目次

0.1 徒然なるままに支離滅裂 1
0.2 言語 1
0.3 項 2
0.4 式 3
0.5 部分式 4
0.6 始切片 4
0.7 スコープ 6
0.8 言語の拡張 8
0.9 類と集合 10
0.10 式の書き換え 11
0.11 証明 11
0.12 推論 12
0.13 相等性 27
0.14 順序型について 37
0.15 超限再帰について 37

0.1 徒然なるままに支離滅裂

わからないわからないわからない

基礎論における証明は大抵が直感に頼っているように見えますが，ではその直感が正しいとは誰が保証するのでしょうか．手元にあるどの本でも保証されていません．もしかしたら神様という超然的な存在を暗黙の裡に認めていて，直感とは神様が用意した論理であるとして無断で使っているだけなのかもしれませんが，残念ながら読者はテレパシーを使えないので，筆者の暗黙の了解を推察するなんて困難です．

しかしながら，暗黙の了解を排除しようとすると，その分だけ日本語による明示的な約束が必要になります．すると新たな問題が生じます．それは日本語で書かれた言明をどこまで信用するか，という問題です．基礎論の難しさは，その表面上のややこしさよりも日本語に対する認識を揃えることにあるのでしょうか．

論理構造を集合論の結果を用いて解明しようというのならまだしも (こちらは数理論理学と呼ばれる分野で，本来は数学基礎論とは別物だそうです)，集合論を構築することが目的である場合，その土台となる基礎論を集合論の上に展開すると理論が循環することになるでしょう．基礎論が基礎にしている集合論は「メタ理論」と呼ばれるらしいですが，その「メタ理論」がどう構成されたのかという点には誰も全く言及していないのですから，「メタ理論」という言葉は単なる逃げ口上にしか聞こえず，理論の循環を解消できません．私の考えでは，メタ理論の代わりに絶対的な原理が与えられたとして数学を構築すれば良いのです．まあ言い方を変えて印象を良く？しようというだけの下らない事情であって，もったいぶって思想的な立場を主張しても集合論には関係のないことなのですが．

前提：我々は数の概念を持っている．個数の概念を持っている．物の数を数えることが出来る．数の概念とは？個数の概念とは？ここで言う数は数学的に構成する数ではなくて，神が用意した概念としての数．そこまで踏み込むときりがない．

排中律と無矛盾性の違い: 排中律から $\rightharpoondown (A \wedge \rightharpoondown A)$ が導かれるが，$A \wedge \rightharpoondown A$ が導かれることを否定しているわけではない．

目的:いかに自然で人工的な世界を作るか．

0.2 言語

本稿の世界を展開するために使用する言語は二つある．一つは自然言語の日本語であり，もう一つは記号のみで作られた人工的な言語である．その人工的な言語は記号列が数学の式となるための文法を指定し，そこで組み立てられた式のみが考察対象となる．日本語は式を解釈したり人工言語を補助するために使われる．

まず，人工的な言語である $\mathcal{L}_{\in}$ を設定する．以下は $\mathcal{L}_{\in}$ を構成する要素である:

矛盾記号 $\perp$

論理記号 $\rightharpoondown, \vee, \wedge, \Longrightarrow$

量化子 $\forall, \exists$

述語記号 $=, \in$

使用文字 ローマ字及びギリシア文字．

接項子 $\natural$

日本語と同様に，決められた規則に従って並ぶ記号列のみを $\mathcal{L}_{\in}$ の単語や文章として扱う．$\mathcal{L}_{\in}$ において，名詞にあたるものは**項 (term)** と呼ばれる．文字は最もよく使われる項である．述語とは項同士を結ぶものであり，最小単位の

文章を形成する．例えば

$$\in st$$

は $\mathcal{L}_\in$ の文章となり，日本語には “s は t の要素である” と翻訳される．$\mathcal{L}_\in$ の文章を**式 (formula)** 或いは**論理式**と呼ぶ．論理記号は主に式同士を繋ぐ役割を持つ．

論理学的な言語とは論理記号と変項記号を除く記号をすべて集めたものであって，本稿で用意した記号で言うと，論理記号とは

$$\bot,\ \neg,\ \vee,\ \wedge,\ \Longrightarrow,\ \forall,\ \exists,\ =$$

であり，変項記号とは文字であって，$\mathcal{L}_\in$ の語彙は

$$\in,\ \natural$$

しかない．だが本稿の目的は集合論の構築であって一般の言語について考察するわけではないので，論理記号も文字もすべて $\mathcal{L}_\in$ の構成員と見做す方が自然である．ついでに記号の分類も主流の論理学とは変えていて，

- $\bot$ はそれ単体で式であるので他の記号とは分ける．
- 論理記号とは式に作用するものとして $\neg, \vee, \wedge, \Longrightarrow$ のみとする．
- $\forall$ と $\exists$ は項に作用するものであるから量化子として分類する．
- 等号 $=$ は' 等しい' という述語になっているから，論理記号ではなく述語記号に入れる．

以上の変更点は殆ど無意味であるが，いかに “直観的な” 集合論を構築するかという目的を勘案すれば良いスタートであるように思える．

0.3 項

文字は項として使われるが，文字だけを項とするのは不十分であり，例えば 1000 個の相異なる項が必要であるといった場合には異体字まで駆使しても不足する．そこで，文字 x と y に対して

$$\natural xy$$

もまた項であると約束する．これは

$$\natural(x, y)$$

や

$$x \natural y$$

などと書く方が見やすいかもしれないが，当面は始めの記法 (前置記法やポーランド記法と呼ばれる) を用いる．また，τ と σ を項とするときに

$$\natural \tau\sigma$$

も項であると約束する．この約束に従えば，文字 x だけを用いたとしても

$$x, \quad \natural xx, \quad \natural\natural xxx, \quad \natural\natural\natural xxxx$$

はいずれも項ということになる．極端なことを言えば，「1000 個の項を用意してくれ」と頼まれたとしても $\natural$ と x だけで 1000 個の項を作り出すことが出来るのだ．

大切なのは，$\natural$ を用いれば理屈の上では項に不足しないということであって，具体的な数式を扱うときに $\natural$ が出てくるかと言えば否である．$\natural$ が必要になるほどに長い式を読解するのは困難であるから，通常は何らかの略記法を導入して複雑なところを覆い隠してしまう．

超記号

上で「τ と σ を項とするときに」と書いたが，これは一時的に τ と σ をそれぞれ或る項に代用しているだけであって，τ が指している項の本来の字面は x であるかもしれない．この場合の τ や σ を**超記号**と呼ぶ．「A を式とする」など式にも超記号が宣言される．

項は形式的には次のよう定義される:

項
- 文字は項である．
- τ と σ を項とするとき，$\natural\tau\sigma$ は項である．
- 以上のみが項である．

上の定義では，はじめに発端を決めて，次に新しい項を作り出す手段を指定している．こういった定義の仕方を**帰納的定義 (inductive definition)** と呼ぶ．ただしそれだけでは項の範囲が定まらないので，最後に「以上のみが項である」と加えている．

「以上のみが項である」という約束によって，例えば「τ が項である」という言明が与えられたとき，この言明が “τ は或る文字に代用されている” か “項 x と項 y が取れて (いずれも超記号)，τ は $\natural xy$ に代用されている” のどちらか一方にしか解釈され得ないのは，言うまでもない，であろうか．直感的にはそうであっても直感を万人が共有している保証はないから，やはりここは明示的に，「τ が項である」という言明の解釈は

- τ は或る文字に代用されている
- 項 x と項 y が取れて (いずれも超記号)，τ は $\natural xy$ に代用されている

に限られると決めてしまおう．こちらの方が誤解を生まない．

暗に宣言された超記号

上で「項 x と項 y が取れて」と書いたが，この x と y は唐突に出てきたので，それが表す文字そのものでしかないのか，或いは超記号であるのか，一見判然しない．本来は「二つの項，これをそれぞれ x と y で表す，が取れて」などと書くのが良いのかもしれないが，はじめの書き方でも文脈上は超記号として解釈するのが自然であるし，何より言い方がまどろこくない．このように見た目の簡潔さのために超記号の宣言を省略する場合もある．

0.4 式

式も項と同様に帰納的に定義される:

式
- $\perp$ は式である．
- σ と τ を項とするとき，$\in st$ と $= st$ は式である．これを**原子式 (atomic formula)** と呼ぶ．
- φ を式とするとき，$\rightarrow \varphi$ は式である．
- φ と ψ を式とするとき，$\vee\varphi\psi$, $\wedge\varphi\psi$, $\Longrightarrow \varphi\psi$ はいずれも式である．

- x を項とし，φ を式とするとき，$\forall x \varphi$ と $\exists x \varphi$ は式である．
- 以上のみが式である．

例えば「φ が式である」という言明の解釈は，

- φ は $\perp$ である
- 項 s と項 t が得られて，φ は $\in st$ である
- 項 s と項 t が得られて，φ は $= st$ である
- 式 ψ が得られて，φ は $\neg\, \psi$ である
- 式 ψ と式 ξ が得られて，φ は $\vee \psi \xi$ である
- 式 ψ と式 ξ が得られて，φ は $\wedge \psi \xi$ である
- 式 ψ と式 ξ が得られて，φ は $\Longrightarrow \psi \xi$ である
- 項 x と式 ψ が得られて，φ は $\forall x \psi$ である
- 項 x と式 ψ が得られて，φ は $\exists x \psi$ である

に限られる．

0.5　部分式

式から切り取ったひとつづきの部分列で，それ自身が式であるものを元の式に対して**部分式 (sub formula)** と呼ぶ．例えば φ と ψ を式とするとき，φ と ψ は $\vee \varphi \psi$ の部分式である．元の式全体も部分式と捉えることにするが，自分自身を除く部分式を特に**真部分式 (proper sub formula)** と呼ぶことにする．

0.6　始切片

φ を式とするとき，φ の左端から切り取るひとつづきの部分列を φ の**始切片 (initial segment)** と呼ぶ．例えば φ が

$$\Longrightarrow \forall x \wedge \Longrightarrow \in xy \in xz \Longrightarrow \in xz \in xy = yz$$

である場合，

$$\color{red}{\Longrightarrow \forall x \wedge \Longrightarrow \in xy \in xz \Longrightarrow \in xz \in x}y = yz$$

や

$$\color{red}{\Longrightarrow \forall x \wedge \Longrightarrow \in xy}\in xz \Longrightarrow \in xz \in xy = yz$$

など赤字で分けられた部分は φ の始切片である．また φ 自身も φ の始切片である．

本節の主題は次である．

メタ定理 0.6.1. (★) φ を式とするとき，φ の始切片で式であるものは φ 自身に限られる．

これを示すには次の原理を用いる:

