Karatzas-Shreve solutions

2018 年 8 月 6 日

目次

第 1 章

Martingales, Stopping Times, and Filtrations

1.1 Stochastic Processes and σ-Fields

Problem 1.5 修正

Let Y be a modification of X, and suppose that every sample path of both processes are right-continuous sample paths. Then X and Y are indistinguishable.

証明. X, Y のパスの右連続性より

$$\{X_t = Y_t,\ \forall t \geq 0\} = \bigcap_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,\infty)} \{X_r = Y_r\}$$

が成立するから，$P(X_r = Y_r) = 1\ (\forall r \geq 0)$ より

$$P(X_t = Y_t,\ \forall t \geq 0) = P\Bigl(\bigcap_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,\infty)} \{X_r = Y_r\}\Bigr) = 1$$

が従う. ∎

Problem 1.7

Let X be a process with every sample path RCLL. Let A be the event that X is continuous on $[0, t_0)$. Show that $A \in \mathscr{F}^X_{t_0}$.

証明 (参照元:[?]). $[0, t_0)$ に属する有理数の全体を $\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q} \cap [0, t_0)$ と表すとき，

$$A = \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{\substack{p,q \in \mathbb{Q}^* \\ |p-q|<1/n}} \left\{ \omega \in \Omega\ ;\quad \left|X_p(\omega) - X_q(\omega)\right| < \frac{1}{m} \right\}$$

が成立することを示せばよい. これが示されれば，$\omega \longmapsto \left(X_p(\omega), X_q(\omega)\right)$ の $\mathscr{F}^X_{t_0}/\mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$-可測性と

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (x, y) \longmapsto |x - y| \in \mathbb{R}$$

の $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2)/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測性より

$$\left\{ \omega \in \Omega\ ;\quad \left|X_p(\omega) - X_q(\omega)\right| < \frac{1}{m} \right\} = \left\{ \omega \in \Omega\ ;\quad \left(X_p(\omega), X_q(\omega)\right) \in \Phi^{-1}\left(B_{1/m}(0)\right) \right\} \in \mathscr{F}^X_{t_0}$$

が得られ $A \in \mathscr{F}_{t_0}^X$ が従う．($B_{1/m}(0) = \{\, x \in \mathbb{R} \;;\quad |x| < 1/m \,\}$.)

第一段　$\omega \in A^c$ を任意にとる．このとき或る $s \in (0, t_0)$ が存在して，$t \longmapsto X_t(\omega)$ は $t = s$ において左側不連続である．従って或る $m \geq 1$ については，任意の $n \geq 1$ に対し $0 < s - u < 1/3n$ を満たす u が存在して

$$|X_u(\omega) - X_s(\omega)| \geq \frac{1}{m}$$

を満たす．一方でパスの右連続性より $0 < p - s,\ q - u < 1/3n$ を満たす $p, q \in \mathbb{Q}^*$ が存在して

$$\left|X_p(\omega) - X_s(\omega)\right| < \frac{1}{4m}, \quad \left|X_q(\omega) - X_u(\omega)\right| < \frac{1}{4m}$$

が成立する．このとき $0 < |p - q| < 1/n$ かつ

$$\left|X_p(\omega) - X_q(\omega)\right| \geq \left|X_p(\omega) - X_s(\omega)\right| - |X_s(\omega) - X_u(\omega)| - \left|X_q(\omega) - X_u(\omega)\right| \geq \frac{1}{2m}$$

が従い

$$\omega \in \bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{\substack{p,q \in \mathbb{Q}^* \\ |p-q|<1/n}} \left\{ \omega \in \Omega \;;\quad \left|X_p(\omega) - X_q(\omega)\right| \geq \frac{1}{m} \right\}$$

を得る．

第二段　任意に $\omega \in A$ を取る．各点で有限な左極限が存在するという仮定から，

$$X_{t_0}(\omega) \coloneqq \lim_{t \uparrow t_0} X_t(\omega)$$

と定めることにより[*1] $t \longmapsto X_t(\omega)$ は $[0, t_0]$ 上で一様連続となる．従って

$$\omega \in \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{\substack{p,q \in \mathbb{Q}^* \\ |p-q|<1/n}} \left\{ \omega \in \Omega \;;\quad \left|X_p(\omega) - X_q(\omega)\right| < \frac{1}{m} \right\}$$

を得る． ∎

Lemma2 for Exercise 1.8

$T = \{1, 2, 3, \cdots\}$ を高々可算集合とし，S_i を第二可算公理を満たす位相空間，X_i を確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上の S_i-値確率変数とする ($i \in T$)．このとき，任意の並び替え $\pi : T \longrightarrow T$ に対して $S \coloneqq \prod_{i \in T} S_{\pi(i)}$ とおけば次が成立する:

$$\sigma(X_i;\ i \in T) = \{\, \{(X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, \cdots) \in A\} \;;\quad A \in \mathscr{B}(S) \,\}. \tag{1.1}$$

証明.

第一段　射影 $S \longrightarrow S_{\pi(n)}$ を p_n で表す．任意に $t_i \in T$ を取り $n \coloneqq \pi^{-1}(i)$ とおけば，任意の $B \in \mathscr{B}(S_n)$ に対して

$$X_i^{-1}(B) = \left\{(\cdots, X_{\pi(n)}, \cdots) \in p_n^{-1}(B)\right\} \in \{\, \{(X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, \cdots) \in A\} \;;\quad A \in \mathscr{B}(S) \,\}$$

が成り立つから $\sigma(X_i;\ i \in T) \subset \{\, \{(X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, \cdots) \in A\} \;;\quad A \in \mathscr{B}(S) \,\}$ が従う．

[*1] 実際 $X_{t_0}(\omega)$ は所与のものであるが，いまは $[0, t_0]$ 上での連続性を考えればよいから便宜上値を取り替える．

第二段　任意の有限部分集合 $j \in T$ と $B_j \in \mathscr{B}(S_{\pi(j)})$ に対し

$$\left\{(X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, \cdots) \in p_j^{-1}(B_j)\right\} = X_{\pi(j)}^{-1}(B_j) \in \sigma(X_i;\ i \in T)$$

が成立するから

$$\left\{\ p_i^{-1}(B_i)\ ;\quad B_i \in \mathscr{B}(S_{\pi(i)}),\ i \in T\ \right\} \subset \{\ A \in \mathscr{B}(S)\ ;\quad \{(X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, \cdots) \in A\} \in \sigma(X_i;\ i \in T)\ \}$$

が従う．右辺は σ-加法族であり，定理**??**より左辺は $\mathscr{B}(S)$ を生成するから前段と併せて (1.1) を得る． ∎

Lemma3 for Exercise 1.8

$X = \{\ X_t\ ;\quad 0 \leq t < \infty\ \}$ を確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上の $\mathbb{R}^d$-値確率過程とする．任意の空でない $S \subset [0, \infty)$ に対し

$$\mathcal{F}_S^X := \sigma(X_s;\ s \in S)$$

とおくとき，任意の空でない $T \subset [0, \infty)$ に対して次が成立する:

$$\mathcal{F}_T^X := \bigcup_{S \subset T:\textit{at most countable}} \mathcal{F}_S^X. \tag{1.2}$$

証明．　便宜上

$$\mathcal{F} := \bigcup_{S \subset T:\textit{at most countable}} \mathcal{F}_S^X$$

とおく．まず，任意の $S \subset T$ に対し $\mathcal{F}_S^X \subset \mathcal{F}_T^X$ が成り立つから

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_T^X$$

が従う．また $\sigma(X_t) = \mathcal{F}_{\{t\}}^X,\ (\forall t \in T)$ より

$$\bigcup_{t \in T} \sigma(X_t) \subset \mathcal{F}$$

が成り立つから，あとは $\mathcal{F}$ が σ-加法族であることを示せばよい．実際，$\mathcal{F}$ は σ-加法族の合併であるから Ω を含みかつ補演算で閉じる．また $B_n \in \mathcal{F},\ n = 1, 2, \cdots$ に対しては，$B_n \in \mathcal{F}_{S_n}^X$ を満たす高々可算集合 $S_n \subset T$ が対応して

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{S_n}^X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(X_s;\ s \in S_n) \subset \sigma\Bigl(X_s;\ s \in \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\Bigr)$$

が成り立つから，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \sigma\Bigl(X_s;\ s \in \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\Bigr) \subset \mathcal{F}$$

が従う．ゆえに $\mathcal{F}$ は σ-加法族であり (1.2) を得る． ∎

Exercise 1.8

Let X be a process whose sample paths are RCLL almost surely, and let A be the event that X is continuous on $[0, t_0)$. Show that A can fail to be in $\mathscr{F}_{t_0}^X$, but if $\{\ \mathscr{F}_t\ ;\quad t \geq 0\ \}$ is a fitration satisfying $\mathscr{F}_t^X \subset \mathscr{F}_t,\ t \geq 0$, and $\mathscr{F}_{t_0}^X$ contains all P-null sets of $\mathscr{F}$, then $A \in \mathscr{F}_{t_0}$.

証明.

第一段　高々可算な集合 $S = \{t_1, t_2, \cdots\} \subset [0, t_0]$ に対し，昇順に並び替えたものを $t_{\pi(1)} < t_{\pi(2)} < \cdots$ と表し

$$\mathcal{F}_S^X := \left\{ \left\{ (X_{t_{\pi(1)}}, X_{t_{\pi(2)}}, \cdots) \in B \right\} \ ; \quad B \in \mathscr{B}((\mathbb{R}^d)^{\#S}) \right\}$$

とおく．ただし S が可算無限の場合は $(\mathbb{R}^d)^{\#S} = \mathbb{R}^\infty$ である．このとき (1.1) より

$$\sigma(X_s;\ s \in S) = \mathcal{F}_S^X$$

が成り立ち，(1.2) より

$$\mathscr{F}_{t_0}^X = \sigma(X_t;\ 0 \leq t \leq t_0) = \bigcup_{S \subset [0,t_0]:at\ most\ countable} \mathcal{F}_S^X$$

が満たされる．すなわち，$\mathscr{F}_{t_0}^X$ の任意の元は $\{(X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots) \in B\}$, $(t_1 < t_2 < \cdots)$ の形で表される．

第二段

Problem 1.10 unsolved

Let X be a process with every sample path LCRL, and let A be the event that X is continuous on $[0, x_0]$. Let X be adapted to a right-continuous filtration $(\mathscr{F}_t)_{t \geq 0}$. Show that $A \in \mathscr{F}_{t_0}$.

証明.

第一段　$\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q} \cap [0, t_0]$ とおく．いま，任意の $n \geq 1$ と $r \in \mathbb{Q}^*$ に対し

$$B_n(r) := \bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{k \leq m} \left\{ \omega \in \Omega \ ; \quad \left| X_r(\omega) - X_{r+\frac{1}{k}}(\omega) \right| \leq \frac{1}{n} \right\}$$

と定めるとき，

$$A = \bigcap_{r \in \mathbb{Q}^*} \bigcap_{n \geq 1} B_n(r)$$

が成立することを示す．これが示されれば，

$$\left\{ \omega \in \Omega \ ; \quad \left| X_r(\omega) - X_{r+\frac{1}{k}}(\omega) \right| \leq \frac{1}{n} \right\} \in \mathscr{F}_{r+\frac{1}{k}}, \quad (\forall r \in \mathbb{Q}^*,\ k \geq 1)$$

とフィルトレーションの右連続性から

$$B_n(r) \in \bigcap_{k \geq m} \mathscr{F}_{r+\frac{1}{k}} = \mathscr{F}_{r+} = \mathscr{F}_r$$

が従い $A \in \mathscr{F}_{t_0}$ が出る．

第二段

Problem 1.16

If the process X is measurable and the random time T is finite, then the function X_T is a random variable.

証明.

$$\tau : \Omega \ni \omega \longmapsto (T(\omega), \omega) \in [0,\infty) \times \Omega$$

とおけば，任意の $A \in \mathscr{B}([0,\infty))$, $B \in \mathscr{F}$ に対して

$$\tau^{-1}(A \times B) = \{\, \omega \in \Omega \ ; \quad (T(\omega),\omega) \in A \times B \,\} = T^{-1}(A) \cap B \in \mathscr{F}$$

が満たされる

$$\{\, A \times B \ ; \quad A \in \mathscr{B}([0,\infty)),\ B \in \mathscr{F} \,\} \subset \left\{\, E \in \mathscr{B}([0,\infty)) \otimes \mathscr{F} \ ; \quad \tau^{-1}(E) \in \mathscr{F} \,\right\}$$

が従い τ の $\mathscr{F}/\mathscr{B}([0,\infty)) \otimes \mathscr{F}$-可測性が出る．$X_T = X \circ \tau$ より X_T は可測 $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ である． ∎

Problem 1.17

Let X be a measurable process and T a random time. Show that the collection of all sets of the form $\{X_T \in A\}$ and $\{X_T \in A\} \cup \{T = \infty\}; A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, forms a sub-$\sigma$-field of $\mathscr{F}$.

証明.　X_T の定義域は $\{T < \infty\}$ であるから，

$$\mathscr{G} := \{\, \{T < \infty\} \cap E \ ; \quad E \in \mathscr{F} \,\}$$

とおけば，前問の結果より X_T は可測 $\mathscr{G}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$ である．$\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ より

$$\mathscr{H} := \{\, \{X_T \in A\},\ \{X_T \in A\} \cup \{T = \infty\} \ ; \quad A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \,\}$$

に対して $\mathscr{H} \subset \mathscr{F}$ が成立する．あとは $\mathscr{H}$ が σ-加法族であることを示せばよい．実際，$A = \mathbb{R}$ のとき

$$\{X_T \in A\} \cup \{T = \infty\} = \{T < \infty\} \cup \{T = \infty\} = \Omega$$

となり $\Omega \in \mathscr{H}$ が従い，また

$$\begin{aligned} &\{X_T \in A\}^c = \{X_T \in A^c\} \cup \{T = \infty\}, \\ &(\{X_T \in A\} \cup \{T = \infty\})^c = \{X_T \in A^c\} \cap \{T < \infty\} = \{X_T \in A^c\} \end{aligned}$$

より $\mathscr{H}$ は補演算で閉じる．更に $B_n \in \mathscr{H}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を取れば，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \left\{ X_T \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}$$

或は

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \left\{ X_T \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\} \cup \{T = \infty\}$$

が成立し $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathscr{H}$ を得る． ∎

1.2 Stopping Times

$[0,\infty]$ の位相

$[0,\infty]$ の位相は拡張実数 $[-\infty,\infty]$ の相対位相である．$O \subset [-\infty,\infty]$ が開集合であるとは，任意の $x \in O$ に対し，

(O1)　$x \in \mathbb{R}$ なら或る $\epsilon > 0$ が存在して $B_\epsilon(x) \subset O$ が満たされる，
(O2)　$x = \infty$ なら或る $a \in \mathbb{R}$ が存在して $(a,\infty] \subset O$ が満たされる，
(O3)　$x = -\infty$ なら或る $a \in \mathbb{R}$ が存在して $[-\infty,a) \subset O$ が満たされる，

で定義される．この性質を満たす O の全体に $\emptyset$ を加えたものが $[-\infty,\infty]$ の位相であり，

$$[-\infty,r), \quad (r,r'), \quad (r,\infty], \quad (r,r' \in \mathbb{Q})$$

の全体が可算開基となる．従って $[0,\infty]$ の位相の可算開基は

$$[0,r), \quad (r,r'), \quad (r,\infty], \quad (r,r' \in \mathbb{Q} \cap [0,\infty])$$

の全体であり，写像 $\tau : \Omega \longrightarrow [0,\infty]$ が $\mathscr{F}/\mathscr{B}([0,\infty])$-可測性を持つかどうかを調べるには

$$\{\tau < a\} = \tau^{-1}([0,a)) \in \mathscr{F}, \quad (\forall a \in (0,\infty))$$

が満たされているかどうかを確認すれば十分である．

Problem 2.2

Let X be a stochastic process and T a stopping time of $\left\{\mathscr{F}_t^X\right\}$. Suppose that for some pair $\omega,\omega' \in \Omega$, we have $X_t(\omega) = X_t(\omega')$ for all $t \in [0,T(\omega)] \cap [0,\infty)$. Show that $T(\omega) = T(\omega')$.

証明 (参照元:[**?**]).　ω,ω' を分離しない集合族 $\mathscr{H}$ を

$$\mathscr{H} := \{\, A \subset \Omega \ ; \quad \{\omega,\omega'\} \subset A,\ or\ \{\omega,\omega'\} \subset \Omega \backslash A \,\}$$

により定めれば，$\mathscr{H}$ は σ-加法族である．このとき，$\{T = T(\omega)\} \in \mathscr{H}$ を示せばよい．

case1　$T(\omega) = \infty$ の場合，任意の $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ 及び $0 \leq t < \infty$ に対して，仮定より

$$\omega \in X_t^{-1}(A) \quad \Leftrightarrow \quad \omega' \in X_t^{-1}(A)$$

が成り立ち

$$\sigma(X_t;\ 0 \leq t < \infty) \subset \mathscr{H}$$

となる．任意の $t \geq 0$ に対し $\{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t^X \subset \sigma(X_t;\ 0 \leq t < \infty)$ が満たされるから

$$\{T = \infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{T \leq n\}^c \in \sigma(X_t;\ 0 \leq t < \infty) \subset \mathscr{H}$$

が成立し，$\omega \in \{T = \infty\}$ より $\omega' \in \{T = \infty\}$ が従い $T(\omega) = T(\omega')$ を得る．

case2　$T(\omega) < \infty$ の場合，case1 と同様に任意の $0 \leq t \leq T(\omega)$ に対し $\sigma(X_t) \subset \mathscr{H}$ が満たされるから

$$\mathscr{F}^X_{T(\omega)} \subset \mathscr{H}$$

が成り立つ．$\{T = T(\omega)\} \in \mathscr{F}^X_{T(\omega)}$ より $\omega' \in \{T = T(\omega)\}$ が従い $T(\omega) = T(\omega')$ を得る． ∎

Lemma for Proposition 2.3

$(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ を可測空間 $(\Omega, \mathscr{F})$ のフィルトレーションとするとき，任意の $t \geq 0$ 及び任意の点列 $s_1 > s_2 > \cdots > t, (s_n \downarrow t)$ に対して次が成立する:

$$\bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{s_n}.$$

証明．　先ず任意の $n \geq 1$ に対して

$$\bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_{s_n}$$

が成り立つから

$$\bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{s_n}$$

を得る．一方で，任意の $s > t$ に対し $s \geq s_n$ を満たす n が存在するから，

$$\mathscr{F}_s \supset \mathscr{F}_{s_n} \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{s_n}$$

が成立し

$$\bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{s_n}$$

が従う． ∎

$(\mathscr{F}_{t+})_{t\geq 0}$ は右連続である．実際，任意の $t \geq 0$ で

$$\bigcap_{s>t} \mathscr{F}_{s+} = \bigcap_{s>t} \bigcap_{u>s} \mathscr{F}_u = \bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s = \mathscr{F}_{t+}$$

が成立する．

Corollary 2.4

T is an optional time of the filtration $\{\mathscr{F}_t\}$ if and only if it is a stopping time of the (right-continuous!) filtration $\{\mathscr{F}_{t+}\}$.

言い換えれば，確率時刻 T に対し

$$\{T < t\} \in \mathscr{F}_t,\ \forall t \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_{t+},\ \forall t \geq 0$$

が成り立つことを主張している．

証明.　T が $(\mathscr{F}_{t+})$-停止時刻であるとき，任意の $n \geq 1$ に対して $\{T \leq t - 1/n\} \in \mathscr{F}_{(t-1/n)+} \subset \mathscr{F}_t$ が満たされるから

$$\{T < t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ T \leq t - \frac{1}{n} \right\} \in \mathscr{F}_t$$

が従う．逆に T が $(\mathscr{F}_t)$-弱停止時刻[*2] のとき，任意の $m \geq 1$ に対し

$$\{T \leq t\} = \bigcap_{n=m}^{\infty} \left\{ T < t + \frac{1}{n} \right\} \in \mathscr{F}_{t+1/m}$$

が成立するから

$$\{T \leq t\} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{t+1/n} = \mathscr{F}_{t+}$$

を得る． ■

Problem 2.6

If the set Γ in Example 2.5 is open, show that H_Γ is an optional time.

証明.　$\{H_\Gamma < 0\} = \emptyset$ であるから，以下 $t > 0$ とする．$H_\Gamma(\omega) < t \Leftrightarrow \exists s < t,\ X_s(\omega) \in \Gamma$ より

$$\{H_\Gamma < t\} = \bigcup_{0 \leq s < t} \{X_s \in \Gamma\}$$

となる．また全てのパスが右連続であることと Γ が開集合であることにより

$$\bigcup_{0 \leq s < t} \{X_s \in \Gamma\} = \bigcup_{\substack{0 \leq r < t \\ r \in \mathbb{Q}}} \{X_r \in \Gamma\}$$

が成り立ち $\{H_\Gamma < t\} \in \mathscr{F}_t$ が従う． ■

Problem 2.7

If the set Γ in Example 2.5 is closed and the sample paths of the process X are continuous, then H_Γ is a stopping time.

証明.

第一段　$\mathbb{R}^d$ 上の Euclid 距離を ρ で表し，

$$\rho(x, \Gamma) := \inf_{y \in \Gamma} \rho(x, y), \quad \Gamma_n := \left\{ x \in \mathbb{R}^d \ ; \quad \rho(x, \Gamma) < \frac{1}{n} \right\}, \quad (x \in \mathbb{R}^d,\ n = 1, 2, \cdots)$$

とおく．$\mathbb{R}^d \ni x \longmapsto \rho(x, \Gamma)$ の連続性より Γ_n は開集合であるから，Problem 2.6 の結果より $T_n := H_{\Gamma_n}$ で定める $T_n,\ n = 1, 2, \cdots$ は $(\mathscr{F}_t)$-弱停止時刻であり，また $H := H_\Gamma$ とおけば次の (1) と (2) が成立する:

(1)　$\{H = 0\} = \{X_0 \in \Gamma\}$,

[*2] optional time の訳語がわからないので弱停止時刻と呼ぶ．

$$(2) \quad H(\omega) \le t \quad \Leftrightarrow \quad T_n(\omega) < t,\ \forall n = 1,2,\cdots, \quad (\forall \omega \in \{H > 0\},\ \forall t > 0).$$

(1) と (2) 及び $T_n,\ n = 1,2,\cdots$ が $(\mathscr{F}_t)$-弱停止時刻であることにより

$$\{H \le t\} = \{H \le t\} \cap \{H > 0\} + \{H = 0\} = \left\{ \bigcap_{n=1}^{\infty} \{T_n < t\} \right\} \cap \{H > 0\} + \{H = 0\} \in \mathscr{F}_t, \quad (\forall t \ge 0)$$

が成立するから H は $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻である．

第二段　(1) を示す．実際，$X_0(\omega) \in \Gamma$ なら $H(\omega) = 0$ であり，$X_0(\omega) \notin \Gamma$ なら，Γ が閉であることとパスの連続性より

$$X_t(\omega) \notin \Gamma, \quad (0 \le t \le h)$$

を満たす $h > 0$ が存在して $H(\omega) \ge h > 0$ となる．

第三段　$\omega \in \{H > 0\},\ t > 0$ として (2) を示す．まずパスの連続性より

$$T_n(\omega) < t \quad \Leftrightarrow \quad \exists s \le t, \quad X_s(\omega) \in \Gamma_n$$

が成り立つ．$H(\omega) \le t$ の場合，$\beta \coloneqq H(\omega)$ とおけば，Γ が閉であることとパスの連続性より

$$X_\beta(\omega) \in \Gamma \subset \Gamma_n, \quad (\forall n = 1,2,\cdots)$$

が満たされ $T_n(\omega) < t\ (\forall n \ge 1)$ が従う．逆に，$H(\omega) > t$ のとき

$$X_s(\omega) \notin \Gamma, \quad (\forall s \in [0,t])$$

が満たされ，パスの連続性と ρ の連続性より $[0,t] \ni s \longmapsto \rho(X_s(\omega),\Gamma)$ は連続であるから，

$$d \coloneqq \min_{s\in[0,t]} \rho(X_s(\omega),\Gamma) > 0$$

が定まる．このとき $1/n < d/2$ を満たす $n \ge 1$ を一つ取れば

$$X_s(\omega) \notin \Gamma_n, \quad (\forall s \in [0,t])$$

が成立する．実際，任意の $s \in [0,t],\ x \in \Gamma_n$ に対し

$$\rho(X_s(\omega),x) \ge \rho(X_s(\omega),\Gamma) - \rho(x,\Gamma) \ge d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2} > \frac{1}{n}$$

が満たされる．従って $T_n(\omega) \ge t$ となる． ∎

Lemma 2.9 の式変形について

第一の式変形は

$$\begin{aligned}\{T+S>t\} &= \{T=0,\ T+S>t\} + \{0<T<t,\ T+S>t\} + \{T \ge t,\ T+S>t\} \\ &= \{T=0,\ T+S>t\} + \{0<T<t,\ T+S>t\} + \{T \ge t,\ T+S>t,\ S=0\} \\ &\quad + \{T \ge t,\ T+S>t,\ S>0\} \\ &= \{T=0,\ S>t\} + \{0<T<t,\ T+S>t\} + \{T>t,\ S=0\} + \{T \ge t,\ S>0\}\end{aligned}$$

である．

Problem 2.10

Let T, S be optional times; then $T+S$ is optional. It is a stopping time, if one of the following conditions holds:

(i)　$T > 0,\ S > 0$;

(ii)　$T > 0, T$ is a stopping time.

証明.　T, S が $(\mathscr{F}_t)$-弱停止時刻であるとすれば，任意の $t > 0$ に対し

$$\begin{aligned}\{T+S<t\} &= \{T=0,\ T+S<t\} + \{0<T<t,\ T+S<t\} \\ &= \{T=0,\ S<t\} + \bigcup_{\substack{0<r<t \\ r\in\mathbb{Q}}} \{0<T<r,\ S<t-r\} \\ &\in \mathscr{F}_t\end{aligned}$$

が成り立つから $T+S$ も $(\mathscr{F}_t)$-弱停止時刻である．

(i)　この場合 $\{T+S\leq 0\} = \emptyset$ である．また $t>0$ なら

$$\{T+S>t\} = \{0<T<t,\ T+S>t\} + \{T\geq t,\ T+S>t\} = \bigcup_{\substack{0<r<t \\ r\in\mathbb{Q}}} \{r<T<t,\ S>t-r\} + \{T\geq t\} \in \mathscr{F}_t$$

が成立する．

(ii)　この場合も $\{T+S\leq 0\} = \emptyset$ であり，また $t>0$ のとき

$$\begin{aligned}\{T+S>t\} &= \{0<T<t,\ T+S>t\} + \{T\geq t,\ T+S>t\} \\ &= \{0<T<t,\ T+S>t\} + \{T\geq t,\ T+S>t,\ S=0\} + \{T\geq t,\ T+S>t,\ S>0\} \\ &= \{0<T<t,\ T+S>t\} + \{T>t,\ S=0\} + \{T\geq t,\ S>0\} \\ &\in \mathscr{F}_t\end{aligned}$$

が成立する．　■

Problem 2.13

Verify that $\mathscr{F}_T$ is actually a σ-field and T is $\mathscr{F}_T$-measurable. Show that if $T(\omega) = t$ for some constant $t \geq 0$ and every $\omega \in \Omega$, then $\mathscr{F}_T = \mathscr{F}_t$.

証明.

第一段　$\mathscr{F}_T$ が σ-加法族であることを示す．実際，$\Omega \cap \{T\leq t\} = \{T\leq t\} \in \mathscr{F}_t,\ (\forall t\geq 0)$ より $\Omega \in \mathscr{F}_T$ が従い，また

$$A^c \cap \{T\leq t\} = \{T\leq t\} - A\cap\{T\leq t\}, \quad \left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\} \cap \{T\leq t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap \{T\leq t\})$$

より $\mathscr{F}_T$ は補演算と可算和で閉じる．

第二段　任意の $\alpha \geq 0$ に対し

$$\{T\leq\alpha\} \cap \{T\leq t\} = \{T\leq \alpha\wedge t\} \in \mathscr{F}_{\alpha\wedge t} \subset \mathscr{F}_t$$

が成立し T の $\mathscr{F}_T/\mathscr{B}([0,\infty])$-可測性が出る．

第三段　$A \in \mathscr{F}_T$ なら $A = A\cap\{T\leq t\} \in \mathscr{F}_t$ となり，$A\in\mathscr{F}_t$ については，任意の $s\geq 0$ に対し $s\geq t$ なら

$$A\cap\{T\leq s\} = A \in \mathscr{F} \subset \mathscr{F}_s,$$

$s<t$ なら

$$A\cap\{T\leq s\} = \emptyset \in \mathscr{F}_s$$

が成り立ち $A\in\mathscr{F}_T$ が従う．　■

Exercise 2.14

Let T be a stopping time and S a random time such that $S \geq T$ on Ω. If S is $\mathscr{F}_T$-measurable, then it is also a stopping time.

証明.　任意の $t \geq 0$ に対し

$$\{S \leq t\} = \{S \leq t\} \cap \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t$$

が成立する. ∎

Problem 2.17 修正

Let T, S be stopping times and Z an $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-measurable, integrable random variable. Then

$$A \in \mathscr{F}_T \quad \Rightarrow \quad A \cap \{T \leq S\}, A \cap \{T < S\} \in \mathscr{F}_{S \wedge T},$$

and we have

(i) $\mathbb{1}_{\{T \leq S\}} E(Z \,|\, \mathscr{F}_T) = \mathbb{1}_{\{T \leq S\}} E(Z \,|\, \mathscr{F}_{S \wedge T})$, P-a.s.

(ii) $\mathbb{1}_{\{T < S\}} E(Z \,|\, \mathscr{F}_T) = \mathbb{1}_{\{T < S\}} E(Z \,|\, \mathscr{F}_{S \wedge T})$, P-a.s.

(iii) $E(E(Z \,|\, \mathscr{F}_T) \,|\, \mathscr{F}_S) = E(Z \,|\, \mathscr{F}_{S \wedge T})$, P-a.s.

証明.

第一段　任意の $A \in \mathscr{F}_T$ に対し $A \cap \{T \leq S\} \in \mathscr{F}_{S \wedge T}$ が成り立つ．実際,

$$A \cap \{T \leq S\} \cap \{S \wedge T \leq t\} = \Big[A \cap \{T \leq t\}\Big] \cap \{T \leq S\} \cap \{S \wedge T \leq t\} \in \mathscr{F}_t, \quad (\forall t \geq 0)$$

が成立する．同様に $A \cap \{T < S\} \in \mathscr{F}_{S \wedge T}$ も得られる.

第二段　任意の $A \in \mathscr{F}_T$ に対し，前段の結果より

$$\int_{A \cap \{T \leq S\}} Z \, dP = \int_{A \cap \{T \leq S\}} E(Z \,|\, \mathscr{F}_{S \wedge T}) \, dP$$

が従う．$\mathbb{1}_{\{T \leq S\}} E(Z \,|\, \mathscr{F}_{S \wedge T})$ も $\mathscr{F}_T/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測であるから (i) が得られ，同様に (ii) も出る.

第三段　任意の $B \in \mathscr{F}_S$ に対し，第一段と第二段の結果により

$$\begin{aligned}
\int_B E(E(Z \,|\, \mathscr{F}_T) \,|\, \mathscr{F}_S) \, dP &= \int_B E(Z \,|\, \mathscr{F}_T) \, dP = \int_{B \cap \{S < T\}} E(Z \,|\, \mathscr{F}_T) \, dP + \int_{B \cap \{T \leq S\}} E(Z \,|\, \mathscr{F}_T) \, dP \\
&= \int_{B \cap \{S < T\}} Z \, dP + \int_{B \cap \{T \leq S\}} E(Z \,|\, \mathscr{F}_{S \wedge T}) \, dP \\
&= \int_{B \cap \{S < T\}} E(Z \,|\, \mathscr{F}_{S \wedge T}) \, dP + \int_{B \cap \{T \leq S\}} E(Z \,|\, \mathscr{F}_{S \wedge T}) \, dP \\
&= \int_B E(Z \,|\, \mathscr{F}_{S \wedge T}) \, dP
\end{aligned}$$

が成り立つ．$E(Z \,|\, \mathscr{F}_{S \wedge T})$ も $\mathscr{F}_S/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測であるから (iii) を得る. ∎

Proposition 2.18 修正

Let $X = \{ X_t, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \leq t < \infty \}$ be a progressively measurable process, and let T be a stopping time of the filtration $\{\mathscr{F}_t\}$. Then the random variable $X_T 1\!\!1_{\{T<\infty\}}$ is $\mathscr{F}_T$-measurable, and the "stopped process" $\{ X_{T\wedge t}, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \leq t < \infty \}$ is progressively measurable.

証明.

第一段　停止過程の発展的可測性を示す．$t \geq 0$ を固定する．このとき，全ての $\omega \in \Omega$ に対して $[0,t] \ni s \longmapsto T(\omega) \wedge s$ は連続であり，かつ全ての $s \in [0,t]$ に対し $\Omega \ni \omega \longmapsto T(\omega) \wedge s$ は $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}([0,t])$-可測であるから，$[0,t] \times \Omega \ni (s,\omega) \longmapsto T(\omega) \wedge s$ は $\mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t/\mathscr{B}([0,t])$-可測である．従って，任意の $A \in \mathscr{B}([0,t])$ と $B \in \mathscr{F}_t$ に対し

$$\begin{aligned}\{ (s,\omega) \in [0,t] \times \Omega \ ; \quad (T(\omega) \wedge s, \omega) \in A \times B \} &= \{ (s,\omega) \in [0,t] \times \Omega \ ; \quad T(\omega) \wedge s \in A \} \cap ([0,t] \times B) \\ &\in \mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t\end{aligned}$$

が成り立つから，任意の $E \in \mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t$ に対して

$$\{ (s,\omega) \in [0,t] \times \Omega \ ; \quad (T(\omega) \wedge s, \omega) \in E \} \in \mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t$$

が満たされ $(s,\omega) \longmapsto (T(\omega) \wedge s, \omega)$ の $\mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t/\mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t$-可測性を得る．

$$X(s,\omega) = X|_{[0,t]\times\Omega}(s,\omega), \quad (\forall (s,\omega) \in [0,t] \times \Omega)$$

かつ $X|_{[0,t]\times\Omega}$ は $\mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$-可測であるから，$[0,t] \times \Omega \ni (s,\omega) \longmapsto X(T(\omega) \wedge s, \omega) = X|_{[0,t]\times\Omega}(T(\omega) \wedge s, \omega)$ の $\mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$-可測性が出る．

第二段　定理**??** (P. **??**) より $\omega \longmapsto X(T(\omega) \wedge t, \omega)$ は $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ であるから，任意の $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ に対し

$$\{X_T 1\!\!1_{\{T<\infty\}} \in B\} \cap \{T \leq t\} = \{X_{T\wedge t} \in B\} \cap \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t, \quad (\forall t \geq 0)$$

が成立し $X_T 1\!\!1_{\{T<\infty\}}$ の $\mathscr{F}_T/\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$-可測性を得る． ∎

Problem 2.19

Under the same assumption as in Proposition 2.18, and with $f(t,x); [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ a bounded, $\mathscr{B}([0,\infty)) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$-measurable function, show that the process $Y_t = \int_0^t f(s, X_s)\, ds;\ t \geq 0$ is progressively measurable with respect to $\{\mathscr{F}_t\}$, and Y_T is an $\mathscr{F}_T$-measurable random variable.

証明.　$[0,t] \times \Omega \ni (s,\omega) \longmapsto f(s, X_s(\omega))$ が $\mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測であれば，Fuini の定理より $\{ Y_t, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \leq t < \infty \}$ は適合過程となり，可積分性より $t \longmapsto Y_t(\omega)$, $(\forall \omega \in \Omega)$ が連続であるから Y の発展的可測性が従う．実際，

$$[0,t] \times \Omega \ni (s,\omega) \longmapsto (s, X_s(\omega)) = (s, X|_{[0,t]\times\Omega}(s,\omega))$$

による $A \times B$, $(A \in \mathscr{B}([0,\infty))$, $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ の引き戻しは

$$\{([0,t] \cap A) \times \Omega\} \cap X|_{[0,t]\times\Omega}^{-1}(B) \in \mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t$$

となるから，$[0,t] \times \Omega \ni (s,\omega) \longmapsto f(s, X_s(\omega))$ は $\mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測である． ∎

Problem 2.21

Verify that the class $\mathscr{F}_{T+}$ is indeed a σ-field with respect to which T is measurable, that it coincides with $\{ A \in \mathscr{F} \ ; \quad A \cap \{T < t\} \in \mathscr{F}_t, \ \forall t \geq 0 \}$, and that if T is a stopping time (so that both $\mathscr{F}_T, \mathscr{F}_{T+}$ are defined), then $\mathscr{F}_T \subset \mathscr{F}_{T+}$.

証明.

第一段　$\Omega \cap \{T \leq t\} = \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t$, $(\forall t \geq 0)$ より $\Omega \in \mathscr{F}_{T+}$ が従い，また

$$A^c \cap \{T \leq t\} = \{T \leq t\} - A \cap \{T \leq t\}, \quad \left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\} \cap \{T \leq t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap \{T \leq t\})$$

より $\mathscr{F}_{T+}$ は補演算と可算和で閉じるから $\mathscr{F}_{T+}$ は σ-加法族である．また，

$$\{T < \alpha\} \cap \{T \leq t\} = \begin{cases} \{T < \alpha\}, & (\alpha \leq t), \\ \{T \leq t\}, & (\alpha > t), \end{cases} \in \mathscr{F}_{t+}, \quad (\forall t \geq 0)$$

より $(\mathscr{F}_t)$-弱停止時刻 T は $\mathscr{F}_{T+}/\mathscr{B}([0, \infty])$-可測である．

第二段　任意の $t \geq 0$ に対し

$$A \cap \{T < t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap \left\{ T \leq t - \frac{1}{n} \right\}, \quad A \cap \{T \leq t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A \cap \left\{ T < t + \frac{1}{n} \right\}$$

が成り立ち $\mathscr{F}_{T+} = \{ A \in \mathscr{F} \ ; \quad A \cap \{T < t\} \in \mathscr{F}_t, \ \forall t \geq 0 \}$ が従う．

第三段　T が $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻であるとき，任意の $A \in \mathscr{F}_T$ に対し

$$A \cap \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t \subset \mathscr{F}_{t+}, \quad (\forall t \geq 0)$$

となり $\mathscr{F}_T \subset \mathscr{F}_{T+}$ が成り立つ． ∎

Lemma: 弱停止時刻の可測性

T を $(\mathscr{F}_t)$-弱停止時刻とすれば，任意の $t \geq 0$ に対し $T \wedge t$ は $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}([0, \infty))$-可測である．

証明.　任意の $\alpha \geq 0$ に対し

$$\{T \wedge t \leq \alpha\} = \begin{cases} \Omega, & (t \leq \alpha), \\ \{T \leq \alpha\}, & (t > \alpha), \end{cases} \in \mathscr{F}_t$$

が成立する． ∎

Probelem 2.22

Verify that analogues of Lemmas 2.15 and 2.16 hold if T and S are assumed to be optional and $\mathscr{F}_T$, $\mathscr{F}_S$ and $\mathscr{F}_{T \wedge S}$ are replaced by $\mathscr{F}_{T+}$, $\mathscr{F}_{S+}$ and $\mathscr{F}_{(T \wedge S)+}$, respectively. Prove that if S is an optional time and T is a positive stopping time with $S \leq T$, and $S < T$ on $\{S < \infty\}$, then $\mathscr{F}_{S+} \subset \mathscr{F}_T$.

証明.

第一段　$T \wedge t,\ S \wedge t$ は $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}([0,\infty))$-可測であるから、任意の $A \in \mathscr{F}_{S+}$ に対して

$$A \cap \{S \le T\} \cap \{T \le t\} = (A \cap \{S \le t\}) \cap \{S \wedge t \le T \wedge t\} \cap \{T \le t\} \in \mathscr{F}_{t+}, \quad (\forall t \ge 0)$$

となり $A \cap \{S \le T\} \in \mathscr{F}_{T+}$ が成立する．特に，Ω 上で $S \le T$ なら $\mathscr{F}_{S+} \subset \mathscr{F}_{T+}$ が従う．

第二段　前段の結果より $\mathscr{F}_{(T\wedge S)+} \subset \mathscr{F}_{T+} \cap \mathscr{F}_{S+}$ が満たされる．一方で，任意の $A \in \mathscr{F}_{T+} \cap \mathscr{F}_{S+}$ に対し

$$A \cap \{T \wedge S \le t\} = (A \cap \{T \le t\}) \cup (A \cap \{S \le t\}) \in \mathscr{F}_{t+}, \quad (\forall t \ge 0)$$

が成り立ち $\mathscr{F}_{(T\wedge S)+} = \mathscr{F}_{T+} \cap \mathscr{F}_{S+}$ を得る．また

$$\{S < T\} \cap \{T \wedge S \le t\} = \left(\bigcup_{\substack{0 \le r \le t \\ r \in \mathbb{Q} \cup \{t\}}} \{S \le r\} \cap \{r < T\} \right) \cap \{S \le t\} \in \mathscr{F}_{t+}, \quad (\forall t \ge 0)$$

により $\{S < T\} \in \mathscr{F}_{(T\wedge S)+}$ 及び $\{T < S\} \in \mathscr{F}_{(T\wedge S)+}$ となり，$\{T \le S\}, \{S \le T\}, \{T = S\} \in \mathscr{F}_{(T\wedge S)+}$ が従う．

第三段　T が停止時刻で $\{T < \infty\}$ 上で $S < T$ が満たされているとき．任意の $A \in \mathscr{F}_{S+}$ に対し

$$A \cap \{T \le t\} = A \cap \{S < t\} \cap \{T \le t\} \in \mathscr{F}_t, \quad (\forall t \ge 0)$$

が成り立ち $\mathscr{F}_{S+} \subset \mathscr{F}_T$ となる． ∎

Problem 2.23

Show that if $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a sequence of optional times and $T = \inf_{n\ge1} T_n$, then $\mathscr{F}_{T+} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{T_n+}$. Besides, if each T_n is a positive stopping time and $T < T_n$ on $\{T < \infty\}$, then we have $\mathscr{F}_{T+} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{T_n}$.

証明.　$T \le T_n,\ (\forall n \ge 1)$ より $\mathscr{F}_{T+} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{T_n+}$ が成り立つ．一方で $A \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{T_n+}$ に対し

$$A \cap \{T < t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap \{T_n < t\} \in \mathscr{F}_t, \quad (\forall t > 0) \tag{1.3}$$

が成り立つから，Problem 2.21 より $A \in \mathscr{F}_{T+}$ が従う．また $\{T < \infty\}$ 上で $T < T_n,\ (\forall n \ge 1)$ であるとき，Problem 2.22 より $\mathscr{F}_{T+} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{T_n}$ が従い，また $T_n,\ n \ge 1$ が停止時刻の場合も (1.3) は成立するので $\mathscr{F}_{T+} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{T_n}$ が出る． ∎

Problem 2.24 修正

Given an optional time T of the filtration $\{\mathscr{F}_t\}$, consider the sequence $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ of random times given by

$$T_n(\omega) = \begin{cases} +\infty; & \text{on } \{\ \omega\ ;\quad T(\omega) \ge n\ \} \\ \dfrac{k}{2^n}; & \text{on } \left\{\ \omega\ ;\quad \frac{k-1}{2^n} \le T(\omega) < \frac{k}{2^n}\ \right\} \text{ for } k = 1, \cdots, n2^n, \end{cases}$$

for $n \ge 1$. Obviously $T_n \ge T_{n+1} \ge T$, for every $n \ge 1$. Show that each T_n is a stopping time, that $\lim_{n\to\infty} T_n = T$, and that for every $A \in \mathscr{F}_{T+}$ we have $A \cap \{T_n = (k/2^n)\} \in \mathscr{F}_{k/2^n};\ n \ge 1, 1 \le k \le n2^n$.

証明.

第一段　$T_n(\omega) < \infty$ を満たす $\omega \in \Omega$ に対し，或る $1 \leq j \leq (n+1)2^{n+1}$, $1 \leq k \leq n2^n$ が存在して

$$\frac{j-1}{2^{n+1}} \leq T(\omega) < \frac{j}{2^{n+1}}, \quad \frac{k-1}{2^n} \leq T(\omega) < \frac{k}{2^n}$$

となる．このとき

$$\frac{2k-2}{2^{n+1}} \leq T(\omega) < \frac{2k-1}{2^{n+1}}$$

または

$$\frac{2k-1}{2^{n+1}} \leq T(\omega) < \frac{2k}{2^{n+1}}$$

のどちらかであるから，すなわち $j = 2k-1$ 或は $j = 2k$ であり

$$T(\omega) < \frac{j}{2^{n+1}} = T_{n+1}(\omega) \leq \frac{2k}{2^{n+1}} = T_n(\omega)$$

が成立する．$T_n(\omega) = \infty$ の場合も併せて $T_n \geq T_{n+1} \geq T$ $(\forall n \geq 1)$ を得る．

第二段　任意の $t \geq 0$ に対して

$$\{T_n \leq t\} = \bigcup_{k/2^n \leq n \wedge t} \left\{ \omega \ ; \quad \frac{k-1}{2^n} \leq T(\omega) < \frac{k}{2^n} \right\} \in \mathscr{F}_t, \quad (\forall t \geq 0)$$

が成り立つから T_n は $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻である．また $\{T < \infty\}$ 上では $T(\omega) < n$ のとき

$$0 < T_n(\omega) - T(\omega) \leq \frac{1}{2^n} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

となる．

第三段　任意の $A \in \mathscr{F}_{T+}$ に対して，Problem 2.21 より

$$A \cap \left\{ T_n = \frac{k}{2^n} \right\} = A \cap \left\{ T < \frac{k}{2^n} \right\} - A \cap \left\{ T < \frac{k-1}{2^n} \right\} \in \mathscr{F}_{k/2^n}$$

が成り立つ． ∎

1.3 Continuous Time Martingales

1.3.1 Fundamental Inequalities

Proposition 3.6

Let $\{ X_t, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \leq t < \infty \}$ be a martingale (respectively, submartingale), and $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a convex (respectively, convex nondecreasing) function, such that $E\,|\varphi(X_t)| < \infty$ holds for every $t \geq 0$. Then $\{ \varphi(X_t), \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \leq t < \infty \}$ is a submartingale.

証明．$(X_t)_{t \geq 0}$ がマルチンゲールであり φ が凸であるとき，Jensen の不等式より P-a.s. の $\omega \in \Omega$ に対し

$$\varphi(X_s(\omega)) = \varphi(E\,(X_t \,|\, \mathscr{F}_s)\,(\omega)) \leq E\,(\varphi(X_t) \,|\, \mathscr{F}_s)\,(\omega)$$

が成り立つ．$(X_t)_{t\geq 0}$ が劣マルチンゲールであり φ が凸かつ単調増大であるとき，P-a.s. の $\omega \in \Omega$ に対し

$$\varphi(X_s(\omega)) \leq \varphi(E\,(X_t \,|\, \mathscr{F}_s)\,(\omega)) \leq E\,(\varphi(X_t) \,|\, \mathscr{F}_s)\,(\omega)$$

が成り立つ． ∎

Theorem 3.8 (i)

Let $\{\, X_t, \mathscr{F}_t \;;\quad 0 \leq t < \infty \,\}$ be a submartingale whose every path is right-continuous, let $[\sigma, \tau]$ be a subinterval of $[0, \infty)$, and let $\alpha < \beta,\ \lambda > 0$ be real numbers. We have the following results:

(i) First submartingale inequality:

$$\lambda \cdot P\left[\sup_{\sigma \leq t \leq \tau} X_t > \lambda\right] \leq \int_{\sup\limits_{\sigma \leq t \leq \tau} X_t > \lambda} X_\tau \, dP, \tag{1.4}$$

and

$$\lambda \cdot P\left[\sup_{\sigma \leq t \leq \tau} X_t \geq \lambda\right] \leq E(X_\tau^+).$$

証明． $n \geq 1$ に対し $[\sigma, \tau]$ を 2^n 等分に分割し

$$E_n := \left\{ \max_{k=0,1,\cdots,2^n} X_{\sigma + \frac{k}{2^n}(\tau - \sigma)} > \lambda \right\},$$
$$E_n^0 := \{X_\sigma > \lambda\}, \quad E_n^m := \left\{ \max_{k=0,1,\cdots,m-1} X_{\sigma + \frac{k}{2^n}(\tau-\sigma)} \leq \lambda,\ X_{\sigma + \frac{m}{2^n}(\tau - \sigma)} > \lambda \right\}, \quad (1 \leq m \leq 2^n)$$

とおけば，

$$E_n^m \in \mathscr{F}_{\sigma + \frac{m}{2^n}(\tau - \sigma)} \subset \mathscr{F}_\tau, \quad E_n = \sum_{m=0}^{2^n} E_n^m, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

かつ，$E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots$ と X のパスの右連続性より

$$\left\{ \sup_{\sigma \leq t \leq \tau} X_t > \lambda \right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \max_{k=0,1,\cdots,2^n} X_{\sigma + \frac{k}{2^n}(\tau - \sigma)} > \lambda \right\} = \lim_{n \to \infty} E_n$$

が満たされ，また $\sup_{\sigma \leq t \leq \tau} X_t$ の $\mathscr{F}_\tau / \mathscr{B}([-\infty, \infty])$-可測性も従う．Chebyshev の不等式と劣マルチンゲール性より

$$P(E_n) = \sum_{m=0}^{2^n} P(E_n^m) \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{m=0}^{2^n} \int_{E_n^m} X_{\sigma + \frac{m}{2^n}(\tau - \sigma)} \, dP \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{m=0}^{2^n} \int_{E_n^m} X_\tau \, dP = \frac{1}{\lambda} \int_{E_n} X_\tau \, dP$$

となるから，$n \longrightarrow \infty$ として，測度の連続性と Lebesgue の収束定理より

$$P\left[\sup_{\sigma \leq t \leq \tau} X_t > \lambda\right] \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\sup\limits_{\sigma \leq t \leq \tau} X_t > \lambda} X_\tau \, dP \leq \frac{1}{\lambda} E(X_\tau^+)$$

を得る．特に，任意の $m \in \mathbb{N},\ (\lambda > 1/m)$ に対して

$$P\left[\sup_{\sigma \leq t \leq \tau} X_t > \lambda - \frac{1}{m}\right] \leq \frac{1}{\lambda - 1/m} E(X_\tau^+)$$

が成り立ち，$m \longrightarrow \infty$ として

$$P\left[\sup_{\sigma\le t\le\tau} X_t \ge \lambda\right] \le \frac{1}{\lambda}E(X_\tau^+)$$

が従う． ∎

Theorem 3.8 (ii)

Second submartingale inequality:

$$\lambda \cdot P\left[\sup_{\sigma\le t\le\tau} X_t \le -\lambda\right] \le E(X_\tau^+) - E(X_\sigma).$$

証明． $n \ge 1$ に対し $[\sigma,\tau]$ を 2^n 等分に分割し

$$E_n := \left\{\min_{k=0,1,\cdots,2^n} X_{\sigma+\frac{k}{2^n}(\tau-\sigma)} < -\lambda\right\},$$

$$E_n^0 := \{X_\sigma < -\lambda\}, \quad E_n^m := \left\{\min_{k=0,1,\cdots,m-1} X_{\sigma+\frac{k}{2^n}(\tau-\sigma)} \ge -\lambda,\ X_{\sigma+\frac{m}{2^n}(\tau-\sigma)} < -\lambda\right\}, \quad (1 \le m \le 2^n)$$

として，また

$$T(\omega) := \begin{cases} \sigma + \frac{m}{2^n}(\tau-\sigma), & (\omega \in E_n^m,\ m = 0,1,\cdots,2^n), \\ \tau, & (\omega \in \Omega\backslash E_n), \end{cases} \qquad (\forall\omega\in\Omega)$$

により $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻を定めれば，任意抽出定理 (P. 31) より

$$\begin{aligned} E(X_\sigma) \le E(X_T) &= \sum_{m=0}^{2^n}\int_{E_n^m} X_{\sigma+\frac{m}{2^n}(\tau-\sigma)}\,dP + \int_{\Omega\backslash E_n} X_\tau\,dP \le \sum_{m=0}^{2^n}(-\lambda)P(E_n^m) + E(X_\tau^+) \\ &= -\lambda P(E_n) + E(X_\tau^+) \end{aligned}$$

が成立する．移項して $n \longrightarrow \infty$ とすれば

$$P\left[\inf_{\sigma\le t\le\tau} X_t < -\lambda\right] \le \frac{1}{\lambda}\{E(X_\tau^+) - E(X_\sigma)\}$$

が得られ，(i) の証明と同様にして

$$P\left[\inf_{\sigma\le t\le\tau} X_t \le -\lambda\right] \le \frac{1}{\lambda}\{E(X_\tau^+) - E(X_\sigma)\}$$

が従う． ∎

Lemma: Theorem 3.8 (iii)

確率過程 $X = \{\, X_t\ ;\quad 0 \le t < \infty \,\}$ のすべてのパスが右連続であるとき，$[\sigma,\tau]$ の 2^n 等分点を

$$F_n := \left\{\, \tau_i^n\ ;\quad \tau_i^n = \sigma + \frac{i}{2^n}(\tau-\sigma),\ i = 0,1,\cdots,2^n \,\right\}, \quad n = 1,2,\cdots$$

とおけば次が成立する:

$$U_{[\sigma,\tau]}(\alpha,\beta;X) = \sup_{n\in\mathbb{N}} U_{F_n}(\alpha,\beta;X), \quad D_{[\sigma,\tau]}(\alpha,\beta;X) = \sup_{n\in\mathbb{N}} D_{F_n}(\alpha,\beta;X).$$

Karatzas-Shreve 本文中では

$$\tau_1(\omega) = \min\{\, t \in F \ ; \quad X_t(\omega) \leq \alpha \,\}$$

と定めているが,

$$\tau_1(\omega) = \min\{\, t \in F \ ; \quad X_t(\omega) < \alpha \,\}$$

と定める方がよい．実際，こうでないと今の補題が従わない．また $\sigma_0 \equiv 0$, $\tau_0 \equiv 0$ と考える．

証明.　$U_{[\sigma,\tau]}(\alpha,\beta;X) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} U_{F_n}(\alpha,\beta;X)$ が成立すれば主張を得る．いま，任意に有限部分集合 $F \subset [\sigma,\tau]$ を取り

$$\tau_1(\omega) \coloneqq \min\{\, t \in F \ ; \quad X_t(\omega) < \alpha \,\}, \quad \sigma_1(\omega) \coloneqq \min\{\, t \in F \ ; \quad t \geq \tau_1(\omega),\ X_t(\omega) > \beta \,\}, \cdots$$

を定め，$\omega \in \Omega$ を任意に取り $U_F(\alpha,\beta;X(\omega)) = j \geq 1$ と仮定する．このとき

$$X_{\tau_i(\omega)}(\omega) < \alpha, \quad X_{\sigma_i(\omega)}(\omega) > \beta, \quad (i = 1, \cdots, j)$$

が満たされ，$t \longrightarrow X_t(\omega)$ の右連続性より，十分大きい $n \in \mathbb{N}$ に対して或る $t_i, s_i \in F_n$, $(1 \leq i \leq j)$ が

$$\tau_1(\omega) \leq t_1 < \sigma_1(\omega) \leq s_1 < \cdots < \tau_j(\omega) \leq t_j < \sigma_j(\omega) \leq s_j$$

かつ

$$X_{t_i}(\omega) < \alpha, \quad X_{s_i}(\omega) > \beta, \quad (\forall i = 1, \cdots, j)$$

を満たす．これにより

$$U_F(\alpha,\beta;X(\omega)) = j \leq U_{F_n}(\alpha,\beta;X(\omega))$$

が従い，ω の任意性より $U_F(\alpha,\beta;X) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} U_{F_n}(\alpha,\beta;X)$ が出る． ∎

Theorem 3.8 (iii)

Upcrossing and downcrossing inequalities:

$$EU_{[\sigma,\tau]}(\alpha,\beta;X) \leq \frac{E(X_\tau^+) + |\alpha|}{\beta - \alpha}, \quad ED_{[\sigma,\tau]}(\alpha,\beta;X) \leq \frac{E(X_\tau - \alpha)^+}{\beta - \alpha}.$$

証明.

