# 確率解析レポート

基礎工学研究科システム創成専攻修士 1 年
学籍番号 29C17095
百合川尚学

2017 年 7 月 28 日

# 1　レポート課題その 1

講義資料定義 3.1 に定義される Brown 運動が存在する確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ を基礎に考える．
定理 3.8 の Brown 運動の性質 (1), (2), (3) を示せ．

**(定理 3.8).**　$B = (B_t)$ を原点から出発する $N$-次元 Brown 運動とするとき，いかが成り立つ．

(1)　(回転不変性)　任意の $R \in O(N)$ に対して $RB = (RB_t)$ は原点から出発する Brown 運動である．ただし，$O(N)$ は $N$ 次直交行列全体で $Rx$ はベクトル $x$ に左から行列 $R$ をかけることいを意味する．

(2)　(スケール則)　任意の $c > 0$ に対して $((1/\sqrt{c})B_{ct})$ は原点から出発する Brown 運動である．

(3)　任意の $h > 0$ に対して $(B_{t+h} - B_h)$ は原点から出発する Brown 運動である．

**証明.**

(1)　講義資料定義 3.1 の番号 (i)(ii)(iii) の順番に照合していくが，その前に $RB = (RB_t)$ が確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 上の確率過程となっていることを確認する．任意の $N$ 次直交行列 $R$ は $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ の連続な全単射線型作用素であるから可測 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)/\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ である．従って任意の $t \geq 0$ に対して $RB_t$ は可測 $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ となるから $RB = (RB_t)$ は確率過程である．講義資料定義 3.1 の (i) について，連続写像の合成である

$$[0, \infty) \ni t \longmapsto RB_t(\omega) \in \mathbb{R}^N, \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

もまた連続写像であるから，(i) は満たされている．次に (ii) を示す．まずは任意の $t \leq 0$ に対して

$$\left\{ (RB_t)^{-1}(E) \;\middle|\; E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \right\} = \left\{ B_t^{-1}(E) \;\middle|\; E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \right\} \tag{1}$$

が成り立つことを示す．これは次の理由による．任意の $N$ 次直交行列 $R$ は $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ の連続写像であるから任意の Borel 集合 $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ を $\mathbb{R}^N$ の Borel 集合に引き戻す．また $R$ の逆写像 $R^{-1}$ もまた $O(N)$ の元であるから，任意の Borel 集合の $R$ による像，即ち $R^{-1}$ によって引き戻した集合は $\mathbb{R}^N$ の Borel 集合となる．従って任意の Borel 集合 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ に対して

$$\begin{aligned} (RB_t)^{-1}(A) &= B_t^{-1}\left(R^{-1}A\right) \in \left\{ B_t^{-1}(E) \;\middle|\; E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \right\}, \\ B_t^{-1}(A) &= B_t^{-1}\left(R^{-1}RA\right) \in \left\{ (RB_t)^{-1}(E) \;\middle|\; E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \right\} \end{aligned}$$

が示され，式 (1) が成り立つと判る．従って

$$\sigma(B_u \;:\; u \leq s) = \bigvee_{u \leq s} \left\{ B_u^{-1}(E) \;\middle|\; E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \right\} = \bigvee_{u \leq s} \left\{ (RB_u)^{-1}(E) \;\middle|\; E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \right\} = \sigma(RB_u \;:\; u \leq s)$$

が任意の $s \geq 0$ で成り立つ．任意の $0 \leq s < t$ に対して $B_t - B_s$ は $\mathcal{F}_s^B = \sigma(B_u \;:\; u \leq s)$ と独

立であるから，任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ と $F \in \sigma(RB_u : u \leq s) = \sigma(B_u : u \leq s)$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\{RB_t - RB_s \in A\} \cap F\right) &= \mathrm{P}\left(\{R(B_t - B_s) \in A\} \cap F\right) \\
&= \mathrm{P}\left(\{B_t - B_s \in R^{-1}A\} \cap F\right) \\
&= \mathrm{P}\left(B_t - B_s \in R^{-1}A\right)\mathrm{P}(F) \\
&= \mathrm{P}\left(R(B_t - B_s) \in A\right)\mathrm{P}(F) = \mathrm{P}\left(RB_t - RB_s \in A\right)\mathrm{P}(F)
\end{aligned}$$

が成り立つ．これは任意の $0 \leq s < t$ に対して $RB_t - RB_s$ と $\sigma(RB_u : u \leq s)$ とが独立であることを表しているから，(ii) も示されたことになる．(iii) について，行列式 $\det(R)$ が $\pm 1$ になることに注意すれば，任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(RB_t - RB_s \in A) &= \mathrm{P}\left(B_t - B_s \in R^{-1}A\right) \\
&= (2\pi(t-s))^{-\frac{N}{2}} \int_{R^{-1}A} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2(t-s)}\right) dx \\
&= (2\pi(t-s))^{-\frac{N}{2}} \int_{A} \exp\left(-\frac{|y|^2}{2(t-s)}\right) dy \qquad (y = Rx \text{ として変数変換})
\end{aligned}$$

