確率微分方程式講義録

基礎工学研究科システム創成専攻修士 1 年
学籍番号 29C17095
百合川尚学

2018 年 2 月 2 日

目次

第 1 章

関数解析

係数体を $\mathbb{R}$，測度空間を $(X, \mathcal{F}, \mu)$ とする．

1.1　Hölder の不等式と Minkowski の不等式

$\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$-可測関数 f に対して

$$\|f\|_{\mathscr{L}^p} \coloneqq \begin{cases} \inf\{\, r \in \mathbb{R} \;;\quad |f(x)| \leq r \quad \mu\text{-a.e.}x \in X \,\} & (p = \infty) \\ \left(\int_X |f(x)|^p \, \mu(dx)\right)^{\frac{1}{p}} & (0 < p < \infty) \end{cases}$$

により $\|\cdot\|_{\mathscr{L}^p}$ を定める．以後は $\|\cdot\|_{\mathscr{L}^p(\Omega,\mathcal{F},\mu)}$ 或は $\|\cdot\|_{\mathscr{L}^p(\mu)}$ と表記することもある．

$$\mathscr{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu) \coloneqq \{\, f : X \to \mathbb{R} \;;\quad f: \text{可測 } \mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R}),\ \|f\|_{\mathscr{L}^p} < \infty \,\} \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

として空間 $\mathscr{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ を定義し，これも以後は $\mathscr{L}^p(\mu), \mathscr{L}^p(\mathcal{F}, \mu), \mathscr{L}^p(\mathcal{F})$ などと略記することもある．以下に示す不等式により $\mathscr{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ は $\mathbb{R}$ 上の線形空間となる．

補題 1.1.1.　任意の $f \in \mathscr{L}^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ に対して次が成り立つ:

$$|f(x)| \leq \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} \quad \mu\text{-a.e.}x \in X.$$

証明.　$\mathscr{L}^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ の定義より任意の実数 $\alpha > \|f\|_{\mathscr{L}^\infty}$ に対して

$$\mu(\{\, x \in X \;;\quad |f(x)| > \alpha \,\}) = 0$$

が成り立つから，

$$\{\, x \in X \;;\quad |f(x)| > \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} \,\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\, x \in X \;;\quad |f(x)| > \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} + 1/n \,\}$$

の右辺は μ-零集合であり主張が従う．　■

定理 1.1.2 (Hölder の不等式). $1 \leq p, q \leq \infty$，$p + q = pq$ ($p = \infty$ なら $q = 1$) とする．このとき任意の $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$-可測関数 f, g に対して次が成り立つ:

$$\int_X |f(x)g(x)|\,\mu(dx) \leq \|f\|_{\mathscr{L}^p}\,\|g\|_{\mathscr{L}^q}. \tag{1.1}$$

証明. $\|f\|_{\mathscr{L}^p} = \infty$ 又は $\|g\|_{\mathscr{L}^q} = \infty$ のとき不等式 (1.1) は成り立つから，以下では $\|f\|_{\mathscr{L}^p} < \infty$ かつ $\|g\|_{\mathscr{L}^q} < \infty$ の場合を考える．

$p = \infty$, $q = 1$ の場合　補題 1.1.1 により或る零集合 A が存在して

$$|f(x)g(x)| \leq \|f\|_{\mathscr{L}^\infty}\,|g(x)| \quad (\forall x \in X \backslash A).$$

が成り立つから，

$$\begin{aligned}\int_X |f(x)g(x)|\,\mu(dx) &= \int_{X\backslash A} |f(x)g(x)|\,\mu(dx)\\ &\leq \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} \int_{X\backslash A} |g(x)|\,\mu(dx) = \|f\|_{\mathscr{L}^\infty}\,\|g\|_{\mathscr{L}^1}\end{aligned}$$

が従い不等式 (1.1) を得る．

$1 < p, q < \infty$ の場合　$\|f\|_{\mathscr{L}^p} = 0$ のとき

$$B \coloneqq \{\, x \in X \ ; \quad |f(x)| > 0 \,\}$$

は零集合であるから，

$$\int_X |f(x)g(x)|\,\mu(dx) = \int_{X\backslash B} |f(x)g(x)|\,\mu(dx) = 0$$

となり (1.1) を得る．$\|g\|_{\mathscr{L}^q} = 0$ の場合も同じである．次に $0 < \|f\|_{\mathscr{L}^p}, \|g\|_{\mathscr{L}^q} < \infty$ の場合を示す．実数値対数関数 $(0, \infty) \ni t \longmapsto -\log t$ は凸であるから，$1/p + 1/q = 1$ に対して

$$-\log\left(\frac{s}{p} + \frac{t}{q}\right) \leq \frac{1}{p}(-\log s) + \frac{1}{q}(-\log t) \quad (\forall s, t > 0)$$

を満たし

$$s^{\frac{1}{p}} t^{\frac{1}{q}} \leq \frac{s}{p} + \frac{t}{q} \quad (\forall s, t > 0)$$

が従う．ここで

$$F(x) \coloneqq \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_{\mathscr{L}^p}^p}, \quad G(x) \coloneqq \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_{\mathscr{L}^q}^q} \quad (\forall x \in X)$$

により可積分関数 F, G を定めれば，

$$F(x)^{\frac{1}{p}} G(x)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}F(x) + \frac{1}{q}G(x) \quad (\forall x \in X)$$

が成り立つから

$$
\begin{aligned}
\int_X \frac{|f(x)|}{\|f\|_{\mathscr{L}^p}} \frac{|g(x)|}{\|g\|_{\mathscr{L}^q}}\, \mu(dx) &= \int_X F(x)^{\frac{1}{p}} G(x)^{\frac{1}{q}}\, \mu(dx) \\
&\leq \frac{1}{p} \int_X F(x)\, \mu(dx) + \frac{1}{q} \int_X G(x)\, \mu(dx) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1
\end{aligned}
$$

が従い，$\|f\|_{\mathscr{L}^p} \|g\|_{\mathscr{L}^q}$ を移項して不等式 (1.1) を得る． ∎

定理 1.1.3 (Minkowski の不等式). $1 \leq p \leq \infty$ とする．このとき任意の $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$-可測関数 f, g に対して次が成り立つ:

$$
\|f + g\|_{\mathscr{L}^p} \leq \|f\|_{\mathscr{L}^p} + \|g\|_{\mathscr{L}^p}. \tag{1.2}
$$

証明. $\|f + g\|_{\mathscr{L}^p} = 0$, $\|f\|_{\mathscr{L}^p} = \infty$, $\|g\|_{\mathscr{L}^p} = \infty$ のいずれかが満たされているとき不等式 (1.2) は成り立つから，以下では $\|f + g\|_{\mathscr{L}^p} > 0$, $\|f\|_{\mathscr{L}^p} < \infty$, $\|g\|_{\mathscr{L}^p} < \infty$ の場合を考える．

$p = \infty$ の場合　補題 1.1.1 により

$$
C := \{\, x \in X \ ; \quad |f(x)| > \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} \,\} \cup \{\, x \in X \ ; \quad |g(x)| > \|g\|_{\mathscr{L}^\infty} \,\}
$$

は零集合であり，

$$
|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} + \|g\|_{\mathscr{L}^\infty} \quad (\forall x \in X \backslash C)
$$

が成り立つ．$\|\cdot\|_{\mathscr{L}^\infty}$ の定義より不等式 (1.2) を得る．

$p = 1$ の場合

$$
|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \quad (\forall x \in X)
$$

の両辺を積分して不等式 (1.2) を得る．

$1 < p < \infty$ の場合　$p + q = pq$ が成り立つように $q > 1$ を取る．各点 $x \in X$ で

$$
|f(x) + g(x)|^p = |f(x) + g(x)||f(x) + g(x)|^{p-1} \leq |f(x)||f(x) + g(x)|^{p-1} + |g(x)||f(x) + g(x)|^{p-1}
$$

が成り立つから，両辺を積分すれば Hölder の不等式により

$$
\begin{aligned}
\|f + g\|_{\mathscr{L}^p}^p &= \int_X |f(x) + g(x)|^p\, \mu(dx) \\
&\leq \int_X |f(x)||f(x) + g(x)|^{p-1}\, \mu(dx) + \int_X |g(x)||f(x) + g(x)|^{p-1}\, \mu(dx) \\
&\leq \|f\|_{\mathscr{L}^p} \|f + g\|_{\mathscr{L}^p}^{p-1} + \|g\|_{\mathscr{L}^p} \|f + g\|_{\mathscr{L}^p}^{p-1}
\end{aligned} \tag{1.3}
$$

が得られる．また $|f|^p, |g|^p$ の可積性と

$$
|f(x) + g(x)|^p \leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \leq 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p) \quad (\forall x \in X)
$$

により $\|f + g\|_{\mathscr{L}^p} < \infty$ が従うから，(1.3) の両辺を $\|f + g\|_{\mathscr{L}^p}^{p-1}$ で割って (1.2) を得る． ∎

以上の結果より $\mathscr{L}^p(X,\mathcal{F},\mu)$ は線形空間となる．実際線型演算は

$$(f+g)(x) \coloneqq f(x)+g(x), \quad (\alpha f)(x) \coloneqq \alpha f(x), \quad (\forall x \in X,\ f,g \in \mathscr{L}^p(X,\mathcal{F},\mu),\ \alpha \in \mathbb{C})$$

により定義され，Minkowski の不等式により加法について閉じている．

補題 1.1.4. $1 \leq p \leq \infty$ に対し，$\|\cdot\|_{\mathscr{L}^p}$ は線形空間 $\mathscr{L}^p(X,\mathcal{F},\mu)$ のセミノルムである．

証明.

半正値性 $\|\cdot\|_{\mathscr{L}^p}$ が正値であることは定義による．しかし $\|f\|_{\mathscr{L}^p}=0$ であっても f が零写像であるとは限らず，実際 μ-零集合 E を取り

$$f(x) \coloneqq \begin{cases} 1 & (x \in E) \\ 0 & (x \in \Omega \backslash E) \end{cases}$$

により f を定めれば $\|f\|_{\mathscr{L}^p}=0$ が成り立つ．

同次性 任意に $\alpha \in \mathbb{R},\ f \in \mathscr{L}^p(X,\mathcal{F},\mu)$ を取る．$1 \leq p < \infty$ の場合は

$$\left(\int_X |\alpha f(x)|^p\,\mu(dx)\right)^{1/p} = \left(|\alpha|^p \int_X |f(x)|^p\,\mu(dx)\right)^{1/p} = |\alpha| \left(\int_X |f(x)|^p\,\mu(dx)\right)^{1/p}$$

により，$p=\infty$ の場合は

$$\inf\{\, r \in \mathbb{R}\ ;\quad |\alpha f(x)| \leq r \quad \mu\text{-a.e.}x \in X \,\} = |\alpha| \inf\{\, r \in \mathbb{R}\ ;\quad |f(x)| \leq r \quad \mu\text{-a.e.}x \in X \,\}$$

により $\|\alpha f\|_{\mathscr{L}^p} = |\alpha| \|f\|_{\mathscr{L}^p}$ が成り立つ．

三角不等式 Minkowski の不等式による． ∎

1.2 空間 L^p

可測関数全体の商集合 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(R)$-可測関数全体の集合を

$$\mathscr{L}^0(X,\mathcal{F},\mu) \coloneqq \{\, f : X \to \mathbb{R}\ ;\quad f：\text{可測 } \mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \,\}$$

とおく．二元 $f,g \in \mathscr{L}^0(X,\mathcal{F},\mu)$ に対し

$$f \sim g \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad f=g \quad \mu\text{-a.e.}$$

により定める $\sim$ は同値関係であり，$\sim$ による $\mathscr{L}^0(X,\mathcal{F},\mu)$ の商集合を $\mathrm{L}^0(X,\mathcal{F},\mu)$ と表す．

商集合における算法 $\mathrm{L}^0(X,\mathcal{F},\mu)$ の元である関数類 (同値類) を $[f]$ (f は関数類の代表) と表す．$\mathrm{L}^0(X,\mathcal{F},\mu)$ における線型演算を次で定義すれば，$\mathrm{L}^0(X,\mathcal{F},\mu)$ は $\mathbb{R}$ 上の線形空間となる:

$$\begin{aligned} &[f]+[g] \coloneqq [f+g] && (\forall [f],[g] \in \mathrm{L}^0(X,\mathcal{F},\mu)), \\ &\alpha[f] \coloneqq [\alpha f] && (\forall [f] \in \mathrm{L}^0(X,\mathcal{F},\mu),\ \alpha \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

この演算は well-defined である．実際任意の $f' \in [f]$ と $g' \in [g]$ に対して

$$\{f+g \neq f'+g'\} \subset \{f \neq f'\} \cup \{g \neq g'\}, \quad \{\alpha f \neq \alpha f'\} = \{f \neq f'\}$$

が成り立ち[*1]，どちらの右辺も μ-零集合であるから $[f+g]=[f'+g']$, $[\alpha f']=[\alpha f]$ が従う．更に乗法を次により定義すれば $\mathrm{L}^0(X,\mathcal{F},\mu)$ は可換環にもなる:

$$[f][g] \coloneqq [fg] \quad (\forall [f],[g] \in \mathrm{L}^0(X,\mathcal{F},\mu)).$$

$\mathrm{L}^0(X,\mathcal{F},\mu)$ における零元は零写像の関数類でありこれを $[0]$ と表す．また単位元は恒等的に 1 を取る関数の関数類でありこれを $[1]$ と表す．また減法を

$$[f]-[g] \coloneqq [f]+(-[g]) = [f]+[-g] = [f-g]$$

により定める．

関数類の順序　$[f],[g] \in \mathrm{L}^0(X,\mathcal{F},\mu)$ に対して次の関係 $<$ $(>)$ を定める:

$$[f]<[g]\ ([g]>[f]) \quad \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} \quad f<g \quad \mu\text{-a.s.} \tag{1.4}$$

この定義は well-defined である．実際任意の $f' \in [f], g' \in [g]$ に対して

$$\{f' \geq g'\} \subset \{f \neq f'\} \cup \{f \geq g\} \cup \{g \neq g'\}$$

の右辺は零集合であるから

$$[f]<[g] \Leftrightarrow [f']<[g']$$

が従う．$<$ または $=$ であることを $\leq$ と表し，同様に $\geq$ を定める．この関係 $\leq$ は次に示す規則を満たし，$\mathrm{L}^0(X,\mathcal{F},\mu)$ における順序となる: 任意の $[f],[g],[h] \in \mathrm{L}^0(X,\mathcal{F},\mu)$ に対し，

- $[f] \leq [f]$ が成り立つ．
- $[f] \leq [g]$ かつ $[g] \leq [f]$ ならば $[f]=[g]$ が成り立つ．
- $[f] \leq [g]$, $[g] \leq [h]$ ならば $[f] \leq [h]$ が成り立つ．

関数類の冪・絶対値　$[f] \in \mathrm{L}^0(X,\mathcal{F},\mu)$ が $[f] \geq [0]$ を満たすとき，$p \geq 0$ に対し $[f]^p \coloneqq [f^p]$ により冪乗を定める．また $|[f]| \coloneqq [|f|]$ として絶対値 $|\cdot|$ を定める．

補題 1.2.1 (商空間におけるノルムの定義).

$$\|[f]\|_{\mathrm{L}^p} \coloneqq \|f\|_{\mathscr{L}^p} \quad (f \in \mathscr{L}^p(X,\mathcal{F},\mu),\ 1 \leq p \leq \infty)$$

により定める $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^p} : \mathrm{L}^0(X,\mathcal{F},\mu) \to \mathbb{R}$ は関数類の代表に依らずに値が確定する．そして

$$\mathrm{L}^p(X,\mathcal{F},\mu) \coloneqq \left\{ [f] \in \mathrm{L}^0(X,\mathcal{F},\mu) \ ; \quad \|[f]\|_{\mathrm{L}^p} < \infty \right\} \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

として定める空間は $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^p}$ をノルムとしてノルム空間となる．

証明.

第一段　任意の $f,g \in \mathscr{L}^p(X,\mathcal{F},\mu)$ に対し，$[f]=[g]$ なら $\|f\|_{\mathscr{L}^p}^p = \|g\|_{\mathscr{L}^p}^p$ となることを示す．

$$A \coloneqq \{\, x \in X \ ; \quad f(x) \neq g(x) \,\}$$

として零集合を定める．

[*1] $\{f \neq g\} \coloneqq \{\, x \in X \ ; \quad f(x) \neq g(x) \,\}$.

$p = \infty$ **の場合**　A^c の上では $f(x) = g(x)$ が満たされているから

$$
\begin{aligned}
&\{\, x \in X \;;\quad |g(x)| > \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} \,\} \\
&\qquad = A \cap \{\, x \in X \;;\quad |g(x)| > \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} \,\} + A^c \cap \{\, x \in X \;;\quad |f(x)| > \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} \,\}
\end{aligned}
$$

が成り立ち，右辺はどちらも零集合であるから $\|g\|_{\mathscr{L}^\infty} \leq \|f\|_{\mathscr{L}^\infty}$ が従う．f, g を入れ替えれば $\|f\|_{\mathscr{L}^\infty} \leq \|g\|_{\mathscr{L}^\infty}$ も示されて $\|g\|_{\mathscr{L}^\infty} = \|f\|_{\mathscr{L}^\infty}$ を得る．

$1 \leq p < \infty$ **の場合**

$$
\|f\|^p_{\mathscr{L}^p} = \int_{X \setminus A} |f(x)|^p \, \mu(dx) = \int_{X \setminus A} |g(x)|^p \, \mu(dx) = \|g\|^p_{\mathscr{L}^p}
$$

が成り立つ．

第二段　$\|\cdot\|_{\mathrm{L}^p}$ がノルムの公理を満たすことを示す．任意に $[f], [g] \in \mathrm{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ を取る．$\|[f]\|_{\mathrm{L}^p}$ が正値であることは $\|\cdot\|_{\mathscr{L}^p}$ が正値であることから従う．また $\mu(f \neq 0) > 0 \Rightarrow \|f\|_{\mathscr{L}^p} > 0$ の対偶により $\|[f]\|_{\mathrm{L}^p} = 0 \Rightarrow [f] = [0]$ が成り立ち，逆に $[f] = [0]$ ならば $\|[f]\|_{\mathrm{L}^p} = \|0\|_{\mathscr{L}^p} = 0$ が成り立つ．更に $\|\cdot\|_{\mathscr{L}^p}$ の同次性と Minkowski の不等式より

$$
\begin{aligned}
&\|\alpha[f]\|_{\mathrm{L}^p} = \|\alpha f\|_{\mathscr{L}^p} = |\alpha| \|f\|_{\mathscr{L}^p} = |\alpha| \|[f]\|_{\mathrm{L}^p}, \\
&\|[f] + [g]\|_{\mathrm{L}^p} = \|f + g\|_{\mathscr{L}^p} \leq \|f\|_{\mathscr{L}^p} + \|g\|_{\mathscr{L}^p} = \|[f]\|_{\mathrm{L}^p} + \|[g]\|_{\mathrm{L}^p}
\end{aligned}
$$

が得られ，$\|\cdot\|_{\mathrm{L}^p}$ の同次性と劣加法性が導かれる．■

命題 1.2.2 (L^p の完備性).　ノルム空間 $\mathrm{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ は Banach 空間である．

証明.　任意に Cauchy 列 $[f_n] \in \mathrm{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を取れば，或る $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$
\|[f_n] - [f_m]\|_{\mathrm{L}^p} < \frac{1}{2} \quad (\forall n > m \geq N_1)
$$

を満たす．ここで $m > N_1$ を一つ選び n_1 とおく．同様に $N_2 > N_1$ を満たす $N_2 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$
\|[f_n] - [f_m]\|_{\mathrm{L}^p} < \frac{1}{2^2} \quad (\forall n > m \geq N_2)
$$

を満たすから，$m > N_2$ を一つ選び n_2 とおけば

$$
\left\| [f_{n_1}] - [f_{n_2}] \right\|_{\mathrm{L}^p} < \frac{1}{2}
$$

が成り立つ．同様の操作を繰り返して

$$
\left\| [f_{n_k}] - [f_{n_{k+1}}] \right\|_{\mathrm{L}^p} < \frac{1}{2^k} \quad (n_k < n_{k+1},\ k = 1, 2, 3, \cdots) \tag{1.5}
$$

を満たす部分添数列 $(n_k)_{k=1}^\infty$ を構成する．

$p = \infty$ **の場合**　$[f_{n_k}]$ の代表 f_{n_k} $(k = 1, 2, \cdots)$ に対して

$$
\begin{aligned}
A_k &:= \left\{ x \in X \;;\quad \left| f_{n_k}(x) \right| > \left\| f_{n_k} \right\|_{\mathscr{L}^\infty} \right\}, \\
A^k &:= \left\{ x \in X \;;\quad \left| f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x) \right| > \left\| f_{n_k} - f_{n_{k+1}} \right\|_{\mathscr{L}^\infty} \right\}
\end{aligned}
$$

とおけば，補題 1.1.1 より $\mu(A_k) = \mu(A^k) = 0\ (k = 1, 2, \cdots)$ が成り立つ．

$$A_\circ := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \quad A^\circ := \bigcup_{k=1}^{\infty} A^k, \quad A := A_\circ \cup A^\circ$$

として μ-零集合 A を定めて

$$\hat{f}_{n_k}(x) := \begin{cases} f_{n_k}(x) & (x \in X \backslash A) \\ 0 & (x \in A) \end{cases} \quad (\forall x \in X,\ k = 1, 2, \cdots)$$

により $\left(\hat{f}_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ を構成すれば，各 $\hat{f}_{n_k}$ は $\left[\hat{f}_{n_k}\right] = [f_{n_k}]$ を満たす有界可測関数であり，(1.5) より

$$\sup_{x \in X} \left| \hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}_{n_{k+1}}(x) \right| \leq \left\| \hat{f}_{n_k} - \hat{f}_{n_{k+1}} \right\|_{\mathscr{L}^\infty} < \frac{1}{2^k} \quad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

が成り立つ．従って各点 $x \in X$ に対し $\left(\hat{f}_{n_k}(x)\right)_{k=1}^{\infty}$ は $\mathbb{R}$ の Cauchy 列をなし[*2] 収束する．

$$\hat{f}(x) := \lim_{k \to \infty} \hat{f}_{n_k}(x) \quad (\forall x \in X)$$

として $\hat{f}$ を定めれば，$\hat{f}$ は可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であり，且つ任意に $k \in \mathbb{N}$ を取れば

$$\sup_{x \in X} |\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}(x)| \leq 1/2^{k-1} \tag{1.6}$$

を満たす．実際或る $y \in X$ で $\alpha := |\hat{f}_{n_k}(y) - \hat{f}(y)| > 1/2^{k-1}$ が成り立つと仮定すれば，

$$\left| \hat{f}_{n_k}(y) - \hat{f}_{n_\ell}(y) \right| \leq \sum_{j=k}^{\ell-1} \sup_{x \in X} \left| \hat{f}_{n_j}(x) - \hat{f}_{n_{j+1}}(x) \right| < \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{k-1}} \quad (\forall \ell > k)$$

より

$$0 < \alpha - \frac{1}{2^{k-1}} < \left| \hat{f}_{n_k}(y) - \hat{f}(y) \right| - \left| \hat{f}_{n_k}(y) - \hat{f}_{n_\ell}(y) \right| \leq \left| \hat{f}(y) - \hat{f}_{n_\ell}(y) \right| \quad (\forall \ell > k)$$

が従い各点収束に反する．不等式 (1.6) により

$$\sup_{x \in X} \left| \hat{f}(x) \right| < \sup_{x \in X} \left| \hat{f}(x) - \hat{f}_{n_k}(x) \right| + \sup_{x \in X} \left| \hat{f}_{n_k}(x) \right| \leq \frac{1}{2^{k-1}} + \left\| \hat{f}_{n_k} \right\|_{\mathscr{L}^\infty}$$

が成り立つから $\left[\hat{f}\right] \in \mathrm{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ が従い，

$$\left\| [f_{n_k}] - \left[\hat{f}\right] \right\|_{\mathrm{L}^\infty} = \left\| \left[\hat{f}_{n_k}\right] - \left[\hat{f}\right] \right\|_{\mathrm{L}^\infty} \leq \sup_{x \in X} |\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}(x)| \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty)$$

により部分列 $\left([f_{n_k}]\right)_{k=1}^{\infty}$ が $\left[\hat{f}\right]$ に収束するから元の Cauchy 列も $\left[\hat{f}\right]$ に収束する．

$1 \leq p < \infty$ の場合　$[f_{n_k}]$ の代表 $f_{n_k}\ (k = 1, 2, \cdots)$ は

$$f_{n_k}(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{k} \left(f_{n_j}(x) - f_{n_{j-1}}(x) \right) \quad (\forall x \in X)$$

[*2] 任意の $\epsilon > 0$ に対し $1/2^N < \epsilon$ を満たす $N \in \mathbb{N}$ を取れば，全ての $\ell > k > N$ に対して

$$\left| \hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}_{n_\ell}(x) \right| \leq \sum_{j=k}^{\ell-1} \left| \hat{f}_{n_j}(x) - \hat{f}_{n_{j+1}}(x) \right| < \sum_{k>N} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^N} < \epsilon \quad (\forall x \in X)$$

が成り立つ．

を満たし，これに対して

$$g_k(x) := \left|f_{n_1}(x)\right| + \sum_{j=1}^{k} \left|f_{n_j}(x) - f_{n_{j-1}}(x)\right| \quad (\forall x \in X,\ k = 1, 2, \cdots)$$

により単調非減少な可測関数列 $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ を定めれば，Minkowski の不等式と (1.5) により

$$\|\, g_k \,\|_{\mathscr{L}^p} \leq \left\|\, f_{n_1} \,\right\|_{\mathscr{L}^p} + \sum_{j=1}^{k} \left\|\, f_{n_j} - f_{n_{j-1}} \,\right\|_{\mathscr{L}^p} < \left\|\, f_{n_1} \,\right\|_{\mathscr{L}^p} + 1 < \infty \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

が成り立つ．ここで

$$B_N := \bigcap_{k=1}^{\infty} \{\, x \in X \ ; \quad g_k(x) \leq N \,\}, \quad B := \bigcup_{N=1}^{\infty} B_N$$

とおけば $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ は B 上で各点収束し $X \backslash B$ 上では発散するが，$X \backslash B$ は零集合である．実際

$$\begin{aligned} \int_X |g_k(x)|^p \,\mu(dx) &= \int_B |g_k(x)|^p \,\mu(dx) + \int_{X \backslash B} |g_k(x)|^p \,\mu(dx) \\ &\leq \left(\left\|\, f_{n_1} \,\right\|_{\mathscr{L}^p} + 1 \right)^p \quad (k = 1, 2, \cdots) \end{aligned}$$

が満たされているから，単調収束定理より

$$\int_B \lim_{k \to \infty} |g_k(x)|^p \,\mu(dx) + \int_{X \backslash B} \lim_{k \to \infty} |g_k(x)|^p \,\mu(dx) \leq \left(\left\|\, f_{n_1} \,\right\|_{\mathscr{L}^p} + 1 \right)^p$$

が成り立ち $\mu(X \backslash B) = 0$ が従う．

$$g(x) := \begin{cases} \lim\limits_{k \to \infty} g_k(x) & (x \in B) \\ 0 & (x \in X \backslash B) \end{cases}, \quad f(x) := \begin{cases} \lim\limits_{k \to \infty} f_{n_k}(x) & (x \in B) \\ 0 & (x \in X \backslash B) \end{cases}$$

として g, f を定義すれば g, f は共に $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$-可測であり，また $|f(x)| \leq g(x)$ $(\forall x \in X)$ と g^p の可積分性により $[f] \in \mathrm{L}^p\,(X, \mathcal{F}, \mu)$ が成り立つ．今 $\left|f_{n_k}(x) - f(x)\right|^p \leq 2^p g(x)^p$ $(\forall x \in B,\ k = 1, 2, \cdots)$ が満たされているから，Lebesgue の収束定理により

$$\lim_{k \to \infty} \left\|\, [f_{n_k}] - [f] \,\right\|_{\mathrm{L}^p}^p = \lim_{k \to \infty} \int_X \left|f_{n_k}(x) - f(x)\right|^p \,\mu(dx) = 0$$

が得られ，部分列の収束により元の Cauchy 列も $[f]$ に収束する． ■

1.3 補助定理

以後の準備として，線型作用素の拡張定理，射影定理，kolmos の補題を証明する．

定理 1.3.1 (線型作用素の拡張). $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ を $\mathbb{K}$ 上のノルム空間とし，それぞれにノルム位相を導入する．Y が Banach 空間であるなら，X の稠密な部分空間 X_0 を定義域とする任意の有界線型作用素 $T : X \to Y$ に対し，T の拡張となる線型作用素で，作用素ノルムを変えず，かつ定義域を X 全体とするものが一意に存在する．

証明．　作用素ノルムを $\|\cdot\|$ と表記する．X_0 が X で稠密であるから，任意の $x \in X$ に対して $\|x_n - x\|_X \longrightarrow 0\ (k \longrightarrow \infty)$ を満たす $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ が存在する．T の有界性から

$$\|Tx_m - Tx_n\|_Y \leq \|T\|\,\|x_m - x_n\|_X \quad (\forall n, m \in \mathbb{N})$$

が成り立ち，$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列であることと Y の完備性から $(Tx_n)_{n=1}^{\infty}$ は或る $y \in Y$ に収束する．y は $x \in X$ に対して一意である．実際 x への別の収束列 $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ を取り $Tz_n \longrightarrow u \in Y$ とすれば，

$$\begin{aligned}
\|y - u\|_Y &= \|y - Tx_n + Tx_n - Tz_m + Tz_m - u\|_Y \\
&\leq \|y - Tx_n\|_Y + \|Tx_n - Tz_m\|_Y + \|Tz_m - u\|_Y \\
&\leq \|y - Tx_n\|_Y + \|T\|\,(\|x_n - x\|_X + \|x - z_m\|_X) + \|Tz_m - u\|_Y \longrightarrow 0 \quad (n, m \longrightarrow \infty)
\end{aligned}$$

より $y = u$ が従う．x に y を対応させる関係を $\tilde{T}$ と表せば，これは有界かつ線型である．

線型性　任意に $x,\ z \in X,\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{K}$ と x, z への収束列 $(x_n)_{n=1}^{\infty},\ (z_n)_{n=1}^{\infty} \subset X_0$ を取れば

$$\begin{aligned}
\left\|\tilde{T}(\alpha x + \beta z) - \alpha\tilde{T}x - \beta\tilde{T}z\right\|_Y &= \left\|\tilde{T}(\alpha x + \beta z) - T(\alpha x_n + \beta z_n) + \alpha T x_n + \beta T z_n - \alpha\tilde{T}x - \beta\tilde{T}z\right\|_Y \\
&\leq \left\|\tilde{T}(\alpha x + \beta z) - T(\alpha x_n + \beta z_n)\right\|_Y + |\alpha|\left\|Tx_n - \tilde{T}x\right\|_Y + |\beta|\left\|Tz_n - \tilde{T}z\right\|_Y \\
&\longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow +\infty)
\end{aligned}$$

が成り立つ．

有界性　任意に $x \in X$ と x への収束列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ を取る．任意の $\epsilon > 0$ に対し或る $K \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\left\|\tilde{T}x\right\|_Y < \|Tx_k\|_Y + \epsilon, \quad \|x\|_X < \|x_k\|_X + \frac{\epsilon}{\|T\|} \quad (\forall k \geq K)$$

が成り立つから，

$$\left\|\tilde{T}x\right\|_Y < \|Tx\|_Y + \epsilon < \|T\|\,\|x\|_X + 2\epsilon$$

となり $\left\|\tilde{T}\right\| \leq \|T\|$ を得る．

さらに

$$\left\|\tilde{T}\right\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X = 1}} \left\|\tilde{T}x\right\|_Y \geq \sup_{\substack{x \in X_0 \\ \|x\|_X = 1}} \left\|\tilde{T}x\right\|_Y = \sup_{\substack{x \in X_0 \\ \|x\|_X = 1}} \|Tx\|_Y = \|T\|$$

より $\left\|\tilde{T}\right\| = \|T\|$ が得られる．拡張の一意性は X_0 の稠密性と有界作用素の連続性による．■

定理 1.3.2 (射影定理).　H を $\mathbb{K}$ 上の Hilbert 空間とし，内積とノルムをそれぞれ $\langle\cdot,\cdot\rangle, \|\cdot\|$ と表記する．$C \subset H$ が閉凸集合なら，$f \in H$ に対し或る $y \in C$ がただ一つ存在して

$$\|f - y\| = \inf_{h \in C} \|f - h\|$$

を満たす．また C が H の閉部分空間なら，$y \in C$ が f の射影であることと

$$\langle f - y, h\rangle = 0 \quad (\forall h \in C)$$

が成り立つことは同値になる．

証明.

