Karatzas-Shreve solutions

2018 年 7 月 5 日

目次

第 1 章 Martingales, Stopping Times, and Filtrations 1
- 1.1 Stochastic Processes and σ-Fields . . . 1
- 1.2 Stopping Times . . . 7
- 1.3 Continuous Time Martingales . . . 17
- 1.4 The Doob-Meyer Decomposition . . . 42

第 2 章 Brownian Motion 45
- 2.1 The Consistency Theorem . . . 48
- 2.2 The Kolmogorov-Čentsov Theorem . . . 52
- 2.3 The Space $C[0, \infty)$, Weak Convergence, and the Wiener Measure . . . 54
- 2.4 Weak Convergence . . . 56

付録 A 59
- A.1 測度 . . . 59
- A.2 Fubini の定理 . . . 67
- A.3 メモ . . . 69
- A.4 複素測度に関する積分 . . . 74

参考文献 80

第 1 章

Martingales, Stopping Times, and Filtrations

1.1 Stochastic Processes and σ-Fields

Problem 1.5

Let Y be a modification of X, and suppose that every sample path of both processes are right-continuous sample paths. Then X and Y are indistinguishable.

証明. Karatzas-Shreve の問題文には "suppose that both processes have a.s. right-continuous sample paths" と書いてあるがこれは誤植である．実際，或る零集合 $\emptyset \neq N \in \mathscr{F}$ が存在し，$\omega \in \Omega \backslash N$ に対する X, Y のパスが右連続であるとする．このとき

$$
\begin{aligned}
\{X_t = Y_t,\ \forall t \geq 0\} &= \{X_t = Y_t,\ \forall t \geq 0\} \cap N + \{X_t = Y_t,\ \forall t \geq 0\} \cap N^c \\
&= \{X_t = Y_t,\ \forall t \geq 0\} \cap N + \bigcap_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,\infty)} \{X_r = Y_r\} \cap N^c
\end{aligned}
$$

が成り立つが，右辺第一項は $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ が完備である場合でないと可測集合であるという保証がない．従って全てのサンプルパスが右連続であると仮定し直す必要がある．この場合

$$
\{X_t = Y_t,\ \forall t \geq 0\} = \bigcap_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,\infty)} \{X_r = Y_r\}
$$

が成立するから，$P(X_r = Y_r) = 1\ (\forall r \geq 0)$ より

$$
P(X_t = Y_t,\ \forall t \geq 0) = P\Bigl(\bigcap_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,\infty)} \{X_r = Y_r\}\Bigr) = 1
$$

が従う． ∎

Problem 1.7

Let X be a process with every sample path RCLL. Let A be the event that X is continuous on $[0, t_0)$. Show that $A \in \mathscr{F}^X_{t_0}$.

証明 (参照元:[2]).　$[0,t_0)$ に属する有理数の全体を $\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q} \cap [0,t_0)$ と表すとき，

$$A = \bigcap_{m\geq 1}\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{\substack{p,q\in\mathbb{Q}^*\\ |p-q|<1/n}} \left\{ \omega\in\Omega \ ; \quad \left|X_p(\omega)-X_q(\omega)\right| < \frac{1}{m} \right\}$$

が成立することを示せばよい．これが示されれば，$\omega \longmapsto \left(X_p(\omega), X_q(\omega)\right)$ の $\mathscr{F}^X_{t_0}/\mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$-可測性と

$$\Phi : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \ni (x,y) \longmapsto |x-y| \in \mathbb{R}$$

の $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2)/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測性より

$$\left\{ \omega\in\Omega \ ; \quad \left|X_p(\omega)-X_q(\omega)\right| < \frac{1}{m} \right\} = \left\{ \omega\in\Omega \ ; \quad \left(X_p(\omega), X_q(\omega)\right) \in \Phi^{-1}\left(B_{1/m}(0)\right) \right\} \in \mathscr{F}^X_{t_0}$$

が得られ $A \in \mathscr{F}^X_{t_0}$ が従う．($B_{1/m}(0) = \{\, x\in\mathbb{R} \ ; \quad |x| < 1/m \,\}$.)

第一段　$\omega \in A^c$ を任意にとる．このとき或る $s\in(0,t_0)$ が存在して，$t \longmapsto X_t(\omega)$ は $t=s$ において左側不連続である．従って或る $m\geq 1$ については，任意の $n\geq 1$ に対し $0 < s-u < 1/3n$ を満たす u が存在して

$$|X_u(\omega)-X_s(\omega)| \geq \frac{1}{m}$$

を満たす．一方でパスの右連続性より $0 < p-s,\ q-u < 1/3n$ を満たす $p,q\in\mathbb{Q}^*$ が存在して

$$\left|X_p(\omega)-X_s(\omega)\right| < \frac{1}{4m}, \quad \left|X_q(\omega)-X_u(\omega)\right| < \frac{1}{4m}$$

が成立する．このとき $0 < |p-q| < 1/n$ かつ

$$\left|X_p(\omega)-X_q(\omega)\right| \geq \left|X_p(\omega)-X_s(\omega)\right| - |X_s(\omega)-X_u(\omega)| - \left|X_q(\omega)-X_u(\omega)\right| \geq \frac{1}{2m}$$

が従い

$$\omega \in \bigcup_{m\geq 1}\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{\substack{p,q\in\mathbb{Q}^*\\ |p-q|<1/n}} \left\{ \omega\in\Omega \ ; \quad \left|X_p(\omega)-X_q(\omega)\right| \geq \frac{1}{m} \right\}$$

を得る．

第二段　任意に $\omega\in A$ を取る．各点で有限な左極限が存在するという仮定から，

$$X_{t_0}(\omega) := \lim_{t\uparrow t_0} X_t(\omega)$$

と定めることにより[*1] $t \longmapsto X_t(\omega)$ は $[0,t_0]$ 上で一様連続となる．従って

$$\omega \in \bigcap_{m\geq 1}\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{\substack{p,q\in\mathbb{Q}^*\\ |p-q|<1/n}} \left\{ \omega\in\Omega \ ; \quad \left|X_p(\omega)-X_q(\omega)\right| < \frac{1}{m} \right\}$$

を得る．■

[*1] 実際 $X_{t_0}(\omega)$ は所与のものであるが，いまは $[0,t_0]$ 上での連続性を考えればよいから便宜上値を取り替える．

定義 1.1.1 (積 σ-加法族).　Λ を空でない任意濃度の添字集合とする．$(S_\lambda, \mathcal{M}_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$ を可測空間の族とし，$S \coloneqq \prod_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ とおく．λ 射影を $p_\lambda : S \longrightarrow S_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$ と書くとき，

$$\left\{ p_\lambda^{-1}(A_\lambda) \ ; \quad A_\lambda \in \mathcal{M}_\lambda,\ \lambda \in \Lambda \right\}$$

が生成する σ-加法族を $(\mathcal{M}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の積 σ-加法族と呼び，$\bigotimes_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{M}_\lambda$ で表す．$\Lambda = \{1, 2, \cdots\}$ の場合，

$$\bigotimes_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{M}_\lambda = \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 \otimes \cdots$$

とも表記する．

Lemma1 for Exercise 1.8

Λ を空でない高々可算集合とする．$(S_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を第二可算公理を満たす位相空間の族とし $S \coloneqq \prod_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ とおくとき，

$$\mathscr{B}(S) = \bigotimes_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{B}(S_\lambda) \tag{1.1}$$

が成立する．(S には直積位相を導入する．この場合，S もまた第二可算公理を満たす．)

証明.　各 S_λ の開集合系及び可算基を $\mathscr{O}_\lambda$, $\mathscr{B}_\lambda$, S の開集合系を $\mathscr{O}$ とし，また λ 射影を $p_\lambda : S \longrightarrow S_\lambda$ と書く．先ず，任意の $O_\lambda \in \mathscr{O}_\lambda$ に対して $p_\lambda^{-1}(O_\lambda) \in \mathscr{O}$ が満たされるから

$$\mathscr{O}_\lambda \subset \left\{ A_\lambda \in \mathscr{B}(S_\lambda) \ ; \quad p_\lambda^{-1}(A_\lambda) \in \mathscr{B}(S) \right\}$$

が従い，右辺が σ-加法族であるから

$$\bigotimes_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{B}(S_\lambda) = \sigma\left[\left\{ p_\lambda^{-1}(A_\lambda) \ ; \quad A_\lambda \in \mathscr{B}(S_\lambda),\ \lambda \in \Lambda \right\}\right] \subset \mathscr{B}(S)$$

を得る．一方で

$$\mathscr{B} \coloneqq \left\{ \bigcap_{\lambda\in\Lambda'} p_\lambda^{-1}(B_\lambda) \ ; \quad B_\lambda \in \mathscr{B}_\lambda,\ \Lambda' \subset \Lambda : \textit{finite subset} \right\}$$

は $\mathscr{O}$ の基底の一つである．実際，任意に $O \in \mathscr{O}$ を取れば，任意の $x \in O$ に対し或る有限集合 $\Lambda' \subset \Lambda$ が存在して

$$x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda'} p_\lambda^{-1}(O_\lambda) \subset O$$

が成立するが，更に S_λ の第二可算性より或る $\mathscr{B}'_\lambda \subset \mathscr{B}_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda')$ が存在して

$$x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda'} p_\lambda^{-1}(O_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda'} \bigcup_{B_\lambda\in\mathscr{B}'_\lambda} p_\lambda^{-1}(B_\lambda)$$

が満たされる．すなわち，任意の $O \in \mathscr{O}$ は

$$O = \bigcup_{E\in\mathscr{B}'} E, \quad (\exists \mathscr{B}' \subset \mathscr{B})$$

と表される．$\mathscr{B}$ は高々可算の濃度を持ち[*2]，$\mathscr{B} \subset \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{B}(S_\lambda)$ が満たされるから

$$\mathscr{O} \subset \bigotimes_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{B}(S_\lambda)$$

[*2] $L_0 \coloneqq \{\, \Lambda' \ ; \quad \Lambda' \subset \Lambda : \textit{finite subset} \,\}$ は高々可算集合である．実際，$\Lambda_n \coloneqq \Lambda \times \cdots \times \Lambda$ (n copies of Λ) として $L \coloneqq \bigcup_{n=1}^{\#\Lambda} \Lambda_n$ とおき，$(x_1, \cdots, x_n) \in L$ に対し $\{x_1, \cdots, x_n\} \in L_0$ を対応させる $f : L \longrightarrow L_0$ を考えれば全射であるから $\mathrm{card}\, L_0 \le \mathrm{card}\, L \le \aleph_0$ が従う．

が従い (1.1) を得る． ∎

Lemma2 for Exercise 1.8

$T = \{1,2,3,\cdots\}$ を高々可算集合とし，S_i を第二可算公理を満たす位相空間，X_i を確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上の S_i-値確率変数とする $(i \in T)$．このとき，任意の並び替え $\pi : T \longrightarrow T$ に対して $S := \prod_{i \in T} S_{\pi(i)}$ とおけば次が成立する:

$$\sigma(X_i;\ i \in T) = \left\{\, \{(X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, \cdots) \in A\} \ ; \quad A \in \mathscr{B}(S)\, \right\}. \tag{1.2}$$

証明.

第一段　射影 $S \longrightarrow S_{\pi(n)}$ を p_n で表す．任意に $t_i \in T$ を取り $n := \pi^{-1}(i)$ とおけば，任意の $B \in \mathscr{B}(S_n)$ に対して

$$X_i^{-1}(B) = \left\{(\cdots, X_{\pi(n)}, \cdots) \in p_n^{-1}(B)\right\} \in \left\{\, \{(X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, \cdots) \in A\} \ ; \quad A \in \mathscr{B}(S)\, \right\}$$

が成り立つから $\sigma(X_i;\ i \in T) \subset \left\{\, \{(X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, \cdots) \in A\} \ ; \quad A \in \mathscr{B}(S)\, \right\}$ が従う．

第二段　任意の有限部分集合 $j \in T$ と $B_j \in \mathscr{B}(S_{\pi(j)})$ に対し

$$\left\{(X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, \cdots) \in p_j^{-1}(B_j)\right\} = X_{\pi(j)}^{-1}(B_j) \in \sigma(X_i;\ i \in T)$$

が成立するから

$$\left\{\, p_i^{-1}(B_i) \ ; \quad B_i \in \mathscr{B}(S_{\pi(i)}),\ i \in T\, \right\} \subset \left\{\, A \in \mathscr{B}(S) \ ; \quad \{(X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, \cdots) \in A\} \in \sigma(X_i;\ i \in T)\, \right\}$$

が従う．右辺は σ-加法族であり，前補題より左辺は $\mathscr{B}(S)$ を生成するから前段と併せて (1.2) を得る． ∎

Lemma3 for Exercise 1.8

$X = \{\, X_t \ ; \quad 0 \leq t < \infty\, \}$ を確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上の $\mathbb{R}^d$-値確率過程とする．任意の空でない $S \subset [0,\infty)$ に対し

$$\mathcal{F}_S^X := \sigma(X_s;\ s \in S)$$

とおくとき，任意の空でない $T \subset [0,\infty)$ に対して次が成立する:

$$\mathcal{F}_T^X := \bigcup_{S \subset T : at\ most\ countable} \mathcal{F}_S^X. \tag{1.3}$$

証明.　便宜上

$$\mathcal{F} := \bigcup_{S \subset T : at\ most\ countable} \mathcal{F}_S^X$$

とおく．まず，任意の $S \subset T$ に対し $\mathcal{F}_S^X \subset \mathcal{F}_T^X$ が成り立つから

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_T^X$$

が従う．また $\sigma(X_t) = \mathcal{F}_{\{t\}}^X,\ (\forall t \in T)$ より

$$\bigcup_{t \in T} \sigma(X_t) \subset \mathcal{F}$$

が成り立つから，あとは $\mathcal{F}$ が σ-加法族であることを示せばよい．実際，$\mathcal{F}$ は σ-加法族の合併であるから Ω を含みかつ補演算で閉じる．また $B_n \in \mathcal{F}$, $n = 1, 2, \cdots$ に対しては，$B_n \in \mathcal{F}^X_{S_n}$ を満たす高々可算集合 $S_n \subset T$ が対応して

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}^X_{S_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(X_s;\ s \in S_n) \subset \sigma\left(X_s;\ s \in \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right)$$

が成り立つから，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \sigma\left(X_s;\ s \in \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) \subset \mathcal{F}$$

が従う．ゆえに $\mathcal{F}$ は σ-加法族であり (1.3) を得る．　■

Exercise 1.8

Let X be a process whose sample paths are RCLL almost surely, and let A be the event that X is continuous on $[0, t_0)$. Show that A can fail to be in $\mathscr{F}^X_{t_0}$, but if $\{\ \mathscr{F}_t\ ;\quad t \geq 0\ \}$ is a fitration satisfying $\mathscr{F}^X_t \subset \mathscr{F}_t,\ t \geq 0$, and $\mathscr{F}^X_{t_0}$ contains all P-null sets of $\mathscr{F}$, then $A \in \mathscr{F}_{t_0}$.

証明.

第一段　高々可算な集合 $S = \{t_1, t_2, \cdots\} \subset [0, t_0]$ に対し，昇順に並び替えたものを $t_{\pi(1)} < t_{\pi(2)} < \cdots$ と表し

$$\mathcal{F}^X_S := \left\{ \left\{ (X_{t_{\pi(1)}}, X_{t_{\pi(2)}}, \cdots) \in B \right\}\ ;\quad B \in \mathscr{B}((\mathbb{R}^d)^{\#S})\ \right\}$$

とおく．ただし S が可算無限の場合は $(\mathbb{R}^d)^{\#S} = \mathbb{R}^\infty$ である．このとき (1.2) より

$$\sigma(X_s;\ s \in S) = \mathcal{F}^X_S$$

が成り立ち，(1.3) より

$$\mathscr{F}^X_{t_0} = \sigma(X_t;\ 0 \leq t \leq t_0) = \bigcup_{S \subset [0,t_0]: at\ most\ countable} \mathcal{F}^X_S$$

が満たされる．すなわち，$\mathscr{F}^X_{t_0}$ の任意の元は $\{(X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots) \in B\}$, $(t_1 < t_2 < \cdots)$ の形で表される．

第二段

Problem 1.10 unsolved

Let X be a process with every sample path LCRL, and let A be the event that X is continuous on $[0, x_0]$. Let X be adapted to a right-continuous filtration $(\mathscr{F}_t)_{t \geq 0}$. Show that $A \in \mathscr{F}_{t_0}$.

証明.

第一段　$\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q} \cap [0, t_0]$ とおく．いま，任意の $n \geq 1$ と $r \in \mathbb{Q}^*$ に対し

$$B_n(r) := \bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{k \leq m} \left\{ \omega \in \Omega\ ;\quad \left| X_r(\omega) - X_{r+\frac{1}{k}}(\omega) \right| \leq \frac{1}{n} \right\}$$

と定めるとき，

$$A = \bigcap_{r \in \mathbb{Q}^*} \bigcap_{n \geq 1} B_n(r)$$

が成立することを示す．これが示されれば，

$$\left\{ \omega \in \Omega \ ; \quad \left| X_r(\omega) - X_{r+\frac{1}{k}}(\omega) \right| \leq \frac{1}{n} \right\} \in \mathscr{F}_{r+\frac{1}{k}}, \quad (\forall r \in \mathbb{Q}^*, \ k \geq 1)$$

とフィルトレーションの右連続性から

$$B_n(r) \in \bigcap_{k \geq m} \mathscr{F}_{r+\frac{1}{k}} = \mathscr{F}_{r+} = \mathscr{F}_r$$

が従い $A \in \mathscr{F}_{t_0}$ が出る．

第二段

> Problem 1.16
>
> If the process X is measurable and the random time T is finite, then the function X_T is a random variable.

証明.

$$\tau : \Omega \ni \omega \longmapsto (T(\omega), \omega) \in [0, \infty) \times \Omega$$

とおけば，任意の $A \in \mathscr{B}([0,\infty))$, $B \in \mathscr{F}$ に対して

$$\tau^{-1}(A \times B) = \{ \, \omega \in \Omega \ ; \quad (T(\omega), \omega) \in A \times B \, \} = T^{-1}(A) \cap B \in \mathscr{F}$$

が満たされる

$$\{ \, A \times B \ ; \quad A \in \mathscr{B}([0,\infty)), \ B \in \mathscr{F} \, \} \subset \left\{ \, E \in \mathscr{B}([0,\infty)) \otimes \mathscr{F} \ ; \quad \tau^{-1}(E) \in \mathscr{F} \, \right\}$$

が従い τ の $\mathscr{F}/\mathscr{B}([0,\infty)) \otimes \mathscr{F}$-可測性が出る．$X_T = X \circ \tau$ より X_T は可測 $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ である． ∎

> Problem 1.17
>
> Let X be a measurable process and T a random time. Show that the collection of all sets of the form $\{X_T \in A\}$ and $\{X_T \in A\} \cup \{T = \infty\}; A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, forms a sub-$\sigma$-field of $\mathscr{F}$.

証明.　X_T の定義域は $\{T < \infty\}$ であるから，

$$\mathscr{G} := \{ \, \{T < \infty\} \cap E \ ; \quad E \in \mathscr{F} \, \}$$

とおけば，前問の結果より X_T は可測 $\mathscr{G}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$ である．$\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ より

$$\mathscr{H} := \{ \, \{X_T \in A\}, \ \{X_T \in A\} \cup \{T = \infty\} \ ; \quad A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \, \}$$

に対して $\mathscr{H} \subset \mathscr{F}$ が成立する．あとは $\mathscr{H}$ が σ-加法族であることを示せばよい．実際，$A = \mathbb{R}$ のとき

$$\{X_T \in A\} \cup \{T = \infty\} = \{T < \infty\} \cup \{T = \infty\} = \Omega$$

となり $\Omega \in \mathscr{H}$ が従い，また

$$\begin{aligned}\{X_T \in A\}^c &= \{X_T \in A^c\} \cup \{T = \infty\},\\ (\{X_T \in A\} \cup \{T = \infty\})^c &= \{X_T \in A^c\} \cap \{T < \infty\} = \{X_T \in A^c\}\end{aligned}$$

より $\mathscr{H}$ は補演算で閉じる．更に $B_n \in \mathscr{H}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を取れば，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \left\{ X_T \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}$$

或は

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \left\{ X_T \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\} \cup \{T = \infty\}$$

が成立し $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathscr{H}$ を得る． ∎

1.2 Stopping Times

$[0, \infty]$ の位相

$[0, \infty]$ の位相は拡張実数 $[-\infty, \infty]$ の相対位相である．$O \subset [-\infty, \infty]$ が開集合であるとは，任意の $x \in O$ に対し，

(O1)　$x \in \mathbb{R}$ なら或る $\epsilon > 0$ が存在して $B_\epsilon(x) \subset O$ が満たされる，
(O2)　$x = \infty$ なら或る $a \in \mathbb{R}$ が存在して $(a, \infty] \subset O$ が満たされる，
(O3)　$x = -\infty$ なら或る $a \in \mathbb{R}$ が存在して $[-\infty, a) \subset O$ が満たされる，

で定義される．この性質を満たす O の全体に $\emptyset$ を加えたものが $[-\infty, \infty]$ の位相であり，

$$[-\infty, r), \quad (r, r'), \quad (r, \infty], \quad (r, r' \in \mathbb{Q})$$

の全体が可算開基となる．従って $[0, \infty]$ の位相の可算開基は

$$[0, r), \quad (r, r'), \quad (r, \infty], \quad (r, r' \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty])$$

の全体であり，写像 $\tau : \Omega \longrightarrow [0, \infty]$ が $\mathscr{F}/\mathscr{B}([0, \infty])$-可測性を持つかどうかを調べるには

$$\{\tau < a\} = \tau^{-1}([0, a)) \in \mathscr{F}, \quad (\forall a \in (0, \infty))$$

が満たされているかどうかを確認すれば十分である．

Problem 2.2

Let X be a stochastic process and T a stopping time of $\left\{\mathscr{F}_t^X\right\}$. Suppose that for some pair $\omega, \omega' \in \Omega$, we have $X_t(\omega) = X_t(\omega')$ for all $t \in [0, T(\omega)] \cap [0, \infty)$. Show that $T(\omega) = T(\omega')$.

証明 (参照元:[3]).　ω, ω' を分離しない集合族 $\mathscr{H}$ を

$$\mathscr{H} := \{\, A \subset \Omega \ ; \quad \{\omega, \omega'\} \subset A,\ or\ \{\omega, \omega'\} \subset \Omega \backslash A \,\}$$

により定めれば，$\mathscr{H}$ は σ-加法族である．このとき，$\{T = T(\omega)\} \in \mathscr{H}$ を示せばよい．

case1　$T(\omega) = \infty$ の場合，任意の $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ 及び $0 \le t < \infty$ に対して，仮定より

$$\omega \in X_t^{-1}(A) \quad \Leftrightarrow \quad \omega' \in X_t^{-1}(A)$$

が成り立ち

$$\sigma(X_t;\ 0 \le t < \infty) \subset \mathscr{H}$$

となる．任意の $t \ge 0$ に対し $\{T \le t\} \in \mathscr{F}_t^X \subset \sigma(X_t;\ 0 \le t < \infty)$ が満たされるから

$$\{T = \infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{T \le n\}^c \in \sigma(X_t;\ 0 \le t < \infty) \subset \mathscr{H}$$

が成立し，$\omega \in \{T = \infty\}$ より $\omega' \in \{T = \infty\}$ が従い $T(\omega) = T(\omega')$ を得る．

case2　$T(\omega) < \infty$ の場合，case1 と同様に任意の $0 \le t \le T(\omega)$ に対し $\sigma(X_t) \subset \mathscr{H}$ が満たされるから

$$\mathscr{F}_{T(\omega)}^X \subset \mathscr{H}$$

が成り立つ．$\{T = T(\omega)\} \in \mathscr{F}_{T(\omega)}^X$ より $\omega' \in \{T = T(\omega)\}$ が従い $T(\omega) = T(\omega')$ を得る． ∎

Lemma for Proposition 2.3

$(\mathscr{F}_t)_{t \ge 0}$ を可測空間 $(\Omega, \mathscr{F})$ のフィルトレーションとするとき, 任意の $t \ge 0$ 及び任意の点列 $s_1 > s_2 > \cdots > t, (s_n \downarrow t)$ に対して次が成立する:

$$\bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{s_n}.$$

証明．　先ず任意の $n \ge 1$ に対して

$$\bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_{s_n}$$

が成り立つから

$$\bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{s_n}$$

を得る．一方で，任意の $s > t$ に対し $s \ge s_n$ を満たす n が存在するから，

$$\mathscr{F}_s \supset \mathscr{F}_{s_n} \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{s_n}$$

が成立し

$$\bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{s_n}$$

が従う． ∎

$(\mathscr{F}_{t+})_{t\geq 0}$ は右連続である．実際，任意の $t \geq 0$ で

$$\bigcap_{s>t} \mathscr{F}_{s+} = \bigcap_{s>t}\bigcap_{u>s} \mathscr{F}_u = \bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s = \mathscr{F}_{t+}$$

が成立する．

Corollary 2.4

T is an optional time of the filtration $\{\mathscr{F}_t\}$ if and only if it is a stopping time of the (right-continuous!) filtration $\{\mathscr{F}_{t+}\}$.

言い換えれば，確率時刻 T に対し

$$\{T < t\} \in \mathscr{F}_t,\ \forall t \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_{t+},\ \forall t \geq 0$$

が成り立つことを主張している．

証明． T が $(\mathscr{F}_{t+})$-停止時刻であるとき，任意の $n \geq 1$ に対して $\{T \leq t - 1/n\} \in \mathscr{F}_{(t-1/n)+} \subset \mathscr{F}_t$ が満たされるから

$$\{T < t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{T \leq t - \frac{1}{n}\right\} \in \mathscr{F}_t$$

が従う．逆に T が $(\mathscr{F}_t)$-弱停止時刻[*3] のとき，任意の $m \geq 1$ に対し

$$\{T \leq t\} = \bigcap_{n=m}^{\infty} \left\{T < t + \frac{1}{n}\right\} \in \mathscr{F}_{t+1/m}$$

が成立するから

$$\{T \leq t\} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{t+1/n} = \mathscr{F}_{t+}$$

を得る． ∎

Problem 2.6

If the set Γ in Example 2.5 is open, show that H_Γ is an optional time.

証明． $\{H_\Gamma < 0\} = \emptyset$ であるから，以下 $t > 0$ とする．$H_\Gamma(\omega) < t \Leftrightarrow \exists s < t,\ X_s(\omega) \in \Gamma$ より

$$\{H_\Gamma < t\} = \bigcup_{0\leq s<t} \{X_s \in \Gamma\}$$

となる．また全てのパスが右連続であることと Γ が開集合であることにより

$$\bigcup_{0\leq s<t} \{X_s \in \Gamma\} = \bigcup_{\substack{0\leq r<t \\ r\in\mathbb{Q}}} \{X_r \in \Gamma\}$$

が成り立ち $\{H_\Gamma < t\} \in \mathscr{F}_t$ が従う． ∎

[*3] optional time の訳語がわからないので弱停止時刻と呼ぶ．

Problem 2.7

If the set Γ in Example 2.5 is closed and the sample paths of the process X are continuous, then H_Γ is a stopping time.

証明.

第一段　$\mathbb{R}^d$ 上の Euclid 距離を ρ で表し，

$$\rho(x,\Gamma) \coloneqq \inf_{y\in\Gamma} \rho(x,y), \quad \Gamma_n \coloneqq \left\{ x \in \mathbb{R}^d \ ; \quad \rho(x,\Gamma) < \frac{1}{n} \right\}, \quad (x \in \mathbb{R}^d,\ n = 1,2,\cdots)$$

とおく．$\mathbb{R}^d \ni x \longmapsto \rho(x,\Gamma)$ の連続性より Γ_n は開集合であるから，Problem 2.6 の結果より $T_n \coloneqq H_{\Gamma_n}$ で定める $T_n,\ n = 1,2,\cdots$ は $(\mathscr{F}_t)$-弱停止時刻であり，また $H \coloneqq H_\Gamma$ とおけば次の (1) と (2) が成立する:

(1)　$\{H = 0\} = \{X_0 \in \Gamma\}$,

(2)　$H(\omega) \leq t \quad \Leftrightarrow \quad T_n(\omega) < t,\ \forall n = 1,2,\cdots, \quad (\forall \omega \in \{H > 0\},\ \forall t > 0)$.

(1) と (2) 及び $T_n,\ n = 1,2,\cdots$ が $(\mathscr{F}_t)$-弱停止時刻であることにより

$$\{H \leq t\} = \{H \leq t\} \cap \{H > 0\} + \{H = 0\} = \left\{ \bigcap_{n=1}^{\infty} \{T_n < t\} \right\} \cap \{H > 0\} + \{H = 0\} \in \mathscr{F}_t, \quad (\forall t \geq 0)$$

が成立するから H は $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻である．

第二段　(1) を示す．実際，$X_0(\omega) \in \Gamma$ なら $H(\omega) = 0$ であり，$X_0(\omega) \notin \Gamma$ なら，Γ が閉であることとパスの連続性より

$$X_t(\omega) \notin \Gamma, \quad (0 \leq t \leq h)$$

を満たす $h > 0$ が存在して $H(\omega) \geq h > 0$ となる．

第三段　$\omega \in \{H > 0\},\ t > 0$ として (2) を示す．まずパスの連続性より

$$T_n(\omega) < t \quad \Leftrightarrow \quad \exists s \leq t, \quad X_s(\omega) \in \Gamma_n$$

が成り立つ．$H(\omega) \leq t$ の場合，$\beta \coloneqq H(\omega)$ とおけば，Γ が閉であることとパスの連続性より

$$X_\beta(\omega) \in \Gamma \subset \Gamma_n, \quad (\forall n = 1,2,\cdots)$$

が満たされ $T_n(\omega) < t\ (\forall n \geq 1)$ が従う．逆に，$H(\omega) > t$ のとき

$$X_s(\omega) \notin \Gamma, \quad (\forall s \in [0,t])$$

が満たされ，パスの連続性と ρ の連続性より $[0,t] \ni s \longmapsto \rho(X_s(\omega),\Gamma)$ は連続であるから，

$$d \coloneqq \min_{s\in[0,t]} \rho(X_s(\omega),\Gamma) > 0$$

が定まる．このとき $1/n < d/2$ を満たす $n \geq 1$ を一つ取れば

$$X_s(\omega) \notin \Gamma_n, \quad (\forall s \in [0,t])$$

が成立する．実際，任意の $s \in [0,t],\ x \in \Gamma_n$ に対し

$$\rho(X_s(\omega),x) \geq \rho(X_s(\omega),\Gamma) - \rho(x,\Gamma) \geq d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2} > \frac{1}{n}$$

が満たされる．従って $T_n(\omega) \geq t$ となる． ∎

Lemma 2.9 の式変形について

第一の式変形は

$$
\begin{aligned}
\{T+S>t\} &= \{T=0,\ T+S>t\} + \{0<T<t,\ T+S>t\} + \{T\geq t,\ T+S>t\} \\
&= \{T=0,\ T+S>t\} + \{0<T<t,\ T+S>t\} + \{T\geq t,\ T+S>t,\ S=0\} \\
&\quad + \{T\geq t,\ T+S>t,\ S>0\} \\
&= \{T=0,\ S>t\} + \{0<T<t,\ T+S>t\} + \{T>t,\ S=0\} + \{T\geq t,\ S>0\}
\end{aligned}
$$

である．

Problem 2.10

Let T, S be optional times; then $T+S$ is optional. It is a stopping time, if one of the following conditions holds:

(i) $T>0,\ S>0$;

(ii) $T>0, T$ is a stopping time.

