

時系列解析

2017 年 8 月 10 日

1 マルコフ連鎖

注意. $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$ と約束する.

基礎となる確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) .

- E : 集合,
- (E, \mathcal{E}) : 可測空間,
- $(X_n)_{n=1}^{+\infty}$: E -値確率過程.

注意. 2 章 ~ 10 章は E が高々可算集合であるとして考える.

2 マルコフ連鎖

定義 (マルコフ性). $\forall n \in \mathbb{N}, i_0, i_1, \dots, i_n \in E$,

$$\begin{aligned} P(X_n = i_n \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) \\ = P(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}). \end{aligned}$$

$(X_n)_{n=1}^{+\infty}$ がマルコフ性を持つ場合, これをマルコフ連鎖という. 以後 $(X_n)_{n=1}^{+\infty}$ はマルコフ連鎖.

3 マルコフ行列

定義 (マルコフ 行列). (i, j) 成分 $(\forall i, j \in E)$ を $P(X_1 = j \mid X_0 = i)$ とする確率行列. 行列を P , (i, j) 成分を $[P]_{ij}$ と表記. 計算規則は以下.

$$\begin{aligned} P^0 &= I, & (I: \text{恒等写像}), \\ [P^n]_{ij} &= \sum_{k \in E} [P^{n-1}]_{ik} [P]_{kj}, & (\forall i, j \in E, n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

定義から次が成立

$$[P^n]_{ij} = P(X_n = j \mid X_0 = i), (\forall n \in \mathbb{N}, i, j \in E).$$

証明. 数学的帰納法で示されることである. $[P]_{ij} = P(X_1 = j \mid X_0 = i)$ ($\forall i, j \in E$) は明らかに成り立つことであるが, 自然数 $n \geq 3$ に対して $[P^{n-1}]_{ij} = P(X_{n-1} = j \mid X_0 = i)$ ($\forall i, j \in E$) が成り立っていると仮定する. このとき任意の $i, j \in E$ に対して

$$\begin{aligned} [P^n]_{ij} &= \sum_{k \in E} [P^{n-1}]_{ik} [P]_{kj} \\ &= \sum_{k \in E} P(X_{n-1} = k \mid X_0 = i) P(X_1 = j \mid X_0 = k) \\ &= \sum_{k \in E} P(X_{n-1} = k \mid X_0 = i) P(X_n = j \mid X_{n-1} = k) \\ &= \sum_{k \in E} \frac{P(X_{n-1} = k, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} \frac{P(X_n = j, X_{n-1} = k)}{P(X_{n-1} = k)} \\ &= \sum_{k \in E} \frac{P(X_n = j, X_{n-1} = k, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} \frac{P(X_{n-1} = k, X_0 = i) P(X_n = j, X_{n-1} = k)}{P(X_n = j, X_{n-1} = k, X_0 = i) P(X_{n-1} = k)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k \in E} \frac{P(X_n = j, X_{n-1} = k, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} \frac{P(X_n = j | X_{n-1} = k)}{P(X_n = j | X_{n-1} = k)} \\
&= \sum_{k \in E} P(X_n = j, X_{n-1} = k | X_0 = i) \\
&= P(X_n = j | X_0 = i)
\end{aligned}$$

が成り立つから、以上で $[P^n]_{ij} = P(X_n = j | X_0 = i)$, $(\forall n \in \mathbb{N}, i, j \in E)$ が示された。 ■

4 チャップマン-コルモゴロフ方程式

命題 (チャップマン-コルモゴロフ方程式). 任意の $n, m = 0, 1, 2, \dots$ と $i, j \in E$ に対し次が成立.

$$[P^{n+m}]_{ij} = \sum_{k \in E} [P^n]_{ik} [P^m]_{kj}.$$

この命題は以降の命題の証明において基礎的である.

5 既約性・再帰性

定義 (既約性). P が既約である

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall i, j \in E, \exists n \in \mathbb{N}, \text{ s.t. } [P^n]_{ij} > 0.$$

定義 (再帰性). P が再帰的である

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} P(\exists n \geq 1, X_n = i | X_0 = i) = 1 \quad (\forall i \in E).$$

P が非再帰的である

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} P(\forall n \geq 1, X_n \neq i | X_0 = i) > 0 \quad (\forall i \in E).$$

6 離散空間上のマルコフ連鎖

定義 (到達時刻と到達回数). $\forall i \in E, \omega \in \Omega$,

到達時刻 $\tau_i(\omega) := \inf \{n \geq 1 \mid X_n(\omega) = i\}$,

到達回数 $\eta_i(\omega) := \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{(X_n=i)}(\omega)$.

