

関数解析後期メモ

百合川

2018 年 1 月 26 日

目次

$a > 0, I = [0, a]$ とおく. $C(I)$ から $C(I)$ への線型作用素 T を次で定める:

$$\mathcal{D}(T) := \left\{ u \in C^1(I) ; \quad u(0) + u(a) = 0 \right\}, \quad Tu(x) = u'(x) \quad (x \in I).$$

このとき, $\sigma_p(T)$ 及び $\sigma(T)$ を求めよ.

証明.

点スペクトルについて $(\lambda I - T)u = 0$ を満たす λ に対し, 微分方程式を解けば

$$u(x) = Ce^{\lambda x} \quad (x \in I, C \in \mathbb{C})$$

と表せる. 今 $u(0) + u(a) = 0$ が仮定されているから,

$$C + Ce^{\lambda a} = 0$$

が成り立つ. これは $C = 0$ 或は $\lambda = \frac{1}{a} \log(-1)$ の場合に実現する. $\lambda = \frac{1}{a} \log(-1)$ でなければ $C = 0$ でなくてはならないが, このとき $u = 0$ となり固有ベクトルにならないから $\lambda = \frac{1}{a} \log(-1)$ でなくてはならない. 従って

$$\sigma_p(T) \subset \left\{ \sqrt{-1} \frac{(2n+1)\pi}{a} ; \quad n \in \mathbb{Z} \right\}$$

が得られる. 逆に或る $n \in \mathbb{Z}$ に対して $\lambda = (2n+1)\pi/a$ と表されているとき, 任意の $C \in \mathbb{C}$ に対して $u(x) = Ce^{\lambda x}$ ($x \in I$) とおけば

$$\lambda u(x) - Tu(x) = 0 \quad (\forall x \in I), \quad u(0) + u(a) = 0$$

が満たされるから

$$\sigma_p(T) \supset \left\{ \sqrt{-1} \frac{(2n+1)\pi}{a} ; \quad n \in \mathbb{Z} \right\}$$

が成り立ち, $\sigma_p(T) = \left\{ \sqrt{-1} \frac{(2n+1)\pi}{a} ; \quad n \in \mathbb{Z} \right\}$ が得られる.

スペクトルについて $\rho(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma_p(T)$ が成り立つことを示す. これにより $\sigma(T) = \sigma_p(T)$ が従う. $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_p(T)$ を任意に取る. $f \in C(I)$ に対し

$$\begin{cases} u'(x) - \lambda u(x) = f(x) \\ u(0) + u(a) = 0 \end{cases} \quad (x \in I)$$

を満たす u を考えれば,

$$\begin{aligned} & \begin{cases} u'(x) - \lambda u(x) = f(x) \\ u(0) + u(a) = 0 \end{cases} \quad (x \in I) \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) = e^{\lambda x} u_0 + \int_0^x e^{\lambda(x-s)} f(s) ds \\ u(0) + u(a) = 0 \end{cases} \quad (x \in I) \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) = e^{\lambda x} u_0 + \int_0^x e^{\lambda(x-s)} f(s) ds \\ u(0) + e^{\lambda a} u_0 + \int_0^a e^{\lambda(a-s)} f(s) ds = 0 \end{cases} \quad (x \in I) \\ & \Leftrightarrow u(x) = -\frac{e^{\lambda x}}{1 + e^{\lambda a}} \int_0^a e^{\lambda(a-s)} f(s) ds + \int_0^x e^{\lambda(x-s)} f(s) ds \quad (x \in I) \end{aligned}$$

より f に対して u は唯一つ定まる. この対応を $R_\lambda : C(I) \xrightarrow{\text{op}} C(I)$ と表せば, $\mathcal{D}(R_\lambda) = C(I)$ 且つ積分の線型性より R_λ 線型写像である. また

$$\|R_\lambda f\| \leq \|f\|$$

を満たすから R_λ は有界で, さらに

$$\begin{aligned} R_\lambda(\lambda - T)u &= u \quad (\forall u \in \mathcal{D}(T)), \\ (\lambda - T)R_\lambda f &= f \quad (\forall f \in C(I)) \end{aligned}$$

が成り立つから $R_\lambda = (\lambda - T)^{-1}$ が従い $\lambda \in \rho(T)$ を得る.

