

2020年2月5日

---

## $\varepsilon$ 項とクラスの導入による具体的で直観的な集合論の構築

---

# 目次

---

1	導入	2
1.1	$\varepsilon$ 計算について . . . . .	2
1.2	クラスについて . . . . .	4
2	言語	6
2.1	言語 $\mathcal{L}_\varepsilon$ . . . . .	7
2.2	言語の拡張 . . . . .	8
3	推論の公理	11
3.1	$\exists$ の導入 . . . . .	11
3.2	$\exists$ の除去 . . . . .	12
3.3	式の書き換え . . . . .	13
3.4	$\forall$ の導入 . . . . .	15
3.5	その他の公理 . . . . .	16
4	成り立つこと	17

# 1 導入

---

## 1.1 $\varepsilon$ 計算について

---

- 量化 $\exists, \forall$ を使う証明を命題論理の証明に埋め込むために Hilbert が開始.
- 式  $\varphi(x)$  に対して

$$\varepsilon x \varphi(x)$$

という形のオブジェクトを作り,  $\varepsilon$  項と呼ぶ. また命題論理の証明に埋め込む際には,  $\exists$  や  $\forall$  の付いた式を

$$\begin{aligned}\varphi(x/\varepsilon x \varphi(x)) &\stackrel{\text{def}}{\longleftrightarrow} \exists x \varphi(x), \\ \varphi(x/\varepsilon x \rightarrow x \varphi(x)) &\stackrel{\text{def}}{\longleftrightarrow} \forall x \varphi(x)\end{aligned}$$

によって変換すればよい.

- 今回  $\varepsilon$  項を導入したのは「存在」と「実在」を同義とするため.
- Hilbert の  $\varepsilon$  計算ではなく,  $\varepsilon$  項を用いて一種の Henkin 拡大を行う.

- ZF 集合論では集合というオブジェクトが用意されていないため、「存在」は「実在」ではない。たとえば

$$\exists x \forall y (y \notin x)$$

は定理であり「空集合は存在する」と読むが、空集合を“実際に取ってくる”ことは不可能。

- $\varepsilon$  項を使えば、 $\exists$  の公理と空集合の存在定理によって

$$\forall y (y \notin \varepsilon x \forall y (y \notin x))$$

が成り立つ。つまり  $\varepsilon$  項は「存在」を「実在」に格上げする (上の  $\varepsilon$  項は集合である)。

$\varepsilon$  項のメリット

- 「存在」を「実在」で補強できる。
- 集合を具体的なオブジェクトとして扱える。
- 証明で用いる推論規則は三段論法のみで済む。
- 証明が容易になる場合がある。

## 1.2 クラスについて

---

- ブルバキ[]や島内[]でも  $\varepsilon$  項を使った集合論を展開.
- ところで, 「 $\varphi$ である集合の全体」の意味の

$$\{x \mid \varphi(x)\}$$

というオブジェクトも取り入れたい.

- **ZF** 集合論では定義による拡大 or インフォーマルな導入.
- ブルバキ[]や島内[]では

$$\{x \mid \varphi(x)\} \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon x \forall u (\varphi(u) \leftrightarrow u \in x)$$

と定めるが,

$$\exists x \forall u (\varphi(u) \leftrightarrow u \in x)$$

が成立しない場合は「 $\varphi$ である集合の全体」という意味を持たない.

- 式  $\varphi$  から直接  $\{x \mid \varphi(x)\}$  の形のオブジェクトを作ればよい.

**定義 1.1 (クラス).** 式  $\varphi$  に  $x$  のみが自由に現れているとき,

$$\varepsilon x \varphi(x), \quad \{x \mid \varphi(x)\}$$

の形のオブジェクトをクラス (**class**) と呼ぶ.

- クラスである  $\varepsilon$  項は集合である.
- 集合でないクラスもある. たとえば  $\{x \mid x = x\}$  や  $\{x \mid x \notin x\}$  は集合ではない.

集合の定義は竹内[]に倣う. 定義により**集合はクラスである**.

**定義 1.2 (集合).** クラス  $c$  が

$$\exists x (c = x)$$

を満たすとき  $c$  を**集合 (set)** と呼び, そうでない場合は**真クラス (proper class)** と呼ぶ.

