2020年1月7日

ε 項とクラスの導入による具体的で直観的な集合論の構築

目次

1　導入

1.1　ε計算について

- 量化∃, ∀を使う証明を命題論理の証明に埋め込むためにHilbertが開始.
- 式$\varphi(x)$に対して

$$\varepsilon x \varphi(x)$$

という形のオブジェクトを作り，ε項と呼ぶ．また

$$\begin{aligned} \exists x \varphi(x) &\leftrightarrow \varphi(x/\varepsilon x \varphi(x)), \\ \forall x \varphi(x) &\leftrightarrow \varphi(x/\varepsilon x \neg x \varphi(x)) \end{aligned}$$

を公理とする.

- 命題論理の証明に埋め込む際には∃や∀の付いた式をε項を代入した式に変換すればよい.
- ただし，今回ε項を導入したのは埋め込むためではなく集合を「具体化」するため.

- “生の”集合論では集合というオブジェクトが用意されていないため，「存在」は「実在」ではない．たとえば

$$\exists x \, \forall y \, (\, y \notin x \,)$$

は定理であり「空集合は存在する」と読むが，空集合を“実際に取ってくる”ことは不可能．

- ε 項を使えば，∃の公理と空集合の存在定理によって

$$\forall y \, (\, y \notin \varepsilon x \, \forall y \, (\, y \notin x \,) \,)$$

が成り立つ．つまり ε 項は「存在」を「実在」に格上げする(上の ε 項は集合である)．

ε 項のメリット

- 「存在」を「実在」で補強できる．
- ある種の ε 項は集合であり，集合を具体的なオブジェクトとして扱える．
- 証明で用いる推論規則は三段論法のみで済む．
- 証明は全て閉じた式で行える．

1.2　クラスについて

- ブルバキ[]や島内[]でもε項を使った集合論を展開.
- ところで,「$\varphi(x)$を満たす集合xの全体」の意味の

$$\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$$

というオブジェクトも取り入れたい.

- “生の”集合論では“インフォーマル”な導入.
- ブルバキ[]や島内[]では

$$\{\, x \mid \varphi(x) \,\} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \varepsilon x\, \forall u\, (\, \varphi(u) \ \leftrightarrow \ u \in x \,)$$

と定めるが,これは欠点がある.

$$\exists x\, \forall u\, (\, \varphi(u) \ \leftrightarrow \ u \in x \,)$$

が成立しない場合は「$\varphi(x)$を満たす集合xの全体」という意味を持たない.

- 式φから直接$\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$の形のオブジェクトを作ればよい.

定義 1.1 (クラス). 式 φ に x のみが自由に現れているとき，

$$\varepsilon x \varphi(x), \quad \{\, x \mid \varphi(x) \,\}$$

の形のオブジェクトを**クラス (class)** と呼ぶ.

- クラスである ε 項は集合である.
- 集合でないクラスもある．たとえば $\{\, x \mid x = x \,\}$ や $\{\, x \mid x \notin x \,\}$ は集合ではない.

集合の定義は竹内 [] に倣う．定義により集合はクラスである.

定義 1.2 (集合). クラス c が

$$\exists x\,(\, c = x \,)$$

を満たすとき c を集合 **(set)** と呼び，そうでない場合は真クラス **(proper class)** と呼ぶ.

NBG 集合論　クラスの概念を取り入れた NBG 集合論というものがあるが，こちらのクラスは「実在」しない.

2　言語

- クラスという新しいオブジェクトを導入したら，この導入操作が“妥当”であるかどうかが問題になる．

- 妥当性は，“生の”集合論の式 φ に対して

$$\text{“生の”集合論で}\ \varphi\ \text{が証明される} \iff \text{新しい集合論で}\ \varphi\ \text{が証明される}$$

  が成り立つかどうかで検証する．

- 精密な検証のためには，集合論の言語と証明のルールを明らかにしなくてはならない．

- 言語とは「変項」，「述語記号」，「論理記号」とその他もろもろの記号からなる．そして「(数) 式」は言語の記号を用いて作られる．式を作るためには「項」が必要であり，文字は最も よく使われる項である．たとえば

$$s \in t$$

  と書けば一つの式が出来上がる．

- まず“生の”集合論の言語 $\mathcal{L}_{\in}$ を明示する．

2.1 言語 $\mathcal{L}_{\in}$

言語 $\mathcal{L}_{\in}$

矛盾記号　$\perp$

論理記号　$\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$

量化子　$\forall$, $\exists$

述語記号　$=$, $\in$

変項　$x, y, z, \cdots$ など.

