ε 計算とクラスの導入による具体的で直観的な集合論の構築

関根深澤研 百合川尚学
学籍番号：29C17095

February 5, 2020

Contents

ε について

- 量化 ∃, ∀ を使う証明を命題論理の証明に埋め込むために Hilbert が開始.
- 式 $\varphi(x)$ に対して

$$\varepsilon x \varphi(x)$$

という形のオブジェクトを作り，ε 項と呼ぶ．また命題論理の証明に埋め込む際には，∃ や ∀ の付いた式を

$$\varphi(x/\varepsilon x \varphi(x)) \overset{\text{def}}{\longleftrightarrow} \exists x \varphi(x),$$

$$\varphi(x/\varepsilon x \neg x \varphi(x)) \overset{\text{def}}{\longleftrightarrow} \forall x \varphi(x)$$

によって変換すればよい.

ε について

- 今回 ε 項を導入したのは「存在」と「実在」を同義とするため．
- Hilbert の ε 計算ではなく，ε 項を用いて一種の Henkin 拡大を行う．
- つまり，導入の意図は存在文に対して証人を与えること：

$$\exists x\varphi(x) \ \rightarrow \ \varphi(\varepsilon x\varphi(x)).$$

  この式は $\exists$ に関する主要な公理．
- 「φ である集合が存在すれば，その一つは $\varepsilon x\varphi(x)$ である．」
- 「$\neg\forall x\varphi(x) \ \rightarrow \ \exists x\neg\varphi(x)$」と組み合わせると

$$\varphi(\varepsilon x\neg\varphi(x)) \ \rightarrow \ \forall x\varphi(x)$$

  が出る．

ε について

- **ZF** 集合論では集合というオブジェクトが用意されていないため，「存在」は「実在」ではない．たとえば

$$\exists x \, \forall y \, (y \notin x)$$

は定理であり「空集合は存在する」と読むが，空集合を
“実際に取ってくる”ことは不可能．

- ε 項を使えば，∃ の公理と空集合の存在定理によって

$$\forall y \, (y \notin \varepsilon x \, \forall y \, (y \notin x))$$

が成り立つ．

ε 項を使うメリット

- 証明で用いる推論規則は三段論法のみで済む．
- 証明が容易になる場合がある．

クラスについて

- Bourbaki[] や島内 [] でも ε 項を使った集合論を展開.
- ところで,「φ である集合の全体」の意味の

$$\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$$

というオブジェクトも取り入れたい.
- **ZF** 集合論では「定義による拡大」 or インフォーマルな導入.
- Bourbaki[] や島内 [] では

$$\{\, x \mid \varphi(x) \,\} \overset{\text{def}}{=\!=} \varepsilon y \, \forall x \, (\, \varphi(x) \ \leftrightarrow \ x \in y \,)$$

と定めるが,

$$\exists y \, \forall x \, (\, \varphi(x) \ \leftrightarrow \ x \in y \,)$$

が成立しない場合は「φ である集合の全体」という意味を持たない.
- 式 φ から直接 $\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$ の形のオブジェクトを作ればよい.

クラスについて

クラス

式 φ に x のみが自由に現れているとき，$\varepsilon x\varphi(x)$,　$\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$ の形のオブジェクトをクラス **(class)** と呼ぶ．

- クラスである ε 項は集合である．
- 集合でないクラスもある．たとえば $\{\, x \mid x = x \,\}$ や $\{\, x \mid x \notin x \,\}$ は集合ではない．

