ε 計算とクラスの導入による具体的で直観的な集合論の構築

関根深澤研 百合川尚学
学籍番号：29C17095
指導教員 深澤正彰 教授

February 9, 2020

Contents

ε について

- ε 計算は数論の無矛盾性証明のために Hilbert[1] が開発.
- ε によって $\exists, \forall$ を使う証明を命題論理の証明に埋め込める.
- 式 $\varphi(x)$ に対して

$$\varepsilon x \varphi(x)$$

という形のモノを作り，ε 項と呼ぶ．命題論理の証明に埋め込む際には，$\exists$ や $\forall$ の付いた式を

$$\varphi(x/\varepsilon x \varphi(x)) \stackrel{\text{def}}{\longleftrightarrow} \exists x \varphi(x),$$
$$\varphi(x/\varepsilon x \neg x \varphi(x)) \stackrel{\text{def}}{\longleftrightarrow} \forall x \varphi(x)$$

によって変換する.

ε について

- 今回 ε 項を導入したのは「存在」と「実在」を同義とするため.
- つまり，導入の意図は存在文に対して証人を与えること (Henkin 拡大)：

$$\exists x\varphi(x) \rightarrow \varphi(\varepsilon x\varphi(x)).$$

この式は $\exists$ に関する主要な公理.

- 「φ である集合が存在すれば，その一つは $\varepsilon x\varphi(x)$ である.」
- 「$\neg\forall x\varphi(x) \rightarrow \exists x \neg\varphi(x)$」と組み合わせると

$$\varphi(\varepsilon x \neg\varphi(x)) \rightarrow \forall x\varphi(x)$$

が出る.

ε について

- ZF 集合論では集合というモノが用意されていないため，「存在」は「実在」ではない．たとえば

$$\exists x \forall y (y \notin x)$$

は定理であり「空集合は存在する」と読むが，空集合を“実際に取ってくる”ことは不可能．

- 空集合を手に入れる一つの方法は「定義による拡大」．
- $\forall y (y \notin \emptyset)$ を $\emptyset$ の定義式として公理に追加し，$\emptyset$ を “語彙” に追加．

ε について

- ε 項を使えば，∃ の公理と空集合の存在定理によって次が成立：

$$\forall y\,(y \notin \varepsilon x\,\forall y\,(y \notin x)).$$

  赤字の部分が空集合を表す.
- 「定義による拡大」と ε 項による拡大の違い：
  - 前者は “$\exists x\varphi(x)$” が証明されたらその度に集合論を拡大.
  - 後者は存在文の成立不成立に関係なく集合論を一気に拡大.

ε 項を使うメリット

- 「存在」の「実在」による補強が簡単で明示的.
- 量化 $\forall, \exists$ の範囲が具体的に掴める.
- 証明で用いる推論規則は三段論法のみで済む.
- 証明が容易になる場合がある.

クラスについて

- Bourbaki[4] や島内 [5] でも ε 項を使った集合論を展開.
- ところで,「φ である集合の全体」の意味の

$$\{x \mid \varphi(x)\}$$

というモノも取り入れたい.
- Bourbaki[4] や島内 [5] では

$$\{x \mid \varphi(x)\} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \varepsilon y \forall x(\varphi(x) \leftrightarrow x \in y)$$

と定めるが,

$$\exists y \forall x(\varphi(x) \leftrightarrow x \in y)$$

が成立しない場合は「φ である集合の全体」という意味を持たない.
- **ZF** 集合論では「定義による拡大」 or インフォーマルな導入.

クラスについて

- 「集合しか扱わない」という立場だと集合ではない「モノの集まり」は扱えない．これを合法的に扱いたい．
- クラスを扱う理論として **BG** や **MK** がある．これらはクラス用の変項 (大文字) を用意して，

$$\exists X \forall x\,(\,\varphi(x) \leftrightarrow x \in X\,)$$

が成り立ったら「定義による拡大」で $\{\,x \mid \varphi(x)\,\}$ を追加．
- クラス用の変項は不要で，一度に全てのクラスを導入する方法がある．
- 式 φ から直接 $\{\,x \mid \varphi\,\}$ を作ればよい (Bernays[6]，竹内 [7])．