射影の存在　C が凸集合であるとする．$f \in H \backslash C$ として

$$\delta := \inf_{h \in C} \| f - h \|$$

とおけば，C が閉であるから $\delta > 0$ となる．$h_n \in C$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を

$$\delta = \lim_{n \to \infty} \| f - h_n \|$$

となるように取れば，任意の $\epsilon > 0$ に対して或る $N \in \mathbb{N}$ が存在し

$$\| f - h_n \|^2 < \delta^2 + \epsilon/4 \quad (\forall n > N)$$

が成り立つ．$n, m > N$ ならば，内積空間の中線定理と $(h_n + h_m)/2 \in C$ により

$$\begin{aligned} \| h_n - h_m \|^2 &= 2\left(\| f - h_m \|^2 + \| f - h_n \|^2 \right) - \| 2f - (h_n + h_m) \|^2 \\ &= 2\left(\| f - h_m \|^2 + \| f - h_n \|^2 \right) - 4 \left\| f - \frac{h_n + h_m}{2} \right\|^2 \\ &< 2\delta^2 + \epsilon - 4\delta^2 = \epsilon \end{aligned}$$

が成り立ち $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ は H の Cauchy 列となり，H が Hilbert 空間で C が H で閉だから極限 $y \in H$ が存在して $y \in C$ が従う．

$$\begin{aligned} \left| \delta - \| f - y \| \right| &\leq \left| \delta - \| f - h_n \| \right| + \left| \| f - h_n \| - \| f - y \| \right| \\ &\leq \left| \delta - \| f - h_n \| \right| + \| h_n - y \| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

より $\delta = \| f - y \|$ となり射影の存在が示された．$f \in C$ の場合は f が自身の射影である．

射影の一意性　$z \in C$ もまた $\delta = \| f - z \|$ を満たすとすれば，C の凸性により

$$2\delta \leq 2 \left\| f - \frac{y + z}{2} \right\| \leq \| f - y \| + \| f - z \| = 2\delta$$

が成り立つから，中線定理より

$$\| y - z \|^2 = 2\left(\| f - z \|^2 + \| f - y \|^2 \right) - 4 \left\| f - \frac{y + z}{2} \right\|^2 = 0$$

となって $y = z$ が従う．

C が閉部分空間の場合　$f \in H \backslash C$ に対して f の C への射影を $y \in C$ とする．($f \in C$ の場合は $y = f$．) 或る $h \in C$ に対して

$$\langle f - y,\ h \rangle \neq 0$$

となると仮定すれば ($f \neq y$ より $h \neq 0$),

$$\hat{y} := y + \left(\frac{\langle f - g, h \rangle}{\| h \|^2} \right) h \in C$$

に対して[*3]

$$\begin{aligned} \| f - \hat{y} \|^2 &= \left\langle f - y - \frac{\langle f - g, h \rangle}{\| h \|^2} h,\ f - y - \frac{\langle f - g, h \rangle}{\| h \|^2} h \right\rangle \\ &= \| f - y \|^2 - \frac{| \langle f - g, h \rangle |^2}{\| h \|^2} \\ &< \| f - y \|^2 \end{aligned}$$

[*3] $\hat{y} \in C$ となるためには C が部分空間である必要がある．凸性だけではこれが成り立たない．

が成り立つから y が射影であることに反する．従って射影 y は

$$\langle f - y,\ h\rangle = 0 \quad (\forall h \in C) \tag{1.7}$$

を満たす．逆に $y \in C$ に対して式 (1.7) が成り立っているとすれば y は f の射影となる．実際任意の $h \in C$ に対して

$$\begin{aligned}\| f - h \|^2 &= \langle f - y + y - h,\ f - y + y - h\rangle \\ &= \| f - y \|^2 + 2\mathfrak{Re}\,\langle f - y,\ y - h\rangle + \| y - h \|^2 \\ &= \| f - y \|^2 + \| y - h \|^2 \\ &\geq \| f - y \|^2\end{aligned}$$

となり

$$\| f - y \| = \inf_{h \in C} \| f - h \|$$

が成り立つ． ∎

定理 1.3.3 (Kolmos の補題). H を Hilbert 空間，$\|\cdot\|$ を H の内積により導入されるノルムとする．$f_n \in H$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が $\sup_{n\in\mathbb{N}} \| f_n \| < \infty$ を満たすとき，

$$\exists g_n \in \mathrm{Conv}\,[\{ f_n, f_{n+1}, f_{n+2} \cdots \}]^{*4} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

が取れて $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ は H の Cauchy 列となる．

証明． $F := \sup_{n\in\mathbb{N}} \| f_n \| < \infty$ とおく．

$$A := \sup_{n\geq 1} \inf \{ \| g \| \ ; \quad g \in \mathrm{Conv}\,[\{ f_n, f_{n+1}, f_{n+2} \cdots \}] \}$$

とおけば $A \leq F$ が成り立つ．実際各 $n \in \mathbb{N}$ について任意に $g \in \mathrm{Conv}\,[\{ f_n, f_{n+1}, f_{n+2} \cdots \}]$ を取れば

$$g = \sum_{i=0}^{N} c_i f_{n+i} \quad \left(0 \leq c_i \leq 1,\ \textstyle\sum_{i=0}^{N} c_i = 1\right)$$

と表現できるから，

$$\| g \| = \left\| \sum_{i=0}^{N} c_i f_{n+i} \right\| \leq \sum_{i=0}^{N} c_i \| f_{n+i} \| \leq F$$

より

$$\inf \{ \| g \| \ ; \quad g \in \mathrm{Conv}\,[\{ f_n, f_{n+1}, f_{n+2} \cdots \}] \} \leq F \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

[*4] $\mathrm{Conv}\,[\{ f_n, f_{n+1}, f_{n+2} \cdots \}]$ は $f_n, f_{n+1}, f_{n+2} \cdots$ を含む最小の凸集合である．すなわち

$$\mathrm{Conv}\,[\{ f_n, f_{n+1}, f_{n+2} \cdots \}] = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} c_i f_{n+i} \ ; \quad 0 \leq c_i \leq 1,\ \exists j \in \mathbb{N},\ c_i = 0\ (\forall i \geq j),\ \sum_{i=0}^{\infty} c_i = 1 \right\}$$

で定義される．

が従い $A \leq F$ を得る．また全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\inf \{ \| g \| \ ; \quad g \in \mathrm{Conv}\, [\{ f_n, f_{n+1}, f_{n+2} \cdots \}] \} \leq A$$

が成り立つから，各 $n \in \mathbb{N}$ について

$$\| g_n \| \leq A + \frac{1}{n} \tag{1.8}$$

を満たす $g_n \in \mathrm{Conv}\, [\{ f_n, f_{n+1}, f_{n+2} \cdots \}]$ が存在する．一方で，下限を取る範囲が縮小していくから

$$\left(\inf \{ \| g \| \ ; \quad g \in \mathrm{Conv}\, [\{ f_n, f_{n+1}, f_{n+2} \cdots \}] \} \right)_{n=1}^{\infty}$$

は単調増大列であり，任意に $m \in \mathbb{N}$ を取れば或る $N(m) \in \mathbb{N}$ $(N(m) > m)$ が存在して

$$\inf \{ \| g \| \ ; \quad g \in \mathrm{Conv}\, [\{ f_n, f_{n+1}, f_{n+2} \cdots \}] \} \geq A - \frac{1}{m} \quad (\forall n \geq N(m))$$

が成り立つ．任意の $l, k \geq N(m)$ に対し $(g_l + g_k)/2 \in \mathrm{Conv}\, [\{ f_{N(m)}, f_{N(m)+1}, f_{N(m)+2} \cdots \}]$ となるから

$$\left\| \frac{g_l + g_k}{2} \right\| \geq A - \frac{1}{m}$$

が従い，中線定理と (1.8) を併せて

$$\| g_l - g_k \|^2 = 2 \| g_l \| + 2 \| g_k \| + \| g_l + g_k \|^2 \leq 4 \left(A + \frac{1}{N(m)} \right)^2 - 4 \left(A - \frac{1}{m} \right)^2 \leq \frac{16A}{m}$$

が成り立つ．$A \leq F < \infty$ より右辺は $m \longrightarrow \infty$ で 0 に収束するから $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列である． ∎

第 2 章

条件付き期待値

基礎におく確率空間を $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ と表し，係数体を $\mathbb{R}$ とする．

2.1　L^2 における条件付き期待値

L^2 における内積　ノルム空間 $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ は次の $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F})}$ を内積として Hilbert 空間となる:

$$\langle [f], [g] \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F})} \coloneqq \int_\Omega f(x)g(x)\, \mu(dx) \quad \Bigl(\forall [f], [g] \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \Bigr). \tag{2.1}$$

(2.1) で定める $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F})}$ は代表の取り方に依らない実数値で確定する．実際 Hölder の不等式より右辺は実数値として確定し，$[f'] = [f]$, $[g'] = [g]$ を満たす f', g' に対しては

$$E \coloneqq \{\, x \in \Omega \;;\quad f(x) \neq f'(x) \,\}, \quad F \coloneqq \{\, x \in \Omega \;;\quad g(x) \neq g'(x) \,\}$$

が μ-零集合であるから

$$\int_\Omega f(x)g(x)\, \mu(dx) = \int_\Omega f'(x)g'(x)\, \mu(dx)$$

が成り立つ．また次に示すように内積の公理が満たされる:

正値性　ノルムとの対応 $\| [f] \|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F})} = \langle [f], [f] \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F})}$ により従う．

対称性　$\int_\Omega fg\, d\mu = \int_\Omega gf\, d\mu$ により従う．

双線型性　片側の線型性を示す．今，任意に $[f], [g], [h] \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ と $a \in \mathbb{R}$ を取れば

$$\begin{aligned} \langle [f], [g] + [h] \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F})} &= \langle [f], [g+h] \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F})} = \int_\Omega f(x)(g(x) + h(x))\, \mu(dx) \\ &= \int_\Omega f(x)g(x)\, \mu(dx) + \int_\Omega f(x)h(x)\, \mu(dx) = \langle [f], [g] \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F})} + \langle [f], [h] \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F})}, \\ \langle [f], \alpha[g] \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F})} &= \langle [f], [\alpha g] \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F})} \\ &= \int_\Omega \alpha f(x)g(x)\, \mu(dx) = \alpha \int_\Omega f(x)g(x)\, \mu(dx) = \alpha \langle [f], [g] \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F})} \end{aligned}$$

が成り立つ．対称性と併せれば双線型性が従う．

ノルム空間としての完備性により $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ は Hilbert 空間となる．

条件付き期待値の存在　$\mathcal{G}$ を $\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族として Hilbert 空間 $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ を考える．任意の $[g]_\mathcal{G} \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ [*1] に対し g は可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であるから，g を代表とする $[g]_\mathcal{F} \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

[*1] $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ は $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ とは空間が違うから関数類の表示を変えた．

が存在する．従って次の線型単射

$$J_{\mathcal{G}} : \mathrm{L}^0(\Omega, \mathcal{G}, \mu) \ni [g]_{\mathcal{G}} \longmapsto [g]_{\mathcal{F}} \in \mathrm{L}^0(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \tag{2.2}$$

によって $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ は $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ に等長に埋め込まれ[*2]，$\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ の完備性より $J_{\mathcal{G}}\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ は閉部分空間となる．$\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ から $J_{\mathcal{G}}\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ への射影作用素を $P_{\mathcal{G}}$，$J_{\mathcal{G}}$ の値域を $J_{\mathcal{G}}\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ に制限した全単射を $J'_{\mathcal{G}}$ と表し，この $P_{\mathcal{G}}$ と ${J'_{\mathcal{G}}}^{-1}$ の合成

$${J'_{\mathcal{G}}}^{-1} P_{\mathcal{G}} : \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \longrightarrow \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu) \tag{2.3}$$

を条件付き期待値とする．

関数類と関数の表記　$\mathrm{L}^p, \mathscr{L}^p$ の元について，以降は関数類と関数は表記上で区別することはあまりせず，状況に応じて f を関数類 $[f]$，或は関数 f の意味で扱う．なぜならば，例えば後述の命題 2.1.2 の C5 において $\mathrm{E}[gf \mid \mathcal{G}] = g\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}]$ と書いているところは本来

$$\mathrm{E}\left[J_{\mathcal{G}}[g]_{\mathcal{G}} [f]_{\mathcal{F}} \,\middle|\, \mathcal{G} \right] = [g]_{\mathcal{G}}\, \mathrm{E}\left[[f]_{\mathcal{F}} \,\middle|\, \mathcal{G} \right]$$

と表記されるが，これでは非常にややこしいからである．主に $f(x)$ と表記して値を取り出しているときは関数として，条件付き期待値を作用させる場合は関数類として扱っている．

定義 2.1.1 (L^2 における条件付き期待値).　(2.3) で定めた ${J'_{\mathcal{G}}}^{-1} P_{\mathcal{G}}$ を

$$\mathrm{E}[\cdot \mid \mathcal{G}] : \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \ni f \longmapsto \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu) \tag{2.4}$$

と表記し，$\mathcal{G}$ の下での条件付き期待値 (conditional expectation) と呼ぶ．$\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ の場合は特別に $\mathrm{E}[\cdot] := \mathrm{E}[\cdot \mid \mathcal{G}]$ と書いて期待値と呼ぶ．

[*2] 任意の $1 \leq p \leq \infty$ に対し L^p は L^0 の部分集合であるから，$J_{\mathcal{G}}$ は $\mathrm{L}^p(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ を $\mathrm{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ に等長に埋め込む．

命題 2.1.2 (条件付き期待値の性質). Hilbert 空間 $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ における内積を $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F})}$，ノルムを $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F})}$ と表記し，$\mathcal{G}, \mathcal{H}$ を $\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族とする．

C1 任意の $f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ に対して次が成り立つ:

$$\mathrm{E}[f] = \int_\Omega f(x)\,\mu(dx)\ ^{*3}.$$

C2 任意の $f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ と $h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ に対して次が成り立つ:

$$\int_\Omega f(x)h(x)\,\mu(dx) = \int_\Omega \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x)h(x)\,\mu(dx).$$

C3 任意の $f, f_1, f_2 \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して次が成り立つ:

$$\mathrm{E}[f_1 + f_2 \mid \mathcal{G}] = \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}] + \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}], \quad \mathrm{E}[\alpha f \mid \mathcal{G}] = \alpha\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}].$$

C4 任意の $f_1, f_2 \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ に対して次が成り立つ:

$$f_1 \le f_2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}] \le \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}]\ ^{*4}$$

C5 任意の $f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ と $g \in \mathrm{L}^\infty(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ に対して次が成り立つ:

$$\mathrm{E}[gf \mid \mathcal{G}] = g\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}].$$

C6 $\mathcal{H}$ が $\mathcal{G}$ の部分 σ-加法族ならば，任意の $f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ に対して次が成り立つ:

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \,\middle|\, \mathcal{H}\right] = \mathrm{E}[f \mid \mathcal{H}].$$

証明.

C1 (2.2) で定めた単射 $J_\mathcal{G}$ を J と表す．$\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ とすれば，$\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ の元の代表は $\mathcal{G}$-可測でなくてはならないから定数関数である．従って各 $g \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ にはただ一つの定数 $\alpha \in \mathbb{R}$ が対応して $g(x) = \alpha\ (\forall x \in \Omega)$ と表すことができ，かつ関数 g を代表とする $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ の関数類は関数 g のみからなる．射影定理よりノルム $\|f - Jg\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F})}$ を最小にする $g \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ が $\mathrm{E}[f]$ である．今 $g(x) = \alpha\ (\forall x \in \Omega)$ であるとして

$$\beta \coloneqq \int_\Omega f(x)\,\mu(dx)$$

とおけば，

$$\begin{aligned}\|f - Jg\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F})} &= \int_\Omega |f(x) - \alpha|^2\,\mu(dx)\\ &= \int_\Omega |f(x)|^2\,\mu(dx) - 2\alpha\beta + |\alpha|^2\\ &= |\alpha - \beta|^2 + \int_\Omega |f(x) - \beta|^2\ \mu(dx)\end{aligned}$$

*4 本来は，恒等的に $\int_\Omega f(x)\,\mu(dx)$ のみを取る定数関数を代表とする関数類が $\mathrm{E}[f]$ である．

*4 関数類に対する順序 (式 (1.4)) を表している．

が成り立ち，最終式は $\alpha = \int_\Omega f(x)\,\mu(dx)$ のとき最小となる．従って

$$\mathrm{E}[f] = \int_\Omega f(x)\,\mu(dx)$$

を得る．

C2　(2.2) で定めた単射 $J_{\mathcal{G}}$ を J と表す．射影定理により，$f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ に対する $\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}]$ は

$$\langle f - J\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F})} = 0 \quad (\forall h \in J\,\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu))$$

を満たすから，内積の線型性より任意の $h \in J\,\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ に対して

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(x)h(x)\,\mu(dx) &= \langle f, h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F})}\\ &= \langle J\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F})} = \int_\Omega \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x)h(x)\,\mu(dx)\end{aligned}$$

が成り立つ．

C3　(2.3) における合成作用素は線型作用素である．

C4　(2.2) で定めた単射 $J_{\mathcal{G}}$ を J と表す．任意の $f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ に対して，$f \geq 0$ ならば $\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \geq 0$ となることを示す．実際これが示されれば，$f_1, f_2 \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ が $f_1 \leq f_2$ を満たすとき

$$0 \leq f_2 - f_1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \mathrm{E}[f_2 - f_1 \mid \mathcal{G}] = \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}] - \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}]$$

が従う．証明は背理法を使う．

$$A \coloneqq \{\, x \in \Omega \;;\quad f(x) < 0 \,\}, \quad B \coloneqq \{\, x \in \Omega \;;\quad \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x) < 0 \,\}$$

とおき，$\mu(A) = 0$ の下で $\mu(B) > 0$ が成り立つと仮定して矛盾を導く．

$$h(x) \coloneqq \begin{cases} \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x) & (x \in \Omega \backslash B) \\ 0 & (x \in B) \end{cases}$$

として $\mathcal{G}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$-可測関数を定義すれば

$$\begin{aligned}\| f - Jh \|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F})} &= \int_\Omega |f(x) - h(x)|^2\,\mu(dx)\\ &= \int_{A^c \cap B^c} \left| f(x) - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x) \right|^2\,\mu(dx) + \int_{A^c \cap B} |f(x)|^2\,\mu(dx)\\ &< \int_{A^c \cap B^c} \left| f(x) - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x) \right|^2\,\mu(dx) + \int_{A^c \cap B} \left| f(x) - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x) \right|^2\,\mu(dx)\\ &= \left\| f - J\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \right\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F})}\end{aligned}$$

が成り立つ．途中の不等号 $<$ は，$\mu(A^c \cap B) = \mu(B) - \mu(A \cap B) = \mu(B) > 0$ であることと

$$0 \leq f(x) < f(x) - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x) \quad (\forall x \in A^c \cap B)$$

による．しかし

$$\| f - Jh \|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F})} < \left\| f - J\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \right\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F})}$$

を満たす $h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ が存在することは $J\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}]$ が f の射影であることに矛盾する．よって $\mu(A) = 0$ の下では $\mu(B) = 0$ でなくてはならず，冒頭の主張が従う．

C5　(2.2) で定めた単射 $J_{\mathcal{G}}$ を J と表す．$\left\| \mathrm{E}[gf \mid \mathcal{G}] - g\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \right\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{G})} = 0$ が成り立つことを示す．任意の $h \in J\,\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ に対して

$$\langle J\,\mathrm{E}[gf \mid \mathcal{G}] - Jg\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F})} = \langle J\,\mathrm{E}[gf \mid \mathcal{G}] - gf, h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F})} + \langle gf - Jg\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F})}$$

を考えると，右辺が 0 になることが次のように証明される．先ず右辺第一項について，gf は $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ に入る．g は或る μ-零集合 $E \in \mathcal{G}$ を除いて有界であるから，或る正数 α によって $|g(x)| \leq \alpha \ (\forall x \in E^c)$ と抑えられ，

$$\int_{\Omega} |g(x)f(x)|^2 \, \mu(dx) = \int_{E^c} |g(x)|^2 |f(x)|^2 \, \mu(dx) \leq \alpha^2 \int_{E^c} |f(x)|^2 \, \mu(dx) = \alpha^2 \int_{\Omega} |f(x)|^2 \, \mu(dx) < \infty$$

が成り立つからである．従って射影定理により

$$\langle \mathrm{E}[gf \mid \mathcal{G}] - gf, h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F})} = 0 \quad (\forall h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)).$$

右辺第二項について，

$$\langle gf - g\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F})} = \int_{\Omega} (f(x) - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x))\, g(x) h(x) \, \mu(dx) = \langle f - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], gh \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F})}$$

であって，先と同様の理由で $gh \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ $(\forall h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu))$ が成り立つから射影定理より

$$\langle gf - g\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F})} = 0 \quad (\forall h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu))$$

であると判明した．始めの式に戻れば

$$\langle \mathrm{E}[gf \mid \mathcal{G}] - g\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F})} = 0 \quad (\forall h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu))$$

が成り立つことになり，特に $h = \mathrm{E}[gf \mid \mathcal{G}] - g\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ に対しては

$$\left\| \mathrm{E}[gf \mid \mathcal{G}] - g\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \right\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F})}^2 = 0$$

となることから $\mathrm{E}[gf \mid \mathcal{G}] = g\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}]$ が示された．

C6　(2.2) で定めた単射 $J_{\mathcal{G}}$ を J_1 と表し，同様に $J_{\mathcal{H}}$ を J_2 と表す．今

$$J_2\,\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{H}, \mu) \subset J_1\,\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$$

が満たされているから，射影定理より任意の $h \in J_2\,\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{H}, \mu)$ に対して

$$\begin{aligned} &\left\langle J_2\,\mathrm{E}\left[\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \,\middle|\, \mathcal{H}\right] - J_2\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{H}], h \right\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F})} \\ &\quad = \left\langle J_2\,\mathrm{E}\left[\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \,\middle|\, \mathcal{H}\right] - J_1\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h \right\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F})} \\ &\qquad + \langle J_1\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] - f, h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F})} + \langle f - J_2\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{H}], h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F})} = 0 \end{aligned}$$

が成り立つ．特に $h = J_2\,\mathrm{E}\left[\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \,\middle|\, \mathcal{H}\right] - J_2\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{H}] \in J_2\,\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{H}, \mu)$ とすれば

$$\left\| J_2\,\mathrm{E}\left[\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \,\middle|\, \mathcal{H}\right] - J_2\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{H}] \right\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F})}^2 = 0$$

が得られ，J_2 の線型単射性より $\mathrm{E}\left[\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \,\middle|\, \mathcal{H}\right] = \mathrm{E}[f \mid \mathcal{H}]$ が従う． ∎

2.2　条件付き期待値の拡張

命題 2.1.2 の C3 で示した通り，(2.4) で定めた条件付き期待値は $\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ から $J\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ への線型作用素 (写像) である．$\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ は $\mathrm{L}^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ の部分空間であり，同様に $\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ も $\mathrm{L}^1(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ の部分空間であるから，条件付き期待値は $\mathrm{L}^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ から $\mathrm{L}^1(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ への線型作用素でもある．条件付き期待値が有界で，且つ定義域 $\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ が $\mathrm{L}^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ において稠密ならば，定理 1.3.1 より条件付き期待値は $\mathrm{L}^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 上の線型写像に拡張可能となる．

補題 2.2.1 (条件付き期待値の有界性).
$\mathrm{L}^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ から $\mathrm{L}^1(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ への線型作用素 $\mathrm{E}[\cdot\,|\,\mathcal{G}]$ の作用素ノルムは 1 以下である:

$$\sup_{\substack{f\in\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)\\ f\neq 0}} \frac{\left\|\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}]\right\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{G})}}{\|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F})}} \leq 1.$$

証明.　命題 2.1.2 の C2 より，任意の $0 \neq f \in \mathrm{L}^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ に対して

$$\begin{aligned}
\left\|\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}]\right\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{G})} &= \int_\Omega \left|\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}](x)\right|\,\mu(dx)\\
&= \int_\Omega \mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}](x)\mathbb{1}_{\{\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}]\geq 0\}}(x) - \mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}](x)\mathbb{1}_{\{\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}]<0\}}(x)\,\mu(dx)\\
&= \int_\Omega f(x)\mathbb{1}_{\{\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}]\geq 0\}}(x) - f(x)\mathbb{1}_{\{\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}]<0\}}(x)\,\mu(dx)\\
&\leq \int_\Omega |f(x)|\mathbb{1}_{\{\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}]\geq 0\}}(x) + |f(x)|\mathbb{1}_{\{\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}]<0\}}(x)\,\mu(dx)\\
&= \|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F})}.
\end{aligned}$$

が成り立つ． ∎

定理 2.2.2 (条件付き期待値の拡張).　(2.4) で定めた条件付き期待値 $\mathrm{E}[\cdot\,|\,\mathcal{G}]$ に対して，作用素ノルムを変えない拡張線型作用素

$$\tilde{\mathrm{E}}[\cdot\,|\,\mathcal{G}] : \mathrm{L}^1(\Omega,\mathcal{F},\mu) \ni f \longmapsto \tilde{\mathrm{E}}[f\,|\,\mathcal{G}] \in \mathrm{L}^1(\Omega,\mathcal{G},\mu)$$

が唯一つ存在する．ただし $\mathcal{G} = \{\emptyset,\ \Omega\}$ の場合は特別に $\tilde{\mathrm{E}}[\cdot] \coloneqq \tilde{\mathrm{E}}[\cdot\,|\,\mathcal{G}]$ と表示する．

証明.　定理 1.3.1 より，$\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ が $\mathrm{L}^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ で稠密ならば補題 2.2.1 と併せて拡張可能となる．今任意に $f \in \mathrm{L}^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ を取り

$$f_n(x) \coloneqq f(x)\mathbb{1}_{|f|\leq n}(x) \quad (\forall x \in \Omega,\ n = 1,2,3,\cdots)$$

とおけば，$(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ であり，かつ Lebesgue の収束定理より

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F})} = 0$$

が成り立つ． ∎

補題 2.2.3 (凸関数は片側微分可能). $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への凸関数は各点で左右の微係数が存在する．

証明． $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を凸関数とする．先ず凸性から

$$\frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x} \leq \frac{\varphi(z) - \varphi(x)}{z - x} \leq \frac{\varphi(z) - \varphi(y)}{z - y} \quad (\forall x < y < z) \tag{2.5}$$

を得る．今任意に x を取り固定する．x に単調減少で近づく点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ を一つ取れば，(2.5) より

$$\left(\frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} \right)_{n=1}^{\infty}$$

は下に有界な単調減少列であり極限が存在する．x に単調減少で近づく別の点列 $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ を取れば

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \frac{f(y_k) - f(x)}{y_k - x} \leq \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

となるから

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \frac{f(y_k) - f(x)}{y_k - x} \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x}$$

が成り立つ．逆向きの不等号も同様に成り立つから，極限は取る点列に依らず確定し φ は x で右側微係数を持つ．同様の理由で左側微係数も存在し，特に φ の連続性及び Borel 可測性が従う． ∎

命題 2.2.4 (拡張条件付き期待値の性質). $\mathcal{G},\mathcal{H}$ を $\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族とする.

$\tilde{\mathrm{C}}1$ 任意の $f \in \mathrm{L}^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ に対して次が成り立つ:

$$\tilde{\mathrm{E}}[f] = \int_\Omega f(x)\,\mu(dx).$$

$\tilde{\mathrm{C}}2$ 任意の $f \in \mathrm{L}^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ と $h \in \mathrm{L}^\infty(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ に対して次が成り立つ:

$$\int_\Omega f(x)h(x)\,\mu(dx) = \int_\Omega \tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}](x)h(x)\,\mu(dx).$$

$\tilde{\mathrm{C}}3$ 任意の $f, f_1, f_2 \in \mathrm{L}^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して次が成り立つ:

$$\tilde{\mathrm{E}}[f_1 + f_2 \mid \mathcal{G}] = \tilde{\mathrm{E}}[f_1 \mid \mathcal{G}] + \tilde{\mathrm{E}}[f_2 \mid \mathcal{G}], \quad \tilde{\mathrm{E}}[\alpha f \mid \mathcal{G}] = \alpha\tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}].$$

$\tilde{\mathrm{C}}4$ 任意の $f_1, f_2 \in \mathrm{L}^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ に対して次が成り立つ:

$$f_1 \leq f_2 \quad \text{a.s.} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathrm{E}}[f_1 \mid \mathcal{G}] \leq \tilde{\mathrm{E}}[f_2 \mid \mathcal{G}] \quad \text{a.s.}$$

$\tilde{\mathrm{C}}5$ $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を凸関数とする．$f, \varphi(f) \in \mathrm{L}^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ ならば次が成り立つ:

$$\varphi(\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}]) \leq \mathrm{E}[\varphi(f) \mid \mathcal{G}].$$

この不等式を Jensen の不等式と呼ぶ.

$\tilde{\mathrm{C}}6$ 任意の $f \in \mathrm{L}^p(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ と $g \in \mathrm{L}^q(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ に対して次が成り立つ:

$$\tilde{\mathrm{E}}[gf \mid \mathcal{G}] = g\tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}].$$

ただし p, q は $1/p + 1/q = 1$, $(1 \leq p, q \leq \infty)$ を満たし，$p = 1$ ならば $q = \infty$ とする.

$\tilde{\mathrm{C}}7$ $\mathcal{H}$ が $\mathcal{G}$ の部分 σ-加法族ならば，任意の $f \in \mathrm{L}^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ に対して次が成り立つ:

$$\tilde{\mathrm{E}}\Big[\tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}] \,\Big|\, \mathcal{H}\Big] = \tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{H}].$$

証明.

$\tilde{\mathrm{C}}1$ f に対して，(2.2) と同じように $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ を作る．命題 2.1.2 の C1 により

$$\tilde{\mathrm{E}}[f_n] = \int_\Omega f_n(x)\,\mu(dx) \quad (\forall n = 1, 2, \cdots)$$

が満たされるから，$\tilde{\mathrm{E}}[\cdot]$ の有界性と Lebesgue の収束定理により

$$\left|\tilde{\mathrm{E}}[f] - \int_\Omega f(x)\,\mu(dx)\right| \leq \|f - f_n\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F})} + \|f - f_n\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F})} \longrightarrow 0 \ (n \longrightarrow \infty)$$

が成り立つ.

$\tilde{\mathrm{C}}2$ f に対して，(2.2) と同じように $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ を作る．命題 2.1.2 の C2 により

$$\int_\Omega f_n(x)h(x)\,\mu(dx) = \int_\Omega \tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{G}](x)h(x)\,\mu(dx) \quad (\forall n = 1, 2, \cdots)$$

が成り立つ．補助定理 2.2.1 と Lebesgue の収束定理より

$$\begin{aligned}
&\left| \int_\Omega f(x)h(x)\,\mu(dx) - \int_\Omega \tilde{\mathrm{E}}\,[f \mid \mathcal{G}]\,(x)h(x)\,\mu(dx) \right| \\
&\quad \leq \left| \int_\Omega f(x)h(x)\,\mu(dx) - \int_\Omega f_n(x)h(x)\,\mu(dx) \right| \\
&\qquad + \left| \int_\Omega \tilde{\mathrm{E}}\,[f_n \mid \mathcal{G}]\,(x)h(x)\,\mu(dx) - \int_\Omega \tilde{\mathrm{E}}\,[f \mid \mathcal{G}]\,(x)h(x)\,\mu(dx) \right| \\
&\quad \leq 2\,\|\,h\,\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathcal{F},\mu)}\,\|\,f - f_n\,\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F})} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)
\end{aligned}$$

が成り立ち

$$\int_\Omega f(x)h(x)\,\mu(dx) = \int_\Omega \tilde{\mathrm{E}}\,[f \mid \mathcal{G}]\,(x)h(x)\,\mu(dx)$$

が従う．

$\tilde{\mathrm{C}}3$　定理 2.2.2 より $\tilde{\mathrm{E}}\,[\cdot \mid \mathcal{G}]$ は線型作用素である．

$\tilde{\mathrm{C}}4$　$\tilde{\mathrm{E}}\,[\cdot \mid \mathcal{G}]$ が線型であるから，命題 2.1.2 の C4 と同様に，任意の $f \in \mathrm{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ に対して $f \geq 0$ ならば $\tilde{\mathrm{E}}\,[f \mid \mathcal{G}] \geq 0$ となることを示せばよい．$f \in \mathrm{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を取り

$$A := \{\, x \in \Omega\ ;\quad f(x) < 0 \,\}, \quad B := \left\{\, x \in \Omega\ ;\quad \tilde{\mathrm{E}}\,[f \mid \mathcal{G}]\,(x) < 0 \,\right\}$$

とおき，$\mu(A) = 0$ の下で $\mu(B) = 0$ が成り立つことを示す．f に対して，(2.2) と同じように $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を作る．

$$\bigcup_{n=1}^\infty \{\, x \in \Omega\ ;\quad f_n(x) < 0 \,\} \subset \{\, x \in \Omega\ ;\quad f(x) < 0 \,\}$$

が成り立つから，$\mu(A) = 0$ の仮定と C4 により

$$\tilde{\mathrm{E}}\,[f_n \mid \mathcal{G}] \geq 0 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

が従う．

$$C_n := \left\{\, x \in \Omega\ ;\quad \tilde{\mathrm{E}}\,[f_n \mid \mathcal{G}]\,(x) < 0 \,\right\} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots), \quad C := \bigcup_{n=1}^\infty C_n$$

とおけば $\mu(C) = 0$ となり

$$\mu(B \cap C^c) = \mu(B) - \mu(B \cap C) = \mu(B)$$

が成り立つから，$\mu(B \cap C^c) = 0$ を示せばよい．$B \cap C^c$ の上では

$$\left| \tilde{\mathrm{E}}\,[f \mid \mathcal{G}]\,(x) - \tilde{\mathrm{E}}\,[f_n \mid \mathcal{G}]\,(x) \right| > 0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

より，

$$D_k := \left\{\, x \in B \cap A^c\ ;\quad \left| \tilde{\mathrm{E}}\,[f \mid \mathcal{G}]\,(x) \right| > 1/k \,\right\} \quad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

とおけば

$$B \cap C^c = \bigcup_{k=1}^\infty D_k$$

が満たされる．全ての $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$\left\| \tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}] - \tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{G}] \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{G})} \geq \int_{C_k} \left| \tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}](x) - \tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{G}](x) \right| \mu(dx) > \frac{\mu(C_k)}{k}$$

が成り立ち，左辺は $n \longrightarrow \infty$ で 0 に収束するから $\mu(C_k) = 0$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ が得られ

$$\mu(B) = \mu(B \cap C^c) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(D_k) = 0$$

が従う．

$\tilde{\mathrm{C}}5$ 補題 2.2.3 より φ は各点 $x \in \mathbb{R}$ で右側接線を持つから，それを $t \longmapsto a_x t + b_x$ と表せば

$$\varphi(x) = \sup_{r \in \mathbb{Q}} \{a_r x + b_r\} \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \tag{2.6}$$

が成り立つ．実際或る点 $x_0 \in \mathbb{R}$ で

$$\varphi(x_0) > \epsilon \coloneqq \sup_{r \in \mathbb{Q}} \{a_r x_0 + b_r\} \tag{2.7}$$

が成り立つとする．任意に $\delta_1 > 0$ を取り

$$\alpha \coloneqq \left| a_{x_0 - \delta_1} \right| \vee \left| a_{x_0 + \delta_1} \right|$$

とおけば，(2.5) より $x \longmapsto a_x$ は単調非減少であるから，$|x_0 - r| < \delta_1$ を満たす $r \in \mathbb{Q}$ に対し

$$|a_r| \leq \alpha$$

が成り立つ．また φ の連続性より或る $\delta_2 > 0$ が存在して，$|x_0 - r| < \delta_2$ となる限り

$$|\varphi(x_0) - \varphi(r)| < \frac{\epsilon}{2}$$

が満たされる．従って

$$\delta_3 \coloneqq \delta_1 \wedge \delta_2 \wedge \frac{\epsilon}{2\alpha}$$ [*5]

とおけば，$|x_0 - r| < \delta_3$ を満たす $r \in \mathbb{Q}$ に対して

$$|\varphi(x_0) - (a_r x_0 + b_r)| \leq |\varphi(x_0) - \varphi(r)| + |a_r|\,|x_0 - r| < \epsilon$$

となり (2.7) に矛盾する．今，(2.6) より任意の a_r, b_r $(r \in \mathbb{Q})$ に対して

$$\varphi(f(\omega)) \geq a_r f(\omega) + b_r \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

が成り立つから，$\tilde{\mathrm{C}}3$ と $\tilde{\mathrm{C}}4$ より

$$\mathrm{E}[\varphi(f) \mid \mathcal{G}] \geq a_r \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] + b_r \quad (\forall r \in \mathbb{Q})$$

が従い

$$\mathrm{E}[\varphi(f) \mid \mathcal{G}] \geq \varphi(\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}])$$

を得る．

[*5] $\alpha = 0$ の場合は $\delta_3 = \delta_1 \wedge \delta_2$ とおけばよい．

$\tilde{\mathrm{C}}6$　f,g に対して，(2.2) と同じように $(f_n)_{n=1}^{\infty}, (g_n)_{n=1}^{\infty}$ を作る．

$p=1$ の場合　命題 2.1.2 の C5 より

$$\tilde{\mathrm{E}}[gf_n \mid \mathcal{G}] = g\tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{G}] \quad (n=1,2,\cdots) \tag{2.8}$$

が成り立っている．補助定理 2.2.1 と Lebesgue の収束定理より

$$\begin{aligned}\left\| \tilde{\mathrm{E}}[gf \mid \mathcal{G}] - \tilde{\mathrm{E}}[gf_n \mid \mathcal{G}] \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{G})} &\leq \| gf - gf_n \|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F})} \\ &\leq \| g \|_{\mathrm{L}^\infty(\mathcal{F},\mu)} \| f - f_n \|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F})} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)\end{aligned}$$

が成り立ち，同様にして

$$\left\| g\tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}] - g\tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{G}] \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{G})} \leq \| g \|_{\mathrm{L}^\infty(\mathcal{F})} \| f - f_n \|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F})} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

も成り立つから，式 (2.8) と併せて

$$\begin{aligned}&\left\| \tilde{\mathrm{E}}[gf \mid \mathcal{G}] - g\tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}] \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{G})} \\ &\leq \left\| \tilde{\mathrm{E}}[gf \mid \mathcal{G}] - \tilde{\mathrm{E}}[gf_n \mid \mathcal{G}] \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{G})} + \left\| g\tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{G}] - g\tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}] \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{G})} \\ &\longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)\end{aligned}$$

が従う．

$1 < p < \infty$ の場合　$f \in \mathrm{L}^p(\mathcal{F}) \subset \mathrm{L}^1(\mathcal{F}), g_n \in \mathrm{L}^\infty(\mathcal{G})$ であるから，前段の結果より

$$\tilde{\mathrm{E}}[g_n f \mid \mathcal{G}] = g_n\tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}] \quad (n=1,2,\cdots) \tag{2.9}$$

が成り立つ．Jensen の不等式と Hölder の不等式より

$$\begin{aligned}&\left\| \tilde{\mathrm{E}}[gf \mid \mathcal{G}] - \tilde{\mathrm{E}}[g_n f \mid \mathcal{G}] \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{G})} \leq \| gf - g_n f \|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F})} \leq \| g - g_n \|_{\mathrm{L}^q(\mathcal{G})} \| f \|_{\mathrm{L}^p(\mathcal{F})}, \\ &\left\| g_n\tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}] - g\tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}] \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{G})} \leq \| g_n - g \|_{\mathrm{L}^q(\mathcal{G})} \left\| \tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}] \right\|_{\mathrm{L}^p(\mathcal{F})} \leq \| g_n - g \|_{\mathrm{L}^q(\mathcal{G})} \| f \|_{\mathrm{L}^p(\mathcal{F})}\end{aligned}$$

が成り立つから，(2.9) と Lebesgue の収束定理より

$$\begin{aligned}&\left\| \tilde{\mathrm{E}}[gf \mid \mathcal{G}] - g\tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}] \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{G})} \\ &\leq \left\| \tilde{\mathrm{E}}[gf \mid \mathcal{G}] - \tilde{\mathrm{E}}[g_n f \mid \mathcal{G}] \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{G})} + \left\| g_n\tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}] - g\tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}] \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{G})} \\ &\longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)\end{aligned}$$

が従う．

$\tilde{\mathrm{C}}7$　f に対して，(2.2) と同じように $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を作る．命題 2.1.2 の C6 より

$$\tilde{\mathrm{E}}\Big[\tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{G}] \,\Big|\, \mathcal{H}\Big] = \tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{H}] \quad (n=1,2,\cdots) \tag{2.10}$$

が成り立っている．補助定理 2.2.1 と Lebesgue の収束定理より

$$\begin{aligned}\left\| \tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{H}] - \tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{H}] \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{H})} &\leq \| f - f_n \|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F})} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty), \\ \left\| \tilde{\mathrm{E}}\Big[\tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}] \,\Big|\, \mathcal{H}\Big] - \tilde{\mathrm{E}}\Big[\tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{G}] \,\Big|\, \mathcal{H}\Big] \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{H})} &\leq \| f - f_n \|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F})} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)\end{aligned}$$

が成り立つから，(2.10) と併せて

$$\begin{aligned}&\left\| \tilde{\mathrm{E}}\Big[\tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}] \,\Big|\, \mathcal{H}\Big] - \tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{H}] \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{H})} \\ &\leq \left\| \tilde{\mathrm{E}}\Big[\tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}] \,\Big|\, \mathcal{H}\Big] - \tilde{\mathrm{E}}\Big[\tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{G}] \,\Big|\, \mathcal{H}\Big] \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{H})} + \left\| \tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{H}] - \tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{H}] \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{H})} \\ &\leq 2 \| f - f_n \|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F})} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)\end{aligned}$$

が従う．　■

定義 2.2.5 (条件付き期待値の再定義). 定理 2.2.2 で定義した有界線型作用素 $\tilde{\mathrm{E}}[\cdot \mid \mathcal{G}]$ を $\mathrm{E}[\cdot \mid \mathcal{G}]$ と表記し直し，$\mathcal{G}$ で条件付けた条件付き期待値と呼ぶ．$\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ の場合は特別に $\mathrm{E}[\cdot] \coloneqq \mathrm{E}[\cdot \mid \mathcal{G}]$ と書いて期待値と呼ぶ.

