時系列解析

2017 年 8 月 7 日

1　Markov 連鎖

注意.　$0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$ と約束する.

基礎となる確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$.

- E: 集合,
- $(E, \mathcal{E})$: 可測空間,
- $(X_n)_{n=1}^{+\infty}$: E-値確率過程.

注意.　2 章 ~ 10 章は E が高々可算集合であるとして考える.

2　Markov 連鎖

定義 (Markov 性).　$\forall n \in \mathbb{N},\ i_0, i_1, \cdots, i_n \in E$,

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}\left(X_n = i_n \mid X_0 = i_0,\ X_1 = i_1,\ \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}\right)\\ &\quad = \mathrm{P}\left(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}\right).\end{aligned}$$

$(X_n)_{n=1}^{+\infty}$ が Markov 性を持つ場合，これを Markov 連鎖という．以後 $(X_n)_{n=1}^{+\infty}$ は Markov 連鎖.

3　Markov 行列

定義 (Markov 行列).　(i, j) 成分 $(\forall i, j \in E)$ を $\mathrm{P}\left(X_1 = j \mid X_0 = i\right)$ とする確率行列．行列を P，(i, j) 成分を $[P]_{ij}$ と表記．計算規則は以下.

$$\begin{aligned}P^0 &= I, && (I：恒等写像),\\ [P^n]_{ij} &= \sum_{k \in E} [P^{n-1}]_{ik} [P]_{kj}, && (\forall i, j \in E,\ n \in \mathbb{N}).\end{aligned}$$

定義から次が成立

$$[P^n]_{ij} = \mathrm{P}\left(X_n = j \mid X_0 = i\right),\ (\forall n \in \mathbb{N},\ i, j \in E).$$

証明.　数学的帰納法で示されることである．$[P]_{ij} = \mathrm{P}\left(X_1 = j \mid X_0 = i\right)$ $(\forall i, j \in E)$ は明らかに成り立つことであるが，自然数 $n \geq 3$ に対して $[P^{n-1}]_{ij} = \mathrm{P}\left(X_{n-1} = j \mid X_0 = i\right)$ $(\forall i, j \in E)$ が成り立っていると仮定する．このとき任意の $i, j \in E$ に対して

$$\begin{aligned}[P^n]_{ij} &= \sum_{k \in E} [P^{n-1}]_{ik} [P]_{kj}\\ &= \sum_{k \in E} \mathrm{P}\left(X_{n-1} = k \mid X_0 = i\right) \mathrm{P}\left(X_1 = j \mid X_0 = k\right)\\ &= \sum_{k \in E} \mathrm{P}\left(X_{n-1} = k \mid X_0 = i\right) \mathrm{P}\left(X_n = j \mid X_{n-1} = k\right)\\ &= \sum_{k \in E} \frac{\mathrm{P}\left(X_{n-1} = k, X_0 = i\right)}{\mathrm{P}\left(X_0 = i\right)} \frac{\mathrm{P}\left(X_n = j, X_{n-1} = k\right)}{\mathrm{P}\left(X_{n-1} = k\right)}\\ &= \sum_{k \in E} \frac{\mathrm{P}\left(X_n = j, X_{n-1} = k, X_0 = i\right)}{\mathrm{P}\left(X_0 = i\right)} \frac{\mathrm{P}\left(X_{n-1} = k, X_0 = i\right) \mathrm{P}\left(X_n = j, X_{n-1} = k\right)}{\mathrm{P}\left(X_n = j, X_{n-1} = k, X_0 = i\right) \mathrm{P}\left(X_{n-1} = k\right)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k\in E} \frac{\mathrm{P}(X_n = j, X_{n-1} = k, X_0 = i)}{\mathrm{P}(X_0 = i)} \frac{\mathrm{P}(X_n = j \mid X_{n-1} = k)}{\mathrm{P}(X_n = j \mid X_{n-1} = k)} \\
&= \sum_{k\in E} \mathrm{P}(X_n = j, X_{n-1} = k \mid X_0 = i) \\
&= \mathrm{P}(X_n = j \mid X_0 = i)
\end{aligned}
$$