クラスについて

クラス

式 φ に x のみが自由に現れているとき，$\varepsilon x \varphi(x)$, $\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$ の形のモノをクラス **(class)** と呼ぶ．

- クラスである ε 項は集合である．
- 集合でないクラスもある．たとえば $\{\, x \mid x = x \,\}$ や $\{\, x \mid x \notin x \,\}$ は集合ではない．

集合の定義は竹内 [7] に倣う．

集合

クラス c が

$$\exists x\,(\, c = x \,)$$

を満たすとき c を集合 **(set)** と呼ぶ．$\neg \exists x\,(\, c = x \,)$ である場合は真クラス **(proper class)** と呼ぶ．定義により集合はクラスである．

主結果

- ε 計算とクラスの直接的な導入を組み合わせたが，これが **ZF** 集合論の "妥当" な拡張であるかどうかが問題になる．
- 妥当性は，**ZF** 集合論の命題 ψ に対して

  ZF 集合論で ψ が証明可能 $\Longleftrightarrow$ 新しい集合論で ψ が証明可能

  が成り立つかどうかで検証する．より精しく書くと，

主結果

$\mathcal{L}_\in$ の任意の文 (自由な変項が現れない式) ψ に対して，「Γ から ψ への **HK** の証明で $\mathcal{L}_\in$ の式の列であるものが取れる」ことと「Σ から ψ への **HE** の証明で $\mathcal{L}$ の文の列であるものが取れる」ことは同値．

ここで，

- Γ は $\mathcal{L}_\in$ の文で書かれた **ZF** 集合論の公理系．
- Σ は $\mathcal{L}$ の文で書かれた本論文の公理系．
- **HK** と **HE** は証明体系 (論理的公理+推論規則)．

以下詳細．

言語 $\mathcal{L}_\in$

$\mathcal{L}_\in$ とは **ZF** 集合論の言語である.

言語 $\mathcal{L}_\in$ の語彙 (参考：菊池 [14])

矛盾記号	$\perp$
論理記号	$\neg,\ \vee,\ \wedge,\ \rightarrow$
量化子	$\forall,\ \exists$
述語記号	$=,\ \in$
変項	$x, y, z, \cdots$.

言語 $\mathcal{L}_\in$ の項と式

$\mathcal{L}_\in$ の項と式は次の規則で生成する.

$\mathcal{L}_\in$ の項と式

項 変項は項であり，またこれらのみが項である.

式
- $\perp$ は式である.
- 項 τ と項 σ に対して $\tau \in \sigma$ と $\tau = \sigma$ は式である.
- 式 φ に対して $\neg\varphi$ は式である.
- 式 φ と式 ψ に対して $\varphi \vee \psi$ と $\varphi \wedge \psi$ と $\varphi \rightarrow \psi$ はいずれも式である.
- 式 φ と項 x に対して $\exists x\varphi$ と $\forall x\varphi$ は式である.
- これらのみが式である.

言語の拡張

- クラスを正式に導入するために言語を拡張する．
- 拡張は二段階に分けて行う．始めに ε 項のために拡張し，次に $\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$ の形の項のために拡張する．
- 始めの拡張で作る言語を $\mathcal{L}_\mathcal{E}$ と名付ける．

言語 $\mathcal{L}_\mathcal{E}$ の語彙 (参考：島内 [5])

矛盾記号	$\bot$
論理記号	$\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\to$
量化子	$\forall$, $\exists$, ε
述語記号	$=$, $\in$
変項	$x, y, z, \cdots$.

$\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項と式

$\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項と式の定義 (参考：Moser&Zach[2])

- 変項は項である.
- $\perp$ は式である.
- 項 τ と項 σ に対して $\tau \in \sigma$ と $\tau = \sigma$ は式である.
- 式 φ に対して $\neg\varphi$ は式である.
- 式 φ と式 ψ に対して $\varphi \vee \psi$ と $\varphi \wedge \psi$ と $\varphi \rightarrow \psi$ はいずれも式である.
- 式 φ と変項 x に対して $\exists x\varphi$ と $\forall x\varphi$ は式である.
- 式 φ と変項 x に対して $\varepsilon x\varphi$ は項である.
- これらのみが項と式である.