集合の定義は竹内 [] に倣う．定義により集合はクラスである．

集合

クラス c が

$$\exists x\,(\, c = x \,)$$

を満たすとき c を集合 **(set)** と呼び，そうでない場合は真クラス **(proper class)** と呼ぶ．

言語

- クラスという新しいオブジェクトを導入したら，この導入操作が“妥当”であるかどうかが問題になる．
- 妥当性は，**ZF** 集合論の命題 ψ に対して

  ZF 集合論で ψ が証明可能 $\Longleftrightarrow$ 新しい集合論で ψ が証明可能

  が成り立つかどうかで検証する．
- 集合論の言語と証明のルールを明らかにしなくてはならない．
- 言語 (の語彙) とは「変項」，「述語記号」，「論理記号」とその他もろもろの記号からなる．「式 (formula)」は言語の語彙を用いて作られる．名詞の役を担うのが「項 (term)」であり，文字は最もよく使われる項である．たとえば

$$s \in t$$

  と書けば一つの式が出来上がる．
- まず **ZF** 集合論の言語 $\mathcal{L}_{\in}$ を明示する．

言語 $\mathcal{L}_{\in}$

言語 $\mathcal{L}_{\in}$ の語彙

矛盾記号	$\perp$
論理記号	$\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$
量化子	$\forall, \exists$
述語記号	$=, \in$
変項	$x, y, z, \cdots.$

言語 $\mathcal{L}_\in$ の項と式

$\mathcal{L}_\in$ の項と式は次の規則で生成する.

$\mathcal{L}_\in$ の項と式

項 変項は項であり，またこれらのみが項である.

式
- $\bot$ は式である.
- 項 τ と項 σ に対して $\tau \in \sigma$ と $\tau = \sigma$ は式である.
- 式 φ に対して $\neg\varphi$ は式である.
- 式 φ と式 ψ に対して $\varphi \vee \psi$ と $\varphi \wedge \psi$ と $\varphi \rightarrow \psi$ はいずれも式である.
- 式 φ と項 x に対して $\exists x\varphi$ と $\forall x\varphi$ は式である.
- これらのみが式である.

言語の拡張

- クラスを正式に導入するには言語を拡張しなくてはならない．
- 拡張は二段階に分けて行う．始めに ε 項のために拡張し，次に $\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$ の形の項のために拡張する．
- 始めの拡張により得る言語を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ と名付ける．

言語 $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の語彙

矛盾記号	$\perp$
論理記号	$\neg,\ \vee,\ \wedge,\ \rightarrow$
量化子	$\forall,\ \exists,\ \varepsilon$
述語記号	$=,\ \in$
変項	$x, y, z, \cdots.$

$\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項と式

$\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項と式の定義

- 変項は項である．
- $\perp$ は式である．
- 項 τ と項 σ に対して $\tau \in \sigma$ と $\tau = \sigma$ は式である．
- 式 φ に対して $\neg\varphi$ は式である．
- 式 φ と式 ψ に対して $\varphi \vee \psi$ と $\varphi \wedge \psi$ と $\varphi \rightarrow \psi$ はいずれも式である．
- 式 φ と変項 x に対して $\exists x\varphi$ と $\forall x\varphi$ は式である．
- 式 φ と変項 x に対して $\varepsilon x\varphi$ は項である．
- これらのみが項と式である．

- $\mathcal{L}_{\in}$ との大きな違いは項と式の生成が循環している点．
- $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式が $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項を用いて作られるのは当然ながら，その逆に $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項もまた $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式から作られる．
- $\mathcal{L}_{\in}$ の式は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式でもある．

言語 $\mathcal{L}$

- $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式 φ と変項 x に対して，$\varepsilon x\varphi$ なる項を ε 項 (epsilon term) という．
- $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式 φ と変項 x に対して，$\{x \mid \varphi\}$ なる項を内包項ということにする．

言語 $\mathcal{L}$ の語彙

矛盾記号	$\perp$
論理記号	$\neg, \vee, \wedge, \to$
量化子	$\forall, \exists$
述語記号	$=, \in$
変項	$x, y, z, \cdots.$
ε 項と内包項	上記のもの

$\mathcal{L}$ の項と式

$\mathcal{L}$ の項と式の定義

項 変項，ε 項，内包項は項である．またこれらのみが項である．

式
- $\perp$ は式である．
- 項 τ と項 σ に対して $\tau \in \sigma$ と $\tau = \sigma$ は式である．
- 式 φ に対して $\neg\varphi$ は式である．
- 式 φ と式 ψ に対して $\varphi \vee \psi$ と $\varphi \wedge \psi$ と $\varphi \to \psi$ はいずれも式である．
- 式 φ と変項 x に対して $\exists x\varphi$ と $\forall x\varphi$ は式である．
- これらのみが式である．

