

金融確率解析レポート

基礎工学研究科システム創成専攻修士 2 年

学籍番号 29C17095

百合川尚学

選択問題 1) 5) 6)

2020 年 1 月 30 日

5)

定数 $-1 \leq \rho \leq 1$ を用いて

$$\bar{W}_t := \rho W_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} W_t^2, \quad t \geq 0$$

を定義する. $(\bar{W}_t)_{t \geq 0}$ は標準ブラウン運動であることを示せ. また W_t^1 と \bar{W}_t との共分散を求めよ.

答案.

連続性 連続関数の定数倍も連続関数同士の和も連続関数になるので $t \mapsto \bar{W}_t$ は連続である.

0 出発 $W_0^1 = 0$ かつ $W_0^2 = 0$ なので $\bar{W}_0 = 0$ である.

独立増分性と分布 $(\bar{W}_t)_{t \geq 0}$ の独立増分性と任意の時点 $0 \leq s < t$ に対して $\bar{W}_t - \bar{W}_s$ が $N(0, t - s)$ に従うことを言うには, 任意の自然数 n に対して任意の $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ および任意の実数 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ を取って

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j (\bar{W}_{t_j} - \bar{W}_{t_{j-1}}) \right) \right] = \prod_{j=1}^n \exp \left(\frac{1}{2} \alpha_j^2 (t_j - t_{j-1}) \right)$$

を示せばよい. まず

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\exp \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j (\bar{W}_{t_j} - \bar{W}_{t_{j-1}}) \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[e^{\sum_{j=1}^n \rho \alpha_j (W_{t_j}^1 - W_{t_{j-1}}^1)} e^{\sum_{j=1}^n \sqrt{1 - \rho^2} \alpha_j (W_{t_j}^2 - W_{t_{j-1}}^2)} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[e^{\sum_{j=1}^n \rho \alpha_j (W_{t_j}^1 - W_{t_{j-1}}^1)} \right] \mathbb{E} \left[e^{\sum_{j=1}^n \sqrt{1 - \rho^2} \alpha_j (W_{t_j}^2 - W_{t_{j-1}}^2)} \right] \quad (W^1 \text{ と } W^2 \text{ は独立なので}) \end{aligned}$$

となるが, ここで W^1 の独立増分性より

$$\mathbb{E} \left[e^{\sum_{j=1}^n \rho \alpha_j (W_{t_j}^1 - W_{t_{j-1}}^1)} \right] = \prod_{j=1}^n \mathbb{E} \left[e^{\rho \alpha_j (W_{t_j}^1 - W_{t_{j-1}}^1)} \right]$$

が成り立つ．この右辺については

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[e^{\rho \alpha_j (W_{t_j}^1 - W_{t_{j-1}}^1)} \right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\rho \alpha_j x} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}} e^{-\frac{x^2}{2(t_j - t_{j-1})}} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\rho \alpha_j \sqrt{t_j - t_{j-1}} x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= e^{\frac{1}{2}\rho^2 \alpha_j^2 (t_j - t_{j-1})} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - \rho \alpha_j \sqrt{t_j - t_{j-1}})^2}{2}} dx \\
&= e^{\frac{1}{2}\rho^2 \alpha_j^2 (t_j - t_{j-1})}
\end{aligned}$$

が成り立つので

$$\mathbb{E} \left[e^{\sum_{j=1}^n \rho \alpha_j (W_{t_j}^1 - W_{t_{j-1}}^1)} \right] = \prod_{j=1}^n e^{\frac{1}{2}\rho^2 \alpha_j^2 (t_j - t_{j-1})}$$

となる．同様にして

$$\mathbb{E} \left[e^{\sum_{j=1}^n \sqrt{1-\rho^2} \alpha_j (W_{t_j}^2 - W_{t_{j-1}}^2)} \right] = \prod_{j=1}^n e^{\frac{1}{2}(1-\rho^2) \alpha_j^2 (t_j - t_{j-1})}$$

が成り立つので

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[\exp \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j (\bar{W}_{t_j} - \bar{W}_{t_{j-1}}) \right) \right] \\
&= \mathbb{E} \left[e^{\sum_{j=1}^n \rho \alpha_j (W_{t_j}^1 - W_{t_{j-1}}^1)} \right] \mathbb{E} \left[e^{\sum_{j=1}^n \sqrt{1-\rho^2} \alpha_j (W_{t_j}^2 - W_{t_{j-1}}^2)} \right] \\
&= \prod_{j=1}^n e^{\frac{1}{2}\rho^2 \alpha_j^2 (t_j - t_{j-1})} e^{\frac{1}{2}(1-\rho^2) \alpha_j^2 (t_j - t_{j-1})} \\
&= \prod_{j=1}^n e^{\frac{1}{2} \alpha_j^2 (t_j - t_{j-1})}
\end{aligned}$$

