

2019年12月29日

ε 項とクラスの導入による具体的で直観的な集合論の構築

目次

1	導入	2
1.1	ε 計算について	2
1.2	クラスについて	4
2	言語	6
2.1	言語 \mathcal{L}_ε	7
2.2	言語の拡張	8
3	\exists の規則	11
4	式の書き換え	13
5	\exists の除去規則	15
6	\forall の導入	16
7	成り立つこと	18

1 導入

1.1 ε 計算について

- 量化 \exists, \forall を使う証明を命題論理の証明に埋め込むために Hilbert が開始.
- 式 $\varphi(x)$ に対して

$$\varepsilon x \varphi(x)$$

という形のオブジェクトを作り, ε 項と呼ぶ. また

$$\begin{aligned}\exists x \varphi(x) &\leftrightarrow \varphi(x / \varepsilon x \varphi(x)), \\ \forall x \varphi(x) &\leftrightarrow \varphi(x / \varepsilon \rightarrow x \varphi(x))\end{aligned}$$

を公理とする.

- 命題論理の証明に埋め込む際には \exists や \forall の付いた式を ε 項を代入した式に変換すればよい.
- ただし, 今回 ε 項を導入したのは埋め込むためではなく **集合を「具体化」**するため.

- “生の”集合論では集合というオブジェクトが用意されていないため、「存在」は「実在」ではない。たとえば

$$\exists x \forall y (y \notin x)$$

は定理であり「空集合は存在する」と読むが、空集合を“実際に取ってくる”ことは不可能。

- ε 項を使えば、 \exists の公理と空集合の存在定理によって

$$\forall y (y \notin \varepsilon x \forall y (y \notin x))$$

が成り立つ。つまり ε 項は「存在」を「実在」に昇華する(上の ε 項は集合である)。

ε 項のメリット

- 「存在」を「実在」で補強できる。
- ある種の ε 項は集合であり、集合を具体的なオブジェクトとして扱える。
- 証明で用いる推論規則は三段論法のみで済む。
- 証明は全て閉じた式で行える。

1.2 クラスについて

- ブルバキ[]や島内[]でも ε 項を使った集合論を展開.
- ところで, 「 $\varphi(x)$ を満たす集合 x の全体」の意味の

$$\{x \mid \varphi(x)\}$$

というオブジェクトも取り入れたい.

- “生の”集合論では“インフォーマル”な導入.
- ブルバキ[]や島内[]では

$$\{x \mid \varphi(x)\} \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon x \forall u (\varphi(u) \leftrightarrow u \in x)$$

と定めるが, これは欠点がある.

$$\exists x \forall u (\varphi(u) \leftrightarrow u \in x)$$

が成立しない場合は「 $\varphi(x)$ を満たす集合 x の全体」という意味を持たない.

- 式 φ から直接 $\{x \mid \varphi(x)\}$ の形のオブジェクトを作ればよい.

定義 1.1 (クラス). 式 φ に x のみが自由に現れているとき,

$$\varepsilon x \varphi(x), \quad \{x \mid \varphi(x)\}$$

の形のオブジェクトをクラス (**class**) と呼ぶ.

- クラスである ε 項は集合である.
- 集合でないクラスもある. たとえば $\{x \mid x = x\}$ や $\{x \mid x \notin x\}$ は集合ではない.

集合の定義は竹内[]に倣う. 定義により**集合はクラスである**.

定義 1.2 (集合). クラス c が

$$\exists x (c = x)$$

を満たすとき c を**集合 (set)** と呼び, そうでない場合は**真クラス (proper class)** と呼ぶ.

NBG 集合論 クラスの概念を取り入れた NBG 集合論というものがあるが, こちらのクラスは「実在」しない.