第一段　有限部分集合 $F = \{t_1, \cdots, t_n\} \subset [\sigma,\tau]$ に対し

$$\tau_1(\omega) \coloneqq \min\{\, t \in F \ ; \quad X_t(\omega) < \alpha \,\}, \quad \sigma_1(\omega) \coloneqq \min\{\, t \in F \ ; \quad t \geq \tau_1(\omega),\ X_t(\omega) > \beta \,\}, \cdots$$

で定める τ_i, σ_i, $(i = 1, 2, \cdots)$ が $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻であることを示す．実際，任意の $t_j \in F$ に対して

$$\left\{\tau_1 = t_j\right\} = \left[\bigcap_{k=1}^{j-1} \{X_{t_k} \geq \alpha\}\right] \cap \left\{X_{t_j} < \alpha\right\} \in \mathscr{F}_{t_j},$$

$$\vdots$$

$$\left\{\tau_i = t_j\right\} = \bigcup_{r=1}^{j-1} \left[\{\sigma_{i-1} = t_r\} \cap \bigcap_{k=r}^{j-1} \{X_{t_k} \geq \alpha\}\right] \cap \left\{X_{t_j} < \alpha\right\} \in \mathscr{F}_{t_j},$$

$$\left\{\sigma_i = t_j\right\} = \bigcup_{r=1}^{j-1} \left[\{\tau_i = t_r\} \cap \bigcap_{k=r}^{j-1} \{X_{t_k} \leq \beta\}\right] \cap \left\{X_{t_j} > \beta\right\} \in \mathscr{F}_{t_j}$$

が成立するから $\{\tau_i \leq t\} \in \mathscr{F}_t$ $(\forall t \geq 0)$ が満たされる．

$$\tau_1(\omega) := \min\{\, t \in F \ ; \quad X_t(\omega) > \beta \,\}, \quad \sigma_1(\omega) := \min\{\, t \in F \ ; \quad t \geq \tau_1(\omega),\ X_t(\omega) < \alpha \,\}, \cdots$$

により τ_i, σ_i, $(i = 1, 2, \cdots)$ を定めてもこれらは $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻となる．特に，

$$\{U_F(\alpha, \beta; X) = j\} = \left\{\sigma_j < \infty\right\} \cap \left\{\sigma_{j+1} = \infty\right\} \in \mathscr{F}, \quad (j = 0, 1, 2, \cdots)$$

が成立するから $U_F(\alpha, \beta; X)$ 及び $D_F(\alpha, \beta; X)$ の可測性が得られる．

第二段　補題の有限部分集合 $F_n \subset [\sigma, \tau]$ に対し

$$EU_{F_n}(\alpha, \beta; X) \leq \frac{E(X_\tau^+) + |\alpha|}{\beta - \alpha} \tag{1.5}$$

が成立することを示せば，単調収束定理より

$$EU_{[\sigma,\tau]}(\alpha, \beta; X) = E\left(\sup_{n \in \mathbb{N}} U_{F_n}(\alpha, \beta; X)\right) \leq \frac{E(X_\tau^+) + |\alpha|}{\beta - \alpha}$$

が従う．実際，$j = U_{F_n}(\alpha, \beta; X(\omega))$ ならば $\sigma_j(\omega) \leq \tau < \tau_{j+1}(\omega)$ 或は $\tau_{j+1}(\omega) \leq \tau < \sigma_{j+1}(\omega)$ であるから

$$Z(\omega) := \sum_{i=1}^{\infty} (X_{\tau_{i+1}(\omega) \wedge \tau}(\omega) - X_{\sigma_i(\omega) \wedge \tau}(\omega)) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{j} (X_{\tau_{i+1}(\omega)}(\omega) - X_{\sigma_i(\omega)}(\omega)), & (\star 1), \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{j-1} (X_{\tau_{i+1}(\omega)}(\omega) - X_{\sigma_i(\omega)}(\omega)) + \left(X_\tau(\omega) - X_{\sigma_j(\omega)}(\omega)\right), & (\star 2) \end{cases}$$

となり，$X_{\tau_i} < \alpha,\ X_{\sigma_i} > \beta$ より

$$\begin{aligned} (\star 2) &= \sum_{i=1}^{j-1} (X_{\tau_{i+1}(\omega)}(\omega) - X_{\sigma_i(\omega)}(\omega)) + (X_\tau(\omega) - \alpha) + \left(\alpha - X_{\sigma_j(\omega)}(\omega)\right) \leq j(\alpha - \beta) + X_\tau^+(\omega) + |\alpha| \\ &= U_{F_n}(\alpha, \beta; X(\omega))(\alpha - \beta) + X_\tau^+(\omega) + |\alpha| \end{aligned}$$

及び

$$(\star 1) \leq j(\alpha - \beta) \leq j(\alpha - \beta) + X_\tau^+(\omega) + |\alpha| = U_{F_n}(\alpha, \beta; X(\omega))(\alpha - \beta) + X_\tau^+(\omega) + |\alpha|$$

が満たされ

$$EZ \leq (\alpha - \beta) EU_{F_n}(\alpha, \beta; X) + E(X_\tau^+) + |\alpha|$$

が従う．$\{\, X_t, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \leq t < \infty \,\}$ の劣マルチンゲール性と任意抽出定理 (P. 31) より

$$E\left(X_{\tau_{i+1} \wedge \tau} - X_{\sigma_i \wedge \tau}\right) \geq 0, \quad (i = 1, \cdots, j)$$

が成り立つから，$EZ \geq 0$ となり (1.5) が得られる．

第三段　$j = D_{F_n}(\alpha,\beta;X(\omega))$ ならば $\sigma_j(\omega) \le \tau < \tau_{j+1}(\omega)$ 或は $\tau_{j+1}(\omega) \le \tau < \sigma_{j+1}(\omega)$ であるから

$$Z(\omega) := \sum_{i=1}^{\infty} (X_{\sigma_i(\omega)\wedge\tau}(\omega) - X_{\tau_i(\omega)\wedge\tau}(\omega)) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{j} (X_{\sigma_i(\omega)}(\omega) - X_{\tau_i(\omega)}(\omega)) + \left(X_\tau(\omega) - X_{\tau_{j+1}(\omega)}(\omega)\right), & (\star 3), \\ \sum_{i=1}^{j} (X_{\sigma_i(\omega)}(\omega) - X_{\tau_i(\omega)}(\omega)), & (\star 4) \end{cases}$$

となり，$X_{\tau_i} > \beta$, $X_{\sigma_i} < \alpha$ より

$$(\star 4) \le \sum_{i=1}^{j} (X_{\sigma_i(\omega)}(\omega) - X_{\tau_i(\omega)}(\omega)) + (X_\tau(\omega) - \alpha)^+ = D_{F_n}(\alpha,\beta;X(\omega))(\alpha-\beta) + (X_\tau(\omega) - \alpha)^+$$

及び

$$(\star 3) \le j(\alpha-\beta) \le j(\alpha-\beta) + (X_\tau(\omega) - \alpha)^+ = D_{F_n}(\alpha,\beta;X(\omega))(\alpha-\beta) + (X_\tau(\omega) - \alpha)^+$$

が満たされ

$$EZ \le (\alpha-\beta)ED_{F_n}(\alpha,\beta;X) + E(X_\tau - \alpha)^+$$

が従う．$\{ X_t, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \le t < \infty \}$ の劣マルチンゲール性と任意抽出定理 (P. 31) より

$$E\left(X_{\sigma_i\wedge\tau} - X_{\tau_i\wedge\tau}\right) \ge 0, \quad (i = 1, \cdots, j+1)$$

が成り立つから，$EZ \ge 0$ となり

$$ED_{F_n}(\alpha,\beta;X) \le \frac{E(X_\tau - \alpha)^+}{\beta - \alpha}$$

が得られる． ∎

Theorem 3.8 (iv)

Doob's maximal inequality:

$$E\left(\sup_{\sigma\le t\le\tau} X_t\right)^p \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E\,(X_\tau)^p, \quad p > 1,$$

provided $X_t \ge 0$ a.s.P for every $t \ge 0$, and $E\,(X_\tau)^p < \infty$.

証明．　パスの右連続性より

$$A := \{ \omega \ ; \quad X_t(\omega) < 0,\ \exists t \in [0,\infty) \} = \{ \omega \ ; \quad X_r(\omega) < 0,\ \exists r \in [0,\infty) \cap \mathbb{Q} \}$$

が成り立ち，仮定より $P(A) = 0$ である．ここで

$$Y_n(\omega) := \begin{cases} n \wedge \sup_{\sigma\le t\le\tau} X_t(\omega), & (\omega \in \Omega\backslash A), \\ 0, & (\omega \in A), \end{cases} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

で Y_n を定めれば，$\sup_{\sigma\le t\le\tau} X_t$ の $\mathscr{F}_\tau/\mathscr{B}([-\infty,\infty])$-可測性より Y_n も $\mathscr{F}_\tau/\mathscr{B}([-\infty,\infty])$-可測である．このとき

$$[0,n) \ni \lambda \longmapsto \mathbb{1}_{\{ (\lambda,\omega) \ ; \quad \lambda < Y_n(\omega) \}}(\lambda,\omega)$$

は任意の $\omega \in \Omega$ に対し右連続，

$$\Omega \ni \omega \longmapsto 1\!\!1_{\{\ (\lambda,\omega)\ ;\quad \lambda < Y_n(\omega)\ \}}(\lambda, \omega)$$

は任意の $\lambda \in [0, n)$ に対し可測 $\mathscr{F}_\tau / \mathscr{B}([0, \infty))$ であるから

$$[0, n) \times \Omega \ni (\lambda, \omega) \longmapsto 1\!\!1_{\{\ (\lambda,\omega)\ ;\quad \lambda < Y_n(\omega)\ \}}(\lambda, \omega)$$

は $\mathscr{B}([0, n)) \otimes \mathscr{F}_\tau / \mathscr{B}([0, \infty))$-可測である．$q$ を p の共役指数として，Fubini の定理と (1.4) 及び Hölder の不等式より

$$\begin{aligned}
\int_\Omega Y_n^p \, dP &= p \int_\Omega \int_{[0,n)} \lambda^{p-1} 1\!\!1_{\{\ (\lambda,\omega)\ ;\quad \lambda < Y_n(\omega)\ \}}(\lambda, \omega) \, d\lambda \, dP \\
&= p \int_{[0,n)} \lambda^{p-1} P(Y_n > \lambda) \, d\lambda \\
&= p \int_{[0,n)} \lambda^{p-1} P\left(\sup_{\sigma \le t \le \tau} X_t > \lambda \right) d\lambda \\
&\le p \int_{[0,n)} \lambda^{p-2} \int_{\sup\limits_{\sigma \le t \le \tau} X_t > \lambda} X_\tau(\omega) \, dP \, d\lambda \\
&= p \int_\Omega X_\tau \int_{[0,n)} \lambda^{p-2} 1\!\!1_{\{\ (\lambda,\omega)\ ;\quad \lambda < Y_n(\omega)\ \}}(\lambda, \omega) \, d\lambda \, dP \\
&= \frac{p}{p-1} \int_\Omega X_\tau Y_n^{p-1} \, dP \\
&\le \frac{p}{p-1} \left\{ \int_\Omega X_\tau^p \, dP \right\}^{1/p} \left\{ \int_\Omega Y_n^p \, dP \right\}^{1/q}
\end{aligned}$$

が成り立つから，$\left\{ \int_\Omega Y_n^p \, dP \right\}^{1/q}$ を移項して両辺を p 乗すれば

$$\int_\Omega Y_n^p \, dP \le \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_\Omega X_\tau^p \, dP$$

が得られる．$n \longrightarrow \infty$ として，単調収束定理より主張が従う． ∎

Theorem 3.8 (v)

Regularity of the paths: Almost every sample path $\{\ X_t(\omega)\ ;\quad 0 \le t < \infty\ \}$ is bounded on compact intervals; is free of discontinuities of the second kind, i.e., admits left-hand limits everywhere on $(0, \infty)$; and if the filtration $(\mathscr{F}_t)$ satisfies the usual conditions, then the jumps are exhausted by a sequence of stopping times (Proposition 2.26).

証明.

第一段　コンパクト区間 $[\sigma, \tau]$ 上で P-a.s. にパスが有界であることを示す．実際，任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
P\left(\sup_{t \in [\sigma,\tau]} X_t \ge N \right) &\le \frac{1}{N} E X_\tau^+, \\
P\left(\inf_{t \in [\sigma,\tau]} X_t \le -N \right) &\le \frac{1}{N} \left\{ E X_\tau^+ - E X_\sigma \right\}
\end{aligned}$$

が成り立つから，

$$P\left(\sup_{t\in[\sigma,\tau]} X_t = \infty\right) = \lim_{N\to\infty} P\left(\sup_{t\in[\sigma,\tau]} X_t \geq N\right) = 0,$$
$$P\left(\inf_{t\in[\sigma,\tau]} X_t = -\infty\right) = \lim_{N\to\infty} P\left(\inf_{t\in[\sigma,\tau]} X_t \leq -N\right) = 0$$

となる．ここで

$$B^{(n)} := \left\{-\infty = \inf_{t\in[0,n]} X_t\right\} \cup \left\{\sup_{t\in[0,n]} X_t = +\infty\right\}, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

により P-零集合を定める．

第二段　P-a.s. にパスが各点で左極限を持つことを示す．いま，$n \geq 1$ として $\alpha < \beta$ に対し

$$A^{(n)}_{\alpha,\beta} := \{\, \omega \in \Omega \ ; \quad U_{[0,n]}(\alpha,\beta; X(\omega)) = \infty \,\}$$

とおくとき，

$$\left\{\omega \in \Omega \ ; \quad \lim_{s\uparrow t} \inf_{s<u<t} X_u(\omega) < \lim_{s\uparrow t} \sup_{s<u<t} X_u(\omega),\ \exists t \in (0, n]\right\} \subset \bigcup_{\substack{\alpha<\beta \\ \alpha,\beta\in\mathbb{Q}}} A^{(n)}_{\alpha,\beta} =: A^{(n)} \tag{1.6}$$

が成り立つ．実際或る $t \in (0, n]$ で

$$\lim_{s\uparrow t} \inf_{s<u<t} X_u(\omega) < \lim_{s\uparrow t} \sup_{s<u<t} X_u(\omega)$$

となる場合，

$$\lim_{s\uparrow t} \inf_{s<u<t} X_u(\omega) < \alpha < \beta < \lim_{s\uparrow t} \sup_{s<u<t} X_u(\omega)$$

を満たす $\alpha,\beta \in \mathbb{Q}$ を取れば，任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し或る点列 $0 < s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \cdots < s_N < t_N < t$ が存在して

$$X_{s_i}(\omega) < \alpha, \quad X_{t_i}(\omega) > \beta, \quad (i = 1, \cdots, N)$$

を満たす．従って $\{s_1, t_1, \cdots, s_N, t_N\}$ を含む有限集合 $F \subset [0, n]$ に対し

$$N \leq U_F(\alpha,\beta; X(\omega)) \leq U_{[0,n]}(\alpha,\beta; X(\omega))$$

が成り立ち，N の任意性より

$$U_{[0,n]}(\alpha,\beta; X(\omega)) = \infty$$

が従い (1.6) が出る．すなわち $\omega \notin \left(A^{(n)} \cup B^{(n)}\right)$ なら任意の $t \in (0, n]$ で $\lim_{s\uparrow t} X_s(\omega)$ が有限確定する．

$$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(A^{(n)} \cup B^{(n)}\right)$$

により零集合を定めれば $\omega \in \Omega \backslash A$ に対するパスは RCLL である．∎

Problem 3.11

Let $\{\mathscr{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a decreasing sequence of sub-σ-fields of $\mathscr{F}$ (i.e.,$\mathscr{F}_{n+1} \subset \mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}$, $\forall n \geq 1$), and let $\{\, X_n, \mathscr{F}_n \ ; \quad n \geq 1 \,\}$ be a backward submartingale; i.e., $E|X_n| < \infty$, X_n is $\mathscr{F}_n$-measurable, and $E(X_n \,|\, \mathscr{F}_{n+1}) \geq X_{n+1}$ a.s.P, for every $n \geq 1$. Then $l := \lim_{n\to\infty} E(X_n) > -\infty$ implies that the sequence $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ is uniformly integrable.

証明.　$(X_n)_{n=1}^{\infty}$ は，或る $(\mathscr{F}_n)$-後退マルチンゲール $(M_n)_{n=1}^{\infty}$ と単調増大列 $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ を用いて

$$X_n = M_n - A_n, \quad (\forall n \geq 1)$$

と分解できる．実際，

$$\begin{aligned} &A_0 \coloneqq 0, \\ &A_n \coloneqq \sum_{i=1}^{n-1} E\left(X_i - X_{i+1} \,|\, \mathscr{F}_{i+1}\right), \quad (n = 2, 3, \cdots) \end{aligned}$$

とおけば，$(X_n)_{n=1}^{\infty}$ の後退劣マルチンゲール性により

$$E \coloneqq \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\, \omega \ni \Omega \ ; \quad E\left(X_n - X_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_{n+1}\right)(\omega) < 0 \,\}$$

で定まる P-零集合 E に対し

$$0 \leq A_1(\omega) \leq A_2(\omega) \leq \cdots \quad (\forall \omega \in \Omega \backslash E)$$

が満たされ

$$A_\infty(\omega) \coloneqq \lim_{n \to \infty} A_n(\omega) 1\!\!1_{\Omega \backslash E}(\omega), \quad (\omega \in \Omega)$$

が ∞ まで含めて確定する．すなわち A_∞ は可測 $\mathscr{F}/\mathscr{B}([0,\infty])$ である．また $EX_1 \geq EX_2 \geq \cdots \geq l > -\infty$ の仮定より

$$\int_\Omega A_n \, dP = \sum_{i=1}^{n-1} \int_\Omega E\left(X_i - X_{i+1} \,|\, \mathscr{F}_{i+1}\right) \, dP = \int_\Omega X_1 - X_n \, dP \leq \int_\Omega X_1 \, dP - l, \quad (\forall n \geq 1)$$

となるから，単調収束定理より A_∞ の可積分性が出る．一方で

$$M_n \coloneqq X_n + A_n, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

により $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定めれば

$$\begin{aligned} E\left(M_n - M_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_{n+1}\right) &= E\left((X_n - X_{n+1}) + (A_n - A_{n+1}) \,|\, \mathscr{F}_{n+1}\right) \\ &= E\left((X_n - X_{n+1}) - E\left(X_n - X_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_{n+1}\right) \,|\, \mathscr{F}_{n+1}\right) = 0, \quad P\text{-a.s.}, \quad n = 1, 2, \cdots \end{aligned}$$

となるから

$$E\left(M_1 \,|\, \mathscr{F}_n\right) = M_n, \quad P\text{-a.s.}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

が従う．このとき，任意の $\lambda > 0$ に対して

$$\begin{aligned} \int_{|X_n| > \lambda} |X_n| \, dP &= \int_{|M_n - A_n| > \lambda} |M_n - A_n| \, dP \\ &\leq 2 \int_{|M_n| > \lambda/2} |M_n| \, dP + 2 \int_{|A_n| > \lambda/2} |A_n| \, dP \\ &\leq 2 \int_{|M_n| > \lambda/2} |M_n| \, dP + 2 \int_{A_\infty > \lambda/2} A_\infty \, dP, \quad (\forall n \geq 1) \end{aligned}$$

が満たされ[*3]，$(M_n = E(M_1 \mid \mathscr{F}_n))_{n=1}^{\infty}$ の一様可積分性 (補題) と A_∞ の可積分性より

$$\sup_{n\geq 1} \int_{|X_n|>\lambda} |X_n|\, dP \leq \sup_{n\geq 1} \int_{|M_n|>\lambda/2} |M_n|\, dP + 2\int_{A_\infty>\lambda/2} A_\infty\, dP \longrightarrow 0 \quad (\lambda \longrightarrow \infty)$$

が成立し $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ の一様可積分性が出る． ∎

Proposition 3.14 (i)

Let $X = \{ X_t, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \leq t < \infty \}$ be a submartingale. We have the following:

(i) There is an event $\Omega^* \in \mathscr{F}$ with $P(\Omega^*) = 1$, such that for every $\omega \in \Omega^*$:

$$\text{the limits } X_{t+}(\omega) := \lim_{\substack{s\downarrow t\\ s\in\mathbb{Q}}} X_s(\omega), \quad X_{t-}(\omega) := \lim_{\substack{s\uparrow t\\ s\in\mathbb{Q}}} X_s(\omega)$$

exist for all $t \geq 0$ (respectively, $t > 0$).

Proposition 3.14 (ii)

(ii) The limits in (i) satisfy

$$E(X_{t+} \mid \mathscr{F}_s) \geq X_s \quad \text{a.s.}P, \text{ for all } 0 \leq s \leq t.$$

証明． $0 \leq s \leq t$ とする．$t_n \downarrow t$ を満たす単調減少な有理点列 $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ を取れば，$(X_{t_n})_{n=1}^{\infty}$ は $(\mathscr{F}_{t_n})$-後退劣マルチンゲールであり，かつ

$$-\infty < EX_t \leq \cdots \leq EX_{t_2} \leq EX_{t_1}$$

が満たされているから $(X_{t_n})_{n=1}^{\infty}$ は一様可積分である (Problem 3.11)．いま，後退劣マルチンゲール性より

$$\int_A X_s\, dP \leq \int_A X_{t_n}\, dP, \quad (\forall A \in \mathscr{F}_s,\ n = 1, 2, \cdots)$$

が従い，また (i) より $X_{t_n} \longrightarrow X_{t+}$ P-a.s. が成り立つから，一様可積分性と平均収束の補題より

$$E|X_{t+}| < \infty, \quad E\left|X_{t_n} - X_{t+}\right| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \tag{1.7}$$

となり

$$\int_A X_s\, dP \leq \int_A X_{t+}\, dP, \quad (\forall A \in \mathscr{F}_s)$$

が得られる． ∎

[*3] 任意の $x, y \in \mathbb{R}$ と $\lambda > 0$ に対して次が成り立つ:

$$|x+y|\mathbb{1}_{|x+y|>\lambda} = |x+y|\mathbb{1}_{|x+y|>\lambda\wedge|x|\geq|y|} + |x+y|\mathbb{1}_{|x+y|>\lambda\wedge|x|<|y|} \leq (|x|+|y|)\mathbb{1}_{|x|+|y|>\lambda\wedge|x|\geq|y|} + (|x|+|y|)\mathbb{1}_{|x|+|y|>\lambda\wedge|x|<|y|} \leq 2|x|\mathbb{1}_{2|x|>\lambda} + 2|y|\mathbb{1}_{2|y|>\lambda}.$$

Proposition 3.14 (iii)

(iii) If $\mathscr{F}_0$ contains all the P-negligible events in $\mathscr{F}$, then $\{ X_{t+}, \mathscr{F}_{t+} \ ; \quad 0 \leq t < \infty \}$ is a submartingale with every path RCLL. [*4]

証明.

第一段　(1.7) より X_{t+} は可積分である．

第二段　$(X_{t+})_{t \geq 0}$ が $(\mathscr{F}_{t+})$-適合であることを示す．任意に $t < u$ を取るとき，$u_n \downarrow t$ を満たす単調減少な有理点列 $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ に対し或る $N \geq 1$ が存在して $t < u_n < u \ (\forall n > N)$ となるから $X_{u_n} 1\!\!1_{\Omega^*} \ (n > N)$ は $\mathscr{F}_u / \mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測性を持つ[*5]．

$$X_{t+} = \lim_{\substack{n \to \infty \\ n > N}} X_{u_n} 1\!\!1_{\Omega^*}$$

より X_{t+} の $\mathscr{F}_u / \mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測性が従い，$t < u$ の任意性より $\mathscr{F}_{t+} / \mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測性を得る．

第三段　任意の $0 \leq s < t$ に対し $E(X_{t+} \mid \mathscr{F}_{s+}) \geq X_{s+}$ P-a.s. が成り立つことを示す．実際，$s_n \downarrow s$ を満たす単調減少な有理点列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (s, t]$ を取れば，(ii) の結果より任意の $A \in \mathscr{F}_{s+} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{s_n}$ と $n \geq 1$ に対し

$$\int_A X_{t+} \, dP \geq \int_A X_{s_n} \, dP$$

が成立し，また $(X_{s_n})_{n=1}^{\infty}$ の一様可積分性より

$$E \left| X_{s_n} - X_{s+} \right| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

となり

$$\int_A X_{t+} \, dP \geq \int_A X_{s+} \, dP, \quad (\forall A \in \mathscr{F}_{s+})$$

が従う．

第四段　$\{ X_{t+} \ ; \quad 0 \leq t < \infty \}$ の右連続性を示す．任意の $t \geq 0,\ \omega \in \Omega^*,\ \epsilon > 0$ に対し，或る $\delta > 0$ が存在して

$$|X_{t+}(\omega) - X_r(\omega)| < \epsilon, \quad (r \in (t, t+\delta) \cap \mathbb{Q})$$

が成立する．このとき，任意の $s \in (t, t+\delta)$ に対し

$$|X_{s+}(\omega) - X_u(\omega)| < \epsilon$$

を満たす $u \in (s, t+\delta) \cap \mathbb{Q}$ が存在するから

$$|X_{t+}(\omega) - X_{s+}(\omega)| \leq |X_{t+}(\omega) - X_u(\omega)| + |X_u(\omega) - X_{s+}(\omega)| < 2\epsilon$$

が従い $[0, \infty) \ni t \longmapsto X_{t+}(\omega)$ の右連続性が得られる．

第五段　$\{ X_{t+} \ ; \quad 0 \leq t < \infty \}$ が各点で有限な左極限を持つことを示す．任意の $t > 0,\ \omega \in \Omega^*,\ \epsilon > 0$ に対し，或る $\delta > 0$ が存在して

$$|X_{t-}(\omega) - X_r(\omega)| < \epsilon, \quad (r \in (t-\delta, t) \cap \mathbb{Q})$$

[*4] $(X_{t+})_{t \geq 0}$ が $(\mathscr{F}_{t+})$-適合であることを保証するためには $(\mathscr{F}_t)_{t \geq 0}$ の完備性が要る．また P-almost ではなく全てのパスが RCLL となる．

[*5] フィルトレーションの完備性の仮定より $1\!\!1_{\Omega^*}$ は $\mathscr{F}_u / \mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測となる．

が成立する．このとき，任意の $s \in (t-\delta, t)$ に対し

$$|X_{s+}(\omega) - X_u(\omega)| < \epsilon$$

を満たす $u \in (s,t) \cap \mathbb{Q}$ が存在するから

$$|X_{t-}(\omega) - X_{s+}(\omega)| \leq |X_{t-}(\omega) - X_u(\omega)| + |X_u(\omega) - X_{s+}(\omega)| < 2\epsilon$$

が従い

$$\lim_{s \uparrow t} X_{s+}(\omega) = X_{t-}(\omega)$$

を得る． ∎

1.3.2 Convergence Results

Problem 3.16

Let $\{ X_t, \mathscr{F}_t \;;\quad 0 \leq t < \infty \}$ be a right-continuous, nonnegative supermatingale; then $X_\infty(\omega) = \lim_{t\to\infty} X_t(\omega)$ exists for P-a.e. $\omega \in \Omega$, and $\{ X_t, \mathscr{F}_t \;;\quad 0 \leq t \leq \infty \}$ is a supermartingale.

証明． $\{ -X_t, \mathscr{F}_t \;;\quad 0 \leq t < \infty \}$ は右連続な $(\mathscr{F}_t)$-劣マルチンゲールとなり

$$\sup_{t \geq 0} E(-X_t)^+ = 0$$

が満たされるから，劣マルチンゲール収束定理により或る P-零集合 A が存在して

$$Z_\infty := \lim_{t\to\infty} (-X_t) 1\!\!1_{\Omega \backslash A}$$

により $\mathscr{F}_\infty/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測な可積分関数 Z_∞ が定まる．すなわち

$$X_\infty := \lim_{t\to\infty} X_t 1\!\!1_{\Omega \backslash A}$$

により $\mathscr{F}_\infty/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測関数が定まり，かつ $X_\infty = -Z_\infty$ より X_∞ は可積分である．また Fatou の補題により任意の $t \geq 0$ 及び $A \in \mathscr{F}_t$ に対し

$$\int_A X_\infty \, dP \leq \liminf_{\substack{n\to\infty \\ n>t}} \int_A X_n \, dP \leq \int_A X_t \, dP$$

が成立するから $\{ X_t, \mathscr{F}_t \;;\quad 0 \leq t \leq \infty \}$ は優マルチンゲールである． ∎

Exercise 3.18

Suppose that the filtration $\{\mathscr{F}_t\}$ satisfies the usual conditions. Then every right-continuous, uniformly integrable supermartingale $\{ X_t, \mathscr{F}_t \;;\quad 0 \leq t < \infty \}$ admits the Riesz decomposition $X_t = M_t + Z_t$, a.s. P, as the sum of a right-continuous, uniformly integrable martingale $\{ M_t, \mathscr{F}_t \;;\quad 0 \leq t < \infty \}$ and a potential $\{ Z_t, \mathscr{F}_t \;;\quad 0 \leq t < \infty \}$.

条件を満たす二つの分解 $X_t = M_t + Z_t = M'_t + Z'_t$ a.s. $P, (\forall t \geq 0)$ が存在する場合，次の意味で分解は一意である:

$$P\left(M_t = M'_t,\ Z_t = Z'_t,\ \forall t \geq 0\right) = 1. \tag{1.8}$$

証明.

第一段　M を構成する．いま，$t \geq 0$ を固定する．$n > t$ を満たす $n \in \mathbb{N}$ と任意の $A \in \mathscr{F}_t$ に対し

$$\begin{aligned}\int_A E(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_t)\ dP &= \int_A X_{n+1}\ dP = \int_A E(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n)\ dP \\ &\leq \int_A X_n\ dP = \int_A E(X_n \mid \mathscr{F}_t)\ dP\end{aligned}$$

が成り立つから

$$E \coloneqq \bigcup_{n>t} \{\ \omega \in \Omega\ ;\quad E(X_n \mid \mathscr{F}_t)(\omega) < E(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_t)(\omega)\ \}$$

として P-零集合が定まる．また，同様に優マルチンゲール性より

$$F \coloneqq \bigcup_{n>t} \{\ \omega \in \Omega\ ;\quad E(X_n \mid \mathscr{F}_t)(\omega) > X_t(\omega)\ \}$$

も P-零集合である．このとき，単調減少性より

$$X_t^* \coloneqq \lim_{n\to\infty} E(X_n \mid \mathscr{F}_t)\, 1\!\!1_{\Omega\setminus(E\cup F)}$$

が $-\infty$ まで込めて確定し，X_t^* は $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}([-\infty,\infty])$-可測であり

$$X_t(\omega) \geq X_t^*(\omega), \quad (\forall \omega \in \Omega\setminus(E \cup F))$$

を満たす．単調収束定理と $\sup_{n\geq 1} E|X_n| < \infty$ (一様可積分性) より

$$E(X_t - X_t^*) = \int_{\Omega\setminus(E\cup F)} \lim_{n\to\infty} (X_t - E(X_n \mid \mathscr{F}_t))\ dP = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega\setminus(E\cup F)} X_t - E(X_n \mid \mathscr{F}_t)\ dP = EX_t - \lim_{n\to\infty} EX_n < \infty$$

が成立するから X_t^* は可積分性であり P-a.s. に $|X_t^*| < \infty$ となる．ここで

$$X_t^{**} \coloneqq X_t^*\, 1\!\!1_{|X_t^*|<\infty}$$

により $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測な可積分関数を定めれば，単調収束定理より

$$EX_t^{**} = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega E(X_n \mid \mathscr{F}_t)\ dP = \lim_{n\to\infty} EX_n \tag{1.9}$$

となる．任意の $t \geq 0$ に対し X_t^{**} を定めれば，任意の $0 \leq s < t$ 及び $A \in \mathscr{F}_s$ に対して

$$\int_A X_t^{**}\ dP = \lim_{n\to\infty} \int_A E(X_n \mid \mathscr{F}_t)\ dP = \lim_{n\to\infty} \int_A E(X_n \mid \mathscr{F}_s)\ dP = \int_A X_s^{**}\ dP \tag{1.10}$$

が成り立つから $\{\ X_t^{**}, \mathscr{F}_t\ ;\quad 0 \leq t < \infty\ \}$ はマルチンゲールである．マルチンゲール性より $[0,\infty) \ni t \longmapsto EX_t^{**}$ は定数であるから Theorem 3.13 により右連続な修正 $\{\ M_t, \mathscr{F}_t\ ;\quad 0 \leq t < \infty\ \}$ が存在する．

第二段　まず $\lim_{t\to\infty} EX_t$ が存在することを示す．任意の単調増大列 $(t_k)_{k=1}^\infty$, $t_k \uparrow \infty$ に対し優マルチンゲール性より

$$\lim_{k\to\infty} EX_{t_k} = \inf_{k\geq 1} EX_{t_k}$$

が確定し，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $n < t_k$ を満たす k が存在するから

$$\inf_{n\geq 1} EX_n \geq \inf_{k\geq 1} EX_{t_k}$$

が従う．逆に任意の t_k に対し $t_k < n$ を満たす n が存在するから

$$\lim_{n\to\infty} EX_n = \inf_{n\geq 1} EX_n = \inf_{k\geq 1} EX_{t_k} = \lim_{k\to\infty} EX_{t_k}$$

が成立し，$(t_k)_{k=1}^{\infty}$ の任意性から $\lim_{t\to\infty} EX_t$ が存在して

$$\lim_{t\to\infty} EX_t = \lim_{n\to\infty} EX_n \tag{1.11}$$

となる．右連続な優マルチンゲール $\{ Z_t, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \leq t < \infty \}$ を

$$Z_t := X_t - M_t, \quad (\forall t \geq 0)$$

により定めれば，(1.9) より任意の $t \geq 0$ に対し

$$E(X_t - M_t) = EX_t - EM_t = EX_t - \lim_{n\to\infty} EX_n$$

が成り立ち，(1.11) より

$$\lim_{t\to\infty} E(X_t - M_t) = \lim_{t\to\infty} EX_t - \lim_{n\to\infty} EX_n = 0$$

が満たされるから $\{ Z_t, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \leq t < \infty \}$ はポテンシャルである．

第三段　分解の一意性を示す．任意の $t \geq 0$ 及び $A \in \mathscr{F}_t$ に対し，(1.10) と M' のマルチンゲール性より

$$\int_A M_t \, dP = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n>t}} \int_A X_n \, dP = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n>t}} \left\{ \int_A M'_n - Z'_n \, dP \right\} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n>t}} \left\{ \int_A M'_t \, dP - \int_A Z'_n \, dP \right\}$$

が成立する．またポテンシャルは非負であるから

$$0 \leq \int_A Z'_n \, dP \leq \int_\Omega Z'_n \, dP \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成り立ち，$M_t = M'_t$ P-a.s. 及び $Z_t = Z'_t$ P-a.s. が従う．パスの右連続性より (1.8) が出る． ∎

Problem 3.19

Assume that $\mathscr{F}_\infty$ contains all the P-negligible events in $\mathscr{F}$ [*6]. Then the following three conditions are equivalent for a nonnegative, right-continuous submartingale $\{ X_t, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \leq t < \infty \}$:

(a) it is a uniformly integrable family of random variables;

(b) is converges in L^1, as $t \to \infty$;

(c) it converges P a.s. (as $t \to \infty$) to an integrable random variable X_∞, such that $\{ X_t, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \leq t \leq \infty \}$ is a submartingale.

Observe that the implications (a) ⇒ (b) ⇒ (c) hold without the assumption of nonnegativity.

証明.

[*6] 証明の第二段で出てくる E が $\mathscr{F}_\infty$ に属していなければならない．

第一段　(a) ⇒ (b) を示す．実際，一様可積分性の同値条件の補題より

$$\sup_{t\geq 0} EX_t^+ \leq \sup_{t\geq 0} E|X_t| < \infty$$

となるから，劣マルチンゲール収束定理より或る $\mathscr{F}_\infty/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測な可積分関数 X_∞ が存在して

$$\lim_{t\to\infty} X_t = X_\infty \quad P\text{-a.s.}$$

が満たされる．一様可積分性と平均収束の補題より，$t_n \uparrow \infty$ となる任意の単調増大列 $(t_n)_{n=1}^\infty$ に対して

$$E|X_{t_n} - X_\infty| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成立するから

$$E|X_t - X_\infty| \longrightarrow 0 \quad (t \longrightarrow \infty)$$

が従う．

第二段　(b) ⇒ (c) を示す．(b) の下で，或る可積分関数 X_* が存在して

$$E|X_n - X_*| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が満たされるから，或る部分列 $(X_{n_k})_{k=1}^\infty$ と P-零集合 E が存在して

$$\lim_{k\to\infty} X_{n_k}(\omega) = X_*(\omega), \quad (\forall \omega \in \Omega\backslash E)$$

となる．$X_{n_k} 1\!\!1_{\Omega\backslash E}$ は全て $\mathscr{F}_\infty/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測であるから，

$$X_\infty \coloneqq \lim_{k\to\infty} X_{n_k} 1\!\!1_{\Omega\backslash E}$$

とおけば X_∞ は $\mathscr{F}_\infty/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測，かつ $X_\infty = X^*$ P-a.s. より可積分であり

$$E|X_n - X_\infty| = E|X_n - X_*| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \tag{1.12}$$

を満たす．任意の $t \geq 0$ 及び $A \in \mathscr{F}_t$ に対し

$$\int_A X_t \, dP \leq \int_A X_n \, dP, \quad (\forall n > t) \tag{1.13}$$

が成り立つから，(1.12) より

$$\int_A X_t \, dP \leq \int_A X_\infty \, dP \tag{1.14}$$

が出る．

第三段　$X_t \geq 0$ $(\forall t \geq 0)$ を仮定して (c) ⇒ (a) を示す．実際，劣マルチンゲール性より

$$\int_{|X_t|>\lambda} |x_t| \, dP = \int_{X_t>\lambda} X_t \, dP \leq \int_{X_t>\lambda} X_\infty \, dP$$

かつ

$$P(X_t > \lambda) \leq \frac{1}{\lambda} EX_t \leq \frac{1}{\lambda} EX_\infty$$

が成り立ち，X_∞ の可積分性より

$$\sup_{t\geq 0} \int_{|X_t|>\lambda} |x_t| \, dP \longrightarrow 0 \quad (\lambda \longrightarrow \infty)$$

となる． ∎

Problem 3.20

Assume that $\mathscr{F}_\infty$ contains all the P-negligible events in $\mathscr{F}$. Then the following four conditions are equivalent for a right-continuous martingale $\{ X_t, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \le t < \infty \}$:

(a),(b) as in Problem 3.19;

(c) it converges P a.s. (as $t \to \infty$) to an integrable random variable X_∞, such that $\{ X_t, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \le t \le \infty \}$ is a martingale;

(d) there exists an integrable random variable Y, such that $X_t = E(Y \,|\, \mathscr{F}_t)$ a.s. P, for every $t \ge 0$.

Besides, if (d) holds and X_∞ is the random variable in (c), then

$$E(Y \,|\, \mathscr{F}_\infty) = X_\infty \quad \text{a.s. } P. \tag{1.15}$$

証明.

第一段　マルチンゲールは劣マルチンゲールであるから，Problem 3.19 より (a) ⇒ (b) が従う．また今の仮定の下では (1.13) と (1.14) の不等号が等号に代わり (b) ⇒ (c) となる．$Y := X_\infty$ として (c) ⇒ (d) が得られ，一様可積分性と条件付き期待値に関する補題 (P. **??**) より (d) ⇒ (a) が出る．

第二段　(1.15) を示す．いま，任意の $t \ge 0$ 及び $A \in \mathscr{F}_t$ に対し

$$\int_A Y \, dP = \int_A X_t \, dP = \int_A X_\infty \, dP$$

が成立するから

$$\int_A Y \, dP = \int_A X_\infty \, dP, \quad (\forall A \in \bigcup_{t \ge 0} \mathscr{F}_t)$$

が従う．Y と X_∞ の可積分性より

$$\mathscr{D} := \left\{ A \in \mathscr{F}_\infty \ ; \quad \int_A Y \, dP = \int_A X_\infty \, dP \right\}$$

は Dynkin 族をなし乗法族 $\bigcup_{t \ge 0} \mathscr{F}_t$ を含むから，Dynkin 族定理より

$$\int_A Y \, dP = \int_A X_\infty \, dP, \quad (\forall A \in \mathscr{F}_\infty)$$

が成立する． ∎

1.3.3　The Optional Sampling Theorem

Lemma: 離散時間の任意抽出定理

$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty$ とし，$\{ X_{t_i}, \mathscr{F}_{t_i} ;\quad i = 0, \cdots, n \}$ を劣マルチンゲール，$S, T : \Omega \longrightarrow \{t_0, t_1, \cdots, t_n, \infty\}$ を $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻[*7]，Y を $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測関数として

$$X_T(\omega) \coloneqq Y(\omega),\ (\forall \omega \in \{T = \infty\}), \quad X_S(\omega) \coloneqq Y(\omega),\ (\forall \omega \in \{S = \infty\})$$

とおく．このとき，

(a)　$S, T < \infty$, a.s. P.

(b)　Y が可積分かつ $E\left(Y \,\middle|\, \mathscr{F}_{t_i}\right) \geq X_{t_i}$ a.s. P, $(i = 0, \cdots, n)$.

のいずれかのが満たされていれば次が成り立つ:

$$E\left(X_T \mid \mathscr{F}_S\right) \geq X_{S \wedge T} \quad \text{a.s. } P. \tag{1.16}$$

証明.

第一段　X_S が $\mathscr{F}_S/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測であることを示す．任意の $t \geq 0$ に対して

$$\{X_S \in B\} \cap \{S \leq t\} = \{X_{S \wedge t} \in B\} \cap \{S \leq t\}, \quad (\forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}))$$

となるから $X_{S \wedge t}$ の $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測性を言えばよい．$t_m \leq t < t_{m+1}$ の場合 ($m = n$ なら $t_{m+1} = \infty$),

$$X_{S \wedge t} = \sum_{t_i \leq t} X_{t_i} 1\!\!1_{\{S = t_i\}} = \sum_{i=0}^{m} X_{t_i} 1\!\!1_{\{S = t_i\}}$$

と分解できる．連続写像 $\varphi : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \longmapsto xy$ と $\psi : \mathbb{R}^{m+1} \ni (x_0, x_1, \cdots, x_m) \longmapsto x_0 + x_1 + \cdots + x_m$ を用いれば,

$$\{X_{t_i} 1\!\!1_{\{S = t_i\}} \in B\} = \left\{\left(X_{t_i}, 1\!\!1_{\{S = t_i\}}\right) \in \varphi^{-1}(B)\right\}, \quad (\forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}))$$

かつ

$$\{X_{S \wedge t} \in B\} = \left\{\left(X_{t_0} 1\!\!1_{\{S = t_0\}}, \cdots, X_{t_m} 1\!\!1_{\{S = t_m\}}\right) \in \psi^{-1}(B)\right\}, \quad (\forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}))$$

が成り立つ．いま，$\mathbb{R}$ の第二可算性より $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2) = \mathscr{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R})$ が満たされ，かつ任意の $E, F \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$\{(X_{t_i}, 1\!\!1_{\{S = t_i\}}) \in E \times F\} = X_{t_i}^{-1}(E) \cap \{1\!\!1_{\{S = t_i\}} \in F\} \in \mathscr{F}_t, \quad (\forall t_i \leq t)$$

となるから $X_{t_i} 1\!\!1_{\{S = t_i\}}$ の $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測性が従う．同様に $\mathscr{B}(\mathbb{R}^{m+1}) = \mathscr{B}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R})$ と

$$\{(X_{t_0} 1\!\!1_{\{S = t_0\}}, \cdots, X_{t_m} 1\!\!1_{\{S = t_m\}}) \in E_0 \times \cdots \times E_m\} = \bigcap_{i=0}^{m} \{X_{t_i} 1\!\!1_{\{S = t_i\}} \in E_i\} \in \mathscr{F}_t, \quad (\forall E_i \in \mathscr{B}(\mathbb{R}),\ i = 0, \cdots, m)$$

より $X_{S \wedge t}$ は $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測である．これより X_T の $\mathscr{F}_T/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測性及び $X_{S \wedge T}$ の $\mathscr{F}_{S \wedge T}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測性も出る．

[*7] $\left\{\mathscr{F}_{t_i}\right\}_{i=0}^{n}$ は $\{\mathscr{F}_t\}_{t \geq 0}$ の部分集合と考える．

第二段　$S \leq T$ と仮定して (1.16) を示す．先ず

$$\int_\Omega |X_S|\,dP = \sum_{i=0}^n \int_{\{S=t_i\}} |X_{t_i}|\,dP + \int_{\{S=\infty\}} |Y|\,dP$$

より (a),(b) いずれの場合も X_S, X_T は可積分である．また，劣マルチンゲール性より任意の $A \in \mathscr{F}_S$ に対して

$$\begin{aligned}
\int_{A\cap\{S=t_i\}} X_{t_i}\,dP &= \int_{A\cap\{S=t_i\}\cap\{T=t_i\}} X_{t_i}\,dP + \int_{A\cap\{S=t_i\}\cap\{T>t_i\}} X_{t_i}\,dP \\
&\leq \int_{A\cap\{S=t_i\}\cap\{T=t_i\}} X_T\,dP + \int_{A\cap\{S=t_i\}\cap\{T>t_i\}} X_{t_{i+1}}\,dP \\
&= \int_{A\cap\{S=t_i\}\cap\{T=t_i\}} X_T\,dP + \int_{A\cap\{S=t_i\}\cap\{T=t_{i+1}\}} X_T\,dP + \int_{A\cap\{S=t_i\}\cap\{T>t_{i+1}\}} X_{t_{i+1}}\,dP \\
&\cdots \\
&\leq \sum_{j=i}^n \int_{A\cap\{S=t_i\}\cap\{T=t_j\}} X_T\,dP + \int_{A\cap\{S=t_i\}\cap\{T>t_n\}} X_{t_n}\,dP
\end{aligned}$$

及び

$$\int_{A\cap\{S=\infty\}} X_S\,dP = \int_{A\cap\{S=\infty\}} Y\,dP = \int_{A\cap\{S=\infty\}} X_T\,dP$$

が成り立つから，(a) の場合は

$$\int_{A\cap\{S=t_i\}} X_{t_i}\,dP \leq \sum_{j=i}^n \int_{A\cap\{S=t_i\}\cap\{T=t_j\}} X_T\,dP = \int_{A\cap\{S=t_i\}} X_T\,dP,$$

(b) の場合は

$$\begin{aligned}
\int_{A\cap\{S=t_i\}} X_{t_i}\,dP &\leq \sum_{j=i}^n \int_{A\cap\{S=t_i\}\cap\{T=t_j\}} X_T\,dP + \int_{A\cap\{S=t_i\}\cap\{T>t_n\}} X_{t_n}\,dP \\
&\leq \sum_{j=i}^n \int_{A\cap\{S=t_i\}\cap\{T=t_j\}} X_T\,dP + \int_{A\cap\{S=t_i\}\cap\{T>t_n\}} Y\,dP \\
&= \sum_{j=i}^n \int_{A\cap\{S=t_i\}\cap\{T=t_j\}} X_T\,dP + \int_{A\cap\{S=t_i\}\cap\{T=\infty\}} Y\,dP \\
&= \int_{A\cap\{S=t_i\}} X_T\,dP
\end{aligned}$$

となり，いずれの場合も

$$\int_A X_S\,dP = \sum_{i=0}^n \int_{A\cap\{S=t_i\}} X_{t_i}\,dP + \int_{A\cap\{S=\infty\}} X_S\,dP \leq \sum_{i=0}^n \int_{A\cap\{S=t_i\}} X_T\,dP + \int_{A\cap\{S=\infty\}} X_T\,dP = \int_A X_T\,dP$$

が成立する．X_S の $\mathscr{F}_S/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測性より (1.16) を得る．

第三段　一般の S, T に対して (1.16) を示す．任意の $A \in \mathscr{F}_S$ に対し，Problem 2.17 (P. 11) と前段の結果より

$$\begin{aligned}
\int_A E(X_T \mid \mathscr{F}_S)\,dP &= \int_{A\cap\{S\leq T\}} E(X_T \mid \mathscr{F}_S)\,dP + \int_{A\cap\{S>T\}} E(X_T \mid \mathscr{F}_S)\,dP \\
&= \int_{A\cap\{S\leq T\}} E(X_T \mid \mathscr{F}_{S\wedge T})\,dP + \int_{A\cap\{S>T\}} X_T\,dP \\
&\geq \int_{A\cap\{S\leq T\}} X_{S\wedge T}\,dP + \int_{A\cap\{S>T\}} X_{S\wedge T}\,dP \\
&= \int_A X_{S\wedge T}\,dP
\end{aligned}$$

となり，$X_{S\wedge T}$ の $\mathscr{F}_{S\wedge T}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測性より (1.16) が出る． ∎

Theorem 3.22 修正

Let $\{ X_t, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \leq t < \infty \}$ be a right-continuous submartingale, S, T be two optional times of the filtration $\{\mathscr{F}_t\}$, and Y be a $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-measurable function, and set

$$X_U(\omega) := Y(\omega) \quad (\forall \omega \in \{U = \infty\}).$$

for any random time U. Then, under either of the following two conditions;

(a) There exists an $N \in \mathbb{N}$ such that $S, T < N$ a.s. P,

(b) Y is integrable and $X_t \leq E(Y \mid \mathscr{F}_t)$ a.s. P, for every $t \geq 0$,

we have

$$E(X_T \mid \mathscr{F}_{S+}) \geq X_{S\wedge T} \quad \text{a.s. } P.$$

If S is a stopping time, then $\mathscr{F}_S$ can replace $\mathscr{F}_{S+}$ above. In particular, $EX_T \geq EX_0$, and for a martingale with a last element we have $EX_T = EX_0$.

