関数解析後期メモ

百合川

2017 年 12 月 28 日

目次

第 1 章

共役作用素

1.1 ノルム空間の共役作用素

係数体を $\mathbb{K}$ とする．以下ではノルム空間 X におけるノルムを $\|\cdot\|_X$ と表記し，位相はこのノルムにより導入されるものと考える．

定義 1.1.1 (共役作用素). X, Y をノルム空間，T を $X \to Y$ の線型作用素とする．T の定義域 $\mathscr{D}(T)$ が X で稠密であるとき，$g \in Y^*$ に対し

$$f(x) = g(Tx) \quad (\forall x \in \mathscr{D}(T)) \tag{1.1}$$

を満たす $f \in X^*$ が存在すれば，f の存在は g に対して唯一つであり[*1]この対応を

$$T^* : g \longmapsto f$$

で表す．$T^* : Y^* \to X^*$ を T の共役作用素という．

上の定義で T が零作用素の場合，T の定義域は X 全体であるが (1.1) を満たすような f は零作用素のみであり，一方で g としては何を取っても成り立つから，共役作用素もまた零作用素となる．

定理 1.1.2 (共役作用素は閉線型). X, Y をノルム空間，T を $X \to Y$ の線型作用素とする．$\mathscr{D}(T)$ が X で稠密であるとき，T^* は閉線型作用素である．

この定理を証明するために以下にいくつか準備をする．$x \in X$ と $f \in X^*$ に対して $f(x)$ を次の形式で表現する:

$$f(x) = \langle x, f \rangle_{X,X^*}.$$

これは双線型形式，つまり $\langle \alpha x_1 + \beta x_2, f \rangle_{X,X^*} = \alpha \langle x_1, f \rangle_{X,X^*} + \beta \langle x_2, f \rangle_{X,X^*}$ と $\langle x, \alpha f_1 + \beta f_2 \rangle_{X,X^*} = \alpha \langle x, f_1 \rangle_{X,X^*} + \beta \langle x, f_2 \rangle_{X,X^*}$ を満たす．双線型形式で表現することで内積空間を扱っているように捉えることができ，例えば (1.1) は

$$\langle x, f \rangle_{X,X^*} = \langle Tx, g \rangle_{Y,Y^*} \quad (\forall x \in \mathscr{D}(T))$$

[*1] g に対し f とは別に (1.1) を満たす $f' \in X^*$ が存在すれば

$$f(x) = f'(x) \quad (\forall x \in \mathscr{D}(T))$$

が成り立つ．$\mathscr{D}(T)$ は X で稠密であるから f, f' の連続性より $f = f'$ が従う．

と表現できる．また $A \subset X,\ B \subset X^*$ に対して

$$A^\perp := \left\{ f \in X^* \ ; \quad \forall x \in A,\ \langle x, f \rangle_{X,X^*} = 0 \right\}, \quad {}^\perp B := \left\{ x \in X \ ; \quad \forall f \in B,\ \langle x, f \rangle_{X,X^*} = 0 \right\}$$

と表記を定める．例えば B に対して $B^\perp$ と書いたらこれは X^{**} の部分集合を表す．

補助定理 1.1.3.　$A \subset X$ に対し $A^\perp$ は X^* において閉部分空間となる．

証明.　$A^\perp$ が X^* において完備部分空間であることを示せばよい．

線型性　任意の $f_1, f_2 \in A^\perp$ と $\alpha \in \mathbb{K}$ に対し

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = 0, \quad (\alpha f_1)(x) = \alpha f_1(x) = 0, \quad (\forall x \in A)$$

が成り立つ．

完備性　$f_n \in A^\perp$ が収束列であるとすれば X^* の完備性から $(f_n)_{n=1}^\infty$ は或る $f \in X^*$ に (作用素ノルムで) 収束する．任意の $x \in A$ に対して

$$|f(x)| = |f(x) - f_n(x)| \leq \| f - f_n \|_{X^*} \| x \|_X \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成り立ち $f \in A^\perp$ となる．

■

補助定理について補足　実際はさらに

$${}^\perp(A^\perp) = \overline{\mathrm{L.h.}[\,A\,]}$$

が成り立つ．$A \subset {}^\perp(A^\perp)$ かつ ${}^\perp(A^\perp)$ は X の閉部分空間であるから $\overline{\mathrm{L.h.}[\,A\,]} \subset {}^\perp(A^\perp)$ が先ず判る．逆向きの包含関係について，$X = \overline{\mathrm{L.h.}[\,A\,]}$ の場合は成り立つが，そうでない場合は次のように考える．Hahn-Banach の定理の系によれば任意の $x_0 \in X \backslash \overline{\mathrm{L.h.}[\,A\,]}$ を一つ取って

$$f_0(x) = \begin{cases} 0 & (x \in \overline{\mathrm{L.h.}[\,A\,]}) \\ f_0(x_0) \neq 0 & (x = x_0) \end{cases}$$

を満たす $f_0 \in X^*$ が存在する．$f_0 \in A^\perp$ であるが $x_0 \notin {}^\perp(A^\perp)$ となり ${}^\perp(A^\perp) \subset \overline{\mathrm{L.h.}[\,A\,]}$ が従う．■

二つのノルム空間 X, Y の直積空間 $X \times Y$ における直積ノルムを

$$\| [x, y] \|_{X \times Y} = \| x \|_X + \| y \|_Y \quad (\forall [x, y] \in X \times Y)$$

と表すことにする．$Y \times X$ の共役空間 $(Y \times X)^*$ の任意の元 F に対し

$$\begin{aligned} F_Y(y) &:= F[y, 0] \quad (y \in Y) \\ F_X(x) &:= F[0, x] \quad (x \in X) \end{aligned} \tag{1.2}$$

として F_Y, F_X を定義すれば，F の線型性，有界性から $F_Y \in Y^*,\ F_X \in X^*$ となり，特に $F[y, x] = F_Y(y) + F_X(x)$ が成り立つ．逆に $g \in Y^*$ と $f \in X^*$ に対し

$$F[y, x] = g(y) + f(x) \quad (\forall [y, x] \in Y \times X)$$

と定義すれば $F \in (Y \times X)^*$ となり，従って対応 $(Y \times X)^* \ni F \longmapsto [F_Y, F_X] \in Y^* \times X^*$ は全単射である．

補助定理 1.1.4.　次の写像

$$\varphi : (Y \times X)^* \ni F \longmapsto [F_Y, F_X] \in Y^* \times X^*$$

は線形，同相である．

$\mathrm{E}[\,j\,|\,G]$

証明.

