ε 計算とクラスの導入による具体的で直観的な集合論の構築

関根深澤研修士二年 百合川尚学
学籍番号：29C17095

2020 年 1 月 28 日

本論文では **ZF** 集合論の一つの拡張を提示したが，そこでの主要な定理は，**ZF** 集合論のどの命題に対しても「**ZF** 集合論で証明可能」ならば「本論文の集合論で証明可能」であり，逆に「本論文の集合論で証明可能」ならば「**ZF** 集合論で証明可能」であるということである．これを精密に言い直せば，**ZF** 集合論の任意の命題 ψ に対して「Γ から ψ への **HK** の証明で $\mathcal{L}_{\in}$ の式の列であるものが取れる」ことと「Σ から ψ への **HE** の証明で $\mathcal{L}$ の文の列であるものが取れる」ことが同値であるということになる．以下で記号を解説する．

$\mathcal{L}_{\in}$ とは **ZF** 集合論の言語 $\{\in\}$ のことである．本論文ではもう二つの言語 $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ と $\mathcal{L}$ があり，項および式の形成規則はそれぞれの言語の中で指定される．変項の自由な出現が無い式を文と呼ぶ．Γ とは $\mathcal{L}_{\in}$ の文で書かれた **ZF** 集合論の公理系 (外延性・相等性・置換・対・合併・冪・正則性・無限) を表す．**HK** とは古典論理の Hilbert 流証明体系のことであり，「Γ からの **HK** の証明で $\mathcal{L}_{\in}$ の式の列であるもの」とは，$\mathcal{L}_{\in}$ の式の列 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ で，各 φ_i について以下のいずれかが満たされるものを言う：(1) **HK** の公理である．(2) Γ の公理である．(3) 列の前の式 φ_j, φ_k から三段論法で得られる．つまりその場合は φ_j が $\varphi_k \rightarrow \varphi_i$ なる式であるか，φ_k が $\varphi_j \rightarrow \varphi_i$ なる式である．(4) 列の前の式 φ_j から汎化で得られる．

これらに対して，$\mathcal{L}$ も Σ も **HE** も本論文特有のものである．$\mathcal{L}$ とは $\mathcal{L}_{\in}$ の語彙を拡張した言語であり，拡張の中間にもう一つ $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ がある．$\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ とは $\mathcal{L}_{\in}$ に ε を追加した言語であるが，この ε とは数論の無矛盾性の考察過程で Hilbert[1] が発案したものである．$\mathcal{L}$ には $\{\, x \mid \varphi \,\}$ の形の項を追加し，正式に類 (class) が扱えるようになる．Σ とは本論文における集合論の公理系であり，Γ の「外延性」,「相等性」が類に対する言明に変更され，また「内包性」と「要素」の公理が新たに追加される．

内包性公理は

$$\forall u \,(\, u \in \{\, x \mid \varphi(x) \,\} \leftrightarrow \varphi(u) \,)$$

なる式を指し，$\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$ に対して「φ である x の全体」の意味を与える．一方要素の公理は

$$a \in b \rightarrow \exists x \,(\, a = x \,)$$

なる式を指し，これによって要素となりうるものは集合に限られる．右辺の $\exists x \,(\, a = x \,)$ は「a は集合である」という意味の式であり，竹内 [2] の集合の定義を引用したものである．**HE** とは **HK** を改造した証明体系で，量化の公理に違いがあり，**HK** の公理である $\forall y \,(\, \psi \rightarrow \varphi(x/y) \,) \rightarrow (\, \psi \rightarrow \forall x \varphi \,)$ と $\forall y \,(\, \varphi(x/y) \rightarrow \psi \,) \rightarrow (\, \exists x \varphi \rightarrow \psi \,)$ が削除され，代わりに

$$\neg \forall x \varphi \rightarrow \exists x \neg \varphi,$$
$$\exists x \varphi \rightarrow \varphi(x/\varepsilon x \varphi)$$

が **HE** の公理となる．**HE** の証明は全て文で行う．「Σ からの **HE** の証明で $\mathcal{L}$ の文の列であるもの」とは，$\mathcal{L}$ の文の列 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ で，各 φ_i について以下のいずれかが満たされるものを言う：(1) **HE** の公理である．(2) Σ の公理である．(3) 列の前の式 φ_j, φ_k から三段論法で得られる．ε 項の作用によって **HE** では汎化は不要になる．

参考文献

[1] D. ヒルベルト and P. ベルナイス, 数学の基礎 (吉田夏彦, 渕野昌訳), 丸善出版株式会社, 2012, pp. 23-63, ISBN 978-4-621-06405-4.

[2] 竹内外史, 現代集合論入門, 増強版, 日本評論社, 2016, pp. 138-183, ISBN 978-4-535-60116-1.