

2020年1月28日

ε 項とクラスの導入による具体的で直観的な集合論の構築

目次

1	導入	2
1.1	ε 計算について	2
1.2	クラスについて	4
2	言語	6
2.1	言語 \mathcal{L}_ε	7
2.2	言語の拡張	8
3	推論の公理	11
3.1	\exists の導入	11
3.2	\exists の除去	12
3.3	式の書き換え	13
3.4	\forall の導入	15
3.5	その他の公理	16
4	成り立つこと	17

1 導入

1.1 ε 計算について

- 量化 \exists, \forall を使う証明を命題論理の証明に埋め込むために Hilbert が開始.
- 式 $\varphi(x)$ に対して

$$\varepsilon x \varphi(x)$$

という形のオブジェクトを作り, ε 項と呼ぶ. また命題論理の証明に埋め込む際には, \exists や \forall の付いた式を

$$\begin{aligned}\varphi(x / \varepsilon x \varphi(x)) &\stackrel{\text{def}}{\longleftrightarrow} \exists x \varphi(x), \\ \varphi(x / \varepsilon x \rightarrow x \varphi(x)) &\stackrel{\text{def}}{\longleftrightarrow} \forall x \varphi(x)\end{aligned}$$

によって変換すればよい.

- ただし, 今回 ε 項を導入したのは埋め込むためではなく **集合を「具体化」** するため.
- Hilbert の ε 計算ではなく, ε 項を用いて一種の Henkin 拡大を行う.

- “生の”集合論では集合というオブジェクトが用意されていないため、「存在」は「実在」ではない。たとえば

$$\exists x \forall y (y \notin x)$$

は定理であり「空集合は存在する」と読むが、空集合を“実際に取ってくる”ことは不可能。

- ε 項を使えば、 \exists の公理と空集合の存在定理によって

$$\forall y (y \notin \varepsilon x \forall y (y \notin x))$$

が成り立つ。つまり ε 項は「存在」を「実在」に格上げする(上の ε 項は集合である)。

ε 項のメリット

- 「存在」を「実在」で補強できる。
- 集合を具体的なオブジェクトとして扱える。
- 証明で用いる推論規則は三段論法のみで済む。
- 証明が容易になる場合がある。

1.2 クラスについて

- ブルバキ[]や島内[]でも ε 項を使った集合論を展開.
- ところで, 「 $\varphi(x)$ を満たす集合 x の全体」の意味の

$$\{x \mid \varphi(x)\}$$

というオブジェクトも取り入れたい.

- “生の”集合論では“インフォーマル”な導入.
- ブルバキ[]や島内[]では

$$\{x \mid \varphi(x)\} \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon x \forall u (\varphi(u) \leftrightarrow u \in x)$$

と定めるが, これは欠点がある.

$$\exists x \forall u (\varphi(u) \leftrightarrow u \in x)$$

が成立しない場合は「 $\varphi(x)$ を満たす集合 x の全体」という意味を持たない.

- 式 φ から直接 $\{x \mid \varphi(x)\}$ の形のオブジェクトを作ればよい.

定義 1.1 (クラス). 式 φ に x のみが自由に現れているとき,

$$\varepsilon x \varphi(x), \quad \{x \mid \varphi(x)\}$$

の形のオブジェクトをクラス (**class**) と呼ぶ.

- クラスである ε 項は集合である.
- 集合でないクラスもある. たとえば $\{x \mid x = x\}$ や $\{x \mid x \notin x\}$ は集合ではない.

集合の定義は竹内[]に倣う. 定義により**集合はクラスである**.

定義 1.2 (集合). クラス c が

$$\exists x (c = x)$$

を満たすとき c を**集合 (set)** と呼び, そうでない場合は**真クラス (proper class)** と呼ぶ.

NBG 集合論 クラスの概念を取り入れた NBG 集合論というものがあるが, こちらのクラスは「実在」しない.

2 言語

- クラスという新しいオブジェクトを導入したら，この導入操作が“妥当”であるかどうかの問題になる．

- 妥当性は，“生の”集合論の式 φ に対して

“生の”集合論で φ が証明される \iff 新しい集合論で φ が証明される

が成り立つかどうかで検証する．

- 精密な検証のためには，集合論の言語と証明のルールを明らかにしなくてはならない．
- 言語とは「変項」，「述語記号」，「論理記号」とその他もろもろの記号からなる．そして「(数)式」は言語の記号を用いて作られる．式を作るためには「項」が必要であり，文字は最もよく使われる項である．たとえば

$$s \in t$$

と書けば一つの式が出来上がる．

- まず“生の”集合論の言語 \mathcal{L}_\in を明示する．

2.1 言語 \mathcal{L}_\in

言語 \mathcal{L}_\in

矛盾記号 \perp

論理記号 $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$

量化子 \forall, \exists

述語記号 $=, \in$

変項 x, y, z, \dots など.

また \mathcal{L}_\in の項 (term) と式 (formula) は次の規則で生成する.