証明． T, S が $(\mathscr{F}_t)$-弱停止時刻であるとすれば，任意の $t>0$ に対し

$$
\begin{aligned}
\{T+S<t\} &= \{T=0,\ T+S<t\} + \{0<T<t,\ T+S<t\} \\
&= \{T=0,\ S<t\} + \bigcup_{\substack{0<r<t \\ r\in\mathbb{Q}}} \{0<T<r,\ S<t-r\} \\
&\in \mathscr{F}_t
\end{aligned}
$$

が成り立つから $T+S$ も $(\mathscr{F}_t)$-弱停止時刻である．

(i) この場合 $\{T+S\leq 0\}=\emptyset$ である．また $t>0$ なら

$$
\{T+S>t\} = \{0<T<t,\ T+S>t\} + \{T\geq t,\ T+S>t\} = \bigcup_{\substack{0<r<t \\ r\in\mathbb{Q}}} \{r<T<t,\ S>t-r\} + \{T\geq t\} \in \mathscr{F}_t
$$

が成立する．

(ii) この場合も $\{T+S\leq 0\}=\emptyset$ であり，また $t>0$ のとき

$$
\begin{aligned}
\{T+S>t\} &= \{0<T<t,\ T+S>t\} + \{T\geq t,\ T+S>t\} \\
&= \{0<T<t,\ T+S>t\} + \{T\geq t,\ T+S>t,\ S=0\} + \{T\geq t,\ T+S>t,\ S>0\} \\
&= \{0<T<t,\ T+S>t\} + \{T>t,\ S=0\} + \{T\geq t,\ S>0\} \\
&\in \mathscr{F}_t
\end{aligned}
$$

が成立する． ∎

Problem 2.13

Verify that $\mathscr{F}_T$ is actually a σ-field and T is $\mathscr{F}_T$-measurable. Show that if $T(\omega)=t$ for some constant $t\geq 0$ and every $\omega\in\Omega$, then $\mathscr{F}_T=\mathscr{F}_t$.

証明．

第一段　$\mathscr{F}_T$ が σ-加法族であることを示す．実際，$\Omega \cap \{T \leq t\} = \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t$, $(\forall t \geq 0)$ より $\Omega \in \mathscr{F}_T$ が従い，また

$$A^c \cap \{T \leq t\} = \{T \leq t\} - A \cap \{T \leq t\}, \quad \left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\} \cap \{T \leq t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap \{T \leq t\})$$

より $\mathscr{F}_T$ は補演算と可算和で閉じる．

第二段　任意の $\alpha \geq 0$ に対し

$$\{T \leq \alpha\} \cap \{T \leq t\} = \{T \leq \alpha \wedge t\} \in \mathscr{F}_{\alpha \wedge t} \subset \mathscr{F}_t$$

が成立し T の $\mathscr{F}_T/\mathscr{B}([0,\infty])$-可測性が出る．

第三段　$A \in \mathscr{F}_T$ なら $A = A \cap \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t$ となり，$A \in \mathscr{F}_t$ については，任意の $s \geq 0$ に対し $s \geq t$ なら

$$A \cap \{T \leq s\} = A \in \mathscr{F} \subset \mathscr{F}_s,$$

$s < t$ なら

$$A \cap \{T \leq s\} = \emptyset \in \mathscr{F}_s$$

が成り立ち $A \in \mathscr{F}_T$ が従う．■

Exercise 2.14

Let T be a stopping time and S a random time such that $S \geq T$ on Ω. If S is $\mathscr{F}_T$-measurable, then it is also a stopping time.

証明．　任意の $t \geq 0$ に対し

$$\{S \leq t\} = \{S \leq t\} \cap \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t$$

が成立する．■

Problem 2.17 修正

Let T, S be stopping times and Z an $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-measurable, integrable random variable. Then

$$A \in \mathscr{F}_T \quad \Rightarrow \quad A \cap \{T \leq S\}, A \cap \{T < S\} \in \mathscr{F}_{S \wedge T},$$

and we have

(i)　$\mathbb{1}_{\{T \leq S\}} E(Z \mid \mathscr{F}_T) = \mathbb{1}_{\{T \leq S\}} E(Z \mid \mathscr{F}_{S \wedge T})$, P-a.s.

(ii)　$\mathbb{1}_{\{T < S\}} E(Z \mid \mathscr{F}_T) = \mathbb{1}_{\{T < S\}} E(Z \mid \mathscr{F}_{S \wedge T})$, P-a.s.

(iii)　$E(E(Z \mid \mathscr{F}_T) \mid \mathscr{F}_S) = E(Z \mid \mathscr{F}_{S \wedge T})$, P-a.s.

証明．

第一段　任意の $A \in \mathscr{F}_T$ に対し $A \cap \{T \leq S\} \in \mathscr{F}_{S \wedge T}$ が成り立つ．実際，

$$A \cap \{T \leq S\} \cap \{S \wedge T \leq t\} = \Big[A \cap \{T \leq t\}\Big] \cap \{T \leq S\} \cap \{S \wedge T \leq t\} \in \mathscr{F}_t, \quad (\forall t \geq 0)$$

が成立する．同様に $A \cap \{T < S\} \in \mathscr{F}_{S \wedge T}$ も得られる．

第二段　任意の $A \in \mathscr{F}_T$ に対し，前段の結果より

$$\int_{A\cap\{T\le S\}} Z\, dP = \int_{A\cap\{T\le S\}} E\left(Z \,|\, \mathscr{F}_{S\wedge T}\right)\, dP$$

が従う．$1\!\!1_{\{T\le S\}} E\left(Z \,|\, \mathscr{F}_{S\wedge T}\right)$ も $\mathscr{F}_T/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測であるから (i) が得られ，同様に (ii) も出る．

第三段　任意の $B \in \mathscr{F}_S$ に対し，第一段と第二段の結果により

$$\begin{aligned}\int_B E\left(E\left(Z \,|\, \mathscr{F}_T\right) | \mathscr{F}_S\right)\, dP &= \int_B E\left(Z \,|\, \mathscr{F}_T\right)\, dP = \int_{B\cap\{S<T\}} E\left(Z \,|\, \mathscr{F}_T\right)\, dP + \int_{B\cap\{T\le S\}} E\left(Z \,|\, \mathscr{F}_T\right)\, dP \\ &= \int_{B\cap\{S<T\}} Z\, dP + \int_{B\cap\{T\le S\}} E\left(Z \,|\, \mathscr{F}_{S\wedge T}\right)\, dP \\ &= \int_{B\cap\{S<T\}} E\left(Z \,|\, \mathscr{F}_{S\wedge T}\right)\, dP + \int_{B\cap\{T\le S\}} E\left(Z \,|\, \mathscr{F}_{S\wedge T}\right)\, dP \\ &= \int_B E\left(Z \,|\, \mathscr{F}_{S\wedge T}\right)\, dP\end{aligned}$$

が成り立つ．$E\left(Z \,|\, \mathscr{F}_{S\wedge T}\right)$ も $\mathscr{F}_S/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測であるから (iii) を得る．∎

Proposition 2.18

Let $X = \{\, X_t, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \le t < \infty \,\}$ be a progressively measurable process, and let T be a stopping time of the filtration $\{\mathscr{F}_t\}$. Then the random variable X_T of Definition 1.15, defined on the set $\{T < \infty\} \in \mathscr{F}_T$, is $\mathscr{F}_T$-measurable, and the "stopped process" $\{\, X_{T\wedge t}, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \le t < \infty \,\}$ is progressively measurable.

証明.

第一段　停止過程の発展的可測性を示す．$t \ge 0$ を固定する．このとき，全ての $\omega \in \Omega$ に対して $[0,t] \ni s \longmapsto T(\omega) \wedge s$ は連続であり，かつ全ての $s \in [0,t]$ に対し $\Omega \ni \omega \longmapsto T(\omega) \wedge s$ は $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}([0,t])$-可測であるから，$[0,t] \times \Omega \ni (s,\omega) \longmapsto T(\omega) \wedge s$ は $\mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t/\mathscr{B}([0,t])$-可測である．従って，任意の $A \in \mathscr{B}([0,t])$ と $B \in \mathscr{F}_t$ に対し

$$\begin{aligned}\{\, (s,\omega) \in [0,t] \times \Omega \ ; \quad (T(\omega) \wedge s, \omega) \in A \times B \,\} &= \{\, (s,\omega) \in [0,t] \times \Omega \ ; \quad T(\omega) \wedge s \in A \,\} \cap ([0,t] \times B) \\ &\in \mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t\end{aligned}$$

が成り立つから，任意の $E \in \mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t$ に対して

$$\{\, (s,\omega) \in [0,t] \times \Omega \ ; \quad (T(\omega) \wedge s, \omega) \in E \,\} \in \mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t$$

が満たされ $(s,\omega) \longmapsto (T(\omega) \wedge s, \omega)$ の $\mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t/\mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t$-可測性を得る．

$$X(s,\omega) = X|_{[0,t]\times\Omega}(s,\omega), \quad (\forall (s,\omega) \in [0,t] \times \Omega)$$

かつ $X|_{[0,t]\times\Omega}$ は $\mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$-可測であるから，$[0,t] \times \Omega \ni (s,\omega) \longmapsto X(T(\omega) \wedge s, \omega) = X|_{[0,t]\times\Omega}(T(\omega) \wedge s, \omega)$ の $\mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$-可測性が出る．

第二段　定理 A.2.1 (P. 67) より $\omega \longmapsto X(T(\omega) \wedge t, \omega)$ は $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ であるから，任意の $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ に対し

$$\{X_T 1\!\!1_{\{T<\infty\}} \in B\} \cap \{T \le t\} = \{X_{T\wedge t} \in B\} \cap \{T \le t\} \in \mathscr{F}_t, \quad (\forall t \ge 0)$$

が成立し $X_T 1\!\!1_{\{T<\infty\}}$ の $\mathscr{F}_T/\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$-可測性を得る．∎

Problem 2.19

Under the same assumption as in Proposition 2.18, and with $f(t,x); [0,\infty)\times\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ a bounded, $\mathscr{B}([0,\infty))\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$-measurable function, show that the process $Y_t = \int_0^t f(s,X_s)\,ds;\ t\geq 0$ is progressively measurable with respect to $\{\mathscr{F}_t\}$, and Y_T is an $\mathscr{F}_T$-measurable random variable.

証明.　$[0,t]\times\Omega \ni (s,\omega) \longmapsto f(s,X_s(\omega))$ が $\mathscr{B}([0,t])\otimes\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測であれば，Fuini の定理より $\{\,Y_t,\mathscr{F}_t\ ;\quad 0\leq t<\infty\,\}$ は適合過程となり，可積分性より $t\longmapsto Y_t(\omega),\ (\forall\omega\in\Omega)$ が連続であるから Y の発展的可測性が従う．実際，

$$[0,t]\times\Omega \ni (s,\omega) \longmapsto (s,X_s(\omega)) = (s,X|_{[0,t]\times\Omega}(s,\omega))$$

による $A\times B,\ (A\in\mathscr{B}([0,\infty)),\ B\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ の引き戻しは

$$\{([0,t]\cap A)\times\Omega\}\cap X|_{[0,t]\times\Omega}^{-1}(B)\in\mathscr{B}([0,t])\otimes\mathscr{F}_t$$

となるから，$[0,t]\times\Omega \ni (s,\omega) \longmapsto f(s,X_s(\omega))$ は $\mathscr{B}([0,t])\otimes\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測である． ∎

Problem 2.21

Verify that the class $\mathscr{F}_{T+}$ is indeed a σ-field with respect to which T is measurable, that it coincides with $\{\,A\in\mathscr{F}\ ;\quad A\cap\{T<t\}\in\mathscr{F}_t,\ \forall t\geq 0\,\}$, and that if T is a stopping time (so that both $\mathscr{F}_T,\mathscr{F}_{T+}$ are defined), then $\mathscr{F}_T\subset\mathscr{F}_{T+}$.

証明.

第一段　$\Omega\cap\{T\leq t\}=\{T\leq t\}\in\mathscr{F}_t,\ (\forall t\geq 0)$ より $\Omega\in\mathscr{F}_{T+}$ が従い，また

$$A^c\cap\{T\leq t\}=\{T\leq t\}-A\cap\{T\leq t\},\quad \left\{\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right\}\cap\{T\leq t\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap\{T\leq t\})$$

より $\mathscr{F}_{T+}$ は補演算と可算和で閉じるから $\mathscr{F}_{T+}$ は σ-加法族である．また，

$$\{T<\alpha\}\cap\{T\leq t\}=\begin{cases}\{T<\alpha\}, & (\alpha\leq t),\\ \{T\leq t\}, & (\alpha>t),\end{cases}\in\mathscr{F}_{t+},\quad(\forall t\geq 0)$$

より $(\mathscr{F}_t)$-弱停止時刻 T は $\mathscr{F}_{T+}/\mathscr{B}([0,\infty])$-可測である．

第二段　任意の $t\geq 0$ に対し

$$A\cap\{T<t\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}A\cap\left\{T\leq t-\frac{1}{n}\right\},\quad A\cap\{T\leq t\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}A\cap\left\{T<t+\frac{1}{n}\right\}$$

が成り立ち $\mathscr{F}_{T+}=\{\,A\in\mathscr{F}\ ;\quad A\cap\{T<t\}\in\mathscr{F}_t,\ \forall t\geq 0\,\}$ が従う．

第三段　T が $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻であるとき，任意の $A\in\mathscr{F}_T$ に対し

$$A\cap\{T\leq t\}\in\mathscr{F}_t\subset\mathscr{F}_{t+},\quad(\forall t\geq 0)$$

となり $\mathscr{F}_T\subset\mathscr{F}_{T+}$ が成り立つ． ∎

Lemma: 弱停止時刻の可測性

T を $(\mathscr{F}_t)$-弱停止時刻とすれば，任意の $t \geq 0$ に対し $T \wedge t$ は $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}([0,\infty))$-可測である．

証明．任意の $\alpha \geq 0$ に対し

$$\{T \wedge t \leq \alpha\} = \begin{cases} \Omega, & (t \leq \alpha), \\ \{T \leq \alpha\}, & (t > \alpha), \end{cases} \in \mathscr{F}_t$$

が成立する． ∎

Probelem 2.22

Verify that analogues of Lemmas 2.15 and 2.16 hold if T and S are assumed to be optional and $\mathscr{F}_T$, $\mathscr{F}_S$ and $\mathscr{F}_{T\wedge S}$ are replaced by $\mathscr{F}_{T+}$, $\mathscr{F}_{S+}$ and $\mathscr{F}_{(T\wedge S)+}$, respectively. Prove that if S is an optional time and T is a positive stopping time with $S \leq T$, and $S < T$ on $\{S < \infty\}$, then $\mathscr{F}_{S+} \subset \mathscr{F}_T$.

証明．

第一段　$T \wedge t,\ S \wedge t$ は $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}([0,\infty))$-可測であるから、任意の $A \in \mathscr{F}_{S+}$ に対して

$$A \cap \{S \leq T\} \cap \{T \leq t\} = (A \cap \{S \leq t\}) \cap \{S \wedge t \leq T \wedge t\} \cap \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_{t+}, \quad (\forall t \geq 0)$$

となり $A \cap \{S \leq T\} \in \mathscr{F}_{T+}$ が成立する．特に，Ω 上で $S \leq T$ なら $\mathscr{F}_{S+} \subset \mathscr{F}_{T+}$ が従う．

第二段　前段の結果より $\mathscr{F}_{(T\wedge S)+} \subset \mathscr{F}_{T+} \cap \mathscr{F}_{S+}$ が満たされる．一方で，任意の $A \in \mathscr{F}_{T+} \cap \mathscr{F}_{S+}$ に対し

$$A \cap \{T \wedge S \leq t\} = (A \cap \{T \leq t\}) \cup (A \cap \{S \leq t\}) \in \mathscr{F}_{t+}, \quad (\forall t \geq 0)$$

が成り立ち $\mathscr{F}_{(T\wedge S)+} = \mathscr{F}_{T+} \cap \mathscr{F}_{S+}$ を得る．また

$$\{S < T\} \cap \{T \wedge S \leq t\} = \left(\bigcup_{\substack{0 \leq r \leq t \\ r \in \mathbb{Q} \cup \{t\}}} \{S \leq r\} \cap \{r < T\} \right) \cap \{S \leq t\} \in \mathscr{F}_{t+}, \quad (\forall t \geq 0)$$

により $\{S < T\} \in \mathscr{F}_{(T\wedge S)+}$ 及び $\{T < S\} \in \mathscr{F}_{(T\wedge S)+}$ となり，$\{T \leq S\}, \{S \leq T\}, \{T = S\} \in \mathscr{F}_{(T\wedge S)+}$ が従う．

第三段　T が停止時刻で $\{T < \infty\}$ 上で $S < T$ が満たされているとき．任意の $A \in \mathscr{F}_{S+}$ に対し

$$A \cap \{T \leq t\} = A \cap \{S < t\} \cap \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t, \quad (\forall t \geq 0)$$

が成り立り $\mathscr{F}_{S+} \subset \mathscr{F}_T$ となる． ∎

Problem 2.23

Show that if $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ is a sequence of optional times and $T = \inf_{n\geq 1} T_n$, then $\mathscr{F}_{T+} = \bigcap_{n=1}^\infty \mathscr{F}_{T_n+}$. Besides, if each T_n is a positive stopping time and $T < T_n$ on $\{T < \infty\}$, then we have $\mathscr{F}_{T+} = \bigcap_{n=1}^\infty \mathscr{F}_{T_n}$.

証明．$T \leq T_n$, $(\forall n \geq 1)$ より $\mathscr{F}_{T+} \subset \bigcap_{n=1}^\infty \mathscr{F}_{T_n+}$ が成り立つ．一方で $A \in \bigcap_{n=1}^\infty \mathscr{F}_{T_n+}$ に対し

$$A \cap \{T < t\} = \bigcup_{n=1}^\infty A \cap \{T_n < t\} \in \mathscr{F}_t, \quad (\forall t > 0) \tag{1.4}$$

が成り立つから，Problem 2.21 より $A \in \mathscr{F}_{T+}$ が従う．また $\{T < \infty\}$ 上で $T < T_n$, $(\forall n \geq 1)$ であるとき，Problem 2.22 より $\mathscr{F}_{T+} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{T_n}$ が従い，また T_n, $n \geq 1$ が停止時刻の場合も (1.4) は成立するので $\mathscr{F}_{T+} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{T_n}$ が出る． ∎

Problem 2.24 修正

Given an optional time T of the filtration $\{\mathscr{F}_t\}$, consider the sequence $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ of random times given by

$$T_n(\omega) = \begin{cases} +\infty; & \text{on } \{\ \omega\ ;\quad T(\omega) \geq n\ \} \\ \dfrac{k}{2^n}; & \text{on } \left\{\ \omega\ ;\quad \frac{k-1}{2^n} \leq T(\omega) < \frac{k}{2^n}\ \right\} \text{ for } k = 1, \cdots, n2^n, \end{cases}$$

for $n \geq 1$. Obviously $T_n \geq T_{n+1} \geq T$, for every $n \geq 1$. Show that each T_n is a stopping time, that $\lim_{n\to\infty} T_n = T$, and that for every $A \in \mathscr{F}_{T+}$ we have $A \cap \{T_n = (k/2^n)\} \in \mathscr{F}_{k/2^n}$; $n \geq 1, 1 \leq k \leq n2^n$.

証明.

第一段　$T_n(\omega) < \infty$ を満たす $\omega \in \Omega$ に対し，或る $1 \leq j \leq (n+1)2^{n+1}$, $1 \leq k \leq n2^n$ が存在して

$$\frac{j-1}{2^{n+1}} \leq T(\omega) < \frac{j}{2^{n+1}}, \qquad \frac{k-1}{2^n} \leq T(\omega) < \frac{k}{2^n}$$

となる．このとき

$$\frac{2k-2}{2^{n+1}} \leq T(\omega) < \frac{2k-1}{2^{n+1}}$$

または

$$\frac{2k-1}{2^{n+1}} \leq T(\omega) < \frac{2k}{2^{n+1}}$$

のどちらかであるから，すなわち $j = 2k-1$ 或は $j = 2k$ であり

$$T(\omega) < \frac{j}{2^{n+1}} = T_{n+1}(\omega) \leq \frac{2k}{2^{n+1}} = T_n(\omega)$$

が成立する．$T_n(\omega) = \infty$ の場合も併せて $T_n \geq T_{n+1} \geq T$ $(\forall n \geq 1)$ を得る．

第二段　任意の $t \geq 0$ に対して

$$\{T_n \leq t\} = \bigcup_{k/2^n \leq n \wedge t} \left\{\ \omega\ ;\quad \frac{k-1}{2^n} \leq T(\omega) < \frac{k}{2^n}\ \right\} \in \mathscr{F}_t, \quad (\forall t \geq 0)$$

が成り立つから T_n は $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻である．また $\{T < \infty\}$ 上では $T(\omega) < n$ のとき

$$0 < T_n(\omega) - T(\omega) \leq \frac{1}{2^n} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

となる．

第三段　任意の $A \in \mathscr{F}_{T+}$ に対して，Problem 2.21 より

$$A \cap \left\{T_n = \frac{k}{2^n}\right\} = A \cap \left\{T < \frac{k}{2^n}\right\} - A \cap \left\{T < \frac{k-1}{2^n}\right\} \in \mathscr{F}_{k/2^n}$$

が成り立つ． ∎

1.3 Continuous Time Martingales

1.3.1 Fundamental Inequalities

Lemma: 凸関数の片側微係数の存在

任意の凸関数 $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ は各点で左右の微係数が存在する．特に，凸関数は連続である．

証明． 凸性より任意の $x < y < z$ に対して

$$\frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x} \leq \frac{\varphi(z)-\varphi(x)}{z-x} \leq \frac{\varphi(z)-\varphi(y)}{z-y}$$

が満たされる．従って，x を固定すれば，x に単調減少に近づく任意の点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ に対し

$$\left(\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}\right)_{n=1}^{\infty}$$

は下に有界な単調減少列となり下限が存在する．x に単調減少に近づく別の点列 $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ を取れば

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \frac{f(y_k)-f(x)}{y_k-x} \leq \frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x} \quad (n=1,2,\cdots)$$

より

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \frac{f(y_k)-f(x)}{y_k-x} \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}$$

が成立し，$(x_n),(y_k)$ の立場を変えれば逆向きの不等号も得られる．すなわち極限は点列に依らず確定し，φ は x で右側微係数を持つ．同様に左側微係数も存在し，特に φ の連続性及び Borel 可測性が従う． ∎

Lemma: Jensen の不等式

$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間，$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ を可測 $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$ とする．このとき，任意の部分 σ-加法族 $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ 及び凸関数 $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ に対し，$X, \varphi(X)$ が Ω 上 P に関して可積分であるなら次が成立する:

$$\varphi\left(E\left(X \mid \mathscr{G}\right)\right) \leq E\left(\varphi(X) \mid \mathscr{G}\right), \quad P\text{-a.s.}$$

証明． φ は各点 $x \in \mathbb{R}$ で右側接線を持つから，それを $\mathbb{R} \ni t \longmapsto a_x t + b_x$ と表せば，

$$\varphi(t) = \sup_{r\in\mathbb{Q}} \{a_r t + b_r\} \quad (\forall t \in \mathbb{R}) \tag{1.5}$$

が成立する．よって任意の $r \in \mathbb{Q}$ に対して

$$\varphi(X(\omega)) \geq a_r X(\omega) + b_r$$

が満たされるから

$$E\left(\varphi(X) \mid \mathcal{G}\right) \geq a_r E\left(X \mid \mathcal{G}\right) + b_r \quad P\text{-a.s.}, \quad \forall r \in \mathbb{Q}$$

が従い，各 $r \in \mathbb{Q}$ に対し

$$N_r := \{\ \omega \in \Omega\ ;\quad E\,(\varphi(X)\,|\,\mathcal{G})\,(\omega) < a_r E\,(X\,|\,\mathcal{G})\,(\omega) + b_r\ \}$$

とおけば $P(N_r) = 0$ かつ

$$E\,(\varphi(X)\,|\,\mathcal{G})\,(\omega) \geq a_r E\,(X\,|\,\mathcal{G})\,(\omega) + b_r, \quad \forall r \in \mathbb{Q},\ \omega \notin \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} N_r$$

となる．r の任意性と (1.5) より

$$E\,(\varphi(X)\,|\,\mathcal{G}) \geq \varphi\,(E\,(X\,|\,\mathcal{G}))\,, \quad P\text{-a.s.}$$

が得られる． ∎

Proposition 3.6

Let $\{\ X_t, \mathscr{F}_t\ ;\quad 0 \leq t < \infty\ \}$ be a martingale (respectively, submartingale), and $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a convex (respectively, convex nondecreasing) function, such that $E\,|\varphi(X_t)| < \infty$ holds for every $t \geq 0$. Then $\{\ \varphi(X_t), \mathscr{F}_t\ ;\quad 0 \leq t < \infty\ \}$ is a submartingale.

証明． $(X_t)_{t\geq 0}$ がマルチンゲールであり φ が凸であるとき，Jensen の不等式より P-a.s. の $\omega \in \Omega$ に対し

$$\varphi(X_s(\omega)) = \varphi(E\,(X_t\,|\,\mathscr{F}_s)\,(\omega)) \leq E\,(\varphi(X_t)\,|\,\mathscr{F}_s)\,(\omega)$$

が成り立つ．$(X_t)_{t\geq 0}$ が劣マルチンゲールであり φ が凸かつ単調増大であるとき，P-a.s. の $\omega \in \Omega$ に対し

$$\varphi(X_s(\omega)) \leq \varphi(E\,(X_t\,|\,\mathscr{F}_s)\,(\omega)) \leq E\,(\varphi(X_t)\,|\,\mathscr{F}_s)\,(\omega)$$

が成り立つ． ∎

Theorem 3.8 (i)

Let $\{\ X_t, \mathscr{F}_t\ ;\quad 0 \leq t < \infty\ \}$ be a submartingale whose every path is right-continuous, let $[\sigma, \tau]$ be a subinterval of $[0, \infty)$, and let $\alpha < \beta,\ \lambda > 0$ be real numbers. We have the following results:

(i) First submartingale inequality:

$$\lambda \cdot P\left[\sup_{\sigma\leq t\leq\tau} X_t > \lambda\right] \leq \int_{\sup\limits_{\sigma\leq t\leq\tau} X_t\, >\, \lambda} X_\tau\, dP, \tag{1.6}$$

and

$$\lambda \cdot P\left[\sup_{\sigma\leq t\leq\tau} X_t \geq \lambda\right] \leq E(X_\tau^+).$$

証明.　$n \geq 1$ に対し $[\sigma, \tau]$ を 2^n 等分に分割し

$$E_n := \left\{ \max_{k=0,1,\cdots,2^n} X_{\sigma + \frac{k}{2^n}(\tau - \sigma)} > \lambda \right\},$$
$$E_n^0 := \{X_\sigma > \lambda\}, \quad E_n^m := \left\{ \max_{k=0,1,\cdots,m-1} X_{\sigma + \frac{k}{2^n}(\tau - \sigma)} \leq \lambda,\ X_{\sigma + \frac{m}{2^n}(\tau - \sigma)} > \lambda \right\}, \quad (1 \leq m \leq 2^n)$$

とおけば，

$$E_n^m \in \mathscr{F}_{\sigma + \frac{m}{2^n}(\tau - \sigma)} \subset \mathscr{F}_\tau, \quad E_n = \sum_{m=0}^{2^n} E_n^m, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

かつ，$E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots$ と X のパスの右連続性より

$$\left\{ \sup_{\sigma \leq t \leq \tau} X_t > \lambda \right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \max_{k=0,1,\cdots,2^n} X_{\sigma + \frac{k}{2^n}(\tau - \sigma)} > \lambda \right\} = \lim_{n \to \infty} E_n$$

が満たされ，また $\sup_{\sigma \leq t \leq \tau} X_t$ の $\mathscr{F}_\tau / \mathscr{B}([-\infty, \infty])$-可測性も従う．Chebyshev の不等式と劣マルチンゲール性より

$$P(E_n) = \sum_{m=0}^{2^n} P(E_n^m) \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{m=0}^{2^n} \int_{E_n^m} X_{\sigma + \frac{m}{2^n}(\tau - \sigma)}\, dP \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{m=0}^{2^n} \int_{E_n^m} X_\tau\, dP = \frac{1}{\lambda} \int_{E_n} X_\tau\, dP$$

となるから，$n \longrightarrow \infty$ として，測度の連続性と Lebesgue の収束定理より

$$P\left[\sup_{\sigma \leq t \leq \tau} X_t > \lambda \right] \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\sup\limits_{\sigma \leq t \leq \tau} X_t > \lambda} X_\tau\, dP \leq \frac{1}{\lambda} E(X_\tau^+)$$

を得る．特に，任意の $m \in \mathbb{N}$, $(\lambda > 1/m)$ に対して

$$P\left[\sup_{\sigma \leq t \leq \tau} X_t > \lambda - \frac{1}{m} \right] \leq \frac{1}{\lambda - 1/m} E(X_\tau^+)$$

が成り立ち，$m \longrightarrow \infty$ として

$$P\left[\sup_{\sigma \leq t \leq \tau} X_t \geq \lambda \right] \leq \frac{1}{\lambda} E(X_\tau^+)$$

が従う． ∎

Theorem 3.8 (ii)

Second submartingale inequality:

$$\lambda \cdot P\left[\sup_{\sigma \leq t \leq \tau} X_t \leq -\lambda \right] \leq E(X_\tau^+) - E(X_\sigma).$$

証明.　$n \geq 1$ に対し $[\sigma, \tau]$ を 2^n 等分に分割し

$$E_n := \left\{ \min_{k=0,1,\cdots,2^n} X_{\sigma + \frac{k}{2^n}(\tau - \sigma)} < -\lambda \right\},$$
$$E_n^0 := \{X_\sigma < -\lambda\}, \quad E_n^m := \left\{ \min_{k=0,1,\cdots,m-1} X_{\sigma + \frac{k}{2^n}(\tau - \sigma)} \geq -\lambda,\ X_{\sigma + \frac{m}{2^n}(\tau - \sigma)} < -\lambda \right\}, \quad (1 \leq m \leq 2^n)$$

として，また

$$T(\omega) := \begin{cases} \sigma + \frac{m}{2^n}(\tau - \sigma), & (\omega \in E_n^m,\ m = 0, 1, \cdots, 2^n), \\ \tau, & (\omega \in \Omega \backslash E_n), \end{cases} \qquad (\forall \omega \in \Omega)$$

により $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻を定めれば，任意抽出定理 (P. 34) より

$$\begin{aligned} E(X_\sigma) \leq E(X_T) &= \sum_{m=0}^{2^n} \int_{E_n^m} X_{\sigma + \frac{m}{2^n}(\tau-\sigma)}\, dP + \int_{\Omega \backslash E_n} X_\tau\, dP \leq \sum_{m=0}^{2^n} (-\lambda) P(E_n^m) + E(X_\tau^+) \\ &= -\lambda P(E_n) + E(X_\tau^+) \end{aligned}$$

が成立する．移項して $n \longrightarrow \infty$ とすれば

$$P\left[\inf_{\sigma \leq t \leq \tau} X_t < -\lambda \right] \leq \frac{1}{\lambda} \left\{ E(X_\tau^+) - E(X_\sigma) \right\}$$

が得られ，(i) の証明と同様にして

$$P\left[\inf_{\sigma \leq t \leq \tau} X_t \leq -\lambda \right] \leq \frac{1}{\lambda} \left\{ E(X_\tau^+) - E(X_\sigma) \right\}$$

が従う． ∎

Lemma: Theorem 3.8 (iii)

確率過程 $X = \{\, X_t \ ;\quad 0 \leq t < \infty \,\}$ のすべてのパスが右連続であるとき，$[\sigma, \tau]$ の 2^n 等分点を

$$F_n := \left\{ \tau_i^n \ ;\quad \tau_i^n = \sigma + \frac{i}{2^n}(\tau - \sigma),\ i = 0, 1, \cdots, 2^n \right\}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

とおけば次が成立する:

$$U_{[\sigma,\tau]}(\alpha, \beta; X) = \sup_{n \in \mathbb{N}} U_{F_n}(\alpha, \beta; X), \quad D_{[\sigma,\tau]}(\alpha, \beta; X) = \sup_{n \in \mathbb{N}} D_{F_n}(\alpha, \beta; X).$$

Karatzas-Shreve 本文中では

$$\tau_1(\omega) = \min\{\, t \in F \ ;\quad X_t(\omega) \leq \alpha \,\}$$

と定めているが，

$$\tau_1(\omega) = \min\{\, t \in F \ ;\quad X_t(\omega) < \alpha \,\}$$

と定める方がよい．実際，こうでないと今の補題が従わない．また $\sigma_0 \equiv 0,\ \tau_0 \equiv 0$ と考える．

証明． $U_{[\sigma,\tau]}(\alpha, \beta; X) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} U_{F_n}(\alpha, \beta; X)$ が成立すれば主張を得る．いま，任意に有限部分集合 $F \subset [\sigma, \tau]$ を取り

$$\tau_1(\omega) := \min\{\, t \in F \ ;\quad X_t(\omega) < \alpha \,\}, \quad \sigma_1(\omega) := \min\{\, t \in F \ ;\quad t \geq \tau_1(\omega),\ X_t(\omega) > \beta \,\}, \cdots$$

を定め，$\omega \in \Omega$ を任意に取り $U_F(\alpha, \beta; X(\omega)) = j \geq 1$ と仮定する．このとき

$$X_{\tau_i(\omega)}(\omega) < \alpha, \quad X_{\sigma_i(\omega)}(\omega) > \beta, \quad (i = 1, \cdots, j)$$

が満たされ，$t \longrightarrow X_t(\omega)$ の右連続性より，十分大きい $n \in \mathbb{N}$ に対して或る $t_i, s_i \in F_n,\ (1 \leq i \leq j)$ が

$$\tau_1(\omega) \leq t_1 < \sigma_1(\omega) \leq s_1 < \cdots < \tau_j(\omega) \leq t_j < \sigma_j(\omega) \leq s_j$$

かつ

$$X_{t_i}(\omega) < \alpha, \quad X_{s_i}(\omega) > \beta, \quad (\forall i = 1, \cdots, j)$$

を満たす．これにより

$$U_F(\alpha, \beta; X(\omega)) = j \leq U_{F_n}(\alpha, \beta; X(\omega))$$

が従い，ω の任意性より $U_F(\alpha, \beta; X) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} U_{F_n}(\alpha, \beta; X)$ が出る． ∎

Theorem 3.8 (iii)

Upcrossing and downcrossing inequalities:

$$EU_{[\sigma,\tau]}(\alpha, \beta; X) \leq \frac{E(X_\tau^+) + |\alpha|}{\beta - \alpha}, \quad ED_{[\sigma,\tau]}(\alpha, \beta; X) \leq \frac{E(X_\tau - \alpha)^+}{\beta - \alpha}.$$

証明.