$$p_{ij} := P(\tau_j < \infty \mid X_0 = i), \quad (\forall i, j \in E)$$

と表記すれば次が成立:

$$p_{ii} = P(\exists n \geq 1, X_n = i \mid X_0 = i), \tag{1}$$

$$E[\eta_i \mid X_0 = i] < +\infty \Rightarrow p_{ii} < 1, \quad (\forall i \in E). \tag{2}$$

証明. 初めの式は

$$\{\omega \in \Omega \mid \exists n \geq 1, X_n(\omega) = i\} = \{\omega \in \Omega \mid \tau_i(\omega) < \infty\}$$

により明らかである。第二式について、任意の $i, j \in E$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\eta_j \mid x_0 = i] &= \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{(X_n=i)} \mid x_0 = i\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = j, \tau_j \leq n \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \mathbb{P}(X_n = j, \tau_j = m \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = j, \tau_j = m \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = j, X_m = j, X_{m+1}, \dots, X_1 \neq j \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\mathbb{P}(X_n = j, X_m = j, X_{m+1}, \dots, X_1 \neq j)}{\mathbb{P}(X_m = j, X_{m+1}, \dots, X_1 \neq j)} \frac{\mathbb{P}(X_m = j, X_{m+1}, \dots, X_1 \neq j)}{\mathbb{P}(X_0 = i)} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = j \mid X_m = j) \mathbb{P}(\tau_j = m \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = j) \mathbb{P}(\tau_j = m \mid X_0 = i) \\
&= \mathbb{P}(\tau_j < \infty \mid X_0 = i) (\mathbb{E}[\eta_j \mid X_0 = j] + 1) \\
&= p_{ij} (\mathbb{E}[\eta_j \mid X_0 = j] + 1)
\end{aligned}$$

が成り立つ。 $i = j$ とすれば

$$\mathbb{E}[\eta_j \mid x_0 = j] = p_{jj} (\mathbb{E}[\eta_j \mid X_0 = j] + 1)$$

となるが、 $\mathbb{E}[\eta_j \mid x_0 = j] < \infty$ ならば $p_{jj} < 1$ で

$$\mathbb{E}[\eta_j \mid x_0 = j] = \frac{p_{jj}}{1 - p_{jj}}$$

が成り立つ。 $p_{jj} = 1$ の場合 $\mathbb{E}[\eta_j \mid x_0 = j] < \infty$ ではありえないので $\mathbb{E}[\eta_j \mid x_0 = j] = \infty$ となる。また $\mathbb{E}[\eta_j \mid x_0 = j] < \infty$ ならば

$$\mathbb{E}[\eta_j \mid x_0 = i] = \frac{p_{ij}}{1 - p_{jj}}$$

も成立する。また $p_{ij} = 0$ の場合は $\mathbb{E}[\eta_j \mid x_0 = i] = 0$ である。以上の結果をまとめれば

$$\mathbb{E}[\eta_j \mid x_0 = i] = \begin{cases} \frac{p_{ij}}{1 - p_{jj}} & \text{if } \mathbb{E}[\eta_j \mid x_0 = j] < \infty, \\ 0 & \text{if } p_{ij} = 0, \\ \infty & \text{if } p_{jj} = 1 \end{cases}$$

■

7 正再帰性

定義 (不変確率測度). E 上の確率測度 $\pi = ([\pi]_i)_{i \in E}$, $(\sum_{i \in E} [\pi]_i = 1)$ が P に対して不変確率測度である

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} [\pi]_i = [\pi P]_i (= \sum_{j \in E} [\pi]_j [P]_{ji}), \quad (\forall i \in E).$$

定義 (正再帰性). P は正再帰的

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} P \text{ が既約かつ不変確率測度が存在.}$$

8 再帰性の諸命題

命題. P が既約の下, (i) ~ (iv) が順に示される:

- (i) P が再帰的 $\Rightarrow E[\eta_i | X_0 = i] = +\infty$, $(\forall i \in E)$.
- (ii) P は再帰的であるか非再帰的のどちらか. 特に E が有限集合なら P は再帰的.
- (iii) P が正再帰的 $\Rightarrow P$ は再帰的.
- (iv) E が有限集合なら P は正再帰的.

証明.

- (i) P が再帰的なら式 (1) により $p_{ii} = 1$ $(\forall i \in E)$ である. 従って式 (2) の対偶により $E[\eta_i | X_0 = i] = +\infty$ となる.
- (ii) 或る $i \in E$ が再帰的なら全ての $j \in E$ が再帰的となることを示せばよい. これが真なら, 対偶により或る $j \in E$ が非再帰的であれば全ての $i \in E$ が非再帰的となる. P が既約であるから任意の $j \in E$ に対して或る $n, m \in \mathbb{N}$ が存在して

$$[P^n]_{ij} > 0, \quad [P^m]_{ji} > 0$$

が成り立つ. i が再帰的であるから $E[\eta_i | X_0 = i] = +\infty$ であり, チャップマン-コルモゴロフの方程式を用いれば

$$E[\eta_j | X_0 = j] = \sum_{n=1}^{+\infty} [P^n]_{jj} \geq \sum_{l=1}^{+\infty} [P^m]_{ji} [P^l]_{ii} [P^n]_{ij} = [P^m]_{ji} [P^n]_{ij} \sum_{l=1}^{+\infty} [P^l]_{ii} = +\infty$$

