確率微分方程式講義録

基礎工学研究科システム創成専攻修士 1 年
学籍番号 29C17095
百合川尚学

2017 年 11 月 3 日

1　10/4 講義ノート

レポート問題 1.　係数体を $\mathbb{K}$，$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 或は $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ と考える．測度空間を $(X,\mathcal{F},m)$ とし，可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ 関数 f に対して

$$\|f\|_{\mathscr{L}^p} := \begin{cases} \inf\{\, r\in\mathbb{R} \mid |f(x)|\le r,\ \text{a.e.}x\in X \,\} & (p=\infty) \\ \left(\int_X |f(x)|^p\, m(dx)\right)^{\frac{1}{p}} & (0<p<\infty) \end{cases}$$

と定め，

$$\mathscr{L}^p(X,\mathcal{F},m) := \{\, f: X\to\mathbb{K} \mid f: \text{可測 } \mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{K}),\ \|f\|_{\mathscr{L}^p}<\infty \,\} \quad (1\le p\le\infty)$$

として空間 $\mathscr{L}^p(X,\mathcal{F},m)$ を定義する．この空間は $\mathbb{K}$ 上の線形空間となるが，そのことを保証するために次の二つの不等式が成り立つことを証明する．

定理 1.1 (Hölder の不等式).　$1\le p,q\le\infty$，$p+q=pq$ ($p=\infty$ なら $q=1$) とする．このとき任意の可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ 関数 f,g に対して次が成り立つ:

$$\int_X |f(x)g(x)|\, m(dx) \le \|f\|_{\mathscr{L}^p}\|g\|_{\mathscr{L}^q}. \tag{1}$$

証明.　まず次の補助定理を証明する．

補題 1.2.　$f\in\mathscr{L}^\infty(X,\mathcal{F},m)$ ならば

$$|f(x)|\le\|f\|_{\mathscr{L}^\infty} \quad (\text{a.e.}x\in X).$$

証明.　$\mathscr{L}^\infty(X,\mathcal{F},m)$ の定義により，任意の実数 $\alpha>\|f\|_{\mathscr{L}^\infty}$ に対して

$$m(\{\, x\in X \mid |f(x)|>\alpha \,\})=0$$

である．これにより

$$\{\, x\in X \mid |f(x)|>\|f\|_{\mathscr{L}^\infty} \,\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{\, x\in X \mid |f(x)|>\|f\|_{\mathscr{L}^\infty}+1/n \,\}$$

の右辺は m-零集合となり補題が証明された．∎

定理の証明に入る．

$p=\infty$, $q=1$ の場合　$\|f\|_{\mathscr{L}^\infty}=\infty$ 又は $\|g\|_{\mathscr{L}^1}=\infty$ の場合は明らかに不等式 (1) が成り立つから，$\|f\|_{\mathscr{L}^\infty}<\infty$ かつ $\|g\|_{\mathscr{L}^1}<\infty$ の場合を考える．補助定理により，或る m-零集合 $A\in\mathcal{F}$ を除いて $|f(x)|\le\|f\|_{\mathscr{L}^\infty}$ が成り立つから，

$$|f(x)g(x)|\le\|f\|_{\mathscr{L}^\infty}|g(x)| \quad (\forall x\in X\backslash A).$$

従って

$$\int_X |f(x)g(x)|\, m(dx) = \int_{X\setminus A} |f(x)g(x)|\, m(dx) \le \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} \int_{X\setminus A} |g(x)|\, m(dx) = \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} \|g\|_{\mathscr{L}^1}$$

となり不等式 (1) が成り立つ．

$1 < p, q < \infty$ の場合　$\|f\|_{\mathscr{L}^p} = \infty$ 又は $\|g\|_{\mathscr{L}^q} = \infty$ の場合は明らかに不等式 (1) が成り立つから，$\|f\|_{\mathscr{L}^p} < \infty$ かつ $\|g\|_{\mathscr{L}^q} < \infty$ の場合を考える．$\|f\|_{\mathscr{L}^p} = 0$ であるとすると

$$B := \{\, x \in X \quad | \quad |f(x)| > 0 \,\}$$

は m-零集合となるから，

$$\int_X |f(x)g(x)|\, m(dx) = \int_B |f(x)g(x)|\, m(dx) + \int_{X\setminus B} |f(x)g(x)|\, m(dx) = 0$$

となり不等式 (1) が成り立つ．$\|g\|_{\mathscr{L}^q} = 0$ の場合も同じである．

最後に $0 < \|f\|_{\mathscr{L}^p}, \|g\|_{\mathscr{L}^q} < \infty$ の場合を示す．$-\log t \quad (t > 0)$ は凸関数であるから，$1/p + 1/q = 1$ に対して

$$-\log\left(\frac{s}{p} + \frac{t}{q}\right) \le \frac{1}{p}(-\log s) + \frac{1}{q}(-\log t) \quad (\forall s, t > 0)$$

が成り立ち，従って

$$s^{1/p} t^{1/q} \le \frac{s}{p} + \frac{t}{q} \quad (\forall s, t > 0)$$

が成り立つ．この不等式を用いれば

$$F(x) := |f(x)|^p / \|f\|_{\mathscr{L}^p}^p, \quad G(x) := |g(x)|^q / \|g\|_{\mathscr{L}^q}^q \quad (\forall x \in X)$$

とした F, G に対し

$$F(x)^{1/p} G(x)^{1/q} \le \frac{1}{p} F(x) + \frac{1}{q} G(x) \quad (\forall x \in X)$$

となり，両辺を積分して

$$\begin{aligned}
\int_X F(x)^{1/p} G(x)^{1/q}\, m(dx) &\le \frac{1}{p} \int_X F(x)\, m(dx) + \frac{1}{q} \int_X G(x)\, m(dx) \\
&= \frac{1}{p} \frac{1}{\|f\|_{\mathscr{L}^p}^p} \int_X |f(x)|^p\, m(dx) + \frac{1}{q} \frac{1}{\|g\|_{\mathscr{L}^q}^q} \int_X |g(x)|^q\, m(dx) \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1
\end{aligned}$$

が成り立つ．最左辺と最右辺を比べて

$$1 \ge \int_X F(x)^{1/p} G(x)^{1/q}\, m(dx) = \int_X \frac{|f(x)|}{\|f\|_{\mathscr{L}^p}} \frac{|g(x)|}{\|g\|_{\mathscr{L}^q}}\, m(dx)$$

から不等式

$$\int_X |f(x)g(x)|\, m(dx) \le \|f\|_{\mathscr{L}^p} \|g\|_{\mathscr{L}^q}$$

が示された．　■

定理 1.3 (Minkowski の不等式). $1 \le p \le \infty$ とする．このとき任意の可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ 関数 f, g に対して次が成り立つ:

$$\| f + g \|_{\mathscr{L}^p} \le \| f \|_{\mathscr{L}^p} + \| g \|_{\mathscr{L}^p}. \tag{2}$$

証明.

$p = \infty$ の場合

$$|f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \quad (\forall x \in X)$$

である．従って $\| f \|_{\mathscr{L}^\infty} = \infty$ 又は $\| g \|_{\mathscr{L}^\infty} = \infty$ の場合に不等式 (2) が成り立つことは明らかである．$\| f \|_{\mathscr{L}^\infty} < \infty$ かつ $\| g \|_{\mathscr{L}^\infty} < \infty$ の場合は

$$C := \{\, x \in X \quad | \quad |f(x)| > \| f \|_{\mathscr{L}^\infty} \,\} \bigcup \{\, x \in X \quad | \quad |g(x)| > \| g \|_{\mathscr{L}^\infty} \,\}$$

が m-零集合となり，$\| \cdot \|_{\mathscr{L}^\infty}$ の定義と

$$|f(x) + g(x)| \le \| f \|_{\mathscr{L}^\infty} + \| g \|_{\mathscr{L}^\infty} \quad (\forall x \in X \backslash C)$$

の関係により不等式 (2) が成り立つ．

$p = 1$ の場合

$$|f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \quad (\forall x \in X)$$

の両辺を積分することにより不等式 (2) が成り立つ．

$1 < p < \infty$ の場合　$p + q = pq$ が成り立つように $q > 1$ を取る．

$$|f(x) + g(x)|^p = |f(x) + g(x)||f(x) + g(x)|^{p-1} \le |f(x)||f(x) + g(x)|^{p-1} + |g(x)||f(x) + g(x)|^{p-1}$$

の両辺を積分すれば，Hölder の不等式により

$$\begin{aligned}
\| f + g \|_{\mathscr{L}^p}^p &= \int_X |f(x) + g(x)|^p \, m(dx) \\
&\le \int_X |f(x)||f(x) + g(x)|^{p-1} \, m(dx) + \int_X |g(x)||f(x) + g(x)|^{p-1} \, m(dx) \\
&\le \left(\int_X |f(x)|^p \, m(dx) \right)^{1/p} \left(\int_X |f(x) + g(x)|^{q(p-1)} \, m(dx) \right)^{1/q} \\
&\qquad + \left(\int_X |g(x)|^p \, m(dx) \right)^{1/p} \left(\int_X |f(x) + g(x)|^{q(p-1)} \, m(dx) \right)^{1/q} \\
&= \left(\int_X |f(x)|^p \, m(dx) \right)^{1/p} \left(\int_X |f(x) + g(x)|^p \, m(dx) \right)^{1/q} \\
&\qquad + \left(\int_X |g(x)|^p \, m(dx) \right)^{1/p} \left(\int_X |f(x) + g(x)|^p \, m(dx) \right)^{1/q} \\
&= \| f \|_{\mathscr{L}^p} \| f + g \|_{\mathscr{L}^p}^{p/q} + \| g \|_{\mathscr{L}^p} \| f + g \|_{\mathscr{L}^p}^{p/q} \\
&= \| f \|_{\mathscr{L}^p} \| f + g \|_{\mathscr{L}^p}^{p-1} + \| g \|_{\mathscr{L}^p} \| f + g \|_{\mathscr{L}^p}^{p-1}
\end{aligned}$$

が成り立つ．$\|f+g\|_{\mathscr{L}^p}=0$ の場合は明らかに不等式 (2) が成り立つ．$\|f+g\|_{\mathscr{L}^p}=\infty$ の場合，

$$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)|+|g(x)| \leq 2\max(|f(x)|,|g(x)|) \quad (\forall x \in X)$$

より

$$|f(x)+g(x)|^p \leq 2^p \max\left(|f(x)|^p,|g(x)|^p\right) \leq 2^p \left(|f(x)|^p+|g(x)|^p\right) \quad (\forall x \in X)$$

から両辺を積分して

$$\|f+g\|_{\mathscr{L}^p}^p \leq 2^p \left(\|f\|_{\mathscr{L}^p}^p + \|g\|_{\mathscr{L}^p}^p\right)$$

という関係が出るから，上式右辺も ∞ となり不等式 (2) が成り立つ．$0<\|f+g\|_{\mathscr{L}^p}<\infty$ の場合，$\|f\|_{\mathscr{L}^p}+\|g\|_{\mathscr{L}^p}=\infty$ なら不等式 (2) は明らかに成り立ち，$\|f\|_{\mathscr{L}^p}+\|g\|_{\mathscr{L}^p}<\infty$ の場合は

$$\|f+g\|_{\mathscr{L}^p}^p \leq \|f\|_{\mathscr{L}^p}\|f+g\|_{\mathscr{L}^p}^{p-1} + \|g\|_{\mathscr{L}^p}\|f+g\|_{\mathscr{L}^p}^{p-1}$$

の両辺を $\|f+g\|_{\mathscr{L}^p}^{p-1}$ で割って不等式 (2) が成り立つと判る． ∎

以上の結果より $\mathscr{L}^p(X,\mathcal{F},m)$ が線形空間をなすことが判る．加法について閉じていることは Minkowski の不等式により従い，加法について可換群となりスカラ倍について (閉じていてかつ) 分配的であることは積分の性質から従うからである．以下にこの線形空間に関する重要な性質を載せる．

補題 1.4 ($\mathscr{L}^p$ **のセミノルムについて**)**.** $\|\cdot\|_{\mathscr{L}^p}$ は線形空間 $\mathscr{L}^p(X,\mathcal{F},m)$ においてセミノルムとなる．

証明. **正値性**　これは明らかである．
同次性

$$\left(\int_X |\alpha f(x)|^p \, m(dx)\right)^{1/p} = \left(|\alpha|^p \int_X |f(x)|^p \, m(dx)\right)^{1/p} = |\alpha| \left(\int_X |f(x)|^p \, m(dx)\right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty)$$

と

$$\inf\{\, r \in \mathbb{R} \quad | \quad |\alpha f(x)| \leq r,\ \text{a.e.} x \in X \,\} = |\alpha| \inf\{\, r \in \mathbb{R} \quad | \quad |f(x)| \leq r,\ \text{a.e.} x \in X \,\}$$