線型性　対応のさせ方 (1.2) に基づけば，任意の $[y, x] \in Y \times X$ と $F_1, F_2 \in (Y \times X)^*$，$\alpha \in \mathbb{K}$ に対して

$$\begin{aligned} \varphi(F_1 + F_2)[y, x] &= (F_1 + F_2)[y, 0] + (F_1 + F_2)[0, x] = \varphi(F_1)[y, x] + \varphi(F_2)[y, x] \\ \varphi(\alpha F_1)[y, x] &= (\alpha F_1)[y, 0] + (\alpha F_1)[0, x] = \alpha\varphi(F_1)[y, x] \end{aligned}$$

が成り立つ．

同相　φ は Banach 空間から Banach 空間への線型全単射であるから，φ^{-1} が有界であるなら値域定理より φ も線型有界となり，従って φ は同相写像となる．実際

$$\|\,[F_Y, F_X]\,\|_{Y^* \times X^*} = \|\,F_Y\,\|_{Y^*} + \|\,F_X\,\|_{X^*}$$

であることと

$$\left\|\,\varphi^{-1}[F_Y, F_X]\,\right\|_{(Y \times X)^*} = \sup_{\substack{[y,x] \in Y \times X \\ [y,x] \neq [0,0]}} \frac{|F_Y(y) + F_X(x)|}{\|\,[y, x]\,\|_{Y \times X}} \leq \|\,F_Y\,\|_{Y^*} + \|\,F_X\,\|_{X^*}$$

により

$$\sup_{\substack{[F_Y,F_X] \in Y^* \times X^* \\ [F_Y,F_X] \neq [0,0]}} \frac{\left\|\,\varphi^{-1}[F_Y, F_X]\,\right\|_{(Y \times X)^*}}{\|\,[F_Y, F_X]\,\|_{Y^* \times X^*}} \leq 1$$

が成り立つ．

∎

証明 (定理 1.1.2).

$$U : X \times Y \ni [x, y] \longmapsto [y, -x] \in Y \times X$$

として写像 U(等長，全単射) を定義する．T^* のグラフ $\mathscr{G}(T^*)$ は

$$\mathscr{G}(T^*) = \left\{\, [g, T^*g] \in Y^* \times X^* \;\; ; \quad \forall [x, Tx] \in \mathscr{G}(T), \quad \langle Tx, g \rangle_{Y,Y^*} = \langle x, T^*g \rangle_{X,X^*} \,\right\}$$

で表される．補助定理 1.1.4 により $[g, T^*g]$ に対応する $F_g \in (Y \times X)^*$ がただ一つ存在して

$$\langle Tx, g \rangle_{Y,Y^*} - \langle x, T^*g \rangle_{X,X^*} = F_g[Tx, -x] = F_g U[x, Tx], \quad ([x, Tx] \in \mathscr{G}(T))$$

と書き直せるから，補助定理 1.1.4 の同相写像 φ により

$$[U\mathscr{G}(T)]^{\perp} = \{\, F \in (Y \times X)^* \;\; ; \quad \forall [x, Tx] \in \mathscr{G}(T), \quad FU[x, Tx] = 0 \,\} = \varphi^{-1}\mathscr{G}(T^*) \tag{1.3}$$

が成り立つ．補助定理 1.1.3 より $[U\mathscr{G}(T)]^{\perp}$ が $Y^* \times X^*$ の閉部分空間であるから，$\mathscr{G}(T^*) = \varphi\,[U\mathscr{G}(T)]^{\perp}$ は $(Y \times X)^*$ において閉部分空間となり，従って T^* が閉線型作用素であると示された． ∎

定理 1.1.5 (閉拡張の共役作用素は元の共役作用素に一致する).
X, Y をノルム空間，T を $X \to Y$ の線型作用素とし，$\mathscr{D}(T)$ が X で稠密でかつ T が可閉であるとする．このとき次が成り立つ:

$$\mathscr{G}(\overline{T}^*) = \mathscr{G}(T^*).$$

証明． (1.3) より $\mathscr{G}\left(\overline{T}^*\right) = \varphi\left[U\mathscr{G}(\overline{T})\right]^{\perp}$ が成り立っているから，

$$\left[U\mathscr{G}(\overline{T})\right]^{\perp} = [U\mathscr{G}(T)]^{\perp}$$

を示せばよい．

$\subset$ について　任意の $[g, f] \in \left[U\mathscr{G}(\overline{T})\right]^{\perp}$ に対して

$$\left\langle \overline{T}x, g\right\rangle_{Y,Y^*} = \langle x, f\rangle_{X,X^*} \quad (\forall [x, \overline{T}x] \in \mathscr{G}(\overline{T}))$$

が成り立っている．

$$\mathscr{G}(T) \subset \overline{\mathscr{G}(T)} = \mathscr{G}(\overline{T})$$

より

$$\langle Tx, g\rangle_{Y,Y^*} = \langle x, f\rangle_{X,X^*} \quad (\forall [x, Tx] \in \mathscr{G}(T))$$

が従い $[g, f] \in [U\mathscr{G}(T)]^{\perp}$ が成り立つ．

$\supset$ について　任意に $[g, f] \in [U\mathscr{G}(T)]^{\perp}$ を取る．任意の $[x, y] \in \mathscr{G}(\overline{T})$ に対して $[x_n, Tx_n] \in \mathscr{G}(T)$ を取り

$$\| x_n - x \|_X \longrightarrow 0, \quad \| Tx_n - y \|_Y \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成り立つようにできるから，

$$\left|\langle y, g\rangle_{Y,Y^*} - \langle x, f\rangle_{X,X^*}\right| \leq \left|\langle y, g\rangle_{Y,Y^*} - \langle Tx_n, g\rangle_{Y,Y^*}\right| + \left|\langle x_n, f\rangle_{X,X^*} - \langle x, f\rangle_{X,X^*}\right| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成り立ち

$$[g, f] \in \left[U\mathscr{G}(\overline{T})\right]^{\perp}$$

が従う．

∎

補助定理 1.1.6 (定義域が稠密となるための条件).　X, Y をノルム空間，T を $X \to Y$ の線型作用素とする．このとき $\mathscr{D}(T)$ が X で稠密であるための必要十分条件は，$[0, f] \in \varphi\,[U\mathscr{G}(T)]^{\perp}$ ならば $f = 0$ となることである．

証明.