- $\mathcal{L}_{\in}$ との大きな違いは項と式の生成が循環している点.
- $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式が $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項を用いて作られるのは当然ながら，その逆に $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項もまた $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式から作られる.
- $\mathcal{L}_{\in}$ の式は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式でもある.

言語 $\mathcal{L}$

- $\mathcal{L}_\mathcal{E}$ の式 φ と変項 x で作られる $\varepsilon x \varphi$ なる項を ε 項 (epsilon term) という．
- $\mathcal{L}_\mathcal{E}$ の式 φ と変項 x で作られる $\{x \mid \varphi\}$ なる項を内包項ということにする．

言語 $\mathcal{L}$ は本論文特有の言語である．内包項の導入は竹内 [7] を参考にしているが，$\mathcal{L}_\mathcal{E}$ の式を使って入れるという点が本論文の特徴である．

言語 $\mathcal{L}$ の語彙

矛盾記号	$\perp$
論理記号	$\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$
量化子	$\forall, \exists$
述語記号	$=, \in$
変項	$x, y, z, \cdots$.
ε 項と内包項	上記のもの

$\mathcal{L}$ の項と式

$\mathcal{L}$ の項と式の定義

項 変項，ε 項，内包項は項である．またこれらのみが項である．

式
- $\perp$ は式である．
- 項 τ と項 σ に対して $\tau \in \sigma$ と $\tau = \sigma$ は式である．
- 式 φ に対して $\neg\varphi$ は式である．
- 式 φ と式 ψ に対して $\varphi \vee \psi$ と $\varphi \wedge \psi$ と $\varphi \rightarrow \psi$ はいずれも式である．
- 式 φ と変項 x に対して $\exists x\varphi$ と $\forall x\varphi$ は式である．
- これらのみが式である．

言語 $\mathcal{L}$ こそが本論文の標準言語である．

扱う式の制限

上で作った項や式の中には

$$\varepsilon x(y = y), \quad \{x \mid z \neq z\}, \quad \forall x(u \in v)$$

のような意味の通らないものが氾濫しているので，排除する．

- $\varepsilon x \varphi$ なる形の ε 項は，φ に x “のみ” 自由に現れているとき主要 ε 項と呼ぶことにする．
- $\{x \mid \varphi\}$ なる形の内包項は，φ に x “が” 自由に現れているとき，正則内包項と呼ぶことにする．
- 以降扱う式に現れる ε 項は全て主要 ε 項，内包項は全て正則内包項であるとし，$\forall x \varphi$ や $\exists x \varphi$ なる式は φ に x が自由に現れているとする．

クラス

主要 ε 項と同様に，$\{x \mid \varphi\}$ なる形の内包項は，φ に x “のみ” 自由に現れているとき，主要内包項と呼ぶことにする．

クラス

主要 ε 項と主要内包項をクラス (class) と呼ぶ．またこれらのみがクラスである．

主要 ε 項は実際は集合である (後述).

$\mathcal{L}$ の式を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き換える

- ε 項を導入したのは，存在文に対して証人を付けるため：

$$\exists x\varphi(x) \ \rightarrow \ \varphi(\varepsilon x\varphi(x)).$$

- しかし φ に内包項が使われているとき，$\varepsilon x\varphi(x)$ は使えない (作られていない).
- そのときは，φ を “同値” な $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式 $\hat{\varphi}$ に書き換えて

$$\exists x\varphi(x) \ \rightarrow \ \varphi(\varepsilon x\hat{\varphi}(x))$$

を公理とすればよい.

式の書き換え

φ の部分式のうち原子式であるところを表に従って直したものを「φ の**書き換え**」と呼ぶ.

	元の式	書き換え後
(1)	$a = \{z \mid \psi\}$	$\forall v\,(v \in a \leftrightarrow \psi(z/v))$
(2)	$\{y \mid \varphi\} = b$	$\forall u\,(\varphi(y/u) \leftrightarrow u \in b)$
(3)	$\{y \mid \varphi\} = \{z \mid \psi\}$	$\forall u\,(\varphi(y/u) \leftrightarrow \psi(z/u))$
(4)	$a \in \{z \mid \psi\}$	$\psi(z/a)$
(5)	$\{y \mid \varphi\} \in b$	$\exists s\,(\forall u\,(\varphi(y/u) \leftrightarrow u \in s) \wedge s \in b)$
(6)	$\{y \mid \varphi\} \in \{z \mid \psi\}$	$\exists s\,(\forall u\,(\varphi(y/u) \leftrightarrow u \in s) \wedge \psi(z/s))$

ここで,

- a, b は変項か主要 ε 項.
- $\psi(z/v)$ は ψ に自由に現れている z に v を代入した式.