により，任意の $\alpha \in \mathbb{K}$ と任意の $f \in \mathscr{L}^p(X,\mathcal{F},m)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ に対して

$$\|\alpha f\|_{\mathscr{L}^p} = |\alpha| \|f\|_{\mathscr{L}^p}$$

が成り立つ．
三角不等式　Minkowski の不等式による． ∎

しかし $\|\cdot\|_{\mathscr{L}^p}$ は $\mathscr{L}^p(X,\mathcal{F},m)$ のノルムとはならない．$\|f\|_{\mathscr{L}^p}=0$ であっても $f(x)=0\ (\forall x\in X)$ とは限らず，m-零集合の上で $1\in\mathbb{K}$ を取るような関数 g でも $\|g\|_{\mathscr{L}^p}=0$ を満たすからである．ここで次のものを考える．可測関数の集合を

$$\mathcal{M}\coloneqq\{\,f:X\to\mathbb{K}\quad|\quad f:\text{可測}\ \mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{K})\}$$

と表すことにする．

$$f,g\in\mathcal{M},\quad f\sim g\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}f(x)=g(x)\quad \text{a.e.}x\in X$$

と定義した関係 $\sim$ は $\mathcal{M}$ における同値関係となり，この関係で $\mathcal{M}$ を割った商を $M\coloneqq\mathcal{M}/\sim$ と表す．M の元を $[f]$ (f は同値類の代表元) と表し，M における加法とスカラ倍を次のように定義すれば M は $\mathbb{K}$ 上の線形空間となる:

$$\begin{aligned}&[f]+[g]\coloneqq[f+g] &&(\forall[f],[g]\in M),\\ &\alpha[f]\coloneqq[\alpha f] &&(\forall[f]\in M,\ \alpha\in\mathbb{K}).\end{aligned}$$

そしてこの表現は well-defined である．つまり代表元に依らずに値がただ一つに定まる．

証明.
任意の $f'\in[f]$ と $g'\in[g]$ に対して，$[f']=[f],\ [g']=[g]$ であるから

$$[f+g]=[f'+g'],\quad [\alpha f']=[\alpha f]$$

をいえばよい．

$$(f\neq g)\coloneqq\{\,x\in X\quad|\quad f(x)\neq g(x)\,\}$$

と簡略した表記を使えば

$$\begin{aligned}&(f+g\neq f'+g')\subset(f\neq f')\cup(g\neq g'),\\ &(\alpha f\neq\alpha f')=(f\neq f')\end{aligned}$$

であり，どちらも右辺は m-零集合であるから $[f+g]=[f'+g'],\ [\alpha f']=[\alpha f]$ である． ∎

次に商空間 M におけるノルムを定義する．

補題 1.5 (商空間 L^p におけるノルムの定義).

$$\|[f]\|_{\mathrm{L}^p}\coloneqq\|f\|_{\mathscr{L}^p}\quad(1\le p\le\infty)$$

として $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^p}$ を定義すればこれは well-defined である．つまり代表元に依らずに値がただ一つに定まる．

証明. $f\in\mathscr{L}^p(X,\mathcal{F},m)$ とし，任意に $g\in[f]$ で $f\neq g$ となるものを選ぶ．示すことは $\|f\|^p_{\mathscr{L}^p}=\|g\|^p_{\mathscr{L}^p}$ が成り立つことである．

$$A\coloneqq\{\,x\in X\quad|\quad f(x)\neq g(x)\,\}\quad\in\mathcal{F}$$

とおけば，f,g は同じ同値類の元同士であるから $m(A)=0$ である．

$p=\infty$ の場合　A^c の上で $f(x)=g(x)$ となるから

$$\begin{aligned}\{\, x \in X \quad | \quad |g(x)| > \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} \,\} &\subset A + A^c \cap \{\, x \in X \quad | \quad |g(x)| > \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} \,\} \\ &= A + A^c \cap \{\, x \in X \quad | \quad |f(x)| > \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} \,\} \\ &\subset A + \{\, x \in X \quad | \quad |f(x)| > \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} \,\}\end{aligned}$$

が成り立ち，最右辺は 2 項とも m-零集合であるから最左辺も m-零集合となる．すなわち $\|g\|_{\mathscr{L}^\infty} \leq \|f\|_{\mathscr{L}^\infty}$ が示された．逆向きの不等号も同様に示されるから $\|g\|_{\mathscr{L}^\infty} = \|f\|_{\mathscr{L}^\infty}$ となる．

$1 \leq p < \infty$ の場合　$m(A)=0$ により

$$\|f\|_{\mathscr{L}^p}^p = \int_X f(x)\, m(dx) = \int_{A^c} f(x)\, m(dx) = \int_{A^c} g(x)\, m(dx) = \int_X g(x)\, m(dx) = \|g\|_{\mathscr{L}^p}^p$$

が成り立つ．

∎

補題 1.6 (商空間 L^p はノルム空間となる).

$$\mathrm{L}^p(X,\mathcal{F},m) := \{\, [f] \in M \quad | \quad \|[f]\|_{\mathrm{L}^p} < \infty \,\} \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

を定義すると，$\mathrm{L}^p(X,\mathcal{F},m)$ は $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^p}$ をノルムとしてノルム空間となる．

証明.　任意の $[f],[g] \in \mathrm{L}^p(X,\mathcal{F},m)$ と $\alpha \in \mathbb{K}$ に対して，$\|[f]\|_{\mathrm{L}^p} \geq 0$ であることは $\|\cdot\|_{\mathscr{L}^p}$ の正値性による．また関数が 0 でない $x \in X$ の集合の測度が正となるとノルムは正となるから，$\|[f]\|_{\mathrm{L}^p} = 0$ であるなら $[f]$ は零写像 (これを 0 と表す) の同値類 (線形空間の零元)，つまり $[f]=[0]$ である．逆に $[f]=[0]$ なら $\|[f]\|_{\mathrm{L}^p}=0$ である．$\|\cdot\|_{\mathscr{L}^p}$ の同次性と Minkowski の不等式から

$$\begin{aligned}&\|\alpha[f]\|_{\mathrm{L}^p} = \|[\alpha f]\|_{\mathrm{L}^p} = \|\alpha f\|_{\mathscr{L}^p} = |\alpha|\,\|f\|_{\mathscr{L}^p} = |\alpha|\,\|[f]\|_{\mathrm{L}^p} \\ &\|[f]+[g]\|_{\mathrm{L}^p} = \|[f+g]\|_{\mathrm{L}^p} = \|f+g\|_{\mathscr{L}^p} \leq \|f\|_{\mathscr{L}^p} + \|g\|_{\mathscr{L}^p} = \|[f]\|_{\mathrm{L}^p} + \|[g]\|_{\mathrm{L}^p}\end{aligned}$$

も成り立つ．以上より $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^p}$ は $\mathrm{L}^p(X,\mathcal{F},m)$ におけるノルムとなる． ∎

命題 1.7 (L^p の完備性).　上で定義したノルム空間 $\mathrm{L}^p(X,\mathcal{F},m)$ は Banach 空間である．$(1 \leq p \leq \infty)$

証明.　任意に $\mathrm{L}^p(X,\mathcal{F},m)$ の Cauchy 列 $[f_n] \in \mathrm{L}^p(X,\mathcal{F},m)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ を取る．Cauchy 列であるから 1/2 に対して或る $N_1 \in \mathbb{N}$ が取れて，$n > m \geq N_1$ ならば $\|[f_n]-[f_m]\|_{\mathrm{L}^p} = \|[f_n - f_m]\|_{\mathrm{L}^p} < 1/2$ となる．ここで $m = n_1$ と表記することにする．同様に $1/2^2$ に対して或る $N_2 \in \mathbb{N}$ $(N_2 > N_1)$ が取れて，$n' > m' \geq N_2$ ならば $\|[f_{n'} - f_{m'}]\|_{\mathrm{L}^p} < 1/2^2$ となる．先ほどの n について，$n > N_2$ となるように取れるからこれを $n = n_2$ と表記し，更に $m' = n_2$ ともしておく．今のところ

$$\left\|[f_{n_1} - f_{n_2}]\right\|_{\mathrm{L}^p} < 1/2$$

と表示できる．再び同様に $1/2^3$ に対して或る $N_3 \in \mathbb{N}$ $(N_3 > N_2)$ が取れて，$n'' > m'' \geq N_2$ ならば $\|[f_{n''} - f_{m''}]\|_{\mathrm{L}^p} < 1/2^3$ となる．先ほどの n' について $n' > N_3$ となるように取れるからこれを

$n' = n_3$ と表記し，更に $m'' = n_3$ ともしておく．今までのところで

$$\left\| [f_{n_1} - f_{n_2}] \right\|_{\mathrm{L}^p} < 1/2$$
$$\left\| [f_{n_2} - f_{n_3}] \right\|_{\mathrm{L}^p} < 1/2^2$$

が成り立っている．数学的帰納法により

$$\left\| [f_{n_k} - f_{n_{k+1}}] \right\|_{\mathrm{L}^p} < 1/2^k \quad (n_{k+1} > n_k,\ k = 1, 2, 3, \cdots) \tag{3}$$

が成り立つように自然数の部分列 $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ を取ることができる．

$p = \infty$ の場合

$[f_{n_k}]$ の代表元 f_{n_k} について，

$$A_k \coloneqq \left\{ x \in X \quad | \quad |f_{n_k}(x)| > \left\| f_{n_k} \right\|_{\mathscr{L}^\infty} \right\},$$
$$A^k \coloneqq \left\{ x \in X \quad | \quad |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| > \left\| f_{n_k} - f_{n_{k+1}} \right\|_{\mathscr{L}^\infty} \right\}$$

とおけば Hölder の不等式の証明中の補助定理より $m(A_k) = m(A^k) = 0$ であり，

$$A \coloneqq \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) \bigcup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A^k \right)$$

として m-零集合を定め

$$\hat{f}_{n_k}(x) = \begin{cases} f_{n_k}(x) & (x \notin A) \\ 0 & (x \in A) \end{cases} \quad (\forall x \in X)$$

と定義した $\hat{f}_{n_k}$ もまた $[f_{n_k}]$ の元となる．代表元を f_{n_k} に替えて $\hat{f}_{n_k}$ とすれば，$\hat{f}_{n_k}$ は X 上の有界可測関数であり

$$\left\| \hat{f}_{n_k} - \hat{f}_{n_{k+1}} \right\|_{\mathscr{L}^\infty} = \sup_{x \in X} |\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}_{n_{k+1}}(x)| < 1/2^k \quad (k = 1, 2, 3, \cdots) \tag{4}$$

が成り立っていることになるから，各点 $x \in X$ で $\left(\hat{f}_{n_k}(x)\right)_{k=1}^{\infty}$ は $\mathbb{K}$ の Cauchy 列となる．(これは $\sum_{k>N} 1/2^k = 1/2^N \longrightarrow 0\ (N \longrightarrow \infty)$ による．) 従って各点 $x \in X$ で極限が存在するからこれを $\hat{f}(x)$ として表す．一般に距離空間に値を取る可測関数列の各点収束の極限関数は可測関数であるから $\hat{f}$ もまた可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ である．また $\hat{f}$ は有界である．これは次のように示される．式 (4) から任意の $l > k$ に対し

$$|\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}_{n_l}(x)| \leq \sum_{j=k}^{l-1} |\hat{f}_{n_j}(x) - \hat{f}_{n_{j+1}}(x)| \leq \sum_{j=k}^{l-1} \sup_{x \in X} |\hat{f}_{n_j}(x) - \hat{f}_{n_{j+1}}(x)| < 1/2^{k-1}$$

が成り立つから，極限関数 $\hat{f}(x)$ も

$$\sup_{x \in X} |\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}(x)| \leq 1/2^{k-1} \tag{5}$$

を満たすことになる．なぜなら，もし或る $x \in X$ で $\alpha \coloneqq |\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}(x)| > 1/2^{k-1}$ となる場合，任意の $l > k$ に対し

$$0 < \alpha - 1/2^{k-1} < |\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}(x)| - |\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}_{n_l}(x)| \leq |\hat{f}_{n_l}(x) - \hat{f}(x)|$$

となり各点収束に反するからである．不等式 (5) により任意の $x \in X$ において

$$|\hat{f}(x)| < |\hat{f}_{n_k}(x)| + 1/2^{k-1} \leq \left\| \hat{f}_{n_k} \right\|_{\mathscr{L}^\infty} + 1/2^{k-1}$$

が成り立ち $\hat{f}$ の有界性が判る．以上で極限関数 $\hat{f}$ が有界可測関数であると示された．$\hat{f}$ を代表元とする $[\hat{f}] \in \mathrm{L}^\infty(X, \mathcal{F}, m)$ に対し，不等式 (5) により

$$\left\| [f_{n_k}] - [\hat{f}] \right\|_{\mathrm{L}^\infty} = \left\| \hat{f}_{n_k} - \hat{f} \right\|_{\mathscr{L}^\infty} = \sup_{x \in X} |\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}(x)| \longrightarrow 0 \ (k \longrightarrow \infty)$$

が成り立つから，Cauchy 列 $([f_n])_{n=1}^\infty$ の部分列 $([f_{n_k}])_{k=1}^\infty$ が $[\hat{f}]$ に収束すると示された．Cauchy 列の部分列が収束すれば，元の Cauchy 列はその部分列と同じ収束先に収束するから $\mathrm{L}^\infty(X, \mathcal{F}, m)$ は Banach 空間である．

$1 \leq p < \infty$ の場合

$[f_{n_k}]$ の代表元 f_{n_k} に対して

$$f_{n_k}(x) \coloneqq f_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{k} (f_{n_j}(x) - f_{n_{j-1}}(x)) \tag{6}$$

