関数解析レポート

百合川

2018 年 1 月 26 日

$a > 0, I = [0, a]$ とおく．$C(I)$ から $C(I)$ への線型作用素 T を次で定める:

$$\mathcal{D}(T) := \left\{ u \in C^1(I) \ ; \quad u(0) + u(a) = 0 \right\}, \quad Tu(x) = u'(x) \quad (x \in I).$$

このとき，$\sigma_p(T)$ 及び $\sigma(T)$ を求めよ.

証明.

点スペクトルについて　$(\lambda I - T)u = 0$ を満たす λ に対し，微分方程式を解けば

$$u(x) = Ce^{\lambda x} \quad (x \in I,\ C \in \mathbb{C})$$

と表せる．今 $u(0) + u(a) = 0$ が仮定されているから，

$$C + Ce^{\lambda a} = 0$$

が成り立つ．これは $C = 0$ 或は $\lambda = \frac{1}{a}\log(-1)$ の場合に実現する．$\lambda = \frac{1}{a}\log(-1)$ でなければ $C = 0$ でなくてはならないが，このとき $u = 0$ となり固有ベクトルにならないから $\lambda = \frac{1}{a}\log(-1)$ でなくてはならない．従って

$$\sigma_p(T) \subset \left\{ \sqrt{-1}\frac{(2n+1)\pi}{a} \ ; \quad n \in \mathbb{Z} \right\}$$

が得られる．逆に或る $n \in \mathbb{Z}$ に対して $\lambda = (2n+1)\pi/a$ と表されているとき，任意の $C \in \mathbb{C}$ に対して $u(x) = Ce^{\lambda x}$ $(x \in I)$ とおけば

$$\lambda u(x) - Tu(x) = 0 \quad (\forall x \in I), \quad u(0) + u(a) = 0$$

が満たされるから

$$\sigma_p(T) \supset \left\{ \sqrt{-1}\frac{(2n+1)\pi}{a} \ ; \quad n \in \mathbb{Z} \right\}$$

が成り立ち，$\sigma_p(T) = \left\{ \sqrt{-1}\frac{(2n+1)\pi}{a} \ ; \quad n \in \mathbb{Z} \right\}$ が得られる．

スペクトルについて　$\rho(T) = \mathbb{C} \backslash \sigma_p(T)$ が成り立つことを示す．これにより $\sigma(T) = \sigma_p(T)$ が従う．$\lambda \in \mathbb{C} \backslash \sigma_p(T)$ を任意に取る．$f \in C(I)$ に対し

$$\begin{cases} u'(x) - \lambda u(x) = f(x) \\ u(0) + u(a) = 0 \end{cases} \quad (x \in I)$$

を満たす u を考えれば，

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} u'(x) - \lambda u(x) = f(x) \\ u(0) + u(a) = 0 \end{cases} \quad (x \in I) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} u(x) = e^{\lambda x}u_0 + \int_0^x e^{\lambda(x-s)} f(s)\, ds \\ u(0) + u(a) = 0 \end{cases} \quad (x \in I) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} u(x) = e^{\lambda x}u_0 + \int_0^x e^{\lambda(x-s)} f(s)\, ds \\ u(0) + e^{\lambda a}u_0 + \int_0^a e^{\lambda(a-s)} f(s)\, ds = 0 \end{cases} \quad (x \in I) \\
&\Leftrightarrow u(x) = -\frac{e^{\lambda x}}{1 + e^{\lambda a}} \int_0^a e^{\lambda(a-s)} f(s)\, ds + \int_0^x e^{\lambda(x-s)} f(s)\, ds \quad (x \in I)
\end{aligned}$$

より f に対して u は唯一つ定まる．この対応を $R_\lambda : C(I) \xrightarrow{\mathrm{op}} C(I)$ と表せば，$\mathcal{D}(R_\lambda) = C(I)$ 且つ積分の線型性より R_λ 線型写像である．また

$$\|R_\lambda f\| \leq \|f\|$$

を満たすから R_λ は有界で，さらに

$$\begin{aligned} R_\lambda(\lambda - T)u &= u \quad (\forall u \in \mathcal{D}(T)), \\ (\lambda - T)R_\lambda f &= f \quad (\forall f \in C(I)) \end{aligned}$$