が成り立つことにより，任意の $0 \leq s < t$ に対して $RB_t - RB_s$ もまた平均ベクトル 0，共分散行列 $(t-s)I_N$ の $N$ 次元 Gauss 型確率変数であることが示された．最後に (iv) が満たされていることを確認する．全単射線型写像 $R$ について $0 \in A \Leftrightarrow 0 \in R^{-1}A$ $(\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$ であることに注意すれば

$$\mathrm{P}_{RB_0}(A) = \mathrm{P}\left(B_0^{-1}\left(R^{-1}A\right)\right) = \begin{cases} 1 & 0 \in R^{-1}(A) \\ 0 & 0 \notin R^{-1}(A) \end{cases} = \begin{cases} 1 & 0 \in A \\ 0 & 0 \notin A \end{cases}$$

となり，$\mathrm{P}_{RB_0}$ と $\delta_0$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ の上で一致する．

(2) 講義資料定義 3.1 の番号 (i)(ii)(iii) の順番に照合していく．その前に，$((1/\sqrt{c})B_{ct})$ が確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 上の確率過程となっていることは，$(1/\sqrt{c})I_N$ ($I_N$ は $N$ 次単位行列) が $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ の連続写像であることと (1) の証明から確認できる．(i) について，$[0,\infty) \ni t \longmapsto B_{ct}(\omega) \in \mathbb{R}^N$,　$(\forall \omega \in \Omega)$ が連続であるから $[0,\infty) \ni t \longmapsto (1/\sqrt{c})B_{ct}(\omega) \in \mathbb{R}^N$,　$(\forall \omega \in \Omega)$ の連続性も明らかである．(ii) について，写像 $\mathbb{R}^N \ni x \longmapsto x/\sqrt{c} \in \mathbb{R}^N$ は $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ の連続な全単射であり，明らかに逆写像 $\mathbb{R}^N \ni x \longmapsto \sqrt{c}x \in \mathbb{R}^N$ もまた連続な全単射である．従って任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ に対して

$$\tfrac{1}{\sqrt{c}}A := \left\{ \tfrac{1}{\sqrt{c}}x \;\middle|\; x \in A \right\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \qquad \sqrt{c}A := \left\{ \sqrt{c}x \;\middle|\; x \in A \right\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$$

が成り立つ．よって任意の $t \geq 0$ に対して

$$\left\{ \left(\tfrac{1}{\sqrt{c}}B_{ct}\right)^{-1}(A) \;\middle|\; A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \right\} = \left\{ B_{ct}^{-1}(A) \;\middle|\; A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \right\}$$

が成り立つから，任意の $s \geq 0$ に対して

$$\sigma\left(\tfrac{1}{\sqrt{c}}B_{cu} : u \leq s\right) := \bigvee_{u \leq s} \left\{ \left(\tfrac{1}{\sqrt{c}}B_{cu}\right)^{-1}(A) \;\middle|\; A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \right\} = \bigvee_{u \leq s} \left\{ B_{cu}^{-1}(A) \;\middle|\; A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \right\} = \sigma(B_{cu} : u \leq s)$$

となり，任意の $0 \leq s < t$ に対して $B_{ct} - B_{cs}$ は $\sigma(B_{cu}\ :\ u \leq s)$ と独立であるから，任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ と $F \in \sigma\left(\frac{1}{\sqrt{c}}B_{cu}\ :\ u \leq s\right) = \sigma(B_{cu}\ :\ u \leq s)$ に対して

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\left\{\frac{1}{\sqrt{c}}B_{ct} - \frac{1}{\sqrt{c}}B_{cs} \in A\right\} \cap F\right) &= \mathrm{P}\left(\left\{B_{ct} - B_{cs} \in \sqrt{c}A\right\} \cap F\right) \\ &= \mathrm{P}\left(B_{ct} - B_{cs} \in \sqrt{c}A\right)\mathrm{P}(F) \\ &= \mathrm{P}\left(\frac{1}{\sqrt{c}}B_{ct} - \frac{1}{\sqrt{c}}B_{cs} \in A\right)\mathrm{P}(F)\end{aligned}$$

が成り立つ．これは任意の $0 \leq s < t$ に対して $\frac{1}{\sqrt{c}}B_{ct} - \frac{1}{\sqrt{c}}B_{cs}$ が $\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{c}}B_{cu}\ :\ u \leq s\right)$ と独立であることを示す．(iii) について，これもヤコビアンが $\left(\sqrt{c}\right)^N$ になることに注意すれば

