確率微分方程式

基礎工学研究科システム創成専攻修士 1 年
学籍番号 29C17095
百合川尚学

2017 年 10 月 15 日

レポート問題 1.

1　10/11

基礎の確率空間を $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ とする．$\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$ を部分 σ-加法族とし，Hilbert 空間 $\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ とその閉部分空間 $\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ を考える．任意の $f\in\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ に対して，射影定理により一意に定まる射影 $g\in\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ を

$$g=\mathrm{E}[f\mid\mathcal{G}]$$

と表現する．$\mathcal{G}=\{\emptyset,\Omega\}$ のときは $\mathrm{E}[f\mid\mathcal{G}]$ を $\mathrm{E}[f]$ と書いて f の期待値と呼ぶ.

レポート問題 2.

Hilbert 空間 $\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ における内積を $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}$，ノルムを $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}$ と表示する．次の C1 ~ C6 を示せ．扱う関数は全て $\mathbb{R}$ 値と考える．(係数体を実数体として Hilbert 空間を扱う．)

C1　$\forall f\in\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)$

$$\mathrm{E}[f]=\int_\Omega f(x)\,\mu(dx)$$

C2　$\forall f\in\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)$, $\forall h\in\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu)$

$$\int_\Omega f(x)h(x)\,\mu(dx)=\int_\Omega \mathrm{E}[f\mid\mathcal{G}](x)h(x)\,\mu(dx)$$

C3　$\forall f_1,f_2\in\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)$

$$\mathrm{E}[f_1+f_2\mid\mathcal{G}]=\mathrm{E}[f_1\mid\mathcal{G}]+\mathrm{E}[f_2\mid\mathcal{G}]$$

C4　$\forall f_1,f_2\in\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)$

$$f_1\le f_2\quad\text{a.s.}\quad\Rightarrow\quad\mathrm{E}[f_1\mid\mathcal{G}]\le\mathrm{E}[f_2\mid\mathcal{G}]\quad\text{a.s.}$$

C5　$\forall f\in\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)$, $\forall g\in\mathrm{L}^\infty(\Omega,\mathcal{G},\mu)$

$$\mathrm{E}[gf\mid\mathcal{G}]=g\,\mathrm{E}[f\mid\mathcal{G}]$$

C6　$\mathcal{H}$ が $\mathcal{G}$ の部分 σ-加法族ならば $\forall f\in\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)$

$$\mathrm{E}\big[\mathrm{E}[f\mid\mathcal{G}]\,\big|\,\mathcal{H}\big]=\mathrm{E}[f\mid\mathcal{H}]$$

証明.　C1　$\mathcal{G}=\{\emptyset,\Omega\}$ とすれば，$\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ の元は $\mathcal{G}$-可測でなくてはならないから Ω 上の定数関数である．従って各 $g\in\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ には定数 $\alpha\in\mathbb{R}$ が対応して $g(x)=\alpha\ (\forall x\in\Omega)$ と表せる．射影定理より任意の $f\in\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ の $\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ への射影 $\mathrm{E}[f\mid\mathcal{G}]=\mathrm{E}[f]$ はノルム $\|f-g\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}$ を最小にする $g\in\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ である．$g(x)=\alpha\ (\forall x\in\Omega)$ としてノルムを直接

計算すれば，

$$
\begin{aligned}
\|f-g\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} &= \int_\Omega |f(x)-\alpha|^2\,\mu(dx)\\
&= \int_\Omega |f(x)|^2 - 2\alpha f(x) + |\alpha|^2\,\mu(dx)\\
&= \int_\Omega |f(x)|^2\,\mu(dx) - 2\alpha\int_\Omega f(x)\,\mu(dx) + |\alpha|^2\\
&= \left|\alpha - \int_\Omega f(x)\,\mu(dx)\right|^2 - \left|\int_\Omega f(x)\,\mu(dx)\right|^2 + \int_\Omega |f(x)|^2\,\mu(dx)\\
&= \left|\alpha - \int_\Omega f(x)\,\mu(dx)\right|^2 + \int_\Omega |f(x)-\beta|^2\,\mu(dx) \qquad \left(\beta := \int_\Omega f(x)\,\mu(dx)\right)
\end{aligned}
$$

と表現できて最終式は $\alpha = \int_\Omega f(x)\,\mu(dx)$ で最小となる．すなわち

$$
\mathrm{E}[f] = \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] = \int_\Omega f(x)\,\mu(dx).
$$

C2　射影定理により，$f \in \mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ の $\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ への射影 $\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}]$ は

$$
\langle f - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0 \quad (\forall h \in \mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu))
$$