この修正により Problem 3.23 と Problem 3.24 の主張が従う．

証明.

第一段　X_S の $\mathscr{F}_{S+}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測性を示す．Corollary 2.4 より S は $(\mathscr{F}_{t+})$-停止時刻であり，$\{ X_t, \mathscr{F}_{t+} \ ; \quad 0 \leq t < \infty \}$ は発展的可測である．従って Proposition 2.18 (P. 12) より任意の $t \geq 0$ に対し $X_{S\wedge t}$ は $\mathscr{F}_{t+}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測であり，

$$\{X_S \in B\} \cap \{S \leq t\} = \{X_{S\wedge t} \in B\} \cap \{S \leq t\} \in \mathscr{F}_{t+}, \quad (\forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}))$$

より X_S の $\mathscr{F}_{S+}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測性が出る．$S$ が $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻のときは，$X_{S\wedge t}$ は $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測性を持ち

$$\{X_S \in B\} \cap \{S \leq t\} = \{X_{S\wedge t} \in B\} \cap \{S \leq t\} \in \mathscr{F}_t, \quad (\forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}))$$

が従うから X_S は $\mathscr{F}_S/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測である．

第二段　任意の $n \geq N$ に対し

$$S_n(\omega) := \begin{cases} \infty & \text{if } S(\omega) \geq n, \\ \dfrac{k}{2^n} & \text{if } \dfrac{k-1}{2^n} \leq S(\omega) < \dfrac{k}{2^n} \text{ for } k = 1, \cdots, n2^n, \end{cases}$$

により停止時刻 S_n が定まる (Problem 2.24 修正版， P. 14)．同様に $(T_n)_{n\geq N}$ も構成すれば，補題より

$$\int_A X_{T_n}\, dP \geq \int_A X_{S_n \wedge T_n}\, dP, \quad (\forall A \in \mathscr{F}_{S_n},\ \forall n \geq N)$$

が成立する．また $S(\omega) < \infty$ なら $S_n(\omega) \downarrow S(\omega)$，かつ $S(\omega) = \infty$ なら $S_n(\omega) = \infty$ であるから

$$S = \inf_{n\geq N} S_n$$

が満たされ，Problem 2.23 より

$$\mathscr{F}_{S+} = \bigcap_{n\geq N} \mathscr{F}_{S_n}$$

となり

$$\int_A X_{T_n}\,dP \geq \int_A X_{S_n\wedge T_n}\,dP, \quad (\forall A \in \mathscr{F}_{S+},\ \forall n \geq N) \tag{1.17}$$

が成立する．S が停止時刻の場合は $\mathscr{F}_S \subset \mathscr{F}_{S+}$ であるから，(1.17) を $\mathscr{F}_S$ に置き換えて成立する．

第三段　$(S_n)_{n\geq N}, (T_n)_{n\geq N}$ は単調減少列であるから $(\mathscr{F}_{T_n})_{n\geq N}$ と $(\mathscr{F}_{S_n\wedge T_n})_{n\geq N}$ も単調減少列であり，$\{ X_{T_n}, \mathscr{F}_{T_n} \ ; \quad n \geq N \}$ 及び $\{ X_{S_n\wedge T_n}, \mathscr{F}_{S_n\wedge T_n} \ ; \quad n \geq N \}$ は後退劣マルチンゲールとなる．かつ

$$\lim_{n\to\infty} EX_{T_n} \geq EX_0, \quad \lim_{n\to\infty} EX_{S_n\wedge T_n} \geq EX_0$$

が満たされているから，Problem 3.11 より $(X_{T_n})_{n\geq N}, (X_{S_n\wedge T_n})_{n\geq N}$ は一様可積分である．また $\{X_t\}$ の右連続性より

$$X_{T_n}(\omega) \longrightarrow X_T(\omega), \quad X_{S_n\wedge T_n}(\omega) \longrightarrow X_{S\wedge T}(\omega), \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

が成り立つから，一様可積分性と平均収束の補題 (P. **??**) より $X_T, X_{S\wedge T}$ の可積分性及び

$$E\left|X_T - X_{T_n}\right| \longrightarrow 0, \quad E\left|X_{S\wedge T} - X_{S_n\wedge T_n}\right| \longrightarrow 0, \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が従い

$$\int_A X_T\,dP \geq \int_A X_{S\wedge T}\,dP, \quad (\forall A \in \mathscr{F}_{S+})$$

が得られる．S が停止時刻の場合は $\mathscr{F}_{S+}$ を $\mathscr{F}_S$ に置き換えて成立する．　■

Problem 3.25

A submartingale of constant expectation, i.e., with $E(X_t) = E(X_0)$ for every $t \geq 0$, is a martingale.

証明．　任意の $0 \leq s < t$ に対し，

$$E\left(X_t \,|\, \mathscr{F}_s\right) - X_s \geq 0, \quad \text{a.s. } P$$

かつ

$$E\left(E\left(X_t \,|\, \mathscr{F}_s\right) - X_s\right) = EX_t - EX_s = EX_0 - EX_0 = 0$$

より

$$E\left(X_t \,|\, \mathscr{F}_s\right) - X_s = 0, \quad \text{a.s. } P$$

が従う．　■

Problem 3.26

A right-continuous process $\{ X_t, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \leq t < \infty \}$ with $E|X_t| < \infty;\ 0 \leq t < \infty$ is a submartingale if and only if for every pair $S \leq T$ of bounded stopping times of the filtration $\{\mathscr{F}_t\}$ we have

$$E(X_T) \geq E(X_S). \tag{1.18}$$

証明. (⇒) は任意抽出定理より従う．(⇐) を示す．任意の $0 \leq s < t$ 及び $A \in \mathscr{F}_s$ に対し，

$$T(\omega) := t, \quad S(\omega) := \begin{cases} s, & (\omega \in A), \\ t, & (\omega \in \Omega \backslash A) \end{cases}, \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

により $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻 $S \leq T$ を定めれば，(1.18) より

$$\int_A X_t \, dP = \int_\Omega X_T \, dP - \int_{\Omega \backslash A} X_t \, dP \geq \int_\Omega X_S \, dP - \int_{\Omega \backslash A} X_t \, dP = \int_A X_s \, dP$$

が成り立ち，$A \in \mathscr{F}_s$ の任意性より $E(X_t \,|\, \mathscr{F}_s) \geq X_s$ a.s. P となる． ∎

Problem 3.27

Let T be a bounded stopping time of the filtration $\{\mathscr{F}_t\}$, which satisfies the usual conditions, and define $\tilde{\mathscr{F}}_t = \mathscr{F}_{T+t}$; $t \geq 0$. Then $\{\tilde{\mathscr{F}}_t\}$ also satisfies the usual conditions.

(i) If $X = \{ X_t, \mathscr{F}_t \;;\; 0 \leq t < \infty \}$ is a right-continuous submartingale, then so is $\tilde{X} = \left\{ \tilde{X}_t := X_{T+t} - X_T, \tilde{\mathscr{F}}_t \;;\; 0 \leq t < \infty \right\}$.

(ii) $\tilde{X} = \left\{ \tilde{X}_t, \tilde{\mathscr{F}}_t \;;\; 0 \leq t < \infty \right\}$ is a right-continuous submartingale, with $\tilde{X}_0 = 0$[*8], then $X = \left\{ X_t := \tilde{X}_{(t-T)\vee 0}, \mathscr{F}_t \;;\; 0 \leq t < \infty \right\}$ is also a submartingale.

証明.

第一段 $\{\tilde{\mathscr{F}}_t\}$ が通常の条件 (usual conditions) を満たすことを示す．実際，

$$\{ N \in \mathscr{F} \;;\; P(N) = 0 \} \subset \mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}_{T+t}, \quad (\forall t \geq 0)$$

より $\{\tilde{\mathscr{F}}_t\}$ は完備であり，また任意の $t \geq 0$ に対して $T + t = \inf_{n \geq 1}(T + t + 1/n)$ より

$$\tilde{\mathscr{F}}_{t+} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{\mathscr{F}}_{t+\frac{1}{n}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{T+t+\frac{1}{n}} = \mathscr{F}_{(T+t)+}$$

となるが (Problem 2.23)，$\{\mathscr{F}_t\}$ の右連続性より

$$A \cap \{T + t \leq s\} \in \mathscr{F}_{s+}, \ \forall s \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad A \cap \{T + t \leq s\} \in \mathscr{F}_s, \ \forall s \geq 0$$

が成立するから $\mathscr{F}_{(T+t)+} = \mathscr{F}_{T+t}$ が満たされ

$$\tilde{\mathscr{F}}_{t+} = \mathscr{F}_{T+t} = \tilde{\mathscr{F}}_t$$

を得る．

(i) の証明 X の右連続性より $\tilde{X}$ は右連続である．また任意抽出定理より X_{T+t} は $\mathscr{F}_{T+t}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測かつ可積分であり

$$E\left(\tilde{X}_t \,\middle|\, \tilde{\mathscr{F}}_s\right) = E(X_{T+t} - X_T \,|\, \mathscr{F}_{T+s}) \geq X_{T+s} - X_T = \tilde{X}_s, \quad \text{a.s. } P, \ (0 \leq s < t)$$

が成立するから，$\tilde{X}$ は右連続劣マルチンゲールである．

[*8] $\tilde{X}_0 = 0$ a.s. P だと $X_t = \tilde{X}_{(t-T)\vee 0}$ が $(\mathscr{F}_t)$-適合となるかわからない．

(ii) の証明　$S_1 \leq S_2$ を有界な $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻とするとき，$(S_j - T) \vee 0 \ (j = 1, 2)$ は $(\tilde{\mathscr{F}}_t)$-停止時刻である．実際，

$$\{(S_j - T) \vee 0 \leq t\} \cap \{T + t \leq u\} = \{S_j \wedge u \leq (T + t) \wedge u\} \cap \{T + t \leq u\} \in \mathscr{F}_u, \quad (\forall u \geq 0)$$

より $\{(S_j - T) \vee 0 \leq t\} \in \mathscr{F}_{T+t} = \tilde{\mathscr{F}}_t \ (\forall t \geq 0)$ が成立する．$[0, \infty) \ni t \longmapsto \tilde{X}_{(t-T)\vee 0}(\omega)$ は右連続であり，また $\tilde{X}_{t-T}$ が $\tilde{\mathscr{F}}_{t-T} = \mathscr{F}_t$-可測かつ可積分であるから

$$X_t = \tilde{X}_{(t-T)\vee 0} = \tilde{X}_{t-T} 1\!\!1_{\{T \leq t\}}$$

は $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測かつ可積分である．従って X は右連続可積分適合過程であり，Problem 3.26 より

$$EX_{S_1} = E\tilde{X}_{(S_1-T)\vee 0} \leq E\tilde{X}_{(S_2-T)\vee 0} = EX_{S_2}$$

が成り立つから，同じく Problem 3.26 より X の劣マルチンゲール性が出る． ■

Problem 3.28

Let $Z = \{ Z_t, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \leq t < \infty \}$ be a continuous, nonnegative martingale with $Z_\infty := \lim_{t\to\infty} Z_t = 0$, a.s. P. Then for every $s \geq 0$, $b > 0$:

(i) $\quad P\left[\sup_{t>s} Z_t \geq b \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right] = \dfrac{1}{b} Z_s, \quad$ a.s. on $\{Z_s < b\}$.

(ii) $\quad P\left[\sup_{t\geq s} Z_t \geq b\right] = P[Z_s \geq b] + \dfrac{1}{b} E[Z_s 1\!\!1_{\{Z_s < b\}}]$.

証明.

第一段　$\inf\{ t \in [s, \infty) \ ; \quad Z_t(\omega) = b \} = \inf\{ t \in [0, \infty) \ ; \quad Z_{t+s}(\omega) = b \} + s$ と Problem 2.7 より

$$T(\omega) := \inf\{ t \in [s, \infty) \ ; \quad Z_t(\omega) = b \}, \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

により $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻が定まる．このとき

$$Z_T(\omega) = b, \quad (\forall \omega \in \{T < \infty\} \cap \{Z_s < b\}) \tag{1.19}$$

と

$$T(\omega) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sup_{t>s} Z_t(\omega) \geq b, \quad (\text{a.s.}\omega \in \{Z_s < b\}) \tag{1.20}$$

が成立する．実際，$\omega \in \{T < \infty\} \cap \{Z_s < b\}$ に対し，$Z_T(\omega) < b$ なら

$$\sup_{s \leq t \leq T(\omega)} Z_t(\omega) < b$$

となり，$t \longmapsto Z_t(\omega)$ の連続性より $T(\omega) < T(\omega)$ が従い矛盾が生じる．逆に $Z_T(\omega) > b$ なら中間値の定理より

$$Z_t(\omega) = b, \quad s < \exists t < T(\omega)$$

となるから，$T(\omega) \leq t < T(\omega)$ という矛盾が生じ，(1.19) が出る．これにより，$\omega \in \{Z_s < b\}$ に対し

$$T(\omega) < \infty \quad \Rightarrow \quad b = Z_T(\omega) \leq \sup_{t>s} Z_t(\omega)$$

が成立する．一方で a.s.$\omega \in \{Z_s < b\}$ で $Z_t(\omega) \longrightarrow 0$ となるから，$0 < \epsilon < b$ に対し或る t_0 が存在して

$$Z_t(\omega) < \epsilon, \quad (\forall t > t_0)$$

が満たされる．この場合

$$\sup_{t>s} Z_t(\omega) \geq b \quad \Rightarrow \quad \sup_{t \in [s,t_0]} Z_t(\omega) \geq b$$

となるから，連続性より $Z_t(\omega) = b$ を満たす $t \in (s, t_0)$ が存在し，$T(\omega) \leq t$ が従い (1.20) が得られる．

第二段　(i) を示す．任意の $A \in \mathscr{F}_s$ と $n > s$ に対し，任意抽出定理と (1.19) より

$$\begin{aligned}
\int_{A \cap \{Z_s < b\}} Z_s \, dP &= \int_{A \cap \{Z_s < b\}} Z_{T \wedge n} \, dP \\
&= \int_{A \cap \{Z_s < b\}} Z_T \, 1\!\!1_{\{T \leq n\}} \, dP + \int_{A \cap \{Z_s < b\}} Z_n \, 1\!\!1_{\{T > n\}} \, dP \\
&= bP\left[A \cap \{Z_s < b\} \cap \{T \leq n\}\right] + \int_{A \cap \{Z_s < b\}} Z_n \, 1\!\!1_{\{T > n\}} \, dP
\end{aligned}$$

が成立する．ここで

$$P\left[A \cap \{Z_s < b\} \cap \{T \leq n\}\right] \longrightarrow P\left[A \cap \{Z_s < b\} \cap \{T < \infty\}\right], \quad (n \longrightarrow \infty)$$

かつ $Z_n \, 1\!\!1_{\{T>n\} \cap \{Z_s < b\}} < b, \ (\forall n > s)$ 及び

$$Z_n \, 1\!\!1_{\{T > n\}} \longrightarrow Z_\infty \, 1\!\!1_{\{T = \infty\}}, \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成り立つから，$Z_\infty = 0$ a.s. P と Lebesgue の収束定理より

$$\int_{A \cap \{Z_s < b\}} Z_s \, dP = bP\left[A \cap \{Z_s < b\} \cap \{T < \infty\}\right] = b \int_{A \cap \{Z_s < b\}} 1\!\!1_{\{T < \infty\}} \, dP$$

が得られる．更に (1.20) より

$$\int_{A \cap \{Z_s < b\}} Z_s \, dP = b \int_{A \cap \{Z_s < b\}} 1\!\!1_{\{\sup_{t>s} Z_t(\omega) \geq b\}} \, dP = b \int_{A \cap \{Z_s < b\}} P\left[\sup_{t>s} Z_t \geq b \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right] dP$$

となるから，$A \in \mathscr{F}_s$ の任意性より

$$P\left[\sup_{t>s} Z_t \geq b \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right] 1\!\!1_{\{Z_s < b\}} = \frac{1}{b} Z_s \, 1\!\!1_{\{Z_s < b\}}, \quad \text{a.s. } P$$

が出る．

第三段　(iii) を示す．$t \longmapsto Z_t(\omega)$ の連続性より

$$\sup_{t>s} Z_t(\omega) \geq b \quad \Leftrightarrow \quad \sup_{t \geq s} Z_t(\omega) \geq b, \quad (\forall \omega \in \{Z_s < b\})$$

となるから

$$\begin{aligned}
P\left[\sup_{t \geq s} Z_t \geq b\right] &= P\left[\left\{\sup_{t \geq s} Z_t \geq b\right\} \cap \{Z_s \geq b\}\right] + P\left[\left\{\sup_{t \geq s} Z_t \geq b\right\} \cap \{Z_s < b\}\right] \\
&= P\left[Z_s \geq b\right] + P\left[\left\{\sup_{t > s} Z_t \geq b\right\} \cap \{Z_s < b\}\right] \\
&= P[Z_s \geq b] + \frac{1}{b} E[Z_s \, 1\!\!1_{\{Z_s < b\}}]
\end{aligned}$$

が成立する．　■

Problem 3.29 修正

Let $\{ X_t, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \leq t < \infty \}$ be a continuous, nonnegative supermartingale and $T = \inf \{ t \in [0,\tau] \ ; \quad X_t = 0 \}$ ($\inf \emptyset = \tau$) for some $\tau > 0$. Show that

$$X_{T+t} = 0; \quad 0 \leq t < \infty \quad \text{hold a.s. } \{T < \tau\}.$$

証明． (1.19) より

$$X_T(\omega) = 0, \quad (\forall \omega \in \{T < \tau\})$$

が満たされ，かつ $\{T < \tau\} \in \mathscr{F}_T$ であるから，任意抽出定理より

$$0 \leq E\left(X_{T+t} 1\!\!1_{\{T<\tau\}}\right) \leq E\left(X_T 1\!\!1_{\{T<\tau\}}\right) = 0, \quad 0 \leq t < \infty$$

が成立し

$$X_{T+t} 1\!\!1_{\{T<\tau\}} = 0, \quad \text{a.s. } P, \quad 0 \leq t < \infty$$

となる．パスの連続性より

$$\{X_{T+t} 1\!\!1_{\{T<\tau\}} = 0,\ 0 \leq t < \infty\} = \bigcap_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,\tau)} \{X_{T+r} 1\!\!1_{\{T<\tau\}} = 0\}$$

が成り立ち主張が従う． ∎

Exercise 3.30

Suppose that the filtration $\{\mathscr{F}_t\}$ satisfies the usual conditions and let $X^{(n)} = \left\{ X_t^{(n)}, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \leq t < \infty \right\}$, $n \geq 1$ be an increasing sequence of right-continuous supermartingales, such that the random variable $\xi_t := \lim_{n\to\infty} X_t^{(n)}$ is nonnegative and integrable for every $0 \leq t < \infty$. Then there exists an RCLL supermartingale $X = \{ X_t, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \leq t < \infty \}$ which is a modification of the process $\xi = \{ \xi_t, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \leq t < \infty \}$.

1.4　The Doob-Meyer Decomposition

martingale transform

If $A = \{ A_n, \mathscr{F}_n \ ; \quad n = 0, 1, \cdots \}$ is predictable with $E|A_n| < \infty$ for every n, and if $\{ M_n, \mathscr{F}_n \ ; \quad n = 0, 1, \cdots \}$ is bounded martingale, then the martingale transform of A by M defined by

$$Y_0 = 0 \quad \text{and} \quad Y_n = \sum_{k=1}^{n} A_k (M_k - M_{k-1}); \quad n \geq 1,$$

is itself a martingale.

証明.　$A_k(M_k - M_{k-1})$ $(k \leq n)$ は $\mathscr{F}_n/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測であるから $(Y_n)_{n=1}^{\infty}$ は $(\mathscr{F}_n)$-適合である．また

$$E|Y_n| = E\left|\sum_{k=1}^{n} A_k(M_k - M_{k-1})\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \left\{\operatorname*{ess.sup}_{\omega\in\Omega} (|M_k(\omega)| + |M_{k-1}(\omega)|)\right\} E|A_k| < \infty$$

が成り立つ．更に任意の $n \geq 0$ に対し

$$E\left(Y_{n+1} - Y_n \mid \mathscr{F}_n\right) = E\left(A_{n+1}(M_{n+1} - M_n) \mid \mathscr{F}_n\right) = A_{n+1}E\left(M_{n+1} - M_n \mid \mathscr{F}_n\right) = 0, \quad \text{a.s. } P$$

が満たされる．■

Doob's decomposition

Any submartingale $\{ X_n, \mathscr{F}_n \ ; \quad n = 0, 1, \cdots \}$ admits the unique decomposition $X_n = M_n + A_n$ as the summation of a martingale $\{M_n, \mathscr{F}_n\}$ and an predictable and increasing sequence $\{A_n, \mathscr{F}_n\}$, where

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} E\left(X_{k+1} - X_k \mid \mathscr{F}_k\right), \quad \text{a.s. } P,\ n \geq 1.$$

証明.

第一段　Doob 分解が存在するとして，分解の一意性を示す．実際，分解が存在すれば

$$A_{n+1} - A_n = E\left(A_{n+1} - A_n \mid \mathscr{F}_n\right) = E\left(X_{n+1} - X_n \mid \mathscr{F}_n\right) - E\left(M_{n+1} - M_n \mid \mathscr{F}_n\right) = E\left(X_{n+1} - X_n \mid \mathscr{F}_n\right), \quad \text{a.s. } P$$

が成立し，A_n $(n \geq 1)$ は

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} E\left(X_{k+1} - X_k \mid \mathscr{F}_k\right), \quad \text{a.s. } P$$

を満たすことになり分解の一意性が出る．

第二段　分解可能性を示す．

$$A_0 \coloneqq 0, \quad A_n \coloneqq \sum_{k=0}^{n-1} E\left(X_{k+1} - X_k \mid \mathscr{F}_k\right), \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

と定めれば (A_n) は可予測かつ可積分であり，

$$A_{n+1} - A_n = E\left(X_{k+1} - X_k \mid \mathscr{F}_k\right) \geq 0, \quad \text{a.s. } P\ (\forall n \geq 1)$$

より増大過程である．また $M_n \coloneqq X_n - A_n$ により $(\mathscr{F}_n)$-適合かつ可積分な過程を定めれば，

$$\begin{aligned} E\left(M_{n+1} - M_n \mid \mathscr{F}_n\right) &= E\left((X_{n+1} - X_n) - (A_{n+1} - A_n) \mid \mathscr{F}_n\right) \\ &= E\left(X_{n+1} - X_n \mid \mathscr{F}_n\right) - E\left(E\left(X_{n+1} - X_n \mid \mathscr{F}_n\right) \mid \mathscr{F}_n\right) = 0, \quad \text{a.s. } P \end{aligned}$$

が成り立つから $\{M_n, \mathscr{F}_n\}$ はマルチンゲールである．■

Proposition 4.3 修正

An increasing random sequence A has a predictable modification if and only if it is natural.

証明.　A が可予測な修正 $\tilde{A}$ を持つとき，任意の有界マルチンゲール M に対して

$$\tilde{Y}_0 := 0, \quad \tilde{Y}_n := \sum_{k=1}^{n} \tilde{A}_k(M_k - M_{k-1}); \quad n \geq 1$$

は $(\mathscr{F}_n)$-マルチンゲールとなる．このとき $M_n\tilde{A}_n$ と $\sum_{k=1}^{n} M_{k-1}(\tilde{A}_k - \tilde{A}_{k-1})$ は可積分であり

$$0 = E\tilde{Y}_n = E\left[M_n\tilde{A}_n - \sum_{k=1}^{n} M_{k-1}(\tilde{A}_k - \tilde{A}_{k-1})\right] = E(M_nA_n) - E\sum_{k=1}^{n} M_{k-1}(A_k - A_{k-1}), \quad (\forall n \geq 1)$$

が成り立つから A はナチュラルである．逆に A がナチュラルであるとき，有界マルチンゲール M に対して

$$\begin{aligned} 0 &= E\left[M_nA_n - \sum_{k=1}^{n} M_{k-1}(A_k - A_{k-1})\right] \\ &= E\left[A_n(M_n - M_{n-1})\right] - E\left[M_{n-1}A_{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} M_{k-1}(A_k - A_{k-1})\right] \\ &= E\left[A_n(M_n - M_{n-1})\right], \quad (\forall n \geq 1) \end{aligned}$$

が成り立つ．一方で

$$\begin{aligned} E\left[M_{n-1}(A_n - E\left(A_n \mid \mathscr{F}_{n-1}\right))\right] &= E\left[E\left(M_{n-1}(A_n - E\left(A_n \mid \mathscr{F}_{n-1}\right)) \mid \mathscr{F}_{n-1}\right)\right] \\ &= E\left[M_{n-1}E\left(A_n - E\left(A_n \mid \mathscr{F}_{n-1}\right) \mid \mathscr{F}_{n-1}\right)\right] = 0, \quad (\forall n \geq 1) \end{aligned}$$

及び

$$\begin{aligned} E\left[E\left(A_n \mid \mathscr{F}_{n-1}\right)(M_n - M_{n-1})\right] &= E\left[E\left(E\left(A_n \mid \mathscr{F}_{n-1}\right)(M_n - M_{n-1}) \mid \mathscr{F}_{n-1}\right)\right] \\ &= E\left[E\left(A_n \mid \mathscr{F}_{n-1}\right)E\left(M_n - M_{n-1} \mid \mathscr{F}_{n-1}\right)\right] = 0, \quad (\forall n \geq 1) \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} E\left[M_n(A_n - E\left(A_n \mid \mathscr{F}_{n-1}\right))\right] &= E\left[A_n(M_n - M_{n-1})\right] \\ &\quad + E\left[M_{n-1}(A_n - E\left(A_n \mid \mathscr{F}_{n-1}\right))\right] \\ &\quad - E\left[E\left(A_n \mid \mathscr{F}_{n-1}\right)(M_n - M_{n-1})\right] \\ &= 0, \quad (\forall n \geq 1) \end{aligned}$$

が従う．ここで各 $n \geq 1$ に対し，$\mathscr{B}(\mathbb{R})/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測関数 $\mathrm{sgn} = \mathbb{1}_{(0,\infty)} - \mathbb{1}_{(-\infty,0)}$ を用いて

$$M_k^{(n)} := \begin{cases} \mathrm{sgn}\left(A_n - E\left(A_n \mid \mathscr{F}_{n-1}\right)\right), & (k \geq n), \\ E\left(\mathrm{sgn}\left(A_n - E\left(A_n \mid \mathscr{F}_{n-1}\right)\right) \,\middle|\, \mathscr{F}_k\right), & (0 \leq k < n) \end{cases}$$

により有界マルチンゲール $M^{(n)} = \left\{ M_k^{(n)}, \mathscr{F}_k \ ; \quad k = 0, 1, \cdots \right\}$ を定めれば，

$$0 = E\left[M_n^{(n)}(A_n - E\left(A_n \mid \mathscr{F}_{n-1}\right))\right] = E\left|A_n - E\left(A_n \mid \mathscr{F}_{n-1}\right)\right|, \quad (\forall n \geq 1)$$

が得られ

$$\tilde{A}_0 := 0, \quad \tilde{A}_n := E\left(A_n \mid \mathscr{F}_{n-1}\right); \quad n \geq 1$$

は A の可予測な修正となる．　■

区別不能性によるパスの同値類

$I \subset [0, \infty)$ を区間とし，I 上で右連続な確率過程 ($s = \sup I \in I$ の場合は s での右連続性は考えない) の全体を $RCSP(I)$ と書けば，$M = \{ M_t \ ; \quad t \in I \}, N = \{ N_t \ ; \quad t \in I \} \in RCSP(I)$ に対し

$$M \sim N \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad P(M_t = N_t, \ \forall t \in I) = 1 \tag{1.21}$$

により同値関係 $\sim$ が定まる．ここで右連続性より

$$\{M_t = N_t, \ \forall t \in I\} = \begin{cases} \displaystyle\bigcap_{r \in (I \cap \mathbb{Q}) \cup \{\sup I\}} \{M_r = N_r\}, & (\sup I \in I), \\ \displaystyle\bigcap_{r \in I \cap \mathbb{Q}} \{M_r = N_r\}, & (\sup I \notin I) \end{cases}$$

となるから $\{M_t = N_t, \ \forall t \in I\}$ は可測である．

Definition 4.4 修正

An adapted process A is called increasing if for all $\omega \in \Omega$ we have

(a)　$A_0(\omega) = 0$

(b)　$t \longmapsto A_t(\omega)$ is nondecreasing, right-continuous function,

and $E(A_t) < \infty$ holds for every $t \in [0, \infty)$. An increasing process is called integrable if $E(A_\infty) < \infty$, where $A_\infty = \lim_{t \to \infty} A_t$.

Definition 4.5 修正

An increasing processs A is called natural if for every bounded, *RCLL* martingale $\{ M_t, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \le t < \infty \}$ we have

$$E \int_{(0,t]} M_s \, dA_s = E \int_{(0,t]} M_{s-} \, dA_s, \quad \text{for every } 0 < t < \infty.$$

Let us denote the subspace of $RCSP[0, \infty)$ as

$$NAT[0, \infty) := \{ A \in RCSP[0, \infty) \ ; \quad natural \},$$

and the equivalent class of $A \in NAT[0, \infty)$ in the meaning of (1.21) as $[A]_{NAT}$ ($\subset NAT[0, \infty)$).

プロセスが $RCLL$ とは全てのパスが $RCLL$ であるということである．Theorem 3.8 によれば右連続な劣マルチンゲールは a.e. のパスが $RCLL$ であるから，(1.21) の意味で同値である．A も全てのパスが右連続かつ単調非減少であるから，全ての $\omega \in \Omega$ に対し $\int_{(0,t]} M_s(\omega) \, dA_s(\omega)$ と $\int_{(0,t]} M_{s-}(\omega) \, dA_s(\omega)$ が定義される．たぶん余計な煩雑さを回避できる．

$RCLL$ なパスの不連続点は高々可算個

(S, d) を距離空間とする．写像 $f : [0, \infty) \longrightarrow S$ について各点 $t \in [0, \infty)$ で右連続かつ各点 $t \in (0, \infty)$ で左極限が存在するとき，f の不連続点は存在しても高々可算個である．

証明.　各点 $t > 0$ における f の左極限を $f(t-)$ と書けば

$$f \text{ が } t \in (0, \infty) \text{ で不連続} \quad \Leftrightarrow \quad d(f(t), f(t-)) > 0$$

が成立するから，任意に $T>0$ を選び固定して

$$D(n) := \left\{ t \in (0,T] \ ; \quad \frac{1}{n+1} \leq d(f(t), f(t-)) < \frac{1}{n} \right\}, \quad E(n) := \{ t \in (0,T] \ ; \quad n \leq d(f(t), f(t-)) < n+1 \}$$

とおけば

$$D_T := \{ t \in (0,T] \ ; \quad f \text{ が } t \in (0,\infty) \text{ で不連続} \} = \bigcup_{n=1}^{\infty} D(n) \cup E(n)$$

となる．このとき $D(n), E(n)$ は全て有限集合である．実際，或る n に対し $D(n)$ が無限集合なら

$$\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D(n), \quad t_k \neq t_j \ (k \neq j)$$

を満たす可算集合が存在し，$[0,T]$ のコンパクト性より或る部分列 $(t_{k_m})_{m=1}^{\infty}$ は或る $y \in [0,T]$ に収束する．$y=0$ の場合，右連続の仮定より $1/2(n+1) > \epsilon > 0$ に対し或る $\delta > 0$ が存在して

$$d(f(0), f(t)) < \epsilon, \quad (\forall 0 < t < \delta)$$

が成り立つが，一方で $0 < t_{k_m} < \delta$ を満たす t_{k_m} が存在して

$$\frac{1}{n+1} - \epsilon < d(f(t_{k_m}), f(t_{k_m}-)) - d(f(0), f(t_{k_m}-)) \leq d(f(0), f(t_{k_m})) < \epsilon$$

となり矛盾が生じる．$y>0$ の場合も，$1/2(n+1) > \epsilon > 0$ に対し或る $\delta > 0$ が存在して

$$d(f(y-), f(t)) < \epsilon, \quad (\forall t \in (y-\delta, y))$$

となるが，f が y で右連続であるから (或は $y=T$ のとき) $y - \delta < t_{k_m} \leq y$ を満たす t_{k_m} が存在して

$$\frac{1}{n+1} - \epsilon < d(f(t_{k_m}-), f(t_{k_m})) - d(f(t_{k_m}-), f(y-)) \leq d(f(y-), f(t_{k_m})) < \epsilon$$

が従い矛盾が生じる．よって任意の $n \geq 1$ に対して $D(n)$ は有限集合であり，同様に $E(n)$ も有限集合であるから D_T は高々可算集合である．f の不連続点の全体は $\bigcup_{T=1}^{\infty} D_T$ に一致するから高々可算個である． ∎

Remarks 4.6 (i) 修正

If A is an increasing and X a measurable process, then with $\omega \in \Omega$ fixed, the sample path $\{ X_t(\omega) \ ; \quad 0 \leq t < \infty \}$ is a measurable function from $[0,\infty)$ into $\mathbb{R}$. It follows that the Lebesgue-Stieltjes integrals

$$I_t^{\pm}(\omega) := \int_{(0,t]} X_s^{\pm}(\omega) \, dA_s(\omega)$$

are well defined. If X is bounded, right-continuous and adapted to the filtration $(\mathscr{F}_t)$, then I is finite, right-continuous and $(\mathscr{F}_t)$-progressively measurable.

証明． X が $\mathscr{B}([0,\infty)) \otimes \mathscr{F} / \mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測なら，補題**??** (P. **??**) より $[0,\infty) \ni t \longmapsto X_t(\omega)$ は $\mathscr{B}([0,\infty))/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測である．また全ての $\omega \in \Omega$ に対し $t \longmapsto A_t(\omega)$ は右連続非減少であるから

$$\mu_\omega((a,b]) = A_b(\omega) - A_a(\omega), \quad (\forall (a,b] \subset [0,\infty)), \quad \mu_\omega(\{0\}) = 0$$

を満たす $([0,\infty),\mathscr{B}([0,\infty)))$ 上の σ-有限測度が唯一つ存在して

$$I_t^{\pm}(\omega) = \int_{(0,t]} X_s^{\pm}(\omega)\, dA_s(\omega) := \int_{(0,t]} X_s^{\pm}(\omega)\, \mu_\omega(ds), \quad (0 < t < \infty)$$

及び $I_t := I_t^+ - I_t^-$ が定義される．特に $\sup_{s\in(0,t]} |X_s^{\pm}| \leq B < \infty$ なら

$$\left| I_t^{\pm} \right| \leq BA_t$$

となるから $I_t^{\pm}$ は有限確定する．X が有界かつ右連続 $(\mathscr{F}_t)$-適合であるとき，$t > 0$ を固定し $t_j^{(n)} := tj/2^n$ として

$$X_s^{(n)\pm} := X_0 \mathbb{1}_{\{0\}}(s) + \sum_{j=0}^{2^n-1} X_{t_{j+1}^{(n)}} \mathbb{1}_{\left(t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)}\right]}(s)$$

とおけば右連続性より $X_s^{(n)\pm} \longrightarrow X_s^{\pm}$, $(\forall s \in [0,t])$ が成立し，かつ

$$I_t^{(n)\pm} := \int_{(0,t]} X_s^{(n)\pm}\, dA_s = \sum_{j=0}^{2^n-1} X_{t_{j+1}^{(n)}} \left(A_{t_j^{(n)}} - A_{t_{j+1}^{(n)}} \right)$$

となり $I_t^{(n)\pm}$ の $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測性が得られる．$X$ が有界であるから Lebesgue の収束定理より

$$I_t^{\pm} = \lim_{n\to\infty} \int_{(0,t]} X_s^{(n)\pm}\, dA_s = \lim_{n\to\infty} I_t^{(n)\pm}$$

が成り立ち，定理**??**より $I_t^{\pm}$ の $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測性が従う．また $t < T$ 及び $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (t,T]$, $t_n \downarrow t$ に対して，Lebesgue の収束定理より

$$\lim_{n\to\infty} I_{t_n}^{\pm} = \lim_{n\to\infty} \int_{(0,T]} \mathbb{1}_{(0,t_n]}(s) X_s^{\pm}\, dA_s = \int_{(0,T]} \mathbb{1}_{(0,t]}(s) X_s^{\pm}\, dA_s = I_t^{\pm}$$

が成立し $t \longmapsto I_t(\omega)$ の右連続性が出る．I は右連続 $(\mathscr{F}_t)$-適合過程であるから $(\mathscr{F}_t)$-発展的可測である． ∎

Remark 4.6 (ii)

Every continuous, increasing process is natural. Indeed then, for P-a.e. $\omega \in \Omega$ we have

$$\int_{(0,t]} (M_s(\omega) - M_{s-}(\omega))\, dA_s(\omega) = 0 \quad \text{for every } 0 < t < \infty,$$

because every path $\{\, M_s(\omega)\ ;\ \ 0 \leq s < \infty \,\}$ has only countably many discontinuities (Theorem 3.8(v)).

証明． *RCLL* パスの不連続点は高々可算個であり，連続な A で作る測度に対し一点集合は零集合となる． ∎

Lemma 4.7

Definition 4.8 修正

Let us consider the class $\mathscr{S}(\mathscr{S}_a)$ such as

$$\mathscr{S} := \{\, T : \text{stopping time of } (\mathscr{F}_t)\ ;\quad T < \infty \,\}, \quad \mathscr{S}_a := \{\, T : \text{stopping time of } (\mathscr{F}_t)\ ;\quad T \le a \,\},\ (a > 0).$$

The right-continuous process $\{\, X_t, \mathscr{F}_t\ ;\quad 0 \le t < \infty \,\}$ is said to be of class D, if the family $\{X_T\}_{T \in \mathscr{S}}$ is uniformly integrable; of class DL, if the family $\{X_T\}_{T \in \mathscr{S}_a}$ is uniformly integrable, for every $0 < a < \infty$.

$T \in \mathscr{S}$(resp. $\mathscr{S}_a$), then $T(\omega) < \infty$ (resp. $\le a$) for all $\omega \in \Omega$, not P-a.s. ω.

Problem 4.9 修正

$X = \{\, X_t, \mathscr{F}_t\ ;\quad 0 \le t < \infty \,\}$ is a right-continuous submartingale. Show that under any one of the following conditions, X is of class DL.

(a) $X_t \ge 0$ a.s. for every $t \ge 0$.

(b) X has the special form

$$X_t = M_t + A_t, \quad 0 \le t < \infty$$

suggested by the Doob-Meyer decomposition, where $\{\, M_t, \mathscr{F}_t\ ;\quad 0 \le t < \infty \,\}$ is a martingale and $\{\, A_t, \mathscr{F}_t\ ;\quad 0 \le t < \infty \,\}$ is an increasing process.

Show also that if $\mathscr{F}_0$ contains all the P-negligible events in $\mathscr{F}$ and X is a uniformly integrable martingale, then it is of class D.

証明.

(a) 任意の $T \in \mathscr{S}_a$ に対して X_T は $\mathscr{F}_T/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測であるから (Proposition 2.18 修正)，任意抽出定理より

$$\int_{\{X_T > \lambda\}} X_T\, dP \le \int_{\{X_T > \lambda\}} X_a\, dP, \quad (\forall \lambda > 0)$$

及び

$$P\,(X_T > \lambda) \le \frac{EX_T}{\lambda} \le \frac{EX_a}{\lambda}, \quad (\forall \lambda > 0)$$

が成立する．X_a が可積分であるから

$$\sup_{T \in \mathscr{S}_a} \int_{\{X_T > \lambda\}} X_T\, dP \longrightarrow 0 \quad (\lambda \longrightarrow \infty)$$

となり，$(X_T)_{T \in \mathscr{S}_a}$ の一様可積分性が得られる．

(b) $a > 0$ とすれば，任意抽出定理より

$$M_T = E\,(M_a \,|\, \mathscr{F}_T),\ \text{a.s. } P, \quad (\forall T \in \mathscr{S}_a)$$

が成り立つから，定理**??** (P. **??**) より $(M_T)_{T\in\mathscr{S}_a}$ は一様可積分である．このとき

$$\begin{aligned}\int_{\{|X_T|>\lambda\}} |X_T|\, dP &\leq 2\int_{\{|M_T|>\lambda/2\}} |M_T|\, dP + 2\int_{\{|A_T|>\lambda/2\}} |A_T|\, dP \\ &\leq 2\sup_{T\in\mathscr{S}_a}\int_{\{|M_T|>\lambda/2\}} |M_T|\, dP + 2\int_{\{A_a>\lambda/2\}} A_a\, dP \\ &\longrightarrow 0 \quad (\lambda \longrightarrow \infty)\end{aligned}$$

が従い $(X_T)_{T\in\mathscr{S}_a}$ の一様可積分性が出る．

X が一様可積分なマルチンゲールであるとき，Problem 3.20 より

$$X_t = E(X_\infty \mid \mathscr{F}_t), \text{ a.s. } P, \quad (\forall t \geq 0)$$

を満たす $\mathscr{F}_\infty/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測可積分関数 X_∞ が存在し，任意抽出定理より

$$X_T = E(X_\infty \mid \mathscr{F}_T), \text{ a.s. } P, \quad (\forall T \in \mathscr{S})$$

が成り立つから X はクラス DL に属する． ∎

Problem 4.11 修正

Let $(X,\mathscr{F},\mu)$ be a measure space and $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ be a sequence of integrable complex functions on $(X,\mathscr{F},\mu)$ which converges weakly in L^1 to an integrable complex function f. Then for each σ-field $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ where $(X,\mathscr{G},\mu|_{\mathscr{G}})$ is σ-finite, the sequence $E(f_n \mid \mathscr{G})$ converges to $E(f \mid \mathscr{G})$ weakly in L^1.

証明． $\nu := \mu|_{\mathscr{G}}$ とおく．定理**??**より任意の $g \in L^\infty(\mu)$ と $F \in L^1(\mu)$ に対して

$$\begin{aligned}\int_X gE(F\mid\mathscr{G})\, d\mu &= \int_X E(gE(F\mid\mathscr{G})\mid\mathscr{G})\, d\nu \\ &= \int_X E(g\mid\mathscr{G})\,E(F\mid\mathscr{G})\, d\nu \\ &= \int_X E(E(g\mid\mathscr{G})\,F\mid\mathscr{G})\, d\nu \\ &= \int_X E(g\mid\mathscr{G})\,F\, d\mu\end{aligned}$$

と $\|E(g\mid\mathscr{G})\|_{L^\infty(\nu)} \leq \|g\|_{L^\infty(\mu)}$ が成り立ち

$$\lim_{n\to\infty}\int_X gE(f_n\mid\mathscr{G})\, d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X E(g\mid\mathscr{G})\, f_n\, d\mu = \int_X E(g\mid\mathscr{G})\, f\, d\mu = \int_X gE(f\mid\mathscr{G})\, d\mu$$

となるから $E(f_n\mid\mathscr{G})$ は $E(f\mid\mathscr{G})$ に $L^1(\mu)$ で弱収束する． ∎

Lemma for Theorem 4.10

$a > 0$，$\mathscr{F}_a/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測な可積分関数 A と $T \in \mathscr{S}_a$ に対して次が成り立つ:

$$E(A\mid\mathscr{F}_t)|_{t=T} = E(A\mid\mathscr{F}_T) \quad \text{a.s. } P. \tag{1.22}$$

証明.　$\{ Y_t := E(A \mid \mathscr{F}_t), \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \le t < \infty \}$ はマルチンゲールであり，任意抽出定理より

$$E(Y_t \mid \mathscr{F}_T) = Y_{t \wedge T}, \quad \text{a.s. } P$$

が成り立つ．$Y_a = A$, a.s. P より $t = a$ として (1.22) を得る．∎

Lemma for theorem 4.10

Let $M = \{ M_t, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \le t < \infty \}$ be a right-continuous martingale, where the filtration $(\mathscr{F}_t)$ is not necessarily usual. If M is a difference of two natural processes $A = \{ A_t, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \le t < \infty \}$ and $B = \{ B_t, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \le t < \infty \}$, namely

$$M_t = A_t - B_t; \quad \forall t \ge 0,$$

then $P\{ M_t = 0 \ ; \quad 0 \le \forall t < \infty \} = 1$.

証明.　仮定より M はパスが有界変動なマルチンゲールである．いま任意に $a > 0$ を取り

$$\Pi_n := \left\{ t_j^{(n)} := \frac{j}{2^n} a \ ; \quad j = 0, 1, \cdots, 2^n \right\}$$

として，任意の有界かつ $RCLL$ なマルチンゲール $\xi = \{ \xi_t, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \le t < \infty \}$ に対し

$$\xi_t^{(n)} := \sum_{j=1}^{2^n} \mathbb{1}_{\left(t_{j-1}^{(n)}, t_j^{(n)}\right]}(t)\, \xi_{t_{j-1}^{(n)}}, \quad (\forall t \in [0, a])$$

とおけば，任意の $\omega \in \Omega$ で

$$\lim_{n \to \infty} \xi_t^{(n)}(\omega) = \xi_{t-}(\omega), \ \forall t \in (0, a]$$

が満たされるから Lebesgue の収束定理より

$$\lim_{n \to \infty} \int_{(0,a]} \xi_t^{(n)}(\omega)\, dA_t(\omega) = \int_{(0,a]} \xi_{t-}(\omega)\, dA_t(\omega),$$
$$\lim_{n \to \infty} \int_{(0,a]} \xi_t^{(n)}(\omega)\, dB_t(\omega) = \int_{(0,a]} \xi_{t-}(\omega)\, dB_t(\omega)$$

が成立する．また A_a, B_a の可積性と ξ の有界性により，再び Lebesgue の収束定理を適用すれば

$$\begin{aligned}
E[\xi_a (A_a - B_a)] &= E[\xi_a A_a] - E[\xi_a B_a] = E \int_{(0,a]} \xi_{t-}\, dA_t - E \int_{(0,a]} \xi_{t-}\, dB_t \\
&= E\left[\lim_{n \to \infty} \int_{(0,a]} \xi_t^{(n)}\, dA_t \right] - E\left[\lim_{n \to \infty} \int_{(0,a]} \xi_t^{(n)}\, dB_t \right] \\
&= \lim_{n \to \infty} E\left[\sum_{j=1}^{2^n} \xi_{t_{j-1}^{(n)}} \left(A_{t_j^{(n)}} - A_{t_{j-1}^{(n)}} \right) \right] - \lim_{n \to \infty} E\left[\sum_{j=1}^{2^n} \xi_{t_{j-1}^{(n)}} \left(B_{t_j^{(n)}} - B_{t_{j-1}^{(n)}} \right) \right] \\
&= \lim_{n \to \infty} E\left[\sum_{j=1}^{2^n} \xi_{t_{j-1}^{(n)}} \left(M_{t_j^{(n)}} - M_{t_{j-1}^{(n)}} \right) \right]
\end{aligned}$$

が従い，このとき右辺は M のマルチンゲール性より

$$E\xi_{t_{j-1}^{(n)}} \left(M_{t_j^{(n)}} - M_{t_{j-1}^{(n)}} \right) = E\left[E\left(\xi_{t_{j-1}^{(n)}} \left(M_{t_j^{(n)}} - M_{t_{j-1}^{(n)}} \right) \middle| \mathscr{F}_{t_{j-1}^{(n)}} \right) \right] = E\left[\xi_{t_{j-1}^{(n)}} E\left(M_{t_j^{(n)}} - M_{t_{j-1}^{(n)}} \middle| \mathscr{F}_{t_{j-1}^{(n)}} \right) \right] = 0$$

となるから

$$E[\xi_a(A_a - B_a)] = 0$$

が得られる．ξ を有界マルチンゲール $\left\{ E(\operatorname{sgn}(A_a - B_a) \middle| \mathscr{F}_t), \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \leq t < \infty \right\}$ の *RCLL* な修正とすれば

$$0 = E[\xi_a(A_a - B_a)] = E[\operatorname{sgn}(A_a - B_a)(A_a - B_a)] = E|A_a - B_a|$$

が成り立ち，$a > 0$ の任意性及び A, B のパスの右連続性より

$$P[\{ A_t = B_t \ ; \quad 0 \leq t < \infty \}] = P\left[\bigcap_{r \in [0,\infty) \cap \mathbb{Q}} \{A_r = B_r\} \right] = 1$$

が出る． ∎

Theorem 4.10 (Doob-Meyer Decomposition) 修正

Let $\{\mathscr{F}_t\}$ satisfy the usual conditions. If the right-continuous submartingale $X = \{ X_t, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \leq t < \infty \}$ is of class *DL*, then there exists a unique $[A]_{NAT}$ where $X - A'$ is right-continuous martingale for every $A' \in [A]_{NAT}$. Further, if X is of class *D*, then M is a uniformly integrable martingale and A is integrable.

証明 (未修正).