メタ公理 0.6.2 (式に対する構造的帰納法). 式に対する言明に対し，

- $\perp$ に対してその言明が当てはまる．
- 原子式に対してその言明が当てはまる．
- 式が任意に与えられた[*1]ときに，その全ての真部分式に対してその言明が当てはまるならば，その式自身に対してもその言明が当てはまる．

ならば，いかなる式に対してもその言明は当てはまる．

では定理を示す．$\perp$ については，その始切片は $\perp$ に限られる．$\in st$ なる原子式については，その始切片は

$$\in, \quad \in s, \quad \in st$$

のいずれかとなるが，このうち式であるものは $\in st$ のみである．$= st$ なる原子式についても，その始切片で式であるものは $= st$ に限られる．

いま φ を任意に与えられた式とし，φ の真部分式に対しては (★) が当てはまっているとする．

ケース 1 式 ψ が得られて φ が

$$\neg \psi$$

であるとき，ψ は φ の真部分式であるので (★) は当てはまる．φ の始切片で式であるものは，式 ξ を用いて $\neg \xi$ と表せるが，ξ は ψ の始切片であるから，帰納法の仮定より ξ と ψ は一致する．ゆえに φ の始切片で式であるものは φ 自身に限られる．

ケース 2 式 ψ と ξ が得られて φ が

$$\vee\psi\xi$$

であるとする．φ の始切片で式であるものも $\vee$ が左端に来るので，式 η と式 ζ が得られて始切片は

$$\vee\eta\zeta$$

と表せる．ψ と η，ξ と ζ はいずれも φ の真部分式であるので (★) が当てはまる．そして ψ と η は一方が他方の始切片であるので，(★) より一致する．すると ξ と ζ も一方が他方の始切片ということになり，(★) より一致する．ゆえに $\vee\psi\xi$ と $\vee\eta\zeta$ は一致する．つまり φ の始切片で式であるものは φ 自身に限られる．φ が $\wedge\psi\xi$ や $\Longrightarrow \psi\xi$ である場合も同じである．

ケース 3 項 x と式 ψ が得られて，φ が

$$\forall x\psi$$

であるとき，φ の始切片で式であるものは，式 ξ が取れて

$$\forall x\xi$$

と表せる．このとき ξ は ψ の始切片であるし，また ψ は φ の真部分式であるから，(★) より ψ と ξ は一致する．ゆえに φ の始切片で式であるものは φ 自身に限られる．φ が $\forall x\psi$ である場合も同じである． ∎

[*1] “任意に与えられた式” とはどう解釈するべきか．どんな式に対しても?

0.7 スコープ

φ を式とし，s を φ に現れた記号とするとき，s のその出現位置から始まる φ の部分式を s のスコープ **(scope)** と呼ぶ．具体的に，φ を

$$\Longrightarrow \forall x \wedge \Longrightarrow \in xy \in xz \Longrightarrow \in xz \in xy = yz$$

としよう．このとき φ の左から 6 番目に $\in$ が現れるが，この $\in$ から

$$\in xy$$

なる原子式が φ の上に現れている:

$$\Longrightarrow \forall x \wedge \Longrightarrow {\color{red}\in xy} \in xz \Longrightarrow \in xz \in xy = yz.$$

他にも，φ の左から 4 番目に $\wedge$ が現れるが，この右側に

$$\Longrightarrow \in xy \in xz$$

と

$$\Longrightarrow \in xz \in xy$$

の二つの式が続いていて，$\wedge$ を起点に

$$\wedge \Longrightarrow \in xy \in xz \Longrightarrow \in xz \in xy$$

なる式が φ の上に現れている:

$$\Longrightarrow \forall x {\color{red}\wedge \Longrightarrow \in xy \in xz \Longrightarrow \in xz \in xy} = yz.$$

φ の左から 2 番目には $\forall$ が現れて，この $\forall$ に対して項 x と

$$\wedge \Longrightarrow \in xy \in xz \Longrightarrow \in xz \in xy$$

なる式が続き，

$$\forall x \wedge \Longrightarrow \in xy \in xz \Longrightarrow \in xz \in xy$$

なる式が φ の上に現れている:

$$\Longrightarrow {\color{red}\forall x \wedge \Longrightarrow \in xy \in xz \Longrightarrow \in xz \in xy} = yz.$$

しかも $\in, \wedge, \forall$ のスコープは上にあげた部分式のほかに取りようが無い．上の具体例を見れば，直感的に「現れた記号のスコープはただ一つだけ，必ず取ることが出来る」が一般の式に対して当てはまるであるように思えるが，直感を排除してこれを認めるには構造的帰納法の原理が必要になる．

メタ定理 0.7.1. (★★) φ を式とするとき，

- $\natural$ が φ に現れたとき，項 σ と項 τ が得られて，$\natural$ のその出現位置から $\natural\sigma\tau$ なる項が φ の上に現れる．また $\natural$ のその出現位置から始まる φ 上の項は $\natural\sigma\tau$ に限られる．
- $\in$ が φ に現れたとき，項 σ と項 τ が得られて，$\in$ のその出現位置から $\in\sigma\tau$ なる式が φ の上に現れる．また $\in$ のその出現位置から始まる φ の部分式は $\in\sigma\tau$ に限られる．$\in$ が $=$ であっても同じ主張が成り立つ．
- $\rightharpoondown$ が φ に現れたとき，式 ψ が得られて，$\rightharpoondown$ のその出現位置から $\rightharpoondown\psi$ なる式が φ の上に現れる．また $\rightharpoondown$ のその出現位置から始まる φ の部分式は $\rightharpoondown\psi$ に限られる．
- $\vee$ が φ に現れたとき，式 ψ と式 ξ が得られて，$\vee$ のその出現位置から $\vee\psi\xi$ なる式が φ の上に現れる．また $\vee$ のその出現位置から始まる φ の部分式は $\vee\psi\xi$ に限られる．$\vee$ が $\wedge$ や $\Longrightarrow$ であっても同じ主張が成り立つ．
- $\exists$ が φ に現れたとき，項 x と式 ψ が得られて，$\exists$ のその出現位置から $\exists x\psi$ なる式が φ の上に現れる．また $\exists$ のその出現位置から始まる φ の部分式は $\exists x\psi$ に限られる．$\exists$ が $\forall$ であっても同じ主張が成り立つ．

$\perp$ に対しては上の言明は当てはまる．

$\in\tau\sigma$ なる式に対しては，$\in$ のスコープは $\in\tau\sigma$ に他ならない．$=\tau\sigma$ なる式についても，$=$ のスコープは $=\tau\sigma$ に他ならない．

φ を任意に与えられた式とし，φ の真部分式に対しては (★★) が当てはまっているとする．

ケース 1

式 φ と ψ に対して上の言明が当てはまるとする．式 $\rightharpoondown\varphi$ に対して，σ が左端の $\rightharpoondown$ であるとき $\sigma\varphi$ は $\rightharpoondown\varphi$ の部分式である．また $\sigma\psi$ が σ のその出現位置から始まる $\rightharpoondown\varphi$ の部分式であるとすると，ψ は φ の左端から始まる φ の部分式ということになるので帰納法の仮定より φ と ψ は一致する．σ が φ に現れる記号であれば，帰納法の仮定より σ から始まる φ の部分式が一意的に得られる．その部分式は $\rightharpoondown\varphi$ の部分式でもあるし，$\rightharpoondown\varphi$ の部分式としての一意性は帰納法の仮定より従う．

式 $\vee\varphi\psi$ に対して，σ が左端の $\vee$ であるとき，式 ξ と η が得られて $\sigma\xi\eta$ が $\vee\varphi\psi$ の部分式となったとすると，ξ と φ は左端を同じくし，どちらか一方は他方の部分式である．ξ が φ の部分式であるならば，帰納法の仮定より ξ と φ は一致する．φ が ξ の部分式であるならば，ξ と ψ が重なるとなると ψ の左端の記号から始まる ξ の部分式と ψ は一致しなくてはならない．

量化

φ に $\forall$ が現れるとき，その $\forall$ に後続する項 x が取れるが，このとき項 x は $\forall$ のスコープ内で**量化されている (quantified)** という．詳しく言い直せば，項 x と式 ψ が取れて，その $\forall$ のスコープは

$$\forall x\psi$$

なる式で表されるが，このとき x は $\forall x\psi$ において量化されているという．

A を式とし，a を A に現れる項とする．このとき A の中の項 a を全て項 x に置き換えた式を

$$(x \mid a)A$$

で表す．特に項 a と項 x が同一の項である場合は $(x \mid a)A$ は A 自身に一致する．また A の中で自由に現れる項が a のみであって，かつ a が自由に現れる箇所がどれも項 x の量化スコープではないとき，A に現れる項 a のうち，**自由**

に現れる箇所を全て項 x に置き換えた式を

$$A(x)$$

と書く．A に現れる項 a が全て自由であるときは $A(a)$ は A 自身に一致する．

0.8 言語の拡張

項 x が自由に現れる式 $A(x)$ に対して

$$\{\, x \mid \quad A(x) \,\}$$

なる形の項を導入する．この $\{\, x \mid \quad A(x) \,\}$ なる記法は**内包的記法 (international notation)** と呼ばれる．導入の意図は “$A(x)$ を満たす集合 x の全体” という意味を込めた式の対象化であって，実際に後述の内包性公理によって

$$\forall x \; (\, x \in \{\, x \mid \quad A(x) \,\} \Longleftrightarrow A(x) \,)$$

を保証する．

追加する項はもう一つある．$A(x)$ を上記のものとするが，この場合 $A(x)$ は x に関する性質として扱われる．そして “性質 $A(x)$ を具えている集合” という意味を込めて

$$\varepsilon x A(x)$$

なる形の項を導入する．これは Hilbert の ε 項と呼ばれるものであるが，留意点は，$\varepsilon x A(x)$ は性質 $A(x)$ を持つとは限らないということである．$\varepsilon x A(x)$ が性質 $A(x)$ を持つのは，$A(x)$ を満たす集合 x が存在するとき，またその時に限られる．$A(x)$ を満たす集合 x が存在しない場合は，$\varepsilon x A(x)$ は集合の山を賑わせるだけの枯れ木に過ぎない．

