金融確率解析レポート

基礎工学研究科システム創成専攻修士 2 年
学籍番号 29C17095 百合川尚学

選択問題 3) 4) 5) 6)

2020 年 1 月 31 日

3)

コールオプションのベガ

$$\mathcal{V}_t = \partial_\sigma C_{BS}(t, T, S_t, K, r, \sigma)$$

を計算せよ (計算の途中経過も示せ)．また，ボラティリティに関してコールオプション価格が単調増加であること，すなわち

$$\sigma \longmapsto C_{BS}(t, T, x, K, r, \sigma)$$

が単調増加であることを示せ．

答案． $\tau := T - t$ として，まず $C_{BS}(t, T, x, K, r, \sigma)$ を偏微分すれば

$$\partial_\sigma C_{BS} = x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} \partial_\sigma d_1 - e^{-r\tau} K \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_2^2}{2}} \partial_\sigma d_2 \tag{1}$$

となる．ここで

$$\begin{aligned}
\partial_\sigma d_1 &= \frac{-1}{\sigma^2 \sqrt{\tau}} \left\{ \log\left(\frac{x}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau \right\} + \sqrt{\tau} \\
&= \frac{-1}{\sigma^2 \sqrt{\tau}} \left\{ \log\left(\frac{x}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau \right\} \\
&= \frac{-d_2}{\sigma}
\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}
\partial_\sigma d_2 &= \partial_\sigma d_1 - \sqrt{\tau} \\
&= -\frac{d_2 + \sigma\sqrt{\tau}}{\sigma} \\
&= \frac{-d_1}{\sigma}
\end{aligned}$$

が成り立つので,

$$
\begin{aligned}
(1) &= x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_1^2}{2}}\frac{-d_2}{\sigma} + e^{-r\tau}K\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_2^2}{2}}\frac{d_1}{\sigma} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_1^2}{2}}\left\{x\frac{-d_2}{\sigma} + e^{-r\tau}K\frac{d_1}{\sigma}e^{\frac{1}{2}(d_1^2-d_2^2)}\right\} \\
&= \Phi'(d_1)\left\{x\frac{-d_2}{\sigma} + e^{-r\tau}K\frac{d_1}{\sigma}e^{\frac{1}{2}(d_1^2-d_2^2)}\right\} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

となる. ここで

$$
\begin{aligned}
d_1^2 - d_2^2 &= (d_1 - d_2)(d_1 + d_2) \\
&= \sigma\sqrt{\tau}(2d_1 - \sigma\sqrt{\tau}) \\
&= 2\log\left(\frac{x}{K}\right) + 2\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau - \sigma^2\tau \\
&= 2\log\left(\frac{x}{K}\right) + 2r\tau \qquad (3)
\end{aligned}
$$

が成り立つので

$$
\begin{aligned}
(2) &= \Phi'(d_1)\left\{x\frac{-d_2}{\sigma} + e^{-r\tau}K\frac{d_1}{\sigma}e^{\log\left(\frac{x}{K}\right)+r\tau}\right\} \\
&= \Phi'(d_1)\left\{x\frac{-d_2}{\sigma} + x\frac{d_1}{\sigma}\right\} \\
&= \Phi'(d_1)\left\{x\frac{d_1 - d_2}{\sigma}\right\} \\
&= \Phi'(d_1)x\sqrt{\tau}
\end{aligned}
$$

が出る. 以上より

$$
\mathcal{V}_t = S_t\sqrt{\tau}\Phi'(d_1(\tau, S_t, K, r, \sigma)) \qquad (4)
$$

である. また単調増大性については, $\Phi'(z) = e^{-z^2/2}/\sqrt{2\pi}$ が正値関数のため, (x を正の数とすれば)

$$
\partial_\sigma C_{BS} = x\sqrt{\tau}\Phi'(d_1) > 0
$$

となるからである.

