

# 確率微分方程式講義録

基礎工学研究科システム創成専攻修士 1 年

学籍番号 29C17095

百合川尚学

2018 年 5 月 10 日

# 目次

第 1 章	関数解析	2
1.1	Hölder の不等式と Minkowski の不等式 . . . . .	2
1.2	空間 $L^p$ . . . . .	5
1.3	補助定理 . . . . .	10
第 2 章	条件付き期待値	15
2.1	$L^2$ における条件付き期待値 . . . . .	15
2.2	条件付き期待値の拡張 . . . . .	19
2.3	独立性 . . . . .	24
第 3 章	停止時刻	27
3.1	フィルトレーション . . . . .	27
3.2	停止時刻の性質 . . . . .	27
3.3	停止時刻の構成 . . . . .	31
第 4 章	マルチンゲール	33
4.1	Doob の不等式・任意抽出定理 . . . . .	33
4.2	二次変分 . . . . .	39
第 5 章	伊藤積分	60
5.1	パスの変動を制限する停止時刻 . . . . .	60
5.2	可予測過程 . . . . .	64
5.3	伊藤積分 . . . . .	69

# 第 1 章

## 関数解析

係数体を  $\mathbb{R}$ , 測度空間を  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  とする.

### 1.1 Hölder の不等式と Minkowski の不等式

$\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -可測関数  $f$  に対して

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p} := \begin{cases} \inf \{ r \in \mathbb{R} ; |f(x)| \leq r \text{ } \mu\text{-a.e. } x \in X \} & (p = \infty) \\ \left( \int_X |f(x)|^p \mu(dx) \right)^{\frac{1}{p}} & (0 < p < \infty) \end{cases}$$

により  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p}$  を定める. 以後は  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)}$  或は  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p(\mu)}$  と表記することもある.

$$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu) := \{ f : X \rightarrow \mathbb{R} ; f : \text{可測 } \mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R}), \|f\|_{\mathcal{L}^p} < \infty \} \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

として空間  $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu)$  を定義し, これも以後は  $\mathcal{L}^p(\mu), \mathcal{L}^p(\mathcal{F}, \mu), \mathcal{L}^p(\mathcal{F})$  などと略記することもある. 以下に示す不等式により  $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu)$  は  $\mathbb{R}$  上の線形空間となる.

補題 1.1.1. 任意の  $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$  に対して次が成り立つ:

$$|f(x)| \leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty} \quad \mu\text{-a.e. } x \in X.$$

証明.  $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$  の定義より任意の実数  $\alpha > \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}$  に対して

$$\mu(\{x \in X ; |f(x)| > \alpha\}) = 0$$

が成り立つから,

$$\{x \in X ; |f(x)| > \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X ; |f(x)| > \|f\|_{\mathcal{L}^\infty} + 1/n\}$$

の右辺は  $\mu$ -零集合であり主張が従う. ■

定理 1.1.2 (Hölder の不等式).  $1 \leq p, q \leq \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  ( $p = \infty$  なら  $q = 1$ ) とする. このとき任意の  $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -可測関数  $f, g$  に対して次が成り立つ:

$$\int_X |f(x)g(x)| \mu(dx) \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p} \|g\|_{\mathcal{L}^q}. \quad (1.1)$$

証明.  $\|f\|_{\mathcal{L}^p} = \infty$  又は  $\|g\|_{\mathcal{L}^q} = \infty$  のとき不等式 (1.1) は成り立つから, 以下では  $\|f\|_{\mathcal{L}^p} < \infty$  かつ  $\|g\|_{\mathcal{L}^q} < \infty$  の場合を考える.

$p = \infty, q = 1$  の場合 補題 1.1.1 により或る零集合  $A$  が存在して

$$|f(x)g(x)| \leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty} |g(x)| \quad (\forall x \in X \setminus A).$$

が成り立つから,

$$\begin{aligned} \int_X |f(x)g(x)| \mu(dx) &= \int_{X \setminus A} |f(x)g(x)| \mu(dx) \\ &\leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty} \int_{X \setminus A} |g(x)| \mu(dx) = \|f\|_{\mathcal{L}^\infty} \|g\|_{\mathcal{L}^1} \end{aligned}$$

が従い不等式 (1.1) を得る.

$1 < p, q < \infty$  の場合  $\|f\|_{\mathcal{L}^p} = 0$  のとき

$$B := \{x \in X; |f(x)| > 0\}$$

は零集合であるから,

$$\int_X |f(x)g(x)| \mu(dx) = \int_{X \setminus B} |f(x)g(x)| \mu(dx) = 0$$

となり (1.1) を得る.  $\|g\|_{\mathcal{L}^q} = 0$  の場合も同じである. 次に  $0 < \|f\|_{\mathcal{L}^p}, \|g\|_{\mathcal{L}^q} < \infty$  の場合を示す. 実数値対数関数  $(0, \infty) \ni t \mapsto -\log t$  は凸であるから,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  に対して

$$-\log\left(\frac{s}{p} + \frac{t}{q}\right) \leq \frac{1}{p}(-\log s) + \frac{1}{q}(-\log t) \quad (\forall s, t > 0)$$

を満たし

$$s^{\frac{1}{p}} t^{\frac{1}{q}} \leq \frac{s}{p} + \frac{t}{q} \quad (\forall s, t > 0)$$

が従う. ここで

$$F(x) := \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_{\mathcal{L}^p}^p}, \quad G(x) := \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_{\mathcal{L}^q}^q} \quad (\forall x \in X)$$

により可積分関数  $F, G$  を定めれば,

$$F(x)^{\frac{1}{p}} G(x)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p} F(x) + \frac{1}{q} G(x) \quad (\forall x \in X)$$

が成り立つから

$$\begin{aligned} \int_X \frac{|f(x)|}{\|f\|_{\mathcal{L}^p}} \frac{|g(x)|}{\|g\|_{\mathcal{L}^q}} \mu(dx) &= \int_X F(x)^{\frac{1}{p}} G(x)^{\frac{1}{q}} \mu(dx) \\ &\leq \frac{1}{p} \int_X F(x) \mu(dx) + \frac{1}{q} \int_X G(x) \mu(dx) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{aligned}$$

が従い、 $\|f\|_{\mathcal{L}^p} \|g\|_{\mathcal{L}^q}$  を移項して不等式 (1.1) を得る。 ■

**定理 1.1.3 (Minkowski の不等式).**  $1 \leq p \leq \infty$  とする. このとき任意の  $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -可測関数  $f, g$  に対して次が成り立つ:

$$\|f + g\|_{\mathcal{L}^p} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p} + \|g\|_{\mathcal{L}^p}. \quad (1.2)$$

**証明.**  $\|f + g\|_{\mathcal{L}^p} = 0$ ,  $\|f\|_{\mathcal{L}^p} = \infty$ ,  $\|g\|_{\mathcal{L}^p} = \infty$  のいずれかが満たされているとき不等式 (1.2) は成り立つから, 以下では  $\|f + g\|_{\mathcal{L}^p} > 0$ ,  $\|f\|_{\mathcal{L}^p} < \infty$ ,  $\|g\|_{\mathcal{L}^p} < \infty$  の場合を考える.

$p = \infty$  の場合 補題 1.1.1 により

$$C := \{x \in X; |f(x)| > \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}\} \cup \{x \in X; |g(x)| > \|g\|_{\mathcal{L}^\infty}\}$$

は零集合であり,

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty} + \|g\|_{\mathcal{L}^\infty} \quad (\forall x \in X \setminus C)$$

が成り立つ.  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^\infty}$  の定義より不等式 (1.2) を得る.

$p = 1$  の場合

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \quad (\forall x \in X)$$

の両辺を積分して不等式 (1.2) を得る.

$1 < p < \infty$  の場合  $p + q = pq$  が成り立つように  $q > 1$  を取る. 各点  $x \in X$  で

$$|f(x) + g(x)|^p = |f(x) + g(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} \leq |f(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} + |g(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1}$$

が成り立つから, 両辺を積分すれば Hölder の不等式により

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{\mathcal{L}^p}^p &= \int_X |f(x) + g(x)|^p \mu(dx) \\ &\leq \int_X |f(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} \mu(dx) + \int_X |g(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} \mu(dx) \\ &\leq \|f\|_{\mathcal{L}^p} \|f + g\|_{\mathcal{L}^p}^{p-1} + \|g\|_{\mathcal{L}^p} \|f + g\|_{\mathcal{L}^p}^{p-1} \end{aligned} \quad (1.3)$$

が得られる. また  $|f|^p, |g|^p$  の可積性と

$$|f(x) + g(x)|^p \leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \leq 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p) \quad (\forall x \in X)$$

により  $\|f + g\|_{\mathcal{L}^p} < \infty$  が従うから, (1.3) の両辺を  $\|f + g\|_{\mathcal{L}^p}^{p-1}$  で割って (1.2) を得る. ■

以上の結果より  $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu)$  は線形空間となる．実際線型演算は

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) := \alpha f(x), \quad (\forall x \in X, f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu), \alpha \in \mathbb{C})$$

により定義され，Minkowski の不等式により加法について閉じている．

**補題 1.1.4.**  $1 \leq p \leq \infty$  に対し， $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p}$  は線形空間  $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu)$  のセミノルムである．

**証明.**

**半正値性**  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p}$  が正値であることは定義による．しかし  $\|f\|_{\mathcal{L}^p} = 0$  であっても  $f$  が零写像であるとは限らず，実際  $\mu$ -零集合  $E$  を取り

$$f(x) := \begin{cases} 1 & (x \in E) \\ 0 & (x \in \Omega \setminus E) \end{cases}$$

により  $f$  を定めれば  $\|f\|_{\mathcal{L}^p} = 0$  が成り立つ．

**同次性** 任意に  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu)$  を取る． $1 \leq p < \infty$  の場合は

$$\left( \int_X |\alpha f(x)|^p \mu(dx) \right)^{1/p} = \left( |\alpha|^p \int_X |f(x)|^p \mu(dx) \right)^{1/p} = |\alpha| \left( \int_X |f(x)|^p \mu(dx) \right)^{1/p}$$

により， $p = \infty$  の場合は

$$\inf \{ r \in \mathbb{R} ; \quad |\alpha f(x)| \leq r \quad \mu\text{-a.e. } x \in X \} = |\alpha| \inf \{ r \in \mathbb{R} ; \quad |f(x)| \leq r \quad \mu\text{-a.e. } x \in X \}$$

により  $\|\alpha f\|_{\mathcal{L}^p} = |\alpha| \|f\|_{\mathcal{L}^p}$  が成り立つ．

**三角不等式** Minkowski の不等式による． ■

## 1.2 空間 $L^p$

**可測関数全体の商集合**  $\mathcal{F}/\mathcal{B}(R)$ -可測関数全体の集合を

$$\mathcal{L}^0(X, \mathcal{F}, \mu) := \{ f : X \rightarrow \mathbb{R} ; \quad f : \text{可測 } \mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R}) \}$$

とおく．二元  $f, g \in \mathcal{L}^0(X, \mathcal{F}, \mu)$  に対し

$$f \sim g \quad \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad f = g \quad \mu\text{-a.e.}$$

により定める  $\sim$  は同値関係であり， $\sim$  による  $\mathcal{L}^0(X, \mathcal{F}, \mu)$  の商集合を  $L^0(X, \mathcal{F}, \mu)$  と表す．

**商集合における算法**  $L^0(X, \mathcal{F}, \mu)$  の元である関数類 (同値類) を  $[f]$  ( $f$  は関数類の代表) と表す．

$L^0(X, \mathcal{F}, \mu)$  における線型演算を次で定義すれば， $L^0(X, \mathcal{F}, \mu)$  は  $\mathbb{R}$  上の線形空間となる：

$$\begin{aligned} [f] + [g] &:= [f + g] & (\forall [f], [g] \in L^0(X, \mathcal{F}, \mu), \\ \alpha[f] &:= [\alpha f] & (\forall [f] \in L^0(X, \mathcal{F}, \mu), \alpha \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

この演算は well-defined である．実際任意の  $f' \in [f]$  と  $g' \in [g]$  に対して

$$\{f + g \neq f' + g'\} \subset \{f \neq f'\} \cup \{g \neq g'\}, \quad \{\alpha f \neq \alpha f'\} = \{f \neq f'\}$$

が成り立ち<sup>\*1</sup>, どちらの右辺も  $\mu$ -零集合であるから  $[f + g] = [f' + g']$ ,  $[\alpha f'] = [\alpha f]$  が従う. 更に乗法を次により定義すれば  $L^0(X, \mathcal{F}, \mu)$  は多元環になる:

$$[f][g] := [fg] \quad (\forall [f], [g] \in L^0(X, \mathcal{F}, \mu)).$$

$L^0(X, \mathcal{F}, \mu)$  における零元は零写像の関数類でありこれを  $[0]$  と表す. また単位元は恒等的に 1 を取る関数の関数類でありこれを  $[1]$  と表す. また減法を

$$[f] - [g] := [f] + (-[g]) = [f] + [-g] = [f - g]$$

により定める.

関数類の順序  $[f], [g] \in L^0(X, \mathcal{F}, \mu)$  に対して次の関係  $< (>)$  を定める:

$$[f] < [g] \quad ([g] > [f]) \quad \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad f < g \quad \mu\text{-a.s.} \quad (1.4)$$

この定義は well-defined である. 実際任意の  $f' \in [f], g' \in [g]$  に対して

$$\{f' \geq g'\} \subset \{f \neq f'\} \cup \{f \geq g\} \cup \{g \neq g'\}$$

の右辺は零集合であるから

$$[f] < [g] \Leftrightarrow [f'] < [g']$$

が従う.  $<$  または  $=$  であることを  $\leq$  と表し, 同様に  $\geq$  を定める. この関係  $\leq$  は次に示す規則を満たし,  $L^0(X, \mathcal{F}, \mu)$  における順序となる: 任意の  $[f], [g], [h] \in L^0(X, \mathcal{F}, \mu)$  に対し,

- $[f] \leq [f]$  が成り立つ.
- $[f] \leq [g]$  かつ  $[g] \leq [f]$  ならば  $[f] = [g]$  が成り立つ.
- $[f] \leq [g], [g] \leq [h]$  ならば  $[f] \leq [h]$  が成り立つ.

関数類の冪・絶対値  $[f] \in L^0(X, \mathcal{F}, \mu)$  が  $[f] \geq [0]$  を満たすとき,  $p \geq 0$  に対し  $[f]^p := [f^p]$  により冪乗を定める. また  $\|f\| := |[f]|$  として絶対値  $|\cdot|$  を定める.

補題 1.2.1 (商空間におけるノルムの定義).

$$\|[f]\|_{L^p} := \|f\|_{\mathcal{L}^p} \quad (f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu), 1 \leq p \leq \infty)$$

により定める  $\|\cdot\|_{L^p} : L^0(X, \mathcal{F}, \mu) \rightarrow \mathbb{R}$  は関数類の代表に依らずに値が確定する. そして

$$L^p(X, \mathcal{F}, \mu) := \{[f] \in L^0(X, \mathcal{F}, \mu) ; \|[f]\|_{L^p} < \infty\} \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

として定める空間は  $\|\cdot\|_{L^p}$  をノルムとしてノルム空間となる.

証明.

第一段 任意の  $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu)$  に対し,  $[f] = [g]$  なら  $\|f\|_{\mathcal{L}^p}^p = \|g\|_{\mathcal{L}^p}^p$  となることを示す.

$$A := \{x \in X ; f(x) \neq g(x)\}$$

として零集合を定める.

<sup>\*1</sup>  $\{f \neq g\} := \{x \in X ; f(x) \neq g(x)\}.$

$p = \infty$  の場合  $A^c$  の上では  $f(x) = g(x)$  が満たされているから

$$\begin{aligned} & \{x \in X ; |g(x)| > \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}\} \\ &= A \cap \{x \in X ; |g(x)| > \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}\} + A^c \cap \{x \in X ; |f(x)| > \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}\} \end{aligned}$$

が成り立ち、右辺はどちらも零集合であるから  $\|g\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}$  が従う。  $f, g$  を入れ替えれば  $\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq \|g\|_{\mathcal{L}^\infty}$  も示されて  $\|g\|_{\mathcal{L}^\infty} = \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}$  を得る。

$1 \leq p < \infty$  の場合

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p}^p = \int_{X \setminus A} |f(x)|^p \mu(dx) = \int_{X \setminus A} |g(x)|^p \mu(dx) = \|g\|_{\mathcal{L}^p}^p$$

が成り立つ。

第二段  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p}$  がノルムの公理を満たすことを示す。任意に  $[f], [g] \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu)$  と  $\alpha \in \mathbb{R}$  を取る。  $\|[f]\|_{\mathcal{L}^p}$  が正値であることは  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p}$  が正値であることから従う。また  $\mu(f \neq 0) > 0 \Rightarrow \|f\|_{\mathcal{L}^p} > 0$  の対偶により  $\|[f]\|_{\mathcal{L}^p} = 0 \Rightarrow [f] = [0]$  が成り立ち、逆に  $[f] = [0]$  ならば  $\|[f]\|_{\mathcal{L}^p} = \|0\|_{\mathcal{L}^p} = 0$  が成り立つ。更に  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p}$  の同次性と Minkowski の不等式より

$$\begin{aligned} \|\alpha[f]\|_{\mathcal{L}^p} &= \|\alpha f\|_{\mathcal{L}^p} = |\alpha| \|f\|_{\mathcal{L}^p} = |\alpha| \|[f]\|_{\mathcal{L}^p}, \\ \|[f] + [g]\|_{\mathcal{L}^p} &= \|f + g\|_{\mathcal{L}^p} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p} + \|g\|_{\mathcal{L}^p} = \|[f]\|_{\mathcal{L}^p} + \|[g]\|_{\mathcal{L}^p} \end{aligned}$$

が得られ、  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p}$  の同次性と劣加法性が導かれる。 ■

補題 1.2.2 (距離空間値可測関数列の各点極限は可測).  $(S, d)$  を距離空間とする。  $\mathcal{F}/\mathcal{B}(S)$ -可測関数列  $(f_n)_{n=1}^\infty$  が各点収束すれば、  $f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  で定める関数  $f$  も可測  $\mathcal{F}/\mathcal{B}(S)$  となる。

証明. 任意に  $S$  の閉集合  $A$  を取り、閉集合の系  $(A_m)_{m=1}^\infty$  を次で定める:

$$A_m := \left\{ y \in S ; d(y, A) \leq \frac{1}{m} \right\}, \quad (m = 1, 2, \dots).^{*2}$$

$f(x) \in A$  ならば、各点収束の仮定より任意の  $m \in \mathbb{N}$  に対し或る  $N \in \mathbb{N}$  が存在して

$$d(f_n(x), A) \leq d(f_n(x), f(x)) < \frac{1}{m} \quad (\forall n \geq N)$$

が成り立ち

$$f^{-1}(A) \subset \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} f_n^{-1}(A_m) \tag{1.5}$$

が従う。一方  $f(x) \notin A$  については、  $0 < \epsilon < d(f(x), A)$  を満たす  $\epsilon$  に対し或る  $N' \in \mathbb{N}$  が存在して

$$d(f_n(x), f(x)) < \epsilon \quad (\forall n \geq N')$$

が成り立つから、  $1/m < d(f(x), A) - \epsilon$  を満たす  $m \in \mathbb{N}$  を取れば

$$\frac{1}{m} < d(f(x), A) - d(f(x), f_n(x)) \leq d(f_n(x), A) \quad (\forall n \geq N')$$

---

<sup>\*2</sup>  $S \ni y \mapsto d(y, A) \in [0, \infty)$  は連続であるから、閉集合  $[0, 1/m]$  は  $S$  の閉集合に引き戻される。



が従い

$$f^{-1}(A^c) \subset \bigcup_{m \geq 1} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} f_n^{-1}(A_m^c) \subset \bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq N} f_n^{-1}(A_m^c)$$

が出る．そして (1.5) と併せれば次を得る：

$$f^{-1}(A) = \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} f_n^{-1}(A_m).$$

これにより  $S$  の閉集合は  $f$  により  $\mathcal{F}$  の元に引き戻されるから  $f$  は可測  $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(S)$  である. ■

**定理 1.2.3 ( $L^p$  の完備性).** ノルム空間  $L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$  ( $1 \leq p < \infty$ ) は Banach 空間である.

**証明.** 任意に Cauchy 列  $[f_n] \in L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を取れば, 或る  $N_1 \in \mathbb{N}$  が存在して

$$\| [f_n] - [f_m] \|_{L^p} < \frac{1}{2} \quad (\forall n > m \geq N_1)$$

を満たす．ここで  $m > N_1$  を一つ選び  $n_1$  とおく．同様に  $N_2 > N_1$  を満たす  $N_2 \in \mathbb{N}$  が存在して

$$\| [f_n] - [f_m] \|_{L^p} < \frac{1}{2^2} \quad (\forall n > m \geq N_2)$$

を満たすから,  $m > N_2$  を一つ選び  $n_2$  とおけば

$$\| [f_{n_1}] - [f_{n_2}] \|_{L^p} < \frac{1}{2}$$

が成り立つ．同様の操作を繰り返して

$$\| [f_{n_k}] - [f_{n_{k+1}}] \|_{L^p} < \frac{1}{2^k} \quad (n_k < n_{k+1}, k = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.6)$$

を満たす部分添数列  $(n_k)_{k=1}^\infty$  を構成する．

$p = \infty$  の場合  $[f_{n_k}]$  の代表  $f_{n_k}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) に対して

$$\begin{aligned} A_k &:= \left\{ x \in X ; \quad |f_{n_k}(x)| > \|f_{n_k}\|_{\mathcal{L}^\infty} \right\}, \\ A^k &:= \left\{ x \in X ; \quad |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| > \|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_{\mathcal{L}^\infty} \right\} \end{aligned}$$

とおけば, 補題 1.1.1 より  $\mu(A_k) = \mu(A^k) = 0$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) が成り立つ．

$$A_\circ := \bigcup_{k=1}^\infty A_k, \quad A^\circ := \bigcup_{k=1}^\infty A^k, \quad A := A_\circ \cup A^\circ$$

として  $\mu$ -零集合  $A$  を定めて

$$\hat{f}_{n_k}(x) := \begin{cases} f_{n_k}(x) & (x \in X \setminus A) \\ 0 & (x \in A) \end{cases} \quad (\forall x \in X, k = 1, 2, \dots)$$

により  $(\hat{f}_{n_k})_{k=1}^\infty$  を構成すれば, 各  $\hat{f}_{n_k}$  は  $[\hat{f}_{n_k}] = [f_{n_k}]$  を満たす有界可測関数であり, (1.6) より

$$\sup_{x \in X} |\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}_{n_{k+1}}(x)| \leq \|\hat{f}_{n_k} - \hat{f}_{n_{k+1}}\|_{\mathcal{L}^\infty} < \frac{1}{2^k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つ。従って各点  $x \in X$  に対し  $(\hat{f}_{n_k}(x))_{k=1}^{\infty}$  は  $\mathbb{R}$  の Cauchy 列をなし<sup>\*3</sup> 収束する。

$$\hat{f}(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{f}_{n_k}(x) \quad (\forall x \in X)$$

として  $\hat{f}$  を定めれば、 $\hat{f}$  は可測  $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  であり、且つ任意に  $k \in \mathbb{N}$  を取れば

$$\sup_{x \in X} |\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}(x)| \leq 1/2^{k-1} \quad (1.7)$$

を満たす。実際或る  $y \in X$  で  $\alpha := |\hat{f}_{n_k}(y) - \hat{f}(y)| > 1/2^{k-1}$  が成り立つと仮定すれば、

$$|\hat{f}_{n_k}(y) - \hat{f}_{n_\ell}(y)| \leq \sum_{j=k}^{\ell-1} \sup_{x \in X} |\hat{f}_{n_j}(x) - \hat{f}_{n_{j+1}}(x)| < \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{k-1}} \quad (\forall \ell > k)$$

より

$$0 < \alpha - \frac{1}{2^{k-1}} < |\hat{f}_{n_k}(y) - \hat{f}(y)| - |\hat{f}_{n_k}(y) - \hat{f}_{n_\ell}(y)| \leq |\hat{f}(y) - \hat{f}_{n_\ell}(y)| \quad (\forall \ell > k)$$

が従い各点収束に反する。不等式 (1.7) により

$$\sup_{x \in X} |\hat{f}(x)| < \sup_{x \in X} |\hat{f}(x) - \hat{f}_{n_k}(x)| + \sup_{x \in X} |\hat{f}_{n_k}(x)| \leq \frac{1}{2^{k-1}} + \|\hat{f}_{n_k}\|_{\mathcal{L}^\infty}$$

が成り立つから  $[\hat{f}] \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  が従い、

$$\| [f_{n_k}] - [\hat{f}] \|_{L^\infty} = \| [\hat{f}_{n_k}] - [\hat{f}] \|_{L^\infty} \leq \sup_{x \in X} |\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}(x)| \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty)$$

により部分列  $([f_{n_k}])_{k=1}^{\infty}$  が  $[\hat{f}]$  に収束するから元の Cauchy 列も  $[\hat{f}]$  に収束する。

$1 \leq p < \infty$  の場合  $[f_{n_k}]$  の代表  $f_{n_k}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) は

$$f_{n_k}(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^k (f_{n_j}(x) - f_{n_{j-1}}(x)) \quad (\forall x \in X)$$

を満たし、これに対して

$$g_k(x) := |f_{n_1}(x)| + \sum_{j=1}^k |f_{n_j}(x) - f_{n_{j-1}}(x)| \quad (\forall x \in X, k = 1, 2, \dots)$$

により単調非減少な可測関数列  $(g_k)_{k=1}^{\infty}$  を定めれば、Minkowski の不等式と (1.6) により

$$\|g_k\|_{\mathcal{L}^p} \leq \|f_{n_1}\|_{\mathcal{L}^p} + \sum_{j=1}^k \|f_{n_j} - f_{n_{j-1}}\|_{\mathcal{L}^p} < \|f_{n_1}\|_{\mathcal{L}^p} + 1 < \infty \quad (k = 1, 2, \dots)$$

が成り立つ。ここで

$$B_N := \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in X ; g_k(x) \leq N\}, \quad B := \bigcup_{N=1}^{\infty} B_N$$

---

<sup>\*3</sup> 任意の  $\epsilon > 0$  に対し  $1/2^N < \epsilon$  を満たす  $N \in \mathbb{N}$  を取れば、全ての  $\ell > k > N$  に対して

$$|\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}_{n_\ell}(x)| \leq \sum_{j=k}^{\ell-1} |\hat{f}_{n_j}(x) - \hat{f}_{n_{j+1}}(x)| < \sum_{k > N} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^N} < \epsilon \quad (\forall x \in X)$$

が成り立つ。

とおけば  $(g_k)_{k=1}^\infty$  は  $B$  上で各点収束し  $X \setminus B$  上では発散するが,  $X \setminus B$  は零集合である. 実際

$$\begin{aligned} \int_X |g_k(x)|^p \mu(dx) &= \int_B |g_k(x)|^p \mu(dx) + \int_{X \setminus B} |g_k(x)|^p \mu(dx) \\ &\leq (\|f_{n_1}\|_{\mathcal{L}^p} + 1)^p \quad (k = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

が満たされているから, 単調収束定理より

$$\int_B \lim_{k \rightarrow \infty} |g_k(x)|^p \mu(dx) + \int_{X \setminus B} \lim_{k \rightarrow \infty} |g_k(x)|^p \mu(dx) \leq (\|f_{n_1}\|_{\mathcal{L}^p} + 1)^p$$

が成り立ち  $\mu(X \setminus B) = 0$  が従う.

$$g(x) := \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) & (x \in B) \\ 0 & (x \in X \setminus B) \end{cases}, \quad f(x) := \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) & (x \in B) \\ 0 & (x \in X \setminus B) \end{cases}$$

として  $g, f$  を定義すれば  $g, f$  は共に  $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ -可測であり, また  $|f(x)| \leq g(x)$  ( $\forall x \in X$ ) と  $g^p$  の可積分性により  $[f] \in L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$  が成り立つ. 今  $|f_{n_k}(x) - f(x)|^p \leq 2^p g(x)^p$  ( $\forall x \in B, k = 1, 2, \dots$ ) が満たされているから, Lebesgue の収束定理により

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|[f_{n_k}] - [f]\|_{L^p}^p = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X |f_{n_k}(x) - f(x)|^p \mu(dx) = 0$$

が得られ, 部分列の収束により元の Cauchy 列も  $[f]$  に収束する. ■

### 1.3 補助定理

以後の準備として, 線型作用素の拡張定理, 射影定理, kolmos の補題を証明する.

**定理 1.3.1 (線型作用素の拡張).**  $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$  を  $\mathbb{K}$  上のノルム空間とし, それぞれにノルム位相を導入する.  $Y$  が Banach 空間であるなら,  $X$  の稠密な部分空間  $X_0$  を定義域とする任意の有界線型作用素  $T : X \rightarrow Y$  に対し,  $T$  の拡張となる線型作用素で, 作用素ノルムを変えず, かつ定義域を  $X$  全体とするものが一意に存在する.

**証明.** 作用素ノルムを  $\|\cdot\|$  と表記する.  $X_0$  が  $X$  で稠密であるから, 任意の  $x \in X$  に対して  $\|x_n - x\|_X \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ) を満たす  $(x_n)_{n=1}^\infty$  が存在する.  $T$  の有界性から

$$\|Tx_m - Tx_n\|_Y \leq \|T\| \|x_m - x_n\|_X \quad (\forall n, m \in \mathbb{N})$$

が成り立ち,  $(Tx_n)_{n=1}^\infty$  が Cauchy 列であることと  $Y$  の完備性から  $(Tx_n)_{n=1}^\infty$  は或る  $y \in Y$  に収束する.  $y$  は  $x \in X$  に対して一意である. 実際  $x$  への別の収束列  $(z_n)_{n=1}^\infty$  を取り  $Tz_n \rightarrow u \in Y$  とすれば,

$$\begin{aligned} \|y - u\|_Y &= \|y - Tx_n + Tx_n - Tz_m + Tz_m - u\|_Y \\ &\leq \|y - Tx_n\|_Y + \|Tx_n - Tz_m\|_Y + \|Tz_m - u\|_Y \\ &\leq \|y - Tx_n\|_Y + \|T\| (\|x_n - x\|_X + \|x - z_m\|_X) + \|Tz_m - u\|_Y \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

より  $y = u$  が従う.  $x$  に  $y$  を対応させる関係を  $\tilde{T}$  と表せば, これは有界かつ線型である.

線型性 任意に  $x, z \in X$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  と  $x, z$  への収束列  $(x_n)_{n=1}^\infty, (z_n)_{n=1}^\infty \subset X_0$  を取れば

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}(\alpha x + \beta z) - \alpha \tilde{T}x - \beta \tilde{T}z\|_Y &= \|\tilde{T}(\alpha x + \beta z) - T(\alpha x_n + \beta z_n) + \alpha T x_n + \beta T z_n - \alpha \tilde{T}x - \beta \tilde{T}z\|_Y \\ &\leq \|\tilde{T}(\alpha x + \beta z) - T(\alpha x_n + \beta z_n)\|_Y + |\alpha| \|T x_n - \tilde{T}x\|_Y + |\beta| \|T z_n - \tilde{T}z\|_Y \\ &\longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow +\infty) \end{aligned}$$

が成り立つ.

有界性 任意に  $x \in X$  と  $x$  への収束列  $(x_n)_{n=1}^\infty$  を取る. 任意の  $\epsilon > 0$  に対し或る  $K \in \mathbb{N}$  が存在して

$$\|\tilde{T}x\|_Y < \|T x_k\|_Y + \epsilon, \quad \|x\|_X < \|x_k\|_X + \frac{\epsilon}{\|T\|} \quad (\forall k \geq K)$$

が成り立つから,

$$\|\tilde{T}x\|_Y < \|Tx\|_Y + \epsilon < \|T\| \|x\|_X + 2\epsilon$$

となり  $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$  を得る.

さらに

$$\|\tilde{T}\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X=1}} \|\tilde{T}x\|_Y \geq \sup_{\substack{x \in X_0 \\ \|x\|_X=1}} \|\tilde{T}x\|_Y = \sup_{\substack{x \in X_0 \\ \|x\|_X=1}} \|Tx\|_Y = \|T\|$$

より  $\|\tilde{T}\| = \|T\|$  が得られる. 拡張の一意性は  $X_0$  の稠密性と有界作用素の連続性による. ■

**定理 1.3.2 (射影定理).**  $H$  を  $\mathbb{K}$  上の Hilbert 空間とし, 内積とノルムをそれぞれ  $\langle \cdot, \cdot \rangle, \|\cdot\|$  と表記する.  $C \subset H$  が閉凸集合なら,  $f \in H$  に対し或る  $y \in C$  がただ一つ存在して

$$\|f - y\| = \inf_{h \in C} \|f - h\|$$

を満たす. また  $C$  が  $H$  の閉部分空間なら,  $y \in C$  が  $f$  の射影であることと

$$\langle f - y, h \rangle = 0 \quad (\forall h \in C)$$

が成り立つことは同値になる.

**証明.**

**射影の存在**  $C$  が凸集合であるとする.  $f \in H \setminus C$  として

$$\delta := \inf_{h \in C} \|f - h\|$$

とおけば,  $C$  が閉であるから  $\delta > 0$  となる.  $h_n \in C$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - h_n\|$$

となるように取れば, 任意の  $\epsilon > 0$  に対して或る  $N \in \mathbb{N}$  が存在し

$$\|f - h_n\|^2 < \delta^2 + \epsilon/4 \quad (\forall n > N)$$

が成り立つ.  $n, m > N$  ならば, 内積空間の中線定理と  $(h_n + h_m)/2 \in C$  により

$$\begin{aligned}\|h_n - h_m\|^2 &= 2(\|f - h_m\|^2 + \|f - h_n\|^2) - \|2f - (h_n + h_m)\|^2 \\ &= 2(\|f - h_m\|^2 + \|f - h_n\|^2) - 4\left\|f - \frac{h_n + h_m}{2}\right\|^2 \\ &< 2\delta^2 + \epsilon - 4\delta^2 = \epsilon\end{aligned}$$

が成り立ち  $(h_n)_{n=1}^\infty$  は  $H$  の Cauchy 列となり,  $H$  が Hilbert 空間で  $C$  が  $H$  で閉だから極限  $y \in H$  が存在して  $y \in C$  が従う.

$$\begin{aligned}|\delta - \|f - y\|| &\leq |\delta - \|f - h_n\|| + |\|f - h_n\| - \|f - y\|| \\ &\leq |\delta - \|f - h_n\|| + \|h_n - y\| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)\end{aligned}$$

より  $\delta = \|f - y\|$  となり射影の存在が示された.  $f \in C$  の場合は  $f$  が自身の射影である.  
射影の一意性  $z \in C$  もまた  $\delta = \|f - z\|$  を満たすとすれば,  $C$  の凸性により

$$2\delta \leq 2\left\|f - \frac{y+z}{2}\right\| \leq \|f - y\| + \|f - z\| = 2\delta$$

が成り立つから, 中線定理より

$$\|y - z\|^2 = 2(\|f - z\|^2 + \|f - y\|^2) - 4\left\|f - \frac{y+z}{2}\right\|^2 = 0$$

となって  $y = z$  が従う.

$C$  が閉部分空間の場合  $f \in H \setminus C$  に対して  $f$  の  $C$  への射影を  $y \in C$  とする. ( $f \in C$  の場合は  $y = f$ .) 或る  $h \in C$  に対して

$$\langle f - y, h \rangle \neq 0$$

となると仮定すれば ( $f \neq y$  より  $h \neq 0$ ),

$$\hat{y} := y + \left(\frac{\langle f - y, h \rangle}{\|h\|^2}\right)h \in C$$

に対して<sup>\*4</sup>

$$\begin{aligned}\|f - \hat{y}\|^2 &= \left\langle f - y - \frac{\langle f - y, h \rangle}{\|h\|^2}h, f - y - \frac{\langle f - y, h \rangle}{\|h\|^2}h \right\rangle \\ &= \|f - y\|^2 - \frac{|\langle f - y, h \rangle|^2}{\|h\|^2} \\ &< \|f - y\|^2\end{aligned}$$

が成り立つから  $y$  が射影であることに反する. 従って射影  $y$  は

$$\langle f - y, h \rangle = 0 \quad (\forall h \in C) \tag{1.8}$$

---

<sup>\*4</sup>  $\hat{y} \in C$  となるためには  $C$  が部分空間である必要がある. 凸性だけではこれが成り立たない.