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\frac{1}{\sqrt{c}}B_{ct} - \frac{1}{\sqrt{c}}B_{cs} \in A\right) &= \mathrm{P}\left(B_{ct} - B_{cs} \in \sqrt{c}A\right) \\ &= (2\pi(ct - cs))^{-\frac{N}{2}} \int_{\sqrt{c}A} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2(ct - cs)}\right) dx \\ &= (2\pi(t - s))^{-\frac{N}{2}} \int_A \exp\left(-\frac{|y|^2}{2(t - s)}\right) dy \qquad \left(y = \frac{1}{\sqrt{c}}x \text{ と変数変換}\right)\end{aligned}$$

が成り立つことにより，任意の $0 \leq s < t$ に対して $\frac{1}{\sqrt{c}}B_{ct} - \frac{1}{\sqrt{c}}B_{cs}$ は平均ベクトル 0，共分散行列 $(t - s)I_N$ の $N$ 次元 Gauss 型確率変数であると判る．最後に (iv) を示す．任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ に対して $0 \in A \Leftrightarrow 0 \in \sqrt{c}A$ であることに注意すれば,

$$\mathrm{P}_{\frac{1}{\sqrt{c}}B_0}(A) = \mathrm{P}\left(B_0^{-1}\left(\sqrt{c}A\right)\right) = \begin{cases}1 & 0 \in \sqrt{c}A \\ 0 & 0 \notin \sqrt{c}A\end{cases} = \begin{cases}1 & 0 \in A \\ 0 & 0 \notin A\end{cases}$$

が成り立つから $\mathrm{P}_{\frac{1}{\sqrt{c}}B_0}$ と $\delta_0$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ の上で一致する．

(3) 形から $(B_{t+h} - B_h)$ が確率過程であることは明らかである．講義資料定義 3.1 の (i) から見ていく．$B = (B_t)$ が Brown 運動であるから

$$[0, \infty) \ni t \longmapsto B_{t+h}(\omega) - B_h(\omega) \in \mathbb{R}^N, \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

が連続写像であることは明らかである．次に (ii) を確認する．任意の $t \geq 0$ に対して $B_{t+h}$ は可測 $\mathcal{F}^B_{t+h}/\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$，$B_h$ は可測 $\mathcal{F}^B_h/\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ であって，$\mathcal{F}^B_h \subset \mathcal{F}^B_{t+h}$ により $B_{t+h} - B_h$ は可測 $\mathcal{F}^B_{t+h}/\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ である．つまり

$$\left\{(B_{t+h} - B_h)^{-1}(A) \;\middle|\; A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)\right\} \subset \mathcal{F}^B_{t+h}$$

が成り立っているから

$$\sigma(B_{u+h} - B_h\ :\ u \leq s) \coloneqq \bigvee_{u \leq s} \left\{(B_{u+h} - B_h)^{-1}(A) \;\middle|\; A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)\right\} \subset \mathcal{F}^B_{s+h}$$

の関係がわかる．従って任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ と $F \in \sigma(B_{u+h} - B_h\ :\ u \leq s) \subset \mathcal{F}^B_{s+h}$ に対して，

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}\left(\{(B_{t+h} - B_h) - (B_{s+h} - B_h) \in A\} \cap F\right) \\ &= \mathrm{P}\left(\{B_{t+h} - B_{s+h} \in A\} \cap F\right) \\ &= \mathrm{P}\left(B_{t+h} - B_{s+h} \in A\right)\mathrm{P}(F) \qquad (B_{t+h} - B_{s+h} \text{ と } \mathcal{F}^B_{s+h} \text{ が独立}) \\ &= \mathrm{P}\left((B_{t+h} - B_h) - (B_{s+h} - B_h) \in A\right)\mathrm{P}(F)\end{aligned}$$

となるから，任意の $0 \leq s < t$ に対して $(B_{t+h} - B_h) - (B_{s+h} - B_h)$ は $\sigma(B_{u+h} - B_h \ : \ u \leq s)$ と独立であることが示された．(iii) について，任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ に対して

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\left((B_{t+h} - B_h) - (B_{s+h} - B_h) \in A\right) &= \mathrm{P}\left(B_{t+h} - B_{s+h} \in A\right) \\
&= (2\pi((t+h) - (s+h)))^{-\frac{N}{2}} \int_A \exp\left(-\frac{|x|^2}{2((t+h) - (s+h))}\right) dx \\
&= (2\pi(t-s))^{-\frac{N}{2}} \int_A \exp\left(-\frac{|x|^2}{2(t-s)}\right) dx
\end{aligned}
$$

