \mathscr{F}_t\right)$ に弱収束する．ここで

$$\tilde{A}_t := Y_t + E\left(A_a \mid \mathscr{F}_t\right), \quad (t \in [0, a])$$

と定めれば $\left\{ \tilde{A}_t, \mathscr{F}_t \mid \quad 0 \leq t \leq a \right\}$ は劣マルチンゲールとなり，$\left\{ X_t, \mathscr{F}_t \mid \quad 0 \leq t < \infty \right\}$ の右連続性より

$$[0, a] \ni t \longmapsto E\left[Y_t + E\left(A_a \mid \mathscr{F}_t\right) \right] = EX_t - EX_a + EA_a$$

は右連続であるから (Theorem 3.13)，$\tilde{A}$ の右連続な修正 $\left\{ A_t, \mathscr{F}_t \mid \quad 0 \leq t \leq a \right\}$ が得られる．

第七段　$t \longmapsto A_t(\omega)$ が a.s. に 0 出発かつ非減少であることを示す．実際，$\xi = \operatorname{sgn}(A_0)$ として，(1.28) より

$$E|A_0| = E\xi A_0 = E\xi \tilde{A}_0 = \lim_{k \to \infty} E\xi A_0^{(n_k)} = 0$$

が成り立つから $A_0 = 0$ a.s. P が従う．また任意に $s, t \in \Pi$, $(s < t)$ を取れば或る $K \geq 1$ が存在して $s, t \in \Pi_{n_k}$ $(\forall k > K)$ が満たされ，$A^{(n_k)}$ は増大過程であるから $\xi = 1\!\!1_{\{A_s > A_t\}}$ として

$$E\xi(A_t - A_s) = E\xi\left(\tilde{A}_t - \tilde{A}_s\right) = \lim_{k \to \infty} E\xi\left(A_t^{(n_k)} - A_s^{(n_k)}\right) \geq 0$$

となり $P(A_s > A_t) = 0$ が成り立つ．$t \longmapsto A_t$ が右連続性であるから，P-零集合を

$$N := \left(\bigcup_{\substack{s, t \in \Pi \\ s < t}} \{A_s > A_t\} \right) \cup \{A_0 \neq 0\}$$

で定めれば $\Omega \backslash N$ 上で $t \longmapsto A_t$ は 0 出発非減少となり，N 上で $A \equiv 0$ と修正すれば A は増大過程となる．

第八段　A がナチュラルであることを示す．$\xi = \left\{ \xi_t, \mathscr{F}_t \mid \quad 0 \leq t \leq a \right\}$ を有界な $RCLL$ マルチンゲールとすれば

$$\begin{aligned}
E\xi_a A_a^{(n_k)} &= E\left[\sum_{j=1}^{2^{n_k}} \xi_{t_{j-1}^{(n_k)}} \left(A_{t_j^{(n_k)}}^{(n_k)} - A_{t_{j-1}^{(n_k)}}^{(n_k)} \right) \right] \\
&= E\left[\sum_{j=1}^{2^{n_k}} \xi_{t_{j-1}^{(n_k)}} \left(Y_{t_j^{(n_k)}} - Y_{t_{j-1}^{(n_k)}} \right) \right] + E\left[\sum_{j=1}^{2^{n_k}} \xi_{t_{j-1}^{(n_k)}} \left(E\left(A_a^{(n_k)} \middle| \mathscr{F}_{t_j^{(n_k)}} \right) - E\left(A_a^{(n_k)} \middle| \mathscr{F}_{t_{j-1}^{(n_k)}} \right) \right) \right] \\
&= E\left[\sum_{j=1}^{2^{n_k}} \xi_{t_{j-1}^{(n_k)}} \left(A_{t_j^{(n_k)}} - A_{t_{j-1}^{(n_k)}} \right) \right]
\end{aligned}$$

が任意の $k \geq 1$ で成り立ち (Proposition 4.3)，$k \longrightarrow \infty$ として

$$E\xi_a A_a = E\int_{(0,a]} \xi_{s-}\, dA_s$$

が得られる．任意の $t \in (0,a]$ に対し $\xi^{(t)} = \left\{ \xi^{(t)}_s := \xi_{t \wedge s}, \mathscr{F}_s \mid \quad 0 \leq s \leq a \right\}$ も $RCLL$ マルチンゲールであり

$$\xi^{(t)}_{s-} = \xi_{s-}, \quad (\forall s \in (0,t]),$$
$$\xi^{(t)}_{s-} = \xi_t, \quad (\forall s \in (t,a])$$

より

$$E\xi_t A_t + E\xi_t (A_a - A_t) = E\xi^{(t)}_a A_a = E\int_{(0,a]} \xi^{(t)}_{s-}\, dA_s = E\int_{(0,t]} \xi_{s-}\, dA_s + E\xi_t (A_a - A_t)$$

となり

$$E\xi_t A_t = E\int_{(0,t]} \xi_{s-}\, dA_s, \quad (\forall t \in (0,a])$$

が成立する．よって A はナチュラルである．

第九段　$\{ M_t := X_t - A_t, \mathscr{F}_t \mid \quad 0 \leq t \leq a \}$ がマルチンゲールであることを示す．M の適合性と可積分性は X, A のそれより従い，また任意に $0 \leq s \leq t \leq a$ を取れば，任意の $A \in \mathscr{F}_s$ で

$$\begin{aligned}
\int_A M_s\, dP = \int_A X_s - A_s\, dP &= \int_A X_s - (Y_s - E(A_a \mid \mathscr{F}_s))\, dP \\
&= \int_A X_s - (X_s - Z_s - E(A_a \mid \mathscr{F}_s))\, dP \\
&= \int_A Z_t + E(A_a \mid \mathscr{F}_t)\, dP \\
&= \int_A X_t - (X_t - Z_t - E(A_a \mid \mathscr{F}_t))\, dP \\
&= \int_A M_t\, dP
\end{aligned}$$

が成立する． ∎

Problem 4.13

Verify that a continuous, nonnegative submartingale is regular.

証明.　Problem 4.9 より $(X_{T_n})_{n=1}^{\infty}$ は一様可積分であり，またパスの連続性より $X_{T_n} \longrightarrow X_T$ $(n \longrightarrow \infty)$ となるから，定理 I.3.3 より $\lim_{n\to\infty} EX_{T_n} = EX_T$ が成立する． ∎

Theorem 4.14 修正

Suppose that $X = \{ X_t \mid \quad 0 \leq t < \infty \}$ is a right-continuous submartingale of class DL with respect to the filtration $\{\mathscr{F}_t\}$, which satisfies the usual conitions, and let $[A]_{NAT}$ be of the Doob-Meyer decomposition of X. There exists a continuous version of A in $[A]_{NAT}$ if and only if X is regular.

証明.

第一段　A が連続であるとき，増大列 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{S}_a$ と $T \coloneqq \lim_{n\to\infty} \in T_n\mathscr{S}_a$ に対し単調収束定理より

$$\lim_{n\to\infty} EA_{T_n} = E \lim_{n\to\infty} A_{T_n} = EA_T$$

が成立する．また任意抽出定理より

$$E(X_{T_n} - A_{T_n}) = E(X_T - A_T), \quad (\forall n \geq 1)$$

となるから

$$\lim_{n\to\infty} EX_{T_n} = \lim_{n\to\infty} E(X_{T_n} - A_{T_n}) + \lim_{n\to\infty} EA_{T_n} = E(X_T - A_T) + EA_T = EX_T$$

が従う．

第二段　以降 X がレギュラーであるとする．このとき任意の有界な停止時刻の増大列 (T_n) と $T \coloneqq \lim T_n$ に対し，$X - A$ のマルチンゲール性と任意抽出定理，及び X のレギュラリティより

$$\begin{aligned} EA_{T_n} &= EX_{T_n} - E(X_{T_n} - A_{T_n}) = EX_{T_n} - E(X_T - A_T) \\ &\longrightarrow EX_T - E(X_T - A_T) = EA_T \quad (n \longrightarrow \infty) \end{aligned} \tag{1.29}$$

が得られる．いま，任意に $a \in \mathbf{N}$ を取り

$$\Pi_n \coloneqq \left\{ t_j^{(n)} \mid \quad t_j^{(n)} = \frac{j}{2^n}a,\ j = 0, 1, \cdots, 2^n \right\}, \quad \Pi \coloneqq \bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi_n$$

とおく．また任意に $\lambda \in \mathbf{N}$ を取り，各 $j = 0, 1, \cdots, 2^n$ に対し

$$Y_t^{(n),j} \coloneqq E\left(\lambda \wedge A_{t_{j+1}^{(n)}} \middle| \mathscr{F}_t\right), \quad (\forall t \geq 0)$$

によりマルチンゲール $\left\{ Y_t^{(n),j}, \mathscr{F}_t \mid \quad 0 \leq t < \infty \right\}$ を定めれば，

$$[0, \infty) \ni t \longmapsto EY_t^{(n),j} = E\left(\lambda \wedge A_{t_{j+1}^{(n)}}\right)$$

と Theorem 3.13 より $RCLL$ な修正 $\tilde{Y}^{(n),j}$ が存在する．このとき各 $t \geq 0$ で

$$\int_A \tilde{Y}_t^{(n),j}\, dP = \int_A \lambda \wedge A_{t_{j+1}^{(n)}}\, dP \leq \lambda P(A), \quad (\forall A \in \mathscr{F}_t)$$

となり，一方で各 $t \in \left[t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)}\right)$ で

$$\int_A \tilde{Y}_t^{(n),j}\, dP = \int_A \lambda \wedge A_{t_{j+1}^{(n)}}\, dP \geq \int_A \lambda \wedge A_t\, dP, \quad (\forall A \in \mathscr{F}_t)$$

となるから，各 j で

$$\begin{aligned} E_j &\coloneqq \left\{ \tilde{Y}_t^{(n),j} > \lambda \mid \quad \exists t \geq 0 \right\} \cup \left\{ \tilde{Y}_t^{(n),j} < \lambda \wedge A_t \mid \quad \exists t \in \left[t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)}\right) \right\} \\ &= \left[\bigcup_{r \in [0,\infty) \cap \mathbf{Q}} \left\{ \tilde{Y}_r^{(n),j} > \lambda \right\} \right] \bigcup \left[\bigcup_{r \in \left[t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)}\right) \cap \mathbf{Q}} \left\{ \tilde{Y}_r^{(n),j} < \lambda \wedge A_r \right\} \right] \end{aligned}$$

とおけば P-零集合 $E := \bigcup_{j=0}^{2^n} E_j$ が定まる．usual 条件より $E \in \mathscr{F}_0$ であるから

$$\left\{ Z_t^{(n),j} := \tilde{Y}_t^{(n),j} \mathbb{1}_{\Omega \backslash E}, \mathscr{F}_t \mid \quad 0 \leq t < \infty \right\}$$

で定める $Y^{(n),j}$ のバージョン $Z^{(n),j}$ は

$$\omega \in \Omega \backslash E \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} Z_t^{(n),j}(\omega) \leq \lambda, & \forall t \geq 0, \\ Z_t^{(n),j}(\omega) \geq \lambda \wedge A_t(\omega), & \forall t \in \left[t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)} \right) \end{cases}$$

を満たす $RCLL$ かつ有界なマルチンゲールとなり，

$$\eta_t^{(n)} := \sum_{j=0}^{2^n-1} Z_t^{(n),j} \mathbb{1}_{\left[t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)} \right)}(t) + (\lambda \wedge A_a) \mathbb{1}_{[a,\infty)}(t), \quad (t \geq 0)$$

とおけば

$$\omega \in \Omega \backslash E \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \eta_t^{(n)}(\omega) \leq \lambda, & (\forall t \geq 0), \\ \eta_t^{(n)}(\omega) \geq \lambda \wedge A_t(\omega), & (\forall t \in [0,a]) \end{cases} \tag{1.30}$$

が成り立つ．また $\eta^{(n)}$ の右連続性，Corollary2.4，Problem2.5 及び usual 条件より

$$T_\epsilon^{(n)} := a \wedge \inf \left\{ t \geq 0 \mid \quad \eta_t^{(n)} - (\lambda \wedge A_t) > \epsilon \right\}$$

は $\mathscr{S}_a$ に属する停止時刻となり，このとき

$$\varphi_n(t) := \begin{cases} t_{j+1}^{(n)}, & t_j^{(n)} \leq t < t_{j+1}^{(n)},\ j = 0, 1, \cdots, 2^n - 1 \\ a, & t = a \end{cases}$$

を用いれば，任意抽出定理より

$$\begin{aligned} E\left(\eta_{T_\epsilon^{(n)}} \right) &= \sum_{j=0}^{2^n-1} \int_{\left\{ t_j^{(n)} \leq T_\epsilon^{(n)} < t_{j+1}^{(n)} \right\}} Z_{T_\epsilon^{(n)}}^{(n),j}\, dP + \int_{\left\{ T_\epsilon^{(n)} = a \right\}} \lambda \wedge A_a\, dP \\ &= \sum_{j=0}^{2^n-1} \int_{\left\{ t_j^{(n)} \leq T_\epsilon^{(n)} < t_{j+1}^{(n)} \right\}} E\left(Z_{t_{j+1}^{(n)}}^{(n),j} \,\middle|\, \mathscr{F}_{T_\epsilon^{(n)}} \right) dP + \int_{\left\{ T_\epsilon^{(n)} = a \right\}} \lambda \wedge A_a\, dP \\ &= \sum_{j=0}^{2^n-1} \int_{\left\{ t_j^{(n)} \leq T_\epsilon^{(n)} < t_{j+1}^{(n)} \right\}} Z_{t_{j+1}^{(n)}}^{(n),j}\, dP + \int_{\left\{ T_\epsilon^{(n)} = a \right\}} \lambda \wedge A_a\, dP \\ &= \sum_{j=0}^{2^n-1} \int_{\left\{ t_j^{(n)} \leq T_\epsilon^{(n)} < t_{j+1}^{(n)} \right\}} \lambda \wedge A_{t_{j+1}^{(n)}}\, dP + \int_{\left\{ T_\epsilon^{(n)} = a \right\}} \lambda \wedge A_a\, dP \\ &= \sum_{j=0}^{2^n-1} \int_{\left\{ t_j^{(n)} \leq T_\epsilon^{(n)} < t_{j+1}^{(n)} \right\}} \lambda \wedge A_{\varphi_n\left(T_\epsilon^{(n)} \right)}\, dP + \int_{\left\{ T_\epsilon^{(n)} = a \right\}} \lambda \wedge A_{\varphi_n\left(T_\epsilon^{(n)} \right)}\, dP \\ &= E\left(\lambda \wedge A_{\varphi_n\left(T_\epsilon^{(n)} \right)} \right) \end{aligned}$$

が従う．また $t \longmapsto \eta_t^{(n)} - (\lambda \wedge A_t)$ の右連続性より

$$T_\epsilon^{(n)}(\omega) < a \quad \Longrightarrow \quad \eta_{T_\epsilon^{(n)}}^{(n)}(\omega) - \left(\lambda \wedge A_{T_\epsilon^{(n)}}(\omega) \right) \geq \epsilon$$

となるから

$$\begin{aligned}E\left(\lambda \wedge A_{\varphi_n\left(T_\epsilon^{(n)}\right)} - \lambda \wedge A_{T_\epsilon^{(n)}}\right) &= E\left(\eta^{(n)}_{T_\epsilon^{(n)}} - \lambda \wedge A_{T_\epsilon^{(n)}}\right) \\ &= E\mathbb{1}_{\left\{T_\epsilon^{(n)}<a\right\}}\left(\eta^{(n)}_{T_\epsilon^{(n)}} - \lambda \wedge A_{T_\epsilon^{(n)}}\right) \geq \epsilon P\left(T_\epsilon^{(n)} < a\right) \end{aligned} \tag{1.31}$$

が成立する．

第三段　$\left(\eta^{(n)}\right)_{n=1}^\infty$ は n に関して P-a.s. に減少していく．実際，任意の $t \in [0,a)$ に対し

$$t \in \left[t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)}\right)$$

を満たす $0 \leq j \leq 2^n - 1$ を取れば $t \in \left[t_{2j}^{(n+1)}, t_{2j+1}^{(n+1)}\right)$ 或は $t \in \left[t_{2j+1}^{(n+1)}, t_{2j+2}^{(n+1)}\right)$ となるから，任意の $A \in \mathscr{F}_t$ で

$$\int_A \eta_t^{(n)}\,dP = \int_A \lambda \wedge A_{t_{j+1}^{(n)}}\,dP \begin{cases} = \displaystyle\int_A \lambda \wedge A_{t_{2j+2}^{(n+1)}}\,dP \\ \geq \displaystyle\int_A \lambda \wedge A_{t_{2j+1}^{(n+1)}}\,dP \end{cases} = \int_A \eta_t^{(n+1)}\,dP$$

が成り立ち $\eta_t^{(n)} \geq \eta_t^{(n+1)}$, a.s. P が従う．$\eta^{(n)}, \eta^{(n+1)}$ のパスは右連続であるから

$$F_n := \left\{\eta_t^{(n)} < \eta_t^{(n+1)} \mid \quad \exists t \in [0,a)\right\} = \bigcup_{r \in [0,a)\cap\mathbf{Q}} \left\{\eta_r^{(n)} < \eta_r^{(n+1)}\right\}$$

で P-零集合が定まり，$F := \bigcup_{n=1}^\infty F_n$ とおけば任意の $\omega \in \Omega\backslash F$ と $t \in [0,a]$ で $\left(\eta_t^{(n)}(\omega)\right)_{n=1}^\infty$ は減少し

$$T_\epsilon^{(1)}\mathbb{1}_{\Omega\backslash F} \leq T_\epsilon^{(2)}\mathbb{1}_{\Omega\backslash F} \leq \cdots \leq a$$

となる．usual 条件より $F \in \mathscr{F}_0$ であるから

$$\left\{T_\epsilon^{(n)}\mathbb{1}_{\Omega\backslash F} \leq t\right\} = \left\{T_\epsilon^{(n)} \leq t\right\} \cap (\Omega\backslash F) + F \in \mathscr{F}_t, \quad (\forall t \geq 0)$$

が成り立つので $T_\epsilon^{(n)}\mathbb{1}_{\Omega\backslash F} \in \mathscr{S}_a$ となり，単調増大性より

$$T_\epsilon := \lim_{n\to\infty} T_\epsilon^{(n)}\mathbb{1}_{\Omega\backslash F}$$

と定めれば $T_\epsilon \in \mathscr{S}_a$ も満たされる．一方 $\varphi_n\left(T_\epsilon^{(n)}\right)$ についても

$$\left\{\varphi_n\left(T_\epsilon^{(n)}\right) \leq t\right\} = \bigcup_{j\,:\,t_{j+1}^{(n)} \leq t} \left\{t_j^{(n)} \leq T_\epsilon^{(n)} < t_{j+1}^{(n)}\right\} \in \mathscr{F}_t, \quad (\forall t \geq 0)$$

より $\varphi_n\left(T_\epsilon^{(n)}\right) \in \mathscr{S}_a$ が従い，また $\varphi_n(t) \geq t$ と $t \longmapsto \varphi_n(t)$ の増大性より

$$T_\epsilon^{(n)}(\omega) \leq \varphi_n\left(T_\epsilon^{(n)}(\omega)\right) \leq \varphi_n\left(T_\epsilon(\omega)\right), \quad (\forall \omega \in \Omega\backslash F)$$

が成立し，A のパスの増大性と併せて

$$E\left(\lambda \wedge A_{T_\epsilon^{(n)}}\right) \leq E\left(\lambda \wedge A_{\varphi_n\left(T_\epsilon^{(n)}\right)}\right) \leq E\left(\lambda \wedge A_{\varphi_n(T_\epsilon)}\right)$$

が満たされる．このとき (1.29) より

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\lambda \wedge A_{T_\epsilon^{(n)}}\right) = E\left(\lambda \wedge A_{T_\epsilon}\right)$$

が成り立ち，右辺も $\varphi_n(t) \downarrow t$ と A のパスの右連続性及び Lebesgue の収束定理より $E\left(\lambda \wedge A_{T_\epsilon}\right)$ に収束するから

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\lambda \wedge A_{\varphi_n\left(T_\epsilon^{(n)}\right)}\right) = E\left(\lambda \wedge A_{T_\epsilon}\right)$$

が得られる．

第五段　任意の $\omega \in \Omega$ と $n \geq 1$ に対し

$$T_\epsilon^{(n)}(\omega) < a \quad \Longleftrightarrow \quad \sup_{0\leq t\leq a}\left\{(\lambda \wedge A_t(\omega)) - \eta_t^{(n)}(\omega)\right\} > \epsilon$$

が満たされ，また (1.30) より $\Omega \backslash E$ の上で $\eta_t^{(n)} - (\lambda \wedge A_t) \geq 0$, $(\forall t \in [0,a])$ だから，(1.31) と前段の結果と併せて

$$\begin{aligned} P\left(\sup_{0\leq t\leq a}\left|\eta_t^{(n)} - (\lambda \wedge A_t)\right| > \epsilon\right) &= P\left(T_\epsilon^{(n)} < a\right) \\ &\leq \frac{1}{\epsilon}E\left(\lambda \wedge A_{\varphi_n\left(T_\epsilon^{(n)}\right)} - \lambda \wedge A_{T_\epsilon^{(n)}}\right) \longrightarrow \frac{1}{\epsilon}E\left(\lambda \wedge A_{T_\epsilon} - \lambda \wedge A_{T_\epsilon}\right) = 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

が得られる．従って定理 G.2.13 より或る部分列 $(n_k)_{k=1}^\infty$ と P-零集合 G が存在して

$$\sup_{0\leq t\leq a}\left|\eta_t^{(n_k)}(\omega) - (\lambda \wedge A_t(\omega))\right| \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty), \quad (\forall \omega \in \Omega \backslash G) \tag{1.32}$$

が成立する．

第六段　A はナチュラルであり，$Z^{(n),j}$ は有界かつ $RCLL$ なマルチンゲールであるから

$$\begin{aligned} E\int_{\left(t_j^{(n)},t_{j+1}^{(n)}\right]} Z_s^{(n),j}\,dA_s &= E\int_{\left(0,t_{j+1}^{(n)}\right]} Z_s^{(n),j}\,dA_s - E\int_{\left(0,t_j^{(n)}\right]} Z_s^{(n),j}\,dA_s \\ &= E\int_{\left(0,t_{j+1}^{(n)}\right]} Z_{s-}^{(n),j}\,dA_s - E\int_{\left(0,t_j^{(n)}\right]} Z_{s-}^{(n),j}\,dA_s \\ &= E\int_{\left(t_j^{(n)},t_{j+1}^{(n)}\right]} Z_{s-}^{(n),j}\,dA_s \end{aligned}$$

が成立する．従って

$$\xi_t^{(n)} := \sum_{j=0}^{2^n-1} Z_t^{(n),j}\mathbb{1}_{\left(t_j^{(n)},t_{j+1}^{(n)}\right]}(t), \quad (t \geq 0)$$

とおけば任意の $t \in (0,a]$ で $\xi_{t-}^{(n)}$ が存在し

$$E\int_{(0,a]} \xi_s^{(n)}\,dA_s = \sum_{j=0}^{2^n-1} E\int_{\left(t_j^{(n)},t_{j+1}^{(n)}\right]} Z_s^{(n),j}\,dA_s = \sum_{j=0}^{2^n-1} E\int_{\left(t_j^{(n)},t_{j+1}^{(n)}\right]} Z_{s-}^{(n),j}\,dA_s = E\int_{(0,a]} \xi_{s-}^{(n)}\,dA_s$$

が成立する．一方で $t \notin \Pi$ で $\xi_t^{(n)} = \eta_t^{(n)}$, $(\forall n \geq 1)$ であるから (1.32) より

$$\sup_{t\in(0,a]\backslash\Pi}\left|\xi_t^{(n_k)}(\omega) - \lambda \wedge A_t(\omega)\right| \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty), \quad (\forall \omega \in \Omega \backslash G)$$

が従い，これにより

$$\sup_{t \in (0,a]} \left| \xi_{t-}^{(n_k)}(\omega) - \lambda \wedge A_{t-}(\omega) \right| \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty), \quad (\forall \omega \in \Omega \backslash G)$$

も出る．実際，$\omega \in \Omega \backslash G$ を固定すれば，任意の $\epsilon > 0$ に対し或る $K = K(\omega, \epsilon) \geq 1$ が存在して

$$\sup_{t \in (0,a] \backslash \Pi} \left| \xi_{t}^{(n_k)}(\omega) - \lambda \wedge A_{t}(\omega) \right| < \epsilon, \quad (\forall k \geq K)$$

となり，このとき任意の $t \in (0,a]$ と $k \geq K$ で

$$\begin{aligned} &\left| \xi_{t-}^{(n_k)}(\omega) - \lambda \wedge A_{t-}(\omega) \right| \\ &\quad \leq \left| \xi_{t-}^{(n_k)}(\omega) - \xi_{s}^{(n_k)}(\omega) \right| + \left| \xi_{s}^{(n_k)}(\omega) - \lambda \wedge A_{s}(\omega) \right| + |\lambda \wedge A_s(\omega) - \lambda \wedge A_{t-}(\omega)| \\ &\quad < \epsilon \end{aligned}$$

を満たす $s = s(t,k) \in (0,a] \backslash \Pi$, $(s < t)$ が取れるから

$$\sup_{t \in (0,a]} \left| \xi_{t-}^{(n_k)}(\omega) - \lambda \wedge A_{t-}(\omega) \right| \leq \epsilon, \quad (\forall k \geq K)$$

が成立する．$t \in \Pi$ なら或る $N = N(t)$ で $t \in \Pi_N$ となるから $\xi_t^{(n)} = \lambda \wedge A_t$, P-a.s., $(\forall n \geq N)$ となり

$$H_t \coloneqq \bigcup_{n \geq N} \left\{ \xi_t^{(n)} \neq \lambda \wedge A_t \right\}, \quad H \coloneqq \bigcup_{t \in \Pi} H_t$$

により P-零集合 H を定めれば任意の $t \in [0,a]$ で

$$\lim_{k \to \infty} \xi_t^{(n_k)}(\omega) = \lambda \wedge A_t(\omega), \quad (\forall \omega \in \Omega \backslash (G \cup H))$$

となる．Lebesgue の収束定理より

$$E \int_{(0,a]} \lambda \wedge A_t \, dA_t = E \int_{(0,a]} \lambda \wedge A_{t-} \, dA_t$$

が得られ，A の単調非減少性より $A_{t-} \leq A_t$ であるから或る P-零集合 U_a が存在し，任意の $\omega \in \Omega \backslash U_a$ で

$$\int_{(0,a]} (\lambda \wedge A_t(\omega)) - (\lambda \wedge A_{t-}(\omega)) \, dA_t(\omega) = 0$$

が成立し $(0,a] \ni t \longmapsto \lambda \wedge A_t(\omega)$ の連続性が出る．a の任意性より $V_\lambda \coloneqq \bigcup_{a=1}^{\infty} U_a$ とおけば

$$(0,\infty) \ni t \longmapsto \lambda \wedge A_t(\omega), \quad (\forall \omega \in \Omega \backslash V_\lambda)$$

は連続となり，λ も任意であるから $V \coloneqq \bigcup_{\lambda=1}^{\infty} V_\lambda$ として

$$(0,\infty) \ni t \longmapsto A_t(\omega), \quad (\forall \omega \in \Omega \backslash V)$$

は連続となる．$\tilde{A} \coloneqq A \mathbb{1}_{\Omega \backslash V} \in [A]_{NAT}$ が求める A のバージョンである．■

Problem 4.15

Let $X = \{ X_t, \mathscr{F}_t \mid \quad 0 \leq t < \infty \}$ be a continuous, nonnegative process with $X_0 = 0$ a.s., and $A = \{ A_t, \mathscr{F}_t \mid \quad 0 \leq t < \infty \}$ any continuous, increasing process for which

$$E(X_T) \leq E(A_T)$$

holds for every bounded stopping time T of $\{\mathscr{F}_t\}$. Introduce the process $V_t := \max 0 \leq s \leq t X_s$, consider a continuous, increasing function F on $[0, \infty)$ with $F(0) = 0$, and define $G(x) := 2F(x) + x \int_{(x,\infty)} u^{-1}\, dF(u);\ 0 < x < \infty$. Establish the inequalities

(4.14) $P[V_T \geq \epsilon] \leq \dfrac{E(A_T)}{\epsilon};\quad \forall \epsilon > 0$

(4.15) (Lenglart inequality) $P[V_T \geq \epsilon] \leq \dfrac{E(\delta \wedge A_T)}{\epsilon} + P[A_T \geq \delta];\quad \forall \epsilon > 0,\ \delta > 0$

(4.16) $EF(V_T) \leq EG(A_T)$

for any stopping time T of $\{\mathscr{F}_t\}$.

証明.

(1) X のパスの連続性と Problem 2.7 より

$$H_\epsilon := \inf \{ t \geq 0 \mid \quad X_t \geq \epsilon \}$$

で $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻が定まる．このとき

$$\begin{aligned} V_T(\omega) \geq \epsilon \quad &\Longrightarrow \quad X_t(\omega) \geq \epsilon, \quad \exists t \in [0, T(\omega)] \\ &\Longrightarrow \quad H_\epsilon(\omega) \leq t \leq T(\omega) \end{aligned}$$

が成立するから，$\{X_0 = 0\} \cap \{V_T \geq \epsilon\}$ 上で $\epsilon = X_{H_\epsilon} = X_{T \wedge H_\epsilon}$ となり

$$\epsilon P(V_T \geq \epsilon) = \int_{\{V_T \geq \epsilon\}} X_{T \wedge H_\epsilon}\, dP \leq E X_{T \wedge H_\epsilon} \leq E A_{T \wedge H_\epsilon} \leq E A_T$$

が得られる．

(2) $S_\delta := \inf \{ t \geq 0 \mid \quad A_t \geq \delta \}$ により $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻を定めれば，$A_{S_\delta} = \delta$ と $t \longmapsto A_t(\omega)$ の増大性より

$$A_T(\omega) < \delta \quad \Longleftrightarrow \quad T(\omega) < S_\delta(\omega)$$

となるから

$$\begin{aligned} P\left(V_T \geq \epsilon,\ A_T < \delta\right) &= P\left(V_{T \wedge S_\delta} \geq \epsilon,\ A_T < \delta\right) \leq P\left(V_{T \wedge S_\delta} \geq \epsilon\right) \\ &\leq \frac{E(A_{S_\delta \wedge T})}{\epsilon} = \frac{E(A_{S_\delta} \wedge A_T)}{\epsilon} = \frac{E(\delta \wedge A_T)}{\epsilon} \end{aligned}$$

が成立し，両辺に $P\left(V_T \geq \epsilon,\ A_T \geq \delta\right)$ を加えて Lenglart の不等式を得る．

(3) F は連続かつ非減少であるから Lebesgue-Stieltjes 積分が構成され，任意の $x \in [0, \infty)$ に対し

$$F(x) = \int_{[0,\infty)} \mathbb{1}_{(0,x]}(u)\, dF(u)$$

が満たされる．

$$(\omega, u) \longmapsto \mathbb{1}_{(0,V_T(\omega)]}(u)$$

は，u の関数として左連続であり，また ω の関数としては $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測であるから (Problem 1.16)，二変数関数として $\mathscr{F}\otimes\mathscr{B}([0,\infty))/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測であり，このとき Fubini の定理より

$$\begin{aligned}
EF(V_T) &= \int_{[0,\infty)} E\left(\mathbb{1}_{[u,\infty)}(V_T)\right)\, dF(u) \\
&= \int_{[0,\infty)} P(V_T \geq u)\, dF(u) \\
&\leq \int_{[0,\infty)} \frac{E(u \wedge A_T)}{u} + P(A_T \geq u)\, dF(u) \\
&= \int_{[0,\infty)} \frac{E(u \wedge A_T \mathbb{1}_{\{A_T \geq u\}})}{u} + \frac{E(u \wedge A_T \mathbb{1}_{\{A_T < u\}})}{u} + P(A_T \geq u)\, dF(u) \\
&= \int_{[0,\infty)} 2P(A_T \geq u) + \frac{E(A_T \mathbb{1}_{\{A_T < u\}})}{u}\, dF(u) \\
&= E\left(2F(A_T)\right) + E\left[A_T \int_{[0,\infty)} \frac{1}{u} \mathbb{1}_{(A_T,\infty)}(u)\, dF(u)\right] \\
&= EG(A_T)
\end{aligned}$$

が得られる． ∎

1.5 Continuous, Square-Integrable Martingales

Processes of difference of two natural processes

Let denote the space of processes represented by difference of two natural processes as

$$\mathscr{A} := \left\{ A^{(1)} - A^{(2)} \mid \quad A^{(j)} : \text{natural},\ j = 1, 2 \right\},$$

and the equivalent class of $A \in \mathscr{A}$ in the meaning of (1.21) in $\mathscr{A}$ as $[A]_{\mathscr{A}}$. Similarly define

$$\mathscr{A}_c := \left\{ A^{(1)} - A^{(2)} \mid \quad A^{(j)} : \text{natural, continuous},\ j = 1, 2 \right\}$$

and the equivalent class of $A \in \mathscr{A}_c$ in the meaning of (1.21) in $\mathscr{A}_c$ as $[A]_{\mathscr{A}_c}$.

Definition 5.3 修正

For $X \in \mathscr{M}_2$, we define the quadratic variation of X to be the process $\langle X \rangle_t := A_t$, where A is the natural increasing process in the Doob-Meyer decomposition of x^2. For $X \in \mathscr{M}_2^c$, the quadratic variation $\langle X \rangle$ of X to be natural increasing and continuous process.

Problem 5.7 修正

Show that $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is a bilinear form on $\mathscr{M}_2$, i.e., for any members X, Y, Z of $\mathscr{M}_2$ and real numbers α, β, we have

(i) $[\langle \alpha X + \beta Y, Z \rangle]_{\mathscr{A}} = [\alpha \langle X, Z \rangle + \beta \langle Y, Z \rangle]_{\mathscr{A}}$.

(ii) $[\langle X, Y \rangle]_{\mathscr{A}} = [\langle Y, X \rangle]_{\mathscr{A}}$.

(iii) $|\langle X, Y \rangle|^2 \le \langle X \rangle \langle Y \rangle$.

(iv) For P-a.e. $\omega \in \Omega$,

$$\check{\xi}_t(\omega) - \check{\xi}_s(\omega) \le \frac{1}{2}[\langle X \rangle_t(\omega) - \langle X \rangle_s(\omega) + \langle Y \rangle_t(\omega) - \langle Y \rangle_s(\omega)]; \quad 0 \le s < t < \infty,$$

where $\check{\xi}_t$ denotes the total variation of $\xi := \langle X, Y \rangle$ on $[0, t]$.

(v) For any stopping time T of $(\mathscr{F}_t)_{t \ge 0}$, we have

$$P\left(\langle X \rangle_{t \wedge T} = \left\langle X^T \right\rangle_t, \ \forall 0 \le t < \infty \right) = 1,$$

where $X_t^T := X_{t \wedge T}$, $(\forall t \ge 0)$.

証明.

(i) ナチュラルなプロセス $A^{(j)}, B^{(j)}, C^{(j)}$, $(j = 1, 2)$ により

$$\langle \alpha X + \beta Y, Z \rangle = A^{(1)} - A^{(2)}, \quad \alpha \langle X, Z \rangle = B^{(1)} - B^{(2)}, \quad \beta \langle Y, Z \rangle = C^{(1)} - C^{(2)}$$

と表せるから

$$\langle \alpha X + \beta Y, Z \rangle - (\alpha \langle X, Z \rangle + \beta \langle Y, Z \rangle) = \left(A^{(1)} + B^{(2)} + C^{(2)} \right) - \left(A^{(2)} + B^{(1)} + C^{(1)} \right)$$

となり，P. 48 の補題より

$$\langle \alpha X + \beta Y, Z \rangle_t = \alpha \langle X, Z \rangle_t + \beta \langle Y, Z \rangle_t, \quad 0 \le t < \infty, \quad \text{a.s. } P$$

が従う．

(ii) $XY - \langle X, Y \rangle$ も $YX - \langle Y, X \rangle$ も右連続マルチンゲールであるから

$$\langle X, Y \rangle - \langle Y, X \rangle$$

も右連続マルチンゲールであり，P. 48 の補題より

$$\langle X, Y \rangle_t = \langle Y, X \rangle_t, \quad 0 \le t < \infty, \quad \text{a.s. } P$$

が従う．

(iii) Shwartz の不等式

Lemma 5.9

Let $X \in \mathscr{M}_2$ satisfy $|X_s| \le K < \infty$ for all $s \in [0, t]$, a.s. P. Let $\Pi = \{t_0, t_1, \cdots, t_m\}$, with $0 = t_0 \le t_1 \le \cdots \le t_m = t$, be a partition of $[0, t]$. Then $E\left(V_t^{(2)}(\Pi) \right)^2 \le 6K^4$.

証明.　X のマルチンゲール性により，任意の $0 \le s_0 \le s_1 \le \cdots \le s_n < \infty$ に対して

$$\begin{aligned} E\sum_{k=1}^{n}\left|X_{s_k}-X_{s_{k-1}}\right|^2 &= \sum_{k=1}^{n} E\left\{E\left(X_{s_k}^2-2X_{s_k}X_{s_{k-1}}+X_{s_{k-1}}^2 \,\middle|\, \mathscr{F}_{s_k}\right)\right\} \\ &= \sum_{k=1}^{n} E\left\{X_{s_k}^2-2E\left(X_{s_k} \,\middle|\, \mathscr{F}_{s_k}\right)X_{s_{k-1}}+X_{s_{k-1}}^2\right\} \\ &= \sum_{k=1}^{n} E\left(X_{s_k}^2-X_{s_{k-1}}^2\right) \\ &= EX_{s_n}^2-EX_{s_0}^2 \end{aligned} \tag{1.33}$$

が成立する．いま，

$$E\left(V_t^{(2)}(\Pi)\right)^2 = E\left\{\sum_{k=1}^{m}\left|X_{t_k}-X_{t_{k-1}}\right|^2\right\}^2 = E\sum_{k=1}^{m}\left|X_{t_k}-X_{t_{k-1}}\right|^4 + 2E\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=i+1}^{m}\left|X_{t_i}-X_{t_{i-1}}\right|^2\left|X_{t_j}-X_{t_{j-1}}\right|^2$$

と分解すれば，$\left|X_{t_k}-X_{t_{k-1}}\right|^2 \le 2\left(X_{t_k}^2+X_{t_{k-1}}^2\right)^2 \le 2K^2$ と (1.33) より右辺第一項は

$$E\sum_{k=1}^{m}\left|X_{t_k}-X_{t_{k-1}}\right|^4 \le 2K^2E\sum_{k=1}^{m}\left|X_{t_k}-X_{t_{k-1}}\right|^2 = 2K^2EX_{t_m}^2 \le 2K^4$$

となる．また右辺第二項も (1.33) より

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=i+1}^{m} E\left|X_{t_i}-X_{t_{i-1}}\right|^2\left|X_{t_j}-X_{t_{j-1}}\right|^2 &= \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=i+1}^{m} E\left[E\left(\left|X_{t_i}-X_{t_{i-1}}\right|^2\left|X_{t_j}-X_{t_{j-1}}\right|^2 \,\middle|\, \mathscr{F}_{t_j}\right)\right] \\ &= \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=i+1}^{m} E\left[\left|X_{t_i}-X_{t_{i-1}}\right|^2 E\left(\left|X_{t_j}-X_{t_{j-1}}\right|^2 \,\middle|\, \mathscr{F}_{t_j}\right)\right] \\ &= \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=i+1}^{m} E\left|X_{t_i}-X_{t_{i-1}}\right|^2\left(X_{t_j}^2-X_{t_{j-1}}^2\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} E\left|X_{t_i}-X_{t_{i-1}}\right|^2\left(X_t^2-X_{t_i}^2\right) \\ &\le 2K^2E\sum_{i=1}^{m-1}\left|X_{t_i}-X_{t_{i-1}}\right|^2 \\ &\le 2K^4 \end{aligned}$$

となるから $E\left(V_t^{(2)}(\Pi)\right)^2 \le 6K^4$ が出る． ∎

Lemma 5.10

Let $X \in \mathscr{M}_2^c$ satisfy $|X_s| \le K < \infty$ for all $s \in [0,t]$, a.s. P. For partitions Π of $[0,t]$, we have

$$\lim_{\|\Pi\|\to 0} EV_t^{(4)}(\Pi) = 0.$$

証明.

第一段　任意の $\omega \in \Omega$ と $\delta > 0$ に対し

$$\begin{aligned}&\sup\{\, |X_r(\omega) - X_s(\omega|\ |\quad s, r \in [0,t],\ |s-r| < \delta \,\} \\ &\quad = \sup\left\{ |X_p(\omega) - X_q(\omega)|\ \middle|\quad p, q \in Q \cap [0,t],\ |q-p| < \delta \right\}\end{aligned} \tag{1.34}$$

が成立する．実際，上限を取る範囲の大小関係より (左辺) ≥ (右辺) が成り立ち，一方で任意の (左辺) $> \alpha > 0$ に対し $|X_r(\omega) - X_s(\omega)| > \alpha$ を満たす $s, r \in [0,t]$, $(|s-r| < \delta)$ を取れば，X のパスの連続性より

$$|X_r(\omega) - X_p(\omega)|,\ |X_s(\omega) - X_q(\omega)| < \frac{\beta - \alpha}{2}$$

を満たす $p, q \in \mathbf{Q} \cap [0,t]$, $(|p-q| < \delta)$ が存在して

$$|X_p(\omega) - X_q(\omega)| \geq |X_r(\omega) - X_s(\omega)| - |X_r(\omega) - X_p(\omega)| - |X_q(\omega) - X_s(\omega)| > \alpha$$

となり (1.34) が出る．(左辺) $\leq 2K$ より $m_t(X;\delta)$ は $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測である．また定理 G.1.15 より任意の $a > 0$ で

$$m_t^a(X;\delta) := \sup\left\{ |X_p(\omega) - X_q(\omega)|^a\ \middle|\quad p, q \in Q \cap [0,t],\ |q-p| < \delta \right\}$$

が満たされる．

第二段　Hölder の不等式より，任意の Π に対し

$$EV_t^{(4)}(\Pi) \leq E\left[V_t^{(2)}(\Pi) \cdot m_t^2(X; \|\Pi\|) \right] \leq \left\{ E\left(V_t^{(2)}(\Pi) \right)^2 \right\}^{1/2} \left\{ Em_t^4(X; \|\Pi\|) \right\}^{1/2} \leq \sqrt{6}K^2 \left\{ Em_t^4(X; \|\Pi\|) \right\}^{1/2}$$

となる．任意に $\|\Pi_n\| \longrightarrow 0$, $(n \longrightarrow \infty)$ を満たす分割列 $(\Pi_n)_{n=1}^\infty$ を取れば

$$\lim_{n\to\infty} m_t(X; \|\Pi_n\|) = 0, \quad m_t(X; \|\Pi_n\|) \leq 2K,\ (\forall n \geq 1)$$

が成り立つから，Lebesgue の収束定理より

$$Em_t^4(X; \|\Pi_n\|) \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が従い $EV_t^{(4)}(\Pi_n) \longrightarrow 0$ $(n \longrightarrow \infty)$ となる．$(\Pi_n)_{n=1}^\infty$ の任意性より補題の主張が得られる． ∎

Theorem 5.8

Let X be in $\mathscr{M}_2^c$. For partitions Π of $[0,t]$, we have $\lim_{\|\Pi\|\to 0} V_t^{(2)} = \langle X \rangle_t$ (in probability); i.e., for every $\epsilon > 0$, $\eta > 0$ there exists $\delta > 0$ such that $\|\Pi\| < \delta$ implies

$$P\left[\left| V_t^{(2)}(\Pi) - \langle X \rangle_t \right| > \epsilon \right] < \eta.$$

証明.

第一段　$X^2 - \langle X \rangle$ のマルチンゲール性より任意の $0 \leq s < t < \infty$ に対して

$$\begin{aligned} E\left((X_t - X_s)^2 - (\langle X \rangle_t - \langle X \rangle_s) \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right) &= E\left((X_t - X_s)^2 \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right) - E\left(\langle X \rangle_t - \langle X \rangle_s \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right) \\ &= E\left(X_t^2 - X_s^2 \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right) - E\left(\langle X \rangle_t - \langle X \rangle_s \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right) \\ &= 0, \quad \text{a.s. } P \end{aligned}$$

となる．従って，任意の $0 \leq u < v \leq s < t < \infty$ に対し

$$E\left|(X_v - X_u)^2 - (\langle X \rangle_v - \langle X \rangle_u)\right|\left|(X_t - X_s)^2 - (\langle X \rangle_t - \langle X \rangle_s)\right| < \infty$$

であれば

$$\begin{aligned} &E\left[\left\{(X_v - X_u)^2 - (\langle X \rangle_v - \langle X \rangle_u)\right\}\left\{(X_t - X_s)^2 - (\langle X \rangle_t - \langle X \rangle_s)\right\}\right] \\ &\quad = E\left[E\left(\left\{(X_v - X_u)^2 - (\langle X \rangle_v - \langle X \rangle_u)\right\}\left\{(X_t - X_s)^2 - (\langle X \rangle_t - \langle X \rangle_s)\right\} \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right)\right] \\ &\quad = E\left[\left\{(X_v - X_u)^2 - (\langle X \rangle_v - \langle X \rangle_u)\right\} E\left(\left\{(X_t - X_s)^2 - (\langle X \rangle_t - \langle X \rangle_s)\right\} \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right)\right] \\ &\quad = 0 \end{aligned}$$

が成立する．

第二段　$|X|$ 及び $\langle X \rangle$ のパスは全て連続であるから，Problem 2.7 より

$$T_n := \inf\{\, t \geq 0 \mid \quad |X_t| \vee \langle X \rangle_t \geq n \,\}$$

で $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻の列 $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ が定まる．このとき任意の $\omega \in \Omega$ で

$$\{\, t \geq 0 \mid \quad |X_t(\omega)| \vee \langle X \rangle_t (\omega) \geq n + 1 \,\} \subset \{\, t \geq 0 \mid \quad |X_t(\omega)| \vee \langle X \rangle_t (\omega) \geq n \,\}$$

となるから

$$T_n \leq T_{n+1}, \quad (\forall n \geq 1)$$

が成立し，また任意の $K > 0$ に対し $\sup_{t \in [0,K]} |X_t(\omega)| \vee \langle X \rangle_t (\omega) < N$ を満たす $N \in \mathbf{N}$ を取れば $T_N(\omega) > K$ となり

$$\lim_{n \to \infty} T_n(\omega) = \infty, \quad (\forall \omega \in \Omega) \tag{1.35}$$

が従う．

第三段　$X^{(n)}$ を $X_t^{(n)} := X_{t \wedge T_n}$, $(\forall t \geq 0)$ で定めて，$[0, t]$ の分割 $\Pi = \{t_0, t_1, \cdots, t_m\}$ に対し

$$V_t^{(2,n)}(\Pi) := \sum_{k=1}^{m} \left|X_{t_k}^{(n)} - X_{t_{k-1}}^{(n)}\right|^2$$

とおけば，$\{t \leq T_n\}$ の上で $X_t = X_t^{(n)}$ となるから

$$V_t^{(2,n)}(\Pi)(\omega) = V_t^{(2)}(\Pi)(\omega), \quad (\forall \omega \in \{t \leq T_n\}) \tag{1.36}$$

が成り立つ．$|X_{t\wedge T_n}| \vee \langle X \rangle_{t\wedge T_n} \leq n$ であるから，Lemma 5.10 と第一段の結果及び $\left\langle X^{(n)} \right\rangle$ の連続性により

$$
\begin{aligned}
E\left|V_t^{(2,n)}(\Pi) - \left\langle X^{(n)} \right\rangle_t\right|^2 &= E\left[\sum_{k=1}^{m}\left\{\left|X_{t_k}^{(n)} - X_{t_{k-1}}^{(n)}\right|^2 - \left(\left\langle X^{(n)} \right\rangle_{t_k} - \left\langle X^{(n)} \right\rangle_{t_{k-1}}\right)\right\}\right]^2 \\
&= E\sum_{k=1}^{m}\left\{\left|X_{t_k}^{(n)} - X_{t_{k-1}}^{(n)}\right|^2 - \left(\left\langle X^{(n)} \right\rangle_{t_k} - \left\langle X^{(n)} \right\rangle_{t_{k-1}}\right)\right\}^2 \\
&\leq 2E\sum_{k=1}^{m}\left|X_{t_k}^{(n)} - X_{t_{k-1}}^{(n)}\right|^4 + 2E\left(\left\langle X^{(n)} \right\rangle_{t_k} - \left\langle X^{(n)} \right\rangle_{t_{k-1}}\right)^2 \\
&\leq 2EV_t^{(4,n)}(\Pi) + 2nE\left[m_t\left(\left\langle X^{(n)} \right\rangle; \|\Pi\|\right)\right] \\
&\longrightarrow 0, \quad (\|\Pi\| \longrightarrow 0)
\end{aligned}
$$

が得られる．

第四段　任意に $\epsilon > 0$ と $\eta > 0$ を取る．(1.36) より任意の $n \geq 1$ で

$$
\begin{aligned}
P\left(\left|V_t^{(2)}(\Pi) - \langle X \rangle_t\right| > \epsilon\right) &= P\left(\left\{\left|V_t^{(2)}(\Pi) - \langle X \rangle_t\right| > \epsilon\right\} \cap \{t > T_n\}\right) + P\left(\left\{\left|V_t^{(2,n)}(\Pi) - \left\langle X^{(n)} \right\rangle_t\right| > \epsilon\right\} \cap \{t \leq T_n\}\right) \\
&\leq P(t > T_n) + P\left(\left|V_t^{(2,n)}(\Pi) - \left\langle X^{(n)} \right\rangle_t\right| > \epsilon\right)
\end{aligned}
$$

が成立し，このとき (1.35) より或る $N \geq 1$ が存在して

$$
P(t > T_n) < \frac{\eta}{2}, \quad (\forall n \geq N)
$$

となり，前段の結果より或る $\delta > 0$ が存在して $\|\Pi\| < \delta$ なら

$$
P\left(\left|V_t^{(2,N)}(\Pi) - \left\langle X^{(N)} \right\rangle_t\right| > \epsilon\right) \leq \frac{1}{\epsilon}E\left|V_t^{(2,N)}(\Pi) - \left\langle X^{(N)} \right\rangle_t\right| \leq \frac{1}{\epsilon}\left\{E\left|V_t^{(2,N)}(\Pi) - \left\langle X^{(N)} \right\rangle_t\right|^2\right\}^{1/2} < \frac{\eta}{2}
$$

が満たされるから

$$
\|\Pi\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad P\left(\left|V_t^{(2)}(\Pi) - \langle X \rangle_t\right| > \epsilon\right) < \eta
$$

が従う．∎

Theorem 5.13 修正

Let $X = \{X_t, \mathscr{F}_t \mid 0 \leq t < \infty\}$ and $Y = \{Y_t, \mathscr{F}_t \mid 0 \leq t < \infty\}$ be members of $\mathscr{M}_2^c$. There is a unique $[A]_{\mathscr{A}_c}$ such that $\left\{X_tY_t - \tilde{A}_t, \mathscr{F}_t \mid 0 \leq t < \infty\right\}$ is a continuous martingale for every $\tilde{A} \in [A]_{\mathscr{A}_c}$.

証明．　定義より $\langle X, Y \rangle \in \mathscr{A}_c$ に対して $XY - \langle X, Y \rangle$ は連続マルチンゲールである．また $\langle X, Y \rangle$ と区別不能な $A \in \mathscr{A}_c$ を取れば，任意の $t \geq 0$ で

$$
P(X_tY_t - \langle X, Y \rangle_t = X_tY_t - A_t) = 1
$$

となるから $XY - A$ もまた連続マルチンゲールとなる．$A, B \in \mathscr{A}_c$ に対し $XY - A$，$XY - B$ が共にマルチンゲールとなるとき，$A - B$ もマルチンゲールとなり，Theorem 4.14 の補題 (P. 48) より $[A]_{\mathscr{A}_c} = [B]_{\mathscr{A}_c}$ が従う．∎

Problem 5.17

Let X, Y be in $\mathscr{M}^{c,loc}$. Then there is a unique (up to indistinguishablility) adapted, continuous process of bounded variation $\langle X, Y \rangle$ satisfying $\langle X, Y \rangle_0 = 0$, such that $XY - \langle X, Y \rangle \in \mathscr{M}^{c,loc}$. If $X = Y$, we write $\langle X \rangle = \langle X, X \rangle$, and this process is nondecreasing.

証明.

Problem 5.19

(i) A local martingale of class DL is a martingale.

(ii)

(iii)

証明.

(i) X を局所マルチンゲールとすれば，或る $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻の列 $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ と P-零集合 E が存在して

$$T_1(\omega) \leq T_2(\omega) \leq \cdots \longrightarrow \infty, \quad (\forall \omega \in \Omega \backslash E)$$

かつ全ての $n \geq 1$ で $\{ X_{t \wedge T_n}, \mathscr{F}_t \mid \ 0 \leq t < \infty \}$ はマルチンゲールとなる．任意に $t \geq 0$ を取れば $\{t \wedge T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{S}_t$ となり，X はクラス DL に属しているから $(X_{t \wedge T_n})_{n=1}^{\infty}$ は一様可積分である．ここで $E \in \mathscr{F}_0$ かつ

$$X_t(\omega) = \lim_{n \to \infty} X_{t \wedge T_n}(\omega), \quad (\forall \omega \in \Omega \backslash E)$$

が成り立つから X_t は $\mathscr{F}_t / \mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測であり，また定理 I.3.3 より X_t の可積分性及び

$$E\,|X_t - X_{t \wedge T_n}(\omega)| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が従う．よって任意に $0 \leq s < t < \infty$ を取れば

$$\int_A X_t \, dP = \lim_{n \to \infty} \int_A X_{t \wedge T_n} \, dP = \lim_{n \to \infty} \int_A X_{s \wedge T_n} \, dP = \int_A X_s \, dP, \quad (\forall A \in \mathscr{F}_s)$$

が満たされ，$\{ X_t, \mathscr{F}_t \mid \ 0 \leq t < \infty \}$ のマルチンゲール性が得られる．

Definition 5.22 修正

$\mathscr{M}_2$ and $\mathscr{M}_2^c$ are vector spaces, where the additions and scalar multiplications are defined by

$$(X+Y)_t(\omega) := X_t(\omega) + Y_t(\omega), \quad (\alpha X)_t(\omega) := \alpha X_t(\omega), \quad (\forall X, Y \in \mathscr{M}_2 \text{ (resp. } \mathscr{M}_2^c), \ \forall \alpha \in \mathbf{R}).$$

Let denote the quotient space of $\mathscr{M}_2$ and $\mathscr{M}_2^c$ with respect to the equivalent relation as in (1.21) (P. 42) by $\mathfrak{M}_2$ and $\mathfrak{M}_2^c$, and denote the elements of each space by $[X]_{\mathfrak{M}_2}$ and $[X]_{\mathfrak{M}_2^c}$. For any $[X]_{\mathfrak{M}_2}, [Y]_{\mathfrak{M}_2} \in \mathfrak{M}_2$, (resp. $[X]_{\mathfrak{M}_2^c}, [Y]_{\mathfrak{M}_2^c} \in \mathfrak{M}_2^c$) and $0 \leq t < \infty$, we define a distance by

$$d\left([X]_{\mathfrak{M}_2}, [Y]_{\mathfrak{M}_2}\right) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left(\|\,[X_n] - [Y_n]\,\|_{L^2(P)} \wedge 1 \right),$$
$$d_c\left([X]_{\mathfrak{M}_2^c}, [Y]_{\mathfrak{M}_2^c}\right) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left(\|\,[X_n] - [Y_n]\,\|_{L^2(P)} \wedge 1 \right),$$

where $\|\cdot\|_{L^2(P)}$ denotes the L^2 norm on $L^2(P) = L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$.

Proposition 5.23 修正

(1) Suppose that the filtration $\{\mathscr{F}_t\}$ satisfies the usual conditions. Then $\mathfrak{M}_2$ is a complete metric space under the preceding metric d.

(2) Suppose that for every $t \in [0,\infty)$, $\mathscr{F}_t$ contains all the P-negligible events in $\mathscr{F}$. Then $\mathfrak{M}_2^c$ is a complete metric space under the preceding metric d_c.

証明. 任意の $0 \leq t < \infty$ に対し，$L^2(\Omega, \mathscr{F}_t, P)$ における関数類を $[\cdot]_t$ と書く．

(1) $\left([X^{(k)}]_{\mathfrak{M}_2}\right)_{k=1}^{\infty}$ を Cauchy 列とすれば，$|X^{(k)} - X^{(j)}|^2$ の劣マルチンゲール性より任意の $0 \leq t \leq n$ で

$$\begin{aligned}\left\| [x_t^{(k)}]_t - [X_t^{(j)}]_t \right\|_{L^2(\Omega,\mathscr{F}_t,P)} \wedge 1 &\leq \left\| [x_n^{(k)}] - [X_n^{(j)}] \right\|_{L^2(P)} \wedge 1 \\ &\leq 2^n d\left([X^{(k)}]_{\mathfrak{M}_2}, [X^{(j)}]_{\mathfrak{M}_2}\right) \longrightarrow 0, \quad (k, j \longrightarrow \infty)\end{aligned}$$

となるから，定理 G.5.6 より或る $[X_t]_t \in L^2(\Omega, \mathscr{F}_t, P)$ が存在して

$$E\left|X_t^{(k)} - X_t\right|^2 \longrightarrow 0, \quad (k \longrightarrow \infty)$$

を満たす．特に $t=0$ なら $X_t = 0$, a.s. P が従う．Hölder の不等式より任意の $A \in \mathscr{F}_t$ で

$$\int_A \left|X_t^{(k)} - X_t\right| \, dP \leq \left(E\left|X_t^{(k)} - X_t\right|^2 \right)^{1/2} \longrightarrow 0, \quad (k \longrightarrow \infty)$$

が成り立つから，任意に $0 \leq s < t$ を取れば

$$\int_A X_s \, dP = \lim_{k\to\infty} \int_A X_s^{(k)} \, dP = \lim_{k\to\infty} \int_A X_t^{(k)} \, dP = \int_A X_t \, dP, \quad (\forall A \in \mathscr{F}_s)$$

となり $X = \{X_t, \mathscr{F}_t \mid \ 0 \leq t < \infty\}$ のマルチンゲール性が出る．Theorem 3.13 より X の $RCLL$ な修正 $\tilde{X} \in \mathscr{M}_2$ が得られ，ここで任意に $\epsilon > 0$ 及び $1/2^N < \epsilon/2$ を満たす N を取れば，或る $K \geq 1$ が存在して

$$\left\| [X_n^{(k)}] - [\tilde{X}_n] \right\|_{L^2(P)} < \frac{\epsilon}{2}, \quad (\forall k \geq K)$$

がすべての $n \leq N$ で満たされるから

$$d\left([X^{(k)}]_{\mathfrak{M}_2}, [\tilde{X}]_{\mathfrak{M}_2}\right) < \epsilon, \quad (\forall k \geq K)$$

が従う．

第 2 章

Brownian Motion

Dynkin system theorem

Let $\mathscr{C}$ be a collection of subsets of Ω which is closed under pairwise intersection. If $\mathscr{D}$ is a Dynkin system containing $\mathscr{C}$, then $\mathscr{D}$ also contains the σ-field $\sigma(\mathscr{C})$ generated by $\mathscr{C}$.

証明. 定理 G.1.13 より $\sigma(\mathscr{C}) = \delta(\mathscr{C}) \subset \mathscr{D}$ となる. ■

Problem 1.4

Let $X = \{\, X_t \mid \quad 0 \leq t < \infty \,\}$ be a stochastic process for which $X_0, X_{t_1} - X_{t_0}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ are independent random variables, for every integer $n \geq 1$ and indices $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty$. Then for any fixed $0 \leq s < t < \infty$, the increment $X_t - X_s$ is independent of $\mathscr{F}_s^X$.

この主張の逆も成立する:

証明. 先ず任意の $s \leq t \leq r$ に対し $\sigma(X_t - X_s) \subset \mathscr{F}_r^X$ が成り立つ. 実際,

$$\Phi : \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \ni (x, y) \longmapsto x - y$$

の連続性と $\mathscr{B}(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d) = \mathscr{B}(\mathbf{R}^d) \otimes \mathscr{B}(\mathbf{R}^d)$ より, 任意の $E \in \mathscr{B}(\mathbf{R}^d)$ に対して

$$(X_t - X_s)^{-1}(E) = \left\{(X_t, X_s) \in \Phi^{-1}(E)\right\} \in \sigma(X_s, X_t) \subset \mathscr{F}_r^X \tag{2.1}$$

が満たされる. よって任意に $A_0 \in \sigma(X_0)$, $A_i \in \sigma(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})$ を取れば, $X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ が $\mathscr{F}_{t_{n-1}}^X$ と独立であるから

$$P(A_0 \cap A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_0 \cap A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})P(A_n)$$

が成立する. 帰納的に

$$P(A_0 \cap A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_0)P(A_1)\cdots P(A_n)$$

が従い $X_0, X_{t_1} - X_{t_0}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ の独立性を得る. ■

証明 (Problem 1.4).

第一段　Dynkin 族を次で定める:

$$\mathscr{D} := \{\, A \in \mathscr{F} \mid \quad P(A \cap B) = P(A)P(B),\ \forall B \in \sigma(X_t - X_s) \,\}.$$

いま，任意に $0 = s_0 < \cdots < s_n = s$ を取り固定し

$$\mathscr{A}_{s_0,\cdots,s_n} := \left\{ \bigcap_{i=0}^{n} A_i \mid \quad A_0 \in \sigma(X_0),\ A_i \in \sigma(X_{s_i} - X_{s_j}),\ i = 1, \cdots, n \right\}$$

により乗法族を定めれば，仮定より $\sigma(X_{s_i} - X_{s_{i-1}})$ と $\sigma(X_t - X_s)$ が独立であるから

$$\mathscr{A}_{s_0,\cdots,s_n} \subset \mathscr{D}$$

が成立し，Dynkin 族定理により

$$\sigma(X_{s_0}, X_{s_1} - X_{s_0}, \cdots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}}) = \sigma\left(\mathscr{A}_{s_0,\cdots,s_n}\right) \subset \mathscr{D} \tag{2.2}$$

が従う．

第二段　$\sigma(X_{s_0}, X_{s_1} - X_{s_0}, \cdots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}})$ の全体が $\mathscr{F}_s^X$ を生成することを示す．先ず，(2.1) より

$$\bigcup_{\substack{n \geq 1 \\ s_0 < \cdots < s_n}} \sigma(X_{s_0}, X_{s_1} - X_{s_0}, \cdots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}}) \subset \mathscr{F}_s^X \tag{2.3}$$

が成立する．一方で，任意の $X_r^{-1}(E)$ $(\forall E \in \mathscr{B}(\mathbf{R}^d),\ 0 < r \leq s)$ について，

$$\Psi : \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \ni (x, y) \longmapsto x + y$$

で定める連続写像を用いれば

$$X_r^{-1}(E) = (X_r - X_0 + X_0)^{-1}(E) = \left\{ (X_r - X_0, X_0) \in \Psi^{-1}(E) \right\}$$

となり，$X_r^{-1}(E) \in \sigma(X_0, X_r - X_0)$ が満たされ

$$\sigma(X_r) \subset \sigma(X_0, X_r - X_0) \subset \sigma(X_0, X_r - X_0, X_s - X_r) \tag{2.4}$$

が出る．$\sigma(X_0) \subset \sigma(X_0, X_s - X_0)$ も成り立ち

$$\bigcup_{0 \leq r \leq s} \sigma(X_r) \subset \bigcup_{\substack{n \geq 1 \\ s_0 < \cdots < s_n}} \sigma(X_{s_0}, X_{s_1} - X_{s_0}, \cdots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}})$$

が従うから，(2.3) と併せて

$$\mathscr{F}_s^X = \sigma\left(\bigcup_{\substack{n \geq 1 \\ s_0 < \cdots < s_n}} \sigma(X_{s_0}, X_{s_1} - X_{s_0}, \cdots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}}) \right) \tag{2.5}$$

が得られる．

第三段　任意の $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = s$ に対し，(2.1) と (2.4) より

$$\sigma(X_{s_0}, X_{s_1} - X_{s_0}, \cdots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}}) = \sigma(X_{s_0}, X_{s_1}, \cdots, X_{s_n}) \tag{2.6}$$

が成り立つ．

第四段 二つの節点 $0 = s_0 < \cdots < s_n = s$ と $0 = r_0 < \cdots < r_m = s$ の合併を $0 = u_0 < \cdots < u_k = s$ と書けば

$$\sigma(X_{s_0}, \cdots, X_{s_n}) \cup \sigma(X_{r_0}, \cdots, X_{r_m}) \subset \sigma(X_{u_0}, \cdots, X_{u_k})$$

が成り立つから

$$\bigcup_{\substack{n\geq 1 \\ s_0<\cdots<s_n}} \sigma(X_{s_0}, X_{s_1}, \cdots, X_{s_n})$$

は交演算で閉じている．従って (2.2)，(2.5)，(2.6) 及び Dynkin 族定理により

$$\mathscr{F}_s^X = \sigma\left(\bigcup_{\substack{n\geq 1 \\ s_0<\cdots<s_n}} \sigma(X_{s_0}, X_{s_1} - X_{s_0}, \cdots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}}) \right) = \sigma\left(\bigcup_{\substack{n\geq 1 \\ s_0<\cdots<s_n}} \sigma(X_{s_0}, X_{s_1}, \cdots, X_{s_n}) \right) \subset \mathscr{D}$$

が従い定理の主張を得る． ∎

2.1 The Consistency Theorem

Karatzas-Shreve より Bogachev の Measure Theory に載っている Kolmogorov の拡張定理の方が洗練された簡潔な証明になっているので頭に入りやすい．

2.2 The Kolmogorov-Čentsov Theorem

Exercise 2.7

The only $\mathscr{B}((\mathbf{R}^d)^{[0,\infty)})$-measurable set contained in $C[0,\infty)^d$ is the empty set.

証明.

第一段 $\mathscr{B}((\mathbf{R}^d)^{[0,\infty)}) = \sigma(B_t;\ 0 \leq t < \infty)$ が成り立つことを示す．先ず，任意の $C \in \mathscr{C}$ は

$$\begin{aligned} C &= \left\{ \omega \in (\mathbf{R}^d)^{[0,\infty)} \mid \quad (\omega(t_1), \cdots, \omega(t_n)) \in A \right\} \\ &= \left\{ \omega \in (\mathbf{R}^d)^{[0,\infty)} \mid \quad (B_{t_1}(\omega), \cdots, B_{t_n}(\omega)) \in A \right\}, \quad (A \in \mathscr{B}((\mathbf{R}^d)^n)) \end{aligned}$$

の形で表されるから $\mathscr{C} \subset \sigma(B_t;\ 0 \leq t < \infty)$ が従い $\mathscr{B}((\mathbf{R}^d)^{[0,\infty)}) \subset \sigma(B_t;\ 0 \leq t < \infty)$ を得る．逆に

$$\sigma(B_t) \subset \mathscr{C}, \quad (\forall t \geq 0)$$

より $\mathscr{B}((\mathbf{R}^d)^{[0,\infty)}) \supset \sigma(B_t;\ 0 \leq t < \infty)$ も成立し $\mathscr{B}((\mathbf{R}^d)^{[0,\infty)}) = \sigma(B_t;\ 0 \leq t < \infty)$ が出る．

第二段 高々可算集合 $S = \{t_1, t_2, \cdots\} \subset [0,\infty)$ に対して

$$\mathcal{E}_S := \left\{ \left\{ \omega \in (\mathbf{R}^d)^{[0,\infty)} \mid \quad (\omega(t_1), \omega(t_2), \cdots) \in A \right\} \mid \quad A \in \mathscr{B}((\mathbf{R}^d)^{\#S}) \right\}$$

とおけば[*1]，座標過程 B は $(\omega(t_1), \omega(t_2), \cdots) = (B_{t_1}(\omega), B_{t_2}(\omega), \cdots)$ を満たすから

$$\mathcal{E}_S = \left\{ \{(B_{t_1}, B_{t_2}, \cdots) \in A\} \mid \quad A \in \mathscr{B}((\mathbf{R}^d)^{\#S}) \right\} =: \mathcal{F}_S^B$$

[*1] S が可算無限なら $(\mathbf{R}^d)^{\#S} = \mathbf{R}^\infty$.

が成立する．従って第一章の Lemma3 for Exercise 1.8 と前段の結果より

$$\mathscr{B}((\mathbf{R}^d)^{[0,\infty)}) = \sigma(B_t;\ 0 \le t < \infty) = \mathcal{F}^B_{[0,\infty)} = \bigcup_{S \subset [0,\infty):at\ most\ countable} \mathcal{F}^B_S$$
$$= \bigcup_{S \subset [0,\infty):at\ most\ countable} \mathcal{E}_S$$

を得る．すなわち，$\mathscr{B}((\mathbf{R}^d)^{[0,\infty)})$ の任意の元は $\left\{ \omega \in (\mathbf{R}^d)^{[0,\infty)} \mid \quad (\omega(t_1), \omega(t_2), \cdots) \in A \right\}$ の形で表現され，$A \neq \emptyset$ ならば $\left\{ \omega \in (\mathbf{R}^d)^{[0,\infty)} \mid \quad (\omega(t_1), \omega(t_2), \cdots) \in A \right\} \not\subset C[0,\infty)^d$ となり主張が従う． ∎

Theorem 2.8 and Problem 2.9

Suppose that a process $X = \left\{ X_t \mid \quad t \in [0,T]^d \right\}$ $(d \ge 1)$ on a probability space $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ satisfies the condition

$$\forall s,t \in [0,T]^d, \quad E|X_t - X_s|^\alpha \le C \parallel t - s \parallel^{d+\beta}, \quad \text{where } \|\cdot\| \text{ is max norm}$$

for some positive constants α, β, and C. Then there exists a continuous modification $\tilde{X} = \left\{ \tilde{X}_t \mid \quad t \in [0,T]^d \right\}$ of X, which is locally Hölder-continuous with exponent γ for every $\gamma \in (0, \beta/\alpha)$. More precisely, for every $\gamma \in (0, \beta/\alpha)$,

$$\forall \omega \in \Omega^*, \qquad \sup_{\substack{0 < \| t-s \| < h(\omega) \\ s,t \in [0,T]^d}} \frac{\left|\tilde{X}_t(\omega) - \tilde{X}_s(\omega)\right|}{\parallel t - s \parallel^\gamma} \le \frac{2}{1 - 2^{-\gamma}}$$

for some $\Omega^* \in \mathscr{F}$ with $P(\Omega^*) = 1$ and positive random variable h, where Ω^* and h depend on γ.

証明.

第一段　$\mathbf{N}$ の任意の要素 n に対して

$$L_n = \left\{ \frac{kT}{2^n} \mid \quad k = 0, 1, 2, \cdots, 2^n - 1 \right\}$$

として $L = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} L_n$ とおく．L は $[0,T]^d$ において稠密である．L_n の要素 s に対して

$$R_n(s) = \{ t \in L_n \mid \quad \| t - s \| \le T2^{-n} \}$$

とおく．つまり，$R_n(s)$ とは s の各成分を最大 $T2^{-n}$ だけ動かした順序対の集合である．いま，L_n の要素数は 2^{nd}，L_n の各要素 s に対して $R_n(s)$ の要素数は 3^d である．Chebyshev の不等式より，任意の正数 ϵ に対して

$$P\left(|X_t - X_s| \ge \epsilon\right) \le \epsilon^{-\alpha} E|X_t - X_s|^\alpha \le C\epsilon^{-\alpha} \parallel t - s \parallel^{d+\beta}$$

となり，特に $\epsilon = 2^{-\gamma n}$ かつ $\| t - s \| \le T2^{-n}$ の場合は

$$P\left(|X_t - X_s| \ge 2^{-\gamma n}\right) \le C2^{-n(d+\beta-\alpha\gamma)}$$

が成り立つから，

$$P\left(\max_{s \in L_n \wedge t \in R_n(s)} |X_t - X_s| \ge 2^{-\gamma n}\right) = P\left(\bigcup_{s \in L_n} \bigcup_{t \in R_n(s)} \{|X_t - X_s| \ge 2^{-\gamma n}\}\right) \le 3^d C T^{d+\beta} 2^{-n(\beta-\alpha\gamma)}$$

が成り立つ．$A_n = \left\{\max_{s\in L_n \wedge t\in R_n(s)} |X_t - X_s| \geq 2^{-\gamma n}\right\}$ とおけば，$\beta - \alpha\gamma > 0$ より $\sum_{n\in\mathbf{N}} P(A_n) < \infty$ となるから，Borel-Cantelli の補題より

$$N = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k$$

は P-零集合となり，

$$\forall\omega\in\Omega\backslash N,\ \exists N\in\mathbf{N},\ \forall n\in\mathbf{N},\quad N\leq n \Longrightarrow \max_{s\in L_n\wedge t\in R_n(s)} |X_t(\omega) - X_s(\omega)| < 2^{-\gamma n} \tag{2.7}$$

が満たされる．

第二段　$\Omega\backslash N$ の要素 ω に対して，(2.7) を満たす自然数 N のうち最小なもの与える写像を n^* と書く (順序数の整列性)．つまり n^* は

$$\begin{aligned} n^* = \Bigg\{ (\omega, n) \ :\ & \omega\in\Omega\wedge n\in\mathbf{N}\wedge \\ & \forall m\in\mathbf{N}\left[n\leq m \Longrightarrow \max_{s\in L_m\wedge t\in R_m(s)} |X_t(\omega) - X_s(\omega)| < 2^{-\gamma m}\right]\wedge \\ & \forall N\in\mathbf{N}\left[\forall m\in\mathbf{N}\left[N\leq m \Longrightarrow \max_{s\in L_m\wedge t\in R_m(s)} |X_t(\omega) - X_s(\omega)| < 2^{-\gamma m}\right] \Longrightarrow n\leq N\right] \Bigg\} \end{aligned}$$

で与えられる写像である．写像 n^* は $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測性を持つ．実際，任意の自然数 ℓ に対して

$$n^{*-1}(\ell) = \left\{\bigcap_{n=\ell}^{\infty} A_n^c\right\} \cap \left\{\bigcap_{1\leq j\leq \ell-1} \bigcap_{n=j}^{\infty} A_n\right\}$$

を満たす．n^* の定め方より

$$\forall\omega\in\Omega\backslash N,\ \forall n\in\mathbf{N},\quad n^*(\omega)\leq n \Longrightarrow \max_{s\in L_n\wedge t\in R_n(s)} |X_t(\omega) - X_s(\omega)| < 2^{-\gamma n} \tag{2.8}$$

が成立する．

第三段　いま，$\Omega\backslash N$ の任意の要素 ω と $n^*(\omega)\leq n$ を満たす任意の自然数 n が与えられたとすると，

$$\forall m\in\mathbf{N},\quad n<m \Longrightarrow \forall s,t\in L_m\left[\|\,t-s\,\| < 2^{-n} \Longrightarrow |X_t(\omega) - X_s(\omega)| < 2\sum_{j=n+1}^{m} 2^{-\gamma j}\right]$$

が成立する．実際，$m = n+1$ ならば，L_{n+1} の任意の要素 s, t に対し $\|\,t-s\,\| < 2^{-n}$ となるのは $t\in R_{n+1}(s)$ の場合のみであるから，(2.8) より

$$\|\,t-s\,\| < 2^{-n} \Longrightarrow |X_t(\omega) - X_s(\omega)| < 2^{-\gamma(n+1)} < 2\sum_{j=n+1}^{m} 2^{-\gamma j}$$

となる．$m = M-1$ のとき

$$\forall s,t\in L_m\left[\|\,t-s\,\| < 2^{-n} \Longrightarrow |X_t(\omega) - X_s(\omega)| < 2\sum_{j=n+1}^{m} 2^{-\gamma j}\right]$$

が成立すると仮定すると，$\|\,t-s\,\| < 2^{-n}$ を満たす L_M の任意の要素 s, t に対し，

- $s_i < t_i$ ならば $s_i \leq s'_i \leq t'_i \leq t_i$ を満たす $\left\{ Tk/2^{M-1} \mid \quad k \in \{0, 1, \cdots, 2^{M-1}\} \right\}$ の要素 s'_i, t'_i を取り，
- $s_i = t_i$ のときは，$s_i \in \left\{ Tk/2^{M-1} \mid \quad k \in \{0, 1, \cdots, 2^{M-1}\} \right\}$ ならば $s'_i = s_i$，$t'_i = s_i$ とおき，$s_i \notin \left\{ Tk/2^{M-1} \mid \quad k \in \{0, 1, \cdots, 2^{M-1}\} \right\}$ ならば $s'_i = s_i - 1/2^M$，$t'_i = s_i - 1/2^M$ とおく

として $s' = (s'_1, \cdots, s'_d)$ と $t' = (t'_1, \cdots, t'_d)$ を定めれば，

$$s', t' \in L_{M-1} \wedge \| s - s' \| < 1/2^M \wedge \| t - t' \| < 1/2^M \wedge \| t' - s' \| < 1/2^n$$

が満たされるから

$$|X_s(\omega) - X_{s'}(\omega)| < 2^{-\gamma M}, \quad |X_{t'}(\omega) - X_t(\omega)| < 2^{-\gamma M}, \quad |X_{t'}(\omega) - X_{s'}(\omega)| < 2 \sum_{j=n+1}^{M-1} 2^{-\gamma j}$$

となり

$$|X_t(\omega) - X_s(\omega)| < 2 \sum_{j=n+1}^{M} 2^{-\gamma j}$$

が成立する．

第四段　実確率変数 h を

$$h(\omega) = \begin{cases} 2^{-n^*(\omega)}, & (\omega \in \Omega \backslash N), \\ 0, & (\omega \in N) \end{cases}$$

で定める．このとき

$$\forall \omega \in \Omega \backslash N,\ \forall s, t \in L, \quad 0 < \| t - s \| < h(\omega) \Longrightarrow |X_t(\omega) - X_s(\omega)| < \frac{2}{1 - 2^{-\gamma}} \| t - s \|^\gamma \tag{2.9}$$

が成立する．いま $\Omega \backslash N$ の要素 ω と L の要素 s, t が任意に与えられたとして，$0 < \| t - s \| < h(\omega)$ のとき，$\| t - s \| < 2^{-n}$ を満たす最大の自然数 n を取れば

$$n^*(\omega) \leq n \wedge 2^{-(n+1)} \leq \| t - s \| < 2^{-n}$$

が成立し，前段の結果より

$$|X_t(\omega) - X_s(\omega)| < 2 \sum_{j=n+1}^{\infty} 2^{-\gamma j} = 2 \frac{2^{-\gamma(n+1)}}{1 - 2^{-\gamma}} \leq \frac{2}{1 - 2^{-\gamma}} \| t - s \|^\gamma$$

が従う．

第五段　X の連続な修正 $\tilde{X}$ を構成する．$\Omega \backslash N$ の要素 ω と $[0, T]^d$ の要素 t が任意に与えられたとき，t に収束する L の列 $\{s_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ を取れば (2.9) より $\{X_{s_n}(\omega)\}_{n \in \mathbf{N}}$ は Cauchy 列をなす．従って $\lim_{n \in \mathbf{N}} X_{s_n}(\omega)$ が存在するが，(2.9) より $\lim_{n \in \mathbf{N}} X_{s_n}(\omega)$ は列 $\{s_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ の取り方に依らずに確定する．この極限を $\tilde{X}_t(\omega)$ と書いて

$$\begin{aligned} \tilde{X} = \Bigg\{ (x, y) \ : \quad & \exists \omega \in \Omega \exists t \in [0, T]^d [x = (t, \omega) \wedge \\ & \omega \in \Omega \backslash N \Longrightarrow y = \tilde{X}_t(\omega) \wedge \\ & \omega \in N \Longrightarrow y = 0] \Bigg\} \end{aligned}$$

で写像 $\tilde{X}$ を定めれば，$\tilde{X}$ は

$$\forall\omega \in \Omega\backslash N,\ \forall s,t \in L,\quad 0 < \|\, t-s \,\| < h(\omega) \Longrightarrow |\tilde{X}_t(\omega) - \tilde{X}_s(\omega)| < \frac{2}{1-2^{-\gamma}}\,\|\, t-s \,\|^{\gamma}$$

を満たし，ゆえに t の写像と見て連続であり，かつ $[0,T]^d$ の任意の要素 t において，任意の正数 ϵ に対し

$$P\left(\left|X_t - \tilde{X}_t\right| > \epsilon\right) \leq P\left(|X_t - X_{s_n}| > \epsilon/2\right) + P\left(\left|X_{s_n} - \tilde{X}_t\right| > \epsilon/2\right) \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成立するから $P(X_t \neq \tilde{X}_t) = 1$ となる． ∎

Corollary to Theorem 2.8

There is a probability measure P on $(\mathbf{R}^{[0,\infty)}, \mathscr{B}(\mathbf{R}^{[0,\infty)}))$, and a stochastic process $W = \left\{ W_t, \mathscr{F}_t^W \mid \quad t \geq 0 \right\}$ on the same space, such that under P, W is a Brownian motion.

証明.

第一段　Corollary to Theorem 2.2 より，$(\mathbf{R}^{[0,\infty)}, \mathscr{B}(\mathbf{R}^{[0,\infty)}))$ にただ一つの確率測度 P が存在して，

$$B = \left\{ (x,y) \mid \quad \exists t \in [0,\infty)\exists\omega \in \mathbf{R}^{[0,\infty)}\left(x = (t,\omega) \wedge y = \omega(t) - \omega(0)\right) \right\}$$

で定める写像 B が P の下で

- $\mathbf{R}^{[0,\infty)}$ の任意の要素 ω に対して $B_0(\omega) = 0$,
- 任意の実数 s,t に対し，$0 \leq s < t$ ならば $B_t - B_s$ は $\mathscr{F}_s$ と独立,
- 任意の実数 s,t に対し，$0 \leq s < t$ ならば $P(B_t - B_s)^{-1}$ は平均 0 で分散が $t-s$ の正規分布

となる．Theorem2.8 と Problem2.10 により，1 以上の任意の自然数 N に対し，$[0,N]$ 上で B の修正 W^N が存在する．

$$\begin{aligned}\Omega_N &= \left\{ \omega \in \mathbf{R}^{[0,\infty)} \mid \quad \forall t \in [0,N] \cap \mathbf{Q},\quad W_t^N(\omega) = B_t(\omega) \right\} \\ &= \bigcap_{t \in [0,N]\cap\mathbf{Q}} \left\{ \omega \in \mathbf{R}^{[0,\infty)} \mid \quad W_t^N(\omega) = B_t(\omega) \right\}\end{aligned}$$

とおけば，W^N は B の修正であるから $P(\Omega_N) = 1$．ここで $\tilde{\Omega} = \bigcap_{N\in\mathbf{N}} \Omega_N$ とおく．0 以上の実数 t と $\tilde{\Omega}$ の要素 ω が任意に与えられたとき，$t < N$ を満たす自然数 N を取れば，N 以上の任意の自然数 n で

$$\forall s \in [0,N] \cap \mathbf{Q},\quad B_s(\omega) = W_s^N(\omega) \wedge B_s(\omega) = W_s^n(\omega)$$

となり，$W^N(\omega)$ と $W^n(\omega)$ の連続性と定理 D.2.10 より $W^N(\omega)$ と $W^n(\omega)$ は $[0,N]$ 上で一致する．すなわち

$$\forall n \in \mathbf{N},\quad N \leq n \Longrightarrow W_t^n(\omega) = W_t^N(\omega)$$

が成り立つから，このとき $\lim_{n\to\infty} W_t^n(\omega)$ が確定する．

$$W_t(\omega) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} W_t^n(\omega), & (\omega \in \tilde{\Omega}), \\ 0, & (\omega \in \mathbf{R}^{[0,\infty)}\backslash\tilde{\Omega}) \end{cases}$$

で W を定めれば，W は B の修正となる．実際，0 以上の任意の実数 t に対し，$t < N$ を満たす自然数 N を取れば

$$\forall\omega \in \tilde{\Omega},\quad W_t(\omega) = W_t^N(\omega)$$

となり，W^N が B の修正であるから

$$P(W_t \neq B_t) \leq P(W_t \neq W_t^N) + P(W_t^N \neq B_t) = 0$$

が成立する．またこの t において，$W^N(\omega)$ の連続性から $W(\omega)$ の t での連続性が従う．

第二段　前段で定めた W が $(\mathbf{R}^{[0,\infty)}, \mathscr{B}(\mathbf{R}^{[0,\infty)}), P)$ の上の Brown 運動であることを示す．まず P-a.s. に $W_0 = B_0$ である．また $0 \leq s < t$ を満たす任意の実数 s, t に対し，

$$\Omega' = \left\{ \omega \in \mathbf{R}^{[0,\infty)} \mid \quad W_s(\omega) \neq B_s(\omega) \wedge W_t(\omega) \neq B_t(\omega) \right\}$$

とおく．$\mathscr{B}(\mathbf{R})$ の要素 E, F が任意に与えられたとして，

$$W_s^{-1}(F) \cap \Omega' = B_s^{-1}(F) \cap \Omega', \quad (W_t - W_s)^{-1}(E) \cap \Omega' = (B_t - B_s)^{-1}(E) \cap \Omega'$$

が成り立ち，かつ $P(\Omega') = 1$ であるから

$$\begin{aligned} P\left(W_s^{-1}(F)\right) = P\left(W_s^{-1}(F) \cap \Omega'\right) = P\left(B_s^{-1}(F) \cap \Omega'\right) = P\left(B_s^{-1}(F)\right), \\ P\left((W_t - W_s)^{-1}(E)\right) = P\left((B_t - B_s)^{-1}(E)\right), \\ P\left(W_s^{-1}(F) \cap (W_t - W_s)^{-1}(E)\right) = P\left(B_s^{-1}(F) \cap (B_t - B_s)^{-1}(E)\right) \end{aligned} \tag{2.10}$$

が従い，B の独立増分性と併せて

$$\begin{aligned} P\left(W_s^{-1}(F) \cap (W_t - W_s)^{-1}(E)\right) &= P\left(B_s^{-1}(F) \cap (B_t - B_s)^{-1}(E)\right) \\ &= P\left(B_s^{-1}(F)\right) P\left((B_t - B_s)^{-1}(E)\right) \\ &= P\left(W_s^{-1}(F)\right) P\left((W_t - W_s)^{-1}(E)\right) \end{aligned}$$

となる．以上で W の独立増分性が示された．また (2.10) から $W_t - W_s$ の分布は $B_t - B_s$ の分布に一致する．■

2.3 The Space $C[0, \infty)$, Weak Convergence, and the Wiener Measure

Problem 4.1

Show that ρ defined by (4.1) is a metric on $C[0, \infty)^d$ and, under ρ, $C[0, \infty)^d$ is a complete, separable metric space.

以下，$C[0, \infty)^d$ には ρ により広義一様収束位相を導入する．

証明．　付録の定理 D.10.4 により従う．■

Problem 4.2

Let $\mathscr{C}(\mathscr{C}_t)$ be the collection of finite-dimensional cylinder sets of the form (2.1); i.e.,

$$C = \left\{ \omega \in C[0,\infty)^d \mid \quad (\omega(t_1),\cdots,\omega(t_n)) \in A \right\}; \quad n \geq 1,\ A \in \mathscr{B}((\mathbf{R}^d)^n),$$

where, for all $i = 1,\cdots,n$, $t_i \in [0,\infty)$ (respectively, $t_i \in [0,t]$). Denote by $\mathscr{G}(\mathscr{G}_t)$ the smallest σ-field containing $\mathscr{C}(\mathscr{C}_t)$. Show that $\mathscr{G} = \mathscr{B}(C[0,\infty)^d)$, the Borel σ-field generated by the open sets in $C[0,\infty)^d$, and that $\mathscr{G}_t = \varphi_t^{-1}\left(\mathscr{B}(C[0,\infty)^d)\right) =: \mathscr{B}_t\left(C[0,\infty)^d\right)$, where $\varphi_t : C[0,\infty)^d \longrightarrow C[0,\infty)^d$ is the mapping $(\varphi_t\omega)(s) = \omega(t \wedge s)$; $0 \leq s < \infty$.

証明.

第一段　$w_0 \in C[0,\infty)^d$ とする．任意に $w \in C[0,\infty)^d$ を取れば，w の連続性により $d(w_0,w)$ の各項について

$$\sup_{t \leq n} |w_0(t) - w(t)| = \sup_{r \in [0,n]\cap\mathbf{Q}} |w_0(r) - w(r)| \quad (n = 1,2,\cdots)$$

とできる．いま，任意に実数 $\alpha \in \mathbf{R}$ を取れば

$$\left\{ w \in C[0,\infty)^d \mid \quad \sup_{r \in [0,n]\cap\mathbf{Q}} |w_0(r) - w(r)| \leq \alpha \right\} = \bigcap_{r \in [0,n]\cap\mathbf{Q}} \left\{ w \in C[0,\infty)^d \mid \quad |w_0(r) - w(r)| \leq \alpha \right\}$$

が成立し，右辺の各集合は $\mathscr{C}$ に属するから 左辺 $\in \sigma(\mathscr{C})$ となる．従って

$$\psi_n : C[0,\infty)^d \ni w \longmapsto \sup_{r \in [0,n]\cap\mathbf{Q}} |w_0(r) - w(r)| \in \mathbf{R}, \quad (n = 1,2,\cdots)$$

で定める ψ_n は可測 $\sigma(\mathscr{C})/\mathscr{B}(\mathbf{R})$ である．$x \longmapsto x \wedge 1$ の連続性より $\psi_n \wedge 1$ も $\sigma(\mathscr{C})/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測性を持ち，

$$d(w_0,w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\psi_n(w) \wedge 1\right)$$

により $C[0,\infty)^d \ni w \longmapsto d(w_0,w) \in \mathbf{R}$ の $\sigma(\mathscr{C})/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測性が出るから，任意の $\epsilon > 0$ に対する球について

$$\left\{ w \in C[0,\infty)^d \mid \quad d(w_0,w) < \epsilon \right\} \in \sigma(\mathscr{C})$$

が成り立つ．$C[0,\infty)^d$ は第二可算公理を満たし，可算基底は上式の形の球で構成されるから，$\mathscr{O}(C[0,\infty)^d) \subset \sigma(\mathscr{C})$ が従い $\mathscr{B}(C[0,\infty)^d) \subset \sigma(\mathscr{C})$ を得る．次に逆の包含関係を示す．いま任意に $n \in \mathbf{Z}_+$ と $t_1 < \cdots < t_n$ を選んで

$$\phi : C[0,\infty)^d \ni w \longmapsto (w(t_1),\cdots,w(t_n)) \in (\mathbf{R}^d)^n$$

で定める写像は連続である．実際，任意の一点 w_0 での連続性を考えると，任意の $\epsilon > 0$ に対して $t_n \leq N$ を満たす $N \in \mathbf{N}$ を取れば，$d(w_0,w) < \epsilon/(n2^N)$ ならば $\sum_{i=1}^n |w_0(t_i) - w(t_i)| < \epsilon$ が成り立つ．よって ϕ は w_0 で連続であり

$$\mathscr{B}((\mathbf{R}^d)^n) \subset \left\{ A \in \mathscr{B}((\mathbf{R}^d)^n) \mid \quad \phi^{-1}(A) \in \mathscr{B}(C[0,\infty)^d) \right\}$$

が出る．任意の $C \in \mathscr{C}$ は，$n \in \mathbf{N}$ と時点 $t_1 < \cdots < t_n$ によって決まる写像 ϕ によって $C = \phi^{-1}(B)$ $(\exists B \in \mathscr{B}((\mathbf{R}^d)^n))$ と表現できるから，$\mathscr{C} \subset \mathscr{B}(C[0,\infty)^d)$ が成り立ち $\sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{B}(C[0,\infty)^d)$ が得られる．

第二段　$t \geq 0$ とする．$C[0,\infty)^d$ の位相を $\mathscr{O}(C[0,\infty)^d)$ と書けば

$$\varphi_t^{-1}\left(\mathscr{B}(C[0,\infty)^d)\right) = \sigma\left(\left\{\, \varphi_t^{-1}(O) \mid \quad O \in \mathscr{O}(C[0,\infty)^d) \,\right\}\right)$$

が成り立つ．任意の $\alpha \in \mathbf{R}$ と $r \geq 0$ に対して

$$\begin{aligned}
&\left\{\, w \in C[0,\infty)^d \mid \quad |w_0(r) - (\varphi_t w)(r)| \leq \alpha \,\right\} \\
&= \begin{cases} \left\{\, w \in C[0,\infty)^d \mid \quad |w_0(r) - (\varphi_t w)(r)| \leq \alpha \,\right\}, & (r \leq t), \\ \left\{\, w \in C[0,\infty)^d \mid \quad |w_0(r) - (\varphi_t w)(t)| \leq \alpha \,\right\}, & (r > t), \end{cases} \in \mathscr{C}_t
\end{aligned}$$

となるから

$$\psi_n^t : C[0,\infty)^d \ni w \longmapsto \sup_{r \in [0,n] \cap \mathbf{Q}} |w_0(r) - (\varphi_t w)(r)| \in \mathbf{R}, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

で定める ψ_n^t は可測 $\sigma(\mathscr{C}_t)/\mathscr{B}(\mathbf{R})$ である．$x \longmapsto x \wedge 1$ の連続性より $\psi_n^t \wedge 1$ も $\sigma(\mathscr{C}_t)/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測性を持ち，

$$d(w_0, \varphi_t w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(\psi_n^t(w) \wedge 1\right)$$

により $C[0,\infty)^d \ni w \longmapsto d(w_0, \varphi_t w) \in \mathbf{R}$ の $\sigma(\mathscr{C}_t)/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測性が出るから，任意の $\epsilon > 0$ に対する球について

$$\left\{\, w \in C[0,\infty)^d \mid \quad d(w_0, \varphi_t w) < \epsilon \,\right\} \in \sigma(\mathscr{C}_t)$$

が成り立つ．特に

$$\varphi_t^{-1}\left(\left\{\, w \in C[0,\infty)^d \mid \quad d(w_0, w) < \epsilon \,\right\}\right) = \left\{\, w \in C[0,\infty)^d \mid \quad d(w_0, \varphi_t w) < \epsilon \,\right\}$$

が満たされ，$C[0,\infty)^d$ の第二可算性より

$$\varphi_t^{-1}(O) \in \sigma(\mathscr{C}_t), \quad (\forall O \in \mathscr{O}(C[0,\infty)^d))$$

が従う．ゆえに $\varphi_t^{-1}\left(\mathscr{B}(C[0,\infty)^d)\right) \subset \sigma(\mathscr{C}_t)$ となる．■

2.4 Weak Convergence

Definition 4.3

It follows, in particular, that the weak limit P is a probability measure, and that it is unique.

証明．　$f \equiv 1$ として

$$P(S) = \lim_{n \to \infty} P_n(S) = 1$$

が従うから P は確率測度である．また任意の有界連続関数 $f : S \longrightarrow \mathbf{R}$ に対し

$$\int_S f \, dP = \int_S f \, dQ$$

が成り立つとき，任意の閉集合 $A \subset S$ に対して

$$f_k(s) := \frac{1}{1 + kd(s, A)}, \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

と定めれば $\lim_{k\to\infty} f_k = \mathbb{1}_A$(各点収束) が満たされるから，Lebesgue の収束定理より

$$P(A) = \lim_{k\to\infty} \int_S f_k \, dP = \lim_{k\to\infty} \int_S f_k \, dQ = Q(A)$$

となり，測度の一致の定理より $P = Q$ が得られる．すなわち弱極限は一意である． ∎

lemma: change of variables for expectation

$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間，$(S, \mathscr{S})$ を可測空間とする．このとき任意の有界 $\mathscr{S}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測関数 f と $\mathscr{F}/\mathscr{S}$-可測写像 X に対して

$$\int_\Omega f(X) \, dP = \int_S f \, dPX^{-1}$$

が成立する．

証明．　任意の $A \in \mathscr{S}$ に対して

$$\int_S \mathbb{1}_A dPX^{-1} = P(X^{-1}(A)) = \int_\Omega \mathbb{1}_{X^{-1}(A)} \, dP = \int_\Omega \mathbb{1}_A(X) \, dP$$

が成り立つから，任意の $\mathscr{S}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測単関数 g に対し

$$\int_\Omega g(X) \, dP = \int_S g \, dPX^{-1}$$

となる．f が有界なら一様有界な単関数で近似できるので，Lebesgue の収束定理より

$$\int_\Omega f(X) \, dP = \int_S f \, dPX^{-1}$$

が出る． ∎

Definition 4.4

Equivalently, $X_n \xrightarrow{\mathscr{D}} X$ if and only if

$$\lim_{n\to\infty} E_n f(X_n) = Ef(X)$$

for every bounded, continuous real-valued function f on S, where E_n and E denote expectations with respect to P_n and P, respectively.

証明．　任意の有界実連続関数 $f : S \longrightarrow \mathbf{R}$ に対し

$$\int_\Omega f(X_n) \, dP_n = \int_S f \, dP_n X_n^{-1}, \quad \int_\Omega f(X) \, dP = \int_S f \, dPX^{-1},$$

が成り立つから，$P_n X_n^{-1}$ が PX^{-1} に弱収束することと $\lim_{n\to\infty} E_n f(X_n) = Ef(X)$ は同値である． ∎

Problem 4.5

Suppose $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a sequence of random variables taking values in a metric space (S_1, ρ_1) and converging in distribution to X. Suppose (S_2, ρ_2) is another metric space, and $\varphi : S_1 \longrightarrow S_2$ is continuous. Show that $Y_n := \varphi(X_n)$ converges in distribution to $Y := \varphi(X)$.

証明.　任意の有界実連続関数 $f : S_2 \longrightarrow \mathbf{R}$ に対し $f \circ \varphi$ は S_1 上の有界実連続関数であるから

$$\begin{aligned}\int_{S_2} f \, dPY_n^{-1} = \int_{\Omega} f(Y_n)\, dP = \int_{\Omega} f(\varphi(X_n))\, dP = \int_{S_1} f \circ \varphi \, dPX_n^{-1} \\ \longrightarrow \int_{S_1} f \circ \varphi \, dPX^{-1} = \int_{S_2} f \, dPY^{-1} \quad (n \longrightarrow \infty)\end{aligned}$$

が成立する． ∎

2.5 Tightness

テキスト本文において $m^T(\omega, \delta)$ は

$$m^T(\omega, \delta) := \max_{\substack{|s-t|\leq\delta \\ 0\leq s,t\leq T}} |\omega(s) - \omega(t)|$$

で定められるが，max と書いて妥当であることを確認しておく．まず

$$D := \{\, (s,t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid \quad |s-t| \leq \delta \wedge 0 \leq s, t \leq T \,\}$$

で定められる集合は $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ のコンパクト集合である．そして ω は連続写像であるから

$$\mathbf{R} \times \mathbf{R} \ni (s,t) \longmapsto \omega(s), \quad \mathbf{R} \times \mathbf{R} \ni (s,t) \longmapsto \omega(t)$$

は共に実連続写像である．引き算は連続，絶対値も連続であるから

$$\mathbf{R} \times \mathbf{R} \ni (s,t) \longmapsto |\omega(s) - \omega(t)|$$

は $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ から $\mathbf{R}$ への連続写像であり，D のコンパクト性から D 上で最大値を取る．

Problem 4.8

Show that $m^T(\omega, \delta)$ is continuous in $\omega \in C[0,\infty)$ under the metric ρ of (4.1), is nondecreasing in δ, and $\lim_{\delta\downarrow 0} m^T(\omega, \delta) = 0$ for each $\omega \in C[0,\infty)$.

略証.

第一段　$m^T(\omega, \delta)$ が ω に関して連続であることを示す．まず大雑把に，

$$\left| \max_x |f(x)| - \max_x |g(x)| \right| \leq \max_x |f(x) - g(x)|$$

が成立する．実際，

$$\max_x |f(x)| - \max_x |g(x)| \le \max_x |f(x) - g(x)|$$

が成り立つことを確認するには

$$|f(x_1)| = \max_x |f(x)|$$

なる x_1 を取り，

$$\begin{aligned}\max_x |f(x)| - \max_x |g(x)| &= |f(x_1)| - \max_x |g(x)| \\ &\le |f(x_1)| - |g(x_1)| \\ &\le |f(x_1) - g(x_1)| \\ &\le \max_x |f(x) - g(x)|\end{aligned}$$

となることを見ればよい．f, g を入れ替えれば

$$\max_x |g(x)| - \max_x |f(x)| \le \max_x |f(x) - g(x)|$$

も成り立つから当初の主張を得る．よって ω_1, ω_2 を $C[0, \infty)$ の要素とすれば

$$\left| m^T(\omega_1, \delta) - m^T(\omega_2, \delta) \right| \le \max_{\substack{|s-t| \le \delta \\ 0 \le s,t \le T}} |(\omega_1(s) - \omega_1(t)) - (\omega_2(s) - \omega_2(t))|$$

が成立する．ところで，いま ϵ を任意に与えられた正数とし，

$$T \le n$$

を満たす自然数 n を取り

$$\rho(\omega_1, \omega_2) < 2^{-n}\epsilon$$

が満たされていると仮定すれば，

$$\sup_{0 \le t \le n} |\omega_1(t) - \omega_2(t)| < \epsilon$$

となるから

$$0 \le t \le T \Longrightarrow |\omega_1(t) - \omega_2(t)| < \epsilon$$

が満たされる．このとき

$$\begin{aligned}0 \le s, t \le T \Longrightarrow &|(\omega_1(s) - \omega_1(t)) - (\omega_2(s) - \omega_2(t))| \\ &\le |\omega_1(s) - \omega_2(s)| + |\omega_1(t) - \omega_2(t)| \\ &< 2\epsilon\end{aligned}$$

が成り立つので

$$\left| m^T(\omega_1, \delta) - m^T(\omega_2, \delta) \right| < 2\epsilon$$

が従い，$m^T(\omega, \delta)$ の ω に関する連続性が得られた．

第二段　δ に関して非減少であることを示す．いま $0 < \delta \leq \delta'$ とする．

$$(s, t) \longmapsto |\omega(s) - \omega(t)|$$

は

$$\{ (s, t) \mid \quad |s - t| \leq \delta \wedge 0 \leq s, t \leq T \}$$

の上で最大値を取るのであるから，

$$|\tilde{s} - \tilde{t}| \leq \delta \wedge 0 \leq \tilde{s}, \tilde{t} \leq T$$

かつ

$$|\omega(\tilde{s}) - \omega(\tilde{t})| = m^T(\omega, \delta)$$

を満たす $\tilde{s}, \tilde{t}$ を取ることが出来るが，

$$|\tilde{s} - \tilde{t}| \leq \delta'$$

も満たされるので

$$|\omega(\tilde{s}) - \omega(\tilde{t})| \in \{ |\omega(s) - \omega(t)| \mid \quad |s - t| \leq \delta \wedge 0 \leq s, t \leq T \}$$

となり

$$|\omega(\tilde{s}) - \omega(\tilde{t})| \leq m^T(\omega, \delta')$$

が従う．よって

$$\delta \leq \delta' \Longrightarrow m^T(\omega, \delta) \leq m^T(\omega, \delta')$$

が示された．

第三段　$\lim_{\delta \downarrow 0} m^T(\omega, \delta) = 0$ が成り立つことを示す．ϵ を任意に与えられた正数とする．ω は $[0, T]$ 上で一様連続となるので

$$|s - t| \leq \delta \Longrightarrow |\omega(s) - \omega(t)| < \epsilon$$

を満たす正数 δ が取れるが，このとき

$$\delta' \leq \delta$$

を満たす任意の正数 δ' に対しても

$$|s - t| \leq \delta' \Longrightarrow |\omega(s) - \omega(t)| < \epsilon$$

となるから

$$\lim_{\delta \downarrow 0} m^T(\omega, \delta) = 0$$

が得られる．■

Theorem 4.10

略証.

第一段　η を任意に与えられた正数とする．$\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ は緊密なので，$C[0,\infty)$ の或るコンパクト部分集合 K が存在して

$$\forall n \in \mathbf{N}\,(\,1-\eta \leq P_n(K)\,)$$

が満たされる．他方で十分大きな正数 λ を取れば

$$\forall \omega \in K\,(\,|\omega(0)| \leq \lambda\,)$$

となる．これはすなわち

$$K \subset \{\,\omega \mid \quad |\omega(0)| \leq \lambda\,\}$$

を表し，

$$\forall n \in \mathbf{N}\,\left(\,P_n\,\{\,\omega \mid \quad \lambda < |\omega(0)|\,\} \leq P_n(C[0,\infty) \backslash K) \leq \eta\,\right)$$

が従う．また T, ϵ を任意に与えられた正数とすれば，或る正数 δ_0 が存在して

$$0 < \delta \leq \delta_0 \Longrightarrow \forall \omega \in K\,\left(\,m^T(\omega,\delta) \leq \epsilon\,\right)$$

が成立する．つまり

$$0 < \delta \leq \delta_0 \Longrightarrow K \subset \left\{\,\omega \mid \quad m^T(\omega,\delta) \leq \epsilon\,\right\}$$

が成り立つので，

$$0 < \delta \leq \delta_0 \Longrightarrow \forall n \in \mathbf{N}\,\left(\,P_n\left\{\,\omega \mid \quad \epsilon < m^T(\omega,\delta)\,\right\} \leq P_n(C[0,\infty) \backslash K) \leq \eta\,\right)$$

が満たされる．

第二段

Problem 4.12

Suppose $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a sequence of probability measures on $(C[0,\infty), \mathscr{B}(C[0,\infty)))$ which converges weakly to a probability measure P. Suppose, in addition, that $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a uniformly bounded sequence of real-valued, continuous functions on $C[0,\infty)$ converging to a continuous function f, the convergence being uniform on compact subsets of $C[0,\infty)$. Then

$$\lim_{n\to\infty} \int_{C[0,\infty)} f_n(\omega)\, dP_n(\omega) = \int_{C[0,\infty)} f(\omega)\, dP(\omega).$$

略証.

第一段　$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は一様有界なので

$$\forall b \in \mathbf{N}\,\forall \omega \in C[0,\infty)\,\left(\,|f_n(\omega)| < b\,\right)$$

を満たす正数 b が存在する．$C[0,\infty)$ の各点 ω で

$$f_n(\omega) \longrightarrow f(\omega) \quad (n \longrightarrow \infty)$$

となるから

$$\forall \omega \in C[0,\infty)\,(\,|f(\omega)| < b\,)$$

が満たされる．すなわち f は有界連続であり，$(P_n)_{n=1}^{\infty}$ が P に弱収束するので

$$\lim_{n\to\infty} \int_{C[0,\infty)} f\, dP_n = \int_{C[0,\infty)} f\, dP$$

が成立する．

第二段　前段の結果より

$$\left| \int_{C[0,\infty)} f\, dP_n - \int_{C[0,\infty)} f\, dP \right| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成り立つから，

$$\left| \int_{C[0,\infty)} f_n\, dP_n - \int_{C[0,\infty)} f\, dP_n \right| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \tag{2.11}$$

が成り立つことを示せば定理の主張が得られる．$\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ は相対コンパクトであるから Prohorov の定理より緊密である．いま ϵ を任意に与えられた正数とすると，$C[0,\infty)$ の或るコンパクト部分集合 K が存在して

$$\forall n \in \mathbf{N}\ (\,P_n(C[0,\infty)\backslash K) < \epsilon\,)$$

となる．他方で K 上で $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ は f に一様収束するので，或る自然数 N を取れば

$$\forall n \in \mathbf{N}\ \big(N \leq n \Longrightarrow \forall \omega \in K\,(\,|f_n(\omega) - f(\omega)| < \epsilon\,)\big)$$

が満たされる．このとき

$$\begin{aligned} N \leq n \Longrightarrow \left| \int_{C[0,\infty)} f_n\, dP_n - \int_{C[0,\infty)} f\, dP_n \right| &\leq \int_{C[0,\infty)} |f_n - f|\, dP_n \\ &\leq \int_K |f_n - f|\, dP_n + \int_{C[0,\infty)\backslash K} |f_n - f|\, dP_n \\ &< \epsilon P_n(K) + 2bP_n(C[0,\infty)\backslash K) \\ &< (1+2b)\epsilon \end{aligned}$$

が成り立つので (2.11) が示された．　■

2.6　Convergence of Finite-Dimensional Distributions

標本路の表記の修正 (テキスト本文 2 行目)

Suppose that X is a continuous process on some $(\Omega, \mathscr{F}, P)$. For each ω, the function $t \longmapsto X_t(\omega)$ is a member of $C[0,\infty)^d$, which we denote by $X_{\bullet}(\omega)$.

$$0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \infty$$

なる $t_1, t_2, \cdots, t_n$ に対し，

$$\pi_{t_1,\cdots,t_n}(w) = (w(t_1), w(t_2), \cdots, w(t_n)), \quad (w \in C[0,\infty)^d)$$

で $C[0,\infty)^d$ から $(\mathbf{R}^d)^n$ への写像 $\pi_{t_1,\cdots,t_n}$ を定める．このとき

$$C = \left\{ w \in C[0,\infty)^d \mid \quad (w(t_1), \cdots, w(t_n)) \in A \right\}$$

なる形のシリンダー集合は

$$\pi^{-1}_{t_1,\cdots,t_n}(A)$$

に等しい．ここで座標過程 W を

$$W_t(w) = w(t), \quad (t \in [0,\infty),\ w \in C[0,\infty)^d)$$

で定め

$$\mathscr{C}' := \left\{ W_t^{-1}(A) \mid \quad t \in [0,\infty),\ A \in \mathscr{B}(\mathbf{R}^d) \right\}$$

と定める．

$$\begin{aligned} W_t^{-1}(A) &= \{ w \in C[0,\infty) \mid \quad W_t(w) \in A \} \\ &= \{ w \in C[0,\infty) \mid \quad w(t) \in A \} \end{aligned}$$

であるから $\mathscr{C}'$ は一次元シリンダー集合の全体である．

$\mathscr{C}'$ は $\mathscr{B}(C[0,\infty)^d)$ を生成する (テキスト本文 3 行目)

$\mathscr{B}(C[0,\infty)^d)$ is generated by the one-dimensional cylinder sets

略証． $\mathscr{C}' \subset \mathscr{C}$ は満たされているので

$$\mathscr{C} \subset \sigma(\mathscr{C}') \tag{2.12}$$

が成り立つことを示せばよい．C を $\mathscr{C}$ の任意の要素とすれば，

$$0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \infty$$

なる $t_1, t_2, \cdots, t_n$ と $\mathscr{B}((\mathbf{R}^d)^n)$ の要素 A を適当に取ることにより

$$C = \pi^{-1}_{t_1,\cdots,t_n}(A)$$

となる．このとき

$$C \in \sigma(\mathscr{C}') \tag{2.13}$$

を言うために，$\pi_{t_1,\cdots,t_n}$ が $\sigma(\mathscr{C}')/\mathscr{B}((\mathbf{R}^d)^n)$-可測であることを示す．

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n, \quad (A_i \in \mathscr{B}(\mathbf{R}^d),\ i = 1, 2, \cdots, n)$$

に対しては

$$\pi_{t_1,\cdots,t_n}^{-1}(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n) = \bigcap_{i=1}^{n} W_{t_i}^{-1}(A_i)$$

となるので

$$\pi_{t_1,\cdots,t_n}^{-1}(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n) \in \sigma(\mathscr{C}')$$

が成立する．従って

$$\left\{ A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \mid \quad A_i \in \mathscr{B}(\mathbf{R}^d),\ i = 1, 2, \cdots, n \right\} \subset \left\{ B \in \mathscr{B}((\mathbf{R}^d)^n) \mid \quad \pi_{t_1,\cdots,t_n}^{-1}(B) \in \sigma(\mathscr{C}') \right\}$$

が成り立ち，右辺は σ-加法族であり左辺は $\mathscr{B}((\mathbf{R}^d)^n)$ を生成するので

$$\mathscr{B}((\mathbf{R}^d)^n) = \left\{ B \in \mathscr{B}((\mathbf{R}^d)^n) \mid \quad \pi_{t_1,\cdots,t_n}^{-1}(B) \in \sigma(\mathscr{C}') \right\}$$

が成立する．すなわち (2.13) が成り立ち，C の任意性から (2.12) が従う． ∎

標本路の可測性 (テキスト本文 4 行目)

the random function $X_\bullet : \Omega \longrightarrow C[0,\infty)^d$ is $\mathscr{F}/\mathscr{B}(C[0,\infty)^d)$-measurable.

略証． C を $\mathscr{C}'$ の任意の要素とする．このとき $0 \leq t < \infty$ なる或る t と $\mathscr{B}(\mathbf{R}^d)$ の或る要素 A によって

$$C = W_t^{-1}(A)$$

となる．ここで

$$C = \{ w \in C[0,\infty) \mid \quad w(t) \in A \}$$

より

$$\forall \omega \in \Omega\ (X_\bullet(\omega) \in C \Longleftrightarrow X_t(\omega) \in A)$$

が成り立つので

$$\{ \omega \in \Omega \mid \quad X_\bullet(\omega) \in C \} = \{ \omega \in \Omega \mid \quad X_t(\omega) \in A \}$$

が成り立ち，X_t の $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{R}^d)$-可測性より

$$\{ \omega \in \Omega \mid \quad X_t(\omega) \in A \} \in \mathscr{F}$$

が成り立つから

$$X_\bullet^{-1}(C) \in \mathscr{F}$$

が従う．C は任意に選ばれていたので

$$\mathscr{C}' \subset \left\{ C \in \sigma(\mathscr{C}) \mid \quad X_\bullet^{-1}(C) \in \mathscr{F} \right\}$$

が成立し，右辺は σ-加法族であるから $X_\bullet$ の $\mathscr{F}/\sigma(\mathscr{C}')$-可測性が従う．

$$\sigma(\mathscr{C}') = \sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{B}(C[0,\infty))$$

より $X_\bullet$ の $\mathscr{F}/\mathscr{B}(C[0,\infty)^d)$-可測性が示された． ∎

Theorem 4.15 修正

Let $\left\{X^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ be a tight sequence of continuous processes, with each $X^{(n)}$ defined on $\left(\Omega^{(n)}, \mathscr{F}^{(n)}, P^{(n)}\right)$, with the property that, whenever $0 \leq t_1 < \cdots < t_d < \infty$, then the sequence

$$\left(P^{(n)}\pi_{t_1,\cdots,t_d}(X_{\bullet}^{(n)})^{-1}\right)_{n=1}^{\infty}$$

weakly converges to some probability measure on $\mathscr{B}(\mathbf{R}^d)$. Let

$$P_n := P^{(n)}X_{\bullet}^{(n)-1}$$

. Then $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ converges weakly to a measure P on $\mathscr{B}(C[0,\infty))$, under which the coordinate mapping process $W_t(\omega) := \omega(t)$ on $C[0,\infty)$ satisfies

$$P^{(n)}\pi_{t_1,\cdots,t_d}(X_{\bullet}^{(n)})^{-1} \overset{weak}{\longrightarrow} P\pi_{t_1,\cdots,t_d}(W_{\bullet})^{-1}, 0 \leq t_1, \cdots < t_d < \infty,\ d \geq 1. \tag{2.14}$$

略証.

第一段　$\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ は緊密であり，全ての n で P_n は $\mathscr{B}(C[0,\infty))$ 上の確率測度であり，$(C[0,\infty),\rho)$ は完備可分距離空間であるから，Prohorov の定理より $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ は弱収束する部分列 $\left(P_{n_i}\right)_{i=1}^{\infty}$ を持つ．その弱極限を P と書く．

第二段　$(P_n)_{n=1}^{\infty}$ の任意の部分列が P に弱収束する部分列を含むなら，$(P_n)_{n=1}^{\infty}$ は P に弱収束する．これは列の収束の一般論である．実際，$(P_n)_{n=1}^{\infty}$ が P に弱収束しないとすれば，P の或る (弱位相に関する) 近傍が存在して，その近傍に入らない P_n が無限個取れる．そうして取った部分列のいかなる部分列も P に収束し得ない．

第三段　$(P_n)_{n=1}^{\infty}$ の任意の部分列が P に弱収束する部分列を含むことを示す．$\left(P_{n(k,1)}\right)_{k=1}^{\infty}$ を $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ の部分列とする．このとき Prohorov の定理より弱収束する部分列 $\left(P_{n(k,2)}\right)_{k=1}^{\infty}$ およびその極限 Q が取れる．あとは

$$P = Q$$

が成立すれば良いが，これが成り立つには

$$\forall C \in \mathscr{C}\,(\,P(C) = Q(C)\,) \tag{2.15}$$

が成り立てば十分である．実際，$\mathscr{C}$ は乗法族であるから Dynkin 族定理より

$$\delta(\mathscr{C}) = \sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{B}(C[0,\infty))$$

が成立し ($\delta(\mathscr{C})$ は $\mathscr{C}$ を含む最小の Dynkin 族)，他方で

$$\mathscr{D} := \{\, C \in \mathscr{B}(C[0,\infty)) \mid \quad P(C) = Q(C)\,\}$$

は Dynkin 族であるから

$$\mathscr{C} \subset \mathscr{D} \Longrightarrow \delta(\mathscr{C}) \subset \mathscr{D}$$

が成立し，併せれば

$$\forall C \in \mathscr{C}\,(\,P(C) = Q(C)\,) \Longrightarrow \mathscr{B}(C[0,\infty)) = \mathscr{D}$$

となる．いま C を $\mathscr{C}$ の任意の要素とすれば，

$$0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_d < \infty$$

なる $t_1, t_2, \cdots, t_d$ と $\mathscr{B}(R^d)$ の要素 A によって

$$C = \{\, \omega \in \mathrm{C}[0,\infty) \mid \quad (\omega(t_1), \omega(t_2), \cdots, \omega(t_d)) \in A \,\}$$

となる．書き換えれば

$$C = \pi^{-1}_{t_1,\cdots,t_d}(A)$$

となるので

$$P\pi^{-1}_{t_1,\cdots,t_d} = Q\pi^{-1}_{t_1,\cdots,t_d} \Longrightarrow P(C) = Q(C)$$

が成り立つ．すなわち，時点 $t_1, \cdots, t_d$ のあらゆる取り方に対して

$$P\pi^{-1}_{t_1,\cdots,t_d} = Q\pi^{-1}_{t_1,\cdots,t_d} \tag{2.16}$$

を示せば (2.15) が従う．

第四段　(2.16) を示す．f を

$$f : R^d \longrightarrow \mathbf{R}$$

なる有界連続写像とすれば，$f \circ \pi_{t_1,\cdots,t_d}$ は

$$f \circ \pi_{t_1,\cdots,t_d} : \mathrm{C}[0,\infty) \longrightarrow \mathbf{R}$$

なる有界連続写像となる．従って

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{C}[0,\infty)} f \circ \pi_{t_1,\cdots,t_d}\, dP_{n_i} &\longrightarrow \int_{\mathrm{C}[0,\infty)} f \circ \pi_{t_1,\cdots,t_d}\, dP \quad (i \longrightarrow \infty), \\ \int_{\mathrm{C}[0,\infty)} f \circ \pi_{t_1,\cdots,t_d}\, dP_{n(k,2)} &\longrightarrow \int_{\mathrm{C}[0,\infty)} f \circ \pi_{t_1,\cdots,t_d}\, dQ \quad (k \longrightarrow \infty)\end{aligned} \tag{2.17}$$

が満たされるが，f は任意に選ばれていたので $\left(P_{n_i}\pi^{-1}_{t_1,\cdots,t_d}\right)_{i=1}^{\infty}$ と $\left(P_{n(k,2)}\pi^{-1}_{t_1,\cdots,t_d}\right)_{k=1}^{\infty}$ はそれぞれ $P\pi^{-1}_{t_1,\cdots,t_d}$ と $Q\pi^{-1}_{t_1,\cdots,t_d}$ に弱収束することになる．ところで定理の仮定から

$$\int_{R^d} f\, dP^{(n)}\pi_{t_1,\cdots,t_d}(X^{(n)}_{\bullet})^{-1} \longrightarrow \int_{R^d} f\, dP^* \quad (n \longrightarrow \infty) \tag{2.18}$$

を満たす $\mathscr{B}(R^d)$ 上の確率測度 P^* が存在する．すなわち

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{C}[0,\infty)} f \circ \pi_{t_1,\cdots,t_d}\, dP_n &= \int_{\mathrm{C}[0,\infty)} f \circ \pi_{t_1,\cdots,t_d}\, dP^{(n)}X^{(n)^{-1}}_{\bullet} \\ &\longrightarrow \int_{R^d} f\, dP^* \quad (n \longrightarrow \infty)\end{aligned}$$

が成立し，収束列の部分列は同じ極限に収束するから

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{C}[0,\infty)} f \circ \pi_{t_1,\cdots,t_d}\, dP_{n_i} &\longrightarrow \int_{R^d} f\, dP^* \quad (i \longrightarrow \infty), \\ \int_{\mathrm{C}[0,\infty)} f \circ \pi_{t_1,\cdots,t_d}\, dP_{n(k,2)} &\longrightarrow \int_{R^d} f\, dP^* \quad (k \longrightarrow \infty)\end{aligned} \tag{2.19}$$

が成立する．f は任意に選ばれていたので，$\left(P_{n_i}\pi^{-1}_{t_1,\cdots,t_d}\right)_{i=1}^{\infty}$ と $\left(P_{n(k,2)}\pi^{-1}_{t_1,\cdots,t_d}\right)_{k=1}^{\infty}$ が P^* に弱収束することが示された．弱極限の一意性より

$$P\pi^{-1}_{t_1,\cdots,t_d} = P^* = Q\pi^{-1}_{t_1,\cdots,t_d}$$

が成立する．以上で (2.16) が示された．そして $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ が P に弱収束することも示された．他方で，(2.17) と (2.19) から

$$\int_{C[0,\infty)} f \circ \pi_{t_1,\cdots,t_d}\, dP = \int_{R^d} f\, dP^*$$

が成立し，これと (2.18) を併せれば

$$\int_{R^d} f\, dP^{(n)}\pi_{t_1,\cdots,t_d}(X^{(n)}_{\bullet})^{-1} \longrightarrow \int_{C[0,\infty)} f \circ \pi_{t_1,\cdots,t_d}\, dP \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成立する．ここで $W_{\bullet}$ は $C[0,\infty)$ 上の恒等写像であるから

$$f \circ \pi_{t_1,\cdots,t_d} = f \circ \pi_{t_1,\cdots,t_d} \circ W_{\bullet}$$

が成立し，

$$\int_{R^d} f\, dP^{(n)}\pi_{t_1,\cdots,t_d}(X^{(n)}_{\bullet})^{-1} \longrightarrow \int_{C[0,\infty)} f\, dP\pi_{t_1,\cdots,t_d}(W_{\bullet})^{-1} \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が従う．f は任意に選ばれていたので (2.14) が示された． ∎

2.7 The Invariance Principle and the Wiener Measure

P.67

$s = k/n$ のとき

$$\mathscr{F}_s^{X^{(n)}} = \sigma(\xi_1, \cdots, \xi_k).$$

略証.　まず

$$\mathscr{F}_s^{X^{(n)}} \subset \sigma(\xi_1, \cdots, \xi_k) \tag{2.20}$$

を示す．$t \geq 0$ かつ $[t] < t$ なる実数 t に対し，Y_t が

$$\sigma(\xi_1, \cdots, \xi_{[t]+1})/\mathscr{B}(\mathbf{R})$$

可測であることを示す．実際，

$$\omega \longmapsto \left(\xi_1(\omega), \cdots, \xi_{[t]+1}(\omega)\right)$$

は $\sigma(\xi_1, \cdots, \xi_{[t]+1})/\mathscr{B}(\mathbf{R}^{[t]+1})$-可測であって

$$(x_1, \cdots, x_{[t]+1}) \longmapsto x_1 + \cdots + x_{[t]} + (t - [t])x_{[t]+1}$$

は $\mathscr{B}(\mathbf{R}^{[t]+1})/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測であるから Y_t は $\sigma(\xi_1, \cdots, \xi_{[t]+1})/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測である．$t = [t]$ ならば Y_t は $\sigma(\xi_1, \cdots, \xi_{[t]})/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測である．

$$\mathbf{R} \ni x \longmapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} x$$

は連続であるから $\mathscr{B}(\mathbf{R})/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測であって，従って $X_t^{(n)}$ は

$[nt] < nt$ ならば $\sigma(\xi_1, \cdots, \xi_{[nt]+1})/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測,

$[nt] = nt$ ならば $\sigma(\xi_1, \cdots, \xi_{[nt]})/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測であって，いずれにせよ

$$\sigma(\xi_1, \cdots, \xi_{[nt]+1})/\mathscr{B}(\mathbf{R})$$

可測となる．r を $0 \leq r \leq s$ なる実数とすれば,

$$nr < k \Longrightarrow [nr] + 1 \leq k$$

が成り立つので，$X_r^{(n)}$ が $\sigma(\xi_1, \cdots, \xi_k)/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測であるとわかる．

$$\bigcup_{0 \leq r \leq s} \left\{ X_r^{(n)^{-1}}(A) \mid \quad A \in \mathscr{B}(\mathbf{R}) \right\} \subset \sigma(\xi_1, \cdots, \xi_k)$$

が成り立つので (2.20) が従う．次に

$$\sigma(\xi_1, \cdots, \xi_k) \subset \mathscr{F}_s^{X^{(n)}} \tag{2.21}$$

を示す．$1 \leq j \leq k$ なる整数 j に対し

$$\xi_j = \sigma\sqrt{n} \left(X_{j/n}^{(n)} - X_{(j-1)/n}^{(n)} \right)$$

となる．$X_{j/n}^{(n)}$ も $X_{(j-1)/n}^{(n)}$ も $\mathscr{F}_s^{X^{(n)}}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測であるから ξ_j も $\mathscr{F}_s^{X^{(n)}}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測である．ゆえに

$$\bigcup_{j=1}^{k} \left\{ \xi_j^{-1}(A) \mid \quad A \in \mathscr{B}(\mathbf{R}) \right\} \subset \mathscr{F}_s^{X^{(n)}}$$

が成り立つので (2.21) が従う． ∎

付録 A

集合論理

このノートは横浜駅の工事のようにいつまでも終わらない．そして至る所にミッシングリンクが見られる．若干どころではなく言語の設定を誤った？感じがするが，つまりややこしいドツボにハマってしまっているのだが，仕方がないのでうまく乗り切る方法を模索している．

A.1　言語

本稿の世界を展開するために使用する言語は二つある．一つは自然言語である日本語であり，もう一つは記号のみで創られた人工的な言語である．その人工的な言語は記号列が数学の式となるための文法を指定し，そこで組み立てられた式のみが考察対象となる．日本語はメタ言語とも呼ばれ，式を解釈したり人工言語を補助するために使われる．

まず，人工的な言語である $\mathcal{L}$ を設定する．以下は $\mathcal{L}$ を構成する要素である:

対象　予め存在が約束されている，$\mathcal{L}$ における名詞を指す．

使用文字　使う文字は表 (P. 625) にあるものに限る．

述語記号　$=, \in$

論理記号　$\perp, \Longrightarrow, \wedge, \vee, \rightharpoondown$

量化記号　$\forall, \exists$

補助記号　[,] , (,) , { , } , < , > , |

定義記号　$\overset{\text{def}}{=}, \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

日本語において，“あｍｔ後右所ｓごぐふぉｓｄ”のように無作為に文字を並べただけでは意味不明な文字列が出来上がる．文字列は，何らかの規則に従って並ぶことで単語や文章として成立するのである．数学も同じで，一定の規則に従って並ぶ記号列のみを $\mathcal{L}$ の文章として扱う．$\mathcal{L}$ において，名詞にあたるものは**対象 (individual)** と呼ばれる．述語とは対象同士を結ぶものであり，最小単位の文章を形成する．例えば s, t を対象とするとき

$$s \in t$$

は $\mathcal{L}$ の文章となり，日本語には“s は t の要素である”と翻訳される．$\mathcal{L}$ の文章を**式 (formula)** 或は**論理式**と呼ぶ．論理記号とは式同士を繋ぐ役割を持つ．

対象がどういうものであるかは後で判明しますが，今のところはその実態は伏せておいて，とりあえず対象は存在しているものとして話を進めます．また $\mathcal{L}$ の対象は上で指定した記号の組み合わせでは表せないということも認めます．説明中は "s を対象とする" のように書くことが多いですが，これは一時的に s を対象の一つに代用しているだけで，文字 's' が対象であると言っているのではありません．このような代用記号のことを**超記号**と呼びます．式にも超記号を宣言することが多いです．

対象および文字を**項 (term)** と呼び，対象を用いて作られていた式は対象を項に替えても式と呼ぶことにする．

A を式とし (上述の通り A とは超記号である)，A の中に文字 x が現れるとき，'$\forall x(A)$' や '$\exists x(A)$' と書けば新しい記号列が得られる．このとき文字 x は '$\forall x(A)$' で，或は '$\exists x(A)$' で**量化されている (quantified)** という．

項と式の構成法を形式的に書き直すと次のようになる．

項　言語 $\mathcal{L}$ の対象は $\mathcal{L}$ の項であり，文字も $\mathcal{L}$ の項である．またそれらのみが $\mathcal{L}$ の項である．

式
- '$\perp$' は $\mathcal{L}$ の式である．
- s, t を $\mathcal{L}$ の項とするとき，'$s = t$' と '$s \in t$' はどちらも $\mathcal{L}$ の式である．
- A, B がすでに $\mathcal{L}$ の式であると判明しているとき，'$(A) \wedge (B)$'，'$(A) \vee (B)$'，'$(A) \Longrightarrow (B)$' はいずれも $\mathcal{L}$ の式である．
- A がすでに $\mathcal{L}$ の式であると判明しているとき，'$\rightharpoondown (A)$' は $\mathcal{L}$ の式である．
- A がすでに $\mathcal{L}$ の式であると判明していて，x を A に現れる文字とするとき，x が A で量化されていないときに限り '$\forall x(A)$' と '$\exists x(A)$' はどちらも $\mathcal{L}$ の式である．
- 以上の操作を繰り返して得られる記号列のみが $\mathcal{L}$ の式である．

'以上の操作を繰り返して得られる記号列のみが式である' の意味

最後の制限を外してしまうと，例えば

$$\exists(\rightharpoondown (\exists x(\forall y(x = y))))$$

という記号列が式であるか式でないかは判別できません．仮に式で OK としても解釈に困りますから，これは式ではないと決めているのです．

式の定義では，始めに最も簡単な形の式 ('$\perp$' や '$s = t$') を提示して，以降の段階で新しい式を作り出す手段 (論理記号による式の接ぎ合わせ) を指定しています．このような定義を**帰納的定義 (inductive definition)** と呼びます．

A を式とし，a と x を項とする (ここでの A, a, x はどれも超記号である)．A が '$t = a$' という式である場合など式中に項 a が現れるとき，A に現れる全ての項 a を項 x に置き換えた式を

$$(x \mid a) A$$

で表す．特に a が文字であり，かつ A に現れる文字で量化されていないものが a のみであるとき，$(x \mid a) A$ を

$$A(x)$$

とも書く．このとき式 A 自体は $(a \mid a) A$ とも $A(a)$ とも書ける．

いま言語 $\mathcal{L}$ を設定したばかりであるが，例えば x のみが量化されていない式 A に対して

$$\{\, x \mid \quad A(x)\,\}$$

という記法を導入し (これを**内包的記法 (intensional notation)** と呼ぶ)，これを対象として

$$s \in \{\, x \mid \quad A(x)\,\}, \quad t = \{\, x \mid \quad A(x)\,\}$$

のように式に組み込んで扱いたい．そこで $\mathcal{L}$ を言語 $\mathcal{L}'$ に拡張する．$\mathcal{L}'$ の使用文字，定数記号，述語記号，論理記号，量化記号，補助記号は $\mathcal{L}$ のものをそのまま継承し，対象・項・式は次のように定める:

対象
- A を $\mathcal{L}$ の式とし，x を A に現れる文字とし，x のみが A で量化されていないとするとき，$\{\, x \mid \quad A(x)\,\}$ は $\mathcal{L}'$ の対象である．
- $\mathcal{L}$ の対象は $\mathcal{L}'$ の対象である．
- 以上のみが $\mathcal{L}'$ の対象である．

項　言語 $\mathcal{L}'$ の対象は $\mathcal{L}'$ の項であり，文字も $\mathcal{L}'$ の項である．またそれらのみが $\mathcal{L}'$ の項である．

式
- $\perp$ は $\mathcal{L}'$ の式である．
- s, t を $\mathcal{L}'$ の項とするとき，'$(s = t)$' と '$(s \in t)$' はどちらも $\mathcal{L}'$ の式である．
- A, B がすでに $\mathcal{L}'$ の式であると判明しているとき，'$(A) \wedge (B)$'，'$(A) \vee (B)$'，'$(A) \Longrightarrow (B)$' はいずれも $\mathcal{L}'$ の式である．
- A がすでに $\mathcal{L}'$ の式であると判明しているとき，'$\rightharpoondown (A)$' は $\mathcal{L}'$ の式である．
- A がすでに $\mathcal{L}'$ の式であると判明していて，x を A に現れる文字とするとき，x が A で量化されていないときに限り '$\forall x(A(x))$' と '$\exists x(A(x))$' はどちらも $\mathcal{L}'$ の式である．
- 以上の操作を繰り返して得られる記号列のみが $\mathcal{L}'$ の式である．

A を $\mathcal{L}$ の式とするとき，文字 x が A に現れ，かつ x のみが A で量化されていないならば

$$\{\, x \mid \quad A(x)\,\}$$

は $\mathcal{L}'$ の対象であると決めましたが，いま $A(x)$ の中に文字 y が現れないならば，式 $A(y)$ には文字 y が現れ，かつ y のみが量化されていないことになりますから

$$\left\{\, y \mid \quad A(y)\,\right\}$$

もまた $\mathcal{L}'$ の対象となります．このとき '$\{\, x \mid \quad A(x)\,\}$' と '$\left\{\, y \mid \quad A(y)\,\right\}$' は x と y の違いを除いて同じ記号列になりますから，これらを同等な対象として扱いたいものです．同等とは等号で結ばれることですが，このことは後述する "類の公理" と "外延性の公理" により保証されます．

$\mathcal{L}'$ の式のうち，量化されていない文字を含まないものを**閉式 (closed formula)** と呼ぶ．定理として考察するものは全て閉式である．また数などの特別な対象や概念は**枠線付きの定義**により名前を付けていく．一度枠線付きの定義で名前を付けられた対象や概念は，それ以後は本稿においてその名前で通用する．他方，枠線付きの定義という手続きを踏まなくても，便宜のために説明や証明の途中で対象に名前を付けることがある．それは次のようなものである:

$\cdots$ いま $P \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \{\, x \mid \quad \forall t\,(\, x = t \vee x \in t\,)\,\}$ とおく．このとき...

記号 '$\overset{\mathrm{def}}{=\!=}$' は**定義記号**と呼ばれ，右辺の記号列に左辺の記号で名前を付けるという意味で使われる．このような文言は

多くの説明や証明に出てくるが，実際上の効果として，以後の式に出てくる ‘$\{\,x \mid \quad \forall t\,(\,x = t \lor x \in t\,)\,\}$’ の部分を ‘$P$’ で置き換えられるようになる．ただしその場合の定義はその説明や証明の中でのみ通用するものと約束する．

定義 A.1.1 (宇宙). $\mathbf{V} \overset{\mathrm{def}}{=} \{\,x \mid \quad x = x\,\}$ で定める $\mathbf{V}$ を**宇宙 (Universe)** と呼ぶ．

宇宙が $\mathbf{V}$ で表されるのは John Von Neumann の V に由来していて，Von Neumann 宇宙とも呼ばれる．

$\mathbf{V}$ は $\mathcal{L}'$ で用意されていた記号ではありませんでしたが，$\overset{\mathrm{def}}{=}$ によって

$$\{\,x \mid \quad x = x\,\}$$

の名前として $\mathcal{L}'$ での立場を与えられました．このように既存の単語から定められる新しい記号を**派生記号**と呼びます．さて宇宙という壮大な言葉が出てきましたが，後述する通り $\mathbf{V}$ は集合の全体のことですから，あらゆるものが集合で説明される現代数学にとって $\mathbf{V}$ はまさしく宇宙なのですね．また定理 A.14.2 で $\mathbf{V}$ の実態が明らかになるでしょう．我々はこの定理で集合とは何者かという問いへの完全な答えを得ることになります．ところで，現実世界において人間が把握し得る最大の世界は宇宙空間でしょうが，数学では宇宙の外側を見ることが出来るのです．そこは真類と呼ばれるものの世界です．実は宇宙そのものも真類の一つなのですが，その話も後述 (P. 155) にまかせましょう．

式の翻訳を列挙する．

- 式 $a = b$ を “a は b に等しい” や “a と b は等しい” と翻訳する．
- 式 $a \in b$ を “a は b の要素である” や “a は b に属する” と翻訳する．
- 式 $(A) \Longrightarrow (B)$ を “A が成り立つならば B が成り立つ” と翻訳する．
- 式 $\rightharpoondown (A)$ を “A でない” と翻訳する．
- 式 $(A) \lor (B)$ を “A または B” と翻訳する．
- 式 $(A) \land (B)$ を “A かつ B” と翻訳する．

定義 A.1.2 (類・集合). $\mathcal{L}'$ の対象のことを**類 (class)** と呼ぶ．また a を類とするとき

$$\mathrm{set}\,(a) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \exists x\,(\,a = x\,)$$

と定め，$\mathrm{set}\,(a)$ が成立すれば a を**集合 (set)** と呼び，$\rightharpoondown \mathrm{set}\,(a)$ が成立すれば a を**真類 (proper class)** と呼ぶ．

我々はまだ $\exists$ が持つ意味を規定していませんが，先に述べてしまうと上の定義は**集合とは $\mathcal{L}$ の対象か $\mathcal{L}$ の対象に等しい類のことを指す**と解釈できます．また後述することですが宇宙は集合の全体に一致します．つまり $\mathbf{V}$ の要素である類は集合であり，逆に類が集合であるならば $\mathbf{V}$ の要素であるのです (定理 A.3.9).

A.2　推論

本節では，「集合でも真類でもない類は存在しない」と「集合であり真類でもある類は存在しない」の二つの言明の正否の決定を主軸にして**推論規則 (rule of inference)** を導入し，基本的な推論法則を導出する．

推論規則 A.2.1 (排中律).　A を $\mathcal{L}'$ の閉式とするとき次は定理である:

$$A \vee \rightharpoondown A.$$

排中律の言明は“どんな閉式でも持ってくれば，その式に対して排中律が適用される”という意味です．このように無際限に存在し得る定理を一括して表す書き方を**公理図式 (schema)** と呼びます．

いま a, b を類とするとき，

$$a \notin b \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \rightharpoondown a \in b$$

で $a \notin b$ を定める．同様に

$$a \neq b \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \rightharpoondown a = b$$

で $a \neq b$ を定める．

定義記号 $\overset{\text{def}}{=}$ と同様に，‘$A \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} B$’ とは式 B を記号列 A で置き換えて良いという意味で使われます．また，式中に記号列 A が出てくるときは，暗黙裡にその A を B に戻して式を解釈します．$\overset{\text{def}}{=}$ も $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ も略記することと同じですね．

定理 A.2.2 (類は集合であるか真類であるかのいずれかに定まる).　a を類とするとき次は定理である:

$$\operatorname{set}(a) \vee \rightharpoondown \operatorname{set}(a).$$

証明.　排中律を適用することにより従う．■

排中律をそのまま適用することにより上の定理は導かれたが，“集合であり真類でもある類は存在しない”という主張はまだ得られない．以下はこの言明を証明することを目標にしてしばらく推論規則の話が続くが，提示される規則はどれも基本的で直感に反しないため通常は無断で使用されてしまうものである．

ここで論理記号の名称を書いておく．

- $\perp$ を**矛盾 (contradiction)** と呼ぶ．
- $\vee$ を**論理和 (logical disjunction)** と呼ぶ．
- $\wedge$ を**論理積 (logical conjunction)** と呼ぶ．
- $\Longrightarrow$ を**含意 (implication)** と呼ぶ．
- $\rightharpoondown$ を**否定 (negation)** と呼ぶ．

推論規則 A.2.3 (基本的な推論規則). A, B, C を $\mathcal{L}'$ の閉式とするとき，次の規則を認める:

三段論法　A ならびに $A \Longrightarrow B$ が定理なら B は定理である．

演繹法則　A を公理に追加した下で B が定理であるなら，A を外した公理系で $A \Longrightarrow B$ は定理である．

論理和の導入イ　$A \Longrightarrow (A \vee B)$ は定理である．

論理和の導入ロ　$A \Longrightarrow (B \vee A)$ は定理である．

論理積の導入　A, B が共に定理なら $A \wedge B$ は定理である．

論理積の除去イ　$(A \wedge B) \Longrightarrow A$ は定理である．

論理積の除去ロ　$(A \wedge B) \Longrightarrow B$ は定理である．

場合分け法則　$A \Longrightarrow C$ と $B \Longrightarrow C$ が共に定理であるとき $(A \vee B) \Longrightarrow C$ は定理である．

演繹法則について，“A を公理に追加する” ことを “A が成り立っていると仮定する” などの言明により示唆することが多いです．

演繹法則の意味

我々は公理か，或いは公理図式として，複数の式を選び出し $\mathcal{L}'$ の世界において正しいと決める．それらは以降小出しに登場させるが，その全体は現段階ですでに決めているのでそれを

$$\mathscr{S}$$

と呼ぶことにする．本稿で出てくる “正しい式” とは $\mathscr{S}$ のみを公理系とした体系において証明される式を指す．演繹法則は，“A が成り立つとする” などの言明により $\mathscr{S}$ に式 A を加えたとき，その新しい公理系 $\mathscr{S}'$ の下で式 B が成り立つなら，$\mathscr{S}$ のみを公理とした体系において

$$A \Longrightarrow B$$

が成立する，と主張している．複数の式を $\mathscr{S}$ に追加する場合もある．たとえば $\mathscr{S}'$ に式 C を追加し，その新しい公理体系 $\mathscr{S}''$ の下で式 D が成り立つ場合，演繹法則に則れば $\mathscr{S}'$ の下で

$$C \Longrightarrow D$$

が成立する．(ちなみに $\mathscr{S}''$ から式 A のみを抜いた公理系の下では $A \Longrightarrow D$ が正しくなる．) このとき $\mathscr{S}$ を公理系とした下では，再び演繹法則を適用することにより

$$A \Longrightarrow (C \Longrightarrow D)$$

が成立するとわかる，が，

$$C \Longrightarrow D$$

が成り立つ保証は無い．非常に屡々いくつも仮定を重ねたところに演繹法則を運用することがあるが，その都度どの段階の公理系を扱っているかを明確に把握しておかないと推論が破綻してしまう恐れがある．

推論法則 A.2.4 (含意の反射律). A を $\mathcal{L}'$ の閉式とするとき $A \Longrightarrow A$ は定理である．

証明. A を公理に追加すれば A は成立するので，演繹法則より $A \Longrightarrow A$ は定理である. ∎

推論法則 A.2.5 (論理和・論理積の可換律). A, B を $\mathcal{L}'$ の閉式とするとき次は定理である:

- $(A \vee B) \Longrightarrow (B \vee A)$.
- $(A \wedge B) \Longrightarrow (B \wedge A)$.

証明. $\vee$ の導入により

$$A \Longrightarrow (B \vee A)$$

と

$$B \Longrightarrow (A \vee B)$$

は定理であるから，場合分け法則より

$$(A \vee B) \Longrightarrow (B \vee A)$$

は定理である．また，$\wedge$ の除去より

$$A \wedge B \Longrightarrow A$$

と

$$A \wedge B \Longrightarrow B$$

は定理であるから，いま

$$A \wedge B$$

が成り立っていると仮定すれば三段論法により B も A も定理となる．このとき

$$B \wedge A$$

が定理となるので，演繹法則より

$$(A \wedge B) \Longrightarrow (B \wedge A)$$

は定理である. ∎

推論法則 A.2.6 (含意の推移律). A, B, C を $\mathcal{L}'$ の閉式とするとき，$A \Longrightarrow B$ と $B \Longrightarrow C$ が共に定理ならば $A \Longrightarrow C$ は定理である.

証明. $A \Longrightarrow B$ と $B \Longrightarrow C$ が共に定理であるとして，A が成り立っていると仮定する．このとき三段論法より B が定理となり，再び三段論法より C が定理となる．ゆえに $A \Longrightarrow C$ は定理である. ∎

推論法則 A.2.7 (二式が同時に導かれるならその論理積が導かれる).　A, B, C を $\mathcal{L}'$ の閉式とするとき，$A \Longrightarrow B$ と $A \Longrightarrow C$ が共に定理ならば $A \Longrightarrow (B \wedge C)$ は定理である．

証明．$A \Longrightarrow B$ と $A \Longrightarrow C$ が共に定理であるとき，A が成り立っていると仮定する．このとき三段論法より B と C が同時に成り立つので，論理積の導入より $B \wedge C$ が成り立つ．従って演繹法則より

$$A \Longrightarrow (B \wedge C)$$

が成立する．∎

推論法則 A.2.8 (含意は遺伝する).　A, B, C を $\mathcal{L}'$ の閉式とするとき以下が成り立つ:

(a) $(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow ((A \vee C) \Longrightarrow (B \vee C))$.

(b) $(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow ((A \wedge C) \Longrightarrow (B \wedge C))$.

(c) $(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow ((B \Longrightarrow C) \Longrightarrow (A \Longrightarrow C))$.

(c) $(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow ((C \Longrightarrow A) \Longrightarrow (C \Longrightarrow B))$.

証明．

(a) いま $A \Longrightarrow B$ が成り立っていると仮定する．論理和の導入により

$$C \Longrightarrow (B \vee C)$$

は定理であるから，含意の推移律より

$$A \Longrightarrow (B \vee C)$$

が従い，場合分け法則より

$$(A \vee C) \Longrightarrow (B \vee C)$$

が成立する．ここに演繹法則を適用して

$$(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow ((A \vee C) \Longrightarrow (B \vee C))$$

が得られる．

(b) いま $A \Longrightarrow B$ が成り立っていると仮定する．論理積の除去より

$$(A \wedge C) \Longrightarrow A$$

は定理であるから，含意の推移律より

$$(A \wedge C) \Longrightarrow B$$

が従い，他方で論理積の除去より

$$(A \wedge C) \Longrightarrow C$$

も満たされる．そして推論法則 A.2.7 から

$$(A \wedge C) \Longrightarrow (B \wedge C)$$

が成り立ち，演繹法則より

$$(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow ((A \wedge C) \Longrightarrow (B \wedge C))$$

が得られる．

(c) いま $A \Longrightarrow B$，$B \Longrightarrow C$ および A が成り立っていると仮定する．このとき三段論法より B が成り立つので再び三段論法より C が成立する．ゆえに演繹法則より $A \Longrightarrow B$ と $B \Longrightarrow C$ が成り立っている下で

$$A \Longrightarrow C$$

が成立し，演繹法則を更に順次適用すれば

$$(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow ((B \Longrightarrow C) \Longrightarrow (A \Longrightarrow C))$$

が得られる．

(d) いま $A \Longrightarrow B$，$C \Longrightarrow A$ および C が成り立っていると仮定する．このとき三段論法より A が成り立つので再び三段論法より B が成立し，ここに演繹法則を適用すれば，$A \Longrightarrow B$ と $C \Longrightarrow A$ が成立している下で

$$C \Longrightarrow B$$

が成立する．演繹法則を更に順次適用すれば

$$(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow ((C \Longrightarrow A) \Longrightarrow (C \Longrightarrow B))$$

が得られる． ∎

推論法則 A.2.9 (正しい式は仮定を選ばない). A, B を $\mathcal{L}'$ の閉式とするとき，$B \Longrightarrow (A \Longrightarrow B)$ は定理である．

証明. B を公理に追加した場合，A を公理に追加しても B は真であるから，このとき

$$A \Longrightarrow B$$

は定理となる．従って演繹法則より $B \Longrightarrow (A \Longrightarrow B)$ は定理である． ∎

A と B を $\mathcal{L}'$ の式とするとき，

$$(A \Longleftrightarrow B) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (A \Longrightarrow B \wedge B \Longrightarrow A)$$

により $\Longleftrightarrow$ を定め，式 ‘$A \Longleftrightarrow B$’ を “A と B は**同値である (equivalent)**” と翻訳する．

推論法則 A.2.10 (同値記号の可換律). A と B を $\mathcal{L}'$ の閉式とするとき

$$(A \Longleftrightarrow B) \Longrightarrow (B \Longleftrightarrow A).$$

略証.　$A \Longleftrightarrow B$ が成り立っているならば，推論法則 A.2.5 より

$$B \Longrightarrow A \wedge A \Longrightarrow B$$

が成立する．すなわち

$$B \Longleftrightarrow A$$

が成立する．そして演繹法則から

$$(A \Longleftrightarrow B) \Longrightarrow (B \Longleftrightarrow A)$$

が成立する． ∎

推論法則 A.2.11 (同値記号の遺伝性質).　A, B, C を $\mathcal{L}'$ の閉式とするとき以下の式が成り立つ:

(a)　$(A \Longleftrightarrow B) \Longrightarrow ((A \vee C) \Longleftrightarrow (B \vee C))$.

(b)　$(A \Longleftrightarrow B) \Longrightarrow ((A \wedge C) \Longleftrightarrow (B \wedge C))$.

(c)　$(A \Longleftrightarrow B) \Longrightarrow ((B \Longrightarrow C) \Longleftrightarrow (A \Longrightarrow C))$.

(d)　$(A \Longleftrightarrow B) \Longrightarrow ((C \Longrightarrow A) \Longleftrightarrow (C \Longrightarrow B))$.

証明.　まず (a) を示す．いま $A \Longleftrightarrow B$ が成り立っていると仮定する．このとき $A \Longrightarrow B$ と $B \Longrightarrow A$ が共に成立し，他方で含意の遺伝性質より

$$(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow ((A \vee C) \Longrightarrow (B \vee C)),$$
$$(B \Longrightarrow A) \Longrightarrow ((B \vee C) \Longrightarrow (A \vee C))$$

が成立するから三段論法より $(A \vee C) \Longrightarrow (B \vee C)$ と $(B \vee C) \Longrightarrow (A \vee C)$ が共に成立する．ここに $\wedge$ の導入を適用すれば

$$(A \vee C) \Longleftrightarrow (B \vee C)$$

が成立し，演繹法則を適用すれば

$$(A \Longleftrightarrow B) \Longrightarrow ((A \vee C) \Longleftrightarrow (B \vee C))$$

が得られる．(b)(c)(d) も含意の遺伝性を適用すれば得られる． ∎

推論規則 A.2.12 (矛盾と否定に関する規則).　A を $\mathcal{L}'$ の閉式とするとき以下の式が成り立つ:

矛盾の発生　否定が共に成り立つとき矛盾が導かれる:

$$(A \wedge \neg A) \Longrightarrow \perp.$$

否定の導出　矛盾が導かれるとき否定が成り立つ:

$$(A \Longrightarrow \perp) \Longrightarrow \neg A.$$

二重否定の法則　二重に否定された式は元の式を導く:

$$\neg\neg A \Longrightarrow A.$$

A を $\mathcal{L}'$ の閉式とするとき，式 $A \Longrightarrow \perp$ を "A は**偽である (false)**" と翻訳します.

否定の導出の逆は定理として得られる.

