ε 計算とクラスの導入による具体的で直観的な集合論の構築

関根深澤研 百合川尚学
学籍番号：29C17095

February 5, 2020

Contents

ε について

- ε 計算は数論の無矛盾性証明のために Hilbert[1] が開発.
- ε によって $\exists, \forall$ を使う証明を命題論理の証明に埋め込める.
- 式 $\varphi(x)$ に対して

$$\varepsilon x \varphi(x)$$

という形のモノを作り，ε 項と呼ぶ．命題論理の証明に埋め込む際には，$\exists$ や $\forall$ の付いた式を

$$\varphi(x/\varepsilon x \varphi(x)) \stackrel{\text{def}}{\longleftrightarrow} \exists x \varphi(x),$$

$$\varphi(x/\varepsilon x \neg x \varphi(x)) \stackrel{\text{def}}{\longleftrightarrow} \forall x \varphi(x)$$

によって変換する.

ε について

- 今回 ε 項を導入したのは「存在」と「実在」を同義とするため.
- Hilbert の ε 計算ではなく，ε 項を用いて Henkin 拡大を行う.
- つまり，導入の意図は存在文に対して証人を与えること：

$$\exists x\varphi(x) \ \rightarrow \ \varphi(\varepsilon x\varphi(x)).$$

この式は ∃ に関する主要な公理.

- 「φ である集合が存在すれば，その一つは $\varepsilon x\varphi(x)$ である.」
- 「$\neg\forall x\varphi(x) \ \rightarrow \ \exists x \neg\varphi(x)$」と組み合わせると

$$\varphi(\varepsilon x \neg\varphi(x)) \ \rightarrow \ \forall x\varphi(x)$$

が出る.

ε について

- ZF 集合論では集合というモノが用意されていないため，「存在」は「実在」ではない．たとえば

$$\exists x \forall y (y \notin x)$$

は定理であり「空集合は存在する」と読むが，空集合を“実際に取ってくる”ことは不可能．

- ε 項を使えば，∃ の公理と空集合の存在定理によって

$$\forall y (y \notin \varepsilon x \forall y (y \notin x))$$

が成り立つ．

ε 項を使うメリット

- 証明で用いる推論規則は三段論法のみで済む．
- 証明が容易になる場合がある．

クラスについて

- Bourbaki[2] や島内 [3] でも ε 項を使った集合論を展開.
- ところで,「φ である集合の全体」の意味の

$$\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$$

  というモノも取り入れたい.
- Bourbaki[2] や島内 [3] では

$$\{\, x \mid \varphi(x) \,\} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \varepsilon y \, \forall x \, (\, \varphi(x) \;\leftrightarrow\; x \in y \,)$$

  と定めるが,

$$\exists y \, \forall x \, (\, \varphi(x) \;\leftrightarrow\; x \in y \,)$$

  が成立しない場合は「φ である集合の全体」という意味を持たない.
- **ZF** 集合論では「定義による拡大」 or インフォーマルな導入.
- 式 φ から直接 $\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$ の形のモノを作ればよい (竹内 [4]).

クラスについて

クラス

式 φ に x のみが自由に現れているとき，$\varepsilon x \varphi(x)$, $\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$ の形のモノをクラス **(class)** と呼ぶ．

- クラスである ε 項は集合である．
- 集合でないクラスもある．たとえば $\{\, x \mid x = x \,\}$ や $\{\, x \mid x \notin x \,\}$ は集合ではない．

集合の定義は竹内 [4] に倣う．定義により集合はクラスである．

集合

クラス c が

$$\exists x\,(\, c = x \,)$$

を満たすとき c を集合 **(set)** と呼ぶ．$\neg \exists x\,(\, c = x \,)$ である場合は真クラス **(proper class)** と呼ぶ．

言語

- クラスという新しいモノを導入したら，この導入操作が "妥当" であるかどうかが問題になる．
- 妥当性は，**ZF** 集合論の命題 ψ に対して

  $$\text{ZF 集合論で } \psi \text{ が証明可能} \Longleftrightarrow \text{新しい集合論で } \psi \text{ が証明可能}$$