\mathcal{L}_\in の項と式

項 変項は項であり, またこれらのみが項である.

式 • \perp は式である.

- 項 τ と項 σ に対して $\tau \in \sigma$ と $\tau = \sigma$ は式である.
- 式 φ に対して $\neg \varphi$ は式である.
- 式 φ と式 ψ に対して $\varphi \vee \psi$ と $\varphi \wedge \psi$ と $\varphi \rightarrow \psi$ はいずれも式である.
- 式 φ と項 x に対して $\exists x \varphi$ と $\forall x \varphi$ は式である.
- これらのみが式である.

2.2 言語の拡張

- クラスを正式に導入するには言語を拡張しなくてはならない.
- 拡張は二段階に分けて行う. 始めに ε 項のために拡張し, 次に $\{x \mid \varphi(x)\}$ の形の項のために拡張する.
- 始めの拡張により得る言語を \mathcal{L}_ε と名付ける.

言語 \mathcal{L}_ε

矛盾記号 \perp

論理記号 $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$

量化子 \forall, \exists

述語記号 $=, \in$

変項 x, y, z, \dots など.

イプシロン ε

\mathcal{L}_ε の項と式の定義

- 変項は項である.
- \perp は式である.
- 項 τ と項 σ に対して $\tau \in \sigma$ と $\tau = \sigma$ は式である.
- 式 φ に対して $\neg \varphi$ は式である.
- 式 φ と式 ψ に対して $\varphi \vee \psi$ と $\varphi \wedge \psi$ と $\varphi \rightarrow \psi$ はいずれも式である.
- 式 φ と変項 x に対して $\exists x \varphi$ と $\forall x \varphi$ は式である.
- 式 φ と変項 x に対して $\varepsilon x \varphi$ は項である.
- これらのみが項と式である.

- \mathcal{L}_\in との大きな違いは項と式の定義が循環している点にある.
- \mathcal{L}_ε の式が \mathcal{L}_ε の項を用いて作られるのは当然ながら, その逆に \mathcal{L}_ε の項もまた \mathcal{L}_ε の式から作られる.
- \mathcal{L}_\in の式は \mathcal{L}_ε の式でもある.

言語 \mathcal{L}

矛盾記号 \perp

論理記号 $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$

量化子 \forall, \exists

述語記号 $=, \in$

変項 x, y, z, \dots など.

補助記号 $\{, |, \}$

\mathcal{L} の項と式の定義

項 • 変項は項である.

- $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項は項である.
- x を変項とし, φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とするとき, $\{x \mid \varphi\}$ なる記号列は項である.
- これらのみが項である.

式 • \perp は式である.

- 項 τ と項 σ に対して $\tau \in \sigma$ と $\tau = \sigma$ は式である.
- 式 φ に対して $\neg \varphi$ は式である.
- 式 φ と式 ψ に対して $\varphi \vee \psi$ と $\varphi \wedge \psi$ と $\varphi \rightarrow \psi$ はいずれも式である.
- 式 φ と変項 x に対して $\exists x \varphi$ と $\forall x \varphi$ は式である.
- これらのみが式である.

3 推論の公理

3.1 \exists の導入

\mathcal{L}_ε の式 φ に x のみが自由に現れているとき, $\varepsilon x\varphi$ を **主要 ε 項** と呼ぶ.

推論公理 3.1 (\exists の導入). φ を \mathcal{L} の式とし, x を変項とし, φ には x のみが自由に現れているとし, τ を主要 ε 項とすると,

$$\varphi(\tau) \rightarrow \exists x\varphi(x).$$

とくに, 任意の ε 項 τ に対して

$$\tau = \tau.$$

だから

$$\exists x (x = \tau)$$

が成り立つ. つまり **ε 項はすべて集合.**

3.2 \exists の除去

推論公理 3.2 (\exists の除去 (NG 版)). φ を \mathcal{L} の式とし, x を変項とし, φ には x のみが自由に現れているとするとき,

$$\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(\varepsilon x \varphi(x)).$$

φ が \mathcal{L}_ε の式でない場合

$$\varepsilon x \varphi(x)$$

なる項は無い.

解決法

\mathcal{L} の式を \mathcal{L}_ε の式に書き換える手順を用意する.

3.3 式の書き換え

\mathcal{L} の式はすべて \mathcal{L}_ε の式に書き換え可能 (構造的帰納法による).

元の式	書き換え後
$a = \{z \mid \psi\}$	$\forall v (v \in a \leftrightarrow \psi(z/v))$
$\{y \mid \varphi\} = b$	$\forall u (\varphi(y/u) \leftrightarrow u \in b)$
$\{y \mid \varphi\} = \{z \mid \psi\}$	$\forall u (\varphi(y/u) \leftrightarrow \psi(z/u))$
$a \in \{z \mid \psi\}$	$\psi(z/a)$
$\{y \mid \varphi\} \in b$	$\exists s (\forall u (\varphi(y/u) \leftrightarrow u \in s) \wedge s \in b)$
$\{y \mid \varphi\} \in \{z \mid \psi\}$	$\exists s (\forall u (\varphi(y/u) \leftrightarrow u \in s) \wedge \psi(z/s))$

ただし上の記号に課している条件は

- a, b は \mathcal{L}_ε の項である.
- φ, ψ は \mathcal{L}_ε の式である.
- φ には y が自由に現れ, ψ には z が自由に現れている.
- u は φ の中で y への代入について自由であり, v は ψ の中で z への代入について自由である.