が成り立つから，以上で $[P^n]_{ij} = \mathrm{P}(X_n = j \mid X_0 = i)$, $(\forall n \in \mathbb{N},\ i, j \in E)$ が示された． ∎

4　Chapman-Kolmogorov 方程式

命題 (Chapman-Kolmogorov 方程式).　任意の $n, m = 0, 1, 2, \cdots$ と $i, j \in E$ に対し次が成立．

$$[P^{n+m}]_{ij} = \sum_{k\in E} [P^n]_{ik} [P^m]_{kj}.$$

この命題は以降の命題の証明において基礎的である．

5　既約性・再帰性

定義 (既約性).　P が既約である

$$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\ \forall i, j \in E,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \text{s.t.}\quad [P^n]_{ij} > 0.$$

定義 (再帰性).　P が再帰的である

$$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\ \mathrm{P}(\exists n \geq 1,\ X_n = i \mid X_0 = i) = 1 \quad (\forall i \in E).$$

P が非再帰的である

$$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\ \mathrm{P}(\forall n \geq 1,\ X_n \neq i \mid X_0 = i) > 0 \quad (\forall i \in E).$$

6　離散空間上の Markov 連鎖

定義 (到達時刻と到達回数).　$\forall i \in E,\ \omega \in \Omega$,

到達時刻　$\tau_i(\omega) := \inf\{n \geq 1 \mid X_n(\omega) = i\}$,
到達回数　$\eta_i(\omega) := \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{(X_n = i)}(\omega)$.

$p_{ij} := \mathrm{P}\left(\tau_j < \infty \,\middle|\, X_0 = i\right),\quad (\forall i, j \in E)$
と表記すれば次が成立:

$$p_{ii} = \mathrm{P}(\exists n \geq 1,\ X_n = j \mid X_0 = i), \tag{1}$$
$$\mathrm{E}\left[\eta_i \mid X_0 = i\right] < +\infty \Rightarrow p_{ii} < 1, \quad (\forall i \in E). \tag{2}$$

証明.　初めの式は

$$\{\omega \in \Omega \mid \exists n \geq 1,\ X_n(\omega) = j\} = \left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, \tau_j(\omega) < \infty\right\}$$

により明らかである．第二式について，任意の $i, j \in E$ に対して

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[\eta_j \,\middle|\, x_0 = i\right] &= \mathrm{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{(X_n=i)} \,\middle|\, x_0 = i\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\left(X_n = j \mid X_0 = i\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\left(X_n = j,\ \tau_j \le n \,\middle|\, X_0 = i\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} \mathrm{P}\left(X_n = j,\ \tau_j = m \,\middle|\, X_0 = i\right) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \mathrm{P}\left(X_n = j,\ \tau_j = m \,\middle|\, X_0 = i\right) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \mathrm{P}\left(X_n = j,\ X_m = j,\ X_{m=1}, \cdots, X_1 \ne j \mid X_0 = i\right) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\mathrm{P}\left(X_n = j,\ X_m = j,\ X_{m=1}, \cdots, X_1 \ne j\right)}{\mathrm{P}\left(X_m = j,\ X_{m=1}, \cdots, X_1 \ne j\right)} \frac{\mathrm{P}\left(X_m = j,\ X_{m=1}, \cdots, X_1 \ne j\right)}{\mathrm{P}\left(X_0 = i\right)} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \mathrm{P}\left(X_n = j \mid X_m = j\right) \mathrm{P}\left(\tau_j = m \,\middle|\, X_0 = i\right) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}\left(X_n = j \mid X_0 = j\right) \mathrm{P}\left(\tau_j = m \,\middle|\, X_0 = i\right) \\
&= \mathrm{P}\left(\tau_j < \infty \,\middle|\, X_0 = i\right)\left(\mathrm{E}\left[\eta_j \,\middle|\, X_0 = j\right] + 1\right) \\
&= p_{ij}\left(\mathrm{E}\left[\eta_j \,\middle|\, X_0 = j\right] + 1\right)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．$i = j$ とすれば

$$
\mathrm{E}\left[\eta_j \,\middle|\, x_0 = j\right] = p_{jj}\left(\mathrm{E}\left[\eta_j \,\middle|\, X_0 = j\right] + 1\right)
$$