推論法則 A.2.13 (否定が正しい式は偽である).　A を $\mathcal{L}'$ の閉式とするとき次が成り立つ:

$$\neg A \Longrightarrow (A \Longrightarrow \perp).$$

証明.　$\neg A$ が成り立っていると仮定する．このとき A が成り立っていれば推論規則 A.2.12 より $\perp$ が成立するから，演繹法則より

$$\neg A \Longrightarrow (A \Longrightarrow \perp)$$

が成り立つ. ∎

推論法則 A.2.14 (矛盾からはあらゆる式が導かれる).　A を $\mathcal{L}'$ の閉式とするとき

$$\perp \Longrightarrow A.$$

証明.　推論法則 A.2.9 より

$$\perp \Longrightarrow (\neg A \Longrightarrow \perp)$$

が成り立つ．また否定の導出より

$$(\neg A \Longrightarrow \perp) \Longrightarrow \neg\neg A$$

も成り立ち，さらに二重否定の法則から

$$\neg\neg A \Longrightarrow A$$

も成り立つ．上の式に含意の推移律を適用すれば

$$\perp \Longrightarrow A$$

が得られる． ∎

推論法則 A.2.15 (背理法の原理). A を $\mathcal{L}'$ の閉式とするとき

$$(\neg A \Longrightarrow \perp) \Longrightarrow A.$$

証明. $\neg A \Longrightarrow \perp$ が成り立つとき，否定の導出より $\neg\neg A$ が成り立つが，二重否定の法則より A も成立する． ∎

推論法則 A.2.16 (矛盾を導く式はあらゆる式を導く). A, B を $\mathcal{L}'$ の閉式とするとき，次が成り立つ:

$$(A \Longrightarrow \perp) \Longrightarrow (A \Longrightarrow B).$$

証明. $A \Longrightarrow \perp$ が成り立っているとする．推論法則 A.2.14 より

$$\perp \Longrightarrow B$$

が満たされるので，含意の推移律より

$$A \Longrightarrow B$$

が成り立つ．従って演繹法則を適用すれば

$$(A \Longrightarrow \perp) \Longrightarrow (A \Longrightarrow B)$$

が得られる． ∎

推論法則 A.2.17 (含意は否定と論理和で表せる). A, B を $\mathcal{L}'$ の閉式とするとき，次が成り立つ:

$$(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg A \vee B).$$

証明. $A \Longrightarrow B$ が成り立っていると仮定する．含意の遺伝性質より

$$(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow ((A \vee \neg A) \Longrightarrow (B \vee \neg A))$$

が満たされているから三段論法より

$$(A \vee \neg A) \Longrightarrow (B \vee \neg A)$$

は定理となり，ここに排中律と三段論法を適用すれば

$$B \lor \neg A$$

が定理となる．ここで論理和の可換律より $\neg A \lor B$ が成り立つので，演繹法則を適用して

$$(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow (\neg A \lor B)$$

が得られる．また矛盾に関する推論規則より

$$\neg A \Longrightarrow (A \Longrightarrow \bot)$$

が成り立ち，同時に推論法則 A.2.16 より

$$(A \Longrightarrow \bot) \Longrightarrow (A \Longrightarrow B)$$

も成り立つので，含意の推移律より

$$\neg A \Longrightarrow (A \Longrightarrow B)$$

が成立する．他方で推論法則 A.2.9 より

$$B \Longrightarrow (A \Longrightarrow B)$$

も成り立つから，場合分けの法則より

$$(\neg A \lor B) \Longrightarrow (A \Longrightarrow B)$$

が成り立つ．以上で $(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg A \lor B)$ が得られた． ∎

A, B を $\mathcal{L}'$ の閉式とするとき，A が偽であれば $\neg A$ が成立する (推論規則 A.2.12) ので $\neg A \lor B$ が成立します (推論規則 A.2.3)．すなわちこのとき $A \Longrightarrow B$ が成り立つのですが，式の解釈としては“偽な式からはあらゆる式が導かれる”となりますね．この現象を**空虚な真 (vacuous truth)** と呼びます．

推論法則 A.2.18 (二重否定の法則の逆が成り立つ). A を $\mathcal{L}'$ の閉式とするとき，次が成り立つ:

$$A \Longrightarrow \neg\neg A.$$

証明. 排中律より

$$\neg A \lor \neg\neg A$$

が成立し，また推論法則 A.2.17 より

$$(\neg A \lor \neg\neg A) \Longrightarrow (A \Longrightarrow \neg\neg A)$$

も成り立つので，三段論法より

$$A \Longrightarrow \neg\neg A$$

が成立する． ∎

推論法則 A.2.19 (対偶命題は同値).　A, B を $\mathcal{L}'$ の閉式とするとき，次が成り立つ:

$$(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg B \Longrightarrow \neg A).$$

証明.　推論法則 A.2.17，論理和の可換律，二重否定の法則 (とその逆) を順に用いれば

$$\begin{aligned}(A \Longrightarrow B) &\Longleftrightarrow (\neg A \vee B)\\ &\Longleftrightarrow (B \vee \neg A)\\ &\Longleftrightarrow (\neg\neg B \vee \neg A)\\ &\Longleftrightarrow (\neg B \Longrightarrow \neg A)\end{aligned}$$

が成り立つ．■

対偶命題を述べるときには “対偶を取る” と表現することが多いです．

推論法則 A.2.20 (De Morgan の法則).　A, B を $\mathcal{L}'$ の閉式とするとき，次が成り立つ:

- $\neg (A \vee B) \Longleftrightarrow \neg A \wedge \neg B.$
- $\neg (A \wedge B) \Longleftrightarrow \neg A \vee \neg B.$

証明.　$A \Longrightarrow (A \vee B)$ は定理であるから，その対偶命題

$$\neg (A \vee B) \Longrightarrow \neg A$$

も定理となる．同様に $\neg (A \vee B) \Longrightarrow \neg B$ は定理となるので，$\neg (A \vee B)$ が成り立っていると仮定すれば $\neg A \wedge \neg B$ が成り立つ．ゆえに

$$\neg (A \vee B) \Longrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

が得られる．また A が成り立っていると仮定すれば，この下で $\neg A \wedge \neg B$ が成り立っているなら A と $\neg A$ が同時に成り立つことになるので $\perp$ が成立する．つまり A が成り立っているとき

$$\neg A \wedge \neg B \Longrightarrow \perp$$

が成り立つが，このとき $\neg (\neg A \wedge \neg B)$ が成り立つので

$$A \Longrightarrow \neg (\neg A \wedge \neg B)$$

が得られる．同様にして

$$B \Longrightarrow \neg (\neg A \wedge \neg B)$$

も得られるから，場合分け法則より

$$(A \vee B) \Longrightarrow \neg (\neg A \wedge \neg B)$$

が成立する．この対偶を取れば

$$\neg A \wedge \neg B \Longrightarrow \neg (A \vee B)$$

が出る．以上で一つ目の式が示された．一つ目の式で A を $\neg A$ に，B を $\neg B$ に置き換えると

$$\neg\neg A \wedge \neg\neg B \Longleftrightarrow \neg (\neg A \vee \neg B)$$

が得られるが，このとき二重否定の法則より

$$A \wedge B \Longleftrightarrow \neg (\neg A \vee \neg B)$$

が成立し，対偶命題の同値性から

$$\neg (A \wedge B) \Longleftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$$

は定理となる． ∎

以上で“集合であり真類でもある類は存在しない”という言明を証明する準備が整いました．

定理 A.2.21 (集合であり真類でもある類は存在しない). a を類とするとき次が成り立つ:

$$\neg\, (\, \mathrm{set}\,(a) \wedge \neg\, \mathrm{set}\,(a)\,).$$

証明. a を類とするとき，排中律より $\mathrm{set}\,(a) \vee \neg\, \mathrm{set}\,(a)$ が成り立ち，論理和の可換律より

$$\neg\, \mathrm{set}\,(a) \vee \mathrm{set}\,(a)$$

も成立する．そして De Morgan の法則より

$$\neg\, (\, \neg\neg\, \mathrm{set}\,(a) \wedge \neg\, \mathrm{set}\,(a)\,)$$

が成り立つが，二重否定の法則より $\neg\neg\, \mathrm{set}\,(a)$ と $\mathrm{set}\,(a)$ は同値となるので

$$\neg\, (\, \mathrm{set}\,(a) \wedge \neg\, \mathrm{set}\,(a)\,)$$

が成り立つ． ∎

次は量化記号が推論操作の上でどのような働きを持つのかを規定しましょう．

推論規則 A.2.22 (量化記号に関する規則). A を $\mathcal{L}'$ の式とし，x を A に現れる文字とするとき，x のみが A で量化されていないならば以下を認める:

ε 記号の導入　$\varepsilon x A(x)$ は $\mathcal{L}$ の或る対象に代用される．
存在記号の規則　$A(\varepsilon x A(x)) \Longleftrightarrow \exists x A(x)$ が成り立つ．
全称記号の規則　$A(\varepsilon x \neg A(x)) \Longleftrightarrow \forall x A(x)$ が成り立つ．
存在記号の基本性質　τ を $\mathcal{L}$ の対象とするとき $A(\tau) \Longrightarrow \exists x A(x)$ が成り立つ．

ε 記号は Hilbert のイプシロン関数と呼ばれるもので，量化記号の働きを形式的に表現するには簡便かつ有能である．また ε 記号が指定する対象を $\mathcal{L}$ のものと約束することで，$\exists$ と $\forall$ の作用範囲を $\mathcal{L}$ の対象全体に制限している．

推論法則 A.2.23 (全称記号と任意性).　A を $\mathcal{L}'$ の式とし，x を A に現れる文字とし，x のみが A で量化されていないとする．このとき $\forall x A(x)$ が成り立つならば $\mathcal{L}$ のいかなる対象 τ に対しても $A(\tau)$ が成り立つ．逆に，$\mathcal{L}$ のいかなる対象 τ に対しても $A(\tau)$ が成り立てば $\forall x A(x)$ が成り立つ．

証明.　τ を $\mathcal{L}$ の任意の対象とすれば，存在記号に関する推論規則より

$$\rightharpoondown A(\tau) \Longrightarrow \exists x \rightharpoondown A(x)$$

と

$$\exists x \rightharpoondown A(x) \Longrightarrow \rightharpoondown A\left(\varepsilon x \rightharpoondown A(x)\right)$$

が成り立つから，推論法則 A.2.6 より

$$\rightharpoondown A(\tau) \Longrightarrow \rightharpoondown A\left(\varepsilon x \rightharpoondown A(x)\right)$$

が成り立ち，対偶を取って

$$A\left(\varepsilon x \rightharpoondown A(x)\right) \Longrightarrow A(\tau)$$

が成り立つ．全称記号に関する推論規則より

$$\forall x A(x) \Longrightarrow A\left(\varepsilon x \rightharpoondown A(x)\right)$$

が満たされているので

$$\forall x A(x) \Longrightarrow A(\tau)$$

が従う．逆にいかなる対象 τ に対しても $A(\tau)$ が成り立つとき，特に

$$A\left(\varepsilon x \rightharpoondown A(x)\right)$$

が成り立つので $\forall x A(x)$ も成り立つ．∎

推論法則 A.2.23 を根拠にして，当面は $\forall x A(x)$ という式を “$\mathcal{L}$ の任意の対象 x に対して $A(x)$ が成立する” と翻訳することにします．また後述する相等性の公理によれば，これは “任意の集合 x に対して $A(x)$ が成立する” と翻訳しても同義です．

推論法則 A.2.24 (量化記号の性質 (イ)).　A, B を $\mathcal{L}'$ の式とし，x を A, B に現れる文字とし，x のみが A, B で量化されていないとする．$\mathcal{L}$ の任意の対象 τ に対して

$$A(\tau) \Longleftrightarrow B(\tau)$$

が成り立っているとき，

$$\exists x A(x) \Longleftrightarrow \exists x B(x)$$

および

$$\forall x A(x) \Longleftrightarrow \forall x B(x)$$

が成り立つ．

証明.　いま，$\mathcal{L}$ の任意の対象 τ に対して

$$A(\tau) \Longleftrightarrow B(\tau) \tag{A.1}$$

が成り立っているとする．ここで

$$\exists x A(x)$$

が成り立っていると仮定すると，

$$\tau \overset{\text{def}}{=\!=} \varepsilon x A(x)$$

とおけば存在記号に関する規則より

$$A(\tau)$$

が成立し，(A.1) と併せて

$$B(\tau)$$

が成立する．再び存在記号に関する規則より

$$\exists x B(x)$$

が成り立つので，演繹法則から

$$\exists x A(x) \Longrightarrow \exists x B(x)$$

が得られる．A と B の立場を入れ替えれば

$$\exists x B(x) \Longrightarrow \exists x A(x)$$

も得られる．今度は

$$\forall x A(x)$$

が成り立っていると仮定すると，推論法則 A.2.23 より $\mathcal{L}$ の任意の対象 τ に対して

$$A(\tau)$$

が成立し，(A.1) と併せて

$$B(\tau)$$

が成立する．τ の任意性と推論法則 A.2.23 より

$$\forall x B(x)$$

が成り立つので，演繹法則から

$$\forall x A(x) \Longrightarrow \forall x B(x)$$

が得られる．A と B の立場を入れ替えれば

$$\forall x B(x) \Longrightarrow \forall x A(x)$$

も得られる． ∎

推論法則 A.2.25 (量化記号に対する De Morgan の法則).　A を $\mathcal{L}'$ の式とし，x を A に現れる文字とし，x のみが A で量化されていないとする．このとき

$$\exists x \rightharpoondown A(x) \Longleftrightarrow \rightharpoondown \forall x A(x)$$

および

$$\forall x \rightharpoondown A(x) \Longleftrightarrow \rightharpoondown \exists x A(x)$$

が成り立つ．

略証.　推論規則 A.2.22 より

$$\exists x \rightharpoondown A(x) \Longleftrightarrow \rightharpoondown A(\varepsilon x \rightharpoondown A(x))$$

は定理である．他方で推論規則 A.2.22 より

$$A(\varepsilon x \rightharpoondown A(x)) \Longleftrightarrow \forall x A(x)$$

もまた定理であり，この対偶を取れば

$$\rightharpoondown A(\varepsilon x \rightharpoondown A(x)) \Longleftrightarrow \rightharpoondown \forall x A(x)$$

が成り立つ．ゆえに

$$\exists x \rightharpoondown A(x) \Longleftrightarrow \rightharpoondown \forall x A(x)$$

が従う．A を $\rightharpoondown A$ に置き換えれば

$$\forall x \rightharpoondown A(x) \Longleftrightarrow \rightharpoondown \exists x \rightharpoondown\rightharpoondown A(x)$$

が成り立ち，また $\mathcal{L}$ の任意の対象 τ に対して

$$A(\tau) \Longleftrightarrow \neg\neg A(\tau)$$

が成り立つので，推論法則 A.2.24 より

$$\exists x \neg\neg A(x) \Longleftrightarrow \exists x A(x)$$

も成り立つ．ゆえに

$$\forall x \neg A(x) \Longleftrightarrow \neg \exists x A(x)$$

が従う． ∎

A.3　相等性

本稿において “等しい” とは項に対する言明であって，a と b を項とするとき

$$a = b$$

なる式で表される．この記号

$$=$$

は等号 **(equal sign)** と呼ばれるが，現時点では述語として導入されているだけで，推論操作における働きはまだ明文化していない．本節では，いつ類は等しくなるのか，そして，等しい場合に何が起きるのか，の二つが主題となる．

公理 A.3.1 (外延性の公理).　a, b を類とするとき，次が成り立つ:

$$\forall x\,(\,x \in a \Longleftrightarrow x \in b\,) \Longrightarrow a = b.$$

定理 A.3.2 (任意の類は自分自身と等しい).　a を類とするとき次が成り立つ:

$$a = a.$$

証明.　$\mathcal{L}$ の任意の対象 τ に対して，推論法則 A.2.4 より

$$\tau \in a \Longleftrightarrow \tau \in a$$

が成り立つから，τ の任意性と推論法則 A.2.23 より

$$\forall x\,(\,x \in a \Longleftrightarrow x \in b\,)$$

が成り立つ．外延性の公理と三段論法より $a = a$ が得られる． ∎

公理 A.3.3 (要素の公理).　要素となりうる類は集合である．つまり，a, b を類とするとき

$$a \in b \Longrightarrow \operatorname{set}(a).$$

公理 A.3.4 (類の公理). A を $\mathcal{L}$ の式とし，x を A に現れる文字とし，t を $A(x)$ に現れない文字とし，x のみが A で量化されていないとする．このとき

$$\forall t\ (\, t \in \{\, x \mid \quad A(x) \,\} \Longleftrightarrow A(t) \,).$$

要素の公理で要求していることは**類を構成できるのは集合に限られる**ということであり，類の公理は**類の要素たる必要十分な条件は然るべき性質を具えていることである**という意味を持つ．

定理 A.3.5 ($\mathcal{L}$ の対象の内包的表記). τ を $\mathcal{L}$ の対象とするとき

$$\tau = \{\, x \mid \quad x \in \tau \,\}.$$

証明. 類の公理より

$$\forall s\ (\, s \in \tau \Longleftrightarrow s \in \{\, x \mid \quad x \in \tau \,\} \,)$$

が成り立つから，外延性の公理より

$$\tau = \{\, x \mid \quad x \in \tau \,\}$$

が従う． ∎

集合は $\mathcal{L}$ の対象であるとは限りません．例えば τ を $\mathcal{L}$ の対象とすれば

$$\tau = \{\, x \mid \quad x \in \tau \,\}$$

が成り立つので，推論規則 A.2.22 と集合の定義より $\{\, x \mid \quad x \in \tau \,\}$ は集合であるとわかりますが，これは言語を $\mathcal{L}'$ に拡張した際に導入された表記なので $\mathcal{L}$ の対象ではありませんね．またこの例は '等しい' とはどういうことかについて或る示唆を与えています．数学において '等しい' とは '同一物である' わけではないということです．τ と $\{\, x \mid \quad x \in \tau \,\}$ は等しいですが明確な違いがありますね．数学において '等しい' とは '論理的に同質である' という意味です．それを形式的に述べたものが次の相等性の公理です．

公理 A.3.6 (相等性の公理). A を $\mathcal{L}'$ の式とし，x を A に現れる文字とし，x のみが A で量化されていないとする．このとき a, b を類とすれば次が成り立つ:

$$a = b \Longrightarrow (\, A(a) \Longleftrightarrow A(b) \,).$$

定理 A.3.7 (外延性の公理の逆も成り立つ). a と b を類とするとき

$$a = b \Longrightarrow \forall x\, (\, x \in a \Longleftrightarrow x \in b \,).$$

証明． $a = b$ が成り立っていると仮定すれば，相等性の公理より $\mathcal{L}$ の任意の対象 τ に対して

$$\tau \in a \Longleftrightarrow \tau \in b$$

が満たされるから，推論法則 A.2.23 より

$$\forall x\,(\,x \in a \Longleftrightarrow x \in b\,)$$

が成立する．よって演繹法則より

$$a = b \Longrightarrow \forall x\,(\,x \in a \Longleftrightarrow x \in b\,)$$

が成り立つ．■

等しい類同士は同じ $\mathcal{L}$ の対象を要素に持つと示されましたが，このとき要素に持つ集合まで一致します．これは相等性の公理から明らかでしょうが，詳しくは部分類の箇所で説明いたしましょう．

定理 A.3.8 (条件を満たす集合は要素である). A を $\mathcal{L}$ の式とし，x を A に現れる文字とし，t を $A(x)$ に現れない文字とし，x のみが A で量化されていないとする．このとき，a を類とすると

$$A(a) \Longrightarrow (\,\mathrm{set}\,(a) \Longrightarrow a \in \{\,x \mid \quad A(x)\,\}\,)\,.$$

略証． いま

$$A(a)$$

と

$$\mathrm{set}\,(a)$$

が成立していると仮定する．このとき要素の公理から

$$\exists x\,(\,a = x\,)$$

が成立するので，

$$\tau \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon x\,(\,a = x\,)$$

とおけば

$$a = \tau$$

が成り立ち，相等性の公理より

$$A(\tau)$$

が成立する．よって類の公理より

$$\tau \in \{\,x \mid \quad A(x)\,\}$$

が従い，相等性の公理から

$$a \in \{\, x \mid \quad A(x) \,\}$$

が成立する． ∎

定理 A.3.9 (V は集合の全体である).　a を類とするとき次が成り立つ:

$$\mathrm{set}\,(a) \Longleftrightarrow a \in \mathbf{V}.$$

証明.　a を類とするとき，まず要素の公理より

$$a \in \mathbf{V} \Longrightarrow \mathrm{set}\,(a)$$

が得られる．逆に

$$\mathrm{set}\,(a)$$

が成り立っていると仮定する．このとき

$$\tau \overset{\mathrm{def}}{=} \varepsilon x(\, a = x \,)$$

とおけば，定理 A.3.2 より

$$\tau = \tau$$

となるので，類の公理より

$$\tau \in \mathbf{V}$$

が成り立つ．そして相等性の公理より

$$a \in \mathbf{V}$$

が従うから

$$\mathrm{set}\,(a) \Longrightarrow a \in \mathbf{V}$$

も得られる． ∎

定義 A.3.10 (空集合).　$\emptyset \overset{\mathrm{def}}{=} \{\, x \mid \quad x \neq x \,\}$ で定める類 $\emptyset$ を空集合 **(empty set)** と呼ぶ．

公理 A.3.11 (空集合の公理).　$\emptyset$ は集合である:

$$\mathrm{set}\,(\emptyset)\,.$$

空集合の公理は簡素にして偉大です．というのも，我々はいま初めて集合の存在について言及したのですね．つまり本稿の世界にビッグバンを起こしたわけですが，別の見方をすれば空集合とは聖書物語のアダムに相当するでしょう．その細部は整礎集合の章で述べますが，集合の宇宙は空集合を起点にして無限の広がりを持つのです．

定理 A.3.12 (空集合は $\mathcal{L}$ のいかなる対象も要素に持たない).

$$\forall x\,(\,x \notin \emptyset\,).$$

略証. τ を $\mathscr{L}$ の対象とするとき，類の公理より

$$\tau \in \emptyset \Longrightarrow \tau \neq \tau$$

が成り立つから，対偶を取れば

$$\tau = \tau \Longrightarrow \tau \notin \emptyset$$

が成り立つ (推論法則 A.2.19)．定理 A.3.2 より

$$\tau = \tau$$

は正しいので，三段論法より

$$\tau \notin \emptyset$$

が成り立つ．そして τ の任意性より

$$\forall x\,(\,x \notin \emptyset\,)$$

が得られる． ∎

定理 A.3.13 ($\mathcal{L}$ のいかなる対象も要素に持たない類は空集合に等しい). a を類とするとき次が成り立つ:

$$\forall x\,(\,x \notin a\,) \Longleftrightarrow a = \emptyset.$$

証明. a を類として $\forall x\,(\,x \notin a\,)$ が成り立っていると仮定する．このとき τ を $\mathcal{L}$ の任意の対象とすれば

$$\tau \notin a \vee \tau \in \emptyset$$

と

$$\tau \notin \emptyset \vee \tau \in a$$

が共に成り立つので，推論法則 A.2.17 より

$$\tau \in a \Longrightarrow \tau \in \emptyset$$

と

$$\tau \in \emptyset \Longrightarrow \tau \in a$$

が共に成り立つ．よって

$$\tau \in a \Longleftrightarrow \tau \in \emptyset$$

が成立し，τ の任意性と推論法則 A.2.23 から

$$\forall x \,(\, x \in a \Longleftrightarrow x \in \emptyset \,)$$

が得られる．ゆえに外延性の公理より

$$a = \emptyset$$

が成立し，演繹法則より

$$\forall x \,(\, x \notin a \,) \Longrightarrow a = \emptyset$$

が得られる．逆に

$$a = \emptyset$$

が成り立っていると仮定する．ここで χ を $\mathcal{L}$ の任意の対象とすれば，相等性の公理より

$$\chi \in a \Longrightarrow \chi \in \emptyset$$

が成立するので，対偶を取れば

$$\chi \notin \emptyset \Longrightarrow \chi \notin a$$

が成り立つ．定理 A.3.12 より

$$\chi \notin \emptyset$$

が満たされているので，三段論法より

$$\chi \notin a$$

が成立し，χ の任意性と推論法則 A.2.23 より

$$\forall x \,(\, x \notin a \,)$$

が成立する．ここに演繹法則を適用して

$$a = \emptyset \Longrightarrow \forall x \,(\, x \notin a \,)$$

も得られる． ∎

定理 A.3.14 (空集合はいかなる類も要素に持たない).　a, b を類とするとき次が成り立つ:

$$b = \emptyset \Longrightarrow a \notin b.$$

証明．　いま $a \in b$ が成り立っていると仮定する．このとき要素の公理と三段論法より

$$\mathrm{set}\,(a)$$

が成立する．ここで

$$\tau \overset{\text{def}}{=} \varepsilon x \, (a = x)$$

とおけば，存在記号に関する規則から

$$a = \tau$$

が成り立つので，相等性の公理より

$$\tau \in b$$

が従い，存在記号に関する規則より

$$\exists x \, (x \in b)$$

が成り立つ．よって演繹法則から

$$a \in b \Longrightarrow \exists x \, (x \in b)$$

が成り立つ．この対偶を取り推論法則 A.2.25 を適用すれば

$$\forall x \, (x \notin b) \Longrightarrow a \notin b$$

が得られる．定理 A.3.13 より

$$b = \emptyset \Longrightarrow \forall x \, (x \notin b)$$

も正しいので，含意の推移律から

$$b = \emptyset \Longrightarrow a \notin b$$

が得られる． ∎

定義 A.3.15 (部分類).　a, b を $\mathcal{L}'$ の項とするとき，

$$a \subset b \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall x \, (x \in a \Longrightarrow x \in b)$$

と定める．式 $a \subset b$ を “a は b の**部分類 (subclass)** である” と翻訳し，特に a が集合である場合は “a は b の**部分集合 (subset)** である” と翻訳する．また次の記号も定める:

$$a \subsetneq b \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} a \subset b \wedge a \neq b.$$

空虚な真の一例として次の結果を得る．

定理 A.3.16 (空集合は全ての類に含まれる).　a を類とするとき次が成り立つ:

$$\emptyset \subset a.$$

証明． a を類とする．τ を $\mathcal{L}$ の任意の対象とすれば

$$\tau \notin \emptyset$$

が成り立つから，推論規則 A.2.3 を適用して

$$\tau \notin \emptyset \vee \tau \in a$$

が成り立つ．従って

$$\tau \in \emptyset \Longrightarrow \tau \in a$$

が成り立ち，τ の任意性と推論法則 A.2.23 より

$$\forall x \, (\, x \in \emptyset \Longrightarrow x \in a \,)$$

が成立する． ∎

$a \subset b$ とは a に属する全ての "$\mathcal{L}$ の対象" は b に属するという定義であったが，要素となりうる類は集合であるという公理から，a に属する全ての "類" もまた b に属する．

定理 A.3.17 (類はその部分類に属する全ての類を要素に持つ). a, b, c を類とすれば次が成り立つ:

$$a \subset b \Longrightarrow (\, c \in a \Longrightarrow c \in b \,).$$

証明． いま $a \subset b$ が成り立っているとする．このとき

$$c \in a$$

が成り立っていると仮定すれば，要素の公理より

$$\mathrm{set}\,(c)$$

が成り立つ．ここで

$$\tau \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon x \, (\, c = x \,)$$

とおくと

$$c = \tau$$

が成り立つので，相等性の公理より

$$\tau \in a$$

が成り立ち，$a \subset b$ と推論法則 A.2.23 から

$$\tau \in b$$

が従う．再び相等性の公理を適用すれば

$$c \in b$$

が成り立つので，演繹法則より，$a \subset b$ が成り立っている下で

$$c \in a \Longrightarrow c \in b$$

が成立する．再び演繹法則を適用すれば定理の主張が得られる． ∎

宇宙 $\mathbf{V}$ は類の一つであった．当然のようであるが，それは最大の類である．

定理 A.3.18 ($\mathbf{V}$ は最大の類である). a を類とするとき次が成り立つ:

$$a \subset \mathbf{V}.$$

証明. τ を $\mathcal{L}$ の任意の対象とすれば，定理 A.3.2 と類の公理より

$$\tau \in \mathbf{V}$$

が成立するので，推論規則 A.2.3 より

$$\tau \notin a \vee \tau \in \mathbf{V}$$

が成立する．このとき推論法則 A.2.17 より

$$\tau \in a \Longrightarrow \tau \in \mathbf{V}$$

が成立し，τ の任意性と推論法則 A.2.23 から

$$\forall x\,(\,x \in a \Longrightarrow x \in \mathbf{V}\,)$$

が従う． ∎

定理 A.3.19 (互いに互いの部分類となる類同士は等しい). a, b を類とするとき次が成り立つ:

$$a \subset b \wedge b \subset a \Longleftrightarrow a = b.$$

略証. $a \subset b \wedge b \subset a$ が成り立っていると仮定する．このとき τ を $\mathcal{L}$ の任意の対象とすれば，$a \subset b$ と推論法則 A.2.23 より

$$\tau \in a \Longrightarrow \tau \in b$$

が成立し，$b \subset a$ と推論法則 A.2.23 より

$$\tau \in b \Longrightarrow \tau \in a$$

が成立するので，

$$\tau \in a \Longleftrightarrow \tau \in b$$

が成り立つ．τ の任意性と推論法則 A.2.23 および外延性の公理より

$$a = b$$

が出るので，演繹法則より

$$a \subset b \wedge b \subset a \Longrightarrow a = b$$

が得られる．逆に $a = b$ が満たされていると仮定するとき，τ を $\mathcal{L}$ の任意の対象とすれば

$$\tau \in a \Longrightarrow \tau \in b$$

と

$$\tau \in b \Longrightarrow \tau \in a$$

が共に成り立つ．よって推論法則 A.2.23 より

$$a \subset b$$

と

$$b \subset a$$

が共に従う．よって演繹法則より

$$a = b \Longrightarrow a \subset b \wedge b \subset a$$

も得られる． ∎

定理 A.3.17 と定理 A.3.19 より，類 a, b が $a = b$ を満たすならば，a と b は要素に持つ $\mathcal{L}$ の対象のみならず，要素に持つ類までも一致するのですね．

A.4　構造的帰納法

我々は $\mathcal{L}$ の式 A を用いて $\{x \mid \ A(x)\}$ の記法を導入しましたが，$\mathcal{L}$ の式しか使えないというのは往々にして不便です．なので $\mathcal{L}'$ の式 B に対しても $\{x \mid \ B(x)\}$ を類として導入しましょう．ただし後者の記法は B と同値な $\mathcal{L}$ の式 $\mathcal{L}B$ によって

$$\{x \mid \ B(x)\} \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \{x \mid \ \mathcal{L}B(x)\}$$

で定められるものとします．$\mathcal{L}'$ の式が与えられたら，それを式の構成法に基づいた或る手続きで $\mathcal{L}$ の式に書き換えていくのですが，その操作は “超数学的” な厄介さを伴っています．

a を類とするとき，a は $\mathcal{L}$ の対象であるか $\{x \mid \ A(x)\}$ の形をしている．そこで，文字 x に対し

- a が $\mathcal{L}$ の対象ならば $\varepsilon a(x) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} x \in a$，

- a が $\{\, x \mid \quad A(x)\,\}$ の形をしていれば $\varepsilon a(x) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} A(x)$,

として記号列 $\varepsilon a(x)$ を定める．この記法は

$$\forall x\,(\,\varepsilon a(x) \Longleftrightarrow x \in a\,)$$

を満たすことを意図している．ε 記号を用いているのは，量化記号に関する推論規則で ε 記号を定めたときと導入の動機が似ているためである．

次に B を $\mathcal{L}'$ の式として，B を $\mathcal{L}$ の式に書き換える手続きを指定する．直感的には，

$$s \in t$$

と

$$s = t$$

の形の原始的な $\mathcal{L}'$ の式が $\mathcal{L}$ の式に書き換えることが出来て，かつ，A, B が $\mathcal{L}'$ の式であって，それぞれ $\mathcal{L}$ の式 $\mathcal{L}A$ と $\mathcal{L}B$ に書き換えることが出来るなら

$$\mathcal{L}((A) \vee (B)) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\mathcal{L}A) \vee (\mathcal{L}B),$$
$$\mathcal{L}((A) \wedge (B)) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\mathcal{L}A) \wedge (\mathcal{L}B),$$
$$\mathcal{L}((A) \Longrightarrow (B)) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\mathcal{L}A) \Longrightarrow (\mathcal{L}B),$$
$$\mathcal{L}(\rightharpoondown (A)) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \rightharpoondown (\mathcal{L}A),$$
$$\mathcal{L}(\forall x(A)) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall x(\mathcal{L}A),$$
$$\mathcal{L}(\exists x(A)) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists x(\mathcal{L}A),$$

と定めることにすると，$\mathcal{L}'$ の式は全て $\mathcal{L}$ の式に書き換えることが出来そうである．しかしこれはあくまで直感の域を出ず，また式で表現できないメタ的な操作であるため正否を断言できない．蓋し神のみぞ知る領域なのである．本稿では極力直感に頼った記述を排除したい．なので，“この操作により $\mathcal{L}'$ の式は全て $\mathcal{L}$ の式に書き換えることが可能である” ということを次の超数学的な言明によって保証することにする．

メタ公理 A.4.1 (構造的帰納法).

構造的帰納法により，以下の手続きで $\mathcal{L}'$ の式は全て $\mathcal{L}$ の式に書き換えられる．

第一段階　s, t を $\mathcal{L}'$ の項とするとき，

- s も t も $\mathcal{L}$ の項であるとき，

$$\mathcal{L}(s \in t) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} s \in t,$$
$$\mathcal{L}(s = t) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} s = t$$

  と定める．

- s が $\mathcal{L}$ の項であって，t が $\mathcal{L}$ の項でないとき，t は内包的記法

$$\{\, x \mid \quad T(x)\,\}$$

なる形で表されているから

$$\mathcal{L}(s \in t) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} T(s),$$
$$\mathcal{L}(s = t) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall x\,(\,x \in s \Longleftrightarrow T(x)\,)$$

と定める．

- s が $\mathcal{L}$ の項でなくて，t が $\mathcal{L}$ の項であるとき，

$$\mathcal{L}(s \in t) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \mathrm{set}\,(s) \wedge \varepsilon x\,(\,s = x\,) \in t$$

と定め，また s は内包的記法

$$\{\,x \mid \quad S(x)\,\}$$

なる形で表されているから

$$\mathcal{L}(s = t) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall x\,(\,S(x) \Longleftrightarrow x \in t\,)$$

と定める．

第二段階　A, B が $\mathcal{L}'$ の式であって，それぞれすでに $\mathcal{L}$ の式への書き換えが得られているならば，その書き換えた式を $\mathcal{L}A$ と $\mathcal{L}B$ で表すとして

$$\mathcal{L}((A) \vee (B)) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\mathcal{L}A) \vee (\mathcal{L}B),$$
$$\mathcal{L}((A) \wedge (B)) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\mathcal{L}A) \wedge (\mathcal{L}B),$$
$$\mathcal{L}((A) \Longrightarrow (B)) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\mathcal{L}A) \Longrightarrow (\mathcal{L}B),$$
$$\mathcal{L}(\neg\,(A)) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \neg\,(\mathcal{L}A),$$
$$\mathcal{L}(\forall x(A)) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall x(\mathcal{L}A),$$
$$\mathcal{L}(\exists x(A)) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists x(\mathcal{L}A),$$

と定める．

以降は B を $\mathcal{L}'$ の式とするとき，上の手続きで得られる $\mathcal{L}$ の式を $\mathcal{L}B$ と表す．

メタ定理 A.4.2 (式の書き換えの同値性).　B を $\mathcal{L}'$ の式とし，x を B に現れる文字とし，B に現れる文字で x のみが量化されていないとき，

$$\forall x\ (\,B(x) \Longleftrightarrow \mathcal{L}B(x)\,).$$

メタ定理の “証明” は $\mathcal{L}'$ における証明とは別物であるから，解説としておく．

定義 A.4.3 ($\mathcal{L}'$ の式に対する内包的記法).　B を $\mathcal{L}'$ の式とし，x を B に現れる文字とし，B に現れる文字で x のみが量化されていないとき，

$$\{\,x \mid \quad B(x)\,\} \overset{\text{def}}{=} \{\,x \mid \quad \mathcal{L}B(x)\,\}$$

と定義する．

上の定義において，t を $B(x)$ に現れない文字とすれば

$$\forall t\ (B(t) \Longleftrightarrow t \in \{\, x \mid \quad B(x)\,\})$$

が成立する．

A.5　対

a と b を類とするとき，a か b の少なくとも一方に等しい集合の全体，つまり

$$a = x \vee b = x$$

を満たす全ての集合 x を集めたものを a と b の対と呼び

$$\{a, b\}$$

と書く．解釈としては "a と b のみを要素とする類" のことであり，当然 a が集合であるならば

$$a \in \{a, b\}$$

が成立する．しかし a と b が共に真類であるときは，いかなる集合も a にも b にも等しくないため

$$\{a, b\} = \emptyset$$

となる．大雑把に対を紹介したが，この辺の事情の詳細は後述する．

定義 A.5.1 (対).　a, b を類とするとき，

$$\{a, b\} \overset{\text{def}}{=\!=} \{\, x \mid \quad a = x \vee b = x \,\}$$

で $\{a, b\}$ を定義し，これを a と b の対 **(pair)** と呼ぶ．特に $\{a, a\}$ を $\{a\}$ と書く．

定理 A.5.2 (対は表示されている要素しか持たない).　a と b を類とするとき次が成立する:

$$\forall x\, (\, x \in \{a, b\} \Longleftrightarrow a = x \vee b = x \,).$$

この定理はメタ的な定理 A.4.2 を適用しただけの主張であるが，直接確認することも出来る．実際，a が

$$\{\, x \mid \quad A(x)\,\}$$

で表される類で，b が

$$\{\, x \mid \quad B(x)\,\}$$

で表される類であるとき，χ を $\mathcal{L}$ の任意の対象とすれば

$$\forall t\, (\, A(t) \Longleftrightarrow t \in \chi\,) \Longleftrightarrow a = \chi$$

と

$$\forall t\, (\, B(t) \Longleftrightarrow t \in \chi\,) \Longleftrightarrow b = \chi$$

から

$$[\forall t\,(A(t) \Longleftrightarrow t \in \chi) \lor \forall t\,(B(t) \Longleftrightarrow t \in \chi)] \Longleftrightarrow [a = \chi \lor b = \chi]$$

が成り立つので，

$$\forall x\,[[\forall t\,(A(t) \Longleftrightarrow t \in x) \lor \forall t\,(B(t) \Longleftrightarrow t \in x)] \Longleftrightarrow [a = x \lor b = x]]$$

が成立する．

定理 A.5.3 (要素の表示の順番を入れ替えても対は等しい).　a と b を類とするとき

$$\{a, b\} = \{b, a\}.$$

略証.　τ を $\mathcal{L}$ の任意の対象とする．定理 A.5.2 より

$$\tau \in \{a, b\} \Longleftrightarrow \tau = a \lor \tau = b$$

が成立し，推論法則 A.2.5 より

$$\tau = a \lor \tau = b \Longleftrightarrow \tau = b \lor \tau = a$$

が成立し，定理 A.5.2 と推論法則 A.2.10 より

$$\tau = b \lor \tau = a \Longleftrightarrow \tau \in \{b, a\}$$

が成立する．そして含意の推移律から

$$\tau \in \{a, b\} \Longleftrightarrow \tau \in \{b, a\}$$

が従う．τ は任意に与えられていたから

$$\forall t\ (t \in \{a, b\} \Longleftrightarrow t \in \{b, a\})$$

が従い，外延性の公理より

$$\{a, b\} = \{b, a\}$$

が出る．∎

公理 A.5.4 (対の公理).　集合同士の対は集合である．つまり，a と b を集合とするとき

$$\mathrm{set}\,(\{a, b\}).$$

対の公理の主張は，a と b を類とするとき

$$\mathrm{set}\,(a) \land \mathrm{set}\,(b) \Longrightarrow \mathrm{set}\,(\{a, b\})$$

が成り立つということですが，式にまとめてしまうと見づらいのではじめから a と b を集合としています．

推論法則 A.5.5 (量化記号の性質 (ロ)).　A, B を $\mathcal{L}'$ の式とし，x を A, B に現れる文字とするとき，x のみが A, B で量化されていないならば以下は定理である:

(a)　$\exists x(A(x) \vee B(x)) \Longleftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$.

(b)　$\forall x(A(x) \wedge B(x)) \Longleftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$.

証明.

(a)　いま $c(x) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} A(x) \vee B(x)$ とおけば，$\exists x(A(x) \vee B(x))$ と $\exists x(C(x))$ は同じ記号列であるから

$$\exists x(A(x) \vee B(x)) \Longrightarrow \exists x C(x) \tag{A.2}$$

が成立する．また推論法則 A.2.6 より

$$\exists x C(x) \Longrightarrow C(\varepsilon x C(x)) \tag{A.3}$$

が成立する．$C(\varepsilon x C(x))$ と $A(\varepsilon x C(x)) \vee B(\varepsilon x C(x))$ は同じ記号列であるから

$$C(\varepsilon x C(x)) \Longrightarrow A(\varepsilon x C(x)) \vee B(\varepsilon x C(x)) \tag{A.4}$$

が成立する．ここで推論法則 A.2.6 と推論規則 A.2.3 より

$$\begin{aligned} A(\varepsilon x C(x)) &\Longrightarrow \exists x A(x) \\ &\Longrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x), \\ B(\varepsilon x C(x)) &\Longrightarrow \exists x B(x) \\ &\Longrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x) \end{aligned}$$

が成立するので，場合分け法則より

$$A(\varepsilon x C(x)) \vee B(\varepsilon x C(x)) \Longrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x) \tag{A.5}$$

が成り立つ．(A.2) (A.3) (A.4) (A.5) に推論法則 A.2.6 を順次適用すれば

$$\exists x(A(x) \vee B(x)) \Longrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$$

が得られる．他方，推論規則 A.2.22 より

$$\begin{aligned} \exists x A(x) &\Longrightarrow A(\varepsilon x A(x)) \\ &\Longrightarrow A(\varepsilon x A(x)) \vee B(\varepsilon x A(x)) \\ &\Longrightarrow C(\varepsilon x A(x)) \\ &\Longrightarrow C(\varepsilon x C(x)) \\ &\Longrightarrow \exists x C(x) \\ &\Longrightarrow \exists x(A(x) \vee B(x)) \end{aligned}$$

が成立し，A を B に置き換えれば $\exists x B(x) \Longrightarrow \exists x(A(x) \vee B(x))$ も成り立つので，場合分け法則より

$$\exists x A(x) \vee \exists x B(x) \Longrightarrow \exists x(A(x) \vee B(x))$$

も得られる．

(b)　簡略して説明すれば

$$
\begin{aligned}
\forall x\,(A(x) \wedge B(x)) &\Longleftrightarrow \rightharpoondown \exists x \rightharpoondown (A(x) \wedge B(x)) && (\text{推論法則 A.2.25})\\
&\Longleftrightarrow \rightharpoondown \exists x\,(\rightharpoondown A(x) \vee \rightharpoondown B(x)) && (\text{De Morgan の法則})\\
&\Longleftrightarrow \rightharpoondown (\exists x \rightharpoondown A(x) \vee \exists x \rightharpoondown B(x)) && (\text{前段の対偶})\\
&\Longleftrightarrow \rightharpoondown (\rightharpoondown \forall x A(x) \vee \rightharpoondown \forall x B(x)) && (\text{推論法則 A.2.25})\\
&\Longleftrightarrow \rightharpoondown\rightharpoondown \forall x A(x) \wedge \rightharpoondown\rightharpoondown \forall x B(x) && (\text{De Morgan の法則})\\
&\Longleftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x) && (\text{二重否定の法則})
\end{aligned}
$$

となる．∎

定理 A.5.6 (集合は対の要素たりうる).　a, b を類とするとき，

$$\mathrm{set}\,(a) \Longrightarrow a \in \{a, b\}.$$

略証.　いま

$$\mathrm{set}\,(a)$$

が成り立っているとする．ここで

$$\tau \stackrel{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon x\,(\,a = x\,)$$

とおけば，存在記号に関する規則より

$$a = \tau$$

が成り立つ．ゆえに

$$\tau = a \vee \tau = b$$

も成り立つ．ゆえに

$$\tau \in \{a, b\}$$

が成り立ち，相当性の公理より

$$a \in \{a, b\}$$

が従う．そして演繹法則より

$$\mathrm{set}\,(a) \Longrightarrow a \in \{a, b\}$$

が得られる．∎

a を集合とすれば対の公理より $\{a\}$ も集合となり，定理 A.5.6 より

$$a \in \{a\}$$

が成立する．

定理 A.5.7 (真類同士の対は空).　a,b を類とするとき，

$$\rightharpoondown \mathrm{set}\,(a) \wedge \rightharpoondown \mathrm{set}\,(b) \Longleftrightarrow \{a,b\} = \emptyset.$$

略証.　いま

$$\rightharpoondown \mathrm{set}\,(a) \wedge \rightharpoondown \mathrm{set}\,(b)$$

が成り立っているとする．このとき

$$\forall x\,(\, a \neq x \,) \wedge \forall x\,(\, b \neq x \,)$$

が成立し，推論法則 A.5.5 より

$$\forall x\,(\, a \neq x \wedge b \neq x \,)$$

が成立する．すなわち χ を $\mathcal{L}$ の任意の対象とすれば

$$a \neq \chi \wedge b \neq \chi$$

が成立する．他方で

$$a \neq \chi \wedge b \neq \chi \Longleftrightarrow \chi \notin \{a,b\}$$

も満たされているので，三段論法より

$$\chi \notin \{a,b\}$$

が成立する．χ の任意性より

$$\forall x\,(\, x \notin \{a,b\} \,)$$

が成立し，定理 A.3.13

$$\{a,b\} = \emptyset$$

が従う．そして演繹法則を適用して

$$\rightharpoondown \mathrm{set}\,(a) \wedge \rightharpoondown \mathrm{set}\,(b) \Longrightarrow \{a,b\} = \emptyset$$

が得られる．逆に，定理 A.5.6 から

$$\mathrm{set}\,(a) \Longrightarrow a \in \{a,b\}$$

が成り立ち，定理 A.3.14 から

$$a \in \{a,b\} \Longrightarrow \{a,b\} \neq \emptyset$$

が成り立つので，含意の推移律より

$$\mathrm{set}\,(a) \Longrightarrow \{a,b\} \neq \emptyset$$

が成立する．同様に

$$\mathrm{set}\,(b) \Longrightarrow \{a, b\} \neq \emptyset$$

も成り立つから，場合分け法則より

$$\mathrm{set}\,(a) \vee \mathrm{set}\,(b) \Longrightarrow \{a, b\} \neq \emptyset$$

が成立し，この対偶を取って

$$\{a, b\} = \emptyset \Longrightarrow \rightarrow \mathrm{set}\,(a) \wedge \rightarrow \mathrm{set}\,(b)$$

が得られる． ∎

A.6　合併

a を空でない類とするとするとき，a の要素もまた空でなければ要素を持つ．a の要素の要素を全て集めたものを a の合併と呼び，その受け皿の意味を込めて

$$\bigcup a$$

と書く．当然ながら，空の合併は空となる．

定義 A.6.1 (合併).　a を類とするとき，a の**合併 (union)** を

$$\bigcup a \overset{\mathrm{def}}{=} \{\, x \mid \quad \exists t \in a\,(\, x \in t\,)\,\}$$

で定める．

量化子が付いた式の略記法

上の定義で

$$\exists t \in a\,(\,x \in t\,)$$

という式を書いたが，これは

$$\exists t \in a\,(\,x \in t\,) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \exists t\,(\,t \in a \wedge x \in t\,)$$

により定義される省略形である．同様にして，A を $\mathcal{L}'$ の式とするとき

$$\exists t\ (\,(t \in a) \wedge (A)\,)$$

なる式を

$$\exists t \in a\,(\,A\,)$$

と略記する．また全称記号についても

$$\forall t\ (\,(t \in a) \Longrightarrow (A)\,)$$

なる式を

$$\forall t \in a\,(\,A\,)$$

と略記する．

公理 A.6.2 (合併の公理). 集合の合併は集合である．つまり，a を類とするとき次が成り立つ:

$$\mathrm{set}\,(a) \Longrightarrow \mathrm{set}\left(\bigcup a\right).$$

定理 A.6.3 (空集合の合併は空). 次が成立する:

$$\bigcup \emptyset = \emptyset.$$

証明. χ と τ を $\mathcal{L}$ の任意の対象とすれば，定理 A.3.12 より

$$\chi \notin \emptyset$$

が成り立つので

$$\chi \notin \emptyset \vee \tau \notin \chi$$

が成立し，χ の任意性と推論法則 A.2.23 より

$$\forall x\,(\,x \notin \emptyset \vee \tau \notin x\,)$$

が成り立つ．ここで推論法則 A.2.25 より

$$\begin{aligned}\forall x\,(\,x \notin \emptyset \vee \tau \notin x\,) &\Longleftrightarrow \forall x\ \neg\,(\,x \in \emptyset \wedge \tau \in x\,)\\ &\Longleftrightarrow \neg\,\exists x\,(\,x \in \emptyset \wedge \tau \in x\,)\end{aligned}$$

が成立するので，三段論法より

$$\rightharpoondown \exists x\,(\,x \in \emptyset \wedge \tau \in x\,)$$

が従う．他方で合併の定義から

$$\rightharpoondown \exists x\,(\,x \in \emptyset \wedge \tau \in x\,) \Longleftrightarrow \tau \notin \bigcup \emptyset$$

が満たされているので，再び三段論法より

$$\tau \notin \bigcup \emptyset$$

が従う．τ の任意性と推論法則 A.2.23 より

$$\forall t\,(\,t \notin \bigcup \emptyset\,)$$

が成立し，定理 A.3.13 より

$$\bigcup \emptyset = \emptyset$$

が従う． ∎

定理 A.6.4 (要素の部分集合は合併の部分集合).　a を類とするとき

$$\forall x \left[\exists t \in a\,(\,x \subset t\,) \Longrightarrow x \subset \bigcup a \right].$$

略証.　χ を $\mathcal{L}$ の任意の対象として

$$\exists t \in a\,(\,x \subset t\,) \tag{A.6}$$

であるとする．ここで

$$\tau \overset{\text{def}}{=\!=} \varepsilon t\,(\,t \in a \wedge \chi \subset t\,)$$

とおく．s を $\mathcal{L}$ の任意の対象として

$$s \in \chi$$

であるとすると，

$$\chi \subset \tau$$

より

$$\tau \in a \wedge s \in \tau$$

が成立するので，存在記号の規則より

$$\exists t\ (\,t \in a \wedge s \in t\,)$$

が成り立ち

$$s \in \bigcup a$$

が従う．s は任意に与えられていたので，(A.6) の下で

$$\forall s \, (s \in \chi \Longrightarrow s \in \bigcup a)$$

すなわち

$$\chi \subset \bigcup a$$

が成り立つ．ゆえに

$$\exists t \in a \; (\chi \subset t) \Longrightarrow \chi \subset \bigcup a$$

が従い，χ も任意に与えられていたので

$$\forall x \left[\exists t \in a \, (x \subset t) \Longrightarrow x \subset \bigcup a \right]$$

が得られる． ∎

定理 A.6.5 (部分集合の合併は部分類).　a と b を類とするとき

$$\forall x \in a \, (x \subset b) \Longrightarrow \bigcup a \subset b.$$

略証.　いま

$$\forall x \in a \, (x \subset b) \tag{A.7}$$

が成り立っているとする．χ を $\mathcal{L}$ の任意の対象とし，

$$\chi \in \bigcup a$$

であるとする．すると

$$\exists t \; (t \in a \wedge \chi \in t)$$

が成り立つので，

$$\tau \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varepsilon t \; (t \in a \wedge \chi \in t)$$

とおけば

$$\tau \in a \wedge \chi \in \tau$$

が成立する．ここで (A.7) より

$$\tau \subset b$$

となるから

$$\chi \in b$$

が従い，演繹法則より (A.7) の下で

$$\chi \in \bigcup a \Longrightarrow \chi \in b$$

が成立する．χ の任意性ゆえに (A.7) の下で

$$\bigcup a \subset b$$

が成立し，演繹法則より

$$\forall x \in a\,(\,x \subset b\,) \Longrightarrow \bigcup a \subset b$$

が得られる． ∎

対の合併

a, b を類とするとき，その対の合併を

$$a \cup b \overset{\text{def}}{=} \bigcup \{a, b\}$$

と書く．

定理 A.6.6 (対の合併はそれぞれの要素を合わせたもの).　a と b を集合とするとき

$$\forall x\,(\,x \in a \cup b \Longleftrightarrow x \in a \vee x \in b\,).$$

この定理の主張は，a と b を類とするとき

$$\mathrm{set}\,(a) \wedge \mathrm{set}\,(b) \Longrightarrow \forall x\,(\,x \in a \cup b \Longleftrightarrow x \in a \vee x \in b\,)$$

が成り立つということですが，式にまとめてしまうと見づらいのではじめから a と b を集合としています．

略証.　χ を $\mathcal{L}$ の任意の対象とする．

$$\chi \in a \cup b$$

であるとき，

$$\exists t\ (\,t \in \{a, b\} \wedge \chi \in t\,)$$

が成り立つので，

$$\tau \overset{\text{def}}{=} \varepsilon t\ (\,t \in \{a, b\} \wedge \chi \in t\,)$$

とおけば

$$\tau \in \{a, b\} \wedge \chi \in \tau$$

が成立する．

$$\tau \in \{a, b\}$$

が成り立つので，定理 A.5.2 より

$$\tau = a \vee \tau = b \tag{A.8}$$

が従う．ここで相等性の公理より

$$\tau = a \Longrightarrow \chi \in a$$

が成り立ち，論理和の規則から

$$\tau = a \Longrightarrow \chi \in a \vee \chi \in b$$

も成り立つ．同様にして

$$\tau = b \Longrightarrow \chi \in a \vee \chi \in b$$

が成り立つので，場合分け法則より

$$\tau = a \vee \tau = b \Longrightarrow \chi \in a \vee \chi \in b$$

が成立し，(A.8) と三段論法より

$$\chi \in a \vee \chi \in b$$

が成立する．ゆえに演繹法則から

$$\chi \in a \cup b \Longrightarrow \chi \in a \vee \chi \in b \tag{A.9}$$

が成立する．逆に

$$\chi \in a$$

であるとすると，

$$\tau_a \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon x\,(\,a = x\,)$$

とおけば定理 A.5.6 より

$$\tau_a \in \{a, b\} \wedge \chi \in \tau_a$$

が成り立つので，

$$\exists t\ (\,t \in \{a, b\} \wedge \chi \in t\,)$$

が成り立ち

$$\chi \in a \cup b$$

が従う．これでまず

$$\chi \in a \Longrightarrow \chi \in a \cup b$$

が得られた．同様にして

$$\chi \in b \Longrightarrow \chi \in a \cup b$$

も得られ，場合分け法則より

$$\chi \in a \vee \chi \in b \Longrightarrow \chi \in a \cup b \tag{A.10}$$

が成立する．以上 (A.9) と (A.10) から

$$\chi \in a \cup b \Longleftrightarrow \chi \in a \vee \chi \in b$$

が従い，χ の任意性より

$$\forall x \, (\, x \in a \cup b \Longleftrightarrow x \in a \vee x \in b \,).$$

が出る． ∎

定理 A.6.7 (等しい類の合併は等しい).　a と b を類とするとき

$$a = b \Longrightarrow \bigcup a = \bigcup b.$$

略証．　いま

$$a = b \tag{A.11}$$

が成り立っているとする．χ を $\mathcal{L}$ の任意の対象として

$$\chi \in \bigcup a$$

であるとすれば，

$$\tau \in a \wedge \chi \in \tau$$

なる $\mathcal{L}$ の対象 τ が取れる．このとき相等性の公理より

$$\tau \in b$$

が成り立つから

$$\tau \in b \wedge \chi \in \tau$$

が従い，ゆえに

$$\chi \in \bigcup b$$

が従う．ゆえに (A.11) の下で

$$\chi \in \bigcup a \Longrightarrow \chi \in \bigcup b$$

が得られたが，a と b を入れ替えれば

$$\chi \in \bigcup b \Longrightarrow \chi \in \bigcup a$$

も得られるので

$$\chi \in \bigcup a \Longleftrightarrow \chi \in \bigcup b$$

が成立する．そして χ の任意性と外延性の公理から

$$\bigcup a = \bigcup b$$

が成立する．ゆえに演繹法則から

$$a = b \Longrightarrow \bigcup a = \bigcup b$$

が従う． ∎

定理 A.6.8 (合併の可換律).　a と b を類とするとき

$$a \cup b = b \cup a.$$

略証.　定理 A.5.3 より

$$\{a, b\} = \{b, a\}$$

が成り立つので，定理 A.6.7 から

$$a \cup b = b \cup a$$

が従う． ∎

A.7　交叉

交叉とは合併の対となる概念である．a を類とするとき，a の全ての要素が共通して持つ集合の全体を a の交叉と呼び，合併の記号を上下に反転させて

$$\bigcap a$$

と書く．またいささか奇妙な結果であるが，空虚な真の為せる業により空の交叉は宇宙に一致する．

定義 A.7.1 (交叉).　a を類とするとき，a の交叉 **(intersection)** を

$$\bigcap a \overset{\text{def}}{=} \{\, x \mid \quad \forall t \in a\, (\, x \in t\,)\, \}$$

で定める．

上の定義に現れた

$$\forall t \in a\, (\, x \in t\,)$$

とは

$$\forall t\, (\, t \in a \Longrightarrow x \in t\,)$$

を略記した式である．

定理 A.7.2 (空集合の交叉は宇宙となる).　次が成立する:

$$\bigcap \emptyset = \mathbf{V}.$$

証明.　x を $\mathcal{L}$ の任意の対象とするとき，空虚な真より

$$t \in \emptyset \Longrightarrow x \in t$$

は $\mathcal{L}$ のいかなる対象 t に対してもに真となる．ゆえに

$$\forall t \in \emptyset\, (\, x \in t\,)$$

が成立し

$$\forall x\, (\, x \in \bigcap \emptyset\,)$$

が従う．

$$\forall x\, (\, x \in \mathbf{V}\,)$$

も成り立つから

$$\forall x\, (\, x \in \mathbf{V} \Longleftrightarrow x \in \bigcap \emptyset\,)$$

が成立して，外延性の公理より

$$\bigcap \emptyset = \mathbf{V}$$

が従う． ∎

定理 A.7.3 (交叉は全ての要素に含まれる).　a を類とするとき

$$\forall x\, (\, x \in a \Longrightarrow \bigcap a \subset x\,).$$

定理 A.7.4 (全ての要素に共通して含まれる類は交叉にも含まれる). a と b を類とするとき

$$\forall x \in a\,(\,b \subset x\,) \Longrightarrow b \subset \bigcap a.$$

定理 A.7.5 (等しい類の交叉は等しい). a と b を類とするとき

$$a = b \Longrightarrow \bigcap a = \bigcap b.$$

対の交叉

a と b を類とするとき，その対の交叉を

$$a \cap b \overset{\mathrm{def}}{=} \bigcap \{a, b\}$$

と書く．

定理 A.7.6.

$$\forall x\,(\,x \in a \cap b \Longleftrightarrow x \in a \wedge x \in b\,).$$

定理 A.7.7 (交叉の可換律).

$$a \cap b = b \cap a.$$

定理 A.7.8 (対の交叉が空ならばその構成要素は共通元を持たない). a, b を類とするとき次が成立する:

$$a \cap b = \emptyset \Longleftrightarrow \forall x\,(\,x \in a \Longrightarrow x \notin b\,).$$

略証. 定理 A.3.13 より

$$a \cap b = \emptyset \Longleftrightarrow \forall x\ (\,x \notin a \cap b\,)$$

が成立する．また

$$\forall x\ (\,x \notin a \cap b \Longleftrightarrow x \notin a \vee x \notin b\,)$$

かつ

$$\forall x\ (\,(\,x \notin a \vee x \notin b\,) \Longleftrightarrow (\,x \in a \Longrightarrow x \notin b\,)\,)$$

が成り立つので

$$\forall x\ (\,x \notin a \cap b \Longleftrightarrow (\,x \in a \Longrightarrow x \notin b\,)\,)$$

が成立し，

$$\forall x\ (\,x \notin a \cap b\,) \Longleftrightarrow \forall x\,(\,x \in a \Longrightarrow x \notin b\,)$$

が従う．ゆえに

$$a \cap b = \emptyset \Longleftrightarrow \forall x\,(\,x \in a \Longrightarrow x \notin b\,).$$

が得られる．

定義 A.7.9 (差類). a, b を類するとき，a に属するが b には属さない集合の全体を a から b を引いた**差類 (class difference)** と呼び，記号は

$$a \backslash b \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \{\, x \mid \quad x \in a \wedge x \notin b \,\}$$

で定める．特に $a \backslash b$ が集合であるときこれを**差集合 (set difference)** と呼ぶ．また

$$b \subset a$$

である場合，$a \backslash b$ を a における b の**補類 (complement)** 或いは $a \backslash b$ が集合であるとき**補集合**と呼ぶ．

$\mathrm{set}\,(a) \Longrightarrow \mathrm{set}\,(a \backslash b)$

定理 A.7.10. a と b を類とするとき，

$$b \subset a$$

であれば

$$\mathrm{set}\,(a \backslash b) \wedge \mathrm{set}\,(b) \Longrightarrow \mathrm{set}\,(a)\,.$$

略証. 対の公理から

$$\{a \backslash b, b\}$$

は集合であり，合併の公理と

$$a = (a \backslash b) \cup b$$

より

$$\mathrm{set}\,(a)$$

が従う．

定理 A.7.11 (合併を引いた類は要素の差の交叉で書ける). a と b を類とするとき，a が集合であれば

$$a \backslash \bigcup b = \bigcap \{\, a \backslash t \mid \quad t \in b \,\}\,.$$

上の定理の式で

$$\{\,a\backslash t \mid \quad t \in b\,\}$$

と書いていますが，これは

$$\{\,x \mid \quad \exists t \in b\,(\,x = a\backslash t\,)\}$$

の略記です．ところがこれもまだ略記されたもので，正しく書くと

$$\{\,x \mid \quad \exists t \in b\,\forall s\,(\,s \in x \Longleftrightarrow s \in a \wedge s \notin t\,)\}$$

となります．以降も煩雑さを避けるためにこのように略記します．

定理 A.7.12 (二つの類の合併の差類は差類同士の交叉).　a と b と c を類とするとき

$$a\backslash(b \cup c) = (a\backslash b) \cap (a\backslash c).$$

定理 A.7.13 (交叉を引いた類は要素の差の合併で書ける).　a と b を類とするとき

$$a\backslash \bigcap b = \bigcup \{\,a\backslash t \mid \quad t \in b\,\}.$$

定理 A.7.14 (二つの類の交叉の差類は差類同士の合併).　a と b と c を類とするとき

$$a\backslash(b \cap c) = (a\backslash b) \cup (a\backslash c).$$

定理 A.7.15.

証明.

(1)　a^{-1} の任意の要素 t に対し或る V の要素 x, y が存在して

$$(x, y) \in a \wedge t = (y, x)$$

を満たす．$((x, y), (y, x)) \in f$ より $((x, y), t) \in f$ が成り立つから $t \in f * a$ となる．逆に $f * a$ の任意の要素 t に対して a の或る要素 x が存在して

$$x \in a \wedge (x, t) \in f$$

となる．x に対し V の或る要素 a, b が存在して $x = (a, b)$ となるので

$$((a, b), t) \in f$$

となり，V の或る要素 c, d が存在して

$$((a, b), t) = ((c, d), (d, c))$$

となる．$(a,b)=(c,d)$ より $a=c$ かつ $b=d$ となり，$t=(d,c)$ かつ $(d,c)=(b,a)$ より $t=(b,a)$，従って $t\in a^{-1}$ が成り立つ．

A.8　冪

定義 A.8.1 (冪).　a を類とするとき，

$$\mathrm{P}(a) \overset{\text{def}}{=\!=} \{\, x \mid \quad x \subset a \,\}$$

で定義される類 $\mathrm{P}(a)$ を a の**冪 (power)** と呼ぶ．

公理 A.8.2 (冪の公理).　集合の冪は集合である．つまり，a を類とするとき

$$\mathrm{set}(a) \Longrightarrow \mathrm{set}(\mathrm{P}(a)).$$

A.9　関係

定義 A.9.1 (順序対).　a,b を類とするとき，

$$(a,b) \overset{\text{def}}{=\!=} \{\{a\},\{a,b\}\}$$

で定義される類 (a,b) を a と b の**順序対 (ordered pair)** と呼ぶ．

定理 A.9.2 (集合の順序対は集合).　a と b を集合とするとき

$$\mathrm{set}((a,b)).$$

証明．　a,b を集合とする．このとき定理 A.5.7 より $\{a\}$ と $\{a,b\}$ は共に集合となり，再び定理 A.5.7 より $\{\{a\},\{a,b\}\}$ は集合となる． ∎

定理 A.9.3 (順序対の相等性).　a,b,c,d を集合とするとき

$$(a,b)=(c,d) \Longleftrightarrow a=c \wedge b=d.$$

定義 A.9.4 (Cartesian 積).　類 a, b に対し，$a \times b$ を

$$a \times b := \{\, x \mid \quad \exists s \in a\, \exists t \in b\, (\, x = (s, t)\,)\,\}$$

で定め，これを a と b の **Cartesian 積 (Cartesian product)** と呼ぶ．

$a \times b$ は

$$\{\, (s, t) \mid \quad s \in a \wedge t \in b\,\}$$

と簡略して書かれることも多い．

二つの類を用いて得られる最大の Cartesian 積は

$$\{\, x \mid \quad \exists s, t\, (\, x = (s, t)\,)\,\}$$

で与えられ，これは $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ に等しい．

定理 A.9.5 ($\mathbf{V}$ の Cartesian 積).　次が成り立つ:

$$\mathbf{V} \times \mathbf{V} = \{\, x \mid \quad \exists s, t\, (\, x = (s, t)\,)\,\}\,.$$

証明.　$\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ は形式的には $\{\, x \mid \quad \exists s, t \in \mathbf{V}\, (\, x = (s, t)\,)\,\}$ で定められるが，正式には

$$\{\, x \mid \quad \exists s\, (\, s = s \wedge \exists t\, (\, t = t \wedge x = (s, t)\,)\,)\,\}$$

で定められる．ここで χ を $\mathcal{L}$ の任意の対象として

$$\exists s\, (\, s = s \wedge \exists t\, (\, t = t \wedge \chi = (s, t)\,)\,) \Longleftrightarrow \exists s\, (\, \exists t\, (\, \chi = (s, t)\,)\,) \tag{A.12}$$

が成り立つことを示す．いま $\exists s\, (\, s = s \wedge \exists t\, (\, t = t \wedge \chi = (s, t)\,)\,)$ が成り立っていると仮定する．このとき

$$\sigma := \varepsilon s\, (\, s = s \wedge \exists t\, (\, t = t \wedge \chi = (s, t)\,)\,)$$

とおけば存在記号に関する規則より

$$\sigma = \sigma \wedge \exists t\, (\, t = t \wedge \chi = (\sigma, t)\,)$$

が成立し，このとき $\wedge$ の除去より $\exists t\, (\, t = t \wedge \chi = (\sigma, t)\,)$ が成り立つので

$$\tau := \varepsilon t\, (\, t = t \wedge \chi = (\sigma, t)\,)$$

とおけば

$$\tau = \tau \wedge \chi = (\sigma, \tau)$$

が成立する．$\wedge$ の除去より $\chi = (\sigma, \tau)$ となり，存在記号に関する規則より

$$\exists t\, (\, \chi = (\sigma, t)\,)$$

が成立し，再び存在記号に関する規則から

$$\exists s\, (\, \exists t\, (\, \chi = (s, t)\,)\,)$$

が成立する．ここで演繹法則を適用すれば

$$\exists s\ (s = s \wedge \exists t\,(t = t \wedge \chi = (s,t))) \Longrightarrow \exists s\ (\exists t\,(\chi = (s,t)))$$

が得られる．逆に $\exists s\ (\exists t\,(\chi = (s,t)))$ が成り立っているとすると，

$$\sigma' \coloneqq \varepsilon s\ (\exists t\,(\chi = (s,t)))$$

とおけば存在記号に関する規則より

$$\exists t\,(\chi = (\sigma',t))$$

が成立し，

$$\tau' \coloneqq \varepsilon t\,(\chi = (\sigma',t))$$

とおけば

$$\chi = (\sigma',\tau')$$

が成立する．ここで定理 A.3.2 より $\tau' = \tau'$ が満たされるので $\wedge$ の導入により

$$\tau' = \tau' \wedge \chi = (\sigma',\tau')$$

が成り立ち，存在記号に関する規則より

$$\exists t\,(t = t \wedge \chi = (\sigma',t))$$

が成り立つ．同じく $\sigma' = \sigma'$ も満たされて

$$\sigma' = \sigma' \wedge \exists t\,(t = t \wedge \chi = (\sigma',t))$$

が成り立ち，存在記号に関する規則より

$$\exists s\ (s = s \wedge \exists t\,(t = t \wedge \chi = (s,t)))$$

が成立する．ここに演繹法則を適用すれば

$$\exists s\ (\exists t\,(\chi = (s,t))) \Longrightarrow \exists s\ (s = s \wedge \exists t\,(t = t \wedge \chi = (s,t)))$$

が得られる．以上より式 (A.12) が成立する．ところで類の公理より

$$\chi \in \mathbf{V} \times \mathbf{V} \Longleftrightarrow \exists s\ (s = s \wedge \exists t\,(t = t \wedge \chi = (s,t))),$$
$$\chi \in \{\,x \mid \quad \exists s,t\,(x = (s,t))\,\} \Longleftrightarrow \exists s\ (\exists t\,(\chi = (s,t)))$$

が成り立つので，含意の推移律から

$$\chi \in \mathbf{V} \times \mathbf{V} \Longleftrightarrow \chi \in \{\,x \mid \quad \exists s,t\,(x = (s,t))\,\}$$

が成立する．そして χ の任意性と推論法則**??**から

$$\forall y\ \left(y \in \mathbf{V} \times \mathbf{V} \Longleftrightarrow y \in \{\,x \mid \quad \exists s,t\,(x = (s,t))\,\}\right)$$

が従い，外延性の公理より定理の主張が得られる． ∎

定義 A.9.6 (関係).　$\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ の部分類を**関係 (relation)** と呼ぶ．また類 a に対して

$$\mathrm{rel}\,(a) \overset{\mathrm{def}}{\iff} a \subset \mathbf{V} \times \mathbf{V}$$

と定める．

いま，関係 E を

$$E = \{\, x \mid \quad \exists s, t\ (\ x = (s,t) \land s = t\ )\,\}$$

と定めてみる．このとき E は次の性質を満たす:

(a)　$\forall x\ (\ (x,x) \in E\ ).$

(b)　$\forall x, y\ (\ (x,y) \in E \Longrightarrow (y,x) \in E\ ).$

(c)　$\forall x, y, z\ (\ (x,y) \in E \land (y,z) \in E \Longrightarrow (x,z) \in E\ ).$

性質 (a) を反射律と呼ぶ．性質 (b) を対称律と呼ぶ．性質 (c) を推移律と呼ぶ．

定義 A.9.7 (同値関係).　a を類とし，R を関係とする．R が $R \subset a \times a$ を満たし，さらに

反射律　$\forall x \in a\ (\ (x,x) \in R\ ).$

対称律　$\forall x, y \in a\ (\ (x,y) \in R \Longrightarrow (y,x) \in R\ ).$

推移律　$\forall x, y, z \in a\ (\ (x,y) \in R \land (y,z) \in R \Longrightarrow (x,z) \in R\ ).$

も満たすとき，R を a 上の**同値関係 (equivalence relation)** と呼ぶ．

集合 a に対して $R = E \cap (a \times a)$ とおけば R は a 上の同値関係となります．

E とは別の関係 O を

$$O = \{\, x \mid \quad \exists s, t\ (\ x = (s,t) \land s \subset t\ )\,\}$$

により定めてみる．このとき O は次の性質を満たす:

(a)　$\forall x\ (\ (x,x) \in O\ ).$

(b')　$\forall x, y\ (\ (x,y) \in O \land (y,x) \in O \Longrightarrow x = y\ ).$

(c)　$\forall x, y, z\ (\ (x,y) \in O \land (y,z) \in O \Longrightarrow (x,z) \in O\ ).$

性質 (b') を反対称律と呼ぶ．

定義 A.9.8 (順序関係).　a を類とし，R を関係とする．R が $R \subset a \times a$ を満たし，さらに

反射律　$\forall x \in a\,(\,(x,x) \in R\,)$.
反対称律　$\forall x,y \in a\,(\,(x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \Longrightarrow x = y\,)$.
推移律　$\forall x,y,z \in a\,(\,(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Longrightarrow (x,z) \in R\,)$.

も満たすとき，R を a 上の**順序 (order)** と呼ぶ．a が集合であるときは対 (a,R) を**順序集合 (ordered set)** と呼ぶ．特に

$$\forall x,y \in a\,(\,(x,y) \in R \vee (y,x) \in R\,)$$

が成り立つとき，R を a 上の**全順序 (total order)** と呼ぶ．

反射律と推移律のみを満たす関係を**前順序 (preorder)** と呼びます．また全順序は**線型順序 (linear order)** とも呼ばれます．

定義 A.9.9 (上限).

定義 A.9.10 (整列集合).　x が**整列集合 (wellordered set)** であるとは，x が集合 a と a 上の順序 R の対 (a,R) に等しく，かつ a の空でない任意の部分集合が R に関する最小元を持つことをいう．またこのときの R を**整列順序 (wellorder)** と呼ぶ．

定理 A.9.11 (整列順序は全順序).

$A(x)$ という式を満たすような x が '**唯一つ存在する**' という概念を定義しましょう．当然 $A(x)$ を満たす x が存在していなくてはいけませんから $\exists x A(x)$ は満たされるべきですが，これに加えて 'y と z に対して $A(y)$ と $A(z)$ が成り立つなら $y = z$ である' という条件を付けるのです．しかしこのままでは '唯一つである' ことを表す式は長くなりますから，新しい記号 $\exists!$ を用意して簡略します．その形式的な定義は下に述べます．ちなみに，'唯一つである' ことは '**一意に存在する**' などの言明によっても示唆されます．

A を $\mathcal{L}'$ の式とし，x を A に現れる文字とし，A に文字 y,z が現れないとするとき，

$$\exists! x A(x) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists x A(x) \wedge \forall y,z\,(\,A(y) \wedge A(z) \Longrightarrow y = z\,)$$

で $\exists!$ の意味を定める．

定義 A.9.12 (定義域・値・値域).　a を類とするとき，

$$\mathrm{dom}(a) := \{\, x \mid \ \exists y\,(\,(x,y) \in a\,)\,\}, \quad \mathrm{ran}(a) := \{\, y \mid \ \exists x\,(\,(x,y) \in a\,)\,\}$$

と定めて，$\mathrm{dom}(a)$ を a の**定義域 (domain)** と呼び，$\mathrm{ran}(a)$ を a の**値域 (range)** と呼ぶ．また

$$a(t) := \{\, x \mid \ \exists y\,(\,x \in y \wedge (t,y) \in a\,)\,\}$$

とおき，これを t の a による**値 (value)** と呼ぶ．

定義 A.9.13 (single-valued).　a を類とするとき，a が **single-valued** であるということを

$$\mathrm{sing}\,(a) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \forall x,y,z\,(\,(x,y) \in a \wedge (x,z) \in a \Longrightarrow y = z\,)$$

で定める．

定理 A.9.14 (値とは要素となる順序対の片割れである).　a を類とするとき

$$\mathrm{sing}\,(a) \Longrightarrow \forall t \in \mathrm{dom}(a)\,(\,(t, a(t)) \in a\,).$$

略証.　$\mathrm{sing}\,(a)$ が成り立っていると仮定する．このとき t を $\mathrm{dom}(a)$ の任意の要素とすれば，

$$(t,\eta) \in a$$

を満たす η が取れる．この η が $a(t)$ に等しいことを示せば良い．いま x を任意の集合とする．

$$x \in \eta$$

が成り立っているとすると

$$\exists y\,(\,x \in y \wedge (t,y) \in a\,)$$

が従うので

$$x \in a(t)$$

となる．ゆえに先ず

$$x \in \eta \Longrightarrow x \in a(t)$$

が得られた．逆に

$$x \in a(t)$$

が成り立っているとき，

$$\xi := \varepsilon y\,(\,x \in y \wedge (t,y) \in a\,)$$

とおけば

$$x \in \xi \wedge (t,\xi) \in a$$

が満たされるが，$(t,\eta) \in a$ と $\mathrm{sing}\,(a)$ より

$$\xi = \eta$$

となるので，相等性の公理から

$$x \in \eta$$

も成立する．ゆえに

$$x \in a(t) \Longrightarrow x \in \eta$$

も得られた．x の任意性と外延性の公理から

$$a(t) = \eta$$

が従う．このとき

$$(t,\eta) = (t,a(t))$$

となり，$(t,\eta) \in a$ と相等性の公理から

$$(t,a(t)) \in a$$

が満たされる．以上を総合すれば

$$\mathrm{sing}\,(a) \Longrightarrow \forall t \in \mathrm{dom}(a)\,(\,(t,a(t)) \in a\,)$$

が出る．▮

定理 A.9.15 (single-valued ならば値は一意). a を類とするとき

$$\mathrm{sing}\,(a) \Longrightarrow \forall s,t \in \mathrm{dom}(a)\,(\,s = t \Longrightarrow a(s) = a(t)\,).$$

略証. $\mathrm{sing}\,(a)$ が成り立っていると仮定する．s,t を $\mathrm{dom}(a)$ の任意の要素とすれば，定理 A.9.14 より

$$(s,a(s)) \in a \wedge (t,a(t)) \in a$$

が成立する．このとき

$$s = t$$

ならば

$$(s,a(s)) = (t,a(s))$$

となるので

$$(t,a(s)) \in a$$

が従い，sing (a) と $(t, a(t)) \in a$ から

$$a(s) = a(t)$$

が成立する．ゆえに

$$s = t \Longrightarrow a(s) = a(t)$$

が示された． ∎

定義 A.9.16 (写像).　f, a, b を類とするとき，以下の概念と $\mathcal{L}'$ における派生記号を定める．

- f が**写像 (mapping)** であるということ:

$$\mathrm{fnc}\left(f\right) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \mathrm{rel}\left(f\right) \wedge \mathrm{sing}\left(f\right).$$

- f が a 上の写像であるということ:

$$f : \mathrm{on}\, a \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \mathrm{fnc}\left(f\right) \wedge \mathrm{dom}(f) = a.$$

- f が a から b への写像であるということ:

$$f : a \longrightarrow b \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f : \mathrm{on}\, a \wedge \mathrm{ran}(f) \subset b.$$

- f が a から b への**単射 (injection)** であるということ:

$$f : a \xrightarrow{1:1} b \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f : a \longrightarrow b \wedge \forall x, y, z\, (\, (x, z) \in f \wedge (y, z) \in f \Longrightarrow x = y\,).$$

- f が a から b への**全射 (surjection)** であるということ:

$$f : a \xrightarrow{\text{onto}} b \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f : a \longrightarrow b \wedge \forall y \in b\, \exists x \in a\, (\, (x, y) \in f\,).$$

- f が a から b への**全単射 (bijection)** であるということ:

$$f : a \xrightarrow[\text{onto}]{1:1} b \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f : a \xrightarrow{1:1} b \wedge f : a \xrightarrow{\text{onto}} b.$$

定理 A.9.17 (定義域と値が一致する写像は等しい).　f, g を類とするとき次が成り立つ:

$$\begin{aligned} &\mathrm{fnc}\left(f\right) \wedge \mathrm{fnc}\left(g\right) \\ &\Longrightarrow \left(\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g) \wedge \forall t \in \mathrm{dom}(f)\, \left(\, f(t) = g(t)\, \right) \Longrightarrow f = g\, \right). \end{aligned}$$

証明.　いま $\left(\mathrm{fnc}\left(f\right) \wedge \mathrm{fnc}\left(g\right)\right) \wedge \left(\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)\right)$ と $\forall t\, \left(\, t \in \mathrm{dom}(f) \Longrightarrow f(t) = g(t)\right)$ が成り立っていると仮定する．このとき χ を $\mathcal{L}$ の任意の対象として $\chi \in f$ が満たされているとすれば，$f \subset \mathbf{V} \times \mathbf{V}$ より

$$\exists s\, \left(\, \exists t\, (\, \chi = (s, t)\,)\, \right)$$

が成立する．ここで $\sigma \coloneqq \varepsilon s\ (\exists t\,(\chi = (s,t)))$ とおけば存在記号に関する規則より

$$\exists t\,(\chi = (\sigma,t))$$

が成立し，更に $\tau \coloneqq \varepsilon t\,(\chi = (\sigma,t))$ とおけば

$$\chi = (\sigma,\tau)$$

が成立する．$\chi \in f$ と相等性の公理より

$$(\sigma,\tau) \in f$$

が従い，存在記号に関する規則より

$$\exists y\,((\sigma,y) \in f)$$

が成立するので

$$\sigma \in \mathrm{dom}(f)$$

となる．このとき $\mathrm{fnc}\left(f\right)$ と定理**??**より

$$(\sigma, f(\sigma)) \in f$$

が成立し，$(\sigma,\tau) \in f \wedge (\sigma, f(\sigma)) \in f$ と $\mathrm{sing}\left(f\right)$ が満たされるので

$$\tau = f(\sigma)$$

が成り立つ．他方で $\forall t\ \left(t \in \mathrm{dom}(f) \Longrightarrow f(t) = g(t)\right)$ と推論法則**??**より

$$f(\sigma) = g(\sigma)$$

が満たされ，相等性の公理より

$$\tau = g(\sigma)$$

が成り立つ．また $\sigma \in \mathrm{dom}(f)$ と相等性の公理より

$$\sigma \in \mathrm{dom}(g)$$

が成り立ち，定理**??**より

$$(\sigma, g(\sigma)) \in g$$

となるが，$\tau = g(\sigma)$ と定理 A.9.3 より

$$(\sigma, g(\sigma)) = (\sigma,\tau)$$

が満たされるので，相等性の公理より

$$(\sigma,\tau) \in g$$

が成り立ち，再び相等性の公理より $\chi \in g$ が成り立つ．ここで演繹法則を適用すれば

$$\chi \in f \Longrightarrow \chi \in g$$

が得られる．f と g の立場を替えれば $\chi \in g \Longrightarrow \chi \in f$ も得られ，χ の任意性と推論法則**??**より

$$\forall x\,(\,x \in f \Longleftrightarrow x \in g\,)$$

が従う．そして外延性の公理より

$$f = g$$

が出てくる．最後に演繹法則を二回適用すれば定理の主張が得られる．■

定義 A.9.18 (反転).　a を類とするとき，その**反転 (inverse)** を

$$a^{-1} := \{\, x \mid \quad \exists s, t\,(\, x = (s, t) \wedge (t, s) \in a\,)\,\}$$

で定める．

定義 A.9.19 (像・原像).　a, b を類とするとき，b の a による像を

$$a * b := \left\{\, y \mid \quad \exists x \in b\,(\,(x, y) \in a\,)\,\right\}$$

で定める．また

$$a^{-1} * b$$

を b の a による原像と呼ぶ．

定理 A.9.20 (原像はそこに写される定義域の要素の全体).　a, b を類とするとき，

$$a^{-1} * b = \left\{\, x \mid \quad \exists y \in b\,(\,(x, y) \in a\,)\,\right\}.$$

略証.　x を $a^{-1} * b$ の要素とすれば，

$$(y, x) \in a^{-1}$$

を満たす b の要素 y が取れる．このとき

$$(x, y) \in a$$

となるので

$$\exists y \in b\,(\,(x, y) \in a\,)$$

が成立し

$$x \in \left\{\, x \mid \quad \exists y \in b\,(\,(x, y) \in a\,)\,\right\}$$

が従う．逆に x を $\left\{\, x \mid \quad \exists y \in b\,(\,(x, y) \in a\,)\,\right\}$ の要素とすれば，

$$(x, y) \in a$$

を満たす b の要素 y が取れる．このとき

$$(y,x) \in a^{-1}$$

となるので

$$\exists y \in b\,(\,(y,x) \in a^{-1}\,)$$

が成立し

$$x \in a^{-1} * b$$

が従う．■

定理 A.9.21 (single-valued な類の像は値の全体).　a, b を類とするとき，

$$\mathrm{sing}\,(a) \wedge b \subset \mathrm{dom}(a) \Longrightarrow a * b = \{\, x \mid \quad \exists t \in b\,(\,x = a(t)\,)\,\}\,.$$

定理 A.9.22 (像は制限写像の値域に等しい).　a, b を類とするとき次が成り立つ:

$$a * b = \mathrm{ran}(a|_b).$$

定理 A.9.23 (空集合は写像である).　以下が成立する．

(イ)　$\mathrm{fnc}\,(\emptyset)\,.$
(ロ)　$\mathrm{dom}(\emptyset) = \emptyset.$
(ハ)　$\mathrm{ran}(\emptyset) = \emptyset.$
(ニ)　$\emptyset$ は単射である．

証明.

(イ)　定理 A.3.16 より

$$\emptyset \subset \mathbf{V} \times \mathbf{V}$$

となるので $\emptyset$ は関係である．また x, y, z を $\mathcal{L}$ の任意の対象とすれば，定理 A.3.14 より

$$(x,y) \notin \emptyset$$

が成り立つので

$$\big(\,(x,y) \notin \emptyset \vee (x,z) \notin \emptyset\,\big) \vee y = z$$

が成立する．従って

$$(x,y) \in \emptyset \wedge (x,z) \in \emptyset \Longrightarrow y = z$$

が成立し，x, y, z の任意性より

$$\forall x, y, z \ \big((x, y) \in \emptyset \wedge (x, z) \in \emptyset \Longrightarrow y = z \big)$$

が成り立つ．よって $\mathrm{sing}\,(\emptyset)$ も満たされる．

(ロ)　χ を $\mathcal{L}$ の任意の対象とすれば

$$\chi \in \mathrm{dom}(\emptyset) \Longleftrightarrow \exists y \, ((\chi, y) \in \emptyset)$$

が成り立つので，対偶を取れば

$$\chi \notin \mathrm{dom}(\emptyset) \Longleftrightarrow \forall y \, ((\chi, y) \notin \emptyset)$$

が従う．定理 A.3.14 より

$$\forall y \, ((\chi, y) \notin \emptyset)$$

が満たされるので

$$\chi \notin \mathrm{dom}(\emptyset)$$

が従い，χ の任意性より

$$\forall x \, (x \notin \mathrm{dom}(\emptyset))$$

が成立する．そして定理 A.3.13 より

$$\mathrm{dom}(\emptyset) = \emptyset$$

が得られる．

(ニ)　空虚な真により

$$\forall x, y, z \ \big((x, z) \in \emptyset \wedge (y, z) \in \emptyset \Longrightarrow x = y \big)$$

が成り立つから $\emptyset$ は単射である． ∎

定義 A.9.24 (空写像).　$\emptyset$ を空写像 **(empty mapping)** とも呼ぶ．

定義 A.9.25 (合成).　a, b を類とするとき，a と b の合成 **(composition)** を

$$a \circ b \overset{\mathrm{def}}{=} \{ x \mid \quad \exists s, t, u \ (x = (s, u) \wedge (s, t) \in b \wedge (t, u) \in a) \}$$

で定める．

定義 A.9.26 (族・系).　x を集合 a から集合 b への写像とするとき，x のことを “a を添字集合 (index set) とする b の族 (family) (或は系 (collection))” とも呼び，$x(i)$ を x_i と書いて

$$(x_i)_{i \in a} \overset{\mathrm{def}}{=} x$$

とも表記する．

族 $(x_i)_{i \in a}$ は写像 x と同じであるが，一方で丸括弧を中括弧に替えた

$$\{x_i\}_{i \in a}$$

は

$$\{\, x(i) \mid \quad i \in a \,\}$$

によって定められる集合であって，$(x_i)_{i \in a}$ とは別物である．

定理 A.9.27 (全射ならば原像の像で元に戻る). f, a, b, v を類とする．f が a から b への写像であるとき

$$v \subset b \Longrightarrow f * \left(f^{-1} * v\right) \subset v$$

が成立し，特に f が全射なら

$$f * \left(f^{-1} * v\right) = v$$

が成り立つ．

略証. y を $f * \left(f^{-1} * v\right)$ の要素とすると，

$$y = f(x)$$

を満たす $f^{-1} * v$ の要素 x が取れて

$$f(x) \in v$$

が成り立つから

$$y \in v$$

が従う．ゆえに

$$f * \left(f^{-1} * v\right) \subset v$$

が成立する．f が全射であるとき，y を v の要素とすれば

$$y = f(x)$$

を満たす a の要素 x が取れて，

$$x \in f^{-1} * v$$

が成り立つので

$$y \in f * \left(f^{-1} * v\right)$$

が従う．ゆえに f が全射である場合には

$$v \subset f * \left(f^{-1} * v\right)$$

も成立して

$$v = f * \left(f^{-1} * v\right)$$

となる． ∎

定理 A.9.28 (単射ならば像の原像で元に戻る).　f, a, b, u を類とする．f が a から b への写像であるとき

$$u \subset a \Longrightarrow u \subset f^{-1} * (f * u)$$

が成立し，特に f が単射なら

$$u = f^{-1} * (f * u)$$

が成り立つ．

略証.　x を u の要素とすると

$$f(x) \in f * u$$

が成り立つから

$$x \in f^{-1} * (f * u)$$

が成立する．ゆえに

$$u \subset f^{-1} * (f * u)$$

が成立する．y を $f^{-1} * (f * u)$ の要素とすれば

$$f(y) \in f * u$$

が成り立って

$$f(y) = f(z)$$

を満たす u の要素 z が取れる．ゆえに，f が単射であるとき

$$y = z$$

となって

$$y \in u$$

が従い，

$$f^{-1} * (f * u) \subset u$$

が成立する．ゆえに，f が単射であれば

$$u = f^{-1} * (f * u)$$

が成立する． ∎

A.10　順序数

$0, 1, 2, \cdots$ で表される数字は，集合論において

$$
\begin{aligned}
0 &\overset{\mathrm{def}}{=} \emptyset, \\
1 &\overset{\mathrm{def}}{=} \{0\} = \{\emptyset\}, \\
2 &\overset{\mathrm{def}}{=} \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \\
3 &\overset{\mathrm{def}}{=} \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}
\end{aligned}
$$

といった反復操作で定められる．上の操作を受け継いで“頑張れば手で書き出せる”類を自然数と呼ぶ．0 は集合であり，対集合の公理から 1 もまた集合である．そして和集合の公理から 2 が集合であること，更には $3, 4, \cdots$ と続く自然数が全て集合であることがわかる．自然数の冪も自然数同士の集合演算もその結果は全て集合になるが，ここで

集合は 0 に集合演算を施しただけの素姓が明らかなものに限られるか

という疑問というか期待が自然に生まれてくる．実際それは正則性公理によって肯定されるわけだが，そこでキーになるのは順序数と呼ばれる概念である．

推論法則 A.10.1 (論理和・論理積の結合律).　A, B, C を $\mathcal{L}'$ の閉式とするとき次が成り立つ:

(イ)　$(A \vee B) \vee C \Longleftrightarrow A \vee (B \vee C)$.

(ロ)　$(A \wedge B) \wedge C \Longleftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$.

推論法則 A.10.2 (論理和・論理積の分配律).　A, B, C を $\mathcal{L}'$ の閉式とするとき次が成り立つ:

(イ)　$(A \vee B) \wedge C \Longleftrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$.

(ロ)　$(A \wedge B) \vee C \Longleftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$.

証明.

(イ)　いま $(A \vee B) \wedge C$ が成立していると仮定する．このとき論理積の除去により $A \vee B$ と C が同時に成り立つ．ここで A が成り立っているとすれば，論理積の導入により

$$A \wedge C$$

が成り立つので演繹法則より

$$A \Longrightarrow (A \wedge C)$$

が成立する．他方で論理和の導入より

$$(A \wedge C) \Longrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

も成り立つので，含意の推移律から

$$A \Longrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

が従う．A と B を入れ替えれば

$$B \Longrightarrow (B \wedge C) \vee (A \wedge C)$$

が成り立つが，論理和の可換律より

$$(B \wedge C) \vee (A \wedge C) \Longrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

が成り立つので

$$B \Longrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

が従う．よって場合分け法則から

$$(A \vee B) \Longrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

が成立するが，いま $A \vee B$ は満たされているので三段論法より

$$(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

が成立する．ここに演繹法則を適用すれば

$$(A \vee B) \wedge C \Longrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

が得られる．次に $A \wedge C$ が成り立っていると仮定する．このとき A が成り立つので $A \vee B$ も成立し，同時に C も成り立つので $(A \vee B) \wedge C$ が成立する．すなわち

$$A \wedge C \Longrightarrow (A \vee B) \wedge C$$

が成立する．A と B を入れ替えれば

$$B \wedge C \Longrightarrow (A \vee B) \wedge C$$

も成立するので

$$(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \Longrightarrow (A \vee B) \wedge C$$

が得られる．

(ロ)　(イ) の結果を $\rightharpoondown A, \rightharpoondown B, \rightharpoondown C$ に適用すれば

$$(\rightharpoondown A \vee \rightharpoondown B) \wedge \rightharpoondown C \Longleftrightarrow (\rightharpoondown A \wedge \rightharpoondown C) \vee (\rightharpoondown B \wedge \rightharpoondown C)$$

が得られる．ここで De Morgan の法則と同値記号の遺伝性質から

$$\begin{aligned}(\rightharpoondown A \vee \rightharpoondown B) \wedge \rightharpoondown C &\Longleftrightarrow \rightharpoondown (A \wedge B) \wedge \rightharpoondown C \\ &\Longleftrightarrow \rightharpoondown ((A \wedge B) \vee C)\end{aligned}$$

が成立し，一方で

$$\begin{aligned}(\rightharpoondown A \wedge \rightharpoondown C) \vee (\rightharpoondown B \wedge \rightharpoondown C) &\Longleftrightarrow \rightharpoondown (A \vee C) \vee \rightharpoondown (B \vee C) \\ &\Longleftrightarrow \rightharpoondown ((A \vee C) \wedge (B \vee C))\end{aligned}$$

も成立するから，含意の推移律より

$$\rightharpoondown ((A \wedge B) \vee C) \Longleftrightarrow \rightharpoondown ((A \vee C) \wedge (B \vee C))$$

が従う．最後に対偶を取れば

$$(A \wedge B) \vee C \Longleftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

が得られる．∎

推論法則 A.10.3 (選言三段論法).　A, B, C を $\mathcal{L}'$ の閉式とするとき次が成り立つ:

$$(A \vee B) \wedge \rightharpoondown B \Longrightarrow A.$$

証明.　分配律 (推論法則 A.10.2) より

$$(A \vee B) \wedge \rightharpoondown B \Longrightarrow (A \wedge \rightharpoondown B) \vee (B \wedge \rightharpoondown B)$$

が成立する．ここで矛盾に関する規則から

$$B \wedge \rightharpoondown B \Longrightarrow \perp$$

が満たされるので

$$(A \wedge \rightharpoondown B) \vee (B \wedge \rightharpoondown B) \Longrightarrow (A \wedge \rightharpoondown B) \vee \perp$$

が従う．また，論理積の除去より

$$(A \wedge \rightharpoondown B) \Longrightarrow A$$

が成り立ち，他方で矛盾に関する規則より

$$\perp \Longrightarrow A$$

も成り立つから，場合分け法則より

$$(A \wedge \rightharpoondown B) \vee \perp \Longrightarrow A$$

が従う．以上の式と含意の推移律から

$$(A \vee B) \wedge \rightharpoondown B \Longrightarrow A$$

が得られる．∎

公理 A.10.4 (正則性公理).　a を類とするとき，a は空でなければ自分自身と交わらない要素を持つ:

$$a \neq \emptyset \Longrightarrow \exists x \in a\,(\,x \cap a = \emptyset\,).$$

定理 A.10.5 (いかなる類も自分自身を要素に持たない).　a, b, c を類とするとき次が成り立つ:

(イ)　$a \notin a$.

(ロ)　$a \notin b \vee b \notin a$.

(ハ)　$a \notin b \vee b \notin c \vee c \notin a$.

証明.

(イ)　a を類とする．まず要素の公理の対偶より

$$\rightharpoondown \mathrm{set}\,(a) \Longrightarrow a \notin a$$

が満たされる．次に a が集合であるとする．このとき定理 A.5.7 より

$$a \in \{a\}$$

が成り立つから，正則性公理より

$$\exists x\ (\, x \in \{z\} \land x \cap \{a\} = \emptyset\,)$$

が従う．ここで $\chi \coloneqq \varepsilon x\ (\, x \in \{a\} \land x \cap \{a\} = \emptyset\,)$ とおけば

$$\chi = a$$

となるので，相等性の公理より

$$a \cap \{a\} = \emptyset$$

が成り立つ．$a \in \{a\}$ であるから定理 A.7.8 より $a \notin a$ が従い，演繹法則から

$$\mathrm{set}\,(a) \Longrightarrow a \notin a$$

が得られる．そして場合分け法則から

$$\mathrm{set}\,(a) \lor \rightharpoondown \mathrm{set}\,(a) \Longrightarrow a \notin a$$

が成立し，排中律と三段論法から

$$a \notin a$$

が出る．

(ロ)　要素の公理より

$$a \in b \Longrightarrow \mathrm{set}\,(a)$$

となり，定理 A.5.7 より

$$\mathrm{set}\,(a) \Longrightarrow a \in \{a, b\}$$

となるので，

$$a \in b \Longrightarrow a \in \{a, b\}$$

が成立する．また定理 A.7.8 より

$$\begin{aligned} a \in b \land a \in \{a, b\} &\Longrightarrow \exists x\ (\, x \in b \land x \in \{a, b\}\,) \\ &\Longrightarrow b \cap \{a, b\} \neq \emptyset \end{aligned}$$

が成立する．他方で正則性公理より

$$
\begin{aligned}
a \in \{a, b\} &\Longrightarrow \exists x\ (\, x \in \{a, b\}\,) \\
&\Longrightarrow \{a, b\} \neq \emptyset \\
&\Longrightarrow \exists x\ (\, x \in \{a, b\} \wedge x \cap \{a, b\} = \emptyset\,)
\end{aligned}
$$

も成立する．以上を踏まえて $a \in b$ が成り立っていると仮定する．このとき

$$a \in \{a, b\}$$

が成立するので

$$b \cap \{a, b\} \neq \emptyset$$

も成り立ち，さらに

$$\exists x\ (\, x \in \{a, b\} \wedge x \cap \{a, b\} = \emptyset\,)$$

も満たされる．ここで

$$\chi \coloneqq \varepsilon x\ (\, x \in \{a, b\} \wedge x \cap \{a, b\} = \emptyset\,)$$

とおけば $\chi \in \{a, b\}$ から

$$\chi = a \vee \chi = b$$

が従うが，相等性の公理より

$$\chi = b \Longrightarrow b \cap \{a, b\} = \emptyset$$

となるので，$b \cap \{a, b\} \neq \emptyset$ と併せて

$$\chi \neq b$$

が成立する．選言三段論法 (推論法則 A.10.3) より

$$(\chi = a \vee \chi = b) \wedge \chi \neq b \Longrightarrow \chi = a$$

となるから

$$\chi = a$$

が従い，相等性の公理より

$$a \cap \{a, b\} = \emptyset$$

が成立する．いま要素の公理より

$$\rightharpoondown \operatorname{set}(b) \Longrightarrow b \notin a$$

が満たされ，他方で定理 A.5.7 より

$$\operatorname{set}(b) \Longrightarrow b \in \{a, b\},$$

$a \cap \{a, b\}$ の仮定と定理 A.7.8 より

$$b \in \{a, b\} = \emptyset \Longrightarrow b \notin a$$

が満たされるので

$$\mathrm{set}\,(b) \Longrightarrow b \notin a$$

が成立する．従って

$$b \notin a$$

が従い，演繹法則より

$$a \in b \Longrightarrow b \notin a$$

が得られる．これは $a \notin b \vee b \notin a$ と同値である．

(ハ)　$a \in b \wedge b \in c$ が満たされていると仮定すれば，a, b は集合であるから

$$a, b \in \{a, b, c\}$$

が成立する．ゆえに $b \cap \{a, b, c\} \neq \emptyset$ と $c \cap \{a, b, c\} \neq \emptyset$ が従う．他方，正則性公理より

$$\tau \in \{a, b, c\} \wedge \tau \cap \{a, b, c\} = \emptyset$$

を満たす $\mathcal{L}$ の対象 τ が取れる．ここで $\tau \in \{a, b, c\}$ より

$$\tau = a \vee \tau = b \vee \tau = a$$

が成り立つが，$b \cap \{a, b, c\} \neq \emptyset$ と $c \cap \{a, b, c\} \neq \emptyset$ より $\tau \neq b$ かつ $\tau \neq c$ となる．よって $\tau = a$ となり

$$a \cap \{a, b, c\} = \emptyset$$

が従う．c が真類ならば要素の公理より $c \notin a$ となり，c が集合ならば $c \in \{a, b, c\}$ となるので，いずれにせよ

$$c \notin a$$

が成立する．以上で

$$a \in b \wedge b \in c \Longrightarrow c \notin a$$

が得られる． ∎

定義 A.10.6 (順序数).　類 a に対して，a が**推移的類 (transitive class)** であるということを

$$\mathrm{tran}\,(a) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \forall s\,(\,s \in a \Longrightarrow s \subset a\,)$$

で定める．また a が (集合であるならば) **順序数 (ordinal number)** であるということを

$$\mathrm{ord}\,(a) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \mathrm{tran}\,(a) \wedge \forall t, u \in a\,(\,t \in u \vee t = u \vee u \in t\,)$$

で定める．順序数の全体を

$$\mathrm{ON} \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \{\,x \mid \ \mathrm{ord}\,(x)\,\}$$

とおく．

空虚な真の一例であるが，例えば 0 は順序数の性質を満たす．ここに一つの順序数が得られたが，いま仮に α を順序数とすれば

$$\alpha \cup \{\alpha\}$$

もまた順序数となることが直ちに判明する．数字の定め方から

$$\begin{aligned} 1 &= 0 \cup \{0\}, \\ 2 &= 1 \cup \{1\}, \\ 3 &= 2 \cup \{2\}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

が成り立つから，数字は全て順序数である．

いま ON 上の関係を

$$\leq \overset{\mathrm{def}}{=} \left\{ x \mid \quad \exists \alpha, \beta \in \mathrm{ON} \, (\, x = (\alpha, \beta) \wedge \alpha \subset \beta \,) \right\}$$

と定める．

中置記法について

x と y を項とするとき，

$$(x, y) \in \leq$$

なることを往々にして

$$x \leq y$$

とも書くが，このような書き方を**中置記法 (infix notation)** と呼ぶ．同様にして，

$$(x, y) \in \leq \wedge x \neq y$$

なることを

$$x < y$$

とも書く．

以下順序数の性質を列挙するが，長いので主張だけ先に述べておく．

- ON は推移的類である．
- $\leq$ は ON において整列順序となる．
- a を $a \subset \mathrm{ON}$ なる集合とすると，$\bigcup a$ は a の $\leq$ に関する上限となる．
- ON は集合ではない．

定理 A.10.7 (推移的で $\in$ が全順序となる類は ON に含まれる).　S を類とするとき

$$\mathrm{ord}\,(S) \Longrightarrow S \subset \mathrm{ON}.$$

略証． x を S の要素とする．まず

$$\forall s, t \in x\,(\,s \in t \lor s = t \lor t \in s\,) \tag{A.13}$$

が成り立つことを示す．実際 S の推移性より

$$x \subset S$$

が成り立つので，x の要素は全て S の要素となり (A.13) が満たされる．次に

$$\mathrm{tran}\,(x)$$

が成り立つことを示す．y を x の要素とする．また z を y の要素とする．このとき

$$x \subset S$$

から

$$y \in S$$

が成り立つので

$$y \subset S$$

が成り立ち，ゆえに

$$z \in S$$

となる．従って

$$z \in x \lor z = x \lor x \in z \tag{A.14}$$

が成立する．ところで定理 A.10.5 より

$$z \in y \Longrightarrow y \notin z$$

が成り立つから

$$y \notin z \tag{A.15}$$

が成立する．また相当性の公理から

$$z = x \lor y \in x \Longrightarrow y \in z$$

が成り立つので，その対偶と (A.14) から

$$z \neq x \lor y \notin x$$

も満たされる．いま

$$y \in x$$

が成り立っていて，さらに選言三段論法より

$$(\,z \neq x \lor y \notin x\,) \land y \in x \Longrightarrow z \neq x$$

も成り立つから，

$$z \neq x$$

が成立する．他方で定理 A.10.5 より

$$z \in y \wedge y \in x \Longrightarrow x \notin z$$

が成立するから，ゆえにいま

$$z \neq x \wedge x \notin z$$

が，つまり

$$\rightharpoondown (z = x \vee x \in z) \tag{A.16}$$

が成立している．ここで選言三段論法より

$$(z \in x \vee z = x \vee x \in z) \wedge \rightharpoondown (z = x \vee x \in z) \Longrightarrow z \in x$$

も成り立つので，(A.15) と (A.16) と併せて

$$z \in x$$

が従う．以上より，y を x の要素とすれば

$$\forall z \in y (z \in y \Longrightarrow z \in x)$$

が成り立ち，ゆえに

$$y \subset x$$

が成り立つ．ゆえに x は推移的である．ゆえに

$$\mathrm{ord}(x)$$

が成立し

$$x \in \mathrm{ON}$$

となる．x の任意性より

$$S \subset \mathrm{ON}$$

が得られる．■

定理 A.10.8 (ON は推移的).　$\mathrm{tran}(\mathrm{ON})$ が成立する．

証明.　x を順序数とすると

$$\mathrm{ord}(x)$$

が成り立つので，定理 A.10.7 から

$$x \subset \mathrm{ON}$$

が成立する．ゆえに ON は推移的である．■

定理 A.10.9 (ON において $\in$ と $<$ は同義).

$$\forall \alpha, \beta \in \mathrm{ON}\,(\,\alpha \in \beta \Longleftrightarrow \alpha < \beta\,).$$

証明.　α, β を任意に与えられた順序数とする．

$$\alpha \in \beta$$

が成り立っているとすると，順序数の推移性より

$$\alpha \subset \beta$$

が成り立つ．定理 A.10.5 より

$$\alpha \neq \beta$$

も成り立つから

$$\alpha < \beta$$

が成り立つ．ゆえに

$$\alpha \in \beta \Longrightarrow \alpha < \beta$$

が成立する．逆に

$$\alpha < \beta$$

が成り立っているとすると

$$\beta \backslash \alpha \neq \emptyset$$

が成り立つので，正則性公理より

$$\gamma \in \beta \backslash \alpha \wedge \gamma \cap (\beta \backslash \alpha) = \emptyset$$

を満たす γ が取れる．このとき

$$\alpha = \gamma$$

が成り立つことを示す．x を α の任意の要素とすれば，x, γ は共に β に属するから

$$x \in \gamma \vee x = \gamma \vee \gamma \in x \tag{A.17}$$

が成り立つ．ところで相等性の公理から

$$x = \gamma \wedge x \in \alpha \Longrightarrow \gamma \in \alpha$$

が成り立ち，α の推移性から

$$\gamma \in x \wedge x \in \alpha \Longrightarrow \gamma \in \alpha$$

が成り立つから，それぞれ対偶を取れば

$$\gamma \notin \alpha \Longrightarrow x \neq \gamma \vee x \notin \alpha$$

と

$$\gamma \notin \alpha \Longrightarrow \gamma \notin x \vee x \notin \alpha$$

が成立する．いま

$$\gamma \notin \alpha$$

が成り立っているので

$$x \neq \gamma \vee x \notin \alpha$$

と

$$\gamma \notin x \vee x \notin \alpha$$

が共に成り立ち，また

$$x \in \alpha$$

でもあるから選言三段論法より

$$x \neq \gamma$$

と

$$\gamma \notin x$$

が共に成立する．そして (A.17) と選言三段論法より

$$x \in \gamma$$

が従うので

$$\alpha \subset \gamma$$

が得られる．逆に x を γ に任意の要素とすると

$$x \in \beta \wedge x \notin \beta \backslash \alpha$$

が成り立つから，すなわち

$$x \in \beta \wedge (x \notin \beta \vee x \in \alpha)$$

が成立する．ゆえに選言三段論法より

$$x \in \alpha$$

が成り立ち，x の任意性より

$$\gamma \subset \alpha$$

となる．従って

$$\gamma = \alpha$$

が成立し，

$$\gamma \in \beta$$

なので

$$\alpha \in \beta$$

が成り立つ．以上で

$$\alpha < \beta \Longrightarrow \alpha \in \beta$$

も得られた． ∎

定理 A.10.10 (ON の整列性). $\leq$ は ON 上の整列順序である．また次が成り立つ．

$$\forall \alpha, \beta \in \mathrm{ON} \left(\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha \right).$$

証明.

第一段 α, β, γ を順序数とすれば

$$\alpha \subset \alpha$$

かつ

$$\alpha \subset \beta \wedge \beta \subset \alpha \Longrightarrow \alpha = \beta$$

かつ

$$\alpha \subset \beta \wedge \beta \subset \gamma \Longrightarrow \alpha \subset \gamma$$

が成り立つ．ゆえに $\leq$ は ON 上の順序である．

第二段 $\leq$ が全順序であることを示す．α と β を順序数とする．このとき

$$\mathrm{ord}\left(\alpha \cap \beta\right)$$

が成り立ち，他方で定理 A.10.5 より

$$\alpha \cap \beta \notin \alpha \cap \beta$$

が満たされるので

$$\alpha \cap \beta \notin \alpha \vee \alpha \cap \beta \notin \beta \tag{A.18}$$

が成立する．ところで

$$\alpha \cap \beta \subset \alpha$$

は正しいので定理 A.10.9 から

$$\alpha \cap \beta \in \alpha \vee \alpha \cap \beta = \alpha$$

が成立する．従って

$$\alpha \cap \beta \notin \alpha \Longrightarrow (\alpha \cap \beta \in \alpha \vee \alpha \cap \beta = \alpha) \wedge \alpha \cap \beta \notin \alpha \tag{A.19}$$

が成り立ち，他方で選言三段論法より

$$(\alpha \cap \beta \in \alpha \vee \alpha \cap \beta = \alpha) \wedge \alpha \cap \beta \notin \alpha \Longrightarrow \alpha \cap \beta = \alpha \tag{A.20}$$

も成り立ち，かつ

$$\alpha \cap \beta = \alpha \Longrightarrow \alpha \subset \beta \tag{A.21}$$

も成り立つので，(A.19) と (A.20) と (A.21) から

$$\alpha \cap \beta \notin \alpha \Longrightarrow \alpha \subset \beta$$

が得られる．同様にして

$$\alpha \cap \beta \notin \beta \Longrightarrow \beta \subset \alpha$$

も得られる．さらに論理和の規則から

$$\alpha \cap \beta \notin \alpha \Longrightarrow \alpha \subset \beta \vee \beta \subset \alpha$$

と

$$\alpha \cap \beta \notin \beta \Longrightarrow \alpha \subset \beta \vee \beta \subset \alpha$$

が従うので，(A.18) と場合分け法則より

$$\alpha \subset \beta \vee \beta \subset \alpha$$

が成立して

$$(\alpha, \beta) \in \leq \vee (\beta, \alpha) \in \leq$$

が成立する．ゆえに $\leq$ は全順序である．

第三段　$\leq$ が整列順序であることを示す．a を ON の空でない部分集合とする．このとき正則性公理より

$$x \in a \wedge x \cap a = \emptyset$$

を満たす集合 x が取れるが，この x が a の最小限である．実際，任意に a から要素 y を取ると

$$x \cap a = \emptyset$$

から

$$y \notin x$$

が従い，また前段の結果より

$$x \in y \vee x = y \vee y \in x$$

も成り立つので，選言三段論法より

$$x \in y \vee x = y \tag{A.22}$$

が成り立つ．y は推移的であるから

$$x \in y \Longrightarrow x \subset y$$

が成立して，また

$$x = y \Longrightarrow x \subset y$$

も成り立つから，(A.22) と場合分け法則から

$$(x, y) \in \leq$$

が従う．y の任意性より

$$\forall y \in a \left[(x, y) \in \leq \right]$$

が成立するので x は a の最小限である． ∎

定理 A.10.11 (ON の部分集合の合併は順序数となる).

$$\forall a \left(a \subset \mathrm{ON} \Longrightarrow \bigcup a \in \mathrm{ON} \right).$$

証明. 和集合の公理より $\bigcup a \in \mathbf{V}$ となる．また順序数の推移性より $\bigcup a$ の任意の要素は順序数であるから，定理 A.10.10 より

$$\forall x, y \in \bigcup a \, (\, x \in y \vee x = y \vee y \in x \,)$$

も成り立つ．最後に $\mathrm{Tran}(\bigcup a)$ が成り立つことを示す．b を $\bigcup a$ の任意の要素とすれば，a の或る要素 x に対して

$$b \in x$$

となるが，x の推移性より $b \subset x$ となり，$x \subset \bigcup a$ と併せて

$$b \subset \bigcup a$$

が従う． ∎

定理 A.10.12 (Burali-Forti). 順序数の全体は集合ではない．

$$\rightharpoondown \mathrm{set}\,(\mathrm{ON})\,.$$

証明． a を類とするとき，定理 A.3.8 より

$$\mathrm{ord}\,(a) \Longrightarrow (\,\mathrm{set}\,(a) \Longrightarrow a \in \mathrm{ON}\,)$$

が成り立つ．定理 A.10.8 と定理 A.10.10 より

$$\mathrm{ord}\,(\mathrm{ON})$$

が成り立つから

$$\mathrm{set}\,(\mathrm{ON}) \Longrightarrow \mathrm{ON} \in \mathrm{ON} \tag{A.23}$$

が従い，また定理 A.10.5 より

$$\mathrm{ON} \notin \mathrm{ON}$$

も成り立つので，(A.23) の対偶から

$$\rightharpoondown \mathrm{set}\,(\mathrm{ON})$$

が成立する． ∎

定義 A.10.13 (後者). x を集合とするとき，

$$x \cup \{x\}$$

を x の**後者 (latter)** と呼ぶ．

定理 A.10.14 (順序数の後者は順序数である). α が順序数であるということと $\alpha \cup \{\alpha\}$ が順序数であるということとは同値である．

$$\forall \alpha\ (\,\alpha \in \mathrm{ON} \Longleftrightarrow \alpha \cup \{\alpha\} \in \mathrm{ON}\,).$$

略証.

第一段　α を順序数とする．そして x を

$$x \in \alpha \cup \{\alpha\} \tag{A.24}$$

なる任意の集合とすると，

$$y \in x$$

なる任意の集合 y に対して定理 A.6.6 より

$$y \in \alpha \vee y \in \{\alpha\} \tag{A.25}$$

が成立する．α が順序数であるから

$$y \in \alpha \Longrightarrow y \subset \alpha \tag{A.26}$$

が成立する．他方で定理 A.5.2 より

$$y \in \{\alpha\} \Longrightarrow y = \alpha$$

が成立し，

$$y = \alpha \Longrightarrow y \subset \alpha$$

であるから

$$y \in \{\alpha\} \Longrightarrow y \subset \alpha \tag{A.27}$$

が従う．定理 A.6.4 より

$$y \subset \alpha \Longrightarrow y \subset \alpha \cup \{\alpha\}$$

が成り立つので，(A.26) と (A.27) と併せて

$$y \in \alpha \Longrightarrow y \subset \alpha \cup \{\alpha\}$$

かつ

$$y \in \{\alpha\} \Longrightarrow y \subset \alpha \cup \{\alpha\}$$

が成立し，場合分け法則より

$$y \in \alpha \vee y \in \{\alpha\} \Longrightarrow y \subset \alpha \cup \{\alpha\}$$

が従う．そして (A.25) と併せて

$$y \subset \alpha \cup \{\alpha\}$$

が成立する．y の任意性ゆえに (A.24) の下で

$$\forall y \left(y \in x \Longrightarrow y \subset \alpha \cup \{\alpha\} \right)$$

が成り立ち，演繹法則と x の任意性から

$$\forall x \left(x \in \alpha \cup \{\alpha\} \Longrightarrow x \subset \alpha \cup \{\alpha\} \right)$$

が従う．ゆえにいま

$$\mathrm{tran}\,(\alpha \cup \{\alpha\}) \tag{A.28}$$

が得られた．また s と t を $\alpha \cup \{\alpha\}$ の任意の要素とすると

$$s \in \alpha \vee s = \alpha$$

と

$$t \in \alpha \vee t = \alpha$$

が成り立つが，

$$s \in \alpha \Longrightarrow s \in \mathrm{ON}$$

かつ

$$s = \alpha \Longrightarrow s \in \mathrm{ON}$$

から

$$s \in \alpha \vee s = \alpha \Longrightarrow s \in \mathrm{ON}$$

が従い，同様にして

$$t \in \alpha \vee t = \alpha \Longrightarrow t \in \mathrm{ON}$$

も成り立つので，

$$s \in \mathrm{ON}$$

かつ

$$t \in \mathrm{ON}$$

となる．このとき定理 A.10.10 より

$$s \in t \vee s = t \vee t \in s$$

が成り立つので，s および t の任意性より

$$\forall s, t \in \alpha \cup \{\alpha\} \, (s \in t \vee s = t \vee t \in s)$$

が得られた．(A.28) と併せて

$$\mathrm{ord}\,(\alpha \cup \{\alpha\})$$

が従い，演繹法則より

$$\alpha \in \mathrm{ON} \Longrightarrow \alpha \cup \{\alpha\} \in \mathrm{ON}$$

を得る．

第二段

定理 A.10.15 (順序数は後者が直後の数となる).　α を順序数とすれば，ON において $\alpha \cup \{\alpha\}$ は α の直後の数である:

$$\forall \alpha \in \mathrm{ON} \left[\forall \beta \in \mathrm{ON} \, (\alpha < \beta \Longrightarrow \alpha \cup \{\alpha\} \leq \beta) \right].$$

略証.　α と β を任意に与えられた順序数とし，

$$\alpha < \beta$$

であるとする．定理 A.10.9 より，このとき

$$\alpha \in \beta$$

が成り立ち，$\leq$ の定義より

$$\alpha \subset \beta$$

も成り立つ．ところで，いま t を任意の集合とすると

$$t \in \{\alpha\} \Longrightarrow t = \alpha$$

かつ

$$t = \alpha \Longrightarrow t \in \beta$$

が成り立つので，

$$\{\alpha\} \subset \beta$$

が成り立つ．ゆえに

$$\forall x \ \left(x \in \{\alpha, \{\alpha\}\} \Longrightarrow x \subset \beta \right)$$

が成り立つ．ゆえに定理 A.6.5 より

$$\alpha \cup \{\alpha\} \subset \beta.$$

すなわち

$$\alpha \cup \{\alpha\} \leq \beta$$

が成り立つ． ∎

A.11　無限

定義 A.11.1 (極限数).　類 α が極限数 **(limit ordinal)** であるということを

$$\mathrm{lim.o}\,(\alpha) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \mathrm{ord}\,(\alpha) \wedge \alpha \neq \emptyset \wedge \forall \beta \in \mathrm{ON} \ \left(\alpha \neq \beta \cup \{\beta\} \right)$$

により定める．つまり，極限数とはいずれの順序数の後者でもない 0 を除く順序数のことである．

定理 A.11.2 (全ての要素の後者で閉じていれば極限数).　空でない順序数は，すべての要素の後者について閉じていれば極限数である:

$$\forall \alpha \in \mathrm{ON} \ \left[\alpha \neq \emptyset \wedge \forall \beta \ \left(\beta \in \alpha \Longrightarrow \beta \cup \{\beta\} \in \alpha \right) \Longrightarrow \mathrm{lim.o}\,(\alpha) \right].$$

略証.　α を順序数とし，

$$\alpha \neq \emptyset \wedge \forall \beta \ \left(\beta \in \alpha \Longrightarrow \beta \cup \{\beta\} \in \alpha \right) \tag{A.29}$$

が成り立っているとする．ここで β を順序数とすると

$$\beta \in \alpha \vee \beta = \alpha \vee \alpha \in \beta$$

が成り立つ．

$$\beta = \alpha$$

と

$$\alpha \in \beta$$

の場合はいずれも

$$\alpha \in \beta \cup \{\beta\}$$

が成り立つので，定理 A.10.5 より

$$\alpha \neq \beta \cup \{\beta\}$$

が成立する．ゆえに

$$(\beta = \alpha \vee \beta \in \alpha) \Longrightarrow \alpha \neq \beta \cup \{\beta\} \tag{A.30}$$

が成立する．他方で (A.29) より

$$\beta \in \alpha \Longrightarrow \beta \cup \{\beta\} \in \alpha$$

も満たされて，

$$\beta \cup \{\beta\} \in \alpha \Longrightarrow \beta \cup \{\beta\} \neq \alpha$$

と併せて

$$\beta \in \alpha \Longrightarrow \beta \cup \{\beta\} \neq \alpha \tag{A.31}$$

が成り立つ．そして (A.30) と (A.31) と場合分け法則により

$$\left(\beta \in \alpha \vee \beta = \alpha \vee \alpha \in \beta\right) \Longrightarrow \alpha \neq \beta \cup \{\beta\}$$

が成立する．ゆえに

$$\forall \beta \in \mathrm{ON} \left(\alpha \neq \beta \cup \{\beta\}\right)$$

が成立する．ゆえに α は極限数である． ∎

次の無限公理は極限数の存在を保証する．

公理 A.11.3 (無限公理). 空集合を要素に持ち，全ての要素の後者について閉じている集合が存在する:

$$\exists a \left[\emptyset \in a \wedge \forall x \left(x \in a \Longrightarrow x \cup \{x\} \in a\right)\right].$$

定理 A.11.4 (極限数は存在する).

$$\exists \alpha \in \mathrm{ON} \left(\mathrm{lim.o}(\alpha)\right).$$

証明． 無限公理より

$$\emptyset \in a \wedge \forall x\ (\, x \in a \Longrightarrow x \cup \{x\} \in a\,)$$

を満たす集合 a が取れる．

$$b \overset{\mathrm{def}}{=} a \cap \mathrm{ON}$$

とおくとき

$$\bigcup b$$

が極限数となることを示す．まず

$$\emptyset \in a \cap \mathrm{ON} \wedge \{\emptyset\} \in a \cap \mathrm{ON}$$

が成り立つから

$$\emptyset \in \bigcup b$$

が成り立つ．ゆえに $\bigcup b$ は空ではない．また定理 A.10.11 より

$$\bigcup b \in \mathrm{ON}$$

が成立する．α を $\bigcup b$ の要素とすると，

$$x \in b \wedge \alpha \in x$$

を満たす順序数 x が取れる．このとき

$$\alpha \cup \{\alpha\} \in x$$

か

$$\alpha \cup \{\alpha\} = x$$

が成り立つが，いずれの場合も

$$\alpha \cup \{\alpha\} \in x \cup \{x\}$$

が成立する．他方で

$$x \cup \{x\} \in a \cap \mathrm{ON}$$

も成立するから

$$\alpha \cup \{\alpha\} \in \bigcup b$$

が成立する．ゆえに

$$\forall \alpha \left(\alpha \in \bigcup b \Longrightarrow \alpha \cup \{\alpha\} \in \bigcup b \right)$$

が成立する．ゆえに定理 A.11.2 より $\bigcup b$ は極限数である． ∎

無限公理から極限数の存在が示されましたが，無限公理の代わりに極限数の存在を公理に採用しても無限公理の主張は導かれます．すなわち無限公理の主張と極限数が存在するという主張は同値なのです．本稿の流れでは極限数の存在を公理とした方が自然に感じられますが，しかし無限公理の方が主張が簡単ですし，他の文献ではこちらを公理としているようです．

定理 A.11.5 (極限数は上限で表せる).

$$\mathrm{lim.o}\,(\alpha) \Longrightarrow \alpha = \bigcup \left\{\beta \mid \quad \beta \in \alpha \right\}.$$

略証.　α を極限数とする．x を α の要素とすれば，

$$x \cup \{x\} \neq \alpha$$

が成り立つから

$$x \cup \{x\} \in \alpha$$

が成り立ち

$$x \in \bigcup \left\{\beta \mid \quad \beta \in \alpha \right\}$$

が成立する．x を $\bigcup \left\{\beta \mid \quad \beta \in \alpha \right\}$ の要素とすれば

$$x \in \beta \wedge \beta \in \alpha$$

なる順序数 β が取れて，順序数の推移性より

$$x \in \alpha$$

が従う．x の任意性から

$$\alpha = \bigcup \left\{\beta \mid \quad \beta \in \alpha \right\}$$

が成立する． ∎

定義 A.11.6 (自然数).　最小の極限数を

$$\boldsymbol{\omega}$$

と書く．また $\boldsymbol{\omega}$ の要素を**自然数 (natural number)** と呼ぶ．

$\boldsymbol{\omega}$ は最小の極限数であるから，その要素である自然数はどれも極限数ではない．従って $\emptyset$ を除く自然数は必ずいずれかの自然数の後者である．また確率論で現れる ω と自然数の全体である $\boldsymbol{\omega}$ は太さで区別する．ヤヤコシイが混乱する危険はおそらく無い．

定義 A.11.7 (無限).　本稿においては，**無限 (infinity)** を表す記号 ∞ を

$$\infty \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \boldsymbol{\omega}$$

によって定める．

A.12　超限帰納法

x を任意に与えられた集合としたとき，x の任意の要素 y で

$$A(y)$$

が成り立つならば

$$A(x)$$

が成り立つとする．すると，なんと $A(x)$ は普遍的に成り立つのである．つまり

$$\forall x \left[\forall y \in x\, A(y) \Longrightarrow A(x) \right] \Longrightarrow \forall x A(x)$$

が成り立つわけだが，この事実を本稿では**集合の帰納法**と呼ぶ．また派生形としては，集合を順序数に制限した場合の**超限帰納法 (transfinite induction)** と，自然数に制限した場合の**数学的帰納法 (mathematical induction)** がある．

定理 A.12.1 (集合の帰納法).　A を $\mathcal{L}'$ の式とし，x を A に現れる文字とし，y を A に現れない文字とし，A に現れる文字で x のみが量化されていないとする．このとき

$$\forall x \left[\forall y \in x\, A(y) \Longrightarrow A(x) \right] \Longrightarrow \forall x A(x).$$

略証.　いま

$$a \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \{\, x \mid \ \neg A(x) \,\}$$

とおく．正則性公理より

$$a \neq \emptyset \Longrightarrow \exists x \,(\, x \in a \wedge x \cap a = \emptyset \,)$$

が成り立つので，対偶を取れば

$$\forall x \,(\, x \notin a \vee x \cap a \neq \emptyset \,) \Longrightarrow a = \emptyset \tag{A.32}$$

が成り立つ．ここで

$$x \cap a \neq \emptyset \Longleftrightarrow \exists y \in x \,(\, y \in a \,)$$

が成り立つので (A.32) から

$$\forall x \left[x \notin a \vee \exists y \in x \,(\, y \in a \,) \right] \Longrightarrow a = \emptyset$$

が従い，そして論理和は否定と含意で書き直せる (推論法則 A.2.17) から

$$\forall x \left[\forall y \in x \, (\, y \notin a \,) \Longrightarrow x \notin a \right] \Longrightarrow a = \emptyset$$

が従う．ところで類の公理より

$$x \notin a \Longleftrightarrow A(x)$$

が成り立つから

$$\forall x \left[\forall y \in x \, A(y) \Longrightarrow A(x) \right] \Longrightarrow \forall x A(x)$$

を得る． ∎

本稿では正則性公理を認めているが，いまだけは認めないことにして代わりに集合の帰納法が正しいと仮定してみると，今度は正則性公理が定理として導かれる．実際，a を類とすれば

$$\forall x \left[\forall y \in x \, (\, y \notin a \,) \Longrightarrow \; x \notin a \right] \Longrightarrow \forall x \, (\, x \notin a \,)$$

が成立するが，ここで対偶を取れば

$$\exists x \, (\, x \in a \,) \Longrightarrow \exists x \in a \left[\forall y \in x \, (\, y \notin a \,) \right]$$

が成立し，

$$a \neq \emptyset \Longleftrightarrow \exists x \, (\, x \in a \,)$$

と

$$\forall y \in x \, (\, y \notin a \,) \Longleftrightarrow x \cap a = \emptyset$$

が成り立つことを併せれば

$$a \neq \emptyset \Longrightarrow \exists x \in a \, (\, x \cap a = \emptyset \,)$$

が出る．この意味で正則性公理は**帰納法の公理**とも呼ばれる．

定理 A.12.2 (超限帰納法). A を $\mathcal{L}'$ の式，α を A に現れる文字，β を A に現れない文字とする．このとき，A に現れる文字で α のみが A で量化されていない場合，次が成り立つ:

$$\forall \alpha \in \mathrm{ON} \left(\forall \beta \in \alpha \, A(\beta) \Longrightarrow A(\alpha) \right) \Longrightarrow \forall \alpha \in \mathrm{ON} \, A(\alpha).$$

証明. 定理 A.12.1 より

$$\forall \alpha \left[\forall \beta \in \alpha \, (\, \beta \in \mathrm{ON} \Longrightarrow A(\beta) \,) \Longrightarrow (\, \alpha \in \mathrm{ON} \Longrightarrow A(\alpha) \,) \right] \Longrightarrow \forall \alpha \, (\, \alpha \in \mathrm{ON} \Longrightarrow A(\alpha) \,) \tag{A.33}$$

が成り立つ．いま

$$\forall \alpha \in \mathrm{ON} \left(\forall \beta \in \alpha \, A(\beta) \Longrightarrow A(\alpha) \right) \tag{A.34}$$

が成り立っているとする．その上で α を集合とし，

$$\forall \beta \in \alpha \,(\, \beta \in \mathrm{ON} \Longrightarrow A(\beta)\,) \tag{A.35}$$

が成り立っているとする．さらにその上で

$$\alpha \in \mathrm{ON}$$

が成り立っているとする．このとき β を

$$\beta \in \alpha$$

なる集合とすると，順序数の推移性より

$$\beta \in \mathrm{ON}$$

が成り立つので，(A.35) と併せて

$$A(\beta)$$

が成り立つ．すなわちいま

$$\forall \beta \in \alpha \, A(\beta)$$

が成り立つ．また (A.34) より

$$\forall \beta \in \alpha \, A(\beta) \Longrightarrow A(\alpha)$$

が成り立つので，いま

$$A(\alpha)$$

が成立する．つまり，(A.35) までを仮定したときには

$$\alpha \in \mathrm{ON} \Longrightarrow A(\alpha)$$

が成立する．ゆえに (A.34) までを仮定したときには

$$\forall \beta \in \alpha \,(\, \beta \in \mathrm{ON} \Longrightarrow A(\beta)\,) \Longrightarrow (\, \alpha \in \mathrm{ON} \Longrightarrow A(\alpha)\,)$$

が成立し，α の任意性から

$$\forall \alpha \left[\forall \beta \in \alpha \,(\, \beta \in \mathrm{ON} \Longrightarrow A(\beta)\,) \Longrightarrow (\, \alpha \in \mathrm{ON} \Longrightarrow A(\alpha)\,) \right]$$

が成立する．ゆえに，何も仮定しなくても

$$(\mathrm{A.34}) \Longrightarrow \forall \alpha \left[\forall \beta \in \alpha \,(\, \beta \in \mathrm{ON} \Longrightarrow A(\beta)\,) \Longrightarrow (\, \alpha \in \mathrm{ON} \Longrightarrow A(\alpha)\,) \right] \tag{A.36}$$

が成立する．(A.33) と (A.36) と含意の推移性より

$$\forall \alpha \in \mathrm{ON} \left(\forall \beta \in \alpha \, A(\beta) \Longrightarrow A(\alpha) \right) \Longrightarrow \forall \alpha \,(\, \alpha \in \mathrm{ON} \Longrightarrow A(\alpha)\,)$$

が従うが，

$$\forall \alpha \,(\, \alpha \in \mathrm{ON} \Longrightarrow A(\alpha)\,)$$

を略記したものが

$$\forall\alpha \in \mathrm{ON}\, A(\alpha)$$

であるから

$$\forall\alpha \in \mathrm{ON}\, \bigl(\forall\beta \in \alpha\, A(\beta) \Longrightarrow A(\alpha)\bigr) \Longrightarrow \forall\alpha \in \mathrm{ON}\, A(\alpha)$$

が成り立つことになる． ▮

以後本稿では超限帰納法を頻繁に扱うので，ここでその**利用方法**を述べておく．順序数に対する何らかの言明 A が与えられたとき，それがいかなる順序数に対しても真であることを示したいとする．往々にして

$$\forall\alpha \in \mathrm{ON}\, A(\alpha)$$

をいきなり示すのは難しく，一方で

$$\forall\beta \in \alpha\, A(\beta)$$

から

$$A(\alpha)$$

を導くことは容易い．それは順序数の “順番” 的な性質の良さによるが，超限帰納法のご利益は

$$\forall\alpha \in \mathrm{ON}\, \bigl(\forall\beta \in \alpha\, A(\beta) \Longrightarrow A(\alpha)\bigr)$$

が成り立つことさえ示してしまえばいかなる順序数に対しても A が真となってくれるところにある．

α を任意に与えられた順序数とするとき，

$$\alpha = 0$$

であると空虚な真によって

$$\forall\beta \in \alpha\, A(\beta)$$

は必ず真となるから，まずは

$$A(0)$$

が成り立つことを示さなければならない．$A(0)$ が偽であると

$$\forall\beta \in \alpha\, A(\beta) \wedge \rightarrow A(0)$$

が真となって

$$\forall\beta \in \alpha\, A(\beta) \Longrightarrow A(0)$$

が偽となってしまうからである．α が 0 でないときは素直に

$$\forall\beta \in \alpha\, A(\beta)$$

が成り立つとき

$$A(\alpha)$$

が成り立つことを示せば良い．以上超限帰納法の利用法をまとめると，

超限帰納法の利用手順

順序数に対する何らかの言明 A が与えられて，それがいかなる順序数に対しても真なることを示したいならば，

- まずは $A(0)$ が成り立つことを示し，
- 次は α を 0 でない順序数として $\forall\beta \in \alpha\, A(\beta) \Longrightarrow A(\alpha)$ が成り立つことを示す．

定理 A.12.3 (数学的帰納法の原理).　$\boldsymbol{\omega}$ は次の意味で最小の無限集合である:

$$\forall a\ [\,\emptyset \in a \wedge \forall x\,(\,x \in a \Longrightarrow x \cup \{x\} \in a\,) \Longrightarrow \boldsymbol{\omega} \subset a\,].$$

証明．　a を集合とし，

$$\emptyset \in a \wedge \forall x\,(\,x \in a \Longrightarrow x \cup \{x\} \in a\,) \tag{A.37}$$

が成り立っているとする．このとき

$$\forall \alpha \in \mathrm{ON}\,(\,\alpha \in \boldsymbol{\omega} \Longrightarrow \alpha \in a\,)$$

が成り立つことを超限帰納法で示す．まずは

$$0 \in a$$

から

$$\emptyset \in \boldsymbol{\omega} \Longrightarrow \emptyset \in a$$

が成立する．次に α を任意に与えられた 0 でない順序数とする．

$$\forall \beta \in \alpha\,(\,\beta \in \boldsymbol{\omega} \Longrightarrow \beta \in a\,) \tag{A.38}$$

が成り立っているとすると，

$$\alpha \in \boldsymbol{\omega}$$

なら α は極限数でないから

$$\alpha = \beta \cup \{\beta\}$$

を満たす自然数 β が取れて，(A.38) より

$$\beta \in a$$

が成り立ち，(A.37) より

$$\alpha \in a$$

が従う．以上で

$$\forall \alpha \in \mathrm{ON}\ \left[\ \forall \beta \in \alpha\,(\,\beta \in \boldsymbol{\omega} \Longrightarrow \beta \in a\,) \Longrightarrow (\,\alpha \in \boldsymbol{\omega} \Longrightarrow \alpha \in a\,)\right]$$

が得られた．超限帰納法により

$$\forall \alpha \in \mathrm{ON}\,(\,\alpha \in \boldsymbol{\omega} \Longrightarrow \alpha \in a\,)$$

が成り立つから

$$\boldsymbol{\omega} \subset a$$

が従う． ■

A.13　再帰的定義

例えば

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad a_4,\quad \cdots\quad a_n,\quad \cdots$$

なる列が与えられたときに，その n 重の順序対を

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

などと書くことがある．まあ

$$(a_0, a_1)$$

ならば単なる順序対であり，

$$(a_0, a_1, a_2)$$

も

$$((a_0, a_1), a_2)$$

で定められ，

$$(a_0, a_1, a_2, a_3)$$

も

$$(((a_0, a_1), a_2), a_3)$$

で定められる．このように具体的に全ての要素を書き出せるうちは何も問題は無い．ただし，同じ操作を n 回反復するということを表現するために

$$\cdots$$

なる不明瞭な記号を無断で用いることは $\mathcal{L}'$ において許されない．そもそもまだ "n 回の反復" をどんな式で表現したら良いかもわからないのである．次の定理は，このような再帰的な操作が $\mathcal{L}'$ で可能であることを保証する．

定理 A.13.1 (超限帰納法による写像の構成).　類 G を $\mathbf{V}$ 上の写像とするとき，

$$K \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{ f \mid \quad \exists \alpha \in \mathrm{ON} \left(f : \mathrm{on}\, \alpha \wedge \forall \beta \in \alpha \left(f(\beta) = G(f|_{\beta}) \right) \right) \right\}$$

とおいて

$$F \overset{\text{def}}{=\!=} \bigcup K$$

と定めると，F は ON 上の写像であって

$$\forall \alpha \in \mathrm{ON} \left(F(\alpha) = G(F|_{\alpha}) \right)$$

を満たす．また ON 上の写像で上式を満たすのは F のみである．

証明.

第二段　F が写像であることを示す．まず K の任意の要素は $V \times V$ の部分集合であるから

$$F \subset V \times V$$

となる．x, y, z を任意の集合とする．$(x, y) \in F$ かつ $(x, z) \in F$ のとき，K の或る要素 f と g が存在して

$$(x, y) \in f \wedge (x, z) \in g$$

を満たすが，ここで $f(x) = g(x)$ となることを言うために，$\alpha = \mathrm{dom}(f)$, $\beta = \mathrm{dom}(g)$ とおき，

$$\forall \gamma \in \mathrm{ON} \left(\gamma \in \alpha \wedge \gamma \in \beta \Longrightarrow f(\gamma) = g(\gamma) \right) \tag{A.39}$$

が成り立つことを示す．いま γ を任意の順序数とする．$\gamma = \emptyset$ の場合は $f|_{\gamma} = \emptyset$ かつ $g|_{\gamma} = \emptyset$ となるから

$$f(\gamma) = G(\emptyset) = g(\gamma)$$

が成立する．$\gamma \neq \emptyset$ の場合は

$$\forall \xi \in \gamma \left(\xi \in \alpha \wedge \xi \in \beta \Longrightarrow f(\xi) = g(\xi) \right)$$

が成り立っていると仮定する．このとき $\gamma \in \alpha \wedge \gamma \in \beta$ ならば順序数の推移性より γ の任意の要素 ξ は $\xi \in \alpha \wedge \xi \in \beta$ を満たすから

$$\forall \xi \in \gamma \left(f(\xi) = g(\xi) \right)$$

が成立する．従って

$$f|_{\gamma} = g|_{\gamma}$$

が成立するので $f(\gamma) = g(\gamma)$ が得られる．超限帰納法より (A.39) が得られる．以上より

$$y = f(x) = g(x) = z$$

となるので F は single-valued である．

第三段　$\mathrm{dom}(F) \subset \mathrm{ON}$ が成り立つことを示す．実際

$$\mathrm{dom}(F) = \bigcup_{f \in K} \mathrm{dom}(f)$$

かつ $\forall f \in K\ (\ \mathrm{dom}(f) \subset \mathrm{ON}\ )$ だから $\mathrm{dom}(F) \subset \mathrm{ON}$ となる．

第四段　$\mathrm{Tran}(\mathrm{dom}(F))$ であることを示す．実際任意の集合 x, y について

$$y \in x \wedge x \in \mathrm{dom}(F)$$

が成り立っているとき，或る $f \in K$ で $x \in \mathrm{dom}(f)$ となり，$\mathrm{dom}(f)$ は順序数なので，順序数の推移律から

$$y \in \mathrm{dom}(f)$$

が従う．ゆえに $y \in \mathrm{dom}(F)$ となる．

第五段　$\forall \alpha \in \mathrm{dom}(F)\ (\ F(\alpha) = G(F|_\alpha)\ )$ が成り立つことを示す．実際，$\alpha \in \mathrm{dom}(F)$ なら K の或る要素 f に対して $\alpha \in \mathrm{dom}(f)$ となるが，$f \subset F$ であるから

$$f(\alpha) = F(\alpha)$$

が成り立つ．これにより $f|_\alpha = f \cap (\alpha \times V) = F \cap (\alpha \times V) = F|_\alpha$ より

$$G(f|_\alpha) = G(F|_\alpha)$$

も成り立つ．$f(\alpha) = G(f|_\alpha)$ と併せて $F(\alpha) = G(F|_\alpha)$ を得る．

第六段　α を任意の順序数として $\forall \beta \in \alpha\ (\ \beta \in \mathrm{dom}(F)\ ) \Longrightarrow \alpha \in \mathrm{dom}(F)$ が成り立つことを示す．$\alpha = \emptyset$ の場合は

$$\forall f \in K\ (\ \mathrm{dom}(f) \neq \emptyset \Longrightarrow \emptyset \in \mathrm{dom}(f)\ )$$

が満たされるので $\alpha \in \mathrm{dom}(F)$ となる (定理**??**)．$\alpha \neq \emptyset$ の場合，

$$\forall \beta \in \alpha\ (\ \beta \in \mathrm{dom}(F)\ )$$

が成り立っているとして $f = F|_\alpha$ とおけば，f は α 上の写像であり，α の任意の要素 β に対して

$$f(\beta) = F|_\alpha(\beta) = F(\beta) = G(F|_\beta) = G(f|_\beta)$$

を満たすから $f \in K$ である．このとき $f' = f \cup \{(\alpha, G(f))\}$ も K に属するので

$$\alpha \in \mathrm{dom}(f') \subset \mathrm{dom}(F)$$

が成立する．超限帰納法より

$$\forall \alpha \in \mathrm{ON}\ (\ \alpha \in \mathrm{dom}(F)\ )$$

が成立し，前段の結果と併せて

$$\mathrm{ON} = \mathrm{dom}(F)$$

を得る．

第七段　F の一意性を示す．類 H が

$$H : \mathrm{ON} \longrightarrow V \wedge \forall \alpha \in \mathrm{ON} \, (\, H(\alpha) = G(H|_{\alpha}) \,)$$

を満たすとき，$F = H$ が成り立つことを示す．いま，α を任意に与えられた順序数とする．$\alpha = \emptyset$ の場合は

$$F|_{\emptyset} = \emptyset = H|_{\emptyset}$$

より $F(\emptyset) = H(\emptyset)$ となる．$\alpha \neq \emptyset$ の場合，

$$\forall \beta \in \alpha \, (\, F(\beta) = H(\beta) \,)$$

が成り立っていると仮定すれば

$$F|_{\alpha} = H|_{\alpha}$$

が成り立つから $F(\alpha) = H(\alpha)$ となる．以上で

$$\forall \alpha \in \mathrm{ON} \, \big(\, \forall \beta \in \alpha \, (\, F(\beta) = H(\beta) \,) \Longrightarrow F(\alpha) = H(\alpha) \, \big)$$

が得られた．超限帰納法より

$$\forall \alpha \in \mathrm{ON} \, (\, F(\alpha) = H(\alpha) \,)$$

が従い $F = H$ が出る． ∎

再帰的定義の応用：多数の要素からなる順序対

a を $\boldsymbol{\omega}$ から集合 A への写像とすると，

$$a_n \overset{\mathrm{def}}{=} a(n)$$

と書けば

$$a_0, a_1, a_2, \cdots$$

なる列が作られる．ここでは

$$(a_0, a_1, \cdots, a_n)$$

のような記法の集合論的意味付けを考察する．

$\mathbf{V}$ 上の写像 G を

$$G(x) = \begin{cases} a_0 & \text{if } \mathrm{dom}(x) = \emptyset \\ (x(k), a(\mathrm{dom}(x))) & \text{if } \mathrm{dom}(x) = k \cup \{k\} \wedge k \in \boldsymbol{\omega} \\ \emptyset & \text{o.w.} \end{cases}$$

によって定めてみると，つまり G とは

$$\begin{aligned} \{ \, (x, y) \mid \quad & \big(\, \mathrm{dom}(x) = \emptyset \Longrightarrow y = a_0 \, \big) \\ & \wedge \forall k \in \boldsymbol{\omega} \, \big(\, \mathrm{dom}(x) = k \cup \{k\} \Longrightarrow y = (x(k), a(\mathrm{dom}(x))) \, \big) \\ & \wedge \Big[\, \mathrm{dom}(x) \neq \emptyset \wedge \forall k \in \boldsymbol{\omega} \, (\, \mathrm{dom}(x) \neq k \cup \{k\} \,) \Longrightarrow y = \emptyset \, \Big] \, \} \end{aligned}$$

のことであるが，ON 上の写像 p で

$$p(n) = \begin{cases} a_0 & \text{if } (n=0) \\ (a_0, a_1) & \text{if } (n=1) \\ ((a_0, a_1), a_2) & \text{if } (n=2) \\ (((a_0, a_1), a_2), a_3) & \text{if } (n=3) \end{cases}$$

を満たすものが取れる．先の

$$(a_0, a_1, \cdots, a_n)$$

という一見不正確であった記法は，この

$$p(n)$$

によって定めてしまえば無事解決である．

A.14　整礎集合

いま $\mathbf{V}$ 上の写像 G を

$$x \longmapsto \begin{cases} \emptyset & \text{if } \mathrm{dom}(x) = \emptyset \\ \mathrm{P}\left(x(\beta)\right) & \text{if } \beta \in \mathrm{ON} \wedge \mathrm{dom}(x) = \beta \cup \{\beta\} \\ \bigcup \mathrm{ran}(x) & \text{o.w.} \end{cases}$$

なる関係により定めると，つまり正式には

$$\begin{aligned} \{\, (x,y) \mid \quad & \left(\mathrm{dom}(x) = \emptyset \Longrightarrow y = \alpha\,\right) \\ & \wedge \forall \beta \in \mathrm{ON}\ \left(\mathrm{dom}(x) = \beta \cup \{\beta\} \Longrightarrow y = \mathrm{P}\left(x(\beta)\right)\,\right) \\ & \wedge \left[\mathrm{dom}(x) \neq \emptyset \wedge \forall \beta \in \mathrm{ON}\ \left(\mathrm{dom}(x) \neq \beta \cup \{\beta\}\,\right) \Longrightarrow y = \bigcup \mathrm{ran}(x)\right] \} \end{aligned}$$

で定めると，

$$\forall \alpha \in \mathrm{ON}\,(\,R(\alpha) = G(R|_\alpha)\,)$$

を満たす ON 上の写像 R が取れる．R とは，その定義の仕方より

$$\mathrm{ON} \ni \alpha \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{if } \alpha = 0 \\ \mathrm{P}\left(R(\beta)\right) & \text{if } \beta \in \mathrm{ON} \wedge \alpha = \beta \cup \{\beta\} \\ \bigcup_{\beta\in\alpha} R(\beta) & \text{if } \mathrm{lim.o}\,(\alpha) \end{cases}$$

を満たす写像である．本節ではこの R が考察対象となる．

定義 A.14.1 (整礎集合).　$\bigcup_{\alpha\in\mathrm{ON}} R(\alpha)$ の要素を**整礎集合 (well-founded set)** と呼ぶ．

この R を用いると次の美しい式が導かれる．ただしこれは偶然得られた訳ではなく，John Von Neumann はこの結果を予定して正則性公理を導入したのである．

定理 A.14.2 (すべての集合は整礎的である).

$$\mathbf{V} = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{ON}} R(\alpha).$$

証明.　S を類として，S が ON の空でない部分類ならば

$$\mathbf{V} \neq \bigcup_{\alpha \in S} R(\alpha) \Longrightarrow S \neq \mathrm{ON}$$

が成り立つことを示す．

$$\mathbf{V} \neq \bigcup_{\alpha \in S} R(\alpha)$$

が成り立っているとすると，正則性公理より

$$a \in \mathbf{V} \backslash \bigcup_{\alpha \in S} R(\alpha) \wedge a \cap \mathbf{V} \backslash \bigcup_{\alpha \in S} R(\alpha) = \emptyset$$

を満たす集合 a が取れる．つまり

$$a \notin \bigcup_{\alpha \in S} R(\alpha) \wedge a \subset \bigcup_{\alpha \in S} R(\alpha)$$

が成り立っている．ここで a の要素 s に対して

$$s \in R(\alpha)$$

を満たす順序数 α のうちで $\leq$ に関して最小のものを対応させる関係を f とすると，つまり

$$f \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \left\{ x \mid \quad \exists s \in a \, \exists \alpha \in \mathrm{ON} \left[x = (s, \alpha) \wedge s \in R(\alpha) \wedge \forall \beta \in \mathrm{ON} \, (s \in R(\beta) \Longrightarrow \alpha \leq \beta) \right] \right\}$$

と定めれば，

$$f : a \longrightarrow \mathrm{ON}$$

が成り立つ．従って

$$\beta \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \bigcup f * a$$

とおけば β は順序数である．このとき

$$t \in a \Longrightarrow t \in R(f(t)) \Longrightarrow t \in R(\beta)$$

が成り立つから

$$a \subset R(\beta)$$

が成り立ち，そして

$$R\left(\beta \cup \{\beta\}\right) = \mathrm{P}\left(R(\beta)\right)$$

であるから

$$a \in R\left(\beta \cup \{\beta\}\right)$$

が従う．

$$\forall \alpha \in S \, (\, a \notin R(\alpha) \,)$$

であったから

$$\beta \cup \{\beta\} \notin S$$

が成り立つので

$$S \neq \mathrm{ON}$$

である．定理の主張は対偶を取れば得られる． ∎

定義 A.14.3 (集合の階数).

付録 B

数

本稿では，整数の全体 $\mathbf{Z}$，有理数の全体 $\mathbf{Q}$，実数の全体 $\mathbf{R}$，複素数の全体 $\mathbf{C}$ を

$$\boldsymbol{\omega} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$$

となるように構成する．当然，加減乗除も純粋な延長として，つまり，それぞれの集合に定める加法を

$$+_{\omega},\quad +_{\mathbf{Z}},\quad +_{\mathbf{Q}},\quad +_{\mathbf{R}},\quad +_{\mathbf{C}}$$

と書けば

$$+_{\omega} \subset +_{\mathbf{Z}} \subset +_{\mathbf{Q}} \subset +_{\mathbf{R}} \subset +_{\mathbf{C}}$$

が満たされ，それぞれの集合に定める乗法を

$$\bullet_{\omega},\quad \bullet_{\mathbf{Z}},\quad \bullet_{\mathbf{Q}},\quad \bullet_{\mathbf{R}},\quad \bullet_{\mathbf{C}}$$

と書けば

$$\bullet_{\omega} \subset \bullet_{\mathbf{Z}} \subset \bullet_{\mathbf{Q}} \subset \bullet_{\mathbf{R}} \subset \bullet_{\mathbf{C}}$$

が満たされるように構成する．これらは ON に定められる加法と乗法が大元となっていて，ON に定める加法を $+$ とし，乗法を $\bullet$ とすれば，$\boldsymbol{\omega}$ 上の加法と乗法とは

$$+_{\omega} \stackrel{\mathrm{def}}{=} +|_{\omega\times\omega}$$

と

$$\bullet_{\omega} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bullet|_{\omega\times\omega}$$

によって定義されるものである．順序についても，$\boldsymbol{\omega}$ の順序は ON の順序の制限で，つまり

$$\leq_{\omega} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \leq|_{\omega\times\omega}$$

で定められるが，残りの $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ に定める順序を

$$\leq_{\mathbf{Z}},\quad \leq_{\mathbf{Q}},\quad \leq_{\mathbf{R}}$$

と書けば

$$\leq_{\omega} \subset \leq_{\mathbf{Z}} \subset \leq_{\mathbf{Q}} \subset \leq_{\mathbf{R}}$$

が満たされるようにする．‘埋め込めば拡張となる’ ように数を構成している文献もあるが，それでは詰め甘い．自然数のゼロと実数のゼロが違うことを許せばややこしくなるだけである．上のように構成すると，例えば測度論の本では

$$0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$$

を ‘ローカルなルール’ としている場合があるが，本稿では定理として導かれる．(∞ の定義は P. 174)

B.1　加法

α と β を順序数とするとき，α に β を “足す” という操作を導入したい．つまり，足し算の記号

$$+$$

を何らかの意味で定めて

$$\alpha + \beta$$

を実行したいのである．先ずは簡単に，β が 0 の場合は

$$\alpha + 0 \overset{\mathrm{def}}{=} \alpha$$

と定めてしまう．β が 1 の場合は，ちょうど

$$\alpha \cup \{\alpha\}$$

が α の直後の元であったからこれを $\alpha + 1$ を定めることにする．$\alpha + 2$ も $\alpha + 1$ の直後の元として

$$\alpha + 2 \overset{\mathrm{def}}{=} (\alpha + 1) + 1$$

で定めることにして，この調子で

$$\alpha + 3 \overset{\mathrm{def}}{=} (\alpha + 2) + 1$$
$$\alpha + 4 \overset{\mathrm{def}}{=} (\alpha + 3) + 1$$
$$\alpha + 5 \overset{\mathrm{def}}{=} (\alpha + 4) + 1$$

としていくわけであるが，例えば β が $\boldsymbol{\omega}$ である場合，$\boldsymbol{\omega}$ は極限数であるから上の操作をいくら続けても

$$\alpha + \boldsymbol{\omega}$$

に到達することは不可能である．仕方が無いから一番自然な方法として

$$\{\, \alpha + k \mid \quad k \in \boldsymbol{\omega} \,\}$$

の上限を $\alpha + \boldsymbol{\omega}$ と定める．以上の操作をヒントにして，$\alpha + \beta$ は

- β に対して $\beta = \gamma + 1$ を満たす順序数 γ が取れるなら

$$\alpha + \beta \overset{\mathrm{def}}{=} (\alpha + \gamma) + 1,$$

- β が極限数なら

$$\alpha + \beta \overset{\mathrm{def}}{=} \bigcup \{\, \alpha + \gamma \mid \quad \gamma \in \beta \,\},$$

で定められる．意味的には再帰操作を繰り返しているのだから，それを $\mathcal{L}'$ のことばで表すためには A.13 節の方法を応用すれば良い．また次節で述べることであるが“足し算”と同様にすれば ON 上に“掛け算”も定めることが出来る．それぞれ主に“加法”と“乗法”と呼ばれ，これらの延長が複素数に対する通常の四則演算に発展していく．

定義 B.1.1 (順序数の加法). α を順序数とし，$\mathbf{V}$ 上の写像 G_α を

$$x \longmapsto \begin{cases} \alpha & \text{if } \mathrm{dom}(x) = \emptyset \\ x(\beta) \cup \{x(\beta)\} & \text{if } \beta \in \mathrm{ON} \wedge \mathrm{dom}(x) = \beta \cup \{\beta\} \\ \bigcup \mathrm{ran}(x) & \text{o.w.} \end{cases}$$

なる関係により定めると，

$$\forall \beta \in \mathrm{ON}\, (\, A_\alpha(\beta) = G_\alpha(A_\alpha|_\beta)\,)$$

を満たす ON 上の写像 A_α が取れる．ここで

$$+ \overset{\text{def}}{=} \left\{\, ((\alpha,\beta),y) \mid \quad \alpha \in \mathrm{ON} \wedge \beta \in \mathrm{ON} \wedge y = A_\alpha(\beta) \,\right\}$$

により + を定め，これを ON 上の**加法 (summation)** と呼ぶ．

α を順序数とすれば，G_α とは正式には

$$\begin{aligned} \{\,(x,y) \mid \quad & \big(\,\mathrm{dom}(x) = \emptyset \Longrightarrow y = \alpha\,\big) \\ & \wedge \forall \beta \in \mathrm{ON}\, \big(\,\mathrm{dom}(x) = \beta \cup \{\beta\} \Longrightarrow y = x(\beta) \cup \{x(\beta)\}\,\big) \\ & \wedge \Big[\,\mathrm{dom}(x) \neq \emptyset \wedge \forall \beta \in \mathrm{ON}\, \big(\,\mathrm{dom}(x) \neq \beta \cup \{\beta\}\,\big) \Longrightarrow y = \bigcup \mathrm{ran}(x)\,\Big]\,\} \end{aligned}$$

によって定められた写像である．そして A_α とは

$$\mathrm{ON} \ni \beta \longmapsto \begin{cases} \alpha & \text{if } \beta = \emptyset \\ (\alpha + \gamma) \cup \{\alpha + \gamma\} & \text{if } \gamma \in \mathrm{ON} \wedge \beta = \gamma \cup \{\gamma\} \\ \bigcup \left\{\, \alpha + \gamma \mid \quad \gamma \in \beta \,\right\} & \text{if } \mathrm{lim.o}\,(\beta) \end{cases}$$

を満たす写像である．

定理 B.1.2 (+ は ON への全射である). + は ON × ON から ON への全射である:

$$+ : \mathrm{ON} \times \mathrm{ON} \xrightarrow{\text{onto}} \mathrm{ON}.$$

略証.

第一段　$\mathrm{dom}(+) = \mathrm{ON} \times \mathrm{ON}$ が成り立つことを示す．x を $\mathrm{dom}(+)$ の要素とすれば

$$(x,y) \in +$$

を満たす集合 y が取れる．このとき

$$x = (\alpha,\beta)$$

を満たす順序数 α と β が取れて，

$$(\alpha,\beta) \in \mathrm{ON} \times \mathrm{ON}$$

なので

$$x \in \mathrm{ON} \times \mathrm{ON}$$

が成り立つ．次に x を $\mathrm{ON} \times \mathrm{ON}$ の要素とする．このとき

$$x = (\alpha, \beta)$$

を満たす順序数 α と β が取れて，

$$((\alpha, \beta), A_\alpha(\beta)) \in +$$

が成り立つから

$$(\alpha, \beta) \in \mathrm{dom}(+)$$

が成り立つ．ゆえに

$$x \in \mathrm{dom}(+)$$

が従う．x の任意性から

$$\mathrm{dom}(+) = \mathrm{ON} \times \mathrm{ON}$$

が成り立つ．

第二段　$+$ が single-valued であることを示す．$\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ を順序数とするとき

$$(\alpha, \beta) = (\alpha', \beta') \Longrightarrow A_\alpha(\beta) = A_{\alpha'}(\beta')$$

が成り立つことを示せば良いが，これは

$$\alpha = \alpha' \Longrightarrow A_\alpha = A_{\alpha'} \tag{B.1}$$

が成り立つことを示せば良い．ところで A_α と $A_{\alpha'}$ はどちらも ON を定義域とする写像なので，

$$\alpha = \alpha' \Longrightarrow \forall \beta \in \mathrm{ON} \left(A_\alpha(\beta) = A_{\alpha'}(\beta) \right)$$

を示せば定理 A.9.17 より (B.1) が従う．いま

$$\alpha = \alpha'$$

であるとする．そして

$$\beta \in \mathrm{ON} \left(A_\alpha(\beta) = A_{\alpha'}(\beta) \right) \tag{B.2}$$

なることは超限帰納法により証明する．まず

$$A_\alpha(\emptyset) = \alpha$$

と

$$A_{\alpha'}(\emptyset) = \alpha'$$

から

$$A_\alpha(\emptyset) = A_{\alpha'}(\emptyset)$$

が従う．次に β を任意に与えられた 0 でない順序数として，

$$\forall\gamma \in \beta \ \left(A_{\alpha}(\gamma) = A_{\alpha'}(\gamma) \right)$$

が成り立っているとする．このとき

$$\beta = \gamma \cup \{\gamma\}$$

なる順序数 γ が取れるなら

$$A_{\alpha}(\beta) = A_{\alpha}(\gamma) \cup \left\{ A_{\alpha}(\gamma) \right\}$$

かつ

$$A_{\alpha'}(\beta) = A_{\alpha'}(\gamma) \cup \left\{ A_{\alpha'}(\gamma) \right\}$$

が成立し，いま

$$A_{\alpha}(\gamma) = A_{\alpha'}(\gamma)$$

なので

$$A_{\alpha}(\beta) = A_{\alpha'}(\beta)$$

が従う．

$$\mathrm{lim.o}\left(\beta\right)$$

であるときは

$$A_{\alpha}(\beta) = \bigcup \left\{ A_{\alpha}(\gamma) \mid \quad \gamma \in \beta \right\}$$

かつ

$$A_{\alpha'}(\beta) = \bigcup \left\{ A_{\alpha'}(\gamma) \mid \quad \gamma \in \beta \right\}$$

が成立して

$$A_{\alpha}(\beta) = A_{\alpha'}(\beta)$$

が従う．ゆえに超限帰納法より (B.2) が従う．

第三段　$\mathrm{ran}(+) \subset \mathrm{ON}$ であることを示す．y を $\mathrm{ran}(+)$ の要素とする．このとき

$$(x, y) \in +$$

を満たす集合 x が取れて，

$$x = (\alpha, \beta)$$

を満たす順序数 α と β が取れて

$$y = A_{\alpha}(\beta)$$

が成り立つ．ゆえに，

$$\forall \gamma \in \mathrm{ON}\ \left(A_{\alpha}(\gamma) \in \mathrm{ON} \right) \tag{B.3}$$

なることを示せば良い．これは超限帰納法により示す．まず

$$A_{\alpha}(\emptyset) = \alpha$$

より

$$A_{\alpha}(\emptyset) \in \mathrm{ON}$$

が成り立つ．次に γ を任意に与えられた 0 でない順序数として，

$$\forall \delta \in \gamma\ (A_{\alpha}(\delta) \in \mathrm{ON})$$

が成り立っているとする．このとき

$$\gamma = \delta \cup \{\delta\}$$

なる順序数 δ が取れるなら

$$A_{\alpha}(\gamma) = A_{\alpha}(\delta) \cup \{A_{\alpha}(\delta)\}$$

が成立し，定理 A.10.14 より

$$A_{\alpha}(\gamma) \in \mathrm{ON}$$

が従う．

$$\mathrm{lim.o}\left(\gamma\right)$$

であるときは

$$A_{\alpha}(\gamma) = \bigcup \left\{ A_{\alpha}(\delta) \mid \quad \delta \in \gamma \right\}$$

が成立して，定理 A.10.11 より

$$A_{\alpha}(\gamma) \in \mathrm{ON}$$

が従う．ゆえに超限帰納法より (B.3) が従う．ゆえに

$$y \in \mathrm{ON}$$

が成り立ち

$$\mathrm{ran}(+) \subset \mathrm{ON}$$

が得られた．

第四段　$\mathrm{ran}(+) = \mathrm{ON}$ を示す．実際，α を順序数とすれば

$$\alpha = +(\alpha, 0)$$

が成り立つから

$$\alpha \in \mathrm{ran}(+)$$

が成り立ち

$$\mathrm{ON} \subset \mathrm{ran}(+)$$

が従う．前段の結果と併せて

$$\mathrm{ran}(+) = \mathrm{ON}$$

を得る． ∎

加法の中置記法

α と β を順序数とするとき

$$+(\alpha, \beta)$$

を

$$\alpha + \beta$$

とも表記する．また $\alpha + \beta$ なる順序数を α と β の**和 (sum)** と呼ぶ.

加法の性質を列挙しておく:

- $\forall \alpha \in \mathrm{ON}\ (\, \alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha\,)$.
- $\forall \alpha \in \mathrm{ON}\ (\, \alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}\,)$.
- $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{ON}\ \left[\, (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)\,\right]$.
- $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{ON}\,(\, \beta < \gamma \Longrightarrow \alpha + \beta < \alpha + \gamma\,)$.
- $\forall \alpha, \beta \in \mathrm{ON}\ \left[\, \alpha < \beta \Longrightarrow \exists \gamma \in \mathrm{ON}\,(\, \gamma < \beta \land \alpha + \gamma = \beta\,)\,\right]$.
- $\forall n, m \in \boldsymbol{\omega}\,(\, n + m \in \boldsymbol{\omega}\,)$.
- $\forall n, m \in \boldsymbol{\omega}\ (\, n + m = m + n\,)$.

定理 B.1.3 (順序数は 0 を足しても 0 に足しても変わらない).

$$\forall \alpha \in \mathrm{ON}\ (\, \alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha\,)\,.$$

略証． α を順序数とすると

$$\alpha + 0 = A_{\alpha}(0)$$

より

$$\alpha + 0 = \alpha$$

が成立する．次に

$$0 + \alpha = \alpha$$

が成り立つことを超限帰納法により証明する．まず加法の定め方より

$$0+0=0$$

が成立する．次に α を任意に与えられた 0 でない順序数とし，

$$\forall\beta\in\alpha\,(\,0+\beta=\beta\,)$$

が満たされているとする．

$$\alpha=\beta\cup\{\beta\}$$

なる順序数 β が取れるときは

$$0+\alpha=(0+\beta)\cup\{0+\beta\}$$

となるが，

$$(0+\beta)\cup\{0+\beta\}=\beta\cup\{\beta\}$$

が成り立つので

$$0+\alpha=\alpha$$

が従う．

$$\mathrm{lim.o}\,(\alpha)$$

であるときは

$$0+\alpha=\bigcup\left\{\,0+\beta\mid\quad\beta\in\alpha\,\right\}$$

となるが，$\mathrm{lim.o}\,(\alpha)$ であるから

$$\alpha=\bigcup\left\{\,\beta\mid\quad\beta\in\alpha\,\right\}$$

が成り立ち

$$0+\alpha=\alpha$$

が従う．ゆえに，超限帰納法により

$$\forall\alpha\in\mathrm{ON}\,(\,0+\alpha=\alpha\,)$$

が成立する． ∎

定理 B.1.4 (後者は 1 を足したもの).

$$\forall\alpha\in\mathrm{ON}\;(\,\alpha+1=\alpha\cup\{\alpha\}\,)\,.$$

略証． α を順序数とする．加法の定め方から

$$\alpha + 1 = (\alpha + 0) \cup \{\alpha + 0\}$$

が成り立ち，

$$\alpha + 0 = \alpha$$

なので

$$\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$$

が成立する． ∎

定理 B.1.5 (加法は結合的).

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{ON} \left[(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) \right].$$

略証． α と β を順序数とする．そして

$$\forall \gamma \in \mathrm{ON} \left[(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) \right]$$

が成り立つことを超限帰納法により示す．まず

$$(\alpha + \beta) + 0 = \alpha + \beta$$

かつ

$$\alpha + (\beta + 0) = \alpha + \beta$$

が成り立つので

$$(\alpha + \beta) + 0 = \alpha + (\beta + 0)$$

が成り立つ．次に γ を任意に与えられた 0 でない順序数とし，

$$\forall \delta \in \gamma \left[(\alpha + \beta) + \delta = \alpha + (\beta + \delta) \right]$$

が成り立っているとする．

$$\gamma = \delta \cup \{\delta\}$$

なる順序数 δ が取れるときは，

定理 B.1.6 (和は順序を保存する).

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{ON} \left(\beta < \gamma \Longrightarrow \alpha + \beta < \alpha + \gamma \right).$$

定理 B.1.7 (大小関係を埋め合わせる順序数が取れる).

$$\forall \alpha, \beta \in \mathrm{ON} \left[\alpha < \beta \Longrightarrow \exists \gamma \in \mathrm{ON} \left(\gamma < \beta \wedge \alpha + \gamma = \beta \right) \right].$$

定理 B.1.8 (自然数の和は自然数).

$$\forall n, m \in \boldsymbol{\omega} \left(n + m \in \boldsymbol{\omega} \right).$$

略証.　n を自然数とする．そして

$$a \overset{\text{def}}{=\!=} \{\, x \mid \quad x \in \boldsymbol{\omega} \wedge n + x \in \boldsymbol{\omega} \,\}$$

とおく．このとき，

$$n + 0 = n$$

より

$$0 \in a$$

が成り立ち，また m を a の要素とするとき，

$$n + m \in \boldsymbol{\omega}$$

が成り立つので

$$(n + m) + 1 \in \boldsymbol{\omega}$$

が成り立ち，また

$$n + (m + 1) = (n + m) + 1$$

と

$$m + 1 \in \boldsymbol{\omega}$$

も成り立つから

$$m + 1 \in a$$

が成立する．ゆえに

$$\emptyset \in a \wedge \forall m \left(m \in a \Longrightarrow m \cup \{m\} \in a \right)$$

が成り立つので，定理 A.12.3 より

$$\boldsymbol{\omega} \subset a$$

が従う．ゆえに，m を自然数とすれば

$$n + m \in \boldsymbol{\omega}$$

となる．■

定理 B.1.9 (自然数の和は可換).

$$\forall n, m \in \boldsymbol{\omega}\ (n + m = m + n).$$

B.2　乗法

α と β を順序数とするとき，次は α に β を“掛ける”という操作を施したい．若干見づらいが

$$\cdot$$

を掛け算の記号として，先ずは簡単に，β が 0 の場合は

$$\alpha \cdot 0 \overset{\mathrm{def}}{=\!=} 0$$

と定めてしまう．β が 1 の場合は，1 を掛けるという操作を α が 1 個だけあるとの意味で

$$\alpha \cdot 1 \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \alpha$$

と定める．2 を掛けるという操作は α が 2 個あるという意味で

$$\alpha \cdot 2 \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \alpha + \alpha$$

と定める．3 を掛けるという操作も α が 3 個あるという意味で

$$\alpha \cdot 3 \overset{\mathrm{def}}{=\!=} (\alpha + \alpha) + \alpha$$

と定めるが，ところでこれは

$$(\alpha \cdot 2) + \alpha$$

に等しいので，これに倣って

$$\alpha \cdot 4 \overset{\mathrm{def}}{=\!=} (\alpha \cdot 3) + \alpha$$
$$\alpha \cdot 5 \overset{\mathrm{def}}{=\!=} (\alpha \cdot 4) + \alpha$$
$$\alpha \cdot 6 \overset{\mathrm{def}}{=\!=} (\alpha \cdot 5) + \alpha$$

と以降も定義していく．また，例えば β が $\boldsymbol{\omega}$ である場合，加法の時と同様に

$$\alpha \cdot \boldsymbol{\omega} \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \bigcup \{\, \alpha \cdot k \mid \quad k \in \boldsymbol{\omega} \,\}$$

と定める．以上の操作をヒントにして，$\alpha \cdot \beta$ は

- β に対して $\beta = \gamma + 1$ を満たす順序数 γ が取れるなら

$$\alpha \cdot \beta \overset{\mathrm{def}}{=\!=} (\alpha \cdot \gamma) + \alpha,$$

- β が極限数なら

$$\alpha \cdot \beta \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \bigcup \{\, \alpha \cdot \gamma \mid \quad \gamma \in \beta \,\},$$

で定められる．

定義 B.2.1 (順序数の乗法). α を順序数とし，$\mathbf{V}$ 上の写像 G_α を

$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{if } \mathrm{dom}(x) = \emptyset \\ x(\beta) + \alpha & \text{if } \beta \in \mathrm{ON} \wedge \mathrm{dom}(x) = \beta \cup \{\beta\} \wedge x(\beta) \in \mathrm{ON} \\ \bigcup \mathrm{ran}(x) & \text{o.w.} \end{cases}$$

なる関係により定めると，

$$\forall \beta \in \mathrm{ON} \left(M_\alpha(\beta) = G_\alpha(M_\alpha|_\beta) \right)$$

を満たす ON 上の写像 M_α が取れる．ここで

$$\bullet \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{ ((\alpha, \beta), y) \mid \quad \alpha \in \mathrm{ON} \wedge \beta \in \mathrm{ON} \wedge y = M_\alpha(\beta) \right\}$$

により $\bullet$ を定め，これを ON 上の**乗法 (multiplication)** と呼ぶ．

定理 B.2.2 ($\cdot$ は ON への全射である). $\bullet$ は $\mathrm{ON} \times \mathrm{ON}$ から ON への全射である:

$$\bullet : \mathrm{ON} \times \mathrm{ON} \xrightarrow{\text{onto}} \mathrm{ON}.$$

乗法の中置記法

α と β を順序数とするとき

$$\bullet(\alpha, \beta)$$

を

$$\alpha \cdot \beta$$

とも表記する．また $\alpha \cdot \beta$ なる順序数を α と β の**積 (product)** と呼ぶ．

乗法の性質を列挙しておく:

- $\forall \alpha \in \mathrm{ON} \ (\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0)$.
- $\forall \alpha \in \mathrm{ON} \ (\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha)$.
- $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{ON} \ \left[(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \right]$.
- $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{ON} \ \left(\beta \leq \gamma \Longrightarrow \beta \cdot \alpha \leq \gamma \cdot \alpha \right)$.
- $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{ON} \ \left[0 < \alpha \Longrightarrow \left(\beta < \gamma \Longleftrightarrow \alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma \right) \right]$.
- $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{ON} \ \left[\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma \right]$.
- $\forall \alpha, \delta \in \mathrm{ON} \ \left[\delta \neq 0 \Longrightarrow \exists \beta, \gamma \in \mathrm{ON} \ \left(\gamma < \delta \wedge \alpha = (\delta \cdot \beta) + \gamma \right) \right]$.
- $\forall n, m \in \boldsymbol{\omega} \ (n \cdot m \in \boldsymbol{\omega})$.
- $\forall n, m \in \boldsymbol{\omega} \ (n \cdot m = m \cdot n)$.
- $\forall n, m, k \in \boldsymbol{\omega} \ [(n + m) \cdot k = n \cdot k + m \cdot k]$.

定理 B.2.3 (0 を掛けたら 0).

$$\forall \alpha \in \mathrm{ON}\ (\ \alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0\ ).$$

定理 B.2.4 (1 を掛けても変わらない).

$$\forall \alpha \in \mathrm{ON}\ (\ \alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha\ ).$$

定理 B.2.5 (乗法は結合的).

