# 時系列解析

2017 年 8 月 7 日

# 1　Markov 連鎖

**注意.**　$0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$ と約束する.

基礎となる確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$.

- $E$: 集合,
- $(E, \mathcal{E})$: 可測空間,
- $(X_n)_{n=1}^{+\infty}$ ： $E$-値確率過程.

**注意.**　2 章 ~ 10 章は $E$ が高々可算集合であるとして考える.

# 2　Markov 連鎖

**定義** (Markov 性).　$\forall n \in \mathbb{N},\ i_0, i_1, \cdots, i_n \in E$,

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}\left(X_n = i_n \mid X_0 = i_0,\ X_1 = i_1,\ \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}\right)\\&\quad = \mathrm{P}\left(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}\right).\end{aligned}$$

$(X_n)_{n=1}^{+\infty}$ が Markov 性を持つ場合，これを Markov 連鎖という．以後 $(X_n)_{n=1}^{+\infty}$ は Markov 連鎖.

# 3　Markov 行列

**定義** (Markov 行列).　$(i, j)$ 成分 $(\forall i, j \in E)$ を $\mathrm{P}\left(X_1 = j \mid X_0 = i\right)$ とする確率行列．行列を $P$，$(i, j)$ 成分を $[P]_{ij}$ と表記．計算規則は以下.

$$\begin{aligned}P^0 &= I, && (I：\text{恒等写像}),\\ [P^n]_{ij} &= \sum_{k \in E} [P^{n-1}]_{ik} [P]_{kj}, && (\forall i, j \in E,\ n \in \mathbb{N}).\end{aligned}$$

定義から次が成立

$$[P^n]_{ij} = \mathrm{P}\left(X_n = j \mid X_0 = i\right),\ (\forall n \in \mathbb{N},\ i, j \in E).$$

**証明.**　数学的帰納法で示されることである．$[P]_{ij} = \mathrm{P}\left(X_1 = j \mid X_0 = i\right)$ $(\forall i, j \in E)$ は明らかに成り立つことであるが，自然数 $n \geq 3$ に対して $[P^{n-1}]_{ij} = \mathrm{P}\left(X_{n-1} = j \mid X_0 = i\right)$ $(\forall i, j \in E)$ が成り立っていると仮定する．このとき任意の $i, j \in E$ に対して

$$\begin{aligned}[P^n]_{ij} &= \sum_{k \in E} [P^{n-1}]_{ik} [P]_{kj}\\ &= \sum_{k \in E} \mathrm{P}\left(X_{n-1} = k \mid X_0 = i\right) \mathrm{P}\left(X_1 = j \mid X_0 = k\right)\\ &= \sum_{k \in E} \mathrm{P}\left(X_{n-1} = k \mid X_0 = i\right) \mathrm{P}\left(X_n = j \mid X_{n-1} = k\right)\\ &= \sum_{k \in E} \frac{\mathrm{P}\left(X_{n-1} = k, X_0 = i\right)}{\mathrm{P}\left(X_0 = i\right)} \frac{\mathrm{P}\left(X_n = j, X_{n-1} = k\right)}{\mathrm{P}\left(X_{n-1} = k\right)}\\ &= \sum_{k \in E} \frac{\mathrm{P}\left(X_n = j, X_{n-1} = k, X_0 = i\right)}{\mathrm{P}\left(X_0 = i\right)} \frac{\mathrm{P}\left(X_{n-1} = k, X_0 = i\right) \mathrm{P}\left(X_n = j, X_{n-1} = k\right)}{\mathrm{P}\left(X_n = j, X_{n-1} = k, X_0 = i\right) \mathrm{P}\left(X_{n-1} = k\right)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k \in E} \frac{\mathrm{P}(X_n = j, X_{n-1} = k, X_0 = i)}{\mathrm{P}(X_0 = i)} \frac{\mathrm{P}(X_n = j \mid X_{n-1} = k)}{\mathrm{P}(X_n = j \mid X_{n-1} = k)} \\
&= \sum_{k \in E} \mathrm{P}(X_n = j, X_{n-1} = k \mid X_0 = i) \\
&= \mathrm{P}(X_n = j \mid X_0 = i)
\end{aligned}
$$

