2020年1月16日

ε 項とクラスの導入による具体的で直観的な集合論の構築

目次

1　導入

1.1　ε 計算について

- 量化∃, ∀を使う証明を命題論理の証明に埋め込むためにHilbertが開始.
- 式 $\varphi(x)$ に対して

$$\varepsilon x \varphi(x)$$

  という形のオブジェクトを作り，ε 項と呼ぶ．また命題論理の証明に埋め込む際には，∃や∀の付いた式を

$$\varphi(x/\varepsilon x \varphi(x)) \overset{\mathrm{def}}{\longleftrightarrow} \exists x \varphi(x),$$
$$\varphi(x/\varepsilon x \neg x \varphi(x)) \overset{\mathrm{def}}{\longleftrightarrow} \forall x \varphi(x)$$

  によって変換すればよい.

- ただし，今回 ε 項を導入したのは埋め込むためではなく集合を「具体化」するため.
- Hilbertの ε 計算ではなく，ε 項を用いて一種のHenkin拡大を行う.

- “生の”集合論では集合というオブジェクトが用意されていないため，「存在」は「実在」ではない．たとえば

$$\exists x \, \forall y \, (\, y \notin x \,)$$

は定理であり「空集合は存在する」と読むが，空集合を“実際に取ってくる”ことは不可能．

- ε 項を使えば，∃の公理と空集合の存在定理によって

$$\forall y \, (\, y \notin \varepsilon x \, \forall y \, (\, y \notin x \,) \,)$$

が成り立つ．つまり ε 項は「存在」を「実在」に格上げする(上の ε 項は集合である).

ε 項のメリット

- 「存在」を「実在」で補強できる．
- 集合を具体的なオブジェクトとして扱える．
- 証明で用いる推論規則は三段論法のみで済む．
- 証明が容易になる場合がある．

1.2 クラスについて

- ブルバキ[]や島内[]でもε項を使った集合論を展開.
- ところで,「$\varphi(x)$を満たす集合xの全体」の意味の

$$\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$$

というオブジェクトも取り入れたい.

- “生の”集合論では“インフォーマル”な導入.
- ブルバキ[]や島内[]では

$$\{\, x \mid \varphi(x) \,\} \overset{\text{def}}{=\!=} \varepsilon x\, \forall u\, (\, \varphi(u) \;\leftrightarrow\; u \in x \,)$$

と定めるが,これは欠点がある.

$$\exists x\, \forall u\, (\, \varphi(u) \;\leftrightarrow\; u \in x \,)$$

が成立しない場合は「$\varphi(x)$を満たす集合xの全体」という意味を持たない.

- 式φから直接$\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$の形のオブジェクトを作ればよい.

定義 1.1 (クラス). 式 φ に x のみが自由に現れているとき，

$$\varepsilon x\varphi(x), \quad \{\, x \mid \varphi(x)\,\}$$

の形のオブジェクトを**クラス (class)** と呼ぶ.

- クラスである ε 項は集合である.
- 集合でないクラスもある．たとえば $\{\, x \mid x = x \,\}$ や $\{\, x \mid x \notin x \,\}$ は集合ではない.

集合の定義は竹内 [] に倣う．定義により集合はクラスである.

定義 1.2 (集合). クラス c が

$$\exists x\,(\, c = x \,)$$

を満たすとき c を集合 **(set)** と呼び，そうでない場合は真クラス **(proper class)** と呼ぶ.

NBG 集合論　クラスの概念を取り入れた NBG 集合論というものがあるが，こちらのクラスは「実在」しない.