ZF の公理系

Γ の公理 (参考：Kunen[11])

外延性 「同一の要素を持つ集合同士は等しい」

$$\forall x\, \forall y\, (\forall z\, (z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y).$$

相等性 「等しい集合同士の服属関係は一致する」

$$\begin{aligned} &\forall x\, \forall y\, (x = y \to y = x), \\ &\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x = y \to (x \in z \to y \in z)), \\ &\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x = y \to (z \in x \to z \in y)). \end{aligned}$$

置換 「集合を写像で写した像は集合」次の式の全称閉包：

$$\begin{aligned} &\forall x\, \forall y\, \forall z\, (\varphi(x,y) \wedge \varphi(x,z) \to y = z) \\ &\to \forall a\, \exists z\, \forall y\, (y \in z \leftrightarrow \exists x\, (x \in a \wedge \varphi(x,y))). \end{aligned}$$

置換公理は式 φ ごとに公理となるので図式 (schema) と呼ばれる.

ZF の公理系

Γ の公理

対 「対集合が存在する」

$$\forall x \forall y \exists p \forall z (x = z \vee y = z \leftrightarrow z \in p).$$

合併 「合併集合が存在する」

$$\forall x \exists u \forall y (\exists z (z \in x \wedge y \in z) \leftrightarrow y \in u).$$

冪 「冪集合が存在する」

$$\forall x \exists p \forall y (\forall z (z \in y \rightarrow z \in x) \leftrightarrow y \in p).$$

これらの公理によって既存の集合から新しい集合が作られる.

ZF の公理系

Γ の公理

正則性 「空でない集合は自分自身と交わらない要素を持つ」

$$\forall r(\exists x(x \in r) \rightarrow \exists y(y \in r \wedge \forall z(z \in r \rightarrow z \notin y))).$$

無限 「自然数の全体を含む集合が存在する」

$$\exists x(\exists s(\forall t(t \notin s) \wedge s \in x) \wedge \forall y(y \in x \rightarrow \exists u(\forall v(v \in u \leftrightarrow v \in y \vee v = y) \wedge u \in x))).$$

正則性公理によって集合の範囲が決定する (整礎集合). また無限公理は唯一「集合の存在」に言及している.

古典論理

HK とは古典論理 (classical logic) の Hilbert 流証明体系である.

HK の論理的公理 (命題論理)(参考：戸次 [13])

- 含意の分配 $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$.
- 含意の導入 $\varphi \to (\psi \to \varphi)$.
- 矛盾の導入 $\varphi \to (\neg\varphi \to \bot)$, $\neg\varphi \to (\varphi \to \bot)$.
- 否定の導入 $(\varphi \to \bot) \to \neg\varphi$.
- 論理和の導入 $\varphi \to \varphi \vee \psi$, $\psi \to \varphi \vee \psi$.
- 論理和の除去 $(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi \to \chi))$.
- 論理積の導入 $\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$.
- 論理積の除去 $\varphi \wedge \psi \to \varphi$, $\varphi \wedge \psi \to \psi$.
- 二重否定の除去 $\neg\neg\varphi \to \varphi$.

古典論理

HK の論理的公理 (量化)(参考：戸次 [13])

全称の導入 $\forall y(\psi \to \varphi(x/y)) \to (\psi \to \forall x\varphi)$.

全称の除去 $\forall x\varphi \to \varphi(x/t)$.

存在の導入 $\varphi(x/t) \to \exists x\varphi$.

存在の除去 $\forall y(\varphi(x/y) \to \psi) \to (\exists x\varphi \to \psi)$.