を満たす．逆に  $y \in C$  に対して式 (1.8) が成り立っているとすれば  $y$  は  $f$  の射影となる．実際任意の  $h \in C$  に対して

$$\begin{aligned}\|f - h\|^2 &= \langle f - y + y - h, f - y + y - h \rangle \\ &= \|f - y\|^2 + 2\Re \langle f - y, y - h \rangle + \|y - h\|^2 \\ &= \|f - y\|^2 + \|y - h\|^2 \\ &\geq \|f - y\|^2\end{aligned}$$

となり

$$\|f - y\| = \inf_{h \in C} \|f - h\|$$

が成り立つ．

**定理 1.3.3 (Kolmos の補題).**  $H$  を Hilbert 空間,  $\|\cdot\|$  を  $H$  の内積により導入されるノルムとする．  $f_n \in H$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) が  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\| < \infty$  を満たすとき,

$$\exists g_n \in \text{Conv}[\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2} \dots\}]^{*5} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

が取れて  $(g_n)_{n=1}^\infty$  は  $H$  の Cauchy 列となる．

**証明.**  $F := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\| < \infty$  とおく．

$$A := \sup_{n \geq 1} \inf \{ \|g\| \ ; \ g \in \text{Conv}[\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2} \dots\}] \}$$

とおけば  $A \leq F$  が成り立つ．実際各  $n \in \mathbb{N}$  について任意に  $g \in \text{Conv}[\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2} \dots\}]$  を取れば

$$g = \sum_{i=0}^N c_i f_{n+i} \quad (0 \leq c_i \leq 1, \sum_{i=0}^N c_i = 1)$$

と表現できるから,

$$\|g\| = \left\| \sum_{i=0}^N c_i f_{n+i} \right\| \leq \sum_{i=0}^N c_i \|f_{n+i}\| \leq F$$

より

$$\inf \{ \|g\| \ ; \ g \in \text{Conv}[\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2} \dots\}] \} \leq F \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

が従い  $A \leq F$  を得る．また全ての  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$\inf \{ \|g\| \ ; \ g \in \text{Conv}[\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2} \dots\}] \} \leq A$$

<sup>\*5</sup>  $\text{Conv}[\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2} \dots\}]$  は  $f_n, f_{n+1}, f_{n+2} \dots$  を含む最小の凸集合である．すなわち

$$\text{Conv}[\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2} \dots\}] = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} c_i f_{n+i} \ ; \ 0 \leq c_i \leq 1, \exists j \in \mathbb{N}, c_i = 0 \ (\forall i \geq j), \sum_{i=0}^{\infty} c_i = 1 \right\}$$

で定義される．

が成り立つから、各  $n \in \mathbb{N}$  について

$$\|g_n\| \leq A + \frac{1}{n} \quad (1.9)$$

を満たす  $g_n \in \text{Conv}[\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2} \cdots\}]$  が存在する．一方で、下限を取る範囲が縮小していくから

$$\left( \inf \{ \|g\| \ ; \ g \in \text{Conv}[\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2} \cdots\}] \} \right)_{n=1}^{\infty}$$

は単調増大列であり、任意に  $m \in \mathbb{N}$  を取れば或る  $N(m) \in \mathbb{N}$  ( $N(m) > m$ ) が存在して

$$\inf \{ \|g\| \ ; \ g \in \text{Conv}[\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2} \cdots\}] \} \geq A - \frac{1}{m} \quad (\forall n \geq N(m))$$

が成り立つ．任意の  $l, k \geq N(m)$  に対し  $(g_l + g_k)/2 \in \text{Conv}[\{f_{N(m)}, f_{N(m)+1}, f_{N(m)+2} \cdots\}]$  となるから

$$\left\| \frac{g_l + g_k}{2} \right\| \geq A - \frac{1}{m}$$

が従い、中線定理と (1.9) を併せて

$$\|g_l - g_k\|^2 = 2\|g_l\|^2 + 2\|g_k\|^2 - \|g_l + g_k\|^2 \leq 4\left(A + \frac{1}{N(m)}\right)^2 - 4\left(A - \frac{1}{m}\right)^2 \leq \frac{16A}{m}$$

が成り立つ． $A \leq F < \infty$  より右辺は  $m \rightarrow \infty$  で 0 に収束するから  $(g_n)_{n=1}^{\infty}$  は Cauchy 列である． ■

## 第 2 章

# 条件付き期待値

基礎におく確率空間を  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  と表し, 係数体を  $\mathbb{R}$  とする.

### 2.1 $L^2$ における条件付き期待値

$L^2$  における内積 ノルム空間  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  は次の  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\mathcal{F})}$  を内積として Hilbert 空間となる:

$$\langle [f], [g] \rangle_{L^2(\mathcal{F})} := \int_{\Omega} f(x)g(x) \mu(dx) \quad (\forall [f], [g] \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)). \quad (2.1)$$

(2.1) で定める  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\mathcal{F})}$  は代表の取り方に依らない実数値で確定する. 実際 Hölder の不等式より右辺は実数値として確定し,  $[f'] = [f]$ ,  $[g'] = [g]$  を満たす  $f', g'$  に対しては

$$E := \{x \in \Omega; \quad f(x) \neq f'(x)\}, \quad F := \{x \in \Omega; \quad g(x) \neq g'(x)\}$$

が  $\mu$ -零集合であるから

$$\int_{\Omega} f(x)g(x) \mu(dx) = \int_{\Omega} f'(x)g'(x) \mu(dx)$$

が成り立つ. また次に示すように内積の公理が満たされる:

正值性 ノルムとの対応  $\| [f] \|_{L^2(\mathcal{F})}^2 = \langle [f], [f] \rangle_{L^2(\mathcal{F})}$  により従う.

対称性  $\int_{\Omega} fg \, d\mu = \int_{\Omega} gf \, d\mu$  により従う.

双線型性 片側の線型性を示す. 今, 任意に  $[f], [g], [h] \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  と  $a \in \mathbb{R}$  を取れば

$$\begin{aligned} \langle [f], [g] + [h] \rangle_{L^2(\mathcal{F})} &= \langle [f], [g + h] \rangle_{L^2(\mathcal{F})} = \int_{\Omega} f(x)(g(x) + h(x)) \mu(dx) \\ &= \int_{\Omega} f(x)g(x) \mu(dx) + \int_{\Omega} f(x)h(x) \mu(dx) = \langle [f], [g] \rangle_{L^2(\mathcal{F})} + \langle [f], [h] \rangle_{L^2(\mathcal{F})}, \\ \langle [f], \alpha[g] \rangle_{L^2(\mathcal{F})} &= \langle [f], [\alpha g] \rangle_{L^2(\mathcal{F})} \\ &= \int_{\Omega} \alpha f(x)g(x) \mu(dx) = \alpha \int_{\Omega} f(x)g(x) \mu(dx) = \alpha \langle [f], [g] \rangle_{L^2(\mathcal{F})} \end{aligned}$$

が成り立つ. 対称性と併せれば双線型性が従う.

ノルム空間としての完備性により  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  は Hilbert 空間となる.

条件付き期待値の存在  $\mathcal{G}$  を  $\mathcal{F}$  の部分  $\sigma$ -加法族とする. 任意の  $[g]_{\mathcal{G}} \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)^{*1}$  に対し  $g$  は

---

<sup>\*1</sup>  $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  は  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  とは空間が違うから関数類の表示を変えた.



可測  $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  であるから,  $g$  を代表とする  $[g]_{\mathcal{F}} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  が唯一つ存在する.

$$J_{\mathcal{G}} : L^0(\Omega, \mathcal{G}, \mu) \ni [g]_{\mathcal{G}} \mapsto [g]_{\mathcal{F}} \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \quad (2.2)$$

として定める線型単射により  $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  は  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  に等長に埋め込まれ<sup>\*2</sup>,  $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  の完備性より  $J_{\mathcal{G}} L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  は閉部分空間となる.  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  から  $J_{\mathcal{G}} L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  への射影作用素を  $P_{\mathcal{G}}$ ,  $J_{\mathcal{G}}$  の値域を  $J_{\mathcal{G}} L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  に制限した全単射を  $J'_{\mathcal{G}}$  と表し,

$$J'^{-1}_{\mathcal{G}} P_{\mathcal{G}} : L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \longrightarrow L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu) \quad (2.3)$$

により定める線型作用素  $J'^{-1}_{\mathcal{G}} P_{\mathcal{G}}$  を条件付き期待値とする. また  $J_{\mathcal{G}}$  は環準同型としての性質も具えている. 実際任意の  $[g]_{\mathcal{G}}, [h]_{\mathcal{G}} \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  に対して次を満たす:

$$J_{\mathcal{G}}([g]_{\mathcal{G}}[h]_{\mathcal{G}}) = J_{\mathcal{G}}[gh]_{\mathcal{G}} = [gh]_{\mathcal{F}} = [g]_{\mathcal{F}}[h]_{\mathcal{F}} = J_{\mathcal{G}}[g]_{\mathcal{G}}J_{\mathcal{G}}[h]_{\mathcal{G}}.$$

**関数類と関数の表記**  $L^p, \mathcal{L}^p$  の元について, 以降は関数類と関数は表記上で区別することはあまりせず, 状況に応じて  $f$  を関数類  $[f]$ , 或は関数  $f$  の意味で扱う. なぜならば, 例えば後述の命題 2.1.2 の C5 において,  $E[gf | \mathcal{G}] = g E[f | \mathcal{G}]$  と書いているところは本来

$$E[J_{\mathcal{G}}[g]_{\mathcal{G}}[f]_{\mathcal{F}} | \mathcal{G}] = [g]_{\mathcal{G}} E[[f]_{\mathcal{F}} | \mathcal{G}]$$

と表記されるが, これでは非常にややこしいからである. ただし主に  $f(x)$  と表記しているときは関数として, 条件付き期待値を作用させる場合は関数類として扱っている.

**定義 2.1.1** ( $L^2$  における条件付き期待値). (2.3) で定めた線型作用素を

$$E[\cdot | \mathcal{G}] : L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \ni f \mapsto E[f | \mathcal{G}] \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu) \quad (2.4)$$

と表記し直し,  $\mathcal{G}$  の下での条件付き期待値 (conditional expectation) と呼ぶ.  $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$  の場合は特別に  $E[\cdot] := E[\cdot | \mathcal{G}]$  と書いて期待値と呼ぶ.

<sup>\*2</sup> 任意の  $1 \leq p \leq \infty$  に対し  $L^p$  は  $L^0$  の部分集合であるから,  $J_{\mathcal{G}}$  は  $L^p(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  を  $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  に等長に埋め込む.

命題 2.1.2 (条件付き期待値の性質). Hilbert 空間  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  における内積を  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\mathcal{F})}$ , ノルムを  $\|\cdot\|_{L^2(\mathcal{F})}$  と表記し,  $\mathcal{G}, \mathcal{H}$  を  $\mathcal{F}$  の部分  $\sigma$ -加法族とする.

C1 任意の  $f \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  に対して次が成り立つ:

$$E[f] = \int_{\Omega} f(x) \mu(dx) \quad *3.$$

C2 任意の  $f \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  と  $h \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  に対して次が成り立つ:

$$\int_{\Omega} f(x)h(x) \mu(dx) = \int_{\Omega} E[f | \mathcal{G}](x)h(x) \mu(dx).$$

C3 任意の  $f, f_1, f_2 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  と  $\alpha \in \mathbb{R}$  に対して次が成り立つ:

$$E[f_1 + f_2 | \mathcal{G}] = E[f_1 | \mathcal{G}] + E[f_2 | \mathcal{G}], \quad E[\alpha f | \mathcal{G}] = \alpha E[f | \mathcal{G}].$$

C4 任意の  $f_1, f_2 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  に対して次が成り立つ:

$$f_1 \leq f_2 \quad \Rightarrow \quad E[f_1 | \mathcal{G}] \leq E[f_2 | \mathcal{G}] \quad *4$$

C5 任意の  $f \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  と  $g \in L^\infty(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  に対して次が成り立つ:

$$E[fg | \mathcal{G}] = g E[f | \mathcal{G}].$$

C6  $\mathcal{H}$  が  $\mathcal{G}$  の部分  $\sigma$ -加法族ならば, 任意の  $f \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  に対して次が成り立つ:

$$E[E[f | \mathcal{G}] | \mathcal{H}] = E[f | \mathcal{H}].$$

証明.

C1 (2.2) で定めた単射  $J_{\mathcal{G}}$  を  $J$  と表す.  $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$  とすれば,  $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  の元の代表は  $\mathcal{G}$ -可測でなくてはならないから定数関数である. 従って各  $g \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  にはただ一つの定数  $\alpha \in \mathbb{R}$  が対応して  $g(x) = \alpha (\forall x \in \Omega)$  と表すことができ, かつ関数  $g$  を代表とする  $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  の関数類は関数  $g$  のみからなる. 射影定理よりノルム  $\|f - Jg\|_{L^2(\mathcal{F})}$  を最小にする  $g \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  が  $E[f]$  である. 今  $g(x) = \alpha (\forall x \in \Omega)$  であるとして

$$\beta := \int_{\Omega} f(x) \mu(dx)$$

とおけば,

$$\begin{aligned} \|f - Jg\|_{L^2(\mathcal{F})}^2 &= \int_{\Omega} |f(x) - \alpha|^2 \mu(dx) \\ &= \int_{\Omega} |f(x)|^2 \mu(dx) - 2\alpha\beta + |\alpha|^2 \\ &= |\alpha - \beta|^2 + \int_{\Omega} |f(x) - \beta|^2 \mu(dx) \end{aligned}$$

\*3 本来は, 恒等的に  $\int_{\Omega} f(x) \mu(dx)$  のみを取る定数関数を代表とする関数類が  $E[f]$  である.

\*4 関数類に対する順序 (式 (1.4)) を表している.

が成り立ち、最終式は  $\alpha = \int_{\Omega} f(x) \mu(dx)$  のとき最小となる。従って

$$E[f] = \int_{\Omega} f(x) \mu(dx)$$

を得る。

C2 (2.2) で定めた単射  $J_{\mathcal{G}}$  を  $J$  と表す。射影定理により、 $f \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  に対する  $E[f | \mathcal{G}]$  は

$$\langle f - JE[f | \mathcal{G}], h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} = 0 \quad (\forall h \in JL^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu))$$

を満たすから、内積の線型性より任意の  $h \in JL^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  に対して

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x)h(x) \mu(dx) &= \langle f, h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} \\ &= \langle JE[f | \mathcal{G}], h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} = \int_{\Omega} E[f | \mathcal{G}](x)h(x) \mu(dx) \end{aligned}$$

が成り立つ。

C3 (2.3) における合成作用素は線型作用素である。

C4 (2.2) で定めた単射  $J_{\mathcal{G}}$  を  $J$  と表す。任意の  $f \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  に対して  $f \geq 0$  ならば  $E[f | \mathcal{G}] \geq 0$  が成り立つことを示せばよい。実際これが示されれば  $f_1, f_2 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  に対して

$$0 \leq f_2 - f_1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq E[f_2 - f_1 | \mathcal{G}]$$

が従い、C3 と併せて主張を得る。証明は背理法を使う。

$$A := \{x \in \Omega ; f(x) < 0\}, \quad B := \{x \in \Omega ; E[f | \mathcal{G}](x) < 0\}$$

とおき、 $\mu(A) = 0$  の下で  $\mu(B) > 0$  が成り立つと仮定して矛盾を導く。

$$h(x) := \begin{cases} E[f | \mathcal{G}](x) & (x \in \Omega \setminus B) \\ 0 & (x \in B) \end{cases}$$

として  $\mathcal{G}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ -可測関数を定義すれば

$$\begin{aligned} \|f - Jh\|_{L^2(\mathcal{F})}^2 &= \int_{\Omega} |f(x) - h(x)|^2 \mu(dx) \\ &= \int_{A^c \cap B^c} |f(x) - E[f | \mathcal{G}](x)|^2 \mu(dx) + \int_{A^c \cap B} |f(x)|^2 \mu(dx) \\ &< \int_{A^c \cap B^c} |f(x) - E[f | \mathcal{G}](x)|^2 \mu(dx) + \int_{A^c \cap B} |f(x) - E[f | \mathcal{G}](x)|^2 \mu(dx) \\ &= \|f - JE[f | \mathcal{G}]\|_{L^2(\mathcal{F})}^2 \end{aligned}$$

が成り立つ。途中の不等号  $<$  は、 $\mu(A^c \cap B) = \mu(B) - \mu(A \cap B) = \mu(B) > 0$  であることと

$$0 \leq f(x) < f(x) - E[f | \mathcal{G}](x) \quad (\forall x \in A^c \cap B)$$

による。しかし

$$\|f - Jh\|_{L^2(\mathcal{F})} < \|f - JE[f | \mathcal{G}]\|_{L^2(\mathcal{F})}$$

を満たす  $h \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  が存在することは  $JE[f | \mathcal{G}]$  が  $f$  の射影であることに矛盾する。よって  $\mu(A) = 0$  の下では  $\mu(B) = 0$  でなくてはならず、冒頭の主張が従う。

C5 (2.2) で定めた単射  $J_{\mathcal{G}}$  を  $J$  と表し, 任意の  $h \in J\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  に対して

$$\begin{aligned} & \langle J\mathbb{E}[gf | \mathcal{G}] - JgJ\mathbb{E}[f | \mathcal{G}], h \rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{F})} \\ &= \langle J\mathbb{E}[gf | \mathcal{G}] - Jgf, h \rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{F})} + \langle Jgf - JgJ\mathbb{E}[f | \mathcal{G}], h \rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{F})} = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

が成り立つことを示す.  $g$  の代表の有界性より  $Jgf \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  が満たされているから,  $Jgf$  に対して条件付き期待値を作用させることができ, 射影定理により

$$\langle J\mathbb{E}[gf | \mathcal{G}] - Jgf, h \rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{F})} = 0$$

が従う. 一方右辺第二項についても,

$$\begin{aligned} & \langle Jgf - JgJ\mathbb{E}[f | \mathcal{G}], h \rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{F})} \\ &= \int_{\Omega} (f(x) - \mathbb{E}[f | \mathcal{G}](x)) g(x) h(x) \mu(dx) = \langle f - J\mathbb{E}[f | \mathcal{G}], Jgh \rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{F})} \end{aligned}$$

が成り立ち,  $Jgh \in J\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  が満たされているから射影定理により

$$\langle Jgf - JgJ\mathbb{E}[f | \mathcal{G}], h \rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{F})} = \langle f - J\mathbb{E}[f | \mathcal{G}], Jgh \rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{F})} = 0$$

が従い (2.5) が得られる. 特に  $h = J\mathbb{E}[gf | \mathcal{G}] - JgJ\mathbb{E}[f | \mathcal{G}] \in J\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  として

$$\|J\mathbb{E}[gf | \mathcal{G}] - JgJ\mathbb{E}[f | \mathcal{G}]\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{F})}^2 = 0$$

が成り立つから, 環準同型  $J$  の線型等長性により  $\mathbb{E}[gf | \mathcal{G}] = g\mathbb{E}[f | \mathcal{G}]$  が得られる.

C6 (2.2) で定めた単射  $J_{\mathcal{G}}$  を  $J_1$  と表し, 同様に  $J_{\mathcal{H}}$  を  $J_2$  と表す. 今

$$J_2\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{H}, \mu) \subset J_1\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$$

が満たされているから, 射影定理より任意の  $h \in J_2\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{H}, \mu)$  に対して

$$\begin{aligned} & \langle J_2\mathbb{E}[\mathbb{E}[f | \mathcal{G}] | \mathcal{H}] - J_2\mathbb{E}[f | \mathcal{H}], h \rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{F})} \\ &= \langle J_2\mathbb{E}[\mathbb{E}[f | \mathcal{G}] | \mathcal{H}] - J_1\mathbb{E}[f | \mathcal{G}], h \rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{F})} \\ &\quad + \langle J_1\mathbb{E}[f | \mathcal{G}] - f, h \rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{F})} + \langle f - J_2\mathbb{E}[f | \mathcal{H}], h \rangle_{\mathcal{L}^2(\mathcal{F})} = 0 \end{aligned}$$

が成り立つ. 特に  $h = J_2\mathbb{E}[\mathbb{E}[f | \mathcal{G}] | \mathcal{H}] - J_2\mathbb{E}[f | \mathcal{H}] \in J_2\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{H}, \mu)$  とすれば

$$\|J_2\mathbb{E}[\mathbb{E}[f | \mathcal{G}] | \mathcal{H}] - J_2\mathbb{E}[f | \mathcal{H}]\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{F})}^2 = 0$$

が得られ,  $J_2$  の線型等長性より  $\mathbb{E}[\mathbb{E}[f | \mathcal{G}] | \mathcal{H}] = \mathbb{E}[f | \mathcal{H}]$  が従う. ■

## 2.2 条件付き期待値の拡張

$\mu$  の有限性と Hölder の不等式より  $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \subset \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  且つ  $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu) \subset \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  が成り立つから, 条件付き期待値が有界で  $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  が  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  において稠密ならば, 定理 1.3.1 より条件付き期待値は  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  上の線型写像に拡張可能である.

補題 2.2.1 (条件付き期待値の有界性). 線型作用素  $E[\cdot | \mathcal{G}]$  の作用素ノルムは 1 以下である:

$$\sup_{\substack{f \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \\ f \neq 0}} \frac{\|E[f | \mathcal{G}]\|_{L^1(\mathcal{G})}}{\|f\|_{L^1(\mathcal{F})}} \leq 1.$$

証明. (2.3) において  $P_{\mathcal{G}}$  の作用素ノルムは 1 以下,  $J'_{\mathcal{G}}$  の作用素ノルムは 1 である.\*5

定理 2.2.2 (条件付き期待値の拡張). (2.4) で定めた条件付き期待値  $E[\cdot | \mathcal{G}]$  に対して, 作用素ノルムを変えない拡張線型作用素

$$\tilde{E}[\cdot | \mathcal{G}] : L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \ni f \mapsto \tilde{E}[f | \mathcal{G}] \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$$

が唯一つ存在する. ただし  $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$  の場合は特別に  $\tilde{E}[\cdot] := \tilde{E}[\cdot | \mathcal{G}]$  と表示する.

証明.  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  の  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  における稠密性を示す. 今, 任意に  $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  を取り

$$f_n(x) := f(x) \mathbb{1}_{|f| \leq n}(x) \quad (\forall x \in \Omega, n = 1, 2, 3, \dots)$$

とおけば,  $(f_n)_{n=1}^\infty \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  であり, かつ Lebesgue の収束定理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^1(\mathcal{F})} = 0$$

が成り立つ. これにより  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  の稠密性が従い, 補題 2.2.1 と定理 1.3.1 より主張を得る.

補題 2.2.3 (凸関数は片側微分可能).  $\mathbb{R}$  から  $\mathbb{R}$  への凸関数は各点で左右の微係数が存在する.

証明.  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を凸関数とする. 先ず凸性から

$$\frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x} \leq \frac{\varphi(z) - \varphi(x)}{z - x} \leq \frac{\varphi(z) - \varphi(y)}{z - y} \quad (\forall x < y < z) \quad (2.6)$$

を得る. 今任意に  $x$  を取り固定する.  $x$  に単調減少で近づく点列  $(x_n)_{n=1}^\infty$  を一つ取れば, (2.6) より

$$\left( \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} \right)_{n=1}^\infty$$

は下に有界な単調減少列であり極限が存在する.  $x$  に単調減少で近づく別の点列  $(y_k)_{k=1}^\infty$  を取れば

$$\inf_{k \in \mathbb{N}} \frac{f(y_k) - f(x)}{y_k - x} \leq \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

\*5  $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  が零元のみで構成される場合を除く.

となるから

$$\inf_{k \in \mathbb{N}} \frac{f(y_k) - f(x)}{y_k - x} \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x}$$

が成り立つ。逆向きの不等号も同様に成り立つから、極限は取る点列に依らず確定し  $\varphi$  は  $x$  で右側微係数を持つ。同様の理由で左側微係数も存在し、特に  $\varphi$  の連続性及び Borel 可測性が従う。 ■

命題 2.2.4 (拡張条件付き期待値の性質).  $\mathcal{G}, \mathcal{H}$  を  $\mathcal{F}$  の部分  $\sigma$ -加法族とする。

Č1 任意の  $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  に対して次が成り立つ:

$$\tilde{\mathbb{E}}[f] = \int_{\Omega} f(x) \mu(dx).$$

Č2 任意の  $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  と  $h \in L^\infty(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  に対して次が成り立つ:

$$\int_{\Omega} f(x)h(x) \mu(dx) = \int_{\Omega} \tilde{\mathbb{E}}[f | \mathcal{G}](x)h(x) \mu(dx).$$

Č3 任意の  $f, f_1, f_2 \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  と  $\alpha \in \mathbb{R}$  に対して次が成り立つ:

$$\tilde{\mathbb{E}}[f_1 + f_2 | \mathcal{G}] = \tilde{\mathbb{E}}[f_1 | \mathcal{G}] + \tilde{\mathbb{E}}[f_2 | \mathcal{G}], \quad \tilde{\mathbb{E}}[\alpha f | \mathcal{G}] = \alpha \tilde{\mathbb{E}}[f | \mathcal{G}].$$

Č4 任意の  $f_1, f_2 \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  に対して次が成り立つ:

$$f_1 \leq f_2 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathbb{E}}[f_1 | \mathcal{G}] \leq \tilde{\mathbb{E}}[f_2 | \mathcal{G}].$$

Č5  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を凸関数とする.  $f, \varphi(f) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ならば次が成り立つ:

$$\varphi(\tilde{\mathbb{E}}[f | \mathcal{G}]) \leq \tilde{\mathbb{E}}[\varphi(f) | \mathcal{G}].$$

この不等式を Jensen の不等式と呼ぶ。

Č6 任意の  $f \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  と  $g \in L^q(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  に対して次が成り立つ:

$$\tilde{\mathbb{E}}[gf | \mathcal{G}] = g \tilde{\mathbb{E}}[f | \mathcal{G}].$$

ただし  $p, q$  は  $1/p + 1/q = 1$ , ( $1 \leq p, q \leq \infty$ ) を満たし,  $p = 1$  ならば  $q = \infty$  とする。

Č7  $\mathcal{H}$  が  $\mathcal{G}$  の部分  $\sigma$ -加法族ならば, 任意の  $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  に対して次が成り立つ:

$$\tilde{\mathbb{E}}[\tilde{\mathbb{E}}[f | \mathcal{G}] | \mathcal{H}] = \tilde{\mathbb{E}}[f | \mathcal{H}].$$

証明.

Č1  $f$  に対して, (2.2) と同じように  $(f_n)_{n=1}^\infty \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  を作る. 命題 2.1.2 の C1 により

$$\tilde{\mathbb{E}}[f_n] = \int_{\Omega} f_n(x) \mu(dx) \quad (\forall n = 1, 2, \dots)$$

が満たされるから、 $\tilde{E}[\cdot]$  の有界性と Lebesgue の収束定理により

$$\left| \tilde{E}[f] - \int_{\Omega} f(x) \mu(dx) \right| \leq \|f - f_n\|_{L^1(\mathcal{F})} + \|f - f_n\|_{L^1(\mathcal{F})} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成り立つ。

$\tilde{C}2$   $f$  に対して、(2.2) と同じように  $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  を作る。命題 2.1.2 の C2 により

$$\int_{\Omega} f_n(x) h(x) \mu(dx) = \int_{\Omega} \tilde{E}[f_n | \mathcal{G}](x) h(x) \mu(dx) \quad (\forall n = 1, 2, \dots)$$

が成り立つ。補助定理 2.2.1 と Lebesgue の収束定理より

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} f(x) h(x) \mu(dx) - \int_{\Omega} \tilde{E}[f | \mathcal{G}](x) h(x) \mu(dx) \right| \\ & \leq \left| \int_{\Omega} f(x) h(x) \mu(dx) - \int_{\Omega} f_n(x) h(x) \mu(dx) \right| \\ & \quad + \left| \int_{\Omega} \tilde{E}[f_n | \mathcal{G}](x) h(x) \mu(dx) - \int_{\Omega} \tilde{E}[f | \mathcal{G}](x) h(x) \mu(dx) \right| \\ & \leq 2 \|h\|_{L^{\infty}(\mathcal{F}, \mu)} \|f - f_n\|_{L^1(\mathcal{F})} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

が成り立ち

$$\int_{\Omega} f(x) h(x) \mu(dx) = \int_{\Omega} \tilde{E}[f | \mathcal{G}](x) h(x) \mu(dx)$$

が従う。

$\tilde{C}3$  定理 2.2.2 より  $\tilde{E}[\cdot | \mathcal{G}]$  は線型作用素である。

$\tilde{C}4$   $\tilde{E}[\cdot | \mathcal{G}]$  が線型であるから、命題 2.1.2 の C4 と同様に、任意の  $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  に対して  $f \geq 0$  ならば  $\tilde{E}[f | \mathcal{G}] \geq 0$  となることを示せばよい。 $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  を取り

$$A := \{x \in \Omega ; f(x) < 0\}, \quad B := \{x \in \Omega ; \tilde{E}[f | \mathcal{G}](x) < 0\}$$

とおき、 $\mu(A) = 0$  の下で  $\mu(B) = 0$  が成り立つことを示す。 $f$  に対して、(2.2) と同じように  $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  を作る。

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \Omega ; f_n(x) < 0\} \subset \{x \in \Omega ; f(x) < 0\}$$

が成り立つから、 $\mu(A) = 0$  の仮定と C4 により

$$\tilde{E}[f_n | \mathcal{G}] \geq 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が従う。

$$C_n := \{x \in \Omega ; \tilde{E}[f_n | \mathcal{G}](x) < 0\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad C := \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$$

とおけば  $\mu(C) = 0$  となり

$$\mu(B \cap C^c) = \mu(B) - \mu(B \cap C) = \mu(B)$$

が成り立つから、 $\mu(B \cap C^c) = 0$  を示せばよい。 $B \cap C^c$  の上では

$$|\tilde{E}[f | \mathcal{G}](x) - \tilde{E}[f_n | \mathcal{G}](x)| > 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

より,

$$D_k := \{x \in B \cap A^c ; \quad |\tilde{E}[f | \mathcal{G}](x)| > 1/k\} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

とおけば

$$B \cap C^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$$

が満たされる. 全ての  $k \in \mathbb{N}$  に対して

$$\|\tilde{E}[f | \mathcal{G}] - \tilde{E}[f_n | \mathcal{G}]\|_{L^1(\mathcal{G})} \geq \int_{C_k} |\tilde{E}[f | \mathcal{G}](x) - \tilde{E}[f_n | \mathcal{G}](x)| \mu(dx) > \frac{\mu(C_k)}{k}$$

が成り立ち, 左辺は  $n \rightarrow \infty$  で 0 に収束するから  $\mu(C_k) = 0$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) が得られ

$$\mu(B) = \mu(B \cap C^c) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(D_k) = 0$$

が従う.

Č5 補題 2.2.3 より  $\varphi$  は各点  $x \in \mathbb{R}$  で右側接線を持つから, それを  $t \mapsto a_x t + b_x$  と表せば

$$\varphi(t) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{a_x t + b_x\} \quad (\forall t \in \mathbb{R}) \quad (2.7)$$

が成り立つ. よって任意の  $x \in \mathbb{R}$  に対して

$$\varphi(f(\omega)) \geq a_x f(\omega) + b_x \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

が満たされるから, Č3 と Č4 より

$$E[\varphi(f) | \mathcal{G}] \geq a_x E[f | \mathcal{G}] + b_x \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

が従い, (2.7) より

$$E[\varphi(f) | \mathcal{G}] \geq \varphi(E[f | \mathcal{G}])$$

を得る.

Č6  $f, g$  に対して, (2.2) と同じように  $(f_n)_{n=1}^{\infty}, (g_n)_{n=1}^{\infty}$  を作る.

$p = 1$  の場合 命題 2.1.2 の C5 より

$$\tilde{E}[gf_n | \mathcal{G}] = g\tilde{E}[f_n | \mathcal{G}] \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.8)$$

が成り立っている. 補助定理 2.2.1 と Lebesgue の収束定理より

$$\begin{aligned} \|\tilde{E}[gf | \mathcal{G}] - \tilde{E}[gf_n | \mathcal{G}]\|_{L^1(\mathcal{G})} &\leq \|gf - gf_n\|_{L^1(\mathcal{F})} \\ &\leq \|g\|_{L^\infty(\mathcal{F}, \mu)} \|f - f_n\|_{L^1(\mathcal{F})} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

が成り立ち, 同様にして

$$\|g\tilde{E}[f | \mathcal{G}] - g\tilde{E}[f_n | \mathcal{G}]\|_{L^1(\mathcal{G})} \leq \|g\|_{L^\infty(\mathcal{F})} \|f - f_n\|_{L^1(\mathcal{F})} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

も成り立つから, 式 (2.8) と併せて

$$\begin{aligned} &\|\tilde{E}[gf | \mathcal{G}] - g\tilde{E}[f | \mathcal{G}]\|_{L^1(\mathcal{G})} \\ &\leq \|\tilde{E}[gf | \mathcal{G}] - \tilde{E}[gf_n | \mathcal{G}]\|_{L^1(\mathcal{G})} + \|g\tilde{E}[f_n | \mathcal{G}] - g\tilde{E}[f | \mathcal{G}]\|_{L^1(\mathcal{G})} \\ &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

が従う.



$1 < p < \infty$  の場合  $f \in L^p(\mathcal{F}) \subset L^1(\mathcal{F})$ ,  $g_n \in L^\infty(\mathcal{G})$  であるから, 前段の結果より

$$\tilde{E}[g_n f | \mathcal{G}] = g_n \tilde{E}[f | \mathcal{G}] \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.9)$$

が成り立つ. Jensen の不等式と Hölder の不等式より

$$\begin{aligned} \|\tilde{E}[g f | \mathcal{G}] - \tilde{E}[g_n f | \mathcal{G}]\|_{L^1(\mathcal{G})} &\leq \|g f - g_n f\|_{L^1(\mathcal{F})} \leq \|g - g_n\|_{L^q(\mathcal{G})} \|f\|_{L^p(\mathcal{F})}, \\ \|g_n \tilde{E}[f | \mathcal{G}] - g \tilde{E}[f | \mathcal{G}]\|_{L^1(\mathcal{G})} &\leq \|g_n - g\|_{L^q(\mathcal{G})} \|\tilde{E}[f | \mathcal{G}]\|_{L^p(\mathcal{F})} \leq \|g_n - g\|_{L^q(\mathcal{G})} \|f\|_{L^p(\mathcal{F})} \end{aligned}$$

が成り立つから, (2.9) と Lebesgue の収束定理より

$$\begin{aligned} &\|\tilde{E}[g f | \mathcal{G}] - g \tilde{E}[f | \mathcal{G}]\|_{L^1(\mathcal{G})} \\ &\leq \|\tilde{E}[g f | \mathcal{G}] - \tilde{E}[g_n f | \mathcal{G}]\|_{L^1(\mathcal{G})} + \|g_n \tilde{E}[f | \mathcal{G}] - g \tilde{E}[f | \mathcal{G}]\|_{L^1(\mathcal{G})} \\ &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

が従う.

Č7  $f$  に対して, (2.2) と同じように  $(f_n)_{n=1}^\infty \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  を作る. 命題 2.1.2 の C6 より

$$\tilde{E}[\tilde{E}[f_n | \mathcal{G}] | \mathcal{H}] = \tilde{E}[f_n | \mathcal{H}] \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.10)$$

が成り立っている. 補助定理 2.2.1 と Lebesgue の収束定理より

$$\begin{aligned} \|\tilde{E}[f | \mathcal{H}] - \tilde{E}[f_n | \mathcal{H}]\|_{L^1(\mathcal{H})} &\leq \|f - f_n\|_{L^1(\mathcal{F})} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \\ \|\tilde{E}[\tilde{E}[f | \mathcal{G}] | \mathcal{H}] - \tilde{E}[\tilde{E}[f_n | \mathcal{G}] | \mathcal{H}]\|_{L^1(\mathcal{H})} &\leq \|f - f_n\|_{L^1(\mathcal{F})} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

が成り立つから, (2.10) と併せて

$$\begin{aligned} &\|\tilde{E}[\tilde{E}[f | \mathcal{G}] | \mathcal{H}] - \tilde{E}[f | \mathcal{H}]\|_{L^1(\mathcal{H})} \\ &\leq \|\tilde{E}[\tilde{E}[f | \mathcal{G}] | \mathcal{H}] - \tilde{E}[\tilde{E}[f_n | \mathcal{G}] | \mathcal{H}]\|_{L^1(\mathcal{H})} + \|\tilde{E}[f | \mathcal{H}] - \tilde{E}[f_n | \mathcal{H}]\|_{L^1(\mathcal{H})} \\ &\leq 2\|f - f_n\|_{L^1(\mathcal{F})} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

が従う. ■

**定義 2.2.5 (条件付き期待値の再定義).** 有界線型作用素  $\tilde{E}[\cdot | \mathcal{G}]$  を  $E[\cdot | \mathcal{G}]$  と表記し直し,  $\mathcal{G}$  の下での条件付き期待値と呼ぶ.  $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$  の場合は  $E[\cdot] := E[\cdot | \mathcal{G}]$  と書いて期待値と呼ぶ.

