ε 計算とクラスの導入による具体的で直観的な集合論の構築

関根深澤研修士二年 百合川尚学
学籍番号：29C17095

2020 年 1 月 28 日

本論文の主要な結果は，**ZF** 集合論のどの命題に対しても「**ZF** 集合論で証明可能」ならば「本論文の集合論で証明可能」であり，逆に「本論文の集合論で証明可能」ならば「**ZF** 集合論で証明可能」であるということである．これを精密に言い直せば，**ZF** 集合論の任意の命題 ψ に対して「Γ から ψ への **HK** の証明で $\mathcal{L}_\in$ の式の列であるものが取れる」ことと「Σ から ψ への **HE** の証明で $\mathcal{L}$ の式の列であるものが取れる」ことが同値であるという意味になる．以下で記号を解説する．

$\mathcal{L}_\in$ とは **ZF** 集合論の言語 $\{\in\}$ のことであり，Γ とは $\mathcal{L}_\in$ の文で書かれた **ZF** 集合論の公理系 (外延性・相等性・置換・対・合併・冪・正則性・無限) を表す．**HK** とは古典論理の Hilbert 流証明体系を指し,「Γ からの **HK** の証明で $\mathcal{L}_\in$ の式の列であるもの」とは，$\mathcal{L}_\in$ の式の列 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ で，各 φ_i について以下のいずれかが満たされるものを言う：(1) **HK** の公理である．(2) Γ の公理である．(3) 列の前の式 φ_j, φ_k から三段論法で得られる．つまりその場合は φ_j が $\varphi_k \rightarrow \varphi_i$ なる式であるか，φ_k が $\varphi_j \rightarrow \varphi_i$ なる式である．(4) 列の前の式 φ_j から汎化で得られる．つまりその場合は φ_j は $\xi(x/a)$ なる式で φ_i は $\forall x \xi$ なる式である．ここで $\xi(x/a)$ とは ξ に自由に現れる x に変項 a を代入した式であり，この a はこの汎化の固有変項と呼ばれる．

これに対して，$\mathcal{L}$ も Σ も **HE** も本論文特有のものである．$\mathcal{L}$ とは $\mathcal{L}_\in$ の語彙を拡張した言語である．本論文に登場する言語はもう一つ $\mathcal{L}_\varepsilon$ というものがある．$\mathcal{L}_\varepsilon$ とは $\mathcal{L}_\in$ に ε 項と呼ばれる項を追加した言語であるが，ε 項とは形式的述語計算から存在論理式を削除するために Hilbert[] が発案したものである．$\mathcal{L}$ に追加するものは $\{\, x \mid \varphi \,\}$ の形の項であり，この内包的記法にちなんでこれを内包項と呼ぶことにする．Σ とは本論文における集合論の公理であり，Γ と違うところは「外延性」,「相等性」が類に対する言明に変更されることと,「内包性」と「要素」の公理が新たに追加されることである．内包性公理は

$$\forall u \,(\, u \in \{\, x \mid \varphi(x) \,\} \leftrightarrow \varphi(u) \,)$$

なる図式を指し，$\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$ に対して φ である x の全体」の意味を与える．要素の公理は

$$a \in b \rightarrow \exists x \,(\, a = x \,)$$

なる図式を指し，これによって要素となりうるものは集合に限られる．右辺の $\exists x \,(\, a = x \,)$ とは a が集合であるという意味の式であり，竹内 [] の集合の定義を引用したものである．**HE** とは **HK** を改造した証明体系であり，量化の公理に違いがある．**HK** と **HE** で被るのは「$\exists$ 導入」$\varphi(x/\tau) \rightarrow \exists x \varphi$ と「$\forall$ 除去」$\forall x \varphi \rightarrow \varphi(x/\tau)$ であるが，**HK** にはもう二つ $\forall y \,(\, \psi \rightarrow \varphi(x/y) \,) \rightarrow (\, \psi \rightarrow \forall x \varphi \,)$ と $\forall y \,(\, \varphi(x/y) \rightarrow \psi \,) \rightarrow (\, \forall x \varphi \rightarrow \psi \,)$ があるが，**HE** ではこれらの代わりに

$$\neg \forall x \varphi \rightarrow \exists x \neg \varphi,$$
$$\exists x \varphi \rightarrow \varphi(x/\varepsilon x \varphi)$$

を公理とする．**HE** の証明は全て文で行う.「Σ からの **HE** の証明で $\mathcal{L}$ の文の列であるもの」とは，

$\mathcal{L}$ の文の列 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ で，各 φ_i について以下のいずれかが満たされるものを言う：(1) **HE** の公理である．(2) Σ の公理である．(3) 列の前の式 φ_j, φ_k から三段論法で得られる．ε 項の作用によって **HE** では汎化は不要になる．

1 導入

2 言語

本稿の言語は三つある．一つ目は言語 $\mathcal{L}_\in$ であり，その語彙は次から成る：

矛盾記号 $\bot$

論理記号 $\neg, \vee, \wedge, \to$

量化子 $\forall, \exists$

述語記号 $=, \in$

変項 $x, y, z, \cdots$.

$\mathcal{L}_\in$ の項と式は次で定義される：

項 変項のみが $\mathcal{L}_\in$ の項である．

式

- $\bot$ は式である．
- s, t を項とするとき $\in st, = st$ は式である．
- φ, ψ を式とするとき $\vee\varphi\psi, \wedge\varphi\psi, \to \varphi\psi$ は式である．
- x を項とし φ を式とするとき $\exists x\varphi, \exists x\varphi$ は式である．

二つ目は言語 $\mathcal{L}_\varepsilon$ であり，その語彙は $\mathcal{L}_\in$ の語彙に ε を追加したものである．$\mathcal{L}_\varepsilon$ の項と式は循環定義になる．

- $\bot$ は式である．
- s, t を項とするとき $\in st, = st$ は式である．
- φ, ψ を式とするとき $\vee\varphi\psi, \wedge\varphi\psi, \to \varphi\psi$ は式である．
- x を変項とし φ を式とするとき $\exists x\varphi, \exists x\varphi$ は式である．
- x を変項とし φ を式とするとき $\varepsilon x\varphi$ は項である．

x を変項とし φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とするとき，以下では $\varepsilon x\varphi$ なる項を ε 項と呼び，$\{\, x \mid \varphi \,\}$ なる項を内包項と呼ぶ．三つめは言語 $\mathcal{L}$ である．$\mathcal{L}$ の語彙は $\mathcal{L}_{\in}$ の語彙に ε 項及び内包項が加えたものである．

項 変項，ε 項，内包項のみが項である．

式

- $\bot$ は式である．
- s, t を項とするとき $\in st, = st$ は式である．
- φ, ψ を式とするとき $\vee\varphi\psi, \wedge\varphi\psi, \to \varphi\psi$ は式である．
- x を項とし φ を式とするとき $\exists x\varphi, \exists x\varphi$ は式である．

ε 項と内包項の中でも性質の良いものは

3 証明と公理

4 類と集合

5 保存拡大