HK の証明 (参考：戸次 [13])

「Γ からの **HK** の証明で $\mathcal{L}_\in$ の式の列であるもの」とは，$\mathcal{L}_\in$ の式の列 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ で，各 φ_i が次のいずれかであるもの：

- **HK** の公理である
- Γ の公理である
- φ_j, φ_k $(j, k < i)$ から三段論法で得られる
- φ_j $(j < i)$ から汎化で得られる.

Σ の公理

- Σ は「対」「合併」「冪」「正則性」「無限」は Γ と共通.
- Σ の「置換」は，二つの変項が現れる式に対しての言明に替わる.
- 新しく「内包性」と「要素」の公理が追加.

Σ の公理 (参考：竹内 [7])

a,b,c をクラスとするとき

外延性 「同一の要素を持つクラス同士は等しい」

$$\forall z(z \in a \leftrightarrow z \in b) \to a = b.$$

相等性 「等しい集合同士の服属関係は一致する」

$$a = b \to b = a,$$
$$a = b \to (a \in c \to b \in c),$$
$$a = b \to (c \in a \to c \in b).$$

Σ の公理

Σ の公理

a, b をクラスとするとき

内包性 「$\{ y \mid \varphi(y) \}$ は φ であるモノの全体」

$$\forall x \, (x \in \{ y \mid \varphi(y) \} \leftrightarrow \varphi(x)).$$

ただし $\{ y \mid \varphi(y) \}$ は主要内包項.

要素 「要素となりうるものは集合に限る」

$$a \in b \rightarrow \exists x \, (a = x).$$

- クラスは量化しないのでこれらの公理は図式 (schema) である.
- 要素の公理は Gödel[8] から引用.

HE の公理

HE は本論文特有の証明体系である．命題論理の論理的公理は **HK** と共通するが，量化公理が違う．

HE の論理的公理 (量化)

De Morgan の法則 $\neg\forall x\varphi(x) \to \exists x \neg\varphi(x)$.

全称の除去 $\forall x\varphi \to \varphi(x/\tau)$.

存在の導入 $\varphi(x/\tau) \to \exists x\varphi$.

存在の除去 $\exists x\varphi(x) \to \varphi(\varepsilon x\hat{\varphi}(x))$.

$\hat{\varphi}$ とは，φ が $\mathcal{L}_\varepsilon$ の式でない場合に書き換えたもの．φ が $\mathcal{L}_\varepsilon$ の式ならば $\hat{\varphi}$ は φ とする．また τ は主要 ε 項とする．

HE の公理により，量化 $\forall x, \exists x$ の亘る範囲は主要 ε 項の上となる．

HE の証明

HK と違い，**HE** の証明は文で行う．

HE の証明

「Σ からの **HE** の証明で $\mathcal{L}$ の文の列であるもの」とは，$\mathcal{L}$ の文の列 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ で，各 φ_i が次のいずれかであるもの：

- **HE** の公理である
- Σ の公理である
- φ_j, φ_k $(j, k < i)$ から三段論法で得られる

「Σ から ψ への **HE** の証明で $\mathcal{L}$ の文の列であるもの」が取れることを

$$\Sigma \vdash \psi$$

と書く．

主結果の証明方針

次の 3 ステップに分割する：

- step1 「Σ から ψ への **HE** の証明で $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の文の列であるものが取れる」ならば「Γ から ψ への **HK** の証明で $\mathcal{L}_{\in}$ の式の列であるものが取れる」ことを示す.
- step2 「Γ から ψ への **HK** の証明で $\mathcal{L}_{\in}$ の式の列であるものが取れる」ならば「Σ から ψ への **HE** の証明で $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の文の列であるものが取れる」ことを示す.
- step3 「Σ から ψ への **HE** の証明で $\mathcal{L}$ の文の列であるものが取れる」ならば 「Σ から ψ への **HE** の証明で $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の文の列であるものが取れる」ことを示す.
  step3 の逆は明らか．$\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の文は $\mathcal{L}$ の文なので.

step1 の略証

step1

「Σ から ψ への **HE** の証明で $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の文の列であるものが取れる」ならば「Γ から ψ への **HK** の証明で $\mathcal{L}_{\in}$ の式の列であるものが取れる」

補題

「Σ から ψ への **HE** の証明で $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の文の列であるものが取れる」ならば「Γ から ψ への **HE** の証明で $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の文の列であるものが取れる」

Σ の公理で $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の文で書かれているものに対して「Γ から ψ への **HE** の証明で $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の文の列であるものが取れる」ことを示せばよい.

step1 の略証

HK に $\exists x\varphi \rightarrow \varphi(x/\varepsilon x\varphi)$ の形の公理を追加した証明体系を **HK**ε とする.