第一段　有限部分集合 $F = \{t_1, \cdots, t_n\} \subset [\sigma, \tau]$ に対し

$$\tau_1(\omega) := \min\{\, t \in F \ ; \quad X_t(\omega) < \alpha \,\}, \quad \sigma_1(\omega) := \min\{\, t \in F \ ; \quad t \geq \tau_1(\omega),\ X_t(\omega) > \beta \,\}, \cdots$$

で定める τ_i, σ_i, $(i = 1, 2, \cdots)$ が $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻であることを示す．実際，任意の $t_j \in F$ に対して

$$\left\{\tau_1 = t_j\right\} = \left[\bigcap_{k=1}^{j-1} \{X_{t_k} \geq \alpha\}\right] \cap \left\{X_{t_j} < \alpha\right\} \in \mathscr{F}_{t_j},$$

$$\vdots$$

$$\left\{\tau_i = t_j\right\} = \bigcup_{r=1}^{j-1} \left[\{\sigma_{i-1} = t_r\} \cap \bigcap_{k=r}^{j-1} \{X_{t_k} \geq \alpha\}\right] \cap \left\{X_{t_j} < \alpha\right\} \in \mathscr{F}_{t_j},$$

$$\left\{\sigma_i = t_j\right\} = \bigcup_{r=1}^{j-1} \left[\{\tau_i = t_r\} \cap \bigcap_{k=r}^{j-1} \{X_{t_k} \leq \beta\}\right] \cap \left\{X_{t_j} > \beta\right\} \in \mathscr{F}_{t_j}$$

が成立するから $\{\tau_i \leq t\} \in \mathscr{F}_t$ $(\forall t \geq 0)$ が満たされる．

$$\tau_1(\omega) := \min\{\, t \in F \ ; \quad X_t(\omega) > \beta \,\}, \quad \sigma_1(\omega) := \min\{\, t \in F \ ; \quad t \geq \tau_1(\omega),\ X_t(\omega) < \alpha \,\}, \cdots$$

により τ_i, σ_i, $(i = 1, 2, \cdots)$ を定めてもこれらは $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻となる．特に，

$$\{U_F(\alpha, \beta; X) = j\} = \left\{\sigma_j < \infty\right\} \cap \left\{\sigma_{j+1} = \infty\right\} \in \mathscr{F}, \quad (j = 0, 1, 2, \cdots)$$

が成立するから $U_F(\alpha, \beta; X)$ 及び $D_F(\alpha, \beta; X)$ の可測性が得られる．

第二段　補題の有限部分集合 $F_n \subset [\sigma, \tau]$ に対し

$$EU_{F_n}(\alpha, \beta; X) \leq \frac{E(X_\tau^+) + |\alpha|}{\beta - \alpha} \tag{1.7}$$

が成立することを示せば，単調収束定理より

$$EU_{[\sigma,\tau]}(\alpha, \beta; X) = E\left(\sup_{n \in \mathbb{N}} U_{F_n}(\alpha, \beta; X)\right) \leq \frac{E(X_\tau^+) + |\alpha|}{\beta - \alpha}$$

が従う．実際，$j = U_{F_n}(\alpha,\beta;X(\omega))$ ならば $\sigma_j(\omega) \le \tau < \tau_{j+1}(\omega)$ 或は $\tau_{j+1}(\omega) \le \tau < \sigma_{j+1}(\omega)$ であるから

$$Z(\omega) := \sum_{i=1}^{\infty} (X_{\tau_{i+1}(\omega)\wedge\tau}(\omega) - X_{\sigma_i(\omega)\wedge\tau}(\omega)) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{j} (X_{\tau_{i+1}(\omega)}(\omega) - X_{\sigma_i(\omega)}(\omega)), & (\star 1), \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{j-1} (X_{\tau_{i+1}(\omega)}(\omega) - X_{\sigma_i(\omega)}(\omega)) + \left(X_\tau(\omega) - X_{\sigma_j(\omega)}(\omega)\right), & (\star 2) \end{cases}$$

となり，$X_{\tau_i} < \alpha$, $X_{\sigma_i} > \beta$ より

$$\begin{aligned} (\star 2) &= \sum_{i=1}^{j-1} (X_{\tau_{i+1}(\omega)}(\omega) - X_{\sigma_i(\omega)}(\omega)) + (X_\tau(\omega) - \alpha) + \left(\alpha - X_{\sigma_j(\omega)}(\omega)\right) \le j(\alpha - \beta) + X_\tau^+(\omega) + |\alpha| \\ &= U_{F_n}(\alpha,\beta;X(\omega))(\alpha - \beta) + X_\tau^+(\omega) + |\alpha| \end{aligned}$$

及び

$$(\star 1) \le j(\alpha - \beta) \le j(\alpha - \beta) + X_\tau^+(\omega) + |\alpha| = U_{F_n}(\alpha,\beta;X(\omega))(\alpha - \beta) + X_\tau^+(\omega) + |\alpha|$$

が満たされ

$$EZ \le (\alpha - \beta) EU_{F_n}(\alpha,\beta;X) + E(X_\tau^+) + |\alpha|$$

が従う．$\{ X_t, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \le t < \infty \}$ の劣マルチンゲール性と任意抽出定理 (P. 34) より

$$E\left(X_{\tau_{i+1}\wedge\tau} - X_{\sigma_i\wedge\tau}\right) \ge 0, \quad (i = 1, \cdots, j)$$

が成り立つから，$EZ \ge 0$ となり (1.7) が得られる．

第三段　$j = D_{F_n}(\alpha,\beta;X(\omega))$ ならば $\sigma_j(\omega) \le \tau < \tau_{j+1}(\omega)$ 或は $\tau_{j+1}(\omega) \le \tau < \sigma_{j+1}(\omega)$ であるから

$$Z(\omega) := \sum_{i=1}^{\infty} (X_{\sigma_i(\omega)\wedge\tau}(\omega) - X_{\tau_i(\omega)\wedge\tau}(\omega)) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{j} (X_{\sigma_i(\omega)}(\omega) - X_{\tau_i(\omega)}(\omega)) + \left(X_\tau(\omega) - X_{\tau_{j+1}(\omega)}(\omega)\right), & (\star 3), \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{j} (X_{\sigma_i(\omega)}(\omega) - X_{\tau_i(\omega)}(\omega)), & (\star 4) \end{cases}$$

となり，$X_{\tau_i} > \beta$, $X_{\sigma_i} < \alpha$ より

$$(\star 4) \le \sum_{i=1}^{j} (X_{\sigma_i(\omega)}(\omega) - X_{\tau_i(\omega)}(\omega)) + (X_\tau(\omega) - \alpha)^+ = D_{F_n}(\alpha,\beta;X(\omega))(\alpha - \beta) + (X_\tau(\omega) - \alpha)^+$$

及び

$$(\star 3) \le j(\alpha - \beta) \le j(\alpha - \beta) + (X_\tau(\omega) - \alpha)^+ = D_{F_n}(\alpha,\beta;X(\omega))(\alpha - \beta) + (X_\tau(\omega) - \alpha)^+$$

が満たされ

$$EZ \le (\alpha - \beta) ED_{F_n}(\alpha,\beta;X) + E(X_\tau - \alpha)^+$$

が従う．$\{ X_t, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \le t < \infty \}$ の劣マルチンゲール性と任意抽出定理 (P. 34) より

$$E\left(X_{\sigma_i\wedge\tau} - X_{\tau_i\wedge\tau}\right) \ge 0, \quad (i = 1, \cdots, j + 1)$$

が成り立つから，$EZ \ge 0$ となり

$$ED_{F_n}(\alpha,\beta;X) \le \frac{E(X_\tau - \alpha)^+}{\beta - \alpha}$$

が得られる．　∎

Theorem 3.8 (iv)

Doob's maximal inequality:

$$E\left(\sup_{\sigma\le t\le\tau} X_t\right)^p \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E\,(X_\tau)^p\,, \quad p > 1,$$

provided $X_t \ge 0$ a.s.P for every $t \ge 0$, and $E\,(X_\tau)^p < \infty$.

証明．　パスの右連続性より

$$A := \{\,\omega\ ;\quad X_t(\omega) < 0,\ \exists t \in [0,\infty)\,\} = \{\,\omega\ ;\quad X_r(\omega) < 0,\ \exists r \in [0,\infty) \cap \mathbb{Q}\,\}$$

が成り立ち，仮定より $P(A) = 0$ である．ここで

$$Y_n(\omega) := \begin{cases} n \wedge \sup_{\sigma\le t\le\tau} X_t(\omega), & (\omega \in \Omega\backslash A), \\ 0, & (\omega \in A), \end{cases} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

で Y_n を定めれば，$\sup_{\sigma\le t\le\tau} X_t$ の $\mathscr{F}_\tau/\mathscr{B}([-\infty,\infty])$-可測性より Y_n も $\mathscr{F}_\tau/\mathscr{B}([-\infty,\infty])$-可測である．このとき

$$[0,n) \ni \lambda \longmapsto \mathbb{1}_{\{\,(\lambda,\omega)\ ;\quad \lambda < Y_n(\omega)\,\}}(\lambda,\omega)$$

は任意の $\omega \in \Omega$ に対し右連続，

$$\Omega \ni \omega \longmapsto \mathbb{1}_{\{\,(\lambda,\omega)\ ;\quad \lambda < Y_n(\omega)\,\}}(\lambda,\omega)$$

は任意の $\lambda \in [0,n)$ に対し可測 $\mathscr{F}_\tau/\mathscr{B}([0,\infty))$ であるから

$$[0,n) \times \Omega \ni (\lambda,\omega) \longmapsto \mathbb{1}_{\{\,(\lambda,\omega)\ ;\quad \lambda < Y_n(\omega)\,\}}(\lambda,\omega)$$

は $\mathscr{B}([0,n)) \otimes \mathscr{F}_\tau/\mathscr{B}([0,\infty))$-可測である．$q$ を p の共役指数として，Fubini の定理と (1.6) 及び Hölder の不等式より

$$\begin{aligned}
\int_\Omega Y_n^p\,dP &= p \int_\Omega \int_{[0,n)} \lambda^{p-1}\,\mathbb{1}_{\{\,(\lambda,\omega)\ ;\quad \lambda < Y_n(\omega)\,\}}(\lambda,\omega)\,d\lambda\,dP \\
&= p \int_{[0,n)} \lambda^{p-1} P(Y_n > \lambda)\,d\lambda \\
&= p \int_{[0,n)} \lambda^{p-1} P\left(\sup_{\sigma\le t\le\tau} X_t > \lambda\right) d\lambda \\
&\le p \int_{[0,n)} \lambda^{p-2} \int_{\sup_{\sigma\le t\le\tau} X_t > \lambda} X_\tau(\omega)\,dP\,d\lambda \\
&= p \int_\Omega X_\tau \int_{[0,n)} \lambda^{p-2}\,\mathbb{1}_{\{\,(\lambda,\omega)\ ;\quad \lambda < Y_n(\omega)\,\}}(\lambda,\omega)\,d\lambda\,dP \\
&= \frac{p}{p-1} \int_\Omega X_\tau Y_n^{p-1}\,dP \\
&\le \frac{p}{p-1} \left\{\int_\Omega X_\tau^p\,dP\right\}^{1/p} \left\{\int_\Omega Y_n^p\,dP\right\}^{1/q}
\end{aligned}$$

が成り立つから，$\left\{\int_\Omega Y_n^p\,dP\right\}^{1/q}$ を移項して両辺を p 乗すれば

$$\int_\Omega Y_n^p\,dP \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_\Omega X_\tau^p\,dP$$

が得られる．$n \longrightarrow \infty$ として，単調収束定理より主張が従う．　∎

Theorem 3.8 (v)

Regularity of the paths: Almost every sample path $\{ X_t(\omega) \ ; \quad 0 \leq t < \infty \}$ is bounded on compact intervals; is free of discontinuities of the second kind, i.e., admits left-hand limits everywhere on $(0, \infty)$; and if the filtration $(\mathscr{F}_t)$ satisfies the usual conditions, then the jumps are exhausted by a sequence of stopping times (Proposition 2.26).

証明.

第一段　コンパクト区間 $[\sigma, \tau]$ 上で P-a.s. にパスが有界であることを示す．実際，任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$P\left(\sup_{t \in [\sigma,\tau]} X_t \geq N \right) \leq \frac{1}{N} E X_\tau^+,$$
$$P\left(\inf_{t \in [\sigma,\tau]} X_t \leq -N \right) \leq \frac{1}{N} \left\{ E X_\tau^+ - E X_\sigma \right\}$$

が成り立つから，

$$P\left(\sup_{t \in [\sigma,\tau]} X_t = \infty \right) = \lim_{N \to \infty} P\left(\sup_{t \in [\sigma,\tau]} X_t \geq N \right) = 0,$$
$$P\left(\inf_{t \in [\sigma,\tau]} X_t = -\infty \right) = \lim_{N \to \infty} P\left(\inf_{t \in [\sigma,\tau]} X_t \leq -N \right) = 0$$

となる．ここで

$$B^{(n)} := \left\{ -\infty = \inf_{t \in [0,n]} X_t \right\} \cup \left\{ \sup_{t \in [0,n]} X_t = +\infty \right\}, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

により P-零集合を定める．

第二段　P-a.s. にパスが各点で左極限を持つことを示す．いま，$n \geq 1$ として $\alpha < \beta$ に対し

$$A_{\alpha,\beta}^{(n)} := \{ \omega \in \Omega \ ; \quad U_{[0,n]}(\alpha, \beta; X(\omega)) = \infty \}$$

とおくとき，

$$\left\{ \omega \in \Omega \ ; \quad \lim_{s \uparrow t} \inf_{s<u<t} X_u(\omega) < \lim_{s \uparrow t} \sup_{s<u<t} X_u(\omega), \ \exists t \in (0, n] \right\} \subset \bigcup_{\substack{\alpha < \beta \\ \alpha, \beta \in \mathbb{Q}}} A_{\alpha,\beta}^{(n)} =: A^{(n)} \tag{1.8}$$

が成り立つ．実際或る $t \in (0, n]$ で

$$\lim_{s \uparrow t} \inf_{s<u<t} X_u(\omega) < \lim_{s \uparrow t} \sup_{s<u<t} X_u(\omega)$$

となる場合，

$$\lim_{s \uparrow t} \inf_{s<u<t} X_u(\omega) < \alpha < \beta < \lim_{s \uparrow t} \sup_{s<u<t} X_u(\omega)$$

を満たす $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ を取れば，任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し或る点列 $0 < s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \cdots < s_N < t_N < t$ が存在して

$$X_{s_i}(\omega) < \alpha, \quad X_{t_i}(\omega) > \beta, \quad (i = 1, \cdots, N)$$

を満たす．従って $\{s_1, t_1, \cdots, s_N, t_N\}$ を含む有限集合 $F \subset [0, n]$ に対し

$$N \leq U_F(\alpha, \beta; X(\omega)) \leq U_{[0,n]}(\alpha, \beta; X(\omega))$$

が成り立ち，N の任意性より

$$U_{[0,n]}(\alpha,\beta;X(\omega)) = \infty$$

が従い (1.8) が出る．すなわち $\omega \notin \left(A^{(n)} \cup B^{(n)}\right)$ なら任意の $t \in (0,n]$ で $\lim_{s\uparrow t} X_s(\omega)$ が有限確定する．

$$A \coloneqq \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(A^{(n)} \cup B^{(n)}\right)$$

により零集合を定めれば $\omega \in \Omega \backslash A$ に対するパスは RCLL である． ∎

Lemma: 一様可積分性の同値条件

Λ を任意の添数集合とし，$(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測関数の族とするとき，次の (1) と (2) は同値である:

(1) $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が一様可積分．

(2)

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} \int_\Omega |X_\lambda|\, dP < \infty$$

かつ，任意の $\epsilon > 0$ に対し或る $\delta > 0$ が存在して次を満たす:

$$P(B) < \delta \Rightarrow \sup_{\lambda\in\Lambda} \int_B |X_\lambda|\, dP < \epsilon.$$

証明.

第一段　(1) $\Rightarrow$ (2) を示す．

Lemma: 一様可積分性と平均収束

$(X_n)_{n=1}^\infty$ を $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測関数の族とする．$(X_n)_{n=1}^\infty$ が P-a.s. に $\mathbb{R}$ で収束するとき，次の (1) と (2) は同値である:

(1) $(X_n)_{n=1}^\infty$ が一様可積分．

(2) 仮定より或る零集合 A が存在して，

$$X \coloneqq \lim_{n\to\infty} X_n \mathbb{1}_A$$

により $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測関数が定まる．このとき，$X$ は可積分であり次を満たす:

$$\int_\Omega |X - X_n|\, dP \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty).$$

Lemma: 一様可積分性と条件付き期待値

可積分な $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ に対し $(E(X|\mathscr{G}))_{\mathscr{G}\subset\mathscr{F}}$ は一様可積分である．

証明． Jensen の不等式より

$$\int_{|E(X\,|\,\mathscr{G})|>\lambda} |E(X\,|\,\mathscr{G})|\ dP \le \int_{E(|X|\,|\,\mathscr{G})>\lambda} E(|X|\,|\,\mathscr{G})\ dP = \int_{E(|X|\,|\,\mathscr{G})>\lambda} |X|\ dP$$

が成り立つ．また X の可積分性より，任意の $\epsilon > 0$ に対して或る $\delta > 0$ が存在し

$$P(B) < \delta \Rightarrow \int_B |X|\ dP < \epsilon$$

が満たされる．いま，Chebyshev の不等式より

$$P\left(E(|X|\,|\,\mathscr{G}) > \lambda\right) \le \frac{1}{\lambda}\int_\Omega E(|X|\,|\,\mathscr{G})\ dP = \frac{E|X|}{\lambda}$$

となるから，$\epsilon > 0$ に対し或る $\lambda_0 > 0$ が存在して

$$\sup_{\mathscr{G}\subset\mathscr{F}} P\left(E(|X|\,|\,\mathscr{G}) > \lambda\right) < \delta, \quad (\forall\lambda > \lambda_0)$$

が満たされ

$$\sup_{\mathscr{G}\subset\mathscr{F}} \int_{E(|X|\,|\,\mathscr{G})>\lambda} |X|\ dP < \epsilon, \quad (\forall\lambda > \lambda_0)$$

が従う． ∎

Problem 3.11

Let $\{\mathscr{F}_n\}_{n=1}^\infty$ be a decreasing sequence of sub-σ-fields of $\mathscr{F}$ (i.e.,$\mathscr{F}_{n+1} \subset \mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}$, $\forall n \ge 1$), and let $\{\, X_n, \mathscr{F}_n \ ;\ \ n \ge 1\,\}$ be a backward submartingale; i.e., $E|X_n| < \infty$, X_n is $\mathscr{F}_n$-measurable, and $E(X_n\,|\,\mathscr{F}_{n+1}) \ge X_{n+1}$ a.s.P, for every $n \ge 1$. Then $l := \lim_{n\to\infty} E(X_n) > -\infty$ implies that the sequence $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ is uniformly integrable.

証明． $(X_n)_{n=1}^\infty$ は，或る $(\mathscr{F}_n)$-後退マルチンゲール $(M_n)_{n=1}^\infty$ と単調増大列 $(A_n)_{n=1}^\infty$ を用いて

$$X_n = M_n - A_n, \quad (\forall n \ge 1)$$

と分解できる．実際，

$$\begin{aligned} A_0 &:= 0,\\ A_n &:= \sum_{i=1}^{n-1} E(X_i - X_{i+1}\,|\,\mathscr{F}_{i+1}), \quad (n = 2, 3, \cdots) \end{aligned}$$

とおけば，$(X_n)_{n=1}^\infty$ の後退劣マルチンゲール性により

$$E := \bigcap_{n=1}^\infty \{\, \omega \ni \Omega \ ;\ \ E(X_n - X_{n+1}\,|\,\mathscr{F}_{n+1})(\omega) < 0\,\}$$

で定まる P-零集合 E に対し

$$0 \le A_1(\omega) \le A_2(\omega) \le \cdots \quad (\forall\omega \in \Omega\backslash E)$$

が満たされ

$$A_\infty(\omega) := \lim_{n\to\infty} A_n(\omega)\mathbb{1}_{\Omega\backslash E}(\omega), \quad (\omega \in \Omega)$$

が ∞ まで含めて確定する．すなわち A_∞ は可測 $\mathscr{F}/\mathscr{B}([0,\infty])$ である． また $EX_1 \geq EX_2 \geq \cdots \geq l > -\infty$ の仮定より

$$\int_\Omega A_n \, dP = \sum_{i=1}^{n-1} \int_\Omega E\left(X_i - X_{i+1} \,|\, \mathscr{F}_{i+1}\right) \, dP = \int_\Omega X_1 - X_n \, dP \leq \int_\Omega X_1 \, dP - l, \quad (\forall n \geq 1)$$

となるから，単調収束定理より A_∞ の可積分性が出る．一方で

$$M_n := X_n + A_n, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

により $\{M_n\}_{n=1}^\infty$ を定めれば

$$\begin{aligned} E\left(M_n - M_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_{n+1}\right) &= E\left((X_n - X_{n+1}) + (A_n - A_{n+1}) \,|\, \mathscr{F}_{n+1}\right) \\ &= E\left((X_n - X_{n+1}) - E\left(X_n - X_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_{n+1}\right) \,|\, \mathscr{F}_{n+1}\right) = 0, \quad P\text{-a.s.}, \quad n = 1, 2, \cdots \end{aligned}$$

となるから

$$E\left(M_1 \,|\, \mathscr{F}_n\right) = M_n, \quad P\text{-a.s.}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

が従う．このとき，任意の $\lambda > 0$ に対して

$$\begin{aligned} \int_{|X_n| > \lambda} |X_n| \, dP &= \int_{|M_n - A_n| > \lambda} |M_n - A_n| \, dP \\ &\leq 2 \int_{|M_n| > \lambda/2} |M_n| \, dP + 2 \int_{|A_n| > \lambda/2} |A_n| \, dP \\ &\leq 2 \int_{|M_n| > \lambda/2} |M_n| \, dP + 2 \int_{A_\infty > \lambda/2} A_\infty \, dP, \quad (\forall n \geq 1) \end{aligned}$$

が満たされ[*4]，$(M_n = E\left(M_1 \,|\, \mathscr{F}_n\right))_{n=1}^\infty$ の一様可積分性 (補題) と A_∞ の可積分性より

$$\sup_{n \geq 1} \int_{|X_n| > \lambda} |X_n| \, dP \leq \sup_{n \geq 1} \int_{|M_n| > \lambda/2} |M_n| \, dP + 2 \int_{A_\infty > \lambda/2} A_\infty \, dP \longrightarrow 0 \quad (\lambda \longrightarrow \infty)$$

が成立し $(X_n)_{n=1}^\infty$ の一様可積分性が出る． ∎

Proposition 3.14 (i)

Let $X = \{ X_t, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \leq t < \infty \}$ be a submartingale. We have the following:

(i) There is an event $\Omega^* \in \mathscr{F}$ with $P(\Omega^*) = 1$, such that for every $\omega \in \Omega^*$:

$$\text{the limits } X_{t+}(\omega) := \lim_{\substack{s \downarrow t \\ s \in \mathbb{Q}}} X_s(\omega), \quad X_{t-}(\omega) := \lim_{\substack{s \uparrow t \\ s \in \mathbb{Q}}} X_s(\omega)$$

exist for all $t \geq 0$ (respectively, $t > 0$).

Proposition 3.14 (ii)

(ii) The limits in (i) satisfy

$$E\left(X_{t+} \,|\, \mathscr{F}_s\right) \geq X_s \quad \text{a.s.}P, \ \text{for all } 0 \leq s \leq t.$$

[*4] 任意の $x, y \in \mathbb{R}$ と $\lambda > 0$ に対して次が成り立つ:

$$|x+y| 1\!\!1_{|x+y|>\lambda} = |x+y| 1\!\!1_{|x+y|>\lambda \wedge |x| \geq |y|} + |x+y| 1\!\!1_{|x+y|>\lambda \wedge |x| < |y|} \leq (|x| + |y|) 1\!\!1_{|x|+|y|>\lambda \wedge |x| \geq |y|} + (|x| + |y|) 1\!\!1_{|x|+|y|>\lambda \wedge |x| < |y|} \leq 2|x| 1\!\!1_{2|x|>\lambda} + 2|y| 1\!\!1_{2|y|>\lambda}.$$

証明． $0 \leq s \leq t$ とする．$t_n \downarrow t$ を満たす単調減少な有理点列 $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ を取れば，$(X_{t_n})_{n=1}^{\infty}$ は $(\mathscr{F}_{t_n})$-後退劣マルチンゲールであり，かつ

$$-\infty < EX_t \leq \cdots \leq EX_{t_2} \leq EX_{t_1}$$

が満たされているから $(X_{t_n})_{n=1}^{\infty}$ は一様可積分である (Problem 3.11)．いま，後退劣マルチンゲール性より

$$\int_A X_s \, dP \leq \int_A X_{t_n} \, dP, \quad (\forall A \in \mathscr{F}_s, \ n = 1, 2, \cdots)$$

が従い，また (i) より $X_{t_n} \longrightarrow X_{t+}$ P-a.s. が成り立つから，一様可積分性と平均収束の補題より

$$E\,|X_{t+}| < \infty, \quad E\left|X_{t_n} - X_{t+}\right| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \tag{1.9}$$

となり

$$\int_A X_s \, dP \leq \int_A X_{t+} \, dP, \quad (\forall A \in \mathscr{F}_s)$$

が得られる． ∎

Proposition 3.14 (iii)

(iii) If $\mathscr{F}_0$ contains all the P-negligible events in $\mathscr{F}$, then $\{ X_{t+}, \mathscr{F}_{t+} \ ; \quad 0 \leq t < \infty \}$ is a submartingale with every path RCLL. [*5]

証明．

第一段　(1.9) より X_{t+} は可積分である．

第二段　$(X_{t+})_{t \geq 0}$ が $(\mathscr{F}_{t+})$-適合であることを示す．任意に $t < u$ を取るとき，$u_n \downarrow t$ を満たす単調減少な有理点列 $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ に対し或る $N \geq 1$ が存在して $t < u_n < u$ $(\forall n > N)$ となるから $X_{u_n} 1\!\!1_{\Omega^*}$ $(n > N)$ は $\mathscr{F}_u/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測性を持つ[*6]．

$$X_{t+} = \lim_{\substack{n \to \infty \\ n > N}} X_{u_n} 1\!\!1_{\Omega^*}$$

より X_{t+} の $\mathscr{F}_u/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測性が従い，$t < u$ の任意性より $\mathscr{F}_{t+}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測性を得る．

第三段　任意の $0 \leq s < t$ に対し $E\,(X_{t+} \,|\, \mathscr{F}_{s+}) \geq X_{s+}$ P-a.s. が成り立つことを示す．実際，$s_n \downarrow s$ を満たす単調減少な有理点列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (s, t]$ を取れば，(ii) の結果より任意の $A \in \mathscr{F}_{s+} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{s_n}$ と $n \geq 1$ に対し

$$\int_A X_{t+} \, dP \geq \int_A X_{s_n} \, dP$$

が成立し，また $(X_{s_n})_{n=1}^{\infty}$ の一様可積分性より

$$E\left|X_{s_n} - X_{s+}\right| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

となり

$$\int_A X_{t+} \, dP \geq \int_A X_{s+} \, dP, \quad (\forall A \in \mathscr{F}_{s+})$$

が従う．

[*5] $(X_{t+})_{t \geq 0}$ が $(\mathscr{F}_{t+})$-適合であることを保証するためには $(\mathscr{F}_t)_{t \geq 0}$ の完備性が要る．また P-almost ではなく全てのパスが RCLL となる．

[*6] フィルトレーションの完備性の仮定より $1\!\!1_{\Omega^*}$ は $\mathscr{F}_u/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測となる．

第四段　$\{ X_{t+} \ ; \quad 0 \leq t < \infty \}$ の右連続性を示す．任意の $t \geq 0,\ \omega \in \Omega^*,\ \epsilon > 0$ に対し，或る $\delta > 0$ が存在して

$$|X_{t+}(\omega) - X_r(\omega)| < \epsilon, \quad (r \in (t, t+\delta) \cap \mathbb{Q})$$

が成立する．このとき，任意の $s \in (t, t+\delta)$ に対し

$$|X_{s+}(\omega) - X_u(\omega)| < \epsilon$$

を満たす $u \in (s, t+\delta) \cap \mathbb{Q}$ が存在するから

$$|X_{t+}(\omega) - X_{s+}(\omega)| \leq |X_{t+}(\omega) - X_u(\omega)| + |X_u(\omega) - X_{s+}(\omega)| < 2\epsilon$$

が従い $[0, \infty) \ni t \longmapsto X_{t+}(\omega)$ の右連続性が得られる．

第五段　$\{ X_{t+} \ ; \quad 0 \leq t < \infty \}$ が各点で有限な左極限を持つことを示す．任意の $t > 0,\ \omega \in \Omega^*,\ \epsilon > 0$ に対し，或る $\delta > 0$ が存在して

$$|X_{t-}(\omega) - X_r(\omega)| < \epsilon, \quad (r \in (t-\delta, t) \cap \mathbb{Q})$$

が成立する．このとき，任意の $s \in (t-\delta, t)$ に対し

$$|X_{s+}(\omega) - X_u(\omega)| < \epsilon$$

を満たす $u \in (s, t) \cap \mathbb{Q}$ が存在するから

$$|X_{t-}(\omega) - X_{s+}(\omega)| \leq |X_{t-}(\omega) - X_u(\omega)| + |X_u(\omega) - X_{s+}(\omega)| < 2\epsilon$$

が従い

$$\lim_{s \uparrow t} X_{s+}(\omega) = X_{t-}(\omega)$$

を得る． ■

1.3.2　Convergence Results

Problem 3.16

Let $\{ X_t, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \leq t < \infty \}$ be a right-continuous, nonnegative supermatingale; then $X_\infty(\omega) = \lim_{t \to \infty} X_t(\omega)$ exists for P-a.e. $\omega \in \Omega$, and $\{ X_t, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \leq t \leq \infty \}$ is a supermartingale.