言語 $\mathcal{L}_\in$ を設定したばかりであるが，上述の二種類の項を取り入れて言語 $\mathcal{L}$ に拡張する．$\mathcal{L}$ は基本的には $\mathcal{L}_\in$ のものを継承するが，拡張に際して $\{\, x \mid \quad A(x) \,\}$ や $\varepsilon x A(x)$ なるオブジェクトや

$$\varepsilon,$$

及び

$$\{, \quad |, \quad \}$$

が加えられる．$\{\, x \mid \quad A(x) \,\}$ や $\varepsilon x A(x)$ は自然言語の固有名詞に相当するものであり，また ε は論理記号で，$\{, |, \}$ は補助記号であるとする．

定義 0.8.1 (類). A を $\mathcal{L}_\in$ の式とし，x を A に現れる項とし，A の中で項 x のみが自由に現れるとき，$\{\, x \mid \quad A(x) \,\}$ 及び $\varepsilon x A(x)$ を**類 (class)** と呼ぶ．

変項 $\mathcal{L}_\in$ の項を**変項 (variable term)** と呼ぶ．またこれらのみが変項である．

項 変項は $\mathcal{L}$ の項である．類も $\mathcal{L}$ の項である．またこれらのみが $\mathcal{L}$ の項である．

式
- $\perp$ は $\mathcal{L}$ の式である．
- 項 s と t に対して $\in st$ と $= st$ は $\mathcal{L}$ の式である．
- φ を $\mathcal{L}$ の式とするとき，$\rightarrow \varphi$ は $\mathcal{L}$ の式である．

- φ と ψ を $\mathcal{L}$ の式とするとき，以下はいずれも $\mathcal{L}$ の式である．

$$\begin{aligned} &\vee\varphi\psi, \\ &\wedge\varphi\psi, \\ &\rightarrow\varphi\psi. \end{aligned}$$

- 変項 x が $\mathcal{L}$ の式 φ に現れるとき，$\forall x\varphi$ と $\exists x\varphi$ は $\mathcal{L}$ の式である．
- 以上のみが $\mathcal{L}$ の式である．

φ を $\mathcal{L}$ の式とし，s を φ に現れる記号とすると，

(1) s は文字である．
(2) s は $\natural$ である．
(2) s は $\{$ である．
(3) s は $|$ である．
(4) s は $\}$ である．
(5) s は $\perp$ である．
(6) s は $\in$ か $=$ である．
(7) s は $\rightharpoondown$ である．
(8) s は $\vee, \wedge, \rightarrow$ のいずれかである．

(★★) いま，φ を任意に与えられた式としよう．

- $\natural$ が φ に現れたとき，$\mathcal{L}_\in$ の項 τ と σ が得られて，$\natural\tau\sigma$ は $\natural$ のその出現位置から始まる $\mathcal{L}_\in$ の項となる．また $\natural$ のその出現位置から始まる $\mathcal{L}_\in$ の項は $\natural\tau\sigma$ のみである．
- $\{$ が φ に現れたとき，$\mathcal{L}_\in$ の変項 x 及び $\mathcal{L}_\in$ の式 A が得られて，$\{x|A\}$ は $\{$ のその出現位置から始まる項となる．また $\{$ のその出現位置から始まる項は $\{x|A\}$ のみである．
- $|$ が φ に現れたとき，，変項 x と $\mathcal{L}_\in$ の式 A が得られて，$\{x|A\}$ は $|$ のその出現位置から広がる項となる．また $|$ のその出現位置から広がる項は $\{x|A\}$ のみである．
- $\}$ が φ に現れたとき，変項 x と式 A が得られて，$\{x|A\}$ は $\}$ のその出現位置を終点とする項となる．また $\}$ のその出現位置を終点とする項は $\{x|A\}$ のみである．

$\natural$ に対して $\natural\tau\sigma$ なる変項 τ と σ が得られること $\natural$ が原子項に現れたら，原子項とは文字 x, y によって

$$\natural xy$$

と表されるものであるから，$\natural$ に対して変項 τ, σ (すなわち文字 x, y) が取れたことになる．$\natural$ が項に現れたとする．項とは，変項 x, y によって

$$\natural xy$$

で表されるものであり，$\natural$ は左端の $\natural$ であるか，x に現れるか，y に現れる．$\natural$ が x か y に現れるときは帰納法の仮定により，$\natural$ が左端のものである場合は x が τ，y が σ ということになる．

変項の始切片で変項であるものは自分自身のみ x が文字である場合はそう．x の任意の部分変項が言明を満たしているなら，x は $\natural st$ なる変項である (生成規則) から，x の始切片は $\natural uv$ なる変項である．s, t, u, v はいずれも x

の部分変項なので仮定が適用されている．ゆえに s と u は一方が他方の始切片であり，一致する．すなわち t と v も一方が他方の始切片であり一致する．ゆえに x の始切片で変項であるものは x 自身である．

♮ に対して得られる変項の一意性　$\natural xy$ と $\natural st$ が共に変項であるとき，x と s，y と t は一致するか．$\natural xy$ が原子項であるときは明らかである．x の始切片で変項であるものは x 自身に限られるので，x と s は一致する．ゆえに t は y の始切片であり，t と y も一致する．

生成規則より x と A が得られるか　φ が原子式であるとき，$\{$ が現れるとすれば項の中である．項とは $\mathcal{L}_\in$ の項であるか $\{x|A\}$ なるものであるので $\{$ が現れたならば $\{$ とは $\{x|A\}$ の $\{$ である．

φ の任意の部分式に対して言明が満たされているとする．φ とは $\rightharpoondown \psi, \vee\psi\xi, \dots$ の形であるから，φ に現れた $\{$ とは ψ や ξ に現れるのである．ゆえに仮定より x と A が取れるわけである．

$\{$ に対して　項の生成規則より x と A が得られる．$\{y|B\}$ もまた $\{$ から始まる項である場合，順番に見ていって x と y は一方が他方の始切片という関係になるから一致する．すると A と B は一方が他方の始切片という関係になり，(★) より A と B は一致する．

$|$ について　項の生成規則より x と A が得られる．$\{y|B\}$ もまた $|$ から広がる項である場合，順番に見ていって x にも y にも $\{$ という記号は現れないので x と y は一致する．A と B は一方が他方の始切片という関係になるので (★) より A と B は一致する．

$\}$ について　項の生成規則より x と A が得られる．$\{y|B\}$ もまた $\}$ のその出現位置を終点とする変項である場合，A と B は $\mathcal{L}_\in$ の式なので $|$ という記号は現れない．ゆえに A と B は一致する．すると x と y は右端で揃うが，x にも y にも $\{$ という記号は現れないので x と y は一致する．

0.9　類と集合

定義 0.9.1 (類と集合).　a を類とするとき，a が集合であるという言明を

$$\mathrm{set}(a) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \exists x\,(\,x = a\,)$$

で定める．$\mathrm{set}(a)$ を満たす類 a を**集合 (set)** と呼び，$\rightharpoondown \mathrm{set}(a)$ を満たす類 a を**真類 (proper class)** と呼ぶ．

ちなみに $\varepsilon x A(x)$ は集合である．なぜならば

$$\varepsilon x A(x) = \varepsilon x A(x)$$

だから

$$\exists a\ (\,a = \varepsilon x A(x)\,).$$

また $\{\,x \mid \quad A(x)\,\}$ が集合であるとき

$$\exists s\ (\,\{\,x \mid \quad A(x)\,\} = s\,)$$

が成り立つが，量化の規則より

$$\{\,x \mid \quad A(x)\,\} = \varepsilon s \forall u\,(\,u \in s \Longleftrightarrow A(u)\,)$$

が得られる．ブルバキや島内では右辺の項でクラスを導入しているため，$\forall u\,(\,u \in s \Longleftrightarrow A(s)\,)$ を満たす集合が取れない限りは $\{\,x \mid \quad A(x)\,\}$ は正体不明の対象として扱うほかない．一方で本稿では $\{\,x \mid \quad A(x)\,\}$ と ϵ 項を独立に導入しているため，両者の存在意義と関係性を自然に記述できる．

0.10 式の書き換え

$\{x \mid \quad A(x)\}$ なる形の項を甲種項，$\varepsilon x A(x)$ なる形の項を乙種項と呼び，これらを類と総称することにする．また乙種項が現れない $\mathcal{L}$ の式を甲種式，乙種項が現れる $\mathcal{L}$ の式を乙種式と呼ぶことにする．

- $x \in \left\{ y \mid \quad B(y) \right\}$ は $B(x)$ と書き換える．
  これは次の公理

$$\forall x \ \left(x \in \left\{ y \mid \quad B(y) \right\} \leftrightarrow B(x) \right)$$

  に基づく式の書き換えである．
- $\{x \mid \quad A(x)\} \in y$ は $\exists s \ \left(s \in y \wedge \forall u \, (u \in s \Longleftrightarrow A(s)) \right)$ と書き換える．これの同値性は

$$a \in b \Longrightarrow \exists x \, (a = x)$$

  の公理による．

量化は乙種項についての規則とする．甲種乙種関係なく，式 $A(x)$ に対して

$$\frac{A(\tau)}{\exists x A(x)}$$

逆に

$$\frac{\exists x A(x)}{A\left(\varepsilon x \mathcal{L} A(x)\right)}$$

全ての乙種項 τ で $A(\tau)$ が成り立てば $\forall x A(x)$ が成り立つ．

$$\frac{(\tau)A(\tau)}{\forall x A(x)}$$

明らかに

$$\forall x A(x) \Longrightarrow A(\varepsilon x \rightharpoondown \mathcal{L} A(x))$$

0.11 証明

- Σ の閉式は真である．
- A と $\to AB$ が真であると判明しているならば，B は真である．
- $\to \wedge ABA$ と $\to \wedge ABB$ は真である．
- A と B が真であると判明しているならば $\wedge AB$ と $\wedge BA$ は真である．
- $\to A \vee AB$ と $\to B \vee AB$ は真である．
- $\to AC$ と $\to BC$ が真であると判明しているならば $\to \vee ABC$ は真である．
- $\to \wedge A \rightharpoondown A\bot$ は真である．
- $\to\to A\bot \rightharpoondown A$ は真である．
- $\to\rightharpoondown\rightharpoondown AA$ は真である．

真であると判明している式 φ を起点にして，上の推論規則を駆使して閉式 ψ が真であると判明すれば，φ から始めて ψ が真であることに辿り着くまでの手続きは ψ の証明と呼ばれ，ψ は定理と呼ばれる．

証明には真であると判明している式が必要であり，その根本として選ばれた式が Σ の文である．Σ の文は証明なしに真であると決められているのであり，これらを公理と呼び定理と区別する．

$\mathscr{S}$ を文の集合とするとき，$\mathscr{S}$ に属する文は $\mathscr{S}$ の定理である．また以下の推論規則によって帰納的に $\mathscr{S}$ の定理が定まっていく．