\mathcal{L} の式 φ を \mathcal{L}_ε の式に書き換えたものを $\hat{\varphi}$ と書く.

推論公理 3.3 (\exists の除去). φ を \mathcal{L} の式とし, x を変項とし, φ には x のみが自由に現れているとすると,

$$\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(\varepsilon x \hat{\varphi}(x)).$$

定理 3.4 (集合は主要 ε 項に等しい). φ を \mathcal{L} の式とし, x を変項とし, φ には x のみが自由に現れているとすると,

$$\exists s (\{x \mid \varphi(x)\} = s) \vdash \{x \mid \varphi(x)\} = \varepsilon s \forall x (\varphi(x) \leftrightarrow x \in s).$$

略証. $\exists s (\{x \mid \varphi(x)\} = s)$ を \mathcal{L}_ε の式に書き直せば

$$\exists s \forall x (\varphi(x) \leftrightarrow x \in s).$$

存在記号の規則より結論が従う. ■

3.4 \forall の導入

推論公理 3.5 (\forall の導入). φ を \mathcal{L} の式とし, x を変項とし, φ には x のみが自由に現れているとすると,

$$\varphi(\varepsilon x \rightarrow \hat{\varphi}(x)) \rightarrow \forall x \varphi(x).$$

推論公理 3.6 (\forall の除去). φ を \mathcal{L} の式とし, x を変項とし, φ には x のみが自由に現れているとし, τ を主要 ε 項とすると,

$$\forall x \varphi(x) \rightarrow \varphi(\tau).$$

主要 ε 項は集合であるから, **量化の亘る範囲は集合の上だけ.**

3.5 その他の公理

推論公理 3.7. φ, ψ, χ を \mathcal{L} の文とするとき,

- $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)).$
- $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi).$
- $\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \perp).$
- $\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \perp).$
- $(\varphi \rightarrow \perp) \rightarrow \neg\varphi.$
- $\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi).$
- $\psi \rightarrow (\varphi \vee \psi).$
- $(\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi)).$
- $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi)).$
- $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi.$
- $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi.$
- $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi.$

4 成り立つこと

次の定理は他の公理および構造的帰納法と併せて示される.

定理 4.1 (書き換えの同値性). φ を \mathcal{L} の文するとき,

$$\varphi \leftrightarrow \hat{\varphi}.$$

証明が容易になる例

φ を x のみ自由に現れる式とし, y を φ の中で x への代入について自由である変項とするとき,

$$\vdash \exists x \varphi(x) \rightarrow \exists y \varphi(y).$$

略証. 公理と演繹定理より

$$\exists x \varphi(x) \vdash \varphi(\varepsilon x \varphi(x))$$

となり, また公理より

$$\vdash \varphi(\varepsilon x \varphi(x)) \rightarrow \exists y \varphi(y)$$

も成り立つので, 三段論法より

$$\exists x \varphi(x) \vdash \exists y \varphi(y)$$

が出る.



$\exists x\varphi(x) \rightarrow \exists y\varphi(y)$ を**HK**で証明すると、
公理より

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \varphi(x) \rightarrow \exists y\varphi(y)$$

が成り立つので、汎化によって

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \forall x (\varphi(x) \rightarrow \exists y\varphi(y))$$

となり、公理

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \forall x (\varphi(x) \rightarrow \exists y\varphi(y)) \rightarrow (\exists x\varphi(x) \rightarrow \exists y\varphi(y))$$

との三段論法より

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \exists x\varphi(x) \rightarrow \exists y\varphi(y)$$

が出る.

証明が容易になる例

φ を x のみ自由に現れる式とし, y を φ の中で x への代入について自由である変項とするとき,

$$\vdash \exists y (\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(y)).$$

略証. 公理より

$$\vdash \exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(\varepsilon x \varphi(x))$$

が成り立つので, 公理より

$$\vdash \exists y (\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(y))$$

となる.



$\exists y (\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(y))$ を **HK** で証明すると

$$\exists x \varphi(x) \rightarrow \exists y \varphi(y)$$

と

$$\begin{aligned} (\exists x \varphi(x) \rightarrow \exists y \varphi(y)) &\rightarrow (\neg \exists x \varphi(x) \vee \exists y \varphi(y)), \\ &\rightarrow \exists y (\neg \exists x \varphi(x) \vee \varphi(y)), \\ &\rightarrow \exists y (\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(y)) \end{aligned}$$

から示される.