  が成り立つかどうかで検証する．
- 集合論の言語と証明のルールを明らかにしなくてはならない．
- 言語 (の語彙) とは「変項」，「述語記号」，「論理記号」とその他もろもろの記号からなる．「式 (formula)」は言語の語彙を用いて作られる．名詞の役を担うのが「項 (term)」であり，文字は最もよく使われる項である．たとえば

  $$s \in t$$

  と書けば一つの式が出来上がる．
- まず **ZF** 集合論の言語 $\mathcal{L}_{\in}$ を明示する．

言語 $\mathcal{L}_\in$

言語 $\mathcal{L}_\in$ の語彙

矛盾記号	$\perp$
論理記号	$\neg,\ \vee,\ \wedge,\ \to$
量化子	$\forall,\ \exists$
述語記号	$=,\ \in$
変項	$x, y, z, \cdots.$

言語 $\mathcal{L}_\in$ の項と式

$\mathcal{L}_\in$ の項と式は次の規則で生成する．

$\mathcal{L}_\in$ の項と式

項 変項は項であり，またこれらのみが項である．

式

- $\perp$ は式である．
- 項 τ と項 σ に対して $\tau \in \sigma$ と $\tau = \sigma$ は式である．
- 式 φ に対して $\neg\varphi$ は式である．
- 式 φ と式 ψ に対して $\varphi \vee \psi$ と $\varphi \wedge \psi$ と $\varphi \rightarrow \psi$ はいずれも式である．
- 式 φ と項 x に対して $\exists x \varphi$ と $\forall x \varphi$ は式である．
- これらのみが式である．

言語の拡張

- クラスを正式に導入するために言語を拡張する.
- 拡張は二段階に分けて行う. 始めに ε 項のために拡張し, 次に $\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$ の形の項のために拡張する.
- 始めの拡張で作る言語を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ と名付ける.

言語 $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の語彙

矛盾記号	$\perp$
論理記号	$\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$
量化子	$\forall$, $\exists$, ε
述語記号	$=$, $\in$
変項	$x, y, z, \cdots$.

$\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項と式

$\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項と式の定義

- 変項は項である.
- $\perp$ は式である.
- 項 τ と項 σ に対して $\tau \in \sigma$ と $\tau = \sigma$ は式である.
- 式 φ に対して $\neg\varphi$ は式である.
- 式 φ と式 ψ に対して $\varphi \vee \psi$ と $\varphi \wedge \psi$ と $\varphi \rightarrow \psi$ はいずれも式である.
- 式 φ と変項 x に対して $\exists x\varphi$ と $\forall x\varphi$ は式である.
- 式 φ と変項 x に対して $\varepsilon x\varphi$ は項である.
- これらのみが項と式である.

- $\mathcal{L}_{\in}$ との大きな違いは項と式の生成が循環している点.
- $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式が $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項を用いて作られるのは当然ながら，その逆に $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項もまた $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式から作られる.
- $\mathcal{L}_{\in}$ の式は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式でもある.

言語 $\mathcal{L}$

- $\mathcal{L}_\varepsilon$ の式 φ と変項 x に対して，$\varepsilon x \varphi$ なる項を ε 項 (epsilon term) という．
- $\mathcal{L}_\varepsilon$ の式 φ と変項 x に対して，$\{x \mid \varphi\}$ なる項を内包項ということにする．

言語 $\mathcal{L}$ の語彙

矛盾記号	$\perp$
論理記号	$\neg,\ \vee,\ \wedge,\ \rightarrow$
量化子	$\forall,\ \exists$
述語記号	$=,\ \in$
変項	$x, y, z, \cdots.$
ε 項と内包項	上記のもの

$\mathcal{L}$ の項と式

$\mathcal{L}$ の項と式の定義

項 変項，ε 項，内包項は項である．またこれらのみが項である．

式
- $\perp$ は式である．
- 項 τ と項 σ に対して $\tau \in \sigma$ と $\tau = \sigma$ は式である．
- 式 φ に対して $\neg\varphi$ は式である．
- 式 φ と式 ψ に対して $\varphi \vee \psi$ と $\varphi \wedge \psi$ と $\varphi \to \psi$ はいずれも式である．
- 式 φ と変項 x に対して $\exists x\varphi$ と $\forall x\varphi$ は式である．
- これらのみが式である．

言語 $\mathcal{L}$ こそが本論文の標準言語である．

扱う式の制限

上で作った項や式の中には

$$\varepsilon x(y = y), \quad \{x \mid z \neq z\}, \quad \forall x(u \in v)$$

のような意味の通らないものが氾濫しているので，排除する．

- $\varepsilon x \varphi$ なる形の ε 項は，φ に x “のみ” 自由に現れているとき主要 ε 項と呼ぶことにする．
- $\{x \mid \varphi\}$ なる形の内包項は，φ に x “が” 自由に現れているとき，正則内包項と呼ぶことにする．
- 以降扱う式に現れる ε 項は全て主要 ε 項，内包項は全て正則内包項であるとし，$\forall x \varphi$ や $\exists x \varphi$ なる式は φ に x が自由に現れているとする．

クラス

主要 ε 項と同様に，$\{x \mid \varphi\}$ なる形の内包項は，φ に x “のみ” 自由に現れているとき，**主要内包項**と呼ぶことにする．

クラス

主要 ε 項と主要内包項をクラス (class) と呼ぶ．またこれらのみがクラスである．

主要 ε 項は実際は集合である (後述).