補題

「Γ から ψ への **HE** の証明で $\mathcal{L}_\mathcal{E}$ の文の列であるものが取れる」ならば「Γ から ψ への **HK**ε の証明で $\mathcal{L}_\mathcal{E}$ の文の列であるものが取れる」

HE の公理で **HK**ε の公理でないものは

$$\neg\forall x\varphi \rightarrow \exists x\neg\varphi$$

のみ. これは **HK** の定理なので **HK**ε の定理でもある.

step1 の略証

- 「Γ から ψ への **HK**ε の証明で $\mathcal{L}_\mathcal{E}$ の文の列であるもの」の中の $\exists x\varphi \to \varphi(x/\varepsilon x\varphi)$ の形の公理を演繹定理で外に出すと：

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{HK},\mathcal{L}_\mathcal{E}} (\exists x\varphi \to \varphi(x/\varepsilon x\varphi)) \to \psi.$$

- 上の証明に現れる $\varepsilon x\varphi$ を新しい変項 y で置き換えると

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{HK},\mathcal{L}_\mathcal{E}} (\exists x\varphi \to \varphi(x/y)) \to \psi.$$

- **HK** の汎化と量化公理より

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{HK},\mathcal{L}_\mathcal{E}} \exists y(\exists x\varphi \to \varphi(x/y)) \to \psi.$$

- $\vdash_{\mathbf{HK},\mathcal{L}_\mathcal{E}} \exists y(\exists x\varphi \to \varphi(x/y))$ なので，三段論法で

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{HK},\mathcal{L}_\mathcal{E}} \psi.$$

step2 の略証

step2

「Γ から ψ への **HK** の証明で $\mathcal{L}_\in$ の式の列であるものが取れる」ならば「Σ から ψ への **HE** の証明で $\mathcal{L}_\varepsilon$ の文の列であるものが取れる」

- 「Γ から ψ への **HK** の証明で $\mathcal{L}_\in$ の式の列であるもの」を正則証明 (汎化の固有変項が一度しか使われない証明) に変換.
- 得られた正則証明に自由に現れる変項のうち，固有変項以外のものをすべて主要 ε 項に置き換える.
- 固有変項を主要 ε 項に置き換える．このとき

$$\varphi(x/\varepsilon x\neg\varphi) \;\to\; \forall x\varphi$$

が **HE** の定理であることを利用する.

step3 の略証

step3

「Σ から ψ への **HE** の証明で $\mathcal{L}$ の文の列であるものが取れる」ならば「Σ から ψ への **HE** の証明で $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の文の列であるものが取れる」

- $\mathcal{L}$ の文の列である証明 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の文に書き換える．このとき命題論理の公理と三段論法の形式は崩れない．
- **HE** の量化公理と Σ の公理は公理でない式に変わりうるが，それらが $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の文で証明可能であることを示す．

集合

集合

クラス a が集合であるとは，

$$\Sigma \vdash \exists x\,(a = x)$$

となること．$\Sigma \vdash \neg\exists x\,(a = x)$ なら a は真クラス (proper class).

主要 ε 項は集合

任意の主要 ε 項 τ に対して $\Sigma \vdash \exists x\,(\tau = x)$.

実際，外延性公理より $\tau = \tau$ となり，また

$$\tau = \tau \;\to\; \exists x\,(\tau = x)$$

は **HE** の量化公理なので，三段論法で $\exists x\,(\tau = x)$ が出る．

全称式の導出

全称式の導出

φ を，x のみが自由に現れる $\mathcal{L}$ の式とするとき，

$$\vdash \varphi(\varepsilon x \neg\hat{\varphi}(x)) \rightarrow \forall x\varphi(x).$$

ただし $\hat{\varphi}$ は必要に応じて φ を $\mathcal{L}_\varepsilon$ の式に書き換えたもの.

