

2019年10月11日

---

# クラスの導入と $\varepsilon$ 項

---

# 目次

---

1	導入	2
2	言語	6
3	言語の拡張	10
4	$\exists$ の規則	12
5	式の書き換え	14
6	$\exists$ の除去規則	16
7	$\forall$ の導入	17
8	成り立つこと	18

# 1 導入

---

- 集合論の言語  $\mathcal{L}_\in = \{\in\}$  の自然な拡張によりクラスを導入することは容易い:

$$\{x \mid \varphi(x)\} \quad (\varphi \text{ は } \mathcal{L}_\in \text{ の式})$$

なるオブジェクトを取り入れればよい.

- これが持つ意味は

$$\forall u \left( u \in \{x \mid \varphi(x)\} \iff \varphi(u) \right)$$

を満たすモノ.

- $\mathcal{L}_\epsilon$  においては無定義概念であった集合が

$$\exists x (x = a)$$

を満たすクラス  $a$  のことであると定義できる.

留意点

- ※  $\varphi(x)$  と書いたら,  $\varphi$  には変項  $x$  が自由に現れていて, また  $x$  の他に自由な変項は無い.
- ※  $\varphi(u)$  など  $x$  を他の項で置換する際は, 項は束縛による障害を受けないように選ばれている.

- $\exists$ とは？
- $\exists$ に形式的な意味を付ける方法として Hilbert の  $\varepsilon$  項がある:  
式  $\varphi(x)$  に対して

$$\varepsilon x \varphi(x).$$

- これが持つ意味は

$$\exists x \varphi(x) \iff \varphi(\varepsilon x \varphi(x))$$

を満たすモノ.

- 島内では  $\varepsilon$  項, ブルバキでは  $\tau$  項.
- しかし式  $\varphi(x)$  に対して  $\varepsilon x \varphi(x)$  なるオブジェクトを項とすると項と式の定義が入れ子になってしまう.

- $\varepsilon$  項の良さを活かしたまま入れ子の問題を解消し, またクラスの自然な導入により直観的な集合論を構築した.
- この言語の拡張がZFCの単純な保存拡大ではないのでZFCと厳密にどう関係しているかは不明.

## 2 言語

---

- 本稿で使う言語は，論理的に書けば

$$\mathcal{L}_\epsilon = \{\epsilon, \vdash\}$$

及びその拡張言語  $\mathcal{L}$ .

- $\vdash$ とは何か？通常は  $\mathcal{L}_\epsilon = \{\epsilon\}$ .
- そもそも述語論理では可算個の変項 (variable) として

$$v_0, v_1, v_2, \dots$$

を用意していたりする．集合論の解説書も同様の記号列を変項としている...

- でも実際の式に  $v_0, v_1, v_2, \dots$  なんて現れず, 通常は文字

$$a, b, c, \dots, \quad x, y, z, \dots, \quad \alpha, \beta, \gamma, \dots.$$

- 文字は変項であると約束する.
- ただし文字だけだと足りないので,

変項の生成規則

$\tau$  と  $\sigma$  を変項とするとき,

$$\vdash \tau \sigma$$

も変項である (ポーランド記法).



- $\vdash$ を使うことの利点：
  - 文字そのものを変項としているので自然.
  - 添え字の数字や「可算個」という言葉を用いることなく, 実質的に可算無限個の変項を用意できる.

$\vdash xx, \vdash \vdash xxx, \vdash \vdash \vdash xxxx, \vdash \vdash \vdash \vdash xxxxx, \dots$

のように,  $\vdash$ と  $x$ だけで十分(極端).

- 数字や可算の概念は「集合論の中で定義されるもの」と「感覚として持っているもの」の二つがあるが, 字面では同じなのであまり使いたくない.

## $\mathcal{L}_\epsilon$ の項と式の定義

項 • 文字は項である.

- 項  $\tau$  と項  $\sigma$  に対して  $\tau\sigma$  は項である.
- これらのみが項である.

式 • 項  $\tau$  と項  $\sigma$  に対して  $\in \tau\sigma$  と  $= \tau\sigma$  は式である.

- 式  $\varphi$  に対して  $\neg \varphi$  は式である.
- 式  $\varphi$  と式  $\psi$  に対して  $\vee \varphi\psi$  と  $\wedge \varphi\psi$  と  $\implies \varphi\psi$  はいずれも式である.
- 式  $\varphi$  と項  $x$  に対して  $\exists x\varphi$  と  $\forall x\varphi$  は式である.
- これらのみが式である.

### 3 言語の拡張

---

拡張の動機

$\mathcal{L}_\epsilon$  の式  $\varphi(x)$  に対して

$$\{x \mid \varphi(x)\}$$

や

$$\varepsilon x \varphi(x)$$

の形のオブジェクトを項として式に組み込みたい.

$\{x \mid \varphi(x)\}$  の形の項を **内包項**,  $\varepsilon x \varphi(x)$  の形の項を  **$\varepsilon$  項** と呼ぶことにして,  $\mathcal{L}_\varepsilon$  に内包項と  $\varepsilon$  項を追加した言語を

$\mathcal{L}$

と名付ける. また  $\mathcal{L}_\varepsilon$  の項は ( **$\mathcal{L}$  の**) **変項** と呼ぶ.