第一段　$[A]_{NAT}$ の一意性を示す．二つの右連続マルチンゲール M, M' とナチュラルな A, A' により

$$X_t = M_t + A_t = M'_t + A'_t, \quad \forall t \geq 0$$

と書けるとき，

$$B = \{ B_t := A_t - A'_t = M'_t - M_t, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \leq t < \infty \}$$

は Lemma の仮定を満たすマルチンゲールとなるから $[A]_{NAT} = [A']_{NAT}$ が従う．

第二段　任意の区間 $[0, a]$ 上で分解の存在を示せば $[0, \infty)$ での分解が得られる．実際任意の $n \geq 1$ に対し

$$X_t = M^n_t + A^n_t, \quad (t \in [0, n])$$

と分解されるなら，$m > n$ に対して

$$M^n_t + A^n_t = M^m_t + A^m_t, \quad (t \in [0, n])$$

となり，前段の結果より或る P-零集合 $E_{n,m}$ が存在して，任意の $\omega \in \Omega \backslash E_{n,m}$ に対して

$$A^n_t(\omega) = A^m_t(\omega), \quad (\forall t \in [0, n])$$

が成立し，かつ $[0, n) \ni t \longmapsto A^n_t(\omega)$ が右連続非減少となる．ここで

$$E := \bigcup_{\substack{n,m \in \mathbb{N} \\ n < m}} E_{n,m}$$

により P-零集合を定めれば，任意の $\omega \in \Omega \backslash E$ 及び $t \geq 0$ に対して

$$A^n_t(\omega) = A^m_t(\omega), \quad (\forall m > n > t)$$

となり $\lim_{n\to\infty} A_t^n(\omega)$ が確定する．usual 条件より $E \in \mathscr{F}_0$ だから $A_t^n 1\!\!1_{\Omega\setminus E}$ $(n > t)$ は $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測であり，

$$A_t := \lim_{n\to\infty} A_t^n 1\!\!1_{\Omega\setminus E}, \quad (\forall t \geq 0)$$

で A_t を定めれば A_t は $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測かつ可積分となる．また任意の $\omega \in \Omega$ と $n \geq 1$ に対し

$$A_t(\omega) = A_t^n(\omega) 1\!\!1_{\Omega\setminus E}, \quad (\forall t \in [0, n))$$

が成り立つから $[0,\infty) \ni t \longmapsto A_t(\omega)$ は右連続かつ非減少である．$\{\,\xi_t, \mathscr{F}_t\ ;\quad 0 \leq t < \infty\,\}$ を右連続なマルチンゲールとすれば或る P-零集合 C が存在して $\Omega\setminus C$ 上でパスは RCLL となるから，任意の $t > 0$ に対し

$$\left(\int_{(0,t]} \xi_{s(-)}\, dA_s\right)(\omega) := \begin{cases} \displaystyle\int_{(0,t]} \xi_{s(-)}(\omega)\, dA_s(\omega), & (\omega \in \Omega\setminus(E \cup C)), \\ 0, & (\omega \in E \cup C) \end{cases},$$

$$\left(\int_{(0,t]} \xi_{s(-)}\, dA_s^n\right)(\omega) := \begin{cases} \displaystyle\int_{(0,t]} \xi_{s(-)}(\omega)\, dA_s^n(\omega), & (\omega \in \Omega\setminus(E \cup C)), \\ 0, & (\omega \in E \cup C) \end{cases}, \quad (n > t)$$

とおけば

$$E\int_{(0,t]} \xi_s\, dA_s = E\int_{(0,t]} \xi_s\, dA_s^n = E\int_{(0,t]} \xi_{s-}\, dA_s^n = E\int_{(0,t]} \xi_{s-}\, dA_s$$

が成立する．

$$M := X - A$$

とおけば $(M_t)_{t\geq 0}$ は $(\mathscr{F}_t)$-適合かつ可積分であり，任意の $0 \leq s < t$ 及び $t < n$ に対して

$$M_t = X_t - A_t^n 1\!\!1_{\Omega\setminus E} = M_t^n, \quad M_s = X_s - A_s^n 1\!\!1_{\Omega\setminus E} = M_s^n, \quad \text{a.s. } P$$

となるから $E\,(M_t \,|\, \mathscr{F}_s) = M_s$ a.s. P が満たされる．

第三段　以下，$a > 0$ として $[0, a]$ 上で分解の存在を示す．

$$Y_t := X_t - E\,(X_a \,|\, \mathscr{F}_t), \quad (t \in [0, a])$$

とおけば $\{\, Y_t, \mathscr{F}_t\ ;\quad 0 \leq t \leq a\,\}$ は劣マルチンゲールであり，

$$\left\{\, Y_{t_j^{(n)}}, \mathscr{F}_{t_j^{(n)}}\ ;\quad t_j^{(n)} = \frac{j}{2^n}a,\ j = 0, 1, \cdots, 2^n \,\right\}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

で離散化すれば，Doob 分解の補題 (P. 39) より

$$A_0^{(n)} := 0, \quad A_{t_j^{(n)}}^{(n)} := \sum_{k=0}^{j-1} E\left(Y_{t_{k+1}^{(n)}} - Y_{t_k^{(n)}} \,\middle|\, \mathscr{F}_{t_k^{(n)}}\right),\ (k = 1, \cdots, 2^n); \quad M_{t_j^{(n)}}^{(n)} := Y_{t_j^{(n)}} - A_{t_j^{(n)}}^{(n)},\ (k = 0, 1, \cdots, 2^n)$$

により可予測な増大過程 $A^{(n)}$ とマルチンゲール $M^{(n)}$ に分解され，$Y_a = 0$ a.s. P であるから

$$Y_{t_j^{(n)}} = A_{t_j^{(n)}}^{(n)} + M_{t_j^{(n)}}^{(n)} = A_{t_j^{(n)}}^{(n)} + E\left(M_a^{(n)} \,\middle|\, \mathscr{F}_{t_j^{(n)}}\right) = A_{t_j^{(n)}}^{(n)} - E\left(A_a^{(n)} \,\middle|\, \mathscr{F}_{t_j^{(n)}}\right), \quad \text{a.s. } P, \quad j = 0, 1, \cdots, 2^n$$

となる．

第四段　$\left(A_a^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ が一様可積分であることを示す．

f

第五段　Dunford-Pettis の定理より $\left(A_a^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ の或る部分列 $\left(A_a^{(n_k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ は $L^1(P)$ で弱収束する．つまり或る $A_a \in L^1(P)$ が存在して任意の $\xi \in L^\infty(P)$ に対し

$$E\xi A_a^{(n_k)} \longrightarrow E\xi A_a \quad (k \longrightarrow \infty)$$

が成立する．

$$\Pi_n := \left\{ t_j^{(n)} \ ; \quad t_j^{(n)} = \frac{j}{2^n}a, \ j = 0, 1, \cdots, 2^n \right\}, \quad \Pi := \bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi_n$$

とすれば，任意の $t \in \Pi$ に対し或る $K \geq 1$ が存在して $t \in \Pi_{n_k}$ $(\forall k > K)$ となり，Problem 4.11 より

$$E\xi A_t^{(n_k)} = E\xi \left\{ Y_t + E\left(A_a^{(n_k)} \,\middle|\, \mathscr{F}_t\right)\right\} \longrightarrow E\xi \left\{Y_t + E\left(A_a \,|\, \mathscr{F}_t\right)\right\} \quad (k > K, \ k \longrightarrow \infty)$$

が成り立つから $A_t^{(n_k)}$ は $Y_t + E\left(A_a \,|\, \mathscr{F}_t\right)$ に弱収束する．ここで

$$\tilde{A}_t := Y_t + E\left(A_a \,|\, \mathscr{F}_t\right), \quad (t \in [0, a])$$

と定めれば $\left\{ \tilde{A}_t, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \leq t \leq a \right\}$ は劣マルチンゲールとなり，$\{ X_t, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \leq t < \infty \}$ の右連続性より

$$[0, a] \ni t \longmapsto E\left[Y_t + E\left(A_a \,|\, \mathscr{F}_t\right)\right] = EX_t - EX_a + EA_a$$

は右連続であるから (Theorem 3.13)，$\tilde{A}$ の右連続な修正 $\{ A_t, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \leq t \leq a \}$ が得られる．

第六段　$t \longmapsto A_t(\omega)$ が a.s. に 0 出発かつ非減少であることを示す．実際，$\xi = \mathrm{sgn}\,(A_0)$ として

$$E|A_0| = E\xi A_0 = E\xi \tilde{A}_0 = \lim_{k \to \infty} E\xi A_0^{(n_k)} = 0$$

が成り立つから $A_0 = 0$ a.s. P が従う．また任意に $s, t \in \Pi$, $(s < t)$ を取れば或る $K \geq 1$ が存在して $s, t \in \Pi_{n_k}$ $(\forall k > K)$ が満たされ，$A^{(n_k)}$ は増大過程であるから $\xi = \mathbb{1}_{\{A_s > A_t\}}$ として

$$E\xi(A_t - A_s) = E\xi\left(\tilde{A}_t - \tilde{A}_s\right) = \lim_{k \to \infty} E\xi\left(A_t^{(n_k)} - A_s^{(n_k)}\right) \geq 0$$

となり $P(A_s > A_t) = 0$ が成り立つ．

$$N := \left(\bigcup_{\substack{s,t \in \Pi \\ s<t}} \{A_s > A_t\}\right) \cup \{A_0 \neq 0\}$$

により P-零集合を定めれば，$t \longmapsto A_t$ の右連続性より $\Omega \backslash N$ 上で $t \longmapsto A_t$ は 0 出発非減少となる．

第七段　A がナチュラルであることを示す．$\xi = \{ \xi_t, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \leq t \leq a \}$ を有界な右連続マルチンゲールとすれば

$$\begin{aligned}
E\xi_a A_a^{(n_k)} &= E\left[\sum_{j=1}^{2^n} \xi_{t_{j-1}^{(n_k)}} \left(A_{t_j^{(n_k)}}^{(n_k)} - A_{t_{j-1}^{(n_k)}}^{(n_k)}\right)\right] \\
&= E\left[\sum_{j=1}^{2^n} \xi_{t_{j-1}^{(n_k)}} \left(Y_{t_j^{(n_k)}} - Y_{t_{j-1}^{(n_k)}}\right)\right] + E\left[\sum_{j=1}^{2^n} \xi_{t_{j-1}^{(n_k)}} \left(E\left(A_a^{(n_k)} \,\middle|\, \mathscr{F}_{t_j^{(n_k)}}\right) - E\left(A_a^{(n_k)} \,\middle|\, \mathscr{F}_{t_{j-1}^{(n_k)}}\right)\right)\right] \\
&= E\left[\sum_{j=1}^{2^n} \xi_{t_{j-1}^{(n_k)}} \left(A_{t_j^{(n_k)}} - A_{t_{j-1}^{(n_k)}}\right)\right]
\end{aligned}$$

が任意の $k \geq 1$ で成り立ち，或る P-零集合 N' が存在して $\Omega \backslash N'$ 上で ξ のパスが RCLL となるから，

$$\left(\int_{(0,a]} \xi_{s(-)} \, dA_s\right)(\omega) := \begin{cases} \displaystyle\int_{(0,a]} \xi_{s(-)}(\omega) \, dA_s(\omega), & (\omega \in \Omega \backslash (N \cup N')), \\ 0, & (\omega \in N \cup N') \end{cases}$$

と定めれば $k \longrightarrow \infty$ として

$$E\xi_a A_a = E\int_{(0,a]} \xi_{s-}\, dA_s$$

が得られる．任意の $t \in (0,a]$ に対し $\xi^t = \{\, \xi^t_s := \xi_{t\wedge s}, \mathscr{F}_s \;;\quad 0 \leq s \leq a \,\}$ も連続マルチンゲールであり

$$\xi^t_{s-} = \xi_{s-}, \quad (\forall s \in (0,t]),$$
$$\xi^t_{s-} = \xi_t, \quad (\forall s \in (t,a])$$

より

$$E\xi_t A_t + E\xi_t(A_a - A_t) = E\xi^t_a A_a = E\int_{(0,a]} \xi^t_{s-}\, dA_s = E\int_{(0,t]} \xi_{s-}\, dA_s + E\xi_t(A_a - A_t)$$

となり

$$E\xi_t A_t = E\int_{(0,t]} \xi_{s-}\, dA_s, \quad (\forall t \in (0,a])$$

が成立する．よって A はナチュラルである．

Problem 4.13

Verify that a continuous, nonnegative submartingale is regular.

証明．　Problem 4.9 より $(X_{T_n})_{n=1}^{\infty}$ は一様可積分であり，またパスの連続性より $X_{T_n} \longrightarrow X_T$ $(n \longrightarrow \infty)$ となるから，定理 **??** より $\lim_{n\to\infty} EX_{T_n} = EX_T$ が成立する． ∎

Theorem 4.14 修正

Suppose that $X = \{\, X_t \;;\quad 0 \leq t < \infty \,\}$ is a right-continuous submartingale of class DL with respect to the filtration $\{\mathscr{F}_t\}$, which satisfies the usual conitions, and let $[A]_{NAT}$ be of the Doob-Meyer decomposition of X. There exists a continuous version of A in $[A]_{NAT}$ if and only if X is regular.

証明.

第一段　A が連続であるとき，増大列 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{S}_a$ と $T := \lim_{n\to\infty} \in T_n\mathscr{S}_a$ に対し単調収束定理より

$$\lim_{n\to\infty} EA_{T_n} = E\lim_{n\to\infty} A_{T_n} = EA_T$$

が成立する．また任意抽出定理より

$$E(X_{T_n} - A_{T_n}) = E(X_T - A_T), \quad (\forall n \geq 1)$$

となるから

$$\lim_{n\to\infty} EX_{T_n} = \lim_{n\to\infty} E(X_{T_n} - A_{T_n}) + \lim_{n\to\infty} EA_{T_n} = (X_T - A_T) + EA_T = EX_T$$

が従う．

第二段　以降 X がレギュラーであるとする．このとき任意の有界な停止時刻の増大列 (T_n) と $T := \lim T_n$ に対し

$$\begin{aligned} EA_{T_n} &= EX_{T_n} - E(X_{T_n} - A_{T_n}) = EX_{T_n} - E(X_T - A_T) \\ &\longrightarrow EX_T - E(X_T - A_T) = EA_T \quad (n \longrightarrow \infty) \end{aligned} \tag{1.23}$$

が成立する．いま，任意に $a \in \mathbb{N}$ を取り

$$\Pi_n := \left\{ t_j^{(n)} \ ; \quad t_j^{(n)} = \frac{j}{2^n} a, \ j = 0, 1, \cdots, 2^n \right\}, \quad \Pi := \bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi_n$$

とおく．また任意に $\lambda \in \mathbb{N}$ を取り，各 $j = 0, 1, \cdots, 2^n$ に対し

$$Y_t^{(n),j} := E\left(\lambda \wedge A_{t_j^{(n)}} \,\middle|\, \mathscr{F}_t\right), \quad (\forall t \geq 0)$$

によりマルチンゲール $\left\{ Y_t^{(n),j}, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \leq t < \infty \right\}$ を定めれば，

$$[0, \infty) \ni t \longmapsto EY_t^{(n),j} = E\left(\lambda \wedge A_{t_j^{(n)}}\right)$$

と Theorem 3.13 より *RCLL* な修正 $\tilde{Y}^{(n),j}$ が存在する．このとき各 $t \geq 0$ で

$$\int_A \tilde{Y}_t^{(n),j} \, dP = \int_A \lambda \wedge A_{t_j^{(n)}} \, dP \leq \lambda P(A), \quad (\forall A \in \mathscr{F}_t)$$

となり，一方で各 $0 \leq t \leq t_j^{(n)}$ で

$$\int_A \lambda \wedge A_t \, dP \leq \int_A \lambda \wedge A_{t_j^{(n)}} \, dP = \int_A \tilde{Y}_t^{(n),j} \, dP$$

となるから

$$\begin{aligned} E_j &:= \left\{ \tilde{Y}_t^{(n),j} > \lambda \ ; \quad \exists t \geq 0 \right\} \cup \left\{ \lambda \wedge A_t > \tilde{Y}_t^{(n),j} \ ; \quad \exists t \in [0, t_j^{(n)}] \right\} \\ &= \left[\bigcup_{r \in [0,\infty) \cap \mathbb{Q}} \left\{ \tilde{Y}_r^{(n),j} > \lambda \right\} \right] \bigcup \left[\bigcup_{r \in [0, t_j^{(n)}] \cap \mathbb{Q}} \left\{ \lambda \wedge A_r > \tilde{Y}_r^{(n),j} \right\} \right], \\ E &:= \bigcup_{j=0}^{2^n} E_j \end{aligned}$$

で P-零集合が定まる．usual 条件より $E \in \mathscr{F}_0$ であるから

$$\left\{ Z_t^{(n),j} := \tilde{Y}_t^{(n),j} \mathbb{1}_{\Omega \setminus E}, \mathscr{F}_t \ ; \quad 0 \leq t < \infty \right\}$$

で定める $Y^{(n),j}$ のバージョンは

$$\lambda \wedge A_t(\omega) \leq Z_t^{(n),j}(\omega), \quad (\forall \omega \in \Omega \setminus E, \ \forall t \in [0, a]) \tag{1.24}$$

を満たす *RCLL* かつ有界なマルチンゲールとなる．ここで

$$\eta_t^{(n)} := \sum_{j=0}^{2^n - 1} Z_t^{(n),j} \mathbb{1}_{\left[t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)}\right)}(t) + (\lambda \wedge A_a) \mathbb{1}_{[a,\infty)}(t), \quad (t \geq 0)$$

とおけば，$\eta^{(n)}$ の右連続性，Corollary2.4，Problem2.5 及び usual 条件より

$$T_\epsilon^{(n)} := a \wedge \inf \left\{ t \geq 0 \ ; \quad \eta_t^{(n)} - (\lambda \wedge A_t) > \epsilon \right\}$$

は $\mathscr{S}_a$ に属する停止時刻となり，このとき

$$\varphi_n(t) \coloneqq \begin{cases} t_j^{(n)}, & t_j^{(n)} \leq t < t_{j+1}^{(n)},\ j = 0, 1, \cdots, 2^n - 1 \\ a, & t = a \end{cases}$$

を用いれば，任意抽出定理より

$$\begin{aligned} E\left(\eta_{T_\epsilon^{(n)}}\right) &= \sum_{j=0}^{2^n-1} \int_{\left\{t_j^{(n)} \leq T_\epsilon^{(n)} < t_{j+1}^{(n)}\right\}} Z_{T_\epsilon^{(n)}}^{(n),j}\, dP + \int_{\left\{T_\epsilon^{(n)} = a\right\}} \lambda \wedge A_a\, dP \\ &= \sum_{j=0}^{2^n-1} \int_{\left\{t_j^{(n)} \leq T_\epsilon^{(n)} < t_{j+1}^{(n)}\right\}} Z_{t_j^{(n)}}^{(n),j}\, dP + \int_{\left\{T_\epsilon^{(n)} = a\right\}} \lambda \wedge A_a\, dP \\ &= \sum_{j=0}^{2^n-1} \int_{\left\{t_j^{(n)} \leq T_\epsilon^{(n)} < t_{j+1}^{(n)}\right\}} \lambda \wedge A_{t_j^{(n)}}\, dP + \int_{\left\{T_\epsilon^{(n)} = a\right\}} \lambda \wedge A_a\, dP \\ &= \sum_{j=0}^{2^n-1} \int_{\left\{t_j^{(n)} \leq T_\epsilon^{(n)} < t_{j+1}^{(n)}\right\}} \lambda \wedge A_{\varphi_n\left(T_\epsilon^{(n)}\right)}\, dP + \int_{\left\{T_\epsilon^{(n)} = a\right\}} \lambda \wedge A_{\varphi_n\left(T_\epsilon^{(n)}\right)}\, dP \\ &= E\left(\lambda \wedge A_{\varphi_n\left(T_\epsilon^{(n)}\right)}\right) \end{aligned}$$

が得られる．また $\eta^n - (\lambda \wedge A)$ の右連続性より

$$T_\epsilon^{(n)}(\omega) < a \quad \Longrightarrow \quad \eta_{T_\epsilon^{(n)}}^{(n)}(\omega) - \left(\lambda \wedge A_{T_\epsilon^{(n)}}(\omega)\right) \geq \epsilon$$

となるから

$$E\left(\lambda \wedge A_{\varphi_n\left(T_\epsilon^{(n)}\right)} - \lambda \wedge A_{T_\epsilon^{(n)}}\right) = E\left(\eta_{T_\epsilon^{(n)}} - \lambda \wedge A_{T_\epsilon^{(n)}}\right) = E\, \mathbb{1}_{\left\{T_\epsilon^{(n)} < a\right\}}\left(\eta_{T_\epsilon^{(n)}} - \lambda \wedge A_{T_\epsilon^{(n)}}\right) \geq \epsilon P\left(T_\epsilon^{(n)} < a\right) \tag{1.25}$$

が従う．

第三段　$\left(\eta^{(n)}\right)_{n=1}^\infty$ は n に関して P-a.s. に減少していく．実際，任意の $t \in [0, a)$ に対し

$$t \in \left[t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)}\right)$$

を満たす $0 \leq j \leq 2^n - 1$ を取れば $t \in \left[t_{2j}^{(n+1)}, t_{2j+1}^{(n+1)}\right)$ 或は $t \in \left[t_{2j+1}^{(n+1)}, t_{2j+2}^{(n+1)}\right)$ となるから

$$\int_A \eta_t^{(n)}\, dP = \int_A \lambda \wedge A_{t_{j+1}^{(n)}}\, dP \geq \int_A \lambda \wedge A_{t_{2j+1}^{(n+1)}}\, dP = \int_A \eta_t^{(n+1)}\, dP, \quad (\forall A \in \mathscr{F}_t)$$

より $\eta_t^{(n)} \geq \eta_t^{(n+1)}$, a.s. P が従う．$\eta^{(n)}, \eta^{(n+1)}$ は右連続であるから

$$F_n \coloneqq \left\{\ \eta_t^{(n)} < \eta_t^{(n+1)}\ ;\quad \exists t \geq 0\ \right\} = \bigcup_{r \in [0,\infty) \cap \mathbb{Q}} \left\{\eta_r^{(n)} < \eta_r^{(n+1)}\right\}$$

で P-零集合が定まり，$F \coloneqq \bigcup_{n=1}^\infty E_n$ とおけば任意の $\omega \in \Omega \backslash F$ と $t \in [0, a]$ で $\left(\eta_t^{(n)}(\omega)\right)_{n=1}^\infty$ は減少し

$$T_\epsilon^{(1)}\mathbb{1}_{\Omega \backslash F} \leq T_\epsilon^{(2)}\mathbb{1}_{\Omega \backslash F} \leq \cdots \leq a \tag{1.26}$$

となる．usual 条件より $F \in \mathscr{F}_0$ であるから

$$\left\{T_\epsilon^{(n)}\mathbb{1}_{\Omega \backslash F} \leq t\right\} = \left\{T_\epsilon^{(n)} \leq t\right\} \cap (\Omega \backslash F) + F \in \mathscr{F}_t, \quad (\forall t \geq 0)$$

が成り立つので $T_\epsilon^{(n)}\mathbb{1}_{\Omega \backslash F} \in \mathscr{S}_a$ となり，単調増大性より

$$T_\epsilon \coloneqq \lim_{n \to \infty} T_\epsilon^{(n)}\mathbb{1}_{\Omega \backslash F}$$

と定めれば $T_\epsilon \in \mathscr{S}_a$ も満たされる．同様に $\left(\varphi_n\left(T_\epsilon^{(n)}\right)\right)_{n=1}^\infty$ も $\mathscr{S}_a$ の列で，$\Omega\backslash F$ 上で単調に増大して

$$T_\epsilon = \lim_{n\to\infty} \varphi_n\left(T_\epsilon^{(n)}\right) 1\!\!1_{\Omega\backslash F} \tag{1.27}$$

を満たす．実際任意の $t \geq 0$ に対し

$$\left\{\varphi_n\left(T_\epsilon^{(n)}\right) \leq t\right\} = \bigcup_{t_j^{(n)} \leq t} \left\{t_j^{(n)} \leq T_\epsilon^{(n)} < t_{j+1}^{(n)}\right\} \in \mathscr{F}_t$$

となるから $\varphi_n\left(T_\epsilon^{(n)}\right) \in \mathscr{S}_a$ が従い，また $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$, $(\forall n \geq 1)$ と (1.26) より

$$\varphi_n\left(T_\epsilon^{(n)}(\omega)\right) \leq \varphi_{n+1}\left(T_\epsilon^{(n)}(\omega)\right) \leq \varphi_{n+1}\left(T_\epsilon^{(n+1)}(\omega)\right), \quad (\forall \omega \in \Omega\backslash F)$$

となる．任意に $\delta > 0$ と $\omega \in \Omega\backslash F$ を取れば

$$T_\epsilon(\omega) - T_\epsilon^{(n)}(\omega) < \delta, \quad \frac{a}{2^n} < \delta, \quad (\forall n > N)$$

を満たす $N = N(\delta, \omega) \geq 1$ が存在するから

$$\left|T_\epsilon(\omega) - \varphi_n\left(T_\epsilon^{(n)}(\omega)\right)\right| \leq \left|T_\epsilon(\omega) - T_\epsilon^{(n)}(\omega)\right| + \left|T_\epsilon^{(n)}(\omega) - \varphi_n\left(T_\epsilon^{(n)}(\omega)\right)\right| < 2\delta, \quad (\forall n > N)$$

が従い (1.27) が出る．

第五段　任意の $\omega \in \Omega$ と $n \geq 1$ に対し

$$T_\epsilon^{(n)}(\omega) < a \quad \Longleftrightarrow \quad \sup_{0\leq t\leq a} \left\{\eta_t^{(n)}(\omega) - (\lambda \wedge A_t(\omega))\right\} > \epsilon$$

が満たされ，また (1.24) より $\Omega\backslash E$ の上で $\eta_t^{(n)} - (\lambda \wedge A_t) \geq 0$, $(\forall t \in [0,a])$ であるから，(1.23), (1.25) と併せて

$$\begin{aligned} P\left(\sup_{0\leq t\leq a} \left|\eta_t^{(n)} - (\lambda \wedge A_t)\right| > \epsilon\right) &= P\left(T_\epsilon^{(n)} < a\right) \\ &\leq \frac{1}{\epsilon} E\left(\lambda \wedge A_{\varphi_n\left(T_\epsilon^{(n)}\right)} - \lambda \wedge A_{T_\epsilon^{(n)}}\right) \longrightarrow E\left(\lambda \wedge A_{T_\epsilon} - \lambda \wedge A_{T_\epsilon}\right) = 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

が得られる．従って或る部分列 $(n_k)_{k=1}^\infty$ と P-零集合 G が存在して

$$\sup_{0\leq t\leq a} \left|\eta_t^{(n_k)}(\omega) - (\lambda \wedge A_t(\omega))\right| \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty), \quad (\forall \omega \in \Omega\backslash G) \tag{1.28}$$

が成立する．

第六段　A はナチュラルであり，$Z^{(n),j}$ は有界かつ $RCLL$ なマルチンゲールであるから

$$\begin{aligned} E\int_{\left(t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)}\right]} Z_s^{(n),j}\, dA_s &= E\int_{\left(0, t_{j+1}^{(n)}\right]} Z_s^{(n),j}\, dA_s - E\int_{\left(0, t_j^{(n)}\right]} Z_s^{(n),j}\, dA_s \\ &= E\int_{\left(0, t_{j+1}^{(n)}\right]} Z_{s-}^{(n),j}\, dA_s - E\int_{\left(0, t_j^{(n)}\right]} Z_{s-}^{(n),j}\, dA_s \\ &= E\int_{\left(t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)}\right]} Z_{s-}^{(n),j}\, dA_s \end{aligned}$$

が成立する．従って

$$\xi_t^{(n)} \coloneqq \sum_{j=0}^{2^n-1} Z_t^{(n),j} 1\!\!1_{\left(t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)}\right]}(t), \quad (t \geq 0)$$

とおけば

$$E\int_{(0,a]} \xi_s^{(n)}\, dA_s = \sum_{j=0}^{2^n-1} E\int_{\left(t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)}\right]} Z_s^{(n),j}\, dA_s = \sum_{j=0}^{2^n-1} E\int_{\left(t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)}\right]} Z_{s-}^{(n),j}\, dA_s = E\int_{(0,a]} \xi_{s-}^{(n)}\, dA_s$$

が成立する．一方で $t \notin \Pi$ で $\xi_t^{(n)} = \eta_t^{(n)}$, $(\forall n \geq 1)$ であるから (1.28) より

$$\sup_{t\in[0,a]\backslash\Pi} \left|\xi_t^{(n_k)}(\omega) - (\lambda \wedge A_t(\omega))\right| \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty), \quad (\forall \omega \in \Omega\backslash G)$$

が従い，これにより任意の $t \in (0,a]$ で

$$\sup_{t\in(0,a]} \left|\xi_{t-}^{(n_k)}(\omega) - (\lambda \wedge A_{t-}(\omega))\right| \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty), \quad (\forall \omega \in \Omega\backslash G)$$

も満たされる．$t \in \Pi$ なら或る $N = N(t)$ で $t \in \Pi_N$ となるから $\xi_t^{(n)} = \lambda \wedge A_t$, P-a.s., $(\forall n \geq N)$ となり

$$H_t := \bigcup_{n\geq N} \left\{\xi_t^{(n)} \neq \lambda \wedge A_t\right\}, \quad H := \bigcup_{t\in\Pi} H_t$$

により P-零集合 H を定めれば任意の $t \in [0,a]$ で

$$\lim_{k\to\infty} \xi_t^{(n_k)}(\omega) = \lambda \wedge A_t(\omega), \quad (\forall \omega \in \Omega\backslash(G \cup H))$$

となる．Lebesgue の収束定理より

$$E\int_{(0,a]} \lambda \wedge A_t\, dA_t = E\int_{(0,a]} \lambda \wedge A_{t-}\, dA_t$$

が得られ，A の単調非減少性より $A_{t-} \leq A_t$ であるから或る P-零集合 U_a が存在し，任意の $\omega \in \Omega\backslash U_a$ で

$$\int_{(0,a]} (\lambda \wedge A_t(\omega)) - (\lambda \wedge A_{t-}(\omega))\, dA_t(\omega) = 0$$

が成立し $(0,a] \ni t \longmapsto \lambda \wedge A_t(\omega)$ の連続性が出る．a の任意性より $V_\lambda := \bigcup_{a=1}^\infty U_a$ とおけば

$$(0,\infty) \ni t \longmapsto \lambda \wedge A_t(\omega), \quad (\forall \omega \in \Omega\backslash V_\lambda)$$

は連続となり，λ も任意であるから $V := \bigcup_{\lambda=1}^\infty V_\lambda$ として

$$(0,\infty) \ni t \longmapsto A_t(\omega), \quad (\forall \omega \in \Omega\backslash V)$$

は連続となる．$\tilde{A} := A 1\!\!1_{\Omega\backslash V} \in [A]_{NAT}$ が求める A のバージョンである． ■

1.5 Continuous, Square-Integrable Martingales

Problem 5.7

Show that $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is a bilinear form on $\mathscr{M}_2$, i.e., for any members X, Y, Z of $\mathscr{M}_2$ and real numbers α, β, we have

(i) $\langle \alpha X + \beta Y, Z \rangle = \alpha \langle X, Z \rangle + \beta \langle Y, Z \rangle$.

(ii) $\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle$.

(iii) $|\langle X, Y \rangle|^2 \leq \langle X \rangle \langle Y \rangle$.

(iv) For P-a.e. $\omega \in \Omega$,

$$\check{\xi}_t(\omega) - \check{\xi}_s(\omega) \leq \frac{1}{2}[\langle X \rangle_t(\omega) - \langle X \rangle_s(\omega) + \langle Y \rangle_t(\omega) - \langle Y \rangle_s(\omega)]; \quad 0 \leq s < t < \infty,$$

where $\check{\xi}_t$ denotes the total variation of $\check{\xi} := \langle X, Y \rangle$ on $[0, t]$.

証明.

(i) ナチュラルなプロセス $A^{(j)}, B^{(j)}, C^{(j)}$, $(j = 1, 2,)$ により

$$\langle \alpha X + \beta Y, Z \rangle = A^{(1)} - A^{(2)}, \quad \alpha \langle X, Z \rangle = B^{(1)} - B^{(2)}, \quad \beta \langle Y, Z \rangle = C^{(1)} - C^{(2)},$$

と表せるから

$$\langle \alpha X + \beta Y, Z \rangle - (\alpha \langle X, Z \rangle + \beta \langle Y, Z \rangle) = \left(A^{(1)} + B^{(2)} + C^{(2)}\right) - \left(A^{(2)} + B^{(1)} + C^{(1)}\right)$$

となり，P. 46 の補題より

$$\langle \alpha X + \beta Y, Z \rangle_t = \alpha \langle X, Z \rangle_t + \beta \langle Y, Z \rangle_t, \quad 0 \leq t < \infty, \quad \text{a.s. } P$$

が従う．

第 2 章

Brownian Motion

Lemma for Dynkin system theorem

集合 Ω の部分集合族 $\mathscr{D}$ が教科書本文中の Dynkin 族の定義 (i) と (ii) を満たしているとする．このとき，Dynkin 族の定義 (iii) は，$\mathscr{D}$ が可算直和で閉じていることと同値である．

証明．$\mathscr{D}$ が可算直和について閉じているとする．このとき単調増大列 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ を取り

$$B_1 := A_1, \quad B_n := A_n \backslash A_{n-1}, \quad (n \geq 2)$$

とおけば，Dynkin 族の定義 (ii) より $B_n \in \mathscr{D}$ $(n \geq 1)$ が満たされ

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathscr{D}$$

が成立する．逆に $\mathscr{D}$ が (iii) を満たしているとして，互いに素な集合列 $(B_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{D}$ を取る．$A^c = \Omega \backslash A$ と Dynkin 族の定義 (i)(ii) より，$A, B \in \mathscr{D}$ が $A \cap B = \emptyset$ を満たしていれば $A^c \cap B^c = A^c - B \in \mathscr{D}$ が成り立ち

$$B_1^c \cap B_2^c \cap \cdots \cap B_n^c = \left(\cdots\left(\left(B_1^c \cap B_2^c\right) \cap B_3^c\right) \cap \cdots \cap B_{n-1}^c\right) \cap B_n^c \in \mathscr{D}, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

が得られる．よって

$$D_n := \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega \backslash \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i^c\right), \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

により定める単調増大列 $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ は $\mathscr{D}$ に含まれ

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathscr{D}$$

が成立する． ∎

Dynkin system theorem

Let $\mathscr{C}$ be a collection of subsets of Ω which is closed under pairwise intersection. If $\mathscr{D}$ is a Dynkin system containing $\mathscr{C}$, then $\mathscr{D}$ also contains the σ-field $\sigma(\mathscr{C})$ generated by $\mathscr{C}$.

証明.　$\mathscr{C}$ を含む最小の Dynkin 族を $\delta(\mathscr{C})$ と書き，$\delta(\mathscr{C}) = \sigma(\mathscr{C})$ が成り立つことを示す.

第一段　$\delta(\mathscr{C})$ が交演算について閉であれば $\delta(\mathscr{C})$ は σ-加法族である．実際，

$$A^c = \Omega \backslash A$$

より $\delta(\mathscr{C})$ は補演算で閉じるから，交演算で閉じていれば，$A_n \in \delta(\mathscr{C})$ $(n = 1, 2, \cdots)$ に対し

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_{n-1}^c \cap A_n \in \delta(\mathscr{C})$$

が従い $\sigma(\mathscr{C}) \subset \delta(\mathscr{C}) \subset \mathscr{D}$ が得られる[*1]．

第二段　$\delta(\mathscr{C})$ が交演算について閉じていることを示す．いま，

$$\mathscr{D}_1 := \{\, B \in \delta(\mathscr{C}) \ ; \quad A \cap B \in \delta(\mathscr{C}),\ \forall A \in \mathscr{C} \,\}$$

により定める $\mathscr{D}_1$ は Dynkin 族であり $\mathscr{C}$ を含むから

$$\delta(\mathscr{C}) \subset \mathscr{D}_1$$

が成立する．従って

$$\mathscr{D}_2 := \{\, B \in \delta(\mathscr{C}) \ ; \quad A \cap B \in \delta(\mathscr{C}),\ \forall A \in \delta(\mathscr{C}) \,\}$$

により Dynkin 族 $\mathscr{D}_2$ を定めれば，$\mathscr{C} \subset \mathscr{D}_2$ が満たされ

$$\delta(\mathscr{C}) \subset \mathscr{D}_2$$

が得られる．よって $\delta(\mathscr{C})$ は交演算について閉じている．■

Problem 1.4

Let $X = \{\, X_t \ ; \quad 0 \leq t < \infty \,\}$ be a stochastic process for which $X_0, X_{t_1} - X_{t_0}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ are independent random variables, for every integer $n \geq 1$ and indices $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty$. Then for any fixed $0 \leq s < t < \infty$, the increment $X_t - X_s$ is independent of $\mathscr{F}_s^X$.

この主張の逆も成立する:

証明.　先ず任意の $s \leq t \leq r$ に対し $\sigma(X_t - X_s) \subset \mathscr{F}_r^X$ が成り立つ．実際，

$$\Phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \ni (x, y) \longmapsto x - y$$

の連続性と $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) = \mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ より，任意の $E \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$(X_t - X_s)^{-1}(E) = \left\{ (X_t, X_s) \in \Phi^{-1}(E) \right\} \in \sigma(X_s, X_t) \subset \mathscr{F}_r^X$$

が満たされる．よって任意に $A_0 \in \sigma(X_0)$, $A_i \in \sigma(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})$ を取れば，$X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ が $\mathscr{F}_{t_{n-1}}^X$ と独立であるから

$$\mathrm{P}(A_0 \cap A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathrm{P}(A_0 \cap A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})\, \mathrm{P}(A_n)$$

[*1] σ-加法族は Dynkin 族であるから，$\delta(\mathscr{C}) \subset \sigma(\mathscr{C})$ が成り立ち $\sigma(\mathscr{C}) = \delta(\mathscr{C})$ となる．

が成立する．帰納的に

$$\mathrm{P}(A_0 \cap A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathrm{P}(A_0)\,\mathrm{P}(A_1)\cdots\mathrm{P}(A_n)$$

が従い $X_0, X_{t_1} - X_{t_0}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ の独立性を得る． ∎

証明 (Problem 1.4).

第一段　Dynkin 族を次で定める:

$$\mathscr{D} := \{\, A \in \mathscr{F} \ ; \quad \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B),\ \forall B \in \sigma(X_t - X_s)\,\}.$$

いま，任意に $0 = s_0 < \cdots < s_n = s$ を取り固定し

$$\mathscr{A}_{s_0,\cdots,s_n} := \left\{ \bigcap_{i=0}^{n} A_i \ ; \quad A_0 \in \sigma(X_0),\ A_i \in \sigma(X_{s_i} - X_{s_j}),\ i = 1,\cdots,n \right\}$$

により乗法族を定めれば，仮定より $\sigma(X_{s_i} - X_{s_{i-1}})$ と $\sigma(X_t - X_s)$ が独立であるから

$$\mathscr{A}_{s_0,\cdots,s_n} \subset \mathscr{D}$$

が成立し，Dynkin 族定理により

$$\sigma(X_{s_0}, X_{s_1} - X_{s_0}, \cdots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}}) = \sigma\left[\mathscr{A}_{s_0,\cdots,s_n}\right] \subset \mathscr{D}$$

が従う．

第二段　$\sigma(X_{s_0}, X_{s_1} - X_{s_0}, \cdots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}})$ の全体が $\mathscr{F}_s^X$ を生成することを示す．先ず，(**??**) より

$$\bigcup_{\substack{n \geq 1 \\ s_0 < \cdots < s_n}} \sigma(X_{s_0}, X_{s_1} - X_{s_0}, \cdots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}}) \subset \mathscr{F}_s^X$$

が成立する．一方で，任意の $X_r^{-1}(E)$ $(\forall E \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d),\ 0 < r \leq s)$ について，

$$\Psi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \ni (x, y) \longmapsto x + y$$

で定める連続写像を用いれば

$$X_r^{-1}(E) = (X_r - X_0 + X_0)^{-1}(E) = \left\{(X_r - X_0, X_0) \in \Psi^{-1}(E)\right\}$$

となり，$X_r^{-1}(E) \in \sigma(X_0, X_r - X_0)$ が満たされ

$$\sigma(X_r) \subset \sigma(X_0, X_r - X_0) \subset \sigma(X_0, X_r - X_0, X_s - X_r)$$

が出る．$\sigma(X_0) \subset \sigma(X_0, X_s - X_0)$ も成り立ち

$$\bigcup_{0 \leq r \leq s} \sigma(X_r) \subset \bigcup_{\substack{n \geq 1 \\ s_0 < \cdots < s_n}} \sigma(X_{s_0}, X_{s_1} - X_{s_0}, \cdots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}})$$

が従うから，(**??**) と併せて

$$\mathscr{F}_s^X = \sigma\left[\bigcup_{\substack{n \geq 1 \\ s_0 < \cdots < s_n}} \sigma(X_{s_0}, X_{s_1} - X_{s_0}, \cdots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}}) \right]$$

が得られる．

第三段　任意の $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = s$ に対し，(**??**) と (**??**) より

$$\sigma(X_{s_0}, X_{s_1} - X_{s_0}, \cdots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}}) = \sigma(X_{s_0}, X_{s_1}, \cdots, X_{s_n})$$

が成り立つ．

第四段　二つの節点 $0 = s_0 < \cdots < s_n = s$ と $0 = r_0 < \cdots < r_m = s$ の合併を $0 = u_0 < \cdots < u_k = s$ と書けば

$$\sigma(X_{s_0}, \cdots, X_{s_n}) \cup \sigma(X_{r_0}, \cdots, X_{r_m}) \subset \sigma(X_{u_0}, \cdots, X_{u_k})$$

が成り立つから

$$\bigcup_{\substack{n \geq 1 \\ s_0 < \cdots < s_n}} \sigma(X_{s_0}, X_{s_1}, \cdots, X_{s_n})$$

は交演算で閉じている．従って (**??**)，(**??**)，(**??**) 及び Dynkin 族定理により

$$\mathscr{F}_s^X = \sigma\left[\bigcup_{\substack{n \geq 1 \\ s_0 < \cdots < s_n}} \sigma(X_{s_0}, X_{s_1} - X_{s_0}, \cdots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}})\right] = \sigma\left[\bigcup_{\substack{n \geq 1 \\ s_0 < \cdots < s_n}} \sigma(X_{s_0}, X_{s_1}, \cdots, X_{s_n})\right] \subset \mathscr{D}$$

が従い定理の主張を得る．■

2.1　The Consistency Theorem

Karatzas-Shreve より Bogachev の Measure Theory に載っている Kolmogorov の拡張定理の方が洗練された簡潔な証明になっているので頭に入りやすい．

定義 2.1.1 (K-正則).　S を位相空間とし，P を $(S, \mathscr{B}(S))$ 上の確率測度とする．$A \in \mathscr{B}(S)$ が P に関して K-正則であるとは，任意の $\epsilon > 0$ に対し或るコンパクト集合 $K \subset A$ が存在して

$$P(A - K) < \epsilon$$

が満たされることをいう．任意の $A \in \mathscr{B}(S)$ が P に関して K-正則であるとき，P は K-正則であるという．

完備可分距離空間上の Borel 確率測度の正則性

(S, d) を完備可分距離空間とするとき，$(S, \mathscr{B}(S))$ 上の任意の Borel 確率測度 P は次の意味で正則である:

$$P(A) = \inf\{\, P(G) \ ; \quad A \subset G,\ G \text{ は開集合}\,\} = \sup\{\, P(K) \ ; \quad K \subset A,\ K \text{ はコンパクト}\,\}, \quad (\forall A \in \mathscr{B}(S)).$$

証明.

第一段　S が P に関して K-正則であることを示す．S の可分性により稠密な部分集合 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する．

$$B_n^k := \left\{\, x \in S \ ; \quad d(x, x_n) \leq \frac{1}{k} \,\right\}, \quad (n, k = 1, 2, \cdots)$$

とおけば，任意の k に対して

$$P\left(S - \bigcup_{n=1}^{N} B_n^k\right) \longrightarrow 0, \quad (N \longrightarrow \infty)$$

が満たされる．いま，任意に $\epsilon > 0$ を取れば各 k に対し或る $N_k \in \mathbb{N}$ が存在して

$$P\left(S - \bigcup_{n=1}^{N_k} B_n^k\right) < \frac{\epsilon}{2^{k+1}}$$

が成立し，

$$K := \bigcap_{k=1}^{\infty} \left[\bigcup_{n=1}^{N_k} B_n^k \right]$$

により K を定めれば，K は閉集合の積であるから閉，すなわち完備である．また

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{N_k} B_n^k, \quad (\forall k = 1, 2, \cdots)$$

より K は全有界部分集合である．K は相対距離に関して完備かつ全有界であるから相対位相に関してコンパクトであり，従って S のコンパクト部分集合である．そして次が成立する:

$$P(S - K) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \left[S - \bigcup_{n=1}^{N_k} B_n^k \right]\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P\left(S - \bigcup_{n=1}^{N_k} B_n^k\right) < \epsilon.$$

第二段　任意の $A \in \mathscr{B}(S)$ と $\epsilon > 0$ に対して，或る閉集合 F 及び開集合 G が存在して

$$F \subset A \subset G, \quad P(G - F) < \epsilon$$

を満たすことを示す．

$$\mathscr{B} := \{ A \in \mathscr{B}(S) \ ; \quad \text{任意の } \epsilon \text{ に対し上式を満たす開集合と閉集合が存在する．} \}$$

とおけば，$\mathscr{B}$ は $\mathscr{O}(S)$ を含む σ-加法族である．実際，任意の開集合 $G \neq \emptyset$ に対し

$$F_n := \left\{ x \in S \ ; \quad d(x, G^c) \geq \frac{1}{n} \right\}, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

により閉集合系 $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ を定めれば $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = G$ が成り立つから

$$\mathscr{O}(S) \subset \mathscr{B}$$

が従う．また前段の結果より $S \in \mathscr{B}$ となり，かつ

$$F \subset A \subset G \quad \Rightarrow \quad G^c \subset A^c \subset F^c$$

より $\mathscr{B}$ は補演算で閉じている．更に $A_n \in \mathscr{B}$, $(n = 1, 2, \cdots)$ を取れば，任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$F_n \subset A_n \subset G_n, \quad P(G_n - F_n) < \frac{\epsilon}{2^{n+1}}$$

を満たす閉集合 F_n と開集合 G_n が存在し，

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n - \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \leq P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n - F_n)\right) < \epsilon$$

が成り立つから十分大きな $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n - \bigcup_{n=1}^{N} F_n\right) < \epsilon$$

となる．$\bigcup_{n=1}^{N} F_n$ は閉集合であり $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ は開集合であるから $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{B}$ が従う．

第三段　任意の $A \in \mathscr{B}(S)$ と $\epsilon > 0$ に対し，或る閉集合 F と開集合 G 及びコンパクト集合 K が存在して

$$F \subset A \subset G, \quad P(G - F) < \frac{\epsilon}{2}, \quad P(S - K) < \frac{\epsilon}{2}$$

を満たす．特に $F \cap K$ はコンパクトであり，このとき $F \cap K \subset A \subset G$ かつ

$$P(G - F \cap K) \leq P(G - F) + P(G - K) \leq P(G - F) + P(S - K) < \epsilon$$

が成立する． ∎

T を空でない集合とし，任意の $t \in T$ に対して可測空間 $(\Omega_t, \mathscr{B}_t)$ が定まっているする．このとき任意の空でない有限部分集合 $\Lambda \subset T$ に対して

$$\Omega_\Lambda \coloneqq \prod_{t \in \Lambda} \Omega_t, \quad \mathscr{B}_\Lambda \coloneqq \bigotimes_{t \in \Lambda} \mathscr{B}_t$$

により可測空間 $(\Omega_\Lambda, \mathscr{B}_\Lambda)$ を定める．ただし $\Lambda = \{t\}$ の場合は $\Omega_{\{t\}} = \Omega_t$, $\mathscr{B}_{\{t\}} = \mathscr{B}_t$ とする．また

$$\Omega \coloneqq \prod_{t \in T} \Omega_t, \quad \mathscr{B}_\Lambda \coloneqq \bigotimes_{t \in T} \mathscr{B}_t$$

とおく．任意の部分集合 $\Lambda \subset \Lambda'$ に対し，$\Omega_{\Lambda'}$ から Ω_Λ への射影を $\pi_{\Lambda',\Lambda}$ と書き，特に $\pi_{T,\Lambda}$ を π_Λ と書く．

Kolmogorov の拡張定理

任意の有限部分集合 $\Lambda \subset T$ について，$(\Omega_\Lambda, \mathscr{B}_\Lambda)$ 上に確率測度 P_Λ が定まっていて，確率測度の族 $(P_\Lambda)_{\Lambda \subset T:\text{finite}}$ が次の整合性条件を満たしていると仮定する:

$$P_{\Lambda'} \circ \pi_{\Lambda',\Lambda}^{-1} = P_\Lambda, \quad (\Lambda \subset \Lambda').$$

このとき，任意の $t \in T$ に対し近似的コンパクトクラス $\mathcal{K}_t \subset \mathscr{B}_t$ が存在するなら，$(\Omega, \mathscr{B})$ 上に次を満たす確率測度 P がただ一つ存在する:

$$P \circ \pi_\Lambda^{-1} = P_\Lambda, \quad (\forall \Lambda : \text{有限}).$$

証明.

第一段　$\mathscr{B}$ を生成する加法族を

$$\mathscr{R} \coloneqq \left\{ \pi_\Lambda^{-1}(B) \ ; \quad B \in \mathscr{B}_\Lambda,\ \Lambda \subset T : \text{有限集合} \right\}$$

とおき，$\mathscr{R}$ 上の有限加法的測度 μ を

$$\mu\left(\pi_\Lambda^{-1}(B)\right) \coloneqq P_\Lambda(B), \quad (\forall \pi_\Lambda^{-1}(B) \in \mathscr{R})$$

により定める．実際この μ は well-defined であり加法性を持つ．

第二段　μ が well-defined であることを示す．

$$\pi_{\Lambda}^{-1}(B) = \pi_{\Lambda'}^{-1}(B')$$

であるとき，$\Lambda'' \coloneqq \Lambda \cup \Lambda'$ とおけば

$$\pi_{\Lambda''}^{-1}\left(\pi_{\Lambda'',\Lambda}^{-1}(B)\right) = \pi_{\Lambda}^{-1}(B) = \pi_{\Lambda'}^{-1}(B') = \pi_{\Lambda''}^{-1}\left(\pi_{\Lambda'',\Lambda'}^{-1}(B')\right)$$

が成り立つから $\pi_{\Lambda'',\Lambda}^{-1}(B) = \pi_{\Lambda'',\Lambda'}^{-1}(B')$ が従い (全射の性質)，整合性条件より

$$P_{\Lambda}(B) = P_{\Lambda''} \circ \pi_{\Lambda'',\Lambda}^{-1}(B) = P_{\Lambda''} \circ \pi_{\Lambda'',\Lambda'}^{-1}(B') = P_{\Lambda'}(B')$$

が満たされ $\mu(\pi_{\Lambda}^{-1}(B))$ の一意性を得る．

第三段　μ の加法性を示す．

$$\pi_{\Lambda_1}^{-1}(B_1) \cap \pi_{\Lambda_2}^{-1}(B_2) = \emptyset$$

であるとき，$\Lambda_3 \coloneqq \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ とおけば

$$\emptyset = \pi_{\Lambda_3}^{-1}\left(\pi_{\Lambda_3,\Lambda_1}^{-1}(B_1)\right) \cap \pi_{\Lambda_3}\left(\pi_{\Lambda_3,\Lambda_2}^{-1}(B_2)\right) = \pi_{\Lambda_3}^{-1}\left(\pi_{\Lambda_3,\Lambda_1}^{-1}(B_1) \cap \pi_{\Lambda_3,\Lambda_2}^{-1}(B_2)\right)$$

となるから $\pi_{\Lambda_3,\Lambda_1}^{-1}(B_1) \cap \pi_{\Lambda_3,\Lambda_2}^{-1}(B_2) = \emptyset$ が従い (全射の性質)，

$$\begin{aligned}
\mu\left(\pi_{\Lambda_1}^{-1}(B_1) \cup \pi_{\Lambda_2}^{-1}(B_2)\right) &= \mu\left[\pi_{\Lambda_3}^{-1}\left(\pi_{\Lambda_3,\Lambda_1}^{-1}(B_1)\right) \cup \pi_{\Lambda_3}\left(\pi_{\Lambda_3,\Lambda_2}^{-1}(B_2)\right)\right] \\
&= \mu\left[\pi_{\Lambda_3}^{-1}\left(\pi_{\Lambda_3,\Lambda_1}^{-1}(B_1) \cup \pi_{\Lambda_3,\Lambda_2}^{-1}(B_2)\right)\right] \\
&= P_{\Lambda_3}\left(\pi_{\Lambda_3,\Lambda_1}^{-1}(B_1) \cup \pi_{\Lambda_3,\Lambda_2}^{-1}(B_2)\right) \\
&= P_{\Lambda_3}\left(\pi_{\Lambda_3,\Lambda_1}^{-1}(B_1)\right) + P_{\Lambda_3}\left(\pi_{\Lambda_3,\Lambda_2}^{-1}(B_2)\right) \\
&= \mu\left(\pi_{\Lambda_1}^{-1}(B_1)\right) + \mu\left(\pi_{\Lambda_2}^{-1}(B_2)\right)
\end{aligned}$$

が成立する．

2.2　The Kolmogorov-Čentsov Theorem

Exercise 2.7

The only $\mathscr{B}((\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)})$-measurable set contained in $C[0,\infty)^d$ is the empty set.

証明.