$a \in C_b(\mathbb{R}^d), \lambda > d$ とする. $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対し,

$$T_a f(x) = \int_{|x-y|>1} \frac{a(x)f(y)}{|x-y|^\lambda} dy \quad (\text{a.e. } x \in \mathbb{R}^d)$$

により $T_a : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ を定める.

(1) T_a は連続であることを示せ.

証明.

(1) 任意の $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対し $T_a f$ が二乗可積分であることと T_a の連続性を同時に示す. 以下, $L^2(\mathbb{R}^d)$ のノルムを $\|\cdot\|$ と書き, $M := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |a(x)| < \infty$ とおく. $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対し, Hölder の不等式より

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{|a(x)f(y)|}{|x-y|^\lambda} dy &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{|a(x)|}{|x-y|^{\frac{\lambda}{2}}} \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{\frac{\lambda}{2}}} dy \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{|a(x)|^2}{|x-y|^\lambda} dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{|f(y)|^2}{|x-y|^\lambda} dy \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

が任意の $x \in \mathbb{R}^d$ で成立する. 右辺第一項について, $\lambda > d \geq 1$ であるから, 変数変換を用いて

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{|a(x)|^2}{|x-y|^\lambda} dy \leq M^2 \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{1}{|x-y|^\lambda} dy = M^2 \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{|u|>1} \frac{1}{|u|^\lambda} du < \infty$$

が満たされる. 従って $U := \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{1}{|x-y|^\lambda} dy$ とおけば U は x に依らない定数である. 今, $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto (a(x)f(y))/|x-y|^\lambda$ は各 $y \in \mathbb{R}^d \setminus \{x\}$ で連続, $\mathbb{R}^d \ni y \mapsto \mathbb{1}_{\{|x-y|>1\}}(a(x)f(y))/|x-y|^\lambda$ は各 $x \in \mathbb{R}^d$ で $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)/\mathfrak{B}(\mathbb{C})$ -可測より, $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \ni (x, y) \mapsto \mathbb{1}_{\{|x-y|>1\}}(a(x)f(y))/|x-y|^\lambda$ は $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d) \times \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)/\mathfrak{B}(\mathbb{C})$ -可測であるから, Fubini の定理より

$$\begin{aligned} \|T_a f\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{|x-y|>1} \frac{a(x)f(y)}{|x-y|^\lambda} dy \right|^2 dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{|a(x)|^2}{|x-y|^\lambda} dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{|f(y)|^2}{|x-y|^\lambda} dy \right) dx \\ &\leq M^2 U \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{|f(y)|^2}{|x-y|^\lambda} dy dx \\ &= M^2 U \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^2 dy \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{1}{|x-y|^\lambda} dx \\ &= M^2 U^2 \|f\|^2 \end{aligned}$$

が得られる. T_a が線型性を持てば有界性と連続性は一致するから, あとは T_a が線型性を持つことを示せばよい.

- (2) $L^2(\mathbb{R}^d)$ が Banach 空間であるから, $B_c(L^2)$ は $B(L^2)$ の閉部分空間である. 従って T_a に作用素ノルムで収束する $B_c(L^2)$ の列が存在すれば $T_a \in B_c(L^2)$ が従う.

$$a_n(x) := a(x) \mathbb{1}_{|x| \leq n} \quad (\forall x \in \mathbb{R}^d, n = 1, 2, \dots)$$

により $(a_n)_{n=1}^\infty$ を定めれば, 各 n に対し

$$\mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{|a(x) - a_n(x)| |f(y)|}{|x-y|^\lambda} \leq \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{2|a(x)| |f(y)|}{|x-y|^\lambda} \quad (\forall (x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$$

が成り立ち, 右辺の関数は (1) の結果より $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ で二乗まで可積分である. 従って Fubini の定理と Lebesgue の収束定理より

$$\|T_a f - T_{a_n} f\|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{|a(x) - a_n(x)|^2 |f(y)|^2}{|x-y|^{2\lambda}} dy dx$$

$a = (a_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty$ に対して $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ を $Tx = (a_n x_n)_{n=1}^\infty$ ($x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^2$) で定める.

- (1) T がコンパクト作用素であるための必要十分条件を求めよ.
- (2) T が Hilbert-Schmidt 型作用素であるための必要十分条件を求めよ.

証明.