となるが，$\mathrm{E}\left[\eta_j \,\middle|\, x_0 = j\right] < \infty$ ならば $p_{jj} < 1$ で

$$
\mathrm{E}\left[\eta_j \,\middle|\, x_0 = j\right] = \frac{p_{jj}}{1 - p_{jj}}
$$

が成り立つ．$p_{jj} = 1$ の場合 $\mathrm{E}\left[\eta_j \,\middle|\, x_0 = j\right] < \infty$ ではありえないので $\mathrm{E}\left[\eta_j \,\middle|\, x_0 = j\right] = \infty$ となる．また $\mathrm{E}\left[\eta_j \,\middle|\, x_0 = j\right] < \infty$ ならば

$$
\mathrm{E}\left[\eta_j \,\middle|\, x_0 = i\right] = \frac{p_{ij}}{1 - p_{jj}}
$$

も成立する．また $p_{ij} = 0$ の場合は $\mathrm{E}\left[\eta_j \,\middle|\, x_0 = i\right] = 0$ である．以上の結果をまとめれば

$$
\mathrm{E}\left[\eta_j \,\middle|\, x_0 = i\right] = \begin{cases} \frac{p_{ij}}{1-p_{jj}} & \text{if } \mathrm{E}\left[\eta_j \,\middle|\, x_0 = j\right] < \infty, \\ 0 & \text{if } p_{ij} = 0, \\ \infty & \text{if } p_{jj} = 1 \end{cases}
$$

∎

7　正再帰性

定義 (不変確率測度).　E 上の確率測度 $\pi = ([\pi]_i)_{i\in E}$, $(\sum_{i\in E}[\pi]_i = 1)$ が P に対して不変確率測度である

$$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \ [\pi]_i = [\pi P]_i (= \sum_{j\in E}[\pi]_j[P]_{ji}), \quad (\forall i \in E).$$

定義 (正再帰性).　P は正再帰的

$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$　P が既約かつ不変確率測度が存在.

8　再帰性の諸命題

命題.　P が既約の下，(i) ~ (iv) が順に示される:

(i)　P が再帰的 $\Rightarrow \mathrm{E}\left[\eta_i \mid X_0 = i\right] = +\infty$, $(\forall i \in E)$.

(ii)　P は再帰的であるか非再帰的のどちらか．特に E が有限集合なら P は再帰的.

(iii)　P が正再帰的 $\Rightarrow$ P は再帰的.

(iv)　E が有限集合なら P は正再帰的.

証明.

(i)　P が再帰的なら式 (1) により $p_{ii} = 1$ $(\forall i \in E)$ である．従って式 (2) の対偶により $\mathrm{E}\left[\eta_i \mid X_0 = i\right] = +\infty$ となる．

9　周期

定義 ($i \in E$ の周期).　$\mathcal{N}_i := \{n \geq 1 \mid [p^n]_{ii} > 0\}$ の最大公約数を $i \in E$ の周期といい d_i と表す.

命題 (既約なら周期は unique).　P が既約ならば $d_i = d_j$ $(\forall i, j \in E)$．この場合 d_i を P の周期という.