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{ON}\ \left[\ (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)\ \right].$$

定理 B.2.6 (自然数の積は自然数).

$$\forall n, m \in \boldsymbol{\omega}\ (\ n \cdot m \in \boldsymbol{\omega}\ ).$$

B.3　数の構成の一時的なメモ置き場

流れを把握していても思うように書けるとは限らない．満足いく体裁で書けるまで整理のためにメモだけ置いておく．$\mathcal{L}'$ の文法等にはこだわらず大雑把に．幾分か雑．

B.3.1　商集合の算法

商集合に対して，割る前の集合上の算法と整合的な算法を定義する．A を集合とし，σ を A 上の算法とし，R を A 上の同値関係とし，A から A/R への商写像を π と書く．また

$$\pi(x) = \pi(x') \wedge \pi(y) = \pi(y') \Longrightarrow \pi\left(\sigma(x, y)\right) = \pi\left(\sigma(x', y')\right)$$

が満たされているとする．このとき

$$\sigma_\pi \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\, x \mid \quad \exists s, t \in A\ (\ x = ((\pi(s), \pi(t)), \pi(\sigma(s, t)))\ )\,\}$$

と定めると，σ_π は A/R 上の算法となり

$$\sigma_\pi(\pi(s), \pi(t)) = \pi(\sigma(s, t))$$

を満たす．実際，$(x, y) \in \sigma_\pi$ かつ $(x, z) \in \sigma_\pi$ であれば，A の或る要素 s, t, s', t' が存在して

$$(x, y) = ((\pi(s), \pi(t)), \pi(\sigma(s, t)))$$

と

$$(x, z) = ((\pi(s'), \pi(t')), \pi(\sigma(s', t')))$$

を満たすが，

$$(\pi(s), \pi(t)) = (\pi(s'), \pi(t'))$$

から

$$\pi(s) = \pi(s') \wedge \pi(t) = \pi(t')$$

が従い，

$$y = \pi(\sigma(s,t))) = \pi(\sigma(s',t'))) = z$$

となるので σ_π は写像である．また σ が可換なら σ_π も可換となる．実際，

$$\sigma_\pi(\pi(x),\pi(y)) = \pi(\sigma(x,y)) = \pi(\sigma(y,x)) = \sigma_\pi(\pi(y),\pi(x))$$

が成り立つ．同様に σ が結合的なら σ_π も結合的となる．実際，

$$x = \pi(s), \quad y = \pi(t), \quad z = \pi(u)$$

のとき

$$\begin{aligned}
\sigma_\pi\left(\sigma_\pi(x,y),z\right) &= \sigma_\pi\left(\pi(\sigma(s,t)),\pi(u)\right) \\
&= \pi\left(\sigma(\sigma(s,t),u)\right) \\
&= \pi\left(\sigma(s,\sigma(t,u))\right) \\
&= \sigma_\pi\left(\pi(s),\pi(\sigma(t,u))\right) \\
&= \sigma_\pi\left(x,\sigma_\pi(y,z)\right)
\end{aligned}$$

が成り立つ．a を A の要素として

$$\forall x \in A\,(\,\sigma(a,x) = \sigma(x,a) = x\,)$$

を満たすとする．a を単位元と呼ぶが，このとき

$$\sigma_\pi(\pi(x),\pi(a)) = \pi(\sigma(x,a)) = \pi(x)$$

かつ

$$\sigma_\pi(\pi(a),\pi(x)) = \pi(\sigma(a,x)) = \pi(x)$$

が成り立つので $\pi(a)$ は A/R の単位元となる．また A の要素 x,y,z に対して

$$\sigma(x,y) = \sigma(y,x) = z$$

となるとき，

$$\sigma_\pi(\pi(x),\pi(y)) = \pi(\sigma(x,y)) = \pi(z)$$

かつ

$$\sigma_\pi(\pi(y),\pi(x)) = \pi(\sigma(y,x)) = \pi(z)$$

が成り立つ．この式から逆元は π で移した先でも逆元となることがわかる．

B.3.2　同型定理

A, A' を集合，σ, σ' をそれぞれ A, A' 上の算法とし，f を A から A' への写像とする．f が

$$f(\sigma(x, y)) = \sigma'(f(x), f(y))$$

を満たすとき，f は (A, σ) から (A', σ') への準同型写像であるという．ここで A 上の同値関係を

$$N \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \mid \quad \exists y, z \in A \ \left(f(y) = f(z) \wedge x = (y, z) \right) \right\}$$

で定める．そして A から A/N への商写像を π と書く．このとき

$$g\left(\pi(x)\right) = f(x)$$

で g を定めれば，g は A/N から $f * A$ への全単射となる．実際，x, y を A/N の要素とすれば

$$x = \pi(s) \wedge y = \pi(t)$$

を満たす A の要素 s, t が存在し，

$$g(x) = g(y) \Longrightarrow f(s) = f(t) \Longrightarrow (s, t) \in N \Longrightarrow x = \pi(s) = \pi(t) = y$$

が成立するので g は単射であり，また z を $f * A$ の要素とすれば

$$z = f(w)$$

を満たす A の要素 w が存在し，

$$g(\pi(w)) = f(w) = z$$

が成り立つので g は全射である．A/R 上の算法を

$$\sigma_\pi(\pi(x), \pi(y)) = \pi(\sigma(x, y))$$

で定めば

$$\begin{aligned} g\left(\sigma_\pi(\pi(x), \pi(y))\right) &= g\left(\pi(\sigma(x, y))\right) \\ &= f\left(\sigma(x, y)\right) \\ &= \sigma'(f(x), f(y)) \\ &= \sigma'\left(g(\pi(x)), g(\pi(y))\right) \end{aligned}$$

が成り立つ．すなわち g は同型写像である．

B.3.3　算法の移し方

A, A' を集合とし，σ を A 上の算法とし，h を A から A' への全単射とする．このとき

$$\sigma'(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} h\left(\sigma(h^{-1}(x), h^{-1}(y))\right)$$

により A' 上の算法を定めれば，

(1) σ が可換なら σ' も可換となる．

(2) σ が結合的なら σ' も結合的となる．

(3) a が A の σ に関する単位元なら $h(a)$ は A' の σ' に関する単位元となる．

(4) A の要素 x の σ に関する逆元を $-x$ と書けば $h(-x)$ は $h(x)$ の σ' に関する逆元となる．ただし A の σ に関する単位元を a とする．

証明.

(1) x, y を A' の要素とすれば

$$\begin{aligned}\sigma'(x,y) &= h\left(\sigma(h^{-1}(x), h^{-1}(y))\right)\\ &= h\left(\sigma(h^{-1}(y), h^{-1}(x))\right)\\ &= \sigma'(y,x)\end{aligned}$$

が成立する．

(2) x, y, z を A' の要素とすれば

$$\begin{aligned}\sigma'\left(\sigma'(x,y), z\right) &= \sigma'\left(h\left(\sigma(h^{-1}(x), h^{-1}(y))\right), z\right)\\ &= h\left(\sigma\left(h^{-1}\left(h\left(\sigma\left(h^{-1}(x), h^{-1}(y)\right)\right)\right), h^{-1}(z)\right)\right)\\ &= h\left(\sigma\left(\sigma\left(h^{-1}(x), h^{-1}(y)\right), h^{-1}(z)\right)\right)\\ &= h\left(\sigma\left(h^{-1}(x), \sigma\left(h^{-1}(y), h^{-1}(z)\right)\right)\right)\\ &= h\left(\sigma\left(h^{-1}(x), h^{-1}\left(h\left(\sigma\left(h^{-1}(y), h^{-1}(z)\right)\right)\right)\right)\right)\\ &= \sigma'\left(x, h\left(\sigma(h^{-1}(y), h^{-1}(z))\right)\right)\\ &= \sigma'\left(x, \sigma'\left(y, z\right)\right)\end{aligned}$$

が成立する．

(3) x を A' の要素とすれば

$$\begin{aligned}\sigma'(x, h(a)) &= h\left(\sigma(h^{-1}(x), a)\right)\\ &= h\left(h^{-1}(x)\right)\\ &= x\end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned}\sigma'(h(a), x) &= h\left(\sigma(a, h^{-1}(x))\right)\\ &= h\left(h^{-1}(x)\right)\\ &= x\end{aligned}$$

が成立する．

(4) x を A' の要素として

$$y \stackrel{\text{def}}{=} h\left(-h^{-1}(x)\right)$$

とおけば

$$\sigma'(x,y) = h\left(\sigma(h^{-1}(x), -h^{-1}(x))\right) = h(a)$$

と

$$\sigma'(y,x) = h\left(\sigma(-h^{-1}(x), h^{-1}(x))\right) = h(a)$$

が成立する．

B.3.4　整数

(S, o) を可換半群とするとき，$S \times S$ 上の同値関係を

$$R \overset{\text{def}}{=\!=} \{\, x \mid \quad \exists a,b,c,d \in S\,(\, x = ((a,b),(c,d)) \land o(a,d) = o(b,c)\,)\,\}$$

で定め，

$$G \overset{\text{def}}{=\!=} S \times S/R$$

とおく．そして x, y を S の要素とするとき，(x, y) の同値類を $[x, y]$ と書く．このとき

$$\sigma\left([x,y],[x',y']\right) = \left[o(x,x'), o(y,y')\right]$$

で σ を定めると，σ は可換律と結合律を満たす．実際，

$$\sigma\left([x,y],[x',y']\right) = \left[o(x,x'), o(y,y')\right] = \left[o(x',x), o(y',y)\right] = \sigma\left([x',y'],[x,y]\right)$$

と

$$\begin{aligned}
\sigma\left(\sigma\left([x,y],[x',y']\right),[x'',y'']\right) &= \sigma\left(\left[o(x,x'), o(y,y')\right],[x'',y'']\right) \\
&= \left[o(o(x,x'),x''), o(o(y,y'),y'')\right] \\
&= \left[o(x,o(x',x'')), o(y,o(y',y''))\right] \\
&= \sigma\left([x,y],\left[o(x',x''), o(y',y'')\right]\right) \\
&= \sigma\left([x,y],\sigma\left([x',y'],[x'',y'']\right)\right)
\end{aligned}$$

が成り立つ．それから，o の可換律から

$$o(x,y) = o(y,x)$$

が成り立つので

$$((x,x),(y,y)) \in R$$

となり，

$$[x,x] = [y,y]$$

が成立する．そこで

$$\zeta \overset{\text{def}}{=\!=} [x,x]$$

とおく．このとき

$$\sigma\left([x,y],\zeta\right) = \sigma\left(\zeta,[x,y]\right) = [x,y]$$

が満たされる．実際，$\zeta = [z, z]$ より $\left([x, y], \zeta\right) = \left([x, y], [z, z]\right)$ となるから

$$\begin{aligned}\sigma\left([x, y], \zeta\right) &= \sigma\left([x, y], [z, z]\right) \\ &= \left[o(x, z), o(y, z)\right]\end{aligned}$$

となるが，

$$o(o(x, z), y) = o(x, o(z, y)) = o(x, o(y, z)) = o(o(y, z), x)$$

より $(o(x, z), o(y, z))$ と (x, y) は同値となるので

$$\sigma\left([x, y], \zeta\right) = [x, y]$$

が成立する．同様にして

$$\sigma\left(\zeta, [x, y]\right) = [x, y]$$

も成立する．また $[x, y]$ に対しては $[y, x]$ が

$$\sigma([x, y], [y, x]) = \sigma([y, x], [x, y]) = \zeta$$

を満たす．そこで $[y, x]$ を $[x, y]$ の逆元と呼び

$$-[x, y] \overset{\text{def}}{=\!=} [y, x]$$

とおく．a を S の要素として

$$\varphi(x) = [o(x, a), a]$$

で S から G への写像 φ を定めるとき，

$$\begin{aligned}\varphi(o(x, y)) = [o(o(x, y), a), a] &= \sigma\left([o(o(x, y), a), a], [a, a]\right) \\ &= [o(o(o(x, y), a), a), o(a, a)] \\ &= [o(o(o(x, y), a), a), o(a, a)] \\ &= [o(o(x, o(y, a)), a), o(a, a)] \\ &= [o(o(o(y, a), x), a), o(a, a)] \\ &= [o(o(y, a), o(x, a)), o(a, a)] \\ &= \sigma\left([o(y, a), a], [o(x, a), a]\right) \\ &= \sigma\left([o(x, a), a], [o(y, a), a]\right) \\ &= \sigma\left(\varphi(x), \varphi(y)\right)\end{aligned}$$

及び

$$\begin{aligned}[x, y] &= [o(x, o(a, a)), o(y, o(a, a))] \\ &= [o(o(x, a), a), o(o(y, a), a)] \\ &= [o(o(x, a), a), o(o(y, a), a)] \\ &= [o(o(x, a), a), o(a, o(y, a))] \\ &= \sigma\left([o(x, a), a], [a, o(y, a)]\right) \\ &= \sigma\left(\varphi(x), -\varphi(y)\right)\end{aligned}$$

が成立する．特に，o が簡約律を満たすなら φ は単射となる．実際，

$$\begin{aligned}\varphi(x) = \varphi(y) &\Longrightarrow [o(x,a),a] = [o(y,a),a] \\ &\Longrightarrow o(o(x,a),a) = o(o(y,a),a) \\ &\Longrightarrow o(x,o(a,a)) = o(x,o(a,a)) \\ &\Longrightarrow x = y\end{aligned}$$

となる．いま o を簡約律と可換律を満たすとして，

$$\tilde{G} \overset{\text{def}}{=\!=} \big(G \backslash (\varphi * S)\big) \cup S$$

とおいて

$$h(x) = \begin{cases} x & (x \notin \varphi * S) \\ \varphi^{-1}(x) & (x \in \varphi * S) \end{cases}$$

とおくと，h は G から $\tilde{G}$ への全単射となる．そして $\tilde{G}$ 上の算法を

$$\tilde{\sigma}(x,y) = h\left(\sigma\left(h^{-1}(x), h^{-1}(y)\right)\right)$$

で定めると h は同型写像となる．また

$$-x \overset{\text{def}}{=\!=} h\left(-h^{-1}(x)\right)$$

と書く．このとき，x, y を S の要素とすれば

$$h^{-1}(x) = \varphi(x) \wedge h^{-1}(y) = \varphi(y)$$

となるので

$$\tilde{\sigma}(x,y) = h\left(\sigma\left(\varphi(x), \varphi(y)\right)\right) = h\left(\varphi(o(x,y))\right) = o(x,y)$$

が満たされる．すなわち $\tilde{\sigma}$ は o の拡張となっている．また $\tilde{G}$ の任意の要素 x は，或る S の要素 y,z によって

$$x = h([y,z])$$

と書けるが，このとき

$$\begin{aligned} x &= h\left(\sigma(\varphi(y), -\varphi(z))\right) \\ &= \tilde{\sigma}\left(h(\varphi(y)), h(-\varphi(z))\right) \\ &= \tilde{\sigma}\left(h(\varphi(y)), -h(\varphi(z))\right) \\ &= \tilde{\sigma}(y,-z) \end{aligned}$$

が成立するので，$\tilde{\sigma}$ の要素は S の要素に対する演算で表せる．この $(\tilde{G},\tilde{\sigma})$ を S が生成する群と呼ぶ．$\boldsymbol{\omega}$ には加法と乗法が定まっているが，その最小の拡張となる環が整数環である．

整数環の性質:

- 整数環は順序環である．
- 整数環は Euclid 整域である．
- 任意の環に対して整数環からの準同型が存在する．

B.3.5　有理数

有理数体は整数環の分数体であるから分数体の構成法をメモしておく．(R, σ, μ) を整域として，その零元と単位元をそれぞれ ζ, ϵ で表す．また $R \times R\backslash\{\zeta\}$ 上の同値関係を

$$\Phi \overset{\text{def}}{=} \left\{ x \mid \quad \exists a, c \in R\, \exists b, d \in R\backslash\{\zeta\} \ \big(x = ((a, b), (c, d)) \wedge \mu(a, d) = \mu(b, c) \big) \right\}$$

で定め，

$$Q \overset{\text{def}}{=} (R \times R\backslash\{\zeta\})/\Phi$$

とおく．そして $(x, y) \in R \times R\backslash\{\zeta\}$ の同値類を $[x, y]$ と書く．$R \times R\backslash\{\zeta\}$ 上の算法を

$$\begin{aligned}
\sigma_P &\overset{\text{def}}{=} \left\{ x \mid \quad \exists a, c \in R\, \exists b, d \in R\backslash\{\zeta\} \ \big(x = (((a, b), (c, d)), (\sigma(\mu(a, c), \mu(b, c)), \mu(b, d))) \big) \right\}, \\
\mu_P &\overset{\text{def}}{=} \left\{ x \mid \quad \exists a, c \in R\, \exists b, d \in R\backslash\{\zeta\} \ \big(x = (((a, b), (c, d)), (\mu(a, c), \mu(b, d))) \big) \right\}
\end{aligned}$$

で定める．煩雑でわかりづらいが，これは分数の計算法則

$$a/b + c/d = (ad + bd)/(bd), \quad a/b \cdot c/d = (ac)/(bd)$$

を一般形式化したものに過ぎない．

$$((a, b), (a', b')) \in \Phi \wedge ((c, d), (c', d')) \in \Phi$$

が成り立っているとき

$$(\sigma_P((a, b), (c, d)), \sigma_P((a', b'), (c', d'))) \in \Phi$$

が成り立つ．実際

$$\begin{aligned}
\mu(\mu(a, d), \mu(b', d')) &= \mu(\mu(\mu(a, d), b'), d') \\
&= \mu(\mu(\mu(d, a), b'), d') \\
&= \mu(\mu(d, \mu(a, b')), d') \\
&= \mu(\mu(d, \mu(a', b)), d') \\
&= \mu(\mu(d, \mu(a', b)), d') \\
&= \mu(\mu(d, \mu(b, a')), d') \\
&= \mu(\mu(\mu(d, b), a'), d') \\
&= \mu(\mu(d, b), \mu(a', d')) \\
&= \mu(\mu(a', d'), \mu(d, b)) \\
&= \mu(\mu(a', d'), \mu(b, d))
\end{aligned}$$

かつ

$$
\begin{aligned}
\mu(\mu(c,b),\mu(b',d')) &= \mu(\mu(b,c),\mu(b',d')) \\
&= \mu(b,\mu(c,\mu(b',d'))) \\
&= \mu(b,\mu(c,\mu(d',b'))) \\
&= \mu(b,\mu(\mu(c,d'),b')) \\
&= \mu(b,\mu(\mu(c',d),b')) \\
&= \mu(b,\mu(\mu(d,c'),b')) \\
&= \mu(b,\mu(d,\mu(c',b'))) \\
&= \mu(\mu(b,d),\mu(c',b')) \\
&= \mu(\mu(c',b'),\mu(b,d))
\end{aligned}
$$

が成り立つから

$$
\begin{aligned}
\mu\left(\sigma(\mu(a,d),\mu(c,b)),\mu(b',d')\right) &= \sigma\left(\mu(\mu(a,d),\mu(b',d')),\mu(\mu(c,b),\mu(b',d'))\right) \\
&= \sigma\left(\mu(\mu(a',d'),\mu(b,d)),\mu(\mu(c',b'),\mu(b,d))\right) \\
&= \mu\left(\sigma(\mu(a',d'),\mu(c',b')),\mu(b,d)\right)
\end{aligned}
$$

が満たされる．同時に

$$
\left(\mu_P((a,b),(c,d)),\mu_P((a',b'),(c',d'))\right) \in \Phi
$$

も満たされる．なぜならば，

$$
\begin{aligned}
\mu(\mu(a,c),\mu(b',d')) &= \mu(a,\mu(c,\mu(b',d'))) \\
&= \mu(a,\mu(c,\mu(d',b'))) \\
&= \mu(a,\mu(\mu(c,d'),b')) \\
&= \mu(a,\mu(b',\mu(c,d'))) \\
&= \mu(\mu(a,b'),\mu(c,d')) \\
&= \mu(\mu(a',b),\mu(c',d)) \\
&= \mu(\mu(a',c'),\mu(b,d))
\end{aligned}
$$

が成り立つからである．以上より Q 上の算法は σ_P,μ_P から整合的に定められる．それらを σ_Q,μ_Q と書けば，σ_P,μ_P はそれぞれ可換かつ結合的であるから σ_Q,μ_Q もそれらの性質を持つ．

$$
(\zeta,\epsilon)
$$

は σ_P に関する単位元であり，

$$
(\epsilon,\epsilon)
$$

は μ_P に関する単位元である．実際，

$$
\begin{aligned}
&\sigma_P((x,y),(\zeta,\epsilon)) = (\sigma(\mu(x,\epsilon),\mu(\zeta,y)),\mu(y,\epsilon)) = (\sigma(x,\zeta),y) = (x,y), \\
&\sigma_P((\zeta,\epsilon),(x,y)) = (\sigma(\mu(\zeta,y),\mu(x,\epsilon)),\mu(\epsilon,y)) = (\sigma(\zeta,x),y) = (x,y)
\end{aligned}
$$

が成り立ち，また

$$\mu_P((x,y),(\epsilon,\epsilon)) = (\mu(x,\epsilon),\mu(y,\epsilon)) = (x,y),$$
$$\mu_P((\epsilon,\epsilon),(x,y)) = (\mu(\epsilon,x),\mu(\epsilon,y)) = (x,y)$$

も成り立つ．よって

$$\zeta_Q \overset{\text{def}}{=\!=} [\zeta,\epsilon]$$

とおけば ζ_Q は σ_Q に関する単位元となり，

$$\epsilon_Q \overset{\text{def}}{=\!=} [\epsilon,\epsilon]$$

とおけば ϵ_Q は μ_Q に関する単位元となる．x と y を $R \times R \backslash \{\zeta\}$ の要素とすれば

$$[x,y] = \zeta_Q \Longleftrightarrow x = \zeta$$

が満たされるので，

$$[x,y] \neq \zeta_Q$$

ならば

$$(y,x) \in R \times R \backslash \{\zeta\}$$

となり，

$$\mu_P([x,y],[y,x]) = [\mu(x,y),\mu(y,x)] = [\mu(x,y),\mu(x,y)] = \epsilon_Q$$

かつ

$$\mu_P([y,x],[x,y]) = [\mu(y,x),\mu(x,y)] = [\mu(x,y),\mu(x,y)] = \epsilon_Q$$

が成立する．従って Q の非零元は可逆である．R から Q への環準同型を

$$\varphi(x) = [x,\epsilon]$$

で定める．このとき φ は単射である．実際，

$$\varphi(x) = \varphi(y) \Longrightarrow [x,\epsilon] = [y,\epsilon] \qquad \Longrightarrow x = \mu(x,\epsilon) = \mu(\epsilon,y) = y$$

となる．

$$\tilde{Q} \overset{\text{def}}{=\!=} (Q \backslash \varphi * R) \cup R$$

とおいて

$$h(x) = \begin{cases} x & (x \notin \varphi * R) \\ \varphi^{-1}(x) & (x \in \varphi * R) \end{cases}$$

で Q から $\tilde{Q}$ への全単射を定め，Q の算法を h により $\tilde{Q}$ に移し，それらを $\tilde{\sigma},\tilde{\mu}$ と書けば，$(\tilde{Q},\tilde{\sigma},\tilde{\mu})$ は体となる．

$$R \subset \tilde{Q},$$
$$\sigma \subset \tilde{\sigma},$$
$$\mu \subset \tilde{\mu}$$

となるので $(\tilde{Q}, \tilde{\sigma}, \tilde{\mu})$ は (R, σ, μ) の純粋な拡張であり，x を $\tilde{Q}$ の任意の要素とすれば R の或る要素 s, t が存在して

$$h^{-1}(x) = [s, t] = \mu_P([s, \epsilon], [\epsilon, t]) = \mu_P(\varphi(s), \varphi(t)^{-1})$$

となり，

$$t^{-1} \overset{\text{def}}{=\!=} h(\varphi(t)^{-1})$$

とおけば

$$x = \tilde{\mu}(s, t^{-1})$$

と書ける．すなわち $(\tilde{Q}, \tilde{\sigma}, \tilde{\mu})$ は

$$\begin{gathered} R \subset \tilde{Q}, \\ \sigma \subset \tilde{\sigma}, \\ \mu \subset \tilde{\mu} \end{gathered}$$

を満たす最小の体である．これを**整域** (R, σ, μ) **の分数体**と呼ぶ．分数体と名付けられたる所以は

$$s/t \overset{\text{def}}{=\!=} \tilde{\mu}(s, t^{-1})$$

と表記すれば明らかである．

B.3.6　実数

実数体の構成はなかなかうまくいかない．Artin-Schreier 理論によれば順序体には実閉包が存在し，特に有理数体の実閉包が実数体として定められる．実閉包の存在の証明には Zorn の補題が使われる．他方で Dedeind 切断による実数の構成は選択公理を使わないので，この方法で実数体を構成すれば複素数体の構成までは選択公理なしで記述できる．しかし Dedeind 切断による方法は，厚顔無恥な言い方をすれば泥臭い．しかし Zorn の補題はまだ使いたくない．Artin-Schreier の定理は任意の順序体に対しての実閉包の存在を主張しているが，例えば Archimedes 的順序体の実閉包の存在は Zorn の補題なしで，華麗に証明できるのか？見通しが立たない．

もう一つ問題がある．実閉体が least upper bound property を満たすかどうかがまだわからない．いかなる実閉体も least upper bound property を満たすのか，実閉体が Archimedes 的ならば least upper bound property を満たすのか，どういう状況でどう証明すれば良いのかまだ把握していない．

実閉体メモ

体が実体であることと順序付け可能であることは同値．
体 F について，F が実閉体であること，F のいかなる要素 x にも $\sqrt{x}$ か $\sqrt{-x}$ が存在してかつ奇数次の多項式が F で解を持つこと，平方の全体を正の要素として順序付け可能であること，F が実体で $F(\sqrt{-1})$ が代数閉体であること，は同値．

B.3.7　イデアル

(R, σ_R, μ_R) を可換環とし，I をその極大イデアルとする．このとき R を I で割った商環は体となる．

B.3.8　主環

主環とはそのいかなるイデアルも単項イデアルとなる整域のことである．(R,σ,μ) を主環とし，q を (R,σ,μ) の素元とする．このとき q が生成するイデアルは極大イデアルとなる．

B.3.9　多項式環

(R,σ_R,μ_R) を可換環とする．また ζ_R を R の零元とし，ϵ_R を R の単位元とする．P を $\boldsymbol{\omega}$ 上の R-値写像で有限個の自然数を除いて ζ_R に張り付くものの全体とする．つまり P は

$$P \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \left\{ f \mid \quad f : \boldsymbol{\omega} \longrightarrow R \wedge \exists n \in \boldsymbol{\omega}\, \forall m \in \boldsymbol{\omega} \,(\, n < m \Longrightarrow f(m) = \zeta_R \,) \right\}$$

で定められる．f を P の要素とするとき

$$\forall m \in \boldsymbol{\omega} \,(\, n < m \Longrightarrow f(m) = \zeta_R \,)$$

を満たす最小の自然数 n が取れるが，その自然数を f の次数と呼び

$$\deg f$$

と書く．さらに言えば，deg とは f に対して

$$\mu n \, \left[\forall m \in \boldsymbol{\omega} \,(\, n < m \Longrightarrow f(m) = \zeta_R \,) \right]$$

を対応させる写像である．f と g を P の要素とするとき

$$\boldsymbol{\omega} \ni n \longmapsto \sigma_R(f(n), g(n))$$

なる写像を対応させる関係を P の加法として定め，

$$\boldsymbol{\omega} \ni n \longmapsto \sum_{i \in n+1} \mu_R(f(i), g(n-i))$$

なる写像を対応させる関係を P の乗法として定める．P の加法を

$$\sigma_P$$

と書き，P の乗法を

$$\mu_P$$

と書く．P の特別な要素として，

$$\boldsymbol{\omega} \ni n \longmapsto \begin{cases} \epsilon_R & \text{if } n = 1 \\ \zeta_R & \text{if } n \neq 1 \end{cases}$$

なる写像を X と定める．このとき自然数 i に対して X^i は

$$\boldsymbol{\omega} \ni n \longmapsto \begin{cases} \epsilon_R & \text{if } n = i \\ \zeta_R & \text{if } n \neq i \end{cases}$$

なる写像であって，さらに

$$n \stackrel{\text{def}}{=} \deg f$$

とおけば

$$f = \sum_{i \in n} \mu_P \left(\varphi(f(i)), X^i \right)$$

が成立する．

ここで R の要素 r に対して

$$\boldsymbol{\omega} \ni n \longmapsto \begin{cases} r & \text{if } n = 0 \\ \zeta_R & \text{if } n \neq 0 \end{cases}$$

なる写像を対応させる関係を φ とすると，φ は R から P への埋め込みとなる．そして

$$R[X] \stackrel{\text{def}}{=} \left(P \backslash \varphi * R \right) \cup R$$

と定める．

$$P \ni f \longmapsto \begin{cases} \varphi^{-1}(f) & \text{if } f \in \varphi * R \\ f & \text{if } f \notin \varphi * R \end{cases}$$

なる写像を h とすると

$$h : P \xrightarrow[\text{onto}]{1:1} R[X]$$

が成立して，この h によって P の算法を $R[X]$ に移すことが出来る．つまり，f と g を $R[X]$ の要素とするとき

$$h \left(\sigma_P \left(h^{-1}(f), h^{-1}(g) \right) \right)$$

なる要素を対応させる関係を $R[X]$ の加法として定め，

$$h \left(\mu_P \left(h^{-1}(f), h^{-1}(g) \right) \right)$$

なる要素を対応させる関係を $R[X]$ の乗法として定める．$R[X]$ の加法を

$$\sigma_X$$

と書き，$R[X]$ の乗法を

$$\mu_X$$

と書くことにする．すると h は (P, σ_P, μ_P) から $(R[X], \sigma_X, \mu_X)$ への環同型となり，しかも

$$R \subset R[X]$$

かつ

$$\sigma_R \subset \sigma_X$$

かつ

$$\mu_R \subset \mu_X$$

が満たされる．

f を P の要素とすると，適当な自然数 n を取って

$$f = \sum_{i \in n} \mu_P \left(\varphi(f(i)), X^i \right)$$

と書けたわけであるが，このとき

$$h(f) = \sum_{i \in n} \mu_X \left(f(i), X^i \right)$$

が成立する．特に

$$f \notin \varphi * R$$

ならば

$$f = \sum_{i \in n} \mu_X \left(f(i), X^i \right)$$

が成立する．

(R, σ_R, μ_R) が整域ならば $(R[X], \sigma_X, \mu_X)$ もまた整域である．

B.3.10　単拡大

前小節の記号を継承する．(R, σ_R, μ_R) が体であるとき，$(R[X], \sigma_X, \mu_X)$ は Euclid 整域となる．従って，q を $R[X]$ の既約多項式とし，q の生成するイデアルを

$$(q)$$

と書くことにすると，商環

$$E \overset{\mathrm{def}}{=\!=} R[X]/(q)$$

は体となる．ただし商環の算法を

$$\sigma_E$$

及び

$$\mu_E$$

と書く．そして ψ を $R[X]$ から E への商写像とすると，ψ によって R は E に埋め込まれる．

$$F \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \left(E \backslash (\psi * R) \right) \cup R$$

とおいて，

$$E \ni x \longmapsto \begin{cases} \psi^{-1}(x) & \text{if } x \in \psi * R \\ x & \text{if } x \notin \psi * R \end{cases}$$

なる写像を J とすると

$$J : E \xrightarrow[\text{onto}]{1:1} F$$

が成立して，この J によって E の算法を F に移すことが出来る．つまり，x と y を E の要素とするとき

$$J\left(\sigma_E\left(h^{-1}(x), h^{-1}(y)\right)\right)$$

なる要素を対応させる関係を F の加法として定め，

$$h\left(\mu_E\left(h^{-1}(x), h^{-1}(y)\right)\right)$$

なる要素を対応させる関係を F の乗法として定める．F の加法を

$$\sigma_F$$

と書き，F の乗法を

$$\mu_F$$

と書くことにする．すると h は (E, σ_E, μ_E) から (F, σ_F, μ_F) への体同型となり，しかも

$$R \subset F$$

かつ

$$\sigma_R \subset \sigma_F$$

かつ

$$\mu_R \subset \mu_F$$

が満たされる．

q は既約多項式であるから

$$q \notin \varphi * R$$

が満たされ，ゆえに適当な自然数 n を取って

$$q = \sum_{i \in n} \mu_X\left(q(i), X^i\right)$$

と表される．ここで

$$\alpha \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \psi(X)$$

とおいて，ζ_E を (E, σ_E, μ_E) の零元とすると，

$$\zeta_E = \psi(q) = \sum_{i \in n} \mu_E\left(\psi(q(i)), \alpha^i\right)$$

が成立する．ψ は R の上で単射であって，かつ

$$X \notin R$$

なので，

$$\alpha \notin \psi * R$$

が成り立ち

$$\zeta_R = J(\zeta_E) = \sum_{i \in n} \mu_F\left(q(i), \alpha^i\right)$$

が従う．ゆえに α は R 上の多項式 q の解である．

B.3.11　複素数

複素数体は $(\mathbf{R}, +_{\mathbf{R}}, \bullet_{\mathbf{R}})$ を単拡大して得られる．$(\mathbf{R}[X], +_X, \bullet_X)$ を $\mathbf{R}$ 上の多項式環とすれば

$$1 +_X X^2$$

(中置記法) は既約多項式となり，単拡大の際にはこれを用いる．複素数体とは前小節で言うところの

$$(F, \sigma_F, \mu_F)$$

にあたり，これを

$$(\mathbf{C}, +_{\mathbf{C}}, \bullet_{\mathbf{C}})$$

と書く．$\mathbf{C}$ の要素で $1 +_X X^2$ の解となるもの，つまり前小節の α に当たるものを

$$\mathbf{i}$$

と書くと

$$0 = 1 +_{\mathbf{C}} \mathbf{i}^2$$

を満たされる．また複素数は全て

$$x +_{\mathbf{C}} (y \bullet_{\mathbf{C}} \mathbf{i})$$

なる形で一意に表される．これでは若干見づらいので，$+_{\mathbf{C}}$ と $\bullet_{\mathbf{C}}$ を順序数のそれと同じ記号に直して

$$x + y \cdot \mathbf{i}$$

と表記する．

B.4　半群

定義 B.4.1 (算法).　a を類とするとき，$a \times a$ から a への写像を a 上の**算法 (operation)** と呼ぶ.

いま，a を類とし，o を a 上の算法とする.

可換律 (commutative law)　$\forall x, y \in a \ \bigl(o(x, y) = o(y, x) \bigr)$.
結合律 (associative law)　$\forall x, y, z \in a \ \bigl(o(o(x, y), z) = o(x, o(y, z)) \bigr)$.
簡約律 (cancellation law)　$\forall x, y, z \in a \ \bigl(o(x, z) = o(y, z) \Longrightarrow x = y \bigr)$.

ON 上の加法と乗法は ON 上の算法である．それらは結合律を満たす一方で可換律と簡約律は満たさないが，定義域を $\omega \times \omega$ 上に制限すれば全てを満たすようになる．ここで

$$+_{\omega} \overset{\text{def}}{=\!=} +|_{\omega \times \omega}$$

及び

$$\cdot_{\omega} \overset{\text{def}}{=\!=} \cdot|_{\omega \times \omega}$$

として ω 上の加法と乗法を定義する.

定義 B.4.2 (半群).　a を集合とし，o を a 上の算法とする．o が結合律を満たしているとき対 (a, o) を**半群 (semi-group)** と呼ぶ．また o が結合律と可換律を満たすとき (a, o) を**可換半群 (commutative semi-group)** と呼び，o が結合律と簡約律を満たすとき (a, o) を**簡約的半群 (cancellable semi-group)** と呼ぶ.

定理 B.4.3 (ω は加法に関して半群となる).　$(\omega, +_{\omega})$ は簡約的可換半群である.

略証.

B.5　同値類

定義 B.5.1 (商集合).　a を集合とし，R を a 上の同値関係とする．x を a の要素とするとき

$$\{\, y \mid \ (y, x) \in R \,\}$$

を x の R に関する**同値類 (equivalence class)** と呼ぶ．また

$$a/R \overset{\text{def}}{=\!=} \{\, x \mid \ \exists y \in a \, \forall z \, \bigl((y, z) \in R \Longleftrightarrow z \in x \bigr) \,\}$$

で定める類を，a を R で割った**商集合 (quotient set)** と呼ぶ.

a が空であれば R も a/R も空となる.

定義 B.5.2 (商写像).　a を集合とし，R を a 上の同値関係とする．このとき，

$$a \ni x \longmapsto \left\{\, y \mid \quad (y, x) \in R \,\right\}$$

なる関係を a から a/R への**商写像 (quotient mapping)** と呼ぶ．

写像であることを述べる前に商写像と名前を付けましたが，以下に示す通り商写像は a から a/R への全射となっています．また商写像は**自然な全射 (natural surjection)** や**標準的全射 (canonical surjection)** とも呼ばれます．

定理 B.5.3 (商写像は全射である).　a を集合とし，R を a 上の同値関係とする．このとき a から a/R への商写像は全射である．

証明.　a が空である場合は $a/R = \emptyset$ も空となる．この場合 a 上には空写像しか定まらないが，定理 A.9.23 より空写像は a から a/R への全射である．

$$a \neq \emptyset$$

であるとし，また q を a から a/R への商写像とする．

第一段　q が写像であることを示す．x, y, z を集合として

$$(x, y) \in q \wedge (x, z) \in q$$

が成り立っているとすると，

$$s = x \wedge y = \{\, \tau \mid \quad (\tau, s) \in R \,\}$$

なる a の要素 s と，

$$t = x \wedge y = \{\, \tau \mid \quad (\tau, t) \in R \,\}$$

なる a の要素 t が取れる．このとき

$$s = t$$

が成り立つから

$$\{\, \tau \mid \quad (\tau, s) \in R \,\} = \{\, \tau \mid \quad (\tau, t) \in R \,\}$$

が従い

$$y = z$$

が成立する．ゆえに q は写像である．

第二段　q の定義域が a に等しいことを示す．x を集合とするとき，

$$x \in \mathrm{dom}(q)$$

ならば

$$(x,y) \in q$$

なる集合 y が取れるが，このとき

$$s = x \wedge y = \{\,\tau \mid \quad (\tau,s) \in R\,\}$$

なる a の要素 s が取れて

$$x \in a$$

が従う．x が

$$x \in a$$

を満たすならば，

$$y \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \{\,\tau \mid \quad (\tau,x) \in R\,\}$$

とおけば

$$(x,y) \in q$$

が成り立つので

$$x \in \mathrm{dom}(q)$$

となる．x の任意性ゆえに

$$a = \mathrm{dom}(q)$$

が従う．ゆえに q は a 上の写像である．

第三段　q が a/R への写像であることを示す．x を a の要素とすると

$$t \overset{\mathrm{def}}{=\!=} q(x)$$

とおくと，

$$t = \left\{\, y \mid \quad (y,x) \in R \,\right\}$$

が成り立つ．すると

$$\forall z\ (\,(z,x) \in R \Longleftrightarrow z \in t\,)$$

が成り立って

$$\exists y \in a\,\forall z\ \left(\,(z,y) \in R \Longleftrightarrow z \in t\,\right)$$

が満たされる．ゆえに

$$t \in a/R$$

が成立し

$$q(x) \in a/R$$

が従う．ゆえに q は a/R への写像である．

第四段　q が全射であることを示す．y を a/R の要素とすると

$$s \in a \, \forall t \, \big((s,t) \in R \Longleftrightarrow t \in y \big)$$

を満たす集合 s が取れて，外延性の公理より

$$y = \{ \, t \mid \quad (s,t) \in R \, \}$$

が成立する．ゆえに

$$(s,y) \in q$$

が満たされる．よって q は全射である．∎

定理 B.5.4 (要素は自分の同値類に属する).　a を集合とし，R を a 上の同値関係とし，q を a から a/R への商写像とする．このとき

$$\forall x \in a \, (\, x \in q(x) \,).$$

略証.　x を a の要素とすると，

$$q(x) = \left\{ \, y \mid \quad (y,x) \in R \, \right\}$$

が成立する．R は同値関係なので

$$(x,x) \in R$$

が成り立ち，

$$x \in \left\{ \, y \mid \quad (y,x) \in R \, \right\}$$

が従う．ゆえに

$$x \in q(x)$$

が成立する．∎

定理 B.5.5 (商集合の合併は割る前の集合に一致する).　a を集合とし，R を a 上の同値関係とする．このとき a/R は集合であって，また

$$a = \bigcup (a/R).$$

証明.　q を a から a/R への商写像とすると，定理 B.5.3 より

$$q * a = a/R$$

が成り立つから，置換公理より

$$\operatorname{set}(a/R)$$

が成立する．x を集合とするとき，

$$x \in a$$

ならば

$$x \in q(x)$$

が成り立つから

$$x \in \bigcup (a/R)$$

が従う．逆に

$$x \in \bigcup (a/R)$$

ならば

$$x \in q(y)$$

を満たす集合 y が取れるが，このとき

$$(x, y) \in R$$

が成立するので

$$x \in a$$

が成立する．x の任意性より

$$a = \bigcup (a/R)$$

となる． ∎

定理 B.5.6 (同値な要素同士の同値類は一致する).　a を集合とし，R を a 上の同値関係とし，q を a から a/R への商写像とする．このとき

$$\forall x, y \in a \ \big((x, y) \in R \Longleftrightarrow q(x) = q(y) \big).$$

略証.　a が空であれば空虚な真より定理は成立する．以下では a は空でないとして証明する．x と y を a の要素とする．

$$(x, y) \in R$$

が成り立っているとすると，z を

$$z \in q(x)$$

なる集合とすれば

$$(z,x) \in R$$

が成り立ち，同値関係の推移性より

$$(z,y) \in R$$

が成り立つ．ゆえに

$$z \in q(y)$$

が成立し，z の任意性より

$$q(x) \subset q(y)$$

となる．x と y の立場を入れ替えれば

$$q(y) \subset q(x)$$

も成り立つから

$$q(x) = q(y)$$

が成り立つ．ゆえに

$$(x,y) \in R \Longrightarrow q(x) = q(y)$$

が成り立つ．逆に

$$q(x) = q(y)$$

が成り立っているとすると，定理 B.5.4 より

$$x \in q(x)$$

が成り立つので

$$x \in q(y)$$

となる．ゆえに

$$(x,y) \in R$$

が従う．ゆえに

$$q(x) = q(y) \Longrightarrow (x,y) \in R$$

が成り立つ． ■

定理 B.5.7 (同値類は一致していなければ交わらない). a を集合とし，R を a 上の同値関係とし，q を a から a/R への商写像とする．このとき

$$\forall x,y \in a \left(q(x) \neq q(y) \Longleftrightarrow q(x) \cap q(y) = \emptyset \right).$$

略証．a が空であれば空虚な真より定理は成立する．以下では a は空でないとして証明する．x と y を a の要素とする．

$$q(x) = q(y)$$

が成り立っているとすると，定理 B.5.4 より

$$x \in q(x)$$

が成り立つので

$$x \in q(y)$$

となる．ゆえに

$$q(x) \cap q(y) \neq \emptyset$$

が成立する．ゆえに

$$q(x) = q(y) \Longrightarrow q(x) \cap q(y) \neq \emptyset$$

が成立する．逆に

$$q(x) \cap q(y) \neq \emptyset$$

が成り立っているとすると，

$$z \in q(x) \cap q(y)$$

を満たす集合 z が取れて

$$(x, z) \in R$$

かつ

$$(y, z) \in R$$

が成り立つ．このとき同値関係の可換律より

$$(z, y) \in R$$

が成り立って，同値関係の推移律より

$$(x, y) \in R$$

が従い，定理 B.5.6 より

$$q(x) = q(y)$$

が成立する．ゆえに

$$q(x) \cap q(y) \neq \emptyset \Longrightarrow q(x) = q(y)$$

が成立する． ∎

B.6　整数

定理 B.6.1 (半群の群への拡張). (A, σ) を簡約的可換半群とするとき，次を満たす群 (B, μ) が取れる．

- $A \subset B$.
- $\sigma \subset \mu$.

B.7　有理数

定理 B.7.1 (分数体の存在). 環 R に対し，R が整域であるということと R が或る体の部分環であるということは同値である．

R を整域とするとき，R を部分環として含む最小の体は R の**分数体 (field of fractions)** と呼ばれる．

$(\mathbf{Z}, +_{\mathbf{Z}}, \bullet_{\mathbf{Z}})$ は整域であるから，定理 B.7.1 より $(\mathbf{Z}, +_{\mathbf{Z}}, \bullet_{\mathbf{Z}})$ を部分環として含む体が取れる．その体を**有理数体 (field of rationals)** と呼び

$$(\mathbf{Q}, +_{\mathbf{Q}}, \bullet_{\mathbf{Q}})$$

と書く．

B.8　実数

定義 B.8.1 (Dedekind 切断). $\mathbf{Q}$ の任意の部分集合 A に対して，対 $(\mathbf{Q} \backslash A, A)$ が **Dedekind 切断 (Dedekind cut)** であるということを

$$\begin{aligned}
\text{対 } (\mathbf{Q} \backslash A, A) \text{ が Dedekind 切断である} \iff & A \neq \emptyset \wedge A \neq \mathbf{Q} \wedge \\
& \forall x \in \mathbf{Q} \backslash A \ \forall y \in A \ (\ x < y\ ) \wedge \\
& \forall x \in A \ \exists y \in A \ (\ y < x\ )
\end{aligned}$$

で定義する．

Dedekind 切断とは数直線を左右に分割する操作をイメージで，例えば

$$A = \left\{ q \in \mathbf{Q} \mid \quad 0 < q \right\}$$

に対して $(\mathbf{Q} \backslash A, A)$ は Dedekind 切断となります．実数の構成においてこの集合 A は重要であって，これを $\mathbf{Q}_+$ と表しておく．上の定義では $(\mathbf{Q} \backslash A, A)$ が Dedekind 切断であるというとき A が最小元をもたないことを条件に入れたが，ここは ‘$\mathbf{Q} \backslash A$ が最大元を持たない’ という条件に取り替えても同じ実数を構成できる．

いま $R = \{ x \mid \quad (\mathbf{Q} \backslash x, x) \text{ は Dedekind 切断である} \}$ として R を定め，

$$T = \{ x \mid \quad \exists a, b \in R \ (\ x = (a, b) \wedge b \subset a\ ) \}$$

と定める．この T は R 上の全順序となる．任意の $a, b \in R$ に対して，$a \not\subset b$ ならば或る有理数 x が $x \in a$ かつ $x \notin b$ を満たす．このとき b の任意の要素 y に対して $x < y$ となり，$x \in a$ かつ $x < y$ より $y \in a$ となるので $b \subset a$ が成り立つ．ゆえに

$$\neg (a \subset b) \Longrightarrow b \subset a$$

が得られた．これは $a \subset b \vee b \subset a$ と同値であるから T は全順序である．

X を R の部分集合で，$X \neq \emptyset$ かつ X は R において上に有界であるとする．このとき $\bigcup X$ は X の上限となる．

定理 B.8.2. $\mathbf{Q}$ の部分集合 A に対して $(\mathbf{Q} \backslash A, A)$ を Dedekind 切断とするとき，次が成り立つ:

(1) $\forall q \in \mathbf{Q}\ (\ \exists a \in A\ (\ a < q\ ) \Longleftrightarrow q \in A\ ).$

(2) $\forall q \in \mathbf{Q}\ (\ \exists a \in \mathbf{Q} \backslash A\ (\ q < a\ ) \Longrightarrow q \in \mathbf{Q} \backslash A\ ).$

証明． q を任意の有理数とすれば，A は最小元を持たないので

$$q \in A \Longrightarrow \exists a \in A\ (\ a < q\ )$$

となる．逆に $q \notin A$ ならば A の任意の要素 a に対して $q < a$ となるから，対偶を取って

$$\exists a \in A\ (\ a < q\ ) \Longrightarrow q \in A$$

を得る．$q \notin \mathbf{Q} \backslash A$ ならば A の任意の要素 a に対して $a < q$ となるから，対偶を取って (2) を得る． ∎

B.9　イデアル

まず和の記号 $\sum$ を定めましょう．例えば，いま実数の列

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$$

が与えられたとすれば，その n 個の和

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}$$

を $\sum$ を用いて

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i$$

と書くと決めてしまえば便利です．n 個の和とは直感的には添え字を順に辿って n 個の要素を合計すれば良いだけですが，その操作を $\mathcal{L}'$ の言葉で表現するには超限帰納法による再帰的定義を利用します．

定義 B.9.1 (イデアル). (R, σ, μ) を環とするとき，R の部分集合 J が

- $\forall a, b \in J\ (\ \sigma(a, b) \in J\ )$
- $\forall a \in J\ \forall r \in R\ (\ \mu(r, a) \in J\ )$

を満たすとき，J を R の左イデアル **(left ideal)** と呼ぶ．また二つ目の条件を

- $\forall a \in J\ \forall r \in R\ (\ \mu(a, r) \in J\ )$

に取り替えた場合，J を R の右イデアル **(right ideal)** と呼ぶ．左イデアルであり右イデアルでもある部分集合を**イデアル (ideal)** と呼ぶ．

考察対象は主に左イデアルである．左右を反転させれば左イデアルに関する結果は右イデアルにも当てはまる．

定理 B.9.2 (左イデアルは加法に関して群をなす). (R, σ, μ) を環とし，J をこの環の左イデアルとするとき，

$$\sigma_J \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \sigma|_{J \times J}$$

とおけば (J, σ_J) は可換群となる．

つまり，左イデアルとは左側からの掛け算で閉じている加法部分群であると言えます．

B.10　多項式環

(R, σ_R, μ_R) を可換環とする．また ζ_R を R の零元とし，ϵ_R を R の単位元とする．P を $\boldsymbol{\omega}$ 上の R-値写像で有限個の自然数を除いて ζ_R に張り付くものの全体とする．つまり P は

$$P \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \left\{ f \mid \quad f : \boldsymbol{\omega} \longrightarrow R \wedge \exists n \in \boldsymbol{\omega}\ \forall m \in \boldsymbol{\omega}\ (\ n < m \Longrightarrow f(m) = \zeta_R\ ) \right\}$$

で定められる．f を P の要素とするとき

$$\forall m \in \boldsymbol{\omega}\ (\ n < m \Longrightarrow f(m) = \zeta_R\ )$$

を満たす最小の自然数 n が取れるが，その自然数を f の次数と呼び

$$\deg f$$

と書く．さらに言えば，deg とは f に対して

$$\mu n\ \left[\forall m \in \boldsymbol{\omega}\ (\ n < m \Longrightarrow f(m) = \zeta_R\ ) \right]$$

を対応させる写像である．f と g を P の要素とするとき

$$\boldsymbol{\omega} \ni n \longmapsto \sigma_R(f(n), g(n))$$

なる写像を対応させる関係を P の加法として定め，

$$\boldsymbol{\omega} \ni n \longmapsto \sum_{i \in n+1} \mu_R(f(i), g(n-i))$$

なる写像を対応させる関係を P の乗法として定める．P の加法を

$$\sigma_P$$

と書き，P の乗法を

$$\mu_P$$

と書く．このとき (P, σ_P, μ_P) は可換環である．

略証.

P の特別な要素として，

$$\boldsymbol{\omega} \ni n \longmapsto \begin{cases} \epsilon_R & \text{if } n = 1 \\ \zeta_R & \text{if } n \neq 1 \end{cases}$$

なる写像を X と定める．このとき自然数 i に対して X^i は

$$\boldsymbol{\omega} \ni n \longmapsto \begin{cases} \epsilon_R & \text{if } n = i \\ \zeta_R & \text{if } n \neq i \end{cases}$$

なる写像であって，さらに

$$n \overset{\text{def}}{=} \deg f$$

とおけば

$$f = \sum_{i \in n} \mu_P \left(\varphi(f(i)), X^i \right)$$

が成立する．

ここで R の要素 r に対して

$$\boldsymbol{\omega} \ni n \longmapsto \begin{cases} r & \text{if } n = 0 \\ \zeta_R & \text{if } n \neq 0 \end{cases}$$

なる写像を対応させる関係を φ とすると，φ は R から P への埋め込みである．

略証.

そして

$$R[X] \overset{\text{def}}{=} \left(P \backslash \varphi * R \right) \cup R$$

と定める．

$$P \ni f \longmapsto \begin{cases} \varphi^{-1}(f) & \text{if } f \in \varphi * R \\ f & \text{if } f \notin \varphi * R \end{cases}$$

なる写像を h とすると

$$h : P \xrightarrow[\text{onto}]{1:1} R[X]$$

が成立して，この h によって P の算法を $R[X]$ に移すことが出来る．つまり，f と g を $R[X]$ の要素とするとき

$$h\left(\sigma_P\left(h^{-1}(f), h^{-1}(g)\right)\right)$$

なる要素を対応させる関係を $R[X]$ の加法として定め，

$$h\left(\mu_P\left(h^{-1}(f), h^{-1}(g)\right)\right)$$

なる要素を対応させる関係を $R[X]$ の乗法として定める．$R[X]$ の加法を

$$\sigma_X$$

と書き，$R[X]$ の乗法を

$$\mu_X$$

と書くことにする．すると h は (P, σ_P, μ_P) から $(R[X], \sigma_X, \mu_X)$ への環同型となり，しかも

$$R \subset R[X]$$

かつ

$$\sigma_R \subset \sigma_X$$

かつ

$$\mu_R \subset \mu_X$$

が満たされる．

f を P の要素とすると，適当な自然数 n を取って

$$f = \sum_{i \in n} \mu_P\left(\varphi(f(i)), X^i\right)$$

と書けたわけであるが，このとき

$$h(f) = \sum_{i \in n} \mu_X\left(f(i), X^i\right)$$

が成立する．特に

$$f \notin \varphi * R$$

ならば

$$f = \sum_{i \in n} \mu_X\left(f(i), X^i\right)$$

が成立する．

$$(R[X], \sigma_X, \mu_X)$$

のことを R 上の**多項式環 (polynomial ring)** と呼び，

$$X$$

のことをその**不定元 (indeterminate)** と呼ぶ．

定理 B.10.1 (整域上の多項式環は整域).　整域の上の多項式環は整域である．

定理 B.10.2 (体の上の多項式環は Euclid 整域).

定理 B.10.3 (Euclid 整域は主環).

B.11　素元分解

(R, σ, μ) を環とし，a を R の要素とするとき，a の生成する左イデアルを

$$R\langle a\rangle$$

と書く．

定理 B.11.1 (同伴な要素が生成するイデアルは等しい).　(R, σ, μ) を環とし，a, b を R の要素とする．このとき次が成り立つ:

$$a \sim b \Longrightarrow R\langle a\rangle = R\langle b\rangle .$$

証明.　$a \mid b$ ならば $b \in R\langle a\rangle$ となるから $R\langle b\rangle \subset R\langle a\rangle$ が成り立つ．同様に $b \mid a$ ならば $R\langle a\rangle \subset R\langle b\rangle$ となるので

$$a \sim b \Longrightarrow R\langle a\rangle = R\langle b\rangle$$

が得られる．∎

定理 B.11.2 (単項イデアル整域において素元が生成するイデアルは極大イデアルである).　(R, σ, μ) を単項イデアル整域するとき，p を (R, σ, μ) の素元とすれば，$R\langle p\rangle$ は (R, σ, μ) の極大イデアルとなる．

証明.　I を (R, σ, μ) のイデアルで

$$R\langle p\rangle \subset I \tag{B.4}$$

を満たすものとする．(R, σ, μ) は単項イデアル整域であるから I に対して R の或る要素 d が存在し

$$I = R\langle d\rangle$$

となるが，(B.4) より $p \in R\langle d\rangle$ となるので

$$d \mid p$$

が成り立つ．p は素元であるから $d \sim \epsilon \lor d \sim p$ となり (ただし ϵ は (R,σ,μ) の単位元を表す)，定理 B.11.1 より

$$d \sim 1 \Longrightarrow R\langle d\rangle = R\langle \epsilon\rangle = I,$$
$$d \sim p \Longrightarrow R\langle d\rangle = R\left\langle p\right\rangle$$

が成り立つので場合分け法則より

$$I = R \lor I = R\left\langle p\right\rangle$$

が成立する．ゆえに $R\left\langle p\right\rangle$ は極大イデアルである． ∎

B.12　複素数

K を体とし，p を多項式環 $K[X]$ の素元とするとき，p の解を含んでいる K の拡大体を取ることが出来る．そのことを保証するのが次の定理である．

定理 B.12.1 (単拡大).　(K,σ,μ) を体とし，p を K 上の多項式環の素元とするとき，(K,σ,μ) の拡大体で p

付録 C

基数メモ

C.1 選択公理

定義 C.1.1 (直積). a を類とし，h を a 上の写像とするとき，

$$\prod_{x \in a} h(x) := \left\{ f \mid \quad f : \mathrm{on}\, a \wedge \forall x \in a \left(f(x) \in h(x) \right) \right\}$$

と定め，これを h の**直積 (direct product)** と呼ぶ．

定理 C.1.2 (選択公理と直積). 次は同値である．

（イ） $\forall a \, \exists f \, \left(f : \mathrm{on}\, a \wedge \forall x \in a \left(x \neq \emptyset \Longrightarrow f(x) \in x \right) \right)$

（ロ） $\forall a \, \forall h \, \left(h : \mathrm{on}\, a \wedge \forall x \in a \left(h(x) \neq \emptyset \right) \Longrightarrow \prod_{x \in a} h(x) \neq \emptyset \right)$

証明.

第一段 a を集合，h を a 上の恒等写像とする．このとき

$$a' := a \backslash \{\emptyset\},$$
$$h' := h|_{a'}$$

とおけば

$$\exists f \, \left(f : \mathrm{on}\, a' \wedge \forall x \in a' \left(f(x) \in h'(x) \right) \right)$$

が成立する．

$$f'' := \varepsilon f \, \left(f : \mathrm{on}\, a' \wedge \forall x \in a' \left(f(x) \in h'(x) \right) \right)$$

とおいて

$$f' := f'' \cup \{(\emptyset, \emptyset)\},$$
$$f := f'|_a$$

とおけば

$$\exists f \, \left(f : \mathrm{on}\, a \wedge \forall x \in a \left(x \neq \emptyset \Longrightarrow f(x) \in x \right) \right)$$

が成立する．

第二段　a を集合とし，h を

$$h : \mathrm{on}\, a \wedge \forall x \in a\, (\, h(x) \neq \emptyset\,)$$

を満たす集合とする．

$$b \coloneqq h * a$$

とおけば

$$\exists f\ \bigl(\, f : \mathrm{on}\, b \wedge \forall x \in b\, (\, x \neq \emptyset \Longrightarrow f(x) \in x\,)\bigr)$$

が成り立つので，

$$\tilde{f} \coloneqq \varepsilon f\ \bigl(\, f : \mathrm{on}\, b \wedge \forall x \in b\, (\, x \neq \emptyset \Longrightarrow f(x) \in x\,)\bigr)$$

とおいて

$$f \coloneqq \left\{ x \mid \quad \exists s \in a \left(x = (s, \tilde{f}(h(s))) \right) \right\}$$

とおけば

$$f : \mathrm{on}\, a \wedge \forall x \in a\, (\, f(x) \in h(x)\,)$$

が成立する．

定義 C.1.3 (選択関数).　a を集合とするとき，

$$f : \mathrm{on}\, a \wedge \forall x \in a\, (\, x \neq \emptyset \Longrightarrow f(x) \in x\,)$$

を満たす写像 f を a 上の**選択関数 (choice function)** と呼ぶ．

$a = \emptyset$ ならば空写像が a 上の選択関数となりますね．空集合だけでなく，どの集合の上にも選択関数が存在することを保証するのが選択公理です．

公理 C.1.4 (選択公理).　いかなる集合の上にも選択関数が存在する：

$$\forall a\, \exists f\ \bigl(\, f : \mathrm{on}\, a \wedge \forall x \in a\, (\, x \neq \emptyset \Longrightarrow f(x) \in x\,)\bigr).$$

整列可能定理の証明は幾分技巧的で見通しが悪いですから，はじめに直感的な解説をしておきます．定理の主張は集合 a に対して順序数 α と写像 f で

$$f : \alpha \xrightarrow[\text{onto}]{1:1} a$$

を満たすものが取れるというものです．順序数は

$$0, 1, 2, 3, \cdots$$

と順番に並んでいますから，まず 0 に対して a の何らかの要素 x_0 を対応させます．次は 1 に対して $a \backslash \{x_0\}$ の何らかの要素 x_1 を対応させ，その次は 2 に対して $a \backslash \{x_0, x_1\}$ の要素を対応させ... と，同様の操作を a の要素が尽きるまで繰り返します．操作が終了した時点で，それまでに使われなかった順序数のうちで最小のものを α とすれば，写像

$$f : \alpha \ni \beta \longmapsto x_\beta \in a$$

が得られるという寸法です．'$a \backslash \{\cdots\}$ の何らかの要素を対応させる' という不明瞭な操作を $\mathcal{L}$' のことばで表現する際に選択公理が使われますから整列可能定理は選択公理から導かれると言えますが，逆に整列可能定理が真であると仮定すれば選択公理の主張が導かれます．つまり (A 節で登場した公理体系の下で) 選択公理と整列可能定理は同値な主張となります．

定理 C.1.5 (整列可能定理).　任意の集合は，或る順序数との間に全単射を持つ:

$$\forall a \, \exists \alpha \in \mathrm{ON} \, \exists f \left(f : \alpha \xrightarrow[\text{onto}]{1:1} a \right).$$

次の主張は整列可能定理と証明が殆ど被るのでまとめて述べておく．

定理 C.1.6 (整列集合は唯一つの順序数に順序同型である).　(a, O_W) を整列集合とするとき，或るただ一つの順序数 α と α から a への全単射 f が存在して

$$\gamma \leq \delta \Longrightarrow (f(\gamma), f(\delta)) \in O_W$$

を満たす．

証明.　χ を任意に与えられた $\mathcal{L}$ の対象とする．

第一段　$\chi = \emptyset$ の場合，

$$\emptyset : \emptyset \xrightarrow[\text{onto}]{1:1} \chi$$

が満たされるから

$$\exists f \left(f : \emptyset \xrightarrow[\text{onto}]{1:1} \chi \right)$$

が成立し，$\emptyset$ は ON の要素であるから

$$\exists\alpha \in \mathrm{ON}\, \exists f \left(f : \alpha \xrightarrow[\text{onto}]{1:1} \chi \right)$$

が従う．以上より

$$\chi = \emptyset \Longrightarrow \exists\alpha \in \mathrm{ON}\, \exists f \left(f : \alpha \xrightarrow[\text{onto}]{1:1} \chi \right)$$

が成り立つ．

第二段　$\chi \neq \emptyset$ の場合，

$$P \coloneqq \mathrm{P}(\chi) \backslash \{\chi\}$$

とおけば

$$\forall p \in P\, (\, \chi \backslash p \neq \emptyset \,)$$

が満たされるので，選択公理より

$$g : \mathrm{on}\, P \wedge \forall p \in P\, (\, g(p) \in \chi \backslash p \,)$$

を満たす写像 g が存在する．

$$G \coloneqq \left\{ z \mid \quad \exists s\, \left(\left(\mathrm{ran}(s) \in P \Longrightarrow z = (s, g(\mathrm{ran}(s))) \right) \wedge (\, \mathrm{ran}(s) \notin P \Longrightarrow z = (s, \emptyset) \,) \right) \right\}$$

で $\mathbf{V}$ 上の写像 G を定めれば

$$\forall\alpha \in \mathrm{ON}\, (\, F(\alpha) = G(F|_\alpha) \,)$$

を満たす類 F が存在して，G の定め方より

$$\alpha \in \mathrm{ON} \Longrightarrow F(\alpha) = \begin{cases} g(F * \alpha) & (F * \alpha \subsetneq \chi) \\ \emptyset & (F * \alpha = a \vee F * \alpha \not\subset \chi) \end{cases}$$

が成立する．

$$\forall\alpha \in \mathrm{ON}\, \left(F * \alpha \subsetneq \chi \Longrightarrow g(F * \alpha) \in \chi \right)$$

が満たさるので

$$F : \mathrm{ON} \longrightarrow \chi \cup \{\emptyset\}$$

が成立することに注意しておく．以下，適当な順序数 γ を選べば

$$F|_\gamma$$

が γ から χ への全単射となることを示す．

第三段　S を類とするとき

$$\mathrm{ord}\,(S) \wedge \forall\alpha \in S\, (\, F * \alpha \neq \chi \,) \Longrightarrow \mathrm{set}\,(F * S) \wedge F|_S : S \xrightarrow[\text{onto}]{1:1} F * S \wedge \mathrm{set}\,(S) \tag{C.1}$$

が成り立つことを示す．いま

$$\mathrm{ord}\,(S) \wedge \forall\alpha \in S\, (\, F * \alpha \neq \chi \,)$$

が成り立っているとする．このとき

$$F(\emptyset) = g(\emptyset) \in \chi$$

が成立し，また α を任意の順序数とすれば，

$$\forall\beta \in \alpha \left(\beta \in S \Longrightarrow F(\beta) \in \chi \right)$$

が満たされているとき

$$\begin{aligned} \alpha \in S &\Longrightarrow \alpha \subset S \\ &\Longrightarrow \forall\beta \in \alpha \left(\beta \in S \right) \\ &\Longrightarrow \forall\beta \in \alpha \left(F(\beta) \in \chi \right) \\ &\Longrightarrow F * \alpha \subset \chi, \\ \alpha \in S &\Longrightarrow F * \alpha \neq \chi \end{aligned}$$

より

$$\alpha \in S \Longrightarrow F(\alpha) \in \chi$$

が成立する．よって超限帰納法より

$$\forall\alpha \in S \left(F(\alpha) \in \chi \right)$$

となる．従って

$$F * S \subset \chi$$

が得られる．そして χ は集合であるから

$$\mathrm{set}\,(F * S)$$

が出る．次に $F|_S$ が単射であることを示す．$\mathrm{ord}\,(S)$ から

$$S \subset \mathrm{ON}$$

が満たされるので，$\beta, \gamma \in S$ に対して $\beta \neq \gamma$ ならば

$$\beta \in \gamma \vee \gamma \in \beta$$

が成り立つ．$\beta \in \gamma$ の場合

$$F(\gamma) = g(F * \gamma) \in \chi \backslash (F * \gamma)$$

が成り立つので

$$F(\gamma) \notin F * \gamma$$

が従う．他方で

$$F(\beta) \in F * \gamma$$

が満たされるので

$$F(\gamma) \neq F(\beta)$$

が満たされる．よって

$$\beta \in \gamma \Longrightarrow F(\gamma) \neq F(\beta)$$

が成立する．β と γ を入れ替えれば

$$\gamma \in \beta \Longrightarrow F(\gamma) \neq F(\beta)$$

も得られるので，場合分け法則より

$$\beta \neq \gamma \Longrightarrow F(\gamma) \neq F(\beta)$$

が成り立つ．よって $F|_S$ は単射である．このとき

$$F|_S : S \xrightarrow[\text{onto}]{1:1} F * S$$

となり

$$S = F|_S{}^{-1}(F * S)$$

が成り立つので，置換公理より

$$\text{set}\,(S)$$

が出る．

第四段　Burali-Forti の定理より

$$\neg\ \text{set}\,(\text{ON})$$

が成り立つので，式 (C.1) の対偶から

$$\neg\ \text{ord}\,(\text{ON}) \vee \exists \alpha \in \text{ON}\ (\,F * \alpha = \chi\,)$$

が従う．一方で

$$\text{ord}\,(\text{ON})$$

は正しいので，選言三段論法より

$$\exists \alpha \in \text{ON}\ (\,F * \alpha = \chi\,)$$

が成立する．γ を

$$F * \alpha = \chi$$

を満たす順序数 α のうちで最小のものとすれば，式 (C.1) より

$$F|_\gamma : \gamma \xrightarrow[\text{onto}]{1:1} \chi$$

が成り立つので，

$$\chi \neq \emptyset \Longrightarrow \exists \alpha \in \text{ON}\ \exists f\ \left(\,f : \alpha \xrightarrow[\text{onto}]{1:1} \chi\right)$$

も得られた．場合分け法則より

$$\chi = \emptyset \vee \chi \neq \emptyset \Longrightarrow \exists \alpha \in \mathrm{ON}\, \exists f \left(f : \alpha \xrightarrow[\text{onto}]{1:1} \chi \right)$$

が成立し，排中律から

$$\exists f \left(f : \alpha \xrightarrow[\text{onto}]{1:1} \chi \right)$$

は真となる．そして χ の任意性より定理の主張が出る． ∎

整列定理によりいかなる集合の上にも整列順序が定められます．実際，a を集合として

$$g := \varepsilon f \left(f : \alpha \xrightarrow[\text{onto}]{1:1} a \right)$$

とおき，

$$R := \left\{ x \mid \quad \exists s, t \in a \ \left(g^{-1}(s) \subset g^{-1}(t) \wedge x = (s,t) \right) \right\}$$

で a 上の関係を定めれば，R は a 上の整列順序となります．まさしく‘整列可能’なのですね．

C.2　基数

定義 C.2.1 (有限・可算・無限).

定理 C.2.2 (任意の無限集合は可算集合を含む).

$$\forall a \ \left(\exists \alpha \in \mathrm{ON} \backslash \omega \ (\, \alpha \approx a \,) \Longrightarrow \exists b \ (\, b \subset a \wedge \omega \approx b \,) \right).$$

定義 C.2.3 (対等).　$\mathbf{V}$ 上の関係 $\approx$ を

$$\approx \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{ x \mid \quad \exists s, t \left[x = (s,t) \wedge \exists f \left(f : s \xrightarrow[\text{onto}]{1:1} t \right) \right] \right\}$$

で定める．a と b を集合とするとき，

$$(a, b) \in \approx$$

なる式を “a と b は対等である **(equipotent)**” と翻訳し，中置記法によって

$$a \approx b$$

とも書く．

定理 C.2.4 (対等関係は同値関係).　$\approx$ は $\mathbf{V}$ 上の同値関係である．

定義 C.2.5 (濃度・基数).　集合 a に対して，a と対等な順序数のうち最小のものを対応させる関係を

$$\mathrm{card} \overset{\mathrm{def}}{=} \left\{ x \mid \quad \exists a \, \exists \alpha \in \mathrm{ON} \left[x = (a, \alpha) \wedge a \approx \alpha \wedge \forall \beta \in \mathrm{ON} \left(a \approx \beta \Longrightarrow \alpha \leq \beta \right) \right] \right\}$$

で定める．$\mathrm{card}\, a$ を a の**濃度 (cardinal)** と呼び，

$$\mathrm{card}\, \alpha = \alpha$$

を満たす順序数 α を**基数 (cardinal number)** と呼ぶ．また基数の全体を

$$\mathrm{CN} \overset{\mathrm{def}}{=} \{ \alpha \mid \quad \alpha \in \mathrm{ON} \wedge \mathrm{card}\, \alpha = \alpha \}$$

とおく．

整列可能定理の結果より，全ての集合には濃度が定められるのですね．

定理 C.2.6 (順序数はその濃度より小さくない).

$$\forall \alpha \in \mathrm{ON} \, (\, \mathrm{card}\, \alpha \leq \alpha \,).$$

略証.　α 上の恒等写像は α から α への全単射であるから

$$\alpha \in \left\{ \beta \mid \quad \beta \in \mathrm{ON} \wedge \beta \approx \alpha \right\}$$

が満たされる．従って

$$\mathrm{card}\, \alpha \leq \alpha$$

が成立する． ∎

定理 C.2.7 (濃度は基数).　次が成り立つ:

$$\forall a \, (\, \mathrm{card}\, a = \mathrm{card}\, \mathrm{card}\, a \,).$$

略証.　a を集合とする．まず定理 C.2.6 より

$$\mathrm{card}\, \mathrm{card}\, a \leq \mathrm{card}\, a$$

が満たされる．他方で

$$a \approx \mathrm{card}\, a \wedge \mathrm{card}\, a \approx \mathrm{card}\, \mathrm{card}\, a$$

が成り立っているので

$$a \approx \mathrm{card}\, \mathrm{card}\, a$$

が従い

$$\mathrm{card}\, a \leq \mathrm{card}\,\mathrm{card}\, a$$

も満たされる． ∎

定理 C.2.8 (CN は濃度の全体である). 次が成り立つ:

$$\mathrm{CN} = \{\, x \mid \quad \exists a \;(\, x = \mathrm{card}\, a \,)\,\}\,.$$

略証. α を CN の任意の要素とすれば

$$\alpha = \mathrm{card}\, \alpha$$

となるから，

$$\exists a \;(\, \alpha = \mathrm{card}\, a \,)$$

が満たされ

$$\alpha \in \{\, x \mid \quad \exists a \;(\, x = \mathrm{card}\, a \,)\,\}$$

が従う．逆に α を $\{\, x \mid \quad \exists a \;(\, x = \mathrm{card}\, a \,)\,\}$ の任意の要素とすれば，或る集合 a が存在して

$$\alpha = \mathrm{card}\, a$$

となる．このとき定理 C.2.7 より

$$\mathrm{card}\, a = \mathrm{card}\,\mathrm{card}\, a$$

が成り立つので

$$\exists \beta \in \mathrm{ON}\,(\, \mathrm{card}\, \beta = \beta \wedge \mathrm{card}\, a = \beta \,)$$

が満たされ

$$\alpha = \mathrm{card}\, a \in \mathrm{CN}$$

が従う． ∎

定理 C.2.9. 次が成り立つ:

$$\forall a\, \forall b \;(\, a \approx b \Longleftrightarrow \mathrm{card}\, a = \mathrm{card}\, b \,)\,.$$

証明. $a \approx b$ が成り立っていると仮定する．このとき

$$\mathrm{card}\, a \approx a \wedge a \approx b$$

が成り立つので

$$\operatorname{card} a \approx b$$

が従い，

$$\operatorname{card} b \leq \operatorname{card} a$$

となる．a と b を入れ替えれば

$$\operatorname{card} a \leq \operatorname{card} b$$

も得られ，

$$\operatorname{card} a = \operatorname{card} b$$

が成立する．以上より

$$a \approx b \Longrightarrow \operatorname{card} a = \operatorname{card} b$$

が示された．逆に $\operatorname{card} a = \operatorname{card} b$ が成り立っていると仮定する．このとき

$$\begin{aligned}
f_1 &:= \varepsilon f \left(f : a \xrightarrow[\text{onto}]{1:1} \operatorname{card} a \right), \\
f_2 &:= \{\, x \mid \quad \exists s \in \operatorname{card} a \,(\, x = (s, s)\,)\,\}, \\
f_3 &:= \varepsilon f \left(f : \operatorname{card} b \xrightarrow[\text{onto}]{1:1} b \right)
\end{aligned}$$

とおけば f_1, f_2, f_3 はどれも全単射であるから，

$$g := (f_3 \circ f_2) \circ f_1$$

は a から b への全単射となる．よって $a \approx b$ が従い

$$\operatorname{card} a = \operatorname{card} b \Longrightarrow a \approx b$$

も示された． ∎

定理 C.2.10 (集合が大きい方が濃度も大きい).

$$\forall a \, \forall b \, (\, a \subset b \Longrightarrow \operatorname{card} a \leq \operatorname{card} b\,).$$

略証． a, b を集合として $a \subset b$ が成り立っていると仮定する．

$$\beta := \operatorname{card} b$$

とおいて

$$f : b \xrightarrow[\text{onto}]{1:1} \beta$$

なる f を取り

$$c \coloneqq f * a$$

とおけば，c の順序型である順序数 α と

$$g : \alpha \xrightarrow[\text{onto}]{1:1} c$$

および

$$\forall \zeta, \eta \in \alpha \left(\zeta < \eta \Longrightarrow g(\zeta) < g(\eta) \right)$$

を満たす g が取れる．このとき

$$\forall \zeta \in \alpha \left(\zeta \leq g(\zeta) \right)$$

が成り立つことが超限帰納法から示され，

$$\alpha \subset \beta$$

が従う．

$$\operatorname{card} a = \operatorname{card} c = \operatorname{card} \alpha \leq \alpha \leq \beta$$

から

$$\operatorname{card} a \leq \operatorname{card} b$$

が得られる． ∎

定理 C.2.11 (単射が存在すれば濃度は小さい).

$$\forall a \, \forall b \left(\exists f \left(f : a \xrightarrow{1:1} b \right) \Longrightarrow \operatorname{card} a \leq \operatorname{card} b \right)$$

略証.　f を集合 a から集合 b への単射とするとき，

$$a \approx f * a \subset b$$

より

$$\operatorname{card} a = \operatorname{card}(f * a) \leq \operatorname{card} b$$

が成り立つ． ∎

定理 C.2.12 (単射が存在すれば全射が存在し，全射が存在すれば単射が存在する).

$$\forall a \, \forall b \left[\exists f \left(f : a \xrightarrow{1:1} b \right) \Longleftrightarrow \exists g \left(g : b \xrightarrow{\text{onto}} a \right) \right].$$

略証． a, b を集合とする．

$$\exists f\ \left(f : a \xrightarrow{1:1} b \right)$$

が成り立っているとき，

$$f \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon f\ \left(f : a \xrightarrow{1:1} b \right)$$

とおいて，a の要素 a_0 を取り

$$g \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \mid \quad \exists y \in b\ \left(y \in f * a \Longrightarrow x = (y, f^{-1}(y)) \wedge y \notin f * a \Longrightarrow x = (y, a_0) \right) \right\}$$

で g を定めれば，

$$g : b \xrightarrow{\text{onto}} a$$

が成立する．よって

$$\exists f\ \left(f : a \xrightarrow{1:1} b \right) \Longrightarrow \exists g\ \left(g : b \xrightarrow{\text{onto}} a \right)$$

が成り立つ．逆に

$$\exists g\ \left(g : b \xrightarrow{\text{onto}} a \right)$$

が成り立っているとき，

$$g \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon g\ \left(g : b \xrightarrow{\text{onto}} a \right)$$

とおいて

$$h \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ t \mid \quad \exists x \in a\ \left(t = (x, \left\{ y \mid \quad y \in b \wedge x = g(y) \right\}) \right) \right\}$$

で h を定めれば，

$$h : \mathrm{on}\, a$$

かつ

$$\forall x \in a\, (\, h(x) \neq \emptyset\,)$$

が成り立つので

$$f : \mathrm{on}\, a \wedge \forall x \in a\, (\, f(x) \in h(x)\,)$$

なる f が取れる．

$$f(x) = f(x') \Longrightarrow x = g(f(x)) = g(f(x')) = x'$$

が成り立つので f は単射である．従って

$$\exists g\ \left(g : b \xrightarrow{\text{onto}} a \right) \Longrightarrow \exists f\ \left(f : a \xrightarrow{1:1} b \right)$$

が成り立つ． ∎

定理 C.2.13 (全射が存在すれば濃度は大きい).

$$\forall a \, \forall b \left(\exists f \left(f : a \xrightarrow{\text{onto}} b \right) \Longrightarrow \operatorname{card} b \leq \operatorname{card} a \right).$$

証明． a, b を集合とするとき，

$$\exists f \left(f : a \xrightarrow{\text{onto}} b \right) \Longrightarrow \exists g \left(g : b \xrightarrow{1:1} a \right)$$

と

$$\exists g \left(g : b \xrightarrow{1:1} a \right) \Longrightarrow \operatorname{card} b \leq \operatorname{card} a$$

が成り立つので

$$\exists f \left(f : a \xrightarrow{\text{onto}} b \right) \Longrightarrow \operatorname{card} b \leq \operatorname{card} a$$

が成立する． ∎

定理 C.2.14 (対等な集合同士は冪も対等).

$$\forall a \, \forall b \, (a \approx b \Longrightarrow \mathrm{P}(a) \approx \mathrm{P}(b)).$$

略証． a, b を集合とし，$a \approx b$ が成り立っているとする．このとき

$$f : a \xrightarrow[\text{onto}]{1:1} b$$

なる集合 f を取り

$$g := \left\{ x \mid \quad \exists s \in \mathrm{P}(a) \left(x = (s, f * s) \right) \right\}$$

で g を定めれば，

$$g : \mathrm{P}(a) \xrightarrow[\text{onto}]{1:1} \mathrm{P}(b)$$

が成立する．実際，x, y を $\mathrm{P}(a)$ の任意の要素とすれば

$$x = y \Longrightarrow f * x = f * y$$

となるので g は写像である．また

$$f * x = f * y$$

のとき

$$x = f^{-1} * (f * x) = f^{-1} * (f * y) = y$$

となるので g は単射である．そして z を $\mathrm{P}(b)$ の任意の要素とすれば，

$$w := f^{-1} * z$$

とおけば

$$f * w = z$$

となるので g は全射である．∎

定理 C.2.15 (Cantor の定理).　いかなる集合もその冪集合の濃度は真に大きい:

$$\forall a\ (\operatorname{card} a < \operatorname{card} \mathrm{P}(a)).$$

略証.　a を集合とし，f を a から $\mathrm{P}(a)$ への写像とする．このとき

$$\operatorname{ran}(f) \neq \mathrm{P}(a) \tag{C.2}$$

が成り立つことを示す．

$$B \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{ x \mid \quad x \in a \wedge x \notin f(x) \right\}$$

とおくと

$$\forall x \in a\ \left(B \neq f(x) \right)$$

が成立するので

$$B \notin \operatorname{ran}(f)$$

となる．他方で

$$B \in \mathrm{P}(a)$$

であるから (C.2) が従う．ゆえに a から $\mathrm{P}(a)$ への全射は存在しない．ゆえに a から $\mathrm{P}(a)$ への全単射は存在しない．ところで

$$g \overset{\text{def}}{=\!=} \{ x \mid \quad \exists t \in a\, (x = (t, \{t\}))\}$$

とおけば

$$g : a \xrightarrow{1:1} \mathrm{P}(a)$$

となり

$$\operatorname{card} a \leq \operatorname{card} \mathrm{P}(a)$$

が成り立つので，

$$\operatorname{card} a < \operatorname{card} \mathrm{P}(a)$$

が成立する．∎

定理 C.2.16 (CN は集合でない).

$$\rightharpoondown \mathrm{set}\,(\mathrm{CN})\,.$$

略証.

$$S \subset \mathrm{ON} \wedge \mathrm{set}\,(S) \Longrightarrow \mathrm{card} \bigcup S \notin S$$

が成り立つことを示す．

定理 C.2.17 (自然数は基数).　次が成立する．

$$\boldsymbol{\omega} \subset \mathrm{CN}.$$

定理 C.2.18 ($\boldsymbol{\omega}$ は基数).　次が成立する．

$$\boldsymbol{\omega} \in \mathrm{CN}.$$

定義 C.2.19 (無限基数割り当て写像 $\aleph$).　有限基数を抜いた基数の全体を

$$\mathrm{ICN} \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \mathrm{CN} \backslash \boldsymbol{\omega}$$

とおく ('I' は Infinite の意)．$\mathbf{V}$ 上の写像 G を

$$G \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \left\{\, x \mid \quad \exists s\, \exists \alpha \in \mathrm{ON} \left[\, x = (s, \alpha) \wedge \alpha \in \mathrm{ICN} \backslash \operatorname{ran}(s) \wedge \forall \beta \in \mathrm{ON} \left(\, \beta \in \mathrm{ICN} \backslash \operatorname{ran}(s) \Longrightarrow \beta \leq \alpha \,\right) \right] \right\}$$

で定めるとき，超限帰納法による写像の構成から

$$\forall \beta \in \mathrm{ON} \left(\, \aleph(\beta) = \mu\alpha \left(\, \alpha \in \mathrm{ICN} \backslash \aleph * \beta \,\right) \right)$$

を満たす ON 上の写像 $\aleph$ が取れる．α を順序数とするとき，

$$\aleph(\alpha)$$

のことを

$$\aleph_\alpha$$

と書く．

次の定理は**異なる無限がいくらでも存在すること**を主張している．

定理 C.2.20 ($\aleph$ は ON と順序同型).　$\aleph$ は ON から ICN への順序同型となる．つまり

$$\aleph : \mathrm{ON} \xrightarrow[\text{onto}]{1:1} \mathrm{ICN} \wedge \forall \gamma, \delta \in \mathrm{ON} \left(\, \gamma < \delta \Longrightarrow \aleph_\gamma < \aleph_\delta \,\right).$$

略証． いま γ, δ を ON の要素として

$$\gamma < \delta$$

であると仮定する．このとき

$$F * \gamma \subset F * \delta$$

かつ

$$F(\delta) \in \mathrm{ICN} \backslash F * \delta$$

が満たされるので

$$F(\delta) \in \mathrm{ICN} \backslash F * \gamma$$

が成立する．従って

$$F(\gamma) \leq F(\delta)$$

が成立する．一方で

$$F(\gamma) \in F * \delta \wedge F(\delta) \in \mathrm{ICN} \backslash F * \delta$$

から

$$F(\gamma) \neq F(\delta)$$

も満たされるので

$$F(\gamma) < F(\delta)$$

が従う．以上より

$$\forall \gamma, \delta \in \mathrm{ON} \, (\, \gamma < \delta \Longrightarrow F(\gamma) < F(\delta) \,)$$

が得られる．またこの結果より F が単射であることも従う．

定理 C.2.21 (Zorn の補題).

C.3　累乗

たまに話題にされることで，“0 の 0 乗が 1 であることは定義であるか定理であるか” という問題がある．本稿では定義になるわけだが，それは累乗の定義の仕方によるものであって，累乗を写像の個数から定義すれば

$$0^0 = 1$$

は定理となる．写像の個数との関係は後述する予定．

定義 C.3.1 (順序数の累乗).　α を順序数とし，$\mathbf{V}$ 上の写像 G_α を

$$x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{if } \operatorname{dom}(x) = \emptyset \\ x(\beta) \cdot \alpha & \text{if } \beta \in \mathrm{ON} \wedge \operatorname{dom}(x) = \beta \cup \{\beta\} \wedge x(\beta) \in \mathrm{ON} \\ \bigcup \operatorname{ran}(x) & \text{o.w.} \end{cases}$$

なる関係により定めると，

$$\forall \beta \in \mathrm{ON}\, (\, E_\alpha(\beta) = G_\alpha(E_\alpha|_\beta)\,)$$

を満たす ON 上の写像 E_α が取れる．順序数 β に対し

$$\alpha^\beta \overset{\text{def}}{=\!=} E_\alpha(\beta)$$

と定め，これを α の β 乗と呼ぶ．

以下の内容は集合論理を勉強する前に書いたものなので雑．いずれ全面書き直す．

付録 D

位相メモ

D.1　位相

位相とは，集合から二つの要素が与えられたとき，その要素同士がどれだけ “近い” のかを測るためのモノサシたる構造である．位相構造が与えられると，例えば次のような概念が生まれる．

a と b を集合として，それぞれに位相構造が定まっているとする．そして f を a から b への写像とし，x を a の要素とする．いま a と b には位相構造が定まっているので，x と $f(x)$ のそれぞれに対して “近所” というものが把握できるわけであるが，ここで $f(x)$ の近所をどんなに “狭く” 取ったとしても，x の近所で，そこの任意の要素 y で

$$f(y) \in f(x) \text{ の近所}$$

となるものが取れるとする．つまりイメージとしては，x の近所をどんどん狭く取って f で移していくと，その像は $f(x)$ に “収束” していく．このとき，f の値は $f(x)$ の近くで “ズレがいくらでも抑えられる” ので，まるで $f(x)$ の周りで値が “連続的” に繋がっているという意味で “f は x で連続である” と言われる．

定義 D.1.1 (位相).　S を集合とし，$\mathscr{O}$ を $\mathrm{P}(S)$ の部分集合とする．$\mathscr{O}$ が以下の三カ条を満たすとき，$\mathscr{O}$ を S 上の**位相 (topology)** や**位相構造 (topological structure)** と呼ぶ:

(O1)　$\mathscr{O}$ は S と空集合を要素に持つ:

$$\emptyset \in \mathscr{O} \wedge S \in \mathscr{O}.$$

(O2)　$\mathscr{O}$ は要素の対の交叉で閉じる．つまり，u と v を $\mathscr{O}$ の要素とすると

$$u \cap v \in \mathscr{O}.$$

(O3)　$\mathscr{O}$ は部分集合の合併で閉じる．つまり，w を $\mathscr{O}$ の部分集合とすると

$$\bigcup w \in \mathscr{O}.$$

そして対 $(S, \mathscr{O})$ を**位相空間 (topological space)** と呼ぶ．

S を集合とするとき，$\mathrm{P}(S)$ と $\{\emptyset, S\}$ は共に S 上の極端な位相構造であり，それぞれ**離散位相 (discrete topology)** 及び**密着位相 (indiscrete topology)** と呼ばれる．通常このような位相を考えることはないが，位相構造は少なくとも二つは取れるという証拠であるため以下に続く話が空論ではないと安心できる．

定義 D.1.2 (開集合と閉集合).　$(S, \mathscr{O})$ を位相空間とするとき，$\mathscr{O}$ の要素を $(S, \mathscr{O})$ の**開集合 (open set)** と呼び，補集合が開である S の部分集合，つまり

$$S \backslash a \in \mathscr{O}$$

なる S の部分集合 a を $(S, \mathscr{O})$ の**閉集合 (closed set)** と呼ぶ.

定理 D.1.3 (閉集合の全体は要素の対の合併と空でない部分集合の交叉で閉じる).　$(S, \mathscr{O})$ を位相空間とし，$(S, \mathscr{O})$ の閉集合の全体を

$$\mathscr{A} \overset{\mathrm{def}}{=} \{\, a \mid \quad a \subset S \wedge S \backslash a \in \mathscr{O} \,\}$$

とおく．このとき，u と v を $\mathscr{A}$ の要素とすると

$$u \cup v \in \mathscr{A}.$$

かつ，w を $\mathscr{A}$ の部分集合とすると

$$w \neq \emptyset \Longrightarrow \bigcap w \in \mathscr{A}.$$

ちなみに $w = \emptyset$ の場合は $\bigcap w = \mathbf{V}$ となる (定理 A.7.2 と定理 A.7.5).

略証.　u と v を $\mathscr{A}$ の要素とする．定理 A.7.12 より

$$S \backslash (u \cup v) = (S \backslash u) \cap (S \backslash v)$$

が成り立ち，

$$(S \backslash u) \cap (S \backslash v) \in \mathscr{O}$$

であるから

$$u \cup v \in \mathscr{A}$$

が成立する．また w を $\mathscr{A}$ の空でない部分集合とすると，定理 A.7.13 より

$$S \backslash \bigcap w = \bigcup \{\, S \backslash a \mid \quad a \in w \,\}$$

が成り立ち，かつ

$$\{\, S \backslash a \mid \quad a \in w \,\} \subset \mathscr{O}$$

が成り立つので，

$$\bigcup \{\, S \backslash a \mid \quad a \in w \,\} \in \mathscr{O}$$

が成り立ち

$$\bigcap w \in \mathscr{A}$$

が従う． ∎

$\mathbf{C}$ の部分集合族を

$$\mathscr{O}_{\mathbf{C}} \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{ u \mid \quad u \subset \mathbf{C} \land \forall x \in u \, \exists r \in \mathbf{R}_{+} \left[\forall y \left(y \in \mathbf{C} \land |y - x| < r \Longrightarrow y \in u \right) \right] \right\}$$

で定めると，これは $\mathbf{C}$ 上の位相となる．以降は $\mathscr{O}_{\mathbf{C}}$ を $\mathbf{C}$ の通常の位相として考える．つまり，$\mathbf{C}$ の部分集合 O は，O の要素 x が与えられたときに

$$\left\{ y \in \mathbf{C} \mid \quad |x - y| < r \right\} \subset O$$

なる正の実数 r が取れるなら $\mathbf{C}$ の通常の開集合と見做される．

定義 D.1.4 ($\mathbf{C}$ の位相).　$\mathbf{C}$ の位相構造を

$$\mathscr{O}_{\mathbf{C}} \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{ u \mid \quad u \subset \mathbf{C} \land \forall x \in u \, \exists r \in \mathbf{R}_{+} \left[\forall y \left(y \in \mathbf{C} \land |y - x| < r \Longrightarrow y \in u \right) \right] \right\}$$

で定める．

定義 D.1.5 (内部・閉包).　$(S, \mathscr{O})$ を位相空間とし，$\mathscr{A}$ を $(S, \mathscr{O})$ の閉集合の全体とし，A を S の部分集合とする．このとき，A に含まれる $(S, \mathscr{O})$ の開集合の全体の合併を A の $\mathscr{O}$ に関する**内部 (interior)** と呼び，A を含む $(S, \mathscr{O})$ の閉集合の全体の交叉を A の $\mathscr{O}$ に関する**閉包 (closure)** と呼ぶ．つまり，

$$\bigcup \{ u \in \mathscr{O} \mid \quad u \subset A \}$$

が A の $\mathscr{O}$ に関する内部であり，

$$\bigcap \{ a \in \mathscr{A} \mid \quad A \subset a \}$$

が A の $\mathscr{O}$ に関する閉包である．

$(S, \mathscr{O})$ を位相空間とし，$\mathscr{A}$ を $(S, \mathscr{O})$ の閉集合の全体とし，A を S の部分集合とするとき，A の $\mathscr{O}$ に関する内部を

$$A^{\circ}$$

と書くと

$$A^{\circ} \in \mathscr{O} \land A^{\circ} \subset A \land \forall v \in \mathscr{O} \left(v \subset A \Longrightarrow v \subset A^{\circ} \right) \tag{D.1}$$

が成立する．実際，

$$\{ u \in \mathscr{O} \mid \quad u \subset A \} \subset \mathscr{O}$$

であるから

$$A^{\circ} \in \mathscr{O}$$

となり，また定理 A.6.5 より

$$A^{\circ} \subset A$$

が成立し，また v を

$$v \subset A$$

なる $(S, \mathscr{O})$ の開集合とすれば

$$v \in \{\, u \in \mathscr{O} \mid \quad u \subset A \,\}$$

となるので，定理 A.6.4 より

$$v \subset A^{\mathrm{o}}$$

が成立する．つまり，

内部の特徴づけ

A の $\mathscr{O}$ に関する内部は，A に含まれる $(S, \mathscr{O})$ の開集合のうちで包含関係に関して最大のものである．

　また A の $\mathscr{O}$ に関する閉包を

$$\overline{A}$$

と書くと

$$\overline{A} \in \mathscr{A} \wedge A \subset \overline{A} \wedge \forall v \in \mathscr{A} \left(A \subset v \Longrightarrow \overline{A} \subset v \right) \tag{D.2}$$

が成立する．実際，

$$S \in \{\, a \in \mathscr{A} \mid \quad A \subset a \,\}$$

であるから

$$\{\, a \in \mathscr{A} \mid \quad A \subset a \,\} \neq \emptyset$$

であって，かつ

$$\{\, a \in \mathscr{A} \mid \quad A \subset a \,\} \subset \mathscr{A}$$

なので，定理 D.1.3 より

$$\overline{A} \in \mathscr{A}$$

が成立する．また定理 A.7.4 より

$$A \subset \overline{A}$$

が成立する．また v を

$$A \subset v$$

なる $(S, \mathscr{O})$ の閉集合とすれば

$$v \in \{\, a \in \mathscr{A} \mid \quad A \subset a \,\}$$

となるので，定理 A.7.3 より

$$\overline{A} \subset v$$

が成立する．つまり，

閉包の特徴づけ

A の $\mathscr{O}$ に関する閉包は，A を含む $(S,\mathscr{O})$ の閉集合のうちで包含関係に関して最小のものである．

定理 D.1.6 (内部の補集合は補集合の閉包).　$(S,\mathscr{O})$ を位相空間とする．また A を S の部分集合とするとき，

$$A^c \overset{\mathrm{def}}{=\!=} S \backslash A$$

として，A の $\mathscr{O}$ に関する内部を

$$A^i$$

と書き，A の $\mathscr{O}$ に関する閉包を

$$A^a$$

と書き，$(A^i)^c$ など連鎖する場合は括弧を省略して A^{ic} と書く．このとき次が成り立つ．

- $A^{ic} = A^{ca}$.
- $A^{cic} = A^a$.
- $A^{ci} = A^{ac}$.

証明．　(D.1) より

$$A^i \subset A$$

が成り立つので

$$A^c \subset A^{ic}$$

が従い，A^{ic} は $(S,\mathscr{O})$ の閉集合であるから (D.2) より

$$A^{ca} \subset A^{ic}$$

が成立する．一方で

$$A^c \subset A^{ca}$$

であるから

$$A^{cac} \subset A$$

が成り立ち，A^{cac} は $(S,\mathscr{O})$ の開集合なので (D.1) より

$$A^{cac} \subset A^i$$

となる．すなわち

$$A^{ic} \subset A^{ca}$$

となる．以上で

$$A^{ic} = A^{ca}$$

が得られた．この式で A を A^c に替えれば

$$A^{cic} = A^a$$

が得られ，ゆえに

$$A^{ci} = A^{ac}$$

も得られる． ∎

定義 D.1.7 (近傍・基本近傍系). 空でない位相空間 S において，$x \in S$ と $U \subset S$ に対し

$$x \in U^{\circ}$$

が満たされるとき U は x の**近傍 (neighborhood)** であるという．同様に $A \subset S$ と $V \subset S$ に対し

$$A \subset V^{\circ}$$

が満たされるとき，V は A の近傍であるという．点 x の近傍全体 (**近傍系 (neighborhood system)** と呼ぶ) を $\mathscr{V}(x)$ と書くとき，S は x の最大の近傍であるから $\mathscr{V}(x)$ は空ではない．また $\mathscr{V}(x)$ の空でない部分集合 $\mathscr{U}(x)$ が

$$\forall V \in \mathscr{V}(x), \quad \exists U \in \mathscr{U}(x), \quad U \subset V$$

を満たすとき，$\mathscr{U}(x)$ を x の**基本近傍系 (local base)** と呼ぶ．

定理 D.1.8 (基本近傍系は開集合を決定する). S を空でない位相空間，$\mathscr{U}(x)$ を点 x の基本近傍系とすれば

$$O \text{ が } S \text{ の開集合} \iff O = \emptyset\text{，或は任意の } x \in O \text{ に対し } U \subset O \text{ を満たす } U \in \mathscr{U}(x) \text{ が存在する}$$

が成立する．すなわち，$\{\mathscr{U}(x)\}_{x\in S}$ を基本近傍系とする S の位相は唯一つである．

証明. 空でない部分集合 O が開集合なら任意の $x \in O$ に対し O は x の近傍となるから，或る $U \in \mathscr{U}(x)$ が存在して $U \subset O$ を満たす．逆に任意の $x \in O$ に対し $U \subset O$ を満たす $U \in \mathscr{U}(x)$ が存在するとき，

$$x \in U^{\circ} \subset O^{\circ}$$

となり $O = O^{\circ}$ が成立するから O は開集合である． ∎

定理 D.1.9 (基本近傍系は位相を復元する).

(1) $(S, \mathscr{O})$ を空でない位相空間とし，各点 $x \in S$ に対し $\mathscr{U}(x)$ を基本近傍系とすれば以下が成り立つ:

(LB1) $\mathscr{U}(x)$ は空ではなく，また任意の $U \in \mathscr{U}(x)$ は $x \in U$ を満たす.

(LB2) 任意の $U, V \in \mathscr{U}(x)$ に対し或る $W \in \mathscr{U}(x)$ が存在して $W \subset U \cap V$ を満たす.

(LB3) 任意の $U \in \mathscr{U}(x)$ に対し或る $V \in \mathscr{U}(x)$ が存在し，$V \subset U$ かつ任意の $y \in V$ に対し $W_y \subset U$ を満たす $W_y \in \mathscr{U}(y)$ が取れる.

(2) 空でない集合 S の各点 x に対し (LB1)(LB2)(LB3) を満たす部分集合族 $\mathscr{U}(x)$ が与えられれば，

$$\mathscr{O} := \{\, O \subset S \mid \quad O = \emptyset,\ \text{或は任意の } x \in O \text{ に対し } U \subset O \text{ を満たす } U \in \mathscr{U}(x) \text{ が存在する}\,\}$$

により S に位相が定まり，$\{\mathscr{U}(x)\}_{x \in S}$ は $(S, \mathscr{O})$ において基本近傍系となる.

(3) 空でない位相空間 $(S, \mathscr{O})$ から基本近傍系 $\{\mathscr{U}(x)\}_{x \in S}$ を得れば，$\{\mathscr{U}(x)\}_{x \in S}$ を基本近傍系とする位相を (2) の手続きで構成することにより $\mathscr{O}$ を復元できる.

証明.

(1) 任意の $U \in \mathscr{U}(x)$ は x の近傍であるから $(LB1)$ が満たされる．また $U, V \in \mathscr{U}(x)$ に対し

$$x \in U^{\circ} \cap V^{\circ} = (U \cap V)^{\circ}$$

となるから $U \cap V$ は x の近傍であり (LB2) も従う．任意に $U \in \mathscr{U}(x)$ を取れば，U° は x の開近傍であるから或る $V \in \mathscr{U}(x)$ で $V \subset U^{\circ}$ を満たすものが存在する．このとき任意の $y \in V$ に対し U° は y の開近傍となるから

$$W_y \subset U^{\circ} \subset U$$

を満たす $W_y \in \mathscr{U}(y)$ が取れる．従って (LB3) も得られる．

(2) $\mathscr{U}(x)$ は空ではないから $S \in \mathscr{O}$ となる．また $O_1, O_2 \in \mathscr{O}$ を取れば，任意の $x \in O_1 \cap O_2$ に対し

$$x \in U_1 \subset O_1, \quad x \in U_2 \subset O_2$$

を満たす $U_1, U_2 \in \mathscr{U}(x)$ が存在し，(LB2) より或る $U_3 \in \mathscr{U}(x)$ に対して

$$U_3 \subset U_1 \cap U_2 \subset O_1 \cap O_2$$

が成り立つから $O_1 \cap O_2 \in \mathscr{O}$ となる．任意に $\mathscr{G} \subset \mathscr{O}$ を取れば任意の $x \in \bigcup \mathscr{G}$ は或る $G \in \mathscr{G}$ の点であるから，

$$U \subset G \subset \bigcup \mathscr{G}$$

を満たす $U \in \mathscr{U}(x)$ が存在し $\bigcup \mathscr{G} \in \mathscr{O}$ が従う．よって $\mathscr{O}$ は位相である．ところで，任意の $U \in \mathscr{U}(x)$ に対し

$$U^{\circ} = \left\{\, y \in U \mid \quad \text{或る } W_y \in \mathscr{U}(y) \text{ が存在して } W_y \subset U \text{ となる} \,\right\} =: \tilde{U} \tag{D.3}$$

が成立する．実際 $\mathscr{O}$ の定義より

$$y \in U^{\circ} \quad \Longrightarrow \quad \text{或る } W_y \in \mathscr{U}(y) \text{ で } W_y \subset U^{\circ}$$

となるから $U^{\circ} \subset \tilde{U}$ が従い，逆に $y \in \tilde{U}$ については，(D.3) の W_y に対して (LB3) より或る $X_y \in \mathscr{U}(y)$ が

$$X_y \subset W_y, \quad z \in X_y \implies \text{或る } Y_z \in \mathscr{U}(z) \text{ で } Y_z \subset X_y \subset U$$

を満たすから $X_y \subset \tilde{U}$ が従う．すなわち $\tilde{U}$ は開集合であり，$U^{\circ} \subset \tilde{U}$ と併せて (D.3) を得る．(LB3) より

$$V \subset U, \quad y \in V \implies \text{或る } W_y \in \mathscr{U}(y) \text{ で } W_y \subset U$$

を満たす $V \in \mathscr{U}(x)$ が存在し，(LB1) と併せて

$$x \in V \subset \tilde{U} = U^{\circ}$$

が成り立つから任意の $U \in \mathscr{U}(x)$ は x の近傍である．そして W を x の任意の近傍とすれば，$\mathscr{O}$ の定め方より或る $U \in \mathscr{U}(x)$ が $U \subset W^{\circ}$ を満たすから $\mathscr{U}(x)$ は x の基本近傍系である．

(3)　定理 D.1.8 より $\{\mathscr{U}(x)\}_{x \in S}$ を基本近傍系とする位相は唯一つであるから主張が従う． ∎

定義 D.1.10 (集積点・密集点).　位相空間 S の点 x と部分集合 A について，x の任意の近傍 U に対し

$$(U \backslash \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

となるとき，x は A の**集積点 (accumulation point)** であるという．同様に x の任意の近傍 U に対し

$$U \cap A \neq \emptyset$$

となるとき，x は A の**密集点 (cluster point)** であるという．

集積点と密集点の明確な違いは T_1 空間 (後述) において現れる．

定理 D.1.11 (閉である一点集合は集積点を持たない).　位相空間において，閉じている一点集合は集積点を持たない．特に $\{x\}$ が閉であるとき，x は $\{x\}$ の密集点ではあるが集積点ではない．

証明.　一点集合 $\{x\}$ が閉であるとする．このとき $y \neq x$ なら $U := \{x\}^c$ は y の開近傍となり

$$(U \backslash \{y\}) \cap \{x\} = \emptyset$$

を満たすから y は $\{x\}$ の集積点ではない．x は $\{x\}$ の集積点となりえないから $\{x\}$ は集積点を持たない． ∎

定理 D.1.12 (閉集合は密集点集合).　位相空間 S の点 x と部分集合 A について次が成り立つ:

$$x \in \overline{A} \iff x \text{ は } A \text{ の密集点である．} \tag{D.4}$$

特に，A が閉であることと A の密集点全体が A に一致することは同値になる．

証明.　x の或る近傍 U が $U \cap A = \emptyset$ を満たすとき，定理 D.1.6 より

$$x \in U^i \subset A^{ci} = A^{ac}$$

となり $x \notin \overline{A}$ が従う．逆に $x \notin \overline{A}$ なら $\overline{A}^c$ は A と交わらない x の開近傍となるから (D.4) が出る．また

$$A \text{ が閉} \quad \Longleftrightarrow \quad A = \overline{A} \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ の密集点全体が } A \text{ に一致}$$

が成立する． ∎

定理 D.1.13 ($x \in \overline{A \backslash \{x\}} \Longleftrightarrow x$ が A の集積点). 位相空間 S の点 x と部分集合 A について次が成り立つ:

$$x \in \overline{A \backslash \{x\}} \quad \Longleftrightarrow \quad x \text{ は } A \text{ の集積点である．}$$

証明. x の任意の近傍 U に対し $U \cap (A \backslash \{x\}) = (U \backslash \{x\}) \cap A$ となるから，定理 D.1.12 と併せて

$$\begin{aligned} x \in \overline{A \backslash \{x\}} \quad &\Longleftrightarrow \quad x \text{ の任意の近傍 } U \text{ に対し } U \cap (A \backslash \{x\}) \neq \emptyset \\ &\Longleftrightarrow \quad x \text{ の任意の近傍 } U \text{ に対し } (U \backslash \{x\}) \cap A \neq \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad x \text{ は } A \text{ の集積点} \end{aligned}$$

が成立する． ∎

定義 D.1.14 (相対位相). $(S, \mathscr{O})$ を位相空間，$M \subset S$ を部分集合，$i : M \longrightarrow S$ を恒等写像とするとき，

$$\mathscr{O}_M := \left\{ i^{-1}(O) = O \cap M \;\middle|\; O \in \mathscr{O} \right\}$$

で定める $\mathscr{O}_M$ を M の**相対位相 (relative topology)** と呼ぶ．また相対位相が定まった部分集合をもとの空間に対し**部分位相空間 (topological subspace)** と呼び，紛れが無ければ単に**部分空間**とも呼ぶ．

定義 D.1.15 ($\mathbf{R}$ 上の位相). $\mathbf{R}$ 上の位相は $\mathbf{C}$ 上の位相の相対位相として定める:

$$\mathscr{O}_{\mathbf{R}} \overset{\text{def}}{=\!=} \{\, O \cap \mathbf{R} \mid \quad O \in \mathscr{O}_{\mathbf{C}} \,\}.$$

定理 D.1.16 ($\mathbf{R}$ の開集合はボールから成る). O を $\mathbf{R}$ の部分集合とするとき，

$$O \in \mathscr{O}_{\mathbf{R}} \Longleftrightarrow \forall x \in O \, \exists r \in \mathbf{R}_+ \left(\left\{ y \in \mathbf{R} \;\middle|\; |x - y| < r \right\} \subset O \right).$$

定義 D.1.17 (被覆・コンパクト・相対コンパクト・局所コンパクト・σ-コンパクト).

- 集合 S の部分集合族 $\mathscr{B}$ が S の**被覆 (cover)** であるとは，
$$S = \bigcup \mathscr{B}$$
を満たすことをいう．また可算 (有限) 個の部分集合から成る被覆を**可算 (有限) 被覆**と呼ぶ．特に，位相空間において開集合のみから成る被覆を**開被覆 (open cover)** と呼ぶ．
- 集合 S の被覆 $\mathscr{B}$ に対し，その部分集合で S の被覆となるものを $\mathscr{B}$ の**部分被覆 (subcover)** と呼ぶ．部分被覆が有限 (可算) 集合であるときは有限 (可算) 部分被覆と呼ぶ．
- 位相空間において任意の開被覆が有限部分被覆を持つとき，その空間は**コンパクトである (compact)** という．位相空間の部分集合は，その相対位相でコンパクト空間となるとき**コンパクト部分集合**と呼ばれる．
- 位相空間の部分集合で，その閉包がコンパクトであるものを**相対コンパクトな (relatively compact)** 部分集合という．
- 位相空間の任意の点がコンパクトな近傍を持つとき，その空間は**局所コンパクトである (locally compact)** という．
- 位相空間においてコンパクト集合から成る可算被覆が存在するとき，その空間は **σ-コンパクトである**という．

集合 S とその部分集合 A に対し，S の部分集合族 $\mathscr{B}$ で $A \subset \bigcup \mathscr{B}$ を満たすものを A の '**S における被覆**' と呼ぶ．$\mathscr{B}$ の構成要素が S の開集合である場合は '**S における開被覆**' と呼び，他に '**S における部分被覆**' や '**S における有限被覆**' といった言い方もする．

定理 D.1.18 (部分集合のコンパクト性). A を位相空間 S の部分集合とするとき次が成り立つ:

A がコンパクト部分集合 $\iff$ A の S における任意の開被覆が (S における) 有限部分被覆を含む．

証明. A がコンパクト部分集合であるとき，$\mathscr{B}$ を A の S における開被覆とすれば
$$\{\, B \cap A \mid \quad B \in \mathscr{B} \,\}$$
は部分空間 A における開被覆となり，有限個の $B_1, B_2, \cdots, B_n \in \mathscr{B}$ により
$$A = \bigcup_{i=1}^{n} (B_i \cap A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i$$
となるから $\Longrightarrow$ が従う．逆に右辺が満たされているとき，$\mathscr{A}$ を A の相対開集合から成る A の被覆として
$$\mathscr{C} := \{\, C \subset S \mid \quad C \text{ は } S \text{ の開集合で } C \cap A \in \mathscr{A} \,\}$$
とおけば，
$$\mathscr{A} = \{\, C \cap A \mid \quad C \in \mathscr{C} \,\}$$
が満たされる．このとき $\mathscr{C}$ は A を覆うから有限個の $C_1, C_2, \cdots, C_m \in \mathscr{C}$ で $A \subset \bigcup_{j=1}^{m} C_j$ となり，
$$A = \bigcup_{j=1}^{m} (A \cap C_j)$$

かつ $A \cap C_j \in \mathscr{A}$ が成り立つから A はコンパクトである． ∎

定理 D.1.19 (コンパクト集合の閉部分集合はコンパクト). S を位相空間，K, F をそれぞれ S のコンパクト部分集合，閉集合とするとき，$K \cap F$ は S のコンパクト部分集合である．

証明. $K \cap F$ の任意の (S における) 開被覆に $S \backslash F$ を加えれば K の (S における) 開被覆となるから，そのうち K の有限部分被覆を取ることができる．$S \backslash F$ を除けば $K \cap F$ の有限被覆が残り $K \cap F$ のコンパクト性が出る． ∎

定義 D.1.20 (有限交叉性). S を集合とし，$\mathscr{S}$ を $\mathrm{P}(S)$ の部分集合とする．$\mathscr{S}$ の任意の空でない有限部分集合 U の交叉が空でないとき，つまり

$$\forall U \left(U \subset \mathscr{S} \wedge \exists n \in \boldsymbol{\omega}\, (\, U \approx n\,) \Longrightarrow \bigcap U \neq \emptyset \right)$$

が成り立つとき，$\mathscr{S}$ は有限交叉性 **(finite intersection property)** を持つという．

定理 D.1.21 (コンパクト $\Longleftrightarrow$ 閉集合族が有限交叉的). $(S, \mathscr{O}_S)$ を位相空間とし，A を S の部分集合とする．このとき，A がコンパクトであることと，S の任意の閉集合族 $\mathscr{F}$ に対して $\{\, F \cap A \mid \quad F \in \mathscr{F}\, \}$ が有限交叉性を持てば

$$A \cap \bigcap \mathscr{F} \neq \emptyset$$

が成り立つことは同値である．

証明. 定理 D.1.18 より

A がコンパクト部分集合である
$\Longleftrightarrow$ A の S における任意の開被覆が (S における) 有限部分被覆を含む
$\Longleftrightarrow$ S の任意にお閉集合族 $\mathscr{F}$ に対し，$A \cap \bigcap \mathscr{F} = \emptyset$ なら或る有限集合 $\mathscr{M} \subset \mathscr{F}$ で $A \cap \bigcap \mathscr{M} = \emptyset$
$\Longleftrightarrow$ S の任意の閉集合族 $\mathscr{F}$ に対し，$\{\, F \cap A \mid \quad F \in \mathscr{F}\, \}$ が有限交叉性を持つなら $A \cap \bigcap \mathscr{F} \neq \emptyset$

が従う． ∎

定義 D.1.22 (連続・同相・開写像). f を位相空間 S から位相空間 T への写像とする．

- $x \in S$ において $f(x)$ の任意の任意の近傍の f による引き戻しが x の近傍となるとき，f は点 x で**連続である (continuous at a point x)** という．
- T の任意の開集合の f による引き戻しが S の開集合となるとき，f を**連続写像 (continuous mapping)** と呼ぶ．
- f に逆写像 f^{-1} が存在し，f, f^{-1} が共に連続であるとき，f を**同相写像 (homeomorphism)** や**位相同型写像**，或は単に**同相**や**位相同型**と呼ぶ．また S, T 間に同相写像が存在するとき S と T は**同相である (homeomorphic)**，或は**位相同型**であるという．
- S の任意の開集合の f による像が T の開集合となるとき，f を**開写像 (open mapping)** と呼ぶ．

定理 D.1.23 (コンパクト集合の連続写像による像はコンパクト).

定理 D.1.24 (各点連続 $\Longleftrightarrow$ 連続). f を位相空間 S から位相空間 T への写像とするとき次が成り立つ:

$$f \text{ が連続} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ が } S \text{ の各点で連続}.$$

証明． f が連続であるとき，各点 $x \in S$ で $f(x)$ の任意の近傍 U に対し $f(x) \in U^{\circ}$ が満たされるから $f^{-1}(U^{\circ})$ は x を含む開集合となる．$f^{-1}(U^{\circ})$ は $f^{-1}(U)$ に含まれる開集合であるから

$$x \in f^{-1}(U^{\circ}) \subset f^{-1}(U)^{\circ}$$

が成り立ち，従って f は x で連続である．逆に f が各点連続であるとき，T の任意の開集合 O に対し $f^{-1}(O)$ は任意の $x \in f^{-1}(O)$ の近傍となるから定理 D.1.8 より $f^{-1}(O)$ は開集合である．よって f は連続である． ∎

定理 D.1.25 (部分空間と制限写像の連続性). S, T を位相空間，f を S から T への写像とする．また $g : S \longrightarrow f(S)$ を f の終集合を $f(S)$ へ制限した写像とする．このとき次が成り立つ:

$$f : S \longrightarrow T \text{ が連続である} \quad \Longleftrightarrow \quad g : S \longrightarrow f(S) \text{ が } (f(S) \text{ の相対位相に関して}) \text{ 連続である}.$$

証明． $U \coloneqq f(S)$ とおけば T の任意の開集合 O に対し

$$g^{-1}(U \cap O) = f^{-1}(U \cap O) = f^{-1}(O)$$

が成り立つから，f と g の連続性は一致する． ∎

定理 D.1.26 (位相の生成). S を集合，$\mathscr{M}$ を S の部分集合の族として

$$\mathscr{A} := \left\{ \bigcap \mathscr{F} \;\middle|\; \mathscr{F} \text{ は } \mathscr{M} \text{ の有限部分集合} \right\}$$

とおくとき，$\mathscr{M}$ を含む最小の位相は

$$\mathscr{O} := \left\{ \bigcup \Lambda \;\middle|\; \Lambda \subset \mathscr{A} \right\} \cup \{S\}$$

で与えられる．この $\mathscr{O}$ を $\mathscr{M}$ が生成する S の位相と呼ぶ．

証明. $\mathscr{O}$ は定め方より S と $\emptyset$ を含む．また任意の $O_1 = \bigcup \Lambda_1,\ O_2 = \bigcup \Lambda_2 \in \mathscr{O},\ (\Lambda_1, \Lambda_2 \subset \mathscr{A})$ に対し

$$\Lambda := \{ I \cap J \mid I \in \Lambda_1,\ J \in \Lambda_2 \} \subset \mathscr{A}$$

となるから

$$O_1 \cap O_2 = \bigcup_{I \in \Lambda_1,\ J \in \Lambda_2} I \cap J = \bigcup \Lambda \in \mathscr{O}$$

が成立する．任意に $\emptyset \neq \mathscr{U} \subset \mathscr{O}$ を取れば，各 $U \in \mathscr{U}$ に $U = \bigcup \Lambda_U$ を満たす $\Lambda_U \subset \mathscr{A}$ が対応し，このとき

$$\bigcup_{U \in \mathscr{U}} \Lambda_U \subset \mathscr{A}$$

となるから

$$\bigcup \mathscr{U} = \bigcup \left(\bigcup_{U \in \mathscr{U}} \Lambda_U \right) \in \mathscr{O}$$

が従う．$\mathscr{M}$ を含む任意の位相は $\mathscr{A}$ を含みかつその任意和で閉じるから $\mathscr{O}$ を含む． ∎

定理 D.1.27 (Alexander の定理).

定義 D.1.28 (始位相). $f \in \mathscr{F}$ を集合 S から位相空間 $(T_f, \mathscr{O}_f)$ への写像とするとき，全ての $f \in \mathscr{F}$ を連続にする最弱の位相を S の $\mathscr{F}$-始位相 (initial topology) と呼ぶ．$\mathscr{F}$-始位相は次が生成する位相である:

$$\bigcup_{f \in \mathscr{F}} \{ f^{-1}(O) \mid O \in \mathscr{O}_f \}.$$

定義 D.1.29 (Cartesian 積の位相).

定義 D.1.30 (直積の位相).

D.2　分離公理

定義 D.2.1 (位相的に識別可能・分離).　S を位相空間とする．

- $x, y \in S$ に対し $x \notin \overline{\{y\}}$ 或は $y \notin \overline{\{x\}}$ が満たされるとき，x と y は**位相的に識別可能である (topologically distinguishable)** という．
- $A, B \subset S$ に対し $\overline{A} \cap B = \emptyset$ かつ $A \cap \overline{B} = \emptyset$ が満たされるとき，A と B は**分離される (separeted)** という．点と点，点と集合の分離は一点集合を考える．
- $A, B \subset S$ が**近傍で分離される (separated by neighborhoods)** とは，A, B が互いに交わらない近傍を持つことをいう．
- 閉集合 $A, B \subset S$ が**関数で分離される (separated by a function)** とは，或る連続関数 $f : S \longrightarrow [0,1]$ によって $f(A) = \{0\}$，$f(B) = \{1\}$ が満たされることをいう．
- 閉集合 $A, B \subset S$ が**関数でちょうど分離される (precisely separated by a function)** とは，或る連続関数 $f : S \longrightarrow [0,1]$ によって $A = f^{-1}(\{0\})$，$B = f^{-1}(\{1\})$ が満たされることをいう．

定理 D.2.2 (位相的に識別可能な二点は相異なる).　S を位相空間とするとき，任意の $x, y \in S$ に対し

$$x \text{ と } y \text{ が位相的に識別可能} \quad \Longrightarrow \quad x \neq y.$$

証明.　$x = y$ なら $y \in \overline{\{x\}}$ かつ $x \in \overline{\{y\}}$ となる．後述の T_0 空間とは，この逆が満たされる位相空間である．■

定理 D.2.3 (分離される集合は他方を含まない近傍を持つ).　位相空間 S において，$A, B \subset S$ が分離されることと

$$A \subset U, \quad B \subset V, \quad A \cap V = \emptyset, \quad B \cap U = \emptyset \tag{D.5}$$

を満たす開集合 U, V が存在することは同値である．

証明.　$A, B \subset S$ が分離されるとき，$U := \overline{B}^c$，$V := \overline{A}^c$ とおけば (D.5) が成立する．逆に A, B に対し (D.5) を満たす開集合 U, V が存在するとき，$\overline{A} \subset V^c \subset B^c$ 及び $\overline{B} \subset U^c \subset A^c$ となるから A, B は分離される．■

定理 D.2.4 (部分空間の互いに素な閉集合はもとの空間で分離される).　S を位相空間，T を S の部分集合とする．このとき T 上の相対閉集合 A, B に対し，$A \cap B = \emptyset$ ならば $A \cap \overline{B} = \emptyset$ かつ $\overline{A} \cap B = \emptyset$ が成り立つ．ただし上線は S における閉包を表す．

証明.　A, B は一方が空なら分離される．そうでない場合は対偶を示す．$A \cap \overline{B} \neq \emptyset$ のとき，$x \in A \cap \overline{B}$ を取り，U を

x の T における近傍とすれば，x の S における近傍 V で $U = T \cap V$ を満たすものが存在する．このとき

$$U \cap B = (T \cap V) \cap B = T \cap (V \cap B) = V \cap B$$

となるが，一方で $x \in \overline{B}$ と定理 D.1.12 より

$$V \cap B \neq \emptyset$$

が成り立ち，B は T で閉じているから $x \in B$ が従う．対称的に $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$ の場合も $A \cap B \neq \emptyset$ が成立する． ∎

定義 D.2.5 (分離公理).

- 任意の二点が位相的に識別可能である位相空間を T_0 **空間**，或は **Kolmogorov 空間**という．
- 任意の二点が分離される位相空間を T_1 **空間**という．
- 任意の二点が近傍で分離される位相空間を T_2 **空間**，或は **Hausdorff 空間**という．
- 任意の交わらない点と閉集合が近傍で分離される位相空間を**正則 (regular) 空間**という．
- T_0 かつ正則な位相空間を T_3 **空間**，或は**正則 Hausdorff 空間**という．
- 任意の交わらない点と閉集合が関数で分離される位相空間を**完全正則 (completely regular) 空間**という．
- T_0 かつ完全正則な位相空間を $T_{3\frac{1}{2}}$ **空間**や**完全正則 Hausdorff 空間**，或は **Tychonoff 空間**という．
- 任意の交わらない二つの閉集合が近傍で分離される位相空間を**正規 (normal) 空間**という．
- T_1 かつ正規な位相空間を T_4 **空間**，或は**正規 Hausdorff 空間**という．
- 任意の部分位相空間が正規である位相空間を**全部分正規 (completely normal) 空間**という．
- T_1 かつ全部分正規な位相空間を T_5 **空間**，或は**全部分正規 Hausdorff 空間**という．
- 任意の交わらない二つの閉集合が関数でちょうど分離される位相空間を**完全正規 (perfectly normal) 空間**という．
- T_1 かつ完全正規な位相空間を T_6 **空間**，或は**完全正規 Hausdorff 空間**という．

定理 D.2.6 (T_1 空間とは一点集合が閉である空間).　位相空間 S に対し，以下は全て同値になる:

(a)　S が T_1 である．
(b)　S が T_0 であり，位相的に識別可能な任意の二点が分離される．
(c)　S の任意の一点集合が閉である．
(d)　$x \in S$ が $A \subset S$ の集積点であることと x の任意の開近傍が A と交わることは同値になる．

証明．　x が A の集積点であるとき，任意に x の近傍 U を取る．いま，x の或る開近傍 U_{n-1} と $x_{n-1} \in U_{n-1}$, $(x \neq x_{n-1})$ が取れたとして，

$$U_n \coloneqq U_{n-1} \cap (S \backslash \{x_{n-1}\})$$

は x の開近傍となり或る $x_n \in (U_{n-1} \backslash \{x\}) \cap A$ が取れる．$U_0 \coloneqq U^\circ$，$x_0 \in (U^\circ \backslash \{x\}) \cap A$ を出発点とすれば A は U の無限集合 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を含む．

T_1 空間でも Hausdorff であるとは限らない．実際，$\mathbf{N}$ において

$$\{\, O \subset \mathbf{N} \mid \quad O = \emptyset,\ \text{又は}\ \mathbf{N} \backslash O\ \text{が有限集合}\,\}$$

で位相を定めるとき，一点集合は常に閉となるが，任意の空でない二つの開集合は必ず交叉する (そうでないと有限集合が無限集合を包含することになる) ので Hausdorff 空間とはならない．一方で Hausdorff 空間は常に T_1 である．

定理 D.2.7 ($T_2 \Longrightarrow T_1$).　Hausdorff 空間は T_1 である．

証明.　x を Hausdorff 空間の点とする．x と異なる任意の点 y に対して

$$x \in U_y, \quad y \in V_y, \quad U_y \cap V_y = \emptyset$$

を満たす開集合 U_y, V_y が存在し，このとき

$$\{x\} = \bigcap_{y\,:\,x \neq y} V_y^c$$

となるから $\{x\}$ は閉である．つまり Hausdorff 空間は T_1 である．■

定理 D.2.8 (Hausdorff 空間のコンパクト部分集合は閉).　Hausdorff 空間のコンパクト部分集合は閉である．

証明.　S を Hausdorff 空間，$K \subset S$ をコンパクト部分集合とするとき，任意に $x \in S \backslash K,\ y \in K$ を取れば

$$x \in U_y, \quad y \in V_y, \quad U_y \cap V_y = \emptyset$$

を満たす開集合 U_y, V_y が取れる．或る $\{y_i\}_{i=1}^n \subset K$ に対し $K \subset \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$ となるから，$U := \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$ とおけば

$$x \in U, \quad U \subset \bigcap_{i=1}^n \left(S \backslash V_{y_i}\right) \subset S \backslash K$$

が成立する．従って $S \backslash K$ は開集合であり，K は閉集合である．■

定理 D.2.9 (Hausdorff 空間とは交わらない二つのコンパクト集合が近傍で分離される空間).　位相空間において，Hausdorff であることと，交わらない二つのコンパクト部分集合が近傍で分離されることは同値である．

証明.　A, B を Hausdorff 空間の交わらないコンパクト集合とするとき，任意の $p \in A$ に対し

$$p \in U_p, \quad B \subset V_p, \quad U_p \cap V_p = \emptyset \tag{D.6}$$

を満たす開集合 U_p, V_p が存在する．実際任意の $q \in B$ に対し

$$p \in U_p(q), \quad q \in V_p(q), \quad U_p(q) \cap U_p(q) = \emptyset$$

を満たす開集合 $U_p(q), U_p(q)$ が取れ，B のコンパクト性より或る $\{q_i\}_{i=1}^n \subset B$ で $B \subset \bigcup_{i=1}^n U_p(q_i)$ となるから，

$$U_p := \bigcap_{i=1}^n U_p(q_i), \quad V_p := \bigcup_{i=1}^n V_p(q_i)$$

とおけば (D.6) が成立する．A のコンパクト性より或る $\{p_j\}_{j=1}^m \subset A$ で $A \subset \bigcup_{j=1}^m U_{p_j}$ となるから，

$$U := \bigcup_{j=1}^m U_{p_j}, \quad V := \bigcap_{j=1}^m V_{p_j}$$

とおけば A と B は U, V により分離される．逆の主張は一点集合がコンパクトであることより従う． ∎

定理 D.2.10 (Hausdorff 空間値連続写像の等価域は閉). S を位相空間，T を Hausdorff 空間，f, g を S から T への連続写像とするとき，$E := \left\{ x \in S \mid \quad f(x) = g(x) \right\}$ は S で閉じている．特に $\overline{E} = X$ なら $f = g$ となる．

証明. 任意に $x \in \left\{ x \in S \mid \quad f(x) \neq g(x) \right\}$ を取れば，Hausdorff 性より

$$f(x) \in A, \quad g(x) \in B, \quad A \cap B = \emptyset$$

を満たす T の開集合 A, B が存在する．$f^{-1}(A) \cap g^{-1}(B)$ は x の開近傍であり，

$$f^{-1}(A) \cap g^{-1}(B) \subset \left\{ x \in S \mid \quad f(x) \neq g(x) \right\}$$

となるから $\left\{ x \in S \mid \quad f(x) \neq g(x) \right\}$ は S の開集合である．従って E は閉である． ∎

定理 D.2.11 ($T_3 \Longrightarrow T_2$). T_3 空間は Hausdorff である．

証明. T_3 空間は T_0 であるから，相異なる二点 x, y に対して $x \in \overline{\{y\}}$ 或は $y \in \overline{\{x\}}$ が成り立つ．正則性より

$$f(x) = 0, \quad f(y) = 1$$

を満たす連続写像が存在し，x, y は $f^{-1}([0, 1/2))$ と $f^{-1}((1/2, 1])$ で分離される． ∎

定理 D.2.12 (正則空間とは交わらないコンパクト集合と閉集合が近傍で分離される空間).

(1) 位相空間において，正則性と，交わらないコンパクト集合と閉集合が近傍で分離されることは同値である．

(2) $K, W, (K \subset W)$ をそれぞれ局所コンパクトな T_3 空間のコンパクト集合，開集合とするとき，相対コンパクトな開集合 U が存在して次を満たす:

$$K \subset U \subset \overline{U} \subset W.$$

証明.

(1)　K, F を正則空間のコンパクト集合，閉集合とするとき，$K \cap F = \emptyset$ なら任意の点 $x \in K$ に対して

$$x \in U_x, \quad F \subset V_x, \quad U_x \cap V_x = \emptyset$$

を満たす開集合 U_x, V_x が取れる．K はコンパクトであるから或る $\{x_i\}_{i=1}^n \subset K$ で $K \subset \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$ となり

$$K \subset U := \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}, \quad F \subset V := \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}, \quad U \cap V = \emptyset$$

が成立する．逆の主張は一点集合がコンパクトであることにより従う．

(2)　任意の $x \in K$ に対し，$F_x \subset W$ を満たす閉近傍 F_x とコンパクトな近傍 C_x が存在する．或る $\{y_i\}_{i=1}^m \subset K$ で

$$K \subset \left(C_{y_1}^{\circ} \cap F_{y_1}^{\circ}\right) \cup \cdots \cup \left(C_{y_m}^{\circ} \cap F_{y_m}^{\circ}\right)$$

となるが，ここで $U := \bigcup_{i=1}^m C_{y_i}^{\circ} \cap F_{y_i}^{\circ}$ とおけば，Hausdorff 空間において C_{y_i} は閉じているから

$$\overline{U} \subset \bigcup_{i=1}^m C_{y_i}$$

が成り立つ．定理 D.1.19 より $\overline{U}$ のコンパクト性が得られ，かつこのとき

$$K \subset U \subset \overline{U} \subset \bigcup_{i=1}^m F_{y_i} \subset W$$

も満たされる．∎

定理 D.2.13 (完全正則なら正則).

定理 D.2.14 (完全正則空間とは交わらないコンパクト集合と閉集合が関数で分離される空間).　位相空間において，完全正則であることと，交わらないコンパクト集合と閉集合が関数で分離されることは同値である．

証明.　K, C をそれぞれ完全正則空間 S のコンパクト部分集合と閉集合とする．任意の $x \in K$ に対し

$$f_x(y) = \begin{cases} 0, & (y = x), \\ 1, & (y \in C) \end{cases}$$

を満たす連続写像 $f_x : S \longrightarrow [0,1]$ が存在し，K のコンパクト性より或る $x_1, x_2, \cdots, x_n \in K$ で

$$K \subset \bigcup_{i=1}^n \left\{ x \in K \mid \quad f_{x_i}(x) < \frac{1}{2} \right\}$$

が成り立つ．$x \in K$ なら $\prod_{i=1}^n f_{x_i}(x) < 1/2$，$x \in C$ なら $\prod_{i=1}^n f_{x_i}(x) = 1$ となるから，$f := \prod_{i=1}^n f_{x_i}$ として

$$g(x) := 2 \max \left\{ f(x), \frac{1}{2} \right\} - 1$$

により連続写像 $g : S \longrightarrow [0,1]$ を定めれば

$$g(x) = \begin{cases} 0, & (x \in K), \\ 1, & (x \in C) \end{cases}$$

が従う．すなわち K, C は g で分離される．一点はコンパクトであるから逆の主張も得られる． ∎

定理 D.2.15 (実数値関数の族が生成する始位相は完全正則). S を集合とし，$\mathscr{C}$ を S から $\mathbf{R}$ への実数値関数の集合とする．このとき S は $\mathscr{C}$-始位相により完全正則空間となる．

証明． S に $\mathscr{C}$-始位相を入れるとき，任意の $x \in S$ と x を含まない (空でない) 始位相の閉集合 F に対して

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(O_i) \subset S \backslash F$$

を満たす $f_i \in \mathscr{C}$ と $\mathbf{R}$ の開集合 O_i, $(i = 1, \cdots, n)$ が取れる．$\mathbf{R}$ は完全正則であるから，各 i で

$$g_i : \mathbf{R} \longrightarrow [0,1]$$

かつ

$$g_i(f_i(x)) = 1$$

かつ

$$r \in \mathbf{R} \backslash O_i \Longrightarrow g_i(r) = 0$$

を満たす連続写像 g_i が存在して，

$$y \in S \backslash f_i^{-1}(O_i) \Longrightarrow g_i(f_i(y)) = 0$$

が成立する．

$$x \in S \Longrightarrow h(x) = \min\left\{g_1(f_1(x)),\ g_2(f_2(x)), \cdots, g_n(f_n(x))\right\}$$

なる写像 h を定めれば，h は

$$h : S \longrightarrow [0,1]$$

を満たし，$\mathscr{C}$-始位相に関して連続であり，$h(x) = 1$ かつ F 上で 0 となる． ∎

定理 D.2.16 (完全正則空間の位相は実連続写像全体の始位相に一致する).　$(S, \mathscr{O})$ を位相空間とし，$C(S)$ を実連続写像の全体とし，

$$\mathscr{Z} := \left\{ \bigcap_{f \in \mathscr{F}} f^{-1} * \{0\} \mid \quad \mathscr{F} \subset C(S) \wedge \mathscr{F} \neq \emptyset \right\}$$

とおくとき，以下は同値となる:

(a)　S が完全正則である．

(b)　S の $C(S)$-始位相が $\mathscr{O}$ に一致する．

(c)　S の閉集合全体と $\mathscr{Z}$ が一致する．

証明.

$(a) \Longrightarrow (c)$　S が完全正則であるとき，$C = \emptyset$ なら

$$f : S \longrightarrow \{1\}$$

なる f により，$C = S$ なら

$$f : S \longrightarrow \{0\}$$

なる f により

$$C = f^{-1} * \{0\}$$

となる．C が $\emptyset$ でも S でもない閉集合であるとき，任意の $x \in S \backslash C$ に対し或る $f_x \in C(S)$ で

$$f_x(y) = \begin{cases} 1, & (y = x), \\ 0, & (y \in C) \end{cases}$$

を満たすものが存在する．このとき

$$C \subset \bigcap_{x \in S \backslash C} f_x^{-1} * \{0\}$$

となるが，一方で

$$x \notin C \Longrightarrow x \notin f_x^{-1} * \{0\}$$

も成り立つので

$$C = \bigcap_{x \in S \backslash C} f_x^{-1} * \{0\}$$

が成り立つ．従って

$$C \in \mathscr{Z}$$

となる．一方で $f \in C(S)$ に対し $f^{-1} * \{0\}$ は閉であるから $\mathscr{Z}$ は S の閉集合の族であり (c) が満たされる．

$(c) \Longrightarrow (b)$　$C(S)$ の要素は $\mathscr{O}$ に関して連続であり，$C(S)$-始位相は $C(S)$ のすべての要素を連続にする最弱の位相であるから，

$$C(S)\text{-始位相} \subset \mathscr{O}$$

が成り立つ．一方で (c) が満たされているとき，O を $\mathscr{O}$ の要素とすると

$$S \backslash O = \bigcap_{f \in \mathscr{F}} f^{-1} * \{0\}$$

を満たす $\subset \left\{ f^{-1}(\{0\}) \mid \quad f \in C(S) \right\}$ の部分集合 $\mathscr{F}$ が存在して，

$$O = \bigcup_{f \in \mathscr{F}} f^{-1} * (\mathbf{R} \backslash \{0\})$$

となる．各 f で $f^{-1} * (\mathbf{R} \backslash \{0\})$ は $C(S)$-始位相の要素であるから，その合併である O も $C(S)$-始位相の要素である．ゆえに (b) が従う．

$(b) \Longrightarrow (a)$　定理 D.2.15 より従う．■

定理 D.2.17 (正規空間とは交わらない二つの閉集合が関数で分離される空間 (Urysohn の補題)).　位相空間において，正規性と，任意の交わらない二つの閉集合が関数で分離されることは同値である．

定理 D.2.18 (正則かつ正規なら完全正則).　正則かつ正規な (空でない) 位相空間は完全正則である．

証明.　点 x と空でない閉集合 F, $(x \notin F)$ に対し，正則なら x の閉近傍 E で $E \cap F = \emptyset$ を満たすものが取れる．加えて正規なら，Urysohn の補題より E と F は関数で分離されるから x と F も関数で分離される．■

定理 D.2.19 ($T_4 \Longrightarrow T_3$).

定理 D.2.20 ($T_6 \Longrightarrow T_5 \Longrightarrow T_4$).　完全正規空間は全部分正規である．特に，全部分正規なら正規であるから $T_6 \Longrightarrow T_5 \Longrightarrow T_4$ となる．

証明.　S を T_6 空間，T を S の部分位相空間，A, B を T の空でない閉集合とするとき，定理 D.2.4 より

$$A \cap \overline{B} = \emptyset, \quad \overline{A} \cap B = \emptyset$$

となる．ただし上線は S における閉包を表す．完全正規性より

$$\overline{A} = f^{-1}(\{0\}), \quad \overline{B} = g^{-1}(\{0\}), \quad \left(f^{-1}(\{1\}) = \emptyset = g^{-1}(\{1\}) \right)$$

を満たす連続写像 $f, g : S \longrightarrow [0,1]$ が取れるから，ここで $h : S \longrightarrow \mathbf{R}$ を $h := f - g$ で定めれば

$$\begin{cases} h(x) < 0, & (x \in A), \\ h(x) > 0, & (x \in B) \end{cases}$$

が成り立ち，$A \subset T \cap h^{-1}((-\infty, 0))$ かつ $B \subset T \cap h^{-1}((0, \infty))$ より A, B は T における開近傍で分離される． ∎

定義 D.2.21 (G_δ 集合・F_σ 集合). 位相空間の部分集合で，開集合の可算交叉で表されるものを G_δ 集合，閉集合の可算和で表されるものを F_σ 集合と呼ぶ．特に，任意の閉集合が G_δ である空間では任意の開集合が F_σ となる．

定理 D.2.22 (完全正規空間とは正規かつ閉集合が全て G_δ である空間). $(S, \mathscr{O})$ を位相空間とする．このとき，$(S, \mathscr{O})$ が完全正規であることと，$(S, \mathscr{O})$ が正規でかつ $(S, \mathscr{O})$ の全ての閉集合が G_δ であることは同値である．また $(S, \mathscr{O})$ が完全正規であるならば，a を $(S, \mathscr{O})$ の閉集合とすると

$$\forall n \in \boldsymbol{\omega} \left(b_{n+1} \subset {b_n}^{\circ} \right)$$

かつ

$$b = \bigcap_{n \in \boldsymbol{\omega}} b_n$$

を満たす $(S, \mathscr{O})$ の閉集合族 $\{b_n\}_{n \in \boldsymbol{\omega}}$ が取れる．ただし $^{\circ}$ は $\mathscr{O}$ に関する内部の意味である．

略証. $(S, \mathscr{O})$ が完全正規であるとする．u と v を

$$u \cap v = \emptyset$$

なる $(S, \mathscr{O})$ の閉集合とすると，

$$u = f^{-1} * \{0\}$$

かつ

$$v = f^{-1} * \{1\}$$

を満たす $\mathscr{O}/\mathscr{O}_{\mathbf{R}}$-連続写像 f が取れる．ここで

$$\alpha \overset{\text{def}}{=\!=} f^{-1} * \left] -\infty, \frac{1}{2} \right[$$

及び

$$\beta \overset{\text{def}}{=\!=} f^{-1} * \left] \frac{1}{2}, \infty \right[$$

とおけば，α と β は $(S, \mathscr{O})$ の開集合であって

$$u \subset \alpha$$

かつ

$$v \subset \beta$$

かつ

$$\alpha \cap \beta = \emptyset$$

を満たすから，$(S,\mathscr{O})$ は正規空間である．いま a を $(S,\mathscr{O})$ の閉集合とすると，

$$a = g^{-1} * \{0\}$$

かつ

$$\emptyset = g^{-1} * \{1\}$$

なる $\mathscr{O}/\mathscr{O}_{\mathbf{R}}$-連続写像 g が取れるが，

$$\{0\} = \bigcap_{n\in\omega} \left] \frac{-1}{n+1}, \frac{1}{n+1} \right[$$

が成り立つので

$$a = \bigcap_{n\in\omega} g^{-1} * \left] \frac{-1}{n+1}, \frac{1}{n+1} \right[$$

が成立する．ゆえに a は G_{δ} である．また

$$\omega \ni n \longmapsto g^{-1} * \left[\frac{-1}{n+1}, \frac{1}{n+1} \right]$$

なる関係を b とすれば，b_n は全て $(S,\mathscr{O})$ の閉集合であって

$$a = \bigcap_{n\in\omega} b_n,$$

かつ全ての自然数 n で

$$b_n \subset g^{-1} * \left] \frac{-1}{n+2}, \frac{1}{n+2} \right[\subset b_{n+1}{}^{\circ}$$

となるので，定理の後半の主張が得られた．

逆に $(S,\mathscr{O})$ が正規でかつ $(S,\mathscr{O})$ の全ての閉集合が G_{δ} であるとして，u と v を

$$u \cap v = \emptyset$$

なる $(S,\mathscr{O})$ の閉集合とする．

$$u = \bigcap_{n\in\omega} a_n$$

なる $(S,\mathscr{O})$ の開集合族 $\{a_n\}_{n\in\omega}$ と

$$v = \bigcap_{n\in\omega} b_n$$

なる $(S,\mathscr{O})$ の開集合族 $\{b_n\}_{n\in\omega}$ が取れる．定理 D.2.17 より各自然数 n で

$$f_n * (S \backslash a_n) = \{1\} \wedge \mathrm{ran}(f_n) \subset [0,1]$$

なる $\mathscr{O}/\mathscr{O}_{\mathbf{R}}$-連続写像 f_n と

$$g_n * (S \backslash b_n) = \{1\} \wedge \mathrm{ran}(g_n) \subset [0,1]$$

なる $\mathscr{O}/\mathscr{O}_{\mathbf{R}}$-連続写像 g_n が取れて，とくに u が空でなければ

$$f_n * u = \{0\},$$

v が空でなければ

$$g_n * v = \{0\}$$

となる．ここで

$$S \ni x \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x)$$

なる写像を f として，

$$S \ni x \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} g_n(x)$$

なる写像を g とすれば，f と g は共に $\mathscr{O}/\mathscr{O}_{\mathbf{R}}$-連続であって，

$$x \in u \Longrightarrow f(x) = 0 \wedge x \in S \backslash u \Longrightarrow 0 < f(x)$$

及び

$$x \in v \Longrightarrow g(x) = 0 \wedge x \in S \backslash v \Longrightarrow 0 < g(x)$$

を満たす．そして

$$S \ni x \longmapsto \frac{f(x)}{f(x) + g(x)}$$

なる写像を h とおけば

$$u = h^{-1} * \{0\}$$

かつ

$$v = h^{-1} * \{1\}$$

が成立する．ゆえに $(S, \mathscr{O})$ は完全正規である． ▮

D.3　可算公理

定理 D.3.1 (可算コンパクト性の同値条件).

定義 D.3.2 (開基).　位相空間 $(S, \mathscr{O})$ において，$\mathscr{O}$ の部分集合 $\mathscr{B}$ で

$$\mathscr{O} = \left\{ \bigcup \mathscr{U} \mid \quad \mathscr{U} \subset \mathscr{B} \right\}$$

を満たすもの，ただし $\bigcup \emptyset = \emptyset$，を $\mathscr{O}$ の**開基**や**基底**，**基 (base)** と呼ぶ．基底は一意に定まるものではない．

定義 D.3.3 (可算公理). 位相空間 S において，任意の点が高々可算な基本近傍系を持つとき S は**第一可算公理 (the first axiom of countability)** を満たす，或は S は第一可算であるといい，S が高々可算な基底を持つとき S は**第二可算公理 (the second axiom of countability)** を満たす，或は S は第二可算であるという．

空集合 (要素数 0) を含む任意の有限位相空間は，その冪集合が有限集合であるから第二可算公理を満たす．

定理 D.3.4 (第二可算なら第一可算). 空でない第二可算空間は第一可算である．

証明． $\mathscr{B}$ を空でない第二可算空間 S の可算基とするとき，任意の $x \in S$ に対して

$$\mathscr{U}(x) \coloneqq \{\, B \in \mathscr{B} \mid \quad x \in B \,\}$$

で可算な基本近傍系が定まる．実際 x の任意の近傍 U に対し或る $B \in \mathscr{B}$ で

$$x \in B \subset U^{\circ}$$

が成立し，定義より $B \in \mathscr{U}(x)$ が満たされる． ∎

定義 D.3.5 (稠密・可分). 位相空間 S において，$\overline{M} = S$ を満たすような部分集合 M を S で**稠密な (dense)** 部分集合と呼ぶ．また高々可算かつ稠密な部分集合 M が存在するとき S は**可分である (separable)** という．

定理 D.3.6 (第二可算なら可分). 第二可算位相空間は可分である．

証明． $\mathscr{B}$ を第二可算空間 S の可算基とするとき，$S = \emptyset$ なら $\emptyset$ は S の唯一の部分集合であり，要素数 0 かつ $\overline{\emptyset} = \emptyset = S$ を満たすから S は可分である．$S \neq \emptyset$ のとき，選択関数 $\Phi \in \prod \mathscr{B} = \prod_{B \in \mathscr{B}} B$ を取り

$$M \coloneqq \{\, \Phi(B) \mid \quad B \in \mathscr{B} \,\}$$

で可算集合を定めれば，任意の $x \in S$ 及び x の任意の近傍 U に対し $x \in B \subset U^{\circ}$ を満たす $B \in \mathscr{B}$ が存在して

$$\Phi(B) \in B \cap M \subset U \cap M$$

となるから，定理 D.1.12 より $S = \overline{M}$ が成立する． ∎

定義 D.3.7 (局所有限). $\mathscr{F}$ を位相空間 S の部分集合族とする．任意の $x \in S$ が $\mathscr{F}$ の高々有限個の元としか交叉しない近傍を持つとき，$\mathscr{F}$ は**局所有限 (locally finite)** であるという．つまり，$\mathscr{F}$ が局所有限であることの論理式で表現すると

$$\forall x \in S \exists V \in \mathscr{V}(x) \exists \mathscr{G} \in \mathcal{P}(\mathscr{F}) \left(\exists i \in \omega (\mathscr{G} \simeq i) \land \forall G \in \mathscr{G} (V \cap G \neq \emptyset) \land \forall F \in \mathscr{F} \backslash \mathscr{G} (V \cap F = \emptyset) \right).$$

また $\mathscr{F}$ が局所有限な部分集合族の高々可算個の合併で表されるとき，$\mathscr{F}$ は σ-**局所有限**であるという．

後述の一様位相空間 (距離空間や位相線型空間に共通する構造が定義された空間) の或るクラスは σ-局所有限な基底を持つ (定理 D.6.7)．従って以下のいくつかの定理はそのまま距離空間や第一可算位相線型空間に適用される．

定理 D.3.8 (σ-局所有限な基底が存在すれば第一可算)．　σ-局所有限な基底が存在する空でない位相空間は第一可算である．

証明．　S を空でない位相空間，$\mathscr{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{B}_n$ を σ-局所有限な基底とする (各 $\mathscr{B}_n$ は局所有限)．任意の $x \in S$ で

$$\mathscr{U}_n(x) := \{\, B \in \mathscr{B}_n \mid \quad x \in B \,\}, \quad \mathscr{U}(x) := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{U}_n(x)$$

と定めれば，局所有限性より $\mathscr{U}_n(x)$ は有限であるから $\mathscr{U}(x)$ は高々可算である．また x の任意の近傍 U に対し

$$x \in B \subset U^{\circ}$$

を満たす $B \in \mathscr{B}$ が存在し，定義より $B \in \mathscr{U}(x)$ が成り立つから $\mathscr{U}(x)$ は x の高々可算な基本近傍系をなす．∎

定理 D.3.9 (可分空間の局所有限な開集合族は高々可算集合)．　S を空でない可分位相空間，M を S で稠密な高々可算集合，$\mathscr{B}$ を S の空でない開集合から成る族とするとき，

$$\mathscr{B} = \bigcup_{m \in M} \{\, B \in \mathscr{B} \mid \quad m \in B \,\} \tag{D.7}$$

が成立する．特に $\mathscr{B}$ が局所有限なら $\mathscr{B}$ は高々可算集合である．

証明．　稠密性より任意の $E \in \mathscr{B}$ は $E \cap M \neq \emptyset$ を満たすから，$m \in E \cap M$ で $E \in \{\, B \in \mathscr{B} \mid \quad m \in B \,\}$ となり (D.7) が出る．$\mathscr{B}$ が局所有限なら $\{\, B \in \mathscr{B} \mid \quad m \in B \,\}$ は全て有限集合となり $\mathscr{B}$ は高々可算集合となる．∎

定理 D.3.10 (σ-局所有限な基底が存在すれば，可分 $\Longleftrightarrow$ 第二可算)．　σ-局所有限な基底が存在する空でない位相空間において，可分であることと第二可算であることは同値になる．

証明．　空でない可分位相空間において σ-局所有限な基底が存在するとき，定理 D.3.9 よりその基底は高々可算集合であるから第二可算性が満たされる．逆に第二可算なら可分であるから定理の主張を得る．∎

定理 D.3.11 (正則かつ σ-局所有限な基底を持つ $\Longrightarrow$ 完全正規)．

定義 D.3.12 (細分・パラコンパクト).

- $\mathscr{A}$ と $\mathscr{B}$ を或る集合の被覆とする．任意の $B \in \mathscr{B}$ に対し $B \subset A$ を満たす $A \in \mathscr{A}$ が存在するとき，$\mathscr{B}$ を $\mathscr{A}$ の**細分 (refinement)** と呼ぶ．位相空間において，被覆の細分で元が全て開 (閉) 集合であるものを**開 (閉) 細分 (open(closed) refinement)** と呼ぶ．
- 任意の開被覆が局所有限な開細分を持つ位相空間は**パラコンパクト (paracompact)** であるという．

定理 D.3.13 (正則空間の開被覆に対し，σ-局所有限な開細分が存在する $\Longleftrightarrow$ 局所有限な開細分が存在する). S を正則空間，$\mathscr{S}$ を S の開被覆とするとき，以下は全て同値になる:

(a) $\mathscr{S}$ が σ-局所有限な開細分を持つ．

(b) $\mathscr{S}$ が局所有限な細分を持つ．

(c) $\mathscr{S}$ が局所有限な閉細分を持つ．

(d) $\mathscr{S}$ が局所有限な開細分を持つ．

定理 D.3.14 (第二可算空間の任意の基底は可算基を内包する). $\mathscr{B}$ を第二可算空間 S の任意の基底とするとき，或る可算部分集合 $\mathscr{B}_0 \subset \mathscr{B}$ もまた S の基底となる．

証明. $\mathscr{D}$ を S の可算基とする．任意の開集合 U に対し或る $\mathscr{B}_U \subset \mathscr{B}$ が存在して $U = \bigcup_{V \in \mathscr{B}_U} V$ を満たすから，

$$\mathscr{D}_U := \{\, W \in \mathscr{D} \mid \quad W \subset V,\ V \in \mathscr{B}_U \,\} \tag{D.8}$$

とおけば $U = \bigcup_{V \in \mathscr{B}_U} V = \bigcup_{V \in \mathscr{B}_U} \bigcup_{\substack{W \in \mathscr{D}_U \\ W \subset V}} W \subset \bigcup_{W \in \mathscr{D}_U} W \subset U$ より

$$U = \bigcup_{W \in \mathscr{D}_U} W \tag{D.9}$$

が成り立つ．ここで (D.8) より任意の $W \in \mathscr{D}_U$ に対して $\{\, V \in \mathscr{B} \mid \quad W \subset V \,\} \neq \emptyset$ であるから

$$\Phi_U \in \prod_{W \in \mathscr{D}_U} \{\, V \in \mathscr{B} \mid \quad W \subset V \,\}$$

が取れる．$\mathscr{B}'_U := \{\, \Phi_U(W) \mid \quad W \in \mathscr{D}_U \,\}$ とすれば $U = \bigcup_{W \in \mathscr{D}_U} W \subset \bigcup_{W \in \mathscr{D}_U} \Phi(W) \subset \bigcup_{V \in \mathscr{B}'_U} V \subset U$ より

$$U = \bigcup_{V \in \mathscr{B}'_U} V \tag{D.10}$$

が満たされ，

$$\mathscr{B}_0 := \bigcup_{W \in \mathscr{D}} \mathscr{B}'_W$$

と定めれば $\mathscr{B}_0$ は求める S の可算基となる．実際，任意の開集合 U に対し (D.9) と (D.10) より

$$U = \bigcup_{W \in \mathscr{D}_U} W = \bigcup_{W \in \mathscr{D}_U} \bigcup_{V \in \mathscr{B}'_W} V$$

となる． ∎

定理 D.3.15 (局所コンパクト Hausdorff 空間が第二可算なら σ-コンパクト).　S が第二可算性をもつ局所コンパクト Hausdorff 空間なら，次を満たすコンパクト部分集合の列 $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ が存在する:

$$K_n \subset K_{n+1}^{\circ}, \quad S = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n.$$

証明.　任意の $x \in S$ に対して閉包がコンパクトな開近傍 U_x を取っておく．$\mathscr{O}$ を S の開集合系として

$$\mathscr{B} := \left\{ U \in \mathscr{O} \mid \quad \overline{U} \text{ がコンパクト} \right\}$$

とおけば，$\mathscr{B}$ は $\mathscr{O}$ の基底となる．実際，任意の $O \in \mathscr{O}$ に対し $O \cap U_x \in \mathscr{B}$ かつ

$$O = \bigcup_{x \in O} O \cap U_x$$

となる．従って定理 D.3.14 より或る可算部分集合 $\{U_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{B}$ が $\mathscr{O}$ の基底となる．いま，$K_1 := \overline{U_1}$ として，またコンパクト集合 K_n が選ばれたとして，K_n の有限被覆 $\mathscr{U}_n \subset \mathscr{B}_0$ を取り

$$K_{n+1} := \overline{U_{n+1}} \cup \bigcup_{V \in \mathscr{U}_n} \overline{V}$$

とすれば，K_{n+1} はコンパクトであり $K_n \subset K_{n+1}^{\circ}$ を満たす．この操作で $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ を構成すれば

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \subset S$$

が成立する． ∎

D.4　商位相

定理 D.4.1 (商位相).　位相空間 $(S, \mathscr{O})$ に同値関係 $\sim$ が定まっているとき，$x \in S$ からその同値類 $\pi(x)$ への対応

$$\pi : S \ni x \longmapsto \pi(x) \in S/{\sim}$$

を商写像 (quotient mapping) という．すなわち商写像は

$$x \sim y \quad \Longleftrightarrow \quad \pi(x) = \pi(y)$$

を満たす．また，商写像を連続にする $S/{\sim}$ の最強の位相，つまり

$$\mathscr{O}(S/{\sim}) := \left\{ V \subset S/{\sim} \mid \quad \pi^{-1}(V) \in \mathscr{O} \right\}$$

で定まる位相を $S/{\sim}$ の商位相 (quotient topology) という．

定理 D.4.2 (商空間が $T_1 \Longleftrightarrow$ 同値類が元の空間で閉じている). S を位相空間，$\sim$ を S 上の同値関係，$\pi : S \longrightarrow S/\sim$ を商写像とする．このとき次が成り立つ:

$$S/\sim \text{ が } T_1 \text{ 空間である} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{任意の } x \in S \text{ に対し } \pi(x) \text{ が } S \text{ の閉集合である．}$$

証明. 任意の $F \subset S/\sim$ に対し

$$F \text{ が閉} \quad \Longleftrightarrow \quad \pi^{-1}(F^c) = \pi^{-1}(F)^c \text{ が閉} \quad \Longleftrightarrow \quad \pi^{-1}(F) \text{ が閉}$$

となる．いま任意の $x \in S$ に対し $\pi(x) = \pi^{-1}(\pi(x))$ が満たされているから定理の主張を得る． ∎

定理 D.4.3 (商写像が開なら，商空間が Hausdorff $\Longleftrightarrow$ 対角線集合が閉). S を位相空間，$\sim$ を S 上の同値関係，$\pi : S \longrightarrow S/\sim$ を商写像とする．このとき，π が開写像であれば次が成立する:

$$S/\sim \text{ が Hausdorff} \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ (x,y) \in S \times S \mid \quad x \sim y \right\} \text{ が閉.}$$

証明. $S/\sim$ が Hausdorff であるとき，$x \nsim y$ を満たす $(x,y) \in S \times S$ に対し $\pi(x) \neq \pi(y)$ となるから

$$\pi(x) \in U, \quad \pi(y) \in V, \quad U \cap V = \emptyset$$

を満たす $S/\sim$ の開集合 U, V が取れる．このとき $\pi^{-1}(U) \times \pi^{-1}(V)$ は $S \times S$ の開集合であり

$$(x,y) \in \pi^{-1}(U) \times \pi^{-1}(V) \subset \{ (s,t) \in S \times S \mid \quad s \nsim t \}$$

が成り立つから $\Longrightarrow$ が得られる．逆に $\{ (s,t) \in S \times S \mid \quad s \nsim t \}$ が開集合であるとき，$\pi(x) \neq \pi(y)$ なら

$$(x,y) \in U \times V \subset \{ (s,t) \in S \times S \mid \quad s \nsim t \}$$

を満たす S の開集合 U, V が存在し，このとき

$$\pi(x) \in \pi(U), \quad \pi(y) \in \pi(V), \quad \pi(U) \cap \pi(V) = \emptyset$$

となりかつ π が開写像であるから $\Longleftarrow$ が従う． ∎

系 D.4.4 (Hausdorff $\Longleftrightarrow$ 対角線集合が閉). S を位相空間とするとき，

$$S \text{ が Hausdorff である} \quad \Longleftrightarrow \quad \{ (x,x) \mid \quad x \in S \} \text{ が } S \times S \text{ で閉じている．}$$

証明. 等号 $=$ を同値関係と見れば S と $S/=$ は商写像により同相となるから，定理 D.4.3 より

$$S \text{ が Hausdorff} \quad \Longleftrightarrow \quad S/= \text{ が Hausdorff} \quad \Longleftrightarrow \quad \{ (x,x) \mid \quad x \in S \} \text{ が閉}$$

が成立する． ∎

定義 D.4.5 ((位相的) 埋め込み写像). S, T を位相空間とするとき，S から T への **(位相的) 埋め込み (embedding)** とは，連続な単射 $i : S \longrightarrow T$ で，S と (相対位相を入れた) $i(S)$ を i (の終集合を $i(S)$ に制限した全単射) により同相とするものである．

定義 D.4.6 (コンパクト化). S をコンパクトではない位相空間，K をコンパクト位相空間として，S が K に稠密に埋め込まれるとき，言い換えれば，S から K への位相的埋め込み i が存在して $i(S)$ が K で稠密となるとき，K を (埋め込み i による) S の**コンパクト化 (compactification)** と呼ぶ．

定理 D.4.7 (一点を追加すればコンパクト空間となる (Alexandroff 拡大)). S をコンパクトではない位相空間，x_∞ を S に属さない点とする．このとき $K := S \cup \{x_\infty\}$ とおいて，K の部分集合 U で

- $x_\infty \notin U$ なら U は S の開集合
- $x_\infty \in U$ なら $K \backslash U$ は S で閉かつコンパクト

となるものの全体を $\mathscr{O}$ と定めれば，$\mathscr{O}$ は K 上の位相となり，K は S の (S から K への恒等写像による) コンパクト化となる．また以下が成立する:

(1) S が T_1 $\iff$ K が T_1.

(2) S が局所コンパクト Hausdorff $\iff$ K が Hausdorff.

(3) S が Hausdorff であるとき，S の位相を含み，かつ K をコンパクト Hausdorff 空間とするような K 上の位相は $\mathscr{O}$ のみである．

証明.

第一段　$\mathscr{O}$ が K 上の位相であることを示す．先ず $\emptyset\ (= K \backslash K)$ は S で開，閉及びコンパクトであるから $K, \emptyset \in \mathscr{O}$ となる．また $U, V \in \mathscr{O}$ を取れば，

- $x_\infty \notin U$ かつ $x_\infty \notin V$ なら U, V は S の開集合であるから $U \cap V \in \mathscr{O}$.
- $x_\infty \in U$ かつ $x_\infty \notin V$ のとき，$V' := V \backslash \{x_\infty\}$ とおけば

$$K \backslash V = S \backslash V'$$

となり，$K \backslash V$ は S で閉じているから V' は S の開集合であり $U \cap V = U \cap V' \in \mathscr{O}$ が従う．
- $x_\infty \in U$ かつ $x_\infty \in V$ のとき，$K \backslash (U \cap V) = (K \backslash U) \cup (K \backslash V)$ より $K \backslash (U \cap V)$ は S で閉かつコンパクトなので $U \cap V \in \mathscr{O}$ となる．

従って $\mathscr{O}$ は有限交叉で閉じる．任意の $\mathscr{U} \subset \mathscr{O}$ に対し $\mathscr{U}_1 := \{U \in \mathscr{U} \mid x_\infty \in U\}, \mathscr{U}_2 := \{U \in \mathscr{U} \mid x_\infty \notin U\}$ とおけば，$\mathscr{U}_2$ の元は S の開集合なので $x_\infty \notin \bigcup \mathscr{U}$ なら $\bigcup \mathscr{U} = \bigcup \mathscr{U}_2 \in \mathscr{O}$ となる．$x_\infty \in \bigcup \mathscr{U}$ のとき，

$$K \Bigm\backslash \bigcup \mathscr{U} = \left(K \Bigm\backslash \bigcup \mathscr{U}_1\right) \bigcap \left(S \Bigm\backslash \bigcup \mathscr{U}_2\right) = \left(\bigcap_{U \in \mathscr{U}_1} K \backslash U\right) \bigcap \left(\bigcap_{U \in \mathscr{U}_2} S \backslash U\right)$$

より $K \backslash \bigcup \mathscr{U}$ は S で閉じ，また定理 D.1.19 より S でコンパクトでもあるから $\bigcup \mathscr{U} \in \mathscr{O}$ が従う．

第二段　S から K への恒等写像 i が埋め込みであることを示す．実際 i は単射であり，また $\mathscr{O}$ が S の位相を含むから

i は開写像でもある．任意に $U \in \mathscr{O}$ を取れば

$$\begin{cases} x_\infty \in U \Longrightarrow i^{-1}(U) = U \text{ は } S \text{ の開集合}, \\ x_\infty \notin U \Longrightarrow S \cap U = S \backslash (K \backslash U) \text{ かつ } K \backslash U \text{ が } S \text{ の閉集合であるから } i^{-1}(U) = S \cap U \text{ は } S \text{ の開集合}, \end{cases}$$

が成り立つから i の連続性も出る．

第三段　S が K で稠密であることを示す．S はコンパクトでないから $\{x_\infty\}$ は K の開集合ではなく，x_∞ の任意の近傍は S と交わることになる．従って定理 D.1.12 より $x_\infty \in \overline{S}$ となり $\overline{S} = K$ を得る．

第四段　K がコンパクトであることを示す．$\mathscr{B}$ を K の開被覆とすれば x_∞ を含む $B_\infty \in \mathscr{B}$ が取れる．$K \backslash B_\infty$ は S でコンパクトであり，$\{\, S \cap B \mid \quad B \in \mathscr{B}\,\}$ は $K \backslash B_\infty$ の S における開被覆となるから，有限部分集合 $\mathscr{B}' \subset \mathscr{B}$ で

$$K \backslash B_\infty \subset \bigcup \mathscr{B}'$$

を満たすものが存在する．$K = B_\infty \cup \bigcup \mathscr{B}'$ が成り立つから K はコンパクトである．

第五段　(1) を示す．S が T_1 であるとき，任意の $x \in S$ に対し $\{x\}$ は S で閉かつコンパクトであるから K で閉じる．また $S \in \mathscr{O}$ より $\{x_\infty\} = K \backslash S$ は K で閉となり $\Longrightarrow$ を得る．逆に K が T_1 であるとき，任意の $x \in S$ に対し

$$S \backslash \{x\} = S \cap (K \backslash \{x\})$$

かつ右辺は S の開集合であるから $\{x\}$ は S の閉集合となり $\Longleftarrow$ を得る．

第六段　(2) を示す．S が局所コンパクト Hausdorff であるとして任意に相異なる二点 $x, y \in K$ を取れば，$x, y \in S$ なら x, y は S の開集合で分離されるが，S の開集合は K の開集合となるから x, y は K の開集合で分離されることになる．一方で $x = x_\infty$ なら，y は S でコンパクト (かつ S の Hausdorff 性より閉) な近傍 C を持ち，$K \backslash C \in \mathscr{O}$ が従うから $K \backslash C$ は x_∞ の開近傍となる．よって $\Longrightarrow$ を得る．逆に K が Hausdorff であるとき，S は K の部分空間であるから S も Hausdorff となる．また任意の $x \in S$ に対し，x と x_∞ は K の開集合 U, V で分離されるが，このとき $K \backslash V$ は S で閉かつコンパクトとなり，

$$x \in (S \cap U) \subset K \backslash V$$

より $K \backslash V$ は x の S における近傍となるから S の局所コンパクト性も出る．

第七段　■

定理 D.4.8 (局所コンパクトなら $T_2 \Longleftrightarrow T_{3\frac{1}{2}}$).　局所コンパクト Hausdorff 空間は Tychonoff である．

証明.