また $\mathcal{L}_{\in}$ の項(term)と式(formula)は次の規則で生成する.

$\mathcal{L}_{\in}$ の項と式

項　変項は項であり，またこれらのみが項である.

式 • $\perp$ は式である.

- 項 τ と項 σ に対して $\tau \in \sigma$ と $\tau = \sigma$ は式である.
- 式 φ に対して $\neg\varphi$ は式である.
- 式 φ と式 ψ に対して $\varphi \vee \psi$ と $\varphi \wedge \psi$ と $\varphi \rightarrow \psi$ はいずれも式である.
- 式 φ と項 x に対して $\exists x\varphi$ と $\forall x\varphi$ は式である.
- これらのみが式である.

2.2　言語の拡張

- クラスを正式に導入するには言語を拡張しなくてはならない.
- 拡張は二段階に分けて行う．始めに ε 項のために拡張し，次に $\left\{ x \mid \varphi(x) \right\}$ の形の項のために拡張する.
- 始めの拡張により得る言語を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ と名付ける.

言語 $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$

矛盾記号　$\perp$
論理記号　$\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$
量化子　$\forall, \exists$
述語記号　$=, \in$
変項　$x, y, z, \cdots$ など.
イプシロン　ε

$\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項と式の定義

- 変項は項である.
- $\perp$ は式である.
- 項 τ と項 σ に対して $\tau \in \sigma$ と $\tau = \sigma$ は式である.
- 式 φ に対して $\neg\varphi$ は式である.
- 式 φ と式 ψ に対して $\varphi \vee \psi$ と $\varphi \wedge \psi$ と $\varphi \rightarrow \psi$ はいずれも式である.
- 式 φ と変項 x に対して $\exists x\varphi$ と $\forall x\varphi$ は式である.
- 式 φ と変項 x に対して $\varepsilon x\varphi$ は項である.
- これらのみが項と式である.

- $\mathcal{L}_{\in}$ との大きな違いは項と式の定義が循環している点にある.

- $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式が $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項を用いて作られるのは当然ながら，その逆に $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項もまた $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式から作られる.

- $\mathcal{L}_{\in}$ の式は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式でもある.

言語 $\mathcal{L}$

矛盾記号　$\perp$

論理記号　$\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$

量化子　$\forall$, $\exists$

述語記号　$=$, $\in$

変項　$x, y, z, \cdots$ など.

補助記号　$\{$, $|$, $\}$

$\mathcal{L}$ の項と式の定義

項
- 変項は項である.
- $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項は項である.
- x を変項とし，φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とするとき，$\left\{ x \mid \varphi \right\}$ なる記号列は項である.
- これらのみが項である.

式
- $\perp$ は式である.
- 項 τ と項 σ に対して $\tau \in \sigma$ と $\tau = \sigma$ は式である.
- 式 φ に対して $\neg\varphi$ は式である.
- 式 φ と式 ψ に対して $\varphi \vee \psi$ と $\varphi \wedge \psi$ と $\varphi \rightarrow \psi$ はいずれも式である.
- 式 φ と変項 x に対して $\exists x \varphi$ と $\forall x \varphi$ は式である.
- これらのみが式である.

3　∃の規則

推論規則 3.1 (∃の導入).　$\mathcal{L}$の式$\varphi(x)$とε項τに対して

$$\varphi(\tau) \vdash \exists x \varphi(x).$$

とくに，任意のε項τに対して

$$\tau = \tau.$$

だから

$$\exists x \, (\, x = \tau \,)$$

が成り立つ．つまりε項はすべて集合.

