2019年10月28日

クラスの導入とε項

目次

1 導入

- 集合論の言語 $\mathcal{L}_\in = \{\in\}$ の自然な拡張によりクラスを導入することは容易い:

$$\left\{ x \mid \quad \varphi(x) \right\} \quad (\varphi \text{ は } \mathcal{L}_\in \text{ の式})$$

なるオブジェクトを取り入れればよい.

- これが持つ意味は

$$\forall u \ \left(u \in \left\{ x \mid \quad \varphi(x) \right\} \Longleftrightarrow \varphi(u) \right)$$

を満たすモノ.

- $\mathcal{L}_{\in}$においては無定義概念であった集合が

$$\exists x\,(\,x = a\,)$$

を満たすクラスaのことであると定義できる.

留意点

※　$\varphi(x)$と書いたら，φには変項xが自由に現れていて，またxの他に自由な変項は無い.

※　$\varphi(u)$などxを他の項で置換する際は，項は束縛による障害を受けないように選ばれている.

- ∃とは？
- ∃に形式的な意味を付ける方法としてHilbertのε項がある:
  式$\varphi(x)$に対して

$$\varepsilon x \varphi(x).$$

- これが持つ意味は

$$\exists x \varphi(x) \Longleftrightarrow \varphi\left(\varepsilon x \varphi(x)\right)$$

  を満たすモノ.
- 島内ではε項，ブルバキではτ項.
- しかし式$\varphi(x)$に対して$\varepsilon x \varphi(x)$なるオブジェクトを項とすると項と式の定義が入れ子になってしまう.

- ε 項を活用しつつ入れ子の問題を解消し，またクラスの自然な導入により具体的で直観的な集合論を構築.
- この言語の拡張がZFCの単純な保存拡大ではないのでZFCと厳密にどう関係しているかは未だ不明(ZFCで示せることは示せるはず．逆に本稿の集合論で示せることがZFCから示せるかは不明).

2　言語

- 本稿で使う言語は，論理学的に書けば

$$\mathcal{L}_{\in} = \{\in, \natural\}$$

  及びその拡張言語$\mathcal{L}$.
- $\natural$とは何か？通常は$\mathcal{L}_{\in} = \{\in\}$.
- そもそも述語論理では可算個の変項(variable)として

$$v_0,\ v_1,\ v_2,\ \cdots$$

  を用意していたりする．集合論の解説書も同様の記号列を変項としている...

- でも実際の式に $v_0, v_1, v_2, \cdots$ なんて現れず，通常は文字

$$a, b, c, \cdots, \quad x, y, z, \cdots, \quad \alpha, \beta, \gamma, \cdots.$$

- 文字は項であると約束する.
- ただし文字だけだと足りないので,

項の生成規則

τ と σ を項とするとき,

$$\natural\tau\sigma$$

も項である(ポーランド記法).

- $\natural$を使うことの利点：
  - 添え字の数字や「可算個」という言葉を用いることなく，実質的に可算無限個の変項を用意できる.

$$\natural xx,\ \natural\natural xxx,\ \natural\natural\natural xxxx,\ \natural\natural\natural\natural xxxxx,\ \cdots$$

のように，$\natural$とxだけで十分(極端).

数字や可算の概念は「集合論の中で定義されるもの」と「感覚として持っているもの」の二つがあるが，字面では同じなのであまり使いたくない.

$\mathcal{L}_{\in}$の項と式の定義

項
- 文字は項である.
- 項τと項σに対して$\natural\tau\sigma$は項である.
- これらのみが項である.

式
- 項τと項σに対して$\in\tau\sigma$と$=\tau\sigma$は式である.
- 式φに対して$\neg\varphi$は式である.
- 式φと式ψに対して$\vee\varphi\psi$と$\wedge\varphi\psi$と$\Longrightarrow\varphi\psi$はいずれも式である.
- 式φと項xに対して$\exists x\varphi$と$\forall x\varphi$は式である.
- これらのみが式である.

3　言語の拡張

拡張の動機

$\mathcal{L}_\in$ の式 $\varphi(x)$ に対して

$$\{\, x \mid \quad \varphi(x) \,\}$$

や

$$\varepsilon x \varphi(x)$$

の形のオブジェクトを項として式に組み込みたい.