が成り立つから，以上で $[P^n]_{ij} = \mathrm{P}(X_n = j \mid X_0 = i)$, $(\forall n \in \mathbb{N},\ i, j \in E)$ が示された． ∎

# 4 Chapman-Kolmogorov 方程式

**命題** (Chapman-Kolmogorov 方程式). 任意の $n, m = 0, 1, 2, \cdots$ と $i, j \in E$ に対し次が成立．

$$[P^{n+m}]_{ij} = \sum_{k \in E} [P^n]_{ik} [P^m]_{kj}.$$

この命題は以降の命題の証明において基礎的である．

# 5 既約性・再帰性

**定義** (既約性). $P$ が既約である

$$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \ \forall i, j \in E,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \text{s.t.} \quad [P^n]_{ij} > 0.$$

**定義** (再帰性). $P$ が再帰的である

$$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \ \mathrm{P}(\exists n \geq 1,\ X_n = i \mid X_0 = i) = 1 \quad (\forall i \in E).$$

$P$ が非再帰的である

$$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \ \mathrm{P}(\forall n \geq 1,\ X_n \neq i \mid X_0 = i) > 0 \quad (\forall i \in E).$$

# 6 離散空間上の Markov 連鎖

**定義** (到達時刻と到達回数). $\forall i \in E,\ \omega \in \Omega$,

到達時刻 $\tau_i(\omega) := \inf \{n \geq 1 \mid X_n(\omega) = i\}$,
到達回数 $\eta_i(\omega) := \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{(X_n = i)}(\omega)$.

$p_{ij} := \mathrm{P}\left(\tau_j < \infty \,\middle|\, X_0 = i\right), \quad (\forall i, j \in E)$
と表記すれば次が成立:

1. $p_{ii} = \mathrm{P}(\exists n \geq 1,\ X_n = j \mid X_0 = i)$,
2. $\mathrm{E}[\eta_i \mid X_0 = i] < +\infty \Rightarrow p_{ii} < 1, \quad (\forall i \in E)$.

**証明.** 初めの式は

$$\{\omega \in \Omega \mid \exists n \geq 1,\ X_n(\omega) = j\} = \left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, \tau_j(\omega) < \infty\right\}$$

により明らかである．第二式について，任意の $i, j \in E$ に対して

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[\eta_j \,\middle|\, x_0 = i\right] &= \mathrm{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{(X_n=i)} \,\middle|\, x_0 = i\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\left(X_n = j \mid X_0 = i\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\left(X_n = j,\ \tau_j \le n \,\middle|\, X_0 = i\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} \mathrm{P}\left(X_n = j,\ \tau_j = m \,\middle|\, X_0 = i\right) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \mathrm{P}\left(X_n = j,\ \tau_j = m \,\middle|\, X_0 = i\right) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \mathrm{P}\left(X_n = j,\ X_m = j,\ X_{m=1}, \cdots, X_1 \ne j \mid X_0 = i\right) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\mathrm{P}\left(X_n = j,\ X_m = j,\ X_{m=1}, \cdots, X_1 \ne j\right)}{\mathrm{P}\left(X_m = j,\ X_{m=1}, \cdots, X_1 \ne j\right)} \frac{\mathrm{P}\left(X_m = j,\ X_{m=1}, \cdots, X_1 \ne j\right)}{\mathrm{P}\left(X_0 = i\right)} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \mathrm{P}\left(X_n = j \mid X_m = j\right) \mathrm{P}\left(\tau_j = m \,\middle|\, X_0 = i\right) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}\left(X_n = j \mid X_0 = j\right) \mathrm{P}\left(\tau_j = m \,\middle|\, X_0 = i\right) \\
&= \mathrm{P}\left(\tau_j < \infty \,\middle|\, X_0 = i\right)\left(\mathrm{E}\left[\eta_j \,\middle|\, X_0 = j\right] + 1\right) \\
&= p_{ij}\left(\mathrm{E}\left[\eta_j \,\middle|\, X_0 = j\right] + 1\right)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．$i = j$ とすれば

$$
\mathrm{E}\left[\eta_j \,\middle|\, x_0 = j\right] = p_{jj}\left(\mathrm{E}\left[\eta_j \,\middle|\, X_0 = j\right] + 1\right)
$$