必要性　(1.3) より，$\overline{\mathscr{D}(T)} = X$ ならば T^* が存在して $\mathscr{G}(T^*) = \varphi\,[U\mathscr{G}(T)]^\perp$ を満たすから $f = 0$ となる．
十分性　$\varphi[0, f] \in [U\mathscr{G}(T)]^\perp$ なら

$$(\varphi[0, f])\,[Tx, -x] = -f(x) = 0 \quad (\forall[x, Tx] \in \mathscr{G}(T))$$

が成り立つ．そして

$$f(x) = 0 \quad (\forall x \in \mathscr{D}(T)) \text{ ならば } f = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\mathscr{D}(T)} = X$$

により $\overline{\mathscr{D}(T)} = X$ となる．実際 $\overline{\mathscr{D}(T)} \subsetneq X$ である場合，Hahn-Banach の定理の系より $f \neq 0$ なる $f \in X^*$ で $f(x) = 0 \quad (\forall x \in \mathscr{D}(T))$ を満たすものが存在する．逆に $\overline{\mathscr{D}(T)} = X$ であるなら，$f \in X^*$ の連続性より $f(x) = 0 \quad (\forall x \in \mathscr{D}(T))$ ならば $f = 0$ が従う．

∎

ノルム空間 X, Y の第二共役空間 X^{**}, Y^{**} への自然な単射を J_X, J_Y と表す．そして

$$J : [X, Y] \ni [x, y] \longmapsto [J_X x, J_Y y] \in [X^{**}, Y^{**}]$$

として J を定めれば J は等長かつ線型単射となる．

定理 1.1.7.　X, Y をノルム空間，T を $X \to Y$ の線型作用素とし $\mathscr{D}(T)$ が X で稠密であるとする．

(1)　$\overline{\mathscr{D}(T^*)} = Y^*$ ならば T は可閉であり

$$J\mathscr{G}(\overline{T}) \subset \mathscr{G}(T^{**})$$

が成り立つ．

(2)　Y が反射的 Banach 空間なら，T が可閉であることと $\overline{D}(T^*) = Y^*$ であることは同値となり

$$T^{**}J_X = J_Y\overline{T}$$

が成り立つ．

証明.　(1)　$\overline{\mathscr{D}(T^*)} = Y^*$ ならば T^* の共役作用素 $T^{**} : X^{**} \to Y^{**}$ が定義される．任意の $x \in \mathscr{D}$ に対し

$$\langle T^* g, J_X x\rangle_{X^*, X^{**}} = \langle x, T^* g\rangle_{X, X^*} = \langle Tx, g\rangle_{Y, Y^*} = \langle g, J_Y Tx\rangle_{Y^*, Y^{**}} \quad (\forall[g, T^* g] \in \mathscr{G}(T^*))$$

が成り立つから，$J_X x \in \mathscr{D}(T^{**})$ かつ

$$T^{**}J_X x = J_Y Tx \quad (\forall[x, Tx] \in \mathscr{G}(T))$$

が従う．すなわち

$$J\mathscr{G}(T) \subset \mathscr{G}(T^{**})$$

が成り立つ．また

$$J\overline{\mathscr{G}(T)} \subset \overline{J\mathscr{G}(T)} \subset \mathscr{G}(T^{**}) \tag{1.4}$$

が成り立つ．実際定理 1.1.2 より T^{**} は閉線型であるから二番目の不等式は成り立つ．だから初めの不等式を示せばよい．任意に $[J_X x, J_Y y] \in J\overline{\mathscr{G}(T)}$ を取れば，$[x_n, Tx_n] \in \mathscr{G}(T)$ を取り

$$\| x_n - x \|_X \longrightarrow 0, \quad \| Tx_n - y \|_Y \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成り立つようにできる．J_X, J_Y の等長性より

$$\| J_X x_n - J_X x \|_{X^{**}} \longrightarrow 0, \quad \| J_Y T x_n - J_Y y \|_{Y^{**}} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

となり $[J_X x, J_Y y] \in \overline{J\mathscr{G}(T)}$ が判る．(1.4) より $[0, y] \in \overline{\mathscr{G}(T)}$ ならば $[0, J_Y y] \in \mathscr{G}(T^{**})$ が従い $J_Y y = 0$ となる．J_Y は単射であるから $y = 0$ となり $\overline{\mathscr{G}(T)}$ がグラフとなるから T は可閉である．

定理 1.1.8 (共役作用素の有界性). X, Y をノルム空間，$T : X \to Y$ を線型作用素とし $\mathscr{D}(T)$ が X で稠密であるとする．T が有界なら T^* も有界で

$$\| T^* \|_{\mathscr{D}(T^*)} \leq \| T \|_{\mathscr{D}(T)}$$

が成り立ち，特に $T \in \mathrm{B}(X, Y)$ ならば $T^* \in \mathrm{B}(Y^*, X^*)$ かつ $\| T^* \|_{\mathrm{B}(Y^*, X^*)} = \| T \|_{\mathrm{B}(X,Y)}$ を満たす．[*2]

証明. 任意の $[x, Tx] \in \mathscr{G}(T)$ と $[g, T^* g] \in \mathscr{G}(T^*)$ に対して

$$\left| \langle x, T^* g \rangle_{X,X^*} \right| = \left| \langle Tx, g \rangle_{Y,Y^*} \right| \leq \| T \|_{\mathscr{D}(T)} \| g \|_{Y^*} \| x \|_X$$

が成り立つから

$$\| T^* g \|_{X^*} = \sup_{0 \neq x \in X} \frac{\left| \langle x, T^* g \rangle_{X,X^*} \right|}{\| x \|_X} \leq \| T \|_{\mathscr{D}(T)} \| g \|_{Y^*}$$