と表現できるから，これに対して

$$g_k(x) \coloneqq |f_{n_1}(x)| + \sum_{j=1}^{k} |f_{n_j}(x) - f_{n_{j-1}}(x)|$$

として可測関数列 $(g_k)_{k=1}^\infty$ を用意する．Minkowski の不等式と式 (3) より

$$\| g_k \|_{\mathscr{L}^p} \leq \left\| f_{n_1} \right\|_{\mathscr{L}^p} + \sum_{j=1}^{k} \left\| f_{n_j} - f_{n_{j-1}} \right\|_{\mathscr{L}^p} < \left\| f_{n_1} \right\|_{\mathscr{L}^p} + \sum_{j=1}^{k} 1/2^j < \left\| f_{n_1} \right\|_{\mathscr{L}^p} + 1 < \infty$$

が成り立つ．各点 $x \in X$ で $g_k(x)$ は k について単調増大であるから，単調収束定理より

$$\| g \|_{\mathscr{L}^p}^p = \lim_{k \to \infty} \| g_k \|_{\mathscr{L}^p}^p < \left\| f_{n_1} \right\|_{\mathscr{L}^p} + 1 < \infty$$

となるので $g \in \mathrm{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$ である．従って

$$B_n \coloneqq \{\, x \in X \quad | \quad g(x) \leq n \,\} \in \mathcal{F},$$
$$B \coloneqq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

とおけば $m(X \backslash B) = 0$ であり，式 (6) の級数は B 上で絶対収束する (各点).

$$f(x) \coloneqq \begin{cases} \lim_{k \to \infty} f_{n_k}(x) & (x \in B) \\ 0 & (x \in X \backslash B) \end{cases}$$

として可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ 関数 f を定義すれば，$|f(x)| \leq g(x)$ $(\forall x \in X)$ と g^p が可積分であることから f を代表元とする同値類 $[f]$ は $\mathrm{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$ の元となる．関数列 $((f_{n_k})_{k=1}^\infty)$ は f に概収束し，$|f_{n_k}(x) - f(x)|^p \leq 2^p(|f_{n_k}(x)|^p + |f(x)|^p) \leq 2^{p+1} g(x)^p$ $(\forall x \in X)$ となるから Lebesgue の収束定理により

$$\lim_{k \to \infty} \left\| [f_{n_k}] - [f] \right\|_{\mathrm{L}^p}^p = \lim_{k \to \infty} \left\| f_{n_k} - f \right\|_{\mathscr{L}^p}^p = \lim_{k \to \infty} \int_X |f_{n_k}(x) - f(x)|^p \, m(dx) = 0$$

が成り立ち，Cauchy 列 $([f_n])_{n=1}^\infty$ の部分列 $([f_{n_k}])_{k=1}^\infty$ が $[f]$ に収束すると示された．Cauchy 列の部分列が収束すれば，元の Cauchy 列はその部分列と同じ収束先に収束するから $\mathrm{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$ は Banach 空間である．

∎

次節への準備として，ノルム空間における線型作用素の拡張定理と Hilbert 空間における射影定理を載せておく．

定理 1.8 (線型作用素の拡張). 係数体を $\mathbb{K}$ とする．X, Y を Banach 空間とし，ノルムをそれぞれ $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$ と表記する．X の部分空間 X_0 が X で稠密なら，X から Y への任意の有界線型作用素 T (T の定義域は X_0) に対し，作用素ノルムを変えない T の拡張 $\tilde{T}$ (定義域 X) で，X から Y への有界線型作用素となるものが一意に存在する．

証明. 作用素ノルムは $\|\cdot\|$ と表記する．X_0 が X で稠密であるということにより，任意の $x \in X$ に対して $x_n \in X_0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ で $\|x_n - x\|_X \longrightarrow 0$ $(k \longrightarrow +\infty)$ となるものを取ることができる．任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\|Tx_m - Tx_n\|_Y \leq \|T\| \|x_m - x_n\|_X$$

が成り立つから，右辺が X_0 の Cauchy 列をなすことにより $(Tx_n)_{n=1}^{+\infty}$ も Y の Cauchy 列となる．Y の完備性から $(Tx_n)_{n=1}^{+\infty}$ は或る $y \in Y$ に収束し，y は $x \in X$ に対して一意に定まる．なぜならば，x への別の収束列 $z_n \in X_0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を取った場合の $(Tz_n)_{n=1}^{+\infty}$ の収束先が $u \in \mathbb{C}$ であるとして，任意の $n, m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
\|y - u\|_Y &= \|y - Tx_n + Tx_n - Tz_m + Tz_m - u\|_Y \\
&\leq \|y - Tx_n\|_Y + \|Tx_n - Tz_m\|_Y + \|Tz_m - u\|_Y \\
&\leq \|y - Tx_n\|_Y + \|T\| \|x_n - z_m\|_X + \|Tz_m - u\|_Y \\
&\leq \|y - Tx_n\|_Y + \|T\| (\|x_n - x\|_X + \|x - z_m\|_X) + \|Tz_m - u\|_Y
\end{aligned}$$

となるから $n, m \longrightarrow +\infty$ で右辺は 0 に収束し，$y = u$ が示されるためである．つまり x に y を対応させる関係は $X \longmapsto Y$ の写像となり，この写像を $\tilde{T}$ と表すことにする．T の線型性も次のように示される．任意の $x,\ z \in X,\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{K}$ に対して，x, z への収束列 $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$, $(z_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X_0$ を取れば $(\alpha x_n + \beta z_n)_{n=1}^{+\infty}$ が $\alpha x + \beta z$ への収束列となるから

$$\begin{aligned}
\left\|\tilde{T}(\alpha x + \beta z) - \alpha\tilde{T}x - \beta\tilde{T}z\right\|_Y &= \left\|\tilde{T}(\alpha x + \beta z) - T(\alpha x_n + \beta z_n) + \alpha Tx_n + \beta Tz_n - \alpha\tilde{T}x - \beta\tilde{T}z\right\|_Y \\
&\leq \left\|\tilde{T}(\alpha x + \beta z) - T(\alpha x_n + \beta z_n)\right\|_Y + \left\|\alpha Tx_n - \alpha\tilde{T}x\right\|_Y + \left\|\beta Tz_n - \beta\tilde{T}z\right\|_Y \\
&\leq \left\|\tilde{T}(\alpha x + \beta z) - T(\alpha x_n + \beta z_n)\right\|_Y + |\alpha| \left\|Tx_n - \tilde{T}x\right\|_Y + |\beta| \left\|Tz_n - \tilde{T}z\right\|_Y \\
&\longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow +\infty)
\end{aligned}$$

が成り立つ．ゆえに $\tilde{T}(\alpha x + \beta z) = \alpha\tilde{T}x + \beta\tilde{T}z$ $(\forall x,\ z \in X,\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{K})$ である．また $\tilde{T}$ は有界な線型作用素である．なぜなら，任意に $x \in X$ と x への収束列 $x_n \in X_0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を取れば，任意の $\epsilon > 0$ に対し或る $K \in \mathbb{N}$ が存在して全ての $k > K$ について

$$\left\|\tilde{T}x\right\|_Y < \|Tx_n\|_Y + \epsilon, \quad \|x\|_X < \|x_n\|_X + \epsilon / \|T\|$$

が成り立つようにできるから，この下で

$$\left\|\tilde{T}x\right\|_Y < \|Tx\|_Y + \epsilon < \|T\| \|x\|_X + 2\epsilon$$

となり $\left\|\tilde{T}\right\| \leq \|T\|$ が判るからである．さらに

$$\left\|\tilde{T}\right\| = \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|_X=1}} \left\|\tilde{T}x\right\|_Y \geq \sup_{\substack{x\in X_0 \\ \|x\|_X=1}} \left\|\tilde{T}x\right\|_Y = \sup_{\substack{x\in X_0 \\ \|x\|_X=1}} \|Tx\|_Y = \|T\|$$

も成り立つから結局 $\left\|\tilde{T}\right\| = \|T\|$ であると判る．以上より任意の有界線型作用素 T がノルムを変えないまま或る有界線型作用素 $\tilde{T}$ に拡張されることが示された．拡張が一意であることは X_0 が X で稠密であることと T の連続性による． ∎

定理 1.9 (射影定理).

証明.

射影の存在　$f \in H\backslash C$ として

$$\delta := \inf_{h\in C} \|f-h\|$$

とおく．C が閉集合で f が C の外にあるから $\delta > 0$ となる．下限の性質から $h_n \in C$ $(n = 1,2,3,\cdots)$ を取って

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \|f-h_n\|$$

となるようにできるから，任意の $\epsilon > 0$ に対して或る $N \in \mathbb{N}$ が存在して $n > N$ ならば $\|f-h_n\|^2 < \delta + \epsilon/4$ が成り立つ．この N に対し $n,m > N$ ならば，内積空間の中線定理と $(h_n+h_m)/2 \in C$ であることにより

$$\begin{aligned}\|h_n-h_m\|^2 &= 2\left(\|f-h_m\|^2 + \|f-h_n\|^2\right) - \|2f-(h_n+h_m)\|^2 \\ &= 2\left(\|f-h_m\|^2 + \|f-h_n\|^2\right) - 4\left\|f - \frac{h_n+h_m}{2}\right\|^2 \\ &< 2\delta + \epsilon - 4\delta = \epsilon\end{aligned}$$

とできるから $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ は C の Cauchy 列であると判る．H が Hilbert 空間であり C が H で閉だから，$(h_n)_{n=1}^{\infty}$ の極限 $y \in H$ が存在し $y \in C$ である．

$$\left|\delta - \|f-y\|\right| \leq \left|\delta - \|f-h_n\|\right| + \left|\|f-h_n\| - \|f-y\|\right| \leq \left|\delta - \|f-h_n\|\right| + \|h_n-y\| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

によって $\delta = \|f-y\|$ が成り立つこと，すなわち射影の存在が示された．$f \in C$ の場合は f が自身の射影である．

射影の一意性　$z \in C$ もまた $\delta = \|f-z\|$ を満たすとすれば，C の凸性により

$$2\delta \leq 2\left\|f - \frac{y+z}{2}\right\| \leq \|f-y\| + \|f-z\| = 2\delta$$

が成り立つから，中線定理より

$$\|y-z\|^2 = 2\left(\|f-z\|^2 + \|f-y\|^2\right) - 4\left\|f - \frac{y+z}{2}\right\|^2 = 0$$

となって $y = z$ が判る．すなわち f の射影はただ一つに決まる．

C が閉部分空間の場合　$f \in H \backslash C$ に対して f の C への射影を $y \in C$ (存在は C が凸の場合と全く同様に示される．) とする．($f \in C$ の場合は $y = f$ である．) 或る $h \in C$ に対して

$$\langle f - y,\ h \rangle \neq 0$$

となると仮定すれば ($f \neq y$ より $h \neq 0$)，C の元 $\hat{y} \coloneqq y + \left(\langle f - g, h \rangle / \| h \|^2 \right) h$ に対して

$$\begin{aligned} \| f - \hat{y} \|^2 &= \left\langle f - y - \frac{\langle f - g, h \rangle}{\| h \|^2} h,\ f - y - \frac{\langle f - g, h \rangle}{\| h \|^2} h \right\rangle \\ &= \| f - y \|^2 - \frac{|\langle f - g, h \rangle|^2}{\| h \|^2} \qquad < \| f - y \|^2 \end{aligned}$$

が成り立つから y が射影であることに反する．従って射影 y に対しては

$$\langle f - y,\ h \rangle \neq 0 \quad (\forall h \in C) \tag{7}$$

が成り立つ．逆に $y \in C$ に対して式 (7) が成り立っているとすれば y が f の射影であることも示される．任意の $h \in C$ に対して

$$\begin{aligned} \| f - h \|^2 &= \langle f - y + y - h,\ f - y + y - h \rangle \\ &= \| f - y \|^2 + 2\Re\mathrm{e} \langle f - y,\ y - h \rangle + \| y - h \|^2 \\ &= \| f - y \|^2 + \| y - h \|^2 \\ &\geq \| f - y \|^2 \end{aligned}$$

となることにより $\| f - y \| = \inf_{h \in C} \| f - h \|$ であることが示された．

2　Sobolev 空間について

係数体を $\mathbb{K}$，$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 或は $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ と考える．測度空間を $(X, \mathcal{F}, m)$ とする．

定義 2.1 (絶対連続関数).　$I \coloneqq [a, b]$ を $\mathbb{R}$ の区間とする．I 上の関数 $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ が絶対連続であるとは，任意の $a \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \cdots \leq a_n < b_n \leq b$, $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ と任意の $\epsilon > 0$ に対し，或る $\delta > 0$ が存在して

$$\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon$$

が成り立つことをいう．

定理 2.2 (絶対連続の同値条件).　測度空間を $(X, \mathcal{F}, m)$ とする．

定義 2.3 (Sobolev 空間).

