2020年2月4日

ε 項とクラスの導入による具

目次

1 導入

1.1 ε 計算について

- 量化∃, ∀を使う証明を命題論理の証明に埋め

- 式 $\varphi(x)$ に対して

$$\varepsilon x$$

という形のオブジェクトを作り，ε 項と呼ぶ
や∀の付いた式を

- **ZF** 集合論では集合というオブジェクトが用
  ない．たとえば

$$\exists x \forall y$$

は定理であり「空集合は存在する」と読むか

- ε 項を使えば，∃の公理と空集合の存在定理

$$\forall y (y \notin \varepsilon x$$

が成り立つ．つまり ε 項は「存在」を「実在

1.2　クラスについて

- ブルバキ[]や島内[]でも ε 項を使った集合論
- ところで,「φ である集合の全体」の意味の

$$\{ x \mid$$

というオブジェクトも取り入れたい.

- **ZF** 集合論では定義による拡大 or インフォー

定義 1.1 (クラス). 式 φ に x のみが自由に現

$$\varepsilon x \varphi(x),$$

の形のオブジェクトをクラス **(class)** と呼ぶ

- クラスである ε 項は集合である.
- 集合でないクラスもある．たとえば $\{x \mid x =$

2　言語

- クラスという新しいオブジェクトを導入した
  問題になる.

- 妥当性は，ZF集合論の式 φ に対して

$$\text{ZF集合論で}\varphi\text{が証明される} \Longleftarrow$$

  が成り立つかどうかで検証する.

- 精密な検証のためには，集合論の言語と証明

2.1 言語 $\mathcal{L}_\in$

言語 $\mathcal{L}_\in$

矛盾記号 $\perp$

論理記号 $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$

量化子 $\forall, \exists$

述語記号 $=, \in$

変項 $x, y, z, \cdots$ など.

また $\mathcal{L}_\in$ の項(term)と式(formula)は次の規則で

2.2 言語の拡張

- クラスを正式に導入するには言語を拡張しな
- 拡張は二段階に分けて行う．始めに ε 項のた
めに拡張する.
- 始めの拡張により得る言語を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ と名付ける

言語 $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$

矛盾記号　$\perp$

論理記号

$\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項と式の定義

- 変項は項である.
- $\perp$ は式である.
- 項 τ と項 σ に対して $\tau \in \sigma$ と $\tau = \sigma$ は式で
- 式 φ に対して $\neg\varphi$ は式である.
- 式 φ と式 ψ に対して $\varphi \vee \psi$ と $\varphi \wedge \psi$ と φ
- 式 φ と変項 x に対して $\exists x\varphi$ と $\forall x\varphi$ は式で
- 式 φ と変項 x に対して $\varepsilon x\varphi$ は項である.
- これらのみが項と式である.

言語 $\mathcal{L}$

矛盾記号　$\perp$
論理記号　$\neg, \lor, \land, \to$
量化子　$\forall, \exists$
述語記号　$=, \in$
変項　$x, y, z, \cdots$ など.
補助記号　$\{, |, \}$

$\mathcal{L}$ の項と式の定義

項　・　変項は項である.

3　推論の公理

3.1　∃の導入

$\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式 φ に x のみが自由に現れているとき，

推論公理 3.1 (∃の導入).　φ を $\mathcal{L}$ の式とし，
ているとし，τ を主要 ε 項とするとき，

$$\varphi(\tau) \to$$

とくに，任意の ε 項 τ に対して

3.2 ∃の除去

推論公理 3.2 (∃の除去(NG 版)). φ を $\mathcal{L}$ の
に現れているとするとき,

$$\exists x \varphi(x) \rightarrow$$

φ が $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式でない場合

$$\varepsilon x \varphi$$

3.3 式の書き換え

$\mathcal{L}$の式はすべて$\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$の式に書き換え可能(構造

元の式	
$a = \{ z \mid \psi \}$	$\forall$
$\{ y \mid \varphi \} = b$	$\forall$
$\{ y \mid \varphi \} = \{ z \mid \psi \}$	$\forall u$
$a \in \{ z \mid \psi \}$	
$\{ y \mid \varphi \} \in b$	$\exists s \, (\forall u \, ($
$\{ y \mid \varphi \} \in \{ z \mid \psi \}$	$\exists s \, (\forall u \, ($

$\mathcal{L}$ の式 φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き換えたものを $\hat{\varphi}$ と書

推論公理 3.3 (∃の除去). φ を $\mathcal{L}$ の式とし,
ているとするとき,

$$\exists x \varphi(x) \rightarrow$$

定理 3.4 (集合は主要 ε 項に等しい). φ を
自由に現れているとするとき,

3.4 ∀の導入

推論公理 3.5 (∀の導入). φ を $\mathcal{L}$ の式とし,
ているとするとき,

$$\varphi(\varepsilon x \rightharpoondown \hat{\varphi}(x)$$

推論公理 3.6 (∀の除去). φ を $\mathcal{L}$ の式とし,
ているとし, τ を主要 ε 項とするとき,

3.5 その他の公理

推論公理 3.7. φ, ψ, χ を $\mathcal{L}$ の文とするとき

- $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to$
- $\varphi \to (\psi \to \varphi)$.
- $\varphi \to (\neg\varphi \to \bot)$.
- $\neg\varphi \to (\varphi \to \bot)$.
- $(\varphi \to \bot) \to \neg\varphi$.
- $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$.
- $\psi \to (\varphi \vee \psi)$.

4　成り立つこと

次の定理は他の公理および構造的帰納法と併せ

定理 4.1 (書き換えの同値性).　φ を $\mathcal{L}$ の文

$$\varphi \leftarrow$$

証明が容易になる例

φ を x のみ自由に現れる式とし，y を φ の中
るとき，

$$\vdash \exists x \varphi(x) \ -$$

略証.　公理と演繹定理より

$$\exists x \varphi(x) \vdash \varphi$$

$\exists x\varphi(x) \rightarrow \exists y\varphi(y)$ を **HK** で証明すると，
公理より

$$\vdash_{\textbf{HK}} \varphi(x) -$$

が成り立つので，汎化によって

$$\vdash_{\textbf{HK}} \forall x\,(\,\varphi(x)$$

となり，公理

$$\vdash_{\textbf{HK}} \forall x\,(\,\varphi(x) \rightarrow \exists y\varphi(y))$$

証明が容易になる例

φ を x のみ自由に現れる式とし，y を φ の中
るとき，

$$\vdash \exists y \, (\exists x \varphi(x$$

略証．　公理より

$$\vdash \exists x \varphi(x) \ \to$$

$\exists y\,(\,\exists x\varphi(x)\ \rightarrow\ \varphi(y)\,)$ を **HK** で証明すると

$$\exists x\varphi(x)\ -$$

と

$$(\,\exists x\varphi(x)\ \rightarrow\ \exists y\varphi(y)\,)\ \rightarrow$$

$$\rightarrow$$

$$\rightarrow$$