が成り立つから j も再帰的となる. E が有限集合である場合, もし P が非再帰的であるなら全ての $i \in E$ で $p_{ii} < 1$ となる. 任意の $i, j \in E$ に対して

$$\sum_{n=1}^{+\infty} [P^n]_{ij} = E[\eta_j | X_0 = i] = \frac{p_{ij}}{1 - p_{ii}} < +\infty$$

となっているから $\lim_{n \rightarrow +\infty} [P^n]_{ij} = 0$ が成り立っているが, 一方で E が有限集合であるから

$$1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j \in E} [P^n]_{ij} = \sum_{j \in E} \lim_{n \rightarrow +\infty} [P^n]_{ij} = 0$$

も成り立つから不合理である.

- (iii) P の不変確率測度を π で表す. P が再帰的でなければ非再帰的である. 従って任意の $i, j \in E$ に対して $E[\eta_j \mid X_0 = i] < +\infty$ となるが,

$$+\infty > E[\eta_j \mid X_0 = i] = \sum_{i \in E} [\pi]_i \sum_{n=1}^{+\infty} [P^n]_{ij} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i \in E} [\pi]_i [P^n]_{ij} = \sum_{n=1}^{+\infty} [\pi P^n]_j = \sum_{n=1}^{+\infty} [\pi]_j$$

が成り立つから $[\pi]_j = 0 \ (\forall j \in E)$ となり π が E 上の確率測度であることに不合理である.

- (iv) E 上の確率測度全体を

$$\mathcal{D} := \left\{ \nu = ([\nu]_i)_{i \in E} \mid \sum_{i \in E} [\nu]_i = 1 \right\}$$

と置けば, これを $\mathbb{R}^{\#E}$ (有限次元実数空間, $\#E$ は E の濃度) の部分集合と見做すことができる. この観点で \mathcal{D} は $\mathbb{R}^{\#E}$ のコンパクト集合である. \mathcal{D} 上の関数を

$$\rho : \mathcal{D} \ni \nu \mapsto \min_{i \in E} \frac{[\nu P]_i}{[\nu]_i} \in \mathbb{R}$$

と定義すれば ρ は \mathcal{D} 上の連続関数となる. 従って或る $\nu^* \in \mathcal{D}$ が存在して ρ は最大値に達する. $\alpha := \rho(\nu^*)$ と置いて

$$\alpha = \frac{[\nu^* P]_i}{[\nu^*]_i} \quad (\forall i \in E)$$

であることを示す. これが示されれば $\alpha = \sum_{i \in E} \alpha [\nu^*]_i = \sum_{i \in E} [\nu^* P]_i = 1$ により ν^* が P の不変確率測度であると導かれる. 或る $j \in E$ に対して $\alpha < [\nu^* P]_j / [\nu^*]_j$ が成り立っているとす. P が既約であるから任意の $i \in E$ に対して $n_i \in \mathbb{N}$ が取れて $[P^{n_i}]_{ji} > 0$ となるから, $n := \max_{i \in E} n_i$ と置けば $[P^n]_{ji} > 0 \ (\forall i \in E)$ となり, $\mu = \nu^* P^n$ と置いて

$$\alpha[\mu]_i = \alpha \sum_{j \neq k \in E} [\nu^*]_k [P^n]_{ki} + \alpha [\nu^*]_j [P^n]_{ji} < \sum_{j \neq k \in E} [\nu^* P]_k [P^n]_{ki} + [\nu^* P]_j [P^n]_{ji} = [\nu^* P^{n+1}]_i = [\mu P]_i$$

が成り立ち $\alpha < \rho(\mu)$ となるが, これは α の最大性に矛盾する.

9 周期

定義 ($i \in E$ の周期). $\mathcal{N}_i := \{n \geq 1 \mid [P^n]_{ii} > 0\}$ の最大公約数を $i \in E$ の周期といい d_i と表す.

命題 (既約なら周期は unique). P が既約ならば $d_i = d_j \ (\forall i, j \in E)$. この場合 d_i を P の周期という.

補助定理. $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$ は和について閉であるとする. この下で \mathcal{N} の最大公約数 d は

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad nd \in \mathbb{N}$$

を満足する.