実際，

$$\neg\forall x\varphi(x) \rightarrow \exists x \neg\varphi(x),$$
$$\exists x \neg\varphi(x) \rightarrow \neg\varphi(\varepsilon x \neg\hat{\varphi}(x))$$

は **HE** の量化公理であり，

$$\neg\forall x\varphi(x) \rightarrow \neg\varphi(\varepsilon x \neg\hat{\varphi}(x))$$

が導かれ，対偶律より

$$\varphi(\varepsilon x \neg\hat{\varphi}(x)) \rightarrow \forall x\varphi(x).$$

内包項の ε 項表現

集合である主要内包項は ε 項で書ける

φ を，x のみが自由に現れる $\mathcal{L}$ の式とするとき，

$$\exists s\,(\{\,x \mid \varphi(x)\,\} = s\,) \vdash \{\,x \mid \varphi(x)\,\} = \varepsilon s\,\forall x\,(\,\varphi(x) \;\leftrightarrow\; x \in s\,).$$

$\forall x\,(\,\varphi(x) \;\leftrightarrow\; x \in s\,)$ は $\{\,x \mid \varphi(x)\,\} = s$ の書き換えなので，

$$\exists s\,(\{\,x \mid \varphi(x)\,\} = s\,) \;\rightarrow\; \{\,x \mid \varphi(x)\,\} = \varepsilon s\,\forall x\,(\,\varphi(x) \;\leftrightarrow\; x \in s\,)$$

は **HE** の量化公理である．従って $\exists s\,(\{\,x \mid \varphi(x)\,\} = s\,)$ を公理とすれば

$$\{\,x \mid \varphi(x)\,\} = \varepsilon s\,\forall x\,(\,\varphi(x) \;\leftrightarrow\; x \in s\,)$$

が定理として出る．

書き換えの同値性

書き換えは同値

φ を $\mathcal{L}_\mathcal{E}$ の文ではない $\mathcal{L}$ の文とするとき,

$$\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \hat{\varphi}.$$

ただし $\hat{\varphi}$ は φ の書き換え.

内包性公理と要素の公理はこの同値性を得るためにある.

$\exists x\varphi(x) \ \rightarrow \ \exists y\varphi(y)$ の証明

φ は $\mathcal{L}_{\in}$ の式で，x のみ自由に現れているとし，y は x への代入について自由であるとするとき，

$$\vdash \exists x\varphi(x) \ \rightarrow \ \exists y\varphi(y).$$

HE で証明すると，

$$\begin{aligned} \exists x\varphi(x) \ &\rightarrow \ \varphi(\varepsilon x\varphi(x)), \\ \varphi(\varepsilon x\varphi(x)) \ &\rightarrow \ \exists y\varphi(y) \end{aligned}$$

が共に **HE** の公理なので

$$\exists x\varphi(x) \ \rightarrow \ \exists y\varphi(y)$$

が従う．

$\exists x \varphi(x) \to \exists y \varphi(y)$ の証明

一方で **HK** で証明すると,

$$\varphi(x) \to \exists y \varphi(y)$$

は **HK** の公理であり，汎化によって

$$\forall x\,(\varphi(x) \to \exists y \varphi(y))$$

が得られる.

$$\forall x\,(\varphi(x) \to \exists y \varphi(y)) \to (\exists x \varphi(x) \to \exists y \varphi(y))$$

が **HK** の公理なので，三段論法で

$$\exists x \varphi(x) \to \exists y \varphi(y)$$

が出る.

$\exists x\varphi(x) \to \exists y\varphi(y)$ の証明

HE で証明した際，A を $\exists x\varphi(x)$，B を $\varphi(\varepsilon x\varphi(x))$，$C$ を $\exists y\varphi(y)$ として

$$
\begin{aligned}
&A \to B,\\
&B \to C,\\
&(B \to C) \to (A \to (B \to C)),\\
&A \to (B \to C),\\
&(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)),\\
&(A \to B) \to (A \to C),\\
&A \to C
\end{aligned}
$$