演繹法則　$\mathscr{T}$ を文の集合とし，ψ を文とするとき，任意の文 φ に対して

$$\mathscr{T} \cup \{\psi\} \vdash \varphi$$

ならば

$$\mathscr{T} \vdash \psi \rightarrow \varphi$$

三段論法　ψ と φ を文とするとき，ψ と $\psi \rightarrow \varphi$ が共に $\mathscr{S}$ の定理ならば φ は $\mathscr{S}$ の定理である．

$\vee$ の導入　ψ と φ を文とするとき，ψ が $\mathscr{S}$ の定理ならば $\vee\varphi\psi$ と $\vee\psi\varphi$ は $\mathscr{S}$ の定理である．

$\wedge$ の導入　ψ と φ を文とするとき，ψ と φ が $\mathscr{S}$ の定理ならば $\wedge\psi\varphi$ は $\mathscr{S}$ の定理である．

$\wedge$ の除去　ψ と φ を文とするとき，$\wedge\psi\varphi$ が $\mathscr{S}$ の定理ならば ψ と φ は $\mathscr{S}$ の定理である．

場合分け法則　A と B と C を文とするとき，$\vee AB$ と $A \rightarrow C$ と $B \rightarrow C$ が $\mathscr{S}$ の定理ならば C は $\mathscr{S}$ の定理である．

与えられた閉式 φ が証明可能であるとは，

- 閉式 ψ で，ψ と $\psi \rightarrow \varphi$ が真であると判明している者が得られる．
- 真であると判明している閉式 ψ と ξ が得られて，φ は $\psi \wedge \xi$ である．
- 閉式 ψ と ξ で，$\psi \vee \xi$ と $\psi \rightarrow \varphi$ と $\xi \rightarrow \varphi$ が真であると判明しているものが得られる．

のいずれかの場合であり，

$$\vdash \varphi$$

と書く．

証明された式が真なる式である．では真なる式は

0.12　推論

本節では，「集合でも真類でもない類は存在しない」と「集合であり真類でもある類は存在しない」の二つの言明の正否の決定を主軸にして**推論規則 (rule of inference)** を導入し，基本的な推論法則を導出する．

> 推論規則 0.12.1 (排中律).　A を任意の文とするとき次は定理である:
>
> $$A \vee \rightarrow A.$$

排中律の言明は “どんな文でも持ってくれば，その式に対して排中律が適用される” という意味である．このように無数に存在し得る定理を一括して表す式は**公理図式 (schema)** と呼ばれる．

いま a, b を類とするとき，

$$a \notin b \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \rightarrow a \in b$$

で $a \notin b$ を定める．同様に

$$a \neq b \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \neg a = b$$

で $a \neq b$ を定める．

定義記号 $\overset{\text{def}}{=}$ と同様に，‘$A \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} B$’ とは式 B を記号列 A で置き換えて良いという意味で使われます．また，式中に記号列 A が出てくるときは，暗黙裡にその A を B に戻して式を解釈します．$\overset{\text{def}}{=}$ も $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ も略記することと同じですね．

定理 0.12.2 (類は集合であるか真類であるかのいずれかに定まる). a を類とするとき次は定理である:

$$\operatorname{set}(a) \vee \neg \operatorname{set}(a).$$

証明． 排中律を適用することにより従う． ∎

排中律をそのまま適用することにより上の定理は導かれたが，“集合であり真類でもある類は存在しない” という主張はまだ得られない．以下はこの言明を証明することを目標にしてしばらく推論規則の話が続くが，提示される規則はどれも基本的で直感に反しないため通常は無断で使用されてしまうものである．

ここで論理記号の名称を書いておく．

- $\perp$ を矛盾 **(contradiction)** と呼ぶ．
- $\vee$ を論理和 **(logical disjunction)** と呼ぶ．
- $\wedge$ を論理積 **(logical conjunction)** と呼ぶ．
- $\Longrightarrow$ を含意 **(implication)** と呼ぶ．
- $\neg$ を否定 **(negation)** と呼ぶ．

推論規則 0.12.3 (基本的な推論規則). A, B, C を $\mathcal{L}'$ の閉式とするとき，次の規則を認める:

三段論法 A ならびに $A \Longrightarrow B$ が定理なら B は定理である．

演繹法則 A を公理に追加した下で B が定理であるなら，A を外した公理系で $A \Longrightarrow B$ は定理である．

論理和の導入イ $A \Longrightarrow (A \vee B)$ は定理である．

論理和の導入ロ $A \Longrightarrow (B \vee A)$ は定理である．

論理積の導入 A, B が共に定理なら $A \wedge B$ は定理である．

論理積の除去イ $(A \wedge B) \Longrightarrow A$ は定理である．

論理積の除去ロ $(A \wedge B) \Longrightarrow B$ は定理である．

場合分け法則 $A \Longrightarrow C$ と $B \Longrightarrow C$ が共に定理であるとき $(A \vee B) \Longrightarrow C$ は定理である．

演繹法則について，“A を公理に追加する” ことを “A が成り立っていると仮定する” などの言明により示唆することが多いです．

演繹法則の意味

我々は公理か，或いは公理図式として，複数の式を選び出し $\mathcal{L}'$ の世界において正しいと決める．それらは以降小出しに登場させるが，その全体は現段階ですでに決めているのでそれを

$$\mathscr{S}$$

と呼ぶことにする．本稿で出てくる“正しい式”とは $\mathscr{S}$ のみを公理系とした体系において証明される式を指す．演繹法則は，“A が成り立つとする”などの言明により $\mathscr{S}$ に式 A を加えたとき，その新しい公理系 $\mathscr{S}'$ の下で式 B が成り立つなら，$\mathscr{S}$ のみを公理とした体系において

$$A \Longrightarrow B$$

が成立する，と主張している．複数の式を $\mathscr{S}$ に追加する場合もある．たとえば $\mathscr{S}'$ に式 C を追加し，その新しい公理体系 $\mathscr{S}''$ の下で式 D が成り立つ場合，演繹法則に則れば $\mathscr{S}'$ の下で

$$C \Longrightarrow D$$

が成立する．(ちなみに $\mathscr{S}''$ から式 A のみを抜いた公理系の下では $A \Longrightarrow D$ が正しくなる．) このとき $\mathscr{S}$ を公理系とした下では，再び演繹法則を適用することにより

$$A \Longrightarrow (C \Longrightarrow D)$$

が成立するとわかる，が，

$$C \Longrightarrow D$$

が成り立つ保証は無い．非常に屡々いくつも仮定を重ねたところに演繹法則を運用することがあるが，その都度どの段階の公理系を扱っているかを明確に把握しておかないと推論が破綻してしまう恐れがある．

推論法則 0.12.4 (含意の反射律). A を文とするとき

$$\vdash A \Longrightarrow A.$$

証明. $A \vdash A$ であるから，演繹法則より $\vdash A \Longrightarrow A$ となる． ■

推論法則 0.12.5 (論理和・論理積の可換律). A, B を文とするとき

- $\vdash (A \vee B) \Longrightarrow (B \vee A)$.
- $\vdash (A \wedge B) \Longrightarrow (B \wedge A)$.

証明. $\vee$ の導入により

$$\vdash A \Longrightarrow (B \vee A)$$

と

$$\vdash B \Longrightarrow (A \vee B)$$

が成り立つので，場合分け法則より

$$\vdash (A \vee B) \Longrightarrow (B \vee A)$$

が成り立つ．また，$\wedge$ の除去より

$$A \wedge B \vdash A$$

と

$$A \wedge B \vdash B$$

となるので，$\wedge$ の導入により

$$A \wedge B \vdash B \wedge A$$

が成り立つ．よって演繹法則より

$$\vdash (A \wedge B) \Longrightarrow (B \wedge A)$$

が成り立つ． ∎

推論法則 0.12.6 (含意の推移律). A, B, C を文とするとき

$$\vdash ((A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow C)) \Longrightarrow (A \Longrightarrow C).$$

証明.

$$(A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow C), A \vdash (A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow C)$$

であるから，$\wedge$ の除去より

$$(A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow C), A \vdash A \Longrightarrow B$$

となる．また

$$(A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow C), A \vdash A$$

でもあるから，三段論法より

$$(A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow C), A \vdash B$$

となる．$\wedge$ の除去より

$$(A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow C), A \vdash B \Longrightarrow C$$

も成り立つから，再び三段論法より

$$(A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow C), A \vdash C$$

となる．よって演繹法則より

$$(A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow C) \vdash A \Longrightarrow C$$

となり，

$$\vdash ((A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow C)) \Longrightarrow (A \Longrightarrow C)$$

を得る． ∎

推論法則 0.12.7 (二式が同時に導かれるならその論理積が導かれる). A, B, C を文とするとき

$$\vdash ((A \Longrightarrow B) \wedge (A \Longrightarrow C)) \Longrightarrow (A \Longrightarrow (B \wedge C))$$

証明.

$$(A \Longrightarrow B) \wedge (A \Longrightarrow C), A \vdash (A \Longrightarrow B) \wedge (A \Longrightarrow C)$$

であるから，$\wedge$ の除去より

$$(A \Longrightarrow B) \wedge (A \Longrightarrow C), A \vdash A \Longrightarrow B$$

が成り立つ．

$$(A \Longrightarrow B) \wedge (A \Longrightarrow C), A \vdash A$$

でもあるから

$$(A \Longrightarrow B) \wedge (A \Longrightarrow C), A \vdash B$$

となる．同様にして

$$(A \Longrightarrow B) \wedge (A \Longrightarrow C), A \vdash C$$

となるので，$\wedge$ の導入により

$$(A \Longrightarrow B) \wedge (A \Longrightarrow C), A \vdash B \wedge C$$

となり，演繹法則より

$$(A \Longrightarrow B) \wedge (A \Longrightarrow C) \vdash A \Longrightarrow (B \wedge C)$$

が成り立つ．ゆえに

$$\vdash ((A \Longrightarrow B) \wedge (A \Longrightarrow C)) \Longrightarrow (A \Longrightarrow (B \wedge C))$$

が得られる． ∎

推論法則 0.12.8 (含意は遺伝する). A, B, C を $\mathcal{L}'$ の閉式とするとき以下が成り立つ:

(a) $(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow ((A \vee C) \Longrightarrow (B \vee C))$.
(b) $(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow ((A \wedge C) \Longrightarrow (B \wedge C))$.
(c) $(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow ((B \Longrightarrow C) \Longrightarrow (A \Longrightarrow C))$.
(c) $(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow ((C \Longrightarrow A) \Longrightarrow (C \Longrightarrow B))$.