証明 (補助定理の証明). 整列性により \mathcal{N} に最小元 d が存在する. 任意に $x, y \in \mathcal{N}$ を取れば x, y が生成する空間 $\{z \in \mathcal{N} \mid z = ax + by \ (a, b \in \mathbb{Z})\}$ は \mathcal{N} の部分集合であるから

証明 (命題の証明). P が既約であるから任意に $i, j \in E$ を取れば或る $n, m \in \mathbb{N}$ が存在して $[P^n]_{ij} > 0$ かつ $[P^m]_{ji} > 0$ となる. また補助定理により或る $n_i \in \mathcal{N}_i$ より大きな任意の自然数 q に対して $[P^{qd_i}]_{ii} > 0$ も成り立つから, チャップマン-コルモゴロフ方程式を適用して

$$[P^{m+qd_i+n}]_{jj} \geq [P^m]_{ji}[P^{qd_i}]_{ii}[P^n]_{ij} > 0$$

となり $m + qd_i + n \in \mathcal{N}_j$ が成り立つ. $q + 1 > n_i$ により $m + (q + 1)d_i + n \in \mathcal{N}_j$ も成り立つから, d_j の倍数で表される二数の差 d_i は d_j の倍数となる. 立場を逆にすれば d_j は d_i の倍数となるから $d_i = d_j$ ($\forall i, j \in E$) が導かれる.

定義 (非周期性). P が既約の下,

$$P \text{ は非周期的} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} P \text{ の周期が } 1.$$

10 エルゴード性

命題 (周期に関する一命題). P : 既約, 非周期的,

$$\forall i, j \in E, \exists n_{ij} \in \mathbb{N}, \text{ s.t. } [P^n]_{ij} > 0 \ (\forall n \geq n_{ij}).$$

定理 (エルゴード性). P が既約で非周期的かつ正再帰的であるとする. P の不変確率測度を π で表すとき次が成立.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [P^n]_{ij} = [\pi]_j, \quad (\forall i, j \in E).$$

証明.

第一段 直積空間 $E \times E$ 上のマルコフ連鎖を考える. $E \times E$ のマルコフ行列を Q と表し

$$[Q]_{ik,jl} := [P]_{ij}[P]_{kl}, \quad (\forall (i, k), (j, l) \in E \times E)$$

と定義する. (Ω, \mathcal{F}, P) 上の E -値確率過程 $(X_n)_{n=1}^{+\infty}, (Y_n)_{n=1}^{+\infty}$ がそれぞれマルコフ行列 P を持つ独立なマルコフ連鎖であるとすれば, $Z_n = (X_n, Y_n)$ ($n = 1, 2, \dots$) は $E \times E$ 上のマルコフ連鎖でマルコフ行列 Q を持つ. なぜならば任意の $n \in \mathbb{N}$ と $(i, j), (i_0, j_0), \dots, (i_{n-1}, j_{n-1}) \in E \times E$ に対して

$$\begin{aligned} & P(Z_n = (i, j) \mid Z_0 = (i_0, j_0), Z_1 = (i_1, j_1), \dots, Z_{n-1} = (i_{n-1}, j_{n-1})) \\ &= \frac{P(Z_n = (i, j), Z_0 = (i_0, j_0), \dots, Z_{n-1} = (i_{n-1}, j_{n-1}))}{P(Z_0 = (i_0, j_0), \dots, Z_{n-1} = (i_{n-1}, j_{n-1}))} \\ &= \frac{P((X_n = i, X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) \cap (Y_n = j, Y_0 = j_0, \dots, Y_{n-1} = j_{n-1}))}{P((X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) \cap (Y_0 = j_0, \dots, Y_{n-1} = j_{n-1}))} \\ &= \frac{P(X_n = i, X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) P(Y_n = j, Y_0 = j_0, \dots, Y_{n-1} = j_{n-1})}{P(X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) P(Y_0 = j_0, \dots, Y_{n-1} = j_{n-1})} \\ &= P(X_n = i \mid X_{n-1} = i_{n-1}) P(Y_n = j \mid Y_{n-1} = j_{n-1}) \\ &= \frac{P(X_n = i, Y_n = j, X_{n-1} = i_{n-1}, Y_{n-1} = j_{n-1})}{P(X_{n-1} = i_{n-1}, Y_{n-1} = j_{n-1})} \\ &= P(Z_n = (i, j) \mid Z_{n-1} = (i_{n-1}, j_{n-1})) \end{aligned}$$