2.3 独立性

任意の有界実連続関数 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$-可測関数 X に対してその合成 $h(X)$ は可積分であるから，条件付き期待値を作用させることができる．これを用いて独立性を次で定義する．

定義 2.3.1 (独立性). X を $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$-可測関数，$\mathcal{G}$ を $\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族とする．任意の有界実連続関数 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対し次が成り立つとき，X と $\mathcal{G}$ は独立である (independent) と定める:

$$\mathrm{E}[h(X) \mid \mathcal{G}](\omega) = \int_{\Omega} h(X(x))\, \mu(dx) \quad (\mu\text{-a.s.}\omega \in \Omega).$$

命題 2.3.2 (独立性の同値条件). 任意の有界実連続関数 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対し

$$\mathrm{E}[h(X) \mid \mathcal{G}](\omega) = \int_{\Omega} h(X(x))\, \mu(dx) \quad (\mu\text{-a.s.}\omega \in \Omega) \tag{2.11}$$

が成り立つことと

$$\mu\left(X^{-1}(E) \cap A\right) = \mu\left(X^{-1}(E)\right)\mu(A) \quad (\forall E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}),\ A \in \mathcal{G}) \tag{2.12}$$

が成り立つことは同値である.

証明.

(2.11)⇒(2.12) (2.11) を仮定して

$$\mathfrak{B}(\mathbb{R}) = \left\{\, E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \ ; \quad \mu\left(X^{-1}(E) \cap A\right) = \mu\left(X^{-1}(E)\right)\mu(A), \quad \forall A \in \mathcal{G} \,\right\} \tag{2.13}$$

が成り立つことを示す．まず (2.13) の右辺が Dynkin 族であることを示し，次に右辺が $\mathbb{R}$ の閉集合系を含むことを示す．これが示されれば Dynkin 族定理により (2.13) が得られる．

$$\mathscr{D} \coloneqq \left\{\, E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \ ; \quad \mu\left(X^{-1}(E) \cap A\right) = \mu\left(X^{-1}(E)\right)\mu(A), \quad \forall A \in \mathcal{G} \,\right\}$$

とおけば，$\mathscr{D}$ は次の (1)(2)(3) を満たすから Dynkin 族である:

(1) $\mathbb{R} \in \mathscr{D}$,

(2) $D_1, D_2 \in \mathscr{D},\ D_1 \subset D_2 \quad \Rightarrow \quad D_2 \backslash D_1 \in \mathscr{D}$,

(3) $D_n \in \mathscr{D},\ D_n \cap D_m = \emptyset\ (n \neq m) \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathscr{D}$.

実際，$\Omega = X^{-1}(\mathbb{R})$ により任意の $A \in \mathcal{G}$ に対して $\mu\left(X^{-1}(\mathbb{R}) \cap A\right) = \mu\left(X^{-1}(\mathbb{R})\right)\mu(A)$ が成り立

つから (1) が従い，また $D_1 \subset D_2$ ならば $X^{-1}(D_2 \backslash D_1) = X^{-1}(D_2) \backslash X^{-1}(D_1)$ が成り立つから

$$\begin{aligned}\mu\left(X^{-1}(D_2 \backslash D_1) \cap A\right) &= \mu\left(X^{-1}(D_2) \cap A\right) - \mu\left(X^{-1}(D_1) \cap A\right) \\ &= \left\{\mu\left(X^{-1}(D_2)\right) - \mu\left(X^{-1}(D_1)\right)\right\}\mu(A) = \mu\left(X^{-1}(D_2 - D_1)\right)\mu(A) \quad (\forall A \in \mathcal{G})\end{aligned}$$

により (2) が従う．(3) も

$$\begin{aligned}\mu\left(X^{-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} D_n\right) \cap A\right) &= \mu\left(\sum_{n=1}^{\infty} X^{-1}(D_n) \cap A\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(X^{-1}(D_n) \cap A\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(X^{-1}(D_n)\right)\mu(A) = \mu\left(X^{-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} D_n\right)\right)\mu(A) \quad (\forall A \in \mathcal{G})\end{aligned}$$

により従う．次に $\mathbb{R}$ の任意の閉集合が $\mathscr{D}$ に属することを示す．E を $\mathbb{R}$ の閉集合として

$$d(\cdot, E) : \mathbb{R} \ni x \longmapsto \inf\{\, |x - y| \;;\quad y \in E \,\}$$

とおき

$$h_n : \mathbb{R} \ni x \longmapsto \frac{1}{1 + nd(x, E)} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により有界実連続関数列 $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ を定める．E が閉集合であるから

$$\lim_{n \to \infty} h_n(x) = \mathbb{1}_E(x) \quad (\forall x \in X)$$

が成り立ち，また h_n の有界連続性と (2.11) の仮定により

$$\mathrm{E}\left[h_n(X) \mid \mathcal{G}\right](\omega) = \int_{\Omega} h_n(X(x))\, \mu(dx) \quad (\mu\text{-a.s.}\omega \in \Omega,\ n = 1, 2, \cdots)$$

が満たされているから，任意に $A \in \mathcal{G}$ を取れば

$$\begin{aligned}\mu\left(X^{-1}(E) \cap A\right) &= \int_A \mathbb{1}_E(X(\omega))\, \mu(d\omega) \\ &= \lim_{n \to \infty} \int_A h_n(X(\omega))\, \mu(d\omega) \\ &= \lim_{n \to \infty} \int_A \mathrm{E}\left[h_n(X) \mid \mathcal{G}\right](\omega)\, \mu(d\omega) \\ &= \mu(A) \lim_{n \to \infty} \int_{\Omega} h_n(X(\omega))\, \mu(d\omega) \\ &= \mu(A) \int_{\Omega} \mathbb{1}_E(X(\omega))\, \mu(d\omega) \\ &= \mu\left(X^{-1}(E)\right)\mu(A)\end{aligned}$$

が成り立ち $E \in \mathscr{D}$ が従う．

(2.12)⇒(2.11)　(2.12) を仮定して

$$\int_A \mathrm{E}\left[h(X) \mid \mathcal{G}\right](\omega)\, \mu(d\omega) = \mu(A) \int_{\Omega} h(X(\omega))\, \mu(d\omega) \quad (\forall A \in \mathcal{G})$$

成り立つことを示す．有界実連続関数 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して $|h_n| \leq |h|$ を満たすように単関数近似列 $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ を取る．各 h_n は $\alpha_i^n \in \mathbb{R},\ E_i^n \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\ (i = 1, \cdots, N_n),\ \sum_{i=1}^{N_n} E_i^n = \mathbb{R}$ を用いて

$$h_n = \sum_{i=1}^{N_n} \alpha_i^n \mathbb{1}_{E_i^n}$$

の形で表現できるから，(2.12) の仮定の下では任意の $A \in \mathcal{G}$ に対して

$$\int_A h_n(X(\omega))\,\mu(d\omega) = \sum_{i=1}^{N_n} \alpha_i^n \int_A \mathbb{1}_{X^{-1}(E_i^n)}(\omega)\,\mu(d\omega) = \sum_{i=1}^{N_n} \alpha_i^n \mu\left(X^{-1}(E_i^n) \cap A\right)$$
$$= \mu(A) \sum_{i=1}^{N_n} \alpha_i^n \mu\left(X^{-1}(E_i^n)\right) = \sum_{i=1}^{N_n} \alpha_i^n \int_\Omega \mathbb{1}_{X^{-1}(E_i^n)}(\omega)\,\mu(d\omega) = \mu(A) \int_\Omega h_n(X(\omega))\,\mu(d\omega)$$

が成り立ち，Lebesgue の収束定理より

$$\int_A \mathrm{E}\,[h(X) \mid \mathcal{G}]\,(\omega)\,\mu(d\omega) = \int_A h(X(\omega))\,\mu(d\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_A h_n(X(\omega))\,\mu(d\omega)$$
$$= \mu(A) \lim_{n\to\infty} \int_\Omega h_n(X(\omega))\,\mu(d\omega) = \mu(A) \int_\Omega h(X(\omega))\,\mu(d\omega)$$

が従う． ∎

レポート問題 1. $A, B \in \mathcal{F}$ に対し，$X = \mathbb{1}_A$，$\mathcal{G} = \{\emptyset,\ \Omega,\ B,\ B^c\}$ とする．この時

$$X \text{ と } \mathcal{G} \text{ が独立} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{P}\,(A \cap B) = \mathrm{P}\,(A)\,\mathrm{P}\,(B).$$

証明. $\forall E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$X^{-1}(E) = \begin{cases} \emptyset & (0, 1 \notin E) \\ A & (0 \notin E,\ 1 \in E) \\ A^c & (0 \in E,\ 1 \notin E) \\ \Omega & (0, 1 \in E) \end{cases}$$

であることに注意する．$\Rightarrow$ については前命題より成り立ち，$\Leftarrow$ については

$$\mathrm{P}\,(A \cap B) = \mathrm{P}\,(A)\,\mathrm{P}\,(B)$$

ならば

$$\mathrm{P}\,(A^c \cap B) = \mathrm{P}\,(B) - \mathrm{P}\,(A)\,\mathrm{P}\,(B) = (1 - \mathrm{P}\,(A))\,\mathrm{P}\,(B) = \mathrm{P}\,(A^c)\,\mathrm{P}\,(B)$$

も成り立ち，A を Ω, $\emptyset$ にしても上の等式は成り立つから，前命題により X と $\mathcal{G}$ が独立であると判る． ∎

第 3 章

停止時刻

3.1　停止時刻

確率空間を $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ とする．集合 I によって確率過程の時点を表現し，以降でこれは $[0,\infty)$ や $\{0,,1,\cdots,n\}$ など実数の区間や高々可算集合を指すものと考え，I が高々可算集合の場合は離散位相，$\mathbb{R}$ の区間の場合は相対位相を考える．また扱う確率変数は全て実数値で考える．

定義 3.1.1 (フィルトレーション).　$\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族の部分系 $\{\,\mathcal{F}_\alpha\ ;\quad \alpha \in I\,\}$ がフィルトレーション (filtration) であるとは，任意の $\alpha,\beta \in I$ に対して $\alpha \leq \beta$ ならば $\mathcal{F}_\alpha \subset \mathcal{F}_\beta$ の関係をもつことで定義する．

定義 3.1.2 (停止時刻).　Ω 上の関数で次を満たすものを $((\mathcal{F}_\alpha)$-) 停止時刻 (stopping time) という:

$$\tau : \Omega \longrightarrow I \quad \text{s.t.} \quad \forall \alpha \in I,\ \{\tau \leq \alpha\} \in \mathcal{F}_\alpha.$$

注意 3.1.3 (停止時刻は可測).　上で定義した τ は可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(I)$ である．

証明.

I が $\mathbb{R}$ の区間である場合　任意の $\alpha \in I$ に対して $I_\alpha := (-\infty, \alpha) \cap I$ は I における (相対の) 開集合であり $\tau^{-1}(I_\alpha) = \{\tau \leq \alpha\} \in \mathcal{F}_\alpha \subset \mathcal{F}$ が成り立つ．つまり

$$\{\,I_\alpha\ ;\quad \alpha \in I\,\} \subset \left\{\,A \in \mathfrak{B}(I)\ ;\quad \tau^{-1}(A) \in \mathcal{F}\,\right\}$$

が成り立ち，左辺の I_α の形の全体は $\mathfrak{B}(I)$ を生成するから τ の可測性が証明された．

I が高々可算集合である場合　先ず $\alpha \in I$ に対して $\{\tau < \alpha\}$ が $\mathcal{F}_\alpha$ に属することを示す．α に対して直前の元 $\beta \in I$ が存在するか α が I の最小限である場合，前者なら $\{\tau < \alpha\} = \{\tau \leq \beta\}$ となり後者なら $\{\tau < \alpha\} = \emptyset$ となるからどちらも $\mathcal{F}_\alpha$ に属する．そうでない場合は $\alpha - 1/n < x < \alpha$ を満たす点列 $x_n \in I\ (n = 1,2,3,\cdots)$ を取れば，$\{\tau < \alpha\} = \cap_{n=1}^{\infty}\{\tau \leq \alpha - 1/n\}$ により $\{\tau < \alpha\} \in \mathcal{F}_\alpha$ が判る．以上の準備の下で任意の $\alpha \in I$ に対して $\tau^{-1}(\{\alpha\}) = \{\tau \leq \alpha\} - \{\tau < \alpha\} \in \mathcal{F}_\alpha$ が成り立ち，更に可算集合 I には離散位相が入っているから任意の $A \in \mathfrak{B}(I)$ は一点集合の可算和で

表現できて，$\tau^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ であると証明された．

$\blacksquare$

定義 3.1.4 (停止時刻の再定義). 今 τ の終集合は I であるが，$I \to \mathbb{R}$ の恒等写像 i を用いて $\tau^* := i \circ \tau$ とすれば，

$$\mathfrak{B}(I) = \{\, A \cap I \;;\quad A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \,\} = \left\{\, i^{-1}(A) \;;\quad A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \,\right\}$$

により (i が可測 $\mathfrak{B}(I)/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であるから) 合成写像 τ^* は可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ となる．以降はこの τ^* を停止時刻 τ と表記して扱うことにする．

定数関数は停止時刻となる．τ が Ω 上の定数関数なら $(\tau \leq \alpha)$ は空集合か全体集合にしかならないからである．また σ, τ を I に値を取る停止時刻とすると $\sigma \vee \tau$ と $\sigma \wedge \tau$ も停止時刻となる．実際

$$\begin{cases} \{\sigma \wedge \tau \leq \alpha\} = \{\sigma \leq \alpha\} \cup \{\tau \leq \alpha\}, \\ \{\sigma \vee \tau \leq \alpha\} = \{\sigma \leq \alpha\} \cap \{\tau \leq \alpha\} \end{cases} , (\forall \alpha \in I)$$

が成り立つからである．

定義 3.1.5 (停止時刻の前に決まっている事象系). τ を I に値を取る停止時刻とする．τ に対し次の集合系を定義する．

$$\mathcal{F}_\tau := \{\, A \in \mathcal{F} \;;\quad \{\tau \leq \alpha\} \cap A \in \mathcal{F}_\alpha,\ \forall \alpha \in I \,\}.$$

命題 3.1.6 (停止時刻の性質). $I \subset \mathbb{R}$ に値を取る停止時刻 σ, τ に対し次が成り立つ．

(1) $\mathcal{F}_\tau$ は σ-加法族である．

(2) 或る $\alpha \in I$ に対して $\tau(\omega) = \alpha$ $(\forall \omega \in \Omega)$ なら $\mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F}_\tau$.

(3) $\sigma(\omega) \leq \tau(\omega)$ $(\forall \omega \in \Omega)$ ならば $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$.

(4) $\mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau} = \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$.

(5) $\mathcal{F}_{\sigma \vee \tau} = \mathcal{F}_\sigma \vee \mathcal{F}_\tau$.

証明.

(1) 停止時刻の定義より $\Omega \in \mathcal{F}_\tau$ である．また $A \in \mathcal{F}_\tau$ なら $A^c \cap \{\tau \leq \alpha\} = \{\tau \leq \alpha\} - A \cap \{\tau \leq \alpha\} \in \mathcal{F}_\alpha$ より $A^c \in \mathcal{F}_\tau$ となる．可算個の $A_n \in \mathcal{F}_\tau$ については $\cup_{n=1}^\infty A_n \cap \{\tau \leq \alpha\} = \cup_{n=1}^\infty (A_n \cap \{\tau \leq \alpha\}) \in \mathcal{F}_\alpha$ により $\cup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{F}_\tau$ が成り立つ．

(2) $A \in \mathcal{F}_\alpha$ なら任意の $\beta \in I$ に対して

$$A \cap \{\tau \leq \beta\} = \begin{cases} A & \alpha \leq \beta \\ \emptyset & \alpha > \beta \end{cases}$$

が成り立つから，いずれの場合も $A \in \mathcal{F}_\beta$ となり $A \subset \mathcal{F}_\tau$ が成り立つ．逆に $A \in \mathcal{F}_\tau$ のとき，$A = A \cap \{\tau \leq \alpha\} \in \mathcal{F}_\alpha$ が成り立ち $\mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F}_\tau$ が示された．

(3) $A \in \mathcal{F}_\sigma$ なら任意の $\alpha \in I$ に対して

$$A \cap \{\tau \leq \alpha\} = A \cap \{\sigma \leq \alpha\} \cap \{\tau \leq \alpha\} \in \mathcal{F}_\alpha$$

が成り立つから $A \in \mathcal{F}_\tau$ となる.

(4) $\sigma \wedge \tau$ が停止時刻であることと (3) より $\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau} \subset \mathcal{F}_\sigma$ と $\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau} \subset \mathcal{F}_\tau$ が判る．また $A \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$ に対し

$$A \cap \{\sigma \wedge \tau \leq \alpha\} = (A \cap \{\sigma \leq \alpha\}) \cup (A \cap \{\tau \leq \alpha\}) \in \mathcal{F}_\alpha \quad (\forall \alpha \in I)$$

より $A \in \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}$ も成り立つ.

(5) 先ず $\sigma \vee \tau$ が停止時刻であることと (3) より $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}$ と $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}$ が判る．逆に $A \in \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}$ に対して

命題 3.1.7 (停止時刻と条件付き期待値). $X \in \mathrm{L}^1(\mathcal{F}, \mathrm{P})$ と I に値を取る停止時刻 σ, τ に対し以下が成立する.

(1) $\mathrm{E}\left[\mathbb{1}_{(\sigma>\tau)}X \,\middle|\, \mathcal{F}_\tau\right] = \mathrm{E}\left[\mathbb{1}_{(\sigma>\tau)}X \,\middle|\, \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}\right]$.

(2) $\mathrm{E}\left[\mathbb{1}_{(\sigma\geq\tau)}X \,\middle|\, \mathcal{F}_\tau\right] = \mathrm{E}\left[\mathbb{1}_{(\sigma\geq\tau)}X \,\middle|\, \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}\right]$.

(3) $\mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left[X \mid \mathcal{F}_\tau\right] \mid \mathcal{F}_\sigma\right] = \mathrm{E}\left[X \mid \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}\right]$.

証明.

第一段 $\mathbb{1}_{(\sigma>\tau)}$ が可測 $\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であることを示す．$A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ に対し

$$\mathbb{1}_{(\sigma>\tau)}^{-1}(A) = \begin{cases} \Omega & (0 \in A,\ 1 \in A) \\ (\sigma > \tau) & (0 \notin A,\ 1 \in A) \\ (\sigma > \tau)^c & (0 \in A,\ 1 \notin A) \\ \emptyset & (0 \notin A,\ 1 \notin A) \end{cases}$$

と表現できるから，示すことは任意の $\alpha \in I$ に対して

$$(\sigma > \tau) \cap (\sigma \wedge \tau \leq \alpha) \in \mathcal{F}_\alpha$$

が成立することである．これが示されれば

$$(\sigma > \tau)^c \cap (\sigma \wedge \tau \leq \alpha) = (\sigma \wedge \tau \leq \alpha) \backslash \left[(\sigma > \tau) \cap (\sigma \wedge \tau \leq \alpha)\right] \in \mathcal{F}_\alpha$$

も成り立ち，更に $(\sigma > \tau)^c = (\sigma \leq \tau)$ であることと σ, τ の対等性により $\mathbb{1}_{(\sigma\geq\tau)}$ もまた可測 $\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であることが判る．目的の式は次が成り立つことにより示される.

$$\begin{aligned} (\sigma > \tau) \cap (\sigma \wedge \tau \leq \alpha) &= (\sigma > \tau) \cap (\sigma \leq \alpha) + (\sigma > \tau) \cap (\sigma > \alpha) \cap (\tau \leq \alpha) \\ &= \left[\bigcup_{\substack{\beta \in \mathbb{Q} \cap I \\ \beta \leq \alpha}} (\sigma > \beta) \cap (\tau \leq \beta)\right] \cap (\sigma \leq \alpha) + (\sigma > \alpha) \cap (\tau \leq \alpha) \qquad (3.1) \\ &\in \mathcal{F}_\alpha. \end{aligned}$$

第二段　一般の実確率変数 Y と停止時刻 τ に対して

- Y が可測 $\mathcal{F}_\tau/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$　$\Leftrightarrow$　任意の $\alpha \in I$ に対し $Y\mathbb{1}_{\tau\leq\alpha}$ が可測 $\mathcal{F}_\alpha/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$

が成り立つことを示す．

$\Rightarrow$ について　Y の単関数近似列 $(Y_n)_{n=1}^\infty$ の一つ一つは $Y_n = \sum_{j=1}^{N_n} a_{j,n}\mathbb{1}_{A_{j,n}}$ $(A_{j,n} \in \mathcal{F}_\tau)$ の形で表現できる．$\alpha \in I$ と $A \in \mathcal{F}_\tau$ の指示関数 $\mathbb{1}_A$ に対し

$$\left(\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{(\tau\leq\alpha)}\right)^{-1}(E) = \begin{cases} \Omega & (0 \in E,\ 1 \in E) \\ A \cap (\tau \leq \alpha) & (0 \notin E,\ 1 \in E) \\ [A \cap (\tau \leq \alpha)]^c & (0 \in E,\ 1 \notin E) \\ \emptyset & (0 \notin E,\ 1 \notin E) \end{cases} \quad (\forall E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$$

となり，$A \cap (\tau \leq \alpha) \in \mathcal{F}_\alpha$ より $\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{(\tau\leq\alpha)}$ が可測 $\mathcal{F}_\alpha/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であると判る．$(Y_n)_{n=1}^\infty$ は Y に各点収束していくから Y も可測 $\mathcal{F}_\alpha/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ となり，$\alpha \in I$ の任意性から"$\Rightarrow$" が示された．

$\Leftarrow$ について　任意の $E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$\left\{\ \omega \in \Omega \quad \middle| \quad Y(\omega)\mathbb{1}_{(\tau\leq\alpha)}(\omega) \in E\ \right\} = \begin{cases} Y^{-1}(E) \cap (\tau \leq \alpha) & (0 \notin E) \\ Y^{-1}(E) \cap (\tau \leq \alpha) + (\tau \leq \alpha)^c & (0 \in E) \end{cases}$$

がいずれも $\mathcal{F}_\alpha$ に属する．特に下段について $(\tau \leq \alpha)^c \in \mathcal{F}_\alpha$ より $Y^{-1}(E) \cap (\tau \leq \alpha) \in \mathcal{F}_\alpha$ となるから，結局 $Y^{-1}(E) \cap (\tau \leq \alpha) \in \mathcal{F}_\alpha$ $(\forall E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ が成り立つ．$\alpha \in I$ の任意性から $Y^{-1}(E) \in \mathcal{F}_\tau$ $(\forall E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ が示された．

第三段　(1) の式を示す．第一段と性質 $\tilde{\mathrm{C}}5$ より

$$\mathrm{E}\left[\mathbb{1}_{(\sigma>\tau)}X \,\middle|\, \mathcal{F}_\tau\right] = \mathbb{1}_{(\sigma>\tau)}\,\mathrm{E}\left[X \mid \mathcal{F}_\tau\right]$$

が成り立つから，あとは右辺が (関数とみて) 可測 $\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であればよく，このためには第二段の結果より任意の $\alpha \in I$ に対して $\mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_\tau]\,\mathbb{1}_{(\sigma>\tau)}\mathbb{1}_{(\sigma\wedge\tau\leq\alpha)}$ が可測 $\mathcal{F}_\alpha/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であることを示せばよい．式 (3.1) を使えば

$$\mathbb{1}_{(\sigma>\tau)}\mathbb{1}_{(\sigma\wedge\tau\leq\alpha)} = \sup_{\substack{\beta\in\mathbb{Q}\cap I \\ \beta\leq\alpha}} \mathbb{1}_{(\sigma>\beta)}\mathbb{1}_{(\tau\leq\beta)}\mathbb{1}_{(\sigma\leq\alpha)} + \mathbb{1}_{(\sigma>\alpha)}\mathbb{1}_{(\tau\leq\alpha)}$$

が成り立つ．$\beta \leq \alpha$ ならば，$\mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_\tau]$ が可測 $\mathcal{F}_\tau/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であることと第二段の結果より $\mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_\tau]\,\mathbb{1}_{(\tau\leq\beta)}$ が可測 $\mathcal{F}_\beta/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ すなわち可測 $\mathcal{F}_\alpha/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ となるから，これで $\mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_\tau]\,\mathbb{1}_{(\sigma>\tau)}\mathbb{1}_{(\sigma\wedge\tau\leq\alpha)}$ が可測 $\mathcal{F}_\alpha/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であると判り $\mathbb{1}_{(\sigma>\tau)}\,\mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_\tau]$ が可測 $\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であることが示された．以上で

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left[\mathbb{1}_{(\sigma>\tau)}X \,\middle|\, \mathcal{F}_\tau\right] \,\middle|\, \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}\right] = \mathrm{E}\left[\mathbb{1}_{(\sigma>\tau)}\,\mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_\tau] \,\middle|\, \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}\right] = \mathbb{1}_{(\sigma>\tau)}\,\mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_\tau] = \mathrm{E}\left[\mathbb{1}_{(\sigma>\tau)}X \,\middle|\, \mathcal{F}_\tau\right]$$

が成り立ち，

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left[\mathbb{1}_{(\sigma>\tau)}X \,\middle|\, \mathcal{F}_\tau\right] \,\middle|\, \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}\right] = \mathbb{1}_{(\sigma>\tau)}\,\mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}] = \mathrm{E}\left[\mathbb{1}_{(\sigma>\tau)}X \,\middle|\, \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}\right]$$

と併せて (1) の式を得る．(2) の式も以上と同じ理由で成り立つ．

第四段　(3) の式を示す．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left[X \mid \mathcal{F}_\tau\right] \mid \mathcal{F}_\sigma\right] &= \mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left[X \mid \mathcal{F}_\tau\right] 1\!\!1_{(\sigma>\tau)} \,\middle|\, \mathcal{F}_\sigma\right] + \mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left[X \mid \mathcal{F}_\tau\right] 1\!\!1_{(\sigma\leq\tau)} \,\middle|\, \mathcal{F}_\sigma\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left[X \mid \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}\right] 1\!\!1_{(\sigma>\tau)} \,\middle|\, \mathcal{F}_\sigma\right] + \mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left[X \mid \mathcal{F}_\tau\right] 1\!\!1_{(\sigma\leq\tau)} \,\middle|\, \mathcal{F}_\sigma\right] && (\because (1)) \\
&= \mathrm{E}\left[X \mid \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}\right] 1\!\!1_{(\sigma>\tau)} + \mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left[X \mid \mathcal{F}_\tau\right] 1\!\!1_{(\sigma\leq\tau)} \,\middle|\, \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}\right] && (\because (2)) \\
&= \mathrm{E}\left[X \mid \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}\right] 1\!\!1_{(\sigma>\tau)} + \mathrm{E}\left[X \mid \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}\right] 1\!\!1_{(\sigma\leq\tau)} \\
&= \mathrm{E}\left[X \mid \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}\right].
\end{aligned}
$$

(2) 式を使った箇所では X を $\mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_\tau]$ に置き換え τ と σ を入れ替えて適用した．

∎

定理 3.1.8 (停止時刻との合成写像の可測性).　$I = [0, T]$，フィルトレーションを $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$，τ を停止時刻とし，M を $I \times \Omega$ 上の $\mathbb{R}$ 値関数とする．全ての $\omega \in \Omega$ に対し $I \ni t \longmapsto M(t, \omega)$ が右連続でかつ $(\mathcal{F}_t)$-適合ならば，写像 $\omega \longmapsto M(\tau(\omega), \omega)$ は可測 $\mathcal{F}_\tau/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ となる．

証明.　任意に $t \in I$ を取り $t_j^n := jt/2^n$ $(j = 0, 1, \cdots, 2^n,\ n = 1, 2, \cdots)$ とおくと，右連続性により任意の $s \in [0, t]$ に対して

$$
M(s, \omega) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{2^n} M_{t_j^n}(\omega) 1\!\!1_{(t_{j-1}^n, t_j^n]}(s) + M_0(\omega) 1\!\!1_{\{0\}}(s) \quad (\omega \in \Omega) \tag{3.2}
$$

が成り立つ．右辺は各 n で可測 $\mathfrak{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であるから M も可測 $\mathfrak{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ となる．(t の任意性から M は $(\mathcal{F}_t)$-発展的可測である．) 一方停止時刻 τ について，$\tau \wedge t$ が可測 $\mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であるから

$$
\Omega \ni \omega \longmapsto (\tau(\omega) \wedge t, \omega) \in [0, t] \times \Omega
$$

は可測 $\mathcal{F}_t/\mathfrak{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t$ である．従って合成写像

$$
\Omega \ni \omega \longmapsto M(\tau(\omega) \wedge t, \omega) \in \mathbb{R}
$$

は可測 $\mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ となる．任意の $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$
\{\, \omega \in \Omega\ ;\quad M(\tau(\omega), \omega) \in A \,\} \cap \{\tau \leq t\} = \{\, \omega \in \Omega\ ;\quad M(\tau(\omega) \wedge t, \omega) \in A \,\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t
$$

が成り立つから，写像 $\omega \longmapsto M(\tau(\omega), \omega)$ は可測 $\mathcal{F}_\tau/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ である[*1]．

∎

[*1] 写像 $\omega \longmapsto M(\tau(\omega), \omega)$ が可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ となっていないことにはこの結論が従わない．この点を確認すれば，式 (3.2) より M が可測 $\mathfrak{B}(I) \times \mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であることは慥かであるから，$\omega \longmapsto (\tau(\omega), \omega)$ が可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(I) \times \mathcal{F}$ であることと併せて写像 $\omega \longmapsto M(\tau(\omega), \omega)$ が可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であることが判明する．

定理 3.1.9 (閉集合と停止時刻). $I = [0,T] \subset \mathbb{R}$，$(E,\rho)$ を距離空間，$(X_t)_{t\in I}$ を E 値確率変数の族とし，$\mathcal{F}_0$ が μ-零集合を全て含んでいると仮定する．μ-零集合 N を除いて $I \ni t \longmapsto X_t(\omega)$ が右連続で，かつ $(X_t)_{t\in I}$ が $(\mathcal{F}_t)$-適合であるなら，任意の閉集合 $F \subset E$ に対し

$$\tau(\omega) \coloneqq \begin{cases} 0 & (\omega \in N) \\ \inf\{\, t \in I \;;\quad X_t(\omega) \in F \,\} \wedge T & (\omega \in \Omega \backslash N)^{*2} \end{cases}$$

として $\tau : \Omega \to \mathbb{R}$ を定めれば τ は停止時刻となる．また N' $(N \subset N')$ を除いて $I \ni t \longmapsto X_t(\omega)$ が連続であるなら

$$X_{t\wedge\tau(\omega)}(\omega) \in \{X_0(\omega)\} \cup F^{ic} \quad (\forall \omega \in N',\ t \in I)$$

が成り立つ．ただし F^i は F の内核を表し F^{ic} は F^i の補集合を表す．

確率空間が完備である場合は

$$\tau(\omega) \coloneqq \inf\{\, t \in I \;;\quad X_t(\omega) \in F \,\} \wedge T \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

として τ は停止時刻となる．実際任意の $t \in I$ に対して，

$$\{\tau \le t\} = \{\tau \le t\} \cap N + \{\, \omega \in \Omega\backslash N \;;\quad \tau(\omega) \le t \,\}$$

の右辺第一項は完備性より μ-零集合，第二項は以下で $\mathcal{F}_t$ に属すると証明される．

証明.

$$D_t(\omega) \coloneqq \begin{cases} 1 & (\omega \in N) \\ \inf\{\, \rho(X_r(\omega), F) \;;\quad r \in ([0,t] \cap \mathbb{Q}) \cup \{t\} \,\} & (\omega \in \Omega \backslash N) \end{cases}$$

とおけば[*3]，D_t は可測 $\mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ となる[*4]．ここでは任意の $t \in [0,T)$ に対して

$$\{\, \omega \in \Omega\backslash N \;;\quad \tau(\omega) \le t \,\} = \{\, \omega \in \Omega\backslash N \;;\quad D_t(\omega) = 0 \,\} \tag{3.3}$$

[*2] $\{\, t \in I \;;\quad X_t(\omega) \in F \,\} = \emptyset$ の場合は

$$\inf\{\, t \in I \;;\quad X_t(\omega) \in F \,\} = \infty$$

と考え，$\tau(\omega) = T$ とする．以後本稿でこのように表記する場合も同様に対処する．

[*3] $\rho(X_r(\omega), F) = \inf_{y\in F} \rho(X_r(\omega), y)$ である．

[*4] 写像 $E \ni x \longmapsto \rho(x, F) \in \mathbb{R}$ は連続であるから，合成写像

$$\Omega \ni \omega \longmapsto \rho(X_t(\omega), F)$$

は可測 $\mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ となる．任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対し

$$\left\{ \inf\{\, \rho(X_r, F) \;;\quad r \in ([0,t] \cap \mathbb{Q}) \cup \{t\} \,\} \ge \lambda \right\} = \bigcap_{r \in ([0,t]\cap\mathbb{Q})\cup\{t\}} \{\rho(X_r, F) \ge \lambda\}$$

となり右辺の各集合は $\in \mathcal{F}_t$ であるから写像 $\Omega \ni \omega \longmapsto \inf\{\, \rho(X_r(\omega), F) \;;\quad r \in ([0,t] \cap \mathbb{Q}) \cup \{t\} \,\}$ も可測 $\mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ となる．任意の $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ に対し

$$D_t^{-1}(A) = \begin{cases} N \cup \{\inf\{\, \rho(X_r, F) \;;\quad r \in ([0,t] \cap \mathbb{Q}) \cup \{t\} \,\} \in A\} & (1 \in A) \\ \{\inf\{\, \rho(X_r, F) \;;\quad r \in ([0,t] \cap \mathbb{Q}) \cup \{t\} \,\} \in A\} & (1 \notin A) \end{cases}$$

となるが，$N \in \mathcal{F}_0$ であるから D_t もまた可測 $\mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ となる．

が成り立つことを示す．実際これが示されれば任意の $t \in I$ に対し

$$\{\tau \leq t\} = \begin{cases} \Omega & (t = T) \\ N + \{\, \omega \in \Omega \backslash N \ ; \quad D_t(\omega) = 0 \,\} & (t < T) \end{cases}$$

となるから τ は停止時刻となる．式 (3.3) が成立することを示すには包含関係 $\subset, \supset$ のそれぞれを満たすことを確認すればよい．

$\subset$ について　任意に $t \in [0, T)$ を固定する．$\tau(\omega) \leq t$ となる $\omega \in \Omega \backslash N$ に対し $s := \tau(\omega)$ とおくと $X_s(\omega) \in F$ となる．もし $X_s(\omega) \notin F$ であるとすれば，F が閉集合であることと $s \longmapsto X_s(\omega)$ の右連続性から或る $\delta > 0$ が存在し，任意の $0 < h < \delta$ に対して $X_{s+h}(\omega) \notin F$ となり $s = \tau(\omega)$ であることに矛盾する．今 $\rho(X_s(\omega), F) = 0$ が示されたが，$D_t(\omega) = 0$ も成り立っている．実際もし $D_t(\omega) > 0$ であるとすれば，$a := D_t(\omega)$ に対して

$$\rho(X_s(\omega), X_r(\omega)) < a/2$$

を満たす $r \in ((s, t] \cap \mathbb{Q}) \cup \{t\}$ が存在するから

$$\rho(X_s(\omega), F) \geq \rho(X_r(\omega), F) - \rho(X_s(\omega), X_r(\omega)) > a - a/2 = a/2$$

となり矛盾が生じてしまう．

$\supset$ について　任意に $t \in [0, T)$ を固定する．$D_t(\omega) = 0$ となる $\omega \in \Omega \backslash N$ について

$$\rho(X_{s_n}(\omega), F) < 1/n$$

となるように $s_n \in ([0, t] \cap \mathbb{Q}) \cup \{t\}$ を取ることができる．$(s_n)_{n=1}^{\infty}$ は $[0, t]$ に集積点 s を持ち，F が閉であるから $X_s(\omega) \in F$ となる．従って $\tau(\omega) \leq s \leq t$ が成り立つ．

以上で τ が停止時刻であることが示されたから，次に定理の後半の主張を示す．N' を除いて $I \ni t \longmapsto X_t(\omega)$ が連続である場合，$\tau(\omega) = 0$ なら $X_0(\omega) \in F$ である．$\tau(\omega) > 0$ のとき，$t < \tau(\omega)$ $(\omega \in \Omega \backslash N')$ に対しては $X_t(\omega) \in F^c$ が成り立っているから，示せばよいのは

$$X_{\tau(\omega)}(\omega) \in F^{ic} \tag{3.4}$$

が成り立つことである．$s = \tau(\omega)$ とおく．もし $X_s(\omega) \in F^i$ であるとすれば連続性から或る δ が存在し，$0 < h < \delta$ を満たす任意の h に対し

$$X_{s-h}(\omega) \in F^i$$

となるが，

$$s > s - h \geq \inf \{\, t \in I \ ; \quad X_t(\omega) \in F \,\}$$

が成り立ち矛盾が生じるから (3.4) が従う．　∎

第 4 章

マルチンゲール

4.1　Doob の不等式・任意抽出定理

I を $[0,\infty)$ の部分集合として基礎に置フィルター付き確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},\mu,(\mathcal{F}_t)_{t\in I})$ と表す．

定義 4.1.1 (マルチンゲール).　フィルター付き確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},\mu,(\mathcal{F}_t)_{t\in I})$ 上の実確率変数の族 $(M_t)_{t\in I}\subset\mathscr{L}^p(\mathcal{F},\mu)$ $(p\geq 1)$ が次の四条件を満たすとき，これを L^p-劣マルチンゲール (L^p-submartingale) という．

(M.1)　$\forall t\in I$ に対し M_t は可測 $\mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ である．

(M.2)　任意の $s\leq t$ $(s,t\in I)$ に対し $\mathrm{E}[M_t\mid\mathcal{F}_s]\geq M_s$ (同値類に対する順序関係) が成り立つ．

(M.3)　各 $\omega\in\Omega$ において，任意の $t\in I$ で左極限が存在する：$\exists\lim_{s\uparrow t}M_s(\omega)\in\mathbb{R}$.