第一段　S をコンパクト Hausdorff 空間とするとき，S の閉集合はコンパクトとなるから定理 D.2.9 より S は正則 Hausdorff となり，Urysohn の補題より Tychonoff となる．

第二段　S をコンパクトではない局所コンパクト Hausdorff 空間とすれば，定理 D.4.7 より S は或るコンパクト Hausdorff 空間 K に埋め込まれる．前段より K は Tychonoff であり，S も Tychonoff となる．■

D.5　有向点族

第一可算性が仮定された空間では可算個の点族 (点列) の収束を用いることでいくつかの位相的概念を記述できるが，一般に位相空間では近傍が ‘多すぎる’ ため位相概念を記述するのに点列では間に合わない．有向点族の理論では，非可算個の集合に或る種の ‘向き’ を与えることでそれを添数集合とする点族に対し収束の概念が定式化され，一般の位相空間における閉包や連続性，コンパクト性の概念を点族の収束により特徴づけることが可能となる．

定義 D.5.1 (有向集合).　空でない集合 Λ において任意の有限部分集合が上界を持つような前順序が定まっているとき，つまり次を満たす二項関係 $\leq$ が定まっているとき，対 $(\Lambda, \leq)$ を**有向集合 (directed set)** と呼ぶ:

(反射律)　$\lambda \leq \lambda, \quad (\forall \lambda \in \Lambda)$,
(推移律)　$\lambda \leq \mu,\ \mu \leq \nu \quad \Longrightarrow \quad \lambda \leq \nu, \quad (\forall \lambda, \mu, \nu \in \Lambda)$,
(有向律)　$M \subset \Lambda$ が有限集合なら $\mu \leq \lambda$, $(\forall \mu \in M)$ を満たす $\lambda \in \Lambda$ が取れる．

また $\lambda < \mu \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \lambda \leq \mu$ かつ $\lambda \neq \mu$ と定める．

正の自然数全体 $\mathbf{N}$ や実数全体 $\mathbf{R}$ は，通常の順序により有向集合となっている．また位相空間の一点の基本近傍系も

$$U \leq V \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad U \supset V$$

により有向集合となる．

定義 D.5.2 (有向点族).　有向集合を添数集合とする点族 (P. 150) を**有向点族 (net)** と呼ぶ．$(\Lambda, \leq)$, $(\Gamma, \leq)$ を有向集合，$(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を有向点族とするとき，共終かつ序列を保つ写像 $f : \Gamma \longrightarrow \Lambda$: 言い換えると

(単調性)　$\gamma \leq \xi \quad \Longrightarrow \quad f(\gamma) \leq f(\xi), \quad (\forall \gamma, \xi \in \Gamma)$,
(共終性)　$f(\Gamma)$ が非有界: 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $\lambda \leq f(\gamma)$ を満たす $\gamma \in \Gamma$ が存在する

を満たす写像 f に対して，$\left(x_{f(\gamma)}\right)_{\gamma \in \Gamma}$ を (x_λ) の**部分有向点族 (subnet)** と呼ぶ:

特に $\mathbf{N}$ を有向集合とする有向点族を**点列 (sequence)** と呼ぶ．また点列 $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ に対し

$$f : \mathbf{N} \ni k \longmapsto n_k \in \mathbf{N}, \quad (n_1 < n_2 < n_3 < \cdots)$$

で定まる部分有向点族 $\left(x_{n_k}\right)_{k \in \mathbf{N}}$ を**部分列 (subsequence)** と呼ぶ．一般の部分有向点族ではそれを定める写像 f に単射性を仮定していないが (cf. Tychonoff plank)，部分列は $k < j$ なら $n_k < n_j$ が満たされるものと約束する．従って点列の部分有向点族といってもそれが部分列となっているとは限らない．

定義 D.5.3 (有向点族の収束).　$x = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を位相空間 S と有向集合 $(\Lambda, \leq)$ で定まる有向点族とする．点 $a \in S$ において，a の任意の近傍 U に対し或る $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在して

$$\lambda_0 \leq \lambda \quad \Longrightarrow \quad x_\lambda \in U$$

となるとき，$(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ は a に収束する (converge) といい $x_\lambda \longrightarrow a$ と書く．また a を $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の**極限 (limit)** と呼ぶ．$(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が部分集合 A 上の有向点族であり，かつ A の点に収束するとき，‘$(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ は A で収束する’ という．

定理 D.5.4 (Hausdorff$\Longleftrightarrow$ 収束する有向点族の極限は一つ). S を二つ以上の元を持つ位相空間とするとき，

$$S \text{ が Hausdorff} \quad \Longleftrightarrow \quad S \text{ で収束する任意の有向点族の極限は一つ}$$

となる．特に，S が第一可算性を持てば有向点族を点列に替えて成立する：

$$S \text{ が Hausdorff} \quad \Longleftrightarrow \quad S \text{ で収束する任意の点列の極限は一つ}. \tag{D.11}$$

S が Hausdorff であるとき，S 上の有向点族 $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と $a \in S$ に対して $x_\lambda \longrightarrow a$ を $\lim x_\lambda = a$ とも表記する．

証明． $(\Lambda, \leq)$ を有向集合，$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を $a \in S$ に収束する有向点族とする．$a \neq b \in S$ に対して，S が Hausdorff なら

$$a \in U, \quad b \in V, \quad U \cap V = \emptyset$$

を満たす a の近傍 U と b の近傍 V が取れるが，このとき或る $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在して

$$\lambda_0 \leq \lambda \quad \Longrightarrow \quad x_\lambda \in U$$

が成り立つから，任意の $\mu_0 \in \Lambda$ に対し $\{\lambda_0, \mu_0\}$ の上界 $\lambda \in \Lambda$ で $x_\lambda \notin V$ となり $x_\lambda \not\longrightarrow b$ が従う．逆に S が Hausdorff でないとき，或る二点 $x, y \in S$, $(x \neq y)$ は近傍で分離されない．x, y それぞれの近傍の全体を $\mathscr{U}, \mathscr{V}$ として

$$\Gamma := \{\, U \cap V \mid \quad U \in \mathscr{U},\, V \in \mathscr{V} \,\}$$

とおけば，

$$U \cap V \preceq X \cap Y \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad (U \cap V) \supset (X \cap Y)$$

により $(\Gamma, \preceq)$ は有向集合となるから $z \in \prod \Gamma$ を取れば $z = (z_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ は S 上の有向点族をなす．任意の $U_0 \in \mathscr{U}$ に対し

$$U_0 = U_0 \cap S \preceq U \cap V \quad \Longrightarrow \quad z_{U\cap V} \in U \cap V \subset U_0$$

となるから $(z_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ は x に収束し，対称的に y にも収束する．これで一般の場合に $\Longleftarrow$ が得られたが，いま S に第一可算性が仮定されていたとすると，$\{U_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, $\{V_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ をそれぞれ x, y の可算な基本近傍系として

$$\tilde{U}_n := U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n, \quad \tilde{V}_n := V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n, \quad (\forall n \in \mathbf{N})$$

で単調減少な基本近傍系 $\left\{\tilde{U}_n\right\}_{n\in\mathbf{N}}$ と $\left\{\tilde{V}_n\right\}_{n\in\mathbf{N}}$ を定め $w \in \prod_{n\in\mathbf{N}} \left(\tilde{U}_n \cap \tilde{V}_n\right)$ を取れば，点列 $w = (w_n)_{n\in N}$ は x, y の両方に収束する．従って (D.11) の $\Longleftarrow$ も得られる． ∎

定理 D.5.5 (有向点族が収束する $\Longleftrightarrow$ 任意の部分点族が収束する). $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間 S と有向集合 $(\Lambda, \leq)$ で定まる有向点族とし，また a を S の任意の点とするとき

$$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \text{ が } a \text{ に収束する} \quad \Longleftrightarrow \quad (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \text{ の任意の部分有向点族が } a \text{ に収束する} \tag{D.12}$$

が成立する．特に $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が点列であるとき，右辺で部分有向点族を部分列に替えても同値関係は成立する．

証明.　$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が a に収束するとき，a の任意の近傍 U に対し或る $\lambda_0\in\Lambda$ が存在して

$$\lambda_0 \leq \lambda \quad\Longrightarrow\quad x_\lambda \in U$$

を満たす．$(y_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ を $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の部分有向点族とするとき，つまりこのとき或る有向集合 $(\Gamma,\leq)$ と $f:\Gamma\longrightarrow\Lambda$ により $y_\gamma = x_{f(\gamma)}$ と表せるが，f の共終性から $\lambda_0 \leq f(\gamma_0)$ を満たす $\gamma_0\in\Gamma$ が存在し，f の単調性と $\leq$ の推移律より

$$\gamma_0 \leq \gamma \quad\Longrightarrow\quad f(\gamma_0) \leq f(\gamma) \quad\Longrightarrow\quad \lambda_0 \leq f(\gamma) \quad\Longrightarrow\quad y_\gamma = x_{f(\gamma)} \in U$$

が従うから $(y_\lambda)_{\gamma\in\Gamma}$ は a に収束する．逆に $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が a に収束しないとき，a の或る近傍 V では任意の $\lambda\in\Lambda$ に対し

$$\lambda \leq \mu, \quad x_\mu \notin V \tag{D.13}$$

を満たす $\mu\in\Lambda$ が取れる．ここで

$$\Gamma \coloneqq \{\,\lambda\in\Lambda \mid \quad x_\lambda \notin U\,\}$$

とおけば，任意の有限集合 $M\subset\Gamma$ に対し Λ における上界 λ が存在するが，(D.13) より $\lambda\leq\mu$ を満たす $\mu\in\Gamma$ が取れるから $(\Gamma,\leq)$ は有向集合となる．恒等写像 $\Gamma\longrightarrow\Lambda$ は単調性と共終性を満たし，この場合の部分有向点族 $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ は a に収束しないから (D.12) が出る．$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が a に収束しない点列であるとき，任意の $n\in\mathbf{N}$ に対して

$$\langle n\rangle \coloneqq \{\,m\in\mathbf{N} \mid \quad n<m,\ x_m \notin U\,\}$$

は空ではない．$\mathbf{N}$ の空でない部分集合の全体を $\mathscr{N}$ として選択関数 $\Phi\in\prod\mathscr{N}$ を取り

$$\begin{aligned} n_1 &\coloneqq \Phi(\langle 1\rangle),\\ n_2 &\coloneqq \Phi(\langle n_1\rangle),\\ n_3 &\coloneqq \Phi(\langle n_2\rangle),\\ &\vdots \end{aligned}$$

で $\{n_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ を定めれば，$(x_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ は a に収束しない部分列となる． ∎

定理 D.5.6 (閉集合は有向点族の極限集合).　A を位相空間 S の部分集合とするとき，

$$a\in\overline{A} \quad\Longleftrightarrow\quad \text{或る有向集合 } (\Lambda,\leq) \text{ と } A \text{ 上の有向点族 } (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \text{ が存在して } x_\lambda \longrightarrow a.$$

特に S が第一可算空間であるとき，右辺で有向点族を点列に替えて同値関係が成立する．

証明.

第一段　$\Longrightarrow$ を示す．$\mathscr{U}$ を a の基本近傍系とするとき，二項関係 $\leq$ を

$$U\leq V \quad\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\quad U\supset V$$

で定めれば $(\mathscr{U},\leq)$ は有向集合となる．定理 D.1.12 より

$$a\in\overline{A} \quad\Longleftrightarrow\quad \text{任意の } U\in\mathscr{U} \text{ に対し } A\cap U\neq\emptyset$$

が満たされ，いま $a \in \overline{A}$ と仮定しているから $x \in \prod_{U \in \mathscr{U}} (A \cap U)$ が取れて $x = (x_U)_{U \in \mathscr{U}}$ は A 上の有向点族となる．このとき a の任意の近傍 V に対し $U_0 \subset V$ となる $U_0 \in \mathscr{U}$ が存在して

$$\forall U \in \mathscr{U}; \quad U_0 \leq U \Longrightarrow x_U \in U \subset U_0 \subset V$$

となり $x_U \longrightarrow a$ が従う．$\mathscr{U}$ が高々可算集合であるとき，つまり $\mathscr{U} = \{U_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ と表せるとき，

$$\tilde{U}_n := U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

で減少列 $\tilde{\mathscr{U}} := \{\tilde{U}_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ を定めれば $\tilde{\mathscr{U}}$ も a の基本近傍系となり，$y \in \prod_{n \in \mathbf{N}} (A \cap \tilde{U}_n)$ を取り

$$y_n := y(n), \quad (\forall n \in \mathbf{N})$$

とおけば，a の任意の近傍 V に対し $\tilde{U}_{n_0} \subset V$ となる $n_0 \in \mathbf{N}$ が存在して

$$\forall n \in \mathbf{N}; \quad n_0 \leq n \Longrightarrow y_n \in \tilde{U}_n \subset \tilde{U}_{n_0} \subset V$$

が成り立ち $y_n \longrightarrow a$ となる．

第二段　$\Longleftarrow$ を示す．a に収束する A 上の有向点族 $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が存在するとき，

$$a \in \overline{\{\, x_\lambda \mid \quad \lambda \in \Lambda \,\}} \subset \overline{A}$$

が従う．∎

定理 D.5.7 (f が x で連続 $\Longleftrightarrow$ x に収束する有向点族の像点族が $f(x)$ に収束).　S, T を位相空間とするとき，$f : S \longrightarrow T$ が点 $s \in S$ で連続であるための必要十分条件は

(1)　任意の有向集合 $(\Lambda, \leq)$ と任意の有向点族 $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ に対し，

$$x_\lambda \longrightarrow s \quad \Longrightarrow \quad f(x_\lambda) \longrightarrow f(s).$$

(2)　s が可算な基本近傍系を持つとき，任意の点列 $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ に対し

$$x_n \longrightarrow s \quad \Longrightarrow \quad f(x_n) \longrightarrow f(s).$$

証明.

(1)　f が s で連続であるとき，$f(s)$ の任意の近傍 V に対し $f^{-1}(V)$ は s の近傍となる．任意の有向集合 $(\Lambda, \leq)$ と任意の有向点族 $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ に対し，$x_\lambda \longrightarrow s$ なら或る $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在して

$$\lambda_0 \leq \lambda \quad \Longrightarrow \quad x_\lambda \in f^{-1}(V) \quad \Longrightarrow \quad f(x_\lambda) \in V$$

となるから $f(x_\lambda) \longrightarrow f(s)$ となる．逆に f が s で連続でないとき，$\mathscr{U}$ を s の基本近傍系とすれば

$$U \backslash f^{-1}(V) \neq \emptyset, \quad (\forall U \in \mathscr{U})$$

を満たす $f(s)$ の近傍 V が存在して，このとき $x \in \prod_{U \in \mathscr{U}} U \backslash f^{-1}(V)$ が取れる．$\mathscr{U}$ において二項関係 $\leq$ を

$$U_1 \leq U_2 \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad U_1 \supset U_2$$

で定めれば $(\mathscr{U},\preceq)$ は有向集合となるから $x=(x_U)_{U\in\mathscr{U}}$ は有向点族をなし，

$$f(x_U)\notin V,\quad (\forall U\in\mathscr{U})$$

より $f(x_U)\not\longrightarrow f(s)$ であるが，一方で任意の $U_0\in\mathscr{U}$ に対し

$$U_0\preceq U \quad\Longrightarrow\quad x_U\in U\subset U_0$$

が成り立つから $(x_U)_{U\in\mathscr{U}}$ は s に収束する．

(2) 点列は有向点族であるから (1) より必要性が従う．$\mathscr{U}=\{U_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ を s の基本近傍系すれば，

$$\tilde{U}_n := U_1\cap U_2\cap\cdots\cap U_n,\quad (n=1,2,\cdots)$$

により単調減少な s の基本近傍系 $\left\{\tilde{U}_n\right\}_{n\in\mathbf{N}}$ が得られる．f が s で連続でないとき，$f(s)$ の或る近傍 V で

$$\tilde{U}_n\backslash f^{-1}(V)\neq\emptyset,\quad (\forall n\in\mathbf{N})$$

が成り立ち，$x\in\prod_{n\in\mathbf{N}}\tilde{U}_n\backslash f^{-1}(V)$ を取れば $x=(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ は $x_n\longrightarrow s$ かつ $f(x_n)\not\longrightarrow f(s)$ を満たす． ∎

定義 D.5.8 (無限に含まれる). $(\Lambda,\leq)$ を有向集合，$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を集合 S 上の有向点族，$A\subset S$ とするとき，任意に $\lambda\in\Lambda$ を選んでも $x_\mu\in A$ を満たす $\lambda\leq\mu$ が取れることを '$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は A に**無限に含まれる (frequently in)**' という．

定理 D.5.9 (有向点族が点 a の任意の近傍に無限に含まれる $\Longleftrightarrow$ a に収束する部分点族が存在).

(1) $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間 S と有向集合 $(\Lambda,\leq)$ で定まる有向点族とし，a を S の点とするとき，

$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が a の任意の近傍に無限に含まれる $\quad\Longleftrightarrow\quad$ a に収束する $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の部分有向点族が存在する．

(2) (1) において $\Lambda=\mathbf{N}$ かつ a が可算な基本近傍系を持つ場合，

$(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ が a の任意の近傍に無限に含まれる $\quad\Longleftrightarrow\quad$ a に収束する $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ の部分列が存在する．

証明.

第一段　(1) の $\Longrightarrow$ を示す．$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が a の任意の近傍に無限に含まれるとき，$\mathscr{U}$ を a の基本近傍系として

$$\Gamma := \{\,(\lambda,U)\mid\quad \lambda\in\Lambda,\ U\in\mathscr{U},\ x_\lambda\in U\,\}$$

とおき，Γ において二項関係 $\preceq$ を

$$(\lambda,U)\preceq(\mu,V)\quad\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\quad \lambda\leq\mu \text{ かつ } U\supset V$$

で定めれば $(\Gamma,\preceq)$ は有向集合となる．実際 $\lambda\leq\lambda$ かつ $U\supset U$ より $(\lambda,U)\preceq(\lambda,U)$, $(\forall(\lambda,U)\in\Gamma)$ となり，

$$\begin{aligned}(\lambda_1,U_1)\preceq(\lambda_2,U_2),\ (\lambda_2,U_2)\preceq(\lambda_3,U_3)\quad&\Longrightarrow\quad \lambda_1\leq\lambda_2,\ \lambda_2\leq\lambda_3,\ U_1\supset U_2,\ U_2\supset U_3\\&\Longrightarrow\quad \lambda_1\leq\lambda_3,\ U_1\supset U_3\\&\Longrightarrow\quad (\lambda_1,U_1)\preceq(\lambda_3,U_3)\end{aligned}$$

より推移律も出る．また任意に有限個の $(\lambda_i, U_i) \in \Gamma$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$ を取れば，或る $\lambda \in \Lambda$ と $U \in \mathscr{U}$ で

$$\lambda_i \leq \lambda, \ (1 \leq i \leq n); \quad \bigcap_{i=1}^{n} U_i \supset U$$

となるが，このとき $\lambda \leq \mu$ かつ $x_\mu \in U$ を満たす $\mu \in \Lambda$ が存在して (μ, U) は $\{(\lambda_i, U_i)\}_{i=1}^{n}$ の上界となる．

$$f : \Gamma \ni (\lambda, U) \longmapsto \lambda \in \Lambda$$

は単調かつ共終であるから $(x_{f(\gamma)})_{\gamma \in \Gamma}$ は部分有向点族となり，任意の $(\lambda_0, U_0) \in \Gamma$ に対して

$$(\lambda_0, U_0) \preceq (\lambda, U) \quad \Longrightarrow \quad x_{f(\lambda, U)} = x_\lambda \in U \subset U_0$$

が成り立つから $(x_{f(\gamma)})_{\gamma \in \Gamma}$ は a に収束する．

第二段　(2) の $\Longrightarrow$ を示す．$\mathscr{U} = \{U_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ を a の基本近傍系とすれば

$$V_k := U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_k, \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

により単調減少な基本近傍系 $\{V_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ が得られる．任意の $n, k \in \mathbf{N}$ に対し

$$\langle n, k \rangle := \{\, m \in \mathbf{N} \mid \quad n < m, \ x_m \in V_k \,\}$$

とおけば $\langle n, k \rangle$ は空ではなく，選択関数 $\Phi \in \prod_{n,k \in \mathbf{N}} \langle n, k \rangle$ を取り

$$\begin{aligned} n_1 &:= \Phi(1, 1), \\ n_2 &:= \Phi(n_1, 2), \\ n_3 &:= \Phi(n_2, 3), \\ &\ \vdots \end{aligned}$$

で $\{n_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ を定めれば，$(x_{n_k})_{k \in \mathbf{N}}$ は $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ の部分列となり，任意の V_{k_0} に対して

$$k_0 \leq k \quad \Longrightarrow \quad x_{n_k} \in V_k \subset V_{k_0}$$

となるから $(x_{n_k})_{k \in \mathbf{N}}$ は a に収束する．

第三段　(1) の $\Longleftarrow$ を示す．或る有向集合 $(\Theta, \trianglelefteq)$ と単調かつ共終な $h : \Theta \longrightarrow \Lambda$ が存在して $(x_{h(\theta)})_{\theta \in \Theta}$ が a に収束するとき，任意に $\lambda \in \Lambda$ と a の近傍 U を取れば，或る $\theta_1 \in \Theta$ で $\lambda \leq h(\theta_1)$ となり，また或る $\theta_2 \in \Theta$ が存在して

$$\theta_2 \trianglelefteq \theta \quad \Longrightarrow \quad x_{f(\theta)} \in U$$

が成り立つ．有向律から $\theta_1, \theta_2 \trianglelefteq \theta$ を満たす $\theta \in \Theta$ が取れるが，$\lambda \leq h(\theta)$ かつ $x_{h(\theta)} \in U$ が従うから $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ は U に無限に含まれる．(2) においても，部分列は部分有向点族であるから $\Longleftarrow$ が成立する．■

定理 D.5.10 (コンパクト $\Longleftrightarrow$ 任意の有向点族が収束部分有向点族を持つ).　位相空間 S の部分集合 A に対し，

$$A \text{ がコンパクト部分集合} \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ 上の任意の有向点族が } A \text{ で収束する部分有向点族を持つ．}$$

証明.

第一段 $\Longrightarrow$ を示す．或る有向集合 $(\Lambda, \leq)$ と A 上の有向点族 $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ で A で収束する部分有向点族を持たないものが存在するとき，定理 D.5.9 より任意の $a \in A$ に対し或る $\lambda_a \in \Lambda$ と a の近傍 U_a が取れて

$$x_\lambda \notin U_a, \quad (\lambda_a \leq \forall\lambda)$$

が満たされる．このとき $\{\, U_a^\circ \mid \quad a \in A \,\}$ は A の S における開被覆となるが，任意に有限個の $a_1, \cdots, a_n \in A$ を取っても $\{\lambda_{a_1}, \cdots, \lambda_{a_n}\}$ の上界 $\lambda \in \Lambda$ で

$$x_\lambda \in A, \quad x_\lambda \notin U_{a_1} \cup U_{a_2} \cup \cdots \cup U_{a_n}$$

となるから，$\{\, U_a^\circ \mid \quad a \in A \,\}$ は A の有限被覆を持たない．従って定理 D.1.18 より A はコンパクトではない．

第二段 $\Longleftarrow$ を示す．$\mathscr{F}$ を S の閉集合族とし，$\{\, A \cap F \mid \quad F \in \mathscr{F} \,\}$ が有限交叉的であるとする．

$$\mathfrak{M} := \{\, \mathscr{M} \mid \quad \mathscr{M} \text{ は } \mathscr{F} \text{ の空でない有限部分族} \,\}$$

とおいて $\mathfrak{M}$ 上の二項関係 $\preceq$ を

$$\mathscr{M} \preceq \mathscr{N} \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \mathscr{M} \subset \mathscr{N}$$

で定めれば $(\mathfrak{M}, \preceq)$ は有向集合となる．任意の $\mathscr{M} \in \mathfrak{M}$ で $A \cap \bigcap \mathscr{M} \neq \emptyset$ が満たされるから

$$x \in \prod_{\mathscr{M}\in\mathfrak{M}} \left(A \cap \bigcap \mathscr{M} \right)$$

が取れて，$x = (x_\mathscr{M})_{\mathscr{M}\in\mathfrak{M}}$ は A 上の有向点族をなし，仮定より或る $p \in A$ が存在して $(x_\mathscr{M})_{\mathscr{M}\in\mathfrak{M}}$ の或る部分有向点族が p に収束する．このとき任意に $F \in \mathscr{F}$ を取れば，$(x_\mathscr{M})_{\mathscr{M}\in\mathfrak{M}}$ は p の任意の近傍 U に無限に含まれるから

$$\{F\} \preceq \mathscr{M}, \quad x_\mathscr{M} \in U$$

を満たす $\mathscr{M} \in \mathfrak{M}$ が存在し，

$$x_\mathscr{M} \in A \cap \bigcap \mathscr{M} \subset A \cap F$$

と併せて $U \cap F \neq \emptyset$ となる．U の任意性，定理 D.1.12 と F が閉であることから

$$p \in \overline{F} = F$$

が従い，F の任意性から $p \in A \cap \bigcap \mathscr{F}$ が成り立つ．そして定理 D.1.21 より A のコンパクト性が出る． ∎

一般の位相空間において部分集合 A がコンパクトであることの同値条件は A 上の任意の有向点族が A で収束する部分有向点族を持つことであったが，この条件で有向点族を点列に替えたもの，すなわち

- A 上の任意の点列が A で収束する部分列を持つ

という性質が成り立つとき，A は**点列コンパクト (sequentially compact)** な部分集合であるという．

定理 D.5.11 (点列コンパクト $\Longrightarrow$ 可算コンパクト).

D.6　一様空間

位相空間では与えられた二つの要素の近さを測ることが出来るが，近さを相対的に比較することは一般に出来ない．つまり，x と y の近さと a と b の近さを比較する基準が一般には用意されていないのである．対して，例えば距離空間では距離により，位相線型空間では零元周りの近傍を任意の点に移すことにより，空間全体で共通する近さの尺度が与えられる．距離空間と位相線型空間については後述することにして，本節では距離や線型性が持つ一様的な性質を抽出し，その洗練された世界において何が起こるのかを俯瞰する．

定義 D.6.1 (近縁系).　S を集合とし，$\mathscr{V}$ を S 上の関係の族とする．$\mathscr{V}$ が次の (US1)~(US5) を満たすとき，これを S 上の**近縁系 (system of entourages)** や**一様構造 (uniform structure)** と呼び，対 $(S, \mathscr{V})$ を**一様空間 (uniform space)** と呼ぶ:

(US1)　$\mathscr{V}$ は空でなく，また $\mathscr{V}$ の要素は S 上の恒等写像を含む:

$$\mathscr{V} \neq \emptyset \wedge \forall V \in \mathscr{V} \ (\{ x \mid \quad \exists s \in S \ (x = (s, s))\} \subset V).$$

(US2)　$\mathscr{V}$ は反転で閉じる:

$$\forall V \in \mathscr{V} \left(V^{-1} \in \mathscr{V} \right).$$

(US3)　$\mathscr{V}$ は有限交叉で閉じる:

$$\forall U, V \in \mathscr{V} \ (U \cap V \in \mathscr{V}).$$

(US4)　$\mathscr{V}$ の任意の要素は $\mathscr{V}$ の或る要素の合成を含む:

$$\forall V \in \mathscr{V} \ \exists W \in \mathscr{V} \ (W \circ W \subset V).$$

(US5)　S 上の関係は $\mathscr{V}$ の要素を含めばそれ自身も $\mathscr{V}$ に属する:

$$\forall R \ (R \subset S \times S \wedge \exists V \in \mathscr{V} \ (V \subset R) \Longrightarrow R \in \mathscr{V}).$$

$\mathscr{V}$ の元を**近縁 (entourage)** と呼び，近縁 V が $V = V^{-1}$ を満たすとき V は**対称である (symmetric)** という．また基本近傍系と同様に $\mathscr{V}$ の部分集合 $\mathscr{U}$ で $\mathscr{V}$ の任意の近縁に対しそれに含まれる $\mathscr{U}$ の元が取れるとき，$\mathscr{U}$ を $\mathscr{V}$ の**基本近縁系 (fundamental system of entourages)** と呼ぶ．

(US3) について，V に対し W を対称なものとして取ることができる．実際 $U \in \mathscr{V}$ が $U \circ U \subset V$ を満たすとき，

$$W \stackrel{\text{def}}{=} U \cap U^{-1}$$

で $W \in \mathscr{V}$ を定めれば，W は対称であり $W \circ W \subset U \circ U \subset V$ となる．

定理 D.6.2 (近縁系は $\circ$ により半群となる).　二項演算 $\circ$ は結合法則を満たし，また近縁系の中で閉じる (U, V が近縁なら $U \circ V$ も近縁).

証明.　S を空でない集合，$\mathscr{V}$ を S の近縁系とする．任意の $U, V, W \subset S \times S$ で

$$\begin{aligned} (a,b) \in (U \circ V) \circ W &\iff \exists c \in S;\ (a,c) \in U \circ V,\ (c,b) \in W \\ &\iff \exists c, d \in S;\ (a,d) \in U,\ (d,c) \in V,\ (c,b) \in W \\ &\iff \exists d \in S;\ (a,d) \in U,\ (d,b) \in U \circ W \\ &\iff (a,b) \in U \circ (V \circ W) \end{aligned}$$

となるから $\circ$ は結合法測を満たす．また任意の $U, V \in \mathscr{V}$ に対し

$$(x,y) \in U \quad \Longrightarrow \quad (x,y) \in U,\ (y,y) \in V \quad \Longrightarrow \quad (x,y) \in U \circ V$$

より $U \subset U \circ V$ となるから $U \circ V \in \mathscr{V}$ が成り立つ． ∎

従って $U_1, U_2, \cdots, U_n \subset S \times S$ に対し

$$U_1 \circ U_2 \circ \cdots \circ U_n \overset{\text{def}}{=} (\cdots((U_1 \circ U_2) \circ U_3) \cdots) \circ U_n$$

と定めれば，定理**??**より左辺の評価は演算 $\circ$ の順番に依らないから，任意に $1 \leq k \leq m \leq n$ を取れば

$$U_1 \circ U_2 \circ \cdots \circ U_n = (U_1 \circ \cdots \circ U_k) \circ (U_{k+1} \circ \cdots \circ U_m) \circ (U_{m+1} \circ \cdots \circ U_n)$$

が成立する．

定理 D.6.3.　$(S, \mathscr{V})$ を一様空間とするとき，任意の $V \in \mathscr{V}$ に対し

$$W_x \times W_x \subset V, \quad (\forall x \in S)$$

を満たす対称な $W \in \mathscr{V}$ が存在する．ただし $W_x = \left\{ y \in S \mid \quad (x,y) \in W \right\}$ である．

証明.　近縁系の定義より $U \circ U \subset V$ を満たす $U \in \mathscr{V}$ が存在する．ここで

$$W \overset{\text{def}}{=} U \cap U^{-1}$$

で対称な $W \in \mathscr{V}$ を定めれば，任意の $x \in S$ に対し

$$y, z \in W_x \quad \Longrightarrow \quad (x,y), (x,z) \in W \quad \Longrightarrow \quad (y,x), (x,z) \in W \quad \Longrightarrow \quad (y,z) \in V$$

が成立し $W_x \times W_x \subset V$ が得られる． ∎

定理 D.6.4 (近縁系で導入する位相).　$\mathscr{V}$ を集合 S の近縁系，$\mathscr{U}$ を $\mathscr{V}$ の基本近縁系とする．V_x を

$$V_x \overset{\text{def}}{=} \left\{ y \in S \mid \quad (x,y) \in V \right\}, \quad (V \in \mathscr{V},\ x \in S)$$

で定義するとき，各 $x \in S$ で

$$\mathscr{U}(x) \overset{\text{def}}{=} \{ U_x \mid \quad U \in \mathscr{U} \}$$

とおけば $\{\mathscr{U}(x)\}_{x \in S}$ は定理 D.1.9 の (LB1)(LB2)(LB3) を満たす．このとき $\{\mathscr{U}(x)\}_{x \in S}$ が基本近傍系となる S の位相が唯一つ定まるが，別の基本近縁系を用いても同じ位相が定まる．

証明. $\mathscr{U}$ は空でないから $\mathscr{U}(x)$ も空ではない．そして任意の $U \in \mathscr{U}$ は $\{\,(x,x) \mid \quad x \in S\,\}$ を含むから $x \in U_x$ となり (LB1) が満たされる．また任意の $U_x, V_x \in \mathscr{U}(x)$ に対し或る $W \in \mathscr{U}$ で $W \subset U \cap V$ となるから，$W_x \subset U_x \cap V_x$ が従い (LB2) も出る．任意の $U_x \in \mathscr{U}(x)$ に対し定理 D.6.3 より

$$W_y \times W_y \subset U, \quad (\forall y \in S)$$

を満たす対称な $W \in \mathscr{V}$ が存在する．$R \subset W$ を満たす $R \in \mathscr{U}$ を取れば

$$y \in R_x \quad \Longrightarrow \quad y \in W_x \quad \Longrightarrow \quad (x,y) \in W_x \times W_x \subset U \quad \Longrightarrow \quad y \in U_x$$

となるから $R_x \subset U_x$ が成り立ち，このとき任意の $y \in R_x$ に対し

$$z \in R_y \quad \Longrightarrow \quad (y,z) \in W = W^{-1} \quad \Longrightarrow \quad (x,z) \in W_y \times W_y \subset U \quad \Longrightarrow \quad z \in U_x$$

より $R_y \subset U_x$ が満たされるから (LB3) も得られる．従って定理 D.1.8 と定理 D.1.9 より $\{\mathscr{U}(x)\}_{x\in S}$ が基本近傍系となる S の位相 $\tau_{\mathscr{U}}$ が唯一つ定まる．いま，$\tilde{\mathscr{U}}$ を $\mathscr{V}$ の別の基本近縁系として

$$\tilde{\mathscr{U}}(x) \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{\,\tilde{U}_x \mid \quad \tilde{U} \in \tilde{\mathscr{U}}\,\right\}, \quad (\forall x \in S)$$

とおけば，$\left\{\tilde{\mathscr{U}}(x)\right\}_{x\in S}$ は $(S, \tau_{\mathscr{U}})$ における基本近傍系となる．実際，任意の $\tilde{U}_x \in \tilde{\mathscr{U}}(x)$ に対し或る $U \in \mathscr{U}$ で $U_x \subset \tilde{U}_x$ となるから $\tilde{U}_x$ は x の近傍であり，一方で任意の $V_x \in \mathscr{U}(x)$ に対し或る $\tilde{V} \in \tilde{\mathscr{U}}$ で $\tilde{V}_x \subset V_x$ となるから $\tilde{\mathscr{U}}(x)$ は x の基本近傍系をなしている．$\left\{\tilde{\mathscr{U}}(x)\right\}_{x\in S}$ が基本近傍系となる位相は唯一つであるから $\tau_{\tilde{\mathscr{U}}} = \tau_{\mathscr{U}}$ が成り立つ． ∎

定義 D.6.5 (一様位相). $\mathscr{V}$ を集合 S の近縁系，$\mathscr{U}$ を $\mathscr{V}$ の基本近縁系とする．$U \in \mathscr{U}$ と $x \in S$ に対し U_x を

$$U_x \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{\,y \in S \mid \quad (x,y) \in U\,\right\}$$

で定義するとき，定理 D.6.4 より

$$\mathscr{U}(x) \overset{\text{def}}{=\!=} \{\,U_x \mid \quad U \in \mathscr{U}\,\}$$

を各点 x の基本近傍系とする位相が定まるが，別の基本近縁系を取っても同じ位相が定まるのでこれを‘近縁系 $\mathscr{V}$ で導入する S の**一様位相 (uniform topology)**’と呼ぶ．S が元から位相空間であるとき，$\mathscr{V}$ で導入する位相と元の位相が一致することを‘$\mathscr{V}$ と元の位相が**両立する (compatible)**’という．

定理 D.6.6 (部分一様空間). $(S, \mathscr{V})$ を一様空間とするとき，任意の空でない部分集合 $A \subset S$ に対し

$$\mathscr{V}_A \overset{\text{def}}{=\!=} \{\,(A \times A) \cap V \mid \quad V \in \mathscr{V}\,\}$$

は A 上の近縁系となる．また S に $\mathscr{V}$ で位相を導入するとき，A 上の相対位相と $\mathscr{V}_A$ は両立する．

証明.

第一段 $\mathscr{V}_A$ が定義 D.6.1 の (US1)~(US5) を満たすことを示す．先ず $\mathscr{V} \neq \emptyset$ より $\mathscr{V}_A \neq \emptyset$ であり，

$$V \in \mathscr{V} \quad \Longrightarrow \quad (a,a) \in V,\ (\forall a \in A) \quad \Longrightarrow \quad (a,a) \in (A \times A) \cap V,\ (\forall a \in A)$$

となるから (US1) が満たされる．また任意に $E \in \mathscr{V}_A$ を取れば或る $V \in \mathscr{V}$ で $E = (A \times A) \cap V$ と表され，

$$(x,y) \in E^{-1} \quad \Longleftrightarrow \quad (y,x) \in (A \times A) \cap V \quad \Longleftrightarrow \quad (x,y) \in (A \times A) \cap V^{-1}$$

が成り立つから $E^{-1} \in \mathscr{V}_A$ が従い (US2) も満たされる．任意の $U, V \in \mathscr{V}$ に対し

$$((A \times A) \cap U) \cap ((A \times A) \cap V) = (A \times A) \cap (U \cap V) \in \mathscr{V}_A$$

より (US3) が得られ，また $V \in \mathscr{V}$ に対し $W \circ W \subset V$ となる $W \in \mathscr{V}$ を取れば

$$(x,y),(y,z) \in (A \times A) \cap W \quad \Longrightarrow \quad x,z \in A,\ (x,z) \in V \quad \Longrightarrow \quad (x,z) \in (A \times A) \cap V$$

となるから (US4) が出る．$(A \times A) \cap V \subset R,\ (V \in \mathscr{V})$ を満たす任意の $R \subset A \times A$ に対し，$V \cup R \in \mathscr{V}$ より

$$R = (A \times A) \cap (V \cup R) \in \mathscr{V}_A$$

が成立し (US5) も従う．

第二段　$\mathscr{V}_A$ で導入する A の位相を τ_A と書く．任意の $a \in A$ と $V \in \mathscr{V}$ に対して

$$\begin{aligned}[(A \times A) \cap V]_a &\overset{\text{def}}{=} \{\, x \in A \mid \quad (a,x) \in (A \times A) \cap V \,\} \\ &= \{\, x \in S \mid \quad (a,x) \in V \,\} \cap A =: V_a \cap A\end{aligned}$$

となる．$\{\, [(A \times A) \cap V]_a \mid \quad V \in \mathscr{V} \,\}$ は τ_A における a の基本近傍系をなし，$\{\, V_a \cap A \mid \quad V \in \mathscr{V} \,\}$ は A の相対位相における a の基本近傍系をなすが，両者が一致するので位相も一致する．■

定理 D.6.7 (可算な基本近縁系を持てば σ-局所有限な基底が存在する).　$(S, \mathscr{V})$ を一様空間とし，$\mathscr{V}$ が可算な基本近縁系 $\{V_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ を持つとする．また S に $\mathscr{V}$ で一様位相を導入する．このとき，$\mathscr{S}$ を S の任意の開被覆 $(\emptyset \notin \mathscr{S})$ とすれば $\mathscr{S}$ の開細分で σ-局所有限なものが存在する．特に，S は σ-局所有限な基底を持つ．

証明.

第一段　$\mathscr{V}$ の可算な基本近縁系 $\{U_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ で，

$$U_{n+1} \circ U_{n+1} \circ U_{n+1} \subset U_n \subset V_n, \quad (\forall n \in \mathbf{N})$$

を満たし，かつ U_n が全て対称であるものが存在する．実際 V_1 に対し $\tilde{W}_1 \circ \tilde{W}_1 \subset V_1 \cap V_1^{-1}$ を満たす $\tilde{W}_1 \in \mathscr{V}$ が取れるが，$\tilde{W}_1$ に対しても或る $W_1 \in \mathscr{V}$ で $W_1 \circ W_1 \subset \tilde{W}_1$ となり，このとき

$$W_1 \circ W_1 \circ W_1 \subset W_1 \circ W_1 \circ W_1 \circ W_1 \subset V_1 \cap V_1^{-1}$$

が成り立つ．ここで

$$U_1 \overset{\text{def}}{=} V_1 \cap V_1^{-1}, \quad U_2 \overset{\text{def}}{=} V_2 \cap V_2^{-1} \cap W_1 \cap W_1^{-1}$$

とおく．U_2 に対しても $W_2 \circ W_2 \circ W_2 \subset U_2$ を満たす $W_2 \in \mathscr{V}$ が取れるから，ここで

$$U_3 \overset{\text{def}}{=} V_3 \cap V_3^{-1} \cap W_2 \cap W_2^{-1}$$

とおく．帰納的に全ての $n \in \mathbf{N}$ に対して U_n が定義されるから $\{U_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ を得る (再帰定理).

第二段　整列可能定理により $\mathscr{S}$ を整列集合にする全順序 $\preceq$ が存在する．ここで

$$E \prec F \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad E \preceq F \text{ かつ } E \neq F$$

とする．任意の $x \in S$ と $V \in \mathscr{V}$ に対し

$$V(x) \overset{\text{def}}{=} \left\{\, y \in S \;\middle|\; (x,y) \in V \,\right\}$$

と定義して，任意の $n \in \mathbf{N}$ と $E \in \mathscr{S}$ に対し

$$I_n(E) \overset{\text{def}}{=} \{\, x \in S \mid \quad U_n(x) \subset E \,\},$$

$$J_n(E) \overset{\text{def}}{=} I_n(E) \left\backslash \bigcup_{F \prec E} F \right.$$

として $\mathscr{S}_n \overset{\text{def}}{=} \{\, E \in \mathscr{S} \mid \quad J_n(E) \neq \emptyset \,\}$ とおく．$\mathscr{S}$ の $\preceq$ に関する最小元を M として $x \in M$ を一つ取れば，M は開集合であるから十分大きい n_0 で $U_{n_0}(x) \subset M$ となり，M の最小性より

$$x \in I_{n_0}(M) = J_{n_0}(M)$$

が成り立つので，少なくとも $n \geq n_0$ ならば $\mathscr{S}_n$ は空でない．$\mathscr{S}_n \neq \emptyset$ のとき，任意の $E \in \mathscr{S}_n$ に対し

$$K_n(E) \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{x \in J_n(E)} U_{n+1}(x)^{\circ}$$

により開集合を定めて $\mathscr{K}_n \overset{\text{def}}{=} \{\, K_n(E) \mid \quad E \in \mathscr{S}_n \,\}$ とおけば次が成立する:

(1)　任意の $E \in \mathscr{S}_n$ に対し $K_n(E) \subset E$ となる．

(2)　相異なる二元 $E, F \in \mathscr{S}_n$ に対し

$$(x,y) \notin U_{n+1}, \quad (\forall x \in K_n(E),\ y \in K_n(F)).$$

(3)　任意の $x \in S$ に対し，$U_{n+2}(x)$ は $\mathscr{K}_n$ の二個以上の元と交わることはない．

実際，任意の $x \in K_n(E)$ に対し或る $x_0 \in J_n(E)$ が存在して

$$x \in U_{n+1}(x_0) \subset U_n(x_0) \subset E$$

となり (1) が出る．また任意に $x \in K_n(E)$ と $y \in K_n(F)$ を取れば或る $x_0 \in J_n(E)$ と $y_0 \in J_n(F)$ で

$$(x_0, x), (y, y_0) \in U_{n+1}$$

となるが，このとき $E \neq F$ とすると $E \prec F$ 又は $F \prec E$ ということになり，$E \prec F$ とすれば $x_0 \in E$ かつ $y_0 \notin E$ が満たされるから $(x_0, y_0) \notin U_n$ が従う．そして $U_{n+1} \circ U_{n+1} \circ U_{n+1} \subset U_n$ より

$$(x,y) \notin U_{n+1}$$

が成立する．すなわち (2) も得られ，これと $y, z \in U_{n+2}(x) \Longrightarrow (y,z) \in U_{n+1}$ を併せて (3) も出る．ここで

$$\mathscr{K} \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{\substack{n \in \mathbf{N} \\ \mathscr{S}_n \neq \emptyset}} \mathscr{K}_n$$

とおけば，$\mathscr{K}$ は $\mathscr{S}$ の σ-局所有限な開細分となる．実際 (1) より $\mathscr{K}$ の元は全て $\mathscr{S}$ の元の部分集合であり，(3) より各 $\mathscr{K}_n$ は局所有限である．また任意の $x \in S$ に対し，x を含む $\mathscr{S}$ の元のうち $\preceq$ に関する最小元を E とすれば，十分大きい n で $U_n(x) \subset E$ となるから $x \in I_n(E)$ が従い，最小性より $F \prec E$ なら $x \notin F$ が満たされ

$$x \in J_n(E) \subset K_n(E)$$

が成立する．すなわち $\mathscr{K}$ は S を覆っている．

第三段　任意の $n \in \mathbf{N}$ に対し $\{\, U_n(x)^{\circ} \mid \quad x \in S \,\}$ は S の開被覆をなすから，σ-局所有限な開細分 $\mathscr{B}_n$ が存在する．このとき任意に $B \in \mathscr{B}_{n+1}$ を取れば，或る $z \in S$ で $B \subset U_{n+1}(z)$ となるから

$$x, y \in B \quad \Longrightarrow \quad (x,z),(z,y) \in U_{n+1} \quad \Longrightarrow \quad (x,y) \in U_n \tag{D.14}$$

が満たされる．いま，任意に開集合 G と $x \in G$ を取れば，或る $n \in \mathbf{N}$ で

$$U_n(x) \subset G$$

となる．一方で $\mathscr{B}_{n+1}$ は S を覆うから或る $B \in \mathscr{B}_{n+1}$ もまた x を含み，このとき (D.14) より

$$x \in B \subset U_n(x) \subset G$$

が成立する．従って $\mathscr{B} \overset{\mathrm{def}}{=} \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \mathscr{B}_n$ は S の基底となり，各 $\mathscr{B}_n$ が σ-局所有限であるから $\mathscr{B}$ も σ-局所有限となる．すなわち S は σ-局所有限な基底を持つ． ∎

メモ:

- S を集合，$\mathscr{F}$ を S 上の実数値関数の空でない集合とする．
- $\mathscr{F}$-一様位相を $\mathscr{F}$ から作る近縁系で導入する S 上の一様位相とする．
- $\mathscr{F}$-一様位相と $\mathscr{F}$-始位相は一致していることは示せると思う．
- S に元から位相が入っていて，それによって完全正則空間となっているとする．$C(S)$ を S 上の実数値連続関数の全体とすると，S の位相は $C(S)$-始位相に一致しているから $C(S)$-一様位相に一致している．すなわち完全正則なら一様化可能．
- S に近縁系 $\mathscr{V}$ が定まっているとき，$C(S)$ を $\mathscr{V}$ に関して連続な S 上の実数値関数の全体とすると，$C(S)$ で創る近縁系と $\mathscr{V}$ は一致するか?

定理 D.6.8 (写像の族で作る一様位相は始位相に一致する). S を集合とし，$(T,\mathscr{V})$ を一様空間とし，T に $\mathscr{V}$ で一様位相を導入する．$\mathscr{U}$ を $\mathscr{V}$ の基本近縁系とし，$\mathscr{U}$ の要素は全て対象であるとする．$\mathscr{F}$ を S から T への写像の空でない集合とする．$\mathscr{F}$ の要素 f と $\mathscr{U}$ の要素 U に対して

$$V(f,U) \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{ (x,y) \in S \times S \mid \quad (f(x),f(y)) \in U \right\}$$

と定義し，$V(f,U)$ の全体を

$$\mathscr{A} \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{ V(f,U) \mid \quad f \in \mathscr{F},\ U \in \mathscr{U} \right\}$$

とおいて，$\mathscr{A}$ の空でない有限部分集合の交叉の全体を

$$\mathscr{B} \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{ \bigcap A \mid \quad A \subset \mathscr{A},\ A \neq \emptyset,\ \exists n \in \omega\,(\,A \approx n\,) \right\}$$

とおく．このとき

$$\mathscr{W} \overset{\text{def}}{=\!=} \{\, W \mid \quad W \subset S \times S \wedge \exists B \in \mathscr{B}\,(\,B \subset W\,)\,\}$$

で定める $\mathscr{W}$ は S 上の近縁系となり，$\mathscr{W}$ で導入する一様位相と $\mathscr{F}$-始位相は一致する．

略証.

第一段 $\mathscr{W}$ が近縁系となることを示す．$\mathscr{F} \neq \emptyset$ より，f を $\mathscr{F}$ の要素とすれば

$$V(f,T \times T) \in \mathscr{W}$$

となるので

$$\mathscr{W} \neq \emptyset$$

である．また任意の $f \in \mathscr{F}$ と $U \in \mathscr{U}$ で

$$\begin{aligned} x \in S &\Longrightarrow (f(x),f(x)) \in U \\ &\Longrightarrow (x,x) \in V(f,U) \end{aligned}$$

となるから

$$\{\,(x,x) \mid \quad x \in S\,\} \subset V(f,U)$$

となり，

$$W \in \mathscr{W} \Longrightarrow \{\,(x,x) \mid \quad x \in S\,\} \subset W$$

が従う．ゆえに定義 D.6.1 の (US1) が満たされる．W を $\mathscr{W}$ の要素とすれば

$$\bigcap_{i=1}^{n} V(f_i,U_i) \subset W$$

なる f_i と U_i が取れて

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} V(f_i,U_i) \right)^{-1} \subset W^{-1}$$

となるが，U_i はどれも対称なので

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} V(f_i, U_i)\right)^{-1} = \bigcap_{i=1}^{n} V(f_i, r_i)^{-1} = \bigcap_{i=1}^{n} V(f_i, U_i)$$

が成り立ち

$$W^{-1} \in \mathscr{W}$$

が従い (US2) も満たされる．W, W' を $\mathscr{W}$ の要素とすれば

$$\bigcap A \subset W, \quad \bigcap A' \subset W'$$

なる $\mathscr{A}$ の有限部分集合 A, A' が取れるが，このとき

$$\bigcap (A \cup A') \in \mathscr{B}$$

かつ

$$\bigcap (A \cup A') \subset W \cap W'$$

が成り立つので (US3) も満たされる．W を $\mathscr{W}$ の要素とすれば

$$\bigcap_{i=1}^{n} V(f_i, U_i) \subset W$$

なる f_i と U_i が取れるが，各 U_i に対して

$$\tilde{U}_i \circ \tilde{U}_i \subset U_i$$

を満たす $\mathscr{U}$ の要素 $\tilde{U}_i$ を取り

$$\tilde{W} \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{i=1}^{n} V(f_i, \tilde{U}_i)$$

とおけば，各 i で

$$\begin{aligned}(x,z),(z,y) \in \tilde{W} &\Longrightarrow (f_i(x), f_i(z)), (f_i(z), f_i(y)) \in \tilde{U}_i \\ &\Longrightarrow (f_i(x), f_i(y)) \in U_i \\ &\Longrightarrow (x,y) \in V(f_i, U_i)\end{aligned}$$

が成り立つので

$$W \circ W \subset \bigcap_{i=1}^{n} V(f_i, U_i) \subset V$$

が成立する．ゆえに (US4) も満たされる．$\mathscr{W}$ は上位の包含関係で閉じるから (US5) も満たされる．

第二段　f を $\mathscr{F}$ の要素とするとき，f が一様位相に関して S から T へ連続写像であることを示す．x を S の要素とし，V を x の近傍とする．このとき

$$\left\{\, t \in T \mid \quad (f(x), t) \in U \,\right\} \subset V$$

を満たす $\mathscr{U}$ の要素 U が取れて

$$\left\{\, y \in S \mid \quad (f(x), f(y)) \in U \,\right\} \subset f^{-1} * \left\{\, t \in T \mid \quad (f(x), t) \in U \,\right\}$$

が成立する．

$$\left\{\, y \in S \mid \quad (f(x), f(y)) \in U \,\right\} = \left\{\, y \mid \quad (x, y) \in V(f, U) \,\right\}$$

が成り立つので，ゆえに $f(x)$ の任意の近傍は f によって x の近傍に引き戻されることになり，f の x における連続性が従う．x の任意性より f は S 上で連続である．以上より

$$\mathscr{F}\text{-始位相} \subset \mathscr{W} \text{ による一様位相}$$

が成り立つ．また O を $\mathscr{W}$ による一様位相での開集合とし，x を O の要素とすれば，

$$x \subset \bigcap_{i=1}^{n} V(f_i, U_i)_x \subset O$$

を満たす f_i と U_i が取れる．

$$V(f_i, U_i)_x = f_i^{-1} * \left\{\, t \in T \mid \quad (f_i(x), t) \in U_i \,\right\}$$

より $V(f_i, U_i)_x$ は始位相に関して x の近傍であるから $\bigcap_{i=1}^{n} V(f_i, U_i)_x$ も始位相に関して x の近傍である．ゆえに O は始位相に関して開集合である．以上で

$$\mathscr{F}\text{-始位相} = \mathscr{W} \text{ による一様位相}$$

が示された． ∎

定理 D.6.9 (一様位相空間は完全正則).　一様位相空間は完全正則である．

定理 D.6.10 (可算な基本近縁系を持つ一様位相空間はパラコンパクト).

証明.　可算な基本近縁系を持つ一様位相空間は完全正則であるから正則である．また任意の開被覆は σ-局所有限な開被覆を持つが，正則空間においては局所有限な開被覆を持つことと同値になる． ∎

定義 D.6.11 (一様化可能).　空でない位相空間が**一様化可能 (uniformizable)** であるとは，その位相と両立する近縁系が存在することをいう．

定理 D.6.12 (完全正則なら一様化可能).　S を完全正則空間とし，$C(S,\mathbf{R})$ で S から $\mathbf{R}$ への連続写像の全体を表す．$f \in C(S,\mathbf{R})$ と $r > 0$ に対し

$$V(f,r) \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{ (x,y) \in S \times S \mid \quad \left| f(x) - f(y) \right| < r \right\}$$

と定義し，$V(f,U)$ の全体を

$$\mathscr{A} \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{ V(f,r) \mid \quad f \in C(S,\mathbf{R}),\ r > 0 \right\}$$

とおいて，$\mathscr{A}$ の空でない有限部分集合の交叉の全体を

$$\mathscr{B} \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{ \bigcap A \mid \quad A \subset \mathscr{A},\ A \neq \emptyset,\ \exists n \in \omega \, (\, A \approx n \,) \right\}$$

とおく．このとき

$$\mathscr{V} \overset{\text{def}}{=\!=} \{\, V \mid \quad V \subset S \times S \wedge \exists B \in \mathscr{B} \, (\, B \subset V \,) \,\}$$

は S 上の近縁系となり S の位相と両立する．

証明.　定理 D.6.8 より $\mathscr{V}$ による一様位相と $C(S)$-始位相は一致する．そして完全正則性より $C(S)$-始位相は S の元の位相に一致する．■

定理 D.6.13 (一様位相空間において $T_0 \Longleftrightarrow T_{3\frac{1}{2}}$).　$(S,\mathscr{V})$ を一様空間とし，S に一様位相を導入する．このとき任意の $x,y \in S$ に対して

$$x,y \text{ が位相的に識別可能} \quad \Longleftrightarrow \quad (x,y) \notin \bigcap \mathscr{V} \quad \Longleftrightarrow \quad x,y \text{ が近傍で分離される} \tag{D.15}$$

が成立する．特に，S が T_0 であること，$\bigcap \mathscr{V} = \{\, (x,x) \mid \quad x \in S \,\}$，$S$ が $T_{3\frac{1}{2}}$ であること，は全て同値になる．

証明.　任意の $V \in \mathscr{V}$ と $s \in S$ に対し

$$V_s \overset{\text{def}}{=\!=} \{\, t \in S \mid \quad (s,t) \in V \,\}$$

と定義する．$(x,y) \in \bigcap_{V \in \mathscr{V}} V$ なら任意の $V \in \mathscr{V}$ に対し

$$x \in V_y, \quad y \in V_x$$

となる．$\{V_x\}_{V \in \mathscr{V}}$ と $\{V_y\}_{V \in \mathscr{V}}$ はそれぞれ x,y の基本近傍系となるから定理 D.1.12 より $x \in \overline{\{y\}}$ かつ $y \in \overline{\{x\}}$ が従い

$$x,y \text{ が位相的に識別可能} \quad \Longrightarrow \quad (x,y) \notin \bigcap \mathscr{V}$$

が出る．また或る $V \in \mathscr{V}$ で $(x,y) \notin V$ となるとき，$W \circ W \subset V$ を満たす対称な $W \in \mathscr{V}$ を取れば W_x, W_y はそれぞれ x,y の近傍となるが，これらは互いに素である．実際 $W_x \cap W_y \neq \emptyset$ とすると，$z \in W_x \cap W_y$ を取れば $(x,z),(z,y) \in W$ から $(x,y) \in V$ が従い $(x,y) \notin V$ に矛盾する．よって

$$(x,y) \notin \bigcap \mathscr{V} \quad \Longrightarrow \quad x,y \text{ が近傍で分離される}$$

を得る．近傍で分離される二点は位相的に識別可能であるから (D.15) が成立する．S が T_0 なら

$$\begin{cases}(x,y) \notin \bigcap \mathscr{V}, & (x \neq y), \\ (x,y) \in \bigcap \mathscr{V}, & (x = y),\end{cases} \quad (\forall x, y \in S)$$

となるから $\bigcap \mathscr{V} = \{\,(x,x) \mid \quad x \in S\,\}$ が従う．このとき相異なる任意の二点は近傍で分離されるから S は Hausdorff 性を持ち，完全正則性と併せて $T_{3\frac{1}{2}}$ となる．$T_{3\frac{1}{2}}$ なら T_0 は満たされるから後半の主張を得る． ∎

定義 D.6.14 (一様収束). S, T を空でない集合とし，T 上に近縁系 $\mathscr{V}$ が定まっているとする．また $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を有向集合 $(\Lambda, \leq)$ で添数付けた S から T への写像族，f を S から T への写像，及び A を S の部分集合とする．

- 任意の近縁 V に対し或る $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在して，全ての $y \in A$ で

  $$\lambda_0 \leq \lambda \quad \Longrightarrow \quad (f(y), f_\lambda(y)) \in V$$

  となるとき，$(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ は A 上で f に**一様収束**する **(uniformly converge)** という．
- 任意の一点集合において一様収束することを**各点収束 (pointwise convergence)** という．
- S が位相空間であるとき，任意のコンパクト部分集合上で一様収束することを**コンパクト一様収束 (compact convergence)** や**広義一様収束**という．
- S が位相空間であるとき，各点 $x \in S$ で或る近傍 $U(x)$ が取れて $U(x)$ 上で一様収束することを**局所一様収束 (locally uniform convergence)** という．

定理 D.6.15 (連続写像が局所一様収束するなら極限写像も連続). S を位相空間，$(T, \mathscr{V})$ を一様空間として T に $\mathscr{V}$ で位相を導入する．また $(\Lambda, \leq)$ を有向集合，$(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を S から T への連続写像族とし，f を S から T への写像とする．このとき $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が f に局所一様収束しているなら f も連続写像である．

証明. 任意に $x \in S$ を取れば，$f(x)$ の任意の近傍 N に対し或る近縁 V が存在して

$$V_{f(x)} \overset{\text{def}}{=} \left\{\, t \in T \mid \quad (f(x), t) \in V \,\right\} \subset N$$

を満たす．また V に対し或る対称な近縁 W で

$$(a,b), (b,c), (c,d) \in W \quad \Longrightarrow \quad (a,d) \in V, \quad (\forall a, b, c, d \in S)$$

を満たすものが取れる．この W に対して或る $\lambda_0 \in \Lambda$ と x の近傍 $U(x)$ が存在し，全ての $y \in U(x)$ で

$$\lambda_0 \leq \lambda \quad \Longrightarrow \quad (f(y), f_\lambda(y)) \in W$$

となる．f_{λ_0} は連続であり $W_{f_{\lambda_0}(x)}$ は $f_{\lambda_0}(x)$ の近傍であるから，x の或る近傍 $R(x)$ で

$$y \in R(x) \quad \Longrightarrow \quad f_{\lambda_0}(y) \in W_{f_{\lambda_0}(x)}$$

が成り立ち，以上より

$$\begin{aligned} y \in U(x) \cap R(x) \quad &\Longrightarrow \quad (f(x), f_{\lambda_0}(x)), (f_{\lambda_0}(x), f_{\lambda_0}(y)), (f_{\lambda_0}(y), f(y)) \in W \\ &\Longrightarrow \quad (f(x), f(y)) \in V \\ &\Longrightarrow \quad f(y) \in N \end{aligned}$$

が従い f の x での連続性が得られる．x の任意性と定理 D.1.24 より f は S で連続である． ∎

定理 D.6.16 (局所コンパクト空間において，広義一様収束 $\Longleftrightarrow$ 局所一様収束). S を局所コンパクト空間，$(T,\mathscr{V})$ を一様空間として T に $\mathscr{V}$ で位相を導入する．また $(\Lambda,\leq)$ を有向集合，$(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を S から T への写像族とし，f を S から T への写像とする．このとき

$$(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \text{ が } f \text{ に広義一様収束する} \quad \Longleftrightarrow \quad (f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \text{ が } f \text{ に局所一様収束する．}$$

証明． 各点でコンパクトな近傍が取れるから $\Longrightarrow$ が得られる．逆に $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が f に局所一様収束すると仮定する．K を S のコンパクト部分集合として各点 $x \in K$ のコンパクトな近傍 $U(x)$ を取れば，有限個の $x_1, x_2, \cdots, x_n \subset K$ で

$$K \subset U(x_1) \cup \cdots \cup U(x_n) \tag{D.16}$$

となる．任意に近縁 $V \in \mathscr{V}$ を取れば，各 $i = 1, \cdots, n$ で或る $\lambda_i \in \Lambda$ が存在して

$$y \in U(x_i),\ \lambda_i \leq \lambda \quad \Longrightarrow \quad (f(y), f_\lambda(y)) \in V$$

が成り立つが，このとき有向律より $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ は上界 $\lambda_0 \in \Lambda$ を持つから，任意の $y \in \bigcup_{i=1}^n U(x_i)$ で

$$\lambda_0 \leq \lambda \quad \Longrightarrow \quad (f(y), f_\lambda(y)) \in V$$

が満たされる．(D.16) より $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は K 上で f に一様収束し，K の任意性から $\Longleftarrow$ が得られる． ∎

定義 D.6.17 (一様連続性). $(S,\mathscr{U})$ と $(T,\mathscr{V})$ を一様空間として $\mathscr{U},\mathscr{V}$ により S,T に一様位相を導入し，$f : S \longrightarrow T$ を写像とする．また A を S の部分集合とする．任意の $V \in \mathscr{V}$ に対し或る $U \in \mathscr{U}$ が存在して

$$(x,y) \in (A \times A) \cap U \quad \Longrightarrow \quad (f(x), f(y)) \in V$$

となるとき，f は A 上で**一様連続**である **(uniformly continuous)** という．

定理 D.6.18 (一様連続なら連続). $(S,\mathscr{U})$ と $(T,\mathscr{V})$ を一様空間として $\mathscr{U},\mathscr{V}$ により S,T に一様位相を導入し，$f : S \longrightarrow T$ を写像とする．また A を S の部分集合とする．このとき f が A 上で一様連続なら f は A 上で連続 ($f|_A$ が連続) である．

証明． 任意の $U \in \mathscr{U}, s \in S$ に対し

$$U_s \overset{\text{def}}{=} \{\, y \in S \mid \quad (s,y) \in U \,\}$$

と定義し，同様に $V \in \mathscr{V}, t \in T$ に対し V_t を定める．$x \in A$ を取れば，$f(x)$ の任意の近傍 N に対し或る $V \in \mathscr{V}$ で

$$V_{f(x)} \subset N$$

となる．このとき f が A で一様連続であるなら V に対し或る $U \in \mathscr{U}$ が存在して

$$(x,y) \in (A \times A) \cap U \quad \Longrightarrow \quad (f(x), f(y)) \in V$$

が満たされるから，

$$y \in A \cap U_x \quad \Longrightarrow \quad f(y) \in V_{f(x)} \subset N$$

が従い $f\big|_A$ の x での連続性が出る．x の任意性より f は A 上で連続である． ∎

定理 D.6.19 (連続写像はコンパクト集合上で一様連続). $(S, \mathscr{U})$ と $(T, \mathscr{V})$ を一様空間として $\mathscr{U}, \mathscr{V}$ で S, T に一様位相を導入し，$f : S \longrightarrow T$ を連続写像とする．このとき f は任意のコンパクト部分集合上で一様連続となる．

証明． K を S のコンパクト部分集合とする．任意の $M \in \mathscr{U}, s \in S$ に対し

$$M_s \overset{\text{def}}{=\!=} \{\, x \in S \mid \quad (s, x) \in M \,\}$$

と定義し，$W \in \mathscr{V}$, $t \in T$ に対しても同様に W_t を定める．任意に $V \in \mathscr{V}$ を取れば，定理 D.6.3 より或る $W \in \mathscr{V}$ で

$$W_t \times W_t \subset V, \quad (\forall t \in T)$$

となる．f は連続であるから任意の $s \in S$ に対し或る $N(s) \in \mathscr{U}$ が存在して

$$(s, x) \in N(s) \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in W_{f(s)}$$

が成り立つ．$M(s) \circ M(s) \subset N(s)$ を満たす対称な $M(s) \in \mathscr{U}$ を取れば，定理 D.1.18 より或る $x_1, \cdots, x_n \in K$ で

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} M(x_i)_{x_i}$$

となる．近縁系は有限交叉で閉じるから

$$U \overset{\text{def}}{=\!=} \bigcap_{i=1}^{n} M(x_i)$$

は $\mathscr{U}$ の元であり，このとき任意に $(x, y) \in (K \times K) \cap U$ を取れば，或る i で $y \in M(x_i)_{x_i}$ となり，$(x_i, x_i), (x_i, y) \in M(x_i)$ より $(x_i, y) \in N(x_i)$ となる．一方で $M(x_i)$ が対称であるから $(x_i, y), (y, x) \in M(x_i)$ となり $(x_i, x) \in N(x_i)$ が満たされ，$f(x), f(y) \in W_{f(x_i)}$ が従うから $(f(x), f(y)) \in V$ が成立し f の K の上での一様連続性が出る． ∎

定理 D.6.20 (擬距離空間の一様構造). (S, d) を擬距離空間とするとき，

$$\mathscr{V} \overset{\text{def}}{=\!=} \{\, U \mid \quad \text{或る正数 } r \text{ が存在して } V(r) \subset U \,\}, \quad \left(V(r) = \left\{ (x, y) \in S \times S \mid \quad d(x, y) < r \right\} \right)$$

とおけば $\mathscr{V}$ は S 上の一様構造となり，距離位相と両立する．

定理 D.6.21 (擬距離空間の Cauchy 列). (S, d) を擬距離空間とし，一様構造 $\mathscr{V}$ を定理 D.6.20 の要領で定めるとき，S の任意の点列 $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ に対し，$(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ が Cauchy 列であることと

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbf{N}, \quad n, m \geq N \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \epsilon \tag{D.17}$$

が成り立つことは同値になる．

証明． 任意の ϵ と $n, m \in \mathbf{N}$ で

$$(x_n, x_m) \in V(\epsilon) \iff d(x_n, x_m) < \epsilon$$

となるから，$(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ が Cauchy 列であるとき，任意の $\epsilon > 0$ に対し或る $N \in \mathbf{N}$ が存在して

$$n, m \geq N \implies (x_n, x_m) \in V(\epsilon) \implies d(x_n, x_m) < \epsilon$$

が成り立つ．逆に $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ に対して (D.17) が満たされているとき，任意の $V(\epsilon) \in \mathscr{V}$ に対し或る $M \in \mathbf{N}$ が存在して

$$n, m \geq N \implies d(x_n, x_m) < \epsilon \implies (x_n, x_m) \in V(\epsilon)$$

となるから $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ は Cauchy 列である． ∎

定理 D.6.22 (点列の擬距離に関する収束). 点列 $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ が a に収束することと $d(x_n, a) \longrightarrow 0$ は同値．

定義 D.6.23 (Cauchy 有向点族・完備性). $(S, \mathscr{V})$ を一様空間，$(\Lambda, \leq)$ を有向集合，$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を有向点族とする．$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が **Cauchy 有向点族 (Cauchy net)** であるとは，任意の近縁 $V \in \mathscr{V}$ に対し或る $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在して

$$\lambda_0 \leq \lambda, \mu \implies (x_\lambda, x_\mu) \in V$$

となることをいう．点列が Cauchy 有向点族をなすときはこれを **Cauchy 列 (Cauchy sequence)** と呼ぶ．S の空でない部分集合 A の上の任意の Cauchy 有向点族が A で収束するとき，A は S で**完備である (complete)** という．

定理 D.6.24 (収束する有向点族は Cauchy 有向点族). $(S, \mathscr{V})$ を一様空間，$(\Lambda, \leq)$ を有向集合，$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を有向点族とする．$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が S で収束するとき，$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は Cauchy 有向点族をなしている．

証明． $a \in S$ を $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の極限 (の一つ) とする．任意の近縁 $V \in \mathscr{V}$ に対し或る対称な $W \in \mathscr{V}$ で $W \circ W \subset V$ を満たすものが取れるが，$W_a \overset{\text{def}}{=} \{\, s \in S \mid (a, s) \in W \,\}$ は a の近傍であるから或る $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在して

$$\lambda_0 \leq \lambda \implies x_\lambda \in W_a$$

となり，W の対称性と併せて

$$\lambda_0 \leq \lambda, \mu \implies (x_\lambda, a), (a, x_\mu) \in W \implies (x_\lambda, x_\mu) \in V$$

が成り立つ． ∎

定理 D.6.25 (Hausdorff 一様位相空間の完備部分集合は閉). $(S, \mathscr{V})$ を一様空間として $\mathscr{V}$ により S に位相を導入する．また A を S の完備な部分集合とする．このとき，S が Hausdorff なら A は S で閉じている．

証明． $A = \overline{A}$ を示す．定理 D.5.6 より任意に $a \in \overline{A}$ を取れば或る A 上の有向点族 $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が a に収束する．定理 D.6.24 より $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は Cauchy 有向点族となるから A で収束し，Hausdorff 性から $a \in A$ となる (定理 D.5.4)． ∎

定理 D.6.26 (完備な一様空間の閉集合は完備).

定理 D.6.27 (Cauchy 有向点族の部分有向点族も Cauchy・部分点族の極限はもとの点族でも極限). $(S, \mathscr{V})$ を一様空間，$(\Lambda, \leq)$ を有向集合，$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を Cauchy 有向点族とする．また $(\Gamma, \leq)$ を有向集合，$f : \Gamma \longrightarrow \Lambda$ を共終かつ単調な写像とする．このとき部分有向点族 $(x_{f(\gamma)})_{\gamma\in\Gamma}$ もまた Cauchy 有向点族となり，任意の $a \in S$ に対し

$$x_{f(\gamma)} \longrightarrow a \quad \Longrightarrow \quad x_\lambda \longrightarrow a.$$

定理 D.5.5 より一般に有向点族が点 a に収束するための必要十分条件はその任意の部分有向点族が a に収束することであるが，Cauchy 有向点族の場合は半分収束点族をなしている (定理 D.6.24) から，一つでも収束する部分有向点族が得られれば元の点族の収束も判明する．

証明. 任意の近縁 $V \in \mathscr{V}$ に対し或る $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在して

$$\lambda_0 \leq \lambda, \mu \quad \Longrightarrow \quad (x_\lambda, x_\mu) \in V$$

が成り立つ．共終性より $\lambda_0 \leq f(\gamma_0)$ を満たす $\gamma_0 \in \Gamma$ が取れて，$\gamma_0 \leq \gamma, \xi$ なら $f(\gamma_0) \leq f(\gamma), f(\xi)$ となるから

$$\gamma_0 \leq \gamma, \xi \quad \Longrightarrow \quad \left(x_{f(\gamma)}, x_{f(\xi)}\right) \in V$$

が従う．よって $(x_{f(\gamma)})_{\gamma\in\Gamma}$ は Cauchy 有向点族である．いま，$x_{f(\gamma)} \longrightarrow a$ とする．このとき任意の $U \in \mathscr{V}$ に対し $W \circ W \subset U$ を満たす $W \in \mathscr{V}$ を取れば，或る $\gamma_1 \in \Gamma$ が存在して

$$\gamma_1 \leq \gamma \quad \Longrightarrow \quad \left(a, x_{f(\gamma)}\right) \in W$$

となる．一方で或る $\lambda_1 \in \Lambda$ が存在して

$$\lambda_1 \leq \lambda, \mu \quad \Longrightarrow \quad (x_\lambda, x_\mu) \in W$$

となる．$\lambda_1 \leq f(\gamma_2)$ を満たす $\gamma_2 \in \Gamma$ を取り，$\{\gamma_1, \gamma_2\}$ の上界を $\gamma_3 \in \Gamma$ とすれば，

$$\lambda_1 \leq \lambda \quad \Longrightarrow \quad \left(a, x_{f(\gamma_3)}\right), \left(x_{f(\gamma_3)}, x_\lambda\right) \in W \quad \Longrightarrow \quad (a, x_\lambda) \in U$$

が成り立ち $x_\lambda \longrightarrow a$ が従う． ∎

定理 D.6.28 (可算な基本近縁系が存在するとき，完備 $\Longleftrightarrow$ 任意の Cauchy 列が収束する). $(S, \mathscr{V})$ を一様空間とし，$\mathscr{V}$ で S に位相を導入する．また A を S の空でない部分集合とする．$\mathscr{V}$ が可算な基本近縁系を持つとき，

$$A \text{ が } S \text{ で完備である} \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ 上の任意の Cauchy 列が } A \text{ で収束する．}$$

証明. $\Longleftarrow$ を示す．$\mathscr{V}$ が可算な基本近縁系 $\{V_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ を持つとき，近縁系は有限交叉で閉じるから

$$U_n \overset{\text{def}}{=} V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

により単調減少な $\mathscr{V}$ の基本近縁系 $\{U_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が定まる．$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を A 上の Cauchy 有向点族として

$$X_\lambda \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{ x_\mu \mid \quad \lambda \leq \mu \right\}, \quad (\forall \lambda \in \Lambda)$$

とおけば，任意の $n \in \mathbf{N}$ で或る $\lambda_n \in \Lambda$ が存在して

$$X_{\lambda_n} \times X_{\lambda_n} \subset U_n$$

となる．任意の $V \in \mathscr{V}$ に対し $W \circ W \subset V$ を満たす $W \in \mathscr{V}$ を取れば，或る $N \in \mathbf{N}$ で $U_N \subset W$ となるから

$$U_N \circ U_N \subset V$$

が成り立つ．また任意の $n, m \geq N$ に対し，有向集合の定義より $\lambda_n, \lambda_m \leq \mu$ を満たす $\mu \in \Lambda$ が存在して

$$(x_{\lambda_n}, x_\mu) \in U_n \subset U_N, \quad (x_\mu, x_{\lambda_m}) \in U_m \subset U_N$$

となり $(x_{\lambda_n}, x_{\lambda_m}) \in V$ が従うから，$(x_{\lambda_n})_{n\in\mathbf{N}}$ は Cauchy 列であり或る $a \in A$ に収束する．このとき

$$x_\lambda \longrightarrow a \tag{D.18}$$

が成立する．実際，任意に a の近傍 B を取れば或る $\tilde{V} \in \mathscr{V}$ で

$$\tilde{V}_a \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{ x \in S \mid \quad (a, x) \in \tilde{V} \right\} \subset B$$

となり，$\tilde{W} \circ \tilde{W} \subset V$ を満たす $\tilde{W} \in \mathscr{V}$ に対し或る $N_1 \in \mathbf{N}$ が存在して

$$n \geq N_1 \quad \Longrightarrow \quad x_{\lambda_n} \in \tilde{W}_a \quad \Longrightarrow \quad (a, x_{\lambda_n}) \in \tilde{W}$$

を満たす．また或る $N_2 \geq N_1$ で $U_{N_2} \subset \tilde{W}$ となるから

$$X_{\lambda_{N_2}} \times X_{\lambda_{N_2}} \subset U_{N_2} \subset \tilde{W}$$

が従い，このとき $(a, x_{\lambda_{N_2}}) \in \tilde{W}$ かつ $(x_{\lambda_{N_2}}, x) \in \tilde{W}$, $(\forall x \in X_{\lambda_{N_2}})$ より $(a, x) \in \tilde{V}$, $(\forall x \in X_{\lambda_{N_2}})$ となるから

$$X_{\lambda_{N_2}} \subset \tilde{V}_a \subset B$$

が得られ (D.18) が出る．A 上の任意の Cauchy 有向点族が A で収束するから A は S で完備である． ∎

定義 D.6.29 (全有界). $(S, \mathscr{V})$ を一様空間とし，A を S の空でない部分集合とする．このとき，A が S で**全有界 (totally bounded)** であるとは，任意の近縁 $V \in \mathscr{V}$ に対し或る有限集合 $F_V \subset A$ が存在して

$$A \subset \bigcup_{x\in F_V} V_x$$

が満たされることを指す．ここで $V_x \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{ y \in S \mid \quad (x, y) \in V \right\}$ である．

定理 D.6.30 (全有界性の同値条件). $(S, \mathscr{V})$ を一様空間，A を S の空でない部分集合とする．このとき，A が S で全有界であることと，任意の近縁 $V \in \mathscr{V}$ に対し A の空でない部分集合の有限族 $\mathscr{F}_V$ で

$$A = \bigcup \mathscr{F}_V; \quad F \times F \subset V, \ (\forall F \in \mathscr{F}_V) \tag{D.19}$$

を満たすものが取れることは同値である．

証明.　A が S で全有界であるとする．任意に $V \in \mathscr{V}$ を取れば，定理 D.6.3 より或る $W \in \mathscr{V}$ で

$$W_x \times W_x \subset V, \quad (\forall x \in S)$$

が成り立つ．全有界性より W に対し或る有限集合 $F_W \subset A$ が存在して

$$A \subset \bigcup_{x \in F_W} W_x$$

となるが，このとき $\mathscr{F}_V \overset{\text{def}}{=} \{W_x \cap A\}_{x \in F_W}$ は A の空でない部分集合の族で (D.19) を満たす．逆に任意の近縁 $V \in \mathscr{V}$ に対して A の空でない部分集合の有限族 $\mathscr{F}_V \subset \mathscr{A}$ で (D.19) を満たすものが取れるとき，$\mathscr{F}_V$ の各元から一点ずつ選んで集めた A の有限部分集合を F_V とすれば，任意の $F \in \mathscr{F}_V$ と F に属する $x \in F_V$ で

$$y \in F \quad \Longrightarrow \quad (x,y) \in F \times F \subset V \quad \Longrightarrow \quad y \in V_x$$

が成り立つから

$$A = \bigcup \mathscr{F}_V \subset \bigcup_{x \in F_V} V_x$$

が従い A の S での全有界性が出る．∎

定理 D.6.31 (全有界かつ可算な基本近縁系を持つ一様位相空間は可分かつ第二可算).

定理 D.6.32 (コンパクトなら全有界).　$(S, \mathscr{V})$ を一様空間とし，$\mathscr{V}$ で S に位相を導入する．A を S の空でないコンパクト部分集合とするとき，A は全有界である．

証明.　任意の $V \in \mathscr{V}$ に対し $\{V_x^\circ\}_{x \in A}$ は A の S における開被覆となるから，A がコンパクトであれば

$$A \subset \bigcup_{x \in F_V} V_x^\circ \subset \bigcup_{x \in F_V} V_x$$

を満たす有限集合 $F_V \subset A$ が存在する．従って A は S で全有界である．∎

定理 D.6.33 (完備かつ全有界 $\Longleftrightarrow$ コンパクト).　$(S, \mathscr{V})$ を一様空間として $\mathscr{V}$ で一様位相を導入するとき，S の任意の空でない部分集合 A に対し，

$$A \text{ が } S \text{ で完備かつ全有界} \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ がコンパクト}.$$

証明.

第一段　$\Longrightarrow$ を示す．A が S で全有界なら，任意の $V \in \mathscr{V}$ に対し A の空でない部分集合の有限族 $\mathscr{F}_V$ で

$$A = \bigcup \mathscr{F}_V, \quad F \times F \subset V, \ (\forall F \in \mathscr{F}_V)$$

を満たすものが取れる．$\mathscr{F}_V$ が生成する A の位相を τ_V と書けば，Alexander の定理より (A, τ_V) はコンパクトとなり，Tychonoff の定理より $\{(A, \tau_V)\}_{V \in \mathscr{V}}$ の直積位相空間 B もまたコンパクトとなる．写像 $\delta : A \longrightarrow B$ を

$$\delta(x)(V) = x, \quad (\forall V \in \mathscr{V},\ x \in A)$$

により定めれば，A 上の任意の有向点族 $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ に対し $(\delta(x_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ は B の有向点族となるから，B のコンパクト性より或る有向集合 $(\Gamma, \leq)$ と共終かつ序列を保つ写像 $f : \Gamma \longrightarrow \Lambda$，及び $b \in B$ が存在して

$$\delta(x_{f(\gamma)}) \longrightarrow b$$

となる．このとき $(x_{f(\gamma)})_{\gamma \in \Gamma}$ は A 上の Cauchy 有向点族をなす．実際，任意の $V \in \mathscr{V}$ に対して $b(V) \in F$ を満たす $F \in \mathscr{F}_V$ を取れば

$$b \in \mathrm{pr}_V^{-1}(F)$$

となり (ただし pr_V は B から (A, τ_V) への射影である)，$\mathrm{pr}_V^{-1}(F)$ は b の開近傍であるから或る $\gamma_V \in \Gamma$ で

$$\gamma_V \leq \gamma \quad \Longrightarrow \quad \delta(x_{f(\gamma)}) \in \mathrm{pr}_V^{-1}(F) \quad \Longrightarrow \quad x_{f(\gamma)} \in F$$

が成り立つ．従って

$$\gamma_V \leq \gamma, \xi \quad \Longrightarrow \quad \left(x_{f(\gamma)}, x_{f(\xi)}\right) \in F \times F \subset V$$

が得られる．いま A は S で完備であるから $(x_{f(\gamma)})_{\gamma \in \Gamma}$ は A で収束し，定理 D.5.10 より A のコンパクト性が出る．

第二段　A がコンパクトであれば，定理 D.6.32 より A は全有界であり，また A 上の任意の Cauchy 有向点族は A で収束する部分有向点族を持ち (定理 D.5.10)，このとき元の点族も A で収束する (定理 D.6.27). ∎

定理 D.6.34 (稠密な部分集合上の一様連続写像の延長).　$(X, \mathscr{V})$ と $(Y, \mathscr{U})$ を一様空間とし，$\mathscr{O}_X$ を $\mathscr{V}$ で導入する X 上の位相とし，$\mathscr{O}_Y$ を $\mathscr{U}$ で導入する Y 上の位相とする．また E を $\mathscr{O}_X$ に関して X の稠密な部分集合とし，

$$\mathscr{V}_E \overset{\text{def}}{=} \{\, v \cap (E \times E) \mid \quad v \in \mathscr{V} \,\}$$

で E 上の近縁系を定めて，f を E 上の $\mathscr{V}_E/\mathscr{U}$-一様連続写像とする．このとき $(Y, \mathscr{O}_Y)$ が完備かつ Hausdorff であれば，

$$g : X \longrightarrow Y \wedge g|_E = f$$

かつ $\mathscr{V}/\mathscr{U}$-一様連続である g が取れる．そしてこれを満たす写像は g のみである．

略証.　x を X の要素とすれば，$\mathscr{O}_X$ に関して

$$x_\lambda \longrightarrow x$$

となる E 上のネット $(x_\lambda)_\lambda$ が取れる．このとき f の一様連続性から

$$(f(x_\lambda))_\lambda$$

が Y 上の Cauchy ネットとなるため，

$$f(x_\lambda) \longrightarrow y$$

なる Y の要素 y が取れる．この対応関係を g とすれば，$(Y, \mathscr{O}_Y)$ の Hausdorff 性より

$$g : X \longrightarrow Y$$

が成立する．g が $\mathscr{V}/\mathscr{U}$-一様連続であることを示す．u を $\mathscr{U}$ の要素とし，

$$w \circ w \circ w \subset u$$

なる近縁 w を取る．w に対して

$$\forall x, y \left[(x, y) \in v \cap (E \times E) \Longrightarrow (f(x), f(y)) \in w \right]$$

を満たす $\mathscr{V}$ の要素 v が取れる．いま x と y を X の要素とすれば，

$$x' \in E \wedge (x, x') \in v \wedge (g(x), f(x')) \in w$$

なる x' と

$$y' \in E \wedge (y', y) \in v \wedge (f(y'), g(y)) \in w$$

なる y' が取れるので

$$(g(x), g(y)) \in u$$

が従う．ゆえに

$$\forall x, y \left[(x, y) \in v \Longrightarrow (g(x), g(y)) \in u \right]$$

が成立するので，g は $\mathscr{V}/\mathscr{U}$-一様連続である．g の一意性は定理 D.2.10 より従う． ∎

定義 D.6.35 (同程度連続).　X, Y を集合とし，$\mathscr{V}_X, \mathscr{V}_Y$ をそれぞれ X, Y 上の近縁系とする．また $\mathscr{F}$ を X から Y への写像の集合とする．x を X の要素とするとき，$\mathscr{F}$ が x において**同程度連続 (equicontinuous)** であるということを

$$\forall V \in \mathscr{V}_Y \, \exists U \in \mathscr{V}_X \, \forall f \in \mathscr{F} \, \forall y \in X \, \left((x, y) \in U \Longrightarrow (f(x), f(y)) \in V \right)$$

で定める．また

$$\forall x \in X \, \forall V \in \mathscr{V}_Y \, \exists U \in \mathscr{V}_X \, \forall f \in \mathscr{F} \, \forall y \in X \, \left((x, y) \in U \Longrightarrow (f(x), f(y)) \in V \right)$$

が成り立つとき $\mathscr{F}$ は X 上で同程度連続であるといい，

$$\forall V \in \mathscr{V}_Y \, \exists U \in \mathscr{V}_X \, \forall f \in \mathscr{F} \, \forall x, y \in X \, \left((x, y) \in U \Longrightarrow (f(x), f(y)) \in V \right)$$

が成り立つとき $\mathscr{F}$ は**一様同程度連続 (uniformly equicontinuous)** であるという．

D.7　距離空間

定義 D.7.1 ((擬) 距離関数・距離位相).　空でない[*1]集合 S において，

(PM1)　$d(x,x)=0, \quad (\forall x \in S)$
(PM2)　$d(x,y)=d(y,x), \quad (\forall x,y \in S)$
(PM3)　$d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y), \quad (\forall x,y,z \in S)$

を満たす関数 $d : S \times S \longrightarrow [0,\infty)$ を擬距離 (pseudometric) と呼ぶ．これらに加えて

- $d(x,y)=0 \Longrightarrow x=y, \quad (\forall x,y \in S)$

が満たされるとき d を距離 (metric) と呼び，S と (擬) 距離 d との対 (S,d) を (擬) 距離空間と呼ぶ．また

$$O \subset S \text{ が開集合である} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$$
$$O \neq \emptyset\text{，或は任意の } x \in O \text{ に対し或る } r_x > 0 \text{ が存在して } \left\{\, y \in S \mid \quad d(x,y) < r_x \,\right\} \subset O \text{ となる}$$

で定める開集合系を (擬) 距離位相と呼ぶ．d で入れる (擬) 距離位相を d-位相とも書く．

距離が一様同値であることと距離から作られる近縁系が一致することは同値．

同値であるが一様同値でない距離の例のコピー

$X=\mathbf{R}$, $d_1(x,y)=|x-y|$, $d_2(x,y)=|x^3-y^3|$ because $x \longmapsto x^3$ isn't uniformly continuous on $\mathbf{R}$, these aren't uniformly equivalent; take $x=n$, $y=n+1/n$, then $d_1(x,y)=1/n$, $d_2(x,y) \geq 3$, so for $\epsilon=3$, every δ fails by taking $1/n<\delta$. However, essentially because $x \longmapsto x^3$ is continuous, they do generate the same topology.
???　https://math.stackexchange.com/questions/793816/example-of-metrics-that-generating-the-same-topology-but-not-uniformly-equivalen

定義 D.7.2 (球).　(S,d) を擬距離空間とするとき，$x \in S$ と $r>0$ により

$$\left\{\, y \in S \mid \quad d(x,y) < r \,\right\}$$

で表される集合を (中心 x，半径 r の) 開球 (open ball) と呼ぶ．$<$ を $\leq$ に替えたものは閉球 (closed ball) と呼ぶ．

定理 D.7.3 (開球・閉球はそれぞれ開集合・閉集合).　擬距離位相空間の開球は開集合，閉球は閉集合である．

証明.　(S,d) を擬距離空間とすれば任意の $x \in S$ で $d_x : S \ni y \longmapsto d(x,y)$ は連続であり，半径 r の開球は $d_x^{-1}([0,r))$，半径 r の閉球は $d_x^{-1}([0,r])$ と書けるからそれぞれ S の開集合，閉集合である． ∎

[*1] S が空集合である場合，$S \times S$ の上で定義し得る写像は空写像のみである．空写像は距離の定義を満たす．

定理 D.7.4 (擬距離空間において開球全体は基底をなす).　(S,d) を擬距離空間として擬距離位相を入れるとき，中心 x 半径 r の開球を $B_r(x)$ と書けば

$$\mathscr{B} \coloneqq \left\{ B_{1/n}(x) \mid \quad x \in S,\ n \in \mathbf{N} \right\}$$

は S の基底をなす．また S が可分であるとき，つまり S で稠密な高々可算集合 M が存在するとき，

$$\mathscr{B}_0 \coloneqq \left\{ B_{1/n}(x) \mid \quad x \in M,\ n \in \mathbf{N} \right\}$$

は S の高々可算な基底となる．すなわち可分な擬距離空間は第二可算である．

証明.　定理 D.7.3 より任意の $\mathscr{U} \subset \mathscr{B}$ に対し $\bigcup \mathscr{U}$ は開集合となる．一方で O が開集合なら，任意の $x \in O$ に対し

$$B_{1/n_x}(x) \subset O$$

を満たす $n_x \in \mathbf{N}$ が存在して

$$O = \bigcup_{x \in O} B_{1/n_x}(x) \in \mathscr{B}$$

が従うから，$\mathscr{B}$ は S の基底をなす．S で稠密な高々可算集合 M が存在するとき，任意の $x \in S$ と $n \in \mathbf{N}$ に対し

$$B_{1/(3n)}(x) \cap M \neq \emptyset$$

となるから，或る $m \in B_{1/(3n)}(x) \cap M$ と $1/(3n) < 1/N < 2/(3n)$ を満たす $N \in \mathbf{N}$ で

$$x \in B_{1/N}(m) \subset B_{1/n}(x), \quad B_{1/N}(m) \in \mathscr{B}_0$$

が成り立つ．すなわち任意の開集合は $\mathscr{B}_0$ の元の合併で表せるから $\mathscr{B}_0$ は S の基底となる．∎

定理 D.7.5 (擬距離位相は第一可算).　(S,d) を擬距離空間として擬距離位相を導入すれば，任意の $x \in S$ に対して

$$\left\{ \left\{ y \in S \mid \quad d(x,y) < \frac{1}{n} \right\} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

は x の基本近傍系となる．すなわち擬距離位相は第一可算空間を定める．

証明.　U を x を近傍とすれば或る $r > 0$ で $\left\{ y \in S \mid \quad d(x,y) < r \right\} \subset U$ となる．このとき $1/n < r$ なら

$$\left\{ y \in S \mid \quad d(x,y) < \frac{1}{n} \right\} \subset \left\{ y \in S \mid \quad d(x,y) < r \right\} \subset U$$

が成り立つ．∎

定理 D.7.6 (擬距離関数の連続性).　(S, d) を擬距離空間として擬距離位相を導入するとき，以下が成り立つ:

(1)　$S \times S \ni (x, y) \longmapsto d(x, y)$ は直積位相に関し連続である．

(2)　任意の空でない部分集合 A に対し $S \ni x \longmapsto d(x, A)$ は連続である．特に A が閉なら

$$x \in A \quad\Longleftrightarrow\quad d(x, A) = 0.$$

定理 D.7.7 (擬距離空間は完全正規).　任意の擬距離位相空間は完全正規である．特に以下は全て同値である:

(a)　擬距離が距離である．

(b)　擬距離位相が T_0 である．

(c)　擬距離位相が T_6 である．

証明.

第一段　(S, d) を擬距離空間として擬距離位相を入れるとき，A, B を交わらない S の閉集合として

$$f(x) \coloneqq \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}, \quad (\forall x \in S)$$

により $f : S \longrightarrow [0, 1]$ を定めれば，定理 D.7.6 より f は連続であり

$$A = f^{-1}(\{0\}), \quad B = f^{-1}(\{1\})$$

が満たされるから S は完全正規である．

第二段　d が距離なら S は Hausdorff である．実際，相異なる二点 $x, y \in S$ に対し

$$B_\epsilon(x) \coloneqq \left\{ s \in S \mid \quad d(s, x) < \frac{\epsilon}{2} \right\}, \quad B_\epsilon(y) \coloneqq \left\{ s \in S \mid \quad d(s, y) < \frac{\epsilon}{2} \right\}, \quad (\epsilon \coloneqq d(x, y))$$

で交わらない開球を定めれば，x と y は $B_\epsilon(x)$ と $B_\epsilon(y)$ で分離される．従って距離位相は完全正規 Hausdorff となり $(a) \Longrightarrow (c)$ を得る．

第三段　位相空間が T_6 なら T_0 であるから $(c) \Longrightarrow (b)$ が従う．また S が T_0 であるとき，相異なる二点 x, y に対し $x \notin \overline{\{y\}}$ 又は $y \notin \overline{\{x\}}$ となるが，$x \notin \overline{\{y\}}$ とすれば $\overline{\{y\}} \subset S \backslash B_r(x)$ を満たす $r > 0$ が存在し，$d(x, y) \geq r > 0$ が成り立つから d は距離となる．これにより $(b) \Longrightarrow (a)$ が出る．∎

定理 D.7.8 (距離空間の部分空間の距離).　(S, d) を距離空間，M を S の空でない部分集合とし，S に距離位相を入れる．このとき M の相対位相 $\mathscr{O}_M$ は

$$d_M(x, y) \coloneqq d(x, y), \quad (\forall x, y \in M)$$

で定める相対距離により導入する距離位相 $\mathscr{O}_{d_M}$ と一致する．

証明.　任意の $x \in M$ と $r > 0$ に対し

$$\left\{ y \in M \mid \quad d_M(x, y) < r \right\} = M \cap \left\{ y \in S \mid \quad d(x, y) < r \right\}$$

が成り立つから，相対開集合は d_M-開球の合併で表され，逆に d_M-開集合は M と d-開集合の交叉で表せる． ∎

定理 D.7.9 (距離空間の Cartesian 積の距離). (S_1, d_1) と (S_2, d_2) を距離空間としてそれぞれに距離位相を導入し，$(S, \mathscr{O}_S)$ をその直積位相空間とする．このとき

$$S \times S \ni ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \longmapsto \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2}$$

なる関係で定める写像を d とすれば，d は S 上の距離となり，S は d で距離化可能である．特に (S_1, d_1) と (S_2, d_2) が共に完備 (resp. 可分) なら (S, d) も完備 (resp. 可分) となる．

定理 D.7.10 (距離空間の可算直積の距離). $\{(S_n, d_n)\}_{n\in\omega}$ を距離空間の族として距離位相を導入し，$(S, \mathscr{O}_S)$ をその直積位相空間とする．このとき

$$S \times S \ni (x, y) \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \left(d_n(x_n, y_n) \wedge 1\right)$$

なる関係で定める写像を d とすれば，d は S 上の距離となり，S は d で距離化可能である．特に全ての n について (S_n, d_n) が完備 (resp. 可分) なら (S, d) も完備 (resp. 可分) となる．

定理 D.7.11 (擬距離の距離化). (S, d) を擬距離空間とするとき，$x \sim y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} d(x, y) = 0$ で S に同値関係が定まる．また商写像を $\pi : S \longrightarrow S/\sim$ と書けば

$$\rho(\pi(x), \pi(y)) := d(x, y), \quad (\forall \pi(x), \pi(y) \in S/\sim)$$

により $S/\sim$ に距離 ρ が定まり，S の d-位相の商位相は $S/\sim$ の ρ-位相に一致する．

証明.

第一段 ρ が well-defined であることを示す．実際，$\pi(x) = \pi(x')$, $\pi(y) = \pi(y')$ ならば

$$d(x', y') \leq d(x', x) + d(x, y) + d(y, y') = d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y') + d(y', y) = d(x', y')$$

より $d(x, y) = d(x', y')$ が成り立つから $\rho(\pi(x), \pi(y)) = \rho(\pi(x'), \pi(y'))$ が満たされる．

第二段 d-開球と ρ-開球をそれぞれ $B_d(x; r)$, $B_\rho(\pi(x); r)$, $(x \in S,\ r > 0)$ と書けば

$$\pi\left(B_d(x; r)\right) = B_\rho(\pi(x); r), \quad B_d(x; r) = \pi^{-1}\left(B_\rho(\pi(x); r)\right)$$

が成り立つ．U を商位相の空でない開集合とすれば，定理 D.7.4 と定理 A.9.27 より

$$U = \pi\left(\pi^{-1}(U)\right) = \pi\left(\bigcup_{x\in\pi^{-1}(U)} B_d(x; r_x)\right) = \bigcup_{x\in\pi^{-1}(U)} B_\rho(\pi(x); r_x)$$

となるから U は ρ-開集合でもある．同様に V を空でない ρ-開集合とすれば

$$\pi^{-1}(V) = \pi^{-1}\left(\bigcup_{\pi(x)\in V} B_\rho\left(\pi(x); \epsilon_{\pi(x)}\right)\right) = \bigcup_{\pi(x)\in V} B_d\left(x; \epsilon_{\pi(x)}\right)$$

が成り立つから V は商空間の開集合でもある．従って商位相と ρ-位相は一致する．∎

定義 D.7.12 (距離化可能). 位相空間において，その位相と一致する距離位相を定める距離が存在するとき，その空間は距離化可能 (metrizable) であるという．

定理 D.7.13 (連続単射な開写像による距離化可能性の遺伝). X, Y を位相空間，$f : X \longrightarrow Y$ を連続単射な開写像とする．X が距離 d_X で距離化可能なら，$f(X)$ の相対位相は次で定める d_Y により距離化可能である:

$$d_Y\left(f(x), f(y)\right) = d_X(x, y), \quad (\forall x, y \in X). \tag{D.20}$$

逆に $f(X)$ の相対位相が或る距離 d_Y で距離化可能であるとき，(D.20) で定める d_X により X は距離化可能である．

証明． X に距離 d_X が定まっているとき，或は $f(X)$ に距離 d_Y が定まっているとき，(D.20) で d_Y 或は d_X を定めればいずれも距離となる．このとき任意の $f(x_0) = y_0$ と $r > 0$ に対し

$$B_r^X(x_0) := \{\, x \in X \mid \quad d_X(x_0, x) < r \,\}, \quad B_r^Y(y_0) := \left\{\, y \in f(X) \mid \quad d_Y(y_0, y) < r \,\right\}$$

とおけば

$$f\left(B_r^X(x_0)\right) = B_r^Y(y_0), \quad B_r^X(x_0) = f^{-1}\left(B_r^Y(y_0)\right) \tag{D.21}$$

が成立する．X が距離化可能であるとき，U を $f(X)$ の相対開集合とすれば $f^{-1}(U)$ は X の開集合であるから

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{x \in f^{-1}(U)} B_{r_x}^X(x)$$

と表され，定理 A.9.27 と (D.21) より

$$U = f\left(\bigcup_{x \in f^{-1}(U)} B_{r_x}^X(x)\right) = \bigcup_{x \in f^{-1}(U)} B_{r_x}^Y(f(x))$$

となるから U は d_Y による距離位相の開集合である．逆に V を d_Y による距離位相の開集合とすれば，(D.21) より $f^{-1}(V)$ は d_X による開球の和で書けるから X の開集合であり，f が全射開写像であるから $V = f\left(f^{-1}(V)\right)$ は $f(X)$ の相対開集合である．後半の主張は f の逆写像 $f^{-1} : f(X) \longrightarrow X$ に対し前半の結果を当てはめて得られる．∎

定理 D.7.14 (距離化可能性の同値条件).　任意の位相空間について以下は同値である:

(a)　擬距離化可能である．

(b)　正則かつ σ-局所有限な基底を持つ．

(c)　一様化可能であり，両立する近縁系は可算な基本近縁系を持つ．

特に，次もまた同値となる:

(a')　距離化可能である．

(b')　正則 Hausdorff (T_3) かつ σ-局所有限な基底を持つ．

(c')　Hausdorff 一様化可能であり，両立する近縁系は可算な基本近縁系を持つ．

証明.　X を位相空間とする．

第一段　X が T_3 かつ σ-局所有限な基底を持てば X は T_4 かつ全ての閉集合は G_δ となる．X は局所有限な部分集合族 $\mathscr{B}_n$ の合併 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{B}_n$ で表せる基底を有する．任意の $n \in \mathbf{Z}_+$ 及び $B \in \mathscr{B}_n$ に対し

$$\begin{cases} f_{n,B}(x) > 0, & (x \in B), \\ f_{n,B}(x) = 0, & (x \in X \backslash B) \end{cases}$$

を満たす連続写像 $f_{n,B} : X \longrightarrow [0, 1/n]$ が存在する．

$$J := \{\, (n, B) \mid \quad n \in \mathbf{Z}_+,\ B \in \mathscr{B}_n \,\}$$

とおいて

$$F(x) := \big(f_{n,B}(x)\big)_{(n,B)\in J}$$

により F を定めれば，F は単射となる．また

$$d\left((x_j)_{j\in J}, (y_j)_{j\in J}\right) := \sup_{j\in J} |x_j - y_j|$$

により $[0,1]^J$ に距離を定めれば，F は X から $[0,1]^J$ への開写像かつ連続写像となる．任意の $x_0 \in X$ と $\epsilon > 0$ に対して

$$x \in W \quad \Longrightarrow \quad d(F(x), F(x_0)) < \epsilon \tag{D.22}$$

を満たす x_0 の開近傍 W が存在する．n を固定すれば或る x_0 の近傍 U_n は $\mathscr{B}_n$ の高々有限個の元としか交わらない．従って或る開近傍 $V_n \subset U_n$ が存在し，すべての $B \in \mathscr{B}_n$ で

$$x \in V_n \quad \Longrightarrow \quad d(F(x), F(x_0)) < \epsilon \tag{D.23}$$

が満たされる，$1/N < \epsilon/2$ を満たす $N \in \mathbf{Z}_+$ を取り

$$W := V_1 \cap \cdots \cap U_N$$

とおけば，$n \leq N$ の場合任意の $B \in \mathscr{B}_n$ で (D.23) が成立し，$n > N$ の場合任意の $B \in \mathscr{B}_n$ で

$$d(F(x), F(x_0)) \leq \frac{2}{n} < \epsilon, \quad (\forall x \in X)$$

となるから (D.22) が成り立つ．

D.8　範疇定理

定理 D.8.1 (Cantor の共通部分定理). $(S, \mathscr{O}_S)$ を Hausdorff 空間とし，$\mathcal{K}$ を S のコンパクト部分集合から成る集合とする．このとき，$\mathcal{K}$ の空でない任意の有限部分集合 U に対して $\bigcap U \neq \emptyset$ が成り立つなら $\bigcap \mathcal{K} \neq \emptyset$ が成り立つ．つまり

$$\forall U \left(U \subset \mathcal{K} \land \exists n \in \omega \, (U \approx n) \Longrightarrow \bigcap U \neq \emptyset \right) \Longrightarrow \bigcap \mathcal{K} \neq \emptyset.$$

証明． いま

$$\bigcap \mathcal{K} = \emptyset$$

が成り立っているとする．このとき K を $\mathcal{K}$ の要素とすれば

$$K \subset \bigcup_{C \in \mathcal{K}} S \backslash C$$

となる．Hausdorff 性より

$$C \in \mathcal{K} \Longrightarrow S \backslash C \in \mathscr{O}_S$$

が成り立つので，K のコンパクト性より

$$K \subset \bigcup_{C \in \mathcal{K}'} S \backslash C$$

を満たす $\mathcal{K}$ の或る有限部分集合 $\mathcal{K}'$ が取れる．

$$\mathcal{K}'' \overset{\text{def}}{=} \mathcal{K}' \cup \{K\}$$

とおけば $\mathcal{K}''$ は $\mathcal{K}$ の有限部分集合であり，また

$$\bigcap \mathcal{K}'' = K \cap \bigcap \mathcal{K}' = \emptyset$$

を満たす． ∎

定義 D.8.2 (疎集合・第一類集合・第二類集合). 位相空間 S の部分集合 A が疎である (nowhere dense) とは A の閉包の内核が $\overline{A}^{\circ} = \emptyset$ を満たすことをいう．S が可算個の疎集合の合併で表せるとき S を第一類集合 (a set of the first category) と呼び，そうでない場合はこれを第二類集合と呼ぶ．

定理 D.8.3 (Baire の範疇定理). 空でない完備距離空間と局所コンパクト Hausdorff 空間は第二類集合である．

証明． $S \neq \emptyset$ を完備距離空間，或は局所コンパクト Hausdorff 空間とする．

第一段　$(V_n)_{n=1}^{\infty}$ を S で稠密な開集合系とするとき

$$\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n} = S, \tag{D.24}$$

となることを示す．実際 (D.24) が満たされていれば，任意の疎集合系 $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ に対して

$$V_n := \overline{E_n}^{c}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

で開集合系 (V_n) を定めると定理 D.1.6 より

$$\overline{V_n} = \overline{E_n}^{ca} = \overline{E_n}^{ic} = \emptyset^c = S$$

となるから，$\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \neq \emptyset$ が従い $S \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{E_n} \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ が成り立つ．従って S は第二類である．

第二段　任意の空でない開集合 B_0 に対し $B_0 \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n) \neq \emptyset$ となることを示せば (D.24) が従う．V_1 は稠密であるから $B_0 \cap V_1 \neq \emptyset$ となり，点 $x_1 \in B_0 \cap V_1$ を取れば，S が距離空間なら或る半径 < 1 の開球 B_1 が存在して

$$x_1 \in B_1 \subset \overline{B_1} \subset B_0 \cap V_1 \tag{D.25}$$

を満たす．S が局所コンパクト Hausdorff の場合も，定理 D.2.12 と定理 D.4.8 より (D.25) を満たす相対コンパクトな開集合 B_1 が取れる．同様に半径 $< 1/n$ の開球，或は相対コンパクトな開集合 B_n と $x_n \in S$ で

$$x_n \in B_n \subset \overline{B_n} \subset B_{n-1} \cap V_n$$

を満たすものが存在する．このとき S が完備距離空間なら $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列をなし，その極限点 x_∞ は

$$x_\infty \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_n}$$

を満たす．S が局所コンパクト Hausdorff 空間なら定理 D.8.1 より

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_n} \neq \emptyset$$

となるから，いずれの場合も

$$\emptyset \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_n} \subset B_0 \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \right)$$

が従い定理の主張が得られる．■

補題 D.8.4 (同相写像に関して閉包 (内部) の像は像の閉包 (内部) に一致する).　A を位相空間 S の部分集合，$h : S \longrightarrow S$ を同相写像とするとき次が成り立つ:

(1)　$h(A^a) = h(A)^a$.

(2)　$h(A^i) = h(A)^i$.

証明.

(1) $h(A) \subset h(A^a)$ かつ $h(A^a)$ は閉であるから $h(A)^a \subset h(A^a)$ が従う．一方で任意の $x \in h(A^a)$ に対し $x = h(y)$ を満たす $y \in A^a$ と x の任意の近傍 V を取れば，$h^{-1}(V) \cap A \neq \emptyset$ より $V \cap h(A) \neq \emptyset$ が成り立ち $x \in h(A)^a$ となる．

(2) $h(A^i) \subset h(A)$ かつ $h(A^i)$ は開であるから $h(A^i) \subset h(A)^i$ が従う．一方で任意の開集合 $O \subset h(A)$ に対し $h^{-1}(O) \subset A$ より $h^{-1}(O) \subset A^i$ となり，$O \subset h(A^i)$ が成り立つから $h(A)^i \subset h(A^i)$ が得られる．∎

定理 D.8.5 (第一類集合の性質). S を位相空間とする．

(a) $A \subset B \subset S$ に対し B が第一類なら A も第一類である．

(b) 第一類集合の可算和も第一類である．

(c) 内核が空である閉集合は第一類である．

(d) S から S への位相同型 h と $E \subset S$ に対し次が成り立つ:

$$E \text{ が第一類} \iff h(E) \text{ が第一類}.$$

証明.

(a) $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ を満たす疎集合系 $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ に対し $A \cap E_n$ は疎であり $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap E_n)$ となる．

(b) $A_n \subset S,\ (n = 1, 2, \cdots)$ が第一類集合とし $(E_{n,i})_{i=1}^{\infty}$ を $A_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_{n,i}$ を満たす疎集合系とすれば

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n,i=1}^{\infty} E_{n,i}$$

が成り立つ．

(c) 内核が空である閉集合はそれ自身が疎であり，自身の可算和に一致する．

(d) E が第一類のとき，$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ を満たす疎集合系 $(E_i)_{i=1}^{\infty}$ に対し定理 D.1.6 と補題 D.8.4 より

$$\emptyset = h(E_i^{ai}) = h(E_i^a)^i = h(E_i)^{ai}$$

が成り立つから $h(E_i)$ は疎であり，

$$h(E) = \bigcup_{i=1}^{\infty} h(E_i)$$

となるから $h(E)$ も第一類である．$h(E)$ が第一類なら $E = h^{-1}(h(E))$ も第一類である．∎

D.9　連結性

定理 D.9.1. $\mathbf{R}$ の任意の区間は連結である．

定理 D.9.2. 連結集合の連続写像による像は連結である．

定理 D.9.3 (弧状連結なら連結).　弧状連結位相空間は連結空間である.

証明.　S を連結でない位相空間とする．このとき或る空でない開集合 U_1, U_2 が存在して

$$U_1 \cup U_2 = S, \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

を満たす．$x \in U_1$, $y \in U_2$ に対し $f(0) = x$, $f(1) = y$ を満たす連続写像 $f : [0,1] \longrightarrow S$ が存在する場合,

$$f([0,1]) = \big(U_1 \cap f([0,1])\big) \cup \big(U_2 \cap f([0,1])\big), \quad \big(U_1 \cap f([0,1])\big) \cap \big(U_2 \cap f([0,1])\big) = \emptyset$$

となり $f([0,1])$ の連結性に矛盾する．従って x, y を結ぶ道は存在しないから S は弧状連結ではない. ∎

D.10　距離空間上の連続写像

D.10.1　広義一様収束を定める距離

$(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間とし，距離位相を導入して

$$C(X,Y) := \left\{ f : X \longrightarrow Y \mid \quad f \text{ は連続写像} \right\}$$

とおく．このとき $K \subset X$ をコンパクト集合とすれば,

$$\rho_K(f,g) := \sup_{x \in K} d_Y(f(x), g(x)), \quad (f, g \in C(X,Y))$$

により定める ρ_K は $C(X,Y)$ の擬距離となる．実際，$f(K), g(K)$ は Y のコンパクト部分集合であるから

$$\mathrm{diam}(f(K)) = \sup_{y, y' \in f(K)} d_Y(y, y') < \infty,$$

及び $\mathrm{diam}(g(K)) < \infty$ が成り立ち，任意に $x_0 \in K$ を取れば

$$\begin{aligned}\sup_{x \in K} d_Y(f(x), g(x)) &\leq \sup_{x \in K} d_Y(f(x), f(x_0)) + d_Y(f(x_0), g(x_0)) + \sup_{x \in K} d_Y(g(x_0), g(x)) \\ &\leq \mathrm{diam}(f(K)) + d_Y(f(x_0), g(x_0)) + \mathrm{diam}(g(K)) < \infty\end{aligned}$$

となるから ρ_K は $[0, \infty)$ 値である．また d_Y が対称性と三角不等式を満たすから ρ も対称性を持ち三角不等式を満たす．いま，X が σ-コンパクトであると仮定する．つまり

$$K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \cdots, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = X \tag{D.26}$$

を満たすコンパクト部分集合の増大列 $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ が存在するとき，$\rho_n = \rho_{K_n}$ とすれば

$$\rho_n(f,g) = 0 \ (\forall n \geq 1) \quad \Longrightarrow \quad f = g$$

が成り立つから,

$$\rho(f,g) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left(1 \wedge \rho_n(f,g)\right), \quad (f, g \in C(X,Y)) \tag{D.27}$$

により $C(X,Y)$ 上に距離 ρ が定まる．特に，定理 D.3.15 より X が可分かつ局所コンパクトなら

$$K_n \subset K_{n+1}^{\circ}, \quad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \tag{D.28}$$

を満たすコンパクト部分集合の列 $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ が存在するから ρ が定義される．

定理 D.10.1 (広義一様収束を定める距離). (X,d_X) を可分な局所コンパクト距離空間，(Y,d_Y) を距離空間とし，(D.28) を満たす $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ で ρ を定めるとき，$f, f_n \in C(X,Y)$ に対して次が成り立つ．

$$(f_n)_{n=1}^{\infty} \text{ が } f \text{ に広義一様収束する} \quad \Longleftrightarrow \quad \rho(f,f_n) \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty).$$

定理 D.10.2 ($C(X,Y)$ の可分性). (X,d_X) を σ-コンパクト距離空間，(Y,d_Y) を可分距離空間とするとき，$C(X,Y)$ は ρ により可分距離空間となる．

証明.

第一段　三段にわたり，コンパクト集合 $K \subset X$ に対して或る高々可算集合 $D(K) \subset C(X,Y)$ があり，任意の $\epsilon > 0$ と $f \in C(X,Y)$ に対して次を満たす $g \in D(K)$ が存在することを示す:

$$d_Y(f(x), g(x)) < \epsilon, \quad (\forall x \in K). \tag{D.29}$$

$x \in X$ の半径 $\delta > 0$ の開球を $B_\delta(x)$ と書けば，K のコンパクト性より任意の $m \in \mathbf{N}$ に対し

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{k(m)} B_{1/m}(x_i^m)$$

を満たす $\left\{x_1^m, \cdots, x_{k(m)}^m\right\} \subset K$ が存在する．また Y は Lindelöf 性を持つから，任意の $\ell \geq 1$ に対し

$$\mathscr{U}_\ell := \left\{ U_j^\ell \mid \quad U_j^\ell : open,\ \mathrm{diam}\left(U_j^\ell\right) < \frac{1}{\ell};\ j = 1,2,\cdots \right\}, \quad Y = \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j^\ell$$

を満たす開被覆 $\mathscr{U}_\ell$ が存在する．一方で，$f \in C(X,Y)$ は K 上で一様連続であるから

$$C_{m,n} := \left\{ f \in C(X,Y) \mid \quad \text{任意の } x, x' \in K \text{ に対し } d_X(x,x') < \frac{1}{m} \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \frac{1}{n} \right\}$$

とすれば

$$C(X,Y) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} C_{m,n} \tag{D.30}$$

が成り立つ．いま，任意に m, n, ℓ 及び $i = (i_1, \cdots, i_{k(m)}) \in \mathbf{N}^{k(m)}$ を取り

$$D_{m,n,\ell}^i := \left\{ g \in C_{m,n} \mid \quad g(x_j^m) \in U_{i_j}^\ell,\ (\forall j = 1, \cdots, k(m)) \right\}$$

とおけば，例えば $i = (1, \cdots, 1) \in \mathbf{N}^{k(m)}$ と $y \in U_1^\ell$ に対して恒等写像 $g : X \longrightarrow \{y\}$ は $g \in D_{m,n,\ell}^i$ となるから

$$\Phi_{m,n,\ell} \in \prod_{\substack{i \in \mathbf{N}^{k(m)} \\ D_{m,n,\ell}^i \neq \emptyset}} D_{m,n,\ell}^i$$

が存在する．ここで

$$D_{m,n,\ell} \coloneqq \left\{ \Phi_{m,n,\ell}(i) \mid \quad i \in \mathbf{N}^{k(m)} \right\}$$

により $D_{m,n,\ell}$ を定めて

$$D_{m,n} \coloneqq \bigcup_{\ell=1}^{\infty} D_{m,n,\ell}, \quad D(K) \coloneqq \bigcup_{m,n=1}^{\infty} D_{m,n}$$

とおく．

第二段　任意の $f \in C_{m,n}$ と $\epsilon > 0$ に対し或る $g \in D_{m,n}$ が存在して

$$d_Y \left(f(x_j^m), g(x_j^m) \right) < \epsilon, \quad (\forall j = 1, \cdots, k(m))$$

を満たすことを示す．実際，$1/\ell < \epsilon$ となる ℓ に対し $\mathscr{U}_\ell$ は Y の被覆であるから，

$$f(x_j^m) \in U_{i_j}^{\ell}, \quad (\forall j = 1, \cdots, k(m))$$

となる $i = (i_1, \cdots, i_{k(m)}) \in \mathbf{N}^{k(m)}$ が取れる．従って $D_{m,n,\ell}^{i} \neq \emptyset$ であり，

$$g \coloneqq \Phi_{m,n,\ell}(i)$$

に対して

$$d_Y \left(f(x_j^m), g(x_j^m) \right) < \frac{1}{\ell} < \epsilon, \quad (\forall j = 1, \cdots, k(m))$$

が成立する．

第三段　$D(K)$ が (D.29) を満たすことを示す．任意に $f \in C(X, Y)$ と $\epsilon > 0$ を取れば，(D.30) より $1/n < \epsilon/3$ を満たす n 及び或る m に対して $f \in C_{m,n}$ となる．このとき，前段の結果より或る $g \in D_{m,n} \subset D(K)$ が存在して

$$d_Y \left(f(x_j^m), g(x_j^m) \right) < \frac{\epsilon}{3}, \quad (\forall j = 1, \cdots, k(m))$$

を満たす．$f, g \in C_{m,n}$ より任意の $x \in B_{1/m}(x_j^m)$ に対して

$$d_Y \left(f(x), f(x_j^m) \right), \; d_Y \left(g(x), g(x_j^m) \right) < \frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{3}$$

が成り立ち，任意の $x \in K$ は或る $B_{1/m}(x_j^m)$ に含まれるから，

$$\begin{aligned} d_Y \left(f(x), g(x) \right) &\leq d_Y \left(f(x), f(x_j^m) \right) + d_Y \left(f(x_j^m), g(x_j^m) \right) + d_Y \left(g(x), g(x_j^m) \right) \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

が従い (D.29) が出る．

第四段　$(K_n)_{n=1}^{\infty}$ を (D.26) を満たすコンパクト集合列とすれば，各 K_n に対し $D(K_n)$ が存在し，

$$D \coloneqq \bigcup_{n=1}^{\infty} D(K_n)$$

と定めれば D は $C(X,Y)$ で高々可算かつ稠密となる．実際，任意の $\epsilon > 0$ と $f \in C(X,Y)$ に対して，

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} < \frac{\epsilon}{2}$$

を満たす $N \geq 1$ を取れば，

$$\rho_N(f,g) < \frac{\epsilon}{2}$$

を満たす $g \in D(K_N) \subset D$ が存在するから

$$\begin{aligned}\rho(f,g) &= \sum_{n=1}^{N} 2^{-n}\left(1 \wedge \rho_n(f,g)\right) + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n}\left(1 \wedge \rho_n(f,g)\right) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &< \epsilon\end{aligned}$$

が成り立つ．∎

定理 D.10.3 ($C(X,Y)$ の完備性). (X,d_X) を可分な局所コンパクト距離空間，(Y,d_Y) を距離空間，$(f_n)_{n=1}^{\infty}$ を $C(X,Y)$ の列とし，(D.28) を満たす $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ で ρ を定める．このとき各点 $x \in X$ で $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在すれば

$$f \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n \in C(X,Y), \quad \rho(f,f_n) \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \tag{D.31}$$

が成立する．特に (Y,d_Y) が完備なら $C(X,Y)$ は ρ により完備距離空間となる．

証明.

第一段　任意の $j \geq 1$ に対し

$$\rho_j(f_n,f) \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \tag{D.32}$$

が成り立つことを示す．実際，任意の $\epsilon > 0$ に対し或る $N \geq 1$ が存在して

$$\rho_j(f_n,f_m) < \frac{\epsilon}{2} \quad (\forall n,m \geq N)$$

が満たされ，また f の定め方より任意の $x \in K_j$ に対し

$$d_Y(f_m(x),f(x)) < \frac{\epsilon}{2}$$

を満たす $m \geq N$ が存在するから，

$$d_Y(f_n(x),f(x)) \leq d_Y(f_n(x),f_m(x)) + d_Y(f_m(x),f(x)) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \quad (\forall n \geq N)$$

が従い

$$\rho_j(f_n,f) \leq \epsilon, \quad (\forall n \geq N)$$

が成立する．

第二段　f の連続性を示す．任意に $\epsilon > 0$ と $x \in X$ 及び $x \in K_j{}^{\circ}$ を満たす K_j を取れば，(D.32) より

$$\rho_j(f_n, f) < \frac{\epsilon}{3}$$

を満たす $n \geq 1$ が存在する．また f_n の連続性より x の或る開近傍 W が存在して

$$d_Y(f_n(x), f_n(x')) < \frac{\epsilon}{3}, \quad (\forall x' \in W)$$

となるから，

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq d_Y(f(x), f_n(x)) + d_Y(f_n(x), f_n(x')) + d_Y(f_n(x'), f(x')) < \epsilon, \quad (\forall x' \in W \cap K_j{}^{\circ})$$

が従い f の x における連続性が出る．

第三段　(D.31) を示す．任意の $\epsilon > 0$ に対し，

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{-k} < \frac{\epsilon}{2}$$

を満たす $k_0 \geq 1$ が存在する．また (D.32) より或る $n_0 \geq 1$ が存在して

$$\rho_{k_0}(f_n, f) < \frac{\epsilon}{2}, \quad (\forall n \geq n_0)$$

となるから

$$\rho(f_n, f) < \epsilon, \quad (\forall n \geq n_0)$$

が成立する．∎

定理 D.10.4 ($C(X, Y)$ の完備可分性).　(X, d_X) を可分な局所コンパクト距離空間，(Y, d_Y) を完備距離空間とする．このとき (D.28) を満たす $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ で ρ を定めれば，$C(X, Y)$ は ρ により完備可分距離空間となる．

証明.　定理 D.10.2 と定理 D.10.3 より従う．∎

D.10.2　正規族

定義 D.10.5 (正規族).　$(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間，$\mathscr{F} \subset C(X, Y)$ とする．$\mathscr{F}$ の任意の列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ が X で広義一様収束する (収束先が連続写像である必要はない) 部分列を含むとき，$\mathscr{F}$ を正規族 (normal family) という．

定理 D.10.6 (正規族の相対コンパクト性).　(X, d_X) を可分な局所コンパクト距離空間，(Y, d_Y) を距離空間とし，(D.28) を満たす $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ で ρ を定め $C(X, Y)$ に距離位相を導入する．このとき $\mathscr{F}$ を $C(X, Y)$ の部分集合とすれば

$$\mathscr{F} \text{ は正規族である} \iff \mathscr{F} \text{ は相対コンパクトである}$$

が成り立つ．

定義 D.10.7 (一様同程度連続). $(X,d_X),(Y,d_Y)$ を距離空間，$\mathscr{F}\subset C(X,Y)$ とする．任意の $\epsilon>0$ に対し

$$d_X(p,q)<\delta \quad\Longrightarrow\quad d_Y(f(p),f(q))<\epsilon,\ (\forall f\in\mathscr{F})$$

を満たす $\delta>0$ が存在するとき，$\mathscr{F}$ は一様同程度連続である (uniformly equicontinuous) という．

定理 D.10.8 (Ascoli-Arzela). (X,d_X) を可分な局所コンパクト距離空間とし，(Y,d_Y) を距離空間とし，$\mathscr{F}$ を $C(X,Y)$ の部分集合とするとき，

$$\mathscr{F}\text{ が正規族である}\iff\begin{cases}\mathscr{F}\text{ が任意のコンパクト集合 }K\subset X\text{ で一様同程度連続,}\\ \text{各点 }x\in X\text{ で }\overline{\left\{\,f(x)\mid\ \ f\in\mathscr{F}\,\right\}}\text{ がコンパクトである.}\end{cases}\tag{D.33}$$

証明.

第一段　$E=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を X で可算稠密な集合とし，$\mathscr{F}$ が (D.33) 右辺の仮定を満たしているとする．$K\subset X$ を任意のコンパクト集合とすれば，一様同程度連続性より任意の $\epsilon>0$ に対し或る $\delta>0$ が存在して

$$p,q\in K,\ d_X(p,q)<\delta \quad\Longrightarrow\quad \sup_{f\in\mathscr{F}} d_Y(f(p),f(q))<\frac{\epsilon}{3}$$

が成立する．また半径 $\delta/2$ の K の開被覆 $B_1,\cdots,B_M$ が存在し，E は稠密であるから

$$p_j\in B_j\cap E,\quad j=1,\cdots,M$$

を選んでおく．任意に $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathscr{F}$ を取れば，

$$\overline{\left\{\,f_n(x_1)\mid\ \ n=1,2,\cdots\right\}}\subset\overline{\left\{\,f(x)\mid\ \ f\in\mathscr{F}\,\right\}}$$

より $\overline{\left\{f_n(x_1)\right\}_{n=1}^{\infty}}$ はコンパクトであるから収束部分列 $\left\{f_{n(k,1)}(x_1)\right\}_{k=1}^{\infty}$ が存在する．同様に $\left\{f_{n(k,1)}(x_2)\right\}_{k=1}^{\infty}$ の或る部分列 $\left\{f_{n(k,2)}(x_2)\right\}_{k=1}^{\infty}$ は Y で収束し，繰り返せば部分添数系

$$\{n(k,1)\}_{k=1}^{\infty}\supset\{n(k,2)\}_{k=1}^{\infty}\supset\{n(k,3)\}_{k=1}^{\infty}\supset\cdots$$

が構成される．$n(k):=n(k,k),\ (\forall k\geq 1)$ とおけば任意の $x_i\in E$ に対して $\left\{f_{n(k)}(x_i)\right\}_{k=i}^{\infty}$ は収束列 $\left\{f_{n(k,i)}(x_i)\right\}_{k=1}^{\infty}$ の部分列となるから収束し，従って或る $N\geq 1$ が存在して

$$u,v>N \quad\Longrightarrow\quad d_Y\left(f_{n(u)}(p_j),f_{n(v)}(p_j)\right)<\frac{\epsilon}{3},\ (\forall j=1,2,\cdots,M)$$

を満たす．任意に $x\in K$ を取れば或る j で $x\in B_j$ かつ $d_X(x,p_j)<\delta$ となるから，$u,v>N$ なら

$$\begin{aligned}d_Y(f_{n(u)}(x),f_{n(v)}(x))&\leq d_Y\left(f_{n(u)}(x),f_{n(u)}(p_j)\right)+d_Y\left(f_{n(u)}(p_j),f_{n(v)}(p_j)\right)+d_Y\left(f_{n(v)}(p_j),f_{n(v)}(x)\right)\\&<\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}<\epsilon\end{aligned}\tag{D.34}$$

が成り立つ．$\{f_{n(k)}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ は相対コンパクトであるから $\lim_{k\to\infty}f_{n(k)}(x)=:f(x)\in Y$ が存在し，(D.34) より $\left(f_{n(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ は f に K で一様収束するから $\mathscr{F}$ は正規族である．

第二段　X の可分性と定理 D.3.15 より

$$K_n \subset K_{n+1}^{\circ}, \quad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$$

を満たすコンパクト部分集合の列 $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ が存在するから，これに対し (D.27) の距離 ρ を定める．$\mathscr{F}$ が正規族であるなら $\mathscr{F}$ は ρ に関して全有界となるから，任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\mathscr{F} = \bigcup_{i=1}^{N} \left\{ f \in \mathscr{F} \mid \quad \rho(f, f_i) < \epsilon \right\}$$

を満たす $\{f_i\}_{i=1}^{N} \subset \mathscr{F}$ が存在する．$K \subset X$ がコンパクトなら或る n で $K \subset K_n$ となり，或る $\delta > 0$ が存在して

$$p, q \in K,\ d_X(p, q) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_Y(f_i(p), f_i(q)) < \epsilon,\ (\forall i = 1, \cdots, N)$$

が成り立つから，任意の $f \in \mathscr{F}$ に対し $\rho(f, f_i) < \epsilon$ を満たす f_i を取れば

$$\begin{aligned} p, q \in K,\ d_X(p, q) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_Y(f(p), f(q)) &\leq d_Y(f(p), f_i(p)) + d_Y(f_i(p), f_i(q)) + d_Y(f_i(q), f(q)) \\ &\leq 2^n \epsilon + \epsilon + 2^n \epsilon \\ &= (2^{n+1} + 1)\epsilon \end{aligned}$$

となる．すなわち $\mathscr{F}$ は任意のコンパクト部分集合上で一様同程度連続である．また任意の $x \in X$ に対し

$$\Gamma(x) \coloneqq \left\{ f(x) \mid \quad f \in \mathscr{F} \right\}$$

とおくとき，任意の $\{w_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \overline{\Gamma(x)}$ に対して

$$f_n(x) \in \Gamma(x), \quad d_Y(f_n(x), w_n) < \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

を満たす $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ を取れば，$\mathscr{F}$ が正規族であるから収束部分列 $\left(f_{n_k}(x)\right)_{k=1}^{\infty}$ が存在して

$$\lim_{k \to \infty} f_{n_k}(x) = \lim_{k \to \infty} w_{n_k} \in \overline{\Gamma(x)}$$

が成り立つから $\overline{\Gamma(x)}$ はコンパクトである．■

付録 E

位相解析メモ

E.1　位相群

位相線型空間に入る前にいくつかの事柄を位相群に対する言明として済ませておく．この節では，(X, σ_X) を群とするとき，X の要素 x の逆元を

$$-x$$

と書く．

E.1.1　不変性

定義 E.1.1 (位相群).　(X, σ_X) を群とし，$\mathscr{O}_X$ を X 上の位相とする．また $\mathscr{O}_{X\times X}$ を $\mathscr{O}_X$ から作られる $X \times X$ 上の積位相とする．

(tg1)　σ_X が $\mathscr{O}_{X\times X}/\mathscr{O}_X$-連続である．

(tg2)　逆元を対応させる写像，つまり

$$\{\,(x, -x) \mid \quad x \in X\,\}$$

が $\mathscr{O}_X/\mathscr{O}_X$-連続である．

が満たされるとき，

$$((X, \sigma_X)\,, \mathscr{O}_X)$$

の三つ組を**位相群 (topological group)** と呼ぶ．

$((X, \sigma_X)\,, \mathscr{O}_X)$ を位相群とするとき，σ_X は連続であるから，a を X の任意の要素として

$$X \ni x \longmapsto \sigma_X(x, a)$$

なる写像を

$$\sigma_X^a$$

とおけば，これは $\mathscr{O}_X/\mathscr{O}_X$-連続である．さらにこのとき，

$$\sigma_X^{-a}$$

なる写像は σ_X^a の逆写像であって，かつ $\mathscr{O}_X/\mathscr{O}_X$-連続なので，$\sigma_X^a$ は $\mathscr{O}_X$ に関する同相写像である．つまり，**位相群の左偏写像は同相写像である**．また

$$X \ni x \longmapsto -x$$

なる写像も，自分自身が逆写像であるから，**逆元を対応させる写像も同相写像である**．

定理 E.1.2 (位相群の開集合はずらしても開).　$((X, \sigma_X), \mathscr{O}_X)$ を位相群とし，u を X の部分集合とし，x を X の要素とする．このとき

$$u \in \mathscr{O}_X \Longleftrightarrow \left\{ z \mid \quad \exists y \in u \ \left(z = \sigma_X(x, y) \right) \right\} \in \mathscr{O}_X.$$

これは直感的に書き直せば

$$u \in \mathscr{O}_X \Longleftrightarrow x + u \in \mathscr{O}_X$$

が成り立つということである．つまり**開集合 u のすべての要素を x だけずらして得られる集合は開集合である**．

略証.

定義 E.1.3 (不変位相).

定理 E.1.4 (準同型写像は平行移動を保存する).　(X, σ_X) と (Y, σ_Y) を群とし，f を (X, σ_X) から (Y, σ_Y) への準同型とし，x を X の要素として

$$y \overset{\text{def}}{=\!=} f(x)$$

とおく．また u を X の部分集合として

$$v \overset{\text{def}}{=\!=} f * u$$

とおく．このとき

$$f * \{ \zeta \mid \quad \exists \xi \in u \ (\zeta = \sigma_X(x, \xi)) \} = \left\{ z \mid \quad \exists w \in v \ \left(z = \sigma_Y(y, w) \right) \right\}.$$

直感的に書き直せば

$$f * (x + u) = y + v$$

が成り立つということである．つまり **u のすべての要素を x だけずらした集合を準同型写像 f で写せば，v のすべての要素を y だけずらした集合に一致する**．

略証.　z を任意に与えられた集合とする．

$$z \in f * \{ \zeta \mid \quad \exists \xi \in u \ (\zeta = \sigma_X(x, \xi)) \}$$

であるとき，

$$z = f \left(\sigma_X(x, \xi) \right)$$

を満たす u の要素 ξ が取れる．ここで

$$f\left(\sigma_X(x,\xi)\right) = \sigma_Y\left(y, f(\xi)\right)$$

かつ

$$f(\xi) \in v$$

より

$$z \in \left\{ z \mid \quad \exists w \in v \ \left(z = \sigma_Y(y,w) \right) \right\}$$

が従う．逆に

$$z = \sigma_Y(y,w)$$

を満たす v の要素 w が取れるとき，

$$w = f(\xi)$$

を満たす u の要素 ξ を取れば

$$\sigma_Y(y,w) = f\left(\sigma_X(x,\xi)\right)$$

が成り立つので

$$z \in f * \left\{ \zeta \mid \quad \exists \xi \in u \ \left(\zeta = \sigma_X(x,\xi) \right) \right\}$$

が従う． ∎

E.1.2　一様化

定義 E.1.5 (局所基).　$((X,\sigma_X),\mathscr{O}_X)$ を位相群とするとき，(X,σ_X) の単位元の基本近傍系を**局所基 (local base)** と呼ぶ．

定理 E.1.6 (すべての要素が逆元で閉じている局所基が取れる).　$((X,\sigma_X),\mathscr{O}_X)$ を位相群とするとき，X の単位元の基本近傍系を，その任意の要素 b が

$$\forall x \in b \left(-x \in b \right) \tag{E.1}$$

を満たすように取れる．

略証.

第一段　X の単位元を

$$0_X$$

と書く．また

$$i \overset{\text{def}}{=\!=} \{\, (x,-x) \mid \quad x \in X \,\}$$

とおく．いま v を 0_X の任意の近傍とすると，i の $\mathscr{O}_X/\mathscr{O}_X$-連続性から

$$u \subset i^{-1} * v$$

を満たす 0_X の開近傍 u が取れる．ここで

$$w \overset{\text{def}}{=\!=} (i * u) \cap u$$

とおけば，w は 0_X の開近傍であって

$$w \subset v$$

を満たす．また x を w の任意の要素とすれば，

$$x = -y$$

なる u の要素 y が取れるので

$$-x = y \in u$$

が成り立つ．他方で

$$x \in u$$

なので

$$-x \in i * u$$

も成り立ち

$$-x \in (i * u) \cap u$$

が従う．ゆえに w は

$$\forall x \in w \,(\, -x \in w \,)$$

を満たす．

第二段　0_X の近傍の全体を

$$\mathscr{B}$$

とおき，$\mathscr{B}$ の要素 v に対して，v の部分集合で (E.1) を満たす 0_X の近傍の全体，つまり

$$\{\, u \mid \quad u \in \mathscr{B} \wedge u \subset v \wedge \forall x \in u \;(\, -x \in u \,)\,\}$$

なる集合を対応させる関係を h とおくと，上の結果から

$$\forall v \in \mathscr{B} \;(\, h(v) \neq \emptyset \,)$$

が成り立つ．ゆえに定理 C.1.2 より

$$f \in \prod_{v \in \mathscr{B}} h(v)$$

なる集合 f が取れる．そして

$$\left\{ f(v) \right\}_{v \in \mathscr{B}}$$

は 0_X の基本近傍系であり，その全ての要素は (E.1) を満たす．∎

次に述べることは**位相群が一様化可能である**ということである．いま $((X, \sigma_X), \mathscr{O}_X)$ を位相群とし，

$$0_X$$

を (X, σ_X) の単位元とし，

$$\mathscr{B}$$

を 0_X の基本近傍系とし，$\mathscr{B}$ のすべての要素は逆元で閉じているとする．つまり

$$\forall b \in \mathscr{B} \left[\forall x \left(x \in b \Longrightarrow -x \in b \right) \right].$$

ここで $\mathscr{B}$ の要素 b に対して

$$\left\{ (x, y) \in X \times X \mid \quad \sigma_X(-x, y) \in b \right\}$$

で定められる集合を，$\mathscr{B}$ のすべての要素に亘って取ったものの全体を $\mathscr{U}$ と定める．つまり

$$\mathscr{U} \overset{\text{def}}{=} \left\{ u \mid \quad \exists b \in \mathscr{B} \left[\forall z \ \left(z \in u \Longleftrightarrow \exists x, y \in X \ \left(z = (x, y) \land \sigma_X(-x, y) \in b \right) \right) \right] \right\}$$

と定める．すると，

$$\mathscr{V} \overset{\text{def}}{=} \{ v \mid \quad v \subset X \times X \land \exists u \in \mathscr{U} \ (u \subset v) \}$$

で定める $\mathscr{V}$ は X 上の近縁系となる．実際は少し緩めた仮定の下で次のことが言える．

定理 E.1.7 (加法がゼロで連続ならば近縁系が作られる). (X, σ_X) を群とし，0_X を (X, σ_X) の単位元とし，$\mathscr{O}_X$ を X 上の位相とし，σ_X は $(0_X, 0_X)$ において $\mathscr{O}_X$ に関して連続であるとする．また $\mathscr{B}$ を 0_X の基本近傍系とし，$\mathscr{B}$ のすべての要素は逆元で閉じているとする．つまり

$$\forall b \in \mathscr{B} \left[\forall x \left(x \in b \Longrightarrow -x \in b \right) \right].$$

このとき

$$\mathscr{U} \overset{\text{def}}{=} \left\{ u \mid \quad \exists b \in \mathscr{B} \left[\forall z \ \left(z \in u \Longleftrightarrow \exists x, y \in X \ \left(z = (x, y) \land \sigma_X(-x, y) \in b \right) \right) \right] \right\}$$

と定めて

$$\mathscr{V} \overset{\text{def}}{=} \{ v \mid \quad v \subset X \times X \land \exists u \in \mathscr{U} \ (u \subset v) \}$$

と定めると，$\mathscr{V}$ は X 上の近縁系をなす．

略証.

(a)　$\mathscr{B}$ は空ではないので

$$\mathscr{U} \neq \emptyset$$

である．ゆえに

$$\mathscr{V} \neq \emptyset$$

である．また v を $\mathscr{V}$ の任意の要素とすると

$$\left\{(x,y) \mid \quad x \in X \land y \in X \land \sigma_X(-x,y) \in b\right\} \subset v$$

を満たす $\mathscr{B}$ の要素 b が取れるが，X の任意の要素 x に対して

$$\sigma_X(-x,x) = 0_X \in b$$

が成り立つので

$$\{(x,x) \mid \quad x \in X\} \subset v$$

が成立する．

(b)　v を $\mathscr{V}$ の任意の要素とする．このとき

$$\left\{(x,y) \mid \quad x \in X \land y \in X \land \sigma_X(-x,y) \in b\right\} \subset v$$

を満たす $\mathscr{B}$ の要素 b が取れる．

$$u \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{(x,y) \mid \quad x \in X \land y \in X \land \sigma_X(-x,y) \in b\right\}$$

とおけば

$$u^{-1} = \left\{(y,x) \mid \quad x \in X \land y \in X \land \sigma_X(-x,y) \in b\right\}$$

となるが，

$$\sigma_X(-x,y) = -\sigma_X(-y,x)$$

かつ b は逆元で閉じているので

$$u^{-1} = \left\{(y,x) \mid \quad x \in X \land y \in X \land \sigma_X(-y,x) \in b\right\}$$

が成り立つ．ゆえに

$$u^{-1} \in \mathscr{U}$$

が成り立つ．

$$u^{-1} \subset v^{-1}$$

であるから

$$v^{-1} \in \mathscr{V}$$

が従う．

(c)　u と v を $\mathscr{V}$ の要素とする．このとき

$$\left\{(x, y) \mid \quad x \in X \wedge y \in X \wedge \sigma_X(-x, y) \in a\right\} \subset u$$

を満たす $\mathscr{B}$ の要素 a と

$$\left\{(x, y) \mid \quad x \in X \wedge y \in X \wedge \sigma_X(-x, y) \in b\right\} \subset v$$

を満たす $\mathscr{B}$ の要素 b が取れる．このとき

$$c \subset a \cap b$$

なる $\mathscr{B}$ の要素 c が取れて

$$\left\{(x, y) \mid \quad x \in X \wedge y \in X \wedge \sigma_X(-x, y) \in c\right\} \subset u \cap v$$

が成り立つので，

$$u \cap v \subset \mathscr{V}$$

が従う．

(d)　v を $\mathscr{V}$ の任意の要素とする．すると

$$\left\{(x, y) \mid \quad x \in X \wedge y \in X \wedge \sigma_X(-x, y) \in b\right\} \subset v$$

を満たす $\mathscr{B}$ の要素 b が取れて，σ_X は $(0_X, 0_X)$ において連続なので

$$a \times c \subset {\sigma_X}^{-1} * b$$

を満たす $\mathscr{B}$ の要素 a と c が取れる．ここで

$$d \subset a \cap c$$

を満たす $\mathscr{B}$ の要素 d を取り，

$$w \stackrel{\text{def}}{=\!=} \left\{(x, y) \mid \quad x \in X \wedge y \in X \wedge \sigma_X(-x, y) \in d\right\}$$

により $\mathscr{V}$ の要素 w を定める．このとき，x と y と z を X の任意の要素として

$$(x, y) \in w \wedge (y, z) \in w$$

であるとすると，

$$\sigma_X(-x, y) \in d$$

かつ

$$\sigma_X(-y, z) \in d$$

が成り立つので

$$\sigma_X\left(\sigma_X(-x, y), \sigma_X(-y, z)\right) \in b$$

が成立する．他方で σ_X の結合性から

$$\begin{aligned}\sigma_X\left(\sigma_X(-x,y),\sigma_X(-y,z)\right) &= \sigma_X\left(\sigma_X\left(\sigma_X(-x,y),-y\right),z\right)\\ &= \sigma_X\left(\sigma_X\left(-x,\sigma_X(y,-y)\right),z\right)\\ &= \sigma_X(-x,z)\end{aligned}$$

が成り立つので，

$$(x,z)\in v$$

が従う．ゆえに w は

$$w\circ w\subset v$$

を満たす．

(e) r を X 上の関係とし，

$$v\subset r$$

を満たす $\mathscr{V}$ の要素 v が取れるとする．このとき

$$u\subset v$$

なる $\mathscr{U}$ の要素が取れて

$$u\subset r$$

が成り立つので

$$r\in\mathscr{V}$$

が従う． ∎

以上より $\mathscr{V}$ が X 上の近縁系であることが示された．後は $\mathscr{V}$ により導入する一様位相が $\mathscr{O}_X$ と両立することを示せば一様化可能性が言えるが，それは次の定理から従う．

定理 E.1.8 (位相群の位相は局所基で決まる). $\left((X,\sigma_X),\mathscr{O}_X\right)$ を位相群とし，$\mathscr{B}$ を (X,σ_X) の単位元の基本近傍系とする．また x を X の任意の要素とする．このとき，

$$\left\{\sigma_X(x,y)\mid\ \ y\in b\right\}$$

を $\mathscr{B}$ の全ての要素に亘って取ったものの全体は x の基本近傍系である．

言い換えれば，

$$\left\{u\mid\ \ \exists b\in\mathscr{B}\forall z\left[z\in u\Longleftrightarrow\exists y\in b\left(z=\sigma_X(x,y)\right)\right]\right\}$$

が x の基本近傍系であるということである．

略証．　v を x の任意に与えられた近傍とする．また

$$X \ni y \longmapsto \sigma_X(x,y)$$

なる写像を σ_X^x とする．σ_X^x は $\mathscr{O}_X/\mathscr{O}_X$-連続であり，

$$\sigma_X^{x\,-1} * v$$

は (X,σ_X) の単位元を要素に持つので，

$$b \subset \sigma_X^{x\,-1} * v$$

を満たす $\mathscr{B}$ の要素 b が取れる．ところで σ_X^x は開写像でもあるので

$$\sigma_X^x * b$$

は x の近傍である．そして

$$\sigma_X^x * b \subset v$$

が成り立つ．ゆえに，

$$\left\{ \sigma_X^x * b \mid \quad b \in \mathscr{B} \right\}$$

は x の基本近傍系である．書き直せば

$$\left\{ u \mid \quad \exists b \in \mathscr{B} \, \forall z \left[z \in u \Longleftrightarrow \exists y \in b \left(z = \sigma_X(x,y) \right) \right] \right\}$$

は x の基本近傍系である．　■

一様化可能性についての言明をまとめるが，式で見づらくなっているところは上で意訳してある．

定理 E.1.9 (位相群は一様化可能である).　$((X,\sigma_X), \mathscr{O}_X)$ を位相群とし，$\mathscr{B}$ を (X,σ_X) の単位元の基本近傍系とし，

$$\forall b \in \mathscr{B} \left[\forall x \left(x \in b \Longrightarrow -x \in b \right) \right].$$

であるとする．ここで

$$\mathscr{U} \overset{\text{def}}{=} \left\{ u \mid \quad \exists b \in \mathscr{B} \left[\forall x,y \in X \left((x,y) \in u \Longleftrightarrow \sigma_X(-x,y) \in b \right) \right] \right\}$$

とおいて

$$\mathscr{V} \overset{\text{def}}{=} \left\{ v \mid \quad v \subset X \times X \wedge \exists u \in \mathscr{U} \ (u \subset v) \right\}$$

と定めると，$\mathscr{V}$ は X 上の近縁系であって $\mathscr{O}_X$ と両立する．

略証．　$\mathscr{V}$ が X 上の近縁系であることは既に示したので，両立することを示す．x を X の要素とすると，$\mathscr{V}$ で導入する位相において

$$\mathscr{U}_1 \overset{\text{def}}{=} \left\{ u \mid \quad \exists v \in \mathscr{V} \, \forall y \left(y \in u \Longleftrightarrow (x,y) \in v \right) \right\}$$

は x の基本近傍系である．他方で定理 E.1.8 より

$$\mathscr{U}_2 \overset{\text{def}}{=} \left\{ u \mid \quad \exists b \in \mathscr{B} \forall z \left[z \in u \Longleftrightarrow \exists y \in b \left(z = \sigma_X(x,y) \right) \right] \right\}$$

は $\mathscr{O}_X$ に関して x の基本近傍系である．ゆえに

$$\forall s \in \mathscr{U}_1 \exists t \in \mathscr{U}_2 \,(\, t \subset s \,) \tag{E.2}$$

と

$$\forall t \in \mathscr{U}_2 \exists s \in \mathscr{U}_1 \,(\, s \subset t \,) \tag{E.3}$$

が成り立つことを示せば良い．s を $\mathscr{U}_1$ の任意の要素とすれば，

$$s = \{\, z \mid \quad (x,z) \in v \,\}$$

なる $\mathscr{V}$ の要素 v が取れて，更に

$$\left\{ (p,q) \mid \quad p \in X \wedge q \in X \wedge \sigma_X(-p,q) \in b \right\} \subset v$$

を満たす $\mathscr{B}$ の要素 b が取れる．ここで y を b の要素とすれば，

$$\sigma_X\left(-x, \sigma_X\left(x,y\right)\right) = \sigma_X\left(\sigma_X\left(-x,x\right), y\right) = y$$

より

$$\sigma_X\left(-x, \sigma_X\left(x,y\right)\right) \in b$$

が成立する．ゆえに

$$\left(x, \sigma_X\left(x,y\right)\right) \in \left\{ (p,q) \mid \quad p \in X \wedge q \in X \wedge \sigma_X(-p,q) \in b \right\}$$

が従い，

$$\left(x, \sigma_X\left(x,y\right)\right) \in v$$

が従い，

$$\sigma_X\left(x,y\right) \in s$$

が従う．ゆえに

$$t \overset{\text{def}}{=} \left\{ \sigma_X(x,y) \mid \quad y \in b \right\}$$

により $\mathscr{U}_2$ の要素 t を定めれば

$$t \subset s$$

となる．これで (E.2) が得られた．次に t を $\mathscr{U}_2$ の任意の要素とすれば，

$$t = \left\{ \sigma_X(x,y) \mid \quad y \in b \right\}$$

を満たす $\mathscr{B}$ の要素 b が取れる．ここで

$$v \overset{\text{def}}{=} \left\{ (p,q) \mid \quad p \in X \wedge q \in X \wedge \sigma_X(-p,q) \in b \right\}$$

とおいて

$$s \overset{\text{def}}{=\!=} \{\, z \mid \quad (x,z) \in v \,\}$$

により $\mathscr{U}_1$ の要素 s を定める．z を s の任意の要素とすると

$$\sigma_X(-x,z) \in b$$

が成り立つが，ここで

$$y \overset{\text{def}}{=\!=} \sigma_X(-x,z)$$

とおくと，

$$\begin{aligned}
\sigma_X(x,y) &= \sigma_X\left(x, \sigma_X\left(-x,z\right)\right) \\
&= \sigma_X\left(\sigma_X\left(x,-x\right), z\right) \\
&= z
\end{aligned}$$

が成り立ち

$$z \in t$$

が従う．ゆえに

$$s \subset t$$

が従うから (E.3) も得られた． ∎

定理 E.1.10 (位相群は T_0 ならば Tychonoff である). $((X,\sigma_X),\mathscr{O}_X)$ を位相群とするとき，$(X,\mathscr{O}_X)$ は T_0 ならば Tychonoff である．

略証. 定理 E.1.9 より $(X,\mathscr{O}_X)$ は一様化可能であり，定理 D.6.13 より一様位相空間では T_0 であることと Tychonoff であることは同値である． ∎

E.1.3　連続性

定理 E.1.11 (単位元で連続な準同型は一様連続である). $((X,\sigma_X),\mathscr{O}_X)$ と $((Y,\sigma_Y),\mathscr{O}_Y)$ を位相群とし，0_X を (X,σ_X) の単位元とし，f を (X,σ_X) から (Y,σ_Y) への準同型写像とする．また $\mathscr{V}_X$ を定理 E.1.9 の要領で構成する X 上の近縁系とし，$\mathscr{V}_Y$ を定理 E.1.9 の要領で構成する Y 上の近縁系とする．このとき，f は 0_X で連続ならば $\mathscr{V}_X/\mathscr{V}_Y$-一様連続である．

E.1.4　距離化

位相群は一様化可能であるから，定理 D.7.14 より両立する近縁系が可算な基本近縁系を持てば擬距離化可能である．しかも，両立する擬距離として算法と相性の良いものが取れる．

定理 E.1.12 (位相群は第一可算ならば可算な基本近縁系が取れる).

定義 E.1.13 (左不変距離). (X, σ_X) を群とし，d を X 上の擬距離とする．x と y と a を X の任意の要素とするとき

$$d\left(x, y\right) = d\left(\sigma_X\left(a, x\right), \sigma_X\left(a, y\right)\right)$$

が成り立つならば，d を左不変擬距離 **(left invariant pseudo metric)** と呼ぶ.

左不変擬距離とは，X の各要素 a に対して

$$X \ni x \longmapsto \sigma_X(a, x)$$

なる写像を等距写像たらしめる擬距離である.

定理 E.1.14 (左不変擬距離位相は平行移動不変である). (X, σ_X) を群とし，d を X 上の左不変擬距離とし，$\mathscr{O}_X$ を d による擬距離位相とする．このとき，X の任意の部分集合 u と X の任意の要素 x に対して

$$u \in \mathscr{O}_X \Longleftrightarrow \left\{ \sigma_X(x, y) \mid \quad y \in u \right\} \in \mathscr{O}_X.$$

これは直感的に書けば

$$u \in \mathscr{O}_X \Longleftrightarrow x + u \in \mathscr{O}_X$$

が成り立つということである.

略証.

第一段　a と x を X の要素とし，r を正の実数とすると，

$$\left\{ \sigma_X\left(x, y\right) \mid \quad y \in X \wedge d(a, y) < r \right\} = \left\{ z \in X \mid \quad d\left(\sigma_X(x, a), z\right) < r \right\} \tag{E.4}$$

が成り立つ．これを直感的に書けば

$$B_r(a) \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{ y \in X \mid \quad d(a, y) < r \right\}$$

と表すときに

$$x + B_r(a) = B_r(x + a)$$

が成り立つということであるが，実際 y を

$$d(a, y) < r$$

なる X の要素とすれば

$$d\left(\sigma_X(x,a),\sigma_X\left(x,y\right)\right)=d\left(a,y\right)$$

が成り立つので

$$\sigma_X\left(x,y\right)\in B_r(x+a)$$

が成り立つ．逆に z を

$$d\left(\sigma_X(x,a),z\right)<r$$

なる X の要素とすれば，

$$y\overset{\mathrm{def}}{=\!=}\sigma_X(-x,z)$$

とおくと

$$\begin{aligned}d\left(a,y\right)&=d\left(a,\sigma_X(-x,z)\right)\\&=d\left(\sigma_X\left(x,a\right),\sigma_X\left(x,\sigma_X(-x,z)\right)\right)\\&=d\left(\sigma_X\left(x,a\right),z\right)\end{aligned}$$

が成り立つので

$$y\in B_r(a)$$

が従う．また

$$z=\sigma_X\left(x,\sigma_X(-x,z)\right)=\sigma_X\left(x,y\right)$$

であるから

$$z\in x+B_r(a)$$

が従う．以上で (E.4) が得られた．

第二段　(X,d) の開球の全体を $\mathscr{B}$ とおく．つまり $\mathscr{B}$ とは

$$\left\{\,u\mid\quad\exists a\in X\,\exists r\in\mathbf{R}_+\,\forall x\in X\,\left(\,x\in u\Longleftrightarrow d(a,x)<r\,\right)\right\}$$

なる集合である．$\mathscr{B}$ は $\mathscr{O}_X$ の基底であるから，u を開集合とすれば

$$v\subset\mathscr{B}$$

かつ

$$u=\bigcup v$$

を満たす v が取れる．ここで b を v の要素としたときの

$$\left\{\sigma_X\left(x,y\right)\mid\quad y\in b\right\}\in\mathscr{B}$$

なる集合を v のすべての要素に亘って取ったものの全体を w とすると，つまり

$$w\overset{\mathrm{def}}{=\!=}\left\{c\mid\quad\exists b\in v\,\forall z\,\left[\,z\in c\Longleftrightarrow\exists y\in b\,\left(\,z=\sigma_X\left(x,y\right)\,\right)\,\right]\right\}$$

と定めると，(E.4) より

$$w \subset \mathscr{B}$$

が成り立つ．そして

$$\left\{ \sigma_X(x,y) \mid \quad y \in u \right\} = \bigcup w \tag{E.5}$$

が成り立つ．実際，y を u の要素とすれば，

$$y \in b$$

なる v の要素 b が取れて

$$\sigma_X(x,y) \in \{ \sigma_X(x,z) \mid \quad z \in b \}$$

が成り立つから

$$\sigma_X(x,y) \in w$$

が従う．逆に z を w の要素とすれば，y と b で

$$b \in v$$

かつ

$$y \in b$$

かつ

$$z = \sigma_X(x,y)$$

を満たすものが取れて，

$$y \in \bigcup v$$

が成り立つので

$$z \in \left\{ \sigma_X(x,y) \mid \quad y \in u \right\}$$

が従う．ゆえに (E.5) が従う．ゆえに

$$u \in \mathscr{O}_X \Longrightarrow \left\{ \sigma_X(x,y) \mid \quad y \in u \right\} \in \mathscr{O}_X$$

が得られた．

第三段　ここで

$$v \stackrel{\mathrm{def}}{=\!=} \left\{ \sigma_X(x,y) \mid \quad y \in u \right\}$$

とおくと

$$u = \{ \sigma_X(-x,z) \mid \quad z \in v \}$$

が成り立つ．実際 s を u の要素とすれば，

$$\sigma_X(x,s) \in v$$

が成り立つので

$$\sigma_X\left(-x, \sigma_X(x,s)\right) \in \{\, \sigma_X(-x,z) \mid \quad z \in v \,\}$$

が成り立つが，

$$s = \sigma_X\left(-x, \sigma_X(x,s)\right)$$

であるから

$$s \in \{\, \sigma_X(-x,z) \mid \quad z \in v \,\}$$

が従う．逆に z を v の要素とするとき，

$$z = \sigma_X\left(x,y\right)$$

を満たす u の要素 y が取れて

$$\sigma_X\left(-x,z\right) = \sigma_X\left(-x, \sigma_X\left(x,y\right)\right) = y$$

が成り立つので

$$\sigma_X\left(-x,z\right) \in u$$

が従う．ゆえに (E.5) が得られた．ゆえに，前段の結果より

$$v \in \mathscr{O}_X \Longrightarrow \{\, \sigma_X(-x,z) \mid \quad z \in v \,\} \in \mathscr{O}_X$$

が従う．ゆえに

$$\left\{ \sigma_X(x,y) \mid \quad y \in u \right\} \in \mathscr{O}_X \Longrightarrow u \in \mathscr{O}_X$$

が得られた． ∎

位相群においてその位相と両立する距離が左不変であるとは限らない．

両立するが左不変距離でない距離

$((X,\sigma_X), \mathscr{O}_X)$ を位相群とし，左不変距離 d により距離化可能であるとする．ここで

$$(x,y) \longmapsto d(x,y) + d(-x,-y)$$

なる写像を ρ とおくと，ρ は X 上の距離となり $\mathscr{O}_X$ と両立する．ただし σ_X が可換でなければ ρ は左不変であるとは限らない．`https://math.stackexchange.com/questions/3208243/`

ゆえに定理 D.7.14 の結果だけでは両立する距離として左不変であるものが取れるかどうかはわからない．しかし次の定理は距離化可能であれば両立する距離で左不変であるものが取れることを保証する．

定理 E.1.15 (Birkhoff-Kakutani).　位相群は，第一可算ならば左不変距離により距離化可能である．

略証． `https://math.stackexchange.com/questions/1315338/`

E.2　加群

この節では，(X, σ_X) を群とするとき，X の要素 x の逆元を

$$-x$$

と書く．また $\left(R, \sigma_R, \mu_R\right)$ を環とするとき，R の要素 x の σ_R に関する逆元を

$$-x$$

と書き，μ_R に関する逆元を

$$x^{-1}$$

と書く．逆元の書き方が同じだが混乱する危険はおそらく無い．

E.2.1　加群

定義 E.2.1 (加群). (X, σ_X) を Abel 群とし，(R, σ_R, μ_R) を環とし，1_R を μ_R に関する単位元とする．また s を

$$s : R \times X \longrightarrow X$$

なる写像で

- $\forall \alpha, \beta \in R\, \forall x \in X\ \left(s(\sigma_R(\alpha, \beta), x) = \sigma_X(s(\alpha, x), s(\beta, x)) \right)$
- $\forall \alpha \in R\, \forall x, y \in X\ \left(s(\alpha, \sigma_X(x, y)) = \sigma_X(s(\alpha, x), s(\alpha, y)) \right)$
- $\forall \alpha, \beta \in R\, \forall x \in X\ \left(s(\mu_R(\alpha, \beta), x) = s(\alpha, s(\beta, x)) \right)$
- $\forall x \in X\ (s(1_R, x) = x)$

を満たすものとする．このとき

$$\left((X, \sigma_X), (R, \sigma_R, \mu_R), s \right)$$

を**加群 (module)** と呼ぶ．(R, σ_R, μ_R) が体である場合はこの 3 つ組を**線型空間 (vector space)** と呼ぶ.

(X, σ_X) と (R, σ_R, μ_R) がそれぞれ $(\mathbf{R}, +)$ と $(\mathbf{R}, +, \bullet)$ であるとき，s も $\bullet$ とすれば s についての規則は

- $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}\, \forall x \in \mathbf{R}\ \left((\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x \right)$
- $\forall \alpha \in \mathbf{R}\, \forall x, y \in \mathbf{R}\ \left(\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y \right)$
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}\, \forall x \in \mathbf{R}\ \left((\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x) \right)$
- $\forall x \in \mathbf{R}\ (1 \cdot x = x)$

と見やすくなる．s は**スカラ倍 (scalar multiplication)** と呼ばれるが，異なる算法の間に分配則と結合則を既定しているに過ぎない.