$\mathcal{L}$  の項と式の定義

項 内包項と  $\varepsilon$  項と変項は項である. これらのみが項である.

式 式の生成規則は前と殆ど同じであるが,

- 式  $\varphi$  と **変項**  $x$  に対して  $\exists x \varphi$  と  $\forall x \varphi$  は式である.  
の箇所のみ変える.

## 4 $\exists$ の規則

---

推論規則 4.1 ( $\exists$ の導入).  $\mathcal{L}$ の式 $\varphi(x)$ と $\varepsilon$ 項 $\tau$ に対して

$$\varphi(\tau) \vdash \exists x \varphi(x).$$

とくに, 任意の $\varepsilon$ 項 $\tau$ に対して

$$\tau = \tau$$

だから

$$\exists x (x = \tau)$$

が成り立つ. つまり  $\varepsilon$ 項はすべて集合.

推論規則 4.2 ( $\exists$ の除去 (NG版)).  $\mathcal{L}$ の式  $\varphi(x)$ に対して

$$\exists x \varphi(x) \vdash \varphi(\varepsilon x \varphi(x)).$$

$\varphi$ に内包項や  $\varepsilon$ 項が現れる場合

$$\varepsilon x \varphi(x)$$

なる項は無い(無理矢理つくと入れ子問題).

解決法

$\mathcal{L}$ の式を  $\mathcal{L}_\varepsilon$ の式に書き換える手順を用意する.

## 5 式の書き換え

---

- 式に  $\varepsilon$  項が含まれていると書き換え不可.
- $\varepsilon$  項が現れない式を **甲種式**, そうでない式を **乙種式** と分類.

次の書き換え規則によって, 甲種式はすべて  $\mathcal{L}_\varepsilon$  の式に書き換え可能(構造的帰納法による).

- $x \in \{y \mid \psi(y)\}$  は  $\psi(x)$
- $\{x \mid \varphi(x)\} \in y$  は

$$\exists s \left( s \in y \wedge \forall x \left( x \in s \iff \varphi(x) \right) \right)$$

- $\{x \mid \varphi(x)\} \in \{y \mid \psi(y)\}$  は

$$\exists s \left( \psi(s) \wedge \forall x \left( x \in s \iff \varphi(x) \right) \right)$$

- $x = \{ y \mid \psi(y) \}$  は

$$\forall u \ ( u \in x \iff \psi(u) )$$

- $\{ x \mid \varphi(x) \} = y$  は

$$\forall u \ ( \varphi(u) \iff u \in y )$$

- $\{ x \mid \varphi(x) \} = \{ y \mid \psi(y) \}$  は

$$\forall u \ ( \varphi(u) \iff \psi(u) )$$



## 6 $\exists$ の除去規則

---

甲種式  $\varphi$  を  $\mathcal{L}_\epsilon$  の式に書き換えたものを  $\hat{\varphi}$  と書く.

**推論規則 6.1 ( $\exists$ の除去).** 甲種式  $\varphi(x)$  に対して

$$\exists x \varphi(x) \vdash \varphi(\varepsilon x \hat{\varphi}(x)).$$

$\exists$ の除去規則と導入規則により次を得る.

**定理 6.2.** 甲種式  $\varphi(x)$  に対して

$$\exists x \varphi(x) \iff \varphi(\varepsilon x \hat{\varphi}(x)).$$

## 7 $\forall$ の導入

---

**推論規則 7.1 ( $\forall$  の導入).** 甲種式  $\varphi(x)$  に対し, すべての  $\varepsilon$  項  $\tau$  で  $\varphi(\tau)$  が成り立つなら

$$\forall x \varphi(x).$$

**推論規則 7.2 ( $\forall$  の除去).** 甲種式  $\varphi(x)$  に対し,  $\forall x \varphi(x)$  が定理ならばすべての  $\varepsilon$  項  $\tau$  で

$$\varphi(\tau).$$

$\varepsilon$  項は集合であるから, 量化の範囲は集合の上だけ.

定理 7.3. 甲種式  $\varphi(x)$  に対して

$$\forall x \varphi(x) \iff \varphi(\varepsilon x \rightarrow \hat{\varphi}(x)).$$

次の定理は他の公理および構造的帰納法と併せて示される.

定理 7.4 (書き換えの同値性). 甲種式  $\varphi(x)$  に対して

$$\forall x (\varphi(x) \iff \hat{\varphi}(x)).$$

## 8 成り立つこと

---

定理 8.1. 内包項  $\{x \mid \varphi(x)\}$  が集合であれば

$$\{x \mid \varphi(x)\} = \varepsilon y \, \forall x \, (x \in y \iff \varphi(x)).$$

略証.  $\exists y \, (\{x \mid \varphi(x)\} = y)$  を  $\mathcal{L}_\varepsilon$  の式に書き直せば

$$\exists y \, \forall x \, (x \in y \iff \varphi(x)).$$

存在記号の規則より結論が従う.