証明．　$\{ -X_t, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \leq t < \infty \}$ は右連続な $(\mathscr{F}_t)$-劣マルチンゲールとなり

$$\sup_{t \geq 0} E(-X_t)^+ = 0$$

が満たされるから，劣マルチンゲール収束定理により或る P-零集合 A が存在して

$$Z_\infty := \lim_{t \to \infty} (-X_t) \mathbb{1}_{\Omega \setminus A}$$

により $\mathscr{F}_\infty / \mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測な可積分関数 Z_∞ が定まる．すなわち

$$X_\infty := \lim_{t \to \infty} X_t \mathbb{1}_{\Omega \setminus A}$$

により $\mathscr{F}_\infty/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測関数が定まり，かつ $X_\infty = -Z_\infty$ より X_∞ は可積分である．また Fatou の補題により任意の $t \geq 0$ 及び $A \in \mathscr{F}_t$ に対し

$$\int_A X_\infty \, dP \leq \liminf_{\substack{n\to\infty \\ n>t}} \int_A X_n \, dP \leq \int_A X_t \, dP$$

が成立するから $\{ X_t, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \leq t \leq \infty \}$ は優マルチンゲールである． ∎

Exercise 3.18

Suppose that the filtration $\{\mathscr{F}_t\}$ satisfies the usual conditions. Then every right-continuous, uniformly integrable supermartingale $\{ X_t, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \leq t < \infty \}$ admits the Riesz decomposition $X_t = M_t + Z_t$, a.s. P, as the sum of a right-continuous, uniformly integrable martingale $\{ M_t, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \leq t < \infty \}$ and a potential $\{ Z_t, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \leq t < \infty \}$.

条件を満たす二つの分解 $X_t = M_t + Z_t = M'_t + Z'_t$ a.s. $P, (\forall t \geq 0)$ が存在する場合，次の意味で分解は一意である:

$$P\left(M_t = M'_t,\ Z_t = Z'_t,\ \forall t \geq 0\right) = 1. \tag{1.10}$$

証明.

第一段　M を構成する．いま，$t \geq 0$ を固定する．$n > t$ を満たす $n \in \mathbb{N}$ と任意の $A \in \mathscr{F}_t$ に対し

$$\begin{aligned}\int_A E\left(X_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_t\right) \, dP &= \int_A X_{n+1} \, dP = \int_A E\left(X_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n\right) \, dP \\ &\leq \int_A X_n \, dP = \int_A E\left(X_n \,|\, \mathscr{F}_t\right) \, dP\end{aligned}$$

が成り立つから

$$E \coloneqq \bigcup_{n>t} \{ \omega \in \Omega \ ; \quad E\left(X_n \,|\, \mathscr{F}_t\right)(\omega) < E\left(X_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_t\right)(\omega) \}$$

として P-零集合が定まる．また，同様に優マルチンゲール性より

$$F \coloneqq \bigcup_{n>t} \{ \omega \in \Omega \ ; \quad E\left(X_n \,|\, \mathscr{F}_t\right)(\omega) > X_t(\omega) \}$$

も P-零集合である．このとき，単調減少性より

$$X_t^* \coloneqq \lim_{n\to\infty} E\left(X_n \,|\, \mathscr{F}_t\right) 1\!\!1_{\Omega \backslash (E \cup F)}$$

が $-\infty$ まで込めて確定し，X_t^* は $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}([-\infty, \infty])$-可測であり

$$X_t(\omega) \geq X_t^*(\omega), \quad (\forall \omega \in \Omega \backslash (E \cup F))$$

を満たす．単調収束定理と $\sup_{n\geq 1} E|X_n| < \infty$ (一様可積分性) より

$$E\left(X_t - X_t^*\right) = \int_{\Omega\backslash(E\cup F)} \lim_{n\to\infty} \left(X_t - E\left(X_n \,|\, \mathscr{F}_t\right)\right) \, dP = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega\backslash(E\cup F)} X_t - E\left(X_n \,|\, \mathscr{F}_t\right) \, dP = EX_t - \lim_{n\to\infty} EX_n < \infty$$

が成立するから X_t^* は可積分性であり P-a.s. に $|X_t^*| < \infty$ となる．ここで

$$X_t^{**} \coloneqq X_t^* 1\!\!1_{|X_t^*|<\infty}$$

により $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測な可積分関数を定めれば，単調収束定理より

$$EX_t^{**} = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega E\,(X_n\,|\,\mathscr{F}_t)\ dP = \lim_{n\to\infty} EX_n \tag{1.11}$$

となる．任意の $t \geq 0$ に対し X_t^{**} を定めれば，任意の $0 \leq s < t$ 及び $A \in \mathscr{F}_s$ に対して

$$\int_A X_t^{**}\ dP = \lim_{n\to\infty}\int_A E\,(X_n\,|\,\mathscr{F}_t)\ dP = \lim_{n\to\infty}\int_A E\,(X_n\,|\,\mathscr{F}_s)\ dP = \int_A X_s^{**}\ dP \tag{1.12}$$

が成り立つから $\{\, X_t^{**}, \mathscr{F}_t\ ;\quad 0 \leq t < \infty \,\}$ はマルチンゲールである．マルチンゲール性より $[0,\infty) \ni t \longmapsto EX_t^{**}$ は定数であるから Theorem 3.13 により右連続な修正 $\{\, M_t, \mathscr{F}_t\ ;\quad 0 \leq t < \infty \,\}$ が存在する．

第二段　まず $\lim_{t\to\infty} EX_t$ が存在することを示す．任意の単調増大列 $(t_k)_{k=1}^\infty$, $t_k \uparrow \infty$ に対し優マルチンゲール性より

$$\lim_{k\to\infty} EX_{t_k} = \inf_{k\geq 1} EX_{t_k}$$

が確定し，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $n < t_k$ を満たす k が存在するから

$$\inf_{n\geq 1} EX_n \geq \inf_{k\geq 1} EX_{t_k}$$

が従う．逆に任意の t_k に対し $t_k < n$ を満たす n が存在するから

$$\lim_{n\to\infty} EX_n = \inf_{n\geq 1} EX_n = \inf_{k\geq 1} EX_{t_k} = \lim_{k\to\infty} EX_{t_k}$$

が成立し，$(t_k)_{k=1}^\infty$ の任意性から $\lim_{t\to\infty} EX_t$ が存在して

$$\lim_{t\to\infty} EX_t = \lim_{n\to\infty} EX_n \tag{1.13}$$

となる．右連続な優マルチンゲール $\{\, Z_t, \mathscr{F}_t\ ;\quad 0 \leq t < \infty \,\}$ を

$$Z_t := X_t - M_t, \quad (\forall t \geq 0)$$

により定めれば，(1.11) より任意の $t \geq 0$ に対し

$$E(X_t - M_t) = EX_t - EM_t = EX_t - \lim_{n\to\infty} EX_n$$

が成り立ち，(1.13) より

$$\lim_{t\to\infty} E(X_t - M_t) = \lim_{t\to\infty} EX_t - \lim_{n\to\infty} EX_n = 0$$

が満たされるから $\{\, Z_t, \mathscr{F}_t\ ;\quad 0 \leq t < \infty \,\}$ はポテンシャルである．

第三段　分解の一意性を示す．任意の $t \geq 0$ 及び $A \in \mathscr{F}_t$ に対し，(1.12) と M' のマルチンゲール性より

$$\int_A M_t\ dP = \lim_{\substack{n\to\infty\\ n>t}}\int_A X_n\ dP = \lim_{\substack{n\to\infty\\ n>t}}\left\{\int_A M_n' - Z_n'\ dP\right\} = \lim_{\substack{n\to\infty\\ n>t}}\left\{\int_A M_t'\ dP - \int_A Z_n'\ dP\right\}$$

が成立する．またポテンシャルは非負であるから

$$0 \leq \int_A Z_n'\ dP \leq \int_\Omega Z_n'\ dP \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成り立ち，$M_t = M_t'$ P-a.s. 及び $Z_t = Z_t'$ P-a.s. が従う．パスの右連続性より (1.10) が出る．　■

Problem 3.19

Assume that $\mathscr{F}_0$ contains all the P-negligible events in $\mathscr{F}$ *7. Then the following three conditions are equivalent for a nonnegative, right-continuous submartingale $\{ X_t, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \leq t < \infty \}$:

(a) it is a uniformly integrable family of random variables;

(b) is converges in L^1, as $t \to \infty$;

(c) it converges P a.s. (as $t \to \infty$) to an integrable random variable X_∞, such that $\{ X_t, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \leq t \leq \infty \}$ is a submartingale.

Observe that the implications (a) ⇒ (b) ⇒ (c) hold without the assumption of nonnegativity.

証明.

第一段　(a) ⇒ (b) を示す．実際，一様可積分性の同値条件の補題より

$$\sup_{t \geq 0} EX_t^+ \leq \sup_{t \geq 0} E|X_t| < \infty$$

となるから，劣マルチンゲール収束定理より或る $\mathscr{F}_\infty/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測な*8 可積分関数 X_∞ が存在して

$$\lim_{t \to \infty} X_t = X_\infty \quad P\text{-a.s.}$$

が満たされる．一様可積分性と平均収束の補題より，$t_n \uparrow \infty$ となる任意の単調増大列 $(t_n)_{n=1}^\infty$ に対して

$$E|X_{t_n} - X_\infty| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成立するから

$$E|X_t - X_\infty| \longrightarrow 0 \quad (t \longrightarrow \infty)$$

が従う．

第二段　(b) ⇒ (c) を示す．(b) の下で，或る可積分関数 X_* が存在して

$$E|X_n - X_*| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が満たされるから，或る部分列 $(X_{n_k})_{k=1}^\infty$ と P-零集合 E が存在して

$$\lim_{k \to \infty} X_{n_k}(\omega) = X_*(\omega), \quad (\forall \omega \in \Omega \backslash E)$$

となる．$X_{n_k} 1\!\!1_{\Omega \backslash E}$ は全て $\mathscr{F}_\infty/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測であるから，

$$X_\infty := \lim_{k \to \infty} X_{n_k} 1\!\!1_{\Omega \backslash E}$$

とおけば X_∞ は $\mathscr{F}_\infty/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測，かつ $X_\infty = X^*$ P-a.s. より可積分であり

$$E|X_n - X_\infty| = E|X_n - X_*| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \tag{1.14}$$

*7 証明の第二段で出てくる E が $\mathscr{F}_\infty$ に属していなければならない．

*8 Theorem 3.15 における X_∞ は $\pm\infty$ も取るが，可積分性より P-a.s. に $\mathbb{R}$ 値であるから $X_\infty 1\!\!1_{|X_\infty| < \infty}$ を X_∞ に置き換えればよい．

を満たす．任意の $t \geq 0$ 及び $A \in \mathscr{F}_t$ に対し

$$\int_A X_t \, dP \leq \int_A X_n \, dP, \quad (\forall n > t) \tag{1.15}$$

が成り立つから，(1.14) より

$$\int_A X_t \, dP \leq \int_A X_\infty \, dP \tag{1.16}$$

が出る．

第三段　$X_t \geq 0$ $(\forall t \geq 0)$ を仮定して (c) ⇒ (a) を示す．実際，劣マルチンゲール性より

$$\int_{|X_t|>\lambda} |x_t| \, dP = \int_{X_t>\lambda} X_t \, dP \leq \int_{X_t>\lambda} X_\infty \, dP$$

かつ

$$P(X_t > \lambda) \leq \frac{1}{\lambda} EX_t \leq \frac{1}{\lambda} EX_\infty$$

が成り立ち，X_∞ の可積分性より

$$\sup_{t \geq 0} \int_{|X_t|>\lambda} |x_t| \, dP \longrightarrow 0 \quad (\lambda \longrightarrow \infty)$$

となる．∎

Problem 3.20

Assume that $\mathscr{F}_0$ contains all the P-negligible events in $\mathscr{F}$. Then the following four conditions are equivalent for a right-continuous martingale $\{ X_t, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \leq t < \infty \}$:

(a),(b)　as in Problem 3.19;

(c)　it converges P a.s. (as $t \to \infty$) to an integrable random variable X_∞, such that $\{ X_t, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \leq t \leq \infty \}$ is a martingale;

(d)　there exists an integrable random variable Y, such that $X_t = E(Y \mid \mathscr{F}_t)$ a.s. P, for every $t \geq 0$.

Besides, if (d) holds and X_∞ is the random variable in (c), then

$$E(Y \mid \mathscr{F}_\infty) = X_\infty \quad \text{a.s. } P. \tag{1.17}$$

証明.

第一段　マルチンゲールは劣マルチンゲールであるから，Problem 3.19 より (a) ⇒ (b) が従う．また今の仮定の下では (1.15) と (1.16) の不等号が等号に代わり (b) ⇒ (c) となる．$Y := X_\infty$ として (c) ⇒ (d) が得られ，一様可積分性と条件付き期待値に関する補題 (P. 25) より (d) ⇒ (a) が出る．

第二段　(1.17) を示す．いま，任意の $t \geq 0$ 及び $A \in \mathscr{F}_t$ に対し

$$\int_A Y \, dP = \int_A X_t \, dP = \int_A X_\infty \, dP$$

が成立するから

$$\int_A Y\,dP = \int_A X_\infty\,dP, \quad (\forall A \in \bigcup_{t\geq 0} \mathscr{F}_t)$$

が従う．Y と X_∞ の可積分性より

$$\mathscr{D} := \left\{ A \in \mathscr{F}_\infty \ ; \quad \int_A Y\,dP = \int_A X_\infty\,dP \right\}$$

は Dynkin 族をなし乗法族 $\bigcup_{t\geq 0} \mathscr{F}_t$ を含むから，Dynkin 族定理より

$$\int_A Y\,dP = \int_A X_\infty\,dP, \quad (\forall A \in \mathscr{F}_\infty)$$

が成立する．∎

1.3.3　The Optional Sampling Theorem

Lemma: 離散時間の任意抽出定理

$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty$ とし，$\{\, X_{t_i}, \mathscr{F}_{t_i} \ ; \quad i = 0, \cdots, n \,\}$ を劣マルチンゲール，$S, T : \Omega \longrightarrow \{t_0, t_1, \cdots, t_n, \infty\}$ を $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻[*9]，Y を $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測関数として

$$X_T(\omega) := Y(\omega),\ (\forall \omega \in \{T = \infty\}), \quad X_S(\omega) := Y(\omega),\ (\forall \omega \in \{S = \infty\})$$

とおく．このとき，

(a)　$S, T < \infty$, a.s. P.

(b)　Y が可積分かつ $E\left(Y \,\middle|\, \mathscr{F}_{t_i}\right) \geq X_{t_i}$ a.s. P, $(i = 0, \cdots, n)$.

のいずれかのが満たされていれば次が成り立つ:

$$E\left(X_T \mid \mathscr{F}_S\right) \geq X_{S\wedge T} \quad \text{a.s. } P. \tag{1.18}$$

証明.

第一段　X_S が $\mathscr{F}_S/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測であることを示す．任意の $t \geq 0$ に対して

$$\{X_S \in B\} \cap \{S \leq t\} = \{X_{S\wedge t} \in B\} \cap \{S \leq t\}, \quad (\forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}))$$

となるから $X_{S\wedge t}$ の $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測性を言えばよい．$t_m \leq t < t_{m+1}$ の場合 ($m = n$ なら $t_{m+1} = \infty$),

$$X_{S\wedge t} = \sum_{t_i \leq t} X_{t_i} \mathbb{1}_{\{S = t_i\}} = \sum_{i=0}^{m} X_{t_i} \mathbb{1}_{\{S = t_i\}}$$

[*9] $\left\{\mathscr{F}_{t_i}\right\}_{i=0}^{n}$ は $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}$ の部分集合と考える．

と分解できる．連続写像 $\varphi : \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \longmapsto xy$ と $\psi : \mathbb{R}^{m+1} \ni (x_0, x_1, \cdots, x_m) \longmapsto x_0 + x_1 + \cdots + x_m$ を用いれば,

$$\{X_{t_i} 1\!\!1_{\{S=t_i\}} \in B\} = \left\{ \left(X_{t_i}, 1\!\!1_{\{S=t_i\}}\right) \in \varphi^{-1}(B) \right\}, \quad (\forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}))$$

かつ

$$\{X_{S\wedge t} \in B\} = \left\{ \left(X_{t_0} 1\!\!1_{\{S=t_0\}}, \cdots, X_{t_m} 1\!\!1_{\{S=t_m\}}\right) \in \psi^{-1}(B) \right\}, \quad (\forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}))$$

が成り立つ．いま，$\mathbb{R}$ の第二可算性より $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2) = \mathscr{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R})$ が満たされ，かつ任意の $E, F \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$\{(X_{t_i}, 1\!\!1_{\{S=t_i\}}) \in E \times F\} = X_{t_i}^{-1}(E) \cap \{1\!\!1_{\{S=t_i\}} \in F\} \in \mathscr{F}_t, \quad (\forall t_i \leq t)$$

となるから $X_{t_i} 1\!\!1_{\{S=t_i\}}$ の $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測性が従う．同様に $\mathscr{B}(\mathbb{R}^{m+1}) = \mathscr{B}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R})$ と

$$\{(X_{t_0} 1\!\!1_{\{S=t_0\}}, \cdots, X_{t_m} 1\!\!1_{\{S=t_m\}}) \in E_0 \times \cdots \times E_m\} = \bigcap_{i=0}^{m} \{X_{t_i} 1\!\!1_{\{S=t_i\}} \in E_i\} \in \mathscr{F}_t, \quad (\forall E_i \in \mathscr{B}(\mathbb{R}),\ i = 0, \cdots, m)$$

より $X_{S\wedge t}$ は $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測である．これより X_T の $\mathscr{F}_T/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測性及び $X_{S\wedge T}$ の $\mathscr{F}_{S\wedge T}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測性も出る．

第二段　$S \leq T$ と仮定して (1.18) を示す．先ず

$$\int_\Omega |X_S|\,dP = \sum_{i=0}^{n} \int_{\{S=t_i\}} |X_{t_i}|\,dP + \int_{\{S=\infty\}} |Y|\,dP$$

より (a),(b) いずれの場合も X_S, X_T は可積分である．また，劣マルチンゲール性より任意の $A \in \mathscr{F}_S$ に対して

$$\begin{aligned}
\int_{A\cap\{S=t_i\}} X_{t_i}\,dP &= \int_{A\cap\{S=t_i\}\cap\{T=t_i\}} X_{t_i}\,dP + \int_{A\cap\{S=t_i\}\cap\{T>t_i\}} X_{t_i}\,dP \\
&\leq \int_{A\cap\{S=t_i\}\cap\{T=t_i\}} X_T\,dP + \int_{A\cap\{S=t_i\}\cap\{T>t_i\}} X_{t_{i+1}}\,dP \\
&= \int_{A\cap\{S=t_i\}\cap\{T=t_i\}} X_T\,dP + \int_{A\cap\{S=t_i\}\cap\{T=t_{i+1}\}} X_T\,dP + \int_{A\cap\{S=t_i\}\cap\{T>t_{i+1}\}} X_{t_{i+1}}\,dP \\
&\cdots \\
&\leq \sum_{j=i}^{n} \int_{A\cap\{S=t_i\}\cap\{T=t_j\}} X_T\,dP + \int_{A\cap\{S=t_i\}\cap\{T>t_n\}} X_{t_n}\,dP
\end{aligned}$$

及び

$$\int_{A\cap\{S=\infty\}} X_S\,dP = \int_{A\cap\{S=\infty\}} Y\,dP = \int_{A\cap\{S=\infty\}} X_T\,dP$$

が成り立つから，(a) の場合は

$$\int_{A\cap\{S=t_i\}} X_{t_i}\,dP \leq \sum_{j=i}^{n} \int_{A\cap\{S=t_i\}\cap\{T=t_j\}} X_T\,dP = \int_{A\cap\{S=t_i\}} X_T\,dP,$$

(b) の場合は

$$\begin{aligned}
\int_{A\cap\{S=t_i\}} X_{t_i}\,dP &\leq \sum_{j=i}^{n} \int_{A\cap\{S=t_i\}\cap\{T=t_j\}} X_T\,dP + \int_{A\cap\{S=t_i\}\cap\{T>t_n\}} X_{t_n}\,dP \\
&\leq \sum_{j=i}^{n} \int_{A\cap\{S=t_i\}\cap\{T=t_j\}} X_T\,dP + \int_{A\cap\{S=t_i\}\cap\{T>t_n\}} Y\,dP \\
&= \sum_{j=i}^{n} \int_{A\cap\{S=t_i\}\cap\{T=t_j\}} X_T\,dP + \int_{A\cap\{S=t_i\}\cap\{T=\infty\}} Y\,dP \\
&= \int_{A\cap\{S=t_i\}} X_T\,dP
\end{aligned}$$

となり，いずれの場合も

$$\int_A X_S\ dP = \sum_{i=0}^{n} \int_{A\cap\{S=t_i\}} X_{t_i}\ dP + \int_{A\cap\{S=\infty\}} X_S\ dP \leq \sum_{i=0}^{n} \int_{A\cap\{S=t_i\}} X_T\ dP + \int_{A\cap\{S=\infty\}} X_T\ dP = \int_A X_T\ dP$$

が成立する．X_S の $\mathscr{F}_S/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測性より (1.18) を得る．

第三段　一般の S,T に対して (1.18) を示す．任意の $A \in \mathscr{F}_S$ に対し，Problem 2.17 (P. 12) と前段の結果より

$$\begin{aligned}
\int_A E(X_T \mid \mathscr{F}_S)\ dP &= \int_{A\cap\{S\leq T\}} E(X_T \mid \mathscr{F}_S)\ dP + \int_{A\cap\{S>T\}} E(X_T \mid \mathscr{F}_S)\ dP \\
&= \int_{A\cap\{S\leq T\}} E(X_T \mid \mathscr{F}_{S\wedge T})\ dP + \int_{A\cap\{S>T\}} X_T\ dP \\
&\geq \int_{A\cap\{S\leq T\}} X_{S\wedge T}\ dP + \int_{A\cap\{S>T\}} X_{S\wedge T}\ dP \\
&= \int_A X_{S\wedge T}\ dP
\end{aligned}$$

となり，$X_{S\wedge T}$ の $\mathscr{F}_{S\wedge T}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測性より (1.18) が出る．■

Theorem 3.22 修正

Let $\{ X_t, \mathscr{F}_t\ ;\quad 0 \leq t < \infty \}$ be a right-continuous submartingale, S,T be two optional times of the filtration $\{\mathscr{F}_t\}$, and Y be a $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-measurable function, and set

$$X_U(\omega) := Y(\omega) \quad (\forall \omega \in \{U = \infty\}).$$

for any random time U. Then, under either of the following two conditions;

(a)　There exists an $N \in \mathbb{N}$ such that $S,T < N$ a.s. P,

(b)　Y is integrable and $X_t \leq E(Y \mid \mathscr{F}_t)$ a.s. P, for every $t \geq 0$,

we have

$$E(X_T \mid \mathscr{F}_{S+}) \geq X_{S\wedge T} \quad \text{a.s. } P.$$

If S is a stopping time, then $\mathscr{F}_S$ can replace $\mathscr{F}_{S+}$ above. In particular, $EX_T \geq EX_0$, and for a martingale with a last element we have $EX_T = EX_0$.

この修正により Problem 3.23 と Problem 3.24 の主張が従う．

証明.

第一段　X_S の $\mathscr{F}_{S+}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測性を示す．Corollary 2.4 より S は $(\mathscr{F}_{t+})$-停止時刻であり，$\{ X_t, \mathscr{F}_{t+}\ ;\quad 0 \leq t < \infty \}$ は発展的可測である．従って Proposition 2.18 (P. 13) より任意の $t \geq 0$ に対し $X_{S\wedge t}$ は $\mathscr{F}_{t+}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測であり，

$$\{X_S \in B\} \cap \{S \leq t\} = \{X_{S\wedge t} \in B\} \cap \{S \leq t\} \in \mathscr{F}_{t+}, \quad (\forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}))$$

より X_S の $\mathscr{F}_{S+}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測性が出る．$S$ が $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻のときは，$X_{S\wedge t}$ は $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測性を持ち

$$\{X_S \in B\} \cap \{S \leq t\} = \{X_{S\wedge t} \in B\} \cap \{S \leq t\} \in \mathscr{F}_t, \quad (\forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}))$$

が従うから X_S は $\mathscr{F}_S/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測である．

第二段　任意の $n \geq N$ に対し

$$S_n(\omega) := \begin{cases} \infty & \text{if } S(\omega) \geq n, \\ \dfrac{k}{2^n} & \text{if } \dfrac{k-1}{2^n} \leq S(\omega) < \dfrac{k}{2^n} \text{ for } k = 1, \cdots, n2^n, \end{cases}$$

により停止時刻 S_n が定まる (Problem 2.24 修正版， P. 16)．同様に $(T_n)_{n \geq N}$ も構成すれば，補題より

$$\int_A X_{T_n}\, dP \geq \int_A X_{S_n \wedge T_n}\, dP, \quad (\forall A \in \mathscr{F}_{S_n},\ \forall n \geq N)$$

が成立する．また $S(\omega) < \infty$ なら $S_n(\omega) \downarrow S(\omega)$，かつ $S(\omega) = \infty$ なら $S_n(\omega) = \infty$ であるから

$$S = \inf_{n \geq N} S_n$$

が満たされ，Problem 2.23 より

$$\mathscr{F}_{S+} = \bigcap_{n \geq N} \mathscr{F}_{S_n}$$

となり

$$\int_A X_{T_n}\, dP \geq \int_A X_{S_n \wedge T_n}\, dP, \quad (\forall A \in \mathscr{F}_{S+},\ \forall n \geq N) \tag{1.19}$$

が成立する．S が停止時刻の場合は $\mathscr{F}_S \subset \mathscr{F}_{S+}$ であるから，(1.19) を $\mathscr{F}_S$ に置き換えて成立する．

第三段　$(S_n)_{n \geq N}, (T_n)_{n \geq N}$ は単調減少列であるから $(\mathscr{F}_{T_n})_{n \geq N}$ と $(\mathscr{F}_{S_n \wedge T_n})_{n \geq N}$ も単調減少列であり，$\{ X_{T_n}, \mathscr{F}_{T_n} ;\quad n \geq N \}$ 及び $\{ X_{S_n \wedge T_n}, \mathscr{F}_{S_n \wedge T_n} ;\quad n \geq N \}$ は後退劣マルチンゲールとなる．かつ

$$\lim_{n \to \infty} EX_{T_n} \geq EX_0, \quad \lim_{n \to \infty} EX_{S_n \wedge T_n} \geq EX_0$$

が満たされているから，Problem 3.11 より $(X_{T_n})_{n \geq N}, (X_{S_n \wedge T_n})_{n \geq N}$ は一様可積分である．また $\{X_t\}$ の右連続性より

$$X_{T_n}(\omega) \longrightarrow X_T(\omega), \quad X_{S_n \wedge T_n}(\omega) \longrightarrow X_{S \wedge T}(\omega), \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

が成り立つから，一様可積分性と平均収束の補題 (P. 25) より $X_T, X_{S \wedge T}$ の可積分性及び

$$E\left|X_T - X_{T_n}\right| \longrightarrow 0, \quad E\left|X_{S \wedge T} - X_{S_n \wedge T_n}\right| \longrightarrow 0, \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が従い

$$\int_A X_T\, dP \geq \int_A X_{S \wedge T}\, dP, \quad (\forall A \in \mathscr{F}_{S+})$$

が得られる．S が停止時刻の場合は $\mathscr{F}_{S+}$ を $\mathscr{F}_S$ に置き換えて成立する．　∎

Problem 3.25

A submartingale of constant expectation, i.e., with $E(X_t) = E(X_0)$ for every $t \geq 0$, is a martingale.

証明．　任意の $0 \leq s < t$ に対し，

$$E\left(X_t \mid \mathscr{F}_s\right) - X_s \geq 0, \quad \text{a.s. } P$$

かつ

$$E\left(E\left(X_t \mid \mathscr{F}_s\right) - X_s\right) = EX_t - EX_s = EX_0 - EX_0 = 0$$

より

$$E\left(X_t \mid \mathscr{F}_s\right) - X_s = 0, \quad \text{a.s. } P$$

が従う． ∎

Problem 3.26

A right-continuous process $\{ X_t, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \leq t < \infty \}$ with $E|X_t| < \infty;\ 0 \leq t < \infty$ is a submartingale if and only if for every pair $S \leq T$ of bounded stopping times of the filtration $\{\mathscr{F}_t\}$ we have

$$E(X_T) \geq E(X_S). \tag{1.20}$$

証明． (⇒) は任意抽出定理より従う．(⇐) を示す．任意の $0 \leq s < t$ 及び $A \in \mathscr{F}_s$ に対し，

$$T(\omega) := t, \quad S(\omega) := \begin{cases} s, & (\omega \in A), \\ t, & (\omega \in \Omega \backslash A) \end{cases}, \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

により $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻 $S \leq T$ を定めれば，(1.20) より

$$\int_A X_t \, dP = \int_\Omega X_T \, dP - \int_{\Omega \backslash A} X_t \, dP \geq \int_\Omega X_S \, dP - \int_{\Omega \backslash A} X_t \, dP = \int_A X_s \, dP$$

が成り立ち，$A \in \mathscr{F}_s$ の任意性より $E\left(X_t \mid \mathscr{F}_s\right) \geq X_s$ a.s. P となる． ∎

Problem 3.27

Let T be a bounded stopping time of the filtration $\{\mathscr{F}_t\}$, which satisfies the usual conditions, and define $\tilde{\mathscr{F}}_t = \mathscr{F}_{T+t};\ t \geq 0$. Then $\{\tilde{\mathscr{F}}_t\}$ also satisfies the usual conditions.

(i) If $X = \{ X_t, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \leq t < \infty \}$ is a right-continuous submartingale, then so is $\tilde{X} = \left\{ \tilde{X}_t := X_{T+t} - X_T, \tilde{\mathscr{F}}_t \ ; \quad 0 \leq t < \infty \right\}$.

(ii) $\tilde{X} = \left\{ \tilde{X}_t, \tilde{\mathscr{F}}_t \ ; \quad 0 \leq t < \infty \right\}$ is a right-continuous submartingale, with $\tilde{X}_0 = 0$[*10], then $X = \left\{ X_t := \tilde{X}_{(t-T)\vee 0}, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \leq t < \infty \right\}$ is also a submartingale.

