Karatzas-Shreve solutions

2018 年 9 月 25 日

目次

第 1 章

Martingales, Stopping Times, and Filtrations

1.1 Stochastic Processes and σ-Fields

Problem 1.5 修正

Let Y be a modification of X, and suppose that every sample path of both processes are right-continuous sample paths. Then X and Y are indistinguishable.

証明. X, Y のパスの右連続性より

$$\{X_t = Y_t,\ \forall t \geq 0\} = \bigcap_{r \in \mathbf{Q} \cap [0,\infty)} \{X_r = Y_r\}$$

が成立するから，$P(X_r = Y_r) = 1\ (\forall r \geq 0)$ より

$$P(X_t = Y_t,\ \forall t \geq 0) = P\Bigg(\bigcap_{r \in \mathbf{Q} \cap [0,\infty)} \{X_r = Y_r\}\Bigg) = 1$$

が従う． ∎

Problem 1.7

Let X be a process with every sample path RCLL. Let A be the event that X is continuous on $[0, t_0)$. Show that $A \in \mathscr{F}^X_{t_0}$.

証明 (参照元:[2]). $[0, t_0)$ に属する有理数の全体を $\mathbf{Q}^* := \mathbf{Q} \cap [0, t_0)$ と表すとき，

$$A = \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{\substack{p,q \in \mathbf{Q}^* \\ |p-q| < 1/n}} \left\{ \omega \in \Omega \quad : \quad \left| X_p(\omega) - X_q(\omega) \right| < \frac{1}{m} \right\}$$

が成立することを示せばよい．これが示されれば，$\omega \longmapsto \left(X_p(\omega), X_q(\omega)\right)$ の $\mathscr{F}^X_{t_0} / \mathscr{B}(\mathbf{R}^2)$-可測性と

$$\Phi : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \ni (x, y) \longmapsto |x - y| \in \mathbf{R}$$

の $\mathscr{B}(\mathbf{R}^2)/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測性より

$$\left\{ \omega \in \Omega \quad : \quad \left| X_p(\omega) - X_q(\omega) \right| < \frac{1}{m} \right\} = \left\{ \omega \in \Omega \quad : \quad \left(X_p(\omega), X_q(\omega)\right) \in \Phi^{-1}\left(B_{1/m}(0)\right) \right\} \in \mathscr{F}^X_{t_0}$$

が得られ $A \in \mathscr{F}^X_{t_0}$ が従う．$\left(B_{1/m}(0) = \{\, x \in \mathbf{R} \ : \ \ |x| < 1/m \,\}.\right)$

第一段　$\omega \in A^c$ を任意にとる．このとき或る $s \in (0, t_0)$ が存在して，$t \longmapsto X_t(\omega)$ は $t = s$ において左側不連続である．従って或る $m \geq 1$ については，任意の $n \geq 1$ に対し $0 < s - u < 1/3n$ を満たす u が存在して

$$|X_u(\omega) - X_s(\omega)| \geq \frac{1}{m}$$

を満たす．一方でパスの右連続性より $0 < p - s,\ q - u < 1/3n$ を満たす $p, q \in \mathbf{Q}^*$ が存在して

$$\left|X_p(\omega) - X_s(\omega)\right| < \frac{1}{4m}, \quad \left|X_q(\omega) - X_u(\omega)\right| < \frac{1}{4m}$$

が成立する．このとき $0 < |p - q| < 1/n$ かつ

$$\left|X_p(\omega) - X_q(\omega)\right| \geq \left|X_p(\omega) - X_s(\omega)\right| - |X_s(\omega) - X_u(\omega)| - \left|X_q(\omega) - X_u(\omega)\right| \geq \frac{1}{2m}$$

が従い

$$\omega \in \bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{\substack{p,q \in \mathbf{Q}^* \\ |p-q| < 1/n}} \left\{ \omega \in \Omega \ : \ \ \left|X_p(\omega) - X_q(\omega)\right| \geq \frac{1}{m} \right\}$$

を得る．

第二段　任意に $\omega \in A$ を取る．各点で有限な左極限が存在するという仮定から，

$$X_{t_0}(\omega) \coloneqq \lim_{t \uparrow t_0} X_t(\omega)$$

と定めることにより[*1] $t \longmapsto X_t(\omega)$ は $[0, t_0]$ 上で一様連続となる．従って

$$\omega \in \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{\substack{p,q \in \mathbf{Q}^* \\ |p-q| < 1/n}} \left\{ \omega \in \Omega \ : \ \ \left|X_p(\omega) - X_q(\omega)\right| < \frac{1}{m} \right\}$$

を得る．∎

Lemma2 for Exercise 1.8

$T = \{1, 2, 3, \cdots\}$ を高々可算集合とし，S_i を第二可算公理を満たす位相空間，X_i を確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上の S_i-値確率変数とする $(i \in T)$．このとき，任意の並び替え $\pi : T \longrightarrow T$ に対して $S \coloneqq \prod_{i \in T} S_{\pi(i)}$ とおけば次が成立する:

$$\sigma(X_i;\ i \in T) = \left\{ \left\{(X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, \cdots) \in A\right\} \ : \ \ A \in \mathscr{B}(S) \right\}. \tag{1.1}$$

証明.

第一段　射影 $S \longrightarrow S_{\pi(n)}$ を p_n で表す．任意に $t_i \in T$ を取り $n \coloneqq \pi^{-1}(i)$ とおけば，任意の $B \in \mathscr{B}(S_n)$ に対して

$$X_i^{-1}(B) = \left\{(\cdots, X_{\pi(n)}, \cdots) \in p_n^{-1}(B)\right\} \in \left\{ \left\{(X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, \cdots) \in A\right\} \ : \ \ A \in \mathscr{B}(S) \right\}$$

が成り立つから $\sigma(X_i;\ i \in T) \subset \left\{ \left\{(X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, \cdots) \in A\right\} \ : \ \ A \in \mathscr{B}(S) \right\}$ が従う．

[*1] 実際 $X_{t_0}(\omega)$ は所与のものであるが，いまは $[0, t_0]$ 上での連続性を考えればよいから便宜上値を取り替える．

第二段　任意の有限部分集合 $j \in T$ と $B_j \in \mathscr{B}(S_{\pi(j)})$ に対し

$$\left\{(X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, \cdots) \in p_j^{-1}(B_j)\right\} = X_{\pi(j)}^{-1}(B_j) \in \sigma(X_i;\ i \in T)$$

が成立するから

$$\left\{\ p_i^{-1}(B_i)\ \ :\ \ B_i \in \mathscr{B}(S_{\pi(i)}),\ i \in T\ \right\} \subset \left\{\ A \in \mathscr{B}(S)\ \ :\ \ \left\{(X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, \cdots) \in A\right\} \in \sigma(X_i;\ i \in T)\ \right\}$$

が従う．右辺は σ-加法族であり，定理 A.5.17 より左辺は $\mathscr{B}(S)$ を生成するから前段と併せて (1.1) を得る．■

Lemma3 for Exercise 1.8

$X = \{\ X_t\ \ :\ \ 0 \leq t < \infty\ \}$ を確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上の $\mathbf{R}^d$-値確率過程とする．任意の空でない $S \subset [0,\infty)$ に対し

$$\mathcal{F}_S^X := \sigma(X_s;\ s \in S)$$

とおくとき，任意の空でない $T \subset [0,\infty)$ に対して次が成立する:

$$\mathcal{F}_T^X := \bigcup_{S \subset T: at\ most\ countable} \mathcal{F}_S^X. \tag{1.2}$$

証明.　便宜上

$$\mathcal{F} := \bigcup_{S \subset T: at\ most\ countable} \mathcal{F}_S^X$$

とおく．まず，任意の $S \subset T$ に対し $\mathcal{F}_S^X \subset \mathcal{F}_T^X$ が成り立つから

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_T^X$$

が従う．また $\sigma(X_t) = \mathcal{F}_{\{t\}}^X,\ (\forall t \in T)$ より

$$\bigcup_{t \in T} \sigma(X_t) \subset \mathcal{F}$$

が成り立つから，あとは $\mathcal{F}$ が σ-加法族であることを示せばよい．実際，$\mathcal{F}$ は σ-加法族の合併であるから Ω を含みかつ補演算で閉じる．また $B_n \in \mathcal{F},\ n = 1, 2, \cdots$ に対しては，$B_n \in \mathcal{F}_{S_n}^X$ を満たす高々可算集合 $S_n \subset T$ が対応して

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{S_n}^X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(X_s;\ s \in S_n) \subset \sigma\left(X_s;\ s \in \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right)$$

が成り立つから，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \sigma\left(X_s;\ s \in \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) \subset \mathcal{F}$$

が従う．ゆえに $\mathcal{F}$ は σ-加法族であり (1.1) を得る．■

Exercise 1.8

Let X be a process whose sample paths are RCLL almost surely, and let A be the event that X is continuous on $[0, t_0)$. Show that A can fail to be in $\mathscr{F}_{t_0}^X$, but if $\{\ \mathscr{F}_t\ \ :\ \ t \geq 0\ \}$ is a fitration satisfying $\mathscr{F}_t^X \subset \mathscr{F}_t,\ t \geq 0$, and $\mathscr{F}_{t_0}^X$ contains all P-null sets of $\mathscr{F}$, then $A \in \mathscr{F}_{t_0}$.

証明.

第一段　高々可算な集合 $S = \{t_1, t_2, \cdots\} \subset [0, t_0]$ に対し，昇順に並び替えたものを $t_{\pi(1)} < t_{\pi(2)} < \cdots$ と表し

$$\mathcal{F}_S^X := \left\{ \left\{ (X_{t_{\pi(1)}}, X_{t_{\pi(2)}}, \cdots) \in B \right\} \ : \quad B \in \mathscr{B}((\mathbf{R}^d)^{\#S}) \right\}$$

とおく．ただし S が可算無限の場合は $(\mathbf{R}^d)^{\#S} = \mathbf{R}^\infty$ である．このとき (1.1) より

$$\sigma(X_s;\ s \in S) = \mathcal{F}_S^X$$

が成り立ち，(1.1) より

$$\mathscr{F}_{t_0}^X = \sigma(X_t;\ 0 \le t \le t_0) = \bigcup_{S \subset [0,t_0]: at\ most\ countable} \mathcal{F}_S^X$$

が満たされる．すなわち，$\mathscr{F}_{t_0}^X$ の任意の元は $\left\{ (X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots) \in B \right\}$, $(t_1 < t_2 < \cdots)$ の形で表される．

第二段

Problem 1.10 unsolved

Let X be a process with every sample path LCRL, and let A be the event that X is continuous on $[0, x_0]$. Let X be adapted to a right-continuous filtration $(\mathscr{F}_t)_{t \ge 0}$. Show that $A \in \mathscr{F}_{t_0}$.

証明.

第一段　$\mathbf{Q}^* := \mathbf{Q} \cap [0, t_0]$ とおく．いま，任意の $n \ge 1$ と $r \in \mathbf{Q}^*$ に対し

$$B_n(r) := \bigcup_{m \ge 1} \bigcap_{k \le m} \left\{ \omega \in \Omega \quad : \quad \left| X_r(\omega) - X_{r+\frac{1}{k}}(\omega) \right| \le \frac{1}{n} \right\}$$

と定めるとき，

$$A = \bigcap_{r \in \mathbf{Q}^*} \bigcap_{n \ge 1} B_n(r)$$

が成立することを示す．これが示されれば，

$$\left\{ \omega \in \Omega \quad : \quad \left| X_r(\omega) - X_{r+\frac{1}{k}}(\omega) \right| \le \frac{1}{n} \right\} \in \mathscr{F}_{r+\frac{1}{k}}, \quad (\forall r \in \mathbf{Q}^*,\ k \ge 1)$$

とフィルトレーションの右連続性から

$$B_n(r) \in \bigcap_{k \ge m} \mathscr{F}_{r+\frac{1}{k}} = \mathscr{F}_{r+} = \mathscr{F}_r$$

が従い $A \in \mathscr{F}_{t_0}$ が出る．

第二段

Problem 1.16

If the process X is measurable and the random time T is finite, then the function X_T is a random variable.

証明.

$$\tau : \Omega \ni \omega \longmapsto (T(\omega), \omega) \in [0,\infty) \times \Omega$$

とおけば，任意の $A \in \mathscr{B}([0,\infty))$, $B \in \mathscr{F}$ に対して

$$\tau^{-1}(A \times B) = \{\, \omega \in \Omega \quad : \quad (T(\omega), \omega) \in A \times B \,\} = T^{-1}(A) \cap B \in \mathscr{F}$$

が満たされる

$$\{\, A \times B \quad : \quad A \in \mathscr{B}([0,\infty)),\ B \in \mathscr{F} \,\} \subset \left\{\, E \in \mathscr{B}([0,\infty)) \otimes \mathscr{F} \quad : \quad \tau^{-1}(E) \in \mathscr{F} \,\right\}$$

が従い τ の $\mathscr{F}/\mathscr{B}([0,\infty)) \otimes \mathscr{F}$-可測性が出る．$X_T = X \circ \tau$ より X_T は可測 $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{R}^d)$ である． ∎

Problem 1.17

Let X be a measurable process and T a random time. Show that the collection of all sets of the form $\{X_T \in A\}$ and $\{X_T \in A\} \cup \{T = \infty\}$; $A \in \mathscr{B}(\mathbf{R})$, forms a sub-$\sigma$-field of $\mathscr{F}$.

証明.　X_T の定義域は $\{T < \infty\}$ であるから，

$$\mathscr{G} := \{\, \{T < \infty\} \cap E \quad : \quad E \in \mathscr{F} \,\}$$

とおけば，前問の結果より X_T は可測 $\mathscr{G}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$ である．$\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ より

$$\mathscr{H} := \{\, \{X_T \in A\},\ \{X_T \in A\} \cup \{T = \infty\} \quad : \quad A \in \mathscr{B}(\mathbf{R}) \,\}$$

に対して $\mathscr{H} \subset \mathscr{F}$ が成立する．あとは $\mathscr{H}$ が σ-加法族であることを示せばよい．実際，$A = \mathbf{R}$ のとき

$$\{X_T \in A\} \cup \{T = \infty\} = \{T < \infty\} \cup \{T = \infty\} = \Omega$$

となり $\Omega \in \mathscr{H}$ が従い，また

$$\begin{aligned} &\{X_T \in A\}^c = \{X_T \in A^c\} \cup \{T = \infty\}, \\ &(\{X_T \in A\} \cup \{T = \infty\})^c = \{X_T \in A^c\} \cap \{T < \infty\} = \{X_T \in A^c\} \end{aligned}$$

より $\mathscr{H}$ は補演算で閉じる．更に $B_n \in \mathscr{H}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を取れば，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \left\{ X_T \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}$$

或は

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \left\{ X_T \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\} \cup \{T = \infty\}$$

が成立し $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathscr{H}$ を得る． ∎

1.2　Stopping Times

$[0,\infty]$ の位相

$[0,\infty]$ の位相は $[-\infty,\infty]$ の相対位相である．$\emptyset \neq O \subset [-\infty,\infty]$ が開集合であるとは，任意の $x \in O$ に対し，

(O1)　$x \in \mathbf{R}$ なら或る $\epsilon > 0$ が存在して $B_\epsilon(x) \subset O$ が満たされる，
(O2)　$x = \infty$ なら或る $a \in \mathbf{R}$ が存在して $(a,\infty] \subset O$ が満たされる，
(O3)　$x = -\infty$ なら或る $a \in \mathbf{R}$ が存在して $[-\infty,a) \subset O$ が満たされる，

で定義される．この性質を満たす O の全体に $\emptyset$ を加えたものが $[-\infty,\infty]$ の位相であり，

$$[-\infty,r),\quad (r,r'),\quad (r,\infty],\quad (r,r' \in \mathbf{Q})$$

の全体が可算開基となる．従って $[0,\infty]$ の位相の可算開基は

$$[0,r),\quad (r,r'),\quad (r,\infty],\quad (r,r' \in \mathbf{Q} \cap [0,\infty))$$

の全体であり，写像 $\tau : \Omega \longrightarrow [0,\infty]$ が $\mathscr{F}/\mathscr{B}([0,\infty])$-可測性を持つかどうかを調べるには

$$\{\tau < a\} = \tau^{-1}([0,a)) \in \mathscr{F},\quad (\forall a \in \mathbf{Q} \cap [0,\infty))$$

が満たされているかどうかを確認すれば十分である．

Problem 2.2

Let X be a stochastic process and T a stopping time of $\left\{\mathscr{F}_t^X\right\}$. Suppose that for some pair $\omega,\omega' \in \Omega$, we have $X_t(\omega) = X_t(\omega')$ for all $t \in [0,T(\omega)] \cap [0,\infty)$. Show that $T(\omega) = T(\omega')$.

証明 (参照元:[3]).　ω,ω' を分離しない集合族 $\mathscr{H}$ を

$$\mathscr{H} \coloneqq \{\, A \subset \Omega \;:\; \{\omega,\omega'\} \subset A,\ or\ \{\omega,\omega'\} \subset \Omega \backslash A \,\}$$

により定めれば，$\mathscr{H}$ は σ-加法族である．このとき，$\{T = T(\omega)\} \in \mathscr{H}$ を示せばよい．

case1　$T(\omega) = \infty$ の場合，任意の $A \in \mathscr{B}(\mathbf{R}^d)$ 及び $0 \leq t < \infty$ に対して，仮定より

$$\omega \in X_t^{-1}(A) \quad \Leftrightarrow \quad \omega' \in X_t^{-1}(A)$$

が成り立ち

$$\sigma(X_t;\ 0 \leq t < \infty) \subset \mathscr{H}$$

となる．任意の $t \geq 0$ に対し $\{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t^X \subset \sigma(X_t;\ 0 \leq t < \infty)$ が満たされるから

$$\{T = \infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{T \leq n\}^c \in \sigma(X_t;\ 0 \leq t < \infty) \subset \mathscr{H}$$

が成立し，$\omega \in \{T = \infty\}$ より $\omega' \in \{T = \infty\}$ が従い $T(\omega) = T(\omega')$ を得る．

case2　$T(\omega) < \infty$ の場合，case1 と同様に任意の $0 \le t \le T(\omega)$ に対し $\sigma(X_t) \subset \mathscr{H}$ が満たされるから

$$\mathscr{F}^X_{T(\omega)} \subset \mathscr{H}$$

が成り立つ．$\{T = T(\omega)\} \in \mathscr{F}^X_{T(\omega)}$ より $\omega' \in \{T = T(\omega)\}$ が従い $T(\omega) = T(\omega')$ を得る．∎

Lemma for Proposition 2.3

$(\mathscr{F}_t)_{t\ge 0}$ を可測空間 $(\Omega, \mathscr{F})$ のフィルトレーションとするとき，任意の $t \ge 0$ 及び任意の点列 $s_1 > s_2 > \cdots > t, (s_n \downarrow t)$ に対して次が成立する:

$$\bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{s_n}.$$

証明．　先ず任意の $n \ge 1$ に対して

$$\bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_{s_n}$$

が成り立つから

$$\bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{s_n}$$

を得る．一方で，任意の $s > t$ に対し $s \ge s_n$ を満たす n が存在するから，

$$\mathscr{F}_s \supset \mathscr{F}_{s_n} \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{s_n}$$

が成立し

$$\bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{s_n}$$

が従う．∎

$(\mathscr{F}_{t+})_{t\ge 0}$ は右連続である．実際，任意の $t \ge 0$ で

$$\bigcap_{s>t} \mathscr{F}_{s+} = \bigcap_{s>t} \bigcap_{u>s} \mathscr{F}_u = \bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s = \mathscr{F}_{t+}$$

が成立する．

Corollary 2.4

T is an optional time of the filtration $\{\mathscr{F}_t\}$ if and only if it is a stopping time of the (right-continuous!) filtration $\{\mathscr{F}_{t+}\}$.

言い換えれば，確率時刻 T に対し

$$\{T < t\} \in \mathscr{F}_t,\ \forall t \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad \{T \le t\} \in \mathscr{F}_{t+},\ \forall t \ge 0$$

が成り立つことを主張している．

証明.　T が $(\mathscr{F}_{t+})$-停止時刻であるとき，任意の $n \geq 1$ に対して $\{T \leq t - 1/n\} \in \mathscr{F}_{(t-1/n)+} \subset \mathscr{F}_t$ が満たされるから

$$\{T < t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ T \leq t - \frac{1}{n} \right\} \in \mathscr{F}_t$$

が従う．逆に T が $(\mathscr{F}_t)$-弱停止時刻[*2] のとき，任意の $m \geq 1$ に対し

$$\{T \leq t\} = \bigcap_{n=m}^{\infty} \left\{ T < t + \frac{1}{n} \right\} \in \mathscr{F}_{t+1/m}$$

が成立するから

$$\{T \leq t\} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{t+1/n} = \mathscr{F}_{t+}$$

を得る．　∎

Problem 2.6

If the set Γ in Example 2.5 is open, show that H_Γ is an optional time.

証明.　$\{H_\Gamma < 0\} = \emptyset$ であるから，以下 $t > 0$ とする．$H_\Gamma(\omega) < t \Leftrightarrow \exists s < t,\ X_s(\omega) \in \Gamma$ より

$$\{H_\Gamma < t\} = \bigcup_{0 \leq s < t} \{X_s \in \Gamma\}$$

となる．また全てのパスが右連続であることと Γ が開集合であることにより

$$\bigcup_{0 \leq s < t} \{X_s \in \Gamma\} = \bigcup_{\substack{0 \leq r < t \\ r \in \mathbf{Q}}} \{X_r \in \Gamma\}$$

が成り立ち $\{H_\Gamma < t\} \in \mathscr{F}_t$ が従う．　∎

Problem 2.7

If the set Γ in Example 2.5 is closed and the sample paths of the process X are continuous, then H_Γ is a stopping time.

証明.

第一段　$\mathbf{R}^d$ 上の Euclid 距離を ρ で表し，

$$\rho(x, \Gamma) := \inf_{y \in \Gamma} \rho(x, y), \quad \Gamma_n := \left\{ x \in \mathbf{R}^d \ : \ \rho(x, \Gamma) < \frac{1}{n} \right\}, \quad (x \in \mathbf{R}^d,\ n = 1, 2, \cdots)$$

とおく．$\mathbf{R}^d \ni x \longmapsto \rho(x, \Gamma)$ の連続性より Γ_n は開集合であるから，Problem 2.6 の結果より $T_n := H_{\Gamma_n}$ で定める $T_n,\ n = 1, 2, \cdots$ は $(\mathscr{F}_t)$-弱停止時刻であり，また $H := H_\Gamma$ とおけば次の (1) と (2) が成立する:

(1)　$\{H = 0\} = \{X_0 \in \Gamma\}$,

[*2] optional time の訳語がわからないので弱停止時刻と呼ぶ．

$$(2)\quad H(\omega) \le t \quad \Leftrightarrow \quad T_n(\omega) < t,\ \forall n = 1,2,\cdots, \quad (\forall \omega \in \{H > 0\},\ \forall t > 0).$$

(1) と (2) 及び $T_n,\ n = 1,2,\cdots$ が $(\mathscr{F}_t)$-弱停止時刻であることにより

$$\{H \le t\} = \{H \le t\} \cap \{H > 0\} + \{H = 0\} = \left\{ \bigcap_{n=1}^{\infty} \{T_n < t\} \right\} \cap \{H > 0\} + \{H = 0\} \in \mathscr{F}_t, \quad (\forall t \ge 0)$$

が成立するから H は $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻である．

第二段　(1) を示す．実際，$X_0(\omega) \in \Gamma$ なら $H(\omega) = 0$ であり，$X_0(\omega) \notin \Gamma$ なら，Γ が閉であることとパスの連続性より

$$X_t(\omega) \notin \Gamma, \quad (0 \le t \le h)$$

を満たす $h > 0$ が存在して $H(\omega) \ge h > 0$ となる．

第三段　$\omega \in \{H > 0\},\ t > 0$ として (2) を示す．まずパスの連続性より

$$T_n(\omega) < t \quad \Leftrightarrow \quad \exists s \le t, \quad X_s(\omega) \in \Gamma_n$$

が成り立つ．$H(\omega) \le t$ の場合，$\beta \coloneqq H(\omega)$ とおけば，Γ が閉であることとパスの連続性より

$$X_\beta(\omega) \in \Gamma \subset \Gamma_n, \quad (\forall n = 1,2,\cdots)$$

が満たされ $T_n(\omega) < t\ (\forall n \ge 1)$ が従う．逆に，$H(\omega) > t$ のとき

$$X_s(\omega) \notin \Gamma, \quad (\forall s \in [0,t])$$

が満たされ，パスの連続性と ρ の連続性より $[0,t] \ni s \longmapsto \rho(X_s(\omega), \Gamma)$ は連続であるから，

$$d \coloneqq \min_{s \in [0,t]} \rho(X_s(\omega), \Gamma) > 0$$

が定まる．このとき $1/n < d/2$ を満たす $n \ge 1$ を一つ取れば

$$X_s(\omega) \notin \Gamma_n, \quad (\forall s \in [0,t])$$

が成立する．実際，任意の $s \in [0,t],\ x \in \Gamma_n$ に対し

$$\rho(X_s(\omega), x) \ge \rho(X_s(\omega), \Gamma) - \rho(x, \Gamma) \ge d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2} > \frac{1}{n}$$

が満たされる．従って $T_n(\omega) \ge t$ となる． ∎

Lemma 2.9 の式変形について

第一の式変形は

$$\begin{aligned}
\{T + S > t\} &= \{T = 0,\ T + S > t\} + \{0 < T < t,\ T + S > t\} + \{T \ge t,\ T + S > t\} \\
&= \{T = 0,\ T + S > t\} + \{0 < T < t,\ T + S > t\} + \{T \ge t,\ T + S > t,\ S = 0\} \\
&\quad + \{T \ge t,\ T + S > t,\ S > 0\} \\
&= \{T = 0,\ S > t\} + \{0 < T < t,\ T + S > t\} + \{T > t,\ S = 0\} + \{T \ge t,\ S > 0\}
\end{aligned}$$

である．

Problem 2.10

Let T, S be optional times; then $T + S$ is optional. It is a stopping time, if one of the following conditions holds:

(i)　$T > 0,\ S > 0$;

(ii)　$T > 0, T$ is a stopping time.

証明．　T,S が $(\mathscr{F}_t)$-弱停止時刻であるとすれば，任意の $t>0$ に対し

$$
\begin{aligned}
\{T+S<t\} &= \{T=0,\, T+S<t\} + \{0<T<t,\, T+S<t\} \\
&= \{T=0,\, S<t\} + \bigcup_{\substack{0<r<t \\ r\in\mathbf{Q}}} \{0<T<r,\, S<t-r\} \\
&\in \mathscr{F}_t
\end{aligned}
$$

が成り立つから $T+S$ も $(\mathscr{F}_t)$-弱停止時刻である．

(i)　この場合 $\{T+S\leq 0\}=\emptyset$ である．また $t>0$ なら

$$
\{T+S>t\} = \{0<T<t,\, T+S>t\} + \{T\geq t,\, T+S>t\} = \bigcup_{\substack{0<r<t \\ r\in\mathbf{Q}}} \{r<T<t,\, S>t-r\} + \{T\geq t\} \in \mathscr{F}_t
$$

が成立する．

(ii)　この場合も $\{T+S\leq 0\}=\emptyset$ であり，また $t>0$ のとき

$$
\begin{aligned}
\{T+S>t\} &= \{0<T<t,\, T+S>t\} + \{T\geq t,\, T+S>t\} \\
&= \{0<T<t,\, T+S>t\} + \{T\geq t,\, T+S>t,\, S=0\} + \{T\geq t,\, T+S>t,\, S>0\} \\
&= \{0<T<t,\, T+S>t\} + \{T>t,\, S=0\} + \{T\geq t,\, S>0\} \\
&\in \mathscr{F}_t
\end{aligned}
$$

が成立する．　∎

Problem 2.13

Verify that $\mathscr{F}_T$ is actually a σ-field and T is $\mathscr{F}_T$-measurable. Show that if $T(\omega)=t$ for some constant $t\geq 0$ and every $\omega\in\Omega$, then $\mathscr{F}_T=\mathscr{F}_t$.

証明．

第一段　$\mathscr{F}_T$ が σ-加法族であることを示す．実際，$\Omega\cap\{T\leq t\}=\{T\leq t\}\in\mathscr{F}_t,\ (\forall t\geq 0)$ より $\Omega\in\mathscr{F}_T$ が従い，また

$$
A^c\cap\{T\leq t\} = \{T\leq t\} - A\cap\{T\leq t\}, \quad \left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\} \cap \{T\leq t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n\cap\{T\leq t\})
$$

より $\mathscr{F}_T$ は補演算と可算和で閉じる．

第二段　任意の $\alpha\geq 0$ に対し

$$
\{T\leq\alpha\}\cap\{T\leq t\} = \{T\leq\alpha\wedge t\} \in \mathscr{F}_{\alpha\wedge t} \subset \mathscr{F}_t
$$

が成立し T の $\mathscr{F}_T/\mathscr{B}([0,\infty])$-可測性が出る．

第三段　$A\in\mathscr{F}_T$ なら $A=A\cap\{T\leq t\}\in\mathscr{F}_t$ となり，$A\in\mathscr{F}_t$ については，任意の $s\geq 0$ に対し $s\geq t$ なら

$$
A\cap\{T\leq s\} = A \in \mathscr{F} \subset \mathscr{F}_s,
$$

$s<t$ なら

$$
A\cap\{T\leq s\} = \emptyset \in \mathscr{F}_s
$$

が成り立ち $A\in\mathscr{F}_T$ が従う．　∎

Exercise 2.14

Let T be a stopping time and S a random time such that $S \geq T$ on Ω. If S is $\mathscr{F}_T$-measurable, then it is also a stopping time.

証明.　任意の $t \geq 0$ に対し

$$\{S \leq t\} = \{S \leq t\} \cap \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t$$

が成立する. ∎

Problem 2.17 修正

Let T, S be stopping times and Z an $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-measurable, integrable random variable. Then

$$A \in \mathscr{F}_T \quad \Longrightarrow \quad A \cap \{T \leq S\}, A \cap \{T < S\} \in \mathscr{F}_{S \wedge T},$$

and we have

(i) $\mathbb{1}_{\{T \leq S\}} E\left(Z \,|\, \mathscr{F}_T\right) = \mathbb{1}_{\{T \leq S\}} E\left(Z \,|\, \mathscr{F}_{S \wedge T}\right)$, P-a.s.

(ii) $\mathbb{1}_{\{T < S\}} E\left(Z \,|\, \mathscr{F}_T\right) = \mathbb{1}_{\{T < S\}} E\left(Z \,|\, \mathscr{F}_{S \wedge T}\right)$, P-a.s.

(iii) $E\left(E\left(Z \,|\, \mathscr{F}_T\right) \,|\, \mathscr{F}_S\right) = E\left(Z \,|\, \mathscr{F}_{S \wedge T}\right)$, P-a.s.

証明.

第一段　任意の $A \in \mathscr{F}_T$ に対し $A \cap \{T \leq S\} \in \mathscr{F}_{S \wedge T}$ が成り立つ. 実際,

$$A \cap \{T \leq S\} \cap \{S \wedge T \leq t\} = \Bigl[A \cap \{T \leq t\} \Bigr] \cap \{T \leq S\} \cap \{S \wedge T \leq t\} \in \mathscr{F}_t, \quad (\forall t \geq 0)$$

が成立する. 同様に $A \cap \{T < S\} \in \mathscr{F}_{S \wedge T}$ も得られる.

第二段　任意の $A \in \mathscr{F}_T$ に対し, 前段の結果より

$$\int_{A \cap \{T \leq S\}} Z \, dP = \int_{A \cap \{T \leq S\}} E\left(Z \,|\, \mathscr{F}_{S \wedge T}\right) \, dP$$

が従う. $\mathbb{1}_{\{T \leq S\}} E\left(Z \,|\, \mathscr{F}_{S \wedge T}\right)$ も $\mathscr{F}_T/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測であるから (i) が得られ, 同様に (ii) も出る.

第三段　任意の $B \in \mathscr{F}_S$ に対し, 第一段と第二段の結果により

$$\begin{aligned}
\int_B E\left(E\left(Z \,|\, \mathscr{F}_T\right) \,|\, \mathscr{F}_S\right) \, dP = \int_B E\left(Z \,|\, \mathscr{F}_T\right) \, dP &= \int_{B \cap \{S < T\}} E\left(Z \,|\, \mathscr{F}_T\right) \, dP + \int_{B \cap \{T \leq S\}} E\left(Z \,|\, \mathscr{F}_T\right) \, dP \\
&= \int_{B \cap \{S < T\}} Z \, dP + \int_{B \cap \{T \leq S\}} E\left(Z \,|\, \mathscr{F}_{S \wedge T}\right) \, dP \\
&= \int_{B \cap \{S < T\}} E\left(Z \,|\, \mathscr{F}_{S \wedge T}\right) \, dP + \int_{B \cap \{T \leq S\}} E\left(Z \,|\, \mathscr{F}_{S \wedge T}\right) \, dP \\
&= \int_B E\left(Z \,|\, \mathscr{F}_{S \wedge T}\right) \, dP
\end{aligned}$$

が成り立つ. $E\left(Z \,|\, \mathscr{F}_{S \wedge T}\right)$ も $\mathscr{F}_S/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測であるから (iii) を得る. ∎

Proposition 2.18 修正

Let $X = \{ X_t, \mathscr{F}_t \ : \ 0 \le t < \infty \}$ be a progressively measurable process, and let T be a stopping time of the filtration $\{\mathscr{F}_t\}$. Then the random variable $X_T \mathbb{1}_{\{T<\infty\}}$ is $\mathscr{F}_T$-measurable, and the "stopped process" $\{ X_{T\wedge t}, \mathscr{F}_t \ : \ 0 \le t < \infty \}$ is progressively measurable.

証明.

第一段　停止過程の発展的可測性を示す．$t \ge 0$ を固定する．このとき，全ての $\omega \in \Omega$ に対して $[0,t] \ni s \longmapsto T(\omega) \wedge s$ は連続であり，かつ全ての $s \in [0,t]$ に対し $\Omega \ni \omega \longmapsto T(\omega) \wedge s$ は $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}([0,t])$-可測であるから，$[0,t] \times \Omega \ni (s,\omega) \longmapsto T(\omega) \wedge s$ は $\mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t/\mathscr{B}([0,t])$-可測である．従って，任意の $A \in \mathscr{B}([0,t])$ と $B \in \mathscr{F}_t$ に対し

$$\begin{aligned}\{ (s,\omega) \in [0,t] \times \Omega \ : \ (T(\omega) \wedge s, \omega) \in A \times B \} &= \{ (s,\omega) \in [0,t] \times \Omega \ : \ T(\omega) \wedge s \in A \} \cap ([0,t] \times B) \\ &\in \mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t\end{aligned}$$

が成り立つから，任意の $E \in \mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t$ に対して

$$\{ (s,\omega) \in [0,t] \times \Omega \ : \ (T(\omega) \wedge s, \omega) \in E \} \in \mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t$$

が満たされ $(s,\omega) \longmapsto (T(\omega) \wedge s, \omega)$ の $\mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t/\mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t$-可測性を得る．

$$X(s,\omega) = X|_{[0,t]\times\Omega}(s,\omega), \quad (\forall (s,\omega) \in [0,t] \times \Omega)$$

かつ $X|_{[0,t]\times\Omega}$ は $\mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbf{R}^d)$-可測であるから，$[0,t] \times \Omega \ni (s,\omega) \longmapsto X(T(\omega) \wedge s, \omega) = X|_{[0,t]\times\Omega}(T(\omega) \wedge s, \omega)$ の $\mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbf{R}^d)$-可測性が出る．

第二段　定理 A.8.1 (P. 156) より $\omega \longmapsto X(T(\omega) \wedge t, \omega)$ は $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbf{R}^d)$ であるから，任意の $B \in \mathscr{B}(\mathbf{R}^d)$ に対し

$$\left\{X_T \mathbb{1}_{\{T<\infty\}} \in B\right\} \cap \{T \le t\} = \{X_{T\wedge t} \in B\} \cap \{T \le t\} \in \mathscr{F}_t, \quad (\forall t \ge 0)$$

が成立し $X_T \mathbb{1}_{\{T<\infty\}}$ の $\mathscr{F}_T/\mathscr{B}(\mathbf{R}^d)$-可測性を得る． ∎

Problem 2.19

Under the same assumption as in Proposition 2.18, and with $f(t,x); [0,\infty) \times \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{R}$ a bounded, $\mathscr{B}([0,\infty)) \otimes \mathscr{B}(\mathbf{R}^d)$-measurable function, show that the process $Y_t = \int_0^t f(s, X_s)\, ds;\ t \ge 0$ is progressively measurable with respect to $\{\mathscr{F}_t\}$, and Y_T is an $\mathscr{F}_T$-measurable random variable.

証明.　$[0,t]\times\Omega \ni (s,\omega) \longmapsto f(s, X_s(\omega))$ が $\mathscr{B}([0,t])\otimes\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測であれば，Fuini の定理より $\{ Y_t, \mathscr{F}_t \ : \ 0 \le t < \infty \}$ は適合過程となり，可積分性より $t \longmapsto Y_t(\omega)$, $(\forall \omega \in \Omega)$ が連続であるから Y の発展的可測性が従う．実際，

$$[0,t] \times \Omega \ni (s,\omega) \longmapsto (s, X_s(\omega)) = \left(s, X|_{[0,t]\times\Omega}(s,\omega)\right)$$

による $A \times B$, $(A \in \mathscr{B}([0,\infty))$, $B \in \mathscr{B}(\mathbf{R}^d))$ の引き戻しは

$$\{([0,t] \cap A) \times \Omega\} \cap X|_{[0,t]\times\Omega}^{-1}(B) \in \mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t$$

となるから，$[0,t] \times \Omega \ni (s,\omega) \longmapsto f(s, X_s(\omega))$ は $\mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測である． ∎

Problem 2.21

Verify that the class $\mathscr{F}_{T+}$ is indeed a σ-field with respect to which T is measurable, that it coincides with $\{ A \in \mathscr{F} \ : \ A \cap \{T < t\} \in \mathscr{F}_t, \forall t \geq 0 \}$, and that if T is a stopping time (so that both $\mathscr{F}_T, \mathscr{F}_{T+}$ are defined), then $\mathscr{F}_T \subset \mathscr{F}_{T+}$.

証明.

第一段　$\Omega \cap \{T \leq t\} = \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t, (\forall t \geq 0)$ より $\Omega \in \mathscr{F}_{T+}$ が従い，また

$$A^c \cap \{T \leq t\} = \{T \leq t\} - A \cap \{T \leq t\}, \quad \left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\} \cap \{T \leq t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap \{T \leq t\})$$

より $\mathscr{F}_{T+}$ は補演算と可算和で閉じるから $\mathscr{F}_{T+}$ は σ-加法族である．また，

$$\{T < \alpha\} \cap \{T \leq t\} = \begin{cases} \{T < \alpha\}, & (\alpha \leq t), \\ \{T \leq t\}, & (\alpha > t), \end{cases} \in \mathscr{F}_{t+}, \quad (\forall t \geq 0)$$

より $(\mathscr{F}_t)$-弱停止時刻 T は $\mathscr{F}_{T+}/\mathscr{B}([0,\infty])$-可測である．

第二段　任意の $t \geq 0$ に対し

$$A \cap \{T < t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap \left\{ T \leq t - \frac{1}{n} \right\}, \quad A \cap \{T \leq t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A \cap \left\{ T < t + \frac{1}{n} \right\}$$

が成り立ち $\mathscr{F}_{T+} = \{ A \in \mathscr{F} \ : \ A \cap \{T < t\} \in \mathscr{F}_t, \forall t \geq 0 \}$ が従う．

第三段　T が $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻であるとき，任意の $A \in \mathscr{F}_T$ に対し

$$A \cap \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t \subset \mathscr{F}_{t+}, \quad (\forall t \geq 0)$$

となり $\mathscr{F}_T \subset \mathscr{F}_{T+}$ が成り立つ． ∎

Lemma: 弱停止時刻の可測性

T を $(\mathscr{F}_t)$-弱停止時刻とすれば，任意の $t \geq 0$ に対し $T \wedge t$ は $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}([0,\infty))$-可測である．

証明.　任意の $\alpha \geq 0$ に対し

$$\{T \wedge t \leq \alpha\} = \begin{cases} \Omega, & (t \leq \alpha), \\ \{T \leq \alpha\}, & (t > \alpha), \end{cases} \in \mathscr{F}_t$$

が成立する． ∎

Probelem 2.22

Verify that analogues of Lemmas 2.15 and 2.16 hold if T and S are assumed to be optional and $\mathscr{F}_T$, $\mathscr{F}_S$ and $\mathscr{F}_{T\wedge S}$ are replaced by $\mathscr{F}_{T+}$, $\mathscr{F}_{S+}$ and $\mathscr{F}_{(T\wedge S)+}$, respectively. Prove that if S is an optional time and T is a positive stopping time with $S \leq T$, and $S < T$ on $\{S < \infty\}$, then $\mathscr{F}_{S+} \subset \mathscr{F}_T$.

証明.

第一段　$T \wedge t$, $S \wedge t$ は $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}([0,\infty))$-可測であるから、任意の $A \in \mathscr{F}_{S+}$ に対して

$$A \cap \{S \leq T\} \cap \{T \leq t\} = (A \cap \{S \leq t\}) \cap \{S \wedge t \leq T \wedge t\} \cap \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_{t+}, \quad (\forall t \geq 0)$$

となり $A \cap \{S \leq T\} \in \mathscr{F}_{T+}$ が成立する．特に，Ω 上で $S \leq T$ なら $\mathscr{F}_{S+} \subset \mathscr{F}_{T+}$ が従う．

第二段　前段の結果より $\mathscr{F}_{(T\wedge S)+} \subset \mathscr{F}_{T+} \cap \mathscr{F}_{S+}$ が満たされる．一方で，任意の $A \in \mathscr{F}_{T+} \cap \mathscr{F}_{S+}$ に対し

$$A \cap \{T \wedge S \leq t\} = (A \cap \{T \leq t\}) \cup (A \cap \{S \leq t\}) \in \mathscr{F}_{t+}, \quad (\forall t \geq 0)$$

が成り立ち $\mathscr{F}_{(T\wedge S)+} = \mathscr{F}_{T+} \cap \mathscr{F}_{S+}$ を得る．また

$$\{S < T\} \cap \{T \wedge S \leq t\} = \left(\bigcup_{\substack{0 \leq r \leq t \\ r \in \mathbf{Q} \cup \{t\}}} \{S \leq r\} \cap \{r < T\} \right) \cap \{S \leq t\} \in \mathscr{F}_{t+}, \quad (\forall t \geq 0)$$

により $\{S < T\} \in \mathscr{F}_{(T\wedge S)+}$ 及び $\{T < S\} \in \mathscr{F}_{(T\wedge S)+}$ となり，$\{T \leq S\}, \{S \leq T\}, \{T = S\} \in \mathscr{F}_{(T\wedge S)+}$ が従う．

第三段　T が停止時刻で $\{T < \infty\}$ 上で $S < T$ が満たされているとき．任意の $A \in \mathscr{F}_{S+}$ に対し

$$A \cap \{T \leq t\} = A \cap \{S < t\} \cap \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t, \quad (\forall t \geq 0)$$

が成り立ち $\mathscr{F}_{S+} \subset \mathscr{F}_T$ となる． ∎

Problem 2.23

Show that if $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a sequence of optional times and $T = \inf_{n\geq 1} T_n$, then $\mathscr{F}_{T+} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{T_n+}$. Besides, if each T_n is a positive stopping time and $T < T_n$ on $\{T < \infty\}$, then we have $\mathscr{F}_{T+} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{T_n}$.

証明.　$T \leq T_n$, $(\forall n \geq 1)$ より $\mathscr{F}_{T+} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{T_n+}$ が成り立つ．一方で $A \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{T_n+}$ に対し

$$A \cap \{T < t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap \{T_n < t\} \in \mathscr{F}_t, \quad (\forall t > 0) \tag{1.3}$$

が成り立つから，Problem 2.21 より $A \in \mathscr{F}_{T+}$ が従う．また $\{T < \infty\}$ 上で $T < T_n$, $(\forall n \geq 1)$ であるとき，Problem 2.22 より $\mathscr{F}_{T+} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{T_n}$ が従い，また T_n, $n \geq 1$ が停止時刻の場合も (1.2) は成立するので $\mathscr{F}_{T+} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{T_n}$ が出る． ∎

Problem 2.24 修正

Given an optional time T of the filtration $\{\mathscr{F}_t\}$, consider the sequence $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ of random times given by

$$T_n(\omega) = \begin{cases} +\infty; & \text{on } \{\ \omega \ : \ T(\omega) \geq n\ \} \\ \dfrac{k}{2^n}; & \text{on } \left\{\ \omega \ : \ \frac{k-1}{2^n} \leq T(\omega) < \frac{k}{2^n}\ \right\} \text{ for } k = 1, \cdots, n2^n, \end{cases}$$

for $n \geq 1$. Obviously $T_n \geq T_{n+1} \geq T$, for every $n \geq 1$. Show that each T_n is a stopping time, that $\lim_{n\to\infty} T_n = T$, and that for every $A \in \mathscr{F}_{T+}$ we have $A \cap \{T_n = (k/2^n)\} \in \mathscr{F}_{k/2^n}$; $n \geq 1, 1 \leq k \leq n2^n$.

証明.

第一段　$T_n(\omega) < \infty$ を満たす $\omega \in \Omega$ に対し，或る $1 \leq j \leq (n+1)2^{n+1}$, $1 \leq k \leq n2^n$ が存在して

$$\frac{j-1}{2^{n+1}} \leq T(\omega) < \frac{j}{2^{n+1}}, \quad \frac{k-1}{2^n} \leq T(\omega) < \frac{k}{2^n}$$

となる．このとき

$$\frac{2k-2}{2^{n+1}} \leq T(\omega) < \frac{2k-1}{2^{n+1}}$$

または

$$\frac{2k-1}{2^{n+1}} \leq T(\omega) < \frac{2k}{2^{n+1}}$$

のどちらかであるから，すなわち $j = 2k-1$ 或は $j = 2k$ であり

$$T(\omega) < \frac{j}{2^{n+1}} = T_{n+1}(\omega) \leq \frac{2k}{2^{n+1}} = T_n(\omega)$$

が成立する．$T_n(\omega) = \infty$ の場合も併せて $T_n \geq T_{n+1} \geq T$ $(\forall n \geq 1)$ を得る．

第二段　任意の $t \geq 0$ に対して

$$\{T_n \leq t\} = \bigcup_{k/2^n \leq n \wedge t} \left\{ \omega \ : \ \frac{k-1}{2^n} \leq T(\omega) < \frac{k}{2^n} \right\} \in \mathscr{F}_t, \quad (\forall t \geq 0)$$

が成り立つから T_n は $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻である．また $\{T < \infty\}$ 上では $T(\omega) < n$ のとき

$$0 < T_n(\omega) - T(\omega) \leq \frac{1}{2^n} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

となる．

第三段　任意の $A \in \mathscr{F}_{T+}$ に対して，Problem 2.21 より

$$A \cap \left\{ T_n = \frac{k}{2^n} \right\} = A \cap \left\{ T < \frac{k}{2^n} \right\} - A \cap \left\{ T < \frac{k-1}{2^n} \right\} \in \mathscr{F}_{k/2^n}$$

が成り立つ．　■

1.3 Continuous Time Martingales

1.3.1 Fundamental Inequalities

Proposition 3.6

Let $\{ X_t, \mathscr{F}_t \ : \ 0 \leq t < \infty \}$ be a martingale (respectively, submartingale), and $\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ a convex (respectively, convex nondecreasing) function, such that $E\,|\varphi(X_t)| < \infty$ holds for every $t \geq 0$. Then $\{ \varphi(X_t), \mathscr{F}_t \ : \ 0 \leq t < \infty \}$ is a submartingale.

証明．　$(X_t)_{t \geq 0}$ がマルチンゲールであり φ が凸であるとき，Jensen の不等式より P-a.s. の $\omega \in \Omega$ に対し

$$\varphi(X_s(\omega)) = \varphi(E\,(X_t \mid \mathscr{F}_s)\,(\omega)) \leq E\,(\varphi(X_t) \mid \mathscr{F}_s)\,(\omega)$$

が成り立つ．$(X_t)_{t\geq 0}$ が劣マルチンゲールであり φ が凸かつ単調増大であるとき，P-a.s. の $\omega \in \Omega$ に対し

$$\varphi(X_s(\omega)) \leq \varphi(E\left(X_t \mid \mathscr{F}_s\right)(\omega)) \leq E\left(\varphi(X_t) \mid \mathscr{F}_s\right)(\omega)$$

が成り立つ． ∎

Theorem 3.8 (i)

Let $\{\ X_t, \mathscr{F}_t \quad : \quad 0 \leq t < \infty\ \}$ be a submartingale whose every path is right-continuous, let $[\sigma, \tau]$ be a subinterval of $[0, \infty)$, and let $\alpha < \beta$, $\lambda > 0$ be real numbers. We have the following results:

(i) First submartingale inequality:

$$\lambda \cdot P\left[\sup_{\sigma \leq t \leq \tau} X_t > \lambda\right] \leq \int_{\sup\limits_{\sigma \leq t \leq \tau} X_t > \lambda} X_\tau \ dP, \tag{1.4}$$

and

$$\lambda \cdot P\left[\sup_{\sigma \leq t \leq \tau} X_t \geq \lambda\right] \leq E(X_\tau^+).$$

証明． $n \geq 1$ に対し $[\sigma, \tau]$ を 2^n 等分に分割し

$$E_n := \left\{\max_{k=0,1,\cdots,2^n} X_{\sigma + \frac{k}{2^n}(\tau-\sigma)} > \lambda\right\},$$

$$E_n^0 := \{X_\sigma > \lambda\}, \quad E_n^m := \left\{\max_{k=0,1,\cdots,m-1} X_{\sigma + \frac{k}{2^n}(\tau-\sigma)} \leq \lambda,\ X_{\sigma + \frac{m}{2^n}(\tau-\sigma)} > \lambda\right\}, \quad (1 \leq m \leq 2^n)$$

とおけば，

$$E_n^m \in \mathscr{F}_{\sigma + \frac{m}{2^n}(\tau-\sigma)} \subset \mathscr{F}_\tau, \quad E_n = \sum_{m=0}^{2^n} E_n^m, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

かつ，$E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots$ と X のパスの右連続性より

$$\left\{\sup_{\sigma \leq t \leq \tau} X_t > \lambda\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{\max_{k=0,1,\cdots,2^n} X_{\sigma + \frac{k}{2^n}(\tau-\sigma)} > \lambda\right\} = \lim_{n \to \infty} E_n$$

が満たされ，また $\sup_{\sigma \leq t \leq \tau} X_t$ の $\mathscr{F}_\tau / \mathscr{B}([-\infty, \infty])$-可測性も従う．Chebyshev の不等式と劣マルチンゲール性より

$$P(E_n) = \sum_{m=0}^{2^n} P(E_n^m) \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{m=0}^{2^n} \int_{E_n^m} X_{\sigma + \frac{m}{2^n}(\tau-\sigma)} \ dP \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{m=0}^{2^n} \int_{E_n^m} X_\tau \ dP = \frac{1}{\lambda} \int_{E_n} X_\tau \ dP$$

となるから，$n \longrightarrow \infty$ として，測度の連続性と Lebesgue の収束定理より

$$P\left[\sup_{\sigma \leq t \leq \tau} X_t > \lambda\right] \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\sup\limits_{\sigma \leq t \leq \tau} X_t > \lambda} X_\tau \ dP \leq \frac{1}{\lambda} E(X_\tau^+)$$

を得る．特に，任意の $m \in \mathbf{N}$, $(\lambda > 1/m)$ に対して

$$P\left[\sup_{\sigma \leq t \leq \tau} X_t > \lambda - \frac{1}{m}\right] \leq \frac{1}{\lambda - 1/m} E(X_\tau^+)$$

が成り立ち，$m \longrightarrow \infty$ として

$$P\left[\sup_{\sigma\leq t\leq\tau} X_t \geq \lambda\right] \leq \frac{1}{\lambda}E(X_\tau^+)$$

が従う． ∎

Theorem 3.8 (ii)

Second submartingale inequality:

$$\lambda \cdot P\left[\sup_{\sigma\leq t\leq\tau} X_t \leq -\lambda\right] \leq E(X_\tau^+) - E(X_\sigma).$$

証明． $n \geq 1$ に対し $[\sigma,\tau]$ を 2^n 等分に分割し

$$E_n := \left\{\min_{k=0,1,\cdots,2^n} X_{\sigma+\frac{k}{2^n}(\tau-\sigma)} < -\lambda\right\},$$

$$E_n^0 := \{X_\sigma < -\lambda\}, \quad E_n^m := \left\{\min_{k=0,1,\cdots,m-1} X_{\sigma+\frac{k}{2^n}(\tau-\sigma)} \geq -\lambda,\ X_{\sigma+\frac{m}{2^n}(\tau-\sigma)} < -\lambda\right\}, \quad (1 \leq m \leq 2^n)$$

として，また

$$T(\omega) := \begin{cases} \sigma + \frac{m}{2^n}(\tau-\sigma), & (\omega \in E_n^m,\ m = 0,1,\cdots,2^n), \\ \tau, & (\omega \in \Omega\backslash E_n), \end{cases} \qquad (\forall\omega \in \Omega)$$

により $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻を定めれば，任意抽出定理 (P. 31) より

$$\begin{aligned} E(X_\sigma) \leq E(X_T) &= \sum_{m=0}^{2^n}\int_{E_n^m} X_{\sigma+\frac{m}{2^n}(\tau-\sigma)}\,dP + \int_{\Omega\backslash E_n} X_\tau\,dP \leq \sum_{m=0}^{2^n}(-\lambda)P(E_n^m) + E(X_\tau^+) \\ &= -\lambda P(E_n) + E(X_\tau^+) \end{aligned}$$

が成立する．移項して $n \longrightarrow \infty$ とすれば

$$P\left[\inf_{\sigma\leq t\leq\tau} X_t < -\lambda\right] \leq \frac{1}{\lambda}\left\{E(X_\tau^+) - E(X_\sigma)\right\}$$

が得られ，(i) の証明と同様にして

$$P\left[\inf_{\sigma\leq t\leq\tau} X_t \leq -\lambda\right] \leq \frac{1}{\lambda}\left\{E(X_\tau^+) - E(X_\sigma)\right\}$$

が従う． ∎

Lemma: Theorem 3.8 (iii)

確率過程 $X = \{\ X_t \ : \ 0 \leq t < \infty\ \}$ のすべてのパスが右連続であるとき，$[\sigma,\tau]$ の 2^n 等分点を

$$F_n := \left\{\ \tau_i^n \ : \ \tau_i^n = \sigma + \frac{i}{2^n}(\tau-\sigma),\ i = 0,1,\cdots,2^n\right\}, \quad n = 1,2,\cdots$$

とおけば次が成立する:

$$U_{[\sigma,\tau]}(\alpha,\beta;X) = \sup_{n\in\mathbf{N}} U_{F_n}(\alpha,\beta;X), \quad D_{[\sigma,\tau]}(\alpha,\beta;X) = \sup_{n\in\mathbf{N}} D_{F_n}(\alpha,\beta;X).$$

Karatzas-Shreve 本文中では

$$\tau_1(\omega) = \min\{\, t \in F \quad : \quad X_t(\omega) \leq \alpha \,\}$$

と定めているが,

$$\tau_1(\omega) = \min\{\, t \in F \quad : \quad X_t(\omega) < \alpha \,\}$$

と定める方がよい．実際，こうでないと今の補題が従わない．また $\sigma_0 \equiv 0$, $\tau_0 \equiv 0$ と考える．

証明．　$U_{[\sigma,\tau]}(\alpha,\beta;X) \leq \sup_{n\in\mathbf{N}} U_{F_n}(\alpha,\beta;X)$ が成立すれば主張を得る．いま，任意に有限部分集合 $F \subset [\sigma,\tau]$ を取り

$$\tau_1(\omega) := \min\{\, t \in F \quad : \quad X_t(\omega) < \alpha \,\}, \quad \sigma_1(\omega) := \min\{\, t \in F \quad : \quad t \geq \tau_1(\omega),\ X_t(\omega) > \beta \,\}, \cdots$$

を定め，$\omega \in \Omega$ を任意に取り $U_F(\alpha,\beta;X(\omega)) = j \geq 1$ と仮定する．このとき

$$X_{\tau_i(\omega)}(\omega) < \alpha, \quad X_{\sigma_i(\omega)}(\omega) > \beta, \quad (i = 1,\cdots,j)$$

が満たされ，$t \longrightarrow X_t(\omega)$ の右連続性より，十分大きい $n \in \mathbf{N}$ に対して或る $t_i, s_i \in F_n$, $(1 \leq i \leq j)$ が

$$\tau_1(\omega) \leq t_1 < \sigma_1(\omega) \leq s_1 < \cdots < \tau_j(\omega) \leq t_j < \sigma_j(\omega) \leq s_j$$

かつ

$$X_{t_i}(\omega) < \alpha, \quad X_{s_i}(\omega) > \beta, \quad (\forall i = 1,\cdots,j)$$

を満たす．これにより

$$U_F(\alpha,\beta;X(\omega)) = j \leq U_{F_n}(\alpha,\beta;X(\omega))$$

が従い，ω の任意性より $U_F(\alpha,\beta;X) \leq \sup_{n\in\mathbf{N}} U_{F_n}(\alpha,\beta;X)$ が出る． ∎

Theorem 3.8 (iii)

Upcrossing and downcrossing inequalities:

$$EU_{[\sigma,\tau]}(\alpha,\beta;X) \leq \frac{E(X_\tau^+) + |\alpha|}{\beta - \alpha}, \quad ED_{[\sigma,\tau]}(\alpha,\beta;X) \leq \frac{E(X_\tau - \alpha)^+}{\beta - \alpha}.$$

証明．

第一段　有限部分集合 $F = \{t_1,\cdots,t_n\} \subset [\sigma,\tau]$ に対し

$$\tau_1(\omega) := \min\{\, t \in F \quad : \quad X_t(\omega) < \alpha \,\}, \quad \sigma_1(\omega) := \min\{\, t \in F \quad : \quad t \geq \tau_1(\omega),\ X_t(\omega) > \beta \,\}, \cdots$$

で定める τ_i, σ_i, $(i = 1, 2, \cdots)$ が $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻であることを示す．実際，任意の $t_j \in F$ に対して

$$\left\{\tau_1 = t_j\right\} = \left[\bigcap_{k=1}^{j-1} \left\{X_{t_k} \geq \alpha\right\}\right] \cap \left\{X_{t_j} < \alpha\right\} \in \mathscr{F}_{t_j},$$

$$\vdots$$

$$\left\{\tau_i = t_j\right\} = \bigcup_{r=1}^{j-1} \left[\left\{\sigma_{i-1} = t_r\right\} \cap \bigcap_{k=r}^{j-1} \left\{X_{t_k} \geq \alpha\right\}\right] \cap \left\{X_{t_j} < \alpha\right\} \in \mathscr{F}_{t_j},$$

$$\left\{\sigma_i = t_j\right\} = \bigcup_{r=1}^{j-1} \left[\left\{\tau_i = t_r\right\} \cap \bigcap_{k=r}^{j-1} \left\{X_{t_k} \leq \beta\right\}\right] \cap \left\{X_{t_j} > \beta\right\} \in \mathscr{F}_{t_j}$$

が成立するから $\{\tau_i \leq t\} \in \mathscr{F}_t$ $(\forall t \geq 0)$ が満たされる．

$$\tau_1(\omega) \coloneqq \min\{\, t \in F \;:\; X_t(\omega) > \beta \,\}, \quad \sigma_1(\omega) \coloneqq \min\{\, t \in F \;:\; t \geq \tau_1(\omega),\ X_t(\omega) < \alpha \,\}, \cdots$$

により τ_i, σ_i, $(i = 1, 2, \cdots)$ を定めてもこれらは $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻となる．特に，

$$\{U_F(\alpha, \beta; X) = j\} = \left\{\sigma_j < \infty\right\} \cap \left\{\sigma_{j+1} = \infty\right\} \in \mathscr{F}, \quad (j = 0, 1, 2, \cdots)$$

が成立するから $U_F(\alpha, \beta; X)$ 及び $D_F(\alpha, \beta; X)$ の可測性が得られる．

第二段　補題の有限部分集合 $F_n \subset [\sigma, \tau]$ に対し

$$EU_{F_n}(\alpha, \beta; X) \leq \frac{E(X_\tau^+) + |\alpha|}{\beta - \alpha} \tag{1.5}$$

が成立することを示せば，単調収束定理より

$$EU_{[\sigma,\tau]}(\alpha, \beta; X) = E\left(\sup_{n \in \mathbf{N}} U_{F_n}(\alpha, \beta; X)\right) \leq \frac{E(X_\tau^+) + |\alpha|}{\beta - \alpha}$$

が従う．実際，$j = U_{F_n}(\alpha, \beta; X(\omega))$ ならば $\sigma_j(\omega) \leq \tau < \tau_{j+1}(\omega)$ 或は $\tau_{j+1}(\omega) \leq \tau < \sigma_{j+1}(\omega)$ であるから

$$Z(\omega) \coloneqq \sum_{i=1}^{\infty} \left(X_{\tau_{i+1}(\omega)\wedge\tau}(\omega) - X_{\sigma_i(\omega)\wedge\tau}(\omega)\right) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{j} \left(X_{\tau_{i+1}(\omega)}(\omega) - X_{\sigma_i(\omega)}(\omega)\right), & (\star 1), \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{j-1} \left(X_{\tau_{i+1}(\omega)}(\omega) - X_{\sigma_i(\omega)}(\omega)\right) + \left(X_\tau(\omega) - X_{\sigma_j(\omega)}(\omega)\right), & (\star 2) \end{cases}$$

となり，$X_{\tau_i} < \alpha$, $X_{\sigma_i} > \beta$ より

$$\begin{aligned}(\star 2) &= \sum_{i=1}^{j-1} \left(X_{\tau_{i+1}(\omega)}(\omega) - X_{\sigma_i(\omega)}(\omega)\right) + (X_\tau(\omega) - \alpha) + \left(\alpha - X_{\sigma_j(\omega)}(\omega)\right) \leq j(\alpha - \beta) + X_\tau^+(\omega) + |\alpha| \\ &= U_{F_n}(\alpha, \beta; X(\omega))(\alpha - \beta) + X_\tau^+(\omega) + |\alpha|\end{aligned}$$

及び

$$(\star 1) \leq j(\alpha - \beta) \leq j(\alpha - \beta) + X_\tau^+(\omega) + |\alpha| = U_{F_n}(\alpha, \beta; X(\omega))(\alpha - \beta) + X_\tau^+(\omega) + |\alpha|$$

が満たされ

$$EZ \leq (\alpha - \beta) EU_{F_n}(\alpha, \beta; X) + E(X_\tau^+) + |\alpha|$$

が従う．$\{\, X_t, \mathscr{F}_t \;:\; 0 \leq t < \infty \,\}$ の劣マルチンゲール性と任意抽出定理 (P. 31) より

$$E\left(X_{\tau_{i+1}\wedge\tau} - X_{\sigma_i\wedge\tau}\right) \geq 0, \quad (i = 1, \cdots, j)$$

が成り立つから，$EZ \geq 0$ となり (1.3.1) が得られる．

第三段　$j = D_{F_n}(\alpha,\beta; X(\omega))$ ならば $\sigma_j(\omega) \le \tau < \tau_{j+1}(\omega)$ 或は $\tau_{j+1}(\omega) \le \tau < \sigma_{j+1}(\omega)$ であるから

$$Z(\omega) \coloneqq \sum_{i=1}^{\infty} \left(X_{\sigma_i(\omega)\wedge\tau}(\omega) - X_{\tau_i(\omega)\wedge\tau}(\omega) \right) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{j} \left(X_{\sigma_i(\omega)}(\omega) - X_{\tau_i(\omega)}(\omega) \right) + \Bigl(X_\tau(\omega) - X_{\tau_{j+1}(\omega)}(\omega) \Bigr), & (\star 3), \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{j} \left(X_{\sigma_i(\omega)}(\omega) - X_{\tau_i(\omega)}(\omega) \right), & (\star 4) \end{cases}$$

となり，$X_{\tau_i} > \beta,\ X_{\sigma_i} < \alpha$ より

$$(\star 4) \le \sum_{i=1}^{j} \left(X_{\sigma_i(\omega)}(\omega) - X_{\tau_i(\omega)}(\omega) \right) + (X_\tau(\omega) - \alpha)^+ = D_{F_n}(\alpha,\beta; X(\omega))(\alpha-\beta) + (X_\tau(\omega)-\alpha)^+$$

及び

$$(\star 3) \le j(\alpha-\beta) \le j(\alpha-\beta) + (X_\tau(\omega)-\alpha)^+ = D_{F_n}(\alpha,\beta; X(\omega))(\alpha-\beta) + (X_\tau(\omega)-\alpha)^+$$

が満たされ

$$EZ \le (\alpha-\beta) ED_{F_n}(\alpha,\beta; X) + E(X_\tau - \alpha)^+$$

が従う．$\{\, X_t, \mathscr{F}_t \ :\ 0 \le t < \infty \,\}$ の劣マルチンゲール性と任意抽出定理 (P. 31) より

$$E\left(X_{\sigma_i\wedge\tau} - X_{\tau_i\wedge\tau} \right) \ge 0, \quad (i = 1, \cdots, j+1)$$

が成り立つから，$EZ \ge 0$ となり

$$ED_{F_n}(\alpha,\beta; X) \le \frac{E(X_\tau-\alpha)^+}{\beta-\alpha}$$

が得られる． ∎

Theorem 3.8 (iv)

Doob's maximal inequality:

$$E\left(\sup_{\sigma\le t\le\tau} X_t \right)^p \le \left(\frac{p}{p-1} \right)^p E\,(X_\tau)^p, \quad p > 1,$$

provided $X_t \ge 0$ a.s.P for every $t \ge 0$, and $E\,(X_\tau)^p < \infty$.