となる．従って $\| T^* \|_{\mathscr{D}(T^*)} \leq \| T \|_{\mathscr{D}(T)}$ を得る．$T \in \mathrm{B}(X, Y)$ である場合，任意の $g \in Y^*$ に対して

$$f : X \ni x \longmapsto g(Tx)$$

と定義すれば，$f \in X^*$ となり (1.1) を満たすから $T^* \in \mathrm{B}(Y^*, X^*)$ が成り立つ．また

$$\| Tx \|_Y = \sup_{\substack{g \in Y^* \\ \| g \|_{Y^*} = 1}} |g(Tx)| = \sup_{\substack{g \in Y^* \\ \| g \|_{Y^*} = 1}} |T^* g(x)| \leq \sup_{\substack{g \in Y^* \\ \| g \|_{Y^*} = 1}} \| T^* g \|_{X^*} \| x \|_X \leq \| T^* \|_{\mathrm{B}(Y^*, X^*)} \| x \|_X$$

が成り立つから $\| T^* \|_{\mathrm{B}(Y^*, X^*)} = \| T \|_{\mathrm{B}(X,Y)}$ が従う． ∎

定理 1.1.9 (共役作用素の合成). X, Y, Z をノルム空間，$T : X \to Y$, $U : Y \to Z$ を線型作用素とし $\overline{\mathscr{D}(T)} = X$, $\overline{\mathscr{D}(U)} = Y$, $\overline{\mathscr{D}(UT)} = X$ を満たすとする．このとき

$$T^* U^* \subset (UT)^*$$

が成り立ち，特に $U \in \mathrm{B}(Y, Z)$ である場合は $T^* U^* = (UT)^*$ となる．

[*2] $\| \cdot \|_{\mathscr{D}(T)}, \| \cdot \|_{\mathscr{D}(T^*)}$ および $\| \cdot \|_{\mathrm{B}(X,Y)}, \| \cdot \|_{\mathrm{B}(Y^*, X^*)}$ は作用素ノルムを表す．

証明． 任意の $h \in \mathscr{D}(T^*U^*)$ に対して

$$\langle (UT)x, h\rangle_{Z,Z^*} = \langle Tx, U^*h\rangle_{Y,Y^*} = \langle x, T^*U^*h\rangle_{X,X^*} \quad (\forall [x, Tx] \in \mathscr{G}(UT))$$

が成り立つから，$h \in \mathscr{D}((UT)^*)$ かつ $(UT)^*h = T^*U^*h$ を満たす[*3]．ゆえに

$$T^*U^* \subset (UT)^*$$

となる．$U \in \mathrm{B}(Y, Z)$ の場合，$\mathscr{D}(UT) = \mathscr{D}(T)$ と $U^* \in \mathrm{B}(Z^*, Y^*)$(定理 1.1.8) が従うから，任意の $h \in \mathscr{D}((UT)^*)$ に対して

$$\langle (UT)x, h\rangle_{Z,Z^*} = \langle x, (UT)^*h\rangle_{X,X^*} \quad (\forall x \in \mathscr{G}(T))$$

かつ

$$\langle (UT)x, h\rangle_{Z,Z^*} = \langle Tx, U^*h\rangle_{Y,Y^*} \quad (\forall x \in \mathscr{G}(T))$$

より $U^*h \in \mathscr{D}(T^*)$ となり $T^*U^*h = (UT)^*h$ を満たす．従って $(UT)^* \subset T^*U^*$ が成り立ち

$$(UT)^* = T^*U^*$$

を得る． ∎

定理 1.1.10 (共役作用素の和). X, Y をノルム空間，$T : X \to Y,\ U : X \to Y$ を線型作用素とし $\overline{\mathscr{D}(T)} = X,\ \overline{\mathscr{D}(U)} = X,\ \overline{\mathscr{D}(T+U)} = X$ を満たすとする．このとき

$$T^* + U^* \subset (T+U)^*$$

が成り立ち，特に $T, U \in \mathrm{B}(X, Y)$ である場合は $T^* + U^* = (T+U)^*$ となる．

証明． 任意の $g \in \mathscr{D}(T^* + U^*)$ に対し，

$$\langle (T+U)x, g\rangle_{Y,Y^*} = \langle Tx, g\rangle_{Y,Y^*} + \langle Ux, g\rangle_{Y,Y^*} = \langle x, T^*g\rangle_{X,X^*} + \langle x, U^*g\rangle_{X,X^*} \ {}^{*4} = \langle x, (T^* + U^*)g\rangle_{X,X^*} \quad (\forall x \in \mathscr{D}(T+U))$$

が成り立つ．従って $g \in \mathscr{D}((T+U)^*)$ かつ $(T+U)^*g = (T^* + U^*)g$ を満たす．特に $T, U \in \mathrm{B}(X, Y)$ のとき，任意の $g \in \mathscr{D}((T+U)^*)$ に対し

$$\langle (T+U)x, g\rangle_{Y,Y^*} = \langle x, (T+U)^*g\rangle_{X,X^*} \quad (\forall x \in X)$$

かつ

$$\langle (T+U)x, g\rangle_{Y,Y^*} = \langle Tx, g\rangle_{Y,Y^*} + \langle Ux, g\rangle_{Y,Y^*} = \langle x, (T^* + U^*)g\rangle_{X,X^*} \quad (\forall x \in X)$$

が成り立つから $g \in \mathscr{D}(T^* + U^*)$ かつ $(T+U)^* = (T^* + U^*)$ が従う． ∎

[*3] $\mathscr{G}(UT)$ は X で稠密であるから $(UT)^*h = T^*U^*h$ でなくてはならない．

[*4] $\mathscr{D}(T+U) \subset \mathscr{D}(T), \mathscr{D}(U)$ である．

定理 1.1.11 (共役作用素のスカラ倍).　X, Y をノルム空間，$T : X \to Y$ を線型作用素とし $\overline{\mathscr{D}(T)} = X$ を満たすとする．任意の $\lambda \in \mathbb{K}$ に対し次が成り立つ．

$$(\lambda T)^* = \lambda T^*.$$

証明.　$\lambda = 0$ の場合，零作用素の共役作用素もまた零作用素となるから $(\lambda T)^* = \lambda T^*$ が成り立つ．$\lambda \neq 0$ の場合，任意の $g \in \mathscr{D}((\lambda T)^*)$ に対して

$$\langle x, (\lambda T)^* g \rangle_{X,X^*} = \langle (\lambda T)x, g \rangle_{Y,Y^*} = \lambda \langle Tx, g \rangle_{Y,Y^*} = \lambda \langle x, T^* g \rangle_{X,X^*} \quad (\forall x \in \mathscr{D}(T))$$

