0.1 4

定義 0.1.1 (4.1). ポーランド記法における語彙とは対 $(\mathcal{W}, \alpha)$ であり，この $\mathcal{W}$ は記号の集合，また α は関数 $\alpha : \mathcal{W} \to \omega$ である．$\mathcal{W}_n = \{ s \in \mathcal{W} \mid \quad \alpha(s) = n \}$ とし，$\mathcal{W}_n$ に属する記号はアリティ n をもつということにする．定義 I.10.3 で定めた通り $\mathcal{W}^{<\omega}$ は $\mathcal{W}$ に属する記号から成る有限列の全体であるものとする．そのような列のうち $(\mathcal{W}, \alpha)$ の式 (または整形式ともいう) とは，

$s \in \mathcal{W}_n$ であり，各 $i < n$ について τ_i が式であるとき，$s\tau_0 \cdots \tau_{n-1}$ も式である

なる規則に則って構成されたもののことをいう．

定理 0.1.2 (4.3). σ を語彙 $(\mathcal{W}, \alpha)$ の式とするとき，

(1) σ の真の始切片はどれも式にならない．

(2) σ の最初の記号が s でそのアリティが n だとすると，式 $\tau_0, \cdots, \tau_{n-1}$ を，σ が $s\tau_0 \cdots \tau_{n-1}$ の形になるように取れる．しかもそのような $\tau_0, \cdots, \tau_{n-1}$ の取り方は一意的である．

定義 0.1.3 (4.4). σ を語彙 $(\mathcal{W}, \alpha)$ の式とするとき，σ の部分式とは σ の中のひとつながりの部分列でそれ自身が式であるもののことをいう．

定理 0.1.4 (4.5). σ を語彙 $(\mathcal{W}, \alpha)$ の式とするとき，各記号の σ における各出現位置は，それぞれ一意的な部分式の開始位置となる．

定義 0.1.5 (4.6). 語彙 $(\mathcal{W}, \alpha)$ の式 σ のある記号のある出現位置について，そのスコープとは，σ のその位置から始まる一意的な部分式のことをいう．

0.2 5

定義 0.2.1 (5.1). 論理記号とは次の 8 つの記号

$$\wedge,\ \vee,\ \neg,\ \to,\ \leftrightarrow,\ \forall,\ \exists,\ =$$

と，それに加えて可算無限個の変数である．変数全体の集合を VAR と書く．通常，u, v, w, x, y, z に必要に応じて添字をつけたもので変数をあらわすものとする．

定義 0.2.2 (5.2). 述語論理の語彙とは，論理外記号の集合 $\mathcal{L}$ のことで，この $\mathcal{L}$ は二つの互いに交わらない集合 $\mathcal{F}$(関数記号の集合) と $\mathcal{P}$(述語記号の集合) に分割される．$\mathcal{F}$ と $\mathcal{P}$ はいずれもアリティに応じて $\mathcal{F} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{F}_n$，$\mathcal{P} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{P}_n$ と分割される．$\mathcal{F}_n$ に属する記号は n 変数関数記号と呼ばれる．$\mathcal{P}_n$ に属する記号は n 項述語記号と呼ばれる．とくに，$\mathcal{F}_0$ に属する記号は定数記号と呼ばれ，$\mathcal{P}_0$ に属する記号は命題定項と呼ばれる．

定義 0.2.3 (5.3). 語彙 $\mathcal{L} = \mathcal{F} \cup \mathcal{P} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{F}_n \cup \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{P}_n$ が定義 5.2 のとおりに与えられたとするとき，

(1) $\mathcal{L}$ の項とは定義 4.1 にいう意味でのポーランド記法の語彙 $\mathcal{F} \cup VAR$ の整形式のこと．ただし，VAR に属する記号のアリティは 0 で，$\mathcal{F}_n$ に属する記号のアリティは n であるものとする．

(2) $\mathcal{L}$ の原子論理式とは，$p\tau_1 \cdots \tau_n$ の形の記号列で，$n \geq 0$ であり，$\tau_1, \cdots, \tau_n$ は $\mathcal{L}$ の項であって，$p \in \mathcal{P}_n$ であるもの，または，$n = 2$ であって p が等号 $=$ であるもののこと．

(3) $\mathcal{L}$ の論理式とは次のルールで構成される記号列のこと:

a 原子論理式は論理式である．

b φ が論理式で $x \in VAR$ のとき $\forall x\varphi$ と $\exists x\varphi$ も論理式である．

c φ が論理式のとき $\neg\varphi$ も論理式である．

d φ と ψ が論理式のとき $\vee\varphi\psi$ も $\wedge\varphi\psi$ も $\rightarrow \varphi\psi$ も $\leftrightarrow \varphi\psi$ も論理式である．

定理 0.2.4 (5.4). 論理式 φ においては，$\mathcal{P} \cup \{\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists, =\}$ に属するどの記号のどの出現のスコープも論理式であり，$\mathcal{F} \cup VAR$ に属する記号のいかなる出現のスコープも項である．

そうしたスコープのことを φ の部分論理式とか部分項とか言う．

定義 0.2.5 (5.5). 論理式 φ の中の変数 y の出現が束縛されているとは，この出現箇所が，y に作用する (すなわち直後に y が続くような)$\forall$ か $\exists$ のスコープ内に含まれていることである．束縛されていない出現のことを自由な出現という．自由な変数が一つもない論理式 φ のことを文という．