言語 $\mathcal{L}$ こそが本論文の標準言語である．

扱う式の制限

上で作った項や式の中には

$$\varepsilon x\,(y = y),\quad \{\,x \mid z \neq z\,\},\quad \forall x\,(u \in v)$$

のような意味の通らないものが氾濫しているので，排除する．

- $\varepsilon x\varphi(x)$ なる形の ε 項は，φ に x “のみ” 自由に現れているとき主要 ε 項と呼ぶことにする．
- $\{\,x \mid \varphi\,\}$ なる形の内包項は，φ に x “が” 自由に現れているとき，正則内包項と呼ぶことにする．
- 以降扱う式に現れる ε 項は全て主要 ε 項，内包項は全て正則内包項であるとし，$\forall x\varphi$ や $\exists x\varphi$ なる式は φ に x が自由に現れているとする．

クラス

クラス

$\varepsilon x\varphi(x)$ なる形の ε 項，及び $\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$ なる形の内包項は，φ に x “のみ” 自由に現れているときクラス (class) と呼ぶ．またこれらのみがクラスである．

主要 ε 項はクラスであるが，実際は集合である (後述).

なぜ書き換えるか

- ε 項を導入したのは，存在文に対して証人を付けるため：

$$\exists x\varphi(x) \;\to\; \varphi(\varepsilon x\varphi(x)).$$

- しかし φ に内包項が使われているとき，$\varepsilon x\varphi(x)$ は使えない (作られていない).
- そのときは，φ を “同値” な $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式 $\hat{\varphi}$ に書き換えて

$$\exists x\varphi(x) \;\to\; \varphi(\varepsilon x\hat{\varphi}(x))$$

を公理とすればよい.

式の書き換え

φ の部分式のうち原子式であるところを表に従って直したものを「φ の書き換え」と呼ぶ.

	元の式	書き換え後
(1)	$a = \{z \mid \psi\}$	$\forall v\,(v \in a \leftrightarrow \psi(z/v))$
(2)	$\{y \mid \varphi\} = b$	$\forall u\,(\varphi(y/u) \leftrightarrow u \in b)$
(3)	$\{y \mid \varphi\} = \{z \mid \psi\}$	$\forall u\,(\varphi(y/u) \leftrightarrow \psi(z/u))$
(4)	$a \in \{z \mid \psi\}$	$\psi(z/a)$
(5)	$\{y \mid \varphi\} \in b$	$\exists s\,(\forall u\,(\varphi(y/u) \leftrightarrow u \in s) \land s \in b)$
(6)	$\{y \mid \varphi\} \in \{z \mid \psi\}$	$\exists s\,(\forall u\,(\varphi(y/u) \leftrightarrow u \in s) \land \psi(z/s))$

ここで,

- a, b は変項か主要 ε 項.
- $\psi(z/v)$ は ψ に自由に現れている z に v を代入した式.

主結果

本論文の主結果は

$$\text{ZF 集合論で } \psi \text{ が証明可能} \iff \text{本論文の集合論で } \psi \text{ が証明可能}$$

であるが，より精密に書くと

主結果

$\mathcal{L}_\in$ の任意の文 (自由な変項が現れない式) ψ に対して，「Γ から ψ への **HK** の証明で $\mathcal{L}_\in$ の式の列であるものが取れる」ことと「Σ から ψ への **HE** の証明で $\mathcal{L}$ の文の列であるものが取れる」ことは同値.

ここで，

- Γ は $\mathcal{L}_\in$ の文で書かれた **ZF** 集合論の公理系.
- Σ は $\mathcal{L}$ の文で書かれた本論文の公理系.
- **HK** と **HE** は証明体系 (論理的公理+推論規則).

以下詳細.