推論規則 3.2 (∃の除去 (NG 版)). $\mathcal{L}$ の式 $\varphi(x)$ に対して

$$\exists x \varphi(x) \vdash \varphi(\varepsilon x \varphi(x)).$$

φ に内包項や ε 項が現れる場合

$$\varepsilon x \varphi(x)$$

なる項は無い (無理矢理つくると入れ子問題).

解決法

$\mathcal{L}$ の式を $\mathcal{L}_{\in}$ の式に書き換える手順を用意する.

4　式の書き換え

- 式に ε 項が含まれていると書き換え不可．
- ε 項が現れない式を甲種式，そうでない式を乙種式と分類．

次の書き換え規則によって，甲種式はすべて $\mathcal{L}_\in$ の式に書き換え可能(構造的帰納法による)．

- $x \in \{\, y \mid \psi(y) \,\}$ は $\psi(x)$
- $\{\, x \mid \varphi(x) \,\} \in y$ は

$$\exists s \ \bigl(s \in y \wedge \forall x \ \bigl(x \in s \Longleftrightarrow \varphi(x) \bigr) \bigr)$$

- $\{\, x \mid \varphi(x) \,\} \in \{\, y \mid \psi(y) \,\}$ は

$$\exists s \ \bigl(\psi(s) \wedge \forall x \ \bigl(x \in s \Longleftrightarrow \varphi(x) \bigr) \bigr)$$

- $x = \{\, y \mid \psi(y) \,\}$ は

$$\forall u \ \bigl(u \in x \Longleftrightarrow \psi(u) \bigr)$$

- $\{\, x \mid \varphi(x) \,\} = y$ は

$$\forall u \ \bigl(\varphi(u) \Longleftrightarrow u \in y \bigr)$$

- $\{\, x \mid \varphi(x) \,\} = \{\, y \mid \psi(y) \,\}$ は

$$\forall u \ \bigl(\varphi(u) \Longleftrightarrow \psi(u) \bigr)$$

5　∃の除去規則

甲種式 φ を $\mathcal{L}_{\in}$ の式に書き換えたものを $\hat{\varphi}$ と書く.

推論規則 5.1 (∃の除去).　甲種式 $\varphi(x)$ に対して

$$\exists x \varphi(x) \vdash \varphi\left(\varepsilon x \hat{\varphi}(x)\right).$$

∃の除去規則と導入規則により次を得る.

定理 5.2.　甲種式 $\varphi(x)$ に対して

$$\exists x \varphi(x) \Longleftrightarrow \varphi\left(\varepsilon x \hat{\varphi}(x)\right).$$

6 ∀の導入

推論規則 6.1 (∀の導入). 式 $\varphi(x)$ に対し，すべての ε 項 τ で $\varphi(\tau)$ が成り立つなら

$$\forall x \varphi(x).$$

推論規則 6.2 (∀の除去). 式 $\varphi(x)$ と ε 項 τ に対して

$$\forall x \varphi(x) \vdash \varphi(\tau).$$

ε 項は集合であるから，量化の亘る範囲は集合の上だけ.

定理 6.3. 甲種式 $\varphi(x)$ に対して

$$\forall x \varphi(x) \Longleftrightarrow \varphi\left(\varepsilon x \rightarrow \hat{\varphi}(x)\right).$$

次の定理は他の公理および構造的帰納法と併せて示される.

定理 6.4 (書き換えの同値性). 甲種式 $\varphi(x)$ に対して

$$\forall x \ \left(\varphi(x) \Longleftrightarrow \hat{\varphi}(x)\right).$$

7　成り立つこと

定理 7.1.　内包項 $\left\{ x \mid \varphi(x) \right\}$ が集合であれば

$$\left\{ x \mid \varphi(x) \right\} = \varepsilon y \, \forall x \, \left(x \in y \Longleftrightarrow \varphi(x) \right).$$

略証.　$\exists y \, \left(\left\{ x \mid \varphi(x) \right\} = y \right)$ を $\mathcal{L}_{\in}$ の式に書き直せば

$$\exists y \, \forall x \, \left(x \in y \Longleftrightarrow \varphi(x) \right).$$

存在記号の規則より結論が従う. ∎