式 φ に変数 x が現れて，φ で自由に出現するものが x のみであるとき

定義 0.2.6 (5.6). 論理式 φ の全称閉包とは，$\forall x_1 \cdots \forall x_n\varphi,\ n \geq 0$ の形の任意の文のことである．

0.3 7

定義 0.3.1 (7.1). 述語論理の語彙 $\mathcal{L} = \mathcal{F} \cup \mathcal{P} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{F}_n \cup \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{P}_n$ が (定義 5.2,5.3 の要領で) 与えられたとするとき，$\mathcal{L}$ に対する構造とは，対 $\mathfrak{A} = (A, \mathcal{I})$ であって A は空でない集合であり $\mathcal{I}$ は $\mathcal{L}$ を定義域とする関数で，$\mathcal{I}(s)$ が適切なタイプのセマンティクス的な実体であるもの，すなわち $\mathcal{I}(s)$ のことを $s_{\mathfrak{A}}$ と表記したとして，

- $n > 0$ で $f \in \mathcal{F}_n$ のときは $f_{\mathfrak{A}} : A^n \rightarrow A$,
- $n > 0$ で $p \in \mathcal{P}_n$ のときは $p_{\mathfrak{A}} \subset A^n$,
- $c \in \mathcal{F}_0$ のときは $c_{\mathfrak{A}} \in A$,
- $p \in \mathcal{P}_0$ のときは $p_{\mathfrak{A}} \in 2 = \{0, 1\} = \{F, T\}$

をみたすもの，とする．

定義 0.3.2 (7.2). 項 τ に対し，$V(\tau)$ とは，τ に出現する変数全体の集合とする．論理式 φ に対し，$V(\varphi)$ とは，φ に自由に出現する変数全体の集合とする．

定義 0.3.3 (7.3). α が項あるいは論理式であったとして，α に対する A への割り当てとは，$V(\alpha) \subset \mathrm{dom}(\sigma) \subset VAR$ と $\mathrm{ran}(\sigma) \subset A$ を満たす関数 σ のことである．

定義 0.3.4 (7.5). $\mathfrak{A}$ を語彙 $\mathcal{L}$ に対する構造とするとき，$\mathcal{L}$ の項 τ と，τ に対する A への割り当て σ について A の要素 $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)[\sigma]$ を次のように定める:

(1) $x \in \mathrm{dom}(\sigma)$ のとき $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(x)[\sigma] = \sigma(x)$,

(2) $c \in \mathcal{F}_0$ のとき $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(c)[\sigma] = c_{\mathfrak{A}}$,

(3) $f \in \mathcal{F}_n$ で $n > 0$ のとき

$$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(f\tau_1 \cdots \tau_n)[\sigma] = f_{\mathfrak{A}}\left(\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_1)[\sigma], \cdots, \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_n)[\sigma]\right).$$

とくに $V(\tau) = \emptyset$ のとき，$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)[\emptyset]$ のことを $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)$ と略記する．

定理 0.3.5 (7.5). $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)[\sigma]$ は $\sigma\restriction_{V(\tau)}$ だけに依存する．すなわち，もしも $\sigma'\restriction_{V(\tau)} = \sigma\restriction_{V(\tau)}$ であれば $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)[\sigma'] = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)[\sigma]$ となる．

定義 0.3.6 (7.6). $\mathfrak{A}$ を語彙 $\mathcal{L}$ に対する構造とするとき，$\mathcal{L}$ の任意の原子論理式 φ とそれに対する A への任意の割り当て σ について $\{0,1\}$ (すなわち $\{F,T\}$) の要素 $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma]$ を次のとおりに定める:

(1) $p \in \mathcal{P}_0$ のとき，$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(p)[\sigma] = p_{\mathfrak{A}}$,

(2) $p \in \mathcal{P}_n$ で $n > 0$ のとき，$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(p\tau_1 \cdots \tau_n)[\sigma] = T$ となることは $(\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_1)[\sigma], \cdots, \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_n)[\sigma]) \in p_{\mathfrak{A}}$ と同値,

(3) $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(= \tau_1\tau_2)[\sigma] = T$ となることは $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_1)[\sigma] = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_2)[\sigma]$ と同値．

定義 0.3.7 (7.7). $\sigma + (y/a) = \sigma\restriction_{VAR\setminus\{y\}} \cup \{(y,a)\}$.

定義 0.3.8 (7.8). $\mathfrak{A}$ を語彙 $\mathcal{L}$ に対する構造とするとき，$\mathcal{L}$ の任意の論理式 φ とそれに対する A への割り当て σ について，$\{0,1\}$ すなわち $\{F,T\}$ の要素 $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma]$ を次のとおりに定める．

(1) $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\neg\varphi)[\sigma] = 1 - \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma]$.

(2) $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\wedge\varphi\psi)[\sigma]$ と $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\vee\varphi\psi)[\sigma]$ と $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\rightarrow\varphi\psi)[\sigma]$ と $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\leftrightarrow\varphi\psi)[\sigma]$ とは，$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma]$ と $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\psi)[\sigma]$ から $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ の真理値表にもとづいて決める．

(3) $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\exists y\varphi)[\sigma] = T$ となるのは，ある $a \in A$ について $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma + (y/a)] = T$ となるときで，そしてそのときに限る．

(4) $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\forall y\varphi)[\sigma] = T$ となるのは，すべての $a \in A$ について $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma + (y/a)] = T$ となるときで，そしてそのときに限る．

