ε 計算とクラスの導入による具体的で直観的な集合論の構築

関根深澤研 百合川尚学
学籍番号：29C17095

February 5, 2020

Contents

ε について

- 量化 ∃, ∀ を使う証明を命題論理の証明に埋め込むために Hilbert が開始.
- 式 $\varphi(x)$ に対して

$$\varepsilon x \varphi(x)$$

という形のオブジェクトを作り，ε 項と呼ぶ．また命題論理の証明に埋め込む際には，∃ や ∀ の付いた式を

$$\varphi(x/\varepsilon x\varphi(x)) \overset{\text{def}}{\longleftrightarrow} \exists x\varphi(x),$$

$$\varphi(x/\varepsilon x \neg x\varphi(x)) \overset{\text{def}}{\longleftrightarrow} \forall x\varphi(x)$$

によって変換すればよい.

ε について

- 今回 ε 項を導入したのは「存在」と「実在」を同義とするため.
- Hilbert の ε 計算ではなく，ε 項を用いて一種の Henkin 拡大を行う.
- つまり，導入の意図は存在文に対して証人を与えること：

$$\exists x \varphi(x) \;\rightarrow\; \varphi(\varepsilon x \varphi(x)).$$

  この式は ∃ に関する主要な公理.
- 「φ である集合が存在すれば，その一つは $\varepsilon x \varphi(x)$ である.」
- 「$\neg \forall x \varphi(x) \;\rightarrow\; \exists x \neg \varphi(x)$」と組み合わせると

$$\varphi(\varepsilon x \neg \varphi(x)) \;\rightarrow\; \forall x \varphi(x)$$

  が出る.

ε について

- **ZF** 集合論では集合というオブジェクトが用意されていないため，「存在」は「実在」ではない．たとえば

$$\exists x \forall y (y \notin x)$$

は定理であり「空集合は存在する」と読むが，空集合を“実際に取ってくる”ことは不可能．

- ε 項を使えば，∃ の公理と空集合の存在定理によって

$$\forall y (y \notin \varepsilon x \forall y (y \notin x))$$

が成り立つ．

ε 項を使うメリット

- 証明で用いる推論規則は三段論法のみで済む．
- 証明が容易になる場合がある．

クラスについて

- Bourbaki[] や島内 [] でも ε 項を使った集合論を展開.
- ところで,「φ である集合の全体」の意味の

$$\{ x \mid \varphi(x) \}$$

というオブジェクトも取り入れたい.
- **ZF** 集合論では「定義による拡大」 or インフォーマルな導入.
- Bourbaki[] や島内 [] では

$$\{ x \mid \varphi(x) \} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \varepsilon y \forall x (\varphi(x) \leftrightarrow x \in y)$$

と定めるが,

$$\exists y \forall x (\varphi(x) \leftrightarrow x \in y)$$

が成立しない場合は「φ である集合の全体」という意味を持たない.
- 式 φ から直接 $\{ x \mid \varphi(x) \}$ の形のオブジェクトを作ればよい.

クラスについて

クラス

式 φ に x のみが自由に現れているとき，$\varepsilon x\varphi(x)$, $\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$ の形のオブジェクトをクラス **(class)** と呼ぶ.

- クラスである ε 項は集合である.
- 集合でないクラスもある．たとえば $\{x \mid x = x\}$ や $\{x \mid x \notin x\}$ は集合ではない.

集合の定義は竹内 [] に倣う．定義により集合はクラスである.

集合

クラス c が

$$\exists x\,(\,c = x\,)$$

を満たすとき c を集合 **(set)** と呼び，そうでない場合は真クラス **(proper class)** と呼ぶ.

言語

- クラスという新しいオブジェクトを導入したら，この導入操作が“妥当”であるかどうかが問題になる．
- 妥当性は，ZF 集合論の命題 ψ に対して

  ZF 集合論で ψ が証明可能 $\Longleftrightarrow$ 新しい集合論で ψ が証明可能

  が成り立つかどうかで検証する．
- 集合論の言語と証明のルールを明らかにしなくてはならない．
- 言語 (の語彙) とは「変項」，「述語記号」，「論理記号」とその他もろもろの記号からなる．「式 (formula)」は言語の語彙を用いて作られる．名詞の役を担うのが「項 (term)」であり，文字は最もよく使われる項である．たとえば

  $$s \in t$$

  と書けば一つの式が出来上がる．
- まず ZF 集合論の言語 $\mathcal{L}_{\in}$ を明示する．

言語 $\mathcal{L}_\in$

言語 $\mathcal{L}_\in$ の語彙

矛盾記号	$\bot$
論理記号	$\neg,\ \vee,\ \wedge,\ \to$
量化子	$\forall,\ \exists$
述語記号	$=,\ \in$
変項	$x, y, z, \cdots.$

言語 $\mathcal{L}_\in$ の項と式

$\mathcal{L}_\in$ の項と式は次の規則で生成する.

