確率解析レポート

基礎工学研究科システム創成専攻修士 1 年
学籍番号 29C17095
百合川尚学

2017 年 7 月 24 日

以下に定義する Brown 運動が存在する確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ を基礎に考える．

定義 (**Brown 運動の講義における定義** (**講義資料引用**))**.** μ を $\mathbb{R}^N$ 上の分布 (i.e.Borel 確率測度) とする．確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 上の $\mathbb{R}^N$-値確率過程 $B = (B_t)_{t \geq 0}$ で以下を満たすものを，初期分布 μ の N 次元 Brown 運動という．とくに，μ が $x \in \mathbb{R}^N$ の Dirac 測度 δ_x のとき，B は x から出発する N 次元 Brown 運動と呼ばれる．

(i) 任意の $\omega \in \Omega$ に対して，$[0, \infty) \ni t \longmapsto B_t(\omega) \in \mathbb{R}^N$ は連続.

(ii) 任意の $0 \leq s < t$ に対して $B_t - B_s$ は $\mathcal{F}^B_s = \sigma(B_u \ : \ u \leq s)$ と独立.

(iii) 任意の $0 \leq s < t$ に対して $B_t - B_s$ は平均ベクトル 0，共分散行列 $(t-s)I_N$ の N 次元 Gauss 型確率変数である．ここで I_N は N 次元単位行列を表す.

(iv) $\mathrm{P}_{B_0} = \mu$.

1 レポート課題その 1

定理 3.8 の Brown 運動の性質 (1), (2), (3) を示せ.

(**定理** 3.8)**.** $B = (B_t)$ を原点から出発する N-次元 Brown 運動とするとき，いかが成り立つ.

(1) (回転不変性) 任意の $R \in O(N)$ に対して $RB = (RB_t)$ は原点から出発する Brown 運動である．ただし，$O(N)$ は N 次直交行列全体で Rx はベクトル x に左から行列 R をかけることいを意味する.

(2) (スケール則) 任意の $c > 0$ に対して $((1/\sqrt{c})B_{ct})$ は原点から出発する Brown 運動である.

(3) 任意の $h > 0$ に対して $(B_{t+h} - B_h)$ は原点から出発する Brown 運動である.

証明.

(1) 上に載せた定義の番号の順番に照合していく．(i) について，任意の N 次直交行列 R は，通常の Euclid ノルムの入ったノルム空間 $\mathbb{R}^N$(通常の位相空間としての $\mathbb{R}^N$ に同じ) において $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ の有界な線型作用素である．即ち $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ の連続写像であり，連続写像の合成である

$$[0, \infty) \ni t \longmapsto RB_t(\omega) \in \mathbb{R}^N, \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

もまた連続写像であるから，(i) は満たされている．次に (ii) を示す．$\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ は $\mathbb{R}^N$ の Borel 集合族を表すとする．まずは任意の $t \leq 0$ に対して

$$\left\{(RB_t)^{-1}(E) \ \middle| \ E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)\right\} = \left\{B_t^{-1}(E) \ \middle| \ E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)\right\} \tag{1}$$

が成り立つことを示す．これは次の理由による．任意の N 次直交行列 R は，通常の Euclid ノルムの入ったノルム空間 $\mathbb{R}^N$ において $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ の有界な線型作用素である．即ち $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ の連続写像であり，任意の Borel 集合 $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ を $\mathbb{R}^N$ の Borel 集合に引き戻す. また R が $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ の全単射であること (全射，単射であることは R の正則性により示され