が成り立つから，任意の $0 \leq s < t$ に対して $(B_{t+h} - B_h) - (B_{s+h} - B_h)$ は平均ベクトル 0，共分散行列 $(t-s)I_N$ の $N$ 次元 Gauss 型確率変数であると示された．最後に (iv) を確認する．便宜上 $Y_t \coloneqq B_{t+h} - B_h \ (\forall t \geq 0)$ と表記する．$t = 0$ の場合 $\Omega$ 上で $Y_0 = 0$ が成り立っているから，任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ に対して

$$
\mathrm{P}_{Y_0}(A) = \mathrm{P}\left(Y_0^{-1}(A)\right) = \begin{cases} 1 & 0 \in A \\ 0 & 0 \notin A \end{cases}
$$

となり，$Y_0$ の分布は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ 上で $\delta_0$ に一致する． ∎

## 2 レポート課題その 2

講義資料定義 3.12 に定義される Brown 運動が存在する確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ を基礎に考える．

$N$ を正整数，$x = {}^t(x_1, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ に対して，$|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_N^2}$ で Euclid のノルムを定義する．$B^x = (B^x(t))_{t\geq 0}$ を $x$ から出発する $N$-次元 $(\mathcal{F}_t)$-Brown 運動とし，$\sigma$ を $(\mathcal{F}_t)$-停止時間とする，このとき，次の (1), (2), (3) に回答せよ．

(1) $|B_x|^2 = \left(|B^x(t)|^2\right)_{t\geq 0}$ はクラス (DL) に属する SbMG であることを示し，その Doob-Meyer 分解を求めよ．

(2) 任意の $t \geq 0$ に対して $\mathrm{E}\left[|B^x(\sigma \wedge t)|^2\right] = N\,\mathrm{E}\,[\sigma \wedge t] + |x|^2$ が成り立つことを示せ．

(3) $D$ を $\mathbb{R}^N$ の有界領域とし，$x \in D$ とする．$\sigma_D$ を領域 $D$ からの脱出時間 $\sigma_D = \inf\{t > 0 : B^x(t) \in \mathbb{R}^N \backslash D\}$ とするとき，$\mathrm{P}\,(\sigma_D < \infty) = 1$ が成り立つことを示せ．

**証明.**

(1) 講義資料命題 3.9(3) は講義資料定義 3.12 で定義される $x$ 出発の $(\mathcal{F}_t)$-Brown 運動についても成り立つ．よって $B_i^{x_i}$ $(i = 1, 2, \cdots, N)$ が $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲールであるから，凸関数 $|\cdot|^2$ で変換することにより $\left|B_i^{x_i}\right|^2$ $(i = 1, 2, \cdots, N)$ は $(\mathcal{F}_t)$-劣マルチンゲールとなる．従ってその有限和で表される $|B^x|^2 = \left(|B^x(t)|^2\right)_{t\geq 0}$ も $(\mathcal{F}_t)$-劣マルチンゲールである．実際，$B_i^{x_i}$ $(i = 1, 2, \cdots, N)$ が $(\mathcal{F}_t)$-適合過程で任意の $t \geq 0$ で二乗可積分であることから，$|B^x|^2$ についても $(\mathcal{F}_t)$-適合で任意の $t \geq 0$ で可積分であることが従い，また任意の $0 \leq s < t$ に対して $A \in \mathcal{F}_s$ を任意に取れば

$$\int_A |B^x(t,\omega)|^2\ \mathrm{P}\,(d\omega) = \sum_{i=1}^N \int_A |B_i^{x_i}(t,\omega)|^2\ \mathrm{P}\,(d\omega) \geq \sum_{i=1}^N \int_A |B_i^{x_i}(s,\omega)|^2\ \mathrm{P}\,(d\omega) = \int_A |B^x(s,\omega)|^2\ \mathrm{P}\,(d\omega)$$

が成り立つから $|B^x|^2$ が $(\mathcal{F}_t)$-劣マルチンゲールであると判る．次に $|B^x|^2$ がクラス (DL) に属することを示す．任意に $a > 0$ を固定する．講義資料に倣い $\mathbf{S_a}$ が $\sigma(\omega) \leq a$ $(\forall\omega \in \Omega)$ を満たす $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ 上の停止時刻 $\sigma$ 全体を表すとする．任意抽出定理 (講義資料定理 2.21) を適用すれば，任意の $\sigma \in \mathbf{S_a}$ と $c > 0$ に対して

$$\int_{|B^x(\sigma)|^2 \geq c} |B^x(\sigma(\omega),\omega)|^2\ \mathrm{P}\,(d\omega) \leq \int_{|B^x(\sigma)|^2 \geq c} |B^x(a,\omega)|^2\ \mathrm{P}\,(d\omega)$$

が成り立つ．Chebyshev の不等式により

$$\mathrm{P}\left(|B^x(\sigma)|^2 \geq c\right) \leq \frac{1}{c}\int_\Omega |B^x(a,\omega)|^2\ \mathrm{P}\,(d\omega) \tag{2}$$