証明.

(a) いま $A \Longrightarrow B$ が成り立っていると仮定する．論理和の導入により

$$C \Longrightarrow (B \vee C)$$

は定理であるから，含意の推移律より

$$A \Longrightarrow (B \vee C)$$

が従い，場合分け法則より

$$(A \vee C) \Longrightarrow (B \vee C)$$

が成立する．ここに演繹法則を適用して

$$(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow ((A \vee C) \Longrightarrow (B \vee C))$$

が得られる．

(b) いま $A \Longrightarrow B$ が成り立っていると仮定する．論理積の除去より

$$(A \wedge C) \Longrightarrow A$$

は定理であるから，含意の推移律より

$$(A \wedge C) \Longrightarrow B$$

が従い，他方で論理積の除去より

$$(A \wedge C) \Longrightarrow C$$

も満たされる．そして推論法則 0.12.7 から

$$(A \wedge C) \Longrightarrow (B \wedge C)$$

が成り立ち，演繹法則より

$$(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow ((A \wedge C) \Longrightarrow (B \wedge C))$$

が得られる．

(c) いま $A \Longrightarrow B$，$B \Longrightarrow C$ および A が成り立っていると仮定する．このとき三段論法より B が成り立つので再び三段論法より C が成立する．ゆえに演繹法則より $A \Longrightarrow B$ と $B \Longrightarrow C$ が成り立っている下で

$$A \Longrightarrow C$$

が成立し，演繹法則を更に順次適用すれば

$$(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow ((B \Longrightarrow C) \Longrightarrow (A \Longrightarrow C))$$

が得られる．

(d) いま $A \Longrightarrow B$，$C \Longrightarrow A$ および C が成り立っていると仮定する．このとき三段論法より A が成り立つので再び三段論法より B が成立し，ここに演繹法則を適用すれば，$A \Longrightarrow B$ と $C \Longrightarrow A$ が成立している下で

$$C \Longrightarrow B$$

が成立する．演繹法則を更に順次適用すれば

$$(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow ((C \Longrightarrow A) \Longrightarrow (C \Longrightarrow B))$$

が得られる． ∎

推論法則 0.12.9 (正しい式は仮定を選ばない). A, B を $\mathcal{L}'$ の閉式とするとき，$B \Longrightarrow (A \Longrightarrow B)$ は定理である．

証明. B を公理に追加した場合，A を公理に追加しても B は真であるから，このとき

$$A \Longrightarrow B$$

は定理となる．従って演繹法則より $B \Longrightarrow (A \Longrightarrow B)$ は定理である． ∎

A と B を $\mathcal{L}'$ の式とするとき，

$$(A \Longleftrightarrow B) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (A \Longrightarrow B \wedge B \Longrightarrow A)$$

により $\Longleftrightarrow$ を定め，式 '$A \Longleftrightarrow B$' を "A と B は**同値である (equivalent)**" と翻訳する．

推論法則 0.12.10 (同値記号の可換律). A と B を $\mathcal{L}'$ の閉式とするとき

$$(A \Longleftrightarrow B) \Longrightarrow (B \Longleftrightarrow A).$$

略証. $A \Longleftrightarrow B$ が成り立っているならば，推論法則 0.12.5 より

$$B \Longrightarrow A \wedge A \Longrightarrow B$$

が成立する．すなわち

$$B \Longleftrightarrow A$$

が成立する．そして演繹法則から

$$(A \Longleftrightarrow B) \Longrightarrow (B \Longleftrightarrow A)$$

が成立する． ∎

推論法則 0.12.11 (同値記号の遺伝性質). A, B, C を $\mathcal{L}'$ の閉式とするとき以下の式が成り立つ:

(a) $(A \Longleftrightarrow B) \Longrightarrow ((A \vee C) \Longleftrightarrow (B \vee C))$.

(b) $(A \Longleftrightarrow B) \Longrightarrow ((A \wedge C) \Longleftrightarrow (B \wedge C))$.

(c) $(A \Longleftrightarrow B) \Longrightarrow ((B \Longrightarrow C) \Longleftrightarrow (A \Longrightarrow C))$.

(d) $(A \Longleftrightarrow B) \Longrightarrow ((C \Longrightarrow A) \Longleftrightarrow (C \Longrightarrow B))$.

証明. まず (a) を示す．いま $A \Longleftrightarrow B$ が成り立っていると仮定する．このとき $A \Longrightarrow B$ と $B \Longrightarrow A$ が共に成立し，他方で含意の遺伝性質より

$$(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow ((A \vee C) \Longrightarrow (B \vee C)),$$
$$(B \Longrightarrow A) \Longrightarrow ((B \vee C) \Longrightarrow (A \vee C))$$

が成立するから三段論法より $(A \vee C) \Longrightarrow (B \vee C)$ と $(B \vee C) \Longrightarrow (A \vee C)$ が共に成立する．ここに $\wedge$ の導入を適用すれば

$$(A \vee C) \Longleftrightarrow (B \vee C)$$

が成立し，演繹法則を適用すれば

$$(A \Longleftrightarrow B) \Longrightarrow ((A \vee C) \Longleftrightarrow (B \vee C))$$

が得られる．(b)(c)(d) も含意の遺伝性を適用すれば得られる． ∎

推論規則 0.12.12 (矛盾と否定に関する規則). A を $\mathcal{L}'$ の閉式とするとき以下の式が成り立つ:

矛盾の発生 否定が共に成り立つとき矛盾が導かれる:

$$(A \wedge \neg A) \Longrightarrow \perp.$$

否定の導出 矛盾が導かれるとき否定が成り立つ:

$$(A \Longrightarrow \perp) \Longrightarrow \neg A.$$

二重否定の法則 二重に否定された式は元の式を導く:

$$\neg\neg A \Longrightarrow A.$$

A を $\mathcal{L}'$ の閉式とするとき，式 $A \Longrightarrow \perp$ を “A **は偽である (false)**” と翻訳します．

否定の導出の逆は定理として得られる．

推論法則 0.12.13 (否定が正しい式は偽である). A を $\mathcal{L}'$ の閉式とするとき次が成り立つ:

$$\neg A \Longrightarrow (A \Longrightarrow \perp).$$

証明. $\neg A$ が成り立っていると仮定する．このとき A が成り立っていれば推論規則 0.12.12 より $\perp$ が成立するから，演繹法則より

$$\neg A \Longrightarrow (A \Longrightarrow \perp)$$

が成り立つ． ∎

推論法則 0.12.14 (矛盾からはあらゆる式が導かれる). A を $\mathcal{L}'$ の閉式とするとき

$$\perp \Longrightarrow A.$$

証明. 推論法則 0.12.9 より

$$\perp \Longrightarrow (\neg A \Longrightarrow \perp)$$

が成り立つ．また否定の導出より

$$(\neg A \Longrightarrow \perp) \Longrightarrow \neg\neg A$$

も成り立ち，さらに二重否定の法則から

$$\neg\neg A \Longrightarrow A$$

も成り立つ．上の式に含意の推移律を適用すれば

$$\perp \Longrightarrow A$$

が得られる． ∎

推論法則 0.12.15 (背理法の原理). A を $\mathcal{L}'$ の閉式とするとき

$$(\neg A \Longrightarrow \perp) \Longrightarrow A.$$

証明. $\neg A \Longrightarrow \perp$ が成り立つとき，否定の導出より $\neg\neg A$ が成り立つが，二重否定の法則より A も成立する． ∎

推論法則 0.12.16 (矛盾を導く式はあらゆる式を導く). A, B を $\mathcal{L}'$ の閉式とするとき，次が成り立つ:

$$(A \Longrightarrow \perp) \Longrightarrow (A \Longrightarrow B).$$

証明． $A \Longrightarrow \perp$ が成り立っているとする．推論法則 0.12.14 より

$$\perp \Longrightarrow B$$

が満たされるので，含意の推移律より

$$A \Longrightarrow B$$

が成り立つ．従って演繹法則を適用すれば

$$(A \Longrightarrow \perp) \Longrightarrow (A \Longrightarrow B)$$

が得られる． ∎

推論法則 0.12.17 (含意は否定と論理和で表せる). A, B を $\mathcal{L}'$ の閉式とするとき，次が成り立つ:

$$(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg A \vee B).$$

証明． $A \Longrightarrow B$ が成り立っていると仮定する．含意の遺伝性質より

$$(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow ((A \vee \neg A) \Longrightarrow (B \vee \neg A))$$

が満たされているから三段論法より

$$(A \vee \neg A) \Longrightarrow (B \vee \neg A)$$

は定理となり，ここに排中律と三段論法を適用すれば

$$B \vee \neg A$$

が定理となる．ここで論理和の可換律より $\neg A \vee B$ が成り立つので，演繹法則を適用して

$$(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow (\neg A \vee B)$$

が得られる．また矛盾に関する推論規則より

$$\neg A \Longrightarrow (A \Longrightarrow \perp)$$

が成り立ち，同時に推論法則 0.12.16 より

$$(A \Longrightarrow \perp) \Longrightarrow (A \Longrightarrow B)$$

も成り立つので，含意の推移律より

$$\neg A \Longrightarrow (A \Longrightarrow B)$$

が成立する．他方で推論法則 0.12.9 より

$$B \Longrightarrow (A \Longrightarrow B)$$

も成り立つから，場合分けの法則より

$$(\neg A \vee B) \Longrightarrow (A \Longrightarrow B)$$

が成り立つ．以上で $(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg A \vee B)$ が得られた． ∎

A, B を $\mathcal{L}'$ の閉式とするとき，A が偽であれば $\neg A$ が成立する (推論規則 0.12.12) ので $\neg A \vee B$ が成立します (推論規則 0.12.3)．すなわちこのとき $A \Longrightarrow B$ が成り立つのですが，式の解釈としては“偽な式からはあらゆる式が導かれる”となりますね．この現象を**空虚な真 (vacuous truth)** と呼びます．

推論法則 0.12.18 (二重否定の法則の逆が成り立つ). A を $\mathcal{L}'$ の閉式とするとき，次が成り立つ:

$$A \Longrightarrow \neg\neg A.$$

証明. 排中律より

$$\neg A \vee \neg\neg A$$

が成立し，また推論法則 0.12.17 より

$$(\neg A \vee \neg\neg A) \Longrightarrow (A \Longrightarrow \neg\neg A)$$

も成り立つので，三段論法より

$$A \Longrightarrow \neg\neg A$$

が成立する． ∎

推論法則 0.12.19 (対偶命題は同値). A, B を $\mathcal{L}'$ の閉式とするとき，次が成り立つ:

$$(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg B \Longrightarrow \neg A).$$