- (1) 求める必要十分条件が, 或る $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $a_n = 0$ ($\forall n > n_0$) が満たされていること, であることを示す.
- 十分性 任意に ℓ^2 の有界列 $(x^\nu)_{\nu=1}^\infty$ ($x^\nu = (x_n^\nu)_{n=1}^\infty$) を取る. 対角線論法により, 或る部分添数列 $(\nu(k))_{k=1}^\infty$ が存在して, 全ての $n \in \mathbb{N}$ について $(x_n^{\nu(k)})_{k=1}^\infty$ が \mathbb{C} の Cauchy 列となるようにできる. 実際 $(x_1^\nu)_{\nu=1}^\infty$ は \mathbb{C} において有界列であるから, Bolzano-Weierstrass の定理より或る部分列 $(x_1^{\nu(k,1)})_{k=1}^\infty$ は \mathbb{C} の Cauchy 列となる. $(x_2^\nu)_{\nu=1}^\infty$ も \mathbb{C} において有界列であるから, $(\nu(k,1))_{k=1}^\infty$ の部分添数列 $(\nu(k,2))_{k=1}^\infty$ が存在し $(x_2^{\nu(k,2)})_{k=1}^\infty$ は \mathbb{C} の Cauchy 列となる. 同様に部分列を取る操作を繰り返し, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $(x_n^{\nu(k,n)})_{k=1}^\infty$ が \mathbb{C} の Cauchy 列となるようにできる. $\nu(k) := \nu(k, k)$ ($k = 1, 2, \dots$) として $(\nu(k))_{k=1}^\infty$ を定めればよい.

必要性

- (2)

(X, \mathcal{M}, μ) を σ -有限な測度空間, $H = L^2(X, \mathcal{M}, \mu) = L^2(\mu)$ とする. \mathcal{M} -可測関数 $a : X \rightarrow \mathbb{C}$ に対して, H から H へのかけ算作用素 M_a を次で定める:

$$\mathcal{D}(M_a) = \{ u \in H ; \quad au \in H \}, \quad (M_a u)(x) = a(x)u(x) \quad (x \in X).$$

- (1) M_a は線型作用素で, $\mathcal{D}(M_a)$ は H で稠密なことを示せ.
- (2) $M_a^* = M_{\bar{a}}$ が成り立つことを示せ.
- (3) $\sigma(M_a) = \{ \lambda \in \mathbb{C} ; \quad \forall \epsilon > 0 \text{ に対し } \mu(a^{-1}(U_\epsilon(\lambda))) > 0 \}$ を示せ. (ただし $U_\epsilon(\lambda)$ は λ の ϵ -近傍.)
- (4) $\sigma_p(M_a) = \{ \lambda \in \mathbb{C} ; \quad \mu(a^{-1}(\{\lambda\})) > 0 \}$ を示せ.

証明. σ -有限であるから或る系 $(X_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{M}$ が存在して $X_1 \subset X_2 \subset \dots$, $\mu(X_n) < \infty$ ($\forall n \in \mathbb{N}$), $\cup_{n \in \mathbb{N}} X_n = X$ を満たす.

- (1) 任意に $v \in H$ を取り $v_n := v \mathbb{1}_{\{|a| \leq n\}}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) として関数列 $(v_n)_{n=1}^\infty$ を作る. 全ての $x \in S$ で $|v_n(x)| \leq |v(x)|$ が満たされているから $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ である. また全ての $n \in \mathbb{N}$ について

$$\int_S |a(x)v_n(x)|^2 \mu(dx) = \int_{\{|a| \leq n\}} |a(x)v(x)|^2 \mu(dx) \leq n^2 \int_S |v(x)|^2 \mu(dx)$$

が成り立つから $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(M_a)$ も満たされる.

$$\|v - v_n\|^2 = \int_S |v(x) - v_n(x)|^2 \mu(dx) = \int_S \mathbb{1}_{\{|a| > n\}}(x) |v(x)|^2 \mu(dx)$$

となり, 右辺の被積分関数は各点で 0 に収束し, かつ n に関係なく可積分関数 $|v|^2$ で抑えられるから, Lebesgue の収束定理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v - v_n\|_{L^2(\mu)}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S \mathbb{1}_{\{|a| > n\}}(x) |v(x)|^2 \mu(dx) = \int_S \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{\{|a| > n\}}(x) |v(x)|^2 \mu(dx) = 0$$

が得られる. v は任意に選んでいたから $D(M_a)$ は X において稠密である.