3　10/11

基礎におく確率空間を $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ とする．係数体を $\mathbb{R}$ として考えると，ノルム空間 $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ は

$$\langle [f], [g] \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} := \int_\Omega f(x)g(x)\,\mu(dx) \quad \big([f], [g] \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)\big)$$

を内積として Hilbert 空間となる．これは次のように示される．まず左辺は代表元の選び方に依らない．任意に $f' \in [f]$ と $g' \in [g]$ を取っても，

$$\begin{aligned} E &:= \{\, x \in \Omega \quad | \quad f(x) \neq f'(x) \,\}, \\ F &:= \{\, x \in \Omega \quad | \quad g(x) \neq g'(x) \,\} \end{aligned}$$

とした E, F は μ-零集合であって

$$\int_\Omega f(x)g(x)\,\mu(dx) = \int_{\Omega\setminus(E\cup F)} f(x)g(x)\,\mu(dx) = \int_{\Omega\setminus(E\cup F)} f'(x)g'(x)\,\mu(dx) = \int_\Omega f'(x)g'(x)\,\mu(dx)$$

が成り立つからである．二乗可積分な関数を扱っているから上式中の積分は全て有限確定であり，つまり $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}$ が実数値として確定している．また内積の公理を満たすことも次のように示される．

正値性　任意の $[f] \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ に対して，ノルム $\|[f]\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}$ との対応から $\langle [f], [f] \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} \geq 0$ と $\langle [f], [f] \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0 \Leftrightarrow [f] = [0]$ が成り立つ．

対称性　任意の $[f], [g] \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ に対して

$$\langle [f], [g] \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = \int_\Omega f(x)g(x)\,\mu(dx) = \int_\Omega g(x)f(x)\,\mu(dx) = \langle [g], [f] \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}$$

が成り立つ．

双線型性　任意の $[f], [g], [h] \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ と $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} \langle [f], [g] + [h] \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} &= \langle [f], [g+h] \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} \\ &= \int_\Omega f(x)(g(x) + h(x))\,\mu(dx) \\ &= \int_\Omega f(x)g(x)\,\mu(dx) + \int_\Omega f(x)h(x)\,\mu(dx) \quad (\because \ fg \text{ も } fh \text{ も可積分である．}) \\ &= \langle [f], [g] \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} + \langle [f], [h] \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}, \\ \langle \alpha[f], [g] \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} &= \langle [\alpha f], [g] \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} \\ &= \int_\Omega \alpha f(x)g(x)\,\mu(dx) \\ &= \alpha \int_\Omega f(x)g(x)\,\mu(dx) \\ &= \alpha \langle [f], [g] \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} \end{aligned}$$

が成り立つことと対称性による．

そしてノルム空間としての完備性から $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ は Hilbert 空間となる．

$\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ を部分 σ-加法族として別の Hilbert 空間 $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ を考えれば，任意の $\langle g \rangle \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ (空間が違うことを意識するために元の表示を変えた) に対し g は可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であるから，対応する $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ の元 $[g]$ が存在する．$\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ より $\langle g \rangle \subset [g]$ であって必ずしも $\langle g \rangle = [g]$ ではないが，単射

$$\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu) \ni \langle g \rangle \longmapsto [g] \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$$

によって $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ は $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ に等長に埋め込まれ，$\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ の完備性から埋め込まれた部分集合は $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ の閉部分空間となる．この部分集合を $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ と同一視し，

$$\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu) \subset \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$$

と考えることにする．以上の準備の下，以降では同値類と関数は表記上で区別することはせず，$f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ と表現することで，この f に同値類 $[f]$ としての意味と，代表元の関数 f としての意味の両方を持たせる．

定義 3.1 (条件付き期待値). $f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ に対して，射影定理により一意に定まる射影 $g \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ (上で断った通り，実際は g は $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ に埋め込まれた部分にある元を表している) を

$$g = \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}]$$

と表現し，これを $\mathcal{G}$ で条件付けた f の条件付き期待値と呼ぶ．$\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ の場合は特別に

$$\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] = \mathrm{E}[f]$$

と書いて f の期待値と呼ぶ．

レポート問題 2.
Hilbert 空間 $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ における内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}$，ノルムを $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}$ と表示する．次の C1 ~ C6 を示せ．

C1 $\quad \forall f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

$$\mathrm{E}[f] = \int_\Omega f(x)\, \mu(dx)$$

C2 $\quad \forall f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu),\ \forall h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$

$$\int_\Omega f(x)h(x)\, \mu(dx) = \int_\Omega \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x)h(x)\, \mu(dx)$$

C3 $\quad \forall f_1, f_2 \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

$$\mathrm{E}[f_1 + f_2 \mid \mathcal{G}] = \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}] + \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}]$$

C4 $\quad \forall f_1, f_2 \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

$$f_1 \le f_2 \quad \text{a.s.} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}] \le \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}] \quad \text{a.s.}$$

C5　$\forall f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, $\forall g \in \mathrm{L}^\infty(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$

$$\mathrm{E}[gf \mid \mathcal{G}] = g\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}]$$

C6　$\mathcal{H}$ が $\mathcal{G}$ の部分 σ-加法族ならば $\forall f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

$$\mathrm{E}\big[\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \,\big|\, \mathcal{H}\big] = \mathrm{E}[f \mid \mathcal{H}]$$

証明．C1　$\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ とすれば，$\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ の元は $\mathcal{G}$-可測でなくてはならないから Ω 上の定数関数である．従って各 $g \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ には定数 $\alpha \in \mathbb{R}$ が対応して $g(x) = \alpha\ (\forall x \in \Omega)$ と表せる．射影定理より任意の $f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ の $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ への射影 $\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] = \mathrm{E}[f]$ はノルム $\|f - g\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}$ を最小にする $g \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ である．$g(x) = \alpha\ (\forall x \in \Omega)$ としてノルムを直接計算すれば，

$$\begin{aligned}
\|f - g\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} &= \int_\Omega |f(x) - \alpha|^2\, \mu(dx) \\
&= \int_\Omega |f(x)|^2 - 2\alpha f(x) + |\alpha|^2\, \mu(dx) \\
&= \int_\Omega |f(x)|^2\, \mu(dx) - 2\alpha \int_\Omega f(x)\, \mu(dx) + |\alpha|^2 \\
&= \left|\alpha - \int_\Omega f(x)\, \mu(dx)\right|^2 - \left|\int_\Omega f(x)\, \mu(dx)\right|^2 + \int_\Omega |f(x)|^2\, \mu(dx) \\
&= \left|\alpha - \int_\Omega f(x)\, \mu(dx)\right|^2 + \int_\Omega |f(x) - \beta|^2\, \mu(dx) \qquad \left(\beta := \int_\Omega f(x)\, \mu(dx)\right)
\end{aligned}$$

と表現できて最終式は $\alpha = \int_\Omega f(x)\, \mu(dx)$ で最小となる．すなわち

$$\mathrm{E}[f] = \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] = \int_\Omega f(x)\, \mu(dx).$$

C2　射影定理により，$f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ の $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ への射影 $\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}]$ は

$$\langle f - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0 \quad (\forall h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu))$$

を満たし，内積の線型性から

$$\langle f, h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = \langle \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} \quad (\forall h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu))$$

が成り立つ．積分の形式で表示することにより

$$\int_\Omega f(x)h(x)\, \mu(dx) = \int_\Omega \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x)h(x)\, \mu(dx) \quad (\forall h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu))$$

が示された．

C3　射影定理により任意の $h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ に対して

$$\begin{aligned}
&\langle (f_1 + f_2) - \mathrm{E}[f_1 + f_2 \mid \mathcal{G}], h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0, \\
&\langle f_1 - \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}], h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0, \\
&\langle f_2 - \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}], h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0
\end{aligned}$$

が成り立っている．従って任意の $h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ に対して

$$0 = \langle (f_1 + f_2) - \mathrm{E}[f_1 + f_2 \mid \mathcal{G}], h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} - \langle f_1 - \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}], h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} - \langle f_2 - \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}], h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}$$

$$\begin{aligned} &= \langle (f_1 + f_2) - \mathrm{E}[f_1 + f_2 \mid \mathcal{G}], h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} - \langle (f_1 + f_2) - (\mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}] + \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}]), h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} \\ &= \langle \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}] + \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}] - \mathrm{E}[f_1 + f_2 \mid \mathcal{G}], h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} \end{aligned}$$

となり，特に $h = \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}] + \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}] - \mathrm{E}[f_1 + f_2 \mid \mathcal{G}] \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ とすれば

$$\left\| \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}] + \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}] - \mathrm{E}[f_1 + f_2 \mid \mathcal{G}] \right\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0$$

が成り立つことになるから

$$\mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}] + \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}] = \mathrm{E}[f_1 + f_2 \mid \mathcal{G}]$$

が示された．

C4　「任意の $f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ に対して，$f \geq 0$ a.s. ならば $\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \geq 0$ a.s.」—(※) を示せばよい．これが示されれば $f_1, f_2 \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ で $f_1 \leq f_2$ a.s. となるものに対し

$$0 \leq f_2 - f_1 \text{ a.s.} \quad \Rightarrow 0 \leq \mathrm{E}[f_2 - f_1 \mid \mathcal{G}] = \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}] - \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}] \text{ a.s.}$$

が成り立つ．しかし，この場合本題に入る前に次の命題を証明する必要がある．これは等号 $\mathrm{E}[f_2 - f_1 \mid \mathcal{G}] = \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}] - \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}]$ が成り立つことを保証するためである．

命題 3.2.　考えている空間は今までと同じ Hilbert 空間 $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ である．任意の実数 α と任意の $f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ に対して次が成立する:

$$\mathrm{E}[\alpha f \mid \mathcal{G}] = \alpha \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}].$$

証明.　射影定理より

$$\langle f - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0, \quad \langle \alpha f - \mathrm{E}[\alpha f \mid \mathcal{G}], h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0 \quad (\forall h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu))$$

が成り立っているから

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{E}[\alpha f \mid \mathcal{G}] - \alpha \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} &= \langle \mathrm{E}[\alpha f \mid \mathcal{G}] - \alpha f, h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} - \langle \alpha \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] - \alpha f, h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} \\ &= \langle \mathrm{E}[\alpha f \mid \mathcal{G}] - \alpha f, h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} - \alpha \langle f - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} \\ &= 0. \quad (\forall h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)) \end{aligned}$$

特に $h = \mathrm{E}[\alpha f \mid \mathcal{G}] - \alpha \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ として

$$\left\| \mathrm{E}[\alpha f \mid \mathcal{G}] - \alpha \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \right\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0$$

だから $\mathrm{E}[\alpha f \mid \mathcal{G}] = \alpha \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}]$ が成り立つ． ∎

次に (※) を示す．

$$\begin{aligned} A &:= \{x \in \Omega \mid \quad f(x) < 0\} && (\in \mathcal{F}), \\ B &:= \{x \in \Omega \mid \quad \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x) < 0\} && (\in \mathcal{G}) \end{aligned}$$

として $\mu(A)=0 \quad \Rightarrow \quad \mu(B)=0$ が成り立つと言えばよく，$\mu(A)=0$ の下で $\mu(B)>0$ と仮定しては不合理であることを以下に記述する．

$\mu(A)=0,\ \mu(B)>0$ であるとする．$\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ の元を

$$h(x) := \begin{cases} \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x) & (x \in B^c) \\ 0 & (x \in B) \end{cases}$$

として定義すると

$$\begin{aligned}
\|f-h\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} &= \int_\Omega |f(x)-h(x)|^2\,\mu(dx) \\
&= \int_{A^c\cap B^c} |f(x)-h(x)|^2\,\mu(dx) + \int_{A^c\cap B} |f(x)-h(x)|^2\,\mu(dx) \\
&= \int_{A^c\cap B^c} |f(x)-\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x)|^2\,\mu(dx) + \int_{A^c\cap B} |f(x)|^2\,\mu(dx) \\
&< \int_{A^c\cap B^c} |f(x)-\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x)|^2\,\mu(dx) + \int_{A^c\cap B} |f(x)-\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x)|^2\,\mu(dx) \\
&= \left\| f-\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \right\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}
\end{aligned}$$

が成り立つ．これは $\mu(A)=0$ であること，$\mu(A^c\cap B)=\mu(B)-\mu(A\cap B)=\mu(B)>0$ であること，それから $A^c\cap B$ の上で

$$|f(x)-\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x)|^2-|f(x)|^2 = (f(x)-\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x)+f(x))(-\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x))>0$$
$$(\because f(x)\geq 0,\ \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x)<0, \quad \forall x\in A^c\cap B)$$

が成り立っていることによる．上の結果，すなわち

$$\|f-h\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} < \left\| f-\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \right\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}$$

を満たす $h\in\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ が存在することは $\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}]$ が f の射影であることに違反している．以上より $\mu(B)=0$ でなくてはならず，(※) が示された．

C5 $\left\| \mathrm{E}[gf \mid \mathcal{G}] - g\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \right\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}=0$ が成り立つことを示す．任意の $h\in\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ に対して

$$\langle \mathrm{E}[gf \mid \mathcal{G}] - g\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = \langle \mathrm{E}[gf \mid \mathcal{G}] - gf, h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} + \langle gf - g\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}$$

を考えると，右辺が 0 になることが次のように証明される．先ず右辺第一項について，gf は $\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ に入る．g は或る μ-零集合 $E\in\mathcal{G}$ を除いて有界であるから，或る正数 α によって $|g(x)|\leq\alpha\ (\forall x\in E^c)$ と抑えられ，

$$\int_\Omega |g(x)f(x)|^2\,\mu(dx) = \int_{E^c} |g(x)|^2|f(x)|^2\,\mu(dx) \leq \alpha^2\int_{E^c} |f(x)|^2\,\mu(dx) = \alpha^2\int_\Omega |f(x)|^2\,\mu(dx) < \infty$$