証明. 推論法則 0.12.17，論理和の可換律，二重否定の法則 (とその逆) を順に用いれば

$$\begin{aligned}(A \Longrightarrow B) &\Longleftrightarrow (\neg A \vee B)\\ &\Longleftrightarrow (B \vee \neg A)\\ &\Longleftrightarrow (\neg\neg B \vee \neg A)\\ &\Longleftrightarrow (\neg B \Longrightarrow \neg A)\end{aligned}$$

が成り立つ． ∎

対偶命題を述べるときには“対偶を取る”と表現することが多いです．

推論法則 0.12.20 (De Morgan の法則). A, B を $\mathcal{L}'$ の閉式とするとき，次が成り立つ:

- $\neg (A \vee B) \Longleftrightarrow \neg A \wedge \neg B.$
- $\neg (A \wedge B) \Longleftrightarrow \neg A \vee \neg B.$

証明． $A \Longrightarrow (A \vee B)$ は定理であるから，その対偶命題

$$\rightharpoondown (A \vee B) \Longrightarrow \rightharpoondown A$$

も定理となる．同様に $\rightharpoondown (A \vee B) \Longrightarrow \rightharpoondown B$ は定理となるので，$\rightharpoondown (A \vee B)$ が成り立っていると仮定すれば $\rightharpoondown A \wedge \rightharpoondown B$ が成り立つ．ゆえに

$$\rightharpoondown (A \vee B) \Longrightarrow \rightharpoondown A \wedge \rightharpoondown B$$

が得られる．また A が成り立っていると仮定すれば，この下で $\rightharpoondown A \wedge \rightharpoondown B$ が成り立っているなら A と $\rightharpoondown A$ が同時に成り立つことになるので $\perp$ が成立する．つまり A が成り立っているとき

$$\rightharpoondown A \wedge \rightharpoondown B \Longrightarrow \perp$$

が成り立つが，このとき $\rightharpoondown (\rightharpoondown A \wedge \rightharpoondown B)$ が成り立つので

$$A \Longrightarrow \rightharpoondown (\rightharpoondown A \wedge \rightharpoondown B)$$

が得られる．同様にして

$$B \Longrightarrow \rightharpoondown (\rightharpoondown A \wedge \rightharpoondown B)$$

も得られるから，場合分け法則より

$$(A \vee B) \Longrightarrow \rightharpoondown (\rightharpoondown A \wedge \rightharpoondown B)$$

が成立する．この対偶を取れば

$$\rightharpoondown A \wedge \rightharpoondown B \Longrightarrow \rightharpoondown (A \vee B)$$

が出る．以上で一つ目の式が示された．一つ目の式で A を $\rightharpoondown A$ に，B を $\rightharpoondown B$ に置き換えると

$$\rightharpoondown\rightharpoondown A \wedge \rightharpoondown\rightharpoondown B \Longleftrightarrow \rightharpoondown (\rightharpoondown A \vee \rightharpoondown B)$$

が得られるが，このとき二重否定の法則より

$$A \wedge B \Longleftrightarrow \rightharpoondown (\rightharpoondown A \vee \rightharpoondown B)$$

が成立し，対偶命題の同値性から

$$\rightharpoondown (A \wedge B) \Longleftrightarrow (\rightharpoondown A \vee \rightharpoondown B)$$

は定理となる． ∎

以上で “集合であり真類でもある類は存在しない” という言明を証明する準備が整いました．

定理 0.12.21 (集合であり真類でもある類は存在しない). a を類とするとき次が成り立つ:

$$\rightharpoondown (\ \mathrm{set}(a) \wedge \rightharpoondown \mathrm{set}(a)\ ).$$

証明. a を類とするとき，排中律より $\mathrm{set}(a) \vee \rightharpoondown \mathrm{set}(a)$ が成り立ち，論理和の可換律より

$$\rightharpoondown \mathrm{set}(a) \vee \mathrm{set}(a)$$

も成立する．そして De Morgan の法則より

$$\rightharpoondown (\rightharpoondown\rightharpoondown \mathrm{set}(a) \wedge \rightharpoondown \mathrm{set}(a))$$

が成り立つが，二重否定の法則より $\rightharpoondown\rightharpoondown \mathrm{set}(a)$ と $\mathrm{set}(a)$ は同値となるので

$$\rightharpoondown (\mathrm{set}(a) \wedge \rightharpoondown \mathrm{set}(a))$$

が成り立つ． ∎

次は量化記号が推論操作の上でどのような働きを持つのかを規定しましょう．

推論規則 0.12.22 (量化記号に関する規則). A を $\mathcal{L}'$ の式とし，x を A に現れる文字とするとき，x のみが A で量化されていないならば以下を認める:

ε 記号の導入 $\varepsilon x A(x)$ は $\mathcal{L}$ の或る対象に代用される．
存在記号の規則 $A(\varepsilon x A(x)) \Longleftrightarrow \exists x A(x)$ が成り立つ．
全称記号の規則 $A(\varepsilon x \rightharpoondown A(x)) \Longleftrightarrow \forall x A(x)$ が成り立つ．
存在記号の基本性質 τ を $\mathcal{L}$ の対象とするとき $A(\tau) \Longrightarrow \exists x A(x)$ が成り立つ．

ε 記号は Hilbert のイプシロン関数と呼ばれるもので，量化記号の働きを形式的に表現するには簡便かつ有能である．また ε 記号が指定する対象を $\mathcal{L}$ のものと約束することで，$\exists$ と $\forall$ の作用範囲を $\mathcal{L}$ の対象全体に制限している．

推論法則 0.12.23 (全称記号と任意性). A を $\mathcal{L}'$ の式とし，x を A に現れる文字とし，x のみが A で量化されていないとする．このとき $\forall x A(x)$ が成り立つならば $\mathcal{L}$ のいかなる対象 τ に対しても $A(\tau)$ が成り立つ．逆に，$\mathcal{L}$ のいかなる対象 τ に対しても $A(\tau)$ が成り立てば $\forall x A(x)$ が成り立つ．

証明. τ を $\mathcal{L}$ の任意の対象とすれば，存在記号に関する推論規則より

$$\rightharpoondown A(\tau) \Longrightarrow \exists x \rightharpoondown A(x)$$

と

$$\exists x \rightharpoondown A(x) \Longrightarrow \rightharpoondown A\,(\varepsilon x \rightharpoondown A(x))$$

が成り立つから，推論法則 0.12.6 より

$$\rightharpoondown A(\tau) \Longrightarrow \rightharpoondown A\,(\varepsilon x \rightharpoondown A(x))$$

が成り立ち，対偶を取って

$$A\,(\varepsilon x \rightharpoondown A(x)) \Longrightarrow A(\tau)$$

が成り立つ．全称記号に関する推論規則より

$$\forall x A(x) \Longrightarrow A(\varepsilon x \rightharpoondown A(x))$$

が満たされているので

$$\forall x A(x) \Longrightarrow A(\tau)$$

が従う．逆にいかなる対象 τ に対しても $A(\tau)$ が成り立つとき，特に

$$A(\varepsilon x \rightharpoondown A(x))$$

が成り立つので $\forall x A(x)$ も成り立つ． ∎

推論法則 0.12.23 を根拠にして，当面は $\forall x A(x)$ という式を “$\mathcal{L}$ の任意の対象 x に対して $A(x)$ が成立する” と翻訳することにします．また後述する相等性の公理によれば，これは “任意の集合 x に対して $A(x)$ が成立する” と翻訳しても同義です．

推論法則 0.12.24 (量化記号の性質 (イ)). A, B を $\mathcal{L}'$ の式とし，x を A, B に現れる文字とし，x のみが A, B で量化されていないとする．$\mathcal{L}$ の任意の対象 τ に対して

$$A(\tau) \Longleftrightarrow B(\tau)$$

が成り立っているとき，

$$\exists x A(x) \Longleftrightarrow \exists x B(x)$$

および

$$\forall x A(x) \Longleftrightarrow \forall x B(x)$$

が成り立つ．

証明． いま，$\mathcal{L}$ の任意の対象 τ に対して

$$A(\tau) \Longleftrightarrow B(\tau) \tag{1}$$

が成り立っているとする．ここで

$$\exists x A(x)$$

が成り立っていると仮定すると，

$$\tau \overset{\text{def}}{=} \varepsilon x A(x)$$

とおけば存在記号に関する規則より

$$A(\tau)$$

が成立し，(1) と併せて

$$B(\tau)$$

が成立する．再び存在記号に関する規則より

$$\exists x B(x)$$

が成り立つので，演繹法則から

$$\exists x A(x) \Longrightarrow \exists x B(x)$$

が得られる．A と B の立場を入れ替えれば

$$\exists x B(x) \Longrightarrow \exists x A(x)$$

も得られる．今度は

$$\forall x A(x)$$

が成り立っていると仮定すると，推論法則 0.12.23 より $\mathcal{L}$ の任意の対象 τ に対して

$$A(\tau)$$

が成立し，(1) と併せて

$$B(\tau)$$

が成立する．τ の任意性と推論法則 0.12.23 より

$$\forall x B(x)$$

が成り立つので，演繹法則から

$$\forall x A(x) \Longrightarrow \forall x B(x)$$

が得られる．A と B の立場を入れ替えれば

$$\forall x B(x) \Longrightarrow \forall x A(x)$$

も得られる． ∎

推論法則 0.12.25 (量化記号に対する De Morgan の法則). A を $\mathcal{L}'$ の式とし，x を A に現れる文字とし，x のみが A で量化されていないとする．このとき

$$\exists x \rightharpoondown A(x) \Longleftrightarrow \rightharpoondown \forall x A(x)$$

および

$$\forall x \rightharpoondown A(x) \Longleftrightarrow \rightharpoondown \exists x A(x)$$

が成り立つ．

略証． 推論規則 0.12.22 より

$$\exists x \rightharpoondown A(x) \Longleftrightarrow \rightharpoondown A(\varepsilon x \rightharpoondown A(x))$$

は定理である．他方で推論規則 0.12.22 より

$$A(\varepsilon x \rightharpoondown A(x)) \Longleftrightarrow \forall x A(x)$$

もまた定理であり，この対偶を取れば

$$\rightharpoondown A(\varepsilon x \rightharpoondown A(x)) \Longleftrightarrow \rightharpoondown \forall x A(x)$$

が成り立つ．ゆえに

$$\exists x \rightharpoondown A(x) \Longleftrightarrow \rightharpoondown \forall x A(x)$$