が成り立つから $g \in \mathscr{D}(T^*)$ かつ

$$(\lambda T)^* g = \lambda T^* g$$

が成り立つ．一方 $g \in \mathscr{D}(T^*)$ に対して

$$\langle (\lambda T)x, g \rangle_{Y,Y^*} = \lambda \langle x, T^* \rangle_{X,X^*} \quad (\forall x \in \mathscr{D}(T))$$

も成り立ち，$g \in \mathscr{D}((\lambda T)^*)$ かつ

$$(\lambda T)^* g = \lambda T^* g$$

を満たす．∎

第 2 章

コンパクト作用素

係数体を $\mathbb{C}$，X, Y をノルム空間，K を $X \to Y$ の線型写像 ($\mathscr{D}(K) = X$) とする．以下では X, Y におけるノルムを $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$ と表記し，位相はこれらのノルムにより導入されるものと考える．

定義 2.0.1 (コンパクト作用素). 任意の有界部分集合 $B \subset X$ に対して KB が相対コンパクトとなるとき，つまり KB の閉包 $\overline{KB}$ がコンパクトとなるとき，K をコンパクト作用素 (compact operator) という．

補助定理 2.0.2 (コンパクト作用素となるための十分条件の一つ). $B_1 := \{\, x \in X \mid \|x\|_X < 1 \,\}$ に対して $\overline{KB_1}$ がコンパクトであるなら K はコンパクト作用素となる．

証明. 任意の有界集合 $B \subset X$ に対しては或る λ が取れて $B \subset \lambda B_1$ ($= \{\, \lambda x \mid x \in B_1 \,\}$) となるようにできる．$K(\lambda B_1)$ の閉包がコンパクトとなるなら KB の閉包もコンパクトとなる (コンパクト集合の閉部分集合はコンパクトとなる) から，$\overline{K(\lambda B_1)}$ がコンパクトとなることを示せばよい．先ず

$$\overline{K(\lambda B_1)} = \lambda \overline{KB_1}$$

が成り立つことを示す．$x \in \overline{K(\lambda B_1)}$ に対しては点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset K(\lambda B_1)$ が取れて $\|x_n - x\|_X \longrightarrow 0$ ($n \longrightarrow \infty$) が成り立つ．$y_n := x_n/\lambda$ とおけば K の線型性により $y_n \in KB_1$ となり，$\|y_n - x/\lambda\|_X = \|x_n - x\|_X / \lambda \longrightarrow 0$ ($n \longrightarrow \infty$) となるから $x/\lambda \in \overline{KB_1}$ すなわち $x \in \lambda \overline{KB_1}$ が判る．逆に $x \in \lambda \overline{KB_1}$ に対しては $x/\lambda \in \overline{KB_1}$ となるから，或る点列 $(t_n)_{n=1}^{\infty} \subset KB_1$ が存在して $\|t_n - x/\lambda\|_X \longrightarrow 0$ ($n \longrightarrow \infty$) が成り立つ．$s_n = \lambda t_n$ とおけば K の線型性により $s_n \in K(\lambda B_1)$ となり，$\|s_n - x\|_X = \lambda \|t_n - x/\lambda\|_X \longrightarrow 0$ ($n \longrightarrow \infty$) が成り立つから $x \in \overline{K(\lambda B_1)}$ が判る．以上で $\overline{K(\lambda B_1)} = \lambda \overline{KB_1}$ が示された．$\overline{K(\lambda B_1)}$ を覆う任意の開被覆 $\cup_{\mu \in M} O_\mu$ (M は任意濃度) に対し

$$\overline{KB_1} \subset \bigcup_{\mu \in M} \tfrac{1}{\lambda} O_\mu$$

が成り立ち[*1]，仮定より $\overline{KB_1}$ はコンパクトであるから M から有限個の μ_i ($i = 1, \cdots, n$) を取り出して

$$\overline{KB_1} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \tfrac{1}{\lambda} O_{\mu_i}$$

とできる．従って $\overline{K(\lambda B_1)}$ は $O_{\mu_1} \cup \cdots \cup O_{\mu_n}$ で覆われることになるからコンパクトであると示された．∎

[*1] 開集合 O_μ は $1/\lambda$ でスケールを変えてもまた開集合となる．

補助定理 2.0.3 (コンパクト作用素であることの同値条件).　(1)K がコンパクトであることと，(2)X の任意の有界点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ に対し点列 $(Tx_n)_{n=1}^{\infty}$ が $\overline{(Tx_n)_{n=1}^{\infty}}$ で収束する部分列を含むことは同値である．

証明.

(1)⇒(2)　$B = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ とおけば B は X において有界集合となるから KB は相対コンパクトである．点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ は $\overline{KB}$ の点列でもあるから，コンパクト性の一般論により $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ は点列コンパクト，つまり収束部分列を持つ．

(2)⇒(1)　一般論より任意の有界集合 $B \subset X$ に対して $\overline{TB}$ がコンパクトとなるための同値条件は $\overline{TB}$ が点列コンパクトとなることである．このためには「TB が点列コンパクトなら $\overline{TB}$ も点列コンパクトとなる」—(※) を示せばよい．(※) が示されたとして，(2) を仮定すれば TB の任意の点列は $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset B$(有界) によって $(Tx_n)_{n=1}^{\infty}$ と表現できるから収束する部分列を持ち，(※) の主張と上の一般論により $\overline{TB}$ はコンパクトとなる．これより (※) を示す．$\overline{TB}$ の任意の点列 $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ に対して $\|y_n - z_n\|_Y < 1/n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を満たす $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subset TB$ が存在する．部分列 $(z_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ が $z \in TB$ に収束するなら，任意の $\epsilon > 0$ に対し或る $K_1 \in \mathbb{N}$ が取れて $k \geq K_1$ ならば $\left\|z - z_{n_k}\right\|_Y < \epsilon/2$ を満たす．更に或る $K_2 \in \mathbb{N}$ が取れて $k \geq K_2$ なら $1/n_k < \epsilon/2$ も満たされ，$\forall k \geq \max\{K_1, K_2\}$ に対して

$$\left\|z - y_{n_k}\right\|_Y \leq \left\|z - z_{n_k}\right\|_Y + \left\|z_{n_k} - y_{n_k}\right\|_Y < \epsilon$$

が成り立つ．これで $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ が収束部分列 $(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ を持つと示された．

∎

定義 2.0.4 (コンパクト作用素の空間).　ここで新しく次の表記を導入する:

$$B_c(X, Y) := \{\, K : X \to Y \quad | \quad K{:}\text{コンパクト作用素} \,\}.$$

命題 2.0.5 (コンパクト作用素の空間・作用素の合成がコンパクトとなるための十分条件).

