Kunen note

sy

2020 年 2 月 4 日

目次

0.1 完全性定理

定理 0.1.1 (補題 2.12.3). 補題 2.12.2 から定理 2.12.1 が得られる．

略証. 健全性定理より $\Sigma \vdash \varphi$ なら $\Sigma \models \varphi$ となる．$\mathrm{CON}_{\models}(\Sigma)$ であれば，$\mathfrak{A} \models \Sigma$ なるモデル $\mathfrak{A}$ が取れるが，$\Sigma \vdash \varphi$ ならば $\mathfrak{A} \models \varphi$ となる．従って $\mathfrak{A} \not\models \neg\varphi$ となる．従って $\Sigma \nvdash \neg\varphi$ となる．以上より

$$\mathrm{CON}_{\models}(\Sigma) \Longrightarrow \mathrm{CON}_{\vdash}(\Sigma)$$

となる．$\Sigma \models \varphi$ ならば $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ を充足するモデルは存在しない．つまり $\neg\mathrm{CON}_{\models}(\Sigma \cup \{\neg\varphi\})$．すなわち

$$\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot.$$

すなわち $\Sigma \vdash \varphi$． ∎

定理 0.1.2 (補題 2.12.6). $\tau \in CT_0(\mathcal{L})$ のとき $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}_0}(\tau) \equiv \tau$．

略証. $\tau \in \mathcal{F}_0$ なら $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}_0}(\tau) \equiv \tau_{\mathfrak{A}_0} \equiv \tau$．いま $\tau_1, \cdots, \tau_n \in CT_0(\mathcal{L})$ に対して

$$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}_0}(\tau_i) \equiv \tau_i, \quad (i = 1, \cdots, n)$$

と仮定すると，

$$\begin{aligned}\mathrm{val}_{\mathfrak{A}_0}(f\tau_1 \cdots \tau_n) &\equiv f_{\mathfrak{A}_0}(\mathrm{val}_{\mathfrak{A}_0}(\tau_1), \cdots, \mathrm{val}_{\mathfrak{A}_0}(\tau_n)) \\ &\equiv f_{\mathfrak{A}_0}(\tau_1, \cdots, \tau_n) \\ &\equiv f\tau_1 \cdots \tau_n\end{aligned}$$

となる．

定理 0.1.3 (定義 2.12.9 の正当性の検証). $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}()$ は商写像であるから同地類の代表云々は関係ない．問題は $[\tau_i] \equiv [\sigma_i]$ のとき $f\tau_1 \cdots \tau_n \sim f\sigma_1 \cdots \sigma_n$ となり，$\Sigma \vdash p\tau_1 \cdots \tau_n \Longleftrightarrow \Sigma \vdash p\sigma_1 \cdots \sigma_n$ となるか．

つまり $f_{\mathfrak{A}}$ が写像であるということを示すということ．定義 2.12.9 では商写像 $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau) \equiv [\tau]$ から始めて，$f \in \mathcal{F}_n$ の解釈を

$$f_{\mathfrak{A}} : ([\tau_1], \cdots, [\tau_n]) \longmapsto \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(f\tau_1 \cdots \tau_n) \equiv [f\tau_1 \cdots \tau_n]$$

と定めている．

定理 0.1.4 (補題 2.12.10). 語彙 $\mathcal{L}$ の文の集合 Σ を考える．ただし $\mathcal{F}_0 \neq \emptyset$ と仮定する．$\mathfrak{A} = \mathfrak{CT}(\mathcal{L}, \Sigma)$ としよう．このとき

(1) $\mathcal{L}$ の閉項 τ に対して $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau) \equiv [\tau]$.

略証. (1) について，$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}()$ はもともとそのように設定されているのでこの問いはナンセンス．