定理 E.2.2 (0 倍すればゼロ).　$\big((X,\sigma_X),(R,\sigma_R,\mu_R),s\big)$ を加群とし，0_X を (X,σ_X) の単位元とし，0_R を σ_R に関する単位元とする．このとき，X の任意の要素 x に対して

$$s\left(0_R,x\right)=0_X.$$

略証.　0_R は σ_R に関する単位元なので

$$\sigma_R\left(0_R,0_R\right)=0_R$$

が成り立つ．ゆえに x を X の要素とすると

$$\begin{aligned}
s\left(0_R,x\right)&=s\left(\sigma_R\left(0_R,0_R\right),x\right)\\
&=\sigma_X\left(s\left(0_R,x\right),s\left(0_R,x\right)\right)
\end{aligned}$$

が成り立つ．ゆえに

$$\begin{aligned}
0_X&=\sigma_X\left(-s\left(0_R,x\right),s\left(0_R,x\right)\right)\\
&=\sigma_X\left(-s\left(0_R,x\right),\sigma_X\left(s\left(0_R,x\right),s\left(0_R,x\right)\right)\right)\\
&=\sigma_X\left(\sigma_X\left(-s\left(0_R,x\right),s\left(0_R,x\right)\right),s\left(0_R,x\right)\right)\\
&=\sigma_X\left(0_X,s\left(0_R,x\right)\right)\\
&=s\left(0_R,x\right)
\end{aligned}$$

が成り立つ．　■

定理 E.2.3 (ゼロには何を掛けてもゼロ).　$\big((X,\sigma_X),(R,\sigma_R,\mu_R),s\big)$ を加群とし，0_X を (X,σ_X) の単位元とする．このとき，R の任意の要素 r に対して

$$s\left(r,0_X\right)=0_X.$$

略証.　0_X は (X,σ_X) の単位元なので

$$\sigma_X\left(0_X,0_X\right)=0_X$$

が成り立つ．ゆえに r を R の要素とすると

$$\begin{aligned}
s\left(r,0_X\right)&=s\left(r,\sigma_X\left(0_X,0_X\right)\right)\\
&=\sigma_X\left(s\left(r,0_X\right),s\left(r,0_X\right)\right)
\end{aligned}$$

が成り立つ．ゆえに

$$\begin{aligned}
0_X&=\sigma_X\left(-s\left(r,0_X\right),s\left(r,0_X\right)\right)\\
&=\sigma_X\left(-s\left(r,0_X\right),\sigma_X\left(s\left(r,0_X\right),s\left(r,0_X\right)\right)\right)\\
&=\sigma_X\left(\sigma_X\left(-s\left(r,0_X\right),s\left(r,0_X\right)\right),s\left(r,0_X\right)\right)\\
&=\sigma_X\left(0_X,s\left(r,0_X\right)\right)\\
&=s\left(r,0_X\right)
\end{aligned}$$

が成り立つ．　■

定理 E.2.4 (逆元は -1 倍に等しい). $\left((X,\sigma_X),(R,\sigma_R,\mu_R),s\right)$ を加群とする．R の任意の要素 r と と X の任意の要素 x に対して

$$-s(r,x)=s(-r,x)=s(r,-x).$$

略証. (R,σ_R) の単位元を 0_R と書き，(X,σ_X) の単位元を 0_X と書く．このとき

$$\begin{aligned}\sigma_X\left(s(r,x),s\left(-r,x\right)\right)&=s\left(\sigma_R\left(s,-s\right),x\right)\\&=s\left(0_R,x\right)\\&=0_X\end{aligned}$$

が成り立ち，同様にして

$$\sigma_X\left(s(-r,x),s\left(r,x\right)\right)=0_X$$

も成り立つので

$$-s(r,x)=s\left(-r,x\right)$$

が従う．また

$$\begin{aligned}\sigma_X\left(s(r,x),s\left(r,-x\right)\right)&=s\left(r,\sigma_X(x,-x)\right)\\&=s\left(r,0_X\right)\\&=0_X\end{aligned}$$

が成り立ち，同様にして

$$\sigma_X\left(s(r,-x),s\left(r,x\right)\right)=0_X$$

も成り立つので

$$-s(r,x)=s\left(r,-x\right)$$

が従う． ∎

定義 E.2.5 (加群準同型).

E.2.2　商加群

定理 E.2.6 (商加群).　$\left((X,\sigma_X),\left(R,\sigma_R,\mu_R\right),s\right)$ を加群とし，Ψ を X 上の同値関係とし，

$$X_q \overset{\text{def}}{=\!=} X/\Psi$$

とおく．また q を X から X_q への商写像とする．同値関係が σ_X と s によって不変であるとき，つまり

$$\forall x,y,a,b \in X\ \left[\,(x,a)\in\Psi \land (y,b)\in\Psi \Longrightarrow \left(\sigma_X(x,y),\sigma_X(a,b)\right)\in\Psi\,\right] \tag{E.6}$$

と

$$\forall r \in R\,\forall x,y \in X\ \left[\,(x,y)\in\Psi \Longrightarrow \left(s(r,x),s(r,y)\right)\in\Psi\,\right] \tag{E.7}$$

が満たされているとき，

$$X_q \times X_q \ni \left(q(x),q(y)\right) \longmapsto q\left(\sigma_X(x,y)\right)$$

なる関係を σ_q とし，

$$R \times X_q \ni \left(\alpha,q(x)\right) \longmapsto q\left(s(\alpha,x)\right)$$

なる関係を s_q とすると，

$$\left(\left(X_q,\sigma_q\right),\left(R,\sigma_R,\mu_R\right),s_q\right)$$

は加群である．

σ_q とは

$$\sigma_q \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{\,z \mid\quad \exists x,y\in X\ \left[\,z=\left(\left(q(x),q(y)\right),q\left(\sigma_X(x,y)\right)\right)\,\right]\right\}$$

により定められた集合であり，s_q とは

$$s_q \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{\,z \mid\quad \exists \alpha\in R\,\exists x\in X\ \left[\,z=\left(\left(\alpha,q(x)\right),q\left(s(\alpha,x)\right)\right)\,\right]\right\}$$

により定められた集合である．

略証.

第一段　$\left(X_q,\sigma_q\right)$ が Abel 群であることを示す．

第二段　s_q が

$$s_q : R \times X_q \longrightarrow X_q$$

を満たすことを示す．x と y と z を任意に与えられた集合とし，

$$(x,y)\in s_q \land (x,z)\in s_q$$

とする．このとき R の要素 r と t，および X の要素 a と b で

$$(x,y)=\big((r,q(a)),q(s(r,a))\big)$$

かつ

$$(x,z)=\big((t,q(b)),q(s(t,b))\big)$$

を満たすものが取れる．ここで

$$(r,q(a))=x=(t,q(b))$$

より

$$(a,b)\in\Phi$$

と

$$(s(r,a),s(t,b))=(s(r,a),s(r,b))$$

が成り立つので，(E.7) より

$$(s(r,a),s(t,b))\in\Psi$$

が従う．ゆえに

$$y=q(s(r,a))=q(s(t,b))=z$$

が従う．ゆえに s_q は写像である．また x を $\mathrm{dom}(s_q)$ の要素とすれば

$$(x,y)\in s_q$$

なる集合 y と

$$(x,y)=\big((\alpha,q(z))\,,q\,(s(\alpha,z))\big)$$

を満たす R の要素 α 及び X の要素 z が取れて

$$x\in R\times X_q$$

となる．ゆえに

$$\mathrm{dom}(s_q)\subset R\times X_q$$

である．逆に x を $R\times X_q$ の要素とすれば

$$x=\big(\alpha,q(z)\big)$$

を満たす R の要素 α 及び X の要素 z が取れて，このとき

$$\big((\alpha,q(z))\,,q\,(s(\alpha,z))\big)\in s_q$$

が成り立つので

$$x\in\mathrm{dom}(s_q)$$

となる．以上で

$$\mathrm{dom}(s_q)=R\times X_q$$

が得られた．ゆえに s_q は $R\times X_q$ から X_q への写像である．

第三段　s_q がスカラ倍であることを示す．いま α と β を R の要素とし，x と y を X_q の要素とする．ここで

$$x = q(\eta)$$

と

$$y = q(\xi)$$

を満たす X の要素 η と ξ を取る．まず

$$\begin{aligned} s_q\left(\sigma_R(\alpha,\beta),x\right) &= q\left(s\left(\sigma_R(\alpha,\beta),\eta\right)\right) \\ &= q\left(\sigma_X\left(s(\alpha,\eta),s(\beta,\eta)\right)\right) \\ &= \sigma_q\left(q\left(s(\alpha,\eta)\right),q\left(s(\beta,\eta)\right)\right) \\ &= \sigma_q\left(s_q(\alpha,x),s_q(\beta,x)\right) \end{aligned}$$

が成立する．また

$$\begin{aligned} s_q\left(\alpha,\sigma_q(x,y)\right) &= s_q\left(\alpha,q\left(\sigma_X(\eta,\xi)\right)\right) \\ &= q\left(s\left(\alpha,\sigma_X(\eta,\xi)\right)\right) \\ &= q\left(\sigma_X(s(\alpha,\eta),s(\alpha,\xi))\right) \\ &= \sigma_q\left(q\left(s(\alpha,\eta)\right),q\left(s(\alpha,\xi)\right)\right) \\ &= \sigma_q\left(s_q(\alpha,x),s_q(\alpha,y)\right) \end{aligned}$$

も成立する．また

$$\begin{aligned} s_q\left(\mu_R(\alpha,\beta),x\right) &= q\left(s\left(\mu_R(\alpha,\beta),\eta\right)\right) \\ &= q\left(s\left(\alpha,s(\beta,\eta)\right)\right) \\ &= s_q\left(\alpha,q\left(s(\beta,\eta)\right)\right) \\ &= s_q\left(\alpha,s_q(\beta,x)\right) \end{aligned}$$

も成立する．最後に

$$s_q(1_R,x) = q\left(s(1_R,\eta)\right) = q(\eta) = x$$

も成立する．∎

E.3　位相線型空間

この節では，(X,σ_X) を群とするとき，X の要素 x の逆元を

$$-x$$

と書く．また扱う線型空間はすべて複素数体か実数体をスカラーとして考える．以降現れる Φ は

$$\Phi \overset{\text{def}}{=} \mathbf{C}$$

か

$$\Phi \overset{\text{def}}{=} \mathbf{R}$$

で定められたものと考える．すなわち，$\mathscr{O}_\Phi$ は $\mathscr{O}_\mathbf{C}$ または $\mathscr{O}_\mathbf{R}$ を指す．

E.3.1　線型位相

定義 E.3.1 (位相線型空間).　$((X,\sigma_X),(\Phi,+,\bullet),s)$ を線型空間とし，$\mathscr{O}_X$ を X 上の位相とする．また $\mathscr{O}_{X\times X}$ を $\mathscr{O}_X$ から作られる $X\times X$ 上の積位相とし，$\mathscr{O}_{\Phi\times X}$ を $\mathscr{O}_\Phi$ と $\mathscr{O}_X$ から作られる $\Phi\times X$ 上の積位相とする．

(tvs1)　σ_X が $\mathscr{O}_{X\times X}/\mathscr{O}_X$-連続である．
(tvs2)　s が $\mathscr{O}_{\Phi\times X}/\mathscr{O}_X$-連続である．

が満たされるとき，$\mathscr{O}_X$ を X 上の**線型位相 (vector topology)** と呼び，

$$((X,\sigma_X),(\Phi,+,\bullet),s,\mathscr{O}_X)$$

を**位相線型空間 (topological vector space)** と呼ぶ．

$((X,\sigma_X),(\Phi,+,\bullet),s,\mathscr{O}_X)$ を位相線型空間とするとき，σ_X は連続であるから，a を X の任意の要素として

$$X\ni x\longmapsto\sigma_X(x,a)$$

なる写像を

$$\sigma_X^a$$

とおけば，これは $\mathscr{O}_X/\mathscr{O}_X$-連続である．さらにこのとき，

$$\sigma_X^{-a}$$

なる写像は σ_X^a の逆写像であって，かつ $\mathscr{O}_X/\mathscr{O}_X$-連続なので，$\sigma_X^a$ は $\mathscr{O}_X$ に関する同相写像である．つまり，**位相線型空間の平行移動は同相である**．また，σ_X は可換であるから

$$X\ni x\longmapsto\sigma_X(a,x)$$

なる写像は σ_X^a に一致する．ゆえにこれも同相である．

同様に x を X の任意の要素とすると

$$\Phi\ni\alpha\longmapsto s(\alpha,x)$$

なる写像は $\mathscr{O}_\Phi/\mathscr{O}_X$-連続であり，$\alpha$ を Φ の任意の要素とすると

$$X\ni x\longmapsto s(\alpha,x)\tag{E.8}$$

なる写像は $\mathscr{O}_X/\mathscr{O}_X$-連続である．とくに

$$\alpha\neq 0$$

ならば

$$X\ni x\longmapsto s(\alpha^{-1},x)$$

なる写像は (E.8) の逆写像であり，かつ $\mathscr{O}_X/\mathscr{O}_X$-連続であるから，(E.8) は $\mathscr{O}_X$ に関する同相写像である．つまり，**位相線型空間のスケール変換は，0 倍でない限り同相である**．

定理 E.3.2 (位相線型空間は位相群).　$((X,\sigma_X),(\Phi,+,\bullet),s,\mathscr{O}_X)$ を位相線型空間とするとき，$((X,\sigma_X),\mathscr{O}_X)$ は位相群である．

略証．　定義より σ_X は $\mathscr{O}_{X\times X}/\mathscr{O}_X$-連続である．また定理 E.2.4 より

$$X \ni x \longmapsto -x$$

なる写像は

$$X \ni x \longmapsto s(-1,x)$$

に一致するので $\mathscr{O}_X/\mathscr{O}_X$-連続である．ゆえに $((X,\sigma_X),\mathscr{O}_X)$ は位相群である．∎

定義 E.3.3 (均衡集合).　$((X,\sigma_X),(\Phi,+,\bullet),s)$ を線型空間とし，A を X の部分集合とする．このとき，Φ の任意の要素 α に対して

$$|\alpha| \leq 1 \Longrightarrow \{\, s(\alpha,x) \mid \quad x \in A \,\} \subset A$$

が成り立つならば，A を $((X,\sigma_X),(\Phi,+,\bullet),s)$ の**均衡集合 (balanced set)** と呼ぶ．

A が均衡であることを直感的に書けば

$$\forall \alpha \in \Phi\,(\,|\alpha| \leq 1 \Longrightarrow \alpha A \subset A\,)$$

ということになる．例えば X が $\mathbf{R}^2$ ならば均衡集合とは円のことを指し，X が $\mathbf{R}^3$ ならば球のことを指す．X の任意の要素 x に対して

$$-x = s(-1,x)$$

が成り立つので，均衡とは逆元で閉じていることの拡張概念である．定理 E.1.6 の拡張として次を得る．

定理 E.3.4 (均衡な局所基が取れる).　$((X,\sigma_X),(\Phi,+,\bullet),s,\mathscr{O}_X)$ を位相線型空間とする．このとき，X の零元の基本近傍系で，そのすべての要素が均衡集合であるものが取れる．

略証．　0_X を X の零元とし，v を 0_X の近傍とする．s は $\mathscr{O}_{\Phi\times X}/\mathscr{O}_X$-連続であるから，

$$\{\, \alpha \in \Phi \mid \quad |\alpha| < \delta \,\} \times w \subset s^{-1} * v$$

を満たす正の実数 δ と 0_X の開近傍 w が取れる．ここで

$$u \overset{\mathrm{def}}{=} \bigcup_{\substack{\alpha\in\Phi \\ 0<|\alpha|<\delta}} \{\, s(\alpha,x) \mid \quad x \in w \,\}$$

とおくと，u は 0_X の均衡な開近傍であって，

$$u \subset v$$

を満たす．

step1　u は開集合である．実際

$$0 < |\alpha| < \delta$$

なる α に対して

$$X \ni x \longmapsto s(\alpha, x)$$

なる写像を s^{α} とおけば，s^{α} は $\mathscr{O}_X$ に関して同相であって，かつ

$$s^{\alpha} * w = \{\, s(\alpha, x) \mid \quad x \in w \,\}$$

であるから，

$$\{\, s(\alpha, x) \mid \quad x \in w \,\} \in \mathscr{O}_X$$

が成り立つ．また

$$0_X \in w$$

より

$$0_X \in \{\, s(\alpha, x) \mid \quad x \in w \,\}$$

も成り立つ．ゆえに u は 0_X の開近傍である．

step2　u が $((X, \sigma_X), (\Phi, +, \bullet), s)$ の均衡集合であることを示す．いま β を

$$|\beta| \leq 1$$

なる Φ の要素とし，x を u の要素とする．このとき

$$x = s(\alpha, y)$$

かつ

$$0 < |\alpha| < \delta$$

かつ

$$y \in w$$

を満たす α と y が取れて

$$s(\beta, x) = s(\beta, s(\alpha, y) = s(\beta \cdot \alpha, y)$$

が成り立つ．

$$\beta = 0$$

ならば

$$s(\beta \cdot \alpha, y) = 0_X \in u$$

が成り立ち，

$$\beta \neq 0$$

ならば

$$0 < |\beta \cdot \alpha| < \delta$$

が成り立つので

$$s(\beta \cdot \alpha, y) \in s^{\beta \cdot \alpha} * w \subset u$$

が従う．ゆえに

$$|\beta| \leq 1 \Longrightarrow \left\{ s(\beta, x) \mid \quad x \in u \right\} \subset u$$

が成り立つ．ゆえに u は均衡している．

step3　定理 A.6.5 より

$$u \subset v$$

が成立する．

0_X の近傍の全体を

$$\mathscr{B}$$

とおき，$\mathscr{B}$ の要素 v に対して，v に含まれる均衡な 0_X の近傍の全体，つまり

$$\{ u \mid \quad u \in \mathscr{B} \land u \subset v \land \forall \alpha \in \Phi \forall x \in u \ (|\alpha| \leq 1 \Longrightarrow s(\alpha, x) \in u) \}$$

なる集合を対応させる関係を h とおくと，上の結果から

$$\forall v \in \mathscr{B} \ (h(v) \neq \emptyset)$$

が成り立つ．ゆえに定理 C.1.2 より

$$f \in \prod_{v \in \mathscr{B}} h(v)$$

なる集合 f が取れる．そして

$$\left\{ f(v) \right\}_{v \in \mathscr{B}}$$

は 0_X の基本近傍系であり，その全ての要素は均衡している．■

位相群に対して示した一様位相的性質を位相線型空間に対しても述べ直しておく．

定理 E.3.5 (位相線型空間の位相は局所基で決まる).　$((X, \sigma_X), (\Phi, +, \bullet), s, \mathscr{O}_X)$ を位相線型空間とし，$\mathscr{B}$ を (X, σ_X) の単位元の基本近傍系とする．また x を X の任意の要素とする．このとき，

$$\left\{ \sigma_X(x, y) \mid \quad y \in b \right\}$$

を $\mathscr{B}$ の全ての要素に亘って取ったものの全体は x の基本近傍系である．

言い換えれば，

$$\left\{ u \mid \quad \exists b \in \mathscr{B} \forall z \left[z \in u \Longleftrightarrow \exists y \in b \ \left(z = \sigma_X(x, y) \right) \right] \right\} \tag{E.9}$$

が x の基本近傍系であるということである．

略証． 定理 E.3.2 より $((X,\sigma_X), \mathscr{O}_X)$ は位相群であるから，定理 E.1.8 より (E.9) は x の基本近傍系である． ∎

定理 E.3.6 (位相線型空間は一様化可能である). $((X,\sigma_X), (\Phi,+,\bullet), s, \mathscr{O}_X)$ を位相線型空間とし，$\mathscr{B}$ を (X,σ_X) の単位元の基本近傍系とし，そのすべての要素が均衡しているとする．ここで

$$\mathscr{U} \overset{\mathrm{def}}{=} \left\{ u \mid \quad \exists b \in \mathscr{B} \left[\forall z \left(z \in u \Longleftrightarrow \exists x, y \in X \left(z = (x,y) \wedge \sigma_X(-x,y) \in b \right) \right) \right] \right\}$$

とおいて

$$\mathscr{V} \overset{\mathrm{def}}{=} \{ v \mid \quad v \subset X \times X \wedge \exists u \in \mathscr{U} \ (u \subset v) \}$$

と定めると，$\mathscr{V}$ は X 上の近縁系であって $\mathscr{O}_X$ と両立する．

略証． $\mathscr{B}$ の要素 b は均衡しているので

$$\forall x \in b \, (-x \in b)$$

を満たす．また $((X,\sigma_X), \mathscr{O}_X)$ は位相群であるから，定理 E.1.9 より $\mathscr{V}$ は X 上の近縁系であって $\mathscr{O}_X$ と両立する． ∎

定理 E.3.7 (位相線型空間は T_0 ならば Tychonoff である). $((X,\sigma_X), (\Phi,+,\bullet), s, \mathscr{O}_X)$ を位相線型空間とするとき，$(X, \mathscr{O}_X)$ は T_0 ならば Tychonoff である．

略証． 定理 E.3.6 と定理 D.6.13 から従う ∎

定理 E.3.8 (位相線型空間の連結性). 位相線型空間は連結である．

証明． 零元のみの空間は密着空間であるから連結である．$X \neq \{0\}$ を位相線型空間とするとき，任意に $a, b \in X$ を取り

$$f : [0,1] \ni t \longmapsto a + t(b-a) \in X$$

と定めれば f は $[0,1]$ から X への連続写像である．実際，定理**??**より $\Phi \ni t \longmapsto t(b-a)$ が連続であるから

$$g : [0,1] \ni t \longmapsto t(b-a)$$

は $[0,1]$ の相対位相に関して連続であり，かつ $h : X \ni x \longmapsto a + x$ もまた連続であるから $f = h \circ g$ の連続性が従う．よって X は弧状連結であるから定理 D.9.3 より連結である． ∎

定義 E.3.9 (位相線形空間の有界集合).　X を位相線型空間，E を X の部分集合とする．0 の任意の近傍 V に対し

$$E \subset tV$$

を満たす $t > 0$ が取れるとき，E は有界であるという．

定理 E.3.10.　X を位相線型空間，A, B を部分集合とする．

(1)　$\alpha\overline{A} = \overline{\alpha A}$

(2)　$\alpha(A^{\circ}) = (\alpha A)^{\circ}$

証明.

(1)　$\alpha = 0$ 或は $A = \emptyset$ の場合は両辺が $\{0\}$ 或は $\emptyset$ となって等号が成立する．$\alpha \neq 0$ かつ $A \neq \emptyset$ の場合，

$$\begin{aligned}
x \in \alpha\overline{A} \quad &\Longleftrightarrow \quad \alpha^{-1}x \in \overline{A} \\
&\Longleftrightarrow \quad \left(\alpha^{-1}x + V\right) \cap A \neq \emptyset, \quad (\forall V\colon \text{neighborhood of } 0) \\
&\Longleftrightarrow \quad (x + V) \cap \alpha A \neq \emptyset, \quad (\forall V\colon \text{neighborhood of } 0) \\
&\Longleftrightarrow \quad x \in \overline{\alpha A}
\end{aligned}$$

が成り立つ．

(2)　$\alpha = 0$ 或は $A = \emptyset$ の場合は両辺が $\{0\}$ 或は $\emptyset$ となって等号が成立する．$\alpha \neq 0$ かつ $A \neq \emptyset$ の場合，

$$\begin{aligned}
x \in \alpha(A^{\circ}) \quad &\Longleftrightarrow \quad \alpha^{-1}x \in A^{\circ} \\
&\Longleftrightarrow \quad \exists V\colon \text{neighborhood of } 0, \quad \alpha^{-1}x + V \subset A \\
&\Longleftrightarrow \quad \exists V\colon \text{neighborhood of } 0, \quad x + V \subset \alpha A \\
&\Longleftrightarrow \quad x \in (\alpha A)^{\circ}
\end{aligned}$$

が成り立つ．

定理 E.3.11 (位相線型空間上の同程度連続性).　X, Y を位相線型空間とし，ζ_X, ζ_Y をそれぞれ X, Y の零元とし，$\mathscr{F}$ を X から Y への線型写像の族とする．また $\mathscr{B}_X, \mathscr{B}_Y$ をそれぞれ X, Y の局所基とする．そして

$$\begin{aligned}
\mathscr{V}_X &\overset{\text{def}}{=} \left\{ V \mid \quad \exists B \in \mathscr{B}_X \left(\left\{ (x, y) \mid \quad x, y \in X \wedge y - x \in B \right\} \subset V \right) \right\}, \\
\mathscr{V}_Y &\overset{\text{def}}{=} \left\{ V \mid \quad \exists B \in \mathscr{B}_Y \left(\left\{ (x, y) \mid \quad x, y \in Y \wedge y - x \in B \right\} \subset V \right) \right\}
\end{aligned}$$

で X, Y 上の近縁系を定める．このとき

(a)　$\forall x \in X\, \forall V \in \mathscr{V}_Y\, \exists U \in \mathscr{V}_X\, \forall f \in \mathscr{F}\, \forall y \in X\, \left((x, y) \in U \Longrightarrow (f(x), f(y)) \in V \right)$

(b)　$\forall V \in \mathscr{V}_Y\, \exists U \in \mathscr{V}_X\, \forall f \in \mathscr{F}\, \forall y \in X\, \left((\zeta_X, y) \in U \Longrightarrow (\zeta_Y, f(y)) \in V \right)$

(c)　$\forall B \in \mathscr{B}_Y\, \exists C \in \mathscr{B}_X\, \forall f \in \mathscr{F}\, \left(f * C \subset B \right)$

(d)　$\forall V \in \mathscr{V}_Y\, \exists U \in \mathscr{V}_X\, \forall f \in \mathscr{F}\, \forall x, y \in X\, \left((x, y) \in U \Longrightarrow (f(x), f(y)) \in V \right)$

は全て同値である．

式 (a) は $\mathscr{F}$ が同程度連続であるということを表す．

式 (b) は $\mathscr{F}$ が零元において同程度連続であるということを表す．

式 (c) は $\mathscr{F}$ の要素の像が一様に抑えられることを表す．

式 (d) は $\mathscr{F}$ が一様同程度連続であるということを表す．

この定理は，位相線型空間上の線型写像の集合については零元における同程度連続性から一様同程度連続性が導かれることを主張しているが，同じ主張は位相群で成立する．その場合 $\mathscr{F}$ は群準同型写像の集合とすればよい．

略証． (a) から (b) は直ちに従う．(b) が成立しているとする．B を $\mathscr{B}_Y$ の要素として取り，

$$V_B \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{ (x, y) \mid \quad x, y \in Y \land y - x \in B \right\}$$

とおくと，$\mathscr{V}_X$ の或る要素 U が取れて

$$\begin{aligned} \forall f \in \mathscr{F}\, \forall y \in X \,(\, (\zeta_X, y) \in U &\Longrightarrow (\zeta_Y, f(y)) \in V_B \\ &\Longrightarrow f(y) \in B \,) \end{aligned}$$

が成立する．ゆえに

$$C \subset \left\{ y \mid \quad y \in X \land (\zeta_X, y) \in U \right\}$$

なる $\mathscr{B}_X$ の要素 C を取れば

$$\forall f \in \mathscr{F} \, \left(f * C \subset B \right)$$

が従う．

次に (c) が成立しているとする．V を $\mathscr{V}_Y$ の要素とすると

$$\left\{ (x, y) \mid \quad x, y \in Y \land y - x \in B \right\} \subset V$$

を満たす $\mathscr{B}_Y$ の要素 B が取れる．B に対し

$$\forall f \in \mathscr{F} \, \left(f * C \subset B \right)$$

を満たす $\mathscr{B}_X$ の要素 C が取れるが，

$$U \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{ (x, y) \mid \quad x, y \in X \land y - x \in C \right\}$$

とおくと

$$\begin{aligned} \forall f \in \mathscr{F}\, \forall x, y \in X \,(\, (x, y) \in U &\Longrightarrow y - x \in C \\ &\Longrightarrow f(y) - f(x) \in B \\ &\Longrightarrow (f(x), f(y)) \in V \,) \end{aligned}$$

が従う．一様同程度連続ならば同程度連続であるから定理の主張が得られる． ∎

定理 E.3.12 (同程度連続な写像族の有界性). X, Y を位相線形空間，$\mathscr{F}$ を X から Y への連続線型写像の族とする．$\mathscr{F}$ が同程度連続であるとき，

定理 E.3.13 (Banach-Steinhaus).

定理 E.3.14 (開写像原理).　X

E.3.2　ノルム

$((X, \sigma_X), (\Phi, +, \bullet), s, \mathscr{O}_X)$ を位相線型空間とし，d を X 上の左不変擬距離とするとき，σ_X は可換であるから X の任意の要素 x, y, a に対して

$$d(x, y) = d(\sigma_X(x, a), \sigma_X(y, a))$$

も成立する．つまり d は右不変でもあるから，位相線型空間においては左不変擬距離を**不変擬距離 (invariant pseudo metric)** と呼ぶ．

定義 E.3.15 (F-空間).　$((X, \sigma_X), (\Phi, +, \bullet), s, \mathscr{O}_X)$ を位相線型空間とする．(X, σ_X) に対して不変距離 d が取れて，$(X, \mathscr{O}_X)$ が d により距離化可能であり，かつ (X, d) が完備距離空間であるとき，$((X, \sigma_X), (\Phi, +, \bullet), s, \mathscr{O}_X)$ を **F-空間 (F-space)** と呼ぶ．

$\mathbf{C}$ において絶対値は

$$|\alpha \cdot x| = |\alpha| \cdot |x|$$

および

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

を満たす関数であり，また

$$\mathbf{C} \times \mathbf{C} \ni (x, y) \longmapsto |x - y|$$

なる関係は $\mathbf{C}$ 上の距離である．しかも二元の距離は

$$x - y$$

という差によって定められているため，この距離は不変距離である．一般の線型空間においても絶対値と類似した性質を満たす写像が付与されれば不変 (擬) 距離が定められる．

定義 E.3.16 (ノルム). $((X,\sigma_X),(\Phi,+,\bullet),s)$ を線型空間とし，0_X を (X,σ_X) の単位元とするとき，

- p は X 上の実数値写像である:

$$p : X \longrightarrow \mathbf{R}.$$

- p は絶対斉次的である **(absolutely homogeneous)**:

$$\forall x \in X\, \forall \alpha \in \Phi \left[\, p\,(s(\alpha,x)) = |\alpha| \cdot p(x) \,\right].$$

- p は劣加法的である:

$$\forall x,y \in X \left[\, p\left(\sigma_X\left(x,y\right)\right) \leq p(x) + p(y) \,\right].$$

を満たす集合 p を $((X,\sigma_X),(\Phi,+,\bullet),s)$ のセミノルム **(semi norm)** と呼ぶ．この p が

$$\forall x \in X \left[\, p(x) = 0 \Longrightarrow x = 0_X \,\right]$$

を満たすとき，p を $((X,\sigma_X),(\Phi,+,\bullet),s)$ のノルム **(norm)** と呼ぶ．

$((X,\sigma_X),(\Phi,+,\bullet),s)$ を線型空間とし，p をセミノルムとし，

$$X \times X \ni (x,y) \longmapsto p\left(\sigma_X\left(x,-y\right)\right)$$

なる関係を d と定めると，d は X 上の擬距離である．p がノルムであれば d は距離である．

定理 E.3.17 (絶対斉次的な不変距離はノルムで導入する距離に限られる). ノルムで導入する距離は絶対斉次的か不変であり，かつそのような距離はノルムで導入する距離に限られる．

証明. $\|\cdot\|$ を線型空間 X のノルムとするとき，

$$d(x,y) \overset{\text{def}}{=\!=} \left\|x-y\right\|, \quad (\forall x,y \in X)$$

で距離を定めれば

$$d(x+z,y+z) = \left\|x+z-(y+z)\right\| = \left\|x-y\right\| = d(x,y), \quad d(\alpha x,\alpha y) = \left\|\alpha(x-y)\right\| = |\alpha|\left\|x-y\right\| = |\alpha| d(x,y)$$

が成立する．逆に X 上の距離 d が絶対斉次的かつ平行移動不変であるとき，

$$\|x\| \overset{\text{def}}{=\!=} d(x,0), \quad (\forall x \in X)$$

でノルムが定まる．実際 $\|\alpha x\| = d(\alpha x,0) = |\alpha| d(x,0) = |\alpha|\,\|x\|$ かつ

$$\left\|x+y\right\| = d(x+y,0) = d(x,-y) \leq d(x,0) + d(0,-y) = d(x,0) + d(y,0) = \|x\| + \left\|y\right\|$$

が成立する．∎

定理 E.3.18 (ノルムで導入する距離位相は線型位相). $(X,\|\cdot\|)$ をノルム空間とするとき，$d(x,y) \overset{\text{def}}{=\!=} \left\|x-y\right\|$ で定める距離 d による距離位相は線型位相となる．

証明.　距離位相は T_6 位相空間を定めるから X は定義 E.3.1 の (tvs2) を満たす．また

$$d(x+y, x'+y') \leq d(x+y, x'+y) + d(x'+y, x'+y') = d(x, x') + d(y, y')$$

より加法の連続性が得られ，

$$\begin{aligned} d(\alpha x, \alpha' x') &\leq d(\alpha x, \alpha' x) + d(\alpha' x, \alpha' x') \\ &= d((\alpha - \alpha')x, 0) + |\alpha'| d(x, x') = |\alpha - \alpha'| d(x, 0) + |\alpha'| d(x, x') \end{aligned}$$

よりスカラ倍の連続性も出る． ∎

定理 E.3.19 (ノルム空間において距離的な有界性と位相的な有界性は一致する).　$(X, \|\ \|)$ をノルム空間とすると，X の部分集合のノルムに関する有界性と τ-有界性は一致する．

証明.　任意の $\alpha > 0$, $\delta > 0$ に対し，$B_\delta(0) \overset{\mathrm{def}}{=} \{\, x \in X \mid \quad d(x, 0) < \delta \,\}$ とおけば斉次性より

$$x \in \alpha B_\delta(0) \quad \Longleftrightarrow \quad d\left(\alpha^{-1} x, 0\right) < \delta \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha^{-1} d(x, 0) < \delta \quad \Longleftrightarrow \quad x \in B_{\alpha\delta}(0)$$

が成立する．$\{B_r(0)\}_{r>0}$ は X の局所基となるから，$E \subset X$ が d-有界のときも τ-有界のときも $E \subset B_R(0)$ を満たす $R > 0$ が存在する．E が d-有界集合である場合，任意に 0 の近傍 V を取れば或る $r > 0$ で $B_r(0) \subset V$ となり

$$E \subset B_R(0) \subset B_t(0) = \frac{t}{r} B_r(0) \subset \frac{t}{r} V, \quad (\forall t > R)$$

が成立するから E は τ-有界集合である．逆に E が τ-有界集合であるとき，任意に $x \in X$ を取れば

$$E \subset B_R(0) \subset B_{d(x,0)+R}(x)$$

が成立するから E は d-有界集合である． ∎

E.3.3　局所凸

定理 E.3.20 (ゼロの近傍はスケール変換によって任意の点を併呑する).　$((X, \sigma_X), (\Phi, +, \bullet), s, \mathscr{O}_X)$ を位相線型空間とし，0_X を (X, σ_X) の単位元とし，u を 0_X の近傍とし，x を X の要素とする．このとき

$$s\left(r^{-1}, x\right) \in u$$

を満たす正の実数 r が取れる．

直感的に書き直せば，x に対して

$$\frac{x}{r} \in u$$

を満たす実数 r が取れるということである．

略証．　スケール変換は連続であるから，

$$\Phi \ni \alpha \longmapsto s(\alpha, x)$$

なる写像を φ とおけば

$$\{\, \alpha \in \Phi \mid \quad |\alpha| \leq \delta \,\} \subset \varphi^{-1} * u$$

を満たす正の実数 δ が取れる．

$$r \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{1}{\delta}$$

とおけば

$$s\left(r^{-1}, x\right) \in u$$

が成り立つ． ∎

定義 E.3.21 (併呑集合).　$((X, \sigma_X), (\Phi, +, \bullet), s)$ を線型空間とし，A を X の部分集合とする．X の要素 x が任意に与えられたとき

$$s\left(r^{-1}, x\right) \in A$$

を満たす正の実数 r が取れるならば，A は $((X, \sigma_X), (\Phi, +, \bullet), s)$ の**併呑集合 (absorbing set)** と呼ばれる．

位相線型空間は一様化可能であるが，本節では逆に**線型位相を導入しうる近縁系とはどのようなものであるか**を考察する．そのような近縁系が具えているべき条件を見つけるには，位相線型空間を一様化する近縁系が持つ性質を洗い出せば良い．

いま $((X, \sigma_X), (\Phi, +, \bullet), s, \mathscr{O}_X)$ を位相線型空間とし，0_X を (X, σ_X) の単位元とし，

$$\mathscr{B}$$

を $((X, \sigma_X), \mathscr{O}_X)$ の局所基とし，その任意の要素 b が均衡しているとする．つまり

$$\forall \alpha \in \Phi\, [\, |\alpha| \leq 1 \Longrightarrow \forall x \in b\ (\, s(\alpha, x) \in b\,)\,].$$

また $\mathscr{U}$ と $\mathscr{V}$ を定理 E.3.6 の要領で構成する集合とする．その定め方より $\mathscr{U}$ は $\mathscr{V}$ の基本近縁系である．$\mathscr{V}$ よりは $\mathscr{U}$ の方が具体的に定められているから，$\mathscr{U}$ が具えている性質を見る方が容易い．ちなみに u を $\mathscr{U}$ の要素とすると

$$u = \left\{\, (p, q) \mid \quad p \in X \wedge q \in X \wedge \sigma_X(-p, q) \in b \,\right\}$$

を満たす $\mathscr{B}$ の要素 b が取れるが，このとき

$$b = \{\, x \mid \quad (0_X, x) \in u \,\}$$

が成り立つ．これは

$$u[x] \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{\, y \mid \quad (x, y) \in u \,\right\}$$

なる表記を用いて直感的に書き直せば

$$b = u[0_X]$$

が成り立つということである．つまり，当然のようだが，$\mathscr{U}$ によって $\mathscr{B}$ を復元できるのである．

(a)　u を $\mathscr{U}$ の要素とし，x を X の要素とすると，

$$\left\{ y \mid \quad (x,y) \in u \right\} = \{ \sigma_X(x,z) \mid \quad (0_X,z) \in u \} \tag{E.10}$$

が成立する．これを直感的に書き直せば

$$u[x] = x + u[0_X]$$

となるが，意味としては x の基本近傍系は 0_X の基本近傍系を x だけ平行移動すれば得られるということである．実際，

$$u = \left\{ (p,q) \mid \quad p \in X \land q \in X \land \sigma_X(-p,q) \in b \right\}$$

を満たす $\mathscr{B}$ の要素 b が取れて，y を X の任意の要素とすると

$$\begin{aligned} (x,y) \in u &\Longleftrightarrow \sigma_X\left(-x,y\right) \in b \\ &\Longleftrightarrow \sigma_X\left(-0_X, \sigma_X\left(-x,y\right)\right) \in b \\ &\Longleftrightarrow \left(0_X, \sigma_X\left(-x,y\right)\right) \in u \end{aligned}$$

が成り立ち，さらに

$$y = \sigma_X\left(x, \sigma_X\left(-x,y\right)\right)$$

であるから

$$\left(0_X, \sigma_X\left(-x,y\right)\right) \in u \Longleftrightarrow \exists z \in X \ \left(\ y = \sigma_X\left(x,z\right) \land \left(0_X,z\right) \in u \ \right)$$

も成り立つ．ゆえに (E.10) が得られた．

(b)　u を $\mathscr{U}$ の要素とし，α を

$$\alpha \neq 0$$

なる任意のスカラーとすれば，スケール変換は連続であるから

$$\{ s(\alpha,z) \mid \quad (0_X,z) \in u \}$$

は 0_X の近傍である．この集合は直感的には

$$\alpha \cdot u[0_X]$$

と書けるが，近傍なのだから

$$b \subset \alpha \cdot u[0_X]$$

を満たす $\mathscr{B}$ の要素 b が取れて，

$$v \stackrel{\text{def}}{=\!=} \left\{ (p,q) \mid \quad p \in X \land q \in X \land \sigma_X(-p,q) \in b \right\}$$

により $\mathscr{U}$ の要素 v を定めれば

$$v[0_X] \subset \alpha \cdot u[0_X]$$

が成り立つ．

(c)　u を $\mathscr{U}$ の要素とすれば

$$u[0_X]$$

　は均衡集合である．

(d)　定理 E.3.20 より，$\mathscr{U}$ の要素 u は併呑集合である．つまり X の要素 x が任意に与えられれば

$$x \in r \cdot u[0_X]$$

　を満たす正の実数 r が取れる．

以上で $\mathscr{U}$ の性質を四つ抜き出したが，逆にこれらを全て揃えている基本近縁系が取れるなら，近縁系によって導入する一様位相は線型位相である．

定理 E.3.22 (線型位相を導入する近縁系).　$((X,\sigma_X),(\Phi,+,\bullet),s)$ を線型空間とし，0_X を (X,σ_X) の単位元とし，$\mathscr{V}$ を X 上の近縁系とし，$\mathscr{O}_X$ を $\mathscr{V}$ で導入する X 上の一様位相とする．$\mathscr{V}$ の基本近縁系 $\mathscr{U}$ で

(a)　$\mathscr{U}$ の要素 u と X の要素 x が任意に与えられたときに

$$\left\{\, y \mid \quad (x,y) \in u \,\right\} = \{\, \sigma_X(x,z) \mid \quad (0_X,z) \in u \,\}$$

　が成り立つ．

(b)　$\mathscr{U}$ の要素 u と正の実数 t が任意に与えられたときに

$$\{\, z \mid \quad (0_X,z) \in v \,\} \subset \{\, s(t,z) \mid \quad (0_X,z) \in u \,\}$$

　を満たす $\mathscr{U}$ の要素 v が取れる．

(c)　$\mathscr{U}$ の要素 u と Φ の要素 α が任意に与えられたときに

$$|\alpha| \leq 1 \Longrightarrow \{\, s(\alpha,z) \mid \quad (0_X,z) \in u \,\} \subset \{\, z \mid \quad (0_X,z) \in u \,\}$$

　が成り立つ．

(d)　u を $\mathscr{U}$ の要素とすると，X の要素 x が任意に与えられたときに

$$s\left(r^{-1},x\right) \in u[0_X]$$

　を満たす正の実数 r が取れる．

を満たすものが取れるとき，$((X,\sigma_X),(\Phi,+,\bullet),s,\mathscr{O}_X)$ は位相線型空間である．

ちなみに σ_X が連続であるためには (a) が満たされていれば十分であり，(b) と (c) と (d) は s が連続であるための十分条件である．

略証.

第一段　$\mathscr{U}$ の要素 u と X の要素 a に対し

$$u[a] \overset{\text{def}}{=\!=} \{\, x \mid \quad (a,x) \in u \,\}$$

　と定める．また

$$X \ni x \longmapsto \sigma_X(a,x)$$

なる写像を

$$\sigma_X^a$$

と書く．

第二段　σ_X が $(0_X, 0_X)$ において連続であることを示す．b を 0_X の近傍とすれば

$$u[0_X] \subset b$$

を満たす $\mathscr{U}$ の要素 u と

$$w \circ w \subset u$$

を満たす $\mathscr{U}$ の要素 w が取れる．このとき

$$w[0_X] \times w[0_X] \subset \sigma_X^{-1} * b \tag{E.11}$$

が成立する．実際，x と y を $w[0_X]$ の要素とすると

$$\sigma_X\left(x, y\right) \in \{\, \sigma_X(x, z) \mid \quad (0_X, z) \in w \,\}$$

が成り立ち，(a) より

$$\{\, \sigma_X(x, z) \mid \quad (0_X, z) \in w \,\} = w[x]$$

であるから

$$\left(x, \sigma_X\left(x, y\right)\right) \in w$$

が従う．ゆえにいま

$$(0_X, x) \in w \wedge \left(x, \sigma_X\left(x, y\right)\right) \in w$$

が成り立っているので

$$\left(0_X, \sigma_X\left(x, y\right)\right) \in u$$

が従う．ゆえに

$$\left(x, y\right) \in w[0_X] \times w[0_X] \Longrightarrow \sigma_X\left(x, y\right) \in u[0_X]$$

が成り立つ．ゆえに (E.11) が得られた．ゆえに σ_X は $(0_X, 0_X)$ で連続である．

第三段　x と y を X の要素として，σ_X が (x, y) において連続であることを示す．いま b を $\sigma_X\left(x, y\right)$ の近傍とすると

$$u\left[\sigma_X(x, y)\right] \subset b$$

を満たす $\mathscr{U}$ の要素 u が取れて，また

$$w \circ w \subset u$$

を満たす $\mathscr{U}$ の要素 w も取れる．そして

$$w[x]$$

は x の近傍であり，

$$w[y]$$

は y の近傍である．そして (a) より

$$w[x] = \left\{ \sigma_X(x,p) \mid \quad (0_X, p) \in w \right\}$$

であるから，r を $w[x]$ の要素とすれば

$$r = \sigma_X(x,p)$$

なる X の要素 p が取れて，同様に t を $w[y]$ の要素とすれば

$$t = \sigma_X(y,q)$$

なる X の要素 q が取れる．このとき前段の結果より

$$\left(0_X, \sigma_X\left(p,q\right)\right) \in u$$

が成り立ち，かつ

$$\begin{aligned}
\sigma_X(r,t) &= \sigma_X\left(\sigma_X\left(x,p\right), \sigma_X\left(y,q\right)\right) \\
&= \sigma_X\left(\sigma_X\left(\sigma_X\left(x,p\right), y\right), q\right) \\
&= \sigma_X\left(\sigma_X\left(x, \sigma_X\left(p,y\right)\right), q\right) \\
&= \sigma_X\left(\sigma_X\left(x, \sigma_X\left(y,p\right)\right), q\right) \\
&= \sigma_X\left(\sigma_X\left(\sigma_X\left(x,y\right), p\right), q\right) \\
&= \sigma_X\left(\sigma_X\left(x,y\right), \sigma_X\left(p,q\right)\right)
\end{aligned}$$

が成り立つので

$$\sigma_X(r,t) \in \left\{ \sigma_X\left(\sigma_X\left(x,y\right), z\right) \mid \quad (0_X, z) \in u \right\}$$

が従う．ゆえに

$$\sigma_X(r,t) \in u\left[\sigma_X(x,y)\right]$$

が従う．ゆえに

$$w[x] \times w[y] \subset \sigma_X^{-1} * b$$

が従う．ゆえに σ_X は (x,y) において連続である．

第四段　x を X の要素とし，α を Φ の要素として，s が (α, x) において連続であることを示す．いま b を $s(\alpha, x)$ の近傍とすると

$$u[s(\alpha,x)] \subset b$$

を満たす $\mathscr{U}$ の要素 u が取れて，また

$$w \circ w \subset u$$

を満たす $\mathscr{U}$ の要素 w も取れる．(d) より

$$s\left(r^{-1}, x\right) \in w[0_X]$$

を満たす正の実数 r が取れるので，ここで

$$t \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \frac{r}{1+|\alpha|\cdot r}$$

とおく．このとき

$$|\beta-\alpha| < \frac{1}{r}$$

なる Φ の要素 β に対して

$$\left|\beta-\alpha\right|\cdot r < 1$$

が成り立ち，(c) より $w[0_X]$ は均衡しているので

$$s\left(\beta-\alpha, x\right) = s\left(\left(\beta-\alpha\right)\cdot r, s\left(r^{-1}, x\right)\right) \in w[0_X] \tag{E.12}$$

が従う．一方で y を

$$s\left(t^{-1}, \sigma_X\left(-x, y\right)\right) \in w[0_X]$$

を満たす X の要素とすれば，

$$\left|\beta\cdot t\right| < \frac{1+|\alpha|\cdot r}{r}\cdot\frac{r}{1+|\alpha|\cdot r} = 1$$

と $w[0_X]$ が均衡していることから

$$s\left(\beta, \sigma_X\left(-x, y\right)\right) = s\left(\beta\cdot t, s\left(t^{-1}, \sigma_X\left(-x, y\right)\right)\right) \in w[0_X] \tag{E.13}$$

が従う．ところでこの β と y に対して

$$\sigma_X\left(-s\left(\alpha, x\right), s\left(\beta, y\right)\right) = \sigma_X\left(s\left(\beta-\alpha, x\right), s\left(\beta, \sigma_X\left(-x, y\right)\right)\right)$$

が成り立つので，(E.12) と (E.13) 及び (E.11) から

$$\sigma_X\left(-s\left(\alpha, x\right), s\left(\beta, y\right)\right) \in u[0_X]$$

が従う．ゆえに

$$s\left(\beta, y\right) \in u[s(\alpha, x)]$$

が成立する．以上で

$$\left\{\beta\in\Phi \mid \quad |\beta-\alpha| < \frac{1}{r}\right\}\times\left\{\sigma_X\left(x, \zeta\right) \mid \quad \exists z\in X\left[\left(0_X, z\right)\in w\wedge\zeta = s(t, z)\right]\right\} \subset s^{-1} * b$$

が示されたが，まだ

$$\left\{\sigma_X\left(x, \zeta\right) \mid \quad \exists z\in X\left[\left(0_X, z\right)\in w\wedge\zeta = s(t, z)\right]\right\}$$

が x の近傍であることについて言及していない．実際 (b) より

$$v[0_X] \subset \{\, s(t,z) \mid \quad (0_X, z) \in w \,\}$$

を満たす $\mathscr{U}$ の要素 v が取れて，(a) より

$$v[x] = \{\, \sigma_X(x,z) \mid \quad (0_X, z) \in v \,\}$$

であるから

$$v[x] \subset \{\, \sigma_X\,(x,\zeta) \mid \quad \exists z \in X\, [\,(0_X, z) \in w \wedge \zeta = s(t,z)\,]\,\}$$

が成り立つ．ゆえに

$$\{\, \sigma_X\,(x,\zeta) \mid \quad \exists z \in X\, [\,(0_X, z) \in w \wedge \zeta = s(t,z)\,]\,\}$$

は x の近傍である．ゆえに s は (α, x) で連続である． ▮

定義 E.3.23 (局所凸空間).　全ての要素が凸である局所基が取れる位相線型空間を**局所凸空間 (locally convex space)** と呼ぶ.

定理 E.3.24 (ノルム空間は局所凸).

定義 E.3.25 (Frechet 空間).　局所凸な F-空間を **Frechet 空間**と呼ぶ.

Banach 空間は Frechet 空間である.

定理 E.3.26 (局所凸空間とはセミノルムの族で生成される空間).

E.3.4　商空間

$((X,\sigma_X),(\Phi,+,\bullet),s,\mathscr{O}_X)$ を位相線型空間とし,

$$0_X$$

を (X,σ_X) の単位元とする．また $((N,\sigma_N),(\Phi,+,\bullet),s_N)$ を $((X,\sigma_X),(\Phi,+,\bullet),s)$ の部分空間とする．つまり N は X の部分集合であって，σ_N と s_N は

$$\sigma_N \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \sigma_X|_{N\times N}$$

および

$$s_N \overset{\mathrm{def}}{=\!=} s|_{\Phi\times N}$$

によって定められ

$$((N,\sigma_N),(\Phi,+,\bullet),s_N)$$

は線型空間をなしている．ここで

$$\Psi \overset{\text{def}}{=\!=} \{(x,y) \mid \quad x \in X \land y \in X \land \sigma_X(-x,y) \in N\}$$

とおくと Ψ は X 上の同値関係である．実際

$$\Psi \subset X \times X$$

であり，また

$$0_X \in N$$

であるから

$$\forall x \in X\ [\,(x,x) \in \Psi\,]$$

が満たさる．

$$(x,y) \in \Psi$$

なるとき，

$$\sigma_X(-y,x) = -\sigma_X(-x,y) \in N$$

が成り立つから

$$(y,x) \in \Psi$$

も満たされる．また

$$(x,y) \in \Psi \land (y,z) \in \Psi$$

なるとき，

$$\sigma_X(-x,z) = \sigma_X\left(\sigma_X(-x,y), \sigma_X(-y,z)\right) \in N$$

が成り立つから

$$(x,z) \in \Psi$$

も満たされる．

　ここで Ψ が定理 E.2.6 の (E.6) と (E.7) を満たすことを確認する．x,y,a,b を X の要素とし

$$(x,a) \in \Psi \land (y,b) \in \Psi$$

が成り立っているとする．σ_X の結合律より

$$\begin{aligned}
\sigma_X\left(-\sigma_X(x,y), \sigma_X(a,b)\right) &= \sigma_X\left(\sigma_X(-y,-x), \sigma_X(a,b)\right) \\
&= \sigma_X\left(-y, \sigma_X\left(-x, \sigma_X(a,b)\right)\right) \\
&= \sigma_X\left(-y, \sigma_X\left(\sigma_X(-x,a), b\right)\right) \\
&= \sigma_X\left(-y, \sigma_X\left(b, \sigma_X(-x,a)\right)\right) \\
&= \sigma_X\left(\sigma_X(-y,b), \sigma_X(-x,a)\right)
\end{aligned}$$

が成り立つが，いま

$$\sigma_X(-x,a) \in N \wedge \sigma_X(-y,b) \in N$$

であるから

$$\sigma_X\left(\sigma_X(-y,b), \sigma_X(-x,a)\right) \in N$$

が成り立ち

$$\sigma_X\left(-\sigma_X(x,y), \sigma_X(a,b)\right) \in N$$

が従う．ゆえに

$$\left(\sigma_X(x,y), \sigma_X(a,b)\right) \in \Psi$$

が成り立つ．ゆえに (E.6) は満たされている．

次に α を Φ の要素とし，x, y を X の要素として

$$(x,y) \in \Psi$$

が成り立っているとする．スカラ倍の規則より

$$\begin{aligned}\sigma_X\left(-s(\alpha,x), s(\alpha,y)\right) &= \sigma_X\left(s(\alpha,-x), s(\alpha,y)\right) \\ &= s\left(\alpha, \sigma_X(-x,y)\right)\end{aligned}$$

が成り立つが，いま

$$\sigma_X(-x,y) \in N$$

であるから

$$s\left(\alpha, \sigma_X(-x,y)\right) \in N$$

が成り立ち

$$\sigma_X\left(-s(\alpha,x), s(\alpha,y)\right) \in N$$

が従う．ゆえに

$$\left(s(\alpha,x), s(\alpha,y)\right) \in \Psi$$

が成り立つ．ゆえに (E.7) も満たされている．よって，

$$X_q \stackrel{\mathrm{def}}{=} X/\Psi$$

とおき，q を X から X_q への商写像とし，

$$\sigma_q \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left\{ z \mid \quad \exists x,y \in X \left[z = \left(\left(q(x), q(y)\right), q\left(\sigma_X(x,y)\right)\right) \right] \right\}$$

および

$$s_q \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left\{ z \mid \quad \exists \alpha \in \Phi\, \exists x \in X \left[z = \left(\left(\alpha, q(x)\right), q\left(s(\alpha,x)\right)\right) \right] \right\}$$

と定めると，定理 E.2.6 より

$$\left(\left(X_q,\sigma_q\right),(\Phi,+,\bullet),s_q\right)$$

は線型空間をなす．

本小節の主題は，X_q **上の商位相が線型位相である**ということである．つまり

$$\mathscr{O}_q \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \left\{ u \mid \quad u \subset X_q \wedge q^{-1} * u \in \mathscr{O}_X \right\}$$

とおけば

$$\left(\left(X_q,\sigma_q\right),(\Phi,+,\bullet),s_q,\mathscr{O}_q\right)$$

は位相線型空間である．

略証.

第一段　まず q が開写像であることを示す．実際，v を $\mathscr{O}_X$ の要素とすると

$$q^{-1} * (q * v) = \bigcup_{x\in N} \left\{ z \mid \quad \exists y \in v \ \left(z = \sigma_X(x,y) \right) \right\} \tag{E.14}$$

が成り立つ．これは直感的に書けば

$$q^{-1} * (q * v) = \bigcup_{x\in N} x + v$$

が成り立つということであるが，定理 E.1.2 より

$$\left\{ z \mid \quad \exists y \in v \ \left(z = \sigma_X(x,y) \right) \right\} \in \mathscr{O}_X$$

であるから，(E.14) が示されれば

$$q * v \in \mathscr{O}_q$$

が従う．いま z を $q^{-1} * (q * v)$ の要素とすると

$$q(z) = q(y)$$

を満たす v の要素 y が取れる．すなわち

$$\sigma_X(-y,z) \in N$$

が成り立ち，

$$z = \sigma_X\left(\sigma_X(-y,z),y\right)$$

も成り立つので

$$z \in \bigcup_{x\in N} \left\{ z \mid \quad \exists y \in v \ \left(z = \sigma_X(x,y) \right) \right\}$$

が従う．逆に集合 z が

$$z \in \bigcup_{x\in N} \left\{ z \mid \quad \exists y \in v \ \left(z = \sigma_X(x,y) \right) \right\}$$

であるとき，

$$z = \sigma_X(x, y)$$

を満たす N の要素 x と v の要素 y が取れるが，

$$x = \sigma_X(-y, z) \in N$$

より

$$q(z) = q(y)$$

が成り立つので

$$z \in q^{-1} * (q * v)$$

が従う．以上で (E.14) が示された．

第二段　$\mathscr{B}$ を $((X, \sigma_X), \mathscr{O}_X)$ の局所基で全ての要素が均衡集合であるものとする．また

$$0_q \overset{\text{def}}{=\!=} q(0_X)$$

とおく．このとき

$$\mathscr{B}_q \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{ q * b \mid \quad b \in \mathscr{B} \right\}$$

は $\mathscr{O}_q$ に関して 0_q の基本近傍系である．実際 q は開写像であるから $\mathscr{B}_q$ の要素は全て 0_q の近傍であり，また v を 0_q の近傍とすれば

$$q^{-1} * v$$

は 0_X の近傍であるから

$$b \subset q^{-1} * v$$

を満たす $\mathscr{B}$ の要素 b が取れる．ゆえに

$$q * b \subset v$$

が成り立つ．

第三段　次は X 上に近縁系が取れることを示すが，その前にまず σ_q が $(0_q, 0_q)$ において $\mathscr{O}_q$ に関して連続であることを示す．u を 0_q の近傍とすると

$$q * b \subset u$$

を満たす $\mathscr{B}$ の要素 b が取れる．また σ_X は $(0_X, 0_X)$ において $\mathscr{O}_X$ に関して連続であるから

$$a \times a \subset {\sigma_X}^{-1} * b$$

を満たす $\mathscr{B}$ の要素 a が取れる．このとき x と y を $q * a$ の要素とすれば，

$$x = q(\eta)$$

および

$$y = q(\xi)$$

を満たす a の要素 η と ξ が取れて，

$$\sigma_q(x, y) = q\left(\sigma_X(\eta, \xi)\right) \in q * b$$

が従う．ゆえに

$$(q * a) \times (q * a) \subset {\sigma_q}^{-1} * u$$

が従う．ゆえに σ_q は $(0_q, 0_q)$ において $\mathscr{O}_q$ に関して連続である．
次に $\mathscr{B}_q$ の要素が均衡集合であることを示す．u を $\mathscr{B}_q$ の要素とする．α を

$$|\alpha| \leq 1$$

なる Φ の要素とし，x を u の要素とするとき

$$s_q(\alpha, x) \in u$$

が成り立てば良いが，実際

$$u = q * b$$

を満たす $\mathscr{B}$ の要素 b と

$$x = q(\eta)$$

を満たす b の要素 η を取れば，b が均衡集合であるので

$$s(\alpha, \eta) \in b$$

が成り立ち

$$s_q(\alpha, x) = q\left(s(\alpha, \eta)\right) \in u$$

が従う．ゆえに u は均衡集合である．よっていま

$$\mathscr{U} \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \left\{ u \mid \quad \exists b \in \mathscr{B}_q \, \forall z \left[z \in u \Longleftrightarrow \exists x, y \in X_q \ \left(z = (x, y) \land \sigma_q(-x, y) \in b \right) \right] \right\}$$

と定めて

$$\mathscr{V} \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \left\{ v \mid \quad v \subset X_q \times X_q \land \exists u \in \mathscr{U} \ (u \subset v) \right\}$$

とおくと，定理 E.1.7 より $\mathscr{V}$ は X_q 上の近縁系をなす．

第四段　$\mathscr{U}$ が定理 E.3.22 の四条件を満たすことを確認する．u を $\mathscr{U}$ の任意の要素とし，x を X の任意の要素とする．ここで X の要素 a に対して

$$u[a] \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \{ x \mid \quad (a, x) \in u \}$$

と定める．こうすると，

$$u = \left\{ (x, y) \mid \quad x \in X_q \land y \in X_q \land \sigma_q(-x, y) \in q * b \right\}$$

なる $\mathscr{B}$ の要素 b に対して

$$u[0_q] = q * b$$

が成立する．まず

$$u[x] = \left\{\, y \mid \quad \exists z \left[\, z \in q * b \wedge y = \sigma_q(x, z) \,\right] \right\} \tag{E.15}$$

が成り立つことを示す．これは直感的に書き直せば

$$u[x] = x + u[0_q]$$

が成り立つということである．y を $u[x]$ の要素とすると，

$$z \overset{\text{def}}{=} \sigma_q(-x, y)$$

とおけば

$$z \in q * b$$

かつ

$$y = \sigma_q(x, z)$$

が成り立つので

$$\exists z \left[\, z \in q * b \wedge y = \sigma_q(x, z) \,\right]$$

が従う．逆に y に対して

$$z \in q * b \wedge y = \sigma_q(x, z)$$

を満たす z が取れるならば，

$$\sigma_q(-x, y) = z \in q * b$$

が成り立つので

$$y \in u[x]$$

が従う．以上で (E.15) が得られた．次に正の実数 t が与えられたときに

$$v[0_q] \subset \left\{\, y \mid \quad \exists z \left[\, z \in q * b \wedge y = s_q(t, z) \,\right] \right\} \tag{E.16}$$

を満たす $\mathscr{U}$ の要素 v が取れることを示す．0 倍でないスケール変換は同相写像であるから

$$c \subset \{\, \zeta \mid \quad \exists \xi \in b \ (\, \zeta = s(t, \xi) \,) \,\}$$

を満たす $\mathscr{B}$ の要素 c が取れる．ここで

$$v \overset{\text{def}}{=} \left\{\, (i, j) \mid \quad i \in X_q \wedge j \in X_q \wedge \sigma_q(-i, j) \in q * c \,\right\}$$

とおけば，y を $v[0_q]$ の要素とすると

$$y = q(\zeta)$$

を満たす c の要素 ζ が取れて，

$$\zeta = s(t,\xi)$$

を満たす b の要素 ξ が取れるので，

$$y = q\left(s(t,\xi)\right) = s_q\left(t, q(\xi)\right)$$

が成り立ち

$$\exists z\ \left[\, z \in q*b \wedge y = s_q(t,z) \,\right]$$

が従う．以上で (E.16) も得られた．$u[0_q]$ が均衡していることは前段で示してあるので，最後に

$$s_q(r^{-1},x) \in u[0_q] \tag{E.17}$$

を満たす正の実数 r が取れることを示す．

$$x = q(\eta)$$

を満たす X の要素 η を取れば

$$s(r^{-1},x) \in b$$

を満たす正の実数 r が取れるが，このとき

$$s_q(r^{-1},x) = q\left(s(r^{-1},\eta)\right) \in q*b$$

が成り立つので (E.17) も得られた．

第五段　$\mathscr{V}$ で導入する X 上の一様位相を

$$\mathscr{O}_{\mathscr{V}}$$

として，最後に

$$\mathscr{O}_q = \mathscr{O}_{\mathscr{V}}$$

であることを示すが，これは一致する基本近傍系が取れることを見ればよい．いま x を X_q の要素とする．$\mathscr{U}$ の要素 u に対しての

$$u[x]$$

なる集合を，$\mathscr{U}$ のすべての要素に亘って取ったものの全体，つまり

$$\mathscr{U}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\, w \mid \quad \exists u \in \mathscr{U}\ \left[\, \forall y\ \left(\, y \in w \Longleftrightarrow (x,y) \in u \,\right)\right]\right\}$$

は $\mathscr{O}_{\mathscr{V}}$ に関して x の基本近傍系であるが，この $\mathscr{U}(x)$ が $\mathscr{O}_q$ に関しても x の基本近傍系であることを示す．x に対して

$$x = q(\eta)$$

を満たす X の要素 η を取る．u を $\mathscr{U}$ の要素とすれば

$$u[0_q] = q*b$$

を満たす $\mathscr{B}$ の要素 b が取れるが，このとき定理 E.1.4 と (E.15) より

$$u[x] = q * \left\{ \zeta \mid \quad \exists \xi \in b \ \left(\zeta = \sigma_X(\eta, \xi) \right) \right\}$$

が成り立ち，かつ定理 E.1.2 より

$$\left\{ \zeta \mid \quad \exists \xi \in b \ \left(\zeta = \sigma_X(\eta, \xi) \right) \right\}$$

は $\mathscr{O}_X$ に関して η の近傍であり，q は開写像であるから

$$q * \left\{ \zeta \mid \quad \exists \xi \in b \ \left(\zeta = \sigma_X(\eta, \xi) \right) \right\}$$

は $\mathscr{O}_q$ に関して x の近傍である．ゆえに $\mathscr{U}(x)$ の要素は全て $\mathscr{O}_q$ に関して x の近傍である．また v を x の $\mathscr{O}_q$ に関する近傍とすれば

$$q^{-1} * v$$

は η の $\mathscr{O}_X$ に関する近傍であって，定理 E.1.2 より

$$\left\{ \zeta \mid \quad \exists \xi \in q^{-1} * v \ \left(\zeta = \sigma_X(-\eta, \xi) \right) \right\}$$

は 0_X の $\mathscr{O}_X$ に関する近傍である．ゆえに

$$b \subset \left\{ \zeta \mid \quad \exists \xi \in q^{-1} * v \ \left(\zeta = \sigma_X(-\eta, \xi) \right) \right\}$$

を満たす $\mathscr{B}$ の要素 b が取れて，

$$\left\{ \xi \mid \quad \exists \zeta \in b \ \left(\xi = \sigma_X(\eta, \zeta) \right) \right\} \subset q^{-1} * v$$

が成立する．ここで

$$u \overset{\mathrm{def}}{=\!=} q * b$$

とおけば定理 E.1.4 と (E.15) より

$$u[x] = q * \left\{ \zeta \mid \quad \exists \xi \in b \ \left(\zeta = \sigma_X(\eta, \xi) \right) \right\} \subset v$$

が成立する．以上より $\mathscr{U}(x)$ は $\mathscr{O}_q$ に関しても x の基本近傍系である．

第六段　N が $(X, \mathscr{O}_X)$ の閉集合であるとき，x を X_q の要素とすれば

$$x = q(\eta)$$

を満たす X の要素 η が取れるが，このとき

$$q^{-1} * \{x\} = \left\{ \xi \mid \quad \exists n \in N \ \left(\xi = \sigma_X(\eta, n) \right) \right\}$$

が成立する．N は閉であり，

$$X \ni a \longmapsto \sigma_X(x, a)$$

なる写像は $\mathscr{O}_X$ に関して同相写像であるので，

$$\left\{ y \mid \quad \exists n \in N \ \left(y = \sigma_X(\eta, n) \right) \right\}$$

もまた $(X, \mathscr{O}_X)$ の閉集合である．従って

$$\{x\}$$

は $(X_q, \mathscr{O}_q)$ の閉集合である．ゆえに $(X_q, \mathscr{O}_q)$ は T_1 空間であり，$\mathscr{O}_q$ は一様位相なので $(X_q, \mathscr{O}_q)$ は Tychonoff である．

∎

以上の内容をまとめると

定理 E.3.27 (位相線型空間を部分空間で割ったときの商位相は線型位相である). $((X,\sigma_X),(\Phi,+,\bullet),s,\mathscr{O}_X)$ を位相線型空間とし，$((N,\sigma_N),(\Phi,+,\bullet),s_N)$ を $((X,\sigma_X),(\Phi,+,\bullet),s)$ の部分空間とし，

$$\Psi \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (x,y) \mid \quad x \in X \wedge y \in X \wedge \sigma_X(-x,y) \in N \right\}$$

により X 上の同値関係を定める．そして

$$X_q \stackrel{\text{def}}{=} X/\Psi$$

とおき，q を X から X_q への商写像とし，

$$\sigma_q \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ z \mid \quad \exists x,y \in X \left[z = \left((q(x),q(y)), q\left(\sigma_X(x,y)\right) \right) \right] \right\}$$

および

$$s_q \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ z \mid \quad \exists \alpha \in \Phi \, \exists x \in X \left[z = \left((\alpha, q(x)), q\left(s(\alpha,x)\right) \right) \right] \right\}$$

および

$$\mathscr{O}_q \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ u \mid \quad u \subset X_q \wedge q^{-1} * u \in \mathscr{O}_X \right\}$$

と定める．このとき

- q は $\mathscr{O}_X$ と $\mathscr{O}_q$ に関して開写像である．
- $\left((X_q,\sigma_q),(\Phi,+,\bullet),s_q,\mathscr{O}_q\right)$ は位相線型空間である．
- $\mathscr{B}$ を $((X,\sigma_X),\mathscr{O}_X)$ の局所基とすると，

$$\mathscr{B}_q \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ q * b \mid \quad b \in \mathscr{B} \right\}$$

  で定める $\mathscr{B}_q$ は $\left((X_q,\sigma_q),\mathscr{O}_q\right)$ の局所基である．
- N が $(X,\mathscr{O}_X)$ の閉集合ならば $(X_q,\mathscr{O}_q)$ は Tychonoff である．

$((X,\sigma_X),(\Phi,+,\bullet),s)$ を線型空間とし，ここにセミノルム q が定まっているとき，q で導入する X 上の位相を $\mathscr{O}_X$ とすれば

$$((X,\sigma_X),(\Phi,+,\bullet),s,\mathscr{O}_X)$$

は位相線型空間である．このとき

$$N \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \in X \mid \quad q(x) = 0 \right\}$$

とおくと N は $(X,\mathscr{O}_X)$ の閉集合であって，また

$$\sigma_N \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_X|_{N\times N}$$

および

$$s_N \stackrel{\text{def}}{=} s|_{\Phi\times N}$$

と定めれば

$$((N,\sigma_N),(\Phi,+,\bullet),s_N)$$

は $((X,\sigma_X),(\Phi,+,\bullet),s)$ の線型部分空間である．よってその商位相線型空間が得られるが，

E.3.5　弱位相

定義 E.3.28 (連続双対).　$((X,\sigma_X),(\Phi,+,\bullet),s,\mathscr{O}_X)$ を位相線型空間とする．このとき，X 上の $\mathscr{O}_X/\mathscr{O}_\Phi$-連続な線型形式の全体を $((X,\sigma_X),(\Phi,+,\bullet),s,\mathscr{O}_X)$ の**連続双対 (continuous dual)** と呼ぶ．

$((X,\sigma_X),(\Phi,+,\bullet),s,\mathscr{O}_X)$ を位相線型空間とし，その連続双対を X^* と書く．X^* の要素 f と g に対して

$$x \longmapsto f(x)+g(x)$$

なる写像を対応させる関係を X^* 上の加法として，これを

$$\sigma_{X^*}$$

で定める．また X^* の要素 f と Φ の要素 α に対して

$$x \longmapsto \alpha\cdot f(x)$$

なる写像を対応させる関係を $\Phi\times X^*$ 上のスカラ倍として，これを

$$s^*$$

で定める．すると

$$((X^*,\sigma_{X^*}),(\Phi,+,\bullet),s^*)$$

は線型空間である．この線型空間を $((X,\sigma_X),(\Phi,+,\bullet),s,\mathscr{O}_X)$ の**連続双対空間 (continuous dual space)** と呼ぶ．

定義 E.3.29 (弱位相).　$((X,\sigma_X),(\Phi,+,\bullet),s,\mathscr{O}_X)$ を位相線型空間とし，X^* をその連続双対とする．このとき，X^*-始位相を X 上の**弱位相 (weak topology)** と呼び

$$\boldsymbol{\alpha}(X,X^*)$$

と書く．

定理 E.3.30 (弱位相は局所凸).　$((X,\sigma_X),(\Phi,+,\bullet),s,\mathscr{O}_X)$ を位相線型空間とし，X^* をその連続双対とするとき，

$$((X,\sigma_X),(\Phi,+,\bullet),s,\boldsymbol{\alpha}(X,X^*))$$

は局所凸位相線型空間である．また X^* が X の分離族ならば $(X,\boldsymbol{\alpha}(X,X^*))$ は Hausdorff である．

略証.　X'-始位相と X' で作る近縁系で導入する一様位相は一致する (定理 D.6.8)．その近縁系は定理 E.3.22 の条件を満たすのでその一様位相は線型位相であり，また局所凸でもある．∎

E.3.6　強位相

定理 E.3.31 (連続線型写像は有界集合を有界集合に写す).

$((X, \sigma_X), (\Phi, +, \bullet), s, \mathscr{O}_X)$ を位相線型空間とし，

$$\mathscr{B}$$

をその局所基とする．また

$$((X^*, \sigma_{X^*}), (\Phi, +, \bullet), s^*)$$

を連続双対空間とする．

$$B$$

を $((X, \sigma_X), (\Phi, +, \bullet), s, \mathscr{O}_X)$ の有界集合とするとき，

$$X^* \ni f \longmapsto \sup_{x \in B} |f(x)|$$

なる関係を p_B と定めると p_B は $((X^*, \sigma_{X^*}), (\Phi, +, \bullet), s^*)$ 上のセミノルムとなる．

$$\mathscr{P} \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{ p_B \mid \quad B \text{ は } ((X, \sigma_X), (\Phi, +, \bullet), s, \mathscr{O}_X) \text{ の有界集合} \right\}$$

でセミノルムの集合 $\mathscr{P}$ を定め，$\mathscr{P}$ から作る近縁系で導入する X^* 上の位相を

$$\boldsymbol{\beta}(X^*, X)$$

で表し，これを X^* 上の**強位相 (strong topology)** と呼ぶ．いま X 上にノルム

$$\|\cdot\|_X$$

が定まっていて，このノルムが $\mathscr{O}_X$ と両立しているとする．このとき

$$B \overset{\text{def}}{=\!=} \{ x \in X \mid \quad \|x\|_X \leq 1 \}$$

は $((X, \sigma_X), (\Phi, +, \bullet), s, \mathscr{O}_X)$ の有界集合となるから

$$\left\{ f \in X^* \mid \quad p_B(f) < 1 \right\}$$

も有界な零元の近傍となる ([9]thm1.37)．そして

$$p_B$$

は X^* 上のノルムとなり，$\boldsymbol{\beta}(X^*, X)$ と両立する．この p_B を**作用素ノルム (operator norm)** と呼ぶが，まだ準備が足りていないので証明は後回し (2019/5/9)．つまり作用素ノルムとは，X がノルム空間であるときに

$$f \longmapsto \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$$

なる関係で定められる連続双対 X^* 上のノルムのことである．

付録 F

指数関数

F.1 複素数の代数的性質

C の加法

C 上には加法 **(summation)** と呼ばれる算法 $+$ が定まっている．α と β を複素数とするとき，

$$+(\alpha,\beta)$$

を α と β の和 **(sum)** と呼び，大抵は

$$\alpha+\beta$$

と書く．これは中置記法と呼ばれる．加法は次の性質を満たす:

結合律　α と β と γ を複素数とするとき

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma).$$

可換律　α と β を複素数とするとき

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha.$$

加法に関する逆元の存在　α を複素数とするとき

$$\alpha+\beta=0$$

を満たす複素数 β が取れる．この β を α の加法に関する逆元と呼ぶ．

0 は加法の単位元　α を複素数とするとき

$$\alpha+0=\alpha.$$

定理 F.1.1 (加法に関する逆元はただ一つ).　複素数 α に対して

$$\alpha+\beta=0$$

を満たす複素数 β はただ一つである．

略証.　複素数 β と γ に対して

$$\alpha + \beta = 0$$

かつ

$$\alpha + \gamma = 0$$

が成り立っているとする．このとき

$$\begin{aligned}
\gamma &= \gamma + 0 && \text{0 が単位元であるから} \\
&= \gamma + (\alpha + \beta) && \alpha + \beta = 0 \\
&= (\gamma + \alpha) + \beta && \text{結合律} \\
&= 0 + \beta && \alpha + \gamma = 0 \text{ と可換律} \\
&= \beta
\end{aligned}$$

が成り立つ．∎

α を複素数とするとき，その加法に関する逆元を

$$-\alpha$$

と書く．また

$$a + (-b)$$

なる複素数を

$$a - b$$

とも略記する．

定理 F.1.2 (和の逆元は逆元の和).　a と b を複素数とするとき

$$-(a + b) = (-b) + (-a).$$

略証.　a と b を複素数とするとき，

$$\begin{aligned}
(a + b) + ((-b) + (-a)) &= (a + (b + (-b))) + (-a) \\
&= (a + 0) + (-a) \\
&= a + (-a) \\
&= 0
\end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned}
((-b) + (-a)) + (a + b) &= ((-b) + ((-a) + a)) + b \\
&= ((-b) + 0) + b \\
&= (-b) + b \\
&= 0
\end{aligned}$$

が成り立つので

$$-(a+b) = (-b) + (-a)$$

が得られた. ∎

C の乗法

C 上には**乗法 (multiplication)** と呼ばれる算法 $\cdot$ が定まっている. α と β を複素数とするとき,

$$\cdot(\alpha, \beta)$$

を α と β の**積 (product)** と呼び, 大抵は

$$\alpha \cdot \beta$$

と書く. これも中置記法である. 乗法は次の性質を満たす:

結合律　α と β と γ を複素数とするとき

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma).$$

可換律　α と β を複素数とするとき

$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha.$$

乗法に関する逆元の存在　α を複素数とするとき, $\alpha \neq 0$ ならば

$$\alpha \cdot \beta = 1$$

を満たす複素数 β が取れる. この β を α の乗法に関する逆元と呼ぶ.

1 は乗法の単位元　α を複素数とするとき

$$\alpha \cdot 1 = \alpha.$$

左分配律　α と β と γ を複素数とするとき

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma.$$

右分配律　α と β と γ を複素数とするとき

$$(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma.$$

演算の順序は括弧内を優先するが, 括弧が付いてない場合は乗法優先である.

常識であるが **C** には

$$1 + \mathbf{i}^2 = 0$$

を満たす複素数

$$\mathbf{i}$$

が存在している．これは**虚数単位**と呼ばれ

$$\sqrt{-1}$$

とも書かれる．$\mathbf{i}$ は複素数の表示において見慣れたものであるが，z を複素数とすれば

$$z = x + \mathbf{i} \cdot y$$

を満たす $\mathbf{R}^2$ の要素 (x, y) が唯一つ取れる．さらに言えば

$$\mathbf{R}^2 \ni (x, y) \longmapsto x + \mathbf{i} \cdot y \in \mathbf{C}$$

なる関係は $\mathbf{R}^2$ から $\mathbf{C}$ への全単射であるのだが，このことは複素数を構成する際に導かれる定理であるが，ここではその証明まで踏み込むことは出来ない．

複素数 z が与えられたときに

$$z = x + \mathbf{i} \cdot y$$

を満たす x を対応させる写像を

$$\mathrm{Re}$$

と書いて，

$$\mathrm{Re}\, z$$

のことを z の**実部 (real part)** と呼ぶ．また z に対して y を対応させる写像を

$$\mathrm{Im}$$

と書いて，

$$\mathrm{Im}\, z$$

のことを z の**虚部 (imaginary part)** と呼ぶ．

複素数 z に対して

$$\mathrm{Re}\, z - \mathbf{i} \cdot \mathrm{Im}\, z$$

なる複素数を z の**複素共役 (complex conjugate)** と呼び，これを

$$\overline{z}$$

と表記する．

ところで暗黙の裡に $\mathbf{R}$ は $\mathbf{C}$ の部分集合であるとして扱ってきたが，それが成り立つように数を構成していない文献が案外多いので注意が必要である．特に $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$ と考えるのは不正確で，複素数と実数の順序対には一対一の対応はあるが別物である．$\mathbf{R}$ は $\mathbf{R}^2$ の部分集合ではない．

$(\mathbf{C}, +, \cdot\,)$ の組は複素数体と呼ばれる閉じた世界である．$\mathbf{R}$ も $\mathbf{C}$ と同様に加法と乗法で閉じていて，つまり $(\mathbf{R}, +, \cdot\,)$ も実数体と呼ばれる体であるので，実数同士の演算は必ず実数である．

定理 F.1.3 (0 は乗法に関して逆元を持たない).　任意の複素数 α に対して

$$0 \cdot \alpha = 0.$$

略証． $0 = 0 + 0$ と右分配律から

$$0 \cdot \alpha = (0 + 0) \cdot \alpha = 0 \cdot \alpha + 0 \cdot \alpha$$

が成り立つ．両辺に $-(0 \cdot \alpha)$ と足せば

$$\begin{aligned} 0 &= -(0 \cdot \alpha) + 0 \cdot \alpha \\ &= -(0 \cdot \alpha) + (0 \cdot \alpha + 0 \cdot \alpha) \\ &= (-(0 \cdot \alpha) + 0 \cdot \alpha) + 0 \cdot \alpha \\ &= 0 + 0 \cdot \alpha \\ &= 0 \cdot \alpha \end{aligned}$$

が成り立つ． ∎

定理 F.1.4 (乗法に関する逆元が取れるなら 0 でない)． α を複素数とするとき

$$\exists \beta \in \mathbf{C} \, (\, \alpha \cdot \beta = 1 \,) \Longrightarrow \alpha \neq 0.$$

略証． 前定理より

$$\alpha = 0 \Longrightarrow \forall \beta \in \mathbf{C} \, (\, \alpha \cdot \beta = 0 \,),$$

すなわち

$$\alpha = 0 \Longrightarrow \forall \beta \in \mathbf{C} \, (\, \alpha \cdot \beta \neq 1 \,)$$

が成り立つ．この対偶を取れば

$$\exists \beta \in \mathbf{C} \, (\, \alpha \cdot \beta = 1 \,) \Longrightarrow \alpha \neq 0$$

が得られる． ∎

定理 F.1.5 (乗法に関する逆元はただ一つ)． 0 でない複素数 α に対して

$$\alpha \cdot \beta = 0$$

を満たす複素数 β はただ一つである．

略証． 複素数 β と γ に対して

$$\alpha \cdot \beta = 0$$

かつ

$$\alpha \cdot \gamma = 0$$

が成り立っているとする．このとき

$$
\begin{aligned}
\gamma &= \gamma \cdot 1 && \text{1 が単位元であるから} \\
&= \gamma \cdot (\alpha \cdot \beta) && \alpha \cdot \beta = 1 \\
&= (\gamma \cdot \alpha) \cdot \beta && \text{結合律} \\
&= 1 \cdot \beta && \alpha \cdot \gamma = 1 \text{ と可換律} \\
&= \beta
\end{aligned}
$$

が成り立つ． ∎

α を 0 でない複素数とするとき，その乗法に関する逆元を

$$\alpha^{-1}$$

や

$$1/\alpha$$

や

$$\frac{1}{\alpha}$$

と書く．また $\alpha \cdot \beta$ の加法に関する逆元を

$$-\alpha \cdot \beta$$

と書く．紛らわしいが，これと $(-\alpha) \cdot \beta$ とは結果としては同じ数であるが意味としては別である．$-\alpha \cdot \beta$ は $\alpha \cdot \beta$ なる複素数の加法に関する逆元であり，後者は $-\alpha$ と β の積である．

定理 F.1.6 (積の逆元は逆元の積).　a と b を複素数とするとき

$$-a \cdot b = (-a) \cdot b = a \cdot (-b).$$

略証.　a と b を複素数とするとき，

$$
\begin{aligned}
a \cdot b + (-a) \cdot b &= (a + (-a)) \cdot b \\
&= 0 \cdot b \\
&= 0
\end{aligned}
$$

かつ

$$
\begin{aligned}
(-a) \cdot b + a \cdot b &= ((-a) + a) \cdot b \\
&= 0 \cdot b \\
&= 0
\end{aligned}
$$

が成り立つので

$$-(a \cdot b) = (-a) \cdot b$$

が得られた．積の可換律より

$$-a \cdot b = -(b \cdot a) = (-b) \cdot a = a \cdot (-b)$$

が得られた． ∎

定理 F.1.7 (0 でない数同士の積は乗法に関して逆元を持つ).　a と b を 0 でない複素数とするとき，$a \cdot b$ も 0 ではない．またこのとき

$$(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}.$$

略証.　a と b を 0 でない複素数とするとき，

$$\begin{aligned}(a \cdot b) \cdot (b^{-1} \cdot a^{-1}) &= \left[a \cdot (b \cdot b^{-1})\right] \cdot a^{-1} \\ &= (a \cdot 1) \cdot a^{-1} \\ &= a \cdot a^{-1} \\ &= 1\end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned}(b^{-1} \cdot a^{-1}) \cdot (a \cdot b) &= \left[b^{-1} \cdot (a^{-1} \cdot a)\right] \cdot b \\ &= (b^{-1} \cdot 1) \cdot b \\ &= b^{-1} \cdot b \\ &= 1\end{aligned}$$

が成り立つので

$$(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$$

が得られた．また定理 F.1.4 から

$$a \cdot b \neq 0$$

も従う． ∎

定理 F.1.8 (積の共役は共役の積).　a と b を複素数とするとき，

$$\overline{a \cdot b} = \overline{a} \cdot \overline{b}.$$

略証.　$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を実数とするとき，

$$\begin{aligned}(\alpha + \mathbf{i} \cdot \beta) \cdot (\gamma + \mathbf{i} \cdot \delta) &= (\alpha + \mathbf{i} \cdot \beta) \cdot \gamma + (\alpha + \mathbf{i} \cdot \beta) \cdot (\mathbf{i} \cdot \delta) \\ &= \left[\alpha \cdot \gamma + \mathbf{i} \cdot (\beta \cdot \gamma)\right] + \left[\mathbf{i} \cdot (\alpha \cdot \delta) + (-1) \cdot (\beta \cdot \delta)\right] \\ &= \left[\alpha \cdot \gamma + (-1) \cdot (\beta \cdot \delta)\right] + \left[\mathbf{i} \cdot (\beta \cdot \gamma) + \mathbf{i} \cdot (\alpha \cdot \delta)\right] \\ &= (\alpha \cdot \gamma - \beta \cdot \delta) + \mathbf{i} \cdot (\beta \cdot \gamma + \alpha \cdot \delta)\end{aligned}$$

が成立する．よって

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (\operatorname{Re} a + \mathbf{i} \cdot \operatorname{Im} a) \cdot (\operatorname{Re} b + \mathbf{i} \cdot \operatorname{Im} b) \\ &= (\operatorname{Re} a \cdot \operatorname{Re} b - \operatorname{Im} a \cdot \operatorname{Im} b) + \mathbf{i} \cdot (\operatorname{Im} a \cdot \operatorname{Re} b + \operatorname{Re} a \cdot \operatorname{Im} b) \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} \overline{a} \cdot \overline{b} &= (\operatorname{Re} a - \mathbf{i} \cdot \operatorname{Im} a) \cdot (\operatorname{Re} b - \mathbf{i} \cdot \operatorname{Im} b) \\ &= (\operatorname{Re} a + \mathbf{i} \cdot (-\operatorname{Im} a)) \cdot (\operatorname{Re} b + \mathbf{i} \cdot (-\operatorname{Im} b)) \\ &= (\operatorname{Re} a \cdot \operatorname{Re} b - \operatorname{Im} a \cdot \operatorname{Im} b) + \mathbf{i} \cdot [(-\operatorname{Im} a) \cdot \operatorname{Re} b + \operatorname{Re} a \cdot (-\operatorname{Im} b)] \\ &= (\operatorname{Re} a \cdot \operatorname{Re} b - \operatorname{Im} a \cdot \operatorname{Im} b) + \mathbf{i} \cdot [-(\operatorname{Im} a \cdot \operatorname{Re} b + \operatorname{Re} a \cdot \operatorname{Im} b)] \\ &= (\operatorname{Re} a \cdot \operatorname{Re} b - \operatorname{Im} a \cdot \operatorname{Im} b) - \mathbf{i} \cdot (\operatorname{Im} a \cdot \operatorname{Re} b + \operatorname{Re} a \cdot \operatorname{Im} b) \end{aligned}$$

が成立する．よって

$$\overline{a \cdot b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$$

である． ∎

z を複素数とするとき，z の整数乗を定義する．まずは

$$z^0 \overset{\text{def}}{=\!=} 1$$

と定め，次に

$$z^1 \overset{\text{def}}{=\!=} z$$

と定め，次に

$$z^2 \overset{\text{def}}{=\!=} z \cdot z$$

と定め，次も同様に

$$z^3 \overset{\text{def}}{=\!=} (z \cdot z) \cdot z = z^2 \cdot z$$

と定める．この調子で

$$\begin{aligned} z^4 &\overset{\text{def}}{=\!=} z^3 \cdot z \\ z^5 &\overset{\text{def}}{=\!=} z^4 \cdot z \\ z^6 &\overset{\text{def}}{=\!=} z^5 \cdot z \end{aligned}$$

と定めていくと，任意の自然数 n に対して

$$z^n$$

なる複素数が得られる．累乗の厳密な定義は帰納法を使った再帰的手法を用いるがここでは直感的な導入で終える．ただし一つ言っておくが，n を自然数とするとき

$$z^{n+1} = z^n \cdot z$$

は定理である．

n を負の整数とするとき，$-n$ は自然数であるから

$$z^{-n}$$

なる複素数は既に得られている．そこで

$$z^n \overset{\mathrm{def}}{=\!=} (z^{-n})^{-1}$$

により z の n 乗を定める．

定理 F.1.9 (積の累乗は累乗の積).　a と b を複素数とし，n を整数とするとき，

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

略証．　まず

$$1 = (a \cdot b)^0 = a^0 = b^0$$

より

$$(a \cdot b)^0 = a^0 \cdot b^0$$

が成り立つ．また n を自然数とするとき

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

が成り立っているとすると，

$$\begin{aligned}
(a \cdot b)^{n+1} &= (a \cdot b)^n \cdot (a \cdot b) \\
&= (a^n \cdot b^n) \cdot (a \cdot b) \\
&= (a^n \cdot b^n) \cdot (b \cdot a) \\
&= [a^n \cdot (b^n \cdot b)] \cdot a \\
&= (a^n \cdot b^{n+1}) \cdot a \\
&= (b^{n+1} \cdot a^n) \cdot a \\
&= b^{n+1} \cdot (a^n \cdot a) \\
&= b^{n+1} \cdot a^{n+1} \\
&= a^{n+1} \cdot b^{n+1}
\end{aligned}$$

が成立する．ゆえに数学的帰納法の原理より任意の自然数 n で

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

が成立する．n を負の整数とするとき，

$$(a \cdot b)^{-n} = a^{-n} \cdot b^{-n}$$

が成り立つから

$$
\begin{aligned}
(a \cdot b)^n &= ((a \cdot b)^n)^{-1} \\
&= (a^{-n} \cdot b^{-n})^{-1} \\
&= (b^{-n})^{-1} \cdot (a^{-n})^{-1} \\
&= b^n \cdot a^n \\
&= a^n \cdot b^n
\end{aligned}
$$

が従う．■

定理 F.1.10 (指数法則 (指数が和の場合)).　z を複素数とし，n と m を整数とするとき，

$$z^{n+m} = z^n \cdot z^m.$$

略証．

第一段　n を整数とするとき

$$z^n \cdot z^{-n} = 1$$

が成り立つ．実際，n が 0 なら

$$z^0 = z^{-0} = 1$$

が成り立つ．n が正の自然数なら，累乗の定め方より

$$z^{-n} = (z^n)^{-1}$$

であるから

$$z^n \cdot z^{-n} = z^n \cdot (z^n)^{-1} = 1$$

が成り立つ．n が負の整数なら，累乗の定め方より

$$z^n = (z^{-n})^{-1}$$

であるから

$$z^n \cdot z^{-n} = (z^{-n})^{-1} \cdot z^{-n} = 1$$

が成り立つ．

第二段　n を整数とするとき

$$z^{n+1} = z^n \cdot z$$

が成り立つ．n が自然数であるときはこれは定理であるが，n が負の整数であるとき，

$$n + 1 \leq 0$$

であるから

$$-(n+1) \in \omega$$

であり，よって

$$z^{-(n+1)+1} = z^{-(n+1)} \cdot z$$

が成立する．ここで

$$z^{-(n+1)+1} = z^{(-n)+((-1)+1)} = z^{-n}$$

より

$$z^{-n} = z^{-(n+1)} \cdot z$$

が成立し，両辺に $z^n \cdot z^{n+1}$ を掛ければ前段の結果より

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z^{n+1} \cdot (z^n \cdot z^{-n}) \\ &= (z^{n+1} \cdot z^n) \cdot z^{-n} \\ &= (z^n \cdot z^{n+1}) \cdot z^{-n} \\ &= (z^n \cdot z^{n+1}) \cdot (z^{-(n+1)} \cdot z) \\ &= \left[z^n \cdot (z^{n+1} \cdot z^{-(n+1)})\right] \cdot z \\ &= z^n \cdot z \end{aligned}$$

が従う．

第三段　n を整数とし，m を自然数とするとき，

$$z^{n+m} = z^n \cdot z^m$$

が成立する．実際，まず

$$z^{n+0} = z^n = z^n \cdot z^0$$

が成り立ち，また自然数 m に対して

$$z^{n+m} = z^n \cdot z^m$$

が成り立っているとすると，前段の結果より

$$\begin{aligned} z^{n+(m+1)} &= z^{(n+m)+1} \\ &= z^{n+m} \cdot z \\ &= (z^n \cdot z^m) \cdot z \\ &= z^n \cdot (z^m \cdot z) \\ &= z^n \cdot z^{m+1} \end{aligned}$$

が成立する．ゆえに数学的帰納法の原理より任意の自然数 m に対して

$$z^{n+m} = z^n \cdot z^m$$

が満たされる．

第四段　最後に，n と m を整数とするとき

$$z^{n+m} = z^n \cdot z^m$$

が成立することを示す．m が負の整数であるとき，前段の結果より

$$z^{-(n+m)} = z^{(-n)+(-m)} = z^{-n} \cdot z^{-m}$$

が成立する．よって

$$\begin{aligned} z^{n+m} &= (z^{-(n+m)})^{-1} \\ &= (z^{-n} \cdot z^{-m})^{-1} \\ &= (z^{-n})^{-1} \cdot (z^{-m})^{-1} \\ &= z^n \cdot z^m \end{aligned}$$

が従う． ∎

特に，z を任意に与えられた複素数とし，n を任意に与えられた整数とすると，

$$z^n \cdot z^{-n} = z^0 = 1$$

が成り立つから

$$z^{-n} = (z^n)^{-1}$$

ということになる．

定理 F.1.11 (指数法則 (指数が積の場合)).　z を複素数とし，n と m を整数とするとき，

$$z^{n \cdot m} = (z^n)^m.$$

略証．　まず

$$z^{n \cdot 0} = z^0 = 1 = (z^n)^0$$

が成り立つ．また自然数 m に対して

$$z^{n \cdot m} = (z^n)^m$$

が成り立っているならば，定理 F.1.10 より

$$z^{n \cdot (m+1)} = z^{n \cdot m + n} = z^{n \cdot m} \cdot z^n = (z^n)^m \cdot z^n = (z^n)^{m+1}$$

が従うので，数学的帰納法の原理より任意の自然数 m で

$$z^{n \cdot m} = (z^n)^m$$

が成立する．m が負の整数であるときは

$$z^{-n \cdot m} = z^{n \cdot (-m)} = (z^n)^{-m} = ((z^n)^m)^{-1}$$

が成り立つから，

$$z^{n \cdot m} = (z^{-n \cdot m})^{-1} = (z^n)^m$$

が得られる． ∎

定理 F.1.12 (二乗が等しい数同士は一致するか逆元である).　a と b を複素数とするとき，

$$a^2 = b^2 \Longleftrightarrow a = b \vee a = -b.$$

略証.　a と b を複素数とする．ここでまず

$$\begin{aligned}
(a+b)\cdot(a-b) &= (a+b)\cdot a + (a+b)\cdot(-b) \\
&= (a^2 + b\cdot a) + (a\cdot(-b) + b\cdot(-b)) \\
&= (a^2 + b\cdot a) + (a\cdot(-b) + b\cdot(-b)) \\
&= \left[a^2 + (b\cdot a + a\cdot(-b))\right] + b\cdot(-b) \\
&= \left[a^2 + (b\cdot a - a\cdot b)\right] - b^2 \\
&= (a^2 + 0) - b^2 \\
&= a^2 - b^2
\end{aligned}$$

が成り立つ．よって

$$a^2 = b^2 \Longleftrightarrow (a+b)\cdot(a-b) = 0$$

が成り立つが，他方で定理 F.1.3 と定理 F.1.7 から

$$(a+b)\cdot(a-b) = 0 \Longleftrightarrow a+b = 0 \vee a-b = 0 \Longleftrightarrow a = -b \vee a = b$$

も成立するので

$$a^2 = b^2 \Longleftrightarrow a = -b \vee a = b$$

が従う． ∎

次の定理は証明なしに認める．

定理 F.1.13 (非負実数には平方根が存在する).　α を 0 以上の実数とするとき，

$$\alpha = \beta^2$$

を満たす実数 β が取れる．

α を 0 以上の実数とするとき，

$$\alpha = \beta^2$$

を満たす実数 β を取ると，定理 F.1.12 より

$$(-\beta)^2 = \alpha$$

も成り立つ．

$$0 \le \beta \lor 0 \le -\beta$$

が成り立つので (ここでは未証明だが認める)，すなわち二乗が α となる実数として非負であるものを取ることが出来る．また実数 γ が

$$\gamma^2 = \alpha$$

を満たすなら

$$\gamma = \beta \lor \gamma = -\beta$$

が成り立つので，二乗が α となる実数は β と $-\beta$ に限られる．

定義 F.1.14 (平方根).　α を 0 以上の実数とするとき，二乗が α となる実数を α の**平方根 (square root)** と呼ぶ．また，そのような実数のうち非負であるものを

$$\sqrt{\alpha}$$

と書く．

定義 F.1.15 (絶対値).　z を複素数とするとき，

$$\sqrt{(\mathrm{Re}\, z)^2 + (\mathrm{Im}\, z)^2}$$

なる実数を z の**絶対値 (absolute value)** と呼び

$$|z|$$

と書く．

定理 F.1.16 (絶対値の二乗は複素共役との積に等しい).　z を複素数とするとき

$$|z|^2 = z \cdot \overline{z}.$$

略証.　算法の分配律と定理 F.1.9 および定理 F.1.6 を用いれば

$$\begin{aligned}
z \cdot \overline{z} &= (\mathrm{Re}\, z + \mathbf{i} \cdot \mathrm{Im}\, z) \cdot (\mathrm{Re}\, z - \mathbf{i} \cdot \mathrm{Im}\, z) \\
&= (\mathrm{Re}\, z)^2 - (\mathbf{i} \cdot \mathrm{Im}\, z)^2 \\
&= (\mathrm{Re}\, z)^2 - \mathbf{i}^2 \cdot (\mathrm{Im}\, z)^2 \\
&= (\mathrm{Re}\, z)^2 - (-1) \cdot (\mathrm{Im}\, z)^2 \\
&= (\mathrm{Re}\, z)^2 + (\mathrm{Im}\, z)^2 \\
&= |z|^2
\end{aligned}$$

が成立する．∎

定理 F.1.17 (積の絶対値は絶対値の積).　a と b を複素数とするとき

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|.$$

略証.　定理 F.1.8 より

$$|a \cdot b|^2 = (a \cdot b) \cdot \overline{a \cdot b} = (a \cdot b) \cdot (\overline{a} \cdot \overline{b}) = (a \cdot \overline{a}) \cdot (b \cdot \overline{b}) = |a|^2 \cdot |b|^2 = (|a| \cdot |b|)^2$$

が成り立つので，定理 F.1.12 より

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b| \lor |a \cdot b| = -|a| \cdot |b|$$

が従う．ここで非負の数の積は非負であるから (これも未証明だが認める)

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

が成り立つ． ∎

定理 F.1.18 (逆元の絶対値は等しい).　z を複素数とするとき

$$|-z| = |z|.$$

略証.　定理 F.1.6 より

$$-z = -(1 \cdot z) = (-1) \cdot z$$

が成り立つから，定理 F.1.17 より

$$|-z| = |-1| \cdot |z|$$

が成り立つ．

$$|-1| = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$$

であるから

$$|-z| = |-1| \cdot |z| = 1 \cdot |z| = |z|$$

が従う． ∎

定理 F.1.19 (劣加法性).　a と b を複素数とするとき

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

略証． 定理 F.1.16 より

$$\begin{aligned}|a+b|^2 &= (a+b)\cdot(\overline{a}+\overline{b})\\ &= (a\cdot\overline{a}+b\cdot\overline{a})+(a\cdot\overline{b}+b\cdot\overline{b})\\ &= |a|^2+|b|^2+2\cdot\mathrm{Re}(a\cdot\overline{b})\end{aligned}$$

が成り立つ．

$$\mathrm{Re}(a\cdot\overline{b}) \leq |a\cdot\overline{b}| = |a|\cdot|b|$$

が成り立つので

$$|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$$

が従い

$$|a+b| \leq |a|+|b|$$

が得られる． ∎

定理 F.1.20 (整数乗の絶対値は絶対値の整数乗). z を複素数とし，n を整数とするとき，

$$|z^n| = |z|^n.$$

略証． まず

$$|z^0| = |1| = 1 = |z|^0$$

が成立する．また n を自然数とするとき

$$|z^n| = |z|^n$$

が成り立っているとすれば，定理 F.1.17 より

$$|z^{n+1}| = |z^n\cdot z| = |z^n|\cdot|z| = |z|^{n+1}$$

が成り立つので，数学的帰納法の原理より任意の自然数 n で

$$|z^n| = |z|^n$$

が成立する．n が負の整数であるときは $-n$ が自然数であるから

$$|z^{-n}| = |z|^{-n}$$

が成り立つ．他方で定理 F.1.10 より

$$1 = |1| = |z^n\cdot z^{-n}| = |z^n|\cdot|z^{-n}| = |z^n|\cdot|z|^{-n}$$

が成り立ち，両辺に $|z|^n$ を掛けて

$$|z|^n = |z^n|$$

を得る． ∎

F.2　微分

複素微分，実微分，微分の線型性，Roll の定理，平均値の定理，中間値の定理，位相，Re と Im の連続性，コンパクト性

いま Ω を $\mathbf{C}$ 或いは $\mathbf{R}$ の開集合とし，f を Ω で定義された $\mathbf{C}$ 値関数とする．α を Ω の要素とするとき，f が α で**微分可能である (differentiable)** ということを

$$\exists a \in \mathbf{C}\, \forall \epsilon \in \mathbf{R}_+\, \exists \delta \in \mathbf{R}_+\, \forall z \in \Omega \left(0 < |z-\alpha| < \delta \Longrightarrow \left| \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} - a \right| < \epsilon \right)$$

で定める．

定理 F.2.1 (微分可能なら連続).　Ω を $\mathbf{C}$ 或いは $\mathbf{R}$ の開集合とし，f を Ω で定義された $\mathbf{C}$ 値関数とし，α を Ω の要素とする．このとき f が α で微分可能であるならば f は α で連続である．

略証.　f が α で微分可能であるとする．このとき，

$$\forall \epsilon \in \mathbf{R}_+\, \exists \delta \in \mathbf{R}_+\, \forall z \in \Omega \left(0 < |z-\alpha| < \delta \Longrightarrow \left| \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} - a \right| < \epsilon \right)$$

を満たす複素数 a が取れる．いま ϵ を任意に与えられた正の実数とすれば

$$\forall z \in \Omega \left(0 < |z-\alpha| < \delta \Longrightarrow \left| \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} - a \right| < \epsilon \right)$$

を満たす正の実数 δ が取れるが，このとき

$$|z-\alpha| < \min\left\{ \frac{\epsilon}{|a|+\epsilon}, \delta \right\}$$

を満たす Ω の任意の要素 z に対して

$$|f(z)-f(\alpha)| < |a\cdot(z-\alpha)| + \epsilon\cdot|z-\alpha| \leq (|a|+\epsilon)\cdot|z-\alpha| \leq \epsilon$$

が成立する．ゆえに f は α において連続である．∎

定義 F.2.2 (正則関数).　Ω を $\mathbf{C}$ の開集合とし，f を Ω で定義された $\mathbf{C}$ 値関数とする．f が Ω の各要素において微分可能であるとき，f を Ω 上の**正則関数 (holomorphic function)** と呼ぶ．また Ω 上の正則関数の全体を

$$H(\Omega)$$

と書く．

f が α で微分可能であるとき，

$$\exists a \in \mathbf{C}\, \forall \epsilon \in \mathbf{R}_+\, \exists \delta \in \mathbf{R}_+\, \forall z \in \Omega \left(0 < |z-\alpha| < \delta \Longrightarrow \left| \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} - a \right| < \epsilon \right)$$

を満たす複素数 a のことを f の α における**微分係数 (derivative)** と呼ぶ．$(\mathbf{C}, \mathscr{O}_{\mathbf{C}})$ は Hausdorff 空間であるから，微分係数は存在すればただ一つである．

定義 F.2.3 (導関数). Ω を $\mathbf{C}$ 或いは $\mathbf{R}$ の開集合とし，f を Ω で定義された $\mathbf{C}$ 値関数とする．f が Ω の各要素において微分可能であるとき，Ω の各要素に対して，そこにおける f の微分係数を対応させる写像を f の**導関数 (derivative function)** と呼び，多くの場合で

$$f'$$

や

$$f^{(1)}$$

と表記する．

定理 F.2.4 (連鎖律). Ω と Φ を $\mathbf{C}$ 或いは $\mathbf{R}$ の開集合とし，f を Ω 上の $\mathbf{C}$ 値関数とし，g を Φ 上の $\mathbf{C}$ 値関数とし，

$$f * \Omega \subset \Phi$$

であるとする．α を Ω の要素とするとき，f が α において微分可能であって，g が $f(\alpha)$ において微分可能であるならば，$g \circ f$ は α において微分可能であって，その微分係数は

$$g'(f(\alpha)) \cdot f'(\alpha)$$

である．ただし $f'(\alpha)$ も $g'(f(\alpha))$ も導関数の表記を使ってはいるが，これは微分係数を表すため便宜的に用いているだけである．

略証. ϵ を任意に与えられた正数とする．ここで

$$\eta^2 + \left(|f'(\alpha)| + |g'(f(\alpha))|\right)\eta = \epsilon$$

を満たす正数 η を取る．η に対し，

$$|z - \alpha| < \delta_1 \Longrightarrow \left|(f(z) - f(\alpha)) - f'(\alpha)(z - \alpha)\right| < \eta|z - \alpha|$$

を満たす正数 δ_1 と，

$$|w - f(\alpha)| < \delta_2 \Longrightarrow \left|(g(w) - g(f(\alpha))) - g'(f(\alpha))(w - f(\alpha))\right| < \eta|w - f(\alpha)|$$

を満たす正数 δ_2 を取る．また f は α で連続であるから

$$|z - \alpha| < \delta_3 \Longrightarrow \left|f(z) - f(\alpha)\right| < \delta_2$$

を満たす正数 δ_3 が取れる．このとき

$$\delta \overset{\text{def}}{=\!=} \min\{\delta_1, \delta_3\}$$

とおけば，

$$|z - \alpha| < \delta$$

なる Ω の任意の要素 z に対して

$$\begin{aligned}\left|(g(f(z)) - g(f(\alpha))) - g'(f(\alpha))(f(z) - f(\alpha))\right| &< \eta|f(z) - f(\alpha)| \\ &< \eta\left(\eta|z-\alpha| + |f'(\alpha)||z-\alpha|\right),\end{aligned}$$

及び

$$\begin{aligned}&\left|(g(f(z)) - g(f(\alpha))) - g'(f(\alpha))(f(z) - f(\alpha))\right| \\ &= \left|(g(f(z)) - g(f(\alpha))) - g'(f(\alpha))f'(\alpha)(z-\alpha) - g'(f(\alpha))\left((f(z) - f(\alpha)) - f'(\alpha)(z-\alpha)\right)\right|\end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned}&\left|(g(f(z)) - g(f(\alpha))) - g'(f(\alpha))f'(\alpha)(z-\alpha)\right| \\ &\leq \left|(g(f(z)) - g(f(\alpha))) - g'(f(\alpha))(f(z) - f(\alpha))\right| + \left|g'(f(\alpha))\right|\left|(f(z) - f(\alpha)) - f'(\alpha)(z-\alpha)\right|\end{aligned}$$

が成り立つので，

$$\left|(g(f(z)) - g(f(\alpha))) - g'(f(\alpha))f'(\alpha)(z-\alpha)\right| < \left[\eta^2 + \left(|f'(\alpha)| + |g'(f(\alpha))|\right)\eta\right]|z-\alpha|$$

が従う．ゆえに

$$0 < |z-\alpha| < \delta \Longrightarrow \left|\frac{g(f(z)) - g(f(\alpha))}{z-\alpha} - g'(f(\alpha)) \cdot f'(\alpha)\right| < \epsilon$$

が成り立つ． ∎

定理 F.2.5 (Rolle の定理). a と b を $a < b$ なる実数とし，f を $[a, b]$ 上で定義された実連続関数とし，f は $]a, b[$ の各要素で微分可能であるとする．また f' を $]a, b[$ 上の f の導関数とする．このとき

$$f(a) = f(b)$$

ならば

$$a < c < b \wedge f'(c) = 0$$

を満たす実数 c が取れる．

定理 F.2.6 (平均値の定理). a と b を $a < b$ なる実数とし，f を $[a, b]$ 上で定義された実連続関数とし，f は $]a, b[$ の各要素で微分可能であるとする．また f' を $]a, b[$ 上の f の導関数とする．このとき

$$a < c < b$$

かつ

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

を満たす実数 c が取れる．

略証．$[a, b]$ 上の写像 g を

$$x \longmapsto f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$$

なる関係により定めれば，Rolle の定理より

$$a < c < b$$

かつ

$$g'(c) = 0$$

を満たす実数 c が取れる．

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

であるから定理の主張が得られる． ∎

F.3　級数

a が $\boldsymbol{\omega}$ から $\mathbf{C}$ への写像であるとき，つまり a が

$$a : \boldsymbol{\omega} \longrightarrow \mathbf{C}$$

を満たすとき，a を**複素数列**と呼ぶ．a が複素数列であるときは

$$a(n)$$

の代わりに

$$a_n$$

と書いて，また a を

$$(a_n)_{n \in \omega}$$

とも表す．ここで $\mathbf{C}$ における総和記号 $\sum$ の定義を直感的に書いておくと，まず 0 に対して

$$\sum_{k=0}^{0} a_k \overset{\text{def}}{=\!=} a_0$$

と定め，次に 1 に対して

$$\sum_{k=0}^{1} a_k \overset{\text{def}}{=\!=} a_0 + a_1$$

と定め，次に 2 に対して

$$\sum_{k=0}^{2} a_k \overset{\text{def}}{=\!=} (a_0 + a_1) + a_2$$

と定め，3 に対して

$$\sum_{k=0}^{3} a_k \overset{\text{def}}{=\!=} ((a_0 + a_1) + a_2) + a_3 = \left(\sum_{k=0}^{2} a_k \right) + a_3$$

と定める．このような再帰的定義によって各自然数 n に対して

$$\sum_{k=0}^{n} a_k$$

なる複素数を対応させることは可能である．厳密な意味付けには帰納法による再帰的定義を用いるがキリがないので略．

$$\boldsymbol{\omega} \ni n \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k$$

なる関係により定まる複素数列を s とするとき，s が $\mathbf{C}$ で収束するなら，つまり

$$|s_n - \alpha| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

を満たす複素数 α が取れるなら

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \overset{\text{def}}{=\!=} \alpha$$

と定め，これを $(a_n)_{n\in\omega}$ の**級数 (series)** と呼ぶ．言い換えれば $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ とは s が収束する場合の極限のことである．

定理 F.3.1 (和の絶対値と絶対値の和). a を複素数列とするとき，任意の自然数 n で

$$\left| \sum_{k=0}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k|.$$

略証． まず

$$\left| \sum_{k=0}^{0} a_k \right| = |a_0| = \sum_{k=0}^{0} |a_k|$$

が成立する．また n を自然数とするとき

$$\left| \sum_{k=0}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k|$$

が成り立っているならば，定理 F.1.19 より

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{n+1} a_k \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n} a_k + a_{n+1} \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=0}^{n} a_k \right| + |a_{n+1}| \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} |a_k| \end{aligned}$$

が成立する．ゆえに数学的帰納法の原理から定理の主張を得る． ∎

今度は

$$\boldsymbol{\omega} \ni n \longmapsto \sum_{k=0}^{n} |a_k|$$

なる関係により定まる実数列を t とする．当然のようだが t が $\mathbf{R}$ で収束すれば s は $\mathbf{C}$ で収束する．実際，t が収束するならば，ϵ を任意に与えられた正の実数とすれば

$$\forall n, m \in \boldsymbol{\omega}\ (N < n \land N < m \Longrightarrow |t_n - t_m| < \epsilon)$$

を満たす自然数 N が取れる．このとき，

$$n < m$$

かつ

$$N < n \land N < m$$

を満たす任意の自然数 n と m に対して

$$|s_m - s_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| = t_m - t_n < \epsilon$$

が成立するので s は $\mathbf{C}$ の Cauchy 列である．$\mathbf{C}$ において絶対値に関する Cauchy 列は収束するので s は $\mathbf{C}$ で収束する．t が収束することを $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は $\mathbf{C}$ で**絶対収束する (absolutely converge)** という．

定理 F.3.2 (級数の絶対値と絶対値の級数).　a を複素数列とするとき，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が $\mathbf{C}$ で絶対収束していれば

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|.$$

略証．　$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が $\mathbf{C}$ で絶対収束しているとする．まず任意の自然数 n で

$$\left| \sum_{k=0}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

が成立する．また

$$\boldsymbol{\omega} \ni n \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k$$

なる数列が収束するので

$$\lim_{n \to \infty} \left| \sum_{k=0}^{n} a_k \right| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right|$$

が成り立ち

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

が従う．　∎

定理 F.3.3 (d'Alembert の収束判定法). a を複素数列とし，すべての自然数 n で $a_n \neq 0$ であるとする．このとき

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$$

ならば $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は $\mathbf{C}$ で絶対収束する．

式の意味は，極限が存在して，かつその極限が 1 より小さいということである．大雑把に書き直せば

$$\exists \alpha \in \mathbf{R} \left[0 \leq \alpha < 1 \land \forall \epsilon \in \mathbf{R}_{+} \, \exists N \in \mathbf{N} \, \forall n \in \mathbf{N} \left(N < n \Longrightarrow \left| \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} - \alpha \right| < \epsilon \right) \right]$$

となる．

略証. 1 より小さい極限が存在するとき，

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

とおけば

$$\forall n \in \boldsymbol{\omega} \left[N \leq n \Longrightarrow \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < \frac{1+\alpha}{2} \right]$$

を満たす自然数 N が取れる．ここで

$$\rho \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1+\alpha}{2}$$

とおく．n を

$$N \leq n$$

を満たす任意の自然数とすると，

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < \rho = \frac{\rho^{n+1}}{\rho^n}$$

が成り立つので

$$\frac{|a_{n+1}|}{\rho^{n+1}} < \frac{|a_n|}{\rho^n}$$

が従う．ゆえに

$$\frac{|a_n|}{\rho^n} \leq \frac{|a_N|}{\rho^N}$$

が成立する．すなわち，

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|a_N|}{\rho^N}$$

とおけば

$$N \leq n$$

を満たす任意の自然数 n で

$$|a_n| \le M \cdot \rho^n$$

が満たされて，

$$\sum_{n=N}^{\infty} M \cdot \rho^n = M \cdot \frac{\rho^N}{1-\rho} < \infty$$

であるから

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| < \infty$$

が従う．よって $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は $\mathbf{C}$ で絶対収束する． ∎

定理 F.3.4 (絶対収束する級数の線型性). a と b を複素数列とし，α を複素数とする．$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ と $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が $\mathbf{C}$ で絶対収束するとき，$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$ も $\mathbf{C}$ で絶対収束して

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$$

が成り立つ．また $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が $\mathbf{C}$ で絶対収束するとき $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha \cdot a_n$ も $\mathbf{C}$ で絶対収束して

$$\alpha \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha \cdot a_n$$

が成り立つ．

略証.

第一段　任意の自然数 n で

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k + b_k| \le \sum_{k=0}^{n} |a_k| + \sum_{k=0}^{n} |b_k| \le \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| + \sum_{k=0}^{\infty} |b_k|$$

が成り立つので $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$ は $\mathbf{C}$ で絶対収束する．また任意の自然数 n で

$$\sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n}(a_k + b_k)$$

が成立するので

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$$

が従う．

第二段　任意の自然数 n で

$$\sum_{k=0}^{n} |\alpha \cdot a_k| \le |\alpha| \cdot \sum_{k=0}^{n} |a_k| \le |\alpha| \cdot \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

が成り立つので $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha \cdot a_n$ は $\mathbf{C}$ で絶対収束する．また任意の自然数 n で

$$\alpha \cdot \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} \alpha \cdot a_k$$

が成立するので

$$\alpha \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha \cdot a_n$$

が従う．■

定理 F.3.5 (絶体絶命する級数の実部は実部の級数，虚部は虚部の級数).　a を複素数列とする．$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が $\mathbf{C}$ で絶対収束することと，$\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} a_n$ と $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} a_n$ が共に $\mathbf{C}$ で絶対収束することは同値である．また $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が $\mathbf{C}$ で絶対収束するならば

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} a_n + \mathbf{i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} a_n.$$

略証.　$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が $\mathbf{C}$ で絶対収束するならば，任意の自然数 N で

$$\sum_{n=0}^{N} |\operatorname{Re} a_n| \le \sum_{n=0}^{N} |a_n| \le \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

および

$$\sum_{n=0}^{N} |\operatorname{Im} a_n| \le \sum_{n=0}^{N} |a_n| \le \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

が成立するので $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} a_n$ と $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} a_n$ は共に $\mathbf{C}$ で絶対収束する．逆に $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} a_n$ と $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} a_n$ が共に $\mathbf{C}$ で絶対収束するとき，定理 F.3.4 より $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は $\mathbf{C}$ で絶対収束して，かつ

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_n &= \sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{Re} a_n + \mathbf{i} \cdot \operatorname{Im} a_n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{i} \cdot \operatorname{Im} a_n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} a_n + \mathbf{i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} a_n
\end{aligned}$$

も成立する．■

定理 F.3.6 (絶体絶命する級数の共役は共役の級数に一致する).　a を複素数列とする．$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が $\mathbf{C}$ で絶対収束するならば $\sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n}$ も $\mathbf{C}$ で絶対収束して

$$\sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} a_n}.$$

略証.　$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が $\mathbf{C}$ で絶対収束するならば，定理 F.3.5 より $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} a_n$ と $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} a_n$ は共に $\mathbf{C}$ で絶対収束するので，定理 F.3.4 より $\sum_{n=0}^{\infty}(-\mathbf{i}) \cdot \operatorname{Im} a_n$ も $\mathbf{C}$ で絶対収束して $\sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n}$ も $\mathbf{C}$ で絶対収束する．またこのとき

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} &= \sum_{n=0}^{\infty}(\operatorname{Re} a_n - \mathbf{i} \cdot \operatorname{Im} a_n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} a_n + \sum_{n=0}^{\infty}(-\mathbf{i}) \cdot \operatorname{Im} a_n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} a_n + (-\mathbf{i}) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} a_n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} a_n - \mathbf{i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} a_n \\
&= \overline{\sum_{n=0}^{\infty} a_n}
\end{aligned}$$

が成立する． ∎

a と b を複素数列とするとき，

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}$$

なる級数が $\mathbf{C}$ で存在しているなら，これを a と b の **Cauchy 積 (Cauchy product)** と呼ぶ．Cauchy 積が収束するためには $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ と $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が共に $\mathbf{C}$ で絶対収束すれば十分であるが，次の Metens の定理はこれより緩い条件の下で Cauchy 積の収束を保証する．

定理 F.3.7 (一方が絶対収束していれば Cauchy 積も収束する).　a と b を複素数列とし，α を

$$\boldsymbol{\omega} \ni n \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k$$

なる複素数列とし，β を

$$\boldsymbol{\omega} \ni n \longmapsto \sum_{k=0}^{n} b_k$$

なる複素数列とし，γ を

$$\boldsymbol{\omega} \ni n \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{k} a_{k-\ell} \cdot b_\ell$$

なる複素数列とする．$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が $\mathbf{C}$ で絶対収束して，かつ β が $\mathbf{C}$ で収束するならば，γ も $\mathbf{C}$ で収束して

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}.$$

略証.　任意の自然数 n で

$$\gamma_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \cdot \beta_k$$

が成立する．よって

$$\alpha^* \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

および

$$\beta^* \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

とおけば

$$\gamma_n - \alpha^* \cdot \beta^* = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \cdot (\beta_k - \beta^*) + (\alpha_n - \alpha^*) \cdot \beta^*$$

が成立する．いま ϵ を任意に与えられた正の実数とすると，

$$\forall n \in \boldsymbol{\omega} \left[N_1 \leq n \Longrightarrow |\beta_n - \beta^*| < \frac{\epsilon}{3 \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| + 1)} \right]$$

を満たす自然数 N_1 と，

$$\forall n \in \boldsymbol{\omega} \left[N_2 \leq n \Longrightarrow |a_n| < \frac{\epsilon}{3 \cdot \left(\sup_{k \in N_1} |\beta_k - \beta^*| + 1 \right)} \right]$$

を満たす自然数 N_2 と，

$$\forall n \in \boldsymbol{\omega} \left[N_3 \leq n \Longrightarrow |\alpha_n - \alpha^*| < \frac{\epsilon}{3 \cdot \left(|\beta^*| + 1\right)} \right]$$

を満たす自然数 N_3 が取れる．従って任意の自然数 n に対して

$$\max\{N_1 + N_2, N_3\} \leq n$$

ならば

$$|\gamma_n - \alpha^* \cdot \beta^*| \leq \sum_{k=0}^{N_1 - 1} |a_{n-k}| \cdot |\beta_k - \beta^*| + \sum_{k=N_1}^{n} |a_{n-k}| \cdot |\beta_k - \beta^*| + |\alpha_n - \alpha^*| \cdot |\beta^*| < \epsilon$$

が成立する．ゆえに γ は $\alpha^* \cdot \beta^*$ に収束する． ∎

F.4　指数関数

z を複素数とするとき，

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot z^n$$

は $\mathbf{C}$ で絶対収束する．実際，$z \neq 0$ ならば

$$\left| \frac{n!}{z^n} \cdot \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \frac{|z|}{n+1} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成り立つので，d'Alembert の収束判定法から級数は絶対収束する．$z = 0$ の場合も初項を除く全ての項は 0 であるから級数は絶対収束する．指数関数とは複素数 z に対して

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot z^n$$

を対応させる写像として定義される．

定義 F.4.1 (指数関数).　複素数 z に対して

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot z^n$$

を対応させる $\mathbf{C}$ から $\mathbf{C}$ への写像を**指数関数 (exponential function)** と呼び，

$$\exp$$

と書く．特に

$$e \overset{\text{def}}{=} \exp 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

で定める実数 e を **Napier 数 (Napier's constant)** と呼ぶ．

定理 F.4.2 (指数法則).　a と b を複素数とするとき

$$\exp a \cdot \exp b = \exp(a+b).$$

略証.　定理 F.3.7 より

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot a^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot b^n\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot a^k\cdot\frac{1}{(n-k)!}\cdot b^{n-k}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot a^k\cdot b^{n-k}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot(a+b)^n\end{aligned}$$

が成り立つ． ∎

定理 F.4.3 (有理数に対する指数関数の値は e の有理数乗で表せる).　r を有理数とするとき

$$\exp r = e^r.$$

略証.

第一段　まず r が整数である場合に示す．

$$\exp 0 = 1 = e^0$$

が成り立つ．また n を自然数とするとき，

$$\exp n = e^n$$

が成り立っているならば

$$\exp(n+1) = \exp n \cdot \exp 1 = e^n \cdot e = e^{n+1}$$

も成り立つ．よって数学的帰納法の原理より任意の自然数 r で

$$\exp r = e^r$$

が成り立つ．r を負の整数とすると

$$\exp r = (\exp(-r))^{-1} = (e^{-r})^{-1} = e^{(-r)\cdot(-1)} = e^r$$

が成り立つ．

第二段　z を複素数とし，n を自然数とするとき，

$$(\exp z)^n = \exp(n\cdot z)$$

が成り立つことを示す．まず

$$(\exp z)^0 = 1 = \exp 0 = \exp(0 \cdot z)$$

が成り立つ．また n を自然数とするとき，

$$(\exp z)^n = \exp(n \cdot z)$$

が成り立っているならば

$$(\exp z)^{n+1} = (\exp z)^n \cdot \exp z = \exp(n \cdot z) \cdot \exp z = \exp n \cdot z + z = \exp(n+1) \cdot z$$

も成り立つ．よって数学的帰納法の原理より任意の自然数 r で

$$(\exp z)^n = \exp(n \cdot z)$$

が成り立つ．

第三段　m を正の自然数とするとき，前段の結果より

$$(\exp(m^{-1}))^m = \exp(m \cdot m^{-1}) = \exp 1 = e$$

が成り立つので

$$\exp(m^{-1}) = \sqrt[m]{e}$$

が従う．いま r を有理数とすると，

$$r = n \cdot m^{-1}$$

を満たす整数 n と正の自然数 m が取れるが，このとき

$$\exp r = \exp(n \cdot m^{-1}) = (\exp(m^{-1}))^n = (\sqrt[m]{e})^n = e^{n \cdot m^{-1}} = e^r$$

が成立する． ∎

上の結果に倣って，以降では複素数 z に対して

$$\exp z$$

を

$$e^z$$

とも書く．

定理 F.4.4 (e のマイナス乗は逆元).　z を複素数とすると，e^z の乗法に関する逆元は e^{-z} である:

$$(e^z)^{-1} = e^{-z}.$$

特に exp は 0 を取り得ない．

略証.　z を複素数とすれば,

$$z + (-z) = (-z) + z = 0$$

かつ

$$e^0 = 1$$

であるから

$$e^z \cdot e^{-z} = e^{-z} \cdot e^z = 1$$

が成立する．つまり e^z の乗法に関する逆元は e^{-z} であって，またこのため

$$e^z \neq 0$$

も満たされる． ∎

定理 F.4.5 (指数関数は各点で微分可能).　z を任意に与えられた複素数とすれば，exp は z で微分可能であってその微分係数は

$$\exp z$$

である．

略証.　z を任意に与えられた複素数とする．指数法則より，任意の複素数 h に対して

$$\begin{aligned} |\exp(z+h) - \exp z - h \cdot \exp z| &= |\exp z| \cdot |\exp h - 1 - h| \\ &= |\exp z| \cdot \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot h^n - h \right| \end{aligned}$$

が成り立つ．ここで

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot h^{n-1}$$

は絶対収束級数であるから，定理 F.3.4 より

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot h^n = h \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot h^{n-1} = h \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot h^{n-1} + h$$

が成り立つ．すなわち

$$\begin{aligned} |\exp(z+h) - \exp z - h \cdot \exp z| &= |\exp z| \cdot \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot h^n - h \right| \\ &= |\exp z| \cdot |h| \cdot \left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot h^{n-1} \right| \end{aligned}$$

が成り立つ．いま ϵ を任意に与えられた正の実数とすると，

$$0 < |h| < \min\{\epsilon/|\exp z|, 1/2\}$$

ならば

$$\begin{aligned}
|\exp(z+h) - \exp z - h\cdot\exp z| &= |\exp z|\cdot|h|\cdot\left|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot h^{n-1}\right| \\
&\le |\exp z|\cdot|h|\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\cdot|h|^{n-1} \\
&\le |\exp z|\cdot|h|\cdot\frac{|h|}{1-|h|} \\
&< 2\cdot\epsilon\cdot|h|
\end{aligned}$$

が成立する．ゆえに exp は z で微分可能であって，その微分係数は

$$\exp z$$

である． ∎

指数関数は $\mathbf{C}$ 全体で定義されて，かつ $\mathbf{C}$ の任意の要素で微分可能である．このように $\mathbf{C}$ 上で定義された $\mathbf{C}$ 値関数で，$\mathbf{C}$ の各点で微分可能なものを**整関数 (entire function)** と呼ぶ．

いま y を実数とすると，任意の自然数 n で

$$\overline{(\mathbf{i}\cdot y)^n} = (-\mathbf{i}\cdot y)^n$$

が成立する．従って定理 F.3.6 より

$$e^{-\mathbf{i}\cdot y} = \overline{e^{\mathbf{i}\cdot y}}$$

が成り立ち，

$$|e^{\mathbf{i}\cdot y}|^2 = e^{\mathbf{i}\cdot y}\cdot\overline{e^{\mathbf{i}\cdot y}} = e^{\mathbf{i}\cdot y}\cdot e^{-\mathbf{i}\cdot y} = e^0 = 1$$

が従う．これで次の主張を得た．

定理 F.4.6 (e の純虚数乗の絶対値は 1).　y を実数とするとき

$$e^{-\mathbf{i}\cdot y} = \overline{e^{\mathbf{i}\cdot y}}$$

が成立し，特に

$$|e^{\mathbf{i}\cdot y}| = 1.$$

定理 F.4.7 (指数関数は実数上で単調増大かつ一対一対応).　exp を実数上に制限した写像

$$\mathbf{R} \ni x \longmapsto e^x$$

は単調増大かつ $\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}_+$ への全単射である．

略証.　指数関数の定義より

$$e^0 = 1$$

が従う．また x を正の実数とすれば

$$e^x \in \mathbf{R}_+$$

が従う．x を負の実数とするとき，$-x$ は正の実数であるから

$$e^{-x} \in \mathbf{R}_+$$

が成り立ち，他方で

$$e^x = 1/e^{-x}$$

であるから

$$e^x \in \mathbf{R}_+$$

が従う．ゆえに exp は $\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}_+$ への写像である．また x と y を

$$x < y$$

を満たす実数とすれば，定理 F.3.4 より

$$e^y - e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot (y^n - x^n)$$

が成り立ち，

$$0 < y - x < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot (y^n - x^n)$$

も成り立つから exp は単調増大である．任意の正の実数 x に対して

$$x < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n = e^x$$

が成り立つので

$$e^x \longrightarrow \infty \quad (x \longrightarrow \infty)$$

が成り立ち，

$$e^{-x} = 1/e^x$$

であるから

$$e^x \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow -\infty)$$

も満たされる．次に実数 x に対して

$$e^x = 1 \Longrightarrow x = 0 \tag{F.1}$$

が成り立つことを示す．実際，$0 < x$ であれば

$$1 < 1 + x < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n = e^x$$

が成り立ち，$x < 0$ であれば

$$1 < e^{-x}$$

から

$$e^x < 1$$

が従うので (F.1) が成立する．よって

$$e^x = e^y$$

ならば

$$e^{x-y} = 1$$

となって

$$x = y$$

が従う．ゆえに exp は単射である．また y を任意に与えられた正の実数とすると，$1 < y$ ならば

$$e^0 < y < e^y$$

が成り立つので，exp の連続性と中間値の定理から

$$y = e^x$$

を満たす実数 x が取れる．$y < 1$ ならば

$$\frac{1}{y} = e^x$$

を満たす実数 x が取れるので

$$y = e^{-x}$$

が成立する．ゆえに exp は全射である． ∎

F.5　三角関数

定義 F.5.1 (三角関数).　複素数 z に対して

$$\frac{e^{\mathbf{i}\cdot z}+e^{-\mathbf{i}\cdot z}}{2}$$

を対応させる $\mathbf{C}$ から $\mathbf{C}$ への写像を**余弦 (cosine)** と呼び，

$$\cos$$

と書く．複素数 z に対して

$$\frac{e^{\mathbf{i}\cdot z}-e^{-\mathbf{i}\cdot z}}{2\cdot\mathbf{i}}$$

を対応させる $\mathbf{C}$ から $\mathbf{C}$ への写像を**正弦 (sine)** と呼び，

$$\sin$$

と書く．

z を複素数とすれば

$$e^{\mathbf{i}\cdot z}=\cos z+\mathbf{i}\cdot\sin z$$

が成立するが，この等式を **Euler の関係式**と呼ぶ．

$\cos z$ の二乗は

$$\cos^2 z$$

と書く．同様に $\sin z$ の二乗も

$$\sin^2 z$$

と書く．

定理 F.5.2 (余弦と正弦の二乗和は 1).　z を複素数とするとき

$$\cos^2 z+\sin^2 z=1.$$

略証．　z を複素数とする．余弦の定義より

$$\cos^2 z=\frac{e^{2\cdot\mathbf{i}\cdot z}+2+e^{-2\cdot\mathbf{i}\cdot z}}{4}$$

が成り立ち，正弦の定義より

$$\sin^2 z=-\frac{e^{2\cdot\mathbf{i}\cdot z}-2+e^{-2\cdot\mathbf{i}\cdot z}}{4}$$

が成り立つので，

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

が得られる． ∎

定理 F.5.3 (正弦の導関数は余弦，余弦の導関数はマイナス正弦). z を任意に与えられた複素数とすると，cos も sin も z で微分可能であって，

$$\cos' z = -\sin z$$

かつ

$$\sin' z = \cos z$$

が成り立つ．

略証．　微分の線型性と連鎖律より

$$\begin{aligned}\cos' z &= \frac{\mathbf{i}\cdot e^{\mathbf{i}\cdot z} + (-\mathbf{i})\cdot e^{-\mathbf{i}\cdot z}}{2}\\ &= \mathbf{i}\cdot\frac{e^{\mathbf{i}\cdot z} - e^{-\mathbf{i}\cdot z}}{2}\\ &= -\frac{e^{\mathbf{i}\cdot z} - e^{-\mathbf{i}\cdot z}}{2\cdot\mathbf{i}}\\ &= -\sin z\end{aligned}$$

が成り立つ．同様に

$$\begin{aligned}\sin' z &= \frac{\mathbf{i}\cdot e^{\mathbf{i}\cdot z} - (-\mathbf{i})\cdot e^{-\mathbf{i}\cdot z}}{2\cdot\mathbf{i}}\\ &= \mathbf{i}\cdot\frac{e^{\mathbf{i}\cdot z} + e^{-\mathbf{i}\cdot z}}{2\cdot\mathbf{i}}\\ &= \frac{e^{\mathbf{i}\cdot z} + e^{-\mathbf{i}\cdot z}}{2}\\ &= \cos z\end{aligned}$$

も成り立つ． ∎

cos と sin も exp と同様に実数に対しては実数を対応させる写像である．

定理 F.5.4 (余弦は実数に対して実数を対応させる). t を実数とすると

$$\cos t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2\cdot n)!}\cdot t^{2\cdot n}$$

が成立する．

この定理の主張は級数の和 (cos の分母) を取れば得られる．exp は絶対収束級数で表せているので級数の和は各項の和の総和に一致する．

いま t を正の実数とすると，平均値の定理より

$$0 < \delta < t$$

かつ

$$\sin t = t \cdot \cos \delta$$

を満たす実数 δ が取れる．ところで

$$\cos^2 \delta + \sin^2 \delta = 1$$

より

$$-1 \leq \cos \delta \leq 1$$

が成り立つから

$$\sin t \leq t$$

が従う．これで

$$\forall t \ (t \in \mathbf{R}_{+} \Longrightarrow \sin t \leq t) \tag{F.2}$$

を得た．再び t を正の実数とすると，平均値の定理より

$$0 < \eta < t$$

かつ

$$\cos t + \frac{t^2}{2} - 1 = t \cdot (-\sin \eta + \eta)$$

を満たす実数 η が取れて，(F.2) より

$$0 \leq -\sin \eta + \eta$$

が満たされているので

$$1 - \frac{t^2}{2} \leq \cos t$$

が従う．これで

$$\forall t \left(t \in \mathbf{R}_{+} \Longrightarrow 1 - \frac{t^2}{2} \leq \cos t \right) \tag{F.3}$$

を得た．再び t を正の実数とすると，平均値の定理より

$$0 < \theta < t$$

かつ

$$\sin t - t + \frac{t^3}{3!} = t \cdot \left(\cos \theta - 1 + \frac{\theta^2}{2} \right)$$

を満たす実数 θ が取れて，(F.3) より

$$0 \leq \cos\theta - 1 + \frac{\theta^2}{2}$$

が満たされているので

$$t - \frac{t^3}{3!} \leq \sin t$$

が従う．これで

$$\forall t \left(t \in \mathbf{R}_+ \Longrightarrow t - \frac{t^3}{3!} \leq \sin t \right) \tag{F.4}$$

を得た．再び t を正の実数とすると，平均値の定理より

$$0 < \xi < t$$

かつ

$$\cos t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{4!} - 1 = t \cdot \left(-\sin\xi + \xi - \frac{\xi^3}{3!} \right)$$

を満たす実数 ξ が取れて，(F.4) より

$$-\sin\xi + \xi - \frac{\xi^3}{3!} \leq 0$$

が満たされているので

$$\cos t \leq 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!}$$

が従う．ゆえに

$$\cos 2 \leq 1 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{4!} = -\frac{1}{3} < 0$$

が成立する．また

$$\mathbf{R} \ni t \longmapsto \cos t$$

は実連続写像であるから，中間値の定理より

$$0 < t < 2 \wedge \cos t = 0$$

を満たす実数 t が取れる．ゆえに

$$\{ t \in \mathbf{R}_+ \mid \cos t = 0 \}$$

は空ではないので，$\mathbf{R}$ においてその下限が存在する．

定義 F.5.5 (円周率).

$$\pi \overset{\mathrm{def}}{=\!=} 2 \cdot \inf \{ t \in \mathbf{R}_+ \mid \cos t = 0 \}$$

により定める実数 π を円周率 **(pi)** と呼ぶ．

cos の連続性から

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

が成り立ち，また

$$0 < t < \frac{\pi}{2}$$

を満たす実数 t に対しては

$$0 < \cos t$$

が成立する．他方で Euler の関係式から

$$\sin^2\frac{\pi}{2} = 1$$

が従う．また平均値の定理より

$$0 < \xi < \frac{\pi}{2}$$

かつ

$$\sin\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi}\cdot\sin'\xi$$

を満たす実数 ξ が取れて，定理 F.5.3 から

$$\sin\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi}\cdot\cos\xi$$

が成り立つが，$\cos\xi$ は正であるから

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1$$

である．ゆえに

$$e^{\frac{\pi}{2}\cdot\mathbf{i}} = \mathbf{i}$$

が成立する．すなわち

$$e^{\pi\cdot\mathbf{i}} = e^{\frac{\pi}{2}\cdot\mathbf{i}}\cdot e^{\frac{\pi}{2}\cdot\mathbf{i}} = -1$$

である．すなわち

$$e^{2\cdot\pi\cdot\mathbf{i}} = e^{\pi\cdot\mathbf{i}}\cdot e^{\pi\cdot\mathbf{i}} = 1$$

である．そして n を任意に与えられた正数とすれば

$$e^{2\cdot n\cdot\pi\cdot\mathbf{i}} = 1$$

が成り立つが，これは当然のようであるけれども，整数の累乗について次の定理を載せておく．

定理 F.5.6 (指数関数の整数乗). z を複素数とし，n を整数とすると，

$$e^{n\cdot z} = (e^z)^n.$$

略証．　z を複素数とする．まず

$$e^{0 \cdot z} = e^0 = 1$$

かつ

$$(e^z)^0 = 1$$

であるから

$$e^{0 \cdot z} = (e^z)^0$$

が成立する．また n を自然数として

$$e^{n \cdot z} = (e^z)^n$$

が成り立っているとすると，

$$e^{(n+1) \cdot z} = e^{n \cdot z} \cdot e^z = (e^z)^n \cdot e^z = (e^z)^{n+1}$$

が従う．ゆえに，数学的帰納法の原理より任意の自然数 n で

$$e^{n \cdot z} = (e^z)^n$$

が成立する．次に n を負の整数とすると，

$$-n \in \boldsymbol{\omega}$$

であるから

$$e^{(-n) \cdot z} = (e^z)^{-n} \tag{F.5}$$

が成立する．ところで定理 F.1.6 より

$$(-n) \cdot z = -(n \cdot z)$$

が成り立つので，定理 F.4.4 より

$$e^{(-n) \cdot z} = e^{-(n \cdot z)} = (e^{n \cdot z})^{-1}$$

が成り立つ．一方で整数乗の定め方より

$$(e^z)^{-n} = ((e^z)^n)^{-1}$$

も成り立つので，(F.5) と併せて

$$(e^{n \cdot z})^{-1} = ((e^z)^n)^{-1}$$

が成立し

$$e^{n \cdot z} = (e^z)^n$$

が従う． ∎

余弦と正弦の振舞いを $[0, 2\cdot\pi]$ 上に限って考察する．まずわかるのは sin の動きである．x と y を

$$x < y$$

を満たす $[0, \pi/2]$ の要素とすれば，平均値の定理より

$$x < \delta < y$$

かつ

$$\frac{\sin y - \sin x}{y - x} = \cos\delta$$

を満たす実数 δ が取れて，

$$0 < \delta < \frac{\pi}{2}$$

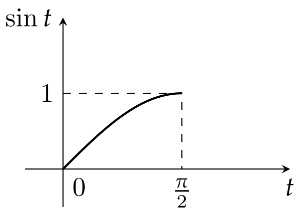
なので

$$0 < \cos\delta$$

が成り立つから

$$\sin x < \sin y$$

が成立する．つまり sin は $[0, \pi/2]$ 上で単調に増大する．



続いて cos の $[0, \pi/2]$ 上での動きもわかる．x と y を

$$x < y$$

を満たす $[0, \pi/2]$ の要素とすれば，平均値の定理より

$$x < \eta < y$$

かつ

$$\frac{\cos y - \cos x}{y - x} = -\sin\eta$$

を満たす実数 η が取れて，

$$0 < \eta < \frac{\pi}{2}$$

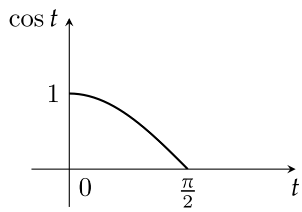
なので

$$0 < \sin\eta$$

が成り立つから

$$\cos y < \cos x$$

が成立する．つまり cos は $[0, \pi/2]$ 上で単調に減少する．



$[\pi/2, \pi]$ 上の振舞いを記述するには次の主張を仲介する．

定理 F.5.7 (余弦と正弦は $\pi/2$ ずれて同じ値を取る).　z を任意に与えられた複素数とするとき

$$\sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right)=\cos z.$$

略証.　実際，

$$e^{\frac{\pi}{2}\cdot \mathbf{i}}=\mathbf{i}$$

かつ

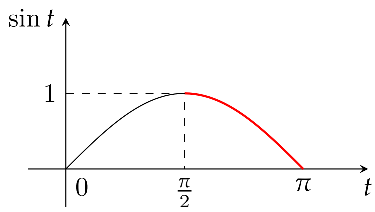
$$e^{-\frac{\pi}{2}\cdot \mathbf{i}}=-\mathbf{i}$$

であるから

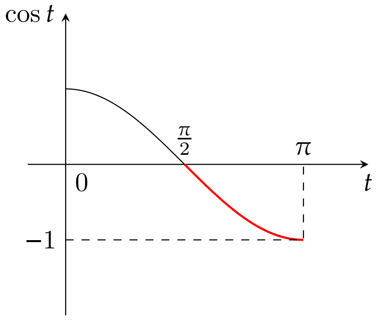
$$\begin{aligned}\sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right)&=\frac{e^{\mathbf{i}\cdot\left(z+\frac{\pi}{2}\right)}-e^{-\mathbf{i}\cdot\left(z+\frac{\pi}{2}\right)}}{2\cdot\mathbf{i}}\\&=\frac{e^{\mathbf{i}\cdot z}\cdot e^{\frac{\pi}{2}\cdot\mathbf{i}}-e^{-\mathbf{i}\cdot z}\cdot e^{-\frac{\pi}{2}\cdot\mathbf{i}}}{2\cdot\mathbf{i}}\\&=\frac{\left(e^{\mathbf{i}\cdot z}+e^{-\mathbf{i}\cdot z}\right)\cdot\mathbf{i}}{2\cdot\mathbf{i}}\\&=\frac{e^{\mathbf{i}\cdot z}+e^{-\mathbf{i}\cdot z}}{2}\\&=\cos z\end{aligned}$$

が成り立つ． ∎

すなわち $[\pi/2, \pi]$ 上の sin の動きは $[0, \pi/2]$ 上の cos の動きに一致し，可視化すれば次の図の赤線を描く．



cos は $[\pi/2, \pi]$ 上で単調に減少し -1 に達するが，これは先と同様に平均値の定理と sin の $[\pi/2, \pi[$ での正値性から把握できる．可視化すれば次の図の赤線を描く．



$[\pi, 2\cdot\pi]$ 上の sin の動きは次の定理から判明する．

定理 F.5.8 (正弦は π ずれると正負が反転する).　z を任意に与えられた複素数とするとき

$$\sin(z+\pi) = -\sin z.$$

略証.　実際，

$$e^{\pi\cdot\mathbf{i}} = -1$$

かつ

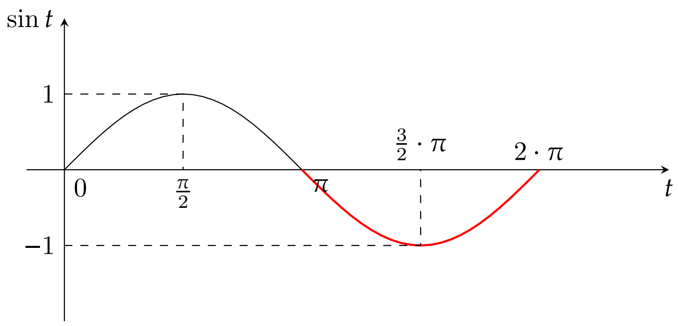
$$e^{-\pi\cdot\mathbf{i}} = 1$$

であるから

$$\begin{aligned}\sin(z+\pi) &= \frac{e^{\mathbf{i}\cdot(z+\pi)} - e^{-\mathbf{i}\cdot(z+\pi)}}{2\cdot\mathbf{i}} \\ &= \frac{e^{\mathbf{i}\cdot z}\cdot e^{\pi\cdot\mathbf{i}} - e^{-\mathbf{i}\cdot z}\cdot e^{-\pi\cdot\mathbf{i}}}{2\cdot\mathbf{i}} \\ &= \frac{-e^{\mathbf{i}\cdot z} + e^{-\mathbf{i}\cdot z}}{2\cdot\mathbf{i}} \\ &= -\sin z\end{aligned}$$

が成り立つ． ∎

すなわち，$[\pi, 2\cdot\pi]$ 上の sin の動きを可視化すると次の赤線を描く．



一方で $[\pi, 2\cdot\pi]$ 上の cos の動きは次の定理により判明する．

定理 F.5.9 (余弦は π を境に対称である).　z を任意に与えられた複素数とするとき

$$\cos(\pi - z) = -\cos z = \cos(\pi + z).$$

略証.　まず

$$\begin{aligned}\cos(\pi + z) &= \frac{e^{\mathbf{i}\cdot(\pi+z)} + e^{-\mathbf{i}\cdot(\pi+z)}}{2} \\ &= \frac{e^{\mathbf{i}\cdot\pi}\cdot e^{\mathbf{i}\cdot z} + e^{-\mathbf{i}\cdot\pi}\cdot e^{-\mathbf{i}\cdot z}}{2} \\ &= \frac{-e^{\mathbf{i}\cdot z} - e^{-\mathbf{i}\cdot z}}{2} \\ &= -\cos z\end{aligned}$$

が成り立つ．また

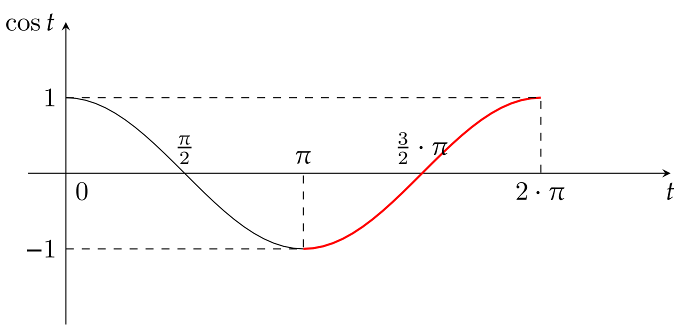
$$\begin{aligned}\cos(-z) &= \frac{e^{\mathbf{i}\cdot(-z)} + e^{-\mathbf{i}\cdot(-z)}}{2} \\ &= \frac{e^{-\mathbf{i}\cdot z} + e^{\mathbf{i}\cdot z}}{2} \\ &= \cos z\end{aligned}$$

であるから

$$\cos(\pi - z) = -\cos(-z) = -\cos z$$

も成立する． ∎

すなわち，$[\pi, 2\cdot\pi]$ 上の cos の動きを可視化すると次の赤線を描く．



F.6　周期性

次に考察するのは指数関数の**周期 (period)** である．結論を言えば複素数 z と w に対して

$$e^z = e^w \iff \exists n \in \mathbf{Z}\ (z - w = 2\cdot n\cdot\pi\cdot\mathbf{i})$$

が成り立つので，指数関数は $2 \cdot \pi \cdot \mathbf{i}$ だけずれるごとに同じ値を繰り返す．つまり**指数関数の周期は** $2 \cdot \pi \cdot \mathbf{i}$ である．
我々はすでに

$$z - w = 2 \cdot n \cdot \pi \cdot \mathbf{i} \Longrightarrow e^{z} = e^{w+2\cdot n\cdot\pi\cdot\mathbf{i}} = e^{w} \cdot e^{2\cdot n\cdot\pi\cdot\mathbf{i}} = e^{w}$$

が成り立つことを知っているから，以下の目標は逆の導出である．

いま z と w を複素数として，

$$e^{z} = e^{w}$$

が成り立っているとする．指数法則より

$$e^{w} = e^{z} \cdot e^{w-z}$$

が成り立つので

$$e^{z} = e^{z} \cdot e^{w-z}$$

が成立し，両辺に e^{-z} を掛けて

$$1 = e^{w-z}$$

を得る．ここで

$$w - z = x + \mathbf{i} \cdot y$$

を満たす実数 x と y を取れば

$$1 = e^{x} \cdot e^{\mathbf{i}\cdot y}$$

となるが，

$$0 < e^{x}$$

かつ

$$|e^{\mathbf{i}\cdot y}| = 1$$

なので

$$1 = |e^{x} \cdot e^{\mathbf{i}\cdot y}| = e^{x}$$

が成り立ち

$$x = 0$$

が従う．よって

$$w - z = \mathbf{i} \cdot y$$

が従う．ゆえに，

$$1 = e^{\mathbf{i}\cdot y} \Longrightarrow \exists n \in \mathbf{Z} \left(y = 2 \cdot n \cdot \pi \right)$$

を示せば

$$e^z = e^w \Longrightarrow \exists n \in \mathbf{Z}\ (z - w = 2 \cdot n \cdot \pi \cdot \mathbf{i})$$

が得られる．

定理 F.6.1 ($1 = e^{\mathbf{i} \cdot y}$ を満たす実数 y は $2 \cdot \pi$ の整数倍に限られる). 　y を実数とするとき，

$$1 = e^{\mathbf{i} \cdot y}$$

ならば

$$y = 2 \cdot n \cdot \pi$$

を満たす整数 n が取れる．

略証．

第一段　いま y を

$$0 < y < 2 \cdot \pi$$

を満たす実数として，

$$e^{\mathbf{i} \cdot y} \neq 1$$

が成り立つことを示す．実際，

$$e^{\mathbf{i} \cdot \frac{y}{4}} = u + \mathbf{i} \cdot y$$

を満たす実数 u と v を取ると，

$$0 < \frac{y}{4} < \frac{\pi}{2}$$

であるから

$$0 < u \wedge 0 < v$$

である．そして

$$e^{\mathbf{i} \cdot y} = (u + \mathbf{i} \cdot v)^4 = (u^4 - 6 \cdot u^2 \cdot v^2 + v^4) + 4 \cdot \mathbf{i} \cdot u \cdot v \cdot (u^2 - v^2)$$

が成り立つ．

$$u^2 \neq v^2$$

ならば

$$0 < u \cdot v \cdot (u^2 - v^2)$$

なので $e^{\mathbf{i} \cdot y}$ は実数ではない．

$$u^2 = v^2$$

ならば

$$u^2 = v^2 = \frac{1}{2}$$

が従い

$$e^{\mathbf{i}\cdot y} = -1$$

が成り立つ．よっていずれの場合も

$$e^{\mathbf{i}\cdot y} \neq 1$$

である．

第二段　y を任意に与えられた実数とすれば，

$$2\cdot n\cdot\pi \leq y < 2\cdot(n+1)\cdot\pi$$

を満たす整数 n が取れる．このとき

$$0 \leq y - 2\cdot n\cdot\pi < 2\cdot\pi$$

かつ

$$e^{\mathbf{i}\cdot y} = e^{\mathbf{i}\cdot y}\cdot e^{\mathbf{i}\cdot(-2\cdot n\cdot\pi)} = e^{\mathbf{i}\cdot(y-2\cdot n\cdot\pi)}$$

であるから，前段の結果より

$$e^{\mathbf{i}\cdot y} = 1$$

ならば

$$y = 2\cdot n\cdot\pi$$

が成り立つ．∎

以上で次の主張が得られた．

定理 F.6.2 (指数関数の周期は $2\cdot\pi\cdot\mathbf{i}$).　任意に与えられた複素数 z と w に対して

$$e^z = e^w \iff \exists n \in \mathbf{Z}\ (\, z - w = 2\cdot n\cdot\pi\cdot\mathbf{i}\,).$$

余弦と正弦は指数関数によって定められているので，これらも $2\cdot\pi\cdot\mathbf{i}$ ずれるごとに同じ値を繰り返す．また定理 F.6.2 から余弦と正弦の零点の全体を把握することができる．

実際，z を複素数とすれば

$$\begin{aligned}
\cos z = 0 &\iff e^{\mathbf{i}\cdot z} + e^{-\mathbf{i}\cdot z} = 0 \\
&\iff e^{2\cdot\mathbf{i}\cdot z} = -1 \\
&\iff e^{2\cdot\mathbf{i}\cdot z} = e^{\pi\cdot\mathbf{i}} \\
&\iff \exists n \in \mathbf{Z}\ (\, 2\cdot z - \pi = 2\cdot n\cdot\pi\,) \\
&\iff \exists n \in \mathbf{Z}\ \left(\, z = \frac{\pi}{2} + n\cdot\pi \,\right)
\end{aligned}$$

が成り立ち，同様に

$$\sin z = 0 \iff e^{2\cdot\mathbf{i}\cdot z} = e^0 \iff \exists n \in \mathbf{Z}\ (\, z = n \cdot \pi\,)$$

が成り立つ．以上を次の主張としてまとめておく．

定理 F.6.3 (余弦と正弦の零点).　cos の零点は $\pi/2$ を π の整数倍だけずらした実数の全体である:

$$\{\, z \in \mathbf{C} \mid \quad \cos z = 0\,\} = \left\{ z \mid \quad \exists n \in \mathbf{Z} \left(z = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \right) \right\}.$$

sin の零点は π を整数倍した実数の全体である:

$$\{\, z \in \mathbf{C} \mid \quad \sin z = 0\,\} = \{\, z \mid \quad \exists n \in \mathbf{Z}\ (\, z = n \cdot \pi\,)\,\}.$$

z を複素数とすれば

$$z = x + \mathbf{i} \cdot y$$

を満たす実数 x と y が取れるが，このとき

$$e^z = e^x \cdot e^{\mathbf{i}\cdot y}$$

が成り立ち，また

$$|e^z| = |e^x| \cdot \left| e^{\mathbf{i}\cdot y} \right| = e^x$$

が成り立つので

$$e^z = e^x \cdot (\cos y + \mathbf{i} \cdot \sin y) = |e^z| \cdot (\cos y + \mathbf{i} \cdot \sin y)$$

が従う．後述することだが，w を 0 でない複素数とすれば

$$w = \exp z$$

を満たす複素数 z が取れるので，

$$w = |w| \cdot (\cos y + \mathbf{i} \cdot \sin y)$$

を満たす実数 y が取れる．これを複素数の**極形式 (polar form)** と呼び，この y を w の**偏角 (argument)** と呼ぶ．先に示したように w の偏角たる実数は整数の個数だけ存在する．

F.7　対数関数

z を複素数とするとき，z の**対数 (logarithm)** とは

$$z = \exp w$$

を満たす複素数 w のことを指すが，exp は周期関数であるからそのような w は整数の個数だけ，つまり可算無限個存在する．対数関数とは指数関数の逆写像にあたるもので，複素数 z に対して対数の全体を対応させる写像である．つまり z に対し

$$\{\, w \in \mathbf{C} \mid \quad z = \exp w\,\}$$

なる $\mathbf{C}$ の部分集合合を対応させる写像であるが，正確には“関数”ではない．出端から名前と実態が食い違っているが，ちなみに関数と写像の違いは値が数であるか否かである．対数関数は写像ではあるが関数ではなく，値の中に対数が無数に存在している．これが理由で対数関数は**多価関数 (multivalued function)** と呼ばれている．値の中から虚部に関する条件によって対数を抜き取れば“関数”となり，その抜き取る操作を**対数の枝を取る**という．

まずは 0 でない複素数 z に対して

$$\{\, w \in \mathbf{C} \mid \quad z = \exp w \,\} \neq \emptyset$$

であることを示す．ちなみに定理 F.4.4 より

$$\{\, w \in \mathbf{C} \mid \quad 0 = \exp w \,\} = \emptyset$$

が成り立つ．

定理 F.7.1 (絶対値が 1 の複素数は e の純虚数乗で表せる).　z を複素数とすると，

$$|z| = 1$$

ならば

$$z = e^{\mathbf{i} \cdot y}$$

を満たす実数 y が取れる．

略証.　z を

$$|z| = 1$$

を満たす複素数とする．

$$z = u + \mathbf{i} \cdot v$$

を満たす実数 u と v を取ると，

$$u^2 + v^2 = 1$$

であるから

$$-1 \leq u \leq 1$$

が成立する．ところで

$$\cos 0 = 1$$

かつ

$$\cos \pi = -1$$

かつ

$$[0, \pi] \ni t \longmapsto \cos t$$

は連続であるから，中間値の定理より

$$u = \cos\theta$$

を満たす実数 θ が取れる．

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - u^2 = v^2$$

が成り立つので

$$v = \sin\theta \lor v = -\sin\theta$$

が従うが，

$$v = \sin\theta$$

の場合は

$$z = \cos\theta + \mathbf{i}\cdot\sin\theta = e^{\mathbf{i}\cdot\theta}$$

が成り立ち，

$$v = -\sin\theta$$

の場合は

$$z = \cos\theta + \mathbf{i}\cdot(-\sin\theta) = \cos(-\theta) + \mathbf{i}\cdot\sin(-\theta) = e^{\mathbf{i}\cdot(-\theta)}$$

が成り立つので，いずれの場合も

$$\exists y \in \mathbf{R}\ \left(z = e^{\mathbf{i}\cdot y}\right)$$

が満たされる． ∎

定理 F.7.2 (0 でない複素数には対数が存在する). z を 0 でない複素数とすると，

$$z = \exp w$$

を満たす複素数 w が取れる．

略証. z を 0 でない複素数とすると，定理 F.7.1 より

$$\frac{z}{|z|} = e^{\mathbf{i}\cdot y}$$

を満たす実数 y が取れる．また定理 F.4.7 より

$$|z| = e^x$$

を満たす実数 x が取れるので

$$z = |z|\cdot e^{\mathbf{i}\cdot y} = e^{x+\mathbf{i}\cdot y}$$

が成立する． ∎

定義 F.7.3 (対数関数).　複素数 z に対して

$$\{\, w \in \mathbf{C} \mid \quad z = \exp w \,\}$$

を対応させる $\mathbf{C}$ 上の写像を**対数関数 (logarithmic function)** と呼び，

$$\log$$

と書く．

z を 0 でない複素数とするとき，

$$z = \exp w$$

かつ

$$-\pi < \operatorname{Im} w \leq \pi$$

を満たす複素数 w を $\log z$ の**主値 (principal value)** と呼ぶ．z の対数の主値を

$$\operatorname{pv} \log z$$

と書くとき，

$$\mathbf{C} \backslash \{0\} \ni z \longmapsto \operatorname{pv} \log z$$

なる対応関係で定める $\mathbf{C} \backslash \{0\}$ 上の写像を

$$\operatorname{Log}$$

と書く．正式には Log とは

$$\operatorname{Log} \overset{\text{def}}{=\!=} \{\, x \mid \quad \exists z, w \in \mathbf{C}\ [\, x = (z, w) \wedge z \neq 0 \wedge z = \exp w \wedge -\pi < \operatorname{Im} w \leq \pi \,]\,\}$$

で定められる関係であるが，実際に

$$\operatorname{Log} : \mathbf{C} \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbf{C}$$

が成り立っているということは定理 F.7.2 と定理 F.6.2 によって保障される．

定理 F.7.4 (Log は $\mathbf{C} \backslash \{0\}$ から $\mathbf{C}$ への関数である).

$$\operatorname{Log} : \mathbf{C} \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbf{C}.$$

略証.