なぜ書き換えるか

- ε 項を導入したのは，存在文に対して証人を付けるため：

$$\exists x\varphi(x) \;\rightarrow\; \varphi(\varepsilon x\varphi(x)).$$

- しかし φ に内包項が使われているとき，$\varepsilon x\varphi(x)$ は使えない (作られていない).
- そのときは，φ を “同値” な $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式 $\hat{\varphi}$ に書き換えて

$$\exists x\varphi(x) \;\rightarrow\; \varphi(\varepsilon x\hat{\varphi}(x))$$

を公理とすればよい.

式の書き換え

φ の部分式のうち原子式であるところを表に従って直したものを「φ の**書き換え**」と呼ぶ.

	元の式	書き換え後
(1)	$a = \{z \mid \psi\}$	$\forall v\,(v \in a \leftrightarrow \psi(z/v))$
(2)	$\{y \mid \varphi\} = b$	$\forall u\,(\varphi(y/u) \leftrightarrow u \in b)$
(3)	$\{y \mid \varphi\} = \{z \mid \psi\}$	$\forall u\,(\varphi(y/u) \leftrightarrow \psi(z/u))$
(4)	$a \in \{z \mid \psi\}$	$\psi(z/a)$
(5)	$\{y \mid \varphi\} \in b$	$\exists s\,(\forall u\,(\varphi(y/u) \leftrightarrow u \in s) \land s \in b)$
(6)	$\{y \mid \varphi\} \in \{z \mid \psi\}$	$\exists s\,(\forall u\,(\varphi(y/u) \leftrightarrow u \in s) \land \psi(z/s))$

ここで,

- a, b は変項か主要 ε 項.
- $\psi(z/v)$ は ψ に自由に現れている z に v を代入した式.

主結果

本論文の主結果は，**ZF** 集合論の任意の命題 ψ に対して

$$\textbf{ZF}\ \text{集合論で}\ \psi\ \text{が証明可能} \iff \text{本論文の集合論で}\ \psi\ \text{が証明可能}$$

が成り立つということであるが，より精密に書くと

主結果

$\mathcal{L}_{\in}$ の任意の文 (自由な変項が現れない式) ψ に対して，「Γ から ψ への **HK** の証明で $\mathcal{L}_{\in}$ の式の列であるものが取れる」ことと「Σ から ψ への **HE** の証明で $\mathcal{L}$ の文の列であるものが取れる」ことは同値.

ここで,

- Γ は $\mathcal{L}_{\in}$ の文で書かれた **ZF** 集合論の公理系.
- Σ は $\mathcal{L}$ の文で書かれた本論文の公理系.
- **HK** と **HE** は証明体系 (論理的公理+推論規則).

以下詳細.

ZF の公理系

Γ の公理

外延性　「同一の要素を持つ集合同士は等しい」

$$\forall x\,\forall y\,(\forall z\,(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y).$$

相等性　「等しい集合同士の服属関係は一致する」

$$\begin{aligned}
&\forall x\,\forall y\,(x = y \to y = x),\\
&\forall x\,\forall y\,\forall z\,(x = y \to (x \in z \to y \in z)),\\
&\forall x\,\forall y\,\forall z\,(x = y \to (z \in x \to z \in y)).
\end{aligned}$$

置換　「集合を写像で写した像は集合」次の式の全称閉包：

$$\begin{aligned}
&\forall x\,\forall y\,\forall z\,(\varphi(x,y) \land \varphi(x,z) \to y = z)\\
&\quad \to \forall a\,\exists z\,\forall y\,(y \in z \leftrightarrow \exists x\,(x \in a \land \varphi(x,y))).
\end{aligned}$$

置換公理は式 φ ごとに公理となるので図式 (schema) と呼ばれる．

ZF の公理系

Γ の公理

対　「対集合が存在する」

$$\forall x\, \forall y\, \exists p\, \forall z\, (x = z \lor y = z \leftrightarrow z \in p).$$

合併　「合併集合が存在する」

$$\forall x\, \exists u\, \forall y\, (\exists z\, (z \in x \land y \in z) \leftrightarrow y \in u).$$

冪　「冪集合が存在する」

$$\forall x\, \exists p\, \forall y\, (\forall z\, (z \in y \to z \in x) \leftrightarrow y \in p).$$

これらの公理によって既存の集合から新しい集合が作られる.