第一段　$\mathscr{B}((\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)}) = \sigma(B_t;\ 0 \leq t < \infty)$ が成り立つことを示す．先ず，任意の $C \in \mathscr{C}$ は

$$\begin{aligned}
C &= \left\{\ \omega \in (\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)}\ ;\quad (\omega(t_1), \cdots, \omega(t_n)) \in A\ \right\} \\
&= \left\{\ \omega \in (\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)}\ ;\quad (B_{t_1}(\omega), \cdots, B_{t_n}(\omega)) \in A\ \right\}, \quad (A \in \mathscr{B}((\mathbb{R}^d)^n))
\end{aligned}$$

の形で表されるから $\mathscr{C} \subset \sigma(B_t;\ 0 \leq t < \infty)$ が従い $\mathscr{B}((\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)}) \subset \sigma(B_t;\ 0 \leq t < \infty)$ を得る．逆に

$$\sigma(B_t) \subset \mathscr{C}, \quad (\forall t \geq 0)$$

より $\mathscr{B}((\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)}) \supset \sigma(B_t;\ 0 \leq t < \infty)$ も成立し $\mathscr{B}((\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)}) = \sigma(B_t;\ 0 \leq t < \infty)$ が出る．

第二段　高々可算集合 $S = \{t_1, t_2, \cdots\} \subset [0,\infty)$ に対して

$$\mathcal{E}_S := \left\{ \left\{ \omega \in (\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)} \ ; \quad (\omega(t_1), \omega(t_2), \cdots) \in A \right\} \ ; \quad A \in \mathscr{B}((\mathbb{R}^d)^{\#S}) \right\}$$

とおけば[*2]，座標過程 B は $(\omega(t_1), \omega(t_2), \cdots) = (B_{t_1}(\omega), B_{t_2}(\omega), \cdots)$ を満たすから

$$\mathcal{E}_S = \left\{ \{(B_{t_1}, B_{t_2}, \cdots) \in A\} \ ; \quad A \in \mathscr{B}((\mathbb{R}^d)^{\#S}) \right\} =: \mathcal{F}_S^B$$

が成立する．従って第一章の Lemma3 for Exercise 1.8 と前段の結果より

$$\mathscr{B}((\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)}) = \sigma(B_t;\ 0 \leq t < \infty) = \mathcal{F}^B_{[0,\infty)} = \bigcup_{S \subset [0,\infty):\textit{at most countable}} \mathcal{F}^B_S$$
$$= \bigcup_{S \subset [0,\infty):\textit{at most countable}} \mathcal{E}_S$$

を得る．すなわち，$\mathscr{B}((\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)})$ の任意の元は $\left\{ \omega \in (\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)} \ ; \quad (\omega(t_1), \omega(t_2), \cdots) \in A \right\}$ の形で表現され，$A \neq \emptyset$ ならば $\left\{ \omega \in (\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)} \ ; \quad (\omega(t_1), \omega(t_2), \cdots) \in A \right\} \not\subset C[0,\infty)^d$ となり主張が従う． ∎

Theorem 2.8 の主張は次のように変更するべきである:

Suppose that a process $X = \{ X_t \ ; \quad 0 \leq t \leq T \}$ on a probability space $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ satisfies the condition

$$E|X_t - X_s|^\alpha \leq C|t-s|^{1+\beta}, \quad 0 \leq s, t \leq T,$$

for some positive constants α,β, and C. Then there exists a continuous modification $\tilde{X} = \left\{ \tilde{X}_t \ ; \quad 0 \leq t \leq T \right\}$ of X, which is locally Hölder-continuous with exponent γ for every $\gamma \in (0, \beta/\alpha)$. More precisely, for every $\gamma \in (0,\beta/\alpha)$,

$$\sup_{\substack{0<|t-s|<h(\omega) \\ s,t\in[0,T]}} \frac{\left|\tilde{X}_t(\omega) - \tilde{X}_s(\omega)\right|}{|t-s|^\gamma} \leq \frac{2}{1-2^{-\gamma}}, \quad \forall \omega \in \Omega^*,$$

for some $\Omega^* \in \mathscr{F}$ with $P(\Omega^*) = 1$ and positive random variable h, where Ω^* and h depend on γ.

なぜならば，式 (2.8) において P の中身が Ω^* に一致するかどうかわからないためである．可測集合でなければ P で測ることはできない．ただし今の場合は $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ が完備確率空間ならば式 (2.8) の表記で問題ない．

Theorem 2.8 memo

証明中の式 (2.10) 直後の “where $n^*(\omega)$ is a positive, integer-valued random variable” について．

証明． $\mathbb{N} := \{1, 2, \cdots\}$ とおき，$\mathbb{N}$ の冪集合を $2^{\mathbb{N}}$ で表せば，$(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$ は可測空間となる．示せばよいのは n^* の $\mathscr{F}/2^{\mathbb{N}}$-可測性である．ただし，$n^*$ は証明文中において well-defined でないため，明確な意味を持たせる必要がある．

$$A_0 := \Omega, \quad A_n := \left\{ \omega \in \Omega \ ; \quad \max_{1 \leq k \leq 2^n} \left| X_{k/2^n}(\omega) - X_{(k-1)/2^n}(\omega) \right| \geq 2^{-\gamma n} \right\}, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

とおくとき，Ω^* は

$$\Omega^* := \bigcup_{\ell=1}^\infty \bigcap_{n=\ell}^\infty A_n^c$$

[*2] S が可算無限なら $(\mathbb{R}^d)^{\#S} = \mathbb{R}^\infty$.

により定まる集合である．任意の $\omega \in \Omega^*$ に対して或る $\ell \geq 1$ が存在し，

$$\max_{1 \leq k \leq 2^n} \left| X_{k/2^n}(\omega) - X_{(k-1)/2^n}(\omega) \right| < 2^{-\gamma n}, \quad (\forall n \geq \ell)$$

を満たす．このような ℓ のうち最小なものを $n^*(\omega)$ と定めれば

$$n^{*-1}(\ell) = \left\{ \bigcap_{n=\ell}^{\infty} A_n^c \right\} \cap \left\{ \bigcap_{n=\ell-1}^{\infty} A_n^c \right\}^c, \quad (\ell = 1, 2, \cdots)$$

が成立し n^* の $\mathscr{F}/2^{\mathbb{N}}$-可測性が従う． ∎

確率変数 h について，厳密には

$$h(\omega) := \begin{cases} 2^{-n^*(\omega)}, & (\omega \in \Omega^*), \\ 0, & (\omega \in \Omega \backslash \Omega^*) \end{cases}$$

とおけばよい．

Theorem 2.8 memo

2.3 The Space $C[0, \infty)$, Weak Convergence, and the Wiener Measure

Problem 4.1

Show that ρ defined by (4.1) is a metric on $C[0, \infty)^d$ and, under ρ, $C[0, \infty)^d$ is a complete, separable metric space.

以下，$C[0, \infty)^d$ には ρ により広義一様収束位相を導入する．

証明． 付録の定理**??**により従う． ∎

Problem 4.2

Let $\mathscr{C}(\mathscr{C}_t)$ be the collection of finite-dimensional cylinder sets of the form (2.1); i.e.,

$$C = \left\{ \omega \in C[0, \infty)^d \;\; ; \quad (\omega(t_1), \cdots, \omega(t_n)) \in A \right\}; \quad n \geq 1, \; A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n),$$

where, for all $i = 1, \cdots, n$, $t_i \in [0, \infty)$ (respectively, $t_i \in [0, t]$). Denote by $\mathscr{G}(\mathscr{G}_t)$ the smallest σ-field containing $\mathscr{C}(\mathscr{C}_t)$. Show that $\mathscr{G} = \mathscr{B}(C[0, \infty)^d)$, the Borel σ-field generated by the open sets in $C[0, \infty)^d$, and that $\mathscr{G}_t = \varphi_t^{-1}\left(\mathscr{B}(C[0, \infty)^d) \right) =: \mathscr{B}_t\left(C[0, \infty)^d \right)$, where $\varphi_t : C[0, \infty)^d \longrightarrow C[0, \infty)^d$ is the mapping $(\varphi_t \omega)(s) = \omega(t \wedge s)$; $0 \leq s < \infty$.

証明．

第一段　$w_0 \in C[0, \infty)^d$ とする．任意に $w \in C[0, \infty)^d$ を取れば，w の連続性により $d(w_0, w)$ の各項について

$$\sup_{t \leq n} |w_0(t) - w(t)| = \sup_{r \in [0, n] \cap \mathbb{Q}} |w_0(r) - w(r)| \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

とできる．いま，任意に実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ を取れば

$$\left\{ w \in C[0,\infty)^d \ ; \quad \sup_{r \in [0,n] \cap \mathbb{Q}} |w_0(r) - w(r)| \leq \alpha \right\} = \bigcap_{r \in [0,n] \cap \mathbb{Q}} \left\{ w \in C[0,\infty)^d \ ; \quad |w_0(r) - w(r)| \leq \alpha \right\}$$

が成立し，右辺の各集合は $\mathscr{C}$ に属するから 左辺 $\in \sigma[\mathscr{C}]$ となる．従って

$$\psi_n : C[0,\infty)^d \ni w \longmapsto \sup_{r \in [0,n] \cap \mathbb{Q}} |w_0(r) - w(r)| \in \mathbb{R}, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

で定める ψ_n は可測 $\sigma[\mathscr{C}] / \mathscr{B}(\mathbb{R})$ である．$x \longmapsto x \wedge 1$ の連続性より $\psi_n \wedge 1$ も $\sigma[\mathscr{C}] / \mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測性を持ち，

$$d(w_0, w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} (\psi_n(w) \wedge 1)$$

により $C[0,\infty)^d \ni w \longmapsto d(w_0, w) \in \mathbb{R}$ の $\sigma[\mathscr{C}] / \mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測性が出るから，任意の $\epsilon > 0$ に対する球について

$$\left\{ w \in C[0,\infty)^d \ ; \quad d(w_0, w) < \epsilon \right\} \in \sigma[\mathscr{C}]$$

が成り立つ．$C[0,\infty)^d$ は第二可算公理を満たし，可算基底は上式の形の球で構成されるから，$\mathscr{O}(C[0,\infty)^d) \subset \sigma[\mathscr{C}]$ が従い $\mathscr{B}(C[0,\infty)^d) \subset \sigma[\mathscr{C}]$ を得る．次に逆の包含関係を示す．いま任意に $n \in \mathbb{Z}_+$ と $t_1 < \cdots < t_n$ を選んで

$$\phi : C[0,\infty)^d \ni w \longmapsto (w(t_1), \cdots, w(t_n)) \in (\mathbb{R}^d)^n$$

で定める写像は連続である．実際，任意の一点 w_0 での連続性を考えると，任意の $\epsilon > 0$ に対して $t_n \leq N$ を満たす $N \in \mathbb{N}$ を取れば，$d(w_0, w) < \epsilon/(n2^N)$ ならば $\sum_{i=1}^n |w_0(t_i) - w(t_i)| < \epsilon$ が成り立つ．よって ϕ は w_0 で連続であり

$$\mathscr{B}((\mathbb{R}^d)^n) \subset \left\{ A \in \mathscr{B}((\mathbb{R}^d)^n) \ ; \quad \phi^{-1}(A) \in \mathscr{B}(C[0,\infty)^d) \right\}$$

が出る．任意の $C \in \mathscr{C}$ は，$n \in \mathbb{N}$ と時点 $t_1 < \cdots < t_n$ によって決まる写像 ϕ によって $C = \phi^{-1}(B)$ $(\exists B \in \mathscr{B}((\mathbb{R}^d)^n))$ と表現できるから，$\mathscr{C} \subset \mathscr{B}(C[0,\infty)^d)$ が成り立ち $\sigma[\mathscr{C}] \subset \mathscr{B}(C[0,\infty)^d)$ が得られる．

第二段　$t \geq 0$ とする．$C[0,\infty)^d$ の位相を $\mathscr{O}(C[0,\infty)^d)$ と書けば

$$\varphi_t^{-1}\left(\mathscr{B}(C[0,\infty)^d)\right) = \sigma\left[\left\{ \varphi_t^{-1}(O) \ ; \quad O \in \mathscr{O}(C[0,\infty)^d) \right\}\right]$$

が成り立つ．任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ と $r \geq 0$ に対して

$$\begin{aligned} &\left\{ w \in C[0,\infty)^d \ ; \quad |w_0(r) - (\varphi_t w)(r)| \leq \alpha \right\} \\ &\quad = \begin{cases} \left\{ w \in C[0,\infty)^d \ ; \quad |w_0(r) - (\varphi_t w)(r)| \leq \alpha \right\}, & (r \leq t), \\ \left\{ w \in C[0,\infty)^d \ ; \quad |w_0(r) - (\varphi_t w)(t)| \leq \alpha \right\}, & (r > t), \end{cases} \in \mathscr{C}_t \end{aligned}$$

となるから

$$\psi_n^t : C[0,\infty)^d \ni w \longmapsto \sup_{r \in [0,n] \cap \mathbb{Q}} |w_0(r) - (\varphi_t w)(r)| \in \mathbb{R}, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

で定める ψ_n^t は可測 $\sigma[\mathscr{C}_t] / \mathscr{B}(\mathbb{R})$ である．$x \longmapsto x \wedge 1$ の連続性より $\psi_n^t \wedge 1$ も $\sigma[\mathscr{C}_t] / \mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測性を持ち，

$$d(w_0, \varphi_t w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\psi_n^t(w) \wedge 1\right)$$

により $C[0,\infty)^d \ni w \longmapsto d(w_0, \varphi_t w) \in \mathbb{R}$ の $\sigma[\mathscr{C}_t] / \mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測性が出るから，任意の $\epsilon > 0$ に対する球について

$$\left\{ w \in C[0,\infty)^d \ ; \quad d(w_0, \varphi_t w) < \epsilon \right\} \in \sigma[\mathscr{C}_t]$$

が成り立つ．特に

$$\varphi_t^{-1}\left(\left\{\ w \in C[0,\infty)^d\ ;\quad d(w_0, w) < \epsilon\ \right\}\right) = \left\{\ w \in C[0,\infty)^d\ ;\quad d(w_0, \varphi_t w) < \epsilon\ \right\}$$

が満たされ，$C[0,\infty)^d$ の第二可算性より

$$\varphi_t^{-1}(O) \in \sigma[\mathscr{C}_t], \quad (\forall O \in \mathscr{O}(C[0,\infty)^d))$$

が従う．ゆえに $\varphi_t^{-1}\left(\mathscr{B}(C[0,\infty)^d)\right) \subset \sigma[\mathscr{C}_t]$ となる． ∎

連続関数の空間に値を取る確率変数

$\omega \in \Omega$ に $\mathbb{R}^d$ 値連続確率過程 X のパスを対応させる写像

$$X_\bullet : \Omega \ni \omega \longmapsto (t \longmapsto X_t(\omega)), \quad (t \geq 0)$$

は可測 $\mathcal{F}/\mathscr{B}(C[0,\infty)^d)$ である．

証明． 任意に $C \in \mathscr{C}$ を取れば $C = \left\{\ w \in C[0,\infty)^d\ ;\quad (w(t_1), \cdots, w(t_n)) \in B\ \right\}$, $(B \in \mathscr{B}((\mathbb{R}^d)^n))$ と表されるから

$$\{\ \omega \in \Omega\ ;\quad X_\bullet(\omega) \in C\ \} = \{\ \omega \in \Omega\ ;\quad (X_{t_1}(\omega), \cdots, X_{t_n}(\omega)) \in B\ \}$$

が成り立つ．右辺は $\mathcal{F}$ に属するから

$$\mathscr{C} \subset \left\{\ C \in \sigma[\mathscr{C}]\ ;\quad (X_\bullet)^{-1}(C) \in \mathcal{F}\ \right\}$$

が従い，右辺は σ 加法族であるから $X_\bullet$ の $\mathcal{F}/\sigma[\mathscr{C}]$-可測性，つまり $\mathcal{F}/\mathscr{B}(C[0,\infty)^d)$-可測性が出る． ∎

2.4　Weak Convergence

なぜ弱収束と呼ぶか．いま，X を局所コンパクト Hausdorff 空間として

$$C_0(X) := \left\{\ f : X \longrightarrow \mathbb{C}\ ;\quad \text{連続かつ，任意の } \epsilon > 0 \text{ に対し } \overline{\{\ x \in X\ ;\quad |f(x)| \geq \epsilon\ \}} \text{ がコンパクト}\ \right\}$$

とおく．この $C_0(X)$ はノルム $\|f\|_{C_0(X)} := \sup_{x \in X}|f(x)|$ により複素 Banach 空間となる．また $(X, \mathscr{B}(X))$ 上の複素測度 μ について，その総変動 $|\mu|$ が正則測度であるとき μ は正則であるという．X 上の正則複素測度の全体を $RM(X)$ と書き，総変動ノルム $\|\mu\|_{RM(X)} := |\mu|(X)$ によりノルム位相を導入する．任意の複素測度 μ に対し

$$\Phi_\mu(f) := \int_X f(x)\,\mu(dx)$$

により $C_0(X)$ 上の有界線型汎関数 Φ_μ が定まる．

定理 2.4.1 (Riesz の表現定理). X を局所コンパクト Hausdorff 空間とする．$C_0(X)$ に $\|\cdot\|_{C_0(X)}$ で位相を入れるとき，共役空間 $C_0(X)^*$ と書く．このとき $C_0(X)^*$ と $RM(X)$ は

$$\Phi : RM(X) \ni \mu \longrightarrow \Phi_\mu \in C_0(X)$$

で定める対応関係 Φ により Banach 空間として等長同型となる．

$C_0(X)^*$ に汎弱位相を入れるとき，汎関数列 $\left(\Phi_{\mu_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ が Φ_μ に汎弱収束することと

$$\Phi_{\mu_n}(f) \longrightarrow \Phi_\mu(f)\ (n \longrightarrow \infty), \quad (\forall f \in C_0(X))$$

は同値になる．$C_0(X)^*$ の汎弱位相の Φ による逆像位相を $RM(X)$ の弱位相と定めれば，Φ は弱位相に関して位相同型となる．このとき，$(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ が μ に弱収束することは $\left(\Phi_{\mu_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ が Φ_μ に汎弱収束することと同値になり，すなわち

$$\int_X f(x)\, \mu_n(dx) \longrightarrow \int_X f(x)\, \mu(dx)\ (n \longrightarrow \infty), \quad (\forall f \in C_0(X))$$

と同値になる．X 上の正則な確率測度の全体を $\mathscr{P}(X)$ と書けば $\mathscr{P}(X) \subset RM(X)$ となり，正則確率測度の列 $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ が $P \in \mathscr{P}(X)$ に弱収束することは

$$\int_X f(x)\, P_n(dx) \longrightarrow \int_X f(x)\, P(dx)\ (n \longrightarrow \infty), \quad (\forall f \in C_0(X))$$

と同値になる．

Definition 4.3

It follows, in particular, that the weak limit P is a probability measure, and that it is unique.

証明．　$f \equiv 1$ として

$$P(S) = \lim_{n\to\infty} P_n(S) = 1$$

が従うから P は確率測度である．また任意の有界連続関数 $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ に対し

$$\int_S f\, dP = \int_S f\, dQ$$

が成り立つとき，任意の閉集合 $A \subset S$ に対して

$$f_k(s) := \frac{1}{1 + kd(s, A)}, \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

と定めれば $\lim_{k\to\infty} f_k = \mathbb{1}_A$(各点収束) が満たされるから，Lebesgue の収束定理より

$$P(A) = \lim_{k\to\infty} \int_S f_k\, dP = \lim_{k\to\infty} \int_S f_k\, dQ = Q(A)$$

となり，測度の一致の定理より $P = Q$ が得られる．すなわち弱極限は一意である．　■

lemma: change of variables for expectation

$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間，$(S, \mathscr{S})$ を可測空間とする．このとき任意の有界 $\mathscr{S}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測関数 f と $\mathscr{F}/\mathscr{S}$-可測写像 X に対して

$$\int_\Omega f(X)\, dP = \int_S f\, dPX^{-1}$$

が成立する．

証明.　任意の $A \in \mathscr{S}$ に対して

$$\int_S \mathbb{1}_A dPX^{-1} = P(X^{-1}(A)) = \int_\Omega \mathbb{1}_{X^{-1}(A)}\, dP = \int_\Omega \mathbb{1}_A(X)\, dP$$

が成り立つから，任意の $\mathscr{S}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測単関数 g に対し

$$\int_\Omega g(X)\, dP = \int_S g\, dPX^{-1}$$

となる．f が有界なら一様有界な単関数で近似できるので，Lebesgue の収束定理より

$$\int_\Omega f(X)\, dP = \int_S f\, dPX^{-1}$$

が出る．　■

Definition 4.4

Equivalently, $X_n \xrightarrow{\mathscr{D}} X$ if and only if

$$\lim_{n\to\infty} E_n f(X_n) = Ef(X)$$

for every bounded, continuous real-valued function f on S, where E_n and E denote expectations with respect to P_n and P, respectively.

証明.　任意の有界実連続関数 $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ に対し

$$\int_\Omega f(X_n)\, dP_n = \int_S f\, dP_n X_n^{-1}, \quad \int_\Omega f(X)\, dP = \int_S f\, dPX^{-1},$$

が成り立つから，$P_n X_n^{-1}$ が PX^{-1} に弱収束することと $\lim_{n\to\infty} E_n f(X_n) = Ef(X)$ は同値である．　■

Problem 4.5

Suppose $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ is a sequence of random variables taking values in a metric space (S_1, ρ_1) and converging in distribution to X. Suppose (S_2, ρ_2) is another metric space, and $\varphi : S_1 \longrightarrow S_2$ is continuous. Show that $Y_n := \varphi(X_n)$ converges in distribution to $Y := \varphi(X)$.

証明.　任意の有界実連続関数 $f : S_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ に対し $f \circ \varphi$ は S_1 上の有界実連続関数であるから

$$\begin{aligned}\int_{S_2} f\, dPY_n^{-1} &= \int_\Omega f(Y_n)\, dP = \int_\Omega f(\varphi(X_n))\, dP = \int_{S_1} f\circ\varphi\, dPX_n^{-1} \\ &\longrightarrow \int_{S_1} f\circ\varphi\, dPX^{-1} = \int_{S_2} f\, dPY^{-1} \quad (n \longrightarrow \infty)\end{aligned}$$

が成立する．　■

付録 A

A.1　集合か位相的な

A.1.1　位相

位相空間 S の部分集合 A について，A の内核を A^i 或は A^{o} と書き，A の閉包を A^a 或は $\overline{A}$ と書く．また $A^{ca} = (A^c)^a$, $A^{ic} = (A^i)^c$ と略記する．

定理 A.1.1 (閉包・内核).　S を位相空間，$h : S \longrightarrow S$ を同相，A を S の部分集合とするとき次が成り立つ．

(1)　$A^{ic} = A^{ca}$.

(2)　$h(A^a) = h(A)^a$.

(3)　$h(A^i) = h(A)^i$.

証明.

(1)　$A^i \subset A$ より $A^{ic} \supset A^c$ が従い，A^{ic} が閉であるから $A^{ic} \supset A^{ca}$ となる．一方で $A^c \subset A^{ca}$ より $A \supset A^{cac}$ が従い，A^{cac} は開であるから $A^i \supset A^{cac}$ すなわち $A^{ic} \subset A^{ca}$ となる．

(2)　$h(A) \subset h(A^a)$ かつ $h(A^a)$ は閉であるから $h(A)^a \subset h(A^a)$ が従う．一方で任意の $x \in h(A^a)$ に対し $x = h(y)$ を満たす $y \in A^a$ と x の任意の近傍 V を取れば，$h^{-1}(V) \cap A \neq \emptyset$ より $V \cap h(A) \neq \emptyset$ が成り立ち $x \in h(A)^a$ となる．

(3)　$h(A^i) \subset h(A)$ かつ $h(A^i)$ は開であるから $h(A^i) \subset h(A)^i$ が従う．一方で任意の開集合 $O \subset h(A)$ に対し $h^{-1}(O) \subset A$ より $h^{-1}(O) \subset A^i$ となり，$O \subset h(A^i)$ が成り立つから $h(A)^i \subset h(A^i)$ が得られる．∎

定理 A.1.2 (有限交叉性).　位相空間 S がコンパクトであることと，任意の閉集合系 $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ に対して

$$\bigcap_{\lambda\in F} U_\lambda \neq \emptyset, \text{ for every finite subset } F \subset \Lambda \quad\Longrightarrow\quad \bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \neq \emptyset$$

となることは同値である．

証明.　任意の閉集合系 $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ に対して $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = \emptyset$ なら $(U_\lambda^c)_{\lambda\in\Lambda}$ は S の開被覆となるから，S がコンパクトであることと (**??**) は同値である．∎

定理 A.1.3 (Cantor の共通部分定理). S を Hausdorff 空間とし，$(K_n)_{n=1}^{\infty}$ をコンパクト部分集合の列とする．このとき，任意の $n \geq 1$ に対して $\bigcap_{i=1}^{n} K_i \neq \emptyset$ なら $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i \neq \emptyset$ が成り立つ．

証明. $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i = \emptyset$ と仮定すれば，$K_1 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n^c = S$ と K_1 のコンパクト性より

$$K_1 \subset \bigcup_{n=1}^{N} K_n^c = \left(\bigcap_{n=1}^{N} K_n\right)^c$$

を満たす $N \geq 1$ が存在し，$\bigcap_{n=1}^{N} K_n \subset K_1$ より $\bigcap_{n=1}^{N} K_n = \emptyset$ が従う． ∎

定理 A.1.4 (局所コンパクト Hausdorff 空間の正則性). 局所コンパクト Hausdorff 空間は T_3 である．

証明. X を局所コンパクト Hausdorff 空間とし，$x \in X$，$x \notin F$ を満たす閉集合 F，及び x のコンパクトな近傍 K を取る．Hausdorff 性より $K \cap F$ はコンパクトであるから

$$U_0 \cap V_0 = \emptyset, \quad x \in U_0, \quad K \cap F \subset V_0$$

を満たす開集合 U_0, V_0 が存在する．

$$U := U_0 \cap K^{\mathrm{o}}, \quad V := V_0 \cup (X \backslash K)$$

により開集合 U, V を定めれば

$$U \cap V = \emptyset, \quad x \in U, \quad F \subset V$$

が成立する． ∎

定理 A.1.5. X を T_3 空間，K をコンパクト集合，U を開集合とするとき，或る開集合 V が存在して

$$K \subset V \subset \overline{V} \subset U.$$

を満たす．X が局所コンパクトなら $\overline{V}$ がコンパクトとなるように V を取れる．

証明. 任意の $x \in K$ に対し $V_x \subset \overline{V_x} \subset U$ を満たす開近傍 V_x が存在するから，

$$K \subset V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_n}$$

となるように $x_1, \cdots, x_n \in K$ を取り $V := V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_n}$ とおけば

$$K \subset V \subset \overline{V} \subset \overline{V_{x_1}} \cup \cdots \overline{\cup V_{x_n}} \subset U$$

が成り立つ．X が局所コンパクトなら $x \in K$ に対し閉包がコンパクトな開近傍 W_x が存在するから，

$$K \subset (W_{y_1} \cap V_{y_1}) \cup \cdots \cup (W_{y_m} \cap V_{y_m})$$

となるように $y_1, \cdots, y_n \in K$ を取り $V := \bigcup_{i=1}^{m} W_{y_i} \cap V_{y_i}$ とおけば $\overline{V}$ はコンパクトであり **(??)** を満たす． ∎

定理 A.1.6 (可算コンパクト性の同値条件).

定理 A.1.7 (第二可算空間の任意の基底は可算基を内包する). $\mathscr{B}$ を第二可算空間 S の任意の基底とするとき，或る可算部分集合 $\mathscr{B}_0 \subset \mathscr{B}$ もまた S の基底となる．すなわち第二可算空間は Lindelöf 性を持つ．

証明. $\mathscr{D}$ を S の可算基とする．任意の開集合 U に対し或る $\mathscr{B}_U \subset \mathscr{B}$ が存在して $U = \bigcup_{V \in \mathscr{B}_U} V$ を満たすから，

$$\mathscr{D}_U \coloneqq \{\, W \in \mathscr{D} \ ; \quad W \subset V,\ V \in \mathscr{B}_U \,\}$$

とおけば $U = \bigcup_{V \in \mathscr{B}_U} V = \bigcup_{V \in \mathscr{B}_U} \bigcup_{\substack{W \in \mathscr{D}_U \\ W \subset V}} W \subset \bigcup_{W \in \mathscr{D}_U} W \subset U$ より

$$U = \bigcup_{W \in \mathscr{D}_U} W$$

が成り立つ．ここで (**??**) より任意の $W \in \mathscr{D}_U$ に対して $\{\, V \in \mathscr{B} \ ; \quad W \subset V \,\} \neq \emptyset$ であるから

$$\Phi_U \in \prod_{W \in \mathscr{D}_U} \{\, V \in \mathscr{B} \ ; \quad W \subset V \,\}$$

が取れる．$\mathscr{B}'_U \coloneqq \{\, \Phi_U(W) \ ; \quad W \in \mathscr{D}_U \,\}$ とすれば $U = \bigcup_{W \in \mathscr{D}_U} W \subset \bigcup_{W \in \mathscr{D}_U} \Phi(W) \subset \bigcup_{V \in \mathscr{B}'_U} V \subset U$ より

$$U = \bigcup_{V \in \mathscr{B}'_U} V$$

が満たされ，

$$\mathscr{B}_0 \coloneqq \bigcup_{W \in \mathscr{D}} \mathscr{B}'_W$$

と定めれば $\mathscr{B}_0$ は求める S の可算基となる．実際，任意の開集合 U に対し (**??**) と (**??**) より

$$U = \bigcup_{W \in \mathscr{D}_U} W = \bigcup_{W \in \mathscr{D}_U} \bigcup_{V \in \mathscr{B}'_W} V$$

となる． ∎

定理 A.1.8 (局所コンパクト Hausdorff 空間が第二可算なら σ-コンパクト). S が第二可算公理を満たす局所コンパクト Hausdorff 空間なら，次を満たすコンパクト部分集合の列 $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ が存在する:

$$K_n \subset K_{n+1}^{\circ}, \quad S = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n.$$

証明. 任意の $x \in S$ に対して閉包がコンパクトな開近傍 U_x を取っておく．$\mathscr{O}$ を S の開集合系として

$$\mathscr{B} \coloneqq \left\{ U \in \mathscr{O} \ ; \quad \overline{U} \text{ がコンパクト} \right\}$$

とおけば，$\mathscr{B}$ は $\mathscr{O}$ の基底となる．実際，任意の $O \in \mathscr{O}$ に対し $O \cap U_x \in \mathscr{B}$ かつ

$$O = \bigcup_{x \in O} O \cap U_x$$

となる．従って定理**??**より或る可算部分集合 $\{U_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{B}$ が $\mathscr{O}$ の基底となる．いま，$K_1 := \overline{U_1}$ として，またコンパクト集合 K_n が選ばれたとして，K_n の有限被覆 $\mathscr{U}_n \subset \mathscr{B}_0$ を取り

$$K_{n+1} := \overline{U_{n+1}} \cup \bigcup_{V \in \mathscr{U}_n} \overline{V}$$

とすれば，K_{n+1} はコンパクトであり $K_n \subset K_{n+1}^{\circ}$ を満たす．この操作で $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ を構成すれば

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \subset S$$

が成立する． ∎

A.1.2 範疇定理

定義 A.1.9 (疎集合・第一類集合・第二類集合). 位相空間 S の部分集合 A が疎である (nowhere dense) とは A の閉包の内核が $\overline{A}^{\circ} = \emptyset$ を満たすことをいう．S が可算個の疎集合の合併で表せるとき S を第一類集合 (the set of the first category) と呼び，そうでない場合はこれを第二類集合と呼ぶ．

定理 A.1.10 (Baire). $S \neq \emptyset$ が完備距離空間，或は局所コンパクト Hausdorff 空間なら S は第二類集合である．

証明.

第一段 $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ を S で稠密な開集合系とするとき

$$\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n} = S,$$

となることを示す．実際 (**??**) が満たされていれば，任意の疎集合系 $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ に対して

$$V_n := \overline{E_n}^{c}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

で開集合系 (V_n) を定めると定理**??**より

$$\overline{V_n} = \overline{E_n}^{ca} = \overline{E_n}^{ic} = \emptyset^{c} = S$$

となるから，$\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \neq \emptyset$ が従い $S \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{E_n} \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ が成り立つ．従って S は第二類である．

第二段 任意の空でない開集合 B_0 に対し $B_0 \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n) \neq \emptyset$ となることを示せば (**??**) が従う．V_1 の稠密性より或る点 $x_1 \in B_0 \cap V_1$ が存在し，定理**??**より次を満たす開集合 B_1 が取れる:

$$x_1 \in \overline{B_1} \subset B_0 \cap V_1.$$

このとき，S が距離空間なら B_1 は半径 1 以下の開球，局所コンパクト Hausdorff 空間なら $\overline{B_1}$ がコンパクトであるようにできる．繰り返して，半径 $1/n$ 以下の開球，或は閉包がコンパクトな開集合 B_n と $x_n \in S$ が存在して

$$x_n \in \overline{B_n} \subset B_{n-1} \cap V_n$$

を満たす．このとき S が完備距離空間なら $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列をなし，その極限点 x_∞ は

$$x_\infty \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_n}$$

を満たす．S が局所コンパクト Hausdorff 空間なら定理**??**より

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_n} \neq \emptyset$$

となるから，いずれの場合も

$$\emptyset \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_n} \subset B_0 \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \right)$$

が従い定理の主張が得られる． ∎

定理 A.1.11 (第一類集合の性質). S を位相空間とする．

(a) $A \subset B \subset S$ に対し B が第一類なら A も第一類である．

(b) 第一類集合の可算和も第一類である．

(c) 内核が空である閉集合は第一類である．

(d) S から S への位相同型 h と $E \subset S$ に対し次が成り立つ:

$$E \text{ が第一類} \quad \Longleftrightarrow \quad h(E) \text{ が第一類.}$$

証明.

(a) $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ を満たす疎集合系 $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ に対し $A \cap E_n$ は疎であり $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap E_n)$ となる．

(b) $A_n \subset S$, $(n = 1, 2, \cdots)$ が第一類集合とし $(E_{n,i})_{i=1}^{\infty}$ を $A_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_{n,i}$ を満たす疎集合系とすれば

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n,i=1}^{\infty} E_{n,i}$$

が成り立つ．

(c) 内核が空である閉集合はそれ自身が疎であり，自身の可算和に一致する．

(d) E が第一類のとき，$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ を満たす疎集合系 $(E_i)_{i=1}^{\infty}$ に対し定理**??**より

$$\emptyset = h(E_i^{ai}) = h(E_i^{a})^{i} = h(E_i)^{ai}$$

が成り立つから $h(E_i)$ は疎であり，

$$h(E) = \bigcup_{i=1}^{\infty} h(E_i)$$

となるから $h(E)$ も第一類である．$h(E)$ が第一類なら $E = h^{-1}(h(E))$ も第一類である． ∎

A.1.3　有向点族

A.1.4　位相線型空間

位相線形空間 (X,τ) に対し，その部分集合 Y 上の相対位相を τ_Y と書き，また X が或る距離 d で距離付け可能なとき，d により導入する位相を τ_d と書く．位相 τ に関する開集合，閉集合，近傍，Cauchy 列は τ-開集合 (resp. 閉集合，近傍，Cauchy 列) と書く．

定理 A.1.12 (部分空間が F-空間なら閉).　(X,τ) を位相線形空間，$Y \subset X$ を部分空間とする．このとき Y が F-空間なら Y は τ-閉である．

証明.　Y に対し或る平行移動不変な距離 d が存在して $\tau_Y = \tau_d$ を満たす．このとき

$$B_{1/n} \coloneqq \left\{ y \in Y \ ; \quad d(y,0) < \frac{1}{n} \right\}, \quad n = 1,2,\cdots$$

で τ_Y-開集合を定めれば，$B_{1/n}$ は 0 を含むから或る 0 の τ-近傍 U_n が存在して

$$B_{1/n} = Y \cap U_n, \quad n = 1,2,\cdots$$

を満たす．

A.2　測度

A.2.1　Lebesgue 拡大

定義 A.2.1 (Lebesgue 拡大).　$(X,\mathcal{B},\mu)$ を測度空間とするとき，

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{B}} &\coloneqq \{ B \subset X \ ; \quad \exists A_1, A_2 \in \mathcal{B}, \text{ s.t. } \quad A_1 \subset B \subset A_2, \ \mu(A_2 - A_1) = 0 \}, \\ \overline{\mu}(B) &\coloneqq \mu(A_1) \quad (\forall B \in \overline{\mathcal{B}}, \ A_1 \text{ as in above}) \end{aligned}$$

により得られる完備測度空間 $\left(X,\overline{\mathcal{B}},\overline{\mu}\right)$ を $(X,\mathcal{B},\mu)$ の Lebesgue 拡大と呼ぶ．

$\overline{\mu}$ は well-defined である．実際，$B \subset X$ に対し $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ が

$$\begin{aligned} A_1 \subset B \subset A_2, &\quad \mu(A_2 - A_1) = 0, \\ B_1 \subset B \subset B_2, &\quad \mu(B_2 - B_1) = 0, \end{aligned}$$

を満たすとき，$A_1 \cup B_1 \subset B \subset A_2 \cap B_2$ となるが，

$$(A_2 \cap B_2) \cap (A_1 \cup B_1)^c \subset A_2 \backslash A_1$$

より $\mu(A_1 \cup B_1) = \mu(A_2 \cap B_2)$ が従い

$$\begin{aligned} \mu(A_2) = \mu(A_1) \leq \mu(A_1 \cup B_1) = \mu(A_2 \cap B_2) \leq \mu(B_2), \\ \mu(B_2) = \mu(B_1) \leq \mu(A_1 \cup B_1) = \mu(A_2 \cap B_2) \leq \mu(A_2) \end{aligned}$$

が成り立つから $\mu(A_2) = \mu(B_2)$ が出る．また，任意の $B \subset X$ について

$$\overline{\mathcal{B}} = \{\, B \subset X \;;\quad \exists A, N \in \mathcal{B},\ \text{s.t.}\quad \mu(N) = 0,\ B \cap A^c, A \cap B^c \subset N \,\}$$

が成立する．実際，$B \in \overline{\mathcal{B}}$ なら $A_1 \subset B \subset A_2$ かつ $\mu(A_2 - A_1) = 0$ を満たす $A_1, A_2 \in \mathcal{B}$ が存在するから

$$A = A_2, \quad N = A_2 - A_1$$

として $(\subset)$ を得る．逆に右辺を満たす A, N が存在するとき，

$$A \cap N^c \subset A \cap B \subset B \subset A \cup (A^c \cap B) \subset A \cup N$$

より $A_1 = A \cap N^c$, $A_2 = A \cup N$ として $(\supset)$ を得る．

補題 A.2.2 (可分値写像による可測写像の一様近似). $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間，(S, d) を可分距離空間とする．このとき任意の $\mathcal{B}/\mathscr{B}(S)$-可測写像 f に対し，S の可算稠密集合に値を取る $\mathcal{B}/\mathscr{B}(S)$-可測写像列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ が存在して，次の意味で f を一様に近似する:

$$\sup_{x \in X} d\left(f_n(x), f(x)\right) \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty).$$

証明. S の可算稠密な部分集合を $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ とする．任意の $n \geq 1$ に対し

$$B_n^k := \left\{\, s \in S \;;\quad d(s, a_k) < \frac{1}{n} \,\right\}, \quad A_n^k := f^{-1}\left(B_n^k\right); \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

とおけば，

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_n^k = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}\left(B_n^k\right) = f^{-1}(S)$$

より $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_n^k$ が成り立つ．ここで

$$\tilde{A}_n^1 := A_n^1, \quad \tilde{A}_n^k := A_n^k \Bigg\backslash \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_n^i\right); \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

として

$$f_n(x) := a_k, \quad (x \in \tilde{A}_n^k,\ k = 1, 2, \cdots)$$

により $\mathcal{B}/\mathscr{B}(S)$-可測写像列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ を定めれば，

$$d\left(f_n(x), f(x)\right) < \frac{1}{n}, \quad (\forall x \in X)$$

が満たされ (**??**) が従う． ∎

補題 A.2.3 (距離空間値の可測写像列の各点極限は可測). (S, d) を距離空間，$(X, \mathcal{B})$ を可測空間とする．$\mathcal{B}/\mathscr{B}(S)$-可測写像列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ が各点収束すれば，$f := \lim_{n \to \infty} f_n$ で定める f もまた可測 $\mathcal{B}/\mathscr{B}(S)$ となる．

証明． S の任意の閉集合 A に対し，閉集合の系 $(A_m)_{m=1}^{\infty}$ を次で定める:

$$A_m := \left\{ y \in S \;\; ; \quad d(y, A) \leq \frac{1}{m} \right\}, \quad (m = 1, 2, \cdots).$$

$f(x) \in A$ なら $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ が満たされるから，任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し或る $N = N(x, m) \in \mathbb{N}$ が存在して

$$d\left(f_n(x), A\right) \leq d\left(f_n(x), f(x)\right) < \frac{1}{m} \quad (\forall n \geq N)$$

が成り立ち

$$f^{-1}(A) \subset \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} f_n^{-1}(A_m)$$

が従う．一方 $f(x) \notin A$ なら，$0 < \epsilon < d(f(x), A)$ を満たす ϵ に対し或る $N = N(x, \epsilon) \in \mathbb{N}$ が存在して

$$d\left(f_n(x), f(x)\right) < \epsilon \quad (\forall n \geq N)$$

が成り立つから，$1/m < d(f(x), A) - \epsilon$ を満たす $m \in \mathbb{N}$ を取れば

$$\frac{1}{m} < d(f(x), A) - d(f(x), f_n(x)) \leq d(f_n(x), A) \quad (\forall n \geq N)$$

が従い

$$f^{-1}(A^c) \subset \bigcup_{m \geq 1} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} f_n^{-1}(A_m^c) \subset \bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq N} f_n^{-1}(A_m^c)$$

となる．(**??**) と併せれば

$$f^{-1}(A) = \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} f_n^{-1}(A_m)$$

が得られ，S の閉集合は f により $\mathcal{B}$ の元に引き戻されるから f の $\mathcal{B}/\mathscr{B}(S)$-可測性が出る． ∎

定理 A.2.4 (拡大前後の可測性). $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間，その Lebesgue 拡大を $\left(X, \overline{\mathcal{B}}, \overline{\mu}\right)$ と書き，(S, d) を可分距離空間とする．このとき，任意の写像 $f : X \longrightarrow S$ に対し次は同値である:

(a) 或る $\mathcal{B}/\mathscr{B}(S)$-可測写像 g が存在して $f = g \quad \mu$-a.e. を満たす．

(b) f は $\overline{\mathcal{B}}/\mathscr{B}(S)$-可測である．

証明．

第一段 (a) が成立しているとき，$\{f \neq g\} \subset N$ を満たす μ-零集合 $N \in \mathcal{B}$ が存在して

$$f^{-1}(E) \cap \left(g^{-1}(E)\right)^c \subset N, \quad g^{-1}(E) \cap \left(f^{-1}(E)\right)^c \subset N, \quad (\forall E \in \mathscr{B}(S))$$

が成り立つから，(**??**) より $f^{-1}(E) \in \overline{\mathcal{B}}$ が従い $(a) \Rightarrow (b)$ が出る．

第二段 f が $\overline{\mathcal{B}}/\mathscr{B}(S)$-可測のとき，$S$ の可算稠密な部分集合を $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ とすれば，補題**??**より

$$f_n(x) = a_k, \; (x \in A_n^k, \; k = 1, 2, \cdots); \quad \sum_{k=1}^{\infty} A_n^k = X; \quad d\left(f_n(x), f(x)\right) < \frac{1}{n}, \; (\forall x \in X)$$

を満たす $\overline{\mathcal{B}}/\mathscr{B}(S)$-可測写像列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ と互いに素な集合 $\left\{A_n^k\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \overline{\mathcal{B}}$ が存在する．各 A_n^k に対し

$$E_{1,n}^k \subset A_n^k \subset E_{2,n}^k, \quad \mu\left(E_{2,n}^k - E_{1,n}^k\right) = 0$$

を満たす $E_{1,n}^k, E_{2,n}^k \in \mathcal{B}$ が存在するから，一つ $a_0 \in S$ を選び

$$g_n(x) \coloneqq \begin{cases} a_k, & (x \in E_{1,n}^k,\ k = 1, 2, \cdots), \\ a_0, & (x \in N_n \coloneqq X \backslash \sum_{k=1}^{\infty} E_{1,n}^k) \end{cases}$$

で $\mathcal{B}/\mathscr{B}(S)$-可測写像列 $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ を定めて $N \coloneqq \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ とおけば

$$f_n(x) = g_n(x), \quad (\forall x \in X \backslash N,\ \forall n \geq 1)$$

が成り立つ．このとき $X \backslash N$ 上で $\lim_{n \to \infty} g_n(x)$ は存在し $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ に一致するから，

$$g(x) \coloneqq \begin{cases} \lim\limits_{n \to \infty} g_n(x), & (x \in X \backslash N), \\ a_0, & (x \in N) \end{cases}$$

により $\mathcal{B}/\mathscr{B}(S)$-可測写像 g を定めれば (a) が満たされる． ∎

A.2.2 有限加法的測度の拡張

定理 A.2.5 (有限加法的な正値測度空間の生成). X を集合，$\mathcal{A}$ を集合 X 上の乗法族で X を含むものとする．

$$\mathcal{B} \coloneqq \left\{ \sum_{i=1}^{n} I_i \ ; \quad I_i \in \mathcal{A},\ n = 1, 2, \cdots \right\}$$

とおけば，$X \backslash I \in \mathcal{A},\ (\forall I \in \mathcal{A})$ のとき $\mathcal{B}$ は X 上の有限加法族となり，更に写像 $m : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty],\ (m(\emptyset) = 0)$ が与えられれば

$$\mu(B) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} m(I_i), \quad (B = I_1 + \cdots + I_n \in \mathcal{B})$$

で定める m の拡張写像 μ は $\mathcal{B}$ の上の有限加法的な正値測度となる．

証明. $X \backslash I \in \mathcal{B},\ (\forall I \in \mathcal{A})$ 及び $m : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$ が与えられたとする．このとき $\emptyset = X \backslash X \in \mathcal{B}$ より $\emptyset \in \mathcal{A}$ である．

第一段 $\mathcal{B}$ が有限加法族であることを示す．$\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ より $X \in \mathcal{B}$ となる．$A, B \in \mathcal{B}$ が

$$A = I_1 + I_2 + \cdots + I_n, \quad B = J_1 + J_2 + \cdots + J_m$$

と表されているとき，$A \cap B = \emptyset$ なら

$$A + B = I_1 + I_2 + \cdots + I_n + J_1 + J_2 + \cdots + J_m \in \mathcal{A}$$

となり，そうでない場合 $I_i \cap J_j \in \mathcal{A}$ より

$$A \cap B = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} I_i \cap J_i \in \mathcal{B}$$

となるから $\mathcal{B}$ は交演算で閉じ，$X\backslash I_i \in \mathcal{B}$ であるから

$$X\backslash A = (X\backslash I_1) \cap \cdots \cap (X\backslash I_n) \in \mathcal{B}$$

が従う．(**??**)，(**??**)，(**??**) より $A \cup B = A + B \cap (X\backslash A) \in \mathcal{B}$ が成り立ち，$\mathcal{B}$ は集合和でも閉じる．

第二段　μ が well-defined かつ有限加法的であることを示す．実際 (**??**) の $A, B \in \mathcal{B}$ に対して，$A = B$ のとき

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} I_i \cap J_j = \sum_{j=1}^{m}\sum_{I=1}^{n} I_i \cap J_j = \sum_{j=1}^{m} J_i$$

かつ $I_i \cap J_j \in \mathcal{A}$ より

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m(I_i \cap J_j) = \mu(B)$$

が成り立つから μ は well-defined であり，また $A \cap B = \emptyset$ のとき

$$\mu(A + B) = m(I_1) + \cdots + m(I_n) + m(J_1) + \cdots + m(J_m) = \mu(A) + \mu(B)$$

となり μ の有限加法性が出る． ∎

定理 A.2.6 (完全加法性の同値条件).　$\mathcal{B}$ を集合 X の上の有限加法族，μ を $\mathcal{B}$ 上の有限加法的な正値測度として

(a)　$\{B_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$ が $\mu(B_1) < \infty$, $B_n \supset B_{n+1}$，$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$ なら $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = 0$.

(b)　$\{B_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$ が $B_n \subset B_{n+1}$，$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n =: B \in \mathcal{B}$ かつ $\mu(B) = \infty$ なら $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \infty$.

(c)　$\mu(X_n) < \infty$ かつ $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$ を満たす $(X_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$ が存在するとき，$\mu(B) = \infty$ なら $\lim_{n\to\infty} \mu(B \cap X_n) = \infty$.

とおくとき，

(1)　$0 < \mu(X) < \infty$ なら μ が $\mathcal{B}$ の上で完全加法性であることと (a) は同値である．

(2)　$\mu(X) = \infty$ なら μ が $\mathcal{B}$ の上で完全加法性であることと (a)∧(b) は同値である．

(3)　$\mu(X) = \infty$ で μ が σ-有限的なら，μ が $\mathcal{B}$ の上で完全加法性であることと (a)∧(c) は同値である．

証明.

定義 A.2.7 (コンパクトクラス).　X を空でない集合，$\mathcal{K}$ をその部分集合族とする．任意の $\{K_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{K}$ について，$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$ なら或る $N \geq 1$ が存在して $\bigcap_{n=1}^{N} K_n = \emptyset$ となるとき，$\mathcal{K}$ を X のコンパクトクラスという．

定理 A.2.8.　Hausdorff 空間において，コンパクト部分集合から成る任意の族はコンパクトクラスとなる．

証明.　Cantor の共通部分定理 (P. **??**) より従う． ∎

定理 A.2.9 (コンパクトクラスと共通点性). $\mathcal{B}$ を集合 X の上の有限加法族，μ を $\mathcal{B}$ 上の有限加法的正値測度とする．X にコンパクトクラス $\mathcal{K}$ が存在するとき，$0 < \mu(B) < \infty$ を満たす任意の $B \in \mathcal{B}$ 及び任意の $\epsilon > 0$ に対し

$$A \subset K \subset B, \quad \mu(B \backslash A) < \epsilon$$

を満たす $A \in \mathcal{B}$ と $K \in \mathcal{K}$ が存在すれば，定理**??**の (a) が満たされる．

証明. $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ を $\mu(B_1) < \infty$ かつ $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$ を満たす減少列とすれば，或る N で $\mu(B_N) = 0$ となるとき

$$\mu(B_n) \leq \mu(B_N) = 0, \quad (\forall n \geq N)$$

より $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = 0$ が従う．全ての n で $0 < \mu(B_n)$ なら，任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$A_n \subset K_n \subset B_N, \quad \mu(B_n \backslash A_n) < \frac{\epsilon}{2^n}, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

を満たす $A_n \in \mathcal{B}$ と $K_n \in \mathcal{K}$ が存在する．このとき

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$$

となるから或る $N \geq 1$ が存在して

$$\bigcap_{n=1}^{N} A_n \subset \bigcap_{n=1}^{N} K_n = \emptyset$$

が成立し，任意の $m \geq N$ に対して

$$B_m \subset \bigcup_{n=1}^{N} (B_n \cap A_n^c)$$

より

$$\mu(B_m) \leq \sum_{n=1}^{N} \mu(B_n \cap A_n^c) < \epsilon$$

が従う． ∎

定理 A.2.10 (測度の一致の定理). $(X, \mathcal{B})$ を可測空間，$\mathcal{A}$ を $\mathcal{B}$ を生成する乗法族とし，$(X, \mathcal{B})$ 上の測度 μ_1, μ_2 が $\mathcal{A}$ 上で一致しているとする．このとき，

$$\mu_1(X_n) < \infty, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$$

を満たす増大列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ が存在すれば $\mu_1 = \mu_2$ が成り立つ．

証明. 任意の $n = 1, 2, \cdots$ に対して

$$\mathscr{D}_n := \{ B \in \mathcal{B} \ ; \quad \mu_1(B \cap X_n) = \mu_2(B \cap X_n) \}$$

とおけば，$\mathscr{D}_n$ は $\mathcal{A}$ を含む Dynkin 族であるから，Dynkin 族定理より

$$\mathscr{D}_n = \mathcal{B}, \quad (\forall n \geq 1)$$

となり

$$\mu_1(B) = \lim_{n\to\infty} \mu_1(B \cap X_n) = \lim_{n\to\infty} \mu_2(B \cap X_n) = \mu_2(B), \quad (\forall B \in \mathcal{B})$$

が従う． ■

定理 A.2.11 (Kolmogorov-Hopf). $(X, \mathcal{B}, \mu_0)$ を有限加法的測度空間 ($\mathcal{B}$ は有限加法族，μ_0 は有限加法的) とし，

$$\tilde{\mu}(A) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(B_n) \ ; \quad B_n \in \mathcal{B},\ A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right\}, \quad (\forall A \subset X)$$

により X 上に外測度を定め，$\tilde{\mu}$-可測集合を $\mathcal{B}^*$ と書く．このとき，

(1) $\sigma[\mathcal{B}] \subset \mathcal{B}^*$ が成り立つ．ここで $\mu^* := \tilde{\mu}|_{\mathcal{B}^*}$, $\mu := \tilde{\mu}|_{\sigma[\mathcal{B}]}$ とおく．

(2) μ_0 が $\mathcal{B}$ 上で σ-加法的なら μ は μ_0 の拡張となっている:

$$\mu_0(B) = \mu(B), \quad (\forall B \in \mathcal{B}).$$

(3) μ_0 が $\mathcal{B}$ 上で σ-有限的であるとき，(**??**) を満たすような $(X, \sigma[\mathcal{B}])$ 上の測度は存在しても唯一つである．

(4) μ_0 が $\mathcal{B}$ 上で σ-加法的かつ σ-有限的ならば，μ は μ_0 の $(X, \sigma[\mathcal{B}])$ への唯一つの拡張測度であり，このとき $(X, \mathcal{B}^*, \mu^*)$ は $(X, \sigma[\mathcal{B}], \mu)$ の Lebesgue 拡大に一致する:

$$(X, \mathcal{B}^*, \mu^*) = \left(X, \overline{\sigma[\mathcal{B}]}, \overline{\mu}\right).$$

証明.