が成立するからである．また Q は既約かつ再帰的である． P が既約であるから，前命題により任意の $(i, k), (j, l) \in E \times E$ に対して或る $n_{ij}, n_{kl} \in \mathbb{N}$ が存在し $[P^n]_{ij} > 0$ ($\forall n \geq n_{ij}$) と $[P^n]_{kl} > 0$ ($\forall n \geq n_{kl}$) が成立する．従って $\forall n \geq \max\{n_{ij}, n_{kl}\}$ に対して

$$[Q^n]_{ik,jl} := [P^n]_{ij}[P^n]_{kl} > 0$$

が成立するから Q は既約である．

注意．先の式変形と同様に， $(X_n)_{n=1}^{+\infty}, (Y_n)_{n=1}^{+\infty}$ の独立性から任意の $n \in \mathbb{N}$, $(i, k), (j, l) \in E \times E$ に対して

$$[Q^n]_{ik,jl} = \mathbf{P}(Z_n = (j, l) \mid Z_0 = (i, k)) = \mathbf{P}(X_n = j \mid X_0 = i) \mathbf{P}(Y_n = l \mid Y_0 = k) = [P^n]_{ij}[P^n]_{kl}$$

が導かれる．

次に再帰性を示す．これには Q に対して $E \times E$ 上の不変確率測度が存在することを言えばよい．

$$[\mu]_{ik} = [\pi]_i[\pi]_k \quad (\forall (i, k) \in E \times E)$$

として $\mu = ([\mu]_{ik})_{i,k \in E}$ を定義すればこれは $E \times E$ 上の確率測度であり，任意の $(j, l) \in E \times E$ に対して

$$[\mu Q]_{jl} = \sum_{(i,k) \in E \times E} [\mu]_{ik} [Q]_{ik,jl} = \sum_{i,k \in E} [\pi]_i [\pi]_k [P]_{ij} [P]_{kl} = \sum_{i \in E} [\pi]_i [P]_{ij} \sum_{k \in E} [\pi]_k [P]_{kl} = [\pi]_j [\pi]_l = [\mu]_{jl}$$

が成り立つから μ が Q の不変確率測度であることが判る．ゆえに Q は正再帰的で既約すなわち再帰的である．

第二段

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |[P^n]_{ij} - [P^n]_{kj}| = 0 \quad (\forall i, j, k \in E) \quad (3)$$

を示す． $(Z_n)_{n=1}^{+\infty} = ((X_n, Y_n))_{n=1}^{+\infty}$ に対しても同様に

$$\tau_{ik}(\omega) := \inf \{n \geq 1 \mid Z_n(\omega) = (i, k)\} \quad (\forall i, k \in E, \omega \in \Omega)$$

として到達時刻を定義する． $(X_n)_{n=1}^{+\infty}, (Y_n)_{n=1}^{+\infty}$ の独立性から

$$\begin{aligned} [P^n]_{ij} &= \frac{\mathbf{P}(X_n = j, X_0 = i)}{\mathbf{P}(X_0 = i)} = \frac{\mathbf{P}(X_n = j, X_0 = i, Y_0 = k)}{\mathbf{P}(X_0 = i, Y_0 = k)} = \mathbf{P}(X_n = j \mid (X_0, Y_0) = (i, k)), \\ [P^n]_{kj} &= \frac{\mathbf{P}(Y_n = j, Y_0 = k)}{\mathbf{P}(Y_0 = k)} = \frac{\mathbf{P}(Y_n = j, X_0 = i, Y_0 = k)}{\mathbf{P}(X_0 = i, Y_0 = k)} = \mathbf{P}(Y_n = j \mid (X_0, Y_0) = (i, k)) \end{aligned}$$

が成立する．

$$\mathbf{P}(X_n = j \mid (X_0, Y_0) = (i, k)) = \mathbf{P}(X_n = j, \tau_{jj} > n \mid (X_0, Y_0) = (i, k)) + \mathbf{P}(X_n = j, \tau_{jj} \leq n \mid (X_0, Y_0) = (i, k)),$$

$$\mathbf{P}(Y_n = j \mid (X_0, Y_0) = (i, k)) = \mathbf{P}(Y_n = j, \tau_{jj} > n \mid (X_0, Y_0) = (i, k)) + \mathbf{P}(Y_n = j, \tau_{jj} \leq n \mid (X_0, Y_0) = (i, k))$$