が成り立つからである．従って射影定理により

$$\langle \mathrm{E}[gf \mid \mathcal{G}] - gf, h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0 \quad (\forall h\in\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu)).$$

右辺第二項について，

$$\langle gf - g\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = \int_\Omega (f(x)-\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x))\,g(x)h(x)\,\mu(dx) = \langle f-\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], gh\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}$$

であって，先と同様の理由で $gh \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ $(\forall h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu))$ が成り立つから射影定理より

$$\langle gf - g\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0 \quad (\forall h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu))$$

であると判明した．始めの式に戻れば

$$\langle \mathrm{E}[gf \mid \mathcal{G}] - g\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0 \quad (\forall h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu))$$

が成り立つことになり，特に $h = \mathrm{E}[gf \mid \mathcal{G}] - g\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ に対しては

$$\left\| \mathrm{E}[gf \mid \mathcal{G}] - g\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \right\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}^2 = 0$$

となることから $\mathrm{E}[gf \mid \mathcal{G}] = g\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}]$ が示された．

C6　任意の $h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{H}, \mu) \subset \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ に対し，射影定理より

$$\begin{aligned}
&\left\langle \mathrm{E}\left[\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \,\middle|\, \mathcal{H}\right] - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{H}], h\right\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} \\
&= \left\langle \mathrm{E}\left[\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \,\middle|\, \mathcal{H}\right] - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h\right\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} \\
&\quad + \langle \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] - f, h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} + \langle f - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{H}], h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0
\end{aligned}$$

が成り立つ．特に $h = \mathrm{E}\left[\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \,\middle|\, \mathcal{H}\right] - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{H}] \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{H}, \mu)$ とすれば

$$\left\| \mathrm{E}\left[\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \,\middle|\, \mathcal{H}\right] - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{H}] \right\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}^2 = 0$$

ということになるので $\mathrm{E}\left[\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \,\middle|\, \mathcal{H}\right] = \mathrm{E}[f \mid \mathcal{H}]$ であることが示された．

∎

レポート問題 2[C3] と [C4] 中の命題より，条件付き期待値が $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ からその部分空間 ($\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ と同一視) への線型作用素であることが示された．Hölder の不等式の不等式により $f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ は (代表元の関数が) 可積分関数であるから $f \in \mathrm{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ であり，すなわち $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ は $\mathrm{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ の部分空間であると判る．同様に $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ は $\mathrm{L}^1(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ の部分空間であるから，条件付き期待値は $\mathrm{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ から $\mathrm{L}^1(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ (埋め込まれた部分空間と同一視している) への線型作用素と見ることができる．次に考えることは，線型作用素として見た条件付き期待値の拡張である．条件付き期待値が $\mathrm{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ から $\mathrm{L}^1(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ への作用素として有界であり，更に定義域 $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ が $\mathrm{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ において稠密であるならば拡張は可能となる．

補題 3.3 (条件付き期待値の有界性).　条件付き期待値について次が成り立つ:

$$\sup_{\substack{f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu) \\ f \neq 0}} \frac{\left\| \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)}}{\| f \|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)}} \leq 1.$$

証明. f, $\mathrm{E}[f\mid\mathcal{G}]$ を代表元の関数として扱えば次のように計算できる.

$$
\begin{aligned}
\left\|\mathrm{E}[f\mid\mathcal{G}]\right\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)} &= \int_\Omega \mathrm{E}[f\mid\mathcal{G}](\omega)\,\mu(dx)\\
&= \int_\Omega \mathrm{E}[f\mid\mathcal{G}](\omega)\mathbb{1}_{(\mathrm{E}[f\mid\mathcal{G}]\geq 0)}(\omega) + \mathrm{E}[f\mid\mathcal{G}](\omega)\mathbb{1}_{(\mathrm{E}[f\mid\mathcal{G}]<0)}(\omega)\,\mu(dx)\\
&= \int_\Omega f(\omega)\mathbb{1}_{(\mathrm{E}[f\mid\mathcal{G}]\geq 0)}(\omega) + f(\omega)\mathbb{1}_{(\mathrm{E}[f\mid\mathcal{G}]<0)}(\omega)\,\mu(dx) && (\because \text{ レポート問題 2[C2]})\\
&\leq \int_\Omega |f(\omega)|\mathbb{1}_{(\mathrm{E}[f\mid\mathcal{G}]\geq 0)}(\omega) + |f(\omega)|\mathbb{1}_{(\mathrm{E}[f\mid\mathcal{G}]<0)}(\omega)\,\mu(dx)\\
&= \|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)}\,.
\end{aligned}
$$

∎

定理 3.4 (条件付き期待値の拡張). 定義域を $\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ としている条件付き期待値を, $\mathrm{L}^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ を定義域とする有界線型作用素に (作用素ノルムを変えずに) 一意に拡張することができる. つまりこの拡張された作用素を $\tilde{\mathrm{E}}[\cdot\mid\mathcal{G}]$ と表示すれば

$$\mathrm{L}^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)\ni f\longmapsto \tilde{\mathrm{E}}[f\mid\mathcal{G}]\in\mathrm{L}^1(\Omega,\mathcal{G},\mu)$$

が有界な線型作用素となり, 更にレポート問題 2 の [C1]~[C6] が L^2 を L^1 に置き換えて成り立つ.

$\mathcal{G}=\{\emptyset,\ \Omega\}$ である場合は $\tilde{\mathrm{E}}[f\mid\mathcal{G}]=\tilde{\mathrm{E}}[f]$ と表示することにする.

証明. 定理の主張する拡張が可能であることを示すには, $\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ が $\mathrm{L}^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ で稠密なことをいえばよい. 任意の $f\in\mathrm{L}^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ に対して,

$$f_n(x) \coloneqq f(x)\mathbb{1}_{|f|\leq n}(x)\quad (\forall x\in\Omega,\ n=1,2,3,\cdots)$$

とおけば $(f_n)_{n=1}^\infty\subset\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ となり, 関数列として f に各点収束しているから, Lebesgue の収束定理より

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)}=0$$

が成り立つ. これで $\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ が $\mathrm{L}^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ で稠密であることが示された. 次にレポート問題 2 の [C1]~[C6] が L^2 が L^1 に置き換えても成り立つことを示す. 以下に主張を書き直す.

$\tilde{\mathrm{C}}1$ $\quad\forall f\in\mathrm{L}^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$

$$\tilde{\mathrm{E}}[f]=\int_\Omega f(x)\,\mu(dx)$$

$\tilde{\mathrm{C}}2$ $\quad\forall f\in\mathrm{L}^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$, $\forall h\in\mathrm{L}^\infty(\Omega,\mathcal{G},\mu)$

$$\int_\Omega f(x)h(x)\,\mu(dx)=\int_\Omega\tilde{\mathrm{E}}[f\mid\mathcal{G}](x)h(x)\,\mu(dx)$$

$\tilde{\mathrm{C}}3$　$\forall f_1, f_2 \in \mathrm{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

$$\tilde{\mathrm{E}}[f_1 + f_2 \mid \mathcal{G}] = \tilde{\mathrm{E}}[f_1 \mid \mathcal{G}] + \tilde{\mathrm{E}}[f_2 \mid \mathcal{G}]$$

$\tilde{\mathrm{C}}4$　$\forall f_1, f_2 \in \mathrm{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

$$f_1 \le f_2 \quad \text{a.s.} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathrm{E}}[f_1 \mid \mathcal{G}] \le \tilde{\mathrm{E}}[f_2 \mid \mathcal{G}] \quad \text{a.s.}$$

$\tilde{\mathrm{C}}5$　$\forall f \in \mathrm{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, $\forall g \in \mathrm{L}^\infty(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$

$$\tilde{\mathrm{E}}[gf \mid \mathcal{G}] = g\tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}]$$

$\tilde{\mathrm{C}}6$　$\mathcal{H}$ が $\mathcal{G}$ の部分 σ-加法族ならば $\forall f \in \mathrm{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

$$\tilde{\mathrm{E}}\left[\tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}] \,\middle|\, \mathcal{H}\right] = \tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{H}]$$

一つ一つ証明していく．

$\tilde{\mathrm{C}}1$　f に対して，先の (3) と同じように関数列 $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を作る．C1 により全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\tilde{\mathrm{E}}[f_n] = \int_\Omega f_n(x)\,\mu(dx)$$

が成り立っているから，Lebesgue の収束定理と作用素の有界性により

$$\left|\tilde{\mathrm{E}}[f] - \int_\Omega f(x)\,\mu(dx)\right| \le \left|\tilde{\mathrm{E}}[f] - \tilde{\mathrm{E}}[f_n]\right| + \left|\int_\Omega f_n(x)\,\mu(dx) - \int_\Omega f(x)\,\mu(dx)\right| \longrightarrow 0 \ (n \longrightarrow \infty)$$

が成り立つ．ゆえに

$$\tilde{\mathrm{E}}[f] = \int_\Omega f(x)\,\mu(dx)$$

が示された．

$\tilde{\mathrm{C}}2$　f に対して，先の (3) と同じように関数列 $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を作る．$h \in \mathrm{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ であることに注意すれば，C2 により全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\int_\Omega f_n(x)h(x)\,\mu(dx) = \int_\Omega \tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{G}](x)h(x)\,\mu(dx)$$

が成り立つ．

$$A := \left\{\, x \in \Omega \quad \middle| \quad |h(x)| > \|h\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathcal{F},\mu)} \right\}$$

とおけば $\mu(A) = 0$ であり，拡張が作用素ノルムを変えないことと補助定理 3.3 の結果より

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega f(x)h(x)\,\mu(dx) - \int_\Omega \tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}](x)h(x)\,\mu(dx)\right| \\
&\quad \le \left|\int_\Omega f(x)h(x)\,\mu(dx) - \int_\Omega f_n(x)h(x)\,\mu(dx)\right| \\
&\qquad + \left|\int_\Omega \tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{G}](x)h(x)\,\mu(dx) - \int_\Omega \tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}](x)h(x)\,\mu(dx)\right| \\
&\quad \le \|h\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathcal{F},\mu)} \int_{\Omega\setminus A} |f(x) - f_n(x)|\,\mu(dx) + \|h\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathcal{F},\mu)} \int_{\Omega\setminus A} \left|\tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{G}](x) - \tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}](x)\right|\,\mu(dx) \\
&\quad = \|h\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathcal{F},\mu)} \|f - f_n\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)} + \|h\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathcal{F},\mu)} \left\|\tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}] - \tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{G}]\right\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)} \\
&\quad \le 2\|h\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathcal{F},\mu)} \|f - f_n\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)} \qquad (\because \text{補助定理 } 3.3)
\end{aligned}$$

が成り立つ．$(f_n)_{n=1}^{\infty}$ の作り方から Lebesgue の収束定理が適用されて

$$\| f - f_n \|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)} \longrightarrow 0 \ (n \longrightarrow \infty)$$

となるから

$$\int_{\Omega} f(x)h(x)\,\mu(dx) = \int_{\Omega} \tilde{\mathrm{E}}\,[f \mid \mathcal{G}]\,(x)h(x)\,\mu(dx)$$

が示された．

$\tilde{\mathrm{C}}3$　作用素 $\tilde{\mathrm{E}}\,[\cdot \mid \mathcal{G}]$ の線型性による．

$\tilde{\mathrm{C}}4$　作用素の線型性から，C4 の証明と同様に「任意の $f \in \mathrm{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ に対して，$f \geq 0$ a.s. ならば $\tilde{\mathrm{E}}\,[f \mid \mathcal{G}] \geq 0$ a.s.」を示せばよい．f に対して，先の (3) と同じように関数列 $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を作る．全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\{\, x \in \Omega \quad | \quad f_n(x) < 0 \,\} \quad \subset \quad \{\, x \in \Omega \quad | \quad f(x) < 0 \,\}$$

が成り立っているから，右辺が μ-零集合と仮定すれば C4 により

$$\tilde{\mathrm{E}}\,[f_n \mid \mathcal{G}] \geq 0 \text{ a.s.} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

となる．従って

$$\begin{aligned} A_n &:= \left\{\, x \in \Omega \quad | \quad \tilde{\mathrm{E}}\,[f_n \mid \mathcal{G}]\,(x) < 0 \,\right\} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots), \\ A &:= \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \end{aligned}$$

とすれば $\mu(A) = 0$ となり，

$$B := \left\{\, x \in \Omega \quad | \quad \tilde{\mathrm{E}}\,[f \mid \mathcal{G}]\,(x) < 0 \,\right\}$$

に対して $\mu(B \cap A^c) = \mu(B) - \mu(B \cap A) = \mu(B)$ が成り立つから，示せばよいのは $\mu(B \cap A^c) = 0$ となることである．$B \cap A^c$ の上では全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\left|\tilde{\mathrm{E}}\,[f \mid \mathcal{G}]\,(x) - \tilde{\mathrm{E}}\,[f_n \mid \mathcal{G}]\,(x)\right| = \tilde{\mathrm{E}}\,[f_n \mid \mathcal{G}]\,(x) - \tilde{\mathrm{E}}\,[f \mid \mathcal{G}]\,(x) \geq -\tilde{\mathrm{E}}\,[f \mid \mathcal{G}]\,(x) > 0$$