が成り立つから $R_\lambda = (\lambda - T)^{-1}$ が従い $\lambda \in \rho(T)$ を得る．

$a \in C_b(\mathbb{R}^d), \lambda > d$ とする．$f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ に対し，

$$T_a f(x) = \int_{|x-y|>1} \frac{a(x)f(y)}{|x-y|^\lambda}\, dy \quad (\text{a.e.} x \in \mathbb{R}^d)$$

により $T_a : \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ を定める．

(1) T_a は連続であることを示せ．

(2) $\lim_{|x|\to\infty} a(x) = 0$ のとき T_a がコンパクト作用素であることを示せ．

証明.

(1) 任意の $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ に対し $T_a f$ が二乗可積分であることと T_a の連続性を同時に示す．以下，$\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ のノルムを $\|\cdot\|$ と書き，$M \coloneqq \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |a(x)| < \infty$ とおく．$f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ に対し，Hölder の不等式より

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{|a(x)f(y)|}{|x-y|^\lambda}\, dy &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{|a(x)|}{|x-y|^{\frac{\lambda}{2}}} \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{\frac{\lambda}{2}}}\, dy \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{|a(x)|^2}{|x-y|^\lambda}\, dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{|f(y)|^2}{|x-y|^\lambda}\, dy \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

が任意の $x \in \mathbb{R}^d$ で成立する．右辺第一項について，$\lambda > d \geq 1$ であるから，変数変換を用いて

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{|a(x)|^2}{|x-y|^\lambda}\, dy \leq M^2 \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{1}{|x-y|^\lambda}\, dy = M^2 \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{|u|>1} \frac{1}{|u|^\lambda}\, du < \infty$$

が満たされる．従って $U \coloneqq \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{1}{|x-y|^\lambda}\, dy$ とおけば U は x に依らない定数である．今，$\mathbb{R}^d \ni x \longmapsto (a(x)f(y))/|x-y|^\lambda$ は各 $y \in \mathbb{R}^d \backslash \{x\}$ で連続，$\mathbb{R}^d \ni y \longmapsto \mathbb{1}_{\{|x-y|>1\}}(a(x)f(y))/|x-y|^\lambda$ は各 $x \in \mathbb{R}^d$ で $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)/\mathfrak{B}(\mathbb{C})$-可測より，$\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \ni (x,y) \longmapsto \mathbb{1}_{\{|x-y|>1\}}(a(x)f(y))/|x-y|^\lambda$ は $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d) \times \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)/\mathfrak{B}(\mathbb{C})$-可測であるから，Fubini の定理より

$$\begin{aligned} \|T_a f\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{|x-y|>1} \frac{a(x)f(y)}{|x-y|^\lambda}\, dy \right|^2 dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{|a(x)|^2}{|x-y|^\lambda}\, dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{|f(y)|^2}{|x-y|^\lambda}\, dy \right) dx \\ &\leq M^2 U \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{|f(y)|^2}{|x-y|^\lambda}\, dy\, dx \\ &= M^2 U \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^2\, dy \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{1}{|x-y|^\lambda}\, dx \\ &= M^2 U^2 \|f\|^2 \end{aligned} \tag{1}$$

が得られる．T_a が線型性を持てば有界性と連続性は一致するから，あとは T_a が線型性を持つことを示せばよい．

(2) $L^2(\mathbb{R}^d)$ が Banach 空間であるから，$B_c(L^2)$ は $B(L^2)$ の閉部分空間である．従って T_a に作用素ノルムで収束する $B_c(L^2)$ の列が存在すれば $T_a \in B_c(L^2)$ が従う．今，任意に $\epsilon > 0$ を取れば，仮定より或る $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ が存在して

$$|a(x)| < \epsilon \quad (|x| > N) \tag{2}$$

が成り立つ．また

$$a_n(x) := a(x)\mathbb{1}_{|x|\leq n} \quad (\forall x \in \mathbb{R}^d,\ n = 1, 2, \cdots)$$