また，$\mathfrak{A} \models \varphi[\sigma]$ とは $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma] = T$ のことである．$V(\varphi) = \emptyset$ のとき，すなわち φ が文のときには，$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\emptyset]$ を $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)$ と略記し，また $\mathfrak{A} \models \varphi$ とは $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi) = T$ のことであるとする．

定理 0.3.9 (7.9). $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma]$ は $\sigma\restriction_{V(\varphi)}$ だけに依存する．すなわち，もしも $\sigma'\restriction_{V(\varphi)}=\sigma\restriction_{V(\varphi)}$ であれば $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma']=\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma]$ である．

定義 0.3.10 (7.11). $\mathfrak{A}$ が語彙 $\mathcal{L}$ に対するある構造で，Σ が $\mathcal{L}$ の文のある集合のとき，$\mathfrak{A}\models\Sigma$ とは，すべての $\varphi\in\Sigma$ について $\mathfrak{A}\models\varphi$ であるということ．

定義 0.3.11 (7.12). Σ を語彙 $\mathcal{L}$ の文のある集合，ψ を $\mathcal{L}$ のある文とするとき，$\Sigma\models\psi$ とは $\mathfrak{A}\models\Sigma$ であるようなすべての $\mathcal{L}$-構造 $\mathfrak{A}$ について $\mathfrak{A}\models\psi$ であることをいう．

定義 0.3.12 (7.13). Σ を語彙 $\mathcal{L}$ の文の或る集合とするとき，Σ がセマンティクス的に無矛盾であるあるいは充足可能である (これを $\mathrm{Con}_{\models}(\Sigma)$ と書く) とは，ある構造 $\mathfrak{A}$ について $\mathfrak{A}\models\Sigma$ となることである．セマンティクス的に無矛盾でないことを「セマンティクス的に矛盾する」という．

定理 0.3.13 (7.14). Σ を語彙 $\mathcal{L}$ の文のある集合とし，ψ を $\mathcal{L}$ のある文とするとき，

(a) $\Sigma\models\psi$ は $\Sigma\cup\{\neg\psi\}$ がセマンティクス的に矛盾することと同値．

(b) $\Sigma\models\neg\psi$ は $\Sigma\cup\{\psi\}$ がセマンティクス的に矛盾することと同値．

定理 0.3.14 (7.15). Σ を語彙 $\mathcal{L}$ の文のある集合とするとき，次のことが成り立つ．

(1) Σ のすべての有限部分集合がそれぞれセマンティクス的に無矛盾であるとき，Σ もセマンティクス的に無矛盾である．

(2) $\Sigma\models\psi$ のとき，ある有限の $\Delta\subset\Sigma$ について $\Delta\models\psi$ となる

定義 0.3.15 (7.16). $\mathfrak{A}$ を語彙 $\mathcal{L}$ のある構造とし，その宇宙を A とするとき，$|\mathfrak{A}|$ とは $|A|$ のことだとする．

定理 0.3.16 (7.17). Σ を語彙 $\mathcal{L}$ の文のある集合とし，すべての有限な n に対し Σ はサイズ n 以上 (無限でもよい) のモデルをもつものとする．このとき，$\max(|\mathcal{L}|,\aleph_0)$ 以上の任意の基数 κ に対して，Σ はサイズ κ のモデルをもつ．

0.4　8

定義 0.4.1 (8.1). ψ を語彙 $\mathcal{L}$ の論理式とするとき，ψ が論理的に妥当であるとは，すべての $\mathcal{L}$-構造 $\mathfrak{A}$ と，$\mathfrak{A}$ における ψ に対するすべての割り当て σ について $\mathfrak{A}\models\psi[\sigma]$ となることである．

文 ψ が論理的に妥当であることと $\emptyset\models\psi$ とは同値．

定義 0.4.2 (8.2). φ と ψ を語彙 $\mathcal{L}$ の論理式とするとき，両者が論理的に同値であるとは，論理式 $\varphi \leftrightarrow \psi$ が論理的に妥当であることだとする．

定理 0.4.3 (8.3). φ が論理式で文 ψ と χ がいずれも φ の全称閉包であるとすれば，ψ と χ とは論理的に同値である．

定義 0.4.4 (8.4). φ と ψ が語彙 $\mathcal{L}$ の論理式で，Σ が $\mathcal{L}$ の文のある集合であるとき，φ と ψ が Σ のもとで同値とは，論理式 $\varphi \leftrightarrow \psi$ の全称閉包が Σ の全てのモデルにおいて真となることだとする．τ_1 と τ_2 を項とするとき，それらが Σ のもとで同値とは，$\mathfrak{A} \models \Sigma$ であるようなすべての $\mathfrak{A}$ と τ_1, τ_2 に対する A へのすべての割り当て σ について $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_1)[\sigma] = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_2)[\sigma]$ となることだとする．

定理 0.4.5 (8.5). すべての $\mathfrak{A}$ とすべての σ について $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_1)[\sigma] = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_2)[\sigma]$ であるなら τ_1 と τ_2 は同一の項である．

定義 0.4.6 (8.6). β と τ が項で x が変数であるとき，$\beta(x \rightsquigarrow \tau)$ とは β における x のすべての自由な出現を τ に置き換えた結果として得られる項のことだとする．

定理 0.4.7 (8.7). 語彙 $\mathcal{L}$ に対する構造 $\mathfrak{A}$ と，項 β と τ の両方に対する A への割り当て σ(定義 7.3) について，$a = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)[\sigma]$ とするとき

$$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\beta(x \rightsquigarrow \tau))[\sigma] = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\beta)[\sigma + (x/a)]$$