も成り立つ．右辺の可積分関数 $|B^x(a)|^2$ について，任意の $\epsilon > 0$ に対して或る $\delta > 0$ が存在し，$\mathrm{P}\,(A) < \delta$ なる任意の $A \in \mathcal{F}$ 上での積分は $< \epsilon$ となる．従って (2) の右辺を $< \delta$ となるような $c > 0$ を選べば，全ての $c' > c$ に対して

$$\sup_{\sigma\in\mathbf{S_a}} \int_{|B^x(\sigma)|^2 \geq c'} |B^x(\sigma(\omega),\omega)|^2\ \mathrm{P}\,(d\omega) < \epsilon$$

が成り立つ．これは確率変数の族 $\left(|B^x(\sigma)|^2\right)_{\sigma\in\mathbf{S_a}}$ が一様可積分であることを表している．$a$ は任意であったから $|B^x|^2$ がクラス (DL) に属することが示された．最後に $|B^x|^2$ の Doob-Meyer 分解を求める．命題 3.9(3) により ($(\mathcal{F}_t)$-Brown 運動でも成り立つ) $\left(|B_i^{x_i}(t)|^2 - t\right)_{t\geq 0}$ が $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲールであるとわかっているから，$\left(|B^x(t)|^2 - Nt\right)_{t\geq 0}$ もまた $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲールである．実際，$(\mathcal{F}_t)$-適合であることと可積分性は上に書いた理由で問題なく，任意の $0 \leq s < t$ と $A \in \mathcal{F}_s$ に対して

$$
\begin{aligned}
\int_A |B^x(t,\omega)|^2 - Nt \ \mathrm{P}(d\omega) &= \int_A \sum_{i=1}^N |B_i^{x_i}(t,\omega)|^2 - Nt \ \mathrm{P}(d\omega) \\
&= \sum_{i=1}^N \int_A |B_i^{x_i}(t,\omega)|^2 - t \ \mathrm{P}(d\omega) \\
&= \sum_{i=1}^N \int_A |B_i^{x_i}(s,\omega)|^2 - s \ \mathrm{P}(d\omega) \\
&= \int_A |B^x(s,\omega)|^2 - Ns \ \mathrm{P}(d\omega)
\end{aligned}
$$

も成り立つ．これが求める Doob-Meyer 分解になっていることを確認する．講義資料の定理 2.25 に則れば，まず $\left(|B^x(t)|^2\right)_{t\geq 0}$ がクラス (DL) に属している $(\mathcal{F}_t)$-劣マルチンゲールであり $\left(|B^x(t)|^2 - Nt\right)_{t\geq 0}$ は $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲールであるから，あとは $(Nt)_{t\geq 0}$ が予測可能な可積分増加過程であることをいえば良い．$Nt$ は明らかに左連続，更に各 $t$ ごとに $\omega \in \Omega$ の関数としては定数関数であるから $(\mathcal{F}_t)$-適合過程であり，よって予測可能である．また $\omega \in \Omega$ に無関係に $N0 = 0$，$Nt$ は $t$ の右連続な単調増加関数であって，全ての $t \geq 0$ で $\mathrm{E}[Nt] = Nt < +\infty$ が成り立っていることにより，これは可積分増加過程でもある．

(2) 一般に連続マルチンゲールを停止時間で停めた過程もまたマルチンゲールとなることをいえばよい．フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}, (\mathcal{F}_t))$ 上の $\mathbb{R}^1$ 値連続確率過程 $(X_t)_{t\geq 0}$ が $(\mathcal{F}_t)$ マルチンゲールであるとする．この確率空間上の停止時間 $\sigma$ を任意に取り $(X_{\sigma\wedge t})_{t\geq 0}$ を考える．$(x_t)_{t\geq 0}$ が連続で $(\mathcal{F}_t)$-適合であることから $(\mathcal{F}_t)$-発展的可測となり，講義資料命題 2.20 により全ての $t$ で $X_{\sigma\wedge t}$ $(= X_{\sigma\wedge t} I_{(\sigma\wedge t<+\infty)})$ は可測 $\mathcal{F}_{\sigma\wedge t}/\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ となる．$\mathcal{F}_{\sigma\wedge t} \subset \mathcal{F}_t$ により $(X_{\sigma\wedge t})_{t\geq 0}$ もまた $(\mathcal{F}_t)$-適合かつ連続であると判る．全ての $t$ で $X_{\sigma\wedge t}$ が可積分となることは，$(|X_t|)_{t\geq 0}$ が $(\mathcal{F}_t)$-劣マルチンゲールであることと任意抽出定理 (講義資料定理 2.21) により

$$
\mathrm{E}[|X_t| \,|\, \mathcal{F}_{\sigma\wedge t}] \geq |X_{\sigma\wedge t}|, \quad a.s.
$$