2 言語

- クラスという新しいオブジェクトを導入したら、この導入操作が“妥当”であるかどうかの問題になる。

- 妥当性は、“生の”集合論の式 φ に対して

“生の”集合論で φ が証明される \iff 新しい集合論で φ が証明される

が成り立つかどうかで検証する。

- 精密な検証のためには、集合論の言語と証明のルールを明らかにしなくてはならない。
- 言語とは「変項」, 「述語記号」, 「論理記号」とその他もろもろの記号からなる。そして「(数) 式」は言語の記号を用いて作られる。式を作るためには「項」が必要であり、文字は最もよく使われる項である。たとえば

$$s \in t$$

と書けば一つの式が出来上がる。

- まず“生の”集合論の言語 \mathcal{L}_\in を明示する。

2.1 言語 \mathcal{L}_\in

言語 \mathcal{L}_\in

矛盾記号 \perp

論理記号 $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$

量化子 \forall, \exists

述語記号 $=, \in$

変項 x, y, z, \dots など.

また \mathcal{L}_\in の項 (term) と式 (formula) は次の規則で生成する.

\mathcal{L}_\in の項と式

項 変項は項であり, またこれらのみが項である.

式 • \perp は式である.

- 項 τ と項 σ に対して $\tau \in \sigma$ と $\tau = \sigma$ は式である.
- 式 φ に対して $\neg \varphi$ は式である.
- 式 φ と式 ψ に対して $\varphi \vee \psi$ と $\varphi \wedge \psi$ と $\varphi \rightarrow \psi$ はいずれも式である.
- 式 φ と項 x に対して $\exists x \varphi$ と $\forall x \varphi$ は式である.
- これらのみが式である.

2.2 言語の拡張

- クラスを正式に導入するには言語を拡張しなくてはならない.
- 拡張は二段階に分けて行う. 始めに ε 項のために拡張し, 次に $\{x \mid \varphi(x)\}$ の形の項のために拡張する.
- 始めの拡張により得る言語を \mathcal{L}_ε と名付ける.

言語 \mathcal{L}_ε

矛盾記号 \perp

論理記号 $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$

量化子 \forall, \exists

述語記号 $=, \in$

変項 x, y, z, \dots など.

イプシロン ε

\mathcal{L}_ε の項と式の定義

- 変項は項である.
- \perp は式である.
- 項 τ と項 σ に対して $\tau \in \sigma$ と $\tau = \sigma$ は式である.
- 式 φ に対して $\neg \varphi$ は式である.
- 式 φ と式 ψ に対して $\varphi \vee \psi$ と $\varphi \wedge \psi$ と $\varphi \rightarrow \psi$ はいずれも式である.
- 式 φ と変項 x に対して $\exists x \varphi$ と $\forall x \varphi$ は式である.
- 式 φ と変項 x に対して $\varepsilon x \varphi$ は項である.
- これらのみが項と式である.

- \mathcal{L}_\in との大きな違いは項と式の定義が循環している点にある.
- \mathcal{L}_ε の式が \mathcal{L}_ε の項を用いて作られるのは当然ながら, その逆に \mathcal{L}_ε の項もまた \mathcal{L}_ε の式から作られる.
- \mathcal{L}_\in の式は \mathcal{L}_ε の式でもある.

言語 \mathcal{L}

矛盾記号 \perp

論理記号 $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$

量化子 \forall, \exists

述語記号 $=, \in$

変項 x, y, z, \dots など.

補助記号 $\{, |, \}$

\mathcal{L} の項と式の定義

項 • 変項は項である.

- $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項は項である.
- x を変項とし, φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とすると, $\{x \mid \varphi\}$ なる記号列は項である.
- これらのみが項である.

式 • \perp は式である.

- 項 τ と項 σ に対して $\tau \in \sigma$ と $\tau = \sigma$ は式である.
- 式 φ に対して $\neg \varphi$ は式である.
- 式 φ と式 ψ に対して $\varphi \vee \psi$ と $\varphi \wedge \psi$ と $\varphi \rightarrow \psi$ はいずれも式である.
- 式 φ と項 x に対して $\exists x \varphi$ と $\forall x \varphi$ は式である.
- これらのみが式である.