が成り立つ．

定義 0.4.8 (8.8). φ を論理式，x を変数，τ を項とするとき，$\varphi(x \rightsquigarrow \tau)$ とは φ における x のすべての自由な出現を τ に置き換えた結果として得られる論理式のことだとする．

定義 0.4.9 (8.9). 項 τ が論理式 φ 内で変数 x に対して自由であるとは，τ に出現する変数 y についての量化 $\exists y$ あるいは $\forall y$ のスコープ内に，x の自由な出現がまったくないことをいう．

定理 0.4.10 (8.10). $\mathfrak{A}$ を $\mathcal{L}$ に対する構造，φ を $\mathcal{L}$ の論理式，τ を $\mathcal{L}$ の項，σ を φ に対する A への割り当て (定義 7.3) であり，かつ τ に対する A への割り当てでもあるとして，$a = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)[\sigma]$ とおく．いま τ が φ 内で変数 x に対して自由であったとする．このとき $\mathfrak{A} \models \varphi(x \rightsquigarrow \tau)[\sigma]$ と $\mathfrak{A} \models \varphi[\sigma + (x/a)]$ とは同値である．

記法

置き換えられる変数が x であることが文脈から明らかである場合に $\varphi(x \rightsquigarrow \tau)$ の略記として $\varphi(\tau)$ を用いる．この目的のため，議論の間は φ のことを $\varphi(x)$ とあらわすことがある．同様に φ を $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ とあらわしているときは，各変数 x_i のすべての自由な出現を τ_i に一斉に置き換えた結果として得られる論理式を $\varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ とあらわす．

定理 0.4.11 (8.12). τ が $\varphi(x)$ 内で x に対して自由であるとすれば，$\forall x\varphi(x) \to \varphi(\tau)$ と $\varphi(\tau) \to \exists x\varphi(x)$ は論理的に妥当である．

定理 0.4.12 (8.13). $\mathfrak{A}$ を $\mathcal{L}$ に対する構造，$\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ は $\mathcal{L}$ の論理式で $x_1, \cdots, x_n$ の他には自由変数を持たないものとする．また $\tau_1, \cdots, \tau_n$ を $\mathcal{L}$ の項とし，これらは自由変数を含まないものとする．$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_i)$ を a_i と書こう．すると，$\mathfrak{A} \models \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ と $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \cdots, a_n]$ とは同値である．

0.5　9

定義 0.5.1 (9.1). **基本論理式**とは (ポーランド記法で表したとき) 命題結合子から始まっていないような論理式のことである．

定義 0.5.2 (9.2). $\mathcal{L}$ に対する**真偽割り当て**とは，$\mathcal{L}$ の基本論理式全体の集合から $\{0, 1\}$ すなわち $\{F, T\}$ への関数 v のことだとする．そのような関数 v が与えられたとして $\{F, T\}$ の要素 $\bar{v}(\varphi)$ を次のように再帰的に定める:

(1) $\bar{v}(\neg\varphi) = 1 - \bar{v}(\varphi)$

(2) $\bar{v}(\wedge\varphi\psi), \bar{v}(\vee\varphi\psi), \bar{v}(\to \varphi\psi), \bar{v}(\leftrightarrow \varphi\psi)$ は $\bar{v}(\varphi)$ と $\bar{v}(\psi)$ からそれぞれ $\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$ の真理値表に従って定められる．

すべての真偽割り当て v に対して $\bar{v}(\varphi) = T$ となるような論理式 φ のことを**命題論理のトートロジー**という．

定理 0.5.3 (9.3). 命題論理のトートロジーはいずれも論理的に妥当である．

0.6 10

定義 0.6.1 (10.1). **論理の公理**とは，次のリストにあるタイプの論理式の全称閉包 (定義 5.6) であるような文のことだとする．ここで x, y, z およびそれらに添字をつけたものは任意の変数をあらわすものとする．

(1) すべての命題論理のトートロジー
(2) x が φ において自由でないときの $\varphi \to \forall\varphi$
(3) $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$
(4) 項 τ が φ 内の変数 x に対して自由であるときの $\forall x\varphi \to \varphi(x \rightsquigarrow \tau)$
(5) 項 τ が φ 内の変数 x に対して自由であるときの $\varphi(x \rightsquigarrow \tau) \to \exists x\varphi$
(6) $\forall x\neg\varphi \leftrightarrow \neg\exists x\varphi$
(7) $x = x$
(8) $x = y \leftrightarrow y = x$
(9) $x = y \wedge y = z \to x = z$
(10) $n > 0$ で f を $\mathcal{L}$ の n 変数関数記号とするときの $x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \to (fx_1 \cdots x_n = fy_1 \cdots y_n)$
(12) $n > 0$ で p を $\mathcal{L}$ の n 変数述語記号とするときの $x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \to (px_1 \cdots x_n \leftrightarrow py_1 \cdots y_n)$

定理 0.6.2 (10.2). 論理の公理はすべて論理的に妥当である．

定義 0.6.3 (10.3). Σ を $\mathcal{L}$ の文のある集合とするとき，Σ からの**フォーマルな証明**とは $\mathcal{L}$ の文の空でない列 $\varphi_0, \cdots, \varphi_n$ であって，各 i について，$\varphi_i \in \Sigma$ であるか，φ_i が論理の公理であるか，あるいは何らかの $j, k < i$ について φ_j と φ_k からモーダスポンネスによって φ_i が導かれる (つまり φ_k が $\varphi_j \to \varphi_i$ である) か，いずれかになっているもののことだとする．この列は末尾の文 φ_n のフォーマルな証明と呼ばれる．