## 2.3 独立性

任意の有界実連続関数  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  と  $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -可測関数  $X$  に対してその合成  $h(X)$  は可積分であるから, 条件付き期待値を作用させることができる. これを用いて独立性を次で定義する.

**定義 2.3.1 (独立性).**  $X$  を  $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -可測関数,  $\mathcal{G}$  を  $\mathcal{F}$  の部分  $\sigma$ -加法族とする. 任意の有界実連続関数  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  に対し次が成り立つとき,  $X$  と  $\mathcal{G}$  は独立である (independent) と定める:

$$E[h(X) | \mathcal{G}](\omega) = \int_{\Omega} h(X(x)) \mu(dx) \quad (\mu\text{-a.s. } \omega \in \Omega).$$

定理 2.3.2 (独立性の同値条件). 任意の有界実連続関数  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  に対し

$$E[h(X) | \mathcal{G}](\omega) = \int_{\Omega} h(X(x)) \mu(dx) \quad (\mu\text{-a.s. } \omega \in \Omega) \quad (2.11)$$

が成り立つことと

$$\mu(X^{-1}(E) \cap A) = \mu(X^{-1}(E))\mu(A) \quad (\forall E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}), A \in \mathcal{G}) \quad (2.12)$$

が成り立つことは同値である.

証明.

(2.11) $\Rightarrow$ (2.12) (2.11) を仮定して

$$\mathfrak{B}(\mathbb{R}) = \left\{ E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) ; \quad \mu(X^{-1}(E) \cap A) = \mu(X^{-1}(E))\mu(A), \quad \forall A \in \mathcal{G} \right\} \quad (2.13)$$

が成り立つことを示す. まず (2.13) の右辺が Dynkin 族であることを示し, 次に右辺が  $\mathbb{R}$  の閉集合系を含むことを示す. これが示されれば Dynkin 族定理により (2.13) が得られる.

$$\mathcal{D} := \left\{ E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) ; \quad \mu(X^{-1}(E) \cap A) = \mu(X^{-1}(E))\mu(A), \quad \forall A \in \mathcal{G} \right\}$$

とおけば,  $\mathcal{D}$  は次の (1)(2)(3) を満たすから Dynkin 族である:

- (1)  $\mathbb{R} \in \mathcal{D}$ ,
- (2)  $D_1, D_2 \in \mathcal{D}, D_1 \subset D_2 \Rightarrow D_2 \setminus D_1 \in \mathcal{D}$ ,
- (3)  $D_n \in \mathcal{D}, D_n \cap D_m = \emptyset (n \neq m) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathcal{D}$ .

実際,  $\Omega = X^{-1}(\mathbb{R})$  により任意の  $A \in \mathcal{G}$  に対して  $\mu(X^{-1}(\mathbb{R}) \cap A) = \mu(X^{-1}(\mathbb{R}))\mu(A)$  が成り立つから (1) が従い, また  $D_1 \subset D_2$  ならば  $X^{-1}(D_2 \setminus D_1) = X^{-1}(D_2) \setminus X^{-1}(D_1)$  が成り立つから

$$\begin{aligned} \mu(X^{-1}(D_2 \setminus D_1) \cap A) &= \mu(X^{-1}(D_2) \cap A) - \mu(X^{-1}(D_1) \cap A) \\ &= \left\{ \mu(X^{-1}(D_2)) - \mu(X^{-1}(D_1)) \right\} \mu(A) = \mu(X^{-1}(D_2 - D_1))\mu(A) \quad (\forall A \in \mathcal{G}) \end{aligned}$$

により (2) が従う. (3) も

$$\begin{aligned} \mu\left(X^{-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} D_n\right) \cap A\right) &= \mu\left(\sum_{n=1}^{\infty} X^{-1}(D_n) \cap A\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(X^{-1}(D_n) \cap A) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(X^{-1}(D_n))\mu(A) = \mu\left(X^{-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} D_n\right)\right)\mu(A) \quad (\forall A \in \mathcal{G}) \end{aligned}$$

により従う. 次に  $\mathbb{R}$  の任意の閉集合が  $\mathcal{D}$  に属することを示す.  $E$  を  $\mathbb{R}$  の閉集合として

$$d(\cdot, E) : \mathbb{R} \ni x \mapsto \inf \{ |x - y| ; \quad y \in E \}$$

とおき

$$h_n : \mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{1}{1 + nd(x, E)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により有界実連続関数列  $(h_n)_{n=1}^{\infty}$  を定める.  $E$  が閉集合であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = \mathbb{1}_E(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

が成り立ち、また  $h_n$  の有界連続性と (2.11) の仮定により

$$\mathbb{E}[h_n(X) | \mathcal{G}](\omega) = \int_{\Omega} h_n(X(x)) \mu(dx) \quad (\mu\text{-a.s. } \omega \in \Omega, n = 1, 2, \dots)$$

が満たされているから、任意に  $A \in \mathcal{G}$  を取れば

$$\begin{aligned} \mu(X^{-1}(E) \cap A) &= \int_A \mathbb{1}_E(X(\omega)) \mu(d\omega) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A h_n(X(\omega)) \mu(d\omega) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \mathbb{E}[h_n(X) | \mathcal{G}](\omega) \mu(d\omega) \\ &= \mu(A) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} h_n(X(\omega)) \mu(d\omega) \\ &= \mu(A) \int_{\Omega} \mathbb{1}_E(X(\omega)) \mu(d\omega) \\ &= \mu(X^{-1}(E))\mu(A) \end{aligned}$$

が成り立ち  $E \in \mathcal{D}$  が従う。

(2.12)  $\Rightarrow$  (2.11) (2.12) を仮定して

$$\int_A \mathbb{E}[h(X) | \mathcal{G}](\omega) \mu(d\omega) = \mu(A) \int_{\Omega} h(X(\omega)) \mu(d\omega) \quad (\forall A \in \mathcal{G})$$

成り立つことを示す。有界実連続関数  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  に対して  $|h_n| \leq |h|$  を満たすように単関数近似列  $(h_n)_{n=1}^{\infty}$  を取る。各  $h_n$  は  $\alpha_i^n \in \mathbb{R}$ ,  $E_i^n \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  ( $i = 1, \dots, N_n$ ),  $\sum_{i=1}^{N_n} E_i^n = \mathbb{R}$  を用いて

$$h_n = \sum_{i=1}^{N_n} \alpha_i^n \mathbb{1}_{E_i^n}$$

の形で表現できるから、(2.12) の仮定の下では任意の  $A \in \mathcal{G}$  に対して

$$\begin{aligned} \int_A h_n(X(\omega)) \mu(d\omega) &= \sum_{i=1}^{N_n} \alpha_i^n \int_A \mathbb{1}_{X^{-1}(E_i^n)}(\omega) \mu(d\omega) = \sum_{i=1}^{N_n} \alpha_i^n \mu(X^{-1}(E_i^n) \cap A) \\ &= \mu(A) \sum_{i=1}^{N_n} \alpha_i^n \mu(X^{-1}(E_i^n)) = \sum_{i=1}^{N_n} \alpha_i^n \int_{\Omega} \mathbb{1}_{X^{-1}(E_i^n)}(\omega) \mu(d\omega) = \mu(A) \int_{\Omega} h_n(X(\omega)) \mu(d\omega) \end{aligned}$$

が成り立ち、Lebesgue の収束定理より

$$\begin{aligned} \int_A \mathbb{E}[h(X) | \mathcal{G}](\omega) \mu(d\omega) &= \int_A h(X(\omega)) \mu(d\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A h_n(X(\omega)) \mu(d\omega) \\ &= \mu(A) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} h_n(X(\omega)) \mu(d\omega) = \mu(A) \int_{\Omega} h(X(\omega)) \mu(d\omega) \end{aligned}$$

が従う。 ■

## 第 3 章

# 停止時刻

### 3.1 フィルトレーション

基礎に置く確率空間を  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  とする. また集合  $I \subset \mathbb{R}$  によって確率過程の時点全体を表現する.  $I$  は  $[0, T]$  ( $T > 0$ ) 或は  $\{0, 1, \dots, n\}$  などを指し,  $I$  が  $\mathbb{R}$  の区間の場合は相対位相,  $I$  が高々可算集合の場合は離散位相を導入する.

定義 3.1.1 (フィルトレーション・適合過程).  $\mathcal{F}$  の部分  $\sigma$ -加法族の系  $\{\mathcal{F}_t; t \in I\}$  が次を満たすとき, これをフィルトレーション (filtration) と呼ぶ:

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \quad (\forall s \leq t, s, t \in I).$$

また可測空間  $(S, \mathcal{M})$  と写像  $X: I \times \Omega \rightarrow S$  に対し,  $t \in I$  ごとに  $\Omega \ni \omega \mapsto X(t, \omega) \in S$  が  $\mathcal{F}_t/\mathcal{M}$ -可測性を満たすとき,  $X$  を  $(\mathcal{F}_t)$ -適合過程 (adapted process) と呼ぶ.

以降は断りなくとも確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  にフィルトレーション  $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$  が付随する.

定義 3.1.2 (発展的可測性).  $I = [0, T]$  或は  $I = [0, \infty)$  とし,  $(S, \mathcal{M})$  を可測空間とする. 任意の  $t \in I$  に対し  $X: I \times \Omega \rightarrow S$  を  $[0, t] \times \Omega$  上に制限した写像が  $\mathcal{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t/\mathcal{M}$ -可測性を満たすとき,  $X$  は  $(\mathcal{F}_t)$ -発展的可測 (progressively measurable) であるという.

定理 3.1.3 (右連続適合過程は発展的可測).

### 3.2 停止時刻の性質

定義 3.2.1 (停止時刻). 次を満たす関数  $\tau: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  を ( $I$  値) 停止時刻 (stopping time) という:

$$\tau(\Omega) \subset I, \quad \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad (\forall t \in I).$$

定理 3.2.2 (停止時刻は可測写像). 停止時刻  $\tau$  は可測  $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  である.

証明.  $\tau$  の終集合を  $I$  に制限した写像  $\tau^*$  と恒等写像  $i: I \rightarrow \mathbb{R}$  を用いて  $\tau = i \circ \tau^*$  と表せる.

$$\mathfrak{B}(I) = \{ A \cap I ; A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \} = \{ i^{-1}(A) ; A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \}$$

により  $i$  は可測  $\mathfrak{B}(I)/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  であるから,  $\tau^*$  が可測  $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(I)$  であれば定理の主張が従う.

$I$  が区間のとき  $t \in I$  に対し  $I_t := (-\infty, t] \cap I$  とおけば  $\tau^{*-1}(I_t) = \{\tau^* \leq t\} \in \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$  が成り立つから

$$\{I_t ; t \in I\} \subset \{A \in \mathfrak{B}(I) ; \tau^{*-1}(A) \in \mathcal{F}\}$$

が従う. 左辺は  $\mathfrak{B}(I)$  を生成するから  $\tau^*$  の可測性が得られる.

$I$  が高々可算集合のとき 先ず任意の  $t \in I$  に対して  $\{\tau^* < t\} \in \mathcal{F}_t$  が成り立つことを示す. 任意に  $t \in I$  を取り固定する.  $t$  に対して直前の元  $s \in I$  が存在する場合は  $\{\tau^* < t\} = \{\tau^* \leq s\} \in \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$  となり,  $t$  が  $I$  の最小限である場合は  $\{\tau^* < t\} = \emptyset \in \mathcal{F}_t$  が成り立つ. いずれでもない場合,  $t - 1/n < x_n < t$  を満たす点列  $x_n \in I$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を取れば,  $\{\tau^* < t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\tau^* \leq x_n\} \in \mathcal{F}_t$  が成り立つ. 以上より任意の  $t \in I$  に対して  $\tau^{*-1}(\{t\}) = \{\tau^* \leq t\} \setminus \{\tau^* < t\} \in \mathcal{F}_t$  が満たされ, 任意の  $A \in \mathfrak{B}(I)$  は一点集合の可算和で表現できるから  $\tau^{*-1}(A) \in \mathcal{F}$  が従う. ■

$\tau: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  が  $I$  値定数関数なら  $\{\tau \leq t\} (t \in I)$  は  $\emptyset$  又は  $\Omega$  であるから, この場合  $\tau$  は停止時刻である. また ( $I$  値) 停止時刻  $\sigma, \tau$  に対し  $\sigma \vee \tau$  と  $\sigma \wedge \tau$  も停止時刻である. 実際次が満たされる:

$$\begin{cases} \{\sigma \wedge \tau \leq t\} = \{\sigma \leq t\} \cup \{\tau \leq t\}, \\ \{\sigma \vee \tau \leq t\} = \{\sigma \leq t\} \cap \{\tau \leq t\} \end{cases}, (\forall t \in I).$$

定義 3.2.3 (停止時刻で定まる事象). 停止時刻  $\tau$  に対し次の集合族を定義する:

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} ; \{\tau \leq t\} \cap A \in \mathcal{F}_t, \forall t \in I\}.$$

定理 3.2.4. 任意の停止時刻  $\tau$  は可測  $\mathcal{F}_\tau/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  である.

命題 3.2.5 (停止時刻の性質). 停止時刻  $\sigma, \tau$  に対し次が成り立つ.

- (1)  $\mathcal{F}_\tau$  は  $\sigma$ -加法族である.
- (2) 或る  $t \in I$  に対して  $\tau(\omega) = t (\forall \omega \in \Omega)$  なら  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_\tau$ .
- (3)  $\sigma(\omega) \leq \tau(\omega) (\forall \omega \in \Omega)$  ならば  $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$ .
- (4)  $\{\sigma \leq \tau\}, \{\sigma < \tau\} \in \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}$ .
- (5)  $\mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau} = \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$ .
- (6)  $\mathcal{F}_{\sigma \vee \tau} = \mathcal{F}_\sigma \vee \mathcal{F}_\tau$ .

証明.

- (1) 停止時刻の定義より  $\Omega \in \mathcal{F}_\tau$  が満たされる. また  $A \in \mathcal{F}_\tau$  に対して  $A^c \cap \{\tau \leq t\} = \{\tau \leq t\} \setminus (A \cap \{\tau \leq t\}) \in \mathcal{F}_t$  が成り立つから  $A^c \in \mathcal{F}_\tau$  も従う. そして可算個の  $A_n \in \mathcal{F}_\tau$  を取れば  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap \{\tau \leq t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap \{\tau \leq t\}) \in \mathcal{F}_t$  が成り立つから  $\mathcal{F}_\tau$  は可算和でも閉じている.

(2) 任意の  $A \in \mathcal{F}_t$  に対して

$$A \cap \{\tau \leq s\} = \begin{cases} A & t \leq s \\ \emptyset & t > s \end{cases} \quad (\forall s \in I)$$

が成り立つから  $A \in \mathcal{F}_\tau$  が従う。逆に  $A \in \mathcal{F}_\tau$  に対しては  $A = A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$  が成り立つ。

(3) 任意の  $A \in \mathcal{F}_\sigma$  に対して

$$A \cap \{\tau \leq t\} = A \cap \{\sigma \leq t\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad (\forall t \in I)$$

が成り立つから  $A \in \mathcal{F}_\tau$  となる。

(4) 任意の  $t \in I$  に対し

$$\begin{aligned} \{\sigma < \tau\} \cap \{\sigma \wedge \tau \leq t\} &= \{\sigma < \tau\} \cap \{\tau \leq t\} + \{\sigma < \tau\} \cap \{\tau > t\} \cap \{\sigma \leq t\} \\ &= \left( \bigcup_{\substack{s \in \mathbb{Q} \cap I \\ s \leq t}} \{\sigma \leq s\} \cap \{s < \tau\} \right) \cap \{\tau \leq t\} + \{\tau > t\} \cap \{\sigma \leq t\} \end{aligned}$$

と表せるから  $\{\sigma < \tau\} \in \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}$  が成り立つ。従って  $\{\sigma \leq \tau\} = \{\tau < \sigma\}^c \in \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}$  も得られる。

(5) 先ず (3) より  $\mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau} \subset \mathcal{F}_\sigma$  と  $\mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau} \subset \mathcal{F}_\tau$  が従う。一方任意の  $A \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$  に対し

$$A \cap \{\sigma \wedge \tau \leq t\} = (A \cap \{\sigma \leq t\}) \cup (A \cap \{\tau \leq t\}) \in \mathcal{F}_t \quad (\forall t \in I)$$

が成り立つから  $A \in \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}$  を得る。

(6) 先ず (3) より  $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_{\sigma \vee \tau}$  と  $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_{\sigma \vee \tau}$  が成り立つから  $\mathcal{F}_\sigma \vee \mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_{\sigma \vee \tau}$  が従う。一方任意に  $A \in \mathcal{F}_{\sigma \vee \tau}$  を取り  $A = A \cap \{\sigma \leq \tau\} + A \cap \{\sigma > \tau\}$  と分ければ、(4) より任意の  $t \in I$  に対して

$$\begin{aligned} A \cap \{\sigma \leq \tau\} \cap \{\tau \leq t\} &= A \cap \{\sigma \vee \tau \leq t\} \cap \{\sigma \leq \tau\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \\ A \cap \{\sigma > \tau\} \cap \{\sigma \leq t\} &= A \cap \{\sigma \vee \tau \leq t\} \cap \{\sigma > \tau\} \cap \{\sigma \leq t\} \in \mathcal{F}_t \end{aligned}$$

が成り立つから、 $\mathcal{F}_{\sigma \vee \tau} \subset \mathcal{F}_\sigma \vee \mathcal{F}_\tau$  が得られる。 ■

**命題 3.2.6 (停止時刻と条件付き期待値).**  $X \in L^1(\mu)$  と停止時刻  $\sigma, \tau$  に対し以下が成立する。

- (1)  $E[\mathbb{1}_{\{\sigma \leq \tau\}} X \mid \mathcal{F}_\sigma](\omega) = \mathbb{1}_{\{\sigma \leq \tau\}}(\omega) E[X \mid \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}](\omega) \quad \mu\text{-a.s. } \omega \in \Omega.$
- (2)  $E[\mathbb{1}_{\{\sigma < \tau\}} X \mid \mathcal{F}_\sigma](\omega) = \mathbb{1}_{\{\sigma < \tau\}}(\omega) E[X \mid \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}](\omega) \quad \mu\text{-a.s. } \omega \in \Omega.$
- (3)  $E[E[X \mid \mathcal{F}_\sigma] \mid \mathcal{F}_\tau](\omega) = E[X \mid \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}](\omega) \quad \mu\text{-a.s. } \omega \in \Omega.$

**証明.**

**第一段** 任意の  $A \in \mathcal{F}_\sigma$  に対し  $A \cap \{\sigma \leq \tau\} \in \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}$  が成り立つことを示す。実際命題 3.2.5 より

$$A \cap \{\sigma \leq \tau\} \cap \{\sigma \wedge \tau \leq t\} = A \cap \{\sigma \leq t\} \cap \{\sigma \leq \tau\} \cap \{\sigma \wedge \tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad (\forall t \in I)$$

が成り立ち主張が得られる。同様に  $A \cap \{\sigma < \tau\} \in \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}$  も成り立つ。

第二段 (1) を示す. (2) も同様に示される. 第一段と命題 2.2.4 より, 任意の  $A \in \mathcal{F}_\sigma$  に対して

$$\begin{aligned} \int_A \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\sigma \leq \tau\}} X \mid \mathcal{F}_\sigma](\omega) \mu(d\omega) &= \int_\Omega \mathbb{1}_{A \cap \{\sigma \leq \tau\}}(\omega) X(\omega) \mu(d\omega) \\ &= \int_\Omega \mathbb{1}_{A \cap \{\sigma \leq \tau\}}(\omega) \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}](\omega) \mu(d\omega) = \int_A \mathbb{1}_{\{\sigma \leq \tau\}}(\omega) \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}](\omega) \mu(d\omega) \end{aligned}$$

が成り立つから, 特に

$$\begin{aligned} A_1 &:= \left\{ \omega \in \Omega ; \quad \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\sigma \leq \tau\}} X \mid \mathcal{F}_\sigma](\omega) > \mathbb{1}_{\{\sigma \leq \tau\}}(\omega) \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}](\omega) \right\} \in \mathcal{F}_\sigma, \\ A_2 &:= \left\{ \omega \in \Omega ; \quad \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\sigma \leq \tau\}} X \mid \mathcal{F}_\sigma](\omega) < \mathbb{1}_{\{\sigma \leq \tau\}}(\omega) \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}](\omega) \right\} \in \mathcal{F}_\sigma \end{aligned}$$

とおけば  $\mu(A_1) = \mu(A_2) = 0$  となり (1) が成立する.

第三段 (3) を示す. 任意の  $B \in \mathcal{F}_\tau$  に対して

$$\begin{aligned} \int_B \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_\sigma] \mid \mathcal{F}_\tau](\omega) \mu(d\omega) &= \int_B \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_\sigma](\omega) \mu(d\omega) \\ &= \int_B \mathbb{1}_{\{\tau \leq \sigma\}}(\omega) \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_\sigma](\omega) \mu(d\omega) + \int_B \mathbb{1}_{\{\sigma < \tau\}}(\omega) \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_\sigma](\omega) \mu(d\omega) \end{aligned}$$

と分ける. 右辺第一項について, 第一段と命題 2.2.4 より

$$\begin{aligned} \int_B \mathbb{1}_{\{\tau \leq \sigma\}}(\omega) \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_\sigma](\omega) \mu(d\omega) &= \int_\Omega \mathbb{E}[\mathbb{1}_{B \cap \{\tau \leq \sigma\}} \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_\sigma] \mid \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}](\omega) \mu(d\omega) \\ &= \int_\Omega \mathbb{1}_{B \cap \{\tau \leq \sigma\}}(\omega) \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_\sigma] \mid \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}](\omega) \mu(d\omega) = \int_B \mathbb{1}_{\{\tau \leq \sigma\}}(\omega) \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}](\omega) \mu(d\omega) \end{aligned}$$

が成り立ち, 右辺第二項については命題 2.2.4 と (2) より

$$\begin{aligned} \int_B \mathbb{1}_{\{\sigma < \tau\}}(\omega) \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_\sigma](\omega) \mu(d\omega) &= \int_B \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\sigma < \tau\}} X \mid \mathcal{F}_\sigma](\omega) \mu(d\omega) \\ &= \int_B \mathbb{1}_{\{\sigma < \tau\}}(\omega) \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}](\omega) \mu(d\omega) \end{aligned}$$

が成り立つから

$$\int_B \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_\sigma] \mid \mathcal{F}_\tau](\omega) \mu(d\omega) = \int_B \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}](\omega) \mu(d\omega)$$

が従う.  $B \in \mathcal{F}_\tau$  の任意性より, 前段と同様にして (3) が得られる. ■

定理 3.2.7 (停止時刻との合成写像の可測性).  $I = [0, T]$  或は  $I = [0, \infty)$  とし, フィルトレーションを  $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ ,  $\tau$  を停止時刻とする. 確率過程  $M : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  が右連続且つ  $(\mathcal{F}_t)$ -適合なら, 写像  $\Omega \ni \omega \mapsto M(\tau(\omega), \omega)$  は可測  $\mathcal{F}_\tau / \mathcal{B}(\mathbb{R})$  である.

証明. 任意に  $t \in I$  を取り固定する. 各  $n \in \mathbb{N}$  に対し  $t_j^n := jt/2^n$  ( $j = 0, 1, \dots, 2^n$ ) とおき

$$\tilde{M} := M|_{[0, t] \times \Omega}, \quad \tilde{M}^n := \mathbb{1}_{\{0\}} M_0 + \sum_{j=1}^{2^n} \mathbb{1}_{(t_{j-1}^n, t_j^n]} M_{t_j^n}$$

として  $\tilde{M}, \tilde{M}^n : [0, t] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  を定める.  $\tilde{M}^n$  は可測  $\mathfrak{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t / \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  であり, 右連続性により

$$\tilde{M}(s, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{M}^n(s, \omega) \quad (\forall (s, \omega) \in [0, t] \times \Omega) \quad (3.1)$$

が成り立つから  $\tilde{M}$  は可測  $\mathfrak{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t / \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  である. 一方で  $\tau \wedge t$  が可測  $\mathcal{F}_t / \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  であるから

$$\Omega \ni \omega \mapsto (\tau(\omega) \wedge t, \omega) \in [0, t] \times \Omega$$

は可測  $\mathcal{F}_t / \mathfrak{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t$  であり, 合成写像

$$\Omega \ni \omega \mapsto \tilde{M}(\tau(\omega) \wedge t, \omega) \in \mathbb{R}$$

の  $\mathcal{F}_t / \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ -可測性が従う. よって任意の  $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  に対して

$$\{\omega \in \Omega ; \tilde{M}(\tau(\omega), \omega) \in A\} \cap \{\tau \leq t\} = \{\omega \in \Omega ; \tilde{M}(\tau(\omega) \wedge t, \omega) \in A\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

が満たされ<sup>\*1</sup>,  $t \in I$  の任意性より写像  $\Omega \ni \omega \mapsto \tilde{M}(\tau(\omega), \omega)$  の  $\mathcal{F}_\tau / \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ -可測性が出る. ■

### 3.3 停止時刻の構成

定理 3.3.1 (閉集合と停止時刻).  $I = [0, T]$ ,  $(E, d)$  を距離空間,  $X : I \times \Omega \rightarrow E$  を  $(\mathcal{F}_t)$ -適合過程とする. 或る  $N \in \mathcal{F}_0$  を除いて  $I \ni t \mapsto X_t(\omega)$  が連続なら, 任意の閉集合  $F \subset E$  に対し

$$\tau(\omega) := \begin{cases} 0 & (\omega \in N) \\ \inf \{ t \in I ; X_t(\omega) \in F \} \wedge T & (\omega \in \Omega \setminus N)^{*2} \end{cases}$$

により定める  $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  は停止時刻である. また  $\omega \in \Omega \setminus N$  に対して

$$X_{t \wedge \tau(\omega)}(\omega) \in \{X_0(\omega)\} \cup F^{ic} \quad (\forall t \in I)$$

が満たされる. ただし  $F^i$  は  $F$  の内核を表し  $F^{ic}$  は  $F^i$  の補集合を表す.

確率空間が完備で且つ  $\mathcal{F}_0$  が  $\mu$ -零集合を全て含み, 更に  $N$  が  $\mu$ -零集合である場合,

$$\tau(\omega) := \inf \{ t \in I ; X_t(\omega) \in F \} \wedge T \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

として  $\tau$  は停止時刻となる. 実際任意の  $t \in I$  に対して,

$$\{\tau \leq t\} = \{\tau \leq t\} \cap N + \{\omega \in \Omega \setminus N ; \tau(\omega) \leq t\}$$

の右辺第一項は完備性より  $\mu$ -零集合, 第二項は以下の証明により  $\mathcal{F}_t$  に属する.

証明.

<sup>\*1</sup> (3.1) において  $t = T$  として  $M = \tilde{M}$  の  $\mathfrak{B}(I) \times \mathcal{F} / \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ -可測性が得られ,  $\omega \mapsto (\tau(\omega), \omega) \in \mathbb{R}$  の  $\mathcal{F} / \mathfrak{B}(I) \times \mathcal{F}$ -可測性と併せて  $\{\omega \in \Omega ; \tilde{M}(\tau(\omega), \omega) \in A\} \in \mathcal{F}$  が従う.

<sup>\*2</sup>  $\{t \in I ; X_t(\omega) \in F\} = \emptyset$  の場合は

$$\inf \{ t \in I ; X_t(\omega) \in F \} = \infty$$

と考え,  $\tau(\omega) = T$  とする. 以後本稿でこのように表記する場合も同様に対処する.



第一段  $x \in E$  に対し  $d(x, F) := \inf_{y \in F} d(x, y)$  と表せば,

$$D_t(\omega) := \begin{cases} 1 & (\omega \in N) \\ \inf_{r \in [0, t] \cap \mathbb{Q}} d(X_r(\omega), F) & (\omega \in \Omega \setminus N) \end{cases}$$

で定める  $D_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  は可測  $\mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  である. 実際,  $E \ni x \mapsto d(x, F) \in \mathbb{R}$  の連続性より

$$\Omega \ni \omega \mapsto d(X_t(\omega), F)$$

の  $\mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ -可測性が従い, 任意の  $\lambda \in \mathbb{R}$  に対し

$$\left\{ \omega \in \Omega ; \inf_{r \in [0, t] \cap \mathbb{Q}} d(X_r(\omega), F) \geq \lambda \right\} = \bigcap_{r \in [0, t] \cap \mathbb{Q}} \{ \omega \in \Omega ; d(X_r(\omega), F) \geq \lambda \}$$

が成り立つから写像  $\Omega \ni \omega \mapsto \inf_{r \in [0, t] \cap \mathbb{Q}} d(X_r(\omega), F)$  の  $\mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ -可測性が出る. よって

$$D_t^{-1}(A) = \begin{cases} N \cup \left\{ \inf_{r \in [0, t] \cap \mathbb{Q}} d(X_r, F) \in A \right\} & (1 \in A) \\ \left\{ \inf_{r \in [0, t] \cap \mathbb{Q}} d(X_r, F) \in A \right\} & (1 \notin A) \end{cases} \quad (\forall A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$$

であることを併せれば  $D_t$  の  $\mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ -可測性が得られる. 後は任意の  $t \in [0, T]$  に対して

$$\{ \omega \in \Omega \setminus N ; \tau(\omega) \leq t \} = \{ \omega \in \Omega \setminus N ; D_t(\omega) = 0 \} \quad (3.2)$$

が成り立つことを示せばよい. 実際これが示されれば

$$\{\tau \leq t\} = \begin{cases} \Omega & (t = T) \\ N + \{ \omega \in \Omega \setminus N ; D_t(\omega) = 0 \} & (t < T) \end{cases}$$

より  $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$  ( $\forall t \in I$ ) が従う.

第二段 (3.2) において  $\subset$  が成り立つことを示す.  $\omega \in \{ \omega \in \Omega \setminus N ; \tau(\omega) \leq t \}$  に対し,  $F$  が閉でパスが連続であるから  $X_{\tau(\omega)}(\omega) \in F$  となり  $D_t(\omega) = 0$  が成立する. 実際  $a := D_t(\omega) > 0$  なら

$$d(X_{\tau(\omega)}(\omega), X_r(\omega)) < \frac{a}{2}$$

を満たす  $r \in [0, t] \cap \mathbb{Q}$  が存在して

$$d(X_{\tau(\omega)}(\omega), F) \geq d(X_r(\omega), F) - d(X_{\tau(\omega)}(\omega), X_r(\omega)) > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$$

が従い矛盾が生じる.

第三段 (3.2) において  $\supset$  が成り立つことを示す.  $\omega \in \{ \omega \in \Omega \setminus N ; D_t(\omega) = 0 \}$  に対し

$$d(X_{s_n}(\omega), F) < \frac{1}{n}$$

を満たす点列  $(s_n)_{n=1}^\infty \subset [0, t] \cap \mathbb{Q}$  が存在する.  $(s_n)_{n=1}^\infty$  は集積点  $s \in [0, t]$  を持ち, パスの連続性より  $d(X_s(\omega), F) = 0$  が成り立つから  $X_s(\omega) \in F$  が従い  $\tau(\omega) \leq s \leq t$  となる.

第四段 定理の後半の主張を示す.  $\omega \in \Omega \setminus N$  を取る.  $\tau(\omega) > 0$  のとき,  $t < \tau(\omega)$  なら  $X_t(\omega) \in F^c$  が満たされるから  $X_{\tau(\omega)}(\omega) \in F^i$  ではありえない.  $\tau(\omega) = 0$  の場合は  $X_0(\omega) \in F$  である. ■

## 第 4 章

# マルチンゲール

### 4.1 Doob の不等式・任意抽出定理

$I$  を  $[0, \infty)$  の部分集合として基礎に置フィルター付き確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, (\mathcal{F}_t)_{t \in I})$  と表す.

定義 4.1.1 (マルチンゲール).  $p \geq 1$  とする. 関数  $M : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  が次の五つの条件を満たすとき,  $M$  を  $L^p$ -劣マルチンゲール ( $L^p$ -submartingale) と呼ぶ:

- (M.1)  $M_t \in \mathcal{L}^p(\mathcal{F}, \mu) \ (\forall t \in I)$ .
- (M.2)  $\forall t \in I$  に対し  $M_t$  は可測  $\mathcal{F}_t/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  である.
- (M.3) 任意の  $s \leq t (s, t \in I)$  に対し  $E[M_t | \mathcal{F}_s] \geq M_s$  が成り立つ.
- (M.4) 任意の  $\omega \in \Omega$  に対し, 各点  $t \in I$  で左極限が存在する:  $\exists \lim_{s \uparrow t} M_s(\omega) \in \mathbb{R}$ .
- (M.5) 任意の  $\omega \in \Omega$  に対し, 各点  $t \in I$  で右連続である:  $M_t(\omega) = \lim_{s \downarrow t} M_s(\omega)$ .

条件 (M.2) の不等号が逆向き " $\leq$ " の場合,  $M$  を  $L^p$ -優マルチンゲール ( $L^p$ -supermartingale) と呼び, 劣かつ優マルチンゲールであるものをマルチンゲールと呼ぶ.

$\tau$  を停止時刻,  $M$  を関数  $I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  とする.  $\tau(\Omega)$  が高々可算集合である場合

$$M_\tau = \sum_{t \in \tau(\Omega)} M_t \mathbf{1}_{\{\tau=t\}}$$

と表現できる. このとき全ての  $t \in \tau(\Omega)$  について  $M_t$  が可測  $\mathcal{F}_t/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  であるなら,  $M_\tau$  は可測  $\mathcal{F}_\tau/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  である. 実際任意の  $t \in I$  と  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  に対して次が成り立つ:

$$\{M_\tau \in A\} \cap \{\tau \leq t\} = \bigcup_{\substack{s \in \tau(\Omega) \\ s \leq t}} \{M_s \in A\} \cap \{\tau = s\} \in \mathcal{F}_t.$$

定理 4.1.2 (任意抽出定理 (1)).  $I = \{0, 1, \dots, n\}$  とし,  $M$  を  $L^p$ -劣マルチンゲールとする. このとき  $I$  値停止時刻  $\sigma$  と  $\tau$  に対し次が成立する:

$$E[M_\tau | \mathcal{F}_\sigma](\omega) \geq M_{\sigma(\omega) \wedge \tau(\omega)}(\omega) \quad \mu\text{-a.s. } \omega \in \Omega. \quad (4.1)$$

$M$  が  $L^p$ -マルチンゲールなら (4.1) は等号で成立する.

証明.