(1)　$B_c(X, Y)$ は $B(X, Y)$ の線型部分空間となる．

(2)　Z をノルム空間とする．$A \in B(X, Y)$ と $B \in B(Y, Z)$ に対して A 又は B がコンパクト作用素なら BA もまたコンパクト作用素となる．

証明.

(1)　$B_1 := \{\, x \in X \quad | \quad \|x\|_X \leq 1 \,\}$ とおけば任意の $K \in B_c(X, Y)$ に対して $\overline{TB_1}$ はコンパクトとなる．従って TB_1 は有界で

$$\infty > \sup_{x \in B_1 \setminus \{0\}} \|Kx\|_Y = \sup_{0 < \|x\| \leq 1} \|Kx\|_Y$$

が成り立ち，$K \in B(X, Y)$ であると示された．次に $B_c(X, Y)$ が線形空間であることを示す．$K_1, K_2 \in B_c(X, Y)$ と $\alpha \in \mathbb{C}$ を任意に取り，前補助定理を使う．補助定理によれば，任意の有界点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ に対して $(K_1 x_n)_{n=1}^{\infty}$ は収束部分列 $(K_1 x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ を持つ．この部分列 $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ に対して $(K_2 x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ もまた収束部分列 $(K_2 x_{n_{k_l}})_{l=1}^{\infty}$ を持ち，$(K_1 x_{n_{k_l}})_{l=1}^{\infty}$ もまた収束列であることに注意すれば $((K_1 + K_2)(x_{n_{k_l}}))_{l=1}^{\infty}$ が収束部分列となるから前補助定理より

$K_1 + K_2$ もコンパクト作用素となる．K_1 に対して，$(\alpha K_1 x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ もまた収束列であるから αK_1 もコンパクト作用素となる．以上で $B_c(X, Y)$ が線形空間であると示された．

(2)

A がコンパクト作用素である場合　補助定理により，X の任意の点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ に対し $(Ax_n)_{n=1}^{\infty}$ は収束部分列 $(Ax_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ を持つ．B の連続性により $(BAx_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ も収束列となるから，再び補助定理を適用して BA がコンパクト作用素であると示される．

B がコンパクト作用素である場合　任意の有界集合 $S \subset X$ に対して，A の有界性と併せて AS は有界となる．従って $\overline{BAS}$ がコンパクトとなり BA はコンパクト作用素であると示された．

■

命題 2.0.6 ($B_c(X, Y)$ は閉).　X をノルム空間，Y を Banach 空間とする．このとき $B_c(X, Y)$ は $B(X, Y)$ の閉部分空間である．

証明.　，$B(X, Y)$ が作用素ノルムについて Banach 空間である．補助定理 2.0.3 により，次のことを示せばよい．

- $A_n \in B_c(X, Y)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ かつ $A_n \to A \in B(X, Y)$ のとき[*2]，任意の有界点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ に対して $(Ax_n)_{n=1}^{\infty}$ が Y で収束する部分列を持つ．

証明には対角線論法を使う．先ず A_1 について，これはコンパクト作用素であるから補助定理 2.0.3 により $(A_1 x_n)_{n=1}^{\infty}$ の或る部分列 $\left(A_1 x_{k(1,j)}\right)_{j=1}^{\infty}$ は収束する．A_2 についても $\left(A_2 x_{k(1,j)}\right)_{j=1}^{\infty}$ から部分列 $\left(A_2 x_{k(2,j)}\right)_{j=1}^{\infty}$ を取って収束するようにできる．以下同様にして，一般の A_n に対しても $\left(A_n x_{k(n-1,j)}\right)_{j=1}^{\infty}$ の部分列 $\left(A_n x_{k(n,j)}\right)_{j=1}^{\infty}$ が収束するように部分列を取ることができる．$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ から適当な部分列 $\left(x_{k(n,j)}\right)_{j=1}^{\infty}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を選び取る操作を繰り返したのであるが，ここで $x_{k_j} := x_{k(j,j)}$ $(j = 1, 2, \cdots)$ として更に新しく点列 $(x_{k_j})_{j=1}^{\infty}$ を用意すれば，全ての A_n $(n = 1, 2, \cdots)$ に対して $\left(A_n x_{k_j}\right)_{j=1}^{\infty}$ は収束列となる．これは $\left(A_n x_{k_j}\right)_{j=1}^{\infty}$ は収束列 $\left(A_n x_{k(n,j)}\right)_{j=1}^{\infty}$ の部分列となっているためである．以上対角線論法により抜き取った $(x_{k_j})_{j=1}^{\infty}$ に対して，次に示すことは $\left(Ax_{k_j}\right)_{j=1}^{\infty}$ が Cauchy 列となることである[*3]．A_n の取り方により任意の $\epsilon > 0$ に対して或る $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ が存在し，$n > N$ なら $\|A_n - A\|_{B(X,Y)} < \epsilon$ となる．また $> N$ のうちから n を一つ取って (どれでもよい)，$\left(A_n x_{k_j}\right)_{j=1}^{\infty}$ は収束列であるから或る $J = J(n, \epsilon) \in \mathbb{N}$ が存在して $j_1, j_2 > J$ なる限り $\left\|A_n x_{k_{j_1}} - A_n x_{k_{j_2}}\right\|_Y < \epsilon$ となる．$M := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_X < \infty$ (有界点列) として以上のことをまとめれば，$j_1, j_2 > J$ なる限り

$$\left\|Ax_{k_{j_1}} - Ax_{k_{j_2}}\right\|_Y \leq M\|A - A_n\|_{B(X,Y)} + \left\|A_n x_{k_{j_1}} - A_n x_{k_{j_2}}\right\|_Y + M\|A - A_n\|_{B(X,Y)} < (2M + 1)\epsilon$$

が成り立つから，$\left(Ax_{k_j}\right)_{j=1}^{\infty}$ が Cauchy 列すなわち収束列であることが示された． ■

[*2] Y が Banach 空間であるから $B(X, Y)$ は作用素ノルムについて Banach 空間である．従ってこの表記でも A の存在は保証されている．

[*3] Y が Banach 空間であるから Cauchy 列であることと収束列であることは同値．

定理 2.0.7 (有界線型作用素がコンパクトであることと共役作用素が有界かつコンパクトであることは同値).
X, Y を Banach 空間とする．$A \in B(X,Y)$ に対して次が成り立つ:

$$A \in B_c(X,Y) \quad \Leftrightarrow \quad A^* \in B_c(Y^*, X^*).$$

証明.