となることより従う．マルチンゲール性の三つ目の性質が満たされるかを確認する．任意の時間 $0 \leq s < t$ に対して $A \in \mathcal{F}_s$ を任意に取る．このとき

$$
A \cap \{\sigma \wedge t > s\} \cap \{\sigma \leq u\} = \begin{cases} A \cap \{s < \sigma \leq u\} \in \mathcal{F}_u & (u \geq s) \\ \emptyset \in \mathcal{F}_u & (u < s) \end{cases}, \quad \forall u \in [0, \infty)
$$

が成り立つことから $A \cap \{\sigma \wedge t > s\} \in \mathcal{F}_\sigma$ である．$\sigma \wedge t$ が停止時間であるから $A \cap \{\sigma \wedge t > s\} \in \mathcal{F}_s$ でもあり，従って

$$
A \cap \{\sigma \wedge t > s\} \in \mathcal{F}_s \cap \mathcal{F}_\sigma = \mathcal{F}_{\sigma\wedge s}
$$

が成り立つ．任意抽出定理 (講義資料定理 2.21) を適用すれば

$$
\int_{A\cap\{\sigma\wedge t>s\}} X(\sigma(\omega) \wedge t, \omega) \ \mathrm{P}(d\omega) = \int_{A\cap\{\sigma\wedge t>s\}} X(\sigma(\omega) \wedge s, \omega) \ \mathrm{P}(d\omega)
$$

と表すことができる．一方で $A\cap\{\sigma\wedge t\leq s\}$ 上の積分も考えると，$s<t$ としているからこの集合の上で $\sigma\wedge t=\sigma\wedge s=\sigma$ が成り立っていることに注意して

$$\int_{A\cap\{\sigma\wedge t\leq s\}} X(\sigma(\omega)\wedge t,\omega)\ \mathrm{P}(d\omega)=\int_{A\cap\{\sigma\wedge t\leq s\}} X(\sigma(\omega)\wedge s,\omega)\ \mathrm{P}(d\omega)$$

が成り立つ．二つの積分を併せれば

$$\int_A X(\sigma(\omega)\wedge t,\omega)\ \mathrm{P}(d\omega)=\int_A X(\sigma(\omega)\wedge s,\omega)\ \mathrm{P}(d\omega)$$

が成り立つ．時間 $0\leq s<t$ と $A\in\mathcal{F}_s$ は任意であったから，$\sigma$ で停めた過程 $(X_{\sigma\wedge t})_{t\geq 0}$ もまた $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲールであると示された．以上の結果を用いれば，(1) における $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲール $\left(|B^x(t)|^2-Nt\right)_{t\geq 0}$ に対して

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |B^x(\sigma(\omega)\wedge t,\omega)|^2-N(\sigma(\omega)\wedge t)\ \mathrm{P}(d\omega)\\ &\qquad=\int_\Omega |B^x(0,\omega)|^2\ \mathrm{P}(d\omega)=\sum_{i=1}^N\int_\Omega B_i^{x_i}(0,\omega)^2\ \mathrm{P}(d\omega)=\sum_{i=1}^N x_i^2=|x|^2\end{aligned}$$

が成り立つ．右辺の変形は命題 3.9 の (1) による (点 $x$ 出発なので $x_i^2$ となる)．左辺の被積分関数はどちらも可積分関数であるから，以上で任意の $t\geq 0$ に対して

$$\mathrm{E}\left[|B^x(\sigma\wedge t)|^2\right]=N\,\mathrm{E}\,[\sigma\wedge t]+|x|^2$$

が成り立つことが示された．

(3) 講義資料定義 2.8 と定理 2.9 により $\sigma_D$ は広義停止時間であるが，同資料仮定 2.11 によりフィルトレーションは右連続であるから，命題 2.7 により $\sigma_D$ は $(\mathcal{F}_t)$-停止時間として扱うことができる．(2) の結果により任意の $t\geq 0$ に対して

$$\mathrm{E}\left[|B^x(\sigma_D\wedge t)|^2\right]=N\,\mathrm{E}\,[\sigma_D\wedge t]+|x|^2 \tag{3}$$