$\{\, x \mid \quad \varphi(x) \,\}$ の形の項を内包項，$\varepsilon x \varphi(x)$ の形の項を ε 項と呼ぶことにして，$\mathcal{L}_\in$ に内包項と ε 項を追加した言語を

$$\mathcal{L}$$

と名付ける．また $\mathcal{L}_\in$ の項は ($\mathcal{L}$ の) 変項と呼ぶ．

$\mathcal{L}$ の項と式の定義

項　内包項と ε 項と変項は項である．これらのみが項である．

式　式の生成規則は $\mathcal{L}_\in$ と殆ど同じであるが，

- 式 φ と変項 x に対して $\exists x \varphi$ と $\forall x \varphi$ は式である．

の箇所のみ変える．

4　∃の規則

推論規則 4.1 (∃の導入).　$\mathcal{L}$ の式 $\varphi(x)$ と ε 項 τ に対して

$$\varphi(\tau) \vdash \exists x \varphi(x).$$

とくに，任意の ε 項 τ に対して

$$\tau = \tau.$$

だから

$$\exists x \, (\, x = \tau \,)$$

が成り立つ．つまり ε 項はすべて集合.

推論規則 4.2 (∃の除去(NG版)). $\mathcal{L}$の式$\varphi(x)$に対して

$$\exists x\varphi(x) \vdash \varphi(\varepsilon x\varphi(x)).$$

φに内包項やε項が現れる場合

$$\varepsilon x\varphi(x)$$

なる項は無い(無理矢理つくると入れ子問題).

解決法

$\mathcal{L}$の式を$\mathcal{L}_{\in}$の式に書き換える手順を用意する.

5　式の書き換え

- 式に ε 項が含まれていると書き換え不可.
- ε 項が現れない式を甲種式，そうでない式を乙種式と分類.

次の書き換え規則によって，甲種式はすべて $\mathcal{L}_{\in}$ の式に書き換え可能(構造的帰納法による).

- $x \in \{\, y \mid \quad \psi(y) \,\}$ は $\psi(x)$
- $\{\, x \mid \quad \varphi(x) \,\} \in y$ は

$$\exists s \; \big(s \in y \wedge \forall x \; \big(x \in s \iff \varphi(x) \big) \big)$$

- $\{\, x \mid \quad \varphi(x) \,\} \in \{\, y \mid \quad \psi(y) \,\}$ は

$$\exists s \; \big(\psi(s) \wedge \forall x \; \big(x \in s \iff \varphi(x) \big) \big)$$

- $x = \left\{ y \mid \quad \psi(y) \right\}$は

$$\forall u \ \left(u \in x \iff \psi(u) \right)$$

- $\left\{ x \mid \quad \varphi(x) \right\} = y$は

$$\forall u \ \left(\varphi(u) \iff u \in y \right)$$

- $\left\{ x \mid \quad \varphi(x) \right\} = \left\{ y \mid \quad \psi(y) \right\}$は

$$\forall u \ \left(\varphi(u) \iff \psi(u) \right)$$

6　∃の除去規則

甲種式 φ を $\mathcal{L}_{\in}$ の式に書き換えたものを $\hat{\varphi}$ と書く.

推論規則 6.1 (∃の除去).　甲種式 $\varphi(x)$ に対して

$$\exists x \varphi(x) \vdash \varphi\left(\varepsilon x \hat{\varphi}(x)\right).$$

∃の除去規則と導入規則により次を得る.

定理 6.2.　甲種式 $\varphi(x)$ に対して

$$\exists x \varphi(x) \Longleftrightarrow \varphi\left(\varepsilon x \hat{\varphi}(x)\right).$$

7　∀の導入

推論規則 7.1 (∀の導入).　式 $\varphi(x)$ に対し，すべての ε 項 τ で $\varphi(\tau)$ が成り立つなら

$$\forall x \varphi(x).$$

推論規則 7.2 (∀の除去).　式 $\varphi(x)$ と ε 項 τ に対して

$$\forall x \varphi(x) \vdash \varphi(\tau).$$

ε 項は集合であるから，量化の亘る範囲は集合の上だけ.

定理 7.3. 甲種式 $\varphi(x)$ に対して

$$\forall x \varphi(x) \Longleftrightarrow \varphi\left(\varepsilon x \rightarrow \hat{\varphi}(x)\right).$$

次の定理は他の公理および構造的帰納法と併せて示される.

定理 7.4 (書き換えの同値性). 甲種式 $\varphi(x)$ に対して

$$\forall x \, \left(\varphi(x) \Longleftrightarrow \hat{\varphi}(x) \right).$$

8　成り立つこと

定理 8.1.　内包項 $\left\{ x \mid \quad \varphi(x) \right\}$ が集合であれば

$$\left\{ x \mid \quad \varphi(x) \right\} = \varepsilon y \forall x \left(x \in y \Longleftrightarrow \varphi(x) \right).$$

略証.　$\exists y \left(\left\{ x \mid \quad \varphi(x) \right\} = y \right)$ を $\mathcal{L}_{\in}$ の式に書き直せば

$$\exists y \forall x \left(x \in y \Longleftrightarrow \varphi(x) \right).$$

存在記号の規則より結論が従う. ∎