2　言語

- クラスという新しいオブジェクトを導入したら，この導入操作が“妥当”であるかどうかが問題になる．

- 妥当性は，“生の”集合論の式 φ に対して

$$\text{“生の”集合論で}\,\varphi\,\text{が証明される} \Longleftrightarrow \text{新しい集合論で}\,\varphi\,\text{が証明される}$$

　が成り立つかどうかで検証する．

- 精密な検証のためには，集合論の言語と証明のルールを明らかにしなくてはならない．

- 言語とは「変項」,「述語記号」,「論理記号」とその他もろもろの記号からなる．そして「(数) 式」は言語の記号を用いて作られる．式を作るためには「項」が必要であり，文字は最もよく使われる項である．たとえば

$$s \in t$$

　と書けば一つの式が出来上がる．

- まず“生の”集合論の言語 $\mathcal{L}_{\in}$ を明示する．

2.1 言語 $\mathcal{L}_\in$

言語 $\mathcal{L}_\in$

矛盾記号　$\perp$

論理記号　$\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$

量化子　$\forall$, $\exists$

述語記号　$=$, $\in$

変項　$x, y, z, \cdots$ など.

また $\mathcal{L}_\in$ の項 (term) と式 (formula) は次の規則で生成する.

$\mathcal{L}_\in$ の項と式

項　変項は項であり，またこれらのみが項である.

式
- $\perp$ は式である.
- 項 τ と項 σ に対して $\tau \in \sigma$ と $\tau = \sigma$ は式である.
- 式 φ に対して $\neg\varphi$ は式である.
- 式 φ と式 ψ に対して $\varphi \vee \psi$ と $\varphi \wedge \psi$ と $\varphi \rightarrow \psi$ はいずれも式である.
- 式 φ と項 x に対して $\exists x\varphi$ と $\forall x\varphi$ は式である.
- これらのみが式である.

2.2　言語の拡張

- クラスを正式に導入するには言語を拡張しなくてはならない.
- 拡張は二段階に分けて行う．始めに ε 項のために拡張し，次に $\left\{ x \mid \varphi(x) \right\}$ の形の項のために拡張する.
- 始めの拡張により得る言語を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ と名付ける.

言語 $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$

矛盾記号　$\perp$
論理記号　$\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\longrightarrow$
量化子　$\forall$, $\exists$
述語記号　$=$, $\in$
変項　$x, y, z, \cdots$ など.
イプシロン　ε

$\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項と式の定義

- 変項は項である.
- $\perp$ は式である.
- 項 τ と項 σ に対して $\tau \in \sigma$ と $\tau = \sigma$ は式である.
- 式 φ に対して $\neg\varphi$ は式である.
- 式 φ と式 ψ に対して $\varphi \vee \psi$ と $\varphi \wedge \psi$ と $\varphi \ \rightarrow \ \psi$ はいずれも式である.
- 式 φ と変項 x に対して $\exists x\varphi$ と $\forall x\varphi$ は式である.
- 式 φ と変項 x に対して $\varepsilon x\varphi$ は項である.
- これらのみが項と式である.

- $\mathcal{L}_{\in}$ との大きな違いは項と式の定義が循環している点にある.

- $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式が $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項を用いて作られるのは当然ながら，その逆に $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項もまた $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式から作られる.

- $\mathcal{L}_{\in}$ の式は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式でもある.

言語$\mathcal{L}$

矛盾記号　$\perp$

論理記号　$\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\longrightarrow$

量化子　$\forall$, $\exists$

述語記号　$=$, $\in$

変項　$x, y, z, \cdots$ など.

補助記号　$\{$, $|$, $\}$

$\mathcal{L}$の項と式の定義

項
- 変項は項である.
- $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項は項である.
- xを変項とし，φを$\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とするとき，$\left\{ x \mid \varphi \right\}$なる記号列は項である.
- これらのみが項である.

式
- $\perp$は式である.
- 項τと項σに対して$\tau \in \sigma$と$\tau = \sigma$は式である.
- 式φに対して$\neg\varphi$は式である.
- 式φと式ψに対して$\varphi \vee \psi$と$\varphi \wedge \psi$と$\varphi \longrightarrow \psi$ はいずれも式である.
- 式φと変項xに対して$\exists x \varphi$と$\forall x \varphi$は式である.
- これらのみが式である.