ZF の公理系

Γ の公理

正則性 「空でない集合は自分自身と交わらない要素を持つ」

$$\forall r(\exists x(x \in r) \to \exists y(y \in r \land \forall z(z \in r \to z \notin y))).$$

無限 「自然数の全体を含む集合が存在する」

$$\exists x(\exists s(\forall t(t \notin s) \land s \in x) \land \forall y(y \in x \to \exists u(\forall v(v \in u \leftrightarrow v \in y \lor v = y) \land u \in x))).$$

正則性公理によって集合の範囲が決定する (整礎集合). また無限公理は唯一「集合の存在」に言及している.

古典論理

HK とは古典論理 (classical logic) の Hilbert 流証明体系である.

HK の論理的公理 (命題論理)

含意の分配 $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$.

含意の導入 $\varphi \to (\psi \to \varphi)$.

矛盾の導入 $\varphi \to (\neg\varphi \to \bot)$, $\neg\varphi \to (\varphi \to \bot)$.

否定の導入 $(\varphi \to \bot) \to \neg\varphi$.

論理和の導入 $\varphi \to \varphi \vee \psi$, $\psi \to \varphi \vee \psi$.

論理和の除去 $(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi \to \chi))$.

論理積の導入 $\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$.

論理積の除去 $\varphi \wedge \psi \to \varphi$, $\varphi \wedge \psi \to \psi$.

二重否定の除去 $\neg\neg\varphi \to \varphi$.

古典論理

HK の論理的公理 (量化)

- 全称の導入 $\forall y(\psi \to \varphi(x/y)) \to (\psi \to \forall x\varphi)$.
- 全称の除去 $\forall x\varphi \to \varphi(x/t)$.
- 存在の導入 $\varphi(x/t) \to \exists x\varphi$.
- 存在の除去 $\forall y(\varphi(x/y) \to \psi) \to (\exists x\varphi \to \psi)$.

HK の証明

「Γ からの **HK** の証明で $\mathcal{L}_\in$ の式の列であるもの」とは，$\mathcal{L}_\in$ の式の列 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ で，各 φ_i が次のいずれかであるもの：

- **HK** の公理である
- Γ の公理である
- φ_j, φ_k $(j, k < i)$ から三段論法で得られる
- φ_j $(j < i)$ から汎化で得られる.

Σ の公理

- Σ は「対」「合併」「冪」「正則性」「無限」は Γ と共通.
- Σ の「置換」は，二つの変項が現れる式に対しての言明に替わる.
- 新しく「内包性」と「要素」の公理が追加.

Σ の公理

a, b, c をクラスとするとき

外延性 「同一の要素を持つクラス同士は等しい」

$$\forall z(z \in a \leftrightarrow z \in b) \to a = b.$$

相等性 「等しい集合同士の服属関係は一致する」

$$a = b \to b = a,$$
$$a = b \to (a \in c \to b \in c),$$
$$a = b \to (c \in a \to c \in b).$$

Σ の公理

Σ の公理

a, b をクラスとするとき

内包性 「$\{\, y \mid \varphi(y) \,\}$ は φ であるモノの全体」

$$\forall x\,(\, x \in \{\, y \mid \varphi(y) \,\} \;\leftrightarrow\; \varphi(x)\,).$$

ただし φ には y のみが自由に現れる.

要素 「要素となりうるものは集合に限る」

$$a \in b \;\rightarrow\; \exists x\,(\, a = x \,).$$

クラスは量化しないのでこれらの公理は図式 (schema) である.

HE の公理

HE は本論文特有の証明体系である．命題論理の論理的公理は **HK** と共通するが，量化公理が違う．

HE の論理的公理 (量化)

De Morgan の法則 $\neg\forall x\varphi(x) \to \exists x\neg\varphi(x)$.

全称の除去 $\forall x\varphi \to \varphi(x/\tau)$.

存在の導入 $\varphi(x/\tau) \to \exists x\varphi$.

存在の除去 $\exists x\varphi(x) \to \varphi(\varepsilon x\hat{\varphi}(x))$.