(M.4)　各 $\omega\in\Omega$ において，任意の $t\in I$ で右連続である：$M_t(\omega)=\lim_{s\downarrow t}M_s(\omega)$.

条件 (M.2) の不等号が逆向き”$\leq$” の場合，$(M_t)_{t\in I}$ を L^p-優マルチンゲール (L^p-supermartingale) といい，劣かつ優マルチンゲールであるものをマルチンゲールという．

τ を停止時刻，$(M_t)_{t\in I}$ を実確率変数の族とする．$\tau(\Omega)$ が高々可算集合である場合，t に関する停止時刻との合成関数は

$$M_\tau=\sum_{t\in\tau(\Omega)}M_t\mathbb{1}_{\{\tau=t\}}$$

と表される．全ての $t\in\tau(\Omega)$ について M_t が可測 $\mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であるなら M_τ は可測 $\mathcal{F}_\tau/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ である．なぜならば任意の $t\in I$ と $A\in\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$\{M_\tau\in A\}\cap\{\tau\leq t\}=\bigcup_{\substack{s\in\tau(\Omega)\\ s\leq t}}\{M_s\in A\}\cap\{\tau=s\}\in\mathcal{F}_t$$

が成り立つからである．M_τ の可測性を確認したところで次の定理を証明する．

定理 4.1.2 (任意抽出定理 (1)).　$I=\{0,1,\cdots,n\}$ とし，実確率変数の族 $(M_t)_{t\in I}$ が L^p-劣マルチンゲールであるとする．このとき I に値を取る停止時刻 σ と τ について次が成立する:

$$\mathrm{E}[M_\tau\mid\mathcal{F}_\sigma]\geq M_{\sigma\wedge\tau}. \tag{4.1}$$

$(M_t)_{t\in I}$ が L^p-マルチンゲールなら (4.1) は等号で成立する．

証明.

$\sigma \leq \tau$ の場合　$F_t \coloneqq \mathbb{1}_{\{\sigma < t \leq \tau\}}\ (t \in I)$ とおくと，

$$\{\sigma < t \leq \tau\} = \{\sigma < t\} \cap \{t \leq \tau\} = \{\sigma \leq t-1\} \cap \{\tau \leq t-1\}^c$$

より F_t は可測 $\mathcal{F}_{t-1}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ となる．

$$N_0 = 0, \quad N_t \coloneqq \sum_{s=0}^{t-1} F_{s+1}(M_{s+1} - M_s) \quad (t \in I \backslash \{0\})$$

として N を定めれば，N もまた L^p-劣マルチンゲールとなる．実際 N_t の右辺の最終項 $F_t(M_t - M_{t-1})$ が可測 $\mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であるから N_t も可測 $\mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であり，また $M_t\ (t \in I)$ が p 乗可積分であるからその有限個の結合で表現される $N_t\ (t \in I)$ もまた p 乗可積分となる．更に $s \leq t\ (s, t \in I)$ に対して

$$N_t - N_s = \sum_{u=s}^{t-1} F_{u+1}(M_{u+1} - M_u)$$

となるから，命題 2.2.4 の $\tilde{\mathrm{C}}5$，$\tilde{\mathrm{C}}6$，そして $(M_t)_{t \in I}$ の劣マルチンゲール性より

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[N_t - N_s \mid \mathcal{F}_s] &= \sum_{u=s}^{t-1} \mathrm{E}[F_{u+1}(M_{u+1} - M_u) \mid \mathcal{F}_s] \\ &= \sum_{u=s}^{t-1} \mathrm{E}[F_{u+1}\,\mathrm{E}[M_{u+1} - M_u \mid \mathcal{F}_u] \mid \mathcal{F}_s] \geq 0 \text{ [*1]} \end{aligned}$$

が成り立ち $(N_t)_{t \in I}$ の劣マルチンゲール性が従う．

$$N_n = \sum_{s=\sigma}^{\tau-1}(M_{s+1} - M_s) = M_\tau - M_\sigma$$

と表現すれば，$\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ として

$$\mathrm{E}[M_\tau - M_\sigma] = \mathrm{E}[N_n] = \mathrm{E}[\mathrm{E}[N_n \mid \mathcal{F}_0] \mid \mathcal{G}] \geq \mathrm{E}[N_0] = 0 \tag{4.2}$$

が成り立つ．特に任意の $E \in \mathcal{F}_\sigma$ に対して

$$\sigma_E(\omega) \coloneqq \begin{cases} \sigma(\omega) & (\omega \in E) \\ n & (\omega \in \Omega \backslash E) \end{cases}, \quad \tau_E(\omega) \coloneqq \begin{cases} \tau(\omega) & (\omega \in E) \\ n & (\omega \in \Omega \backslash E) \end{cases}$$

と定めれば σ_E, τ_E も停止時刻となり[*2]，$\sigma_E \leq \tau_E$ を満たすから (4.2) より

$$\int_\Omega M(\tau_E(\omega), \omega)\, \mu(d\omega) \geq \int_\Omega M(\sigma_E(\omega), \omega)\, \mu(d\omega)$$

[*1] 順序は関数類に対する順序であり，0 は関数類の零元を表す．

[*2] 任意の $t \in I$ に対し

$$\{\tau_E \leq t\} = \{\tau_E \leq t\} \cap E + \{\tau_E \leq t\} \cap (\Omega \backslash E) = \begin{cases} \{\tau \leq t\} \cap E & (t < n) \\ \Omega & (t = n) \end{cases}$$

が成り立つ．$\mathcal{F}_\sigma$ の定義より $\{\tau \leq t\} \cap E \in \mathcal{F}_t$ である．

が成り立つ．τ_E の定め方より

$$\int_\Omega M(\tau_E(\omega),\omega)\,\mu(d\omega) = \int_E M(\tau(\omega),\omega)\,\mu(d\omega) + \int_{\Omega\setminus E} M(n,\omega)\,\mu(d\omega)$$

とでき，σ_E についても同じ表現ができるから

$$\int_E M(\tau(\omega),\omega)\,\mu(d\omega) \geq \int_E M(\sigma(\omega),\omega)\,\mu(d\omega)$$

が従う．よって命題 2.2.4 の $\tilde{\mathrm{C}}$2 より

$$\int_E \mathrm{E}\left[M_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma\right](\omega)\,\mu(d\omega) \geq \int_E M(\sigma(\omega),\omega)\,\mu(d\omega)$$

が成り立ち，$E \in \mathcal{F}_\sigma$ の任意性により

$$\mathrm{E}\left[M_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma\right] \geq M_\sigma = M_{\sigma\wedge\tau}$$

を得る．

一般の場合　σ, τ を一般の停止時刻とする．命題 3.1.7 より

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[M_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma\right] &= \mathrm{E}\left[M_\tau \mathbb{1}_{\{\tau>\sigma\}} \,\middle|\, \mathcal{F}_\sigma\right] + \mathrm{E}\left[M_\tau \mathbb{1}_{\{\tau\leq\sigma\}} \,\middle|\, \mathcal{F}_\sigma\right] \\ &= \mathrm{E}\left[M_{\tau\vee\sigma} \mathbb{1}_{\{\tau>\sigma\}} \,\middle|\, \mathcal{F}_\sigma\right] + \mathrm{E}\left[M_{\tau\wedge\sigma} \mathbb{1}_{\{\tau\leq\sigma\}} \,\middle|\, \mathcal{F}_\sigma\right] \\ &\geq M_\sigma \mathbb{1}_{\{\tau>\sigma\}} + M_{\tau\wedge\sigma} \mathbb{1}_{\{\tau\leq\sigma\}} = M_{\tau\wedge\sigma}\end{aligned}$$

が成り立つ．

∎

定理 4.1.3 (Doob の不等式 (1)).　$I = \{0, 1, \cdots, n\}$，$(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ をフィルトレーション，$(M_t)_{t\in I}$ を L^1-劣マルチンゲールとし，$M^* := \max_{t\in I} M_t$ とおく．$(M_t)_{t\in I}$ が非負値なら次が成り立つ:

(1)　任意の $\lambda > 0$ に対して

$$\mu(M^* \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}\int_{\{M^*\geq\lambda\}} M_n(\omega)\,\mu(d\omega) \leq \frac{1}{\lambda}\left\|M_n\right\|_{\mathscr{L}^1}.$$

(2)　任意の $p > 1$ に対して M_t $(\forall t \in I)$ が p 乗可積分なら

$$\left\|M^*\right\|_{\mathscr{L}^p} \leq \frac{p}{p-1}\left\|M_n\right\|_{\mathscr{L}^p}.$$

証明.

$$\tau(\omega) := \min\{\, i \in I \;;\quad M_i(\omega) \geq \lambda \,\} \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

とおけば τ は I に値を取る停止時刻となる．ただし全ての $i \in I$ で $M_i(\omega) < \lambda$ となるような ω につ

いては $\tau(\omega)=n$ とする．実際停止時刻となることは

$$\{\,\tau=i\,\}=\bigcap_{j=0}^{i-1}\Big\{\,M_j<\lambda\,\Big\}\cap\{\,M_i\geq\lambda\,\}\in\mathcal{F}_i,\quad (i=0,1,\cdots,n-1),$$

$$\{\,\tau=n\,\}=\bigcap_{j=0}^{n-1}\Big\{\,M_j<\lambda\,\Big\}\in\mathcal{F}_n$$

により判る．任意抽出定理より

$$\mathrm{E}\,[M_n\,|\,\mathcal{F}_\tau]\geq M_{n\wedge\tau}=M_\tau\quad(\because\ \tau\leq n)$$

が成り立つから，期待値を取って

$$\begin{aligned}\int_\Omega M_n(\omega)\,\mu(d\omega)&\geq\int_\Omega M_\tau(\omega)\,\mu(d\omega)^{*3}\\&=\int_{\{\,M^*\geq\lambda\,\}}M_\tau(\omega)\,\mu(d\omega)+\int_{\{\,M^*<\lambda\,\}}M_\tau(\omega)\,\mu(d\omega)\\&\geq\lambda\mu(M^*\geq\lambda)^{*4}+\int_{\{\,M^*<\lambda\,\}}M_n(\omega)\,\mu(d\omega)\qquad(\because\ M^*(\omega)<\lambda\text{ ならば }\tau(\omega)=n\text{ である．})\end{aligned}$$

が成り立つ． 従って

$$\lambda\mu(M^*\geq\lambda)\leq\int_{\{\,M^*\geq\lambda\,\}}M_n(\omega)\,\mu(d\omega)\leq\|\,M_n\,\|_{\mathscr{L}^1}\tag{4.3}$$

を得る．これは

$$\mu(M^*>\lambda)\leq\int_{\{\,M^*>\lambda\,\}}M_n(\omega)\,\mu(d\omega)\tag{4.4}$$

としても成り立つ[*5]．次に (2) を示す．$K\in\mathbb{N}$ とする．

$$\begin{aligned}\|\,M^*\wedge K\,\|_{\mathscr{L}^p}^p&=\int_\Omega|M^*(\omega)\wedge K|^p\ \mu(d\omega)\\&=p\int_\Omega\int_0^{M^*(\omega)\wedge K}t^{p-1}\ dt\,\mu(d\omega)\\&=p\int_\Omega\int_0^K t^{p-1}\,\mathbb{1}_{\{M^*(\omega)>t\}}\ dt\,\mu(d\omega)^{*6}\end{aligned}$$

[*4] 性質 $\tilde{\mathrm{C}}2$ より

$$\int_\Omega M_n(\omega)\ \mathrm{P}\,(d\omega)=\int_\Omega\mathrm{E}\,[M_n\,|\,\mathcal{F}_\tau]\,(\omega)\,\mu(d\omega)\geq\int_\Omega M_\tau(\omega)\,\mu(d\omega)$$

が成り立つ．

[*4] 最後の不等式は次の理由で成り立つ:

$$M_\tau\,\mathbb{1}_{\{M^*\geq\lambda\}}=\sum_{i=0}^{n-1}M_i\,\mathbb{1}_{\{\tau=i\}}+M_n\,\mathbb{1}_{\{\tau=n\}}\,\mathbb{1}_{\{M^*\geq\lambda\}}\geq\lambda.$$

[*5] 式 (4.3) により任意の $n\in\mathbb{N}$ で

$$\mu(M^*\geq\lambda+1/n)\leq\int_{\{\,M^*\geq\lambda+1/n\,\}}M_n(\omega)\,\mu(d\omega)$$

が成り立っているから，$n\longrightarrow\infty$ とすればよい．

$$
\begin{aligned}
&= p \int_0^K t^{p-1} \int_\Omega \mathbb{1}_{\{M^*(\omega)>t\}}\, \mu(d\omega)\, dt && (\because \text{ Fubini の定理より}) \\
&= p \int_0^K t^{p-1} \mu(M^* > t)\, dt \\
&\leq p \int_0^K t^{p-2} \int_{\{\, M^*>t \,\}} M_n(\omega)\, \mu(d\omega) && (\because \text{ 式 (4.4) より}) \\
&= p \int_\Omega M_n(\omega) \int_0^K t^{p-2}\, \mathbb{1}_{\{M^*(\omega)>t\}}\, dt\, \mu(d\omega) \\
&= \frac{p}{p-1} \int_\Omega M_n(\omega)\, |M^*(\omega) \wedge K|^{p-1}\ \mu(d\omega) \\
&\leq \frac{p}{p-1} \|\, M_n \,\|_{\mathscr{L}^p} \|\, M^*(\omega) \wedge K \,\|_{\mathscr{L}^p}^{p-1}
\end{aligned}
$$

となるから,

$$
\|\, M^* \wedge K \,\|_{\mathscr{L}^p} \leq \frac{p}{p-1} \|\, M_n \,\|_{\mathscr{L}^p}
$$

が成り立つ．$K \longrightarrow \infty$ として単調収束定理より

$$
\|\, M^* \,\|_{\mathscr{L}^p} \leq \frac{p}{p-1} \|\, M_n \,\|_{\mathscr{L}^p}
$$

を得る． ∎

$I = [0, T] \subset \mathbb{R}\ (T > 0)$ を考える．$t \longmapsto M_t$ は右連続であるから $\sup_{t \in I} M_t$ は確率変数となる．これは

$$
\sup_{t \in I} M_t(\omega) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \max_{j=0,1,\cdots,2^n} M_{\frac{j}{2^n}T}(\omega) \quad (\forall \omega \in \Omega)
$$

が成り立つからである．実際各点 $\omega \in \Omega$ で

$$
\alpha = \alpha(\omega) \coloneqq \sup_{t \in I} M_t(\omega), \quad \beta = \beta(\omega) \coloneqq \sup_{n \in \mathbb{N}} \max_{j=0,1,\cdots,2^n} M_{\frac{j}{2^n}T}(\omega)
$$

とおけば，α の方が上限を取る範囲が広いから $\alpha \geq \beta$ は成り立つ．だがもし $\alpha > \beta$ とすれば，或る $s \in I$ が存在して

$$
M_s(\omega) > \frac{\alpha + \beta}{2}
$$

---

*6 写像 $[0, K) \times \Omega \ni (t, \omega) \longmapsto \mathbb{1}_{\{M^*(\omega)>t\}}$ は可測 $\mathfrak{B}([0, K)) \times \mathcal{F} / \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ である．実際,

$$
f(t, \omega) \coloneqq \mathbb{1}_{\{M^*(\omega)>t\}}, \quad f_n(t, \omega) \coloneqq \mathbb{1}_{\{M^*(\omega)>(j+1)/2^n\}} \quad \left(t \in \left[\tfrac{j}{2^n}, \tfrac{j+1}{2^n}\right),\ j = 0, 1, \cdots, K2^n - 1\right)
$$

とおけば，任意の $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$
f_n^{-1}(A) = \begin{cases} \emptyset & (0 \notin A,\ 1 \notin A) \\ \bigcup_{j=0}^{K2^n-1} \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right) \times \left\{\, \omega \;;\quad M^*(\omega) > \frac{j+1}{2^n} \,\right\} & (0 \notin A,\ 1 \in A) \\ \bigcup_{j=0}^{K2^n-1} \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right) \times \left\{\, \omega \;;\quad M^*(\omega) \leq \frac{j+1}{2^n} \,\right\} & (0 \in A,\ 1 \notin A) \\ [0, n] \times \Omega & (0 \in A,\ 1 \in A) \end{cases}
$$

が成り立つから f_n は可測 $\mathfrak{B}([0, K)) \times \mathcal{F} / \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ である．また各点 $(t, \omega) \in [0, K) \times \Omega$ において

$$
f(t, \omega) - f_n(t, \omega) = \mathbb{1}_{\{t<M^*(\omega)\leq(j+1)/2^n\}} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)
$$

となり f_n は f に各点収束するから，可測性は保存され f も可測 $\mathfrak{B}([0, K)) \times \mathcal{F} / \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ となる．t^{p-1} も 2 変数関数として $g(t, \omega) \coloneqq t^{p-1}\mathbb{1}_\Omega(\omega)$ と見做せば可測 $\mathfrak{B}([0, K)) \times \mathcal{F} / \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ で，よって gf に対し Fubini の定理を適用できる．

を満たすから，右連続性により s の近傍から $jT/2^n$ の形の点を取ることができて

$$(\beta \geq)\ M_{\frac{j}{2^n}T}(\omega) > \frac{\alpha+\beta}{2}$$

となりこれは矛盾である．

定理 4.1.4 (Doob の不等式 (2)). $I = [0,T]$，$(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ をフィルトレーション，$(M_t)_{t\in I}$ を L^p-劣マルチンゲールとし，$M^* := \sup_{t\in I} M_t$ とおく．$(M_t)_{t\in I}$ が非負値なら次が成り立つ:

(1) 任意の $\lambda > 0$ に対して

$$\mu(M^* \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^p} \| M_T \|^p_{\mathscr{L}^p}.$$

(2) $p > 1$ なら

$$\| M^* \|_{\mathscr{L}^p} \leq \frac{p}{p-1} \| M_T \|_{\mathscr{L}^p}.$$

証明.

$$D_n := \left\{ \tfrac{j}{2^n}T \ ; \quad j = 0, 1, \cdots, 2^n \right\}$$

とおく．Jensen の不等式より，任意の $0 \leq s < t \leq T$ に対して

$$\mathrm{E}\left[M_t^p \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right] \geq \mathrm{E}\left[M_t \mid \mathcal{F}_s\right]^p \leq M_s^p$$

が成り立つ．従って $(M_t^p)_{t\in I}$ は L^1-劣マルチンゲールであり，前定理の結果を使えば

$$\mu(\max_{r\in D_n} M_r^p \geq \lambda^p) \leq \frac{1}{\lambda^p} \| M_T \|^p_{\mathscr{L}^p}$$

が任意の $n \in \mathbb{N}$ で成り立つ．非負性から $\max_{r\in D_n} M_r^p = (\max_{r\in D_n} M_r)^p$ となり

$$\mu(\max_{r\in D_n} M_r \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^p} \| M_T \|^p_{\mathscr{L}^p}$$

と書き直すことができて，

$$\mu(M^* \geq \lambda) = \mu(\sup_{n\in\mathbb{N}} \max_{r\in D_n} M_r \geq \lambda) = \lim_{n\to\infty} \mu(\max_{r\in D_n} M_r \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^p} \| M_T \|^p_{\mathscr{L}^p}$$

が成り立つ．同じく前定理[*7]を適用し，

$$\left\| \max_{r\in D_n} M_r \right\|_{\mathscr{L}^p} \leq \frac{p}{p-1} \| M_T \|_{\mathscr{L}^p}$$

を保って $n \longrightarrow \infty$ とすれば単調収束定理より (2) を得る． ■

[*7] L^p-劣マルチンゲールなら L^1-劣マルチンゲールであるから前定理の結果を適用できる．

定理 4.1.5 (任意抽出定理 (2)). $I = [0, T]$，$p > 1$，$(M_t)_{t \in I}$ を L^p-マルチンゲールとする．このとき I に値を取る任意の停止時刻 τ, σ に対し次が成り立つ:

$$\mathrm{E}\,[M_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma] = M_{\tau \wedge \sigma}.$$

証明.

$$\tau_n \coloneqq \min\left\{ T, \frac{1 + [2^n \tau]}{2^n} \right\}, \quad \sigma_n \coloneqq \min\left\{ T, \frac{1 + [2^n \sigma]}{2^n} \right\}, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

とおく．このとき τ_n, σ_n は停止時刻で $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_{\sigma_n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が成り立つ．実際任意の $0 \leq t < T$ に対して

$$\{\tau_n \leq t\} = \{1 + [2^n \tau] \leq 2^n t\} = \{\tau_n \leq [2^n t]/2^n\} \in \mathcal{F}_t$$

となり，$t = T$ の時も

$$\{\tau_n \leq T\} = \{1 + [2^n \tau] > 2^n T\} + \{1 + [2^n \tau] \leq 2^n T\} \in \mathcal{F}_T$$

が成り立つから τ_n は停止時刻[*8]で，

$$2^n \sigma_n \leq 1 + [2^n \sigma] \Rightarrow \sigma < \sigma_n$$

により $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_{\sigma_n}$ となる．前定理により任意の $A \in \mathcal{F}_\sigma$ に対して

$$\int_A M_{\tau_n(\omega)}(\omega)\,\mu(d\omega) = \int_A M_{\tau_n(\omega) \wedge \sigma_n(\omega)}(\omega)\,\mu(d\omega)$$

が成り立ち，$(|M_t|)_{t \in I}$ が L^p-劣マルチンゲールであることから Doob の不等式により $\sup_{t \in I} M_t$ は可積分である[*9]．従って $\lim_{n \to \infty} \tau_n = \tau$ と M の右連続性から，Lebesgue の収束定理より

$$\begin{aligned}
\int_A M_{\tau(\omega)}(\omega)\,\mu(d\omega) &= \lim_{n \to \infty} \int_A M_{\tau_n(\omega)}(\omega)\,\mu(d\omega) \\
&= \lim_{n \to \infty} \int_A M_{\tau_n(\omega) \wedge \sigma_n(\omega)}(\omega)\,\mu(d\omega) = \int_A M_{\tau(\omega) \wedge \sigma(\omega)}(\omega)\,\mu(d\omega)
\end{aligned}$$

が成り立つ． ∎

4.2 二次変分

以降では $I \coloneqq [0, T]$ $(T > 0)$ とし，このフィルトレーション $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ が次の仮定を満たす:

$$\mathcal{N} \coloneqq \{\, N \in \mathcal{F} \;;\quad \mu(N) = 0 \,\} \subset \mathcal{F}_0.$$

[*8] もとより τ_n は可測関数である．$\mathbb{R} \ni x \longmapsto [x] \in \mathbb{R}$ は可測 $\mathfrak{B}(\mathbb{R})/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であるから $[2^n \tau]$ は可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であり，従って τ_n も可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ となっている．

[*9] $\sup_{t \in I} |M_t|^p = (\sup_{t \in I} |M_t|)^p$ である．

定義 4.2.1 (停止時刻で停めた過程). 任意の停止時刻 τ と確率過程 M に対し

$$M_t^\tau := M_{t\wedge\tau} \quad (\forall t \in I)$$

として定義する M^τ を，停止時刻 τ で停めた過程という．

命題 4.2.2 (停めた過程の適合性). 確率過程 M の全てのパスが右連続且つ $(\mathcal{F}_t)$-適合のとき，任意の停止時刻 τ に対し M^τ もまた右連続且つ $(\mathcal{F}_t)$-適合である．

証明． 任意に $\omega \in \Omega$ を取り固定する．写像 $t \longmapsto M_t^\tau(\omega) = M_{t\wedge\tau(\omega)}(\omega)$ について，$t < \tau(\omega)$ なら $t \longmapsto M_t(\omega)$ の右連続性により，$t \geq \tau(\omega)$ なら右側で定数関数となるから右連続性が従う．また定理 3.1.8 より M_t^τ は可測 $\mathcal{F}_{t\wedge\tau}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であるから，$\mathcal{F}_{t\wedge\tau} \subset \mathcal{F}_t$ より M^τ の適合性が従う． ∎

以下，いくつか集合を定義する．

(1) $\mathcal{A}^+$ $\mathcal{A}^+$ は以下を満たす $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 上の可測関数族 $A = (A_t)_{t\in I}$ の全体として定める:

適合性 任意の $t \in I$ に対し，写像 $\Omega \ni \omega \longmapsto A_t(\omega) \in \mathbb{R}$ は可測 $\mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ である．

連続性 μ-a.s. に写像 $I \ni t \longmapsto A_t(\omega) \in \mathbb{R}$ が連続である．

単調非減少性 μ-a.s. に写像 $I \ni t \longmapsto A_t(\omega) \in \mathbb{R}$ が単調非減少である．

(2) $\mathcal{A}$ $\mathcal{A}$ を $\mathcal{A} := \left\{ A^1 - A^2 \ ; \quad A^1, A^2 \in \mathcal{A}^+ \right\}$ により定める．任意の $A = A_1 - A_2 \in \mathcal{A}$ に対し，A は適合過程であり μ-a.s. に $I \ni t \longmapsto A_t$ は連続且つ有界変動である．

(3) $\mathcal{M}_{p,c}$ $(p \geq 1)$ $\mathcal{M}_{p,c}$ を以下を満たす可測関数族 $M = (M_t)_{t\in I} \subset \mathscr{L}^p(\mathcal{F}, \mu)$ の全体として定める．

0 出発 $M_0 = 0$ μ-a.s. を満たす．

L^p-マルチンゲール $M = (M_t)_{t\in I}$ は L^p-マルチンゲールである．

連続性 μ-a.s.ω に対し写像 $I \ni t \longmapsto M_t(\omega) \in \mathbb{R}$ が連続である．

(4) $\mathcal{M}_{b,c}$ $\mathcal{M}_{b,c}$ を一様有界な L^1-マルチンゲールの全体として定める:

$$\mathcal{M}_{b,c} := \left\{ M = (M_t)_{t\in I} \in \mathcal{M}_{1,c} \ ; \quad \sup_{t\in I} \| M_t \|_{\mathscr{L}^\infty} < \infty \right\}.$$

(5) $\mathcal{T}$ $\mathcal{T}$ を以下を満たすような，I に値を取る停止時刻の列 $(\tau_j)_{j=0}^\infty$ の全体として定める．

a) $\tau_0 = 0$ μ-a.s.

b) $\tau_j \leq \tau_{j+1}$ μ-a.s. $(j = 1, 2, \cdots)$.

c) $(\tau_j)_{j=1}^\infty$ に対し或る μ-零集合 N_T が存在し，任意の $\omega \in \Omega \backslash N_T$ に対し或る $n = n(\omega) \in \mathbb{N}$ が存在して $\tau_n(\omega) = T$ が成り立つ．

例えば $\tau_j = jT/2^n$ なら $(\tau_j)_{j=0}^\infty \in \mathcal{T}$ となる．上の条件において，*a*) が零集合 N_0 を除いて成立し，*b*) が各 j について零集合 N_j を除いて成立するとき，$N := N_0 \cup N_T \cup (\cup_{j=0}^\infty N_j)$ とすればこれも μ-零集合であり，任意の $\omega \in \Omega \backslash N$ に対して

$$\tau_0(\omega) = 0, \quad \tau_j(\omega) \leq \tau_{j+1}(\omega) \ (j = 1, 2, \cdots), \quad \tau_n(\omega) = T \ (\exists n = n(\omega) \in \mathbb{N})$$

が成立する．

(4) $\mathcal{M}_{c,loc}$　$\mathcal{M}_{c,loc}$ を次で定める．$\mathcal{M}_{c,loc}$ の元を「連続な局所マルチンゲール」という:

$$\mathcal{M}_{c,loc} := \left\{ M = (M_t)_{t\in I} \subset \mathscr{L}^1(\mathcal{F},\mu) \ ; \quad \begin{array}{c} \text{全ての } \omega \in \Omega \text{ に対し，} I \ni t \longmapsto M_t(\omega) \text{ が} \\ \text{各点 } t \text{ で右連続且つ左極限を持ち，} \\ \text{或る } (\tau_j)_{j=0}^{\infty} \in \mathcal{T} \text{ が存在して} \\ M^{\tau_j} \in \mathcal{M}_{b,c}\ (\forall j = 0,1,\cdots) \text{ を満たす．} \end{array} \right\}.$$

定理 4.2.3 (有界なマルチンゲールを停止時刻で停めた過程の有界性).　τ を任意の停止時刻とする．任意の $M \in \mathcal{M}_{b,c}$ に対し $\sup_{t\in I} \left\| M_t^\tau \right\|_{\mathscr{L}^\infty} \leq \sup_{t\in I} \| M_t \|_{\mathscr{L}^\infty}$ が成り立つ．

証明.　任意に $s \in I$ を取り固定する．$|M_{s\wedge\tau(\omega)}(\omega)| \leq \sup_{t\in I} |M_t(\omega)|$ $(\forall \omega \in \Omega)$ より

$$\sup_{t\in I} |M_t| \leq \sup_{t\in I} \| M_t \|_{\mathscr{L}^\infty} \quad \mu\text{-a.s.}$$

が成り立つことを示せばよい．$M \in \mathcal{M}_{b,c}$ であるから，或る零集合 A が存在して全ての $\omega \in \Omega \backslash A$ に対し $I \ni t \longmapsto M_t(\omega)$ が連続である．また補題 1.1.1 より

$$B_r := \{\, \omega \in \Omega \ ; \quad |M_r(\omega)| > \| M_r \|_{\mathscr{L}^\infty} \,\}, \quad (r \in \mathbb{Q} \cap I)$$

は全て零集合であるから，

$$B := \bigcup_{r\in\mathbb{Q}\cap I} B_r$$

に対し $C := A \cup B$ として零集合を定める．任意の $\omega \in \Omega\backslash C$ に対し $t \longmapsto M_t(\omega)$ が連続であるから

$$|M_u(\omega)| \leq \sup_{t\in I} \| M_t \|_{\mathscr{L}^\infty} \quad (\forall u \in I)$$

が成り立ち

$$\sup_{t\in I} |M_t(\omega)| \leq \sup_{t\in I} \| M_t \|_{\mathscr{L}^\infty} \quad (\forall \omega \in \Omega\backslash C)$$

が従う．∎

定理 4.2.4 (停止時刻で停めてもマルチンゲール).　$p > 1$ とする．任意の $M \in \mathcal{M}_{p,c}$ と停止時刻 τ に対し，M を τ で停めた過程について $M^\tau \in \mathcal{M}_{p,c}$ が成り立つ．

証明.　任意の $\omega \in \Omega$ に対し $I \ni t \longmapsto M_t(\omega)$ は各点で右連続且つ左極限を持つから $I \ni t \longmapsto M_t^\tau(\omega)$ も各点で右連続且つ左極限を持ち，特に $I \ni t \longmapsto M_t(\omega)$ が連続となる ω に対しては $I \ni t \longmapsto M_t^\tau(\omega)$ も連続である．また $M_0 = M_0^\tau$ より $M_0^\tau = 0$ μ-a.s. が従う．あとは M^τ の p 乗可積分性と $\mathrm{E}\left[M_t^\tau \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right] = M_s^\tau$ $(s < t)$ を示せばよい．実際 Doob の不等式 (定理 4.1.4) より $\sup_{t\in I} |M_t|^p$ が可積分であるから，全ての $t \in I$ に対し $\left|M_t^\tau\right|$ は p 乗可積分であり，更に任意抽出定理 (定理 4.1.5) より

$$\mathrm{E}\left[M_t^\tau \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right] = M_{t\wedge\tau\wedge s} = M_s^\tau \quad (s < t)$$

が従う．∎

補題 4.2.5 ($\mathcal{M}_{p,c}$ は線形空間).
任意の $M, N \in \mathcal{M}_{p,c}$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して線型演算を

$$(M+N)_t \coloneqq (M_t + N_t)_{t\in I}, \quad (\alpha M)_t \coloneqq (\alpha M_t)_{t\in I} \tag{4.5}$$

として定義すれば，$\mathcal{M}_{p,c}$ は $\mathbb{R}$ 上の線形空間となる.

証明. $\mathcal{M}_{p,c}$ が (4.5) の演算について閉じていることを示す.