$\mathcal{L}_\in$ の項と式

項 変項は項であり，またこれらのみが項である.

式
- $\perp$ は式である.
- 項 τ と項 σ に対して $\tau \in \sigma$ と $\tau = \sigma$ は式である.
- 式 φ に対して $\neg\varphi$ は式である.
- 式 φ と式 ψ に対して $\varphi \vee \psi$ と $\varphi \wedge \psi$ と $\varphi \rightarrow \psi$ はいずれも式である.
- 式 φ と項 x に対して $\exists x\varphi$ と $\forall x\varphi$ は式である.
- これらのみが式である.

言語の拡張

- クラスを正式に導入するには言語を拡張しなくてはならない．
- 拡張は二段階に分けて行う．始めに ε 項のために拡張し，次に $\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$ の形の項のために拡張する．
- 始めの拡張により得る言語を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ と名付ける．

言語 $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の語彙

矛盾記号	$\perp$
論理記号	$\neg,\ \vee,\ \wedge,\ \to$
量化子	$\forall,\ \exists,\ \varepsilon$
述語記号	$=,\ \in$
変項	$x, y, z, \cdots.$

$\mathcal{L}_{\varepsilon}$ の項と式

$\mathcal{L}_{\varepsilon}$ の項と式の定義

- 変項は項である.
- $\perp$ は式である.
- 項 τ と項 σ に対して $\tau \in \sigma$ と $\tau = \sigma$ は式である.
- 式 φ に対して $\neg\varphi$ は式である.
- 式 φ と式 ψ に対して $\varphi \vee \psi$ と $\varphi \wedge \psi$ と $\varphi \rightarrow \psi$ はいずれも式である.
- 式 φ と変項 x に対して $\exists x\varphi$ と $\forall x\varphi$ は式である.
- 式 φ と変項 x に対して $\varepsilon x\varphi$ は項である.
- これらのみが項と式である.

- $\mathcal{L}_{\in}$ との大きな違いは項と式の生成が循環している点.
- $\mathcal{L}_{\varepsilon}$ の式が $\mathcal{L}_{\varepsilon}$ の項を用いて作られるのは当然ながら，その逆に $\mathcal{L}_{\varepsilon}$ の項もまた $\mathcal{L}_{\varepsilon}$ の式から作られる.
- $\mathcal{L}_{\in}$ の式は $\mathcal{L}_{\varepsilon}$ の式でもある.

言語 $\mathcal{L}$

- $\mathcal{L}_\varepsilon$ の式 φ と変項 x に対して，$\varepsilon x \varphi$ なる項を ε 項 (epsilon term) という．
- $\mathcal{L}_\varepsilon$ の式 φ と変項 x に対して，$\{x \mid \varphi\}$ なる項を内包項ということにする．

言語 $\mathcal{L}$ の語彙

矛盾記号	$\perp$
論理記号	$\neg, \lor, \land, \to$
量化子	$\forall, \exists$
述語記号	$=, \in$
変項	$x, y, z, \cdots$.
ε 項と内包項	上記のもの

$\mathcal{L}$ の項と式

$\mathcal{L}$ の項と式の定義

項 変項，ε 項，内包項は項である．またこれらのみが項である．

式
- $\perp$ は式である．
- 項 τ と項 σ に対して $\tau \in \sigma$ と $\tau = \sigma$ は式である．
- 式 φ に対して $\neg\varphi$ は式である．
- 式 φ と式 ψ に対して $\varphi \vee \psi$ と $\varphi \wedge \psi$ と $\varphi \rightarrow \psi$ はいずれも式である．
- 式 φ と変項 x に対して $\exists x\varphi$ と $\forall x\varphi$ は式である．
- これらのみが式である．

言語 $\mathcal{L}$ こそが本論文の標準言語である．

扱う式の制限

上で作った項や式の中には

$$\varepsilon x\,(y = y), \quad \{x \mid z \neq z\}, \quad \forall x\,(u \in v)$$

のような意味の通らないものが氾濫しているので，排除する．

- $\varepsilon x \varphi(x)$ なる形の ε 項は，φ に x “のみ” 自由に現れているとき主要 ε 項と呼ぶことにする．
- $\{x \mid \varphi\}$ なる形の内包項は，φ に x “が” 自由に現れているとき，正則内包項と呼ぶことにする．
- 以降扱う式に現れる ε 項は全て主要 ε 項，内包項は全て正則内包項であるとし，$\forall x \varphi$ や $\exists x \varphi$ なる式は φ に x が自由に現れているとする．

クラス

クラス

$\varepsilon x\varphi(x)$ なる形の ε 項，及び $\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$ なる形の内包項は，φ に x “のみ” 自由に現れているときクラス (class) と呼ぶ．またこれらのみがクラスである．

主要 ε 項はクラスであるが，実際は集合である (後述).