## 2 言語

---

- クラスという新しいオブジェクトを導入したら、この導入操作が“妥当”であるかどうかの問題になる.
- 妥当性は、**ZF** 集合論の式  $\varphi$  に対して

**ZF** 集合論で  $\varphi$  が証明される  $\iff$  新しい集合論で  $\varphi$  が証明される

が成り立つかどうかで検証する.

- 精密な検証のためには、集合論の言語と証明のルールを明らかにしなくてはならない.
- 言語とは「変項」, 「述語記号」, 「論理記号」とその他もろもろの記号からなる. そして「(数) 式」は言語の記号を用いて作られる. 式を作るためには「項」が必要であり, 文字は最もよく使われる項である. たとえば

$$s \in t$$

と書けば一つの式が出来上がる.

- まず **ZF** 集合論の言語  $\mathcal{L}_\in$  を明示する.

## 2.1 言語 $\mathcal{L}_\in$

言語  $\mathcal{L}_\in$

矛盾記号  $\perp$

論理記号  $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$

量化子  $\forall, \exists$

述語記号  $=, \in$

変項  $x, y, z, \dots$  など.

また  $\mathcal{L}_\in$  の項 (term) と式 (formula) は次の規則で生成する.

$\mathcal{L}_\in$  の項と式

項 変項は項であり, またこれらのみが項である.

式 •  $\perp$  は式である.

- 項  $\tau$  と項  $\sigma$  に対して  $\tau \in \sigma$  と  $\tau = \sigma$  は式である.
- 式  $\varphi$  に対して  $\neg \varphi$  は式である.
- 式  $\varphi$  と式  $\psi$  に対して  $\varphi \vee \psi$  と  $\varphi \wedge \psi$  と  $\varphi \rightarrow \psi$  はいずれも式である.
- 式  $\varphi$  と項  $x$  に対して  $\exists x \varphi$  と  $\forall x \varphi$  は式である.
- これらのみが式である.



## 2.2 言語の拡張

---

- クラスを正式に導入するには言語を拡張しなくてはならない.
- 拡張は二段階に分けて行う. 始めに  $\varepsilon$  項のために拡張し, 次に  $\{x \mid \varphi(x)\}$  の形の項のために拡張する.
- 始めの拡張により得る言語を  $\mathcal{L}_\varepsilon$  と名付ける.

言語  $\mathcal{L}_\varepsilon$

矛盾記号  $\perp$

論理記号  $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$

量化子  $\forall, \exists$

述語記号  $=, \in$

変項  $x, y, z, \dots$  など.

イプシロン  $\varepsilon$

## $\mathcal{L}_\varepsilon$ の項と式の定義

- 変項は項である.
- $\perp$  は式である.
- 項  $\tau$  と項  $\sigma$  に対して  $\tau \in \sigma$  と  $\tau = \sigma$  は式である.
- 式  $\varphi$  に対して  $\neg \varphi$  は式である.
- 式  $\varphi$  と式  $\psi$  に対して  $\varphi \vee \psi$  と  $\varphi \wedge \psi$  と  $\varphi \rightarrow \psi$  はいずれも式である.
- 式  $\varphi$  と変項  $x$  に対して  $\exists x \varphi$  と  $\forall x \varphi$  は式である.
- 式  $\varphi$  と変項  $x$  に対して  $\varepsilon x \varphi$  は項である.
- これらのみが項と式である.

- $\mathcal{L}_\in$  との大きな違いは項と式の定義が循環している点にある.
- $\mathcal{L}_\varepsilon$  の式が  $\mathcal{L}_\varepsilon$  の項を用いて作られるのは当然ながら, その逆に  $\mathcal{L}_\varepsilon$  の項もまた  $\mathcal{L}_\varepsilon$  の式から作られる.
- $\mathcal{L}_\in$  の式は  $\mathcal{L}_\varepsilon$  の式でもある.

## 言語 $\mathcal{L}$

矛盾記号  $\perp$

論理記号  $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$

量化子  $\forall, \exists$

述語記号  $=, \in$

変項  $x, y, z, \dots$  など.

補助記号  $\{, |, \}$

## $\mathcal{L}$ の項と式の定義

項 • 変項は項である.

- $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$  の項は項である.
- $x$  を変項とし,  $\varphi$  を  $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$  の式とすると,  $\{x \mid \varphi\}$  なる記号列は項である.
- これらのみが項である.