$\sigma \leq \tau$  の場合  $F_t := \mathbb{1}_{\{\sigma < t \leq \tau\}}$  ( $t \in I \setminus \{0\}$ ) とおけば,

$$\{\sigma < t \leq \tau\} = \{\sigma < t\} \cap \{t \leq \tau\} = \{\sigma \leq t-1\} \cap \{\tau \leq t-1\}^c$$

より  $F_t$  は可測  $\mathcal{F}_{t-1}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  である. また

$$N_0 = 0, \quad N_t := \sum_{s=0}^{t-1} F_{s+1}(M_{s+1} - M_s) \quad (t \in I \setminus \{0\})$$

として  $N$  を定めれば,  $N$  は  $L^p$ -劣マルチンゲールである. 実際  $N_t$  の右辺の各項が可測  $\mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  であるから  $N_t$  も可測  $\mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  であり, また  $N_t$  は  $(M_t)_{t \in I} \subset \mathcal{L}^p(\mathcal{F}, \mu)$  の有限個の線型結合で表現されるから  $p$  乗可積分である. 更に  $s \leq t$  ( $s, t \in I$ ) に対して, 命題 2.2.4 より

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N_t - N_s | \mathcal{F}_s] &= \sum_{u=s}^{t-1} \mathbb{E}[F_{u+1}(M_{u+1} - M_u) | \mathcal{F}_s] \\ &= \sum_{u=s}^{t-1} \mathbb{E}[F_{u+1} \mathbb{E}[M_{u+1} - M_u | \mathcal{F}_u] | \mathcal{F}_s] \geq 0 \end{aligned}$$

が成り立つ. 特に

$$N_n = \sum_{s=\sigma}^{\tau-1} (M_{s+1} - M_s) = M_\tau - M_\sigma$$

と表せるから

$$\mathbb{E}[M_\tau - M_\sigma] = \mathbb{E}[N_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[N_n | \mathcal{F}_0] | \mathcal{G}] \geq \mathbb{E}[N_0] = 0 \quad (4.2)$$

が成立する. ここで任意に  $E \in \mathcal{F}_\sigma$  を取り

$$\sigma_E(\omega) := \begin{cases} \sigma(\omega) & (\omega \in E) \\ n & (\omega \in \Omega \setminus E) \end{cases}, \quad \tau_E(\omega) := \begin{cases} \tau(\omega) & (\omega \in E) \\ n & (\omega \in \Omega \setminus E) \end{cases}$$

として停止時刻を定めれば<sup>\*1</sup>, (4.2) により

$$\int_{\Omega} M(\tau_E(\omega), \omega) \mu(d\omega) \geq \int_{\Omega} M(\sigma_E(\omega), \omega) \mu(d\omega)$$

が成り立つ.  $\tau_E, \sigma_E$  の定め方より

$$\begin{aligned} \int_E M(\tau(\omega), \omega) \mu(d\omega) &= \int_{\Omega} M(\tau_E(\omega), \omega) \mu(d\omega) - \int_{\Omega \setminus E} M(n, \omega) \mu(d\omega) \\ &\geq \int_{\Omega} M(\sigma_E(\omega), \omega) \mu(d\omega) - \int_{\Omega \setminus E} M(n, \omega) \mu(d\omega) = \int_E M(\sigma(\omega), \omega) \mu(d\omega) \end{aligned}$$

---

<sup>\*1</sup> 任意の  $t \in I$  に対し

$$\{\tau_E \leq t\} = E \cap \{\tau \leq t\} + (\Omega \setminus E) \cap \{\tau_E \leq t\} = \begin{cases} E \cap \{\tau \leq t\} & (t < n) \\ \Omega & (t = n) \end{cases}$$

が成り立つ.  $\mathcal{F}_\sigma$  の定義より  $E \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$  となるから  $\tau_E$  は停止時刻である.

が従い、命題 2.2.4 より

$$\int_E \mathbb{E}[M_\tau | \mathcal{F}_\sigma](\omega) \mu(d\omega) \geq \int_E M(\sigma(\omega), \omega) \mu(d\omega)$$

となるから、 $E \in \mathcal{F}_\sigma$  の任意性により

$$\mathbb{E}[M_\tau | \mathcal{F}_\sigma] \geq M_\sigma = M_{\sigma \wedge \tau}$$

が得られる。

一般の場合  $\sigma, \tau$  を一般の停止時刻とすると、任意の  $A \in \mathcal{F}_\sigma$  に対して

$$\begin{aligned} & \int_A \mathbb{E}[M_\tau | \mathcal{F}_\sigma](\omega) \mu(d\omega) \\ &= \int_A \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau > \sigma\}} M_\tau | \mathcal{F}_\sigma](\omega) \mu(d\omega) + \int_A \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau \leq \sigma\}} M_\tau | \mathcal{F}_\sigma](\omega) \mu(d\omega) \end{aligned} \quad (4.3)$$

とすれば、右辺第一項については命題 3.2.6 より

$$\begin{aligned} \int_A \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau > \sigma\}} M_\tau | \mathcal{F}_\sigma](\omega) \mu(d\omega) &= \int_A \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau > \sigma\}} M_{\tau \vee \sigma} | \mathcal{F}_\sigma](\omega) \mu(d\omega) \\ &= \int_A \mathbb{1}_{\{\tau > \sigma\}}(\omega) \mathbb{E}[M_{\tau \vee \sigma} | \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}](\omega) \mu(d\omega) \end{aligned}$$

が成り立ち、右辺第二項については命題 2.2.4 より

$$\begin{aligned} \int_A \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau \leq \sigma\}} M_\tau | \mathcal{F}_\sigma](\omega) \mu(d\omega) &= \int_A \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau \leq \sigma\}} M_{\sigma \wedge \tau} | \mathcal{F}_\sigma](\omega) \mu(d\omega) \\ &= \int_A \mathbb{1}_{\{\tau \leq \sigma\}}(\omega) M_{\sigma(\omega) \wedge \tau(\omega)}(\omega) \mu(d\omega) \end{aligned}$$

が成り立つから、前段の結果を適用して

$$\begin{aligned} (4.3) &= \int_A \mathbb{1}_{\{\tau > \sigma\}}(\omega) \mathbb{E}[M_{\tau \vee \sigma} | \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}](\omega) \mu(d\omega) + \int_A \mathbb{1}_{\{\tau \leq \sigma\}}(\omega) M_{\sigma(\omega) \wedge \tau(\omega)}(\omega) \mu(d\omega) \\ &\geq \int_A \mathbb{1}_{\{\tau > \sigma\}}(\omega) M_{\sigma(\omega) \wedge \tau(\omega)}(\omega) \mu(d\omega) + \int_A \mathbb{1}_{\{\tau \leq \sigma\}}(\omega) M_{\sigma(\omega) \wedge \tau(\omega)}(\omega) \mu(d\omega) \\ &= \int_A M_{\sigma(\omega) \wedge \tau(\omega)}(\omega) \mu(d\omega) \end{aligned}$$

を得る。  $A$  の任意性より (4.1) が出る。 ■

定理 4.1.3 (Doob の不等式 (1)).  $I = \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$  をフィルトレーション,  $M$  を非負値  $L^1$ -劣マルチンゲールとし,  $M_* := \max_{t \in I} M_t$  とおく.

(1) 任意の  $\lambda > 0$  に対して次が成り立つ:

$$\mu(M_* \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\{M_* \geq \lambda\}} M_n(\omega) \mu(d\omega) \leq \frac{1}{\lambda} \|M_n\|_{\mathcal{L}^1}.$$

(2) 任意の  $p > 1$  に対して  $M_t$  ( $\forall t \in I$ ) が  $p$  乗可積分なら次が成り立つ:

$$\|M_*\|_{\mathcal{L}^p} \leq \frac{p}{p-1} \|M_n\|_{\mathcal{L}^p}. \quad (4.4)$$

証明.

(1)

$$\tau(\omega) := \min \{ t \in I ; \quad M_t(\omega) \geq \lambda \} \wedge n \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

により  $I$  値停止時刻を定めれば\*2, 任意抽出定理より

$$\int_{\Omega} M_n(\omega) \mu(d\omega) \geq \int_{\Omega} M_{\tau}(\omega) \mu(d\omega) = \int_{\{M_* \geq \lambda\}} M_{\tau}(\omega) \mu(d\omega) + \int_{\{M_* < \lambda\}} M_{\tau}(\omega) \mu(d\omega)$$

が成り立つ. 右辺第一項は  $\tau$  の定め方より

$$\int_{\{M_* \geq \lambda\}} M_{\tau}(\omega) \mu(d\omega) = \sum_{t=0}^n \int_{\{M_* \geq \lambda\} \cap \{\tau=t\}} M_t(\omega) \mu(d\omega) \geq \lambda \mu(M_* \geq \lambda)$$

が従い, 一方右辺第二項については,  $M_*(\omega) < \lambda$  ならば  $\tau(\omega) = n$  であるから

$$\int_{\{M_* < \lambda\}} M_{\tau}(\omega) \mu(d\omega) = \int_{\{M_* < \lambda\}} M_n(\omega) \mu(d\omega)$$

と表されて

$$\lambda \mu(M_* \geq \lambda) \leq \int_{\{M_* \geq \lambda\}} M_n(\omega) \mu(d\omega) \leq \|M_n\|_{\mathcal{L}^1} \quad (4.5)$$

が得られる. 特に (4.5) の  $\lambda$  を  $\lambda - 1/m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) に置き換えて  $m \rightarrow \infty$  とすれば

$$\lambda \mu(M_* > \lambda) \leq \int_{\{M_* > \lambda\}} M_n(\omega) \mu(d\omega) \quad (4.6)$$

が出る.

(2) 先ず任意の  $K \in \mathbb{N}$  に対して写像  $[0, K) \times \Omega \ni (t, \omega) \mapsto \mathbb{1}_{\{M_*(\omega) > t\}}$  が可測  $\mathfrak{B}([0, K)) \times \mathcal{F} / \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  であることを示す. 実際  $t_j := jK/2^n$  ( $j = 0, 1, \dots, 2^n - 1$ ) とおいて

$$f(t, \omega) := \mathbb{1}_{\{M_*(\omega) > t\}}, \quad f_n(t, \omega) := \sum_{j=0}^{2^n-1} \mathbb{1}_{[t_j, t_{j+1})}(t) f(t_j, \omega) \quad (\forall (t, \omega) \in I \times \Omega)$$

により  $f, (f_n)_{n=1}^{\infty}$  を定めれば, 任意の  $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  に対し

$$f_n^{-1}(A) = \begin{cases} \emptyset & (0 \notin A, 1 \notin A) \\ \bigcup_{j=0}^{2^n-1} [t_j, t_{j+1}) \times \left\{ \omega ; \quad M_*(\omega) > t_{j+1} \right\} & (0 \notin A, 1 \in A) \\ \bigcup_{j=0}^{2^n-1} [t_j, t_{j+1}) \times \left\{ \omega ; \quad M_*(\omega) \leq t_{j+1} \right\} & (0 \in A, 1 \notin A) \\ [0, n] \times \Omega & (0 \in A, 1 \in A) \end{cases}$$

が成り立つから  $f_n$  は可測  $\mathfrak{B}([0, K)) \times \mathcal{F} / \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  であり,  $[0, K) \ni t \mapsto f(t, \omega)$  ( $\forall \omega \in \Omega$ ) の右連続性より  $f_n$  は  $f$  に各点収束するから  $f$  の  $\mathfrak{B}([0, K)) \times \mathcal{F} / \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ -可測性が従う. これにより

\*2 実際次が成り立つから  $\tau$  は停止時刻である:

$$\{\tau = t\} = \bigcap_{j=0}^{t-1} \{M_j < \lambda\} \cap \{M_t \geq \lambda\} \in \mathcal{F}_t \quad (t = 0, 1, \dots, n-1), \quad \{\tau = n\} = \bigcap_{j=0}^{n-1} \{M_j < \lambda\} \in \mathcal{F}_n.$$

Fubini の定理が適用でき, (4.6) 及び Hölder の不等式と併せて

$$\begin{aligned}
\|M_* \wedge K\|_{\mathcal{L}^p}^p &= \int_{\Omega} |M_*(\omega) \wedge K|^p \mu(d\omega) \\
&= p \int_{\Omega} \int_0^K t^{p-1} \mathbb{1}_{\{M_*(\omega) > t\}} dt \mu(d\omega) \\
&= p \int_0^K t^{p-1} \mu(M_* > t) dt \\
&\leq p \int_0^K t^{p-2} \int_{\Omega} M_n(\omega) \mathbb{1}_{\{M_*(\omega) > t\}} \mu(d\omega) dt \\
&= \frac{p}{p-1} \int_{\Omega} M_n(\omega) |M_*(\omega) \wedge K|^{p-1} \mu(d\omega) \\
&\leq \frac{p}{p-1} \|M_n\|_{\mathcal{L}^p} \|M_*(\omega) \wedge K\|_{\mathcal{L}^p}^{p-1}
\end{aligned}$$

が成立し

$$\|M_* \wedge K\|_{\mathcal{L}^p} \leq \frac{p}{p-1} \|M_n\|_{\mathcal{L}^p}$$

が従う.  $K \rightarrow \infty$  として単調収束定理より (4.4) を得る. ■

$T > 0$  に対し  $I = [0, T]$  とおき  $M$  を  $L^p$ -劣マルチンゲールとする. このとき

$$\sup_{t \in I} M_t(\omega) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \max_{j=0,1,\dots,2^n} M_{\frac{j}{2^n}T}(\omega) \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

が成り立ち  $\sup_{t \in I} M_t$  の  $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ -可測性が出る. 実際, 各  $\omega \in \Omega$  に対し

$$\alpha(\omega) := \sup_{t \in I} M_t(\omega), \quad \beta(\omega) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \max_{j=0,1,\dots,2^n} M_{\frac{j}{2^n}T}(\omega)$$

とおけば  $\alpha \geq \beta$  が満たされるが, もし或る  $\omega \in \Omega$  で  $\alpha(\omega) > \beta(\omega)$  となると,

$$M_s(\omega) > \frac{\alpha(\omega) + \beta(\omega)}{2}$$

を満たす  $s \in [0, T]$  が存在し<sup>\*3</sup>,  $I \ni t \mapsto M_t(\omega) (\forall \omega \in \Omega)$  の右連続性により或る  $j$  で

$$M_{\frac{j}{2^n}T}(\omega) > \frac{\alpha(\omega) + \beta(\omega)}{2}$$

が成り立ち  $M_{jT/2^n} \leq \beta$  に矛盾する.

定理 4.1.4 (Doob の不等式 (2)).  $I = [0, T]$ ,  $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$  をフィルトレーション,  $M$  を非負値  $L^p$ -劣マルチンゲールとし,  $M_* := \sup_{t \in I} M_t$  とおく.

(1) 任意の  $\lambda > 0$  に対して次が成り立つ:

$$\mu(M_* \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^p} \|M_T\|_{\mathcal{L}^p}^p.$$

(2)  $p > 1$  なら次が成り立つ:

$$\|M_*\|_{\mathcal{L}^p} \leq \frac{p}{p-1} \|M_T\|_{\mathcal{L}^p}.$$

<sup>\*3</sup>  $s = T$  の場合  $\beta(\omega) \leq M_T(\omega)$  が満たされているから  $M_T(\omega) > \alpha(\omega) + \beta(\omega)/2$  となりえない.

証明. 任意に  $n \in \mathbb{N}$  を取り固定し

$$D_n := \left\{ \frac{j}{2^n} T ; \quad j = 0, 1, \dots, 2^n \right\}$$

とおく. Jensen の不等式より, 任意の  $s < t$  ( $s, t \in I$ ) に対して

$$\mathbb{E}[M_t^p | \mathcal{F}_s] \geq \mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s]^p \geq M_s^p$$

が成り立つから  $(M_t^p)_{t \in I}$  は  $L^1$ -劣マルチンゲールであり, 定理 4.1.3 より

$$\mu \left( \max_{r \in D_n} M_r \geq \lambda \right) = \mu \left( \max_{r \in D_n} M_r^p \geq \lambda^p \right) \leq \frac{1}{\lambda^p} \|M_T\|_{\mathcal{L}^p}^p$$

従う.  $n \in \mathbb{N}$  は任意に取っていたから

$$\mu(M_* \geq \lambda) = \mu \left( \sup_{n \in \mathbb{N}} \max_{r \in D_n} M_r \geq \lambda \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left( \max_{r \in D_n} M_r \geq \lambda \right) \leq \frac{1}{\lambda^p} \|M_T\|_{\mathcal{L}^p}^p$$

となり (1) の主張が得られる. 同じく定理 4.1.3 より

$$\left\| \max_{r \in D_n} M_r \right\|_{\mathcal{L}^p} \leq \frac{p}{p-1} \|M_T\|_{\mathcal{L}^p}$$

が成り立つから,  $n \rightarrow \infty$  とすれば単調収束定理より (2) の主張が得られる. ■

定理 4.1.5 (任意抽出定理 (2)).  $I = [0, T]$ ,  $M$  を  $L^p$ -マルチンゲール ( $p > 1$ ) とする. このとき任意の  $I$  値停止時刻  $\tau, \sigma$  に対し次が成り立つ:

$$\mathbb{E}[M_\tau | \mathcal{F}_\sigma] = M_{\sigma \wedge \tau}.$$

証明. 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$\tau_n := \frac{1 + [2^n \tau]}{2^n} \wedge T, \quad \sigma_n := \frac{1 + [2^n \sigma]}{2^n} \wedge T$$

とおけば,  $\tau_n, \sigma_n$  は停止時刻であり  $\tau \leq \tau_n$  かつ  $\tau_n \rightarrow \tau$  ( $n \rightarrow \infty$ ) を満たす. 実際

$$\begin{cases} \{\tau_n \leq t\} = \{1 + [2^n \tau] \leq 2^n t\} = \{\tau < t\} & (t \in [0, T)), \\ \{\tau_n \leq t\} = \{1 + [2^n \tau] > 2^n t\} + \{1 + [2^n \tau] \leq 2^n t\} & (t = T) \end{cases}$$

が成り立つから  $\tau_n$  は停止時刻であり, また

$$\begin{aligned} \tau_n(\omega) - \tau(\omega) &= \frac{1 + [2^n \tau(\omega)] - 2^n \tau(\omega)}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}, & \left( \tau(\omega) < T - \frac{1}{2^n} \right), \\ \tau_n(\omega) - \tau(\omega) &= T - \tau(\omega) \leq \frac{1}{2^n}, & \left( T - \frac{1}{2^n} \leq \tau(\omega) \leq T \right) \end{aligned}$$

より  $\tau \leq \tau_n$  かつ  $\tau_n \rightarrow \tau$  ( $n \rightarrow \infty$ ) となる. 従って  $M$  の右連続性より

$$M_{\tau_n(\omega)}(\omega) \rightarrow M_{\tau(\omega)}(\omega) \quad (n \rightarrow \infty, \forall \omega \in \Omega)$$

が成り立ち、また定理 4.1.2 より任意の  $A \in \mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_{\sigma_n}$  に対して

$$\int_A M_{\tau_n(\omega)}(\omega) \mu(d\omega) = \int_A \mathbb{E}[M_{\tau_n} | \mathcal{F}_{\sigma_n}](\omega) \mu(d\omega) = \int_A M_{\tau_n(\omega) \wedge \sigma_n(\omega)}(\omega) \mu(d\omega)$$

が満たされる. Jensen の不等式により  $(|M_t|)_{t \in I}$  は  $L^p$ -劣マルチンゲールであり, Doob の不等式より  $\sup_{t \in I} |M_t|$  の可積分性が得られるから, Lebesgue の収束定理を適用して

$$\begin{aligned} \int_A M_{\tau(\omega)}(\omega) \mu(d\omega) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A M_{\tau_n(\omega)}(\omega) \mu(d\omega) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A M_{\tau_n(\omega) \wedge \sigma_n(\omega)}(\omega) \mu(d\omega) = \int_A M_{\tau(\omega) \wedge \sigma(\omega)}(\omega) \mu(d\omega) \end{aligned}$$

が成立する. ■

## 4.2 二次変分

以降では  $I := [0, T]$  ( $T > 0$ ) とし, フィルトレーション  $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$  は次の仮定を満たす:

$$\mathcal{N} := \{ N \in \mathcal{F} ; \mu(N) = 0 \} \subset \mathcal{F}_0.$$

**定義 4.2.1 (停止時刻で停めた過程).** 任意の停止時刻  $\tau$  と確率過程  $M$  に対し

$$M_t^\tau := M_{t \wedge \tau} \quad (\forall t \in I)$$

として定義する  $M^\tau$  を, 停止時刻  $\tau$  で停めた過程という.

**命題 4.2.2 (停めた過程の適合性).** 確率過程  $M$  が右連続且つ  $(\mathcal{F}_t)$ -適合のとき, 任意の停止時刻  $\tau$  に対し  $M^\tau$  もまた右連続且つ  $(\mathcal{F}_t)$ -適合である.

**証明.** 任意に  $\omega \in \Omega$  を取り固定する. 写像  $t \mapsto M_t^\tau(\omega) = M_{t \wedge \tau(\omega)}(\omega)$  について,  $t < \tau(\omega)$  なら  $t \mapsto M_t(\omega)$  の右連続性により,  $t \geq \tau(\omega)$  なら右側で定数関数となるから右連続性が従う. また定理 3.2.7 より  $M_t^\tau$  は可測  $\mathcal{F}_{t \wedge \tau} / \mathcal{B}(\mathbb{R})$  であるから,  $\mathcal{F}_{t \wedge \tau} \subset \mathcal{F}_t$  より  $M^\tau$  の適合性が従う. ■

以下, いくつか集合を定義する.

(1)  $\mathcal{A}^+$   $\mathcal{A}^+$  は以下を満たす  $A : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  の全体として定める:

適合性 任意の  $t \in I$  に対し, 写像  $\Omega \ni \omega \mapsto A_t(\omega) \in \mathbb{R}$  は可測  $\mathcal{F}_t / \mathcal{B}(\mathbb{R})$  である.

連続性  $\mu$ -a.s. に写像  $I \ni t \mapsto A_t(\omega) \in \mathbb{R}$  が連続である.

単調非減少性  $\mu$ -a.s. に写像  $I \ni t \mapsto A_t(\omega) \in \mathbb{R}$  が単調非減少である.

(2)  $\mathcal{A}$   $\mathcal{A} := \{ A^1 - A^2 ; A^1, A^2 \in \mathcal{A}^+ \}$  により  $\mathcal{A}$  を定める. 任意の  $A = A_1 - A_2 \in \mathcal{A}$  に対し,  $A$  は適合過程であり  $\mu$ -a.s. に  $I \ni t \mapsto A_t$  は連続且つ有界変動である.

(3)  $\mathcal{M}_{p,c}$  ( $p \geq 1$ )  $\mathcal{M}_{p,c}$  を以下を満たす  $M : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  の全体として定める.

0 出発  $M_0 = 0$   $\mu$ -a.s. を満たす.



$L^p$ -マルチンゲール  $M$  は  $L^p$ -マルチンゲールである.

連続性  $\mu$ -a.s. $\omega$  に対し写像  $I \ni t \mapsto M_t(\omega) \in \mathbb{R}$  が連続である.

(4)  $\mathcal{M}_{b,c}$   $\sup_{t \in I} \|M_t\|_{\mathcal{L}^\infty} < \infty$  を満たす  $L^1$ -マルチンゲール  $M$  の全体を  $\mathcal{M}_{b,c}$  と表す.

(5)  $\mathcal{T}$   $\mathcal{T}$  を以下を満たすような,  $I$  に値を取る停止時刻の列  $(\tau_j)_{j=0}^\infty$  の全体として定める.

a)  $\tau_0 = 0$   $\mu$ -a.s.

b)  $\tau_j \leq \tau_{j+1}$   $\mu$ -a.s. ( $j = 1, 2, \dots$ ).

c)  $(\tau_j)_{j=1}^\infty$  に対し或る  $\mu$ -零集合  $N_T$  が存在し, 任意の  $\omega \in \Omega \setminus N_T$  に対し或る  $n = n(\omega) \in \mathbb{N}$  が存在して  $\tau_n(\omega) = T$  が成り立つ.

$(\tau_j)_{j=0}^\infty \in \mathcal{T}$  について, a) が  $N_0 \in \mathcal{N}$  を除いて成立し, b) が  $N_j \in \mathcal{N}$  ( $\forall j$ ) を除いて成立するとき,  $N := N_0 \cup N_T \cup (\cup_{j=0}^\infty N_j)$  とおけば任意の  $\omega \in \Omega \setminus N$  に対し或る  $n = n(\omega) \in \mathbb{N}$  が存在して

$$0 = \tau_0(\omega) \leq \tau_1(\omega) \leq \tau_2(\omega) \leq \dots \leq \tau_n(\omega) = T$$

が成り立つ.

(4)  $\mathcal{M}_{c,loc}$  全てのパスが右連続且つ左極限を持ち, また或る  $(\tau_j)_{j=0}^\infty \in \mathcal{T}$  が存在して  $\tau_j$  で停めた過程が全て  $\mathcal{M}_{b,c}$  に属するような確率過程  $M : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  の全体を  $\mathcal{M}_{c,loc}$  と表す.

定理 4.2.3 (有界なマルチンゲールを停止時刻で停めた過程の有界性).  $\tau$  を任意の停止時刻とする. 任意の  $M \in \mathcal{M}_{b,c}$  に対し  $\sup_{t \in I} \|M_t^\tau\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq \sup_{t \in I} \|M_t\|_{\mathcal{L}^\infty}$  が成り立つ.

証明. 任意に  $s \in I$  を取り固定する.  $|M_{s \wedge \tau(\omega)}(\omega)| \leq \sup_{t \in I} |M_t(\omega)|$  ( $\forall \omega \in \Omega$ ) より

$$\sup_{t \in I} |M_t| \leq \sup_{t \in I} \|M_t\|_{\mathcal{L}^\infty} \quad \mu\text{-a.s.}$$

が成り立つことを示せばよい.  $M \in \mathcal{M}_{b,c}$  であるから, 或る零集合  $A$  が存在して全ての  $\omega \in \Omega \setminus A$  に対し  $I \ni t \mapsto M_t(\omega)$  が連続である. また補題 1.1.1 より

$$B_r := \{ \omega \in \Omega ; |M_r(\omega)| > \|M_r\|_{\mathcal{L}^\infty} \}, \quad (r \in \mathbb{Q} \cap I)$$

は全て零集合であるから,

$$B := \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap I} B_r$$

に対し  $C := A \cup B$  として零集合を定める. 任意の  $\omega \in \Omega \setminus C$  に対し  $t \mapsto M_t(\omega)$  が連続であるから

$$|M_u(\omega)| \leq \sup_{t \in I} \|M_t\|_{\mathcal{L}^\infty} \quad (\forall u \in I)$$

が成り立ち

$$\sup_{t \in I} |M_t(\omega)| \leq \sup_{t \in I} \|M_t\|_{\mathcal{L}^\infty} \quad (\forall \omega \in \Omega \setminus C)$$

が従う. ■

定理 4.2.4 (停止時刻で停めてもマルチンゲール).  $p > 1$  とする. 任意の  $M \in \mathcal{M}_{p,c}$  と停止時刻  $\tau$  に対し,  $M$  を  $\tau$  で停めた過程について  $M^\tau \in \mathcal{M}_{p,c}$  が成り立つ.

証明. 任意の  $\omega \in \Omega$  に対し  $I \ni t \mapsto M_t(\omega)$  は各点で右連続且つ左極限を持つから  $I \ni t \mapsto M_t^\tau(\omega)$  も各点で右連続且つ左極限を持ち, 特に  $I \ni t \mapsto M_t(\omega)$  が連続となる  $\omega$  に対しては  $I \ni t \mapsto M_t^\tau(\omega)$  も連続である. また  $M_0 = M_0^\tau$  より  $M_0^\tau = 0$   $\mu$ -a.s. が従う. あとは  $M^\tau$  の  $p$  乗可積分性と  $E[M_t^\tau | \mathcal{F}_s] = M_s^\tau$  ( $s < t$ ) を示せばよい. 実際 Doob の不等式 (定理 4.1.4) より  $\sup_{t \in I} |M_t|^p$  が可積分であるから, 全ての  $t \in I$  に対し  $|M_t^\tau|$  は  $p$  乗可積分であり, 更に任意抽出定理 (定理 4.1.5) より

$$E[M_t^\tau | \mathcal{F}_s] = M_{t \wedge \tau \wedge s}^\tau = M_s^\tau \quad (s < t)$$

が従う. ■

補題 4.2.5 ( $\mathcal{M}_{p,c}$  は線形空間). 任意の  $M, N \in \mathcal{M}_{p,c}$  と  $\alpha \in \mathbb{R}$  に対して線型演算を

$$(M + N)(t, \omega) := M(t, \omega) + N(t, \omega), \quad (\alpha M)(t, \omega) := \alpha M(t, \omega) \quad (\forall (t, \omega) \in I \times \Omega) \quad (4.7)$$

として定義すれば,  $\mathcal{M}_{p,c}$  は  $\mathbb{R}$  上の線形空間となる.

証明.  $\mathcal{M}_{p,c}$  が (4.7) の演算で閉じていることを示す. 任意に  $M, N \in \mathcal{M}_{p,c}$  と  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  を取る.

第一段 先ず  $\alpha M + \beta N$  が  $L^p$ -マルチンゲールであることを示す. 各  $t \in I$  に対し  $M_t, N_t$  が  $\mathcal{F}_t$ -可測であるから  $\alpha M_t + \beta N_t$  も  $\mathcal{F}_t$ -可測であり  $\alpha M + \beta N$  の適合性が従う. また Minkowski の不等式より  $\alpha M_t + \beta N_t \in \mathcal{L}^p(\mu)$  ( $\forall t \in I$ ) も従う. そして全ての  $\omega \in \Omega$  に対し  $t \mapsto M_t(\omega)$  と  $t \mapsto N_t(\omega)$  は各点で右連続且つ左極限を持つから  $t \mapsto \alpha M_t(\omega) + \beta N_t(\omega)$  も各点で右連続且つ左極限を持ち, 更に任意の  $s, t \in I, s \leq t$  に対して, 条件付き期待値の線型性により

$$E[\alpha M_t + \beta N_t | \mathcal{F}_s] = \alpha E[M_t | \mathcal{F}_s] + \beta E[N_t | \mathcal{F}_s] = \alpha M_s + \beta N_s$$

も成り立つ. 以上より  $((\alpha M + \beta N)_t)_{t \in I}$  は  $L^p$ -マルチンゲールである.

第二段  $\alpha M + \beta N \in \mathcal{M}_{p,c}$  を示す. 実際,  $\mu$ -a.s. に  $M_0 = N_0 = 0$  であるから  $\alpha M_0 + \beta N_0 = 0$   $\mu$ -a.s. が従い, 同様に  $\mu$ -a.s. に  $I \ni t \mapsto M_t, I \ni t \mapsto N_t$  が連続であるから  $\mu$ -a.s. に  $I \ni t \mapsto (\alpha M + \beta N)_t$  も連続である. 第一段の結果と併せて  $\alpha M + \beta N \in \mathcal{M}_{p,c}$  を得る. ■

補題 4.2.6 ( $\mathcal{M}_{p,c}$  における同値関係). 任意の  $M, N \in \mathcal{M}_{p,c}$  ( $p \geq 1$ ) に対して, 関係  $R$  を

$$M R N \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} M_t = N_t \quad (\forall t \in I), \quad \mu\text{-a.s.}$$

により定めれば, これは  $\mathcal{M}_{p,c}$  における同値関係である. また関係  $R$  は次を満たす:

$$M R N \Leftrightarrow \mu \left\{ \omega \in \Omega ; \sup_{r \in (I \cap \mathbb{Q}) \cup \{T\}} |M_r(\omega) - N_r(\omega)| > 0 \right\} = 0.$$

\*3 全ての  $t, \omega$  に対し  $0 \in \mathbb{R}$  を取るもの.

証明. 反射律と対称律は  $R$  の定義より従うから推移律について示す.  $M, N, U \in \mathcal{M}_{p,c}$  が  $M R N$  かつ  $N R U$  を満たしているなら,  $M, N$  のパスが一致しない  $\omega$  の全体  $E_1$  と  $N, U$  のパスが一致しない  $\omega$  の全体  $E_2$  は零集合に含まれるから  $M R U$  が従う. 後半の主張を示す.  $M, N$  に対し或る零集合  $E$  が存在して,  $\Omega \setminus E$  上で  $I \ni t \mapsto M_t(\omega)$  と  $I \ni t \mapsto N_t(\omega)$  は共に連続である.

$$F := \left\{ \omega \in \Omega ; \sup_{r \in (I \cap \mathbb{Q}) \cup \{T\}} |M_r(\omega) - N_r(\omega)| > 0 \right\}$$

とおけば, 連続性により  $F^c \cap E^c$  上で  $M$  と  $N$  のパスが一致するから,  $\mu(F) = 0$  ならば  $M R N$  が成り立つ. 逆に  $M R N$  ならば, 或る零集合  $G$  が存在して  $G^c$  上で  $M$  と  $N$  のパスが一致する.

$$G^c \subset F^c$$

が満たされているから  $F \subset G$  が従い  $\mu(F) = 0$  が成り立つ. ■

定義 4.2.7 ( $\mathcal{M}_{p,c}$  の商空間). 補題 4.2.6 で導入した同値関係  $R$  による  $\mathcal{M}_{p,c}$  の商集合を  $\mathfrak{M}_{p,c}$  と表す.  $M \in \mathcal{M}_{p,c}$  の関係  $R$  による同値類を  $[M]_{2,c}$  と表記し,  $\mathfrak{M}_{p,c}$  において

$$[M]_{2,c} + [N]_{2,c} := [M + N]_{2,c}, \quad \alpha [M]_{2,c} := [\alpha M]_{2,c}$$

として線型演算を定めれば, これは代表の選び方に依存せず,  $\mathfrak{M}_{p,c}$  は  $\mathbb{R}$  上の線形空間となる.

補題 4.2.8 ( $\mathfrak{M}_{2,c}$  における内積の定義).

$$\langle [M]_{2,c}, [N]_{2,c} \rangle_{2,c} := \int_{\Omega} M_T(\omega) N_T(\omega) \mu(d\omega), \quad ([M]_{2,c}, [N]_{2,c} \in \mathfrak{M}_{2,c}). \quad (4.8)$$

により  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{2,c}$  を定めれば, 右辺は代表に無関係に確定し,  $\mathfrak{M}_{2,c}$  において内積となる.

証明.

第一段 先ず  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{2,c}$  の定義が代表の取り方に依らないことを示す. 任意の  $[M]_{2,c}, [N]_{2,c} \in \mathfrak{M}_{2,c}$  に対し (4.8) の積分が実数値で確定することは,  $M_T, N_T$  の二乗可積分性と Hölder の不等式による. また任意の  $M' \in [M]_{2,c}$  と  $N' \in [N]_{2,c}$  に対しては,  $M_T = M'_T, N_T = N'_T$   $\mu$ -a.s. により

$$\int_{\Omega} M_T(\omega) N_T(\omega) \mu(d\omega) = \int_{\Omega} M'_T(\omega) N'_T(\omega) \mu(d\omega)$$

が成り立つから,  $\langle [M]_{2,c}, [N]_{2,c} \rangle_{2,c}$  は代表に無関係に確定する.

第二段  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{2,c} : \mathfrak{M}_{2,c} \times \mathfrak{M}_{2,c} \rightarrow \mathbb{R}$  が内積であることを示す. 先ず任意の  $[M]_{2,c} \in \mathfrak{M}_{2,c}$  に対して (4.8) より  $\langle [M]_{2,c}, [M]_{2,c} \rangle_{2,c} \geq 0$  が満たされる. また  $\langle [M]_{2,c}, [M]_{2,c} \rangle_{2,c} = 0 \Leftrightarrow [M]_{2,c} = [0]_{2,c}$  も成り立つ. 実際  $\Leftarrow$  は (4.8) より従う.  $\Rightarrow$  については,  $M$  が  $L^2$ -マルチンゲールであるか

ら Jensen の不等式より  $(|M_t|)_{t \in I}$  は  $L^2$ -劣マルチンゲールであり, Doob の不等式により

$$\int_{\Omega} \left( \sup_{t \in I} |M_t(\omega)| \right)^2 \mu(d\omega) \leq 4 \int_{\Omega} M_T(\omega)^2 \mu(d\omega) = 0$$

が成り立つから

$$\mu \left( \sup_{t \in I} |M_t| > 0 \right) = 0$$

が従い  $[M]_{2,c} = [0]_{2,c}$  が得られる.  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{2,c}$  の双線型性は積分の線型性より従う. ■

定理 4.2.9 ( $\mathfrak{M}_{2,c}$  は Hilbert 空間).  $\mathfrak{M}_{2,c}$  は  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{2,c}$  を内積として Hilbert 空間となる.