を満たし，内積の線型性から

$$
\langle f, h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = \langle \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} \quad (\forall h \in \mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu))
$$

が成り立つ．積分の形式で表示することにより

$$
\int_\Omega f(x)h(x)\,\mu(dx) = \int_\Omega \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x)h(x)\,\mu(dx) \quad (\forall h \in \mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu))
$$

が示された．

C3　射影定理により任意の $h \in \mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\langle (f_1+f_2) - \mathrm{E}[f_1+f_2 \mid \mathcal{G}], h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0,\\
&\langle f_1 - \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}], h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0,\\
&\langle f_2 - \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}], h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0
\end{aligned}
$$

が成り立っている．従って任意の $h \in \mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ に対して

$$
\begin{aligned}
0 &= \langle (f_1+f_2) - \mathrm{E}[f_1+f_2 \mid \mathcal{G}], h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} - \langle f_1 - \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}], h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} - \langle f_2 - \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}], h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}\\
&= \langle (f_1+f_2) - \mathrm{E}[f_1+f_2 \mid \mathcal{G}], h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} - \langle (f_1+f_2) - (\mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}] + \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}]), h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}\\
&= \langle \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}] + \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}] - \mathrm{E}[f_1+f_2 \mid \mathcal{G}], h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}
\end{aligned}
$$

となり，特に $h = \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}] + \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}] - \mathrm{E}[f_1+f_2 \mid \mathcal{G}] \in \mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ とすれば

$$
\left\|\mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}] + \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}] - \mathrm{E}[f_1+f_2 \mid \mathcal{G}]\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0
$$

が成り立つことになるから

$$
\mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}] + \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}] = \mathrm{E}[f_1+f_2 \mid \mathcal{G}]
$$

が示された．

C4　「任意の $f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ に対して，$f \geq 0$ a.s. ならば $\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \geq 0$ a.s.」—(※) を示せばよい．これが示されれば $f_1, f_2 \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ で $f_1 \leq f_2$ a.s. となるものに対し

$$0 \leq f_2 - f_1 \text{ a.s.} \quad \Rightarrow 0 \leq \mathrm{E}[f_2 - f_1 \mid \mathcal{G}] = \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}] - \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}] \text{ a.s.}$$

が成り立つ．しかし，この場合本題に入る前に次の命題を証明する必要がある．これは等号 $\mathrm{E}[f_2 - f_1 \mid \mathcal{G}] = \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}] - \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}]$ が成り立つことを保証するためである．

命題.　考えている空間は今までと同じ Hilbert 空間 $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ である．任意の実数 α と任意の $f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ に対して次が成立する:

$$\mathrm{E}[\alpha f \mid \mathcal{G}] = \alpha \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}].$$

証明.　射影定理より

$$\langle f - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F}, \mu)} = 0, \quad \langle \alpha f - \mathrm{E}[\alpha f \mid \mathcal{G}], h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F}, \mu)} = 0 \quad (\forall h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu))$$

が成り立っているから

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{E}[\alpha f \mid \mathcal{G}] - \alpha \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F}, \mu)} &= \langle \mathrm{E}[\alpha f \mid \mathcal{G}] - \alpha f, h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F}, \mu)} - \langle \alpha \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] - \alpha f, h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F}, \mu)} \\ &= \langle \mathrm{E}[\alpha f \mid \mathcal{G}] - \alpha f, h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F}, \mu)} - \alpha \langle f - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F}, \mu)} \\ &= 0. \quad (\forall h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)) \end{aligned}$$

特に $h = \mathrm{E}[\alpha f \mid \mathcal{G}] - \alpha \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ として

$$\left\| \mathrm{E}[\alpha f \mid \mathcal{G}] - \alpha \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \right\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F}, \mu)} = 0$$

だから $\mathrm{E}[\alpha f \mid \mathcal{G}] = \alpha \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}]$ が成り立つ．　∎

次に (※) を示す．

$$\begin{aligned} A &:= \{x \in \Omega \mid \quad f(x) < 0\} && (\in \mathcal{F}), \\ B &:= \{x \in \Omega \mid \quad \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x) < 0\} && (\in \mathcal{G}) \end{aligned}$$

として $\mu(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu(B) = 0$ が成り立つと言えばよく，$\mu(A) = 0$ の下で $\mu(B) > 0$ と仮定しては不合理であることを以下に記述する．
$\mu(A) = 0,\ \mu(B) > 0$ であるとする．$\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ の元を

$$h(x) := \begin{cases} \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x) & (x \in B^c) \\ 0 & (x \in B) \end{cases}$$