$\hat{\varphi}$ とは，φ が $\mathcal{L}_\varepsilon$ の式でない場合に書き換えたもの．φ が $\mathcal{L}_\varepsilon$ の式ならば $\hat{\varphi}$ は φ とする．また τ は主要 ε 項とする．

HE の公理により，量化 $\forall x$, $\exists x$ は主要 ε 項の上を亘ることになる．

HE の証明

HK と違い，HE の証明は文で行う．

HE の証明

「Σ からの HE の証明で $\mathcal{L}$ の文の列であるもの」とは，$\mathcal{L}$ の文の列 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ で，各 φ_i が次のいずれかであるもの：

- HE の公理である
- Σ の公理である
- φ_j, φ_k $(j, k < i)$ から三段論法で得られる

「Σ から ψ への HE の証明で $\mathcal{L}$ の文の列であるもの」が取れることを

$$\Sigma \vdash \psi$$

と書く．

主結果の証明方針

次の 3 ステップに分割する：

- step1 「Σ から ψ への **HE** の証明で $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の文の列であるものが取れる」ならば「Γ から ψ への **HK** の証明で $\mathcal{L}_{\in}$ の式の列であるものが取れる」ことを示す.
- step2 「Γ から ψ への **HK** の証明で $\mathcal{L}_{\in}$ の式の列であるものが取れる」ならば「Σ から ψ への **HE** の証明で $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の文の列であるものが取れる」ことを示す.
- step3 「Σ から ψ への **HE** の証明で $\mathcal{L}$ の文の列であるものが取れる」ならば「Σ から ψ への **HE** の証明で $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の文の列であるものが取れる」ことを示す.

集合

集合

クラス a が集合であるとは,

$$\Sigma \vdash \exists x\,(a = x)$$

となること．$\Sigma \vdash \neg\exists x\,(a = x)$ なら a は真クラス (proper class).

主要 ε 項は集合

任意の主要 ε 項 τ に対して $\Sigma \vdash \exists x\,(\tau = x)$.

実際，外延性公理より $\tau = \tau$ となり，また

$$\tau = \tau \;\rightarrow\; \exists x\,(\tau = x)$$

は **HE** の量化公理なので，三段論法で $\exists x\,(\tau = x)$ が出る．

全称式の導出

全称式の導出

φ を，x のみが自由に現れる $\mathcal{L}$ の式とするとき，

$$\vdash \varphi(\varepsilon x \neg\hat{\varphi}(x)) \;\to\; \forall x\varphi(x).$$

ただし $\hat{\varphi}$ は必要に応じて φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き換えたもの．

実際，

$$\neg\forall x\varphi(x) \;\to\; \exists x \neg\varphi(x),$$
$$\exists x \neg\varphi(x) \;\to\; \neg\varphi(\varepsilon x \neg\hat{\varphi}(x))$$

は **HE** の量化公理であり，

$$\neg\forall x\varphi(x) \;\to\; \neg\varphi(\varepsilon x \neg\hat{\varphi}(x))$$

が導かれ，対偶律より

$$\varphi(\varepsilon x \neg\hat{\varphi}(x)) \;\to\; \forall x\varphi(x).$$

内包項の ε 項表現

集合である内包項は ε 項で書ける

φ を，x のみが自由に現れる $\mathcal{L}$ の式とするとき，

$$\exists s\,(\{\,x \mid \varphi(x)\,\} = s\,) \vdash \{\,x \mid \varphi(x)\,\} = \varepsilon s\,\forall x\,(\,\varphi(x) \leftrightarrow x \in s\,).$$

$\forall x\,(\,\varphi(x) \leftrightarrow x \in s\,)$ は $\{\,x \mid \varphi(x)\,\} = s$ の書き換えなので，

$$\exists s\,(\{\,x \mid \varphi(x)\,\} = s\,) \rightarrow \{\,x \mid \varphi(x)\,\} = \varepsilon s\,\forall x\,(\,\varphi(x) \leftrightarrow x \in s\,)$$

は **HE** の量化公理である．従って $\exists s\,(\{\,x \mid \varphi(x)\,\} = s\,)$ を公理とすれば

$$\{\,x \mid \varphi(x)\,\} = \varepsilon s\,\forall x\,(\,\varphi(x) \leftrightarrow x \in s\,)$$

が定理として出る．

書き換えの同値性

書き換えは同値

φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の文ではない $\mathcal{L}$ の文とするとき,

$$\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \hat{\varphi}.$$

ただし $\hat{\varphi}$ は φ の書き換え.

内包性公理と要素の公理はこの同値性を得るためにある.