加法について 先ず $M+N$ が L^p-マルチンゲールの定義を満たすことを示す．各 $t \in I$ について M_t, N_t が $\mathcal{F}_t$-可測であるから $M_t + N_t$ も $\mathcal{F}_t$-可測であり $M+N$ の適合性が従う．また Minkowski の不等式より $M_t + N_t \in \mathscr{L}^p(\mu)$ ($\forall t \in I$) も従う．そして全ての $\omega \in \Omega$ に対し $t \longmapsto M_t(\omega)$ と $t \longmapsto N_t(\omega)$ は各点で右連続且つ左極限を持つから $t \longmapsto M_t(\omega) + N_t(\omega)$ も各点で右連続且つ左極限を持ち，更に任意の $s,t \in I,\ s \leq t$ に対して，条件付き期待値の線型性により

$$\mathrm{E}[M_t + M_t \mid \mathcal{F}_s] = \mathrm{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] + \mathrm{E}[N_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s + N_s$$

も成り立つ．以上より $((M+N)_t)_{t\in I}$ は L^p-マルチンゲールである．次に写像 $I \ni t \longmapsto M_t(\omega) + N_t(\omega) \in \mathbb{R}$ の連続性を示す．M, N に対して或る μ-零集合 E が存在し，$\omega \notin E$ について $t \longmapsto M_t(\omega)$ と $t \longmapsto N_t(\omega)$ が共に連続となるから $t \longmapsto M_t(\omega) + N_t(\omega)$ も連続となる．以上で $M+N \in \mathcal{M}_{p,c}$ が示された.

スカラ倍について 任意の $0 \leq s \leq t \leq T$ に対し，条件付き期待値の線型性 (性質 $\tilde{\mathrm{C}}3$) により

$$\mathrm{E}[\alpha M_t \mid \mathcal{F}_s] = \alpha\,\mathrm{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = \alpha M_s$$

が成り立つ．定数倍しているだけであるから，αM が L^p-マルチンゲールであるためのその他の条件，及び μ-a.s. にパスが連続であることも成り立ち，$\alpha M \in \mathcal{M}_{p,c}$ となる.

■

補題 4.2.6 ($\mathcal{M}_{p,c}$ における同値関係の導入).
任意の $M, N \in \mathcal{M}_{p,c}$ ($p \geq 1$) に対して，関係 R を

$$M\,R\,N \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} \left\{ \omega \in \Omega \ ; \quad \sup_{r \in (I\cap\mathbb{Q})\cup\{T\}} |M_r(\omega) - N_r(\omega)| > 0 \right\} \text{が } \mu\text{-零集合}$$

として定義すれば，関係 R は同値関係となる．そして $M\,R\,N$ となることと μ-a.s. にパスが一致することは同値である.

証明. 反射律と対称律は R の定義式より判然しているから推移律について確認する．M, N とは別

[*9] 全ての t, ω に対し $0 \in \mathbb{R}$ を取るもの.

に $U=(U_t)_{t\in I}\in\mathcal{M}_{p,c}$ を取って $M\,R\,N$ かつ $N\,R\,U$ となっているとすれば，各 $r\in(I\cap\mathbb{Q})\cup\{T\}$ にて

$$\{\,|M_r-U_r|>0\,\}\ \subset\ \{\,|M_r-N_r|>0\,\}\cup\{\,|N_r-U_r|>0\,\}$$

の関係が成り立っているから $M\,R\,U$ が従う．[*10] 後半の主張を示す．M,N に対し或る零集合 E が存在して，$\omega\in\Omega\backslash E$ に対し $I\ni t\longmapsto M_t(\omega)$ と $I\ni t\longmapsto N_t(\omega)$ は共に連続写像となっている．今 $M\,R\,N$ であるとする．

$$F:=\left\{\omega\in\Omega\ ;\ \sup_{r\in(I\cap\mathbb{Q})\cup\{T\}}|M_r(\omega)-N_r(\omega)|>0\right\}$$

とおけば $F^c\cap E^c$ 上で M と N のパスは完全に一致し，また $F\cup E$ が零集合であるから μ-a.s. にパスが一致しているということになる．逆に μ-a.s. にパスが一致しているとすれば，或る零集合 G が存在して G^c 上でパスが一致している．

$$G^c\subset F^c$$

の関係から $F\subset G$ となり F が零集合となるから $M\,R\,N$ が従う． ∎

補題 4.2.7 ($\mathcal{M}_{p,c}$ の商空間の定義). 補題 4.2.6 で導入した同値関係 R による $\mathcal{M}_{p,c}$ $(p\geq 1)$ の商集合を $\mathfrak{M}_{p,c}$ と表記する．$M\in\mathcal{M}_{p,c}$ の関係 R による同値類を $\overline{M}$ と表記し，$\mathfrak{M}_{p,c}$ において

$$\overline{M}+\overline{N}:=\overline{M+N},\quad \alpha\overline{M}:=\overline{\alpha M} \tag{4.6}$$

として演算を定義すれば，これは代表元の選び方に依らない (well-defined)．そして (4.6) で定義した算法を加法とスカラ倍として $\mathfrak{M}_{p,c}$ は $\mathbb{R}$ 上の線形空間となる．

証明. $M'\in\overline{M}$, $N'\in\overline{N}$ を任意に選べば，

$$\left\{\left|M_r+N_r-M'_r-N'_r\right|>0\right\}\subset\left\{\left|M_r-M'_r\right|>0\right\}\cup\left\{\left|N_r-N'_r\right|>0\right\}$$
$$\left\{\left|\alpha M_r-\alpha M'_r\right|>0\right\}=\left\{\left|M_r-M'_r\right|>0\right\}$$

により $(M+N)\,R\,(M'+N')$, $(\alpha M)\,R\,(\alpha M')$ が成り立ち

$$\overline{M+N}=\overline{M'+N'},\quad \overline{\alpha M}=\overline{\alpha M'}$$

が従う． ∎

補題 4.2.8 ($\mathfrak{M}_{2,c}$ における内積の定義). 写像[*11] $\langle\cdot,\cdot\rangle:\mathfrak{M}_{2,c}\times\mathfrak{M}_{2,c}\to\mathbb{R}$ を次で定義すれば，これは $\mathfrak{M}_{2,c}$ において内積となる:

$$\left\langle\overline{M},\overline{N}\right\rangle:=\int_\Omega M_T(\omega)N_T(\omega)\,\mu(d\omega),\quad (\overline{M},\overline{N}\in\mathfrak{M}_{2,c}). \tag{4.7}$$

[*10] $\{\,|M_r-N_r|>0\,\}=\{\,\omega\in\Omega\ ;\ \ |M_r(\omega)-N_r(\omega)|>0\,\}$.

[*11] 実数値として確定することは，M_T,N_T が共に二乗可積分であることと Hölder の不等式による．

証明.

well-defined であること　先ずは上の $\langle\cdot,\cdot\rangle$ の定義が代表元の取り方に依らないことを確認する．$M' \in \overline{M}$ と $N' \in \overline{N}$ に対して，同値関係の定義から μ-a.s. に $M'_T = M_T$, $N'_T = N_T$ であり

$$\int_\Omega M_T(\omega)N_T(\omega)\,\mu(d\omega) = \int_\Omega M'_T(\omega)N'_T(\omega)\,\mu(d\omega)$$

が成り立つから，$\left\langle \overline{M}, \overline{N} \right\rangle$ は一つの値に確定している．次に $\langle\cdot,\cdot\rangle$ が内積であることを証明する．

正値性　先ず任意の $\overline{M} \in \mathfrak{M}_{2,c}$ に対して $\left\langle \overline{M}, \overline{M} \right\rangle = \|M_T\|^2_{\mathscr{L}^2} \geq 0$ が成り立つ．次に $\left\langle \overline{M}, \overline{M} \right\rangle = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \overline{M} = \overline{0}$ が成り立つことを示す．$\langle\cdot,\cdot\rangle$ の定義により $\Leftarrow$ は判然しているから，$\Rightarrow$ について示す．M は L^2-マルチンゲールであるから，Jensen の不等式より $(|M_t|)_{t\in I}$ が L^2-劣マルチンゲールとなる．Doob の不等式を適用すれば

$$\int_\Omega \left(\sup_{t\in I} |M_t(\omega)|\right)^2 \mu(d\omega) \leq 4 \int_\Omega M_T(\omega)^2\,\mu(d\omega) = 0$$

が成り立ち，

$$\left\{ \sup_{t\in I} |M_t| > 0 \right\} = \left\{ \sup_{t\in I} |M_t|^2 > 0 \right\} = \left\{ \left(\sup_{t\in I} |M_t(\omega)|\right)^2 > 0 \right\}$$

であるから

$$\mu\left(\sup_{t\in I} |M_t| > 0\right) = 0$$

が従う．よって $\overline{M} = \overline{0}$ となる．

双線型性　双線型性は積分の線型性による．

∎

命題 4.2.9 ($\mathfrak{M}_{2,c}$ は Hilbert 空間である)**.**　$\mathfrak{M}_{2,c}$ は補題 4.2.8 で導入した $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を内積として Hilbert 空間となる．

証明.　内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ により導入されるノルムを $\|\cdot\|$ と表記する．$\overline{M^{(n)}} \in \mathfrak{M}_{2,c}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を Cauchy 列として取れば，各代表元 $M^{(n)}$ に対し或る μ-零集合 E_n が存在して，$\omega \in \Omega \backslash E_n$ なら写像 $I \ni t \longmapsto M_t^{(n)}(\omega) \in \mathbb{R}$ が連続となる．後で連続関数列の一様収束を扱うからここで次の処理を行う:

$$E := \bigcup_{n=1}^\infty E_n$$

として，$M^{(n)} = (M_t^{(n)})_{t\in I}$ を零集合 E 上で修正した過程 $(N_t^{(n)})_{t\in I}$ を

$$N_t^{(n)}(\omega) := \begin{cases} M_t^{(n)}(\omega) & (\omega \in \Omega\backslash E) \\ 0 & (\omega \in E) \end{cases}, \quad (\forall n = 1, 2, \cdots,\ t \in I)$$

として定義すれば，$N^{(n)}$ は Ω 全体でパスが連続，かつ L^2-マルチンゲールであるから*12 $\mathcal{M}_{2,c}$ の元となる．また零集合 E を除いて $M^{(n)}$ とパスが一致するから，$\overline{N^{(n)}} = \overline{M^{(n)}}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が成立し

$$\left\| \overline{M^{(n)}} - \overline{M^{(m)}} \right\|^2 = \left\| \overline{N^{(n)}} - \overline{N^{(m)}} \right\|^2 = \left\| \overline{N^{(n)} - N^{(m)}} \right\|^2 = \int_\Omega \left| N_T^{(n)}(\omega) - N_T^{(m)}(\omega) \right|^2 \mu(d\omega)$$

と表現できる．任意の $n, m \in N$ の組に対し，$\mathcal{M}_{2,c}$ が線形空間であるから $\left(\left| N_t^{(n)} - N_t^{(m)} \right| \right)_{t \in T}$ は連続な L^2-劣マルチンゲールとなり，Doob の不等式を適用して

$$\lambda^2 \mu \left(\sup_{t \in I} |N_t^{(n)} - N_t^{(m)}| > \lambda \right) \leq \int_\Omega \left| N_T^{(n)}(\omega) - N_T^{(m)}(\omega) \right|^2 \mu(d\omega) = \left\| \overline{M^{(n)}} - \overline{M^{(m)}} \right\|^2 \quad (\forall \lambda > 0)$$

が成り立つ．この不等式と $\left(\overline{M^{(n)}} \right)_{n=1}^\infty$ が Cauchy 列であることを併せれば，

$$\left\| \overline{M^{(n_k)}} - \overline{M^{(n_{k+1})}} \right\| < 1/4^k, \quad (k = 1, 2, \cdots) \tag{4.8}$$

となるように添数の部分列 $(n_k)_{k=1}^\infty$ を抜き出して

$$\mu \left(\sup_{t \in I} |N_t^{(n_k)} - N_t^{(n_{k+1})}| > 1/2^k \right) < 1/2^k, \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

が成り立つようにできる．

$$F \coloneqq \bigcup_{N=1}^\infty \bigcap_{k \geq N} \left\{ \omega \in \Omega \ ; \quad \sup_{t \in I} |N_t^{(n_k)}(\omega) - N_t^{(n_{k+1})}(\omega)| \leq 1/2^k \right\}$$

とおけば，Borel-Cantelli の補題により F^c は μ-零集合であって，$\omega \in F$ なら全ての $t \in I$ について数列 $\left(N_t^{(n_k)}(\omega) \right)_{k=1}^\infty$ は Cauchy 列となる．実数の完備性から数列 $\left(N_t^{(n_k)}(\omega) \right)_{k=1}^\infty$ $(\omega \in F)$ に極限 $N_t^*(\omega)$ が存在し，この収束は t に関して一様である*13から写像 $t \longmapsto N_t^*(\omega)$ は連続で，

$$N_t(\omega) \coloneqq \begin{cases} N_t^*(\omega) & (\omega \in F) \\ 0 & (\omega \in \Omega \backslash F) \end{cases}$$

として N を定義すればこれは $\mathcal{M}_{2,c}$ の元となる．N は全てのパスが連続であるから L^2-マルチンゲールとなっていることを示す．マルチンゲールの定義の (M.3)(M.4) はパスの連続性により従うことであるから，後は (M.1) と (M.2) を証明すればよい．

(M.1) 適合性について　今任意に $t \in I$ を取り固定する．$N_t^{n_k}$ の定義域を F に制限した写像を $N_t^{F(k)}$ と表記し

$$\mathcal{F}_t^F \coloneqq \{ F \cap B \ ; \quad B \in \mathcal{F}_t \}$$

---

*12 L^2-マルチンゲールとなることを証明する．パスの右連続性と左極限の存在は連続性により成り立つことである．適合性については，フィルトレーションの仮定より $E \in \mathcal{F}_0$ であることに注意すれば，$N_t^{(n)} = M_t^{(n)} 1\!\!1_{\Omega \backslash E}$ であることと $M_t^{(n)}$ が適合過程であることから $N_t^{(n)}$ も可測 $\mathcal{F}_t / \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ となる．また各 $t \in I$ に対し $N_t^{(n)}$ と $M_t^{(n)}$ の関数類は一致するから，任意に $0 \leq s \leq t \leq T$ を取って

$$\mathrm{E}\left[N_t^{(n)} \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right] = \mathrm{E}\left[M_t^{(n)} \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right] = M_s^{(n)} = N_s^{(n)}$$

が成り立つ．$N_t^{(n)} = M_t^{(n)} 1\!\!1_{\Omega \backslash E}$ の二乗可積分性は $M_t^{(n)}$ の二乗可積分性から従う．

*13 $\left| N_t^{(n_k)}(\omega) - N_t^*(\omega) \right| \leq \sum_{j=k}^\infty \left| N_t^{(n_j)}(\omega) - N_t^{(n_{j+1})}(\omega) \right| \leq \sum_{j=k}^\infty \sup_{t \in I} \left| N_t^{(n_j)}(\omega) - N_t^{(n_{j+1})}(\omega) \right| < 1/2^k, \quad (\forall t \in T)$ による．

とおけば，$N_t^{F(k)}$ は可測 $\mathcal{F}_t^F/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ となる．従って各点収束先の関数である N_t^* もまた可測 $\mathcal{F}_t^F/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ となる．任意の $C \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$N_t^{-1}(C) = \begin{cases} (\Omega \backslash F) \cup {N^*}_t^{-1}(C) & (0 \in C) \\ {N^*}_t^{-1}(C) & (0 \notin C) \end{cases}$$

が成り立ち，フィルトレーションの仮定から $F \in \mathcal{F}_0$ であり $\mathcal{F}_t^F \subset \mathcal{F}_t$ が従うから，N_t は可測 $\mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ である．

(M.1) 二乗可積分性について　任意に $t \in I$ を取り固定する．$N_t^{(n_k)}$ $(k = 1, 2, \cdots)$ は二乗可積分関数 $M_t^{(n_k)}$ と零集合 E を除いて一致し，N_t に概収束する．また添数列 $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ の抜き出し方 (4.8) と Doob の不等式より

$$\left\| \sup_{t \in I} \left| N_t^{(n_k)} - N_t^{(n_{k+1})} \right| \right\|_{\mathscr{L}^2} \leq 2 \left\| \left| N_T^{(n_k)} - N_T^{(n_{k+1})} \right| \right\|_{\mathscr{L}^2} < 2/4^k$$

が成り立つから $\left\| N_t^{(n_k)} - N_t^{(n_{k+1})} \right\|_{\mathscr{L}^2} < 2/4^k \leq 1/2^k$ $(k = 1, 2, \cdots)$ を得る．特に $j \in \mathbb{N}$ を固定すれば全ての $k > j$ に対して $\left\| N_t^{(n_j)} - N_t^{(n_k)} \right\|_{\mathscr{L}^2} < 1/2^j$ となるから，Fatou の補題より

$$\left\| N_t^{(n_j)} - N_t \right\|_{\mathscr{L}^2}^2 = \int_{\Omega \backslash F} \liminf_{k \to \infty} \left| N_t^{(n_j)}(\omega) - N_t^{(n_k)}(\omega) \right|^2 \mu(d\omega) < 1/4^j \tag{4.9}$$

が従い，Minkowski の不等式より

$$\| N_t \|_{\mathscr{L}^2} \leq \left\| N_t - N_t^{(n_j)} \right\|_{\mathscr{L}^2} + \left\| N_t^{(n_j)} \right\|_{\mathscr{L}^2} < \infty$$

が成り立つ．

(M.2) について　各 $t \in I,\ k \in \mathbb{N}$ について $(M_t^{(n_k)})_{t \in I}$ が L^2-マルチンゲールであるということを利用すればよい．任意の $0 \leq s \leq t \leq T$ と $A \in \mathcal{F}_s$ に対して

$$\begin{aligned} \int_A \mathrm{E}\left[N_t^{(n_k)} \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right](\omega)\, \mu(d\omega) &= \int_A \mathrm{E}\left[M_t^{(n_k)} \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right](\omega)\, \mu(d\omega) \\ &= \int_A M_s^{(n_k)}(\omega)\, \mu(d\omega) = \int_A N_s^{(n_k)}(\omega)\, \mu(d\omega) \end{aligned}$$

が全ての $k = 1, 2, \cdots$ で成り立つから，Hölder の不等式及び (4.9) より

$$\begin{aligned} &\left| \int_A \mathrm{E}\left[N_t \,|\, \mathcal{F}_s \right](\omega)\, \mu(d\omega) - \int_A N_s(\omega)\, \mu(d\omega) \right| \\ &\leq \left| \int_A \mathrm{E}\left[N_t \,|\, \mathcal{F}_s \right](\omega)\, \mu(d\omega) - \int_A \mathrm{E}\left[N_t^{(n_k)} \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right](\omega)\, \mu(d\omega) \right| \\ &\qquad + \left| \int_A N_s^{(n_k)}(\omega)\, \mu(d\omega) - \int_A N_s(\omega)\, \mu(d\omega) \right| \\ &= \left| \int_A N_t(\omega) - N_t^{(n_k)}(\omega)\, \mu(d\omega) \right| + \left| \int_A N_s^{(n_k)}(\omega) - N_s(\omega)\, \mu(d\omega) \right| \\ &\leq \int_A \left| N_t(\omega) - N_t^{(n_k)}(\omega) \right| \mu(d\omega) + \int_A \left| N_s^{(n_k)}(\omega) - N_s(\omega) \right| \mu(d\omega) \\ &\leq \left\| N_t - N_t^{(n_k)} \right\|_{\mathscr{L}^2} + \left\| N_s^{(n_k)} - N_s \right\|_{\mathscr{L}^2} \\ &\leq 1/2^{k-1} \end{aligned}$$

が全ての $k = 1, 2, \cdots$ で成り立つ．k の任意性から

$$\int_A \mathrm{E}\left[N_t \,|\, \mathcal{F}_s \right](\omega)\, \mu(d\omega) = \int_A N_s(\omega)\, \mu(d\omega)$$

が従い，$\mathrm{E}\left[N_t \,|\, \mathcal{F}_s \right] = N_s \quad \text{in } \mathrm{L}^2(\mathcal{F}, \mu)$ となる．

最後に，N の $\mathfrak{M}_{2,c}$ における同値類 $\overline{N}$ が Cauchy 列 $\left(\overline{M^{(n)}}\right)_{n=1}^{\infty}$ の極限であるということを明示して証明を完全に終える．部分列 $\left(\overline{M^{(n_k)}}\right)_{k=1}^{\infty}$ に対して，(4.9) より

$$\left\| \overline{N} - \overline{M^{(n_k)}} \right\| = \left\| \overline{N} - \overline{N^{(n_k)}} \right\| = \left\| N_T - N_T^{(n_k)} \right\|_{\mathscr{L}^2} \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty)$$

が成り立つ．部分列が収束することは Cauchy 列が収束することになるから $\left\| \overline{N} - \overline{M^{(n)}} \right\| \longrightarrow 0$ が従い，$\mathfrak{M}_{2,c}$ が Hilbert 空間であることが証明された． ∎

命題 4.2.10. 任意の $p \geq 1$ に対し，$\mathcal{M}_{b,c} \subset \mathcal{M}_{p,c} \subset \mathcal{M}_{c,loc}$ が成り立つ．

この証明には次の補題を使う．

補題 4.2.11 (右連続で左極限を持つ関数は閉区間上で有界).
(E, ρ) を距離空間，$J = [a, b] \subset \mathbb{R}$ とする．$f : J \to E$ が各点で右連続且つ左極限を持つなら f は J 上で有界である．ただし左端点では左極限を考えず，右端点では右連続性を考えない．

証明 (補題 4.2.11). 任意に $\epsilon > 0$ を取り固定する．f は各点 $x \in [a, b)$ で右連続であるから，$0 < \delta_x < b - x$ を $0 < \forall h < \delta_x$ が $\rho(f(x), f(x+h)) < \epsilon$ を満たすように取り，

$$V_x \coloneqq [x, x + \delta_x) \quad (\forall x \in [a, b))$$

とおく．また f は各点 $x \in (a, b]$ で左極限も持つから，左極限を $f(x-)$ と表して $0 < \gamma_x < x - a$ を $0 < \forall h < \gamma_x$ が $\rho(f(x-), f(x-h)) < \epsilon$ を満たすように取り，

$$U_x \coloneqq (x - \gamma_x, x] \quad (\forall x \in (a, b])$$

とおく．特に $U_a \coloneqq (-\infty, a]$, $V_b \coloneqq [b, \infty)$ とおけば

$$J \subset \bigcup_{x \in J} U_x \cup V_x$$

が成り立つが，J は $\mathbb{R}$ のコンパクト部分集合であるから，このうち有限個を選び

$$J = \bigcup_{i=1}^{n} (U_{x_i} \cup V_{x_i}) \cap J$$

とできる．$U_{x_i} \cap J$, $V_{x_i} \cap J$ での f の挙動の振れ幅は 2ϵ で抑えられるから J 全体での挙動の振れ幅は $2n\epsilon$ より小さい[*14]．ゆえに有界である． ∎

---

*14 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ と仮定し，区間 $U_{x_i} \cup V_{x_i}$ と $U_{x_{i+1}} \cup V_{x_{i+1}}$ の共通点を一つ取り z_i と表す．$\rho(f(x), f(y))$ $(x, y \in J)$ の上界を知りたいから $x \in U_{x_1} \cup V_{x_1}$, $y \in U_{x_n} \cup V_{x_n}$ の場合を調べればよい．このとき

$$\begin{aligned} \rho(f(x), f(y)) &\leq \rho(f(x), f(x_1)) + \rho(f(x_1), f(x_2)) + \cdots + \rho(f(x_{n-1}), f(x_n)) + \rho(f(x_n), f(y)) \\ &\leq \rho(f(x), f(x_1)) + \rho(f(x_1), f(z_1)) + \rho(f(z_1), f(x_2)) + \cdots + \rho(f(z_{n-1}), f(x_n)) + \rho(f(x_n), f(y)) \\ &< 2n\epsilon \end{aligned}$$

が成り立つ．

補題 4.2.12 (右連続関数で導入する停止時刻の単調性). 或る零集合 N が存在し，全ての $\omega \in \Omega \backslash N$ に対して $I \ni t \longmapsto X_t(\omega)$ が右連続なら，

$$\tau_n(\omega) := \begin{cases} 0 & (\omega \in N) \\ \inf\{\, t \in I \ ; \quad |X_t(\omega)| \geq n \,\} \wedge T & (\omega \in \Omega \backslash N)^{*15} \end{cases} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

で定める停止時刻は $0 = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \cdots$ を満たし，特に，$\omega \in \Omega \backslash N$ に対して $I \ni t \longmapsto X_t(\omega)$ が各点で左極限を持つなら，或る $n = n(\omega) \in \mathbb{N}$ が存在して $\tau_n(\omega) = T$ を満たす．

証明 (補題 4.2.12). 定理 3.1.9 より τ_n は停止時刻である．絶対値の非負性より $\tau_0 = 0$ が従い，また

$$\tau_n(\omega) \leq \inf\{\, t \in I \ ; \quad |X_t(\omega)| \geq n + 1 \,\} = \tau_{n+1}(\omega) \quad (\forall \omega \in \Omega \backslash N,\ n = 0, 1, 2, \cdots)$$

が成り立つから $0 = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \cdots$ が得られる．或る $\omega \in \Omega \backslash N$ に対してパスが各点で左極限を持つ場合，補題 4.2.11 より $n > \sup_{t \in I} |X_t(\omega)|$ を満たす $n = n(\omega)$ が存在して $\tau_n(\omega) = T$ が得られる． ∎

証明 (命題 4.2.10). a.s. に有界な関数は p 乗して可積分であるから $\mathcal{M}_{b,c} \subset \mathcal{M}_{p,c}$ を得る．$\mathcal{M}_{p,c} \subset \mathcal{M}_{c,loc}$ を示す．任意に $M \in \mathcal{M}_{p,c}$ を取れば，或る零集合 E が存在して

$$M_0(\omega) = 0 \quad (\forall \omega \in \Omega \backslash E)$$

を満たし，$t \longmapsto M_t(\omega)$ が連続となる．全てのパスは右連続で左極限を持つから，補題 4.2.12 より

$$\tau_j(\omega) := \inf\{\, t \in I \ ; \quad |M_t(\omega)| \geq j \,\} \wedge T \quad (\forall \omega \in \Omega,\ j = 0, 1, 2, \cdots)$$

で定める停止時刻列は $(\tau_j)_{j=0}^{\infty} \in \mathcal{T}$ を満たす．Doob の不等式 (定理 4.1.4) より $\sup_{t \in I} |M_t|$ が p 乗可積分となるから $M_t^{\tau_j} = M_{t \wedge \tau_j}$ $(\forall t \in I)$ は可積分である．また $\omega \in \Omega \backslash E$ については $t \longmapsto M_t(\omega)$ の連続性から $I \ni t \longmapsto M_t^{\tau_j}(\omega)$ の連続性が従い，かつ定理 3.1.9 より

$$\sup_{t \in I} \left| M_{t \wedge \tau_j(\omega)}(\omega) \right| \leq j \quad (\forall \omega \in \Omega \backslash E)$$

が成り立ち

$$\sup_{t \in I} \left\| M_t^{\tau_j} \right\|_{\mathscr{L}^\infty} \leq j \quad (j = 0, 1, 2, \cdots)$$

を得る．そして任意抽出定理 (定理 4.1.5) より

$$\mathrm{E}\left[M_t^{\tau_j} \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right] = M_{t \wedge \tau_j \wedge s} = M_s^{\tau_j} \quad (s, t \in I,\ s < t)$$

が成り立つから．$M^{\tau_j} \in \mathcal{M}_{b,c}$ $(j = 1, 2, \cdots)$，すなわち $M \in \mathcal{M}_{c,loc}$ となる． ∎

---

*15 定理 3.1.9 の脚注に書いた通り $\{\, t \in I \ ; \quad |X_t(\omega)| \geq n \,\} = \emptyset$ の場合は $\tau_n(\omega) = T$ とする．

補題 4.2.13.　$X \in \mathcal{M}_{2,c}$ と停止時刻 $\tau \geq \sigma$ に対し次が成り立つ:

(1)　$\mathrm{E}\left[(X_\tau - X_\sigma)^2\right] = \mathrm{E}\left[X_\tau^2 - X_\sigma^2\right]$,

(2)　$\mathrm{E}\left[(X_\tau - X_\sigma)^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_\sigma\right] = \mathrm{E}\left[X_\tau^2 - X_\sigma^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_\sigma\right]$.

証明.

(1)　$X \in \mathcal{M}_{2,c}$ であるから Doob の不等式 (定理 4.1.4) により X_τ, X_σ は二乗可積分である．また定理 3.1.8 より X_σ は可測 $\mathcal{F}_\sigma/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であり，任意抽出定理 (定理 4.1.5) と $\tau \geq \sigma$ の仮定より

$$\mathrm{E}\left[X_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma\right] = X_{\tau\wedge\sigma} = X_\sigma$$

も成り立つ．命題 2.2.4 の $\tilde{\mathrm{C}}2$ と $\tilde{\mathrm{C}}6$ を併せて

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[(X_\tau - X_\sigma)^2\right] &= \mathrm{E}\left[X_\tau^2 + X_\sigma^2\right] - 2\,\mathrm{E}\left[X_\tau X_\sigma\right] \\
&= \mathrm{E}\left[X_\tau^2 + X_\sigma^2\right] - 2\,\mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left[X_\tau X_\sigma \mid \mathcal{F}_\sigma\right]\right] \\
&= \mathrm{E}\left[X_\tau^2 + X_\sigma^2\right] - 2\,\mathrm{E}\left[X_\sigma\,\mathrm{E}\left[X_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma\right]\right] \\
&= \mathrm{E}\left[X_\tau^2 - X_\sigma^2\right]
\end{aligned}$$

を得る．

(2)　(1) と同様にして

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[(X_\tau - X_\sigma)^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_\sigma\right] &= \mathrm{E}\left[X_\tau^2 + X_\sigma^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_\sigma\right] - 2\,\mathrm{E}\left[X_\tau X_\sigma \mid \mathcal{F}_\sigma\right] \\
&= \mathrm{E}\left[X_\tau^2 + X_\sigma^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_\sigma\right] - 2X_\sigma^2 \\
&= \mathrm{E}\left[X_\tau^2 - X_\sigma^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_\sigma\right]
\end{aligned}$$

が成り立つ．

∎

命題 4.2.14 (有界変動な連続二乗可積分マルチンゲールは 0).
$A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{M}_{2,c}$ に対し $A_t = 0\ (\forall t \in I)$　μ-a.s. が成り立つ．

証明.　A に対し或る $A^{(1)}, A^{(2)} \in \mathcal{A}^+$ が存在して

$$A = A^{(1)} - A^{(2)}$$

と表現できる．また或る μ-零集合 E が存在し，全ての $\omega \in \Omega \backslash E$ に対して $A_0(\omega) = 0$ 且つ $I \ni t \longmapsto A_t^{(1)}(\omega)$ と $I \ni t \longmapsto A_t^{(2)}(\omega)$ が共に連続，単調非減少となる．従って補題 4.2.12 より

$$\tau_m(\omega) := \begin{cases} 0 & (\omega \in E) \\ \inf\left\{\, t \in I\ ;\quad \sup_{s\leq t} \tilde{A}_s^{(1)}(\omega) \vee \tilde{A}_s^{(2)}(\omega) \geq m \,\right\} \wedge T & (\omega \in \Omega\backslash E) \end{cases} \qquad (m = 1, 2, \cdots)$$

として停止時刻列を定めれば，各 $\omega \in \Omega\backslash E$ に対し或る $i = i(\omega) \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\tau_1(\omega) \leq \tau_2(\omega) \leq \cdots \leq \tau_i(\omega) = T$$

が成り立つ．但し $\tilde{A}^{(i)}_t \coloneqq A^{(i)}_t - A^{(i)}_0$, $(i = 1, 2)$ とした．今任意に $t \in I$, $n, m \in \mathbb{N}$ を取り固定する．

$$\sigma^n_j \coloneqq \tau_m \wedge \frac{tj}{2^n} \quad (j = 0, 1, \cdots, 2^n)$$

とおけば，$\left(\sigma^n_j\right)_{j=0}^{2^n}$ は単調増加で

$$\sigma^n_{j+1} - \sigma^n_j \leq \frac{t}{2^n} \quad (j = 0, 1, \cdots, 2^n) \tag{4.10}$$

を満たすから，補題 4.2.13 により

$$\mathrm{E}\left[\sum_{j=0}^{2^n-1}\left(A_{\sigma^n_{j+1}} - A_{\sigma^n_j}\right)^2\right] = \sum_{j=0}^{2^n-1}\mathrm{E}\left[A^2_{\sigma^n_{j+1}} - A^2_{\sigma^n_j}\right] = \mathrm{E}\left[A^2_{\tau_m\wedge t}\right] \tag{4.11}$$

が成り立つ．左辺の被積分関数について，

$$\sum_{j=0}^{2^n-1}\left(A_{\sigma^n_{j+1}} - A_{\sigma^n_j}\right)^2 \leq \sup_j\left|A_{\sigma^n_{j+1}} - A_{\sigma^n_j}\right|\sum_{j=0}^{2^n-1}\left|A_{\sigma^n_{j+1}} - A_{\sigma^n_j}\right|$$

とできる．特に $\omega \in \Omega\backslash E$ に対しては，$I \ni t \longmapsto A_t(\omega)$ の連続性と (4.10) より

$$\sup_j\left|A_{\sigma^n_{j+1}(\omega)}(\omega) - A_{\sigma^n_j(\omega)}(\omega)\right| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

且つ

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{2^n-1}\left|A_{\sigma^n_{j+1}(\omega)}(\omega) - A_{\sigma^n_j(\omega)}(\omega)\right| &\leq \sum_{j=0}^{2^n-1}\left(A^{(1)}_{\sigma^n_{j+1}(\omega)}(\omega) - A^{(1)}_{\sigma^n_j(\omega)}(\omega) + A^{(2)}_{\sigma^n_{j+1}(\omega)}(\omega) - A^{(2)}_{\sigma^n_j(\omega)}(\omega)\right)\\ &= A^{(1)}_{\tau_m(\omega)\wedge t}(\omega) - A^{(1)}_0(\omega) + A^{(2)}_{\tau_m(\omega)\wedge t}(\omega) - A^{(2)}_0(\omega) \leq 2m\end{aligned}$$

が満たされるから，Lebesgue の収束定理より

$$\int_\Omega\sum_{j=0}^{2^n-1}\left(A_{\sigma^n_{j+1}(\omega)}(\omega) - A_{\sigma^n_j(\omega)}(\omega)\right)^2\ \mu(d\omega) \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成り立ち，(4.11) より

$$\int_\Omega\left(A_{\tau_m(\omega)\wedge t}\right)^2\ \mu(d\omega) = 0 \quad (m = 1, 2, \cdots)$$

が従う．Doob の不等式より $|A_{\tau_m\wedge t}| \leq \sup_{t\in I}|A_t| \in \mathscr{L}^2$ が成り立つから，Lebesgue の収束定理より

$$\int_\Omega\left(A_t(\omega)\right)^2\ \mu(d\omega) = 0$$

となり $A_t = 0$ μ-a.s. を得る．$\omega \in \Omega\backslash E$ に対する A のパスの連続性により

$$\{\,\omega \in \Omega\backslash E\ ;\quad A_t(\omega) = 0\ (\forall t \in I)\,\} = \bigcap_{r\in I\cap\mathbb{Q}}\{\,\omega \in \Omega\backslash E\ ;\quad A_r(\omega) = 0\,\}$$

と表せるから，

$$\{\,\omega \in \Omega\ ;\quad A_t(\omega) \neq 0\ (\exists t \in I)\,\} \subset E + \bigcup_{r\in I\cap\mathbb{Q}}\{\,\omega \in \Omega\backslash E\ ;\quad A_r(\omega) \neq 0\,\}$$

が成り立ち命題の主張が従う． ∎

補題 4.2.15 (二次変分補題). $n \in \mathbb{N}$ と $M \in \mathcal{M}_{b,c}$ を取り，$\tau^n_j = jT/2^n$ $(j = 0, 1, \cdots, 2^n)$ に対し

$$Q^n_t := \sum_{j=0}^{2^n-1} \left(M_{t\wedge\tau^n_{j+1}} - M_{t\wedge\tau^n_j} \right)^2 \quad (\forall t \in I) \tag{4.12}$$

とおけば，$M^2 - Q^n \in \mathcal{M}_{b,c}$ かつ次が成り立つ:

$$\left\| M^2_T - Q^n_T \right\|_{\mathscr{L}^2} \leq 2 \sup_{t\in I} \| M_t \|_{\mathscr{L}^\infty} \| M_T \|_{\mathscr{L}^2} .$$