が従う．これで求める式を得た．

6)

USD/JPY が替レート過程を表す S^1 と EUR/JPY が替レート過程を表す S^2 が

$$\begin{aligned}
dS_t^1 &= S_t^1 (\sigma_1 dW_t^1 + \mu_1 dt), \quad S_0^1 > 0, \\
dS_t^2 &= S_t^2 (\sigma_2 dW_t^2 + \mu_2 dt), \quad S_0^2 > 0,
\end{aligned}$$

と与えられている (すなわち、時刻 t で 1USD が S_t^1 円であり、1EUR が S_t^2 円である)．ただし $\sigma_1, \sigma_2 > 0$, $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ である．このとき USD/EUR が替レート過程を計算し、そのボラティリティと期待収益率を求めよ．

答案． USD/EUR が替レート過程は S^1/S^2 を計算すればよい．

$$d \begin{bmatrix} X_t^1 \\ X_t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_t^1 & 0 \\ 0 & S_t^2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dW_t^1 \\ dW_t^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} dt \right)$$

なので、伊藤の公式より

$$\begin{aligned}
\frac{S_t^1}{S_t^2} &= \frac{S_0^1}{S_0^2} + \int_0^t \frac{1}{S_s^2} dS_s^1 + \int_0^t \frac{-S_s^1}{(S_s^2)^2} dS_s^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \text{tr} \left(\begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{(S_s^2)^2} \\ \frac{-1}{(S_s^2)^2} & \frac{2S_s^1}{(S_s^2)^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_s^1 \sigma_1 & 0 \\ 0 & S_s^2 \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_s^1 \sigma_1 & 0 \\ 0 & S_s^2 \sigma_2 \end{bmatrix} \right) ds \\
&= \frac{S_0^1}{S_0^2} + \int_0^t \frac{1}{S_s^2} dS_s^1 + \int_0^t \frac{-S_s^1}{(S_s^2)^2} dS_s^2 + \int_0^t \frac{S_s^1}{S_s^2} \sigma_2^2 ds \\
&= \frac{S_0^1}{S_0^2} + \int_0^t \frac{1}{S_s^2} S_s^1 (\sigma_1 dW_s^1 + \mu_1 ds) \\
&\quad + \int_0^t \frac{-S_s^1}{(S_s^2)^2} S_s^2 (\sigma_2 dW_s^2 + \mu_2 ds) \\
&\quad + \int_0^t \frac{S_s^1}{S_s^2} \sigma_2^2 ds \\
&= \frac{S_0^1}{S_0^2} + \int_0^t \frac{S_s^1}{S_s^2} \sigma_1 dW_s^1 + \int_0^t \frac{-S_s^1}{S_s^2} \sigma_2 dW_s^2 + \int_0^t \frac{S_s^1}{S_s^2} (\mu_1 - \mu_2 + \sigma_2^2) ds
\end{aligned}$$

が成り立つ。これが USD/EUR 為替レート過程の式である。従って

$$d \frac{S_t^1}{S_t^2} = \frac{S_0^1}{S_0^2} \{ \sigma_1 dW_t^1 - \sigma_2 dW_t^2 + (\mu_1 - \mu_2 + \sigma_2^2) dt \}$$

となる。時点 t での期待収益率は

$$\begin{aligned}
E_t \left[d(S_t^1/S_t^2)/(S_t^1/S_t^2) \right] &= E_t \left[\sigma_1 dW_t^1 - \sigma_2 dW_t^2 + (\mu_1 - \mu_2 + \sigma_2^2) dt \right] \\
&= (\mu_1 - \mu_2 + \sigma_2^2) dt
\end{aligned}$$

である。また時点 t でのボラティリティは

$$\begin{aligned}
&E_t \left[\left\{ d(S_t^1/S_t^2)/(S_t^1/S_t^2) - (\mu_1 - \mu_2 + \sigma_2^2) dt \right\}^2 \right] \\
&= E_t \left[\left\{ \sigma_1 dW_t^1 - \sigma_2 dW_t^2 \right\}^2 \right] \\
&= E_t \left[\sigma_1^2 (dW_t^1)^2 \right] - 2\sigma_1 \sigma_2 E_t \left[dW_t^1 dW_t^2 \right] + E_t \left[\sigma_2^2 (dW_t^2)^2 \right] \\
&= (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) dt
\end{aligned}$$

である (W^1 と W^2 は独立なので $E_t [dW_t^1 dW_t^2] = E_t [dW_t^1] E_t [dW_t^2] = 0$)。