定義 0.6.4 (10.4). Σ を $\mathcal{L}$ の文のある集合とし，φ を $\mathcal{L}$ のある文とするとき，$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ とは Σ からの φ のフォーマルな証明が存在するという意味である．

定理 0.6.5 (10.5). $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ であれば $\Sigma \models \varphi$ である．

0.7 11

定理 0.7.1 (11.1). $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \to \psi$ と $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathcal{L}} \psi$ とは同値である．

定義 0.7.2 (11.2). 語彙 $\mathcal{L}$ の文の集合 Σ がシンタクス的に矛盾するとは，$\mathcal{L}$ のある文 φ について $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ と $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi$ の両方が成立することをいう．このことを $\neg\,\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma)$ と書く．矛盾しないとき，無矛盾である ($\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma)$) という．

定理 0.7.3 (11.3). 語彙 $\mathcal{L}$ の文からなる集合 Σ については次は互いに同値である:

(1) $\neg\,\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma)$,

(2) $\mathcal{L}$ のすべての文 ψ について $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \psi$.

定理 0.7.4 (11.4). 語彙 $\mathcal{L}$ の文からなる集合 Σ と，$\mathcal{L}$ の文 φ について，

(1) $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ と $\neg\,\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma \cup \{\neg\varphi\})$ は同値.

(2) $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi$ と $\neg\,\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma \cup \{\varphi\})$ は同値.

定義 0.7.5 (11.5). 文 ψ が $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ から**トートロジーで得られる**というのは，$(\varphi_1, \cdots, \varphi_n) \to \psi$ が命題論理のトートロジーであるときにいう.

定理 0.7.6 (11.6). $\psi, \varphi_1, \cdots, \varphi_n$ が $\mathcal{L}$ の文で ψ が $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ からトートロジーで得られるなら，$\{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\} \vdash \psi$ である.

ψ が φ_1 と φ_2 からトートロジーで得られるなら

$$\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \psi)$$

もトートロジーである．$\{\varphi_1, \varphi_2\}$ から ψ への形式的証明は

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_1 \to (\varphi_2 \to \psi),\ \varphi_2 \to \psi,\ \psi$$

である.

定理 0.7.7 (11.7). $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\} \vdash \psi$ であり，各 $i = 1, \cdots, n$ について $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi_i$ であれば $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \psi$ である.

定理 0.7.8 (11.8). ここで Σ は $\mathcal{L}$ の文からなる集合であり，$\varphi(x)$ は x 以外の自由変数をもたない $\mathcal{L}$ の論理式であるものとする．$\varphi(\tau)$ が文となるように，UI と EG における項 τ には変数が含まれないものとする．UG と EI における c は $\mathcal{L}$ に含まれない定数記号で，$\mathcal{L}'$ とは $\mathcal{L} \cup \{c\}$ のことであるものとする．EI における ψ は $\mathcal{L}$ の文であるものとする.

定理 0.7.9 (11.12). 文の集合 Σ と文 φ が語彙 $\mathcal{L}$ で書かれているとし，定数記号 c を加え $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c\}$ としよう．$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}'} \varphi$ であったとする．このとき $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ である.

0.8 12

定理 0.8.1 (12.1). Σ を語彙 $\mathcal{L}$ の文からなる集合とするとき，

(1) $\mathrm{Con}_{\models}(\Sigma)$ と $\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma)$ が同値.

(2) $\mathcal{L}$ の任意の文 φ について，$\Sigma \models \varphi$ と $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ が同値.

定理 0.8.2 (12.2). Σ は語彙 $\mathcal{L}$ の文からなる集合とし，$\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma)$ であると仮定する．このとき $\mathrm{Con}_{\models}(\Sigma)$ である．

定理 0.8.3 (12.3). 補題 12.2 から定理 12.1 が得られる．

Σ にモデルが存在する場合，$\Sigma \vdash \varphi$ ならば

$$\Sigma \models \varphi$$

であるから

$$\Sigma \not\models \neg\varphi.$$

よって $\Sigma \nvdash \neg\varphi$ である．

$\Sigma \models \varphi$ ならば $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ のモデルは存在しない．よって $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ は矛盾する．よって背理法より

$$\Sigma \vdash \varphi$$

が成立．

定義 0.8.4 (12.4). 語彙 $\mathcal{L}$ の項 τ が変数を含まないとき，τ を**閉項**という．$\mathcal{L}$ の閉項全体の集合を $CT_0(\mathcal{L})$ と書く．

定義 0.8.5 (12.5). Σ は語彙 $\mathcal{L}$ の文からなる集合であるとし，また $\mathcal{F}_0 \neq \emptyset$ であると仮定する．$CT_0(\mathcal{L})$ を宇宙とする構造 $\mathfrak{A}_0$ を

- $f \in \mathcal{F}_n$ かつ $n > 0$, $\tau_1, \cdots, \tau_n \in CT_0(\mathcal{L})$ のとき，$f_{\mathfrak{A}_0}(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ とは閉項 $f(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ のこと，
- $p \in \mathcal{P}_n$ かつ $n > 0$, $\tau_1, \cdots, \tau_n \in CT_0(\mathcal{L})$ のとき，$(\tau_1, \cdots, \tau_n) \in p_{\mathfrak{A}_0}$ とは $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} p(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ となること，
- $c \in \mathcal{F}_0$ のとき $c_{\mathfrak{A}_0} = c$.
- $p \in \mathcal{P}_0$ のとき $p_{\mathfrak{A}_0} = 1$ とは $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} p$ となること．

と定め，これを**閉項モデル** $\mathfrak{CT}_0(\mathcal{L}, \Sigma)$ と呼ぶ．

定理 0.8.6 (12.6). $\tau \in CT_0(\mathcal{L})$ のとき $\mathrm{val}_{\mathfrak{CT}_0(\mathcal{L},\Sigma)}(\tau) = \tau$.