証明．

第一段　$\{\tilde{\mathscr{F}}_t\}$ が通常の条件 (usual conditions) を満たすことを示す．実際，

$$\{ N \in \mathscr{F} \ ; \quad P(N) = 0 \} \subset \mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}_{T+t}, \quad (\forall t \geq 0)$$

[*10] $\tilde{X}_0 = 0$ a.s. P だと $X_t = \tilde{X}_{(t-T)\vee 0}$ が $(\mathscr{F}_t)$-適合となるかわからない．

より $\{\tilde{\mathscr{F}}_t\}$ は完備であり，また任意の $t \geq 0$ に対して $T + t = \inf_{n\geq 1}(T + t + 1/n)$ より

$$\tilde{\mathscr{F}}_{t+} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{\mathscr{F}}_{t+\frac{1}{n}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{T+t+\frac{1}{n}} = \mathscr{F}_{(T+t)+}$$

となるが (Problem 2.23)，$\{\mathscr{F}_t\}$ の右連続性より

$$A \cap \{T + t \leq s\} \in \mathscr{F}_{s+},\ \forall s \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad A \cap \{T + t \leq s\} \in \mathscr{F}_s,\ \forall s \geq 0$$

が成立するから $\mathscr{F}_{(T+t)+} = \mathscr{F}_{T+t}$ が満たされ

$$\tilde{\mathscr{F}}_{t+} = \mathscr{F}_{T+t} = \tilde{\mathscr{F}}_t$$

を得る．

(i) の証明　X の右連続性より $\tilde{X}$ は右連続である．また任意抽出定理より X_{T+t} は $\mathscr{F}_{T+t}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測かつ可積分であり

$$E\left(\tilde{X}_t \,\middle|\, \tilde{\mathscr{F}}_s\right) = E\left(X_{T+t} - X_T \mid \mathscr{F}_{T+s}\right) \geq X_{T+s} - X_T = \tilde{X}_s, \quad \text{a.s. } P,\ (0 \leq s < t)$$

が成立するから，$\tilde{X}$ は右連続劣マルチンゲールである．

(ii) の証明　$S_1 \leq S_2$ を有界な $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻とするとき，$(S_j - T) \vee 0$ $(j = 1, 2)$ は $(\tilde{\mathscr{F}}_t)$-停止時刻である．実際，

$$\{(S_j - T) \vee 0 \leq t\} \cap \{T + t \leq u\} = \{S_j \wedge u \leq (T + t) \wedge u\} \cap \{T + t \leq u\} \in \mathscr{F}_u, \quad (\forall u \geq 0)$$

より $\{(S_j - T) \vee 0 \leq t\} \in \mathscr{F}_{T+t} = \tilde{\mathscr{F}}_t$ $(\forall t \geq 0)$ が成立する．$[0, \infty) \ni t \longmapsto \tilde{X}_{(t-T)\vee 0}(\omega)$ は右連続であり，また $\tilde{X}_{t-T}$ が $\tilde{\mathscr{F}}_{t-T} = \mathscr{F}_t$-可測かつ可積分であるから

$$X_t = \tilde{X}_{(t-T)\vee 0} = \tilde{X}_{t-T}\,\mathbb{1}_{\{T \leq t\}}$$

は $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測かつ可積分である．従って X は右連続可積分適合過程であり，Problem 3.26 より

$$EX_{S_1} = E\tilde{X}_{(S_1-T)\vee 0} \leq E\tilde{X}_{(S_2-T)\vee 0} = EX_{S_2}$$

が成り立つから，同じく Problem 3.26 より X の劣マルチンゲール性が出る． ∎

Problem 3.28

Let $Z = \{ Z_t, \mathscr{F}_t \ ;\quad 0 \leq t < \infty \}$ be a continuous, nonnegative martingale with $Z_\infty := \lim_{t\to\infty} Z_t = 0$, a.s. P. Then for every $s \geq 0$, $b > 0$:

(i) $\quad P\left[\sup_{t>s} Z_t \geq b \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right] = \frac{1}{b} Z_s, \quad$ a.s. on $\{Z_s < b\}$.

(ii) $\quad P\left[\sup_{t\geq s} Z_t \geq b\right] = P[Z_s \geq b] + \frac{1}{b} E[Z_s \mathbb{1}_{\{Z_s<b\}}]$.

証明.

第一段　$\inf\{ t \in [s, \infty) \ ;\quad Z_t(\omega) = b \} = \inf\{ t \in [0, \infty) \ ;\quad Z_{t+s}(\omega) = b \} + s$ と Problem 2.7 より

$$T(\omega) := \inf\{ t \in [s, \infty) \ ;\quad Z_t(\omega) = b \}, \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

により $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻が定まる．このとき

$$Z_T(\omega) = b, \quad (\forall \omega \in \{T < \infty\} \cap \{Z_s < b\}) \tag{1.21}$$

と

$$T(\omega) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sup_{t>s} Z_t(\omega) \geq b, \quad (\text{a.s.}\omega \in \{Z_s < b\}) \tag{1.22}$$

が成立する．実際，$\omega \in \{T < \infty\} \cap \{Z_s < b\}$ に対し，$Z_T(\omega) < b$ なら

$$\sup_{s \leq t \leq T(\omega)} Z_t(\omega) < b$$

となり，$t \longmapsto Z_t(\omega)$ の連続性より $T(\omega) < T(\omega)$ が従い矛盾が生じる．逆に $Z_T(\omega) > b$ なら中間値の定理より

$$Z_t(\omega) = b, \quad s < \exists t < T(\omega)$$

となるから，$T(\omega) \leq t < T(\omega)$ という矛盾が生じ，(1.21) が出る．これにより，$\omega \in \{Z_s < b\}$ に対し

$$T(\omega) < \infty \quad \Rightarrow \quad b = Z_T(\omega) \leq \sup_{t>s} Z_t(\omega)$$

が成立する．一方で a.s.$\omega \in \{Z_s < b\}$ で $Z_t(\omega) \longrightarrow 0$ となるから，$0 < \epsilon < b$ に対し或る t_0 が存在して

$$Z_t(\omega) < \epsilon, \quad (\forall t > t_0)$$

が満たされる．この場合

$$\sup_{t>s} Z_t(\omega) \geq b \quad \Rightarrow \quad \sup_{t \in [s,t_0]} Z_t(\omega) \geq b$$

となるから，連続性より $Z_t(\omega) = b$ を満たす $t \in (s, t_0)$ が存在し，$T(\omega) \leq t$ が従い (1.22) が得られる．

第二段　(i) を示す．任意の $A \in \mathscr{F}_s$ と $n > s$ に対し，任意抽出定理と (1.21) より

$$\begin{aligned}
\int_{A\cap\{Z_s<b\}} Z_s \, dP &= \int_{A\cap\{Z_s<b\}} Z_{T\wedge n} \, dP \\
&= \int_{A\cap\{Z_s<b\}} Z_T \, 1\!\!1_{\{T\leq n\}} \, dP + \int_{A\cap\{Z_s<b\}} Z_n \, 1\!\!1_{\{T>n\}} \, dP \\
&= bP\left[A \cap \{Z_s < b\} \cap \{T \leq n\}\right] + \int_{A\cap\{Z_s<b\}} Z_n \, 1\!\!1_{\{T>n\}} \, dP
\end{aligned}$$

が成立する．ここで

$$P\left[A \cap \{Z_s < b\} \cap \{T \leq n\}\right] \longrightarrow P\left[A \cap \{Z_s < b\} \cap \{T < \infty\}\right], \quad (n \longrightarrow \infty)$$

かつ $Z_n 1\!\!1_{\{T>n\}\cap\{Z_s<b\}} < b,\ (\forall n > s)$ 及び

$$Z_n \, 1\!\!1_{\{T>n\}} \longrightarrow Z_\infty \, 1\!\!1_{\{T=\infty\}}, \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成り立つから，$Z_\infty = 0$ a.s. P と Lebesgue の収束定理より

$$\int_{A\cap\{Z_s<b\}} Z_s \, dP = bP\left[A \cap \{Z_s < b\} \cap \{T < \infty\}\right] = b \int_{A\cap\{Z_s<b\}} 1\!\!1_{\{T<\infty\}} \, dP$$

が得られる．更に (1.22) より

$$\int_{A\cap\{Z_s<b\}} Z_s \, dP = b \int_{A\cap\{Z_s<b\}} 1\!\!1_{\{\sup_{t>s} Z_t(\omega) \geq b\}} \, dP = b \int_{A\cap\{Z_s<b\}} P\left[\sup_{t>s} Z_t \geq b \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right] dP$$

となるから，$A \in \mathscr{F}_s$ の任意性より

$$P\left[\sup_{t>s} Z_t \geq b \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right] \mathbb{1}_{\{Z_s<b\}} = \frac{1}{b} Z_s \mathbb{1}_{\{Z_s<b\}}, \quad \text{a.s. } P$$

が出る．

第三段　(iii) を示す．$t \longmapsto Z_t(\omega)$ の連続性より

$$\sup_{t>s} Z_t(\omega) \geq b \quad \Leftrightarrow \quad \sup_{t\geq s} Z_t(\omega) \geq b, \quad (\forall \omega \in \{Z_s < b\})$$

となるから

$$\begin{aligned} P\left[\sup_{t\geq s} Z_t \geq b\right] &= P\left[\left\{\sup_{t\geq s} Z_t \geq b\right\} \cap \{Z_s \geq b\}\right] + P\left[\left\{\sup_{t\geq s} Z_t \geq b\right\} \cap \{Z_s < b\}\right] \\ &= P\left[Z_s \geq b\right] + P\left[\left\{\sup_{t>s} Z_t \geq b\right\} \cap \{Z_s < b\}\right] \\ &= P[Z_s \geq b] + \frac{1}{b} E[Z_s \mathbb{1}_{\{Z_s<b\}}] \end{aligned}$$

が成立する．∎

Problem 3.29 修正

Let $\{ X_t, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \leq t < \infty \}$ be a continuous, nonnegative supermartingale and $T = \inf \{ t \in [0,\tau] \ ; \quad X_t = 0 \}$ ($\inf \emptyset = \tau$) for some $\tau > 0$. Show that

$$X_{T+t} = 0; \quad 0 \leq t < \infty \quad \text{hold a.s. } \{T < \tau\}.$$

証明． (1.21) より

$$X_T(\omega) = 0, \quad (\forall \omega \in \{T < \tau\})$$

が満たされ，かつ $\{T < \tau\} \in \mathscr{F}_T$ であるから，任意抽出定理より

$$0 \leq E\left(X_{T+t} \mathbb{1}_{\{T<\tau\}}\right) \leq E\left(X_T \mathbb{1}_{\{T<\tau\}}\right) = 0, \quad 0 \leq t < \infty$$

が成立し

$$X_{T+t} \mathbb{1}_{\{T<\tau\}} = 0, \quad \text{a.s. } P, \quad 0 \leq t < \infty$$

となる．パスの連続性より

$$\{X_{T+t} \mathbb{1}_{\{T<\tau\}} = 0,\ 0 \leq t < \infty\} = \bigcap_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,\tau)} \{X_{T+r} \mathbb{1}_{\{T<\tau\}} = 0\}$$

が成り立ち主張が従う．∎

Exercise 3.30

Suppose that the filtration $\{\mathscr{F}_t\}$ satisfies the usual conditions and let $X^{(n)} = \left\{ X_t^{(n)}, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \leq t < \infty \right\}$, $n \geq 1$ be an increasing sequence of right-continuous supermartingales, such that the random variable $\xi_t \coloneqq \lim_{n\to\infty} X_t^{(n)}$ is nonnegative and integrable for every $0 \leq t < \infty$. Then there exists an RCLL supermartingale $X = \{ X_t, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \leq t < \infty \}$ which is a modification of the process $\xi = \{ \xi_t, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \leq t < \infty \}$.

1.4　The Doob-Meyer Decomposition

martingale transform

If $A = \{ A_n, \mathscr{F}_n \ ; \quad n = 0, 1, \cdots \}$ is predictable with $E|A_n| < \infty$ for every n, and if $\{ M_n, \mathscr{F}_n \ ; \quad n = 0, 1, \cdots \}$ is bounded martingale, then the martingale transform of A by M defined by

$$Y_0 = 0 \quad \text{and} \quad Y_n = \sum_{k=1}^{n} A_k(M_k - M_{k-1}); \quad n \geq 1,$$

is itself a martingale.

証明.　$A_k(M_k - M_{k-1})$ $(k \leq n)$ は $\mathscr{F}_n/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測であるから $(Y_n)_{n=1}^{\infty}$ は $(\mathscr{F}_n)$-適合である．また

$$E|Y_n| = E\left|\sum_{k=1}^{n} A_k(M_k - M_{k-1})\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \left\{ \operatorname*{ess.sup}_{\omega\in\Omega} (|M_k(\omega)| + |M_{k-1}(\omega)|) \right\} E|A_k| < \infty$$

が成り立つ．更に任意の $n \geq 1$ に対し

$$\begin{aligned} E\left(Y_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right) &= E\left(A_n(M_n - M_{n-1}) + Y_{n-1} \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right) \\ &= A_n(E\left(M_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right) - M_{n-1}) + Y_{n-1} = Y_{n-1}, \quad \text{a.s. } P \end{aligned}$$

が満たされる． ∎

Doob's decomposition

Any submartingale $\{ X_n, \mathscr{F}_n \ ; \quad n = 0, 1, \cdots \}$ admits the Doob decomposition $X_n = M_n + A_n$ as the summation of a martingale $\{M_n, \mathscr{F}_n\}$ and an predictable and increasing sequence $\{A_n, \mathscr{F}_n\}$. This decomposition is unique.

証明.

第一段　Doob 分解が存在するとして，分解の一意性を示す．実際，分解が存在すれば

$$A_{n+1} - A_n = E\left(A_{n+1} - A_n \,|\, \mathscr{F}_n\right) = E\left(X_{n+1} - X_n \,|\, \mathscr{F}_n\right) - E\left(M_{n+1} - M_n \,|\, \mathscr{F}_n\right) = E\left(X_{n+1} - X_n \,|\, \mathscr{F}_n\right), \quad \text{a.s. } P$$

が成立し，A_n $(n \geq 1)$ は

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} E\left(X_{k+1} - X_k \,|\, \mathscr{F}_k\right), \quad \text{a.s. } P$$

を満たすことになり分解の一意性が出る．

第二段　分解可能性を示す．

$$A_0 := 0, \quad A_n := \sum_{k=0}^{n-1} E\left(X_{k+1} - X_k \,|\, \mathscr{F}_k\right), \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

と定めれば (A_n) は可予測かつ可積分であり，

$$A_{n+1} - A_n = E\left(X_{k+1} - X_k \,|\, \mathscr{F}_k\right) \geq 0, \quad \text{a.s. } P\ (\forall n \geq 1)$$

より増大過程である．また $M_n := X_n - A_n$ により $(\mathscr{F}_n)$-適合かつ可積分な過程を定めれば，

$$\begin{aligned} E\left(M_{n+1} - M_n \,|\, \mathscr{F}_n\right) &= E\left((X_{n+1} - X_n) - (A_{n+1} - A_n) \,|\, \mathscr{F}_n\right) \\ &= E\left(X_{n+1} - X_n \,|\, \mathscr{F}_n\right) - E\left(E\left(X_{n+1} - X_n \,|\, \mathscr{F}_n\right) \,|\, \mathscr{F}_n\right) = 0, \quad \text{a.s. } P \end{aligned}$$

が成り立つから $\{M_n, \mathscr{F}_n\}$ はマルチンゲールである． ∎

Proposition 4.3 修正

An increasing random sequence A has a predictable modification if and only if it is natural.

証明． A が可予測な修正 $\tilde{A}$ を持つとき，任意の有界マルチンゲール M に対して

$$\tilde{Y}_0 := 0, \quad \tilde{Y}_n := \sum_{k=1}^{n} \tilde{A}_k (M_k - M_{k-1}); \quad n \geq 1$$

は $(\mathscr{F}_n)$-マルチンゲールとなる．このとき $M_n\tilde{A}_n$ と $\sum_{k=1}^{n} M_{k-1}(\tilde{A}_k - \tilde{A}_{k-1})$ は可積分であり

$$0 = E\tilde{Y}_n = E\left[M_n\tilde{A}_n - \sum_{k=1}^{n} M_{k-1}(\tilde{A}_k - \tilde{A}_{k-1})\right] = E(M_n A_n) - E\sum_{k=1}^{n} M_{k-1}(A_k - A_{k-1}), \quad (\forall n \geq 1)$$

が成り立つから A はナチュラルである．逆に A がナチュラルであるとき，有界マルチンゲール M に対して

$$\begin{aligned} 0 &= E\left[M_n A_n - \sum_{k=1}^{n} M_{k-1}(A_k - A_{k-1})\right] \\ &= E\left[A_n(M_n - M_{n-1})\right] - E\left[M_{n-1}A_{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} M_{k-1}(A_k - A_{k-1})\right] \\ &= E\left[A_n(M_n - M_{n-1})\right], \quad (\forall n \geq 1) \end{aligned}$$

が成り立つ．一方で

$$\begin{aligned} E\left[M_{n-1}(A_n - E\left(A_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right))\right] &= E\left[E\left(M_{n-1}(A_n - E\left(A_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right)) \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right)\right] \\ &= E\left[M_{n-1}E\left(A_n - E\left(A_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right) \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right)\right] = 0, \quad (\forall n \geq 1) \end{aligned}$$

及び

$$\begin{aligned} E\left[E\left(A_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right)(M_n - M_{n-1})\right] &= E\left[E\left(E\left(A_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right)(M_n - M_{n-1}) \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right)\right] \\ &= E\left[E\left(A_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right) E\left(M_n - M_{n-1} \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right)\right] = 0, \quad (\forall n \geq 1) \end{aligned}$$

となるから

$$
\begin{aligned}
E\left[M_n(A_n - E\left(A_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right))\right] &= E\left[A_n(M_n - M_{n-1})\right] \\
&\quad + E\left[M_{n-1}(A_n - E\left(A_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right))\right] \\
&\quad - E\left[E\left(A_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right)(M_n - M_{n-1})\right] \\
&= 0, \quad (\forall n \geq 1)
\end{aligned}
$$

が従う．ここで各 $n \geq 1$ に対し，$\mathscr{B}(\mathbb{R})/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測関数 $\mathrm{sgn} = 1\!\!1_{(0,\infty)} - 1\!\!1_{(-\infty,0)}$ を用いて

$$
M_k^{(n)} := \begin{cases} \mathrm{sgn}\left(A_n - E\left(A_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right)\right), & (k \geq n), \\ E\left(\mathrm{sgn}\left(A_n - E\left(A_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right)\right) \,\middle|\, \mathscr{F}_k\right), & (0 \leq k < n) \end{cases}
$$

により有界マルチンゲール $M^{(n)} = \left\{ M_k^{(n)}, \mathscr{F}_k \;;\quad k = 0, 1, \cdots \right\}$ を定めれば,

$$
0 = E\left[M_n^{(n)}(A_n - E\left(A_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right))\right] = E\left|A_n - E\left(A_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right)\right|, \quad (\forall n \geq 1)
$$

が得られ

$$
\tilde{A}_0 := 0, \quad \tilde{A}_n := E\left(A_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}\right); \quad n \geq 1
$$

は A の可予測な修正となる． ∎

第 2 章

Brownian Motion

Lemma for Dynkin system theorem

集合 Ω の部分集合族 $\mathscr{D}$ が教科書本文中の Dynkin 族の定義 (i) と (ii) を満たしているとする．このとき，Dynkin 族の定義 (iii) は，$\mathscr{D}$ が可算直和で閉じていることと同値である．

証明．$\mathscr{D}$ が可算直和について閉じているとする．このとき単調増大列 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ を取り

$$B_1 \coloneqq A_1, \quad B_n \coloneqq A_n \backslash A_{n-1}, \quad (n \geq 2)$$

とおけば，Dynkin 族の定義 (ii) より $B_n \in \mathscr{D}$ $(n \geq 1)$ が満たされ

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathscr{D}$$

が成立する．逆に $\mathscr{D}$ が (iii) を満たしているとして，互いに素な集合列 $(B_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{D}$ を取る．$A^c = \Omega \backslash A$ と Dynkin 族の定義 (i)(ii) より，$A, B \in \mathscr{D}$ が $A \cap B = \emptyset$ を満たしていれば $A^c \cap B^c = A^c - B \in \mathscr{D}$ が成り立ち

$$B_1^c \cap B_2^c \cap \cdots \cap B_n^c = \left(\cdots \left(\left(B_1^c \cap B_2^c \right) \cap B_3^c \right) \cap \cdots \cap B_{n-1}^c \right) \cap B_n^c \in \mathscr{D}, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

が得られる．よって

$$D_n \coloneqq \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega \backslash \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i^c \right), \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

により定める単調増大列 $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ は $\mathscr{D}$ に含まれ

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathscr{D}$$

が成立する． ∎

Dynkin system theorem

Let $\mathscr{C}$ be a collection of subsets of Ω which is closed under pairwise intersection. If $\mathscr{D}$ is a Dynkin system containing $\mathscr{C}$, then $\mathscr{D}$ also contains the σ-field $\sigma(\mathscr{C})$ generated by $\mathscr{C}$.

証明.　$\mathscr{C}$ を含む最小の Dynkin 族を $\delta(\mathscr{C})$ と書き，$\delta(\mathscr{C}) = \sigma(\mathscr{C})$ が成り立つことを示す．

第一段　$\delta(\mathscr{C})$ が交演算について閉であれば $\delta(\mathscr{C})$ は σ-加法族である．実際，

$$A^c = \Omega \backslash A$$

より $\delta(\mathscr{C})$ は補演算で閉じるから，交演算で閉じていれば，$A_n \in \delta(\mathscr{C})$ $(n = 1, 2, \cdots)$ に対し

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_{n-1}^c \cap A_n \in \delta(\mathscr{C})$$

が従い $\sigma(\mathscr{C}) \subset \delta(\mathscr{C}) \subset \mathscr{D}$ が得られる[*1]．

第二段　$\delta(\mathscr{C})$ が交演算について閉じていることを示す．いま，

$$\mathscr{D}_1 := \{\, B \in \delta(\mathscr{C}) \ ; \quad A \cap B \in \delta(\mathscr{C}),\ \forall A \in \mathscr{C} \,\}$$

により定める $\mathscr{D}_1$ は Dynkin 族であり $\mathscr{C}$ を含むから

$$\delta(\mathscr{C}) \subset \mathscr{D}_1$$

が成立する．従って

$$\mathscr{D}_2 := \{\, B \in \delta(\mathscr{C}) \ ; \quad A \cap B \in \delta(\mathscr{C}),\ \forall A \in \delta(\mathscr{C}) \,\}$$

により Dynkin 族 $\mathscr{D}_2$ を定めれば，$\mathscr{C} \subset \mathscr{D}_2$ が満たされ

$$\delta(\mathscr{C}) \subset \mathscr{D}_2$$

が得られる．よって $\delta(\mathscr{C})$ は交演算について閉じている．　■

Problem 1.4

Let $X = \{\, X_t \ ; \quad 0 \leq t < \infty \,\}$ be a stochastic process for which $X_0, X_{t_1} - X_{t_0}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ are independent random variables, for every integer $n \geq 1$ and indices $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty$. Then for any fixed $0 \leq s < t < \infty$, the increment $X_t - X_s$ is independent of $\mathscr{F}_s^X$.

この主張の逆も成立する:

証明.　先ず任意の $s \leq t \leq r$ に対し $\sigma(X_t - X_s) \subset \mathscr{F}_r^X$ が成り立つ．実際，

$$\Phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \ni (x, y) \longmapsto x - y$$

の連続性と $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) = \mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ より，任意の $E \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$(X_t - X_s)^{-1}(E) = \left\{ (X_t, X_s) \in \Phi^{-1}(E) \right\} \in \sigma(X_s, X_t) \subset \mathscr{F}_r^X \tag{2.1}$$

が満たされる．よって任意に $A_0 \in \sigma(X_0)$, $A_i \in \sigma(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})$ を取れば，$X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ が $\mathscr{F}_{t_{n-1}}^X$ と独立であるから

$$\mathrm{P}(A_0 \cap A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathrm{P}(A_0 \cap A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})\, \mathrm{P}(A_n)$$

[*1] σ-加法族は Dynkin 族であるから，$\delta(\mathscr{C}) \subset \sigma(\mathscr{C})$ が成り立ち $\sigma(\mathscr{C}) = \delta(\mathscr{C})$ となる．

が成立する．帰納的に

$$\mathrm{P}(A_0 \cap A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathrm{P}(A_0)\,\mathrm{P}(A_1)\cdots\mathrm{P}(A_n)$$

が従い $X_0, X_{t_1} - X_{t_0}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ の独立性を得る． ∎

証明 (Problem 1.4).

第一段　Dynkin 族を次で定める:

$$\mathscr{D} := \{\, A \in \mathscr{F} \;;\quad \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B),\ \forall B \in \sigma(X_t - X_s) \,\}.$$

いま，任意に $0 = s_0 < \cdots < s_n = s$ を取り固定し

$$\mathscr{A}_{s_0,\cdots,s_n} := \left\{ \bigcap_{i=0}^{n} A_i \;;\quad A_0 \in \sigma(X_0),\ A_i \in \sigma(X_{s_i} - X_{s_j}),\ i = 1, \cdots, n \right\}$$

により乗法族を定めれば，仮定より $\sigma(X_{s_i} - X_{s_{i-1}})$ と $\sigma(X_t - X_s)$ が独立であるから

$$\mathscr{A}_{s_0,\cdots,s_n} \subset \mathscr{D}$$

が成立し，Dynkin 族定理により

$$\sigma(X_{s_0}, X_{s_1} - X_{s_0}, \cdots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}}) = \sigma\left[\mathscr{A}_{s_0,\cdots,s_n}\right] \subset \mathscr{D} \tag{2.2}$$

が従う．

第二段　$\sigma(X_{s_0}, X_{s_1} - X_{s_0}, \cdots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}})$ の全体が $\mathscr{F}_s^X$ を生成することを示す．先ず，(2.1) より

$$\bigcup_{\substack{n \geq 1 \\ s_0 < \cdots < s_n}} \sigma(X_{s_0}, X_{s_1} - X_{s_0}, \cdots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}}) \subset \mathscr{F}_s^X \tag{2.3}$$

が成立する．一方で，任意の $X_r^{-1}(E)$ $(\forall E \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d),\ 0 < r \leq s)$ について，

$$\Psi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \ni (x, y) \longmapsto x + y$$

で定める連続写像を用いれば

$$X_r^{-1}(E) = (X_r - X_0 + X_0)^{-1}(E) = \left\{ (X_r - X_0, X_0) \in \Psi^{-1}(E) \right\}$$

となり，$X_r^{-1}(E) \in \sigma(X_0, X_r - X_0)$ が満たされ

$$\sigma(X_r) \subset \sigma(X_0, X_r - X_0) \subset \sigma(X_0, X_r - X_0, X_s - X_r) \tag{2.4}$$

が出る．$\sigma(X_0) \subset \sigma(X_0, X_s - X_0)$ も成り立ち

$$\bigcup_{0 \leq r \leq s} \sigma(X_r) \subset \bigcup_{\substack{n \geq 1 \\ s_0 < \cdots < s_n}} \sigma(X_{s_0}, X_{s_1} - X_{s_0}, \cdots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}})$$

が従うから，(2.3) と併せて

$$\mathscr{F}_s^X = \sigma\left[\bigcup_{\substack{n \geq 1 \\ s_0 < \cdots < s_n}} \sigma(X_{s_0}, X_{s_1} - X_{s_0}, \cdots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}}) \right] \tag{2.5}$$

が得られる．

第三段　任意の $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = s$ に対し，(2.1) と (2.4) より

$$\sigma(X_{s_0}, X_{s_1} - X_{s_0}, \cdots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}}) = \sigma(X_{s_0}, X_{s_1}, \cdots, X_{s_n}) \tag{2.6}$$

が成り立つ．

第四段　二つの節点 $0 = s_0 < \cdots < s_n = s$ と $0 = r_0 < \cdots < r_m = s$ の合併を $0 = u_0 < \cdots < u_k = s$ と書けば

$$\sigma(X_{s_0}, \cdots, X_{s_n}) \cup \sigma(X_{r_0}, \cdots, X_{r_m}) \subset \sigma(X_{u_0}, \cdots, X_{u_k})$$

が成り立つから

$$\bigcup_{\substack{n \geq 1 \\ s_0 < \cdots < s_n}} \sigma(X_{s_0}, X_{s_1}, \cdots, X_{s_n})$$

は交演算で閉じている．従って (2.2)，(2.5)，(2.6) 及び Dynkin 族定理により

$$\mathscr{F}_s^X = \sigma\left[\bigcup_{\substack{n \geq 1 \\ s_0 < \cdots < s_n}} \sigma(X_{s_0}, X_{s_1} - X_{s_0}, \cdots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}})\right] = \sigma\left[\bigcup_{\substack{n \geq 1 \\ s_0 < \cdots < s_n}} \sigma(X_{s_0}, X_{s_1}, \cdots, X_{s_n})\right] \subset \mathscr{D}$$

が従い定理の主張を得る． ∎

2.1 The Consistency Theorem

Karatzas-Shreve より Bogachev の Measure Theory に載っている Kolmogorov の拡張定理の方が洗練された簡潔な証明になっているので頭に入りやすい．

定義 2.1.1 (K-正則).　S を位相空間とし，P を $(S, \mathscr{B}(S))$ 上の確率測度とする．$A \in \mathscr{B}(S)$ が P に関して K-正則であるとは，任意の $\epsilon > 0$ に対し或るコンパクト集合 $K \subset A$ が存在して

$$P(A - K) < \epsilon$$

が満たされることをいう．任意の $A \in \mathscr{B}(S)$ が P に関して K-正則であるとき，P は K-正則であるという．

完備可分距離空間上の Borel 確率測度の正則性

(S, d) を完備可分距離空間とするとき，$(S, \mathscr{B}(S))$ 上の任意の Borel 確率測度 P は次の意味で正則である:

$$P(A) = \inf\{\, P(G)\ ;\quad A \subset G,\ G \text{ は開集合}\,\} = \sup\{\, P(K)\ ;\quad K \subset A,\ K \text{ はコンパクト}\,\}, \quad (\forall A \in \mathscr{B}(S)).$$

証明.