定義 (非周期性).　P が既約の下，

$$P \text{ は非周期的} \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad P \text{ の周期が } 1.$$

10　Ergodicity

命題 (周期に関する一命題).　P : 既約，非周期的,

$$\forall i, j \in E,\ \exists n_{ij} \in \mathbb{N},\ \text{s.t.}\ [P^n]_{ij} > 0\ (\forall n \geq n_{ij}).$$

定理 (Ergodicity).　P が既約で非周期的かつ正再帰的であるとする．P の不変確率測度を π で表すとき次が成立.

$$\lim_{n\to+\infty}[P^n]_{ij} = [\pi]_j, \quad (\forall i, j \in E).$$

証明.

第一段　直積空間 $E\times E$ 上の Markov 連鎖を考える．$E\times E$ の Markov 行列を Q と表し

$$[Q]_{ik,jl} \coloneqq [P]_{ij}[P]_{kl}, \quad (\forall (i,k),(j,l)\in E\times E)$$

と定義する．$(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ 上の E-値確率過程 $(X_n)_{n=1}^{+\infty},(Y_n)_{n=1}^{+\infty}$ がそれぞれ Markov 行列 P を持つ独立な Markov 連鎖であるとすれば，$Z_n=(X_n,Y_n)$ $(n=1,2,\cdots)$ は $E\times E$ 上の Markov 連鎖で Markov 行列 Q を持つ．なぜならば任意の $n\in\mathbb{N}$ と $(i,j),(i_0,j_0),\cdots,(i_{n-1},j_{n-1})\in E\times E$ に対して

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left(Z_n=(i,j)\mid Z_0=(i_0,j_0),Z_1=(i_1,j_1),\cdots,Z_{n-1}=(i_{n-1},j_{n-1})\right)\\
&=\frac{\mathrm{P}\left(Z_n=(i,j),Z_0=(i_0,j_0),\cdots,Z_{n-1}=(i_{n-1},j_{n-1})\right)}{\mathrm{P}\left(Z_0=(i_0,j_0),\cdots,Z_{n-1}=(i_{n-1},j_{n-1})\right)}\\
&=\frac{\mathrm{P}\left((X_n=i,X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1})\cap(Y_n=j,Y_0=j_0,\cdots,Y_{n-1}=j_{n-1})\right)}{\mathrm{P}\left((X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1})\cap(Y_0=j_0,\cdots,Y_{n-1}=j_{n-1})\right)}\\
&=\frac{\mathrm{P}\left(X_n=i,X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1}\right)\mathrm{P}\left(Y_n=j,Y_0=j_0,\cdots,Y_{n-1}=j_{n-1}\right)}{\mathrm{P}\left(X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1}\right)\mathrm{P}\left(Y_0=j_0,\cdots,Y_{n-1}=j_{n-1}\right)}\\
&=\mathrm{P}\left(X_n=i\mid X_{n-1}=i_{n-1}\right)\mathrm{P}\left(Y_n=j\mid Y_{n-1}=j_{n-1}\right)\\
&=\frac{\mathrm{P}\left(X_n=i,Y_n=j,X_{n-1}=i_{n-1},Y_{n-1}=j_{n-1}\right)}{\mathrm{P}\left(X_{n-1}=i_{n-1},Y_{n-1}=j_{n-1}\right)}\\
&=\mathrm{P}\left(Z_n=(i,j)\mid Z_{n-1}=(i_{n-1},j_{n-1})\right)
\end{aligned}$$

が成立するからである．また Q は既約かつ再帰的である．P が既約であるから，前命題により任意の $(i,k),(j,l)\in E\times E$ に対して或る $n_{ij},n_{kl}\in\mathbb{N}$ が存在し $[P^n]_{ij}>0$ $(\forall n\geq n_{ij})$ と $[P^n]_{kl}>0$ $(\forall n\geq n_{kl})$ が成立する．従って $\forall n\geq\max\left\{n_{ij},n_{kl}\right\}$ に対して

$$[Q^n]_{ik,jl}\coloneqq[P^n]_{ij}[P^n]_{kl}>0$$

が成立するから Q は既約である．

注意.　先の式変形と同様に，$(X_n)_{n=1}^{+\infty},(Y_n)_{n=1}^{+\infty}$ の独立性から任意の $n\in\mathbb{N}$, $(i,k),(j,l)\in E\times E$ に対して

$$[Q^n]_{ik,jl}=\mathrm{P}\left(Z_n=(j,l)\mid Z_0=(i,k)\right)=\mathrm{P}\left(X_n=j\mid X_0=i\right)\mathrm{P}\left(Y_n=l\mid Y_0=k\right)=[P^n]_{ij}[P^n]_{kl}$$