定義 0.8.7 (12.7). $CT_0(\mathcal{L})$ 上の関係 $\sim$(正確には $\sim_{\mathcal{L},\Sigma}$) を

$$\tau \sim \sigma \Longleftrightarrow \Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \tau = \sigma$$

によって定める．

定理 0.8.8 (12.8). この $\sim$ は $CT_0(\mathcal{L})$ 上の同値関係である．

定義 0.8.9 (12.9). Σ を語彙 $\mathcal{L}$ の文の集合だとし，また $\mathcal{F}_0 \neq \emptyset$ と仮定する．$CT(\mathcal{L},\Sigma) = CT_0(\mathcal{L},\Sigma)/\sim$ と定める．エルブランのモデル $\mathfrak{A} = \mathfrak{CT}(\mathcal{L},\Sigma)$ とはこの $CT(\mathcal{L},\Sigma)$ を宇宙とし，記号の解釈を

- $f \in \mathcal{F}_n$，$n > 0$ で $[\tau_1], \cdots, [\tau_n] \in CT(\mathcal{L},\Sigma)$ のとき $f_{\mathfrak{A}}([\tau_1], \cdots, [\tau_n])$ とは $[f(\tau_1, \cdots, \tau_n)]$ のこと，
- $p \in \mathcal{P}_n$，$n > 0$ で $[\tau_1], \cdots, [\tau_n] \in CT(\mathcal{L},\Sigma)$ のとき $([\tau_1], \cdots, [\tau_n]) \in p_{\mathfrak{A}} \iff \Sigma \vdash_{\mathcal{L}} p(\tau_1, \cdots, \tau_n)$，
- $c \in \mathcal{F}_0$ のとき $c_{\mathfrak{A}} = [c]$，
- $p \in \mathcal{P}_0$ のとき $p_{\mathfrak{A}} = 1(\text{真}) \iff \Sigma \vdash_{\mathcal{L}} p$

によって定めた $\mathcal{L}$-構造のことである．

定理 0.8.10 (12.10). 語彙 $\mathcal{L}$ の文の集合 Σ を考える．ただし $\mathcal{F}_0 \neq \emptyset$ と仮定する．$\mathfrak{A} = \mathfrak{CT}(\mathcal{L},\Sigma)$ としよう．このとき，

(1) $\mathcal{L}$ の閉項 τ について $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau) = [\tau]$.

(2) $\mathcal{L}$ の文 φ が $\forall x_1 \cdots x_n \psi(x_1, \cdots, x_n)$ の形だとすると，$\mathfrak{A} \models \varphi$ と $\mathcal{L}$ のすべての閉項 $\tau_1, \cdots, \tau_n$ について $\mathfrak{A} \models \psi(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ であることが同値.

(3) φ が原子論理式である文のときは，$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ と $\mathfrak{A} \models \varphi$ が同値.

(4) φ が原子論理式の全称閉包で $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ のときは $\mathfrak{A} \models \varphi$ である.

(1) $\tau \in \mathcal{F}_0$ のとき

$$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau) = \tau_{\mathfrak{A}} = [\tau]$$

が成り立つ．τ が $f\tau_1 \cdots \tau_n$ のとき

$$\begin{aligned}
\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(f\tau_1 \cdots \tau_n) &= f_{\mathfrak{A}}(\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_1), \cdots, \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_n)) \\
&= f_{\mathfrak{A}}[\tau_1] \cdots [\tau_n] \\
&= [f\tau_1 \cdots \tau_n]
\end{aligned}$$

が成り立つ.

(2) $\psi(x)$ が原子論理式，つまり p を述語とし ξ を閉項として $px\xi$ なる式のとき，任意の割り当て σ に対して

$$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(px\xi)[\sigma + (x/[\tau])] = T \iff ([\tau], [\xi]) \in p_{\mathfrak{A}} \iff \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(p\tau\xi)[\sigma] = T$$

が成り立つ．ゆえに，x のみが自由に現れる任意の式 $\psi(x)$ に対して

$$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\psi(x))[\sigma + (x/[\tau])] = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\psi(\tau))[\sigma] = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\psi(\tau))$$

が成り立つ．$\mathfrak{A} \models \forall x\psi(x)$ のとき，任意の閉項 τ に対して

$$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\psi(x))[\sigma + (x/[\tau])] = T$$

が成り立つ．すなわち任意の閉項 τ に対して

$$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\psi(\tau)) = T$$

が成り立つので $\mathfrak{A} \models \psi(\tau)$．逆に任意の閉項 τ に対して $\mathfrak{A} \models \psi(\tau)$ のとき，$\mathfrak{A}$ の宇宙の任意の要素 a に対して，

$$a = [\pi]$$

なる閉項 π を取れば

$$\begin{aligned} T &= \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\psi(\pi)) \\ &= \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\psi(x))[\sigma + (x/[\pi])] \\ &= \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\psi(x))[\sigma + (x/a)] \end{aligned}$$