る，つまり任意の $y \in \mathbb{R}^N$ に対して $Rx = y$ を満たすような x は $R^{-1}y$ であり，$Rx = Ry$ ならば $R(x-y) = 0$ の両辺に R^{-1} をかけて $x = y$ が出る．）と $\mathbb{R}^N$ の完備性により関数解析の値域定理が適用され，R の逆写像 R^{-1} もまた $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ の有界な線型作用素である．従って任意の Borel 集合の R による像は $\mathbb{R}^N$ の Borel 集合となる．以上より任意の Borel 集合 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ に対して

$$\begin{aligned}(RB_t)^{-1}(A) = B_t^{-1}\left(R^{-1}(A)\right) \in \left\{B_t^{-1}(E) \;\middle|\; E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)\right\}, \\ B_t^{-1}(A) = B_t^{-1}\left(R^{-1}(R(A))\right) \in \left\{(RB_t)^{-1}(E) \;\middle|\; E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)\right\}\end{aligned}$$

が示され，式 (1) が成り立つと判る．従って

$$\sigma(B_u \;:\; u \leq s) = \bigvee_{u \leq s} \left\{B_u^{-1}(E) \;\middle|\; E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)\right\} = \bigvee_{u \leq s} \left\{(RB_u)^{-1}(E) \;\middle|\; E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)\right\} = \sigma(RB_u \;:\; u \leq s)$$

が成り立つ．任意の $0 \leq s < t$ に対して $B_t - B_s$ は $\mathcal{F}_s^B = \sigma(B_u \;:\; u \leq s)$ と独立であるから，任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ と $F \in \sigma(RB_u \;:\; u \leq s) = \sigma(B_u \;:\; u \leq s)$ に対して，$R^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ に注意すれば

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\{RB_t - RB_s \in A\} \cap F\right) &= \mathrm{P}\left(\{R(B_t - B_s) \in A\} \cap F\right) \\ &= \mathrm{P}\left(\{B_t - B_s \in R^{-1}(A)\} \cap F\right) \\ &= \mathrm{P}\left(B_t - B_s \in R^{-1}(A)\right)\mathrm{P}(F) \\ &= \mathrm{P}\left(R(B_t - B_s) \in A\right)\mathrm{P}(F) = \mathrm{P}\left(RB_t - RB_s \in A\right)\mathrm{P}(F)\end{aligned}$$

が成り立つ．これは任意の $0 \leq s < t$ に対して $RB_t - RB_s$ と $\sigma(RB_u \;:\; u \leq s)$ とが独立であることを表しているから，(ii) も示されたことになる．(iii) について，行列式 $\det(R)$ が ± 1 になることに注意すれば，任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ に対して

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(RB_t - RB_s \in A) &= \mathrm{P}\left(B_t - B_s \in R^{-1}(A)\right) \\ &= (2\pi(t-s))^{-\frac{N}{2}} \int_{R^{-1}(A)} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2(t-s)}\right) dx \\ &= (2\pi(t-s))^{-\frac{N}{2}} \int_{A} \exp\left(-\frac{|y|^2}{2(t-s)}\right) dy \qquad (y = Rx \text{ として変数変換})\end{aligned}$$

が成り立つことにより，任意の $0 \leq s < t$ に対して $RB_t - RB_s$ もまた平均ベクトル 0，共分散行列 $(t-s)I_N$ の N 次元 Gauss 型確率変数であることが示された．最後に (iv) が満たされていることを確認する．全単射線型写像 R について $0 \in A \Leftrightarrow 0 \in R^{-1}(A)$ $(\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$ であることに注意すれば

$$\mathrm{P}_{RB_0}(A) = \mathrm{P}\left(B_0^{-1}\left(R^{-1}(A)\right)\right) = \begin{cases} 1 & 0 \in R^{-1}(A) \\ 0 & 0 \notin R^{-1}(A)\end{cases} = \begin{cases} 1 & 0 \in A \\ 0 & 0 \notin A\end{cases}$$

となり，P_{RB_0} と δ_0 は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ の上で一致する．

(2) 上に載せた定義の番号の順番に照合していく．(i) について，これも連続写像の合成

$$[0, \infty) \ni t \longmapsto ct \longmapsto \frac{1}{\sqrt{c}} B_{ct}(\omega) \in \mathbb{R}^N, \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