が導かれる．

次に再帰性を示す．これには Q に対して $E\times E$ 上の不変確率測度が存在することを言えばよい．

$$[\mu]_{ik}=[\pi]_i[\pi]_k \quad (\forall (i,k)\in E\times E)$$

として $\mu=([\mu]_{ik})_{i,k\in E}$ を定義すればこれは $E\times E$ 上の確率測度であり，任意の $(j,l)\in E\times E$ に対して

$$[\mu Q]_{jl}=\sum_{(i,k)\in E\times E}[\mu]_{ik}[Q]_{ik,jl}=\sum_{i,k\in E}[\pi]_i[\pi]_k[P]_{ij}[P]_{jl}=\sum_{i\in E}[\pi]_i[P]_{ij}\sum_{k\in E}[\pi]_k[P]_{kl}=[\pi]_j[\pi]_l=[\mu]_{jl}$$

が成り立つから μ が Q の不変確率測度であることが判る．ゆえに Q は正再帰的で既約すなわち再帰的である．

第二段

$$\lim_{n\to+\infty}\left|[P^n]_{ij}-[P^n]_{kj}\right|=0 \quad (\forall i,j,k\in E) \tag{3}$$

を示す．$(Z_n)_{n=1}^{+\infty}=((X_n,Y_n))_{n=1}^{+\infty}$ に対しても同様に

$$\tau_{ik}(\omega)\coloneqq\inf\{n\geq 1 \mid Z_n(\omega)=(i,k)\} \quad (\forall i,k\in E,\ \omega\in\Omega)$$

として到達時刻を定義する．$(X_n)_{n=1}^{+\infty},(Y_n)_{n=1}^{+\infty}$ の独立性から

$$\begin{aligned}
[P^n]_{ij}&=\frac{\mathrm{P}(X_n=j,X_0=i)}{\mathrm{P}(X_0=i)}=\frac{\mathrm{P}(X_n=j,X_0=i,Y_0=k)}{\mathrm{P}(X_0=i,Y_0=k)}=\mathrm{P}(X_n=j\mid(X_0,Y_0)=(i,k)),\\
[P^n]_{kj}&=\frac{\mathrm{P}(Y_n=j,Y_0=k)}{\mathrm{P}(Y_0=k)}=\frac{\mathrm{P}(Y_n=j,X_0=i,Y_0=k)}{\mathrm{P}(X_0=i,Y_0=k)}=\mathrm{P}(Y_n=j\mid(X_0,Y_0)=(i,k))
\end{aligned}$$

が成立する．

$$\mathrm{P}(X_n=j\mid(X_0,Y_0)=(i,k))=\mathrm{P}\left(X_n=j,\tau_{jj}>n\;\middle|\;(X_0,Y_0)=(i,k)\right)+\mathrm{P}\left(X_n=j,\tau_{jj}\leq n\;\middle|\;(X_0,Y_0)=(i,k)\right),$$

$$\mathrm{P}(Y_n=j\mid(X_0,Y_0)=(i,k))=\mathrm{P}\left(Y_n=j,\tau_{jj}>n\;\middle|\;(X_0,Y_0)=(i,k)\right)+\mathrm{P}\left(Y_n=j,\tau_{jj}\leq n\;\middle|\;(X_0,Y_0)=(i,k)\right)$$