証明. 内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{2,c}$  により導入されるノルムを  $\|\cdot\|_{\mathfrak{M}_{2,c}}$  と表記する. 任意に Cauchy 列  $[M^{(n)}]_{2,c} \in \mathfrak{M}_{2,c}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) を取れば, 各代表  $M^{(n)}$  に対し或る  $\mu$ -零集合  $E_n$  が存在して,  $\Omega \setminus E_n$  上で  $I \ni t \mapsto M_t^{(n)}(\omega) \in \mathbb{R}$  が連続となる.  $E := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$  により零集合を定め

$$N_t^{(n)}(\omega) := \begin{cases} M_t^{(n)}(\omega) & (\omega \in \Omega \setminus E) \\ 0 & (\omega \in E) \end{cases}, \quad (\forall t \in I, n = 1, 2, \dots)$$

として  $(N^{(n)})_{n=1}^{\infty}$  を定義すれば,  $N^{(n)}$  は全てのパスが連続な  $L^2$ -マルチンゲールであるから<sup>\*4</sup>  $N^{(n)} \in \mathcal{M}_{2,c}$  を満たし, かつ  $[N^{(n)}]_{2,c} = [M^{(n)}]_{2,c}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) も満たすから任意の  $n, m \in \mathbb{N}$  に対し

$$\left\| [M^{(n)}]_{2,c} - [M^{(m)}]_{2,c} \right\|_{\mathfrak{M}_{2,c}}^2 = \left\| [N^{(n)}]_{2,c} - [N^{(m)}]_{2,c} \right\|_{\mathfrak{M}_{2,c}}^2 = \int_{\Omega} |N_T^{(n)}(\omega) - N_T^{(m)}(\omega)|^2 \mu(d\omega) \quad (4.9)$$

が成り立つ. 一方,  $(|N_t^{(n)} - N_t^{(m)}|)_{t \in T}$  は連続な  $L^2$ -劣マルチンゲールであるから Doob の不等式より

$$\lambda^2 \mu \left( \sup_{t \in I} |N_t^{(n)} - N_t^{(m)}| \geq \lambda \right) \leq \int_{\Omega} |N_T^{(n)}(\omega) - N_T^{(m)}(\omega)|^2 \mu(d\omega) \quad (\forall \lambda > 0) \quad (4.10)$$

が成り立つ.  $([M^{(n)}]_{2,c})_{n=1}^{\infty}$  は Cauchy 列であるから

$$\left\| [M^{(n_k)}]_{2,c} - [M^{(n_{k+1})}]_{2,c} \right\| < \frac{1}{4^k}, \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (4.11)$$

を満たす部分添数列  $(n_k)_{k=1}^{\infty}$  が存在して, (4.9)(4.10) より

$$\mu \left( \sup_{t \in I} |N_t^{(n_k)} - N_t^{(n_{k+1})}| \geq \frac{1}{2^k} \right) < \frac{1}{2^k}, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

<sup>\*4</sup> パスの連続性より右連続性と左極限の存在は満たされる. また  $E \in \mathcal{F}_0$  であることと  $M^{(n)}$  の適合性から  $N^{(n)}$  の適合性が従う. 更に  $N_t^{(n)} = M_t^{(n)}$   $\mu$ -a.s. ( $\forall t \in I$ ) が満たされているから, 任意の  $s, t \in I$ ,  $s \leq t$  に対して

$$\mathbb{E}[N_t^{(n)} | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[M_t^{(n)} | \mathcal{F}_s] = M_s^{(n)} = N_s^{(n)}$$

が成り立つ.  $N_t^{(n)}$  の二乗可積分性は  $M_t^{(n)}$  の二乗可積分性から従う.

が成立する.

$$F := \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq N} \left\{ \omega \in \Omega ; \sup_{t \in I} |N_t^{(n_k)}(\omega) - N_t^{(n_{k+1})}(\omega)| < \frac{1}{2^k} \right\}$$

とおけば, Borel-Cantelli の補題より  $F^c$  は  $\mu$ -零集合であり, 任意の  $\omega \in F$  については全ての  $t \in I$  に対して数列  $(N_t^{(n_k)}(\omega))_{k=1}^{\infty}$  が  $\mathbb{R}$  の Cauchy 列となる. 数列  $(N_t^{(n_k)}(\omega))_{k=1}^{\infty}$  ( $\omega \in F$ ) の極限を  $N_t^*(\omega)$  と表せば, 数列は  $t$  に関して一様に収束するから\*5  $I \ni t \mapsto N_t^*(\omega)$  は連続であり,

$$N_t(\omega) := \begin{cases} N_t^*(\omega) & (\omega \in F) \\ 0 & (\omega \in \Omega \setminus F) \end{cases}$$

により  $N$  を定義すれば  $N \in \mathcal{M}_{2,c}$  が成り立つ:  $N$  は全てのパスが連続で  $N_0 = 0$  を満たすから, 以下では  $N$  が  $L^2$ -マルチンゲールであることを示す. 全てのパスが各点で右連続性かつ左極限を持つことはパスの連続性により満たされているから, (1) 適合性 (2) 二乗可積分性及び

$$(3) : E[N_t | \mathcal{F}_s] = N_s \quad (\forall s \leq t, s, t \in I)$$

を証明すればよい.

- (1) 任意に  $t \in I$  を取り固定する.  $N_t^{(n_k)}$  の定義域を  $F$  に制限した写像を  $N_t^{F(k)}$  として

$$\mathcal{F}_t^F := \{ F \cap B ; B \in \mathcal{F}_t \}$$

とおけば,  $N_t^{F(k)}$  は  $\mathcal{F}_t^F / \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -可測であるから各点収束先の  $N_t^*$  も可測  $\mathcal{F}_t^F / \mathcal{B}(\mathbb{R})$  である.

$$N_t^{-1}(C) = \begin{cases} (\Omega \setminus F) \cup N_t^{*-1}(C) & (0 \in C) \\ N_t^{*-1}(C) & (0 \notin C) \end{cases} \quad (\forall C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

が成り立ち, また  $F \in \mathcal{F}_0$  により  $\mathcal{F}_t^F \subset \mathcal{F}_t$  が従うから,  $N_t$  は  $\mathcal{F}_t / \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -可測である.

- (2) 任意に  $t \in I$  を取り固定する. (4.11) と Doob の不等式より

$$\left\| \sup_{t \in I} |N_t^{(n_k)} - N_t^{(n_{k+1})}| \right\|_{\mathcal{L}^2} \leq 2 \|N_t^{(n_k)} - N_t^{(n_{k+1})}\|_{\mathcal{L}^2} < \frac{2}{4^k} \leq \frac{1}{2^k} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

が成り立つから  $\|N_t^{(n_k)} - N_t^{(n_{k+1})}\|_{\mathcal{L}^2} < 1/2^k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) が従う. 特に  $j \in \mathbb{N}$  を固定すれば全ての  $k > j$  に対して  $\|N_t^{(n_j)} - N_t^{(n_k)}\|_{\mathcal{L}^2} < 1/2^j$  が満たされるから, Fatou の補題により

$$\|N_t^{(n_j)} - N_t\|_{\mathcal{L}^2}^2 = \int_{\Omega \setminus F} \lim_{k \rightarrow \infty} |N_t^{(n_j)}(\omega) - N_t^{(n_k)}(\omega)|^2 \mu(d\omega) < \frac{1}{4^j} \quad (4.12)$$

が得られ, Minkowski の不等式より

$$\|N_t\|_{\mathcal{L}^2} \leq \|N_t - N_t^{(n_j)}\|_{\mathcal{L}^2} + \|N_t^{(n_j)}\|_{\mathcal{L}^2} < \infty$$

が成り立つ.

- (3)  $N^{(n)} \in \mathcal{M}_{2,c}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) より任意の  $s \leq t$ ,  $s, t \in I$  と  $A \in \mathcal{F}_s$  に対して

$$\int_A E[N_t^{(n_k)} | \mathcal{F}_s](\omega) \mu(d\omega) = \int_A N_s^{(n_k)}(\omega) \mu(d\omega) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

---

\*5  $|N_t^{(n_k)}(\omega) - N_t^*(\omega)| \leq \sum_{j=k}^{\infty} |N_t^{(n_j)}(\omega) - N_t^{(n_{j+1})}(\omega)| \leq \sum_{j=k}^{\infty} \sup_{t \in I} |N_t^{(n_j)}(\omega) - N_t^{(n_{j+1})}(\omega)| < 1/2^k$ , ( $\forall t \in I$ ) による.

が成り立つから, Hölder の不等式及び (4.12) より

$$\begin{aligned}
& \left| \int_A \mathbb{E}[N_t | \mathcal{F}_s](\omega) \mu(d\omega) - \int_A N_s(\omega) \mu(d\omega) \right| \\
& \leq \left| \int_A \mathbb{E}[N_t - N_t^{(n_k)} | \mathcal{F}_s](\omega) \mu(d\omega) \right| + \left| \int_A N_s^{(n_k)}(\omega) - N_s(\omega) \mu(d\omega) \right| \\
& = \left| \int_A N_t(\omega) - N_t^{(n_k)}(\omega) \mu(d\omega) \right| + \left| \int_A N_s^{(n_k)}(\omega) - N_s(\omega) \mu(d\omega) \right| \\
& \leq \|N_t - N_t^{(n_k)}\|_{\mathcal{L}^2} + \|N_s^{(n_k)} - N_s\|_{\mathcal{L}^2} \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty)
\end{aligned}$$

が従い  $\mathbb{E}[N_t | \mathcal{F}_s] = N_s$  が得られる.

以上より  $N$  の同値類  $[N]_{2,c}$  は  $\mathfrak{M}_{2,c}$  に属する. そして (4.12) より

$$\|[N]_{2,c} - [N^{(n_k)}]_{2,c}\|_{\mathfrak{M}_{2,c}} = \|[N]_{2,c} - [N^{(n_k)}]_{2,c}\|_{\mathfrak{M}_{2,c}} = \|N_T - N_T^{(n_k)}\|_{\mathcal{L}^2} \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty)$$

が成り立つから元の Cauchy 列も  $[N]_{2,c}$  に収束する. 従って  $\mathfrak{M}_{2,c}$  は Hilbert 空間である. ■

**命題 4.2.10.** 任意の  $p \geq 1$  に対し,  $\mathcal{M}_{b,c} \subset \mathcal{M}_{p,c} \subset \mathcal{M}_{c,loc}$  が成り立つ.

この証明には次の補題を使う.

**補題 4.2.11** (右連続で左極限を持つ関数は閉区間上で有界).

$(E, \rho)$  を距離空間,  $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$  とする.  $f : J \rightarrow E$  が各点で右連続且つ左極限を持つなら  $f$  は  $J$  上で有界である. ただし左端点では左極限を考えず, 右端点では右連続性を考えない.

**証明 (補題 4.2.11).** 任意に  $\epsilon > 0$  を取り固定する.  $f$  は各点  $x \in [a, b)$  で右連続であるから,  $0 < \delta_x < b - x$  を  $0 < \forall h < \delta_x$  が  $\rho(f(x), f(x+h)) < \epsilon$  を満たすように取り,

$$V_x := [x, x + \delta_x) \quad (\forall x \in [a, b))$$

とおく. また  $f$  は各点  $x \in (a, b]$  で左極限も持つから, 左極限を  $f(x-)$  と表して  $0 < \gamma_x < x - a$  を  $0 < \forall h < \gamma_x$  が  $\rho(f(x-), f(x-h)) < \epsilon$  を満たすように取り,

$$U_x := (x - \gamma_x, x] \quad (\forall x \in (a, b])$$

とおく. 特に  $U_a := (-\infty, a]$ ,  $V_b := [b, \infty)$  とおけば

$$J \subset \bigcup_{x \in J} U_x \cup V_x$$

が成り立つが,  $J$  は  $\mathbb{R}$  のコンパクト部分集合であるから, このうち有限個を選び

$$J = \bigcup_{i=1}^n (U_{x_i} \cup V_{x_i}) \cap J$$

とできる.  $U_{x_i} \cap J, V_{x_i} \cap J$  での  $f$  の挙動の振れ幅は  $2\epsilon$  で抑えられるから  $J$  全体での挙動の振れ幅は  $2n\epsilon$  より小さい\*6. ゆえに有界である. ■

補題 4.2.12 (右連続関数で導入する停止時刻の単調性). 或る零集合  $N$  が存在し, 全ての  $\omega \in \Omega \setminus N$  に対して  $I \ni t \mapsto X_t(\omega)$  が右連続なら,

$$\tau_n(\omega) := \begin{cases} 0 & (\omega \in N) \\ \inf \{ t \in I ; |X_t(\omega)| \geq n \} \wedge T & (\omega \in \Omega \setminus N)^{*7} \end{cases} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

で定める停止時刻は  $0 = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \dots$  を満たし, 特に,  $\omega \in \Omega \setminus N$  に対して  $I \ni t \mapsto X_t(\omega)$  が各点で左極限を持つなら, 或る  $n = n(\omega) \in \mathbb{N}$  が存在して  $\tau_n(\omega) = T$  を満たす.

証明 (補題 4.2.12). 定理 3.3.1 より  $\tau_n$  は停止時刻である. 絶対値の非負性より  $\tau_0 = 0$  が従い, また

$$\tau_n(\omega) \leq \inf \{ t \in I ; |X_t(\omega)| \geq n+1 \} = \tau_{n+1}(\omega) \quad (\forall \omega \in \Omega \setminus N, n = 0, 1, 2, \dots)$$

が成り立つから  $0 = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \dots$  が得られる. 或る  $\omega \in \Omega \setminus N$  に対してパスが各点で左極限を持つ場合, 補題 4.2.11 より  $n > \sup_{t \in I} |X_t(\omega)|$  を満たす  $n = n(\omega)$  が存在して  $\tau_n(\omega) = T$  が得られる. ■

証明 (命題 4.2.10). a.s. に有界な関数は  $p$  乗して可積分であるから  $\mathcal{M}_{b,c} \subset \mathcal{M}_{p,c}$  を得る.  $\mathcal{M}_{p,c} \subset \mathcal{M}_{c,loc}$  を示す. 任意に  $M \in \mathcal{M}_{p,c}$  を取れば, 或る零集合  $E$  が存在して

$$M_0(\omega) = 0 \quad (\forall \omega \in \Omega \setminus E)$$

を満たし,  $t \mapsto M_t(\omega)$  が連続となる. 全てのパスは右連続で左極限を持つから, 補題 4.2.12 より

$$\tau_j(\omega) := \inf \{ t \in I ; |M_t(\omega)| \geq j \} \wedge T \quad (\forall \omega \in \Omega, j = 0, 1, 2, \dots)$$

で定める停止時刻列は  $(\tau_j)_{j=0}^\infty \in \mathcal{T}$  を満たす. Doob の不等式 (定理 4.1.4) より  $\sup_{t \in I} |M_t|$  が  $p$  乗可積分となるから  $M_t^{\tau_j} = M_{t \wedge \tau_j} (\forall t \in I)$  は可積分である. また  $\omega \in \Omega \setminus E$  については  $t \mapsto M_t(\omega)$  の連続性から  $I \ni t \mapsto M_t^{\tau_j}(\omega)$  の連続性が従い, かつ定理 3.3.1 より

$$\sup_{t \in I} |M_{t \wedge \tau_j}(\omega)| \leq j \quad (\forall \omega \in \Omega \setminus E)$$

が成り立ち

$$\sup_{t \in I} \|M_t^{\tau_j}\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq j \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

\*6  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  と仮定し, 区間  $U_{x_i} \cup V_{x_i}$  と  $U_{x_{i+1}} \cup V_{x_{i+1}}$  の共通点の一つ取り  $z_i$  と表す.  $\rho(f(x), f(y))$  ( $x, y \in J$ ) の上界を知りたいから  $x \in U_{x_1} \cup V_{x_1}, y \in U_{x_n} \cup V_{x_n}$  の場合を調べればよい. このとき

$$\begin{aligned} \rho(f(x), f(y)) &\leq \rho(f(x), f(x_1)) + \rho(f(x_1), f(x_2)) + \dots + \rho(f(x_{n-1}), f(x_n)) + \rho(f(x_n), f(y)) \\ &\leq \rho(f(x), f(x_1)) + \rho(f(x_1), f(z_1)) + \rho(f(z_1), f(x_2)) + \dots + \rho(f(z_{n-1}), f(x_n)) + \rho(f(x_n), f(y)) \\ &< 2n\epsilon \end{aligned}$$

が成り立つ.

\*7 定理 3.3.1 の脚注に書いた通り  $\{ t \in I ; |X_t(\omega)| \geq n \} = \emptyset$  の場合は  $\tau_n(\omega) = T$  とする.

を得る．そして任意抽出定理 (定理 4.1.5) より

$$\mathbb{E}[M_t^{\tau_j} | \mathcal{F}_s] = M_{t \wedge \tau_j \wedge s} = M_s^{\tau_j} \quad (s, t \in I, s < t)$$

が成り立つから． $M^{\tau_j} \in \mathcal{M}_{b,c}$  ( $j = 1, 2, \dots$ )，すなわち  $M \in \mathcal{M}_{c,loc}$  となる．

補題 4.2.13.  $X \in \mathcal{M}_{2,c}$  と停止時刻  $\tau \geq \sigma$  に対し次が成り立つ:

- (1)  $\mathbb{E}[(X_\tau - X_\sigma)^2] = \mathbb{E}[X_\tau^2 - X_\sigma^2]$ ,
- (2)  $\mathbb{E}[(X_\tau - X_\sigma)^2 | \mathcal{F}_\sigma] = \mathbb{E}[X_\tau^2 - X_\sigma^2 | \mathcal{F}_\sigma]$ .

証明.

- (1)  $X \in \mathcal{M}_{2,c}$  であるから Doob の不等式 (定理 4.1.4) により  $X_\tau, X_\sigma$  は二乗可積分である．また定理 3.2.7 より  $X_\sigma$  は可測  $\mathcal{F}_\sigma/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  であり，任意抽出定理 (定理 4.1.5) と  $\tau \geq \sigma$  の仮定より

$$\mathbb{E}[X_\tau | \mathcal{F}_\sigma] = X_{\tau \wedge \sigma} = X_\sigma$$

も成り立つ．命題 2.2.4 の  $\tilde{C}2$  と  $\tilde{C}6$  を併せて

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X_\tau - X_\sigma)^2] &= \mathbb{E}[X_\tau^2 + X_\sigma^2] - 2\mathbb{E}[X_\tau X_\sigma] \\ &= \mathbb{E}[X_\tau^2 + X_\sigma^2] - 2\mathbb{E}[\mathbb{E}[X_\tau X_\sigma | \mathcal{F}_\sigma]] \\ &= \mathbb{E}[X_\tau^2 + X_\sigma^2] - 2\mathbb{E}[X_\sigma \mathbb{E}[X_\tau | \mathcal{F}_\sigma]] \\ &= \mathbb{E}[X_\tau^2 - X_\sigma^2] \end{aligned}$$

を得る．

- (2) (1) と同様にして

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X_\tau - X_\sigma)^2 | \mathcal{F}_\sigma] &= \mathbb{E}[X_\tau^2 + X_\sigma^2 | \mathcal{F}_\sigma] - 2\mathbb{E}[X_\tau X_\sigma | \mathcal{F}_\sigma] \\ &= \mathbb{E}[X_\tau^2 + X_\sigma^2 | \mathcal{F}_\sigma] - 2X_\sigma^2 \\ &= \mathbb{E}[X_\tau^2 - X_\sigma^2 | \mathcal{F}_\sigma] \end{aligned}$$

が成り立つ．

命題 4.2.14 (有界変動な連続二乗可積分マルチンゲールは 0).

$A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{M}_{2,c}$  に対し  $A_t = 0$  ( $\forall t \in I$ )  $\mu$ -a.s. が成り立つ．

証明.  $A$  に対し或る  $A^{(1)}, A^{(2)} \in \mathcal{A}^+$  が存在して

$$A = A^{(1)} - A^{(2)}$$



と表現できる．また或る  $\mu$ -零集合  $E$  が存在し，全ての  $\omega \in \Omega \setminus E$  に対して  $A_0(\omega) = 0$  且つ  $I \ni t \mapsto A_t^{(1)}(\omega)$  と  $I \ni t \mapsto A_t^{(2)}(\omega)$  が共に連続，単調非減少となる．従って補題 4.2.12 より

$$\tau_m(\omega) := \begin{cases} 0 & (\omega \in E) \\ \inf \left\{ t \in I ; \sup_{s \leq t} \tilde{A}_s^{(1)}(\omega) \vee \tilde{A}_s^{(2)}(\omega) \geq m \right\} \wedge T & (\omega \in \Omega \setminus E) \end{cases} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

として停止時刻列を定めれば，各  $\omega \in \Omega \setminus E$  に対し或る  $i = i(\omega) \in \mathbb{N}$  が存在して

$$\tau_1(\omega) \leq \tau_2(\omega) \leq \dots \leq \tau_i(\omega) = T$$

が成り立つ．但し  $\tilde{A}_t^{(i)} := A_t^{(i)} - A_0^{(i)}$ , ( $i = 1, 2$ ) とした．今任意に  $t \in I$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$  を取り固定する．

$$\sigma_j^n := \tau_m \wedge \frac{tj}{2^n} \quad (j = 0, 1, \dots, 2^n)$$

とおけば， $(\sigma_j^n)_{j=0}^{2^n}$  は単調増加で

$$\sigma_{j+1}^n - \sigma_j^n \leq \frac{t}{2^n} \quad (j = 0, 1, \dots, 2^n) \quad (4.13)$$

を満たすから，補題 4.2.13 により

$$\mathbb{E} \left[ \sum_{j=0}^{2^n-1} (A_{\sigma_{j+1}^n} - A_{\sigma_j^n})^2 \right] = \sum_{j=0}^{2^n-1} \mathbb{E} [A_{\sigma_{j+1}^n}^2 - A_{\sigma_j^n}^2] = \mathbb{E} [A_{\tau_m \wedge t}^2] \quad (4.14)$$

が成り立つ．左辺の被積分関数について，

$$\sum_{j=0}^{2^n-1} (A_{\sigma_{j+1}^n} - A_{\sigma_j^n})^2 \leq \sup_j |A_{\sigma_{j+1}^n} - A_{\sigma_j^n}| \sum_{j=0}^{2^n-1} |A_{\sigma_{j+1}^n} - A_{\sigma_j^n}|$$

とできる．特に  $\omega \in \Omega \setminus E$  に対しては， $I \ni t \mapsto A_t(\omega)$  の連続性と (4.13) より

$$\sup_j |A_{\sigma_{j+1}^n(\omega)}(\omega) - A_{\sigma_j^n(\omega)}(\omega)| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

且つ

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2^n-1} |A_{\sigma_{j+1}^n(\omega)}(\omega) - A_{\sigma_j^n(\omega)}(\omega)| &\leq \sum_{j=0}^{2^n-1} \left( A_{\sigma_{j+1}^n(\omega)}^{(1)}(\omega) - A_{\sigma_j^n(\omega)}^{(1)}(\omega) + A_{\sigma_{j+1}^n(\omega)}^{(2)}(\omega) - A_{\sigma_j^n(\omega)}^{(2)}(\omega) \right) \\ &= A_{\tau_m(\omega) \wedge t}^{(1)}(\omega) - A_0^{(1)}(\omega) + A_{\tau_m(\omega) \wedge t}^{(2)}(\omega) - A_0^{(2)}(\omega) \leq 2m \end{aligned}$$

が満たされるから，Lebesgue の収束定理より

$$\int_{\Omega} \sum_{j=0}^{2^n-1} (A_{\sigma_{j+1}^n(\omega)}(\omega) - A_{\sigma_j^n(\omega)}(\omega))^2 \mu(d\omega) \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成り立ち，(4.14) より

$$\int_{\Omega} (A_{\tau_m(\omega) \wedge t})^2 \mu(d\omega) = 0 \quad (m = 1, 2, \dots)$$

が従う．Doob の不等式より  $|A_{\tau_m \wedge t}| \leq \sup_{t \in I} |A_t| \in \mathcal{L}^2$  が成り立つから，Lebesgue の収束定理より

$$\int_{\Omega} (A_t(\omega))^2 \mu(d\omega) = 0$$

となり  $A_t = 0$   $\mu$ -a.s. を得る.  $\omega \in \Omega \setminus E$  に対する  $A$  のパスの連続性により

$$\{\omega \in \Omega \setminus E ; A_t(\omega) = 0 (\forall t \in I)\} = \bigcap_{r \in I \cap \mathbb{Q}} \{\omega \in \Omega \setminus E ; A_r(\omega) = 0\}$$

と表せるから,

$$\{\omega \in \Omega ; A_t(\omega) \neq 0 (\exists t \in I)\} \subset E + \bigcup_{r \in I \cap \mathbb{Q}} \{\omega \in \Omega \setminus E ; A_r(\omega) \neq 0\}$$

が成り立ち命題の主張が従う. ■

補題 4.2.15 (二次変分補題).  $n \in \mathbb{N}$  と  $M \in \mathcal{M}_{b,c}$  を取り,  $\tau_j^n = jT/2^n$  ( $j = 0, 1, \dots, 2^n$ ) に対し

$$Q_t^n := \sum_{j=0}^{2^n-1} (M_{t \wedge \tau_{j+1}^n} - M_{t \wedge \tau_j^n})^2 \quad (\forall t \in I) \quad (4.15)$$

とおけば,  $M^2 - Q^n \in \mathcal{M}_{b,c}$  かつ次が成り立つ:

$$\|M_T^2 - Q_T^n\|_{\mathcal{L}^2} \leq 2 \sup_{t \in I} \|M_t\|_{\mathcal{L}^\infty} \|M_T\|_{\mathcal{L}^2}.$$

証明. 各  $j$  に対し  $M_{t \wedge \tau_{j+1}^n}$  が可測  $\mathcal{F}_t/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  であるから  $Q^n$  は  $\mathcal{F}_t$ -適合である. 今任意に  $s, t \in I$ , ( $s < t$ ) を取り固定する.  $\tau_k^n \leq s < \tau_{k+1}^n$  となる  $k$  を選べば, 補題 4.2.13 と任意抽出定理 4.1.5 より

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Q_t^n - Q_s^n | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}\left[\sum_{j=k}^{2^n-1} \left\{(M_{t \wedge \tau_{j+1}^n} - M_{t \wedge \tau_j^n})^2 - (M_{s \wedge \tau_{j+1}^n} - M_{s \wedge \tau_j^n})^2\right\} \middle| \mathcal{F}_s\right] \\ &= \sum_{j=k+1}^{2^n-1} \mathbb{E}\left[M_{t \wedge \tau_{j+1}^n}^2 - M_{t \wedge \tau_j^n}^2 \middle| \mathcal{F}_s\right] + \mathbb{E}\left[(M_{t \wedge \tau_{k+1}^n} - M_{\tau_k^n})^2 \middle| \mathcal{F}_s\right] - (M_s - M_{\tau_k^n})^2 \\ &= \mathbb{E}\left[M_t^2 - M_{t \wedge \tau_{k+1}^n}^2 \middle| \mathcal{F}_s\right] + \mathbb{E}\left[(M_{t \wedge \tau_{k+1}^n} - M_{\tau_k^n})^2 \middle| \mathcal{F}_s\right] - (M_s - M_{\tau_k^n})^2 \\ &= \mathbb{E}\left[M_t^2 \middle| \mathcal{F}_s\right] - 2\mathbb{E}\left[M_{t \wedge \tau_{k+1}^n} M_{\tau_k^n} \middle| \mathcal{F}_s\right] + \mathbb{E}\left[M_{\tau_k^n}^2 \middle| \mathcal{F}_s\right] - M_s^2 + 2M_s M_{\tau_k^n} - M_{\tau_k^n}^2 \\ &= \mathbb{E}\left[M_t^2 \middle| \mathcal{F}_s\right] - 2M_{\tau_k^n} \mathbb{E}\left[M_{t \wedge \tau_{k+1}^n} \middle| \mathcal{F}_s\right] + M_{\tau_k^n}^2 - M_s^2 + 2M_s M_{\tau_k^n} - M_{\tau_k^n}^2 \\ &= \mathbb{E}\left[M_t^2 \middle| \mathcal{F}_s\right] - M_s^2. \end{aligned}$$

が成り立ち次を得る:

$$\mathbb{E}\left[M_t^2 - Q_t^n \middle| \mathcal{F}_s\right] = M_s^2 - Q_s^n, \quad (\forall 0 \leq s < t \leq T). \quad (4.16)$$

ここで

$$N := M^2 - Q^n$$

とおけば  $N \in \mathcal{M}_{b,c}$  であり\*8,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(N_T - N_0)^2] &= \mathbb{E}[N_T^2 - N_0^2] = \mathbb{E}\left[\sum_{j=0}^{2^n-1} (N_{\tau_{j+1}^n}^2 - N_{\tau_j^n}^2)\right] \\
&= \sum_{j=0}^{2^n-1} \mathbb{E}\left[\left\{M_{\tau_{j+1}^n}^2 - M_{\tau_j^n}^2 - (Q_{\tau_{j+1}^n}^n - Q_{\tau_j^n}^n)\right\}^2\right] \\
&= \sum_{j=0}^{2^n-1} \mathbb{E}\left[\left\{M_{\tau_{j+1}^n}^2 - M_{\tau_j^n}^2 - (M_{\tau_{j+1}^n} - M_{\tau_j^n})^2\right\}^2\right] \\
&\leq 4 \sup_{t \in I} \|M_t\|_{\mathcal{L}^\infty}^2 \mathbb{E}\left[\sum_{j=0}^{2^n-1} (M_{\tau_{j+1}^n} - M_{\tau_j^n})^2\right] \\
&= 4 \sup_{t \in I} \|M_t\|_{\mathcal{L}^\infty}^2 \mathbb{E}[M_T^2 - M_0^2]
\end{aligned}$$

が成り立つ. ■

定理 4.2.16 (二次変分の存在).

(1) 任意の  $M \in \mathcal{M}_{c,loc}$  に対し或る  $A \in \mathcal{A}^+$  が存在して次を満たす:

$$A_0 = 0 \quad \mu\text{-a.s.}, \quad M^2 - A \in \mathcal{M}_{c,loc}. \quad (4.17)$$

(2)  $A' \in \mathcal{A}^+$  も (4.17) を満たすなら  $A$  と  $A'$  は  $\mu$ -a.s. にパスが一致し, 逆に  $A, A' \in \mathcal{A}^+$  が  $\mu$ -a.s. にパスが一致するなら  $A'$  も (4.17) を満たす. また  $M, M' \in \mathcal{M}_{c,loc}$  が  $\mu$ -a.s. にパスが一致するなら, 各々に対し (4.17) を満たす  $A, A' \in \mathcal{A}^+$  も  $\mu$ -a.s. にパスが一致する.

(3)  $M \in \mathcal{M}_{p,c}$  ( $p \geq 2$ ) の場合, (4.17) を満たす  $A \in \mathcal{A}^+$  は可積分である.

(4)  $M \in \mathcal{M}_{b,c}$  の場合, (4.17) を満たす  $A \in \mathcal{A}^+$  により次の不等式が成り立つ:

$$\|M_T^2 - A_T\|_{\mathcal{L}^2} \leq 2 \sup_{t \in I} \|M_t\|_{\mathcal{L}^\infty} \|M_T\|_{\mathcal{L}^2}.$$

\*8  $M \in \mathcal{M}_{b,c}$  より全ての  $\omega \in \Omega$  において写像  $t \mapsto M_t(\omega)$  は各点で右連続かつ左極限を持つ.  $Q^n$  についても Gauss 記号を用いて  $Q_t^n = \sum_{j=0}^{[2^n t]/T} (M_{\tau_{j+1}^n} - M_{\tau_j^n})^2$  と表せば,  $t \mapsto Q_t^n(\omega)$  ( $\forall \omega \in \Omega$ ) が各点で右連続かつ左極限を持つことが明確になる. よって全ての  $\omega \in \Omega$  において  $t \mapsto N_t(\omega)$  は各点で右連続かつ左極限を持つ. また同じ理由で  $t \mapsto M_t(\omega)$  が連続となる点で  $t \mapsto N_t(\omega)$  も連続となるからつまり  $\mu$ -a.s. に  $t \mapsto N_t$  は連続. 一様有界性については,  $\sup_{t \in I} \|M_t\|_{\mathcal{L}^\infty} < \infty$  であるから, 任意の  $t \in I$  に対し或る零集合  $E_t$  が存在して  $\omega \notin E_t$  なら  $|M_t(\omega)| \leq \sup_{t \in I} \|M_t\|_{\mathcal{L}^\infty}$  が成り立つ. 同様に  $Q_t^n$  についても  $\omega \notin E_t \cup \bigcup_{j=0}^{[2^n t]/T} E_{\tau_j^n}$  なら

$$|Q_t^n(\omega)| \leq \sum_{j=0}^{[2^n t]/T} \left(2 \sup_{t \in I} \|M_t\|_{\mathcal{L}^\infty}\right)^2 \leq 2^{n+1} \sup_{t \in I} \|M_t\|_{\mathcal{L}^\infty}^2.$$

ゆえに

$$|N_t(\omega)| \leq |M_t(\omega)|^2 + |Q_t^n(\omega)| \leq (2^{n+1} + 1) \sup_{t \in I} \|M_t\|_{\mathcal{L}^\infty}^2, \quad (\forall \omega \notin E_t \cup \bigcup_{j=0}^{[2^n t]/T} E_{\tau_j^n}).$$

この右辺は  $t$  に依らないから

$$\sup_{t \in I} \|N_t\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq (2^{n+1} + 1) \sup_{t \in I} \|M_t\|_{\mathcal{L}^\infty}^2$$

を得る. 以上の結果と (4.16) を併せて  $N \in \mathcal{M}_{b,c}$  となる.

証明. まず  $M \in \mathcal{M}_{b,c}$  に対し  $A$  の存在を証明し, 次にその結果を  $\mathcal{M}_{c,loc}$  に拡張する.

第一段  $M \in \mathcal{M}_{b,c}$  とする. (4.15) の  $Q^n$  を構成し  $N^n := M^2 - Q^n \in \mathcal{M}_{b,c}$  とおけば

$$\|N_T^n\|_{\mathcal{L}^2} \leq 2 \sup_{t \in I} \|M_t\|_{\mathcal{L}^\infty} \|M_T\|_{\mathcal{L}^2} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (4.18)$$

が成り立つから,  $N^n$  の  $\mathcal{M}_{2,c}$  における同値類  $[N^n]_{2,c}$  の列  $([N^n]_{2,c})_{n=1}^\infty$  は Hilbert 空間  $\mathfrak{M}_{2,c}$  において有界列である. 従って Kolmos の補題より  $[N^n]_{2,c}$  の或る凸結合の列  $[N^{\hat{n}}]_{2,c}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) が  $\mathfrak{M}_{2,c}$  において Cauchy 列をなし, 極限  $[N]_{2,c} \in \mathfrak{M}_{2,c}$  が存在する. 凸結合を

$$[N^{\hat{n}}]_{2,c} = \sum_{j=0}^\infty c_j^n [N^{n+j}]_{2,c}, \quad \hat{N}^n := \sum_{j=0}^\infty c_j^n N^{n+j}, \quad \hat{Q}^n := \sum_{j=0}^\infty c_j^n Q^{n+j}$$

と表せば  $\hat{N}^n = M^2 - \hat{Q}^n$  を満たし<sup>\*9</sup>,  $N \in [N]_{2,c}$  を一つ取り

$$A := M^2 - N \quad (4.19)$$

とおけば, Doob の不等式 (定理 4.1.4) により

$$\begin{aligned} \left\| \sup_{t \in I} |\hat{Q}_t^n - A_t| \right\|_{\mathcal{L}^2} &= \left\| \sup_{t \in I} |N_t - \hat{N}_t^n| \right\|_{\mathcal{L}^2} \\ &\leq \|N_T - \hat{N}_T^n\|_{\mathcal{L}^2} = \|[N]_{2,c} - [N^{\hat{n}}]_{2,c}\|_{\mathfrak{M}_{2,c}} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

が成り立つ.

$$\left\| \sup_{t \in I} |\hat{Q}_t^{n_k} - A_t| \right\|_{\mathcal{L}^2} < \frac{1}{4^k} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

を満たすように部分列  $(n_k)_{k=1}^\infty$  を取り

$$E_k := \left\{ \sup_{t \in I} |\hat{Q}_t^{n_k} - A_t| \geq \frac{1}{2^k} \right\} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

とすると, Chebyshev の不等式より  $\mu(E_k) < 1/2^k$  を得る.

$$E := \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq N} E_k$$

と定めれば Borel-Cantelli の補題より  $E$  は  $\mu$ -零集合であり,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in I} |\hat{Q}_t^{n_k}(\omega) - A_t(\omega)| = 0 \quad (\forall \omega \in \Omega \setminus E) \quad (4.20)$$

が成り立つから  $A_0(\omega) = 0$  ( $\forall \omega \in \Omega \setminus E$ ) が従う.

$$D_k := \left\{ \frac{j}{2^{n_k}} T ; \quad j = 0, 1, \dots, 2^{n_k} \right\} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

とおけば, (4.15) より全ての  $v \geq k$ ,  $\omega \in \Omega$  に対して  $t \mapsto Q_t^{n_v}(\omega)$  は  $D_k$  上で単調非減少であるから  $\hat{Q}_t^{n_v}$  も  $D_k$  上で単調非減少であり, (4.20) より  $\omega \in \Omega \setminus E$  に対するパス  $t \mapsto A_t(\omega)$  も

<sup>\*9</sup> 各  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $(c_j^n)_{j=0}^\infty$  は  $\sum_{j=0}^\infty c_j^n = 1$  を満たし, 且つ  $\neq 0$  であるのは有限個である.