なぜ書き換えるか

- ε 項を導入したのは，存在文に対して証人を付けるため：

$$\exists x \varphi(x) \;\rightarrow\; \varphi(\varepsilon x \varphi(x)).$$

- しかし φ に内包項が使われているとき，$\varepsilon x \varphi(x)$ は使えない (作られていない).
- そのときは，φ を "同値" な $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式 $\hat{\varphi}$ に書き換えて

$$\exists x \varphi(x) \;\rightarrow\; \varphi(\varepsilon x \hat{\varphi}(x))$$

  を公理とすればよい.

式の書き換え

φ の部分式のうち原子式であるところを表に従って直したものを「φ の**書き換え**」と呼ぶ.

	元の式	書き換え後
(1)	$a = \{z \mid \psi\}$	$\forall v\,(v \in a \leftrightarrow \psi(z/v))$
(2)	$\{y \mid \varphi\} = b$	$\forall u\,(\varphi(y/u) \leftrightarrow u \in b)$
(3)	$\{y \mid \varphi\} = \{z \mid \psi\}$	$\forall u\,(\varphi(y/u) \leftrightarrow \psi(z/u))$
(4)	$a \in \{z \mid \psi\}$	$\psi(z/a)$
(5)	$\{y \mid \varphi\} \in b$	$\exists s\,(\forall u\,(\varphi(y/u) \leftrightarrow u \in s) \wedge s \in b)$
(6)	$\{y \mid \varphi\} \in \{z \mid \psi\}$	$\exists s\,(\forall u\,(\varphi(y/u) \leftrightarrow u \in s) \wedge \psi(z/s))$

ここで,

- a, b は変項か主要 ε 項.
- $\psi(z/v)$ は ψ に自由に現れている z に v を代入した式.

主結果

本論文の主結果は

$$\text{ZF 集合論で } \psi \text{ が証明可能} \Longleftrightarrow \text{本論文の集合論で } \psi \text{ が証明可能}$$

であるが，より精密に書くと

主結果

$\mathcal{L}_\in$ の任意の文 (自由な変項が現れない式) ψ に対して，「Γ から ψ への **HK** の証明が取れる」ことと「Σ から ψ への **HE** の証明が取れる」ことは同値.

ここで,

- Γ は $\mathcal{L}_\in$ の文で書かれた **ZF** 集合論の公理系
- Σ は $\mathcal{L}$ の文で書かれた本論文の公理系.
- **HK** と **HE** は証明体系 (論理的公理+推論規則)

以下詳細.

ZF の公理系

Γ の公理

外延性　「同一の要素を持つ集合同士は等しい」

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$$

相等性　「等しい集合同士の服属関係は一致する」

$$\begin{aligned}&\forall x \forall y (x = y \rightarrow y = x),\\&\forall x \forall y \forall z (x = y \rightarrow (x \in z \rightarrow y \in z)),\\&\forall x \forall y \forall z (x = y \rightarrow (z \in x \rightarrow z \in y)).\end{aligned}$$

置換　「集合を写像で写した像は集合」次の式の全称閉包：

$$\begin{aligned}&\forall x \forall y \forall z (\varphi(x,y) \wedge \varphi(x,z) \rightarrow y = z)\\&\rightarrow \forall a \exists z \forall y (y \in z \leftrightarrow \exists x (x \in a \wedge \varphi(x,y))).\end{aligned}$$

置換公理は式 φ ごとに公理となるので図式 (schema) と呼ばれる.

ZF の公理系

Γ の公理

対　「対集合が存在する」

$$\forall x \, \forall y \, \exists p \, \forall z \, (x = z \lor y = z \; \leftrightarrow \; z \in p)$$

合併　「合併集合が存在する」

$$\forall x \, \exists u \, \forall y \, (\exists z \, (z \in x \land y \in z) \; \leftrightarrow \; y \in u)$$

冪　「冪集合が存在する」

$$\forall x \, \exists p \, \forall y \, (\forall z \, (z \in y \; \rightarrow \; z \in x) \; \leftrightarrow \; y \in p)$$

これらの公理によって既存の集合から新しい集合が作られる.

ZF の公理系

Γ の公理

正則性　「空でない集合は自分自身と交わらない要素を持つ」

$$\forall r(\exists x(x \in r) \to \exists y(y \in r \land \forall z(z \in r \to z \notin y)))$$

無限　「自然数の全体を含む集合が存在する」

$$\exists x(\exists s(\forall t(t \notin s) \land s \in x) \land \forall y(y \in x \to \exists u(\forall v(v \in u \leftrightarrow v \in y \lor v = y) \land u \in x)))$$

正則性公理によって集合の範囲が決定する (整礎集合). また無限公理は唯一「集合の存在」に言及している.

いろんなブロック

ブロック

これは普通のブロックです

警告ブロック

警告！これは警告ブロックだ！

例ブロック

例えば、こんなブロックです。