が成り立っていることから，

$$C_k := \left\{\, x \in B \cap A^c \quad | \quad \left|\tilde{\mathrm{E}}\,[f \mid \mathcal{G}]\,(x)\right| > 1/k \,\right\} \quad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

とおけば

$$B \cap A^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$$

が成り立つ．全ての $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{\mathrm{E}}\,[f \mid \mathcal{G}] - \tilde{\mathrm{E}}\,[f_n \mid \mathcal{G}] \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)} &= \int_{\Omega} \left|\tilde{\mathrm{E}}\,[f \mid \mathcal{G}]\,(x) - \tilde{\mathrm{E}}\,[f_n \mid \mathcal{G}]\,(x)\right| \mu(dx) \\ &\geq \int_{C_k} \left|\tilde{\mathrm{E}}\,[f \mid \mathcal{G}]\,(x) - \tilde{\mathrm{E}}\,[f_n \mid \mathcal{G}]\,(x)\right| \mu(dx) \\ &> \mu(C_k)/k \end{aligned}$$

が成り立つことから，C_k が n に無関係なことと左辺が $n \longrightarrow \infty$ で 0 に収束することから $\mu(C_k) = 0\ (\forall k = 1, 2, 3, \cdots)$ でなくてはならず，

$$\mu(B) = \mu(B \cap A^c) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(C_k) = 0$$

となり $\tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}] \geq 0$ a.s. が示された．

$\tilde{\mathrm{C}}5$ f に対して，先の (3) と同じように関数列 $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を作る．f_n については C5 より

$$\tilde{\mathrm{E}}[gf_n \mid \mathcal{G}] = g\tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{G}] \tag{8}$$

が成り立っている．

$$E \coloneqq \left\{ x \in \Omega \quad \middle| \quad |g(x)| > \|g\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathcal{F},\mu)} \right\}$$

とおけば $\mu(E) = 0$ であって，拡張が作用素ノルムを変えないことと補助定理 3.3，また Lebesgue の収束定理を適用すれば

$$\begin{aligned}
\left\| \tilde{\mathrm{E}}[gf \mid \mathcal{G}] - \tilde{\mathrm{E}}[gf_n \mid \mathcal{G}] \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)} &\leq \|gf - gf_n\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)} \leq \int_{\Omega} |g(x)||f(x) - f_n(x)|\,\mu(dx) \\
&= \int_{\Omega \setminus E} |g(x)||f(x) - f_n(x)|\,\mu(dx) \leq \|g\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathcal{F},\mu)} \|f - f_n\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)
\end{aligned}$$

が成り立つ．同様にして

$$\begin{aligned}
\left\| g\tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}] - g\tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{G}] \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)} &= \int_{\Omega} |g(x)\tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}](x) - g(x)\tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{G}](x)|\,\mu(dx) \\
&\leq \|g\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathcal{F},\mu)} \int_{\Omega \setminus E} |\tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}](x) - \tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{G}](x)|\,\mu(dx) \\
&= \|g\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathcal{F},\mu)} \int_{\Omega} |\tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}](x) - \tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{G}](x)|\,\mu(dx) \\
&\leq \|g\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathcal{F},\mu)} \|f - f_n\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)} \\
&\longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)
\end{aligned}$$

も成り立つから，式 (8) と併せて

$$\begin{aligned}
\left\| \tilde{\mathrm{E}}[gf \mid \mathcal{G}] - g\tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}] \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)} &\leq \left\| \tilde{\mathrm{E}}[gf \mid \mathcal{G}] - \tilde{\mathrm{E}}[gf_n \mid \mathcal{G}] \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)} + \left\| g\tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{G}] - g\tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}] \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)} \\
&\longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)
\end{aligned}$$

となり $\tilde{\mathrm{E}}[gf \mid \mathcal{G}] = g\tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}]$ が示された．

$\tilde{\mathrm{C}}6$ f に対して，先の (3) と同じように関数列 $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を作る．f_n については C6 より

$$\tilde{\mathrm{E}}\left[\tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{G}] \,\middle|\, \mathcal{H}\right] = \tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{H}]$$

が成り立っている．

$$\begin{aligned}
\left\| \tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{H}] - \tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{H}] \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)} &\leq \|f - f_n\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)}, \\
\left\| \tilde{\mathrm{E}}\left[\tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}] \,\middle|\, \mathcal{H}\right] - \tilde{\mathrm{E}}\left[\tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{G}] \,\middle|\, \mathcal{H}\right] \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)} &\leq \left\| \tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}] - \tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{G}] \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)} \leq \|f - f_n\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)}
\end{aligned}$$

が成り立つことと Lebesgue の収束定理より

$$\begin{aligned}
&\left\| \tilde{\mathrm{E}}\left[\tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{G}] \,\middle|\, \mathcal{H}\right] - \tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{H}] \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)} \\
&\qquad \leq \left\| \tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{H}] - \tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{H}] \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)} + \left\| \tilde{\mathrm{E}}\left[\tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}] \,\middle|\, \mathcal{H}\right] - \tilde{\mathrm{E}}\left[\tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{G}] \,\middle|\, \mathcal{H}\right] \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)} \\
&\qquad \leq 2 \| f - f_n \|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)} \qquad \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)
\end{aligned}$$

となり $\tilde{\mathrm{E}}\left[\tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{G}] \,\middle|\, \mathcal{H}\right] = \tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{H}]$ が示された.

■

定義 3.5 (条件付き期待値の再定義). 定理 3.4 で定義された $\mathrm{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ から $\mathrm{L}^1(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ (実際は $\mathrm{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ に埋め込まれた部分空間の意味) への有界線型作用素 $\tilde{\mathrm{E}}[\cdot \mid \mathcal{G}]$ を $\mathrm{E}[\cdot \mid \mathcal{G}]$ と表記し直し，$f \in \mathrm{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ に対して

$$\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}]$$

を $\mathcal{G}$ で条件付けた f の条件付き期待値と呼ぶ. $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ の場合は特別に

$$\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] = \mathrm{E}[f]$$

と書いて f の期待値と呼ぶ.

4　10/17

基礎におく確率空間を $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ とする．任意の有界実連続関数 $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ と任意の可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ 関数 X に対して，その合成 $h(X)$ が $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ で可積分であることに注意すればその条件付き期待値を考えることができ，これを用いて独立性を次で定義する．

定義 4.1 (独立性).　X を可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ 関数，$\mathcal{G}$ を $\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族とする．この下で X と $\mathcal{G}$ が独立であることを以下で定義する:

任意の有界実連続関数 $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に対し次が成り立つ．

$$\mathrm{E}\left[h(X)\mid\mathcal{G}\right]=\mathrm{E}\left[h(X)\right]\quad \mathrm{P}-\mathrm{a.s.}$$

上で定義した独立性が，X の生成する σ-加法族と $\mathcal{G}$ との間の σ-加法族としての独立性と同値であることを示す．

命題 4.2 (独立性の同値条件).　任意の有界実連続関数 $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に対し

$$\mathrm{E}\left[h(X)\mid\mathcal{G}\right]=\mathrm{E}\left[h(X)\right]\quad \mathrm{P}-\mathrm{a.s.}$$

が成立すること (—(1) とする) と，

$$\mathrm{P}\left(X^{-1}(E)\cap A\right)=\mathrm{P}\left(X^{-1}(E)\right)\mathrm{P}(A)\quad (\forall E\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}),\ A\in\mathcal{G})$$

が成立すること (—(2) とする) は同値である．

証明.

(1) ⇒ (2) について　示したいことは

$$\mathfrak{B}(\mathbb{R})=\left\{\,E\in\mathfrak{B}(\mathbb{R})\quad\middle|\quad \mathrm{P}\left(X^{-1}(E)\cap A\right)=\mathrm{P}\left(X^{-1}(E)\right)\mathrm{P}(A),\quad \forall A\in\mathcal{G}\,\right\}$$

である．証明の手順としてまず上式右辺が Dynkin 族となることを示し，次に $\mathbb{R}$ の閉集合系が右辺に含まれることを示せば，Dynkin 族定理より上式が成立することが判る．右辺を

$$\mathscr{D}:=\left\{\,E\in\mathfrak{B}(\mathbb{R})\quad\middle|\quad \mathrm{P}\left(X^{-1}(E)\cap A\right)=\mathrm{P}\left(X^{-1}(E)\right)\mathrm{P}(A),\quad \forall A\in\mathcal{G}\,\right\}$$

とおいて表示を簡単にしておく．$\mathscr{D}$ が Dynkin 族であることを示すには次の 3 条件を確認すればよい:

(i).　$\mathbb{R}\in\mathscr{D}$,

(ii).　$D_1,D_2\in\mathscr{D},\ D_1\subset D_2\quad\Rightarrow\quad D_2-D_1\in\mathscr{D}$,

(iii).　$D_n\in\mathscr{D},\ D_n\cap D_m=\emptyset\ (n\neq m)\quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}D_n\in\mathscr{D}$

(i) について，$\Omega = X^{-1}(\mathbb{R})$ により $\mathrm{P}\left(X^{-1}(\mathbb{R}) \cap A\right) = \mathrm{P}(A) = \mathrm{P}\left(X^{-1}(\mathbb{R})\right)\mathrm{P}(A)$ $(\forall A \in \mathcal{G})$ であるから $\mathbb{R} \in \mathscr{D}$ となる．(ii) について，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(X^{-1}(D_2 - D_1) \cap A\right) &= \mathrm{P}\left(X^{-1}(D_2) \cap A\right) - \mathrm{P}\left(X^{-1}(D_1) \cap A\right) \\ &= \left(\mathrm{P}\left(X^{-1}(D_2)\right) - \mathrm{P}\left(X^{-1}(D_1)\right)\right)\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}\left(X^{-1}(D_2 - D_1)\right)\mathrm{P}(A), \quad (\forall A \in \mathcal{G})\end{aligned}$$

により $D_2 - D_1 \in \mathscr{D}$ となる．(iii) について，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(X^{-1}(\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} D_n) \cap A\right) &= \mathrm{P}\left(\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} X^{-1}(D_n) \cap A\right) = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\left(X^{-1}(D_n) \cap A\right) \\ &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\left(X^{-1}(D_n)\right)\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}\left(X^{-1}(\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} D_n)\right)\mathrm{P}(A), \quad (\forall A \in \mathcal{G})\end{aligned}$$

により $\sum_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathscr{D}$ となる．以上で $\mathscr{D}$ が Dynkin 族であることが判った．次に $\mathbb{R}$ の閉集合系が $\mathscr{D}$ に含まれることを示す．E を $\mathbb{R}$ の任意の閉集合とする．

$$d(\cdot, E) : \mathbb{R} \ni x \longmapsto \inf\{\, |x - y| \quad | \quad y \in E \,\}$$

として集合との距離の関数を表せばこれは $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の実連続関数であり，

$$h_n : \mathbb{R} \ni x \longmapsto \frac{1}{1 + nd(x, E)} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

は有界実連続関数となる．E が閉集合であるから $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = 1\!\!1_E(x)$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ であり，また h_n の有界連続性から $h_n \circ X \in \mathrm{L}^1(\mathcal{F}, \mu)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ であることに注意すれば，任意の $A \in \mathcal{G}$ に対して

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(X^{-1}(E) \cap A\right) &= \int_{\Omega} 1\!\!1_E(X(\omega)) 1\!\!1_A(\omega)\ \mathrm{P}(d\omega) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} h_n(X(\omega)) 1\!\!1_A(\omega)\ \mathrm{P}(d\omega) && (\because \text{ Lebesgue の収束定理}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} \mathrm{E}[h_n(X) \,|\, \mathcal{G}](\omega) 1\!\!1_A(\omega)\ \mathrm{P}(d\omega) && (\because \text{ 定理 } 3[\check{\mathrm{C}}2]) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[h_n(X)] \int_{\Omega} 1\!\!1_A(\omega)\ \mathrm{P}(d\omega) && (\because \text{ (1) より．} \mathrm{E}[h_n(X) \,|\, \mathcal{G}] \neq \mathrm{E}[h_n(X)] \text{ の部分は積分に影響しない．}) \\ &= \mathrm{P}(A) \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} h_n(X(\omega))\ \mathrm{P}(d\omega) && (\because \text{ 定理 } 3[\check{\mathrm{C}}1]) \\ &= \mathrm{P}(A) \int_{\Omega} 1\!\!1_E(X(\omega))\ \mathrm{P}(d\omega) && (\because \text{ Lebesgue の収束定理}) \\ &= \mathrm{P}\left(X^{-1}(E)\right)\mathrm{P}(A)\end{aligned}$$

が成り立ち，$\mathbb{R}$ の閉集合系が $\mathscr{D}$ に含まれることが示された．閉集合系は乗法族であり $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ を生成するから (2) が成り立つと判明する．

(2) $\Rightarrow$ (1) について　任意の $A \in \mathcal{G}$ に対し

$$\int_{\Omega} 1\!\!1_A(\omega)\,\mathrm{E}[h(X) \,|\, \mathcal{G}](\omega)\ \mathrm{P}(d\omega) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{E}[h(X)] = \int_{\Omega} 1\!\!1_A(\omega)\,\mathrm{E}[h(X)]\,\mathrm{P}(d\omega)$$