$D_k$  上で単調非減少である．実際，或る  $j$  と  $u \in \Omega \setminus E$  で  $A_{\frac{j}{2^k}T}(u) > A_{\frac{j+1}{2^k}T}(u)$  が成り立つとすると， $\alpha := A_{\frac{j}{2^k}T}(u)$ ,  $\beta := A_{\frac{j+1}{2^k}T}(u)$  とおけば式 (4.20) より或る  $\nu \geq 1$  が存在して

$$\left| \hat{Q}_{\frac{j}{2^k}T}^{n_\nu}(u) - A_{\frac{j}{2^k}T}(u) \right| < \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad \left| \hat{Q}_{\frac{j+1}{2^k}T}^{n_\nu}(u) - A_{\frac{j+1}{2^k}T}(u) \right| < \frac{\alpha - \beta}{2}$$

を同時に満たすが，

$$\hat{Q}_{\frac{j}{2^k}T}^{n_\nu}(u) > \frac{\alpha + \beta}{2} > \hat{Q}_{\frac{j+1}{2^k}T}^{n_\nu}(u)$$

が従い  $t \mapsto \hat{Q}_t^{n_\nu}(u)$  の単調増大性に矛盾する． $D := \bigcup_{k=1}^{\infty} D_{n_k}$  とおけば  $D$  は  $I$  で稠密であり，更に  $A$  は或る零集合  $E'$  を除いてパスが連続であるから<sup>\*10</sup>，任意の  $\omega \in \Omega \setminus (E \cup E')$  に対し  $I \ni t \mapsto A_t(\omega)$  は連続且つ単調非減少である．また (4.19) より  $A$  の適合性が出るから  $A \in \mathcal{A}^+$  が従う．そして命題 4.2.10 より  $N = M^2 - A \in \mathcal{M}_{2,c} \subset \mathcal{M}_{c,loc}$  が成り立つから  $A$  は (4.17) を満たす． $A' \in \mathcal{A}^+$  もまた (4.17) を満たすなら， $N' = M^2 - A'$  として

$$\mathcal{A} \ni A - A' = N' - N \in \mathcal{M}_{2,c}$$

が成り立ち命題 4.2.14 により  $A_t - A'_t = 0$  ( $\forall t \in I$ )  $\mu$ -a.s. が従う．

第二段  $M \in \mathcal{M}_{c,loc}$  を取れば，或る  $(\tau_j)_{j=0}^{\infty} \in \mathcal{T}$  と (4.17) を満たす  $(A^j)_{j=0}^{\infty} \subset \mathcal{A}^+$  が存在して

$$N^j := (M^{\tau_j})^2 - A^j \in \mathcal{M}_{2,c} \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

を満たす．ここで  $A^j$  のパスは零集合  $C_j$  を除いて 0 出発で連続単調非減少であるとする．或る  $\mu$ -零集合  $E_1$  があり，任意の  $\omega \in \Omega \setminus E_1$  に対し或る  $J = J(\omega) \in \mathbb{N}$  が存在して

$$0 = \tau_0(\omega) \leq \tau_1(\omega) \leq \dots \leq \tau_J(\omega) = T \quad (4.21)$$

を満たすから，任意に  $n, m \in \mathbb{N}$  ( $n \leq m$ ) を取り固定すれば全ての  $\omega \in \Omega \setminus E_1$  に対して

$$M_{t \wedge \tau_n(\omega)}^{\tau_m}(\omega) = M_{t \wedge \tau_n(\omega) \wedge \tau_m(\omega)}(\omega) = M_t^{\tau_n}(\omega) \quad (\forall t \in I)$$

が従い，任意抽出定理 (定理 4.1.5) より

$$\mathbb{E} \left[ (M_t^{\tau_m})^2 - A_t^m \mid \mathcal{F}_{\tau_n} \right] = (M_{t \wedge \tau_n}^{\tau_m})^2 - A_{t \wedge \tau_n}^m = (M_t^{\tau_n})^2 - A_{t \wedge \tau_n}^m \quad (\forall t \in I)$$

が得られる．定理 4.2.4 より  $(N^m)^{\tau_n} = (M^{\tau_n})^2 - (A^m)^{\tau_n} \in \mathcal{M}_{2,c}$  が従い，一方で  $N^n = (M^{\tau_n})^2 - A^n \in \mathcal{M}_{2,c}$  も満たされているから前段の考察より或る  $\mu$ -零集合  $E^{n,m}$  が存在して

$$A_t^n(\omega) = A_{t \wedge \tau_n(\omega)}^m(\omega) \quad (\forall t \in I, \omega \in \Omega \setminus E^{n,m})$$

が成り立ち，特に両辺を  $\tau_n$  で停めれば

$$A_{t \wedge \tau_n(\omega)}^n(\omega) = A_{t \wedge \tau_n(\omega)}^m(\omega) \quad (\forall t \in I, \omega \in \Omega \setminus E^{n,m})$$

が得られる．ここで

$$E_2 := \bigcup_{\substack{n, m \in \mathbb{N} \\ n \leq m}} E^{n,m}, \quad E_3 := \bigcup_{j \in \mathbb{N}_0} C_j$$

<sup>\*10</sup>  $M \in \mathcal{M}_{b,c}$ ,  $N \in \mathcal{M}_{2,c}$  より  $M, N$  のパスが連続でない  $\omega$  の全体は或る零集合に含まれる．それを  $E'$  とおけばよい．

とにおいて

$$A_t(\omega) := \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} A_{t \wedge \tau_n}^n(\omega) & (\omega \in \Omega \setminus (E_1 \cup E_2 \cup E_3)) \\ 0 & (\omega \in E_1 \cup E_2 \cup E_3) \end{cases} \quad (\forall t \in I)$$

により  $A$  を定めれば  $A \in \mathcal{A}^+$  を満たす:

**連続性・単調非減少性**  $\omega \in \Omega \setminus (E_1 \cup E_2 \cup E_3)$  の場合, (4.21) より或る  $n \in \mathbb{N}$  が存在して

$I \ni t \mapsto A_t(\omega)$  と  $I \ni t \mapsto A_t^n(\omega)$  は一致するから 0 出発且つ連続単調非減少である.

**適合性** 各  $n \in \mathbb{N}$  に対し  $A^n$  は  $(\mathcal{F}_t)$ -適合である.  $t \in I$  を固定し

$$\tilde{\mathcal{F}}_t := \{ B \cap (E_1 \cup E_2 \cup E_3)^c ; \quad B \in \mathcal{F}_t \}$$

とおく. 写像  $\Omega \ni \omega \mapsto A_t^n(\omega)$  を  $\Omega \setminus (E_1 \cup E_2 \cup E_3)$  に制限した  $\tilde{A}_t^n := A_t^n|_{\Omega \setminus (E_1 \cup E_2 \cup E_3)}$  は可測  $\tilde{\mathcal{F}}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  であり,  $\tau_n$  で停めた過程  $\tilde{A}_{t \wedge \tau_n}^n$  も可測  $\tilde{\mathcal{F}}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  である. その各点収束で定めた  $\tilde{A}_t := A_t|_{\Omega \setminus (E_1 \cup E_2 \cup E_3)}$  もまた  $\tilde{\mathcal{F}}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ -可測性を持つ. 任意の  $C \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  に対して

$$A_t^{-1}(C) = \begin{cases} \tilde{A}_t^{-1}(C) & (0 \notin C) \\ (E_1 \cup E_2) \cup \tilde{A}_t^{-1}(C) & (0 \in C) \end{cases}$$

が成り立ち,  $\tilde{\mathcal{F}}_t \subset \mathcal{F}_t$  が満たされているから  $A_t$  の  $\mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ -可測性が出る.

$N := M^2 - A$  は或る零集合  $E_4$  を除いてパスが連続であるから, 命題 (4.2.10) より

$$\sigma_j(\omega) := \begin{cases} 0 & (\omega \in E_4), \\ \inf \{ t \in I ; \quad |N_t(\omega)| \geq j \} \wedge T & (\omega \in \Omega \setminus E_4) \end{cases} \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

として  $(\sigma_j)_{j=0}^\infty \in \mathcal{T}$  を定めれば

$$\sup_{t \in I} \| N_{t \wedge \tau_j \wedge \sigma_j}^j \|_{\mathcal{L}^\infty} \leq j \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

が満たされる. また  $\Omega \setminus (E_1 \cup E_2 \cup E_3)$  上で

$$N_t^{\tau_j}(\omega) = \left( M_t^{\tau_j} \right)^2(\omega) - A_t^{\tau_j}(\omega) = \left( M_t^{\tau_j} \right)^2(\omega) - \left( A^j \right)_t^{\tau_j}(\omega) = \left( N^j \right)_t^{\tau_j}(\omega) \quad (\forall t \in I, j \in \mathbb{N}_0)$$

が成り立つから,

$$\gamma_j := \tau_j \wedge \sigma_j \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

により  $(\gamma_j)_{j=0}^\infty \in \mathcal{T}$  を定めれば  $N^{\gamma_j} \in \mathcal{M}_{b,c}$  が満たされ  $N \in \mathcal{M}_{c,loc}$  が従う.  $A$  の一意性について,  $A' \in \mathcal{A}^+$  もまた (4.17) を満たしているとき, 或る停止時刻  $(\gamma'_j)_{j=0}^\infty \in \mathcal{T}$  が存在して  $\left( M^{\gamma'_j} \right)^2 - A'^{\gamma'_j} \in \mathcal{M}_{b,c}$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ) が成り立つ.

$$\zeta_j := \gamma_j \wedge \gamma'_j \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

とおけば

$$\left( M^{\zeta_j} \right)^2 - A^{\zeta_j}, \left( M^{\zeta_j} \right)^2 - A'^{\zeta_j} \in \mathcal{M}_{b,c} \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

が満たされるから

$$A_t^{\zeta_j}(\omega) = A'^{\zeta_j}_t(\omega)$$

が従い  $A$  と  $A'$  は  $\mu$ -a.s. にパスが一致する.

第三段 (3) を示す.  $M \in \mathcal{M}_{p,c}$  ( $p \geq 2$ ) の場合, 命題 4.2.10 より  $M \in \mathcal{M}_{c,loc}$  であるから, 或る  $A \in \mathcal{A}^+$  が存在して  $M^2 - A \in \mathcal{M}_{c,loc}$  となる. 従って或る  $(\tau_j)_{j=0}^\infty \in \mathcal{T}$  が存在して  $(M^{\tau_j})^2 - A^{\tau_j} \in \mathcal{M}_{b,c}$  ( $j = 0, 1, \dots$ ) を満たすから, 任意に  $t \in I$  を固定すれば

$$\int_{\Omega} \left( M_{t \wedge \tau_j(\omega)}(\omega) \right)^2 \mu(d\omega) = \int_{\Omega} A_{t \wedge \tau_j(\omega)}(\omega) \mu(d\omega) \quad (\forall j = 0, 1, \dots)$$

が成り立つ. 或る零集合  $E$  が存在して,  $\omega \in \Omega \setminus E$  なら  $A_0(\omega) = 0$ ,  $I \ni t \mapsto A_t(\omega)$  は連続且つ単調非減少, 更に  $0 = \tau_0(\omega) \leq \tau_1(\omega) \leq \dots \leq \tau_J(\omega) = T$  ( $\exists J = J(\omega)$ ) が満たされるから,  $(A_{t \wedge \tau_j(\omega)}(\omega))_{j=0}^\infty$  は単調増大列である. また Doob の不等式により  $|M_{t \wedge \tau_j}| \leq \sup_{t \in I} |M_t| \in \mathcal{L}^p \subset \mathcal{L}^2$  も満たされているから, Lebesgue の収束定理と単調収束定理より

$$\int_{\Omega} (M_t(\omega))^2 \mu(d\omega) = \int_{\Omega} A_t(\omega) \mu(d\omega) < \infty$$

が従う.

第四段 (4) を示す. 第一段において, (4.20) と Fatou の補題, Minkowski の不等式及び (4.18) より

$$\begin{aligned} \|M_T^2 - A_T\|_{\mathcal{L}^2} &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|M_T^2 - \hat{Q}_t^{n_k}\|_{\mathcal{L}^2} \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_j^{n_k} \|M_T^2 - Q^{n_k+j}\|_{\mathcal{L}^2} \leq 2 \sup_{t \in I} \|M_t\|_{\mathcal{L}^\infty} \|M_T\|_{\mathcal{L}^2} \end{aligned}$$

が成立する. ■

定義 4.2.17 (二次変分).  $M \in \mathcal{M}_{c,loc}$  に対して (4.17) を満たす  $A \in \mathcal{A}^+$  のうち, 全てのパスが 0 出発, 連続, 単調非減少であるものを取り, これを  $M$  の二次変分 (quadratic variation) と呼び  $\langle M \rangle$  と表す. また  $M, N \in \mathcal{M}_{c,loc}$  に対して

$$\langle M, N \rangle := \frac{1}{4} (\langle M + N \rangle - \langle M - N \rangle)$$

と定義して  $M, N$  の共変分と呼ぶ.

定理 4.2.18 (二次変分が有界な連続局所マルチンゲールは連続な二乗可積分マルチンゲール).  $M \in \mathcal{M}_{c,loc}$  かつ  $\|\langle M \rangle_T\|_{\mathcal{L}^\infty} < \infty$  であるならば,  $M \in \mathcal{M}_{2,c}$  が成り立つ.

証明. マルチンゲール性の定義に従い, 以下三段階に分けて証明する.

第一段 任意の  $t \in I$  に対し  $M_t$  が二乗可積分であることを示す. 或る  $(\tau_j)_{j=0}^\infty \in \mathcal{T}$  が存在して  $(M^{\tau_j})^2 - \langle M \rangle^{\tau_j} \in \mathcal{M}_{b,c}$  ( $j = 0, 1, \dots$ ) を満たし, そして  $M_0^2 - \langle M \rangle_0 = 0$   $\mu$ -a.s. も満たされているから, マルチンゲール性により任意の  $t \in I$ ,  $j = 0, 1, \dots$  に対し

$$\int_{\Omega} \left( M_{t \wedge \tau_j(\omega)}(\omega) \right)^2 \mu(d\omega) = \int_{\Omega} \langle M \rangle_{t \wedge \tau_j(\omega)}(\omega) \mu(d\omega) \quad (4.22)$$

が成り立つ. また  $(\tau_j)_{j=0}^\infty$  に対して或る零集合  $E$  が存在し, 任意の  $\omega \in \Omega \setminus E$  に対し或る  $J = J(\omega) \in \mathbb{N}$  が存在して  $0 = \tau_0(\omega) \leq \tau_1(\omega) \leq \dots \leq \tau_J(\omega) = T$  が満たされる. 全ての  $\omega \in \Omega$

に対し  $I \ni t \mapsto \langle M \rangle_t(\omega)$  が非負・連続・単調非減少であるから、任意の  $t \in I$  に対し

$$\langle M \rangle_{t \wedge \tau_j(\omega)}(\omega) \leq \langle M \rangle_T(\omega) \quad (\forall \omega \in \Omega \setminus E, j = 0, 1, \dots)$$

が成り立ち、更に仮定より  $\langle M \rangle_T$  が可積分であるから、Lebesgue の収束定理により

$$\int_{\Omega} \langle M \rangle_t(\omega) \mu(d\omega) = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \langle M \rangle_{t \wedge \tau_j(\omega)}(\omega) \mu(d\omega)$$

が成立する。よって (4.22) において Fatou の補題を使えば

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (M_t(\omega))^2 \mu(d\omega) &= \int_{\Omega} \liminf_{j \rightarrow \infty} (M_{t \wedge \tau_j(\omega)}(\omega))^2 \mu(d\omega) \\ &\leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \langle M \rangle_{t \wedge \tau_j(\omega)}(\omega) \mu(d\omega) = \int_{\Omega} \langle M \rangle_t(\omega) \mu(d\omega) \leq \|\langle M \rangle_T\|_{\mathcal{L}^\infty} \end{aligned}$$

が得られ  $M_t$  の二乗可積分性が従う。

第二段  $I \ni t \mapsto M_t(\omega)$  について、定義より任意の  $\omega \in \Omega$  に対し各点  $t$  で右連続且つ左極限を持つから、以降は  $\mu$ -a.s.  $\omega \in \Omega$  に対し連続且つ 0 出発であることを示す。 $M$  に対し或る  $(\sigma_k)_{k=0}^\infty \in \mathcal{T}$  が存在して  $M^{\sigma_k} \in \mathcal{M}_{b,c}$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) を満たすから、先ず  $M_0 = M_0^{\sigma_0} = 0$   $\mu$ -a.s. が従う。また或る零集合  $E'$  が存在して  $\omega \in \Omega \setminus E'$  なら  $0 = \sigma_0(\omega) \leq \sigma_1(\omega) \leq \dots \leq \sigma_K(\omega) = T = \sigma_{K+1}(\omega) = \sigma_{K+2}(\omega) = \dots$  ( $\exists K = K(\omega)$ ) が成り立ち、一方で各  $k = 0, 1, \dots$  に対し或る零集合  $E_k''$  が存在し、 $\omega \in \Omega \setminus E_k''$  ならば  $I \ni t \mapsto M_t^{\sigma_k}(\omega)$  が連続となる。

$$E'' := \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k''$$

とおけば、 $\omega \in \Omega \setminus (E' \cup E'')$  に対しては或る  $K = K(\omega)$  が存在して  $\sigma_K(\omega) = T$  を満たし、 $I \ni t \mapsto M_t(\omega)$  は  $I \ni t \mapsto M_t^{\sigma_K}(\omega)$  に一致する。 $I \ni t \mapsto M_t^{\sigma_K}(\omega)$  が連続であるから  $I \ni t \mapsto M_t(\omega)$  の連続性が従い、よって  $\mu$ -a.s. に  $I \ni t \mapsto M_t$  は連続である。

第三段 任意の  $s, t \in I$  ( $s < t$ ) に対し

$$\int_A M_t(\omega) \mu(d\omega) = \int_A M_s(\omega) \mu(d\omega) \quad (\forall A \in \mathcal{F}_s) \quad (4.23)$$

が成り立つことを示す。前段の  $(\sigma_k)_{k=0}^\infty \in \mathcal{T}$  を取れば  $M_{t \wedge \sigma_k} \rightarrow M_t$  ( $k \rightarrow \infty$ ,  $\mu$ -a.s.) が満たされ、かつ  $M^{\sigma_k} \in \mathcal{M}_{b,c}$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) であるから任意の  $k = 0, 1, \dots$  に対して

$$\int_A M_{t \wedge \sigma_k}(\omega) \mu(d\omega) = \int_A M_{s \wedge \sigma_k}(\omega) \mu(d\omega) \quad (\forall A \in \mathcal{F}_s)$$

が成り立つ。第一段の結果と Doob の不等式より  $|M_{t \wedge \sigma_k}| \leq \sup_{t \in I} |M_t| \in \mathcal{L}^2 \subset \mathcal{L}^1$  が満たされるから、Lebesgue の収束定理より (4.23) が得られる。 ■



補題 4.2.19 (停止時刻で停めた二次変分).  $\sigma, \tau$  を停止時刻とし,  $\sigma \geq \tau$  を満たしていると仮定する. このとき任意の  $M \in \mathcal{M}_{c,loc}$  に対し  $N := M^\sigma - M^\tau$  と定めれば,  $N \in \mathcal{M}_{c,loc}$  かつ

$$\langle N \rangle_t = \langle M \rangle_{t \wedge \sigma} - \langle M \rangle_{t \wedge \tau} \quad (\forall t \in I, \mu\text{-a.s.})$$

が成り立つ. 特に  $\tau = 0$  の場合, 任意の停止時刻  $\sigma$  に対し

$$\langle M^\sigma \rangle_t = \langle M \rangle_{t \wedge \sigma} \quad (\forall t \in I, \mu\text{-a.s.})$$

の関係が得られる.

証明.

第一段  $M \in \mathcal{M}_{b,c}$  の場合を考える. まず  $N \in \mathcal{M}_{b,c}$  が成り立つことを示す. 実際  $M$  がマルチンゲールであるから任意の  $\omega \in \Omega$  に対し  $t \mapsto N_t(\omega)$  は各点で右連続且つ左極限を持ち, さらに定理 4.2.3 より  $|N_t| \leq |M_{t \wedge \sigma}| + |M_{t \wedge \tau}| \leq 2 \sup_{t \in I} \|M_t\|_{\mathcal{L}^\infty} \mu\text{-a.s.}$  が成り立つから

$$\sup_{t \in I} \|N_t\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq 2 \sup_{t \in I} \|M_t\|_{\mathcal{L}^\infty} < \infty$$

が満たされる. そして任意に  $s, t \in I$  ( $s < t$ ) を取れば, 命題 2.2.4 と任意抽出定理より

$$\mathbb{E}[N_t | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[M_{t \wedge \sigma} - M_{t \wedge \tau} | \mathcal{F}_s] = M_{s \wedge \sigma} - M_{s \wedge \tau} = N_s$$

が成り立ち,  $\mu\text{-a.s.}$  に  $M = 0$  であるから  $N = 0 \mu\text{-a.s.}$  も従う. 次に

$$\langle N \rangle_t = \langle M \rangle_{t \wedge \sigma} - \langle M \rangle_{t \wedge \tau} \quad (\forall t \in I, \mu\text{-a.s.}) \quad (4.24)$$

が成り立つことを示す.

補題 4.2.15 の  $(\tau_j^n)_{j=0}^{2^n}$  と任意の  $\omega \in \Omega$  に対し或る  $i, k$  ( $i \leq k$ ) が存在して

$$\tau_i^n \leq \tau(\omega) \leq \tau_{i+1}^n \leq \sigma(\omega) \leq \tau_{i+2}^n, \quad (4.25)$$

$$\tau_i^n \leq \tau(\omega) \leq \tau_{i+1}^n < \tau_k^n \leq \sigma(\omega) \leq \tau_{k+1}^n, \quad (4.26)$$

$$\tau_i^n \leq \tau(\omega) \leq \sigma(\omega) \leq \tau_{i+1}^n, \quad (4.27)$$

のいずれかを満たす.

$$Q_i^n(N) := \sum_{j=0}^{2^n-1} \left( N_{t \wedge \tau_{j+1}^n} - N_{t \wedge \tau_j^n} \right)^2 \quad (\forall t \in I)$$

とおき, 同様に  $Q^n(M)$  も定める.  $\omega$  が (4.25) を満たしている場合,

$$\begin{aligned} Q_i^n(N)(\omega) &= \sum_{j=0}^{2^n-1} \left( N_{t \wedge \tau_{j+1}^n}(\omega) - N_{t \wedge \tau_j^n}(\omega) \right)^2 \\ &= \sum_{j=0}^{2^n-1} \left( M_{t \wedge \sigma(\omega) \wedge \tau_{j+1}^n}(\omega) - M_{t \wedge \tau(\omega) \wedge \tau_{j+1}^n}(\omega) - M_{t \wedge \sigma(\omega) \wedge \tau_j^n}(\omega) + M_{t \wedge \tau(\omega) \wedge \tau_j^n}(\omega) \right)^2 \\ &= \left( M_{t \wedge \sigma(\omega)}(\omega) - M_{t \wedge \tau_{i+1}^n}(\omega) \right)^2 + \left( M_{t \wedge \tau_{i+1}^n}(\omega) - M_{t \wedge \tau(\omega)}(\omega) \right)^2, \\ Q_{t \wedge \sigma(\omega)}^n(M)(\omega) &= \sum_{j=0}^{2^n-1} \left( M_{t \wedge \sigma(\omega) \wedge \tau_{j+1}^n}(\omega) - M_{t \wedge \sigma(\omega) \wedge \tau_j^n}(\omega) \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^i \left( M_{t \wedge \tau_{j+1}^n}(\omega) - M_{t \wedge \tau_j^n}(\omega) \right)^2 + \left( M_{t \wedge \sigma(\omega)}(\omega) - M_{t \wedge \tau_{i+1}^n}(\omega) \right)^2, \\
Q_{t \wedge \tau(\omega)}^n(M)(\omega) &= \sum_{j=0}^{2^n-1} \left( M_{t \wedge \tau(\omega) \wedge \tau_{j+1}^n}(\omega) - M_{t \wedge \tau(\omega) \wedge \tau_j^n}(\omega) \right)^2 \\
&= \sum_{j=0}^{i-1} \left( M_{t \wedge \tau_{j+1}^n}(\omega) - M_{t \wedge \tau_j^n}(\omega) \right)^2 + \left( M_{t \wedge \tau(\omega)}(\omega) - M_{t \wedge \tau_i^n}(\omega) \right)^2
\end{aligned}$$

と表せるから

$$\begin{aligned}
&\left| Q_t^n(N)(\omega) - \left( Q_{t \wedge \sigma(\omega)}^n(M)(\omega) - Q_{t \wedge \tau(\omega)}^n(M)(\omega) \right) \right| \\
&\leq \left( M_{t \wedge \tau_{i+1}^n}(\omega) - M_{t \wedge \tau(\omega)}(\omega) \right)^2 + \left( M_{t \wedge \tau_{i+1}^n}(\omega) - M_{t \wedge \tau_i^n}(\omega) \right)^2 + \left( M_{t \wedge \tau(\omega)}(\omega) - M_{t \wedge \tau_i^n}(\omega) \right)^2 \\
&\leq 3 \sup_{|t-s| \leq T/2^n} |M_t(\omega) - M_s(\omega)|^2
\end{aligned}$$

が成り立つ．同様にして  $\omega$  が (4.26) 或は (4.27) を満たしている場合も

$$\left| Q_t^n(N)(\omega) - \left( Q_{t \wedge \sigma(\omega)}^n(M)(\omega) - Q_{t \wedge \tau(\omega)}^n(M)(\omega) \right) \right| \leq 3 \sup_{|t-s| \leq T/2^n} |M_t(\omega) - M_s(\omega)|^2$$

が成り立つから，つまり全ての  $\omega \in \Omega$  に対し

$$\left| Q_t^n(N)(\omega) - \left( Q_{t \wedge \sigma(\omega)}^n(M)(\omega) - Q_{t \wedge \tau(\omega)}^n(M)(\omega) \right) \right| \leq 3 \sup_{|t-s| \leq T/2^n} |M_t(\omega) - M_s(\omega)|^2 \quad (4.28)$$

が満たされる．更に  $t \mapsto M_t$  が  $\mu$ -a.s. に一様連続であるから，或る零集合  $A_1$  が存在して

$$3 \sup_{|t-s| \leq T/2^n} |M_t(\omega) - M_s(\omega)|^2 \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty, \omega \in \Omega \setminus A_1) \quad (4.29)$$

が従う．また定理 4.2.16 の証明中の (4.20) より， $(Q^n(M))_{n=1}^\infty$  の或る凸結合列  $(\hat{Q}^n(M))_{n=1}^\infty$ ，或る零集合  $A_2$  及び或る部分添数列  $(n_k)_{k=1}^\infty$  が存在して，全ての  $t \in I$  と  $\omega \in \Omega \setminus A_2$  に対し

$$\hat{Q}_t^{n_k}(M)(\omega) \longrightarrow \langle M \rangle_t(\omega) \quad (k \longrightarrow \infty)$$

を満たす．従って全ての  $t \in I$ ,  $\omega \in \Omega \setminus A_2$  に対し

$$\hat{Q}_{t \wedge \sigma(\omega)}^{n_k}(M)(\omega) \longrightarrow \langle M \rangle_{t \wedge \sigma(\omega)}(\omega), \quad \hat{Q}_{t \wedge \tau(\omega)}^{n_k}(M)(\omega) \longrightarrow \langle M \rangle_{t \wedge \tau(\omega)}(\omega) \quad (k \longrightarrow \infty) \quad (4.30)$$

も成り立つ．各  $n \in \mathbb{N}$  についての凸結合を

$$\hat{Q}^n(M) = \sum_{j=0}^\infty c_j^n Q^{n+j}(M), \quad \left( \sum_{j=0}^\infty c_j^n = 1 \right)$$

と表し，

$$\hat{Q}^n(N) := \sum_{j=0}^\infty c_j^n Q^{n+j}(N)$$

とおけば, (4.28) より全ての  $\omega \in \Omega$  に対し

$$\begin{aligned}
& \left| \hat{Q}_t^n(N)(\omega) - \left( \hat{Q}_{t \wedge \sigma(\omega)}^n(M)(\omega) - \hat{Q}_{t \wedge \tau(\omega)}^n(M)(\omega) \right) \right| \\
&= \left| \sum_{j=0}^{\infty} c_j^n \mathcal{Q}_t^{n+j}(N)(\omega) - \left( \mathcal{Q}_{t \wedge \sigma(\omega)}^{n+j}(M)(\omega) - \mathcal{Q}_{t \wedge \tau(\omega)}^{n+j}(M)(\omega) \right) \right| \\
&\leq \sum_{j=0}^{\infty} c_j^n \left| \mathcal{Q}_t^{n+j}(N)(\omega) - \left( \mathcal{Q}_{t \wedge \sigma(\omega)}^{n+j}(M)(\omega) - \mathcal{Q}_{t \wedge \tau(\omega)}^{n+j}(M)(\omega) \right) \right| \\
&\leq 3 \sup_{|t-s| \leq T/2^n} |M_t(\omega) - M_s(\omega)|^2 \quad (n = 1, 2, \dots)
\end{aligned}$$

が成り立つから, (4.29) と (4.30) より全ての  $t \in I$ ,  $\omega \in \Omega \setminus (A_1 \cup A_2)$  に対して

$$|\langle M \rangle_{t \wedge \sigma(\omega)}(\omega) - \langle M \rangle_{t \wedge \tau(\omega)}(\omega) - \hat{Q}_t^{n_k}(N)(\omega)| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成り立つ. このとき

$$\langle N \rangle_t = \langle M \rangle_{t \wedge \sigma} - \langle M \rangle_{t \wedge \tau} \quad (\forall t \in I, \mu\text{-a.s.})$$

が成立する.

定理 4.2.16 より  $M$  に対し二次変分  $\langle M \rangle$  が存在して

$$N_t - (\langle M \rangle_{t \wedge \sigma} - \langle M \rangle_{t \wedge \tau}) = (M - \langle M \rangle)_{t \wedge \sigma} - (M - \langle M \rangle)_{t \wedge \tau} \quad (\forall t \in I)$$

と表せる.  $M - \langle M \rangle \in \mathcal{M}_{b,c}$  であるから, 上と同様にして  $(M - \langle M \rangle)^\sigma - (M - \langle M \rangle)^\tau \in \mathcal{M}_{b,c}$  が成り立つ. また全ての  $\omega \in \Omega$  に対し  $\langle M \rangle_0(\omega) = 0$  が満たされ, 更に  $\sigma \geq \tau$  により全ての  $\omega \in \Omega$  に対し  $I \ni t \mapsto \langle M \rangle_{t \wedge \sigma(\omega)}(\omega) - \langle M \rangle_{t \wedge \tau(\omega)}(\omega)$  は連続且つ単調非減少である. 従って定理 4.2.16 の意味での二次変分の一意性より (4.24) が得られる.

第二段  $M \in \mathcal{M}_{c,loc}$  のとき, 或る  $(\tau_j)_{j=0}^\infty \in \mathcal{T}$  が存在して  $M^{\tau_j} \in \mathcal{M}_{b,c}$  となる. 全ての  $j \in \mathbb{N}$  で

$$N_t^{\tau_j} = M_{t \wedge \sigma}^{\tau_j} - M_{t \wedge \tau}^{\tau_j} \quad (\forall t \in I)$$

が成り立つから, 前段の考察より各  $j$  に対し  $N^{\tau_j}, (N^{\tau_j})^2 - \langle N^{\tau_j} \rangle \in \mathcal{M}_{b,c}$  且つ

$$\langle N^{\tau_j} \rangle_t = \langle M^{\tau_j} \rangle_{t \wedge \sigma} - \langle M^{\tau_j} \rangle_{t \wedge \tau} \quad (\forall t \in I, \mu\text{-a.s.})$$

が満たされる. 一方  $N \in \mathcal{M}_{c,loc}$  であるから, 定理 4.2.16 より  $\langle N \rangle$  が存在して  $(N^2 - \langle N \rangle)^{\tau_j} = (N^{\tau_j})^2 - \langle N^{\tau_j} \rangle \in \mathcal{M}_{b,c}$  ( $j = 0, 1, \dots$ ) も満たされ, 二次変分の一意性より各  $j$  について

$$\langle N^{\tau_j} \rangle_t = \langle N \rangle_{t \wedge \tau_j} \quad (\forall t \in I, \mu\text{-a.s.})$$

が成り立ち, 同じ理由で

$$\langle M^{\tau_j} \rangle_t = \langle M \rangle_{t \wedge \tau_j} \quad (\forall t \in I, \mu\text{-a.s.})$$

も得られる. すなわち或る零集合  $A_j, B_j, C_j$  ( $j = 0, 1, \dots$ ) が存在して

$$\begin{aligned}
\langle N^{\tau_j} \rangle_t(\omega) &= \langle M^{\tau_j} \rangle_{t \wedge \sigma(\omega)}(\omega) - \langle M^{\tau_j} \rangle_{t \wedge \tau(\omega)}(\omega) & (\forall t \in I, \omega \in \Omega \setminus A_j), \\
\langle N^{\tau_j} \rangle_t(\omega) &= \langle N \rangle_{t \wedge \tau_j(\omega)}(\omega) & (\forall t \in I, \omega \in \Omega \setminus B_j), \\
\langle M^{\tau_j} \rangle_t(\omega) &= \langle M \rangle_{t \wedge \tau_j(\omega)}(\omega) & (\forall t \in I, \omega \in \Omega \setminus C_j)
\end{aligned}$$

が満たされるから,

$$A := \bigcup_{j=0}^{\infty} A_j, \quad B := \bigcup_{j=0}^{\infty} B_j, \quad C := \bigcup_{j=0}^{\infty} C_j, \quad E := A \cup B \cup C$$

として零集合  $E$  を定めれば

$$\langle N \rangle_t(\omega) = \langle M \rangle_{t \wedge \sigma(\omega)}(\omega) - \langle M \rangle_{t \wedge \tau(\omega)}(\omega) \quad (\forall t \in I, \omega \in \Omega \setminus E)$$

が従い主張を得る. ■

## 第 5 章

# 伊藤積分

$I := [0, T]$  ( $T > 0$ ) に対して, 基礎に置くフィルター付き確率空間を  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, (\mathcal{F}_t)_{t \in I})$  とする. また次を仮定する:

$$\mathcal{N} := \{ N \in \mathcal{F} ; \quad \mu(N) = 0 \} \subset \mathcal{F}_0.$$

以後, 確率過程が連続 (resp. 右連続, 左連続) であるとき書く場合は全てのパスが連続 (resp. 右連続, 左連続) であることを指す.

### 5.1 パスの変動を制限する停止時刻

定義 5.1.1 (パスの変動を制限する停止時刻).  $X = (X^1, \dots, X^d)$  を連続な  $\mathbb{R}^d$  値適合過程<sup>\*1</sup>とする.  $X$  と  $\epsilon > 0$  に対して

$$\sum_{i=1}^d \|X_{t \wedge \tau_{j+1}}^i - X_{t \wedge \tau_j}^i\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq \epsilon, \quad (\forall t \in I, j = 0, 1, 2, \dots)$$

を満たす  $(\tau_j)_{j=0}^\infty \in \mathcal{T}$  の全体を  $\mathcal{T}(X, \epsilon)$  と表す.

定理 5.1.2 (パスの変動を制限する停止時刻の存在).  $X = (X^1, \dots, X^d)$  を連続な  $\mathbb{R}^d$  値適合過程とする. 任意の  $\epsilon > 0$  に対して,  $\tau_0 = 0$  かつ

$$\tau_{j+1}(\omega) := \inf \left\{ t \in I ; \quad |X_t(\omega) - X_{t \wedge \tau_j(\omega)}(\omega)| \geq \epsilon/d \right\} \wedge T, \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

と定めれば  $(\tau_j)_{j=0}^\infty \in \mathcal{T}(X, \epsilon)$  となる.