式 •  $\perp$  は式である.

- 項  $\tau$  と項  $\sigma$  に対して  $\tau \in \sigma$  と  $\tau = \sigma$  は式である.
- 式  $\varphi$  に対して  $\neg \varphi$  は式である.
- 式  $\varphi$  と式  $\psi$  に対して  $\varphi \vee \psi$  と  $\varphi \wedge \psi$  と  $\varphi \rightarrow \psi$  はいずれも式である.
- 式  $\varphi$  と変項  $x$  に対して  $\exists x \varphi$  と  $\forall x \varphi$  は式である.
- これらのみが式である.

### 3 推論の公理

---

#### 3.1 $\exists$ の導入

---

$\mathcal{L}_\varepsilon$  の式  $\varphi$  に  $x$  のみが自由に現れているとき,  $\varepsilon x\varphi$  を **主要  $\varepsilon$  項** と呼ぶ.

**推論公理 3.1 ( $\exists$ の導入).**  $\varphi$  を  $\mathcal{L}$  の式とし,  $x$  を変項とし,  $\varphi$  には  $x$  のみが自由に現れているとし,  $\tau$  を主要  $\varepsilon$  項とすると,

$$\varphi(\tau) \rightarrow \exists x\varphi(x).$$

とくに, 任意の  $\varepsilon$  項  $\tau$  に対して

$$\tau = \tau.$$

だから

$$\exists x (\tau = x)$$

が成り立つ. つまり  **$\varepsilon$  項はすべて集合.**

## 3.2 $\exists$ の除去

**推論公理 3.2 ( $\exists$ の除去 (NG 版)).**  $\varphi$  を  $\mathcal{L}$  の式とし,  $x$  を変項とし,  $\varphi$  には  $x$  のみが自由に現れているとすると,

$$\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(\varepsilon x \varphi(x)).$$

$\varphi$  が  $\mathcal{L}_\varepsilon$  の式でない場合

$$\varepsilon x \varphi(x)$$

なる項は無い.

解決法

$\mathcal{L}$  の式を  $\mathcal{L}_\varepsilon$  の式に書き換える手順を用意する.

### 3.3 式の書き換え

$\mathcal{L}$ の式はすべて  $\mathcal{L}_\varepsilon$  の式に書き換え可能 (構造的帰納法による).

元の式	書き換え後
$a = \{z \mid \psi\}$	$\forall v (v \in a \leftrightarrow \psi(z/v))$
$\{y \mid \varphi\} = b$	$\forall u (\varphi(y/u) \leftrightarrow u \in b)$
$\{y \mid \varphi\} = \{z \mid \psi\}$	$\forall u (\varphi(y/u) \leftrightarrow \psi(z/u))$
$a \in \{z \mid \psi\}$	$\psi(z/a)$
$\{y \mid \varphi\} \in b$	$\exists s (\forall u (\varphi(y/u) \leftrightarrow u \in s) \wedge s \in b)$
$\{y \mid \varphi\} \in \{z \mid \psi\}$	$\exists s (\forall u (\varphi(y/u) \leftrightarrow u \in s) \wedge \psi(z/s))$

ただし上の記号に課している条件は

- $a, b$  は  $\mathcal{L}_\varepsilon$  の項である.
- $\varphi, \psi$  は  $\mathcal{L}_\varepsilon$  の式である.
- $\varphi$  には  $y$  が自由に現れ,  $\psi$  には  $z$  が自由に現れている.
- $u$  は  $\varphi$  の中で  $y$  への代入について自由であり,  $v$  は  $\psi$  の中で  $z$  への代入について自由である.

$\mathcal{L}$  の式  $\varphi$  を  $\mathcal{L}_\varepsilon$  の式に書き換えたものを  $\hat{\varphi}$  と書く.