により $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ を定めれば，各 n に対し

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \longmapsto \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{a_n(x)}{|x-y|^{\lambda}}$$

は二乗可積分であるから T_{a_n} は Hilbert-Schmidt 型積分作用素であり，従ってコンパクト作用素である．(1) より

$$\left\| T_a - T_{a_n} \right\| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |a(x) - a_n(x)| U$$

が成り立ち，(2) より $n > N$ ならば $\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |a(x) - a_n(x)| < \epsilon$ となるから，ϵ の任意性より

$$\left\| T_a - T_{a_n} \right\| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が従う．冒頭に書いた理由により T_a はコンパクト作用素である． ∎

$a = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^{\infty}$ に対して $T : \ell^2 \to \ell^2$ を $Tx = (a_n x_n)_{n=1}^{\infty}$ $(x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^2)$ で定める．

(1) T がコンパクト作用素であるための必要十分条件を求めよ．

(2) T が Hilbert-Schmidt 型作用素であるための必要十分条件を求めよ．

証明.

(1) 求める必要十分条件が $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であることを示す．

十分性　任意に ℓ^2 の有界列 $(x^{\nu})_{\nu=1}^{\infty}$ $\left(x^{\nu} = (x_n^{\nu})_{n=1}^{\infty}\right)$ を取る．対角線論法により，或る部分添数列 $(\nu(k))_{k=1}^{\infty}$ が存在して，全ての $n \in \mathbb{N}$ について $\left(x_n^{\nu(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ が $\mathbb{C}$ の Cauchy 列となるようにできる．実際 $\left(x_1^{\nu}\right)_{\nu=1}^{\infty}$ は $\mathbb{C}$ において有界列であるから，Bolzano-Weierstrass の定理より或る部分列 $\left(x_1^{\nu(k,1)}\right)_{k=1}^{\infty}$ は $\mathbb{C}$ の Cauchy 列となる．$\left(x_2^{\nu}\right)_{\nu=1}^{\infty}$ も $\mathbb{C}$ において有界列であるから，$(\nu(k,1))_{k=1}^{\infty}$ の部分添数列 $(\nu(k,2))_{k=1}^{\infty}$ が存在し $\left(x_2^{\nu(k,2)}\right)_{k=1}^{\infty}$ は $\mathbb{C}$ の Cauchy 列となる．同様に部分列を取る操作を繰り返し，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\left(x_n^{\nu(k,n)}\right)_{k=1}^{\infty}$ が $\mathbb{C}$ の Cauchy 列となるようにできる．$\nu(k) := \nu(k,k)$ $(k = 1, 2, \cdots)$ として $(\nu(k))_{k=1}^{\infty}$ を定めればよい．

必要性　$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ が満たされない場合に或る ℓ^2 の有界点列 $(x^k)_{k=1}^{\infty}$ が存在して，$(Tx^k)_{k=1}^{\infty}$ のいかなる部分列も収束しえないことを示す．或る $\epsilon > 0$ が存在して，$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ の或る部分列 $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ は

$$\left|a_{n_k}\right| \geq \epsilon$$

を満たすと仮定する．

$$x_n^k := \begin{cases} 1 & (n = n_k) \\ 0 & (n \neq n_k) \end{cases} \quad (n, k = 1, 2, \cdots)$$

として ℓ^2 の点列 $(x^k)_{k=1}^{\infty}$ を定めれば，$k \neq m$ なら

$$\left\| Tx^k - Tx^m \right\|^2 = |a_{n_k}|^2 + |a_{n_m}|^2 \geq 2\epsilon^2$$

を満たすから $(Tx^k)_{k=1}^{\infty}$ のいかなる部分列も収束しえない．

(2)