となるが，$\mathrm{E}\left[\eta_j \,\middle|\, x_0 = j\right] < \infty$ ならば $p_{jj} < 1$ で

$$
\mathrm{E}\left[\eta_j \,\middle|\, x_0 = j\right] = \frac{p_{jj}}{1 - p_{jj}}
$$

が成り立つ．$p_{jj} = 1$ の場合 $\mathrm{E}\left[\eta_j \,\middle|\, x_0 = j\right] < \infty$ ではありえないので $\mathrm{E}\left[\eta_j \,\middle|\, x_0 = j\right] = \infty$ となる．また $\mathrm{E}\left[\eta_j \,\middle|\, x_0 = j\right] < \infty$ ならば

$$
\mathrm{E}\left[\eta_j \,\middle|\, x_0 = i\right] = \frac{p_{ij}}{1 - p_{jj}}
$$

も成立する．また $p_{ij} = 0$ の場合は $\mathrm{E}\left[\eta_j \,\middle|\, x_0 = i\right] = 0$ である．以上の結果をまとめれば

$$
\mathrm{E}\left[\eta_j \,\middle|\, x_0 = i\right] = \begin{cases} \frac{p_{ij}}{1-p_{jj}} & \text{if } \mathrm{E}\left[\eta_j \,\middle|\, x_0 = j\right] < \infty, \\ 0 & \text{if } p_{ij} = 0, \\ \infty & \text{if } p_{jj} = 1 \end{cases}
$$

∎

## 7　正再帰性

**定義 (不変確率測度).**　$E$ 上の確率測度 $\pi = ([\pi]_i)_{i\in E}$, $(\sum_{i\in E}[\pi]_i = 1)$ が $P$ に対して不変確率測度である

$$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\ [\pi]_i = [\pi P]_i (= \sum_{j\in E}[\pi]_j [P]_{ji}),\quad (\forall i\in E).$$

**定義 (正再帰性).**　$P$ は正再帰的
$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$　$P$ が既約かつ不変確率測度が存在.

## 8　再帰性の諸命題

**命題.**　$P$ が既約の下, (i) ~ (iv) が順に示される:

(i)　$P$ が再帰的 $\Leftrightarrow \mathrm{E}\left[\eta_i \mid X_0 = i\right] = +\infty$, $(\forall i\in E)$.
(ii)　$P$ は再帰的であるか非再帰的のどちらか. 特に $E$ が有限集合なら $P$ は再帰的.
(iii)　$P$ が正再帰的 $\Rightarrow$ $P$ は再帰的.
(iv)　$E$ が有限集合なら $P$ は正再帰的.

## 9　周期

**定義 ($i\in E$ の周期).**　$\mathcal{N}_i \coloneqq \{n\geq 1 \mid [p^n]_{ii} > 0\}$ の最大公約数を $i\in E$ の周期といい $d_i$ と表す.

**命題 (既約なら周期は unique).**　$P$ が既約ならば $d_i = d_j$ $(\forall i,j\in E)$. この場合 $d_i$ を $P$ の周期という.

**定義 (非周期性).**　$P$ が既約の下,

$$P \text{ は非周期的}\quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\quad P \text{ の周期が } 1.$$

## 10　Ergodicity

**命題 (周期に関する一命題).**　$P$ : 既約, 非周期的,

$$\forall i,j\in E,\ \exists n_{ij}\in\mathbb{N},\ \text{s.t. } [P^n]_{ij} > 0\ (\forall n\geq n_{ij}).$$