**推論公理 3.3 ( $\exists$  の除去).**  $\varphi$  を  $\mathcal{L}$  の式とし,  $x$  を変項とし,  $\varphi$  には  $x$  のみが自由に現れているとすると,

$$\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(\varepsilon x \hat{\varphi}(x)).$$

**定理 3.4 (集合は主要  $\varepsilon$  項に等しい).**  $\varphi$  を  $\mathcal{L}$  の式とし,  $x$  を変項とし,  $\varphi$  には  $x$  のみが自由に現れているとすると,

$$\exists s (\{x \mid \varphi(x)\} = s) \vdash \{x \mid \varphi(x)\} = \varepsilon s \forall x (\varphi(x) \leftrightarrow x \in s).$$

略証.  $\exists s (\{x \mid \varphi(x)\} = s)$  を  $\mathcal{L}_\varepsilon$  の式に書き直せば

$$\exists s \forall x (\varphi(x) \leftrightarrow x \in s).$$

存在記号の規則より結論が従う. ■

## 3.4 $\forall$ の導入

---

**推論公理 3.5 ( $\forall$ の導入).**  $\varphi$ を $\mathcal{L}$ の式とし,  $x$ を変項とし,  $\varphi$ には $x$ のみが自由に現れているとすると,

$$\varphi(\varepsilon x \rightarrow \hat{\varphi}(x)) \rightarrow \forall x \varphi(x).$$

**推論公理 3.6 ( $\forall$ の除去).**  $\varphi$ を $\mathcal{L}$ の式とし,  $x$ を変項とし,  $\varphi$ には $x$ のみが自由に現れているとし,  $\tau$ を主要 $\varepsilon$ 項とすると,

$$\forall x \varphi(x) \rightarrow \varphi(\tau).$$

主要 $\varepsilon$ 項は集合であるから, **量化の亘る範囲は集合の上だけ.**



### 3.5 その他の公理

---

**推論公理 3.7.**  $\varphi, \psi, \chi$  を  $\mathcal{L}$  の文とするとき,

- $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)).$
- $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi).$
- $\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \perp).$
- $\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \perp).$
- $(\varphi \rightarrow \perp) \rightarrow \neg\varphi.$
- $\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi).$
- $\psi \rightarrow (\varphi \vee \psi).$
- $(\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi)).$
- $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi)).$
- $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi.$
- $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi.$
- $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi.$

## 4 成り立つこと

---

次の定理は他の公理および構造的帰納法と併せて示される.

定理 4.1 (書き換えの同値性).  $\varphi$  を  $\mathcal{L}$  の文するとき,

$$\varphi \leftrightarrow \hat{\varphi}.$$

証明が容易になる例

$\varphi$  を  $x$  のみ自由に現れる式とし,  $y$  を  $\varphi$  の中で  $x$  への代入について自由である変項とするとき,

$$\vdash \exists x \varphi(x) \rightarrow \exists y \varphi(y).$$

略証. 公理と演繹定理より

$$\exists x \varphi(x) \vdash \varphi(\varepsilon x \varphi(x))$$

となり, また公理より

$$\vdash \varphi(\varepsilon x \varphi(x)) \rightarrow \exists y \varphi(y)$$

も成り立つので, 三段論法より

$$\exists x \varphi(x) \vdash \exists y \varphi(y)$$

が出る.



$\exists x\varphi(x) \rightarrow \exists y\varphi(y)$ を**HK**で証明すると、  
公理より

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \varphi(x) \rightarrow \exists y\varphi(y)$$

が成り立つので、汎化によって

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \forall x (\varphi(x) \rightarrow \exists y\varphi(y))$$

となり、公理

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \forall x (\varphi(x) \rightarrow \exists y\varphi(y)) \rightarrow (\exists x\varphi(x) \rightarrow \exists y\varphi(y))$$

との三段論法より

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \exists x\varphi(x) \rightarrow \exists y\varphi(y)$$

が出る.

証明が容易になる例

$\varphi$  を  $x$  のみ自由に現れる式とし,  $y$  を  $\varphi$  の中で  $x$  への代入について自由である変項とするとき,

$$\vdash \exists y (\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(y)).$$

略証. 公理より

$$\vdash \exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(\varepsilon x \varphi(x))$$

が成り立つので, 公理より

$$\vdash \exists y (\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(y))$$

となる.



$\exists y (\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(y))$  を **HK** で証明すると

$$\exists x \varphi(x) \rightarrow \exists y \varphi(y)$$

と

$$\begin{aligned} (\exists x \varphi(x) \rightarrow \exists y \varphi(y)) &\rightarrow (\neg \exists x \varphi(x) \vee \exists y \varphi(y)), \\ &\rightarrow \exists y (\neg \exists x \varphi(x) \vee \varphi(y)), \\ &\rightarrow \exists y (\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(y)) \end{aligned}$$

から示される.