証明．　パスの右連続性より

$$A \coloneqq \{\, \omega \ :\ X_t(\omega) < 0,\ \exists t \in [0,\infty) \,\} = \{\, \omega \ :\ X_r(\omega) < 0,\ \exists r \in [0,\infty)\cap\mathbf{Q} \,\}$$

が成り立ち，仮定より $P(A) = 0$ である．ここで

$$Y_n(\omega) \coloneqq \begin{cases} n \wedge \sup_{\sigma\le t\le\tau} X_t(\omega), & (\omega \in \Omega\backslash A), \\ 0, & (\omega \in A), \end{cases} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

で Y_n を定めれば，$\sup_{\sigma\le t\le\tau} X_t$ の $\mathscr{F}_\tau/\mathscr{B}([-\infty,\infty])$-可測性より Y_n も $\mathscr{F}_\tau/\mathscr{B}([-\infty,\infty])$-可測である．このとき

$$[0,n) \ni \lambda \longmapsto \mathbb{1}_{\{\, (\lambda,\omega) \ :\ \lambda < Y_n(\omega) \,\}}(\lambda,\omega)$$

は任意の $\omega \in \Omega$ に対し右連続，

$$\Omega \ni \omega \longmapsto \mathbb{1}_{\{\,(\lambda,\omega)\ :\quad \lambda<Y_n(\omega)\,\}}(\lambda,\omega)$$

は任意の $\lambda \in [0,n)$ に対し可測 $\mathscr{F}_\tau/\mathscr{B}([0,\infty))$ であるから

$$[0,n)\times\Omega \ni (\lambda,\omega) \longmapsto \mathbb{1}_{\{\,(\lambda,\omega)\ :\quad \lambda<Y_n(\omega)\,\}}(\lambda,\omega)$$

は $\mathscr{B}([0,n))\otimes\mathscr{F}_\tau/\mathscr{B}([0,\infty))$-可測である．$q$ を p の共役指数として，Fubini の定理と (1.3.1) 及び Hölder の不等式より

$$\begin{aligned}
\int_\Omega Y_n^p\ dP &= p\int_\Omega\int_{[0,n)} \lambda^{p-1}\mathbb{1}_{\{\,(\lambda,\omega)\ :\quad \lambda<Y_n(\omega)\,\}}(\lambda,\omega)\ d\lambda\ dP \\
&= p\int_{[0,n)} \lambda^{p-1}P(Y_n>\lambda)\ d\lambda \\
&= p\int_{[0,n)} \lambda^{p-1}P\left(\sup_{\sigma\le t\le\tau} X_t>\lambda\right)\ d\lambda \\
&\le p\int_{[0,n)} \lambda^{p-2}\int_{\sup\limits_{\sigma\le t\le\tau} X_t>\lambda} X_\tau(\omega)\ dP\ d\lambda \\
&= p\int_\Omega X_\tau\int_{[0,n)} \lambda^{p-2}\mathbb{1}_{\{\,(\lambda,\omega)\ :\quad \lambda<Y_n(\omega)\,\}}(\lambda,\omega)\ d\lambda\ dP \\
&= \frac{p}{p-1}\int_\Omega X_\tau Y_n^{p-1}\ dP \\
&\le \frac{p}{p-1}\left\{\int_\Omega X_\tau^p\ dP\right\}^{1/p}\left\{\int_\Omega Y_n^p\ dP\right\}^{1/q}
\end{aligned}$$

が成り立つから，$\left\{\int_\Omega Y_n^p\ dP\right\}^{1/q}$ を移項して両辺を p 乗すれば

$$\int_\Omega Y_n^p\ dP \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_\Omega X_\tau^p\ dP$$

が得られる．$n\longrightarrow\infty$ として，単調収束定理より主張が従う．∎

Theorem 3.8 (v)

Regularity of the paths: Almost every sample path $\{\,X_t(\omega)\ :\quad 0\le t<\infty\,\}$ is bounded on compact intervals; is free of discontinuities of the second kind, i.e., admits left-hand limits everywhere on $(0,\infty)$; and if the filtration $(\mathscr{F}_t)$ satisfies the usual conditions, then the jumps are exhausted by a sequence of stopping times (Proposition 2.26).

証明.

第一段　コンパクト区間 $[\sigma,\tau]$ 上で P-a.s. にパスが有界であることを示す．実際，任意の $N\in\mathbf{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
P\left(\sup_{t\in[\sigma,\tau]} X_t\ge N\right) &\le \frac{1}{N}EX_\tau^+, \\
P\left(\inf_{t\in[\sigma,\tau]} X_t\le -N\right) &\le \frac{1}{N}\left\{EX_\tau^+-EX_\sigma\right\}
\end{aligned}$$

が成り立つから，

$$
P\left(\sup_{t\in[\sigma,\tau]} X_t = \infty\right) = \lim_{N\to\infty} P\left(\sup_{t\in[\sigma,\tau]} X_t \geq N\right) = 0,
$$
$$
P\left(\inf_{t\in[\sigma,\tau]} X_t = -\infty\right) = \lim_{N\to\infty} P\left(\inf_{t\in[\sigma,\tau]} X_t \leq -N\right) = 0
$$

となる．ここで

$$
B^{(n)} \coloneqq \left\{-\infty = \inf_{t\in[0,n]} X_t\right\} \cup \left\{\sup_{t\in[0,n]} X_t = +\infty\right\}, \quad (n = 1, 2, \cdots)
$$

により P-零集合を定める．

第二段　P-a.s. にパスが各点で左極限を持つことを示す．いま，$n \geq 1$ として $\alpha < \beta$ に対し

$$
A^{(n)}_{\alpha,\beta} \coloneqq \left\{ \omega \in \Omega \ : \quad U_{[0,n]}(\alpha, \beta; X(\omega)) = \infty \right\}
$$

とおくとき，

$$
\left\{ \omega \in \Omega \ : \quad \lim_{s\uparrow t} \inf_{s<u<t} X_u(\omega) < \lim_{s\uparrow t} \sup_{s<u<t} X_u(\omega),\ \exists t \in (0, n] \right\} \subset \bigcup_{\substack{\alpha<\beta \\ \alpha,\beta\in\mathbf{Q}}} A^{(n)}_{\alpha,\beta} =: A^{(n)} \tag{1.6}
$$

が成り立つ．実際或る $t \in (0, n]$ で

$$
\lim_{s\uparrow t} \inf_{s<u<t} X_u(\omega) < \lim_{s\uparrow t} \sup_{s<u<t} X_u(\omega)
$$

となる場合，

$$
\lim_{s\uparrow t} \inf_{s<u<t} X_u(\omega) < \alpha < \beta < \lim_{s\uparrow t} \sup_{s<u<t} X_u(\omega)
$$

を満たす $\alpha, \beta \in \mathbf{Q}$ を取れば，任意の $N \in \mathbf{N}$ に対し或る点列 $0 < s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \cdots < s_N < t_N < t$ が存在して

$$
X_{s_i}(\omega) < \alpha, \quad X_{t_i}(\omega) > \beta, \quad (i = 1, \cdots, N)
$$

を満たす．従って $\{s_1, t_1, \cdots, s_N, t_N\}$ を含む有限集合 $F \subset [0, n]$ に対し

$$
N \leq U_F(\alpha, \beta; X(\omega)) \leq U_{[0,n]}(\alpha, \beta; X(\omega))
$$

が成り立ち，N の任意性より

$$
U_{[0,n]}(\alpha, \beta; X(\omega)) = \infty
$$

が従い (1.3.1) が出る．すなわち $\omega \notin \left(A^{(n)} \cup B^{(n)}\right)$ なら任意の $t \in (0, n]$ で $\lim_{s\uparrow t} X_s(\omega)$ が有限確定する．

$$
A \coloneqq \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(A^{(n)} \cup B^{(n)}\right)
$$

により零集合を定めれば $\omega \in \Omega \backslash A$ に対するパスは RCLL である．∎

Problem 3.11

Let $\{\mathscr{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a decreasing sequence of sub-σ-fields of $\mathscr{F}$ (i.e.,$\mathscr{F}_{n+1} \subset \mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}$, $\forall n \geq 1$), and let $\{ X_n, \mathscr{F}_n \ : \ n \geq 1 \}$ be a backward submartingale; i.e., $E|X_n| < \infty$, X_n is $\mathscr{F}_n$-measurable, and $E(X_n \mid \mathscr{F}_{n+1}) \geq X_{n+1}$ a.s.P, for every $n \geq 1$. Then $l := \lim_{n\to\infty} E(X_n) > -\infty$ implies that the sequence $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ is uniformly integrable.

証明. $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ は，或る $(\mathscr{F}_n)$-後退マルチンゲール $(M_n)_{n=1}^{\infty}$ と単調増大列 $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ を用いて

$$X_n = M_n - A_n, \quad (\forall n \geq 1)$$

と分解できる．実際，

$$A_0 := 0,$$
$$A_n := \sum_{i=1}^{n-1} E(X_i - X_{i+1} \mid \mathscr{F}_{i+1}), \quad (n = 2, 3, \cdots)$$

とおけば，$(X_n)_{n=1}^{\infty}$ の後退劣マルチンゲール性により

$$E := \bigcap_{n=1}^{\infty} \{ \omega \ni \Omega \ : \ E(X_n - X_{n+1} \mid \mathscr{F}_{n+1})(\omega) < 0 \}$$

で定まる P-零集合 E に対し

$$0 \leq A_1(\omega) \leq A_2(\omega) \leq \cdots \quad (\forall \omega \in \Omega \backslash E)$$

が満たされ

$$A_\infty(\omega) := \lim_{n\to\infty} A_n(\omega) \mathbb{1}_{\Omega\backslash E}(\omega), \quad (\omega \in \Omega)$$

が ∞ まで含めて確定する．すなわち A_∞ は可測 $\mathscr{F}/\mathscr{B}([0,\infty])$ である． また $EX_1 \geq EX_2 \geq \cdots \geq l > -\infty$ の仮定より

$$\int_\Omega A_n \, dP = \sum_{i=1}^{n-1} \int_\Omega E(X_i - X_{i+1} \mid \mathscr{F}_{i+1}) \, dP = \int_\Omega X_1 - X_n \, dP \leq \int_\Omega X_1 \, dP - l, \quad (\forall n \geq 1)$$

となるから，単調収束定理より A_∞ の可積分性が出る．一方で

$$M_n := X_n + A_n, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

により $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定めれば

$$\begin{aligned} E(M_n - M_{n+1} \mid \mathscr{F}_{n+1}) &= E((X_n - X_{n+1}) + (A_n - A_{n+1}) \mid \mathscr{F}_{n+1}) \\ &= E((X_n - X_{n+1}) - E(X_n - X_{n+1} \mid \mathscr{F}_{n+1}) \mid \mathscr{F}_{n+1}) = 0, \quad P\text{-a.s.}, \quad n = 1, 2, \cdots \end{aligned}$$

となるから

$$E(M_1 \mid \mathscr{F}_n) = M_n, \quad P\text{-a.s.}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

が従う．このとき，任意の $\lambda > 0$ に対して

$$\begin{aligned} \int_{|X_n|>\lambda} |X_n| \, dP &= \int_{|M_n - A_n|>\lambda} |M_n - A_n| \, dP \\ &\leq 2\int_{|M_n|>\lambda/2} |M_n| \, dP + 2\int_{|A_n|>\lambda/2} |A_n| \, dP \\ &\leq 2\int_{|M_n|>\lambda/2} |M_n| \, dP + 2\int_{A_\infty>\lambda/2} A_\infty \, dP, \quad (\forall n \geq 1) \end{aligned}$$

が満たされ[*3]，$(M_n = E(M_1 \mid \mathscr{F}_n))_{n=1}^{\infty}$ の一様可積分性 (補題) と A_∞ の可積分性より

$$\sup_{n\geq 1}\int_{|X_n|>\lambda} |X_n|\, dP \leq \sup_{n\geq 1}\int_{|M_n|>\lambda/2} |M_n|\, dP + 2\int_{A_\infty > \lambda/2} A_\infty\, dP \longrightarrow 0 \quad (\lambda \longrightarrow \infty)$$

が成立し $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ の一様可積分性が出る． ∎

Proposition 3.14 (i)

Let $X = \{\, X_t, \mathscr{F}_t \ :\ 0 \leq t < \infty \,\}$ be a submartingale. We have the following:

(i) There is an event $\Omega^* \in \mathscr{F}$ with $P(\Omega^*) = 1$, such that for every $\omega \in \Omega^*$:

$$\text{the limits } X_{t+}(\omega) := \lim_{\substack{s\downarrow t \\ s\in\mathbf{Q}}} X_s(\omega), \quad X_{t-}(\omega) := \lim_{\substack{s\uparrow t \\ s\in\mathbf{Q}}} X_s(\omega)$$

exist for all $t \geq 0$ (respectively, $t > 0$).

Proposition 3.14 (ii)

(ii) The limits in (i) satisfy

$$E(X_{t+} \mid \mathscr{F}_s) \geq X_s \quad \text{a.s.}P, \text{ for all } 0 \leq s \leq t.$$

証明． $0 \leq s \leq t$ とする．$t_n \downarrow t$ を満たす単調減少な有理点列 $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ を取れば，$\left(X_{t_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ は $(\mathscr{F}_{t_n})$-後退劣マルチンゲールであり，かつ

$$-\infty < EX_t \leq \cdots \leq EX_{t_2} \leq EX_{t_1}$$

が満たされているから $(X_{t_n})_{n=1}^{\infty}$ は一様可積分である (Problem 3.11)．いま，後退劣マルチンゲール性より

$$\int_A X_s\, dP \leq \int_A X_{t_n}\, dP, \quad (\forall A \in \mathscr{F}_s,\ n = 1, 2, \cdots)$$

が従い，また (i) より $X_{t_n} \longrightarrow X_{t+}$ P-a.s. が成り立つから，一様可積分性と平均収束の補題より

$$E|X_{t+}| < \infty, \quad E\left|X_{t_n} - X_{t+}\right| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \tag{1.7}$$

となり

$$\int_A X_s\, dP \leq \int_A X_{t+}\, dP, \quad (\forall A \in \mathscr{F}_s)$$

が得られる． ∎

[*3] 任意の $x, y \in \mathbf{R}$ と $\lambda > 0$ に対して次が成り立つ:

$|x+y|\mathbb{1}_{|x+y|>\lambda} = |x+y|\mathbb{1}_{|x+y|>\lambda\wedge|x|\geq|y|} + |x+y|\mathbb{1}_{|x+y|>\lambda\wedge|x|<|y|} \leq (|x|+|y|)\mathbb{1}_{|x|+|y|>\lambda\wedge|x|\geq|y|} + (|x|+|y|)\mathbb{1}_{|x|+|y|>\lambda\wedge|x|<|y|} \leq 2|x|\mathbb{1}_{2|x|>\lambda} + 2|y|\mathbb{1}_{2|y|>\lambda}.$

Proposition 3.14 (iii)

(iii) If $\mathscr{F}_0$ contains all the P-negligible events in $\mathscr{F}$, then $\{\, X_{t+}, \mathscr{F}_{t+} \;:\; 0 \leq t < \infty \,\}$ is a submartingale with every path RCLL. [*4]

証明.

第一段　(1.3.1) より X_{t+} は可積分である．

第二段　$(X_{t+})_{t\geq 0}$ が $(\mathscr{F}_{t+})$-適合であることを示す．任意に $t < u$ を取るとき，$u_n \downarrow t$ を満たす単調減少な有理点列 $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ に対し或る $N \geq 1$ が存在して $t < u_n < u \; (\forall n > N)$ となるから $X_{u_n} 1\!\!1_{\Omega^*} \; (n > N)$ は $\mathscr{F}_u/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測性を持つ[*5]．

$$X_{t+} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n>N}} X_{u_n} 1\!\!1_{\Omega^*}$$

より X_{t+} の $\mathscr{F}_u/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測性が従い，$t < u$ の任意性より $\mathscr{F}_{t+}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測性を得る．

第三段　任意の $0 \leq s < t$ に対し $E\left(X_{t+} \mid \mathscr{F}_{s+}\right) \geq X_{s+}$ P-a.s. が成り立つことを示す．実際，$s_n \downarrow s$ を満たす単調減少な有理点列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (s,t]$ を取れば，(ii) の結果より任意の $A \in \mathscr{F}_{s+} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{s_n}$ と $n \geq 1$ に対し

$$\int_A X_{t+} \, dP \geq \int_A X_{s_n} \, dP$$

が成立し，また $(X_{s_n})_{n=1}^{\infty}$ の一様可積分性より

$$E\left|X_{s_n} - X_{s+}\right| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

となり

$$\int_A X_{t+} \, dP \geq \int_A X_{s+} \, dP, \quad (\forall A \in \mathscr{F}_{s+})$$

が従う．

第四段　$\{\, X_{t+} \;:\; 0 \leq t < \infty \,\}$ の右連続性を示す．任意の $t \geq 0$, $\omega \in \Omega^*$, $\epsilon > 0$ に対し，或る $\delta > 0$ が存在して

$$|X_{t+}(\omega) - X_r(\omega)| < \epsilon, \quad (r \in (t, t+\delta) \cap \mathbf{Q})$$

が成立する．このとき，任意の $s \in (t, t+\delta)$ に対し

$$|X_{s+}(\omega) - X_u(\omega)| < \epsilon$$

を満たす $u \in (s, t+\delta) \cap \mathbf{Q}$ が存在するから

$$|X_{t+}(\omega) - X_{s+}(\omega)| \leq |X_{t+}(\omega) - X_u(\omega)| + |X_u(\omega) - X_{s+}(\omega)| < 2\epsilon$$

が従い $[0,\infty) \ni t \longmapsto X_{t+}(\omega)$ の右連続性が得られる．

[*4] $(X_{t+})_{t\geq 0}$ が $(\mathscr{F}_{t+})$-適合であることを保証するためには $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ の完備性が要る．また P-almost ではなく全てのパスが RCLL となる．

[*5] フィルトレーションの完備性の仮定より $1\!\!1_{\Omega^*}$ は $\mathscr{F}_u/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測となる．

第五段　$\{ X_{t+} \ :\ 0 \leq t < \infty \}$ が各点で有限な左極限を持つことを示す．任意の $t > 0$, $\omega \in \Omega^*$, $\epsilon > 0$ に対し，或る $\delta > 0$ が存在して

$$|X_{t-}(\omega) - X_r(\omega)| < \epsilon, \quad (r \in (t-\delta, t) \cap \mathbf{Q})$$

が成立する．このとき，任意の $s \in (t-\delta, t)$ に対し

$$|X_{s+}(\omega) - X_u(\omega)| < \epsilon$$

を満たす $u \in (s, t) \cap \mathbf{Q}$ が存在するから

$$|X_{t-}(\omega) - X_{s+}(\omega)| \leq |X_{t-}(\omega) - X_u(\omega)| + |X_u(\omega) - X_{s+}(\omega)| < 2\epsilon$$

が従い

$$\lim_{s \uparrow t} X_{s+}(\omega) = X_{t-}(\omega)$$

を得る． ∎

1.3.2　Convergence Results

Problem 3.16

Let $\{ X_t, \mathscr{F}_t \ :\ 0 \leq t < \infty \}$ be a right-continuous, nonnegative supermatingale; then $X_\infty(\omega) = \lim_{t\to\infty} X_t(\omega)$ exists for P-a.e. $\omega \in \Omega$, and $\{ X_t, \mathscr{F}_t \ :\ 0 \leq t \leq \infty \}$ is a supermartingale.

証明．　$\{ -X_t, \mathscr{F}_t \ :\ 0 \leq t < \infty \}$ は右連続な $(\mathscr{F}_t)$-劣マルチンゲールとなり

$$\sup_{t \geq 0} E(-X_t)^+ = 0$$

が満たされるから，劣マルチンゲール収束定理により或る P-零集合 A が存在して

$$Z_\infty \coloneqq \lim_{t\to\infty} (-X_t) 1\!\!1_{\Omega \setminus A}$$

により $\mathscr{F}_\infty / \mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測な可積分関数 Z_∞ が定まる．すなわち

$$X_\infty \coloneqq \lim_{t\to\infty} X_t 1\!\!1_{\Omega \setminus A}$$

により $\mathscr{F}_\infty / \mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測関数が定まり，かつ $X_\infty = -Z_\infty$ より X_∞ は可積分である．また Fatou の補題により任意の $t \geq 0$ 及び $A \in \mathscr{F}_t$ に対し

$$\int_A X_\infty \, dP \leq \liminf_{\substack{n\to\infty \\ n>t}} \int_A X_n \, dP \leq \int_A X_t \, dP$$

が成立するから $\{ X_t, \mathscr{F}_t \ :\ 0 \leq t \leq \infty \}$ は優マルチンゲールである． ∎

Exercise 3.18

Suppose that the filtration $\{\mathscr{F}_t\}$ satisfies the usual conditions. Then every right-continuous, uniformly integrable supermartingale $\{ X_t, \mathscr{F}_t \ : \ 0 \leq t < \infty \}$ admits the Riesz decomposition $X_t = M_t + Z_t$, a.s. P, as the sum of a right-continuous, uniformly integrable martingale $\{ M_t, \mathscr{F}_t \ : \ 0 \leq t < \infty \}$ and a potential $\{ Z_t, \mathscr{F}_t \ : \ 0 \leq t < \infty \}$.

条件を満たす二つの分解 $X_t = M_t + Z_t = M_t' + Z_t'$ a.s. $P, (\forall t \geq 0)$ が存在する場合，次の意味で分解は一意である:

$$P\left(M_t = M_t',\ Z_t = Z_t',\ \forall t \geq 0\right) = 1. \tag{1.8}$$

証明.

第一段　M を構成する．いま，$t \geq 0$ を固定する．$n > t$ を満たす $n \in \mathbf{N}$ と任意の $A \in \mathscr{F}_t$ に対し

$$\begin{aligned}\int_A E\left(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_t\right)\, dP &= \int_A X_{n+1}\, dP = \int_A E\left(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n\right)\, dP \\ &\leq \int_A X_n\, dP = \int_A E\left(X_n \mid \mathscr{F}_t\right)\, dP\end{aligned}$$

が成り立つから

$$E := \bigcup_{n>t} \{ \omega \in \Omega \ : \ E\left(X_n \mid \mathscr{F}_t\right)(\omega) < E\left(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_t\right)(\omega) \}$$

として P-零集合が定まる．また，同様に優マルチンゲール性より

$$F := \bigcup_{n>t} \{ \omega \in \Omega \ : \ E\left(X_n \mid \mathscr{F}_t\right)(\omega) > X_t(\omega) \}$$

も P-零集合である．このとき，単調減少性より

$$X_t^* := \lim_{n\to\infty} E\left(X_n \mid \mathscr{F}_t\right) \mathbb{1}_{\Omega \setminus (E \cup F)}$$

が $-\infty$ まで込めて確定し，X_t^* は $\mathscr{F}_t / \mathscr{B}([-\infty, \infty])$-可測であり

$$X_t(\omega) \geq X_t^*(\omega), \quad (\forall \omega \in \Omega \setminus (E \cup F))$$

を満たす．単調収束定理と $\sup_{n\geq 1} E|X_n| < \infty$ (一様可積分性) より

$$E\left(X_t - X_t^*\right) = \int_{\Omega\setminus(E\cup F)} \lim_{n\to\infty} \left(X_t - E\left(X_n \mid \mathscr{F}_t\right)\right)\, dP = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega\setminus(E\cup F)} X_t - E\left(X_n \mid \mathscr{F}_t\right)\, dP = EX_t - \lim_{n\to\infty} EX_n < \infty$$

が成立するから X_t^* は可積分性であり P-a.s. に $|X_t^*| < \infty$ となる．ここで

$$X_t^{**} := X_t^* \mathbb{1}_{|X_t^*| < \infty}$$

により $\mathscr{F}_t / \mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測な可積分関数を定めれば，単調収束定理より

$$EX_t^{**} = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega E\left(X_n \mid \mathscr{F}_t\right)\, dP = \lim_{n\to\infty} EX_n \tag{1.9}$$

となる．任意の $t \geq 0$ に対し X_t^{**} を定めれば，任意の $0 \leq s < t$ 及び $A \in \mathscr{F}_s$ に対して

$$\int_A X_t^{**}\, dP = \lim_{n\to\infty} \int_A E\left(X_n \mid \mathscr{F}_t\right)\, dP = \lim_{n\to\infty} \int_A E\left(X_n \mid \mathscr{F}_s\right)\, dP = \int_A X_s^{**}\, dP \tag{1.10}$$

が成り立つから $\left\{ X_t^{**}, \mathscr{F}_t \ : \ 0 \leq t < \infty \right\}$ はマルチンゲールである．マルチンゲール性より $[0, \infty) \ni t \longmapsto EX_t^{**}$ は定数であるから Theorem 3.13 により右連続な修正 $\{ M_t, \mathscr{F}_t \ : \ 0 \leq t < \infty \}$ が存在する．

第二段　まず $\lim_{t\to\infty} EX_t$ が存在することを示す．任意の単調増大列 $(t_k)_{k=1}^{\infty}$, $t_k \uparrow \infty$ に対し優マルチンゲール性より

$$\lim_{k\to\infty} EX_{t_k} = \inf_{k\geq 1} EX_{t_k}$$

が確定し，任意の $n \in \mathbf{N}$ に対し $n < t_k$ を満たす k が存在するから

$$\inf_{n\geq 1} EX_n \geq \inf_{k\geq 1} EX_{t_k}$$

が従う．逆に任意の t_k に対し $t_k < n$ を満たす n が存在するから

$$\lim_{n\to\infty} EX_n = \inf_{n\geq 1} EX_n = \inf_{k\geq 1} EX_{t_k} = \lim_{k\to\infty} EX_{t_k}$$

が成立し，$(t_k)_{k=1}^{\infty}$ の任意性から $\lim_{t\to\infty} EX_t$ が存在して

$$\lim_{t\to\infty} EX_t = \lim_{n\to\infty} EX_n \tag{1.11}$$

となる．右連続な優マルチンゲール $\{ Z_t, \mathscr{F}_t \ : \ 0 \leq t < \infty \}$ を

$$Z_t := X_t - M_t, \quad (\forall t \geq 0)$$

により定めれば，(1.3.2) より任意の $t \geq 0$ に対し

$$E(X_t - M_t) = EX_t - EM_t = EX_t - \lim_{n\to\infty} EX_n$$

が成り立ち，(1.3.2) より

$$\lim_{t\to\infty} E(X_t - M_t) = \lim_{t\to\infty} EX_t - \lim_{n\to\infty} EX_n = 0$$

が満たされるから $\{ Z_t, \mathscr{F}_t \ : \ 0 \leq t < \infty \}$ はポテンシャルである．

第三段　分解の一意性を示す．任意の $t \geq 0$ 及び $A \in \mathscr{F}_t$ に対し，(1.3.2) と M' のマルチンゲール性より

$$\int_A M_t \, dP = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n>t}} \int_A X_n \, dP = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n>t}} \left\{ \int_A M_n' - Z_n' \, dP \right\} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n>t}} \left\{ \int_A M_t' \, dP - \int_A Z_n' \, dP \right\}$$

が成立する．またポテンシャルは非負であるから

$$0 \leq \int_A Z_n' \, dP \leq \int_\Omega Z_n' \, dP \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成り立ち，$M_t = M_t'$ P-a.s. 及び $Z_t = Z_t'$ P-a.s. が従う．パスの右連続性より (1.3.2) が出る．■

Problem 3.19

Assume that $\mathscr{F}_\infty$ contains all the P-negligible events in $\mathscr{F}$ [*6]. Then the following three conditions are equivalent for a nonnegative, right-continuous submartingale $\{ X_t, \mathscr{F}_t \ : \ 0 \leq t < \infty \}$:

(a) it is a uniformly integrable family of random variables;

(b) it converges in L^1, as $t \to \infty$;

(c) it converges P a.s. (as $t \to \infty$) to an integrable random variable X_∞, such that $\{ X_t, \mathscr{F}_t \ : \ 0 \leq t \leq \infty \}$ is a submartingale.

Observe that the implications (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) hold without the assumption of nonnegativity.

[*6] 証明の第二段で出てくる E が $\mathscr{F}_\infty$ に属していなければならない．

証明.

第一段　(a) ⇒ (b) を示す．実際，一様可積分性の同値条件の補題より

$$\sup_{t\geq 0} EX_t^+ \leq \sup_{t\geq 0} E|X_t| < \infty$$

となるから，劣マルチンゲール収束定理より或る $\mathscr{F}_\infty/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測な可積分関数 X_∞ が存在して

$$\lim_{t\to\infty} X_t = X_\infty \quad P\text{-a.s.}$$

が満たされる．一様可積分性と平均収束の補題より，$t_n \uparrow \infty$ となる任意の単調増大列 $(t_n)_{n=1}^\infty$ に対して

$$E|X_{t_n} - X_\infty| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成立するから

$$E|X_t - X_\infty| \longrightarrow 0 \quad (t \longrightarrow \infty)$$

が従う．

第二段　(b) ⇒ (c) を示す．(b) の下で，或る可積分関数 X_* が存在して

$$E|X_n - X_*| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が満たされるから，或る部分列 $\left(X_{n_k}\right)_{k=1}^\infty$ と P-零集合 E が存在して

$$\lim_{k\to\infty} X_{n_k}(\omega) = X_*(\omega), \quad (\forall \omega \in \Omega\backslash E)$$

となる．$X_{n_k} 1\!\!1_{\Omega\backslash E}$ は全て $\mathscr{F}_\infty/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測であるから，

$$X_\infty \coloneqq \lim_{k\to\infty} X_{n_k} 1\!\!1_{\Omega\backslash E}$$

とおけば X_∞ は $\mathscr{F}_\infty/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測，かつ $X_\infty = X^*$ P-a.s. より可積分であり

$$E|X_n - X_\infty| = E|X_n - X_*| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \tag{1.12}$$

を満たす．任意の $t \geq 0$ 及び $A \in \mathscr{F}_t$ に対し

$$\int_A X_t \, dP \leq \int_A X_n \, dP, \quad (\forall n > t) \tag{1.13}$$

が成り立つから，(1.3.2) より

$$\int_A X_t \, dP \leq \int_A X_\infty \, dP \tag{1.14}$$

が出る．

第三段　$X_t \geq 0$ $(\forall t \geq 0)$ を仮定して (c) ⇒ (a) を示す．実際，劣マルチンゲール性より

$$\int_{|X_t|>\lambda} |x_t| \, dP = \int_{X_t>\lambda} X_t \, dP \leq \int_{X_t>\lambda} X_\infty \, dP$$

かつ

$$P(X_t > \lambda) \leq \frac{1}{\lambda} EX_t \leq \frac{1}{\lambda} EX_\infty$$

が成り立ち，X_∞ の可積分性より

$$\sup_{t\geq 0} \int_{|X_t|>\lambda} |x_t| \, dP \longrightarrow 0 \quad (\lambda \longrightarrow \infty)$$

となる． ∎

Problem 3.20

Assume that $\mathscr{F}_\infty$ contains all the P-negligible events in $\mathscr{F}$. Then the following four conditions are equivalent for a right-continuous martingale $\{ X_t, \mathscr{F}_t \ : \ 0 \le t < \infty \}$:

(a),(b) as in Problem 3.19;

(c) it converges P a.s. (as $t \to \infty$) to an integrable random variable X_∞, such that $\{ X_t, \mathscr{F}_t \ : \ 0 \le t \le \infty \}$ is a martingale;

(d) there exists an integrable random variable Y, such that $X_t = E(Y \mid \mathscr{F}_t)$ a.s. P, for every $t \ge 0$.

Besides, if (d) holds and X_∞ is the random variable in (c), then

$$E(Y \mid \mathscr{F}_\infty) = X_\infty \quad \text{a.s. } P. \tag{1.15}$$

証明.

第一段　マルチンゲールは劣マルチンゲールであるから，Problem 3.19 より (a) ⇒ (b) が従う．また今の仮定の下では (1.3.2) と (1.3.2) の不等号が等号に代わり (b) ⇒ (c) となる．$Y := X_\infty$ として (c) ⇒ (d) が得られ，一様可積分性と条件付き期待値に関する補題 (P. 188) より (d) ⇒ (a) が出る．

第二段　(1.3.2) を示す．いま，任意の $t \ge 0$ 及び $A \in \mathscr{F}_t$ に対し

$$\int_A Y\,dP = \int_A X_t\,dP = \int_A X_\infty\,dP$$

が成立するから

$$\int_A Y\,dP = \int_A X_\infty\,dP, \quad \left(\forall A \in \bigcup_{t \ge 0} \mathscr{F}_t\right)$$

が従う．Y と X_∞ の可積分性より

$$\mathscr{D} := \left\{ A \in \mathscr{F}_\infty \ : \ \int_A Y\,dP = \int_A X_\infty\,dP \right\}$$

は Dynkin 族をなし乗法族 $\bigcup_{t \ge 0} \mathscr{F}_t$ を含むから，Dynkin 族定理より

$$\int_A Y\,dP = \int_A X_\infty\,dP, \quad (\forall A \in \mathscr{F}_\infty)$$

が成立する． ∎

1.3.3 The Optional Sampling Theorem

Lemma: 離散時間の任意抽出定理

$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty$ とし，$\left\{ X_{t_i}, \mathscr{F}_{t_i} \ : \ \ i = 0, \cdots, n \right\}$ を劣マルチンゲール，$S, T : \Omega \longrightarrow \{t_0, t_1, \cdots, t_n, \infty\}$ を $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻[*7]，Y を $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測関数として

$$X_T(\omega) \coloneqq Y(\omega),\ (\forall \omega \in \{T = \infty\}), \quad X_S(\omega) \coloneqq Y(\omega),\ (\forall \omega \in \{S = \infty\})$$

とおく．このとき，

(a)　$S, T < \infty$, a.s. P.

(b)　Y が可積分かつ $E\left(Y \,\middle|\, \mathscr{F}_{t_i}\right) \geq X_{t_i}$ a.s. P, $(i = 0, \cdots, n)$.

のいずれかのが満たされていれば次が成り立つ:

$$E\left(X_T \mid \mathscr{F}_S\right) \geq X_{S \wedge T} \quad \text{a.s. } P. \tag{1.16}$$

証明.

第一段　X_S が $\mathscr{F}_S/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測であることを示す．任意の $t \geq 0$ に対して

$$\{X_S \in B\} \cap \{S \leq t\} = \{X_{S \wedge t} \in B\} \cap \{S \leq t\}, \quad (\forall B \in \mathscr{B}(\mathbf{R}))$$

となるから $X_{S \wedge t}$ の $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測性を言えばよい．$t_m \leq t < t_{m+1}$ の場合 ($m = n$ なら $t_{m+1} = \infty$),

$$X_{S \wedge t} = \sum_{t_i \leq t} X_{t_i} \mathbb{1}_{\{S = t_i\}} = \sum_{i=0}^{m} X_{t_i} \mathbb{1}_{\{S = t_i\}}$$

と分解できる．連続写像 $\varphi : \mathbf{R}^2 \ni (x, y) \longmapsto xy$ と $\psi : \mathbf{R}^{m+1} \ni (x_0, x_1, \cdots, x_m) \longmapsto x_0 + x_1 + \cdots + x_m$ を用いれば,

$$\left\{X_{t_i} \mathbb{1}_{\{S = t_i\}} \in B\right\} = \left\{\left(X_{t_i}, \mathbb{1}_{\{S = t_i\}}\right) \in \varphi^{-1}(B)\right\}, \quad (\forall B \in \mathscr{B}(\mathbf{R}))$$

かつ

$$\{X_{S \wedge t} \in B\} = \left\{\left(X_{t_0} \mathbb{1}_{\{S = t_0\}}, \cdots, X_{t_m} \mathbb{1}_{\{S = t_m\}}\right) \in \psi^{-1}(B)\right\}, \quad (\forall B \in \mathscr{B}(\mathbf{R}))$$

が成り立つ．いま，$\mathbf{R}$ の第二可算性より $\mathscr{B}(\mathbf{R}^2) = \mathscr{B}(\mathbf{R}) \otimes \mathscr{B}(\mathbf{R})$ が満たされ，かつ任意の $E, F \in \mathscr{B}(\mathbf{R})$ に対して

$$\left\{\left(X_{t_i}, \mathbb{1}_{\{S = t_i\}}\right) \in E \times F\right\} = X_{t_i}^{-1}(E) \cap \left\{\mathbb{1}_{\{S = t_i\}} \in F\right\} \in \mathscr{F}_t, \quad (\forall t_i \leq t)$$

となるから $X_{t_i} \mathbb{1}_{\{S = t_i\}}$ の $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測性が従う．同様に $\mathscr{B}(\mathbf{R}^{m+1}) = \mathscr{B}(\mathbf{R}) \otimes \cdots \otimes \mathscr{B}(\mathbf{R})$ と

$$\left\{\left(X_{t_0} \mathbb{1}_{\{S = t_0\}}, \cdots, X_{t_m} \mathbb{1}_{\{S = t_m\}}\right) \in E_0 \times \cdots \times E_m\right\} = \bigcap_{i=0}^{m} \left\{X_{t_i} \mathbb{1}_{\{S = t_i\}} \in E_i\right\} \in \mathscr{F}_t, \quad (\forall E_i \in \mathscr{B}(\mathbf{R}),\ i = 0, \cdots, m)$$

より $X_{S \wedge t}$ は $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測である．これより X_T の $\mathscr{F}_T/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測性及び $X_{S \wedge T}$ の $\mathscr{F}_{S \wedge T}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測性も出る．

[*7] $\left\{\mathscr{F}_{t_i}\right\}_{i=0}^{n}$ は $\{\mathscr{F}_t\}_{t \geq 0}$ の部分集合と考える．

第二段　$S \leq T$ と仮定して (1.3.3) を示す．先ず

$$\int_\Omega |X_S|\ dP = \sum_{i=0}^{n} \int_{\{S=t_i\}} |X_{t_i}|\ dP + \int_{\{S=\infty\}} |Y|\ dP$$

より (a),(b) いずれの場合も X_S, X_T は可積分である．また，劣マルチンゲール性より任意の $A \in \mathscr{F}_S$ に対して

$$\begin{aligned}
\int_{A\cap\{S=t_i\}} X_{t_i}\ dP &= \int_{A\cap\{S=t_i\}\cap\{T=t_i\}} X_{t_i}\ dP + \int_{A\cap\{S=t_i\}\cap\{T>t_i\}} X_{t_i}\ dP \\
&\leq \int_{A\cap\{S=t_i\}\cap\{T=t_i\}} X_T\ dP + \int_{A\cap\{S=t_i\}\cap\{T>t_i\}} X_{t_{i+1}}\ dP \\
&= \int_{A\cap\{S=t_i\}\cap\{T=t_i\}} X_T\ dP + \int_{A\cap\{S=t_i\}\cap\{T=t_{i+1}\}} X_T\ dP + \int_{A\cap\{S=t_i\}\cap\{T>t_{i+1}\}} X_{t_{i+1}}\ dP \\
&\cdots \\
&\leq \sum_{j=i}^{n} \int_{A\cap\{S=t_i\}\cap\{T=t_j\}} X_T\ dP + \int_{A\cap\{S=t_i\}\cap\{T>t_n\}} X_{t_n}\ dP
\end{aligned}$$

及び

$$\int_{A\cap\{S=\infty\}} X_S\ dP = \int_{A\cap\{S=\infty\}} Y\ dP = \int_{A\cap\{S=\infty\}} X_T\ dP$$

が成り立つから，(a) の場合は

$$\int_{A\cap\{S=t_i\}} X_{t_i}\ dP \leq \sum_{j=i}^{n} \int_{A\cap\{S=t_i\}\cap\{T=t_j\}} X_T\ dP = \int_{A\cap\{S=t_i\}} X_T\ dP,$$

(b) の場合は

$$\begin{aligned}
\int_{A\cap\{S=t_i\}} X_{t_i}\ dP &\leq \sum_{j=i}^{n} \int_{A\cap\{S=t_i\}\cap\{T=t_j\}} X_T\ dP + \int_{A\cap\{S=t_i\}\cap\{T>t_n\}} X_{t_n}\ dP \\
&\leq \sum_{j=i}^{n} \int_{A\cap\{S=t_i\}\cap\{T=t_j\}} X_T\ dP + \int_{A\cap\{S=t_i\}\cap\{T>t_n\}} Y\ dP \\
&= \sum_{j=i}^{n} \int_{A\cap\{S=t_i\}\cap\{T=t_j\}} X_T\ dP + \int_{A\cap\{S=t_i\}\cap\{T=\infty\}} Y\ dP \\
&= \int_{A\cap\{S=t_i\}} X_T\ dP
\end{aligned}$$

となり，いずれの場合も

$$\int_A X_S\ dP = \sum_{i=0}^{n} \int_{A\cap\{S=t_i\}} X_{t_i}\ dP + \int_{A\cap\{S=\infty\}} X_S\ dP \leq \sum_{i=0}^{n} \int_{A\cap\{S=t_i\}} X_T\ dP + \int_{A\cap\{S=\infty\}} X_T\ dP = \int_A X_T\ dP$$

が成立する．X_S の $\mathscr{F}_S/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測性より (1.3.3) を得る．

第三段　一般の S, T に対して (1.3.3) を示す．任意の $A \in \mathscr{F}_S$ に対し，Problem 2.17 (P. 11) と前段の結果より

$$\begin{aligned}
\int_A E\left(X_T \mid \mathscr{F}_S\right)\ dP &= \int_{A\cap\{S\leq T\}} E\left(X_T \mid \mathscr{F}_S\right)\ dP + \int_{A\cap\{S>T\}} E\left(X_T \mid \mathscr{F}_S\right)\ dP \\
&= \int_{A\cap\{S\leq T\}} E\left(X_T \mid \mathscr{F}_{S\wedge T}\right)\ dP + \int_{A\cap\{S>T\}} X_T\ dP \\
&\geq \int_{A\cap\{S\leq T\}} X_{S\wedge T}\ dP + \int_{A\cap\{S>T\}} X_{S\wedge T}\ dP \\
&= \int_A X_{S\wedge T}\ dP
\end{aligned}$$

となり，$X_{S\wedge T}$ の $\mathscr{F}_{S\wedge T}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測性より (1.3.3) が出る． ∎

Theorem 3.22 修正

Let $\{\, X_t, \mathscr{F}_t \;:\; 0 \leq t < \infty \,\}$ be a right-continuous submartingale, S, T be two optional times of the filtration $\{\mathscr{F}_t\}$, and Y be a $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-measurable function, and set

$$X_U(\omega) := Y(\omega) \quad (\forall \omega \in \{U = \infty\}).$$

for any random time U. Then, under either of the following two conditions;

(a) There exists an $N \in \mathbf{N}$ such that $S, T < N$ a.s. P,

(b) Y is integrable and $X_t \leq E\left(Y \mid \mathscr{F}_t\right)$ a.s. P, for every $t \geq 0$,

we have

$$E\left(X_T \mid \mathscr{F}_{S+}\right) \geq X_{S\wedge T} \quad \text{a.s. } P.$$

If S is a stopping time, then $\mathscr{F}_S$ can replace $\mathscr{F}_{S+}$ above. In particular, $EX_T \geq EX_0$, and for a martingale with a last element we have $EX_T = EX_0$.

この修正により Problem 3.23 と Problem 3.24 の主張が従う．

証明.

第一段　X_S の $\mathscr{F}_{S+}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測性を示す．Corollary 2.4 より S は $(\mathscr{F}_{t+})$-停止時刻であり，$\{\, X_t, \mathscr{F}_{t+} \;:\; 0 \leq t < \infty \,\}$ は発展的可測である．従って Proposition 2.18 (P. 12) より任意の $t \geq 0$ に対し $X_{S\wedge t}$ は $\mathscr{F}_{t+}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測であり，

$$\{X_S \in B\} \cap \{S \leq t\} = \{X_{S\wedge t} \in B\} \cap \{S \leq t\} \in \mathscr{F}_{t+}, \quad (\forall B \in \mathscr{B}(\mathbf{R}))$$

より X_S の $\mathscr{F}_{S+}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測性が出る．$S$ が $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻のときは，$X_{S\wedge t}$ は $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測性を持ち

$$\{X_S \in B\} \cap \{S \leq t\} = \{X_{S\wedge t} \in B\} \cap \{S \leq t\} \in \mathscr{F}_t, \quad (\forall B \in \mathscr{B}(\mathbf{R}))$$

が従うから X_S は $\mathscr{F}_S/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測である．

第二段　任意の $n \geq N$ に対し

$$S_n(\omega) := \begin{cases} \infty & \text{if } S(\omega) \geq n, \\ \dfrac{k}{2^n} & \text{if } \dfrac{k-1}{2^n} \leq S(\omega) < \dfrac{k}{2^n} \text{ for } k = 1, \cdots, n2^n, \end{cases}$$

により停止時刻 S_n が定まる (Problem 2.24 修正版， P. 14)．同様に $(T_n)_{n\geq N}$ も構成すれば，補題より

$$\int_A X_{T_n}\, dP \geq \int_A X_{S_n \wedge T_n}\, dP, \quad (\forall A \in \mathscr{F}_{S_n},\, \forall n \geq N)$$

が成立する．また $S(\omega) < \infty$ なら $S_n(\omega) \downarrow S(\omega)$，かつ $S(\omega) = \infty$ なら $S_n(\omega) = \infty$ であるから

$$S = \inf_{n\geq N} S_n$$

が満たされ，Problem 2.23 より

$$\mathscr{F}_{S+} = \bigcap_{n\geq N} \mathscr{F}_{S_n}$$

となり

$$\int_A X_{T_n}\ dP \geq \int_A X_{S_n \wedge T_n}\ dP, \quad (\forall A \in \mathscr{F}_{S+},\ \forall n \geq N) \tag{1.17}$$

が成立する．S が停止時刻の場合は $\mathscr{F}_S \subset \mathscr{F}_{S+}$ であるから，(1.3.3) を $\mathscr{F}_S$ に置き換えて成立する．

第三段　$(S_n)_{n\geq N}, (T_n)_{n\geq N}$ は単調減少列であるから $\left(\mathscr{F}_{T_n}\right)_{n\geq N}$ と $\left(\mathscr{F}_{S_n\wedge T_n}\right)_{n\geq N}$ も単調減少列であり，$\left\{ X_{T_n}, \mathscr{F}_{T_n} \ :\ n \geq N \right\}$ 及び $\left\{ X_{S_n\wedge T_n}, \mathscr{F}_{S_n\wedge T_n} \ :\ n \geq N \right\}$ は後退劣マルチンゲールとなる．かつ

$$\lim_{n\to\infty} EX_{T_n} \geq EX_0, \quad \lim_{n\to\infty} EX_{S_n\wedge T_n} \geq EX_0$$

が満たされているから，Problem 3.11 より $\left(X_{T_n}\right)_{n\geq N}, \left(X_{S_n\wedge T_n}\right)_{n\geq N}$ は一様可積分である．また $\{X_t\}$ の右連続性より

$$X_{T_n}(\omega) \longrightarrow X_T(\omega), \quad X_{S_n\wedge T_n}(\omega) \longrightarrow X_{S\wedge T}(\omega), \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

が成り立つから，一様可積分性と平均収束の補題 (P. 188) より $X_T, X_{S\wedge T}$ の可積分性及び

$$E\left|X_T - X_{T_n}\right| \longrightarrow 0, \quad E\left|X_{S\wedge T} - X_{S_n\wedge T_n}\right| \longrightarrow 0, \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が従い

$$\int_A X_T\ dP \geq \int_A X_{S\wedge T}\ dP, \quad (\forall A \in \mathscr{F}_{S+})$$

が得られる．S が停止時刻の場合は $\mathscr{F}_{S+}$ を $\mathscr{F}_S$ に置き換えて成立する．∎

Problem 3.25

A submartingale of constant expectation, i.e., with $E(X_t) = E(X_0)$ for every $t \geq 0$, is a martingale.

証明.　任意の $0 \leq s < t$ に対し，

$$E\left(X_t \mid \mathscr{F}_s\right) - X_s \geq 0, \quad \text{a.s. } P$$

かつ

$$E\left(E\left(X_t \mid \mathscr{F}_s\right) - X_s\right) = EX_t - EX_s = EX_0 - EX_0 = 0$$

より

$$E\left(X_t \mid \mathscr{F}_s\right) - X_s = 0, \quad \text{a.s. } P$$

が従う．∎

Problem 3.26

A right-continuous process $\{ X_t, \mathscr{F}_t \ :\ 0 \leq t < \infty \}$ with $E|X_t| < \infty;\ 0 \leq t < \infty$ is a submartingale if and only if for every pair $S \leq T$ of bounded stopping times of the filtration $\{\mathscr{F}_t\}$ we have

$$E(X_T) \geq E(X_S). \tag{1.18}$$

証明.　(⇒) は任意抽出定理より従う．(⇐) を示す．任意の $0 \leq s < t$ 及び $A \in \mathscr{F}_s$ に対し，

$$T(\omega) := t, \quad S(\omega) := \begin{cases} s, & (\omega \in A), \\ t, & (\omega \in \Omega \backslash A) \end{cases}, \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

により $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻 $S \leq T$ を定めれば，(1.3.3) より

$$\int_A X_t \, dP = \int_\Omega X_T \, dP - \int_{\Omega \backslash A} X_t \, dP \geq \int_\Omega X_S \, dP - \int_{\Omega \backslash A} X_t \, dP = \int_A X_s \, dP$$

が成り立ち，$A \in \mathscr{F}_s$ の任意性より $E(X_t \mid \mathscr{F}_s) \geq X_s$ a.s. P となる． ∎

Problem 3.27

Let T be a bounded stopping time of the filtration $\{\mathscr{F}_t\}$, which satisfies the usual conditions, and define $\tilde{\mathscr{F}}_t = \mathscr{F}_{T+t}$; $t \geq 0$. Then $\{\tilde{\mathscr{F}}_t\}$ also satisfies the usual conditions.

(i) If $X = \{ X_t, \mathscr{F}_t \ : \ 0 \leq t < \infty \}$ is a right-continuous submartingale, then so is $\tilde{X} = \left\{ \tilde{X}_t := X_{T+t} - X_T, \tilde{\mathscr{F}}_t \ : \ 0 \leq t < \infty \right\}$.

(ii) $\tilde{X} = \left\{ \tilde{X}_t, \tilde{\mathscr{F}}_t \ : \ 0 \leq t < \infty \right\}$ is a right-continuous submartingale, with $\tilde{X}_0 = 0$[*8], then $X = \left\{ X_t := \tilde{X}_{(t-T)\vee 0}, \mathscr{F}_t \ : \ 0 \leq t < \infty \right\}$ is also a submartingale.

証明.

第一段　$\{\tilde{\mathscr{F}}_t\}$ が通常の条件 (usual conditions) を満たすことを示す．実際，

$$\{ N \in \mathscr{F} \ : \ P(N) = 0 \} \subset \mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}_{T+t}, \quad (\forall t \geq 0)$$

より $\{\tilde{\mathscr{F}}_t\}$ は完備であり，また任意の $t \geq 0$ に対して $T + t = \inf_{n \geq 1}(T + t + 1/n)$ より

$$\tilde{\mathscr{F}}_{t+} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{\mathscr{F}}_{t+\frac{1}{n}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{T+t+\frac{1}{n}} = \mathscr{F}_{(T+t)+}$$

となるが (Problem 2.23)，$\{\mathscr{F}_t\}$ の右連続性より

$$A \cap \{T + t \leq s\} \in \mathscr{F}_{s+}, \forall s \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad A \cap \{T + t \leq s\} \in \mathscr{F}_s, \forall s \geq 0$$

が成立するから $\mathscr{F}_{(T+t)+} = \mathscr{F}_{T+t}$ が満たされ

$$\tilde{\mathscr{F}}_{t+} = \mathscr{F}_{T+t} = \tilde{\mathscr{F}}_t$$

を得る．

(i) の証明　X の右連続性より $\tilde{X}$ は右連続である．また任意抽出定理より X_{T+t} は $\mathscr{F}_{T+t}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測かつ可積分であり

$$E\left(\tilde{X}_t \,\middle|\, \tilde{\mathscr{F}}_s\right) = E(X_{T+t} - X_T \mid \mathscr{F}_{T+s}) \geq X_{T+s} - X_T = \tilde{X}_s, \quad \text{a.s. } P, \ (0 \leq s < t)$$

が成立するから，$\tilde{X}$ は右連続劣マルチンゲールである．

---

*8　$\tilde{X}_0 = 0$ a.s. P だと $X_t = \tilde{X}_{(t-T)\vee 0}$ が $(\mathscr{F}_t)$-適合となるかわからない．

(ii) の証明　$S_1 \leq S_2$ を有界な $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻とするとき，$(S_j - T) \vee 0\ (j = 1, 2)$ は $(\tilde{\mathscr{F}}_t)$-停止時刻である．実際，

$$\{(S_j - T) \vee 0 \leq t\} \cap \{T + t \leq u\} = \{S_j \wedge u \leq (T + t) \wedge u\} \cap \{T + t \leq u\} \in \mathscr{F}_u, \quad (\forall u \geq 0)$$

より $\{(S_j - T) \vee 0 \leq t\} \in \mathscr{F}_{T+t} = \tilde{\mathscr{F}}_t\ (\forall t \geq 0)$ が成立する．$[0, \infty) \ni t \longmapsto \tilde{X}_{(t-T)\vee 0}(\omega)$ は右連続であり，また $\tilde{X}_{t-T}$ が $\tilde{\mathscr{F}}_{t-T} = \mathscr{F}_t$-可測かつ可積分であるから

$$X_t = \tilde{X}_{(t-T)\vee 0} = \tilde{X}_{t-T}\,\mathbb{1}_{\{T \leq t\}}$$

は $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測かつ可積分である．従って X は右連続可積分適合過程であり，Problem 3.26 より

$$EX_{S_1} = E\tilde{X}_{(S_1-T)\vee 0} \leq E\tilde{X}_{(S_2-T)\vee 0} = EX_{S_2}$$

が成り立つから，同じく Problem 3.26 より X の劣マルチンゲール性が出る．∎

Problem 3.28

Let $Z = \{\, Z_t, \mathscr{F}_t \ :\ 0 \leq t < \infty \,\}$ be a continuous, nonnegative martingale with $Z_\infty := \lim_{t\to\infty} Z_t = 0$, a.s. P. Then for every $s \geq 0,\ b > 0$:

(i) $\quad P\left[\sup_{t>s} Z_t \geq b \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right] = \dfrac{1}{b} Z_s, \quad$ a.s. on $\{Z_s < b\}$.

(ii) $\quad P\left[\sup_{t\geq s} Z_t \geq b\right] = P[Z_s \geq b] + \dfrac{1}{b} E[Z_s \mathbb{1}_{\{Z_s < b\}}]$.

証明.

第一段　$\inf\{\, t \in [s, \infty) \ :\ Z_t(\omega) = b \,\} = \inf\{\, t \in [0, \infty) \ :\ Z_{t+s}(\omega) = b \,\} + s$ と Problem 2.7 より

$$T(\omega) := \inf\{\, t \in [s, \infty) \ :\ Z_t(\omega) = b \,\}, \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

により $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻が定まる．このとき

$$Z_T(\omega) = b, \quad (\forall \omega \in \{T < \infty\} \cap \{Z_s < b\}) \tag{1.19}$$

と

$$T(\omega) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sup_{t>s} Z_t(\omega) \geq b, \quad (\text{a.s.}\,\omega \in \{Z_s < b\}) \tag{1.20}$$

が成立する．実際，$\omega \in \{T < \infty\} \cap \{Z_s < b\}$ に対し，$Z_T(\omega) < b$ なら

$$\sup_{s \leq t \leq T(\omega)} Z_t(\omega) < b$$

となり，$t \longmapsto Z_t(\omega)$ の連続性より $T(\omega) < T(\omega)$ が従い矛盾が生じる．逆に $Z_T(\omega) > b$ なら中間値の定理より

$$Z_t(\omega) = b, \quad s < \exists t < T(\omega)$$

となるから，$T(\omega) \leq t < T(\omega)$ という矛盾が生じ，(1.3.3) が出る．これにより，$\omega \in \{Z_s < b\}$ に対し

$$T(\omega) < \infty \quad \Rightarrow \quad b = Z_T(\omega) \leq \sup_{t>s} Z_t(\omega)$$

が成立する．一方で a.s.$\omega \in \{Z_s < b\}$ で $Z_t(\omega) \longrightarrow 0$ となるから，$0 < \epsilon < b$ に対し或る t_0 が存在して

$$Z_t(\omega) < \epsilon, \quad (\forall t > t_0)$$

が満たされる．この場合

$$\sup_{t>s} Z_t(\omega) \geq b \quad \Rightarrow \quad \sup_{t\in[s,t_0]} Z_t(\omega) \geq b$$

となるから，連続性より $Z_t(\omega) = b$ を満たす $t \in (s, t_0)$ が存在し，$T(\omega) \leq t$ が従い (1.3.3) が得られる．

第二段　(i) を示す．任意の $A \in \mathscr{F}_s$ と $n > s$ に対し，任意抽出定理と (1.3.3) より

$$\begin{aligned}\int_{A\cap\{Z_s<b\}} Z_s\, dP &= \int_{A\cap\{Z_s<b\}} Z_{T\wedge n}\, dP \\ &= \int_{A\cap\{Z_s<b\}} Z_T \mathbb{1}_{\{T\leq n\}}\, dP + \int_{A\cap\{Z_s<b\}} Z_n \mathbb{1}_{\{T>n\}}\, dP \\ &= bP\left[A\cap\{Z_s<b\}\cap\{T\leq n\}\right] + \int_{A\cap\{Z_s<b\}} Z_n \mathbb{1}_{\{T>n\}}\, dP\end{aligned}$$

が成立する．ここで

$$P\left[A\cap\{Z_s<b\}\cap\{T\leq n\}\right] \longrightarrow P\left[A\cap\{Z_s<b\}\cap\{T<\infty\}\right], \quad (n\longrightarrow\infty)$$

かつ $Z_n \mathbb{1}_{\{T>n\}\cap\{Z_s<b\}} < b,\ (\forall n > s)$ 及び

$$Z_n \mathbb{1}_{\{T>n\}} \longrightarrow Z_\infty \mathbb{1}_{\{T=\infty\}}, \quad (n\longrightarrow\infty)$$

が成り立つから，$Z_\infty = 0$ a.s. P と Lebesgue の収束定理より

$$\int_{A\cap\{Z_s<b\}} Z_s\, dP = bP\left[A\cap\{Z_s<b\}\cap\{T<\infty\}\right] = b\int_{A\cap\{Z_s<b\}} \mathbb{1}_{\{T<\infty\}}\, dP$$

が得られる．更に (1.3.3) より

$$\int_{A\cap\{Z_s<b\}} Z_s\, dP = b\int_{A\cap\{Z_s<b\}} \mathbb{1}_{\{\sup_{t>s} Z_t(\omega)\geq b\}}\, dP = b\int_{A\cap\{Z_s<b\}} P\left[\sup_{t>s} Z_t \geq b \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right] dP$$

となるから，$A \in \mathscr{F}_s$ の任意性より

$$P\left[\sup_{t>s} Z_t \geq b \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right] \mathbb{1}_{\{Z_s<b\}} = \frac{1}{b} Z_s \mathbb{1}_{\{Z_s<b\}}, \quad \text{a.s. } P$$

が出る．

第三段　(iii) を示す．$t \longmapsto Z_t(\omega)$ の連続性より

$$\sup_{t>s} Z_t(\omega) \geq b \quad \Leftrightarrow \quad \sup_{t\geq s} Z_t(\omega) \geq b, \quad (\forall\omega\in\{Z_s<b\})$$

となるから

$$\begin{aligned}P\left[\sup_{t\geq s} Z_t \geq b\right] &= P\left[\left\{\sup_{t\geq s} Z_t \geq b\right\}\cap\{Z_s\geq b\}\right] + P\left[\left\{\sup_{t\geq s} Z_t \geq b\right\}\cap\{Z_s<b\}\right] \\ &= P\left[Z_s\geq b\right] + P\left[\left\{\sup_{t>s} Z_t \geq b\right\}\cap\{Z_s<b\}\right] \\ &= P[Z_s\geq b] + \frac{1}{b}E[Z_s \mathbb{1}_{\{Z_s<b\}}]\end{aligned}$$

が成立する．　■

Problem 3.29 修正

Let $\{ X_t, \mathscr{F}_t \;:\; 0 \le t < \infty \}$ be a continuous, nonnegative supermartingale and $T = \inf \{ t \in [0,\tau] \;:\; X_t = 0 \}$ $(\inf \emptyset = \tau)$ for some $\tau > 0$. Show that

$$X_{T+t} = 0; \quad 0 \le t < \infty \quad \text{hold a.s. } \{T < \tau\}.$$

証明．(1.3.3) より

$$X_T(\omega) = 0, \quad (\forall \omega \in \{T < \tau\})$$

が満たされ，かつ $\{T < \tau\} \in \mathscr{F}_T$ であるから，任意抽出定理より

$$0 \le E\left(X_{T+t} \mathbb{1}_{\{T<\tau\}}\right) \le E\left(X_T \mathbb{1}_{\{T<\tau\}}\right) = 0, \quad 0 \le t < \infty$$

が成立し

$$X_{T+t} \mathbb{1}_{\{T<\tau\}} = 0, \quad \text{a.s. } P, \quad 0 \le t < \infty$$

となる．パスの連続性より

$$\left\{X_{T+t} \mathbb{1}_{\{T<\tau\}} = 0,\ 0 \le t < \infty\right\} = \bigcap_{r \in \mathbf{Q} \cap [0,\tau)} \left\{X_{T+r} \mathbb{1}_{\{T<\tau\}} = 0\right\}$$

が成り立ち主張が従う． ∎

Exercise 3.30

Suppose that the filtration $\{\mathscr{F}_t\}$ satisfies the usual conditions and let $X^{(n)} = \left\{ X_t^{(n)}, \mathscr{F}_t \;:\; 0 \le t < \infty \right\}$, $n \ge 1$ be an increasing sequence of right-continuous supermartingales, such that the random variable $\xi_t := \lim_{n\to\infty} X_t^{(n)}$ is nonnegative and integrable for every $0 \le t < \infty$. Then there exists an RCLL supermartingale $X = \{ X_t, \mathscr{F}_t \;:\; 0 \le t < \infty \}$ which is a modification of the process $\xi = \{ \xi_t, \mathscr{F}_t \;:\; 0 \le t < \infty \}$.

1.4 The Doob-Meyer Decomposition

martingale transform

If $A = \{ A_n, \mathscr{F}_n \;:\; n = 0, 1, \cdots \}$ is predictable with $E|A_n| < \infty$ for every n, and if $\{ M_n, \mathscr{F}_n \;:\; n = 0, 1, \cdots \}$ is bounded martingale, then the martingale transform of A by M defined by

$$Y_0 = 0 \quad \text{and} \quad Y_n = \sum_{k=1}^{n} A_k (M_k - M_{k-1}); \quad n \ge 1,$$

is itself a martingale.

証明.　$A_k(M_k - M_{k-1})$ $(k \leq n)$ は $\mathscr{F}_n/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測であるから $(Y_n)_{n=1}^{\infty}$ は $(\mathscr{F}_n)$-適合である．また

$$E|Y_n| = E\left|\sum_{k=1}^{n} A_k(M_k - M_{k-1})\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \left\{\operatorname*{ess.sup}_{\omega\in\Omega} (|M_k(\omega)| + |M_{k-1}(\omega)|)\right\} E|A_k| < \infty$$

が成り立つ．更に任意の $n \geq 0$ に対し

$$E\left(Y_{n+1} - Y_n \mid \mathscr{F}_n\right) = E\left(A_{n+1}(M_{n+1} - M_n) \mid \mathscr{F}_n\right) = A_{n+1}E\left(M_{n+1} - M_n \mid \mathscr{F}_n\right) = 0, \quad \text{a.s. } P$$

が満たされる． ∎

Doob's decomposition

Any submartingale $\{ X_n, \mathscr{F}_n \ : \ n = 0, 1, \cdots \}$ admits the unique decomposition $X_n = M_n + A_n$ as the summation of a martingale $\{M_n, \mathscr{F}_n\}$ and an predictable and increasing sequence $\{A_n, \mathscr{F}_n\}$, where

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} E\left(X_{k+1} - X_k \mid \mathscr{F}_k\right), \quad \text{a.s. } P,\ n \geq 1.$$

証明.

第一段　Doob 分解が存在するとして，分解の一意性を示す．実際，分解が存在すれば

$$A_{n+1} - A_n = E\left(A_{n+1} - A_n \mid \mathscr{F}_n\right) = E\left(X_{n+1} - X_n \mid \mathscr{F}_n\right) - E\left(M_{n+1} - M_n \mid \mathscr{F}_n\right) = E\left(X_{n+1} - X_n \mid \mathscr{F}_n\right), \quad \text{a.s. } P$$

が成立し，A_n $(n \geq 1)$ は

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} E\left(X_{k+1} - X_k \mid \mathscr{F}_k\right), \quad \text{a.s. } P$$

を満たすことになり分解の一意性が出る．

第二段　分解可能性を示す．

$$A_0 := 0, \quad A_n := \sum_{k=0}^{n-1} E\left(X_{k+1} - X_k \mid \mathscr{F}_k\right), \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

と定めれば (A_n) は可予測かつ可積分であり，

$$A_{n+1} - A_n = E\left(X_{k+1} - X_k \mid \mathscr{F}_k\right) \geq 0, \quad \text{a.s. } P\ (\forall n \geq 1)$$

より増大過程である．また $M_n := X_n - A_n$ により $(\mathscr{F}_n)$-適合かつ可積分な過程を定めれば，

$$\begin{aligned} E\left(M_{n+1} - M_n \mid \mathscr{F}_n\right) &= E\left((X_{n+1} - X_n) - (A_{n+1} - A_n) \mid \mathscr{F}_n\right) \\ &= E\left(X_{n+1} - X_n \mid \mathscr{F}_n\right) - E\left(E\left(X_{n+1} - X_n \mid \mathscr{F}_n\right) \mid \mathscr{F}_n\right) = 0, \quad \text{a.s. } P \end{aligned}$$

が成り立つから $\{M_n, \mathscr{F}_n\}$ はマルチンゲールである． ∎

Proposition 4.3 修正

An increasing random sequence A has a predictable modification if and only if it is natural.