証明. 各 j に対し $M_{t\wedge\tau^n_{j+1}}$ が可測 $\mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であるから Q^n は $\mathcal{F}_t$-適合である．今任意に $s, t \in I$, $(s < t)$ を取り固定する．$\tau^n_k \leq s < \tau^n_{k+1}$ となる k を選べば，補題 4.2.13 と任意抽出定理 4.1.5 より

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[Q^n_t - Q^n_s \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right] &= \mathrm{E}\left[\sum_{j=k}^{2^n-1} \left\{ \left(M_{t\wedge\tau^n_{j+1}} - M_{t\wedge\tau^n_j} \right)^2 - \left(M_{s\wedge\tau^n_{j+1}} - M_{s\wedge\tau^n_j} \right)^2 \right\} \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right] \\
&= \sum_{j=k+1}^{2^n-1} \mathrm{E}\left[M^2_{t\wedge\tau^n_{j+1}} - M^2_{t\wedge\tau^n_j} \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right] + \mathrm{E}\left[\left(M_{t\wedge\tau^n_{k+1}} - M_{\tau^n_k} \right)^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right] - \left(M_s - M_{\tau^n_k} \right)^2 \\
&= \mathrm{E}\left[M^2_t - M^2_{t\wedge\tau^n_{k+1}} \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right] + \mathrm{E}\left[\left(M_{t\wedge\tau^n_{k+1}} - M_{\tau^n_k} \right)^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right] - \left(M_s - M_{\tau^n_k} \right)^2 \\
&= \mathrm{E}\left[M^2_t \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right] - 2\,\mathrm{E}\left[M_{t\wedge\tau^n_{k+1}} M_{\tau^n_k} \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right] + \mathrm{E}\left[M^2_{\tau^n_k} \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right] - M^2_s + 2M_s M_{\tau^n_k} - M^2_{\tau^n_k} \\
&= \mathrm{E}\left[M^2_t \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right] - 2M_{\tau^n_k}\,\mathrm{E}\left[M_{t\wedge\tau^n_{k+1}} \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right] + M^2_{\tau^n_k} - M^2_s + 2M_s M_{\tau^n_k} - M^2_{\tau^n_k} \\
&= \mathrm{E}\left[M^2_t \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right] - M^2_s.
\end{aligned}$$

が成り立ち次を得る:

$$\mathrm{E}\left[M^2_t - Q^n_t \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right] = M^2_s - Q^n_s, \quad (\forall 0 \leq s < t \leq T). \tag{4.13}$$

ここで

$$N := M^2 - Q^n$$

とおけば $N \in \mathcal{M}_{b,c}$ であり[*16],

$$\mathrm{E}\left[(N_T - N_0)^2 \right] = \mathrm{E}\left[N^2_T - N^2_0 \right] = \mathrm{E}\left[\sum_{j=0}^{2^n-1} \left(N^2_{\tau^n_{j+1}} - N^2_{\tau^n_j} \right) \right]$$

[*16] $M \in \mathcal{M}_{b,c}$ より全ての $\omega \in \Omega$ において写像 $t \longmapsto M_t(\omega)$ は各点で右連続かつ左極限を持つ．Q^n についても Gauss 記号を用いて $Q^n_t = \sum_{j=0}^{[2^n t]/T} \left(M^n_t - M_{\tau^n_j} \right)^2$ と表せば，$t \longmapsto Q^n_t(\omega)$ $(\forall \omega \in \Omega)$ が各点で右連続かつ左極限を持つことが明確になる．よって全ての $\omega \in \Omega$ において $t \longmapsto N_t(\omega)$ は各点で右連続かつ左極限を持つ．また同じ理由で $t \longmapsto M_t(\omega)$ が連続となる点で $t \longmapsto N_t(\omega)$ も連続となるからつまり μ-a.s. に $t \longmapsto N_t$ は連続．一様有界性については，$\sup_{t\in I} \| M_t \|_{\mathscr{L}^\infty} < \infty$ であるから，任意の $t \in I$ に対し或る零集合 E_t が存在して $\omega \notin E_t$ なら $|M_t(\omega)| \leq \sup_{t\in I} \| M_t \|_{\mathscr{L}^\infty}$ が成り立つ．同様に Q^n_t についても $\omega \notin E_t \cup \bigcup_{j=0}^{[2^n t]/T} E_{\tau^n_j}$ なら

$$\left| Q^n_t(\omega) \right| \leq \sum_{j=0}^{[2^n t]/T} \left(2 \sup_{t\in I} \| M_t \|_{\mathscr{L}^\infty} \right)^2 \leq 2^{n+1} \sup_{t\in I} \| M_t \|^2_{\mathscr{L}^\infty} .$$

ゆえに

$$|N_t(\omega)| \leq \left| M_t(\omega)^2 \right| + \left| Q^n_t(\omega) \right| \leq \left(2^{n+1} + 1 \right) \sup_{t\in I} \| M_t \|^2_{\mathscr{L}^\infty} , \quad \left(\forall \omega \notin E_t \cup \cup_{j=0}^{[2^n t]/T} E_{\tau^n_j} \right).$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{2^n-1} \mathrm{E}\left[\left\{M^2_{\tau^n_{j+1}} - M^2_{\tau^n_j} - \left(Q^n_{\tau^n_{j+1}} - Q^n_{\tau^n_j}\right)\right\}^2\right] \\
&= \sum_{j=0}^{2^n-1} \mathrm{E}\left[\left\{M^2_{\tau^n_{j+1}} - M^2_{\tau^n_j} - \left(M_{\tau^n_{j+1}} - M_{\tau^n_j}\right)^2\right\}^2\right] \\
&\leq 4 \sup_{t\in I} \| M_t \|^2_{\mathscr{L}^\infty} \mathrm{E}\left[\sum_{j=0}^{2^n-1} \left(M_{\tau^n_{j+1}} - M_{\tau^n_j}\right)^2\right] \\
&= 4 \sup_{t\in I} \| M_t \|^2_{\mathscr{L}^\infty} \mathrm{E}\left[M^2_T - M^2_0\right]
\end{aligned}
$$

が成り立つ. ∎

定理 4.2.16 (二次変分の存在). 任意の $M \in \mathcal{M}_{c,loc}$ に対し或る $A \in \mathcal{A}^+$ が存在して次を満たす:

$$
A_0 = 0 \quad \mu\text{-a.s.}, \quad M^2 - A \in \mathcal{M}_{c,loc}.
$$

$A' \in \mathcal{A}^+$ もまた上の主張を満たすときは A と A' は μ-a.s. にパスが一致し，逆に $A, A' \in \mathcal{A}^+$ が μ-a.s. にパスが一致するならば A' も主張を満たす．また $M, M' \in \mathcal{M}_{c,loc}$ が μ-a.s. にパスが一致するなら，それぞれに対応する $A, A' \in \mathcal{A}^+$ も μ-a.s. にパスが一致する．特に $M \in \mathcal{M}_{p,c}$ $(p \geq 2)$ に対しては，対応する $A \in \mathcal{A}^+$ は可積分である．

証明. まず $M \in \mathcal{M}_{b,c}$ に対し A の存在を証明し，次にその結果を $\mathcal{M}_{c,loc}$ に拡張する．

第一段 $M \in \mathcal{M}_{b,c}$ とする．(4.12) の Q^n を構成し $N^n := M^2 - Q^n \in \mathcal{M}_{b,c}$ とおけば

$$
\left\| N^n_T \right\|_{\mathscr{L}^2} \leq 2 \sup_{t\in I} \| M_t \|_{\mathscr{L}^\infty} \| M_T \|_{\mathscr{L}^2} \quad (n = 1, 2, \cdots)
$$

が成り立つから，N^n の同値類[*17] $\overline{N^n}$ の列 $(\overline{N^n})_{n=1}^\infty$ は Hilbert 空間 $\mathfrak{M}_{2,c}$ において有界列となる．Kolmos の補題より $\overline{N^n}$ の或る線型結合の列 $\hat{\overline{N^n}}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が $\mathfrak{M}_{2,c}$ において Cauchy 列をなすから，その極限を $\overline{N} \in \mathfrak{M}_{2,c}$ と表す．凸結合を

$$
\hat{\overline{N^n}} = \sum_{j=0}^\infty c^n_j \overline{N^{n+j}}, \quad \hat{N}^n := \sum_{j=0}^\infty c^n_j N^{n+j}, \quad \hat{Q}^n := \sum_{j=0}^\infty c^n_j Q^{n+j}
$$

と表せば $\hat{N}^n = M^2 - \hat{Q}^n$ を満たし[*18]，$N \in \overline{N}$ を一つ取り

$$
A := M^2 - N \tag{4.14}
$$

この右辺は t に依らないから

$$
\sup_{t\in I} \| N_t \|_{\mathscr{L}^\infty} \leq \left(2^{n+1} + 1\right) \sup_{t\in I} \| M_t \|^2_{\mathscr{L}^\infty}
$$

を得る．以上の結果と (4.13) を併せて $N \in \mathcal{M}_{b,c}$ となる．

[*17] 補題 4.2.6 で導入した同値関係 R による同値類.

[*18] 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $(c^n_j)_{j=0}^\infty$ は $\sum_{j=0}^\infty c^n_j = 1$ を満たし，且つ $\neq 0$ であるのは有限個である.

とおけば，Doob の不等式 (定理 4.1.4) により

$$\left\| \sup_{t\in I} \left| \hat{Q}_t^n - A_t \right| \right\|_{\mathscr{L}^2} = \left\| \sup_{t\in I} \left| N_t - \hat{N}_t^n \right| \right\|_{\mathscr{L}^2}$$
$$\leq \left\| N_T - \hat{N}_T^n \right\|_{\mathscr{L}^2} = \left\| \overline{N} - \widehat{\overline{N^n}} \right\|_{\mathfrak{M}_{2,c}} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成り立つ．[*19]

$$\left\| \sup_{t\in I} \left| \hat{Q}_t^{n_k} - A_t \right| \right\|_{\mathscr{L}^2} < \frac{1}{4^k} \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

を満たすように部分列 $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ を取り

$$E_k := \left\{ \sup_{t\in I} \left| \hat{Q}_t^{n_k} - A_t \right| \geq \frac{1}{2^k} \right\} \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

とすると，Chebyshev の不等式より $\mu(E_k) < 1/2^k$ を得る．

$$E := \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq N} E_k$$

と定めれば Borel-Cantelli の補題より E は μ-零集合であり，

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{t\in I} \left| \hat{Q}_t^{n_k}(\omega) - A_t(\omega) \right| = 0 \quad (\forall \omega \in \Omega \backslash E) \tag{4.15}$$

が成り立ち，$A_0(\omega) = 0$ $(\forall \omega \in \Omega\backslash E)$ が従う．

$$D_k := \left\{ \frac{j}{2^{n_k}} T \ ; \quad j = 0, 1, \cdots, 2^{n_k} \right\} \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

とおけば，(4.12) より全ての $\nu \geq k$, $\omega \in \Omega$ に対して $t \longmapsto Q_t^{n_\nu}(\omega)$ は D_k 上で単調非減少となるから，その線型結合である $\hat{Q}_t^{n_\nu}$ も D_k 上で単調非減少となり，(4.15) より $\omega \in \Omega\backslash E$ に対しては $t \longmapsto A_t(\omega)$ も D_k 上で単調非減少となる[*20]．$D := \cup_{k=1}^{\infty} D_{n_k}$ とおけば D は I で稠密であり，更に A は或る零集合 E' を除いてパスが連続となるから[*21]，写像 $I \ni t \longmapsto A_t(\omega)$ $(\forall \omega \in \Omega\backslash(E \cup E'))$ は連続且つ単調非減少である．また (4.14) より A は $(\mathcal{F}_t)$-適合でもあるから，以上より $A \in \mathcal{A}^+$ である．$N = M^2 - A \in \mathcal{M}_{2,c} \subset \mathcal{M}_{c,loc}$(命題 4.2.10) より A は定理の主張を満たす．存在の一意性は命題 4.2.14 による．今 $A' \in \mathcal{A}^+$ もまた定理の主張を満たしているなら，$N' = M^2 - A'$ として，$A - A' \in \mathcal{A}$ かつ

$$A - A' = N' - N \in \mathcal{M}_{2,c}$$

となるから $A_t - A'_t = 0$ $(\forall t \in I)$ μ-a.s. が従う．

[*19] $\|\cdot\|_{\mathfrak{M}_{2,c}}$ は (4.7) で定義される内積により導入されるノルムを表す．

[*20] 或る j と $u \in \Omega\backslash E$ で $A_{\frac{j}{2^{n_k}}T}(u) > A_{\frac{j+1}{2^{n_k}}T}(u)$ が成り立っているとする．式 (4.15) により，

$$\alpha := A_{\frac{j}{2^n}T}(u), \quad \beta := A_{\frac{j+1}{2^n}T}(u)$$

とおけば或る $\nu \geq 1$ が存在して

$$\left| \hat{Q}^{n_\nu}_{\frac{j}{2^{n_k}}T}(u) - A_{\frac{j}{2^{n_k}}T}(u) \right| < \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad \left| \hat{Q}^{n_\nu}_{\frac{j+1}{2^{n_k}}T}(u) - A_{\frac{j+1}{2^{n_k}}T}(u) \right| < \frac{\alpha - \beta}{2}$$

を同時に満たすが，

$$\hat{Q}^{n_\nu}_{\frac{j}{2^{n_k}}T}(u) > \frac{\alpha + \beta}{2} > \hat{Q}^{n_\nu}_{\frac{j+1}{2^{n_k}}T}(u)$$

が従うので $t \longmapsto \hat{Q}_t^{n_\nu}(u)$ の単調増大性に矛盾する．

[*21] $M \in \mathcal{M}_{b,c}$, $N \in \mathcal{M}_{2,c}$ より M, N のパスが連続でない ω の全体は或る零集合に含まれる．それを E' とおけばよい．

第二段 $M \in \mathcal{M}_{c,loc}$ を任意に取る．或る $(\tau_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathcal{T}$ が存在して $M^{\tau_j} \in \mathcal{M}_{b,c}$ を満たすから，前段の結果より或る $A^j \in \mathcal{A}^+$ が存在して

$$N^j \coloneqq (M^{\tau_j})^2 - A^j \in \mathcal{M}_{2,c}$$

が成り立つ．或る μ-零集合 E_1 が存在して[*22]，全ての $\omega \in \Omega \backslash E_1$ に対し $(\tau_j(\omega))_{j=1}^{\infty}$ は 0 出発，単調非減少かつ或る $J = J(\omega)$ 番目以降は $\tau_j(\omega) = T$ $(\forall j \geq J)$ を満たす．$n \leq m$ となるように任意に $n, m \in \mathbb{N}$ を取って固定すれば，全ての $\omega \in \Omega \backslash E_1$ に対して

$$M^{\tau_m}_{t \wedge \tau_n(\omega)}(\omega) = M_{t \wedge \tau_n(\omega) \wedge \tau_m(\omega)}(\omega) = M^{\tau_n}_t(\omega) \quad (\forall t \in I)$$

が従うから，各 $t \in I$ で $M^m_{t \wedge \tau_n}$ と M^n_t の関数類が一致し，任意抽出定理 (定理 4.1.5) より

$$\mathrm{E}\left[(M^{\tau_m}_t)^2 - A^m_t \;\middle|\; \mathcal{F}_{\tau_n}\right] = \left(M^{\tau_m}_{t \wedge \tau_n}\right)^2 - A^m_{t \wedge \tau_n} = (M^{\tau_n}_t)^2 - A^m_{t \wedge \tau_n} \quad (\forall t \in I)$$

が得られる．定理 4.2.4 より $\left(N^m_{t \wedge \tau_n}\right)_{t \in I} \in \mathcal{M}_{2,c}$ となるから $(M^{\tau_n})^2 - (A^m)^{\tau_n} \in \mathcal{M}_{2,c}$ が従い，一方 $N^n = (M^{\tau_n})^2 - A^n \in \mathcal{M}_{2,c}$ であるから，前段の考察より或る μ-零集合 $E^{n,m}$ が存在して

$$A^n_t(\omega) = A^m_{t \wedge \tau_n(\omega)}(\omega) \quad (\forall t \in I,\ \omega \in \Omega \backslash E^{n,m})$$

が得られ，特に

$$A^n_{t \wedge \tau_n(\omega)}(\omega) = A^m_{t \wedge \tau_n(\omega)}(\omega) \quad (\forall t \in I,\ \omega \in \Omega \backslash E^{n,m})$$

が成り立つ．

$$E_2 \coloneqq \bigcup_{\substack{n,m \in \mathbb{N} \\ n \leq m}} E^{n,m}$$

に対し

$$A_t(\omega) \coloneqq \begin{cases} \lim_{n \to \infty} A^n_{t \wedge \tau_n(\omega)}(\omega) & (\omega \in \Omega \backslash (E_1 \cup E_2)) \\ 0 & (\omega \in E_1 \cup E_2) \end{cases} \quad (\forall t \in I)$$

として A を定めれば $A \in \mathcal{A}^+$ を満たす[*23]．そして $N \coloneqq M^2 - A$ とおけば $\Omega \backslash (E_1 \cup E_2)$ 上で

$$N_{t \wedge \tau_n} = M^2_{t \wedge \tau_n} - A_{t \wedge \tau_n} = (M^{\tau_n}_t)^2 - A^n_{t \wedge \tau_n} = N^n_{t \wedge \tau_n} \quad (\forall t \in I,\ n \in \mathbb{N})$$

[*22] 或る零集合 $E_1^{(1)}$ があり $\tau_0(\omega) = 0$ $(\forall \omega \in \Omega \backslash E_1^{(1)})$，また或る零集合 E_1^j があり $\tau_j(\omega) \leq \tau_{j+1}(\omega)$ $(\forall \omega \in \Omega \backslash E_1^j)$，更に或る零集合 $E_1^{(T)}$ を取れば，各 $\omega \in \Omega \backslash E_1^{(T)}$ について或る $J(\omega)$ 番目以降は $\tau_j(\omega) = T$ $(\forall j \geq J(\omega))$ が成り立つ．よって

$$E_1 = \left(\cup_{j=1}^{\infty} E_1^j\right) \cup E_1^{(1)} \cup E_1^{(T)}$$

とおけばよい．

[*23]

連続性・単調非減少性 $\omega \in \Omega \backslash (E_1 \cup E_2)$ の場合に確認する．任意に $s, u \in I$, $(s < u)$ を取れば $u \leq \tau_n(\omega)$ となる n が存在し $A_t(\omega) = A^n_t(\omega)$ $(\forall t \leq \tau_n(\omega))$ を満たす．写像 $I \ni t \longmapsto A^n_t(\omega)$ は連続且つ単調非減少であるから $t \longmapsto A_t(\omega)$ も $t = s, u$ において連続であり，且つ $A_s(\omega) = A^n_s(\omega) \leq A^n_u(\omega) = A_u(\omega)$ により単調非減少である．

適合性 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し A^n は $(\mathcal{F}_t)$-適合である．$t \in I$ を固定し

$$\tilde{\mathcal{F}}_t \coloneqq \{\, B \cap (E_1 \cup E_2)^c \;;\quad B \in \mathcal{F}_t \,\}$$

とおく．写像 $\Omega \ni \omega \longmapsto A^n_t(\omega)$ を $\Omega \backslash (E_1 \cup E_2)$ に制限した $\tilde{A}^n_t \coloneqq A^n_t|_{\Omega \backslash (E_1 \cup E_2)}$ は可測 $\tilde{\mathcal{F}}_t / \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であり，各点収束先の $\tilde{A}_t \coloneqq A_t|_{\Omega \backslash (E_1 \cup E_2)}$ もまた可測 $\tilde{\mathcal{F}}_t / \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ となる．任意の $C \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$A_t^{-1}(C) = \begin{cases} \tilde{A}_t^{-1}(C) & (0 \notin C) \\ (E_1 \cup E_2) \cup \tilde{A}_t^{-1}(C) & (0 \in C) \end{cases}$$

となり，$E_1 \cup E_2 \in \mathcal{F}_0$ により $\tilde{\mathcal{F}}_t \subset \mathcal{F}_t$ であるから A_t は可測 $\mathcal{F}_t / \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ となる．

が成り立つから $N \in \mathcal{M}_{c,loc}$ となる．A の一意性について，

第三段　後半の主張を示す．$M \in \mathcal{M}_{p,c}$ $(p \geq 2)$ の場合，命題 4.2.10 より $M \in \mathcal{M}_{c,loc}$ であるから，或る $A \in \mathcal{A}^+$ が存在して $M^2 - A \in \mathcal{M}_{c,loc}$ となる．従って或る $(\tau_j)_{j=0}^{\infty} \in \mathcal{T}$ が存在して $(M^{\tau_j})^2 - A^{\tau_j} \in \mathcal{M}_{b,c}$ $(j = 0, 1, \cdots)$ を満たすから，任意に $t \in I$ を固定すれば

$$\int_{\Omega} \left(M_{t \wedge \tau_j(\omega)}(\omega) \right)^2 \mu(d\omega) = \int_{\Omega} A_{t \wedge \tau_j(\omega)}(\omega)\, \mu(d\omega) \quad (\forall j = 0, 1, \cdots)$$

が成り立つ．或る零集合 E が存在して，$\omega \in \Omega \backslash E$ なら $A_0(\omega) = 0$，$I \ni t \longmapsto A_t(\omega)$ は連続且つ単調非減少，更に $0 = \tau_0(\omega) \leq \tau_1(\omega) \leq \cdots \leq \tau_J(\omega) = T$ $(\exists J = J(\omega))$ が満たされるから，$\left(A_{t \wedge \tau_j(\omega)}(\omega) \right)_{j=0}^{\infty}$ は単調増大列である．また Doob の不等式により $\left| M_{t \wedge \tau_j} \right| \leq \sup_{t \in I} |M_t| \in \mathscr{L}^p \subset \mathscr{L}^2$ も満たされているから，Lebesgue の収束定理と単調収束定理より

$$\int_{\Omega} (M_t(\omega))^2\, \mu(d\omega) = \int_{\Omega} A_t(\omega)\, \mu(d\omega) < \infty$$

が得られる．

定義 4.2.17 (二次変分).　$M \in \mathcal{M}_{c,loc}$ に対して定理 4.2.16 より存在する $A \in \mathcal{A}^+$ のうち，全てのパスが 0 出発，連続，単調非減少であるものを M の二次変分 (quadratic variation) と呼び $\langle M \rangle$ と表す．また $M, N \in \mathcal{M}_{c,loc}$ に対して

$$\langle M, N \rangle \coloneqq \frac{1}{4}(\langle M + N \rangle - \langle M - N \rangle)$$

と定義して M, N の共変分と呼ぶ.

定理 4.2.18 (二次変分が有界な局所マルチンゲールは二乗可積分マルチンゲール).　$M \in \mathcal{M}_{c,loc}$ かつ $\| \langle M \rangle_T \|_{\mathscr{L}^\infty} < \infty$ であるならば，$M \in \mathcal{M}_{2,c}$ が成り立つ．

証明.　マルチンゲール性の定義に従い，以下三段階に分けて証明する．

第一段　任意の $t \in I$ に対し M_t が二乗可積分であることを示す．定理 4.2.16 より，或る $(\tau_j)_{j=0}^{\infty} \in \mathcal{T}$ が存在して $(M^{\tau_j})^2 - \langle M \rangle^{\tau_j} \in \mathcal{M}_{b,c}$ $(j = 0, 1, \cdots)$ を満たす．そして $M_0^2 - \langle M \rangle_0 = 0$ μ-a.s. も満たされているから，マルチンゲール性より任意の $t \in I$, $j = 0, 1, \cdots$ に対し

$$\int_{\Omega} \left(M_{t \wedge \tau_j(\omega)}(\omega) \right)^2 \mu(d\omega) = \int_{\Omega} \langle M \rangle_{t \wedge \tau_j(\omega)} (\omega)\, \mu(d\omega) \tag{4.16}$$

が成り立つ．$(\tau_j)_{j=0}^{\infty}$ に対して或る零集合 E が存在し，$\omega \in \Omega \backslash E$ なら $0 = \tau_0(\omega) \leq \tau_1(\omega) \leq \cdots \leq \tau_J(\omega) = T = \tau_{J+1}(\omega) = \tau_{J+2}(\omega) = \cdots$ $(\exists J = J(\omega))$ が満たされる．また全ての $\omega \in \Omega$ に対し $I \ni t \longmapsto \langle M \rangle_t (\omega)$ が非負・連続・単調非減少であるから，任意の $t \in I$ に対し

$$\langle M \rangle_{t \wedge \tau_j(\omega)} (\omega) \leq \langle M \rangle_T (\omega) \quad (\forall \omega \in \Omega \backslash E,\ j = 0, 1, \cdots)$$

が成り立つ．$\langle M \rangle_T$ が可積分であるから Lebesgue の収束定理より

$$\int_{\Omega} \langle M \rangle_t (\omega)\, \mu(d\omega) = \lim_{j \to \infty} \int_{\Omega} \langle M \rangle_{t \wedge \tau_j(\omega)} (\omega)\, \mu(d\omega)$$

が成り立ち，(4.16) において Fatou の補題を使えば

$$\begin{aligned}\int_\Omega (M_t(\omega))^2\ \mu(d\omega) &= \int_\Omega \liminf_{j\to\infty}\left(M_{t\wedge\tau_j(\omega)}(\omega)\right)^2\ \mu(d\omega)\\ &\leq \liminf_{j\to\infty}\int_\Omega \langle M\rangle_{t\wedge\tau_j(\omega)}(\omega)\,\mu(d\omega) = \int_\Omega \langle M\rangle_t(\omega)\,\mu(d\omega) \leq \|\langle M\rangle_T\|_{\mathscr{L}^\infty}\end{aligned}$$

が得られ M_t の二乗可積分性が従う．

第二段 $I \ni t \longmapsto M_t(\omega)$ について，定義より[*24] 任意の $\omega \in \Omega$ に対し各点 t で右連続且つ左極限を持つから，以降は μ-a.s.$\omega \in \Omega$ に対し連続且つ 0 出発であることを示す．M に対し或る $(\sigma_k)_{k=0}^\infty \in \mathcal{T}$ が存在して $M^{\sigma_k} \in \mathcal{M}_{b,c}$ $(k = 0,1,\cdots)$ を満たすから，先ず $M_0 = M_0^{\sigma_k} = 0$ μ-a.s. が従う．また或る零集合 E' が存在して $\omega \in \Omega\backslash E'$ なら $0 = \sigma_0(\omega) \leq \sigma_1(\omega) \leq \cdots \leq \sigma_K(\omega) = T = \sigma_{K+1}(\omega) = \sigma_{K+2}(\omega) = \cdots$ $(\exists K = K(\omega))$ が成り立ち，一方で各 $k = 0,1,\cdots$ に対し或る零集合 E_k'' が存在し，$\omega \in \Omega\backslash E_k''$ ならば $I \longmapsto M_t^{\hat{\sigma}_k}(\omega)$ が連続となる．

$$E'' := \bigcup_{k=0}^\infty E_k''$$

とおけば，$\omega \in \Omega\backslash(E' \cup E'')$ ならば必ず或る $K = K(\omega)$ が存在して $\sigma_K(\omega) = T$ を満たし，$I \ni t \longmapsto M_t(\omega)$ は $I \ni t \longmapsto M_t^{\sigma_K}(\omega)$ に一致する．$I \ni t \longmapsto M_t^{\sigma_K}(\omega)$ が連続であるから $I \ni t \longmapsto M_t(\omega)$ の連続性が従い，よって μ-a.s. に $I \ni t \longmapsto M_t$ は連続である．

第三段 任意の $s,t \in I$ $(s < t)$ に対し

$$\int_A M_t(\omega)\,\mu(d\omega) = \int_A M_s(\omega)\,\mu(d\omega) \quad (\forall A \in \mathcal{F}_s) \tag{4.17}$$

が成り立つことを示す．前段の $(\sigma_k)_{k=0}^\infty \in \mathcal{T}$ を取れば $M_{t\wedge\sigma_k} \longrightarrow M_t$ $(k \longrightarrow \infty,\ \mu\text{-a.s.})$ かつ $M^{\sigma_k} \in \mathcal{M}_{b,c}$ $(k = 0,1,\cdots)$ が満たされるから，任意の $k = 0,1,\cdots$ に対して

$$\int_A M_{t\wedge\sigma_k(\omega)}(\omega)\,\mu(d\omega) = \int_A M_{s\wedge\sigma_k(\omega)}(\omega)\,\mu(d\omega) \quad (\forall A \in \mathcal{F}_s)$$

が成り立つ．第一段の結果と Doob の不等式より $\left|M_{t\wedge\sigma_k}\right| \leq \sup_{t\in I}|M_t| \in \mathscr{L}^2 \subset \mathscr{L}^1$ が満たされるから，Lebesgue の収束定理より (4.17) が得られる．∎

補題 4.2.19 (停止時刻で停めた二次変分). σ,τ を停止時刻とし，$\sigma \geq \tau$ を満たしていると仮定する．このとき任意の $M \in \mathcal{M}_{c,loc}$ に対し $N := M^\sigma - M^\tau$ と定めれば，$N \in \mathcal{M}_{c,loc}$ かつ

$$\langle N\rangle_t = \langle M\rangle_{t\wedge\sigma} - \langle M\rangle_{t\wedge\tau} \quad (\forall t \in I,\ \mu\text{-a.s.})$$

が成り立つ．特に $\tau = 0$ の場合，任意の停止時刻 σ に対し

$$\langle M^\sigma\rangle_t = \langle M\rangle_{t\wedge\sigma} \quad (\forall t \in I,\ \mu\text{-a.s.})$$

の関係が得られる．

[*24] 講義中の $\mathcal{M}_{c,loc}$ 定義には，「全ての $\omega \in \Omega$ に対し $I \ni t \longmapsto M_t(\omega)$ が各点 t で右連続且つ左極限を持つ」とは定められていませんでしたが，マルチンゲールの定義にはパスが右連続且つ左極限を持つことが含まれています．講義中の $\mathcal{M}_{c,loc}$ の定義だとこのことが示せなかったので，勝手に自分の方で定義に入れました．

証明.

第一段　$M \in \mathcal{M}_{b,c}$ の場合を考える．まず $N \in \mathcal{M}_{b,c}$ が成り立つことを示す．実際 M がマルチンゲールであるから任意の $\omega \in \Omega$ に対し $t \longmapsto N_t(\omega)$ は各点で右連続且つ左極限を持ち，さらに定理 4.2.3 より $|N_t| \leq |M_{t\wedge\sigma}| + |M_{t\wedge\tau}| \leq 2\sup_{t\in I} \| M_t \|_{\mathscr{L}^\infty}$ μ-a.s. が成り立つから

$$\sup_{t\in I} \| N_t \|_{\mathscr{L}^\infty} \leq 2 \sup_{t\in I} \| M_t \|_{\mathscr{L}^\infty} < \infty$$

が満たされる．そして任意に $s, t \in I$ $(s < t)$ を取れば，命題 2.2.4 と任意抽出定理より

$$\mathrm{E}[N_t \mid \mathcal{F}_s] = \mathrm{E}[M_{t\wedge\sigma} - M_{t\wedge\tau} \mid \mathcal{F}_s] = M_{s\wedge\sigma} - M_{s\wedge\tau} = N_s$$

が成り立ち，μ-a.s. に $M = 0$ であるから $N = 0$ μ-a.s. も従う．次に

$$\langle N \rangle_t = \langle M \rangle_{t\wedge\sigma} - \langle M \rangle_{t\wedge\sigma} \quad (\forall t \in I,\ \mu\text{-a.s.}) \tag{4.18}$$

が成り立つことを示す．

補題 4.2.15 の $(\tau_j^n)_{j=0}^{2^n}$ と任意の $\omega \in \Omega$ に対し或る i, k $(i \leq k)$ が存在して

$$\tau_i^n \leq \tau(\omega) \leq \tau_{i+1}^n \leq \sigma(\omega) \leq \tau_{i+2}^n, \tag{4.19}$$
$$\tau_i^n \leq \tau(\omega) \leq \tau_{i+1}^n < \tau_k^n \leq \sigma(\omega) \leq \tau_{k+1}^n, \tag{4.20}$$
$$\tau_i^n \leq \tau(\omega) \leq \sigma(\omega) \leq \tau_{i+1}^n, \tag{4.21}$$

のいずれかを満たす．

$$Q_t^n(N) \coloneqq \sum_{j=0}^{2^n-1} \left(N_{t\wedge\tau_{j+1}^n} - N_{t\wedge\tau_j^n} \right)^2 \quad (\forall t \in I)$$

とおき，同様に $Q^n(M)$ も定める．ω が (4.19) を満たしている場合，

$$\begin{aligned}
Q_t^n(N)(\omega) &= \sum_{j=0}^{2^n-1} \left(N_{t\wedge\tau_{j+1}^n}(\omega) - N_{t\wedge\tau_j^n}(\omega) \right)^2 \\
&= \sum_{j=0}^{2^n-1} \left(M_{t\wedge\sigma(\omega)\wedge\tau_{j+1}^n}(\omega) - M_{t\wedge\tau(\omega)\wedge\tau_{j+1}^n}(\omega) - M_{t\wedge\sigma(\omega)\wedge\tau_j^n}(\omega) + M_{t\wedge\tau(\omega)\wedge\tau_j^n}(\omega) \right)^2 \\
&= \left(M_{t\wedge\sigma(\omega)}(\omega) - M_{t\wedge\tau_{i+1}^n}(\omega) \right)^2 + \left(M_{t\wedge\tau_{i+1}^n}(\omega) - M_{t\wedge\tau(\omega)}(\omega) \right)^2, \\
Q_{t\wedge\sigma(\omega)}^n(M)(\omega) &= \sum_{j=0}^{2^n-1} \left(M_{t\wedge\sigma(\omega)\wedge\tau_{j+1}^n}(\omega) - M_{t\wedge\sigma(\omega)\wedge\tau_j^n}(\omega) \right)^2 \\
&= \sum_{j=0}^{i} \left(M_{t\wedge\tau_{j+1}^n}(\omega) - M_{t\wedge\tau_j^n}(\omega) \right)^2 + \left(M_{t\wedge\sigma(\omega)}(\omega) - M_{t\wedge\tau_{i+1}^n}(\omega) \right)^2, \\
Q_{t\wedge\tau(\omega)}^n(M)(\omega) &= \sum_{j=0}^{2^n-1} \left(M_{t\wedge\tau(\omega)\wedge\tau_{j+1}^n}(\omega) - M_{t\wedge\tau(\omega)\wedge\tau_j^n}(\omega) \right)^2 \\
&= \sum_{j=0}^{i-1} \left(M_{t\wedge\tau_{j+1}^n}(\omega) - M_{t\wedge\tau_j^n}(\omega) \right)^2 + \left(M_{t\wedge\tau(\omega)}(\omega) - M_{t\wedge\tau_i^n}(\omega) \right)^2
\end{aligned}$$

と表せるから

$$
\begin{aligned}
&\left|Q_t^n(N)(\omega) - \left(Q_{t\wedge\sigma(\omega)}^n(M)(\omega) - Q_{t\wedge\tau(\omega)}^n(M)(\omega)\right)\right| \\
&\quad \leq \left(M_{t\wedge\tau_{i+1}^n}(\omega) - M_{t\wedge\tau(\omega)}(\omega)\right)^2 + \left(M_{t\wedge\tau_{i+1}^n}(\omega) - M_{t\wedge\tau_i^n}(\omega)\right)^2 + \left(M_{t\wedge\tau(\omega)}(\omega) - M_{t\wedge\tau_i^n}(\omega)\right)^2 \\
&\quad \leq 3 \sup_{|t-s|\leq T/2^n} |M_t(\omega) - M_s(\omega)|^2
\end{aligned}
$$

が成り立つ．同様にして ω が (4.20) 或は (4.21) を満たしている場合も

$$
\left|Q_t^n(N)(\omega) - \left(Q_{t\wedge\sigma(\omega)}^n(M)(\omega) - Q_{t\wedge\tau(\omega)}^n(M)(\omega)\right)\right| \leq 3 \sup_{|t-s|\leq T/2^n} |M_t(\omega) - M_s(\omega)|^2
$$

が成り立つから，つまり全ての $\omega \in \Omega$ に対し

$$
\left|Q_t^n(N)(\omega) - \left(Q_{t\wedge\sigma(\omega)}^n(M)(\omega) - Q_{t\wedge\tau(\omega)}^n(M)(\omega)\right)\right| \leq 3 \sup_{|t-s|\leq T/2^n} |M_t(\omega) - M_s(\omega)|^2 \tag{4.22}
$$