4)

コールオプションのガンマ

$$
\Gamma_t \coloneqq \partial_{xx}C_{BS}(t, T, S_t, K, r, \sigma)
$$

とベガの間に

$$
\mathcal{V}_t = \sigma S_t^2(T - t)\Gamma_t
$$

が成り立つことを示せ.

答案． $\tau := T - t$ として，まず $C_{BS}(t, T, x, K, r, \sigma)$ を一回偏微分すれば

$$\partial_x C_{BS} = \Phi(d_1) + x\Phi'(d_1)\partial_x d_1 - e^{-r\tau} K\Phi'(d_2)\partial_x d_2$$

となり，もう一度偏微分すれば

$$\begin{aligned}\partial_x C_{BS} &= \Phi'(d_1)\partial_x d_1 + \Phi'(d_1)\partial_x d_1 + x\Phi''(d_1)(\partial_x d_1)^2 + x\Phi'(d_1)\partial_{xx} d_1 \\ &\quad - e^{-r\tau} K\left(\Phi''(d_2)(\partial_x d_2)^2 + \Phi'(d_2)\partial_{xx} d_2\right) \end{aligned} \tag{5}$$

となる．ここで

$$\begin{aligned}\Phi''(z) &= \frac{-z}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \\ \partial_x d_1(\tau, x, K, r, \sigma) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \frac{1}{x}, \\ \partial_{xx} d_1(\tau, x, K, r, \sigma) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \frac{-1}{x^2} \\ \partial_x d_2(\tau, x, K, r, \sigma) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \frac{1}{x}, \\ \partial_{xx} d_2(\tau, x, K, r, \sigma) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \frac{-1}{x^2}\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}&\Phi'(d_1)\partial_x d_1 + \Phi'(d_1)\partial_x d_1 + x\Phi''(d_1)(\partial_x d_1)^2 + x\Phi'(d_1)\partial_{xx} d_1, \\ &= 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \frac{1}{x} + x\frac{-d_1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} \frac{1}{\sigma^2\tau} \frac{1}{x^2} + x\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \frac{-1}{x^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} \frac{-d_1}{\sigma^2\tau} \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} \frac{1}{x\sigma^2\tau}(\sigma\sqrt{\tau} - d_1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} \frac{-d_2}{x\sigma^2\tau}\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}&\Phi''(d_2)(\partial_x d_2)^2 + \Phi'(d_2)\partial_{xx} d_2 \\ &= \frac{-d_2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_2^2}{2}} \frac{1}{\sigma^2\tau} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_2^2}{2}} \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \frac{-1}{x^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_2^2}{2}} \frac{-1}{x^2\sigma^2\tau}(d_2 + \sigma\sqrt{\tau}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_2^2}{2}} \frac{-d_1}{x^2\sigma^2\tau}\end{aligned}$$

が成り立つ．従って

$$
\begin{aligned}
(5) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} \frac{-d_2}{x\sigma^2\tau} + e^{-r\tau} K \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_2^2}{2}} \frac{d_1}{x^2\sigma^2\tau} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} \frac{1}{x\sigma^2\tau} \left(-d_2 + e^{-r\tau} K e^{\frac{1}{2}(d_1^2-d_2^2)} \frac{d_1}{x} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} \frac{1}{x\sigma^2\tau} (-d_2 + d_1) && ((3) \text{ より } e^{\frac{1}{2}(d_1^2-d_2^2)} = (x/K)e^{r\tau}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} \frac{1}{x\sigma\sqrt{\tau}}
\end{aligned}
$$

が成立する．特に

$$
\Gamma_t = \frac{1}{S_t \sigma \sqrt{\tau}} \Phi'(d_1(\tau, S_t, K, r, \sigma))
$$

なので，(4) との関係式

$$
\mathcal{V}_t = \sigma S_t^2 (T-t) \Gamma_t
$$

が得られる． ∎

5)

定数 $-1 \leq \rho \leq 1$ を用いて

$$
\bar{W}_t := \rho W_t^1 + \sqrt{1-\rho^2} W_t^2, \quad t \geq 0
$$

を定義する．$(\bar{W}_t)_{t\geq 0}$ は標準ブラウン運動であることを示せ．また W_t^1 と $\bar{W}_t$ との共分散を求めよ．

答案.