(1) の証明 任意の $B \in \mathcal{B}$ が $\tilde{\mu}$-可測であること，つまり任意の $A \subset X$ に対し

$$\tilde{\mu}(A) \geq \tilde{\mu}(A \cap B) + \tilde{\mu}(A \cap B^c)$$

となることを示せば，$\mathcal{B} \subset \mathcal{B}^*$ すなわち $\sigma[\mathcal{B}] \subset \mathcal{B}^*$ が従う．任意の $A \subset X$, $\epsilon > 0$ に対し

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(B_n) < \tilde{\mu}(A) + \epsilon$$

を満たす $\{B_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$ が存在する．このとき $A \cap B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(B_n \cap B)$, $A \cap B^c \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(B_n \cap B^c)$ より

$$\tilde{\mu}(A \cap B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(B_n \cap B), \quad \tilde{\mu}(A \cap B^c) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(B_n \cap B^c)$$

となるから

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}(A) + \epsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(B_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \{\mu_0(B_n \cap B) + \mu_0(B_n \cap B^c)\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(B_n \cap B) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(B_n \cap B^c) \\ &\geq \tilde{\mu}(A \cap B) + \tilde{\mu}(A \cap B^c)\end{aligned}$$

が成り立つ．ϵ の任意性より (**??**) が出る．

(2) の証明　任意に $B \in \mathcal{B}$ を取る．まず，$B \subset B \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \cdots$ より

$$\tilde{\mu}(B) \leq \mu_0(B)$$

が成り立つ．一方で $B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ を満たす $\{B_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$ に対し

$$B = \sum_{n=1}^{\infty}\left(B \cap \left(B_n \backslash \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k\right)\right)$$

かつ $B \cap \left(B_n \backslash \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k\right) \in \mathcal{B}$ が満たされるから，μ_0 の σ-加法性より

$$\mu_0(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0\left(B \cap \left(B_n \backslash \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k\right)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(B_n)$$

が成り立ち $\mu_0(B) \leq \tilde{\mu}(B)$ が従う．よって $\mu_0(B) = \tilde{\mu}(B) = \mu(B)$ が得られる．

(3) の証明　σ-有限の仮定より，或る増大列 $X_1 \subset X_2 \subset \cdots$, $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$ が存在して

$$\mu_0(X_n) < \infty \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$$

が成り立つ．一致の定理より，(**??**) を満たす $(X, \sigma[\mathcal{B}])$ 上の測度は存在しても一つのみである．

(4) の証明　(2) と (3) の結果より μ は μ_0 の唯一つの拡張測度である．次に

$$\mathcal{B}^* = \overline{\sigma[\mathcal{B}]}$$

を示す．$E \in \overline{\sigma[\mathcal{B}]}$ なら或る $B_1, B_2 \in \sigma[\mathcal{B}]$ が存在して

$$B_1 \subset E \subset B_2, \quad \mu(B_2 - B_1) = 0$$

を満たす．このとき (1) より $\mu^*(B_2 - B_1) = 0$ であり，$(X, \mathcal{B}^*, \mu^*)$ の完備性より $E \backslash B_1 \in \mathcal{B}^*$ が満たされ

$$E = B_1 + E \backslash B_1 \in \mathcal{B}^*$$

が従う．いま，(**??**) を満たす $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$ を取り，$E \in \mathcal{B}^*$ に対して $E_n := E \cap X_n$ とおく．このとき

$$\mu^*(E_n) \leq \mu^*(X_n) = \mu_0(X_n) < \infty$$

となるから，任意の $k = 1, 2, \cdots$ に対して

$$E_n \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{k,j}^n, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0\left(B_{k,j}^n\right) < \mu^*(E_n) + \frac{1}{k}$$

を満たす $\left\{B_{k,j}^n\right\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$ が取れる．

$$B_{2,n} := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{k,j}^n$$

とおけば $E_n \subset B_{2,n} \in \sigma[\mathcal{B}]$ であり，任意の $k = 1, 2, \cdots$ に対して

$$\begin{aligned}\mu^*(B_{2,n} - E_n) &= \mu^*(B_{2,n}) - \mu^*(E_n) \leq \mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_{k,j}^n\right) - \mu^*(E_n) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*\left(B_{k,j}^n\right) - \mu^*(E_n) < \mu^*(E_n) + \frac{1}{k} - \mu^*(E_n) = \frac{1}{k}\end{aligned}$$

が成り立つから $\mu^*(B_{2,n} - E_n) = 0$ となる．E_n を $B_{2,n} - E_n$ に替えれば

$$B_{2,n} - E_n \subset N_n, \quad \mu(N_n) = 0$$

を満たす $N_n \in \sigma[\mathcal{B}]$ が取れる．

$$B_{1,n} \coloneqq B_{2,n} \cap N_n^c$$

とおけば，$B_{1,n} \subset B_{2,n} \cap (B_{2,n} - E_n)^c = E_n$ より

$$B_{1,n} \subset E_n \subset B_{2,n}, \quad \mu(B_{2,n} - B_{1,n}) \leq \mu(N_n) = 0$$

が成り立つから，

$$B_1 \coloneqq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{1,n}, \quad B_2 \coloneqq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{2,n}$$

として

$$B_1 \subset E \subset B_2, \quad \mu(B_2 - B_1) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (B_{2,n} - B_{1,n})\right) = 0$$

が満たされ，$E \in \overline{\sigma[\mathcal{B}]}$ が従い (**??**) が得られる．同時に

$$\overline{\mu}(E) = \mu(B_1) = \mu^*(B_1) \leq \mu^*(E) \leq \mu^*(B_2) = \mu(B_2) = \overline{\mu}(E)$$

が成立するから，$\overline{\mu} = \mu^*$ となり (**??**) が出る． ∎

定義 A.2.12 (積 σ-加法族). Λ を空でない任意濃度の添字集合、$((X_\lambda, \mathscr{F}_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ を可測空間の族とし，$X \coloneqq \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ とおく．λ 射影を $p_\lambda : X \longrightarrow X_\lambda$ と書くとき，

$$\left\{ p_\lambda^{-1}(A_\lambda) \ ; \quad A_\lambda \in \mathscr{F}_\lambda,\ \lambda \in \Lambda \right\}$$

が生成する σ-加法族を $(\mathscr{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の積 σ-加法族と呼び，$\bigotimes_{\lambda \in \Lambda} \mathscr{F}_\lambda$ で表す．$\Lambda = \{1, 2, \cdots\}$ の場合，

$$\bigotimes_{\lambda \in \Lambda} \mathscr{F}_\lambda = \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2 \otimes \cdots$$

とも表記する．

定理 A.2.13 (積 σ-加法族を生成する加法族). Λ を空でない任意濃度の添字集合、$((X_\lambda, \mathscr{F}_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ を可測空間の族とし，$X \coloneqq \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ とおく．$\mathscr{B}_\lambda$ を X_λ を含み $\mathscr{F}_\lambda$ を生成する乗法族とし，λ 射影を $p_\lambda : X \longrightarrow X_\lambda$ と書くとき，

$$\mathcal{A} \coloneqq \left\{ \bigcap_{\lambda\in\Lambda'} p_\lambda^{-1}(A_\lambda) \ ; \quad A_\lambda \in \mathscr{B}_\lambda,\ \Lambda' \colon \Lambda \text{ の有限部分集合} \right\}$$

とおけば $\mathcal{A}$ は乗法族となり，

$$\mathcal{B} \coloneqq \left\{ \sum_{i=1}^{n} I_i \ ; \quad I_i \in \mathcal{A},\ n = 1, 2, \cdots \right\}$$

により有限加法族が定まる．このとき次が成り立つ:

$$\bigotimes_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{F}_\lambda = \sigma[\mathcal{A}] = \sigma[\mathcal{B}].$$

証明.

定理 A.2.14 (第二可算空間の直積 Borel 集合族). Λ を空でない高々可算集合，$(S_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を空でない第二可算空間の族とする．$S \coloneqq \prod_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ とおいて直積位相を導入すれば，S も第二可算空間となりまた次が成立する:

$$\mathscr{B}(S) = \bigotimes_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{B}(S_\lambda).$$

証明. 各 S_λ の開集合系及び可算基を $\mathscr{O}_\lambda$, $\mathscr{B}_\lambda$，S の開集合系を $\mathscr{O}$ とし，また λ 射影を $p_\lambda : S \longrightarrow S_\lambda$ と書く．先ず，任意の $O_\lambda \in \mathscr{O}_\lambda$ に対して $p_\lambda^{-1}(O_\lambda) \in \mathscr{O}$ が満たされるから

$$\mathscr{O}_\lambda \subset \left\{ A_\lambda \in \mathscr{B}(S_\lambda) \ ; \quad p_\lambda^{-1}(A_\lambda) \in \mathscr{B}(S) \right\}$$

が従い，右辺が σ-加法族であるから

$$\bigotimes_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{B}(S_\lambda) = \sigma\left[\left\{ p_\lambda^{-1}(A_\lambda) \ ; \quad A_\lambda \in \mathscr{B}(S_\lambda),\ \lambda \in \Lambda \right\}\right] \subset \mathscr{B}(S)$$

を得る．一方で

$$\mathscr{B} \coloneqq \left\{ \bigcap_{\lambda\in\Lambda'} p_\lambda^{-1}(B_\lambda) \ ; \quad B_\lambda \in \mathscr{B}_\lambda,\ \Lambda' \subset \Lambda : \textit{finite subset} \right\}$$

は $\mathscr{O}$ の基底の一つである．実際，任意に $O \in \mathscr{O}$ を取れば，任意の $x \in O$ に対し或る有限集合 $\Lambda' \subset \Lambda$ が存在して

$$x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda'} p_\lambda^{-1}(O_\lambda) \subset O$$

が成立するが，更に S_λ の第二可算性より或る $\mathscr{B}'_\lambda \subset \mathscr{B}_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda')$ が存在して

$$x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda'} p_\lambda^{-1}(O_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda'} \bigcup_{B_\lambda\in\mathscr{B}'_\lambda} p_\lambda^{-1}(B_\lambda)$$

が満たされる．すなわち，任意の $O \in \mathscr{O}$ は

$$O = \bigcup_{E \in \mathscr{B}'} E, \quad (\exists \mathscr{B}' \subset \mathscr{B})$$

と表される．$\mathscr{B}$ は高々可算の濃度を持ち[*1]，$\mathscr{B} \subset \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathscr{B}(S_\lambda)$ が満たされるから

$$\mathscr{O} \subset \bigotimes_{\lambda \in \Lambda} \mathscr{B}(S_\lambda)$$

が従い (**??**) を得る． ∎

定理 A.2.15 (積測度). 測度空間の族 $((X_i, \mathscr{F}_i, \mu_i))_{i=1}^n$ に対し，$\left(\prod_{i=1}^n X_i,\ \bigotimes_{i=1}^n \mathscr{F}_i\right)$ 上の測度 μ で

$$\mu(A_1 \times \cdots \times A_n) = \mu_1(A_1) \cdots \mu_n(A_n), \quad (\forall A_i \in \mathscr{F}_i,\ i = 1, \cdots, n)$$

を満たすものが存在する．この μ を $(\mu_i)_{i=1}^n$ の積測度と呼び $\bigotimes_{i=1}^n \mu_i = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ と書く．全ての μ_i が σ-有限なら積測度 μ は唯一つ存在し σ-有限となる．

証明. $\bigotimes_{i=1}^n \mathscr{F}_i$ を生成する乗法族を

$$\mathcal{A} := \{\, A_1 \times \cdots \times A_n \ ; \quad A_i \in \mathscr{F}_i,\ i = 1, \cdots, n \,\}$$

とおけば，定理**??**より

$$\mathcal{B} := \left\{ \sum_{i=1}^n I_i \ ; \quad I_i \in \mathcal{A},\ n = 1, 2, \cdots \right\}$$

は $\prod_{i=1}^n X_i$ の上の加法族となり $\bigotimes_{i=1}^n \mathscr{F}_i$ を生成する．

定理 A.2.16 (完備測度空間の直積空間). $((X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i))_{i=1}^n$ を σ-有限な測度空間の族とし，$(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$ の Lebesgue 拡大を $(X_i, \mathfrak{M}_i, m_i)$ と書く．このとき次が成り立つ:

$$\left(X_1 \times \cdots \times X_n, \overline{\mathcal{B}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}_n}, \overline{\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n}\right) = \left(X_1 \times \cdots \times X_n, \overline{\mathfrak{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{M}_n}, \overline{m_1 \otimes \cdots \otimes m_n}\right).$$

証明. $X := \prod_{i=1}^n X_i$, $\mathcal{B} := \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{B}_i$, $\mathfrak{M} := \bigotimes_{i=1}^n \mathfrak{M}_i$, $\mu := \bigotimes_{i=1}^n \mu_i$, $m := \bigotimes_{i=1}^n m_i$ と表記する．

第一段 $\mathcal{B}_i \subset \mathfrak{M}_i$, $(i = 1, \cdots, n)$ より $\mathcal{B} \subset \mathfrak{M}$ が従う．このとき

$$\mu(B) = m(B), \quad (\forall B \in \mathcal{B})$$

が成り立つことを示す．いま，σ-有限の仮定により各 i に対し

$$\mu_i(X_i^k) < \infty, \quad X_i^k \in \mathcal{B}_i,\ (\forall k = 1, 2, \cdots), \quad X_1^k \subset X_2^k \subset \cdots$$

[*1] $L_0 := \{\, \Lambda' \ ; \quad \Lambda' \subset \Lambda : \textit{finite subset} \,\}$ は高々可算集合である．実際，$\Lambda_n := \Lambda \times \cdots \times \Lambda$ (n copies of Λ) として $L := \bigcup_{n=1}^{\#\Lambda} \Lambda_n$ とおき，$(x_1, \cdots, x_n) \in L$ に対し $\{x_1, \cdots, x_n\} \in L_0$ を対応させる $f : L \longrightarrow L_0$ を考えれば全射であるから $\mathrm{card}\, L_0 \leq \mathrm{card}\, L \leq \aleph_0$ が従う．

を満たす増大列 $\left(X_i^k\right)_{k=1}^{\infty}$ が存在し，

$$X^k := X_1^k \times \cdots \times X_n^k, \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

により $\mathcal{B}$ の増大列 $(X^k)_{k=1}^{\infty}$ を定めれば

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X^k, \quad \mu(X^k) = \mu_1(X_1^k)\cdots\mu_n(X_n^k) < \infty; \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

が満たされる．ここで $\mathcal{B}$ を生成する乗法族を

$$\mathcal{A} := \{\, B_1 \times \cdots \times B_n \ ; \quad B_i \in \mathcal{B}_i,\ i = 1, \cdots, n \,\}$$

とおけば，$\mathcal{A}$ は $\left\{X^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ を含み，かつ任意の $B_1 \times \cdots \times B_n \in \mathcal{A}$ に対して

$$\mu(B_1 \times \cdots \times B_n) = \mu_1(B_1)\cdots\mu_n(B_n) = m_1(B_1)\cdots m_n(B_n) = m(B_1 \times \cdots \times B_n)$$

となるから，定理**??**より (**??**) が出る．

第二段　この段と次の段で $\left(X, \overline{\mathcal{B}}, \overline{\mu}\right)$ が $(X, \mathfrak{M}, m)$ の完備拡張であることを示す．まず

$$\mathfrak{M} \subset \overline{\mathcal{B}}$$

が成り立つことを示す．任意の $E_j \in \mathfrak{M}_j$ に対し，

$$B_j^1 \subset E_j \subset B_j^2, \quad \mu_j\left(B_j^2 - B_j^1\right) = 0$$

を満たす $B_j^1, B_j^2 \in \mathcal{B}_j$ が存在する．このとき，X から X_j への射影を p_j と書けば

$$p_j^{-1}\left(B_j^1\right) \subset p_j^{-1}(E_j) \subset p_j^{-1}\left(B_j^2\right), \quad p_j^{-1}\left(B_j^1\right), p_j^{-1}\left(B_j^2\right) \in \mathcal{B}$$

及び

$$\mu\left(p_j^{-1}\left(B_j^2\right) - p_j^{-1}\left(B_j^1\right)\right) = \mu_1(X_1)\cdots\mu_j\left(B_j^2 - B_j^1\right)\cdots\mu_n(X_n) = 0$$

が成り立つから

$$p_j^{-1}(E_j) \in \overline{\mathcal{B}}$$

が従い，

$$E_1 \times \cdots \times E_n = \bigcap_{i=1}^{n} p_i^{-1}(E_i), \quad (E_i \in \mathfrak{M}_i,\ i = 1, \cdots, n)$$

と積 σ-加法族の定義より (**??**) が得られる．

第三段　任意の $E \in \mathfrak{M}$ に対し

$$m(E) = \overline{\mu}(E)$$

が成り立つことを示す．実際，(**??**) より $E \in \mathfrak{M}$ なら $E \in \overline{\mathcal{B}}$ となるから，

$$B_1 \subset E \subset B_2, \quad \mu(B_2 - B_1) = 0, \quad \overline{\mu}(E) = \mu(B_1)$$

を満たす $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ が存在し，このとき (**??**) より

$$m(E - B_1) \leq m(B_2 - B_1) = \mu(B_2 - B_1) = 0$$

が成立し

$$m(E) = m(B_1) = \mu(B_1) = \overline{\mu}(E)$$

が得られる．

第四段 前段の結果より $\left(X, \overline{\mathcal{B}}, \overline{\mu}\right)$ は $(X, \mathfrak{M}, m)$ の完備拡張であるから，

$$\overline{\mathfrak{M}} \supset \overline{\mathcal{B}}$$

を示せば定理の主張を得る．実際，任意の $E \in \overline{\mathcal{B}}$ に対し (**??**) を満たす $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ を取れば，

$$m(B_2 - B_1) = \mu(B_2 - B_1) = 0$$

が成り立ち $E \in \overline{\mathfrak{M}}$ が従う． ■

A.2.3 関数列の収束

定義 A.2.17 (概収束すれば測度収束する). $(X, \mathscr{F}, \mu)$ を正値有限測度空間とする．$(f_n)_{n=1}^{\infty}, f$ を全て $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbb{C})$-可測関数とするとき，$\lim_{n\to\infty} f_n = f$, μ-a.e. なら $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ は f に測度収束する．

証明. 任意の $\epsilon > 0$ に対し

$$A_\epsilon^n := \{|f_n - f| > \epsilon\}$$

とおけば，Lebesgue の収束定理より任意の $k \geq 1$ で

$$\epsilon\mu\left(A_\epsilon^n\right) \leq \int_{A_\epsilon^n} |f_n - f| \wedge \epsilon \, d\mu \leq \int_X |f_n - f| \wedge \epsilon \, d\mu \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成立する． ■

上の定理で有限性を外すときの反例を示す．$X = [0, \infty)$，μ を一次元 Lebesgue 測度の X への制限とするとき，

$$f_n := 1\!\!1_{[n,\infty)}$$

で定める関数列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ は零写像に各点収束するが，$0 < \epsilon < 1$ に対し

$$\mu\left(f_n > \epsilon\right) = \mu([n, \infty)) = \infty, \quad (\forall n \geq 1)$$

を満たすから測度収束しない．

定理 A.2.18 (測度収束列の概収束部分列). $(X, \mathscr{F}, \mu)$ を正値測度空間，$(f_n)_{n=1}^{\infty}, f$ を全て $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbb{C})$-可測関数とするとき，$(f_n)_{n=1}^{\infty}$ は f に測度収束するなら或る部分列 $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ は f に概収束する．

証明. 任意の $k \geq 1$ に対し

$$\mu\left(|f_{n_k} - f| > \frac{1}{2^k}\right) < \frac{1}{2^k}$$

を満たす添数列 $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ が取れる.

$$A_k \coloneqq \left\{|f_{n_k} - f| > \frac{1}{2^k}\right\}, \quad A \coloneqq \bigcup_{k \geq 1} \bigcap_{j > k} A_j^c$$

とおけば，$\mu(A^c) \leq \mu\left(\bigcup_{j>k} A_j\right)$, $(\forall k \geq 1)$ かつ

$$\mu\left(\bigcup_{j>k} A_j\right) \leq \sum_{j>k} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^k}$$

より $\mu(A^c) = 0$ が従い，$x \in A$ なら或る $k = k(x)$ が存在して

$$|f_{n_j} - f| \leq \frac{1}{2^j}, \quad (\forall j > k)$$

となるから $\lim_{k \to \infty} f_{n_k}(x) = f(x)$ が満たされる. ∎

定理 A.2.19 (平均収束すれば測度収束する). $p \in (0, \infty)$，$(X, \mathscr{F}, \mu)$ を正値測度空間，$(f_n)_{n=1}^{\infty}, f$ を全て $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbb{C})$-可測関数とするとき，

$$\int_X |f_n - f|^p \, d\mu \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

なら $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ は f に測度収束する.

証明. 任意の $\epsilon > 0$ に対し

$$\epsilon^p \mu\left(|f_n - f| > \epsilon\right) \leq \int_{\{|f_n - f| > \epsilon\}} |f_n - f|^p \, d\mu \leq \int_X |f_n - f|^p \, d\mu \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成立する. ∎

A.2.4 正則 Borel 測度

定理 A.2.20 (Riesz-Markov-Kakutani の表現定理).

定理 A.2.21 (正値 Borel 測度の正則性定理).

A.3 積分

定理 A.3.1 (複素数値関数の可測性). $(X, \mathscr{F})$ を可測空間，$f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ とする．このとき，f が $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbb{C})$-可測であることと f の実部 u と虚部 v がそれぞれ $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測であることは同値である．

証明. $z \in \mathbb{C}$ に対し $x, y \in \mathbb{C}$ の組が唯一つ対応し $z = x + iy$ を満たす．この対応関係により定める写像

$$\varphi : \mathbb{C} \ni z \longmapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

は位相同型である．射影を $p_1 : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \longmapsto x,\ p_2 : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \longmapsto y$ とすれば

$$u = p_1 \circ \varphi \circ f, \quad v = p_2 \circ \varphi \circ f$$

となるから，f が $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbb{C})$-可測であるなら p_1, p_2, φ の連続性より

$$u^{-1}(A) = f^{-1} \circ \varphi^{-1} \circ p_1^{-1}(A) \in \mathscr{F}, \quad v^{-1}(A) = f^{-1} \circ \varphi^{-1} \circ p_2^{-1}(A) \in \mathscr{F}, \quad (\forall A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}))$$

が成り立ち u, v の $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測性が従う．逆に u, v が $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測であるとき，

$$f^{-1}(B) = \{\, x \in X \ ; \quad (u(x), v(x)) \in \varphi(B) \,\} \in \mathscr{F}, \quad (\forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{C}))$$

が成り立ち f の $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbb{C})$-可測性が出る． ■

定理 A.3.2 (和・積・商の可測性).

定理 A.3.3 (相対位相の Borel 集合族). $(S, \mathscr{O})$ を位相空間とする．部分集合 $A \subset S$ に対して

$$\mathscr{B}(A) \coloneqq \sigma\left[\{\, A \cap O \ ; \quad O \in \mathscr{O} \,\}\right]$$

とおくとき次が成り立つ:

$$\mathscr{B}(A) = \{\, A \cap E \ ; \quad E \in \mathscr{B}(S) \,\}.$$

また $A \in \mathscr{B}(S)$ なら $\mathscr{B}(A) \subset \mathscr{B}(S)$ となる．

$\mathbb{R}$-値可測関数は，終集合 $\mathbb{C}$ に拡張すれば $\mathbb{C}$-値可測関数となる．

定理 A.3.4 (単関数近似列の存在). $(X, \mathscr{F})$ を可測空間とする．

(1) 任意の $\mathscr{F}/\mathscr{B}([0,\infty])$-可測写像 f に対し

$$0 \le f_1 \le f_2 \le \cdots \le f; \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \ (\forall x \in X)$$

を満たす $\mathscr{F}/\mathscr{B}([0,\infty))$-可測単関数列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ が存在する．

(2) 任意の $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbb{C})$-可測写像 f に対し

$$0 \le |f_1| \le |f_2| \le \cdots \le |f|; \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \ (\forall x \in X)$$

を満たす $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbb{C})$-可測単関数列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ が存在する．

(3) (1) または (2) において，f が $E \in \mathscr{F}$ 上で有界なら $f_n \mathbb{1}_E$ は一様に $f \mathbb{1}_E$ を近似する:

$$\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty).$$

定義 A.3.5 (複素数値可測関数の正値測度に関する積分). $(X, \mathscr{F}, \mu)$ を正値測度空間，f を $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbb{C})$-可測関数とする．$u := \mathrm{Re} f$, $v := \mathrm{Im} f$ とおけば $|u|, |v| \le |f| \le |u| + |v|$ より

$$|f| \text{ が可積分} \quad \Longleftrightarrow \quad u, v \text{ が共に可積分}$$

が成り立つ．$|f|$ が可積分のとき，f は可積分であるといい f の μ に関する積分を次で定める:

$$\int_X f \, d\mu := \int_X u \, d\mu + i \int_X v \, d\mu.$$

定理 A.3.6 (Lebesgue の収束定理). $(X, \mathscr{F}, \mu)$ を正値測度空間，f, f_n $(n = 1, 2, \cdots)$ を $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbb{C})$-可測な可積分関数とする．このとき，$f = \lim_{n\to\infty} f_n$ μ-a.e. かつ

$$|f_n| \le g, \quad \mu\text{-a.e.}$$

を満たす可積分関数 g が存在するとき

$$\int_X |f - f_n| \, d\mu \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty).$$

定理 A.3.7 (積分の線形性・積分作用素の有界性). $(X, \mathscr{F})$ を可測空間とし，μ を $\mathscr{F}$ 上の正値測度とする．

(1) 任意の $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbb{C})$-可測可積分関数 f, g と $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して次が成り立つ:

$$\int_X \alpha f + \beta g \, d\mu = \alpha \int_X f \, d\mu + \beta \int_X g \, d\mu.$$

(2) 任意の $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbb{C})$-可測可積分関数 f に対して次が成り立つ:

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| \le \int_X |f| \, d\mu.$$

証明.

(1)

(2) $\alpha := \int_X f\,d\mu$ とおけば，$\alpha \neq 0$ の場合

$$|\alpha| = \frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|}\int_X f\,d\mu = \int_X \frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|} f\,d\mu$$

が成り立ち

$$|\alpha| = \mathrm{Re}|\alpha| = \mathrm{Re}\int_X \frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|} f\,d\mu = \int_X \mathrm{Re}\frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|} f\,d\mu \leq \int_X |f|\,d\mu$$

が従う．$\alpha = 0$ の場合も不等式は成立する． ■

補題 A.3.8. S を実数の集合とする．$-S := \{\, -s\ ;\quad s \in S \,\}$ とおくとき次が成り立つ:

$$\inf S = -\sup(-S), \quad \sup S = -\inf(-S).$$

証明. 任意の $s \in S$ に対して $-s \leq \sup(-S)$ より $\inf S \geq -\sup(-S)$ となる．一方で任意の $s \in S$ に対し $\inf S \leq s$ より $-s \leq -\inf S$ となり $\sup(-S) \leq -\inf S$ が従うから $-\sup(-S) \geq \inf S$ も成り立ち $\inf S = -\sup(-S)$ が出る． ■

定理 A.3.9 (積分の平均値と写像の値域). $(X, \mathscr{F}, \mu)$ を σ-有限測度空間，$f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ を $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbb{C})$-可測可積分関数，$C \subset \mathbb{C}$ を閉集合とする．このとき

$$\frac{1}{\mu(E)}\int_E f\,d\mu \in C, \quad (\forall E \in \mathscr{F},\ 0 < \mu(E) < \infty)$$

なら次が成り立つ:

$$f(x) \in C \quad \mu\text{-a.e.}x \in X.$$

$C = \mathbb{R}$ なら f は殆ど至る所 $\mathbb{R}$ 値であり，$C = \{0\}$ なら殆ど至る所 $f = 0$ である．

証明. σ-有限の仮定より次を満たす $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}$ が存在する:

$$\mu(X_n) < \infty,\ (\forall n \geq 1); \quad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n.$$

$C = \mathbb{C}$ なら $f(x) \in C$ $(\forall x \in X)$ である．$C \neq \mathbb{C}$ の場合，任意の $\alpha \in \mathbb{C}\backslash C$ に対し或る $r > 0$ が存在して

$$B_r(\alpha) := \{\, z \in \mathbb{C}\ ;\quad |z - \alpha| \leq r \,\} \subset \mathbb{C}\backslash C$$

を満たす．ここで

$$E := f^{-1}(B_r(\alpha)), \quad E_n := E \cap X_n$$

とおけば，任意の $n \geq 1$ について $\mu(E_n) > 0$ なら

$$\left| \frac{1}{\mu(E_n)} \int_{E_n} f \, d\mu - \alpha \right| = \left| \frac{1}{\mu(E_n)} \int_{E_n} f - \alpha \, d\mu \right| \leq \frac{1}{\mu(E_n)} \int_{E_n} |f - \alpha| \, d\mu \leq r$$

となり (**??**) に反するから，$\mu(E_n) = 0$ $(\forall n \geq 1)$ 及び

$$\mu(E) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = 0$$

が従う．$\mathbb{C} \backslash C$ は開集合であり $B_r(\alpha)$ の形の集合の可算和で表せるから

$$\mu\left(f^{-1}(\mathbb{C} \backslash C) \right) = 0$$

が成り立ち主張が得られる． ∎

定理 A.3.10 (可積分なら積分値を一様に小さくできる). $(X, \mathscr{F}, \mu)$ を正値測度空間，$f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ を $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbb{C})$-可測関数とするとき，$f$ が可積分なら，任意の $\epsilon > 0$ に対して或る $\delta > 0$ が存在し次を満たす:

$$\mu(E) < \delta \Longrightarrow \int_E |f| \, d\mu < \epsilon.$$

証明. $X_n := \{|f| \leq n\}$ により増大列 $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ を定めれば単調収束定理より

$$\int_X |f| \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_{X_n} |f| \, d\mu$$

となるから，任意の $\epsilon > 0$ に対し或る $n_0 \geq 1$ が存在して

$$\int_{X \backslash X_{n_0}} |f| \, d\mu < \epsilon$$

が成り立つ．このとき $\mu(E) < \delta := \epsilon / n_0$ なら

$$\int_E |f| \, d\mu = \int_{E \cap X_n} |f| \, d\mu + \int_{E \cap (X \backslash X_n)} |f| \, d\mu \leq n_0 \mu(E) + \int_{X \backslash X_n} |f| \, d\mu < 2\epsilon$$

が従う． ∎

A.4 Stieltjes 積分

A.4.1 $\mathbb{R}^d$ 上の Stieltjes 測度

$\mathbb{R}$ の左半開区間とは $(a, b]$, $(-\infty \leq a \leq b \leq \infty)$ を指す．ただし

$$(a, b] = \begin{cases} \emptyset, & a = b, \\ (-\infty, b], & a = -\infty, \ b < \infty, \\ (a, \infty), & -\infty < a, \ b = \infty, \\ (-\infty, \infty), & a = -\infty, \ b = \infty, \end{cases}$$

と考える．ここで $d \geq 1$ に対し $(a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \cdots \times (a_d, b_d]$ の形の集合を $\mathbb{R}^d$ の左半開区間として

$$\mathfrak{F} \coloneqq \left\{ \sum_{i=1}^{n} I_i \ ; \quad I_i \subset \mathbb{R}^d : 左半開区間,\ n = 1, 2, \cdots \right\}$$

とおけば，$\mathfrak{F}$ は $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ を生成し，また定理**??**より $\mathbb{R}^d$ の上の加法族となる．$f_\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ (\lambda = 1, \cdots, d)$ を単調非減少関数として，任意の空でない左半開区間 $I = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \cdots \times (a_d, b_d] \subset \mathbb{R}^d$ に対し

$$m_0(I) \coloneqq \prod_{\lambda=1}^{d} \sup \left\{ f_\lambda(\beta_\lambda) - f_\lambda(\alpha_\lambda) \ ; \quad (\alpha_\lambda, \beta_\lambda] \subset (a_\lambda, b_\lambda],\ -\infty < \alpha_\lambda < \beta_\lambda < \infty \right\}$$

とおき，$I = \emptyset$ なら $m_0(I) \coloneqq 0$ とすれば，定理**??**より

$$\mu_0(F) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} m_0(I_i), \quad (\forall F = I_1 + I_2 + \cdots + I_n \in \mathfrak{F})$$

により $\mathfrak{F}$ 上の有限加法的測度が定まる．また，任意の $n \geq 1$ に対して

$$\mu_0((-n, n] \times \cdots \times (-n, n]) = \prod_{\lambda=1}^{d} \{ f_\lambda(n) - f_\lambda(-n) \} < \infty$$

となるから μ_0 は $\mathfrak{F}$ 上で σ-有限的である．

定理 A.4.1 (右連続性と完全加法性). 単調非減少関数 $f_\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ (\lambda = 1, \cdots, d)$ を用いて定める μ_0 について，全ての f_λ が右連続であることと μ_0 が $\mathfrak{F}$ の上で完全加法的であることは同値である．

証明.

第一段

第二段　全ての f_λ が右連続であるとし，

$$I = (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d], \quad (-\infty \leq a_\lambda \leq b_\lambda \leq \infty,\ \lambda = 1, \cdots, d)$$

を取る．$0 < \mu_0(I) < \infty$ のとき，任意の $\epsilon > 0$ に対し

$$I_\epsilon \coloneqq (\alpha_{1,\epsilon}, \beta_{1,\epsilon}] \times \cdots \times (\alpha_{d,\epsilon}, \beta_{d,\epsilon}], \quad (-\infty < \alpha_{\lambda,\epsilon} < \beta_{\lambda,\epsilon} < \infty), \quad I_\epsilon \subset I, \quad \mu(I \backslash I_\epsilon) < \epsilon$$

を満たす左半開区間 I_ϵ が存在し，

$$I_\epsilon \subset K_\epsilon \coloneqq [\alpha_{1,\epsilon}, \beta_{1,\epsilon}] \times \cdots \times [\alpha_{d,\epsilon}, \beta_{d,\epsilon}] \subset I$$

かつ K_ϵ はコンパクト集合である．

定理**??**より $\mathbb{R}^d$ のコンパクト集合全体はコンパクトクラスとなるから，定理**??**より定理**??**の (a) が満たされる．

定義 A.4.2 (Lebesgue-Stieltjes 測度). 単調非減少関数の族 $(f_\lambda)_{\lambda=1}^{d}$ が全て右連続であれば (**??**) の μ_0 は $\mathfrak{F}$ の上で完全加法的となるから，定理**??**より $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{F}, \mu_0)$ は 完備測度空間 $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{M}, \mu^*)$ に拡張される．この μ^* を $(f_\lambda)_{\lambda=1}^{d}$ の d 次元 Lebesgue-Stieltjes 測度と呼び，特に f_λ が全て恒等写像の場合 d 次元 Lebesgue 測度と呼ぶ．

f_λ が全て右連続であれば定理**??**より μ_0 は $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ の上の σ-有限測度 μ に一意に拡張され，このとき

$$\left(\mathbb{R}^d, \overline{\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)}, \overline{\mu}\right) = \left(\mathbb{R}^d, \mathfrak{M}, \mu^*\right)$$

が成立する．この拡張測度 μ を $(f_\lambda)_{\lambda=1}^d$ の Borel-Stieltjes 測度と呼ぶ.

A.4.2　任意の区間上の Stieltjes 測度

I_λ, $(\lambda = 1, \cdots, d)$ を $\mathbb{R}$ の区間，つまり $(a,b), (a,b], [a,b), [a,b]$, $(-\infty \leq a \leq b \leq \infty)$ のいずれかとするとき，

$$I \coloneqq I_1 \times \cdots \times I_d$$

の形の集合 I を $\mathbb{R}^d$ の区間と呼ぶ．いま，各 $\lambda = 1, \cdots, d$ に対し，f_λ を I_λ 上で定義された右連続単調非減少な，ただし I_λ が有界なら I_λ 上で有界な関数として

$$a_\lambda \coloneqq \inf\left\{ f_\lambda(x) \ ; \quad \inf I_\lambda < x < \sup I_\lambda \right\}, \quad b_\lambda \coloneqq \sup\left\{ f_\lambda(x) \ ; \quad \inf I_\lambda < x < \sup I_\lambda \right\}$$

とおけば，$\inf I_\lambda \in I_\lambda$ なら $a_\lambda = f_\lambda(\inf I_\lambda)$，$\sup I_\lambda \in I_\lambda$ なら $b_\lambda = f_\lambda(\sup I_\lambda)$ であるから

$$\hat{f}_\lambda(x) \coloneqq \begin{cases} a_\lambda & -\infty < x \leq \inf I_\lambda \\ f_\lambda(x) & \inf I_\lambda < x < \sup I_\lambda \\ b_\lambda & \sup I_\lambda \leq x < \infty \end{cases}$$

は f_λ の拡張となり，$\left(\hat{f}_\lambda\right)_{\lambda=1}^d$ に対して Borel-Stieltjes 測度空間 $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \mu)$ が定まる．定理**??**より

$$\mathscr{B}(I) = \left\{ I \cap E \ ; \quad E \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \right\} \subset \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$$

が成り立つから，

$$\mu_I(I \cap E) \coloneqq \mu(I \cap E), \quad (\forall E \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$$

とおけば $(I, \mathscr{B}(I), \mu_I)$ は測度空間となる．この μ_I もまた $(f_\lambda)_{\lambda=1}^d$ の Borel-Stieltjes 測度と呼ぶ.

定理 A.4.3 (Borel-Stiletjes **測度の一意性**).　f_λ を区間 $I_\lambda \subset \mathbb{R}$ で定義された右連続な単調非減少関数，μ を $(f_\lambda)_{\lambda=1}^d$ の Borel-Stieltjes 測度とするとき，任意の $(\alpha_1, \beta_1] \times \cdots \times (\alpha_d, \beta_d]$, $(-\infty < \alpha_\lambda < \beta_\lambda < \infty$, $(\alpha_\lambda, \beta_\lambda] \subset I_\lambda)$ に対して

$$\mu\left((\alpha_1, \beta_1] \times \cdots \times (\alpha_d, \beta_d]\right) = \prod_{\lambda=1}^{d} \{f_\lambda(\beta_\lambda) - f_\lambda(\alpha_\lambda)\}$$

が満たされる．また $(f_\lambda)_{\lambda=1}^d$ に対し (**??**) を満たす $(I, \mathscr{B}(I))$ 上の測度は唯一つである.

A.4.3　Stieltjes 積分

定理 A.4.4 (Riemann-Stieltjes **積分との関係**).　$F : I \longrightarrow \mathbb{C}$ が右連続或は左連続なら

定理 A.4.5 (**時間変更**).

A.5 Fubini の定理

$(X,\mathcal{M}),(Y,\mathcal{N})$ を可測空間とするとき，任意の $x\in X$ に対し

$$p_x : Y\ni y\longmapsto (x,y)\in X\times Y$$

で定める p_x は $\mathcal{N}/\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$-可測である．実際，$A\in\mathcal{M},\ B\in\mathcal{N}$ に対しては

$$p_x^{-1}(A\times B)=\begin{cases}\emptyset, & (x\notin A),\\ B, & (x\in A),\end{cases}\in\mathcal{N}$$

となるから，

$$\{\,A\times B\ ;\quad A\in\mathcal{M},\ B\in\mathcal{N}\,\}\subset\left\{\,E\in\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}\ ;\quad p_x^{-1}(E)\in\mathcal{N}\,\right\}$$

が従い p_x の $\mathcal{N}/\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$-可測性が出る．同様に任意の $y\in Y$ に対し

$$q_y : X\ni x\longmapsto (x,y)\in X\times Y$$

で定める q_y は $\mathcal{M}/\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$-可測である．

補題 A.5.1 (二変数可測写像は片変数で可測). $(X,\mathcal{M}),(Y,\mathcal{N}),(Z,\mathcal{L})$ を可測空間とするとき，写像 $f:X\times Y\longmapsto Z$ が $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}/\mathcal{L}$-可測であれば，任意の $x_0\in X,\ y_0\in Y$ に対し

$$X\ni x\longmapsto f(x,y_0),\quad Y\ni y\longmapsto f(x_0,y)$$

はそれぞれ $\mathcal{M}/\mathcal{L}$-可測，$\mathcal{N}/\mathcal{L}$-可測である．

証明. $X\ni x\longmapsto f(x,y_0)$ は f と q_{y_0} の合成 $f\circ q_{y_0}$ であり，$Y\ni y\longmapsto f(x_0,y)$ は $f\circ p_{x_0}$ である． ∎

補題 A.5.2. $(X,\mathcal{M},\mu),(Y,\mathcal{N},\nu)$ を σ-有限な測度空間とするとき，任意の $Q\in\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$ に対し

$$\varphi_Q : X\ni x\longmapsto \int_Y 1\!\!1_Q\circ p_x\,d\nu,\quad \psi_Q : Y\ni y\longmapsto \int_X 1\!\!1_Q\circ q_y\,d\mu,$$

はそれぞれ $\mathcal{M}/\mathscr{B}([0,\infty])$-可測，$\mathcal{N}/\mathscr{B}([0,\infty])$-可測であり

$$\int_X \varphi_Q\,d\mu=(\mu\otimes\nu)(Q)=\int_Y \psi_Q\,d\nu$$

が成立する．

証明.

第一段 σ-有限の仮定より，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X,\quad \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n = Y,\quad \mu(X_n),\ \nu(Y_n)<\infty;\ n=1,2,\cdots$$

を満たす増大列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ と $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{N}$ が存在する．ここで

$$\mathcal{M}_n \coloneqq \{\, A \cap X_n \ ; \quad A \in \mathcal{M} \,\}, \quad \mathcal{N}_n \coloneqq \{\, B \cap Y_n \ ; \quad B \in \mathcal{N} \,\}$$

により X_n, Y_n 上の σ-加法族を定めて

$$\mathcal{D}_n \coloneqq \left\{ Q_n \in \mathcal{M}_n \otimes \mathcal{N}_n \ ; \quad \begin{array}{r} \varphi_{Q_n} : X \ni x \longmapsto \displaystyle\int_Y \mathbb{1}_{Q_n} \circ p_x \, d\nu \text{ が } \mathcal{M}/\mathscr{B}([0,\infty])\text{-可測}, \\ \psi_{Q_n} : Y \ni y \longmapsto \displaystyle\int_X \mathbb{1}_{Q_n} \circ q_y \, d\mu \text{ が } \mathcal{N}/\mathscr{B}([0,\infty])\text{-可測}, \\ \displaystyle\int_X \varphi_{Q_n} \, d\mu = (\mu \otimes \nu)(Q_n) = \int_Y \psi_{Q_n} \, d\nu \end{array} \right\}$$

とおけば，$\mathcal{D}_n$ は $X_n \times Y_n$ 上の Dynkin 族であり

$$\{\, A \times B \ ; \quad A \in \mathcal{M}_n,\ B \in \mathcal{N}_n \,\} \subset \mathcal{D}_n$$

を満たすから $\mathcal{M}_n \otimes \mathcal{N}_n = \mathcal{D}_n$ が従う．

第二段 $\mathcal{M}_n \otimes \mathcal{N}_n = \{\, Q \cap (X_n \times Y_n) \ ; \quad Q \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \,\}$ より，任意の $Q \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ に対して

$$Q_n \coloneqq Q \cap (X_n \times Y_n) \in \mathcal{D}_n, \ (\forall n \geq 1), \quad Q_1 \subset Q_2 \subset \cdots \longrightarrow Q$$

が従い，単調収束定理より

$$\varphi_Q(x) = \int_Y \mathbb{1}_Q \circ p_x \, d\nu = \lim_{n\to\infty} \int_Y \mathbb{1}_{Q_n} \circ p_x \, d\nu = \lim_{n\to\infty} \varphi_{Q_n}(x), \quad (\forall x \in X)$$

となるから φ_Q の $\mathcal{M}/\mathscr{B}([0,\infty])$-可測性が出る．また，

$$\varphi_{Q_n}(x) = \int_Y \mathbb{1}_{Q_n} \circ p_x \, d\nu \leq \int_Y \mathbb{1}_{Q_{n+1}} \circ p_x \, d\nu = \varphi_{Q_{n+1}}(x), \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

が満たされているから，再び単調収束定理により

$$\int_X \varphi_Q \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_{Q_n} \, d\mu = \lim_{n\to\infty} (\mu \otimes \nu)(Q_n) = (\mu \otimes \nu)(Q)$$

が得られる．同様に ψ_Q は $\mathcal{N}/\mathscr{B}([0,\infty])$-可測であり (**??**) を満たす． ∎

定理 A.5.3 (Fubini). $(X, \mathcal{M}, \mu), (Y, \mathcal{N}, \nu)$ を σ-有限な測度空間とする．

(1) $f : X \times Y \longrightarrow [0,\infty]$ を $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}/\mathscr{B}([0,\infty])$-可測写像とするとき，

$$\varphi : X \ni x \longmapsto \int_Y f \circ p_x \, d\nu, \quad \psi : Y \ni y \longmapsto \int_X f \circ q_y \, d\mu$$

により定める φ, ψ はそれぞれ $\mathcal{M}/\mathscr{B}([0,\infty])$-可測，$\mathcal{N}/\mathscr{B}([0,\infty])$-可測であり，

$$\int_X \varphi \, d\mu = \int_{X\times Y} f \, d(\mu \otimes \nu) = \int_Y \psi \, d\nu$$

が成立する．

(2) $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{C}$ を $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}/\mathscr{B}(\mathbb{C})$-可測な可積分関数とするとき，

定理 A.5.4 (n 変数関数の Fubini の定理). $((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i))_{i=1}^n$, $(n \geq 3)$ を σ-有限な測度空間の族とし，

$$\{i_1, \cdots, i_k\} \cup \{j_1, \cdots, j_h\} = \{1, 2, \cdots, n\}, \quad \{i_1, \cdots, i_k\} \cap \{j_1, \cdots, j_h\} = \emptyset$$

を満たす添数列 $i_1, \cdots, i_k$ と $j_1, \cdots, j_h$, $(1 \leq k, h \leq n-1)$ を任意に取り

$$Y \coloneqq \prod_{i=1}^n X_i, \quad Y_1 \coloneqq \prod_{\ell=1}^k X_{i_\ell}, \quad Y_2 \coloneqq \prod_{\ell=1}^h X_{j_\ell},$$
$$\mathcal{N} \coloneqq \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{M}_i, \quad \mathcal{N}_1 \coloneqq \bigotimes_{\ell=1}^k \mathcal{M}_{i_\ell}, \quad \mathcal{N}_2 \coloneqq \bigotimes_{\ell=1}^h \mathcal{M}_{j_\ell},$$
$$\mu \coloneqq \bigotimes_{i=1}^n \mu_i, \quad \nu_1 \coloneqq \bigotimes_{\ell=1}^k \mu_{i_\ell}, \quad \nu_2 \coloneqq \bigotimes_{\ell=1}^h \mu_{j_\ell}$$

とおく．また

$$p_{y_1} : Y_2 \ni y_2 \longmapsto (y_1, y_2), \ (\forall y_1 \in Y_1), \quad q_{y_2} : Y_1 \ni y_1 \longmapsto (y_1, y_2), \ (\forall y_2 \in Y_2)$$

とする．このとき，射影 $\pi_1 : Y \longrightarrow Y_1$, $\pi_2 : Y \longrightarrow Y_2$ に対し

$$\varphi : Y_1 \times Y_2 \ni (y_1, y_2) \longmapsto \pi_1^{-1}(y_1) \cap \pi_2^{-1}(y_2)$$

により $\varphi : Y_1 \times Y_2 \longrightarrow Y$ を定めれば φ は $\mathcal{N}_1 \otimes \mathcal{N}_2/\mathcal{N}$-可測であり，更に以下が成立する:

(1) $f : Y \longrightarrow [0, \infty]$ が $\mathcal{N}/\mathscr{B}([0, \infty])$-可測なら次が成り立つ:

$$\int_Y f \, d\mu = \int_{Y_1} \int_{Y_2} f\Big(\varphi\big(p_{y_1}(y_2)\big)\Big) \ \nu_2(dy_2) \ \nu_1(dy_1) = \int_{Y_2} \int_{Y_1} f\Big(\varphi\big(q_{y_2}(y_1)\big)\Big) \ \nu_1(dy_1) \ \nu_2(dy_2).$$

証明.

第一段 φ の $\mathcal{N}_1 \otimes \mathcal{N}_2/\mathcal{N}$-可測性を示す．実際，$\varphi : Y_1 \times Y_2 \longrightarrow Y$ が全単射であることより

$$\varphi^{-1}(E_1 \times \cdots \times E_n) = \prod_{\ell=1}^k E_{i_\ell} \times \prod_{\ell=1}^h E_{j_\ell} \in \mathcal{N}_1 \otimes \mathcal{N}_2, \quad (\forall E_i \in \mathcal{M}_i, \ i = 1, \cdots, n)$$

が成り立つから

$$\{\, E_1 \times \cdots \times E_n \ ; \quad E_i \in \mathcal{M}_i, \ i = 1, \cdots, n \,\} \subset \Big\{\, E \in \mathcal{N} \ ; \quad \varphi^{-1}(E) \in \mathcal{N}_1 \otimes \mathcal{N}_2 \,\Big\}$$

となり，左辺は $\mathcal{N}$ を生成するから φ は $\mathcal{N}_1 \otimes \mathcal{N}_2/\mathcal{N}$-可測である．

第二段 $f = 1\!\!1_E$ $(E \in \mathcal{N})$ に対し

$$\int_Y f \, d\mu = \int_{Y_1 \times Y_2} f \circ \varphi \, d(\nu_1 \otimes \nu_2)$$

となることを示す．実際，(**??**) より

$$\{\, E_1 \times \cdots \times E_n \ ; \quad E_i \in \mathcal{M}_i, \ i = 1, \cdots, n \,\} \subset \Big\{\, E \in \mathcal{N} \ ; \quad \mu(E) = \nu_1 \otimes \nu_2 \big(\varphi^{-1}(E)\big) \,\Big\}$$

となるから，Dinkin 族定理より任意の $E \in \mathcal{N}$ に対して $\mu(E) = \nu_1 \otimes \nu_2 \left(\varphi^{-1}(E)\right)$ が成立し

$$\int_Y f \, d\mu = \mu(E) = \nu_1 \otimes \nu_2 \left(\varphi^{-1}(E)\right) = \int_{Y_1 \times Y_2} f \circ \varphi \, d(\nu_1 \otimes \nu_2)$$

が従う．

A.6 L^p 空間

測度空間を $(X, \mathscr{F}, \mu)$ とする．$\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbb{C})$-可測関数 f に対して

$$\| f \|_{\mathscr{L}^p} \coloneqq \begin{cases} \inf \{\, r \in \mathbb{C} \;;\; |f(x)| \leq r \quad \mu\text{-a.e.} x \in X \,\} & (p = \infty) \\ \left(\left(\int_X |f(x)|^p \, \mu(dx) \right) \right)^{1/p} & (0 < p < \infty) \end{cases}$$

により $\|\cdot\|_{\mathscr{L}^p}$ を定め，

$$\mathscr{L}^p(X, \mathscr{F}, \mu) \coloneqq \{\, f : X \to \mathbb{C} \;;\; f : \text{可測 } \mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbb{C}),\ \| f \|_{\mathscr{L}^p} < \infty \,\} \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

で空間 $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{F}, \mu)$ を定義する．$\mathscr{L}^p(\mu)$ とも略記する．

補題 A.6.1. 任意の $f \in \mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{F}, \mu)$ に対して次が成り立つ:

$$|f| \leq \| f \|_{\mathscr{L}^\infty} \quad \mu\text{-a.e.}$$

証明. $\mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{F}, \mu)$ の定義より任意の実数 $\alpha > \| f \|_{\mathscr{L}^\infty}$ に対して

$$\mu\left(\{\, x \in X \;;\; |f(x)| > \alpha \,\}\right) = 0$$

が成り立つから，

$$\{\, x \in X \;;\; |f(x)| > \| f \|_{\mathscr{L}^\infty} \,\} = \bigcup_{n=1}^\infty \left\{\, x \in X \;;\; |f(x)| > \| f \|_{\mathscr{L}^\infty} + \frac{1}{n} \,\right\}$$

の右辺は μ-零集合であり主張が従う． ∎

定理 A.6.2 (Hölder の不等式). $1 \leq p, q \leq \infty$，$p + q = pq$ ($p = \infty$ なら $q = 1$) とする．このとき任意の $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbb{C})$-可測関数 f, g に対して次が成り立つ:

$$\int_X |fg| \, d\mu \leq \| f \|_{\mathscr{L}^p} \| g \|_{\mathscr{L}^q}.$$

証明. $\| f \|_{\mathscr{L}^p} = \infty$ 又は $\| g \|_{\mathscr{L}^q} = \infty$ なら (**??**) は成り立つから，$\| f \|_{\mathscr{L}^p} < \infty$ かつ $\| g \|_{\mathscr{L}^q} < \infty$ とする．

$p = \infty$, $q = 1$ の場合 補題**??**により或る零集合 A が存在して

$$|f(x)g(x)| \leq \| f \|_{\mathscr{L}^\infty} |g(x)| \quad (\forall x \in X \backslash A).$$

が成り立つから,

$$\int_X |fg|\,d\mu = \int_{X\setminus A} |fg|\,d\mu \leq \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} \int_{X\setminus A} |g|\,d\mu = \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} \|g\|_{\mathscr{L}^1}$$

が従い不等式 (**??**) を得る.