が成立することをいえばよい．有界実連続関数 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が非負であるとして h の単関数近似を考えると，例えば

$$\begin{aligned}E_n^j &:= \left\{\, x \in \mathbb{R} \quad | \quad \frac{j-1}{3^n} \leq h(x) < \frac{j}{3^n} \,\right\}, \quad (j = 1, 2, \cdots, n3^n - 1,\ n = 1, 2, 3, \cdots) \\ E_n^{n3^n} &:= \{\, x \in \mathbb{R} \quad | \quad n \leq h(x) \,\}\end{aligned}$$

として

$$h_n(x) = \sum_{j=1}^{n3^n} \frac{j}{3^n} 1\!\!1_{E_n^j}(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R},\ n = 1, 2, 3, \cdots)$$

とおけば，h が可測 $\mathfrak{B}(\mathbb{R})/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であるから E_n^j は全て Borel 集合であり，任意の $A \in \mathcal{G}$ に対して

$$\begin{aligned}
\int_\Omega 1\!\!1_A(\omega)\,\mathrm{E}\,[h(X) \mid \mathcal{G}]\,(\omega)\ \mathrm{P}\,(d\omega) &= \int_\Omega 1\!\!1_A(\omega) h(X(\omega))\ \mathrm{P}\,(d\omega) && (\because \text{ 定理 3[Č2]}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega 1\!\!1_A(\omega) h_n(X(\omega))\ \mathrm{P}\,(d\omega) && (\because \text{ 積分の定義}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n3^n} \int_\Omega 1\!\!1_A(\omega) 1\!\!1_{X^{-1}(E_n^j)}(\omega)\ \mathrm{P}\,(d\omega) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n3^n} \mathrm{P}\left(X^{-1}(E_n^j) \cap A\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n3^n} \mathrm{P}\left(X^{-1}(E_n^j)\right) \mathrm{P}\,(A) && (\because \text{ (2) より.}) \\
&= \mathrm{P}\,(A) \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n3^n} \int_\Omega 1\!\!1_{X^{-1}(E_n^j)}(\omega)\ \mathrm{P}\,(d\omega) \\
&= \mathrm{P}\,(A) \lim_{n\to\infty} \int_\Omega h_n(X(\omega))\ \mathrm{P}\,(d\omega) \\
&= \mathrm{P}\,(A) \int_\Omega h(X(\omega))\ \mathrm{P}\,(d\omega) \\
&= \mathrm{P}\,(A)\,\mathrm{E}\,[h(X)]
\end{aligned}$$

が成り立つ．一般の有界実連続関数 h についても $\{\, x \in \mathbb{R} \mid h(x) \geq 0 \,\}$ の部分と $\{\, x \in \mathbb{R} \mid h(x) < 0 \,\}$ の部分に分解して上と同様に考えれば

$$\int_\Omega 1\!\!1_A(\omega)\,\mathrm{E}\,[h(X) \mid \mathcal{G}]\,(\omega)\ \mathrm{P}\,(d\omega) = \mathrm{P}\,(A)\,\mathrm{E}\,[h(X)] \quad (\forall A \in \mathcal{G})$$

となる．従って $\mathcal{G}$ の元 $\{\, \omega \in \Omega \mid \mathrm{E}\,[h(X) \mid \mathcal{G}]\,(\omega) > \mathrm{E}\,[h(X)] \,\}$ も $\{\, \omega \in \Omega \mid \mathrm{E}\,[h(X) \mid \mathcal{G}]\,(\omega) < \mathrm{E}\,[h(X)] \,\}$ も P-零集合でなくてはならず，

$$\mathrm{E}\,[h(X) \mid \mathcal{G}] = \mathrm{E}\,[h(X)] \quad \mathrm{P}-\text{a.s.}$$

が示された．

∎

レポート問題 3. $A, B \in \mathcal{F}$ に対し，$X = 1\!\!1_A$，$\mathcal{G} = \{\emptyset,\ \Omega,\ B,\ B^c\}$ とする．この時

$$X \text{ と } \mathcal{G} \text{ が独立} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{P}\,(A \cap B) = \mathrm{P}\,(A)\,\mathrm{P}\,(B).$$

証明．$\forall E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$X^{-1}(E) = \begin{cases} \emptyset & (0, 1 \notin E) \\ A & (0 \notin E,\ 1 \in E) \\ A^c & (0 \in E,\ 1 \notin E) \\ \Omega & (0, 1 \in E) \end{cases}$$

であることに注意する．$\Rightarrow$ については前命題より成り立ち，$\Leftarrow$ については

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$$

ならば

$$\mathrm{P}(A^c \cap B) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B) = (1 - \mathrm{P}(A))\,\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A^c)\,\mathrm{P}(B)$$

も成り立ち，A を $\Omega, \emptyset$ にしても上の等式は成り立つから，前命題により X と $\mathcal{G}$ が独立であると判る． ∎

次に条件付き期待値に対して Jensen の不等式が成り立つことを証明する．その前に凸関数の性質を書いておく．

定理 4.3 (Jensen の不等式). $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を凸関数とし，$X,\ \psi(X) \in \mathrm{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ とする．$\mathcal{G}$ を $\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族とすれば次の不等式が成り立つ:

$$\mathrm{E}[\psi(X) \mid \mathcal{G}] \geq \psi(\mathrm{E}[X \mid \mathcal{G}])$$

5 10/25

確率空間を $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ とし，以下でマルチンゲールを定義する．集合 I によって確率過程の時点を表現し，以降でこれは $[0,\infty)$ や $\{0,,1,\cdots,n\}$ など実数の区間や高々可算集合を指すものと考え，I が高々可算集合の場合は離散位相，$\mathbb{R}$ の区間の場合は相対位相を考える．また扱う確率変数は全て実数値で考える．

定義 5.1 (フィルトレーション). $\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族の部分系 $\{\,\mathcal{F}_\alpha \mid \alpha\in I\,\}$ がフィルトレーション (filtration) であるとは，任意の $\alpha,\beta\in I$ に対して $\alpha\le\beta$ ならば $\mathcal{F}_\alpha\subset\mathcal{F}_\beta$ の関係をもつことで定義する．

マルチンゲールを定義する前に同値類に対して順序を定める．$(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ 上の可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ 関数の全体を $\mathcal{M}$，$\mathcal{M}$ を a.s. で等しいものにまとめた商空間を M と表す．$[f],[g]\in M$ に対して

$$f\le g \text{ P-a.s. かつそのときに限り } [f]\le[g]$$

として関係"$\le$"(記号は $\mathcal{M}$ におけるものと同じであるが) を定義すればこれは M において順序となる．この定義が well-defined，つまり代表元の取り方に依存しないことは $(f'>g')\subset(f\neq f')\cup(f>g)\cup(g\neq g')$ [*1] かつ右辺が零集合であることにより明確であるが，順序関係としての定義を満たしていることは以下で判る．

- $f=f$ により $[f]\le[f]$,
- $[f]\le[g]$ かつ $[g]\le[f]$ なら $(f>g)$ と $(g>f)$ は P-零集合だから $[f]=[g]$,
- $[f]\le[g]$ かつ $[g]\le[h]$ なら $(f>h)\subset(f>g)\cup(g>h)$ により $[f]\le[h]$.

次にマルチンゲールを定義する．確率変数とその同値類の表記は区別しないが，大体は文脈から判断するべきことであると留意しておく．

定義 5.2 (マルチンゲール). $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ 上の実確率変数の族 $(M_\alpha)_{\alpha\in I}\subset\mathscr{L}^p(\mathcal{F},\mathrm{P})$ $(p\ge1)$ が次の四条件を満たすとき，これを L^p-劣マルチンゲール (L^p-submartingale) という．

(M.1) $\forall\alpha\in I$ に対し M_α は可測 $\mathcal{F}_\alpha/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ である．
(M.2) 任意の $\alpha\le\beta$ $(\alpha,\beta\in I)$ に対し $\mathrm{E}\left[M_\beta\,\middle|\,\mathcal{F}_\alpha\right]\ge M_\alpha$ (同値類に対する順序関係) が成り立つ．
(M.3) 各 $\omega\in\Omega$ において，任意の $\alpha\in I$ で左極限が存在する：$\exists\lim_{\beta\uparrow\alpha}M_\beta(\omega)\in\mathbb{R}$.
(M.4) 各 $\omega\in\Omega$ において，任意の $\alpha\in I$ で右連続である：$M_\alpha(\omega)=\lim_{\beta\downarrow\alpha}M_\beta(\omega)$.

条件 (M.2) の不等号が逆向き"$\le$" の場合，$(M_\alpha)_{\alpha\in I}$ を L^p-優マルチンゲール (L^p-supermartingale) といい，劣かつ優マルチンゲールであるものをマルチンゲールという．

定義 5.3 (停止時刻). Ω 上の関数で次を満たすものを $((\mathcal{F}_\alpha)$-) 停止時刻 (stopping time) という:

$$\tau:\Omega\longrightarrow I\quad \text{s.t.}\quad \forall\alpha\in I,\ (\tau\le\alpha)\in\mathcal{F}_\alpha.$$

[*1] $(f>g):=\{\,x\in\Omega \mid f(x)>g(x)\,\}$

注意 5.4 (停止時刻は可測). 上で定義した τ は可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(I)$ である．

証明.

I が $\mathbb{R}$ の区間である場合 任意の $\alpha \in I$ に対して $I_\alpha := (-\infty, \alpha) \cap I$ は I における (相対の) 開集合であり $\tau^{-1}(I_\alpha) = (\tau \leq \alpha) \in \mathcal{F}_\alpha \subset \mathcal{F}$ が成り立つ．つまり

$$\{ I_\alpha \quad | \quad \alpha \in I \} \subset \left\{ A \in \mathfrak{B}(I) \quad | \quad \tau^{-1}(A) \in \mathcal{F} \right\}$$

が成り立ち，左辺の I_α の形の全体は $\mathfrak{B}(I)$ を生成するから τ の可測性が証明された．

I が高々可算集合である場合 先ず $\alpha \in I$ に対して $(\tau < \alpha)$ が $\mathcal{F}_\alpha$ に属することを示す．α に対して直前の元 $\beta \in I$ が存在するか α が I の最小限である場合, 前者なら $(\tau < \alpha) = (\tau \leq \beta)$ となり後者なら $(\tau < \alpha) = \emptyset$ となるからどちらも $\mathcal{F}_\alpha$ に属する．そうでない場合は $\alpha - 1/n < x < \alpha$ を満たす点列 $x_n \in I$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を取れば，$(\tau < \alpha) = \cap_{n=1}^{\infty}(\tau \leq \alpha - 1/n)$ により $(\tau < \alpha) \in \mathcal{F}_\alpha$ が判る．以上の準備の下で任意の $\alpha \in I$ に対して $\tau^{-1}(\{\alpha\}) = (\tau \leq \alpha) - (\tau < \alpha) \in \mathcal{F}_\alpha$ が成り立ち，更に可算集合 I には離散位相が入っているから任意の $A \in \mathfrak{B}(I)$ は一点集合の可算和で表現できて，$\tau^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ であると証明された．

∎

定義 5.5 (停止時刻の再定義). 今 τ の終集合は I であるが，$I \to \mathbb{R}$ の単射 i を用いて $\tau^* := i \circ \tau$ とすれば,

$$\mathfrak{B}(I) = \{ A \cap I \quad | \quad A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \} = \left\{ i^{-1}(A) \quad | \quad A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \right\}$$

により i が可測 $\mathfrak{B}(I)/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であるから合成写像 τ^* は可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ となる．以降はこの τ^* を停止時刻 τ と表記して扱うことにする．

定数関数は停止時刻となる．τ が Ω 上の定数関数なら $(\tau \leq \alpha)$ は空集合か全体集合にしかならないからである．また σ, τ を I に値を取る停止時刻とすると $\sigma \vee \tau$ と $\sigma \wedge \tau$ も停止時刻となる．

$$\begin{cases} (\sigma \wedge \tau \leq \alpha) = (\sigma \leq \alpha) \cup (\tau \leq \alpha), \\ (\sigma \vee \tau \leq \alpha) = (\sigma \leq \alpha) \cap (\tau \leq \alpha) \end{cases} \quad , (\forall \alpha \in I)$$

が成り立つからである．

定義 5.6 (停止時刻の前に決まっている事象系). τ を I に値を取る停止時刻とする．τ に対し次の集合系を定義する．

$$\mathcal{F}_\tau := \{ A \in \mathcal{F} \quad | \quad (\tau \leq \alpha) \cap A \in \mathcal{F}_\alpha, \ \forall \alpha \in I \}.$$

命題 5.7 (停止時刻の性質). σ, τ を I に値を取る停止時刻であるとする．

(1) $\mathcal{F}_\tau$ は σ-加法族である．

(2) 或る $\alpha \in I$ に対して $\tau(\omega) = \alpha$ $(\forall \omega \in \Omega)$ なら $\mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F}_\tau$.

(3) $\sigma(\omega) \leq \tau(\omega)$ $(\forall \omega \in \Omega)$ ならば $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$.

(4) $\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau} = \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$.

(5) $\mathcal{F}_{\sigma\vee\tau} = \mathcal{F}_\sigma \vee \mathcal{F}_\tau$.

証明.

