

# $\varepsilon$ 計算とクラスの導入による具体的で直観的な集合論の構築

関根深澤研修士二年 百合川尚学

学籍番号 : 29C17095

2020 年 1 月 28 日

本論文では類 (class) を扱うための **ZF** 集合論の一つの拡張を提示したが、そこでの主要な定理は、**ZF** 集合論のどの命題に対しても「**ZF** 集合論で証明可能」ならば「本論文の集合論で証明可能」であり、逆に「本論文の集合論で証明可能」ならば「**ZF** 集合論で証明可能」であるということである。これを精密に言い直せば、**ZF** 集合論の任意の命題  $\psi$  に対して「 $\Gamma$  から  $\psi$  への **HK** の証明で  $\mathcal{L}_\in$  の式の列であるものが取れる」と「 $\Sigma$  から  $\psi$  への **HE** の証明で  $\mathcal{L}$  の文の列であるものが取れる」ことが同値であるということになる。以下で記号を解説する。

$\mathcal{L}_\in$  とは **ZF** 集合論の言語のことである。本論文ではもう二つの言語  $\mathcal{L}_\varepsilon$  と  $\mathcal{L}$  があり、項および式の形成規則はそれぞれの言語の中で指定される。 $\Gamma$  とは  $\mathcal{L}_\in$  の文で書かれた **ZF** 集合論の公理系 (外延性・相等性・置換・対・合併・冪・正則性・無限) であり、ここで文とは変項の自由な出現が無い式を指す。**HK** とは古典論理の Hilbert 流証明体系のことであり、「 $\Gamma$  からの **HK** の証明で  $\mathcal{L}_\in$  の式の列であるもの」とは、 $\mathcal{L}_\in$  の式の列  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  で、各  $\varphi_i$  について以下のいずれかが満たされるものである：(1) **HK** の公理である。(2)  $\Gamma$  の公理である。(3) 列の前の式から三段論法で得られる。(4) 列の前の式から汎化で得られる。

一方で  $\mathcal{L}$  も  $\Sigma$  も **HE** も本論文特有のものである。 $\mathcal{L}$  とは  $\mathcal{L}_\in$  の語彙を拡張した言語であり、拡張の中間に  $\mathcal{L}_\varepsilon$  がある。 $\mathcal{L}_\varepsilon$  は  $\mathcal{L}_\in$  に  $\varepsilon$  を追加した言語であるが、この  $\varepsilon$  とは数論の無矛盾性の考察過程で Hilbert[1] が発案したものである。 $\mathcal{L}$  には  $\{x \mid \varphi\}$  の形の項 (内包項) を追加し、正式に類が扱えるようになる。 $\Sigma$  とは本論文における集合論の公理系であり、 $\Gamma$  の「外延性」と「相等性」が類に対する言明に変更され、また「内包性」と「要素」の公理が新たに追加される。内包性公理は

$$\forall u (u \in \{x \mid \varphi(x)\} \leftrightarrow \varphi(u))$$

なる式を指し、 $\{x \mid \varphi(x)\}$  に対して「 $\varphi$  である  $x$

の全体」の意味を与える。要素の公理は

$$a \in b \rightarrow \exists x (a = x)$$

なる式を指し、これによって要素となりうるものは集合に限られる。右辺の  $\exists x (a = x)$  は「 $a$  は集合である」の意味の式であり、竹内 [2] の集合の定義を引用したものである。**HE** とは **HK** の量化の公理を改造した証明体系である。**HE** では **HK** の公理である  $\forall y (\psi \rightarrow \varphi(x/y)) \rightarrow (\psi \rightarrow \forall x \varphi)$  と  $\forall y (\varphi(x/y) \rightarrow \psi) \rightarrow (\exists x \varphi \rightarrow \psi)$  が削除され、代わりに

$$\begin{aligned} &\rightarrow \forall x \varphi \rightarrow \exists x \rightarrow \varphi, \\ &\exists x \varphi \rightarrow \varphi(x/\varepsilon x \varphi) \end{aligned}$$

が公理となる。**HE** の証明は全て文で行う。「 $\Sigma$  からの **HE** の証明で  $\mathcal{L}$  の文の列であるもの」とは、 $\mathcal{L}$  の文の列  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  で、各  $\varphi_i$  について以下のいずれかが満たされるものである：(1) **HE** の公理である。(2)  $\Sigma$  の公理である。(3) 列の前の式から三段論法で得られる。 $\varepsilon$  項の作用によって **HE** では汎化は不要になる。

なお、 $\varepsilon x \varphi$  なる形の項を  $\varepsilon$  項と呼ぶが、特に  $\varphi$  に  $x$  のみ自由に現れている場合は主要  $\varepsilon$  項と呼ぶ。また  $\{x \mid \varphi\}$  なる内包項に関しては  $\varphi$  に  $x$  が自由に現れている場合に正則内包項と呼ぶ。そして扱う  $\mathcal{L}$  の式には次の制限を付ける：(1) 式に現れる  $\varepsilon$  項は主要  $\varepsilon$  項である。(2) 式に現れる内包項は正則内包項である。**HE** の量化公理と外延性公理および集合の定義式によって、主要  $\varepsilon$  項は全て集合となり、また集合である類はいずれかの主要  $\varepsilon$  項と等しいものに限られる。

## 参考文献

- [1] D. ヒルベルト and P. ベルナイス, 数学の基礎 (吉田夏彦, 瀧野昌訳), 丸善出版株式会社, 2012, pp. 23-63, ISBN 978-4-621-06405-4.
- [2] 竹内外史, 現代集合論入門, 増強版, 日本評論社, 2016, p. 159, ISBN 978-4-535-60116-1.