第一段　S が P に関して K-正則であることを示す．S の可分性により稠密な部分集合 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する．

$$B_n^k := \left\{\, x \in S\ ;\quad d(x, x_n) \leq \frac{1}{k} \,\right\}, \quad (n, k = 1, 2, \cdots)$$

とおけば，任意の k に対して

$$P\left(S - \bigcup_{n=1}^{N} B_n^k\right) \longrightarrow 0, \quad (N \longrightarrow \infty)$$

が満たされる．いま，任意に $\epsilon > 0$ を取れば各 k に対し或る $N_k \in \mathbb{N}$ が存在して

$$P\left(S - \bigcup_{n=1}^{N_k} B_n^k\right) < \frac{\epsilon}{2^{k+1}}$$

が成立し，

$$K := \bigcap_{k=1}^{\infty} \left[\bigcup_{n=1}^{N_k} B_n^k\right]$$

により K を定めれば，K は閉集合の積であるから閉，すなわち完備である．また

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{N_k} B_n^k, \quad (\forall k = 1, 2, \cdots)$$

より K は全有界部分集合である．K は相対距離に関して完備かつ全有界であるから相対位相に関してコンパクトであり，従って S のコンパクト部分集合である．そして次が成立する:

$$P(S - K) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\left[S - \bigcup_{n=1}^{N_k} B_n^k\right]\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P\left(S - \bigcup_{n=1}^{N_k} B_n^k\right) < \epsilon.$$

第二段　任意の $A \in \mathscr{B}(S)$ と $\epsilon > 0$ に対して，或る閉集合 F 及び開集合 G が存在して

$$F \subset A \subset G, \quad P(G - F) < \epsilon$$

を満たすことを示す．

$$\mathscr{B} := \{\, A \in \mathscr{B}(S) \;;\quad \text{任意の } \epsilon \text{ に対し上式を満たす開集合と閉集合が存在する．} \}$$

とおけば，$\mathscr{B}$ は $\mathscr{O}(S)$ を含む σ-加法族である．実際，任意の開集合 $G \neq \emptyset$ に対し

$$F_n := \left\{\, x \in S \;;\quad d(x, G^c) \geq \frac{1}{n} \right\}, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

により閉集合系 $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ を定めれば $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = G$ が成り立つから

$$\mathscr{O}(S) \subset \mathscr{B}$$

が従う．また前段の結果より $S \in \mathscr{B}$ となり，かつ

$$F \subset A \subset G \quad \Rightarrow \quad G^c \subset A^c \subset F^c$$

より $\mathscr{B}$ は補演算で閉じている．更に $A_n \in \mathscr{B}$, $(n = 1, 2, \cdots)$ を取れば，任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$F_n \subset A_n \subset G_n, \quad P(G_n - F_n) < \frac{\epsilon}{2^{n+1}}$$

を満たす閉集合 F_n と開集合 G_n が存在し，

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n - \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \leq P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n - F_n)\right) < \epsilon$$

が成り立つから十分大きな $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n - \bigcup_{n=1}^{N} F_n\right) < \epsilon$$

となる．$\bigcup_{n=1}^{N} F_n$ は閉集合であり $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ は開集合であるから $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{B}$ が従う．

第三段　任意の $A \in \mathscr{B}(S)$ と $\epsilon > 0$ に対し，或る閉集合 F と開集合 G 及びコンパクト集合 K が存在して

$$F \subset A \subset G, \quad P(G - F) < \frac{\epsilon}{2}, \quad P(S - K) < \frac{\epsilon}{2}$$

を満たす．特に $F \cap K$ はコンパクトであり，このとき $F \cap K \subset A \subset G$ かつ

$$P(G - F \cap K) \leq P(G - F) + P(G - K) \leq P(G - F) + P(S - K) < \epsilon$$

が成立する． ∎

定義 2.1.2 (コンパクトクラス).　X を空でない集合，$\mathcal{K}$ をその部分集合族とする．任意の $\{K_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{K}$ について，$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$ なら $\bigcap_{n=1}^{N} K_n = \emptyset$ を満たす $N \geq 1$ が存在するとき，$\mathcal{K}$ をコンパクトクラスという．

Hausdorff 空間のコンパクトクラス

$\emptyset \neq S$ を Hausdorff 空間とすれば，S のコンパクト部分集合の全体はコンパクトクラスとなる．

証明.　$(K_n)_{n=1}^{\infty}$ をコンパクト部分集合の族とする．$\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i = \emptyset$ と仮定するとき，$K_1 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n^c = S$ より

$$K_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} (K_n^c \cap K_1)$$

が成立する．Hausdorff 空間においてコンパクト部分集合は閉であるから $K_n^c \cap K_1$ は K_1 の開集合であり，K_1 のコンパクト性より或る $N \geq 1$ が存在して

$$K_1 = \bigcup_{n=1}^{N} (K_n^c \cap K_1) = K_1 \cap \left(\bigcap_{n=1}^{N} K_n\right)^c$$

が満たされ $\bigcap_{n=1}^{N} K_n = \emptyset$ が従う． ∎

T を空でない集合とし，任意の $t \in T$ に対して可測空間 $(\Omega_t, \mathscr{B}_t)$ が定まっているする．このとき任意の空でない有限部分集合 $\Lambda \subset T$ に対して

$$\Omega_\Lambda := \prod_{t \in \Lambda} \Omega_t, \quad \mathscr{B}_\Lambda := \bigotimes_{t \in \Lambda} \mathscr{B}_t$$

により可測空間 $(\Omega_\Lambda, \mathscr{B}_\Lambda)$ を定める．ただし $\Lambda = \{t\}$ の場合は $\Omega_{\{t\}} = \Omega_t$, $\mathscr{B}_{\{t\}} = \mathscr{B}_t$ とする．また

$$\Omega := \prod_{t \in T} \Omega_t, \quad \mathscr{B}_\Lambda := \bigotimes_{t \in T} \mathscr{B}_t$$

とおく．任意の部分集合 $\Lambda \subset \Lambda'$ に対し，$\Omega_{\Lambda'}$ から Ω_Λ への射影を $\pi_{\Lambda',\Lambda}$ と書き，特に $\pi_{T,\Lambda}$ を π_Λ と書く．

Kolmogorov の拡張定理

任意の有限部分集合 $\Lambda \subset T$ について，$(\Omega_\Lambda, \mathscr{B}_\Lambda)$ 上に確率測度 P_Λ が定まっていて，確率測度の族 $(P_\Lambda)_{\Lambda \subset T:\text{finite}}$ が次の整合性条件を満たしていると仮定する:

$$P_{\Lambda'} \circ \pi_{\Lambda',\Lambda}^{-1} = P_\Lambda, \quad (\Lambda \subset \Lambda').$$

このとき，任意の $t \in T$ に対し近似的コンパクトクラス $\mathcal{K}_t \subset \mathscr{B}_t$ が存在するなら，$(\Omega, \mathscr{B})$ 上に次を満たす確率測度 P がただ一つ存在する:

$$P \circ \pi_\Lambda^{-1} = P_\Lambda, \quad (\forall \Lambda : \text{有限}).$$

証明.

第一段　$\mathscr{B}$ を生成する加法族を

$$\mathscr{R} := \left\{ \pi_\Lambda^{-1}(B) \ ; \quad B \in \mathscr{B}_\Lambda,\ \Lambda \subset T : \text{有限集合} \right\}$$

とおき，$\mathscr{R}$ 上の有限加法的測度 μ を

$$\mu\left(\pi_\Lambda^{-1}(B)\right) := P_\Lambda(B), \quad (\forall \pi_\Lambda^{-1}(B) \in \mathscr{R})$$

により定める．実際この μ は well-defined であり加法性を持つ．

第二段　μ が well-defined であることを示す．

$$\pi_\Lambda^{-1}(B) = \pi_{\Lambda'}^{-1}(B')$$

であるとき，$\Lambda'' := \Lambda \cup \Lambda'$ とおけば

$$\pi_{\Lambda''}^{-1}\left(\pi_{\Lambda'',\Lambda}^{-1}(B)\right) = \pi_\Lambda^{-1}(B) = \pi_{\Lambda'}^{-1}(B') = \pi_{\Lambda''}^{-1}\left(\pi_{\Lambda'',\Lambda'}^{-1}(B')\right)$$

が成り立つから $\pi_{\Lambda'',\Lambda}^{-1}(B) = \pi_{\Lambda'',\Lambda'}^{-1}(B')$ が従い (全射の性質)，整合性条件より

$$P_\Lambda(B) = P_{\Lambda''} \circ \pi_{\Lambda'',\Lambda}^{-1}(B) = P_{\Lambda''} \circ \pi_{\Lambda'',\Lambda'}^{-1}(B') = P_{\Lambda'}(B')$$

が満たされ $\mu(\pi_\Lambda^{-1}(B))$ の一意性を得る．

第三段　μ の加法性を示す．

$$\pi_{\Lambda_1}^{-1}(B_1) \cap \pi_{\Lambda_2}^{-1}(B_2) = \emptyset$$

であるとき，$\Lambda_3 := \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ とおけば

$$\emptyset = \pi_{\Lambda_3}^{-1}\left(\pi_{\Lambda_3,\Lambda_1}^{-1}(B_1)\right) \cap \pi_{\Lambda_3}\left(\pi_{\Lambda_3,\Lambda_2}^{-1}(B_2)\right) = \pi_{\Lambda_3}^{-1}\left(\pi_{\Lambda_3,\Lambda_1}^{-1}(B_1) \cap \pi_{\Lambda_3,\Lambda_2}^{-1}(B_2)\right)$$

となるから $\pi_{\Lambda_3,\Lambda_1}^{-1}(B_1) \cap \pi_{\Lambda_3,\Lambda_2}^{-1}(B_2) = \emptyset$ が従い (全射の性質)，

$$\begin{aligned}
\mu\left(\pi_{\Lambda_1}^{-1}(B_1) \cup \pi_{\Lambda_2}^{-1}(B_2)\right) &= \mu\left[\pi_{\Lambda_3}^{-1}\left(\pi_{\Lambda_3,\Lambda_1}^{-1}(B_1)\right) \cup \pi_{\Lambda_3}\left(\pi_{\Lambda_3,\Lambda_2}^{-1}(B_2)\right)\right] \\
&= \mu\left[\pi_{\Lambda_3}^{-1}\left(\pi_{\Lambda_3,\Lambda_1}^{-1}(B_1) \cup \pi_{\Lambda_3,\Lambda_2}^{-1}(B_2)\right)\right] \\
&= P_{\Lambda_3}\left(\pi_{\Lambda_3,\Lambda_1}^{-1}(B_1) \cup \pi_{\Lambda_3,\Lambda_2}^{-1}(B_2)\right) \\
&= P_{\Lambda_3}\left(\pi_{\Lambda_3,\Lambda_1}^{-1}(B_1)\right) + P_{\Lambda_3}\left(\pi_{\Lambda_3,\Lambda_2}^{-1}(B_2)\right) \\
&= \mu\left(\pi_{\Lambda_1}^{-1}(B_1)\right) + \mu\left(\pi_{\Lambda_2}^{-1}(B_2)\right)
\end{aligned}$$

が成立する．

2.2 The Kolmogorov-Čentsov Theorem

Exercise 2.7

The only $\mathscr{B}((\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)})$-measurable set contained in $C[0,\infty)^d$ is the empty set.

証明.

第一段　$\mathscr{B}((\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)}) = \sigma(B_t;\ 0 \leq t < \infty)$ が成り立つことを示す．先ず，任意の $C \in \mathscr{C}$ は

$$
\begin{aligned}
C &= \left\{ \omega \in (\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)} \ ; \quad (\omega(t_1), \cdots, \omega(t_n)) \in A \right\} \\
&= \left\{ \omega \in (\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)} \ ; \quad (B_{t_1}(\omega), \cdots, B_{t_n}(\omega)) \in A \right\}, \quad (A \in \mathscr{B}((\mathbb{R}^d)^n))
\end{aligned}
$$

の形で表されるから $\mathscr{C} \subset \sigma(B_t;\ 0 \leq t < \infty)$ が従い $\mathscr{B}((\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)}) \subset \sigma(B_t;\ 0 \leq t < \infty)$ を得る．逆に

$$
\sigma(B_t) \subset \mathscr{C}, \quad (\forall t \geq 0)
$$

より $\mathscr{B}((\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)}) \supset \sigma(B_t;\ 0 \leq t < \infty)$ も成立し $\mathscr{B}((\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)}) = \sigma(B_t;\ 0 \leq t < \infty)$ が出る．

第二段　高々可算集合 $S = \{t_1, t_2, \cdots\} \subset [0,\infty)$ に対して

$$
\mathcal{E}_S := \left\{ \left\{ \omega \in (\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)} \ ; \quad (\omega(t_1), \omega(t_2), \cdots) \in A \right\} \ ; \quad A \in \mathscr{B}((\mathbb{R}^d)^{\# S}) \right\}
$$

とおけば[*2]，座標過程 B は $(\omega(t_1), \omega(t_2), \cdots) = (B_{t_1}(\omega), B_{t_2}(\omega), \cdots)$ を満たすから

$$
\mathcal{E}_S = \left\{ \{(B_{t_1}, B_{t_2}, \cdots) \in A\} \ ; \quad A \in \mathscr{B}((\mathbb{R}^d)^{\# S}) \right\} =: \mathcal{F}_S^B
$$

が成立する．従って第一章の Lemma3 for Exercise 1.8 と前段の結果より

$$
\begin{aligned}
\mathscr{B}((\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)}) = \sigma(B_t;\ 0 \leq t < \infty) = \mathcal{F}^B_{[0,\infty)} &= \bigcup_{S \subset [0,\infty):\textit{at most countable}} \mathcal{F}_S^B \\
&= \bigcup_{S \subset [0,\infty):\textit{at most countable}} \mathcal{E}_S
\end{aligned}
$$

を得る．すなわち，$\mathscr{B}((\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)})$ の任意の元は $\left\{ \omega \in (\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)} \ ; \quad (\omega(t_1), \omega(t_2), \cdots) \in A \right\}$ の形で表現され，$A \neq \emptyset$ ならば $\left\{ \omega \in (\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)} \ ; \quad (\omega(t_1), \omega(t_2), \cdots) \in A \right\} \not\subset C[0,\infty)^d$ となり主張が従う． ∎

[*2] S が可算無限なら $(\mathbb{R}^d)^{\# S} = \mathbb{R}^\infty$.

Theorem 2.8 の主張は次のように変更するべきである:

Suppose that a process $X = \{ X_t \ ; \quad 0 \le t \le T \}$ on a probability space $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ satisfies the condition

$$E|X_t - X_s|^{\alpha} \le C|t-s|^{1+\beta}, \quad 0 \le s, t \le T,$$

for some positive constants α, β, and C. Then there exists a continuous modification $\tilde{X} = \left\{ \tilde{X}_t \ ; \quad 0 \le t \le T \right\}$ of X, which is locally Hölder-continuous with exponent γ for every $\gamma \in (0, \beta/\alpha)$. More precisely, for every $\gamma \in (0, \beta/\alpha)$,

$$\sup_{\substack{0<|t-s|<h(\omega) \\ s,t \in [0,T]}} \frac{\left|\tilde{X}_t(\omega) - \tilde{X}_s(\omega)\right|}{|t-s|^{\gamma}} \le \frac{2}{1-2^{-\gamma}}, \quad \forall \omega \in \Omega^*,$$

for some $\Omega^* \in \mathscr{F}$ with $P(\Omega^*) = 1$ and positive random variable h, where Ω^* and h depend on γ.

なぜならば，式 (2.8) において P の中身が Ω^* に一致するかどうかわからないためである．可測集合でなければ P で測ることはできない．ただし今の場合は $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ が完備確率空間ならば式 (2.8) の表記で問題ない．

Theorem 2.8 memo

証明中の式 (2.10) 直後の “where $n^*(\omega)$ is a positive, integer-valued random variable” について．

証明． $\mathbb{N} := \{1, 2, \cdots\}$ とおき，$\mathbb{N}$ の冪集合を $2^{\mathbb{N}}$ で表せば，$(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$ は可測空間となる．示せばよいのは n^* の $\mathscr{F}/2^{\mathbb{N}}$-可測性である．ただし，$n^*$ は証明文中において well-defined でないため，明確な意味を持たせる必要がある．

$$A_0 := \Omega, \quad A_n := \left\{ \omega \in \Omega \ ; \quad \max_{1 \le k \le 2^n} \left| X_{k/2^n}(\omega) - X_{(k-1)/2^n}(\omega) \right| \ge 2^{-\gamma n} \right\}, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

とおくとき，Ω^* は

$$\Omega^* := \bigcup_{\ell=1}^{\infty} \bigcap_{n=\ell}^{\infty} A_n^c$$

により定まる集合である．任意の $\omega \in \Omega^*$ に対して或る $\ell \ge 1$ が存在し，

$$\max_{1 \le k \le 2^n} \left| X_{k/2^n}(\omega) - X_{(k-1)/2^n}(\omega) \right| < 2^{-\gamma n}, \quad (\forall n \ge \ell)$$

を満たす．このような ℓ のうち最小なものを $n^*(\omega)$ と定めれば

$$n^{*-1}(\ell) = \left\{ \bigcap_{n=\ell}^{\infty} A_n^c \right\} \cap \left\{ \bigcap_{n=\ell-1}^{\infty} A_n^c \right\}^c, \quad (\ell = 1, 2, \cdots)$$

が成立し n^* の $\mathscr{F}/2^{\mathbb{N}}$-可測性が従う． ∎

確率変数 h について，厳密には

$$h(\omega) := \begin{cases} 2^{-n^*(\omega)}, & (\omega \in \Omega^*), \\ 0, & (\omega \in \Omega \backslash \Omega^*) \end{cases}$$

とおけばよい．

Theorem 2.8 memo

2.3 The Space $C[0,\infty)$, Weak Convergence, and the Wiener Measure

Problem 4.1

Show that ρ defined by (4.1) is a metric on $C[0,\infty)^d$ and, under ρ, $C[0,\infty)^d$ is a complete, separable metric space.

以下，$C[0,\infty)^d$ には ρ により広義一様収束位相を導入する．

連続関数の空間の Borel 集合族

$n = 1,2,\cdots,\ B \in \mathscr{B}((\mathbb{R}^d)^n),\ 0 \leq t_1 < \cdots < t_n$ により

$$C = \left\{ w \in C[0,\infty)^d \ ; \quad (w(t_1),\cdots,w(t_n)) \in B \right\}$$

と表される $C[0,\infty)^d$ の部分集合 C の全体を $\mathscr{C}$ とおく．このとき，$\mathscr{B}(C[0,\infty)^d) = \sigma[\mathscr{C}]$ が成り立つ．

証明.

第一段　$w_0 \in C[0,\infty)^d$ とする．任意に $w \in C[0,\infty)^d$ を取れば，w の連続性により $d(w_0,w)$ の各項について

$$\sup_{t\leq n}|w_0(t)-w(t)| = \sup_{r\in[0,n]\cap\mathbb{Q}} |w_0(r)-w(r)| \quad (n=1,2,\cdots)$$

と表現できる．いま，任意に実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ を取れば

$$\left\{ w \in C[0,\infty)^d \ ; \quad \sup_{r\in[0,n]\cap\mathbb{Q}} |w_0(r)-w(r)| \leq \alpha \right\} = \bigcap_{r\in[0,n]\cap\mathbb{Q}} \left\{ w \in C[0,\infty)^d \ ; \quad |w_0(r)-w(r)| \leq \alpha \right\}$$

が成立し，右辺の各集合は $\mathscr{C}$ に属するから 左辺 $\in \sigma[\mathscr{C}]$ となる．従って

$$\psi_n : C[0,\infty)^d \ni w \longmapsto \sup_{r\in[0,n]\cap\mathbb{Q}} |w_0(r)-w(r)| \in \mathbb{R}, \quad (n=1,2,\cdots)$$

で定める ψ_n は可測 $\sigma[\mathscr{C}]/\mathscr{B}(\mathbb{R})$ である．$x \longmapsto x \wedge 1$ の連続性より $\psi_n \wedge 1$ も $\sigma[\mathscr{C}]/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測性を持ち，

$$d(w_0,w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}(\psi_n(w)\wedge 1)$$

により $C[0,\infty)^d \ni w \longmapsto d(w_0,w) \in \mathbb{R}$ の $\sigma[\mathscr{C}]/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測性が出るから，任意の $\epsilon > 0$ に対する球について

$$\left\{ w \in C[0,\infty)^d \ ; \quad d(w_0,w) < \epsilon \right\} \in \sigma[\mathscr{C}]$$

が成り立つ．$C[0,\infty)^d$ は第二可算公理を満たし, 可算基底は上式の形の球で構成されるから, $\mathscr{O}(C[0,\infty)^d) \subset \sigma[\mathscr{C}]$ が従い $\mathscr{B}(C[0,\infty)^d) \subset \sigma[\mathscr{C}]$ を得る．次に逆の包含関係を示す．いま，任意に $n \in \mathbb{Z}_+$ と $t_1 < \cdots < t_n$ を選んで

$$\phi : C[0,\infty)^d \ni w \longmapsto (w(t_1),\cdots,w(t_n)) \in (\mathbb{R}^d)^n$$

により定める写像は連続である．実際，w_0 での連続性を考えると，任意の $\epsilon > 0$ に対して $t_n \leq N$ を満たす $N \in \mathbb{N}$ を取れば，$d(w_0,w) < \epsilon/(n2^N)$ ならば $\sum_{i=1}^n |w_0(t_i)-w(t_i)| < \epsilon$ が成り立つ．よって ϕ は w_0 で連続であり (各点連続)

$$\mathscr{B}((\mathbb{R}^d)^n) \subset \left\{ A \in \mathscr{B}((\mathbb{R}^d)^n) \ ; \quad \phi^{-1}(A) \in \mathscr{B}(C[0,\infty)^d) \right\}$$

が出る．任意の $C \in \mathscr{C}$ は, $n \in \mathbb{N}$ と時点 $t_1 < \cdots < t_n$ によって決まる写像 ϕ によって $C = \phi^{-1}(B)$ $(\exists B \in \mathscr{B}((\mathbb{R}^d)^n))$ と表現できるから，$\mathscr{C} \subset \mathscr{B}(C[0,\infty)^d)$ が成り立ち $\sigma[\mathscr{C}] \subset \mathscr{B}(C[0,\infty)^d)$ が得られる．

第二段　$t \geq 0$ とする．$C[0,\infty)^d$ の位相を $\mathscr{O}(C[0,\infty)^d)$ と書けば

$$\varphi_t^{-1}\left(\mathscr{B}(C[0,\infty)^d)\right) = \sigma\left[\left\{\ \varphi_t^{-1}(O)\ ;\quad O \in \mathscr{O}(C[0,\infty)^d)\ \right\}\right]$$

が成り立つ．任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ と $r \geq 0$ に対して

$$\begin{aligned}&\left\{\ w \in C[0,\infty)^d\ ;\quad |w_0(r) - (\varphi_t w)(r)| \leq \alpha\ \right\} \\ &= \begin{cases}\left\{\ w \in C[0,\infty)^d\ ;\quad |w_0(r) - (\varphi_t w)(r)| \leq \alpha\ \right\}, & (r \leq t), \\ \left\{\ w \in C[0,\infty)^d\ ;\quad |w_0(r) - (\varphi_t w)(t)| \leq \alpha\ \right\}, & (r > t),\end{cases} \quad \in \mathscr{C}_t\end{aligned}$$

となるから

$$\psi_n^t : C[0,\infty)^d \ni w \longmapsto \sup_{r \in [0,n] \cap \mathbb{Q}} |w_0(r) - (\varphi_t w)(r)| \in \mathbb{R}, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

で定める ψ_n^t は可測 $\sigma[\mathscr{C}_t]/\mathscr{B}(\mathbb{R})$ である．$x \longmapsto x \wedge 1$ の連続性より $\psi_n^t \wedge 1$ も $\sigma[\mathscr{C}_t]/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測性を持ち，

$$d(w_0, \varphi_t w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(\psi_n^t(w) \wedge 1\right)$$

により $C[0,\infty)^d \ni w \longmapsto d(w_0, \varphi_t w) \in \mathbb{R}$ の $\sigma[\mathscr{C}_t]/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測性が出るから，任意の $\epsilon > 0$ に対する球について

$$\left\{\ w \in C[0,\infty)^d\ ;\quad d(w_0, \varphi_t w) < \epsilon\ \right\} \in \sigma[\mathscr{C}_t]$$

が成り立つ．特に

$$\varphi_t^{-1}\left(\left\{\ w \in C[0,\infty)^d\ ;\quad d(w_0, w) < \epsilon\ \right\}\right) = \left\{\ w \in C[0,\infty)^d\ ;\quad d(w_0, \varphi_t w) < \epsilon\ \right\}$$

が満たされ，$C[0,\infty)^d$ の第二可算性より

$$\varphi_t^{-1}(O) \in \sigma[\mathscr{C}_t], \quad (\forall O \in \mathscr{O}(C[0,\infty)^d))$$

が従う．ゆえに $\varphi_t^{-1}\left(\mathscr{B}(C[0,\infty)^d)\right) \subset \sigma[\mathscr{C}_t]$ となる． ∎

連続関数の空間に値を取る確率変数

$\omega \in \Omega$ に $\mathbb{R}^d$ 値連続確率過程 X のパスを対応させる写像

$$X_\bullet : \Omega \ni \omega \longmapsto (t \longmapsto X_t(\omega)), \quad (t \geq 0)$$

は可測 $\mathcal{F}/\mathscr{B}(C[0,\infty)^d)$ である．

証明．　任意に $C \in \mathscr{C}$ を取れば $C = \left\{\ w \in C[0,\infty)^d\ ;\quad (w(t_1), \cdots, w(t_n)) \in B\ \right\}$, $(B \in \mathscr{B}((\mathbb{R}^d)^n))$ と表されるから

$$\{\ \omega \in \Omega\ ;\quad X_\bullet(\omega) \in C\ \} = \{\ \omega \in \Omega\ ;\quad (X_{t_1}(\omega), \cdots, X_{t_n}(\omega)) \in B\ \}$$

が成り立つ．右辺は $\mathcal{F}$ に属するから

$$\mathscr{C} \subset \left\{\ C \in \sigma[\mathscr{C}]\ ;\quad (X_\bullet)^{-1}(C) \in \mathcal{F}\ \right\}$$

が従い，右辺は σ 加法族であるから $X_\bullet$ の $\mathcal{F}/\sigma[\mathscr{C}]$-可測性，つまり $\mathcal{F}/\mathscr{B}(C[0,\infty)^d)$-可測性が出る． ∎

2.4　Weak Convergence

なぜ弱収束と呼ぶか．いま，X を局所コンパクト Hausdorff 空間として

$$C_0(X) \coloneqq \left\{ f : X \longrightarrow \mathbb{C}\ ;\quad \text{連続かつ，任意の } \epsilon > 0 \text{ に対し } \overline{\{\, x \in X\ ;\quad |f(x)| \geq \epsilon \,\}} \text{ がコンパクト} \right\}$$

とおく．この $C_0(X)$ はノルム $\|f\|_{C_0(X)} \coloneqq \sup_{x \in X} |f(x)|$ により複素 Banach 空間となる．また $(X, \mathscr{B}(X))$ 上の複素測度 μ について，その総変動 $|\mu|$ が正則測度であるとき μ は正則であるという．X 上の正則複素測度の全体を $RM(X)$ と書き，総変動ノルム $\|\mu\|_{RM(X)} \coloneqq |\mu|(X)$ によりノルム位相を導入する．任意の複素測度 μ に対し

$$\Phi_\mu(f) \coloneqq \int_X f(x)\,\mu(dx)$$

により $C_0(X)$ 上の有界線型汎関数 Φ_μ が定まる．

定理 2.4.1 (Riesz の表現定理).　X を局所コンパクト Hausdorff 空間とする．$C_0(X)$ に $\|\cdot\|_{C_0(X)}$ で位相を入れるとき，共役空間 $C_0(X)^*$ と書く．このとき $C_0(X)^*$ と $RM(X)$ は

$$\Phi : RM(X) \ni \mu \longrightarrow \Phi_\mu \in C_0(X)$$

で定める対応関係 Φ により Banach 空間として等長同型となる．

$C_0(X)^*$ に汎弱位相を入れるとき，汎関数列 $\left(\Phi_{\mu_n}\right)_{n=1}^\infty$ が Φ_μ に汎弱収束することと

$$\Phi_{\mu_n}(f) \longrightarrow \Phi_\mu(f)\ (n \longrightarrow \infty), \quad (\forall f \in C_0(X))$$

は同値になる．$C_0(X)^*$ の汎弱位相の Φ による逆像位相を $RM(X)$ の弱位相と定めれば，Φ は弱位相に関して位相同型となる．このとき，$(\mu_n)_{n=1}^\infty$ が μ に弱収束することは $\left(\Phi_{\mu_n}\right)_{n=1}^\infty$ が Φ_μ に汎弱収束することと同値になり，すなわち

$$\int_X f(x)\,\mu_n(dx) \longrightarrow \int_X f(x)\,\mu(dx)\ (n \longrightarrow \infty), \quad (\forall f \in C_0(X))$$

と同値になる．X 上の正則な確率測度の全体を $\mathscr{P}(X)$ と書けば $\mathscr{P}(X) \subset RM(X)$ となり，正則確率測度の列 $(P_n)_{n=1}^\infty$ が $P \in \mathscr{P}(X)$ に弱収束することは

$$\int_X f(x)\,P_n(dx) \longrightarrow \int_X f(x)\,P(dx)\ (n \longrightarrow \infty), \quad (\forall f \in C_0(X))$$

と同値になる．

Definition 4.3

It follows, in particular, that the weak limit P is a probability measure, and that it is unique.

証明.　$f \equiv 1$ として

$$P(S) = \lim_{n \to \infty} P_n(S) = 1$$

が従うから P は確率測度である．また任意の有界連続関数 $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ に対し

$$\int_S f\,dP = \int_S f\,dQ$$

が成り立つとき，任意の閉集合 $A \subset S$ に対して

$$f_k(s) := \frac{1}{1+kd(s,A)}, \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

と定めれば $\lim_{k\to\infty} f_k = \mathbb{1}_A$(各点収束) が満たされるから，Lebesgue の収束定理より

$$P(A) = \lim_{k\to\infty} \int_S f_k \, dP = \lim_{k\to\infty} \int_S f_k \, dQ = Q(A)$$

となり，測度の一致の定理より $P = Q$ が得られる．すなわち弱極限は一意である． ∎

lemma: change of variables for expectation

$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間，$(S, \mathscr{S})$ を可測空間とする．このとき任意の有界 $\mathscr{S}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測関数 f と $\mathscr{F}/\mathscr{S}$-可測写像 X に対して

$$\int_\Omega f(X) \, dP = \int_S f \, dPX^{-1}$$

が成立する．

証明． 任意の $A \in \mathscr{S}$ に対して

$$\int_S \mathbb{1}_A dPX^{-1} = P(X^{-1}(A)) = \int_\Omega \mathbb{1}_{X^{-1}(A)} \, dP = \int_\Omega \mathbb{1}_A(X) \, dP$$

が成り立つから，任意の $\mathscr{S}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測単関数 g に対し

$$\int_\Omega g(X) \, dP = \int_S g \, dPX^{-1}$$

となる．f が有界なら一様有界な単関数で近似できるので，Lebesgue の収束定理より

$$\int_\Omega f(X) \, dP = \int_S f \, dPX^{-1}$$

が出る． ∎

Definition 4.4

Equivalently, $X_n \xrightarrow{\mathscr{D}} X$ if and only if

$$\lim_{n\to\infty} E_n f(X_n) = Ef(X)$$

for every bounded, continuous real-valued function f on S, where E_n and E denote expectations with respect to P_n and P, respectively.

証明． 任意の有界実連続関数 $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ に対し

$$\int_\Omega f(X_n) \, dP_n = \int_S f \, dP_n X_n^{-1}, \quad \int_\Omega f(X) \, dP = \int_S f \, dPX^{-1},$$

が成り立つから，$P_n X_n^{-1}$ が PX^{-1} に弱収束することと $\lim_{n\to\infty} E_n f(X_n) = Ef(X)$ は同値である． ∎

Problem 4.5

Suppose $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a sequence of random variables taking values in a metric space (S_1, ρ_1) and converging in distribution to X. Suppose (S_2, ρ_2) is another metric space, and $\varphi : S_1 \longrightarrow S_2$ is continuous. Show that $Y_n := \varphi(X_n)$ converges in distribution to $Y := \varphi(X)$.

証明.　任意の有界実連続関数 $f : S_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ に対し $f \circ \varphi$ は S_1 上の有界実連続関数であるから

$$\begin{aligned} \int_{S_2} f \, dPY_n^{-1} &= \int_{\Omega} f(Y_n) \, dP = \int_{\Omega} f(\varphi(X_n)) \, dP = \int_{S_1} f \circ \varphi \, dPX_n^{-1} \\ &\longrightarrow \int_{S_1} f \circ \varphi \, dPX^{-1} = \int_{S_2} f \, dPY^{-1} \quad (n \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

が成立する. ∎

付録 A

A.1　測度

A.1.1　Lebesgue 拡大

定義 A.1.1 (Lebesgue 拡大).　$(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とするとき，

$$\overline{\mathcal{B}} := \{\, B \subset X \;;\quad \exists A_1, A_2 \in \mathcal{B},\ \text{s.t.}\quad A_1 \subset B \subset A_2,\ \mu(A_2 - A_1) = 0 \,\},$$
$$\overline{\mu}(B) := \mu(A_1) \quad (\forall B \in \overline{\mathcal{B}},\ A_1 \text{ as in above})$$

により得られる完備測度空間 $\left(X, \overline{\mathcal{B}}, \overline{\mu}\right)$ を $(X, \mathcal{B}, \mu)$ の Lebesgue 拡大と呼ぶ.