を追加しなくては証明とならないが，証明の組み立ては **HK** よりも直観的である．

$\exists y\,(\,\exists x\varphi(x) \;\to\; \varphi(y)\,)$ の証明

φ は $\mathcal{L}_{\in}$ の式で，x のみ自由に現れているとし，y は x への代入について自由であるとするとき，

$$\vdash \exists y\,(\,\exists x\varphi(x) \;\to\; \varphi(y)\,).$$

HE で証明すると，

$$\exists x\varphi(x) \;\to\; \varphi(\varepsilon x\varphi(x))$$

は **HE** の公理であり，

$$(\,\exists x\varphi(x) \;\to\; \varphi(\varepsilon x\varphi(x))\,) \\ \;\to\; \exists y\,(\,\exists x\varphi(x) \;\to\; \varphi(y)\,)$$

も **HE** の公理なので，三段論法で

$$\exists y\,(\,\exists x\varphi(x) \;\to\; \varphi(y)\,)$$

が従う．

$\exists y\,(\,\exists x\varphi(x) \;\rightarrow\; \varphi(y)\,)$ の証明

一方で **HK** で証明すると，

$$\exists x\varphi(x) \;\rightarrow\; \varphi(\varepsilon x\varphi(x))$$

と

$$\begin{aligned}(\,\exists x\varphi(x) \;\rightarrow\; \exists y\varphi(y)\,) \;&\rightarrow\; (\,\neg\exists x\varphi(x) \vee \exists y\varphi(y)\,),\\ &\rightarrow\; \exists y\,(\,\neg\exists x\varphi(x) \vee \varphi(y)\,),\\ &\rightarrow\; \exists y\,(\,\exists x\varphi(x) \;\rightarrow\; \varphi(y)\,)\end{aligned}$$

の証明が必要になる．明らかに数行で終わる証明ではないし，証明の方針も直観とはずれる．

まとめ

本論文では ε 計算 (オリジナルとは違うが) とクラスの直接的な導入を併せた集合論を構築した.

何が具体的で直観的か

- 量化の範囲が具体的.
- 初めから集合とクラスが用意されていて，集合とクラスの範囲が明確.
- 存在するなら取れる.

- D. Hilbert and P. Bernays, 数学の基礎 (吉田夏彦, 渕野昌訳), 丸善出版株式会社, 2012, pp. 23-63, ISBN 978-4-621-06405-4.
- G. Moser and R. Zach, “The epsilon calculus and Herbrand complexity,” Studia Logica, vol. 82, no. 1, pp. 133-155, 2006.
- K. Miyamoto and G. Moser, “The epsilon calculus with equality and Herbrand complexity,” arXiv:1904.11304, 2019.
- N. Bourbaki, 数学原論 集合論 1 (前原昭二訳), 第一刷, 東京都書株式会社, 1968, pp. 64-65.
- 島内剛一, 数学の基礎, 第 1 版, 日本評論社, 2016, p. 67, ISBN 978-4-535-60106-2.
- P. Bernays, *Axiomatic Set Theory*, 2nd edition, North-Holland Publishing Company, 1968.
- 竹内外史, 現代集合論入門, 増強版, 日本評論社, 2016, pp. 138-183, ISBN 978-4-535-60116-1.

- K. Gödel, *The Consistency of the Continuum Hypothesis*, 8th printing, Princeton University Press 1970, p. 3, ISBN 0-691-07927-7.
- A. Morse, *A Theory of Sets*, Academic Press, 1965, pp. xix-xxiii.
- W. Quine, *Mathematical Logic*, revised edition, Harvard University Press, 1965.
- K. Kunen, キューネン数学基礎論講義 (藤田博司訳), 第 1 版, 日本評論社, 2016, pp. 123-221, ISBN 978-4-535-78748-3.
- 前原昭二, 記号論理入門, 新装版, 日本評論社, 2018, pp. 106-115, ISBN 4-535-60144-5.
- 戸次大介, 数理論理学, 初版, 東京大学出版会, 2016, pp. 148-166, ISBN 978-4-13-062915-7.
- 菊池誠, 不完全性定理, 初版, 共立出版株式会社, 2017, pp. 86-91, ISBN 978-4-320-11096-0.
- G. Takeuti, *Proof Theory*, vol. 81, North-Holland Publishing Company, 1975, pp. 15-17, ISBN 0-7204-2200-0.