連続性　連続関数の定数倍も連続関数同士の和も連続関数になるので $t \longmapsto \bar{W}_t$ は連続である．

0 出発　$W_0^1 = 0$ かつ $W_0^2 = 0$ なので $\bar{W}_0 = 0$ である．

独立増分性と分布　$(\bar{W}_t)_{t\geq 0}$ の独立増分性と任意の時点 $0 \leq s < t$ に対して $\bar{W}_t - \bar{W}_s$ が $N(0, t-s)$ に従うことを言うには，任意の自然数 n に対して任意の時点 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ および任意の実数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ を取って

$$
\mathrm{E}\left[\exp\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j (\bar{W}_{t_j} - \bar{W}_{t_{j-1}}) \right) \right] = \prod_{j=1}^n \exp\left(\frac{1}{2} \alpha_j^2 (t_j - t_{j-1}) \right)
$$

を示せばよい．まず

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left[\exp\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j (\bar{W}_{t_j} - \bar{W}_{t_{j-1}}) \right) \right] \\
&= \mathrm{E}\left[e^{\sum_{j=1}^n \rho\alpha_j (W_{t_j}^1 - W_{t_{j-1}}^1)} e^{\sum_{j=1}^n \sqrt{1-\rho^2}\alpha_j (W_{t_j}^2 - W_{t_{j-1}}^2)} \right] \\
&= \mathrm{E}\left[e^{\sum_{j=1}^n \rho\alpha_j (W_{t_j}^1 - W_{t_{j-1}}^1)} \right] \mathrm{E}\left[e^{\sum_{j=1}^n \sqrt{1-\rho^2}\alpha_j (W_{t_j}^2 - W_{t_{j-1}}^2)} \right] && (W^1 \text{ と } W^2 \text{ は独立なので})
\end{aligned}
$$

となるが，ここで W^1 の独立増分性より

$$\mathrm{E}\left[e^{\sum_{j=1}^n \rho\alpha_j(W^1_{t_j}-W^1_{t_{j-1}})}\right] = \prod_{j=1}^n \mathrm{E}\left[e^{\rho\alpha_j(W^1_{t_j}-W^1_{t_{j-1}})}\right]$$

が成り立つ．この右辺については

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left[e^{\rho\alpha_j(W^1_{t_j}-W^1_{t_{j-1}})}\right]\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\rho\alpha_j x}\frac{1}{\sqrt{2\pi(t_j-t_{j-1})}}e^{-\frac{x^2}{2(t_j-t_{j-1})}}\,dx\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\rho\alpha_j\sqrt{t_j-t_{j-1}}x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\\
&= e^{\frac{1}{2}\rho^2\alpha_j^2(t_j-t_{j-1})}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\rho\alpha_j\sqrt{t_j-t_{j-1}})^2}{2}}\,dx\\
&= e^{\frac{1}{2}\rho^2\alpha_j^2(t_j-t_{j-1})}
\end{aligned}$$

が成り立つので

$$\mathrm{E}\left[e^{\sum_{j=1}^n \rho\alpha_j(W^1_{t_j}-W^1_{t_{j-1}})}\right] = \prod_{j=1}^n e^{\frac{1}{2}\rho^2\alpha_j^2(t_j-t_{j-1})}$$

となる．同様にして

$$\mathrm{E}\left[e^{\sum_{j=1}^n \sqrt{1-\rho^2}\alpha_j(W^2_{t_j}-W^2_{t_{j-1}})}\right] = \prod_{j=1}^n e^{\frac{1}{2}(1-\rho^2)\alpha_j^2(t_j-t_{j-1})}$$