と分解できるが,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(X_n = j, \tau_{jj} \leq n \mid (X_0, Y_0) = (i, k)) \\
&= \sum_{m=1}^n \mathbb{P}(X_n = j, \tau_{jj} = m \mid (X_0, Y_0) = (i, k)) \\
&= \sum_{m=1}^n \mathbb{P}(X_n = j, (X_m, Y_m) = (j, j), (X_{m-1}, Y_{m-1}) \cdots (X_1, Y_1) \neq (j, j) \mid (X_0, Y_0) = (i, k)) \\
&= \sum_{m=1}^n \frac{\mathbb{P}(X_n = j, X_m = j, X_{m-1}, \dots, X_1 \neq j)}{\mathbb{P}(X_0 = i)} \frac{\mathbb{P}(Y_m = j, Y_{m-1}, \dots, Y_1 \neq j)}{\mathbb{P}(Y_0 = k)} \\
&= \sum_{m=1}^n \frac{\mathbb{P}(X_n = j, X_m = j, X_{m-1}, \dots, X_1 \neq j)}{\mathbb{P}(X_m = j, X_{m-1}, \dots, X_1 \neq j)} \frac{\mathbb{P}(X_m = j, X_{m-1}, \dots, X_1 \neq j)}{\mathbb{P}(X_0 = i)} \frac{\mathbb{P}(Y_m = j, Y_{m-1}, \dots, Y_1 \neq j)}{\mathbb{P}(Y_0 = k)} \\
&= \sum_{m=1}^n [P^{n-m}]_{jj} \frac{\mathbb{P}((X_m = j, X_{m-1}, \dots, X_1 \neq j) \cap (Y_m = j, Y_{m-1}, \dots, Y_1 \neq j))}{\mathbb{P}((X_0 = i) \cap (Y_0 = k))} \\
&= \sum_{m=1}^n [P^{n-m}]_{jj} \mathbb{P}(\tau_{jj} = m \mid (X_0, Y_0) = (i, k)) \\
&= \mathbb{P}(Y_n = j, \tau_{jj} \leq n \mid (X_0, Y_0) = (i, k))
\end{aligned}$$

が成立することと、既約性 ($\mathbb{P}(\tau_{jj} < +\infty \mid (X_0, Y_0) = (i, k)) = 1$) により

$$\begin{aligned}
& \left| \mathbb{P}(X_n = j, \tau_{jj} > n \mid (X_0, Y_0) = (i, k)) - \mathbb{P}(Y_n = j, \tau_{jj} > n \mid (X_0, Y_0) = (i, k)) \right| \\
&\leq 2 \mathbb{P}(\tau_{jj} > n \mid (X_0, Y_0) = (i, k)) \\
&= 2(1 - \mathbb{P}(\tau_{jj} \leq n \mid (X_0, Y_0) = (i, k))) \\
&\longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow +\infty)
\end{aligned}$$

が成り立つことから式 (3) が成立する。

第三段 Σ を測度空間 (E, \mathcal{E}, π) 上の積分と見做して Lebesgue の収束定理を使う。

$$\begin{aligned}
& |[P^n]_{ij} - [\pi]_j| = |[P^n]_{ij} - [\pi P^n]_j| \\
&= \left| [P^n]_{ij} - \sum_{k \in E} [\pi]_k [P^n]_{kj} \right| \\
&= \left| \sum_{k \in E} [\pi]_k [P^n]_{ij} - \sum_{k \in E} [\pi]_k [P^n]_{kj} \right| \\
&\leq \sum_{k \in E} [\pi]_k |[P^n]_{ij} - [P^n]_{kj}| \\
&\longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow +\infty).
\end{aligned}$$

以上で命題の主張が示された。 ■

11 一般の状態集合上のマルコフ連鎖

E を実数全体など含めた一般の集合として扱う際には、マルコフ行列に代えて次のものを定義する。

定義 (マルコフカーネル). 関数 $P : E \times \mathcal{E} \rightarrow [0, 1]$ がマルコフカーネルであるとは以下を満たすことで定義される.

- (i) 任意の $A \in \mathcal{E}$ に対して $P(\cdot, A) : E \ni x \mapsto P(x, A) \in [0, 1]$ が可測 $\mathcal{E}/\mathfrak{B}([0, 1])$,
- (ii) 任意の $x \in E$ に対して $P(x, \cdot)$ が (E, \mathcal{E}) 上の確率測度となっている.

定義 (マルコフ連鎖). (Ω, \mathcal{F}, P) 上の確率変数列 $(X_n)_{n=1}^{+\infty}$ がマルコフカーネル P を持つマルコフ連鎖である

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} P(X_{n+1} \in A \mid X_0, X_1, \dots, X_n) = P(X_n, A) \quad (\forall n \in \mathbb{N}, A \in \mathcal{E}).$$

定義 (作用の定義). μ を (E, \mathcal{E}) 上の確率測度, P, Q を $E \times \mathcal{E}$ 上のマルコフカーネル, f を $E \rightarrow \mathbb{C}$ の \mathcal{E} 可測関数とすると, 以下の四つの作用を定義する.

$$\begin{aligned} (\mu P)(A) &:= \int_E P(x, A) \mu(dx) & (\forall A \in \mathcal{E}), \\ (Pf)(x) &:= \int_E f(y) P(x, dy) & (\forall x \in E), \\ (PQ)(x, A) &:= \int_E Q(y, A) P(x, dy) & (\forall x \in E, A \in \mathcal{E}), \\ \mu(f) &:= \int_E f(x) \mu(dx). \end{aligned}$$

また $P^0 = I$ (恒等写像), $P^n = P^{n-1}P$ と計算規則を定めれば $P^n(x, A) = (P^n)(x, A) = P(X_n \in A \mid X_0 = x)$ ($\forall n \in \mathbb{N}, x \in E, A \in \mathcal{E}$) が成り立つ.