が従う．A を $\rightharpoondown A$ に置き換えれば

$$\forall x \rightharpoondown A(x) \Longleftrightarrow \rightharpoondown \exists x \rightharpoondown\rightharpoondown A(x)$$

が成り立ち，また $\mathcal{L}$ の任意の対象 τ に対して

$$A(\tau) \Longleftrightarrow \rightharpoondown\rightharpoondown A(\tau)$$

が成り立つので，推論法則 0.12.24 より

$$\exists x \rightharpoondown\rightharpoondown A(x) \Longleftrightarrow \exists x A(x)$$

も成り立つ．ゆえに

$$\forall x \rightharpoondown A(x) \Longleftrightarrow \rightharpoondown \exists x A(x)$$

が従う． ∎

0.13 相等性

本稿において“等しい”とは項に対する言明であって，a と b を項とするとき

$$a = b$$

なる式で表される．この記号

$$=$$

は等号 **(equal sign)** と呼ばれるが，現時点では述語として導入されているだけで，推論操作における働きはまだ明文化していない．本節では，いつ類は等しくなるのか，そして，等しい場合に何が起きるのか，の二つが主題となる．

公理 0.13.1 (外延性の公理). a, b を類とするとき，次が成り立つ:

$$\forall x\,(\,x \in a \Longleftrightarrow x \in b\,) \Longrightarrow a = b.$$

定理 0.13.2 (任意の類は自分自身と等しい). a を類とするとき次が成り立つ:

$$a = a.$$

略証． 任意の ε 項 τ に対して，推論法則 0.12.4 より

$$\tau \in a \Longleftrightarrow \tau \in a$$

が成り立つから，τ の任意性より

$$\forall x \,(\, x \in a \Longleftrightarrow x \in a \,)$$

が成り立つ．外延性の公理と三段論法より

$$a = a$$

が得られる． ∎

定理 0.13.3 (ε 項は集合である). 任意の ε 項 $\varepsilon x A(x)$ に対して

$$\mathrm{set}(\varepsilon x A(x)).$$

略証． 定理 0.13.2 より

$$\varepsilon x A(x) = \varepsilon x A(x)$$

が成立するので，存在記号の推論規則より

$$\exists y \;\left(\, \varepsilon x A(x) = y \,\right)$$

が成立する． ∎

A を $\mathcal{L}_{\in}$ の式とし，x を A に現れる変項とし，x のみが A で自由であるとし，かつ

$$\mathrm{set}(\{\, x \mid \quad A(x) \,\})$$

が満たされているとする．つまり

$$\exists y \;\left(\{\, x \mid \quad A(x) \,\} = y \,\right)$$

が成り立っているということであるが，$\{\, x \mid \quad A(x) \,\} = y$ を

$$\forall x \;\left(\, A(x) \Longleftrightarrow x \in y \,\right)$$

と書き換えれば，存在記号の推論規則より

$$\{\, x \mid \quad A(x) \,\} = \varepsilon y \forall x \;\left(\, A(x) \Longleftrightarrow x \in y \,\right)$$

が得られる．

定理 0.13.4 (集合である内包項は ε 項で書ける). 任意の内包項 $\{\, x \mid \quad A(x) \,\}$ に対して，$\{\, x \mid \quad A(x) \,\}$ が集合であれば

$$\{\, x \mid \quad A(x) \,\} = \varepsilon y \forall x \;\left(\, A(x) \Longleftrightarrow x \in y \,\right).$$

ブルバキでは τ 項を，島内では ε 項のみを導入して $\varepsilon y \forall x\ \big(A(x) \Longleftrightarrow x \in y\big)$ によって $\{\,x \mid \quad A(x)\,\}$ を定めている．本稿と同じくブルバキの τ 項も島内の ε 項も集合を表すものであるから，

$$\exists y\, \forall x\ \big(A(x) \Longleftrightarrow x \in y\big)$$

を満たさないような性質 A に対しては $\varepsilon y \forall x\ \big(A(x) \Longleftrightarrow x \in y\big)$ は不定の集合を指す．本稿では

公理 0.13.5 (要素の公理). 要素となりうる類は集合である．つまり，a, b を類とするとき

$$a \in b \Longrightarrow \mathrm{set}(a).$$

公理 0.13.6 (内包性公理). A を $\mathcal{L}_{\in}$ の式とし，x を A に現れる変項とし，y を $A(x)$ に現れない変項とし，x のみが A で自由であるとする．このとき

$$\forall y\ \big(y \in \{\,x \mid \quad A(x)\,\} \Longleftrightarrow A(y)\big).$$

要素の公理で要求していることは**類を構成できるのは集合に限られる**ということであり，内包性公理は**甲種項はその固有の性質を持つ集合の全体である**という意味を持つ．

例えば

$$a = b$$

と書いてあったら "a と b は等しい" と読めるわけだが，明らかに a は b とは違うではないではないか！こんなことはしょっちゅう起こることであって，上で述べたように $\{\,x \mid \quad A(x)\,\}$ が集合なら

$$\{\,x \mid \quad A(x)\,\} = \varepsilon y \forall x\ \big(A(x) \Longleftrightarrow x \in y\big)$$

が成り立ったりする．そこで "数学的に等しいとは何事か" という疑問が浮かぶのは至極自然であって，それに答えるのが次の相等性公理である．

公理 0.13.7 (相等性公理). A を $\mathcal{L}'$ の式とし，x を A に現れる文字とし，x のみが A で量化されていないとする．このとき a, b を類とすれば次が成り立つ:

$$a = b \Longrightarrow (\,A(a) \Longleftrightarrow A(b)\,).$$

定理 0.13.8 (外延性の公理の逆も成り立つ). a と b を類とするとき

$$a = b \Longrightarrow \forall x\,(\,x \in a \Longleftrightarrow x \in b\,).$$

証明. $a = b$ が成り立っていると仮定すれば，相等性の公理より $\mathcal{L}$ の任意の対象 τ に対して

$$\tau \in a \Longleftrightarrow \tau \in b$$

が満たされるから，推論法則 0.12.23 より

$$\forall x\,(\,x \in a \Longleftrightarrow x \in b\,)$$

が成立する．よって演繹法則より

$$a = b \Longrightarrow \forall x\,(\,x \in a \Longleftrightarrow x \in b\,)$$

が成り立つ． ∎

等しい類同士は同じ $\mathcal{L}$ の対象を要素に持つと示されましたが，このとき要素に持つ集合まで一致します．これは相等性の公理から明らかでしょうが，詳しくは部分類の箇所で説明いたしましょう．

定理 0.13.9 (条件を満たす集合は要素である). A を $\mathcal{L}$ の式とし，x を A に現れる文字とし，t を $A(x)$ に現れない文字とし，x のみが A で量化されていないとする．このとき，a を類とすると

$$A(a) \Longrightarrow (\,\mathrm{set}(a) \Longrightarrow a \in \{\,x \mid \quad A(x)\,\}\,).$$

略証. いま

$$A(a)$$

と

$$\mathrm{set}(a)$$

が成立していると仮定する．このとき要素の公理から

$$\exists x\,(\,a = x\,)$$

が成立するので，

$$\tau \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon x\,(\,a = x\,)$$

とおけば

$$a = \tau$$

が成り立ち，相等性の公理より

$$A(\tau)$$

が成立する．よって類の公理より

$$\tau \in \{\,x \mid \quad A(x)\,\}$$

が従い，相等性の公理から

$$a \in \{\,x \mid \quad A(x)\,\}$$

が成立する． ∎

定理 0.13.10 (V は集合の全体である). a を類とするとき次が成り立つ:

$$\mathrm{set}(a) \Longleftrightarrow a \in \mathbf{V}.$$

証明. a を類とするとき，まず要素の公理より

$$a \in \mathbf{V} \Longrightarrow \mathrm{set}(a)$$

が得られる．逆に

$$\mathrm{set}(a)$$

が成り立っていると仮定する．このとき

$$\tau \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon x(\, a = x \,)$$

とおけば，定理 0.13.2 より

$$\tau = \tau$$

となるので，類の公理より

$$\tau \in \mathbf{V}$$

が成り立つ．そして相等性の公理より

$$a \in \mathbf{V}$$

が従うから

$$\mathrm{set}(a) \Longrightarrow a \in \mathbf{V}$$

も得られる． ∎

定義 0.13.11 (空集合). $\emptyset \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \{\, x \mid \quad x \neq x \,\}$ で定める類 $\emptyset$ を空集合 **(empty set)** と呼ぶ．

公理 0.13.12 (空集合の公理). $\emptyset$ は集合である:

$$\mathrm{set}(\emptyset).$$

空集合の公理は簡素にして偉大です．というのも，我々はいま初めて集合の存在について言及したのですね．つまり本稿の世界にビッグバンを起こしたわけですが，別の見方をすれば空集合とは聖書物語のアダムに相当するでしょう．その細部は整礎集合の章で述べますが，集合の宇宙は空集合を起点にして無限の広がりを持つのです．

定理 0.13.13 (空集合は $\mathcal{L}$ のいかなる対象も要素に持たない).

$$\forall x\, (\, x \notin \emptyset \,).$$

略証． τ を $\mathscr{L}$ の対象とするとき，類の公理より

$$\tau \in \emptyset \Longrightarrow \tau \neq \tau$$

が成り立つから，対偶を取れば

$$\tau = \tau \Longrightarrow \tau \notin \emptyset$$

が成り立つ (推論法則 0.12.19)．定理 0.13.2 より

$$\tau = \tau$$

は正しいので，三段論法より

$$\tau \notin \emptyset$$

が成り立つ．そして τ の任意性より

$$\forall x \, (\, x \notin \emptyset \,)$$

が得られる． ∎

定理 0.13.14 ($\mathcal{L}$ のいかなる対象も要素に持たない類は空集合に等しい). a を類とするとき次が成り立つ:

$$\forall x \, (\, x \notin a \,) \Longleftrightarrow a = \emptyset.$$

証明． a を類として $\forall x \, (\, x \notin a \,)$ が成り立っていると仮定する．このとき τ を $\mathcal{L}$ の任意の対象とすれば

$$\tau \notin a \vee \tau \in \emptyset$$

と

$$\tau \notin \emptyset \vee \tau \in a$$

が共に成り立つので，推論法則 0.12.17 より

$$\tau \in a \Longrightarrow \tau \in \emptyset$$

と

$$\tau \in \emptyset \Longrightarrow \tau \in a$$

が共に成り立つ．よって

$$\tau \in a \Longleftrightarrow \tau \in \emptyset$$

が成立し，τ の任意性と推論法則 0.12.23 から

$$\forall x \, (\, x \in a \Longleftrightarrow x \in \emptyset \,)$$

が得られる．ゆえに外延性の公理より

$$a = \emptyset$$

が成立し，演繹法則より

$$\forall x \,(\, x \notin a \,) \Longrightarrow a = \emptyset$$

が得られる．逆に

$$a = \emptyset$$

が成り立っていると仮定する．ここで χ を $\mathcal{L}$ の任意の対象とすれば，相等性の公理より

$$\chi \in a \Longrightarrow \chi \in \emptyset$$

が成立するので，対偶を取れば

$$\chi \notin \emptyset \Longrightarrow \chi \notin a$$

が成り立つ．定理 0.13.13 より

$$\chi \notin \emptyset$$

が満たされているので，三段論法より

$$\chi \notin a$$

が成立し，χ の任意性と推論法則 0.12.23 より

$$\forall x \,(\, x \notin a \,)$$

が成立する．ここに演繹法則を適用して

$$a = \emptyset \Longrightarrow \forall x \,(\, x \notin a \,)$$

も得られる． ∎

定理 0.13.15 (空集合はいかなる類も要素に持たない). a, b を類とするとき次が成り立つ:

$$b = \emptyset \Longrightarrow a \notin b.$$

証明． いま $a \in b$ が成り立っていると仮定する．このとき要素の公理と三段論法より

$$\mathrm{set}(a)$$

が成立する．ここで

$$\tau \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon x \,(\, a = x \,)$$