が成り立つので

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left[\exp\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j(\bar{W}_{t_j}-\bar{W}_{t_{j-1}})\right)\right]\\
&= \mathrm{E}\left[e^{\sum_{j=1}^n \rho\alpha_j(W^1_{t_j}-W^1_{t_{j-1}})}\right]\mathrm{E}\left[e^{\sum_{j=1}^n \sqrt{1-\rho^2}\alpha_j(W^2_{t_j}-W^2_{t_{j-1}})}\right]\\
&= \prod_{j=1}^n e^{\frac{1}{2}\rho^2\alpha_j^2(t_j-t_{j-1})}e^{\frac{1}{2}(1-\rho^2)\alpha_j^2(t_j-t_{j-1})}\\
&= \prod_{j=1}^n e^{\frac{1}{2}\alpha_j^2(t_j-t_{j-1})}
\end{aligned}$$

が従う．これで求める式を得た．

W^1_t と $\bar{W}_t$ との共分散　W^1_t も $\bar{W}_t$ も平均は 0 なので

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[W^1_t\bar{W}_t\right] &= \mathrm{E}\left[W^1_t\left(\rho W^1_t + \sqrt{1-\rho^2}W^2_t\right)\right]\\
&= \rho\,\mathrm{E}\left[{W^1_t}^2\right] + \sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{E}\left[W^1_t W^2_t\right]\\
&= \rho t
\end{aligned}$$

が共分散である． ∎

6)

USD/JPY 為替レート過程を表す S^1 と EUR/JPY 為替レート過程を表す S^2 が

$$\begin{aligned} dS_t^1 &= S_t^1(\sigma_1 dW_t^1 + \mu_1 dt), \quad S_0^1 > 0, \\ dS_t^2 &= S_t^2(\sigma_2 d\bar{W}_t + \mu_2 dt), \quad S_0^2 > 0, \end{aligned}$$

と与えられている (すなわち，時刻 t で 1USD が S_t^1 円であり，1EUR が S_t^2 円である)．ただし $\sigma_1, \sigma_2 > 0$, $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ である．このとき USD/EUR 為替レート過程を計算し，そのボラティリティと期待収益率を求めよ．

答案． USD/EUR 為替レート過程は S^1/S^2 を計算すればよい．

$$d\begin{bmatrix} S_t^1 \\ S_t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_t^1 & 0 \\ 0 & S_t^2 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \sigma_2\rho & \sigma_2\sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dW_t^1 \\ dW_t^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} dt\right)$$