証明. 数学的帰納法で示す.  $\tau_0$  は定義より停止時刻であるから,  $\tau_j$  が停止時刻であると仮定して  $\tau_{j+1}$  が停止時刻となることを示せばよい.

<sup>\*1</sup> 定理 3.2.7 により, 任意の停止時刻  $\tau$  に対し写像  $\omega \mapsto X^i(\tau(\omega), \omega)$  ( $i = 1, \dots, d$ ) は可測  $\mathcal{F}_\tau / \mathcal{B}(\mathbb{R})$  となり,  $\|X_{t \wedge \tau_{j+1}}^i - X_{t \wedge \tau_j}^i\|_{\mathcal{L}^\infty}$  を考えることができる.

第一段

$$I \ni t \mapsto \sup_{s \in [0, t]} |X_s - X_{s \wedge \tau_j}|$$

は連続であり

$$\Omega \ni \omega \mapsto \sup_{s \in [0, t]} |X_s(\omega) - X_{s \wedge \tau_j}(\omega)|$$

は全ての  $t \in I$  に対し可測  $\mathcal{F}_t/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  であることを示す.

**連続性** 任意に  $t \in I$  を取り  $t$  における連続性を調べる. 表記を簡単にするため, 任意の  $\omega \in \Omega$  に対し

$$f_\omega(t) := |X_t(\omega) - X_{t \wedge \tau_j}(\omega)| \quad (t \in I)$$

とおく.  $f_\omega(t) < \sup_{s \in [0, t]} f_\omega(s)$  の場合,  $s \mapsto f_\omega(s)$  の連続性より  $t$  の十分小さな近傍を取っても上限は変化しない.  $f_\omega(t) = \sup_{s \in [0, t]} f_\omega(s)$  の場合,  $s < t$  なら

$$\sup_{u \in [0, t]} f_\omega(u) - \sup_{u \in [0, s]} f_\omega(u) \leq f_\omega(t) - f_\omega(s)$$

となり,  $s \mapsto f_\omega(s)$  が連続だから左側で連続である. 同じく  $s \mapsto f_\omega(s)$  の連続性より, 任意の  $\delta > 0$  に対し十分小さな  $h > 0$  を取れば, 全ての  $t < u < t + h$  に対し

$$f_\omega(u) < f_\omega(t) + \delta$$

とできるから

$$\sup_{u \in [0, s]} f_\omega(u) - f_\omega(t) < \delta \quad (t < \forall s < t + h)$$

が成り立つ.

**可測性** 定理 3.2.7 により  $X_{s \wedge \tau_j}$  は  $\mathcal{F}_{s \wedge \tau_j}$ -可測であるから,  $X$  の適合性及び絶対値の連続性と併せて写像  $|X_s - X_{s \wedge \tau_j}|$  は可測  $\mathcal{F}_s/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ , すなわち可測  $\mathcal{F}_t/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  となる.

$$D_t^n := \left\{ \frac{jt}{2^n} ; \quad j = 0, 1, \dots, 2^n \right\} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

として,  $X$  のパスの連続性により

$$\sup_{s \in [0, t]} |X_s(\omega) - X_{s \wedge \tau_j}(\omega)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{s \in D_t^n} |X_s(\omega) - X_{s \wedge \tau_j}(\omega)| \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

が成り立つから  $\sup_{s \in [0, t]} |X_s - X_{s \wedge \tau_j}|$  も可測  $\mathcal{F}_t/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  となる.

**第二段**  $\tau_j$  が停止時刻であるとして  $\tau_{j+1}$  が停止時刻であることを示す. 前段の結果より, 任意の  $t \in [0, T)$  に対して

$$\{\tau_{j+1} \leq t\} = \left\{ \sup_{s \in [0, t]} |X_s - X_{s \wedge \tau_j}| \geq \epsilon/d \right\} \quad (5.1)$$

が成り立つことをいえばよい.  $t = T$  の場合は  $\{\tau_{j+1} \leq T\} = \Omega$  である.

$$\sup_{s \in [0, t]} |X_s(\omega) - X_{s \wedge \tau_j}(\omega)| < \epsilon/d$$

を満たす  $\omega$  について，前段で示した連続性より，或る  $h > 0$  が取れて  $[0, t + h]$  が  $\{u \in I; |X_u(\omega) - X_{u \wedge \tau_j(\omega)}(\omega)| \geq \epsilon/d\}$  の下界の集合となるから  $t < \tau_{j+1}(\omega)$  が従う．逆に

$$\sup_{s \in [0, t]} |X_s(\omega) - X_{s \wedge \tau_j(\omega)}(\omega)| \geq \epsilon/d$$

を満たす  $\omega$  について，パスの連続性より  $\sup$  は  $\max$  と一致するから，或る  $u \in [0, t]$  で

$$|X_u(\omega) - X_{u \wedge \tau_j(\omega)}(\omega)| \geq \epsilon/d$$

が成り立ち  $\tau_{j+1}(\omega) \leq u \leq t$  が従う．以上で (5.1) が示された．前段で示した可測性より

$$\{\tau_{j+1} \leq t\} = \left\{ \sup_{s \in [0, t]} |X_s - X_{s \wedge \tau_j}| \geq \epsilon/d \right\} \in \mathcal{F}_t$$

が任意の  $t \in I$  に対して成立するから  $\tau_{j+1}$  は停止時刻である．

第三段  $(\tau_j)_{j=0}^\infty$  が  $\mathcal{T}$  の元であることを示す．今任意に  $\omega \in \Omega$  を取り固定する．先ず定義より  $\tau_0(\omega) = 0$  は満たされている．また，各  $j \in \mathbb{N}_0$  について  $\tau_{j+1}(\omega)$  は

$$|X_t(\omega) - X_{t \wedge \tau_j(\omega)}(\omega)| \geq \epsilon/d$$

を満たす  $t$  の下限であり， $t \leq \tau_j(\omega)$  のときは左辺が 0 となるから

$$\tau_j(\omega) < \tau_{j+1}(\omega) \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

を満たす．

第四段  $(\tau_j)_{j=0}^\infty \in \mathcal{T}(X, \epsilon)$  を示す．任意に  $\omega \in \Omega$  と  $t \in I$  を取り固定する． $(\tau_j)_{j=0}^\infty$  の作り方より

$$|X_{t \wedge \tau_{j+1}(\omega)}(\omega) - X_{t \wedge \tau_j(\omega)}(\omega)| \leq \epsilon/d \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

が満たされている．実際もし或る  $j$  で

$$|X_{t \wedge \tau_{j+1}(\omega)}(\omega) - X_{t \wedge \tau_j(\omega)}(\omega)| > \epsilon/d$$

が成り立つとすれば，この場合は  $t \geq \tau_j(\omega)$  でなくてはならないが， $t \geq \tau_{j+1}(\omega)$  ならば，パスの連続性より  $\tau_{j+1}(\omega) > s$  を満たす  $s$  についても

$$|X_s(\omega) - X_{\tau_j(\omega)}(\omega)| > \epsilon/d$$

が成り立ち，下限の定義から  $\tau_{j+1}(\omega) > s \geq \tau_{j+1}(\omega)$  が従い矛盾が生じる． $t < \tau_{j+1}(\omega)$  のときも  $\tau_{j+1}(\omega) > t \geq \tau_{j+1}(\omega)$  が従い矛盾が生じる．よって

$$|X_{t \wedge \tau_{j+1}(\omega)}^i(\omega) - X_{t \wedge \tau_j(\omega)}^i(\omega)| \leq \epsilon/d \quad (i = 1, \dots, d, j = 0, 1, 2, \dots)$$

が成り立ち， $\omega, t$  の任意性から

$$\sum_{i=1}^d \|X_{t \wedge \tau_{j+1}}^i - X_{t \wedge \tau_j}^i\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq \epsilon \quad (\forall t \in I, j = 0, 1, 2, \dots)$$

が従う．

■

定理 5.1.3 (停止時刻によるパスの変動の制限).  $X = (X^1, \dots, X^d)$  を連続な  $\mathbb{R}^d$  値適合過程とし, 任意に  $\epsilon > 0$  を取る. このとき任意の  $(\tau_j)_{j=0}^\infty \in \mathcal{T}(X, \epsilon)$  に対して或る零集合  $N$  が存在し, 任意の  $\omega \in \Omega \setminus N$  に対して

$$\tau_0(\omega) = 0, \quad \tau_j(\omega) \leq \tau_{j+1}(\omega) \ (j = 1, 2, \dots), \quad \tau_n(\omega) = T \ (\exists n = n(\omega) \in \mathbb{N})$$

かつ

$$\sum_{i=1}^d \left| X_{t \wedge \tau_{j+1}}^i(\omega) - X_{t \wedge \tau_j}^i(\omega) \right| \leq \epsilon, \quad (\forall t \in I, j = 0, 1, 2, \dots)$$

が満たされる.

証明. 任意に  $t \in I$  を取り固定する.

$$A_{t,j}^i := \left\{ \left| X_{t \wedge \tau_{j+1}}^i - X_{t \wedge \tau_j}^i \right| > \left\| X_{t \wedge \tau_{j+1}}^i - X_{t \wedge \tau_j}^i \right\|_{\mathcal{L}^\infty} \right\} \quad (i = 1, \dots, d, j = 0, 1, 2, \dots)$$

とおけば, 補題 1.1.1 により  $A_{t,j}^i$  は  $\mu$ -零集合となる. また

$$A_{t,j} := \bigcup_{i=1}^d A_{t,j}^i, \quad A_t := \bigcup_{j=0}^\infty A_{t,j}$$

とおけば, 任意の  $\omega \in \Omega \setminus A_t$  に対して

$$\sum_{i=1}^d \left| X_{t \wedge \tau_{j+1}}^i(\omega) - X_{t \wedge \tau_j}^i(\omega) \right| \leq \epsilon, \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

が成り立つ. 更に

$$A := \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap I} A_r$$

とすれば, 任意の  $\omega \in \Omega \setminus A$  に対して

$$\sum_{i=1}^d \left| X_{t \wedge \tau_{j+1}}^i(\omega) - X_{t \wedge \tau_j}^i(\omega) \right| \leq \epsilon, \quad (\forall t \in I, j = 0, 1, 2, \dots)$$

が成り立つ. 実際もし或る  $t \in I, j \in \mathbb{N}_0$  で

$$\sum_{i=1}^d \left| X_{t \wedge \tau_{j+1}}^i(\omega) - X_{t \wedge \tau_j}^i(\omega) \right| > \epsilon$$

となると,  $t \mapsto X_t$  の連続性より或る  $r \in \mathbb{Q} \cap I$  に対して

$$\sum_{i=1}^d \left| X_{r \wedge \tau_{j+1}}^i(\omega) - X_{r \wedge \tau_j}^i(\omega) \right| > \epsilon$$

が従うがこれは矛盾である.  $(\tau_j)_{j=0}^\infty \in \mathcal{T}$  でもあるから, 或る  $\mu$ -零集合  $B$  が存在し, 任意の  $\omega \in \Omega \setminus B$  に対して

$$\tau_0(\omega) = 0, \quad \tau_j(\omega) \leq \tau_{j+1}(\omega) \ (j = 1, 2, \dots), \quad \tau_n(\omega) = T \ (\exists n = n(\omega) \in \mathbb{N})$$

を満たす. 従って  $N := A \cup B$  とすればよい. ■



## 5.2 可予測過程

定義 5.2.1 (可予測  $\sigma$ -加法族・可予測過程).  $\{0\} \times A$  ( $A \in \mathcal{F}_0$ ) の形, 或は  $(s, t] \times A$  ( $(s, t] \subset I, A \in \mathcal{F}_s$ ) の形の  $I \times \Omega$  の部分集合の全体を  $\Pi$  とおく. そして  $\Pi$  の生成する  $\sigma$ -加法族を  $\mathcal{P}$  と表し, これを可予測  $\sigma$ -加法族 (predictable  $\sigma$ -algebra) と呼ぶ. また  $\mathcal{P}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  可測の関数を可予測過程 (predictable process) という.

補題 5.2.2 ( $\Pi$  は乗法族). 定義 5.2.1 の  $\Pi$  は乗法族である.

証明. 任意に  $B_1, B_2 \in \Pi$  を取り,  $B_1 = (s_1, t_1] \times A_1, B_2 = (s_2, t_2] \times A_2$  ( $A_1 \in \mathcal{F}_{s_1}, A_2 \in \mathcal{F}_{s_2}, s_1 \leq s_2$ ) と仮定する.  $t_1 \leq s_2$  なら  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$  であり,  $s_2 < t_1$  とすれば  $A_1 \in \mathcal{F}_{s_2}$  であるから

$$B_1 \cap B_2 = (s_2, t_1 \wedge t_2] \times (A_1 \cap A_2) \in \Pi$$

が成り立つ.  $B_1 = \{0\} \times A_1$  ( $A_1 \in \mathcal{F}_0$ ) の場合,  $B_2 = \{0\} \times A_2$  ( $A_2 \in \mathcal{F}_0$ ) の形であれば  $B_1 \cap B_2 = \{0\} \times (A_1 \cap A_2)$ , そうでなければ  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$  となり, いずれの場合も交演算で閉じている. ■

補題 5.2.3 (可予測単関数の時間に関する可測性). 任意の  $B \in \mathcal{P}$  と任意の  $\omega \in \Omega$  に対し  $f_B : I \ni t \mapsto \mathbb{1}_B(t, \omega)$  は可測  $\mathfrak{B}(I)/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  である.

証明. 任意に  $C \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  を取り固定する.

$$\mathcal{D} := \{ B \in \mathcal{P} ; f_B \text{ が可測 } \mathfrak{B}(I)/\mathfrak{B}(\mathbb{R}). \}$$

とおけば  $\mathcal{D}$  は Dynkin 族である. 実際次が成り立つ:

- $B = I \times \Omega$  なら  $f_B^{-1}(C) = I$  又は  $\emptyset$  であるから  $I \times \Omega \in \mathcal{D}$  である.
- $B_1, B_2 \in \mathcal{D}$ ,  $B_1 \subset B_2$  に対して,  $f_{B_2 \setminus B_1} = f_{B_2} - f_{B_1}$  より  $B_2 \setminus B_1 \in \mathcal{D}$  が成り立つ.
- 互いに素な列  $B_n \in \mathcal{D}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) に対して,  $f_{\sum_{n=1}^{\infty} B_n} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{B_n}$  より  $\sum_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{D}$  が成り立つ.

補題 5.2.2 より  $\Pi$  は乗法族であるから,  $\Pi \subset \mathcal{D}$  ならば Dynkin 族定理により補題の主張が従う.

$B = (s, t] \times A$  ( $(s, t] \subset I, A \in \mathcal{F}_s$ ) と表されるとすれば,  $\omega \in A$  のとき

$$f_B^{-1}(C) = \begin{cases} I & (0 \in C, 1 \in C) \\ (s, t] & (0 \notin C, 1 \in C) \\ I \setminus (s, t] & (0 \in C, 1 \notin C) \\ \emptyset & (0 \notin C, 1 \notin C) \end{cases}$$

が成り立ち,  $\omega \notin A$  のとき

$$f_B^{-1}(C) = \begin{cases} I & (0 \in C) \\ \emptyset & (0 \notin C) \end{cases}$$

が成り立つ.  $B = \{0\} \times A$  の場合も同様であるから, いずれの場合も  $f_B^{-1}(C) \in \mathfrak{B}(I)$  を満たす. ■

定理 5.2.4 (( $\Omega \times I, \mathcal{P}$ ) における測度の構成). 任意の  $M \in \mathcal{M}_{2,c}, B \in \mathcal{P}$  に対して

$$\mu_M(B) := \int_{\Omega} \int_I \mathbb{1}_B(s, \omega) \langle M \rangle(ds, \omega) \mu(d\omega) \quad (5.2)$$

と定めれば,  $\mu_M$  は可測空間  $(I \times \Omega, \mathcal{P})$  上の有限測度となる.

証明.

第一段 任意の  $B \in \mathcal{P}, t \in I$  に対して

$$\Omega \ni \omega \mapsto \int_{[0,t]} \mathbb{1}_B(s, \omega) \langle M \rangle(ds, \omega) \quad (5.3)$$

が可測  $\mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  であることを示す\*2.  $I \ni t \mapsto \langle M \rangle_t$  の単調非減少性より

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{[0,t]} \mathbb{1}_B(s, \omega) \langle M \rangle(ds, \omega) \\ &\leq \int_{[0,t]} \langle M \rangle(ds, \omega) = \langle M \rangle(t, \omega) < \infty \quad (\forall t \in I, B \in \mathcal{P}, \omega \in \Omega) \end{aligned} \quad (5.4)$$

が成り立ち, いかなる場合も可積分性は保証される.

$$\mathcal{D} := \{ B \in \mathcal{P} ; \text{ 任意の } t \in I \text{ に対し (5.3) が可測 } \mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R}). \}$$

とおけば  $\mathcal{D}$  は Dynkin 族である. 実際以下が成り立つ:

- $B = I \times \Omega$  の場合, (5.4) と  $\langle M \rangle$  の適合性より (5.3) は可測  $\mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  となる.
- $B_1, B_2 \in \mathcal{P}, B_1 \subset B_2$  に対して, (5.3) の積分は可積分であるから線型性より

$$\begin{aligned} &\int_{[0,t]} \mathbb{1}_{B_2 \setminus B_1}(s, \omega) \langle M \rangle(ds, \omega) \\ &= \int_{[0,t]} \mathbb{1}_{B_2}(s, \omega) \langle M \rangle(ds, \omega) - \int_{[0,t]} \mathbb{1}_{B_1}(s, \omega) \langle M \rangle(ds, \omega) \end{aligned}$$

が成り立ち  $B_2 \setminus B_1 \in \mathcal{P}$  が従う.

- 互いに素な列  $B_n \in \mathcal{P} (n \in \mathbb{N})$  に対して, 単調収束定理より

$$\int_{[0,t]} \mathbb{1}_{\sum_{n=1}^{\infty} B_n}(s, \omega) \langle M \rangle(ds, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,t]} \mathbb{1}_{B_n}(s, \omega) \langle M \rangle(ds, \omega) \quad (5.5)$$

が成り立つ. (5.4) より  $\omega$  ごとに右辺の級数は有限確定し  $\sum_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{P}$  が従う.

補題 5.2.3 と同様に  $\Pi \subset \mathcal{D}$  となることを示せば, Dynkin 族定理より第一段の主張が従う.

$B = (\alpha, \beta] \times A$  ( $A \in \mathcal{F}_{\alpha}$ ) として, 全ての  $\omega \in \Omega$  に対し

$$\begin{aligned} \int_{[0,t]} \mathbb{1}_B(s, \omega) \langle M \rangle(ds, \omega) &= \mathbb{1}_A(\omega) \int_{[0,t]} \mathbb{1}_{(\alpha, \beta]}(s) \langle M \rangle(ds, \omega) \\ &= \begin{cases} 0 & (t \leq \alpha) \\ \mathbb{1}_A(\omega) (\langle M \rangle(t \wedge \beta, \omega) - \langle M \rangle(\alpha, \omega)) & (t > \alpha) \end{cases} \end{aligned}$$

\*2 補題 5.2.3 より可測性が保証されているから, (5.3) の積分は Lebesgue-Stieltjes 積分として定義される.

が成り立つから,  $A \in \mathcal{F}_t$  であることと  $\langle M \rangle$  の適合性から  $(\alpha, \beta] \times A \in \mathcal{D}$  が従う.  $B = \{0\} \times A$  ( $A \in \mathcal{F}_0$ ) の場合は積分は常に 0 になる. 以上で (5.2) 右辺の積分が定義される.

第二段 (5.2) で定める  $\mu_M$  が測度となることを示す. 先ず  $\mu_M$  の正值性は (5.4) より従う. また互いに素な列  $B_n \in \mathcal{P}$  を取れば, (5.5) と単調収束定理より

$$\int_{\Omega} \int_I \mathbb{1}_{\sum_{n=1}^{\infty} B_n}(s, \omega) \langle M \rangle(ds, \omega) \mu(d\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} \int_I \mathbb{1}_{B_n}(s, \omega) \langle M \rangle(ds, \omega) \mu(d\omega)$$

が成り立ち  $\mu_M$  の完全加法性が従う. また定理 4.2.16 より  $\langle M \rangle_T$  は可積分であるから,

$$\mu_M(I \times \Omega) = \int_{\Omega} \int_I \langle M \rangle(ds, \omega) \mu(d\omega) = \int_{\Omega} \langle M \rangle_T(\omega) \mu(d\omega) < \infty$$

より  $\mu_M$  の有限性を得る. ■

定義 5.2.5 (単純可予測過程).  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ ,  $F \in \mathcal{L}^{\infty}(\Omega, \mathcal{F}_0, \mu)$ ,  $F_i \in \mathcal{L}^{\infty}(\Omega, \mathcal{F}_{t_i}, \mu)$  ( $i = 0, \dots, n-1$ ) を任意に取り構成する次の過程

$$X(t, \omega) := F(\omega) \mathbb{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} F_i(\omega) \mathbb{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t) \quad (\forall \omega \in \Omega, t \in I) \quad (5.6)$$

を単純可予測過程 (simple predictable process) という. 単純可予測過程の全体を  $\mathcal{S}$  と表す. また  $\mathcal{S}$  を  $\mu_M$ -a.s. に等しい関数類  $[\cdot]_{\mathfrak{S}}$  でまとめた商集合を  $\mathfrak{S}$  と表す.

補題 5.2.6 (単純可予測過程の性質).  $M \in \mathcal{M}_{2,c}$  とする.

- (1)  $\mathcal{S}$  は  $\mathbb{R}$  上の線形空間をなす.
- (2) 任意の  $X \in \mathcal{S}$  は可測  $\mathcal{P}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  である.
- (3) 任意の  $\mathcal{P}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ -可測可積分関数  $Y$  に対し次が成り立つ:

$$\int_{I \times \Omega} Y(t, \omega) \mu_M(dt d\omega) = \int_{\Omega} \int_I Y(t, \omega) \langle M \rangle(dt, \omega) \mu(d\omega). \quad (5.7)$$

- (4)  $\mathcal{S}$  は  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^2(\mu_M)}$  に関して  $\mathcal{L}^2(\mathcal{P}, \mu_M)$  の稠密な部分空間である. これにより,  $\mathfrak{S}$  から  $L^2(\mathcal{P}, \mu_M)$  への等長<sup>\*3</sup>埋め込みを  $J$  とすれば  $J\mathfrak{S}$  は  $L^2(\mathcal{P}, \mu_M)$  において稠密である.

証明.

- (1)  $\mathcal{S}$  が線型演算について閉じていることを示す.  
加法  $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$  を取れば, 定義 5.2.5 に従って

$$S_1 = F \mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{i=0}^{n-1} F_i \mathbb{1}_{(t_i, t_{i+1}]}, \quad S_2 = G \mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{j=0}^{m-1} G_j \mathbb{1}_{(s_j, s_{j+1}]}$$

<sup>\*3</sup> ノルム  $\|\cdot\|_{L^2(\mu_M)}$  に関する等長性を指す.

と表現できる．今，時点の分点の合併が  $0 = u_0 < u_1 < \cdots < u_r = T$  であるとする．

$$\begin{aligned}\tilde{F}_k &:= F_i \quad (t_i \leq u_k < t_{i+1}, i = 0, \dots, n-1), \\ \tilde{G}_k &:= G_j \quad (s_j \leq u_k < s_{j+1}, j = 0, \dots, m-1)\end{aligned}$$

とおけば，全ての  $k = 0, \dots, r-1$  に対し  $\tilde{F}_k, \tilde{G}_k \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}_{u_k}, \mu)$  であり，また

$$S_1 = F \mathbb{1}_{[0]} + \sum_{k=0}^{r-1} \tilde{F}_k \mathbb{1}_{(u_k, u_{k+1}]}, \quad S_2 = G \mathbb{1}_{[0]} + \sum_{k=0}^{r-1} \tilde{G}_k \mathbb{1}_{(u_k, u_{k+1}]}$$

と表現しなおせば

$$S_1 + S_2 = (F + G) \mathbb{1}_{[0]} + \sum_{k=0}^{r-1} (\tilde{F}_k + \tilde{G}_k) \mathbb{1}_{(u_k, u_{k+1}]}$$

が成り立つ． $\mathcal{L}^\infty$  の線型性より  $S_1 + S_2 \in \mathcal{S}$  が従う．

スカラ倍  $S \in \mathcal{S}$  と  $\alpha \in \mathbb{R}$  を取れば，

$$S = F \mathbb{1}_{[0]} + \sum_{i=0}^{n-1} F_i \mathbb{1}_{(t_i, t_{i+1}]}$$

と表されているとして

$$\alpha S = \alpha F \mathbb{1}_{[0]} + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha F_i \mathbb{1}_{(t_i, t_{i+1}]}$$

となる． $\mathcal{L}^\infty$  の線型性より  $\alpha S \in \mathcal{S}$  が従う．

- (2) (5.6) の各項が可測  $\mathcal{P}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  であることを示す．任意に  $(s, t] \in I$  と  $F \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}_s, \mu)$  を取る． $F$  の単関数近似列  $(F_n)_{n=1}^\infty$  の一つ一つは

$$F_n = \sum_{j=1}^{N_n} \alpha_j^n \mathbb{1}_{A_j^n} \quad (\alpha_j^n \in \mathbb{R}, A_j^n \in \mathcal{F}_s, \sum_{j=1}^{N_n} A_j^n = \Omega)$$

と表現され，各  $j = 1, \dots, N_n$  について

$$I \times \Omega \ni (u, \omega) \mapsto \mathbb{1}_{A_j^n}(\omega) \mathbb{1}_{(s, t]}(u)$$

が可測  $\mathcal{P}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  であるから， $F_n \mathbb{1}_{(s, t]}$  及びその各点極限の  $F \mathbb{1}_{(s, t]}$  も可測  $\mathcal{P}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  である．

- (3)  $\mathcal{P}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -可測可積分関数  $Y$  が非負値の場合， $Y$  の単関数近似列  $(Y_n)_{n=1}^\infty$  を  $0 \leq Y_n \leq Y_{n+1} \leq Y$  を満たすように取る．各  $Y_n$  については， $\alpha_i^n \in \mathbb{R}, A_i^n \in \mathcal{P}(\sum_{i=1}^{N_n} A_i^n = I \times \Omega)$  により

$$Y_n = \sum_{i=1}^{N_n} \alpha_i^n \mathbb{1}_{A_i^n}$$

の形で表現できるから

$$\begin{aligned}\int_{I \times \Omega} Y_n(t, \omega) \mu_M(dt d\omega) &= \sum_{i=1}^{N_n} \alpha_i^n \mu_M(A_i^n) \\ &= \sum_{i=1}^{N_n} \alpha_i^n \int_{\Omega} \int_I \mathbb{1}_{A_i^n} \langle M \rangle(dt, \omega) \mu(d\omega) = \int_{\Omega} \int_I Y_n(\omega) \langle M \rangle(dt, \omega) \mu(d\omega)\end{aligned}$$

が成り立つ。従って単調収束定理より

$$\int_{I \times \Omega} Y(t, \omega) \mu_M(dt d\omega) = \int_{\Omega} \int_I Y(t, \omega) \langle M \rangle(dt, \omega) \mu(d\omega)$$

が得られる。

- (4) まず  $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}^2(\mathcal{P}, \mu_M)$  であることを示す。(5.6) の各項が二乗可積分であればよいから、任意に  $(s, t] \in I$  と  $F \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}_s, \mu)$  を取り  $F \mathbb{1}_{(s, t]}$  の二乗可積分性を示す。

$$E := \left\{ \|F\|_{\mathcal{L}^\infty(\mu)} < F \right\}$$

とおけば補題 1.1.1 より  $\mu(E) = 0$  となるから、 $\mu_M(I \times E) = 0$  が従い

$$\int_{I \times \Omega} |F(\omega)|^2 \mathbb{1}_{(s, t]}(u) \mu_M(du d\omega) \leq \|F\|_{\mathcal{L}^\infty(\mu)}^2 \mu_M((s, t] \times (\Omega \setminus E))$$

が成り立つ。また  $M \in \mathcal{M}_{2,c}$  であるから、定理 4.2.16 より  $\langle M \rangle_t$  ( $\forall t \in I$ ) は可積分であり

$$\mu_M((s, t] \times (\Omega \setminus E)) = \int_{\Omega} \langle M \rangle_t(\omega) - \langle M \rangle_s(\omega) \mu(d\omega) < \infty$$

が得られる。次に  $\mathcal{S}$  が  $\mathcal{L}^2(\mathcal{P}, \mu_M)$  で稠密であることを示す。

$$\mathcal{D} := \left\{ B \in \mathcal{P} ; \quad \forall \epsilon > 0, \exists S \in \mathcal{S}, \text{ s.t. } \|\mathbb{1}_B - S\|_{\mathcal{L}^2(\mu_M)} < \epsilon. \right\}$$

とおけば  $\Pi \subset \mathcal{D}$  を満たす。実際任意の  $B \in \Pi$  は  $B = (s, t] \times A$  ( $A \in \mathcal{F}_s$ ) 或は  $B = \{0\} \times A$  ( $A \in \mathcal{F}_0$ ) と表現され、 $\mathbb{1}_A \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$  を満たすから  $\mathbb{1}_{(s, t] \times A} = \mathbb{1}_{(s, t]} \mathbb{1}_A \in \mathcal{S}$  が成り立つ。そしてまた、以下に示すように  $\mathcal{D}$  は Dynkin 族である。

- $B = I \times \Omega$  に対し  $S = \mathbb{1}_{(0, T] \times \Omega}$  とすれば

$$\|\mathbb{1}_B - S\|_{\mathcal{L}^2(\mu_M)}^2 = \mu_M(\{0\} \times \Omega) = 0$$

が成り立ち  $I \times \Omega \in \mathcal{D}$  が従う。

- $B_1, B_2 \in \mathcal{D}$ ,  $B_1 \subset B_2$  と  $\epsilon > 0$  を任意に取る。

$$\|\mathbb{1}_{B_1} - S_1\|_{\mathcal{L}^2(\mu_M)} < \frac{\epsilon}{2}, \quad \|\mathbb{1}_{B_2} - S_2\|_{\mathcal{L}^2(\mu_M)} < \frac{\epsilon}{2}$$

を満たす  $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$  を選べば、(1) より  $S_2 - S_1 \in \mathcal{S}$  であり、かつ

$$\|\mathbb{1}_{B_2} - \mathbb{1}_{B_1} - (S_2 - S_1)\|_{\mathcal{L}^2(\mu_M)} < \epsilon$$

が成り立つから  $B_2 \setminus B_1 \in \mathcal{D}$  が従う。

- 互いに素な列  $B_n \in \mathcal{D}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) と  $\epsilon > 0$  を任意に取る。各  $B_n$  に対し

$$\|\mathbb{1}_{B_n} - S_n\|_{\mathcal{L}^2(\mu_M)} < \frac{\epsilon}{2^n}$$

を満たす  $S_n \in \mathcal{S}$  を選ぶ. 任意の  $N \in \mathbb{N}$  に対し

$$\begin{aligned}
\left\| \mathbb{1}_{\sum_{n=1}^{\infty} B_n} - \sum_{n=1}^N S_n \right\|_{\mathcal{L}^2(\mu_M)} &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{B_n} - \sum_{n=1}^N S_n \right\|_{\mathcal{L}^2(\mu_M)} \\
&\leq \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \mathbb{1}_{B_n} \right\|_{\mathcal{L}^2(\mu_M)} + \left\| \sum_{n=1}^N \mathbb{1}_{B_n} - \sum_{n=1}^N S_n \right\|_{\mathcal{L}^2(\mu_M)} \\
&\leq \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \mathbb{1}_{B_n} \right\|_{\mathcal{L}^2(\mu_M)} + \sum_{n=1}^N \left\| \mathbb{1}_{B_n} - S_n \right\|_{\mathcal{L}^2(\mu_M)} \\
&< \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \mathbb{1}_{B_n} \right\|_{\mathcal{L}^2(\mu_M)} + \frac{\epsilon}{2}
\end{aligned}$$

が成り立つ.  $\sum_{n=N+1}^{\infty} \mathbb{1}_{B_n}$  は可積分関数 1 で抑えられ, かつ各点  $(t, \omega) \in I \times \Omega$  において

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \mathbb{1}_{B_n}(t, \omega) \longrightarrow 0 \quad (N \longrightarrow \infty)$$

となるから Lebesgue の収束定理より

$$\left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \mathbb{1}_{B_n} \right\|_{\mathcal{L}^2(\mu_M)} \longrightarrow 0 \quad (N \longrightarrow \infty)$$

が成り立つ. 従って

$$\left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \mathbb{1}_{B_n} \right\|_{\mathcal{L}^2(\mu_M)} < \frac{\epsilon}{2}$$

を満たすように  $N \in \mathbb{N}$  を選べば, (1) より  $\sum_{n=1}^N S_n \in \mathcal{S}$  が成り立ち, かつ

$$\left\| \mathbb{1}_{\sum_{n=1}^{\infty} B_n} - \sum_{n=1}^N S_n \right\|_{\mathcal{L}^2(\mu_M)} < \epsilon$$

も得られ  $\sum_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{D}$  が従う.

以上で  $\mathcal{P} = \mathcal{D}$  が示された. つまり  $S$  は  $\mathcal{P}$ -可測の単関数を近似できるから主張が従う. ■

## 5.3 伊藤積分

定義 5.3.1 (単純可予測過程に対する伊藤積分). 任意に  $X \in \mathcal{S}$  を取れば, (5.6) に倣って

$$X = F \mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{i=0}^{n-1} F_i \mathbb{1}_{(t_i, t_{i+1}]}$$

と表現される.  $M \in \mathcal{M}_{2,c}$  に対し  $I_M : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{M}_{2,c}$  を

$$I_M(X)(t, \omega) := \sum_{i=0}^{n-1} F_i(\omega) (M_{t \wedge t_{i+1}}(\omega) - M_{t \wedge t_i}(\omega)) \quad (\forall t \in I, \omega \in \Omega)$$

により定め, 単純可予測過程に対する伊藤積分 (Itô integral) とする.

定理 5.3.2 (単純可予測過程に対する伊藤積分の線型等長性). 任意の  $M \in \mathcal{M}_{2,c}$  に対し  $I_M$  は  $\mathcal{S}$  から  $\mathcal{M}_{2,c}$  への線型作用素であり, 任意の停止時刻  $\tau$  に対して次を満たす:

$$\int_{I \times \Omega} |X(t, \omega)|^2 \mathbb{1}_{[0, \tau(\omega)]}(t) \mu_M(dt d\omega) = \int_{\Omega} |I_M(X)(\tau(\omega), \omega)|^2 \mu(d\omega) \quad (X \in \mathcal{S}). \quad (5.8)$$

特に  $\tau = T$  の場合次を得る:

$$\int_{I \times \Omega} |X(t, \omega)|^2 \mu_M(dt d\omega) = \int_{\Omega} |I_M(X)_T(\omega)|^2 \mu(d\omega) \quad (X \in \mathcal{S}).$$

証明.

**線型性** 先ず任意の  $X \in \mathcal{S}$  に対し  $I_M(X) \in \mathcal{M}_{2,c}$  となることを示す. 次に  $I_M$  の線型性を示す. 任意に  $X_1, X_2 \in \mathcal{S}$  と  $\alpha \in \mathbb{R}$  を取る.