$(X, \mathcal{M}, \mu)$ を σ-有限な測度空間，$H = \mathrm{L}^2(X, \mathcal{M}, \mu) = \mathrm{L}^2(\mu)$ とする．$\mathcal{M}$-可測関数 $a : X \to \mathbb{C}$ に対して，H から H へのかけ算作用素 M_a を次で定める:

$$\mathcal{D}(M_a) = \{\, u \in H \ ; \quad au \in H \,\}, \quad (M_a u)(x) = a(x)u(x) \quad (x \in X).$$

(1) M_a は線型作用素で，$\mathcal{D}(M_a)$ は H で稠密なことを示せ．

(2) $M_a^* = M_{\overline{a}}$ が成り立つことを示せ．

(3) $\sigma(M_a) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \ ; \quad \forall \epsilon > 0 \text{ に対し } \mu\left(a^{-1}(U_\epsilon(\lambda))\right) > 0 \right\}$ を示せ．(ただし $U_\epsilon(\lambda)$ は λ の ϵ-近傍．)

(4) $\sigma_p(M_a) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \ ; \quad \mu\left(a^{-1}(\{\lambda\})\right) > 0 \right\}$ を示せ．

証明． σ-有限であるから或る系 $(X_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ が存在して $X_1 \subset X_2 \subset \cdots$，$\mu(X_n) < \infty$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, $\cup_{n\in\infty} X_n = X$ を満たす．

(1) 任意に $v \in H$ を取り $v_n \coloneqq v 1\!\!1_{\{|a| \leq n\}}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ として関数列 $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ を作る．全ての $x \in S$ で $|v_n(x)| \leq |v(x)|$ が満たされているから $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ である．また全ての $n \in \mathbb{N}$ について

$$\int_S |a(x)v_n(x)|^2 \mu(dx) = \int_{\{|a|\leq n\}} |a(x)v(x)|^2 \mu(dx) \leq n^2 \int_S |v(x)|^2 \mu(dx)$$

が成り立つから $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(M_a)$ も満たされる．

$$\| v - v_n \|^2 = \int_S |v(x) - v_n(x)|^2 \, \mu(dx) = \int_S 1\!\!1_{\{|a|>n\}}(x)|v(x)|^2 \, \mu(dx)$$

となり，右辺の被積分関数は各点で 0 に収束し，かつ n に関係なく可積分関数 $|v|^2$ で抑えられるから，Lebesgue の収束定理より

$$\lim_{n\to\infty} \| v - v_n \|_{\mathrm{L}^2(\mu)}^2 = \lim_{n\to\infty} \int_S 1\!\!1_{\{|a|>n\}}(x)|v(x)|^2 \, \mu(dx) = \int_S \lim_{n\to\infty} 1\!\!1_{\{|a|>n\}}(x)|v(x)|^2 \, \mu(dx) = 0$$

が得られる．v は任意に選んでいたから $D(M_a)$ は X において稠密である．

(2) 任意の $u, v \in \mathcal{D}(M_a) = \mathcal{D}(M_{\overline{a}})$ に対して

$$\langle M_a u, v \rangle = \int_X a(x)u(x)\overline{v(x)} \, \mu(dx) = \int_X u(x)\overline{\overline{a(x)}v(x)} \, \mu(dx) = \langle u, M_{\overline{a}} v \rangle$$

が成り立つから，$v \in \mathcal{D}(M_a^*)$ 且つ $M_a^* v = M_{\overline{a}} v$ $(\forall v \in \mathcal{D}(M_{\overline{a}}))$ が従う．逆に任意に $u \in \mathcal{D}(M_a), v \in \mathcal{D}(M_a^*)$ を取れば,

$$\langle u, M_a^* v \rangle = \langle M_a u, v \rangle = \langle u, M_{\overline{a}} v \rangle$$

となり $M_a^* v = M_{\overline{a}} v$ $(\forall v \in \mathcal{D}(M_a^*))$ が従う．

(3) $\lambda \in \mathbb{C}$ を任意に取り固定し，任意の $\epsilon > 0$ に対して $V_\epsilon := a^{-1}(U_\epsilon(\lambda))$ とおく．或る $\epsilon > 0$ が存在して $\mu(V_\epsilon) = 0$ が成り立つ場合，

$$b(x) := \begin{cases} \frac{1}{\lambda - a(x)} & (x \in X \backslash V_\epsilon) \\ 0 & (x \in V_\epsilon) \end{cases}$$