証明. 証明は数学的帰納法による. $n = 1$ の場合は定義より $P(x, A) = P(X_1 \in A \mid X_0 = x)$ が成り立つから, 以下では或る自然数 n について $P^n(x, A) = P(X_n \in A \mid X_0 = x)$ が成り立っていると仮定する. 任意の $A \in \mathcal{E}$ と $x \in E$ を固定する. E の分割 $E_1, E_2, \dots, E_N \in \mathcal{E}$, $(\sum_{j=1}^N E_j = E)$ を取れば

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} \in A \mid X_0 = x) &= \sum_{j=1}^N P(X_{n+1} \in A, X_n \in E_j \mid X_0 = x) \\ &= \sum_{j=1}^N P(X_{n+1} \in A \mid X_n \in E_j, X_0 = x) P(X_n \in E_j \mid X_0 = x) \\ &= \int_E \sum_{j=1}^N P(X_{n+1} \in A \mid X_n \in E_j, X_0 = x) \mathbb{1}_{E_j}(y) P^n(x, dy) \end{aligned}$$

が成り立っていることを確認しておく. 表記を簡単にするために $f(y) := P(y, A)$ ($\forall y \in E, A \in \mathcal{E}$) とおき, 可測 $\mathcal{E}/\mathfrak{B}([0, 1])$ 関数 f の単関数近似列を考える. 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して区間 $[0, 1]$ を 2^N 等分割し

$$f_N(y) := \sum_{j=0}^{2^N} \frac{j}{2^N} \mathbb{1}_{(j/2^N \leq f(y) < (j+1)/2^N)}(y) = \sum_{j=0}^{2^N} \alpha_j^{(N)} \mathbb{1}_{E_j^{(N)}}(y) \quad (y \in E)$$

として単関数近似列 $(f_N)_{n=1}^{+\infty}$ を定義する. ただし $\alpha_j^{(N)} = j/2^N$, $E_j^{(N)} = \{y \in E \mid j/2^N \leq f(y) < (j+1)/2^N\}$, ($j = 1, 2, \dots, 2^N$) である. 全ての $N \in \mathbb{N}$ に対して $P(y, A) = j/2^N$ ($\forall y \in E_j^{(N)}, j = 1, 2, \dots, 2^N$) としているから $|P(X_{n+1} \in A \mid X_n \in E_j^{(N)}, X_0 = x) - \alpha_j^{(N)}| < 1/2^N$ ($j = 1, 2, \dots, 2^N$) が成り立っていることに

注意すれば

$$\begin{aligned}
& \left| P(X_{n+1} \in A \mid X_0 = x) - \int_E f_N(y) P^n(x, dy) \right| \\
&= \left| \int_E \sum_{j=1}^{2^N} P(X_{n+1} \in A \mid X_n \in E_j^{(N)}, X_0 = x) \mathbb{1}_{E_j^{(N)}}(y) P^n(x, dy) - \int_E \sum_{j=1}^{2^N} \alpha_j^{(N)} \mathbb{1}_{E_j^{(N)}}(y) P^n(x, dy) \right| \\
&\leq \int_E \sum_{j=1}^{2^N} \left| P(X_{n+1} \in A \mid X_n \in E_j^{(N)}, X_0 = x) - \alpha_j^{(N)} \right| \mathbb{1}_{E_j^{(N)}}(y) P^n(x, dy) \\
&< \frac{1}{2^N}
\end{aligned}$$

が成り立つ。この結果を

$$\int_E P(y, A) P^n(x, dy) = \int_E f(y) P^n(x, dy) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_E f_N(y) P^n(x, dy)$$

であることと合わせれば

$$\begin{aligned}
\left| P(X_{n+1} \in A \mid X_0 = x) - \int_E P(y, A) P^n(x, dy) \right| &\leq \left| P(X_{n+1} \in A \mid X_0 = x) - \int_E f_N(y) P^n(x, dy) \right| \\
&\quad + \left| \int_E f_N(y) P^n(x, dy) - \int_E f(y) P^n(x, dy) \right| \\
&\rightarrow 0 \quad (N \rightarrow +\infty)
\end{aligned}$$

が成り立つから

$$P(X_{n+1} \in A \mid X_0 = x) = \int_E P(y, A) P^n(x, dy)$$

が導かれる。作用の定義と計算規則の定義により $P(X_{n+1} \in A \mid X_0 = x) = P^{n+1}(x, A)$ が任意の $A \in \mathcal{E}$ と $x \in E$ について成立することが示された。 ■