3　推論の公理

3.1　∃の導入

$\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式 φ に x のみが自由に現れているとき，$\varepsilon x \varphi$ を主要 ε 項と呼ぶ．

推論公理 3.1 (∃の導入).　φ を $\mathcal{L}$ の式とし，x を変項とし，φ には x のみが自由に現れているとし，τ を主要 ε 項とするとき，

$$\varphi(\tau) \longrightarrow \exists x \varphi(x).$$

とくに，任意の ε 項 τ に対して

$$\tau = \tau.$$

だから

$$\exists x \, (\, x = \tau \,)$$

が成り立つ．つまり ε 項はすべて集合．

3.2　∃の除去

推論公理 3.2 (∃の除去 (NG 版)).　φ を $\mathcal{L}$ の式とし，x を変項とし，φ には x のみが自由に現れているとするとき，

$$\exists x \varphi(x) \longrightarrow \varphi(\varepsilon x \varphi(x)).$$

φ が $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式でない場合

$$\varepsilon x \varphi(x)$$

なる項は無い．

解決法

$\mathcal{L}$ の式を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き換える手順を用意する．

3.3 式の書き換え

$\mathcal{L}$ の式はすべて $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き換え可能(構造的帰納法による).

元の式	書き換え後
$a = \{ z \mid \psi \}$	$\forall v\,(\, v \in a \;\leftrightarrow\; \psi(z/v)\,)$
$\{ y \mid \varphi \} = b$	$\forall u\,(\, \varphi(y/u) \;\leftrightarrow\; u \in b\,)$
$\{ y \mid \varphi \} = \{ z \mid \psi \}$	$\forall u\,(\, \varphi(y/u) \;\leftrightarrow\; \psi(z/u)\,)$
$a \in \{ z \mid \psi \}$	$\psi(z/a)$
$\{ y \mid \varphi \} \in b$	$\exists s\,(\forall u\,(\, \varphi(y/u) \;\leftrightarrow\; u \in s\,) \land s \in b\,)$
$\{ y \mid \varphi \} \in \{ z \mid \psi \}$	$\exists s\,(\forall u\,(\, \varphi(y/u) \;\leftrightarrow\; u \in s\,) \land \psi(z/s)\,)$

ただし上の記号に課している条件は

- a, b は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項である.
- φ, ψ は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式である.
- φ には y が自由に現れ, ψ には z が自由に現れている.
- u は φ の中で y への代入について自由であり, v は ψ の中で z への代入について自由である.

$\mathcal{L}$の式φを$\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$の式に書き換えたものを$\hat{\varphi}$と書く.

推論公理 3.3 (∃の除去). φを$\mathcal{L}$の式とし，xを変項とし，φにはxのみが自由に現れているとするとき,

$$\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi\left(\varepsilon x \hat{\varphi}(x)\right).$$

定理 3.4 (集合は主要ε項に等しい). φを$\mathcal{L}$の式とし，xを変項とし，φにはxのみが自由に現れているとするとき,

$$\exists s\,(\,\{\,x \mid \varphi(x)\,\} = s\,) \vdash \{\,x \mid \varphi(x)\,\} = \varepsilon s\, \forall x\,(\,\varphi(x) \leftrightarrow x \in s\,).$$

略証. $\exists s\,\left(\{\,x \mid \varphi(x)\,\} = s\,\right)$を$\mathcal{L}_{\in}$の式に書き直せば

$$\exists s\, \forall x\,(\,\varphi(x) \leftrightarrow x \in s\,).$$

存在記号の規則より結論が従う. ∎

3.4　∀の導入

推論公理 3.5 (∀の導入).　φを$\mathcal{L}$の式とし，xを変項とし，φにはxのみが自由に現れているとするとき，

$$\varphi(\varepsilon x \neg\hat{\varphi}(x)) \to \forall x\varphi(x).$$

推論公理 3.6 (∀の除去).　φを$\mathcal{L}$の式とし，xを変項とし，φにはxのみが自由に現れているとし，τを主要ε項とするとき，

$$\forall x\varphi(x) \to \varphi(\tau).$$

主要ε項は集合であるから，量化の亘る範囲は集合の上だけ.