が成り立つ．ゆえに $\mathfrak{A} \models \forall x \psi(x)$ である．

(3) φ が $p\tau_1 \cdots \tau_n$ なる式のとき，

$$\begin{aligned} \Sigma \vdash_{\mathcal{L}} p\tau_1 \cdots \tau_n &\Longleftrightarrow ([\tau_1], \cdots, [\tau_n]) \in p_{\mathfrak{A}} \\ &\Longleftrightarrow (\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_1), \cdots, \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_n)) \in p_{\mathfrak{A}} \\ &\Longleftrightarrow \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(p\tau_1 \cdots \tau_n) = T \\ &\Longleftrightarrow \mathfrak{A} \models p\tau_1 \cdots \tau_n \end{aligned}$$

が成り立つ．

(4) $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \forall x \psi(x)$ ならすべての閉項 τ で

$$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \psi(\tau)$$

となる．ゆえに (3) よりすべての閉項 τ で

$$\mathfrak{A} \models \psi(\tau)$$

が成り立ち，(2) より

$$\mathfrak{A} \models \forall x \psi(x)$$

が成り立つ． ∎

定義 0.8.11 (12.11). 語彙 $\mathcal{L}$ の文の集合 Σ は次の条件を満たすとき**極大** $(\vdash, \mathcal{L})$ 無矛盾であるといわれる：

(1) $\mathrm{Con}_{\vdash, \mathcal{L}}(\Sigma)$ であって，

(2) $\mathcal{L}$ の文のどんな集合 Π についても $\mathrm{Con}_{\vdash, \mathcal{L}}(\Pi)$ かつ $\Pi \supsetneq \Sigma$ とはならない．

定理 0.8.12 (12.12). Δ が $\mathcal{L}$ の文の集合で $\mathrm{Con}_{\vdash, \mathcal{L}}(\Delta)$ であるものとすると，$\mathcal{L}$ の文の集合 Σ で，Δ を含んで極大 $(\vdash, \mathcal{L})$ 無矛盾であるようなものが存在する．

定理 0.8.13 (12.13). $\mathcal{L}$ の文の極大 $(\vdash, \mathcal{L})$ 無矛盾な集合 Σ を考える．このとき $\mathcal{L}$ の任意の文 φ と ψ について，

(1) $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \Longleftrightarrow \varphi \in \Sigma$;

(2) $(\neg\varphi) \in \Sigma \Longleftrightarrow \varphi \notin \Sigma$;

(3) $(\varphi \vee \psi) \in \Sigma \Longleftrightarrow \varphi \in \Sigma$ または $\psi \in \Sigma$.

語彙 $\mathcal{L}$ の文の集合 Σ が無矛盾であるとは

- $\Sigma \vdash \varphi$ ならば $\Sigma \nvdash \neg\varphi$,
- $\Sigma \vdash \neg\varphi$ ならば $\Sigma \nvdash \varphi$

が満たされること．無矛盾 $\Longleftrightarrow$ モデルが存在．Σ が完全であるとは

- $\Sigma \nvdash \varphi$ ならば $\Sigma \vdash \neg\varphi$,
- $\Sigma \nvdash \neg\varphi$ ならば $\Sigma \vdash \varphi$

が満たされること．完全だからと言って無矛盾ではない．Σ から証明も反証もできる文 φ の存在を否定できる？ 極大であるとは

- $\Sigma \cup \{\varphi\}$ が無矛盾ならば $\varphi \in \Sigma$

となること．極大なら

$$\Sigma \vdash \varphi \text{ ならば } \varphi \in \Sigma$$

が成立する．実際，$\Sigma \vdash \varphi$ なら $\Sigma \cup \{\varphi\}$ は無矛盾なので極大性より $\varphi \in \Sigma$ となる．逆は完全性と併せて得られる．$\Sigma \cup \{\varphi\}$ が無矛盾なら背理法より

$$\Sigma \nvdash \neg\varphi$$

なので，完全性より $\Sigma \vdash \varphi$ となる．このとき $\varphi \in \Sigma$ となる (逆)．つまり，Σ が完全であるとき，Σ が極大であることと $\Sigma \vdash \varphi \Longrightarrow \varphi \in \Sigma$ は同値．

Σ を語彙 $\mathcal{L}$ の文の集合とする．極大無矛盾なら完全かつ $\Sigma \vdash \varphi \Longrightarrow \varphi \in \Sigma$ である．Σ が無矛盾で，完全かつ $\Sigma \vdash \varphi \Longrightarrow \varphi \in \Sigma$ ならば極大無矛盾である．

極大無矛盾であるとき

$$\Sigma \nvdash \varphi$$

とすれば $\varphi \notin \Sigma$ である．$\Sigma \cup \{\varphi\}$ は矛盾するので背理法より

$$\Sigma \vdash \neg\varphi$$

となる．ゆえに完全．また

$$\Sigma \vdash \varphi$$

ならば任意の文 ψ に対して

$$\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \Longleftrightarrow \Sigma \vdash \psi$$

となるので $\Sigma \cup \{\varphi\}$ は無矛盾である．極大性より

$$\varphi \in \Sigma$$

となる．完全かつ $\Sigma \vdash \varphi \Longrightarrow \varphi \in \Sigma$ のとき，$\Sigma \cup \{\varphi\}$ が無矛盾ならば

$$\Sigma \nvdash \neg\varphi$$

である．完全性より $\Sigma \vdash \varphi$ であって

$$\varphi \in \Sigma$$

となる．

$\Pi \overset{\text{def}}{=\!=} \{\varphi \mid \quad \Sigma \vdash \varphi\}$ とおけば，

(1) 任意の文 φ に対して $\Sigma \vdash \varphi \Longleftrightarrow \Pi \vdash \varphi$.
(2) 任意の文 φ に対して $\varphi \in \Pi \Longleftrightarrow \Pi \vdash \varphi$.
(3) Σ が無矛盾なら Π は極大無矛盾？

(1) $\Pi \vdash \varphi$ であるとき，φ の証明 $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi n$ に対して，φ_0 は推論法則か $\varphi_0 \in \Pi$ なので

$$\Sigma \vdash \varphi_0$$

である．任意の $i < j$ に対して $\Sigma \vdash \varphi_i$ ならば，証明可能性の定義より

$$\Sigma \vdash \varphi_j$$

である．よって $\Sigma \vdash \varphi$.