$\exists x\varphi(x) \to \exists y\varphi(y)$ の証明

φ は $\mathcal{L}_\in$ の式で，x のみ自由に現れているとし，y は x への代入について自由であるとするとき，

$$\vdash \exists x\varphi(x) \to \exists y\varphi(y).$$

HE で証明すると，

$$\exists x\varphi(x) \to \varphi(\varepsilon x\varphi(x)),$$
$$\varphi(\varepsilon x\varphi(x)) \to \exists y\varphi(y)$$

が共に **HE** の公理なので

$$\exists x\varphi(x) \to \exists y\varphi(y)$$

が従う．

$\exists x \varphi(x) \to \exists y \varphi(y)$ の証明

一方で **HK** で証明すると，

$$\varphi(x) \to \exists y \varphi(y)$$

は **HK** の公理であり，汎化によって

$$\forall x\,(\,\varphi(x) \to \exists y \varphi(y)\,)$$

が得られる．

$$\forall x\,(\,\varphi(x) \to \exists y \varphi(y)\,) \to (\,\exists x \varphi(x) \to \exists y \varphi(y)\,)$$

が **HK** の公理なので，三段論法で

$$\exists x \varphi(x) \to \exists y \varphi(y)$$

が出る．

$\exists x\varphi(x) \to \exists y\varphi(y)$ の証明

HE で証明した際，A を $\exists x\varphi(x)$，B を $\varphi(\varepsilon x\varphi(x))$，$C$ を $\exists y\varphi(y)$ として

$$
\begin{aligned}
& A \to B, \\
& B \to C, \\
& (B \to C) \to (A \to (B \to C)), \\
& A \to (B \to C), \\
& (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)), \\
& (A \to B) \to (A \to C), \\
& A \to C
\end{aligned}
$$

を追加しなくては証明とならないが，証明の組み立ては **HK** よりも直観的である．

$\exists y\,(\,\exists x\varphi(x) \ \rightarrow\ \varphi(y)\,)$ の証明

φ は $\mathcal{L}_\in$ の式で，x のみ自由に現れているとし，y は x への代入について自由であるとするとき，

$$\vdash \exists y\,(\,\exists x\varphi(x) \ \rightarrow\ \varphi(y)\,).$$

HE で証明すると，

$$\exists x\varphi(x) \ \rightarrow\ \varphi(\varepsilon x\varphi(x))$$

は **HE** の公理であり，

$$\begin{aligned}&(\,\exists x\varphi(x) \ \rightarrow\ \varphi(\varepsilon x\varphi(x))\,)\\ &\quad \rightarrow\ \exists y\,(\,\exists x\varphi(x) \ \rightarrow\ \varphi(y)\,)\end{aligned}$$

も **HE** の公理なので，三段論法で

$$\exists y\,(\,\exists x\varphi(x) \ \rightarrow\ \varphi(y)\,)$$

が従う．

$\exists y\,(\,\exists x\varphi(x) \;\rightarrow\; \varphi(y)\,)$ の証明

一方で **HK** で証明すると，

$$\exists x\varphi(x) \;\rightarrow\; \varphi(\varepsilon x\varphi(x))$$

と

$$\begin{aligned}(\,\exists x\varphi(x) \;\rightarrow\; \exists y\varphi(y)\,) \;&\rightarrow\; (\,\neg\exists x\varphi(x) \vee \exists y\varphi(y)\,),\\ &\rightarrow\; \exists y\,(\,\neg\exists x\varphi(x) \vee \varphi(y)\,),\\ &\rightarrow\; \exists y\,(\,\exists x\varphi(x) \;\rightarrow\; \varphi(y)\,)\end{aligned}$$

の証明が必要になる．明らかに数行で終わる証明ではないし，証明の方針も直観とはずれる．

- D. Hilbert and P. Bernays, 数学の基礎 (吉田夏彦, 渕野昌訳), 丸善出版株式会社, 2012, pp. 23-63, ISBN 978-4-621-06405-4.
Studia Logica, vol. 82, no. 1, pp. 133-155, 2006.
- N. Bourbaki, 数学原論 集合論 1 (前原昭二訳), 第一刷, 東京都書株式会社, 1968, pp. 64-65.
- 島内剛一, 数学の基礎, 第 1 版, 日本評論社, 2016, p. 67, ISBN 978-4-535-60106-2.
- 竹内外史, 現代集合論入門, 増強版, 日本評論社, 2016, pp. 138-183, ISBN 978-4-535-60116-1.