**加法**  $X_1, X_2$  が, 時点の列  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  と集合の系  $F, G \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{F}_0, \mu), F_k, G_k \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{F}_{t_k}, \mu)$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ) を用いて次で表示されていると仮定する:

$$X_1 = F \mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{k=0}^{n-1} F_k \mathbb{1}_{(t_k, t_{k+1}]}, \quad X_2 = G \mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{k=0}^{n-1} G_k \mathbb{1}_{(t_k, t_{k+1}]}.$$

このとき次が成り立つ:

$$\begin{aligned} I_M(X_1 + X_2)(t, \omega) &= \sum_{k=0}^{n-1} (F_k(\omega) + G_k(\omega)) (M_{t \wedge t_{k+1}}(\omega) - M_{t \wedge t_k}(\omega)) \\ &= I_M(X_1)(t, \omega) + I_M(X_2)(t, \omega) \quad (\forall t \in I, \omega \in \Omega). \end{aligned}$$

**スカラ倍**  $X_1$  と  $\alpha$  に対して次が成り立つ:

$$\begin{aligned} I_M(\alpha X_1)(t, \omega) &= \sum_{k=0}^{n-1} \alpha F_k(\omega) (M_{t \wedge t_{k+1}}(\omega) - M_{t \wedge t_k}(\omega)) \\ &= \alpha \sum_{k=0}^{n-1} F_k(\omega) (M_{t \wedge t_{k+1}}(\omega) - M_{t \wedge t_k}(\omega)) = \alpha I_M(X_1)(t, \omega) \quad (\forall t \in I, \omega \in \Omega). \end{aligned}$$

**等長性**  $B := \{ (t, \omega) \in I \times \Omega ; \quad t \leq \tau(\omega) \}$  とおけば,  $\mathbb{1}_B$  は

$$\mathbb{1}_{[0, \tau(\omega)]}(t) = \mathbb{1}_B(t, \omega) \quad (\forall (t, \omega) \in I \times \Omega)$$

を満たし, かつ左連続な適合過程であるから定理??により可測  $\mathcal{P}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  であるから (5.8) 左辺の積分を考察できる. 今,  $X \in \mathcal{S}$  が (5.6) により表示されているとすれば,

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} |I_M(X)(\tau(\omega), \omega)|^2 \mu(d\omega) \\ &= \int_{\Omega} \left| \sum_{i=0}^{n-1} F_i(\omega) (M_{\tau_{i+1}}^\tau(\omega) - M_{\tau_i}^\tau(\omega)) \right|^2 \mu(d\omega) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\Omega} \left| F_i(\omega) (M_{\tau_{i+1}}^\tau(\omega) - M_{\tau_i}^\tau(\omega)) \right|^2 \mu(d\omega) \end{aligned}$$

$$+ 2 \sum_{i < j} \int_{\Omega} F_i(\omega) F_j(\omega) (M_{t_{i+1}}^{\tau}(\omega) - M_{t_i}^{\tau}(\omega)) (M_{t_{j+1}}^{\tau}(\omega) - M_{t_j}^{\tau}(\omega)) \mu(d\omega) \quad (5.9)$$

が成り立つ。右辺第二項についてはマルチンゲール性より

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} F_i(\omega) F_j(\omega) (M_{t_{i+1}}^{\tau}(\omega) - M_{t_i}^{\tau}(\omega)) (M_{t_{j+1}}^{\tau}(\omega) - M_{t_j}^{\tau}(\omega)) \mu(d\omega) \\ &= \int_{\Omega} F_i(\omega) F_j(\omega) (M_{t_{i+1}}^{\tau}(\omega) - M_{t_i}^{\tau}(\omega)) \mathbb{E} [M_{t_{j+1}}^{\tau}(\omega) - M_{t_j}^{\tau}(\omega) \mid \mathcal{F}_{t_j}] (\omega) \mu(d\omega) = 0 \end{aligned}$$

が従い、右辺第一項についても

$$\int_{\Omega} |F_i(\omega) (M_{t_{i+1}}^{\tau}(\omega) - M_{t_i}^{\tau}(\omega))|^2 \mu(d\omega) = \int_{\Omega} |F_i(\omega)|^2 (\langle M^{\tau} \rangle_{t_{i+1}}(\omega) - \langle M^{\tau} \rangle_{t_i}(\omega)) \mu(d\omega)$$

が成り立つから

$$\begin{aligned} (5.9) &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\Omega} |F_i(\omega)|^2 (\langle M \rangle_{t_{i+1}}^{\tau}(\omega) - \langle M \rangle_{t_i}^{\tau}(\omega)) \mu(d\omega) \\ &= \int_{\Omega} \int_I |X(t, \omega)|^2 \mathbb{1}_B(t, \omega) \langle M \rangle(dt, \omega) \mu(d\omega) \end{aligned}$$

が導かれ、(5.7) により主張を得る。 ■

定理 5.3.3 (同値類に対する伊藤積分).  $\tau$  を停止時刻とし、 $M \in \mathcal{M}_{2,c}$  を取り

$$B := \{ (t, \omega) \in I \times \Omega ; \quad t \leq \tau(\omega) \}$$

とおく。任意の  $X_1, X_2 \in [X]_{\mathfrak{S}} \in \mathfrak{S}$  に対し、 $[I_M(X_1)^{\tau}]_{2,c} = [I_M(X_2)^{\tau}]_{2,c}$  が成り立つ。従って

$$\tilde{I}_M^{\tau} : \mathfrak{S} \ni [X]_{\mathfrak{S}} \mapsto [I_M(X)^{\tau}]_{2,c} \in \mathfrak{M}_{2,c}$$

により定める  $\tilde{I}_M^{\tau}$  は well-defined であり、更に線型性と次の意味での等長性を持つ：

$$\| [X \mathbb{1}_B]_{\mathfrak{S}} \|_{L^2(\mu_M)} = \| [I_M(X)^{\tau}]_{2,c} \|_{\mathfrak{M}_{2,c}} \quad (\forall X \in \mathcal{S}). \quad (5.10)$$

証明. 定理 5.3.2 の  $I_M$  の線型性と (5.8) より、任意の  $X_1, X_2 \in \mathcal{S}$  に対して

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |I_M(X_1)^{\tau}(\omega) - I_M(X_2)^{\tau}(\omega)|^2 \mu(d\omega) = \int_{\Omega} |I_M(X_1 - X_2)^{\tau}(\omega)|^2 \mu(d\omega) \\ &= \int_{I \times \Omega} |(X_1 - X_2)(t, \omega)|^2 \mathbb{1}_B(t, \omega) \mu_M(dtd\omega) = \int_{I \times \Omega} |X_1(t, \omega) - X_2(t, \omega)|^2 \mathbb{1}_B(t, \omega) \mu_M(dtd\omega) \end{aligned}$$

が成り立つ。これにより  $[X_1]_{\mathfrak{S}} = [X_2]_{\mathfrak{S}}$  ならば  $[I_M(X_1)]_{2,c} = [I_M(X_2)]_{2,c}$  である。(5.10) は (5.8) より従い、また任意に  $[X_1]_{\mathfrak{S}}, [X_2]_{\mathfrak{S}} \in \mathfrak{S}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  を取れば、 $I_M$  及び  $[\cdot]_{\mathfrak{S}}, [\cdot]_{2,c}$  の線型性より

$$\begin{aligned} \tilde{I}^{\tau}(\alpha [X_1]_{\mathfrak{S}} + \beta [X_2]_{\mathfrak{S}}) &= \tilde{I}^{\tau}([\alpha X_1 + \beta X_2]_{\mathfrak{S}}) = [I(\alpha X_1 + \beta X_2)^{\tau}]_{2,c} \\ &= [\alpha I(X_1)^{\tau}]_{2,c} + [\beta I(X_2)^{\tau}]_{2,c} = \alpha \tilde{I}^{\tau}([X_1]_{\mathfrak{S}}) + \beta \tilde{I}^{\tau}([X_2]_{\mathfrak{S}}) \end{aligned}$$

が成り立ち  $\tilde{I}_M^{\tau}$  の線型性が得られる。 ■



定理 5.3.4 (同値類に対する伊藤積分の拡張).  $M \in \mathcal{M}_{2,c}$  とする. 任意の停止時刻  $\tau$  に対し, 定理 5.3.3 で定めた  $\tilde{I}_M$  は  $L^2(\mathcal{P}, \mu_M)$  上の等長線型作用素に拡張可能である.

証明. 補題 5.2.6 の等長単射

$$J : \mathfrak{S} \ni [X]_{\mathfrak{S}} \mapsto [X]_{L^2(\mu_M)} \in L^2(\mathcal{P}, \mu_M)$$

に対し, 値域を  $J\mathfrak{S}$  に制限した線形全単射を  $\tilde{J}$  と表す. 定理 5.3.3 より  $\tilde{I}_M^\tau$  も線型性を持つから

$$\tilde{I}_M^\tau \circ \tilde{J}^{-1} : J\mathfrak{S} \ni [X]_{L^2(\mu_M)} \mapsto [I_M(X)^\tau]_{2,c} \in \mathfrak{M}_{2,c}$$

もまた線型写像である. この  $\tilde{I}_M^\tau \circ \tilde{J}^{-1}$  を補題 5.2.6 及び定理 1.3.1 により拡張すればよい. ■

定義 5.3.5 (伊藤積分の拡張). 停止時刻  $\tau$  に対し定理 5.3.4 で拡張した作用素もまた  $\tilde{I}_M^\tau$  と書く.  $\tau = T$  として,  $X \in \mathcal{L}^2(\mathcal{P}, \mu_M)$  に対し或る  $N \in \tilde{I}_M^\tau([X]_{L^2(\mu_M)})$  を対応させる関係を

$$I_M : \mathcal{L}^2(\mathcal{P}, \mu_M) \ni X \mapsto N \in \tilde{I}_M^\tau([X]_{L^2(\mu_M)}), \quad I_M(X)_t = \int_0^t X_s dM_s \quad (t \in I)$$

と表記し, この  $I_M$  を伊藤積分として定義しなおす.

定理 5.3.6 (拡張された伊藤積分の線型等長性).  $M \in \mathcal{M}_{2,c}$  とする.  $I_M : \mathcal{L}^2(\mathcal{P}, \mu_M) \rightarrow \mathcal{M}_{2,c}$  は線型性を持ち, 任意の停止時刻  $\tau$  と  $X \in \mathcal{L}^2(\mathcal{P}, \mu_M)$  に対し次を満たす:

$$\int_{\Omega} |I_M(X)(\tau(\omega), \omega)|^2 \mu(d\omega) = \int_{\Omega} \int_I |X(t, \omega)|^2 \mathbb{1}_{[0, \tau(\omega)]}(t) \langle M \rangle(dt, \omega) \mu(d\omega).$$

証明. 補題 5.2.6 により  $X \in \mathcal{L}^2(\mathcal{P}, \mu_M)$  に対し或る  $X_n \in \mathcal{S}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) が存在して

$$\|X - X_n\|_{\mathcal{L}^2(\mu_M)} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \tag{5.11}$$

を満たす.  $B := \{(t, \omega) \in I \times \Omega ; \quad t \leq \tau(\omega)\}$  とおき,

$$\|Y\|_{\mathcal{M}_{2,c}}^2 := \int_{\Omega} |Y_T(\omega)|^2 \mu(d\omega) \quad (\forall Y \in \mathcal{M}_{2,c})$$

によりセミノルムを定めれば, (5.10) により

$$\|X_n \mathbb{1}_B\|_{\mathcal{L}^2(\mu_M)} = \|I_M(X_n)^\tau\|_{\mathcal{M}_{2,c}} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

が成り立ち,  $\tilde{I}_M^\tau$  の線型等長性と (5.11) より

$$\begin{aligned} & \left| \|X \mathbb{1}_B\|_{\mathcal{L}^2(\mu_M)} - \|I_M(X)^\tau\|_{\mathcal{M}_{2,c}} \right| \\ & \leq \left| \|X \mathbb{1}_B\|_{\mathcal{L}^2(\mu_M)} - \|X_n \mathbb{1}_B\|_{\mathcal{L}^2(\mu_M)} \right| + \left| \|I_M(X_n)^\tau\|_{\mathcal{M}_{2,c}} - \|I_M(X)^\tau\|_{\mathcal{M}_{2,c}} \right| \\ & \leq \|X - X_n\|_{\mathcal{L}^2(\mu_M)} + \|I_M(X - X_n)^\tau\|_{\mathcal{M}_{2,c}} \\ & \leq 2\|X - X_n\|_{\mathcal{L}^2(\mu_M)} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

が従い主張を得る.

命題 5.3.7 (伊藤積分の二次変分).  $M \in \mathcal{M}_{2,c}$ ,  $X \in \mathcal{L}^2(\mathcal{P}, \mu_M)$  に対し次が成り立つ:

$$\langle I_M(X) \rangle_t = \int_0^t X_s^2 \langle M \rangle(ds) \quad (\forall t \in I, \mu\text{-a.s.})$$

$M \in \mathcal{M}_{2,c}$ ,  $X \in \mathcal{L}^2(\mathcal{P}, \mu_M)$  に対して定義した伊藤積分を更に拡張する.

定義 5.3.8 (局所有界過程).  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  上の確率過程  $X$  に対し或る  $(\tau_j)_{j=0}^\infty \in \mathcal{T}$  が存在して

$$\sup_{t \in I} \|X_{t \wedge \tau_j}\|_{\mathcal{L}^\infty} < \infty \quad (j = 0, 1, \dots)$$

が満たされているとき,  $X$  を局所有界過程 (locally bounded process) という.

定理 5.3.9 (局所マルチンゲールと左連続局所有界適合過程に対する伊藤積分).  $X$  を左連続且つ局所有界な適合過程,  $M \in \mathcal{M}_{c,loc}$  とする. このとき確率積分

$$\int_0^t X_s dM_s \quad (t \in I)$$

が定義される.

レポート問題 6

$I = [a, b]$  を  $I = [0, T]$  に替えて示す. 局所有界な左連続適合過程  $X$  と  $M \in \mathcal{M}_{c,loc}$  に対して,  $X$  が連続適合過程である時と同様に確率積分

$$\int_0^t X_s dM_s, \quad t \in I$$

が定義できることを示せ.

証明.

第一段  $\sup_{t \in I} \|X_t\|_{\mathcal{L}^\infty(\mu)} < \infty$  かつ  $\|\langle M \rangle_T\|_{\mathcal{L}^\infty(\mu)} < \infty$  が満たされている場合,  $X$  は可測  $\mathcal{P}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  であり  $X \in \mathcal{L}^2(\mathcal{P}, \mu_M)$  を満たすことを示す. 実際,

$$X_t^n := X_0 \mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{k=0}^{2^n-1} X_{\frac{kT}{2^n}} \mathbb{1}_{\left(\frac{kT}{2^n}, \frac{(k+1)T}{2^n}\right]}(t) \quad (\forall t \in I) \quad (5.12)$$

として  $(X^n)_{n=1}^\infty$  を構成すれば  $\sup_{t \in I} \|X_t\|_{\mathcal{L}^\infty} < \infty$  より  $(X^n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{S}$  が満たされるから,  $X^n$  は全て可測  $\mathcal{P}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  である. また  $I \ni t \mapsto X_t(\omega)$  ( $\forall \omega \in \Omega$ ) の左連続性から

$$|X^n(t, \omega) - X(t, \omega)| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty, \forall (t, \omega) \in I \times \Omega)$$

が従い, 各点収束先も可測性は保たれるから  $X$  は可測  $\mathcal{P}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  である. そして  $X$  の有界性及び  $\mu_M$  の有限性により, Lebesgue の収束定理を適用して

$$\|X - X^n\|_{\mathcal{L}^2(\mu_M)} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が得られ,  $\mathcal{S}$  は  $\mathcal{L}^2(\mathcal{P}, \mu_M)$  で稠密であるから  $X \in \mathcal{L}^2(\mathcal{P}, \mu_M)$  が従う. また定理 4.2.18 より  $M \in \mathcal{M}_{2,c}$  も満たされている. ゆえに確率積分  $I_M(X)$  が定義される.

第二段 前段の仮定を外す.  $X$  が局所有界過程であるから, 或る  $(\tau_j)_{j=0}^\infty \in \mathcal{T}$  が存在して

$$\sup_{t \in I} \|X_{t \wedge \tau_j}\|_{\mathcal{L}^\infty(\mu)} < \infty \quad (j = 0, 1, \dots)$$

が満たされる. また

$$\hat{\tau}_j(\omega) := \inf \{ t \in I ; \langle M \rangle_t(\omega) \geq j \} \wedge T^{*4} \quad (\forall \omega \in \Omega, j = 0, 1, \dots)$$

として  $(\hat{\tau}_j)_{j=0}^\infty \in \mathcal{T}$  を定め

$$\sigma_j := \tau_j \wedge \hat{\tau}_j \quad (j = 0, 1, \dots) \quad (5.13)$$

とおけば,  $(\sigma_j)_{j=0}^\infty \in \mathcal{T}$  且つ

$$\|X_t^{\sigma_j}\|_{\mathcal{L}^\infty(\mu)} \leq \sup_{s \in I} \|X_s^{\tau_j}\|_{\mathcal{L}^\infty(\mu)}, \quad \|\langle M \rangle_t^{\sigma_j}\|_{\mathcal{L}^\infty(\mu)} \leq j \quad (\forall t \in I, j = 0, 1, \dots)$$

が成り立つ. 従って前段の結果より  $I_{M^{\sigma_j}}(X^{\sigma_j})$  ( $j = 0, 1, \dots$ ) が定義される.

\*4  $\{t \in I ; |\langle M \rangle_t(\omega)| \geq j\} = \emptyset$  の場合  $\sigma_j(\omega) = T$  とする.

第三段 次の極限が  $\mu$ -a.s. に確定することを示す:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} I_{M^{\sigma_j}}(X^{\sigma_j})_{t \wedge \sigma_j} \quad (\forall t \in I).$$

$(\sigma_j)_{j=0}^\infty \in \mathcal{T}$  より或る  $\mu$ -零集合  $E$  が存在して、 $\omega \in \Omega \setminus E$  なら  $0 = \sigma_0(\omega) \leq \sigma_1(\omega) \leq \dots$  且つ、或る  $J = J(\omega) \in \mathbb{N}$  が存在して  $\sigma_j(\omega) = T$  ( $j \geq J$ ) が満たされる。今、 $j \leq k$  を満たす  $j, k \in \mathbb{N}_0$  を任意に取り固定する。任意に  $Y \in \mathcal{S}$  を取り、 $Y$  が時点  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  と  $F \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}_0, \mu)$ ,  $F_i \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}_{t_i}, \mu)$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) によって

$$Y_t = F \mathbb{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} F_i \mathbb{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t) \quad (t \in I)$$

と表現されているとすれば、 $\mathcal{M}_{2,c}$  上の確率積分の定義より

$$I_{M^{\sigma_j}}(Y)_t = \sum_{i=0}^{n-1} F_i \left( M_{t \wedge t_{i+1}}^{\sigma_j} - M_{t \wedge t_i}^{\sigma_j} \right) \quad (\forall t \in I, \mu\text{-a.s.})$$

が成り立つ。特に両辺を  $\sigma_j$  で停めても等号は保たれ

$$I_{M^{\sigma_j}}(Y)_t^{\sigma_j} = \sum_{i=0}^{n-1} F_i \left( M_{t \wedge t_{i+1}}^{\sigma_j} - M_{t \wedge t_i}^{\sigma_j} \right) \quad (\forall t \in I, \mu\text{-a.s.}) \quad (5.14)$$

を得る。 $\sigma_{j+k}$  についても同様に

$$I_{M^{\sigma_{j+k}}}(Y)_t = \sum_{i=0}^{n-1} F_i \left( M_{t \wedge t_{i+1}}^{\sigma_{j+k}} - M_{t \wedge t_i}^{\sigma_{j+k}} \right) \quad (\forall t \in I, \mu\text{-a.s.})$$

が成り立ち、特に  $\Omega \setminus E$  上では  $\sigma_j \leq \sigma_{j+k}$  が満たされるから、両辺を  $\sigma_j$  で停めて

$$I_{M^{\sigma_{j+k}}}(Y)_t^{\sigma_j} = \sum_{i=0}^{n-1} F_i \left( M_{t \wedge t_{i+1}}^{\sigma_j} - M_{t \wedge t_i}^{\sigma_j} \right) \quad (\forall t \in I, \mu\text{-a.s.}) \quad (5.15)$$

が得られ、(5.14) と (5.15) を併せれば

$$I_{M^{\sigma_j}}(Y)_t^{\sigma_j} = I_{M^{\sigma_{j+k}}}(Y)_t^{\sigma_j} \quad (\forall t \in I, \mu\text{-a.s.})$$

が従う。一般の  $Y \in \mathcal{L}^2(\mathcal{P}, \mu_{M^{\sigma_j}}) \cap \mathcal{L}^2(\mathcal{P}, \mu_{M^{\sigma_{j+k}}})$  に対しては或る  $(Y_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{S}$  が存在して

$$\begin{aligned} & \int_{I \times \Omega} |Y(t, \omega) - Y_n(t, \omega)|^2 \mu_{M^{\sigma_{j+k}}}(dt d\omega) \\ &= \int_{\Omega} \int_I |Y(t, \omega) - Y_n(t, \omega)|^2 \langle M^{\sigma_{j+k}} \rangle(dt, \omega) \mu(d\omega) \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

を満たすから、 $\sigma_j \leq \sigma_{j+k}$  ( $\mu$ -a.s.) により  $\|Y - Y_n\|_{\mathcal{L}^2(\mu_{M^{\sigma_j}})} \longrightarrow 0$  も従い

$$\begin{aligned} & \|I_{M^{\sigma_j}}(Y)^{\sigma_j} - I_{M^{\sigma_{j+k}}}(Y)^{\sigma_j}\|_{\mathcal{M}_{2,c}}^{*5} \\ & \leq \|I_{M^{\sigma_j}}(Y)^{\sigma_j} - I_{M^{\sigma_j}}(Y_n)^{\sigma_j}\|_{\mathcal{M}_{2,c}} + \|I_{M^{\sigma_{j+k}}}(Y_n)^{\sigma_j} - I_{M^{\sigma_{j+k}}}(Y)^{\sigma_j}\|_{\mathcal{M}_{2,c}} \\ & \leq \|Y - Y_n\|_{\mathcal{L}^2(\mu_{M^{\sigma_j}})} + \|Y - Y_n\|_{\mathcal{L}^2(\mu_{M^{\sigma_{j+k}}})} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

が成り立つ。以上より

$$I_{M^{\sigma_j}}(Y)_t^{\sigma_j} = I_{M^{\sigma_{j+k}}}(Y)_t^{\sigma_j} \quad (\forall t \in I, \mu\text{-a.s.}) \quad (5.16)$$

\*5  $\|Y\|_{\mathcal{M}_{2,c}}^2 := \int_{\Omega} |Y_T(\omega)|^2 \mu(d\omega) \quad (\forall Y \in \mathcal{M}_{2,c}).$

を得る．特に  $X^{\sigma_j}$  は  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^\infty(\omega)}$  について一様有界であるから第一段より  $X^{\sigma_j} \in \mathcal{L}^2(\mathcal{P}, \mu_{M^{\sigma_j}}) \cap \mathcal{L}^2(\mathcal{P}, \mu_{M^{\sigma_{j+k}}})$  が満たされ, (5.16) より或る  $\mu$ -零集合  $A_{j,k}$  が存在して

$$I_{M^{\sigma_j}}(X^{\sigma_j})_t^{\sigma_j}(\omega) = I_{M^{\sigma_{j+k}}}(X^{\sigma_j})_t^{\sigma_j}(\omega) \quad (\forall t \in I, \omega \in \Omega \setminus A_{j,k}) \quad (5.17)$$

が成り立つ．一方で定理 5.3.6 より

$$\begin{aligned} & \|I_{M^{\sigma_{j+k}}}(X^{\sigma_j})^{\sigma_j} - I_{M^{\sigma_{j+k}}}(X^{\sigma_{j+k}})^{\sigma_j}\|_{\mathcal{M}_{2,c}}^2 \\ &= \int_{\Omega} \int_I |X^{\sigma_j}(t, \omega) - X^{\sigma_{j+k}}(t, \omega)|^2 \mathbb{1}_{[0, \sigma_j(\omega)]}(t) \langle M^{\sigma_{j+k}} \rangle(dt, \omega) \mu(d\omega) \end{aligned}$$

が成り立つが,  $\Omega \setminus E$  上では  $\sigma_j \leq \sigma_{j+k}$  により  $X^{\sigma_j}(t) \mathbb{1}_{[0, \sigma_j]}(t) = X^{\sigma_{j+k}}(t) \mathbb{1}_{[0, \sigma_j]}(t)$  が満たされているから右辺の積分は 0 であり, 或る  $\mu$ -零集合  $B_{j,k}$  が存在して

$$I_{M^{\sigma_{j+k}}}(X^{\sigma_j})_t^{\sigma_j}(\omega) = I_{M^{\sigma_{j+k}}}(X^{\sigma_{j+k}})_t^{\sigma_j}(\omega) \quad (\forall t \in I, \omega \in \Omega \setminus B_{j,k}) \quad (5.18)$$

が成り立つ．(5.17) と (5.18) を併せれば

$$I_{M^{\sigma_j}}(X^{\sigma_j})_t^{\sigma_j}(\omega) = I_{M^{\sigma_{j+k}}}(X^{\sigma_{j+k}})_t^{\sigma_j}(\omega) \quad (\forall t \in I, \omega \in \Omega \setminus (A_{j,k} \cup B_{j,k}))$$

が従う． $j, k$  は任意に選んでいたから,

$$A := \bigcup_{\substack{j,k \in \mathbb{N}_0 \\ j \leq k}} A_{j,k}, \quad B := \bigcup_{\substack{j,k \in \mathbb{N}_0 \\ j \leq k}} B_{j,k}, \quad C := A \cup B \cup E$$

により定める  $C$  は  $\mu$ -零集合である．任意の  $\omega \in \Omega \setminus C$  に対し或る  $J = J(\omega)$  が存在して  $0 = \sigma_0(\omega) \leq \sigma_1(\omega) \leq \dots \leq \sigma_J(\omega) = T$  が満たされ, 且つ任意の  $j, k \in \mathbb{N}_0, j \leq k$  に対し

$$I_{M^{\sigma_j}}(X^{\sigma_j})_t^{\sigma_j}(\omega) = I_{M^{\sigma_k}}(X^{\sigma_k})_t^{\sigma_j}(\omega) \quad (\forall t \in I, \omega \in \Omega \setminus C)$$

も成り立つから,  $\Omega \setminus C$  上で  $\lim_{j \rightarrow \infty} I_{M^{\sigma_j}}(X^{\sigma_j})_t^{\sigma_j}(\omega) (\forall t \in I)$  が確定する．

$$N(t, \omega) := \begin{cases} \lim_{j \rightarrow \infty} I_{M^{\sigma_j}}(X^{\sigma_j})_t^{\sigma_j}(\omega) & (\omega \in \Omega \setminus C) \\ 0 & (\omega \in C) \end{cases} \quad (t \in I) \quad (5.19)$$

により  $N$  を定め, これを確率積分  $\int_0^t X_s dM_s$  と表す. ■

レポート問題 7

$I = [a, b]$  を  $I = [0, T]$  に替えて示す.  $X, Y$  を局所有界な左連続適合過程とし,  $M \in \mathcal{M}_{c,loc}$  とする.

$$N_t = \int_0^t X_s dM_s, \quad t \in I$$

とする時,  $N \in \mathcal{M}_{c,loc}$  であり,

$$\int_0^t Y_s dN_s = \int_0^t Y_s X_s dM_s, \quad t \in I \quad (5.20)$$

であることを示せ.

証明 (レポート問題 6 の続き).

第一段  $N \in \mathcal{M}_{c,loc}$  を示す. (5.19) により定めた  $N$  は適合過程であり, 且つ任意の  $\omega \in \Omega$  に対し  $I \ni t \mapsto N_t(\omega)$  は各点  $t$  で右連続かつ左極限を持つ. 特に  $\mu$ -a.s. に  $I \ni t \mapsto N_t$  は連続である. そして任意の  $\sigma_j$  ( $j \in \mathbb{N}_0$ ) について次が満たされる:

$$N^{\sigma_j}(t, \omega) = I_{M^{\sigma_j}}(X^{\sigma_j})^{\sigma_j}(t, \omega) \quad (\forall t \in I, \omega \in \Omega \setminus C). \quad (5.21)$$

(5.21) について 定め方 (5.19) による.

適合性について  $I_{M^{\sigma_j}}(X^{\sigma_j})^{\sigma_j}$  は  $\mathcal{M}_{2,c}$  に属するから適合過程である. その各点収束極限で  $N$  が定義されるから  $N$  の適合性が出る.

(右) 連続性について  $I_{M^{\sigma_j}}(X^{\sigma_j})^{\sigma_j} \in \mathcal{M}_{2,c}$  であることと  $N$  の定め方による.

左極限について  $I_{M^{\sigma_j}}(X^{\sigma_j})^{\sigma_j} \in \mathcal{M}_{2,c}$  であることと  $N$  の定め方による.

従って

$$\tau_j := \inf \{ t \in I ; |N_t| \geq j \} \wedge T$$

により  $(\tau_j)_{j=0}^\infty \in \mathcal{T}$  を定めることができる.

$$\hat{\sigma}_j := \sigma_j \wedge \tau_j$$

として  $(\hat{\sigma}_j)_{j=0}^\infty \in \mathcal{T}$  を構成すれば任意の  $t \in I$  に対して

$$|N_t^{\hat{\sigma}_j}| \leq j \quad \mu\text{-a.s.}$$

が満たされ, 且つ  $\mathcal{M}_{2,c}$  を停めた過程であるから  $N^{\hat{\sigma}_j} \in \mathcal{M}_{b,c}$  となり  $N \in \mathcal{M}_{c,loc}$  が従う.

第二段 (5.13) で構成した通り, 或る停止時刻の列  $(\tau_j)_{j=0}^\infty, (\hat{\tau}_j)_{j=0}^\infty, (\sigma_j)_{j=0}^\infty \in \mathcal{T}$  が存在して,

$$\begin{aligned} Y^{\tau_j}, X^{\hat{\tau}_j}, (YX)^{\sigma_j} &\in \mathcal{L}^2(\mathcal{P}, \mu_M) \quad (\forall M \in \mathcal{M}_{2,c}, j = 0, 1, 2, \dots), \\ \sup_{t \in I} \|Y_t^{\tau_j}\|_{\mathcal{L}^\infty(\mu)} &< \infty, \quad \sup_{t \in I} \|X_t^{\hat{\tau}_j}\|_{\mathcal{L}^\infty(\mu)} < \infty, \quad \sup_{t \in I} \|(YX)_t^{\sigma_j}\|_{\mathcal{L}^\infty(\mu)} < \infty \end{aligned} \quad (5.22)$$

かつ (5.19) の収束の意味で

$$I_{N^{\tau_j}}(Y^{\tau_j})^{\tau_j} \longrightarrow \int_0^t Y_s dN_s, \quad I_{M^{\sigma_j}}(Y^{\sigma_j} X^{\sigma_j})^{\sigma_j} \longrightarrow \int_0^t Y_s X_s dM_s \quad (t \in I) \quad (5.23)$$

を満たす．よって

$$v_j := \sigma_j \wedge \tau_j \wedge \hat{\tau}_j \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

により定める  $(v_j)_{j=0}^\infty \in \mathcal{T}$  に対して

$$I_{N^{v_j}}(Y^{v_j})_t^{v_j} = I_{M^{v_j}}(Y^{v_j} X^{v_j})_t^{v_j} \quad (\forall t \in I, \mu\text{-a.s.}, j = 0, 1, 2, \dots) \quad (5.24)$$

が満たされることを示せば, (5.23) より (5.20) が従う．今, 任意に  $j \in \mathbb{N}_0$  を取り固定する．(5.12) と同様に  $X^{v_j}$  に各点収束する  $X_n^j \in \mathcal{S} \ (n = 1, 2, \dots)$  を構成し, 同様に  $Y^{v_j}$  に対しても  $Y_n^j \in \mathcal{S} \ (n = 1, 2, \dots)$  を取れば, Lebesgue の収束定理及び Hölder の不等式により

$$\begin{aligned} \|Y^{v_j} - Y_n^j\|_{\mathcal{L}^2(\mu_{N^{v_j}})} &\longrightarrow 0, \quad \|X^{v_j} - X_n^j\|_{\mathcal{L}^2(\mu_{M^{v_j}})} \longrightarrow 0, \\ \|Y^{v_j} X^{v_j} - Y_n^j X_n^j\|_{\mathcal{L}^2(\mu_{M^{v_j}})} &\longrightarrow 0, \end{aligned} \quad (5.25)$$

が成立する．従って, もし全ての  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$\|I_{N^{v_j}}(Y_n^j)^{v_j} - I_{M^{v_j}}(Y_n^j X_n^j)^{v_j}\|_{\mathcal{M}_{2,c}} = 0 \quad (5.26)$$

が満たされているなら, 伊藤積分の線型等長性より

$$\begin{aligned} &\|I_{N^{v_j}}(Y^{v_j})^{v_j} - I_{M^{v_j}}(Y^{v_j} X^{v_j})^{v_j}\|_{\mathcal{M}_{2,c}} \\ &\leq \|I_{N^{v_j}}(Y^{v_j})^{v_j} - I_{N^{v_j}}(Y_n^j)^{v_j}\|_{\mathcal{M}_{2,c}} + \|I_{M^{v_j}}(Y_n^j X_n^j)^{v_j} - I_{M^{v_j}}(Y^{v_j} X^{v_j})^{v_j}\|_{\mathcal{M}_{2,c}} \\ &\longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

が従い (5.24) を得る．

第三段 任意に  $n \in \mathbb{N}$  を取り固定し, (5.26) を示す．

$$Y_n := Y_n^j, \quad X_n := X_n^j, \quad N := N^{v_j}, \quad M := M^{v_j}$$

と表示しなおし,

$$N_t^n := \int_0^t X_n(s) dM_s \quad (t \in I)$$

とおく．また  $F^n := X_0^{v_j}$ ,  $G^n := Y_0^{v_j}$ ,  $F_k^n := X_{kT/2^n}^{v_j}$ ,  $G_k^n := Y_{kT/2^n}^{v_j}$ ,  $t_k := kT/2^n$  とおけば

$$X_n = F^n \mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{k=0}^{2^n-1} F_k^n \mathbb{1}_{(t_k, t_{k+1}]}, \quad Y_n = G^n \mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{k=0}^{2^n-1} G_k^n \mathbb{1}_{(t_k, t_{k+1}]}$$

と表現でき,

$$\begin{aligned} I_N(Y_n)_t &= \sum_{k=0}^{2^n-1} G_k^n (N_{t \wedge t_{k+1}} - N_{t \wedge t_k}) \quad (\forall t \in I, \mu\text{-a.s.}), \\ I_{N^n}(Y_n)_t &= \sum_{k=0}^{2^n-1} G_k^n (N_{t \wedge t_{k+1}}^n - N_{t \wedge t_k}^n) \quad (\forall t \in I, \mu\text{-a.s.}), \\ I_M(Y_n X_n)_t &= \sum_{k=0}^{2^n-1} F_k^n G_k^n (M_{t \wedge t_{k+1}} - M_{t \wedge t_k}) \quad (\forall t \in I, \mu\text{-a.s.}) \end{aligned}$$

と書ける．特に

$$N_t^n = \sum_{k=0}^{2^n-1} F_k^n (M_{t \wedge t_{k+1}} - M_{t \wedge t_k}) \quad (\forall t \in I, \mu\text{-a.s.})$$

が成り立っているから

$$I_{N^n}(Y_n)_t = I_M(Y_n X_n)_t \quad (\forall t \in I, \mu\text{-a.s.}) \quad (5.27)$$

が従う．一方で

$$I_N(Y_n)_T - I_{N^n}(Y_n)_T = \sum_{k=0}^{2^n-1} G_k^n (N_{t_{k+1}} - N_{t_k}^n) - \sum_{k=0}^{2^n-1} G_k^n (N_{t_k} - N_{t_k}^n) \quad \mu\text{-a.s.}$$

が成り立ち，また (5.22) と  $v_j$  の構成法より  $a := \sup_{t \in I} \|Y_t^{v_j}\|_{\mathcal{L}^\infty(\mu)} < \infty$  が満たされているから， $G_k^n (\forall k, n)$  は  $\mu\text{-a.s.}$  に  $a$  で抑えられる．従って伊藤積分の線型等長性より

$$\begin{aligned} \|I_N(Y_n) - I_{N^n}(Y_n)\|_{\mathcal{M}_{2,c}} &\leq \sum_{k=0}^{2^n-1} \left\{ a \|N_{t_{k+1}} - N_{t_{k+1}}^n\|_{\mathcal{L}^2(\mu)} + a \|N_{t_k} - N_{t_k}^n\|_{\mathcal{L}^2(\mu)} \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{2^n-1} \left\{ a \|I_M(X^{v_j} - X_n)_{t_{k+1}}\|_{\mathcal{L}^2(\mu)} + a \|I_M(X^{v_j} - X_n)_{t_k}\|_{\mathcal{L}^2(\mu)} \right\} \\ &\leq \sum_{k=0}^{2^n-1} 2a \|X^{v_j} - X_n\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{P}, \mu_M)} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

が成り立つ． $n$  の任意性と (5.25) 及び (5.27) を併せて (5.26) が成立する． ■