**定理 (Ergodicity).**　$P$ が既約で非周期的かつ正再帰的であるとする. $P$ の不変確率測度を $\pi$ で表すとき次が成立.

$$\lim_{n\to+\infty}[P^n]_{ij} = [\pi]_j,\quad (\forall i,j\in E).$$

**証明.**

**第一段**　直積空間 $E\times E$ 上の Markov 連鎖を考える. $E\times E$ の Markov 行列を $Q$ と表し

$$[Q]_{ik,jl} \coloneqq [P]_{ij}[P]_{kl},\quad (\forall (i,k),(j,l)\in E\times E)$$

と定義する．$(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 上の $E$-値確率過程 $(X_n)_{n=1}^{+\infty}, (Y_n)_{n=1}^{+\infty}$ がそれぞれ Markov 行列 $P$ を持つ独立な Markov 連鎖であるとすれば，$Z_n = (X_n, Y_n)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ は $E \times E$ 上の Markov 連鎖で Markov 行列 $Q$ を持つ．なぜならば任意の $n \in \mathbb{N}$ と $(i, j), (i_0, j_0), \cdots, (i_{n-1}, j_{n-1}) \in E \times E$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left(Z_n = (i, j) \mid Z_0 = (i_0, j_0), Z_1 = (i_1, j_1), \cdots, Z_{n-1} = (i_{n-1}, j_{n-1})\right) \\
&= \frac{\mathrm{P}\left(Z_n = (i, j), Z_0 = (i_0, j_0), \cdots, Z_{n-1} = (i_{n-1}, j_{n-1})\right)}{\mathrm{P}\left(Z_0 = (i_0, j_0), \cdots, Z_{n-1} = (i_{n-1}, j_{n-1})\right)} \\
&= \frac{\mathrm{P}\left((X_n = i, X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}) \cap (Y_n = j, Y_0 = j_0, \cdots, Y_{n-1} = j_{n-1})\right)}{\mathrm{P}\left((X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}) \cap (Y_0 = j_0, \cdots, Y_{n-1} = j_{n-1})\right)} \\
&= \frac{\mathrm{P}\left(X_n = i, X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}\right) \mathrm{P}\left(Y_n = j, Y_0 = j_0, \cdots, Y_{n-1} = j_{n-1}\right)}{\mathrm{P}\left(X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}\right) \mathrm{P}\left(Y_0 = j_0, \cdots, Y_{n-1} = j_{n-1}\right)} \\
&= \mathrm{P}\left(X_n = i \mid X_{n-1} = i_{n-1}\right) \mathrm{P}\left(Y_n = j \mid Y_{n-1} = j_{n-1}\right) \\
&= \frac{\mathrm{P}\left(X_n = i, Y_n = j, X_{n-1} = i_{n-1}, Y_{n-1} = j_{n-1}\right)}{\mathrm{P}\left(X_{n-1} = i_{n-1}, Y_{n-1} = j_{n-1}\right)} \\
&= \mathrm{P}\left(Z_n = (i, j) \mid Z_{n-1} = (i_{n-1}, j_{n-1})\right)
\end{aligned}
$$

が成立するからである．また $Q$ は既約かつ再帰的である．$P$ が既約であるから，前命題により任意の $(i, k), (j, l) \in E \times E$ に対して或る $n_{ij}, n_{kl} \in \mathbb{N}$ が存在し $[P^n]_{ij} > 0$ $(\forall n \geq n_{ij})$ と $[P^n]_{kl} > 0$ $(\forall n \geq n_{kl})$ が成立する．従って $\forall n \geq \max\left\{n_{ij}, n_{kl}\right\}$ に対して

$$
[Q^n]_{ik,jl} \coloneqq [P^n]_{ij} [P^n]_{kl} > 0
$$

が成立するから $Q$ は既約である．

**注意．** 先の式変形と同様に，$(X_n)_{n=1}^{+\infty}, (Y_n)_{n=1}^{+\infty}$ の独立性から任意の $n \in \mathbb{N}$, $(i, k), (j, l) \in E \times E$ に対して

$$
[Q^n]_{ik,jl} = \mathrm{P}\left(Z_n = (j, l) \mid Z_0 = (i, k)\right) = \mathrm{P}\left(X_n = j \mid X_0 = i\right) \mathrm{P}\left(Y_n = l \mid Y_0 = k\right) = [P^n]_{ij} [P^n]_{kl}
$$