$\overline{\mu}$ は well-defined である．実際，$B \subset X$ に対し $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ が

$$A_1 \subset B \subset A_2, \quad \mu(A_2 - A_1) = 0,$$
$$B_1 \subset B \subset B_2, \quad \mu(B_2 - B_1) = 0,$$

を満たすとき，$A_1 \cup B_1 \subset B \subset A_2 \cap B_2$ となるが，

$$(A_2 \cap B_2) \cap (A_1 \cup B_1)^c \subset A_2 \backslash A_1$$

より $\mu(A_1 \cup B_1) = \mu(A_2 \cap B_2)$ が従い

$$\mu(A_2) = \mu(A_1) \le \mu(A_1 \cup B_1) = \mu(A_2 \cap B_2) \le \mu(B_2),$$
$$\mu(B_2) = \mu(B_1) \le \mu(A_1 \cup B_1) = \mu(A_2 \cap B_2) \le \mu(A_2)$$

が成り立つから $\mu(A_2) = \mu(B_2)$ が出る．また，任意の $B \subset X$ について

$$\overline{\mathcal{B}} = \{\, B \subset X \;;\quad \exists A, N \in \mathcal{B},\ \text{s.t.}\quad \mu(N) = 0,\ B \cap A^c, A \cap B^c \subset N \,\} \tag{A.1}$$

が成立する．実際，$B \in \overline{\mathcal{B}}$ なら $A_1 \subset B \subset A_2$ かつ $\mu(A_2 - A_1) = 0$ を満たす $A_1, A_2 \in \mathcal{B}$ が存在するから

$$A = A_2, \quad N = A_2 - A_1$$

として $(\subset)$ を得る．逆に右辺を満たす A, N が存在するとき，

$$A \cap N^c \subset A \cap B \subset B \subset A \cup (A^c \cap B) \subset A \cup N$$

より $A_1 = A \cap N^c,\ A_2 = A \cup N$ として $(\supset)$ を得る．

補題 A.1.2 (可分値写像による可測写像の近似). $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間，(S, d) を可分距離空間とする．このとき，任意の $\mathcal{B}/\mathscr{B}(S)$-可測写像 f に対し次を満たす可分値 $\mathcal{B}/\mathscr{B}(S)$-可測写像列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ が存在する:

$$\sup_{x \in X} d\left(f_n(x), f(x)\right) \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty). \tag{A.2}$$

証明. S の可算稠密な部分集合を $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ とする．任意の $n \geq 1$ に対し

$$B_n^k \coloneqq \left\{ s \in S \ ; \quad d(s, a_k) < \frac{1}{n} \right\}, \quad A_n^k \coloneqq f^{-1}\left(B_n^k\right); \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

とおけば，

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_n^k = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}\left(B_n^k\right) = f^{-1}(S)$$

より $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_n^k$ が成り立つ．ここで

$$\tilde{A}_n^1 \coloneqq A_n^1, \quad \tilde{A}_n^k \coloneqq A_n^k \Bigg\backslash \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_n^i \right); \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

として

$$f_n(x) \coloneqq a_k, \quad (x \in \tilde{A}_n^k,\ k = 1, 2, \cdots)$$

により $\mathcal{B}/\mathscr{B}(S)$-可測写像列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ を定めれば，

$$d\left(f_n(x), f(x)\right) < \frac{1}{n}, \quad (\forall x \in X)$$

が満たされ (A.2) が従う． ∎

補題 A.1.3 (距離空間値の可測写像列の各点極限は可測). (S, d) を距離空間，$(X, \mathcal{B})$ を可測空間とする．$\mathcal{B}/\mathscr{B}(S)$-可測写像列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ が各点収束すれば，$f \coloneqq \lim_{n \to \infty} f_n$ で定める f もまた可測 $\mathcal{B}/\mathscr{B}(S)$ となる．

証明. S の任意の閉集合 A に対し，閉集合の系 $(A_m)_{m=1}^{\infty}$ を次で定める:

$$A_m \coloneqq \left\{ y \in S \ ; \quad d(y, A) \leq \frac{1}{m} \right\}, \quad (m = 1, 2, \cdots).$$

$f(x) \in A$ なら $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ が満たされるから，任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し或る $N = N(x, m) \in \mathbb{N}$ が存在して

$$d\left(f_n(x), A\right) \leq d\left(f_n(x), f(x)\right) < \frac{1}{m} \quad (\forall n \geq N)$$

が成り立ち

$$f^{-1}(A) \subset \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} f_n^{-1}(A_m) \tag{A.3}$$

が従う．一方 $f(x) \notin A$ なら，$0 < \epsilon < d(f(x), A)$ を満たす ϵ に対し或る $N = N(x, \epsilon) \in \mathbb{N}$ が存在して

$$d\left(f_n(x), f(x)\right) < \epsilon \quad (\forall n \geq N)$$

が成り立つから，$1/m < d(f(x), A) - \epsilon$ を満たす $m \in \mathbb{N}$ を取れば

$$\frac{1}{m} < d(f(x), A) - d(f(x), f_n(x)) \leq d(f_n(x), A) \quad (\forall n \geq N)$$

が従い

$$f^{-1}(A^c) \subset \bigcup_{m \geq 1} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} f_n^{-1}(A_m^c) \subset \bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq N} f_n^{-1}(A_m^c)$$

となる．(A.3) と併せれば

$$f^{-1}(A) = \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} f_n^{-1}(A_m)$$

が得られ，S の閉集合は f により $\mathcal{B}$ の元に引き戻されるから f の $\mathcal{B}/\mathscr{B}(S)$-可測性が出る． ■

定理 A.1.4 (拡大前後の可測性). $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間，その Lebesgue 拡大を $\left(X, \overline{\mathcal{B}}, \overline{\mu}\right)$ と書き，(S, d) を可分距離空間とする．このとき，任意の写像 $f : X \longrightarrow S$ に対し次は同値である:

(a) 或る $\mathcal{B}/\mathscr{B}(S)$-可測写像 g が存在して $f = g \quad \mu$-a.e. を満たす．

(b) f は $\overline{\mathcal{B}}/\mathscr{B}(S)$-可測である．

証明.

第一段 (a) が成立しているとき，$\{f \neq g\} \subset N$ を満たす μ-零集合 $N \in \mathcal{B}$ が存在して

$$f^{-1}(E) \cap \left(g^{-1}(E)\right)^c \subset N, \quad g^{-1}(E) \cap \left(f^{-1}(E)\right)^c \subset N, \quad (\forall E \in \mathscr{B}(S))$$

が成り立つから，(A.1) より $f^{-1}(E) \in \overline{\mathcal{B}}$ が従い $(a) \Rightarrow (b)$ が出る．

第二段 f が $\overline{\mathcal{B}}/\mathscr{B}(S)$-可測のとき，$S$ の可算稠密な部分集合を $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ とすれば，補題 A.1.2 より

$$f_n(x) = a_k, \ (x \in A_n^k, \ k = 1, 2, \cdots); \quad \sum_{k=1}^{\infty} A_n^k = X; \quad d\left(f_n(x), f(x)\right) < \frac{1}{n}, \ (\forall x \in X)$$

を満たす $\overline{\mathcal{B}}/\mathscr{B}(S)$-可測写像列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ と互いに素な集合 $\left\{A_n^k\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \overline{\mathcal{B}}$ が存在する．各 A_n^k に対し

$$E_{1,n}^k \subset A_n^k \subset E_{2,n}^k, \quad \mu\left(E_{2,n}^k - E_{1,n}^k\right) = 0$$

を満たす $E_{1,n}^k, E_{2,n}^k \in \mathcal{B}$ が存在するから，一つ $a_0 \in S$ を選び

$$g_n(x) := \begin{cases} a_k, & (x \in E_{1,n}^k, \ k = 1, 2, \cdots), \\ a_0, & (x \in N_n := X \backslash \sum_{k=1}^{\infty} E_{1,n}^k) \end{cases}$$

で $\mathcal{B}/\mathscr{B}(S)$-可測写像列 $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ を定めて $N := \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ とおけば

$$f_n(x) = g_n(x), \quad (\forall x \in X \backslash N, \ \forall n \geq 1)$$

が成り立つ．このとき $X\backslash N$ 上で $\lim_{n\to\infty} g_n(x)$ は存在し $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ に一致するから，

$$g(x) := \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x), & (x \in X\backslash N), \\ a_0, & (x \in N) \end{cases}$$

により $\mathcal{B}/\mathscr{B}(S)$-可測写像 g を定めれば (a) が満たされる． ∎

補題 A.1.5 (複素数値関数の可測性). $(X, \mathcal{M})$ を可測空間，$f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ とする．このとき，f が $\mathcal{M}/\mathscr{B}(\mathbb{C})$-可測であることと f の実部 u と虚部 v がそれぞれ $\mathcal{M}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測であることは同値である．

証明. $z \in \mathbb{C}$ に対し $x, y \in \mathbb{C}$ の組が唯一つ対応し $z = x + iy$ を満たす．この対応関係により定める写像

$$\varphi : \mathbb{C} \ni z \longmapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

は位相同型である．射影を $p_1 : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \longmapsto x,\ p_2 : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \longmapsto y$ とすれば

$$u = p_1 \circ \varphi \circ f, \quad v = p_2 \circ \varphi \circ f$$

となるから，f が $\mathcal{M}/\mathscr{B}(\mathbb{C})$-可測であるなら p_1, p_2, φ の連続性より

$$u^{-1}(A) = f^{-1} \circ \varphi^{-1} \circ p_1^{-1}(A) \in \mathcal{M}, \quad v^{-1}(A) = f^{-1} \circ \varphi^{-1} \circ p_2^{-1}(A) \in \mathcal{M}, \quad (\forall A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}))$$

が成り立ち u, v の $\mathcal{M}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測性が従う．逆に u, v が $\mathcal{M}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測であるとき，

$$f^{-1}(B) = \{\, x \in X \ ; \quad (u(x), v(x)) \in \varphi(B) \,\} \in \mathcal{M}, \quad (\forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{C}))$$

が成り立ち f の $\mathcal{M}/\mathscr{B}(\mathbb{C})$-可測性が出る． ∎

A.1.2 有限加法的測度の拡張

定理 A.1.6 (測度の一致の定理). $(X, \mathcal{M})$ を可測空間，$\mathcal{A}$ を $\mathcal{M}$ を生成する乗法族とし，$(X, \mathcal{M})$ 上の測度 μ_1, μ_2 が $\mathcal{A}$ 上で一致しているとする．このとき，

$$\mu_1(X_n) < \infty, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$$

を満たす増大列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ が存在すれば $\mu_1 = \mu_2$ が成り立つ．

証明. 任意の $n = 1, 2, \cdots$ に対して

$$\mathscr{D}_n := \{\, B \in \mathcal{M} \ ; \quad \mu_1(B \cap X_n) = \mu_2(B \cap X_n) \,\}$$

とおけば，$\mathscr{D}_n$ は $\mathcal{A}$ を含む Dynkin 族であるから，Dynkin 族定理より

$$\mathscr{D}_n = \mathcal{M}, \quad (\forall n \geq 1)$$

となり

$$\mu_1(B) = \lim_{n\to\infty} \mu_1(B \cap X_n) = \lim_{n\to\infty} \mu_2(B \cap X_n) = \mu_2(B), \quad (\forall B \in \mathcal{M})$$

が従う． ∎

定理 A.1.7 (Kolmogorov-Hopf). $(X, \mathcal{B}, \mu_0)$ を有限加法的測度空間 ($\mathcal{B}$ は有限加法族，μ_0 は有限加法的) とし，

$$\mu^*(A) \coloneqq \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(B_n) \ ; \quad B_n \in \mathcal{B},\ A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right\}, \quad (\forall A \subset X)$$

により X 上に外測度を定め，μ^*-可測集合を $\mathcal{B}^*$ と書く．このとき，

(1) $\sigma[\mathcal{B}] \subset \mathcal{B}^*$ が成り立つ．ここで $\mu' \coloneqq \mu^*|_{\mathcal{B}^*}$, $\mu \coloneqq \mu^*|_{\sigma[\mathcal{B}]}$ とおく．

(2) μ_0 が $\mathcal{B}$ 上で σ-加法的なら μ は μ_0 の拡張となっている:

$$\mu_0(B) = \mu(B), \quad (\forall B \in \mathcal{B}). \tag{A.4}$$

(3) μ_0 が $\mathcal{B}$ 上で σ-有限的であるとき，(A.4) を満たすような $(X, \sigma[\mathcal{B}])$ 上の測度は存在しても唯一つである．

(4) μ_0 が $\mathcal{B}$ 上で σ-加法的かつ σ-有限的ならば，μ は μ_0 の $(X, \sigma[\mathcal{B}])$ への唯一つの拡張測度であり，このとき $(X, \mathcal{B}^*, \mu')$ は $(X, \sigma[\mathcal{B}], \mu)$ の Lebesgue 拡大に一致する:

$$(X, \mathcal{B}^*, \mu') = \left(X, \overline{\sigma[\mathcal{B}]}, \overline{\mu}\right). \tag{A.5}$$

証明.

(1) の証明 任意の $B \in \mathcal{B}$ が μ^*-可測であること，つまり任意の $A \subset X$ に対し

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c) \tag{A.6}$$

となることを示せば，$\mathcal{B} \subset \mathcal{B}^*$ すなわち $\sigma[\mathcal{B}] \subset \mathcal{B}^*$ が従う．任意の $A \subset X$, $\epsilon > 0$ に対し

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(B_n) < \mu^*(A) + \epsilon$$

を満たす $\{B_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$ が存在する．このとき $A \cap B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(B_n \cap B)$, $A \cap B^c \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(B_n \cap B^c)$ より

$$\mu^*(A \cap B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(B_n \cap B), \quad \mu^*(A \cap B^c) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(B_n \cap B^c)$$

となるから

$$\begin{aligned}
\mu^*(A) + \epsilon &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \{\mu_0(B_n \cap B) + \mu_0(B_n \cap B^c)\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(B_n \cap B) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(B_n \cap B^c) \\
&\geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c)
\end{aligned}$$

が成り立つ．ϵ の任意性より (A.6) が出る．

(2) の証明　任意に $B \in \mathcal{B}$ を取る．まず，$B \subset B \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \cdots$ より

$$\mu^*(B) \leq \mu_0(B)$$

が成り立つ．一方で $B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ を満たす $\{B_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$ に対し

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} \left(B \cap \left(B_n \backslash \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k \right) \right)$$

かつ $B \cap \left(B_n \backslash \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k \right) \in \mathcal{B}$ が満たされるから，μ_0 の σ-加法性より

$$\mu_0(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0\left(B \cap \left(B_n \backslash \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k \right) \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(B_n)$$

が成り立ち $\mu_0(B) \leq \mu^*(B)$ が従う．よって $\mu_0(B) = \mu^*(B) = \mu(B)$ が得られる．

(3) の証明　σ-有限の仮定より，或る増大列 $X_1 \subset X_2 \subset \cdots$，$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$ が存在して

$$\mu_0(X_n) < \infty \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X \tag{A.7}$$

が成り立つ．一致の定理より，(A.4) を満たす $(X, \sigma[\mathcal{B}])$ 上の測度は存在しても一つのみである．

(4) の証明　(2) と (3) の結果より μ は μ_0 の唯一つの拡張測度である．次に

$$\mathcal{B}^* = \overline{\sigma[\mathcal{B}]} \tag{A.8}$$

を示す．$E \in \overline{\sigma[\mathcal{B}]}$ なら或る $B_1, B_2 \in \sigma[\mathcal{B}]$ が存在して

$$B_1 \subset E \subset B_2, \quad \mu(B_2 - B_1) = 0$$

を満たす．このとき (1) より $\mu'(B_2 - B_1) = 0$ であり，$(X, \mathcal{B}^*, \mu')$ の完備性より $E \backslash B_1 \in \mathcal{B}^*$ が満たされ

$$E = B_1 + E \backslash B_1 \in \mathcal{B}^*$$

が従う．いま，(A.7) を満たす $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$ を取り，$E \in \mathcal{B}^*$ に対して $E_n := E \cap X_n$ とおく．このとき

$$\mu'(E_n) \leq \mu'(X_n) = \mu_0(X_n) < \infty$$

となり，任意の $k = 1, 2, \cdots$ に対して

$$E_n \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{k,j}^n, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0\left(B_{k,j}^n\right) < \mu'(E_n) + \frac{1}{k}$$

を満たす $\left\{B_{k,j}^n\right\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$ が存在する．

$$B_{2,n} := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{k,j}^n$$

とおけば $E_n \subset B_{2,n} \in \sigma[\mathcal{B}]$ であり，任意の $k = 1, 2, \cdots$ に対して

$$\begin{aligned}
\mu'(B_{2,n} - E_n) &= \mu'(B_{2,n}) - \mu'(E_n) \leq \mu'\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_{k,j}^n \right) - \mu'(E_n) \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu'\left(B_{k,j}^n\right) - \mu'(E_n) < \mu'(E_n) + \frac{1}{k} - \mu'(E_n) = \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

が成り立つから $\mu'(B_{2,n} - E_n) = 0$ となる．E_n を $B_{2,n} - E_n$ に替えれば

$$B_{2,n} - E_n \subset N_n, \quad \mu(N_n) = 0$$

を満たす $N_n \in \sigma[\mathcal{B}]$ が取れる．

$$B_{1,n} \coloneqq B_{2,n} \cap N_n^c$$

とおけば，$B_{1,n} \subset B_{2,n} \cap (B_{2,n} - E_n)^c = E_n$ より

$$B_{1,n} \subset E_n \subset B_{2,n}, \quad \mu(B_{2,n} - B_{1,n}) \le \mu(N_n) = 0$$

が成り立つから，

$$B_1 \coloneqq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{1,n}, \quad B_2 \coloneqq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{2,n}$$

として

$$B_1 \subset E \subset B_2, \quad \mu(B_2 - B_1) \le \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (B_{2,n} - B_{1,n})\right) = 0$$

が満たされ，$E \in \overline{\sigma[\mathcal{B}]}$ が従い (A.8) が得られる．同時に

$$\overline{\mu}(E) = \mu(B_1) = \mu'(B_1) \le \mu'(E) \le \mu'(B_2) = \mu(B_2) = \overline{\mu}(E)$$

が成立するから，$\overline{\mu} = \mu'$ となり (A.5) が出る． ∎

定理 A.1.8 (積測度). σ-有限測度空間の族 $((X_i, \mathscr{M}_i, \mu_i))_{i=1}^n$ に対し，$\left(\prod_{i=1}^n X_i,\ \bigotimes_{i=1}^n \mathscr{M}_i\right)$ 上の σ-有限測度 μ で

$$\mu(A_1 \times \cdots \times A_n) = \mu_1(A_1) \cdots \mu_n(A_n), \quad (\forall A_i \in \mathscr{M}_i,\ i = 1, \cdots, n)$$

を満たすものがただ一つ存在する．この μ を $(\mu_i)_{i=1}^n$ の積測度と呼び $\bigotimes_{i=1}^n \mu_i = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ と書く．

定理 A.1.9 (完備測度空間の直積空間). $((X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i))_{i=1}^n$ を σ-有限な測度空間の族とし，各 i の Lebesgue 拡大を $(X_i, \mathfrak{M}_i, m_i)$ と書く．このとき次が成り立つ:

$$\left(X_1 \times \cdots \times X_n, \overline{\mathcal{B}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}_n}, \overline{\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n}\right) = \left(X_1 \times \cdots \times X_n, \overline{\mathfrak{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{M}_n}, \overline{m_1 \otimes \cdots \otimes m_n}\right).$$

証明. $X \coloneqq \prod_{i=1}^n X_i$, $\mathcal{B} \coloneqq \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{B}_i$, $\mathfrak{M} \coloneqq \bigotimes_{i=1}^n \mathfrak{M}_i$, $\mu \coloneqq \bigotimes_{i=1}^n \mu_i$, $m \coloneqq \bigotimes_{i=1}^n m_i$ と表記する．

第一段 $\mathcal{B}_i \subset \mathfrak{M}_i$, $(i = 1, \cdots, n)$ より $\mathcal{B} \subset \mathfrak{M}$ が従う．このとき

$$\mu(B) = m(B), \quad (\forall B \in \mathcal{B}) \tag{A.9}$$

が成り立つことを示す．いま，σ-有限の仮定により各 i に対し

$$\mu_i(X_i^k) < \infty, \quad X_i^k \in \mathcal{B}_i, \ (\forall k = 1, 2, \cdots), \quad X_1^k \subset X_2^k \subset \cdots$$

を満たす増大列 $\left(X_i^k\right)_{k=1}^{\infty}$ が存在し，

$$X^k := X_1^k \times \cdots \times X_n^k, \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

により $\mathcal{B}$ の増大列 $(X^k)_{k=1}^{\infty}$ を定めれば

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X^k, \quad \mu(X^k) = \mu_1(X_1^k)\cdots\mu_n(X_n^k) < \infty; \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

が満たされる．ここで $\mathcal{B}$ を生成する乗法族を

$$\mathcal{A} := \{\, B_1 \times \cdots \times B_n \ ; \quad B_i \in \mathcal{B}_i,\ i = 1, \cdots, n \,\}$$

とおけば，$\mathcal{A}$ は $\left\{X^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ を含み，かつ任意の $B_1 \times \cdots \times B_n \in \mathcal{A}$ に対して

$$\mu(B_1 \times \cdots \times B_n) = \mu_1(B_1)\cdots\mu_n(B_n) = m_1(B_1)\cdots m_n(B_n) = m(B_1 \times \cdots \times B_n)$$

となるから，定理 A.1.6 より (A.9) が出る．

第二段　この段と次の段で $\left(X, \overline{\mathcal{B}}, \overline{\mu}\right)$ が $(X, \mathfrak{M}, m)$ の完備拡張であることを示す．まず

$$\mathfrak{M} \subset \overline{\mathcal{B}} \tag{A.10}$$

が成り立つことを示す．任意の $E_j \in \mathfrak{M}_j$ に対し，

$$B_j^1 \subset E_j \subset B_j^2, \quad \mu_j\left(B_j^2 - B_j^1\right) = 0$$

を満たす $B_j^1, B_j^2 \in \mathcal{B}_j$ が存在する．このとき，X から X_j への射影を p_j と書けば

$$p_j^{-1}\left(B_j^1\right) \subset p_j^{-1}(E_j) \subset p_j^{-1}\left(B_j^2\right), \quad p_j^{-1}\left(B_j^1\right), p_j^{-1}\left(B_j^2\right) \in \mathcal{B}$$

及び

$$\mu\left(p_j^{-1}\left(B_j^2\right) - p_j^{-1}\left(B_j^1\right)\right) = \mu_1(X_1)\cdots\mu_j\left(B_j^2 - B_j^1\right)\cdots\mu_n(X_n) = 0$$

が成り立つから

$$p_j^{-1}(E_j) \in \overline{\mathcal{B}}$$

が従い，

$$E_1 \times \cdots \times E_n = \bigcap_{i=1}^{n} p_i^{-1}(E_i), \quad (E_i \in \mathfrak{M}_i,\ i = 1, \cdots, n)$$

と積 σ-加法族の定義より (A.10) が得られる．

第三段　任意の $E \in \mathfrak{M}$ に対し

$$m(E) = \overline{\mu}(E)$$

が成り立つことを示す．実際，(A.10) より $E \in \mathfrak{M}$ なら $E \in \overline{\mathcal{B}}$ となるから，

$$B_1 \subset E \subset B_2, \quad \mu(B_2 - B_1) = 0, \quad \overline{\mu}(E) = \mu(B_1) \tag{A.11}$$

を満たす $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ が存在し，このとき (A.9) より

$$m(E - B_1) \leq m(B_2 - B_1) = \mu(B_2 - B_1) = 0$$

が成立し

$$m(E) = m(B_1) = \mu(B_1) = \overline{\mu}(E)$$

が得られる．

第四段　前段の結果より $\left(X, \overline{\mathcal{B}}, \overline{\mu}\right)$ は $(X, \mathfrak{M}, m)$ の完備拡張であるから，

$$\overline{\mathfrak{M}} \supset \overline{\mathcal{B}}$$

を示せば定理の主張を得る．実際，任意の $E \in \overline{\mathcal{B}}$ に対し (A.11) を満たす $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ を取れば，

$$m(B_2 - B_1) = \mu(B_2 - B_1) = 0$$

が成り立ち $E \in \overline{\mathfrak{M}}$ が従う． ∎

A.2　Fubini の定理

$(X, \mathcal{M}), (Y, \mathcal{N})$ を可測空間とするとき，任意の $x \in X$ に対し

$$p_x : Y \ni y \longmapsto (x, y) \in X \times Y$$

で定める p_x は $\mathcal{N}/\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$-可測である．実際，$A \in \mathcal{M},\ B \in \mathcal{N}$ に対しては

$$p_x^{-1}(A \times B) = \begin{cases} \emptyset, & (x \notin A), \\ B, & (x \in A), \end{cases} \in \mathcal{N}$$

となるから，

$$\{\, A \times B\ ;\quad A \in \mathcal{M},\ B \in \mathcal{N} \,\} \subset \left\{\, E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}\ ;\quad p_x^{-1}(E) \in \mathcal{N} \,\right\}$$

が従い p_x の $\mathcal{N}/\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$-可測性が出る．同様に任意の $y \in Y$ に対し

$$q_y : X \ni x \longmapsto (x, y) \in X \times Y$$

で定める q_y は $\mathcal{M}/\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$-可測である．

補題 A.2.1 (二変数可測写像は片変数で可測).　$(X, \mathcal{M}), (Y, \mathcal{N}), (Z, \mathcal{L})$ を可測空間とするとき，写像 $f : X \times Y \longmapsto Z$ が $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}/\mathcal{L}$-可測であれば，任意の $x_0 \in X,\ y_0 \in Y$ に対し

$$X \ni x \longmapsto f(x, y_0), \quad Y \ni y \longmapsto f(x_0, y)$$

はそれぞれ $\mathcal{M}/\mathcal{L}$-可測，$\mathcal{N}/\mathcal{L}$-可測である．

証明.　$X \ni x \longmapsto f(x, y_0)$ は f と q_{y_0} の合成 $f \circ q_{y_0}$ であり，$Y \ni y \longmapsto f(x_0, y)$ は $f \circ p_{x_0}$ である． ∎

補題 A.2.2. $(X,\mathcal{M},\mu),(Y,\mathcal{N},\nu)$ を σ-有限な測度空間とするとき，任意の $Q\in\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$ に対し

$$\varphi_Q : X\ni x\longmapsto \int_Y \mathbb{1}_Q\circ p_x\,d\nu,\quad \psi_Q : Y\ni y\longmapsto \int_X \mathbb{1}_Q\circ q_y\,d\mu,$$

はそれぞれ $\mathcal{M}/\mathscr{B}([0,\infty])$-可測，$\mathcal{N}/\mathscr{B}([0,\infty])$-可測であり

$$\int_X \varphi_Q\,d\mu = (\mu\otimes\nu)(Q) = \int_Y \psi_Q\,d\nu \tag{A.12}$$

が成立する．

証明.

第一段 σ-有限の仮定より，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X,\quad \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n = Y,\quad \mu(X_n),\ \nu(Y_n)<\infty;\ n=1,2,\cdots$$

を満たす増大列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{M}$ と $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{N}$ が存在する．ここで

$$\mathcal{M}_n \coloneqq \{\,A\cap X_n\ ;\quad A\in\mathcal{M}\,\},\quad \mathcal{N}_n \coloneqq \{\,B\cap Y_n\ ;\quad B\in\mathcal{N}\,\}$$

により X_n, Y_n 上の σ-加法族を定めて

$$\mathcal{D}_n \coloneqq \left\{ Q_n\in\mathcal{M}_n\otimes\mathcal{N}_n\ ;\quad \begin{aligned} &\varphi_{Q_n} : X\ni x\longmapsto \int_Y \mathbb{1}_{Q_n}\circ p_x\,d\nu \text{ が } \mathcal{M}/\mathscr{B}([0,\infty])\text{-可測},\\ &\psi_{Q_n} : Y\ni y\longmapsto \int_X \mathbb{1}_{Q_n}\circ q_y\,d\mu \text{ が } \mathcal{N}/\mathscr{B}([0,\infty])\text{-可測},\\ &\int_X \varphi_{Q_n}\,d\mu = (\mu\otimes\nu)(Q_n) = \int_Y \psi_{Q_n}\,d\nu \end{aligned} \right\}$$

とおけば，$\mathcal{D}_n$ は $X_n\times Y_n$ 上の Dynkin 族であり

$$\{\,A\times B\ ;\quad A\in\mathcal{M}_n,\ B\in\mathcal{N}_n\,\}\subset\mathcal{D}_n$$

を満たすから $\mathcal{M}_n\otimes\mathcal{N}_n=\mathcal{D}_n$ が従う．

第二段 $\mathcal{M}_n\otimes\mathcal{N}_n = \{\,Q\cap(X_n\times Y_n)\ ;\quad Q\in\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}\,\}$ より，任意の $Q\in\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$ に対して

$$Q_n \coloneqq Q\cap(X_n\times Y_n)\in\mathcal{D}_n,\ (\forall n\geq 1),\quad Q_1\subset Q_2\subset\cdots\longrightarrow Q$$

が従い，単調収束定理より

$$\varphi_Q(x) = \int_Y \mathbb{1}_Q\circ p_x\,d\nu = \lim_{n\to\infty}\int_Y \mathbb{1}_{Q_n}\circ p_x\,d\nu = \lim_{n\to\infty}\varphi_{Q_n}(x),\quad (\forall x\in X)$$

となるから φ_Q の $\mathcal{M}/\mathscr{B}([0,\infty])$-可測性が出る．また，

$$\varphi_{Q_n}(x) = \int_Y \mathbb{1}_{Q_n}\circ p_x\,d\nu \leq \int_Y \mathbb{1}_{Q_{n+1}}\circ p_x\,d\nu = \varphi_{Q_{n+1}}(x),\quad (n=1,2,\cdots)$$

が満たされているから，再び単調収束定理により

$$\int_X \varphi_Q\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X \varphi_{Q_n}\,d\mu = \lim_{n\to\infty}(\mu\otimes\nu)(Q_n) = (\mu\otimes\nu)(Q)$$

が得られる．同様に ψ_Q は $\mathcal{N}/\mathscr{B}([0,\infty])$-可測であり (A.12) を満たす． ∎

定理 A.2.3 (Fubini). $(X, \mathcal{M}, \mu), (Y, \mathcal{N}, \nu)$ を σ-有限な測度空間とする．

(1) $f : X \times Y \longrightarrow [0, \infty]$ を $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} / \mathscr{B}([0, \infty])$-可測写像とするとき，

$$\varphi : X \ni x \longmapsto \int_Y f \circ p_x \, d\nu, \quad \psi : Y \ni y \longmapsto \int_X f \circ q_y \, d\mu$$

により定める φ, ψ はそれぞれ $\mathcal{M}/\mathscr{B}([0, \infty])$-可測，$\mathcal{N}/\mathscr{B}([0, \infty])$-可測であり，

$$\int_X \varphi \, d\mu = \int_{X \times Y} f \, d(\mu \otimes \nu) = \int_Y \psi \, d\nu$$

が成立する．

(2) $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{C}$ を $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} / \mathscr{B}(\mathbb{C})$-可測な可積分関数とするとき，

$(X_i, \mathcal{M}_i)$, $(i = 1, \cdots, n)$ を可測空間の族とする．いま，$0 < k < n$ として $\{i_1, \cdots, i_k\} \subset \{1, \cdots, n\}$ を取り

$$Y \coloneqq \prod_{i=1}^{n} X_i, \quad Y_1 \coloneqq \prod_{j=1}^{k} X_{i_j}, \quad Y_2 \coloneqq \prod_{i \in \substack{\{1, \cdots, n\} \\ \setminus \{i_1, \cdots, i_k\}}} X_i,$$

$$\mathcal{N} \coloneqq \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{M}_i, \quad \mathcal{N}_1 \coloneqq \bigotimes_{j=1}^{k} \mathcal{M}_{i_j}, \quad \mathcal{N}_2 \coloneqq \bigotimes_{i \in \substack{\{1, \cdots, n\} \\ \setminus \{i_1, \cdots, i_k\}}} \mathcal{M}_i$$

とおく．このとき，

A.3 メモ

A.3.1 複素測度

定義 A.3.1 (複素測度). $(X, \mathcal{M})$ を可測空間とする．$\lambda : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{C}$ が任意の互いに素な列 $(E_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ に対し

$$\lambda\Big(\sum_{i=1}^{\infty} E_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i)$$

を満たすとき，λ を複素測度 (complex measure) という．

任意の全単射 $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ に対し

$$(E \coloneqq) \ \sum_{i=1}^{\infty} E_i = \sum_{i=1}^{\infty} E_{\sigma(i)}$$

が成り立つから

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i) = \lambda(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_{\sigma(i)})$$

が従い，Riemann の級数定理より $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i)$ は絶対収束する．ここで，

$$|\lambda(E)| \leq \mu(E) \quad (\forall E \in \mathcal{M}) \tag{A.13}$$

を満たすような或る $(X,\mathcal{M})$ 上の測度 μ が存在すると考える．このとき μ は

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda(E_i)| \le \sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i) = \mu\Bigl(\sum_{i=1}^{\infty}E_i\Bigr)$$

を満たすから

$$\sup\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda(A_i)|\ ;\quad E=\sum_{i=1}^{\infty}A_i,\ \{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subset\mathcal{M}\right\}\le\mu(E),\quad(\forall E\in\mathcal{M})$$

が成立する．実は，

$$|\lambda|(E) \coloneqq \sup\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda(A_i)|\ ;\quad E=\sum_{i=1}^{\infty}A_i,\ \{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subset\mathcal{M}\right\},\quad(\forall E\in\mathcal{M}) \tag{A.14}$$

で定める $|\lambda|$ は (A.13) を満たす最小の有限測度となる (定理 A.3.3，定理 A.3.5).