証明.　A が可予測な修正 $\tilde{A}$ を持つとき，任意の有界マルチンゲール M に対して

$$\tilde{Y}_0 \coloneqq 0, \quad \tilde{Y}_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n} \tilde{A}_k (M_k - M_{k-1}); \quad n \geq 1$$

は $(\mathscr{F}_n)$-マルチンゲールとなる．このとき $M_n \tilde{A}_n$ と $\sum_{k=1}^{n} M_{k-1}(\tilde{A}_k - \tilde{A}_{k-1})$ は可積分であり

$$0 = E\tilde{Y}_n = E\left[M_n \tilde{A}_n - \sum_{k=1}^{n} M_{k-1}(\tilde{A}_k - \tilde{A}_{k-1}) \right] = E(M_n A_n) - E\sum_{k=1}^{n} M_{k-1}(A_k - A_{k-1}), \quad (\forall n \geq 1)$$

が成り立つから A はナチュラルである．逆に A がナチュラルであるとき，有界マルチンゲール M に対して

$$\begin{aligned} 0 &= E\left[M_n A_n - \sum_{k=1}^{n} M_{k-1}(A_k - A_{k-1}) \right] \\ &= E\left[A_n (M_n - M_{n-1}) \right] - E\left[M_{n-1} A_{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} M_{k-1}(A_k - A_{k-1}) \right] \\ &= E\left[A_n (M_n - M_{n-1}) \right], \quad (\forall n \geq 1) \end{aligned}$$

が成り立つ．一方で

$$\begin{aligned} E\left[M_{n-1}(A_n - E(A_n \mid \mathscr{F}_{n-1})) \right] &= E\left[E\left(M_{n-1}(A_n - E(A_n \mid \mathscr{F}_{n-1})) \mid \mathscr{F}_{n-1} \right) \right] \\ &= E\left[M_{n-1} E\left(A_n - E(A_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) \mid \mathscr{F}_{n-1} \right) \right] = 0, \quad (\forall n \geq 1) \end{aligned}$$

及び

$$\begin{aligned} E\left[E(A_n \mid \mathscr{F}_{n-1})(M_n - M_{n-1}) \right] &= E\left[E\left(E(A_n \mid \mathscr{F}_{n-1})(M_n - M_{n-1}) \mid \mathscr{F}_{n-1} \right) \right] \\ &= E\left[E(A_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) E(M_n - M_{n-1} \mid \mathscr{F}_{n-1}) \right] = 0, \quad (\forall n \geq 1) \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} E\left[M_n (A_n - E(A_n \mid \mathscr{F}_{n-1})) \right] &= E\left[A_n (M_n - M_{n-1}) \right] \\ &\quad + E\left[M_{n-1}(A_n - E(A_n \mid \mathscr{F}_{n-1})) \right] \\ &\quad - E\left[E(A_n \mid \mathscr{F}_{n-1})(M_n - M_{n-1}) \right] \\ &= 0, \quad (\forall n \geq 1) \end{aligned}$$

が従う．ここで各 $n \geq 1$ に対し，$\mathscr{B}(\mathbf{R})/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測関数 $\mathrm{sgn} = 1\!\!1_{(0,\infty)} - 1\!\!1_{(-\infty,0)}$ を用いて

$$M_k^{(n)} \coloneqq \begin{cases} \mathrm{sgn}\left(A_n - E(A_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) \right), & (k \geq n), \\ E\left(\mathrm{sgn}\left(A_n - E(A_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) \right) \mid \mathscr{F}_k \right), & (0 \leq k < n) \end{cases}$$

により有界マルチンゲール $M^{(n)} = \left\{ M_k^{(n)}, \mathscr{F}_k \;:\; k = 0, 1, \cdots \right\}$ を定めれば，

$$0 = E\left[M_n^{(n)} (A_n - E(A_n \mid \mathscr{F}_{n-1})) \right] = E\left| A_n - E(A_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) \right|, \quad (\forall n \geq 1)$$

が得られ

$$\tilde{A}_0 \coloneqq 0, \quad \tilde{A}_n \coloneqq E(A_n \mid \mathscr{F}_{n-1}); \quad n \geq 1$$

は A の可予測な修正となる．　■

区別不能性によるパスの同値類

区間[9] $I \subset [0,\infty)$ の上で右連続な確率過程の全体を $RCSP(I)$ と書く．また $RCSP([0,\infty))$ は $RCSP$ と書く．任意の $M = \{ M_t \ : \ t \in I \}, N = \{ N_t \ : \ t \in I \} \in RCSP(I)$ に対し，

$$\{M_t = N_t,\ \forall t \in I\} = \begin{cases} \displaystyle\bigcap_{r \in (I\cap\mathbb{Q})\cup\{\sup I\}} \{M_r = N_r\}, & (\sup I \in I), \\ \displaystyle\bigcap_{r \in I\cap\mathbb{Q}} \{M_r = N_r\}, & (\sup I \notin I) \end{cases}$$

となるから $\{M_t = N_t,\ \forall t \in I\}$ は可測であり，このとき，

$$M \sim N \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad P(M_t = N_t,\ \forall t \in I) = 1 \tag{1.21}$$

により同値関係 $\sim$ が定まる．

Definition 4.4 修正

Let $I \subset [0,\infty)$ be an interval. An adapted process $A = \{ A_t, \mathscr{F}_t \ : \ t \in I \}$ is called increasing if for all $\omega \in \Omega$ we have

(a) $A_0(\omega) = 0$

(b) $t \longmapsto A_t(\omega)$ is nondecreasing, right-continuous function,

and $E(A_t) < \infty$ holds for every $t \in I$. An increasing process is called integrable if $E(A_\infty) < \infty$, where $A_\infty = \lim_{t\to\sup I} A_t$. Since A is nondecreasing, $A_\infty = A_{(\sup I)-}$ if $\sup I \in I$.

Definition 4.5 修正

Let $I \subset [0,\infty)$ be an interval and $\alpha := \inf I$. An increasing processs $A = \{ A_t, \mathscr{F}_t \ : \ t \in I \}$ is called natural if for every bounded, $RCLL$ martingale $\{ M_t, \mathscr{F}_t \ : \ t \in I \}$ we have

$$E\int_{(\alpha,t]} M_s\, dA_s = E\int_{(\alpha,t]} M_{s-}\, dA_s, \quad \text{for every } t \in (\alpha,\infty)\cap I.$$

Let us denote the subset of $RCSP(I)$ as

$$NAT(I) := \{ A \in RCSP(I) \ : \ \text{natural} \}, \quad NAT := NAT([0,\infty))$$

and the equivalent class of $A \in NAT$ in the meaning of (1.4) as $[A]_{NAT}$ $(\subset NAT)$.

プロセスが $RCLL$ とは全てのパスが $RCLL$ であるということである．Theorem 3.8 によれば右連続な劣マルチンゲールは a.e. のパスが $RCLL$ であるから，(1.4) の意味で同値である．A も全てのパスが右連続かつ単調非減少であるから，全ての $\omega \in \Omega$ に対し $\int_{(0,t]} M_s(\omega)\, dA_s(\omega)$ と $\int_{(0,t]} M_{s-}(\omega)\, dA_s(\omega)$ が定義される．たぶん余計な煩雑さを回避できる．

[9] この場合区間は $[a,b], (a,b), [a,b), (a,b], [a,\infty), (a,\infty)$, $(0 \le a < b < \infty)$ のいずれかと考える．

RCLL なパスの不連続点は高々可算個

(S,d) を距離空間とする．写像 $f:[0,\infty)\longrightarrow S$ について各点 $t\in[0,\infty)$ で右連続かつ各点 $t\in(0,\infty)$ で左極限が存在するとき，f の不連続点は存在しても高々可算個である．

証明. 各点 $t>0$ における f の左極限を $f(t-)$ と書けば

$$f \text{ が } t\in(0,\infty) \text{ で不連続} \quad\Leftrightarrow\quad d(f(t),f(t-))>0$$

が成立するから，任意に $T>0$ を選び固定して

$$D(n):=\left\{t\in(0,T] \;:\; \frac{1}{n+1}\leq d(f(t),f(t-))<\frac{1}{n}\right\},\quad E(n):=\{\,t\in(0,T] \;:\; n\leq d(f(t),f(t-))<n+1\,\}$$

とおけば

$$D_T:=\{\,t\in(0,T] \;:\; f \text{ が } t\in(0,\infty) \text{ で不連続}\,\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}D(n)\cup E(n)$$

となる．このとき $D(n),E(n)$ は全て有限集合である．実際，或る n に対し $D(n)$ が無限集合なら

$$\{t_k\}_{k=1}^{\infty}\subset D(n),\quad t_k\neq t_j\ (k\neq j)$$

を満たす可算集合が存在し，$[0,T]$ のコンパクト性より或る部分列 $\left(t_{k_m}\right)_{m=1}^{\infty}$ は或る $y\in[0,T]$ に収束する．$y=0$ の場合，右連続の仮定より $1/2(n+1)>\epsilon>0$ に対し或る $\delta>0$ が存在して

$$d(f(0),f(t))<\epsilon,\quad (\forall 0<t<\delta)$$

が成り立つが，一方で $0<t_{k_m}<\delta$ を満たす t_{k_m} が存在して

$$\frac{1}{n+1}-\epsilon<d(f(t_{k_m}),f(t_{k_m}-))-d(f(0),f(t_{k_m}-))\leq d(f(0),f(t_{k_m}))<\epsilon$$

となり矛盾が生じる．$y>0$ の場合も，$1/2(n+1)>\epsilon>0$ に対し或る $\delta>0$ が存在して

$$d(f(y-),f(t))<\epsilon,\quad (\forall t\in(y-\delta,y))$$

となるが，f が y で右連続であるから (或は $y=T$ のとき) $y-\delta<t_{k_m}\leq y$ を満たす t_{k_m} が存在して

$$\frac{1}{n+1}-\epsilon<d(f(t_{k_m}-),f(t_{k_m}))-d(f(t_{k_m}-),f(y-))\leq d(f(y-),f(t_{k_m}))<\epsilon$$

が従い矛盾が生じる．よって任意の $n\geq 1$ に対して $D(n)$ は有限集合であり，同様に $E(n)$ も有限集合であるから D_T は高々可算集合である．f の不連続点の全体は $\bigcup_{T=1}^{\infty}D_T$ に一致するから高々可算個である． ∎

Remarks 4.6 (i) 修正

If A is an increasing and X a measurable process, then with $\omega\in\Omega$ fixed, the sample path $\{\,X_t(\omega) \;:\; 0\leq t<\infty\,\}$ is a measurable function from $[0,\infty)$ into $\mathbf{R}$. It follows that the Lebesgue-Stieltjes integrals

$$I_t^{\pm}(\omega):=\int_{(0,t]}X_s^{\pm}(\omega)\,dA_s(\omega)$$

are well defined. If X is bounded, right-continuous and adapted to the filtration $(\mathscr{F}_t)$, then I is finite, right-continuous and $(\mathscr{F}_t)$-progressively measurable.

証明.　X が $\mathscr{B}([0,\infty))\otimes\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測なら，補題 A.8.1 (P. 156) より $[0,\infty)\ni t\longmapsto X_t(\omega)$ は $\mathscr{B}([0,\infty))/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測である．また全ての $\omega\in\Omega$ に対し $t\longmapsto A_t(\omega)$ は右連続非減少であるから

$$\mu_\omega((a,b]) = A_b(\omega) - A_a(\omega), \quad (\forall (a,b]\subset[0,\infty)), \quad \mu_\omega(\{0\}) = 0$$

を満たす $([0,\infty),\mathscr{B}([0,\infty)))$ 上の σ-有限測度が唯一つ存在して

$$I_t^{\pm}(\omega) = \int_{(0,t]} X_s^{\pm}(\omega)\,dA_s(\omega) := \int_{(0,t]} X_s^{\pm}(\omega)\,\mu_\omega(ds), \quad (0<t<\infty)$$

及び $I_t := I_t^+ - I_t^-$ が定義される．特に $\sup_{s\in(0,t]}|X_s^{\pm}|\leq B<\infty$ なら

$$\left|I_t^{\pm}\right| \leq BA_t$$

となるから $I_t^{\pm}$ は有限確定する．X が有界かつ右連続 $(\mathscr{F}_t)$-適合であるとき，$t>0$ を固定し $t_j^{(n)} := tj/2^n$ として

$$X_s^{(n)\pm} := X_0 1\!\!1_{\{0\}}(s) + \sum_{j=0}^{2^n-1} X_{t_{j+1}^{(n)}} 1\!\!1_{\left(t_j^{(n)},t_{j+1}^{(n)}\right]}(s)$$

とおけば右連続性より $X_s^{(n)\pm}\longrightarrow X_s^{\pm}$, $(\forall s\in[0,t])$ が成立し，かつ

$$I_t^{(n)\pm} := \int_{(0,t]} X_s^{(n)\pm}\,dA_s = \sum_{j=0}^{2^n-1} X_{t_{j+1}^{(n)}}\left(A_{t_j^{(n)}} - A_{t_{j+1}^{(n)}}\right)$$

となり $I_t^{(n)\pm}$ の $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測性が得られる．$X$ が有界であるから Lebesgue の収束定理より

$$I_t^{\pm} = \lim_{n\to\infty}\int_{(0,t]} X_s^{(n)\pm}\,dA_s = \lim_{n\to\infty} I_t^{(n)\pm}$$

が成り立ち，定理 A.5.3 より $I_t^{\pm}$ の $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測性が従う．また $t<T$ 及び $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(t,T]$, $t_n\downarrow t$ に対して，Lebesgue の収束定理より

$$\lim_{n\to\infty} I_{t_n}^{\pm} = \lim_{n\to\infty}\int_{(0,T]} 1\!\!1_{(0,t_n]}(s)X_s^{\pm}\,dA_s = \int_{(0,T]} 1\!\!1_{(0,t]}(s)X_s^{\pm}\,dA_s = I_t^{\pm}$$

が成立し $t\longmapsto I_t(\omega)$ の右連続性が出る．I は右連続 $(\mathscr{F}_t)$-適合過程であるから $(\mathscr{F}_t)$-発展的可測である．∎

Remark 4.6 (ii) 修正

Every continuous, increasing process is natural. Indeed then, for every $\omega\in\Omega$ we have

$$\int_{(0,t]} (M_s(\omega) - M_{s-}(\omega))\,dA_s(\omega) = 0 \quad \text{for every } 0<t<\infty,$$

because every path $\{\, M_s(\omega) \;:\; 0\leq s<\infty \,\}$ has only countably many discontinuities (Theorem 3.8(v)).

証明.　$RCLL$ なパスの不連続点は高々可算個であり，連続な A で作る測度に対し一点集合は零集合となる．∎

Lemma 4.7 修正

If A is an increasing process and $\{\, M_t,\mathscr{F}_t \;:\; 0\leq t<\infty \,\}$ is a bounded, $RCLL$ martingale, then

$$E(M_tA_t) = E\int_{(0,t]} M_s\,dA_s, \quad (\forall t>0). \tag{1.22}$$

証明.　$t_j^{(n)} := jt/2^n$, $(j = 0, 1, \cdots, 2^n)$ として

$$M_s^{(n)} := \sum_{j=1}^{2^n} \mathbb{1}_{\left(t_{j-1}^{(n)}, t_j^{(n)}\right]}(s) M_{t_j^{(n)}}, \quad (\forall s \in (0, t])$$

とおけば，M のパスの右連続性より任意の $s \in (0, t]$ で $\lim_{n\to\infty} M_s^{(n)} = M_s$ となる．また

$$E\left[A_{t_{j-1}^{(n)}}\left(M_{t_j^{(n)}} - M_{t_{j-1}^{(n)}}\right)\right] = E\left[A_{t_{j-1}^{(n)}} E\left(M_{t_j^{(n)}} - M_{t_{j-1}^{(n)}} \,\middle|\, \mathscr{F}_{t_{j-1}}\right)\right] = 0, \quad (j = 1, \cdots, 2^n)$$

が満たされるから任意の $n \geq 1$ で

$$\begin{aligned} E\int_{(0,t]} M_s^{(n)}\, dA_s &= E\sum_{j=1}^{2^n} M_{t_j^{(n)}}\left(A_{t_j^{(n)}} - A_{t_{j-1}^{(n)}}\right) \\ &= E(M_t A_t) - \sum_{j=1}^{2^n} E\left[A_{t_{j-1}^{(n)}}\left(M_{t_j^{(n)}} - M_{t_{j-1}^{(n)}}\right)\right] \\ &= E(M_t A_t) \end{aligned}$$

が成立する．仮定より $\sup_{s\geq 0}|M_s| \leq b < \infty$ を満たす b が存在して

$$\left|\int_{(0,t]} M_s^{(n)}\, dA_s\right| \leq b(A_t - A_0) = bA_t, \quad (\forall n \geq 1)$$

となり，A_t の可積分性と Lebesgue の収束定理より

$$\lim_{n\to\infty} E\int_{(0,t]} M_s^{(n)}\, dA_s = E\lim_{n\to\infty}\int_{(0,t]} M_s^{(n)}\, dA_s = E\int_{(0,t]} M_s\, dA_s$$

が従い (1.4) を得る． ∎

Definition 4.8 修正

Let us consider the class $\mathscr{S}(\mathscr{S}_a)$ such as

$$\mathscr{S} := \{\, T : \text{stopping time of } (\mathscr{F}_t) \;:\; T < \infty \,\}, \quad \mathscr{S}_a := \{\, T : \text{stopping time of } (\mathscr{F}_t) \;:\; T \leq a \,\}, \ (a > 0).$$

The right-continuous process $\{\, X_t, \mathscr{F}_t \;:\; 0 \leq t < \infty \,\}$ is said to be of class D, if the family $\{X_T\}_{T\in\mathscr{S}}$ is uniformly integrable; of class DL, if the family $\{X_T\}_{T\in\mathscr{S}_a}$ is uniformly integrable, for every $0 < a < \infty$.

$T \in \mathscr{S}$(resp. $\mathscr{S}_a$), then $T(\omega) < \infty$ (resp. $\leq a$) for all $\omega \in \Omega$, not P-a.s. ω.

Problem 4.9 修正

$X = \{ X_t, \mathscr{F}_t \ : \ 0 \leq t < \infty \}$ is a right-continuous submartingale. Show that under any one of the following conditions, X is of class DL.

(a) $X_t \geq 0$ a.s. for every $t \geq 0$.

(b) X has the special form

$$X_t = M_t + A_t, \quad 0 \leq t < \infty$$

suggested by the Doob-Meyer decomposition, where $\{ M_t, \mathscr{F}_t \ : \ 0 \leq t < \infty \}$ is a martingale and $\{ A_t, \mathscr{F}_t \ : \ 0 \leq t < \infty \}$ is an increasing process.

Show also that if $\mathscr{F}_0$ contains all the P-negligible events in $\mathscr{F}$ and X is a uniformly integrable martingale, then it is of class D.

証明.

(a) 任意の $T \in \mathscr{S}_a$ に対して X_T は $\mathscr{F}_T/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測であるから (Proposition 2.18 修正)，任意抽出定理より

$$\int_{\{X_T > \lambda\}} X_T \, dP \leq \int_{\{X_T > \lambda\}} X_a \, dP, \quad (\forall \lambda > 0)$$

及び

$$P(X_T > \lambda) \leq \frac{EX_T}{\lambda} \leq \frac{EX_a}{\lambda}, \quad (\forall \lambda > 0)$$

が成立する．X_a が可積分であるから

$$\sup_{T \in \mathscr{S}_a} \int_{\{X_T > \lambda\}} X_T \, dP \longrightarrow 0 \quad (\lambda \longrightarrow \infty)$$

となり，$(X_T)_{T \in \mathscr{S}_a}$ の一様可積分性が得られる．

(b) $a > 0$ とすれば，任意抽出定理より

$$M_T = E(M_a \mid \mathscr{F}_T), \text{ a.s. } P, \quad (\forall T \in \mathscr{S}_a)$$

が成り立つから，定理 A.14.3 (P. 188) より $(M_T)_{T \in \mathscr{S}_a}$ は一様可積分である．このとき

$$\begin{aligned} \int_{\{|X_T| > \lambda\}} |X_T| \, dP &\leq 2 \int_{\{|M_T| > \lambda/2\}} |M_T| \, dP + 2 \int_{\{|A_T| > \lambda/2\}} |A_T| \, dP \\ &\leq 2 \sup_{T \in \mathscr{S}_a} \int_{\{|M_T| > \lambda/2\}} |M_T| \, dP + 2 \int_{\{A_a > \lambda/2\}} A_a \, dP \\ &\longrightarrow 0 \quad (\lambda \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

が従い $(X_T)_{T \in \mathscr{S}_a}$ の一様可積分性が出る．

X が一様可積分なマルチンゲールであるとき，Problem 3.20 より

$$X_t = E(X_\infty \mid \mathscr{F}_t), \text{ a.s. } P, \quad (\forall t \geq 0)$$

を満たす $\mathscr{F}_\infty/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測可積分関数 X_∞ が存在し，任意抽出定理より

$$X_T = E(X_\infty \mid \mathscr{F}_T), \text{ a.s. } P, \quad (\forall T \in \mathscr{S})$$

が成り立つから X はクラス DL に属する. ∎

Problem 4.11 修正

Let $(X,\mathscr{F},\mu)$ be a measure space and $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a sequence of integrable complex functions on $(X,\mathscr{F},\mu)$ which converges weakly in L^1 to an integrable complex function f. Then for each σ-field $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ where $(X,\mathscr{G},\mu|_{\mathscr{G}})$ is σ-finite, the sequence $E(f_n \,|\, \mathscr{G})$ converges to $E(f \,|\, \mathscr{G})$ weakly in L^1.

証明. $\nu := \mu|_{\mathscr{G}}$ とおく. 定理 A.12.4 より任意の $g \in L^{\infty}(\mu)$ と $F \in L^1(\mu)$ に対して

$$\begin{aligned}\int_X gE(F \,|\, \mathscr{G})\ d\mu &= \int_X E(gE(F \,|\, \mathscr{G}) \,|\, \mathscr{G})\ d\nu \\ &= \int_X E(g \,|\, \mathscr{G})\, E(F \,|\, \mathscr{G})\ d\nu \\ &= \int_X E(E(g \,|\, \mathscr{G})\, F \,|\, \mathscr{G})\ d\nu \\ &= \int_X E(g \,|\, \mathscr{G})\, F\ d\mu\end{aligned}$$

と $\| E(g \,|\, \mathscr{G}) \|_{L^{\infty}(\nu)} \leq \| g \|_{L^{\infty}(\mu)}$ が成り立ち

$$\lim_{n\to\infty} \int_X gE(f_n \,|\, \mathscr{G})\ d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X E(g \,|\, \mathscr{G})\, f_n\ d\mu = \int_X E(g \,|\, \mathscr{G})\, f\ d\mu = \int_X gE(f \,|\, \mathscr{G})\ d\mu$$

となるから $E(f_n \,|\, \mathscr{G})$ は $E(f \,|\, \mathscr{G})$ に $L^1(\mu)$ で弱収束する. ∎

Lemma for theorem 4.10

Let $I \subset [0,\infty)$ be an interval and $\{\, M_t, \mathscr{F}_t \ : \ t \in I \,\}$ be a right-continuous martingale, where the filtration $(\mathscr{F}_t)_{t\in I}$ is usual. If M is a difference of two natural processes $\{\, A_t, \mathscr{F}_t \ : \ t \in I \,\}$ and $\{\, B_t, \mathscr{F}_t \ : \ t \in I \,\}$, namely

$$M_t = A_t - B_t; \quad \forall t \in I,$$

then $P\{\, M_t = 0 \ : \ \forall t \in I \,\} = 1$.

証明. $a_0 := \inf I$ として任意に $a \in I \cap (a_0,\infty)$ を取り,

$$t_j^{(n)} := a_0 + \frac{j}{2^n}(a - a_0), \quad (j = 0, 1, \cdots, 2^n)$$

とおく. 任意の有界かつ $RCLL$ なマルチンゲール $\xi = \{\, \xi_t, \mathscr{F}_t \ : \ t \in I \,\}$ に対し

$$\xi_t^{(n)} := \sum_{j=1}^{2^n} \mathbb{1}_{\left(t_{j-1}^{(n)}, t_j^{(n)}\right]}(t)\, \xi_{t_{j-1}^{(n)}}, \quad (\forall t \in (a_0, a])$$

とおけば, 任意の $\omega \in \Omega$ と $t \in (a_0, a]$ で

$$\lim_{n\to\infty} \xi_t^{(n)}(\omega) = \xi_{t-}(\omega)$$

が満たされるから Lebesgue の収束定理より

$$\lim_{n\to\infty}\int_{(a_0,a]}\xi_t^{(n)}(\omega)\,dA_t(\omega)=\int_{(a_0,a]}\xi_{t-}(\omega)\,dA_t(\omega),$$
$$\lim_{n\to\infty}\int_{(a_0,a]}\xi_t^{(n)}(\omega)\,dB_t(\omega)=\int_{(a_0,a]}\xi_{t-}(\omega)\,dB_t(\omega)$$

が成立する．また A_a, B_a の可積性と ξ の有界性により，再び Lebesgue の収束定理を適用すれば

$$\begin{aligned}E\left[\xi_a\left(A_a-B_a\right)\right]&=E\left[\xi_a A_a\right]-E\left[\xi_a B_a\right]=E\int_{(a_0,a]}\xi_{t-}\,dA_t-E\int_{(a_0,a]}\xi_{t-}\,dB_t\\&=E\left[\lim_{n\to\infty}\int_{(a_0,a]}\xi_t^{(n)}\,dA_t\right]-E\left[\lim_{n\to\infty}\int_{(a_0,a]}\xi_t^{(n)}\,dB_t\right]\\&=\lim_{n\to\infty}E\left[\sum_{j=1}^{2^n}\xi_{t_{j-1}^{(n)}}\left(A_{t_j^{(n)}}-A_{t_{j-1}^{(n)}}\right)\right]-\lim_{n\to\infty}E\left[\sum_{j=1}^{2^n}\xi_{t_{j-1}^{(n)}}\left(B_{t_j^{(n)}}-B_{t_{j-1}^{(n)}}\right)\right]\\&=\lim_{n\to\infty}E\left[\sum_{j=1}^{2^n}\xi_{t_{j-1}^{(n)}}\left(M_{t_j^{(n)}}-M_{t_{j-1}^{(n)}}\right)\right]\end{aligned}$$

が従い，このとき右辺は M のマルチンゲール性より

$$E\xi_{t_{j-1}^{(n)}}\left(M_{t_j^{(n)}}-M_{t_{j-1}^{(n)}}\right)=E\left[E\left(\xi_{t_{j-1}^{(n)}}\left(M_{t_j^{(n)}}-M_{t_{j-1}^{(n)}}\right)\middle|\mathscr{F}_{t_{j-1}^{(n)}}\right)\right]=E\left[\xi_{t_{j-1}^{(n)}}E\left(M_{t_j^{(n)}}-M_{t_{j-1}^{(n)}}\middle|\mathscr{F}_{t_{j-1}^{(n)}}\right)\right]=0$$

となるから

$$E\left[\xi_a\left(A_a-B_a\right)\right]=0$$

が得られる．ξ を有界マルチンゲール $\{\,E\left(\mathrm{sgn}\left(A_a-B_a\right)\,|\,\mathscr{F}_t\right),\mathscr{F}_t\ :\ t\in I\,\}$ の $RCLL$ な修正とすれば (usual 条件より Theorem 3.13 を適用)

$$0=E\left[\xi_a\left(A_a-B_a\right)\right]=E\left[\mathrm{sgn}\left(A_a-B_a\right)\left(A_a-B_a\right)\right]=E\left|A_a-B_a\right|$$

が成り立ち，$a>0$ の任意性及び A, B のパスの右連続性より

$$P\left[\{\,A_t=B_t\ :\ t\in I\,\}\right]=\begin{cases}P\left(\bigcap_{r\in(I\cap\mathbf{Q})\cup\{\sup I\}}\{A_r=B_r\}\right)=1, & (\sup I\in I),\\ P\left(\bigcap_{r\in I\cap\mathbf{Q}}\{A_r=B_r\}\right)=1, & (\sup I\notin I)\end{cases}$$

が出る． ∎

Theorem 4.10 (Doob-Meyer Decomposition) 修正

Let $\{\mathscr{F}_t\}$ satisfy the usual conditions. If the right-continuous submartingale $X=\{\,X_t,\mathscr{F}_t\ :\ 0\le t<\infty\,\}$ is of class DL, then there exists a unique $[A]_{NAT}$ where $X-A'$ is right-continuous martingale for every $A'\in[A]_{NAT}$. Further, if X is of class D, then M is a uniformly integrable martingale and A is integrable.

証明.

第一段　$[A]_{NAT}$ の一意性を示す．二つの右連続マルチンゲール M, M' とナチュラルな A, A' により

$$X_t = M_t + A_t = M'_t + A'_t, \quad \forall t \geq 0$$

と書けるとき，

$$B = \left\{ B_t := A_t - A'_t = M'_t - M_t, \mathscr{F}_t \quad : \quad 0 \leq t < \infty \right\}$$

は Lemma の仮定を満たすマルチンゲールとなるから $[A]_{NAT} = [A']_{NAT}$ が従う．

第二段　任意の区間 $[0, a]$ 上で分解の存在を示せば $[0, \infty)$ での分解が得られる．実際任意の $n \geq 1$ に対し

$$X_t = M_t^n + A_t^n, \quad (t \in [0, n])$$

と分解されるなら，$m > n$ に対して

$$M_t^n + A_t^n = X_t = M_t^m + A_t^m, \quad (t \in [0, n])$$

となり，Lemma より或る P-零集合 $E_{n,m}$ が存在して，任意の $\omega \in \Omega \backslash E_{n,m}$ で

$$A_t^n(\omega) = A_t^m(\omega), \quad (\forall t \in [0, n])$$

が成立し，かつ $[0, n) \ni t \longmapsto A_t^n(\omega)$ が右連続非減少となる．ここで

$$E := \bigcup_{\substack{n,m \in \mathbf{N} \\ n < m}} E_{n,m}$$

により P-零集合を定めれば，任意の $\omega \in \Omega \backslash E$ 及び $t \geq 0$ に対して

$$A_t^n(\omega) = A_t^m(\omega), \quad (\forall m > n > t)$$

となり $\lim_{n \to \infty} A_t^n(\omega)$ が確定する．usual 条件より $E \in \mathscr{F}_0$ だから $A_t^n 1\!\!1_{\Omega \backslash E}$ $(n > t)$ は $\mathscr{F}_t / \mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測であり，

$$A_t := \lim_{n \to \infty} A_t^n 1\!\!1_{\Omega \backslash E}, \quad (\forall t \geq 0)$$

で A_t を定めれば A_t は $\mathscr{F}_t / \mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測となる．また任意の $n \geq 1$ で

$$A_t = A_t^n 1\!\!1_{\Omega \backslash E}, \quad (\forall t \in [0, n))$$

が成り立つから A_t は可積分であり，$[0, \infty) \ni t \longmapsto A_t(\omega)$ は右連続かつ非減少である．$\{ \xi_t, \mathscr{F}_t \quad : \quad 0 \leq t < \infty \}$ を有界 $RCLL$ マルチンゲールとすれば任意の $t > 0$ で

$$E \int_{(0,t]} \xi_s \, dA_s = E \int_{(0,t]} \xi_s \, dA_s^n = E \int_{(0,t]} \xi_{s-} \, dA_s^n = E \int_{(0,t]} \xi_{s-} \, dA_s, \quad (t < n)$$

が成立する．

$$M := X - A$$

とおけば $(M_t)_{t \geq 0}$ は $(\mathscr{F}_t)$-適合かつ可積分であり，任意の $0 \leq s < t$ 及び $t < n$ に対して

$$M_t = X_t - A_t^n 1\!\!1_{\Omega \backslash E} = M_t^n, \quad M_s = X_s - A_s^n 1\!\!1_{\Omega \backslash E} = M_s^n, \quad \text{a.s. } P$$

となるから $E\,(M_t \mid \mathscr{F}_s) = M_s$ a.s. P が満たされる．次段以降で $[0, a]$ 上で分解の存在を示す．

第三段　$\{ Z_t, \mathscr{F}_t \ : \ 0 \le t < \infty \}$ を $\{ E(X_a \mid \mathscr{F}_t), \mathscr{F}_t \ : \ 0 \le t < \infty \}$ の右連続な修正として (Theorem 3.13),

$$Y_t \coloneqq X_t - Z_t, \quad (t \in [0,a])$$

により非正値の劣マルチンゲール $\{ Y_t, \mathscr{F}_t \ : \ 0 \le t \le a \}$ を定め

$$\left\{ Y_{t_j^{(n)}}, \mathscr{F}_{t_j^{(n)}} \ : \ t_j^{(n)} = \frac{j}{2^n} a,\ j = 0,1,\cdots,2^n \right\}, \quad n = 1,2,\cdots,$$

で離散化すれば，離散時の Doob 分解 (P. 39) より

$$\begin{aligned} A_0^{(n)} &\coloneqq 0, \quad A_{t_j^{(n)}}^{(n)} \coloneqq \sum_{k=0}^{j-1} E\left(Y_{t_{k+1}^{(n)}} - Y_{t_k^{(n)}} \,\middle|\, \mathscr{F}_{t_k^{(n)}} \right); \\ M_{t_j^{(n)}}^{(n)} &\coloneqq Y_{t_j^{(n)}} - A_{t_j^{(n)}}^{(n)} \end{aligned}$$

により可予測な増大過程 $A^{(n)}$ とマルチンゲール $M^{(n)}$ に分解され，$Y_a = 0$ a.s. P であるから

$$Y_{t_j^{(n)}} = A_{t_j^{(n)}}^{(n)} + M_{t_j^{(n)}}^{(n)} = A_{t_j^{(n)}}^{(n)} + E\left(M_a^{(n)} \,\middle|\, \mathscr{F}_{t_j^{(n)}} \right) = A_{t_j^{(n)}}^{(n)} - E\left(A_a^{(n)} \,\middle|\, \mathscr{F}_{t_j^{(n)}} \right), \quad \text{a.s. } P, \quad j = 0,1,\cdots,2^n$$

となる．

第四段　$(Y_T)_{T \in \mathscr{S}_a}$ が一様可積分であることを示す．先ず任意の $T \in \mathscr{S}_a$ に対し

$$Z_T = E(X_a \mid \mathscr{F}_T), \quad \text{a.s. } P \tag{1.23}$$

が成立する．実際，任意抽出定理より

$$\int_A Z_T \ dP = \int_A Z_a \ dP = \int_A X_a \ dP = \int_A E(X_a \mid \mathscr{F}_T) \ dP, \quad (\forall A \in \mathscr{F}_T)$$

が従い (1.4) が得られる．$(E(X_a \mid \mathscr{F}_T))_{T \in \mathscr{S}_a}$ は定理 A.14.3 より一様可積分であるから $(Z_T)_{T \in \mathscr{S}_a}$ も一様可積分であり，また X がクラス DL に属しているので $(Y_T)_{T \in \mathscr{S}_a}$ の一様可積分性が従う．

第五段　$\left(A_a^{(n)} \right)_{n=1}^{\infty}$ が一様可積分であることを示す．任意に $\lambda > 0$ を取り

$$T_\lambda^{(n)} \coloneqq a \wedge \min \left\{ t_{j-1}^{(n)} \ : \ A_{t_j^{(n)}}^{(n)} > \lambda \text{ for some } j,\ 1 \le j \le 2^n \right\}$$

とおけば，$A^{(n)}$ の可予測性より任意の $t \ge 0$ で

$$\left\{ T_\lambda^{(n)} \le t \right\} = \bigcup_{j : t_{j-1}^{(n)} \le t} \left\{ T_\lambda^{(n)} = t_{j-1}^{(n)} \right\} = \bigcup_{j : t_{j-1}^{(n)} \le t} \left[\bigcap_{k=1}^{j-1} \left\{ A_{t_k^{(n)}}^{(n)} \le \lambda \right\} \right] \cap \left\{ A_{t_j^{(n)}}^{(n)} > \lambda \right\} \in \mathscr{F}_t$$

が成り立つから $T_\lambda^{(n)} \in \mathscr{S}_a$ が満たされ，また

$$\mu < \lambda \quad \Longrightarrow \quad \left\{ T_\lambda^{(n)} < a \right\} \subset \left\{ T_\mu^{(n)} < a \right\} \tag{1.24}$$

及び

$$T_\lambda^{(n)}(\omega) < a \quad \Longrightarrow \quad A_{T_\lambda^{(n)}}^{(n)}(\omega) \le \lambda \tag{1.25}$$

も満たされる．

$$N \coloneqq \bigcup_{k=1}^{2^n} \left\{ E\left(Y_{t_k^{(n)}} - Y_{t_{k-1}^{(n)}} \,\middle|\, \mathscr{F}_{t_{k-1}^{(n)}} \right) < 0 \right\}$$

により P-零集合を定めれば，$\Omega \backslash N$ の上で $A_0^{(n)} \leq A_{t_1^{(n)}}^{(n)} \leq \cdots \leq A_a^{(n)}$ となるから

$$\left\{T_\lambda^{(n)} < a\right\} \cap (\Omega \backslash N) = \left\{A_a^{(n)} > \lambda\right\} \cap (\Omega \backslash N) \tag{1.26}$$

が従う．任意に $\Lambda \in \mathscr{F}_{T_\lambda^{(n)}}$ を取れば，$\Lambda \cap \left\{T_\lambda^{(n)} = t_{j-1}^{(n)}\right\} \in \mathscr{F}_{t_{j-1}^{(n)}},\ (j = 1, \cdots, 2^n)$ より

$$\begin{aligned}
\int_\Lambda Y_{T_\lambda^{(n)}}\, dP = \sum_{j=1}^{2^n} \int_{\Lambda \cap \left\{T_\lambda^{(n)} = t_{j-1}^{(n)}\right\}} Y_{t_{j-1}^{(n)}}\, dP &= \sum_{j=1}^{2^n} \int_{\Lambda \cap \left\{T_\lambda^{(n)} = t_{j-1}^{(n)}\right\}} A_{t_{j-1}^{(n)}}^{(n)} - E\left(A_a^{(n)} \middle| \mathscr{F}_{t_{j-1}^{(n)}}\right) dP \\
&= \sum_{j=1}^{2^n} \int_{\Lambda \cap \left\{T_\lambda^{(n)} = t_{j-1}^{(n)}\right\}} A_{T_\lambda^{(n)}}^{(n)} - A_a^{(n)}\, dP \\
&= \int_\Lambda A_{T_\lambda^{(n)}}^{(n)} - A_a^{(n)}\, dP
\end{aligned} \tag{1.27}$$

が成立するから，(1.4) と (1.4) と併せて

$$\int_{\left\{A_a^{(n)} > \lambda\right\}} A_a^{(n)}\, dP = \int_{\left\{T_\lambda^{(n)} < a\right\}} A_{T_\lambda^{(n)}}^{(n)}\, dP - \int_{\left\{T_\lambda^{(n)} < a\right\}} Y_{T_\lambda^{(n)}}\, dP \leq \lambda P\left(T_\lambda^{(n)} < a\right) - \int_{\left\{T_\lambda^{(n)} < a\right\}} Y_{T_\lambda^{(n)}}\, dP$$

となる．一方で (1.4)，(1.4)，(1.4)，(1.4) より

$$\begin{aligned}
\int_{\left\{T_{\lambda/2}^{(n)} < a\right\}} Y_{T_{\lambda/2}^{(n)}}\, dP &= \int_{\left\{T_{\lambda/2}^{(n)} < a\right\}} A_{T_{\lambda/2}^{(n)}}^{(n)} - A_a^{(n)}\, dP \\
&\leq \int_{\left\{T_\lambda^{(n)} < a\right\}} A_{T_{\lambda/2}^{(n)}}^{(n)} - A_a^{(n)}\, dP \\
&\leq -\frac{\lambda}{2} P\left(T_\lambda^{(n)} < a\right)
\end{aligned}$$

が成立するから

$$\int_{\left\{A_a^{(n)} > \lambda\right\}} A_a^{(n)}\, dP \leq -2 \int_{\left\{T_{\lambda/2}^{(n)} < a\right\}} Y_{T_{\lambda/2}^{(n)}}\, dP - \int_{\left\{T_\lambda^{(n)} < a\right\}} Y_{T_\lambda^{(n)}}\, dP$$

となる．ここで

$$P\left(T_\lambda^{(n)} < a\right) = P\left(A_a^{(n)} > \lambda\right) \leq \frac{EA_a^{(n)}}{\lambda} = \frac{-EM_a^{(n)}}{\lambda} = \frac{-EM_0^{(n)}}{\lambda} = \frac{-EY_0}{\lambda}$$

より $P\left(T_\lambda^{(n)} < a\right)$ は λ のみに依存して 0 に収束し，定理 A.14.1 と $(Y_T)_{T \in \mathscr{S}_a}$ の一様可積分性により

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \int_{\left\{A_a^{(n)} > \lambda\right\}} A_a^{(n)}\, dP \leq 2 \sup_{n \in \mathbf{N}} \int_{\left\{T_{\lambda/2}^{(n)} < a\right\}} \left|Y_{T_{\lambda/2}^{(n)}}\right| dP + \sup_{n \in \mathbf{N}} \int_{\left\{T_\lambda^{(n)} < a\right\}} \left|Y_{T_\lambda^{(n)}}\right| dP \longrightarrow 0 \quad (\lambda \longrightarrow \infty)$$

が従い $\left(A_a^{(n)}\right)_{n=1}^\infty$ が一様可積分性が出る．

第六段　Dunford-Pettis の定理より $\left(A_a^{(n)}\right)_{n=1}^\infty$ の或る部分列 $\left(A_a^{(n_k)}\right)_{k=1}^\infty$ は $L^1(P)$ で弱収束する．つまり或る $A_a \in L^1(P)$ が存在して任意の $\xi \in L^\infty(P)$ に対し

$$E\left(\xi A_a^{(n_k)}\right) \longrightarrow E(\xi A_a) \quad (k \longrightarrow \infty)$$

が成立する．

$$\Pi_n \coloneqq \left\{ t_j^{(n)} \ : \ t_j^{(n)} = \frac{j}{2^n}a,\ j = 0, 1, \cdots, 2^n \right\}, \quad \Pi \coloneqq \bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi_n$$

とすれば，任意の $t \in \Pi$ に対し或る $K \geq 1$ が存在して $t \in \Pi_{n_k}$ $(\forall k > K)$ となり，Problem 4.11 より

$$E\left(\xi A_t^{(n_k)}\right) = E\xi \left\{ Y_t + E\left(A_a^{(n_k)} \middle| \mathscr{F}_t \right) \right\} \longrightarrow E\xi \left\{ Y_t + E\left(A_a \mid \mathscr{F}_t\right) \right\} \quad (k > K,\ k \longrightarrow \infty) \tag{1.28}$$

が成り立つから $A_t^{(n_k)}$ は $Y_t + E(A_a \mid \mathscr{F}_t)$ に弱収束する．ここで

$$\tilde{A}_t \coloneqq Y_t + E\left(A_a \mid \mathscr{F}_t\right), \quad (t \in [0, a])$$

と定めれば $\left\{ \tilde{A}_t, \mathscr{F}_t \ : \ 0 \leq t \leq a \right\}$ は劣マルチンゲールとなり，$\{ X_t, \mathscr{F}_t \ : \ 0 \leq t < \infty \}$ の右連続性より

$$[0, a] \ni t \longmapsto E\left[Y_t + E\left(A_a \mid \mathscr{F}_t\right)\right] = EX_t - EX_a + EA_a$$

は右連続であるから (Theorem 3.13)，$\tilde{A}$ の右連続な修正 $\{ A_t, \mathscr{F}_t \ : \ 0 \leq t \leq a \}$ が得られる．

第七段　$t \longmapsto A_t(\omega)$ が a.s. に 0 出発かつ非減少であることを示す．実際，$\xi = \mathrm{sgn}(A_0)$ として，(1.4) より

$$E|A_0| = E\xi A_0 = E\xi \tilde{A}_0 = \lim_{k \to \infty} E\xi A_0^{(n_k)} = 0$$

が成り立つから $A_0 = 0$ a.s. P が従う．また任意に $s, t \in \Pi$, $(s < t)$ を取れば或る $K \geq 1$ が存在して $s, t \in \Pi_{n_k}$ $(\forall k > K)$ が満たされ，$A^{(n_k)}$ は増大過程であるから $\xi = 1\!\!1_{\{A_s > A_t\}}$ として

$$E\xi(A_t - A_s) = E\xi\left(\tilde{A}_t - \tilde{A}_s\right) = \lim_{k \to \infty} E\xi\left(A_t^{(n_k)} - A_s^{(n_k)}\right) \geq 0$$

となり $P(A_s > A_t) = 0$ が成り立つ．$t \longmapsto A_t$ が右連続性であるから，P-零集合を

$$N \coloneqq \left(\bigcup_{\substack{s, t \in \Pi \\ s < t}} \{A_s > A_t\} \right) \cup \{A_0 \neq 0\}$$

で定めれば $\Omega \backslash N$ 上で $t \longmapsto A_t$ は 0 出発非減少となり，N 上で $A \equiv 0$ と修正すれば A は増大過程となる．

第八段　A がナチュラルであることを示す．$\xi = \{ \xi_t, \mathscr{F}_t \ : \ 0 \leq t \leq a \}$ を有界な *RCLL* マルチンゲールとすれば

$$\begin{aligned}
E\xi_a A_a^{(n_k)} &= E\left[\sum_{j=1}^{2^{n_k}} \xi_{t_{j-1}^{(n_k)}} \left(A_{t_j^{(n_k)}}^{(n_k)} - A_{t_{j-1}^{(n_k)}}^{(n_k)} \right) \right] \\
&= E\left[\sum_{j=1}^{2^{n_k}} \xi_{t_{j-1}^{(n_k)}} \left(Y_{t_j^{(n_k)}} - Y_{t_{j-1}^{(n_k)}} \right) \right] + E\left[\sum_{j=1}^{2^{n_k}} \xi_{t_{j-1}^{(n_k)}} \left(E\left(A_a^{(n_k)} \middle| \mathscr{F}_{t_j^{(n_k)}} \right) - E\left(A_a^{(n_k)} \middle| \mathscr{F}_{t_{j-1}^{(n_k)}} \right) \right) \right] \\
&= E\left[\sum_{j=1}^{2^{n_k}} \xi_{t_{j-1}^{(n_k)}} \left(A_{t_j^{(n_k)}} - A_{t_{j-1}^{(n_k)}} \right) \right]
\end{aligned}$$

が任意の $k \geq 1$ で成り立ち (Proposition 4.3)，$k \longrightarrow \infty$ として

$$E\xi_a A_a = E\int_{(0, a]} \xi_{s-}\, dA_s$$

が得られる．任意の $t \in (0, a]$ に対し $\xi^{(t)} = \left\{ \xi_s^{(t)} \coloneqq \xi_{t \wedge s}, \mathscr{F}_s \ : \ 0 \leq s \leq a \right\}$ も *RCLL* マルチンゲールであり

$$\begin{aligned}
&\xi_{s-}^{(t)} = \xi_{s-}, \quad (\forall s \in (0, t]), \\
&\xi_{s-}^{(t)} = \xi_t, \quad (\forall s \in (t, a])
\end{aligned}$$

より

$$E\xi_t A_t + E\xi_t(A_a - A_t) = E\xi_a^{(t)} A_a = E\int_{(0,a]} \xi_{s-}^{(t)}\, dA_s = E\int_{(0,t]} \xi_{s-}\, dA_s + E\xi_t(A_a - A_t)$$

となり

$$E\xi_t A_t = E\int_{(0,t]} \xi_{s-}\, dA_s, \quad (\forall t \in (0,a])$$

が成立する．よって A はナチュラルである．

第九段　$\{\, M_t := X_t - A_t, \mathscr{F}_t \;:\; 0 \le t \le a \,\}$ がマルチンゲールであることを示す．M の適合性と可積分性は X, A のそれより従い，また任意に $0 \le s \le t \le a$ を取れば，任意の $A \in \mathscr{F}_s$ で

$$\begin{aligned}
\int_A M_s\, dP = \int_A X_s - A_s\, dP &= \int_A X_s - (Y_s - E(A_a \mid \mathscr{F}_s))\, dP \\
&= \int_A X_s - (X_s - Z_s - E(A_a \mid \mathscr{F}_s))\, dP \\
&= \int_A Z_t + E(A_a \mid \mathscr{F}_t)\, dP \\
&= \int_A X_t - (X_t - Z_t - E(A_a \mid \mathscr{F}_t))\, dP \\
&= \int_A M_t\, dP
\end{aligned}$$

が成立する．∎

Problem 4.13

Verify that a continuous, nonnegative submartingale is regular.

証明．　Problem 4.9 より $(X_{T_n})_{n=1}^{\infty}$ は一様可積分であり，またパスの連続性より $X_{T_n} \longrightarrow X_T$ $(n \longrightarrow \infty)$ となるから，定理 A.14.2 より $\lim_{n\to\infty} EX_{T_n} = EX_T$ が成立する．∎

Theorem 4.14 修正

Suppose that $X = \{\, X_t \;:\; 0 \le t < \infty \,\}$ is a right-continuous submartingale of class DL with respect to the filtration $\{\mathscr{F}_t\}$, which satisfies the usual conitions, and let $[A]_{NAT}$ be of the Doob-Meyer decomposition of X. There exists a continuous version of A in $[A]_{NAT}$ if and only if X is regular.

証明．

第一段　A が連続であるとき，増大列 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{S}_a$ と $T := \lim_{n\to\infty} \in T_n\mathscr{S}_a$ に対し単調収束定理より

$$\lim_{n\to\infty} EA_{T_n} = E\lim_{n\to\infty} A_{T_n} = EA_T$$

が成立する．また任意抽出定理より

$$E(X_{T_n} - A_{T_n}) = E(X_T - A_T), \quad (\forall n \ge 1)$$

となるから

$$\lim_{n\to\infty} EX_{T_n} = \lim_{n\to\infty} E(X_{T_n} - A_{T_n}) + \lim_{n\to\infty} EA_{T_n} = E(X_T - A_T) + EA_T = EX_T$$

が従う．

第二段　以降 X がレギュラーであるとする．このとき任意の有界な停止時刻の増大列 (T_n) と $T := \lim T_n$ に対し，$X - A$ のマルチンゲール性と任意抽出定理，及び X のレギュラリティより

$$\begin{aligned} EA_{T_n} &= EX_{T_n} - E(X_{T_n} - A_{T_n}) = EX_{T_n} - E(X_T - A_T) \\ &\longrightarrow EX_T - E(X_T - A_T) = EA_T \quad (n \longrightarrow \infty) \end{aligned} \tag{1.29}$$

が得られる．いま，任意に $a \in \mathbf{N}$ を取り

$$\Pi_n := \left\{ t_j^{(n)} \ : \ t_j^{(n)} = \frac{j}{2^n}a,\ j = 0,1,\cdots,2^n \right\}, \quad \Pi := \bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi_n$$

とおく．また任意に $\lambda \in \mathbf{N}$ を取り，各 $j = 0,1,\cdots,2^n$ に対し

$$Y_t^{(n),j} := E\left(\lambda \wedge A_{t_{j+1}^{(n)}} \middle| \mathscr{F}_t\right), \quad (\forall t \geq 0)$$

によりマルチンゲール $\left\{ Y_t^{(n),j}, \mathscr{F}_t \ : \ 0 \leq t < \infty \right\}$ を定めれば，

$$[0,\infty) \ni t \longmapsto EY_t^{(n),j} = E\left(\lambda \wedge A_{t_{j+1}^{(n)}}\right)$$

と Theorem 3.13 より $RCLL$ な修正 $\tilde{Y}^{(n),j}$ が存在する．このとき各 $t \geq 0$ で

$$\int_A \tilde{Y}_t^{(n),j}\, dP = \int_A \lambda \wedge A_{t_{j+1}^{(n)}}\, dP \leq \lambda P(A), \quad (\forall A \in \mathscr{F}_t)$$

となり，一方で各 $t \in \left[t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)}\right)$ で

$$\int_A \tilde{Y}_t^{(n),j}\, dP = \int_A \lambda \wedge A_{t_{j+1}^{(n)}}\, dP \geq \int_A \lambda \wedge A_t\, dP, \quad (\forall A \in \mathscr{F}_t)$$

となるから，各 j で

$$\begin{aligned} E_j &:= \left\{ \tilde{Y}_t^{(n),j} > \lambda \ : \ \exists t \geq 0 \right\} \cup \left\{ \tilde{Y}_t^{(n),j} < \lambda \wedge A_t \ : \ \exists t \in \left[t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)}\right) \right\} \\ &= \left[\bigcup_{r \in [0,\infty) \cap \mathbf{Q}} \left\{ \tilde{Y}_r^{(n),j} > \lambda \right\} \right] \bigcup \left[\bigcup_{r \in \left[t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)}\right) \cap \mathbf{Q}} \left\{ \tilde{Y}_r^{(n),j} < \lambda \wedge A_r \right\} \right] \end{aligned}$$

とおけば P-零集合 $E := \bigcup_{j=0}^{2^n} E_j$ が定まる．usual 条件より $E \in \mathscr{F}_0$ であるから

$$\left\{ Z_t^{(n),j} := \tilde{Y}_t^{(n),j} 1\!\!1_{\Omega \backslash E}, \mathscr{F}_t \ : \ 0 \leq t < \infty \right\}$$

で定める $Y^{(n),j}$ のバージョン $Z^{(n),j}$ は

$$\omega \in \Omega \backslash E \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} Z_t^{(n),j}(\omega) \leq \lambda, & \forall t \geq 0, \\ Z_t^{(n),j}(\omega) \geq \lambda \wedge A_t(\omega), & \forall t \in \left[t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)}\right) \end{cases}$$

を満たす $RCLL$ かつ有界なマルチンゲールとなり，

$$\eta_t^{(n)} := \sum_{j=0}^{2^n-1} Z_t^{(n),j} \mathbb{1}_{\left[t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)}\right)}(t) + (\lambda \wedge A_a)\mathbb{1}_{[a,\infty)}(t), \quad (t \geq 0)$$

とおけば

$$\omega \in \Omega \backslash E \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \eta_t^{(n)}(\omega) \leq \lambda, & (\forall t \geq 0), \\ \eta_t^{(n)}(\omega) \geq \lambda \wedge A_t(\omega), & (\forall t \in [0,a]) \end{cases} \tag{1.30}$$

が成り立つ．また $\eta^{(n)}$ の右連続性，Corollary2.4，Problem2.5 及び usual 条件より

$$T_\epsilon^{(n)} := a \wedge \inf\left\{\, t \geq 0 \quad : \quad \eta_t^{(n)} - (\lambda \wedge A_t) > \epsilon \,\right\}$$

は $\mathscr{S}_a$ に属する停止時刻となり，このとき

$$\varphi_n(t) := \begin{cases} t_{j+1}^{(n)}, & t_j^{(n)} \leq t < t_{j+1}^{(n)},\ j = 0, 1, \cdots, 2^n - 1 \\ a, & t = a \end{cases}$$

を用いれば，任意抽出定理より

$$\begin{aligned} E\left(\eta_{T_\epsilon^{(n)}}\right) &= \sum_{j=0}^{2^n-1} \int_{\left\{t_j^{(n)} \leq T_\epsilon^{(n)} < t_{j+1}^{(n)}\right\}} Z_{T_\epsilon^{(n)}}^{(n),j}\, dP + \int_{\left\{T_\epsilon^{(n)} = a\right\}} \lambda \wedge A_a\, dP \\ &= \sum_{j=0}^{2^n-1} \int_{\left\{t_j^{(n)} \leq T_\epsilon^{(n)} < t_{j+1}^{(n)}\right\}} E\left(Z_{t_{j+1}^{(n)}}^{(n),j} \,\middle|\, \mathscr{F}_{T_\epsilon^{(n)}} \right) dP + \int_{\left\{T_\epsilon^{(n)} = a\right\}} \lambda \wedge A_a\, dP \\ &= \sum_{j=0}^{2^n-1} \int_{\left\{t_j^{(n)} \leq T_\epsilon^{(n)} < t_{j+1}^{(n)}\right\}} Z_{t_{j+1}^{(n)}}^{(n),j}\, dP + \int_{\left\{T_\epsilon^{(n)} = a\right\}} \lambda \wedge A_a\, dP \\ &= \sum_{j=0}^{2^n-1} \int_{\left\{t_j^{(n)} \leq T_\epsilon^{(n)} < t_{j+1}^{(n)}\right\}} \lambda \wedge A_{t_{j+1}^{(n)}}\, dP + \int_{\left\{T_\epsilon^{(n)} = a\right\}} \lambda \wedge A_a\, dP \\ &= \sum_{j=0}^{2^n-1} \int_{\left\{t_j^{(n)} \leq T_\epsilon^{(n)} < t_{j+1}^{(n)}\right\}} \lambda \wedge A_{\varphi_n\left(T_\epsilon^{(n)}\right)}\, dP + \int_{\left\{T_\epsilon^{(n)} = a\right\}} \lambda \wedge A_{\varphi_n\left(T_\epsilon^{(n)}\right)}\, dP \\ &= E\left(\lambda \wedge A_{\varphi_n\left(T_\epsilon^{(n)}\right)}\right) \end{aligned}$$

が従う．また $t \longmapsto \eta_t^{(n)} - (\lambda \wedge A_t)$ の右連続性より

$$T_\epsilon^{(n)}(\omega) < a \quad \Longrightarrow \quad \eta_{T_\epsilon^{(n)}}^{(n)}(\omega) - \left(\lambda \wedge A_{T_\epsilon^{(n)}}(\omega)\right) \geq \epsilon$$

となるから

$$\begin{aligned} E\left(\lambda \wedge A_{\varphi_n\left(T_\epsilon^{(n)}\right)} - \lambda \wedge A_{T_\epsilon^{(n)}}\right) &= E\left(\eta_{T_\epsilon^{(n)}}^{(n)} - \lambda \wedge A_{T_\epsilon^{(n)}}\right) \\ &= E\mathbb{1}_{\left\{T_\epsilon^{(n)} < a\right\}}\left(\eta_{T_\epsilon^{(n)}}^{(n)} - \lambda \wedge A_{T_\epsilon^{(n)}}\right) \geq \epsilon P\left(T_\epsilon^{(n)} < a\right) \end{aligned} \tag{1.31}$$

が成立する．

第三段　$\left(\eta^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ は n に関して P-a.s. に減少していく．実際，任意の $t \in [0,a)$ に対し

$$t \in \left[t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)}\right)$$

を満たす $0 \leq j \leq 2^n - 1$ を取れば $t \in \left[t_{2j}^{(n+1)}, t_{2j+1}^{(n+1)}\right)$ 或は $t \in \left[t_{2j+1}^{(n+1)}, t_{2j+2}^{(n+1)}\right)$ となるから，任意の $A \in \mathscr{F}_t$ で

$$\int_A \eta_t^{(n)}\, dP = \int_A \lambda \wedge A_{t_{j+1}^{(n)}}\, dP \begin{cases} = \displaystyle\int_A \lambda \wedge A_{t_{2j+2}^{(n+1)}}\, dP \\ \geq \displaystyle\int_A \lambda \wedge A_{t_{2j+1}^{(n+1)}}\, dP \end{cases} = \int_A \eta_t^{(n+1)}\, dP$$

が成り立ち $\eta_t^{(n)} \geq \eta_t^{(n+1)}$, a.s. P が従う．$\eta^{(n)}, \eta^{(n+1)}$ のパスは右連続であるから

$$F_n \coloneqq \left\{\ \eta_t^{(n)} < \eta_t^{(n+1)} \quad : \quad \exists t \in [0,a)\ \right\} = \bigcup_{r \in [0,a) \cap \mathbf{Q}} \left\{\eta_r^{(n)} < \eta_r^{(n+1)}\right\}$$

で P-零集合が定まり，$F \coloneqq \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ とおけば任意の $\omega \in \Omega \backslash F$ と $t \in [0,a]$ で $\left(\eta_t^{(n)}(\omega)\right)_{n=1}^{\infty}$ は減少し

$$T_\epsilon^{(1)} 1\!\!1_{\Omega \backslash F} \leq T_\epsilon^{(2)} 1\!\!1_{\Omega \backslash F} \leq \cdots \leq a$$

となる．usual 条件より $F \in \mathscr{F}_0$ であるから

$$\left\{T_\epsilon^{(n)} 1\!\!1_{\Omega \backslash F} \leq t\right\} = \left\{T_\epsilon^{(n)} \leq t\right\} \cap (\Omega \backslash F) + F \in \mathscr{F}_t, \quad (\forall t \geq 0)$$

が成り立つので $T_\epsilon^{(n)} 1\!\!1_{\Omega \backslash F} \in \mathscr{S}_a$ となり，単調増大性より

$$T_\epsilon \coloneqq \lim_{n \to \infty} T_\epsilon^{(n)} 1\!\!1_{\Omega \backslash F}$$

と定めれば $T_\epsilon \in \mathscr{S}_a$ も満たされる．一方 $\varphi_n\left(T_\epsilon^{(n)}\right)$ についても

$$\left\{\varphi_n\left(T_\epsilon^{(n)}\right) \leq t\right\} = \bigcup_{j\,:\,t_{j+1}^{(n)} \leq t} \left\{t_j^{(n)} \leq T_\epsilon^{(n)} < t_{j+1}^{(n)}\right\} \in \mathscr{F}_t, \quad (\forall t \geq 0)$$

より $\varphi_n\left(T_\epsilon^{(n)}\right) \in \mathscr{S}_a$ が従い，また $\varphi_n(t) \geq t$ と $t \longmapsto \varphi_n(t)$ の増大性より

$$T_\epsilon^{(n)}(\omega) \leq \varphi_n\left(T_\epsilon^{(n)}(\omega)\right) \leq \varphi_n\left(T_\epsilon(\omega)\right), \quad (\forall \omega \in \Omega \backslash F)$$

が成立し，A のパスの増大性と併せて

$$E\left(\lambda \wedge A_{T_\epsilon^{(n)}}\right) \leq E\left(\lambda \wedge A_{\varphi_n\left(T_\epsilon^{(n)}\right)}\right) \leq E\left(\lambda \wedge A_{\varphi_n(T_\epsilon)}\right)$$

が満たされる．このとき (1.4) より

$$\lim_{n \to \infty} E\left(\lambda \wedge A_{T_\epsilon^{(n)}}\right) = E\left(\lambda \wedge A_{T_\epsilon}\right)$$

が成り立ち，右辺も $\varphi_n(t) \downarrow t$ と A のパスの右連続性及び Lebesgue の収束定理より $E\left(\lambda \wedge A_{T_\epsilon}\right)$ に収束するから

$$\lim_{n \to \infty} E\left(\lambda \wedge A_{\varphi_n\left(T_\epsilon^{(n)}\right)}\right) = E\left(\lambda \wedge A_{T_\epsilon}\right)$$

が得られる．

第五段　任意の $\omega \in \Omega$ と $n \geq 1$ に対し

$$T_\epsilon^{(n)}(\omega) < a \quad \Longleftrightarrow \quad \sup_{0 \leq t \leq a} \left\{ (\lambda \wedge A_t(\omega)) - \eta_t^{(n)}(\omega) \right\} > \epsilon$$

が満たされ，また (1.4) より $\Omega \backslash E$ の上で $\eta_t^{(n)} - (\lambda \wedge A_t) \geq 0,\ (\forall t \in [0,a])$ だから，(1.4) と前段の結果と併せて

$$\begin{aligned} P\left(\sup_{0 \leq t \leq a} \left| \eta_t^{(n)} - (\lambda \wedge A_t) \right| > \epsilon \right) &= P\left(T_\epsilon^{(n)} < a \right) \\ &\leq \frac{1}{\epsilon} E\left(\lambda \wedge A_{\varphi_n\left(T_\epsilon^{(n)}\right)} - \lambda \wedge A_{T_\epsilon^{(n)}} \right) \longrightarrow \frac{1}{\epsilon} E\left(\lambda \wedge A_{T_\epsilon} - \lambda \wedge A_{T_\epsilon} \right) = 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

が得られる．従って定理 A.6.12 より或る部分列 $(n_k)_{k=1}^\infty$ と P-零集合 G が存在して

$$\sup_{0 \leq t \leq a} \left| \eta_t^{(n_k)}(\omega) - (\lambda \wedge A_t(\omega)) \right| \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty), \quad (\forall \omega \in \Omega \backslash G) \tag{1.32}$$

が成立する．

第六段　A はナチュラルであり，$Z^{(n),j}$ は有界かつ $RCLL$ なマルチンゲールであるから

$$\begin{aligned} E \int_{\left(t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)}\right]} Z_s^{(n),j}\, dA_s &= E \int_{\left(0, t_{j+1}^{(n)}\right]} Z_s^{(n),j}\, dA_s - E \int_{\left(0, t_j^{(n)}\right]} Z_s^{(n),j}\, dA_s \\ &= E \int_{\left(0, t_{j+1}^{(n)}\right]} Z_{s-}^{(n),j}\, dA_s - E \int_{\left(0, t_j^{(n)}\right]} Z_{s-}^{(n),j}\, dA_s \\ &= E \int_{\left(t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)}\right]} Z_{s-}^{(n),j}\, dA_s \end{aligned}$$

が成立する．従って

$$\xi_t^{(n)} := \sum_{j=0}^{2^n - 1} Z_t^{(n),j}\, \mathbb{1}_{\left(t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)}\right]}(t), \quad (t \geq 0)$$

とおけば任意の $t \in (0,a]$ で $\xi_{t-}^{(n)}$ が存在し

$$E \int_{(0,a]} \xi_s^{(n)}\, dA_s = \sum_{j=0}^{2^n-1} E \int_{\left(t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)}\right]} Z_s^{(n),j}\, dA_s = \sum_{j=0}^{2^n-1} E \int_{\left(t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)}\right]} Z_{s-}^{(n),j}\, dA_s = E \int_{(0,a]} \xi_{s-}^{(n)}\, dA_s$$

が成立する．一方で $t \notin \Pi$ で $\xi_t^{(n)} = \eta_t^{(n)},\ (\forall n \geq 1)$ であるから (1.4) より

$$\sup_{t \in (0,a] \backslash \Pi} \left| \xi_t^{(n_k)}(\omega) - \lambda \wedge A_t(\omega) \right| \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty), \quad (\forall \omega \in \Omega \backslash G)$$

が従い，これにより

$$\sup_{t \in (0,a]} \left| \xi_{t-}^{(n_k)}(\omega) - \lambda \wedge A_{t-}(\omega) \right| \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty), \quad (\forall \omega \in \Omega \backslash G)$$

も出る．実際，$\omega \in \Omega \backslash G$ を固定すれば，任意の $\epsilon > 0$ に対し或る $K = K(\omega, \epsilon) \geq 1$ が存在して

$$\sup_{t \in (0,a] \backslash \Pi} \left| \xi_t^{(n_k)}(\omega) - \lambda \wedge A_t(\omega) \right| < \epsilon, \quad (\forall k \geq K)$$

となり，このとき任意の $t \in (0,a]$ と $k \geq K$ で

$$
\begin{aligned}
&\left|\xi_{t-}^{(n_k)}(\omega) - \lambda \wedge A_{t-}(\omega)\right| \\
&\quad \leq \left|\xi_{t-}^{(n_k)}(\omega) - \xi_s^{(n_k)}(\omega)\right| + \left|\xi_s^{(n_k)}(\omega) - \lambda \wedge A_s(\omega)\right| + |\lambda \wedge A_s(\omega) - \lambda \wedge A_{t-}(\omega)| \\
&\quad < \epsilon
\end{aligned}
$$

を満たす $s = s(t,k) \in (0,a]\backslash\Pi$, $(s < t)$ が取れるから

$$
\sup_{t \in (0,a]} \left|\xi_{t-}^{(n_k)}(\omega) - \lambda \wedge A_{t-}(\omega)\right| \leq \epsilon, \quad (\forall k \geq K)
$$

が成立する．$t \in \Pi$ なら或る $N = N(t)$ で $t \in \Pi_N$ となるから $\xi_t^{(n)} = \lambda \wedge A_t$, P-a.s., $(\forall n \geq N)$ となり

$$
H_t := \bigcup_{n \geq N} \left\{\xi_t^{(n)} \neq \lambda \wedge A_t\right\}, \quad H := \bigcup_{t \in \Pi} H_t
$$

により P-零集合 H を定めれば任意の $t \in [0,a]$ で

$$
\lim_{k \to \infty} \xi_t^{(n_k)}(\omega) = \lambda \wedge A_t(\omega), \quad (\forall \omega \in \Omega\backslash(G \cup H))
$$

となる．Lebesgue の収束定理より

$$
E \int_{(0,a]} \lambda \wedge A_t \, dA_t = E \int_{(0,a]} \lambda \wedge A_{t-} \, dA_t
$$

が得られ，A の単調非減少性より $A_{t-} \leq A_t$ であるから或る P-零集合 U_a が存在し，任意の $\omega \in \Omega\backslash U_a$ で

$$
\int_{(0,a]} (\lambda \wedge A_t(\omega)) - (\lambda \wedge A_{t-}(\omega)) \, dA_t(\omega) = 0
$$

が成立し $(0,a] \ni t \longmapsto \lambda \wedge A_t(\omega)$ の連続性が出る．a の任意性より $V_\lambda := \bigcup_{a=1}^{\infty} U_a$ とおけば

$$
(0,\infty) \ni t \longmapsto \lambda \wedge A_t(\omega), \quad (\forall \omega \in \Omega\backslash V_\lambda)
$$

は連続となり，λ も任意であるから $V := \bigcup_{\lambda=1}^{\infty} V_\lambda$ として

$$
(0,\infty) \ni t \longmapsto A_t(\omega), \quad (\forall \omega \in \Omega\backslash V)
$$

は連続となる．$\tilde{A} := A 1\!\!1_{\Omega\backslash V} \in [A]_{NAT}$ が求める A のバージョンである．∎

Problem 4.15

Let $X = \{ X_t, \mathscr{F}_t \ : \ 0 \le t < \infty \}$ be a continuous, nonnegative process with $X_0 = 0$ a.s., and $A = \{ A_t, \mathscr{F}_t \ : \ 0 \le t < \infty \}$ any continuous, increasing process for which

$$E(X_T) \le E(A_T)$$

holds for every bounded stopping time T of $\{\mathscr{F}_t\}$. Introduce the process $V_t := \max_{0\le s\le t} X_s$, consider a continuous, increasing function F on $[0,\infty)$ with $F(0)=0$, and define $G(x) := 2F(x) + x\int_{(x,\infty)} u^{-1}\,dF(u);\ 0 < x < \infty$. Establish the inequalities

(4.14) $\quad P[V_T \ge \epsilon] \le \dfrac{E(A_T)}{\epsilon};\quad \forall \epsilon > 0$

(4.15) (Lenglart inequality) $\quad P[V_T \ge \epsilon] \le \dfrac{E(\delta \wedge A_T)}{\epsilon} + P[A_T \ge \delta];\quad \forall\epsilon > 0,\ \delta > 0$

(4.16) $\quad EF(V_T) \le EG(A_T)$

for any stopping time T of $\{\mathscr{F}_t\}$.