$1 < p, q < \infty$ **の場合**　$\|f\|_{\mathscr{L}^p} = 0$ のとき

$$B \coloneqq \{\, x \in X \;;\quad |f(x)| > 0 \,\}$$

は零集合であるから,

$$\int_X |fg|\,d\mu = \int_{X\setminus B} |fg|\,d\mu = 0$$

となり (**??**) を得る．$\|g\|_{\mathscr{L}^q} = 0$ の場合も同じである．次に $0 < \|f\|_{\mathscr{L}^p}, \|g\|_{\mathscr{L}^q} < \infty$ の場合を示す．実数値対数関数 $(0,\infty) \ni t \longmapsto -\log t$ は凸であるから，$1/p + 1/q = 1$ に対して

$$-\log\left(\frac{s}{p} + \frac{t}{q}\right) \leq \frac{1}{p}(-\log s) + \frac{1}{q}(-\log t) \quad (\forall s, t > 0)$$

を満たし

$$s^{1/p} t^{1/q} \leq \frac{s}{p} + \frac{t}{q} \quad (\forall s, t > 0)$$

が従う．ここで

$$F \coloneqq \frac{|f|^p}{\|f\|_{\mathscr{L}^p}^p}, \quad G \coloneqq \frac{|g|^q}{\|g\|_{\mathscr{L}^q}^q}$$

により可積分関数 F, G を定めれば,

$$F(x)^{1/p} G(x)^{1/q} \leq \frac{1}{p} F(x) + \frac{1}{q} G(x) \quad (\forall x \in X)$$

が成り立つから

$$\frac{1}{\|f\|_{\mathscr{L}^p} \|g\|_{\mathscr{L}^q}} \int_X |fg|\,d\mu = \int_X F^{1/p} G^{1/q}\,d\mu \leq \frac{1}{p} \int_X F\,d\mu + \frac{1}{q} \int_X G\,d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

が従い，$\|f\|_{\mathscr{L}^p} \|g\|_{\mathscr{L}^q}$ を移項して不等式 (**??**) を得る． ∎

定理 A.6.3 (Minkowski の不等式).　$1 \leq p \leq \infty$ のとき，任意の $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbb{C})$-可測関数 f, g に対して次が成り立つ:

$$\|f + g\|_{\mathscr{L}^p} \leq \|f\|_{\mathscr{L}^p} + \|g\|_{\mathscr{L}^p}.$$

証明.　$\|f + g\|_{\mathscr{L}^p} = 0$, $\|f\|_{\mathscr{L}^p} = \infty$, $\|g\|_{\mathscr{L}^p} = \infty$ のいずれかが満たされていれば (**??**) は成り立つから，$\|f + g\|_{\mathscr{L}^p} > 0$ かつ $\|f\|_{\mathscr{L}^p} < \infty$ かつ $\|g\|_{\mathscr{L}^p} < \infty$ の場合を考える．

$p = \infty$ **の場合**　補題**??**により

$$C \coloneqq \{\, x \in X \;;\quad |f(x)| > \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} \,\} \cup \{\, x \in X \;;\quad |g(x)| > \|g\|_{\mathscr{L}^\infty} \,\}$$

は零集合であり，

$$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)|+|g(x)| \leq \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} + \|g\|_{\mathscr{L}^\infty} \quad (\forall x \in X \backslash C)$$

が成り立ち (**??**) が従う．

$p=1$ の場合

$$\int_X |f+g|\,d\mu \leq \int_X |f|+|g|\,d\mu = \|f\|_{\mathscr{L}^1} + \|g\|_{\mathscr{L}^1}$$

より (**??**) が従う．

$1<p<\infty$ の場合 q を p の共役指数とする．

$$|f+g|^p = |f+g||f+g|^{p-1} \leq |f||f+g|^{p-1} + |g||f+g|^{p-1}$$

が成り立つから，Hölder の不等式より

$$\begin{aligned}\|f+g\|_{\mathscr{L}^p}^p &= \int_X |f+g|^p\,d\mu \\ &\leq \int_X |f||f+g|^{p-1}\,d\mu + \int_X |g||f+g|^{p-1}\,d\mu \\ &\leq \|f\|_{\mathscr{L}^p}\|f+g\|_{\mathscr{L}^p}^{p-1} + \|g\|_{\mathscr{L}^p}\|f+g\|_{\mathscr{L}^p}^{p-1}\end{aligned}$$

が得られる．また $|f|^p, |g|^p$ の可積性と

$$|f+g|^p \leq 2^p\left(|f|^p + |g|^p\right)$$

により $\|f+g\|_{\mathscr{L}^p} < \infty$ が従うから，(**??**) の両辺を $\|f+g\|_{\mathscr{L}^p}^{p-1}$ で割って (**??**) を得る． ∎

以上の結果より $\mathscr{L}^p(X,\mathscr{F},\mu)$ は線形空間となる．実際線型演算は

$$(f+g)(x) \coloneqq f(x)+g(x), \quad (\alpha f)(x) \coloneqq \alpha f(x), \quad (\forall x \in X,\ f,g \in \mathscr{L}^p(\mu),\ \alpha \in \mathbb{C})$$

により定義され，Minkowski の不等式により加法について閉じている．

補題 A.6.4. $1 \leq p \leq \infty$ に対し，$\|\cdot\|_{\mathscr{L}^p}$ は線形空間 $\mathscr{L}^p(X,\mathscr{F},\mu)$ のセミノルムである．

証明.

半正値性 $\|\cdot\|_{\mathscr{L}^p}$ が正値であることは定義による．一方で，$E \neq \emptyset$ を満たす μ-零集合 E が存在するとき，

$$f(x) \coloneqq \begin{cases} 1 & (x \in E) \\ 0 & (x \in \Omega \backslash E) \end{cases}$$

で定める f は零写像ではないが $\|f\|_{\mathscr{L}^p} = 0$ となる．

同次性 任意に $\alpha \in \mathbb{C},\ f \in \mathscr{L}^p(\mu)$ を取る．$1 \leq p < \infty$ の場合は

$$\left(\int_X |\alpha f|^p\,d\mu\right)^{1/p} = \left(|\alpha|^p \int_X |f|^p\,d\mu\right)^{1/p} = |\alpha|\left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{1/p}$$

により，$p=\infty$ の場合は

$$\inf\{\, r \in \mathbb{R}\ ;\quad |\alpha f(x)| \leq r \quad \mu\text{-a.e.}x \in X \,\} = |\alpha| \inf\{\, r \in \mathbb{R}\ ;\quad |f(x)| \leq r \quad \mu\text{-a.e.}x \in X \,\}$$

により $\|\alpha f\|_{\mathscr{L}^p} = |\alpha|\,\|f\|_{\mathscr{L}^p}$ が成り立つ．

三角不等式 Minkowski の不等式より従う． ∎

$\mathscr{L}^p$ はノルム空間ではないが，同値類でまとめることによりノルム空間となる．

可測関数全体の商集合 $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbb{C})$-可測関数全体の集合を

$$\mathscr{L}^0(X,\mathscr{F},\mu) \coloneqq \{\, f : X \to \mathbb{C} \;;\quad f : \text{可測 } \mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbb{C}) \,\}$$

とおく．$f, g \in \mathscr{L}^0(X,\mathscr{F},\mu)$ に対し

$$f \sim g \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad f = g \quad \mu\text{-a.e.}$$

により定める $\sim$ は同値関係であり，$\sim$ による $\mathscr{L}^0(X,\mathscr{F},\mu)$ の商集合を $L^0(X,\mathscr{F},\mu)$ と表す．

商集合における算法 $L^0(\mu)$ の元である関数類 (同値類) を $[f]$ (f は関数類の代表) と表せば，$L^0(\mu)$ は

$$[f]+[g] \coloneqq [f+g], \quad \alpha[f] \coloneqq [\alpha f], \quad ([f],[g] \in L^0(\mu),\ \alpha \in \mathbb{C}).$$

を線型演算として $\mathbb{C}$ 上の線形空間となる．また

$$[f][g] \coloneqq [fg] \quad \bigl([f],[g] \in L^0(\mu)\bigr).$$

を乗法として $L^0(\mu)$ は環となる．$L^0(\mu)$ の零元は零写像の関数類でありこれを $[0]$ と書く．また単位元は恒等的に 1 を取る関数の関数類でありこれを $[1]$ と書く．減法は

$$[f]-[g] \coloneqq [f]+(-[g]) = [f]+[-g] = [f-g]$$

により定める．

関数類の順序 $[f],[g] \in L^0(\mu)$ に対して次の関係 $<$ ($>$) を定める:

$$[f] < [g] \ \ ([g] > [f]) \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad f < g \quad \mu\text{-a.s.}$$

この定義は well-defined である．実際任意の $f' \in [f], g' \in [g]$ に対して

$$\{f' \geq g'\} \subset \{f \neq f'\} \cup \{f \geq g\} \cup \{g \neq g'\}$$

の右辺は零集合であるから

$$[f] < [g] \Leftrightarrow [f'] < [g']$$

が従う．$<$ ($>$) または $=$ であることを $\leq$ ($\geq$) と書くとき，任意の $[f],[g],[h] \in L^0(\mu)$ に対し，

- $[f] \leq [f]$ が成り立つ．
- $[f] \leq [g]$ かつ $[g] \leq [f]$ ならば $[f] = [g]$ が成り立つ．
- $[f] \leq [g]$, $[g] \leq [h]$ ならば $[f] \leq [h]$ が成り立つ．

が満たされるから $\leq$ は $L^0(\mu)$ における順序となる．

定義 A.6.5 (商空間におけるノルムの定義).

$$\|[f]\|_{L^p} \coloneqq \|f\|_{\mathscr{L}^p} \quad (f \in \mathscr{L}^p(X, \mathscr{F}, \mu),\ 1 \leq p \leq \infty)$$

により定める $\|\cdot\|_{L^p} : L^0(X, \mathscr{F}, \mu) \to \mathbb{R}$ は関数類の代表に依らずに値が確定する．そして

$$L^p(X, \mathscr{F}, \mu) \coloneqq \left\{ [f] \in L^0(X, \mathscr{F}, \mu) \ ; \quad \|[f]\|_{L^p} < \infty \right\} \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

として定める空間は $\|\cdot\|_{L^p}$ をノルムとしてノルム空間となる．

定理 A.6.6 (L^p は Banach 空間). ノルム空間 $L^p(X, \mathscr{F}, \mu)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ の任意の Cauchy 列 $([f_n])_{n=1}^{\infty}$ に対してノルム収束極限 $[f] \in L^p(\mu)$ が存在する．また，このとき或る部分列 $([f_{n_k}])_{k=1}^{\infty}$ の代表 f_{n_k} は f に概収束する:

$$\lim_{k \to \infty} f_{n_k} = f, \quad \mu\text{-a.e.}$$

証明. 任意に Cauchy 列 $[f_n] \in L^p(\mu)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を取れば，或る $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\|[f_n] - [f_m]\|_{L^p} < \frac{1}{2} \quad (\forall n > m \geq N_1)$$

を満たす．ここで $m > N_1$ を一つ選び n_1 とおく．同様に $N_2 > N_1$ を満たす $N_2 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\|[f_n] - [f_m]\|_{L^p} < \frac{1}{2^2} \quad (\forall n > m \geq N_2)$$

を満たすから，$m > N_2$ を一つ選び n_2 とおけば

$$\left\| [f_{n_1}] - [f_{n_2}] \right\|_{L^p} < \frac{1}{2}$$

が成り立つ．同様の操作を繰り返して

$$\left\| [f_{n_k}] - [f_{n_{k+1}}] \right\|_{L^p} < \frac{1}{2^k} \quad (n_k < n_{k+1},\ k = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たす部分添数列 $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ を構成する．

$p = \infty$ の場合 $[f_{n_k}]$ の代表 f_{n_k} $(k = 1, 2, \cdots)$ に対して

$$\begin{aligned} A_k &\coloneqq \left\{ x \in X \ ; \quad \left| f_{n_k}(x) \right| > \left\| f_{n_k} \right\|_{\mathscr{L}^\infty} \right\}, \\ A^k &\coloneqq \left\{ x \in X \ ; \quad \left| f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x) \right| > \left\| f_{n_k} - f_{n_{k+1}} \right\|_{\mathscr{L}^\infty} \right\} \end{aligned}$$

とおけば，補題**??**より $\mu(A_k) = \mu(A^k) = 0$ $(k = 1, 2, \cdots)$ が成り立つ．

$$A_\circ \coloneqq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \quad A^\circ \coloneqq \bigcup_{k=1}^{\infty} A^k, \quad A \coloneqq A_\circ \cup A^\circ$$

として μ-零集合 A を定めて

$$\hat{f}_{n_k} \coloneqq f_{n_k} \mathbb{1}_{X \backslash A} \quad (\forall k = 1, 2, \cdots)$$

とおけば各 $\hat{f}_{n_k}$ は $\left[\hat{f}_{n_k}\right] = [f_{n_k}]$ を満たす有界可測関数であり，(**??**) より

$$\sup_{x\in X}\left|\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}_{n_{k+1}}(x)\right| \leq \left\| \hat{f}_{n_k} - \hat{f}_{n_{k+1}} \right\|_{\mathscr{L}^\infty} < \frac{1}{2^k} \quad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

が成り立つ．このとき任意の $\epsilon > 0$ に対し $1/2^N < \epsilon$ を満たす $N \in \mathbb{N}$ を取れば，$\ell > k > N$ なら

$$\left|\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}_{n_\ell}(x)\right| \leq \sum_{j=k}^{\ell-1}\left|\hat{f}_{n_j}(x) - \hat{f}_{n_{j+1}}(x)\right| < \sum_{k>N}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^N} < \epsilon \quad (\forall x \in X)$$

となるから，各点 $x \in X$ で $\left(\hat{f}_{n_k}(x)\right)_{k=1}^\infty$ は $\mathbb{C}$ の Cauchy 列となり収束する．

$$\hat{f}(x) \coloneqq \lim_{k\to\infty}\hat{f}_{n_k}(x) \quad (\forall x \in X)$$

として $\hat{f}$ を定めれば，$\hat{f}$ は可測 $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbb{C})$ であり，且つ任意に $k \in \mathbb{N}$ を取れば

$$\sup_{x\in X}|\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}(x)| \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

を満たす．実際或る $y \in X$ で $\alpha \coloneqq |\hat{f}_{n_k}(y) - \hat{f}(y)| > 1/2^{k-1}$ が成り立つと仮定すれば，

$$\left|\hat{f}_{n_k}(y) - \hat{f}_{n_\ell}(y)\right| \leq \sum_{j=k}^{\ell-1}\sup_{x\in X}\left|\hat{f}_{n_j}(x) - \hat{f}_{n_{j+1}}(x)\right| < \sum_{j=k}^{\infty}\frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{k-1}} \quad (\forall \ell > k)$$

より

$$0 < \alpha - \frac{1}{2^{k-1}} < \left|\hat{f}_{n_k}(y) - \hat{f}(y)\right| - \left|\hat{f}_{n_k}(y) - \hat{f}_{n_\ell}(y)\right| \leq \left|\hat{f}(y) - \hat{f}_{n_\ell}(y)\right| \quad (\forall \ell > k)$$

が従い各点収束に反する．不等式 (**??**) により

$$\sup_{x\in X}\left|\hat{f}(x)\right| < \sup_{x\in X}\left|\hat{f}(x) - \hat{f}_{n_k}(x)\right| + \sup_{x\in X}\left|\hat{f}_{n_k}(x)\right| \leq \frac{1}{2^{k-1}} + \left\| \hat{f}_{n_k} \right\|_{\mathscr{L}^\infty}$$

が成り立つから $\left[\hat{f}\right] \in L^\infty(\mu)$ が従い，

$$\left\| [f_{n_k}] - \left[\hat{f}\right] \right\|_{L^\infty} = \left\| \left[\hat{f}_{n_k}\right] - \left[\hat{f}\right] \right\|_{L^\infty} \leq \sup_{x\in X}|\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}(x)| \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty)$$

により部分列 $([f_{n_k}])_{k=1}^\infty$ が $\left[\hat{f}\right]$ に収束するから元の Cauchy 列も $\left[\hat{f}\right]$ に収束する．

$1 \leq p < \infty$ の場合　$[f_{n_k}]$ の代表 f_{n_k} $(k = 1, 2, \cdots)$ は

$$f_{n_k}(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{k}\left(f_{n_j}(x) - f_{n_{j-1}}(x)\right) \quad (\forall x \in X)$$

を満たし，これに対して

$$g_k(x) \coloneqq \left|f_{n_1}(x)\right| + \sum_{j=1}^{k}\left|f_{n_j}(x) - f_{n_{j-1}}(x)\right| \quad (\forall x \in X,\ k = 1, 2, \cdots)$$

により単調非減少な可測関数列 $(g_k)_{k=1}^\infty$ を定めれば，Minkowski の不等式と (**??**) により

$$\| g_k \|_{\mathscr{L}^p} \leq \left\| f_{n_1} \right\|_{\mathscr{L}^p} + \sum_{j=1}^{k}\left\| f_{n_j} - f_{n_{j-1}} \right\|_{\mathscr{L}^p} < \left\| f_{n_1} \right\|_{\mathscr{L}^p} + 1 < \infty \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

が成り立つ．ここで

$$B_N \coloneqq \bigcap_{k=1}^{\infty} \{\, x \in X \ ; \quad g_k(x) \le N \,\}, \quad B \coloneqq \bigcup_{N=1}^{\infty} B_N$$

とおけば $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ は B 上で各点収束し $X \backslash B$ 上では発散するが，$X \backslash B$ は零集合である．実際

$$\int_X g_k^p \, d\mu = \int_B g_k^p \, d\mu + \int_{X \backslash B} g_k^p \, d\mu \le \left(\| f_{n_1} \|_{\mathscr{L}^p} + 1 \right)^p, \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

が満たされているから，単調収束定理より

$$\int_B \lim_{k \to \infty} g_k^p \, d\mu + \int_{X \backslash B} \lim_{k \to \infty} g_k^p \, d\mu \le \left(\| f_{n_1} \|_{\mathscr{L}^p} + 1 \right)^p$$

が成り立ち $\mu(X \backslash B) = 0$ が従う．$\mathscr{F} / \mathscr{B}(\mathbb{C})$-可測関数 g, f を

$$g \coloneqq \lim_{k \to \infty} g_k \mathbb{1}_B, \quad f \coloneqq \lim_{k \to \infty} f_{n_k} \mathbb{1}_B$$

で定義すれば，$|f| \le g$ と g^p の可積分性により $[f] \in L^p(\mu)$ が成り立つ．また $\left| f_{n_k} - f \right|^p \le 2^p g^p \ (\forall k = 1, 2, \cdots)$ が満たされているから，Lebesgue の収束定理により

$$\lim_{k \to \infty} \| [f_{n_k}] - [f] \|_{L^p}^p = \lim_{k \to \infty} \int_X \left| f_{n_k} - f \right|^p \, d\mu = 0$$

が従い，部分列の収束により元の Cauchy 列も $[f]$ に収束する． ∎

A.7 複素測度

定義 A.7.1 (**複素測度**). $(X, \mathscr{F})$ を可測空間とするとき，$\mathscr{F}$ で定義される完全加法的な複素数値関数を $(X, \mathscr{F})$ 上の複素測度 (complex measure) という．

λ を可測空間 $(X, \mathscr{F})$ の複素測度とする．任意の全単射 $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ に対し

$$(E \coloneqq) \ \sum_{i=1}^{\infty} E_i = \sum_{i=1}^{\infty} E_{\sigma(i)}$$

が成り立つから

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i) = \lambda(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_{\sigma(i)})$$

が従い，Riemann の級数定理より $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i)$ は絶対収束する．ここで，

$$|\lambda(E)| \le \mu(E) \quad (\forall E \in \mathscr{F})$$

を満たすような或る $(X, \mathscr{F})$ 上の測度 μ が存在すると考える．このとき μ は

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(E_i)| \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) = \mu\left(\sum_{i=1}^{\infty} E_i \right)$$

を満たすから

$$\sup\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(A_i)| \ ; \quad E = \sum_{i=1}^{\infty} A_i,\ \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathscr{F} \right\} \leq \mu(E), \quad (\forall E \in \mathscr{F})$$

が成立する．実は，

$$|\lambda|(E) \coloneqq \sup\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(A_i)| \ ; \quad E = \sum_{i=1}^{\infty} A_i,\ \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathscr{F} \right\}, \quad (\forall E \in \mathscr{F})$$

で定める $|\lambda|$ は (**??**) を満たす最小の有限測度となる (定理**??**，定理**??**).

定義 A.7.2 (**総変動・総変動測度**). 可測空間 $(X, \mathscr{F})$ 上の複素測度 λ に対し，(**??**) で定める $|\lambda|$ を λ の総変動測度 (total variation measure) といい，$|\lambda|(X)$ を λ の総変動 (total variation) という.

特に λ が正値有限測度である場合は $\lambda = |\lambda|$ が成り立つ．実際，任意の $E \in \mathscr{F}$ に対して

$$|\lambda|(E) = \sup\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(A_i)| \ ; \quad E = \sum_{i=1}^{\infty} A_i,\ \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathscr{F} \right\} = \lambda(E)$$

が成立する.

定理 A.7.3 ($|\lambda|$ **は測度**). 可測空間 $(X, \mathscr{F})$ 上の複素測度 λ に対して，(**??**) で定める $|\lambda|$ は正値測度である.

証明. $|\lambda|$ の正値性は (**??**) より従うから，$|\lambda|$ の完全加法性を示す．いま，互いに素な集合列 $E_i \in \mathscr{F}$ $(i = 1, 2, \cdots)$ を取り $E \coloneqq \sum_{i=1}^{\infty} E_i$ とおく．このとき，任意の $\epsilon > 0$ に対して E_i の或る分割 $(A_{ij})_{j=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}$ が存在して

$$|\lambda|(E_i) \geq \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda(A_{ij})| > |\lambda|(E_i) - \frac{\epsilon}{2^i}$$

を満たすから，$E = \sum_{i,j=1}^{\infty} A_{ij}$ と併せて

$$|\lambda|(E) \geq \sum_{i,j=1}^{\infty} |\lambda(A_{ij})| \geq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda(A_{ij})| > \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda|(E_i) - \epsilon$$

となり，$\epsilon > 0$ の任意性より

$$|\lambda|(E) \geq \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda|(E_j)$$

が従う．一方で E の任意の分割 $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}$ に対し

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda(A_j)| = \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_j \cap E_i) \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda|(A_j \cap E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda|(E_i)$$

が成り立つから，E の分割について上限を取って

$$|\lambda|(E) \leq \sum_{i=1} |\lambda|(E_i)$$

を得る. ∎

補題 A.7.4. $z_1, \cdots, z_N$ を複素数とする．このとき，次を満たす或る部分集合 $S \subset \{1, \cdots, N\}$ が存在する:

$$\left|\sum_{k \in S} z_k\right| \geq \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N} |z_k|.$$

証明. $i = \sqrt{-1}$ として，$z_k = |z_k| e^{i\alpha_k}$ $(-\pi \leq \alpha_k < \pi,\ k = 1, \cdots, N)$ を満たす $\alpha_1, \cdots, \alpha_N$ を取り

$$S(\theta) \coloneqq \{\, k \in \{1, \cdots, N\}\ ;\quad \cos(\alpha_k - \theta) > 0 \,\}, \quad (-\pi \leq \theta \leq \pi)$$

とおく．このとき，$\cos^+ x \coloneqq 0 \vee \cos x$ $(x \in \mathbb{R})$ とすれば

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k \in S(\theta)} z_k\right| &= |e^{-i\theta}| \left|\sum_{k \in S(\theta)} z_k\right| = \left|\sum_{k \in S(\theta)} |z_k| e^{i(\alpha_k - \theta)}\right| \\
&\geq \mathrm{Re} \sum_{k \in S(\theta)} |z_k| e^{i(\alpha_k - \theta)} = \sum_{k \in S(\theta)} |z_k| \cos(\alpha_k - \theta) = \sum_{k=1}^{N} |z_k| \cos^+(\alpha_k - \theta)
\end{aligned}$$

が成り立ち，最右辺は θ に関して連続であるから最大値を達成する $\theta_0 \in [-\pi, \pi]$ が存在する．$S \coloneqq S(\theta_0)$ として

$$\left|\sum_{k \in S} z_k\right| \geq \sum_{k=1}^{N} |z_k| \cos^+(\alpha_k - \theta_0) \geq \sum_{k=1}^{N} |z_k| \cos^+(\alpha_k - \theta) \quad (\forall \theta \in [-\pi, \pi])$$

となり，積分して

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k \in S} z_k\right| &\geq \sum_{k=1}^{N} |z_k| \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} \cos^+(\alpha_k - \theta)\, d\theta \\
&= \sum_{k=1}^{N} |z_k| \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} \cos^+ \theta\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N} |z_k|
\end{aligned}$$

が得られる． ∎

定理 A.7.5 (複素測度の有界性). 可測空間 $(X, \mathscr{F})$ 上の複素測度 λ の総変動測度 $|\lambda|$ について次が成り立つ:

$$|\lambda|(X) < \infty.$$

証明. $|\lambda|(X) = \infty$ と仮定して背理法により定理を導く．

第一段 或る $E \in \mathscr{F}$ に対し $|\lambda|(E) = \infty$ が成り立っているなら，

$$|\lambda(A)| > 1, \quad |\lambda(B)| > 1, \quad E = A + B$$

を満たす $A, B \in \mathscr{F}$ が存在することを示す．いま，$t \coloneqq 2\pi(1 + |\lambda(E)|)$ とおけば

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(E_i)| > t$$

を満たす E の分割 $(E_i)_{i=1}^{\infty}$ が存在する．従って或る $N \in \mathbb{N}$ に対し

$$\sum_{i=1}^{N} |\lambda(E_i)| > t$$

が成り立ち，補題**??**より

$$\left|\sum_{k \in S} \lambda(E_k)\right| \geq \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N} |\lambda(E_k)| > \frac{t}{2\pi} > 1$$

を満たす $S \subset \{1, \cdots, N\}$ が取れる．ここで $A \coloneqq \sum_{k \in S} E_k,\ B \coloneqq E - A$ とおけば，$|\lambda(A)| > 1$ かつ

$$|\lambda(B)| = |\lambda(E) - \lambda(A)| \geq |\lambda(A)| - |\lambda(E)| > \frac{t}{2\pi} - |\lambda(E)| = 1$$

が成り立つ．また，

$$|\lambda|(E) = |\lambda|(A) + |\lambda|(B)$$

より $|\lambda|(A), |\lambda|(B)$ の少なくとも一方は ∞ となる．

第二段　いま，$|\lambda|(X) = \infty$ と仮定すると，前段の結果より

$$|\lambda|(B_1) = \infty, \quad |\lambda(A_1)| > 1, \quad |\lambda(B_1)| > 1, \quad X = A_1 + B_1$$

を満たす $A_1, B_1 \in \mathscr{F}$ が存在する．同様に B_1 に対しても

$$|\lambda|(B_2) = \infty, \quad |\lambda(A_2)| > 1, \quad |\lambda(B_2)| > 1, \quad B_1 = A_2 + B_2$$

を満たす $A_2, B_2 \in \mathscr{F}$ が存在する．繰り返せば $|\lambda(A_j)| > 1\ (j = 1, 2, \cdots)$ を満たす互いに素な集合列 $(A_j)_{j=1}^{\infty}$ が構成され，このとき $\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda(A_j)| = \infty$ となる．一方で Riemann の級数定理より $\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda(A_j)| < \infty$ が成り立つから矛盾が生じ，$|\lambda|(X) < \infty$ が出る． ∎

定理 A.7.6 (総変動測度は有限分割で表現できる).　可測空間 $(X, \mathscr{F})$ 上の複素測度 λ に対して次が成り立つ:

$$|\lambda|(E) = \sup\left\{ \sum_{i=1}^{n} |\lambda(A_i)| \ ; \quad E = \sum_{i=1}^{n} A_i,\ \{A_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathscr{F},\ n = 1, 2, \cdots \right\}, \quad (\forall E \in \mathscr{F}).$$

証明．　任意の $E \in \mathscr{F}$ で，$E = \sum_{i=1}^{n} A_i$ に対し $A_{i+1} = A_{i+2} = \cdots = \emptyset$ とすれば $E = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$ となるから

$$|\lambda|(E) \geq \sup\left\{ \sum_{i=1}^{n} |\lambda(A_i)| \ ; \quad E = \sum_{i=1}^{n} A_i,\ \{A_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathscr{F},\ n = 1, 2, \cdots \right\}$$

が従う．一方で $|\lambda|(E) > 0$ の場合，$|\lambda|(E) > \alpha > 0$ を満たす α を任意に取れば

$$|\lambda|(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(A_i)| > \alpha, \quad E = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$$

を満たす $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}$ が存在し，このとき $B_n \coloneqq \sum_{i=n}^{\infty} A_i$ とおけば

$$0 \leq \sum_{i=n}^{\infty} |\lambda(A_i)| - |\lambda(B_n)| \leq \sum_{i=n}^{\infty} |\lambda(A_i)| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

となるから，或る $n \geq 1$ で

$$|\lambda|(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(A_i)| \geq |\lambda(A_1)| + \cdots + |\lambda(A_{n-1})| + |\lambda(B_n)| > \alpha$$

が満たされる．$E = A_1 + \cdots + A_{n-1} + B_n$ であるから，(**??**) と併せて

$$|\lambda|(E) = \sup\left\{ \sum_{i=1}^{n} |\lambda(A_i)| \;;\quad E = \sum_{i=1}^{n} A_i,\ \{A_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathscr{F},\ n = 1, 2, \cdots \right\}$$

が得られる．$|\lambda|(E) = 0$ なら (**??**) で等号成立となる． ∎

定理 A.7.7 (総変動ノルム). 可測空間 $(X, \mathscr{F})$ 上の複素測度の全体を $CM(X, \mathscr{F})$ と書くとき，

$$(\alpha\lambda + \beta\mu)(E) \coloneqq \alpha\lambda(E) + \beta\mu(E), \quad (\lambda, \mu \in CM(X, \mathscr{F}),\ \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ E \in \mathscr{F})$$

を線型演算として $CM(X, \mathscr{F})$ は線形空間となり，また

$$\|\lambda\|_{TV} \coloneqq |\lambda|(X) \quad (\lambda \in CM(X, \mathscr{F}))$$

により $CM(X, \mathscr{F})$ にノルム $\|\cdot\|_{TV}$ が定まる．この $\|\cdot\|_{TV}$ を総変動ノルムという．

証明. $\|\cdot\|_{TV}$ がノルムであることを示す．

第一段 $\lambda = 0$ なら $\|\lambda\|_{TV} = |\lambda|(X) = 0$ となる．また $|\lambda(E)| \leq |\lambda|(E) \leq \|\lambda\|_{TV}$ より $\|\lambda\|_{TV} = 0$ なら $\lambda = 0$ が従う．

第二段 任意の $\lambda \in CM(X, \mathscr{F})$ と $c \in \mathbb{C}$ に対し

$$\|c\lambda\|_{TV} = \sup \sum_{i} |(c\lambda)(E_i)| = \sup \sum_{i} |c\lambda(E_i)| = |c| \sup \sum_{i} |\lambda(E_i)| = |c| \|\lambda\|_{TV}$$

が成り立ち同次性が得られる．

第三段 $\lambda, \mu \in CM(X, \mathscr{F})$ を任意に取る．このとき，X の任意の分割 $X = \sum_{i=1}^{\infty} E_i$ $(E_i \in \mathscr{F})$ に対して

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(\lambda + \mu)(E_i)| = \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(E_i) + \mu(E_i)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(E_i)| + \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)| \leq \|\lambda\|_{TV} + \|\mu\|_{TV}$$

が成り立つから $\|\lambda + \mu\|_{TV} \leq \|\lambda\|_{TV} + \|\mu\|_{TV}$ が従う． ∎

可測空間 $(X, \mathscr{F})$ において，$\mathbb{R}$ にしか値を取らない複素測度を符号付き測度 (signed measure) という．

定義 A.7.8 (正変動と負変動・Jordan の分解). $(X, \mathscr{F})$ を可測空間とする．$(X, \mathscr{F})$ 上の符号付き測度 μ に対し

$$\mu^{+} \coloneqq \frac{1}{2}(|\mu| + \mu), \quad \mu^{-} \coloneqq \frac{1}{2}(|\mu| - \mu)$$

として正値有限測度 μ^{+}, μ^{-} を定める．μ^{+} (μ^{-}) を μ の正 (負) 変動 (positive (negative) variation) と呼び，

$$\mu = \mu^{+} - \mu^{-}$$

を符号付き測度 μ の Jordan 分解 (Jordan decomposition) という．同時に $|\mu| = \mu^{+} + \mu^{-}$ も成り立つ．

定義 A.7.9 (絶対連続・特異). $(X,\mathscr{F})$ を可測空間，μ を $\mathscr{F}$ 上の正値測度，$\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ を $\mathscr{F}$ 上の任意の測度とする．

- $\mu(E) = 0$ ならば $\lambda(E) = 0$ となるとき，λ は μ に関して絶対連続である (absolutely continuous) といい
$$\lambda \ll \mu$$
と書く．
- 或る $A \in \mathscr{F}$ が存在して
$$\lambda(E) = \lambda(A \cap E), \quad (\forall E \in \mathscr{F})$$
が成り立つとき，λ は A に集中している (concentrated on A) という．λ_1 が A_1 に，λ_2 が A_2 に集中し，かつ $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ であるとき，λ_1, λ_2 は互いに特異である (mutually singular) といい
$$\lambda_1 \perp \lambda_2$$
と書く．

定理 A.7.10 (絶対連続性の同値条件). λ, μ をそれぞれ可測空間 $(X,\mathscr{F})$ 上の複素測度，正値測度とするとき，次は同値である:

(1) $\lambda \ll \mu$,

(2) $|\lambda| \ll \mu$

(3) 任意の $\epsilon > 0$ に対し或る $\delta > 0$ が存在して $\mu(E) < \delta$ なら $|\lambda|(E) < \epsilon$ となる．

証明.

第一段 (1) $\Leftrightarrow$ (2) を示す．任意の $E \in \mathscr{F}$ に対し $|\lambda(E)| \leq |\lambda|(E)$ より (2) $\Rightarrow$ (1) が従う．また $\lambda \ll \mu$ のとき，
$$|\lambda|(E) = \sup\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(A_i)| \ ; \quad E = \sum_{i=1}^{\infty} A_i,\ \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathscr{F} \right\}, \quad (\forall E \in \mathscr{F})$$
より $\mu(E) = 0$ なら $\mu(A_i) = 0$ となり $\lambda(A_i) = 0$ $(\forall i \geq 1)$ が満たされ (1) $\Rightarrow$ (2) が従う．

第二段 (2) $\Leftrightarrow$ (3) を示す．実際 (3) が満たされているとき，$\mu(E) = 0$ なら任意の $\delta > 0$ に対し $\mu(E) < \delta$ となるから $|\lambda|(E) < \epsilon$ $(\forall \epsilon > 0)$ となり $|\mu|(E) = 0$ が出る．逆に (3) が満たされていないとき，或る $\epsilon > 0$ に対して
$$\mu(E_n) < \frac{1}{2^{n+1}}, \quad |\lambda|(E_n) \geq \epsilon, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$
を満たす $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}$ が存在する．このとき
$$A_n \coloneqq \bigcup_{i=n}^{\infty} E_i, \quad A \coloneqq \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$
とおけば
$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

かつ

$$|\lambda|(A) = \lim_{n\to\infty} |\lambda|(A_n) \geq \lim_{n\to\infty} |\lambda|(E_n) \geq \epsilon$$

が成り立ち，対偶を取れば (2) ⇒ (3) が従う． ∎

補題 A.7.11. $(X, \mathscr{F}, \mu)$ を σ-有限測度空間とするとき，$0 < w < 1$ を満たす可積分関数 w が存在する．

証明. $\mu(X) = 0$ なら $w \equiv 1/2$ とすればよい．$\mu(X) > 0$ の場合，σ-有限の仮定より

$$0 < \mu(X_n) < \infty, \ (\forall n \geq 1), \quad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

を満たす $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}$ が存在する．ここで

$$w_n(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{2^n\,(1 + \mu(X_n))}, & x \in X_n, \\ 0, & x \in X \backslash X_n, \end{cases} \qquad n = 1, 2, \cdots$$

に対して

$$w := \sum_{n=1}^{\infty} w_n$$

と定めれば，任意の $x \in X$ は或る X_n に属するから

$$0 < w_n(x) \leq w(x)$$

が成り立ち，かつ

$$w(x) = w_1(x) + \sum_{n=2}^{\infty} w_n(x) \leq \frac{1}{2\,(1 + \mu(X_1))} + \frac{1}{2} < 1, \quad (\forall x \in X)$$

が満たされる．また単調収束定理より

$$\int_X w \, d\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_X w_n \, d\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(X_n)}{2^n\,(1 + \mu(X_n))} \leq 1$$

となり w の可積分性が出る． ∎

定理 A.7.12 (Lebesgue-Radon-Nikodym). $(X, \mathscr{F})$ を可測空間，λ を $(X, \mathscr{F})$ 上の複素測度，μ を $(X, \mathscr{F})$ 上の σ-有限正値測度 $(\mu(X) > 0)$ とするとき，以下が成立する:

Lebesgue 分解 λ は μ に関して絶対連続な λ_a 及び μ と互いに特異な λ_s に一意に分解される:

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s, \quad \lambda_a \ll \mu, \quad \lambda_s \perp \mu.$$

密度関数の存在 λ_a に対し或る $g \in L^1(\mu) = L^1(X, \mathscr{F}, \mu)$ が唯一つ存在して次を満たす:

$$\lambda_a(E) = \int_E g \, d\mu, \quad (\forall E \in \mathscr{F}).$$

証明.

第一段　Lebesgue の分解の一意性を示す．$\lambda'_a \ll \mu$ と $\lambda'_s \perp \mu$ により

$$\lambda_a + \lambda_s = \lambda'_a + \lambda'_s$$

が成り立つとき，

$$\Lambda \coloneqq \lambda_a - \lambda'_a = \lambda'_s - \lambda_s, \quad \Lambda \ll \mu, \quad \Lambda \perp \mu$$

となり $\Lambda = 0$ が従い分解の一意性が出る．

第二段　密度関数の一意性を示す．実際，可積分関数 f に対して

$$\int_E f\, d\mu = 0, \quad (\forall E \in \mathscr{F})$$

が成り立つとき，定理**??**より $f = 0$, μ-a.e. が成り立つ．

第三段　Lebesgue の分解と密度関数の存在を示す．

定理 A.7.13 (Vitali-Hahn-Saks).　$(X, \mathscr{F})$ を可測空間，$(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ をこの上の複素測度の列とするとき，

$$\lambda(E) \coloneqq \lim_{n\to\infty} \lambda_n(E), \quad (\forall E \in \mathscr{F})$$

が存在すれば λ もまた $(X, \mathscr{F})$ 上の複素測度となる．また $(CM(X, \mathscr{F}), \|\cdot\|_{TV})$ は Banach 空間である．

証明.　$\lambda_n \equiv 0$ $(\forall n \geq 1)$ なら $\lambda \equiv 0$ で複素測度となるから，或る n と $E \in \mathscr{F}$ に対し $\lambda_n(E) \neq 0$ と仮定する．

第一段　$(X, \mathscr{F})$ 上の有限測度を

$$\mu \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(1 + \|\lambda_n\|_{TV})} |\lambda_n|$$

により定めるとき，任意の $\epsilon > 0$ に対して或る $\delta > 0$ が存在し

$$\mu(E) < \delta \quad \Rightarrow \quad |\lambda_n|(E) < \epsilon \ (\forall n \geq 1)$$

となることを示す．任意の $n \geq 1$ に対して $\lambda_n \ll \mu$ であるから Lebesgue-Radon-Nikodym の定理より

$$\lambda_n(E) = \int_E g_n\, d\mu, \quad (\forall E \in \mathscr{F})$$

を満たす $g_n \in L^1(\mu)$ が存在し，このとき

$$\left| \int_E g_n\, d\mu \right| \leq |\lambda_n|(E) \leq 2^n(1 + \|\lambda_n\|_{TV})\mu(E), \quad (\forall E \in \mathscr{F})$$

が成立するから定理**??**より

$$\|g_n\|_{L^\infty(\mu)} \leq 2^n(1 + \|\lambda_n\|_{TV})$$

が従う．いま，任意の $E \in \mathscr{F}$ に対し $f_E \coloneqq [\mathbb{1}_E]$ として

$$L \coloneqq \{\, f_E \ ; \quad E \in \mathscr{F} \,\}$$

とおけば，$\mu(X) < \infty$ より $L \subset L^1(\mu)$ となり，また

$$d(f_E, f_{E'}) \coloneqq \| f_E - f_{E'} \|_{L^1(\mu)}$$

で定める距離 d により L は完備距離空間となる．実際，定理**??**より L の任意の Cauchy 列 $(f_{E_n})_{n=1}^{\infty}$ に対し極限 $f \in L^1(\mu)$ が存在し，或る部分列 $\left(\mathbb{1}_{E_{n_k}}\right)_{k=1}^{\infty}$ は或る μ-零集合 A を除いて各点収束するから

$$\varphi \coloneqq \lim_{k\to\infty} \mathbb{1}_{E_{n_k}} \mathbb{1}_{X\backslash A}$$

に対し $E \coloneqq \{\varphi = 1\}$ とおけば $f = [\mathbb{1}_E] \in L$ が満たされる．ここで

$$\Phi_n : L \ni f_E \longmapsto \int_X |g_n| f_E \, d\mu$$

とおけば，任意の $E \in \mathscr{F}$ に対し $|\lambda_n|(E) \leq \Phi_n(f_E)$ が満たされ，また Hölder の不等式より

$$|\Phi_n(f_E) - \Phi_n(f_{E'})| \leq \int_X |g_n||f_E - f_{E'}| \, d\mu \leq \| g_n \|_{L^\infty(\mu)} d(f_E, f_{E'}), \quad (\forall f_E, f_{E'} \in L)$$

がとなるから Φ_n は L 上の連続写像である．いま $\epsilon > 0$ を任意に取れば，$\eta \coloneqq \epsilon/4$ に対して

$$F_n(\eta) \coloneqq \left\{ f_E \in L \ ; \quad \sup_{k\geq 1} |\Phi_n(f_E) - \Phi_{n+k}(f_E)| \leq \eta \right\} = \bigcap_{k\geq 1} \{ f_E \in L \ ; \quad |\Phi_n(f_E) - \Phi_{n+k}(f_E)| \leq \eta \}$$

により定める $F_n(\delta)$ は閉集合であり，任意の $f_E \in L$ は

$$\begin{aligned}
\sup_{k\geq 1} |\Phi_n(f_E) - \Phi_{n+k}(f_E)| &\leq |\Phi_n(f_E) - \lambda(E)| + \sup_{k\geq 1} |\lambda(E) - \Phi_{n+k}(f_E)| \\
&= |\lambda_n(E) - \lambda(E)| + \sup_{k\geq 1} |\lambda(E) - \lambda_{n+k}(E)| \\
&\longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)
\end{aligned}$$

を満たすから

$$L = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(\eta)$$

が成り立ち，Baire の範疇定理 (P. **??**) より或る $F_{n_0}(\eta)$ は内点 f_{E_0} を持つ．つまり或る $\delta_0 > 0$ が存在して

$$d(f_{E_0}, f_E) < \delta_0 \quad \Rightarrow \quad \sup_{k\geq 1} |\Phi_n(f_E) - \Phi_{n+k}(f_E)| \leq \eta$$

となる．$\mu(E) < \delta_0$ ならば，

$$E_1 \coloneqq E \cup E_0, \quad E_2 \coloneqq E_0 \backslash (E \cap E_0)$$

とすれば $f_E = [\mathbb{1}_E] = [\mathbb{1}_{E_1} - \mathbb{1}_{E_2}] = [\mathbb{1}_{E_1}] - [\mathbb{1}_{E_2}] = f_{E_1} - f_{E_2}$ かつ

$$d(f_{E_0}, f_{E_1}) = \mu(E \backslash E_0) < \delta_0, \quad d(f_{E_0}, f_{E_2}) = \mu(E \cap E_0) < \delta_0$$

が満たされるから，$n > n_0$ なら

$$\begin{aligned}
|\Phi_n(f_E)| &\leq \left|\Phi_{n_0}(f_E)\right| + \left|\Phi_n(f_E) - \Phi_{n_0}(f_E)\right| \\
&\leq \left|\Phi_{n_0}(f_E)\right| + \left|\Phi_n(f_{E_1}) - \Phi_{n_0}(f_{E_1})\right| + \left|\Phi_n(f_{E_2}) - \Phi_{n_0}(f_{E_2})\right| \\
&\leq \left|\Phi_{n_0}(f_E)\right| + 2\eta
\end{aligned}$$

が従い，一方で $n = 1, 2, \cdots, n_0$ に対しては，定理**??**より或る $\delta_n > 0$ が存在して

$$\mu(E) < \delta_n \Longrightarrow \Phi_n(f_E) = \int_E |g_n| \, d\mu < \frac{\epsilon}{2}$$

が成立し，$\delta \coloneqq \min\{\delta_0, \delta_1, \cdots, \delta_{n_0}\}$ として

$$\mu(E) < \delta_n \Longrightarrow |\lambda_n|(E) \leq \Phi_n(f_E) < \epsilon, \ (\forall n \geq 1)$$

が得られる．

第二段 λ の可算加法性を示す．任意の互いに素な $A, B \in \mathscr{F}$ を取れば

$$\lambda(A + B) = \lim_{n\to\infty} \lambda_n(A + B) = \lim_{n\to\infty} \lambda_n(A) + \lim_{n\to\infty} \lambda_n(B) = \lambda(A) + \lambda(B)$$

となるから λ は有限加法的であり，このとき任意の互いに素な列 $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}$ に対し

$$\lambda\left(\sum_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lambda\left(\sum_{i=1}^{N} E_i\right) + \lambda\left(\sum_{i=N+1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \lambda(E_i) + \lambda\left(\sum_{i=N+1}^{\infty} E_i\right)$$

が任意の $N \geq 1$ について満たされるが，

$$\mu\left(\sum_{i=N+1}^{\infty} E_i\right) \longrightarrow 0 \quad (N \longrightarrow \infty)$$

と (**??**) より

$$\lambda\left(\sum_{i=N+1}^{\infty} E_i\right) \longrightarrow 0 \quad (N \longrightarrow \infty)$$

が従い

$$\lambda\left(\sum_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i)$$

が得られる．よって λ は複素測度である．

第三段 $(\nu_n)_{n=1}^{\infty}$ を $CM(X, \mathscr{F})$ の Cauchy 列とすれば任意の $E \in \mathscr{F}$ で

$$|\nu_n(E) - \nu_m(E)| \leq \|\nu_n - \nu_m\|_{TV} \longrightarrow 0 \quad (n, m \longrightarrow \infty)$$

となるから，$\mathbb{C}$ の完備性より $\nu \coloneqq \lim_{n\to\infty} \nu_n$ で複素測度 ν が定まる．このとき ▮

定理 A.7.14 (L^p の共役空間). $1 \le p < \infty$，q を p の共役指数とし，また $(X, \mathscr{F}, \mu)$ を σ-有限な測度空間とするとき，$g \in L^q(\mu)$ に対して

$$\Phi_g : L^p(\mu) \ni f \longmapsto \int_X fg \, d\mu$$

は有界線形作用素となる．また

$$\Phi : L^q(\mu) \ni g \longmapsto \Phi_g \in (L^p(\mu))^*$$

で定める Φ は $(L^p(\mu))^*$ から $L^q(\mu)$ への線型同型であり，次の意味で等長である:

$$\| g \|_{L^q(\mu)} = \left\| \Phi_g \right\|_{(L^p(\mu))^*}.$$

$p = \infty$ の場合，$\mu(X) < \infty$ かつ $\varphi \in (L^\infty(\mu))^*$ に対し $\mathscr{F} \ni A \longmapsto \varphi(1\!\!1_A)$ が可算加法的ならば，φ に対し或る $g \in L^1(\mu)$ が唯一つ存在して $\varphi = \Phi_g$ と (**??**) を満たす．

証明.