ZF の公理系

Γ の公理

外延性　「同一の要素を持つ集合同士は等しい」

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)$$

相等性　「等しい集合同士の服属関係は一致する」

$$\begin{aligned}
&\forall x \forall y (x = y \to y = x),\\
&\forall x \forall y \forall z (x = y \to (x \in z \to y \in z)),\\
&\forall x \forall y \forall z (x = y \to (z \in x \to z \in y)).
\end{aligned}$$

置換　「集合を写像で写した像は集合」次の式の全称閉包：

$$\begin{aligned}
&\forall x \forall y \forall z (\varphi(x,y) \wedge \varphi(x,z) \to y = z)\\
&\to \forall a \exists z \forall y (y \in z \leftrightarrow \exists x (x \in a \wedge \varphi(x,y))).
\end{aligned}$$

置換公理は式 φ ごとに公理となるので図式 (schema) と呼ばれる.

ZF の公理系

Γ の公理

対 「対集合が存在する」

$$\forall x\,\forall y\,\exists p\,\forall z\,(x = z \lor y = z \;\leftrightarrow\; z \in p)$$

合併 「合併集合が存在する」

$$\forall x\,\exists u\,\forall y\,(\exists z\,(z \in x \land y \in z) \;\leftrightarrow\; y \in u)$$

冪 「冪集合が存在する」

$$\forall x\,\exists p\,\forall y\,(\forall z\,(z \in y \;\rightarrow\; z \in x) \;\leftrightarrow\; y \in p)$$

これらの公理によって既存の集合から新しい集合が作られる.

ZF の公理系

Γ の公理

正則性 「空でない集合は自分自身と交わらない要素を持つ」

$$\forall r\,(\exists x\,(x \in r) \to \exists y\,(y \in r \land \forall z\,(z \in r \to z \notin y)))$$

無限 「自然数の全体を含む集合が存在する」

$$\exists x\,(\exists s\,(\forall t\,(t \notin s) \land s \in x) \land \forall y\,(y \in x \to \exists u\,(\forall v\,(v \in u \leftrightarrow v \in y \lor v = y) \land u \in x)))$$

正則性公理によって集合の範囲が決定する (整礎集合). また無限公理は唯一「集合の存在」に言及している.

古典論理

HK とは古典論理 (classical logic) の Hilbert 流証明体系である.

HK の論理的公理 (命題論理)

- 含意の分配 $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$.
- 含意の導入 $\varphi \to (\psi \to \varphi)$.
- 矛盾の導入 1 $\varphi \to (\neg\varphi \to \bot)$.
- 矛盾の導入 2 $\neg\varphi \to (\varphi \to \bot)$.
- 否定の導入 $(\varphi \to \bot) \to \neg\varphi$.
- 論理和の導入 1 $\varphi \to \varphi \vee \psi$.
- 論理和の導入 2 $\psi \to \varphi \vee \psi$.
- 論理和の除去 $(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi \to \chi))$.
- 論理積の導入 $\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$.
- 論理積の除去 1 $\varphi \wedge \psi \to \varphi$.
- 論理積の除去 2 $\varphi \wedge \psi \to \psi$.
- 二重否定の除去 $\neg\neg\varphi \to \varphi$.

古典論理

HK の論理的公理 (量化)

- 全称の導入 $\forall y(\psi \to \varphi(x/y)) \to (\psi \to \forall x\varphi)$.
- 全称の除去 $\forall x\varphi \to \varphi(x/t)$.
- 存在の導入 $\varphi(x/t) \to \exists x\varphi$.
- 存在の除去 $\forall y(\varphi(x/y) \to \psi) \to (\exists x\varphi \to \psi)$.

HK の証明

「Γ からの **HK** の証明で $\mathcal{L}_{\in}$ の式の列であるもの」とは，$\mathcal{L}_{\in}$ の式の列 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ で，各 φ_i が次のいずれかであるもの：

- **HK** の公理である
- Γ の公理である
- φ_j, φ_k $(j, k < i)$ から三段論法で得られる
- φ_j $(j < i)$ から汎化で得られる.