証明.

(1) X のパスの連続性と Problem 2.7 より

$$H_\epsilon := \inf\{ t \ge 0 \ : \ X_t \ge \epsilon \}$$

で $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻が定まる．このとき

$$\begin{aligned} V_T(\omega) \ge \epsilon \quad &\Longrightarrow \quad X_t(\omega) \ge \epsilon, \quad \exists t \in [0, T(\omega)] \\ &\Longrightarrow \quad H_\epsilon(\omega) \le t \le T(\omega) \end{aligned}$$

が成立するから，$\{X_0 = 0\} \cap \{V_T \ge \epsilon\}$ 上で $\epsilon = X_{H_\epsilon} = X_{T\wedge H_\epsilon}$ となり

$$\epsilon P(V_T \ge \epsilon) = \int_{\{V_T\ge\epsilon\}} X_{T\wedge H_\epsilon}\,dP \le EX_{T\wedge H_\epsilon} \le EA_{T\wedge H_\epsilon} \le EA_T$$

が得られる．

(2) $S_\delta := \inf\{ t \ge 0 \ : \ A_t \ge \delta \}$ により $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻を定めれば，$A_{S_\delta} = \delta$ と $t \longmapsto A_t(\omega)$ の増大性より

$$A_T(\omega) < \delta \quad \Longleftrightarrow \quad T(\omega) < S_\delta(\omega)$$

となるから

$$\begin{aligned} P(V_T \ge \epsilon,\ A_T < \delta) &= P\left(V_{T\wedge S_\delta} \ge \epsilon,\ A_T < \delta\right) \le P\left(V_{T\wedge S_\delta} \ge \epsilon\right) \\ &\le \frac{E(A_{S_\delta\wedge T})}{\epsilon} = \frac{E(A_{S_\delta}\wedge A_T)}{\epsilon} = \frac{E(\delta\wedge A_T)}{\epsilon} \end{aligned}$$

が成立し，両辺に $P(V_T \ge \epsilon,\ A_T \ge \delta)$ を加えて Lenglart の不等式を得る．

(3) F は連続かつ非減少であるから Lebesgue-Stieltjes 積分が構成され，任意の $x \in [0,\infty)$ に対し

$$F(x) = \int_{[0,\infty)} 1\!\!1_{(0,x]}(u)\,dF(u)$$

が満たされる．

$$(\omega, u) \longmapsto 1\!\!1_{(0,V_T(\omega))]}(u)$$

は，u の関数として左連続であり，また ω の関数としては $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測であるから (Problem 1.16)，二変数関数として $\mathscr{F}\otimes\mathscr{B}([0,\infty))/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測であり，このとき Fubini の定理より

$$
\begin{aligned}
EF(V_T) &= \int_{[0,\infty)} E\left(\mathbb{1}_{[u,\infty)}(V_T)\right)\, dF(u) \\
&= \int_{[0,\infty)} P(V_T \geq u)\, dF(u) \\
&\leq \int_{[0,\infty)} \frac{E(u\wedge A_T)}{u} + P(A_T \geq u)\, dF(u) \\
&= \int_{[0,\infty)} \frac{E(u\wedge A_T\mathbb{1}_{\{A_T\geq u\}})}{u} + \frac{E(u\wedge A_T\mathbb{1}_{\{A_T< u\}})}{u} + P(A_T \geq u)\, dF(u) \\
&= \int_{[0,\infty)} 2P(A_T\geq u) + \frac{E(A_T\mathbb{1}_{\{A_T<u\}})}{u}\, dF(u) \\
&= E\left(2F(A_T)\right) + E\left[A_T\int_{[0,\infty)}\frac{1}{u}\mathbb{1}_{(A_T,\infty)}(u)\, dF(u)\right] \\
&= EG(A_T)
\end{aligned}
$$

が得られる．∎

1.5　Continuous, Square-Integrable Martingales

Processes of difference of two natural processes

Let denote the space of processes represented by difference of two natural processes as

$$\mathscr{A} := \left\{ A^{(1)} - A^{(2)} \quad : \quad A^{(j)} : \text{natural},\ j = 1,2 \right\},$$

and the equivalent class of $A\in\mathscr{A}$ in the meaning of (1.4) in $\mathscr{A}$ as $[A]_{\mathscr{A}}$. Similarly define

$$\mathscr{A}_c := \left\{ A^{(1)} - A^{(2)} \quad : \quad A^{(j)} : \text{natural, continuous},\ j = 1,2 \right\}$$

and the equivalent class of $A\in\mathscr{A}_c$ in the meaning of (1.4) in $\mathscr{A}_c$ as $[A]_{\mathscr{A}_c}$.

Definition 5.3 修正

For $X\in\mathscr{M}_2$, we define the quadratic variation of X to be the process $\langle X\rangle_t := A_t$, where A is the natural increasing process in the Doob-Meyer decomposition of x^2. For $X\in\mathscr{M}_2^c$, the quadratic variation $\langle X\rangle$ of X to be natural increasing and continuous process.

Problem 5.7 修正

Show that $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is a bilinear form on $\mathscr{M}_2$, i.e., for any members X, Y, Z of $\mathscr{M}_2$ and real numbers α, β, we have

(i) $[\langle \alpha X + \beta Y, Z \rangle]_{\mathscr{A}} = [\alpha \langle X, Z \rangle + \beta \langle Y, Z \rangle]_{\mathscr{A}}$.

(ii) $[\langle X, Y \rangle]_{\mathscr{A}} = [\langle Y, X \rangle]_{\mathscr{A}}$.

(iii) $|\langle X, Y \rangle|^2 \le \langle X \rangle \langle Y \rangle$.

(iv) For P-a.e. $\omega \in \Omega$,

$$\check{\xi}_t(\omega) - \check{\xi}_s(\omega) \le \frac{1}{2}[\langle X \rangle_t(\omega) - \langle X \rangle_s(\omega) + \langle Y \rangle_t(\omega) - \langle Y \rangle_s(\omega)]; \quad 0 \le s < t < \infty,$$

where $\check{\xi}_t$ denotes the total variation of $\xi := \langle X, Y \rangle$ on $[0, t]$.

(v) For any stopping time T of $(\mathscr{F}_t)_{t \ge 0}$, we have

$$P\left(\langle X \rangle_{t \wedge T} = \left\langle X^T \right\rangle_t, \ \forall 0 \le t < \infty \right) = 1,$$

where $X_t^T := X_{t \wedge T}$, $(\forall t \ge 0)$.

証明.

(i) ナチュラルなプロセス $A^{(j)}, B^{(j)}, C^{(j)}$, $(j = 1, 2)$ により

$$\langle \alpha X + \beta Y, Z \rangle = A^{(1)} - A^{(2)}, \quad \alpha \langle X, Z \rangle = B^{(1)} - B^{(2)}, \quad \beta \langle Y, Z \rangle = C^{(1)} - C^{(2)}$$

と表せるから

$$\langle \alpha X + \beta Y, Z \rangle - (\alpha \langle X, Z \rangle + \beta \langle Y, Z \rangle) = \left(A^{(1)} + B^{(2)} + C^{(2)} \right) - \left(A^{(2)} + B^{(1)} + C^{(1)} \right)$$

となり，P. 46 の補題より

$$\langle \alpha X + \beta Y, Z \rangle_t = \alpha \langle X, Z \rangle_t + \beta \langle Y, Z \rangle_t, \quad 0 \le t < \infty, \quad \text{a.s. } P$$

が従う.

(ii) $XY - \langle X, Y \rangle$ も $YX - \langle Y, X \rangle$ も右連続マルチンゲールであるから

$$\langle X, Y \rangle - \langle Y, X \rangle$$

も右連続マルチンゲールであり，P. 46 の補題より

$$\langle X, Y \rangle_t = \langle Y, X \rangle_t, \quad 0 \le t < \infty, \quad \text{a.s. } P$$

が従う.

(iii) Shwartz の不等式

Lemma 5.9

Let $X \in \mathscr{M}_2$ satisfy $|X_s| \le K < \infty$ for all $s \in [0, t]$, a.s. P. Let $\Pi = \{t_0, t_1, \cdots, t_m\}$, with $0 = t_0 \le t_1 \le \cdots \le t_m = t$, be a partition of $[0, t]$. Then $E\left(V_t^{(2)}(\Pi) \right)^2 \le 6K^4$.

証明．X のマルチンゲール性により，任意の $0 \le s_0 \le s_1 \le \cdots \le s_n < \infty$ に対して

$$\begin{aligned} E\sum_{k=1}^{n}\left|X_{s_k}-X_{s_{k-1}}\right|^2 &= \sum_{k=1}^{n} E\left\{E\left(X_{s_k}^2 - 2X_{s_k}X_{s_{k-1}} + X_{s_{k-1}}^2 \,\middle|\, \mathscr{F}_{s_k}\right)\right\} \\ &= \sum_{k=1}^{n} E\left\{X_{s_k}^2 - 2E\left(X_{s_k} \,\middle|\, \mathscr{F}_{s_k}\right)X_{s_{k-1}} + X_{s_{k-1}}^2\right\} \\ &= \sum_{k=1}^{n} E\left(X_{s_k}^2 - X_{s_{k-1}}^2\right) \\ &= EX_{s_n}^2 - EX_{s_0}^2 \end{aligned} \tag{1.33}$$

が成立する．いま，

$$E\left(V_t^{(2)}(\Pi)\right)^2 = E\left\{\sum_{k=1}^{m}\left|X_{t_k}-X_{t_{k-1}}\right|^2\right\}^2 = E\sum_{k=1}^{m}\left|X_{t_k}-X_{t_{k-1}}\right|^4 + 2E\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=i+1}^{m}\left|X_{t_i}-X_{t_{i-1}}\right|^2\left|X_{t_j}-X_{t_{j-1}}\right|^2$$

と分解すれば，$\left|X_{t_k}-X_{t_{k-1}}\right|^2 \le 2\left(X_{t_k}^2 + X_{t_{k-1}}^2\right)^2 \le 2K^2$ と (1.5) より右辺第一項は

$$E\sum_{k=1}^{m}\left|X_{t_k}-X_{t_{k-1}}\right|^4 \le 2K^2E\sum_{k=1}^{m}\left|X_{t_k}-X_{t_{k-1}}\right|^2 = 2K^2EX_{t_m}^2 \le 2K^4$$

となる．また右辺第二項も (1.5) より

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=i+1}^{m} E\left|X_{t_i}-X_{t_{i-1}}\right|^2\left|X_{t_j}-X_{t_{j-1}}\right|^2 &= \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=i+1}^{m} E\left[E\left(\left|X_{t_i}-X_{t_{i-1}}\right|^2\left|X_{t_j}-X_{t_{j-1}}\right|^2 \,\middle|\, \mathscr{F}_{t_j}\right)\right] \\ &= \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=i+1}^{m} E\left[\left|X_{t_i}-X_{t_{i-1}}\right|^2 E\left(\left|X_{t_j}-X_{t_{j-1}}\right|^2 \,\middle|\, \mathscr{F}_{t_j}\right)\right] \\ &= \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=i+1}^{m} E\left|X_{t_i}-X_{t_{i-1}}\right|^2\left(X_{t_j}^2 - X_{t_{j-1}}^2\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} E\left|X_{t_i}-X_{t_{i-1}}\right|^2\left(X_t^2 - X_{t_i}^2\right) \\ &\le 2K^2E\sum_{i=1}^{m-1}\left|X_{t_i}-X_{t_{i-1}}\right|^2 \\ &\le 2K^4 \end{aligned}$$

となるから $E\left(V_t^{(2)}(\Pi)\right)^2 \le 6K^4$ が出る． ∎

Lemma 5.10

Let $X \in \mathscr{M}_2^c$ satisfy $|X_s| \le K < \infty$ for all $s \in [0,t]$, a.s. P. For partitions Π of $[0,t]$, we have

$$\lim_{\|\Pi\|\to 0} EV_t^{(4)}(\Pi) = 0.$$

証明．

第一段　任意の $\omega \in \Omega$ と $\delta > 0$ に対し

$$
\begin{aligned}
&\sup \{ |X_r(\omega) - X_s(\omega| \ : \ s, r \in [0, t],\ |s - r| < \delta \} \\
&\quad = \sup \left\{ |X_p(\omega) - X_q(\omega)| \ : \ p, q \in Q \cap [0, t],\ |q - p| < \delta \right\}
\end{aligned}
\tag{1.34}
$$

が成立する．実際，上限を取る範囲の大小関係より (左辺) $\geq$ (右辺) が成り立ち，一方で任意の (左辺) $> \alpha > 0$ に対し $|X_r(\omega) - X_s(\omega)| > \alpha$ を満たす $s, r \in [0, t]$, $(|s - r| < \delta)$ を取れば，X のパスの連続性より

$$
|X_r(\omega) - X_p(\omega)|,\ |X_s(\omega) - X_q(\omega)| < \frac{\beta - \alpha}{2}
$$

を満たす $p, q \in \mathbf{Q} \cap [0, t]$, $(|p - q| < \delta)$ が存在して

$$
|X_p(\omega) - X_q(\omega)| \geq |X_r(\omega) - X_s(\omega)| - |X_r(\omega) - X_p(\omega)| - |X_q(\omega) - X_s(\omega)| > \alpha
$$

となり (1.5) が出る．(左辺) $\leq 2K$ より $m_t(X; \delta)$ は $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測である．また定理 A.1.4 より任意の $a > 0$ で

$$
m_t^a(X; \delta) \coloneqq \sup \left\{ |X_p(\omega) - X_q(\omega)|^a \ : \ p, q \in Q \cap [0, t],\ |q - p| < \delta \right\}
$$

が満たされる．

第二段　Hölder の不等式より，任意の Π に対し

$$
EV_t^{(4)}(\Pi) \leq E\left[V_t^{(2)}(\Pi) \cdot m_t^2(X; \| \Pi \|)\right] \leq \left\{E\left(V_t^{(2)}(\Pi)\right)^2\right\}^{1/2} \left\{Em_t^4(X; \| \Pi \|)\right\}^{1/2} \leq \sqrt{6}K^2 \left\{Em_t^4(X; \| \Pi \|)\right\}^{1/2}
$$

となる．任意に $\| \Pi_n \| \longrightarrow 0$, $(n \longrightarrow \infty)$ を満たす分割列 $(\Pi_n)_{n=1}^{\infty}$ を取れば

$$
\lim_{n \to \infty} m_t(X; \| \Pi_n \|) = 0, \quad m_t(X; \| \Pi_n \|) \leq 2K,\ (\forall n \geq 1)
$$

が成り立つから，Lebesgue の収束定理より

$$
Em_t^4(X; \| \Pi_n \|) \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)
$$

が従い $EV_t^{(4)}(\Pi_n) \longrightarrow 0$ $(n \longrightarrow \infty)$ となる．$(\Pi_n)_{n=1}^{\infty}$ の任意性より補題の主張が得られる． ∎

Theorem 5.8

Let X be in $\mathscr{M}_2^c$. For partitions Π of $[0, t]$, we have $\lim_{\| \Pi \| \to 0} V_t^{(2)} = \langle X \rangle_t$ (in probability); i.e., for every $\epsilon > 0$, $\eta > 0$ there exists $\delta > 0$ such that $\| \Pi \| < \delta$ implies

$$
P\left[\left|V_t^{(2)}(\Pi) - \langle X \rangle_t\right| > \epsilon\right] < \eta.
$$

証明.

第一段　$X^2 - \langle X \rangle$ のマルチンゲール性より任意の $0 \leq s < t < \infty$ に対して

$$
\begin{aligned}
E\left((X_t - X_s)^2 - (\langle X \rangle_t - \langle X \rangle_s) \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right) &= E\left((X_t - X_s)^2 \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right) - E\left(\langle X \rangle_t - \langle X \rangle_s \mid \mathscr{F}_s\right) \\
&= E\left(X_t^2 - X_s^2 \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right) - E\left(\langle X \rangle_t - \langle X \rangle_s \mid \mathscr{F}_s\right) \\
&= 0, \quad \text{a.s. } P
\end{aligned}
$$

となる．従って，任意の $0 \leq u < v \leq s < t < \infty$ に対し

$$E\left|(X_v - X_u)^2 - (\langle X\rangle_v - \langle X\rangle_u)\right|\left|(X_t - X_s)^2 - (\langle X\rangle_t - \langle X\rangle_s)\right| < \infty$$

であれば

$$\begin{aligned}
&E\left[\left\{(X_v - X_u)^2 - (\langle X\rangle_v - \langle X\rangle_u)\right\}\left\{(X_t - X_s)^2 - (\langle X\rangle_t - \langle X\rangle_s)\right\}\right] \\
&\quad = E\left[E\left(\left\{(X_v - X_u)^2 - (\langle X\rangle_v - \langle X\rangle_u)\right\}\left\{(X_t - X_s)^2 - (\langle X\rangle_t - \langle X\rangle_s)\right\} \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right)\right] \\
&\quad = E\left[\left\{(X_v - X_u)^2 - (\langle X\rangle_v - \langle X\rangle_u)\right\} E\left(\left\{(X_t - X_s)^2 - (\langle X\rangle_t - \langle X\rangle_s)\right\} \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right)\right] \\
&\quad = 0
\end{aligned}$$

が成立する．

第二段　$|X|$ 及び $\langle X\rangle$ のパスは全て連続であるから，Problem 2.7 より

$$T_n := \inf\{\, t \geq 0 \ :\ \ |X_t| \vee \langle X\rangle_t \geq n \,\}$$

で $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻の列 $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ が定まる．このとき任意の $\omega \in \Omega$ で

$$\{\, t \geq 0 \ :\ \ |X_t(\omega)| \vee \langle X\rangle_t(\omega) \geq n+1 \,\} \subset \{\, t \geq 0 \ :\ \ |X_t(\omega)| \vee \langle X\rangle_t(\omega) \geq n \,\}$$

となるから

$$T_n \leq T_{n+1}, \quad (\forall n \geq 1)$$

が成立し，また任意の $K > 0$ に対し $\sup_{t\in[0,K]} |X_t(\omega)| \vee \langle X\rangle_t(\omega) < N$ を満たす $N \in \mathbf{N}$ を取れば $T_N(\omega) > K$ となり

$$\lim_{n\to\infty} T_n(\omega) = \infty, \quad (\forall \omega \in \Omega) \tag{1.35}$$

が従う．

第三段　$X^{(n)}$ を $X_t^{(n)} := X_{t\wedge T_n}$, $(\forall t \geq 0)$ で定めて，$[0,t]$ の分割 $\Pi = \{t_0, t_1, \cdots, t_m\}$ に対し

$$V_t^{(2,n)}(\Pi) := \sum_{k=1}^{m} \left|X_{t_k}^{(n)} - X_{t_{k-1}}^{(n)}\right|^2$$

とおけば，$\{t \leq T_n\}$ の上で $X_t = X_t^{(n)}$ となるから

$$V_t^{(2,n)}(\Pi)(\omega) = V_t^{(2)}(\Pi)(\omega), \quad (\forall \omega \in \{t \leq T_n\}) \tag{1.36}$$

が成り立つ．$\left|X_{t\wedge T_n}\right| \vee \langle X\rangle_{t\wedge T_n} \leq n$ であるから，Lemma 5.10 と第一段の結果及び $\left\langle X^{(n)}\right\rangle$ の連続性により

$$\begin{aligned}
E\left|V_t^{(2,n)}(\Pi) - \left\langle X^{(n)}\right\rangle_t\right|^2 &= E\left[\sum_{k=1}^{m}\left\{\left|X_{t_k}^{(n)} - X_{t_{k-1}}^{(n)}\right|^2 - \left(\left\langle X^{(n)}\right\rangle_{t_k} - \left\langle X^{(n)}\right\rangle_{t_{k-1}}\right)\right\}\right]^2 \\
&= E\sum_{k=1}^{m}\left\{\left|X_{t_k}^{(n)} - X_{t_{k-1}}^{(n)}\right|^2 - \left(\left\langle X^{(n)}\right\rangle_{t_k} - \left\langle X^{(n)}\right\rangle_{t_{k-1}}\right)\right\}^2 \\
&\leq 2E\sum_{k=1}^{m}\left|X_{t_k}^{(n)} - X_{t_{k-1}}^{(n)}\right|^4 + 2E\left(\left\langle X^{(n)}\right\rangle_{t_k} - \left\langle X^{(n)}\right\rangle_{t_{k-1}}\right)^2 \\
&\leq 2EV_t^{(4,n)}(\Pi) + 2nE\left[m_t\left(\left\langle X^{(n)}\right\rangle; \|\Pi\|\right)\right] \\
&\longrightarrow 0, \quad (\|\Pi\| \longrightarrow 0)
\end{aligned}$$

が得られる．

第四段　任意に $\epsilon > 0$ と $\eta > 0$ を取る．(1.5) より任意の $n \geq 1$ で

$$
\begin{aligned}
P\left(\left|V_t^{(2)}(\Pi) - \langle X\rangle_t\right| > \epsilon\right) &= P\left(\left\{\left|V_t^{(2)}(\Pi) - \langle X\rangle_t\right| > \epsilon\right\} \cap \{t > T_n\}\right) + P\left(\left\{\left|V_t^{(2,n)}(\Pi) - \left\langle X^{(n)}\right\rangle_t\right| > \epsilon\right\} \cap \{t \leq T_n\}\right) \\
&\leq P(t > T_n) + P\left(\left|V_t^{(2,n)}(\Pi) - \left\langle X^{(n)}\right\rangle_t\right| > \epsilon\right)
\end{aligned}
$$

が成立し，このとき (1.5) より或る $N \geq 1$ が存在して

$$
P(t > T_n) < \frac{\eta}{2}, \quad (\forall n \geq N)
$$

となり，前段の結果より或る $\delta > 0$ が存在して $\|\Pi\| < \delta$ なら

$$
P\left(\left|V_t^{(2,N)}(\Pi) - \left\langle X^{(N)}\right\rangle_t\right| > \epsilon\right) \leq \frac{1}{\epsilon} E\left|V_t^{(2,N)}(\Pi) - \left\langle X^{(N)}\right\rangle_t\right| \leq \frac{1}{\epsilon}\left\{E\left|V_t^{(2,N)}(\Pi) - \left\langle X^{(N)}\right\rangle_t\right|^2\right\}^{1/2} < \frac{\eta}{2}
$$

が満たされるから

$$
\|\Pi\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad P\left(\left|V_t^{(2)}(\Pi) - \langle X\rangle_t\right| > \epsilon\right) < \eta
$$

が従う． ∎

Theorem 5.13 修正

Let $X = \{X_t, \mathscr{F}_t \ : \ 0 \leq t < \infty\}$ and $Y = \{Y_t, \mathscr{F}_t \ : \ 0 \leq t < \infty\}$ be members of $\mathscr{M}_2^c$. There is a unique $[A]_{\mathscr{A}_c}$ such that $\left\{X_tY_t - \tilde{A}_t, \mathscr{F}_t \ : \ 0 \leq t < \infty\right\}$ is a continuous martingale for every $\tilde{A} \in [A]_{\mathscr{A}_c}$.

証明．　定義より $\langle X, Y\rangle \in \mathscr{A}_c$ に対して $XY - \langle X, Y\rangle$ は連続マルチンゲールである．また $\langle X, Y\rangle$ と区別不能な $A \in \mathscr{A}_c$ を取れば，任意の $t \geq 0$ で

$$
P(X_tY_t - \langle X, Y\rangle_t = X_tY_t - A_t) = 1
$$

となるから $XY - A$ もまた連続マルチンゲールとなる．$A, B \in \mathscr{A}_c$ に対し $XY - A$, $XY - B$ が共にマルチンゲールとなるとき，$A - B$ もマルチンゲールとなり，Theorem 4.14 の補題 (P. 46) より $[A]_{\mathscr{A}_c} = [B]_{\mathscr{A}_c}$ が従う． ∎

Problem 5.17

Let X, Y be in $\mathscr{M}^{c,loc}$. Then there is a unique (up to indistinguishablility) adapted, continuous process of bounded variation $\langle X, Y\rangle$ satisfying $\langle X, Y\rangle_0 = 0$, such that $XY - \langle X, Y\rangle \in \mathscr{M}^{c,loc}$. If $X = Y$, we write $\langle X\rangle = \langle X, X\rangle$, and this process is nondecreasing.

証明．

Problem 5.19

(i)　A local martingale of class DL is a martingale.

(ii)

(iii)

証明.

(i) X を局所マルチンゲールとすれば，或る $(\mathscr{F}_t)$-停止時刻の列 $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ と P-零集合 E が存在して

$$T_1(\omega) \leq T_2(\omega) \leq \cdots \longrightarrow \infty, \quad (\forall \omega \in \Omega \backslash E)$$

かつ全ての $n \geq 1$ で $\left\{ X_{t \wedge T_n}, \mathscr{F}_t \ : \ 0 \leq t < \infty \right\}$ はマルチンゲールとなる．任意に $t \geq 0$ を取れば $\{t \wedge T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{S}_t$ となり，X はクラス DL に属しているから $\left(X_{t \wedge T_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ は一様可積分である．ここで $E \in \mathscr{F}_0$ かつ

$$X_t(\omega) = \lim_{n \to \infty} X_{t \wedge T_n}(\omega), \quad (\forall \omega \in \Omega \backslash E)$$

が成り立つから X_t は $\mathscr{F}_t/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測であり，また定理 A.14.2 より X_t の可積分性及び

$$E\left|X_t - X_{t \wedge T_n}(\omega)\right| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が従う．よって任意に $0 \leq s < t < \infty$ を取れば

$$\int_A X_t \, dP = \lim_{n \to \infty} \int_A X_{t \wedge T_n} \, dP = \lim_{n \to \infty} \int_A X_{s \wedge T_n} \, dP = \int_A X_s \, dP, \quad (\forall A \in \mathscr{F}_s)$$

が満たされ，$\{ X_t, \mathscr{F}_t \ : \ 0 \leq t < \infty \}$ のマルチンゲール性が得られる．

Definition 5.22 修正

$\mathscr{M}_2$ and $\mathscr{M}_2^c$ are vector spaces, where the additions and scalar multiplications are defined by

$$(X+Y)_t(\omega) := X_t(\omega) + Y_t(\omega), \quad (\alpha X)_t(\omega) := \alpha X_t(\omega), \quad (\forall X, Y \in \mathscr{M}_2 \text{ (resp. } \mathscr{M}_2^c\text{)}, \ \forall \alpha \in \mathbf{R}).$$

Let denote the quotient space of $\mathscr{M}_2$ and $\mathscr{M}_2^c$ with respect to the equivalent relation as in (1.4) (P. 41) by $\mathfrak{M}_2$ and $\mathfrak{M}_2^c$, and denote the elements of each space by $[X]_{\mathfrak{M}_2}$ and $[X]_{\mathfrak{M}_2^c}$. For any $[X]_{\mathfrak{M}_2}, [Y]_{\mathfrak{M}_2} \in \mathfrak{M}_2$, (resp. $[X]_{\mathfrak{M}_2^c}, [Y]_{\mathfrak{M}_2^c} \in \mathfrak{M}_2^c$) and $0 \leq t < \infty$, we define a distance by

$$d\left([X]_{\mathfrak{M}_2}, [Y]_{\mathfrak{M}_2}\right) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left(\| [X_n] - [Y_n] \|_{L^2(P)} \wedge 1 \right),$$

$$d_c\left([X]_{\mathfrak{M}_2^c}, [Y]_{\mathfrak{M}_2^c}\right) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left(\| [X_n] - [Y_n] \|_{L^2(P)} \wedge 1 \right),$$

where $\| \cdot \|_{L^2(P)}$ denotes the L^2 norm on $L^2(P) = L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$.

Proposition 5.23 修正

(1) Suppose that the filtration $\{\mathscr{F}_t\}$ satisfies the usual conditions. Then $\mathfrak{M}_2$ is a complete metric space under the preceding metric d.

(2) Suppose that for every $t \in [0, \infty)$, $\mathscr{F}_t$ contains all the P-negligible events in $\mathscr{F}$. Then $\mathfrak{M}_2^c$ is a complete metric space under the preceding metric d_c.

証明.　任意の $0 \leq t < \infty$ に対し，$L^2(\Omega, \mathscr{F}_t, P)$ における関数類を $[\cdot]_t$ と書く．

(1)　$\left([X^{(k)}]_{\mathfrak{M}_2}\right)_{k=1}^{\infty}$ を Cauchy 列とすれば，$|X^{(k)} - X^{(j)}|^2$ の劣マルチンゲール性より任意の $0 \leq t \leq n$ で

$$
\begin{aligned}
\left\| [x_t^{(k)}]_t - [X_t^{(j)}]_t \right\|_{L^2(\Omega, \mathscr{F}_t, P)} \wedge 1 &\leq \left\| [x_n^{(k)}] - [X_n^{(j)}] \right\|_{L^2(P)} \wedge 1 \\
&\leq 2^n d\left([X^{(k)}]_{\mathfrak{M}_2}, [X^{(j)}]_{\mathfrak{M}_2}\right) \longrightarrow 0, \quad (k, j \longrightarrow \infty)
\end{aligned}
$$

となるから，定理 A.9.6 より或る $[X_t]_t \in L^2(\Omega, \mathscr{F}_t, P)$ が存在して

$$
E\left|X_t^{(k)} - X_t\right|^2 \longrightarrow 0, \quad (k \longrightarrow \infty)
$$

を満たす．特に $t = 0$ なら $X_t = 0$, a.s. P が従う．Hölder の不等式より任意の $A \in \mathscr{F}_t$ で

$$
\int_A \left|X_t^{(k)} - X_t\right| \, dP \leq \left(E\left|X_t^{(k)} - X_t\right|^2\right)^{1/2} \longrightarrow 0, \quad (k \longrightarrow \infty)
$$

が成り立つから，任意に $0 \leq s < t$ を取れば

$$
\int_A X_s \, dP = \lim_{k \to \infty} \int_A X_s^{(k)} \, dP = \lim_{k \to \infty} \int_A X_t^{(k)} \, dP = \int_A X_t \, dP, \quad (\forall A \in \mathscr{F}_s)
$$

となり $X = \{ X_t, \mathscr{F}_t \ : \ 0 \leq t < \infty \}$ のマルチンゲール性が出る．Theorem 3.13 より X の $RCLL$ な修正 $\tilde{X} \in \mathscr{M}_2$ が得られ，ここで任意に $\epsilon > 0$ 及び $1/2^N < \epsilon/2$ を満たす N を取れば，或る $K \geq 1$ が存在して

$$
\left\| [X_n^{(k)}] - [\tilde{X}_n] \right\|_{L^2(P)} < \frac{\epsilon}{2}, \quad (\forall k \geq K)
$$

がすべての $n \leq N$ で満たされるから

$$
d\left([X^{(k)}]_{\mathfrak{M}_2}, [\tilde{X}]_{\mathfrak{M}_2}\right) < \epsilon, \quad (\forall k \geq K)
$$

が従う．

第 2 章

Brownian Motion

Dynkin system theorem

Let $\mathscr{C}$ be a collection of subsets of Ω which is closed under pairwise intersection. If $\mathscr{D}$ is a Dynkin system containing $\mathscr{C}$, then $\mathscr{D}$ also contains the σ-field $\sigma(\mathscr{C})$ generated by $\mathscr{C}$.

証明. 定理 A.1.2 より $\sigma(\mathscr{C}) = \delta(\mathscr{C}) \subset \mathscr{D}$ となる. ∎

Problem 1.4

Let $X = \{ X_t \ : \ 0 \leq t < \infty \}$ be a stochastic process for which $X_0, X_{t_1} - X_{t_0}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ are independent random variables, for every integer $n \geq 1$ and indices $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty$. Then for any fixed $0 \leq s < t < \infty$, the increment $X_t - X_s$ is independent of $\mathscr{F}_s^X$.

この主張の逆も成立する:

証明. 先ず任意の $s \leq t \leq r$ に対し $\sigma(X_t - X_s) \subset \mathscr{F}_r^X$ が成り立つ. 実際,

$$\Phi : \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \ni (x, y) \longmapsto x - y$$

の連続性と $\mathscr{B}(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d) = \mathscr{B}(\mathbf{R}^d) \otimes \mathscr{B}(\mathbf{R}^d)$ より, 任意の $E \in \mathscr{B}(\mathbf{R}^d)$ に対して

$$(X_t - X_s)^{-1}(E) = \left\{(X_t, X_s) \in \Phi^{-1}(E)\right\} \in \sigma(X_s, X_t) \subset \mathscr{F}_r^X \tag{2.1}$$

が満たされる. よって任意に $A_0 \in \sigma(X_0)$, $A_i \in \sigma(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})$ を取れば, $X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ が $\mathscr{F}_{t_{n-1}}^X$ と独立であるから

$$P(A_0 \cap A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_0 \cap A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})P(A_n)$$

が成立する. 帰納的に

$$P(A_0 \cap A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_0)P(A_1) \cdots P(A_n)$$

が従い $X_0, X_{t_1} - X_{t_0}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ の独立性を得る. ∎

証明 (Problem 1.4).

第一段　Dynkin 族を次で定める:

$$\mathscr{D} := \{\, A \in \mathscr{F} \quad : \quad P(A \cap B) = P(A)P(B),\ \forall B \in \sigma(X_t - X_s) \,\}.$$

いま，任意に $0 = s_0 < \cdots < s_n = s$ を取り固定し

$$\mathscr{A}_{s_0,\cdots,s_n} := \left\{ \bigcap_{i=0}^{n} A_i \quad : \quad A_0 \in \sigma(X_0),\ A_i \in \sigma(X_{s_i} - X_{s_j}),\ i = 1,\cdots,n \right\}$$

により乗法族を定めれば，仮定より $\sigma(X_{s_i} - X_{s_{i-1}})$ と $\sigma(X_t - X_s)$ が独立であるから

$$\mathscr{A}_{s_0,\cdots,s_n} \subset \mathscr{D}$$

が成立し，Dynkin 族定理により

$$\sigma(X_{s_0}, X_{s_1} - X_{s_0}, \cdots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}}) = \sigma\left(\mathscr{A}_{s_0,\cdots,s_n}\right) \subset \mathscr{D} \tag{2.2}$$

が従う．

第二段　$\sigma(X_{s_0}, X_{s_1} - X_{s_0}, \cdots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}})$ の全体が $\mathscr{F}_s^X$ を生成することを示す．先ず，(2) より

$$\bigcup_{\substack{n \geq 1 \\ s_0 < \cdots < s_n}} \sigma(X_{s_0}, X_{s_1} - X_{s_0}, \cdots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}}) \subset \mathscr{F}_s^X \tag{2.3}$$

が成立する．一方で，任意の $X_r^{-1}(E)$ $(\forall E \in \mathscr{B}(\mathbf{R}^d),\ 0 < r \leq s)$ について，

$$\Psi : \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \ni (x, y) \longmapsto x + y$$

で定める連続写像を用いれば

$$X_r^{-1}(E) = (X_r - X_0 + X_0)^{-1}(E) = \left\{(X_r - X_0, X_0) \in \Psi^{-1}(E)\right\}$$

となり，$X_r^{-1}(E) \in \sigma(X_0, X_r - X_0)$ が満たされ

$$\sigma(X_r) \subset \sigma(X_0, X_r - X_0) \subset \sigma(X_0, X_r - X_0, X_s - X_r) \tag{2.4}$$

が出る．$\sigma(X_0) \subset \sigma(X_0, X_s - X_0)$ も成り立ち

$$\bigcup_{0 \leq r \leq s} \sigma(X_r) \subset \bigcup_{\substack{n \geq 1 \\ s_0 < \cdots < s_n}} \sigma(X_{s_0}, X_{s_1} - X_{s_0}, \cdots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}})$$

が従うから，(2) と併せて

$$\mathscr{F}_s^X = \sigma\left(\bigcup_{\substack{n \geq 1 \\ s_0 < \cdots < s_n}} \sigma(X_{s_0}, X_{s_1} - X_{s_0}, \cdots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}}) \right) \tag{2.5}$$

が得られる．

第三段　任意の $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = s$ に対し，(2) と (2) より

$$\sigma(X_{s_0}, X_{s_1} - X_{s_0}, \cdots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}}) = \sigma(X_{s_0}, X_{s_1}, \cdots, X_{s_n}) \tag{2.6}$$

が成り立つ．

第四段　二つの節点 $0 = s_0 < \cdots < s_n = s$ と $0 = r_0 < \cdots < r_m = s$ の合併を $0 = u_0 < \cdots < u_k = s$ と書けば

$$\sigma(X_{s_0}, \cdots, X_{s_n}) \cup \sigma(X_{r_0}, \cdots, X_{r_m}) \subset \sigma(X_{u_0}, \cdots, X_{u_k})$$

が成り立つから

$$\bigcup_{\substack{n \geq 1 \\ s_0 < \cdots < s_n}} \sigma(X_{s_0}, X_{s_1}, \cdots, X_{s_n})$$

は交演算で閉じている．従って (2)，(2)，(2) 及び Dynkin 族定理により

$$\mathscr{F}_s^X = \sigma\left(\bigcup_{\substack{n \geq 1 \\ s_0 < \cdots < s_n}} \sigma(X_{s_0}, X_{s_1} - X_{s_0}, \cdots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}}) \right) = \sigma\left(\bigcup_{\substack{n \geq 1 \\ s_0 < \cdots < s_n}} \sigma(X_{s_0}, X_{s_1}, \cdots, X_{s_n}) \right) \subset \mathscr{D}$$

が従い定理の主張を得る． ∎

2.1　The Consistency Theorem

Karatzas-Shreve より Bogachev の Measure Theory に載っている Kolmogorov の拡張定理の方が洗練された簡潔な証明になっているので頭に入りやすい．

定義 2.1.1 (K**-正則**).　S を位相空間とし，P を $(S, \mathscr{B}(S))$ 上の確率測度とする．$A \in \mathscr{B}(S)$ が P に関して K-正則であるとは，任意の $\epsilon > 0$ に対し或るコンパクト集合 $K \subset A$ が存在して

$$P(A - K) < \epsilon$$

が満たされることをいう．任意の $A \in \mathscr{B}(S)$ が P に関して K-正則であるとき，P は K-正則であるという．

完備可分距離空間上の Borel 確率測度の正則性

(S, d) を完備可分距離空間とするとき，$(S, \mathscr{B}(S))$ 上の任意の Borel 確率測度 P は次の意味で正則である:

$$P(A) = \inf\{\, P(G) \;:\; A \subset G,\ G \text{ は開集合} \,\} = \sup\{\, P(K) \;:\; K \subset A,\ K \text{ はコンパクト} \,\}, \quad (\forall A \in \mathscr{B}(S)).$$

証明.

第一段　S が P に関して K-正則であることを示す．S の可分性により稠密な部分集合 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する．

$$B_n^k := \left\{ x \in S \;:\; d(x, x_n) \leq \frac{1}{k} \right\}, \quad (n, k = 1, 2, \cdots)$$

とおけば，任意の k に対して

$$P\left(S - \bigcup_{n=1}^{N} B_n^k \right) \longrightarrow 0, \quad (N \longrightarrow \infty)$$

が満たされる．いま，任意に $\epsilon > 0$ を取れば各 k に対し或る $N_k \in \mathbf{N}$ が存在して

$$P\left(S - \bigcup_{n=1}^{N_k} B_n^k\right) < \frac{\epsilon}{2^{k+1}}$$

が成立し，

$$K := \bigcap_{k=1}^{\infty} \left[\bigcup_{n=1}^{N_k} B_n^k\right]$$

により K を定めれば，K は閉集合の積であるから閉，すなわち完備である．また

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{N_k} B_n^k, \quad (\forall k = 1, 2, \cdots)$$

より K は全有界部分集合である．K は相対距離に関して完備かつ全有界であるから相対位相に関してコンパクトであり，従って S のコンパクト部分集合である．そして次が成立する:

$$P(S - K) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \left[S - \bigcup_{n=1}^{N_k} B_n^k\right]\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P\left(S - \bigcup_{n=1}^{N_k} B_n^k\right) < \epsilon.$$

第二段　任意の $A \in \mathscr{B}(S)$ と $\epsilon > 0$ に対して，或る閉集合 F 及び開集合 G が存在して

$$F \subset A \subset G, \quad P(G - F) < \epsilon$$

を満たすことを示す．

$$\mathscr{B} := \{\, A \in \mathscr{B}(S) \ : \quad \text{任意の } \epsilon \text{ に対し上式を満たす開集合と閉集合が存在する．} \}$$

とおけば，$\mathscr{B}$ は $\mathscr{O}(S)$ を含む σ-加法族である．実際，任意の開集合 $G \neq \emptyset$ に対し

$$F_n := \left\{ x \in S \ : \quad d(x, G^c) \geq \frac{1}{n} \right\}, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

により閉集合系 $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ を定めれば $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = G$ が成り立つから

$$\mathscr{O}(S) \subset \mathscr{B}$$

が従う．また前段の結果より $S \in \mathscr{B}$ となり，かつ

$$F \subset A \subset G \quad \Rightarrow \quad G^c \subset A^c \subset F^c$$

より $\mathscr{B}$ は補演算で閉じている．更に $A_n \in \mathscr{B}, (n = 1, 2, \cdots)$ を取れば，任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$F_n \subset A_n \subset G_n, \quad P(G_n - F_n) < \frac{\epsilon}{2^{n+1}}$$

を満たす閉集合 F_n と開集合 G_n が存在し，

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n - \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \leq P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n - F_n)\right) < \epsilon$$

が成り立つから十分大きな $N \in \mathbf{N}$ に対して

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n - \bigcup_{n=1}^{N} F_n\right) < \epsilon$$

となる．$\bigcup_{n=1}^{N} F_n$ は閉集合であり $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ は開集合であるから $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{B}$ が従う．

第三段　任意の $A \in \mathscr{B}(S)$ と $\epsilon > 0$ に対し，或る閉集合 F と開集合 G 及びコンパクト集合 K が存在して

$$F \subset A \subset G, \quad P(G - F) < \frac{\epsilon}{2}, \quad P(S - K) < \frac{\epsilon}{2}$$

を満たす．特に $F \cap K$ はコンパクトであり，このとき $F \cap K \subset A \subset G$ かつ

$$P(G - F \cap K) \leq P(G - F) + P(G - K) \leq P(G - F) + P(S - K) < \epsilon$$

が成立する． ∎

T を空でない集合とし，任意の $t \in T$ に対して可測空間 $(\Omega_t, \mathscr{B}_t)$ が定まっているする．このとき任意の空でない有限部分集合 $\Lambda \subset T$ に対して

$$\Omega_\Lambda \coloneqq \prod_{t \in \Lambda} \Omega_t, \quad \mathscr{B}_\Lambda \coloneqq \bigotimes_{t \in \Lambda} \mathscr{B}_t$$

により可測空間 $(\Omega_\Lambda, \mathscr{B}_\Lambda)$ を定める．ただし $\Lambda = \{t\}$ の場合は $\Omega_{\{t\}} = \Omega_t$, $\mathscr{B}_{\{t\}} = \mathscr{B}_t$ とする．また

$$\Omega \coloneqq \prod_{t \in T} \Omega_t, \quad \mathscr{B}_\Lambda \coloneqq \bigotimes_{t \in T} \mathscr{B}_t$$

とおく．任意の部分集合 $\Lambda \subset \Lambda'$ に対し，$\Omega_{\Lambda'}$ から Ω_Λ への射影を $\pi_{\Lambda',\Lambda}$ と書き，特に $\pi_{T,\Lambda}$ を π_Λ と書く．

Kolmogorov の拡張定理

任意の有限部分集合 $\Lambda \subset T$ について，$(\Omega_\Lambda, \mathscr{B}_\Lambda)$ 上に確率測度 P_Λ が定まっていて，確率測度の族 $(P_\Lambda)_{\Lambda \subset T:\mathrm{finite}}$ が次の整合性条件を満たしていると仮定する:

$$P_{\Lambda'} \circ \pi_{\Lambda',\Lambda}^{-1} = P_\Lambda, \quad (\Lambda \subset \Lambda').$$

このとき，任意の $t \in T$ に対し近似的コンパクトクラス $\mathcal{K}_t \subset \mathscr{B}_t$ が存在するなら，$(\Omega, \mathscr{B})$ 上に次を満たす確率測度 P がただ一つ存在する:

$$P \circ \pi_\Lambda^{-1} = P_\Lambda, \quad (\forall \Lambda : 有限\ ).$$

証明.

第一段　$\mathscr{B}$ を生成する加法族を

$$\mathscr{R} \coloneqq \left\{ \pi_\Lambda^{-1}(B) \ : \quad B \in \mathscr{B}_\Lambda,\ \Lambda \subset T : 有限集合 \right\}$$

とおき，$\mathscr{R}$ 上の有限加法的測度 μ を

$$\mu\left(\pi_\Lambda^{-1}(B)\right) \coloneqq P_\Lambda(B), \quad (\forall \pi_\Lambda^{-1}(B) \in \mathscr{R})$$

により定める．実際この μ は well-defined であり加法性を持つ．

第二段　μ が well-defined であることを示す．

$$\pi_\Lambda^{-1}(B) = \pi_{\Lambda'}^{-1}(B')$$

であるとき，$\Lambda'' \coloneqq \Lambda \cup \Lambda'$ とおけば

$$\pi_{\Lambda''}^{-1}\left(\pi_{\Lambda'',\Lambda}^{-1}(B)\right) = \pi_\Lambda^{-1}(B) = \pi_{\Lambda'}^{-1}(B') = \pi_{\Lambda''}^{-1}\left(\pi_{\Lambda'',\Lambda'}^{-1}(B')\right)$$

が成り立つから $\pi^{-1}_{\Lambda'',\Lambda}(B) = \pi^{-1}_{\Lambda'',\Lambda'}(B')$ が従い (全射の性質)，整合性条件より

$$P_\Lambda(B) = P_{\Lambda''} \circ \pi^{-1}_{\Lambda'',\Lambda}(B) = P_{\Lambda''} \circ \pi^{-1}_{\Lambda'',\Lambda'}(B') = P_{\Lambda'}(B')$$

が満たされ $\mu(\pi^{-1}_\Lambda(B))$ の一意性を得る．

第三段　μ の加法性を示す．

$$\pi^{-1}_{\Lambda_1}(B_1) \cap \pi^{-1}_{\Lambda_2}(B_2) = \emptyset$$

であるとき，$\Lambda_3 \coloneqq \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ とおけば

$$\emptyset = \pi^{-1}_{\Lambda_3}\left(\pi^{-1}_{\Lambda_3,\Lambda_1}(B_1)\right) \cap \pi_{\Lambda_3}\left(\pi^{-1}_{\Lambda_3,\Lambda_2}(B_2)\right) = \pi^{-1}_{\Lambda_3}\left(\pi^{-1}_{\Lambda_3,\Lambda_1}(B_1) \cap \pi^{-1}_{\Lambda_3,\Lambda_2}(B_2)\right)$$

となるから $\pi^{-1}_{\Lambda_3,\Lambda_1}(B_1) \cap \pi^{-1}_{\Lambda_3,\Lambda_2}(B_2) = \emptyset$ が従い (全射の性質),

$$\begin{aligned}
\mu\left(\pi^{-1}_{\Lambda_1}(B_1) \cup \pi^{-1}_{\Lambda_2}(B_2)\right) &= \mu\left[\pi^{-1}_{\Lambda_3}\left(\pi^{-1}_{\Lambda_3,\Lambda_1}(B_1)\right) \cup \pi_{\Lambda_3}\left(\pi^{-1}_{\Lambda_3,\Lambda_2}(B_2)\right)\right] \\
&= \mu\left[\pi^{-1}_{\Lambda_3}\left(\pi^{-1}_{\Lambda_3,\Lambda_1}(B_1) \cup \pi^{-1}_{\Lambda_3,\Lambda_2}(B_2)\right)\right] \\
&= P_{\Lambda_3}\left(\pi^{-1}_{\Lambda_3,\Lambda_1}(B_1) \cup \pi^{-1}_{\Lambda_3,\Lambda_2}(B_2)\right) \\
&= P_{\Lambda_3}\left(\pi^{-1}_{\Lambda_3,\Lambda_1}(B_1)\right) + P_{\Lambda_3}\left(\pi^{-1}_{\Lambda_3,\Lambda_2}(B_2)\right) \\
&= \mu\left(\pi^{-1}_{\Lambda_1}(B_1)\right) + \mu\left(\pi^{-1}_{\Lambda_2}(B_2)\right)
\end{aligned}$$

が成立する．

2.2 The Kolmogorov-Čentsov Theorem

Exercise 2.7

The only $\mathscr{B}((\mathbf{R}^d)^{[0,\infty)})$-measurable set contained in $C[0,\infty)^d$ is the empty set.

証明.

第一段　$\mathscr{B}((\mathbf{R}^d)^{[0,\infty)}) = \sigma(B_t;\ 0 \leq t < \infty)$ が成り立つことを示す．先ず，任意の $C \in \mathscr{C}$ は

$$\begin{aligned}
C &= \left\{\omega \in (\mathbf{R}^d)^{[0,\infty)} \quad : \quad (\omega(t_1),\cdots,\omega(t_n)) \in A\right\} \\
&= \left\{\omega \in (\mathbf{R}^d)^{[0,\infty)} \quad : \quad (B_{t_1}(\omega),\cdots,B_{t_n}(\omega)) \in A\right\}, \quad (A \in \mathscr{B}((\mathbf{R}^d)^n))
\end{aligned}$$

の形で表されるから $\mathscr{C} \subset \sigma(B_t;\ 0 \leq t < \infty)$ が従い $\mathscr{B}((\mathbf{R}^d)^{[0,\infty)}) \subset \sigma(B_t;\ 0 \leq t < \infty)$ を得る．逆に

$$\sigma(B_t) \subset \mathscr{C}, \quad (\forall t \geq 0)$$

より $\mathscr{B}((\mathbf{R}^d)^{[0,\infty)}) \supset \sigma(B_t;\ 0 \leq t < \infty)$ も成立し $\mathscr{B}((\mathbf{R}^d)^{[0,\infty)}) = \sigma(B_t;\ 0 \leq t < \infty)$ が出る．

第二段　高々可算集合 $S = \{t_1, t_2, \cdots\} \subset [0,\infty)$ に対して

$$\mathcal{E}_S \coloneqq \left\{\left\{\omega \in (\mathbf{R}^d)^{[0,\infty)} \quad : \quad (\omega(t_1),\omega(t_2),\cdots) \in A\right\} \quad : \quad A \in \mathscr{B}((\mathbf{R}^d)^{\#S})\right\}$$

とおけば[*1]，座標過程 B は $(\omega(t_1),\omega(t_2),\cdots)=(B_{t_1}(\omega),B_{t_2}(\omega),\cdots)$ を満たすから

$$\mathcal{E}_S=\left\{\ \left\{(B_{t_1},B_{t_2},\cdots)\in A\right\}\ :\quad A\in\mathscr{B}((\mathbf{R}^d)^{\#S})\ \right\}=:\mathcal{F}^B_S$$

が成立する．従って第一章の Lemma3 for Exercise 1.8 と前段の結果より

$$\mathscr{B}((\mathbf{R}^d)^{[0,\infty)})=\sigma(B_t;\ 0\leq t<\infty)=\mathcal{F}^B_{[0,\infty)}=\bigcup_{S\subset[0,\infty):at\ most\ countable}\mathcal{F}^B_S$$
$$=\bigcup_{S\subset[0,\infty):at\ most\ countable}\mathcal{E}_S$$

を得る．すなわち，$\mathscr{B}((\mathbf{R}^d)^{[0,\infty)})$ の任意の元は $\left\{\ \omega\in(\mathbf{R}^d)^{[0,\infty)}\ :\quad(\omega(t_1),\omega(t_2),\cdots)\in A\ \right\}$ の形で表現され，$A\neq\emptyset$ ならば $\left\{\ \omega\in(\mathbf{R}^d)^{[0,\infty)}\ :\quad(\omega(t_1),\omega(t_2),\cdots)\in A\ \right\}\not\subset C[0,\infty)^d$ となり主張が従う． ∎

Theorem 2.8 修正

Suppose that a process $X=\{\ X_t\ :\quad 0\leq t\leq T\ \}$ on a probability space $(\Omega,\mathscr{F},P)$ satisfies the condition

$$E|X_t-X_s|^\alpha\leq C|t-s|^{1+\beta},\quad 0\leq s,t\leq T,$$

for some positive constants α,β, and C. Then there exists a continuous modification $\tilde{X}=\left\{\ \tilde{X}_t\ :\quad 0\leq t\leq T\ \right\}$ of X, which is locally Hölder-continuous with exponent γ for every $\gamma\in(0,\beta/\alpha)$. More precisely, for every $\gamma\in(0,\beta/\alpha)$,

$$\sup_{\substack{0<|t-s|<h(\omega)\\ s,t\in[0,T]}}\frac{\left|\tilde{X}_t(\omega)-\tilde{X}_s(\omega)\right|}{|t-s|^\gamma}\leq\frac{2}{1-2^{-\gamma}},\quad\forall\omega\in\Omega^*,$$

for some $\Omega^*\in\mathscr{F}$ with $P(\Omega^*)=1$ and positive random variable h, where Ω^* and h depend on γ.

なぜならば，式 (2.8) において P の中身が Ω^* に一致するかどうかわからないためである．可測集合でなければ P で測ることはできない．ただし今の場合は $(\Omega,\mathscr{F},P)$ が完備確率空間ならば式 (2.8) の表記で問題ない．

Theorem 2.8 memo

証明中の式 (2.10) 直後の “where $n^*(\omega)$ is a positive, integer-valued random variable” について．

証明． $\mathbf{N}:=\{1,2,\cdots\}$ とおき，$\mathbf{N}$ の冪集合を $2^{\mathbf{N}}$ で表せば，$(\mathbf{N},2^{\mathbf{N}})$ は可測空間となる．示せばよいのは n^* の $\mathscr{F}/2^{\mathbf{N}}$-可測性である．ただし，$n^*$ は証明文中において well-defined でないため，明確な意味を持たせる必要がある．

$$A_0:=\Omega,\quad A_n:=\left\{\omega\in\Omega\ :\quad\max_{1\leq k\leq 2^n}\left|X_{k/2^n}(\omega)-X_{(k-1)/2^n}(\omega)\right|\geq 2^{-\gamma n}\right\},\quad(n=1,2,\cdots)$$

とおくとき，Ω^* は

$$\Omega^*:=\bigcup_{\ell=1}^\infty\bigcap_{n=\ell}^\infty A_n^c$$

により定まる集合である．任意の $\omega\in\Omega^*$ に対して或る $\ell\geq 1$ が存在し，

$$\max_{1\leq k\leq 2^n}\left|X_{k/2^n}(\omega)-X_{(k-1)/2^n}(\omega)\right|<2^{-\gamma n},\quad(\forall n\geq\ell)$$

[*1] S が可算無限なら $(\mathbf{R}^d)^{\#S}=\mathbf{R}^\infty$．

を満たす．このような ℓ のうち最小なものを $n^*(\omega)$ と定めれば

$$n^{*-1}(\ell) = \left\{ \bigcap_{n=\ell}^{\infty} A_n^c \right\} \cap \left\{ \bigcap_{n=\ell-1}^{\infty} A_n^c \right\}^c, \quad (\ell = 1, 2, \cdots)$$

が成立し n^* の $\mathscr{F}/2^{\mathbf{N}}$-可測性が従う． ∎

確率変数 h について，厳密には

$$h(\omega) := \begin{cases} 2^{-n^*(\omega)}, & (\omega \in \Omega^*), \\ 0, & (\omega \in \Omega \backslash \Omega^*) \end{cases}$$

とおけばよい．

Theorem 2.8 memo

2.3 The Space $C[0,\infty)$, Weak Convergence, and the Wiener Measure

Problem 4.1

Show that ρ defined by (4.1) is a metric on $C[0,\infty)^d$ and, under ρ, $C[0,\infty)^d$ is a complete, separable metric space.

以下，$C[0,\infty)^d$ には ρ により広義一様収束位相を導入する．

証明. 付録の定理 A.15.4 により従う． ∎

Problem 4.2

Let $\mathscr{C}(\mathscr{C}_t)$ be the collection of finite-dimensional cylinder sets of the form (2.1); i.e.,

$$C = \left\{ \omega \in C[0,\infty)^d \quad : \quad (\omega(t_1), \cdots, \omega(t_n)) \in A \right\}; \quad n \geq 1,\ A \in \mathscr{B}(\mathbf{R}^n),$$

where, for all $i = 1, \cdots, n$, $t_i \in [0,\infty)$ (respectively, $t_i \in [0,t]$). Denote by $\mathscr{G}(\mathscr{G}_t)$ the smallest σ-field containing $\mathscr{C}(\mathscr{C}_t)$. Show that $\mathscr{G} = \mathscr{B}(C[0,\infty)^d)$, the Borel σ-field generated by the open sets in $C[0,\infty)^d$, and that $\mathscr{G}_t = \varphi_t^{-1}\left(\mathscr{B}(C[0,\infty)^d)\right) =: \mathscr{B}_t\left(C[0,\infty)^d\right)$, where $\varphi_t : C[0,\infty)^d \longrightarrow C[0,\infty)^d$ is the mapping $(\varphi_t\omega)(s) = \omega(t \wedge s);\ 0 \leq s < \infty$.

証明.

第一段　$w_0 \in C[0,\infty)^d$ とする．任意に $w \in C[0,\infty)^d$ を取れば，w の連続性により $d(w_0, w)$ の各項について

$$\sup_{t \leq n} |w_0(t) - w(t)| = \sup_{r \in [0,n] \cap \mathbf{Q}} |w_0(r) - w(r)| \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

とできる．いま，任意に実数 $\alpha \in \mathbf{R}$ を取れば

$$\left\{ w \in C[0,\infty)^d \ : \ \sup_{r \in [0,n] \cap \mathbf{Q}} |w_0(r) - w(r)| \leq \alpha \right\} = \bigcap_{r \in [0,n] \cap \mathbf{Q}} \left\{ w \in C[0,\infty)^d \ : \ |w_0(r) - w(r)| \leq \alpha \right\}$$

が成立し，右辺の各集合は $\mathscr{C}$ に属するから 左辺 $\in \sigma(\mathscr{C})$ となる．従って

$$\psi_n : C[0,\infty)^d \ni w \longmapsto \sup_{r \in [0,n] \cap \mathbf{Q}} |w_0(r) - w(r)| \in \mathbf{R}, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

で定める ψ_n は可測 $\sigma(\mathscr{C})/\mathscr{B}(\mathbf{R})$ である．$x \longmapsto x \wedge 1$ の連続性より $\psi_n \wedge 1$ も $\sigma(\mathscr{C})/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測性を持ち，

$$d(w_0, w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} (\psi_n(w) \wedge 1)$$

により $C[0,\infty)^d \ni w \longmapsto d(w_0, w) \in \mathbf{R}$ の $\sigma(\mathscr{C})/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測性が出るから，任意の $\epsilon > 0$ に対する球について

$$\left\{ w \in C[0,\infty)^d \ : \ d(w_0, w) < \epsilon \right\} \in \sigma(\mathscr{C})$$

が成り立つ．$C[0,\infty)^d$ は第二可算公理を満たし，可算基底は上式の形の球で構成されるから，$\mathscr{O}(C[0,\infty)^d) \subset \sigma(\mathscr{C})$ が従い $\mathscr{B}(C[0,\infty)^d) \subset \sigma(\mathscr{C})$ を得る．次に逆の包含関係を示す．いま任意に $n \in \mathbf{Z}_+$ と $t_1 < \cdots < t_n$ を選んで

$$\phi : C[0,\infty)^d \ni w \longmapsto (w(t_1), \cdots, w(t_n)) \in (\mathbf{R}^d)^n$$

で定める写像は連続である．実際，任意の一点 w_0 での連続性を考えると，任意の $\epsilon > 0$ に対して $t_n \leq N$ を満たす $N \in \mathbf{N}$ を取れば，$d(w_0, w) < \epsilon/(n2^N)$ ならば $\sum_{i=1}^n |w_0(t_i) - w(t_i)| < \epsilon$ が成り立つ．よって ϕ は w_0 で連続であり

$$\mathscr{B}((\mathbf{R}^d)^n) \subset \left\{ A \in \mathscr{B}((\mathbf{R}^d)^n) \ : \ \phi^{-1}(A) \in \mathscr{B}(C[0,\infty)^d) \right\}$$

が出る．任意の $C \in \mathscr{C}$ は，$n \in \mathbf{N}$ と時点 $t_1 < \cdots < t_n$ によって決まる写像 ϕ によって $C = \phi^{-1}(B)$ $(\exists B \in \mathscr{B}((\mathbf{R}^d)^n))$ と表現できるから，$\mathscr{C} \subset \mathscr{B}(C[0,\infty)^d)$ が成り立ち $\sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{B}(C[0,\infty)^d)$ が得られる．

第二段　$t \geq 0$ とする．$C[0,\infty)^d$ の位相を $\mathscr{O}(C[0,\infty)^d)$ と書けば

$$\varphi_t^{-1}\left(\mathscr{B}(C[0,\infty)^d)\right) = \sigma\left(\left\{ \varphi_t^{-1}(O) \ : \ O \in \mathscr{O}(C[0,\infty)^d) \right\}\right)$$

が成り立つ．任意の $\alpha \in \mathbf{R}$ と $r \geq 0$ に対して

$$\begin{aligned} &\left\{ w \in C[0,\infty)^d \ : \ |w_0(r) - (\varphi_t w)(r)| \leq \alpha \right\} \\ &= \begin{cases} \left\{ w \in C[0,\infty)^d \ : \ |w_0(r) - (\varphi_t w)(r)| \leq \alpha \right\}, & (r \leq t), \\ \left\{ w \in C[0,\infty)^d \ : \ |w_0(r) - (\varphi_t w)(t)| \leq \alpha \right\}, & (r > t), \end{cases} \in \mathscr{C}_t \end{aligned}$$

となるから

$$\psi_n^t : C[0,\infty)^d \ni w \longmapsto \sup_{r \in [0,n] \cap \mathbf{Q}} |w_0(r) - (\varphi_t w)(r)| \in \mathbf{R}, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

で定める ψ_n^t は可測 $\sigma(\mathscr{C}_t)/\mathscr{B}(\mathbf{R})$ である．$x \longmapsto x \wedge 1$ の連続性より $\psi_n^t \wedge 1$ も $\sigma(\mathscr{C}_t)/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測性を持ち，

$$d(w_0, \varphi_t w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\psi_n^t(w) \wedge 1\right)$$

により $C[0,\infty)^d \ni w \longmapsto d(w_0, \varphi_t w) \in \mathbf{R}$ の $\sigma(\mathscr{C}_t)/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測性が出るから，任意の $\epsilon > 0$ に対する球について

$$\left\{ w \in C[0,\infty)^d \quad : \quad d(w_0, \varphi_t w) < \epsilon \right\} \in \sigma(\mathscr{C}_t)$$

が成り立つ．特に

$$\varphi_t^{-1}\left(\left\{ w \in C[0,\infty)^d \quad : \quad d(w_0, w) < \epsilon \right\}\right) = \left\{ w \in C[0,\infty)^d \quad : \quad d(w_0, \varphi_t w) < \epsilon \right\}$$

が満たされ，$C[0,\infty)^d$ の第二可算性より

$$\varphi_t^{-1}(O) \in \sigma(\mathscr{C}_t), \quad (\forall O \in \mathscr{O}(C[0,\infty)^d))$$

が従う．ゆえに $\varphi_t^{-1}\left(\mathscr{B}(C[0,\infty)^d)\right) \subset \sigma(\mathscr{C}_t)$ となる． ∎

連続関数の空間に値を取る確率変数

$\omega \in \Omega$ に $\mathbf{R}^d$ 値連続確率過程 X のパスを対応させる写像

$$X_\bullet : \Omega \ni \omega \longmapsto (t \longmapsto X_t(\omega)), \quad (t \geq 0)$$

は可測 $\mathcal{F}/\mathscr{B}(C[0,\infty)^d)$ である．

証明． 任意に $C \in \mathscr{C}$ を取れば $C = \left\{ w \in C[0,\infty)^d \quad : \quad (w(t_1), \cdots, w(t_n)) \in B \right\}$, $(B \in \mathscr{B}((\mathbf{R}^d)^n))$ と表されるから

$$\{ \omega \in \Omega \quad : \quad X_\bullet(\omega) \in C \} = \left\{ \omega \in \Omega \quad : \quad \left(X_{t_1}(\omega), \cdots, X_{t_n}(\omega)\right) \in B \right\}$$

が成り立つ．右辺は $\mathcal{F}$ に属するから

$$\mathscr{C} \subset \left\{ C \in \sigma(\mathscr{C}) \quad : \quad (X_\bullet)^{-1}(C) \in \mathcal{F} \right\}$$

が従い，右辺は σ 加法族であるから $X_\bullet$ の $\mathcal{F}/\sigma(\mathscr{C})$-可測性，つまり $\mathcal{F}/\mathscr{B}(C[0,\infty)^d)$-可測性が出る． ∎

2.4 Weak Convergence

いま，X を局所コンパクト Hausdorff 空間として

$$C_0(X) := \left\{ f : X \longrightarrow \mathbf{C} \quad : \quad \text{連続かつ，任意の } \epsilon > 0 \text{ に対し } \overline{\{ x \in X \quad : \quad |f(x)| \geq \epsilon \}} \text{ がコンパクト} \right\}$$

とおく．この $C_0(X)$ はノルム $\|f\|_{C_0(X)} := \sup_{x \in X} |f(x)|$ により複素 Banach 空間となる．また $(X, \mathscr{B}(X))$ 上の複素測度 μ について，その総変動 $|\mu|$ が正則測度であるとき μ は正則であるという．X 上の正則複素測度の全体を $RM(X)$ と書き，総変動ノルム $\|\mu\|_{RM(X)} := |\mu|(X)$ によりノルム位相を導入する．任意の複素測度 μ に対し

$$\Phi_\mu(f) := \int_X f(x)\, \mu(dx)$$

により $C_0(X)$ 上の有界線型汎関数 Φ_μ が定まる．

定理 2.4.1 (Riesz の表現定理).　X を局所コンパクト Hausdorff 空間とする．$C_0(X)$ に $\|\cdot\|_{C_0(X)}$ で位相を入れるとき，共役空間 $C_0(X)^*$ と書く．このとき $C_0(X)^*$ と $RM(X)$ は

$$\Phi : RM(X) \ni \mu \longrightarrow \Phi_\mu \in C_0(X)$$

で定める対応関係 Φ により Banach 空間として等長同型となる．

$C_0(X)^*$ に汎弱位相を入れるとき，汎関数列 $\left(\Phi_{\mu_n}\right)_{n=1}^\infty$ が Φ_μ に汎弱収束することと

$$\Phi_{\mu_n}(f) \longrightarrow \Phi_\mu(f)\ (n \longrightarrow \infty), \quad (\forall f \in C_0(X))$$

は同値になる．$C_0(X)^*$ の汎弱位相の Φ による逆像位相を $RM(X)$ の弱位相と定めれば，Φ は弱位相に関して位相同型となる．このとき，$(\mu_n)_{n=1}^\infty$ が μ に弱収束することは $\left(\Phi_{\mu_n}\right)_{n=1}^\infty$ が Φ_μ に汎弱収束することと同値になり，すなわち

$$\int_X f(x)\ \mu_n(dx) \longrightarrow \int_X f(x)\ \mu(dx)\ (n \longrightarrow \infty), \quad (\forall f \in C_0(X))$$

と同値になる．X 上の正則な確率測度の全体を $\mathscr{P}(X)$ と書けば $\mathscr{P}(X) \subset RM(X)$ となり，正則確率測度の列 $(P_n)_{n=1}^\infty$ が $P \in \mathscr{P}(X)$ に弱収束することは

$$\int_X f(x)\ P_n(dx) \longrightarrow \int_X f(x)\ P(dx)\ (n \longrightarrow \infty), \quad (\forall f \in C_0(X))$$

と同値になる．

Definition 4.3

It follows, in particular, that the weak limit P is a probability measure, and that it is unique.