3 \exists の規則

推論規則 3.1 (\exists の導入). \mathcal{L} の式 $\varphi(x)$ と ε 項 τ に対して

$$\varphi(\tau) \vdash \exists x \varphi(x).$$

とくに, 任意の ε 項 τ に対して

$$\tau = \tau.$$

だから

$$\exists x (x = \tau)$$

が成り立つ. つまり ε 項はすべて集合.

推論規則 3.2 (\exists の除去 (NG版)). \mathcal{L} の式 $\varphi(x)$ に対して

$$\exists x \varphi(x) \vdash \varphi(\varepsilon x \varphi(x)).$$

φ に内包項や ε 項が現れる場合

$$\varepsilon x \varphi(x)$$

なる項は無い(無理矢理つくと入れ子問題).

解決法

\mathcal{L} の式を \mathcal{L}_ε の式に書き換える手順を用意する.

4 式の書き換え

- 式に ε 項が含まれていると書き換え不可.
- ε 項が現れない式を **甲種式**, そうでない式を **乙種式** と分類.

次の書き換え規則によって, 甲種式はすべて \mathcal{L}_ε の式に書き換え可能 (構造的帰納法による).

- $x \in \{y \mid \psi(y)\}$ は $\psi(x)$
- $\{x \mid \varphi(x)\} \in y$ は

$$\exists s \left(s \in y \wedge \forall x \left(x \in s \iff \varphi(x) \right) \right)$$

- $\{x \mid \varphi(x)\} \in \{y \mid \psi(y)\}$ は

$$\exists s \left(\psi(s) \wedge \forall x \left(x \in s \iff \varphi(x) \right) \right)$$

• $x = \{ y \mid \psi(y) \}$ は

$$\forall u \ (u \in x \iff \psi(u))$$

• $\{ x \mid \varphi(x) \} = y$ は

$$\forall u \ (\varphi(u) \iff u \in y)$$

• $\{ x \mid \varphi(x) \} = \{ y \mid \psi(y) \}$ は

$$\forall u \ (\varphi(u) \iff \psi(u))$$

5 \exists の除去規則

甲種式 φ を \mathcal{L}_ϵ の式に書き換えたものを $\hat{\varphi}$ と書く.

推論規則 5.1 (\exists の除去). 甲種式 $\varphi(x)$ に対して

$$\exists x \varphi(x) \vdash \varphi(\epsilon x \hat{\varphi}(x)).$$

\exists の除去規則と導入規則により次を得る.

定理 5.2. 甲種式 $\varphi(x)$ に対して

$$\exists x \varphi(x) \iff \varphi(\epsilon x \hat{\varphi}(x)).$$

6 \forall の導入

推論規則 6.1 (\forall の導入). 式 $\varphi(x)$ に対し, すべての ε 項 τ で $\varphi(\tau)$ が成り立つなら

$$\forall x \varphi(x).$$

推論規則 6.2 (\forall の除去). 式 $\varphi(x)$ と ε 項 τ に対して

$$\forall x \varphi(x) \vdash \varphi(\tau).$$

ε 項は集合であるから, 量化の亘る範囲は集合の上だけ.

定理 6.3. 甲種式 $\varphi(x)$ に対して

$$\forall x \varphi(x) \iff \varphi(\varepsilon x \rightarrow \hat{\varphi}(x)).$$

次の定理は他の公理および構造的帰納法と併せて示される.

定理 6.4 (書き換えの同値性). 甲種式 $\varphi(x)$ に対して

$$\forall x (\varphi(x) \iff \hat{\varphi}(x)).$$

7 成り立つこと

定理 7.1. 内包項 $\{x \mid \varphi(x)\}$ が集合であれば

$$\{x \mid \varphi(x)\} = \varepsilon y \, \forall x \, (x \in y \iff \varphi(x)).$$

略証. $\exists y \, (\{x \mid \varphi(x)\} = y)$ を \mathcal{L}_ε の式に書き直せば

$$\exists y \, \forall x \, (x \in y \iff \varphi(x)).$$

存在記号の規則より結論が従う. ■