が満たされる．更に $t \longmapsto M_t$ が μ-a.s. に一様連続であるから，或る零集合 A_1 が存在して

$$
3 \sup_{|t-s|\leq T/2^n} |M_t(\omega) - M_s(\omega)|^2 \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty,\ \omega \in \Omega\backslash A_1) \tag{4.23}
$$

が従う．また定理 4.2.16 の証明中の (4.15) より，$(Q^n(M))_{n=1}^\infty$ の或る凸結合列 $\left(\hat{Q}^n(M)\right)_{n=1}^\infty$，或る零集合 A_2 及び或る部分添数列 $(n_k)_{k=1}^\infty$ が存在して，全ての $t \in I$ と $\omega \in \Omega\backslash A_2$ に対し

$$
\hat{Q}_t^{n_k}(M)(\omega) \longrightarrow \langle M\rangle_t(\omega) \quad (k \longrightarrow \infty)
$$

を満たす．従って全ての $t \in I,\ \omega \in \Omega\backslash A_2$ に対し

$$
\hat{Q}_{t\wedge\sigma(\omega)}^{n_k}(M)(\omega) \longrightarrow \langle M\rangle_{t\wedge\sigma(\omega)}(\omega), \quad \hat{Q}_{t\wedge\tau(\omega)}^{n_k}(M)(\omega) \longrightarrow \langle M\rangle_{t\wedge\tau(\omega)}(\omega) \quad (k \longrightarrow \infty) \tag{4.24}
$$

も成り立つ．各 $n \in \mathbb{N}$ についての凸結合を

$$
\hat{Q}^n(M) = \sum_{j=0}^\infty c_j^n Q^{n+j}(M), \quad \left(\sum_{j=0}^\infty c_j^n = 1\right)
$$

と表し，

$$
\hat{Q}^n(N) \coloneqq \sum_{j=0}^\infty c_j^n Q^{n+j}(N)
$$

とおけば，(4.22) より全ての $\omega \in \Omega$ に対し

$$
\begin{aligned}
&\left|\hat{Q}_t^n(N)(\omega) - \left(\hat{Q}_{t\wedge\sigma(\omega)}^n(M)(\omega) - \hat{Q}_{t\wedge\tau(\omega)}^n(M)(\omega)\right)\right| \\
&\quad = \left|\sum_{j=0}^\infty c_j^n Q_t^{n+j}(N)(\omega) - \left(Q_{t\wedge\sigma(\omega)}^{n+j}(M)(\omega) - Q_{t\wedge\tau(\omega)}^{n+j}(M)(\omega)\right)\right| \\
&\quad \leq \sum_{j=0}^\infty c_j^n \left|Q_t^{n+j}(N)(\omega) - \left(Q_{t\wedge\sigma(\omega)}^{n+j}(M)(\omega) - Q_{t\wedge\tau(\omega)}^{n+j}(M)(\omega)\right)\right| \\
&\quad \leq 3 \sup_{|t-s|\leq T/2^n} |M_t(\omega) - M_s(\omega)|^2 \quad (n = 1, 2, \cdots)
\end{aligned}
$$

が成り立つから，(4.23) と (4.24) より全ての $t \in I,\ \omega \in \Omega\backslash(A_1 \cup A_2)$ に対して

$$
\left|\langle M\rangle_{t\wedge\sigma(\omega)}(\omega) - \langle M\rangle_{t\wedge\tau(\omega)}(\omega) - \hat{Q}_t^{n_k}(N)(\omega)\right| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)
$$

が成り立つ．このとき

$$\langle N\rangle_t = \langle M\rangle_{t\wedge\sigma} - \langle M\rangle_{t\wedge\tau} \quad (\forall t \in I,\ \mu\text{-a.s.})$$

が成立する．

定理 4.2.16 より M に対し二次変分 $\langle M\rangle$ が存在して

$$N_t - (\langle M\rangle_{t\wedge\sigma} - \langle M\rangle_{t\wedge\tau}) = (M - \langle M\rangle)_{t\wedge\sigma} - (M - \langle M\rangle)_{t\wedge\tau} \quad (\forall t \in I)$$

と表せる．$M - \langle M\rangle \in \mathcal{M}_{b,c}$ であるから，上と同様にして $(M - \langle M\rangle)^\sigma - (M - \langle M\rangle)^\tau \in \mathcal{M}_{b,c}$ が成り立つ．また全ての $\omega \in \Omega$ に対し $\langle M\rangle_0(\omega) = 0$ が満たされ，更に $\sigma \geq \tau$ により全ての $\omega \in \Omega$ に対し $I \ni t \longmapsto \langle M\rangle_{t\wedge\sigma(\omega)}(\omega) - \langle M\rangle_{t\wedge\tau(\omega)}(\omega)$ は連続且つ単調非減少である．従って定理 4.2.16 の意味での二次変分の一意性より (4.18) が得られる．

第二段　$M \in \mathcal{M}_{c,loc}$ のとき，或る $(\tau_j)_{j=0}^\infty \in \mathcal{T}$ が存在して $M^{\tau_j} \in \mathcal{M}_{b,c}$ となる．全ての $j \in \mathbb{N}$ で

$$N_t^{\tau_j} = M_{t\wedge\sigma}^{\tau_j} - M_{t\wedge\tau}^{\tau_j} \quad (\forall t \in I)$$

が成り立つから，前段の考察より各 j に対し $N^{\tau_j}, (N^{\tau_j})^2 - \langle N^{\tau_j}\rangle \in \mathcal{M}_{b,c}$ 且つ

$$\langle N^{\tau_j}\rangle_t = \langle M^{\tau_j}\rangle_{t\wedge\sigma} - \langle M^{\tau_j}\rangle_{t\wedge\tau} \quad (\forall t \in I,\ \mu\text{-a.s.})$$

が満たされる．一方 $N \in \mathcal{M}_{c,loc}$ であるから，定理 4.2.16 より $\langle N\rangle$ が存在して $\left(N^2 - \langle N\rangle\right)^{\tau_j} = (N^{\tau_j})^2 - \langle N\rangle^{\tau_j} \in \mathcal{M}_{b,c}$ $(j = 0, 1, \cdots)$ も満たされ，二次変分の一意性より各 j について

$$\langle N^{\tau_j}\rangle_t = \langle N\rangle_{t\wedge\tau_j} \quad (\forall t \in I,\ \mu\text{-a.s.})$$

が成り立ち，同じ理由で

$$\langle M^{\tau_j}\rangle_t = \langle M\rangle_{t\wedge\tau_j} \quad (\forall t \in I,\ \mu\text{-a.s.})$$

も得られる．すなわち或る零集合 A_j, B_j, C_j $(j = 0, 1, \cdots)$ が存在して

$$\begin{aligned}
\langle N^{\tau_j}\rangle_t(\omega) &= \langle M^{\tau_j}\rangle_{t\wedge\sigma(\omega)}(\omega) - \langle M^{\tau_j}\rangle_{t\wedge\tau(\omega)}(\omega) && (\forall t \in I,\ \omega \in \Omega\backslash A_j),\\
\langle N^{\tau_j}\rangle_t(\omega) &= \langle N\rangle_{t\wedge\tau_j(\omega)}(\omega) && (\forall t \in I,\ \omega \in \Omega\backslash B_j),\\
\langle M^{\tau_j}\rangle_t(\omega) &= \langle M\rangle_{t\wedge\tau_j(\omega)}(\omega) && (\forall t \in I,\ \omega \in \Omega\backslash C_j)
\end{aligned}$$

が満たされるから，

$$A := \bigcup_{j=0}^\infty A_j, \quad B := \bigcup_{j=0}^\infty B_j, \quad C := \bigcup_{j=0}^\infty C_j, \quad E := A \cup B \cup C$$

として零集合 E を定めれば

$$\langle N\rangle_t(\omega) = \langle M\rangle_{t\wedge\sigma(\omega)}(\omega) - \langle M\rangle_{t\wedge\tau(\omega)}(\omega) \quad (\forall t \in I,\ \omega \in \Omega\backslash E)$$

が従い主張を得る．■

第 5 章

伊藤積分

$I := [0,T]$ $(T > 0)$ に対して，基礎に置くフィルター付き確率空間を $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, (\mathcal{F}_t)_{t\in I})$ とする．また次を仮定する:

$$\mathcal{N} := \{\, N \in \mathcal{F} \ ; \quad \mu(N) = 0 \,\} \subset \mathcal{F}_0.$$

以後，確率過程が連続 (resp．右連続，左連続) であると書く場合は全てのパスが連続 (resp．右連続，左連続) であることを指す．

5.1　パスの変動を制限する停止時刻

定義 5.1.1 (パスの変動を制限する停止時刻).　$X = (X^1, \cdots, X^d)$ を連続な $\mathbb{R}^d$ 値適合過程[*1]とする．X と $\epsilon > 0$ に対して

$$\sum_{i=1}^{d} \left\| X^i_{t\wedge\tau_{j+1}} - X^i_{t\wedge\tau_j} \right\|_{\mathscr{L}^\infty} \leq \epsilon, \quad (\forall t \in I,\ j = 0,1,2,\cdots)$$

を満たす $(\tau_j)_{j=0}^{\infty} \in \mathcal{T}$ の全体を $\mathcal{T}(X,\epsilon)$ と表す．

定理 5.1.2 (パスの変動を制限する停止時刻の存在).　$X = (X^1, \cdots, X^d)$ を連続な $\mathbb{R}^d$ 値適合過程とする．任意の $\epsilon > 0$ に対して，$\tau_0 = 0$ かつ

$$\tau_{j+1}(\omega) := \inf \left\{ t \in I \ ; \quad \left| X_t(\omega) - X_{t\wedge\tau_j(\omega)}(\omega) \right| \geq \epsilon/d \right\} \wedge T, \quad (j = 0,1,2,\cdots)$$

と定めれば $(\tau_j)_{j=0}^{\infty} \in \mathcal{T}(X,\epsilon)$ となる．

証明．　数学的帰納法で示す．τ_0 は定義より停止時刻であるから，τ_j が停止時刻であると仮定して τ_{j+1} が停止時刻となることを示せばよい．

[*1] 定理 3.1.8 により，任意の停止時刻 τ に対し写像 $\omega \longmapsto X^i(\tau(\omega),\omega)$ $(i = 1,\cdots,d)$ は可測 $\mathcal{F}_\tau/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ となり，$\left\| X^i_{t\wedge\tau_{j+1}} - X^i_{t\wedge\tau_j} \right\|_{\mathscr{L}^\infty}$ を考えることができる．

第一段

$$I \ni t \longmapsto \sup_{s\in[0,t]} \left|X_s - X_{s\wedge\tau_j}\right|$$

は連続であり

$$\Omega \ni \omega \longmapsto \sup_{s\in[0,t]} \left|X_s(\omega) - X_{s\wedge\tau_j(\omega)}(\omega)\right|$$

は全ての $t \in I$ に対し可測 $\mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であることを示す．

連続性 任意に $t \in I$ を取り t における連続性を調べる．表記を簡単にするため，任意の $\omega \in \Omega$ に対し

$$f_\omega(t) \coloneqq \left|X_t(\omega) - X_{t\wedge\tau_j(\omega)}(\omega)\right| \quad (t \in I)$$

とおく．$f_\omega(t) < \sup_{s\in[0,t]} f_\omega(s)$ の場合，$s \longmapsto f_\omega(s)$ の連続性より t の十分小さな近傍を取っても上限は変化しない．$f_\omega(t) = \sup_{s\in[0,t]} f_\omega(s)$ の場合，$s < t$ なら

$$\sup_{u\in[0,t]} f_\omega(u) - \sup_{u\in[0,s]} f_\omega(u) \leq f_\omega(t) - f_\omega(s)$$

となり，$s \longmapsto f_\omega(s)$ が連続だから左側で連続である．同じく $s \longmapsto f_\omega(s)$ の連続性より，任意の $\delta > 0$ に対し十分小さな $h > 0$ を取れば，全ての $t < u < t + h$ に対し

$$f_\omega(u) < f_\omega(t) + \delta$$

とできるから

$$\sup_{u\in[0,s]} f_\omega(u) - f_\omega(t) < \delta \quad (t < \forall s < t + h)$$

が成り立つ．

可測性 定理 3.1.8 により $X_{s\wedge\tau_j}$ は $\mathcal{F}_{s\wedge\tau_j}$-可測であるから，$X$ の適合性及び絶対値の連続性と併せて写像 $\left|X_s - X_{s\wedge\tau_j}\right|$ は可測 $\mathcal{F}_s/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$，すなわち可測 $\mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ となる．

$$D_t^n \coloneqq \left\{ \frac{jt}{2^n} \ ; \quad j = 0, 1, \cdots, 2^n \right\} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

として，X のパスの連続性により

$$\sup_{s\in[0,t]} \left|X_s(\omega) - X_{s\wedge\tau_j(\omega)}(\omega)\right| = \lim_{n\to\infty} \max_{s\in D_t^n} \left|X_s(\omega) - X_{s\wedge\tau_j(\omega)}(\omega)\right| \quad (\forall\omega \in \Omega)$$

が成り立つから $\sup_{s\in[0,t]} \left|X_s - X_{s\wedge\tau_j}\right|$ も可測 $\mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ となる．

第二段 τ_j が停止時刻であるとして τ_{j+1} が停止時刻であることを示す．前段の結果より，任意の $t \in [0, T)$ に対して

$$\left\{\tau_{j+1} \leq t\right\} = \left\{ \sup_{s\in[0,t]} \left|X_s - X_{s\wedge\tau_j}\right| \geq \epsilon/d \right\} \tag{5.1}$$

が成り立つことをいえばよい．$t = T$ の場合は $\left\{\tau_{j+1} \leq T\right\} = \Omega$ である．

$$\sup_{s\in[0,t]} \left|X_s(\omega) - X_{s\wedge\tau_j(\omega)}(\omega)\right| < \epsilon/d$$

を満たす ω について，前段で示した連続性より，或る $h > 0$ が取れて $[0, t+h]$ が $\left\{ u \in I \ ; \quad \left| X_u(\omega) - X_{u \wedge \tau_j(\omega)}(\omega) \right| \geq \epsilon/d \right\}$ の下界の集合となるから $t < \tau_{j+1}(\omega)$ が従う．逆に

$$\sup_{s \in [0,t]} \left| X_s(\omega) - X_{s \wedge \tau_j(\omega)}(\omega) \right| \geq \epsilon/d$$

を満たす ω について，パスの連続性より sup は max と一致するから，或る $u \in [0, t]$ で

$$\left| X_u(\omega) - X_{u \wedge \tau_j(\omega)}(\omega) \right| \geq \epsilon/d$$

が成り立ち $\tau_{j+1}(\omega) \leq u \leq t$ が従う．以上で (5.1) が示された．前段で示した可測性より

$$\left\{ \tau_{j+1} \leq t \right\} = \left\{ \sup_{s \in [0,t]} \left| X_s - X_{s \wedge \tau_j} \right| \geq \epsilon/d \right\} \in \mathcal{F}_t$$

が任意の $t \in I$ に対して成立するから τ_{j+1} は停止時刻である．

第三段 $(\tau_j)_{j=0}^{\infty}$ が $\mathcal{T}$ の元であることを示す．今任意に $\omega \in \Omega$ を取り固定する．先ず定義より $\tau_0(\omega) = 0$ は満たされている．また，各 $j \in \mathbb{N}_0$ について $\tau_{j+1}(\omega)$ は

$$\left| X_t(\omega) - X_{t \wedge \tau_j(\omega)}(\omega) \right| \geq \epsilon/d$$

を満たす t の下限であり，$t \leq \tau_j(\omega)$ のときは左辺が 0 となるから

$$\tau_j(\omega) < \tau_{j+1}(\omega) \quad (j = 0, 1, 2, \cdots)$$

を満たす．

第四段 $(\tau_j)_{j=0}^{\infty} \in \mathcal{T}(X, \epsilon)$ を示す．任意に $\omega \in \Omega$ と $t \in I$ を取り固定する．$(\tau_j)_{j=0}^{\infty}$ の作り方より

$$\left| X_{t \wedge \tau_{j+1}(\omega)}(\omega) - X_{t \wedge \tau_j(\omega)}(\omega) \right| \leq \epsilon/d \quad (j = 0, 1, 2, \cdots)$$

が満たされている．実際もし或る j で

$$\left| X_{t \wedge \tau_{j+1}(\omega)}(\omega) - X_{t \wedge \tau_j(\omega)}(\omega) \right| > \epsilon/d$$

が成り立つとすれば，この場合は $t \geq \tau_j(\omega)$ でなくてはならないが，$t \geq \tau_{j+1}(\omega)$ ならば，パスの連続性より $\tau_{j+1}(\omega) > s$ を満たす s についても

$$\left| X_s(\omega) - X_{\tau_j(\omega)}(\omega) \right| > \epsilon/d$$

が成り立ち，下限の定義から $\tau_{j+1}(\omega) > s \geq \tau_{j+1}(\omega)$ が従い矛盾が生じる．$t < \tau_{j+1}(\omega)$ のときも $\tau_{j+1}(\omega) > t \geq \tau_{j+1}(\omega)$ が従い矛盾が生じる．よって

$$\left| X^i_{t \wedge \tau_{j+1}(\omega)}(\omega) - X^i_{t \wedge \tau_j(\omega)}(\omega) \right| \leq \epsilon/d \quad (i = 1, \cdots, d, \ j = 0, 1, 2, \cdots)$$

が成り立ち，ω, t の任意性から

$$\sum_{i=1}^{d} \left\| X^i_{t \wedge \tau_{j+1}} - X^i_{t \wedge \tau_j} \right\|_{\mathscr{L}^\infty} \leq \epsilon \quad (\forall t \in I, \ j = 0, 1, 2, \cdots)$$

が従う．

∎

定理 5.1.3 (停止時刻によるパスの変動の制限). $X = (X^1, \cdots, X^d)$ を連続な $\mathbb{R}^d$ 値適合過程とし，任意に $\epsilon > 0$ を取る．このとき任意の $(\tau_j)_{j=0}^{\infty} \in \mathcal{T}(X, \epsilon)$ に対して或る零集合 N が存在し，任意の $\omega \in \Omega \backslash N$ に対して

$$\tau_0(\omega) = 0, \quad \tau_j(\omega) \leq \tau_{j+1}(\omega)\ (j = 1, 2, \cdots), \quad \tau_n(\omega) = T\ (\exists n = n(\omega) \in \mathbb{N})$$

かつ

$$\sum_{i=1}^{d} \left| X^i_{t \wedge \tau_{j+1}(\omega)}(\omega) - X^i_{t \wedge \tau_j(\omega)}(\omega) \right| \leq \epsilon, \quad (\forall t \in I,\ j = 0, 1, 2, \cdots)$$

が満たされる．

証明． 任意に $t \in I$ を取り固定する．

$$A^i_{t,j} \coloneqq \left\{ \left| X^i_{t \wedge \tau_{j+1}} - X^i_{t \wedge \tau_j} \right| > \left\| X^i_{t \wedge \tau_{j+1}} - X^i_{t \wedge \tau_j} \right\|_{\mathscr{L}^\infty} \right\} \quad (i = 1, \cdots, d,\ j = 0, 1, 2, \cdots)$$

とおけば，補題 1.1.1 により $A^i_{t,j}$ は μ-零集合となる．また

$$A_{t,j} \coloneqq \bigcup_{i=1}^{d} A^i_{t,j}, \quad A_t \coloneqq \bigcup_{j=0}^{\infty} A_{t,j}$$

とおけば，任意の $\omega \in \Omega \backslash A_t$ に対して

$$\sum_{i=1}^{d} \left| X^i_{t \wedge \tau_{j+1}(\omega)}(\omega) - X^i_{t \wedge \tau_j(\omega)}(\omega) \right| \leq \epsilon, \quad (j = 0, 1, 2, \cdots)$$

が成り立つ．更に

$$A \coloneqq \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap I} A_r$$

とすれば，任意の $\omega \in \Omega \backslash A$ に対して

$$\sum_{i=1}^{d} \left| X^i_{t \wedge \tau_{j+1}(\omega)}(\omega) - X^i_{t \wedge \tau_j(\omega)}(\omega) \right| \leq \epsilon, \quad (\forall t \in I,\ j = 0, 1, 2, \cdots)$$

が成り立つ．実際もし或る $t \in I,\ j \in \mathbb{N}_0$ で

$$\sum_{i=1}^{d} \left| X^i_{t \wedge \tau_{j+1}(\omega)}(\omega) - X^i_{t \wedge \tau_j(\omega)}(\omega) \right| > \epsilon$$

となると，$t \longmapsto X_t$ の連続性より或る $r \in \mathbb{Q} \cap I$ に対して

$$\sum_{i=1}^{d} \left| X^i_{r \wedge \tau_{j+1}(\omega)}(\omega) - X^i_{r \wedge \tau_j(\omega)}(\omega) \right| > \epsilon$$

が従うがこれは矛盾である．$(\tau_j)_{j=0}^{\infty} \in \mathcal{T}$ でもあるから，或る μ-零集合 B が存在し，任意の $\omega \in \Omega \backslash B$ に対して

$$\tau_0(\omega) = 0, \quad \tau_j(\omega) \leq \tau_{j+1}(\omega)\ (j = 1, 2, \cdots), \quad \tau_n(\omega) = T\ (\exists n = n(\omega) \in \mathbb{N})$$

を満たす．従って $N \coloneqq A \cup B$ とすればよい． ∎

5.2 可予測過程

定義 5.2.1 (可予測 σ-加法族・可予測過程). $\{0\} \times A$ $(A \in \mathcal{F}_0)$ の形，或は $(s,t] \times A$ $((s,t] \subset I,\ A \in \mathcal{F}_s)$ の形の $I \times \Omega$ の部分集合の全体を Π とおく．そして Π の生成する σ-加法族を $\mathcal{P}$ と表し，これを可予測 σ-加法族 (predictable σ-algebra) と呼ぶ．また $\mathcal{P}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ 可測の関数を可予測過程 (predictable process) という．

補題 5.2.2 (Π は乗法族). 定義 5.2.1 の Π は乗法族である．

証明. 任意に $B_1, B_2 \in \Pi$ を取り，$B_1 = (s_1, t_1] \times A_1, B_2 = (s_2, t_2] \times A_2$ $(A_1 \in \mathcal{F}_{s_1}, A_2 \in \mathcal{F}_{s_2}, s_1 \leq s_2)$ と仮定する．$t_1 \leq s_2$ なら $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ であり，$s_2 < t_1$ とすれば $A_1 \in \mathcal{F}_{s_2}$ であるから

$$B_1 \cap B_2 = (s_2, t_1 \wedge t_2] \times (A_1 \cap A_2) \in \Pi$$

が成り立つ．$B_1 = \{0\} \times A_1$ $(A_1 \in \mathcal{F}_0)$ の場合，$B_2 = \{0\} \times A_2$ $(A_2 \in \mathcal{F}_0)$ の形であれば $B_1 \cap B_2 = \{0\} \times (A_1 \cap A_2)$，そうでなければ $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ となり，いずれの場合も交演算で閉じている． ■

補題 5.2.3 (可予測単関数の時間に関する可測性). 任意の $B \in \mathcal{P}$ と任意の $\omega \in \Omega$ に対し $f_B : I \ni t \longmapsto \mathbb{1}_B(t, \omega)$ は可測 $\mathfrak{B}(I)/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ である．

証明. 任意に $C \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ を取り固定する．

$$\mathcal{D} := \{\, B \in \mathcal{P} \ ; \quad f_B \text{ が可測 } \mathfrak{B}(I)/\mathfrak{B}(\mathbb{R}). \,\}$$

とおけば $\mathcal{D}$ は Dynkin 族である．実際次が成り立つ:

- $B = I \times \Omega$ なら $f_B^{-1}(C) = I$ 又は $\emptyset$ であるから $I \times \Omega \in \mathcal{D}$ である．
- $B_1, B_2 \in \mathcal{D}$, $B_1 \subset B_2$ に対して，$f_{B_2 \backslash B_1} = f_{B_2} - f_{B_1}$ より $B_2 \backslash B_1 \in \mathcal{D}$ が成り立つ．
- 互いに素な列 $B_n \in \mathcal{D}$ $(n \in \mathbb{N})$ に対して，$f_{\sum_{n=1}^\infty B_n} = \sum_{n=1}^\infty f_{B_n}$ より $\sum_{n=1}^\infty B_n \in \mathcal{D}$ が成り立つ．

補題 5.2.2 より Π は乗法族であるから，$\Pi \subset \mathcal{D}$ ならば Dynkin 族定理により補題の主張が従う．$B = (s,t] \times A$ $((s,t] \subset I,\ A \in \mathcal{F}_s)$ と表されるとすれば，$\omega \in A$ のとき

$$f_B^{-1}(C) = \begin{cases} I & (0 \in C, 1 \in C) \\ (s,t] & (0 \notin C, 1 \in C) \\ I \backslash (s,t] & (0 \in C, 1 \notin C) \\ \emptyset & (0 \notin C, 1 \notin C) \end{cases}$$

が成り立ち，$\omega \notin A$ のとき

$$f_B^{-1}(C) = \begin{cases} I & (0 \in C) \\ \emptyset & (0 \notin C) \end{cases}$$

が成り立つ．$B = \{0\} \times A$ の場合も同様であるから，いずれの場合も $f_B^{-1}(C) \in \mathfrak{B}(I)$ を満たす． ∎

定理 5.2.4 (($(\Omega \times I, \mathcal{P})$ における測度の構成)). 任意の $M \in \mathcal{M}_{2,c}, B \in \mathcal{P}$ に対して

$$\mu_M(B) := \int_\Omega \int_I \mathbb{1}_B(s,\omega)\ \langle M \rangle (ds,\omega)\ \mu(d\omega) \tag{5.2}$$

と定めれば，μ_M は可測空間 $(I \times \Omega, \mathcal{P})$ 上の有限測度となる．

証明.

第一段　任意の $B \in \mathcal{P}, t \in I$ に対して

$$\Omega \ni \omega \longmapsto \int_{[0,t]} \mathbb{1}_B(s,\omega)\ \langle M \rangle (ds,\omega) \tag{5.3}$$

が可測 $\mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であることを示す[*2]．$I \ni t \longmapsto \langle M \rangle_t$ の単調非減少性より

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{[0,t]} \mathbb{1}_B(s,\omega)\ \langle M \rangle (ds,\omega) \\ &\leq \int_{[0,t]} \langle M \rangle (ds,\omega) = \langle M \rangle (t,\omega) < \infty \quad (\forall t \in I, B \in \mathcal{P}, \omega \in \Omega) \end{aligned} \tag{5.4}$$

が成り立ち，いかなる場合も可積分性は保証される．

$$\mathcal{D} := \{\ B \in \mathcal{P}\ ;\quad 任意の\ t \in I\ に対し\ (5.3)\ が可測\ \mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R}).\ \}$$

とおけば $\mathcal{D}$ は Dynkin 族である．実際以下が成り立つ:

- $B = I \times \Omega$ の場合，(5.4) と $\langle M \rangle$ の適合性より (5.3) は可測 $\mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ となる．
- $B_1, B_2 \in \mathcal{P},\ B_1 \subset B_2$ に対して，(5.3) の積分は可積分であるから線型性より

$$\begin{aligned} &\int_{[0,t]} \mathbb{1}_{B_2 \backslash B_1}(s,\omega)\ \langle M \rangle (ds,\omega) \\ &\qquad = \int_{[0,t]} \mathbb{1}_{B_2}(s,\omega)\ \langle M \rangle (ds,\omega) - \int_{[0,t]} \mathbb{1}_{B_1}(s,\omega)\ \langle M \rangle (ds,\omega) \end{aligned}$$

  が成り立ち $B_2 \backslash B_1 \in \mathcal{P}$ が従う．
- 互いに素な列 $B_n \in \mathcal{P}\ (n \in \mathbb{N})$ に対して，単調収束定理より

$$\int_{[0,t]} \mathbb{1}_{\sum_{n=1}^\infty B_n}(s,\omega)\ \langle M \rangle (ds,\omega) = \sum_{n=1}^\infty \int_{[0,t]} \mathbb{1}_{B_n}(s,\omega)\ \langle M \rangle (ds,\omega) \tag{5.5}$$

  が成り立つ．(5.4) より ω ごとに右辺の級数は有限確定し $\sum_{n=1}^\infty B_n \in \mathcal{P}$ が従う．

補題 5.2.3 と同様に $\Pi \subset \mathcal{D}$ となることを示せば，Dynkin 族定理より第一段の主張が従う．$B = (\alpha,\beta] \times A\ (A \in \mathcal{F}_\alpha)$ として，全ての $\omega \in \Omega$ に対し

$$\begin{aligned} \int_{[0,t]} \mathbb{1}_B(s,\omega)\ \langle M \rangle (ds,\omega) &= \mathbb{1}_A(\omega) \int_{[0,t]} \mathbb{1}_{(\alpha,\beta]}(s)\ \langle M \rangle (ds,\omega) \\ &= \begin{cases} 0 & (t \leq \alpha) \\ \mathbb{1}_A(\omega)\left(\langle M \rangle (t \wedge \beta,\omega) - \langle M \rangle (\alpha,\omega)\right) & (t > \alpha) \end{cases} \end{aligned}$$

[*2] 補題 5.2.3 より可測性が保証されているから，(5.3) の積分は Lebesgue-Stieltjes 積分として定義される．

が成り立つから，$A \in \mathcal{F}_t$ であることと $\langle M \rangle$ の適合性から $(\alpha, \beta] \times A \in \mathcal{D}$ が従う．$B = \{0\} \times A$ $(A \in \mathcal{F}_0)$ の場合は積分は常に 0 になる．以上で (5.2) 右辺の積分が定義される．

第二段 (5.2) で定める μ_M が測度となることを示す．先ず μ_M の正値性は (5.4) より従う．また互いに素な列 $B_n \in \mathcal{P}$ を取れば，(5.5) と単調収束定理より

$$\int_\Omega \int_I 1\!\!1_{\sum_{n=1}^\infty B_n}(s,\omega)\ \langle M \rangle (ds,\omega)\, \mu(d\omega) = \sum_{n=1}^\infty \int_\Omega \int_I 1\!\!1_{B_n}(s,\omega)\ \langle M \rangle (ds,\omega)\, \mu(d\omega)$$

が成り立ち μ_M の完全加法性が従う．また定理 4.2.16 より $\langle M \rangle_T$ は可積分であるから，

$$\mu_M(I \times \Omega) = \int_\Omega \int_I \langle M \rangle (ds,\omega)\, \mu(d\omega) = \int_\Omega \langle M \rangle_T (\omega)\, \mu(d\omega) < \infty$$

より μ_M の有限性を得る． ∎

定義 5.2.5 (単純可予測過程). $n \in \mathbb{N}$，$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$，$F \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}_0, \mu)$, $F_i \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}_{t_i}, \mu)$ $(i = 0, \cdots, n-1)$ を任意に取り構成する次の過程

$$X(t,\omega) \coloneqq F(\omega) 1\!\!1_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} F_i(\omega) 1\!\!1_{(t_i, t_{i+1}]}(t) \quad (\forall \omega \in \Omega, t \in I) \tag{5.6}$$

を単純可予測過程 (simple predictable process) という．単純可予測過程の全体を $\mathcal{S}$ と表す．また $\mathcal{S}$ を μ_M-a.s. に等しい関数類 $[\cdot]_{\mathfrak{S}}$ でまとめた商集合を $\mathfrak{S}$ と表す．

補題 5.2.6 (単純可予測過程の性質). $M \in \mathcal{M}_{2,c}$ とする．

(1) $\mathcal{S}$ は $\mathbb{R}$ 上の線形空間をなす．

(2) 任意の $X \in \mathcal{S}$ は可測 $\mathcal{P}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ である．

(3) 任意の $\mathcal{P}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$-可測可積分関数 Y に対し次が成り立つ:

$$\int_{I \times \Omega} Y(t,\omega)\, \mu_M(dtd\omega) = \int_\Omega \int_I Y(t,\omega)\ \langle M \rangle (dt,\omega)\, \mu(d\omega). \tag{5.7}$$

(4) $\mathcal{S}$ は $\|\cdot\|_{\mathscr{L}^2(\mu_M)}$ に関して $\mathscr{L}^2(\mathcal{P}, \mu_M)$ の稠密な部分空間である．これにより，$\mathfrak{S}$ から $\mathrm{L}^2(\mathcal{P}, \mu_M)$ への等長[*3]埋め込みを J とすれば $J\mathfrak{S}$ は $\mathrm{L}^2(\mathcal{P}, \mu_M)$ において稠密である．

証明.