証明．　$f \equiv 1$ として

$$P(S) = \lim_{n\to\infty} P_n(S) = 1$$

が従うから P は確率測度である．また任意の有界連続関数 $f : S \longrightarrow \mathbf{R}$ に対し

$$\int_S f\ dP = \int_S f\ dQ$$

が成り立つとき，任意の閉集合 $A \subset S$ に対して

$$f_k(s) \coloneqq \frac{1}{1 + kd(s,A)}, \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

と定めれば $\lim_{k\to\infty} f_k = \mathbb{1}_A$(各点収束) が満たされるから，Lebesgue の収束定理より

$$P(A) = \lim_{k\to\infty} \int_S f_k\ dP = \lim_{k\to\infty} \int_S f_k\ dQ = Q(A)$$

となり，測度の一致の定理より $P = Q$ が得られる．すなわち弱極限は一意である． ∎

lemma: change of variables for expectation

$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間，$(S, \mathscr{S})$ を可測空間とする．このとき任意の有界 $\mathscr{S}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測関数 f と $\mathscr{F}/\mathscr{S}$-可測写像 X に対して

$$\int_\Omega f(X)\, dP = \int_S f\, dPX^{-1}$$

が成立する．

証明．　任意の $A \in \mathscr{S}$ に対して

$$\int_S \mathbb{1}_A dPX^{-1} = P(X^{-1}(A)) = \int_\Omega \mathbb{1}_{X^{-1}(A)}\, dP = \int_\Omega \mathbb{1}_A(X)\, dP$$

が成り立つから，任意の $\mathscr{S}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測単関数 g に対し

$$\int_\Omega g(X)\, dP = \int_S g\, dPX^{-1}$$

となる．f が有界なら一様有界な単関数で近似できるので，Lebesgue の収束定理より

$$\int_\Omega f(X)\, dP = \int_S f\, dPX^{-1}$$

が出る．■

Definition 4.4

Equivalently, $X_n \xrightarrow{\mathscr{D}} X$ if and only if

$$\lim_{n\to\infty} E_n f(X_n) = Ef(X)$$

for every bounded, continuous real-valued function f on S, where E_n and E denote expectations with respect to P_n and P, respectively.

証明．　任意の有界実連続関数 $f : S \longrightarrow \mathbf{R}$ に対し

$$\int_\Omega f(X_n)\, dP_n = \int_S f\, dP_n X_n^{-1}, \quad \int_\Omega f(X)\, dP = \int_S f\, dPX^{-1},$$

が成り立つから，$P_n X_n^{-1}$ が PX^{-1} に弱収束することと $\lim_{n\to\infty} E_n f(X_n) = Ef(X)$ は同値である．■

Problem 4.5

Suppose $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ is a sequence of random variables taking values in a metric space (S_1, ρ_1) and converging in distribution to X. Suppose (S_2, ρ_2) is another metric space, and $\varphi : S_1 \longrightarrow S_2$ is continuous. Show that $Y_n \coloneqq \varphi(X_n)$ converges in distribution to $Y \coloneqq \varphi(X)$.

証明.　任意の有界実連続関数 $f : S_2 \longrightarrow \mathbf{R}$ に対し $f \circ \varphi$ は S_1 上の有界実連続関数であるから

$$\begin{aligned}\int_{S_2} f \, dPY_n^{-1} &= \int_{\Omega} f(Y_n) \, dP = \int_{\Omega} f(\varphi(X_n)) \, dP = \int_{S_1} f \circ \varphi \, dPX_n^{-1} \\ &\longrightarrow \int_{S_1} f \circ \varphi \, dPX^{-1} = \int_{S_2} f \, dPY^{-1} \quad (n \longrightarrow \infty)\end{aligned}$$

が成立する. ∎

付録 A

A.1　集合メモ

A.1.1　Dynkin 族定理

定義 A.1.1 (乗法族・Dynkin 族).　集合 X の部分集合の族 $\mathscr{A}$ が任意の $A, B \in \mathscr{A}$ に対し $A \cap B \in \mathscr{A}$ を満たすとき $\mathscr{A}$ を X 上の乗法族 (π-system) という．X の部分集合の族 $\mathscr{D}$ が

(D1)　$X \in \mathscr{D}$,

(D2)　$A, B \in \mathscr{D},\ A \subset B \quad \Longrightarrow \quad B \backslash A \in \mathscr{D}$,

(D3)　$\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{D},\ A_n \cap A_m = \emptyset\ (n \neq m) \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{D}$,

を満たすとき，$\mathscr{D}$ を X 上の Dynkin 族 (Dynkin system) という．

定義 A.1.2 (Dynkin 族定理).　集合 X 上の乗法族 $\mathscr{A}$ に対し，$\mathscr{A}$ を含む最小の Dynkin 族を $\delta(\mathscr{A})$ と書くとき，

$$\delta(\mathscr{A}) = \sigma(\mathscr{A}).$$

証明.

第一段　$\delta(\mathscr{C})$ が交演算で閉じていれば $\delta(\mathscr{C})$ は σ-加法族となる．実際任意の $A \in \delta(\mathscr{A})$ に対し

$$A^c = X \backslash A \in \delta(\mathscr{A})$$

となるから，$\delta(\mathscr{C})$ が交演算で閉じていれば任意の $A_n \in \delta(\mathscr{C})$ $(n = 1, 2, \cdots)$ に対し

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_{n-1}^c \cap A_n \in \delta(\mathscr{C})$$

が従う．σ-加法族は Dynkin 族であるから $\sigma(\mathscr{C}) \subset \delta(\mathscr{C})$ も成り立ち $\sigma(\mathscr{C}) = \delta(\mathscr{C})$ が得られる．

第二段　$\delta(\mathscr{C})$ が交演算について閉じていることを示す．いま，

$$\mathscr{D}_1 \coloneqq \{\ B \in \delta(\mathscr{C}) \ :\ \ A \cap B \in \delta(\mathscr{C}),\ \forall A \in \mathscr{C}\ \}$$

により定める $\mathscr{D}_1$ は Dynkin 族であり $\mathscr{C}$ を含むから

$$\delta(\mathscr{C}) \subset \mathscr{D}_1$$

が成立する．従って

$$\mathscr{D}_2 \coloneqq \{\ B \in \delta(\mathscr{C}) \ : \quad A \cap B \in \delta(\mathscr{C}),\ \forall A \in \delta(\mathscr{C})\ \}$$

により Dynkin 族 $\mathscr{D}_2$ を定めれば，$\mathscr{C} \subset \mathscr{D}_2$ が満たされ

$$\delta(\mathscr{C}) \subset \mathscr{D}_2$$

が得られる．よって $\delta(\mathscr{C})$ は交演算について閉じている． ∎

定理 A.1.3. 集合 X の部分集合族 $\mathscr{D}$ がの定義 A.1.1 の (D1),(D2) を満たしているとき，$\mathscr{D}$ が (D3) を満たすことと $\mathscr{D}$ が増大列の可算和で閉じることは同値である．

証明. $\mathscr{D}$ が可算直和について閉じているとする．このとき単調増大列 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ を取り

$$B_1 \coloneqq A_1, \quad B_n \coloneqq A_n \backslash A_{n-1}, \quad (n \geq 2)$$

とおけば (D2) より $B_n \in \mathscr{D}$, $(\forall n \geq 1)$ が満たされ，$n \neq m$ なら $B_n \cap B_m = \emptyset$ となるから

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathscr{D}$$

が成立する．逆に $\mathscr{D}$ が増大列の可算和で閉じているとする．(D1)(D2) より互いに素な $A, B \in \mathscr{D}$ に対し $A^c \in \mathscr{D}$ 及び $A^c \cap B^c = A^c \backslash B \in \mathscr{D}$ が成り立つから，$\mathscr{D}$ の互いに素な集合列 $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ を取れば

$$B_1^c \cap B_2^c \cap \cdots \cap B_n^c = \left(\cdots \left(\left(B_1^c \cap B_2^c \right) \cap B_3^c \right) \cap \cdots \cap B_{n-1}^c \right) \cap B_n^c \in \mathscr{D}, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

が得られる．よって

$$D_n \coloneqq \bigcup_{i=1}^{n} B_i = X \backslash \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i^c \right), \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

により $\mathscr{D}$ の単調増大列 $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ を定めれば

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathscr{D}$$

が成立する． ∎

A.1.2 上限下限

定理 A.1.4 (上限の冪と冪の上限). 任意の空でない $S \subset [0, \infty)$ と $t > 0$ に対し次が成立する:

$$(\sup S)^t = \sup \left\{\ s^t \ : \quad s \in S\ \right\}.$$

証明. $S = \{0\}$ なら両辺 0 で一致するので，S は $\{0\}$ より真に大きいとする．このとき任意の $s \in S$ に対し $s^t \leq (\sup S)^t$ となるから $\sup\left\{ s^t \ : \ s \in S \right\} \leq (\sup S)^t$ が従う．また任意の $(\sup S)^t > \alpha > 0$ に対し $s > \alpha^{1/t}$ を満たす $s \in S$ が存在し $(\sup S)^t \geq s^t > \alpha$ となるから $\sup\left\{ s^t \ : \ s \in S \right\} = (\sup S)^t$ が得られる． ∎

A.1.3 写像

定義 A.1.5 (写像).

定義 A.1.6 (族・系). x を集合 A から集合 B への写像とするとき，x を B の元の集まりと見做したものを "A を添数集合 (index set) とする B の族 (family) (或は系 (collection))" と呼び，$x(a)$ の代わりに x_a として (x_a) や $(x_a)_{a\in A}$ と書き，A の元が具体的に書き並べられるときは $(x_{a_1}, x_{a_2}, \cdots)$ などとも表記する．B の元の指す対象によっては族を点族，集合族 (系)，或は関数族 (系) などと呼ぶ.

族 $(x_a)_{a\in A}$ は写像 x そのものと同一であるが，丸括弧を中括弧に替えた $\{x_a\}_{a\in A}$ は B の部分集合 $\{ x_a \ : \ a \in A \}$ の別の記法であり，$(x_a)_{a\in A}$ とは区別する．実際，族と集合の大きな違いは，$(x_a)_{a\in A}$ の表記では重複する元も別個の存在と認めるのに対し，$\{x_a\}_{a\in A}$ の表記では重複する元は区別しないことである．例えば $A = \mathbf{N}$, $B = \mathbf{R}$ に対して

$$x_n := \begin{cases} 1 & (n : \text{奇数}) \\ -1 & (n : \text{偶数}) \end{cases}$$

と定めるとき，$(x_n) = (1, -1, 1, -1, \cdots)$ と書ける一方で $\{x_n\} = \{-1, 1\}$ となる.

定理 A.1.7 (全射・単射・像・原像). f を集合 A から集合 B への写像とするとき，

(1) 任意の $U \subset A$ に対し $f^{-1}(f(U)) \supset U$ が成立し，特に f が単射なら $f^{-1}(f(U)) = U$ となる.

(2) 任意の $V \subset B$ に対し $f\left(f^{-1}(V)\right) \subset V$ が成立し，特に f が全射なら $f\left(f^{-1}(V)\right) = V$ となる.

証明.

(1) 任意の $x \in U$ で $f(x) \in f(U)$ となるから $x \in f^{-1}(f(U))$ が成立する．f が単射であれば，任意の $x \in f^{-1}(f(U))$ に対し $f(x) \in f(U)$ となるから或る $x_1 \in U$ で $f(x) = f(x_1)$ となり，単射性より $x = x_1 \in U$ が成り立つ.

(2) 任意に $y \in f\left(f^{-1}(V)\right)$ を取れば，或る $x \in f^{-1}(V)$ で $y = f(x) \in V$ となる．f が全射であるとき，任意の $y \in V$ に対し或る $x \in A$ が $y = f(x)$ を満たすから，$x \in f^{-1}(V)$ となり $y \in f\left(f^{-1}(V)\right)$ が従う. ∎

A.1.4 順序

A.2 代数メモ

A.2.1 群

定義 A.2.1 (**半群**). 空でない集合 S に次を満たす二項演算 $*: S \times S \longrightarrow S$ が定義されているとき，対 $(S, *)$ を (代数的) **半群 (semigroup)** と呼ぶ:

$$(a * b) * c = a * (b * c), \quad (\forall a, b, c \in S).$$

この演算法則を**結合法則 (associative law)**，或は**結合律**と呼ぶ.

定義 A.2.2 (**一般結合法則**). 空でない集合 S に次を満たす二項演算 $*: S \times S \longrightarrow S$ が定義されているとき，a_1, a_2, a_3, a_4 を S の元として，a_1, a_2, a_3, a_4 の並びを替えずに $*$ で評価していくと

$$(a_1 * (a_2 * a_3)) * a_4, \quad ((a_1 * a_2) * a_3) * a_4, \quad (a_1 * a_2) * (a_3 * a_4),$$
$$a_1 * (a_2 * (a_3 * a_4)), \quad a_1 * ((a_2 * a_3) * a_4)$$

の 5 通りの評価法が考えうるが (括弧の中を優先して評価する)，これは

$$a_1 * a_2 * a_3 * a_4$$

の 3 つの $*$ に演算の順番を付けることに対応している．特に，この場合は $*$ が結合律を満たしていれば 5 通りの評価は全て同値になる．一般に n 個の $a_1, a_2, \cdots, a_n \in S$ を取りこれらに対して $n-1$ 回の評価を行うとき，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ の並びを替えない限り演算の順番をどう設定しても得られる結果に影響しない (最終的な評価がただ一つに確定する) ならば，$*$ は**一般結合法則 (generalized associative law)** を満たすという．またその結果を

$$a_1 * a_2 * \cdots * a_n$$

と書く.

定理 A.2.3 (**結合法則から一般結合法則が従う**). $(S, *)$ を半群とするとき $*$ は一般結合法則を満たす.

証明. $n > 3$ を選ぶとき，任意の k 個 $(3 \leq k < n)$ の元に対する演算の結果が評価順に依存しないと仮定すると n 個の元に対する演算の結果も評価順に依存せず確定することを示す．$a_1, a_2, \cdots, a_n \in S$ に対し，並びを替えずに $n-1$ 回評価するとき，$n-1$ 回目の演算は

$$(a_1, a_2, \cdots, a_k \text{ に対する評価 }) * (a_{k+1}, a_{k+2}, \cdots, a_n \text{ に対する評価 }) \tag{A.1}$$

となる．ただし k は $1 \leq k \leq n-1$ を満たす．仮定より第一項と第二項について

$$(\text{第一項}) = (\cdots((a_1 * a_2) * a_3) \cdots) * a_k,$$
$$(\text{第二項}) = a_{k+1} * (\cdots(a_{n-2} * (a_{n-1} * a_n)) \cdots)$$

が成り立つから，ここで $*$ の結合律を繰り返し用いることにより

$$\begin{aligned}
(\text{A.2.1}) &= ((\cdots((a_1 * a_2) * a_3)\cdots) * a_k) * (a_{k+1} * (\cdots(a_{n-2} * (a_{n-1} * a_n))\cdots)) \\
&= (((\cdots((a_1 * a_2) * a_3)\cdots) * a_k) * a_{k+1}) * (a_{k+2} * (\cdots(a_{n-2} * (a_{n-1} * a_n))\cdots)) \\
&\ \vdots \\
&= ((\cdots((a_1 * a_2) * a_3)\cdots) * a_{n-2}) * (a_{n-1} * a_n) \\
&= (((\cdots((a_1 * a_2) * a_3)\cdots) * a_{n-2}) * a_{n-1}) * a_n
\end{aligned}$$

が得られる．3 個の元の演算は評価順に依らないから，数学的帰納法より $*$ は一般結合法則を満たす． ∎

A.3 位相メモ

A.3.1 位相

定義 A.3.1 (**位相**). 集合 S の部分集合族 $\mathscr{O}$ が以下を満たすとき，$\mathscr{O}$ を S の位相 (topology)，或は開集合系と呼ぶ:

(O1) $\emptyset, S \in \mathscr{O}$,

(O2) $O_1, O_2 \in \mathscr{O} \implies O_1 \cap O_2 \in \mathscr{O}$,

(O3) $\mathscr{U} \subset \mathscr{O} \implies \bigcup \mathscr{U} = \bigcup_{U \in \mathscr{U}} U \in \mathscr{O}$.

また $\mathscr{O}$ の元を S の開集合 (open set) と呼び，補集合が開である集合を閉集合 (closed set) と呼ぶ.

定義 A.3.2 (**内部・閉包**). 位相空間の部分集合 A に対し，A に含まれる最大の開集合を A の内部 (interior) と呼び A° や A^{i} で表す．また A を含む最大の閉集合を A の閉包 (closure) と呼び $\overline{A}$ や A^{a} で表す．特に，

$$A \text{ が閉} \iff A = A^{\circ}, \quad A \text{ が閉} \iff A = \overline{A}. \tag{A.2}$$

定理 A.3.3 (**内部の補集合は補集合の閉包**). A を位相空間の部分集合とするとき次が成り立つ.

$$A^{ic} = A^{ca}, \quad A^{cic} = A^{a}, \quad A^{ci} = A^{ac}.$$

証明. $A^{i} \subset A$ より $A^{ic} \supset A^{c}$ が従い，A^{ic} が閉であるから $A^{ic} \supset A^{ca}$ となる．一方で $A^{c} \subset A^{ca}$ より $A \supset A^{cac}$ が従い，A^{cac} は開であるから $A^{i} \supset A^{cac}$ すなわち $A^{ic} \subset A^{ca}$ となる．A を A^{c} に替えれば残りの関係も得られる． ∎

定義 A.3.4 (近傍・基本近傍系). 空でない位相空間 S において，$x \in S$ と $U \subset S$ に対し

$$x \in U^{\circ}$$

が満たされるとき U は x の近傍 (neighborhood) であるという．同様に $A \subset S$ と $V \subset S$ に対し

$$A \subset V^{\circ}$$

が満たされるとき，V は A の近傍であるという．点 x の近傍全体を $\mathscr{V}(x)$ と書くとき，S は x の最大の近傍であるから $\mathscr{V}(x)$ は空ではない．また $\mathscr{V}(x)$ の空でない部分集合 $\mathscr{U}(x)$ が

$$\forall V \in \mathscr{V}(x), \quad \exists U \in \mathscr{U}(x), \quad U \subset V$$

を満たすとき，$\mathscr{U}(x)$ を x の基本近傍系 (local base of a point x) と呼ぶ．

定理 A.3.5 (基本近傍系は開集合を決定する). S を空でない位相空間，$\mathscr{U}(x)$ を点 x の基本近傍系とすれば

$$O \text{ が } S \text{ の開集合} \quad \Longleftrightarrow \quad O = \emptyset\text{，或は任意の } x \in O \text{ に対し } U \subset O \text{ を満たす } U \in \mathscr{U}(x) \text{ が存在する}$$

が成立する．すなわち，$\{\mathscr{U}(x)\}_{x \in S}$ を基本近傍系とする S の位相は唯一つである．

証明. 空でない部分集合 O が開集合なら任意の $x \in O$ に対し O は x の近傍となるから，或る $U \in \mathscr{U}(x)$ が存在して $U \subset O$ を満たす．逆に任意の $x \in O$ に対し $U \subset O$ を満たす $U \in \mathscr{U}(x)$ が存在するとき，

$$x \in U^{\circ} \subset O^{\circ}$$

となり $O = O^{\circ}$ が成立するから O は開集合である． ∎

定理 A.3.6 (基本近傍系は位相を復元する).

(1) $(S, \mathscr{O})$ を空でない位相空間とし，各点 $x \in S$ に対し $\mathscr{U}(x)$ を基本近傍系とすれば以下が成り立つ:

(LB1) $\mathscr{U}(x)$ は空ではなく，また任意の $U \in \mathscr{U}(x)$ は $x \in U$ を満たす．

(LB2) 任意の $U, V \in \mathscr{U}(x)$ に対し或る $W \in \mathscr{U}(x)$ が存在して $W \subset U \cap V$ を満たす．

(LB3) 任意の $U \in \mathscr{U}(x)$ に対し或る $V \in \mathscr{U}(x)$ が存在し，$V \subset U$ かつ任意の $y \in V$ に対し $W_y \subset U$ を満たす $W_y \in \mathscr{U}(y)$ が取れる．

(2) 空でない集合 S の各点 x に対し (LB1)(LB2)(LB3) を満たす部分集合族 $\mathscr{U}(x)$ が与えられれば，

$$\mathscr{O} := \{\, O \subset S \ : \ O = \emptyset\text{，或は任意の } x \in O \text{ に対し } U \subset O \text{ を満たす } U \in \mathscr{U}(x) \text{ が存在する} \,\}$$

により S に位相が定まり，$\{\mathscr{U}(x)\}_{x \in S}$ は $(S, \mathscr{O})$ において基本近傍系となる．

(3) 空でない位相空間 $(S, \mathscr{O})$ から基本近傍系 $\{\mathscr{U}(x)\}_{x \in S}$ を得れば，$\{\mathscr{U}(x)\}_{x \in S}$ を基本近傍系とする位相を (2) の手続きで構成することにより $\mathscr{O}$ を復元できる．

証明.

(1) 任意の $U \in \mathscr{U}(x)$ は x の近傍であるから $(LB1)$ が満たされる．また $U, V \in \mathscr{U}(x)$ に対し

$$x \in U^{\circ} \cap V^{\circ} = (U \cap V)^{\circ}$$

となるから $U \cap V$ は x の近傍であり (LB2) も従う．任意に $U \in \mathscr{U}(x)$ を取れば，U° は x の開近傍であるから或る $V \in \mathscr{U}(x)$ で $V \subset U^{\circ}$ を満たすものが存在する．このとき任意の $y \in V$ に対し U° は y の開近傍となるから

$$W_y \subset U^{\circ} \subset U$$

を満たす $W_y \in \mathscr{U}(y)$ が取れる．従って (LB3) も得られる．

(2) $\mathscr{U}(x)$ は空ではないから $S \in \mathscr{O}$ となる．また $O_1, O_2 \in \mathscr{O}$ を取れば，任意の $x \in O_1 \cap O_2$ に対し

$$x \in U_1 \subset O_1, \quad x \in U_2 \subset O_2$$

を満たす $U_1, U_2 \in \mathscr{U}(x)$ が存在し，(LB2) より或る $U_3 \in \mathscr{U}(x)$ に対して

$$U_3 \subset U_1 \cap U_2 \subset O_1 \cap O_2$$

が成り立つから $O_1 \cap O_2 \in \mathscr{O}$ となる．任意に $\mathscr{G} \subset \mathscr{O}$ を取れば任意の $x \in \bigcup \mathscr{G}$ は或る $G \in \mathscr{G}$ の点であるから，

$$U \subset G \subset \bigcup \mathscr{G}$$

を満たす $U \in \mathscr{U}(x)$ が存在し $\bigcup \mathscr{G} \in \mathscr{O}$ が従う．よって $\mathscr{O}$ は位相である．ところで，任意の $U \in \mathscr{U}(x)$ に対し

$$U^{\circ} = \left\{ y \in U \ : \quad \text{或る } W_y \in \mathscr{U}(y) \text{ が存在して } W_y \subset U \text{ となる} \right\} =: \tilde{U} \tag{A.3}$$

が成立する．実際 $\mathscr{O}$ の定義より

$$y \in U^{\circ} \quad \Longrightarrow \quad \text{或る } W_y \in \mathscr{U}(y) \text{ で } W_y \subset U^{\circ}$$

となるから $U^{\circ} \subset \tilde{U}$ が従い，逆に $y \in \tilde{U}$ については，(A.3.1) の W_y に対して (LB3) より或る $X_y \in \mathscr{U}(y)$ が

$$X_y \subset W_y, \quad z \in X_y \Longrightarrow \text{或る } Y_z \in \mathscr{U}(z) \text{ で } Y_z \subset X_y \subset U$$

を満たすから $X_y \subset \tilde{U}$ が従う．すなわち $\tilde{U}$ は開集合であり，$U^{\circ} \subset \tilde{U}$ と併せて (A.3.1) を得る．(LB3) より

$$V \subset U, \quad y \in V \Longrightarrow \text{或る } W_y \in \mathscr{U}(y) \text{ で } W_y \subset U$$

を満たす $V \in \mathscr{U}(x)$ が存在し，(LB1) と併せて

$$x \in V \subset \tilde{U} = U^{\circ}$$

が成り立つから任意の $U \in \mathscr{U}(x)$ は x の近傍である．そして W を x の任意の近傍とすれば，$\mathscr{O}$ の定め方より或る $U \in \mathscr{U}(x)$ が $U \subset W^{\circ}$ を満たすから $\mathscr{U}(x)$ は x の基本近傍系である．

(3) 定理 A.3.5 より $\{\mathscr{U}(x)\}_{x \in S}$ を基本近傍系とする位相は唯一つであるから主張が従う． ∎

定義 A.3.7 (**集積点・密集点**). 位相空間 S の点 x と部分集合 A について，x の任意の近傍 U に対し

$$(U \backslash \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

となるとき，x は A の集積点 (accumulation point) であるという．同様に x の任意の近傍 U に対し

$$U \cap A \neq \emptyset$$

となるとき，x は A の密集点 (cluster point) であるという．

集積点と密集点の明確な違いは T_1 空間 (後述) において現れる．

定理 A.3.8 (**閉である一点集合は集積点を持たない**). 位相空間において，閉じている一点集合は集積点を持たない．特に $\{x\}$ が閉であるとき，x は $\{x\}$ の密集点ではあるが集積点ではない．

証明. 一点集合 $\{x\}$ が閉であるとする．このとき $y \neq x$ なら $U := \{x\}^c$ は y の開近傍となり

$$(U \backslash \{y\}) \cap \{x\} = \emptyset$$

を満たすから y は $\{x\}$ の集積点ではない．x は $\{x\}$ の集積点となりえないから $\{x\}$ は集積点を持たない． ∎

定理 A.3.9 (**閉集合は密集点集合**). 位相空間 S の点 x と部分集合 A について次が成り立つ:

$$x \in \overline{A} \quad \Longleftrightarrow \quad x \text{ は } A \text{ の密集点である．} \tag{A.4}$$

特に，A が閉であることと A の密集点全体が A に一致することは同値になる．

証明. x の或る近傍 U が $U \cap A = \emptyset$ を満たすとき，定理 A.3.3 より

$$x \in U^i \subset A^{ci} = A^{ac}$$

となり $x \notin \overline{A}$ が従う．逆に $x \notin \overline{A}$ なら $\overline{A}^c$ は A と交わらない x の開近傍となるから (A.3.9) が出る．また (A.3.2) より

$$A \text{ が閉} \quad \Longleftrightarrow \quad A = \overline{A} \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ の密集点全体が } A \text{ に一致}$$

が成立する． ∎

定理 A.3.10 ($x \in \overline{A \backslash \{x\}} \Longleftrightarrow x$ **が** A **の集積点**). 位相空間 S の点 x と部分集合 A について次が成り立つ:

$$x \in \overline{A \backslash \{x\}} \quad \Longleftrightarrow \quad x \text{ は } A \text{ の集積点である．}$$

証明. x の任意の近傍 U に対し $U \cap (A \backslash \{x\}) = (U \backslash \{x\}) \cap A$ となるから，定理 A.3.9 と併せて

$$\begin{aligned} x \in \overline{A \backslash \{x\}} \quad &\Longleftrightarrow \quad x \text{ の任意の近傍 } U \text{ に対し } U \cap (A \backslash \{x\}) \neq \emptyset \\ &\Longleftrightarrow \quad x \text{ の任意の近傍 } U \text{ に対し } (U \backslash \{x\}) \cap A \neq \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad x \text{ は } A \text{ の集積点} \end{aligned}$$

が成立する． ∎

定義 A.3.11 (**相対位相**). $(S, \mathscr{O})$ を位相空間，$M \subset S$ を部分集合，$i : M \longrightarrow S$ を恒等写像とするとき，

$$\mathscr{O}_M := \left\{ i^{-1}(O) = O \cap M \quad : \quad O \in \mathscr{O} \right\}$$

で定まる i による $\mathscr{O}$ の引き戻しを M の相対位相 (relative topology) と呼ぶ．

定義 A.3.12 (**被覆・コンパクト・相対コンパクト・局所コンパクト・**σ**-コンパクト**).

- 集合 S の部分集合族 $\mathscr{B}$ が S の**被覆 (cover)** であるとは,

$$S = \bigcup \mathscr{B}$$

  を満たすことをいう.また可算個の部分集合から成る被覆を**可算被覆**と呼ぶ.特に,位相空間において開集合のみから成る被覆を**開被覆 (open cover)** と呼ぶ.
- 集合 S の被覆 $\mathscr{B}$ に対し,その部分集合で S の被覆となるものを $\mathscr{B}$ の**部分被覆 (subcover)** と呼ぶ.部分被覆が有限 (可算) 集合であるときは有限 (可算) 部分被覆と呼ぶ.
- 位相空間において任意の開被覆が有限部分被覆を持つとき,その空間は**コンパクトである (compact)** という.位相空間の部分集合は,その相対位相でコンパクト空間となるとき**コンパクト部分集合**と呼ばれる.
- 位相空間の部分集合で,その閉包がコンパクトであるものを**相対コンパクトな (relatively compact)** 部分集合という.
- 位相空間の任意の点がコンパクトな近傍を持つとき,その空間は**局所コンパクトである (locally compact)** という.
- 位相空間においてコンパクト集合から成る可算被覆が存在するとき,その空間は σ**-コンパクトである**という.

集合 S とその部分集合 A に対し,S の部分集合族 $\mathscr{B}$ で $A \subset \bigcup \mathscr{B}$ を満たすものを A の 'S における被覆' と呼ぶ.$\mathscr{B}$ の構成要素が S の開集合である場合は 'S における開被覆' と呼び,他に 'S における部分被覆' や 'S における有限被覆' といった言い方もする.

定理 A.3.13 (**部分集合のコンパクト性**). A を位相空間 S の部分集合とするとき次が成り立つ:

$$A \text{ がコンパクト部分集合} \iff A \text{ の } S \text{ における任意の開被覆が } (S \text{ における}) \text{ 有限部分被覆を含む}.$$

証明. A がコンパクト部分集合であるとき,$\mathscr{B}$ を A の S における開被覆とすれば

$$\{\, B \cap A \;:\; B \in \mathscr{B} \,\}$$

は部分空間 A における開被覆となり,有限個の $B_1, B_2, \cdots, B_n \in \mathscr{B}$ により

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} (B_i \cap A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i$$

となるから $\Longrightarrow$ が従う.逆に右辺が満たされているとき,$\mathscr{A}$ を A の相対開集合から成る A の被覆とすれば

$$\mathscr{A} = \{\, C \cap A \;:\; C \in \mathscr{C} \,\}$$

を満たす S の開集合族 $\mathscr{C}$ が存在する.実際任意の $U \in \mathscr{A}$ に対し

$$\mathscr{C}_U := \{\, C \subset S \;:\; C \text{ は } S \text{ の開集合で } C \cap A = U \,\}$$

とおけば $\mathscr{C}_U \neq \emptyset$ であるから,一つ $\Phi \in \prod_{U \in \mathscr{A}} \mathscr{C}_U$ を取り

$$\mathscr{C} := \{\, \Phi(U) \;:\; U \in \mathscr{A} \,\}$$

と定めればよい．このとき有限個の $C_1, C_2, \cdots, C_m \in \mathscr{C}$ により $A \subset \bigcup_{j=1}^{m} C_j$ となり，

$$A = \bigcup_{j=1}^{m} (A \cap C_j)$$

かつ $A \cap C_j \in \mathscr{A}$ が成り立つから A はコンパクトである． ∎

定義 A.3.14 (有限交叉性). 集合 S の部分集合族 $\mathscr{S}$ について，その任意の有限部分族 $\mathscr{T} \subset \mathscr{S}$ が $\bigcap \mathscr{T} \neq \emptyset$ を満たすとき $\mathscr{S}$ は**有限交叉性 (finite intersection property)** を持つという．

定理 A.3.15 (コンパクト $\Longleftrightarrow$ 閉集合族が有限交叉的). S を位相空間，A を S の部分集合とするとき，

A がコンパクト部分集合 $\Longleftrightarrow$
任意の S の閉集合族 $\mathscr{F}$ に対し，$\{ F \cap A \ : \ F \in \mathscr{F} \}$ が有限交叉性を持つなら $A \cap \bigcap \mathscr{F} \neq \emptyset$.

証明. 定理 A.3.13 より

A がコンパクト部分集合
$\Longleftrightarrow$ A の S における任意の開被覆が (S における) 有限部分被覆を含む
$\Longleftrightarrow$ 任意の S の閉集合族 $\mathscr{F}$ に対し，$A \cap \bigcap \mathscr{F} = \emptyset$ なら或る有限族 $\mathscr{M} \subset \mathscr{F}$ で $A \cap \bigcap \mathscr{M} = \emptyset$
$\Longleftrightarrow$ 任意の S の閉集合族 $\mathscr{F}$ に対し，$\{ F \cap A \ : \ F \in \mathscr{F} \}$ が有限交叉性を持つなら $A \cap \bigcap \mathscr{F} \neq \emptyset$

が従う． ∎

定義 A.3.16 (連続・同相・開写像). f を位相空間 S から位相空間 T への写像とする．

- $x \in S$ において $f(x)$ の任意の近傍 U に対し $f^{-1}(U)$ が x の近傍となるとき，f は x で連続である (continuous at a point x) という．
- T の任意の開集合 O に対し $f^{-1}(O)$ が S の開集合となるとき，f は連続である (continuous) という．
- f に逆写像 f^{-1} が存在し，f, f^{-1} が共に連続であるとき，f を同相写像 (homeomorphism)，或は位相同型と呼ぶ．また S, T 間に同相写像が存在するとき S と T は同相である (homeomorphic)，或は位相同型であるという．
- S の任意の開集合の f による像が T の開集合であるとき，f を開写像 (open mapping) と呼ぶ．

定理 A.3.17 (各点連続 $\Longleftrightarrow$ 連続). f を位相空間 S から位相空間 T への写像とするとき次が成り立つ:

$$f \text{ が連続} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ が } S \text{ の各点で連続.}$$

証明. f が連続であるとき，各点 $x \in S$ で $f(x)$ の任意の近傍 U に対し $f(x) \in U^{\circ}$ が満たされるから $f^{-1}(U^{\circ})$ は x を

含む開集合となる．$f^{-1}(U^\circ)$ は $f^{-1}(U)$ に含まれる開集合であるから

$$x \in f^{-1}(U^\circ) \subset f^{-1}(U)^\circ$$

が成り立ち，従って f は x で連続である．逆に f が各点連続であるとき，T の任意の開集合 O に対し $f^{-1}(O)$ は任意の $x \in f^{-1}(O)$ の近傍となるから定理 A.3.5 より $f^{-1}(O)$ は開集合である．よって f は連続である． ∎

定理 A.3.18 (部分空間と制限写像の連続性). S, T を位相空間，f を S から T への写像とする．また $U := f(S)$ として $g : S \longrightarrow U$ を f の値域を U へ制限した写像とする．このとき次が成り立つ:

$$f : S \longrightarrow T \text{ が連続である} \quad \Longleftrightarrow \quad g : S \longrightarrow U \text{ が } (U \text{ の相対位相に関して}) \text{ 連続である}.$$

証明. T の任意の開集合 O に対し

$$g^{-1}(U \cap O) = f^{-1}(U \cap O) = f^{-1}(O)$$

が成り立つから，f と g の連続性は一致する． ∎

定理 A.3.19 (位相の生成). S を集合，$\mathcal{P}(S)$ を冪集合として任意に $M \subset \mathcal{P}(S)$ を取り

$$\mathscr{A} := \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} I_i \quad : \quad I_i \in M,\ n = 1, 2, \cdots \right\}$$

とおくとき，M を含む最小の位相は

$$\mathscr{O} := \left\{ \bigcup \Lambda \quad : \quad \Lambda \subset \mathscr{A} \right\} \cup \{S\}$$

で与えられる．この $\mathscr{O}$ を M が生成する S の位相と呼ぶ.

証明. $\mathscr{O}$ は定め方より S と $\emptyset$ を含む．また任意の $O_1 = \bigcup \Lambda_1,\ O_2 = \bigcup \Lambda_2 \in \mathscr{O},\ (\Lambda_1, \Lambda_2 \subset \mathscr{A})$ に対し

$$\Lambda := \{\, I \cap J \quad : \quad I \in \Lambda_1,\ J \in \Lambda_2 \,\} \subset \mathscr{A}$$

となるから

$$O_1 \cap O_2 = \bigcup_{I \in \Lambda_1,\ J \in \Lambda_2} I \cap J = \bigcup \Lambda \in \mathscr{O}$$

が成立する．任意に $\emptyset \neq \mathscr{U} \subset \mathscr{O}$ を取れば，各 $U \in \mathscr{U}$ に $U = \bigcup \Lambda_U$ を満たす $\Lambda_U \subset \mathscr{A}$ が対応し，このとき

$$\bigcup_{U \in \mathscr{U}} \Lambda_U \subset \mathscr{A}$$

となるから

$$\bigcup \mathscr{U} = \bigcup \left(\bigcup_{U \in \mathscr{U}} \Lambda_U \right) \in \mathscr{O}$$

が従う．M を含む任意の位相は $\mathscr{A}$ を含みかつその任意和で閉じるから $\mathscr{O}$ を含む． ∎

定義 A.3.20 (始位相). $f \in \mathscr{F}$ を集合 S から位相空間 $(T_f, \mathscr{O}_f)$ への写像とするとき，全ての $f \in \mathscr{F}$ を連続にする最弱の位相を S の $\mathscr{F}$-始位相 (initial topology) と呼ぶ．$\mathscr{F}$-始位相は次が生成する位相である:

$$\bigcup_{f \in \mathscr{F}} \left\{ f^{-1}(O) \ : \quad O \in \mathscr{O}_f \right\}.$$

A.3.2 分離公理

定義 A.3.21 (位相的に識別可能・分離). S を位相空間とする．

- $x, y \in S$ に対し $x \notin \overline{\{y\}}$ 或は $y \notin \overline{\{x\}}$ が満たされるとき，x と y は**位相的に識別可能**である **(topologically distinguishable)** という．
- $A, B \subset S$ に対し $\overline{A} \cap B = \emptyset$ 或は $A \cap \overline{B} = \emptyset$ が満たされるとき，A と B は**分離される (separeted)** という．点と点，点と集合の分離は一点集合を考える．
- $A, B \subset S$ が**近傍で分離される (separated by neighborhoods)** とは，A, B が互いに交わらない近傍を持つことをいう．
- 閉集合 $A, B \subset S$ が**関数で分離される (separated by a function)** とは，或る連続関数 $f : S \longrightarrow [0, 1]$ によって $f(A) = \{0\}$, $f(B) = \{1\}$ が満たされることをいう．
- 閉集合 $A, B \subset S$ が**関数でちょうど分離される (precisely separated by a function)** とは，或る連続関数 $f : S \longrightarrow [0, 1]$ によって $A = f^{-1}(\{0\})$, $B = f^{-1}(\{1\})$ が満たされることをいう．

定理 A.3.22 (位相的に識別可能な二点は相異なる). S を位相空間とするとき，任意の $x, y \in S$ に対し

$$x \text{ と } y \text{ が位相的に識別可能} \quad \Longrightarrow \quad x \neq y.$$

証明. $x = y$ なら $y \in \overline{\{x\}}$ かつ $x \in \overline{\{y\}}$ となる．後述の T_0 空間とは，この逆が満たされる位相空間である． ∎

定理 A.3.23 (分離される集合は他方を含まない近傍を持つ). 位相空間 S において，$A, B \subset S$ が分離されることと

$$A \subset U, \quad B \subset V, \quad A \cap V = \emptyset, \quad B \cap U = \emptyset \tag{A.5}$$

を満たす開集合 U, V が存在することは同値である．

証明. $A, B \subset S$ が分離されるとき，$U := \overline{B}^c$, $V := \overline{A}^c$ とおけば (A.3.23) が成立する．逆に A, B に対し (A.3.23) を満たす開集合 U, V が存在するとき，$\overline{A} \subset V^c \subset B^c$ 及び $\overline{B} \subset U^c \subset A^c$ となるから A, B は分離される． ∎

定義 A.3.24 (分離公理).

- 任意の二点が位相的に識別可能である位相空間を T_0 空間，或は **Kolmogorov 空間**という．
- 任意の二点が分離される位相空間を T_1 **空間**という．
- 任意の二点が近傍で分離される位相空間を T_2 **空間**，或は **Hausdorff 空間**という．
- 任意の交わらない点と閉集合が近傍で分離される位相空間を**正則 (regular) 空間**という．
- T_0 かつ正則な位相空間を T_3 **空間**，或は**正則 Hausdorff 空間**という．
- 任意の交わらない二つの閉集合が近傍で分離される位相空間を**正規 (normal) 空間**という．
- T_1 かつ正規な位相空間を T_4 **空間**，或は**正規 Hausdorff 空間**という．
- 任意の部分位相空間が正規である位相空間を**全部分正規 (completely normal) 空間**という．
- T_1 かつ全部分正規な位相空間を T_5 **空間**，或は**全部分正規 Hausdorff 空間**という．
- 任意の交わらない二つの閉集合が関数でちょうど分離される位相空間を**完全正規 (perfectly normal) 空間**という．
- T_1 かつ完全正規な位相空間を T_6 **空間**，或は**完全正規 Hausdorff 空間**という．

定理 A.3.25 (T_1 空間とは一点集合が閉である空間). 位相空間 S に対し，

$$\begin{aligned} S \text{ が } T_1 &\iff S \text{ は } T_0 \text{ かつ位相的に識別可能な任意の二点が分離される} \\ &\iff S \text{ の任意の一点集合は閉} \\ &\iff x \in S \text{ が } A \subset S \text{ の集積点であることと } x \text{ の任意の開近傍が } A \text{ と交わることは同値.} \end{aligned}$$

証明. x が A の集積点であるとき，任意に x の近傍 U を取る．いま，x の或る開近傍 U_{n-1} と $x_{n-1} \in U_{n-1}$, $(x \neq x_{n-1})$ が取れたとして，

$$U_n \coloneqq U_{n-1} \cap (S \backslash \{x_{n-1}\})$$

は x の開近傍となり或る $x_n \in (U_{n-1} \backslash \{x\}) \cap A$ が取れる．$U_0 \coloneqq U^\circ$, $x_0 \in (U^\circ \backslash \{x\}) \cap A$ を出発点とすれば A は U の無限集合 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を含む．

定理 A.3.26 (Hausdorff 空間のコンパクト部分集合は閉). Hausdorff 空間のコンパクト部分集合は閉である．

証明. S を Hausdorff 空間，$K \subset S$ をコンパクト部分集合とするとき，任意に $x \in S \backslash K$, $y \in K$ を取れば

$$x \in U_y, \quad y \in V_y, \quad U_y \cap V_y = \emptyset$$

を満たす開集合 U_y, V_y が取れる．或る $\{y_i\}_{i=1}^n \subset K$ に対し $K \subset \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$ となるから，$U \coloneqq \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$ とおけば

$$x \in U, \quad U \subset \bigcap_{i=1}^{n} \left(S \backslash V_{y_i}\right) \subset S \backslash K$$

が成立する．従って $S \backslash K$ は開集合であり，K は閉集合である． ∎

定理 A.3.27 (Hausdorff 空間においてコンパクト集合の閉部分集合はコンパクト). S を Hausdorff 空間，$K \subset S$ をコンパクト部分集合，$F \subset S$ を閉集合とするとき，$K \cap F$ はコンパクトである．

証明. $K \cap F$ の任意の (S における) 開被覆に $S \backslash F$ を加えれば K の (S における) 開被覆となるから，そのうち K の有限部分被覆を取ることができる．$S \backslash F$ を除けば $K \cap F$ の有限被覆が残り $K \cap F$ のコンパクト性が出る． ∎

定理 A.3.28 (Hausdorff 空間とは交わらない二つのコンパクト集合が近傍で分離される空間). 位相空間において，Hausdorff であることと，交わらない二つのコンパクト部分集合が近傍で分離されることは同値である．

証明. A, B を Hausdorff 空間の交わらないコンパクト集合とするとき，任意の $p \in A$ に対し

$$p \in U_p, \quad B \subset V_p, \quad U_p \cap V_p = \emptyset \tag{A.6}$$

を満たす開集合 U_p, V_p が存在する．実際任意の $q \in B$ に対し

$$p \in U_p(q), \quad q \in V_p(q), \quad U_p(q) \cap U_p(q) = \emptyset$$

を満たす開集合 $U_p(q), U_p(q)$ が取れ，B のコンパクト性より或る $\{q_i\}_{i=1}^n \subset B$ で $B \subset \bigcup_{i=1}^n U_p(q_i)$ となるから，

$$U_p := \bigcap_{i=1}^n U_p(q_i), \quad V_p := \bigcup_{i=1}^n V_p(q_i)$$

とおけば (A.3.2) が成立する．A のコンパクト性より或る $\{p_j\}_{j=1}^m \subset A$ で $A \subset \bigcup_{j=1}^m U_{p_j}$ となるから，

$$U := \bigcup_{j=1}^m U_{p_j}, \quad V := \bigcap_{j=1}^m V_{p_j}$$

とおけば A と B は U, V により分離される．逆の主張は一点集合がコンパクトであることより従う． ∎

定理 A.3.29 (Hausdorff 空間値連続写像の等価域は閉). S を位相空間，T を Hausdorff 空間，f, g を S から T への連続写像とするとき，$E := \{\, x \in S \ : \ f(x) = g(x) \,\}$ は S で閉じている．特に，E が X で稠密なら $f = g$ となる．

証明. 任意に $x \in \{\, x \in S \ : \ f(x) \neq g(x) \,\}$ を取れば，Hausdorff 性より

$$f(x) \in A, \quad g(x) \in B, \quad A \cap B = \emptyset$$

を満たす T の開集合 A, B が存在する．$f^{-1}(A) \cap g^{-1}(B)$ は x の開近傍であり，

$$f^{-1}(A) \cap g^{-1}(B) \subset \{\, x \in S \ : \ f(x) \neq g(x) \,\}$$

となるから $\{\, x \in S \ : \ f(x) \neq g(x) \,\}$ は S の開集合である．従って E は閉である． ∎

定理 A.3.30 (正則空間とは交わらないコンパクト集合と閉集合が近傍で分離できる空間).

(1) 位相空間において，正則性と，交わらないコンパクト集合と閉集合が近傍で分離されることは同値である．

(2) K, W をそれぞれ局所コンパクトな正則空間のコンパクト集合，開集合とするとき，相対コンパクトな開集合 U が存在して次を満たす:

$$K \subset U \subset \overline{U} \subset W. \tag{A.7}$$

証明.

(1) K, F を正則空間のコンパクト集合，閉集合とするとき，$K \cap F = \emptyset$ なら任意の点 $x \in K$ に対して

$$x \in U_x, \quad F \subset V_x, \quad U_x \cap V_x = \emptyset$$

を満たす開集合 U_x, V_x が取れる．K はコンパクトであるから或る $\{x_i\}_{i=1}^n \subset K$ で $K \subset \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$ となり

$$K \subset U := \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}, \quad F \subset V := \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}, \quad U \cap V = \emptyset$$

が成立する．逆の主張は一点集合がコンパクトであることにより従う．

(2) 任意の $x \in K$ に対し，$\overline{U_x} \subset W$ となる開近傍 U_x と閉包がコンパクトな開近傍 C_x が存在するから，

$$K \subset (C_{y_1} \cap U_{y_1}) \cup \cdots \cup (C_{y_m} \cap U_{y_m})$$

を満たす $\{y_i\}_{i=1}^m \subset K$ に対し $U := \bigcup_{i=1}^m C_{y_i} \cap U_{y_i}$ とおけば，$\overline{U}$ はコンパクトであり (A.3.30) を満たす． ■

定理 A.3.31 (局所コンパクトなら T_2 と T_3 は同値). 局所コンパクト位相空間において，$T_2 \Longleftrightarrow T_3$ である．

証明. T_3 ならば T_2 であるから $\Longleftarrow$ を得る．逆に S を局所コンパクト Hausdorff 空間とし，点 x と閉集合 F が $x \notin F$ を満たしているとする．x のコンパクトな近傍 K を取れば，Hausdorff 性より $K \cap F$ はコンパクトであるから

$$U_0 \cap V_0 = \emptyset, \quad x \in U_0, \quad K \cap F \subset V_0$$

を満たす開集合 U_0, V_0 が存在する．このとき，

$$U := U_0 \cap K^{\circ}, \quad V := V_0 \cup (S \backslash K)$$

により開集合 U, V を定めれば

$$U \cap V = \emptyset, \quad x \in U, \quad F \subset V$$

が成立し，S の正則性が出る．S は T_0 空間でもあるから T_3 である． ■

定理 A.3.32 (正規空間とは交わらない二つの閉集合が関数で分離される空間 (Urysohn の補題)). 位相空間において，正規性と，任意の交わらない二つの閉集合が関数で分離されることは同値である．

定義 A.3.33 (G_δ 集合・F_σ 集合). 位相空間の部分集合で，開集合の可算交叉で表されるものを G_δ 集合，閉集合の可算和で表されるものを F_σ 集合と呼ぶ．特に，任意の閉集合が G_δ である空間では任意の開集合が F_σ となる．

定理 A.3.34 (完全正規空間とは正規かつ閉集合が全て G_δ である空間).

(1) F を完全正規空間の閉集合とすれば，次を満たす閉集合系 $(F_n)_{n=1}^\infty$ が存在する:

$$F = \bigcap_{n=1}^\infty F_n, \quad F_n^\circ \supset F_{n+1}.$$

(2) 位相空間において，完全正規であることと，正規かつ任意の閉集合が G_δ であることは同値である．

証明. S を完全正規空間，A, B を互いに交わらない S の閉集合とすれば，$A = f^{-1}(\{0\})$, $B = f^{-1}(\{1\})$ を満たす連続関数 $f : S \longrightarrow \mathbf{R}$ が存在する．このとき $U := f^{-1}([0, 1/2))$, $V := f^{-1}((1/2, 1])$ で開集合 U, V を定めれば

$$A \subset U, \quad B \subset V, \quad U \cap V = \emptyset$$

となるから S は正規である．また F を閉集合とすれば或る連続関数 $g : S \longrightarrow \mathbf{R}$, $(\emptyset = g^{-1}(\{1\}))$ により

$$F = g^{-1}(\{0\}) = g^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^\infty \left[0, n^{-1}\right)\right) = \bigcap_{n=1}^\infty g^{-1}\left(\left[0, n^{-1}\right)\right)$$

が成立するから F は G_δ である．特に，このとき $F_n := g^{-1}\left(\left[0, n^{-1}\right]\right)$ とおけば

$$F = \bigcap_{n=1}^\infty g^{-1}\left(\left[0, n^{-1}\right]\right) = \bigcap_{n=1}^\infty F_n, \quad F_n^\circ \supset g^{-1}\left(\left[0, n^{-1}\right)\right) \supset g^{-1}\left(\left[0, (n+1)^{-1}\right]\right) = F_{n+1}$$

となり (1) の主張が得られる．逆に S が正規かつ閉集合が全て G_δ であるとき，任意の交わらない閉集合 A, B に対し $A = \bigcap_{n=1}^\infty U_n$, $B = \bigcap_{n=1}^\infty V_n$ を満たす開集合系 $(U_n)_{n=1}^\infty$, $(V_n)_{n=1}^\infty$ が取れて，定理 A.3.32 より各 $n \geq 1$ で

$$f_n(A) = \{0\}, \quad f_n(S \backslash U_n) = \{1\}, \quad g_n(B) = \{0\}, \quad g_n(S \backslash V_n) = \{1\}$$

を満たす連続写像 $f_n, g_n : S \longrightarrow [0, 1]$ が存在する．ここで連続写像を $f := \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} f_n$, $g := \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} g_n$ で定めれば

$$\begin{cases} f(x) = 0, & (x \in A), \\ f(x) > 0, & (x \notin A), \end{cases} \quad \begin{cases} g(x) = 0, & (x \in B), \\ g(x) > 0, & (x \notin B), \end{cases}$$

となり，$h := f/(f+g)$ とおけば $A = h^{-1}(\{0\})$, $B = h^{-1}(\{1\})$ が成立する．従って S は完全正規である． ∎

定理 A.3.35 (連続な単射の引き戻しによる分離性の遺伝). S, T を位相空間とする．S から T への連続単射が存在するとき，T が T_k-空間 $(k = 0, 1, \cdots, 6)$ なら S もまた T_k-空間となる．

証明. 任意に異なる二点 $s_1, s_2 \in S$ を取れば単射性より $f(s_1) \neq f(s_2)$ となる．T の分離性より

A.3.3 可算公理

定理 A.3.36 (可算コンパクト性の同値条件).

定義 A.3.37 (開基). 位相空間 $(S,\mathscr{O})$ において，$\mathscr{O}$ の部分集合 $\mathscr{B}$ で

$$\mathscr{O} = \left\{ \bigcup \mathscr{U} \quad : \quad \mathscr{U} \subset \mathscr{B} \right\}$$

を満たすもの，ただし $\bigcup \emptyset = \emptyset$，を $\mathscr{O}$ の開基や基底，基 (base) と呼ぶ．基底は一意に定まるものではない．$S \neq \emptyset$ のときは $\mathscr{B}$ の任意の元は空集合でないとする．

定義 A.3.38 (可算公理). 位相空間 S において，任意の点が高々可算な基本近傍系を持つとき S は第一可算公理 (the first axiom of countability) を満たす，或は S は第一可算であるといい，S が高々可算な基底を持つとき S は第二可算公理 (the second axiom of countability) を満たす，或は S は第二可算であるという．

空集合 (要素数 0) を含む任意の有限位相空間は，その冪集合が有限集合であるから第二可算公理を満たす．

定理 A.3.39 (第二可算なら第一可算). 空でない第二可算空間は第一可算である．

証明. $\mathscr{B}$ を空でない第二可算空間 S の可算基とするとき，任意の $x \in S$ に対して

$$\mathscr{U}(x) := \{ B \in \mathscr{B} \quad : \quad x \in B \}$$

で可算な基本近傍系が定まる．実際 x の任意の近傍 U に対し或る $B \in \mathscr{B}$ で

$$x \in B \subset U^{\circ}$$

が成立し，定義より $B \in \mathscr{U}(x)$ が満たされる． ∎

定義 A.3.40 (稠密・可分). 位相空間 S において，$\overline{M} = S$ を満たすような部分集合 M を S で稠密な (dense) 部分集合と呼ぶ．また高々可算かつ稠密な部分集合 M が存在するとき S は可分である (separable) という．

定理 A.3.41 (第二可算なら可分). 第二可算位相空間は可分である．

証明. $\mathscr{B}$ を第二可算空間 S の可算基とするとき，$S = \emptyset$ なら $\emptyset$ は S の唯一の部分集合であり，要素数 0 かつ $\overline{\emptyset} = \emptyset = S$ を満たすから S は可分である．$S \neq \emptyset$ のとき，選択関数 $\Phi \in \prod \mathscr{B} = \prod_{B \in \mathscr{B}} B$ を取り

$$M := \{ \Phi(B) \quad : \quad B \in \mathscr{B} \}$$

で可算集合を定めれば，任意の $x \in S$ 及び x の任意の近傍 U に対し $x \in B \subset U^{\circ}$ を満たす $B \in \mathscr{B}$ が存在して

$$\Phi(B) \in B \cap M \subset U \cap M$$

となるから，定理 A.3.9 より $S = \overline{M}$ が成立する． ∎

定義 A.3.42 (局所有限). 位相空間 S の部分集合族 $\mathscr{F}$ が局所有限 (locally finite) であるとは，任意の $x \in S$ が $\mathscr{F}$ の高々有限個の元としか交叉しない近傍を持つことである．局所有限な部分集合族の可算和で表される部分集合族を σ-局所有限な族という．

定義 A.3.43 (細分・パラコンパクト).