(2) $\Pi \vdash \varphi$ ならば $\Sigma \vdash \varphi$ なので $\varphi \in \Pi$.

定理 0.8.14 (12.14). 語彙 $\mathcal{L}$ は $\mathcal{F}_0 \neq \emptyset$ であるものとし，文の集合 Σ は極大 $(\vdash, \mathcal{L})$ 無矛盾であるとする．$\mathfrak{A} = \mathfrak{CT}(\mathcal{L}, \Sigma)$ とする．$\mathcal{L}$ の文 φ が量化記号を用いないものであれば，$\varphi \in \Sigma$ と $\mathfrak{A} \models \varphi$ とは同値である．

$\Sigma \vdash \varphi \vee \psi$ のとき，$\Sigma \vdash \varphi$ ならば $\mathfrak{A} \models \varphi$ なので $\mathfrak{A} \models \varphi \vee \psi$ である．$\Sigma \nvdash \varphi$ ならば

$$\Sigma \nvdash \varphi \Longrightarrow \varphi \notin \Sigma \Longrightarrow \Sigma \vdash \neg\varphi$$

より $\Sigma \vdash \neg\varphi$ となり，$\Sigma \vdash \psi$ が従う．ゆえに先ほどと同様に $\mathfrak{A} \models \varphi \vee \psi$ である．

$\mathfrak{A} \models \varphi \vee \psi$ のとき，$\Sigma \nvdash \varphi$ なら $\Sigma \vdash \neg\varphi$ なので $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$．よって $\mathfrak{A} \models \psi$．よって帰納法の仮定より $\Sigma \vdash \psi$．よって $\Sigma \vdash \varphi \vee \psi$.

定義 0.8.15 (12.15). $\exists x\varphi(x)$ の形の文を**存在文**という．

定義 0.8.16 (12.16). Σ を語彙 $\mathcal{L}$ の文からなる集合とし，$\exists x\varphi(x)$ を存在文とするとき，閉項 τ が $(\Sigma, \mathcal{L}$ に関して$)\exists x\varphi(x)$ の**証人**であるとは $\tau \in CT_0(\mathcal{L})$ かつ $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} (\exists x\varphi(x) \to \varphi(\tau))$ であるときにいう．すべての存在文に対し少なくとも一つの証人が存在するなら，Σ は $\mathcal{L}$ **にすべての証人をもつ**という．

定理 0.8.17 (12.17). Σ は語彙 $\mathcal{L}$ の文からなる集合だとする．Σ が極大 $(\vdash, \mathcal{L})$ 無矛盾で $\mathcal{L}$ にすべての証人をもつと仮定し，$\mathfrak{A} = \mathfrak{CT}(\mathcal{L}, \Sigma)$ とする．このとき，$\mathfrak{A} \models \Sigma$ である．

定理 0.8.18 (12.18). Σ が $\mathcal{L}$ の文からなる集合，$\exists x\varphi(x)$ が $\mathcal{L}$ のある存在文，c を $\mathcal{L}$ に属さない新しい定数記号とし $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c\}$ とする．$\Sigma' = \Sigma \cup \{\exists x\varphi(x) \to \varphi(c)\}$ と定め，$\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma)$ と仮定する．このとき $\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}'}(\Sigma')$ である．

定理 0.8.19 (12.19). Σ を語彙 $\mathcal{L}$ の文からなる集合とし，δ を任意の順序数としよう．各 $\alpha < \delta$ に対する新しい定数記号 c_α を考えて，δ 以下の α について $\mathcal{L}_\alpha = \mathcal{L} \cup \{\, c_\xi \mid \xi < \alpha \,\}$ とおく．各 $\alpha < \delta$ に対して $\exists x \varphi_\alpha(x)$ を語彙 $\mathcal{L}_\alpha$ の存在文とし，$\Sigma_\delta = \Sigma \cup \{\, \exists x \varphi_\alpha(x) \to \varphi(c_\alpha) \mid \alpha < \delta \,\}$ とおく．$\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma)$ と仮定するとき，$\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}_\delta}(\Sigma_\delta)$ である．

定理 0.8.20 (12.20). Σ を語彙 $\mathcal{L}$ の文からなる集合とし，$\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma)$ と仮定する．$\kappa = \max(|\mathcal{L}|, \aleph_0)$ としよう．このとき次のような Σ' と $\mathcal{L}'$ が存在する：

(1) $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \mathcal{C}$，ただし $\mathcal{C}$ はなんらかの定数記号の集合．

(2) $|\mathcal{L}'| = |\Sigma'| = \kappa$

(3) $\Sigma \subset \Sigma'$ であり，Σ' は $\mathcal{L}'$ の文からなる集合．

(4) $\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}'}(\Sigma')$．

(5) Σ' は $\mathcal{L}'$ にすべての証人をもつ．