12 既約性

E が高々可算集合の場合は E の或る元から或る元へ到達する確率を考えたが、 E を一般の集合として考える場合は元から可測集合の上に到達する確率を考える。

定義 (既約性). ψ を (E, \mathcal{E}) 上の確率測度とする。 P が ψ 既約である

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \psi(A) > 0 \Rightarrow \forall x \in E, \exists n \in \mathbb{N}, \text{ s.t. } P^n(x, A) > 0, \quad (A \in \mathcal{E}).$$

ψ 既約であることを単に既約という。

定義 (極大既約測度). (E, \mathcal{E}) 上の確率測度全体を Λ と表す。 $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ に対し $\lambda_1 \ll \lambda_2 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \lambda_1(A) > 0 \Rightarrow \lambda_2(A) > 0$ として関係 \ll を定義するとこれは Λ における順序となる。

$$\Psi := \{\lambda \in \Lambda \mid P \text{ が } \lambda \text{ 既約.}\}$$

とおいて $\Psi \neq \emptyset$ とする。或る $\psi^* \in \Psi$ が任意の $\psi \in \Psi$ に対して $\psi \ll \psi^*$ となるとき ψ^* を P の極大既約測度という。

命題 (極大既約測度の存在). P が既約なら極大既約測度が存在する。

極大既約測度 $\psi^* \in \Psi$ に対し、 $\psi^*(A) > 0$ となる $A \in \mathcal{E}$ の全体を \mathcal{E}^+ と表す。

13 再帰性

P が再帰的

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} P \text{ が既約かつ } \forall A \in \mathcal{E}^+, \sum_{n=1}^{+\infty} P^n(x, A) = +\infty \quad (\forall x \in E).$$

P が非再帰的

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{ 或る } E \text{ の分割 } A_1, A_2, \dots \in \mathcal{E} \text{ (} \sum_k A_k = E \text{) が存在して } \sup_{x \in A_i} \sum_{n=1}^{+\infty} P^n(x, A_i) < +\infty.$$

命題. P が既約なら P は再帰的か非再帰的かのどちらかとなる.

定義 (正再帰性). P が正再帰的である $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} P$ が既約で $\pi P = \pi$ となる (E, \mathcal{E}) 上の確率測度 π が存在する.

命題. P が正再帰的 $\Rightarrow P$ は再帰的.

14 エルゴード性

定義 (小集合). $n \in \mathbb{N}$ と (E, \mathcal{E}) 上の確率測度 ν に対し, $A \in \mathcal{E}^+$ が (n, ν) 小集合である

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists \delta > 0 \text{ s.t. } P^n(x, B) \geq \delta \nu(B) \quad (\forall x \in A, B \in \mathcal{E}).$$

定義 (条件 S). P に対して小集合が存在する.

定義 (Doublin 条件). E が P の小集合となっている.

Doublin 条件の下では P は既約となる.

定義 (周期). 条件 S が満たされている下で或る $A \in \mathcal{E}^+$ が (n, ν) 小集合であるとする.

$$\mathcal{N}_A := \{n \in \mathbb{N} \mid \exists \delta_n \text{ s.t. } P^n(x, B) \geq \delta_n \nu(B) \text{ (} \forall x \in A, B \in \mathcal{E})\}$$

に対して \mathcal{N}_A の最大公約数を P の周期という. 周期が 1 の場合 P は非周期的であるという.

命題 (周期の一意性). P が既約なら周期は小集合 $A \in \mathcal{E}^+$ に依らずに定まる.

命題. Doublin 条件が満たされている下では P は非周期的となる.

エルゴード性を定義するための収束の概念を規定するノルムを絶対変動ノルムという.

定義 (絶対変動ノルム). (E, \mathcal{E}) 上の確率測度に対して絶対変動ノルム $\|\cdot\|$ を次で定義する.

$$\|\mu - \nu\| = \sup_{A \in \mathcal{E}} |\mu(A) - \nu(A)| = \frac{1}{2} \sup_{|f| \leq 1} \left| \int_E f(x) \mu(dx) - \int_E f(x) \nu(dx) \right|$$

ただし μ, ν は (E, \mathcal{E}) 上の任意に選んだ確率測度であり, f は \mathcal{E} 可測である.

定義 (エルゴード性). P がエルゴード的である $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 或る (E, \mathcal{E}) 上の確率測度 π が存在して

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|P^n(x, \cdot) - \pi\| = 0 \quad (\pi\text{-a.e.}).$$

定義 (一様エルゴード性). P がエルゴード的である $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 或る (E, \mathcal{E}) 上の確率測度 π が存在して

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in E} \|p^n(x, \cdot) - \pi\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\substack{x \in E \\ A \in \mathcal{E}}} |p^n(x, A) - \pi(A)| = 0.$$