(1) $\mathscr{A}$ と $\mathscr{B}$ を或る集合の被覆とする．任意の $B \in \mathscr{B}$ に対し $B \subset A$ を満たす $A \in \mathscr{A}$ が存在するとき，$\mathscr{B}$ を $\mathscr{A}$ の細分 (refinement) と呼ぶ．位相空間において，被覆の細分で元が全て開集合であるものを開細分と呼ぶ．

(2) 任意の開被覆が局所有限な開細分を持つ位相空間はパラコンパクト (paracompact) であるという．

定理 A.3.44 (σ-局所有限な基底が存在すれば第一可算). σ-局所有限な基底が存在する空でない位相空間は第一可算である．

証明. S を空でない位相空間，$\mathscr{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{B}_n$ を σ-局所有限な基底とする (各 $\mathscr{B}_n$ は局所有限)．任意の $x \in S$ で

$$\mathscr{U}_n(x) := \{\, B \in \mathscr{B}_n \;\;:\;\; x \in B \,\}, \quad \mathscr{U}(x) := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{U}_n(x)$$

と定めれば，局所有限性より $\mathscr{U}_n(x)$ は有限集合であるから $\mathscr{U}(x)$ は可算集合である．また x の任意の近傍 U に対し

$$x \in B \subset U^{\circ}$$

を満たす $B \in \mathscr{B}$ が存在し，定義より $B \in \mathscr{U}(x)$ が成り立つから $\mathscr{U}(x)$ は x の可算な基本近傍系をなす． ∎

定理 A.3.45 (可分空間の局所有限な開集合族は高々可算集合). S を空でない可分位相空間，M を S で稠密な高々可算集合，$\mathscr{B}$ を S の空でない開集合から成る族とするとき，

$$\mathscr{B} = \bigcup_{m \in M} \{\, B \in \mathscr{B} \;\;:\;\; m \in B \,\} \tag{A.8}$$

が成立する．特に $\mathscr{B}$ が局所有限なら $\mathscr{B}$ は高々可算集合である．

証明. 稠密性より任意の $E \in \mathscr{B}$ は $E \cap M \neq \emptyset$ を満たすから，$m \in E \cap M$ で $E \in \{\, B \in \mathscr{B} \;:\; m \in B \,\}$ となり (A.3.45) が出る．$\mathscr{B}$ が局所有限なら $\{\, B \in \mathscr{B} \;:\; m \in B \,\}$ は全て有限集合となり $\mathscr{B}$ は高々可算集合となる． ∎

定理 A.3.46 (σ-局所有限な基底が存在すれば，可分 $\Longleftrightarrow$ 第二可算). σ-局所有限な基底が存在する空でない位相空間において，可分であることと第二可算であることは同値になる．

証明． 空でない可分位相空間において σ-局所有限な基底が存在するとき，定理 A.3.45 よりその基底は高々可算集合であるから第二可算性が満たされる．逆に第二可算なら可分であるから定理の主張を得る． ∎

定理 A.3.47 (第二可算空間の任意の基底は可算基を内包する)． $\mathscr{B}$ を第二可算空間 S の任意の基底とするとき，或る可算部分集合 $\mathscr{B}_0 \subset \mathscr{B}$ もまた S の基底となる．すなわち第二可算空間は Lindelöf 性を持つ．

証明． $\mathscr{D}$ を S の可算基とする．任意の開集合 U に対し或る $\mathscr{B}_U \subset \mathscr{B}$ が存在して $U = \bigcup_{V \in \mathscr{B}_U} V$ を満たすから，

$$\mathscr{D}_U := \{ W \in \mathscr{D} \ : \ W \subset V,\ V \in \mathscr{B}_U \} \tag{A.9}$$

とおけば $U = \bigcup_{V \in \mathscr{B}_U} V = \bigcup_{V \in \mathscr{B}_U} \bigcup_{\substack{W \in \mathscr{D}_U \\ W \subset V}} W \subset \bigcup_{W \in \mathscr{D}_U} W \subset U$ より

$$U = \bigcup_{W \in \mathscr{D}_U} W \tag{A.10}$$

が成り立つ．ここで (A.3.3) より任意の $W \in \mathscr{D}_U$ に対して $\{ V \in \mathscr{B} \ : \ W \subset V \} \neq \emptyset$ であるから

$$\Phi_U \in \prod_{W \in \mathscr{D}_U} \{ V \in \mathscr{B} \ : \ W \subset V \}$$

が取れる．$\mathscr{B}'_U := \{ \Phi_U(W) \ : \ W \in \mathscr{D}_U \}$ とすれば $U = \bigcup_{W \in \mathscr{D}_U} W \subset \bigcup_{W \in \mathscr{D}_U} \Phi(W) \subset \bigcup_{V \in \mathscr{B}'_U} V \subset U$ より

$$U = \bigcup_{V \in \mathscr{B}'_U} V \tag{A.11}$$

が満たされ，

$$\mathscr{B}_0 := \bigcup_{W \in \mathscr{D}} \mathscr{B}'_W$$

と定めれば $\mathscr{B}_0$ は求める S の可算基となる．実際，任意の開集合 U に対し (A.3.3) と (A.3.3) より

$$U = \bigcup_{W \in \mathscr{D}_U} W = \bigcup_{W \in \mathscr{D}_U} \bigcup_{V \in \mathscr{B}'_W} V$$

となる． ∎

定理 A.3.48 (局所コンパクト Hausdorff 空間が第二可算なら σ-コンパクト)． S が第二可算性をもつ局所コンパクト Hausdorff 空間なら，次を満たすコンパクト部分集合の列 $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ が存在する:

$$K_n \subset K_{n+1}^{\circ}, \quad S = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n.$$

証明． 任意の $x \in S$ に対して閉包がコンパクトな開近傍 U_x を取っておく．$\mathscr{O}$ を S の開集合系として

$$\mathscr{B} := \left\{ U \in \mathscr{O} \ : \ \overline{U} \text{ がコンパクト} \right\}$$

とおけば，$\mathscr{B}$ は $\mathscr{O}$ の基底となる．実際，任意の $O \in \mathscr{O}$ に対し $O \cap U_x \in \mathscr{B}$ かつ

$$O = \bigcup_{x \in O} O \cap U_x$$

となる．従って定理 A.3.47 より或る可算部分集合 $\{U_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{B}$ が $\mathscr{O}$ の基底となる．いま，$K_1 \coloneqq \overline{U_1}$ として，またコンパクト集合 K_n が選ばれたとして，K_n の有限被覆 $\mathscr{U}_n \subset \mathscr{B}_0$ を取り

$$K_{n+1} \coloneqq \overline{U_{n+1}} \cup \bigcup_{V \in \mathscr{U}_n} \overline{V}$$

とすれば，K_{n+1} はコンパクトであり $K_n \subset K_{n+1}^{\circ}$ を満たす．この操作で $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ を構成すれば

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \subset S$$

が成立する． ∎

A.3.4 商位相

定理 A.3.49 (商位相). 位相空間 $(S, \mathscr{O})$ に同値関係 $\sim$ が定まっているとき，$x \in S$ からその同値類 $\pi(x)$ への対応

$$\pi : S \ni x \longmapsto \pi(x) \in S/\sim$$

を商写像 (quotient mapping) という．すなわち商写像は

$$x \sim y \quad \Longleftrightarrow \quad \pi(x) = \pi(y)$$

を満たす．また，商写像を連続にする $S/\sim$ の最強の位相，つまり

$$\mathscr{O}(S/\sim) \coloneqq \left\{ V \subset S/\sim : \quad \pi^{-1}(V) \in \mathscr{O} \right\}$$

で定まる位相を $S/\sim$ の商位相 (quotient topology) という．

定理 A.3.50 (商空間が T_1 $\Longleftrightarrow$ 同値類が元の空間で閉じている). S を位相空間, $\sim$ を S 上の同値関係, $\pi : S \longrightarrow S/\sim$ を商写像とする．このとき次が成り立つ:

$$S/\sim \text{ が } T_1 \text{ 空間である} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{任意の } x \in S \text{ に対し } \pi(x) \text{ が } S \text{ の閉集合である．}$$

証明. 任意の $F \subset S/\sim$ に対し

$$F \text{ が閉} \quad \Longleftrightarrow \quad \pi^{-1}(F^c) = \pi^{-1}(F)^c \text{ が閉} \quad \Longleftrightarrow \quad \pi^{-1}(F) \text{ が閉}$$

となる．いま任意の $x \in S$ に対し $\pi(x) = \pi^{-1}(\pi(x))$ が満たされているから定理の主張を得る． ∎

定理 A.3.51 (商写像が開なら，商空間が Hausdorff $\Longleftrightarrow$ 対角線集合が閉). S を位相空間，$\sim$ を S 上の同値関係，$\pi : S \longrightarrow S/\sim$ を商写像とする．このとき，π が開写像であれば次が成立する:

$$S/\sim \text{ が Hausdorff} \quad \Longleftrightarrow \quad \{\, (x,y) \in S \times S \ : \ x \sim y \,\} \text{ が閉}.$$

証明. $S/\sim$ が Hausdorff であるとき，$x \nsim y$ を満たす $(x,y) \in S \times S$ に対し $\pi(x) \neq \pi(y)$ となるから

$$\pi(x) \in U, \quad \pi(y) \in V, \quad U \cap V = \emptyset$$

を満たす $S/\sim$ の開集合 U,V が取れる．このとき $\pi^{-1}(U) \times \pi^{-1}(V)$ は $S \times S$ の開集合であり

$$(x,y) \in \pi^{-1}(U) \times \pi^{-1}(V) \subset \{\, (s,t) \in S \times S \ : \ s \nsim t \,\}$$

が成り立つから $\Longrightarrow$ が得られる．逆に $\{\, (s,t) \in S \times S \ : \ s \nsim t \,\}$ が開集合であるとき，$\pi(x) \neq \pi(y)$ なら

$$(x,y) \in U \times V \subset \{\, (s,t) \in S \times S \ : \ s \nsim t \,\}$$

を満たす S の開集合 U,V が存在し，このとき

$$\pi(x) \in \pi(U), \quad \pi(y) \in \pi(V), \quad \pi(U) \cap \pi(V) = \emptyset$$

となりかつ π が開写像であるから $\Longleftarrow$ が従う． ∎

系 A.3.52 (Hausdorff $\Longleftrightarrow$ 対角線集合が閉). S を位相空間とするとき，

$$S \text{ が Hausdorff である} \quad \Longleftrightarrow \quad \{\, (x,x) \ : \ x \in S \,\} \text{ が } S \times S \text{ で閉じている}.$$

証明. 等号 $=$ を同値関係と見れば S と $S/=$ は商写像により同相となるから，定理 A.3.51 より

$$S \text{ が Hausdorff} \quad \Longleftrightarrow \quad S/= \text{ が Hausdorff} \quad \Longleftrightarrow \quad \{\, (x,x) \ : \ x \in S \,\} \text{ が閉}$$

が成立する． ∎

A.3.5 有向点族

第一可算性が仮定された空間では可算個の点族 (点列) の収束を用いることでいくつかの位相的概念を記述できるが，一般に位相空間では近傍が ‘多すぎる’ ため位相概念を記述するのに点列では間に合わない．有向点族の理論では，非可算個の集合に或る種の ‘向き’ を与えることでそれを添数集合とする点族に対し収束の概念が定式化され，一般の位相空間における閉包や連続性，コンパクト性の概念を点族の収束により特徴づけることが可能となる．

定義 A.3.53 (有向集合). 空でない集合 Λ において任意の有限部分集合が上界を持つような前順序が定まっているとき，つまり次を満たす二項関係 $\leq$ が定まっているとき，対 $(\Lambda, \leq)$ を**有向集合 (directed set)** と呼ぶ:

(反射律) $\lambda \leq \lambda, \quad (\forall \lambda \in \Lambda),$
(推移律) $\lambda \leq \mu, \mu \leq \nu \quad \Longrightarrow \quad \lambda \leq \nu, \quad (\forall \lambda, \mu, \nu \in \Lambda),$
(有向律) $M \subset \Lambda$ が有限集合なら $\mu \leq \lambda$, $(\forall \mu \in M)$ を満たす $\lambda \in \Lambda$ が取れる．

また $\lambda < \mu \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \lambda \leq \mu$ かつ $\lambda \neq \mu$ と定める．

正の自然数全体 $\mathbf{N}$ や実数全体 $\mathbf{R}$ は，通常の順序により有向集合となっている．また位相空間の一点の基本近傍系も

$$U \leq V \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad U \supset V$$

により有向集合となる．

定義 A.3.54 (有向点族). 有向集合を添数集合とする点族 (P. 82) を**有向点族 (net)** と呼ぶ．$(\Lambda, \leq)$, $(\Gamma, \leq)$ を有向集合，$(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を有向点族とするとき，共終かつ序列を保つ写像 $f : \Gamma \longrightarrow \Lambda$: 言い換えると

(単調性) $\gamma \leq \xi \quad \Longrightarrow \quad f(\gamma) \leq f(\xi), \quad (\forall \gamma, \xi \in \Gamma),$
(共終性) $f(\Gamma)$ が非有界: 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $\lambda \leq f(\gamma)$ を満たす $\gamma \in \Gamma$ が存在する

を満たす写像 f に対して，$\left(x_{f(\gamma)}\right)_{\gamma \in \Gamma}$ を (x_λ) の**部分有向点族 (subnet)** と呼ぶ:

特に $\mathbf{N}$ を有向集合とする有向点族を**点列 (sequence)** と呼ぶ．また点列 $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ に対し

$$f : \mathbf{N} \ni k \longmapsto n_k \in \mathbf{N}, \quad (n_1 < n_2 < n_3 < \cdots)$$

で定まる部分有向点族 $\left(x_{n_k}\right)_{k \in \mathbf{N}}$ を**部分列 (subsequence)** と呼ぶ．一般の部分有向点族ではそれを定める写像 f に単射性を仮定していないが (cf. Tychonoff plank)，部分列は $k < j$ なら $n_k < n_j$ が満たされるものと約束する．従って点列の部分有向点族といってもそれが部分列となっているとは限らない．

定義 A.3.55 (有向点族の収束). $x = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を位相空間 S と有向集合 $(\Lambda, \leq)$ で定まる有向点族とする．点 $a \in S$ において，a の任意の近傍 U に対し或る $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在して

$$\lambda_0 \leq \lambda \quad \Longrightarrow \quad x_\lambda \in U$$

となるとき，$(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ は a に収束する (converge) といい $x_\lambda \longrightarrow a$ と書く．また a を $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の**極限 (limit)** と呼ぶ．$(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が部分集合 A 上の有向点族であり，かつ A の点に収束するとき，‘$(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ は A で収束する’ という．

定理 A.3.56 (Hausdorff$\Longleftrightarrow$ 収束する有向点族の極限は一つ). S を二つ以上の元を持つ位相空間とするとき，

$$S \text{ が Hausdorff} \quad \Longleftrightarrow \quad S \text{ で収束する任意の有向点族の極限は一つ}$$

となる．特に，S が第一可算性を持てば有向点族を点列に替えて成立する:

$$S \text{ が Hausdorff} \quad \Longleftrightarrow \quad S \text{ で収束する任意の点列の極限は一つ}. \tag{A.12}$$

S が Hausdorff であるとき，S 上の有向点族 $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ と $a \in S$ に対して $x_\lambda \longrightarrow a$ を $\lim x_\lambda = a$ とも表記する．

証明. $(\Lambda, \leq)$ を有向集合，$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を $a \in S$ に収束する有向点族とする．$a \neq b \in S$ に対して，S が Hausdorff なら

$$a \in U, \quad b \in V, \quad U \cap V = \emptyset$$

を満たす a の近傍 U と b の近傍 V が取れるが，このとき或る $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在して

$$\lambda_0 \leq \lambda \quad \Longrightarrow \quad x_\lambda \in U$$

が成り立つから，任意の $\mu_0 \in \Lambda$ に対し $\{\lambda_0, \mu_0\}$ の上界 $\lambda \in \Lambda$ で $x_\lambda \notin V$ となり $x_\lambda \not\longrightarrow b$ が従う．逆に S が Hausdorff でないとき，或る二点 $x, y \in S$, $(x \neq y)$ は近傍で分離されない．x, y それぞれの近傍の全体を $\mathscr{U}, \mathscr{V}$ として

$$\Gamma := \{\, U \cap V \ : \quad U \in \mathscr{U},\, V \in \mathscr{V} \,\}$$

とおけば，

$$U \cap V \leq X \cap Y \quad \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad (U \cap V) \supset (X \cap Y)$$

により $(\Gamma, \leq)$ は有向集合となるから $z \in \prod \Gamma$ を取れば $z = (z_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ は S 上の有向点族をなす．任意の $U_0 \in \mathscr{U}$ に対し

$$U_0 = U_0 \cap S \leq U \cap V \quad \Longrightarrow \quad z_{U\cap V} \in U \cap V \subset U_0$$

となるから $(z_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ は x に収束し，対称的に y にも収束する．これで一般の場合に $\Longleftarrow$ が得られたが，いま S に第一可算性が仮定されていたとすると，$\{U_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, $\{V_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ をそれぞれ x, y の可算な基本近傍系として

$$\tilde{U}_n := U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n, \quad \tilde{V}_n := V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n, \quad (\forall n \in \mathbf{N})$$

で単調減少な基本近傍系 $\left\{\tilde{U}_n\right\}_{n\in\mathbf{N}}$ と $\left\{\tilde{V}_n\right\}_{n\in\mathbf{N}}$ を定め $w \in \prod_{n\in\mathbf{N}} \left(\tilde{U}_n \cap \tilde{V}_n\right)$ を取れば，点列 $w = (w_n)_{n\in N}$ は x, y の両方に収束する．従って (A.3.56) の $\Longleftarrow$ も得られる． ∎

定理 A.3.57 (有向点族が収束する $\Longleftrightarrow$ 任意の部分点族が収束する). $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間 S と有向集合 $(\Lambda, \leq)$ で定まる有向点族とし，また a を S の任意の点とするとき

$$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \text{ が } a \text{ に収束する} \quad \Longleftrightarrow \quad (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \text{ の任意の部分有向点族が } a \text{ に収束する} \tag{A.13}$$

が成立する．特に $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が点列であるとき，右辺で部分有向点族を部分列に替えても同値関係は成立する．

証明. $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が a に収束するとき，a の任意の近傍 U に対し或る $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在して

$$\lambda_0 \leq \lambda \quad \Longrightarrow \quad x_\lambda \in U$$

を満たす．$(y_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ を $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の部分有向点族とするとき，つまりこのとき或る有向集合 $(\Gamma, \leq)$ と $f : \Gamma \longrightarrow \Lambda$ により $y_\gamma = x_{f(\gamma)}$ と表せるが，f の共終性から $\lambda_0 \leq f(\gamma_0)$ を満たす $\gamma_0 \in \Gamma$ が存在し，f の単調性と $\leq$ の推移律より

$$\gamma_0 \leq \gamma \quad \Longrightarrow \quad f(\gamma_0) \leq f(\gamma) \quad \Longrightarrow \quad \lambda_0 \leq f(\gamma) \quad \Longrightarrow \quad y_\gamma = x_{f(\gamma)} \in U$$

が従うから $(y_\lambda)_{\gamma\in\Gamma}$ は a に収束する．逆に $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が a に収束しないとき，a の或る近傍 V では任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し

$$\lambda \leq \mu, \quad x_\mu \notin V \tag{A.14}$$

を満たす $\mu \in \Lambda$ が取れる．ここで

$$\Gamma \coloneqq \{\ \lambda \in \Lambda \ \ : \quad x_\lambda \notin U\ \}$$

とおけば，任意の有限集合 $M \subset \Gamma$ に対し Λ における上界 λ が存在するが，(A.3.5) より $\lambda \leq \mu$ を満たす $\mu \in \Gamma$ が取れるから $(\Gamma, \leq)$ は有向集合となる．恒等写像 $\Gamma \longrightarrow \Lambda$ は単調性と共終性を満たし，この場合の部分有向点族 $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ は a に収束しないから (A.3.57) が出る．$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が a に収束しない点列であるとき，任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して

$$\langle n \rangle \coloneqq \{\ m \in \mathbf{N} \ \ : \quad n < m,\ x_m \notin U\ \}$$

は空ではない．$\mathbf{N}$ の空でない部分集合の全体を $\mathscr{N}$ として選択関数 $\Phi \in \prod \mathscr{N}$ を取り

$$\begin{aligned} n_1 &\coloneqq \Phi(\langle 1 \rangle), \\ n_2 &\coloneqq \Phi(\langle n_1 \rangle), \\ n_3 &\coloneqq \Phi(\langle n_2 \rangle), \\ &\ \ \vdots \end{aligned}$$

で $\{n_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ を定めれば，$(x_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ は a に収束しない部分列となる． ■

定理 A.3.58 (閉集合は有向点族の極限集合). A を位相空間 S の部分集合とするとき，

$$a \in \overline{A} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{或る有向集合 } (\Lambda, \leq) \text{ と } A \text{ 上の有向点族 } (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \text{ が存在して } x_\lambda \longrightarrow a.$$

特に S が第一可算空間であるとき，右辺で有向点族を点列に替えて同値関係が成立する．

証明.

第一段 $\Longrightarrow$ を示す．$\mathscr{U}$ を a の基本近傍系とするとき，二項関係 $\leq$ を

$$U \leq V \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad U \supset V$$

で定めれば $(\mathscr{U}, \leq)$ は有向集合となる．定理 A.3.9 より

$$a \in \overline{A} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{任意の } U \in \mathscr{U} \text{ に対し } A \cap U \neq \emptyset$$

が満たされ，いま $a \in \overline{A}$ と仮定しているから $x \in \prod_{U\in\mathscr{U}}(A \cap U)$ が取れて $x = (x_U)_{U\in\mathscr{U}}$ は A 上の有向点族となる．このとき a の任意の近傍 V に対し $U_0 \subset V$ となる $U_0 \in \mathscr{U}$ が存在して

$$\forall U \in \mathscr{U};\quad U_0 \leq U \Longrightarrow x_U \in U \subset U_0 \subset V$$

となり $x_U \longrightarrow a$ が従う．$\mathscr{U}$ が高々可算集合であるとき，つまり $\mathscr{U} = \{U_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ と表せるとき，

$$\tilde{U}_n \coloneqq U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

で減少列 $\tilde{\mathscr{U}} \coloneqq \{\tilde{U}_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ を定めれば $\tilde{\mathscr{U}}$ も a の基本近傍系となり，$y \in \prod_{n\in\mathbf{N}}(A \cap \tilde{U}_n)$ を取り

$$y_n \coloneqq y(n), \quad (\forall n \in \mathbf{N})$$

とおけば，a の任意の近傍 V に対し $\tilde{U}_{n_0} \subset V$ となる $n_0 \in \mathbf{N}$ が存在して

$$\forall n \in \mathbf{N}; \quad n_0 \leq n \Longrightarrow y_n \in \tilde{U}_n \subset \tilde{U}_{n_0} \subset V$$

が成り立ち $y_n \longrightarrow a$ となる．

第二段 $\Longleftarrow$ を示す．a に収束する A 上の有向点族 $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が存在するとき，

$$a \in \overline{\{ x_\lambda \ : \ \lambda \in \Lambda \}} \subset \overline{A}$$

が従う．■

定理 A.3.59 (f が x で連続 $\Longleftrightarrow$ x に収束する有向点族の像点族が $f(x)$ に収束). S,T を位相空間とするとき，$f : S \longrightarrow T$ が点 $s \in S$ で連続であるための必要十分条件は

(1) 任意の有向集合 $(\Lambda, \leq)$ と任意の有向点族 $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ に対し，

$$x_\lambda \longrightarrow s \quad \Longrightarrow \quad f(x_\lambda) \longrightarrow f(s).$$

(2) s が可算な基本近傍系を持つとき，任意の点列 $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ に対し

$$x_n \longrightarrow s \quad \Longrightarrow \quad f(x_n) \longrightarrow f(s).$$

証明.

(1) f が s で連続であるとき，$f(s)$ の任意の近傍 V に対し $f^{-1}(V)$ は s の近傍となる．任意の有向集合 $(\Lambda, \leq)$ と任意の有向点族 $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ に対し，$x_\lambda \longrightarrow s$ なら或る $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在して

$$\lambda_0 \leq \lambda \quad \Longrightarrow \quad x_\lambda \in f^{-1}(V) \quad \Longrightarrow \quad f(x_\lambda) \in V$$

となるから $f(x_\lambda) \longrightarrow f(s)$ となる．逆に f が s で連続でないとき，$\mathscr{U}$ を s の基本近傍系とすれば

$$U \backslash f^{-1}(V) \neq \emptyset, \quad (\forall U \in \mathscr{U})$$

を満たす $f(s)$ の近傍 V が存在して，このとき $x \in \prod_{U \in \mathscr{U}} U \backslash f^{-1}(V)$ が取れる．$\mathscr{U}$ において二項関係 $\leq$ を

$$U_1 \leq U_2 \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad U_1 \supset U_2$$

で定めれば $(\mathscr{U}, \leq)$ は有向集合となるから $x = (x_U)_{U \in \mathscr{U}}$ は有向点族をなし，

$$f(x_U) \notin V, \quad (\forall U \in \mathscr{U})$$

より $f(x_U) \not\longrightarrow f(s)$ であるが，一方で任意の $U_0 \in \mathscr{U}$ に対し

$$U_0 \leq U \quad \Longrightarrow \quad x_U \in U \subset U_0$$

が成り立つから $(x_U)_{U \in \mathscr{U}}$ は s に収束する．

(2) 点列は有向点族であるから (1) より必要性が従う．$\mathscr{U} = \{U_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ を s の基本近傍系すれば，

$$\tilde{U}_n \coloneqq U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

により単調減少な s の基本近傍系 $\left\{\tilde{U}_n\right\}_{n\in\mathbf{N}}$ が得られる．f が s で連続でないとき，$f(s)$ の或る近傍 V で

$$\tilde{U}_n \backslash f^{-1}(V) \neq \emptyset, \quad (\forall n \in \mathbf{N})$$

が成り立ち，$x \in \prod_{n\in\mathbf{N}} \tilde{U}_n \backslash f^{-1}(V)$ を取れば $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ は $x_n \longrightarrow s$ かつ $f(x_n) \not\longrightarrow f(s)$ を満たす． ∎

定義 A.3.60 (無限に含まれる). $(\Lambda, \leq)$ を有向集合，$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を集合 S 上の有向点族，$A \subset S$ とするとき，任意に $\lambda \in \Lambda$ を選んでも $x_\mu \in A$ を満たす $\lambda \leq \mu$ が取れることを '$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は A に無限に含まれる **(frequently in)**' という．

定理 A.3.61 (有向点族が点 a の任意の近傍に無限に含まれる $\Longleftrightarrow$ a に収束する部分点族が存在).

(1) $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間 S と有向集合 $(\Lambda, \leq)$ で定まる有向点族とし，a を S の点とするとき，

$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が a の任意の近傍に無限に含まれる $\Longleftrightarrow$ a に収束する $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の部分有向点族が存在する．

(2) (1) において $\Lambda = \mathbf{N}$ かつ a が可算な基本近傍系を持つ場合，

$(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ が a の任意の近傍に無限に含まれる $\Longleftrightarrow$ a に収束する $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ の部分列が存在する．

証明.

第一段 (1) の $\Longrightarrow$ を示す．$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が a の任意の近傍に無限に含まれるとき，$\mathscr{U}$ を a の基本近傍系として

$$\Gamma \coloneqq \{\, (\lambda, U) \;:\; \lambda \in \Lambda,\ U \in \mathscr{U},\ x_\lambda \in U \,\}$$

とおき，Γ において二項関係 $\preceq$ を

$$(\lambda, U) \preceq (\mu, V) \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \lambda \leq \mu \text{ かつ } U \supset V$$

で定めれば $(\Gamma, \preceq)$ は有向集合となる．実際 $\lambda \leq \lambda$ かつ $U \supset U$ より $(\lambda, U) \preceq (\lambda, U)$, $(\forall (\lambda, U) \in \Gamma)$ となり，

$$\begin{aligned}
(\lambda_1, U_1) \preceq (\lambda_2, U_2),\ (\lambda_2, U_2) \preceq (\lambda_3, U_3) \quad &\Longrightarrow \quad \lambda_1 \leq \lambda_2,\ \lambda_2 \leq \lambda_3,\ U_1 \supset U_2,\ U_2 \supset U_3 \\
&\Longrightarrow \quad \lambda_1 \leq \lambda_3,\ U_1 \supset U_3 \\
&\Longrightarrow \quad (\lambda_1, U_1) \preceq (\lambda_3, U_3)
\end{aligned}$$

より推移律も出る．また任意に有限個の $(\lambda_i, U_i) \in \Gamma$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$ を取れば，或る $\lambda \in \Lambda$ と $U \in \mathscr{U}$ で

$$\lambda_i \leq \lambda,\ (1 \leq i \leq n); \quad \bigcap_{i=1}^{n} U_i \supset U$$

となるが，このとき $\lambda \leq \mu$ かつ $x_\mu \in U$ を満たす $\mu \in \Lambda$ が存在して (μ, U) は $\{(\lambda_i, U_i)\}_{i=1}^n$ の上界となる．

$$f : \Gamma \ni (\lambda, U) \longmapsto \lambda \in \Lambda$$

は単調かつ共終であるから $(x_{f(\gamma)})_{\gamma\in\Gamma}$ は部分有向点族となり，任意の $(\lambda_0, U_0) \in \Gamma$ に対して

$$(\lambda_0, U_0) \preceq (\lambda, U) \quad \Longrightarrow \quad x_{f(\lambda,U)} = x_\lambda \in U \subset U_0$$

が成り立つから $(x_{f(\gamma)})_{\gamma\in\Gamma}$ は a に収束する．

第二段 (2) の $\Longrightarrow$ を示す．$\mathscr{U} = \{U_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ を a の基本近傍系とすれば

$$V_k \coloneqq U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_k, \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

により単調減少な基本近傍系 $\{V_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ が得られる．任意の $n, k \in \mathbf{N}$ に対し

$$\langle n, k\rangle \coloneqq \{\, m \in \mathbf{N} \;:\; n < m,\ x_m \in V_k \,\}$$

とおけば $\langle n, k\rangle$ は空ではなく，選択関数 $\Phi \in \prod_{n,k\in\mathbf{N}} \langle n, k\rangle$ を取り

$$\begin{aligned} n_1 &\coloneqq \Phi(1, 1), \\ n_2 &\coloneqq \Phi(n_1, 2), \\ n_3 &\coloneqq \Phi(n_2, 3), \\ &\vdots \end{aligned}$$

で $\{n_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ を定めれば，$(x_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ は $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ の部分列となり，任意の V_{k_0} に対して

$$k_0 \leq k \quad \Longrightarrow \quad x_{n_k} \in V_k \subset V_{k_0}$$

となるから $(x_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ は a に収束する．

第三段 (1) の $\Longleftarrow$ を示す．或る有向集合 $(\Theta, \trianglelefteq)$ と単調かつ共終な $h : \Theta \longrightarrow \Lambda$ が存在して $(x_{h(\theta)})_{\theta\in\Theta}$ が a に収束するとき，任意に $\lambda \in \Lambda$ と a の近傍 U を取れば，或る $\theta_1 \in \Theta$ で $\lambda \leq h(\theta_1)$ となり，また或る $\theta_2 \in \Theta$ が存在して

$$\theta_2 \trianglelefteq \theta \quad \Longrightarrow \quad x_{f(\theta)} \in U$$

が成り立つ．有向律から $\theta_1, \theta_2 \trianglelefteq \theta$ を満たす $\theta \in \Theta$ が取れるが，$\lambda \leq h(\theta)$ かつ $x_{h(\theta)} \in U$ が従うから $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は U に無限に含まれる．(2) においても，部分列は部分有向点族であるから $\Longleftarrow$ が成立する． ∎

定理 A.3.62 (コンパクト $\Longleftrightarrow$ 任意の有向点族が収束部分有向点族を持つ). 位相空間 S の部分集合 A に対し，

$$A \text{ がコンパクト部分集合} \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ 上の任意の有向点族が } A \text{ で収束する部分有向点族を持つ．}$$

証明.

第一段 $\Longrightarrow$ を示す．或る有向集合 $(\Lambda, \leq)$ と A 上の有向点族 $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ で A で収束する部分有向点族を持たないものが存在するとき，定理 A.3.61 より任意の $a \in A$ に対し或る $\lambda_a \in \Lambda$ と a の近傍 U_a が取れて

$$x_\lambda \notin U_a, \quad (\lambda_a \leq \forall\lambda)$$

が満たされる．このとき $\left\{\, U_a^\circ \;:\; a \in A \,\right\}$ は A の S における開被覆となるが，もし有限個の $a_1, \cdots, a_n \in A$ で

$$A \subset U_{a_1}^\circ \cup U_{a_2}^\circ \cup \cdots \cup U_{a_n}^\circ$$

が成り立つとすると，$\left\{\lambda_{a_1}, \cdots, \lambda_{a_n}\right\}$ の上界 $\lambda \in \Lambda$ において

$$x_\lambda \notin U_{a_1} \cup U_{a_2} \cup \cdots \cup U_{a_n}$$

となり $x_\lambda \in A$ に矛盾する．従って定理 A.3.13 より A はコンパクトではない．

第二段 $\Longleftarrow$ を示す．$\mathscr{F}$ を S の閉集合族とし，$\{\, A \cap F \;:\; F \in \mathscr{F} \,\}$ が有限交叉的であるとする．

$$\mathfrak{M} := \{\, \mathscr{M} \;:\; \mathscr{M} \text{ は } \mathscr{F} \text{ の空でない有限部分族} \,\}$$

とおいて $\mathfrak{M}$ 上の二項関係 $\leq$ を

$$\mathscr{M} \leq \mathscr{N} \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \mathscr{M} \subset \mathscr{N}$$

で定めれば $(\mathfrak{M}, \leq)$ は有向集合となる．任意の $\mathscr{M} \in \mathfrak{M}$ で $A \cap \bigcap \mathscr{M} \neq \emptyset$ が満たされるから

$$x \in \prod_{\mathscr{M} \in \mathfrak{M}} \left(A \cap \bigcap \mathscr{M} \right)$$

が取れて，$x = (x_{\mathscr{M}})_{\mathscr{M} \in \mathfrak{M}}$ は A 上の有向点族をなし，仮定より或る $p \in A$ が存在して $(x_{\mathscr{M}})_{\mathscr{M} \in \mathfrak{M}}$ の或る部分有向点族が p に収束する．このとき任意に $F \in \mathscr{F}$ を取れば，$(x_{\mathscr{M}})_{\mathscr{M} \in \mathfrak{M}}$ は p の任意の近傍 U に無限に含まれるから

$$\{F\} \leq \mathscr{M}, \quad x_{\mathscr{M}} \in U$$

を満たす $\mathscr{M} \in \mathfrak{M}$ が存在し，

$$x_{\mathscr{M}} \in A \cap \bigcap \mathscr{M} \subset A \cap F$$

と併せて $U \cap F \neq \emptyset$ となる．U の任意性，定理 A.3.9 と F が閉であることから

$$p \in \overline{F} = F$$

が従い，F の任意性から $p \in A \cap \bigcap \mathscr{F}$ が成り立つ．そして定理 A.3.15 より A のコンパクト性が出る． ∎

一般の位相空間において部分集合 A がコンパクトであることの同値条件は A 上の任意の有向点族が A で収束する部分有向点族を持つことであったが，この条件で有向点族を点列に替えたもの，すなわち

- A 上の任意の点列が A で収束する部分列を持つ

という性質が成り立つとき，A は**点列コンパクト (sequentially compact)** な部分集合であるという．

定理 A.3.63 (点列コンパクト $\Longrightarrow$ 可算コンパクト).

A.3.6 一様空間

一様空間は後述する距離空間や位相線型空間の上位概念である．距離空間では距離により，位相線型空間では 0 ベクトル周りの近傍を任意の点に移すことにより，空間全体で共通する点同士の ‘近さ’ の尺度が与えられる．一般の位相空間では点同士の ‘近さ’ を相対的に比較することはできない (つまり点 x, y の ‘近さ’ と点 a, b の ‘近さ’ を比較する基準がない) が，一様構造が導入された空間では各点に共通する近傍概念が定義されるため ‘近さ’ の相対比較が可能になり，一様連続，一様収束，完備，全有界といった性質が定式化される．

始めに次の集合演算を定義する．S を集合とするとき，任意の $V \subset S \times S$ に対して，その反転 V^{-1} を

$$V^{-1} := \{\, (y, x) \;:\; (x, y) \in V \,\}$$

により定め，また $S\times S$ における二項演算 $\circ$ を

$$U\circ V := \{\,(x,z)\;:\quad 或る\ y\in S\ で\ (x,y)\in U\ かつ\ (y,z)\in V\ となる\,\},\quad (U,V\subset S\times S)$$

で定める．このとき演算 $\circ$ について次が成り立つ: $V,W\subset S\times S$ を空でない部分集合とすれば

$$W\circ W\subset V \quad\Longleftrightarrow\quad 任意の\ x,y,z\in S\ に対し\ (x,y),(y,z)\in W\ なら\ (x,z)\in V.$$

定義 A.3.64 (**近縁系**). S を空でない集合とする．次の (US1)~(US5) を満たす $S\times S$ の部分集合族 $\mathscr{V}$ を S の**近縁系 (system of entourages)** や**一様構造 (uniform structure)** と呼び，対 $(S,\mathscr{V})$ を**一様空間 (uniform space)** と呼ぶ:

(US1) $\mathscr{V}\neq\emptyset$ かつ任意の $V\in\mathscr{V}$ は $\{\,(x,x)\;:\quad x\in S\,\}\subset V$ を満たす．
(US2) 任意の $V\subset S\times S$ に対し $V\in\mathscr{V}\Longleftrightarrow V^{-1}\in\mathscr{V}$.
(US3) 任意の $U,V\in\mathscr{V}$ に対し $U\cap V\in\mathscr{V}$.
(US4) 任意の $V\in\mathscr{V}$ に対し或る $W\in\mathscr{V}$ が存在して $W\circ W\subset V$．またこれは次と同値である:

$$\forall V\in\mathscr{V};\ \exists W\in\mathscr{V};\ \forall x,y,z\in S;\quad (x,y),(y,z)\in W\Longrightarrow(x,z)\in V.$$

(US5) 任意の $V\subset\mathscr{V}$ に対し $V\subset R$ なら $R\in\mathscr{V}$.

$\mathscr{V}$ の元を**近縁 (entourage)** と呼び，近縁 V が $V=V^{-1}$ を満たすとき V は**対称である (symmetric)** という．また基本近傍系と同様に $\mathscr{V}$ の部分集合 $\mathscr{U}$ で $\mathscr{V}$ の任意の近縁に対しそれに含まれる $\mathscr{U}$ の元が取れるとき，$\mathscr{U}$ を $\mathscr{V}$ の**基本近縁系 (fundamental system of entourages)** と呼ぶ.

(US3) について，V に対し W を対称なものとして取ることができる．実際 $U\in\mathscr{V}$ が $U\circ U\subset V$ を満たすとき，

$$W := U\cap U^{-1}$$

で $W\in\mathscr{V}$ を定めれば，W は対称であり $W\circ W\subset U\circ U\subset V$ となる．

定理 A.3.65 (**近縁系は $\circ$ により半群となる**). 二項演算 $\circ$ は結合法則を満たし，また近縁系の中で閉じる (U,V が近縁なら $U\circ V$ も近縁).

証明. S を空でない集合，$\mathscr{V}$ を S の近縁系とする．任意の $U,V,W\subset S\times S$ で

$$\begin{aligned}(a,b)\in(U\circ V)\circ W &\iff \exists c\in S;\ (a,c)\in U\circ V,\ (c,b)\in W\\ &\iff \exists c,d\in S;\ (a,d)\in U,\ (d,c)\in V,\ (c,b)\in W\\ &\iff \exists d\in S;\ (a,d)\in U,\ (d,b)\in U\circ W\\ &\iff (a,b)\in U\circ(V\circ W)\end{aligned}$$

となるから $\circ$ は結合法測を満たす．また任意の $U,V\in\mathscr{V}$ に対し

$$(x,y)\in U\quad\Longrightarrow\quad(x,y)\in U,\ (y,y)\in V\quad\Longrightarrow\quad(x,y)\in U\circ V$$

より $U\subset U\circ V$ となるから $U\circ V\in\mathscr{V}$ が成り立つ． ∎

定理 A.3.66. $(S, \mathscr{V})$ を一様空間とするとき，任意の $V \in \mathscr{V}$ に対し

$$W_x \times W_x \subset V, \quad (\forall x \in S)$$

を満たす対称な $W \in \mathscr{V}$ が存在する．ただし $W_x = \{\, y \in S \ :\ (x, y) \in W \,\}$ である．

証明. 近縁系の定義より $U \circ U \subset V$ を満たす $U \in \mathscr{V}$ が存在する．ここで

$$W := U \cap U^{-1}$$

で対称な $W \in \mathscr{V}$ を定めれば，任意の $x \in S$ に対し

$$y, z \in W_x \implies (x, y), (x, z) \in W \implies (y, x), (x, z) \in W \implies (y, z) \in V$$

が成立し $W_x \times W_x \subset V$ が得られる． ∎

定理 A.3.67 (近縁系で導入する位相). $\mathscr{V}$ を集合 S の近縁系，$\mathscr{U}$ を $\mathscr{V}$ の基本近縁系とする．V_x を

$$V_x := \{\, y \in S \ :\ (x, y) \in V \,\}, \quad (V \in \mathscr{V},\ x \in S)$$

で定義するとき，各 $x \in S$ で

$$\mathscr{U}(x) := \{\, U_x \ :\ U \in \mathscr{U} \,\}$$

とおけば $\{\mathscr{U}(x)\}_{x \in S}$ は定理 A.3.6 の (LB1)(LB2)(LB3) を満たす．このとき $\{\mathscr{U}(x)\}_{x \in S}$ が基本近傍系となる S の位相が唯一つ定まるが，別の基本近縁系を用いても同じ位相が定まる．

証明. $\mathscr{U}$ は空でないから $\mathscr{U}(x)$ も空ではない．そして任意の $U \in \mathscr{U}$ は $\{\, (x, x) \ :\ x \in S \,\}$ を含むから $x \in U_x$ となり (LB1) が満たされる．また任意の $U_x, V_x \in \mathscr{U}(x)$ に対し或る $W \in \mathscr{U}$ で $W \subset U \cap V$ となるから，$W_x \subset U_x \cap V_x$ が従い (LB2) も出る．任意の $U_x \in \mathscr{U}(x)$ に対し定理 A.3.66 より

$$W_y \times W_y \subset U, \quad (\forall y \in S)$$

を満たす対称な $W \in \mathscr{V}$ が存在する．$R \subset W$ を満たす $R \in \mathscr{U}$ を取れば

$$y \in R_x \implies y \in W_x \implies (x, y) \in W_x \times W_x \subset U \implies y \in U_x$$

となるから $R_x \subset U_x$ が成り立ち，このとき任意の $y \in R_x$ に対し

$$z \in R_y \implies (y, z) \in W = W^{-1} \implies (x, z) \in W_y \times W_y \subset U \implies z \in U_x$$

より $R_y \subset U_x$ が満たされるから (LB3) も得られる．従って定理 A.3.5 と定理 A.3.6 より $\{\mathscr{U}(x)\}_{x \in S}$ が基本近傍系となる S の位相 $\tau_{\mathscr{U}}$ が唯一つ定まる．いま，$\tilde{\mathscr{U}}$ を $\mathscr{V}$ の別の基本近縁系として

$$\tilde{\mathscr{U}}(x) := \left\{\, \tilde{U}_x \ :\ \tilde{U} \in \tilde{\mathscr{U}} \,\right\}, \quad (\forall x \in S)$$

とおけば，$\left\{\tilde{\mathscr{U}}(x)\right\}_{x\in S}$ は $(S,\tau_{\mathscr{U}})$ における基本近傍系となる．実際，任意の $\tilde{U}_x \in \tilde{\mathscr{U}}(x)$ に対し或る $U \in \mathscr{U}$ で $U_x \subset \tilde{U}_x$ となるから $\tilde{U}_x$ は x の近傍であり，一方で任意の $V_x \in \mathscr{U}(x)$ に対し或る $\tilde{V} \in \tilde{\mathscr{U}}$ で $\tilde{V}_x \subset V_x$ となるから $\tilde{\mathscr{U}}(x)$ は x の基本近傍系をなしている．$\left\{\tilde{\mathscr{U}}(x)\right\}_{x\in S}$ が基本近傍系となる位相は唯一つであるから $\tau_{\tilde{\mathscr{U}}} = \tau_{\mathscr{U}}$ が成り立つ． ∎

定義 A.3.68 (一様位相). $\mathscr{V}$ を集合 S の近縁系，$\mathscr{U}$ を $\mathscr{V}$ の基本近縁系とする．$U \in \mathscr{U}$ と $x \in S$ に対し U_x を

$$U_x \coloneqq \{\, y \in S \quad : \quad (x,y) \in U \,\}$$

で定義するとき，定理 A.3.67 より

$$\mathscr{U}(x) \coloneqq \{\, U_x \quad : \quad U \in \mathscr{U} \,\}$$

を各点 x の基本近傍系とする位相が定まるが，別の基本近縁系を取っても同じ位相が定まるのでこれを '近縁系 $\mathscr{V}$ で導入する S の**一様位相 (uniform topology)**' と呼ぶ．S が元から位相空間であるとき，$\mathscr{V}$ で導入する位相と元の位相が一致することを '$\mathscr{V}$ と元の位相が**両立する (compatible)**' という．

定理 A.3.69 (部分一様空間). $(S,\mathscr{V})$ を一様空間とするとき，任意の空でない部分集合 $A \subset S$ に対し

$$\mathscr{V}_A \coloneqq \{\, (A\times A)\cap V \quad : \quad V \in \mathscr{V} \,\}$$

は A 上の近縁系となる．また S に $\mathscr{V}$ で位相を導入するとき，A 上の相対位相と $\mathscr{V}_A$ は両立する．

証明.

第一段 $\mathscr{V}_A$ が定義 A.3.64 の (US1)~(US5) を満たすことを示す．先ず $\mathscr{V} \neq \emptyset$ より $\mathscr{V}_A \neq \emptyset$ であり，

$$V \in \mathscr{V} \quad\Longrightarrow\quad (a,a) \in V,\ (\forall a \in A) \quad\Longrightarrow\quad (a,a) \in (A\times A)\cap V,\ (\forall a \in A)$$

となるから (US1) が満たされる．また任意に $E \in \mathscr{V}_A$ を取れば或る $V \in \mathscr{V}$ で $E = (A\times A)\cap V$ と表され，

$$(x,y) \in E^{-1} \quad\Longleftrightarrow\quad (y,x) \in (A\times A)\cap V \quad\Longleftrightarrow\quad (x,y) \in (A\times A)\cap V^{-1}$$

が成り立つから $E^{-1} \in \mathscr{V}_A$ が従い (US2) も満たされる．任意の $U,V \in \mathscr{V}$ に対し

$$((A\times A)\cap U)\cap((A\times A)\cap V) = (A\times A)\cap(U\cap V) \in \mathscr{V}_A$$

より (US3) が得られ，また $V \in \mathscr{V}$ に対し $W\circ W \subset V$ となる $W \in \mathscr{V}$ を取れば

$$(x,y),(y,z) \in (A\times A)\cap W \quad\Longrightarrow\quad x,z \in A,\ (x,z) \in V \quad\Longrightarrow\quad (x,z) \in (A\times A)\cap V$$

となるから (US4) が出る．$(A\times A)\cap V \subset R,\ (V \in \mathscr{V})$ を満たす任意の $R \subset A\times A$ に対し，$V\cup R \in \mathscr{V}$ より

$$R = (A\times A)\cap(V\cup R) \in \mathscr{V}_A$$

が成立し (US5) も従う．

第二段 $\mathscr{V}_A$ で導入する A の位相を τ_A と書く．任意の $a \in A$ と $V \in \mathscr{V}$ に対して

$$\begin{aligned}[(A\times A)\cap V]_a &\coloneqq \{\, x \in A \quad : \quad (a,x) \in (A\times A)\cap V \,\} \\ &= \{\, x \in S \quad : \quad (a,x) \in V \,\} \cap A =: V_a \cap A\end{aligned}$$

となる．$\{ [(A \times A) \cap V]_a \ : \ V \in \mathscr{V} \}$ は τ_A における a の基本近傍系をなし，$\{ V_a \cap A \ : \ V \in \mathscr{V} \}$ は A の相対位相における a の基本近傍系をなすが，両者が一致するので位相も一致する． ∎

定理 A.3.70 (一様位相空間において $T_0 \Longleftrightarrow T_2$). $(S, \mathscr{V})$ を一様空間とし，S に一様位相を導入する．このとき任意の $x, y \in S$ に対して

$$x, y \text{ が位相的に識別可能} \quad \Longleftrightarrow \quad (x, y) \notin \bigcap_{V \in \mathscr{V}} V \quad \Longleftrightarrow \quad x, y \text{ が近傍で分離される．} \tag{A.15}$$

特に次が得られる:

$$S \text{ が } T_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \bigcap_{V \in \mathscr{V}} V = \{ (x, x) \ : \ x \in S \} \quad \Longleftrightarrow \quad S \text{ が } T_2$$

証明． 任意の $V \in \mathscr{V}$ と $s \in S$ に対し

$$V_s := \{ t \in S \ : \ (s, t) \in V \}$$

と定義する．$(x, y) \in \bigcap_{V \in \mathscr{V}} V$ なら任意の $V \in \mathscr{V}$ に対し

$$x \in V_y, \quad y \in V_x$$

となる．$\{V_x\}_{V \in \mathscr{V}}$ と $\{V_y\}_{V \in \mathscr{V}}$ はそれぞれ x, y の基本近傍系となるから定理 A.3.9 より $x \in \overline{\{y\}}$ かつ $y \in \overline{\{x\}}$ が従い

$$x, y \text{ が位相的に識別可能} \quad \Longrightarrow \quad (x, y) \notin \bigcap_{V \in \mathscr{V}} V$$

が出る．また或る $V \in \mathscr{V}$ で $(x, y) \notin V$ となるとき，$W \circ W \subset V$ を満たす対称な $W \in \mathscr{V}$ を取れば W_x, W_y はそれぞれ x, y の近傍となるが，これらは互いに素である．実際或る $z \in W_x \cap W_y$ が取れるとすると，$(x, z), (z, y) \in W$ から $(x, y) \in V$ が従い $(x, y) \notin V$ に矛盾する．よって

$$(x, y) \notin \bigcap_{V \in \mathscr{V}} V \quad \Longrightarrow \quad x, y \text{ が近傍で分離される}$$

を得る．近傍で分離される二点は位相的に識別可能であるから (A.3.70) が成立する． ∎

定義 A.3.71 (一様収束). S, T を空でない集合とし，Y 上に近縁系 $\mathscr{V}$ が定まっているとする．また $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を有向集合 $(\Lambda, \leq)$ で添数付けた S から T への写像族，f を S から T への写像，及び A を S の部分集合とする．

- 任意の近縁 V に対し或る $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在して，全ての $y \in A$ で
$$\lambda_0 \leq \lambda \quad \Longrightarrow \quad (f(y), f_\lambda(y)) \in V$$
となるとき，$(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は A 上で f に**一様収束**する **(uniformly converge)** という．
- 任意の一点集合において一様収束することを**各点収束 (pointwise convergence)** という．
- S が位相空間であるとき，任意のコンパクト部分集合上で一様収束することを**コンパクト一様収束 (compact convergence)** や**広義一様収束**という．
- S が位相空間であるとき，各点 $x \in S$ で或る近傍 $U(x)$ が取れて $U(x)$ 上で一様収束することを**局所一様収束 (locally uniform convergence)** という．

定理 A.3.72 (連続写像が局所一様収束するなら極限写像も連続). S を位相空間，$(T, \mathscr{V})$ を一様空間として T に $\mathscr{V}$ で位相を導入する．また $(\Lambda, \leq)$ を有向集合，$(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を S から T への連続写像族とし，f を S から T への写像とする．このとき $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が f に局所一様収束しているなら f も連続写像である．

証明. 任意に $x \in S$ を取れば，$f(x)$ の任意の近傍 N に対し或る近縁 V が存在して
$$V_{f(x)} := \{\, t \in T \;\;:\;\; (f(x), t) \in V \,\} \subset N$$
を満たす．また V に対し或る対称な近縁 W で
$$(a,b), (b,c), (c,d) \in W \quad \Longrightarrow \quad (a,d) \in V, \quad (\forall a,b,c,d \in S)$$
を満たすものが取れる．この W に対して或る $\lambda_0 \in \Lambda$ と x の近傍 $U(x)$ が存在し，全ての $y \in U(x)$ で
$$\lambda_0 \leq \lambda \quad \Longrightarrow \quad (f(y), f_\lambda(y)) \in W$$
となる．f_{λ_0} は連続であり $W_{f_{\lambda_0}(x)}$ は $f_{\lambda_0}(x)$ の近傍であるから，x の或る近傍 $R(x)$ で
$$y \in R(x) \quad \Longrightarrow \quad f_{\lambda_0}(y) \in W_{f_{\lambda_0}(x)}$$
が成り立ち，以上より
$$\begin{aligned} y \in U(x) \cap R(x) \quad &\Longrightarrow \quad (f(x), f_{\lambda_0}(x)), (f_{\lambda_0}(x), f_{\lambda_0}(y)), (f_{\lambda_0}(y), f(y)) \in W \\ &\Longrightarrow \quad (f(x), f(y)) \in V \\ &\Longrightarrow \quad f(y) \in N \end{aligned}$$
が従い f の x での連続性が得られる．x の任意性と定理 A.3.17 より f は S で連続である． ∎

定理 A.3.73 (局所コンパクト空間において，広義一様収束 $\Longleftrightarrow$ 局所一様収束). S を局所コンパクト空間，$(T, \mathscr{V})$ を一様空間として T に $\mathscr{V}$ で位相を導入する．また $(\Lambda, \leq)$ を有向集合，$(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を S から T への写像族とし，f を S から T への写像とする．このとき

$$(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \text{ が } f \text{ に広義一様収束する} \quad \Longleftrightarrow \quad (f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \text{ が } f \text{ に局所一様収束する．}$$

証明． 各点でコンパクトな近傍が取れるから $\Longrightarrow$ が得られる．逆に $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が f に局所一様収束すると仮定する．K を S のコンパクト部分集合として各点 $x \in K$ のコンパクトな近傍 $U(x)$ を取れば，有限個の $x_1, x_2, \cdots, x_n \subset K$ で

$$K \subset U(x_1) \cup \cdots \cup U(x_n) \tag{A.16}$$

となる．任意に近縁 $V \in \mathscr{V}$ を取れば，各 $i = 1, \cdots, n$ で或る $\lambda_i \in \Lambda$ が存在して

$$y \in U(x_i),\ \lambda_i \leq \lambda \quad \Longrightarrow \quad (f(y), f_\lambda(y)) \in V$$

が成り立つが，このとき有向律より $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ は上界 $\lambda_0 \in \Lambda$ を持つから，任意の $y \in \bigcup_{i=1}^n U(x_i)$ で

$$\lambda_0 \leq \lambda \quad \Longrightarrow \quad (f(y), f_\lambda(y)) \in V$$

が満たされる．(A.3.6) より $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は K 上で f に一様収束し，K の任意性から $\Longleftarrow$ が得られる． ∎

定義 A.3.74 (一様連続性)． $(S, \mathscr{U})$ と $(T, \mathscr{V})$ を一様空間として $\mathscr{U}, \mathscr{V}$ により S, T に一様位相を導入し，$f : S \longrightarrow T$ を写像とする．また A を S の部分集合とする．任意の $V \in \mathscr{V}$ に対し或る $U \in \mathscr{U}$ が存在して

$$(x, y) \in (A \times A) \cap U \quad \Longrightarrow \quad (f(x), f(y)) \in V$$

となるとき，f は A 上で**一様連続**である **(uniformly continuous)** という．

定理 A.3.75 (一様連続なら連続)． $(S, \mathscr{U})$ と $(T, \mathscr{V})$ を一様空間として $\mathscr{U}, \mathscr{V}$ により S, T に一様位相を導入し，$f : S \longrightarrow T$ を写像とする．また A を S の部分集合とする．このとき f が A 上で一様連続なら f は A 上で連続 ($f|_A$ が連続) である．

証明． 任意の $U \in \mathscr{U}, s \in S$ に対し

$$U_s := \{\, y \in S \ :\ \ (s, y) \in U \,\}$$

と定義し，同様に $V \in \mathscr{V}, t \in T$ に対し V_t を定める．$x \in A$ を取れば，$f(x)$ の任意の近傍 N に対し或る $V \in \mathscr{V}$ で

$$V_{f(x)} \subset N$$

となる．このとき f が A で一様連続であるなら V に対し或る $U \in \mathscr{U}$ が存在して

$$(x, y) \in (A \times A) \cap U \quad \Longrightarrow \quad (f(x), f(y)) \in V$$

が満たされるから，

$$y \in A \cap U_x \quad \Longrightarrow \quad f(y) \in V_{f(x)} \subset N$$

が従い $f|_A$ の x での連続性が出る．x の任意性より f は A 上で連続である． ∎

定理 A.3.76 (連続写像はコンパクト集合上で一様連続)． $(S, \mathscr{U})$ と $(T, \mathscr{V})$ を一様空間として $\mathscr{U}, \mathscr{V}$ で S, T に一様位相を導入し，$f : S \longrightarrow T$ を連続写像とする．このとき f は任意のコンパクト部分集合上で一様連続となる．

証明. K を S のコンパクト部分集合とする．任意の $M \in \mathscr{U}, s \in S$ に対し

$$M_s \coloneqq \{\ x \in S \ :\ (s,x) \in M\ \}$$

と定義し，$W \in \mathscr{V}$, $t \in T$ に対しても同様に W_t を定める．任意に $V \in \mathscr{V}$ を取れば，定理 A.3.66 より或る $W \in \mathscr{V}$ で

$$W_t \times W_t \subset V, \quad (\forall t \in T)$$

となる．f は連続であるから任意の $s \in S$ に対し或る $N(s) \in \mathscr{U}$ が存在して

$$(s,x) \in N(s) \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in W_{f(s)}$$

が成り立つ．$M(s) \circ M(s) \subset N(s)$ を満たす対称な $M(s) \in \mathscr{U}$ を取れば，定理 A.3.13 より或る $x_1, \cdots, x_n \in K$ で

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} M(x_i)_{x_i}$$

となる．近縁系は有限交叉で閉じるから

$$U \coloneqq \bigcap_{i=1}^{n} M(x_i)$$

は $\mathscr{U}$ の元であり，このとき任意に $(x,y) \in (K \times K) \cap U$ を取れば，或る i で $y \in M(x_i)_{x_i}$ となり，$(x_i,x_i),(x_i,y) \in M(x_i)$ より $(x_i,y) \in N(x_i)$ となる．一方で $M(x_i)$ が対称であるから $(x_i,y),(y,x) \in M(x_i)$ となり $(x_i,x) \in N(x_i)$ が満たされ，$f(x), f(y) \in W_{f(x_i)}$ が従うから $(f(x), f(y)) \in V$ が成立し f の K の上での一様連続性が出る． ∎

定理 A.3.77 (擬距離空間の一様構造). (S,d) を擬距離空間とするとき，

$$\mathscr{V} \coloneqq \{\ V(r)\ :\ r > 0\ \}, \quad (V(r) \coloneqq \{\ (x,y) \in S \times S\ :\ d(x,y) < r\ \})$$

とおけば $\mathscr{V}$ は S 上の一様構造となり，$\mathscr{V}$ で導入する一様位相は d-位相に一致する．

定理 A.3.78 (擬距離空間の Cauchy 列). (S,d) を擬距離空間とし，一様構造 $\mathscr{V}$ を定理 A.3.77 の要領で定めるとき，S の任意の点列 $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ に対し，$(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ が Cauchy 列であることと

$$\forall \epsilon > 0;\ \exists N \in \mathbf{N};\quad n,m \geq N \Longrightarrow d(x_n,x_m) < \epsilon \tag{A.17}$$

が成り立つことは同値になる．

証明. 任意の ϵ と $n,m \in \mathbf{N}$ で

$$(x_n,x_m) \in V(\epsilon) \quad \Longleftrightarrow \quad d(x_n,x_m) < \epsilon$$

となるから，$(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ が Cauchy 列であるとき，任意の $\epsilon > 0$ に対し或る $N \in \mathbf{N}$ が存在して

$$n,m \geq N \quad \Longrightarrow \quad (x_n,x_m) \in V(\epsilon) \quad \Longrightarrow \quad d(x_n,x_m) < \epsilon$$

が成り立つ．逆に $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ に対して (A.3.78) が満たされているとき，任意の $V(\epsilon) \in \mathscr{V}$ に対し或る $M \in \mathbf{N}$ が存在して

$$n,m \geq N \quad \Longrightarrow \quad d(x_n,x_m) < \epsilon \quad \Longrightarrow \quad (x_n,x_m) \in V(\epsilon)$$

となるから $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ は Cauchy 列である． ∎

定理 A.3.79 (点列の擬距離に関する収束). 点列 $(x_n)_{n\in\mathrm{N}}$ が a に収束することと $d(x_n, a) \longrightarrow 0$ は同値.

定義 A.3.80 (Cauchy 有向点族・完備性). $(S, \mathscr{V})$ を一様空間，$(\Lambda, \leq)$ を有向集合，$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を有向点族とする．$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が **Cauchy 有向点族 (Cauchy net)** であるとは，任意の近縁 $V \in \mathscr{V}$ に対し或る $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在して

$$\lambda_0 \leq \lambda, \mu \quad \Longrightarrow \quad (x_\lambda, x_\mu) \in V$$

となることをいう．点列が Cauchy 有向点族をなすときはこれを Cauchy 列 **(Cauchy sequence)** と呼ぶ．S の空でない部分集合 A の上の任意の Cauchy 有向点族が A で収束するとき，A は S で**完備**である **(complete)** という．

定理 A.3.81 (収束する有向点族は Cauchy 有向点族). $(S, \mathscr{V})$ を一様空間，$(\Lambda, \leq)$ を有向集合，$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を有向点族とする．$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が S で収束するとき，$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は Cauchy 有向点族をなしている．

証明. $a \in S$ を $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の極限 (の一つ) とする．任意の近縁 $V \in \mathscr{V}$ に対し或る対称な $W \in \mathscr{V}$ で $W \circ W \subset V$ を満たすものが取れるが，$W_a := \{ s \in S \ : \ (a, s) \in W \}$ は a の近傍であるから或る $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在して

$$\lambda_0 \leq \lambda \quad \Longrightarrow \quad x_\lambda \in W_a$$

となり，W の対称性と併せて

$$\lambda_0 \leq \lambda, \mu \quad \Longrightarrow \quad (x_\lambda, a), (a, x_\mu) \in W \quad \Longrightarrow \quad (x_\lambda, x_\mu) \in V$$

が成り立つ． ∎

定理 A.3.82 (Hausdorff 一様位相空間の完備部分集合は閉). $(S, \mathscr{V})$ を一様空間として $\mathscr{V}$ により S に位相を導入する．また A を S の完備な部分集合とする．このとき，S が Hausdorff なら A は S で閉じている．

証明. $A = \overline{A}$ を示す．定理 A.3.58 より任意に $a \in \overline{A}$ を取れば或る A 上の有向点族 $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が a に収束する．定理 A.3.81 より $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は Cauchy 有向点族となるから A で収束し，Hausdorff 性から $a \in A$ となる (定理 A.3.56). ∎

定理 A.3.83 (Cauchy 有向点族の部分点族も Cauchy・部分点族の極限には元の点族も収束). $(S, \mathscr{V})$ を一様空間，$(\Lambda, \leq)$ を有向集合，$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を Cauchy 有向点族とする．また $(\Gamma, \leq)$ を有向集合，$f : \Gamma \longrightarrow \Lambda$ を共終かつ順序を保存する写像とする．このとき部分有向点族 $(x_{f(\gamma)})_{\gamma\in\Gamma}$ もまた Cauchy 有向点族となり，かつ任意の $a \in S$ に対し

$$x_{f(\gamma)} \longrightarrow a \quad \Longrightarrow \quad x_\lambda \longrightarrow a.$$

定理 A.3.57 より一般に有向点族が点 a に収束するための必要十分条件はその任意の部分有向点族が a に収束することであるが，Cauchy 有向点族の場合は半分収束点族をなしている (定理 A.3.81) から，一つでも収束する部分有向点族が得られれば元の点族の収束も判明する．

証明. 任意の近縁 $V \in \mathscr{V}$ に対し或る $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在して

$$\lambda_0 \leq \lambda, \mu \quad \Longrightarrow \quad (x_\lambda, x_\mu) \in V$$

が成り立つ．共終性より $\lambda_0 \leq f(\gamma_0)$ を満たす $\gamma_0 \in \Gamma$ が取れて，$\gamma_0 \leq \gamma, \xi$ なら $f(\gamma_0) \leq f(\gamma), f(\xi)$ となるから

$$\gamma_0 \leq \gamma, \xi \quad \Longrightarrow \quad \left(x_{f(\gamma)}, x_{f(\xi)}\right) \in V$$

が従う．よって $(x_{f(\gamma)})_{\gamma \in \Gamma}$ は Cauchy 有向点族である．いま，$x_{f(\gamma)} \longrightarrow a$ とする．このとき任意の $U \in \mathscr{V}$ に対し $W \circ W \subset U$ を満たす $W \in \mathscr{V}$ を取れば，或る $\gamma_1 \in \Gamma$ が存在して

$$\gamma_1 \leq \gamma \quad \Longrightarrow \quad \left(a, x_{f(\gamma)}\right) \in W$$

となる．一方で或る $\lambda_1 \in \Lambda$ が存在して

$$\lambda_1 \leq \lambda, \mu \quad \Longrightarrow \quad (x_\lambda, x_\mu) \in W$$

となる．$\lambda_1 \leq f(\gamma_2)$ を満たす $\gamma_2 \in \Gamma$ を取り，$\{\gamma_1, \gamma_2\}$ の上界を $\gamma_3 \in \Gamma$ とすれば，

$$\lambda_1 \leq \lambda \quad \Longrightarrow \quad \left(a, x_{f(\gamma_3)}\right), \left(x_{f(\gamma_3)}, x_\lambda\right) \in W \quad \Longrightarrow \quad (a, x_\lambda) \in U$$

が成り立ち $x_\lambda \longrightarrow a$ が従う． ∎

定理 A.3.84 (可算な基本近縁系が存在するとき，完備 $\Longleftrightarrow$ 任意の Cauchy 列が収束する)． $(S, \mathscr{V})$ を一様空間とし，$\mathscr{V}$ で S に位相を導入する．また A を S の空でない部分集合とする．$\mathscr{V}$ が可算な基本近縁系を持つとき，

$$A \text{ が } S \text{ で完備である} \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ 上の任意の Cauchy 列が } A \text{ で収束する．}$$

証明. $\Longleftarrow$ を示す．$\mathscr{V}$ が可算な基本近縁系 $\{V_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ を持つとき，近縁系は有限交叉で閉じるから

$$U_n \coloneqq V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

により単調減少な $\mathscr{V}$ の基本近縁系 $\{U_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ が定まる．$(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を A 上の Cauchy 有向点族として

$$X_\lambda \coloneqq \left\{\, x_\mu \;:\; \lambda \leq \mu \,\right\}, \quad (\forall \lambda \in \Lambda)$$

とおけば，任意の $n \in \mathbf{N}$ で或る $\lambda_n \in \Lambda$ が存在して

$$X_{\lambda_n} \times X_{\lambda_n} \subset U_n$$

となる．任意の $V \in \mathscr{V}$ に対し $W \circ W \subset V$ を満たす $W \in \mathscr{V}$ を取れば，或る $N \in \mathbf{N}$ で $U_N \subset W$ となるから

$$U_N \circ U_N \subset V$$

が成り立つ．また任意の $n, m \geq N$ に対し，有向集合の定義より $\lambda_n, \lambda_m \leq \mu$ を満たす $\mu \in \Lambda$ が存在して

$$(x_{\lambda_n}, x_\mu) \in U_n \subset U_N, \quad (x_\mu, x_{\lambda_m}) \in U_m \subset U_N$$

となり $(x_{\lambda_n}, x_{\lambda_m}) \in V$ が従うから，$(x_{\lambda_n})_{n \in \mathbf{N}}$ は Cauchy 列であり或る $a \in A$ に収束する．このとき

$$x_\lambda \longrightarrow a \tag{A.18}$$

が成立する．実際，任意に a の近傍 B を取れば或る $\tilde{V} \in \mathscr{V}$ で

$$\tilde{V}_a := \left\{ x \in S \ : \quad (a,x) \in \tilde{V} \right\} \subset B$$

となり，$\tilde{W} \circ \tilde{W} \subset V$ を満たす $\tilde{W} \in \mathscr{V}$ に対し或る $N_1 \in \mathbf{N}$ が存在して

$$n \geq N_1 \quad \Longrightarrow \quad x_{\lambda_n} \in \tilde{W}_a \quad \Longrightarrow \quad (a, x_{\lambda_n}) \in \tilde{W}$$

を満たす．また或る $N_2 \geq N_1$ で $U_{N_2} \subset \tilde{W}$ となるから

$$X_{\lambda_{N_2}} \times X_{\lambda_{N_2}} \subset U_{N_2} \subset \tilde{W}$$

が従い，このとき $(a, x_{\lambda_{N_2}}) \in \tilde{W}$ かつ $(x_{\lambda_{N_2}}, x) \in \tilde{W}, (\forall x \in X_{\lambda_{N_2}})$ より $(a,x) \in \tilde{V}, (\forall x \in X_{\lambda_{N_2}})$ となるから

$$X_{\lambda_{N_2}} \subset \tilde{V}_a \subset B$$

が得られ (A.3.6) が出る．A 上の任意の Cauchy 有向点族が A で収束するから A は S で完備である． ∎

定義 A.3.85 (**全有界**). $(S,\mathscr{V})$ を一様空間とし，A を S の空でない部分集合とする．このとき，A が S で**全有界 (totally bounded)** であるとは，任意の近縁 $V \in \mathscr{V}$ に対し或る有限集合 $F_V \subset A$ が存在して

$$A \subset \bigcup_{x \in F_V} V_x$$

が満たされることを指す．ここで $V_x := \{ y \in S \ : \quad (x,y) \in V \}$ である．

定理 A.3.86 (**全有界性の同値条件**). $(S,\mathscr{V})$ を一様空間，A を S の空でない部分集合とする．このとき，A が S で全有界であることと，任意の近縁 $V \in \mathscr{V}$ に対し A の空でない部分集合の有限族 $\mathscr{F}_V$ で

$$A = \bigcup \mathscr{F}_V; \quad F \times F \subset V, \ (\forall F \in \mathscr{F}_V) \tag{A.19}$$

を満たすものが取れることは同値である．

証明. A が S で全有界であるとする．任意に $V \in \mathscr{V}$ を取れば，定理 A.3.66 より或る $W \in \mathscr{V}$ で

$$W_x \times W_x \subset V, \quad (\forall x \in S)$$

が成り立つ．全有界性より W に対し或る有限集合 $F_W \subset A$ が存在して

$$A \subset \bigcup_{x \in F_W} W_x$$

となるが，このとき $\mathscr{F}_V := \{W_x \cap A\}_{x \in F_W}$ は A の空でない部分集合の族で (A.3.86) を満たす．逆に任意の近縁 $V \in \mathscr{V}$ に対して A の空でない部分集合の有限族 $\mathscr{F}_V \subset \mathscr{A}$ で (A.3.86) を満たすものが取れるとき，$\mathscr{F}_V$ の各元から一点ずつ選んで集めた A の有限部分集合を F_V とすれば，任意の $F \in \mathscr{F}_V$ と F に属する $x \in F_V$ で

$$y \in F \quad \Longrightarrow \quad (x,y) \in F \times F \subset V \quad \Longrightarrow \quad y \in V_x$$

が成り立つから

$$A = \bigcup \mathscr{F}_V \subset \bigcup_{x \in F_V} V_x$$

が従い A の S での全有界性が出る． ∎

定理 A.3.87 (コンパクトなら全有界). $(S, \mathscr{V})$ を一様空間とし，$\mathscr{V}$ で S に位相を導入する．A を S の空でないコンパクト部分集合とするとき，A は全有界である．

証明. 任意の $V \in \mathscr{V}$ に対し $\{V_x^{\circ}\}_{x \in A}$ は A の S における開被覆となるから，A がコンパクトであれば

$$A \subset \bigcup_{x \in F_V} V_x^{\circ} \subset \bigcup_{x \in F_V} V_x$$

を満たす有限集合 $F_V \subset A$ が存在する．従って A は S で全有界である． ∎

定理 A.3.88 (完備かつ全有界 $\Longleftrightarrow$ コンパクト). $(S, \mathscr{V})$ を一様空間として $\mathscr{V}$ で一様位相を導入するとき，S の任意の空でない部分集合 A に対し，

$$A \text{ が } S \text{ で完備かつ全有界} \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ がコンパクト}.$$

証明.