定義 A.3.2 (**総変動・総変動測度**). 可測空間 $(X,\mathcal{M})$ 上の複素測度 λ に対し，(A.14) で定める $|\lambda|$ を λ の総変動測度 (total variation measure) といい，$|\lambda|(X)$ を λ の総変動 (total variation) という．

特に λ が正値有限測度である場合は $\lambda=|\lambda|$ が成り立つ．実際，任意の $E\in\mathcal{M}$ に対して

$$|\lambda|(E)=\sup\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda(A_i)|\ ;\quad E=\sum_{i=1}^{\infty}A_i,\ \{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subset\mathcal{M}\right\}=\lambda(E)$$

が成立する．

定理 A.3.3 ($|\lambda|$ **は測度**). 可測空間 $(X,\mathcal{M})$ 上の複素測度 λ に対して，(A.14) で定める $|\lambda|$ は正値測度である．

証明. $|\lambda|$ の正値性は (A.14) より従うから，$|\lambda|$ の完全加法性を示す．いま，互いに素な集合列 $E_i\in\mathcal{M}\ (i=1,2,\cdots)$ を取り $E\coloneqq\sum_{i=1}^{\infty}E_i$ とおく．このとき，任意の $\epsilon>0$ に対して E_i の或る分割 $(A_{ij})_{j=1}^{\infty}\subset\mathcal{M}$ が存在して

$$|\lambda|(E_i)\ge\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda(A_{ij})|>|\lambda|(E_i)-\frac{\epsilon}{2^i}$$

を満たすから，$E=\sum_{i,j=1}^{\infty}A_{ij}$ と併せて

$$|\lambda|(E)\ge\sum_{i,j=1}^{\infty}|\lambda(A_{ij})|\ge\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda(A_{ij})|>\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda|(E_i)-\epsilon$$

となり，$\epsilon>0$ の任意性より

$$|\lambda|(E)\ge\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda|(E_j)$$

が従う．一方で E の任意の分割 $(A_j)_{j=1}^{\infty}\subset\mathcal{M}$ に対し

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda(A_j)|=\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{i=1}^{\infty}\lambda(A_j\cap E_i)\right|\le\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda|(A_j\cap E_i)\le\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda|(E_i)$$

が成り立つから，E の分割について上限を取って

$$|\lambda|(E) \leq \sum_{i=1} |\lambda|(E_i)$$

を得る． ∎

補題 A.3.4. $z_1, \cdots, z_N$ を複素数とする．このとき，次を満たす或る部分集合 $S \subset \{1, \cdots, N\}$ が存在する:

$$\left| \sum_{k \in S} z_k \right| \geq \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N} |z_k|.$$

証明. $i = \sqrt{-1}$ として，$z_k = |z_k| e^{i\alpha_k}$ $(-\pi \leq \alpha_k < \pi,\ k = 1, \cdots, N)$ を満たす $\alpha_1, \cdots, \alpha_N$ を取り

$$S(\theta) \coloneqq \{\, k \in \{1, \cdots, N\} \ ; \quad \cos(\alpha_k - \theta) > 0 \,\}, \quad (-\pi \leq \theta \leq \pi)$$

とおく．このとき，$\cos^+ x \coloneqq 0 \vee \cos x$ $(x \in \mathbb{R})$ とすれば

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k \in S(\theta)} z_k \right| &= |e^{-i\theta}| \left| \sum_{k \in S(\theta)} z_k \right| = \left| \sum_{k \in S(\theta)} |z_k| e^{i(\alpha_k - \theta)} \right| \\
&\geq \mathrm{Re} \left[\sum_{k \in S(\theta)} |z_k| e^{i(\alpha_k - \theta)} \right] = \sum_{k \in S(\theta)} |z_k| \cos(\alpha_k - \theta) = \sum_{k=1}^{N} |z_k| \cos^+(\alpha_k - \theta)
\end{aligned}$$

が成り立ち，最右辺は θ に関して連続であるから最大値を達成する $\theta_0 \in [-\pi, \pi]$ が存在する．$S \coloneqq S(\theta_0)$ として

$$\left| \sum_{k \in S} z_k \right| \geq \sum_{k=1}^{N} |z_k| \cos^+(\alpha_k - \theta_0) \geq \sum_{k=1}^{N} |z_k| \cos^+(\alpha_k - \theta) \quad (\forall \theta \in [-\pi, \pi])$$

となり，積分して

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k \in S} z_k \right| &\geq \sum_{k=1}^{N} |z_k| \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi]} \cos^+(\alpha_k - \theta)\, d\theta \\
&= \sum_{k=1}^{N} |z_k| \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi]} \cos^+ \theta\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N} |z_k|
\end{aligned}$$

が得られる． ∎

定理 A.3.5 (総変動は有限). 可測空間 $(X, \mathcal{M})$ 上の複素測度 λ の総変動測度 $|\lambda|$ について次が成り立つ:

$$|\lambda|(X) < \infty.$$

特に，複素測度は有界である．

証明. $|\lambda|(X) = \infty$ と仮定して背理法により定理を導く．

第一段 或る $E \in \mathcal{M}$ に対し $|\lambda|(E) = \infty$ が成り立っているなら，

$$|\lambda(A)| > 1, \quad |\lambda(B)| > 1, \quad E = A + B$$

を満たす $A, B \in \mathcal{M}$ が存在することを示す．いま，$t \coloneqq 2\pi(1 + |\lambda(E)|)$ とおけば

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(E_i)| > t$$

を満たす E の分割 $(E_i)_{i=1}^{\infty}$ が存在する．従って或る $N \in \mathbb{N}$ に対し

$$\sum_{i=1}^{N} |\lambda(E_i)| > t$$

が成り立ち，補題 A.3.4 より

$$\left| \sum_{k \in S} \lambda(E_k) \right| \geq \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N} |\lambda(E_k)| > \frac{t}{2\pi} > 1$$

を満たす $S \subset \{1, \cdots, N\}$ が取れる．ここで $A \coloneqq \sum_{k \in S} E_k$, $B \coloneqq E - A$ とおけば，$|\lambda(A)| > 1$ かつ

$$|\lambda(B)| = |\lambda(E) - \lambda(A)| \geq |\lambda(A)| - |\lambda(E)| > \frac{t}{2\pi} - |\lambda(E)| = 1$$

が成り立つ．また，

$$|\lambda|(E) = |\lambda|(A) + |\lambda|(B)$$

より $|\lambda|(A)$, $|\lambda|(B)$ の少なくとも一方は ∞ となる．

第二段 いま，$|\lambda|(X) = \infty$ と仮定すると，前段の結果より

$$|\lambda|(B_1) = \infty, \quad |\lambda(A_1)| > 1, \quad |\lambda(B_1)| > 1, \quad X = A_1 + B_1$$

を満たす $A_1, B_1 \in \mathcal{M}$ が存在する．同様に B_1 に対しても

$$|\lambda|(B_2) = \infty, \quad |\lambda(A_2)| > 1, \quad |\lambda(B_2)| > 1, \quad B_1 = A_2 + B_2$$

を満たす $A_2, B_2 \in \mathcal{M}$ が存在する．繰り返せば $|\lambda(A_j)| > 1$ $(j = 1, 2, \cdots)$ を満たす互いに素な集合列 $(A_j)_{j=1}^{\infty}$ が構成され，このとき $\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda(A_j)| = \infty$ となる．一方で Riemann の級数定理より $\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda(A_j)| < \infty$ が成り立つから矛盾が生じ，$|\lambda|(X) < \infty$ が出る． ∎

定理 A.3.6 (複素測度の空間・ノルムの定義). 可測空間 $(X, \mathcal{M})$ 上の複素測度の全体を $\mathrm{Meas}_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{M})$ と書く．

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)(E) &\coloneqq \lambda(E) + \mu(E), \\ (c\lambda)(E) &\coloneqq c\lambda(E) \end{aligned}$$

を線型演算として $\mathrm{Meas}_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{M})$ は線形空間となる．また

$$\|\lambda\| \coloneqq |\lambda|(X) \quad (\lambda \in \mathrm{Meas}_{\mathbb{C}})$$

により $\mathrm{Meas}_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{M})$ にノルム $\|\cdot\|$ が定まる．

後述の Riesz の表現定理によれば $(\mathrm{Meas}_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{M}), \|\cdot\|)$ は Banach 空間である．

証明. $\|\cdot\|$ がノルムであることを示す.

第一段 $\lambda = 0$ なら $\|\lambda\| = |\lambda|(X) = 0$ となる．また $|\lambda(E)| \leq |\lambda|(E) \leq \|\lambda\|$ より $\|\lambda\| = 0$ なら $\lambda = 0$ が従う.

第二段 任意の $\lambda \in \mathrm{Meas}_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{M})$ と $c \in \mathbb{C}$ に対し

$$\|c\lambda\| = \sup \sum_i |(c\lambda)(E_i)| = \sup \sum_i |c\lambda(E_i)| = |c| \sup \sum_i |\lambda(E_i)| = |c| \|\lambda\|$$

が成り立ち同次性が得られる.

第三段 $\lambda, \mu \in \mathrm{Meas}_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{M})$ を任意に取る．このとき，X の任意の分割 $X = \sum_{i=1}^{\infty} E_i$ $(E_i \in \mathcal{M})$ に対して

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(\lambda + \mu)(E_i)| = \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(E_i) + \mu(E_i)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(E_i)| + \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)| \leq \|\lambda\| + \|\mu\|$$

が成り立つから $\|\lambda + \mu\| \leq \|\lambda\| + \|\mu\|$ が従う. ∎

可測空間 $(X, \mathcal{M})$ において，$\mathbb{R}$ にしか値を取らない複素測度を符号付き測度 (signed measure) という.

定義 A.3.7 (正変動と負変動・Jordan の分解). $(X, \mathcal{M})$ を可測空間とする．$(X, \mathcal{M})$ 上の符号付き測度 μ に対し

$$\mu^+ \coloneqq \frac{1}{2}(|\mu| + \mu), \quad \mu^- \coloneqq \frac{1}{2}(|\mu| - \mu)$$

として正値有限測度 μ^+, μ^- を定める．μ^+ (μ^-) を μ の正 (負) 変動 (positive (negative) variation) と呼び,

$$\mu = \mu^+ - \mu^-$$

を符号付き測度 μ の Jordan 分解 (Jordan decomposition) という．同時に $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ も成り立つ.

定義 A.3.8 (絶対連続・特異). $(X, \mathcal{M})$ を可測空間，μ を $\mathcal{M}$ 上の正値測度，$\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ を $\mathcal{M}$ 上の任意の測度とする.

- $\mu(E) = 0$ ならば $\lambda(E) = 0$ となるとき，λ は μ に関して絶対連続である (absolutely continuous) といい

$$\lambda \ll \mu$$

  と書く.
- 或る $A \in \mathcal{M}$ が存在して

$$\lambda(E) = \lambda(A \cap E), \quad (\forall E \in \mathcal{M})$$

  が成り立つとき，λ は A に集中している (concentrated on A) という．λ_1 が A_1 に，λ_2 が A_2 に集中し，かつ $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ であるとき，λ_1, λ_2 は互いに特異である (mutually singular) といい

$$\lambda_1 \perp \lambda_2$$

  と書く.

命題 A.3.9 (絶対連続性と特異性に関する性質). $(X, \mathcal{M})$ を可測空間，μ を $\mathcal{M}$ 上の正値測度，$\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ を $\mathcal{M}$ 上の複素測度とする．このとき以下に羅列する事柄が成り立つ．

(1) λ が $A \in \mathcal{M}$ に集中しているなら $|\lambda|$ も A に集中している．

(2) $\lambda_1 \perp \lambda_2$ ならば $|\lambda_1| \perp |\lambda_2|$.

(3) $\lambda_1 \perp \mu$ かつ $\lambda_2 \perp \mu$ ならば $\lambda_1 + \lambda_2 \perp \mu$.

(4) $\lambda_1 \ll \mu$ かつ $\lambda_2 \ll \mu$ ならば $\lambda_1 + \lambda_2 \ll \mu$.

(5) $\lambda \ll \mu$ ならば $|\lambda| \ll \mu$.

(6) $\lambda_1 \ll \mu$ かつ $\lambda_2 \perp \mu$ ならば $\lambda_1 \perp \lambda_2$.

(7) $\lambda \ll \mu$ かつ $\lambda \perp \mu$ ならば $\lambda = 0$.

A.4 複素測度に関する積分

定義 A.4.1 (複素数値可測関数の正値測度に関する積分). $(X, \mathcal{M})$ を可測空間，μ を $\mathcal{M}$ 上の正値測度とし，$\mathcal{M}/\mathscr{B}(\mathbb{C})$-可測関数 f が実数値関数 u, v を用いて $f = u + iv$ と表現されているとする．u, v が μ に関して X 上可積分であるとき[*1]，f は μ に関して X 上可積分であるといい，μ に関する f の積分を次で定める:

$$\int_E f(x)\,\mu(dx) \coloneqq \int_E u(x)\,\mu(dx) + i\int_E v(x)\,\mu(dx) \quad (\forall E \in \mathcal{M}).$$

定理 A.4.2 (正値測度に関する積分の性質). $(X, \mathcal{M})$ を可測空間とし，μ を $\mathcal{M}$ 上の正値測度とする．

(1) μ に関して可積分な $\mathcal{M}/\mathscr{B}(\mathbb{C})$-可測関数 f と複素数 $\gamma = \alpha + i\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ に対して次が成り立つ:

$$\int_E \gamma f(x)\,\mu(dx) = \gamma\int_E f(x)\,\mu(dx) \quad (\forall E \in \mathcal{M}).$$

(2) μ に関して可積分な $\mathcal{M}/\mathscr{B}(\mathbb{C})$-可測関数 f がに対して次が成り立つ:

$$\left|\int_E f(x)\,\mu(dx)\right| \leq \int_E |f(x)|\,\mu(dx) < \infty \quad (\forall E \in \mathcal{M}).$$

(3) $\mathcal{M}/\mathscr{B}(\mathbb{C})$-可測関数 f, g が μ に関して可積分であり

$$\int_E f(x)\,\mu(dx) = \int_E g(x)\,\mu(dx) \quad (\forall E \in \mathcal{M})$$

を満たすとき，μ-a.e. に $f = g$ が成り立つ．

(4) f が $\mathcal{M}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測かつ μ に関して可積分であり

$$0 \leq \int_E f(x)\,\mu(dx) \leq \mu(E) \quad (\forall E \in \mathcal{M})$$

が成り立つとき，μ-a.e.x に対して $0 \leq f(x) \leq 1$ が満たされる．

[*1] 定理 A.1.5 により u, v は $\mathcal{M}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測である．

証明.

(1) f に対して或る実数値可積分関数 u, v が存在して $f = u + iv$ と表現できる．このとき

$$\gamma f = (\alpha u - \beta v) + i(\alpha v + \beta u)$$

が成り立つから，任意の $E \in \mathcal{M}$ に対して次を得る:

$$\begin{aligned}\int_E \gamma f \, d\mu &= \int_E (\alpha u - \beta v) + i(\alpha v + \beta u) \, d\mu \\ &= \int_E \alpha u - \beta v \, d\mu + i \int_E \alpha v + \beta u \, d\mu = (\alpha + i\beta)\left(\int_E u \, d\mu + i \int_E u \, d\mu\right) = \gamma \int_E f \, d\mu.\end{aligned}$$

(2) f に対して或る実数値可積分関数 u, v が存在して $f = u + iv$ と表現でき，u, v の可積分性から

$$\int_E |f(x)| \, \mu(dx) \leq \int_E |u(x)| \, \mu(dx) + \int_E |v(x)| \, \mu(dx) < \infty \quad (\forall E \in \mathcal{M})$$

が従う．次に初めの不等式を示す．任意に $E \in \mathcal{M}$ を取り $\alpha := \int_E f \, d\mu$ とおく．$\alpha \neq 0$ の場合，(1) の結果より

$$|\alpha| = \frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|} \int_E f(x) \, \mu(dx) = \int_E \frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|} f(x) \, \mu(dx)$$

が成り立ち，

$$\mathrm{Re}\left[\frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|} f(x)\right] \leq |f(x)| \quad (\forall x \in X)$$

が満たされるから

$$|\alpha| = \mathrm{Re}\left[\int_E \frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|} f(x) \, \mu(dx)\right] = \int_E \mathrm{Re}\left[\frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|} f(x)\right] \mu(dx) \leq \int_E |f(x)| \, \mu(dx)$$

が従う．$\alpha = 0$ の場合も不等式は成り立つ．

(3) f, g に対し或る実数値可積分関数 u_1, u_2, v_1, v_2 が存在して

$$f = u_1 + iv_1, \quad g = u_2 + iv_2$$

と表現できる．自然数 n に対して

$$E_n := \left\{ x \in X \; ; \quad u_1(x) - u_2(x) \geq \frac{1}{n} \right\}$$

と定めれば $E_n \in \mathcal{M}$ が満たされるから，仮定より

$$\int_{E_n} u_1(x) - u_2(x) \, \mu(dx) = 0$$

が成り立つ．ここで $\mu(E_n) > 0$ と仮定すると

$$0 < \frac{1}{n}\mu(E_n) \leq \int_{E_n} u_1(x) - u_2(x) \, \mu(dx) = 0$$

が従い矛盾が生じるから，$\mu(E_n) = 0 \; (\forall n \in \mathbb{N})$ が満たされ

$$\mu(u_1 > u_2) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = 0$$

が得られる．同様にして $\mu(u_1 < u_2) = 0$ 及び $\mu(v_1 \neq v_2) = 0$ となり，

$$\mu(f \neq g) \leq \mu(u_1 \neq u_2) + \mu(v_1 \neq v_2) = 0$$

により μ-a.e. に $f = g$ が成り立つ．

(4) 任意の自然数 n に対し

$$E_n^- \coloneqq \left\{ x \in X \ ; \quad f(x) \leq -\frac{1}{n} \right\}, \quad E_n^+ \coloneqq \left\{ x \in X \ ; \quad f(x) \geq 1 + \frac{1}{n} \right\}$$

とおく．ここで或る自然数 n に対して $\mu(E_n^-) > 0$ が満たされているとすると

$$0 \leq \int_{E_n^-} f(x)\,\mu(dx) \leq -\frac{1}{n}\mu(E_n^-) < 0$$

が成り立ち矛盾が生じるから，$\mu(E_n^-) = 0\ (\forall n \in \mathbb{N})$ が従う．同様の理由により $\mu(E_n^+) = 0\ (\forall n \in \mathbb{N})$ が得られ

$$\mu(f \notin [0,1]) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^-\right) + \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^+\right) = 0$$

が成り立つ． ∎

定義 A.4.3 (複素測度に関する積分). $(X, \mathcal{M})$ を可測空間とし，μ を $(X, \mathcal{M})$ 上の複素測度とする．μ の総変動測度 $|\mu|$ に関して可積分となる関数 $f : X \to \mathbb{C}$ について，f の μ に関する積分を次で定める:

f が可測単関数の場合 有限個の複素数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ と集合 $A_1, \cdots, A_k \in \mathcal{M}$ によって

$$f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \tag{A.15}$$

と表されるとき[*2]，f の μ に関する積分を

$$\int_X f(x)\,\mu(dx) \coloneqq \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(A_i) \tag{A.16}$$

で定める．

f が一般の可測関数の場合

$$\int_X f_n(x)\,|\mu|(dx) \longrightarrow \int_X f(x)\,|\mu|(dx) \tag{A.17}$$

を満たす f の可測単関数近似列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ を取り，f の μ に関する積分を

$$\int_X f(x)\,\mu(dx) \coloneqq \lim_{n \to \infty} \int_X f_n(x)\,\mu(dx) \tag{A.18}$$

で定める．

定理 A.4.4 (積分の定義は well-defined). 定義 A.4.3 において，(A.16) は (A.15) の表示の仕方に依らずに定まり，(A.18) も (A.17) を満たす単関数近似列の選び方に依らずに定まる．更に任意の $f \in MF$ に対して次が成り立つ:

$$\left| \int_X f(x)\,\mu(dx) \right| \leq \int_X |f(x)|\,|\mu|(dx). \tag{A.19}$$

[*2] $A_1, \cdots, A_k$ は互いに素であり $X = \sum_{i=1}^{k} A_i$ を満たす．

証明.

f が可測単関数の場合　f が (A.15) の表示とは別に

$$f = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mathbb{1}_{B_j} \quad (\beta_j \in \mathbb{C},\ B_j \in \mathcal{M},\ X = \textstyle\sum_{j=1}^{m} B_j)$$

と表現できるとしても

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{k} \beta_j \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(B_j)$$

が成り立つ．また (A.14) より

$$\left| \int_X f(x)\, \mu(dx) \right| = \left| \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(A_i) \right| \leq \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|\, |\mu|(A_i) = \int_X |f(x)|\, |\mu|(dx) \tag{A.20}$$

も成り立つ．

f が一般の可測関数の場合　(A.18) は有限確定している．実際 (A.17) を満たす単関数近似列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ に対して (A.20) より

$$\left| \int_X f_n(x)\, \mu(dx) - \int_X f_m(x)\, \mu(dx) \right| \leq \int_X |f_n(x) - f_m(x)|\ |\mu|(dx) \quad (\forall n, m \in \mathbb{N})$$

が成り立つから，$\left(\int_X f_n(x)\, \mu(dx) \right)_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{C}$ において Cauchy 列をなし極限が存在する．$(f_n)_{n=1}^{\infty}$ とは別に (A.17) を満たす f の単関数近似列 $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ が存在しても

$$\begin{aligned} \left| \int_X f_n(x)\, \mu(dx) - \int_X g_m(x)\, \mu(dx) \right| &\leq \int_X |f_n(x) - g_m(x)|\ |\mu|(dx) \\ &\leq \int_X |f_n(x) - f(x)|\ |\mu|(dx) + \int_X |f(x) - g_m(x)|\ |\mu|(dx) \longrightarrow 0 \quad (n, m \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

が成り立つから，

$$\alpha \coloneqq \lim_{n \to \infty} \int_X f_n(x)\, \mu(dx), \quad \beta \coloneqq \lim_{n \to \infty} \int_X g_n(x)\, \mu(dx)$$

とおけば

$$\begin{aligned} |\alpha - \beta| \leq \left| \alpha - \int_X f_n(x)\, \mu(dx) \right| + \left| \int_X f_n(x)\, \mu(dx) - \int_X g_m(x)\, \mu(dx) \right| + \left| \int_X g_m(x)\, \mu(dx) - \beta \right| \\ \longrightarrow 0 \quad (n, m \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

が従い $\alpha = \beta$ を得る．また (A.20) より

$$\left| \int_X f_n(x)\, \mu(dx) \right| \leq \int_X |f_n(x)|\, |\mu|(dx) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

が満たされているから，両辺で $n \longrightarrow \infty$ として (A.19) を得る． ∎

定義 A.4.3 において，(A.18) は (A.16) の拡張となっている．実際 f が可測単関数の場合，(A.17) を満たす単関数近似列として f 自身を選べばよい．定理 A.4.4 より (A.18) による f の積分は一意に確定し (A.16) の左辺に一致する．

定理 A.4.5 (積分の線型性). 定義 A.4.3 で定めた積分について，任意の $f, g \in \mathscr{L}^1(X, \mathcal{M}, |\mu|)$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対し

$$\int_X \alpha f(x) + \beta g(x)\, \mu(dx) = \alpha \int_X f(x)\, \mu(dx) + \beta \int_X g(x)\, \mu(dx)$$

が成り立つ．

証明.

第一段 f, g が可測単関数の場合，(A.16) で定める積分が線型性を持つことを示す．$u_1, \cdots, u_k, v_1, \cdots, v_r \in \mathbb{C}$ と $A_1, \cdots, A_k, B_1, \cdots, B_r \in \mathcal{M}$ ($X = \sum_{i=1}^k A_i = \sum_{j=1}^r B_j$) によって

$$f = \sum_{i=1}^k u_i \mathbb{1}_{A_i}, \quad g = \sum_{j=1}^r v_j \mathbb{1}_{B_j}$$

と表示されているとき，

$$\alpha f + \beta g = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^r (\alpha u_i + \beta v_j) \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}$$

と表現できるから

$$\begin{aligned}\int_X \alpha f(x) + \beta g(x)\, \mu(dx) &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^r (\alpha u_i + \beta v_j) \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^k u_i \mu(A_i) + \beta \sum_{j=1}^r v_j \mu(B_j) = \alpha \int_X f(x)\, \mu(dx) + \beta \int_X g(x)\, \mu(dx)\end{aligned}$$

が成り立つ．

第二段 f, g を一般の可測関数とし，f, g それぞれについて (A.17) を満たす単関数近似列 $(f_n)_{n=1}^\infty, (g_n)_{n=1}^\infty$ を一つ選ぶ．

$$\begin{aligned}&\int_X |(\alpha f_n(x) + \beta g_n(x)) - (\alpha f(x) + \beta g(x))|\ |\mu|(dx) \\ &\quad \leq |\alpha| \int_X |f_n(x) - f(x)|\ |\mu|(dx) + |\beta| \int_X |g_n(x) - g(x)|\ |\mu|(dx) \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)\end{aligned}$$

が成り立つから $\alpha f + \beta g$ の μ に関する積分は

$$\int_X \alpha f(x) + \beta g(x)\, \mu(dx) \coloneqq \lim_{n\to\infty} \int_X \alpha f_n(x) + \beta g_n(x)\, \mu(dx)$$

で定義され，前段の結果より

$$\begin{aligned}&\left| \int_X \alpha f(x) + \beta g(x)\, \mu(dx) - \alpha \int_X f(x)\, \mu(dx) - \beta \int_X g(x)\, \mu(dx) \right| \\ &\quad \leq \left| \int_X \alpha f(x) + \beta g(x)\, \mu(dx) - \int_X \alpha f_n(x) + \beta g_n(x)\, \mu(dx) \right| \\ &\qquad + \left| \alpha \int_X f_n(x)\, \mu(dx) + \beta \int_X g_n(x)\, \mu(dx) - \alpha \int_X f(x)\, \mu(dx) - \beta \int_X g(x)\, \mu(dx) \right| \\ &\longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)\end{aligned}$$

が従う． ∎

定理 A.4.6 (積分の測度に関する線型性). $(X, \mathcal{M})$ を可測空間，μ, ν をこの上の複素測度とする．$f : X \to \mathbb{C}$ が $|\mu|$ と $|\nu|$ について可積分であるなら，$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対し $|\alpha\mu|, |\beta\nu|, |\alpha\mu + \beta\nu|$ についても可積分であり，更に次が成り立つ:

$$\int_X f(x)\,(\alpha\mu + \beta\nu)(dx) = \alpha \int_X f(x)\,\mu(dx) + \beta \int_X f(x)\,\nu(dx).$$

証明. **第一段** f が可測単関数の場合について証明する．$a_i \in \mathbb{C},\ A_i \in \mathcal{M}\ (i = 1, \cdots, n,\ \sum_{i=1}^n A_i = X)$ を用いて

$$f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i}$$

と表されている場合，

$$\begin{aligned}\int_X f(x)\,(\alpha\mu + \beta\nu)(dx) &= \sum_{i=1}^n a_i(\alpha\mu + \beta\nu)(A_i) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^n a_i\mu(A_i) + \beta \sum_{i=1}^n a_i\nu(A_i) = \alpha \int_X f(x)\,\mu(dx) + \beta \int_X f(x)\,\nu(dx)\end{aligned}$$

が成り立つ．

第二段 f が一般の可測関数の場合について証明する．任意の $A \in \mathcal{M}$ に対して

$$|(\alpha\mu + \beta\nu)(A)| \leq |\alpha||\mu(A)| + |\beta||\nu(A)| \leq |\alpha||\mu|(A) + |\beta||\nu|(A)$$

が成り立つから，左辺で A を任意に分割しても右辺との大小関係は変わらず

$$|\alpha\mu + \beta\nu|(A) \leq |\alpha||\mu|(A) + |\beta||\nu|(A)$$

となる．従って f が $|\mu|$ と $|\nu|$ について可積分であるなら

$$\int_X |f(x)|\,|\alpha\mu + \beta\nu|(dx) \leq |\alpha| \int_X |f(x)|\,|\mu|(dx) + |\beta| \int_X |f(x)|\,|\nu|(dx) < \infty$$

が成り立ち前半の主張を得る．f の単関数近似列 $(f_n)_{n=1}^\infty$ を取れば，前段の結果と積分の定義より

$$\begin{aligned}&\left|\int_X f(x)\,(\alpha\mu + \beta\nu)(dx) - \alpha \int_X f(x)\,\mu(dx) - \beta \int_X f(x)\,\nu(dx)\right| \\ &\quad\leq \left|\int_X f(x)\,(\alpha\mu + \beta\nu)(dx) - \int_X f_n(x)\,(\alpha\mu + \beta\nu)(dx)\right| \\ &\qquad + |\alpha|\left|\int_X f(x)\,\mu(dx) - \int_X f_n(x)\,\mu(dx)\right| + |\beta|\left|\int_X f(x)\,\nu(dx) - \int_X f_n(x)\,\nu(dx)\right| \\ &\quad\longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)\end{aligned}$$

が成り立ち後半の主張が従う． ∎

参考文献

[1] I. Karatzas and S. Shreve, Brownian motion and stochastic calculus second edition, 1998.

[2] C. Chen, Study Notes in Matheamtics, available from http://www.stat.purdue.edu/~chen418/study_research/StochasticCalculus-note2.pdf, 2018/05/20.

[3] Mathematics Stack Exchange, A question about stochastic processes and stopping times, available from https://math.stackexchange.com/questions/84271/a-question-about-stochastic-processes-and-stopping-times, 2018/05/20.