第一段　Log が写像であることを示す．複素数 z と w と ζ に対して

$$z = e^{w} \wedge -\pi < \operatorname{Im} w \leq \pi$$

と

$$z = e^{\zeta} \wedge -\pi < \operatorname{Im} \zeta \leq \pi$$

が成り立っているとき，定理 F.6.2 より

$$w - \zeta = (2 \cdot n \cdot \pi) \cdot \mathbf{i}$$

を満たす整数 n が取れる．このとき

$$2 \cdot n \cdot \pi = |\operatorname{Im}(w - \zeta)| = |\operatorname{Im} w - \operatorname{Im} \zeta| < 2 \cdot \pi$$

が成り立つので

$$n = 0$$

が従い

$$w = \zeta$$

が従う．ゆえに Log は写像である．

第二段　Log の定義域 dom(Log) が $\mathbf{C} \backslash \{0\}$ に一致することを示す．

$$\operatorname{dom}(\operatorname{Log}) \subset C \backslash \{0\}$$

であることは Log の定め方より従う．いま z を 0 でない複素数とすると，定理 F.7.2 より

$$z = \exp w$$

を満たす複素数 w が取れる．

$$(2 \cdot n - 1) \cdot \pi < \operatorname{Im} w \leq (2 \cdot n + 1) \cdot \pi$$

を満たす整数 n を取れば，

$$e^{w - (2 \cdot n \cdot \pi) \cdot \mathbf{i}} = e^{w} \cdot e^{-(2 \cdot n \cdot \pi) \cdot \mathbf{i}} = e^{w} = z$$

かつ

$$-\pi < \operatorname{Im} (w - (2 \cdot n \cdot \pi) \cdot \mathbf{i}) \leq \pi$$

が成り立つので

$$z \in \operatorname{dom}(\operatorname{Log})$$

が従う．以上で

$$\operatorname{dom}(\operatorname{Log}) = C \backslash \{0\}$$

が得られた．∎

Log は不連続点を持つ

Log は -1 で不連続である．

実際，

$$\operatorname{Log}(-1) = i \cdot \pi$$

であり，他方で

$$-\pi < t < 0$$

なる実数 t に対しては

$$\operatorname{Log} e^{\mathbf{i}\cdot t} = \mathbf{i} \cdot t \longrightarrow \mathbf{i} \cdot (-\pi) \quad (t \longrightarrow -\pi)$$

が成り立つから，単位円上に沿ってとる Log の値は -1 において不連続である．

さらに言えば Log は任意の負の実数において不連続であるが，それは対数の主値の定め方に起因している．だが 0 以下の実数ではない複素数においては微分可能である．

定理 F.7.5 (Log は 0 以下の実数ではない複素数において微分可能).　z を

$$z \notin \mathbf{R} \vee 0 < z$$

を満たす複素数とすると，Log は z において微分可能であって，その微分係数は

$$\frac{1}{z}$$

である．

略証．

第一段　z を

$$z \notin \mathbf{R} \vee 0 < z$$

を満たす複素数として，Log が z で連続であることを示す．定理 F.4.7 より

$$e^{\theta} = \frac{|z|}{2}$$

を満たす実数 θ と

$$e^{\eta} = \frac{3}{2} \cdot |z|$$

を満たす実数 η が取れる．exp は $\mathbf{R}$ 上で単調増大であって，かつ

$$|z| = |e^{\operatorname{Log} z}| = e^{\operatorname{Re} \operatorname{Log} z}$$

が成り立つので，

$$\theta < \operatorname{Re} \operatorname{Log} z < \eta$$

が満たされる．また z は負の実数ではないので

$$-\pi < \operatorname{Im} \operatorname{Log} z < \pi$$

も満たされる．従って

$$\forall w \in \mathbf{C} \left[|\operatorname{Log} z - w| < \epsilon_0 \Longrightarrow \left(\theta < \operatorname{Re} w < \eta \wedge -\pi < \operatorname{Im} w < \pi \right) \right]$$

を満たす正の実数 ϵ_0 が取れる．いま ϵ を

$$\epsilon \leq \epsilon_0$$

を満たす正の実数とする．ここで

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \{\, w \in \mathbf{C} \mid \quad -\pi \leq \operatorname{Im} w \leq \pi \,\}$$

及び

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ w \in \mathbf{C} \mid \quad \theta \leq \operatorname{Re} w \leq \eta \right\}$$

及び

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \{\, w \in \mathbf{C} \mid \quad \epsilon \leq |w - \operatorname{Log} z| \,\}$$

とおけば，A と B と C はどれも $\mathbf{C}$ の閉集合であって，

$$K \stackrel{\text{def}}{=} A \cap B \cap C$$

で定める K は $\mathbf{C}$ のコンパクト部分集合である．

$$\mathbf{C} \ni w \longmapsto |e^w - z|$$

は連続なので，K 上で最小値を取る．その最小値を ρ とおけば

$$|e^{\xi} - z| = \rho$$

を満たす K の要素 ξ が取れるが，

$$e^w = z$$

を満たす K の要素 w は $\operatorname{Log} z$ に限られるので

$$0 < |e^{\xi} - z| = \rho$$

が成り立つ．他方で

$$\operatorname{Re} w < \theta$$

を満たす複素数 w に対しては

$$\frac{|z|}{2} \leq |z| - |e^w| \leq |e^w - z|$$

が成り立ち，

$$\eta < \operatorname{Re} w$$

を満たす複素数 w に対しては

$$\frac{|z|}{2} \leq |e^w| - |z| \leq |e^w - z|$$

が成り立つ．ゆえに

$$\forall w \ \left[\, w \in A \cap C \Longrightarrow \min\left\{\rho, |z|/2\right\} \leq |e^{w} - z| \,\right] \tag{F.6}$$

を得る．ここで

$$\delta \overset{\text{def}}{=\!=} \min\left\{\rho, |z|/2\right\}$$

とおく．ζ を任意に与えられた複素数とすると，

$$\epsilon \leq |\operatorname{Log}\zeta - \operatorname{Log} z|$$

であるとき

$$\operatorname{Log}\zeta \in A \cap C$$

が成り立つので，このとき (F.6) より

$$\delta \leq |e^{\operatorname{Log}\zeta} - z| = |\zeta - z|$$

が成立する．すなわち

$$\forall \zeta \in \mathbf{C} \ (\, \epsilon \leq |\operatorname{Log}\zeta - \operatorname{Log} z| \Longrightarrow \delta \leq |\zeta - z| \,)$$

が成立する．この対偶を取れば

$$\forall \zeta \in \mathbf{C} \ (\, |\zeta - z| < \delta \Longrightarrow |\operatorname{Log}\zeta - \operatorname{Log} z| < \epsilon \,)$$

が従う．ゆえに Log は z において連続である．

第二段　z を

$$z \notin \mathbf{R} \vee 0 < z$$

を満たす複素数として，Log が z で微分可能であって，その微分係数が

$$\frac{1}{z}$$

であることを示す．いま ϵ を任意に与えられた正の実数とする．

$$\zeta \overset{\text{def}}{=\!=} \operatorname{Log} z$$

とおくと，exp の ζ での微分可能性より

$$\forall w \in \mathbf{C} \left[\, 0 < |w - \zeta| < \delta \Longrightarrow \left| \frac{e^{w} - e^{\zeta}}{w - \zeta} - e^{\zeta} \right| < \frac{|z|}{2} \,\right] \tag{F.7}$$

かつ

$$\forall w \in \mathbf{C} \left[\, 0 < |w - \zeta| < \delta \Longrightarrow \left| \frac{e^{w} - e^{\zeta}}{w - \zeta} - e^{\zeta} \right| < \frac{|z|^2}{2} \cdot \epsilon \,\right] \tag{F.8}$$

を満たす正の実数 δ が取れる．Log は z で連続なので

$$\forall h \in \mathbf{C} \ \left[\, |h| < \eta \Longrightarrow |\operatorname{Log}(z + h) - \operatorname{Log} z| < \delta \,\right] \tag{F.9}$$

を満たす正の実数 η が取れる．ここで h を

$$0 < |h| < \eta$$

を満たす複素数とすると，

$$w \overset{\text{def}}{=\!=} \mathrm{Log}\,(z+h)$$

とおけば (F.9) より

$$0 < |w-\zeta| < \delta$$

が満たされるので，(F.8) より

$$\begin{aligned}
\left|\mathrm{Log}\,(z+h) - \mathrm{Log}\,z - h\cdot\frac{1}{z}\right| &= \left|w-\zeta-(e^w-e^\zeta)\cdot\frac{1}{z}\right| \\
&= \frac{1}{|z|}\cdot\left|e^w-e^\zeta-(w-\zeta)\cdot e^\zeta\right| \\
&< \frac{1}{|z|}\cdot\frac{|z|^2}{2}\cdot\epsilon\cdot|w-\zeta| \\
&= \frac{|z|}{2}\cdot\epsilon\cdot|h|\cdot\left|\frac{w-\zeta}{e^w-e^\zeta}\right|
\end{aligned}$$

が成り立つ．ところで (F.7) より

$$\frac{|z|}{2} = |e^\zeta| - \frac{|z|}{2} < \left|\frac{e^w-e^\zeta}{w-\zeta}\right|$$

が成立するので

$$\frac{|z|}{2}\cdot\epsilon\cdot|h|\cdot\left|\frac{w-\zeta}{e^w-e^\zeta}\right| < \epsilon\cdot|h|$$

が成り立つ．以上より

$$\forall h \in \mathbf{C}\left[0<|h|<\eta \Longrightarrow \left|\mathrm{Log}\,(z+h)-\mathrm{Log}\,z-h\cdot\frac{1}{z}\right| < \epsilon\cdot|h|\right]$$

が得られた．ゆえに Log は z で微分可能であり，その微分係数は

$$\frac{1}{z}$$

である． ∎

F.8　偏角

0 でない複素数 z に対して

$$z = \exp w$$

を満たす複素数 w を z の対数と呼んだが，このとき

$$\frac{z}{|z|} = e^{\mathbf{i}\cdot\mathrm{Im}\,w}$$

が成立する．$\mathrm{Im}\, w$ の様に

$$\frac{z}{|z|} = e^{\mathbf{i}\cdot\theta}$$

を満たす実数 θ のことを z の**偏角 (argument)** と呼ぶ．対数と同様に偏角も整数の個数だけ存在する．

定義 F.8.1 (偏角).　複素数 z に対して，その偏角の全体

$$\{\, \theta \in \mathbf{R} \mid \quad z = |z| \cdot \exp(\mathbf{i}\cdot\theta)\,\}$$

を対応させる $\mathbf{C}$ 上の写像を

$$\mathrm{arg}$$

と書く．arg もまた多価関数であるが，何らかの条件によって偏角を抜き取れば "関数" となり，その抜き取る操作を**偏角の枝を取る**という．

z を 0 でない複素数とするとき，

$$\arg z$$

は z の対数の虚部の全体

$$\{\, \theta \mid \quad \exists w \in \mathbf{C}\ (\, z = \exp w \wedge \theta = \mathrm{Im}\, w\,)\,\}$$

に一致する．実際，θ を z の偏角とすれば

$$\frac{z}{|z|} = e^{\mathbf{i}\cdot\theta}$$

が成り立つので，

$$w \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Log}\,|z| + \mathbf{i}\cdot\theta$$

により複素数 w を定めれば

$$e^{w} = e^{\mathrm{Log}\,|z|} \cdot e^{\mathbf{i}\cdot\theta} = |z| \cdot \frac{z}{|z|} = z$$

が成立する．つまり w は z の対数であり，$\mathrm{Log}\,|z|$ が実数であるから θ は w の虚部である．逆に，θ を実数とし，

$$z = \exp w \wedge \theta = \mathrm{Im}\, w$$

を満たす複素数 w が取れるとする．この場合は冒頭に書いた内容から

$$\frac{z}{|z|} = e^{\mathbf{i}\cdot\mathrm{Im}\, w} = e^{\mathbf{i}\cdot\theta}$$

が成立するので θ は z の偏角である．

z を 0 でない複素数とするとき，

$$-\pi < \theta \leq \pi$$

を満たす z の偏角を $\arg z$ の**主値 (principal value)** と呼ぶ．z の偏角の主値を

$$\mathrm{pv}\arg z$$

と書くとき，

$$\mathbf{C}\backslash\{0\} \ni z \longmapsto \mathrm{pv}\arg z$$

なる対応関係で定める $\mathbf{C}\backslash\{0\}$ 上の写像を

$$\mathrm{Arg}$$

と書く．正式には Arg とは

$$\mathrm{Arg} \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \{\, x \mid \quad \exists z \in \mathbf{C}\, \exists \theta \in \mathbf{R}\, [\, x = (z,\theta) \wedge z \neq 0 \wedge z = |z| \cdot \exp(\mathbf{i} \cdot \theta) \wedge -\pi < \theta \leq \pi \,]\,\}$$

で定められる関係である．

定理 F.8.2 (偏角の主値は対数の主値の虚部).

$$\mathrm{Arg} = \mathrm{Im} \circ \mathrm{Log}\,.$$

略証． x を Arg の要素とすると，

$$z = |z| \cdot \exp(\mathbf{i} \cdot \theta) \wedge -\pi < \theta \leq \pi$$

を満たす 0 でない複素数 z，および実数 θ が取れて，

$$x = (z, \theta)$$

が成り立つ．ここで

$$w \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \mathrm{Log}\,|z| + \mathbf{i} \cdot \theta$$

により複素数 w を定めれば，

$$z = \exp w$$

かつ

$$\theta = \mathrm{Im}\, w$$

が成り立つので

$$(z, w) \in \mathrm{Log}$$

かつ

$$(w, \theta) \in \mathrm{Im}$$

が成立する．ゆえに

$$x = (z, \theta) \in \mathrm{Im} \circ \mathrm{Log}$$

が成立する．逆に x を $\mathrm{Im} \circ \mathrm{Log}$ の要素とすると，

$$(z, w) \in \mathrm{Log}$$

と

$$(w,\theta) \in \mathrm{Im}$$

を満たす複素数 z, w と実数 θ が取れて，

$$x = (z,\theta)$$

が成り立つ．このとき

$$z = \exp w$$

かつ

$$\theta = \mathrm{Im}\, w$$

であるから

$$e^{\mathbf{i}\cdot\theta} = e^{\mathbf{i}\cdot\mathrm{Im}\, w} = \frac{z}{|z|}$$

が成立し，また

$$-\pi < \mathrm{Im}\, w \leq \pi$$

であるから

$$-\pi < \theta \leq \pi$$

も満たされる．ゆえに

$$x = (z,\theta) \in \mathrm{Arg}$$

が従う． ▮

特に Arg は $\mathbf{C}\backslash\{0\}$ から $\mathbf{R}$ への連続写像である．

偏角の群論的な視点

いま

$$U \overset{\mathrm{def}}{=} \{\, z \in \mathbf{C} \mid \quad |z| = 1 \,\}$$

とおいて，φ を

$$\mathbf{R} \ni y \longmapsto e^{\mathrm{i}\cdot y}$$

なる写像とする．この φ は $(\mathbf{R}, +)$ から $(U, \cdot)$ への全射群準同型である．φ の核は

$$\{\, 2 \cdot n \cdot \pi \mid \quad n \in \mathbf{Z} \,\}$$

に一致し，この集合を

$$2\pi\mathbf{Z}$$

と書けば同型定理より商 $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ から U への全単射 ψ が得られる．このとき，z を 0 でない任意の複素数とすれば

$$\arg z = \psi^{-1}(z/|z|)$$

が成立する．

F.9　note

指数関数についての内容は Rudin の Real and Complex Analysis のプロローグを，対数の主値の正則性については Ahlfors の Complex Analysis の 3 章 2.2 を主に参考にした．また偏角の群論的定義は Cartan の複素関数論における流儀である．

付録 G

積分論メモ

G.1　測度

G.1.1　Lebesgue 拡大

定理 G.1.1 (最小の完備拡大が取れる).　$(X, \mathscr{A}, \mu)$ を正値測度空間とする．このとき

$$\mathscr{B} \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{ B \mid \quad B \subset X \land \exists A, C \in \mathscr{A} \ \left(A \subset B \subset C \land \mu(C \backslash A) = 0 \right) \right\}$$

により定める $\mathscr{B}$ は X 上の σ-加法族となる．また B を $\mathscr{B}$ の要素とすると

$$A \subset B \subset C \land \mu(C \backslash A) = 0$$

なる $\mathscr{A}$ の要素 A と C が取れるが，B に対して $\mu(A)$ を対応させる関係，つまり

$$\left\{ (x, y) \mid \quad x \in \mathscr{B} \land \exists a, c \in \mathscr{A} \ \left(a \subset x \subset c \land y = \mu(a) \right) \right\}$$

なる関係を ν とすれば，ν は $\mathscr{B}$ 上の完備な正値測度である．そして $(X, \mathscr{C}, \lambda)$ を

$$\mathscr{A} \subset \mathscr{C} \land \mu \subset \lambda$$

を満たす完備な正値測度空間とすると，

$$\mathscr{B} \subset \mathscr{C} \land \nu \subset \lambda$$

が成立する．つまり $(X, \mathscr{B}, \nu)$ は $(X, \mathscr{A}, \mu)$ の完備拡大のうちで最小である．

略証.

第一段　$\mathscr{B}$ が σ-加法族であることを示す．まず

$$X \in \mathscr{A}$$

と

$$X \subset X \subset X$$

と

$$\mu(X\backslash X) = \mu(\emptyset) = 0$$

が成り立つので X は $\mathscr{B}$ に属する．B を $\mathscr{B}$ の要素とすれば

$$A \subset B \subset C \wedge \mu(C\backslash A) = 0$$

なる $\mathscr{A}$ の要素 A と C が取れて，このとき

$$(X\backslash C) \subset (X\backslash B) \subset (X\backslash A)$$

と

$$\mu\left((X\backslash A)\backslash(X\backslash C)\right) = \mu(C\backslash A) = 0$$

が成り立つから

$$X\backslash B \in \mathscr{B}$$

が成り立つ．つまり $\mathscr{B}$ は補演算で閉じる．$\{B_n\}_{n\in\omega}$ を $\mathscr{B}$ の部分集合とすれば，各自然数 n で

$$A_n \subset B_n \subset C_n \wedge \mu(C_n\backslash A_n) = 0$$

を満たす $\mathscr{A}$ の要素 A_n と C_n が取れる．このとき

$$\bigcup_{n\in\omega} A_n \subset \bigcup_{n\in\omega} B_n \subset \bigcup_{n\in\omega} C_n$$

が成り立ち，また

$$\bigcup_{n\in\omega} C_n \backslash \bigcup_{n\in\omega} A_n \subset \bigcup_{n\in\omega} (C_n\backslash A_n)$$

より

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\omega} C_n \backslash \bigcup_{n\in\omega} A_n\right) \leq \sum_{n\in\omega} \mu(C_n\backslash A_n) = 0$$

も成り立つから

$$\bigcup_{n\in\omega} B_n \in \mathscr{B}$$

も成立する．ゆえに $\mathscr{B}$ は可算合併でも閉じる．ゆえに $\mathscr{B}$ は σ-加法族である．

第二段　ν が写像であることを示す．(x, y) と (x, z) を ν の要素とする．このとき

$$x = B$$

なる $\mathscr{B}$ の要素 B が取れて，また

$$A_1 \subset B \subset C_1 \wedge \mu(C_1\backslash A_1) = 0$$

なる $\mathscr{A}$ の要素 A_1 と C_1 と，

$$A_2 \subset B \subset C_2 \wedge \mu(C_2\backslash A_2) = 0$$

なる $\mathscr{A}$ の要素 A_2 と C_2 も取れる．そして

$$A_1 \subset B \subset C_2$$

から

$$\mu(A_1) \leq \mu(C_2) = \mu(A_2)$$

が成り立ち，

$$A_2 \subset B \subset C_1$$

から

$$\mu(A_2) \leq \mu(C_1) = \mu(A_1)$$

も成り立つので，

$$y = \mu(A_1) = \mu(A_2) = z$$

が成立する．ゆえに ν は写像である．

第三段　ν の定義域が $\mathscr{B}$ に等しいことを示す．x を $\mathrm{dom}(\nu)$ の要素とすると，

$$x = B$$

なる $\mathscr{B}$ の要素 B が取れるので

$$x \in \mathscr{B}$$

が従う．x を $\mathscr{B}$ の要素とすると，

$$A \subset x \subset C \wedge \mu(C \backslash A) = 0$$

なる $\mathscr{A}$ の要素 A と C が取れるので

$$(x, \mu(A)) \in \nu$$

が成り立ち

$$x \in \mathrm{dom}(\nu)$$

が従う．x の任意性から

$$\mathrm{dom}(\nu) = \mathscr{B}$$

が得られる．

第四段　$(X, \mathscr{B}, \nu)$ が $(X, \mathscr{A}, \mu)$ の完備拡大のうちで最小であることを示す．B を $\mathscr{B}$ の要素とすると

$$A \subset x \subset C \wedge \mu(C \backslash A) = 0$$

なる $\mathscr{A}$ の要素 A と C が取れる．ここで

$$\mu \subset \lambda$$

より

$$C \backslash A$$

は λ-零集合なので，λ の完備性より

$$B \backslash A \in \mathscr{C}$$

が成立する．よって

$$B = B \cup (B \backslash A) \in \mathscr{C}$$

が成立する．よって

$$\mathscr{B} \subset \mathscr{C}$$

が成立する．また

$$\nu(B) = \mu(A) = \lambda(A) = \lambda(A) + \lambda(B \backslash A) = \lambda(B)$$

が成立するので

$$\nu \subset \lambda$$

も成立する． ∎

定義 G.1.2 (Lebesgue 拡大). $(X, \mathscr{A}, \mu)$ を正値測度空間とするとき，その最小の完備拡大として取れる正値測度空間を $(X, \mathscr{A}, \mu)$ の **Lebesgue** 拡大と呼ぶ．Lebesgue 拡大は往々にして

$$\left(X, \overline{\mathscr{A}}, \overline{\mu}\right)$$

のように上線を載せて書かれる．

定理 G.1.3 (Lebesgue 拡大の可測集合族の対称差による表現). $(X, \mathscr{A}, \mu)$ を正値測度空間とし，$\left(X, \overline{\mathscr{A}}, \overline{\mu}\right)$ をその Lebesgue 拡大とする．このとき

$$\tilde{\mathscr{A}} \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{ B \mid \quad B \subset X \wedge \exists A, N \in \mathscr{A} \ \left(\mu(N) = 0 \wedge B \backslash A \subset N \wedge A \backslash B \subset N \right) \right\}$$

は $\overline{\mathscr{A}}$ に一致する．

略証. B を $\overline{\mathscr{A}}$ の要素とすると

$$A \subset B \subset C \wedge \mu(C \backslash A) = 0$$

なる $\mathscr{A}$ の要素 A と C が取れる．

$$N \overset{\text{def}}{=\!=} C \backslash A$$

とおけば，

$$\mu(N) = 0$$

かつ

$$B \backslash A \subset N$$

かつ

$$A \backslash B = \emptyset \subset N$$

が成り立つので

$$B \in \tilde{\mathscr{A}}$$

が成立する．次に B を $\tilde{\mathscr{A}}$ の要素とすると，

$$\mu(N) = 0 \wedge B \backslash A \subset N \wedge A \backslash B \subset N$$

なる $\mathscr{A}$ の要素 A と N が取れる．ここで

$$\forall x \in A \, (\, x \notin B \Longrightarrow x \in N \,)$$

が成り立つから，

$$A \backslash N \subset B$$

が成立する．他方で

$$\forall x \in B \, (\, x \notin A \Longrightarrow x \in N \,)$$

が成り立つから，

$$B \subset A \cup N$$

が成立する．また

$$(A \cup N) \backslash (A \backslash N) = (A \cup N) \cap ((X \backslash A) \cup N)$$

であるから，x を $(A \cup N) \backslash (A \backslash N)$ の要素とすると

$$x \in A$$

ならば

$$x \notin A \vee x \in N$$

と併せて

$$x \in N$$

が成り立つ．ゆえに

$$(A \cup N) \backslash (A \backslash N) \subset N$$

が成り立つ．ゆえに

$$A \backslash N \subset B \subset A \cup N \wedge \mu\left((A \cup N) \backslash (A \backslash N)\right) = 0$$

が満たされ

$$B \in \overline{\mathscr{A}}$$

となる．以上より

$$\overline{\mathscr{A}} = \tilde{\mathscr{A}}$$

が得られた．∎

補題 G.1.4 (可分値写像による可測写像の一様近似). $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を正値測度空間とし，(S, d) を可分距離空間とし，f を $\mathcal{B}/\mathscr{B}(S)$-可測写像とする．このとき S の可算稠密集合に値を取る $\mathcal{B}/\mathscr{B}(S)$-可測写像列で，$f$ に一様収束するものが取れる．

証明. $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ を S の可算稠密な部分集合をとする．任意の $n \geq 1$ に対し

$$B_n^k := \left\{ s \in S \mid \quad d(s, a_k) < \frac{1}{n} \right\}, \quad A_n^k := f^{-1}\left(B_n^k\right); \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

とおけば，

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_n^k = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}\left(B_n^k\right) = f^{-1}(S)$$

より $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_n^k$ が成り立つ．ここで

$$\tilde{A}_n^1 := A_n^1, \quad \tilde{A}_n^k := A_n^k \left\backslash \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_n^i \right) \right.; \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

として

$$f_n(x) := a_k, \quad (x \in \tilde{A}_n^k,\ k = 1, 2, \cdots)$$

により $\mathcal{B}/\mathscr{B}(S)$-可測写像列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ を定めれば，

$$d\left(f_n(x), f(x)\right) < \frac{1}{n}, \quad (\forall x \in X)$$

が満たされる．∎

定理 G.1.5 (拡大前後の可測性). $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間，その Lebesgue 拡大を $\left(X, \overline{\mathcal{B}}, \overline{\mu}\right)$ と書き，(S, d) を可分距離空間とする．このとき，任意の写像 $f : X \longrightarrow S$ に対し次は同値である:

(a)　或る $\mathcal{B}/\mathscr{B}(S)$-可測写像 g が存在して μ-a.e. に $f = g$ となる．

(b)　f は $\overline{\mathcal{B}}/\mathscr{B}(S)$-可測である．

証明.

第一段　(a) が成立しているとき，$\{f \neq g\} \subset N$ を満たす μ-零集合 $N \in \mathcal{B}$ が存在して

$$f^{-1}(E) \cap \left(g^{-1}(E)\right)^c \subset N, \quad g^{-1}(E) \cap \left(f^{-1}(E)\right)^c \subset N, \quad (\forall E \in \mathscr{B}(S))$$

が成り立つから，**(??)** より $f^{-1}(E) \in \overline{\mathcal{B}}$ が従い $(a) \Rightarrow (b)$ が出る．

第二段　f が $\overline{\mathcal{B}}/\mathscr{B}(S)$-可測のとき，$S$ の可算稠密な部分集合を $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ とすれば，補題 G.1.4 より

$$f_n(x) = a_k,\ (x \in A_n^k,\ k = 1, 2, \cdots); \quad \sum_{k=1}^{\infty} A_n^k = X; \quad d\left(f_n(x), f(x)\right) < \frac{1}{n},\ (\forall x \in X)$$

を満たす $\overline{\mathcal{B}}/\mathscr{B}(S)$-可測写像列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ と互いに素な集合 $\left\{A_n^k\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \overline{\mathcal{B}}$ が存在する．各 A_n^k に対し

$$E_{1,n}^k \subset A_n^k \subset E_{2,n}^k, \quad \mu\left(E_{2,n}^k - E_{1,n}^k\right) = 0$$

を満たす $E_{1,n}^k, E_{2,n}^k \in \mathcal{B}$ が存在するから，一つ $a_0 \in S$ を選び

$$g_n(x) := \begin{cases} a_k, & (x \in E_{1,n}^k,\ k = 1, 2, \cdots), \\ a_0, & (x \in N_n := X \backslash \sum_{k=1}^{\infty} E_{1,n}^k) \end{cases}$$

で $\mathcal{B}/\mathscr{B}(S)$-可測写像列 $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ を定めて $N := \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ とおけば

$$f_n(x) = g_n(x), \quad (\forall x \in X \backslash N,\ \forall n \geq 1)$$

が成り立つ．このとき $X \backslash N$ 上で $\lim_{n\to\infty} g_n(x)$ は存在し $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ に一致するから，

$$g(x) := \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x), & (x \in X \backslash N), \\ a_0, & (x \in N) \end{cases}$$

により $\mathcal{B}/\mathscr{B}(S)$-可測写像 g を定めれば (a) が満たされる． ∎

G.1.2　完全加法性

定義 G.1.6 (共通点性).　X を集合とし，$\mathcal{B}$ を X 上の加法族とし，μ を $\mathcal{B}$ 上の加法的な正値写像とする．$\{B_n\}_{n\in\omega}$ を

$$\mu(B_0) < \infty \wedge \bigcap_{n\in\omega} B_n = \emptyset \wedge \forall n \in \omega\,(\, B_{n+1} \subset B_n\,)$$

を満たす $\mathcal{B}$ の部分集合とするとき

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = 0$$

が成立するなら，μ は**共通点性**を満たすという．

定理 G.1.7 (有限測度の完全加法性の同値条件).　X を集合とし，$\mathcal{B}$ を X 上の加法族とし，μ を $\mathcal{B}$ 上の加法的正値測度として，$\mu(X) < \infty$ であるとする．このとき，μ が $\mathcal{B}$ の上で完全加法的であることと μ が共通点性を満たすことは同値である．

証明.

定義 G.1.8 (コンパクトクラス). K を集合とする．K の任意の可算部分集合が有限交叉性を満たすとき，つまり

$$\forall u \left[u \subset K \land \omega \approx u \Longrightarrow \forall v \left(v \subset u \land \exists n \in \omega \, (v \approx n) \Longrightarrow \bigcap v \neq \emptyset \right) \right]$$

となるとき，K をコンパクトクラス (**compact class**) と呼ぶ.

定理 G.1.9 (測度有限な集合がコンパクトクラスで近似されるなら共通点性を持つ). X を集合とし，$\mathcal{B}$ を X 上の加法族とし，μ を $\mathcal{B}$ 上の加法的正値測度とする．また $\mathcal{K}$ を $\mathrm{P}(X)$ の部分集合でコンパクトクラスであるものとする．この下で，任意に正数 ϵ と $\mu(B) < \infty$ なる $\mathcal{B}$ の要素 B が与えられたとき

$$A \subset K \subset B \land \mu(B \backslash A) < \epsilon$$

を満たす $\mathcal{B}$ の要素 A と $\mathcal{K}$ の要素 K が取れるなら，μ は共通点性を持つ.

証明.　$\{B_n\}_{n\in\omega}$ を

$$\mu(B_1) < \infty$$

かつ

$$\bigcap_{n\in\omega} B_n = \emptyset$$

かつ

$$\forall n \in \omega \, (B_{n+1} \subset B_n)$$

を満たす $\mathcal{B}$ の部分集合とする.

$$\mu(B_N) = 0$$

なる自然数 N が取れるとき，

$$\forall n \in \omega \, \left(N \leq n \Longrightarrow \mu(B_n) = 0 \right)$$

が成り立つから

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = 0$$

が従う．他方で

$$\forall n \in \omega \, \left(0 < \mu(B_n) \right)$$

が成り立つとき，ϵ を任意に与えられた正数とすると，各自然数 n で

$$A_n \subset K_n \subset B_n \land \mu(B_n \backslash A_n) < \frac{\epsilon}{2^n}$$

を満たす $\mathcal{B}$ の要素 A_n と $\mathcal{K}$ の要素 K_n が取れる．ここで

$$\rightharpoondown \{K_n\}_{n\in\omega} \approx \boldsymbol{\omega} \tag{G.1}$$

の場合は

$$\{K_n\}_{n\in\omega} = \{K_n\}_{n\in N}$$

を満たす自然数 N が取れて

$$\bigcap_{n\in N} K_n \subset \bigcap_{n\in\omega} B_n$$

となるので，

$$\bigcap_{n\in N} A_n = \emptyset$$

が成立する．

$$\{K_n\}_{n\in\omega} \approx \boldsymbol{\omega} \tag{G.2}$$

の場合は

$$\bigcap_{n\in\omega} K_n \subset \bigcap_{n\in\omega} B_n$$

が成り立つから，この場合も

$$\bigcap_{n\in N} K_n = \emptyset$$

を満たす自然数 N が取れて，

$$\bigcap_{n\in M} A_n = \emptyset$$

が成立する．ゆえに (G.1) の場合も (G.2) の場合も N 以上の任意の自然数 m に対して

$$B_m \subset \bigcup_{n\in N} (B_n \setminus A_n)$$

が成り立ち

$$\forall m \in \mathbf{N} \left(N \leq m \Longrightarrow \mu(B_m) < \epsilon \right)$$

が従う．すなわち

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = 0$$

となる． ∎

定理 G.1.10 (全測度が無限である加法的測度の完全加法性の同値条件).　X を集合とし，$\mathcal{B}$ を X 上の加法族とし，μ を $\mathcal{B}$ 上の加法的正値測度として，$\mu(X) = \infty$ であるとする．このとき，μ が $\mathcal{B}$ の上で完全加法性であることと，μ が共通点性と次の条件を共に満たすことは同値である．

- $\{B_n\}_{n\in\omega}$ を
$$\forall n \in \omega\,(\,B_n \subset B_{n+1}\,) \wedge \bigcup_{n\in\omega} B_n \in \mathcal{B}$$
を満たす $\mathcal{B}$ の部分集合とするとき，
$$\mu\left(\bigcup_{n\in\omega} B_n\right) = \infty \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \infty.$$

証明.

定理 G.1.11 (σ-有限な加法的測度の完全加法性の同値条件).　X を集合とし，$\mathcal{B}$ を X 上の加法族とし，μ を $\mathcal{B}$ 上の σ-有限な加法的正値測度として，$\mu(X) = \infty$ であるとする．また $\{X_n\}_{n\in\omega}$ を
$$\forall n \in \omega\,(\,\mu(X_n) < \infty\,) \wedge \forall n \in \omega\,(\,X_n \subset X_{n+1}\,) \wedge \bigcup_{n\in\omega} X_n = X$$
を満たす $\mathcal{B}$ の部分集合とする．このとき，μ が $\mathcal{B}$ の上で完全加法性であることと，μ が共通点性と次の条件を共に満たすことは同値である．

- B を $\mu(B) = \infty$ なる $\mathcal{B}$ の要素とするとき
$$\lim_{n\to\infty} \mu(B \cap X_n) = \infty.$$

証明.

G.1.3　Dynkin 族定理

定義 G.1.12 (乗法族・Dynkin 族).　集合 X の部分集合の族 $\mathscr{A}$ が任意の $A, B \in \mathscr{A}$ に対し $A \cap B \in \mathscr{A}$ を満たすとき $\mathscr{A}$ を X 上の乗法族 (π-system) という．X の部分集合の族 $\mathscr{D}$ が

(D1)　$X \in \mathscr{D}$,
(D2)　$A, B \in \mathscr{D},\ A \subset B \quad\Longrightarrow\quad B \backslash A \in \mathscr{D}$,
(D3)　$\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{D},\ A_n \cap A_m = \emptyset\ (n \neq m) \quad\Longrightarrow\quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{D}$,

を満たすとき，$\mathscr{D}$ を X 上の Dynkin 族 (Dynkin system) という．

定義 G.1.13 (Dynkin 族定理).　集合 X 上の乗法族 $\mathscr{A}$ に対し，$\mathscr{A}$ を含む最小の Dynkin 族を $\delta(\mathscr{A})$ と書くとき，

$$\delta(\mathscr{A}) = \sigma(\mathscr{A}).$$

証明.

第一段　$\delta(\mathscr{C})$ が交演算で閉じていれば $\delta(\mathscr{C})$ は σ-加法族となる．実際任意の $A \in \delta(\mathscr{A})$ に対し

$$A^c = X \backslash A \in \delta(\mathscr{A})$$

となるから，$\delta(\mathscr{C})$ が交演算で閉じていれば任意の $A_n \in \delta(\mathscr{C})$ $(n = 1, 2, \cdots)$ に対し

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_{n-1}^c \cap A_n \in \delta(\mathscr{C})$$

が従う．σ-加法族は Dynkin 族であるから $\sigma(\mathscr{C}) \subset \delta(\mathscr{C})$ も成り立ち $\sigma(\mathscr{C}) = \delta(\mathscr{C})$ が得られる．

第二段　$\delta(\mathscr{C})$ が交演算について閉じていることを示す．いま，

$$\mathscr{D}_1 := \{ B \in \delta(\mathscr{C}) \mid \quad A \cap B \in \delta(\mathscr{C}),\ \forall A \in \mathscr{C} \}$$

により定める $\mathscr{D}_1$ は Dynkin 族であり $\mathscr{C}$ を含むから

$$\delta(\mathscr{C}) \subset \mathscr{D}_1$$

が成立する．従って

$$\mathscr{D}_2 := \{ B \in \delta(\mathscr{C}) \mid \quad A \cap B \in \delta(\mathscr{C}),\ \forall A \in \delta(\mathscr{C}) \}$$

により Dynkin 族 $\mathscr{D}_2$ を定めれば，$\mathscr{C} \subset \mathscr{D}_2$ が満たされ

$$\delta(\mathscr{C}) \subset \mathscr{D}_2$$

が得られる．よって $\delta(\mathscr{C})$ は交演算について閉じている．∎

定理 G.1.14.　集合 X の部分集合族 $\mathscr{D}$ がの定義 G.1.12 の (D1),(D2) を満たしているとき，$\mathscr{D}$ が (D3) を満たすことと $\mathscr{D}$ が増大列の可算和で閉じることは同値である．

証明.　$\mathscr{D}$ が可算直和について閉じているとする．このとき単調増大列 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ を取り

$$B_1 := A_1, \quad B_n := A_n \backslash A_{n-1}, \quad (n \geq 2)$$

とおけば (D2) より $B_n \in \mathscr{D}$, $(\forall n \geq 1)$ が満たされ，$n \neq m$ なら $B_n \cap B_m = \emptyset$ となるから

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathscr{D}$$

が成立する．逆に $\mathscr{D}$ が増大列の可算和で閉じているとする．(D1)(D2) より互いに素な $A, B \in \mathscr{D}$ に対し $A^c \in \mathscr{D}$ 及び $A^c \cap B^c = A^c \backslash B \in \mathscr{D}$ が成り立つから，$\mathscr{D}$ の互いに素な集合列 $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ を取れば

$$B_1^c \cap B_2^c \cap \cdots \cap B_n^c = \left(\cdots\left(\left(B_1^c \cap B_2^c\right) \cap B_3^c\right) \cap \cdots \cap B_{n-1}^c\right) \cap B_n^c \in \mathscr{D}, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

が得られる．よって

$$D_n := \bigcup_{i=1}^{n} B_i = X \backslash \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i^c \right), \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

により $\mathscr{D}$ の単調増大列 $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ を定めれば

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathscr{D}$$

が成立する． ∎

定理 G.1.15 (上限の冪と冪の上限). 任意の空でない $S \subset [0, \infty)$ と $t > 0$ に対し次が成立する:

$$(\sup S)^t = \sup \left\{ s^t \;\middle|\; s \in S \right\}.$$

証明. $S = \{0\}$ なら両辺 0 で一致するので，S は $\{0\}$ より真に大きいとする．このとき任意の $s \in S$ に対し $s^t \leq (\sup S)^t$ となるから $\sup \left\{ s^t \;\middle|\; s \in S \right\} \leq (\sup S)^t$ が従う．また任意の $(\sup S)^t > \alpha > 0$ に対し $s > \alpha^{1/t}$ を満たす $s \in S$ が存在し $(\sup S)^t \geq s^t > \alpha$ となるから $\sup \left\{ s^t \;\middle|\; s \in S \right\} = (\sup S)^t$ が得られる． ∎

G.1.4　加法的正値測度

定理 G.1.16 (加法族と加法的測度の構成).　X を集合とし，$\mathscr{A}$ を X 上の乗法族とし，$\mathscr{B}$ を $\mathscr{A}$ の要素の有限非交和の全体とする．つまり

$$\mathscr{B} \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{ \bigcup u \mid \quad u \subset \mathscr{A} \wedge \exists n \in \omega\,(\,u \approx n\,) \wedge \forall i, j \in u\,(\,i \neq j \Longrightarrow i \cap j = \emptyset\,) \right\}$$

である．$\mathscr{A}$ が $\emptyset$ を要素に持ち，$\mathscr{B}$ が

$$\forall i \in \mathscr{A}\,(\,X \backslash i \in \mathscr{B}\,)$$

を満たすとき，$\mathscr{B}$ は X 上の加法族となる．さらに m を $m : \mathscr{A} \longrightarrow [0, \infty]$ なる写像で，

$$m(\emptyset) = 0$$

であって，かつ $\mathscr{A}$ の要素 i が $\mathscr{B}$ の要素 $\bigcup u$ に一致しているときに

$$m(i) = \sum_{j \in u} m(j)$$

を満たすものとすると，

$$\mathscr{B} \ni \bigcup u \longmapsto \sum_{i \in u} m(i)$$

なる関係で定める μ は $\mathscr{B}$ の上の加法的な正値測度となる．

証明.

第一段　$\mathscr{B}$ が加法族であることを示す．まず

$$\emptyset \in \mathscr{A}$$

より

$$X = X \backslash \emptyset \in \mathscr{B}$$

が成り立つ．A と B を $\mathscr{B}$ の要素とすると，

$$A = \bigcup u$$

なる $\mathscr{A}$ の有限部分集合 u と

$$B = \bigcup v$$

なる $\mathscr{A}$ の有限部分集合 v が，u も v もそれに属する相異なる二つの要素がどれも互いに素であるように取れる．

$$A \cap B = \emptyset$$

なら $u \cup v$ の相異なる二つの要素は互いに素であるから

$$\bigcup (u \cup v) \in \mathscr{B}$$

が成立し，

$$A \cup B = \bigcup (u \cup v)$$

であるから $A \cup B$ も $\mathscr{B}$ に属する．つまり $\mathscr{B}$ は非交和で閉じる．また $\mathscr{A}$ は交演算で閉じるので，i を u の要素とすれば

$$\bigcup \left\{\, i \cap j \mid \quad j \in v \,\right\} \in \mathscr{B}$$

となる．そして

$$A \cap B = \bigcup_{i \in u} \left(\bigcup \left\{\, i \cap j \mid \quad j \in v \,\right\} \right)$$

が成り立つが，$\mathscr{B}$ が非交和で閉じるので右辺は $\mathscr{B}$ の要素であり

$$A \cap B \in \mathscr{B}$$

が従う．ゆえに $\mathscr{B}$ は交演算で閉じる．

$$X \backslash A = \bigcap_{i \in u} (X \backslash i)$$

が成り立つが，$X \backslash i$ は全て $\mathscr{B}$ の要素であり，$\mathscr{B}$ は交演算で閉じるから

$$X \backslash A \in \mathscr{B}$$

が成り立つ．ゆえに $\mathscr{B}$ は補演算で閉じる．

$$A \cup B = A \cup (B \cap (X \backslash A))$$

であるから，$\mathscr{B}$ が補演算と交演算と非交和で閉じることにより

$$A \cup B \in \mathscr{B}$$

となる．以上より $\mathscr{B}$ は X 上の加法族である．

第二段　μ が加法的な写像であることを示す．実際，A と B を $\mathscr{B}$ の要素とすると，

$$A = \bigcup u$$

なる $\mathscr{A}$ の有限部分集合 u と

$$B = \bigcup v$$

なる $\mathscr{A}$ の有限部分集合 v が，u も v もそれに属する相異なる二つの要素がどれも互いに素であるように取れる．そして

$$A = B$$

ならば，i を u の要素とすれば

$$i = \bigcup \left\{\, i \cap j \mid \quad j \in v \,\right\}$$

が成り立ち

$$m(i) = \sum_{j \in v} m(i \cap j)$$

が満たされれ，同様に j を v の要素とすれば

$$m(j) = \sum_{i \in u} m(i \cap j)$$

も満たされるので，

$$\sum_{i \in u} m(i) = \sum_{i \in u} \sum_{j \in v} m(i \cap j) = \sum_{j \in v} \sum_{i \in u} m(i \cap j) = \sum_{j \in v} m(j)$$

が成立する．ゆえに μ は写像である．また

$$A \cap B = \emptyset$$

ならば

$$\mu(A \cup B) = \sum_{k \in u \cup v} m(k) = \sum_{i \in u} m(i) + \sum_{j \in v} m(j) = \mu(A) + \mu(B)$$

が成り立つので μ は加法的である．μ は m の拡張であるから

$$\mu(\emptyset) = 0$$

も満たされる．ゆえに μ は $\mathscr{B}$ 上の加法的正値測度である． ∎

定義 G.1.17 (外測度).　X の冪集合 $\mathcal{P}(X)$ の上で定義される $[0, \infty]$-値写像 μ が

(OM1)　$\mu(\emptyset) = 0$,
(OM2) (単調性)　$A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$,
(OM3) (劣加法性)　$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, $(A_n \subset X,\ n = 1, 2, \cdots)$

を満たすとき，μ を X の外測度 (outer measure) と呼ぶ．また $A \subset X$ が

$$\mu(W) = \mu(A \cap W) + \mu(A^c \cap W), \quad (\forall W \in \mathcal{P}(X))$$

を満たすとき A は μ-可測集合であるという．

定理 G.1.18 (Caratheodory の拡張定理).　μ を集合 X の外測度とし，$\mathcal{B}^*$ を μ-可測集合の全体とする．このとき $\mathcal{B}^*$ は $\mathcal{B}$ を含む σ-加法族であり，また $\mu^* := \mu\big|_{\mathcal{B}^*}$ は $\mathcal{B}^*$ の上の完備測度となる．

証明.

第一段　$\mathcal{B}^*$ が σ-加法族であることを示す．

第二段　任意の $B \in \mathcal{B}$ が μ-可測であること，つまり任意の $W \subset X$ に対し

$$\mu(W) \geq \mu(W \cap B) + \mu(W \cap B^c) \tag{G.3}$$

となることを示せば $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}^*$ が従う．任意の $W \subset X,\ \epsilon > 0$ に対し

$$W \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(B_n) < \mu(W) + \epsilon$$

を満たす $\{B_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$ が存在する．このとき $W \cap B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(B_n \cap B),\ W \cap B^c \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(B_n \cap B^c)$ より

$$\mu(W \cap B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(B_n \cap B), \quad \mu(W \cap B^c) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(B_n \cap B^c)$$

となるから

$$\begin{aligned}\mu(W) + \epsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(B_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\mu_0(B_n \cap B) + \mu_0(B_n \cap B^c)\right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(B_n \cap B) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(B_n \cap B^c) \\ &\geq \mu(W \cap B) + \mu(W \cap B^c)\end{aligned}$$

が成り立つ．ϵ の任意性より (G.3) が出る．

第三段　μ^* が完備測度であることを示す．■

定理 G.1.19 (有限加法的な正値測度により定まる外測度).　X を集合とし，$\mathcal{B}$ を X 上の加法族とし，μ_0 を $\mathcal{B}$ 上の加法的正値測度とする．このとき

$$\mathrm{P}(X) \ni A \longmapsto \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(B_n) \;\middle|\; B_n \in \mathcal{B},\ A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right\}$$

なる関係で定める写像を μ とすれば，μ は X の外測度である．また μ_0 が $\mathcal{B}$ の上で完全加法的ならば μ は μ_0 の拡張となる．

証明.

第一段　μ が定義 G.1.17 の (OM1)(OM2)(OM3) を満たすことを示す．μ_0 の正値性より μ の正値性が従い，また

$$\mu(\emptyset) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(B_n) = 0, \quad (B_n = \emptyset,\ n = 1, 2, \cdots)$$

となるから (OM1) を得る．X の部分集合 $A, B,\ (A \subset B)$ に対し

$$\left\{\{B_n\}_{n=1}^{\infty} \;\middle|\; B_n \in \mathcal{B},\ B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right\} \subset \left\{\{B_n\}_{n=1}^{\infty} \;\middle|\; B_n \in \mathcal{B},\ A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right\}$$

となるから $\mu(A) \leq \mu(B)$ が成り立ち (OM2) も得られる．

第二段　μ_0 が $\mathcal{B}$ の上で完全加法的であるとする．任意に $B \in \mathcal{B}$ を取れば $B \subset B \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \cdots$ より

$$\mu(B) \leq \mu_0(B)$$

が成り立つ．一方で $B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ を満たす $\{B_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$ に対し

$$B = \sum_{n=1}^{\infty}\left(B \cap \left(B_n \backslash \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k\right)\right)$$

かつ $B \cap \left(B_n \backslash \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k\right) \in \mathcal{B}$, $(\forall n \geq 1)$ が満たされるから，μ_0 の完全加法性より

$$\mu_0(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0\left(B \cap \left(B_n \backslash \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k\right)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(B_n)$$

が成り立ち $\mu_0(B) \leq \mu(B)$ が従う．よって任意の $B \in \mathcal{B}$ で $\mu_0(B) = \mu(B)$ となる． ∎

定理 G.1.20 (測度の一致の定理).　$(X, \mathcal{B})$ を可測空間，$\mathcal{A}$ を $\mathcal{B}$ を生成する乗法族とし，$(X, \mathcal{B})$ 上の測度 μ_1, μ_2 が $\mathcal{A}$ 上で一致しているとする．このとき，

$$\mu_1(X_n) < \infty, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$$

を満たす増大列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ が存在すれば $\mu_1 = \mu_2$ が成り立つ．

証明.　任意の $n = 1, 2, \cdots$ に対して

$$\mathscr{D}_n := \left\{ B \in \mathcal{B} \mid \quad \mu_1(B \cap X_n) = \mu_2(B \cap X_n) \right\}$$

とおけば，$\mathscr{D}_n$ は $\mathcal{A}$ を含む Dynkin 族であるから，Dynkin 族定理より

$$\mathscr{D}_n = \mathcal{B}, \quad (\forall n \geq 1)$$

となり

$$\mu_1(B) = \lim_{n \to \infty} \mu_1(B \cap X_n) = \lim_{n \to \infty} \mu_2(B \cap X_n) = \mu_2(B), \quad (\forall B \in \mathcal{B})$$

が従う． ∎

定理 G.1.21 (Kolmogorov-Hopf). X を集合とし，$\mathcal{B}$ を X 上の加法族とし，μ_0 を $\mathcal{B}$ 上の加法的正値測度とする．また $\tilde{\mu}$ を

$$\mathrm{P}(X) \ni A \longmapsto \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(B_n) \mid \quad B_n \in \mathcal{B},\ A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right\}$$

なる関係で定める外測度とする (定理 G.1.19)．このとき $\mathcal{B}^*$ を $\tilde{\mu}$-可測集合として $\mu^* \overset{\mathrm{def}}{=} \tilde{\mu}|_{\mathcal{B}^*}$，$\mu \overset{\mathrm{def}}{=} \tilde{\mu}|_{\sigma(\mathcal{B})}$ おけば以下が成り立つ:

(1) $\sigma(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}^*$.

(2) μ_0 が $\mathcal{B}$ 上で σ-加法的なら μ は μ_0 の拡張である．

$$\mu_0(B) = \mu(B), \quad (\forall B \in \mathcal{B}). \tag{G.4}$$

(3) μ_0 が σ-有限であるとき，(G.4) を満たすような $(X, \sigma(\mathcal{B}))$ 上の正値測度は唯一つである．

(4) μ_0 が $\mathcal{B}$ 上で完全加法的かつ σ-有限ならば，$\sigma(\mathcal{B})$ 上の正値測度で μ_0 の拡張となっているものは μ のみであり，また $\left(X, \mathcal{B}^*, \mu^*\right)$ は $(X, \sigma(\mathcal{B}), \mu)$ の Lebesgue 拡大に一致する:

$$\left(X, \mathcal{B}^*, \mu^*\right) = \left(X, \overline{\sigma(\mathcal{B})}, \overline{\mu}\right). \tag{G.5}$$

証明.

(1) の証明　定理 G.1.18 より $\mathcal{B}^*$ は $\mathcal{B}$ を含む σ-加法族であるから $\sigma[\mathcal{B}] \subset \mathcal{B}^*$ となる．

(2) の証明　定理 G.1.19 より任意の $B \in \mathcal{B}$ で $\mu_0(B) = \tilde{\mu}(B) = \mu(B)$ が成り立つ．

(3) の証明　σ-有限の仮定より，或る増大列 $X_1 \subset X_2 \subset \cdots$，$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$ が存在して

$$\mu_0(X_n) < \infty \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X \tag{G.6}$$

が成り立つ．一致の定理より，(G.4) を満たす $(X, \sigma[\mathcal{B}])$ 上の測度は存在しても一つのみである．

(4) の証明　(2) と (3) の結果より μ は μ_0 の唯一つの拡張測度である．次に

$$\mathcal{B}^* = \overline{\sigma[\mathcal{B}]} \tag{G.7}$$

を示す．$E \in \overline{\sigma[\mathcal{B}]}$ なら或る $B_1, B_2 \in \sigma[\mathcal{B}]$ が存在して

$$B_1 \subset E \subset B_2, \quad \mu(B_2 - B_1) = 0$$

を満たす．このとき (1) より $\mu^*(B_2 - B_1) = 0$ であり，$\left(X, \mathcal{B}^*, \mu^*\right)$ の完備性より $E \backslash B_1 \in \mathcal{B}^*$ が満たされ

$$E = B_1 + E \backslash B_1 \in \mathcal{B}^*$$

が従う．いま，(G.6) を満たす $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$ を取り，$E \in \mathcal{B}^*$ に対して $E_n := E \cap X_n$ とおく．このとき

$$\mu^*(E_n) \leq \mu^*(X_n) = \mu_0(X_n) < \infty$$

となるから，任意の $k = 1, 2, \cdots$ に対して

$$E_n \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{k,j}^n, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0\left(B_{k,j}^n\right) < \mu^*(E_n) + \frac{1}{k}$$

を満たす $\left\{B_{k,j}^n\right\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$ が取れる．

$$B_{2,n} := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{k,j}^n$$

とおけば $E_n \subset B_{2,n} \in \sigma[\mathcal{B}]$ であり，任意の $k = 1, 2, \cdots$ に対して

$$\begin{aligned} \mu^*(B_{2,n} - E_n) &= \mu^*(B_{2,n}) - \mu^*(E_n) \leq \mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_{k,j}^n\right) - \mu^*(E_n) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*\left(B_{k,j}^n\right) - \mu^*(E_n) < \mu^*(E_n) + \frac{1}{k} - \mu^*(E_n) = \frac{1}{k} \end{aligned}$$

が成り立つから $\mu^*(B_{2,n} - E_n) = 0$ となる．E_n を $B_{2,n} - E_n$ に替えれば

$$B_{2,n} - E_n \subset N_n, \quad \mu(N_n) = 0$$

を満たす $N_n \in \sigma[\mathcal{B}]$ が取れる．

$$B_{1,n} := B_{2,n} \cap N_n^c$$

とおけば，$B_{1,n} \subset B_{2,n} \cap (B_{2,n} - E_n)^c = E_n$ より

$$B_{1,n} \subset E_n \subset B_{2,n}, \quad \mu(B_{2,n} - B_{1,n}) \leq \mu(N_n) = 0$$

が成り立つから，

$$B_1 := \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{1,n}, \quad B_2 := \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{2,n}$$

として

$$B_1 \subset E \subset B_2, \quad \mu(B_2 - B_1) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (B_{2,n} - B_{1,n})\right) = 0$$

が満たされ，$E \in \overline{\sigma[\mathcal{B}]}$ が従い (G.7) が得られる．同時に

$$\overline{\mu}(E) = \mu(B_1) = \mu^*(B_1) \leq \mu^*(E) \leq \mu^*(B_2) = \mu(B_2) = \overline{\mu}(E)$$

が成立するから，$\overline{\mu} = \mu^*$ となり (G.5) が出る． ∎

G.1.5　積測度

本稿では ‘Cartesian 積’ と ‘直積’ は分けていて，Cartesian 積は × で表される順序対の集合とし，直積は写像の集合としている．‘Cartesian 積’ と ‘直積’ で別に積 σ-加法族を定義する．

定義 G.1.22 (Cartesian 積上の σ-加法族). $(A, \mathscr{F}_A), (B, \mathscr{F}_B)$ を可測空間とするとき，

$$\mathscr{F}_A \otimes \mathscr{F}_B := \sigma\left(\{\, x \mid \quad \exists a\, \exists b\, (\, x = a \times b \wedge a \in \mathscr{F}_A \wedge b \in \mathscr{F}_B\,)\,\}\right)$$

と定め，これを $\mathscr{F}_A$ と $\mathscr{F}_B$ の積 σ-加法族 **(product sigma-algebra)** と呼ぶ．

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_A \otimes \mathscr{F}_B \otimes \mathscr{F}_C &:= (\mathscr{F}_A \otimes \mathscr{F}_B) \otimes \mathscr{F}_C, \\
\mathscr{F}_A \otimes \mathscr{F}_B \otimes \mathscr{F}_C \otimes \mathscr{F}_D &:= (\mathscr{F}_A \otimes \mathscr{F}_B \otimes \mathscr{F}_C) \otimes \mathscr{F}_D, \\
\mathscr{F}_A \otimes \mathscr{F}_B \otimes \mathscr{F}_C \otimes \mathscr{F}_D \otimes \mathscr{F}_E &:= (\mathscr{F}_A \otimes \mathscr{F}_B \otimes \mathscr{F}_C \otimes \mathscr{F}_D) \otimes \mathscr{F}_E, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

定義 G.1.23 (直積上の σ-加法族). Λ を集合とし，$\{(X_\lambda, \mathscr{F}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ を可測空間の族とし，

$$X \overset{\text{def}}{=\!=} \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

とおく．p_λ を λ 射影とするとき，

$$\bigotimes_{\lambda \in \Lambda} \mathscr{F}_\lambda := \sigma\left(\left\{\, x \mid \quad \exists \lambda \in \Lambda\, \exists A \in \mathscr{F}_\lambda\, \left(\, x = p_\lambda^{-1} * A\,\right)\right\}\right)$$

と定め，これを $\{\mathscr{F}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の積 σ-加法族と呼ぶ．

定理 G.1.24 (積 σ-加法族を生成する加法族). Λ を集合とし、$\{(X_\lambda, \mathscr{F}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ を可測空間の族とし，$X := \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ とおく．$\mathscr{B}_\lambda$ を X_λ を含み $\mathscr{F}_\lambda$ を生成する乗法族とし，λ 射影を p_λ と書くとき，

$$\mathcal{A} := \left\{ \bigcap_{\lambda \in \Lambda'} p_\lambda^{-1}(A_\lambda) \mid \quad A_\lambda \in \mathscr{B}_\lambda,\ \Lambda' \colon \Lambda \text{ の有限部分集合} \right\}$$

とおけば $\mathcal{A}$ は乗法族となり，$\mathcal{A}$ の要素の有限直和の全体を $\mathcal{B}$ とすればこれは有限加法族となる．そして次が成り立つ:

$$\bigotimes_{\lambda \in \Lambda} \mathscr{F}_\lambda = \sigma[\mathcal{A}] = \sigma[\mathcal{B}].$$

証明.

定理 G.1.25 (第二可算空間の Cartesian 積の Borel 集合族). $(X, \mathscr{O}_X)$ と $(Y, \mathscr{O}_Y)$ を第二可算位相空間とするとき

$$\mathscr{B}(X \times Y) = \mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(Y).$$

略証.　p を

$$X \times Y \ni (x, y) \longmapsto x$$

なる関係で定める写像とし，q を

$$X \times Y \ni (x, y) \longmapsto y$$

なる関係で定める写像とする．O を X の開集合とすれば

$$p^{-1} * O$$

は $X \times Y$ の開集合となるから，

$$\mathscr{O}_X \subset \left\{ A \in \mathscr{B}(X) \mid \quad p^{-1} * A \in \mathscr{B}(X \times Y) \right\}$$

が従い，右辺は σ-加法族なので

$$A \in \mathscr{B}(X) \Longrightarrow p^{-1} * A \in \mathscr{B}(X \times Y)$$

が成立する．同様にして

$$B \in \mathscr{B}(Y) \Longrightarrow q^{-1} * B \in \mathscr{B}(X \times Y)$$

が成立するので，

$$\{ A \times B \mid \quad A \in \mathscr{B}(X) \wedge B \in \mathscr{B}(Y) \} \subset \mathscr{B}(X \times Y)$$

が成立する．ゆえに

$$\mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(Y) \subset \mathscr{B}(X \times Y)$$

が得られる．逆の包含関係を示す．$\mathscr{B}_X$ を $\mathscr{O}_X$ の可算開基とし，$\mathscr{B}_Y$ を $\mathscr{O}_Y$ の可算開基とすれば，

$$\mathscr{B} \overset{\text{def}}{=\!=} \{ U \times V \mid \quad U \in \mathscr{B}_X \wedge V \in \mathscr{B}_Y \}$$

とおけば $\mathscr{B}$ は $X \times Y$ の位相の可算開基となり，また

$$\mathscr{B} \subset \mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(Y)$$

が成立する．O を $X \times Y$ の開集合とすれば

$$O = \bigcup \mathscr{U}$$

を満たす $\mathscr{B}$ の部分集合 $\mathscr{U}$ が取れるので

$$O \in \mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(Y)$$

となる．ゆえに $X \times Y$ の位相は $\mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(Y)$ に含まれるので

$$\mathscr{B}(X \times Y) \subset \mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(Y)$$

も得られた．　■

$(X, \mathscr{O}_X)$ と $(Y, \mathscr{O}_Y)$ と $(Z, \mathscr{O}_Z)$ を第二可算位相空間とすれば，

$$\begin{aligned}\mathscr{B}(X \times Y \times Z) &= \mathscr{B}((X \times Y) \times Z) \\ &= \mathscr{B}(X \times Y) \otimes \mathscr{B}(Z) \\ &= (\mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(Y)) \otimes \mathscr{B}(Z) \\ &= \mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(Y) \otimes \mathscr{B}(Z)\end{aligned}$$

が成立する．

定理 G.1.26 (第二可算空間の直積の Borel 集合族). Λ を空でない高々可算集合，$\{(S_\lambda, \mathscr{O}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ を第二可算空間の族とする．$S \overset{\text{def}}{=} \prod_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ とおいて直積位相を導入すれば次が成立する:

$$\mathscr{B}(S) = \bigotimes_{\lambda \in \Lambda} \mathscr{B}(S_\lambda). \tag{G.8}$$

証明. 各 S_λ の開集合系及び可算基を $\mathscr{O}_\lambda$，$\mathscr{B}_\lambda$，S の開集合系を $\mathscr{O}$ とし，また λ 射影を p_λ と書く．先ず，任意の $O_\lambda \in \mathscr{O}_\lambda$ に対して $p_\lambda^{-1}(O_\lambda) \in \mathscr{O}$ が満たされるから

$$\mathscr{O}_\lambda \subset \left\{ A_\lambda \in \mathscr{B}(S_\lambda) \mid \quad p_\lambda^{-1}(A_\lambda) \in \mathscr{B}(S) \right\}$$

が従い，右辺が σ-加法族であるから

$$\bigotimes_{\lambda \in \Lambda} \mathscr{B}(S_\lambda) = \sigma\left(\left\{ p_\lambda^{-1}(A_\lambda) \mid \quad A_\lambda \in \mathscr{B}(S_\lambda),\ \lambda \in \Lambda \right\}\right) \subset \mathscr{B}(S)$$

を得る．一方で

$$\mathscr{B} := \left\{ \bigcap_{\lambda \in \Lambda'} p_\lambda^{-1}(B_\lambda) \mid \quad B_\lambda \in \mathscr{B}_\lambda,\ \Lambda' \subset \Lambda : finite\ subset \right\}$$

は $\mathscr{O}$ の基底となり，$\mathscr{B}$ は高々可算の濃度を持つ[*1]．

$$\mathscr{B} \subset \bigotimes_{\lambda \in \Lambda} \mathscr{B}(S_\lambda)$$

が成り立つから

$$\mathscr{O} \subset \bigotimes_{\lambda \in \Lambda} \mathscr{B}(S_\lambda)$$

が従い (G.8) を得る． ∎

[*1] $L_0 := \left\{ \Lambda' \mid \quad \Lambda' \subset \Lambda : finite\ subset \right\}$ は高々可算集合である．実際，$\Lambda_n := \Lambda \times \cdots \times \Lambda$ (n copies of Λ) として $L := \bigcup_{n=1}^{\#\Lambda} \Lambda_n$ とおき，$(x_1, \cdots, x_n) \in L$ に対し $\{x_1, \cdots, x_n\} \in L_0$ を対応させる $f : L \longrightarrow L_0$ を考えれば全射であるから $\mathrm{card}\, L_0 \leq \mathrm{card}\, L \leq \aleph_0$ が従う．

定理 G.1.27 (積測度). $(X, \mathscr{F}, \mu)$ と $(Y, \mathscr{G}, \nu)$ を σ-有限な正値測度空間とすると，$(X \times Y, \mathscr{F} \otimes \mathscr{G})$ 上の σ-有限な正値測度 m で

$$\forall A \in \mathscr{F}\, \forall B \in \mathscr{G} \ \big(m(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B) \big)$$

を満たすものが唯一つ存在する．この m を μ と ν の積測度と呼び

$$\mu \otimes \nu$$

と書く．

証明．$\mathscr{F} \otimes \mathscr{G}$ を生成する乗法族を

$$\mathscr{A} \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \{\, A \times B \mid \quad A \in \mathscr{F} \wedge B \in \mathscr{G} \,\}$$

として，$\mathscr{B}$ を $\mathscr{A}$ の有限非交和の全体とすれば，定理 G.1.16 より $\mathscr{B}$ は $X \times Y$ 上の有限加法族となり $\mathscr{F} \otimes \mathscr{G}$ を生成する．

定理 G.1.28 (直積空間の Lebesgue 拡大は Lebesgue 拡大の直積空間の Lebesgue 拡大に一致する). $(X_1, \mathcal{B}_1, \mu_1)$ と $(X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2)$ を σ-有限な測度空間とし，$(X_1, \mathfrak{M}_1, m_1)$ を $(X_1, \mathcal{B}_1, \mu_1)$ の Lebesgue 拡大とし，$(X_2, \mathfrak{M}_2, m_2)$ を $(X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2)$ の Lebesgue 拡大とする．このとき次が成り立つ:

$$\left(X_1 \times X_2, \overline{\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2}, \overline{\mu_1 \otimes \mu_2} \right) = \left(X_1 \times X_2, \overline{\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_2}, \overline{m_1 \otimes m_2} \right).$$

証明．

第一段　$\mathcal{B}_1 \subset \mathfrak{M}_1$ と $\mathcal{B}_2 \subset \mathfrak{M}_2$ から

$$\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \subset \mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_2$$

が成立する．ここで

$$B \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \Longrightarrow \mu_1 \otimes \mu_2(B) = m_1 \otimes m_2(B) \tag{G.9}$$

が成り立つことを示す．σ-有限の仮定により，

$$\forall n \in \boldsymbol{\omega} \ \big(\mu_1(U_n) < \infty \big)$$

かつ

$$X_1 = \bigcup_{n \in \omega} U_n$$

を満たす $\mathcal{B}_1$ の部分集合 $\{U_n\}_{n \in \omega}$ と，

$$\forall n \in \boldsymbol{\omega} \ \big(\mu_2(V_n) < \infty \big)$$

かつ

$$X_2 = \bigcup_{n \in \omega} V_n$$

を満たす $\mathcal{B}_2$ の部分集合 $\{V_n\}_{n \in \omega}$ が取れる．このとき

$$\forall n \in \omega \; \left(\mu_1 \otimes \mu_2 (U_n \times V_n) < \infty \right)$$

かつ

$$\forall n \in \omega \; (m_1 \otimes m_2 (U_n \times V_n) < \infty)$$

かつ

$$X_1 \times X_2 = \bigcup_{n \in \omega} (U_n \times V_n)$$

が成立し，また

$$A \in \mathcal{B}_1 \wedge B \in \mathcal{B}_2 \Longrightarrow \mu_1 \otimes \mu_2 (A \times B) = \mu_1(A) \cdot \mu_2(B) = m_1(A) \cdot m_2(B) = m_1 \otimes m_2 (A \times B)$$

も成り立つから，定理 G.1.20 より (G.9) が従う．

第二段　次に

$$\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_2 \subset \overline{\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2} \tag{G.10}$$

が成り立つことを示す．E を $\mathfrak{M}_1$ の要素とすると，

$$A \subset E \subset B \wedge \mu_1(B \backslash A) = 0$$

を満たす $\mathcal{B}_1$ の要素 A と B が取れる．このとき

$$A \times X_2 \subset E \times X_2 \subset B \times X_2$$

及び

$$\mu_1 \otimes \mu_2 \left((B \times X_2) \backslash (A \times X_2) \right) = \mu_1(B \backslash A) \cdot \mu_2(X_2) = 0$$

が成り立つから

$$E \times X_2 \in \overline{\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2}$$

が成立する．F を $\mathfrak{M}_2$ の要素とすれば同様にして

$$X_1 \times F \in \overline{\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2}$$

が成立するので

$$E \in \mathfrak{M}_1 \wedge F \in \mathfrak{M}_2 \Longrightarrow E \times F \in \overline{\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2}$$

が成立し，積 σ-加法族の定義より (G.10) が従う．

第三段　次に

$$E \in \mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_2 \Longrightarrow m_1 \otimes m_2(E) = \overline{\mu_1 \otimes \mu_2}(E)$$

が成り立つことを示す．E を $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_2$ の要素とすると，(G.10) より

$$A \subset E \subset B \wedge \mu_1 \otimes \mu_2(B \backslash A) = 0$$

なる $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ の要素 A と B が取れて，(G.9) と併せて

$$\overline{\mu_1 \otimes \mu_2}(E) = \mu_1 \otimes \mu_2(A) = m_1 \otimes m_2(A) \leq m_1 \otimes m_2(E)$$

かつ

$$m_1 \otimes m_2(E) \leq m_1 \otimes m_2(B) = \mu_1 \otimes \mu_2(B) = \overline{\mu_1 \otimes \mu_2}(E)$$

が成立する．ゆえに

$$m_1 \otimes m_2(E) = \overline{\mu_1 \otimes \mu_2}(E)$$

が得られた．

第四段　最後に

$$\overline{\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2} \subset \overline{\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_2}$$

を示せば定理の主張が得られる．E を $\overline{\mathcal{B}}$ の要素とすれば

$$A \subset E \subset B \wedge \mu_1 \otimes \mu_2(B \backslash A) = 0$$

を満たす $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ の要素 A と B が取れて，(G.9) より

$$m_1 \otimes m_2(B \backslash A) = \mu_1 \otimes \mu_2(B \backslash A) = 0$$

が成立する．すなわち

$$E \in \overline{\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_2}$$

が成立する．∎

G.1.6　正則性

定義 G.1.29 (正値測度の正則性).　$(X,\mathscr{O}_X)$ を位相空間とし，$\mathscr{K}_X$ を X のコンパクト部分集合の全体とする．また $\mathcal{B}$ を X 上の σ-加法族で $\mathscr{B}(X)$ を含むものとし，μ を $\mathcal{B}$ 上の正値測度とする．

- E を $\mathcal{B}$ の要素とするとき，
$$\forall \epsilon \in \mathbf{R}_+ \, \exists K \in \mathscr{K}_X' \left(K \subset E \wedge \mu(E \backslash K) < \epsilon \right)$$
が満たされるなら E は μ に関して K-正則 **(K-regular)** であるという．
- E を $\mathcal{B}$ の要素とするとき，
$$\mu(E) = \inf \left\{ \mu(O) \mid \quad O \in \mathscr{O}_X \wedge E \subset O \right\}$$
が満たされるなら E は μ に関して**外部正則 (outer regular)** であるという．
- E を $\mathcal{B}$ の要素とするとき，
$$\mu(E) = \sup \left\{ \mu(K) \mid \quad K \in \mathscr{K}_X \wedge K \subset E \right\}$$
が満たされるなら E は μ に関して**内部正則 (inner regular)** であるという．
- $\mathcal{B}$ の全ての要素が外部正則で，かつ開集合及び μ の測度が実数値である $\mathcal{B}$ の全ての要素が内部正則であるとき，μ は**正則な**正値測度と呼ばれる．

定理 G.1.30 (C_c 上の Riesz の表現定理).

定理 G.1.31 (σ-有限な正則測度は開集合と閉集合で近似できる).　$(X,\mathscr{O}_X)$ を位相空間とし，μ を $\mathscr{B}(X)$ 上の σ-有限で正則な正値測度とする．このとき，正数 ϵ と Borel 集合 E が任意に与えられれば
$$F \subset E \subset G \wedge \mu(G \backslash F) < \epsilon$$
を満たす閉集合 F と開集合 G が取れる．

略証.　μ は σ-有限なので
$$X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$$
かつ
$$\forall n \in \omega \left(X_n \subset X_{n+1} \right)$$
を満たす $\mathscr{B}(X)$ の部分集合 $\{X_n\}_{n\in\omega}$ が取れる．いま ϵ を正の実数とし，E を $\mathscr{B}(X)$ の要素とする．
$$E_n \overset{\text{def}}{=} X_n \cap E$$

とおけば，μ の正則性より

$$E_n \subset G_n \wedge \mu(G_n \backslash E_n) < \frac{\epsilon}{2^n}$$

を満たす開集合 G_n が取れる．

$$G \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \bigcup_{n \in \omega} G_n$$

とおけば，G は開集合であって，

$$G \backslash E \subset \bigcup_{n \in \omega} (G_n \backslash E_n)$$

を満たすので

$$\mu(G \backslash E) < \epsilon$$

が成り立つ．$X \backslash E$ に対しても

$$\mu(O \backslash (X \backslash E)) < \epsilon$$

を満たす開集合 O が取れるので，

$$F \overset{\mathrm{def}}{=\!=} X \backslash O$$

とおけば，F は閉集合であって

$$\mu(E \backslash F) < \epsilon$$

を満たす． ∎

定理 G.1.32 (閉集合と開集合で近似できるなら正則).　$(X, \mathscr{O}_X)$ を位相空間とし，μ を $\mathscr{B}(X)$ 上の正値測度とする．また正数 ϵ と Borel 集合 E が任意に与えられたとき

$$F \subset E \subset G \wedge \mu(G \backslash F) < \epsilon$$

を満たす閉集合 F と開集合 G が取れるとする．このとき，

- 全ての Borel 集合は μ に関して外部正則である．
- X が σ-コンパクトであるなら，全ての Borel 集合は μ に関して内部正則でもある．
- X が μ に関して K-正則であるなら，μ-測度有限な全ての Borel 集合は μ に関して内部正則でもある．

略証.　E を $\mathscr{B}(X)$ の要素とする．

第一段　E が外部正則であることを示す．

$$\mu(E) = \infty$$

ならば $E \subset O$ なる全ての開集合 O に対し

$$\mu(O) = \infty$$

となるので E は μ に関して外部正則である．

$$\mu(E) < \infty$$

ならば，任意の正数 ϵ に対して

$$E \subset G \wedge \mu(G) < \mu(E) + \epsilon$$

を満たす開集合 G が取れるので，この場合も E は μ に関して外部正則である．

第二段　X が σ-コンパクトで $\mu(E) = \infty$ のとき E が内部正則であることを示す．

$$F \subset E \wedge \mu(E \backslash F) < 1$$

を満たす閉集合 F が取れるが，

$$\mu(F) = \infty$$

である．X が σ-コンパクトである場合，

$$X = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$$

かつ

$$\forall n \in \boldsymbol{\omega} \, (\, K_n \subset K_{n+1} \,)$$

を満たす $\mathscr{K}_X$ の部分集合 $\{K_n\}_{n \in \omega}$ が取れて

$$\mu(F) = \lim_{n \to \infty} \mu(K_n \cap F)$$

が成立するので，

$$\sup \left\{ \mu(K) \mid \quad K \in \mathscr{K}_X \wedge K \subset F \right\} = \infty$$

が従う．

$$\left\{ \mu(K) \mid \quad K \in \mathscr{K}_X \wedge K \subset F \right\} \subset \left\{ \mu(K) \mid \quad K \in \mathscr{K}_X \wedge K \subset E \right\}$$

なので

$$\sup \left\{ \mu(K) \mid \quad K \in \mathscr{K}_X \wedge K \subset E \right\} = \infty$$

も成立する．ゆえに E は μ に関して内部正則である．

第三段　$\mu(E) < \infty$ のとき，任意の正数 ϵ に対して

$$F \subset E \wedge \mu(E) - \epsilon < \mu(F)$$

を満たす閉集合 F が取れる．X が σ-コンパクトであるとき，$\{K_n\}_{n \in \omega}$ を前段のものとすると

$$\mu(E) - \epsilon < \mu(K_n \cap F)$$

なる自然数 n が取れる．$K_n \cap F$ はコンパクトであるから，この場合 E は μ に関して内部正則である．X が μ に関して K-正則なら

$$\mu(X \backslash K) < \epsilon$$

なるコンパクト部分集合 K が取れて，

$$\mu(E \backslash (F \cap K)) \leq \mu(E \backslash F) + \mu(E \backslash K) < 2\epsilon$$

が成立するので，この場合も E は μ に関して内部正則である． ∎

定理 G.1.33 (正値 Borel 測度の正則性定理). $(X, \mathscr{O}_X)$ を Hausdorff 位相空間とし，$\mathscr{K}_X$ を X のコンパクト部分集合の全体とし，X は σ-コンパクトであって X の開集合は全て F_σ であるとする．また μ を $\mathscr{B}(X)$ 上の正値測度とする．このとき

$$\forall K \in \mathscr{K}_X \left(\mu(K) < \infty \right)$$

ならば μ は正則である．

略証. いま

$$\begin{aligned} S \overset{\text{def}}{=\!=} \{ E \in \mathscr{B}(X) \mid \quad & \mu(E) = \inf \left\{ \mu(O) \mid \quad O \in \mathscr{O}_X \wedge E \subset O \right\} \\ & \wedge \left[E \in \mathscr{O}_X \vee \mu(E) < \infty \Longrightarrow \mu(E) = \sup \left\{ \mu(K) \mid \quad K \in \mathscr{K}_X \wedge K \subset E \right\} \right] \} \end{aligned}$$

とおく．S が $\mathscr{O}_X$ を含む σ-加法族であることが示されれば

$$\mathscr{B}(X) = S$$

が成り立ち定理の主張が得られる．

第一段 S が $\mathscr{O}_X$ を含むことを示す．E を X の開集合とすれば

$$\mu(E) \in \left\{ \mu(O) \mid \quad O \in \mathscr{O}_X \wedge E \subset O \right\}$$

が成り立つので

$$\mu(E) = \inf \left\{ \mu(O) \mid \quad O \in \mathscr{O}_X \wedge E \subset O \right\}$$

が成立する．また E は σ-コンパクトなので，

$$E = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$$

かつ

$$\forall n \in \boldsymbol{\omega} \left(K_n \subset K_{n+1} \right)$$

を満たす $\mathscr{K}_X$ の部分集合 $\{K_n\}_{n\in\omega}$ が取れる．これに対し

$$\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(K_n)$$

が成立するので

$$\mu(E) = \sup\left\{\, \mu(K) \mid \quad K \in \mathscr{K}_X \wedge K \subset E \,\right\}$$

も成り立つ．ゆえに

$$\mathscr{O}_X \subset S$$

である．

第二段　S が σ-加法族であることを示す．S は開集合を全て含むので

$$X \in S \wedge \emptyset \in S$$

が満たされる．いま E を S の要素とする．そして

$$\mu(E) < \infty$$

であるとする．このとき任意の正の実数 ϵ に対して

$$K \subset E \wedge \mu(E \backslash K) < \epsilon$$

を満たす X のコンパクト部分集合 K が取れて，

$$\mu((X\backslash K)\backslash(X\backslash E)) < \epsilon$$

が成り立ち，また Hausdorff 性より $X\backslash K$ は開集合なので

$$\mu(X\backslash E) = \inf\left\{\, \mu(O) \mid \quad O \in \mathscr{O}_X \wedge X\backslash E \subset O \,\right\}$$

が成り立つ．また任意の正の実数 ϵ に対して

$$E \subset O \wedge \mu(O) - \mu(E) < \epsilon$$

を満たす開集合 O が取れて，他方で

$$X = \bigcup_{n\in\omega} K_n \tag{G.11}$$

かつ

$$\forall n \in \boldsymbol{\omega}\,(\, K_n \subset K_{n+1}\,) \tag{G.12}$$

を満たす $\mathscr{K}_X$ の部分集合 $\{K_n\}_{n\in\omega}$ が取れる．ここで

$$\mu(X\backslash E) < \infty$$

ならば

$$\mu(X\backslash E) - \mu(X\backslash O) < \epsilon$$

と

$$\mu(X \backslash O) = \lim_{n \to \infty} \mu((X \backslash O) \cap K_n)$$

が成り立つので，

$$\mu(X \backslash E) - \mu((X \backslash O) \cap K_n) < \epsilon$$

を満たす n が取れる．$(X \backslash O) \cap K_n$ はコンパクトであるから

$$\mu(X \backslash E) = \sup \left\{ \mu(K) \mid \quad K \in \mathscr{K}_X \wedge K \subset X \backslash E \right\}$$

が従う．以上より

$$\mu(E) < \infty \Longrightarrow X \backslash E \in S$$

が得られた．

$$\mu(E) = \infty$$

のとき，(G.11) と (G.12) を満たす $\{K_n\}_{n \in \omega}$ に対して

$$E_n \overset{\mathrm{def}}{=\!=} E \cap K_n$$

とおけば，E_n の測度は有限なので

$$X \backslash E_n \in S$$

が成り立つ．ϵ を任意の正の実数とすると

$$\mu(O_n \backslash X \backslash E_n$$

定理 G.1.34 (正則正値測度空間の Lebesgue 拡大も正則正値測度空間).

定理 G.1.35 (完備可分距離空間上の Borel 確率測度は正則). (S, d) を完備可分距離空間とし，P を $\mathscr{B}(S)$ 上の確率測度とするとき，P は正則である．

証明.

第一段　S が P に関して K-正則であることを示す．S の可分性により稠密な部分集合 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する．

$$B_n^k := \left\{ x \in S \mid \quad d(x, x_n) \leq \frac{1}{k} \right\}, \quad (n, k = 1, 2, \cdots)$$

とおけば，任意の k に対して

$$P\left(S - \bigcup_{n=1}^{N} B_n^k \right) \longrightarrow 0, \quad (N \longrightarrow \infty)$$

が満たされる．いま，任意に $\epsilon > 0$ を取れば各 k に対し或る $N_k \in \mathbf{N}$ が存在して

$$P\left(S - \bigcup_{n=1}^{N_k} B_n^k\right) < \frac{\epsilon}{2^{k+1}}$$

が成立し，

$$K \coloneqq \bigcap_{k=1}^{\infty} \left[\bigcup_{n=1}^{N_k} B_n^k\right]$$

により K を定めれば，K は閉集合の積であるから閉，すなわち完備である．また

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{N_k} B_n^k, \quad (\forall k = 1, 2, \cdots)$$

より K は全有界部分集合である．K は相対距離に関して完備かつ全有界であるから相対位相に関してコンパクトであり，従って S のコンパクト部分集合である．そして次が成立する:

$$P(S - K) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\left[S - \bigcup_{n=1}^{N_k} B_n^k\right]\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P\left(S - \bigcup_{n=1}^{N_k} B_n^k\right) < \epsilon.$$

第二段　任意の $A \in \mathscr{B}(S)$ と $\epsilon > 0$ に対して，或る閉集合 F 及び開集合 G が存在して

$$F \subset A \subset G, \quad P(G - F) < \epsilon$$

を満たすことを示す．

$$\mathscr{B} \coloneqq \{\, A \in \mathscr{B}(S) \mid \quad \text{任意の } \epsilon \text{ に対し上式を満たす開集合と閉集合が存在する．} \}$$

とおけば，$\mathscr{B}$ は $\mathscr{O}(S)$ を含む σ-加法族である．実際，任意の開集合 $G \neq \emptyset$ に対し

$$F_n \coloneqq \left\{ x \in S \mid \quad d(x, G^c) \geq \frac{1}{n} \right\}, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

により閉集合系 $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ を定めれば $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = G$ が成り立つから

$$\mathscr{O}(S) \subset \mathscr{B}$$

が従う．また前段の結果より $S \in \mathscr{B}$ となり，かつ

$$F \subset A \subset G \quad \Rightarrow \quad G^c \subset A^c \subset F^c$$

より $\mathscr{B}$ は補演算で閉じている．更に $A_n \in \mathscr{B}, (n = 1, 2, \cdots)$ を取れば，任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$F_n \subset A_n \subset G_n, \quad P(G_n - F_n) < \frac{\epsilon}{2^{n+1}}$$

を満たす閉集合 F_n と開集合 G_n が存在し，

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n - \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \leq P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(G_n - F_n)\right) < \epsilon$$

が成り立つから十分大きな $N \in \mathbf{N}$ に対して

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n - \bigcup_{n=1}^{N} F_n\right) < \epsilon$$

となる．$\bigcup_{n=1}^{N} F_n$ は閉集合であり $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ は開集合であるから $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{B}$ が従う．

第三段　任意の $A \in \mathscr{B}(S)$ と $\epsilon > 0$ に対し，或る閉集合 F と開集合 G 及びコンパクト集合 K が存在して

$$F \subset A \subset G, \quad P(G-F) < \frac{\epsilon}{2}, \quad P(S-K) < \frac{\epsilon}{2}$$

を満たす．特に $F \cap K$ はコンパクトであり，このとき $F \cap K \subset A \subset G$ かつ

$$P(G - F \cap K) \leq P(G-F) + P(G-K) \leq P(G-F) + P(S-K) < \epsilon$$

が成立する． ■

G.2　積分

G.2.1　積分

定理 G.2.1 (複素数値可測 $\Longleftrightarrow$ 実部虚部が可測).　$(X, \mathscr{F})$ を可測空間，$f : X \longrightarrow \mathbf{C}$ とするとき，f が $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測であることと f の実部 u と虚部 v がそれぞれ $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測であることは同値である．

証明．　$z \in \mathbf{C}$ に対し $x, y \in \mathbf{R}$ の組が唯一つ対応して

$$z = x + iy$$

を満たす．この対応関係により定める写像

$$\varphi : \mathbf{C} \ni z \longmapsto (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

は位相同型である．p_1 を

$$p_1 : \mathbf{R}^2 \ni (x, y) \longmapsto x$$

なる写像とし，p_2 を

$$p_2 : \mathbf{R}^2 \ni (x, y) \longmapsto y$$

なる写像とすれば，p_1 と p_2 は連続であって，また

$$u = p_1 \circ \varphi \circ f$$

かつ

$$v = p_2 \circ \varphi \circ f$$

が成り立つ．よって，f が $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測であるならば

$$A \in \mathscr{B}(\mathbf{R}) \Longrightarrow u^{-1}(A) = f^{-1}\left(\varphi^{-1}\left(p_1^{-1}(A)\right)\right) \in \mathscr{F}$$

と

$$A \in \mathscr{B}(\mathbf{R}) \Longrightarrow v^{-1}(A) = f^{-1}\left(\varphi^{-1}\left(p_2^{-1}(A)\right)\right) \in \mathscr{F}$$

が成り立ち u,v の $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測性が従う．逆に u,v が $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測であるとき，

$$B \in \mathscr{B}(\mathbf{C}) \Longrightarrow f^{-1}(B) = \left\{ x \in X \mid \quad (u(x), v(x)) \in \varphi(B) \right\} \in \mathscr{F}$$

が成り立つので f の $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測性が出る． ■

定理 G.2.2 (和・積・商の可測性).

定理 G.2.3 (相対位相の Borel 集合族). $(S, \mathscr{O})$ を位相空間とする．部分集合 $A \subset S$ に対して

$$\mathscr{B}(A) := \sigma\left[\{ A \cap O \mid \quad O \in \mathscr{O} \}\right]$$

とおくとき次が成り立つ:

$$\mathscr{B}(A) = \{ A \cap E \mid \quad E \in \mathscr{B}(S) \}.$$

また $A \in \mathscr{B}(S)$ なら $\mathscr{B}(A) \subset \mathscr{B}(S)$ となる．

$\mathbf{R}$-値可測関数は $\mathbf{C}$-値可測関数でもある．

定理 G.2.4 (単関数近似列の存在). $(X, \mathscr{F})$ を可測空間とする．

(1) 任意の $\mathscr{F}/\mathscr{B}([0,\infty])$-可測写像 f に対し

$$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f; \quad \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x), \ (\forall x \in X)$$

を満たす $\mathscr{F}/\mathscr{B}([0,\infty))$-可測単関数列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ が存在する．

(2) 任意の $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測写像 f に対し

$$0 \leq |f_1| \leq |f_2| \leq \cdots \leq |f|; \quad \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x), \ (\forall x \in X)$$

を満たす $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測単関数列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ が存在する．

(3) (1) または (2) において，f が $E \in \mathscr{F}$ 上で有界なら $f_n \mathbb{1}_E$ は一様に $f \mathbb{1}_E$ を近似する:

$$\sup_{x \in E} \left| f_n(x) - f(x) \right| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty).$$

定義 G.2.5 (複素数値可測関数の正値測度に関する積分). $(X, \mathscr{F}, \mu)$ を正値測度空間，f を $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測関数とする．$u := \mathrm{Re}\, f$, $v := \mathrm{Im}\, f$ とおけば $|u|, |v| \leq |f| \leq |u| + |v|$ より

$$|f| \text{ が可積分} \quad \Longleftrightarrow \quad u, v \text{ が共に可積分}$$

が成り立つ．$|f|$ が可積分のとき，f は可積分であるといい f の μ に関する積分を次で定める:

$$\int_X f \, d\mu := \int_X u \, d\mu + i \int_X v \, d\mu.$$

定理 G.2.6 (Lebesgue の収束定理).　$(X, \mathscr{F}, \mu)$ を正値測度空間，f，f_n $(n = 1, 2, \cdots)$ を $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測な可積分関数とする．このとき，$f = \lim_{n\to\infty} f_n$ μ-a.e. かつ

$$|f_n| \leq g, \quad \mu\text{-a.e.}$$

を満たす可積分関数 g が存在するとき

$$\int_X |f - f_n| \, d\mu \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty).$$

定理 G.2.7 (積分の線形性・積分作用素の有界性).　$(X, \mathscr{F})$ を可測空間とし，μ を $\mathscr{F}$ 上の正値測度とする．

(1)　任意の $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測可積分関数 f, g と $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ に対して次が成り立つ:

$$\int_X \alpha f + \beta g \, d\mu = \alpha \int_X f \, d\mu + \beta \int_X g \, d\mu.$$

(2)　任意の $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測可積分関数 f に対して次が成り立つ:

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| \leq \int_X |f| \, d\mu.$$

証明.

(1)

(2)　$\alpha := \int_X f \, d\mu$ とおけば，$\alpha \neq 0$ の場合

$$|\alpha| = \frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|} \int_X f \, d\mu = \int_X \frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|} f \, d\mu$$

が成り立ち

$$|\alpha| = \mathrm{Re}\, |\alpha| = \mathrm{Re} \int_X \frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|} f \, d\mu = \int_X \mathrm{Re}\, \frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|} f \, d\mu \leq \int_X |f| \, d\mu$$

が従う．$\alpha = 0$ の場合も不等式は成立する．∎

補題 G.2.8.　S を実数の集合とする．$-S := \{ -s \mid \quad s \in S \}$ とおくとき次が成り立つ:

$$\inf S = -\sup(-S), \quad \sup S = -\inf(-S).$$

証明.　任意の $s \in S$ に対して $-s \leq \sup(-S)$ より $\inf S \geq -\sup(-S)$ となる．一方で任意の $s \in S$ に対し $\inf S \leq s$ より $-s \leq -\inf S$ となり $\sup(-S) \leq -\inf S$ が従うから $-\sup(-S) \geq \inf S$ も成り立ち $\inf S = -\sup(-S)$ が出る．∎

定理 G.2.9 (写像の値域は積分の平均値の範囲を出ない). $(X, \mathscr{F}, \mu)$ を σ-有限測度空間，$f : X \longrightarrow \mathbf{C}$ を $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測かつ μ-可積分な関数，$C \subset \mathbf{C}$ を閉集合とする．このとき

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f \, d\mu \in C, \quad (\forall E \in \mathscr{F},\ 0 < \mu(E) < \infty) \tag{G.13}$$

なら次が成り立つ:

$$f(x) \in C \quad \mu\text{-a.e.} x \in X.$$

$C = \mathbf{R}$ なら f は殆ど至る所 $\mathbf{R}$ 値であり，$C = \{0\}$ なら殆ど至る所 $f = 0$ である．

証明. σ-有限の仮定より次を満たす $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}$ が存在する:

$$\mu(X_n) < \infty,\ (\forall n \geq 1); \quad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n.$$

$C = \mathbf{C}$ なら $f(x) \in C$ $(\forall x \in X)$ である．$C \neq \mathbf{C}$ の場合，任意の $\alpha \in \mathbf{C} \backslash C$ に対し或る $r > 0$ が存在して

$$B_r(\alpha) := \{\, z \in \mathbf{C} \mid \quad |z - \alpha| \leq r \,\} \subset \mathbf{C} \backslash C$$

を満たす．ここで

$$E := f^{-1}\left(B_r(\alpha)\right), \quad E_n := E \cap X_n$$

とおけば，任意の $n \geq 1$ について $\mu(E_n) > 0$ なら

$$\left| \frac{1}{\mu(E_n)} \int_{E_n} f \, d\mu - \alpha \right| = \left| \frac{1}{\mu(E_n)} \int_{E_n} f - \alpha \, d\mu \right| \leq \frac{1}{\mu(E_n)} \int_{E_n} |f - \alpha| \, d\mu \leq r$$

となり (G.13) に反するから，$\mu(E_n) = 0$ $(\forall n \geq 1)$ 及び

$$\mu(E) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = 0$$

が従う．$\mathbf{C} \backslash C$ は開集合であり $B_r(\alpha)$ の形の集合の可算和で表せるから

$$\mu\left(f^{-1}\left(\mathbf{C} \backslash C\right)\right) = 0$$

が成り立ち主張が得られる． ∎

定理 G.2.10 (可積分なら積分値を一様に小さくできる). $(X, \mathscr{F}, \mu)$ を正値測度空間，$f : X \longrightarrow \mathbf{C}$ を $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測関数とするとき，$f$ が可積分なら，任意の $\epsilon > 0$ に対して或る $\delta > 0$ が存在し次を満たす:

$$\mu(E) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \int_E |f| \, d\mu < \epsilon.$$

証明． $X_n := \{|f| \leq n\}$ により増大列 $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ を定めれば単調収束定理より

$$\int_X |f|\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{X_n} |f|\, d\mu$$

となるから，任意の $\epsilon > 0$ に対し或る $n_0 \geq 1$ が存在して

$$\int_{X \setminus X_{n_0}} |f|\, d\mu < \epsilon$$

が成り立つ．このとき $\mu(E) < \delta := \epsilon/n_0$ なら

$$\int_E |f|\, d\mu = \int_{E\cap X_{n_0}} |f|\, d\mu + \int_{E\cap(X\setminus X_{n_0})} |f|\, d\mu \leq n_0\mu(E) + \int_{X\setminus X_{n_0}} |f|\, d\mu < 2\epsilon$$

が従う． ∎

G.2.2　関数列

定理 G.2.11 (T_6 空間に値を取る可測写像列の各点極限で定める写像は可測). $(S,\mathscr{O})$ を T_6 空間とし，$(X,\mathscr{F})$ を可測空間とし，$\{f_n\}_{n\in\omega}$ を $\mathscr{F}/\mathscr{B}(S)$-可測写像の族とする．$(f_n)_{n\in\omega}$ が各点収束するとき，

$$X \ni x \longmapsto \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

なる関係で定める写像 f は $\mathscr{F}/\mathscr{B}(S)$-可測である．

証明． a を $(S,\mathscr{O})$ の閉集合とする．

$$f^{-1} * a = \emptyset$$

ならば

$$f^{-1} * a \in \mathscr{F}$$

となる．

$$f^{-1} * a \neq \emptyset$$

であるとき，定理 D.2.22 より

$$a = \bigcap_{n\in\omega} {a_n}^{\circ}$$

を満たす $(S,\mathscr{O})$ の閉集合族 $\{a_n\}_{n\in\omega}$ が取れる．x を

$$x \in f^{-1} * a$$

なる集合とすると，m を任意に与えられた自然数とするとき

$$\forall n \in \omega \left[N < n \Longrightarrow f_n(x) \in {a_m}^{\circ} \right]$$

を満たす自然数 N が取れるから，

$$x \in \bigcap_{m \in \omega} \bigcup_{N \in \omega} \bigcap_{\substack{n \in \omega \\ N < n}} f_n^{-1} * a_m$$

が成立する．x の任意性ゆえに

$$f^{-1} * a \subset \bigcap_{m \in \omega} \bigcup_{N \in \omega} \bigcap_{\substack{n \in \omega \\ N < n}} f_n^{-1} * a_m \tag{G.14}$$

が得られる．次に

$$x \in f^{-1} * (S \backslash a)$$

であるとすると，

$$f(x) \in S \backslash a_m$$

なる自然数 m が取れて，

$$\forall n \in \omega \left[N < n \Longrightarrow f_n(x) \in S \backslash a_m \right]$$

なる自然数 N が取れる．ゆえに

$$x \in \bigcup_{m \in \omega} \bigcup_{N \in \omega} \bigcap_{\substack{n \in \omega \\ N < n}} f_n^{-1} * (S \backslash a_m)$$

が成り立つが，

$$\bigcup_{m \in \omega} \bigcup_{N \in \omega} \bigcap_{\substack{n \in \omega \\ N < n}} f_n^{-1} * (S \backslash a_m) \subset \bigcup_{m \in \omega} \bigcap_{N \in \omega} \bigcup_{\substack{n \in \omega \\ N < n}} f_n^{-1} * (S \backslash a_m)$$

が成り立つので

$$f^{-1} * (S \backslash a) \subset \bigcup_{m \in \omega} \bigcap_{N \in \omega} \bigcup_{\substack{n \in \omega \\ N < n}} f_n^{-1} * (S \backslash a_m)$$

が従う．(G.14) と併せれば

$$f^{-1} * a = \bigcap_{m \in \omega} \bigcup_{N \in \omega} \bigcap_{\substack{n \in \omega \\ N < n}} f_n^{-1} * a_m$$

が成立し，

$$f^{-1} * a \in \mathscr{F}$$

が従う．以上より $(S, \mathscr{O})$ の閉集合は全て f で $\mathscr{F}$ の要素に引き戻されるので，f は $\mathscr{F}/\mathscr{B}(S)$-可測である．∎

定義 G.2.12 (概収束すれば測度収束する). $(X, \mathscr{F}, \mu)$ を正値有限測度空間とする．$(f_n)_{n=1}^{\infty}, f$ を全て $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測関数とするとき，$\lim_{n\to\infty} f_n = f$，$\mu$-a.e. なら $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ は f に測度収束する．

証明．　任意の $\epsilon > 0$ に対し

$$A_\epsilon^n := \left\{ |f_n - f| > \epsilon \right\}$$

とおけば，Lebesgue の収束定理より任意の $k \geq 1$ で

$$\epsilon \mu\left(A_\epsilon^n\right) \leq \int_{A_\epsilon^n} |f_n - f| \wedge \epsilon \, d\mu \leq \int_X |f_n - f| \wedge \epsilon \, d\mu \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成立する．∎

上の定理で有限性を外すときの反例を示す．$X = \mathbf{R}$，μ を一次元 Lebesgue 測度とするとき，

$$f_n := \mathbb{1}_{\mathbf{R} \setminus (-n,n)}$$

で定める関数列 $(f_n)_{n=1}^\infty$ は零写像に各点収束するが，$0 < \epsilon < 1$ に対し

$$\mu\left(f_n > \epsilon\right) = \mu((-\infty, -n] \cup [n, \infty)) = \infty, \quad (\forall n \geq 1)$$

を満たすから測度収束しない．

定理 G.2.13 (測度収束列の概収束部分列).　$(X, \mathscr{F}, \mu)$ を正値測度空間，$(f_n)_{n=1}^\infty, f$ を全て $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測関数とするとき，$(f_n)_{n=1}^\infty$ が f に測度収束するなら或る部分列 $(f_{n_k})_{k=1}^\infty$ は f に概収束する．

証明．　$(f_n)_{n=1}^\infty$ が f に測度収束するとき，任意の $k \geq 1$ に対し

$$\mu\left(|f_{n_k} - f| > \frac{1}{2^k}\right) < \frac{1}{2^k}$$

を満たす添数列 $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ が取れる．

$$A_k := \left\{ |f_{n_k} - f| > \frac{1}{2^k} \right\}, \quad A := \bigcup_{k \geq 1} \bigcap_{j > k} A_j^c$$

とおけば，$\mu(A^c) \leq \mu\left(\bigcup_{j>k} A_j\right)$, $(\forall k \geq 1)$ かつ

$$\mu\left(\bigcup_{j>k} A_j\right) \leq \sum_{j>k} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^k}$$

より $\mu(A^c) = 0$ が従い，$x \in A$ なら或る $k = k(x)$ が存在して

$$|f_{n_j}(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^j}, \quad (\forall j > k)$$

となるから $\lim_{k \to \infty} f_{n_k}(x) = f(x)$ が満たされる．∎

定理 G.2.14 (平均収束すれば測度収束する). $p \in (0,\infty)$，$(X,\mathscr{F},\mu)$ を正値測度空間，$(f_n)_{n=1}^{\infty}, f$ を全て $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測関数とするとき，

$$\int_X |f_n - f|^p \, d\mu \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

なら $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ は f に測度収束する．

証明. 任意の $\epsilon > 0$ に対し

$$\epsilon^p \mu\left(|f_n - f| > \epsilon\right) \leq \int_{\{|f_n - f| > \epsilon\}} |f_n - f|^p \, d\mu \leq \int_X |f_n - f|^p \, d\mu \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成立する． ∎

定理 G.2.15 (Egorov). $(X,\mathscr{F},\mu)$ を正値測度空間とし，E を

$$\mu(E) < \infty$$

なる $\mathscr{F}$ の要素とする．また $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ を $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測写像とし，$E$ 上で $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ が各点収束するとする．このとき，ϵ を任意に与えられた実数とすれば

$$H \subset E \wedge \mu(E \backslash H) < \epsilon$$

かつ H 上で $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ が一様収束するように $\mathscr{F}$ の要素 H が取れる．

略証. E の各要素 x に対し

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

と定める．ϵ を任意に与えられた正数とし，p を自然数とする．

$$E_n^p \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{k=n}^{\infty} \left\{ x \in E \mid \quad |f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{2^p} \right\}$$

とおけば，$(f_n)_{n=0}^{\infty}$ は E 上で各点収束するので

$$E = \bigcup_{n\in\omega} E_n^p$$

が成り立ち，また

$$\forall n \in \omega \ \left(E_n^p \subset E_{n+1}^p\right)$$

も成立する．ゆえに

$$\mu(E \backslash E_{n_p}^p) < \frac{\epsilon}{2^p}$$

を満たす自然数 n_p が取れる．

$$H \overset{\text{def}}{=\!=} \bigcap_{p\in\omega} E^p_{n_p}$$

とおけば

$$\mu(E \backslash H) < \epsilon$$

が成り立ち，また H 上で $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ は一様収束する． ∎

G.3　Stieltjes 積分

G.3.1　Stieltjes 測度

R の左半開区間とは，$a < b$ なる実数 a と b によって

$$]a, b]$$

で表される区間か，もしくは

$$\begin{gathered}]-\infty, b], \\ ]a, \infty[, \\ \mathbf{R} \end{gathered}$$

のいずれかを指す．いま，**R** の左半開区間の全体を含む乗法族を

$$\begin{aligned} \mathscr{A} \overset{\text{def}}{=\!=} \{\, x \mid\ & \exists a, b \in \mathbf{R}\,(\, a < b \wedge x =]a, b]\,) \\ & \vee \exists b \in \mathbf{R}\,(\, x =]-\infty, b]\,) \\ & \vee \exists a \in \mathbf{R}\,(\, x =]a, \infty[\,) \\ & \vee x = \mathbf{R} \\ & \vee x = \emptyset \} \end{aligned}$$

とおき，$\mathscr{A}$ の有限非交和の全体から成る集合を

$$\mathfrak{F} \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{ \bigcup u \mid\quad u \subset \mathscr{A} \wedge \mathrm{Fin}\,(u) \wedge \forall s, t \in u\,(\, s \neq t \Longrightarrow s \cap t = \emptyset\,) \right\}$$

とおけば，$\mathfrak{F}$ は $\mathscr{B}(\mathbf{R})$ を生成し，また定理 G.1.16 より **R** の上の加法族となる．f を

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$$

なる単調非減少関数とする．**R** の空でない左半開区間 I に対し

$$\sup \left\{\, f(b) - f(a) \mid\quad a, b \in \mathbf{R} \wedge a < b \wedge]a, b] \subset I \,\right\}$$

を対応させ，$\emptyset$ に対して 0 を対応させる写像を m とおく．このとき

$$\mu_0 : \mathfrak{F} \longrightarrow [0, \infty]$$

なる写像 μ_0 を

$$\bigcup u \longmapsto \sum_{s \in u} m(s)$$

なる関係により定めれば，定理 G.1.16 より μ_0 は $\mathfrak{F}$ 上の有限加法的測度をなす．また，$n \geq 1$ なる任意の自然数 n に対して

$$\mu_0(]-n,n]) = f(n) - f(-n) < \infty$$

となるから，μ_0 は $\mathfrak{F}$ 上で σ-有限である．

定理 G.3.1 (右連続性と完全加法性).　単調非減少関数 f を用いて定めた μ_0 について，f が $\mathbf{R}$ の各点で右連続であることと μ_0 が $\mathfrak{F}$ の上で完全加法的であることは同値である．

証明.

第一段　μ_0 が $\mathfrak{F}$ の上で完全加法的であるとする．a を実数とし，ϵ を任意に与えられた正の実数とする．

$$\emptyset = \bigcap_{n \in \omega \backslash \{0\}} \left] a, a + \frac{1}{n} \right]$$

が成立するから

$$\mu_0 \left(\left] a, a + \frac{1}{n} \right] \right) < \epsilon$$

を満たす自然数 n が取れて，このとき

$$a < b < a + \frac{1}{n}$$

なる実数 b に対して

$$|f(b) - f(a)| = \mu_0\left(]a,b]\right) \leq \mu_0 \left(\left] a, a + \frac{1}{n} \right] \right) < \epsilon$$

が成り立つ．ゆえに f は a において右連続である．a の任意性から f は $\mathbf{R}$ で右連続である．

第二段　f が右連続であるとする．また I を $\mathbf{R}$ の左半開区間で

$$\mu_0(I) < \infty$$

を満たすものとする．

$$I =]a,b]$$

なる実数 a, b が取れる場合，ϵ を任意に与えられた正の実数とすれば，f の右連続性から

$$a < \delta < b \wedge f(\delta) - f(a) < \epsilon$$

なる δ が取れる．

$$a < \delta' < \delta$$

なる δ' を取れば

$$I \backslash [\delta', b] \subset (a, \delta]$$

が成り立つので

$$\mu_0 (I \backslash [\delta', b]) \leq f(\delta) - f(a) < \epsilon$$

が成立する．

$$I =]-\infty, b]$$

なる実数 b が取れる場合，

$$I =]a, \infty[$$

なる実数 a が取れる場合，

$$I = \mathbf{R}$$

の場合，

つまり，μ_0-測度が有限な左半開区間の測度はコンパクト集合の測度で近似出来る．$\mathbf{R}$ のコンパクト集合全体はコンパクトクラスであるから，定理 G.1.9 より μ_0 は共通点性を満たす．また

$$\mu_0(\mathbf{R}) = \infty$$

のとき，

f が右連続であれば，定理 G.1.21 より μ_0 は $\mathscr{B}(\mathbf{R})$ の上の σ-有限測度 μ に一意に拡張され，このとき

$$\forall a, b \in \mathbf{R} \ \left(a < b \Longrightarrow \mu(]a, b]) = f(b) - f(a) \right)$$

が成立する．また，測度の一致の定理よりこの関係を満たす $\mathscr{B}(\mathbf{R})$ 上の測度は μ に限られる．

定義 G.3.2 (Lebesgue-Stieltjes 測度). f を $\mathbf{R}$ 上の右連続単調非減少な $\mathbf{R}$ 値関数とするとき，

$$\forall a, b \in \mathbf{R} \ \left(a < b \Longrightarrow \mu(]a, b]) = f(b) - f(a) \right)$$

を満たす $\mathscr{B}(\mathbf{R})$ の上の測度 μ が唯一つ存在する．このとき $(\mathbf{R}, \mathscr{B}(\mathbf{R}), \mu)$ の Lebesgue 拡大で得られる完備測度を f による 1 次元 Lebesgue-Stieltjes 測度と呼び，特に f が $\mathbf{R}$ 上の恒等写像の場合はそれを 1 次元 Lebesgue 測度と呼ぶ．

$\mathbf{R}^2$ の上の Lebesgue 測度の構成では，まず 1 次元の Lebesgue 測度を $\mathscr{B}(\mathbf{R})$ に制限したものから

$$\mathscr{B}(\mathbf{R}) \otimes \mathscr{B}(\mathbf{R})$$

の上の積測度 μ を構成する．$(\mathbf{R}, \mathscr{O}_{\mathbf{R}})$ の第二可算性より

$$\mathscr{B}(\mathbf{R}^2) = \mathscr{B}(\mathbf{R}) \otimes \mathscr{B}(\mathbf{R})$$

が成り立つので μ は $\mathbf{R}^2$ の Borel 測度ということになる．そして $\left(\mathbf{R}^2, \mathscr{B}(\mathbf{R}^2), \mu\right)$ を Lebesgue 拡大して得られる完備な正値測度を 2 次元の Lebesgue 測度として定義する．$\mathbf{R}^3$ の上の Lebesgue 測度も

$$\mathscr{B}(\mathbf{R}^2) \otimes \mathscr{B}(\mathbf{R})$$

の上の積測度を構成してから Lebesgue 拡大を施して得られる．以下反復すれば $\mathbf{R}^n$ の上の Lebesgue 測度も得られる．が，その反復作業の妥当性は A.13 節の再帰的定義によって保障されるものである．

次に任意の区間上の Stieltjes 測度を構成する．I を $\mathbf{R}$ の区間とする．つまり I は，$a < b$ なる実数 a, b によって

$$\begin{gathered}]a, b[, \\ ]a, b], \\ [a, b[, \\ [a, b] \end{gathered}$$

のいずれかで表されるか，もしくは

$$\begin{gathered}]-\infty, a[, \\ ]-\infty, a], \\ [a, \infty[, \\ ]a, \infty[, \\ \mathbf{R} \end{gathered}$$

のいずれかで表される．いま，f を I 上で定義された右連続単調非減少とし，I が有界であるときは f は I 上で有界な関数とする．

$$\inf I \in \mathbf{R}$$

ならば

$$\alpha \overset{\text{def}}{=} \inf \left\{ f(x) \mid \quad \inf I < x < \sup I \right\}$$

とおき，同様に

$$\sup I \in \mathbf{R}$$

ならば

$$\beta \overset{\text{def}}{=} \sup \left\{ f(x) \mid \quad \inf I < x < \sup I \right\}$$

とおく．そして $\mathbf{R}$ 上の右連続単調非減少関数 $\hat{f}$ を

$$x \longmapsto \begin{cases} \alpha & \text{if } -\infty < x \leq \inf I_\lambda \\ f(x) & \text{if } \inf I_\lambda < x < \sup I_\lambda \\ \beta & \text{if } \sup I_\lambda \leq x < \infty \end{cases}$$

なる関係で定める．すると前節の結果より $\mathscr{B}(\mathbf{R})$ 上の正値測度 $\hat{\mu}$ で

$$\forall a, b \in \mathbf{R} \left(a < b \Longrightarrow \hat{\mu}(]a, b]) = \hat{f}(b) - \hat{f}(a) \right)$$

を満たすものが取れる．定理 G.2.3 より

$$\mathscr{B}(I) = \left\{ I \cap E \mid \quad E \in \mathscr{B}(\mathbf{R}^d) \right\} \subset \mathscr{B}(\mathbf{R}^d)$$

が成り立つから，

$$\mathscr{B}(I) \ni E \longmapsto \hat{\mu}(E)$$

なる写像を μ とおけば μ は $\mathscr{B}(I)$ 上の測度となる．

$$\inf I \in I$$

のとき

$$a \stackrel{\text{def}}{=\!=} \inf I$$

とおくと

$$\mu(\{a\}) = \hat{\mu}(\{a\}) = 0$$

が成り立ち，また

$$]u, v] \subset I$$

なる任意の有界左半開区間に対しては

$$\mu(]u, v]) = f(v) - f(u)$$

が成り立つ．そして $]u, v]$ の形の I の部分区間の全体，$\inf I \in I$ の場合はそれに $\{a\}$ を加えたもの，は $\mathscr{B}(I)$ を生成する乗法族をなすため，f に対して上の関係を満たす (加えて $\inf I \in I$ の場合は $\{a\}$ の測度が 0 である) ような $\mathscr{B}(I)$ 上の測度はただ一つである．

G.3.2　Stieltjes 積分

I を $\mathbf{R}$ の区間とし，A を I 上で右連続かつ単調非減少関数な関数とし，μ_A を $\mathscr{B}(I)$ 上の A の Stieltjes 測度とする．また f を I 上の $\mathscr{B}(I)/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測写像とする．このとき，$f$ が μ_A に関して可積分なら

$$\int_I f(s)\, dA_s \stackrel{\text{def}}{=\!=} \int_I f\, d\mu_A$$

と定め，これを f の A による Stieltjes 積分と呼ぶ．

定理 G.3.3 (Riemann-Stieltjes 積分との関係).　$F : I \longrightarrow \mathbf{C}$ が右連続或は左連続なら

定理 G.3.4 (時間変更).　u を $[a, b]$ から $\mathbf{R}$ への非減少連続関数とし，A を $[u(a), u(b)]$ から $\mathbf{R}$ への非減少右連続関数とし，f を $[u(a), u(b)]$ から $\mathbf{R}_+$ への $\mathscr{B}([u(a), u(b)])/\mathscr{B}(\mathbf{R}_+)$-可測関数とする．このとき

$$\int_{[a,b]} f(u(s))\, dA_{u(s)} = \int_{[u(a),u(b)]} f(t)\, dA_t$$

が成立する．ただし右辺は A の Borel-Stieltjes 測度による積分を表し，ここで左辺は $A \circ u$ の Borel-Stieltjes 測度による積分を表す．

略証． μ_A を A の Borel-Stieltjes 測度とし，μ_{A_u} を $A \circ u$ の Borel-Stieltjes 測度とするとき，左辺の積分は

$$\int_{[a,b]} f \circ u \, d\mu_{A_u} = \int_{[a,b]} f \, d\mu_{A_u} u^{-1}$$

と書けるので，

$$\mu_A = \mu_{A_u} u^{-1}$$

が成り立つことを示せばよい．これは $\{u(a)\}$ に対する測度と $]s,t]$ なる形の部分区間の測度が一致することを見ればよい．まず Stieltjes 測度の構成法より

$$\mu_A(\{u(a)\}) = 0$$

が満たされる．他方で

$$\alpha \overset{\text{def}}{=\!=} \sup\left(u^{-1} * \{u(a)\}\right)$$

とおけば

$$[a, \alpha] = u^{-1} * \{u(a)\}$$

が成り立ち，

$$\mu_{A_u}\left(u^{-1} * \{u(a)\}\right) = \mu_{A_u}([a, \alpha]) = A(u(\alpha)) - A(u(a)) + \mu_{A_u}(\{a\}) = 0$$

が成り立つ．以上で

$$\mu_A(\{u(a)\}) = \mu_{A_u}\left(u^{-1} * \{u(a)\}\right)$$

が示された．次に $]s,t]$ を $[u(a), u(b)]$ の部分区間とする．

$$\mu_A(]s,t]) = A(t) - A(s)$$

となる．他方で

$$\alpha \overset{\text{def}}{=\!=} \sup\left(u^{-1} * \{s\}\right),$$

$$\beta \overset{\text{def}}{=\!=} \sup\left(u^{-1} * \{t\}\right)$$

とおけば

$$]\alpha, \beta] = u^{-1} *]s,t]$$

となり，

$$\mu_{A_u}\left(u^{-1} *]s,t]\right) = \mu_{A_u}(]\alpha, \beta]) = A(u(\beta)) - A(u(\alpha)) = A(t) - A(s)$$

が成り立つ．以上で

$$\mu_A(]s,t]) = \mu_{A_u}\left(u^{-1} *]s,t]\right)$$

が示された． ∎

G.4　Fubini の定理

$(X, \mathcal{M}), (Y, \mathcal{N})$ を可測空間とするとき，任意の $x \in X$ に対し

$$p_x : Y \ni y \longmapsto (x, y) \in X \times Y$$

で定める p_x は $\mathcal{N}/\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$-可測である．実際，$A \in \mathcal{M},\ B \in \mathcal{N}$ に対しては

$$p_x^{-1}(A \times B) = \begin{cases} \emptyset, & (x \notin A), \\ B, & (x \in A), \end{cases} \in \mathcal{N}$$

となるから，

$$\{\, A \times B \mid \quad A \in \mathcal{M},\ B \in \mathcal{N} \,\} \subset \left\{ E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \mid \quad p_x^{-1}(E) \in \mathcal{N} \right\}$$

が従い p_x の $\mathcal{N}/\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$-可測性が出る．同様に任意の $y \in Y$ に対し

$$q_y : X \ni x \longmapsto (x, y) \in X \times Y$$

で定める q_y は $\mathcal{M}/\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$-可測である．

補題 G.4.1 (二変数可測写像は片変数で可測).　$(X, \mathcal{M}), (Y, \mathcal{N}), (Z, \mathcal{L})$ を可測空間とするとき，写像 $f : X \times Y \longmapsto Z$ が $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}/\mathcal{L}$-可測であれば，任意の $x_0 \in X,\ y_0 \in Y$ に対し

$$X \ni x \longmapsto f(x, y_0), \quad Y \ni y \longmapsto f(x_0, y)$$

はそれぞれ $\mathcal{M}/\mathcal{L}$-可測，$\mathcal{N}/\mathcal{L}$-可測である．

証明.　$X \ni x \longmapsto f(x, y_0)$ は f と q_{y_0} の合成 $f \circ q_{y_0}$ であり，$Y \ni y \longmapsto f(x_0, y)$ は $f \circ p_{x_0}$ である．　■

補題 G.4.2.　$(X, \mathcal{M}, \mu), (Y, \mathcal{N}, \nu)$ を σ-有限な測度空間とするとき，任意の $Q \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ に対し

$$\varphi_Q : X \ni x \longmapsto \int_Y \mathbb{1}_Q \circ p_x \, d\nu, \quad \psi_Q : Y \ni y \longmapsto \int_X \mathbb{1}_Q \circ q_y \, d\mu,$$

はそれぞれ $\mathcal{M}/\mathscr{B}([0, \infty])$-可測，$\mathcal{N}/\mathscr{B}([0, \infty])$-可測であり

$$\int_X \varphi_Q \, d\mu = (\mu \otimes \nu)(Q) = \int_Y \psi_Q \, d\nu \tag{G.15}$$

が成立する．

証明.

第一段　σ-有限の仮定より，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n = Y, \quad \mu(X_n),\ \nu(Y_n) < \infty;\ n = 1, 2, \cdots$$

を満たす増大列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ と $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{N}$ が存在する．ここで

$$\mathcal{M}_n := \{\, A \cap X_n \mid \quad A \in \mathcal{M} \,\}, \quad \mathcal{N}_n := \{\, B \cap Y_n \mid \quad B \in \mathcal{N} \,\}$$

により X_n, Y_n 上の σ-加法族を定めて

$$\mathcal{D}_n := \left\{ Q_n \in \mathcal{M}_n \otimes \mathcal{N}_n \;\middle|\; \begin{array}{r} \varphi_{Q_n} : X \ni x \longmapsto \displaystyle\int_Y \mathbb{1}_{Q_n} \circ p_x \, d\nu \text{ が } \mathcal{M}/\mathscr{B}([0,\infty])\text{-可測}, \\ \psi_{Q_n} : Y \ni y \longmapsto \displaystyle\int_X \mathbb{1}_{Q_n} \circ q_y \, d\mu \text{ が } \mathcal{N}/\mathscr{B}([0,\infty])\text{-可測}, \\ \displaystyle\int_X \varphi_{Q_n} \, d\mu = (\mu \otimes \nu)(Q_n) = \int_Y \psi_{Q_n} \, d\nu \end{array} \right\}$$

とおけば，$\mathcal{D}_n$ は $X_n \times Y_n$ 上の Dynkin 族であり

$$\{\, A \times B \mid \quad A \in \mathcal{M}_n,\, B \in \mathcal{N}_n \,\} \subset \mathcal{D}_n$$

を満たすから $\mathcal{M}_n \otimes \mathcal{N}_n = \mathcal{D}_n$ が従う．

第二段　$\mathcal{M}_n \otimes \mathcal{N}_n = \{\, Q \cap (X_n \times Y_n) \mid \quad Q \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \,\}$ より，任意の $Q \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ に対して

$$Q_n := Q \cap (X_n \times Y_n) \in \mathcal{D}_n,\ (\forall n \geq 1), \quad Q_1 \subset Q_2 \subset \cdots \longrightarrow Q$$

が従い，単調収束定理より

$$\varphi_Q(x) = \int_Y \mathbb{1}_Q \circ p_x \, d\nu = \lim_{n\to\infty} \int_Y \mathbb{1}_{Q_n} \circ p_x \, d\nu = \lim_{n\to\infty} \varphi_{Q_n}(x), \quad (\forall x \in X)$$

となるから φ_Q の $\mathcal{M}/\mathscr{B}([0,\infty])$-可測性が出る．また，

$$\varphi_{Q_n}(x) = \int_Y \mathbb{1}_{Q_n} \circ p_x \, d\nu \leq \int_Y \mathbb{1}_{Q_{n+1}} \circ p_x \, d\nu = \varphi_{Q_{n+1}}(x), \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

が満たされているから，再び単調収束定理により

$$\int_X \varphi_Q \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_{Q_n} \, d\mu = \lim_{n\to\infty} (\mu \otimes \nu)(Q_n) = (\mu \otimes \nu)(Q)$$

が得られる．同様に ψ_Q は $\mathcal{N}/\mathscr{B}([0,\infty])$-可測であり (G.15) を満たす． ∎

定理 G.4.3 (Fubini).　$(X, \mathcal{M}, \mu), (Y, \mathcal{N}, \nu)$ を σ-有限な測度空間とする．

(1)　$f : X \times Y \longrightarrow [0,\infty]$ を $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}/\mathscr{B}([0,\infty])$-可測写像とするとき，

$$\varphi : X \ni x \longmapsto \int_Y f \circ p_x \, d\nu, \quad \psi : Y \ni y \longmapsto \int_X f \circ q_y \, d\mu$$

により定める φ, ψ はそれぞれ $\mathcal{M}/\mathscr{B}([0,\infty])$-可測，$\mathcal{N}/\mathscr{B}([0,\infty])$-可測であり，

$$\int_X \varphi \, d\mu = \int_{X\times Y} f \, d(\mu \otimes \nu) = \int_Y \psi \, d\nu$$

が成立する．

(2)　$f : X \times Y \longrightarrow \mathbf{C}$ を $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測な可積分関数とするとき，

G.5　L^p 空間

$(X, \mathscr{F}, \mu)$ を測度空間とし，

$$\mathscr{L}^0(X, \mathscr{F}, \mu) \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{ f \mid \quad f \text{ は } \mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C})\text{-可測} \right\}$$

と定める．p を $]0, \infty]$ の要素とするとき，

$$p = \infty$$

ならば

$$f \longmapsto \inf \left\{ r \in \mathbf{R} \mid \quad \exists a \in \mathscr{F} \ \left[\mu(a) = 0 \land \forall x \ \left(x \in X \backslash a \Longrightarrow |f(x)| \leq r \right) \right] \right\}$$

により，

$$0 < p < \infty$$

ならば

$$f \longmapsto \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

により定める $\mathscr{L}^0(X, \mathscr{F}, \mu)$ 上の写像を

$$\|\cdot\|_{\mathscr{L}^p}$$

と書き，

$$\|\cdot\|_{\mathscr{L}^p}(f)$$

の代わりに

$$\left\| f \right\|_{\mathscr{L}^p}$$

と書く．そして

$$\mathscr{L}^p(X, \mathscr{F}, \mu) \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{ f \mid \quad f \in \mathscr{L}^0(X, \mathscr{F}, \mu) \land \left\| f \right\|_{\mathscr{L}^p} < \infty \right\}$$

と定義する．本節においては，以降これを

$$\mathscr{L}^p$$

とも略記する．

補題 G.5.1.　任意の $f \in \mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{F}, \mu)$ に対して次が成り立つ:

$$|f| \leq \left\| f \right\|_{\mathscr{L}^\infty} \quad \mu\text{-a.e.}$$

証明.　$\mathscr{L}^\infty(X,\mathscr{F},\mu)$ の定義より任意の実数 $\alpha > \|f\|_{\mathscr{L}^\infty}$ に対して

$$\mu\left(\left\{\, x \in X \mid \quad |f(x)| > \alpha \,\right\}\right) = 0$$

が成り立つから，

$$\left\{\, x \in X \mid \quad |f(x)| > \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} \,\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{\, x \in X \mid \quad |f(x)| > \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} + \frac{1}{n} \,\right\}$$

の右辺は μ-零集合であり主張が従う． ∎

定理 G.5.2 (Hölder の不等式).　$1 \leq p, q \leq \infty$，$p+q = pq$ ($p = \infty$ なら $q = 1$) とする．このとき任意の $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測関数 f, g に対して次が成り立つ:

$$\int_X |fg|\, d\mu \leq \|f\|_{\mathscr{L}^p} \|g\|_{\mathscr{L}^q}. \tag{G.16}$$

証明.　$\|f\|_{\mathscr{L}^p} = \infty$ 又は $\|g\|_{\mathscr{L}^q} = \infty$ なら (G.16) は成り立つから，$\|f\|_{\mathscr{L}^p} < \infty$ かつ $\|g\|_{\mathscr{L}^q} < \infty$ とする．

$p = \infty$, $q = 1$ の場合　補題 G.5.1 により或る零集合 A が存在して

$$|f(x)g(x)| \leq \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} |g(x)| \quad (\forall x \in X \backslash A).$$

が成り立つから，

$$\int_X |fg|\, d\mu = \int_{X\backslash A} |fg|\, d\mu \leq \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} \int_{X\backslash A} |g|\, d\mu = \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} \|g\|_{\mathscr{L}^1}$$

が従い不等式 (G.16) を得る．

$1 < p, q < \infty$ の場合　$\|f\|_{\mathscr{L}^p} = 0$ のとき

$$B := \left\{\, x \in X \mid \quad |f(x)| > 0 \,\right\}$$

は零集合であるから，

$$\int_X |fg|\, d\mu = \int_{X\backslash B} |fg|\, d\mu = 0$$

となり (G.16) を得る．$\|g\|_{\mathscr{L}^q} = 0$ の場合も同じである．次に $0 < \|f\|_{\mathscr{L}^p}, \|g\|_{\mathscr{L}^q} < \infty$ の場合を示す．実数値対数関数 $(0,\infty) \ni t \longmapsto -\log t$ は凸であるから，$1/p + 1/q = 1$ に対して

$$-\log\left(\frac{s}{p} + \frac{t}{q}\right) \leq \frac{1}{p}(-\log s) + \frac{1}{q}(-\log t) \quad (\forall s, t > 0)$$

を満たし

$$s^{1/p} t^{1/q} \leq \frac{s}{p} + \frac{t}{q} \quad (\forall s, t > 0)$$

が従う．ここで

$$F := \frac{|f|^p}{\|f\|_{\mathscr{L}^p}^p}, \quad G := \frac{|g|^q}{\|g\|_{\mathscr{L}^q}^q}$$

により可積分関数 F, G を定めれば，

$$F(x)^{1/p}G(x)^{1/q} \leq \frac{1}{p}F(x) + \frac{1}{q}G(x) \quad (\forall x \in X)$$

が成り立つから

$$\frac{1}{\|f\|_{\mathscr{L}^p}\|g\|_{\mathscr{L}^q}} \int_X |fg| \, d\mu = \int_X F^{1/p}G^{1/q} \, d\mu \leq \frac{1}{p}\int_X F \, d\mu + \frac{1}{q}\int_X G \, d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

が従い，$\|f\|_{\mathscr{L}^p}\|g\|_{\mathscr{L}^q}$ を移項して不等式 (G.16) を得る． ∎

定理 G.5.3 (Minkowski の不等式). $1 \leq p \leq \infty$ のとき，任意の $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測関数 f, g に対して次が成り立つ:

$$\|f+g\|_{\mathscr{L}^p} \leq \|f\|_{\mathscr{L}^p} + \|g\|_{\mathscr{L}^p}. \tag{G.17}$$

証明. $\|f+g\|_{\mathscr{L}^p} = 0$, $\|f\|_{\mathscr{L}^p} = \infty$, $\|g\|_{\mathscr{L}^p} = \infty$ のいずれかが満たされていれば (G.17) は成り立つから，$\|f+g\|_{\mathscr{L}^p} > 0$ かつ $\|f\|_{\mathscr{L}^p} < \infty$ かつ $\|g\|_{\mathscr{L}^p} < \infty$ の場合を考える．

$p = \infty$ の場合　補題 G.5.1 により

$$C := \left\{ x \in X \mid \quad |f(x)| > \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} \right\} \cup \left\{ x \in X \mid \quad |g(x)| > \|g\|_{\mathscr{L}^\infty} \right\}$$

は零集合であり，

$$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} + \|g\|_{\mathscr{L}^\infty} \quad (\forall x \in X \backslash C)$$

が成り立ち (G.17) が従う．

$p = 1$ の場合

$$\int_X |f+g| \, d\mu \leq \int_X |f| + |g| \, d\mu = \|f\|_{\mathscr{L}^1} + \|g\|_{\mathscr{L}^1}$$

より (G.17) が従う．

$1 < p < \infty$ の場合　q を p の共役指数とする．

$$|f+g|^p = |f+g||f+g|^{p-1} \leq |f||f+g|^{p-1} + |g||f+g|^{p-1}$$

が成り立つから，Hölder の不等式より

$$\begin{aligned} \|f+g\|_{\mathscr{L}^p}^p &= \int_X |f+g|^p \, d\mu \\ &\leq \int_X |f||f+g|^{p-1} \, d\mu + \int_X |g||f+g|^{p-1} \, d\mu \\ &\leq \|f\|_{\mathscr{L}^p}\|f+g\|_{\mathscr{L}^p}^{p-1} + \|g\|_{\mathscr{L}^p}\|f+g\|_{\mathscr{L}^p}^{p-1} \end{aligned} \tag{G.18}$$

が得られる．また $|f|^p, |g|^p$ の可積性と

$$|f+g|^p \leq 2^p \left(|f|^p + |g|^p\right)$$

により $\left\|f+g\right\|_{\mathscr{L}^p} < \infty$ が従うから，(G.18) の両辺を $\left\|f+g\right\|_{\mathscr{L}^p}^{p-1}$ で割って (G.17) を得る． ∎

以上の結果より $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{F}, \mu)$ は $\mathbf{C}$ 上の線形空間となる．実際線型演算は

$$(f+g)(x) \coloneqq f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) \coloneqq \alpha f(x), \quad (\forall x \in X,\ f, g \in \mathscr{L}^p(\mu),\ \alpha \in \mathbf{C})$$

により定義され，Minkowski の不等式により加法について閉じている．

補題 G.5.4.　$1 \leq p \leq \infty$ に対し，$\|\cdot\|_{\mathscr{L}^p}$ は線形空間 $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{F}, \mu)$ のセミノルムである．

証明.

半正値性　$\|\cdot\|_{\mathscr{L}^p}$ が正値であることは定義による．一方で，$E \neq \emptyset$ を満たす μ-零集合 E が存在するとき，

$$f(x) \coloneqq \begin{cases} 1 & (x \in E) \\ 0 & (x \in \Omega \backslash E) \end{cases}$$

で定める f は零写像ではないが $\left\|f\right\|_{\mathscr{L}^p} = 0$ となる．

同次性　任意に $\alpha \in \mathbf{C}$, $f \in \mathscr{L}^p(\mu)$ を取る．$1 \leq p < \infty$ の場合は

$$\left(\int_X |\alpha f|^p \, d\mu\right)^{1/p} = \left(|\alpha|^p \int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} = |\alpha| \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}$$

により，$p = \infty$ の場合は

$$\inf\left\{ r \in \mathbf{R} \mid \quad |\alpha f(x)| \leq r \quad \mu\text{-a.e.} x \in X \right\} = |\alpha| \inf\left\{ r \in \mathbf{R} \mid \quad |f(x)| \leq r \quad \mu\text{-a.e.} x \in X \right\}$$

により $\left\|\alpha f\right\|_{\mathscr{L}^p} = |\alpha| \left\|f\right\|_{\mathscr{L}^p}$ が成り立つ．

三角不等式　Minkowski の不等式より従う． ∎

$\mathscr{L}^p$ はノルム空間ではないが，同値類でまとめることによりノルム空間となる．

可測関数全体の商集合　$\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測関数全体の集合を

$$\mathscr{L}^0(X, \mathscr{F}, \mu) \coloneqq \left\{ f : X \longrightarrow \mathbf{C} \mid \quad f : \text{可測 } \mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C}) \right\}$$

とおく．$f, g \in \mathscr{L}^0(X, \mathscr{F}, \mu)$ に対し

$$f \sim g \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad f = g \quad \mu\text{-a.e.}$$

により定める $\sim$ は同値関係であり，$\sim$ による $\mathscr{L}^0(X, \mathscr{F}, \mu)$ の商集合を $L^0(X, \mathscr{F}, \mu)$ と表す．

商集合における算法　$L^0(\mu)$ の元である関数類 (同値類) を $[f]$ (f は関数類の代表) と表せば，$L^0(\mu)$ は

$$[f] + [g] \coloneqq [f+g], \quad \alpha[f] \coloneqq [\alpha f], \quad ([f], [g] \in L^0(\mu),\ \alpha \in \mathbf{C}).$$

を線型演算として $\mathbf{C}$ 上の線形空間となる．また

$$[f][g] \coloneqq [fg] \quad \bigl([f],[g] \in L^0(\mu)\bigr).$$

を乗法として $L^0(\mu)$ は環となる．$L^0(\mu)$ の零元は零写像の関数類でありこれを $[0]$ と書く．また単位元は恒等的に 1 を取る関数の関数類でありこれを $[1]$ と書く．減法は

$$[f]-[g] \coloneqq [f]+(-[g]) = [f]+[-g] = [f-g]$$

により定める．

関数類の順序　$[f],[g] \in L^0(\mu)$ に対して次の関係 $<$ ($>$) を定める:

$$[f] < [g] \ \bigl([g] > [f]\bigr) \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad f < g \quad \mu\text{-a.s.}$$

この定義は well-defined である．実際任意の $f' \in [f], g' \in [g]$ に対して

$$\left\{f' \geq g'\right\} \subset \left\{f \neq f'\right\} \cup \left\{f \geq g\right\} \cup \left\{g \neq g'\right\}$$

の右辺は零集合であるから

$$[f] < [g] \Leftrightarrow [f'] < [g']$$

が従う．$<$ ($>$) または $=$ であることを $\leq$ ($\geq$) と書くとき，任意の $[f],[g],[h] \in L^0(\mu)$ に対し，

- $[f] \leq [f]$ が成り立つ．
- $[f] \leq [g]$ かつ $[g] \leq [f]$ ならば $[f] = [g]$ が成り立つ．
- $[f] \leq [g]$, $[g] \leq [h]$ ならば $[f] \leq [h]$ が成り立つ．

が満たされるから $\leq$ は $L^0(\mu)$ における順序となる．

定義 G.5.5 (商空間におけるノルムの定義).

$$\left\|[f]\right\|_{L^p} \coloneqq \left\|f\right\|_{\mathscr{L}^p} \quad (f \in \mathscr{L}^p(X,\mathscr{F},\mu),\ 1 \leq p \leq \infty)$$

により定める $\|\cdot\|_{L^p} : L^0(X,\mathscr{F},\mu) \longrightarrow \mathbf{R}$ は関数類の代表に依らずに値が確定する．そして

$$L^p(X,\mathscr{F},\mu) \coloneqq \left\{ [f] \in L^0(X,\mathscr{F},\mu) \mid \quad \left\|[f]\right\|_{L^p} < \infty \right\} \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

として定める空間は $\|\cdot\|_{L^p}$ をノルムとしてノルム空間となる．

定理 G.5.6 (L^p は Banach 空間).　ノルム空間 $L^p(X,\mathscr{F},\mu)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ の任意の Cauchy 列 $\bigl([f_n]\bigr)_{n=1}^{\infty}$ に対してノルム収束極限 $[f] \in L^p(\mu)$ が存在する．また，このとき或る部分列 $\left(\left[f_{n_k}\right]\right)_{k=1}^{\infty}$ の代表 f_{n_k} は f に概収束する:

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k} = f, \quad \mu\text{-a.e.}$$

証明.　任意に Cauchy 列 $[f_n] \in L^p(\mu)$ $(n = 1,2,3,\cdots)$ を取れば，或る $N_1 \in \mathbf{N}$ が存在して

$$\left\|[f_n]-[f_m]\right\|_{L^p} < \frac{1}{2} \quad (\forall n > m \geq N_1)$$

を満たす．ここで $m > N_1$ を一つ選び n_1 とおく．同様に $N_2 > N_1$ を満たす $N_2 \in \mathbf{N}$ が存在して

$$\left\| [f_n] - [f_m] \right\|_{L^p} < \frac{1}{2^2} \quad (\forall n > m \geq N_2)$$

を満たすから，$m > N_2$ を一つ選び n_2 とおけば

$$\left\| \left[f_{n_1}\right] - \left[f_{n_2}\right] \right\|_{L^p} < \frac{1}{2}$$

が成り立つ．同様の操作を繰り返して

$$\left\| \left[f_{n_k}\right] - \left[f_{n_{k+1}}\right] \right\|_{L^p} < \frac{1}{2^k} \quad (n_k < n_{k+1},\ k = 1, 2, 3, \cdots) \tag{G.19}$$

を満たす部分添数列 $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ を構成する．

$p = \infty$ の場合　$\left[f_{n_k}\right]$ の代表 f_{n_k} $(k = 1, 2, \cdots)$ に対して

$$\begin{aligned} A_k &:= \left\{ x \in X \mid \quad \left|f_{n_k}(x)\right| > \left\| f_{n_k} \right\|_{\mathscr{L}^\infty} \right\}, \\ A^k &:= \left\{ x \in X \mid \quad \left|f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)\right| > \left\| f_{n_k} - f_{n_{k+1}} \right\|_{\mathscr{L}^\infty} \right\} \end{aligned}$$

とおけば，補題 G.5.1 より $\mu(A_k) = \mu(A^k) = 0$ $(k = 1, 2, \cdots)$ が成り立つ．

$$A_\circ := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \quad A^\circ := \bigcup_{k=1}^{\infty} A^k, \quad A := A_\circ \cup A^\circ$$

として μ-零集合 A を定めて

$$\hat{f}_{n_k} := f_{n_k} \mathbb{1}_{X \setminus A} \quad (\forall k = 1, 2, \cdots)$$

とおけば各 $\hat{f}_{n_k}$ は $\left[\hat{f}_{n_k}\right] = \left[f_{n_k}\right]$ を満たす有界可測関数であり，(G.19) より

$$\sup_{x \in X} \left| \hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}_{n_{k+1}}(x) \right| \leq \left\| \hat{f}_{n_k} - \hat{f}_{n_{k+1}} \right\|_{\mathscr{L}^\infty} < \frac{1}{2^k} \quad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

が成り立つ．このとき任意の $\epsilon > 0$ に対し $1/2^N < \epsilon$ を満たす $N \in \mathbf{N}$ を取れば，$\ell > k > N$ なら

$$\left| \hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}_{n_\ell}(x) \right| \leq \sum_{j=k}^{\ell-1} \left| \hat{f}_{n_j}(x) - \hat{f}_{n_{j+1}}(x) \right| < \sum_{k>N} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^N} < \epsilon \quad (\forall x \in X)$$

となるから，各点 $x \in X$ で $\left(\hat{f}_{n_k}(x)\right)_{k=1}^{\infty}$ は $\mathbf{C}$ の Cauchy 列となり収束する．

$$\hat{f}(x) := \lim_{k \to \infty} \hat{f}_{n_k}(x) \quad (\forall x \in X)$$

として $\hat{f}$ を定めれば，$\hat{f}$ は可測 $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$ であり，且つ任意に $k \in \mathbf{N}$ を取れば

$$\sup_{x \in X} \left| \hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}(x) \right| \leq \frac{1}{2^{k-1}} \tag{G.20}$$

を満たす．実際或る $y \in X$ で $\alpha := \left|\hat{f}_{n_k}(y) - \hat{f}(y)\right| > 1/2^{k-1}$ が成り立つと仮定すれば，

$$\left| \hat{f}_{n_k}(y) - \hat{f}_{n_\ell}(y) \right| \leq \sum_{j=k}^{\ell-1} \sup_{x \in X} \left| \hat{f}_{n_j}(x) - \hat{f}_{n_{j+1}}(x) \right| < \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{k-1}} \quad (\forall \ell > k)$$

より

$$0 < \alpha - \frac{1}{2^{k-1}} < \left|\hat{f}_{n_k}(y) - \hat{f}(y)\right| - \left|\hat{f}_{n_k}(y) - \hat{f}_{n_\ell}(y)\right| \leq \left|\hat{f}(y) - \hat{f}_{n_\ell}(y)\right| \quad (\forall \ell > k)$$

が従い各点収束に反する．不等式 (G.20) により

$$\sup_{x \in X}\left|\hat{f}(x)\right| < \sup_{x \in X}\left|\hat{f}(x) - \hat{f}_{n_k}(x)\right| + \sup_{x \in X}\left|\hat{f}_{n_k}(x)\right| \leq \frac{1}{2^{k-1}} + \left\| \hat{f}_{n_k} \right\|_{\mathscr{L}^\infty}$$

が成り立つから $\left[\hat{f}\right] \in L^\infty(\mu)$ が従い，

$$\left\| \left[f_{n_k}\right] - \left[\hat{f}\right] \right\|_{L^\infty} = \left\| \left[\hat{f}_{n_k}\right] - \left[\hat{f}\right] \right\|_{L^\infty} \leq \sup_{x \in X} |\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}(x)| \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty)$$

により部分列 $\left(\left[f_{n_k}\right]\right)_{k=1}^\infty$ が $\left[\hat{f}\right]$ に収束するから元の Cauchy 列も $\left[\hat{f}\right]$ に収束する．

$1 \leq p < \infty$ の場合　$\left[f_{n_k}\right]$ の代表 f_{n_k} $(k = 1, 2, \cdots)$ は

$$f_{n_k}(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{k}\left(f_{n_j}(x) - f_{n_{j-1}}(x)\right) \quad (\forall x \in X)$$

を満たし，これに対して

$$g_k(x) := \left|f_{n_1}(x)\right| + \sum_{j=1}^{k}\left|f_{n_j}(x) - f_{n_{j-1}}(x)\right| \quad (\forall x \in X,\ k = 1, 2, \cdots)$$

により単調非減少な可測関数列 $(g_k)_{k=1}^\infty$ を定めれば，Minkowski の不等式と (G.19) により

$$\left\| g_k \right\|_{\mathscr{L}^p} \leq \left\| f_{n_1} \right\|_{\mathscr{L}^p} + \sum_{j=1}^{k}\left\| f_{n_j} - f_{n_{j-1}} \right\|_{\mathscr{L}^p} < \left\| f_{n_1} \right\|_{\mathscr{L}^p} + 1 < \infty \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

が成り立つ．ここで

$$B_N := \bigcap_{k=1}^\infty \left\{ x \in X \mid \quad g_k(x) \leq N \right\}, \quad B := \bigcup_{N=1}^\infty B_N$$

とおけば $(g_k)_{k=1}^\infty$ は B 上で各点収束し $X \backslash B$ 上では発散するが，$X \backslash B$ は零集合である．実際

$$\int_X g_k^p \, d\mu = \int_B g_k^p \, d\mu + \int_{X \backslash B} g_k^p \, d\mu \leq \left(\left\| f_{n_1} \right\|_{\mathscr{L}^p} + 1\right)^p, \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

が満たされているから，単調収束定理より

$$\int_B \lim_{k \to \infty} g_k^p \, d\mu + \int_{X \backslash B} \lim_{k \to \infty} g_k^p \, d\mu \leq \left(\left\| f_{n_1} \right\|_{\mathscr{L}^p} + 1\right)^p$$

が成り立ち $\mu(X \backslash B) = 0$ が従う．$\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測関数 g, f を

$$g := \lim_{k \to \infty} g_k \mathbb{1}_B, \quad f := \lim_{k \to \infty} f_{n_k} \mathbb{1}_B$$

で定義すれば，$|f| \leq g$ と g^p の可積分性により $\left[f\right] \in L^p(\mu)$ が成り立つ．また $\left|f_{n_k} - f\right|^p \leq 2^p g^p$ $(\forall k = 1, 2, \cdots)$ が満たされているから，Lebesgue の収束定理により

$$\lim_{k \to \infty} \left\| \left[f_{n_k}\right] - \left[f\right] \right\|_{L^p}^p = \lim_{k \to \infty} \int_X \left|f_{n_k} - f\right|^p \, d\mu = 0$$

が従い，部分列の収束により元の Cauchy 列も $\left[f\right]$ に収束する．　■

G.6　微分定理

G.7　微分積分学の基本定理

定理 G.7.1 ($\mathbf{R}$ の開集合は交わらない開区間の高々可算和で書ける).　$\mathscr{I}$ を $\mathbf{R}$ の開区間の全体とする．u を $\mathbf{R}$ の開集合とすると，$\mathscr{I}$ の部分集合 $\mathscr{S}$ で，

$$\forall i, j \in \mathscr{S} \ \left(i \neq j \Longrightarrow i \cap j = \emptyset \right)$$

かつ

$$\mathrm{card}\, \mathscr{S} \leq \boldsymbol{\omega}$$

かつ

$$u = \bigcup \mathscr{S}$$

を満たすものが取れる．

略証．　u が空であるときは

$$\mathscr{S} \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \emptyset$$

とおけばよい．以下では

$$u \neq \emptyset$$

であるとする．u 上の同値関係を

$$\sim \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \left\{ (x, y) \mid \quad x \in u \wedge y \in u \wedge \left[\min\{x, y\}, \max\{x, y\} \right] \subset u \right\}$$

により定め，q を u から $\mathscr{S}$ への商写像とする．このとき，x を u の要素とすれば

$$q(x) \in \mathscr{I}$$

が成り立つ．実際，s と t を

$$s < t$$

なる $q(x)$ の要素とすれば，

$$[s, t] \subset u$$

なので

$$[s, t] \subset q(x)$$

が従う．すなわち $q(x)$ は弧状連結である．ゆえに $q(x)$ は連結集合である．また y を $q(x)$ の要素とすれば，u は開集合なので

$$[y - r, y + r] \subset u$$

を満たす正の実数 r が取れるが，このとき

$$[y-r, y+r] \subset q(x)$$

が成り立つので $q(x)$ は $\mathbf{R}$ の開集合である．以上より $q(x)$ は $\mathbf{R}$ の開区間である．

$$\mathscr{S} \overset{\text{def}}{=\!=} u/\sim$$

とおけば

$$\mathscr{S} \subset \mathscr{I}$$

であって，定理 B.5.7 より

$$\forall i, j \in \mathscr{S} \ \left(i \neq j \Longrightarrow i \cap j = \emptyset \right)$$

が成立し，定理 B.5.5 より

$$u = \bigcup \mathscr{S}$$

が成立する．また

$$Q \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{ r \in \mathbf{Q} \mid \quad \exists x \in u \ \left(r \in q(x) \right) \right\}$$

とおいて

$$f \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{ a \mid \quad \exists r \in Q \, \exists x \in u \ \left[a = (r, q(x)) \land r \in q(x) \right] \right\}$$

とおけば，

$$f : Q \xrightarrow{\text{onto}} \mathscr{S}$$

が成り立つので，定理 C.2.13 と定理 C.2.10 より

$$\operatorname{card} \mathscr{S} \leq \operatorname{card} Q \leq \boldsymbol{\omega}$$

が得られる． ∎

定義 G.7.2 (絶対連続関数). α と β を $\alpha < \beta$ なる実数とし，f を $[\alpha, \beta]$ 上の $\mathbf{C}$ 値関数とし，λ を一次元 Lebesgue 測度とする．また $\mathscr{I}$ を $\mathbf{R}$ の開区間の全体として

$$\mathscr{I}_{[\alpha,\beta]} \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{ I \cap [\alpha, \beta] \mid \quad I \in \mathscr{I} \land I \cap [\alpha, \beta] \neq \emptyset \right\}$$

とおく．ϵ を任意に与えられた正数とするとき，正数 δ が取れて，$\mathscr{I}_{[\alpha,\beta]}$ の任意の有限部分集合 $\mathscr{S}$ に対し

- $\mathscr{S}$ のどの二要素も互いに素であって
- かつ $\lambda\left(\bigcup \mathscr{S}\right) < \delta$

が満たされている限り

$$\sum_{s \in \mathscr{S}} |f(\sup s) - f(\inf s)| < \epsilon$$

が成り立つとする．このとき f を $[\alpha, \beta]$ 上の絶対連続関数 **(absolutely continuous function)** と呼ぶ．

上の定義は抽象的である分有用であるが，その反面わかりづらいので直感的な説明を付けておく．いま f を $[\alpha,\beta]$ 上の写像とするとき，f が絶対連続であるとは，任意に与えられた正数 ϵ に対して正数 δ が取れて，1 以上の任意の自然数 n 及び

$$t : 2 \cdot n \longrightarrow [\alpha,\beta]$$

なる写像 t に対して

$$\forall k \in 2 \cdot n - 1 \left(\alpha \leq t_k \leq t_{k+1} \leq \beta \right)$$

及び

$$\sum_{k=0}^{n-1} (t_{2 \cdot k+1} - t_{2 \cdot k}) < \delta$$

が満たされている限り

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left| f(t_{2 \cdot k+1}) - f(t_{2 \cdot k}) \right| < \epsilon$$

が成り立つということである．

定理 G.7.3 (AC は線型空間である).

定理 G.7.4 (絶対連続関数は有界変動である).

定理 G.7.5 (絶対連続な非減少関数は可測集合を可測集合に写す).　α と β を $\alpha < \beta$ なる実数とし，f を $[\alpha,\beta]$ 上の非減少 $\mathbf{R}$ 値絶対連続関数とし，λ を一次元 Lebesgue 測度とし，$\mathfrak{M}$ を Lebesgue 可測集合の全体とする．また

$$\mathfrak{M}_{[\alpha,\beta]} \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \left\{ E \cap [\alpha,\beta] \mid \quad E \in \mathfrak{M} \right\}$$

とおく．このとき $\mathfrak{M}_{[\alpha,\beta]}$ の任意の要素 E に対して

$$f * E \in \mathfrak{M}$$

が成り立ち，特に

$$\lambda(E) = 0 \Longrightarrow \lambda(f * E) = 0.$$

略証.　いま $\mathscr{I}$ を $\mathbf{R}$ 上の開区間の全体とし，

$$\mathscr{I}_{[a,b]} \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \left\{ I \cap [\alpha,\beta] \mid \quad I \in \mathscr{I} \wedge I \cap [\alpha,\beta] \neq \emptyset \right\}$$

とおく．また ϵ を任意に与えられた正の実数とする．f は絶対連続であるから，このとき正の実数 δ が取れて，$\mathscr{I}_{[\alpha,\beta]}$ の任意の有限部分集合 $\mathscr{S}$ に対し

- $\mathscr{S}$ のどの二要素も互いに素であって
- かつ $\lambda\left(\bigcup \mathscr{S}\right) < \delta$

が満たされている限り

$$\sum_{s \in \mathscr{S}} |f(\sup s) - f(\inf s)| < \epsilon$$

が成り立つ．いま E を $\mathfrak{M}_{[\alpha,\beta]}$ の要素として

$$\lambda(E) = 0$$

であるとする．

$$E = \emptyset$$

ならば

$$f * E = \emptyset \in \mathfrak{M}$$

が成り立つ．

$$E \neq \emptyset$$

であるとき，λ の正則性より

$$E \subset V$$

かつ

$$\lambda(V) < \delta$$

を満たす $\mathbf{R}$ の開集合 V が取れて，定理 G.7.1 より

$$V = \bigcup \mathscr{T}$$

かつ

$$\mathrm{card}\,\mathscr{T} \leq \boldsymbol{\omega}$$

かつ

$$\forall i, j \in \mathscr{T} \,(\, i \neq j \Longrightarrow i \cap j = \emptyset \,)$$

を満たす $\mathscr{I}$ の部分集合 $\mathscr{T}$ が取れる．

$$\mathscr{S} \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \left\{ I \cap [\alpha, \beta] \mid \quad I \in \mathscr{T} \wedge I \cap [\alpha, \beta] \neq \emptyset \right\}$$

とおけば

$$\lambda\left(\bigcup \mathscr{S}\right) = \lambda\left([\alpha, \beta] \cap V\right) \leq \lambda(V) < \delta$$

が成り立つ．ところで f は連続であるから，$\mathscr{S}$ の要素 s に対して $f * s$ は連結である．ゆえにこれは $\mathbf{R}$ の区間であり，すなわち Lebesgue 可測集合である．よって

$$f * \bigcup \mathscr{S} = \bigcup_{s \in \mathscr{S}} f * s \in \mathfrak{M}$$

が成り立つ．また f は非減少関数なので

$$f * s \subset [f(\inf s), f(\sup s)]$$

が成り立つ．

$$\operatorname{card} \mathscr{S} < \boldsymbol{\omega}$$

であるときは，絶対連続性の定義から直接

$$\lambda\left(f * \bigcup \mathscr{S}\right) = \lambda\left(\bigcup_{s \in \mathscr{S}} f * s\right) \leq \sum_{s \in \mathscr{S}} \left(f(\sup s) - f(\inf s)\right) < \epsilon$$

が成立する．

$$\operatorname{card} \mathscr{S} = \boldsymbol{\omega}$$

であるときは

$$\sigma : \boldsymbol{\omega} \xrightarrow[\text{onto}]{1:1} \mathscr{S}$$

なる写像 σ が取れるが，このとき任意の自然数 n で

$$\sum_{k=0}^{n} \left(f(\sup \sigma(k)) - f(\inf \sigma(k))\right) < \epsilon$$

が成り立つから，数列

$$\boldsymbol{\omega} \ni n \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \left(f(\sup \sigma(k)) - f(\inf \sigma(k))\right)$$

は収束して

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(f(\sup \sigma(n)) - f(\inf \sigma(n))\right) \leq \epsilon$$

を満たす．よってこの場合も

$$\lambda\left(f * \bigcup \mathscr{S}\right) = \lambda\left(\bigcup_{n \in \boldsymbol{\omega}} f * \sigma(n)\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(f(\sup \sigma(n)) - f(\inf \sigma(n))\right) \leq \epsilon$$

が成立する．以上でこの E に対して

$$\forall \epsilon \in \mathbf{R}_{+} \, \exists F \in \mathfrak{M} \, \left(f * E \subset F \wedge \lambda(F) < \epsilon \right)$$

が成り立つことが示された．すなわち各自然数 n に対して

$$\left\{ F \in \mathfrak{M} \mid \quad f * E \subset F \wedge \lambda(F) < \frac{1}{n} \right\}$$

は空でないから，定理 C.1.2 より

$$\prod_{n \in \boldsymbol{\omega}} \left\{ F \in \mathfrak{M} \mid \quad f * E \subset F \wedge \lambda(F) < \frac{1}{n} \right\}$$

から要素 h が取れる．

$$F \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \bigcap_{n \in \omega} h(n)$$

とおけば

$$f * E \subset F$$

かつ

$$\lambda(F) = 0$$

が成り立つので，Lebesgue 測度の完備性より

$$f * E \in \mathfrak{M}$$

及び

$$\lambda(f * E) = 0$$

が従う．つまり，f は零集合を零集合に写す．次に E を $\mathfrak{M}_{[\alpha,\beta]}$ の一般の要素とする．このとき

$$E = F \cup N$$

を満たす $\mathbf{R}$ の F_σ 集合 F と Lebesgue 零集合 N が取れるが，

$$F \subset [\alpha, \beta]$$

なので F は σ-コンパクトであり

$$f * F \in \mathfrak{M}$$

が満たされる．また N は Lebesgue 零集合なので

$$f * N \in \mathfrak{M}$$

も満たされる．ゆえに

$$f * E = f * F \cup f * N \in \mathfrak{M}$$

が成立する． ∎

定理 G.7.6 (絶対連続関数の総変動関数も絶対連続である).

定理 G.7.7 (微分積分学の基本定理).

略証.

第一段　f が $\mathbf{R}$ 値の非減少関数であるとして考察する．

$$[\alpha,\beta] \ni x \longmapsto x + f(x)$$

なる写像を g とすれば，g は単調増大であるから定理 G.7.5 より

$$\forall E\ \left[\, E \in \mathfrak{M}_{[a,b]} \Longrightarrow g * E \in \mathfrak{M} \,\right]$$

を満たす．また $\mathfrak{M}_{[a,b]}$ 上の写像 μ を

$$\mathfrak{M}_{[a,b]} \ni E \longmapsto \lambda(g * E)$$

なる関係により定めれば，g が単射であるから μ は $\mathfrak{M}_{[a,b]}$ 上の複素測度である．また定理 G.7.5 より

$$\lambda(E) = 0 \Longrightarrow \lambda(g * E) = 0$$

が成り立つので

$$\mu \ll \lambda$$

が成立し，Radon-Nikodym の定理から $\mathfrak{M}_{[a,b]}$ の任意の要素 E に対して

$$\mu(E) = \int_E h\ d\lambda$$

を満たす $\mathscr{L}^1([a,b],\mathfrak{M}_{[a,b]},\lambda)$ の要素 h が取れる．x を

$$a \leq x \leq b$$

を満たす $[a,b]$ の任意の要素とすれば

$$g(x) - g(a) = \lambda(g * [a,x]) = \mu([a,x]) = \int_{[a,x]} h\ d\lambda$$

が成り立つので，

$$f(x) - f(a) = \int_{[a,x]} h - 1\ d\lambda$$

が従う．ゆえに微分定理より Lebesgue 点 x において f は微分可能であって，その微分係数は

$$h(x) - 1$$

に一致する．

$$[a,b] \ni x \longmapsto \begin{cases} h(x) - 1 & \text{if } x \text{ が Lebesgue 点} \\ 0 & \text{if } x \text{ が Lebesgue 点でない} \end{cases}$$

なる写像を f' と定めれば

$$\forall x \left[a \leq x \leq b \Longrightarrow f(x) - f(a) = \int_{[a,x]} f'\ d\lambda \right] \tag{G.21}$$

が得られる．逆に f が a.e. に微分可能で (G.21) が成立していれば f は絶対連続である．

付録 H

複素解析メモ

H.1　複素測度

H.1.1　複素測度

定義 H.1.1 (複素測度). $(X, \mathscr{F})$ を可測空間とするとき，$\mathscr{F}$ で定義される完全加法的な複素数値関数を $(X, \mathscr{F})$ 上の**複素測度 (complex measure)** という．

λ を可測空間 $(X, \mathscr{F})$ の複素測度とする．任意の全単射 $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ に対し

$$(E :=) \sum_{i=1}^{\infty} E_i = \sum_{i=1}^{\infty} E_{\sigma(i)}$$

が成り立つから

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i) = \lambda(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_{\sigma(i)})$$

が従い，Riemann の級数定理より $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i)$ は絶対収束する．ここで，

$$|\lambda(E)| \leq \mu(E) \quad (\forall E \in \mathscr{F}) \tag{H.1}$$

を満たすような或る $(X, \mathscr{F})$ 上の測度 μ が存在すると考える．このとき μ は

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(E_i)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) = \mu\left(\sum_{i=1}^{\infty} E_i\right)$$

を満たすから

$$\sup\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(A_i)| \;\middle|\; E = \sum_{i=1}^{\infty} A_i,\ \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathscr{F} \right\} \leq \mu(E), \quad (\forall E \in \mathscr{F})$$

が成立する．実は，

$$|\lambda|(E) := \sup\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(A_i)| \;\middle|\; E = \sum_{i=1}^{\infty} A_i,\ \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathscr{F} \right\}, \quad (\forall E \in \mathscr{F}) \tag{H.2}$$

で定める $|\lambda|$ は (H.1) を満たす最小の有限測度となる (定理 H.1.3，定理 H.1.5).

定義 H.1.2 (総変動・総変動測度). 可測空間 $(X, \mathscr{F})$ 上の複素測度 λ に対し，(H.2) で定める $|\lambda|$ を λ の総変動測度 (total variation measure) といい，$|\lambda|(X)$ を λ の総変動 (total variation) という．

特に λ が正値有限測度である場合は $\lambda = |\lambda|$ が成り立つ．実際，任意の $E \in \mathscr{F}$ に対して

$$|\lambda|(E) = \sup\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(A_i)| \;\middle|\; E = \sum_{i=1}^{\infty} A_i,\ \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathscr{F} \right\} = \lambda(E)$$

が成立する．

定理 H.1.3 ($|\lambda|$ は測度). 可測空間 $(X, \mathscr{F})$ 上の複素測度 λ に対して，(H.2) で定める $|\lambda|$ は正値測度である．

証明. $|\lambda|$ の正値性は (H.2) より従うから，$|\lambda|$ の完全加法性を示す．いま，互いに素な集合列 $E_i \in \mathscr{F}$ $(i = 1, 2, \cdots)$ を取り $E := \sum_{i=1}^{\infty} E_i$ とおく．このとき，任意の $\epsilon > 0$ に対して E_i の或る分割 $(A_{ij})_{j=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}$ が存在して

$$|\lambda|(E_i) \geq \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda(A_{ij})| > |\lambda|(E_i) - \frac{\epsilon}{2^i}$$

を満たすから，$E = \sum_{i,j=1}^{\infty} A_{ij}$ と併せて

$$|\lambda|(E) \geq \sum_{i,j=1}^{\infty} |\lambda(A_{ij})| \geq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda(A_{ij})| > \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda|(E_i) - \epsilon$$

となり，$\epsilon > 0$ の任意性より

$$|\lambda|(E) \geq \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda|(E_j)$$

が従う．一方で E の任意の分割 $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}$ に対し

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda(A_j)| = \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_j \cap E_i) \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda|(A_j \cap E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda|(E_i)$$

が成り立つから，E の分割について上限を取って

$$|\lambda|(E) \leq \sum_{i=1} |\lambda|(E_i)$$

を得る． ∎

補題 H.1.4. $z_1, \cdots, z_N$ を複素数とする．このとき，次を満たす或る部分集合 $S \subset \{1, \cdots, N\}$ が存在する:

$$\left| \sum_{k \in S} z_k \right| \geq \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N} |z_k|.$$

証明.　$i = \sqrt{-1}$ として，$z_k = |z_k| \exp i\alpha_k \ (-\pi \leq \alpha_k < \pi,\ k = 1, \cdots, N)$ を満たす $\alpha_1, \cdots, \alpha_N$ を取り

$$S(\theta) \coloneqq \{\, k \in \{1, \cdots, N\} \mid \quad \cos(\alpha_k - \theta) > 0 \,\}, \quad (-\pi \leq \theta \leq \pi)$$

とおく．このとき，$\cos x+ \coloneqq 0 \vee \cos x \ (x \in \mathbf{R})$ とすれば

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k \in S(\theta)} z_k \right| &= |\exp -i\theta| \left| \sum_{k \in S(\theta)} z_k \right| = \left| \sum_{k \in S(\theta)} |z_k| \exp i(\alpha_k - \theta) \right| \\ &\geq \mathrm{Re} \sum_{k \in S(\theta)} |z_k| \exp i(\alpha_k - \theta) = \sum_{k \in S(\theta)} |z_k| \cos(\alpha_k - \theta) = \sum_{k=1}^{N} |z_k| \cos(\alpha_k - \theta)+ \end{aligned}$$

が成り立ち，最右辺は θ に関して連続であるから最大値を達成する $\theta_0 \in [-\pi, \pi]$ が存在する．$S \coloneqq S(\theta_0)$ として

$$\left| \sum_{k \in S} z_k \right| \geq \sum_{k=1}^{N} |z_k| \cos(\alpha_k - \theta_0)+ \geq \sum_{k=1}^{N} |z_k| \cos(\alpha_k - \theta)+ \quad (\forall \theta \in [-\pi, \pi])$$

となり，積分して

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k \in S} z_k \right| &\geq \sum_{k=1}^{N} |z_k| \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} \cos(\alpha_k - \theta)+ \, d\theta \\ &= \sum_{k=1}^{N} |z_k| \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} \cos\theta+ \, d\theta = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N} |z_k| \end{aligned}$$

が得られる． ∎

定理 H.1.5 (複素測度の有界性).　可測空間 $(X, \mathscr{F})$ 上の複素測度 λ の総変動測度 $|\lambda|$ について次が成り立つ:

$$|\lambda|(X) < \infty.$$

証明.　$|\lambda|(X) = \infty$ と仮定して背理法により定理を導く．

第一段　或る $E \in \mathscr{F}$ に対し $|\lambda|(E) = \infty$ が成り立っているなら，

$$|\lambda(A)| > 1, \quad |\lambda(B)| > 1, \quad E = A + B$$

を満たす $A, B \in \mathscr{F}$ が存在することを示す．いま，$t \coloneqq 2\pi(1 + |\lambda(E)|)$ とおけば

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(E_i)| > t$$

を満たす E の分割 $(E_i)_{i=1}^{\infty}$ が存在する．従って或る $N \in \mathbf{N}$ に対し

$$\sum_{i=1}^{N} |\lambda(E_i)| > t$$

が成り立ち，補題 H.1.4 より

$$\left|\sum_{k\in S}\lambda(E_k)\right| \geq \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}|\lambda(E_k)| > \frac{t}{2\pi} > 1$$

を満たす $S \subset \{1,\cdots,N\}$ が取れる．ここで $A := \sum_{k\in S} E_k$，$B := E - A$ とおけば，$|\lambda(A)| > 1$ かつ

$$|\lambda(B)| = |\lambda(E) - \lambda(A)| \geq |\lambda(A)| - |\lambda(E)| > \frac{t}{2\pi} - |\lambda(E)| = 1$$

が成り立つ．また，

$$|\lambda|(E) = |\lambda|(A) + |\lambda|(B)$$

より $|\lambda|(A)$, $|\lambda|(B)$ の少なくとも一方は ∞ となる．

第二段　いま，$|\lambda|(X) = \infty$ と仮定すると，前段の結果より

$$|\lambda|(B_1) = \infty, \quad |\lambda(A_1)| > 1, \quad |\lambda(B_1)| > 1, \quad X = A_1 + B_1$$

を満たす $A_1, B_1 \in \mathscr{F}$ が存在する．同様に B_1 に対しても

$$|\lambda|(B_2) = \infty, \quad |\lambda(A_2)| > 1, \quad |\lambda(B_2)| > 1, \quad B_1 = A_2 + B_2$$

を満たす $A_2, B_2 \in \mathscr{F}$ が存在する．繰り返せば $|\lambda(A_j)| > 1$ $(j = 1,2,\cdots)$ を満たす互いに素な集合列 $(A_j)_{j=1}^{\infty}$ が構成され，このとき $\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda(A_j)| = \infty$ となる．一方で Riemann の級数定理より $\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda(A_j)| < \infty$ が成り立つから矛盾が生じ，$|\lambda|(X) < \infty$ が出る． ∎

定理 H.1.6 (総変動測度は有限分割で表現できる).　可測空間 $(X,\mathscr{F})$ 上の複素測度 λ に対して次が成り立つ:

$$|\lambda|(E) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n}|\lambda(A_i)| \;\middle|\; E = \sum_{i=1}^{n}A_i,\ \{A_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathscr{F},\ n = 1,2,\cdots\right\}, \quad (\forall E \in \mathscr{F}).$$

証明.　任意の $E \in \mathscr{F}$ で，$E = \sum_{i=1}^{n} A_i$ に対し $A_{i+1} = A_{i+2} = \cdots = \emptyset$ とすれば $E = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$ となるから

$$|\lambda|(E) \geq \sup\left\{\sum_{i=1}^{n}|\lambda(A_i)| \;\middle|\; E = \sum_{i=1}^{n}A_i,\ \{A_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathscr{F},\ n = 1,2,\cdots\right\} \tag{H.3}$$

が従う．一方で $|\lambda|(E) > 0$ の場合，$|\lambda|(E) > \alpha > 0$ を満たす α を任意に取れば

$$|\lambda|(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty}|\lambda(A_i)| > \alpha, \quad E = \sum_{i=1}^{\infty}A_i$$

を満たす $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}$ が存在し，このとき $B_n := \sum_{i=n}^{\infty} A_i$ とおけば

$$0 \leq \sum_{i=n}^{\infty}|\lambda(A_i)| - |\lambda(B_n)| \leq \sum_{i=n}^{\infty}|\lambda(A_i)| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

となるから，或る $n \geq 1$ で

$$|\lambda|(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(A_i)| \geq |\lambda(A_1)| + \cdots + |\lambda(A_{n-1})| + |\lambda\,(B_n)| > \alpha$$

が満たされる．$E = A_1 + \cdots + A_{n-1} + B_n$ であるから，(H.3) と併せて

$$|\lambda|(E) = \sup\left\{ \sum_{i=1}^{n} |\lambda(A_i)| \;\middle|\; E = \sum_{i=1}^{n} A_i,\ \{A_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathscr{F},\ n = 1, 2, \cdots \right\}$$

が得られる．$|\lambda|(E) = 0$ なら (H.3) で等号成立となる． ∎

定理 H.1.7 (総変動ノルム). 可測空間 $(X, \mathscr{F})$ 上の複素測度の全体を $CM(X, \mathscr{F})$ と書くとき，

$$(\alpha\lambda + \beta\mu)(E) \coloneqq \alpha\lambda(E) + \beta\mu(E), \quad (\lambda, \mu \in CM(X, \mathscr{F}),\ \alpha, \beta \in \mathbf{C},\ E \in \mathscr{F})$$

を線型演算として $CM(X, \mathscr{F})$ は線形空間となり，また

$$\|\,\lambda\,\|_{TV} \coloneqq |\lambda|(\mathrm{X}) \quad (\lambda \in CM(X, \mathscr{F}))$$

により $CM(X, \mathscr{F})$ にノルム $\|\cdot\|_{TV}$ が定まる．この $\|\cdot\|_{TV}$ を総変動ノルムという．

証明. $\|\cdot\|_{TV}$ がノルムであることを示す.