なので，伊藤の公式より

$$\begin{aligned}
\frac{S_t^1}{S_t^2} &= \frac{S_0^1}{S_0^2} + \int_0^t \frac{1}{S_s^2}\, dS_s^1 + \int_0^t \frac{-S_s^1}{(S_s^2)^2}\, dS_s^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^t \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{(S_s^2)^2} \\ \frac{-1}{(S_s^2)^2} & \frac{2S_s^1}{(S_s^2)^3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sigma_1 S_s^1 & 0 \\ \sigma_2\rho S_s^2 & \sigma_2\sqrt{1-\rho^2} S_s^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sigma_1 S_s^1 & \sigma_2\rho S_s^2 \\ 0 & \sigma_2\sqrt{1-\rho^2} S_s^2 \end{bmatrix}\right) ds \\
&= \frac{S_0^1}{S_0^2} + \int_0^t \frac{1}{S_s^2}\, dS_s^1 + \int_0^t \frac{-S_s^1}{(S_s^2)^2}\, dS_s^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^t \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{(S_s^2)^2} \\ \frac{-1}{(S_s^2)^2} & \frac{2S_s^1}{(S_s^2)^3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (\sigma_1 S_s^1)^2 & \sigma_1\sigma_2\rho S_s^1 S_s^2 \\ \sigma_1\sigma_2\rho S_s^1 S_s^2 & (\sigma_2 S_s^2)^2 \end{bmatrix}\right) ds \\
&= \frac{S_0^1}{S_0^2} + \int_0^t \frac{1}{S_s^2}\, dS_s^1 + \int_0^t \frac{-S_s^1}{(S_s^2)^2}\, dS_s^2 + \int_0^t \frac{S_s^1}{S_s^2}(-\sigma_1\sigma_2\rho + \sigma_2^2)\, ds \\
&= \frac{S_0^1}{S_0^2} + \int_0^t \frac{1}{S_s^2}\, S_s^1(\sigma_1 dW_s^1 + \mu_1 ds) + \int_0^t \frac{-S_s^1}{(S_s^2)^2}\, S_s^2(\sigma_2 d\bar{W}_s + \mu_2 ds) \\
&\quad + \int_0^t \frac{S_s^1}{S_s^2}(-\sigma_1\sigma_2\rho + \sigma_2^2)\, ds \\
&= \frac{S_0^1}{S_0^2} + \int_0^t \frac{1}{S_s^2}\, S_s^1(\sigma_1 dW_s^1 + \mu_1 ds) + \int_0^t \frac{-S_s^1}{(S_s^2)^2}\, S_s^2(\sigma_2\rho dW_s^1 + \sigma_2\sqrt{1-\rho^2} dW_s^2 + \mu_2 ds) \\
&\quad + \int_0^t \frac{S_s^1}{S_s^2}(-\sigma_1\sigma_2\rho + \sigma_2^2)\, ds \\
&= \frac{S_0^1}{S_0^2} + \int_0^t \frac{S_s^1}{S_s^2}(\sigma_1 - \sigma_2\rho)\, dW_s^1 + \int_0^t \frac{-S_s^1}{S_s^2}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\, dW_s^2 \\
&\quad + \int_0^t \frac{S_s^1}{S_s^2}(\mu_1 - \mu_2 - \sigma_1\sigma_2\rho + \sigma_2^2)\, ds
\end{aligned}$$

が成り立つ．これが USD/EUR 為替レート過程の式である．従って

$$d\frac{S_t^1}{S_t^2} = \frac{S_t^1}{S_t^2}\left\{(\sigma_1 - \sigma_2\rho)dW_t^1 - \sigma_2\sqrt{1-\rho^2}dW_t^2 + (\mu_1 - \mu_2 - \sigma_1\sigma_2\rho + \sigma_2^2)dt\right\}$$

となる．時点 t での期待収益率は

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}_t\left[d(S_t^1/S_t^2)/(S_t^1/S_t^2)\right]\\
&=\mathrm{E}_t\left[(\sigma_1-\sigma_2\rho)dW_t^1-\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}dW_t^2+(\mu_1-\mu_2-\sigma_1\sigma_2\rho+\sigma_2^2)dt\right]\\
&=(\mu_1-\mu_2-\sigma_1\sigma_2\rho+\sigma_2^2)dt
\end{aligned}
$$

である．また時点 t でのボラティリティは

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}_t\left[\left\{d(S_t^1/S_t^2)/(S_t^1/S_t^2)-(\mu_1-\mu_2-\sigma_1\sigma_2\rho+\sigma_2^2)dt\right\}^2\right]\\
&=\mathrm{E}_t\left[\left\{(\sigma_1-\sigma_2\rho)dW_t^1-\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}dW_t^2\right\}^2\right]\\
&=\mathrm{E}_t\left[(\sigma_1-\sigma_2\rho)^2(dW_t^1)^2\right]-2(\sigma_1-\sigma_2\rho)\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{E}_t\left[dW_t^1dW_t^2\right]+\mathrm{E}_t\left[\sigma_2^2(1-\rho^2)(dW_t^2)^2\right]\\
&=((\sigma_1-\sigma_2\rho)^2+\sigma_2^2(1-\rho^2))dt\\
&=(\sigma_1^2-2\sigma_1\sigma_2\rho+\sigma_2^2)dt
\end{aligned}
$$

である (W^1 と W^2 は独立なので $\mathrm{E}_t\left[dW_t^1dW_t^2\right]=\mathrm{E}_t\left[dW_t^1\right]\mathrm{E}_t\left[dW_t^2\right]=0$). ∎