として定義すると

$$
\begin{aligned}
\| f - h \|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} &= \int_{\Omega} |f(x) - h(x)|^2 \, \mu(dx) \\
&= \int_{A^c \cap B^c} |f(x) - h(x)|^2 \, \mu(dx) + \int_{A^c \cap B} |f(x) - h(x)|^2 \, \mu(dx) \\
&= \int_{A^c \cap B^c} |f(x) - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x)|^2 \, \mu(dx) + \int_{A^c \cap B} |f(x)|^2 \, \mu(dx) \\
&< \int_{A^c \cap B^c} |f(x) - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x)|^2 \, \mu(dx) + \int_{A^c \cap B} |f(x) - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x)|^2 \, \mu(dx) \\
&= \left\| f - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \right\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．これは $\mu(A) = 0$ であること，$\mu(A^c \cap B) = \mu(B) - \mu(A \cap B) = \mu(B) > 0$ であること，それから $A^c \cap B$ の上で

$$
\begin{gathered}
|f(x) - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x)|^2 - |f(x)|^2 = (f(x) - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x) + f(x))(-\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x)) > 0 \\
(\because f(x) \geq 0,\ \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x) < 0, \quad \forall x \in A^c \cap B)
\end{gathered}
$$

が成り立っていることによる．上の結果，すなわち

$$
\| f - h \|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} < \left\| f - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \right\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}
$$

を満たす $h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ が存在することは $\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}]$ が f の射影であることに違反している．以上より $\mu(B) = 0$ でなくてはならず，(※) が示された．

C5 $\left\| \mathrm{E}[gf \mid \mathcal{G}] - g\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \right\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0$ が成り立つことを示す．任意の $h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ に対して

$$
\langle \mathrm{E}[gf \mid \mathcal{G}] - g\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = \langle \mathrm{E}[gf \mid \mathcal{G}] - gf, h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} + \langle gf - g\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}
$$

を考えると，右辺が 0 になることが次のように証明される．先ず右辺第一項について，gf は $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ に入る．g は或る μ-零集合 $E \in \mathcal{G}$ を除いて有界であるから，或る正数 α によって $|g(x)| \leq \alpha\ (\forall x \in E^c)$ と抑えられ，

$$
\int_{\Omega} |g(x)f(x)|^2 \, \mu(dx) = \int_{E^c} |g(x)|^2 |f(x)|^2 \, \mu(dx) \leq \alpha^2 \int_{E^c} |f(x)|^2 \, \mu(dx) = \alpha^2 \int_{\Omega} |f(x)|^2 \, \mu(dx) < \infty
$$

が成り立つからである．従って射影定理により

$$
\langle \mathrm{E}[gf \mid \mathcal{G}] - gf, h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0 \quad (\forall h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)).
$$

右辺第二項について，

$$
\langle gf - g\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = \int_{\Omega} (f(x) - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x))\, g(x)h(x) \, \mu(dx) = \langle f - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], gh \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}
$$

であって，先と同様の理由で $gh \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ $(\forall h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu))$ が成り立つから射影定理より

$$
\langle gf - g\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0 \quad (\forall h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu))
$$

であると判明した．始めの式に戻れば

$$
\langle \mathrm{E}[gf \mid \mathcal{G}] - g\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0 \quad (\forall h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu))
$$

が成り立つことになり，特に $h = \mathrm{E}[gf \mid \mathcal{G}] - g\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ に対しては

$$\left\| \mathrm{E}[gf \mid \mathcal{G}] - g\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \right\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}^2 = 0$$

となることから $\mathrm{E}[gf \mid \mathcal{G}] = g\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}]$ が示された．

C6　任意の $h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{H}, \mu) \subset \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ に対し，射影定理より

$$\begin{aligned}
&\left\langle \mathrm{E}\big[\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \,\big|\, \mathcal{H}\big] - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{H}], h \right\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} \\
&\quad = \left\langle \mathrm{E}\big[\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \,\big|\, \mathcal{H}\big] - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h \right\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} \\
&\qquad + \langle \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] - f, h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} + \langle f - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{H}], h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0
\end{aligned}$$

が成り立つ．特に $h = \mathrm{E}\big[\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \,\big|\, \mathcal{H}\big] - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{H}] \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{H}, \mu)$ とすれば

$$\left\| \mathrm{E}\big[\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \,\big|\, \mathcal{H}\big] - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{H}] \right\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}^2 = 0$$

ということになるので $\mathrm{E}\big[\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \,\big|\, \mathcal{H}\big] = \mathrm{E}[f \mid \mathcal{H}]$ であることが示された．

∎