第一段 $\Longrightarrow$ を示す．A が S で全有界なら，任意の $V \in \mathscr{V}$ に対し A の空でない部分集合の有限族 $\mathscr{F}_V$ で

$$A = \bigcup \mathscr{F}_V, \quad F \times F \subset V, \ (\forall F \in \mathscr{F}_V)$$

を満たすものが取れる．$\mathscr{F}_V$ が生成する A の位相を τ_V と書けば，Alexander の定理より (A, τ_V) はコンパクトとなり，Tychonoff の定理より $\{(A, \tau_V)\}_{V \in \mathscr{V}}$ の直積位相空間 B もまたコンパクトとなる．写像 $\delta : A \longrightarrow B$ を

$$\delta(x)(V) = x, \quad (\forall V \in \mathscr{V}, \ x \in A)$$

により定めれば，A 上の任意の有向点族 $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ に対し $(\delta(x_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ は B の有向点族となるから，B のコンパクト性より或る有向集合 $(\Gamma, \leq)$ と共終かつ序列を保つ写像 $f : \Gamma \longrightarrow \Lambda$，及び $b \in B$ が存在して

$$\delta(x_{f(\gamma)}) \longrightarrow b$$

となる．このとき $(x_{f(\gamma)})_{\gamma \in \Gamma}$ は A 上の Cauchy 有向点族をなす．実際，任意の $V \in \mathscr{V}$ に対して $b(V) \in F$ を満たす $F \in \mathscr{F}_V$ を取れば

$$b \in \mathrm{pr}_V^{-1}(F)$$

となり (ただし pr_V は B から (A, τ_V) への射影である)，$\mathrm{pr}_V^{-1}(F)$ は b の開近傍であるから或る $\gamma_V \in \Gamma$ で

$$\gamma_V \leq \gamma \quad \Longrightarrow \quad \delta(x_{f(\gamma)}) \in \mathrm{pr}_V^{-1}(F) \quad \Longrightarrow \quad x_{f(\gamma)} \in F$$

が成り立つ．従って

$$\gamma_V \preceq \gamma, \xi \quad \Longrightarrow \quad \left(x_{f(\gamma)}, x_{f(\xi)}\right) \in F \times F \subset V$$

が得られる．いま A は S で完備であるから $(x_{f(\gamma)})_{\gamma\in\Gamma}$ は A で収束し，定理 A.3.62 より A のコンパクト性が出る．

第二段 A がコンパクトであれば，定理 A.3.87 より A は全有界であり，また A 上の任意の Cauchy 有向点族は A で収束する部分有向点族を持ち (定理 A.3.62)，このとき元の点族も A で収束する (定理 A.3.83). ■

A.3.7 距離空間

定義 A.3.89 ((擬) 距離関数・距離位相). 空でない集合 S において，

(PM1) $d(x,x) = 0, \quad (\forall x \in S)$

(PM2) $d(x,y) = d(y,x), \quad (\forall x, y \in S)$

(PM3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y), \quad (\forall x,y,z \in S)$

を満たす関数 $d : S \times S \longrightarrow [0,\infty)$ を擬距離 (pseudometric) と呼ぶ．これらに加えて

(PM4) $d(x,y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = y, \quad (\forall x, y \in S)$

が満たされるとき d を距離 (metric) と呼び，S と (擬) 距離 d との対 (S,d) を (擬) 距離空間と呼ぶ．また

$O \subset S$ が開集合である $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$O \neq \emptyset$，或は任意の $x \in O$ に対し或る $r_x > 0$ が存在して $\{\, y \in S \;:\; d(x,y) < r_x \,\} \subset O$ となる

で定める開集合系を (擬) 距離位相と呼ぶ．d で入れる (擬) 距離位相を d-位相とも書く．

定義 A.3.90 (球). (S,d) を擬距離空間とするとき，$x \in S$ と $r > 0$ により

$$\{\, y \in S \;:\; d(x,y) < r \,\}$$

で表される集合を (中心 x，半径 r の) 開球 (open ball) と呼ぶ．$<$ を $\leq$ に替えたものは閉球 (closed ball) と呼ぶ．

定理 A.3.91 (開球・閉球はそれぞれ開集合・閉集合). 擬距離位相空間の開球は開集合，閉球は閉集合である．

証明． (S,d) を擬距離空間とすれば任意の $x \in S$ で $d_x : S \ni y \longmapsto d(x,y)$ は連続であり，半径 r の開球は $d_x^{-1}([0,r))$，半径 r の閉球は $d_x^{-1}([0,r])$ と書けるからそれぞれ S の開集合，閉集合である． ■

定理 A.3.92 (擬距離空間において開球全体は基底をなす). (S,d) を擬距離空間として擬距離位相を入れるとき，中心 x 半径 r の開球を $B_r(x)$ と書けば

$$\mathscr{B} := \left\{ B_{1/n}(x) \quad : \quad x \in S,\ n \in \mathbf{N} \right\}$$

は S の基底をなす．また S が可分であるとき，つまり S で稠密な高々可算集合 M が存在するとき，

$$\mathscr{B}_0 := \left\{ B_{1/n}(x) \quad : \quad x \in M,\ n \in \mathbf{N} \right\}$$

は S の高々可算な基底となる．すなわち可分な擬距離空間は第二可算である．

証明. 定理 A.3.91 より任意の $\mathscr{U} \subset \mathscr{B}$ に対し $\bigcup \mathscr{U}$ は開集合となる．一方で O が開集合なら，任意の $x \in O$ に対し

$$B_{1/n_x}(x) \subset O$$

を満たす $n_x \in \mathbf{N}$ が存在して

$$O = \bigcup_{x \in O} B_{1/n_x}(x) \in \mathscr{B}$$

が従うから，$\mathscr{B}$ は S の基底をなす．S で稠密な高々可算集合 M が存在するとき，任意の $x \in S$ と $n \in \mathbf{N}$ に対し

$$B_{1/(3n)}(x) \cap M \neq \emptyset$$

となるから，或る $m \in B_{1/(3n)}(x) \cap M$ と $1/(3n) < 1/N < 2/(3n)$ を満たす $N \in \mathbf{N}$ で

$$x \in B_{1/N}(m) \subset B_{1/n}(x), \quad B_{1/N}(m) \in \mathscr{B}_0$$

が成り立つ．すなわち任意の開集合は $\mathscr{B}_0$ の元の合併で表せるから $\mathscr{B}_0$ は S の基底となる． ∎

定理 A.3.93 (擬距離位相は第一可算). (S,d) を擬距離空間として擬距離位相を導入すれば，任意の $x \in S$ に対して

$$\left\{ \left\{ y \in S \quad : \quad d(x,y) < \frac{1}{n} \right\} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

は x の基本近傍系となる．すなわち擬距離位相は第一可算空間を定める．

証明. U を x を近傍とすれば或る $r > 0$ で $\{\, y \in S \ :\ d(x,y) < r \,\} \subset U$ となる．このとき $1/n < r$ なら

$$\left\{ y \in S \quad : \quad d(x,y) < \frac{1}{n} \right\} \subset \{\, y \in S \quad : \quad d(x,y) < r \,\} \subset U$$

が成り立つ． ∎

定理 A.3.94 (擬距離空間は σ-局所有限な基底を持つ). (X,d) を擬距離空間，$\mathscr{X}$ を X の任意の開被覆とするとき，$\mathscr{X}$ の開細分で σ-局所有限であるものが存在する．特に，擬距離空間は σ-局所有限な基底を持つ．

証明.

第一段　整列可能定理により $\mathscr{X}$ を整列集合にする全順序 $\preceq$ が存在する．ここで

$$U \prec V \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad U \preceq V \text{ かつ } U \neq V$$

とする．中心 x で半径 r の開球を $B_r(x)$ と書き，任意の $n \in \mathbf{N}$ と $U \in \mathscr{X}$ に対し

$$I_n(U) := \left\{ x \in X \ : \ B_{1/n}(x) \subset U \right\}, \quad (I_n(\emptyset) = \emptyset),$$
$$J_n(U) := I_n(U) \Bigg\backslash \bigcup_{V \prec U} V$$

として $\mathscr{X}_n := \{ U \in \mathscr{X} \ : \ J_n(x) \neq \emptyset \}$ とおく．$\mathscr{X}$ の $\preceq$ に関する最小元を V として $x \in V$ を一つ取れば，V は開集合であるから十分大きい n_0 で $B_{1/n_0}(x) \subset V$ となり，V の最小性より

$$x \in I_{n_0}(V) = J_{n_0}(V)$$

が成り立つので少なくとも $n \geq n_0$ ならば $\mathscr{X}_n$ は空でない．$\mathscr{X}_n \neq \emptyset$ のとき，任意の $U \in \mathscr{X}_n$ に対し

$$K_n(U) := \bigcup_{x \in J_n(U)} B_{1/(3n)}(x)$$

により開集合を定めて $\mathscr{K}_n := \{ K_n(U) \ : \ U \in \mathscr{X}_n \}$ とおけば次が成立する:

(1)　任意の $U \in \mathscr{X}_n$ に対し $K_n(U) \subset U$ となる．

(2)　相異なる二元 $U, V \in \mathscr{X}_n$ に対し

$$d(x, y) \geq \frac{1}{3n}, \quad (\forall x \in K_n(U),\ y \in K_n(V)).$$

(3)　半径 $1/(6n)$ の任意の開球は，$\mathscr{K}_n$ の二個以上の元と交わることはない．

実際，任意の $x \in K_n(U)$ は或る $x_0 \in J_n(U)$ を中心とする半径 $1/(3n)$ の開球に入るから

$$x \in B_{1/(3n)}(x_0) \subset B_{1/n}(x_0) \subset U$$

となり (1) が出る．また $U, V \in \mathscr{X}_n$ が $U \neq V$ であるとき，$U \prec V$ か $V \prec U$ の一方が成り立つ．$V \prec U$ が成り立つとき，任意に $x \in K_n(U)$ と $y \in K_n(V)$ を取れば或る $x_0 \in J_n(U)$ と $y_0 \in J_n(V)$ で

$$d(x_0, x) < \frac{1}{3n}, \quad d(y_0, y) < \frac{1}{3n}$$

となる．一方で J_n の定義より $x_0 \notin V$ かつ $y_0 \in V$ が満たされるから $d(x_0, y_0) \geq 1/n$ が従い，

$$d(x, y) \geq d(x_0, y_0) - d(x, x_0) - d(y, y_0) \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{3n} - \frac{1}{3n} = \frac{1}{3n}$$

が成り立ち (2) も出る．これにより半径 $1/(6n)$ の任意の開球は $\mathscr{K}_n$ の二個以上の元と交わり得ない．ここで

$$\mathscr{K} := \bigcup_{\substack{n \in \mathbf{N} \\ \mathscr{X}_n \neq \emptyset}} \mathscr{K}_n$$

とおけば，$\mathscr{K}$ は $\mathscr{X}$ の σ-局所有限な開細分となる．実際 (1) より $\mathscr{K}$ の元は全て $\mathscr{X}$ の元の部分集合であり，(3) より各 $\mathscr{K}_n$ は局所有限である．また任意の $x \in X$ に対し，x を含む $\mathscr{X}$ の元のうち $\preceq$ に関する最小元を V とすれば，十分大きい n で $B_{1/n}(x) \subset V$ となるから $x \in I_n(V)$ が従い，最小性より $W \prec V$ なら $x \notin W$ が満たされ

$$x \in J_n(V) \subset K_n(V)$$

が成立する．すなわち $\mathscr{K}$ は X を覆っている．

第二段 X の開被覆 $\mathscr{B}_n \coloneqq \left\{ B_{1/n}(x) \ : \ x \in S \right\}$ に対して σ-局所有限な開細分 $\mathscr{A}_n$ が存在し，任意の $A \in \mathscr{A}_n$ で

$$d(x,y) < \frac{2}{n}, \quad (\forall x, y \in A) \tag{A.20}$$

が満たされる ($n = 1, 2, \cdots$)．いま，任意に開集合 U と $x \in U$ を取れば或る $n \in \mathbf{N}$ で

$$B_{1/n}(x) \subset U$$

となる．一方で $\mathscr{A}_{1/(2n)}$ が X を覆うから或る $A \in \mathscr{A}_{1/(2n)}$ もまた x を含み，このとき (A.3.7) より

$$x \in A \subset B_{1/n}(x)$$

が成立する．従って $\mathscr{A} \coloneqq \bigcup_{n \in \mathrm{N}} \mathscr{A}_n$ は X の基底となり，各 $\mathscr{A}_n$ が σ-局所有限であるから $\mathscr{A}$ も σ-局所有限である．すなわち X は σ-局所有限な基底を持つ． ■

定理 A.3.95 (距離でないと分離性が成り立たない). (S,d) を擬距離空間として擬距離位相を入れるとき，

$$d \text{ が距離である} \quad \Longleftrightarrow \quad S \text{ が } T_0 \text{ である} \quad \Longleftrightarrow \quad S \text{ が } T_2 \text{ である．} \tag{A.21}$$

証明.

第一段 d が距離なら S は Hausdorff である．実際，相異なる二点 $x, y \in S$ に対し

$$B_\epsilon(x) \coloneqq \left\{ s \in S \ : \ d(s,x) < \frac{\epsilon}{2} \right\}, \quad B_\epsilon(y) \coloneqq \left\{ s \in S \ : \ d(s,y) < \frac{\epsilon}{2} \right\}, \quad (\epsilon \coloneqq d(x,y))$$

で交わらない開球を定めれば，x と y は $B_\epsilon(x)$ と $B_\epsilon(y)$ で分離される．

第二段 S が T_0 であるとき，相異なる二点 x, y に対し $x \notin \overline{\{y\}}$ 或は $y \notin \overline{\{x\}}$ となる．$x \notin \overline{\{y\}}$ とすれば $\overline{\{y\}} \subset S \backslash B_r(x)$ を満たす $r > 0$ が存在し，$d(x,y) \geq r > 0$ が成り立つから d は距離となる．$T_2 \Longrightarrow T_0$ より (A.3.95) を得る． ■

定理 A.3.96 (擬距離関数の連続性). (S,d) を擬距離空間として擬距離位相を導入するとき，以下が成り立つ:

(1) $S \times S \ni (x,y) \longmapsto d(x,y)$ は直積位相に関し連続である．

(2) 任意の空でない部分集合 A に対し $S \ni x \longmapsto d(x,A)$ は連続である．特に A が閉なら

$$x \in A \quad \Longleftrightarrow \quad d(x,A) = 0.$$

定理 A.3.97 (擬距離空間は完全正規). 任意の擬距離位相空間は完全正規である．特に

$$\text{擬距離が距離である} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{擬距離位相が } T_6 \text{ である．}$$

証明. (S,d) を擬距離空間として擬距離位相を入れるとき，A, B を交わらない S の閉集合として

$$f(x) \coloneqq \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}, \quad (\forall x \in S)$$

により $f : S \longrightarrow \mathbf{R}$ を定めれば，定理 A.3.96 より f は連続であり

$$A = f^{-1}(\{0\}), \quad B = f^{-1}(\{1\})$$

が満たされるから S は完全正規である．また d が距離であるとき，定理 A.3.95 より S は Hausdorff かつ完全正規となるから T_6 となる．逆に S が T_6 なら T_0 であるから d は距離となる． ∎

定理 A.3.98 (距離空間の部分空間の距離). (S, d) を距離空間，M を S の空でない部分集合とし，S に距離位相を入れる．このとき M の相対位相 $\mathscr{O}_M$ は

$$d_M(x, y) \coloneqq d(x, y), \quad (\forall x, y \in M)$$

で定める相対距離により導入する距離位相 $\mathscr{O}_{d_M}$ と一致する．

証明. 任意の $x \in M$ と $r > 0$ に対し

$$\{\, y \in M \;:\; d_M(x, y) < r \,\} = M \cap \{\, y \in S \;:\; d(x, y) < r \,\}$$

が成り立つから，相対開集合は d_M-開球の合併で表され，逆に d_M-開集合は M と d-開集合の交叉で表せる． ∎

定理 A.3.99 (距離空間の高々可算直積の距離). $((S_n, d_n))_{n=1}^{N}$ を距離空間の族として距離位相を導入し，S をその直積位相空間とする．また $x \in S$ に対し $x(n)$ を x_n と書く．このとき $N < \infty$ なら

$$d(x, y) \coloneqq \left\{ \sum_{n=1}^{N} d_n(x_n, y_n)^2 \right\}^{1/2}, \quad (\forall x, y \in S)$$

により，$N = \infty$ なら

$$d(x, y) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left(d_n(x_n, y_n) \wedge 1 \right), \quad (\forall x, y \in S)$$

により，S は距離化可能である．特に (S_n, d_n) が全て完備 (resp. 可分) なら (S, d) も完備 (resp. 可分) となる．

定理 A.3.100 (擬距離の距離化). (S, d) を擬距離空間とするとき，$x \sim y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} d(x, y) = 0$ で S に同値関係が定まる．また商写像を $\pi : S \longrightarrow S/\sim$ と書けば

$$\rho(\pi(x), \pi(y)) \coloneqq d(x, y), \quad (\forall \pi(x), \pi(y) \in S/\sim)$$

により $S/\sim$ に距離 ρ が定まり，S の d-位相の商位相は $S/\sim$ の ρ-位相に一致する．

証明.

第一段　ρ が well-defined であることを示す．実際，$\pi(x)=\pi(x')$, $\pi(y)=\pi(y')$ ならば

$$d(x',y') \leq d(x',x)+d(x,y)+d(y,y') = d(x,y) \leq d(x,x')+d(x',y')+d(y',y) = d(x',y')$$

より $d(x,y)=d(x',y')$ が成り立つから $\rho(\pi(x),\pi(y)) = \rho(\pi(x'),\pi(y'))$ が満たされる．

第二段　d-開球と ρ-開球をそれぞれ $B_d(x;r)$, $B_\rho(\pi(x);r)$, $(x\in S,\ r>0)$ と書けば

$$\pi\left(B_d(x;r)\right) = B_\rho(\pi(x);r), \quad B_d(x;r) = \pi^{-1}\left(B_\rho(\pi(x);r)\right)$$

が成り立つ．U を商位相の空でない開集合とすれば，定理 A.3.92 と定理 A.1.7 より

$$U = \pi\left(\pi^{-1}(U)\right) = \pi\left(\bigcup_{x\in\pi^{-1}(U)} B_d(x;r_x)\right) = \bigcup_{x\in\pi^{-1}(U)} B_\rho(\pi(x);r_x)$$

となるから U は ρ-開集合でもある．同様に V を空でない ρ-開集合とすれば

$$\pi^{-1}(V) = \pi^{-1}\left(\bigcup_{\pi(x)\in V} B_\rho\left(\pi(x);\epsilon_{\pi(x)}\right)\right) = \bigcup_{\pi(x)\in V} B_d\left(x;\epsilon_{\pi(x)}\right)$$

が成り立つから V は商空間の開集合でもある．従って商位相と ρ-位相は一致する．■

定義 A.3.101 (距離化可能).　位相空間において，その位相と一致する距離位相を定める距離が存在するとき，その空間は距離化可能 (metrizable) であるという．

定理 A.3.102 (連続単射な開写像による距離化可能性の遺伝).　X,Y を位相空間，$f:X\longrightarrow Y$ を連続単射な開写像とする．X が距離 d_X で距離化可能なら，$f(X)$ の相対位相は次で定める d_Y により距離化可能である:

$$d_Y\left(f(x),f(y)\right) = d_X(x,y), \quad (\forall x,y\in X). \tag{A.22}$$

逆に $f(X)$ の相対位相が或る距離 d_Y で距離化可能であるとき，(A.3.102) で定める d_X により X は距離化可能である．

証明.　X に距離 d_X が定まっているとき，或は $f(X)$ に距離 d_Y が定まっているとき，(A.3.102) で d_Y 或は d_X を定めればいずれも距離となる．このとき任意の $f(x_0)=y_0$ と $r>0$ に対し

$$B_r^X(x_0) := \{\, x\in X \ :\ d_X(x_0,x)<r \,\}, \quad B_r^Y(y_0) := \{\, y\in f(X) \ :\ d_Y(y_0,y)<r \,\}$$

とおけば

$$f\left(B_r^X(x_0)\right) = B_r^Y(y_0), \quad B_r^X(x_0) = f^{-1}\left(B_r^Y(y_0)\right) \tag{A.23}$$

が成立する．X が距離化可能であるとき，U を $f(X)$ の相対開集合とすれば $f^{-1}(U)$ は X の開集合であるから

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{x\in f^{-1}(U)} B_{r_x}^X(x)$$

と表され，定理 A.1.7 と (A.3.7) より

$$U = f\left(\bigcup_{x\in f^{-1}(U)} B^X_{r_x}(x)\right) = \bigcup_{x\in f^{-1}(U)} B^Y_{r_x}(f(x))$$

となるから U は d_Y による距離位相の開集合である．逆に V を d_Y による距離位相の開集合とすれば，(A.3.7) より $f^{-1}(V)$ は d_X による開球の和で書けるから X の開集合であり，f が全射開写像であるから $V = f\left(f^{-1}(V)\right)$ は $f(X)$ の相対開集合である．後半の主張は f の逆写像 $f^{-1} : f(X) \longrightarrow X$ に対し前半の結果を当てはめて得られる． ∎

定理 A.3.103 (Nagata-Smirnov). 位相空間は，T_3 かつ σ-局所有限な基底を持つ $\Longleftrightarrow$ 距離化可能．

証明． X を位相空間とする．

第一段 X が T_3 かつ σ-局所有限であれば，X は T_4 かつ全ての閉集合は G_δ となる．X は局所有限な部分集合族 $\mathscr{B}_n$ の合併 $\bigcup_{n=1}^\infty \mathscr{B}_n$ で表せる基底を有する．任意の $n \in \mathbf{Z}_+$ 及び $B \in \mathscr{B}_n$ に対し

$$\begin{cases} f_{n,B}(x) > 0, & (x \in B), \\ f_{n,B}(x) = 0, & (x \in X\backslash B) \end{cases}$$

を満たす連続写像 $f_{n,B} : X \longrightarrow [0, 1/n]$ が存在する．

$$J := \{\ (n,B) \quad : \quad n \in \mathbf{Z}_+,\ B \in \mathscr{B}_n\ \}$$

とおいて

$$F(x) := \left(f_{n,B}(x)\right)_{(n,B)\in J}$$

により F を定めれば，F は単射となる．また

$$d\left((x_j)_{j\in J}, (y_j)_{j\in J}\right) := \sup_{j\in J} |x_j - y_j|$$

により $[0,1]^J$ に距離を定めれば，F は X から $[0,1]^J$ への開写像かつ連続写像となる．任意の $x_0 \in X$ と $\epsilon > 0$ に対して

$$x \in W \quad \Longrightarrow \quad d(F(x), F(x_0)) < \epsilon \tag{A.24}$$

を満たす x_0 の開近傍 W が存在する．n を固定すれば或る x_0 の近傍 U_n は $\mathscr{B}_n$ の高々有限個の元としか交わらない．従って或る開近傍 $V_n \subset U_n$ が存在し，すべての $B \in \mathscr{B}_n$ で

$$x \in V_n \quad \Longrightarrow \quad d(F(x), F(x_0)) < \epsilon \tag{A.25}$$

が満たされる，$1/N < \epsilon/2$ を満たす $N \in \mathbf{Z}_+$ を取り

$$W := V_1 \cap \cdots \cap U_N$$

とおけば，$n \leq N$ の場合任意の $B \in \mathscr{B}_n$ で (A.3.7) が成立し，$n > N$ の場合任意の $B \in \mathscr{B}_n$ で

$$d(F(x), F(x_0)) \leq \frac{2}{n} < \epsilon, \quad (\forall x \in X)$$

となるから (A.3.7) が成り立つ．

A.3.8 範疇定理

定理 A.3.104 (Cantor の共通部分定理). S を Hausdorff 空間とし，$(K_n)_{n=1}^{\infty}$ をコンパクト部分集合の列とする．このとき，任意の $n \geq 1$ に対して $\bigcap_{i=1}^{n} K_i \neq \emptyset$ なら $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i \neq \emptyset$ が成り立つ．

証明. $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i = \emptyset$ と仮定すれば，$K_1 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n^c = S$ と K_1 のコンパクト性より

$$K_1 \subset \bigcup_{n=1}^{N} K_n^c = \left(\bigcap_{n=1}^{N} K_n \right)^c$$

を満たす $N \geq 1$ が存在し，$\bigcap_{n=1}^{N} K_n \subset K_1$ より $\bigcap_{n=1}^{N} K_n = \emptyset$ が従う． ∎

定義 A.3.105 (疎集合・第一類集合・第二類集合). 位相空間 S の部分集合 A が疎である (nowhere dense) とは A の閉包の内核が $\overline{A}^{\circ} = \emptyset$ を満たすことをいう．S が可算個の疎集合の合併で表せるとき S を第一類集合 (the set of the first category) と呼び，そうでない場合はこれを第二類集合と呼ぶ．

定理 A.3.106 (Baire の範疇定理). 空でない完備距離空間と局所コンパクト Hausdorff 空間は第二類集合である．

証明. $S \neq \emptyset$ を完備距離空間，或は局所コンパクト Hausdorff 空間とする．

第一段 $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ を S で稠密な開集合系とするとき

$$\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n} = S, \tag{A.26}$$

となることを示す．実際 (A.3.8) が満たされていれば，任意の疎集合系 $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ に対して

$$V_n := \overline{E_n}^c, \quad n = 1, 2, \cdots$$

で開集合系 (V_n) を定めると定理 A.3.3 より

$$\overline{V_n} = \overline{E_n}^{ca} = \overline{E_n}^{ic} = \emptyset^c = S$$

となるから，$\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \neq \emptyset$ が従い $S \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{E_n} \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ が成り立つ．従って S は第二類である．

第二段 任意の空でない開集合 B_0 に対し $B_0 \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \right) \neq \emptyset$ となることを示せば (A.3.8) が従う．V_1 は稠密であるから $B_0 \cap V_1 \neq \emptyset$ となり，点 $x_1 \in B_0 \cap V_1$ を取れば，S が距離空間なら或る半径 < 1 の開球 B_1 が存在して

$$x_1 \in B_1 \subset \overline{B_1} \subset B_0 \cap V_1 \tag{A.27}$$

を満たす．S が局所コンパクト Hausdorff の場合も，定理 A.3.30 と定理 A.3.31 より (A.3.8) を満たす相対コンパクトな開集合 B_1 が取れる．同様に半径 $< 1/n$ の開球，或は相対コンパクトな開集合 B_n と $x_n \in S$ で

$$x_n \in B_n \subset \overline{B_n} \subset B_{n-1} \cap V_n$$

を満たすものが存在する．このとき S が完備距離空間なら $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列をなし，その極限点 x_∞ は

$$x_\infty \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_n}$$

を満たす．S が局所コンパクト Hausdorff 空間なら定理 A.3.104 より

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_n} \neq \emptyset$$

となるから，いずれの場合も

$$\emptyset \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_n} \subset B_0 \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \right)$$

が従い定理の主張が得られる． ∎

補題 A.3.107 (同相写像に関して閉包 (内部) の像は像の閉包 (内部) に一致する). A を位相空間 S の部分集合，$h : S \longrightarrow S$ を同相写像とするとき次が成り立つ:

(1) $h(A^a) = h(A)^a$.

(2) $h(A^i) = h(A)^i$.

証明.

(1) $h(A) \subset h(A^a)$ かつ $h(A^a)$ は閉であるから $h(A)^a \subset h(A^a)$ が従う．一方で任意の $x \in h(A^a)$ に対し $x = h(y)$ を満たす $y \in A^a$ と x の任意の近傍 V を取れば，$h^{-1}(V) \cap A \neq \emptyset$ より $V \cap h(A) \neq \emptyset$ が成り立ち $x \in h(A)^a$ となる．

(2) $h(A^i) \subset h(A)$ かつ $h(A^i)$ は開であるから $h(A^i) \subset h(A)^i$ が従う．一方で任意の開集合 $O \subset h(A)$ に対し $h^{-1}(O) \subset A$ より $h^{-1}(O) \subset A^i$ となり，$O \subset h(A^i)$ が成り立つから $h(A)^i \subset h(A^i)$ が得られる． ∎

定理 A.3.108 (第一類集合の性質). S を位相空間とする．

(a) $A \subset B \subset S$ に対し B が第一類なら A も第一類である．

(b) 第一類集合の可算和も第一類である．

(c) 内核が空である閉集合は第一類である．

(d) S から S への位相同型 h と $E \subset S$ に対し次が成り立つ:

$$E \text{ が第一類} \quad \Longleftrightarrow \quad h(E) \text{ が第一類.}$$

証明.

(a) $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ を満たす疎集合系 $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ に対し $A \cap E_n$ は疎であり $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap E_n)$ となる．

(b) $A_n \subset S,\ (n = 1, 2, \cdots)$ が第一類集合とし $(E_{n,i})_{i=1}^{\infty}$ を $A_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_{n,i}$ を満たす疎集合系とすれば

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n,i=1}^{\infty} E_{n,i}$$

が成り立つ．

(c) 内核が空である閉集合はそれ自身が疎であり，自身の可算和に一致する．

(d) E が第一類のとき，$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ を満たす疎集合系 $(E_i)_{i=1}^{\infty}$ に対し定理 A.3.3 と補題 A.3.107 より

$$\emptyset = h(E_i^{ai}) = h(E_i^{a})^{i} = h(E_i)^{ai}$$

が成り立つから $h(E_i)$ は疎であり，

$$h(E) = \bigcup_{i=1}^{\infty} h(E_i)$$

となるから $h(E)$ も第一類である．$h(E)$ が第一類なら $E = h^{-1}(h(E))$ も第一類である． ∎

A.3.9 連結性

定理 A.3.109. $\mathbf{R}$ の任意の区間は連結である．

定理 A.3.110. 連結集合の連続写像による像は連結である．

定理 A.3.111 (弧状連結なら連結). 弧状連結位相空間は連結空間である．

証明. S を連結でない位相空間とする．このとき或る空でない開集合 U_1, U_2 が存在して

$$U_1 \cup U_2 = S, \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

を満たす．$x \in U_1,\ y \in U_2$ に対し $f(0) = x,\ f(1) = y$ を満たす連続写像 $f : [0,1] \longrightarrow S$ が存在する場合，

$$f([0,1]) = (U_1 \cap f([0,1])) \cup (U_2 \cap f([0,1])), \quad (U_1 \cap f([0,1])) \cap (U_2 \cap f([0,1])) = \emptyset$$

となり $f([0,1])$ の連結性に矛盾する．従って x, y を結ぶ道は存在しないから S は弧状連結ではない． ∎

A.4 位相線型空間

A.4.1 線型位相

定理 A.4.1 (多変数連続写像は一変数写像として連続). Λ を任意濃度の空でない集合とし，$((S_\lambda, \tau_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ を位相空間の族とする．

以降扱う線型空間はすべて体 $\Phi(=\mathbf{C},\mathbf{R})$ をスカラーとして考え，位相は Euclid 距離による距離位相を導入する．

定義 A.4.2 (位相線型空間). Φ 上の線型空間 X で定められる位相 τ が

(tvs1) $X\times X\ni(x,y)\longmapsto x+y\in X$ 及び $\Phi\times X\ni(\alpha,x)\longmapsto \alpha x\in X$ が τ 及びその直積位相に関し連続である．
(tvs2) (X,τ) は T_1 位相空間である．

を満たすとき，τ を X の線型位相 (vector topology) と呼び，(X,τ) を位相線型空間 (topological vector space) と呼ぶ．

定理 A.4.3 (位相線型空間は T_3). X を位相線型空間とするとき，コンパクト部分集合 $K\subset X$ と閉集合 $C\subset X$ に対し，$K\cap C=\emptyset$ なら或る 0 の開近傍 V が存在して次を満たす:

$$(K+V)\cap(C+V)=\emptyset. \tag{A.28}$$

特に位相線型空間は T_3 空間である．

証明. $K=\emptyset$ なら $K+V=\emptyset$ となり (A.4.3) が成立する．$K\neq\emptyset$ の場合，任意に $x\in K$ を取れば

定理 A.4.4 (平行移動・スカラ倍は連続). (X,τ) を位相線型空間とするとき以下が成立する．

(1) 任意の $a\in X$ に対し $X\ni x\longmapsto a+x\in X$ は同相写像である．
(2) 任意の $\alpha\in\Phi$ に対し $X\ni x\longmapsto \alpha x\in X$ は連続であり，特に $\alpha\neq 0$ のとき同相写像となる．
(3) 任意の $x\in X$ に対し $\Phi\ni\alpha\longmapsto\alpha x\in X$ は連続である．

証明. 連続性は定理 A.4.1 より従う．また，(1)(2) において $x\longmapsto -a+x,\ x\longmapsto\alpha^{-1}x$ が逆写像となる． ■

定理 A.4.5 (平行移動不変位相). τ を線型空間 X の位相とする．任意の $V\subset X$ と $x\in X$ に対して

$$V\in\tau \quad\Longleftrightarrow\quad x+V\in\tau$$

が満たされるとき，τ は平行移動不変である (translation invariant) という．定理 A.4.4 より位相線型空間において平行移動は同相写像となるから線型位相は平行移動不変である．

定理 A.4.6 (位相線型空間は一様空間). $\mathscr{B}$ を位相線型空間 (X,τ) の 0 ベクトルの均衡な基本近傍系とするとき，

$$\Phi:=\{\,\{\,(x,y)\ :\ \ x,y\in X,\ x-y\in B\,\}\ :\ \ B\in\mathscr{B}\,\}$$

は近縁系となり，この近縁系が定める位相は τ に一致する．

定理 A.4.7 (平行移動不変位相は 0 の基本近傍系で決まる). τ を線型空間 X の平行移動不変位相，$\mathscr{U}$ を $0 \in X$ の基本近傍系とするとき，任意の $x \in X$ に対して

$$\mathscr{U}(x) := \{\, x + U \ : \ U \in \mathscr{U} \,\}$$

は x の基本近傍系となる．すなわち次が成立する:

$$\tau = \{\, O \subset X \ : \ O = \emptyset,\ \text{或は任意の } x \in O \text{ に対し } x + U_x \subset O \text{ を満たす } U_x \in \mathscr{U} \text{ が存在する} \,\}.$$

証明. V を x の任意の近傍とすれば定理 A.4.4 より $-x + V^{\circ}$ は 0 の開近傍となる．このとき或る $U \in \mathscr{U}$ が

$$U \subset -x + V^{\circ} \subset -x + V$$

を満たし $x + U \subset V$ が従うから $\mathscr{U}(x)$ は x の基本近傍系をなしている．このとき定理 A.3.6 より

$$\begin{aligned} O \in \tau \quad &\Longleftrightarrow \quad O = \emptyset,\ \text{或は任意の } x \in O \text{ に対し } U \subset O \text{ を満たす } U \in \mathscr{U}(x) \text{ が存在する} \\ &\Longleftrightarrow \quad O = \emptyset,\ \text{或は任意の } x \in O \text{ に対し } x + U_x \subset O \text{ を満たす } U_x \in \mathscr{U} \text{ が存在する} \end{aligned}$$

が成立する． ∎

定義 A.4.8 (平行移動不変距離・絶対斉次距離). d を線型空間 X 上に定まる距離とする．

(1) 次が満たされるとき d は平行移動不変である (invariant) という:

$$d(x + z, y + z) = d(x, y), \quad (\forall x, y, z \in X).$$

(2) 次が満たされるとき d は絶対斉次的である (absolutely homogeneous) という:

$$d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y), \quad (\forall \alpha \in \Phi,\ x, y \in X).$$

定理 A.4.9 (平行移動不変距離による距離位相は平行移動不変). 線型空間 X に平行移動不変距離 d が定まっているとき，d による距離位相は平行移動不変となる．

証明. 任意の $\delta > 0$ と $a \in X$ に対し $B_\delta(a) := \{\, x \in X \ : \ d(x, a) < \delta \,\}$ と書けば，任意の $y \in X$ で

$$z \in y + B_\delta(a) \quad \Longleftrightarrow \quad d(z - y, a) < \delta \quad \Longleftrightarrow \quad d(z, y + a) < \delta \quad \Longleftrightarrow \quad z \in B_\delta(y + a)$$

が成り立つ．従って，部分集合 U が $U = \bigcup_{a \in U} B_{\delta_a}(a)$ と書けるとき任意の $x \in X$ に対し

$$x + U = \bigcup_{a \in U} \left(x + B_{\delta_a}(a) \right) = \bigcup_{a \in U} B_{\delta_a}(x + a)$$

となるから，U が開集合であることと $x + U$ が開集合であることは同値になる． ∎

定理 A.4.10 (絶対斉次的かつ平行移動不変な距離はノルムで導入する距離に限られる). ノルムで導入する距離は絶対斉次的かつ平行移動不変であり，かつそのような距離はノルムで導入する距離に限られる．

証明. $\|\cdot\|$ を線型空間 X のノルムとするとき，

$$d(x,y) := \| x - y \|, \quad (\forall x, y \in X)$$

で距離を定めれば

$$d(x+z, y+z) = \| x + z - (y+z) \| = \| x - y \| = d(x,y), \quad d(\alpha x, \alpha y) = \| \alpha(x-y) \| = |\alpha| \, \| x - y \| = |\alpha| d(x,y)$$

が成立する．逆に X 上の距離 d が絶対斉次的かつ平行移動不変であるとき，

$$\| x \| := d(x,0), \quad (\forall x \in X)$$

でノルムが定まる．実際 $\| \alpha x \| = d(\alpha x, 0) = |\alpha| d(x,0) = |\alpha| \, \| x \|$ かつ

$$\| x + y \| = d(x+y, 0) = d(x, -y) \leq d(x,0) + d(0,-y) = d(x,0) + d(y,0) = \| x \| + \| y \|$$

が成立する． ∎

定理 A.4.11 (ノルムで導入する距離位相は線型位相). $(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間とするとき，$d(x,y) := \| x - y \|$ で定める距離 d による距離位相は線型位相となる．

証明. 距離位相は T_6 位相空間を定めるから X は定義 A.4.2 の (tvs2) を満たす．また

$$d(x+y, x'+y') \leq d(x+y, x'+y) + d(x'+y, x'+y') = d(x,x') + d(y,y')$$

より加法の連続性が得られ，

$$\begin{aligned} d(\alpha x, \alpha' x') &\leq d(\alpha x, \alpha' x) + d(\alpha' x, \alpha' x') \\ &= d((\alpha - \alpha')x, 0) + |\alpha'| d(x, x') = |\alpha - \alpha'| d(x,0) + |\alpha'| d(x,x') \end{aligned}$$

よりスカラ倍の連続性も出る． ∎

定理 A.4.12 (位相線型空間の連結性). 位相線型空間は連結である．

証明. 零元のみの空間は密着空間であるから連結である．$X \neq \{0\}$ を位相線型空間とするとき，任意に $a, b \in X$ を取り

$$f : [0,1] \ni t \longmapsto a + t(b-a) \in X$$

と定めれば f は $[0,1]$ から X への連続写像である．実際，定理 A.4.4 より $\Phi \ni t \longmapsto t(b-a)$ が連続であるから

$$g : [0,1] \ni t \longmapsto t(b-a)$$

は $[0,1]$ の相対位相に関して連続であり，かつ $h : X \ni x \longmapsto a + x$ もまた連続であるから $f = h \circ g$ の連続性が従う．よって X は弧状連結であるから定理 A.3.111 より連結である． ∎

定義 A.4.13 (位相線形空間の有界集合). X を位相線型空間，E を X の部分集合とする．0 の任意の近傍 V に対し或る $s = s(V) > 0$ が存在して

$$E \subset tV, \quad (\forall t > s)$$

となるとき，E は有界であるという．

定理 A.4.14.

位相線形空間 (X, τ) に対し，その部分集合 Y 上の相対位相を τ_Y と書き，また X が或る距離 d で距離付け可能なとき，d により導入する位相を τ_d と書く．位相 τ に関する開集合，閉集合，近傍，Cauchy 列は τ-開集合 (resp. 閉集合，近傍，Cauchy 列) と書く．

定義 A.4.15 (局所基・局所凸・局所コンパクト・局所有界). (X, τ) を位相線型空間とする．

(1) $0 \in X$ の基本近傍系を X の局所基 (local base) と呼ぶ．
(2) すべての元が凸集合であるような局所基が取れるとき，X は局所凸 (locally convex) であるという．
(3) $0 \in X$ がコンパクトな近傍を持つとき，X は局所コンパクト (locally compact) であるという．
(4) $0 \in X$ が有界な近傍を持つとき，X は局所有界 (locally bounded) であるという．

定義 A.4.16 (F-空間・Frechet 空間・ノルム空間). (X, τ) を位相線型空間とする．d により X が距離化可能でかつ完備距離空間となるとき，X を F-空間と呼ぶ．局所凸な F-空間を Frechet 空間と呼び

定理 A.4.17 (部分空間が F-空間なら閉). (X, τ) を位相線形空間，$Y \subset X$ を部分空間とする．このとき Y が F-空間なら Y は τ-閉である．

証明. Y に対し或る平行移動不変な距離 d が存在して $\tau_Y = \tau_d$ を満たす．このとき

$$B_{1/n} \coloneqq \left\{ y \in Y \quad : \quad d(y, 0) < \frac{1}{n} \right\}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

で τ_Y-開集合を定めれば，$B_{1/n}$ は 0 を含むから或る 0 の τ-近傍 U_n が存在して

$$B_{1/n} = Y \cap U_n, \quad n = 1, 2, \cdots$$

を満たす．

定義 A.4.18 (集合の線型演算). X を体 Φ 上の位相線型空間，A, B を X の部分集合，$\alpha, \beta \in \Phi$ とする．このとき

$$\alpha A + \beta B \coloneqq \{ \alpha a + \beta b \quad : \quad a \in A, \ b \in B \}$$

と書く．

定理 A.4.19. X を位相線型空間，A, B を部分集合とする．

(1) $\alpha\overline{A} = \overline{\alpha A}$

(2) $\alpha(A^{\circ}) = (\alpha A)^{\circ}$

証明.

(1) $\alpha = 0$ 或は $A = \emptyset$ の場合は両辺が $\{0\}$ 或は $\emptyset$ となって等号が成立する．$\alpha \neq 0$ かつ $A \neq \emptyset$ の場合，

$$\begin{aligned} x \in \alpha\overline{A} &\iff \alpha^{-1}x \in \overline{A} \\ &\iff \left(\alpha^{-1}x + V\right) \cap A \neq \emptyset, \quad (\forall V\colon \text{neighborhood of } 0) \\ &\iff (x + V) \cap \alpha A \neq \emptyset, \quad (\forall V\colon \text{neighborhood of } 0) \\ &\iff x \in \overline{\alpha A} \end{aligned}$$

が成り立つ．

(2) $\alpha = 0$ 或は $A = \emptyset$ の場合は両辺が $\{0\}$ 或は $\emptyset$ となって等号が成立する．$\alpha \neq 0$ かつ $A \neq \emptyset$ の場合，

$$\begin{aligned} x \in \alpha(A^{\circ}) &\iff \alpha^{-1}x \in A^{\circ} \\ &\iff \exists V\colon \text{neighborhood of } 0, \quad \alpha^{-1}x + V \subset A \\ &\iff \exists V\colon \text{neighborhood of } 0, \quad x + V \subset \alpha A \\ &\iff x \in (\alpha A)^{\circ} \end{aligned}$$

が成り立つ．

定理 A.4.20 (斉次距離で距離化可能なら距離と位相の有界性は一致する). 位相線型空間 (X, τ) が斉次的な距離 d で距離化可能である場合，X の部分集合の d-有界性と τ-有界性は一致する．

証明. 任意の $\alpha > 0,\ \delta > 0$ に対し，$B_{\delta}(0) := \{\, x \in X \ :\ d(x, 0) < \delta \,\}$ とおけば斉次性より

$$x \in \alpha B_{\delta}(0) \iff d\left(\alpha^{-1}x, 0\right) < \delta \iff \alpha^{-1}d(x, 0) < \delta \iff x \in B_{\alpha\delta}(0)$$

が成立する．$\{B_r(0)\}_{r>0}$ は X の局所基となるから，$E \subset X$ が d-有界のときも τ-有界のときも $E \subset B_R(0)$ を満たす $R > 0$ が存在する．E が d-有界集合である場合，任意に 0 の近傍 V を取れば或る $r > 0$ で $B_r(0) \subset V$ となり

$$E \subset B_R(0) \subset B_t(0) = \frac{t}{r}B_r(0) \subset \frac{t}{r}V, \quad (\forall t > R)$$

が成立するから E は τ-有界集合である．逆に E が τ-有界集合であるとき，任意に $x \in X$ を取れば

$$E \subset B_R(0) \subset B_{d(x,0)+R}(x)$$

が成立するから E は d-有界集合である． ∎

定義 A.4.21 (位相線型空間における同程度連続性). X, Y を位相線形空間，$\mathscr{F}$ を X から Y への連続線型写像の族とする．このとき，$\mathscr{F}$ が同程度連続であるとは，$0 \in Y$ の任意の近傍 V に対し

$$f(U) \subset V, \quad (\forall f \in \mathscr{F})$$

を満たす $0 \in X$ の近傍 U が存在することである．

定理 A.4.22 (同程度連続な写像族の有界性). X, Y を位相線形空間，$\mathscr{F}$ を X から Y への連続線型写像の族とする．$\mathscr{F}$ が同程度連続であるとき，

定理 A.4.23 (Banach-Steinhaus).

定理 A.4.24 (開写像原理). X

A.4.2 局所凸空間

定義 A.4.25 (局所凸・Frechet 空間). 位相線型空間の 0 の基本近傍系で全ての元が凸であるものが存在するとき，その空間は局所凸である (locally convex) といいその基本近傍系を凸な基本近傍系という．また局所凸な F-空間を Frechet 空間と呼ぶ．

補題 A.4.26 (局所凸空間の直積は局所凸). Z を線型空間，$(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を局所凸位相線型空間の族とし，$0 \in X_\lambda$ の基本近傍系 (全ての元は凸) を $\mathscr{U}_\lambda$ と書く．また各 $\lambda \in \Lambda$ に対し写像 $f_\lambda : Z \longrightarrow X_\lambda$ が定まっているとする．このとき次が成り立つ:

(1) $0 \in Z$ を含み，かつ定理のを満たすような集合系 $\mathscr{U}$ を

$$\mathscr{U} := \left\{ \bigcap_{\lambda \in H} f_\lambda^{-1}(V_\lambda) \quad : \quad H \text{ は } \Lambda \text{ の空でない有限部分集合}, V_\lambda \in \mathscr{U}_\lambda \right\}$$

で定める．また任意の $V \in \mathscr{U}_\lambda$ に対し $f_\lambda^{-1}(V)$ が凸であるとき $(\forall \lambda \in \Lambda)$,

$$\mathscr{U}(x) := \{\, x + U \quad : \quad U \in \mathscr{U} \,\}, \quad (\forall x \in Z)$$

とおけば，$\{\mathscr{U}(x)\}_{x \in Z}$ を基本近傍系とする Z の位相がただ一つに定まり，Z の和を連続にする．

定理 A.4.27 (局所凸空間とはセミノルムの族で生成される空間).

A.4.3 商空間の位相

A.4.4 位相双対空間

定義 A.4.28 (位相双対空間・位相第二双対空間). X を位相線型空間とする．

(1) X 上の連続な線型形式，つまり X から Φ への線型写像の全体 X^* を位相双対空間 (topological dual space) と呼ぶ．また X^* の全ての元を連続にする最弱の位相を X の弱位相 (weak topology) と呼び $\sigma(X, X^*)$ と書く．

(2) 任意の $x \in X$ に対し $\varphi_x : X^* \ni x^* \longmapsto \langle x, x^* \rangle_{X,X^*}$ により X^* 上の線型形式 φ_x が定まる．このとき $\{ \varphi_x \ : \ x \in X \}$ の元を全て連続にする最弱の位相を X の汎弱位相 (weak$*$ topology) と呼び $\sigma(X^*, X)$ と書く．

定理 A.4.29.

定理 A.4.30 (位相的双対空間の全ての元を連続にする最弱の位相は局所凸線型位相). (X, τ) を

A.5 測度

A.5.1 Lebesgue 拡大

定義 A.5.1 (Lebesgue 拡大). $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とするとき，

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{B}} &:= \{ B \subset X \ : \ \exists A_1, A_2 \in \mathcal{B}, \text{ s.t. } \ A_1 \subset B \subset A_2,\ \mu(A_2 \backslash A_1) = 0 \}, \\ \overline{\mu}(B) &:= \mu(A_1) \quad (\forall B \in \overline{\mathcal{B}},\ A_1 \text{ as in above})\end{aligned}$$

により得られる完備測度空間 $\left(X, \overline{\mathcal{B}}, \overline{\mu}\right)$ を $(X, \mathcal{B}, \mu)$ の Lebesgue 拡大と呼ぶ．

$\overline{\mu}$ は well-defined である．実際，$B \subset X$ に対し $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ が

$$\begin{aligned}A_1 \subset B \subset A_2, &\quad \mu(A_2 \backslash A_1) = 0, \\ B_1 \subset B \subset B_2, &\quad \mu(B_2 \backslash B_1) = 0,\end{aligned}$$

を満たすとき，$A_1 \cup B_1 \subset B \subset A_2 \cap B_2$ となるが，

$$(A_2 \cap B_2) \cap (A_1 \cup B_1)^c \subset A_2 \backslash A_1$$

より $\mu(A_1 \cup B_1) = \mu(A_2 \cap B_2)$ が従い

$$\begin{aligned}\mu(A_2) = \mu(A_1) \leq \mu(A_1 \cup B_1) = \mu(A_2 \cap B_2) \leq \mu(B_2), \\ \mu(B_2) = \mu(B_1) \leq \mu(A_1 \cup B_1) = \mu(A_2 \cap B_2) \leq \mu(A_2)\end{aligned}$$

が成り立つから $\mu(A_2) = \mu(B_2)$ が出る．また，任意の $B \subset X$ について

$$\overline{\mathcal{B}} = \{ B \subset X \ : \ \exists A, N \in \mathcal{B}, \text{ s.t. } \ \mu(N) = 0,\ B \cap A^c, A \cap B^c \subset N \} \tag{A.29}$$

が成立する．実際，$B \in \overline{\mathcal{B}}$ なら $A_1 \subset B \subset A_2$ かつ $\mu(A_2 \backslash A_1) = 0$ を満たす $A_1, A_2 \in \mathcal{B}$ が存在するから

$$A = A_2, \quad N = A_2 \backslash A_1$$

として ($\subset$) を得る．逆に右辺を満たす A, N が存在するとき，

$$A \cap N^c \subset A \cap B \subset B \subset A \cup (A^c \cap B) \subset A \cup N$$

より $A_1 = A \cap N^c$, $A_2 = A \cup N$ として ($\supset$) を得る．

補題 A.5.2 (可分値写像による可測写像の一様近似). $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間，(S, d) を可分距離空間とする．このとき任意の $\mathcal{B}/\mathscr{B}(S)$-可測写像 f に対し，S の可算稠密集合に値を取る $\mathcal{B}/\mathscr{B}(S)$-可測写像列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ が存在して，次の意味で f を一様に近似する:

$$\sup_{x \in X} d\left(f_n(x), f(x)\right) \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty). \tag{A.30}$$

証明. S の可算稠密な部分集合を $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ とする．任意の $n \geq 1$ に対し

$$B_n^k \coloneqq \left\{ s \in S \quad : \quad d(s, a_k) < \frac{1}{n} \right\}, \quad A_n^k \coloneqq f^{-1}\left(B_n^k\right); \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

とおけば，

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_n^k = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}\left(B_n^k\right) = f^{-1}(S)$$

より $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_n^k$ が成り立つ．ここで

$$\tilde{A}_n^1 \coloneqq A_n^1, \quad \tilde{A}_n^k \coloneqq A_n^k \left\backslash \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_n^i \right) \right.; \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

として

$$f_n(x) \coloneqq a_k, \quad (x \in \tilde{A}_n^k,\ k = 1, 2, \cdots)$$

により $\mathcal{B}/\mathscr{B}(S)$-可測写像列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ を定めれば，

$$d\left(f_n(x), f(x)\right) < \frac{1}{n}, \quad (\forall x \in X)$$

が満たされ (A.5.2) が従う． ∎

定理 A.5.3 (T_6 空間に値を取る可測写像列の各点極限は可測). S を T_6 空間，$(X, \mathcal{B})$ を可測空間とする．$\mathcal{B}/\mathscr{B}(S)$-可測写像列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ が各点収束すれば，$f \coloneqq \lim_{n \to \infty} f_n$ で定める f もまた可測 $\mathcal{B}/\mathscr{B}(S)$ となる．

証明. S の任意の閉集合 A に対し，定理 A.3.34 より次を満たす閉集合の系 $(A_m)_{m=1}^{\infty}$ が取れる:

$$A = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m^{\circ}.$$

$f(x) \in A$ なら任意の $m \in \mathbf{N}$ に対し或る $N = N(x,m) \in \mathbf{N}$ が存在して $f_n(x) \in A_m^\circ$, $(\forall n \geq N)$ となるから

$$f^{-1}(A) \subset \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{N \geq 1} \bigcap_{n \geq N} f_n^{-1}(A_m) \tag{A.31}$$

が従う．$f(x) \notin A$ なら或る $m \geq 1$ で $f(x) \in S \backslash A_m$ となり，或る $N \in \mathbf{N}$ に対し $f_n(x) \in S \backslash A_m$, $(\forall n \geq N)$ が成り立ち

$$f^{-1}(A^c) \subset \bigcup_{m \geq 1} \bigcup_{N \geq 1} \bigcap_{n \geq N} f_n^{-1}(A_m^c) \subset \bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{n \geq N} f_n^{-1}(A_m^c)$$

が従う．(A.5.1) と併せれば

$$f^{-1}(A) = \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{N \geq 1} \bigcap_{n \geq N} f_n^{-1}(A_m) \in \mathcal{B}$$

が成立し，S の閉集合は f により $\mathcal{B}$ の元に引き戻されるから f の $\mathcal{B}/\mathscr{B}(S)$-可測性が出る． ∎

定理 A.5.4 (拡大前後の可測性). $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間，その Lebesgue 拡大を $\left(X, \overline{\mathcal{B}}, \overline{\mu}\right)$ と書き，(S, d) を可分距離空間とする．このとき，任意の写像 $f : X \longrightarrow S$ に対し次は同値である:

(a) 或る $\mathcal{B}/\mathscr{B}(S)$-可測写像 g が存在して $f = g \quad \mu$-a.e. を満たす．

(b) f は $\overline{\mathcal{B}}/\mathscr{B}(S)$-可測である．

証明.

第一段 (a) が成立しているとき，$\{f \neq g\} \subset N$ を満たす μ-零集合 $N \in \mathcal{B}$ が存在して

$$f^{-1}(E) \cap \left(g^{-1}(E)\right)^c \subset N, \quad g^{-1}(E) \cap \left(f^{-1}(E)\right)^c \subset N, \quad (\forall E \in \mathscr{B}(S))$$

が成り立つから，(A.5.1) より $f^{-1}(E) \in \overline{\mathcal{B}}$ が従い $(a) \Rightarrow (b)$ が出る．

第二段 f が $\overline{\mathcal{B}}/\mathscr{B}(S)$-可測のとき，$S$ の可算稠密な部分集合を $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ とすれば，補題 A.5.2 より

$$f_n(x) = a_k, \ (x \in A_n^k, \ k = 1, 2, \cdots); \quad \sum_{k=1}^\infty A_n^k = X; \quad d\left(f_n(x), f(x)\right) < \frac{1}{n}, \ (\forall x \in X)$$

を満たす $\overline{\mathcal{B}}/\mathscr{B}(S)$-可測写像列 $(f_n)_{n=1}^\infty$ と互いに素な集合 $\left\{A_n^k\right\}_{k=1}^\infty \subset \overline{\mathcal{B}}$ が存在する．各 A_n^k に対し

$$E_{1,n}^k \subset A_n^k \subset E_{2,n}^k, \quad \mu\left(E_{2,n}^k - E_{1,n}^k\right) = 0$$

を満たす $E_{1,n}^k, E_{2,n}^k \in \mathcal{B}$ が存在するから，一つ $a_0 \in S$ を選び

$$g_n(x) := \begin{cases} a_k, & (x \in E_{1,n}^k, \ k = 1, 2, \cdots), \\ a_0, & (x \in N_n := X \backslash \sum_{k=1}^\infty E_{1,n}^k) \end{cases}$$

で $\mathcal{B}/\mathscr{B}(S)$-可測写像列 $(g_n)_{n=1}^\infty$ を定めて $N := \bigcup_{n=1}^\infty N_n$ とおけば

$$f_n(x) = g_n(x), \quad (\forall x \in X \backslash N, \ \forall n \geq 1)$$

が成り立つ．このとき $X \backslash N$ 上で $\lim_{n \to \infty} g_n(x)$ は存在し $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ に一致するから，

$$g(x) := \begin{cases} \lim\limits_{n \to \infty} g_n(x), & (x \in X \backslash N), \\ a_0, & (x \in N) \end{cases}$$

により $\mathcal{B}/\mathscr{B}(S)$-可測写像 g を定めれば (a) が満たされる． ∎

A.5.2　コンパクトクラス

定義 A.5.5 (コンパクトクラス).　X を空でない集合，$\mathcal{K}$ をその部分集合族とする．任意の $\{K_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{K}$ について，$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$ なら或る $N \geq 1$ が存在して $\bigcap_{n=1}^{N} K_n = \emptyset$ となるとき，$\mathcal{K}$ を X のコンパクトクラスという．

定理 A.5.6.　Hausdorff 空間において，コンパクト部分集合から成る任意の族はコンパクトクラスとなる．

証明.　Cantor の共通部分定理 (P. 126) より従う．■

定理 A.5.7 (完全加法性の同値条件).　$\mathcal{B}$ を集合 X の上の有限加法族，μ を $\mathcal{B}$ 上の有限加法的な正値測度として

(a) (共通点性)　$\{B_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$ が $\mu(B_1) < \infty$, $B_n \supset B_{n+1}$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$ なら $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = 0$.

(b)　$\{B_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$ が $B_n \subset B_{n+1}$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n =: B \in \mathcal{B}$ かつ $\mu(B) = \infty$ なら $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \infty$.

(c)　$\mu(X_n) < \infty$ かつ $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$ を満たす $(X_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$ が存在するとき，$\mu(B) = \infty$ なら $\lim_{n\to\infty} \mu(B \cap X_n) = \infty$.

とおくとき，

(1)　$0 < \mu(X) < \infty$ なら μ が $\mathcal{B}$ の上で完全加法性であることと (a) は同値である．

(2)　$\mu(X) = \infty$ なら μ が $\mathcal{B}$ の上で完全加法性であることと (a)∧(b) は同値である．

(3)　$\mu(X) = \infty$ で μ が σ-有限的なら，μ が $\mathcal{B}$ の上で完全加法性であることと (a)∧(c) は同値である．

証明.

定理 A.5.8 (コンパクトクラスと共通点性).　$\mathcal{B}$ を集合 X の上の有限加法族，μ を $\mathcal{B}$ 上の有限加法的正値測度とする．X にコンパクトクラス $\mathcal{K}$ が存在するとき，$0 < \mu(B) < \infty$ を満たす任意の $B \in \mathcal{B}$ 及び任意の $\epsilon > 0$ に対し

$$A \subset K \subset B, \quad \mu(B \backslash A) < \epsilon$$

を満たす $A \in \mathcal{B}$ と $K \in \mathcal{K}$ が存在すれば，定理 A.5.7 の (a) が満たされる．

証明.　$(B_n)_{n=1}^{\infty}$ を $\mu(B_1) < \infty$ かつ $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$ を満たす減少列とすれば，或る N で $\mu(B_N) = 0$ となるとき

$$\mu(B_n) \leq \mu(B_N) = 0, \quad (\forall n \geq N)$$

より $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = 0$ が従う．全ての n で $0 < \mu(B_n)$ なら，任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$A_n \subset K_n \subset B_N, \quad \mu(B_n \backslash A_n) < \frac{\epsilon}{2^n}, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

を満たす $A_n \in \mathcal{B}$ と $K_n \in \mathcal{K}$ が存在する．このとき

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$$

より或る $N \geq 1$ が存在して $\bigcap_{n=1}^{N} A_n \subset \bigcap_{n=1}^{N} K_n = \emptyset$ が成立し，任意の $m \geq N$ で $B_m \subset \bigcup_{n=1}^{N}(B_n \cap A_n^c)$ となるから

$$\mu(B_m) \leq \sum_{n=1}^{N} \mu(B_n \cap A_n^c) < \epsilon, \quad (\forall m \geq N)$$

が従う． ∎

A.5.3 有限加法的測度の拡張

定理 A.5.9 (有限加法的な正値測度空間の生成). X を集合，$\mathcal{A}$ を集合 X 上の乗法族で X を含むものとする．

$$\mathcal{B} := \left\{ \sum_{i=1}^{n} I_i \quad : \quad I_i \in \mathcal{A},\ n = 1, 2, \cdots \right\}$$

は $X \backslash I \in \mathcal{B},\ (\forall I \in \mathcal{A})$ のとき X 上の有限加法族となる．また $I \in \mathcal{A}$ が $I = \sum_{j=1}^{m} J_j,\ (J_j \in \mathcal{A},\ m \in \mathbf{N})$ で表されるとき $m(I) = \sum_{j=1}^{m} m(J_j)$ を満たすような写像 $m : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty],\ (m(\emptyset) = 0)$ が与えられれば，

$$\mu(B) := \sum_{i=1}^{n} m(I_i), \quad (B = I_1 + \cdots + I_n \in \mathcal{B})$$

で定める μ は well-derined であり $\mathcal{B}$ の上の有限加法的な正値測度となる．

証明. $X \backslash I \in \mathcal{B},\ (\forall I \in \mathcal{A})$ 及び $m : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$ が与えられたとする．このとき $\emptyset = X \backslash X \in \mathcal{B}$ より $\emptyset \in \mathcal{A}$ である．

第一段 $\mathcal{B}$ が有限加法族であることを示す．$\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ より $X \in \mathcal{B}$ となる．$A, B \in \mathcal{B}$ が

$$A = I_1 + I_2 + \cdots + I_n, \quad B = J_1 + J_2 + \cdots + J_m \tag{A.32}$$

と表されているとき，$A \cap B = \emptyset$ なら

$$A + B = I_1 + I_2 + \cdots + I_n + J_1 + J_2 + \cdots + J_m \in \mathcal{A} \tag{A.33}$$

となり，そうでない場合 $I_i \cap J_j \in \mathcal{A}$ より

$$A \cap B = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} I_i \cap J_i \in \mathcal{B} \tag{A.34}$$

となるから $\mathcal{B}$ は交演算で閉じ，$X \backslash I_i \in \mathcal{B}$ であるから

$$X \backslash A = (X \backslash I_1) \cap \cdots \cap (X \backslash I_n) \in \mathcal{B} \tag{A.35}$$

が従う．(A.5.3)，(A.5.3)，(A.5.3) より $A \cup B = A + B \cap (X \backslash A) \in \mathcal{B}$ が成り立ち，$\mathcal{B}$ は集合和でも閉じる．

第二段 μ が well-defined かつ有限加法的であることを示す．実際 (A.5.3) の $A, B \in \mathcal{B}$ に対して，$A = B$ のとき

$$\sum_{i=1}^{n} m(I_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m(I_i \cap J_j) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} m(I_i \cap J_j) = \sum_{j=1}^{m} m(J_j)$$

が成り立つから μ は well-defined であり，また $A \cap B = \emptyset$ のとき

$$\mu(A + B) = m(I_1) + \cdots + m(I_n) + m(J_1) + \cdots + m(J_m) = \mu(A) + \mu(B)$$

となり μ の有限加法性が出る．μ は m の拡張であるから $\mu(\emptyset) = 0$ も従う． ∎

定義 A.5.10 (外測度). X の冪集合 $\mathcal{P}(X)$ の上で定義される $[0, \infty]$-値写像 μ が

(OM1) $\mu(\emptyset) = 0, \quad 0 \leq \mu(A) \leq \infty, \ (\forall A \subset X)$,

(OM2) (単調性) $A \subset B \quad \Longrightarrow \quad \mu(A) \leq \mu(B)$,

(OM3) (劣加法性) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n), \ (A_n \subset X, \ n = 1, 2, \cdots)$

を満たすとき，μ を X の外測度 (outer measure) と呼ぶ．また $A \subset X$ が

$$\mu(W) = \mu(A \cap W) + \mu(A^c \cap W), \quad (\forall W \in \mathcal{P}(X))$$

を満たすとき A は μ-可測集合であるという．

定理 A.5.11 (Caratheodory の拡張定理). μ を集合 X の外測度とし，$\mathcal{B}^*$ を μ-可測集合の全体とする．このとき $\mathcal{B}^*$ は $\mathcal{B}$ を含む σ-加法族であり，また $\mu^* := \mu|_{\mathcal{B}^*}$ は $\mathcal{B}^*$ の上の完備測度となる．

証明.

第一段 $\mathcal{B}^*$ が σ-加法族であることを示す．

第二段 任意の $B \in \mathcal{B}$ が μ-可測であること，つまり任意の $W \subset X$ に対し

$$\mu(W) \geq \mu(W \cap B) + \mu(W \cap B^c) \tag{A.36}$$

となることを示せば $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}^*$ が従う．任意の $W \subset X$, $\epsilon > 0$ に対し

$$W \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(B_n) < \mu(W) + \epsilon$$

を満たす $\{B_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$ が存在する．このとき $W \cap B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(B_n \cap B)$, $W \cap B^c \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(B_n \cap B^c)$ より

$$\mu(W \cap B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(B_n \cap B), \quad \mu(W \cap B^c) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(B_n \cap B^c)$$

となるから

$$\begin{aligned}\mu(W)+\epsilon &\geq \sum_{n=1}^{\infty}\mu_0(B_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\{\mu_0(B_n\cap B)+\mu_0(B_n\cap B^c)\}\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_0(B_n\cap B)+\sum_{n=1}^{\infty}\mu_0(B_n\cap B^c)\\ &\geq \mu(W\cap B)+\mu(W\cap B^c)\end{aligned}$$

が成り立つ．ϵ の任意性より (A.5.3) が出る．

第三段 μ^* が完備測度であることを示す． ∎

定理 A.5.12 (有限加法的な正値測度により定まる外測度). $(X,\mathcal{B},\mu_0)$ を有限加法的な正値測度空間とするとき，

$$\mu(A):=\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu_0(B_n)\ :\ B_n\in\mathcal{B},\ A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right\},\quad (\forall A\subset X)$$

で定める μ は X の外測度である．また μ_0 が $\mathcal{B}$ の上で完全加法的ならば μ は μ_0 の拡張となる．

証明.