第一段 $\lambda = 0$ なら $\|\,\lambda\,\|_{TV} = |\lambda|(X) = 0$ となる．また $|\lambda(E)| \leq |\lambda|(E) \leq \|\,\lambda\,\|_{TV}$ より $\|\,\lambda\,\|_{TV} = 0$ なら $\lambda = 0$ が従う．

第二段 任意の $\lambda \in CM(X, \mathscr{F})$ と $c \in \mathbf{C}$ に対し

$$\|\,c\lambda\,\|_{TV} = \sup \sum_{i} |(c\lambda)(E_i)| = \sup \sum_{i} |c\lambda(E_i)| = |c| \sup \sum_{i} |\lambda(E_i)| = |c|\,\|\,\lambda\,\|_{TV}$$

が成り立ち同次性が得られる．

第三段 $\lambda, \mu \in CM(X, \mathscr{F})$ を任意に取る．このとき，X の任意の分割 $X = \sum_{i=1}^{\infty} E_i\ (E_i \in \mathscr{F})$ に対して

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(\lambda + \mu)(E_i)| = \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(E_i) + \mu(E_i)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(E_i)| + \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)| \leq \|\,\lambda\,\|_{TV} + \left\|\,\mu\,\right\|_{TV}$$

が成り立つから $\left\|\,\lambda + \mu\,\right\|_{TV} \leq \|\,\lambda\,\|_{TV} + \left\|\,\mu\,\right\|_{TV}$ が従う． ∎

可測空間 $(X, \mathscr{F})$ の上の完全加法的な $\mathbf{R}$-値関数を符号付き測度 (signed measure) という．

定義 H.1.8 (正変動と負変動・Jordan の分解).　$(X, \mathscr{F})$ を可測空間とする．$(X, \mathscr{F})$ 上の符号付き測度 μ に対し

$$\mu^+ := \frac{1}{2}(|\mu| + \mu), \quad \mu^- := \frac{1}{2}(|\mu| - \mu)$$

として正値有限測度 μ^+, μ^- を定める．μ^+ (μ^-) を μ の正 (負) 変動 (positive (negative) variation) と呼び，

$$\mu = \mu^+ - \mu^-$$

を符号付き測度 μ の Jordan 分解 (Jordan decomposition) という．同時に $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ も成り立つ．

定義 H.1.9 (絶対連続・特異).　$(X, \mathscr{F})$ を可測空間，μ を $\mathscr{F}$ 上の正値測度，$\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ を $\mathscr{F}$ 上の任意の測度とする．

- $\mu(E) = 0$ ならば $\lambda(E) = 0$ となるとき，λ は μ に関して絶対連続である (absolutely continuous) といい
$$\lambda \ll \mu$$
と書く．
- 或る $A \in \mathscr{F}$ が存在して
$$\lambda(E) = \lambda(A \cap E), \quad (\forall E \in \mathscr{F})$$
が成り立つとき，λ は A に集中している (concentrated on A) という．λ_1 が A_1 に，λ_2 が A_2 に集中し，かつ $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ であるとき，λ_1, λ_2 は互いに特異である (mutually singular) といい
$$\lambda_1 \perp \lambda_2$$
と書く．

定理 H.1.10 (絶対連続性の同値条件).　λ, μ をそれぞれ可測空間 $(X, \mathscr{F})$ 上の複素測度，正値測度とするとき，次は同値である:

(1)　$\lambda \ll \mu$,
(2)　$|\lambda| \ll \mu$
(3)　任意の $\epsilon > 0$ に対し或る $\delta > 0$ が存在して $\mu(E) < \delta$ なら $|\lambda|(E) < \epsilon$ となる．

証明．

第一段　(1) $\Longleftrightarrow$ (2) を示す．任意の $E \in \mathscr{F}$ に対し $|\lambda(E)| \leq |\lambda|(E)$ より (2) $\Longrightarrow$ (1) が従う．また $\lambda \ll \mu$ のとき，$E \in \mathscr{F}$ の任意の分割 $E = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$ に対し $\mu(E) = 0$ なら $\lambda(A_i) = 0$ $(\forall i \geq 1)$ となり (1) $\Longrightarrow$ (2) が従う．

第二段　(2) $\Longleftrightarrow$ (3) を示す．実際 (3) が満たされているとき，$\mu(E) = 0$ なら任意の $\delta > 0$ に対し $\mu(E) < \delta$ となるから $|\lambda|(E) < \epsilon$ $(\forall \epsilon > 0)$ となり $|\lambda|(E) = 0$ が出る．逆に (3) が満たされていないとき，或る $\epsilon > 0$ に対して

$$\mu(E_n) < \frac{1}{2^{n+1}}, \quad |\lambda|(E_n) \geq \epsilon, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

を満たす $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}$ が存在する．このとき

$$A_n \coloneqq \bigcup_{i=n}^{\infty} E_i, \quad A \coloneqq \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

とおけば

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

かつ

$$|\lambda|(A) = \lim_{n\to\infty} |\lambda|(A_n) \geq \lim_{n\to\infty} |\lambda|(E_n) \geq \epsilon$$

が成り立ち，対偶を取れば (2) $\Longrightarrow$ (3) が従う． ∎

補題 H.1.11. $(X, \mathscr{F}, \mu)$ を σ-有限測度空間とするとき，$0 < w < 1$ を満たす可積分関数 w が存在する．

証明. $\mu(X) = 0$ なら $w \equiv 1/2$ とすればよい．$\mu(X) > 0$ の場合，σ-有限の仮定より

$$0 < \mu(X_n) < \infty, \ (\forall n \geq 1), \quad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

を満たす $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}$ が存在する．ここで

$$w_n(x) \coloneqq \begin{cases} \dfrac{1}{2^n\left(1 + \mu(X_n)\right)}, & x \in X_n, \\ 0, & x \in X \backslash X_n, \end{cases} \qquad n = 1, 2, \cdots$$

に対して

$$w \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} w_n$$

と定めれば，任意の $x \in X$ は或る X_n に属するから

$$0 < w_n(x) \leq w(x)$$

が成り立ち，かつ

$$w(x) = w_1(x) + \sum_{n=2}^{\infty} w_n(x) \leq \frac{1}{2\left(1 + \mu(X_1)\right)} + \frac{1}{2} < 1, \quad (\forall x \in X)$$

が満たされる．また単調収束定理より

$$\int_X w \, d\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_X w_n \, d\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(X_n)}{2^n\left(1 + \mu(X_n)\right)} \leq 1$$

となり w の可積分性が出る． ∎

定理 H.1.12 (Lebesgue-Radon-Nikodym). $(X, \mathscr{F})$ を可測空間，λ を $(X, \mathscr{F})$ 上の複素測度，μ を $(X, \mathscr{F})$ 上の σ-有限正値測度 $(\mu(X) > 0)$ とするとき，以下が成立する:

Lebesgue 分解　λ は μ に関して絶対連続な λ_a 及び μ と互いに特異な λ_s に一意に分解される:

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s, \quad \lambda_a \ll \mu, \quad \lambda_s \perp \mu.$$

密度関数の存在　λ_a に対し或る $g \in L^1(\mu) = L^1(X, \mathscr{F}, \mu)$ が唯一つ存在して次を満たす:

$$\lambda_a(E) = \int_E g \, d\mu, \quad (\forall E \in \mathscr{F}).$$

証明.

第一段　Lebesgue の分解の一意性を示す．$\lambda_a' \ll \mu$ と $\lambda_s' \perp \mu$ により

$$\lambda_a + \lambda_s = \lambda_a' + \lambda_s'$$

が成り立つとき，

$$\Lambda := \lambda_a - \lambda_a' = \lambda_s' - \lambda_s, \quad \Lambda \ll \mu, \quad \Lambda \perp \mu$$

となり $\Lambda = 0$ が従い分解の一意性が出る．

第二段　密度関数の一意性を示す．実際，可積分関数 f に対して

$$\int_E f \, d\mu = 0, \quad (\forall E \in \mathscr{F})$$

が成り立つとき，定理 G.2.9 より $f = 0$, μ-a.e. が成り立つ．

第三段　Lebesgue の分解と密度関数の存在を示す．

定理 H.1.13 (Vitali-Hahn-Saks). $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ を可測空間 $(X, \mathscr{F})$ の複素測度の列とするとき，任意の $E \in \mathscr{F}$ で

$$\lambda(E) := \lim_{n \to \infty} \lambda_n(E)$$

が確定すれば λ もまた $(X, \mathscr{F})$ 上の複素測度となる．

証明.　$\lambda_n \equiv 0 \ (\forall n \geq 1)$ なら $\lambda \equiv 0$ で複素測度となるから，或る n と $E \in \mathscr{F}$ に対し $\lambda_n(E) \neq 0$ と仮定する．

第一段　$(X, \mathscr{F})$ 上の有限測度を

$$\mu := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(1 + \| \lambda_n \|_{TV})} |\lambda_n|$$

により定めるとき，任意の $\epsilon > 0$ に対して或る $\delta > 0$ が存在し

$$\mu(E) < \delta \quad \Rightarrow \quad |\lambda_n|(E) < \epsilon \ (\forall n \geq 1) \tag{H.4}$$

となることを示す．任意の $n \geq 1$ に対して $\lambda_n \ll \mu$ であるから Lebesgue-Radon-Nikodym の定理より

$$\lambda_n(E) = \int_E g_n \, d\mu, \quad (\forall E \in \mathscr{F})$$

を満たす $g_n \in L^1(\mu)$ が存在し，このとき

$$\left| \int_E g_n \, d\mu \right| \leq |\lambda_n|(E) \leq 2^n (1 + \| \lambda_n \|_{TV}) \mu(E), \quad (\forall E \in \mathscr{F})$$

が成立するから定理 G.2.9 より

$$\| g_n \|_{L^\infty(\mu)} \leq 2^n (1 + \| \lambda_n \|_{TV})$$

が従う．いま，任意の $E \in \mathscr{F}$ に対し $f_E := [\mathbb{1}_E]$ として

$$L := \left\{ f_E \mid \quad E \in \mathscr{F} \right\}$$

とおけば，$\mu(X) < \infty$ より $L \subset L^1(\mu)$ となり，また

$$d(f_E, f_{E'}) := \| f_E - f_{E'} \|_{L^1(\mu)}$$

で定める距離 d により L は完備距離空間となる．実際，定理 G.5.6 より L の任意の Cauchy 列 $\left(f_{E_n}\right)_{n=1}^\infty$ に対し極限 $f \in L^1(\mu)$ が存在し，或る部分列 $\left(\mathbb{1}_{E_{n_k}}\right)_{k=1}^\infty$ は或る μ-零集合 A を除いて各点収束するから

$$\varphi := \lim_{k \to \infty} \mathbb{1}_{E_{n_k}} \mathbb{1}_{X \setminus A}$$

に対し $E := \{\varphi = 1\}$ とおけば $f = [\mathbb{1}_E] \in L$ が満たされる．ここで

$$\Phi_n : L \ni f_E \longmapsto \int_X |g_n| f_E \, d\mu$$

とおけば，任意の $E \in \mathscr{F}$ に対し $|\lambda_n|(E) \leq \Phi_n(f_E)$ が満たされ，また Hölder の不等式より

$$\left| \Phi_n(f_E) - \Phi_n(f_{E'}) \right| \leq \int_X |g_n| |f_E - f_{E'}| \, d\mu \leq \| g_n \|_{L^\infty(\mu)} d(f_E, f_{E'}), \quad (\forall f_E, f_{E'} \in L)$$

がとなるから Φ_n は L 上の連続写像である．いま $\epsilon > 0$ を任意に取れば，$\eta := \epsilon/4$ に対して

$$F_n(\eta) := \left\{ f_E \in L \mid \quad \sup_{k \geq 1} \left| \Phi_n(f_E) - \Phi_{n+k}(f_E) \right| \leq \eta \right\} = \bigcap_{k \geq 1} \left\{ f_E \in L \mid \quad \left| \Phi_n(f_E) - \Phi_{n+k}(f_E) \right| \leq \eta \right\}$$

により定める $F_n(\delta)$ は閉集合であり，任意の $f_E \in L$ は

$$\begin{aligned}
\sup_{k \geq 1} \left| \Phi_n(f_E) - \Phi_{n+k}(f_E) \right| &\leq \left| \Phi_n(f_E) - \lambda(E) \right| + \sup_{k \geq 1} \left| \lambda(E) - \Phi_{n+k}(f_E) \right| \\
&= |\lambda_n(E) - \lambda(E)| + \sup_{k \geq 1} |\lambda(E) - \lambda_{n+k}(E)| \\
&\longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)
\end{aligned}$$

を満たすから

$$L = \bigcup_{n=1}^\infty F_n(\eta)$$

が成り立ち，Baire の範疇定理 (P. 309) より或る $F_{n_0}(\eta)$ は内点 f_{E_0} を持つ．つまり或る $\delta_0 > 0$ が存在して

$$d(f_{E_0}, f_E) < \delta_0 \quad \Rightarrow \quad \sup_{k\geq 1}\left|\Phi_n(f_E) - \Phi_{n+k}(f_E)\right| \leq \eta$$

となる．$\mu(E) < \delta_0$ ならば，

$$E_1 := E \cup E_0, \quad E_2 := E_0 \backslash (E \cap E_0)$$

とすれば $f_E = [\mathbb{1}_E] = [\mathbb{1}_{E_1} - \mathbb{1}_{E_2}] = [\mathbb{1}_{E_1}] - [\mathbb{1}_{E_2}] = f_{E_1} - f_{E_2}$ かつ

$$d(f_{E_0}, f_{E_1}) = \mu(E\backslash E_0) < \delta_0, \quad d(f_{E_0}, f_{E_2}) = \mu(E \cap E_0) < \delta_0$$

が満たされるから，$n > n_0$ なら

$$\begin{aligned}\left|\Phi_n(f_E)\right| &\leq \left|\Phi_{n_0}(f_E)\right| + \left|\Phi_n(f_E) - \Phi_{n_0}(f_E)\right| \\ &\leq \left|\Phi_{n_0}(f_E)\right| + \left|\Phi_n(f_{E_1}) - \Phi_{n_0}(f_{E_1})\right| + \left|\Phi_n(f_{E_2}) - \Phi_{n_0}(f_{E_2})\right| \\ &\leq \left|\Phi_{n_0}(f_E)\right| + 2\eta\end{aligned}$$

が従い，一方で $n = 1, 2, \cdots, n_0$ に対しては，定理 G.2.10 より或る $\delta_n > 0$ が存在して

$$\mu(E) < \delta_n \Longrightarrow \Phi_n(f_E) = \int_E |g_n|\, d\mu < \frac{\epsilon}{2}$$

が成立し，$\delta := \min\{\delta_0, \delta_1, \cdots, \delta_{n_0}\}$ として

$$\mu(E) < \delta_n \Longrightarrow |\lambda_n|(E) \leq \Phi_n(f_E) < \epsilon, \ (\forall n \geq 1)$$

が得られる．

第二段　λ の可算加法性を示す．任意の互いに素な $A, B \in \mathscr{F}$ を取れば

$$\lambda(A+B) = \lim_{n\to\infty}\lambda_n(A+B) = \lim_{n\to\infty}\lambda_n(A) + \lim_{n\to\infty}\lambda_n(B) = \lambda(A) + \lambda(B)$$

となるから λ は有限加法的であり，このとき任意の互いに素な列 $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}$ に対し

$$\lambda\left(\sum_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lambda\left(\sum_{i=1}^{N} E_i\right) + \lambda\left(\sum_{i=N+1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{N}\lambda(E_i) + \lambda\left(\sum_{i=N+1}^{\infty} E_i\right)$$

が任意の $N \geq 1$ について満たされるが，

$$\mu\left(\sum_{i=N+1}^{\infty} E_i\right) \longrightarrow 0 \quad (N \longrightarrow \infty)$$

と (H.4) より

$$\lambda\left(\sum_{i=N+1}^{\infty} E_i\right) \longrightarrow 0 \quad (N \longrightarrow \infty)$$

が従い

$$\lambda\left(\sum_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda(E_i)$$

が得られる．よって λ は複素測度である．■

定理 H.1.14 (L^p の共役空間). $1 \leq p < \infty$，q を p の共役指数とし，また $(X, \mathscr{F}, \mu)$ を σ-有限な正値測度空間とするとき，$g \in L^q(\mu)$ に対して定める次の写像

$$\Phi_g : L^p(\mu) \ni f \longmapsto \int_X f g \, d\mu \tag{H.5}$$

は有界線形作用素となる．また

$$\Phi : L^q(\mu) \ni g \longmapsto \Phi_g \in \left(L^p(\mu)\right)^*$$

で定める Φ は $\left(L^p(\mu)\right)^*$ から $L^q(\mu)$ への線型同型であり，次の意味で等長である:

$$\| g \|_{L^q(\mu)} = \| \Phi_g \|_{\left(L^p(\mu)\right)^*} . \tag{H.6}$$

$p = \infty$ の場合，$\mu(X) < \infty$ かつ $\varphi \in \left(L^\infty(\mu)\right)^*$ に対し $\mathscr{F} \ni A \longmapsto \varphi(\mathbb{1}_A)$ が可算加法的ならば，φ に対し或る $g \in L^1(\mu)$ が唯一つ存在して $\varphi = \Phi_g$ と (H.6) を満たす．

証明.

第一段　Φ_g が (H.5) で与えられていれば，Hölder の不等式より

$$\left|\Phi_g(f)\right| \leq \| g \|_{L^q(\mu)} \| f \|_{L^p(\mu)}$$

が成り立つから

$$\| \Phi_g \|_{\left(L^p(\mu)\right)^*} \leq \| g \|_{L^q(\mu)} \tag{H.7}$$

が従う．よって $\Phi_g \in \left(L^p(\mu)\right)^*$ となる．

第二段　$\varphi \in \left(L^p(\mu)\right)^*$ に対して $\Phi(g) = \varphi$ を満たす $g \in L^q(\mu)$ が存在するとき，g が φ に対して一意に決まることを示す．σ-有限の仮定より

$$\mu(X_n) < \infty, \ (\forall n \geq 1); \quad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \tag{H.8}$$

を満たす $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}$ が存在する．いま，$g, g' \in L^q(\mu)$ に対して

$$\int_X f g \, d\mu = \int_X f g' \, d\mu, \quad (\forall f \in L^p(\mu))$$

が成り立っているとすれば，任意の $E \in \mathscr{F}$ に対して $\mathbb{1}_{E \cap X_n} \in L^p(\mu)$ であるから

$$\int_{E \cap X_n} g - g' \, d\mu = 0, \quad (\forall n \geq 1)$$

となり，Lebesgue の収束定理より

$$\int_E g - g' \, d\mu = 0$$

が従い $L^q(\mu)$ で $g = g'$ が成立する．

第三段　$1 \leq p < \infty$ の場合，$\mu(X) < \infty$ なら任意の $\varphi \in \left(L^p(\mu)\right)^*$ に対して $\Phi(g) = \varphi$ を満たす $g \in L^q(\mu)$ が存在することを示す．

$$\lambda(E) := \varphi(\mathbb{1}_E) \tag{H.9}$$

により λ を定めれば

$$\lambda(A+B) = \varphi(\mathbb{1}_{A+B}) = \varphi(\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B) = \varphi(\mathbb{1}_A) + \varphi(\mathbb{1}_B) = \lambda(A) + \lambda(B)$$

となり λ の加法性が出る．また任意の互いに素な $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathscr{F}$ に対して

$$A_k := \sum_{n=1}^{k} E_n, \quad A := \sum_{n=1}^{\infty} E_n$$

とおけば

$$\begin{aligned} \left| \lambda(A) - \sum_{n=1}^{k} \lambda(E_n) \right| &= |\lambda(A) - \lambda(A_k)| = \left| \varphi(\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{A_k}) \right| \\ &\leq \left\| \varphi \right\|_{(L^p(\mu))^*} \left\| \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{A_k} \right\|_{L^p(\mu)} = \left\| \varphi \right\|_{(L^p(\mu))^*} \mu(A - A_k)^{1/p} \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

が成り立つから λ は複素測度である．また

$$|\lambda(E)| \leq \left\| \varphi \right\|_{(L^p(\mu))^*} \mu(E)^{1/p}$$

より $\lambda \ll \mu$ となるから，Lebesgue-Radon-Nikodym の定理より

$$\varphi(\mathbb{1}_E) = \lambda(E) = \int_X \mathbb{1}_E g \, d\mu, \quad (\forall E \in \mathscr{F}) \tag{H.10}$$

を満たす $g \in L^1(\mu)$ が存在する．φ の線型性より任意の単関数の同値類 f に対して

$$\varphi(f) = \int_X f g \, d\mu \tag{H.11}$$

が成立し，特に $f \in L^\infty(\mu)$ に対しては

$$B := \left\{ x \in X \mid \quad |f(x)| > \left\| f \right\|_{L^\infty(\mu)} \right\}$$

とおけば $\mu(B) = 0$ となり，有界可測関数 $f \mathbb{1}_{X \setminus B}$ を一様に近似する単関数列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ が存在して

$$\begin{aligned} \left| \varphi(f) - \int_X f g \, d\mu \right| &\leq \left| \varphi(f) - \varphi(f_n) \right| + \left| \int_X f_n g \, d\mu - \int_X f g \, d\mu \right| \\ &\leq \left\| \varphi \right\|_{(L^p(\mu))^*} \left\| f - f_n \right\|_{L^p(\mu)} + \int_X |f_n - f||g| \, d\mu \\ &\longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

となるから (H.11) が成立する．

第四段　$p = \infty$，$\mu(X) < \infty$ の場合，$\varphi \in \left(L^p(\mu)\right)^*$ に対して $\mathscr{F} \ni A \longmapsto \varphi(\mathbb{1}_A)$ が可算加法的ならば (H.9) で定める λ は複素測度となり，前段と同じ理由で (H.10) を満たす $g \in L^1(\mu)$ が存在し

$$\varphi(f) = \int_X f g \, d\mu, \quad (\forall f \in L^\infty(\mu))$$

が成立する．すなわち $\varphi = \Phi_g$ であり，このとき $f := \mathbb{1}_{\{g \neq 0\}} \overline{g}/g \in L^\infty(\mu)$ に対して

$$\| g \|_{L^1(\mu)} = \int_X fg \, d\mu = \varphi(f) \leq \| \varphi \|_{(L^\infty(\mu))^*}$$

となるから，(H.7) と併せて (H.6) が満たされる．以降は $p < \infty$ とする．

第五段 $g \in L^q(\mu)$ であることを示す．$p = 1$ の場合，任意の $E \in \mathscr{F}$ に対して $f = \mathbb{1}_E$ とすれば，(H.11) より

$$\left| \int_E g \, d\mu \right| = \left| \varphi(\mathbb{1}_E) \right| \leq \| \varphi \|_{(L^p(\mu))^*} \mu(E)$$

が成立し

$$\| g \|_{L^q(\mu)} \leq \| \varphi \|_{(L^p(\mu))^*} \tag{H.12}$$

が従う．$1 < p < \infty$ の場合は $\alpha := \mathbb{1}_{\{g \neq 0\}} \overline{g}/g$ と

$$E_n := \left\{ x \in X \mid \quad |g(x)| \leq n \right\}, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

に対して $f := \mathbb{1}_{E_n} |g|^{q-1} \alpha$ とおけば，

$$fg = \mathbb{1}_{E_n} |g|^q = |f|^p$$

が成り立ち $|f|^p \in L^\infty(\mu)$ となるから (H.11) より

$$\int_X \mathbb{1}_{E_n} |g|^q \, d\mu = \int_X fg \, d\mu = \varphi(f) \leq \| \varphi \|_{(L^p(\mu))^*} \| f \|_{L^p(\mu)} = \| \varphi \|_{(L^p(\mu))^*} \left\{ \int_X \mathbb{1}_{E_n} |g|^q \, d\mu \right\}^{1/p}$$

が従い

$$\left\{ \int_X \mathbb{1}_{E_n} |g|^q \, d\mu \right\}^{1/q} \leq \| \varphi \|_{(L^p(\mu))^*}$$

が得られ，単調収束定理より

$$\| g \|_{L^q(\mu)} \leq \| \varphi \|_{(L^p(\mu))^*} \tag{H.13}$$

が出る．

第六段 任意の $f \in L^p(\mu)$ に対して，単関数近似列 $(f_n)_{n=1}^\infty$ は (H.11) を満たすから，Hölder の不等式と Lebesgue の収束定理より

$$\begin{aligned} \left| \varphi(f) - \int_X fg \, d\mu \right| &\leq \left| \varphi(f) - \varphi(f_n) \right| + \left| \int_X f_n g \, d\mu - \int_X fg \, d\mu \right| \\ &\leq \| \varphi \|_{(L^p(\mu))^*} \| f - f_n \|_{L^p(\mu)} + \| f - f_n \|_{L^p(\mu)} \| g \|_{L^q(\mu)} \\ &\longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

となり

$$\varphi = \Phi(g)$$

が成り立つ．また，このとき (H.7) と (H.12) 或は (H.13) より

$$\| g \|_{L^q(\mu)} = \| \varphi \|_{(L^p(\mu))^*}$$

が満たされる．

第七段　$\mu(X) = \infty$ の場合，補題 H.1.11 の関数 w を用いて

$$\tilde{\mu}(E) := \int_E w \, d\mu, \quad (\forall E \in \mathscr{F})$$

により有限測度 $\tilde{\mu}$ を定める．このとき任意の $f \in L^p(\mu)$ に対して

$$F := w^{-1/p} f$$

とおけば

$$\int_X |F|^p \, d\tilde{\mu} = \int_X |F|^p w \, d\mu = \int_X |f|^p \, d\mu \tag{H.14}$$

が成立し，

$$L^p \ni f \longmapsto w^{-1/p} f \in L^p(\tilde{\mu})$$

は等長な線型同型となる．ここで任意の $\varphi \in \left(L^p(\mu)\right)^*$ に対して

$$\Psi(F) := \varphi\left(w^{1/p} F\right), \quad (\forall F \in L^p(\tilde{\mu}))$$

で線形作用素 Ψ を定めれば

$$|\Psi(F)| = \left|\varphi\left(w^{1/p} F\right)\right| \leq \|\varphi\|_{(L^p(\mu))^*} \left\|w^{1/p} F\right\|_{L^p(\mu)} = \|\varphi\|_{(L^p(\mu))^*} \|F\|_{L^p(\tilde{\mu})}$$

より $\Psi \in \left(L^p(\tilde{\mu})\right)^*$ が満たされ，かつ任意の $f \in L^p(\mu)$ に対して

$$\left|\varphi(f)\right| = \left|\Psi\left(w^{-1/p} f\right)\right| \leq \|\Psi\|_{(L^p(\mu))^*} \left\|w^{-1/p} f\right\|_{L^p(\tilde{\mu})} = \|\Psi\|_{(L^p(\tilde{\mu}))^*} \left\|f\right\|_{L^p(\mu)}$$

も成り立ち

$$\|\varphi\|_{(L^p(\mu))^*} = \|\Psi\|_{(L^p(\tilde{\mu}))^*}$$

が得られる．前段までの結果より Ψ に対し或る $G \in L^q(\tilde{\mu})$ が存在して

$$\Psi(F) = \int_X FG \, d\tilde{\mu}$$

が成立するから，任意の $f \in L^p(\mu)$ に対して

$$\varphi(f) = \Psi\left(w^{-1/p} f\right) = \int_X w^{-1/p} f G w \, d\mu = \begin{cases} \displaystyle\int_X fG \, d\mu, & (p = 1), \\ \displaystyle\int_X f w^{1/q} G \, d\mu, & (1 < p < \infty) \end{cases}$$

が従い，

$$g := \begin{cases} G, & (p = 1), \\ w^{1/q} G, & (1 < p < \infty) \end{cases}$$

とおけば (H.14) より $g \in L^q(\mu)$ となり，$\varphi = \Phi(g)$ かつ

$$\|\varphi\|_{(L^p(\mu))^*} = \|\Psi\|_{(L^p(\tilde{\mu}))^*} = \|G\|_{L^q(\tilde{\mu})} = \|g\|_{L^q(\mu)}$$

が満たされる． ∎

H.1.2　極分解

定理 H.1.15 (複素測度の極分解).　可測空間 $(X,\mathscr{F})$ 上の任意の複素測度 μ に対し，次の意味での極分解

$$\mu(E) = \int_E e^{i\theta}\, d|\mu|, \quad (\forall E \in \mathscr{F})$$

を満たす $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測関数 θ が存在する．$\lambda \not\equiv 0$ なら $e^{i\theta}$ は $L^1(|\mu|)$ の元として唯一つに決まる．

証明.　$\mu \equiv 0$ なら $|\mu| \equiv 0$ より $\theta \equiv \pi$ でよい．$\mu \not\equiv 0$ の場合，Lebesgue-Radon-Nikodym の定理より

$$\mu(E) = \int_E h\, d|\mu|, \quad (\forall E \in \mathscr{F})$$

を満たす $[h] \in L^1(|\mu|)$ が唯一つ存在する．このとき $|\mu|(E) > 0$ なら

$$\frac{1}{|\mu|(E)}\left|\int_E h\, d|\mu|\right| = \frac{|\mu(E)|}{|\mu|(E)} \leq 1$$

となるから，定理 G.2.9 より $|\mu|$-a.e. に $|h| \leq 1$ となる．また

$$E_r \coloneqq \{|h| \leq r\}$$

とおき $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}$ を E_r の任意の分割とすれば，

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(A_n)| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_{A_n} h\, d|\mu|\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n} |h|\, d|\mu| \leq r\sum_{n=1}^{\infty}|\mu|(A_n) = r|\mu|(E_r)$$

が成り立つから $r < 1$ なら $|\mu|(E_r) = 0$ となり

$$|\mu|\,(|h| < 1) = |\mu|\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_{1-1/n}\right) = 0$$

が従う．よって $|\mu|$-a.e. に $|h| = 1$ となる．$\tilde{h} \coloneqq \mathbb{1}_{\{|h|=1\}}h + \mathbb{1}_{\{|h|\neq 1\}}$ とおいて

$$\theta(x) \coloneqq \begin{cases} \operatorname{Arg}\tilde{h}(x), & (\tilde{h}(x) \neq -1), \\ \pi, & (\tilde{h}(x) = -1) \end{cases}$$

と定めれば $[h] = [e^{i\theta}]$ が成立する．∎

定義 H.1.16 (複素測度に関する積分).　$(X,\mathscr{F})$ を可測空間，μ を $(X,\mathscr{F})$ 上の複素測度，f を $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測関数とする．$f$ が $|\mu|$-可積分であるとき，極分解 $d\mu = e^{i\theta}\, d|\mu|$ を用いて

$$\int_E f\, d\mu \coloneqq \int_E f e^{i\theta}\, d|\mu|, \quad (\forall E \in \mathscr{F})$$

により f の μ に関する積分を定める．

$\mu \not\equiv 0$ なら極分解は定理 H.1.15 の意味で一意であるから μ に関する積分は well-defined である．$\mu \equiv 0$ なら $|\mu| \equiv 0$ であるから任意の可測写像は $|\mu|$ について可積分となり，μ に関する積分値は 0 で確定する (well-defined). また定義より

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f e^{i\theta} \, d|\mu| = \int_X \mathbb{1}_E f e^{i\theta} \, d|\mu| = \int_X \mathbb{1}_E f \, d\mu, \quad (\forall E \in \mathscr{F})$$

が満たされる．

定理 H.1.17 (総変動測度の積分表現). $(X, \mathscr{F}, \mu)$ を正値測度空間，f を $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測な μ-可積分関数とするとき，

$$\lambda(E) := \int_E f \, d\mu, \quad (\forall E \in \mathscr{F})$$

で複素測度 λ を定めれば次が成り立つ:

$$|\lambda|(E) = \int_E |f| \, d\mu, \quad (\forall E \in \mathscr{F}).$$

定理 H.1.18 (積分の測度に関する線型性). $(X, \mathscr{F})$ を可測空間，μ, ν をこの上の複素測度とする．$f : X \to \mathbf{C}$ が $|\mu|$ と $|\nu|$ について可積分であるなら，$\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ に対し $|\alpha\mu + \beta\nu|$ についても可積分であり，更に次が成り立つ:

$$\int_X f \, d(\alpha\mu + \beta\nu) = \alpha \int_X f \, d\mu + \beta \int_X f \, d\nu.$$

証明． **第一段**　f が可測単関数の場合について証明する．$a_i \in \mathbf{C}$, $A_i \in \mathcal{M}$ $(i = 1, \cdots, n, \sum_{i=1}^n A_i = X)$ を用いて

$$f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i}$$

と表されている場合，

$$\begin{aligned}\int_X f(x) \, (\alpha\mu + \beta\nu)(dx) &= \sum_{i=1}^n a_i (\alpha\mu + \beta\nu)(A_i) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i) + \beta \sum_{i=1}^n a_i \nu(A_i) = \alpha \int_X f(x) \, \mu(dx) + \beta \int_X f(x) \, \nu(dx)\end{aligned}$$

が成り立つ．

第二段　f が一般の可測関数の場合について証明する．任意の $A \in \mathcal{M}$ に対して

$$\left|(\alpha\mu + \beta\nu)(A)\right| \leq |\alpha||\mu(A)| + |\beta||\nu(A)| \leq |\alpha||\mu|(A) + |\beta||\nu|(A)$$

が成り立つから，左辺で A を任意に分割しても右辺との大小関係は変わらず

$$|\alpha\mu + \beta\nu|(A) \leq |\alpha||\mu|(A) + |\beta||\nu|(A)$$

となる．従って f が $|\mu|$ と $|\nu|$ について可積分であるなら

$$\int_X |f(x)| \, |\alpha\mu + \beta\nu|(dx) \leq |\alpha| \int_X |f(x)| \, |\mu|(dx) + |\beta| \int_X |f(x)| \, |\nu|(dx) < \infty$$

が成り立ち前半の主張を得る．f の単関数近似列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ を取れば，前段の結果と積分の定義より

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_X f(x)\,(\alpha\mu+\beta\nu)(dx) - \alpha\int_X f(x)\,\mu(dx) - \beta\int_X f(x)\,\nu(dx)\right| \\
&\quad\leq \left|\int_X f(x)\,(\alpha\mu+\beta\nu)(dx) - \int_X f_n(x)\,(\alpha\mu+\beta\nu)(dx)\right| \\
&\qquad + |\alpha|\left|\int_X f(x)\,\mu(dx) - \int_X f_n(x)\,\mu(dx)\right| + |\beta|\left|\int_X f(x)\,\nu(dx) - \int_X f_n(x)\,\nu(dx)\right| \\
&\quad\longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)
\end{aligned}
$$

が成り立ち後半の主張が従う． ∎

定理 H.1.19 (積分の複素共役). $(X,\mathscr{F})$ を可測空間，μ を複素測度，$f : X \to \mathbf{C}$ を $|\mu|$ について可積分な $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測関数とするとき次が成り立つ:

$$
\int_X f\,d\overline{\mu} = \overline{\int_X \overline{f}\,d\mu}.
$$

証明． $u = \mathrm{Re}\,f$, $v = \mathrm{Im}\,f$, $\gamma = \mathrm{Re}\,\mu$, $\theta = \mathrm{Im}\,\mu$ とすれば，定理 H.1.18 より

$$
\begin{aligned}
\int_X f\,d\overline{\mu} &= \int_X f\,d\gamma - i\int_X f\,d\theta \\
&= \int_X u\,d\gamma + i\int_X v\,d\gamma - i\int_X u\,d\theta + \int_X v\,d\theta \\
&= \overline{\int_X u\,d\gamma - i\int_X v\,d\gamma + i\int_X u\,d\theta + \int_X v\,d\theta} \\
&= \overline{\int_X \overline{f}\,d\gamma + i\int_X \overline{f}\,d\theta} \\
&= \overline{\int_X \overline{f}\,d\mu}
\end{aligned}
$$

が成立する． ∎

定理 H.1.20 (Riesz の表現定理 (複素測度)).

H.1.3　Jordan 分解

いま a と b を

$$
a < b
$$

を満たす実数とし，f を $[a,b]$ 上の実有界変動関数とし，μ を f の Stieltjes 測度とし，$|\mu|$ を μ の総変動測度とし，

$$\mu^+ \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{1}{2}\left(|\mu| + \mu\right)$$

及び

$$\mu^- \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{1}{2}\left(|\mu| - \mu\right)$$

と定める．この μ^+ と μ^- を μ の **Jordan 分解 (Jordan decomposition)** と呼ぶ．

また v を f の総変動関数とし，

$$v^+ \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{1}{2}\left(v + f - f(a)\right)$$

及び

$$v^- \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{1}{2}\left(v - f - f(a)\right)$$

と定め，μ_v, μ_v^+, μ_v^- をそれぞれ v, v^+, v^- の Stieltjes 測度とする．この v^+ と v^- を f の **Jordan 分解 (Jordan decomposition)** と呼ぶ．このとき

$$\begin{aligned} |\mu| &= \mu_v \wedge \\ \mu^+ &= \mu_v^+ \wedge \\ \mu^- &= \mu_v^- \end{aligned}$$

が成立する．つまり総変動関数の **Stieltjes** 測度は測度の総変動に一致し，関数の **Jordan** 分解の **Stieltjes** 測度は測度を **Jordan** 分解したものに一致する．

s と t を

$$s < t$$

を満たす $[a,b]$ の要素とすると

$$\begin{aligned} \mu_v^+(]s,t]) - \mu_v^-(]s,t]) &= [v^+(t) - v^+(s)] - [v^-(t) - v^-(s)] \\ &= [v^+(t) - v^-(t)] - [v^+(s) - v^-(s)] \\ &= f(t) - f(s) \\ &= \mu(]s,t]) \end{aligned}$$

が成り立つので，一致の定理より

$$\mu = \mu_v^+ - \mu_v^-$$

が成り立つ．よって，

$$\mu_v^+ = \mu^+$$

が成り立つことを示せば，

$$\mu_v^- = \mu_v^+ - \mu = \mu^+ - \mu = \mu^-$$

及び

$$\mu_v = \mu_v^+ + \mu_v^- = \mu^+ + \mu^- = |\mu|$$

が従う．

いま s と t を

$$s < t$$

を満たす $[a,b]$ の要素とする．まず Jordan 分解の最小性より

$$\mu^+(]s,t]) \leq \mu_v^+(]s,t])$$

が成立する．他方で

$$\begin{aligned}
\mu_v^+(]s,t]) &= v^+(t) - v^+(s) \\
&= \frac{1}{2} \cdot [v(t) - v(s) + f(t) - f(s)] \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left[\sup \sum \left|f(t_k) - f(t_{k-1})\right| + f(t) - f(s)\right] \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sup \left[\sum \left|f(t_k) - f(t_{k-1})\right| + f(t) - f(s)\right] \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sup \left[\sum \left|f(t_k) - f(t_{k-1})\right| + \sum \left(f(t_k) - f(t_{k-1})\right)\right] \\
&= \sup \sum \max \left\{f(t_k) - f(t_{k-1}), 0\right\} \\
&\leq \sup_{E \in \mathscr{B}(]s,t])} \mu(E) \\
&\leq \sup_{E \in \mathscr{B}(]s,t])} \mu^+(E) \\
&\leq \mu^+(]s,t])
\end{aligned}$$

が成り立つので，以上で

$$\mu_v^+(]s,t]) = \mu^+(]s,t])$$

が得られた．測度の一致の定理より

$$\mu_v^+ = \mu^+$$

が成り立つ．

H.2　複素線積分

H.2.1　複素 Stiletjes 測度

I を $\mathbf{R}$ の区間とし，f を I 上の複素数値右連続有界変動関数とする．このとき f の実部虚部は共に右連続有界変動となり，それぞれ I 上の右連続単調非減少関数に分解される．分解して得られた関数に対して Stieltjes 測度を構成し，それらを合算すれば，$\mathscr{B}(I)$ 上の複素測度が得られる．

H.2.2　複素線積分

$\mathbf{C}$ 上で定義された関数を積分するには，$\mathbf{C}$ を台とする可測空間に測度を導入するか，何らかの方法で $\mathbf{R}$ 上の Lebesgue 積分に持ち込むかすれば良い．複素積分は後者の方法を採る．(後者のやり方から無理やり前者流に積分を定義するこ

ともできるが，それによって見通しが良くなるかというと否である．) 直感的なイメージとしては “複素平面上に現れた線に沿って” 関数を積分するのが複素積分であり，その “線” とは実区間上の写像の像である．

定義 H.2.1 (路). **R** の有界閉区間上で定義された連続で有界変動な **C** 値関数を**路 (contour)** と呼ぶ.

いま γ を路とし，α と β を

$$[\alpha, \beta] = \mathrm{dom}(\gamma)$$

を満たす実数とし，γ で作る $\mathscr{B}([\alpha, \beta])$ 上の複素 Stieltjes 測度を

$$\mu_\gamma$$

と書く．与えられた路に対する Stieltjes 測度の記法は以後本節で共通する．f を

$$\gamma^* \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{ran}(\gamma)$$

上の **C** 値連続写像とするとき，

$$\int_{[\alpha,\beta]} f \circ \gamma \, d\mu_\gamma$$

を f の γ に関する**複素線積分 (complex contour integral)** と呼び，便宜上

$$\int_\gamma f(z) \, dz$$

や (文字は z に限らず w でも ζ でも使い得る)

$$\int_\gamma f$$

とも書く．特に γ が $[\alpha, \beta]$ 上で絶対連続なら，λ を一次元 Lebesgue 測度とすれば，微分積分学の基本定理より

$$\int_{[\alpha,\beta]} f \circ \gamma \, d\mu_\gamma = \int_{[\alpha,\beta]} f \circ \gamma \cdot \gamma' \, d\lambda$$

が成立する．

γ は $[\alpha, \beta]$ 上の写像であるが，γ に関する線積分はパラメータ区間を変項することが出来る．

線積分のパラメータ区間変項

σ と τ を $\sigma < \tau$ を満たす実数とし，φ を

$$[\sigma, \tau] \ni t \longmapsto \alpha + \frac{t - \sigma}{\tau - \sigma} \cdot (\beta - \alpha)$$

なる $[\sigma, \tau]$ 上の写像とする．このとき

$$\eta \stackrel{\mathrm{def}}{=} \gamma \circ \varphi$$

で定める η は，$[\sigma, \tau]$ 上の連続な有界変動関数であって，

$$\mu_\gamma(E) = \mu_\eta \left(\varphi^{-1} * E\right)$$

が $\mathscr{B}([\alpha, \beta])$ の任意の要素 E で成立する．

これが示されれば，γ^* 上の任意の $\mathbf{C}$ 値連続写像 f に対して

$$\int_{\gamma} f = \int_{[\alpha,\beta]} f \circ \gamma \, d\mu_{\gamma} = \int_{[\sigma,\tau]} f \circ \eta \, d\mu_{\eta} = \int_{\eta} f$$

が成立する．実際，

$$\mathscr{B}(\gamma^*) \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{ E \cap \gamma^* \mid \quad E \in \mathscr{B}(\mathrm{C}) \right\}$$

とおけば，γ^* は $\mathbf{C}$ のコンパクト部分集合すなわち閉集合であるから

$$\mathscr{B}(\gamma^*) \subset \mathscr{B}(\mathrm{C})$$

が成り立つ．よって E を $\mathscr{B}(\gamma^*)$ の要素とすれば

$$\mu_{\gamma} \left(\gamma^{-1} * E \right) = \mu_{\eta} \left(\varphi^{-1} * (\gamma^{-1} * E) \right) = \mu_{\eta} \left(\eta^{-1} * E \right)$$

が成立する．ゆえに f が $\mathscr{B}(\gamma^*)/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測単関数である場合は

$$\int_{[\alpha,\beta]} f \circ \gamma \, d\mu_{\gamma} = \int_{[\sigma,\tau]} f \circ \eta \, d\mu_{\eta}$$

が成り立つから，Lebesgue の収束定理より f が連続である場合も

$$\int_{[\alpha,\beta]} f \circ \gamma \, d\mu_{\gamma} = \int_{[\sigma,\tau]} f \circ \eta \, d\mu_{\eta}$$

が成り立つ．特に**複素線積分は全て** $[0,1]$ **上の路に関する積分に書き直すことが出来る．**

略証.

第一段　v を γ の $[\alpha,\beta]$ 上の総変動とする．いま t を $[\sigma,\tau]$ の分割とする．つまり 1 以上の自然数 n で

$$t : n+1 \longrightarrow [\sigma,\tau]$$

を満たすものが取れて，

$$\begin{cases} t_0 = \sigma \\ t_j < t_{j+1} & \text{if } j \in n \wedge 1 \leq j \\ t_n = \tau, \end{cases}$$

つまり

$$\sigma = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \tau$$

が成り立っている．このとき

$$\varphi \circ t$$

は $[\alpha,\beta]$ の分割であって

$$\sum_{j=1}^{n} \left| \eta(t_j) - \eta(t_{j-1}) \right| = \sum_{j=1}^{n} \left| \gamma(\varphi(t_j)) - \gamma(\varphi(t_{j-1})) \right| \leq v$$

が成立する．これは $[\sigma,\tau]$ の分割の取り方に依らないから η は有界変動である．η の連続性は γ と φ の連続性から従う．

第二段　s と t を

$$s < t$$

を満たす $[\alpha, \beta]$ の要素とするとき，

$$\begin{aligned}\mu_\eta \left(\varphi^{-1} *]s, t]\right) &= \mu_\eta \left(\left]\varphi^{-1}(s), \varphi^{-1}(t)\right]\right) \\ &= \eta(\varphi^{-1}(t)) - \eta(\varphi^{-1}(s)) \\ &= \gamma(t) - \gamma(s) \\ &= \mu_\gamma(]s, t])\end{aligned}$$

が成立する．μ_γ も μ_η も一点の測度は 0 であるから，測度の一致の定理より $\mathscr{B}([\alpha, \beta])$ の任意の要素 E で

$$\mu_\gamma(E) = \mu_\eta \left(\varphi^{-1} * E\right)$$

が成立する． ∎

次に '逆向き' の路に関する積分を考える．

定義 H.2.2 (逆路).　γ を路とし，α と β を

$$[\alpha, \beta] = \mathrm{dom}(\gamma)$$

を満たす実数とする．このとき

$$[\alpha, \beta] \ni t \longmapsto \gamma(\alpha + \beta - t)$$

なる関係で定める $[\alpha, \beta]$ 上の写像を γ の**逆路 (inverse contour)** と呼ぶ．

先ほどから扱っている γ に対して，ρ をその逆路とする．このとき ρ は有界変動かつ連続である．実際，ψ を

$$[\alpha, \beta] \ni t \longmapsto \alpha + \beta - t$$

なる写像とすれば

$$\rho = \gamma \circ \psi$$

が成り立つので，ρ の連続性は γ と ψ の連続性から従う．また t を $[\sigma, \tau]$ の分割とすれば，1 以上の自然数 n で

$$t : n + 1 \longrightarrow [\sigma, \tau]$$

かつ

$$\begin{cases} t_0 = \sigma \\ t_j < t_{j+1} \quad \text{if } j \in n \land 1 \leq j \\ t_n = \tau, \end{cases}$$

を満たすものが取れるが，このとき s を

$$n + 1 \ni j \longmapsto \psi(t_{n-j})$$

なる写像とすれば s もまた $[\alpha,\beta]$ の分割であって

$$\sum_{j=1}^{n}\left|\rho(t_j)-\rho(t_{j-1})\right| = \sum_{j=1}^{n}\left|\gamma(s_{n-j})-\gamma(s_{n-j+1})\right| = \sum_{j=1}^{n}\left|\gamma(s_j)-\gamma(s_{j-1})\right|$$

が成り立つ．右辺は γ の総変動で抑えられるので ρ の総変動も有限値である．以上より ρ で複素 Stieltjes 測度を構成できる．

定理 H.2.3 (逆路に関する積分は正負が逆転する). γ を路とし，ρ をその逆路とする．このとき，f を $\mathrm{ran}(\gamma)$ 上の $\mathbf{C}$ 値連続関数とすれば

$$\int_{\gamma} f = -\int_{\rho} f$$

が成立する．

略証． α と β を

$$[\alpha,\beta] = \mathrm{dom}(\gamma)$$

を満たす実数とする．また ψ を

$$[\alpha,\beta] \ni t \longmapsto \alpha+\beta-t$$

なる写像とする．まず $\mathscr{B}([\alpha,\beta])$ の任意の要素 E で

$$\mu_{\gamma}(E) = -\mu_{\rho}\left(\psi^{-1}*E\right)$$

が成り立つことを示す．s と t を

$$s < t$$

を満たす $[\alpha,\beta]$ の要素とすれば，

$$\begin{aligned}
\mu_{\rho}\left(\psi^{-1}*]s,t[\right) &= \mu_{\rho}\left(]\psi^{-1}(t),\psi^{-1}(s)[\right) \\
&= \rho(\psi^{-1}(s)) - \rho(\psi^{-1}(t)) \\
&= \gamma(s)-\gamma(t) \\
&= -\mu_{\gamma}(]s,t[)
\end{aligned}$$

が成立する．μ_{γ} も μ_{ρ} も一点の測度は 0 であるから，測度の一致の定理より $\mathscr{B}([\alpha,\beta])$ の任意の要素 E で

$$\mu_{\gamma}(E) = -\mu_{\rho}\left(\psi^{-1}*E\right)$$

が成立する．次に f を $\mathrm{ran}(\gamma)$ 上の $\mathbf{C}$ 値連続関数として

$$\int_{\rho} f = -\int_{\gamma} f$$

であることを示す．ここで

$$\mathscr{B}(\gamma^{*}) \overset{\mathrm{def}}{=} \left\{\, E\cap\mathrm{ran}(\gamma) \mid \quad E \in \mathscr{B}(\mathrm{C}) \,\right\}$$

とおくと，$\mathscr{B}(\gamma^*)$ の任意の要素 E に対しては

$$\mu_\gamma\left(\gamma^{-1} * E\right) = -\mu_\rho\left(\psi^{-1} * \left(\gamma^{-1} * E\right)\right) = -\mu_\rho\left(\rho^{-1} * E\right)$$

が成り立つので，f が $\mathscr{B}(\gamma^*)/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測単関数である場合は

$$\int_{[\alpha,\beta]} f \circ \gamma \, d\mu_\gamma = -\int_{[\alpha,\beta]} f \circ \rho \, d\mu_\rho$$

が成り立つ．Lebesgue の収束定理より f が連続である場合も

$$\int_{[\alpha,\beta]} f \circ \gamma \, d\mu_\gamma = -\int_{[\alpha,\beta]} f \circ \rho \, d\mu_\rho$$

が成り立つ． ∎

H.2.3　級数展開

先ず冪について，z を 0 でない複素数とし，α を複素数とするとき，本稿では

$$z^\alpha \overset{\text{def}}{=\!=} \exp\left(\alpha \cdot \operatorname{Log} z\right)$$

と定める．また z が 0 であるときは

$$z^\alpha \overset{\text{def}}{=\!=} 0$$

と定める．

定義 H.2.4 (冪根).　x を正の実数とし，n を 1 以上の自然数とするとき，

$$\sqrt[n]{x} \overset{\text{def}}{=\!=} e^{\frac{1}{n} \cdot \operatorname{Log} x}$$

と定めてこれを x の n **乗根**と呼ぶ．

x を正の実数とし，n を 1 以上の自然数とするとき，$\sqrt[n]{x}$ は n 乗すれば x に戻る．実際，定理 F.5.6 より

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[n]{x}\right)^n &= \left(e^{\frac{1}{n} \cdot \operatorname{Log} x}\right)^n \\ &= e^{n \cdot \frac{1}{n} \cdot \operatorname{Log} x} \\ &= e^{\operatorname{Log} x} \\ &= x\end{aligned}$$

が成立する．ここで y を正の実数とすれば

$$\operatorname{Log}\left(x \cdot y\right) = \operatorname{Log} x + \operatorname{Log} y$$

が成り立つので

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{x \cdot y} = e^{\frac{1}{n} \cdot \operatorname{Log}(x \cdot y)} &= e^{\frac{1}{n} \cdot \operatorname{Log} x + \frac{1}{n} \cdot \operatorname{Log} y} \\ &= e^{\frac{1}{n} \cdot \operatorname{Log} x} \cdot e^{\frac{1}{n} \cdot \operatorname{Log} y} \\ &= \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}\end{aligned}$$

が成り立つ．また

$$\operatorname{Log} x^{n+1} = \operatorname{Log}(x^n \cdot x) = \operatorname{Log} x^n + \operatorname{Log} x$$

と数学的帰納法の原理から

$$\operatorname{Log} x^n = n \cdot \operatorname{Log} x$$

も示すことが出来る．

定理 H.2.5 (Cauchy の冪根判定法).　c を複素数列とするとき，

$$\inf_{n\in\omega} \sup_{\substack{k\in\omega \\ n<k}} \sqrt[k]{|c_k|} < 1$$

ならば $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ は絶対収束し，

$$1 < \inf_{n\in\omega} \sup_{\substack{k\in\omega \\ n<k}} \sqrt[k]{|c_k|}$$

ならば数列

$$\omega \ni n \longmapsto \sum_{k=0}^{n} c_k$$

は $\mathbf{C}$ で収束しない．

略証．　いま

$$r \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \inf_{n\in\omega} \sup_{\substack{k\in\omega \\ n<k}} \sqrt[k]{|c_k|}$$

とおく．

$$r < 1$$

であるとき，

$$\sup_{\substack{k\in\omega \\ n<k}} \sqrt[k]{|c_k|} < \frac{1+r}{2}$$

を満たす自然数 n が取れる．すなわち

$$n < k$$

を満たす任意の自然数 k に対して

$$|c_k| \leq \left(\frac{1+r}{2}\right)^k$$

が成立する．ゆえに，n より大きい任意の自然数 N に対して

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N}|c_k| &= \sum_{k=0}^{n}|c_k| + \sum_{k=n+1}^{N}|c_k| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n}|c_k| + \sum_{k=n+1}^{N}\left(\frac{1+r}{2}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n}|c_k| + \left(\frac{1+r}{2}\right)^{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{N-n+1}\left(\frac{1+r}{2}\right)^k \\ &\leq \sum_{k=0}^{n}|c_k| + \left(\frac{1+r}{2}\right)^{n+1} \cdot \frac{2}{1-r}\end{aligned}$$

が成立する．ゆえに $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ は絶対収束する．

$$1 < r$$

であるとき，n を任意に与えられた自然数とすれば

$$1 < \sup_{\substack{k\in\boldsymbol{\omega} \\ n<k}} \sqrt[k]{|c_k|}$$

が成り立つので，

$$n < k$$

かつ

$$1 < \sqrt[k]{|c_k|}$$

を満たす自然数 k が取れて，両辺 k 乗して

$$1 < |c_k|$$

が成立する．他方で，

$$\boldsymbol{\omega} \ni n \longmapsto \sum_{k=0}^{n} c_k$$

が $\mathbf{C}$ で収束するときは

$$\forall \epsilon \in \mathbf{R}_+ \, \exists N \in \boldsymbol{\omega} \, \forall n \in \boldsymbol{\omega} \; [\, N \leq n \Longrightarrow |c_n| < \epsilon \,]$$

が成立するので，対偶命題から

$$1 < r$$

ならば

$$\boldsymbol{\omega} \ni n \longmapsto \sum_{k=0}^{n} c_k$$

は $\mathbf{C}$ で収束しない．　■

定義 H.2.6 (収束半径).　複素数列 c が与えられたとき，

$$r \overset{\text{def}}{=\!=} \inf_{n\in\omega} \sup_{\substack{k\in\omega \\ n<k}} \sqrt[k]{|c_k|}$$

とおく．このとき

$$R \overset{\text{def}}{=\!=} \begin{cases} 0 & \text{if } r = \infty \\ \dfrac{1}{r} & \text{if } 0 < r < \infty \\ \infty & \text{if } r = 0 \end{cases}$$

により定める R を c の収束半径 **(radius of convergence)** と呼ぶ.

定理 H.2.7 (収束半径の内側では絶対収束，外側では収束しない).　z を複素数とし，c を複素数列とし，R を c の収束半径とする．このとき，

$$|z| < R$$

ならば $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot z^n$ は絶対収束する．

$$R < |z|$$

であれば

$$\omega \ni n \longmapsto \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot z^k$$

なる数列は $\mathbf{C}$ で収束しない．

略証.

第一段　z を 0 でない複素数とすると，任意の自然数 n で

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{|c_n \cdot z^n|} &= \sqrt[n]{|c_n| \cdot |z^n|} \\ &= \sqrt[n]{|c_n| \cdot |z|^n} \\ &= \sqrt[n]{|c_n|} \cdot \sqrt[n]{|z|^n} \\ &= \sqrt[n]{|c_n|} \cdot e^{\frac{1}{n}\cdot \mathrm{Log}\,|z|^n} \\ &= \sqrt[n]{|c_n|} \cdot e^{\frac{1}{n}\cdot n \cdot \mathrm{Log}\,|z|} \\ &= \sqrt[n]{|c_n|} \cdot |z| \end{aligned}$$

が成立する．z が 0 ならば

$$\sqrt[n]{|c_n \cdot z^n|} = 0$$

である．またここで

$$r \overset{\text{def}}{=\!=} \inf_{n\in\omega} \sup_{\substack{k\in\omega \\ n<k}} \sqrt[k]{|c_k|}$$

とおく．

第二段　z を任意に与えられた複素数とするとき，

$$|z| < R$$

ならば

$$\inf_{n\in\omega} \sup_{\substack{k\in\omega \\ n<k}} \sqrt[k]{|c_k \cdot z^k|} < 1 \tag{H.15}$$

が成り立つ．実際，

$$r = \infty$$

であるときは空虚な真より (H.15) が成立する．

$$0 \leq r < \infty$$

であるときは

$$\inf_{n\in\omega} \sup_{\substack{k\in\omega \\ n<k}} \sqrt[k]{|c_k \cdot z^k|} = |z| \cdot \inf_{n\in\omega} \sup_{\substack{k\in\omega \\ n<k}} \sqrt[k]{|c_k|}$$

が成り立つから (H.15) が従う．ゆえに

$$\inf_{n\in\omega} \sup_{\substack{k\in\omega \\ n<k}} \sqrt[k]{|c_k \cdot z^k|} = 0 < 1$$

が成立する．ゆえにいずれの場合も Cauchy の冪根判定法より $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot z^n$ は絶対収束する．

第三段　z を任意に与えられた複素数とするとき，

$$R < |z|$$

ならば

$$1 < \inf_{n\in\omega} \sup_{\substack{k\in\omega \\ n<k}} \sqrt[k]{|c_k \cdot z^k|} \tag{H.16}$$

が成り立つ．実際，

$$r = \infty$$

であるときは，任意に与えられた正の実数 M 及び任意の自然数 n に対して

$$n < k$$

かつ

$$\frac{M}{|z|} < \sqrt[k]{|c_k|}$$

を満たす自然数 k が取れる．ゆえに任意の自然数 n に対して

$$\sup_{\substack{k\in\omega \\ n<k}} \sqrt[k]{|c_k \cdot z^k|} = \infty$$

が成り立つので

$$\inf_{n\in\omega}\sup_{\substack{k\in\omega\\ n<k}}\sqrt[k]{|c_k\cdot z^k|}=\infty$$

が従う．

$$0<r<\infty$$

であるときは

$$\inf_{n\in\omega}\sup_{\substack{k\in\omega\\ n<k}}\sqrt[k]{|c_k\cdot z^k|}=|z|\cdot r$$

が成り立つので (H.16) が従う．

$$r=0$$

の場合は空虚な真より (H.16) が満たされる．ゆえにいずれの場合も Cauchy の冪根判定法より

$$\omega\ni n\longmapsto\sum_{k=0}^{n}c_k\cdot z^k$$

なる数列は $\mathbf{C}$ で収束しない． ∎

z を複素数とし，r を正数とするとき，

$$D(z;r)\overset{\mathrm{def}}{=\!=}\{\,w\in\mathbf{C}\mid\quad|w-z|<r\,\}$$

と定める．イメージとしては $D(z;r)$ とは中心 z 半径 r の円板を表す．

定理 H.2.8 (級数で表される関数は微分可能). r を正の実数とし，c を複素数列とする．このとき，$D(0;r)$ の任意の要素 z で数列

$$\omega\ni n\longmapsto\sum_{k=0}^{n}c_k\cdot z^k$$

が収束しているならば

- $D(0;r)$ の任意の要素 z で $\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cdot z^n$ は絶対収束する．
- $D(0;r)$ 上の写像 f を

$$z\longmapsto\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cdot z^n$$

なる関係により定めると，f は $D(0;r)$ の各要素で微分可能であって，f の導関数を f' と書けば

$$f'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot c(n+1)\cdot z^n$$

が $D(0;r)$ の任意の要素 z で成立する．

略証.

第一段　いま R を c の収束半径とし，

$$\omega \ni n \longmapsto \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot z^k$$

が収束しているとする．z を $D(0;r)$ の要素とするとき，

$$\rho \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \frac{|z|+r}{2}$$

とおけば

$$|z| < \rho < r$$

が成り立つので

$$\omega \ni n \longmapsto \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot \rho^k$$

は収束する．ゆえに定理 H.2.7 より

$$\rho \leq R$$

が成り立つ．ゆえに

$$|z| < R$$

が成り立つので，定理 H.2.7 より $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot z^n$ は絶対収束する．

第二段 ∎

いま a を任意に与えられた複素数とする．$D(0;r)$ の任意の要素 z で

$$\omega \ni n \longmapsto \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot z^k$$

が収束しているならば，$D(a;r)$ の任意の要素 z で

$$\omega \ni n \longmapsto \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot (z-a)^k$$

は収束する．また f を

$$z \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot z^n$$

なる関係により定めて，g を

$$z \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z-a)^n$$

なる関係により定めると，

$$g(z) = f(z-a)$$

が成り立つので g は $D(a;r)$ の各要素で微分可能である．そして g の導関数を g' と書けば

$$g'(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot c(n+1)\cdot(z-a)^n$$

が $D(a;r)$ の任意の要素 z で成立する．

H.2.4　Goursat の定理

本稿では，複素数 z と w に対して

$$[0,1] \ni t \longmapsto z + t\cdot(w-z)$$

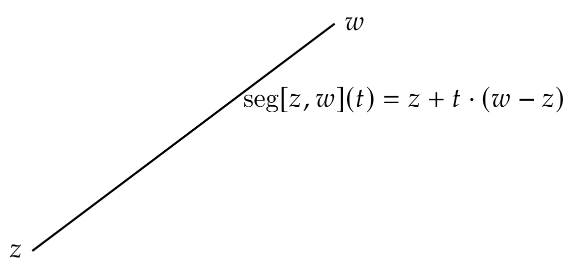
なる写像を

$$\mathrm{seg}[z,w]$$

と表す．つまり

$$\mathrm{seg}[z,w] \overset{\text{def}}{=\!=} \{\,(t,\zeta) \mid \quad t\in[0,1] \wedge \zeta = z + t\cdot(w-z)\,\}$$

と定めている．$\mathrm{seg}[z,w]$ とは z と w を結ぶ線分を描き，



また f をその線分上の連続写像とすれば

$$\int_{\mathrm{seg}[z,w]} f = (w-z)\cdot\int_{[0,1]} f(z+t\cdot(w-z))\,dt$$

が成り立つ．また t を $[0,1]$ の要素とすれば

$$\mathrm{seg}[w,z](t) = \mathrm{seg}[z,w](1-t)$$

が成り立つので，$\mathrm{seg}[w,z]$ は $\mathrm{seg}[z,w]$ の逆路である．ゆえに

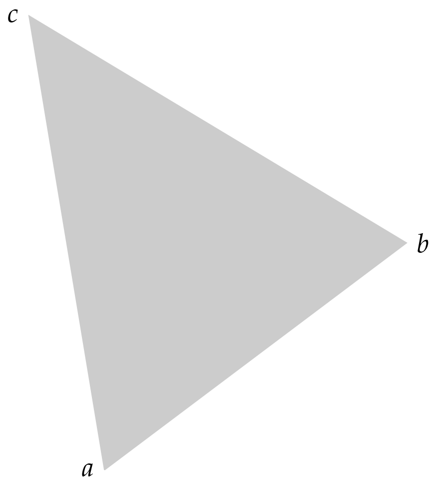
$$\int_{\mathrm{seg}[w,z]} f = -\int_{\mathrm{seg}[z,w]} f$$

が成立する．

いま a と b と c を複素数とすると，

$$\Delta \overset{\text{def}}{=\!=} \{\,z \mid \quad \exists t,s\in[0,1]\ (\,z=(1-t)\cdot a + t\cdot(1-s)\cdot b + t\cdot s\cdot c\,)\,\}$$

により定める集合 Δ は，イメージとしては a,b,c によって囲まれる三角形



を表す．この Δ は $\mathbf{C}$ のコンパクト部分集合である．実際，

$$(t, s) \longmapsto (1-t)\cdot a + t\cdot(1-s)\cdot b + t\cdot s\cdot c$$

は $\mathbf{R}^2$ から $\mathbf{C}$ への連続写像であって，Δ とはこの写像によって

$$[0,1]\times[0,1]$$

なる $\mathbf{R}^2$ のコンパクト部分集合を写した像である．

三角領域の外郭に沿った正則関数の線積分は 0 になる．

定理 H.2.9 (Cauchy-Goursat). a と b と c を複素数とし，

$$\Delta \overset{\text{def}}{=\!=} \{\, z \mid \quad \exists t, s \in [0,1]\ (\, z = (1-t)\cdot a + t\cdot(1-s)\cdot b + t\cdot s\cdot c\,)\,\}$$

と定める．また Ω を $\mathbf{C}$ の開集合とし，f を Ω 上の $\mathbf{C}$ 値連続写像とし，p を Ω の要素とする．このとき，

$$\Delta \subset \Omega$$

かつ，p を除く Ω の各要素で f が微分可能であれば

$$\int_{\mathrm{seg}[a,b]} f + \int_{\mathrm{seg}[b,c]} f + \int_{\mathrm{seg}[c,a]} f = 0.$$

定理 H.2.10 (凸開集合に含まれる任意の三角形の周上の積分が 0 である連続写像は正則関数の導関数). Ω を $\mathbf{C}$ の凸開集合とし，f を Ω 上の $\mathbf{C}$ 値連続写像とする．このとき，Ω の任意の三要素 a と b と c に対して

$$\int_{\mathrm{seg}[a,b]} f + \int_{\mathrm{seg}[b,c]} f + \int_{\mathrm{seg}[c,a]} f = 0$$

が満たされているならば，p を Ω の要素として F を

$$\Omega \ni z \longmapsto \int_{\mathrm{seg}[p,z]} f$$

なる関係により定める写像とすれば

$$F' = f$$

が成立する．

略証． Ω の任意の三要素 a と b と c に対して

$$\int_{\mathrm{seg}[a,b]} f + \int_{\mathrm{seg}[b,c]} f + \int_{\mathrm{seg}[c,a]} f = 0$$

が満たされているとする．また p を Ω の要素として，

$$\Omega \ni z \longmapsto \int_{\mathrm{seg}[p,z]} f$$

なる写像を F とする．z と w を Ω の要素とすれば

$$\int_{\mathrm{seg}[z,w]} f = -\int_{\mathrm{seg}[w,p]} f - \int_{\mathrm{seg}[z,p]} f$$

が成り立つが，

$$\int_{\mathrm{seg}[w,p]} f = -\int_{\mathrm{seg}[p,w]} f = -F(w)$$

より

$$\int_{\mathrm{seg}[z,w]} f = F(w) - F(z)$$

が得られる．よって，h を

$$z + h \in \Omega$$

である範囲の任意の複素数とすれば

$$\begin{aligned} F(z+h) - F(z) - h \cdot f(z) &= \int_{\mathrm{seg}[z,z+h]} f - h \cdot f(z) \\ &= h \cdot \int_{[0,1]} f(z + t \cdot h) - f(z)\, dt \end{aligned}$$

が成立する．ところで f は z で連続であるから，いま ϵ を任意に与えられた正の実数とすれば

$$|h| < \delta \Longrightarrow |f(z+h) - f(z)| < \epsilon$$

を満たす正の実数 δ が取れる．そして h を

$$|h| < \delta$$

を満たす任意の複素数とすれば

$$|F(z+h) - F(z) - h \cdot f(z)| \leq |h| \cdot \int_{[0,1]} |f(z+t \cdot h) - f(z)|\, dt < |h| \cdot \epsilon$$

が成り立つ．ゆえに F は z で微分可能であり，その微分係数は

$$f(z)$$

である． ∎

定理 H.2.11 (円周上の積分公式). Ω を開集合とし，f を Ω 上の正則関数とし，a を Ω の要素とし，r を

$$\overline{D}(a;r) \subset \Omega$$

を満たす正の実数とする．このとき，c を

$$[0, 2 \cdot \pi] \ni \theta \longmapsto z + r \cdot e^{\mathbf{i} \cdot \theta}$$

なる写像とすれば，$D(a;r)$ の任意の要素 z で

$$f(z) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \mathbf{i}} \cdot \int_c \frac{f(w)}{w - z}\, dw$$

が成立する．

略証． z を $D(a;r)$ の要素とし，

$$r < R$$

かつ

$$D(a;R) \subset \Omega$$

を満たす正の実数 R を取る．この R は次のようにして取れる．$\mathbf{C}$ の絶対値により定まる距離を d と書けば

$$z \longmapsto d(z, \mathbf{C} \backslash \Omega)$$

は連続であり，$\overline{D}(a;r)$ はコンパクトなので，この写像は $\overline{D}(a;r)$ 上で最小値 ρ を取る．

$$R \overset{\mathrm{def}}{=\!=} r + \frac{\rho}{2}$$

とおけばよい．Ω 上の写像 g を

$$\Omega \ni w \longmapsto \begin{cases} \dfrac{f(w) - f(z)}{w - z} & \text{if } w \neq z \\ f'(z) & \text{if } w = z \end{cases}$$

なる関係により定める．この g は Ω 上で連続であって

$$g \in H(\Omega \backslash \{z\})$$

を満たすので，定理 H.2.9 と定理 H.2.10 より $D(a;r)$ の各要素 w で

$$G'(w) = g(w)$$

を満たす $D(a;r)$ 上の正則関数 G が取れる．微分積分学の基本定理より

$$\begin{aligned} \int_c g &= \int_{[0,2\cdot\pi]} g(c(\theta)) \cdot c'(\theta)\, d\theta \\ &= \int_{[0,2\cdot\pi]} G'(c(\theta)) \cdot c'(\theta)\, d\theta \\ &= G(c(2\cdot\pi)) - G(c(0)) \\ &= G(a+r) - G(a+r) \\ &= 0 \end{aligned}$$

が成立する．ゆえに

$$\begin{aligned} \int_c \frac{f(w)}{w-z}\, dw &= f(z) \cdot \int_c \frac{1}{w-z}\, dw \\ &= (2\cdot\pi\cdot\mathbf{i}) \cdot f(z) \cdot \mathrm{Ind}_c(z) \end{aligned}$$

が成立する． ∎

H.2.5　Morera の定理

Morera の定理とは Goursat の定理の逆の主張である．

定理 H.2.12 (積分の級数展開).　γ を $[\alpha,\beta]$ 上の路とし，γ で作る $\mathscr{B}([\alpha,\beta])$ 上の複素 Stieltjes 測度を μ_γ とする．また φ を $[\alpha,\beta]$ 上の $\mathbf{C}$ 値連続関数とする．このとき，a を $\mathbf{C}\backslash\mathrm{ran}(\gamma)$ の要素とし，r を

$$D(a;r) \subset \mathbf{C}\backslash\mathrm{ran}(\gamma)$$

を満たす正の実数とすると，$D(a;r)$ の任意の要素 z で

$$\int_{[\alpha,\beta]} \frac{\varphi}{\gamma - z}\, d\mu_\gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_{[\alpha,\beta]} \frac{\varphi}{(\gamma-a)^{n+1}}\, d\mu_\gamma \right] \cdot (z-a)^n$$

が成立する．

略証． いま z を $D(a;r)$ の要素とする．このとき $[\alpha,\beta]$ の任意の要素 t で

$$\left|\frac{z-a}{\gamma(t)-a}\right| \leq \frac{|z-a|}{r} < 1$$

が成り立つので

$$\frac{\varphi(t)}{\gamma(t)-a} = \varphi(t)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\gamma(t)-a)^{n+1}}$$

が成立する．また $[\alpha,\beta]$ の任意の要素 t で

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z-a|^n}{|\gamma(t)-a|^{n+1}} \leq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z-a|^n}{r^{n+1}} = \frac{1}{r-|z-a|}$$

が成り立つので，Lebesgue の収束定理より

$$\begin{aligned}\int_{[\alpha,\beta]}\frac{\varphi}{\gamma-z}\,d\mu_\gamma &= \int_{[\alpha,\beta]}\varphi\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\gamma-a)^{n+1}}\,d\mu_\gamma \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{[\alpha,\beta]}(z-a)^n\cdot\frac{\varphi}{(\gamma-a)^{n+1}}\,d\mu_\gamma \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_{[\alpha,\beta]}\frac{\varphi}{(\gamma-a)^{n+1}}\,d\mu_\gamma\right]\cdot(z-a)^n\end{aligned}$$

が成立する． ∎

定理 H.2.13 (Liouville の定理). Ω を $\mathbf{C}$ の開集合とし，f を Ω 上の正則関数とし，a を Ω の要素とし，r を

$$\overline{D}(a;r)\subset\Omega$$

を満たす正の実数とする．このとき，

$$[0,2\cdot\pi]\ni\theta\longmapsto a+r\cdot e^{\mathbf{i}\cdot\theta}$$

なる写像を c とすれば，$D(a;r)$ の各要素 z で

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\cdot\pi\cdot\mathbf{i}}\cdot\int_{[0,2\cdot\pi]}\frac{f\circ c}{(c-a)^{n+1}}\,d\mu_c\right]\cdot(z-a)^n$$

が成立する．特に**有界な整関数は定数関数である**．

略証．

第一段　定理の設定の下で，定理 H.2.11 より $D(a;r)$ の任意の要素 z で

$$f(z) = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot\mathbf{i}}\cdot\int_{[0,2\cdot\pi]}\frac{f\circ c}{c-z}\,d\mu_c$$

が成立する．他方で定理 H.2.12 より，$D(a;r)$ の任意の要素 z で

$$\int_{[0,2\cdot\pi]} \frac{f\circ c}{c-z}\,d\mu_c = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_{[0,2\cdot\pi]} \frac{f\circ c}{(c-a)^{n+1}}\,d\mu_c\right]\cdot(z-a)^n$$

が成立する．よって $D(a;r)$ の任意の要素 z で

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\cdot\pi\cdot\mathbf{i}}\cdot\int_{[0,2\cdot\pi]} \frac{f\circ c}{(c-a)^{n+1}}\,d\mu_c\right]\cdot(z-a)^n$$

が成立する．

第二段　f を有界な整関数とし，

$$M \overset{\text{def}}{=\!=} \sup_{z\in\mathbf{C}}|f(z)|$$

とおく．

$$[0,2\cdot\pi]\ni\theta\longmapsto e^{\mathbf{i}\cdot\theta}$$

なる写像を c_1 とすれば，第一段の結果より $D(0;1)$ の任意の要素 z で

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\cdot\pi\cdot\mathbf{i}}\cdot\int_{[0,2\cdot\pi]} \frac{f\circ c_1}{c_1^{n+1}}\,d\mu_{c_1}\right]\cdot z^n$$

が成立する．また R を 1 より大きい任意の正数として

$$[0,2\cdot\pi]\ni\theta\longmapsto R\cdot e^{\mathbf{i}\cdot\theta}$$

なる写像を c_R とすれば，$D(0;R)$ の任意の要素 z で

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\cdot\pi\cdot\mathbf{i}}\cdot\int_{[0,2\cdot\pi]} \frac{f\circ c_R}{c_R^{n+1}}\,d\mu_{c_R}\right]\cdot z^n$$

が成立する．係数の一意性から任意の自然数 n で

$$\frac{1}{2\cdot\pi\cdot\mathbf{i}}\cdot\int_{[0,2\cdot\pi]} \frac{f\circ c_1}{c_1^{n+1}}\,d\mu_{c_1} = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot\mathbf{i}}\cdot\int_{[0,2\cdot\pi]} \frac{f\circ c_R}{c_R^{n+1}}\,d\mu_{c_R}$$

が成り立つが，このとき

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\cdot\pi\cdot\mathbf{i}}\cdot\int_{[0,2\cdot\pi]} \frac{f\circ c_1}{c_1^{n+1}}\,d\mu_{c_1}\right| &\leq \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{[0,2\cdot\pi]} \frac{|f\circ c_R|}{|c_R|^{n+1}}\,d\left|\mu_{c_R}\right| \\ &\leq \frac{M}{R^{n+1}}\end{aligned}$$

が成立し，R の任意性から

$$\frac{1}{2\cdot\pi\cdot\mathbf{i}}\cdot\int_{[0,2\cdot\pi]} \frac{f\circ c_1}{c_1^{n+1}}\,d\mu_{c_1} = 0$$

が従う．ゆえに $D(0;1)$ の任意の要素 z で

$$f(z) = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot\mathbf{i}}\cdot\int_{[0,2\cdot\pi]} \frac{f\circ c_1}{c_1}\,d\mu_{c_1}$$

が成立する．ただし係数の一意性から

$$f(z) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \mathbf{i}} \cdot \int_{[0,2\cdot\pi]} \frac{f \circ c_1}{c_1}\, d\mu_{c_1}$$

は任意の複素数 z で成立する． ∎

定理 H.2.14 (正則関数の導関数も正則).　Ω を $\mathbf{C}$ の開集合とするとき

$$\forall f \left[f \in H(\Omega) \Longrightarrow f' \in H(\Omega) \right].$$

略証．　f を Ω 上の正則関数とし，Ω の要素 a を任意に取る．また

$$\overline{D}(a;r) \subset \Omega$$

を満たす正の実数 r を取って

$$[0, 2\cdot\pi] \ni \theta \longmapsto a + r \cdot e^{\mathbf{i}\cdot\theta}$$

なる写像を c とする．このとき定理 H.2.13 より $D(a;r)$ の任意の要素 z で

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \mathbf{i}} \cdot \int_{[0,2\cdot\pi]} \frac{f \circ c}{(c-a)^{n+1}}\, d\mu_c \right] \cdot (z-a)^n$$

が成立する．よって定理 H.2.8 より $D(a;r)$ の任意の要素 z で

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{n+1}{2 \cdot \pi \cdot \mathbf{i}} \cdot \int_{[0,2\cdot\pi]} \frac{f \circ c}{(c-a)^{n+2}}\, d\mu_c \right] \cdot (z-a)^n$$

が成立し，f' の a での微分可能性が従う．a の任意性から

$$f' \in H(\Omega)$$

が従う． ∎

定理 H.2.15 (Morera の定理).　Ω を $\mathbf{C}$ の開集合とし，f を Ω 上の $\mathbf{C}$ 値連続関数とする．また Ω から任意に三要素 a, b, c が与えられたとき，この三点が作る三角集合が Ω に含まれるなら，つまり

$$\{ z \mid \quad \exists t, s \in [0,1]\ (z = (1-t)\cdot a + t \cdot (1-s) \cdot b + t \cdot s \cdot c) \} \subset \Omega$$

であるならば

$$\int_{\mathrm{seg}[a,b]} f + \int_{\mathrm{seg}[b,c]} f + \int_{\mathrm{seg}[c,a]} f = 0$$

が成り立つとする．このとき f は Ω 上の正則関数である．

略証．　いま z を Ω の要素とし，

$$\overline{D}(z;r) \subset \Omega$$

を満たす正の実数 r を取る．このとき，定理 H.2.10 より

$$F \in H(D(z;r))$$

かつ

$$F' = f|_{D(z;r)}$$

を満たす F が取れて，さらに定理 H.2.14 より

$$f|_{D(z;r)} \in H(D(z;r))$$

が従う．ゆえに f は z で微分可能である．z の任意性から

$$f \in H(\Omega)$$

が成立する． ∎

H.2.6　Cauchy の定理

定義 H.2.16 (閉路).　始点と終点が一致する路を**閉路 (closed contour)** と呼ぶ．つまり，γ が閉路であるとは

$$[\alpha, \beta] = \mathrm{dom}(\gamma)$$

を満たす実数 α と β を取ったときに

$$\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$$

が成り立つということである．

例えば，いままで扱ってきた

$$[0, 2\cdot\pi] \ni \theta \longmapsto a + r \cdot e^{\mathbf{i}\cdot\theta}$$

なる路は閉路である．

定義 H.2.17 (指数).　γ を閉路とし，z を

$$z \notin \mathrm{ran}(\gamma)$$

を満たす複素数とするとき，

$$\frac{1}{2\cdot\pi\cdot\mathbf{i}} \cdot \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z}\,d\zeta$$

を γ の z 周りの**指数 (index)** と呼ぶ．

閉路 γ が与えられたとき，$\mathrm{ran}(\gamma)$ に属さない複素数に対して，その周りの γ の指数を対応させる写像を

$$\mathrm{Ind}_\gamma$$

と書く．

定理 H.2.12 と定理 H.2.8 より Ind_γ は $\mathbf{C}\backslash\mathrm{ran}(\gamma)$ の各要素において微分可能である．すなわち

$$\mathrm{Ind}_\gamma \in H\left(\mathbf{C}\backslash\mathrm{ran}(\gamma)\right)$$

である．

定理 H.2.18 (Cauchy の積分定理).　Ω を開集合とし，f を Ω 上の正則関数とし，γ を閉路とする．このとき，

$$\mathrm{ran}(\gamma) \subset \Omega$$

かつ，$\mathbf{C}$ の開集合 Ψ で

$$\mathbf{C}\backslash\Omega \subset \Psi \subset \mathrm{Ind}_\gamma^{-1} * \{0\}$$

を満たすものが取れるなら，$\Omega\backslash\mathrm{ran}(\gamma)$ の任意の要素 z に対して

$$f(z)\cdot\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot\mathbf{i}}\cdot\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

が成立し，このとき特に

$$\int_\gamma f = 0$$

が成立する．

後述することであるが，実は $\mathrm{Ind}_\gamma^{-1} * \{0\}$ 自体がすでに $\mathbf{C}$ の開集合である．

一見すると閉集合を引き戻しているのでこれは閉集合であるかと思えるが，Ind_γ とは $\Omega\backslash\mathrm{ran}(\gamma)$ 上の連続写像であり，$\mathrm{Ind}_\gamma^{-1} * \{0\}$ はその相対位相で閉集合であるにすぎない．しかも Ind_γ は整数値である (後述) から，

$$\mathrm{Ind}_\gamma^{-1} * \{0\} = \mathrm{Ind}_\gamma^{-1} * \{\, x \in \mathbf{R} \mid \quad -1 < x < 1\,\}$$

が成り立つ．つまり $\mathrm{Ind}_\gamma^{-1} * \{0\}$ は $\Omega\backslash\mathrm{ran}(\gamma)$ の開集合でもあることになるが，この現象は $\Omega\backslash\mathrm{ran}(\gamma)$ が連結でないことに起因する．そして $\Omega\backslash\mathrm{ran}(\gamma)$ 自体は $\mathbf{C}$ の開集合なので $\mathrm{Ind}_\gamma^{-1} * \{0\}$ は $\mathbf{C}$ の開集合である．

略証 (大雑把).

第一段　$\Omega\times\Omega$ 上の写像 g を

$$\Omega\times\Omega \ni (z,w) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{if } z \neq w \\ f'(z) & \text{if } z = w \end{cases}$$

により定めれば，g は連続である．ここで複素数 z に対して

$$\Omega \ni w \longmapsto (z,w)$$

なる写像を p_z として

$$\Omega \ni z \longmapsto \frac{1}{2\cdot\pi\cdot\mathbf{i}}\cdot\int_\gamma g\circ p_z$$

なる写像を h とすれば，h は Ω 上で連続である．

第二段　いま a,b,c を Ω の要素として，それらがなす三角集合が Ω に含まれるとする．つまり

$$\{\, z \mid \quad \exists t,s \in [0,1]\ (\, z = (1-t)\cdot a + t\cdot(1-s)\cdot b + t\cdot s\cdot c\,)\,\} \subset \Omega$$

であるとする．すると

$$\int_{\mathrm{seg}[a,b]} h + \int_{\mathrm{seg}[b,c]} h + \int_{\mathrm{seg}[c,a]} h = 0$$

が成立する．実際，まず

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{seg}[a,b]} h &= \int_{[0,1]} h(a+s\cdot(b-a))\cdot(b-a)\ \lambda(ds)\\ &= \frac{b-a}{2\cdot\pi\cdot\mathbf{i}}\cdot\int_{[0,1]}\left[\int_{[\alpha,\beta]} g\circ p_{a+s\cdot(b-a)}\circ\gamma\ d\mu_\gamma\right]\ \lambda(ds)\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで実数 t に対して

$$[0,1] \ni s \longmapsto (s,t)$$

なる写像を q^t とし，実数 s に対して

$$[\alpha,\beta] \ni t \longmapsto (s,t)$$

なる写像を p^s とし，複素数 w に対して

$$\Omega \ni z \longmapsto (z,w)$$

なる写像を q_w とし，

$$[0,1]\times[\alpha,\beta] \ni (s,t) \longmapsto g(a+s\cdot(b-a),\gamma(t))$$

なる写像を G とし，Γ を，$\mathscr{B}([\alpha,\beta])$ の各要素 E で

$$\mu_\gamma(E) = \int_E \Gamma\ d|\mu_\gamma|$$

を満たす $\mathscr{B}([\alpha,\beta])/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測関数とし，$\tilde{\Gamma}$ を

$$[0,1]\times[\alpha,\beta] \ni (s,t) \longmapsto \Gamma(t)$$

なる写像とする．すると，Fubini の定理より

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]}\left[\int_{[\alpha,\beta]} g\circ p_{a+s\cdot(b-a)}\circ\gamma\ d\mu_\gamma\right]\ \lambda(ds) &= \int_{[0,1]}\left[\int_{[\alpha,\beta]} G\circ p^s\cdot\Gamma\ d|\mu_\gamma|\right]\ \lambda(ds)\\ &= \int_{[0,1]}\left[\int_{[\alpha,\beta]} (G\cdot\tilde{\Gamma})\circ p^s\ d|\mu_\gamma|\right]\ \lambda(ds)\\ &= \int_{[\alpha,\beta]}\left[\int_{[0,1]} (G\cdot\tilde{\Gamma})\circ q^t\ \lambda(ds)\right]\ |\mu_\gamma|(dt)\\ &= \int_{[\alpha,\beta]}\left[\int_{[0,1]} G\circ q^t\ d\lambda\right]\cdot\Gamma(t)\ |\mu_\gamma|(dt)\\ &= \int_{[\alpha,\beta]}\left[\int_{[0,1]} g\circ q_{\gamma(t)}(a+s\cdot(b-a))\ \lambda(ds)\right]\ \mu_\gamma(dt)\end{aligned}$$

が成り立つ．従って

$$\begin{aligned}
&\frac{b-a}{2\cdot\pi\cdot\mathbf{i}}\cdot\int_{[0,1]}\left[\int_{[\alpha,\beta]} g\circ p_{a+s\cdot(b-a)}\circ\gamma\ d\mu_\gamma\right]\ \lambda(ds)\\
&=\frac{b-a}{2\cdot\pi\cdot\mathbf{i}}\cdot\int_{[\alpha,\beta]}\left[\int_{[0,1]} g\circ q_{\gamma(t)}(a+s\cdot(b-a))\ \lambda(ds)\right]\ \mu_\gamma(dt)\\
&=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot\mathbf{i}}\cdot\int_{[\alpha,\beta]}\left[\int_{\mathrm{seg}[a,b]} g\circ q_{\gamma(t)}\right]\ \mu_\gamma(dt)
\end{aligned}$$

が成り立つ．ところで，$[\alpha,\beta]$ の各要素 t において，

$$\Omega\ni z\longmapsto g(z,\gamma(t))$$

なる写像は Ω 上で連続であって，$\gamma(t)$ を除く点で微分可能であるから，Goursat の定理より

$$\int_{\mathrm{seg}[a,b]} g\circ q_{\gamma(t)}+\int_{\mathrm{seg}[b,c]} g\circ q_{\gamma(t)}+\int_{\mathrm{seg}[c,a]} g\circ q_{\gamma(t)}=0$$

が成立する．ゆえに

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathrm{seg}[a,b]} h+\int_{\mathrm{seg}[b,c]} h+\int_{\mathrm{seg}[c,a]} h\\
&=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot\mathbf{i}}\cdot\int_{[\alpha,\beta]}\left[\int_{\mathrm{seg}[a,b]} g\circ q_{\gamma(t)}+\int_{\mathrm{seg}[b,c]} g\circ q_{\gamma(t)}+\int_{\mathrm{seg}[c,a]} g\circ q_{\gamma(t)}\right]\ \mu_\gamma(dt)\\
&=0
\end{aligned}$$

が得られ，Morera の定理より

$$h\in H(\Omega)$$

が従う．

第三段　$\mathbf{C}$ 上の写像 φ を

$$\mathbf{C}\ni z\longmapsto\begin{cases}\dfrac{1}{2\cdot\pi\cdot\mathbf{i}}\cdot\displaystyle\int_\gamma\frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dw & \text{if } z\in\Omega\\[2ex] \dfrac{1}{2\cdot\pi\cdot\mathbf{i}}\cdot\displaystyle\int_\gamma\frac{f(w)}{w-z}\,dw & \text{if } z\in\Psi\end{cases}$$

なる関係により定めると，φ は整関数であって，

$$\lim_{|z|\longrightarrow\infty}\varphi(z)=0$$

が成り立つから，Liouville の定理より

$$\forall z\in\mathbf{C}\,(\,\varphi(z)=0\,)$$

が成立する．ゆえに $\Omega\setminus\mathrm{ran}(\gamma)$ の任意の要素 z に対して

$$\frac{1}{2\cdot\pi\cdot\mathbf{i}}\cdot\int_\gamma\frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dw=0$$

が成立するから，移項して

$$\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \mathbf{i}} \cdot \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z}\, dw = f(z) \cdot \mathrm{Ind}_{\gamma}(z)$$

を得る．$\Omega \backslash \mathrm{ran}(\gamma)$ の要素 z を取り

$$\Omega \ni w \longmapsto f(w) \cdot (w - z)$$

なる写像を F と定めれば，

$$F \in H(\Omega)$$

であるから

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} \frac{F(w)}{w - z}\, dw = F(z) \cdot \mathrm{Ind}_{\gamma}(z) = 0$$

が成立する．■

H.2.7　回転数

複素数 a と，a を通らない路 γ が与えられたとき，γ が a の周りを “何周するか” という問題を考える．なぜそのようなことを考えるのかというと，実は γ が閉路であるときは a の周りを回る ‘回数’ は a 周りの指数に一致して，しかも回転数の性質を分析することで Cauchy の積分定理の実用的なステートメントが得られるためである．思い返せば Cauchy の積分定理には

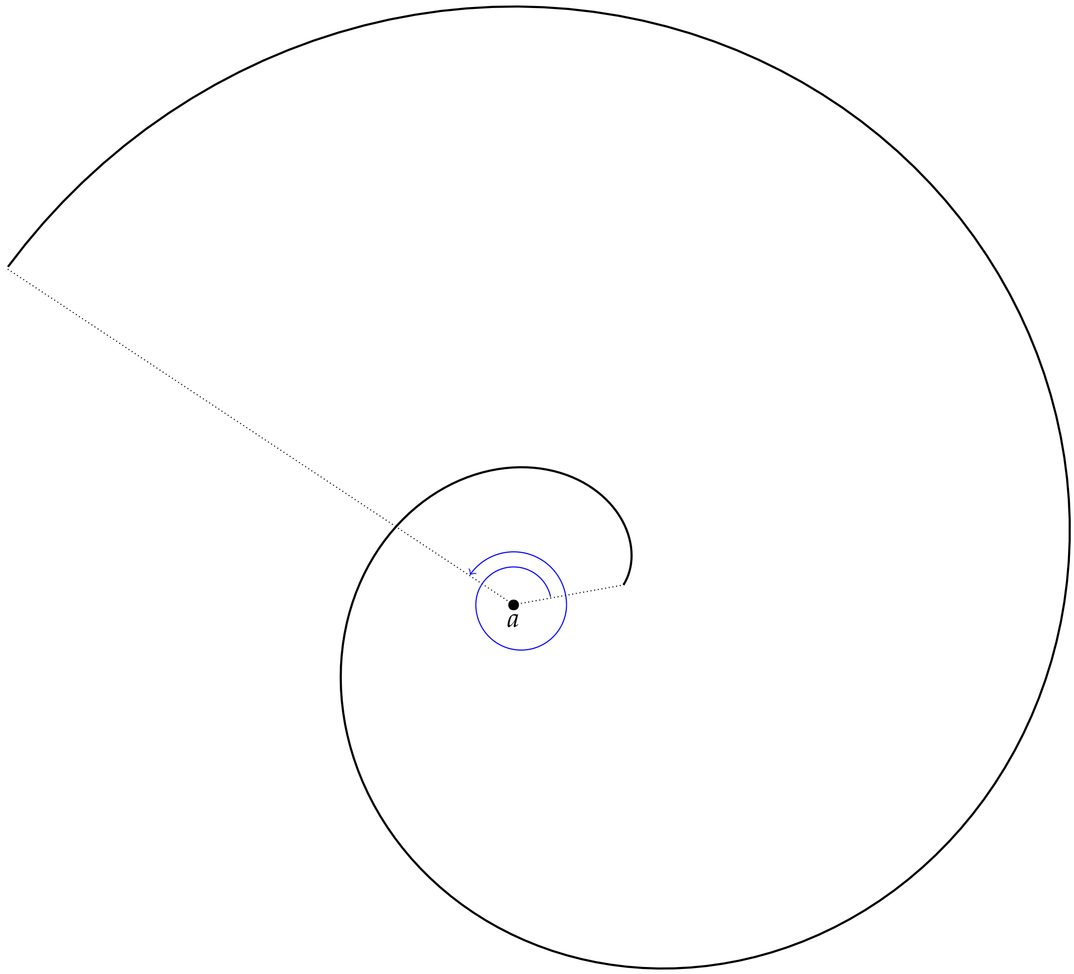
$\mathbf{C}$ の開集合 Ψ で

$$\mathbf{C} \backslash \Omega \subset \Psi \subset \mathrm{Ind}_{\gamma}^{-1} * \{0\}$$

を満たすものが取れるなら

という条件が付いていたが，これを愚直に確認するのは無謀である．

では何をもって ‘回転’ を数えるのかというと，**偏角の変動量**を使うのである．イメージとしては，路の偏角が $2 \cdot \pi$ だけ増えるごとに “a の周りを一回転した” と数える．ただし，便宜上の呼び方であるが，もし偏角が $2 \cdot \pi$ 減ったら “a の周りをマイナス一回転した” と数えることにする．



しかし偏角を測るからといって安直に Arg を使ってはいけない．Arg を使ってしまっては，路が負の実軸をまたぐごとに偏角が $2 \cdot \pi$ だけ巻き戻されてしまうからである．これは Arg が負の実軸を挟んでジャンプすることが原因であり，他の偏角の枝を取ってもこの問題は避けられない．解決するには，路の挙動に合わせて臨機応変に偏角の枝を選択し繋ぎ合わせる必要がある．

いま α を実数として

$$L_\alpha \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{ t \cdot e^{\mathbf{i} \cdot \alpha} \mid \quad t \in \mathbf{R} \wedge 0 \leq t \right\}$$

とおき，$\mathbf{C} \backslash L_\alpha$ 上の写像 Arg_α を

$$z \longmapsto \alpha + \mathrm{Arg}\left(z \cdot e^{-\mathbf{i} \cdot \alpha}\right)$$

により定める．すると Arg_α は $\mathbf{C} \backslash L_\alpha$ 上の実連続写像であって，$\mathbf{C} \backslash L_\alpha$ の各要素 z に対して

$$\frac{z}{|z|} = e^{\mathbf{i} \cdot \mathrm{Arg}_\alpha (z)}$$

を満たす．実際，

$$\mathbf{C} \ni z \longmapsto z \cdot e^{-\mathbf{i} \cdot \alpha}$$

は連続写像であり，Arg は $\mathbf{C} \backslash L_0$ 上の実連続写像であり，また任意の複素数 z で

$$z \in \mathbf{C} \backslash L_\alpha \Longrightarrow z \cdot e^{-\mathbf{i} \cdot \alpha} \in \mathbf{C} \backslash L_0$$

が成り立つので，Arg_α は $\mathbf{C}\backslash L_\alpha$ の各点で連続である．また z を $\mathbf{C}\backslash L_\alpha$ の要素とすれば

$$e^{\mathbf{i}\cdot \mathrm{Arg}_\alpha(z)} = e^{\mathbf{i}\cdot\alpha}\cdot e^{\mathbf{i}\cdot \mathrm{Arg}\,(z\cdot e^{-\mathbf{i}\cdot\alpha})} = e^{\mathbf{i}\cdot\alpha}\cdot \frac{z\cdot e^{-\mathbf{i}\cdot\alpha}}{|z\cdot e^{-\mathbf{i}\cdot\alpha}|} = \frac{z}{|z|}$$

が成り立つ．

定理 H.2.19 (曲線の偏角の連続選択).　γ を $[0,1]$ 上の $\mathbf{C}$ 値連続写像とし，

$$\forall t\in[0,1]\,(\,|\gamma(t)|=1\,)$$

であるとする．このとき $[0,1]$ 上の $\mathbf{R}$ 値連続写像 θ で

$$\forall t\in[0,1]\,\left(\,\gamma(t)=e^{\mathbf{i}\cdot\theta(t)}\right)$$

を満たすものが取れる．

略証.　γ は $[0,1]$ 上で一様連続であるから，自然数 n で

$$\forall s,t\in[0,1]\left(|t-s|\leq\frac{1}{n}\Longrightarrow|\gamma(t)-\gamma(s)|<1\right)$$

を満たすものが取れる．このとき n の各要素 k で

$$\gamma*[k/n,(k+1)/n]\subset D(\gamma(k/n);1)$$

が成り立つので，

$$\alpha_k\overset{\mathrm{def}}{=\!=}\mathrm{Arg}\,(\gamma(k/n))$$

とおいて

$$[k/n,(k+1)/n]\ni t\longmapsto \mathrm{Arg}_{\alpha_k+\pi}(\gamma(t))$$

なる写像を

$$\theta_k$$

と定めれば，θ_k は $[k/n,(k+1)/n]$ 上の $\mathbf{R}$ 値連続写像であって，$[k/n,(k+1)/n]$ の任意の要素 t で

$$\gamma(t)=e^{\mathbf{i}\cdot\theta_k(t)}$$

を満たす．$[0,1]$ 上の写像 θ を

$$[0,1]\ni t\longmapsto\begin{cases}\theta_0(t) & \text{if } 0\leq t\leq\dfrac{1}{n}\\ \theta_k(t)+\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1}\left\{\theta_j((j+1)/n)-\theta_{j+1}((j+1)/n)\right\} & \text{if } 1\leq k \text{ and } \dfrac{k}{n}<t\leq\dfrac{k+1}{n}\end{cases}$$

により定めれば，θ は $[0,1]$ 上で連続である．また n の各要素 j で

$$e^{\mathbf{i}\cdot\left(\theta_j((j+1)/n)-\theta_{j+1}((j+1)/n)\right)}=\frac{e^{\mathbf{i}\cdot\theta_j((j+1)/n)}}{e^{\mathbf{i}\cdot\theta_{j+1}((j+1)/n)}}=\frac{\gamma((j+1)/n)}{\gamma((j+1)/n)}=1$$

が成り立つから，$[0,1]$ の任意の要素 t で

$$\gamma(t) = e^{\mathbf{i}\cdot\theta(t)}$$

が満たされる． ∎

γ を $[\alpha,\beta]$ 上の路として，a を $\mathrm{ran}(\gamma)$ に属さない複素数とする．このとき φ を

$$[0,1] \ni t \longmapsto \alpha + t\cdot(\beta-\alpha)$$

なる $[0,1]$ 上の写像とすると，

$$[0,1] \ni t \longmapsto \frac{\gamma(\varphi(t)) - a}{\left|\gamma(\varphi(t)) - a\right|}$$

なる写像は $[0,1]$ 上の連続写像であるから，定理 H.2.19 より，$[0,1]$ の任意の要素 t で

$$\frac{\gamma(\varphi(t)) - a}{\left|\gamma(\varphi(t)) - a\right|} = e^{\mathbf{i}\cdot\eta(t)}$$

を満たす $[0,1]$ 上の $\mathbf{R}$ 値連続写像 η が取れる．φ は $[0,1]$ から $[\alpha,\beta]$ への同相写像であるから，

$$\theta \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \eta\circ\varphi^{-1}$$

により定める θ は $[\alpha,\beta]$ 上の $\mathbf{R}$ 値連続写像であって，$[\alpha,\beta]$ の任意の要素 t で

$$\frac{\gamma(t) - a}{\left|\gamma(t) - a\right|} = \frac{\gamma(\varphi(\varphi^{-1}(t))) - a}{\left|\gamma(\varphi(\varphi^{-1}(t))) - a\right|} = e^{\mathbf{i}\cdot\eta(\varphi^{-1}(t))} = e^{\mathbf{i}\cdot\theta(t)}$$

が成立する．ここで ξ を $[\alpha,\beta]$ 上の $\mathbf{R}$ 値連続写像で，$[\alpha,\beta]$ の任意の要素 t で

$$\frac{\gamma(t) - a}{\left|\gamma(t) - a\right|} = e^{\mathbf{i}\cdot\xi(t)}$$

を満たすものとすると，定理 F.6.2 より

$$[\alpha,\beta] \ni t \longmapsto \frac{\theta(t) - \xi(t)}{2\cdot\pi}$$

は整数値で，かつ連続である．ゆえにこの写像は定数値である．ゆえに

$$\frac{\theta(\beta) - \theta(\alpha)}{2\cdot\pi} = \frac{\xi(\beta) - \xi(\alpha)}{2\cdot\pi}$$

が成立する．ちなみに，γ が閉路であるとき

$$e^{\mathbf{i}\cdot\theta(\alpha)} = \gamma(\alpha) = \gamma(\beta) = e^{\mathbf{i}\cdot\theta(\beta)}$$

が成り立つので，再び定理 F.6.2 より

$$\frac{\theta(\beta) - \theta(\alpha)}{2\cdot\pi}$$

は整数である．

定義 H.2.20 (回転数).　γ を $[\alpha, \beta]$ 上の閉路として，a を $\mathrm{ran}(\gamma)$ に属さない複素数とする．このとき $[\alpha, \beta]$ の任意の要素 t で

$$\frac{\gamma(t) - a}{|\gamma(t) - a|} = e^{\mathbf{i} \cdot \theta(t)}$$

を満たす $[\alpha, \beta]$ 上の $\mathbf{R}$ 値連続写像 θ を取って

$$\frac{\theta(\beta) - \theta(\alpha)}{2 \cdot \pi}$$

により定める整数を，γ の a 周りの**回転数 (winding number)** と呼ぶ.

閉路 γ が与えられたとき，$\mathrm{ran}(\gamma)$ に属さない複素数に対して，その周りの γ の回転数を対応させる写像を

$$\mathrm{Wnd}_\gamma$$

と書く.

本節の主題は指数と回転数が等しいということである．導入として簡単な例により確認してみる．いま

$$[0, 2 \cdot \pi] \ni \theta \longmapsto e^{\mathbf{i} \cdot \theta}$$

なる写像を γ とする．γ は 0 を中心に半径 1 の円周を描くが，このとき

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ind}_\gamma(0) &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \mathbf{i}} \cdot \int_\gamma \frac{1}{z}\, dz \\
&= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \mathbf{i}} \cdot \int_{[0, 2 \cdot \pi]} \frac{\mathbf{i} \cdot e^{\mathbf{i} \cdot \theta}}{e^{\mathbf{i} \cdot \theta}}\, d\theta \\
&= 1
\end{aligned}$$

が成り立つから，$\mathrm{Ind}_\gamma(0)$ はちょうど γ が 0 の周りを回った回数に一致する．では次に

$$[0, 4 \cdot \pi] \ni \theta \longmapsto e^{\mathbf{i} \cdot \theta}$$

なる写像を η としてみる．η も 0 を中心に半径 1 の円周を描くが，γ とは違って 0 の周りを二周する．そして

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ind}_\eta(0) &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \mathbf{i}} \cdot \int_\eta \frac{1}{z}\, dz \\
&= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \mathbf{i}} \cdot \int_{[0, 4 \cdot \pi]} \frac{\mathbf{i} \cdot e^{\mathbf{i} \cdot \theta}}{e^{\mathbf{i} \cdot \theta}}\, d\theta \\
&= 2
\end{aligned}$$

が成り立つのだから，今度もまた $\mathrm{Ind}_\eta(0)$ はちょうど η が 0 の周りを回った回数に一致した．同様に 0 の周りを 3 周する路の指数は 3 になり，4 周すれば指数は 4 になる．

定理 H.2.21 (分数関数に対する微分積分学の基本定理).　γ を $[0,1]$ 上の路とし，

$$0 \notin \mathrm{ran}(\gamma)$$

であるとする．また θ を $[0,1]$ の任意の要素 t で

$$\gamma(t) = |\gamma(t)| \cdot e^{\mathbf{i}\cdot\theta(t)}$$

を満たす $[0,1]$ 上の $\mathbf{R}$ 値連続写像とする．このとき

$$\int_{[0,1]} \frac{1}{\gamma}\, d\mu_\gamma = \mathrm{Log}\,|\gamma(1)| - \mathrm{Log}\,|\gamma(0)| + \mathbf{i}\cdot(\theta(1) - \theta(0)).$$

略証.

第一段　いま

$$[0,1] \ni t \longmapsto \mathrm{Log}\,|\gamma(t)| + \mathbf{i}\cdot\theta(t)$$

なる写像を ℓ とし，

$$[0,1] \ni t \longmapsto \frac{1}{\gamma(t)}$$

なる写像を f とし，

$$\mathbf{C} \ni z \longmapsto e^z - 1 - z$$

なる写像を ρ とし，

$$R \overset{\text{def}}{=\!=} \inf_{t\in[0,1]} |\gamma(t)|$$

とおき，

$$L \overset{\text{def}}{=\!=} |\mu_\gamma|([0,1])$$

とおく．また ϵ を任意に与えられた正の実数とする．このとき自然数 n で

$$|t-s| \leq \frac{1}{n}$$

を満たす $[0,1]$ の任意の要素 s と t に対して

$$|f(t) - f(s)| < \frac{\epsilon}{L}$$

かつ

$$\left|\rho(\ell(t) - \ell(s))\right| \leq \frac{R\cdot\epsilon}{2\cdot L} \cdot |\ell(t) - \ell(s)|$$

かつ (第二段)

$$|\ell(t) - \ell(s)| \leq \frac{2}{R} \cdot |\gamma(t) - \gamma(s)|$$

を満たす (第三段) ものが取れる．ここで

$$[0,1] \ni t \longmapsto f(0) \cdot \mathbb{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} f(k/n) \cdot \mathbb{1}_{(k/n,(k+1)/n]}(t)$$

なる写像を g とおけば

$$\left| \int_{[0,1]} f \, d\mu_\gamma - \int_{[0,1]} g \, d\mu_\gamma \right| \leq \int_{[0,1]} |f - g| \, d|\mu_\gamma| \leq \frac{\epsilon}{L} \cdot |\mu_\gamma|([0,1]) = \epsilon$$

が成り立つ．他方で

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]} g \, d\mu_\gamma &= \sum_{k=0}^{n-1} g(k/n) \cdot \mu_\gamma \left((k/n, (k+1)/n]\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma((k+1)/n) - \gamma(k/n)}{\gamma(k/n)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{\ell((k+1)/n)} - e^{\ell(k/n)}}{e^{\ell(k/n)}} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\ell((k+1)/n) - \ell(k/n)} - 1 \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\ell((k+1)/n) - \ell(k/n) + \rho\left(\ell((k+1)/n) - \ell(k/n)\right) \right] \\
&= \ell(1) - \ell(0) + \sum_{k=0}^{n-1} \rho\left(\ell((k+1)/n) - \ell(k/n)\right)
\end{aligned}$$

が成り立つので

$$\begin{aligned}
\left| \int_{[0,1]} g \, d\mu_\gamma - [\ell(1) - \ell(0)] \right| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \rho\left(\ell((k+1)/n) - \ell(k/n)\right) \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{R \cdot \epsilon}{2 \cdot L} \cdot |\ell((k+1)/n) - \ell(k/n)| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{R \cdot \epsilon}{2 \cdot L} \cdot \frac{2}{R} \cdot |\gamma((k+1)/n) - \gamma(k/n)| \\
&= \frac{\epsilon}{L} \sum_{k=0}^{n-1} |\gamma((k+1)/n) - \gamma(k/n)| \\
&\leq \epsilon
\end{aligned}$$

が成立する．ゆえに

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{[0,1]} f \, d\mu_\gamma - [\ell(1) - \ell(0)] \right| \\
&\leq \left| \int_{[0,1]} f \, d\mu_\gamma - \int_{[0,1]} g \, d\mu_\gamma \right| + \left| \int_{[0,1]} g \, d\mu_\gamma - [\ell(1) - \ell(0)] \right| \\
&\leq 2 \cdot \epsilon
\end{aligned}$$

が従い，ϵ の任意性から

$$\int_{[0,1]} f\, d\mu_\gamma = \ell(1) - \ell(0) = \mathrm{Log}\,|\gamma(1)| - \mathrm{Log}\,|\gamma(0)| + \mathbf{i} \cdot (\theta(1) - \theta(0))$$

が得られる．

第二段　正の実数 δ で，

$$|t - s| < \delta$$

を満たす $[0,1]$ の任意の要素 s と t に対して

$$\left|\rho(\ell(t) - \ell(s))\right| \leq \frac{R \cdot \epsilon}{2 \cdot L} \cdot |\ell(t) - \ell(s)|$$

を満たすものが取れる．実際，

$$\frac{\rho(z)}{z} \longrightarrow 0 \quad (z \longrightarrow 0)$$

であるから

$$\forall z \in \mathbf{C} \left(|z| < \eta \Longrightarrow |\rho(z)| < \frac{R \cdot \epsilon}{2 \cdot L} \cdot |z| \right)$$

を満たす正の実数 η が取れて，ℓ の一様連続性から正の実数 δ で，

$$|t - s| < \delta$$

を満たす $[0,1]$ の任意の要素 s と t に対して

$$|\ell(t) - \ell(s)| < \eta$$

を満たすものが取れる．

第三段　正の実数 δ で，

$$|t - s| < \delta$$

を満たす $[0,1]$ の任意の要素 s と t に対して

$$|\ell(t) - \ell(s)| \leq \frac{2}{R} \cdot |\gamma(t) - \gamma(s)|$$

を満たすものが取れる．実際，

$$\forall z \in \mathbf{C} \left(|z| < \eta \Longrightarrow |\rho(z)| < \frac{|z|}{2} \right)$$

を満たす正の実数 η が取れて，ℓ の一様連続性から正の実数 δ で，

$$|t - s| < \delta$$

を満たす $[0,1]$ の任意の要素 s と t に対して

$$|\ell(t) - \ell(s)| < \eta$$

を満たすものが取れる．このとき，s と t を

$$|t-s|<\delta$$

を満たす $[0,1]$ の要素とすれば

$$\begin{aligned}|\gamma(t)-\gamma(s)| &= \left|e^{\ell(t)}-e^{\ell(s)}\right| \\ &= |\gamma(s)|\cdot\left|e^{\ell(t)-\ell(s)}-1\right| \\ &= |\gamma(s)|\cdot\left|\ell(t)-\ell(s)+\rho(\ell(t)-\ell(s))\right|\end{aligned}$$

が成立する．ここで

$$R \leq |\gamma(s)|$$

かつ

$$\frac{|\ell(t)-\ell(s)|}{2} \leq \left|\ell(t)-\ell(s)+\rho(\ell(t)-\ell(s))\right|$$

なので

$$R\cdot\frac{|\ell(t)-\ell(s)|}{2} \leq |\gamma(t)-\gamma(s)|$$

が成立する． ∎

定理 H.2.22 (閉路の指数と回転数は一致する). α と β を $\alpha<\beta$ なる実数とし，γ を $[\alpha,\beta]$ 上の閉路とする．このとき

$$\mathrm{Ind}_\gamma = \mathrm{Wnd}_\gamma\,.$$

略証. いま a を $\mathbf{C}\setminus\mathrm{ran}(\gamma)$ の要素とする．

第一段　定義より

$$\mathrm{Ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot\mathbf{i}}\cdot\int_{[\alpha,\beta]}\frac{1}{\gamma-a}\,d\mu_\gamma$$

である．ここで

$$[\alpha,\beta]\ni t\longmapsto\gamma(t)-a$$

なる $[\alpha,\beta]$ 上の写像を η とすれば，

$$\mu_\gamma = \mu_\eta$$

が成り立つ．実際 s と t を

$$s<t$$

を満たす $[\alpha,\beta]$ の要素とすれば

$$\begin{aligned}\mu_\gamma(]s,t]) &= \gamma(t)-\gamma(s)\\ &= (\gamma(t)-a)-(\gamma(s)-a)\\ &= \eta(t)-\eta(s)\\ &= \mu_\eta(]s,t])\end{aligned}$$

が成り立つので，測度の一致の定理より

$$\mu_\gamma = \mu_\eta$$

が得られる．ゆえに

$$\int_{[\alpha,\beta]} \frac{1}{\gamma-a}\,d\mu_\gamma = \int_{[\alpha,\beta]} \frac{1}{\eta}\,d\mu_\gamma = \int_{[\alpha,\beta]} \frac{1}{\eta}\,d\mu_\eta$$

が成り立つ．

第二段　φ を

$$[0,1] \ni t \longmapsto \alpha + t\cdot(\beta-\alpha)$$

なる $[0,1]$ 上の写像とすれば

$$\int_{[\alpha,\beta]} \frac{1}{\eta}\,d\mu_\eta = \int_{[0,1]} \frac{1}{\eta\circ\varphi}\,d\mu_{\eta\circ\varphi}$$

が成立する (パラメータ区間変項，P 510)．ここで $[0,1]$ の任意の要素 t に対して

$$\frac{\eta\circ\varphi(t)}{|\eta\circ\varphi(t)|} = e^{\mathbf{i}\cdot\xi(t)}$$

を満たす，$[0,1]$ 上の $\mathbf{R}$ 値連続写像 ξ を取ると，定理 H.2.21 より

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]} \frac{1}{\eta\circ\varphi}\,d\mu_{\eta\circ\varphi} &= \mathrm{Log}\,|\eta\circ\varphi(1)| - \mathrm{Log}\,|\eta\circ\varphi(0)| + \mathbf{i}\cdot(\xi(1)-\xi(0))\\ &= \mathbf{i}\cdot(\xi(1)-\xi(0))\end{aligned}$$

が成り立つ．

第三段　$[\alpha,\beta]$ の任意の要素 t で

$$\frac{\gamma(t)-a}{|\gamma(t)-a|} = \frac{\eta(t)}{|\eta(t)|} = e^{\mathbf{i}\cdot\xi(\varphi^{-1}(t))}$$

が成り立つので，

$$\theta \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \xi\circ\varphi^{-1}$$

により $[\alpha,\beta]$ 上の $\mathbf{R}$ 値連続写像 θ を定めれば

$$\mathrm{Wnd}_\gamma(a) = \frac{\theta(\beta)-\theta(\alpha)}{2\cdot\pi} = \frac{\xi(1)-\xi(0)}{2\cdot\pi}$$

が成立する．以上より

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_\gamma(a) &= \frac{1}{2\cdot\pi\cdot\mathbf{i}}\cdot\int_{[0,1]}\frac{1}{\eta\circ\varphi}\,d\mu_{\eta\circ\varphi}\\ &= \frac{\xi(1)-\xi(0)}{2\cdot\pi}\\ &= \mathrm{Wnd}_\gamma(a)\end{aligned}$$

が得られた．∎

H.2.8　単連結

ホモトピーと単連結開集合上の Cauchy の積分定理について．

γ と η を $[0,1]$ 上の路とし，

$$0\notin\mathrm{ran}(\gamma),\quad 0\notin\mathrm{ran}(\eta)$$

であるとする．また

$$\begin{gathered}H:[0,1]\times[0,1]\longrightarrow\mathbf{C}\backslash\{0\},\\ \forall s\in[0,1]\,H(s,0)=\gamma(s),\\ \forall s\in[0,1]\,H(s,1)=\eta(s),\\ \forall t\in[0,1]\,H(1,t)=\gamma(1)=\eta(1),\\ \forall t\in[0,1]\,H(0,t)=\gamma(0)=\eta(0)\end{gathered}$$

を満たす H が取れるとする．このとき

$$\mathrm{Wnd}_\gamma(0)=\mathrm{Wnd}_\eta(0)$$

が成り立つ．実際，

$$\exp\circ F=H$$

を満たす $[0,1]\times[0,1]$ 上の $\mathbf{C}$ 値連続写像 F が取れて，特に

$$\forall s\in[0,1]\,\gamma(s)=e^{F(s,0)}$$

を満たす．すなわち

$$\forall s\in[0,1]\,\gamma(s)=|\gamma(s)|\cdot e^{\mathbf{i}\cdot\mathrm{Im}\,F(s,0)}$$

が成り立つので

$$\mathrm{Ind}_\gamma(0)=\frac{\mathrm{Log}\,|\gamma(1)|-\mathrm{Log}\,|\gamma(0)|}{2\cdot\pi\cdot\mathbf{i}}+\frac{\mathrm{Im}\,F(1,0)-\mathrm{Im}\,F(0,0)}{2\cdot\pi}$$

が成り立つ．同様に

$$\mathrm{Ind}_\eta(0)=\frac{\mathrm{Log}\,|\eta(1)|-\mathrm{Log}\,|\eta(0)|}{2\cdot\pi\cdot\mathbf{i}}+\frac{\mathrm{Im}\,F(1,1)-\mathrm{Im}\,F(0,1)}{2\cdot\pi}$$

が成り立つ．ところで

$$e^{F(0,t)} = H(0,t) = H(0,0) = e^{F(0,0)}$$

なので

$$t \longmapsto \frac{\operatorname{Im} F(0,t) - \operatorname{Im} F(0,0)}{2 \cdot \pi}$$

は連続であり整数値であり，特に $t = 0$ で 0 なのだから

$$\operatorname{Im} F(0,1) = \operatorname{Im} F(0,0)$$

が成り立つ．同様に

$$\operatorname{Im} F(1,1) = \operatorname{Im} F(1,0)$$

が成り立つ．従って

$$\mathrm{Wnd}_\gamma(0) = \frac{\operatorname{Im} F(1,0) - \operatorname{Im} F(0,0)}{2 \cdot \pi} = \frac{\operatorname{Im} F(1,1) - \operatorname{Im} F(0,1)}{2 \cdot \pi} = \mathrm{Wnd}_\eta(0)$$

が得られる．

H.2.9　零点

H.2.10　特異点

H.2.11　留数解析

H.3　調和解析

H.3.1　全微分

定義 H.3.1 (全微分).　D を $\mathbf{R}^2$ の開集合とし，(a,b) を D の要素とし，u を D 上の実数値関数とする．このとき

$$\begin{aligned}&\forall \epsilon \in \mathbf{R}_+ \, \exists \delta \in \mathbf{R}_+ \, \forall h,k \in \mathbf{R} \\ &\sqrt{h^2+k^2} < \delta \Longrightarrow \left| u(a+h,b+k) - u(a,b) - \alpha \cdot h - \beta \cdot k \right| < \epsilon \cdot \sqrt{h^2+k^2}\end{aligned} \tag{H.17}$$

を満たす実数 α と β が取れるなら，u は (a,b) において**全微分可能である (totally differentiable)** という．

(H.17) の α と β が一意に定まることを示す．定義 H.3.1 の設定の下で

$$\begin{aligned}&\forall \epsilon \in \mathbf{R}_+ \, \exists \delta \in \mathbf{R}_+ \, \forall h,k \in \mathbf{R} \\ &\sqrt{h^2+k^2} < \delta \Longrightarrow \left| u(a+h,b+k) - u(a,b) - \gamma \cdot h - \zeta \cdot k \right| < \epsilon \cdot \sqrt{h^2+k^2}\end{aligned}$$

を満たす実数 γ と ζ が取れる場合，ϵ を任意に与えられた正の実数とすると

$$\forall h,k \in \mathbf{R} \left[\sqrt{h^2+k^2} < \delta \Longrightarrow \left| u(a+h,b+k) - u(a,b) - \alpha \cdot h - \beta \cdot k \right| < \epsilon \cdot \sqrt{h^2+k^2} \right]$$

かつ

$$\forall h,k \in \mathbf{R} \left[\sqrt{h^2+k^2} < \delta \Longrightarrow \left| u(a+h,b+k) - u(a,b) - \gamma \cdot h - \zeta \cdot k \right| < \epsilon \cdot \sqrt{h^2+k^2} \right]$$

を満たす正の実数 δ が取れるが，このとき

$$|h| < \delta$$

ならば

$$|u(a+h,b) - u(a,b) - \alpha \cdot h| < \epsilon \cdot |h| \tag{H.18}$$

かつ

$$\left|u(a+h,b) - u(a,b) - \gamma \cdot h\right| < \epsilon \cdot |h|$$

が成り立つので

$$\left|\alpha \cdot h - \gamma \cdot h\right| < \epsilon \cdot |h|$$

が従う．すなわち

$$\left|\alpha - \gamma\right| < \epsilon$$

が従う．そして ϵ の任意性より

$$\alpha = \gamma$$

が出る．同様にして

$$\beta = \zeta$$

も得られる．また (H.18) は u が第一変数に関して微分可能であることを示している．これについて

定義 H.3.2 (偏微分).　D を $\mathbf{R}^2$ の開集合とし，(a,b) を D の要素とし，u を D 上の実数値関数とする．このとき

$$\forall \epsilon \in \mathbf{R}_{+} \, \exists \delta \in \mathbf{R}_{+} \, \forall h \in \mathbf{R} \left[\, |h| < \delta \Longrightarrow |u(a+h,b) - u(a,b) - \alpha \cdot h| < \epsilon \cdot |h| \,\right]$$

を満たす実数 α が取れるなら，u は (a,b) において第一変数に関して**偏微分可能である (partially differentiable)** という．同様に

$$\forall \epsilon \in \mathbf{R}_{+} \, \exists \delta \in \mathbf{R}_{+} \, \forall k \in \mathbf{R} \left[\, |k| < \delta \Longrightarrow \left|u(a,b+k) - u(a,b) - \beta \cdot k\right| < \epsilon \cdot |k| \,\right]$$

を満たす実数 β が取れるなら，u は (a,b) において第二変数に関して偏微分可能であるという．

以上をまとめると

定理 H.3.3 (全微分可能なら偏微分可能). D を $\mathbf{R}^2$ の開集合とし，(a,b) を D の要素とし，u を D 上の実数値関数とする．u が (a,b) で全微分可能であるとき，u は第一変数と第二変数に関して (a,b) で偏微分可能であって，そして

$$\partial_1 u(a,b) \overset{\text{def}}{=\!=} \lim_{h\to 0} \frac{u(a+h,b)-u(a,b)}{h}$$

および

$$\partial_2 u(a,b) \overset{\text{def}}{=\!=} \lim_{k\to 0} \frac{u(a,b+k)-u(a,b)}{k}$$

とおけば

$$\begin{aligned}&\forall \epsilon \in \mathbf{R}_+\ \exists \delta \in \mathbf{R}_+\ \forall h,k \in \mathbf{R}\\ &\sqrt{h^2+k^2} < \delta \Longrightarrow |u(a+h,b+k)-u(a,b)-\partial_1 u(a,b)\cdot h - \partial_2 u(a,b)\cdot k| < \epsilon \cdot \sqrt{h^2+k^2}\end{aligned}$$

が成立する．

第一変数と第二変数に関して偏微分可能であるからといって全微分可能であるとは限らないが，偏導関数が局所的に存在して連続であれば全微分可能である．

定理 H.3.4 (偏導関数が連続であれば全微分可能). D を $\mathbf{R}^2$ の開集合とし，(a,b) を D の要素とし，u を D 上の実数値関数とする．また u は D の各要素において第一変数と第二変数に関して偏微分可能であるとし，その偏導関数をそれぞれ $\partial_1 u, \partial_2 u$ と書く．このとき，$\partial_1 u$ と $\partial_2 u$ が (a,b) において連続であれば u は (a,b) において全微分可能である．

略証． いま ϵ を任意に与えられた正の実数とする．$\partial_1 u$ と $\partial_2 u$ は (a,b) で連続であるから，任意の実数 h と k に対して

$$\sqrt{h^2+k^2} < \delta \Longrightarrow |\partial_1 u(a+h,b+k) - \partial_1 u(a,b)| < \frac{\epsilon}{2}$$

かつ

$$\sqrt{h^2+k^2} < \delta \Longrightarrow |\partial_2 u(a+h,b+k) - \partial_2 u(a,b)| < \frac{\epsilon}{2}$$

を満たす正の実数 δ が取れる．ここで h と k を

$$\sqrt{h^2+k^2} < \delta$$

を満たす実数とすると，平均値の定理より

$$0 < \theta < 1$$

かつ

$$u(a+h,b+k) - u(a,b+k) = \partial_1 u(a+\theta\cdot h, b+k)\cdot h$$

を満たす実数 θ と，

$$0 < \eta < 1$$

かつ

$$u(a, b+k) - u(a, b) = \partial_2 u(a, b+\eta\cdot k)\cdot k$$

を満たす実数 η が取れて，このとき

$$\begin{aligned}
&|u(a+h, b+k) - u(a, b) - \partial_1 u(a, b)\cdot h - \partial_2 u(a, b)\cdot k|\\
&= |u(a+h, b+k) - u(a, b+k) - \partial_1 u(a, b)\cdot h + u(a, b+k) - u(a, b) - \partial_2 u(a, b)\cdot k|\\
&= \left|\partial_1 u(a+\theta\cdot h, b+k)\cdot h - \partial_1 u(a, b)\cdot h + \partial_2 u(a, b+\eta\cdot k)\cdot k - \partial_2 u(a, b)\cdot k\right|\\
&< \frac{\epsilon}{2}\cdot|h| + \frac{\epsilon}{2}\cdot|k|\\
&\leq \epsilon\cdot\sqrt{h^2+k^2}
\end{aligned}$$

が成立する．ゆえに u は (a, b) において全微分可能である． ∎

H.3.2　Cauchy-Riemann 方程式

いま，Ω を $\mathbf{C}$ の空でない開集合とし，f を Ω 上の複素数値関数とし，ζ を Ω の要素とし，a と b を

$$\zeta = a + \mathbf{i}\cdot b$$

を満たす実数とする．ここで

$$\mathbf{R}^2 \ni (x, y) \longmapsto x + \mathbf{i}\cdot y$$

なる関係により定める写像を φ とすると，φ は $\mathbf{R}^2$ から $\mathbf{C}$ への同相写像であるから

$$D \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{\varphi^{-1}(z) \mid \quad z\in\Omega\right\}$$

で定める D は $\mathbf{R}^2$ の開集合である．また

$$D \ni (x, y) \longmapsto \operatorname{Re} f(x+\mathbf{i}\cdot y)$$

なる写像を u とし，

$$D \ni (x, y) \longmapsto \operatorname{Im} f(x+\mathbf{i}\cdot y)$$

なる写像を v とすると，その定め方より Ω の任意の要素 z に対して

$$f(z) = u(\varphi^{-1}(z)) + \mathbf{i}\cdot v(\varphi^{-1}(z))$$

が成立する．同じことであるが，D の任意の要素 (x, y) に対して

$$f(x+\mathbf{i}\cdot y) = u(x, y) + \mathbf{i}\cdot v(x, y)$$

も成立する．

この設定の下で，u と v が (a, b) で全微分可能であるとき

$$\partial_1 u(a, b) \overset{\text{def}}{=\!=} \lim_{h\to 0}\frac{u(a+h, b) - u(a, b)}{h}$$

および

$$\partial_2 u(a,b) \overset{\text{def}}{=\!=} \lim_{k\to 0} \frac{u(a,b+k)-u(a,b)}{k}$$

と定めて，同様に $\partial_1 v(a,b)$ と $\partial_2 v(a,b)$ を定める．このとき

$$\partial_1 u(a,b) + \mathbf{i}\cdot\partial_1 v(a,b) = \partial_2 v(a,b) - \mathbf{i}\cdot\partial_2 u(a,b)$$

を **Cauchy-Riemann 方程式**と呼ぶ．

定理 H.3.5 (微分可能であることと Cauchy-Riemann 方程式). 記号は全て上で設定したものとする．f が ζ で微分可能であることと，u と v が共に (a,b) で全微分可能であってかつ Cauchy-Riemann 方程式が成り立つことは同値である．また f が ζ で微分可能であるとき，その微分係数を $f'(\zeta)$ と書けば

$$\begin{aligned} f'(\zeta) &= \partial_1 u(a,b) + \mathbf{i}\cdot\partial_1 v(a,b) \\ &= \partial_2 v(a,b) - \mathbf{i}\cdot\partial_2 u(a,b). \end{aligned}$$

略証.

第一段　f が ζ で微分可能であるとする．すると

$$\begin{gathered} \forall \epsilon \in \mathbf{R}_+\, \exists \delta \in \mathbf{R}_+\, \forall h \in \mathbf{C} \\ \left[\, |h| < \delta \Longrightarrow \left| f(\zeta+h) - f(\zeta) - (\alpha+\mathbf{i}\cdot\beta)\cdot h \right| < \epsilon\cdot|h| \,\right] \end{gathered}$$

を満たす実数 α と β が取れる．また，h と k を実数とすれば

$$\begin{aligned} & f(\zeta+(h+\mathbf{i}\cdot k)) - f(\zeta) - (\alpha+\mathbf{i}\cdot\beta)\cdot(h+\mathbf{i}\cdot k) \\ &= \left\{ u(a+h,b+k) - u(a,b) - \alpha\cdot h + \beta\cdot k \right\} \\ &\quad + i\cdot\left\{ v(a+h,b+k) - v(a,b) - \beta\cdot h - \alpha\cdot k \right\} \end{aligned} \tag{H.19}$$

が成り立つ．いま ϵ を任意に与えられた正の実数とする．

$$\forall h \in \mathbf{C}\ \left[\, |h| < \delta \Longrightarrow \left| f(\zeta+h) - f(\zeta) - (\alpha+\mathbf{i}\cdot\beta)\cdot h \right| < \epsilon\cdot|h| \,\right]$$

を満たす正の実数 δ を取ると，任意の実数 h と k に対して

$$\sqrt{h^2+k^2} < \delta$$

ならば

$$\begin{aligned} & \left| u(a+h,b+k) - u(a,b) - \alpha\cdot h + \beta\cdot k \right| \\ & \leq \left| f(\zeta+(h+\mathbf{i}\cdot k)) - f(\zeta) - (\alpha+\mathbf{i}\cdot\beta)\cdot(h+\mathbf{i}\cdot k) \right| && \text{(H.19) より} \\ & < \epsilon\cdot\sqrt{h^2+k^2} \end{aligned}$$

が成立する．ゆえに u は (a,b) において全微分可能である．同様に任意の実数 h と k に対して

$$\begin{aligned} \sqrt{h^2+k^2} < \delta \Longrightarrow & \left| v(a+h,b+k) - v(a,b) - \beta\cdot h - \alpha\cdot k \right| \\ & < \epsilon\cdot\sqrt{h^2+k^2} \end{aligned}$$

も成り立つので，v もまた (a,b) において全微分可能である．そして

$$\partial_1 u(a,b) = \alpha = \partial_2 v(a,b)$$

かつ

$$\partial_2 u(a,b) = -\beta = -\partial_1 v(a,b)$$

が成り立つ．

第二段　u と v が (a,b) で全微分可能であって，かつ

$$\partial_1 u(a,b) = \partial_2 v(a,b)$$

と

$$\partial_2 u(a,b) = -\partial_1 v(a,b)$$

が成り立っているとき，f が ζ で微分可能であることを示す．いま ϵ を任意に与えられた正の実数とする．すると，任意の複素数 h に対して

$$\begin{aligned}&|h| < \delta_1 \\ &\Longrightarrow \left|u(\varphi^{-1}(\zeta+h)) - u(\varphi^{-1}(\zeta)) - \partial_1 u(a,b)\cdot \operatorname{Re} h - \partial_2 u(a,b)\cdot \operatorname{Im} h\right| < \epsilon\cdot|h|\end{aligned}$$

を満たす正の実数 δ_1 と，

$$\begin{aligned}&|h| < \delta_2 \\ &\Longrightarrow \left|v(\varphi^{-1}(\zeta+h)) - v(\varphi^{-1}(\zeta)) - \partial_1 v(a,b)\cdot \operatorname{Re} h - \partial_2 v(a,b)\cdot \operatorname{Im} h\right| < \epsilon\cdot|h|\end{aligned}$$

を満たす正の実数 δ_2 が取れる．ここで Cauchy-Riemann の関係式から

$$\begin{aligned}&|h| < \delta_1 \\ &\Longrightarrow \left|u(\varphi^{-1}(\zeta+h)) - u(\varphi^{-1}(\zeta)) - \partial_1 u(a,b)\cdot \operatorname{Re} h + \partial_1 v(a,b)\cdot \operatorname{Im} h\right| < \epsilon\cdot|h|\end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned}&|h| < \delta_2 \\ &\Longrightarrow \left|v(\varphi^{-1}(\zeta+h)) - v(\varphi^{-1}(\zeta)) - \partial_1 v(a,b)\cdot \operatorname{Re} h - \partial_1 u(a,b)\cdot \operatorname{Im} h\right| < \epsilon\cdot|h|\end{aligned}$$

が成り立つので，任意の複素数 h に対して

$$|h| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$$

ならば

$$\begin{aligned}&\left|f(\zeta+h) - f(\zeta) - (\partial_1 u(a,b) + \mathbf{i}\cdot\partial_1 v(a,b))\cdot h\right| \\ &\leq \left|u(\varphi^{-1}(\zeta+h)) - u(\varphi^{-1}(\zeta)) - \partial_1 u(a,b)\cdot \operatorname{Re} h + \partial_1 v(a,b)\cdot \operatorname{Im} h\right| \\ &\quad + \left|v(\varphi^{-1}(\zeta+h)) - v(\varphi^{-1}(\zeta)) - \partial_1 v(a,b)\cdot \operatorname{Re} h - \partial_1 u(a,b)\cdot \operatorname{Im} h\right| \\ &< 2\cdot\epsilon\cdot|h|\end{aligned}$$

が成立する．ゆえに f は ζ で微分可能である．　■

u と v が (a,b) において第一変数に関して偏微分可能であるとき，$f\circ\varphi$ もまた (a,b) において第一変数に関して偏微分可能であって

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\varphi(a+h,b))-f(\varphi(a,b))}{h}=\partial_1 u(a,b)+\mathbf{i}\cdot\partial_1 v(a,b) \tag{H.20}$$

が成立する．実際，ϵ を任意に与えられた正の実数とすると

$$|h|<\delta \Longrightarrow |u(a+h,b)-u(a,b)-h\cdot\partial_1 u(a,b)|<\frac{\epsilon}{2}\cdot|h|$$

かつ

$$|h|<\delta \Longrightarrow |v(a+h,b)-v(a,b)-h\cdot\partial_1 v(a,b)|<\frac{\epsilon}{2}\cdot|h|$$

を満たす正の実数 δ が取れるので，任意の複素数 h に対して

$$|h|<\delta$$

であれば

$$\begin{aligned}&\left|f(\varphi(a+h,b))-f(\varphi(a,b))-h\cdot(\partial_1 u(a,b)+\mathbf{i}\cdot\partial_1 v(a,b))\right|\\&\le|u(a+h,b)-u(a,b)-h\cdot\partial_1 u(a,b)|+|v(a+h,b)-v(a,b)-h\cdot\partial_1 v(a,b)|\\&<\epsilon\cdot|h|\end{aligned}$$

が成立する．逆に $f\circ\varphi$ が (a,b) において第一変数に関して偏微分可能であるなら u と v も (a,b) において第一変数に関して偏微分可能であって，そのとき (H.20) が成立する．実際，

$$\alpha+\mathbf{i}\cdot\beta=\lim_{h\to 0}\frac{f(\varphi(a+h,b))-f(\varphi(a,b))}{h}$$

を満たす実数 α と β を取ると，ϵ を任意に与えられた正の実数とすると

$$|h|<\delta \Longrightarrow \left|f(\varphi(a+h,b))-f(\varphi(a,b))-(\alpha+\mathbf{i}\cdot\beta)\cdot h\right|<\epsilon\cdot|h|$$

を満たす正の実数 δ が取れる．ここで

$$|h|<\delta$$

を満たす複素数 h に対して

$$\begin{aligned}&f(\varphi(a+h,b))-f(\varphi(a,b))-(\alpha+\mathbf{i}\cdot\beta)\cdot h\\&=\{u(a+h,b)-u(a,b)-\alpha\cdot h\}+\mathbf{i}\cdot\left\{v(a+h,b)-v(a,b)-\beta\cdot h\right\}\end{aligned}$$

が成り立つので，

$$|u(a+h,b)-u(a,b)-\alpha\cdot h|<\epsilon\cdot|h|$$

と

$$\left|v(a+h,b)-v(a,b)-\beta\cdot h\right|<\epsilon\cdot|h|$$

が従う．同様に，u と v が (a,b) において第二変数に関して偏微分可能であることと $f\circ\varphi$ が (a,b) において第二変数に関して偏微分可能であることは同値であって，いずれの場合も

$$\lim_{k\to 0}\frac{f(\varphi(a,b+k))-f(\varphi(a,b))}{k}=\partial_2 u(a,b)+\mathbf{i}\cdot\partial_2 v(a,b)$$

が成立する．ここで $f \circ \varphi$ が (a, b) において第一変数に関して偏微分可能であるとき

$$\partial_1(f \circ \varphi)(a, b) \overset{\text{def}}{=\!=} \lim_{h \to 0} \frac{f(\varphi(a+h, b)) - f(\varphi(a, b))}{h}$$

と定めて，$f \circ \varphi$ が (a, b) において第二変数に関して偏微分可能であるとき

$$\partial_2(f \circ \varphi)(a, b) \overset{\text{def}}{=\!=} \lim_{k \to 0} \frac{f(\varphi(a, b+k)) - f(\varphi(a, b))}{k}$$

と定めることにすると，Cauchy-Riemann 方程式は

$$\partial_1(f \circ \varphi)(a, b) + \mathbf{i} \cdot \partial_2(f \circ \varphi)(a, b) = 0$$

と書き換えられる．ここで定理 H.3.5 の主張と併せて整理すると，

f が ζ で微分可能であるとき

u と v は (a, b) で全微分可能であり Cauchy-Riemann 方程式が成立するので，$f \circ \varphi$ は (a, b) で第一変数と第二変数に関して偏微分可能であって

$$\partial_1(f \circ \varphi)(a, b) + \mathbf{i} \cdot \partial_2(f \circ \varphi)(a, b) = 0$$

が成立する．

しかし $f \circ \varphi$ が (a, b) で第一変数と第二変数に関して偏微分可能であって

$$\partial_1(f \circ \varphi)(a, b) + \mathbf{i} \cdot \partial_2(f \circ \varphi)(a, b) = 0$$

が成立しているからといって，u と v が (a, b) で全微分可能であるとは限らない．定理 H.3.4 より，u と v が (a, b) で全微分可能であるためには $\partial_1 u, \partial_2 u, \partial_1 v, \partial_2 v$ が全て (a, b) で連続であれば十分である．ところで，(x, y) を D の要素とするとき，$f \circ \varphi$ が (x, y) において第一変数に関して偏微分可能であれば

$$\partial_1(f \circ \varphi)(x, y) = \partial_1 u(x, y) + \mathbf{i} \cdot \partial_1 v(x, y)$$

が成立し，$f \circ \varphi$ が (x, y) において第二変数に関して偏微分可能であれば

$$\partial_2(f \circ \varphi)(x, y) = \partial_2 u(x, y) + \mathbf{i} \cdot \partial_2 v(x, y)$$

が成立する．よって $f \circ \varphi$ が D の各点で第一変数と第二変数に関して偏微分可能であって，かつ第一変数と第二変数に関する偏導関数が共に (a, b) で連続であれば，u と v は共に (a, b) で全微分可能である．更にこのとき

$$\partial_1(f \circ \varphi)(a, b) + \mathbf{i} \cdot \partial_2(f \circ \varphi)(a, b) = 0$$

が満たされていれば Cauchy-Riemann の方程式も満たされるので，f は ζ で微分可能である．

以上の結果をまとめると

定理 H.3.6 (微分可能性と連続偏微分可能性). 記号は全て上で設定したものとする．このとき，

- f が ζ で微分可能であるならば，$f\circ\varphi$ は (a,b) で第一変数と第二変数に関して偏微分可能であって

$$\partial_1(f\circ\varphi)(a,b)+\mathbf{i}\cdot\partial_2(f\circ\varphi)(a,b)=0$$

  が成り立つ．
- $f\circ\varphi$ が D の各点で第一変数と第二変数に関して偏微分可能であって，その偏導関数 $\partial_1(f\circ\varphi)$ と $\partial_2(f\circ\varphi)$ が共に (a,b) で連続であり，かつ

$$\partial_1(f\circ\varphi)(a,b)+\mathbf{i}\cdot\partial_2(f\circ\varphi)(a,b)=0$$

  を満たすならば，f は ζ で微分可能である．

定理 H.3.7 (偏導関数が全微分可能なら偏微分は順序を替えても等しい). D を $\mathbf{R}^2$ の開集合とし，(a,b) を D の要素とし，u を D 上の実数値関数とする．また u は D の各要素で第一変数と第二変数それぞれに関して偏微分可能であるとし，u の第一変数に関する導関数を $\partial_1 u$ とし，第二変数に関する導関数を $\partial_2 u$ とする．このとき，$\partial_1 u$ と $\partial_2 u$ が共に (a,b) で全微分可能であるならば

$$\partial_1\partial_2 u(a,b)=\partial_2\partial_1 u(a,b)$$

が成り立つ．ただし $\partial_1\partial_2 u(a,b)$ と $\partial_2\partial_1 u(a,b)$ は

$$\partial_1\partial_2 u(a,b)\overset{\text{def}}{=\!=}\lim_{h\to 0}\frac{\partial_2 u(a+h,b)-\partial_2 u(a,b)}{h}$$

および

$$\partial_2\partial_1 u(a,b)\overset{\text{def}}{=\!=}\lim_{k\to 0}\frac{\partial_1 u(a,b+k)-\partial_1 u(a,b)}{k}$$

で定められた実数である．

略証． いま ϵ を任意に与えられた正の実数とする．D は開集合であるから，任意の実数 h と k に対して

$$\sqrt{h^2+k^2}<r\Longrightarrow(a+h,b+k)\in D$$

を満たす正の実数 r が取れる．ここで

$$\sqrt{h^2+k^2}<r$$

を満たす実数 h と k に対して

$$\Delta(h,k)\overset{\text{def}}{=\!=}\{u(a+h,b+k)-u(a+h,b)\}-\{u(a,b+k)-u(a,b)\}$$

とおく．$\Delta(h,k)$ とは

$$(a,a+h)\ni x\longmapsto u(x,b+k)-u(x,b)$$

なる写像の差であるから，平均値の定理より

$$0<\theta<1$$

かつ

$$\Delta(h,k) = h \cdot [\{\partial_1 u(a+\theta\cdot h, b+k) - \partial_1 u(a+\theta\cdot h, b)\} - \{\partial_1 u(a, b+k) - \partial_1 u(a,b)\}]$$

を満たす実数 θ が取れる．また $\partial_1 u$ の全微分可能性より

$$\begin{aligned}&\sqrt{h^2+k^2} < \delta_1\\ &\Longrightarrow |\partial_1 u(a+\theta\cdot h, b+k) - \partial_1 u(a,b) - \partial_1\partial_1 u(a,b)\cdot(\theta\cdot h) - \partial_2\partial_1 u(a,b)\cdot k| < \epsilon\cdot\sqrt{h^2+k^2}\end{aligned}$$

を満たす正の実数 $\delta_1(< r)$ と，

$$\begin{aligned}&|h| < \delta_2\\ &\Longrightarrow |\partial_1 u(a+\theta\cdot h, b) - \partial_1 u(a,b) - \partial_1\partial_1 u(a,b)\cdot(\theta\cdot h)| < \epsilon\cdot|h|\end{aligned}$$

を満たす正の実数 $\delta_2(< r)$ が取れるので，

$$\delta \overset{\text{def}}{=\!=} \min\{\delta_1, \delta_2\}$$

とおけば

$$\sqrt{h^2+k^2} < \delta$$

を満たす任意の実数 h と k に対して

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\Delta(h,k)}{h} - \partial_2\partial_1 u(a,b)\cdot k\right|\\ &\leq |\partial_1 u(a+\theta\cdot h, b+k) - \partial_1 u(a,b) - \partial_1\partial_1 u(a,b)\cdot(\theta\cdot h) - \partial_2\partial_1 u(a,b)\cdot k|\\ &\quad + |\partial_1 u(a+\theta\cdot h, b) - \partial_1 u(a,b) - \partial_1\partial_1 u(a,b)\cdot(\theta\cdot h)|\\ &< 2\cdot\epsilon\cdot\sqrt{h^2+k^2}\end{aligned}$$

が成立する．他方で

$$\Delta(h,k) = \{u(a+h, b+k) - u(a, b+k)\} - \{u(a+h, b) - u(a,b)\}$$

も成り立つので，上の内容で第一変数と第二変数の立場を入れ替えれば

$$\sqrt{h^2+k^2} < \eta \Longrightarrow \left|\frac{\Delta(h,k)}{k} - \partial_1\partial_2 u(a,b)\cdot h\right| < 2\cdot\epsilon\cdot\sqrt{h^2+k^2}$$

を満たす正の実数 η が取れる．従って，

$$\sqrt{2}\cdot|h| < \min\{\delta, \eta\}$$

を満たす任意の正の実数 h に対して

$$\begin{aligned}|\partial_2\partial_1 u(a,b)\cdot h - \partial_1\partial_2 u(a,b)\cdot h| &\leq \left|\frac{\Delta(h,k)}{h} - \partial_2\partial_1 u(a,b)\cdot h\right| + \left|\frac{\Delta(h,k)}{h} - \partial_1\partial_2 u(a,b)\cdot h\right|\\ &< 4\cdot\sqrt{2}\cdot\epsilon\cdot|h|\end{aligned}$$

が成立する．よって

$$|\partial_2\partial_1 u(a,b) - \partial_1\partial_2 u(a,b)| < 4\cdot\sqrt{2}\cdot\epsilon$$

が従い，ϵ は任意に与えられていたので

$$\partial_2\partial_1 u(a,b) = \partial_1\partial_2 u(a,b)$$

が出る． ∎

H.4　note

関数論の積分定理までの流れは Rudin の Real and Complex Analysis の 10 章を参考にしたが，Rudin との違いは，本稿では積分路の微分可能性を外して，つまり連続性と有界変動性のみを仮定した下で，関数論の特に和書にはあまり見られない回転数と指数の繋がりを精密に分析し，Ahlfors や Rudin の流儀の “スマートな論理展開” を実現し (かけ) ているところである．回転数については，偏角の連続選択定理は Beardon の Complex Analysis7 章を，回転数と指数が一致することの証明は MathStackExchange に助けてもらった．Cauchy-Riemann 方程式については礒祐介複素関数論入門を主に参考にした．

付録 I

確率論メモ

I.1 条件付期待値

定義 I.1.1 (条件付期待値). $(X, \mathscr{F}, \mu)$ を測度空間，$f \in L^1(\mu)$ とする．部分 σ-加法族 $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ に対し $\nu := \mu|_{\mathscr{G}}$ が σ-有限であるとき，

$$\lambda(A) := \int_A f \, d\mu, \quad (\forall A \in \mathscr{G})$$

により $(X, \mathscr{G})$ 上に複素測度 λ が定まり，$\lambda \ll \nu$ であるから Lebesgue-Radon-Nikodym の定理より

$$\lambda(A) = \int_A g \, d\nu, \quad (\forall A \in \mathscr{G})$$

を満たす $g \in L^1(\nu) = L^1(X, \mathscr{G}, \nu)$ が唯一つ存在する．この g を $\mathscr{G}$ で条件付けた f の条件付期待値と呼び

$$g = E\left(f \middle| \mathscr{G}\right)$$

と書く．

$f \in \mathscr{L}^1(\mu)$ が μ-a.e. に $\mathbf{R}$ 値なら λ は正値測度となるから，定理 G.2.9 より $E\left(f \middle| \mathscr{G}\right)$ も ν-a.e. に $\mathbf{R}$ 値となる．

補題 I.1.2 (凸関数の片側微係数の存在). 任意の凸関数 $\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ には各点で左右の微係数が存在する．特に，凸関数は連続であり，すなわち Borel 可測である．

証明. 凸性より任意の $x < y < z$ に対して

$$\frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x} \leq \frac{\varphi(z) - \varphi(x)}{z - x} \leq \frac{\varphi(z) - \varphi(y)}{z - y}$$

が満たされる．従って，x を固定すれば，x に単調減少に近づく任意の点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ に対し

$$\left(\frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x}\right)_{n=1}^{\infty}$$

は下に有界な単調減少列となり下限が存在する．x に単調減少に近づく別の点列 $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ を取れば

$$\inf_{k \in \mathbf{N}} \frac{f(y_k) - f(x)}{y_k - x} \leq \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

より

$$\inf_{k \in \mathbf{N}} \frac{f(y_k) - f(x)}{y_k - x} \leq \inf_{n \in \mathbf{N}} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x}$$

が成立し，$(x_n), (y_k)$ の立場を変えれば逆向きの不等号も得られる．すなわち極限は点列に依らず確定し，φ は x で右側微係数を持つ．同様に左側微係数も存在し，特に φ の連続性及び Borel 可測性が従う． ∎

定理 I.1.3 (Jensen の不等式). $(X, \mathscr{F}, \mu)$ を測度空間，$\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ を部分 σ-加法族とし，$\mu|_{\mathscr{G}}$ が σ-有限であるとする．このとき，任意の $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測関数 f と凸関数 $\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ に対し，$f, \varphi \circ f$ が μ-可積分なら次が成立する:

$$\varphi \circ E\left(f \middle| \mathscr{G}\right) \leq E\left(\varphi \circ f \middle| \mathscr{G}\right).$$

証明. φ は各点 $x \in \mathbf{R}$ で右側接線を持つから，それを $\mathbf{R} \ni t \longmapsto a_x t + b_x$ と表せば，

$$\varphi(t) = \sup_{r \in \mathbf{Q}} \{a_r t + b_r\} \quad (\forall t \in \mathbf{R}) \tag{I.1}$$

が成立する．よって任意の $r \in \mathbf{Q}$ に対して

$$\varphi(f(x)) \geq a_r f(x) + b_r$$

が満たされるから

$$E\left(\varphi(f) \middle| \mathscr{G}\right) \geq a_r E\left(f \middle| \mathscr{G}\right) + b_r \quad \mu\text{-a.e.}, \quad \forall r \in \mathbf{Q}$$

が従い，各 $r \in \mathbf{Q}$ に対し

$$N_r := \left\{ x \in X \mid \quad E\left(\varphi(f) \middle| \mathscr{G}\right)(x) < a_r E\left(f \middle| \mathscr{G}\right)(x) + b_r \right\}$$

とおけば $\mu(N_r) = 0$ かつ

$$E\left(\varphi(f) \middle| \mathscr{G}\right)(x) \geq a_r E\left(f \middle| \mathscr{G}\right)(x) + b_r, \quad \forall r \in \mathbf{Q},\ x \notin \bigcup_{r \in \mathbf{Q}} N_r$$

となる．r の任意性と (I.1) より

$$E\left(\varphi(f) \middle| \mathscr{G}\right) \geq \varphi\left(E\left(f \middle| \mathscr{G}\right)\right), \quad \mu\text{-a.e.}$$

が得られる． ∎

定理 I.1.4 (条件付き期待値の性質). $(X, \mathscr{F}, \mu)$ を測度空間，$\mathscr{H}, \mathscr{G}$ を $\mathscr{H} \subset \mathscr{G}$ を満たす $\mathscr{F}$ の部分 σ-加法族とし，$\theta \coloneqq \mu|_{\mathscr{H}}, \gamma \coloneqq \mu|_{\mathscr{G}}$ がそれぞれ σ-有限測度であるとする．このとき以下が成立する:

(1)　$E(\cdot|\mathscr{G})$ は $L^1(X, \mathscr{F}, \mu)$ から $L^1\left(X, \mathscr{G}, \gamma\right)$ への有界線形作用素であり，次を満たす:

$$|E\left(f \middle| \mathscr{G}\right)| \leq E\left(|f| \middle| \mathscr{G}\right), \quad (\forall f \in L^1(\mu)). \tag{I.2}$$

(2)　$f \in L^1(\mu),\ g \in L^0(\gamma)$ に対して，$gf \in L^1(\mu)$ なら $gE\left(f \middle| \mathscr{G}\right) \in L^1(\gamma)$ であり

$$E\left(gf \middle| \mathscr{G}\right) = gE\left(f \middle| \mathscr{G}\right). \tag{I.3}$$

(3)　$f \in L^1(\mu)$ に対して

$$E\left(E\left(f \middle| \mathscr{G}\right) \middle| \mathscr{H}\right) = E\left(f \middle| \mathscr{H}\right).$$

(4)　$f \in L^1(\mu) \cap L^p(\mu)$ に対し，$1 \leq p < \infty$ のとき

$$\left|E\left(f \middle| \mathscr{G}\right)\right|^p \leq E\left(|f|^p \middle| \mathscr{G}\right)$$

が満たされ，$1 \leq p \leq \infty$ のとき

$$\left\| E\left(f \middle| \mathscr{G}\right) \right\|_{L^p(\gamma)} \leq \|f\|_{L^p(\mu)} \tag{I.4}$$

も成立する．すなわち $E(\cdot|\mathscr{G})$ は $L^1(\mu) \cap L^p(\mu)$ から $L^1(\gamma) \cap L^p(\gamma)$ への有界線形作用素である．

証明.