が成り立つ．ここで左辺が $t$ に関して一様に有界であることを証明する．各 $\omega\in\Omega$ ごとに，写像 $[0,+\infty)\ni t\longmapsto B^x(t,\omega)$ が連続であることと $D$ が開集合であることにより $0\leq s\leq\sigma_D(\omega)$ であるような $s$ に対して $B^x(s,\omega)\in\overline{D}$ となる．ここで $\overline{D}$ は $D$ の閉包を表すとする．$D$ が $\mathbb{R}^N$ の有界領域であるから $\overline{D}$ も $\mathbb{R}^N$ の有界閉集合となる．ここで

$$d:=\sup\left\{|x-y|\ :\ x,y\in\overline{D}\right\}$$

とおく．等式 (3) の左辺の被積分関数について，時刻の部分は $\sigma_D(\omega)\wedge t\leq\sigma_D(\omega)$ が全ての $\omega\in\Omega$ で成立しているから，$\omega$ ごとに $B^x(\sigma_D(\omega)\wedge t,\omega)$ は $\overline{D}$ に属している．従って $|B^x(\sigma_D(\omega)\wedge t,\omega)-x|\leq d$ $(\forall\omega\in\Omega)$ で抑えられるから

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[|B^x(\sigma_D\wedge t)|^2\right]&=\int_\Omega |B^x(\sigma_D(\omega)\wedge t,\omega)|^2\ \mathrm{P}(d\omega)\\ &=\int_\Omega |B^x(\sigma_D(\omega)\wedge t,\omega)-x+x|^2\ \mathrm{P}(d\omega)\\ &=\int_\Omega |B^x(\sigma_D(\omega)\wedge t,\omega)-x|^2+2\langle B^x(\sigma_D(\omega)\wedge t,\omega)-x,\ x\rangle+|x|^2\ \mathrm{P}(d\omega)\\ &\leq d^2+2d|x|+|x|^2\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $\mathbb{R}^N$ の標準的内積を表し (つまり $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^N x_i y_i$, $x = {}^t(x_1, \cdots, x_N)$, $y = {}^t(y_1, \cdots, y_N) \in \mathbb{R}^N$.), 最後の式変形で Schwarz の不等式を使った．等式 (3) にこの結果を適用すれば

$$\mathrm{E}\,[\sigma_D \wedge t] \leq \frac{d^2 + 2d|x|}{N}$$

が $t \geq 0$ に依らずに成り立つ．これにより $\mathrm{P}\,(\sigma_D = +\infty) = 0$ が示される．もし $\alpha := \mathrm{P}\,(\sigma_D = +\infty) > 0$ であるとすれば，集合 $\{\sigma_D = +\infty\}$ の上で，$t > (d^2 + 2d|x|)/(\alpha N)$ となる $t$ に対して

$$\frac{d^2 + 2d|x|}{\alpha N}\,\mathrm{P}\,(\sigma_D = +\infty) < \int_{\{\sigma_D = +\infty\}} \sigma_D(\omega) \wedge t\ \mathrm{P}\,(d\omega) \leq \int_\Omega \sigma_D(\omega) \wedge t\ \mathrm{P}\,(d\omega) \leq \frac{d^2 + 2d|x|}{N}$$

が成り立ち矛盾ができるからである．ゆえに $\mathrm{P}\,(\sigma_D < +\infty) = 1$ が示された． ∎

## 3 レポート課題その 3

$B=(B(t))_{t\ge 0}$, $W=(W(t))_{t\ge 0}$ は，ともに 0 から出発する独立な 1-次元 Brown 運動，$a$, $b$ は $ab\neq 0$ なる実実数，$n$ は 2 以上の整数とする．このとき，以下の (1), (2), (3) の確率過程に Itô の公式が適用できることを確認し，適用したその結果を書け．

(1) $X=(X(t))_{t\ge 0}$ は $t\ge 0$ に対して $X(t)=(B(t)+at)^n$ で定義される確率過程.

(2) $Y=(Y(t))_{t\ge 0}$ は $t\ge 0$ に対して $Y(t)=B(t)W(t)$ で定義される確率過程.

(3) $Z=(Z(t))_{t\ge 0}$ は $t\ge 0$ に対して $Z(t)=e^{-bt}\left(a+\int_0^t e^{bs}\,dB(s)\right)$ で定義される確率過程.

**解答** 設問文ではただの Brown 運動と書いてありますが，講義資料 5 の仮定に合わせて，考えている確率空間は" 原点から出発する 1 次元 $(\mathcal{F}_t)$-Brown 運動 $B=(B_t)$ を備えた usual なフィルター付き確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P},(\mathcal{F}_t))$" とし，設問の $B$, $W$ は 1-次元 $(\mathcal{F}_t)$-Brown 運動であると考えて以下に進みます.

