2017年8月4日

時系列解析 期末課題

基礎工学研究科システム創成専攻修士1年
学籍番号29C17095

百合川尚学

1　Markov 連鎖

基礎となる確率空間$(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$.

- E: 集合,
- $(E, \mathcal{E})$: 可測空間,
- $(X_n)_{n=1}^{+\infty}$ ： E-値確率過程.

注意. 2 章 ∼ 10 章はEが高々可算集合であるとして考える.

2　Markov 連鎖

定義 (Markov 性). $\forall n \in \mathbb{N},\ i_0, i_1, \cdots, i_n \in E$,

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}\left(X_n = i_n \mid X_0 = i_0,\ X_1 = i_1,\ \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}\right) \\ &\qquad = \mathrm{P}\left(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}\right). \end{aligned}$$

$(X_n)_{n=1}^{+\infty}$ が Markov 性を持つ場合，これを Markov 連鎖という．以後 $(X_n)_{n=1}^{+\infty}$ は Markov 連鎖.

3　Markov行列

定義 (Markov 行列). (i, j) 成分 $(\forall i, j \in E)$ を $\mathrm{P}(X_1 = j \mid X_0 = i)$ とする確率行列．行列を P, (i, j) 成分を $[P]_{ij}$ と表記．計算規則は以下.

$$P^0 = I, \qquad\qquad (I：恒等写像),$$

$$[P^n]_{ij} = \sum_{k \in E} [P^{n-1}]_{ik} [P]_{kj}, \quad (\forall i, j \in E,\ n \in \mathbb{N}).$$

定義から次が成立

$$[P^n]_{ij} = \mathrm{P}(X_n = j \mid X_0 = i),\ (\forall n \in \mathbb{N},\ i, j \in E).$$

4　Chapman-Kolmogorov 方程式

命題 (Chapman-Kolmogorov 方程式). 任意の $n, m = 0, 1, 2, \cdots$ と $i, j \in E$ に対し次が成立.

$$[P^{n+m}]_{ij} = \sum_{k \in E} [P^n]_{ik} [P^m]_{kj}.$$

5　既約性・再帰性

定義 (既約性). P が既約である

$$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\ \forall i, j \in E,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \text{s.t.} \quad [P^n]_{ij} > 0.$$

定義 (再帰性). P が再帰的である

$$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\ \mathrm{P}(\exists n \geq 1,\ X_n = i \mid X_0 = i) = 1 \quad (\forall i \in E).$$

P が非再帰的である

$$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\ \mathrm{P}(\forall n \geq 1,\ X_n \neq i \mid X_0 = i) > 0 \quad (\forall i \in E).$$

6　離散空間上のMarkov連鎖

定義 (到達時刻と到達回数). $\forall i \in E,\ \omega \in \Omega,$

到達時刻　$\tau_i(\omega) := \inf\{n \geq 1 \mid X_n(\omega) = i\}$,

到達回数　$\eta_i(\omega) := \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{(X_n=i)}(\omega)$.

$p_{ij} := \mathrm{P}\left(\tau_j < \infty \,\middle|\, X_0 = i\right), \quad (\forall i, j \in E)$
と表記すれば次が成立:

$$p_{ii} = \mathrm{P}\left(\exists n \geq 1,\ X_n = j \mid X_0 = i\right),$$

$$p_{ii} < 1 \Leftrightarrow \mathrm{E}\left[\eta_i \mid X_0 = i\right] < +\infty, \quad (\forall i \in E).$$

7 正再帰性

定義 (不変確率測度). E 上の確率測度 $\pi = ([\pi]_i)_{i\in E}$, $(\sum_{i\in E}[\pi]_i = 1)$ が P に対して不変確率測度である

$$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad [\pi]_i = [\pi P]_i (= \sum_{j\in E} [\pi]_j [P]_{ji}), \qquad (\forall i \in E).$$

定義 (正再帰性). P は正再帰的

$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\quad P$ が既約かつ不変確率測度が存在.

8　再帰性の諸命題

命題. P が既約の下，(i) ~ (iv) が順に示される:

(i)　P が再帰的 $\Leftrightarrow \mathrm{E}\left[\eta_i \mid X_0 = i\right] = +\infty,\ (\forall i \in E)$.

(ii)　P は再帰的であるか非再帰的のどちらか.

　特に E が有限集合なら P は再帰的.

(iii)　P が正再帰的 $\Rightarrow$ P は再帰的.

(iv)　E が有限集合なら P は正再帰的.

9　周期

定義 ($i \in E$の周期). $N_i := \{n \geq 1 \mid [p^n]_{ii} > 0\}$の最大公約数を$i \in E$の周期といい$d_i$と表す.

命題 (既約なら周期はunique). Pが既約ならば$d_i = d_j \ (\forall i, j \in E)$.　この場合$d_i$を$P$の周期という.

定義 (非周期性). Pが既約の下,

$$P\text{は非周期的} \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad P\text{の周期が}1.$$

10　Ergodicity

命題 (周期に関する一命題). P：既約，非周期的,

$$\forall i, j \in E,\ \exists n_{ij} \in \mathbb{N},\ \text{s.t. } [P^n]_{ij} > 0\ (\forall n \geq n_{ij}).$$

定理 (Ergodicity). Pが既約で非周期的かつ正再帰的であるとする．Pの不変確率測度を$\boldsymbol{\pi}$で表すとき次が成立.

$$\lim_{n\to+\infty} [P^n]_{ij} = [\pi]_j, \quad (\forall i, j \in E).$$