$\Rightarrow$ について　$A \in B(X,Y)$ なら $A^* \in B(Y^*, X^*)$ が成り立っていることに注意しておく．任意に有界点列 $(y_n^*)_{n=1}^\infty \subset Y^*$ を取る．

$$S_1 := \{\, x \in X \quad | \quad 0 < \|x\|_X \leq 1 \,\}$$

とすれば，A がコンパクトであるから $K := \overline{A(S)}$ は Y のコンパクト部分集合である．各 y_n^* に対し

$$f_n : K \ni y \longmapsto y_n^*(y) \in \mathbb{C}$$

として写像を定めれば，関数族 $(f_n)_{n=1}^\infty$ は同等連続かつ K の各点で有界となり (後述)，Ascoli-Arzela の定理の適用される条件を満たす．これにより $(f_n)_{n=1}^\infty$ は sup-norm で相対コンパクトとなり，K 上の連続関数の全体 $C(K)$ における収束部分列 $(f_{n_k})_{k=1}^\infty$ を持つ．これに対し

$$\begin{aligned}
\left\| A^* y_{n_k}^* - A^* y_{n_j}^* \right\|_{X^*} &= \sup_{x \in S_1} \left\langle A^* y_{n_k}^* - A^* y_{n_j}^*, x \right\rangle_{X^*,X} && (\because\ 0 \neq x \in X \text{ の範囲で上限を取っている.}) \\
&= \sup_{x \in S_1} \left\langle y_{n_k}^* - y_{n_j}^*, Ax \right\rangle_{Y^*,Y} && (\because\ \mathscr{D}(A) = X \text{ であることと共役作用素の定義より.}) \\
&= \sup_{y \in A(S_1)} \left\langle y_{n_k}^* - y_{n_j}^*, y \right\rangle_{Y^*,Y} \\
&= \sup_{y \in K} \left\langle y_{n_k}^* - y_{n_j}^*, y \right\rangle_{Y^*,Y} && (\because\ \text{連続性から閉包で上限を取ってもノルムは変わらない.}) \\
&= \left\| f_{n_k} - f_{n_j} \right\|_{C(K)} && (\because\ C(K) \text{ における sup-norm を表す.})
\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし山括弧の表示は双線型形式の意味である．$(f_{n_k})_{k=1}^\infty$ が Cauchy 列であるから $\left(A^* y_{n_k}^*\right)_{k=1}^\infty$ も Cauchy 列となり，X^* の完備性からこれは収束列となる．これで $A^* \in B_c(Y^*, X^*)$ が示された．
最後に，後述としていた関数族 $(f_n)_{n=1}^\infty$ の同等連続性と K の各点での有界性を示す．$(y_n^*)_{n=1}^\infty$ は有界であるから $M := \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| y_n^* \right\|_{Y^*}$ とおいて，

$$|f_n(y_1) - f_n(y_2)| = |y_n^*(y_1) - y_n^*(y_2)| \leq M \|y_1 - y_2\|_Y \quad (\forall y_1, y_2 \in K,\ n = 1, 2, \cdots)$$

により同等連続性が判り，

$$|f_n(y_0)| \leq M \|y_0\|_Y \quad (\forall y_0 \in K,\ n = 1, 2, \cdots)$$

により各点での有界性が判る．

$\Leftarrow$ について

証明 1　$J_X : X \longrightarrow X^{**},\ J_Y : Y \longrightarrow Y^{**}$ を自然な等長埋め込みとする．$\mathscr{D}(A^*) = Y^*$ であるから A^{**} が定義できることに注意しておき，双線型形式を用いれば

$$\langle J_X(u), A^* y^* \rangle_{X^{**},X^*} = \langle A^* y^*, u \rangle_{X^*,X} = \langle y^*, Au \rangle_{Y^*,Y} = \langle J_Y(Au), y^* \rangle_{Y^{**},Y^*} \quad (\forall u \in X = \mathscr{D}(A))$$

が成り立つ．ただし第 1 と第 3 の等号は $u \in X$ と $f \in X^*$ に対し $J_X u(f) = f(u)$ となることにより，そして第 2 の等号は共役作用素の定義による．前段の結果より A^* がコンパクトなら A^{**} もコンパクトとなり，今 X から任意に有界点列 $(x_n)_{n=1}^\infty$ を取れば，等長性から $(J_X x_n)_{n=1}^\infty$ も有界点列となるから或る部分列 $(A^{**} J_X x_{n_k})_{k=1}^\infty$ は Y^{**} において収束列となる．$J_Y A = A^{**} J_X$ の関係より，同じ添数について $(J_Y A x_{n_k})_{k=1}^\infty$ もまた収束列となるから，J_Y の等長性より $(A x_{n_k})_{k=1}^\infty$ が収束列となる．以上で $A \in B_c(X,Y)$ が示された．

証明 2　X の任意の有界点列 $(x_n)_{n=1}^\infty$ に対して

$$\| Ax_n \|_Y = \sup_{\| y^* \|_{Y^*} \leq 1} |y^*(Ax_n)| = \sup_{\| y^* \|_{Y^*} \leq 1} |\langle y^*, Ax_n \rangle_{Y^*,Y}| = \sup_{\| y^* \|_{Y^*} \leq 1} |\langle A^* y^*, x_n \rangle_{X^*,X}| = \sup_{x^* \in V} |\langle x^*, x_n \rangle_{X^*,X}|$$

が成り立つ．ただし $V := \overline{\{ A^* y^* \quad | \quad \| y^* \|_{Y^*} \leq 1 \}}$ としていて，また第 1 の等号は

$$\| y \|_Y = \sup_{\substack{0 \neq g \in Y^* \\ \| g \|_{Y^*} \leq 1}} \frac{|g(y)|}{\| g \|_{Y^*}} = \sup_{\| g \|_{Y^*} = 1} |g(y)| = \sup_{\| g \|_{Y^*} \leq 1} |g(y)|$$