(1) 停止時刻の定義より $\Omega \in \mathcal{F}_\tau$ である．また $A \in \mathcal{F}_\tau$ なら $A^c \cap (\tau \leq \alpha) = (\tau \leq \alpha) - A \cap (\tau \leq \alpha) \in \mathcal{F}_\alpha$ より $A^c \in \mathcal{F}_\tau$ となる．可算個の $A_n \in \mathcal{F}_\tau$ については $\cup_{n=1}^\infty A_n \cap (\tau \leq \alpha) = \cup_{n=1}^\infty (A_n \cap (\tau \leq \alpha)) \in \mathcal{F}_\alpha$ により $\cup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{F}_\tau$ が成り立つ．

(2) $A \in \mathcal{F}_\alpha$ なら任意の $\beta \in I$ に対して

$$A \cap (\tau \leq \beta) = \begin{cases} A & \alpha \leq \beta \\ \emptyset & \alpha > \beta \end{cases}$$

が成り立つから，いずれの場合も $A \in \mathcal{F}_\beta$ となり $A \subset \mathcal{F}_\tau$ が成り立つ．逆に $A \in \mathcal{F}_\tau$ のとき，$A = A \cap (\tau \leq \alpha) \in \mathcal{F}_\alpha$ が成り立ち $\mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F}_\tau$ が示された．

(3) $A \in \mathcal{F}_\sigma$ なら任意の $\alpha \in I$ に対して

$$A \cap (\tau \leq \alpha) = A \cap (\sigma \leq \alpha) \cap (\tau \leq \alpha) \in \mathcal{F}_\alpha$$

が成り立つから $A \in \mathcal{F}_\tau$ となる．

(4) $\sigma \wedge \tau$ が停止時刻であることと (3) より $\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau} \subset \mathcal{F}_\sigma$ と $\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau} \subset \mathcal{F}_\tau$ が判る．また $A \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$ に対し

$$A \cap (\sigma \wedge \tau \leq \alpha) = [A \cap (\sigma \leq \alpha)] \bigcup [A \cap (\tau \leq \alpha)] \in \mathcal{F}_\alpha \quad (\forall \alpha \in I)$$

より $A \in \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}$ も成り立つ．

(5) 先ず $\sigma \vee \tau$ が停止時刻であることと (3) より $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}$ と $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}$ が判る．逆に $A \in \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}$ に対して

命題 5.8 (停止時刻と条件付き期待値). $X \in \mathrm{L}^1(\mathcal{F}, \mathrm{P})$ と I に値を取る停止時刻 σ, τ に対し以下が成立する．

(1) $\mathrm{E}\left[\mathbb{1}_{(\sigma>\tau)} X \,\middle|\, \mathcal{F}_\tau\right] = \mathrm{E}\left[\mathbb{1}_{(\sigma>\tau)} X \,\middle|\, \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}\right]$.

(2) $\mathrm{E}\left[\mathbb{1}_{(\sigma\geq\tau)} X \,\middle|\, \mathcal{F}_\tau\right] = \mathrm{E}\left[\mathbb{1}_{(\sigma\geq\tau)} X \,\middle|\, \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}\right]$.

(3) $\mathrm{E}[\mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_\tau] \mid \mathcal{F}_\sigma] = \mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}]$.

証明.

第一段　$\mathbb{1}_{(\sigma>\tau)}$ が可測 $\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であることを示す．$A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ に対し

$$\mathbb{1}_{(\sigma>\tau)}^{-1}(A) = \begin{cases} \Omega & (0 \in A,\ 1 \in A) \\ (\sigma > \tau) & (0 \notin A,\ 1 \in A) \\ (\sigma > \tau)^c & (0 \in A,\ 1 \notin A) \\ \emptyset & (0 \notin A,\ 1 \notin A) \end{cases}$$

と表現できるから，示すことは任意の $\alpha \in I$ に対して

$$(\sigma > \tau) \cap (\sigma \wedge \tau \leq \alpha) \in \mathcal{F}_\alpha$$

が成立することである．これが示されれば

$$(\sigma > \tau)^c \cap (\sigma \wedge \tau \leq \alpha) = (\sigma \wedge \tau \leq \alpha) \setminus [(\sigma > \tau) \cap (\sigma \wedge \tau \leq \alpha)] \in \mathcal{F}_\alpha$$

も成り立ち，更に $(\sigma > \tau)^c = (\sigma \leq \tau)$ であることと σ, τ の対等性により $\mathbb{1}_{(\sigma\geq\tau)}$ もまた可測 $\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であることが判る．目的の式は次が成り立つことにより示される．

$$\begin{aligned} (\sigma > \tau) \cap (\sigma \wedge \tau \leq \alpha) &= (\sigma > \tau) \cap (\sigma \leq \alpha) + (\sigma > \tau) \cap (\sigma > \alpha) \cap (\tau \leq \alpha) \\ &= \left[\bigcup_{\substack{\beta\in\mathbb{Q}\cap I \\ \beta\leq\alpha}} (\sigma > \beta) \cap (\tau \leq \beta) \right] \cap (\sigma \leq \alpha) + (\sigma > \alpha) \cap (\tau \leq \alpha) \qquad (9) \\ &\in \mathcal{F}_\alpha. \end{aligned}$$

第二段　一般の実確率変数 Y と停止時刻 τ に対して

- Y が可測 $\mathcal{F}_\tau/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$　$\Leftrightarrow$　任意の $\alpha \in I$ に対し $Y\mathbb{1}_{\tau\leq\alpha}$ が可測 $\mathcal{F}_\alpha/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$

が成り立つことを示す．

$\Rightarrow$ について　Y の単関数近似列 $(Y_n)_{n=1}^\infty$ の一つ一つは $Y_n = \sum_{j=1}^{N_n} a_{j,n}\mathbb{1}_{A_{j,n}}$ $(A_{j,n} \in \mathcal{F}_\tau)$ の形で表現できる．$\alpha \in I$ と $A \in \mathcal{F}_\tau$ の指示関数 $\mathbb{1}_A$ に対し

$$\left(\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{(\tau\leq\alpha)}\right)^{-1}(E) = \begin{cases} \Omega & (0 \in E,\ 1 \in E) \\ A \cap (\tau \leq \alpha) & (0 \notin E,\ 1 \in E) \\ [A \cap (\tau \leq \alpha)]^c & (0 \in E,\ 1 \notin E) \\ \emptyset & (0 \notin E,\ 1 \notin E) \end{cases} \quad (\forall E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$$

となり，$A \cap (\tau \leq \alpha) \in \mathcal{F}_\alpha$ より $\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{(\tau\leq\alpha)}$ が可測 $\mathcal{F}_\alpha/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であると判る．$(Y_n)_{n=1}^\infty$ は Y に各点収束していくから Y も可測 $\mathcal{F}_\alpha/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ となり，$\alpha \in I$ の任意性から"$\Rightarrow$" が示された．

$\Leftarrow$ について　任意の $E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$\{\, \omega \in \Omega \quad | \quad Y(\omega)\mathbb{1}_{(\tau\leq\alpha)}(\omega) \in E \,\} = \begin{cases} Y^{-1}(E) \cap (\tau \leq \alpha) & (0 \notin E) \\ Y^{-1}(E) \cap (\tau \leq \alpha) + (\tau \leq \alpha)^c & (0 \in E) \end{cases}$$

がいずれも $\mathcal{F}_\alpha$ に属する．特に下段について $(\tau \leq \alpha)^c \in \mathcal{F}_\alpha$ より $Y^{-1}(E) \cap (\tau \leq \alpha) \in \mathcal{F}_\alpha$ となるから，結局 $Y^{-1}(E) \cap (\tau \leq \alpha) \in \mathcal{F}_\alpha$ $(\forall E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ が成り立つ．$\alpha \in I$ の任意性から $Y^{-1}(E) \in \mathcal{F}_\tau$ $(\forall E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ が示された．

第三段　(1) の式を示す．第一段と性質 $\tilde{\mathrm{C}}5$ より

$$\mathrm{E}\left[\mathbb{1}_{(\sigma>\tau)}X \,\middle|\, \mathcal{F}_\tau\right] = \mathbb{1}_{(\sigma>\tau)}\,\mathrm{E}\left[X \mid \mathcal{F}_\tau\right]$$

が成り立つから，あとは右辺が (関数とみて) 可測 $\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であればよく，このためには第二段の結果より任意の $\alpha \in I$ に対して $\mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_\tau]\, 1\!\!1_{(\sigma>\tau)} 1\!\!1_{(\sigma\wedge\tau\leq\alpha)}$ が可測 $\mathcal{F}_\alpha/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であることを示せばよい．式 (9) を使えば

$$1\!\!1_{(\sigma>\tau)} 1\!\!1_{(\sigma\wedge\tau\leq\alpha)} = \sup_{\substack{\beta\in\mathbb{Q}\cap I \\ \beta\leq\alpha}} 1\!\!1_{(\sigma>\beta)} 1\!\!1_{(\tau\leq\beta)} 1\!\!1_{(\sigma\leq\alpha)} + 1\!\!1_{(\sigma>\alpha)} 1\!\!1_{(\tau\leq\alpha)}$$

が成り立つ．$\beta \leq \alpha$ ならば，$\mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_\tau]$ が可測 $\mathcal{F}_\tau/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であることと第二段の結果より $\mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_\tau]\, 1\!\!1_{(\tau\leq\beta)}$ が可測 $\mathcal{F}_\beta/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ すなわち可測 $\mathcal{F}_\alpha/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ となるから，これで $\mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_\tau]\, 1\!\!1_{(\sigma>\tau)} 1\!\!1_{(\sigma\wedge\tau\leq\alpha)}$ が可測 $\mathcal{F}_\alpha/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であると判り $1\!\!1_{(\sigma>\tau)}\, \mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_\tau]$ が可測 $\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であることが示された．以上で

$$\mathrm{E}\Big[\mathrm{E}\big[1\!\!1_{(\sigma>\tau)}X \,\big|\, \mathcal{F}_\tau\big] \,\Big|\, \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}\Big] = \mathrm{E}\big[1\!\!1_{(\sigma>\tau)}\, \mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_\tau] \,\big|\, \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}\big] = 1\!\!1_{(\sigma>\tau)}\, \mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_\tau] = \mathrm{E}\big[1\!\!1_{(\sigma>\tau)}X \,\big|\, \mathcal{F}_\tau\big]$$

が成り立ち，

$$\mathrm{E}\Big[\mathrm{E}\big[1\!\!1_{(\sigma>\tau)}X \,\big|\, \mathcal{F}_\tau\big] \,\Big|\, \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}\Big] = 1\!\!1_{(\sigma>\tau)}\, \mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}] = \mathrm{E}\big[1\!\!1_{(\sigma>\tau)}X \,\big|\, \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}\big]$$

と併せて (1) の式を得る．(2) の式も以上と同じ理由で成り立つ．

第四段　(3) の式を示す．

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_\tau] \mid \mathcal{F}_\sigma] &= \mathrm{E}\big[\mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_\tau]\, 1\!\!1_{(\sigma>\tau)} \,\big|\, \mathcal{F}_\sigma\big] + \mathrm{E}\big[\mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_\tau]\, 1\!\!1_{(\sigma\leq\tau)} \,\big|\, \mathcal{F}_\sigma\big] \\
&= \mathrm{E}\big[\mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}]\, 1\!\!1_{(\sigma>\tau)} \,\big|\, \mathcal{F}_\sigma\big] + \mathrm{E}\big[\mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_\tau]\, 1\!\!1_{(\sigma\leq\tau)} \,\big|\, \mathcal{F}_\sigma\big] && (\because (1)) \\
&= \mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}]\, 1\!\!1_{(\sigma>\tau)} + \mathrm{E}\big[\mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_\tau]\, 1\!\!1_{(\sigma\leq\tau)} \,\big|\, \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}\big] && (\because (2)) \\
&= \mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}]\, 1\!\!1_{(\sigma>\tau)} + \mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}]\, 1\!\!1_{(\sigma\leq\tau)} \\
&= \mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}].
\end{aligned}$$

(2) 式を使った箇所では X を $\mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_\tau]$ に置き換え τ と σ を入れ替えて適用した．

∎

τ を停止時刻とし，$\tau(\Omega)$ が高々可算集合である場合，実確率変数の族 $(M_\alpha)_{\alpha\in I}$ に対して

$$M_\tau \coloneqq \sum_{\alpha\in\tau(\Omega)} M_\alpha$$

とおく．全ての $\alpha \in \tau(\Omega)$ について M_α が可測 $\mathcal{F}_\alpha/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であるとき，M_τ は可測 $\mathcal{F}_\tau/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ となる．なぜならば任意の $\alpha \in I$ と $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$(M_\tau \in A) \cap (\tau \leq \alpha) = \bigcup_{\substack{\beta\in\tau(\Omega) \\ \beta\leq\alpha}} (M_\beta \in A) \cap (\tau = \beta) \in \mathcal{F}_\alpha$$

が成り立つからである．M_τ の可測性を確認したところで次の定理を証明する．

定理 5.9 (任意抽出定理 (その 1)).　$I = \{1, 2, \cdots, n\}$ とし，実確率変数の族 $(M_\alpha)_{\alpha\in I}$ が L^p-劣マルチンゲールであるとする．このとき I に値を取る停止時刻 σ と τ について次が成立する:

$$\mathrm{E}[M_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma] \geq M_{\sigma\wedge\tau}.$$