(1) $\mathcal{S}$ が線型演算について閉じていることを示す．

加法 $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$ を取れば，定義 5.2.5 に従って

$$S_1 = F 1\!\!1_{\{0\}} + \sum_{i=0}^{n-1} F_i 1\!\!1_{(t_i, t_{i+1}]}, \quad S_2 = G 1\!\!1_{\{0\}} + \sum_{j=0}^{m-1} G_j 1\!\!1_{(s_j, s_{j+1}]}$$

[*3] ノルム $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^2(\mu_M)}$ に関する等長性を指す．

と表現できる．今，時点の分点の合併が $0 = u_0 < u_1 < \cdots < u_r = T$ であるとする．

$$\tilde{F}_k := F_i \quad (t_i \le u_k < t_{i+1},\ i = 0, \cdots, n-1),$$
$$\tilde{G}_k := G_j \quad (s_j \le u_k < s_{j+1},\ j = 0, \cdots, m-1)$$

とおけば，全ての $k = 0, \cdots, r-1$ に対し $\tilde{F}_k, \tilde{G}_k \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}_{u_k}, \mu)$ であり，また

$$S_1 = F\mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{k=0}^{r-1} \tilde{F}_k \mathbb{1}_{(u_k, u_{k+1}]}, \quad S_2 = G\mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{k=0}^{r-1} \tilde{G}_k \mathbb{1}_{(u_k, u_{k+1}]}$$

と表現しなおせば

$$S_1 + S_2 = (F+G)\mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{k=0}^{r-1} \left(\tilde{F}_k + \tilde{G}_k\right) \mathbb{1}_{(u_k, u_{k+1}]}$$

が成り立つ．$\mathscr{L}^\infty$ の線型性より $S_1 + S_2 \in \mathcal{S}$ が従う．

スカラ倍　$S \in \mathcal{S}$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ を取れば，

$$S = F\mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{i=0}^{n-1} F_i \mathbb{1}_{(t_i, t_{i+1}]}$$

と表されているとして

$$\alpha S = \alpha F\mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha F_i \mathbb{1}_{(t_i, t_{i+1}]}$$

となる．$\mathscr{L}^\infty$ の線型性より $\alpha S \in \mathcal{S}$ が従う．

(2)　(5.6) の各項が可測 $\mathcal{P}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であることを示す．任意に $(s,t] \in I$ と $F \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}_s, \mu)$ を取る．F の単関数近似列 $(F_n)_{n=1}^\infty$ の一つ一つは

$$F_n = \sum_{j=1}^{N_n} \alpha_j^n \mathbb{1}_{A_j^n} \quad \left(\alpha_j^n \in \mathbb{R},\ A_j^n \in \mathcal{F}_s,\ \textstyle\sum_{j=1}^{N_n} A_j^n = \Omega\right)$$

と表現され，各 $j = 1, \cdots, N_n$ について

$$I \times \Omega \ni (u, \omega) \longmapsto \mathbb{1}_{A_j^n}(\omega)\mathbb{1}_{(s,t]}(u)$$

が可測 $\mathcal{P}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であるから，$F_n\mathbb{1}_{(s,t]}$ 及びその各点極限の $F\mathbb{1}_{(s,t]}$ も可測 $\mathcal{P}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ である．

(3)　$\mathcal{P}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$-可測可積分関数 Y が非負値の場合，Y の単関数近似列 $(Y_n)_{n=1}^\infty$ を $0 \le Y_n \le Y_{n+1} \le Y$ を満たすように取る．各 Y_n については，$\alpha_i^n \in \mathbb{R},\ A_i^n \in \mathcal{P}$ $(\sum_{i=1}^{N_n} A_i^n = I \times \Omega)$ により

$$Y_n = \sum_{i=1}^{N_n} \alpha_i^n \mathbb{1}_{A_i^n}$$

の形で表現できるから

$$\begin{aligned}\int_{I\times\Omega} Y_n(t,\omega)\,\mu_M(dtd\omega) &= \sum_{i=1}^{N_n} \alpha_i^n \mu_M(A_i^n) \\ &= \sum_{i=1}^{N_n} \alpha_i^n \int_\Omega \int_I \mathbb{1}_{A_i^n} \langle M \rangle (dt,\omega)\,\mu(d\omega) = \int_\Omega \int_I Y_n(\omega)\ \langle M \rangle (dt,\omega)\,\mu(d\omega)\end{aligned}$$

が成り立つ．従って単調収束定理より

$$\int_{I\times\Omega} Y(t,\omega)\,\mu_M(dtd\omega) = \int_\Omega \int_I Y(t,\omega)\ \langle M\rangle(dt,\omega)\,\mu(d\omega)$$

が得られる．

(4) まず $\mathcal{S}\subset\mathscr{L}^2(\mathcal{P},\mu_M)$ であることを示す．(5.6) の各項が二乗可積分であればよいから，任意に $(s,t]\in I$ と $F\in\mathscr{L}^\infty(\Omega,\mathcal{F}_s,\mu)$ を取り $F\mathbb{1}_{(s,t]}$ の二乗可積分性を示す．

$$E := \left\{ \|F\|_{\mathscr{L}^\infty(\mu)} < F \right\}$$

とおけば補題 1.1.1 より $\mu(E)=0$ となるから，$\mu_M(I\times E)=0$ が従い

$$\int_{I\times\Omega} |F(\omega)|^2\,\mathbb{1}_{(s,t]}(u)\,\mu_M(dud\omega) \leq \|F\|^2_{\mathscr{L}^\infty(\mu)}\,\mu_M\left((s,t]\times(\Omega\backslash E)\right)$$

が成り立つ．また $M\in\mathcal{M}_{2,c}$ であるから，定理 4.2.16 より $\langle M\rangle_t\ (\forall t\in I)$ は可積分であり

$$\mu_M\left((s,t]\times(\Omega\backslash E)\right) = \int_\Omega \langle M\rangle_t(\omega) - \langle M\rangle_s(\omega)\,\mu(d\omega) < \infty$$

が得られる．次に $\mathcal{S}$ が $\mathscr{L}^2(\mathcal{P},\mu_M)$ で稠密であることを示す．

$$\mathcal{D} := \left\{ B\in\mathcal{P}\ ;\quad \forall\epsilon>0,\ \exists S\in\mathcal{S},\ \text{s.t. } \|\mathbb{1}_B - S\|_{\mathscr{L}^2(\mu_M)} < \epsilon. \right\}$$

とおけば $\Pi\subset\mathcal{D}$ を満たす．実際任意の $B\in\Pi$ は $B=(s,t]\times A\ (A\in\mathcal{F}_s)$ 或は $B=\{0\}\times A\ (A\in\mathcal{F}_0)$ と表現され，$\mathbb{1}_A\in\mathscr{L}^\infty(\mu)$ を満たすから $\mathbb{1}_{(s,t]\times A} = \mathbb{1}_{(s,t]}\mathbb{1}_A\in\mathcal{S}$ が成り立つ．そしてまた，以下に示すように $\mathcal{D}$ は Dynkin 族である．

- $B=I\times\Omega$ に対し $S=\mathbb{1}_{(0,T]\times\Omega}$ とすれば

$$\|\mathbb{1}_B - S\|^2_{\mathscr{L}^2(\mu_M)} = \mu_M(\{0\}\times\Omega) = 0$$

  が成り立ち $I\times\Omega\in\mathcal{D}$ が従う．

- $B_1,B_2\in\mathcal{D},\ B_1\subset B_2$ と $\epsilon>0$ を任意に取る．

$$\left\|\mathbb{1}_{B_1} - S_1\right\|_{\mathscr{L}^2(\mu_M)} < \frac{\epsilon}{2},\quad \left\|\mathbb{1}_{B_2} - S_2\right\|_{\mathscr{L}^2(\mu_M)} < \frac{\epsilon}{2}$$

  を満たす $S_1,S_2\in\mathcal{S}$ を選べば，(1) より $S_2-S_1\in\mathcal{S}$ であり，かつ

$$\left\|\mathbb{1}_{B_2} - \mathbb{1}_{B_1} - (S_2-S_1)\right\|_{\mathscr{L}^2(\mu_M)} < \epsilon$$

  が成り立つから $B_2\backslash B_1\in\mathcal{D}$ が従う．

- 互いに素な列 $B_n\in\mathcal{D}\ (n=1,2,\cdots)$ と $\epsilon>0$ を任意に取る．各 B_n に対し

$$\left\|\mathbb{1}_{B_n} - S_n\right\|_{\mathscr{L}^2(\mu_M)} < \frac{\epsilon}{2^n}$$

を満たす $S_n \in \mathcal{S}$ を選ぶ．任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し

$$
\begin{aligned}
\left\| 1\!\!1_{\sum_{n=1}^{\infty} B_n} - \sum_{n=1}^{N} S_n \right\|_{\mathscr{L}^2(\mu_M)} &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} 1\!\!1_{B_n} - \sum_{n=1}^{N} S_n \right\|_{\mathscr{L}^2(\mu_M)} \\
&\leq \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} 1\!\!1_{B_n} \right\|_{\mathscr{L}^2(\mu_M)} + \left\| \sum_{n=1}^{N} 1\!\!1_{B_n} - \sum_{n=1}^{N} S_n \right\|_{\mathscr{L}^2(\mu_M)} \\
&\leq \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} 1\!\!1_{B_n} \right\|_{\mathscr{L}^2(\mu_M)} + \sum_{n=1}^{N} \left\| 1\!\!1_{B_n} - S_n \right\|_{\mathscr{L}^2(\mu_M)} \\
&< \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} 1\!\!1_{B_n} \right\|_{\mathscr{L}^2(\mu_M)} + \frac{\epsilon}{2}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．$\sum_{n=N+1}^{\infty} 1\!\!1_{B_n}$ は可積分関数 1 で抑えられ，かつ各点 $(t, \omega) \in I \times \Omega$ において

$$
\sum_{n=N+1}^{\infty} 1\!\!1_{B_n}(t, \omega) \longrightarrow 0 \quad (N \longrightarrow \infty)
$$

となるから Lebesgue の収束定理より

$$
\left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} 1\!\!1_{B_n} \right\|_{\mathscr{L}^2(\mu_M)} \longrightarrow 0 \quad (N \longrightarrow \infty)
$$

が成り立つ．従って

$$
\left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} 1\!\!1_{B_n} \right\|_{\mathscr{L}^2(\mu_M)} < \frac{\epsilon}{2}
$$

を満たすように $N \in \mathbb{N}$ を選べば，(1) より $\sum_{n=1}^{N} S_n \in \mathcal{S}$ が成り立ち，かつ

$$
\left\| 1\!\!1_{\sum_{n=1}^{\infty} B_n} - \sum_{n=1}^{N} S_n \right\|_{\mathscr{L}^2(\mu_M)} < \epsilon
$$

も得られ $\sum_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{D}$ が従う．

以上で $\mathcal{P} = \mathcal{D}$ が示された．つまり S は $\mathcal{P}$-可測の単関数を近似できるから主張が従う． ∎

定理 5.2.7 (一様有界な左連続適合過程は $\mathcal{P}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$-可測). $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, (\mathcal{F}_t)_{t \in I})$ 上の左連続適合過程 X が $\sup_{t \in I} \|X_t\|_{\mathscr{L}^\infty} < \infty$ を満たしているなら，X は可測 $\mathcal{P}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ である．

証明.

$$
X_t^n := X_0 1\!\!1_{\{0\}} + \sum_{k=0}^{2^n - 1} X_{\frac{kT}{2^n}} 1\!\!1_{\left(\frac{kT}{2^n}, \frac{(k+1)T}{2^n}\right]}(t) \quad (\forall t \in I) \tag{5.8}
$$

として $(X^n)_{n=1}^{\infty}$ を構成する．$\sup_{t \in I} \|X_t\|_{\mathscr{L}^\infty} < \infty$ より $(X^n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}$ が成り立ち，補題 5.2.6 により X^n は全て可測 $\mathcal{P}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ である．また $I \ni t \longmapsto X_t(\omega)$ $(\forall \omega \in \Omega)$ の左連続性から

$$
|X^n(t, \omega) - X(t, \omega)| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty,\ \forall (t, \omega) \in I \times \Omega)
$$

が従い，各点収束先も可測性は保たれるから主張を得る． ∎

5.3 伊藤積分

定義 5.3.1 (単純可予測過程に対する伊藤積分). 任意に $X \in \mathcal{S}$ を取れば，(5.6) に倣って

$$X = F\mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{i=0}^{n-1} F_i \mathbb{1}_{(t_i,t_{i+1}]}$$

と表現される．$M \in \mathcal{M}_{2,c}$ に対し $I_M : \mathcal{S} \to \mathcal{M}_{2,c}$ を

$$I_M(X)(t,\omega) \coloneqq \sum_{i=0}^{n-1} F_i(\omega)\left(M_{t\wedge t_{i+1}}(\omega) - M_{t\wedge t_i}(\omega)\right) \quad (\forall t \in I, \omega \in \Omega)$$

により定め，単純可予測過程に対する伊藤積分 (Itô integral) とする．

定理 5.3.2 (単純可予測過程に対する伊藤積分の線型等長性). 任意の $M \in \mathcal{M}_{2,c}$ に対し I_M は $\mathcal{S}$ から $\mathcal{M}_{2,c}$ への線型作用素であり，任意の停止時刻 τ に対して次を満たす:

$$\int_{I\times\Omega} |X(t,\omega)|^2\, \mathbb{1}_{[0,\tau(\omega)]}(t)\, \mu_M(dtd\omega) = \int_\Omega |I_M(X)(\tau(\omega),\omega)|^2\, \mu(d\omega) \quad (X \in \mathcal{S}). \tag{5.9}$$

特に $\tau = T$ の場合次を得る:

$$\int_{I\times\Omega} |X(t,\omega)|^2\, \mu_M(dtd\omega) = \int_\Omega |I_M(X)_T(\omega)|^2\, \mu(d\omega) \quad (X \in \mathcal{S}).$$

証明.

線型性 先ず任意の $X \in \mathcal{S}$ に対し $I_M(X) \in \mathcal{M}_{2,c}$ となることを示す．次に I_M の線型性を示す．任意に $X_1, X_2 \in \mathcal{S}$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ を取る．

加法 X_1, X_2 が，時点の列 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ と集合の系 $F, G \in \mathscr{L}^\infty(\mathcal{F}_0,\mu), F_k, G_k \in \mathscr{L}^\infty(\mathcal{F}_{t_k},\mu)$ $(k = 0,1,\cdots,n-1)$ を用いて次で表示されていると仮定する:

$$X_1 = F\mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{k=0}^{n-1} F_k \mathbb{1}_{(t_k,t_{k+1}]}, \quad X_2 = G\mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{k=0}^{n-1} G_k \mathbb{1}_{(t_k,t_{k+1}]}.$$

このとき次が成り立つ:

$$\begin{aligned} I_M(X_1+X_2)(t,\omega) &= \sum_{k=0}^{n-1} (F_k(\omega)+G_k(\omega))\left(M_{t\wedge t_{k+1}}(\omega) - M_{t\wedge t_k}(\omega)\right) \\ &= I_M(X_1)(t,\omega) + I_M(X_2)(t,\omega) \quad (\forall t \in I, \omega \in \Omega). \end{aligned}$$

スカラ倍 X_1 と α に対して次が成り立つ:

$$I_M(\alpha X_1)(t,\omega) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha F_k(\omega)\left(M_{t\wedge t_{k+1}}(\omega) - M_{t\wedge t_k}(\omega)\right)$$

$$= \alpha \sum_{k=0}^{n-1} F_k(\omega)\left(M_{t\wedge t_{k+1}}(\omega) - M_{t\wedge t_k}(\omega)\right) = \alpha I_M(X_1)(t,\omega) \quad (\forall t \in I, \omega \in \Omega).$$

等長性 $B \coloneqq \{\, (t,\omega) \in I \times \Omega \;;\quad t \leq \tau(\omega) \,\}$ とおけば，$\mathbb{1}_B$ は

$$\mathbb{1}_{[0,\tau(\omega)]}(t) = \mathbb{1}_B(t,\omega) \quad (\forall (t,\omega) \in I \times \Omega)$$

を満たし，かつ左連続な適合過程であるから定理 5.2.7 により可測 $\mathcal{P}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であるから (5.9) 左辺の積分を考察できる．今，$X \in \mathcal{S}$ が (5.6) により表示されているとすれば，

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |I_M(X)(\tau(\omega),\omega)|^2 \; \mu(d\omega) \\
&\quad = \int_\Omega \left| \sum_{i=0}^{n-1} F_i(\omega)\left(M^\tau_{t_{i+1}}(\omega) - M^\tau_{t_i}(\omega)\right) \right|^2 \; \mu(d\omega) \\
&\quad = \sum_{i=0}^{n-1} \int_\Omega \left| F_i(\omega)\left(M^\tau_{t_{i+1}}(\omega) - M^\tau_{t_i}(\omega)\right) \right|^2 \; \mu(d\omega) \\
&\qquad + 2 \sum_{i<j} \int_\Omega F_i(\omega) F_j(\omega) \left(M^\tau_{t_{i+1}}(\omega) - M^\tau_{t_i}(\omega)\right)\left(M^\tau_{t_{j+1}}(\omega) - M^\tau_{t_j}(\omega)\right) \mu(d\omega) \qquad (5.10)
\end{aligned}$$

が成り立つ．右辺第二項についてはマルチンゲール性より

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega F_i(\omega) F_j(\omega) \left(M^\tau_{t_{i+1}}(\omega) - M^\tau_{t_i}(\omega)\right)\left(M^\tau_{t_{j+1}}(\omega) - M^\tau_{t_j}(\omega)\right) \mu(d\omega) \\
&= \int_\Omega F_i(\omega) F_j(\omega) \left(M^\tau_{t_{i+1}}(\omega) - M^\tau_{t_i}(\omega)\right) \mathrm{E}\left[M^\tau_{t_{j+1}}(\omega) - M^\tau_{t_j}(\omega) \;\middle|\; \mathcal{F}_{t_j} \right](\omega)\, \mu(d\omega) = 0
\end{aligned}$$

が従い，右辺第一項についても

$$\int_\Omega \left| F_i(\omega)\left(M^\tau_{t_{i+1}}(\omega) - M^\tau_{t_i}(\omega)\right) \right|^2 \; \mu(d\omega) = \int_\Omega |F_i(\omega)|^2 \left(\langle M^\tau \rangle_{t_{i+1}}(\omega) - \langle M^\tau \rangle_{t_i}(\omega) \right) \mu(d\omega)$$

が成り立つから

$$\begin{aligned}
(5.10) &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_\Omega |F_i(\omega)|^2 \left(\langle M \rangle^\tau_{t_{i+1}}(\omega) - \langle M \rangle^\tau_{t_i}(\omega) \right) \mu(d\omega) \\
&= \int_\Omega \int_I |X(t,\omega)|^2 \mathbb{1}_B(t,\omega) \; \langle M \rangle (dt,\omega)\, \mu(d\omega)
\end{aligned}$$

が導かれ，(5.7) により主張を得る． ∎

定理 5.3.3 (同値類に対する伊藤積分). τ を停止時刻とし，$M \in \mathcal{M}_{2,c}$ を取り

$$B \coloneqq \{\, (t,\omega) \in I \times \Omega \;;\quad t \leq \tau(\omega) \,\}$$

とおく．任意の $X_1, X_2 \in [X]_{\mathfrak{S}} \in \mathfrak{S}$ に対し，$[I_M(X_1)^\tau]_{2,c} = [I_M(X_2)^\tau]_{2,c}$ が成り立つ．従って

$$\tilde{I}^\tau_M : \mathfrak{S} \ni [X]_{\mathfrak{S}} \longmapsto [I_M(X)^\tau]_{2,c} \in \mathfrak{M}_{2,c}$$

により定める $\tilde{I}^\tau_M$ は well-defined であり，更に線型性と次の意味での等長性を持つ:

$$\|\,[X\mathbb{1}_B]_{\mathfrak{S}}\,\|_{\mathrm{L}^2(\mu_M)} = \left\|\,[I_M(X)^\tau]_{2,c}\,\right\|_{\mathfrak{M}_{2,c}} \quad (\forall X \in \mathcal{S}). \qquad (5.11)$$

証明.　定理 5.3.2 の I_M の線型性と (5.9) より，任意の $X_1, X_2 \in \mathcal{S}$ に対して

$$\begin{aligned}\int_\Omega |I_M(X_1)^\tau(\omega) - I_M(X_2)^\tau(\omega)|^2\ \mu(d\omega) &= \int_\Omega |I_M(X_1 - X_2)^\tau(\omega)|^2\ \mu(d\omega)\\ = \int_{I\times\Omega} |(X_1 - X_2)(t,\omega)|^2\ \mathbb{1}_B(t,\omega)\,\mu_M(dtd\omega) &= \int_{I\times\Omega} |X_1(t,\omega) - X_2(t,\omega)|^2\ \mathbb{1}_B(t,\omega)\,\mu_M(dtd\omega)\end{aligned}$$

が成り立つ．これにより $[X_1]_{\mathfrak{S}} = [X_2]_{\mathfrak{S}}$ ならば $[I_M(X_1)]_{2,c} = [I_M(X_2)]_{2,c}$ である．(5.11) は (5.9) より従い，また任意に $[X_1]_{\mathfrak{S}}, [X_2]_{\mathfrak{S}} \in \mathfrak{S}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ を取れば，I_M 及び $[\cdot]_{\mathfrak{S}}, [\cdot]_{2,c}$ の線型性より

$$\begin{aligned}\tilde{I}^\tau\left(\alpha\,[X_1]_{\mathfrak{S}} + \beta\,[X_2]_{\mathfrak{S}}\right) &= \tilde{I}^\tau\left([\alpha X_1 + \beta X_2]_{\mathfrak{S}}\right) = \left[I(\alpha X_1 + \beta X_2)^\tau\right]_{2,c}\\ &= \left[\alpha I(X_1)^\tau\right]_{2,c} + \left[\beta I(X_2)^\tau\right]_{2,c} = \alpha\tilde{I}^\tau\left([X_1]_{\mathfrak{S}}\right) + \beta\tilde{I}^\tau\left([X_2]_{\mathfrak{S}}\right)\end{aligned}$$

が成り立ち $\tilde{I}^\tau_M$ の線型性が得られる．■

定理 5.3.4 (同値類に対する伊藤積分の拡張).　$M \in \mathcal{M}_{2,c}$ とする．任意の停止時刻 τ に対し，定理 5.3.3 で定めた $\tilde{I}^\tau_M$ は $\mathrm{L}^2(\mathcal{P}, \mu_M)$ 上の等長線型作用素に拡張可能である．

証明.　補題 5.2.6 の等長単射

$$J : \mathfrak{S} \ni [X]_{\mathfrak{S}} \longmapsto [X]_{\mathrm{L}^2(\mu_M)} \in \mathrm{L}^2(\mathcal{P}, \mu_M)$$

に対し，値域を $J\mathfrak{S}$ に制限した線形全単射を $\tilde{J}$ と表す．定理 5.3.3 より $\tilde{I}^\tau_M$ も線型性を持つから

$$\tilde{I}^\tau_M \circ \tilde{J}^{-1} : J\mathfrak{S} \ni [X]_{\mathrm{L}^2(\mu_M)} \longmapsto \left[I_M(X)^\tau\right]_{2,c} \in \mathfrak{M}_{2,c}$$

もまた線型写像である．この $\tilde{I}^\tau_M \circ \tilde{J}^{-1}$ を補題 5.2.6 及び定理 1.3.1 により拡張すればよい．■

定義 5.3.5 (伊藤積分の拡張).　停止時刻 τ に対し定理 5.3.4 で拡張した作用素もまた $\tilde{I}^\tau_M$ と書く．$\tau = T$ として，$X \in \mathscr{L}^2(\mathcal{P}, \mu_M)$ に対し或る $N \in \tilde{I}^\tau_M\left([X]_{\mathrm{L}^2(\mu_M)}\right)$ を対応させる関係を

$$I_M : \mathscr{L}^2(\mathcal{P}, \mu_M) \ni X \longmapsto N \in \tilde{I}^\tau_M\left([X]_{\mathrm{L}^2(\mu_M)}\right), \quad I_M(X)_t = \int_0^t X_s\,dM_s \quad (t \in I)$$

と表記し，この I_M を伊藤積分として定義しなおす．

定理 5.3.6 (拡張された伊藤積分の線型等長性).　$M \in \mathcal{M}_{2,c}$ とする．$I_M : \mathscr{L}^2(\mathcal{P}, \mu_M) \to \mathcal{M}_{2,c}$ は線型性を持ち，任意の停止時刻 τ と $X \in \mathscr{L}^2(\mathcal{P}, \mu_M)$ に対し次を満たす:

$$\int_\Omega |I_M(X)(\tau(\omega),\omega)|^2\ \mu(d\omega) = \int_\Omega\int_I |X(t,\omega)|^2\ \mathbb{1}_{[0,\tau(\omega)]}(t)\ \langle M\rangle(dt,\omega)\,\mu(d\omega).$$

証明.　補題 5.2.6 により $X \in \mathscr{L}^2(\mathcal{P}, \mu_M)$ に対し或る $X_n \in \mathcal{S}\ (n = 1, 2, \cdots)$ が存在して

$$\|\,X - X_n\,\|_{\mathscr{L}^2(\mu_M)} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \tag{5.12}$$

を満たす．$B := \{ (t,\omega) \in I \times \Omega \ ; \quad t \leq \tau(\omega) \}$ とおき，

$$\| Y \|_{\mathcal{M}_{2,c}}^2 := \int_\Omega |Y_T(\omega)|^2 \, \mu(d\omega) \quad (\forall Y \in \mathcal{M}_{2,c})$$

によりセミノルムを定めれば，(5.11) により

$$\| X_n 1\!\!1_B \|_{\mathscr{L}^2(\mu_M)} = \| I_M(X_n)^\tau \|_{\mathcal{M}_{2,c}} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

が成り立ち，$\tilde{I}_M^\tau$ の線型等長性と (5.12) より

$$\begin{aligned}
&\Big| \| X 1\!\!1_B \|_{\mathscr{L}^2(\mu_M)} - \| I_M(X)^\tau \|_{\mathcal{M}_{2,c}} \Big| \\
&\quad \leq \Big| \| X 1\!\!1_B \|_{\mathscr{L}^2(\mu_M)} - \| X_n 1\!\!1_B \|_{\mathscr{L}^2(\mu_M)} \Big| + \Big| \| I_M(X_n)^\tau \|_{\mathcal{M}_{2,c}} - \| I_M(X)^\tau \|_{\mathcal{M}_{2,c}} \Big| \\
&\quad \leq \| (X - X_n) 1\!\!1_B \|_{\mathscr{L}^2(\mu_M)} + \| I_M(X - X_n)^\tau \|_{\mathcal{M}_{2,c}} \\
&\quad \leq 2 \| X - X_n \|_{\mathscr{L}^2(\mu_M)} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)
\end{aligned}$$

が従い主張を得る． ■

命題 5.3.7 (伊藤積分の二次変分). $M \in \mathcal{M}_{2,c}$, $X \in \mathscr{L}^2(\mathcal{P}, \mu_M)$ に対し次が成り立つ:

$$\langle I_M(X) \rangle_t = \int_0^t X_s^2 \, \langle M \rangle (ds) \quad (\forall t \in I, \ \mu\text{-a.s.})$$

$M \in \mathcal{M}_{2,c}$, $X \in \mathscr{L}^2(\mathcal{P}, \mu_M)$ に対して定義した伊藤積分を更に拡張する．

定義 5.3.8 (局所有界過程). $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 上の確率過程 X に対し或る $(\tau_j)_{j=0}^\infty \in \mathcal{T}$ が存在して

$$\sup_{t \in I} \left\| X_{t \wedge \tau_j} \right\|_{\mathscr{L}^\infty} < \infty \quad (j = 0, 1, \cdots)$$

が満たされているとき，X を局所有界過程 (locally bounded process) という．

定理 5.3.9 (局所マルチンゲールと左連続局所有界適合過程に対する伊藤積分). X を左連続且つ局所有界な適合過程，$M \in \mathcal{M}_{c,loc}$ とする．このとき確率積分

$$\int_0^t X_s \, dM_s \quad (t \in I)$$

が定義される．

証明.

第一段 $\sup_{t \in I} \| X_t \|_{\mathscr{L}^\infty(\mu)} < \infty$ かつ $\| \langle M \rangle_T \|_{\mathscr{L}^\infty(\mu)} < \infty$ が満たされている場合 $X \in \mathscr{L}^2(\mathcal{P}, \mu_M)$ が成り立つことを示す．X は左連続であるから定理 5.2.7 により可測 $\mathcal{P}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ である．また定理 4.2.18 より $M \in \mathcal{M}_{2,c}$ も満たされている．X に対し (5.8) で定義される単純可予測過程の列 $(X^n)_{n=1}^\infty$ を取れば，X の有界性及び μ_M の有限性により Lebesgue の収束定理を適用できて

$$\| X - X^n \|_{\mathscr{L}^2(\mu_M)} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成り立つ．補題 5.2.6 より $\mathcal{S}$ は $\mathscr{L}^2(\mathcal{P}, \mu_M)$ で稠密であるから $X \in \mathscr{L}^2(\mathcal{P}, \mu_M)$ が従う．

第二段　前段の仮定を外す．X が局所有界過程であるから，或る $(\tau_j)_{j=0}^{\infty} \in \mathcal{T}$ が存在して

$$\sup_{t \in I} \left\| X_{t \wedge \tau_j} \right\|_{\mathscr{L}^\infty(\mu)} < \infty \quad (j = 0, 1, \cdots)$$

が満たされる．また

$$\hat{\tau}_j(\omega) \coloneqq \inf \{\, t \in I \;;\quad \langle M \rangle_t(\omega) \geq j \,\} \wedge T \;{}^{*4} \quad (\forall \omega \in \Omega,\ j = 0, 1, \cdots)$$

として $\left(\hat{\tau}_j\right)_{j=0}^{\infty} \in \mathcal{T}$ を定め

$$\sigma_j \coloneqq \tau_j \wedge \hat{\tau}_j \quad (j = 0, 1, \cdots)$$

とおけば，$(\sigma_j)_{j=0}^{\infty} \in \mathcal{T}$ 且つ

$$\left\| X_t^{\sigma_j} \right\|_{\mathscr{L}^\infty(\mu)} \leq \left\| X_t^{\tau_j} \right\|_{\mathscr{L}^\infty(\mu)}, \quad \left\| \langle M \rangle_t^{\sigma_j} \right\|_{\mathscr{L}^\infty(\mu)} \leq j \quad (\forall t \in I,\ j = 0, 1, \cdots)$$

が成り立つ．従って前段の結果より $I_{M^{\sigma_j}}(X^{\sigma_j})$ $(j = 0, 1, \cdots)$ が定義される．

第三段　次の極限が μ-a.s. に確定することを示す:

$$\lim_{j \to \infty} I_{M^{\sigma_j}}(X^{\sigma_j})_{t \wedge \sigma_j} \quad (\forall t \in I).$$

$(\sigma_j)_{j=0}^{\infty} \in \mathcal{T}$ より或る μ-零集合 E が存在して，$\omega \in \Omega \backslash E$ なら $0 = \sigma_0(\omega) \leq \sigma_1(\omega) \leq \cdots$ 且つ，或る $J = J(\omega) \in \mathbb{N}$ が存在して $\sigma_j(\omega) = T$ $(j \geq J)$ が満たされる．今，$j \leq k$ を満たす $j, k \in \mathbb{N}_0$ を任意に取り固定する[*5]．任意に $Y \in \mathcal{S}$ を取り，Y が時点 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ と $F \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}_0, \mu), F_i \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}_{t_i}, \mu)$ $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$ によって

$$Y_t = F \mathbb{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} F_i \mathbb{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t) \quad (t \in I)$$

と表現されているとすれば，$\mathcal{M}_{2,c}$ 上の確率積分の定義より

$$I_{M^{\sigma_j}}(Y)_t = \sum_{i=0}^{n-1} F_i \left(M_{t \wedge t_{i+1}}^{\sigma_j} - M_{t \wedge t_i}^{\sigma_j} \right) \quad (\forall t \in I,\ \mu\text{-a.s.})$$

が成り立つ．特に両辺を σ_j で停めても等号は保たれ

$$I_{M^{\sigma_j}}(Y)_t^{\sigma_j} = \sum_{i=0}^{n-1} F_i \left(M_{t \wedge t_{i+1}}^{\sigma_j} - M_{t \wedge t_i}^{\sigma_j} \right) \quad (\forall t \in I,\ \mu\text{-a.s.}) \tag{5.13}$$

を得る．σ_{j+k} についても同様に

$$I_{M^{\sigma_{j+k}}}(Y)_t = \sum_{i=0}^{n-1} F_i \left(M_{t \wedge t_{i+1}}^{\sigma_{j+k}} - M_{t \wedge t_i}^{\sigma_{j+k}} \right) \quad (\forall t \in I,\ \mu\text{-a.s.})$$

が成り立ち，特に $\Omega \backslash E$ 上では $\sigma_j \leq \sigma_{j+k}$ が満たされるから，両辺を σ_j で停めて

$$I_{M^{\sigma_{j+k}}}(Y)_t^{\sigma_j} = \sum_{i=0}^{n-1} F_i \left(M_{t \wedge t_{i+1}}^{\sigma_j} - M_{t \wedge t_i}^{\sigma_j} \right) \quad (\forall t \in I,\ \mu\text{-a.s.}) \tag{5.14}$$

---

*4　$\{\, t \in I \;;\quad |\langle M \rangle_t(\omega)| \geq j \,\} = \emptyset$ の場合 $\sigma_j(\omega) = T$ とする．

*5　$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

が得られ，(5.13) と (5.14) を併せれば

$$I_{M^{\sigma_j}}(Y)_t^{\sigma_j} = I_{M^{\sigma_{j+k}}}(Y)_t^{\sigma_j} \quad (\forall t \in I,\ \mu\text{-a.s.})$$

が従う．一般の $Y \in \mathscr{L}^2(\mathcal{P}, \mu_{M^{\sigma_j}}) \cap \mathscr{L}^2(\mathcal{P}, \mu_{M^{\sigma_{j+k}}})$ に対しては或る $Y_n \in \mathcal{S}\ (n = 1, 2, \cdots)$ が存在して

$$\int_{I\times\Omega} |Y(t,\omega) - Y_n(t,\omega)|^2\ \mu_{M^{\sigma_j}}(dtd\omega) \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

を満たすから

$$\begin{aligned}
&\| I_{M^{\sigma_j}}(Y)^{\sigma_j} - I_{M^{\sigma_{j+k}}}(Y)^{\sigma_j} \|_{\mathcal{M}_{2,c}} \\
&\quad \leq \| I_{M^{\sigma_j}}(Y)^{\sigma_j} - I_{M^{\sigma_j}}(Y_n)^{\sigma_j} \|_{\mathcal{M}_{2,c}} + \| I_{M^{\sigma_{j+k}}}(Y_n)^{\sigma_j} - I_{M^{\sigma_{j+k}}}(Y)^{\sigma_j} \|_{\mathcal{M}_{2,c}} \\
&\quad \leq \| Y - Y_n \|_{\mathscr{L}^2(\mu_{M^{\sigma_j}})} + \| Y - Y_n \|_{\mathscr{L}^2\left(\mu_{M^{\sigma_{j+k}}}\right)} \quad \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)
\end{aligned}$$

が成り立ち

$$I_{M^{\sigma_j}}(Y)_t^{\sigma_j} = I_{M^{\sigma_{j+k}}}(Y)_t^{\sigma_j} \quad (\forall t \in I,\ \mu\text{-a.s.}) \tag{5.15}$$

が従う．特に X^{σ_j} は $\|\cdot\|_{\mathscr{L}^\infty(\mu)}$ について一様有界であるから第一段より $X^{\sigma_j} \in \mathscr{L}^2(\mathcal{P}, \mu_{M^{\sigma_j}}) \cap \mathscr{L}^2(\mathcal{P}, \mu_{M^{\sigma_{j+k}}})$ が満たされ，(5.15) より或る μ-零集合 $A_{j,k}$ が存在して

$$I_{M^{\sigma_j}}(X^{\sigma_j})_t^{\sigma_j}(\omega) = I_{M^{\sigma_{j+k}}}(X^{\sigma_j})_t^{\sigma_j}(\omega) \quad (\forall t \in I,\ \omega \in \Omega\backslash A_{j,k}) \tag{5.16}$$

が成り立つ．一方で定理 5.3.6 より

$$\begin{aligned}
&\| I_{M^{\sigma_{j+k}}}(X^{\sigma_j})^{\sigma_j} - I_{M^{\sigma_{j+k}}}(X^{\sigma_{j+k}})^{\sigma_j} \|_{\mathcal{M}_{2,c}}^2 \\
&\quad = \int_\Omega \int_I |X^{\sigma_j}(t,\omega) - X^{\sigma_{j+k}}(t,\omega)|^2\ \mathbb{1}_{[0,\sigma_j(\omega)]}(t)\ \langle M^{\sigma_{j+k}} \rangle (dt,\omega)\, \mu(d\omega)
\end{aligned}$$

が成り立つが，$\Omega\backslash E$ 上では $\sigma_j \leq \sigma_{j+k}$ により $X^{\sigma_j}(t)\mathbb{1}_{[0,\sigma_j]}(t) = X^{\sigma_{j+k}}(t)\mathbb{1}_{[0,\sigma_j]}(t)$ が満たされているから右辺の積分は 0 であり，或る μ-零集合 $B_{j,k}$ が存在して

$$I_{M^{\sigma_{j+k}}}(X^{\sigma_j})_t^{\sigma_j}(\omega) = I_{M^{\sigma_{j+k}}}(X^{\sigma_{j+k}})_t^{\sigma_j}(\omega) \quad (\forall t \in I,\ \omega \in \Omega\backslash B_{j,k}) \tag{5.17}$$

が成り立つ．(5.16) と (5.17) を併せれば

$$I_{M^{\sigma_j}}(X^{\sigma_j})_t^{\sigma_j}(\omega) = I_{M^{\sigma_{j+k}}}(X^{\sigma_{j+k}})_t^{\sigma_j}(\omega) \quad \left(\forall t \in I,\ \omega \in \Omega\backslash \left(A_{j,k} \cup B_{j,k}\right)\right)$$

が従う．j, k は任意に選んでいたから，

$$A := \bigcup_{\substack{j,k\in\mathbb{N}_0 \\ j\leq k}} A_{j,k}, \quad B := \bigcup_{\substack{j,k\in\mathbb{N}_0 \\ j\leq k}} B_{j,k}, \quad C := A \cup B \cup E$$

により定める C は μ-零集合である．任意の $\omega \in \Omega\backslash C$ に対し或る $J = J(\omega)$ が存在して $0 = \sigma_0(\omega) \leq \sigma_1(\omega) \leq \cdots \leq \sigma_J(\omega) = T$ が満たされ，且つ任意の $j, k \in \mathbb{N}_0$, $j \leq k$ に対し

$$I_{M^{\sigma_j}}(X^{\sigma_j})_t^{\sigma_j}(\omega) = I_{M^{\sigma_k}}(X^{\sigma_k})_t^{\sigma_j}(\omega) \quad (\forall t \in I,\ \omega \in \Omega\backslash C)$$

も成り立つから，$\Omega\backslash C$ 上で $\lim_{j\to\infty} I_{M^{\sigma_j}}(X^{\sigma_j})_t^{\sigma_j}\ (\forall t \in I)$ が確定する．

$$I_M(X)(t,\omega) := \begin{cases} \lim\limits_{j\to\infty} I_{M^{\sigma_j}}(X^{\sigma_j})^{\sigma_j}(t,\omega) & (\omega \in \Omega\backslash C) \\ 0 & (\omega \in C) \end{cases} \quad (t \in I)$$

により $I_M(X)$ を定めれば，$I_M(X)$ は適合過程であり，且つ任意の $\omega \in \Omega$ に対し $I \ni t \longmapsto I_M(X)_t(\omega)$ は各点 t で右連続かつ左極限を持つ．そして任意の $j \in \mathbb{N}_0$ に対し

$$I_M(X)^{\sigma_j}(t,\omega) = I_{M^{\sigma_j}}(X^{\sigma_j})^{\sigma_j}(t,\omega) \quad (\forall t \in I,\ \omega \in \Omega \backslash C)$$

が満たされる． ∎