と定めれば，任意の $u \in H$ に対して

$$\int_X |b(x)u(x)|^2 \, \mu(dx) = \int_{X \backslash V_\epsilon} \frac{1}{|\lambda - a(x)|^2} |u(x)|^2 \, \mu(dx) \leq \frac{1}{\epsilon^2} \int_X |u(x)|^2 \, \mu(dx) < \infty$$

が成り立つから $\mathcal{D}(M_b) = H$ である．更に

$$\begin{aligned} b(\lambda - a)u &= u \quad (\mu\text{-a.e.}, \ \forall u \in \mathcal{D}(M_a)), \\ (\lambda - a)bu &= u \quad (\mu\text{-a.e.}, \ \forall u \in H) \end{aligned}$$

が成り立つから $M_b = (\lambda I - M_a)^{-1}$ であり，$M_b \in \mathrm{B}(H)$ であるから $\lambda \in \rho(M_a)$ が成り立つ．一方任意の $\epsilon > 0$ に対して $\mu(V_\epsilon) = 0$ となる場合，任意に $\epsilon > 0$ を取り固定する．

$$\mu(V_\epsilon) = \lim_{n \to \infty} \mu(V_\epsilon \cap X_n)$$

が成り立つから，或る $N \in \mathbb{N}$ が存在して $\mu(V_\epsilon \cap X_N) > 0$ を満たす．

$$u_\epsilon(x) := \begin{cases} 1 & (x \in V_\epsilon \cap X_N) \\ 0 & (x \notin V_\epsilon \cap X_N) \end{cases}$$

と定めれば，u_ϵ は二乗可積分であり

$$\int_X |a(x)u_\epsilon(x)|^2 \, \mu(dx) = \int_{V_\epsilon \cap X_N} |a(x)u_\epsilon(x)|^2 \, \mu(dx) < \infty$$

を満たすから $u_\epsilon \in \mathcal{D}(M_a)$ である．また

$$\| (\lambda I - M_a)u_\epsilon \|^2 = \int_X |\lambda - a(x)|^2 |u_\epsilon(x)|^2 \, \mu(dx) = \int_{V_\epsilon \cap X_N} |\lambda - a(x)|^2 |u_\epsilon(x)|^2 \, \mu(dx) \leq \epsilon^2 \int_X |u_\epsilon(x)|^2 \, \mu(dx) = \epsilon^2 \, \| u_\epsilon \|^2$$

を満たす．つまり任意の ϵ に対し或る $u_\epsilon \in \mathcal{D}(M_a)$ が存在し

$$\frac{1}{\epsilon} \leq \frac{\| u_\epsilon \|}{\| (\lambda I - M_a)u_\epsilon \|}$$

を満たす．ここで $(\lambda I - M_a)$ に対し逆作用素 $(\lambda I - M_a)^{-1}$ が存在するとしても，$u_\epsilon \in \mathcal{D}(M_a)$ に対して或る $v_\epsilon \in \mathcal{D}\left((\lambda I - M_a)^{-1}\right)$ が存在して $u_\epsilon = (\lambda I - M_a)^{-1} v_\epsilon$ を満たすが，

$$\frac{1}{\epsilon} \leq \frac{\left\| (\lambda I - M_a)^{-1} v_\epsilon \right\|}{\| v_\epsilon \|}$$

が従い，ϵ の任意性より $(\lambda I - M_a)^{-1}$ の作用素ノルムは非有界である．従ってこの場合 $\lambda \in \sigma(M_a)$ が成り立つ．