と見做せばよい．(ii) について，(i) と同様に考えればよい．写像 $\mathbb{R}^N \ni x \longmapsto x/\sqrt{c} \in \mathbb{R}^N$ は $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ の連続な全単射であり，明らかに逆写像 $\mathbb{R}^N \ni x \longmapsto \sqrt{c} \in \mathbb{R}^N$ もまた連続な全単射である．従って任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ に対して

$$\tfrac{1}{\sqrt{c}}A := \left\{x/\sqrt{c} \mid x \in A\right\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \qquad \sqrt{c}A := \left\{\sqrt{c}x \mid x \in A\right\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$$

が成り立つから，任意の $t \geq 0$ に対して

$$\left\{ \tfrac{1}{\sqrt{c}}B_{ct} \in A \;\middle|\; A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)\right\} = \left\{B_{ct} \in A \mid A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)\right\}$$

が成り立つ．即ち任意の $s \geq 0$ に対して

$$\sigma\left(\tfrac{1}{\sqrt{c}}B_{cu} \;:\; u \leq s\right) := \bigvee_{u \leq s} \left\{\tfrac{1}{\sqrt{c}}B_{cu} \in A \;\middle|\; A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)\right\} = \bigvee_{u \leq s}\left\{B_{cu} \in A \;\middle|\; A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)\right\} = \sigma(B_{cu} \;:\; u \leq s)$$

となっていて，さらに設問の仮定により任意の $0 \leq s < t$ に対して $B_{ct} - B_{cs}$ は $\sigma(B_{cu} \;:\; u \leq s)$ と独立である．以上より，任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ と $F \in \sigma\left(\tfrac{1}{\sqrt{c}}B_{cu} \;:\; u \leq s\right) = \sigma(B_{cu} \;:\; u \leq s)$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\left\{\tfrac{1}{\sqrt{c}}B_{ct} - \tfrac{1}{\sqrt{c}}B_{cs} \in A\right\} \cap F\right) &= \mathrm{P}\left(\left\{B_{ct} - B_{cs} \in \sqrt{c}A\right\} \cap F\right) \\
&= \mathrm{P}\left(B_{ct} - B_{cs} \in \sqrt{c}A\right)\mathrm{P}(F) \\
&= \mathrm{P}\left(\tfrac{1}{\sqrt{c}}B_{ct} - \tfrac{1}{\sqrt{c}}B_{cs} \in A\right)\mathrm{P}(F)
\end{aligned}$$

が成り立つから，任意の $0 \leq s < t$ に対して $\tfrac{1}{\sqrt{c}}B_{ct} - \tfrac{1}{\sqrt{c}}B_{cs}$ は $\sigma\left(\tfrac{1}{\sqrt{c}}B_{cu} \;:\; u \leq s\right)$ と独立であると示された．(iii) について，これもヤコビアンが $\left(\sqrt{c}\right)^N$ になることに注意すれば

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\tfrac{1}{\sqrt{c}}B_{ct} - \tfrac{1}{\sqrt{c}}B_{cs} \in A\right) &= \mathrm{P}\left(B_{ct} - B_{cs} \in \sqrt{c}A\right) \\
&= (2\pi(ct - cs))^{-\frac{N}{2}} \int_{\sqrt{c}A} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2(ct - cs)}\right) dx \\
&= (2\pi(t - s))^{-\frac{N}{2}} \int_{A} \exp\left(-\frac{|y|^2}{2(t - s)}\right) dy \qquad \left(y = \tfrac{1}{\sqrt{c}}x \text{ と変数変換}\right)
\end{aligned}$$

が成り立つことにより，任意の $0 \leq s < t$ に対して $\tfrac{1}{\sqrt{c}}B_{ct} - \tfrac{1}{\sqrt{c}}B_{cs}$ は平均ベクトル 0，共分散行列 $(t - s)I_N$ の N 次元 Gauss 型確率変数である．最後に (iv) を示す．任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ に対して $0 \in A \Leftrightarrow 0 \in \sqrt{c}A$ であることに注意すれば，

$$\mathrm{P}_{\frac{1}{\sqrt{c}}B_0}(A) = \mathrm{P}\left(B_0^{-1}(\sqrt{c}A)\right) = \begin{cases} 1 & 0 \in \sqrt{c}A \\ 0 & 0 \notin \sqrt{c}A \end{cases} = \begin{cases} 1 & 0 \in A \\ 0 & 0 \notin A \end{cases}$$