(1) 講義資料定理 6.2 を適用する．

$$B(t)=\int_0^t dB(s)$$

であるから，講義資料中の式 (6.1) における $\Phi=(\Phi(t))_{t\ge 0}$, $\Psi=(\Psi(t))_{t\ge 0}$ はそれぞれ $\Phi(t)=1$, $\Psi(t)=0$ $(\forall t\ge 0)$ である．よって明らかに $\Phi\in\mathcal{L}_{2,loc}$, $\Psi\in\mathcal{L}_{1,loc}$ であるから，$(B(t))_{t\ge 0}$ は 1 次元 Itô 過程である．また定理 6.2 の $f:[0,T]\times\mathbb{R}\ni(t,x)\longmapsto f(t,x)\in\mathbb{R}$ はこの場合 $f(t,x)=(x+at)^n$ で表現される関数であり，$t\in[0,T]$ を固定して $x$ の多項式関数であるから $x$ の関数として $C^2$ 級であり，$x\in\mathbb{R}$ を固定したとき $t$ の関数としても多項式関数であるから $[0,T]$ で $C^1$ 級である．以上より講義資料定理 6.2 を適用することができて，講義資料式 (6.5) により

$$(B(t)+at)^n=\int_0^t an(B(s)+at)^{n-1}\,ds+\int_0^t n(B(s)+at)^{n-1}\,dB(s)+\frac{1}{2}\int_0^t n(n-1)(B(s)+at)^{n-2}\,ds$$

が成り立つ.

(2) 講義資料定理 6.3 を適用する．$B,W$ が独立な原点出発の 1 次元 Brown 運動であるから $(B(t),\ W(t))_{t\ge 0}$ も原点出発の 2 次元 Brown 運動である．

$$B(t)=\int_0^t dB(s),\quad W(t)=\int_0^t dW(s)$$

であるから，講義資料中の式 (6.8) における $\Phi=((\Phi^{ik}(t))_{1\le i,k\le 2})_{t\ge 0}$, $\Psi=(\Psi^1(t),\ \Psi^2(t))_{t\ge 0}$ はそれぞれ $\Phi^{ik}(t)=\delta_{ik}$, $\Psi^i(t)=0$ $(\forall t\ge 0,\ i,k=1,2)$ である．ただし $\delta_{ik}$ は Kronecker のデルタである．従って $(B(t),\ W(t))_{t\ge 0}$ は 2 次元 Itô 過程である．また定理 6.3 の $f:[0,T]\times\mathbb{R}^2\ni(t,x)\longmapsto f(t,x)\in\mathbb{R}$ はこの場合 $f(t,x)=x_1x_2$ $(x={}^t(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2)$ で表現される関数であり，$x$ の関数として $C^2$ 級である．$x\in\mathbb{R}$ を固定したときは $t$ についての定数関数であると見做せば $[0,T]$ で $C^1$ 級である．以上より講義資料定理 6.3 を適用することができて，

$$B(t)W(t)=\int_0^t W(s)\,dB(s)+\int_0^t B(s)\,dW(s)$$

と表せる.

(3) $Z(0) = a$ である．$U(t) \coloneqq e^{bt}Z(t)\ (\forall t \geq 0)$ と置けば

$$U(t) - U(0) = e^{bt}Z(t) - a = \int_0^t e^{bs}\,dB(s)$$

と表現できる．右辺は Itô 過程であるから講義資料定理 6.2 を適用できる．関数 $f : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^1 \ni (t, x) \longmapsto f(t, x) \in \mathbb{R}^1$ として $f(t, x) = e^{-bt}x$ とおき式 (6.5) を書けば

$$\begin{aligned} f(t, U(t)) - f(0, U(0)) &= Z(t) - Z(0) \\ &= \int_0^t -bZ(s)\,ds + \int_0^t e^{-bs}\,dB(s) \end{aligned} \tag{4}$$

と表すことができる．ここで上式の右辺が Itô 過程となっていることを示す．確率積分項の被積分関数 $[0, +\infty) \ni t \longmapsto e^{-bt} \in \mathbb{R}^1$ について，各 $t \geq 0$ において $\omega$ の関数として定数関数と見れば確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 上の予測可能な確率過程となり，任意の $[0, T]\ (T > 0)$ 上で $t$ について二乗可積分であるから $\mathcal{L}_{2,loc}$ に属する．式 (4) のもう一方の項では確率過程 $(Z(t))_{t\geq 0}$ が被積分関数となっている．設問文中の $Z(t)$ の定義式における $\int_0^t e^{bs}\,dB(s)$ は，$(e^{bt})_{t\geq 0}$ が $[0, +\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^1$ の関数として $\mathcal{L}_2$ の元であることと講義資料定理 5.8(1) により $\mathcal{M}_{2,c}$ に属しているとわかる．従って $Z(t)$ は適合過程となり，もちろん左連続でもあるから予測可能である．また $Z(t)$ は連続だから任意の区間 $[0, T]$ で可積分であり，$(Z(t))_{t\geq 0} \in \mathcal{L}_{1,loc}$ であるとわかる．ゆえに式 (4) の右辺は Itô 過程を表している．以上より $Z(t)$ は確率微分方程式

$$dZ(t) = e^{-bt}\,dB(t) - bZ(t)\,dt$$

をみたす. ∎