確率微分方程式

基礎工学研究科システム創成専攻修士 1 年
学籍番号 29C17095
百合川尚学

2017 年 10 月 13 日

レポート問題 1.

1　10/11

基礎の確率空間を $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ とする．$\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ を部分 σ-加法族とし，Hilbert 空間 $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ とその閉部分空間 $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ を考える．任意の $f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ に対して，射影定理により一意に定まる射影 $g \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ を

$$g = \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}]$$

と表現する．$\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ のときは $\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}]$ を $\mathrm{E}[f]$ と書いて f の期待値と呼ぶ．

レポート問題 2.
扱う関数は全て $\mathbb{R}$ 値と考える．

C1　$\forall f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

$$\mathrm{E}[f] = \int_\Omega f(x)\, \mu(dx)$$

C2　$\forall f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, $\forall h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$

$$\int_\Omega f(x)h(x)\, \mu(dx) = \int_\Omega \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x)h(x)\, \mu(dx)$$

C3　$\forall f_1, f_2 \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

$$\mathrm{E}[f_1 + f_2 \mid \mathcal{G}] = \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}] + \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}]$$

C4　$\forall f_1, f_2 \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

$$f_1 \le f_2 \quad \text{a.s.} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}] \le \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}] \quad \text{a.s.}$$

C5　$\forall f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, $\forall g \in \mathrm{L}^\infty(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$

$$\mathrm{E}[gf \mid \mathcal{G}] = g\, \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}]$$

C6　$\mathcal{H}$ が $\mathcal{G}$ の部分 σ-加法族ならば $\forall f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

$$\mathrm{E}\big[\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \,\big|\, \mathcal{H}\big] = \mathrm{E}[f \mid \mathcal{H}]$$

証明.　C1　$\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ とすれば，$\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ の元は $\mathcal{G}$ 可測でなくてはならないから Ω 上の定数関数である．従って任意の $g \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ に或る定数 $\alpha \in \mathbb{R}$ が対応して $g(x) = \alpha$ $(\forall x \in \Omega)$ と表せる．Hilbert 空間 $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ におけるノルムを $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)}$ と表示すれば，射影定理より任意の $f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ の $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ への射影 $\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] = \mathrm{E}[f]$ はノルム $\|f - g\|_{\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)}$

を最小にする $g \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ である．$g(x) = \alpha \ (\forall x \in \Omega)$ としてノルムを直接計算すれば，

$$\begin{aligned}
\| f - g \|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)} &= \int_\Omega |f(x) - \alpha|^2 \, \mu(dx) \\
&= \int_\Omega |f(x)|^2 - 2\alpha f(x) + |\alpha|^2 \, \mu(dx) \\
&= \int_\Omega |f(x)|^2 \, \mu(dx) - 2\alpha \int_\Omega f(x) \, \mu(dx) + |\alpha|^2 \\
&= \left| \alpha - \int_\Omega f(x) \, \mu(dx) \right|^2 - \left| \int_\Omega f(x) \, \mu(dx) \right|^2 + \int_\Omega |f(x)|^2 \, \mu(dx) \\
&= \left| \alpha - \int_\Omega f(x) \, \mu(dx) \right|^2 + \int_\Omega |f(x) - \beta|^2 \ \mu(dx) \qquad \left(\beta := \int_\Omega f(x) \, \mu(dx)\right)
\end{aligned}$$

と表現できて最終式は $\alpha = \int_\Omega f(x) \, \mu(dx)$ となることで最小となる．すなわち

$$\mathrm{E}[f] = \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] = \int_\Omega f(x) \, \mu(dx).$$

C2 Hilbert 空間 $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ における内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ と表示する．講義中の射影定理により，$f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ の $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ への射影 $\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}]$ は

$$\langle f - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h \rangle = 0 \quad (\forall h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu))$$

を満たし，内積の線型性から

$$\langle f, h \rangle = \langle \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h \rangle \quad (\forall h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu))$$

が成り立つ．積分の形式で表示することにより

$$\int_\Omega f(x) h(x) \, \mu(dx) = \int_\Omega \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x) h(x) \, \mu(dx) \quad (\forall h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu))$$

が示された．

C3