とおけば，存在記号に関する規則から

$$a = \tau$$

が成り立つので，相等性の公理より

$$\tau \in b$$

が従い，存在記号に関する規則より

$$\exists x \, (\, x \in b \,)$$

が成り立つ．よって演繹法則から

$$a \in b \Longrightarrow \exists x \, (\, x \in b \,)$$

が成り立つ．この対偶を取り推論法則 0.12.25 を適用すれば

$$\forall x \, (\, x \notin b \,) \Longrightarrow a \notin b$$

が得られる．定理 0.13.14 より

$$b = \emptyset \Longrightarrow \forall x \, (\, x \notin b \,)$$

も正しいので，含意の推移律から

$$b = \emptyset \Longrightarrow a \notin b$$

が得られる． ∎

定義 0.13.16 (部分類). a, b を $\mathcal{L}'$ の項とするとき，

$$a \subset b \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall x \, (\, x \in a \Longrightarrow x \in b \,)$$

と定める．式 $a \subset b$ を “a は b の**部分類 (subclass)** である” と翻訳し，特に a が集合である場合は “a は b の**部分集合 (subset)** である” と翻訳する．また次の記号も定める:

$$a \subsetneq b \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} a \subset b \wedge a \neq b.$$

空虚な真の一例として次の結果を得る．

定理 0.13.17 (空集合は全ての類に含まれる). a を類とするとき次が成り立つ:

$$\emptyset \subset a.$$

証明． a を類とする．τ を $\mathcal{L}$ の任意の対象とすれば

$$\tau \notin \emptyset$$

が成り立つから，推論規則 0.12.3 を適用して

$$\tau \notin \emptyset \vee \tau \in a$$

が成り立つ．従って

$$\tau \in \emptyset \Longrightarrow \tau \in a$$

が成り立ち，τ の任意性と推論法則 0.12.23 より

$$\forall x\,(\,x \in \emptyset \Longrightarrow x \in a\,)$$

が成立する． ∎

$a \subset b$ とは a に属する全ての “$\mathcal{L}$ の対象” は b に属するという定義であったが，要素となりうる類は集合であるという公理から，a に属する全ての “類” もまた b に属する．

定理 0.13.18 (類はその部分類に属する全ての類を要素に持つ). a, b, c を類とすれば次が成り立つ:

$$a \subset b \Longrightarrow (\,c \in a \Longrightarrow c \in b\,).$$

証明． いま $a \subset b$ が成り立っているとする．このとき

$$c \in a$$

が成り立っていると仮定すれば，要素の公理より

$$\mathrm{set}(c)$$

が成り立つ．ここで

$$\tau \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varepsilon x\,(\,c = x\,)$$

とおくと

$$c = \tau$$

が成り立つので，相等性の公理より

$$\tau \in a$$

が成り立ち，$a \subset b$ と推論法則 0.12.23 から

$$\tau \in b$$

が従う．再び相等性の公理を適用すれば

$$c \in b$$

が成り立つので，演繹法則より，$a \subset b$ が成り立っている下で

$$c \in a \Longrightarrow c \in b$$

が成立する．再び演繹法則を適用すれば定理の主張が得られる． ∎

宇宙 $\mathbf{V}$ は類の一つであった．当然のようであるが，それは最大の類である．

定理 0.13.19 ($\mathbf{V}$ は最大の類である). a を類とするとき次が成り立つ:

$$a \subset \mathbf{V}.$$

証明. τ を $\mathcal{L}$ の任意の対象とすれば，定理 0.13.2 と類の公理より

$$\tau \in \mathbf{V}$$

が成立するので，推論規則 0.12.3 より

$$\tau \notin a \vee \tau \in \mathbf{V}$$

が成立する．このとき推論法則 0.12.17 より

$$\tau \in a \Longrightarrow \tau \in \mathbf{V}$$

が成立し，τ の任意性と推論法則 0.12.23 から

$$\forall x\,(\,x \in a \Longrightarrow x \in \mathbf{V}\,)$$

が従う． ∎

定理 0.13.20 (互いに互いの部分類となる類同士は等しい). a, b を類とするとき次が成り立つ:

$$a \subset b \wedge b \subset a \Longleftrightarrow a = b.$$

略証. $a \subset b \wedge b \subset a$ が成り立っていると仮定する．このとき τ を $\mathcal{L}$ の任意の対象とすれば，$a \subset b$ と推論法則 0.12.23 より

$$\tau \in a \Longrightarrow \tau \in b$$

が成立し，$b \subset a$ と推論法則 0.12.23 より

$$\tau \in b \Longrightarrow \tau \in a$$

が成立するので，

$$\tau \in a \Longleftrightarrow \tau \in b$$

が成り立つ．τ の任意性と推論法則 0.12.23 および外延性の公理より

$$a = b$$

が出るので，演繹法則より

$$a \subset b \wedge b \subset a \Longrightarrow a = b$$

が得られる．逆に $a=b$ が満たされていると仮定するとき，τ を $\mathcal{L}$ の任意の対象とすれば

$$\tau \in a \Longrightarrow \tau \in b$$

と

$$\tau \in b \Longrightarrow \tau \in a$$

が共に成り立つ．よって推論法則 0.12.23 より

$$a \subset b$$

と

$$b \subset a$$

が共に従う．よって演繹法則より

$$a = b \Longrightarrow a \subset b \wedge b \subset a$$

も得られる． ∎

定理 0.13.18 と定理 0.13.20 より，類 a, b が $a=b$ を満たすならば，a と b は要素に持つ $\mathcal{L}$ の対象のみならず，要素に持つ類までも一致するのですね．

0.14 順序型について

(A, R) を整列集合とするとき，

$$x \longmapsto \begin{cases} \min A \backslash \operatorname{ran}(x) & \text{if } \operatorname{ran}(x) \subsetneq A \\ A & \text{o.w.} \end{cases}$$

なる写像 G に対して

$$\forall \alpha\, F(\alpha) = G(F \restriction \alpha)$$

なる写像 F を取り

$$\alpha \overset{\text{def}}{=\!=} \min \{\, \alpha \in \mathrm{ON} \mid \quad F(\alpha) = A \,\}$$

とおけば，α は (A, R) の順序型．

0.15 超限再帰について

$\mathbf{V}$ 上の写像 G が与えられたら，

$$F \overset{\text{def}}{=\!=} \Big\{ (\alpha, x) \mid \quad \operatorname{ord}(\alpha) \wedge \exists f \ \big(f : \mathrm{on}\ \alpha \wedge \forall \beta \in \alpha \ \big(f(\beta) = G(f \restriction \beta) \big) \wedge x = G(f) \big) \Big\}$$

により F を定めれば

$$\forall \alpha \, F(\alpha) = G(F \restriction \alpha)$$

が成立する．

任意の順序数 α および α 上の写像 f と g に対して，

$$\forall \beta \in \alpha \; \big(f(\beta) = G(f \restriction \beta) \big)$$

かつ

$$\forall \beta \in \alpha \; \big(g(\beta) = G(g \restriction \beta) \big)$$

ならば $f = g$ である．

まず

$$f(0) = G(f \restriction 0) = G(0) = G(g \restriction 0) = g(0)$$

が成り立つ．また

$$\forall \delta \in \beta \; \big(\delta \in \alpha \Longrightarrow f(\delta) = g(\delta) \big)$$

ならば，$\beta \in \alpha$ であるとき

$$f \restriction \beta = g \restriction \beta$$

となるので

$$\beta \in \alpha \Longrightarrow f(\beta) = g(\beta)$$

が成り立つ．ゆえに

$$f = g$$

が得られる．

任意の順序数 α に対して，α 上の写像 f で

$$\forall \beta \in \alpha \; \big(f(\beta) = G(f \restriction \beta) \big)$$

を満たすものが取れる．

$\alpha = 0$ のとき $f \overset{\mathrm{def}}{=\!=} 0$ とすればよい．α の任意の要素 β に対して

$$g : \mathrm{on} \, \beta \wedge \forall \gamma \in \beta \; \big(g(\gamma) = G(g \restriction \gamma) \big)$$

なる g が存在するとき，

$$f \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \Big\{ (\beta, x) \mid \quad \beta \in \alpha \wedge \exists g \; \Big(g : \mathrm{on} \, \beta \wedge \forall \gamma \in \beta \; \big(g(\gamma) = G(g \restriction \gamma) \big) \wedge x = G(g) \Big) \Big\}$$

と定めれば，f は α 上の写像であって

$$\forall \beta \in \alpha \; \big(f(\beta) = G(f \restriction \beta) \big)$$

を満たす．

> 任意の順序数 α に対して $F(\alpha) = G(F{\restriction}\alpha)$ が成り立つ．

$\alpha = 0$ ならば，0 上の写像は 0 のみなので

$$F(0) = G(0) = G(F{\restriction}0)$$

である．

$$\forall \beta \in \alpha \, F(\beta) = G(F{\restriction}\beta)$$

が成り立っているとき，

$$\forall \beta \in \alpha \, f(\beta) = G(f{\restriction}\beta)$$

を満たす α 上の写像 f を取れば，前の一意性より

$$f = F{\restriction}\alpha$$

が成立する．よって

$$F(\alpha) = G(f) = G(F{\restriction}\alpha)$$

となる． ▮