(4) 先ず $\sigma_p(M_a) \subset \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \ ; \ \ \mu\left(a^{-1}(\{\lambda\})\right) > 0 \right\}$ が成り立つことを示す．任意の $\lambda \in \sigma_p(M_a)$ に対して固有ベクトル $u \in H$ が存在する．$u \neq 0$ (関数類の意味で) より

$$N := \{ \, x \in X \ ; \ \ u(x) \neq 0 \, \}$$

とおけば $\mu(N)>0$ が満たされる．一方で点スペクトルの定義より $(\lambda I-M_a)u=0$ が成り立つから

$$0=\|(\lambda I-M_a)u\|^2=\int_X|\lambda-a(x)|^2|u(x)|^2\,\mu(dx)=\int_N|\lambda-a(x)|^2|u(x)|^2\,\mu(dx)$$

となり

$$\mu(\{\,x\in N\ ;\quad |\lambda-a(x)|>0\,\})=0$$

が従う．$\mu(N)>0$ であるから

$$\mu\left(a^{-1}(\{\lambda\})\right)\geq\mu(\{\,x\in N\ ;\quad |\lambda-a(x)|=0\,\})>0$$

が成り立ち $\lambda\in\left\{\lambda\in\mathbb{C}\ ;\quad \mu\left(a^{-1}(\{\lambda\})\right)>0\right\}$ を得る．次に $\sigma_p(M_a)\supset\left\{\lambda\in\mathbb{C}\ ;\quad \mu\left(a^{-1}(\{\lambda\})\right)>0\right\}$ が成り立つことを示す．任意の $\lambda\in\left\{\lambda\in\mathbb{C}\ ;\quad \mu\left(a^{-1}(\{\lambda\})\right)>0\right\}$ に対して

$$\Lambda\coloneqq a^{-1}(\{\lambda\})$$

とおけば $\mu(\Lambda)>0$ が満たされている．

$$\mu(\Lambda)=\lim_{n\to\infty}\mu(\Lambda\cap X_n)$$

が成り立つから，或る $n\in\mathbb{N}$ が存在して $\mu(\Lambda\cap X_n)>0$ を満たす．

$$u(x)\coloneqq\begin{cases}1 & (x\in\Lambda\cap X_n),\\ 0 & (x\notin\Lambda\cap X_n)\end{cases}$$

として u を定めれば u は二乗可積分であり，$\mu(\Lambda\cap X_n)>0$ であるから関数類として $u\neq 0$ を満たす．また

$$\|(\lambda I-M_a)u\|^2=\int_X|\lambda-a(x)|^2|u(x)|^2\,\mu(dx)=\int_{\Lambda\cap X_n}|\lambda-a(x)|^2|u(x)|^2\,\mu(dx)=0$$

が成り立ち $(\lambda I-M_a)u=0$ が従うから u は λ の固有ベクトルであり，$\lambda\in\sigma_p(M_a)$ を得る．

$(\mathbb{C},\mathfrak{B}(\mathbb{C}),\mu)$ を σ-有限な測度空間，$H=\mathrm{L}^2(\mathbb{C},\mathfrak{B}(\mathbb{C}),\mu)=\mathrm{L}^2(\mu)$ とする．Borel 可測関数 $a:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ に対して，H から H へのかけ算作用素 M_a を次で定める:

$$\mathcal{D}(M_a)=\{\,u\in H\ ;\quad au\in H\,\},\quad (M_au)(z)=a(z)u(z)\quad (z\in\mathbb{C}).$$

また $E(A)=M_{\mathbb{1}_{a^{-1}(A)}}$ $(A\in\mathfrak{B}(\mathbb{C}))$ と定める．

(1) E は，$\mathfrak{B}(\mathbb{C})$ で定義され，H 上の直交射影を値とするスペクトル測度であることを示せ．

(2) Borel 可測関数 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ に対し，

$$T_f\coloneqq\int_{\mathbb{C}}f(z)\,E(dxdy)\quad (z=x+iy,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2)$$

と定める．このとき，$T_f=M_{f\circ a}$ を示せ．

証明.