と分解できるが，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left(X_n=j,\tau_{jj}\leq n\;\middle|\;(X_0,Y_0)=(i,k)\right)\\
&=\sum_{m=1}^{n}\mathrm{P}\left(X_n=j,\tau_{jj}=m\;\middle|\;(X_0,Y_0)=(i,k)\right)\\
&=\sum_{m=1}^{n}\mathrm{P}(X_n=j,(X_m,Y_m)=(j,j),(X_{m-1},Y_{m-1})\cdots(X_1,Y_1)\neq(j,j)\mid(X_0,Y_0)=(i,k))\\
&=\sum_{m=1}^{n}\frac{\mathrm{P}(X_n=j,X_m=j,X_{m-1},\cdots,X_1\neq j)}{\mathrm{P}(X_0=i)}\frac{\mathrm{P}(Y_m=j,Y_{m-1},\cdots,Y_1\neq j)}{\mathrm{P}(Y_0=k)}\\
&=\sum_{m=1}^{n}\frac{\mathrm{P}(X_n=j,X_m=j,X_{m-1},\cdots,X_1\neq j)}{\mathrm{P}(X_m=j,X_{m-1},\cdots,X_1\neq j)}\frac{\mathrm{P}(X_m=j,X_{m-1},\cdots,X_1\neq j)}{\mathrm{P}(X_0=i)}\frac{\mathrm{P}(Y_m=j,Y_{m-1},\cdots,Y_1\neq j)}{\mathrm{P}(Y_0=k)}\\
&=\sum_{m=1}^{n}[P^{n-m}]_{jj}\frac{\mathrm{P}((X_m=j,X_{m-1},\cdots,X_1\neq j)\cap(Y_m=j,Y_{m-1},\cdots,Y_1\neq j))}{\mathrm{P}((X_0=i)\cap(Y_0=k))}\\
&=\sum_{m=1}^{n}[P^{n-m}]_{jj}\,\mathrm{P}\left(\tau_{jj}=m\;\middle|\;(X_0,Y_0)=(i,k)\right)\\
&=\mathrm{P}\left(Y_n=j,\tau_{jj}\leq n\;\middle|\;(X_0,Y_0)=(i,k)\right)
\end{aligned}$$

が成立することと，既約性 $(\mathrm{P}\left(\tau_{jj}<+\infty\;\middle|\;(X_0,Y_0)=(i,k)\right)=1)$ により

$$\begin{aligned}
&\left|\mathrm{P}\left(X_n=j,\tau_{jj}>n\;\middle|\;(X_0,Y_0)=(i,k)\right)-\mathrm{P}\left(Y_n=j,\tau_{jj}>n\;\middle|\;(X_0,Y_0)=(i,k)\right)\right|\\
&\leq 2\,\mathrm{P}\left(\tau_{jj}>n\;\middle|\;(X_0,Y_0)=(i,k)\right)\\
&=2\left(1-\mathrm{P}\left(\tau_{jj}\leq n\;\middle|\;(X_0,Y_0)=(i,k)\right)\right)\\
&\longrightarrow 0 \quad (n\longrightarrow+\infty)
\end{aligned}$$

が成り立つことから式 (3) が成立する．

第三段 $\sum$ を測度空間 $(E,\mathcal{E},\pi)$ 上の積分と見做して Lebesgue の収束定理を使う.

$$\begin{aligned}
\left|[P^n]_{ij}-[\pi]_j\right| &= \left|[P^n]_{ij}-[\pi P^n]_j\right| \\
&= \left|[P^n]_{ij}-\sum_{k\in E}[\pi]_k[P^n]_{kj}\right| \\
&= \left|\sum_{k\in E}[\pi]_k[P^n]_{ij}-\sum_{k\in E}[\pi]_k[P^n]_{kj}\right| \\
&\leq \sum_{k\in E}[\pi]_k\left|[P^n]_{ij}-[P^n]_{kj}\right| \\
&\longrightarrow 0 \quad (n\longrightarrow +\infty).
\end{aligned}$$

以上で命題の主張が示された. ∎