第一段　Φ_g が (**??**) で与えられていれば，Hölder の不等式より

$$\left|\Phi_g(f)\right| \le \| g \|_{L^q(\mu)} \| f \|_{L^p(\mu)}$$

が成り立つから

$$\left\| \Phi_g \right\|_{(L^p(\mu))^*} \le \| g \|_{L^q(\mu)}$$

が従う．よって $\Phi_g \in (L^p(\mu))^*$ となる．

第二段　$\varphi \in (L^p(\mu))^*$ に対して $\Phi(g) = \varphi$ を満たす $g \in L^q(\mu)$ が存在するとき，g が φ に対して一意に決まることを示す．σ-有限の仮定より

$$\mu(X_n) < \infty, \ (\forall n \ge 1); \quad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

を満たす $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}$ が存在する．いま，$g, g' \in L^q(\mu)$ に対して

$$\int_X fg \, d\mu = \int_X fg' \, d\mu, \quad (\forall f \in L^p(\mu))$$

が成り立っているとすれば，任意の $E \in \mathscr{F}$ に対して $1\!\!1_{E \cap X_n} \in L^p(\mu)$ であるから

$$\int_{E \cap X_n} g - g' \, d\mu = 0, \quad (\forall n \ge 1)$$

となり，Lebesgue の収束定理より

$$\int_E g - g' \, d\mu = 0$$

が従い $L^q(\mu)$ で $g = g'$ が成立する．

第三段　$1 \leq p < \infty$ の場合，$\mu(X) < \infty$ なら任意の $\varphi \in (L^p(\mu))^*$ に対して $\Phi(g) = \varphi$ を満たす $g \in L^q(\mu)$ が存在することを示す．

$$\lambda(E) \coloneqq \varphi(1\!\!1_E)$$

により λ を定めれば

$$\lambda(A+B) = \varphi(1\!\!1_{A+B}) = \varphi(1\!\!1_A + 1\!\!1_B) = \varphi(1\!\!1_A) + \varphi(1\!\!1_B) = \lambda(A) + \lambda(B)$$

となり λ の加法性が出る．また任意の互いに素な $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathscr{F}$ に対して

$$A_k \coloneqq \sum_{n=1}^{k} E_n, \quad A \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} E_n$$

とおけば

$$\begin{aligned} \left| \lambda(A) - \sum_{n=1}^{k} \lambda(E_n) \right| &= |\lambda(A) - \lambda(A_k)| = \left| \varphi(1\!\!1_A - 1\!\!1_{A_k}) \right| \\ &\leq \| \varphi \|_{(L^p(\mu))^*} \left\| 1\!\!1_A - 1\!\!1_{A_k} \right\|_{L^p(\mu)} = \| \varphi \|_{(L^p(\mu))^*} \mu(A - A_k)^{1/p} \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

が成り立つから λ は複素測度である．また

$$|\lambda(E)| \leq \| \varphi \|_{(L^p(\mu))^*} \mu(E)^{1/p}$$

より $\lambda \ll \mu$ となるから，Lebesgue-Radon-Nikodym の定理より

$$\varphi(1\!\!1_E) = \lambda(E) = \int_X 1\!\!1_E g \, d\mu, \quad (\forall E \in \mathscr{F})$$

を満たす $g \in L^1(\mu)$ が存在する．φ の線型性より任意の単関数の同値類 f に対して

$$\varphi(f) = \int_X fg \, d\mu$$

が成立し，特に $f \in L^{\infty}(\mu)$ に対しては

$$B \coloneqq \left\{ x \in X \; ; \quad |f(x)| > \| f \|_{L^{\infty}(\mu)} \right\}$$

とおけば $\mu(B) = 0$ となり，有界可測関数 $f 1\!\!1_{X \setminus B}$ を一様に近似する単関数列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ が存在して

$$\begin{aligned} \left| \varphi(f) - \int_X fg \, d\mu \right| &\leq |\varphi(f) - \varphi(f_n)| + \left| \int_X f_n g \, d\mu - \int_X fg \, d\mu \right| \\ &\leq \| \varphi \|_{(L^p(\mu))^*} \| f - f_n \|_{L^p(\mu)} + \int_X |f_n - f||g| \, d\mu \\ &\longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

となるから (**??**) が成立する．

第四段　$p = \infty$, $\mu(X) < \infty$ の場合，$\varphi \in (L^p(\mu))^*$ に対して $\mathscr{F} \ni A \longmapsto \varphi(1\!\!1_A)$ が可算加法的ならば (**??**) で定める λ は複素測度となり，前段と同じ理由で (**??**) を満たす $g \in L^1(\mu)$ が存在し

$$\varphi(f) = \int_X fg \, d\mu, \quad (\forall f \in L^{\infty}(\mu))$$

が成立する．すなわち $\varphi = \Phi_g$ であり，このとき $f \coloneqq 1\!\!1_{\{g \neq 0\}} \overline{g}/g \in L^{\infty}(\mu)$ に対して

$$\| g \|_{L^1(\mu)} = \int_X fg \, d\mu = \varphi(f) \leq \| \varphi \|_{(L^{\infty}(\mu))^*}$$

となるから，(**??**) と併せて (**??**) が満たされる．以降は $p < \infty$ とする．

第五段　$g \in L^q(\mu)$ であることを示す．$p = 1$ の場合，任意の $E \in \mathscr{F}$ に対して $f = 1\!\!1_E$ とすれば，(**??**) より

$$\left| \int_E g \, d\mu \right| = |\varphi(1\!\!1_E)| \leq \| \varphi \|_{(L^p(\mu))^*} \, \mu(E)$$

が成立し

$$\| g \|_{L^q(\mu)} \leq \| \varphi \|_{(L^p(\mu))^*}$$

が従う．$1 < p < \infty$ の場合は $\alpha \coloneqq 1\!\!1_{\{g \neq 0\}} \overline{g}/g$ と

$$E_n \coloneqq \{ \, x \in X \; ; \quad |g(x)| \leq n \, \}, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

に対して $f \coloneqq 1\!\!1_{E_n} |g|^{q-1} \alpha$ とおけば，

$$fg = 1\!\!1_{E_n} |g|^q = |f|^p$$

が成り立ち $|f|^p \in L^\infty(\mu)$ となるから (**??**) より

$$\int_X 1\!\!1_{E_n} |g|^q \, d\mu = \int_X fg \, d\mu = \varphi(f) \leq \| \varphi \|_{(L^p(\mu))^*} \| f \|_{L^p(\mu)} = \| \varphi \|_{(L^p(\mu))^*} \left\{ \int_X 1\!\!1_{E_n} |g|^q \, d\mu \right\}^{1/p}$$

が従い

$$\left\{ \int_X 1\!\!1_{E_n} |g|^q \, d\mu \right\}^{1/q} \leq \| \varphi \|_{(L^p(\mu))^*}$$

が得られ，単調収束定理より

$$\| g \|_{L^q(\mu)} \leq \| \varphi \|_{(L^p(\mu))^*}$$

が出る．

第六段　任意の $f \in L^p(\mu)$ に対して，単関数近似列 $(f_n)_{n=1}^\infty$ は (**??**) を満たすから，Hölder の不等式と Lebesgue の収束定理より

$$\begin{aligned} \left| \varphi(f) - \int_X fg \, d\mu \right| &\leq |\varphi(f) - \varphi(f_n)| + \left| \int_X f_n g \, d\mu - \int_X fg \, d\mu \right| \\ &\leq \| \varphi \|_{(L^p(\mu))^*} \| f - f_n \|_{L^p(\mu)} + \| f - f_n \|_{L^p(\mu)} \| g \|_{L^q(\mu)} \\ &\longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

となり

$$\varphi = \Phi(g)$$

が成り立つ．また，このとき (**??**) と (**??**) 或は (**??**) より

$$\| g \|_{L^q(\mu)} = \| \varphi \|_{(L^p(\mu))^*}$$

が満たされる．

第七段　$\mu(X) = \infty$ の場合，補題**??**の関数 w を用いて

$$\tilde{\mu}(E) \coloneqq \int_E w \, d\mu, \quad (\forall E \in \mathscr{F})$$

により有限測度 $\tilde{\mu}$ を定める．このとき任意の $f \in L^p(\mu)$ に対して

$$F \coloneqq w^{-1/p} f$$

とおけば

$$\int_X |F|^p \, d\tilde{\mu} = \int_X |F|^p w \, d\mu = \int_X |f|^p \, d\mu$$

が成立し，

$$L^p \ni f \longmapsto w^{-1/p} f \in L^p(\tilde{\mu})$$

は等長な線型同型となる．ここで任意の $\varphi \in (L^p(\mu))^*$ に対して

$$\Psi(F) \coloneqq \varphi\left(w^{1/p} F\right), \quad (\forall F \in L^p(\tilde{\mu}))$$

で線形作用素 Ψ を定めれば

$$|\Psi(F)| = \left|\varphi\left(w^{1/p} F\right)\right| \leq \|\varphi\|_{(L^p(\mu))^*} \left\| w^{1/p} F \right\|_{L^p(\mu)} = \|\varphi\|_{(L^p(\mu))^*} \|F\|_{L^p(\tilde{\mu})}$$

より $\Psi \in (L^p(\tilde{\mu}))^*$ が満たされ，かつ任意の $f \in L^p(\mu)$ に対して

$$|\varphi(f)| = \left|\Psi\left(w^{-1/p} f\right)\right| \leq \|\Psi\|_{(L^p(\mu))^*} \left\| w^{-1/p} f \right\|_{L^p(\tilde{\mu})} = \|\Psi\|_{(L^p(\tilde{\mu}))^*} \|f\|_{L^p(\mu)}$$

も成り立ち

$$\|\varphi\|_{(L^p(\mu))^*} = \|\Psi\|_{(L^p(\tilde{\mu}))^*}$$

が得られる．前段までの結果より Ψ に対し或る $G \in L^q(\tilde{\mu})$ が存在して

$$\Psi(F) = \int_X FG \, d\tilde{\mu}$$

が成立するから，任意の $f \in L^p(\mu)$ に対して

$$\varphi(f) = \Psi\left(w^{-1/p} f\right) = \int_X w^{-1/p} fGw \, d\mu = \begin{cases} \displaystyle\int_X fG \, d\mu, & (p = 1), \\ \displaystyle\int_X f w^{1/q} G \, d\mu, & (1 < p < \infty) \end{cases}$$

が従い，

$$g \coloneqq \begin{cases} G, & (p = 1), \\ w^{1/q} G, & (1 < p < \infty) \end{cases}$$

とおけば (**??**) より $g \in L^q(\mu)$ となり，$\varphi = \Phi(g)$ かつ

$$\|\varphi\|_{(L^p(\mu))^*} = \|\Psi\|_{(L^p(\tilde{\mu}))^*} = \|G\|_{L^q(\tilde{\mu})} = \|g\|_{L^q(\mu)}$$

が満たされる． ∎

A.8 複素測度に関する積分

定理 A.8.1 (複素測度の極分解). 可測空間 $(X, \mathscr{F})$ 上の任意の複素測度 μ に対し，次の意味での極分解

$$\mu(E) = \int_E e^{i\theta}\, d|\mu|, \quad (\forall E \in \mathscr{F})$$

を満たす $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbb{C})$-可測関数 θ が存在する．$\lambda \not\equiv 0$ なら $e^{i\theta}$ は $L^1(|\mu|)$ の元として唯一つに決まる．

証明. $\mu \equiv 0$ なら $|\mu| \equiv 0$ より $\theta \equiv \pi$ でよい．$\mu \not\equiv 0$ の場合，Lebesgue-Radon-Nikodym の定理より

$$\mu(E) = \int_E h\, d|\mu|, \quad (\forall E \in \mathscr{F})$$

を満たす $[h] \in L^1(|\mu|)$ が唯一つ存在する．このとき $|\mu|(E) > 0$ なら

$$\frac{1}{|\mu|(E)} \left| \int_E h\, d|\mu| \right| = \frac{|\mu(E)|}{|\mu|(E)} \leq 1$$

となるから，定理**??**より $|\mu|$-a.e. に $|h| \leq 1$ となる．また

$$E_r \coloneqq \{|h| \leq r\}$$

とおき $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathscr{F}$ を E_r の任意の分割とすれば，

$$\sum_{n=1}^\infty |\mu(A_n)| = \sum_{n=1}^\infty \left| \int_{A_n} h\, d|\mu| \right| \leq \sum_{n=1}^\infty \int_{A_n} |h|\, d|\mu| \leq r \sum_{n=1}^\infty |\mu|(A_n) = r|\mu|(E_r)$$

が成り立つから $r < 1$ なら $|\mu|(E_r) = 0$ となり

$$|\mu|\,(|h| < 1) = |\mu|\left(\bigcap_{n=1}^\infty E_{1-1/n} \right) = 0$$

が従う．よって $|\mu|$-a.e. に $|h| = 1$ となる．ここで

$$\theta(x) \coloneqq \begin{cases} 0, & h(x) = 1, \\ \pi, & h(x) \neq 1 \end{cases}$$

と定めれば $[h] = [e^{i\theta}]$ が成立する． ∎

定義 A.8.2 (複素測度に関する積分). $(X, \mathscr{F})$ を可測空間，μ を $(X, \mathscr{F})$ 上の複素測度，f を $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbb{C})$-可測関数とする．$f$ が $|\mu|$ に関して可積分であるとき，極分解 $d\mu = e^{i\theta}\, d|\mu|$ を用いて

$$\int_X f\, d\mu \coloneqq \int_X f e^{i\theta}\, d|\mu|$$

により f の μ に関する積分を定める．

$\mu \not\equiv 0$ なら極分解は定理**??** の意味で一意であるから μ に関する積分は well-defined である．$\mu \equiv 0$ なら $|\mu| \equiv 0$ であるから任意の可測写像は $|\mu|$ について可積分となり，μ に関する積分値は 0 で確定する (well-defined).

定理 A.8.3 (総変動測度の積分表現). $(X, \mathscr{F}, \mu)$ を正値測度空間，f を $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbb{C})$-可測な可積分関数とするとき，

$$\lambda(E) \coloneqq \int_E f \, d\mu, \quad (\forall E \in \mathscr{F})$$

で複素測度 λ を定めれば次が成り立つ:

$$|\lambda|(E) = \int_E |f| \, d\mu, \quad (\forall E \in \mathscr{F}).$$

定理 A.8.4 (積分の測度に関する線型性). $(X, \mathscr{F})$ を可測空間，μ, ν をこの上の複素測度とする．$f : X \to \mathbb{C}$ が $|\mu|$ と $|\nu|$ について可積分であるなら，$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対し $|\alpha\mu + \beta\nu|$ についても可積分であり，更に次が成り立つ:

$$\int_X f \, d(\alpha\mu + \beta\nu) = \alpha \int_X f \, d\mu + \beta \int_X f \, d\nu.$$

証明. **第一段** f が可測単関数の場合について証明する．$a_i \in \mathbb{C},\ A_i \in \mathcal{M}\ (i = 1, \cdots, n,\ \sum_{i=1}^n A_i = X)$ を用いて

$$f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i}$$

と表されている場合，

$$\begin{aligned}\int_X f(x) \, (\alpha\mu + \beta\nu)(dx) &= \sum_{i=1}^n a_i (\alpha\mu + \beta\nu)(A_i) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i) + \beta \sum_{i=1}^n a_i \nu(A_i) = \alpha \int_X f(x) \, \mu(dx) + \beta \int_X f(x) \, \nu(dx)\end{aligned}$$

が成り立つ．

第二段 f が一般の可測関数の場合について証明する．任意の $A \in \mathcal{M}$ に対して

$$|(\alpha\mu + \beta\nu)(A)| \leq |\alpha||\mu(A)| + |\beta||\nu(A)| \leq |\alpha||\mu|(A) + |\beta||\nu|(A)$$

が成り立つから，左辺で A を任意に分割しても右辺との大小関係は変わらず

$$|\alpha\mu + \beta\nu|(A) \leq |\alpha||\mu|(A) + |\beta||\nu|(A)$$

となる．従って f が $|\mu|$ と $|\nu|$ について可積分であるなら

$$\int_X |f(x)| \, |\alpha\mu + \beta\nu|(dx) \leq |\alpha| \int_X |f(x)| \, |\mu|(dx) + |\beta| \int_X |f(x)| \, |\nu|(dx) < \infty$$

が成り立ち前半の主張を得る．f の単関数近似列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ を取れば，前段の結果と積分の定義より

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_X f(x)\,(\alpha\mu+\beta\nu)(dx) - \alpha\int_X f(x)\,\mu(dx) - \beta\int_X f(x)\,\nu(dx)\right| \\
&\quad \leq \left|\int_X f(x)\,(\alpha\mu+\beta\nu)(dx) - \int_X f_n(x)\,(\alpha\mu+\beta\nu)(dx)\right| \\
&\qquad + |\alpha|\left|\int_X f(x)\,\mu(dx) - \int_X f_n(x)\,\mu(dx)\right| + |\beta|\left|\int_X f(x)\,\nu(dx) - \int_X f_n(x)\,\nu(dx)\right| \\
&\quad \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)
\end{aligned}
$$

が成り立ち後半の主張が従う． ■

定理 A.8.5 (積分の複素共役). $(X,\mathscr{F})$ を可測空間，μ を複素測度，$f : X \to \mathbb{C}$ を $|\mu|$ について可積分な $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbb{C})$-可測関数とするとき次が成り立つ:

$$
\int_X f\,d\overline{\mu} = \overline{\int_X \overline{f}\,d\mu}.
$$

証明． $u = \mathrm{Re}f,\ v = \mathrm{Im}f,\ \gamma = \mathrm{Re}\mu,\ \theta = \mathrm{Im}\mu$ とすれば，定理**??**より

$$
\begin{aligned}
\int_X f\,d\overline{\mu} &= \int_X f\,d\gamma - i\int_X f\,d\theta \\
&= \int_X u\,d\gamma + i\int_X v\,d\gamma - i\int_X u\,d\theta + \int_X v\,d\theta \\
&= \overline{\int_X u\,d\gamma - i\int_X v\,d\gamma + i\int_X u\,d\theta + \int_X v\,d\theta} \\
&= \overline{\int_X \overline{f}\,d\gamma + i\int_X \overline{f}\,d\theta} \\
&= \overline{\int_X \overline{f}\,d\mu}
\end{aligned}
$$

が成立する． ■

定理 A.8.6 (Riesz の表現定理 (複素測度)).

A.8.1 複素積分

γ を $[\alpha,\beta]$ から $\mathbb{C}$ への区分的 C^1 関数，f を $X := \gamma([\alpha,\beta])$ から $\mathbb{C}$ への $\mathscr{B}(X)/\mathscr{B}(\mathbb{C})$ 可測関数，λ を一次元 Lebesgue 測度とするとき，

$$
\mu(E) := \int_E \gamma'\,d\lambda, \quad (\forall E \in \mathscr{B}([\alpha,\beta]))
$$

により $([\alpha,\beta],\mathscr{B}([\alpha,\beta]))$ 上に複素測度が定まる．このとき

$$\mu\gamma'^{-1}(A) \coloneqq \mu\left(\gamma'^{-1}(A)\right), \quad (\forall A \in \mathscr{B}(X))$$

は $(X,\mathscr{B}(X))$ 上の複素測度となり

$$\int_X f\, d\mu\gamma'^{-1} = \int_{[\alpha,\beta]} f(\gamma)\gamma'\, d\lambda$$

A.9 条件付き期待値

定義 A.9.1 (条件付き期待値). $(X,\mathscr{F},\mu)$ を測度空間，$f \in L^1(\mu)$ とする．部分 σ-加法族 $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ に対し $\nu \coloneqq \mu|_{\mathscr{G}}$ が σ-有限であるとき，

$$\lambda(A) \coloneqq \int_A f\, d\mu, \quad (\forall A \in \mathscr{G})$$

により $(X,\mathscr{G})$ 上に複素測度 λ が定まり，$\lambda \ll \nu$ であるから Lebesgue-Radon-Nikodym の定理より

$$\lambda(A) = \int_A g\, d\nu, \quad (\forall A \in \mathscr{G})$$

を満たす $g \in L^1(\nu) = L^1(X,\mathscr{G},\nu)$ が唯一つ存在する．この g を $\mathscr{G}$ で条件付けた f の条件付き期待値と呼び

$$g = E(f\,|\,\mathscr{G})$$

と書く．

$f \in \mathscr{L}^1(\mu)$ が μ-a.e. に $\mathbb{R}$ 値なら λ は正値測度となるから，定理**??**より $E(f\,|\,\mathscr{G})$ も ν-a.e. に $\mathbb{R}$ 値となる．

補題 A.9.2 (凸関数の片側微係数の存在). 任意の凸関数 $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ には各点で左右の微係数が存在する．特に，凸関数は連続であり，すなわち Borel 可測である．

証明. 凸性より任意の $x < y < z$ に対して

$$\frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x} \leq \frac{\varphi(z)-\varphi(x)}{z-x} \leq \frac{\varphi(z)-\varphi(y)}{z-y}$$

が満たされる．従って，x を固定すれば，x に単調減少に近づく任意の点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ に対し

$$\left(\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}\right)_{n=1}^{\infty}$$

は下に有界な単調減少列となり下限が存在する．x に単調減少に近づく別の点列 $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ を取れば

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \frac{f(y_k)-f(x)}{y_k-x} \leq \frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x} \quad (n = 1,2,\cdots)$$

より

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \frac{f(y_k)-f(x)}{y_k-x} \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}$$

が成立し，$(x_n), (y_k)$ の立場を変えれば逆向きの不等号も得られる．すなわち極限は点列に依らず確定し，φ は x で右側微係数を持つ．同様に左側微係数も存在し，特に φ の連続性及び Borel 可測性が従う． ▮

定理 A.9.3 (Jensen の不等式). $(X, \mathscr{F}, \mu)$ を測度空間，$\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ を部分 σ-加法族とし，$\mu|_{\mathscr{G}}$ が σ-有限であるとする．このとき，任意の可積分関数 $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ と凸関数 $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ に対し，$\varphi(f)$ が可積分なら次が成立する:

$$\varphi\left(E\left(f \,|\, \mathscr{G}\right)\right) \leq E\left(\varphi(f) \,|\, \mathscr{G}\right).$$

証明. φ は各点 $x \in \mathbb{R}$ で右側接線を持つから，それを $\mathbb{R} \ni t \longmapsto a_x t + b_x$ と表せば，

$$\varphi(t) = \sup_{r \in \mathbb{Q}} \{a_r t + b_r\} \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

が成立する．よって任意の $r \in \mathbb{Q}$ に対して

$$\varphi(f(x)) \geq a_r f(x) + b_r$$

が満たされるから

$$E\left(\varphi(f) \,|\, \mathscr{G}\right) \geq a_r E\left(f \,|\, \mathscr{G}\right) + b_r \quad \mu\text{-a.e.}, \quad \forall r \in \mathbb{Q}$$

が従い，各 $r \in \mathbb{Q}$ に対し

$$N_r := \{\, x \in X \ ; \quad E\left(\varphi(f) \,|\, \mathscr{G}\right)(x) < a_r E\left(f \,|\, \mathscr{G}\right)(x) + b_r \,\}$$

とおけば $\mu(N_r) = 0$ かつ

$$E\left(\varphi(f) \,|\, \mathscr{G}\right)(x) \geq a_r E\left(f \,|\, \mathscr{G}\right)(x) + b_r, \quad \forall r \in \mathbb{Q},\ x \notin \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} N_r$$

となる．r の任意性と (**??**) より

$$E\left(\varphi(f) \,|\, \mathscr{G}\right) \geq \varphi\left(E\left(f \,|\, \mathscr{G}\right)\right), \quad \mu\text{-a.e.}$$

が得られる． ▮

定理 A.9.4 (条件付き期待値の性質). $(X, \mathscr{F}, \mu)$ を測度空間，$\mathscr{H}, \mathscr{G}$ を $\mathscr{H} \subset \mathscr{G}$ を満たす $\mathscr{F}$ の部分 σ-加法族とし，$\theta := \mu|_{\mathscr{H}}, \gamma := \mu|_{\mathscr{G}}$ がそれぞれ σ-有限測度であるとする．このとき以下が成立する:

(1) $E(\cdot\,|\,\mathscr{G})$ は $L^1(X, \mathscr{F}, \mu)$ から $L^1(X, \mathscr{G}, \gamma)$ への有界線形作用素であり，次を満たす:

$$|E(f\,|\,\mathscr{G})| \leq E(|f|\,|\,\mathscr{G}), \quad (\forall f \in L^1(\mu)).$$

(2) $f \in L^1(\mu)$, $g \in L^0(\gamma)$ に対して，$gf \in L^1(\mu)$ なら $gE(f\,|\,\mathscr{G}) \in L^1(\gamma)$ であり

$$E(gf\,|\,\mathscr{G}) = gE(f\,|\,\mathscr{G}).$$

(3) $f \in L^1(\mu)$ に対して

$$E(E(f\,|\,\mathscr{G})\,|\,\mathscr{H}) = E(f\,|\,\mathscr{H}).$$

(4) $f \in L^1(\mu) \cap L^p(\mu)$ に対し，$1 \leq p < \infty$ のとき

$$|E(f\,|\,\mathscr{G})|^p \leq E(|f|^p\,|\,\mathscr{G})$$

が満たされ，$1 \leq p \leq \infty$ のとき

$$\|E(f\,|\,\mathscr{G})\|_{L^p(\gamma)} \leq \|f\|_{L^p(\mu)}$$

も成立する．すなわち $E(\cdot\,|\,\mathscr{G})$ は $L^1(\mu) \cap L^p(\mu)$ から $L^1(\gamma) \cap L^p(\gamma)$ への有界線形作用素である．

証明.

(1) 任意の $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, $f_1, f_2 \in L^1(\mu)$ と $A \in \mathscr{G}$ に対して

$$\begin{aligned}\int_A E(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2\,|\,\mathscr{G})\ d\gamma &= \int_A \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2\ d\mu = \alpha_1 \int_A f_1\ d\mu + \alpha_2 \int_A f_2\ d\mu \\ &= \alpha_1 \int_A E(f_1\,|\,\mathscr{G})\ d\gamma + \alpha_2 \int_A E(f_2\,|\,\mathscr{G})\ d\gamma = \int_A \alpha_1 E(f_1\,|\,\mathscr{G}) + \alpha_2 E(f_2\,|\,\mathscr{G})\ d\gamma\end{aligned}$$

が成立するから，$L^1(\nu)$ で

$$E(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2\,|\,\mathscr{G}) = \alpha_1 E(f_1\,|\,\mathscr{G}) + \alpha_2 E(f_2\,|\,\mathscr{G})$$

となり $E(\cdot\,|\,\mathscr{G})$ の線型性が出る．いま，$f \in L^1(\mu)$, $g \in L^\infty(\gamma)$ に対して

$$E(gf\,|\,\mathscr{G}) = gE(f\,|\,\mathscr{G}).$$

が成り立つことを示す．実際，任意の $A, B \in \mathscr{G}$ に対して

$$\int_A 1\!\!1_B f\ d\mu = \int_{A \cap B} f\ d\mu = \int_{A \cap B} E(f\,|\,\mathscr{G})\ d\gamma = \int_A 1\!\!1_B E(f\,|\,\mathscr{G})\ d\gamma$$

となるから，g の単関数近似列 $(g_n)_{n=1}^\infty$, $(g_n \in L^\infty(\gamma), |g_n| \leq |g|)$ に対して

$$\int_A g_n f\ d\mu = \int_A g_n E(f\,|\,\mathscr{G})\ d\gamma, \quad (\forall n \geq 1)$$

が成り立ち，$gf \in L^1(\mu)$ かつ $gE(f\,|\,\mathscr{G}) \in L^1(\gamma)$ であるから Lebesgue の収束定理より

$$\int_A gE(f\,|\,\mathscr{G})\ d\gamma = \int_A gf\ d\mu = \int_A E(gf\,|\,\mathscr{G})\ d\gamma$$

が従い (**??**) が得られる．ここで $f \in L^1(\mu)$ に対し

$$\alpha := \mathbb{1}_{\{E(f\,|\,\mathscr{G})\neq 0\}} \frac{\overline{E(f\,|\,\mathscr{G})}}{|E(f\,|\,\mathscr{G})|}$$

により $\alpha \in L^\infty(\gamma)$ を定めれば，任意の $A \in \mathscr{G}$ に対して

$$\begin{aligned}\int_A |E(f\,|\,\mathscr{G})|\ d\gamma &= \int_A \alpha E(f\,|\,\mathscr{G})\ d\gamma = \int_A E(\alpha f\,|\,\mathscr{G})\ d\gamma \\ &= \int_A \alpha f\ d\mu \leq \int_A |f|\ d\mu = \int_A E(|f|\,|\,\mathscr{G})\ d\gamma\end{aligned}$$

が成り立つから，(**??**) 及び $E(\cdot\,|\,\mathscr{G})$ の有界性が得られる．

(2) $(g_n)_{n=1}^\infty$ を g の単関数近似列とすれば，単調収束定理と (**??**) より

$$\int_X |g|E(|f|\,|\,\mathscr{G})\ d\gamma = \lim_{n\to\infty}\int_X |g_n|E(|f|\,|\,\mathscr{G})\ d\gamma = \lim_{n\to\infty}\int_X |g_n||f|\ d\mu = \int_X |g||f|\ d\mu$$

となり $gE(f\,|\,\mathscr{G})$ の可積分性が従う．従って，Lebesgue の収束定理より任意の $A \in \mathscr{G}$ に対して

$$\int_A gE(f\,|\,\mathscr{G})\ d\gamma = \lim_{n\to\infty}\int_A g_n E(f\,|\,\mathscr{G})\ d\gamma = \lim_{n\to\infty}\int_A g_n f\ d\mu = \int_A gf\ d\mu$$

が成り立ち (**??**) が得られる．

(3) 任意の $A \in \mathscr{H}$ に対して

$$\int_A E(f\,|\,\mathscr{H})\ d\theta = \int_A f\ d\mu = \int_A E(f\,|\,\mathscr{G})\ d\gamma = \int_A E(E(f\,|\,\mathscr{G})\,|\,\mathscr{H})\ d\theta$$

が成立する．

(4) $1 \leq p < \infty$ の場合，(**??**) と Jensen の不等式より

$$|E(f\,|\,\mathscr{G})|^p \leq E(|f|\,|\,\mathscr{G})^p \leq E(|f|^p\,|\,\mathscr{G})$$

が成り立つ．$p = \infty$ の場合は任意の $A \in \mathscr{G}$ に対して

$$\int_A |E(f\,|\,\mathscr{G})|\ d\gamma \leq \int_A |f|\ d\mu \leq \mu(A)\,\|f\|_{L^\infty} = \gamma(A)\,\|f\|_{L^\infty}$$

となり，$1 \leq p < \infty$ の場合も込めて (**??**) が従う． ∎

定理 A.9.5. (1) $X_n \leq X_{n+1}$ $X_n \longrightarrow X$ $a.s.P$ $E(X_n\,|\,\mathscr{G}) \longrightarrow E(X\,|\,\mathscr{G})$ $a.s.P$

(2) $X_n \geq 0$ $E(\liminf X_n\,|\,\mathscr{G}) \leq \liminf E(X_n\,|\,\mathscr{G})$

(3) $|X_n| \leq Y$ $X_n \longrightarrow X$ $a.s.P$ $E(X_n\,|\,\mathscr{G}) \longrightarrow E(X\,|\,\mathscr{G})$ $a.s.P$

A.10　一様可積分性

定理 A.10.1 (一様可積分性の同値条件).　$(X, \mathscr{F}, \mu)$ を測度空間とし，$\mu(X) < \infty$ とする．任意の添数集合 Λ に対して $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbb{C})$-可測関数の族とするとき，次の (1) と (2) は同値である:

(1)　$(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が一様可積分．

(2)

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}\int_X |f_\lambda|\,d\mu < \infty$$

かつ，任意の $\epsilon > 0$ に対し或る $\delta > 0$ が存在して次を満たす:

$$\mu(B) < \delta \Rightarrow \sup_{\lambda\in\Lambda}\int_B |f_\lambda|\,d\mu < \epsilon.$$

証明.

第一段　(1) ⇒ (2) を示す．任意の $a > 0$ に対して

$$\int_X |f_\lambda|\,d\mu = \int_{\{|f_\lambda|>a\}} |f_\lambda|\,d\mu + \int_{\{|f_\lambda|\leq a\}} |f_\lambda|\,d\mu \leq \sup_{\lambda\in\Lambda}\int_{\{|f_\lambda|>a\}} |f_\lambda|\,d\mu + a\mu(X)$$

が成り立ち，一様可積分性より或る $a > 0$ に対して

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}\int_{\{|f_\lambda|>a\}} |f_\lambda|\,d\mu < \infty$$

となるから (**??**) が従う．また任意の $B \in \mathscr{F}$ に対して

$$\int_B |f_\lambda|\,d\mu = \int_{\{|f_\lambda|>a\}\cap B} |f_\lambda|\,d\mu + \int_{\{|f_\lambda|\leq a\}\cap B} |f_\lambda|\,d\mu \leq \sup_{\lambda\in\Lambda}\int_{\{|f_\lambda|>a\}} |f_\lambda|\,d\mu + a\mu(B)$$

が成り立つから，任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}\int_{\{|f_\lambda|>a\}} |f_\lambda|\,d\mu < \frac{\epsilon}{2}$$

を満たす $a > 0$ を取り $\delta := \epsilon/(2a)$ とおけば (**??**) が成立する．

第二段　(2) ⇒ (1) を示す．任意の $a > 0$ に対して

$$\mu(|f_\lambda| > a) \leq \frac{1}{a}\int_X |f_\lambda|\,d\mu \leq \frac{1}{a}\sup_{\lambda\in\Lambda}\int_X |f_\lambda|\,d\mu$$

が成立するから，(**??**) を満たす $\delta > 0$ に対し或る $a_0 > 0$ が存在して

$$\mu(|f_\lambda| > a) < \delta, \quad (\forall\lambda\in\Lambda,\ \forall a > a_0)$$

となり

$$\int_{\{|f_\lambda|>a\}} |f_\lambda|\,d\mu < \epsilon, \quad (\forall\lambda\in\Lambda,\ \forall a > a_0)$$

が従う． ∎

定理 A.10.2 (一様可積分性と平均収束). $(X, \mathscr{F}, \mu)$ を σ-有限測度空間とし，$(f_n)_{n=1}^{\infty}$ を $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbb{C})$-可測関数の族とする．$(f_n)_{n=1}^{\infty}$ が μ-a.e. に $\mathbb{C}$ で収束するとき，つまり或る零集合 A が存在して，

$$f \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n \mathbb{1}_A$$

により $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbb{C})$-可測関数が定まるとき，次の (1) と (2) は同値である:

(1) $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ が一様可積分.

(2) f が可積分で次を満たす:

$$\int_X |f - f_n| \, d\mu \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty).$$

定理 A.10.3 (一様可積分性と条件付き期待値). $(X, \mathscr{F}, \mu)$ を測度空間とする．部分 σ-加法族 $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ に対し $\mu|_{\mathscr{G}}$ が σ-有限なら，可積分関数 $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ に対し $(E\,(f\,|\,\mathscr{G}))_{\mathscr{G}\subset\mathscr{F}}$ は一様可積分である．

証明. Jensen の不等式より

$$\int_{|E(f\,|\,\mathscr{G})|>\lambda} |E\,(f\,|\,\mathscr{G})| \; d\mu \leq \int_{E(|f|\,|\,\mathscr{G})>\lambda} E\,(|f|\,|\,\mathscr{G}) \; d\mu = \int_{E(|f|\,|\,\mathscr{G})>\lambda} |f| \, d\mu$$

が成り立つ．また X の可積分性より，任意の $\epsilon > 0$ に対して或る $\delta > 0$ が存在し

$$\mu(B) < \delta \Rightarrow \int_B |f| \, d\mu < \epsilon$$

が満たされる．いま，Chebyshev の不等式より

$$\mu\,(E\,(|f|\,|\,\mathscr{G}) > \lambda) \leq \frac{1}{\lambda} \int_X E\,(|f|\,|\,\mathscr{G}) \; d\mu = \frac{1}{\lambda} \int_X |f| \, d\mu$$

となるから，$\epsilon > 0$ に対し或る $\lambda_0 > 0$ が存在して

$$\sup_{\mathscr{G}\subset\mathscr{F}} \mu\,(E\,(|f|\,|\,\mathscr{G}) > \lambda) < \delta, \quad (\forall \lambda > \lambda_0)$$

が満たされ

$$\sup_{\mathscr{G}\subset\mathscr{F}} \int_{E(|f|\,|\,\mathscr{G})>\lambda} |f| \, d\mu < \epsilon, \quad (\forall \lambda > \lambda_0)$$

が従う． ∎

A.11 距離空間上の連続写像

A.11.1 広義一様収束を定める距離

$(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間とし，距離位相を導入して

$$C(X, Y) \coloneqq \{\, f : X \longrightarrow Y \;;\quad f \text{ は連続写像} \,\}$$

とおく．このとき $K \subset X$ をコンパクト集合とすれば，

$$\rho_K(f,g) \coloneqq \sup_{x\in K} d_Y(f(x),g(x)), \quad (f,g \in C(X,Y))$$

により定める ρ_K は $C(X,Y)$ の擬距離となる．実際，$f(K), g(K)$ は Y のコンパクト部分集合であるから

$$\operatorname{diam}(f(K)) = \sup_{y,y'\in f(K)} d_Y(y,y') < \infty,$$

及び $\operatorname{diam}(g(K)) < \infty$ が成り立ち，任意に $x_0 \in K$ を取れば

$$\begin{aligned}\sup_{x\in K} d_Y(f(x),g(x)) &\leq \sup_{x\in K} d_Y(f(x),f(x_0)) + d_Y(f(x_0),g(x_0)) + \sup_{x\in K} d_Y(g(x_0),g(x)) \\ &\leq \operatorname{diam}(f(K)) + d_Y(f(x_0),g(x_0)) + \operatorname{diam}(g(K)) < \infty\end{aligned}$$

となるから ρ_K は $[0,\infty)$ 値である．また d_Y が対称性と三角不等式を満たすから ρ も対称性を持ち三角不等式を満たす．いま，X が σ-コンパクトであると仮定する．つまり

$$K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \cdots, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = X$$

を満たすコンパクト部分集合の増大列 $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ が存在するとき，$\rho_n = \rho_{K_n}$ とすれば

$$\rho_n(f,g) = 0 \ (\forall n \geq 1) \quad \Longrightarrow \quad f = g$$

が成り立つから，

$$\rho(f,g) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left(1 \wedge \rho_n(f,g)\right), \quad (f,g \in C(X,Y))$$

により $C(X,Y)$ 上に距離 ρ が定まる．特に，定理**??**より X が可分かつ局所コンパクトなら

$$K_n \subset K_{n+1}^{\circ}, \quad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$$

を満たすコンパクト部分集合の列 $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ が存在するから ρ が定義される．

定理 A.11.1 (広義一様収束を定める距離). (X,d_X) を可分な局所コンパクト距離空間，(Y,d_Y) を距離空間とし，(**??**) を満たす $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ で ρ を定めるとき，$f, f_n \in C(X,Y)$ に対して次が成り立つ．

$$(f_n)_{n=1}^{\infty} \text{ が } f \text{ に広義一様収束する} \quad \Longleftrightarrow \quad \rho(f,f_n) \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty).$$

定理 A.11.2 ($C(X,Y)$ の可分性). (X,d_X) を σ-コンパクト距離空間，(Y,d_Y) を可分距離空間とするとき，$C(X,Y)$ は ρ により可分距離空間となる．

証明.

第一段 三段にわたり，コンパクト集合 $K \subset X$ に対して或る高々可算集合 $D(K) \subset C(X,Y)$ があり，任意の $\epsilon > 0$ と $f \in C(X,Y)$ に対して次を満たす $g \in D(K)$ が存在することを示す:

$$d_Y(f(x),g(x)) < \epsilon, \quad (\forall x \in K).$$

$x \in X$ の半径 $\delta > 0$ の開球を $B_\delta(x)$ と書けば，K のコンパクト性より任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{k(m)} B_{1/m}(x_i^m)$$

を満たす $\left\{x_1^m, \cdots, x_{k(m)}^m\right\} \subset K$ が存在する．また Y は Lindelöf 性を持つから，任意の $\ell \geq 1$ に対し

$$\mathscr{U}_\ell \coloneqq \left\{ U_j^\ell \ ; \quad U_j^\ell : open,\ \mathrm{diam}\left(U_j^\ell\right) < \frac{1}{\ell};\ j = 1, 2, \cdots \right\}, \quad Y = \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j^\ell$$

を満たす開被覆 $\mathscr{U}_\ell$ が存在する．一方で，$f \in C(X,Y)$ は K 上で一様連続であるから

$$C_{m,n} \coloneqq \left\{ f \in C(X,Y) \ ; \quad 任意の\ x, x' \in K\ に対し\ d_X(x,x') < \frac{1}{m} \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \frac{1}{n} \right\}$$

とすれば

$$C(X,Y) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} C_{m,n}$$

が成り立つ．いま，任意に m, n, ℓ 及び $i = (i_1, \cdots, i_{k(m)}) \in \mathbb{N}^{k(m)}$ を取り

$$D_{m,n,\ell}^i \coloneqq \left\{ g \in C_{m,n} \ ; \quad g(x_j^m) \in U_{i_j}^\ell,\ (\forall j = 1, \cdots, k(m)) \right\}$$

とおけば，例えば $i = (1, \cdots, 1) \in \mathbb{N}^{k(m)}$ と $y \in U_1^\ell$ に対して恒等写像 $g : X \longrightarrow \{y\}$ は $g \in D_{m,n,\ell}^i$ となるから

$$\Phi_{m,n,\ell} \in \prod_{\substack{i \in \mathbb{N}^{k(m)} \\ D_{m,n,\ell}^i \neq \emptyset}} D_{m,n,\ell}^i$$

が存在する．ここで

$$D_{m,n,\ell} \coloneqq \left\{ \Phi_{m,n,\ell}(i) \ ; \quad i \in \mathbb{N}^{k(m)} \right\}$$

により $D_{m,n,\ell}$ を定めて

$$D_{m,n} \coloneqq \bigcup_{\ell=1}^{\infty} D_{m,n,\ell}, \quad D(K) \coloneqq \bigcup_{m,n=1}^{\infty} D_{m,n}$$

とおく．

第二段　任意の $f \in C_{m,n}$ と $\epsilon > 0$ に対し或る $g \in D_{m,n}$ が存在して

$$d_Y\left(f(x_j^m), g(x_j^m)\right) < \epsilon, \quad (\forall j = 1, \cdots, k(m))$$

を満たすことを示す．実際，$1/\ell < \epsilon$ となる ℓ に対し $\mathscr{U}_\ell$ は Y の被覆であるから，

$$f(x_j^m) \in U_{i_j}^\ell, \quad (\forall j = 1, \cdots, k(m))$$

となる $i = (i_1, \cdots, i_{k(m)}) \in \mathbb{N}^{k(m)}$ が取れる．従って $D_{m,n,\ell}^i \neq \emptyset$ であり，

$$g \coloneqq \Phi_{m,n,\ell}(i)$$

に対して

$$d_Y\left(f(x_j^m), g(x_j^m)\right) < \frac{1}{\ell} < \epsilon, \quad (\forall j = 1, \cdots, k(m))$$

が成立する．

第三段 $D(K)$ が (**??**) を満たすことを示す．任意に $f \in C(X,Y)$ と $\epsilon > 0$ を取れば，(**??**) より $1/n < \epsilon/3$ を満たす n 及び或る m に対して $f \in C_{m,n}$ となる．このとき，前段の結果より或る $g \in D_{m,n} \subset D(K)$ が存在して

$$d_Y\left(f(x_j^m), g(x_j^m)\right) < \frac{\epsilon}{3}, \quad (\forall j = 1, \cdots, k(m))$$

を満たす．$f, g \in C_{m,n}$ より任意の $x \in B_{1/m}(x_j^m)$ に対して

$$d_Y\left(f(x), f(x_j^m)\right),\ d_Y\left(g(x), g(x_j^m)\right) < \frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{3}$$

が成り立ち，任意の $x \in K$ は或る $B_{1/m}(x_j^m)$ に含まれるから，

$$\begin{aligned} d_Y\left(f(x), g(x)\right) &\leq d_Y\left(f(x), f(x_j^m)\right) + d_Y\left(f(x_j^m), g(x_j^m)\right) + d_Y\left(g(x), g(x_j^m)\right) \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

が従い (**??**) が出る．

第四段 $(K_n)_{n=1}^\infty$ を (**??**) を満たすコンパクト集合列とすれば，各 K_n に対し $D(K_n)$ が存在し，

$$D \coloneqq \bigcup_{n=1}^\infty D(K_n)$$

と定めれば D は $C(X,Y)$ で高々可算かつ稠密となる．実際，任意の $\epsilon > 0$ と $f \in C(X,Y)$ に対して，

$$\sum_{n=N+1}^\infty 2^{-n} < \frac{\epsilon}{2}$$

を満たす $N \geq 1$ を取れば，

$$\rho_N(f,g) < \frac{\epsilon}{2}$$

を満たす $g \in D(K_N) \subset D$ が存在するから

$$\begin{aligned} \rho(f,g) &= \sum_{n=1}^N 2^{-n}\left(1 \wedge \rho_n(f,g)\right) + \sum_{n=N+1}^\infty 2^{-n}\left(1 \wedge \rho_n(f,g)\right) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

が成り立つ． ∎

定理 A.11.3 ($C(X,Y)$ の完備性). (X, d_X) を可分な局所コンパクト距離空間，(Y, d_Y) を距離空間，$(f_n)_{n=1}^\infty$ を $C(X,Y)$ の列とし，(**??**) を満たす $(K_n)_{n=1}^\infty$ で ρ を定める．このとき各点 $x \in X$ で $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在すれば

$$f \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n \in C(X,Y), \quad \rho(f, f_n) \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成立する．特に (Y, d_Y) が完備なら $C(X,Y)$ は ρ により完備距離空間となる．

証明.

第一段　任意の $j \geq 1$ に対し

$$\rho_j(f_n, f) \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成り立つことを示す．実際，任意の $\epsilon > 0$ に対し或る $N \geq 1$ が存在して

$$\rho_j(f_n, f_m) < \frac{\epsilon}{2} \quad (\forall n, m \geq N)$$

が満たされ，また f の定め方より任意の $x \in K_j$ に対し

$$d_Y(f_m(x), f(x)) < \frac{\epsilon}{2}$$

を満たす $m \geq N$ が存在するから，

$$d_Y(f_n(x), f(x)) \leq d_Y(f_n(x), f_m(x)) + d_Y(f_m(x), f(x)) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \quad (\forall n \geq N)$$

が従い

$$\rho_j(f_n, f) \leq \epsilon, \quad (\forall n \geq N)$$

が成立する．

第二段　f の連続性を示す．任意に $\epsilon > 0$ と $x \in X$ 及び $x \in {K_j}^{\mathrm{o}}$ を満たす K_j を取れば，(**??**) より

$$\rho_j(f_n, f) < \frac{\epsilon}{3}$$

を満たす $n \geq 1$ が存在する．また f_n の連続性より x の或る開近傍 W が存在して

$$d_Y(f_n(x), f_n(x')) < \frac{\epsilon}{3}, \quad (\forall x' \in W)$$

となるから，

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq d_Y(f(x), f_n(x)) + d_Y(f_n(x), f_n(x')) + d_Y(f_n(x'), f(x')) < \epsilon, \quad (\forall x' \in W \cap {K_j}^{\mathrm{o}})$$

が従い f の x における連続性が出る．

第三段　(**??**) を示す．任意の $\epsilon > 0$ に対し，

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{-k} < \frac{\epsilon}{2}$$

を満たす $k_0 \geq 1$ が存在する．また (**??**) より或る $n_0 \geq 1$ が存在して

$$\rho_{k_0}(f_n, f) < \frac{\epsilon}{2}, \quad (\forall n \geq n_0)$$

となるから

$$\rho(f_n, f) < \epsilon, \quad (\forall n \geq n_0)$$

が成立する．∎

定理 A.11.4 ($C(X, Y)$ の完備可分性).　(X, d_X) を可分な局所コンパクト距離空間，(Y, d_Y) を完備距離空間とする．このとき (**??**) を満たす $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ で ρ を定めれば，$C(X, Y)$ は ρ により完備可分距離空間となる．

証明.　定理**??**と定理**??**より従う．∎

A.11.2 正規族

定義 A.11.5 (正規族). $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間，$\mathscr{F} \subset C(X, Y)$ とする．$\mathscr{F}$ の任意の列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ が X で広義一様収束する (収束先が連続写像である必要はない) 部分列を含むとき，$\mathscr{F}$ を正規族 (normal family) という．

定理 A.11.6 (正規族の相対コンパクト性). (X, d_X) を可分な局所コンパクト距離空間，(Y, d_Y) を距離空間とし，(**??**) を満たす $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ で ρ を定め $C(X, Y)$ に距離位相を導入する．このとき，正規族 $\mathscr{F}$ に対して

$$\overline{\mathscr{F}} \subset C(X, Y).$$

が成立し，また $\overline{\mathscr{F}}$ はコンパクトとなる．

定義 A.11.7 (同程度連続). $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間，$\mathscr{F} \subset C(X, Y)$ とする．任意の $\epsilon > 0$ に対し

$$d_X(p, q) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_Y(f(p), f(q)) < \epsilon, \ (\forall f \in \mathscr{F})$$

を満たす $\delta > 0$ が存在するとき，$\mathscr{F}$ は同程度連続である (equicontinuous) という．

定理 A.11.8 (Ascoli-Arzela). (X, d_X) を可分な局所コンパクト距離空間，(Y, d_Y) を距離空間とするとき

$$\mathscr{F} \subset C(X, Y) \text{ が正規族} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \mathscr{F} \text{ が任意のコンパクト集合 } K \subset X \text{ で同程度連続,} \\ \text{各点 } x \in X \text{ で } \overline{\{\, f(x) \ ; \quad f \in \mathscr{F} \,\}} \text{ がコンパクトである.} \end{cases}$$

証明.

第一段 $E = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を X で可算稠密な集合とし，$\mathscr{F}$ が (**??**) 右辺の仮定を満たしているとする．$K \subset X$ を任意のコンパクト集合とすれば，同程度連続性より任意の $\epsilon > 0$ に対し或る $\delta > 0$ が存在して

$$p, q \in K, \ d_X(p, q) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \sup_{f \in \mathscr{F}} d_Y(f(p), f(q)) < \frac{\epsilon}{3}$$

が成立する．また半径 $\delta/2$ の K の開被覆 $B_1, \cdots, B_M$ が存在し，E は稠密であるから

$$p_j \in B_j \cap E, \quad j = 1, \cdots, M$$

を選んでおく．任意に $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}$ を取れば，

$$\overline{\{\, f_n(x_1) \ ; \quad n = 1, 2, \cdots \,\}} \subset \overline{\{\, f(x) \ ; \quad f \in \mathscr{F} \,\}}$$

より $\overline{\{f_n(x_1)\}_{n=1}^{\infty}}$ はコンパクトであるから収束部分列 $\{f_{n(k,1)}(x_1)\}_{k=1}^{\infty}$ が存在する．同様に $\{f_{n(k,1)}(x_2)\}_{k=1}^{\infty}$ の或る部分列 $\{f_{n(k,2)}(x_2)\}_{k=1}^{\infty}$ は Y で収束し，繰り返せば部分添数系

$$\{n(k, 1)\}_{k=1}^{\infty} \supset \{n(k, 2)\}_{k=1}^{\infty} \supset \{n(k, 3)\}_{k=1}^{\infty} \supset \cdots$$

が構成される．$n(k) := n(k, k), \ (\forall k \geq 1)$ とおけば任意の $x_i \in E$ に対して $\{f_{n(k)}(x_i)\}_{k=i}^{\infty}$ は収束列 $\{f_{n(k,i)}(x_i)\}_{k=1}^{\infty}$ の部

分列となるから収束し，従って或る $N \geq 1$ が存在して

$$u, v > N \quad \Longrightarrow \quad d_Y\left(f_{n(u)}(p_j), f_{n(v)}(p_j)\right) < \frac{\epsilon}{3}, \ (\forall j = 1, 2, \cdots, M)$$

を満たす．任意に $x \in K$ を取れば或る j で $x \in B_j$ かつ $d_X(x, p_j) < \delta$ となるから，$u, v > N$ なら

$$\begin{aligned} d_Y(f_{n(u)}(x), f_{n(v)}(x)) &\leq d_Y\left(f_{n(u)}(x), f_{n(u)}(p_j)\right) + d_Y\left(f_{n(u)}(p_j), f_{n(v)}(p_j)\right) + d_Y\left(f_{n(v)}(p_j), f_{n(v)}(x)\right) \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon \end{aligned}$$

が成り立つ．$\{f_{n(k)}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ は相対コンパクトであるから $\lim_{k\to\infty} f_{n(k)}(x) =: f(x) \in Y$ が存在し，(**??**) より $\left(f_{n(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ は f に K で一様収束するから $\mathscr{F}$ は正規族である．

第二段　X の可分性と定理**??**より

$$K_n \subset K_{n+1}^{\circ}, \quad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$$

を満たすコンパクト部分集合の列 $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ が存在するから，これに対し (**??**) の距離 ρ を定める．$\mathscr{F}$ が正規族であるなら $\mathscr{F}$ は ρ に関して全有界となるから，任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\mathscr{F} = \bigcup_{i=1}^{N} \{\, f \in \mathscr{F} \ ; \quad \rho(f, f_i) < \epsilon \,\}$$

を満たす $\{f_i\}_{i=1}^{N} \subset \mathscr{F}$ が存在する．$K \subset X$ がコンパクトなら或る n で $K \subset K_n$ となり，或る $\delta > 0$ が存在して

$$p, q \in K, \ d_X(p, q) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_Y(f_i(p), f_i(q)) < \epsilon, \ (\forall i = 1, \cdots, N)$$

が成り立つから，任意の $f \in \mathscr{F}$ に対し $\rho(f, f_i) < \epsilon$ を満たす f_i を取れば

$$\begin{aligned} p, q \in K, \ d_X(p, q) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_Y(f(p), f(q)) &\leq d_Y(f(p), f_i(p)) + d_Y(f_i(p), f_i(q)) + d_Y(f_i(q), f(q)) \\ &\leq 2^n\epsilon + \epsilon + 2^n\epsilon \\ &= (2^{n+1} + 1)\epsilon \end{aligned}$$

となる．すなわち $\mathscr{F}$ は任意のコンパクト部分集合上で同程度連続である．また任意の $x \in X$ に対し

$$\Gamma(x) \coloneqq \{\, f(x) \ ; \quad f \in \mathscr{F} \,\}$$

とおくとき，任意の $\{w_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \overline{\Gamma(x)}$ に対して

$$f_n(x) \in \Gamma(x), \quad d_Y(f_n(x), w_n) < \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

を満たす $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ を取れば，$\mathscr{F}$ が正規族であるから収束部分列 $(f_{n_k}(x))_{k=1}^{\infty}$ が存在して

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = \lim_{k\to\infty} w_{n_k} \in \overline{\Gamma(x)}$$

が成り立つから $\overline{\Gamma(x)}$ はコンパクトである．　■

参考文献

[1] I. Karatzas and S. Shreve, Brownian motion and stochastic calculus second edition, 1998.

[2] C. Chen, Study Notes in Matheamtics, available from http://www.stat.purdue.edu/~chen418/study_research/StochasticCalculus-note2.pdf, 2018/05/20.

[3] Mathematics Stack Exchange, A question about stochastic processes and stopping times, available from https://math.stackexchange.com/questions/84271/a-question-about-stochastic-processes-and-stopping-times, 2018/05/20.