- (2) 任意の $u, v \in \mathcal{D}(M_a) = \mathcal{D}(M_{\bar{a}})$ に対して

$$\langle M_a u, v \rangle = \int_X a(x) u(x) \overline{v(x)} \mu(dx) = \int_X u(x) \overline{a(x) v(x)} \mu(dx) = \langle u, M_{\bar{a}} v \rangle$$

が成り立つから, $v \in \mathcal{D}(M_a^*)$ 且つ $M_a^* v = M_{\bar{a}} v$ ($\forall v \in \mathcal{D}(M_{\bar{a}})$) が従う. 逆に任意に $u \in \mathcal{D}(M_a)$, $v \in \mathcal{D}(M_a^*)$ を取れば,

$$\langle u, M_a^* v \rangle = \langle M_a u, v \rangle = \langle u, M_{\bar{a}} v \rangle$$

となり $M_a^* v = M_{\bar{a}} v$ ($\forall v \in \mathcal{D}(M_a^*)$) が従う.

- (3) $\lambda \in \mathbb{C}$ を任意に取り固定し, 任意の $\epsilon > 0$ に対して $V_\epsilon := a^{-1}(U_\epsilon(\lambda))$ とおく. 或る $\epsilon > 0$ が存在して $\mu(V_\epsilon) = 0$ が成り立つ場合,

$$b(x) := \begin{cases} \frac{1}{\lambda - a(x)} & (x \in X \setminus V_\epsilon) \\ 0 & (x \in V_\epsilon) \end{cases}$$

と定めれば, 任意の $u \in H$ に対して

$$\int_X |b(x)u(x)|^2 \mu(dx) = \int_{X \setminus V_\epsilon} \frac{1}{|\lambda - a(x)|^2} |u(x)|^2 \mu(dx) \leq \frac{1}{\epsilon^2} \int_X |u(x)|^2 \mu(dx) < \infty$$

が成り立つから $\mathcal{D}(M_b) = H$ である. 更に

$$\begin{aligned} b(\lambda - a)u &= u \quad (\mu\text{-a.e.}, \forall u \in \mathcal{D}(M_a)), \\ (\lambda - a)bu &= u \quad (\mu\text{-a.e.}, \forall u \in H) \end{aligned}$$

が成り立つから $M_b = (\lambda I - M_a)^{-1}$ であり, $M_b \in \mathbf{B}(H)$ であるから $\lambda \in \rho(M_a)$ が成り立つ. 一方任意の $\epsilon > 0$ に対して $\mu(V_\epsilon) = 0$ となる場合, 任意に $\epsilon > 0$ を取り固定する.

$$\mu(V_\epsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(V_\epsilon \cap X_n)$$

が成り立つから, 或る $N \in \mathbb{N}$ が存在して $\mu(V_\epsilon \cap X_N) > 0$ を満たす.

$$u_\epsilon(x) := \begin{cases} 1 & (x \in V_\epsilon \cap X_N) \\ 0 & (x \notin V_\epsilon \cap X_N) \end{cases}$$

と定めれば, u_ϵ は二乗可積分であり

$$\int_X |a(x)u_\epsilon(x)|^2 \mu(dx) = \int_{V_\epsilon \cap X_N} |a(x)u_\epsilon(x)|^2 \mu(dx) < \infty$$

を満たすから $u_\epsilon \in \mathcal{D}(M_a)$ である. また

$$\|(\lambda I - M_a)u_\epsilon\|^2 = \int_X |\lambda - a(x)|^2 |u_\epsilon(x)|^2 \mu(dx) = \int_{V_\epsilon \cap X_N} |\lambda - a(x)|^2 |u_\epsilon(x)|^2 \mu(dx) \leq \epsilon^2 \int_X |u_\epsilon(x)|^2 \mu(dx) = \epsilon^2 \|u_\epsilon\|^2$$

を満たす. つまり任意の ϵ に対し或る $u_\epsilon \in \mathcal{D}(M_a)$ が存在し

$$\frac{1}{\epsilon} \leq \frac{\|u_\epsilon\|}{\|(\lambda I - M_a)u_\epsilon\|}$$