3.5 その他の公理

推論公理 3.7. φ, ψ, χ を $\mathcal{L}$ の文とするとき,

- $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$.
- $\varphi \to (\psi \to \varphi)$.
- $\varphi \to (\neg\varphi \to \bot)$.
- $\neg\varphi \to (\varphi \to \bot)$.
- $(\varphi \to \bot) \to \neg\varphi$.
- $\varphi \to (\varphi \lor \psi)$.
- $\psi \to (\varphi \lor \psi)$.
- $(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to ((\varphi \lor \psi) \to \chi))$.
- $\varphi \to (\psi \to (\varphi \land \psi))$.
- $(\varphi \land \psi) \to \varphi$.
- $(\varphi \land \psi) \to \psi$.
- $\neg\neg\varphi \to \varphi$.

4　成り立つこと

次の定理は他の公理および構造的帰納法と併せて示される.

定理 4.1 (書き換えの同値性).　φ を $\mathcal{L}$ の文するとき,

$$\varphi \leftrightarrow \hat{\varphi}.$$

証明が容易になる例

φ を x のみ自由に現れる式とし，y を φ の中で x への代入について自由である変項とするとき，

$$\vdash \exists x \varphi(x) \ \rightarrow \ \exists y \varphi(y).$$

略証．　公理と演繹定理より

$$\exists x \varphi(x) \vdash \varphi(\varepsilon x \varphi(x))$$

となり，また公理より

$$\vdash \varphi(\varepsilon x \varphi(x)) \ \rightarrow \ \exists y \varphi(y)$$

も成り立つので，三段論法より

$$\exists x \varphi(x) \vdash \exists y \varphi(y)$$

が出る． ∎

$\exists x\varphi(x) \ \rightarrow\ \exists y\varphi(y)$ を**HK**で証明すると，
公理より

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \varphi(x) \ \rightarrow\ \exists y\varphi(y)$$

が成り立つので，汎化によって

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \forall x\,(\,\varphi(x) \ \rightarrow\ \exists y\varphi(y)\,)$$

となり，公理

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \forall x\,(\,\varphi(x) \ \rightarrow\ \exists y\varphi(y)\,) \ \rightarrow\ (\,\exists x\varphi(x) \ \rightarrow\ \exists y\varphi(y)\,)$$

との三段論法より

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \exists x\varphi(x) \ \rightarrow\ \exists y\varphi(y)$$

が出る．

証明が容易になる例

φをxのみ自由に現れる式とし，yをφの中でxへの代入について自由である変項とするとき，

$$\vdash \exists y\,(\,\exists x \varphi(x) \;\rightarrow\; \varphi(y)\,).$$

略証.　公理より

$$\vdash \exists x \varphi(x) \;\rightarrow\; \varphi(\varepsilon x \varphi(x))$$

が成り立つので，公理より

$$\vdash \exists y\,(\,\exists x \varphi(x) \;\rightarrow\; \varphi(y)\,)$$

となる. ∎

$\exists y\,(\,\exists x\varphi(x)\ \rightarrow\ \varphi(y)\,)$を**HK**で証明すると

$$\exists x\varphi(x)\ \rightarrow\ \exists y\varphi(y)$$

と

$$\begin{aligned}
(\,\exists x\varphi(x)\ \rightarrow\ \exists y\varphi(y)\,)\ &\rightarrow\ (\,\neg\exists x\varphi(x)\vee\exists y\varphi(y)\,),\\
&\rightarrow\ \neg(\,\exists x\varphi(x)\wedge\neg\exists y\varphi(y)\,),\\
&\rightarrow\ \neg(\,\exists x\varphi(x)\wedge\forall y\ \neg\varphi(y)\,),\\
&\rightarrow\ \neg\forall y(\,\exists x\varphi(x)\wedge\neg\varphi(y)\,),\\
&\rightarrow\ \exists y\ \neg(\,\exists x\varphi(x)\wedge\neg\varphi(y)\,),\\
&\rightarrow\ \exists y(\,\neg\exists x\varphi(x)\vee\varphi(y)\,),\\
&\rightarrow\ \exists y(\,\exists x\varphi(x)\ \rightarrow\ \varphi(y)\,)
\end{aligned}$$

から示される.