の関係を使った[*4]．A^* がコンパクトだから V が X^* のコンパクト集合となるから $M := \sup_{x^* \in V} \| x^* \|_{X^*}$ とおけば $M < \infty$ である．また $(\| x_n \|_X)_{n=1}^\infty$ は $\mathbb{R}$ において有界列となるから収束する部分列 $\left(\left\| x_{n_k} \right\|_X \right)_{k=1}^\infty$ を取ることができる．この部分列と全ての $x^* \in V$ に対して

$$|x^*(x_{n_k}) - x^*(x_{n_j})| \leq M \left\| x_{n_k} - x_{n_j} \right\|_X \longrightarrow 0 \quad (k, j \longrightarrow \infty)$$

が成り立つから，

$$\left\| Ax_{n_k} - Ax_{n_j} \right\|_Y = \sup_{x^* \in V} \left| \left\langle x^*, x_{n_k} - x_{n_j} \right\rangle_{X^*,X} \right| \longrightarrow 0 \quad (k, j \longrightarrow \infty)$$

が従い $A \in B_c(X,Y)$ が判明する．

■

定理 2.0.8 (反射的 Banach 空間の弱点列コンパクト性).
X が反射的 Banach 空間なら，X の任意の有界点列は弱収束する部分列を含む．

定理 2.0.9 (有限次元空間における有界点列の収束).　X, Y をノルム空間とし $A \in B(X,Y)$ とする．このとき $\operatorname{rank} A = \dim \mathscr{R}(A) < \infty$ ならば $A \in B_c(X,Y)$ となる．[a]

[a] X, Y が Hilbert 空間であるなら逆が成立する．

証明.　A の線型性と有界性から $\mathscr{R}(A) = AX$ は有界な有限次元空間となるから，後の結論までは次の定理による．■

定理 2.0.10 (有限次元空間における有界点列の収束 (局所コンパクト性)).
X を $\mathbb{K}(= \mathbb{R}$ or, $\mathbb{C})$ 上のノルム空間とする．$\dim X < \infty$ ならば X の任意の有界点列は収束部分列を持つ．

[*4] Hahn-Banach の定理の系を参照．始めの sup は $\| g \|_{Y^*} \leq 1$ の範囲で制限しているが，等号成立する g のノルムが 1 であるから問題ない．

証明.　次元数 n による帰納法で証明する．

$n=1$ のとき　X の基底を u_1 として取る．X の任意の有界点列は $\alpha_m \in \mathbb{K}\ (m=1,2,\cdots)$ によって $(\alpha_m u_1)_{m=1}^{\infty}$ と表現できるが，$(\alpha_m u_1)_{m=1}^{\infty}$ が有界だから $(\alpha_m)_{m=1}^{\infty}$ も有界となる．Bolzano-Weierstrass の定理より $\mathbb{K}$ において収束する[*5]部分列 $(\alpha_{m_k})_{k=1}^{\infty}$ が存在し，同じ添数で $(\alpha_{m_k} u_1)_{k=1}^{\infty}$ も収束列となる．

一般の n について　$n=k$ のとき定理の主張が正しいと仮定する．$n=k+1$ のとき X の基底を $u_1,\cdots,u_{k+1}$ として取ると，X から任意に有界列 $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ を取れば各 x_j は

$$x_j = y_j + \alpha_j u_{k+1} \quad (y_j \in \mathrm{L.h.}[\,u_1,\cdots,u_k\,],\ \alpha_j \in \mathbb{K})$$

として一意に表示される．もし $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$ が有界でないとすれば，$\alpha_{j_s} \geq s\ (s=1,2,\cdots)$ となるように部分列を抜き出すことができて，$(x_j)_{j=1}^{\infty}$ の有界性から

$$\left\| u_{k+1} - \frac{1}{\alpha_{j_s}} y_{j_s} \right\|_X \leq \left\| u_{k+1} - \left(\frac{1}{\alpha_{j_s}} x_{j_s} - \frac{1}{\alpha_{j_s}} y_{j_s} \right) \right\|_X + \left\| \frac{1}{\alpha_{j_s}} x_{j_s} \right\|_X = \left\| \frac{1}{\alpha_{j_s}} x_{j_s} \right\|_X \longrightarrow 0 \quad (s \longrightarrow \infty)$$

が成り立つ．有限次元空間は閉であることに注意すれば，u_{k+1} が $\mathrm{L.h.}[\,u_1,\cdots,u_k\,]$ の列 $\left(\frac{1}{\alpha_{j_s}} y_{j_s}\right)_{s=1}^{\infty}$ の極限となっているから $u_{k+1} \in \mathrm{L.h.}[\,u_1,\cdots,u_k\,]$ となり矛盾ができた．背理法により $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$ は $\mathbb{K}$ の有界列と判り，Bolzano-Weierstrass の定理より部分列 $(\alpha_{j(1,t)})_{t=1}^{\infty}$ が収束列となる．帰納法の仮定から $(y_{j(1,t)})_{t=1}^{\infty}$ から収束する部分列 $(y_{j(2,t)})_{t=1}^{\infty}$ を取ることができて，これと同じ添数について $x_{j(2,t)} = y_{j(2,t)} + \alpha_{j(2,t)} u_{k+1}\ (t=1,2,\cdots)$ は収束列となる．

■

定理 2.0.11 (反射的 Banach 空間上のコンパクト作用素は弱収束列を強収束列に写す).
X を反射的 Banach 空間，Y を Banach 空間，そして $A \in B(X,Y)$ とする．このとき次が成り立つ．

(1)　$A \in B_c(X,Y)$ なら A は X の任意の弱収束列を強収束列に写す．

(2)　逆に A が X の任意の弱収束列を強収束列に写すなら $A \in B_c(X,Y)$ である．

証明. (1)　$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ を X の任意の弱収束列とする．$\mathrm{w}\text{-}\lim x_n = x$ として，示すべきことは (i)$(Ax_n)_{n=1}^{\infty}$ の任意の部分列が収束部分列を含み，(ii) 収束先は全て Ax である，の二つである．この二つが示されれば，距離空間における点列の収束の一般論より (1) の主張が従う．(i) について，一般にノルム空間の弱収束列は有界であるから

(2)

[*5] 以降出てくる点列も収束先は X に含まれる．これは有限次元空間が完備であることによる．