を満たす. ここで $(\lambda I - M_a)$ に対し逆作用素 $(\lambda I - M_a)^{-1}$ が存在するとしても, $u_\epsilon \in \mathcal{D}(M_a)$ に対して或る $v_\epsilon \in \mathcal{D}((\lambda I - M_a)^{-1})$ が存在して $u_\epsilon = (\lambda I - M_a)^{-1}v_\epsilon$ を満たすが,

$$\frac{1}{\epsilon} \leq \frac{\|(\lambda I - M_a)^{-1}v_\epsilon\|}{\|v_\epsilon\|}$$

が従い, ϵ の任意性より $(\lambda I - M_a)^{-1}$ の作用素ノルムは非有界である. 従ってこの場合 $\lambda \in \sigma(M_a)$ が成り立つ.

- (4) 先ず $\sigma_p(M_a) \subset \{ \lambda \in \mathbb{C} ; \mu(a^{-1}(\{\lambda\})) > 0 \}$ が成り立つことを示す. 任意の $\lambda \in \sigma_p(M_a)$ に対して固有ベクトル $u \in H$ が存在する. $u \neq 0$ (関数類の意味で) より

$$N := \{ x \in X ; u(x) \neq 0 \}$$

とおけば $\mu(N) > 0$ が満たされる. 一方で点スペクトルの定義より $(\lambda I - M_a)u = 0$ が成り立つから

$$0 = \|(\lambda I - M_a)u\|^2 = \int_X |\lambda - a(x)|^2 |u(x)|^2 \mu(dx) = \int_N |\lambda - a(x)|^2 |u(x)|^2 \mu(dx)$$

となり

$$\mu(\{ x \in N ; |\lambda - a(x)| > 0 \}) = 0$$

が従う. $\mu(N) > 0$ であるから

$$\mu(a^{-1}(\{\lambda\})) \geq \mu(\{ x \in N ; |\lambda - a(x)| = 0 \}) > 0$$

が成り立ち $\lambda \in \{ \lambda \in \mathbb{C} ; \mu(a^{-1}(\{\lambda\})) > 0 \}$ を得る. 次に $\sigma_p(M_a) \subset \{ \lambda \in \mathbb{C} ; \mu(a^{-1}(\{\lambda\})) > 0 \}$ が成り立つことを示す. 任意の $\lambda \in \{ \lambda \in \mathbb{C} ; \mu(a^{-1}(\{\lambda\})) > 0 \}$ に対して

$$\Lambda := a^{-1}(\{\lambda\})$$

とおけば $\mu(\Lambda) > 0$ が満たされている.

$$\mu(\Lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\Lambda \cap X_n)$$

が成り立つから, 或る $n \in \mathbb{N}$ が存在して $\mu(\Lambda \cap X_n) > 0$ を満たす.

$$u(x) := \begin{cases} 1 & (x \in \Lambda \cap X_n), \\ 0 & (x \notin \Lambda \cap X_n) \end{cases}$$

として u を定めれば u は二乗可積分であり, $\mu(\Lambda \cap X_n) > 0$ であるから関数類として $u \neq 0$ を満たす. また

$$\|(\lambda I - M_a)u\|^2 = \int_X |\lambda - a(x)|^2 |u(x)|^2 \mu(dx) = \int_{\Lambda \cap X_n} |\lambda - a(x)|^2 |u(x)|^2 \mu(dx) = 0$$

が成り立ち $(\lambda I - M_a)u = 0$ が従うから u は λ の固有ベクトルであり, $\lambda \in \sigma_p(M_a)$ を得る.

$(\mathbb{C}, \mathfrak{B}(\mathbb{C}), \mu)$ を σ -有限な測度空間, $H = L^2(\mathbb{C}, \mathfrak{B}(\mathbb{C}), \mu) = L^2(\mu)$ とする. Borel 可測関数 $a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ に対して, H から H へのかけ算作用素 M_a を次で定める:

$$\mathcal{D}(M_a) = \{ u \in H ; \quad au \in H \}, \quad (M_a u)(z) = a(z)u(z) \quad (z \in \mathbb{C}).$$

また $E(A) = M_{\mathbb{1}_{a^{-1}(A)}} \quad (A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C}))$ と定める.