(1) 任意の $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$ に対し $\mathbb{1}_{a^{-1}(A)}$ は有界であるから，春学期のレポート問題より $M_{\mathbb{1}_{a^{-1}(A)}} \in \mathrm{B}(H)$ が成り立つ．ゆえに E は $\mathfrak{B}(\mathbb{C})$ 全体で定義される．次に任意に $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$ を取り $E(A)$ が H 上の直交射影であることを示す．実際

$$E(A)^2 u = M_{\mathbb{1}_{a^{-1}(A)}} M_{\mathbb{1}_{a^{-1}(A)}} u = \mathbb{1}_{a^{-1}(A)} \mathbb{1}_{a^{-1}(A)} u = \mathbb{1}_{a^{-1}(A)} u = E(A)u \quad (\forall u \in H)$$

が成り立ち $E(A)^2 = E(A)$ が得られ，また $\mathbb{1}_{a^{-1}(A)}$ は実数値であるから

$$E(A)^* = M^*_{\mathbb{1}_{a^{-1}(A)}} = M_{\mathbb{1}_{a^{-1}(A)}} = E(A)$$

が成り立ち，$E(A)$ は自己共役である．最後に E がスペクトル測度であることを示す．先ず

$$E(\mathbb{R}^d)u = M_{\mathbb{1}_{\mathbb{C}}} u = u$$

より $E(\mathbb{R}^d) = I$ を得る．また任意の互いに素な集合列 $A_1, A_2, \cdots \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$ を取れば

$$E(\sum_{n=1}^{\infty} A_n)u = \sum_{n=1}^{\infty} E(A_n)u \quad (\forall u \in H)$$

が成り立つ．

(2) $\mathcal{D}\left(T_f\right) = \mathcal{D}\left(M_{f\circ a}\right)$ を示さなくてはいけない．f が可測単関数の場合，

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$$

として

$$\int_{\mathbb{C}} |f(x)|^2\ \mu_u(dx) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \langle E(A_i)u, u\rangle = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \int_{\mathbb{C}} \mathbb{1}_{a^{-1}(A_i)} |u(x)|^2\ \mu(dx) = \int_{\mathbb{C}} |f(a(x))|^2 |u(x)|^2\ \mu(dx)$$

が成り立つ．f が一般の可測関数の場合は MSF-単調近似列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ を取れば

$$\int_{\mathbb{C}} |f_n(x)|^2\ \mu_u(dx) = \int_{\mathbb{C}} |f_n(a(x))|^2 |u(x)|^2\ \mu(dx) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

が従い，単調収束定理より両辺はそれぞれ $\int_{\mathbb{C}} |f(x)|^2\ \mu_u(dx), \int_{\mathbb{C}} |f(a(x))|^2 |u(x)|^2\ \mu(dx)$ に収束する．従って

$$u \in \mathcal{D}\left(T_f\right) \quad \Leftrightarrow \quad u \in \mathcal{D}\left(M_{f\circ a}\right)$$

が成り立つ．次に $T_f u = M_{f\circ a} u\ (\forall u \in \mathcal{D}\left(T_f\right))$ を示す．f が可測単関数の場合，

$$T_f u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E(A_i) u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{a^{-1}(A_i)} u = f_n \circ a u = M_{f_n \circ a} u \quad (\forall u \in H)$$

が成り立つ．一般の f に対しては，MSF-単調近似列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ を取る．

$$\left\| T_f u - M_{f\circ a} u \right\| \leq \left\| T_f u - T_{f_n} u \right\| + \left\| M_{f_n\circ a} u - M_{f\circ a} u \right\|$$

が成り立つ．スペクトル積分 T_f の定義より

$$\left\| T_f u - T_{f_n} u \right\| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成り立ち，また Lebesgue の収束定理より

$$\left\| M_{f_n\circ a} u - M_{f\circ a} u \right\|^2 = \int_{\mathbb{C}} |f_n(a(x))u(x) - f(a(x))u(x)|^2\ \mu(dx) \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

を得る．ゆえに

$$\left\| T_f u - M_{f \circ a} u \right\| = 0$$

が成り立つ．