が導かれる．

次に再帰性を示す．これには $Q$ に対して $E \times E$ 上の不変確率測度が存在することを言えばよい．

$$
[\mu]_{ik} = [\pi]_i [\pi]_k \quad (\forall (i, k) \in E \times E)
$$

として $\mu = ([\mu]_{ik})_{i,k \in E}$ を定義すればこれは $E \times E$ 上の確率測度であり，任意の $(j, l) \in E \times E$ に対して

$$
[\mu Q]_{jl} = \sum_{(i,k) \in E \times E} [\mu]_{ik} [Q]_{ik,jl} = \sum_{i,k \in E} [\pi]_i [\pi]_k [P]_{ij} [P]_{jl} = \sum_{i \in E} [\pi]_i [P]_{ij} \sum_{k \in E} [\pi]_k [P]_{kl} = [\pi]_j [\pi]_l = [\mu]_{jl}
$$

が成り立つから $\mu$ が $Q$ の不変確率測度であることが判る．ゆえに $Q$ は正再帰的で既約すなわち再帰的である．

第二段

$$
\lim_{n \to +\infty} \left| [P^n]_{ij} - [P^n]_{kj} \right| = 0 \quad (\forall i, j, k \in E) \tag{1}
$$

を示す．$(Z_n)_{n=1}^{+\infty} = ((X_n, Y_n))_{n=1}^{+\infty}$ に対しても同様に

$$\tau_{ik}(\omega) \coloneqq \inf\{n \geq 1 \mid Z_n(\omega) = (i,k)\} \quad (\forall i, k \in E,\ \omega \in \Omega)$$

として到達時刻を定義する．$(X_n)_{n=1}^{+\infty}, (Y_n)_{n=1}^{+\infty}$ の独立性から

$$\begin{aligned}
[P^n]_{ij} &= \frac{\mathrm{P}(X_n = j, X_0 = i)}{\mathrm{P}(X_0 = i)} = \frac{\mathrm{P}(X_n = j, X_0 = i, Y_0 = k)}{\mathrm{P}(X_0 = i, Y_0 = k)} = \mathrm{P}(X_n = j \mid (X_0, Y_0) = (i,k)), \\
[P^n]_{kj} &= \frac{\mathrm{P}(Y_n = j, Y_0 = k)}{\mathrm{P}(Y_0 = k)} = \frac{\mathrm{P}(Y_n = j, X_0 = i, Y_0 = k)}{\mathrm{P}(X_0 = i, Y_0 = k)} = \mathrm{P}(Y_n = j \mid (X_0, Y_0) = (i,k))
\end{aligned}$$

が成立する．

$$\mathrm{P}(X_n = j \mid (X_0, Y_0) = (i,k)) = \mathrm{P}\left(X_n = j, \tau_{jj} > n \,\middle|\, (X_0, Y_0) = (i,k)\right) + \mathrm{P}\left(X_n = j, \tau_{jj} \leq n \,\middle|\, (X_0, Y_0) = (i,k)\right),$$

$$\mathrm{P}(Y_n = j \mid (X_0, Y_0) = (i,k)) = \mathrm{P}\left(Y_n = j, \tau_{jj} > n \,\middle|\, (X_0, Y_0) = (i,k)\right) + \mathrm{P}\left(Y_n = j, \tau_{jj} \leq n \,\middle|\, (X_0, Y_0) = (i,k)\right)$$