が成り立つから $\mathrm{P}_{\frac{1}{\sqrt{c}}B_0}$ と δ_0 は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ の上で一致する．

(3) 定義の (i) から見ていく．$B = (B_t)$ が Brown 運動であるならば

$$[0, \infty) \ni t \longmapsto B_{t+h}(\omega) - B_h(\omega) \in \mathbb{R}^N, \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

が連続写像であることは明らかである．次に (ii) を確認する．任意の $t \geq 0$ に対して B_{t+h} は可測 $\mathcal{F}^B_{t+h}/\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$，$B_h$ は可測 $\mathcal{F}^B_h/\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ であって，$\mathcal{F}^B_h \subset \mathcal{F}^B_{t+h}$ により $B_{t+h} - B_h$ は可測 $\mathcal{F}^B_{t+h}/\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ である．従って

$$\left\{ (B_{t+h} - B_h)^{-1}(A) \;\middle|\; A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \right\} \subset \mathcal{F}^B_{t+h} = \sigma(B_u \;:\; u \leq t + h)$$

が成り立つ．明らかに

$$\sigma(B_{u+h} - B_h \;:\; u \leq s) = \bigvee_{u \leq s} \left\{ (B_{u+h} - B_h)^{-1}(A) \;\middle|\; A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \right\} \subset \sigma(B_u \;:\; u \leq s + h)$$

が成り立っている．従って任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ と $F \in \sigma(B_{u+h} - B_h \;:\; u \leq s) \subset \sigma(B_u \;:\; u \leq s+h)$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\{(B_{t+h} - B_h) - (B_{s+h} - B_h) \in A\} \cap F\right) &= \mathrm{P}\left(\{B_{t+h} - B_{s+h} \in A\} \cap F\right) \\
&= \mathrm{P}\left(B_{t+h} - B_{s+h} \in A\right) \mathrm{P}(F) \\
&= \mathrm{P}\left((B_{t+h} - B_h) - (B_{s+h} - B_h) \in A\right) \mathrm{P}(F)
\end{aligned}$$

となるから，任意の $0 \leq s < t$ に対して $(B_{t+h} - B_h) - (B_{s+h} - B_h)$ は $\sigma(B_{u+h} - B_h \;:\; u \leq s)$ と独立であることが示された．(iii) について，任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left((B_{t+h} - B_h) - (B_{s+h} - B_h) \in A\right) &= \mathrm{P}\left(B_{t+h} - B_{s+h} \in A\right) \\
&= (2\pi((t+h) - (s+h)))^{-\frac{N}{2}} \int_A \exp\left(-\frac{|x|^2}{2((t+h) - (s+h))} \right) dx \\
&= (2\pi(t-s))^{-\frac{N}{2}} \int_A \exp\left(-\frac{|x|^2}{2(t-s)} \right) dx
\end{aligned}$$

が成り立つから，任意の $0 \leq s < t$ に対して $(B_{t+h} - B_h) - (B_{s+h} - B_h)$ は平均ベクトル 0，共分散行列 $(t-s)I_N$ の N 次元 Gauss 型確率変数であると示された．最後に (iv) を確認する．便宜上 $Y_t \coloneqq B_{t+h} - B_h$ $(\forall t \geq 0)$ と表記する．$t = 0$ の場合 Ω 上で $Y_0 = 0$ が成り立っているから，任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ に対して

$$\mathrm{P}_{Y_0}(A) = \mathrm{P}\left(Y_0^{-1}(A)\right) = \begin{cases} 1 & 0 \in A \\ 0 & 0 \notin A \end{cases}$$

となり，Y_0 の分布は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ 上で δ_0 に一致する． ∎