- (1) E は, $\mathfrak{B}(\mathbb{C})$ で定義され, H 上の直交射影を値とするスペクトル測度であることを示せ.
 (2) Borel 可測関数 $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ に対し,

$$T_f := \int_{\mathbb{C}} f(z) E(dxdy) \quad (z = x + iy, (x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

と定める. このとき, $T_f = M_{f \circ a}$ を示せ.

証明.

- (1) 任意の $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$ に対し $\mathbb{1}_{a^{-1}(A)}$ は有界であるから, 春学期のレポート問題より $M_{\mathbb{1}_{a^{-1}(A)}} \in \mathcal{B}(H)$ が成り立つ. ゆえに E は $\mathfrak{B}(\mathbb{C})$ 全体で定義される. 次に任意に $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$ を取り $E(A)$ が H 上の直交射影であることを示す. 実際

$$E(A)^2 u = M_{\mathbb{1}_{a^{-1}(A)}} M_{\mathbb{1}_{a^{-1}(A)}} u = \mathbb{1}_{a^{-1}(A)} \mathbb{1}_{a^{-1}(A)} u = \mathbb{1}_{a^{-1}(A)} u = E(A) u \quad (\forall u \in H)$$

が成り立ち $E(A)^2 = E(A)$ が得られ, また $\mathbb{1}_{a^{-1}(A)}$ は実数値であるから

$$E(A)^* = M_{\mathbb{1}_{a^{-1}(A)}}^* = M_{\mathbb{1}_{a^{-1}(A)}} = E(A)$$

が成り立ち, $E(A)$ は自己共役である. 最後に E がスペクトル測度であることを示す. 先ず

$$E(\mathbb{R}^d) u = M_{\mathbb{1}_{\mathbb{C}}} u = u$$

より $E(\mathbb{R}^d) = I$ を得る. また任意の互いに素な集合列 $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$ を取れば

$$E\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) u = \sum_{n=1}^{\infty} E(A_n) u \quad (\forall u \in H)$$

が成り立つ.

- (2) $\mathcal{D}(T_f) = \mathcal{D}(M_{f \circ a})$ を示さなくてはならない. f が可測単関数の場合,

$$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$$

として

$$\int_{\mathbb{C}} |f(x)|^2 \mu_u(dx) = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \langle E(A_i) u, u \rangle = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \int_{\mathbb{C}} \mathbb{1}_{a^{-1}(A_i)} |u(x)|^2 \mu(dx) = \int_{\mathbb{C}} |f(a(x))|^2 |u(x)|^2 \mu(dx)$$

が成り立つ. f が一般の可測関数の場合は MSF -単調近似列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ を取れば

$$\int_{\mathbb{C}} |f_n(x)|^2 \mu_u(dx) = \int_{\mathbb{C}} |f_n(a(x))|^2 |u(x)|^2 \mu(dx) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

が従い, 単調収束定理より両辺はそれぞれ $\int_{\mathbb{C}} |f(x)|^2 \mu_u(dx)$, $\int_{\mathbb{C}} |f(a(x))|^2 |u(x)|^2 \mu(dx)$ に収束する. 従って

$$u \in \mathcal{D}(T_f) \quad \Leftrightarrow \quad u \in \mathcal{D}(M_{f \circ a})$$

が成り立つ．次に $T_f u = M_{f \circ a} u$ ($\forall u \in \mathcal{D}(T_f)$) を示す． f が可測単関数の場合，

$$T_f u = \sum_{i=1}^n \alpha_i E(A_i) u = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{a^{-1}(A_i)} u = f_n \circ a u = M_{f_n \circ a} u \quad (\forall u \in H)$$

が成り立つ．一般の f に対しては， MSF -単調近似列 $(f_n)_{n=1}^\infty$ を取る．

$$\|T_f u - M_{f \circ a} u\| \leq \|T_f u - T_{f_n} u\| + \|M_{f_n \circ a} u - M_{f \circ a} u\|$$

が成り立つ．スペクトル積分 T_f の定義より

$$\|T_f u - T_{f_n} u\| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成り立ち，また Lebesgue の収束定理より

$$\|M_{f_n \circ a} u - M_{f \circ a} u\|^2 = \int_{\mathbb{C}} |f_n(a(x))u(x) - f(a(x))u(x)|^2 \mu(dx) \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

を得る．ゆえに

$$\|T_f u - M_{f \circ a} u\| = 0$$

が成り立つ．