と分解できるが，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left(X_n = j, \tau_{jj} \leq n \,\middle|\, (X_0, Y_0) = (i,k)\right) \\
&= \sum_{m=1}^{n} \mathrm{P}\left(X_n = j, \tau_{jj} = m \,\middle|\, (X_0, Y_0) = (i,k)\right) \\
&= \sum_{m=1}^{n} \mathrm{P}(X_n = j, (X_m, Y_m) = (j,j), (X_{m-1}, Y_{m-1}) \cdots (X_1, Y_1) \neq (j,j) \mid (X_0, Y_0) = (i,k)) \\
&= \sum_{m=1}^{n} \frac{\mathrm{P}(X_n = j, X_m = j, X_{m-1}, \cdots, X_1 \neq j)}{\mathrm{P}(X_0 = i)} \frac{\mathrm{P}(Y_m = j, Y_{m-1}, \cdots, Y_1 \neq j)}{\mathrm{P}(Y_0 = k)} \\
&= \sum_{m=1}^{n} \frac{\mathrm{P}(X_n = j, X_m = j, X_{m-1}, \cdots, X_1 \neq j)}{\mathrm{P}(X_m = j, X_{m-1}, \cdots, X_1 \neq j)} \frac{\mathrm{P}(X_m = j, X_{m-1}, \cdots, X_1 \neq j)}{\mathrm{P}(X_0 = i)} \frac{\mathrm{P}(Y_m = j, Y_{m-1}, \cdots, Y_1 \neq j)}{\mathrm{P}(Y_0 = k)} \\
&= \sum_{m=1}^{n} [P^{n-m}]_{jj} \frac{\mathrm{P}((X_m = j, X_{m-1}, \cdots, X_1 \neq j) \cap (Y_m = j, Y_{m-1}, \cdots, Y_1 \neq j))}{\mathrm{P}((X_0 = i) \cap (Y_0 = k))} \\
&= \sum_{m=1}^{n} [P^{n-m}]_{jj} \mathrm{P}\left(\tau_{jj} = m \,\middle|\, (X_0, Y_0) = (i,k)\right) \\
&= \mathrm{P}\left(Y_n = j, \tau_{jj} \leq n \,\middle|\, (X_0, Y_0) = (i,k)\right)
\end{aligned}$$

が成立することと，既約性 ($\mathrm{P}\left(\tau_{jj} < +\infty \,\middle|\, (X_0, Y_0) = (i,k)\right) = 1$) により

$$\begin{aligned}
&\left|\mathrm{P}\left(X_n = j, \tau_{jj} > n \,\middle|\, (X_0, Y_0) = (i,k)\right) - \mathrm{P}\left(Y_n = j, \tau_{jj} > n \,\middle|\, (X_0, Y_0) = (i,k)\right)\right| \\
&\leq 2\,\mathrm{P}\left(\tau_{jj} > n \,\middle|\, (X_0, Y_0) = (i,k)\right) \\
&= 2\left(1 - \mathrm{P}\left(\tau_{jj} \leq n \,\middle|\, (X_0, Y_0) = (i,k)\right)\right) \\
&\longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow +\infty)
\end{aligned}$$

が成り立つことから式 (1) が成立する．

**第三段**　$\sum$ を測度空間 $(E, \mathcal{E}, \pi)$ 上の積分と見做して Lebesgue の収束定理を使う.

$$
\begin{aligned}
\left|[P^n]_{ij} - [\pi]_j\right| &= \left|[P^n]_{ij} - [\pi P^n]_j\right| \\
&= \left|[P^n]_{ij} - \sum_{k \in E} [\pi]_k [P^n]_{kj}\right| \\
&= \left|\sum_{k \in E} [\pi]_k [P^n]_{ij} - \sum_{k \in E} [\pi]_k [P^n]_{kj}\right| \\
&\leq \sum_{k \in E} [\pi]_k \left|[P^n]_{ij} - [P^n]_{kj}\right| \\
&\longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow +\infty).
\end{aligned}
$$

以上で命題の主張が示された. ∎