(1)　任意の $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{C},\ f_1, f_2 \in L^1(\mu)$ と $A \in \mathscr{G}$ に対して

$$\begin{aligned}\int_A E\left(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \middle| \mathscr{G}\right)\ d\gamma &= \int_A \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2\ d\mu = \alpha_1 \int_A f_1\ d\mu + \alpha_2 \int_A f_2\ d\mu \\ &= \alpha_1 \int_A E\left(f_1 \middle| \mathscr{G}\right)\ d\gamma + \alpha_2 \int_A E\left(f_2 \middle| \mathscr{G}\right)\ d\gamma = \int_A \alpha_1 E\left(f_1 \middle| \mathscr{G}\right) + \alpha_2 E\left(f_2 \middle| \mathscr{G}\right)\ d\gamma\end{aligned}$$

が成立するから，$L^1(\nu)$ で

$$E\left(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \middle| \mathscr{G}\right) = \alpha_1 E\left(f_1 \middle| \mathscr{G}\right) + \alpha_2 E\left(f_2 \middle| \mathscr{G}\right)$$

となり $E(\cdot|\mathscr{G})$ の線型性が出る．いま，$f \in L^1(\mu),\ g \in L^\infty(\gamma)$ に対して

$$E\left(gf \middle| \mathscr{G}\right) = gE\left(f \middle| \mathscr{G}\right). \tag{I.5}$$

が成り立つことを示す．実際，任意の $A, B \in \mathscr{G}$ に対して

$$\int_A \mathbb{1}_B f\ d\mu = \int_{A \cap B} f\ d\mu = \int_{A \cap B} E\left(f \middle| \mathscr{G}\right)\ d\gamma = \int_A \mathbb{1}_B E\left(f \middle| \mathscr{G}\right)\ d\gamma$$

となるから，g の単関数近似列 $(g_n)_{n=1}^\infty$，$\left(g_n \in L^\infty(\gamma), |g_n| \leq |g|\right)$ に対して

$$\int_A g_n f\ d\mu = \int_A g_n E\left(f \middle| \mathscr{G}\right)\ d\gamma, \quad (\forall n \geq 1)$$

が成り立ち，$gf \in L^1(\mu)$ かつ $gE\left(f \,\middle|\, \mathscr{G}\right) \in L^1(\gamma)$ であるから Lebesgue の収束定理より

$$\int_A gE\left(f \,\middle|\, \mathscr{G}\right)\, d\gamma = \int_A gf\, d\mu = \int_A E\left(gf \,\middle|\, \mathscr{G}\right)\, d\gamma$$

が従い (I.5) が得られる．ここで $f \in L^1(\mu)$ に対し

$$\alpha := 1\!\!1_{\{E(f|\mathscr{G}) \neq 0\}} \frac{\overline{E\left(f \,\middle|\, \mathscr{G}\right)}}{|E\left(f \,\middle|\, \mathscr{G}\right)|}$$

により $\alpha \in L^\infty(\gamma)$ を定めれば，任意の $A \in \mathscr{G}$ に対して

$$\begin{aligned}\int_A |E\left(f \,\middle|\, \mathscr{G}\right)|\, d\gamma &= \int_A \alpha E\left(f \,\middle|\, \mathscr{G}\right)\, d\gamma = \int_A E\left(\alpha f \,\middle|\, \mathscr{G}\right)\, d\gamma \\ &= \int_A \alpha f\, d\mu \leq \int_A |f|\, d\mu = \int_A E\left(|f| \,\middle|\, \mathscr{G}\right)\, d\gamma\end{aligned}$$

が成り立つから，(I.2) 及び $E(\cdot\,|\,\mathscr{G})$ の有界性が得られる．

(2)　$(g_n)_{n=1}^\infty$ を g の単関数近似列とすれば，単調収束定理と (I.5) より

$$\int_X |g|E\left(|f| \,\middle|\, \mathscr{G}\right)\, d\gamma = \lim_{n\to\infty} \int_X |g_n|E\left(|f| \,\middle|\, \mathscr{G}\right)\, d\gamma = \lim_{n\to\infty} \int_X |g_n||f|\, d\mu = \int_X |g||f|\, d\mu$$

となり $gE\left(f \,\middle|\, \mathscr{G}\right)$ の可積分性が従う．従って，Lebesgue の収束定理より任意の $A \in \mathscr{G}$ に対して

$$\int_A gE\left(f \,\middle|\, \mathscr{G}\right)\, d\gamma = \lim_{n\to\infty} \int_A g_n E\left(f \,\middle|\, \mathscr{G}\right)\, d\gamma = \lim_{n\to\infty} \int_A g_n f\, d\mu = \int_A gf\, d\mu$$

が成り立ち (I.3) が得られる．

(3)　任意の $A \in \mathscr{H}$ に対して

$$\int_A E\left(f \,\middle|\, \mathscr{H}\right)\, d\theta = \int_A f\, d\mu = \int_A E\left(f \,\middle|\, \mathscr{G}\right)\, d\gamma = \int_A E\left(E\left(f \,\middle|\, \mathscr{G}\right) \,\middle|\, \mathscr{H}\right)\, d\theta$$

が成立する．

(4)　$1 \leq p < \infty$ の場合，(I.2) と Jensen の不等式より

$$|E\left(f \,\middle|\, \mathscr{G}\right)|^p \leq E\left(|f| \,\middle|\, \mathscr{G}\right)^p \leq E\left(|f|^p \,\middle|\, \mathscr{G}\right)$$

が成り立つ．$p = \infty$ の場合は任意の $A \in \mathscr{G}$ に対して

$$\int_A \left|E\left(f \,\middle|\, \mathscr{G}\right)\right|\, d\gamma \leq \int_A |f|\, d\mu \leq \mu(A) \left\| f \right\|_{L^\infty} = \gamma(A) \left\| f \right\|_{L^\infty}$$

となり，$1 \leq p < \infty$ の場合も込めて (I.4) が従う．■

$\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ なる写像 φ で，$-\varphi$ が凸であるものを**凹関数 (concave function)** と呼ぶ．

定理 I.1.5 (凹関数に対する Jensen の不等式).　$(X, \mathscr{F}, \mu)$ を測度空間，$\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ を部分 σ-加法族とし，$\mu|_{\mathscr{G}}$ が σ-有限であるとする．このとき，任意の $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測関数 f と凹関数 $\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ に対し，$f, \varphi \circ f$ が μ-可積分なら次が成立する:

$$E\left(\varphi \circ f \,\middle|\, \mathscr{G}\right) \leq \varphi \circ E\left(f \,\middle|\, \mathscr{G}\right).$$

証明． 定理 I.1.5 より μ-a.e. の $x(\in X)$ で

$$-\varphi\left(E\left(f \,\middle|\, \mathscr{G}\right)(x)\right) \leq E\left(-\varphi \circ f \,\middle|\, \mathscr{G}\right)(x)$$

が成立する．条件付き期待値は線形作用素であるから

$$E\left(\varphi \circ f \,\middle|\, \mathscr{G}\right)(x) \leq \varphi\left(E\left(f \,\middle|\, \mathscr{G}\right)(x)\right)$$

が従う． ∎

定理 I.1.6. (1)　$X_n \leq X_{n+1}\ X_n \longrightarrow X\ a.s.P\ E\left(X_n \,|\, \mathscr{G}\right) \longrightarrow E\left(X \,|\, \mathscr{G}\right)\ a.s.P$

(2)　$X_n \geq 0\ E\left(\liminf X_n \,|\, \mathscr{G}\right) \leq \liminf E\left(X_n \,|\, \mathscr{G}\right)$

(3)　$|X_n| \leq Y\ X_n \longrightarrow X\ a.s.P\ E\left(X_n \,|\, \mathscr{G}\right) \longrightarrow E\left(X \,|\, \mathscr{G}\right)\ a.s.P$

I.2　正則条件付複素測度

定義 I.2.1 (正則条件付複素測度). $(X, \mathscr{F})$ を可測空間，$\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ を部分 σ-加法族，μ を $\mathscr{F}$ 上の複素測度とするとき，次の (1)(2)(3) を満たす写像

$$\mu(\cdot \,|\, \mathscr{G})(\cdot) : \mathscr{F} \times X \ni (A, x) \longmapsto \mu(A \,|\, \mathscr{G})(x) \in \mathbf{C}$$

を $\mathscr{G}$ の下での μ の正則条件付複素測度 (regular conditional complex measure of μ with respect to $\mathscr{G}$) と呼ぶ:

(1)　任意の $x \in X$ で $\mathscr{F} \ni A \longmapsto \mu(A \,|\, \mathscr{G})(x)$ は複素測度である．

(2)　任意の $A \in \mathscr{F}$ で $X \ni x \longmapsto \mu(A \,|\, \mathscr{G})(x)$ は $\mathscr{G}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測かつ $|\mu|$-可積分である．

(3)　任意の $A \in \mathscr{F}$ と $B \in \mathscr{G}$ に対し次を満たす:

$$\mu(A \cap B) = \int_B \mu(A \,|\, \mathscr{G})\, d|\mu|.$$

定理 I.2.2 (正則条件付複素測度の一意性). $(X, \mathscr{F})$ を可測空間，$\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ を部分 σ-加法族，μ を $\mathscr{F}$ 上の複素測度とし，μ に対し $\mathscr{G}$ の下での正則条件付複素測度 $\mu(\cdot \,|\, \mathscr{G})(\cdot)$ と $\nu(\cdot \,|\, \mathscr{G})(\cdot)$ が存在しているとする．このとき，$\mathscr{F}$ が可算族で生成されるなら，或る $|\mu|$-零集合 $N \in \mathscr{G}$ が存在して次が成立する:

$$\mu(A \,|\, \mathscr{G})(x) = \nu(A \,|\, \mathscr{G})(x), \quad (\forall A \in \mathscr{F},\ \forall x \in X \backslash N).$$

証明． $\mathscr{F}$ を生成する可算族を $\mathscr{A}$ とし，

$$\mathscr{U} := \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} A_i \,\middle|\quad A_i \in \mathscr{A},\ n = 1, 2, \cdots \right\}$$

により可算乗法族を定める．$\mathscr{A}$ は $\mathscr{F}$ を生成するから $\sigma(\mathscr{U}) = \mathscr{F}$ となり，任意の $U \in \mathscr{U}$ に対し

$$\int_B \mu(U \,|\, \mathscr{G})\, d|\mu| = \int_B \nu(U \,|\, \mathscr{G})\, d|\mu|, \quad (\forall B \in \mathscr{G})$$

が満たされるから $N_U := \left\{\mu(U \,|\, \mathscr{G}) \neq \nu(U \,|\, \mathscr{G})\right\}$ は $\mathscr{G}$ の $|\mu|$-零集合となる．$N := \bigcup_{U \in \mathscr{U}} N_U$ とおけば

$$\mathscr{D} := \left\{ A \in \mathscr{F} \;\middle|\; \quad \mu(A \,|\, \mathscr{G})(x) = \nu(A \,|\, \mathscr{G})(x),\ \forall x \in X \backslash N \right\}$$

により Dynkin 族が定まり，$\mathscr{D}$ は $\mathscr{U}$ を含むから Dynkin 族定理より定理の主張が従う． ■

定理 I.2.3 (正則条件付複素測度の存在). $(X, \mathscr{F})$ を可測空間，$\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ を部分 σ-加法族，μ を $\mathscr{F}$ 上の複素測度とする．また $\mathscr{F}$ が可算族で生成され，かつ或るコンパクトクラス $\mathcal{K}$ が存在して，任意の $\epsilon > 0$ と $A \in \mathscr{F}$ に対し

$$A_\epsilon \subset K_\epsilon \subset A, \quad |\mu|(A \backslash A_\epsilon) < \epsilon$$

を満たす $K_\epsilon \in \mathcal{K}$, $A_\epsilon \in \mathscr{F}$ が取れると仮定する．このとき $\mathscr{G}$ の下での μ の正則条件付複素測度が存在する．

I.3　一様可積分性

定義 I.3.1 (一様可積分). $(X, \mathscr{F}, \mu)$ を正値測度空間とし，$\mathscr{U}$ を $\mathscr{L}^1(X, \mathscr{F}, \mu)$ の部分集合とする．

- ϵ を任意に与えられた正数とすると，次を満たす正数 δ が取れる:

$$\forall f \in \mathscr{U}\ \forall B \in \mathscr{F}\ \left(\mu(B) < \delta \Longrightarrow \int_B |f|\, d\mu < \epsilon \right).$$

が満たされているとき，$\mathscr{U}$ は**同程度可積分である (equi-integrable)** という．同程度可積分性に加えて次の式

- $\mathscr{U}$ が $\mathscr{L}^1(X, \mathscr{F}, \mu)$ で有界である:

$$\exists b \in \mathbf{R}_+\ \forall f \in \mathscr{U}\ \left(\int_X |f|\, d\mu < b \right).$$

が満たされているとき，$\mathscr{U}$ は**一様可積分である (uniformly integrable)** という．

同程度可積分な集合の部分集合もまた同程度可積分であり，一様可積分な集合の部分集合もまた一様可積分である．

定理 I.3.2 (一様可積分性の同値条件).　$(X, \mathscr{F}, \mu)$ を測度空間とし，$\mathscr{U}$ を $\mathscr{L}^1(X, \mathscr{F}, \mu)$ の部分集合とする．このとき次の (1) と (2) が成り立つ:

(1)　$\mathscr{U}$ が一様可積分であるとき，ϵ を任意に与えられた正数とすると，次を満たす正数 a が取れる:

$$\forall f \in \mathscr{U}\ \forall \lambda \in \mathbf{R}_+ \left(a < \lambda \Longrightarrow \int_{\{|f|>\lambda\}} |f|\, d\mu < \epsilon \right).$$

(2)　$\mu(X) < \infty$ の場合 (1) の逆が成立する．つまり，

$$\forall \epsilon \in \mathbf{R}_+\ \exists a \in \mathbf{R}_+\ \forall f \in \mathscr{U}\ \forall \lambda \in \mathbf{R}_+ \left(a < \lambda \Longrightarrow \int_{\{|f|>\lambda\}} |f|\, d\mu < \epsilon \right)$$

が成り立つとき $\mathscr{U}$ は一様可積分である．

略証.

(1)　$\mathscr{U}$ が一様可積分であるとする．いま ϵ を任意に与えられた正数とする．このとき

$$\forall f \in \mathscr{U}\ \forall B \in \mathscr{F} \left(\mu(B) < \delta \Longrightarrow \int_B |f|\, d\mu < \epsilon \right)$$

を満たす δ が取れる．ここで

$$\frac{1}{a} \sup_{f \in \mathscr{U}} \int_X |f|\, d\mu < \delta$$

を満たす正の実数 a を取れば，$a < \lambda$ なる正数 λ と $\mathscr{U}$ の任意の要素 f に対して

$$\mu(|f| > \lambda) \leq \frac{1}{\lambda} \int_X |f|\, d\mu < \delta$$

となるので

$$\forall f \in \mathscr{U}\ \forall \lambda \in \mathbf{R}_+ \left(a < \lambda \Longrightarrow \int_{\{|f|>\lambda\}} |f|\, d\mu < \epsilon \right)$$

が成立する．

(2)　いま ϵ を任意に与えられた正数とする．このとき

$$\forall f \in \mathscr{U} \left(\int_{\{|f|>a\}} |f|\, d\mu < \frac{\epsilon}{2} \right)$$

を満たす正数 a が取れる．f を $\mathscr{U}$ の任意の要素とし，B を $\mathscr{F}$ の任意の要素とすれば

$$\int_B |f|\, d\mu = \int_{\{|f|>a\} \cap B} |f|\, d\mu + \int_{\{|f| \leq a\} \cap B} |f|\, d\mu \leq \frac{\epsilon}{2} + a\mu(B)$$

が成り立つから，

$$\sup_{f \in \mathscr{U}} \int_X |f|\, d\mu < \infty$$

及び

$$\forall B \in \mathscr{F} \left(\mu(B) < \frac{\epsilon}{2a} \Longrightarrow \int_B |f| \, d\mu < \epsilon \right)$$

が成立する．すなわち $\mathscr{U}$ は一様可積分である． ∎

定理 I.3.3 (一様可積分性と平均収束). $(X, \mathscr{F}, \mu)$ を正値測度空間とし，

$$\mu(X) < \infty$$

とする．また $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\mathscr{L}^1(X, \mathscr{F}, \mu)$ の部分集合とし，A を μ-零集合とし，$X \backslash A$ の各点 x で $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ が $\mathbf{C}$ で収束するとする．このとき次の (1) と (2) は同値である:

(1)　$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が一様可積分．

(2)　$f \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \lim_{n \to \infty} f_n \mathbb{1}_A$ と f を定めると，f は可積分で

$$\int_X |f - f_n| \, d\mu \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty).$$

略証.

定理 I.3.4 (一様可積分性と条件付き期待値). $(X, \mathscr{F}, \mu)$ を測度空間とし，$\mu(X) < \infty$ とし，f を $\mathscr{L}^1(X, \mathscr{F}, \mu)$ の要素とする．また $\mathscr{S}$ を X 上の σ-加法族であり $\mathscr{F}$ の部分集合であるものの全体とする．このとき $\left\{E\left(f \,\middle|\, \mathscr{G}\right)\right\}_{\mathscr{G} \in \mathscr{S}}$ は一様可積分である．

証明.　定理 I.1.4 より

$$\int_{|E(f|\mathscr{G})|>\lambda} \left|E\left(f \,\middle|\, \mathscr{G}\right)\right| \, d\mu \leq \int_{E(|f||\mathscr{G})>\lambda} E\left(|f| \,\middle|\, \mathscr{G}\right) \, d\mu = \int_{E(|f||\mathscr{G})>\lambda} |f| \, d\mu$$

が成り立つ．また X の可積分性より，任意の $\epsilon > 0$ に対して或る $\delta > 0$ が存在し

$$\mu(B) < \delta \Rightarrow \int_B |f| \, d\mu < \epsilon$$

が満たされる．いま，Chebyshev の不等式より

$$\mu\left(E\left(|f| \,\middle|\, \mathscr{G}\right) > \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda} \int_X E\left(|f| \,\middle|\, \mathscr{G}\right) \, d\mu = \frac{1}{\lambda} \int_X |f| \, d\mu$$

となるから，$\epsilon > 0$ に対し或る $\lambda_0 > 0$ が存在して

$$\sup_{\mathscr{G} \in \mathscr{S}} \mu\left(E\left(|f| \,\middle|\, \mathscr{G}\right) > \lambda\right) < \delta, \quad (\forall \lambda > \lambda_0)$$

が満たされ

$$\sup_{\mathscr{G} \in \mathscr{S}} \int_{E(|f||\mathscr{G})>\lambda} |f| \, d\mu < \epsilon, \quad (\forall \lambda > \lambda_0)$$

が従う． ∎

定理 I.3.5 (Dunford-Pettis). $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を確率空間とし，$\mathscr{F}$ を $\mathscr{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ のセミノルムに関して有界な部分集合とする．また q_1 を $\mathscr{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ から $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ への商写像とする．このとき，$\mathscr{F}$ が同程度可積分であることと，

$$\mathscr{F}^q \overset{\text{def}}{=} \left\{ q_1(f) \mid \quad f \in \mathscr{F} \right\}$$

が $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ において弱位相に関して相対コンパクトであることは同値である．

略証． q_∞ を $\mathscr{L}^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$ から $L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$ への商写像とする．

$$T : L^1(X, \mathcal{B}, \mu) \longrightarrow L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)^*$$

なる写像 T を

$$T(q_1(f)) : q_\infty(g) \longmapsto \int_X fg \, d\mu$$

なる関係により定めれば，T は等長線型である．従って

$$T * \mathscr{F}^q$$

は $L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)^*$ において作用素ノルムに関して有界である．ゆえにこの集合は $L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)^*$ の零元を中心とした或る大きさの閉球に含まれるが，Banach-Alaoglu の定理よりその閉球は汎弱位相でコンパクトである．ゆえに

$$\mathscr{H}$$

を $T * \mathscr{F}^q$ の汎弱位相に関する閉包とすれば，$\mathscr{H}$ は汎弱コンパクトである．なので

- $\mathscr{H}$ が $\mathrm{ran}(T)$ に含まれていること．
- $T^{-1}|_{\mathscr{H}}$ が $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ の弱位相と $L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)^*$ の半弱位相に関して連続であること．

が示されれば，

$$T^{-1} * \mathscr{H}$$

が $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ の弱位相に関してコンパクトとなり，他方で弱位相は Hausdorff なので $\mathscr{F}^q$ の弱閉包は $T^{-1} * \mathscr{H}$ に含まれ，$\mathscr{F}^q$ が弱位相に関して相対コンパクトであることが従う．

第一段　$\mathscr{H}$ が $\mathrm{ran}(T)$ に含まれていることを示す．φ を $\mathscr{H}$ の要素とすれば，定理 D.5.6 より有向集合 $(\Lambda, \preceq)$ と

$$\{\varphi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset T * \mathscr{F}^q$$

を満たすネット $(\varphi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が取れて，

$$\varphi_\lambda \longrightarrow \varphi$$

が汎弱位相に関して成立する．選択公理より Λ の各要素 λ に対して

$$q_1(f_\lambda) = T^{-1}(\varphi_\lambda)$$

となる f_λ が取れる．仮定より

$$\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$$

は同程度可積分であるから，ϵ を任意に与えられた正数とすれば，

$$\forall A \in \mathcal{B}\, \forall\lambda \in \Lambda \left(\mu(A) < \delta \Longrightarrow \int_A |f_\lambda|\, d\mu < \epsilon \right)$$

を満たす正数 δ が取れる．$\varphi_\lambda \longrightarrow \varphi$ より

$$\varphi_\lambda(\mathbb{1}_A) \longrightarrow \varphi(\mathbb{1}_A)$$

が $\mathbf{C}$ の位相で成立するので

$$\forall A \in \mathcal{B} \ \left(\mu(A) < \delta \Longrightarrow |\varphi(\mathbb{1}_A)| \leq \epsilon \right)$$

が従い，

$$\mathcal{B} \ni A \longmapsto \varphi(\mathbb{1}_A)$$

の可算加法性が従い，定理 H.1.14 より

$$\varphi = T(q_1(f))$$

を満たす f が取れる．すなわち

$$\varphi \in \mathrm{ran}(T)$$

が成り立つ．以上で

$$\mathscr{H} \subset \mathrm{ran}(T)$$

が示された．

第二段　φ を $\mathscr{H}$ の要素とし，φ において $T^{-1}|_{\mathscr{H}}$ が連続であることを示す．$(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を汎弱位相に関して

$$\varphi_\lambda \longrightarrow \varphi$$

を満たす $\mathscr{H}$ 上のネットとすれば，

$$g \in L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu) \Longrightarrow \varphi_\lambda(g) \longrightarrow \varphi(g)$$

が成り立つので，定理 H.1.14 と併せて

$$\Phi \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)^* \Longrightarrow \Phi\left(T^{-1}(\varphi_\lambda)\right) \longrightarrow \Phi\left(T^{-1}(\varphi)\right)$$

が成り立つ．ゆえに，弱位相の意味で

$$T^{-1}(\varphi_\lambda) \longrightarrow T^{-1}(\varphi)$$

が成り立つ．ゆえに，定理 D.5.7 より $T^{-1}|_{\mathscr{H}}$ は，$L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ の弱位相と $L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)^*$ の半弱位相に関して φ において連続である．φ の任意性より $T^{-1}|_{\mathscr{H}}$ は $\mathscr{H}$ 上で連続である．■

I.4　確率測度の族の位相

$(X, \mathscr{O}_X)$ を位相空間とし，$\mathscr{P}$ を $(X, \mathscr{B}(X))$ 上の確率測度の集合とし，

$$C_b(X, \mathbf{R}) \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{ f \mid \quad f : X \longrightarrow \mathbf{R} \wedge f \text{ は } \mathscr{O}_X/\mathscr{O}_{\mathbf{R}}\text{-連続} \wedge \exists b \in \mathbf{R}_+ \, \forall x \in X \left(|f(x)| \leq b \right) \right\}$$

とおく．f を $C_b(X, \mathbf{R})$ の要素とすれば

$$\mathscr{P} \ni \mu \longmapsto \int_X f \, d\mu$$

なる関係で $\mathscr{P}$ 上の $\mathbf{R}$ 値写像が定まる．この写像を φ_f と書けば，

$$\left\{ \varphi_f \mid \quad f \in C_b(X, \mathbf{R}) \right\}$$

によって $\mathscr{P}$ 上に始位相が定められる．その位相を

$$\mathscr{O}_{\mathscr{P}}$$

とおく．μ を $\mathscr{P}$ の要素とし，$(\mu_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を $\mathscr{P}$ のネットとするとき，$\mathscr{O}_{\mathscr{P}}$ に関して

$$\mu_\lambda \longrightarrow \mu$$

となるとき $(\mu_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ は μ に**弱収束する**という．また $(\mu_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が μ に弱収束することと

$$\forall f \in C_b(X, \mathbf{R}) \left(\int_X f \, d\mu_\lambda \longrightarrow \int_X f \, d\mu \right)$$

は同値である．

I.5　確率過程

$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間とし，$\mathbf{T}$ を $[0, \infty[, [0, \infty], [0, T]$ のいずれかとする．また (S, d) を距離空間とする．X を $\mathbf{T} \times \Omega$ 上の S 値写像とするとき，$\mathbf{T}$ の要素 t に対して

$$X_t \overset{\text{def}}{=\!=} \{ (\omega, X(t, \omega)) \mid \quad \omega \in \Omega \}$$

により X_t を定める．つまり X_t は

$$\omega \longmapsto X(t, \omega)$$

なる写像である．

定義 I.5.1 (確率過程).　集合 X が

- $X : \mathbf{T} \times \Omega \longrightarrow S$.
- t を $\mathbf{T}$ から任意に選ばれた要素とするとき X_t が $\mathscr{F}/\mathscr{B}(S)$-可測である．

を満たすとき，X を $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上の S 値**確率過程 (stochastic process)** と呼ぶ．

ω を Ω の要素とするとき，

$$\mathbf{T} \ni t \longmapsto X_t(\omega)$$

なる写像を ω の**標本路 (sample path)** と呼ぶ．標本路の性質に対して確率過程 X の呼び名が分かれる:

- Ω の全ての要素の標本路が右連続である場合，X を右連続な S 値確率過程と呼ぶ.
- Ω の全ての要素の標本路が左連続である場合，X を左連続な S 値確率過程と呼ぶ.
- Ω の全ての要素の標本路が $RCLL$ である場合，X を $RCLL$ な S 値確率過程と呼ぶ.
- Ω の全ての要素の標本路が連続である場合，X を連続な S 値確率過程と呼ぶ.
- 標本路が P-a.s. に右連続である場合，X を P-a.s. に右連続な S 値確率過程と呼ぶ.
- 標本路が P-a.s. に左連続である場合，X を P-a.s. に左連続な S 値確率過程と呼ぶ.
- 標本路が P-a.s. に $RCLL$ である場合，X を P-a.s. に $RCLL$ な S 値確率過程と呼ぶ.
- 標本路が P-a.s. に連続である場合，X を P-a.s. に連続な S 値確率過程と呼ぶ.

X を $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上の S 値確率過程とし，$\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$ を $\mathscr{F}$ に付随するフィルトレーションとする．このとき

- X が $\mathscr{B}(\mathbf{T})\otimes\mathscr{F}/\mathscr{B}(S)$-可測であるとき，$X$ は**可測な確率過程 (measurable stochastic process)** であるという.
- $\mathbf{T}$ の任意の t 要素に対して，X の $[0,t]\times\Omega$ への制限写像 $X|_{[0,t]\times\Omega}$ が $\mathscr{B}([0,t])\otimes\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(S)$-可測であるとき，$X$ は**発展的可測な確率過程 (progressively measurable stochastic process)** であるという.

定義 I.5.2 (適合).　X を $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上の S 値確率過程とし，$\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$ を $\mathscr{F}$ に付随するフィルトレーションとするとき，

- t を $\mathbf{T}$ から任意に選ばれた要素とするとき X_t が $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(S)$-可測

であるなら X は $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$ に**適合している (adapted to $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$)** という．または X を $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$-適合な $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上の S 値確率過程と呼ぶ.

定理 I.5.3 (右連続または左連続な適合過程は発展的可測).　$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間とし，$\mathbf{T}$ を $[0,\infty[$ または $[0,T]$ とし，(S,d) を距離空間とし，X を $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上の S 値確率過程とする．このとき，X が右連続 (または左連続) かつ $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$-適合であるなら X は $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$-発展的可測である.

略証.

第一段　$X|_{\{0\}\times\Omega}$ について，A を $\mathscr{B}(S)$ の任意の要素とすると

$$X|_{\{0\}\times\Omega}{}^{-1} * A = \{0\}\times\left(X_0^{-1} * A\right)$$

が成り立ち，X が $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$-適合であるので

$$\{0\}\times\left(X_0^{-1} * A\right) \in \mathscr{B}(\{0\})\otimes\mathscr{F}_0$$

が成立する．ゆえに $X|_{\{0\}\times\Omega}$ は $\mathscr{B}(\{0\})\otimes\mathscr{F}_0/\mathscr{B}(S)$-可測である.

第二段　t を

$$0 < t$$

なる $\mathbf{T}$ の要素とする．そして n を自然数として，X が右連続である場合は

$$[0,t]\times\Omega \ni (s,\omega) \longmapsto \begin{cases} X(0,\omega) & \text{if } s=0 \\ X\left(\frac{1}{2^n}t,\omega\right) & \text{if } s\in\left]0,\frac{1}{2^n}t\right] \\ \vdots & \\ X\left(\frac{2^n-1}{2^n}t,\omega\right) & \text{if } s\in\left]\frac{2^n-2}{2^n}t,\frac{2^n-1}{2^n}t\right] \\ X(t,\omega) & \text{if } s\in\left]\frac{2^n-1}{2^n}t,t\right] \end{cases}$$

なる関係を Y_n と定め，X が左連続である場合は

$$[0,t]\times\Omega \ni (s,\omega) \longmapsto \begin{cases} X(0,\omega) & \text{if } s\in\left[0,\frac{1}{2^n}t\right[\\ X\left(\frac{1}{2^n}t,\omega\right) & \text{if } s\in\left[\frac{1}{2^n}t,\frac{2}{2^n}t\right[\\ \vdots & \\ X\left(\frac{2^n-1}{2^n}t,\omega\right) & \text{if } s\in\left[\frac{2^n-1}{2^n}t,t\right[\\ X(t,\omega) & \text{if } s=t \end{cases}$$

なる関係を Y_n と定める．A を $\mathscr{B}(S)$ の任意の要素とすると，X が右連続の場合は

$$Y_n^{-1}*A=\{0\}\times\left(X_0^{-1}*A\right)\cup\bigcup_{j=1}^{2^n}\left]\frac{j-1}{2^n}t,\frac{j}{2^n}t\right]\times\left(X_{\frac{j}{2^n}t}^{-1}*A\right)$$

となり，X が左連続の場合は

$$Y_n^{-1}*A=\{t\}\times\left(X_t^{-1}*A\right)\cup\bigcup_{j=1}^{2^n}\left[\frac{j-1}{2^n}t,\frac{j}{2^n}t\right[\times\left(X_{\frac{j-1}{2^n}t}^{-1}*A\right)$$

となるので，いずれの場合も

$$Y_n^{-1}*A\in\mathscr{B}([0,t])\otimes\mathscr{F}_t$$

が成立する．ゆえに Y_n は $\mathscr{B}([0,t])\otimes\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(S)$-可測である．またいずれの場合も

$$\forall s\in[0,t]\,\forall\omega\in\Omega\left(\lim_{n\to\infty}Y_n(s,\omega)=X|_{[0,t]\times\Omega}(s,\omega)\right)$$

が成立するので，定理 G.2.11 より $X|_{[0,t]\times\Omega}$ は $\mathscr{B}([0,t])\otimes\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(S)$-可測である． ∎

実数値確率過程 X が $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$-優マルチンゲールであるとは，

- X は $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$ に適合していて，かつ $\mathbf{T}$ の各要素 t で X_t は可積分である．
- s,t を $\mathbf{T}$ の要素とするとき，$s\le t$ ならば P-a.s. に $E\left(X_t\,|\,\mathscr{F}_s\right)\le X_s$ である．つまり

$$s\le t\Longrightarrow\forall E\in\mathscr{F}_s\left[\int_E E\left(X_t\,|\,\mathscr{F}_s\right)\,dP\le\int_E X_s\,dP\right].$$

が満たされていることを指す．二つ目の条件が

- s,t を $\mathbf{T}$ の要素とするとき，$s\le t$ ならば P-a.s. に $X_s\le E\left(X_t\,|\,\mathscr{F}_s\right)$ である．

に置き換わった場合，X は $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$-劣マルチンゲールと呼ばれ，$X$ が $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$-優マルチンゲールであり $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$-劣マルチンゲールでもある場合，つまり二つ目の条件が

- s, t を $\mathbf{T}$ の要素とするとき，$s \le t$ ならば P-a.s. に $X_s = E\left(X_t \mid \mathscr{F}_s\right)$ である．

に置き換わった場合，X は $\{\mathscr{F}_t\}_{t \in \mathbf{T}}$-マルチンゲールと呼ばれる．

以下性質を列挙する:

優マルチンゲールの正負を反転したものは劣マルチンゲール

X を $\{\mathscr{F}_t\}_{t \in \mathbf{T}}$-優マルチンゲールとするとき，$-X$ は $\{\mathscr{F}_t\}_{t \in \mathbf{T}}$-劣マルチンゲールである．逆も然り．

証明． $-X$ の適合性及び $-X_t$ 可積分性は X に対する仮定より従う．s, t を $s \le t$ なる $\mathbf{T}$ の要素とし，E を $\mathscr{F}_s$ の要素とするとき，

$$\int_E X_t \, dP \le \int_E X_s \, dP$$

が成立する．よって

$$\int_E -X_s \, dP \le \int_E -X_t \, dP$$

が成立する．よって

$$\int_E -X_s \, dP \le \int_E E\left(-X_t \mid \mathscr{F}_s\right) \, dP$$

が成立する． ∎

マルチンゲールは期待値が一定

X を $\{\mathscr{F}_t\}_{t \in \mathbf{T}}$-マルチンゲールとするとき，

$$\forall t \in \mathbf{T}\left(E(X_t) = E(X_0)\right).$$

証明． t を $\mathbf{T}$ の要素とすれば P-a.s. に $E\left(X_t \mid \mathscr{F}_0\right) = X_0$ となるので

$$E(X_t) = E(E\left(X_t \mid \mathscr{F}_0\right)) = E(X_0)$$

が成り立つ． ∎

期待値が一定な優マルチンゲールはマルチンゲール

X を $\{\mathscr{F}_t\}_{t \in \mathbf{T}}$-優マルチンゲールとするとき，

$$\forall t \in \mathbf{T}\left(E(X_t) = E(X_0)\right)$$

ならば X は $\{\mathscr{F}_t\}_{t \in \mathbf{T}}$-マルチンゲールである．

証明． s, t を $\mathbf{T}$ の要素とし，$s \le t$ とする．このとき P-a.s. に

$$0 \le X_s - E\left(X_t \mid \mathscr{F}_s\right)$$

が成り立つので，P-a.s. に

$$X_s - E(X_t \mid \mathscr{F}_s) = |X_s - E(X_t \mid \mathscr{F}_s)|$$

となる．ゆえに

$$0 = E(X_s - E(X_t \mid \mathscr{F}_s)) = E|X_s - E(X_t \mid \mathscr{F}_s)|$$

が成り立つので，P-a.s. に

$$X_s = E(X_t \mid \mathscr{F}_s)$$

が成り立つ． ∎

Jensen の不等式の応用:マルチンゲール

X を $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$-マルチンゲールとし，$f$ を $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ なる凸関数 (resp. 凹関数) とする．このとき

$$\forall t \in \mathbf{T}\,(\, E|f \circ X_t| < \infty\,)$$

ならば $f \circ X$ は $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$-劣マルチンゲール (resp. 優マルチンゲール) である．

証明． s, t を $s \leq t$ なる $\mathbf{T}$ の要素とする．Jensen の不等式 (定理 I.1.3) より，P-a.s. の $\omega(\in \Omega)$ に対し

$$f(X_s(\omega)) = f(E(X_t \mid \mathscr{F}_s)(\omega)) \leq E\left(f \circ X_t \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right)(\omega)$$

が成り立つ．f が凹関数である場合，$-f$ は凸関数であるから P-a.s. の $\omega(\in \Omega)$ に対し

$$-f(X_s(\omega)) = -f(E(X_t \mid \mathscr{F}_s)(\omega)) \leq E\left(-f \circ X_t \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right)(\omega)$$

が成り立つ．ゆえに

$$E\left(f \circ X_t \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right)(\omega) \leq f(X_s(\omega))$$

が成り立つ． ∎

I.6　停止時刻

$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間とし，$\mathbf{T} \stackrel{\text{def}}{=} [0, \infty[$ か $[0, T]$ とし，$\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$ を $\mathscr{F}$ に付随するフィルトレーションとする．τ を

$$\tau : \Omega \longrightarrow [0, \infty]$$

なる写像で

$$\forall t \in \mathbf{T}\,(\,\{\tau \leq t\} \in \mathscr{F}_t\,)$$

を満たすものとするとき，これを $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$-停止時刻 **(stopping time)** と呼ぶ．

定理 I.6.1 (発展的可測過程と停止時刻の合成の可測性).　f を $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$-発展的可測過程とし，$\tau$ を $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$-停止時刻とし，$f_\tau$ を

$$\Omega \ni \omega \longmapsto f(\tau(\omega), \omega)$$

なる関係で定める写像とする．このとき f_τ は $\mathscr{F}_\tau/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測である．

略証.　t を $\mathbf{T}$ から任意に選ばれた要素とし，E を $\mathscr{B}(\mathbf{R})$ から任意に選ばれた要素とする．

$$f_\tau^{-1} * E = \left\{\omega \in \Omega \mid \quad f(\tau(\omega), \omega) \in E\right\}$$

なので

$$\left\{\omega \in \Omega \mid \quad f(\tau(\omega), \omega) \in E\right\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathscr{F}_t$$

が成り立てばよい．ところで左辺は

$$\left\{\omega \in \Omega \mid \quad f|_{[0,t]\times\Omega}(\tau(\omega) \wedge t, \omega) \in E\right\} \cap \{\tau \leq t\}$$

に一致する．$\tau \wedge t$ は $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}([0,t])$-可測なので

$$\Omega \ni \omega \longmapsto (\tau(\omega) \wedge t, \omega)$$

は $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t$-可測であり，$f|_{[0,t]\times\Omega}$ は $\mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測である．ゆえに

$$\left\{\omega \in \Omega \mid \quad f|_{[0,t]\times\Omega}(\tau(\omega) \wedge t, \omega) \in E\right\} \in \mathscr{F}_t$$

が成り立つ．ゆえに f_τ は $\mathscr{F}_\tau/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測である． ∎

定理 I.6.2 (任意抽出定理).

I.7　*RCLL* 修正

本節の主題は劣マルチンゲールが或る条件下で *RCLL* な修正を持つということである．いつも通り $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間とし，$\mathbf{T} \overset{\text{def}}{=\!=} [0, \infty[$ とし，$\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$ を $\mathscr{F}$ に付随するフィルトレーションとし，X を $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上の $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$-劣マルチンゲールとする．

いま λ を正の実数とし，N を 0 でない自然数とする．また $[0, N]$ の稠密な部分集合を

$$D^N \overset{\text{def}}{=\!=} \bigcup_{n\in\omega} \left\{\frac{k}{2^n} \mid \quad k \in \{0, 1, \cdots, N\cdot 2^n\}\right\}$$

により定める．このとき

$$\left\{\lambda < \sup_{t\in D^N} X_t\right\} = \bigcup_{n\in\omega} \left\{\lambda < \max_{k\in\{0,1,2,\cdots,N\cdot 2^n\}} X_{\frac{k}{2^n}T}\right\}$$

が成り立つ．ちなみにこの式から

$$\Omega \ni \omega \longmapsto \sup_{t \in D^N} X_t(\omega)$$

が $\mathscr{F}_N/\mathscr{B}([-\infty,\infty])$-可測であることが従う．$n$ を自然数として

$$E_n \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{ \lambda < \max_{k \in \{0,1,2,\cdots,N\cdot 2^n\}} X_{\frac{k}{2^n}T} \right\}$$

とおき，E_n をさらに分解して

$$E_n^0 \overset{\text{def}}{=\!=} \{\lambda < X_0\}$$

及び，$\{1,2,\cdots,N\cdot 2^n\}$ の各要素 k に対して

$$E_n^k \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{ \max_{m \in \{0,1,2,\cdots,k-1\}} X_{\frac{m}{2^n}} \leq \lambda \right\} \cap \left\{ \lambda < X_{\frac{k}{2^n}} \right\}$$

とおく．k を $\{0,1,\cdots,N\cdot 2^n\}$ の要素とすれば

$$E_n^k \in \mathscr{F}_{\frac{k}{2^n}}$$

が成立するので，劣マルチンゲール性から

$$\int_{E_n^k} X_{\frac{k}{2^n}}\, dP \leq \int_{E_n^k} X_N\, dP$$

が成り立つ．他方で

$$\forall \omega \in E_n^k \left(\lambda < X_{\frac{k}{2^n}}(\omega) \right)$$

が成り立つから

$$P(E_n^k) \leq \frac{1}{\lambda} \cdot \int_{E_n^k} X_{\frac{k}{2^n}}\, dP$$

が成立する．これにより

$$P(E_n) = \sum_{k=0}^{2^n} P(E_n^k) \leq \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{N\cdot 2^n} \int_{E_n^k} X_{\frac{m}{2^n}}\, dP \leq \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{N\cdot 2^n} \int_{E_n^k} X_N\, dP = \frac{1}{\lambda} \cdot \int_{E_n} X_N\, dP \tag{I.6}$$

が成立する．$\{E_n\}_{n\in\omega}$ は単調に増大して

$$\left\{ \lambda < \sup_{t \in D^N} X_t \right\}$$

に一致するので，(I.6) で $n \longrightarrow \infty$ として

$$P\left(\lambda < \sup_{t \in D^N} X_t \right) \leq \frac{1}{\lambda} \cdot \int_{\left\{\lambda < \sup_{t\in D^N} X_t\right\}} X_N\, dP$$

が成立する．さらに右辺は

$$\frac{1}{\lambda} \cdot E\left(X_N^+\right)$$

で抑えられるので，以上で次を得た．

定理 I.7.1 (Doob の上限不等式).　$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間とし，$\mathbf{T} \overset{\text{def}}{=\!=} [0, \infty[$ とし，$\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$ を $\mathscr{F}$ に付随するフィルトレーションとし，X を $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上の $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$-劣マルチンゲールとする．このとき，$\lambda$ と正の実数とし，N を 0 でない自然数として

$$D^N \overset{\text{def}}{=\!=} \bigcup_{n\in\omega} \left\{ \frac{k}{2^n} \;\middle|\; k \in \{0, 1, \cdots, N \cdot 2^n\} \right\}$$

とおけば，

$$P\left(\lambda < \sup_{t\in D^N} X_t\right) \leq \frac{1}{\lambda} \cdot E\left(X_N^+\right).$$

上の設定をそのままにして，次は

$$P\left(\inf_{t\in D^N} X_t < -\lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda} \cdot \left[E\left(X_N^+\right) - E(X_0)\right]$$

が成り立つことを示す．今度は

$$E_n \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{ \min_{k\in\{0,1,2,\cdots,N\cdot 2^n\}} X_{\frac{k}{2^n}} < -\lambda \right\}$$

とおいて，また

$$E_n^0 \overset{\text{def}}{=\!=} \{X_0 < -\lambda\}$$

及び，$\{1, 2, \cdots, N \cdot 2^n\}$ の各要素 k に対して

$$E_n^k \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{ -\lambda \leq \min_{m\in\{0,1,2,\cdots,k-1\}} X_{\frac{m}{2^n}} \right\} \cap \left\{ X_{\frac{k}{2^n}} < -\lambda \right\}$$

とおく．ここで

$$\Omega \ni \omega \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{if } \omega \in E_n^0 \\ \frac{1}{2^n} & \text{if } \omega \in E_n^1 \\ \frac{2}{2^n} & \text{if } \omega \in E_n^2 \\ \vdots & \\ \frac{N\cdot 2^n - 1}{2^n} & \text{if } \omega \in E_n^{N\cdot 2^n - 1} \\ \frac{N\cdot 2^n}{2^n} & \text{if } \omega \in E_n^{N\cdot 2^n} \\ N & \text{if } \omega \in \Omega \backslash E_n \end{cases}$$

なる関係を τ とすれば，τ は $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$-停止時刻である．任意抽出定理より

$$E(X_0) \leq E(X_\tau)$$

が成立し，τ の定め方より

$$E(X_\tau) = \sum_{k=0}^{N\cdot 2^n} \int_{E_n^k} X_{\frac{k}{2^n}}\, dP + \int_{\Omega\backslash E_n} X_N\, dP \leq \sum_{k=0}^{N\cdot 2^n} \int_{E_n^k} X_{\frac{k}{2^n}}\, dP + E\left(X_N^+\right)$$

が成立する．他方で

$$\forall \omega \in E_n^k \left(X_{\frac{k}{2^n}}(\omega) < -\lambda \right)$$

から

$$\int_{E_n^k} X_{\frac{k}{2^n}} \, dP \leq -\lambda \cdot P(E_n^k)$$

が成り立つので

$$E(X_0) \leq \sum_{k=0}^{N \cdot 2^n} \int_{E_n^k} X_{\frac{k}{2^n}} \, dP + E\left(X_N^+\right) \leq -\lambda \cdot P(E_n) + E\left(X_N^+\right)$$

が従う．移項すれば

$$P\left(E_n\right) \leq \frac{1}{\lambda} \cdot \left[E\left(X_N^+\right) - E(X_0) \right]$$

が成立し，$n \longrightarrow \infty$ として

$$P\left(\inf_{t \in D^N} X_t < -\lambda \right) \leq \frac{1}{\lambda} \cdot \left[E\left(X_N^+\right) - E(X_0) \right]$$

が得られる．以上をまとめると，

定理 I.7.2 (Doob の下限不等式).　設定と記号は定理 I.7.1 の物を継承する．このとき

$$P\left(\inf_{t \in D^N} X_t < -\lambda \right) \leq \frac{1}{\lambda} \cdot \left[E\left(X_N^+\right) - E(X_0) \right].$$

この二つの不等式から次を得る．

定理 I.7.3 (劣マルチンゲールのパスは有界区間上で有界).　$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間とし，$\mathbf{T} \overset{\text{def}}{=} [0, \infty[$ とし，$\{\mathscr{F}_t\}_{t \in \mathbf{T}}$ を $\mathscr{F}$ に付随するフィルトレーションとし，X を $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上の $\{\mathscr{F}_t\}_{t \in \mathbf{T}}$-劣マルチンゲールとする．また

$$D \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{n \in \omega} \left\{ \frac{k}{2^n} \mid \quad k \in \omega \right\}$$

とおく．このとき P-零集合 A が取れて，ω を $\Omega \backslash A$ の任意の要素とし，N を任意の自然数とすれば

$$-\infty < \inf_{t \in D \cap [0,N]} X_t(\omega) \wedge \sup_{t \in D \cap [0,N]} X_t(\omega) < \infty$$

が成り立つ．

略証.　N を 0 でない自然数として

$$D^N \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{n \in \omega} \left\{ \frac{k}{2^n} \mid \quad k \in \{0, 1, \cdots, N \cdot 2^n\} \right\}$$

とおくと，定理 I.7.1 より任意の自然数 n に対して

$$P\left(n < \sup_{t \in D^N} X_t \right) \leq \frac{1}{n} \cdot E\left(X_N^+\right).$$

が成り立つから

$$P\left(\sup_{t\in D^N} X_t = \infty\right) = 0$$

が従う．定理 I.7.2 からも

$$P\left(\inf_{t\in D^N} X_t = -\infty\right) = 0$$

が導かれるので，

$$A_N \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{\sup_{t\in D^N} X_t = \infty\right\} \cup \left\{\inf_{t\in D^N} X_t = -\infty\right\}$$

とおいて

$$A \overset{\text{def}}{=\!=} \bigcup_{N=1}^{\infty} A_N$$

とおけば，A は P-零集合である．また ω を $\Omega\backslash A$ の要素とし N を正の実数とすれば，

$$D^N = D \cap [0,N]$$

であるから

$$-\infty < \inf_{t\in D\cap[0,N]} X_t(\omega) \wedge \sup_{t\in D\cap[0,N]} X_t(\omega) < \infty$$

が成立する． ∎

次は劣マルチンゲールの殆ど全てのパスが各点で左極限と右極限を持つことを示す．

いま N と n を 0 でない自然数とし，$t_0, t_1, \cdots, t_n$ を

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = N$$

なる実数列とする．そして

$$F \overset{\text{def}}{=\!=} \{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$$

とおく．また X を $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上の $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$-劣マルチンゲールとする．$\alpha$ と β を

$$\alpha < \beta$$

なる実数とし，

$$\Omega \ni \omega \longmapsto \min\{\, t \in F \mid \quad X_t(\omega) < \alpha \,\}$$

なる関係を τ_1 とし，

$$\Omega \ni \omega \longmapsto \min\left\{\, t \in F \mid \quad \tau_1(\omega) < t \wedge \beta < X_t(\omega) \,\right\}$$

なる関係を σ_1 とし，

$$\Omega \ni \omega \longmapsto \min\{\, t \in F \mid \quad \sigma_1(\omega) < t \wedge X_t(\omega) < \alpha \,\}$$

なる関係を τ_2 とし，

$$\Omega \ni \omega \longmapsto \min\left\{ t \in F \mid \quad \tau_2(\omega) < t \wedge \beta < X_t(\omega) \right\}$$

なる関係を σ_2 とし，繰り返して

$$\Omega \ni \omega \longmapsto \min\{ t \in F \mid \quad \sigma_{i-1}(\omega) < t \wedge X_t(\omega) < \alpha \}$$

なる関係を τ_i とし，

$$\Omega \ni \omega \longmapsto \min\left\{ t \in F \mid \quad \tau_i(\omega) < t \wedge \beta < X_t(\omega) \right\}$$

なる関係を σ_i とし，τ_{n+1} 及び σ_n まで定める．ただし

$$\min \emptyset = \infty$$

と定める．また τ_0 及び σ_0 を

$$\Omega \ni \omega \longmapsto 0$$

なる関係とする．Ω の要素 ω に

$$\sigma_i(\omega) < \infty$$

を満たす最大の自然数 i を対応させる関係を

$$U_F^{\alpha,\beta;X}$$

と書く．$U_F^{\alpha,\beta;X}$ とは，X のパスが F の時点を動いた時に α から β へ上向きに渡った回数を示す写像である．ここで

$$2 \cdot i - 1 \leq n$$

なる自然数 i に対し τ_i と σ_i が $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$-停止時刻であることを示す．まず

$$\{\tau_1 = t_0\} = \{X_{t_0} < \alpha\},$$

及び

$$k \in \{1, 2, \cdots, n\}$$

に対して

$$\{\tau_1 = t_k\} = \left(\bigcap_{j=0}^{k-1} \left\{ \alpha \leq X_{t_j} \right\} \right) \cap \left\{ X_{t_j} < \alpha \right\}$$

が成り立ち

$$k \in \{0, 1, 2, \cdots, n\} \Longrightarrow \{\tau_1 = t_k\} \in \mathscr{F}_{t_k}$$

が成立するので，τ_1 は $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$-停止時刻である．$\sigma_1$ に関しては

$$\{\sigma_1 = t_1\} = \{\tau_1 = t_0\} \cap \left\{ \beta < X_{t_1} \right\},$$

及び

$$k \in \{2, \cdots, n\}$$

に対して

$$\{\sigma_1 = t_k\} = \bigcup_{r=0}^{k-1} \left(\{\tau_1 = t_r\} \cap \bigcap_{j=r}^{k-1} \left\{ X_{t_j} \leq \beta \right\} \cap \left\{ \beta < X_{t_k} \right\} \right)$$

が成り立ち

$$k \in \{1, 2, \cdots, n\} \Longrightarrow \{\sigma_1 = t_k\} \in \mathscr{F}_{t_k}$$

が成立するので，σ_1 も $\{\mathscr{F}_t\}_{t \in \mathbf{T}}$-停止時刻である．$\sigma_{i-1}$ まで $\{\mathscr{F}_t\}_{t \in \mathbf{T}}$-停止時刻であるとわかったときに，$\tau_i$ に関しては

$$\{\tau_i = t_{2 \cdot i-2}\} = \{\sigma_{i-1} = t_{2 \cdot i-3}\} \cap \left\{ X_{t_{2 \cdot i-2}} < \alpha \right\},$$

及び

$$k \in \{2 \cdot i - 1, 2 \cdot i, \cdots, n\}$$

に対して

$$\{\tau_i = t_k\} = \bigcup_{r=2 \cdot i-3}^{k-1} \left(\{\sigma_{i-1} = t_r\} \cap \bigcap_{j=r}^{k-1} \left\{ \alpha \leq X_{t_j} \right\} \cap \left\{ X_{t_k} < \alpha \right\} \right)$$

が成り立ち

$$k \in \{2 \cdot i - 2, 2 \cdot i - 1, \cdots, n\} \Longrightarrow \{\tau_i = t_k\} \in \mathscr{F}_{t_k}$$

が成立するので，τ_i は $\{\mathscr{F}_t\}_{t \in \mathbf{T}}$-停止時刻である．また

$$\{\sigma_i = t_{2 \cdot i-1}\} = \{\tau_i = t_{2 \cdot i-2}\} \cap \left\{ \beta < X_{t_{2 \cdot i-1}} \right\},$$

及び

$$k \in \{2 \cdot i, 2 \cdot i + 1, \cdots, n\}$$

に対して

$$\{\sigma_i = t_k\} = \bigcup_{r=2 \cdot i-2}^{k-1} \left(\{\tau_i = t_r\} \cap \bigcap_{j=r}^{k-1} \left\{ X_{t_j} \leq \beta \right\} \cap \left\{ \beta < X_{t_k} \right\} \right)$$

が成り立ち

$$k \in \{2 \cdot i - 1, 2 \cdot i, \cdots, n\} \Longrightarrow \{\sigma_i = t_k\} \in \mathscr{F}_{t_k}$$

が成立するので，σ_i もまた $\{\mathscr{F}_t\}_{t \in \mathbf{T}}$-停止時刻である．

また j を自然数とすれば

$$\left\{ U_F^{\alpha, \beta; X} = j \right\} = \{\sigma_j < \infty\} \cap \{\sigma_{j+1} = \infty\}$$

が成り立つので $U_F^{\alpha,\beta;X}$ は $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測である.

Doob の上渡回数定理

$U_F^{\alpha,\beta;X}$ は次を満たす.

$$E\left(U_F^{\alpha,\beta;X}\right) \leq \frac{E(X_N^+) + |\alpha|}{\beta - \alpha}.$$

略証.　ω を Ω の要素として

$$j \overset{\text{def}}{=\!=} U_F^{\alpha,\beta;X}(\omega)$$

とおく.

第一段　$j = 0$ のとき,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left(X_{\min\{\tau_{i+1}(\omega),N\}}(\omega) - X_{\min\{\sigma_i(\omega),N\}}(\omega)\right) &= 0 \\ &\leq (\alpha-\beta)\cdot U_F^{\alpha,\beta;X}(\omega) + X_N^+(\omega) + |\alpha|\end{aligned}$$

が満たされる.

第二段　$j = 1$ のとき,

$$\sigma_1(\omega) \leq N < \tau_2(\omega)$$

ならば

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left(X_{\min\{\tau_{i+1}(\omega),N\}}(\omega) - X_{\min\{\sigma_i(\omega),N\}}(\omega)\right) &= X_N(\omega) - X_{\sigma_1(\omega)}(\omega) \\ &= \alpha - X_{\sigma_1(\omega)}(\omega) + X_N(\omega) - \alpha \\ &\leq (\alpha-\beta)\cdot U_F^{\alpha,\beta;X}(\omega) + X_N^+(\omega) + |\alpha|\end{aligned}$$

が成立し,

$$\tau_2(\omega) \leq N < \sigma_2(\omega)$$

ならば

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left(X_{\min\{\tau_{i+1}(\omega),N\}}(\omega) - X_{\min\{\sigma_i(\omega),N\}}(\omega)\right) &= X_{\tau_2(\omega)}(\omega) - X_{\sigma_1(\omega)}(\omega) \\ &\leq (\alpha-\beta)\cdot U_F^{\alpha,\beta;X}(\omega) \\ &\leq (\alpha-\beta)\cdot U_F^{\alpha,\beta;X}(\omega) + X_N^+(\omega) + |\alpha|\end{aligned}$$

が成立する.

第三段　$2 \leq j$ のとき,

$$\sigma_j(\omega) \leq N < \tau_{j+1}(\omega)$$

ならば

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\left(X_{\min\{\tau_{i+1}(\omega),N\}}(\omega)-X_{\min\{\sigma_i(\omega),N\}}(\omega)\right)\\
&=\sum_{i=1}^{j-1}\left(X_{\tau_{i+1}(\omega)}(\omega)-X_{\sigma_i(\omega)}(\omega)\right)+X_N(\omega)-X_{\sigma_j(\omega)}(\omega)\\
&=\sum_{i=1}^{j-1}\left(X_{\tau_{i+1}(\omega)}(\omega)-X_{\sigma_i(\omega)}(\omega)\right)+\alpha-X_{\sigma_j(\omega)}(\omega)+X_N(\omega)-\alpha\\
&\le(\alpha-\beta)\cdot U_F^{\alpha,\beta;X}(\omega)+X_N^+(\omega)+|\alpha|
\end{aligned}
$$

が成立し，

$$\tau_{j+1}(\omega)\le N<\sigma_{j+1}(\omega)$$

ならば

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\left(X_{\min\{\tau_{i+1}(\omega),N\}}(\omega)-X_{\min\{\sigma_i(\omega),N\}}(\omega)\right)\\
&=\sum_{i=1}^{j}\left(X_{\tau_{i+1}(\omega)}(\omega)-X_{\sigma_i(\omega)}(\omega)\right)\\
&\le(\alpha-\beta)\cdot U_F^{\alpha,\beta;X}(\omega)+X_N^+(\omega)+|\alpha|
\end{aligned}
$$

が成立する．

ゆえに Ω の任意の要素 ω において

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_{\min\{\tau_{i+1}(\omega),N\}}(\omega)-X_{\min\{\sigma_i(\omega),N\}}(\omega)\right)\le(\alpha-\beta)\cdot U_F^{\alpha,\beta;X}(\omega)+X_N^+(\omega)+|\alpha|$$

が成立する．左辺の各項については任意抽出定理より

$$0\le E\left(X_{\min\{\tau_{i+1},N\}}-X_{\min\{\sigma_i,N\}}\right)$$

が成り立つため，

$$0\le(\alpha-\beta)\cdot E\left(U_F^{\alpha,\beta;X}\right)+E(X_N^+)+|\alpha|$$

が成立する．移項して

$$E\left(U_F^{\alpha,\beta;X}\right)\le\frac{E(X_N^+)+|\alpha|}{\beta-\alpha}$$

を得る．∎

n を自然数として

$$D_n^N\overset{\mathrm{def}}{=}\left\{\frac{k}{2^n}\ \middle|\ \ k\in\{0,1,2,\cdots,N\cdot 2^n\}\right\}$$

と定めれば

$$E\left(U_{D_n^N}^{\alpha,\beta;X}\right) \leq \frac{E(X_N^+) + |\alpha|}{\beta - \alpha}$$

が成立する．ところで

$$\left\{U_{D_n^N}^{\alpha,\beta;X}\right\}_{n\in\boldsymbol{\omega}}$$

は単調増大列であるから，

$$U_{D^N}^{\alpha,\beta;X} \overset{\text{def}}{=\!=} \lim_{n\to\infty} U_{D_n^N}^{\alpha,\beta;X}$$

と定めれば

$$E\left(U_{D^N}^{\alpha,\beta;X}\right) \leq \frac{E(X_N^+) + |\alpha|}{\beta - \alpha}$$

が成立する．すなわち

$$P\left(U_{D^N}^{\alpha,\beta;X} = \infty\right) = 0$$

である．ここで

$$D^N \overset{\text{def}}{=\!=} \bigcup_{n\in\boldsymbol{\omega}} D_n^N$$

及び

$$B_{\alpha,\beta}^{(N)} \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{U_{D^N}^{\alpha,\beta;X} = \infty\right\}$$

とおけば

[0, N] 上では殆ど全てのパスが各点で左極限を持つ

$$\left\{\omega \in \Omega \mid \quad \exists t \in (0,N]\left(\sup_{\substack{s\in D^N \\ s<t}} \inf_{\substack{u\in D^N \\ s<u<t}} X_u(\omega) < \inf_{\substack{s\in D^N \\ s<t}} \sup_{\substack{u\in D^N \\ s<u<t}} X_u(\omega)\right)\right\} \subset \bigcup_{\substack{\alpha,\beta\in\mathbf{Q} \\ \alpha<\beta}} B_{\alpha,\beta}^{(N)}.$$

略証． ω を左辺の集合の要素とする．つまり，

$$t \in (0,N]$$

なる t で，そこにおいて

$$\sup_{\substack{s\in D^N \\ s<t}} \inf_{\substack{u\in D^N \\ s<u<t}} X_u(\omega) < \inf_{\substack{s\in D^N \\ s<t}} \sup_{\substack{u\in D^N \\ s<u<t}} X_u(\omega)$$

となるものが取れる．

$$\sup_{\substack{s\in D^N \\ s<t}} \inf_{\substack{u\in D^N \\ s<u<t}} X_u(\omega) < \alpha < \beta < \inf_{\substack{s\in D^N \\ s<t}} \sup_{\substack{u\in D^N \\ s<u<t}} X_u(\omega)$$

を満たす有理数 α と β を取る．また M を任意に選ばれた 0 でない自然数とする．このとき

$$s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \cdots < s_M < t_M$$

なる D^N の点列を，$\{1, 2, \cdots, M\}$ の各要素 i で

$$X_{s_i}(\omega) < \alpha \wedge \beta < X_{t_i}(\omega)$$

を満たすように取れる．ゆえに，

$$\{s_1, t_1, \cdots, s_M, t_M\} \subset D_n^N$$

なる自然数 n を取れば

$$M \leq U_{D_n^N}^{\alpha,\beta;X}(\omega)$$

が成立する．ゆえに

$$M \leq U_{D^N}^{\alpha,\beta;X}(\omega)$$

が成立する．M の任意性ゆえに

$$U_{D^N}^{\alpha,\beta;X}(\omega) = \infty$$

が成立する．■

同様の証明で次も得られる．

$[0, N]$ 上では殆ど全てのパスが各点で右極限を持つ

$$\left\{ \omega \in \Omega \mid \quad \exists t \in [0, N) \left(\sup_{\substack{s \in D^N \\ t < s}} \inf_{\substack{u \in D^N \\ t < u < s}} X_u(\omega) < \inf_{\substack{s \in D^N \\ t < s}} \sup_{\substack{u \in D^N \\ t < u < s}} X_u(\omega) \right) \right\} \subset \bigcup_{\substack{\alpha, \beta \in \mathbf{Q} \\ \alpha < \beta}} B_{\alpha,\beta}^{(N)}.$$

ここで

$$D \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{n \in \boldsymbol{\omega}} \left\{ \frac{k}{2^n} \mid \quad k \in \boldsymbol{\omega} \right\}$$

及び

$$B \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcup_{\substack{\alpha, \beta \in \mathbf{Q} \\ \alpha < \beta}} B_{\alpha,\beta}^{(N)}$$

とおけば，B は P-零集合であって，また上で示したことと

$$D^N = D \cap [0, N]$$

が成り立つことにより

$$\left\{ \omega \in \Omega \mid \quad \exists t \in]0, \infty[\left(\sup_{\substack{s \in D \\ s < t}} \inf_{\substack{u \in D \\ s < u < t}} X_u(\omega) < \inf_{\substack{s \in D \\ s < t}} \sup_{\substack{u \in D \\ s < u < t}} X_u(\omega) \right) \right\} \subset B$$

と

$$\left\{ \omega \in \Omega \;\middle|\; \exists t \in [0,\infty[\left(\sup_{\substack{s\in D\\ t<s}} \inf_{\substack{u\in D\\ t<u<s}} X_u(\omega) < \inf_{\substack{s\in D\\ t<s}} \sup_{\substack{u\in D\\ t<u<s}} X_u(\omega) \right) \right\} \subset B$$

が成立する．また定理 I.7.3 より P-零集合 A で，ω を $\Omega\backslash A$ の要素とし N を正の自然数とすれば

$$-\infty < \inf_{t\in D\cap[0,N]} X_t(\omega) \wedge \sup_{t\in D\cap[0,N]} X_t(\omega) < \infty$$

が成り立つようにできるものが取れる．つまり，

$$\omega \in \Omega\backslash(A \cup B)$$

なる ω に対しては，$]0,\infty[$ の各要素 t において

$$\sup_{\substack{s\in D\\ s<t}} \inf_{\substack{u\in D\\ s<u<t}} X_u(\omega) \in \mathbf{R}$$

かつ

$$\sup_{\substack{s\in D\\ s<t}} \inf_{\substack{u\in D\\ s<u<t}} X_u(\omega) = \inf_{\substack{s\in D\\ t<s}} \sup_{\substack{u\in D\\ t<u<s}} X_u(\omega)$$

が成立し，$[0,\infty[$ の各要素 t において

$$\sup_{\substack{s\in D\\ t<s}} \inf_{\substack{u\in D\\ t<u<s}} X_u(\omega) \in \mathbf{R}$$

かつ

$$\sup_{\substack{s\in D\\ t<s}} \inf_{\substack{u\in D\\ t<u<s}} X_u(\omega) = \inf_{\substack{s\in D\\ t<s}} \sup_{\substack{u\in D\\ t<u<s}} X_u(\omega)$$

が成立する．以上をまとめると，

定理 I.7.4 (劣マルチンゲールの殆ど全てのパスが各点で実数値の左極限及び右極限を持つ).　定理 I.7.3 の設定と記号を継承する．このとき P-零集合 B で次を満たすものが取れる．ω を $\Omega \backslash B$ の任意の要素とすれば

左極限　$]0,\infty[$ の各要素 t において

$$\sup_{\substack{s\in D\\ s<t}} \inf_{\substack{u\in D\\ s<u<t}} X_u(\omega) \in \mathbf{R}$$

かつ

$$\sup_{\substack{s\in D\\ s<t}} \inf_{\substack{u\in D\\ s<u<t}} X_u(\omega) = \inf_{\substack{s\in D\\ t<s}} \sup_{\substack{u\in D\\ t<u<s}} X_u(\omega)$$

が成り立つ．

右極限　$[0,\infty[$ の各要素 t において

$$\sup_{\substack{s\in D\\ t<s}} \inf_{\substack{u\in D\\ t<u<s}} X_u(\omega) \in \mathbf{R}$$

かつ

$$\sup_{\substack{s\in D\\ t<s}} \inf_{\substack{u\in D\\ t<u<s}} X_u(\omega) = \inf_{\substack{s\in D\\ t<s}} \sup_{\substack{u\in D\\ t<u<s}} X_u(\omega)$$

が成り立つ．

本節の主題は次の定理である．

定理 I.7.5 (劣マルチンゲールの右極限を取った写像は *RCLL* な劣マルチンゲールで修正となりうる).　設定と記号は定理 I.7.4 のものを継承する．また $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$ は完備であるとする．このとき $\mathbf{T}\times\Omega$ 上の写像 Y を

$$(t,\omega) \longmapsto \begin{cases} \sup\limits_{\substack{s\in D\\ t<s}} \inf\limits_{\substack{u\in D\\ t<u<s}} X_u(\omega) & \text{if } \omega \in \Omega\backslash B \\ 0 & \text{if } \omega \in B \end{cases}$$

なる関係により定めると，Y は $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上の $RCLL$ な $\{\mathscr{F}_{t+}\}_{t\in\mathbf{T}}$-劣マルチンゲールである．また $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$ が右連続であって，かつ

$$\mathbf{T} \ni t \longmapsto EX_t$$

も右連続であるとき，Y は $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上の $RCLL$ な $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$-劣マルチンゲールで，$X$ の修正である．

略証.

第一段　Y が $\{\mathscr{F}_{t+}\}_{t\in\mathbf{T}}$-適合であることを示す．$t$ を $\mathbf{T}$ の要素とする．また $\{t_n\}_{n\in\omega}$ を前段の物とする．

$$t < u$$

なる実数 u を任意に取れば，

$$\forall n \in \boldsymbol{\omega}\,(\,N < n \Longrightarrow t_n < u\,)$$

なる自然数 N が取れる．このとき

$$N < n$$

なる自然数 n に対して X_{t_n} は $\mathscr{F}_u/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測であり，仮定より

$$B \in \mathscr{F}_u$$

となるから

$$X_{t_n}\mathbb{1}_{\Omega\backslash B}$$

もまた $\mathscr{F}_u/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測である．そして

$$\left\{X_{t_n}\mathbb{1}_{\Omega\backslash B}\right\}_{N<n}$$

は Y_t に各点収束するので，定理 G.2.11 より Y_t も $\mathscr{F}_u/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測である．

$$t < u$$

なる実数 u の任意性より Y_t の $\mathscr{F}_{t+}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測性が従う．

第二段　t を $\mathbf{T}$ の要素とするとき，

$$A \in \mathscr{F}_t \Longrightarrow \int_A X_t\,dP \leq \int_A Y_t\,dP \tag{I.7}$$

が成り立つことを示す．

$$\forall n \in \boldsymbol{\omega}\ (\,t < t_n\,)$$

かつ

$$\forall n \in \boldsymbol{\omega}\ (\,t_{n+1} \leq t_n\,)$$

かつ

$$\lim_{n\to\infty} t_n = t$$

を満たす D の部分集合 $\{t_n\}_{n\in\boldsymbol{\omega}}$ を取ると，

$$\{X_{t_n}\}_{n\in\boldsymbol{\omega}}$$

は一様可積分であって，かつ $\Omega\backslash B$ 上で

$$Y_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_{t_n}(\omega)$$

が成立するので，定理 I.3.3 より

$$E|Y_t| < \infty$$

かつ

$$E\,|Y_t - X_{t_n}| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \tag{I.8}$$

が成立する．A を $\mathscr{F}_t$ の任意の要素とすると，X の劣マルチンゲール性より全ての自然数 n で

$$\int_A X_t \, dP \leq \int_A X_{t_n} \, dP$$

が成立するので

$$\int_A X_t \, dP \leq \int_A Y_t \, dP$$

が従う．ゆえに (I.7) が得られた．

第三段　Y が $\{\mathscr{F}_{t+}\}_{t \in \mathbf{T}}$-劣マルチンゲールであることを示す．$s$ と t を

$$s < t$$

なる $\mathbf{T}$ の要素として，

$$\forall n \in \boldsymbol{\omega} \ (\, s < s_n < t \,)$$

かつ

$$\forall n \in \boldsymbol{\omega} \ (\, s_{n+1} \leq s_n \,)$$

かつ

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s$$

を満たす D の部分集合 $\{s_n\}_{n \in \omega}$ を取る．A を $\mathscr{F}_{s+}$ の要素とすると，任意の自然数 n に対して

$$A \in \mathscr{F}_{s_n}$$

が成り立つので，X の劣マルチンゲール性と (I.7) から

$$\int_A X_{s_n} \, dP \leq \int_A X_t \, dP \leq \int_A Y_t \, dP$$

が成立する．他方で

$$E\,|Y_s - X_{s_n}| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成立するので

$$\int_A Y_s \, dP \leq \int_A Y_t \, dP$$

が従う．ゆえに Y は $\{\mathscr{F}_{t+}\}_{t \in \mathbf{T}}$-劣マルチンゲールである．

第四段　Y が $RCLL$ であることを示す．ω を $\Omega \backslash B$ の要素とし，t を $\mathbf{T}$ の要素とする．ϵ を任意に与えられた正の実数とすると，

$$r \in D \wedge t < r < t + \delta \Longrightarrow |Y_t(\omega) - X_r(\omega)| < \epsilon$$

を満たす正の実数 δ が取れる．このとき s を

$$t < s < t + \delta$$

なる任意の実数とすると，

$$r \in D \wedge s < r < t + \delta \wedge |Y_s(\omega) - X_r(\omega)| < \epsilon$$

なる実数 r を取れば

$$|Y_t(\omega) - Y_s(\omega)| \leq |Y_t(\omega) - X_r(\omega)| + |X_r(\omega) - Y_s(\omega)| < 2 \cdot \epsilon$$

が成立する．ゆえに Y は右連続である．次に左極限の存在を示すが，ここで

$$Z_t(\omega) \stackrel{\mathrm{def}}{=\!=} \sup_{\substack{s \in D \\ s < t}} \inf_{\substack{u \in D \\ s < u < t}} X_u(\omega)$$

とおき，また

$$0 < t$$

であるとする．ϵ を任意に与えられた正の実数とすると，

$$r \in D \wedge t - \delta < r < t \Longrightarrow |Z_t(\omega) - X_r(\omega)| < \epsilon$$

を満たす正の実数 δ が取れる．このとき s を

$$t - \delta < s < t$$

なる任意の実数とすると，

$$r \in D \wedge s < r < t \wedge |Y_s(\omega) - X_r(\omega)| < \epsilon$$

なる実数 r を取れば

$$|Z_t(\omega) - Y_s(\omega)| \leq |Z_t(\omega) - X_r(\omega)| + |X_r(\omega) - Y_s(\omega)| < 2 \cdot \epsilon$$

が成立する．ゆえに Y は t で左極限を持ち，それは Z_t に一致する．

第五段　$\{\mathscr{F}_t\}_{t \in \mathbf{T}}$ が右連続であって，かつ

$$\mathbf{T} \ni t \longmapsto EX_t$$

も右連続であるとき，Y が X の修正であることを示す．t を $\mathbf{T}$ の要素として，

$$\forall n \in \boldsymbol{\omega} \ (\, t < t_n \,)$$

かつ

$$\forall n \in \boldsymbol{\omega} \ (\, t_{n+1} \leq t_n \,)$$

かつ

$$\lim_{n \to \infty} t_n = t$$

を満たす D の部分集合 $\{t_n\}_{n \in \boldsymbol{\omega}}$ を取る．このとき

$$EX_t = \lim_{n \to \infty} EX_{t_n}$$

が成立し，一方で (I.8) から

$$EY_t = \lim_{n\to\infty} EX_{t_n}$$

も成り立つから

$$EX_t = EY_t$$

が成り立つ．またいまは Y_t が $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測であるから，(I.7) より

$$X_t \leq Y_t$$

が P-a.s. に成立する．ゆえに

$$X_t = Y_t$$

が P-a.s. に成立する．ゆえに Y は X の修正である．∎

最後に，右連続な劣マルチンゲールは殆ど全てのパスが $RCLL$ であることを証明して本節を終える．

定理 I.7.6 (パスの正則性). $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間とし，$\mathbf{T} \overset{\text{def}}{=} [0,\infty[$ とし，$\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$ を $\mathscr{F}$ に付随するフィルトレーションとし，X を $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上の右連続な $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$-劣マルチンゲールとする．このとき，$\Omega\backslash B$ のすべての要素のパスが $RCLL$ であるように P-零集合 B が取れる．

略証． 定理 I.7.4 より，P-零集合 B が取れて，ω を $\Omega\backslash B$ の要素とすれば $\mathbf{T}$ の各要素 t において

$$\sup_{\substack{s\in D\\ s<t}} \inf_{\substack{u\in D\\ s<u<t}} X_u(\omega) \in \mathbf{R}$$

かつ

$$\sup_{\substack{s\in D\\ s<t}} \inf_{\substack{u\in D\\ s<u<t}} X_u(\omega) = \inf_{\substack{s\in D\\ s<t}} \sup_{\substack{u\in D\\ s<u<t}} X_u(\omega)$$

が成り立つ．いま ω を $\Omega\backslash B$ から任意に選ばれた要素とし，t を $\mathbf{T}$ から任意に選ばれた要素とし，

$$\sup_{\substack{s\in D\\ s<t}} \inf_{\substack{u\in D\\ s<u<t}} X_u(\omega) = \sup_{s<t} \inf_{s<u<t} X_u(\omega) \tag{I.9}$$

かつ

$$\inf_{\substack{s\in D\\ s<t}} \sup_{\substack{u\in D\\ s<u<t}} X_u(\omega) = \inf_{s<t} \sup_{s<u<t} X_u(\omega) \tag{I.10}$$

が成り立つことを示す．

(I.9) のスケッチ　s を

$$s < t$$

なる D の要素とすると，

$$\inf_{s<u<t} X_u(\omega) \leq \inf_{\substack{u\in D\\ s<u<t}} X_u(\omega)$$

が成り立つ．α を

$$\inf_{s<u<t} X_u(\omega) < \alpha$$

を満たす任意に与えられた実数とすれば，

$$s < u < t$$

かつ

$$X_u(\omega) < \alpha$$

を満たす実数 u が取れるが，パスの右連続性から

$$s < v < t$$

かつ

$$X_v(\omega) < \alpha$$

を満たす D の要素 v が取れるので

$$\inf_{\substack{u\in D\\ s<u<t}} X_u(\omega) < \alpha$$

が従う．ゆえに

$$\inf_{s<u<t} X_u(\omega) = \inf_{\substack{u\in D\\ s<u<t}} X_u(\omega)$$

が成り立つ．ゆえに

$$\sup_{\substack{s\in D\\ s<t}} \inf_{\substack{u\in D\\ s<u<t}} X_u(\omega) \leq \sup_{s<t} \inf_{s<u<t} X_u(\omega)$$

が成り立つ．α を

$$\alpha < \sup_{s<t} \inf_{s<u<t} X_u(\omega)$$

を満たす任意に与えられた実数とすれば

$$\alpha < \inf_{s<u<t} X_u(\omega)$$

を満たす実数 s が取れるが，このとき r を

$$s \leq r < t$$

なる D の要素として取れば

$$\alpha < \inf_{\substack{u\in D\\ r<u<t}} X_u(\omega)$$

が成り立つから

$$\alpha < \sup_{\substack{s\in D\\ s<t}} \inf_{\substack{u\in D\\ s<u<t}} X_u(\omega)$$

が成り立つ．ゆえに

$$\sup_{\substack{s\in D\\ s<t}} \inf_{\substack{u\in D\\ s<u<t}} X_u(\omega) = \sup_{s<t} \inf_{s<u<t} X_u(\omega)$$

が得られた．

(I.10) のスケッチ　s を

$$s < t$$

なる D の要素とすると，

$$\sup_{\substack{u \in D \\ s<u<t}} X_u(\omega) \leq \sup_{s<u<t} X_u(\omega)$$

が成り立つ．α を

$$\alpha < \sup_{s<u<t} X_u(\omega)$$

を満たす任意に与えられた実数とすれば，

$$s < u < t$$

かつ

$$\alpha < X_u(\omega)$$

を満たす実数 u が取れるが，パスの右連続性から

$$s < v < t$$

かつ

$$\alpha < X_v(\omega)$$

を満たす D の要素 v が取れるので

$$\alpha < \sup_{\substack{u \in D \\ s<u<t}} X_u(\omega)$$

が従う．ゆえに

$$\sup_{\substack{u \in D \\ s<u<t}} X_u(\omega) = \sup_{s<u<t} X_u(\omega)$$

が成り立つ．ゆえに

$$\inf_{s<t} \sup_{s<u<t} X_u(\omega) \leq \inf_{\substack{s \in D \\ s<t}} \sup_{\substack{u \in D \\ s<u<t}} X_u(\omega)$$

が成り立つ．α を

$$\inf_{s<t} \sup_{s<u<t} X_u(\omega) < \alpha$$

を満たす任意に与えられた実数とすれば

$$\sup_{s<u<t} X_u(\omega) < \alpha$$

を満たす実数 s が取れるが，このとき r を

$$s \leq r < t$$

なる D の要素として取れば

$$\sup_{\substack{u\in D\\ r<u<t}} X_u(\omega) < \alpha$$

が成り立つから

$$\inf_{\substack{s\in D\\ s<t}} \sup_{\substack{u\in D\\ s<u<t}} X_u(\omega) < \alpha$$

が成り立つ．ゆえに

$$\inf_{s<t} \sup_{s<u<t} X_u(\omega) = \inf_{\substack{s\in D\\ s<t}} \sup_{\substack{u\in D\\ s<u<t}} X_u(\omega)$$

が得られた． ∎

I.8　Gauss 過程

$(\Omega,\mathscr{F},P)$ を確率空間とし，X をこの上の実数値確率過程とする．X が連続な確率過程であって，かつ

- s,t を $s<t$ なる $\mathbf{T}$ の要素とするとき

$$A \in \mathscr{B}(\mathbf{R}) \Longrightarrow P\left((X_t - X_s)^{-1}(A)\right) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(t-s)}\right)\,dx$$

  が成り立つ．
- s,t を $s<t$ なる $\mathbf{T}$ の要素とするとき $X_t - X_s$ が $\mathscr{F}_s^X$ と独立.
- P-a.s に $X_0 = 0$.

が満たされるとき，X を $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上の標準 Gauss 過程と呼ぶ．X が $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上の標準 Gauss 過程であって，さらに

$$s,t \in \mathbf{T} \Longrightarrow \int_\Omega X_s \cdot X_t\,dP = \min\{s,t\}$$

を満たすとき，X を $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上の標準 Wiener 過程と呼ぶ.

本節では所与の確率空間 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上に Wiener 過程が存在するとして考察を進め，それを基にして Wiener 空間の構成法を述べる．然るべき確率空間 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 及びその上の Wiener 過程の構成法は I.10 節で述べる.

定義 I.8.1 (座標過程).　F を $\mathbf{T}$ 上の $\mathbf{R}$ 値写像の集合とする．このとき

$$X \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \{\,((t,w),w(t)) \mid \quad t \in \mathbf{T} \wedge w \in F\,\}$$

で定める X を $(\mathbf{T},F)$-座標過程と呼ぶ．つまり，X の w に対する標本路は w そのものである.

定義 I.8.2 (筒集合).　F を $\mathbf{T}$ 上の $\mathbf{R}$ 値写像の集合とするとき,

$$\mathrm{cyl}\,(F) \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \{\,x \mid \quad \exists t \in \mathbf{T}\,\exists A \in \mathscr{B}(\mathbf{R})\ (\,x = \{\,w \in F \mid \quad w(t) \in A\,\}\,)\,\}$$

で定める集合を F の筒集合族と呼ぶ.

定理 I.8.3 (座標過程は確率過程).　F を $\mathbf{T}$ 上の $\mathbf{R}$ 値写像の集合とし，X を $(\mathbf{T}, F)$-座標過程とする．このとき各 $t \in \mathbf{T}$ で X_t は $\sigma(\mathrm{cyl}\,(F))/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測である．

略証.　t を $\mathbf{T}$ の要素とし，A を $\mathscr{B}(\mathbf{R})$ の要素とするとき，

$$\{\, w \in F \mid \quad X_t(w) \in A \,\} = \{\, w \in F \mid \quad w(t) \in A \,\} \in \mathrm{cyl}\,(F)$$

が成り立つ．∎

$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間とし，X をこの上の確率過程とするとき，Ω の要素 ω に対してその標本路

$$\mathbf{T} \ni t \longmapsto X_t(\omega)$$

を対応させる写像，つまり

$$\Omega \ni \omega \longmapsto \{\, (t, X_t(\omega)) \mid \quad t \in \mathbf{T} \,\}$$

なる写像を $X_\bullet$ と書く．

定理 I.8.4 ($X_\bullet$ は可測).　F を $\mathbf{T}$ 上の $\mathbf{R}$ 値写像の集合とし，$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間とし，X をこの上の確率過程とする．このとき

$$\forall \omega \in \Omega \; (\, X_\bullet(\omega) \in F \,)$$

ならば $X_\bullet$ は $\mathscr{F}/\sigma(\mathrm{cyl}\,(F))$-可測である．

略証.　E を $\mathrm{cyl}\,(F)$ の要素として

$$X_\bullet^{-1}(E) \in \mathscr{F}$$

が成り立つことを示す．A は筒集合であるから，

$$E = \{\, w \in F \mid \quad w(t) \in A \,\}$$

を満たす $\mathbf{T}$ の要素 t および $\mathscr{B}(\mathbf{R})$ の要素 A が取れる．このとき

$$X_\bullet^{-1}(E) = \{\, \omega \in \Omega \mid \quad X_\bullet(\omega) \in E \,\} = \{\, \omega \in \Omega \mid \quad X_t(\omega) \in A \,\}$$

が成り立ち，X は確率過程であるので右辺は $\mathscr{F}$ に属する．いま

$$\mathrm{cyl}\,(F) \subset \left\{\, E \in \sigma(\mathrm{cyl}\,(F)) \mid \quad X_\bullet^{-1}(E) \in \mathscr{F} \,\right\}$$

が満たされることが分かったので $X_\bullet$ は $\mathscr{F}/\sigma(\mathrm{cyl}\,(F))$-可測である．∎

定理 I.8.5 (連続写像の全体の筒集合族は Borel 集合族を生成する).　C を $\mathbf{T}$ 上の実連続写像の全体とするとき

$$\sigma(\mathrm{cyl}\,(C)) = \mathscr{B}(C).$$

略証.　(P. 78)

定理 I.8.6.　$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間とし，X をこの上の Gauss 過程とし，C を $\mathbf{T}$ 上の実連続写像の全体とし，B を $(\mathbf{T}, C)$-座標過程とする．また

$$\mu_X \overset{\text{def}}{=\!=} PX_{\bullet}^{-1}$$

と定める．このとき B は $(C, \mathscr{B}(C), \mu_X)$ 上の Gauss 過程である．さらに X が $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上の Wiener 過程ならば B も $(C, \mathscr{B}(C), \mu_X)$ 上の Wiener 過程である．

略証.

第一段　定理 I.8.3 より B は連続な確率過程である．また

$$\{\, w \in C \mid \quad B_0(w) = 0 \,\} = \{\, w \in C \mid \quad w(0) = 0 \,\}$$

なので

$$X_{\bullet}^{-1}\left(\{\, w \in C \mid \quad B_0(w) = 0 \,\}\right) = \{\, \omega \in \Omega \mid \quad X_0(\omega) = 0 \,\}$$

が成り立つ．ゆえに

$$\mu_X\left(\{\, w \in C \mid \quad B_0(w) \neq 0 \,\}\right) = 0$$

が成り立つ．

第二段　s, t を $s < t$ なる $\mathbf{T}$ の要素とするとき，

$$(B_t - B_s) \circ X_{\bullet} = X_t - X_s$$

が成り立つので，

$$\mu_X (B_t - B_s)^{-1} = P\left((B_t - B_s) \circ X_{\bullet}\right)^{-1} = P(X_t - X_s)^{-1}$$

が成り立つ．すなわち

$$A \in \mathscr{B}(\mathbf{R}) \Longrightarrow \mu_X\left((B_t - B_s)^{-1}(A)\right) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(t-s)}\right) dx$$

も満たされる．

第三段　$B_t - B_s$ と $\mathscr{F}_s^B$ が独立であることを示す．$t \in \mathbf{T}$ なる r と $\mathscr{B}(\mathbf{R})$ の要素 E に対して

$$X_{\bullet}^{-1}(B_t^{-1}(E)) = X_t^{-1}(E)$$

が成り立つので

$$\left\{\, x \mid \quad \exists r \in [0, s]\, \exists E \in \mathscr{B}(\mathbf{R}) \ \left(x = B_r^{-1}(E)\right) \,\right\} \subset \left\{\, A \in \mathscr{F}_s^B \mid \quad X_{\bullet}^{-1}(A) \in \mathscr{F}_s^X \,\right\}$$

が成り立つ．左辺は $\mathscr{F}_s^B$ を生成するので

$$A \in \mathscr{F}_s^B \Longrightarrow X_{\bullet}^{-1}(A) \in \mathscr{F}_s^X$$

が成り立つ．$X_t - X_s$ と $\mathscr{F}_s^X$ の独立性を使えば，

$$
\begin{aligned}
U \in \mathscr{B}(\mathbf{R}) \wedge A \in \mathscr{F}_s^B \Longrightarrow \mu_X\left((B_t - B_s)^{-1}(U) \cap A\right) &= PX_\bullet^{-1}\left((B_t - B_s)^{-1}(U) \cap A\right) \\
&= P\left(X_\bullet^{-1}\left((B_t - B_s)^{-1}(U)\right) \cap X_\bullet^{-1}(A)\right) \\
&= P\left((X_t - X_s)^{-1}(U) \cap X_\bullet^{-1}(A)\right) \\
&= P\left((X_t - X_s)^{-1}(U)\right) PX_\bullet^{-1}(A) \\
&= \mu_X\left((B_t - B_s)^{-1}(U)\right) \mu_X(A)
\end{aligned}
$$

が成立し，$B_t - B_s$ と $\mathscr{F}_s^B$ との独立性が従う．

第四段　$f : \mathbf{R}^2 \ni (x, y) \longmapsto x \cdot y$ なる f に対して

$$
\int_C f \circ (B_t, B_s)\, d\mu_X = \int_{\mathbf{R}^2} f\, d\mu_X(B_t, B_s)^{-1}
$$

が成り立つ．ただし $\mu_X(B_t, B_s)^{-1}$ の意味は

$$
A \in \mathscr{B}(\mathbf{R}^2) \Longrightarrow \mu_X(B_t, B_s)^{-1}(A) = \mu_X(\{\, w \in C \mid \quad (B_t(w), B_s(w)) \in A \,\})
$$

である．他方で

$$
\mu_X(B_t, B_s)^{-1} = P(X_t, X_s)^{-1}
$$

が成り立つので

$$
\int_C f \circ (B_t, B_s)\, d\mu_X = \int_{\mathbf{R}^2} f\, dP(X_t, X_s)^{-1} = \int_\Omega f \circ (X_t, X_s)\, dP
$$

が従う．ゆえに，W が Wiener 過程であるときは B もまた Wiener 過程である．∎

定義 I.8.7 (座標過程を Gauss 過程とする確率測度の一意性).　C を $\mathbf{T}$ 上の実連続写像の全体とし，B を $(\mathbf{T}, C)$-座標過程とし，μ_1, μ_2 を $\mathscr{B}(C)$ 上の確率測度とする．このとき B が $(C, \mathscr{B}(C), \mu_1)$ 上の Gauss 過程であり，かつ $(C, \mathscr{B}(C), \mu_2)$ 上の Gauss 過程でもあるならば，$\mu_1 = \mu_2$.

証明.

第一段　μ_1 と μ_2 が $\mathrm{cyl}\,(C)$ 上で一致することを示す．E を $\mathrm{cyl}\,(C)$ の要素とすれば，

$$
E = \{\, w \in C \mid \quad w(t) \in A \,\}
$$

なる $\mathbf{T}$ の要素 t と $\mathscr{B}(\mathbf{R})$ の要素 A が取れる．すなわち

$$
E = B_t^{-1}(A)
$$

が成り立つ．いま，仮定より

$$
\mu_1(B_t - B_0 \in A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) dx = \mu_2(B_t - B_0 \in A)
$$

が満たされているが，同時に

$$\mu_1(N_1) = 0 \wedge \forall w \in C \backslash N_1 \ (B_0(w) = 0)$$

を満たす N_1 と

$$\mu_2(N_2) = 0 \wedge \forall w \in C \backslash N_2 \ (B_0(w) = 0)$$

を満たす N_2 が取れるので，

$$\begin{aligned}
\mu_1(B_t \in A) &= \mu_1(\{B_t \in A\} \cap (C \backslash N_1)) \\
&= \mu_1(\{B_t - B_0 \in A\} \cap (C \backslash N_1)) \\
&= \mu_1(B_t - B_0 \in A) \\
&= \mu_2(B_t - B_0 \in A) \\
&= \mu_2(\{B_t - B_0 \in A\} \cap (C \backslash N_2)) \\
&= \mu_2(\{B_t \in A\} \cap (C \backslash N_2)) \\
&= \mu_2(B_t \in A)
\end{aligned}$$

が成立する．ゆえに μ_1 と μ_2 は $\mathrm{cyl}(C)$ 上で一致する

第二段　いま n を 2 以上の自然数とし，$t_1, t_2, \cdots, t_n$ を

$$t_1 < t_2 < \cdots < t_n$$

なる $\mathbf{T}$ の要素とする．このとき

$$\begin{aligned}
E \in \mathscr{B}(\mathbf{R}^n) \Longrightarrow &\mu_1(\{(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \cdots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}) \in E\}) \\
&= \mu_2(\{(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \cdots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}) \in E\})
\end{aligned}$$

が成り立つことを示す．ところで

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \quad (E_1, E_2, \cdots, E_n \in \mathscr{B}(\mathbf{R}))$$

の形の集合の全体は $\mathscr{B}(\mathbf{R}^n)$ を生成する乗法族をなすから，これに対して

$$\begin{aligned}
&\mu_1(\{(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \cdots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n\}) \\
&= \mu_2(\{(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \cdots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n\})
\end{aligned}$$

が成り立つことを示せば良い．実際，仮定より

$$\begin{aligned}
\mu_1\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \in E_i\right) &= \int_{E_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(t_i - t_{i-1})}\right) dx \\
&= \mu_2(B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \in E_i)
\end{aligned}$$

が成り立ち，かつ $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \cdots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ は μ_1 に関しても μ_2 に関しても独立なので，

$$\begin{aligned}
&\mu_1(\{(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \cdots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n\}) \\
&= \mu_1(B_{t_1} \in E_1) \cdot \mu_1(B_{t_2} - B_{t_1} \in E_2) \cdot \cdots \cdot \mu_1(B_{t_n} - B_{t_{n-1}} \in E_n) \\
&= \mu_2(B_{t_1} \in E_1) \cdot \mu_2(B_{t_2} - B_{t_1} \in E_2) \cdot \cdots \cdot \mu_2(B_{t_n} - B_{t_{n-1}} \in E_n) \\
&= \mu_2(\{(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \cdots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n\})
\end{aligned}$$

が得られる．

第三段　$\mathscr{B}(C) = \sigma(\mathrm{cyl}\,(C))$ であるから，

$$\mathscr{A} \overset{\mathrm{def}}{=} \left\{ x \mid \quad \exists n \in \boldsymbol{\omega}\, \exists A \left(A : n \longrightarrow \mathrm{cyl}\,(C) \wedge x = \bigcap_{i \in n} A(i) \right) \right\}$$

により $\mathrm{cyl}\,(C)$ の有限交叉の全体を定めれば

$$\mathscr{B}(C) = \sigma(\mathscr{A})$$

が成立する．$\mathscr{A}$ は乗法族であるので，

$$\mathscr{A} \subset \left\{ E \in \mathscr{B}(C) \mid \quad \mu_1(E) = \mu_2(E) \right\}$$

が成り立つことを示せば Dynkin 族定理より $\mu_1 = \mu_2$ が従う．いま E を $\mathscr{A}$ の要素とする．このとき E は空か $\mathrm{cyl}\,(C)$ の要素か，或いは

$$t_1 < t_2 < \cdots < t_n$$

なる $\mathbf{T}$ の要素 $t_1, \cdots, t_n$ と $\mathscr{B}(\mathbf{R})$ の要素 $A_1, \cdots, A_n$ により

$$E = B_{t_1}^{-1}(A_1) \cap B_{t_2}^{-1}(A_2) \cap \cdots \cap B_{t_n}^{-1}(A_n)$$

なる形で表される．最後の場合，E は

$$E = \{ w \in C \mid \quad (B_{t_1}(w), B_{t_2}(w), \cdots, B_{t_n}(w)) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \}$$

と書き直される．ここで φ を

$$\varphi : \mathbf{R}^n \ni (x_1, x_2, \cdots, x_n) \longmapsto (x_1, x_2 - x_1, \cdots, x_n - x_{n-1})$$

なる写像とすれば，φ は $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^n$ への同相写像であるから

$$\varphi * (A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n) \in \mathscr{B}(\mathbf{R}^n)$$

が満たされる．そして第二段の結果より

$$\begin{aligned} \mu_1(E) &= \mu_1 \left(\left\{ (B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \cdots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}) \in \varphi * (A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n) \right\} \right) \\ &= \mu_2 \left(\left\{ (B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \cdots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}) \in \varphi * (A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n) \right\} \right) \\ &= \mu_2(E) \end{aligned}$$

が成立する．∎

定義 I.8.8 (Wiener 測度).　C を $\mathbf{T}$ 上の実連続写像の全体とし，B を $(\mathbf{T}, C)$-座標過程とし，μ_w を $\mathscr{B}(C)$ 上の確率測度とする．μ_w が B を $(C, \mathscr{B}(C), \mu_w)$ 上の Wiener 過程たらしめるとき，μ_w を $\mathscr{B}(C)$ 上の **Wiener 測度 (Wiener measure)** と呼び，$(C, \mathscr{B}(C), \mu_w)$ を **Wiener 空間 (Wiener space)** と呼ぶ.

Wiener 測度の存在は定理 I.8.6 より，Wiener 測度の一意性は定理 I.8.7 より従う．

I.9　拡張定理

いま，T を空でない集合とし，T の任意の要素 t に対して可測空間 $(X_t, \mathscr{B}_t)$ が定まっていて，また

$$\forall t \in T\,(\,X_t \neq \emptyset\,)$$

が満たされているとする．$\mathscr{F}$ を T の空でない任意の有限部分集合の全体として，$\mathscr{F}$ の任意の要素 Λ に対して

$$X_\Lambda \overset{\text{def}}{=\!=} \prod_{t\in\Lambda} X_t, \quad \mathscr{B}_\Lambda \overset{\text{def}}{=\!=} \bigotimes_{t\in\Lambda} \mathscr{B}_t$$

により可測空間 $(X_\Lambda, \mathscr{B}_\Lambda)$ を定める．また

$$X \overset{\text{def}}{=\!=} \prod_{t\in T} X_t, \quad \mathscr{B} \overset{\text{def}}{=\!=} \bigotimes_{t\in T} \mathscr{B}_t$$

とおく．$\mathscr{F}$ の任意の要素 Λ, Λ' に対し，$\Lambda \subset \Lambda'$ であるとき $X_{\Lambda'}$ から X_Λ への射影を $\pi_{\Lambda',\Lambda}$ と書き，また X から X_Λ への射影を π_Λ と書く．以上が準備となる．

定理の首脳部に入る前に次を証明しておく．

補題 I.9.1 (射影の可測性).　Λ と Λ' を $\Lambda \subset \Lambda'$ なる T の空でない部分集合とするとき，射影 $\pi_{\Lambda',\Lambda}$ は $\mathscr{B}_{\Lambda'}/\mathscr{B}_\Lambda$-可測である．また射影 π_Λ は $\mathscr{B}/\mathscr{B}_\Lambda$-可測である．

証明.　t を Λ の要素とすれば $\pi_{\Lambda,\{t\}}$ は X_Λ から X_t への射影であるから，直積 σ-加法族の定義より $\pi_{\Lambda,\{t\}}$ は $\mathscr{B}_\Lambda/\mathscr{B}_t$-可測である．特に π_Λ は $\mathscr{B}/\mathscr{B}_\Lambda$-可測である．また $\Lambda \subset \Lambda'$ であるとき，t を Λ の要素として B を $\mathscr{B}_t$ の要素とすれば

$$\pi_{\Lambda',\Lambda}^{-1} * \left(\pi_{\Lambda,\{t\}}^{-1} * B\right) = \pi_{\Lambda',\{t\}}^{-1} * B$$

が成立するので

$$\bigcup_{t\in\Lambda} \left\{\, \pi_{\Lambda,\{t\}}^{-1} * B \mid \quad B \in \mathscr{B}_t \,\right\} \subset \left\{\, B \in \mathscr{B}_\Lambda \mid \quad \pi_{\Lambda',\Lambda}^{-1} * B \in \mathscr{B}_{\Lambda'} \,\right\}$$

が成り立つ．左辺は $\mathscr{B}_\Lambda$ を生成し右辺は σ-加法族であるから $\pi_{\Lambda',\Lambda}$ の $\mathscr{B}_{\Lambda'}/\mathscr{B}_\Lambda$-可測性が従う．■

本節の主題は次である．いま，$\mathscr{F}$ の任意の要素 Λ に対し，$(X_\Lambda, \mathscr{B}_\Lambda)$ 上に確率測度 μ_Λ が定まっていて

$$\forall \Lambda, \Lambda' \in \mathscr{F}, \quad \Lambda \subset \Lambda' \Longrightarrow \mu_{\Lambda'}\pi_{\Lambda',\Lambda}^{-1} = \mu_\Lambda$$

が成り立っているとする．この式を**両立条件 (consistency condition)** と呼ぶ．加えて，T の任意の要素 t に対して $\mathscr{B}_t$ に含まれるコンパクトクラス $\mathcal{K}_t$ が取れて，任意の正数 ϵ と $\mathscr{B}_t$ の任意の要素 B に対して

$$K \subset B \wedge \mu_{\{t\}}(B \backslash K) < \epsilon$$

なる $\mathcal{K}_t$ の要素 K が取れるとする．このとき，

$$\forall \Lambda \in \mathscr{F}, \quad \mu\pi_\Lambda^{-1} = \mu_\Lambda.$$

を満たす $(X, \mathscr{B})$ 上の確率測度 μ が唯一つだけ取れる．

証明.

第一段　集合 $\mathscr{R}$ を

$$\mathscr{R} \overset{\text{def}}{=\!=} \bigcup_{\Lambda \in \mathscr{F}} \left\{ \pi_{\Lambda}^{-1} * B \mid \quad B \in \mathscr{B}_{\Lambda} \right\}$$

により定めれば，$\mathscr{R}$ は X 上の加法族となり $\mathscr{B}$ を生成する．まず

$$X = \pi_{\Lambda}^{-1} * X_{\Lambda}$$

より X は $\mathscr{R}$ の要素である．また A を $\mathscr{R}$ の要素とすれば

$$A = \pi_{\Lambda}^{-1} * B$$

を満たす $\mathscr{F}$ の要素 Λ と $\mathscr{B}_{\Lambda}$ の要素 B が取れて，このとき

$$X \backslash A = \pi_{\Lambda}^{-1} * (X_{\Lambda} \backslash B)$$

が成り立つので

$$X \backslash A \in \mathscr{R}$$

も成り立つ．A と A' を $\mathscr{R}$ の要素とすれば，

$$A = \pi_{\Lambda}^{-1} * B$$

を満たす $\mathscr{F}$ の要素 Λ と $\mathscr{B}_{\Lambda}$ の要素 B が取れて，かつ

$$A' = \pi_{\Lambda'}^{-1} * B'$$

を満たする $\mathscr{F}$ の要素 Λ' と $\mathscr{B}_{\Lambda'}$ の要素 B' も取れる．ここで

$$\Lambda'' \overset{\text{def}}{=\!=} \Lambda \cup \Lambda'$$

とおけば

$$A = \pi_{\Lambda''}^{-1} * \left(\pi_{\Lambda'',\Lambda}^{-1} * B \right)$$

と

$$A' = \pi_{\Lambda''}^{-1} * \left(\pi_{\Lambda'',\Lambda'}^{-1} * B' \right)$$

が成り立つ．よって

$$A \cup A' = \pi_{\Lambda''}^{-1} \left(\pi_{\Lambda'',\Lambda}^{-1}(B) \cup \pi_{\Lambda'',\Lambda'}^{-1}(B') \right)$$

となるが，補題 I.9.1 より $\pi_{\Lambda'',\Lambda}^{-1}(B)$ と $\pi_{\Lambda'',\Lambda'}^{-1}(B')$ は共に $\mathscr{B}_{\Lambda''}$ に属するので

$$A \cup A' \in \mathscr{R}$$

が成立する．以上より $\mathscr{R}$ は X 上の加法族である．また

$$\bigcup_{t \in T} \left\{ \pi_{\{t\}}^{-1}(B) \mid \quad B \in \mathscr{B}_t \right\} \subset \mathscr{R}$$

が成り立つが，左辺は $\mathscr{B}$ を生成するので

$$\mathscr{B} \subset \sigma(\mathscr{R})$$

を得る．一方で $\mathscr{F}$ の任意の要素 Λ に対し π_Λ は $\mathscr{B}/\mathscr{B}_\Lambda$-可測であるから

$$\mathscr{R} \subset \mathscr{B}$$

も成り立ち

$$\sigma(\mathscr{R}) = \mathscr{B}$$

が出る．

第二段　μ を

$$\mathscr{R} \ni \pi_\Lambda^{-1} * B \longmapsto P_\Lambda(B)$$

なる関係により定めると，μ は写像であって，また $\mathscr{R}$ の上の加法的である．まず μ が写像であることを示す．

$$\pi_\Lambda^{-1} * B = \pi_{\Lambda'}^{-1} * B'$$

が成り立っているとき，

$$\Lambda'' \stackrel{\text{def}}{=\!=} \Lambda \cup \Lambda'$$

とおけば

$$\pi_{\Lambda''}^{-1} * \left(\pi_{\Lambda'',\Lambda}^{-1} * B\right) = \pi_\Lambda^{-1} * B = \pi_{\Lambda'}^{-1} * B' = \pi_{\Lambda''}^{-1} * \left(\pi_{\Lambda'',\Lambda'}^{-1} * B'\right)$$

が成り立つ．ここで $\pi_{\Lambda''}$ は全射なので定理 A.9.27 より

$$\pi_{\Lambda'',\Lambda}^{-1} * B = \pi_{\Lambda'',\Lambda'}^{-1} * B'$$

が従い，両立条件から

$$\mu_\Lambda(B) = \mu_{\Lambda''}\pi_{\Lambda'',\Lambda}^{-1}(B) = \mu_{\Lambda''}\pi_{\Lambda'',\Lambda'}^{-1}(B') = \mu_{\Lambda'}(B')$$

が成り立つ．ゆえに μ は写像である．次に μ の加法性を示す．

$$\pi_{\Lambda_1}^{-1} * B_1 \cap \pi_{\Lambda_2}^{-1} * B_2 = \emptyset$$

であるとき，

$$\Lambda_3 \stackrel{\text{def}}{=\!=} \Lambda_1 \cup \Lambda_2$$

とおけば

$$\emptyset = \pi_{\Lambda_3}^{-1} * \left(\pi_{\Lambda_3,\Lambda_1}^{-1} * B_1\right) \cap \pi_{\Lambda_3} * \left(\pi_{\Lambda_3,\Lambda_2}^{-1} * B_2\right) = \pi_{\Lambda_3}^{-1} * \left(\pi_{\Lambda_3,\Lambda_1}^{-1} * B_1 \cap \pi_{\Lambda_3,\Lambda_2}^{-1} * B_2\right)$$

が成り立って，π_{Λ_3} が全射であるので

$$\pi_{\Lambda_3,\Lambda_1}^{-1} * B_1 \cap \pi_{\Lambda_3,\Lambda_2}^{-1} * B_2 = \emptyset$$

が従う．よって両立条件と併せて

$$\begin{aligned}\mu\left(\pi_{\Lambda_1}^{-1}*B_1\cup\pi_{\Lambda_2}^{-1}*B_2\right)&=\mu\left[\pi_{\Lambda_3}^{-1}*\left(\pi_{\Lambda_3,\Lambda_1}^{-1}*B_1\right)\cup\pi_{\Lambda_3}*\left(\pi_{\Lambda_3,\Lambda_2}^{-1}*B_2\right)\right]\\&=\mu\left[\pi_{\Lambda_3}^{-1}*\left(\pi_{\Lambda_3,\Lambda_1}^{-1}*B_1\cup\pi_{\Lambda_3,\Lambda_2}^{-1}*B_2\right)\right]\\&=\mu_{\Lambda_3}\left(\pi_{\Lambda_3,\Lambda_1}^{-1}*B_1\cup\pi_{\Lambda_3,\Lambda_2}^{-1}*B_2\right)\\&=\mu_{\Lambda_3}\left(\pi_{\Lambda_3,\Lambda_1}^{-1}*B_1\right)+\mu_{\Lambda_3}\left(\pi_{\Lambda_3,\Lambda_2}^{-1}*B_2\right)\\&=\mu\left(\pi_{\Lambda_1}^{-1}*B_1\right)+\mu\left(\pi_{\Lambda_2}^{-1}*B_2\right)\end{aligned}$$

が成立する．

第三段　μ が $\mathscr{R}$ の上で完全加法的であることを示す．

$$\bigcup_{t\in T}\left\{\,\pi_t^{-1}*K \;\middle|\; K\in\mathcal{K}_t\,\right\}$$

の有限和の全体を $\mathcal{K}$ とおけば $\mathcal{K}$ はコンパクトクラスである (未証明)．また

$$\mathscr{D}\overset{\text{def}}{=\!=}\left\{\,B\in\mathscr{B} \;\middle|\; \forall\epsilon\in\mathbf{R}_+\,\exists K\in\mathcal{K}\,\left(\,\mu(B\backslash K)<\epsilon\,\right)\right\}$$

は X 上の Dynkin 族である．ここで

$$\bigcup_{t\in T}\left\{\,\pi_t^{-1}*B \;\middle|\; B\in\mathscr{B}_t\,\right\}$$

の有限交叉の全体は $\mathscr{B}$ を生成する乗法族となるので，$\bigcap_{i=1}^{n}\pi_{t_i}^{-1}*B_i$ をその要素とするとき

$$\bigcap_{i=1}^{n}\pi_{t_i}^{-1}*B_i\in\mathscr{D}\tag{I.11}$$

が成り立つことを示せば

$$\mathscr{D}=\mathscr{B}$$

が成り立ち，定理 G.1.9 と定理 G.1.7 より μ の完全加法性が従う．ϵ を任意に与えられた正数とすれば，各 B_i に対して

$$K_i\subset B_i\wedge\mu_{t_i}(B_i\backslash K_i)<\epsilon$$

を満たす K_i が取れて，

$$\bigcup_{i=1}^{n}\pi_{t_i}^{-1}*K_i\in\mathcal{K}$$

かつ

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{n}\pi_{t_i}^{-1}*B_i\backslash\bigcup_{i=1}^{n}\pi_{t_i}^{-1}*K_i\right)=\mu\left(\bigcap_{i=1}^{n}\pi_{t_i}^{-1}*(B_i\backslash K_i)\right)<\epsilon$$

が成り立つ．すなわち (I.11) が成り立つ．　∎

I.10　Wiener 過程

$\mathbf{T}$ を $[0,\infty[$ か $[0,T]$ とする．$\mathbf{T}$ の各要素 t に対し，$(X_t,\mathscr{B}_t)$ は全て $(\mathbf{R},\mathscr{B}(\mathbf{R}))$ であるとする．$\mathbf{T}$ の部分集合 Λ に対して

$$\mathbf{R}^\Lambda \overset{\text{def}}{=} \{\, x \mid \quad x : \Lambda \longrightarrow \mathbf{R} \,\}$$

とおく．

$$\bigotimes_{t\in\Lambda} \mathscr{B}_t$$

とは

$$\bigcup_{t\in\Lambda} \{\, \{\, x \mid \quad x : \Lambda \longrightarrow \mathbf{R} \wedge x(t) \in A \,\} \mid \quad A \in \mathscr{B}(\mathbf{R}) \,\}$$

が生成する σ-加法族であるから，すなわち

$$\bigotimes_{t\in\Lambda} \mathscr{B}_t = \operatorname{cyl}\left(\mathbf{R}^\Lambda\right)$$

が成立する．

$$t_1 < t_2 < \cdots < t_n$$

なる $\mathbf{T}$ の要素 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ によって

$$\Lambda = \{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$$

が成り立っているときは

$$\operatorname{cyl}\left(\mathbf{R}^\Lambda\right) = \{\, \{\, x \mid \quad x : \Lambda \longrightarrow \mathbf{R} \wedge (x(t_1), x(t_2), \cdots, x(t_n)) \in A \,\} \mid \quad A \in \mathscr{B}(\mathbf{R}^n) \,\}$$

が成立する．このとき，$(\mathbf{R}^\Lambda, \operatorname{cyl}\left(\mathbf{R}^\Lambda\right))$ 上の確率測度 P_Λ を

$$\begin{aligned} &P_\Lambda(\{\, x \mid \quad x : \Lambda \longrightarrow \mathbf{R} \wedge (x(t_1), x(t_2), \cdots, x(t_n)) \in A \,\}) \\ &= \int_A p(t_1, 0, y_1) p(t_2 - t_1, y_1, y_2) \cdots p(t_n - t_{n-1}, y_{n-1}, y_n)\, dy_1 dy_2 \cdots dy_n \end{aligned}$$

で定める．完備可分距離空間上の Borel 確率測度は正則で，また Hausdorff 空間においてはコンパクト集合の全体がコンパクトクラスとなるから，コンパクトクラスについての前節の拡張定理の条件が満たされる．ただし

$$p(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2}\right).$$

$\{P_\Lambda\}_\Lambda$ は両立条件を満たす

略証.

拡張定理の主張から $(\mathbf{R}^{\mathbf{T}}, \mathrm{cyl}\left(\mathbf{R}^{\mathbf{T}}\right))$ 上に確率測度 P が定まる．

$(\mathbf{T}, \mathbf{R})$-座標過程は連続性を除いて Wiener 過程

B を $(\mathbf{T}, \mathbf{R})$-座標過程とすると，B は標本路の連続性を除いて $(\mathbf{R}^{\mathbf{T}}, \mathrm{cyl}\left(\mathbf{R}^{\mathbf{T}}\right), P)$ 上の標準 Wiener 過程の性質を満たす?

I.11　二乗可積分マルチンゲール

本節では $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間とし，$\mathbf{T} \overset{\text{def}}{=\!=} [0, \infty[$ か $[0, T]$ とし，$\{\mathscr{F}_t\}_{t \in \mathbf{T}}$ を $\mathscr{F}$ に付随するフィルトレーションとする．

定義 I.11.1 (二乗可積分マルチンゲール).　$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上の右連続な $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$-マルチンゲールで，$\Omega$ の任意の要素 ω に対して $(0, \omega)$ に 0 を対応させるものの全体を

$$\mathscr{M}_{\mathbf{T}}$$

とおく．$\mathscr{M}_{\mathbf{T}}$ の要素のうち連続であるものの全体を

$$\mathscr{M}_{\mathbf{T}}^{c}$$

とおく．X を $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上の $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$-マルチンゲールで

$$\forall t \in \mathbf{T} \left(\int_{\Omega} |X_t|^2 \, dP < \infty \right)$$

を満たすものとするとき，X を**二乗可積分 (square integrable)** な $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$-マルチンゲールと呼ぶ．$\mathscr{M}_{\mathbf{T}}$ の要素のうち二乗可積分であるものの全体を

$$\mathscr{M}_{\mathbf{T}}^{2}$$

とおき，また

$$\mathscr{M}_{\mathbf{T}}^{2,c} \overset{\text{def}}{=\!=} \mathscr{M}_{\mathbf{T}}^{c} \cap \mathscr{M}_{\mathbf{T}}^{2}$$

とおく．

つまり X を $\mathscr{M}_{\mathbf{T}}$ の要素とすれば，X は

$$\forall \omega \in \Omega \left(X_0(\omega) = 0 \right)$$

を満たす右連続な $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$-マルチンゲールである．

定理 I.11.2 (Doob の劣マルチンゲール不等式).

定理 I.11.3 ($\mathscr{M}^2_{\mathbf{T}}$ の線型構造).　X と Y を $\mathscr{M}^2_{\mathbf{T}}$ の要素とするとき，(X,Y) に対して

$$(t,\omega) \longmapsto X(t,\omega) + Y(t,\omega)$$

なる写像を対応させる関係 $+_m$ を $\mathscr{M}^2_{\mathbf{T}}$ 上の加法とし，また α を実数とするときに (α, X) に対して

$$(t,\omega) \longmapsto \alpha \cdot X(t,\omega)$$

なる写像を対応させる関係 s をスカラ倍とすれば，

$$\left(\left(\mathscr{M}^2_{\mathbf{T}}, +_m \right), (\mathbf{R}, +, \bullet), s \right)$$

は線型空間である．また

$$\left(\left(\mathscr{M}^{2,c}_{\mathbf{T}}, +_m \right), (\mathbf{R}, +, \bullet), s \right)$$

はその線型部分空間である．

定理 I.11.4 ($\mathscr{M}^2_{\mathbf{T}}$ は完備な擬距離空間).　$\mathbf{T} = [0,T]$ とし，$\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$ は完備であるとする．このとき

$$\mathscr{M}^2_{\mathbf{T}} \times \mathscr{M}^2_{\mathbf{T}} \ni (X,Y) \longmapsto \left\{ \int_\Omega |X_T - Y_T|^2 \, dP \right\}^{\frac{1}{2}}$$

なる関係を d とすると，$\left(\mathscr{M}^2_{\mathbf{T}}, d\right)$ は完備な擬距離空間である．また $\mathscr{M}^{2,c}_{\mathbf{T}}$ はその完備な部分集合である．

略証.

第一段　擬距離空間は可算な基本近縁系が取れるので，完備性は Cauchy 列の収束を示すだけで良い．いま

$$\boldsymbol{\omega} \ni n \longmapsto X^{(n)} \in \mathscr{M}^2_{\mathbf{T}}$$

なる関係を $\left(\mathscr{M}^2_{\mathbf{T}}, d\right)$ の Cauchy 列とする．すると

$$\forall k \in \boldsymbol{\omega} \left[d\left(X^{(n_k)}, X^{(n_{k+1})} \right) < \frac{1}{4^{k+1}} \right]$$

を満たす部分列

$$\boldsymbol{\omega} \ni k \longmapsto X^{(n_k)}$$

が取れる．このとき Doob の劣マルチンゲール不等式から，任意の自然数 k で

$$\int_\Omega \left\{ \sup_{t\in[0,T]} \left| X^{(n_k)}_t - X^{(n_{k+1})}_t \right| \right\}^2 dP \leq 4 \int_\Omega \left| X^{(n_k)}_T - X^{(n_{k+1})}_T \right|^2 dP < \frac{1}{8^k} \tag{I.12}$$

が成立する．従って，自然数 k に対して

$$E_k \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{ \frac{1}{2^k} \leq \sup_{t\in[0,T]} \left| X^{(n_k)}_t - X^{(n_{k+1})}_t \right| \right\}$$

とおけば

$$P(E_k) < \frac{1}{2^k}$$

が成立するので，Borel-Cantelli の補題より

$$E \stackrel{\text{def}}{=\!=} \bigcap_{n \in \boldsymbol{\omega}} \bigcup_{\substack{k \in \boldsymbol{\omega} \\ n < k}} E_k$$

で定める E は P-零集合である．ω を $\Omega \backslash E$ の要素とすれば

$$\forall k \in \boldsymbol{\omega} \left[N < k \Longrightarrow \sup_{t \in [0,T]} \left| X_t^{(n_k)}(\omega) - X_t^{(n_{k+1})}(\omega) \right| < \frac{1}{2^k} \right] \tag{I.13}$$

を満たす自然数 N が取れる．ゆえに，いま t を $\mathbf{T}$ の要素とすれば

$$\boldsymbol{\omega} \ni k \longmapsto X_t^{(n_k)}(\omega)$$

は $\mathbf{R}$ の Cauchy 列であり，$\mathbf{R}$ で収束する．ここで

$$\mathbf{T} \times \Omega \ni (t, \omega) \longmapsto \begin{cases} \lim_{k \to \infty} X_t^{(n_k)}(\omega) & \text{if } \omega \in \Omega \backslash E \\ 0 & \text{if } \omega \in E \end{cases}$$

で定める関係を X とする．

第二段　X のパスが右連続 (または連続) であることを示す．ω を $\Omega \backslash E$ の要素とすれば (I.13) より

$$\forall k \in \boldsymbol{\omega} \left[N < k \Longrightarrow \sup_{t \in [0,T]} \left| X_t^{(n_k)}(\omega) - X_t(\omega) \right| \leq \frac{1}{2^k} \right]$$

を満たす自然数 N が取れるので，パスは一様収束している．ゆえに

$$\left\{ X^{(n)} \right\}_{n \in \boldsymbol{\omega}} \subset \mathscr{M}_{\mathbf{T}}^2$$

ならば X は右連続であり，

$$\left\{ X^{(n)} \right\}_{n \in \boldsymbol{\omega}} \subset \mathscr{M}_{\mathbf{T}}^{2,c}$$

ならば X は連続である．

第三段　X が $\{\mathscr{F}_t\}_{t \in \mathbf{T}}$-適合であることを示す．$t$ を $\mathbf{T}$ の任意の要素とすれば

$$\forall \omega \in \Omega \left(\lim_{k \to \infty} X_t^{(n_k)}(\omega) \cdot \mathbb{1}_{\Omega \backslash E}(\omega) = X_t(\omega) \right)$$

が成り立ち，またフィルトレーションの完備性の仮定から

$$E \in \mathscr{F}_t$$

なので，各自然数 k で $X_t^{(n_k)} \mathbb{1}_{\Omega \backslash E}$ は $\mathscr{F}_t / \mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測である．よって定理 G.2.11 より X_t は $\mathscr{F}_t / \mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測である．

第四段　X が二乗可積分な $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$-マルチンゲールであることを示す．$t$ を $\mathbf{T}$ の任意の要素とすれば，Fatou の補題と (I.12) より任意の自然数 k で

$$\int_\Omega \left| X_t - X_t^{(n_k)} \right|^2 \, dP \leq \sup_{n\in\omega} \inf_{\substack{j\in\omega \\ n<j}} \int_\Omega \left| X_t^{(n_j)} - X_t^{(n_k)} \right|^2 \, dP \leq \frac{1}{4^k} \tag{I.14}$$

が成立する．ゆえに Minkowski の不等式から

$$\left\{ \int_\Omega |X_t|^2 \, dP \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \left\{ \int_\Omega \left| X_t - X_t^{(n_k)} \right|^2 \, dP \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \int_\Omega \left| X_t^{(n_k)} \right|^2 \, dP \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty$$

が成立する．また Hölder の不等式から

$$\int_\Omega \left| X_t - X_t^{(n_k)} \right| \, dP \leq \left\{ \int_\Omega \left| X_t - X_t^{(n_k)} \right|^2 \, dP \right\}^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty)$$

が成り立つ．ゆえに，いま s と t を

$$s < t$$

なる $\mathbf{T}$ の要素とすれば，$\mathscr{F}_s$ の任意の要素 A で

$$\int_A X_t \, dP = \lim_{k\to\infty} \int_A X_t^{(n_k)} \, dP = \lim_{k\to\infty} \int_A X_s^{(n_k)} \, dP = \int_A X_s \, dP$$

が成り立つ．

第五段　以上より

$$X \in \mathscr{M}_{\mathbf{T}}^2$$

である．最後に，(I.14) より

$$d\left(X, X^{(n_k)} \right) = \int_\Omega \left| X_T - X_T^{(n_k)} \right|^2 \, dP \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty)$$

が成り立つので X は d に関して $k \longmapsto X^{(n_k)}$ の極限である．部分列の収束から

$$d\left(X, X^{(n)} \right) \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が従う． ∎

定理 I.11.5 (右連続マルチンゲールから停止時刻の増大列が作れる).　$\mathbf{T} = [0, \infty[$ とし，X を $\mathscr{M}_{\mathbf{T}}$ の要素とする．自然数 n に対して

$$\omega \longmapsto \begin{cases} \inf \{\, t \in \mathbf{T} \mid \quad n \leq |X_t(\omega)| \,\} & \text{if } \{\, t \in \mathbf{T} \mid \quad n \leq |X_t(\omega)| \,\} \neq \emptyset \\ \infty & \text{if } \{\, t \in \mathbf{T} \mid \quad n \leq |X_t(\omega)| \,\} = \emptyset \end{cases}$$

なる写像を τ_n と定めると，τ_n は $\{\mathscr{F}_t\}_{t \in \mathbf{T}}$-停止時刻であって，$\Omega$ のすべての要素 ω に対して

$$\forall n \in \boldsymbol{\omega} \ (\, \tau_n(\omega) \leq \tau_{n+1}(\omega) \,)$$

を満たす．またパスが *RCLL* である ω に対しては

$$\sup_{n \in \boldsymbol{\omega}} \tau_n(\omega) = \infty$$

が成り立つ．またパスが連続である ω に対しては

$$\sup_{t \in \mathbf{T}} \left| X_t^{\tau_n}(\omega) \right| \leq n$$

が成り立つ．

略証．　$\mathbf{T}$ の任意の要素 t に対して

$$\{\tau_n \leq t\} = \{\, \omega \in \Omega \mid \quad n \leq |X_t(\omega)| \,\}$$

が成り立つので τ_n は $\{\mathscr{F}_t\}_{t \in \mathbf{T}}$-停止時刻である．また *RLCC* なパスは有界区間上で有界であるから，パスが *RCLL* である ω に対しては

$$\sup_{n \in \boldsymbol{\omega}} \tau_n(\omega) = \infty$$

が成り立つ． ∎

右連続な劣マルチンゲールは殆ど全てのパスが *RCLL* なので，上の様に構成する停止時刻の列 $\{\tau_n\}_{n \in \boldsymbol{\omega}}$ は殆どすべての ω に対し

$$0 = \tau_0(\omega) \leq \tau_1(\omega) \leq \tau_2(\omega) \leq \longrightarrow \infty$$

を満たす．

定義 I.11.6 (増大過程).　A が $\mathbf{T} \times \Omega$ 上の $\mathbf{R}$ 値写像であって，かつ

- $\forall \omega \in \Omega \, (\, A_0(\omega) = 0 \,)$
- A は $\{\mathscr{F}_t\}_{t \in \mathbf{T}}$-適合
- A のすべてのパスが右連続かつ単調非減少
- $\mathbf{T}$ の任意の要素 t で $E(A_t) < \infty$

を満たすとき，A を $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上の $\{\mathscr{F}_t\}_{t \in \mathbf{T}}$-**増大過程 (increasing process)** と呼ぶ．

定義 I.11.7 (ナチュラル).　A を $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上の $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$-増大過程とする．$M$ を任意に与えられた $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上の有界かつ $RCLL$ な $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$-マルチンゲールとするとき

$$\forall t \in \mathbf{T} \left[E(M_t A_t) = E \int_{(0,t]} M_{s-}\, dA_s \right]$$

が成り立つならば，A は**ナチュラル (natural)** であるという．$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上のナチュラル過程の全体を

$$\mathscr{N}_{\mathbf{T}}$$

で表し，区別不能性で類別した商集合を

$$\mathfrak{N}_{\mathbf{T}}$$

で表す．同様に，$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上の連続なナチュラル過程の全体を

$$\mathscr{N}_{\mathbf{T}}^c$$

で表し，区別不能性で類別した商集合を

$$\mathfrak{N}_{\mathbf{T}}^c$$

で表す．

定理 I.11.8 (連続な増大過程はナチュラル).

定理 I.11.9 (有界変動なマルチンゲールは殆ど全てのパスが定値).　$\mathbf{T}$ を $[0,\infty[$ か $[0,T]$ とし，A と B を $\mathscr{N}_{\mathbf{T}}$ の要素とし，

$$A - B \in \mathscr{M}_{\mathbf{T}}$$

が成り立っているとする．このとき，$\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$ が右連続である場合，或いは A と B が共に連続である場合，

$$\forall t \in \mathbf{T}\, \forall \omega \in \Omega \backslash E\ \left(A(t,\omega) = B(t,\omega) \right)$$

を満たす P-零集合 E が取れる．

略証.

定理 I.11.10 (二乗可積分マルチンゲールは増大過程とマルチンゲールに分解できる).　$\mathbf{T}$ を $[0,\infty[$ か $[0,T]$ とし，X を $\mathscr{M}_{\mathbf{T}}^2$ の要素とする．このとき，

- $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$ が右連続かつ完備ならば，$\mathfrak{N}_{\mathbf{T}}$ の要素 Q が唯一つ取れて，Q の任意の要素 A に対して
$$X^2 - A \in \mathscr{M}_{\mathbf{T}}.$$
- X が連続であるとき，$\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$ が完備ならば $\mathfrak{N}_{\mathbf{T}}^c$ の要素 Q が唯一つ取れて，Q の任意の要素 A に対して
$$X^2 - A \in \mathscr{M}_{\mathbf{T}}.$$

略証.　この証明は怪しい．X が右連続の場合は Doob-Meyer 分解から示した方が無難か... X が連続の場合は問題ないのだが．何とかして右連続の場合と連続の場合を包括的に証明したかったのだがうまくいかない...

step1-1　$\mathbf{T} = [0,T]$ とし，X が有界であるとする．つまりいま
$$\forall t\in\mathbf{T}\,\forall\omega\in\Omega\ (\,|X(t,\omega)|\leq b\,)$$
を満たす実数 b が取れる．

step1-2　n を自然数とし，
$$(t,\omega)\longmapsto\sum_{j=0}^{2^n-1}\left(X_{\min\left\{t,\frac{j+1}{2^n}T\right\}}(\omega)-X_{\min\left\{t,\frac{j}{2^n}T\right\}}(\omega)\right)^2$$
なる写像を $A^{(n)}$ とする．このとき
$$X^2 - A^{(n)} \in \mathscr{M}_{\mathbf{T}}^2 \tag{I.15}$$
であることを示す．まず X の右連続性より $A^{(n)}$ も右連続である．また全ての j で
$$X_{\min\left\{t,\frac{j}{2^n}T\right\}}$$
は $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測なので，$X^2 - A^{(n)}$ は $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$-適合である．いまは X も $A^{(n)}$ も有界であるから，$\mathbf{T}$ の任意の要素 t で
$$\int_\Omega\left|X_t^2 - A_t^{(n)}\right|^2\,dP<\infty$$
が成立する．s と t を
$$s<t$$
なる $\mathbf{T}$ の要素とする．そして
$$\frac{k}{2^n}T\leq s<\frac{k+1}{2^n}T$$
を満たす k を取る．このとき
$$\begin{aligned}A_t^{(n)}-A_s^{(n)}&=\sum_{j=k}^{2^n-1}\left\{\left(X_{\min\left\{t,\frac{j+1}{2^n}T\right\}}-X_{\min\left\{t,\frac{j}{2^n}T\right\}}\right)^2-\left(X_{\min\left\{s,\frac{j+1}{2^n}T\right\}}-X_{\min\left\{s,\frac{j}{2^n}T\right\}}\right)^2\right\}\\&=\sum_{j=k+1}^{2^n-1}\left(X_{\min\left\{t,\frac{j+1}{2^n}T\right\}}-X_{\min\left\{t,\frac{j}{2^n}T\right\}}\right)^2+\left(X_{\min\left\{t,\frac{k+1}{2^n}T\right\}}-X_{\frac{k}{2^n}T}\right)^2-\left(X_s-X_{\frac{k}{2^n}T}\right)^2\end{aligned}$$

が成り立つ．この各項について，

$$j \in \{k+1, K+2, \cdots, 2^n - 1\}$$

なる各 j で P-a.s. に

$$E\left(\left(X_{\min\left\{t, \frac{j+1}{2^n}T\right\}} - X_{\min\left\{t, \frac{j}{2^n}T\right\}}\right)^2 \middle| \mathscr{F}_s\right) = E\left(X^2_{\min\left\{t, \frac{j+1}{2^n}T\right\}} \middle| \mathscr{F}_s\right) - E\left(X^2_{\min\left\{t, \frac{j}{2^n}T\right\}} \middle| \mathscr{F}_s\right)$$

が成り立ち，また P-a.s. に

$$\begin{aligned}
&E\left(\left(X_{\min\left\{t, \frac{k+1}{2^n}T\right\}} - X_{\frac{k}{2^n}T}\right)^2 \middle| \mathscr{F}_s\right) \\
&= E\left(X^2_{\min\left\{t, \frac{k+1}{2^n}T\right\}} \middle| \mathscr{F}_s\right) - 2E\left(X_{\min\left\{t, \frac{k+1}{2^n}T\right\}} X_{\frac{k}{2^n}T} \middle| \mathscr{F}_s\right) + E\left(X^2_{\frac{k}{2^n}T} \middle| \mathscr{F}_s\right) \\
&= E\left(X^2_{\min\left\{t, \frac{k+1}{2^n}T\right\}} \middle| \mathscr{F}_s\right) - 2X^2_{\frac{k}{2^n}T} + E\left(X^2_{\frac{k}{2^n}T} \middle| \mathscr{F}_s\right)
\end{aligned}$$

も成り立つので，

$$\begin{aligned}
&E\left(A_t^{(n)} - A_s^{(n)} \middle| \mathscr{F}_s\right) \\
&= E\left(X_t^2 \middle| \mathscr{F}_s\right) - E\left(X^2_{\min\left\{t, \frac{k+1}{2^n}T\right\}} \middle| \mathscr{F}_s\right) + E\left(\left(X_{\min\left\{t, \frac{k+1}{2^n}T\right\}} - X_{\frac{k}{2^n}T}\right)^2 \middle| \mathscr{F}_s\right) - \left(X_s - X_{\frac{k}{2^n}T}\right)^2 \\
&= E\left(X_t^2 \middle| \mathscr{F}_s\right) - X_s^2
\end{aligned}$$

が従う．ゆえに P-a.s. に

$$E\left(X_t^2 - A_t^{(n)} \middle| \mathscr{F}_s\right) = X_s^2 - A_s^{(n)}$$

となる．以上で (I.15) が得られたが，X が連続である場合は $A^{(n)}$ も連続であるから

$$X^2 - A^{(n)} \in \mathscr{M}_{\mathbf{T}}^{2,c} \tag{I.16}$$

が成立する．

step1-3　任意の自然数 n に対して

$$\int_\Omega \left|X_T^2 - A_T^{(n)}\right|^2 \, dP \leq 14 \cdot b^2 \cdot \int_\Omega |X_T|^2 \, dP$$

が成り立つことを示す．いま

$$M \stackrel{\text{def}}{=} X^2 - A^{(n)}$$

とおけば

$$\begin{aligned}
\int_\Omega M^2_{\frac{j+1}{2^n}T} - M^2_{\frac{j}{2^n}T} \, dP &= \int_\Omega \left(M_{\frac{j+1}{2^n}T} - M_{\frac{j}{2^n}T}\right)^2 \, dP \\
&= \int_\Omega \left\{X^2_{\frac{j+1}{2^n}T} - X^2_{\frac{j}{2^n}T} - \left(A^{(n)}_{\frac{j+1}{2^n}T} - A^{(n)}_{\frac{j}{2^n}T}\right)\right\}^2 \, dP \\
&= \int_\Omega \left\{X^2_{\frac{j+1}{2^n}T} - X^2_{\frac{j}{2^n}T} - \left(X_{\frac{j+1}{2^n}T} - X_{\frac{j}{2^n}T}\right)^2\right\}^2 \, dP
\end{aligned}$$

が成り立つから，

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |M_T|^2 \; dP &= \sum_{j=0}^{2^n-1} \int_\Omega M^2_{\frac{j+1}{2^n}T} - M^2_{\frac{j}{2^n}T} \, dP \\
&= \sum_{j=0}^{2^n-1} \int_\Omega \left\{ X^2_{\frac{j+1}{2^n}T} - X^2_{\frac{j}{2^n}T} - \left(X_{\frac{j+1}{2^n}T} - X_{\frac{j}{2^n}T} \right)^2 \right\}^2 \; dP \\
&= \sum_{j=0}^{2^n-1} \int_\Omega \left\{ X^2_{\frac{j+1}{2^n}T} - X^2_{\frac{j}{2^n}T} \right\}^2 \; dP \\
&\quad - 2 \cdot \sum_{j=0}^{2^n-1} \int_\Omega \left(X^2_{\frac{j+1}{2^n}T} - X^2_{\frac{j}{2^n}T} \right) \left(X_{\frac{j+1}{2^n}T} - X_{\frac{j}{2^n}T} \right)^2 \; dP \\
&\quad + \sum_{j=0}^{2^n-1} \int_\Omega \left(X_{\frac{j+1}{2^n}T} - X_{\frac{j}{2^n}T} \right)^4 \; dP
\end{aligned}
\tag{I.17}
$$

が成り立つ．ここで

$$
\int_\Omega \left\{ X^2_{\frac{j+1}{2^n}T} - X^2_{\frac{j}{2^n}T} \right\}^2 \; dP \leq 2 \cdot b^2 \cdot \int_\Omega X^2_{\frac{j+1}{2^n}T} - X^2_{\frac{j}{2^n}T} \, dP
$$

かつ

$$
\int_\Omega \left(X^2_{\frac{j+1}{2^n}T} - X^2_{\frac{j}{2^n}T} \right) \left(X_{\frac{j+1}{2^n}T} - X_{\frac{j}{2^n}T} \right)^2 \; dP \leq 4 \cdot b^2 \cdot \int_\Omega X^2_{\frac{j+1}{2^n}T} - X^2_{\frac{j}{2^n}T} \, dP
$$

かつ

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \left(X_{\frac{j+1}{2^n}T} - X_{\frac{j}{2^n}T} \right)^4 \; dP &\leq 4 \cdot b^2 \cdot \int_\Omega X^2_{\frac{j+1}{2^n}T} - X^2_{\frac{j}{2^n}T} \, dP \\
&= 4 \cdot b^2 \cdot \int_\Omega X^2_{\frac{j+1}{2^n}T} - X^2_{\frac{j}{2^n}T} \, dP
\end{aligned}
$$

が成り立つので

$$
\begin{aligned}
(\text{I.17}) &\leq 14 \cdot b^2 \cdot \sum_{j=0}^{2^n-1} \int_\Omega X^2_{\frac{j+1}{2^n}T} - X^2_{\frac{j}{2^n}T} \, dP \\
&= 14 \cdot b^2 \cdot \int_\Omega |X_T|^2 \; dP
\end{aligned}
$$

が成立する．

step1-4　$\mathscr{M}^2_{\mathbf{T}}$ に定理 I.11.4 の擬距離 d を定めるとき，step1-3 より

$$
\left\{ X^2 - A^{(n)} \right\}_{n \in \omega}
$$

は $\left(\mathscr{M}^2_{\mathbf{T}}, d \right)$ で有界である．ゆえに Komlos の補題より

$$
h : \omega \longrightarrow \mathscr{M}^2_{\mathbf{T}}
$$

なる $\left(\mathscr{M}^2_{\mathbf{T}}, d \right)$ の Cauchy 列 h で，任意の自然数 n で

$$
h(n) \in \operatorname{conv}\left(\left\{ X^2 - A^{(k)} \mid \quad k \in \omega \wedge n \leq k \right\} \right)
\tag{I.18}
$$

を満たすものが取れて，定理 I.11.4 より

$$d(h(n), M) \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

なる $\mathscr{M}^2_{\mathbf{T}}$ の要素 M が取れる．特に X が連続である場合は (I.16) より

$$\{h(n)\}_{n\in\boldsymbol{\omega}} \subset \mathscr{M}^{2,c}_{\mathbf{T}}$$

が成り立つから，極限 M を

$$M \in \mathscr{M}^{2,c}_{\mathbf{T}}$$

なるものとして取れる．ここで

$$A \overset{\mathrm{def}}{=\!=} X^2 - M$$

とおく．定め方より A は $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$-適合であって，右連続でもあり，特に X が連続なら A も連続である．あとは A の増大性を示せばよい．いま任意の自然数 k に対し

$$d(h(n_k), M) < \frac{1}{4^{k+1}}$$

を満たす部分列

$$\boldsymbol{\omega} \ni k \longmapsto h(n_k)$$

を取ると，Doob の劣マルチンゲール不等式より任意の自然数 k で

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left\{ \sup_{t\in[0,T]} \left| \left(X_t^2 - h(n_k)_t\right) - A_t \right| \right\}^2 \, dP &= \int_\Omega \left\{ \sup_{t\in[0,T]} \left| h(n_k)_t - M_t \right| \right\}^2 \, dP \\
&\leq 4 \cdot \int_\Omega \left| h(n_k)_T - M_T \right|^2 \, dP \\
&< \frac{1}{8^k}
\end{aligned}$$

が成り立つ．従って，自然数 k に対して

$$E_k \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \left\{ \frac{1}{2^k} \leq \sup_{t\in[0,T]} \left| \left(X_t^2 - h(n_k)_t\right) - A_t \right| \right\}$$

とおけば

$$P(E_k) < \frac{1}{2^k}$$

が成立するので，Borel-Cantelli の補題より

$$E \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \bigcap_{n\in\boldsymbol{\omega}} \bigcup_{\substack{k\in\boldsymbol{\omega} \\ n<k}} E_k$$

で定める E は P-零集合である．いま ω を $\Omega\backslash E$ の要素とする．すると

$$\forall k \in \boldsymbol{\omega} \left[K < k \Longrightarrow \sup_{t\in[0,T]} \left| \left(X_t^2(\omega) - h(n_k)_t(\omega)\right) - A_t(\omega) \right| < \frac{1}{2^k} \right] \tag{I.19}$$

を満たす自然数 K が取れる．ここで

$$D_k \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \frac{j}{2^{n_k}} T \;\middle|\; j \in \{0, 1, \cdots, 2^{n_k}\} \right\}$$

とおき

$$D \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{k \in \omega} D_k$$

とおく．s と t を

$$s < t$$

なる D の要素とするとき

$$s \in D_N \wedge t \in D_N$$

を満たす自然数 N が取れるが，このとき

$$N \leq k$$

なる任意の自然数 k に対して

$$X_s^2(\omega) - h(n_k)_s(\omega) \leq X_t^2(\omega) - h(n_k)_t(\omega)$$

が成り立つ．なぜならば (I.18) より

$$X^2 - h(n_k) \in \operatorname{conv}\left(\left\{ A^{(j)} \;\middle|\; j \in \boldsymbol{\omega} \wedge n_k \leq j \right\} \right)$$

となるためである．そして (I.19) と併せて

$$A_s(\omega) \leq A_t(\omega)$$

が従う．s と t が

$$s < t$$

なる $\mathbf{T}$ の要素であるときは，

$$\{t_n\}_{n \in \boldsymbol{\omega}} \subset [t, T] \cap D$$

かつ

$$t_n \downarrow t$$

を満たす $\{t_n\}_{n \in \boldsymbol{\omega}}$ と

$$\{s_n\}_{n \in \boldsymbol{\omega}} \subset [s, t) \cap D$$

かつ

$$s_n \downarrow s$$

を満たす $\{s_n\}_{n\in\boldsymbol{\omega}}$ を取れば

$$\forall n \in \boldsymbol{\omega}\ \left(A_{s_n}(\omega) \leq A_{t_n}(\omega) \right)$$

が成り立ち，また A は右連続であるから

$$A_s(\omega) \leq A_t(\omega)$$

が従う．ちなみに Ω の任意の要素 ω で

$$X_0^2(\omega) - h(n_k)_0(\omega) = 0$$

が成り立つので (I.19) から

$$\omega \in \Omega \backslash E \Longrightarrow A_0(\omega) = 0$$

も満たされる．最後に，

$$(t,\omega) \longmapsto \begin{cases} A_t(\omega) & \text{if } \omega \in \Omega\backslash E \\ 0 & \text{if } \omega \in E \end{cases}$$

なる写像を $\tilde{A}$ とすれば，

$$\tilde{A} \in \mathscr{A}_{\mathbf{T}}^{+}$$

かつ

$$X^2 - \tilde{A} \in \mathscr{M}_{\mathbf{T}}^2$$

が成立する．とくに X が連続である場合は $\tilde{A}$ も連続である．

step1-5　前段で得られた $\tilde{A}$ がナチュラルであることを示す．あれ... 示せない...

step2　$\mathbf{T} = [0,\infty[$ とし，X が有界であるとする．N を 0 でない自然数とすれば，step1 の結果より

$$\left(X|_{[0,N]\times\Omega} \right)^2 - A^N \in \mathscr{M}_{[0,N]}^2$$

かつ

$$A^N \in \mathscr{A}_{[0,N]}^{+}$$

を満たす A^N が取れる．特に X が連続であれば A^N は連続なものとして取れる．M を

$$N < M$$

なる自然数とすれば

$$\left(X|_{[0,N]\times\Omega} \right)^2 - A^M|_{[0,N]\times\Omega} \in \mathscr{M}_{[0,N]}^2$$

が成立するので，

$$E_{N,M} \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{ \omega \in \Omega \mid \quad \exists t \in [0,N]\ \left(A_t^N(\omega) \neq A_t^M(\omega) \right) \right\}$$

で定める集合は P-零集合である．

$$E \overset{\text{def}}{=\!=} \bigcup_{\substack{N,M\in\boldsymbol{\omega} \\ N<M}} E_{N,M}$$

により P-零集合を定めて

$$(t,\omega) \longmapsto \begin{cases} A^N(t,\omega) & \text{if } N \in \boldsymbol{\omega} \wedge t \le N \wedge \omega \in \Omega\backslash E \\ 0 & \text{if } \omega \in E \end{cases}$$

なる関係を A と定めれば

$$A : \mathbf{T} \times \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$$

が成立する．そして任意の自然数 N に対して

$$A|_{[0,N]\times\Omega} = A^N \mathbb{1}_{[0,N]\times\Omega\backslash E}$$

が成立する．ゆえに

$$A \in \mathscr{A}_{\mathbf{T}}^+$$

が成立し，特に X が連続ならば A も連続である．t を $\mathbf{T}$ の任意の要素とすれば，

$$t \le N$$

なる自然数 N に対して

$$E\left|X_t^2 - A_t\right| = E\left|X_t^2 - A_t^N\right| < \infty$$

が成立し，また s と t を $\mathbf{T}$ の任意の要素として

$$t \le N$$

なる自然数 N を取れば，$\mathscr{F}_s$ の任意の要素 A に対して

$$\int_A X_t^2 - A_t \, dP = \int_A X_t^2 - A_t^N \, dP = \int_A X_s^2 - A_s^N \, dP = \int_A X_s^2 - A_s \, dP$$

が成立する．ゆえに

$$X^2 - A \in \mathscr{M}_{\mathbf{T}}$$

である．

step3　$\mathbf{T} = [0,\infty[$ とし，X を $\mathscr{M}_{\mathbf{T}}^2$ の要素とする．

$$(X^{\tau_n})^2 - A^n \in \mathscr{M}_{\mathbf{T}}^2$$

となる．そして

$$(t,\omega) \longmapsto \begin{cases} \lim_{n\to\infty} A^n_{t\wedge\tau_n(\omega)}(\omega) \\ 0 \end{cases}$$

として A を定めると A は適合，増大，(右) 連続

$$A_{t\wedge\tau_n} = A^n_{t\wedge\tau_n}$$

が成り立つ．そして

$$\int_\Omega \left(X_t^{\tau_n}\right)^2 \, dP = \int_\Omega A_{t\wedge\tau_n} \, dP$$

から

$$\int_\Omega X_t^2 \, dP = \int_\Omega A_t \, dP$$

となるので

$$X_t^2 - A_t$$

は可積分．また

$$\int_A X_t^2 - A_t \, dP = \lim_{n\to\infty} \int_A \left(X_t^{\tau_n}\right)^2 - A_t^n \, dP = \lim_{n\to\infty} \int_A \left(X_s^{\tau_n}\right)^2 - A_s^n \, dP = \int_A X_s^2 - A_s \, dP$$

が成り立つ．

step4　$\mathbf{T} = [0, T]$ とし，X を $\mathscr{M}_\mathbf{T}^2$ の要素とする．

$$(t, \omega) \longmapsto \begin{cases} X(t, \omega) & \text{if } t \leq T \\ X(T, \omega) & \text{if } T < t \end{cases}$$

なる写像を Y として，また

$$[0, \infty[\ni t \longmapsto \begin{cases} \mathscr{F}_t & \text{if } t \leq T \\ \mathscr{F}_T & \text{if } T < t \end{cases}$$

なる写像でフィルトレーション

$$\{\mathscr{F}_t\}_{t\in[0,\infty[}$$

を定めれば

$$Y \in \mathscr{M}_{[0,\infty[}^2$$

が成り立つ．ゆえに step3 の結果より

$$B \in \mathscr{A}_{[0,\infty[}^+$$

かつ

$$Y^2 - B \in \mathscr{M}_{[0,\infty[}$$

を満たす B が取れる．

$$A \overset{\text{def}}{=\!=} B|_{[0,T]\times\Omega}$$

で A を定めれば,

$$A \in \mathscr{A}_\mathbf{T}^+$$

かつ

$$X^2 - A \in \mathscr{M}_\mathbf{T}$$

が成立する． ∎

定義 I.11.11 (局所マルチンゲール).

定理 I.11.12 (マルチンゲールは局所マルチンゲール).

$$\mathscr{M}_{\mathbf{T}} \subset \mathscr{M}_{\mathbf{T}}^{loc}.$$

略証.

I.12　可予測過程

$\mathbf{T}$ は $[0,\infty[$ か $[0,T]$ を表すものとする．$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間とし，$\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$ をフィルトレーションとする．

- $f : \mathbf{T} \times \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$.
- 各 $\omega \in \Omega$ で,

$$\mathbf{T} \ni s \longmapsto f(s,\omega)$$

  が各 $t \in \mathbf{T} \backslash \{0\}$ において左連続.
- 各 $t \in \mathbf{T}$ で

$$\Omega \ni \omega \longmapsto f(t,\omega)$$

  は $\mathscr{F}_t / \mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測.

なる f の全体を $\mathscr{L}_{\mathbf{T}}$ で表す．また $\mathscr{L}_{\mathbf{T}}$ の全ての要素を可測にする $\mathbf{T} \times \Omega$ 上の最小の σ-加法族を $\mathscr{P}_{\mathbf{T}}$ で表す:

$$\mathscr{P}_{\mathbf{T}} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma\left(\left\{ f^{-1}(A) \mid \quad f \in \mathscr{L}_{\mathbf{T}} \wedge A \in \mathscr{B}(\mathbf{R}) \right\}\right).$$

$\mathbf{T} \times \Omega$ 上の実数値写像で $\mathscr{P}_{\mathbf{T}} / \mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測なるものを $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$-**可予測過程 (predictable process)** と呼ぶ.

定理 I.12.1 ($\mathscr{P}_{\mathbf{T}}$ を生成する乗法族).　$\{0\} \times B$ $(B \in \mathscr{F}_0)$ または $(u,v] \times B$ $((u,v] \subset \mathbf{T},\ B \in \mathscr{F}_u)$ なる形の集合の全体を $\mathscr{U}_{\mathbf{T}}$ とおくとき，$\mathscr{U}_{\mathbf{T}}$ は乗法族であって

$$\sigma(\mathscr{U}_{\mathbf{T}}) = \mathscr{P}_{\mathbf{T}}.$$

略証.

第一段　$\mathscr{U}_{\mathbf{T}}$ が乗法族であることを示す．A, B を $\mathscr{U}_{\mathbf{T}}$ から任意に選ばれた要素とする．A が

$$A = \{0\} \times A'$$

なる形の場合は，B が

$$B = (a,b] \times B'$$

なる形なら

$$A \cap B = \emptyset$$

となり，B が

$$B = \{0\} \times B'$$

なる形なら

$$A \cap B = \{0\} \times (A' \cap B')$$

となるので，いずれにせよ

$$A \cap B \in \mathscr{U}_{\mathbf{T}}$$

となる．A が

$$A = (u, v] \times A'$$

なる形の場合は，B が

$$B = (a, b] \times B'$$

なる形なら，$(u, v] \cap (a, b]$ は重なれば区間，重ならないなら空となり $A \cap B$ も空となる．重なる場合

$$(u, v] \cap (a, b] = (\max\{u, a\}, \min\{v, b\}]$$

となるが，このとき

$$A' \in \mathscr{F}_{\max\{u,a\}} \wedge B' \in \mathscr{F}_{\max\{u,a\}}$$

となるので

$$A \cap B = (\max\{u, a\}, \min\{v, b\}] \times (A' \cap B') \in \mathscr{U}_{\mathbf{T}}$$

が成り立つ．以上より $\mathscr{U}_{\mathbf{T}}$ が乗法族であることが示された．

第二段　$\sigma(\mathscr{U}_{\mathbf{T}}) = \mathscr{P}_{\mathbf{T}}$ を示す．A を $\mathscr{U}_{\mathbf{T}}$ から任意に選ばれた要素とすると，

$$\mathbb{1}_A \in \mathscr{L}_{\mathbf{T}}$$

が成り立つ．ゆえに

$$A = \mathbb{1}_A^{-1}(\{1\}) \in \mathscr{P}_{\mathbf{T}}$$

が成り立つので

$$\mathscr{U}_{\mathbf{T}} \subset \mathscr{P}_{\mathbf{T}}$$

が従い

$$\sigma(\mathscr{U}_{\mathbf{T}}) \subset \mathscr{P}_{\mathbf{T}}$$

が得られる．次に ϕ を $\mathscr{L}_{\mathbf{T}}$ から任意に選ばれた要素とする．ここで $\mathbf{T} = [0, \infty)$ の場合と $\mathbf{T} = [0, T]$ の場合に分ける．

(a)　$\mathbf{T} = [0, \infty)$ の場合，自然数 n に対して

$$\phi^n(t, \omega) = \phi(0, \omega) \mathbb{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{j=0}^{n2^n - 1} \phi(j/2^n, \omega) \mathbb{1}_{(j/2^n, (j+1)/2^n]}(t)$$

で ϕ^n を定めると，

$$\forall t \in \mathbf{T} \, \forall \omega \in \Omega \, \phi^n(t, \omega) \longrightarrow \phi(t, \omega) \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成り立つ．他方で $\mathscr{B}(\mathbf{R})$ の任意の要素 E に対して

$$\phi^{n-1}(E) = \{0\} \times \phi_0^{-1}(E) \cup \bigcup_{j=0}^{n2^n - 1} (j/2^n, (j+1)/2^n] \times \phi_{j/2^n}^{-1}(E)$$

が成り立つので，ϕ^n は $\sigma(\mathscr{U}_{\mathbf{T}}) / \mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測である．ゆえに ϕ も $\sigma(\mathscr{U}_{\mathbf{T}}) / \mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測である．$\phi$ の任意性より

$$\left\{ f^{-1}(A) \mid \quad f \in \mathscr{L}_{\mathbf{T}} \wedge A \in \mathscr{B}(\mathbf{R}) \right\} \subset \sigma(\mathscr{U}_{\mathbf{T}})$$

が従うので

$$\mathscr{P}_{\mathbf{T}} \subset \sigma(\mathscr{U}_{\mathbf{T}})$$

が得られる．

(b)　$\mathbf{T} = [0, T]$ の場合，自然数 n に対して

$$\phi^n(t, \omega) = \phi(0, \omega) \mathbb{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{j=0}^{n2^n - 1} \phi(jT/2^n, \omega) \mathbb{1}_{(jT/2^n, (j+1)T/2^n]}(t)$$

で ϕ^n を定めると，$(\phi^n)_{n \in \omega}$ は ϕ に各点収束し，ϕ^n は $\sigma(\mathscr{U}_{\mathbf{T}}) / \mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測で，$\phi$ の $\sigma(\mathscr{U}_{\mathbf{T}}) / \mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測性が従い

$$\mathscr{P}_{\mathbf{T}} \subset \sigma(\mathscr{U}_{\mathbf{T}})$$

が得られる．∎

定理 I.12.2 (右連続化したフィルトレーションに関する可予測過程は元のフィルトレーションに適合する).
$\{\mathscr{G}_t\}_{t \in \mathbf{T}}$ をフィルトレーションとし，各 $t \in \mathbf{T}$ で

$$\mathscr{F}_t \overset{\text{def}}{=} \mathscr{G}_{t+},$$

ただし $\mathbf{T} = [0, T]$ の場合は

$$\mathscr{F}_T \overset{\text{def}}{=} \mathscr{G}_T$$

として右連続なフィルトレーション $\{\mathscr{F}_t\}_{t \in \mathbf{T}}$ を定める．このとき f を $\{\mathscr{F}_t\}_{t \in \mathbf{T}}$-可予測過程とすると，各 $t \in \mathbf{T} \backslash \{0\}$ で

$$\Omega \ni \omega \longmapsto f(t, \omega)$$

なる写像は $\mathscr{G}_t / \mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測である．

略証.　$\mathbf{T} \times \Omega$ 上の Dynkin 族を

$$\mathscr{D} \overset{\text{def}}{=} \{\, A \in \mathscr{P}_{\mathbf{T}} \mid \quad \text{各 } t \in \mathbf{T} \backslash \{0\} \text{ で } \Omega \ni \omega \longmapsto \mathbb{1}_A(t, \omega) \text{ が } \mathscr{G}_t / \mathscr{B}(\mathbf{R})\text{-可測} \,\}$$

で定める．このとき

$$\mathscr{U}_{\mathbf{T}} \subset \mathscr{D} \tag{I.20}$$

が成り立てば Dynkin 族定理と定理 I.12.1 より

$$\mathscr{P}_{\mathbf{T}} = \sigma\left(\mathscr{U}_{\mathbf{T}}\right) = \mathscr{D}$$

が成立する．すると $\mathscr{P}_{\mathbf{T}}$-可測単関数に対して定理の主張が満たされ，その各点収束極限で表せる $\mathscr{P}_{\mathbf{T}}$-可測関数に対しても定理の主張が満たされる．いま，A を $\mathscr{U}_{\mathbf{T}}$ から任意に選ばれた要素とする．

(a)　$A = \{0\} \times B$ なる形の場合，$t \in \mathbf{T} \backslash \{0\}$ なる t を取ると

$$\Omega \ni \omega \longmapsto \mathbb{1}_A(t, \omega)$$

は恒等的に 0 となる．ゆえに $\mathscr{G}_t / \mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測である．

(b)　$A = (u, v] \times B$ なる形の場合，$t \in \mathbf{T} \backslash \{0\}$ なる t を取ると，

$$t \leq u \vee v < t$$

なら

$$\Omega \ni \omega \longmapsto \mathbb{1}_A(t, \omega)$$

は恒等的に 0 となるから $\mathscr{G}_t / \mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測である．

$$u < t \leq v$$

なら

$$\Omega \ni \omega \longmapsto \mathbb{1}_A(t, \omega)$$

は $\mathbb{1}_B$ に一致し，$\mathbb{1}_B$ は $\mathscr{G}_u / \mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測なので $\mathscr{G}_t / \mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測である．

以上より

$$A \in \mathscr{D}$$

が成立するので，(I.20) が従う．∎

定理 I.12.3 (可予測過程は発展的可測).　$\{\mathscr{F}_t\}_{t \in \mathbf{T}}$-可予測過程は $\{\mathscr{F}_t\}_{t \in \mathbf{T}}$-発展的可測である．

略証.　いま

$$\mathscr{D} \overset{\text{def}}{=} \{\, A \in \mathscr{P}_{\mathbf{T}} \mid \quad \mathbb{1}_A \text{ が } \{\mathscr{F}_t\}_{t \in \mathbf{T}}\text{-発展的可測} \,\}$$

として Dynkin 族を定める．

$$\mathscr{U}_{\mathbf{T}} \subset \mathscr{D} \tag{I.21}$$

が成り立てば，Dynkin 族定理と定理 I.12.1 より

$$\mathscr{P}_{\mathbf{T}} = \sigma\left(\mathscr{U}_{\mathbf{T}}\right) = \mathscr{D}$$

が成立する．いま，A を $\mathscr{U}_{\mathbf{T}}$ から任意に選ばれた要素とし，t を $\mathbf{T}$ から任意に選ばれた要素とする．

(a)　$A = \{0\} \times B$ なる形の場合，

$$\mathbb{1}_A|_{[0,t]\times\Omega} = \mathbb{1}_A$$

が成り立ち，また $\{0\} \in \mathscr{B}([0,t])$ かつ $B \in \mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}_t$ であるから $\mathbb{1}_A|_{[0,t]\times\Omega}$ は $\mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測である．

(b)　$A = (u,v] \times B$ なる形の場合，

$$t \leq u$$

なら $\mathbb{1}_A|_{[0,t]\times\Omega}$ は恒等的に 0 となり，

$$u < t$$

なら

$$\mathbb{1}_A|_{[0,t]\times\Omega} = \mathbb{1}_{(u,\min\{v,t\}]\times B}$$

となり，$(u, \min v, t] \in \mathscr{B}([0,t])$ かつ $B \in \mathscr{F}_u \subset \mathscr{F}_t$ となるので $\mathbb{1}_A|_{[0,t]\times\Omega}$ は $\mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測である．

以上より

$$A \in \mathscr{D}$$

が成立するので，(I.21) が従う． ■

I.13　確率積分

$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間とし，$\mathbf{T}$ を $[0,T]$ とし，$\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$ を $\mathscr{F}$ に付随するフィルトレーションとし，

$$\{\, a \mid \quad a \in \mathscr{F} \wedge P(a) = 0 \,\} \subset \mathscr{F}_0$$

が満たされているとする．また M を $\mathscr{M}_{\mathbf{T}}^2$ の要素か，或いは $\mathscr{M}_{\mathbf{T}}^{2,c}$ の要素とする．ただし

$$M \in \mathscr{M}_{\mathbf{T}}^2$$

の場合は $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbf{T}}$ は右連続であるとする．また $\langle M \rangle$ の ω に対する標本路 (表記法は P. 589)

$$\langle M \rangle_{\bullet}(\omega)$$

で構成する $\mathscr{B}(\mathbf{T})$ 上の Stieltjes 測度を

$$s_{M,\omega}$$

と書く．

本節の始めでは，可予測集合 A に対して

$$\int_\Omega \int_{\mathbf{T}} \mathbb{1}_A(t,\omega)\, s_{M,\omega}(dt)\, P(d\omega)$$

という積分を正当化する．

いま A を $\mathscr{P}_{\mathbf{T}}$ の要素とすれば，

$$A \in \mathscr{B}(\mathbf{T}) \otimes \mathscr{F}_T$$

であるから Ω の各要素 ω で

$$\mathbf{T} \ni t \longmapsto \mathbb{1}_A(t,\omega)$$

なる写像は $\mathscr{B}(\mathbf{T})/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測である．ゆえに

$$\int_{\mathbf{T}} \mathbb{1}_A(t,\omega)\, s_{M,\omega}(dt)$$

という積分は各 ω で存在している．実際この積分は

$$\int_{\mathbf{T}} \mathbb{1}_A(t,\omega)\, s_{M,\omega}(dt) \le \int_{\mathbf{T}} \mathbb{1}_{\mathbf{T}\times\Omega}(t,\omega)\, s_{M,\omega}(dt) = \langle M \rangle_T(\omega)$$

なる不等式を満たすから実数値で確定している．

測度 $s_{M,\omega}$ は ω に依存しているため，

$$\Omega \ni \omega \longmapsto \int_{\mathbf{T}} \mathbb{1}_A(t,\omega)\, s_{M,\omega}(dt)$$

の可測性は Fubini の定理の適用では得られない．だが以下が示される．

Stieltjes 積分は ω の関数として可測

A を $\mathscr{P}_{\mathbf{T}}$ の要素とすれば

$$\Omega \ni \omega \longmapsto \int_{\mathbf{T}} \mathbb{1}_A(t,\omega)\, s_{M,\omega}(dt)$$

は $\mathscr{F}_T/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測である．

略証． いま

$$\mathscr{D} \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{ A \in \mathscr{P}_{\mathbf{T}} \;\middle|\; \omega \longmapsto \textstyle\int_{\mathbf{T}} \mathbb{1}_A(t,\omega)\, s_{M,\omega}(dt) \text{ が } \mathscr{F}_T/\mathscr{B}(\mathbf{R})\text{-可測} \right\}$$

により Dynkin 族を定めて，また A を $\mathscr{U}_{\mathbf{T}}$ の要素とする．$\mathscr{F}_0$ の要素 B によって

$$A = \{0\} \times B$$

が成り立っているとき，Ω の任意の要素 ω に対して

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{T}} \mathbb{1}_A(t,\omega)\, s_{M,\omega}(dt) &= \mathbb{1}_B(\omega) \cdot \int_{\mathbf{T}} \mathbb{1}_{\{0\}}(t)\, s_{M,\omega}(dt) \\ &= \mathbb{1}_B(\omega) \cdot (\langle M\rangle_0(\omega) - \langle M\rangle_0(\omega)) \\ &= 0\end{aligned}$$

が成り立つので

$$A \in \mathscr{D}$$

が成り立つ．

$$s < t$$

なる $\mathbf{T}$ の要素と $\mathscr{F}_s$ の要素 B によって

$$A =]s,t] \times B$$

が成り立っているとき，Ω の任意の要素 ω に対して

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{T}} \mathbb{1}_A(t,\omega)\, s_{M,\omega}(dt) &= \mathbb{1}_B(\omega) \cdot \int_{\mathbf{T}} \mathbb{1}_{]s,t]}(t)\, s_{M,\omega}(dt) \\ &= \mathbb{1}_B(\omega) \cdot (\langle M\rangle_t(\omega) - \langle M\rangle_s(\omega))\end{aligned}$$

が成り立つので

$$A \in \mathscr{D}$$

が成り立つ．ゆえに

$$\mathscr{U}_{\mathbf{T}} \subset \mathscr{D}$$

が成り立つ．ゆえに Dynkin 族定理より

$$\mathscr{P}_{\mathbf{T}} = \mathscr{D}$$

が従う． ∎

$\mathscr{P}_{\mathbf{T}}$ 上の写像 ν_M を

$$\mathscr{P}_{\mathbf{T}} \ni A \longmapsto \int_{\Omega} \int_{\mathbf{T}} \mathbb{1}_A(t,\omega)\, s_{M,\omega}(dt)\, P(d\omega)$$

なる関係により定める．

定理 I.13.1 (二乗可積分マルチンゲールで構成する測度). ν_M は $\mathscr{P}_{\mathbf{T}}$ 上の正値有限測度である．

略証.　先ず

$$\int_{\Omega} \int_{\mathbf{T}} \mathbb{1}_{\mathbf{T}\times\Omega}(t,\omega)\, s_{M,\omega}(dt)\, P(d\omega) = \int_{\Omega} \langle M\rangle_T \; dP$$

が成り立つが，

$$M^2 - \langle M \rangle$$

はマルチンゲールであり M_T^2 は可積分なので

$$\int_{\Omega} \langle M \rangle_T \ dP < \infty$$

が従う．ゆえに ν_M は有限値しか取らない．また

$$\{A_n\}_{n \in \boldsymbol{\omega}}$$

を互いに素な $\mathscr{P}_{\mathbf{T}}$ の部分集合とすると，Ω の任意の要素 ω に対して単調収束定理より

$$\int_{\mathbf{T}} \mathbb{1}_{\bigcup_{n \in \boldsymbol{\omega}} A_n}(t, \omega)\, s_{M,\omega}(dt) = \sum_{n \in \boldsymbol{\omega}} \int_{\mathbf{T}} \mathbb{1}_{A_n}(t, \omega)\, s_{M,\omega}(dt)$$

が成り立ち，再び単調収束定理より

$$\int_{\Omega} \sum_{n \in \boldsymbol{\omega}} \int_{\mathbf{T}} \mathbb{1}_{A_n}(t, \omega)\, s_{M,\omega}(dt)\, P(d\omega) = \sum_{n \in \boldsymbol{\omega}} \int_{\Omega} \int_{\mathbf{T}} \mathbb{1}_{A_n}(t, \omega)\, s_{M,\omega}(dt)\, P(d\omega)$$

が成り立つ．ゆえに ν_M は

$$\bigcup_{n \in \boldsymbol{\omega}} A_n \longmapsto \sum_{n \in \boldsymbol{\omega}} \nu_M(A_n)$$

を満たす．ゆえに ν_M は $\mathscr{P}_{\mathbf{T}}$ 上の正値有限測度である． ∎

$\mathscr{L}^1(\mathbf{T} \times \Omega, \mathscr{P}_{\mathbf{T}}, \nu_M)$ を $\mathscr{L}^1(\nu_M)$ と略記する．

定理 I.13.2 (可積分可予測過程の積分表現).　f を $\mathscr{L}^1(\nu_M)$ の要素とすると

$$\int_{\mathbf{T} \times \Omega} f \ d\nu_M = \int_{\Omega} \int_{\mathbf{T}} f(t, \omega)\, s_{M,\omega}(dt)\, P(d\omega).$$

略証．

参考文献

[1] I. Karatzas and S. Shreve, Brownian motion and stochastic calculus second edition, 1998.
[2] G. Killianpur, Stochastic Filtering Theory, 1980.
[3] C. Chen, Study Notes in Matheamtics, available from http://www.stat.purdue.edu/~chen418/study_research/StochasticCalculus-note2.pdf, 2018/05/20.
[4] Mathematics Stack Exchange, A question about stochastic processes and stopping times, available from https://math.stackexchange.com/questions/84271/, 2018/05/20.
[5] 現代集合論入門, 竹内外史
[6] 数学原論 集合論 1, ブルバキ
[7] 代数系入門, 松坂和夫
[8] S. Lang, Algebra, 2002.
[9] W. Rudin, Functional Analysis, 2006.
[10] W. Rudin, Real and Complex Analysis, 2006.
[11] V. Bogachev, Measure Theory, 2006.
[12] L. V. Ahlfors, Complex Analysis
[13] A. F. Beardon, Complex Analysis
[14] H. Cartan, 複素函数論
[15] 磯裕介, 複素関数論入門
[16] その他は Wikipedia と海外の質問サイトがメイン.

索引

英字 (大)	英字 (小)	希字 (大)	希字 (小)	希字 (変)
A	a	A	α	
B	b	B	β	
C	c	Γ	γ	
D	d	Δ	δ	
E	e	E	ϵ	ε
F	f	Z	ζ	
G	g	H	η	
H	h	Θ	θ	ϑ
I	i	I	ι	
J	j	K	κ	
K	k	Λ	λ	
L	l	M	μ	
M	m	N	ν	
N	n	Ξ	ξ	
O	o	O	o	
P	p	Π	π	ϖ
Q	q	P	ρ	ϱ
R	r	Σ	σ	ς
S	s	T	τ	
T	t	Υ	υ	
U	u	Φ	ϕ	
V	v	X	χ	
W	w	Ψ	ψ	φ
X	x	Ω	ω	
Y	y			
Z	z			