第一段 μ が定義 A.5.10 の (OM1)(OM2)(OM3) を満たすことを示す．μ_0 の正値性より μ の正値性が従い，また

$$\mu(\emptyset)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu_0(B_n)=0,\quad (B_n=\emptyset,\ n=1,2,\cdots)$$

となるから (OM1) を得る．X の部分集合 $A,B,\ (A\subset B)$ に対し

$$\left\{\{B_n\}_{n=1}^{\infty}\ :\ B_n\in\mathcal{B},\ B\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right\}\subset\left\{\{B_n\}_{n=1}^{\infty}\ :\ B_n\in\mathcal{B},\ A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right\}$$

となるから $\mu(A)\leq\mu(B)$ が成り立ち (OM2) も得られる．

第二段 μ_0 が $\mathcal{B}$ の上で完全加法的であるとする．任意に $B\in\mathcal{B}$ を取れば $B\subset B\cup\emptyset\cup\emptyset\cup\cdots$ より

$$\mu(B)\leq\mu_0(B)$$

が成り立つ．一方で $B\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$ を満たす $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{B}$ に対し

$$B=\sum_{n=1}^{\infty}\left(B\cap\left(B_n\setminus\bigcup_{k=1}^{n-1}B_k\right)\right)$$

かつ $B\cap\left(B_n\setminus\bigcup_{k=1}^{n-1}B_k\right)\in\mathcal{B},\ (\forall n\geq 1)$ が満たされるから，μ_0 の完全加法性より

$$\mu_0(B)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_0\left(B\cap\left(B_n\setminus\bigcup_{k=1}^{n-1}B_k\right)\right)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu_0(B_n)$$

が成り立ち $\mu_0(B)\leq\mu(B)$ が従う．よって任意の $B\in\mathcal{B}$ で $\mu_0(B)=\mu(B)$ となる． ∎

定理 A.5.13 (測度の一致の定理). $(X,\mathcal{B})$ を可測空間，$\mathcal{A}$ を $\mathcal{B}$ を生成する乗法族とし，$(X,\mathcal{B})$ 上の測度 μ_1,μ_2 が $\mathcal{A}$ 上で一致しているとする．このとき，

$$\mu_1(X_n) < \infty, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$$

を満たす増大列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ が存在すれば $\mu_1 = \mu_2$ が成り立つ．

証明. 任意の $n = 1,2,\cdots$ に対して

$$\mathscr{D}_n := \{\, B \in \mathcal{B} \;\;:\;\; \mu_1(B \cap X_n) = \mu_2(B \cap X_n) \,\}$$

とおけば，$\mathscr{D}_n$ は $\mathcal{A}$ を含む Dynkin 族であるから，Dynkin 族定理より

$$\mathscr{D}_n = \mathcal{B}, \quad (\forall n \geq 1)$$

となり

$$\mu_1(B) = \lim_{n\to\infty} \mu_1(B \cap X_n) = \lim_{n\to\infty} \mu_2(B \cap X_n) = \mu_2(B), \quad (\forall B \in \mathcal{B})$$

が従う． ∎

定理 A.5.14 (Kolmogorov-Hopf). $(X,\mathcal{B},\mu_0)$ を有限加法的な正値測度空間とすれば，定理 A.5.12 より

$$\tilde{\mu}(A) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(B_n) \;\;:\;\; B_n \in \mathcal{B},\ A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right\}, \quad (\forall A \subset X)$$

により X 上に外測度が定まる．このとき $\mathcal{B}^*$ を $\tilde{\mu}$-可測集合として $\mu^* := \tilde{\mu}|_{\mathcal{B}^*}$, $\mu := \tilde{\mu}|_{\sigma[\mathcal{B}]}$ おけば以下が成り立つ:

(1) $\sigma[\mathcal{B}] \subset \mathcal{B}^*$ が成り立つ．

(2) μ_0 が $\mathcal{B}$ 上で σ-加法的なら μ は μ_0 の拡張となっている:

$$\mu_0(B) = \mu(B), \quad (\forall B \in \mathcal{B}). \tag{A.37}$$

(3) μ_0 が $\mathcal{B}$ 上で σ-有限的であるとき，(A.5.14) を満たすような $(X,\sigma[\mathcal{B}])$ 上の測度は存在しても唯一つである．

(4) μ_0 が $\mathcal{B}$ 上で σ-加法的かつ σ-有限的ならば，μ は μ_0 の $(X,\sigma[\mathcal{B}])$ への唯一つの拡張測度であり，このとき $(X,\mathcal{B}^*,\mu^*)$ は $(X,\sigma[\mathcal{B}],\mu)$ の Lebesgue 拡大に一致する:

$$(X,\mathcal{B}^*,\mu^*) = \left(X, \overline{\sigma[\mathcal{B}]}, \overline{\mu}\right). \tag{A.38}$$

証明.

(1) の証明 定理 A.5.11 より $\mathcal{B}^*$ は $\mathcal{B}$ を含む σ-加法族であるから $\sigma[\mathcal{B}] \subset \mathcal{B}^*$ となる．

(2) の証明 定理 A.5.12 より任意の $B \in \mathcal{B}$ で $\mu_0(B) = \tilde{\mu}(B) = \mu(B)$ が成り立つ．

(3) の証明　σ-有限の仮定より，或る増大列 $X_1 \subset X_2 \subset \cdots$, $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$ が存在して

$$\mu_0(X_n) < \infty \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X \tag{A.39}$$

が成り立つ．一致の定理より，(A.5.14) を満たす $(X, \sigma[\mathcal{B}])$ 上の測度は存在しても一つのみである．

(4) の証明　(2) と (3) の結果より μ は μ_0 の唯一つの拡張測度である．次に

$$\mathcal{B}^* = \overline{\sigma[\mathcal{B}]} \tag{A.40}$$

を示す．$E \in \overline{\sigma[\mathcal{B}]}$ なら或る $B_1, B_2 \in \sigma[\mathcal{B}]$ が存在して

$$B_1 \subset E \subset B_2, \quad \mu(B_2 - B_1) = 0$$

を満たす．このとき (1) より $\mu^*(B_2 - B_1) = 0$ であり，$(X, \mathcal{B}^*, \mu^*)$ の完備性より $E \backslash B_1 \in \mathcal{B}^*$ が満たされ

$$E = B_1 + E \backslash B_1 \in \mathcal{B}^*$$

が従う．いま，(A.5.3) を満たす $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$ を取り，$E \in \mathcal{B}^*$ に対して $E_n := E \cap X_n$ とおく．このとき

$$\mu^*(E_n) \leq \mu^*(X_n) = \mu_0(X_n) < \infty$$

となるから，任意の $k = 1, 2, \cdots$ に対して

$$E_n \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{k,j}^n, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0\left(B_{k,j}^n\right) < \mu^*(E_n) + \frac{1}{k}$$

を満たす $\left\{B_{k,j}^n\right\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$ が取れる．

$$B_{2,n} := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{k,j}^n$$

とおけば $E_n \subset B_{2,n} \in \sigma[\mathcal{B}]$ であり，任意の $k = 1, 2, \cdots$ に対して

$$\begin{aligned}
\mu^*(B_{2,n} - E_n) &= \mu^*(B_{2,n}) - \mu^*(E_n) \leq \mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_{k,j}^n\right) - \mu^*(E_n) \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*\left(B_{k,j}^n\right) - \mu^*(E_n) < \mu^*(E_n) + \frac{1}{k} - \mu^*(E_n) = \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

が成り立つから $\mu^*(B_{2,n} - E_n) = 0$ となる．E_n を $B_{2,n} - E_n$ に替えれば

$$B_{2,n} - E_n \subset N_n, \quad \mu(N_n) = 0$$

を満たす $N_n \in \sigma[\mathcal{B}]$ が取れる．

$$B_{1,n} := B_{2,n} \cap N_n^c$$

とおけば，$B_{1,n} \subset B_{2,n} \cap (B_{2,n} - E_n)^c = E_n$ より

$$B_{1,n} \subset E_n \subset B_{2,n}, \quad \mu(B_{2,n} - B_{1,n}) \leq \mu(N_n) = 0$$

が成り立つから，

$$B_1 \coloneqq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{1,n}, \quad B_2 \coloneqq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{2,n}$$

として

$$B_1 \subset E \subset B_2, \quad \mu(B_2 - B_1) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(B_{2,n} - B_{1,n})\right) = 0$$

が満たされ，$E \in \overline{\sigma[\mathcal{B}]}$ が従い (A.5.3) が得られる．同時に

$$\overline{\mu}(E) = \mu(B_1) = \mu^*(B_1) \leq \mu^*(E) \leq \mu^*(B_2) = \mu(B_2) = \overline{\mu}(E)$$

が成立するから，$\overline{\mu} = \mu^*$ となり (A.5.14) が出る． ∎

定義 A.5.15 (積 σ-加法族). Λ を空でない任意濃度の添字集合、$((X_\lambda, \mathscr{F}_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ を可測空間の族とし，$X \coloneqq \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ とおく．λ 射影を $p_\lambda : X \longrightarrow X_\lambda$ と書くとき，

$$\left\{\, p_\lambda^{-1}(A_\lambda) \;\; : \;\; A_\lambda \in \mathscr{F}_\lambda,\ \lambda \in \Lambda \,\right\}$$

が生成する σ-加法族を $(\mathscr{F}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の積 σ-加法族と呼び，$\bigotimes_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{F}_\lambda$ で表す．$\Lambda = \{1, 2, \cdots\}$ の場合，

$$\bigotimes_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{F}_\lambda = \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2 \otimes \cdots$$

とも表記する．

定理 A.5.16 (積 σ-加法族を生成する加法族). Λ を空でない任意濃度の添字集合、$((X_\lambda, \mathscr{F}_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ を可測空間の族とし，$X \coloneqq \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ とおく．$\mathscr{B}_\lambda$ を X_λ を含み $\mathscr{F}_\lambda$ を生成する乗法族とし，λ 射影を $p_\lambda : X \longrightarrow X_\lambda$ と書くとき，

$$\mathcal{A} \coloneqq \left\{ \bigcap_{\lambda\in\Lambda'} p_\lambda^{-1}(A_\lambda) \;\; : \;\; A_\lambda \in \mathscr{B}_\lambda,\ \Lambda' \colon \Lambda \text{ の有限部分集合} \right\}$$

とおけば $\mathcal{A}$ は乗法族となり，

$$\mathcal{B} \coloneqq \left\{ \sum_{i=1}^{n} I_i \;\; : \;\; I_i \in \mathcal{A},\ n = 1, 2, \cdots \right\}$$

により有限加法族が定まる．このとき次が成り立つ:

$$\bigotimes_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{F}_\lambda = \sigma[\mathcal{A}] = \sigma[\mathcal{B}].$$

証明.

定理 A.5.17 (第二可算空間の直積 Borel 集合族). Λ を空でない高々可算集合，$(S_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を空でない第二可算空間の族とする．$S \coloneqq \prod_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ とおいて直積位相を導入すれば，S も第二可算空間となりまた次が成立する:

$$\mathscr{B}(S) = \bigotimes_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{B}(S_\lambda). \tag{A.41}$$

証明. 各 S_λ の開集合系及び可算基を $\mathscr{O}_\lambda$, $\mathscr{B}_\lambda$，S の開集合系を $\mathscr{O}$ とし，また λ 射影を $p_\lambda : S \longrightarrow S_\lambda$ と書く．先ず，任意の $O_\lambda \in \mathscr{O}_\lambda$ に対して $p_\lambda^{-1}(O_\lambda) \in \mathscr{O}$ が満たされるから

$$\mathscr{O}_\lambda \subset \left\{\, A_\lambda \in \mathscr{B}(S_\lambda) \quad : \quad p_\lambda^{-1}(A_\lambda) \in \mathscr{B}(S) \,\right\}$$

が従い，右辺が σ-加法族であるから

$$\bigotimes_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{B}(S_\lambda) = \sigma\left(\left\{\, p_\lambda^{-1}(A_\lambda) \quad : \quad A_\lambda \in \mathscr{B}(S_\lambda),\ \lambda \in \Lambda \,\right\}\right) \subset \mathscr{B}(S)$$

を得る．一方で

$$\mathscr{B} \coloneqq \left\{ \bigcap_{\lambda\in\Lambda'} p_\lambda^{-1}(B_\lambda) \quad : \quad B_\lambda \in \mathscr{B}_\lambda,\ \Lambda' \subset \Lambda : \mathit{finite\ subset} \right\}$$

は $\mathscr{O}$ の基底の一つである．実際，任意に $O \in \mathscr{O}$ を取れば，任意の $x \in O$ に対し或る有限集合 $\Lambda' \subset \Lambda$ が存在して

$$x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda'} p_\lambda^{-1}(O_\lambda) \subset O$$

が成立するが，更に S_λ の第二可算性より或る $\mathscr{B}'_\lambda \subset \mathscr{B}_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda')$ が存在して

$$x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda'} p_\lambda^{-1}(O_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda'} \bigcup_{B_\lambda \in \mathscr{B}'_\lambda} p_\lambda^{-1}(B_\lambda)$$

が満たされる．すなわち，任意の $O \in \mathscr{O}$ は

$$O = \bigcup_{E \in \mathscr{B}'} E, \quad (\exists \mathscr{B}' \subset \mathscr{B})$$

と表される．$\mathscr{B}$ は高々可算の濃度を持ち[*1]，$\mathscr{B} \subset \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{B}(S_\lambda)$ が満たされるから

$$\mathscr{O} \subset \bigotimes_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{B}(S_\lambda)$$

が従い (A.5.17) を得る． ∎

定理 A.5.18 (積測度). 測度空間の族 $((X_i, \mathscr{F}_i, \mu_i))_{i=1}^n$ に対し，$\left(\prod_{i=1}^n X_i,\ \bigotimes_{i=1}^n \mathscr{F}_i\right)$ 上の測度 μ で

$$\mu(A_1 \times \cdots \times A_n) = \mu_1(A_1)\cdots\mu_n(A_n), \quad (\forall A_i \in \mathscr{F}_i,\ i = 1, \cdots, n)$$

を満たすものが存在する．この μ を $(\mu_i)_{i=1}^n$ の積測度と呼び $\bigotimes_{i=1}^n \mu_i = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ と書く．全ての μ_i が σ-有限なら積測度 μ は唯一つ存在し σ-有限となる．

[*1] $L_0 \coloneqq \{\, \Lambda' \quad : \quad \Lambda' \subset \Lambda : \mathit{finite\ subset} \,\}$ は高々可算集合である．実際，$\Lambda_n \coloneqq \Lambda \times \cdots \times \Lambda$ (n copies of Λ) として $L \coloneqq \bigcup_{n=1}^{\#\Lambda} \Lambda_n$ とおき，$(x_1, \cdots, x_n) \in L$ に対し $\{x_1, \cdots, x_n\} \in L_0$ を対応させる $f : L \longrightarrow L_0$ を考えれば全射であるから $\mathrm{card}\, L_0 \leq \mathrm{card}\, L \leq \aleph_0$ が従う．

証明. $\bigotimes_{i=1}^n \mathscr{F}_i$ を生成する乗法族を

$$\mathcal{A} := \{\, A_1 \times \cdots \times A_n \quad : \quad A_i \in \mathscr{F}_i,\ i = 1, \cdots, n \,\}$$

とおけば，定理 A.5.9 より

$$\mathcal{B} := \left\{ \sum_{i=1}^n I_i \quad : \quad I_i \in \mathcal{A},\ n = 1, 2, \cdots \right\}$$

は $\prod_{i=1}^n X_i$ の上の加法族となり $\bigotimes_{i=1}^n \mathscr{F}_i$ を生成する．

定理 A.5.19 (完備測度空間の直積空間). $((X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i))_{i=1}^n$ を σ-有限な測度空間の族とし，$(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$ の Lebesgue 拡大を $(X_i, \mathfrak{M}_i, m_i)$ と書く．このとき次が成り立つ:

$$\left(X_1 \times \cdots \times X_n, \overline{\mathcal{B}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}_n}, \overline{\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n} \right) = \left(X_1 \times \cdots \times X_n, \overline{\mathfrak{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{M}_n}, \overline{m_1 \otimes \cdots \otimes m_n} \right).$$

証明. $X := \prod_{i=1}^n X_i$, $\mathcal{B} := \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{B}_i$, $\mathfrak{M} := \bigotimes_{i=1}^n \mathfrak{M}_i$, $\mu := \bigotimes_{i=1}^n \mu_i$, $m := \bigotimes_{i=1}^n m_i$ と表記する．

第一段 $\mathcal{B}_i \subset \mathfrak{M}_i$, $(i = 1, \cdots, n)$ より $\mathcal{B} \subset \mathfrak{M}$ が従う．このとき

$$\mu(B) = m(B), \quad (\forall B \in \mathcal{B}) \tag{A.42}$$

が成り立つことを示す．いま，σ-有限の仮定により各 i に対し

$$\mu_i(X_i^k) < \infty, \quad X_i^k \in \mathcal{B}_i,\ (\forall k = 1, 2, \cdots), \quad X_1^k \subset X_2^k \subset \cdots$$

を満たす増大列 $\left(X_i^k\right)_{k=1}^\infty$ が存在し，

$$X^k := X_1^k \times \cdots \times X_n^k, \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

により $\mathcal{B}$ の増大列 $(X^k)_{k=1}^\infty$ を定めれば

$$X = \bigcup_{k=1}^\infty X^k, \quad \mu(X^k) = \mu_1(X_1^k) \cdots \mu_n(X_n^k) < \infty; \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

が満たされる．ここで $\mathcal{B}$ を生成する乗法族を

$$\mathcal{A} := \{\, B_1 \times \cdots \times B_n \quad : \quad B_i \in \mathcal{B}_i,\ i = 1, \cdots, n \,\}$$

とおけば，$\mathcal{A}$ は $\left\{X^k\right\}_{k=1}^\infty$ を含み，かつ任意の $B_1 \times \cdots \times B_n \in \mathcal{A}$ に対して

$$\mu(B_1 \times \cdots \times B_n) = \mu_1(B_1) \cdots \mu_n(B_n) = m_1(B_1) \cdots m_n(B_n) = m(B_1 \times \cdots \times B_n)$$

となるから，定理 A.5.13 より (A.5.3) が出る．

第二段 この段と次の段で $\left(X, \overline{\mathcal{B}}, \overline{\mu}\right)$ が $(X, \mathfrak{M}, m)$ の完備拡張であることを示す．まず

$$\mathfrak{M} \subset \overline{\mathcal{B}} \tag{A.43}$$

が成り立つことを示す．任意の $E_j \in \mathfrak{M}_j$ に対し，

$$B_j^1 \subset E_j \subset B_j^2, \quad \mu_j\left(B_j^2 - B_j^1\right) = 0$$

を満たす $B_j^1, B_j^2 \in \mathcal{B}_j$ が存在する．このとき，X から X_j への射影を p_j と書けば

$$p_j^{-1}\left(B_j^1\right) \subset p_j^{-1}(E_j) \subset p_j^{-1}\left(B_j^2\right), \quad p_j^{-1}\left(B_j^1\right), p_j^{-1}\left(B_j^2\right) \in \mathcal{B}$$

及び

$$\mu\left(p_j^{-1}\left(B_j^2\right) - p_j^{-1}\left(B_j^1\right)\right) = \mu_1(X_1)\cdots\mu_j\left(B_j^2 - B_j^1\right)\cdots\mu_n(X_n) = 0$$

が成り立つから

$$p_j^{-1}(E_j) \in \overline{\mathcal{B}}$$

が従い，

$$E_1 \times \cdots \times E_n = \bigcap_{i=1}^{n} p_i^{-1}(E_i), \quad (E_i \in \mathfrak{M}_i,\ i = 1, \cdots, n)$$

と積 σ-加法族の定義より (A.5.3) が得られる．

第三段　任意の $E \in \mathfrak{M}$ に対し

$$m(E) = \overline{\mu}(E)$$

が成り立つことを示す．実際，(A.5.3) より $E \in \mathfrak{M}$ なら $E \in \overline{\mathcal{B}}$ となるから，

$$B_1 \subset E \subset B_2, \quad \mu(B_2 - B_1) = 0, \quad \overline{\mu}(E) = \mu(B_1) \tag{A.44}$$

を満たす $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ が存在し，このとき (A.5.3) より

$$m(E - B_1) \leq m(B_2 - B_1) = \mu(B_2 - B_1) = 0$$

が成立し

$$m(E) = m(B_1) = \mu(B_1) = \overline{\mu}(E)$$

が得られる．

第四段　前段の結果より $\left(X, \overline{\mathcal{B}}, \overline{\mu}\right)$ は $(X, \mathfrak{M}, m)$ の完備拡張であるから，

$$\overline{\mathfrak{M}} \supset \overline{\mathcal{B}}$$

を示せば定理の主張を得る．実際，任意の $E \in \overline{\mathcal{B}}$ に対し (A.5.3) を満たす $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ を取れば，

$$m(B_2 - B_1) = \mu(B_2 - B_1) = 0$$

が成り立ち $E \in \overline{\mathfrak{M}}$ が従う． ∎

A.6 積分

A.6.1 積分

定理 A.6.1 (複素数値可測 $\Longleftrightarrow$ 実部虚部が可測). $(X,\mathscr{F})$ を可測空間，$f : X \longrightarrow \mathbf{C}$ とするとき，f が $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測であることと f の実部 u と虚部 v がそれぞれ $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測であることは同値である．

証明． $z \in \mathbf{C}$ に対し $x, y \in \mathbf{C}$ の組が唯一つ対応し $z = x + iy$ を満たす．この対応関係により定める写像

$$\varphi : \mathbf{C} \ni z \longmapsto (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

は位相同型である．射影を $p_1 : \mathbf{R}^2 \ni (x, y) \longmapsto x$, $p_2 : \mathbf{R}^2 \ni (x, y) \longmapsto y$ とすれば

$$u = p_1 \circ \varphi \circ f, \quad v = p_2 \circ \varphi \circ f$$

となるから，f が $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測であるなら p_1, p_2, φ の連続性より

$$u^{-1}(A) = f^{-1} \circ \varphi^{-1} \circ p_1^{-1}(A) \in \mathscr{F}, \quad v^{-1}(A) = f^{-1} \circ \varphi^{-1} \circ p_2^{-1}(A) \in \mathscr{F}, \quad (\forall A \in \mathscr{B}(\mathbf{R}))$$

が成り立ち u, v の $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測性が従う．逆に u, v が $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測であるとき，

$$f^{-1}(B) = \{\, x \in X \quad : \quad (u(x), v(x)) \in \varphi(B) \,\} \in \mathscr{F}, \quad (\forall B \in \mathscr{B}(\mathbf{C}))$$

が成り立ち f の $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測性が出る． ∎

定理 A.6.2 (和・積・商の可測性).

定理 A.6.3 (相対位相の Borel 集合族). $(S,\mathscr{O})$ を位相空間とする．部分集合 $A \subset S$ に対して

$$\mathscr{B}(A) \coloneqq \sigma\left[\{\, A \cap O \quad : \quad O \in \mathscr{O} \,\}\right]$$

とおくとき次が成り立つ:

$$\mathscr{B}(A) = \{\, A \cap E \quad : \quad E \in \mathscr{B}(S) \,\}.$$

また $A \in \mathscr{B}(S)$ なら $\mathscr{B}(A) \subset \mathscr{B}(S)$ となる．

$\mathbf{R}$-値可測関数は，終集合 $\mathbf{C}$ に拡張すれば $\mathbf{C}$-値可測関数となる．

定理 A.6.4 (単関数近似列の存在). $(X,\mathscr{F})$ を可測空間とする．

(1) 任意の $\mathscr{F}/\mathscr{B}([0,\infty])$-可測写像 f に対し

$$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f; \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),\ (\forall x \in X)$$

を満たす $\mathscr{F}/\mathscr{B}([0,\infty))$-可測単関数列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ が存在する．

(2) 任意の $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測写像 f に対し

$$0 \leq |f_1| \leq |f_2| \leq \cdots \leq |f|; \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),\ (\forall x \in X)$$

を満たす $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測単関数列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ が存在する．

(3) (1) または (2) において，f が $E \in \mathscr{F}$ 上で有界なら $f_n \mathbb{1}_E$ は一様に $f\mathbb{1}_E$ を近似する:

$$\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty).$$

定義 A.6.5 (複素数値可測関数の正値測度に関する積分). $(X,\mathscr{F},\mu)$ を正値測度空間，f を $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測関数とする．$u := \operatorname{Re} f$, $v := \operatorname{Im} f$ とおけば $|u|,|v| \leq |f| \leq |u| + |v|$ より

$$|f| \text{ が可積分} \quad \Longleftrightarrow \quad u,v \text{ が共に可積分}$$

が成り立つ．$|f|$ が可積分のとき，f は可積分であるといい f の μ に関する積分を次で定める:

$$\int_X f\, d\mu := \int_X u\, d\mu + i \int_X v\, d\mu.$$

定理 A.6.6 (Lebesgue の収束定理). $(X,\mathscr{F},\mu)$ を正値測度空間，f, f_n $(n = 1,2,\cdots)$ を $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測な可積分関数とする．このとき，$f = \lim_{n\to\infty} f_n$ μ-a.e. かつ

$$|f_n| \leq g, \quad \mu\text{-a.e.}$$

を満たす可積分関数 g が存在するとき

$$\int_X |f - f_n|\, d\mu \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty).$$

定理 A.6.7 (積分の線形性・積分作用素の有界性). $(X,\mathscr{F})$ を可測空間とし，μ を $\mathscr{F}$ 上の正値測度とする．

(1) 任意の $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測可積分関数 f,g と $\alpha,\beta \in \mathbf{C}$ に対して次が成り立つ:

$$\int_X \alpha f + \beta g\, d\mu = \alpha \int_X f\, d\mu + \beta \int_X g\, d\mu.$$

(2) 任意の $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測可積分関数 f に対して次が成り立つ:

$$\left| \int_X f\, d\mu \right| \leq \int_X |f|\, d\mu.$$

証明.

(1)

(2) $\alpha := \int_X f\, d\mu$ とおけば，$\alpha \neq 0$ の場合

$$|\alpha| = \frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|} \int_X f\, d\mu = \int_X \frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|} f\, d\mu$$

が成り立ち

$$|\alpha| = \mathrm{Re}\,|\alpha| = \mathrm{Re} \int_X \frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|} f\, d\mu = \int_X \mathrm{Re}\, \frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|} f\, d\mu \leq \int_X |f|\, d\mu$$

が従う．$\alpha = 0$ の場合も不等式は成立する． ■

補題 A.6.8. S を実数の集合とする．$-S := \{\, -s \quad : \quad s \in S \,\}$ とおくとき次が成り立つ:

$$\inf S = -\sup(-S), \quad \sup S = -\inf(-S).$$

証明. 任意の $s \in S$ に対して $-s \leq \sup(-S)$ より $\inf S \geq -\sup(-S)$ となる．一方で任意の $s \in S$ に対し $\inf S \leq s$ より $-s \leq -\inf S$ となり $\sup(-S) \leq -\inf S$ が従うから $-\sup(-S) \geq \inf S$ も成り立ち $\inf S = -\sup(-S)$ が出る． ■

定理 A.6.9 (写像の値域は積分の平均値の範囲を出ない). $(X, \mathscr{F}, \mu)$ を σ-有限測度空間，$f : X \longrightarrow \mathbf{C}$ を $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測かつ μ-可積分な関数，$C \subset \mathbf{C}$ を閉集合とする．このとき

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f\, d\mu \in C, \quad (\forall E \in \mathscr{F},\ 0 < \mu(E) < \infty) \tag{A.45}$$

なら次が成り立つ:

$$f(x) \in C \quad \mu\text{-a.e.}\, x \in X.$$

$C = \mathbf{R}$ なら f は殆ど至る所 $\mathbf{R}$ 値であり，$C = \{0\}$ なら殆ど至る所 $f = 0$ である．

証明. σ-有限の仮定より次を満たす $\{X_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathscr{F}$ が存在する:

$$\mu(X_n) < \infty,\ (\forall n \geq 1); \quad X = \bigcup_{n=1}^\infty X_n.$$

$C = \mathbf{C}$ なら $f(x) \in C$ $(\forall x \in X)$ である．$C \neq \mathbf{C}$ の場合，任意の $\alpha \in \mathbf{C} \backslash C$ に対し或る $r > 0$ が存在して

$$B_r(\alpha) := \{\, z \in \mathbf{C} \quad : \quad |z - \alpha| \leq r \,\} \subset \mathbf{C} \backslash C$$

を満たす．ここで

$$E := f^{-1}\left(B_r(\alpha)\right), \quad E_n := E \cap X_n$$

とおけば，任意の $n \geq 1$ について $\mu(E_n) > 0$ なら

$$\left|\frac{1}{\mu(E_n)}\int_{E_n} f\,d\mu - \alpha\right| = \left|\frac{1}{\mu(E_n)}\int_{E_n} f - \alpha\,d\mu\right| \leq \frac{1}{\mu(E_n)}\int_{E_n} |f-\alpha|\,d\mu \leq r$$

となり (A.6.9) に反するから，$\mu(E_n) = 0\ (\forall n \geq 1)$ 及び

$$\mu(E) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = 0$$

が従う．$\mathbf{C}\backslash C$ は開集合であり $B_r(\alpha)$ の形の集合の可算和で表せるから

$$\mu\left(f^{-1}(\mathbf{C}\backslash C)\right) = 0$$

が成り立ち主張が得られる． ∎

定理 A.6.10 (可積分なら積分値を一様に小さくできる). $(X, \mathscr{F}, \mu)$ を正値測度空間，$f : X \longrightarrow \mathbf{C}$ を $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測関数とするとき，$f$ が可積分なら，任意の $\epsilon > 0$ に対して或る $\delta > 0$ が存在し次を満たす:

$$\mu(E) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \int_E |f|\,d\mu < \epsilon.$$

証明. $X_n \coloneqq \{|f| \leq n\}$ により増大列 $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ を定めれば単調収束定理より

$$\int_X |f|\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_{X_n} |f|\,d\mu$$

となるから，任意の $\epsilon > 0$ に対し或る $n_0 \geq 1$ が存在して

$$\int_{X\backslash X_{n_0}} |f|\,d\mu < \epsilon$$

が成り立つ．このとき $\mu(E) < \delta \coloneqq \epsilon/n_0$ なら

$$\int_E |f|\,d\mu = \int_{E\cap X_{n_0}} |f|\,d\mu + \int_{E\cap(X\backslash X_{n_0})} |f|\,d\mu \leq n_0\mu(E) + \int_{X\backslash X_{n_0}} |f|\,d\mu < 2\epsilon$$

が従う． ∎

A.6.2 関数列の収束

定義 A.6.11 (概収束すれば測度収束する). $(X, \mathscr{F}, \mu)$ を正値有限測度空間とする．$(f_n)_{n=1}^{\infty}, f$ を全て $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測関数とするとき，$\lim_{n\to\infty} f_n = f$, μ-a.e. なら $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ は f に測度収束する．

証明. 任意の $\epsilon > 0$ に対し

$$A_\epsilon^n \coloneqq \{|f_n - f| > \epsilon\}$$

とおけば，Lebesgue の収束定理より任意の $k \geq 1$ で

$$\epsilon\mu\left(A_\epsilon^n\right) \leq \int_{A_\epsilon^n} |f_n - f| \wedge \epsilon \, d\mu \leq \int_X |f_n - f| \wedge \epsilon \, d\mu \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成立する． ∎

上の定理で有限性を外すときの反例を示す．$X = \mathbf{R}$，μ を一次元 Lebesgue 測度とするとき，

$$f_n := \mathbb{1}_{\mathbf{R}\setminus(-n,n)}$$

で定める関数列 $(f_n)_{n=1}^\infty$ は零写像に各点収束するが，$0 < \epsilon < 1$ に対し

$$\mu\left(f_n > \epsilon\right) = \mu((-\infty, -n] \cup [n, \infty)) = \infty, \quad (\forall n \geq 1)$$

を満たすから測度収束しない．

定理 A.6.12 (測度収束列の概収束部分列)． $(X, \mathscr{F}, \mu)$ を正値測度空間，$(f_n)_{n=1}^\infty, f$ を全て $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測関数とするとき，$(f_n)_{n=1}^\infty$ が f に測度収束するなら或る部分列 $(f_{n_k})_{k=1}^\infty$ は f に概収束する．

証明． $(f_n)_{n=1}^\infty$ が f に測度収束するとき，任意の $k \geq 1$ に対し

$$\mu\left(|f_{n_k} - f| > \frac{1}{2^k}\right) < \frac{1}{2^k}$$

を満たす添数列 $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ が取れる．

$$A_k := \left\{|f_{n_k} - f| > \frac{1}{2^k}\right\}, \quad A := \bigcup_{k \geq 1} \bigcap_{j > k} A_j^c$$

とおけば，$\mu(A^c) \leq \mu\left(\bigcup_{j>k} A_j\right)$, $(\forall k \geq 1)$ かつ

$$\mu\left(\bigcup_{j>k} A_j\right) \leq \sum_{j>k} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^k}$$

より $\mu(A^c) = 0$ が従い，$x \in A$ なら或る $k = k(x)$ が存在して

$$|f_{n_j}(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^j}, \quad (\forall j > k)$$

となるから $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$ が満たされる． ∎

定理 A.6.13 (平均収束すれば測度収束する)． $p \in (0, \infty)$，$(X, \mathscr{F}, \mu)$ を正値測度空間，$(f_n)_{n=1}^\infty, f$ を全て $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測関数とするとき，

$$\int_X |f_n - f|^p \, d\mu \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

なら $(f_n)_{n=1}^\infty$ は f に測度収束する．

証明. 任意の $\epsilon > 0$ に対し

$$\epsilon^p \mu(|f_n - f| > \epsilon) \leq \int_{\{|f_n - f| > \epsilon\}} |f_n - f|^p \, d\mu \leq \int_X |f_n - f|^p \, d\mu \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成立する. ∎

定理 A.6.14 (Egorov).

A.6.3 Radon 測度

定理 A.6.15 (Riesz-Markov-Kakutani の表現定理).

定理 A.6.16 (正値 Borel 測度の正則性定理).

A.7 Stieltjes 積分

A.7.1 $\mathbf{R}^d$ 上の Stieltjes 測度

$\mathbf{R}$ の左半開区間とは $(a, b]$, $(-\infty \leq a \leq b \leq \infty)$ を指す．ただし

$$(a, b] = \begin{cases} \emptyset, & a = b, \\ (-\infty, b], & a = -\infty, \ b < \infty, \\ (a, \infty), & -\infty < a, \ b = \infty, \\ (-\infty, \infty), & a = -\infty, \ b = \infty, \end{cases}$$

と考える．ここで $d \geq 1$ に対し $(a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \cdots \times (a_d, b_d]$ の形の集合を $\mathbf{R}^d$ の左半開区間として

$$\mathfrak{F} \coloneqq \left\{ \sum_{i=1}^n I_i \quad : \quad I_i \subset \mathbf{R}^d : \text{左半開区間}, \ n = 1, 2, \cdots \right\}$$

とおけば，$\mathfrak{F}$ は $\mathscr{B}(\mathbf{R}^d)$ を生成し，また定理 A.5.9 より $\mathbf{R}^d$ の上の加法族となる．$f_\lambda : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $(\lambda = 1, \cdots, d)$ を単調非減少関数として，任意の空でない左半開区間 $I = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \cdots \times (a_d, b_d] \subset \mathbf{R}^d$ に対し

$$m_0(I) \coloneqq \prod_{\lambda=1}^d \sup \{ f_\lambda(\beta_\lambda) - f_\lambda(\alpha_\lambda) \quad : \quad (\alpha_\lambda, \beta_\lambda] \subset (a_\lambda, b_\lambda], -\infty < \alpha_\lambda < \beta_\lambda < \infty \}$$

とおき，$I = \emptyset$ なら $m_0(I) \coloneqq 0$ とすれば，定理 A.5.9 より

$$\mu_0(F) \coloneqq \sum_{i=1}^n m_0(I_i), \quad (\forall F = I_1 + I_2 + \cdots + I_n \in \mathfrak{F})$$

により $\mathfrak{F}$ 上の有限加法的測度が定まる．また，任意の $n \geq 1$ に対して

$$\mu_0((-n, n] \times \cdots \times (-n, n]) = \prod_{\lambda=1}^d \{ f_\lambda(n) - f_\lambda(-n) \} < \infty$$

となるから μ_0 は $\mathfrak{F}$ 上で σ-有限的である．

定理 A.7.1 (右連続性と完全加法性). 単調非減少関数 $f_\lambda : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $(\lambda = 1, \cdots, d)$ を用いて定める μ_0 について，全ての f_λ が右連続であることと μ_0 が $\mathfrak{F}$ の上で完全加法的であることは同値である．

証明.

第一段

第二段　全ての f_λ が右連続であるとし，

$$I = (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d], \quad (-\infty \leq a_\lambda \leq b_\lambda \leq \infty,\ \lambda = 1, \cdots, d)$$

を取る．$0 < \mu_0(I) < \infty$ のとき，任意の $\epsilon > 0$ に対し

$$I_\epsilon := \left(\alpha_{1,\epsilon}, \beta_{1,\epsilon}\right] \times \cdots \times \left(\alpha_{d,\epsilon}, \beta_{d,\epsilon}\right], \quad (-\infty < \alpha_{\lambda,\epsilon} < \beta_{\lambda,\epsilon} < \infty), \quad I_\epsilon \subset I, \quad \mu(I \backslash I_\epsilon) < \epsilon$$

を満たす左半開区間 I_ϵ が存在し，

$$I_\epsilon \subset K_\epsilon := \left[\alpha_{1,\epsilon}, \beta_{1,\epsilon}\right] \times \cdots \times \left[\alpha_{d,\epsilon}, \beta_{d,\epsilon}\right] \subset I$$

かつ K_ϵ はコンパクト集合である．
定理 A.5.6 より $\mathbf{R}^d$ のコンパクト集合全体はコンパクトクラスとなるから，定理 A.5.8 より定理 A.5.7 の (a) が満たされる．

定義 A.7.2 (Lebesgue-Stieltjes 測度). 右連続かつ単調非減少な関数の族 $(f_\lambda)_{\lambda=1}^d$ により構成する $(\mathbf{R}^d, \mathfrak{F}, \mu_0)$ は，定理 A.5.11 と定理 A.5.12 より完備測度空間 $(\mathbf{R}^d, \mathfrak{M}, \mu^*)$ に拡張される．この μ^* を $(f_\lambda)_{\lambda=1}^d$ の d 次元 Lebesgue-Stieltjes 測度と呼び，特に f_λ が全て恒等写像の場合 d 次元 Lebesgue 測度と呼ぶ．

f_λ が全て右連続であれば定理 A.5.14 より μ_0 は $(\mathbf{R}^d, \mathscr{B}(\mathbf{R}^d))$ の上の σ-有限測度 μ に一意に拡張され，このとき

$$\left(\mathbf{R}^d, \overline{\mathscr{B}(\mathbf{R}^d)}, \overline{\mu}\right) = \left(\mathbf{R}^d, \mathfrak{M}, \mu^*\right)$$

が成立する．この拡張測度 μ を $(f_\lambda)_{\lambda=1}^d$ の Borel-Stieltjes 測度と呼ぶ．

A.7.2　任意の区間上の Stieltjes 測度

I_λ, $(\lambda = 1, \cdots, d)$ を $\mathbf{R}$ の区間，つまり $(a,b), (a,b], [a,b), [a,b]$, $(-\infty \leq a \leq b \leq \infty)$ のいずれかとするとき，

$$I := I_1 \times \cdots \times I_d$$

の形の集合 I を $\mathbf{R}^d$ の区間と呼ぶ．いま，各 $\lambda = 1, \cdots, d$ に対し，f_λ を I_λ 上で定義された右連続単調非減少な，ただし I_λ が有界なら I_λ 上で有界な関数として

$$a_\lambda := \inf\left\{\ f_\lambda(x) \ :\ \inf I_\lambda < x < \sup I_\lambda\ \right\}, \quad b_\lambda := \sup\left\{\ f_\lambda(x) \ :\ \inf I_\lambda < x < \sup I_\lambda\ \right\}$$

とおけば，$\inf I_\lambda \in I_\lambda$ なら $a_\lambda = f_\lambda(\inf I_\lambda)$，$\sup I_\lambda \in I_\lambda$ なら $b_\lambda = f_\lambda(\sup I_\lambda)$ であるから

$$\hat{f_\lambda}(x) := \begin{cases} a_\lambda & -\infty < x \leq \inf I_\lambda \\ f_\lambda(x) & \inf I_\lambda < x < \sup I_\lambda \\ b_\lambda & \sup I_\lambda \leq x < \infty \end{cases}$$

は f_λ の拡張となり，$\left(\hat{f_\lambda}\right)_{\lambda=1}^d$ に対して Borel-Stieltjes 測度空間 $(\mathbf{R}^d, \mathscr{B}(\mathbf{R}^d), \mu)$ が定まる．定理 A.6.3 より

$$\mathscr{B}(I) = \left\{ \ I \cap E \quad : \quad E \in \mathscr{B}(\mathbf{R}^d) \ \right\} \subset \mathscr{B}(\mathbf{R}^d)$$

が成り立つから，

$$\mu_I(I \cap E) := \mu(I \cap E), \quad (\forall E \in \mathscr{B}(\mathbf{R}^d))$$

とおけば $(I, \mathscr{B}(I), \mu_I)$ は測度空間となる．この μ_I もまた $(f_\lambda)_{\lambda=1}^d$ の Borel-Stieltjes 測度と呼ぶ.

定理 A.7.3 (Borel-Stiletjes 測度の一意性). f_λ を区間 $I_\lambda \subset \mathbf{R}$ で定義された右連続な単調非減少関数，μ を $(f_\lambda)_{\lambda=1}^d$ の Borel-Stieltjes 測度とするとき，任意の $(\alpha_1, \beta_1] \times \cdots \times (\alpha_d, \beta_d]$, $(-\infty < \alpha_\lambda < \beta_\lambda < \infty$, $(\alpha_\lambda, \beta_\lambda] \subset I_\lambda)$ に対して

$$\mu\left((\alpha_1, \beta_1] \times \cdots \times (\alpha_d, \beta_d]\right) = \prod_{\lambda=1}^{d} \{f_\lambda(\beta_\lambda) - f_\lambda(\alpha_\lambda)\} \tag{A.46}$$

が満たされる．また $(f_\lambda)_{\lambda=1}^d$ に対し (A.7.3) を満たす $(I, \mathscr{B}(I))$ 上の測度は唯一つである.

A.7.3 Stieltjes 積分

定理 A.7.4 (Riemann-Stieltjes 積分との関係). $F : I \longrightarrow \mathbf{C}$ が右連続或は左連続なら

定理 A.7.5 (時間変更). $u : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ を非減少連続関数，$A : [u(a), u(b)] \longrightarrow \mathbf{R}$ を非減少右連続関数とするとき，任意の $\mathscr{B}([u(a), u(b)])/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測関数 f に対し

$$\int_{[a,b]} f(u(s)) \ dA_{u(s)} = \int_{[u(a),u(b)]} f(t) \ dA_t$$

が成立する．ここで左辺は $s \longrightarrow A(u(s))$ により作る Lebesgue-Stieltjes 測度による積分を表す.

A.8 Fubini の定理

$(X, \mathcal{M}), (Y, \mathcal{N})$ を可測空間とするとき，任意の $x \in X$ に対し

$$p_x : Y \ni y \longmapsto (x, y) \in X \times Y$$

で定める p_x は $\mathcal{N}/\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$-可測である．実際，$A \in \mathcal{M}$, $B \in \mathcal{N}$ に対しては

$$p_x^{-1}(A \times B) = \begin{cases} \emptyset, & (x \notin A), \\ B, & (x \in A), \end{cases} \in \mathcal{N}$$

となるから，

$$\{ A \times B \ : \ A \in \mathcal{M},\ B \in \mathcal{N} \} \subset \left\{ E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \ : \ p_x^{-1}(E) \in \mathcal{N} \right\}$$

が従い p_x の $\mathcal{N}/\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$-可測性が出る．同様に任意の $y \in Y$ に対し

$$q_y : X \ni x \longmapsto (x, y) \in X \times Y$$

で定める q_y は $\mathcal{M}/\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$-可測である．

補題 A.8.1 (二変数可測写像は片変数で可測). $(X, \mathcal{M}), (Y, \mathcal{N}), (Z, \mathcal{L})$ を可測空間とするとき，写像 $f : X \times Y \longmapsto Z$ が $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}/\mathcal{L}$-可測であれば，任意の $x_0 \in X,\ y_0 \in Y$ に対し

$$X \ni x \longmapsto f(x, y_0), \quad Y \ni y \longmapsto f(x_0, y)$$

はそれぞれ $\mathcal{M}/\mathcal{L}$-可測，$\mathcal{N}/\mathcal{L}$-可測である．

証明． $X \ni x \longmapsto f(x, y_0)$ は f と q_{y_0} の合成 $f \circ q_{y_0}$ であり，$Y \ni y \longmapsto f(x_0, y)$ は $f \circ p_{x_0}$ である． ∎

補題 A.8.2. $(X, \mathcal{M}, \mu), (Y, \mathcal{N}, \nu)$ を σ-有限な測度空間とするとき，任意の $Q \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ に対し

$$\varphi_Q : X \ni x \longmapsto \int_Y 1\!\!1_Q \circ p_x \, d\nu, \quad \psi_Q : Y \ni y \longmapsto \int_X 1\!\!1_Q \circ q_y \, d\mu,$$

はそれぞれ $\mathcal{M}/\mathscr{B}([0, \infty])$-可測，$\mathcal{N}/\mathscr{B}([0, \infty])$-可測であり

$$\int_X \varphi_Q \, d\mu = (\mu \otimes \nu)(Q) = \int_Y \psi_Q \, d\nu \tag{A.47}$$

が成立する．

証明．

第一段 σ-有限の仮定より，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n = Y, \quad \mu(X_n),\ \nu(Y_n) < \infty;\ n = 1, 2, \cdots$$

を満たす増大列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ と $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{N}$ が存在する．ここで

$$\mathcal{M}_n := \{ A \cap X_n \ : \ A \in \mathcal{M} \}, \quad \mathcal{N}_n := \{ B \cap Y_n \ : \ B \in \mathcal{N} \}$$

により X_n, Y_n 上の σ-加法族を定めて

$$\mathcal{D}_n := \left\{ Q_n \in \mathcal{M}_n \otimes \mathcal{N}_n \ : \ \begin{array}{r} \varphi_{Q_n} : X \ni x \longmapsto \displaystyle\int_Y 1\!\!1_{Q_n} \circ p_x \, d\nu \text{ が } \mathcal{M}/\mathscr{B}([0, \infty])\text{-可測}, \\ \psi_{Q_n} : Y \ni y \longmapsto \displaystyle\int_X 1\!\!1_{Q_n} \circ q_y \, d\mu \text{ が } \mathcal{N}/\mathscr{B}([0, \infty])\text{-可測}, \\ \displaystyle\int_X \varphi_{Q_n} \, d\mu = (\mu \otimes \nu)(Q_n) = \int_Y \psi_{Q_n} \, d\nu \end{array} \right\}$$

とおけば，$\mathcal{D}_n$ は $X_n \times Y_n$ 上の Dynkin 族であり

$$\{\, A \times B \ : \quad A \in \mathcal{M}_n,\ B \in \mathcal{N}_n \,\} \subset \mathcal{D}_n$$

を満たすから $\mathcal{M}_n \otimes \mathcal{N}_n = \mathcal{D}_n$ が従う．

第二段 $\mathcal{M}_n \otimes \mathcal{N}_n = \{\, Q \cap (X_n \times Y_n) \ : \quad Q \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \,\}$ より，任意の $Q \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ に対して

$$Q_n \coloneqq Q \cap (X_n \times Y_n) \in \mathcal{D}_n,\ (\forall n \geq 1), \quad Q_1 \subset Q_2 \subset \cdots \longrightarrow Q$$

が従い，単調収束定理より

$$\varphi_Q(x) = \int_Y \mathbb{1}_Q \circ p_x \, d\nu = \lim_{n \to \infty} \int_Y \mathbb{1}_{Q_n} \circ p_x \, d\nu = \lim_{n \to \infty} \varphi_{Q_n}(x), \quad (\forall x \in X)$$

となるから φ_Q の $\mathcal{M}/\mathscr{B}([0,\infty])$-可測性が出る．また，

$$\varphi_{Q_n}(x) = \int_Y \mathbb{1}_{Q_n} \circ p_x \, d\nu \leq \int_Y \mathbb{1}_{Q_{n+1}} \circ p_x \, d\nu = \varphi_{Q_{n+1}}(x), \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

が満たされているから，再び単調収束定理により

$$\int_X \varphi_Q \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X \varphi_{Q_n} \, d\mu = \lim_{n \to \infty} (\mu \otimes \nu)(Q_n) = (\mu \otimes \nu)(Q)$$

が得られる．同様に ψ_Q は $\mathcal{N}/\mathscr{B}([0,\infty])$-可測であり (A.8.2) を満たす． ∎

定理 A.8.3 (Fubini). $(X, \mathcal{M}, \mu), (Y, \mathcal{N}, \nu)$ を σ-有限な測度空間とする．

(1) $f : X \times Y \longrightarrow [0, \infty]$ を $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}/\mathscr{B}([0,\infty])$-可測写像とするとき，

$$\varphi : X \ni x \longmapsto \int_Y f \circ p_x \, d\nu, \quad \psi : Y \ni y \longmapsto \int_X f \circ q_y \, d\mu$$

により定める φ, ψ はそれぞれ $\mathcal{M}/\mathscr{B}([0,\infty])$-可測，$\mathcal{N}/\mathscr{B}([0,\infty])$-可測であり，

$$\int_X \varphi \, d\mu = \int_{X \times Y} f \, d(\mu \otimes \nu) = \int_Y \psi \, d\nu$$

が成立する．

(2) $f : X \times Y \longrightarrow \mathbf{C}$ を $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測な可積分関数とするとき，

定理 A.8.4 (n 変数関数の Fubini の定理). $((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i))_{i=1}^n$, $(n \geq 3)$ を σ-有限な測度空間の族とし，

$$\{i_1, \cdots, i_k\} \cup \{j_1, \cdots, j_h\} = \{1, 2, \cdots, n\}, \quad \{i_1, \cdots, i_k\} \cap \{j_1, \cdots, j_h\} = \emptyset$$

を満たす添数列 $i_1, \cdots, i_k$ と $j_1, \cdots, j_h$, $(1 \leq k, h \leq n-1)$ を任意に取り

$$Y := \prod_{i=1}^n X_i, \quad Y_1 := \prod_{\ell=1}^k X_{i_\ell}, \quad Y_2 := \prod_{\ell=1}^h X_{j_\ell},$$
$$\mathcal{N} := \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{M}_i, \quad \mathcal{N}_1 := \bigotimes_{\ell=1}^k \mathcal{M}_{i_\ell}, \quad \mathcal{N}_2 := \bigotimes_{\ell=1}^h \mathcal{M}_{j_\ell},$$
$$\mu := \bigotimes_{i=1}^n \mu_i, \quad \nu_1 := \bigotimes_{\ell=1}^k \mu_{i_\ell}, \quad \nu_2 := \bigotimes_{\ell=1}^h \mu_{j_\ell}$$

とおく．また

$$p_{y_1} : Y_2 \ni y_2 \longmapsto (y_1, y_2), (\forall y_1 \in Y_1), \quad q_{y_2} : Y_1 \ni y_1 \longmapsto (y_1, y_2), (\forall y_2 \in Y_2)$$

とする．このとき，射影 $\pi_1 : Y \longrightarrow Y_1$, $\pi_2 : Y \longrightarrow Y_2$ に対し

$$\varphi : Y_1 \times Y_2 \ni (y_1, y_2) \longmapsto \pi_1^{-1}(y_1) \cap \pi_2^{-1}(y_2)$$

により $\varphi : Y_1 \times Y_2 \longrightarrow Y$ を定めれば φ は $\mathcal{N}_1 \otimes \mathcal{N}_2/\mathcal{N}$-可測であり，更に以下が成立する:

(1) $f : Y \longrightarrow [0, \infty]$ が $\mathcal{N}/\mathscr{B}([0, \infty])$-可測なら次が成り立つ:

$$\int_Y f \, d\mu = \int_{Y_1} \int_{Y_2} f\left(\varphi\left(p_{y_1}(y_2)\right)\right) \, \nu_2(dy_2) \, \nu_1(dy_1) = \int_{Y_2} \int_{Y_1} f\left(\varphi\left(q_{y_2}(y_1)\right)\right) \, \nu_1(dy_1) \, \nu_2(dy_2).$$

証明.

第一段 φ の $\mathcal{N}_1 \otimes \mathcal{N}_2/\mathcal{N}$-可測性を示す．実際，$\varphi : Y_1 \times Y_2 \longrightarrow Y$ が全単射であることより

$$\varphi^{-1}(E_1 \times \cdots \times E_n) = \prod_{\ell=1}^k E_{i_\ell} \times \prod_{\ell=1}^h E_{j_\ell} \in \mathcal{N}_1 \otimes \mathcal{N}_2, \quad (\forall E_i \in \mathcal{M}_i, \, i = 1, \cdots, n) \tag{A.48}$$

が成り立つから

$$\{\, E_1 \times \cdots \times E_n \;:\; E_i \in \mathcal{M}_i, \, i = 1, \cdots, n \,\} \subset \left\{\, E \in \mathcal{N} \;:\; \varphi^{-1}(E) \in \mathcal{N}_1 \otimes \mathcal{N}_2 \,\right\}$$

となり，左辺は $\mathcal{N}$ を生成するから φ は $\mathcal{N}_1 \otimes \mathcal{N}_2/\mathcal{N}$-可測である．

第二段 $f = 1\!\!1_E$ $(E \in \mathcal{N})$ に対し

$$\int_Y f \, d\mu = \int_{Y_1 \times Y_2} f \circ \varphi \, d(\nu_1 \otimes \nu_2)$$

となることを示す．実際，(A.8) より

$$\{\, E_1 \times \cdots \times E_n \;:\; E_i \in \mathcal{M}_i, \, i = 1, \cdots, n \,\} \subset \left\{\, E \in \mathcal{N} \;:\; \mu(E) = \nu_1 \otimes \nu_2\left(\varphi^{-1}(E)\right) \,\right\}$$

となるから，Dinkin 族定理より任意の $E \in \mathcal{N}$ に対して $\mu(E) = \nu_1 \otimes \nu_2 \left(\varphi^{-1}(E)\right)$ が成立し

$$\int_Y f\, d\mu = \mu(E) = \nu_1 \otimes \nu_2 \left(\varphi^{-1}(E)\right) = \int_{Y_1 \times Y_2} f \circ \varphi\, d(\nu_1 \otimes \nu_2)$$

が従う．

A.9 L^p 空間

測度空間を $(X, \mathscr{F}, \mu)$ とする．$\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測関数 f に対して

$$\| f \|_{\mathscr{L}^p} := \begin{cases} \inf \{\, r \in \mathbf{C} \ : \ |f(x)| \leq r \quad \mu\text{-a.e.} x \in X \,\} & (p = \infty) \\ \left(\int_X |f(x)|^p \ \mu(dx) \right)^{1/p} & (0 < p < \infty) \end{cases}$$

により $\|\cdot\|_{\mathscr{L}^p}$ を定め，

$$\mathscr{L}^p(X, \mathscr{F}, \mu) := \{\, f : X \longrightarrow \mathbf{C} \ : \ f : \text{可測 } \mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C}),\ \| f \|_{\mathscr{L}^p} < \infty \,\} \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

で空間 $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{F}, \mu)$ を定義する．$\mathscr{L}^p(\mu)$ とも略記する．

補題 A.9.1. 任意の $f \in \mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{F}, \mu)$ に対して次が成り立つ:

$$|f| \leq \| f \|_{\mathscr{L}^\infty} \quad \mu\text{-a.e.}$$

証明. $\mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{F}, \mu)$ の定義より任意の実数 $\alpha > \| f \|_{\mathscr{L}^\infty}$ に対して

$$\mu(\{\, x \in X \ : \ |f(x)| > \alpha \,\}) = 0$$

が成り立つから，

$$\{\, x \in X \ : \ |f(x)| > \| f \|_{\mathscr{L}^\infty} \,\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{\, x \in X \ : \ |f(x)| > \| f \|_{\mathscr{L}^\infty} + \frac{1}{n} \,\right\}$$

の右辺は μ-零集合であり主張が従う． ∎

定理 A.9.2 (Hölder **の不等式**). $1 \leq p, q \leq \infty$，$p + q = pq$ ($p = \infty$ なら $q = 1$) とする．このとき任意の $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測関数 f, g に対して次が成り立つ:

$$\int_X |fg|\, d\mu \leq \| f \|_{\mathscr{L}^p} \| g \|_{\mathscr{L}^q} . \tag{A.49}$$

証明. $\| f \|_{\mathscr{L}^p} = \infty$ 又は $\| g \|_{\mathscr{L}^q} = \infty$ なら (A.9.2) は成り立つから，$\| f \|_{\mathscr{L}^p} < \infty$ かつ $\| g \|_{\mathscr{L}^q} < \infty$ とする．

$p = \infty$, $q = 1$ の場合 補題 A.9.1 により或る零集合 A が存在して

$$|f(x)g(x)| \leq \| f \|_{\mathscr{L}^\infty} |g(x)| \quad (\forall x \in X \backslash A).$$

が成り立つから，

$$\int_X |fg|\,d\mu = \int_{X\setminus A} |fg|\,d\mu \leq \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} \int_{X\setminus A} |g|\,d\mu = \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} \|g\|_{\mathscr{L}^1}$$

が従い不等式 (A.9.2) を得る．

$1 < p, q < \infty$ **の場合**　$\|f\|_{\mathscr{L}^p} = 0$ のとき

$$B := \{\, x \in X \ :\ \ |f(x)| > 0 \,\}$$

は零集合であるから，

$$\int_X |fg|\,d\mu = \int_{X\setminus B} |fg|\,d\mu = 0$$

となり (A.9.2) を得る．$\|g\|_{\mathscr{L}^q} = 0$ の場合も同じである．次に $0 < \|f\|_{\mathscr{L}^p}, \|g\|_{\mathscr{L}^q} < \infty$ の場合を示す．実数値対数関数 $(0,\infty) \ni t \longmapsto -\log t$ は凸であるから，$1/p + 1/q = 1$ に対して

$$-\log\left(\frac{s}{p} + \frac{t}{q}\right) \leq \frac{1}{p}(-\log s) + \frac{1}{q}(-\log t) \quad (\forall s, t > 0)$$

を満たし

$$s^{1/p} t^{1/q} \leq \frac{s}{p} + \frac{t}{q} \quad (\forall s, t > 0)$$

が従う．ここで

$$F := \frac{|f|^p}{\|f\|_{\mathscr{L}^p}^p}, \quad G := \frac{|g|^q}{\|g\|_{\mathscr{L}^q}^q}$$

により可積分関数 F, G を定めれば，

$$F(x)^{1/p} G(x)^{1/q} \leq \frac{1}{p} F(x) + \frac{1}{q} G(x) \quad (\forall x \in X)$$

が成り立つから

$$\frac{1}{\|f\|_{\mathscr{L}^p} \|g\|_{\mathscr{L}^q}} \int_X |fg|\,d\mu = \int_X F^{1/p} G^{1/q}\,d\mu \leq \frac{1}{p}\int_X F\,d\mu + \frac{1}{q}\int_X G\,d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

が従い，$\|f\|_{\mathscr{L}^p} \|g\|_{\mathscr{L}^q}$ を移項して不等式 (A.9.2) を得る． ∎

定理 A.9.3 (Minkowski の不等式).　$1 \leq p \leq \infty$ のとき，任意の $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測関数 f, g に対して次が成り立つ:

$$\|f + g\|_{\mathscr{L}^p} \leq \|f\|_{\mathscr{L}^p} + \|g\|_{\mathscr{L}^p}. \tag{A.50}$$

証明.　$\|f + g\|_{\mathscr{L}^p} = 0$, $\|f\|_{\mathscr{L}^p} = \infty$, $\|g\|_{\mathscr{L}^p} = \infty$ のいずれかが満たされていれば (A.9.3) は成り立つから，$\|f + g\|_{\mathscr{L}^p} > 0$ かつ $\|f\|_{\mathscr{L}^p} < \infty$ かつ $\|g\|_{\mathscr{L}^p} < \infty$ の場合を考える．

$p = \infty$ **の場合**　補題 A.9.1 により

$$C := \{\, x \in X \ :\ \ |f(x)| > \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} \,\} \cup \{\, x \in X \ :\ \ |g(x)| > \|g\|_{\mathscr{L}^\infty} \,\}$$

は零集合であり，

$$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)|+|g(x)| \leq \| f \|_{\mathscr{L}^\infty} + \| g \|_{\mathscr{L}^\infty} \quad (\forall x \in X \backslash C)$$

が成り立ち (A.9.3) が従う．

$p=1$ の場合

$$\int_X |f+g| \, d\mu \leq \int_X |f|+|g| \, d\mu = \| f \|_{\mathscr{L}^1} + \| g \|_{\mathscr{L}^1}$$

より (A.9.3) が従う．

$1<p<\infty$ の場合 q を p の共役指数とする．

$$|f+g|^p = |f+g||f+g|^{p-1} \leq |f||f+g|^{p-1} + |g||f+g|^{p-1}$$

が成り立つから，Hölder の不等式より

$$\begin{aligned} \| f+g \|_{\mathscr{L}^p}^p &= \int_X |f+g|^p \, d\mu \\ &\leq \int_X |f||f+g|^{p-1} \, d\mu + \int_X |g||f+g|^{p-1} \, d\mu \\ &\leq \| f \|_{\mathscr{L}^p} \| f+g \|_{\mathscr{L}^p}^{p-1} + \| g \|_{\mathscr{L}^p} \| f+g \|_{\mathscr{L}^p}^{p-1} \end{aligned} \tag{A.51}$$

が得られる．また $|f|^p, |g|^p$ の可積性と

$$|f+g|^p \leq 2^p \left(|f|^p + |g|^p \right)$$

により $\| f+g \|_{\mathscr{L}^p} < \infty$ が従うから，(A.9) の両辺を $\| f+g \|_{\mathscr{L}^p}^{p-1}$ で割って (A.9.3) を得る． ∎

以上の結果より $\mathscr{L}^p(X,\mathscr{F},\mu)$ は $\mathbf{C}$ 上の線形空間となる．実際線型演算は

$$(f+g)(x) := f(x)+g(x), \quad (\alpha f)(x) := \alpha f(x), \quad (\forall x \in X,\ f,g \in \mathscr{L}^p(\mu),\ \alpha \in \mathbf{C})$$

により定義され，Minkowski の不等式により加法について閉じている．

補題 A.9.4. $1 \leq p \leq \infty$ に対し，$\| \cdot \|_{\mathscr{L}^p}$ は線形空間 $\mathscr{L}^p(X,\mathscr{F},\mu)$ のセミノルムである．

証明.

半正値性 $\| \cdot \|_{\mathscr{L}^p}$ が正値であることは定義による．一方で，$E \neq \emptyset$ を満たす μ-零集合 E が存在するとき，

$$f(x) := \begin{cases} 1 & (x \in E) \\ 0 & (x \in \Omega \backslash E) \end{cases}$$

で定める f は零写像ではないが $\| f \|_{\mathscr{L}^p} = 0$ となる．

同次性 任意に $\alpha \in \mathbf{C}$, $f \in \mathscr{L}^p(\mu)$ を取る．$1 \leq p < \infty$ の場合は

$$\left(\int_X |\alpha f|^p \, d\mu \right)^{1/p} = \left(|\alpha|^p \int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} = |\alpha| \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

により，$p=\infty$ の場合は

$$\inf \{ r \in \mathbf{R} \ : \ |\alpha f(x)| \leq r \quad \mu\text{-a.e.} x \in X \} = |\alpha| \inf \{ r \in \mathbf{R} \ : \ |f(x)| \leq r \quad \mu\text{-a.e.} x \in X \}$$

により $\| \alpha f \|_{\mathscr{L}^p} = |\alpha| \| f \|_{\mathscr{L}^p}$ が成り立つ．

三角不等式 Minkowski の不等式より従う． ∎

$\mathscr{L}^p$ はノルム空間ではないが，同値類でまとめることによりノルム空間となる．

可測関数全体の商集合 $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測関数全体の集合を

$$\mathscr{L}^0(X,\mathscr{F},\mu) \coloneqq \{\, f : X \longrightarrow \mathbf{C} \quad : \quad f : \text{可測 } \mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C}) \,\}$$

とおく．$f,g \in \mathscr{L}^0(X,\mathscr{F},\mu)$ に対し

$$f \sim g \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad f = g \quad \mu\text{-a.e.}$$

により定める $\sim$ は同値関係であり，$\sim$ による $\mathscr{L}^0(X,\mathscr{F},\mu)$ の商集合を $L^0(X,\mathscr{F},\mu)$ と表す．

商集合における算法 $L^0(\mu)$ の元である関数類 (同値類) を $[f]$ (f は関数類の代表) と表せば，$L^0(\mu)$ は

$$[f]+[g] \coloneqq [f+g], \quad \alpha[f] \coloneqq [\alpha f], \quad ([f],[g] \in L^0(\mu),\ \alpha \in \mathbf{C}).$$

を線型演算として $\mathbf{C}$ 上の線形空間となる．また

$$[f][g] \coloneqq [fg] \quad \left([f],[g] \in L^0(\mu)\right).$$

を乗法として $L^0(\mu)$ は環となる．$L^0(\mu)$ の零元は零写像の関数類でありこれを $[0]$ と書く．また単位元は恒等的に 1 を取る関数の関数類でありこれを $[1]$ と書く．減法は

$$[f]-[g] \coloneqq [f]+(-[g]) = [f]+[-g] = [f-g]$$

により定める．

関数類の順序 $[f],[g] \in L^0(\mu)$ に対して次の関係 $<$ ($>$) を定める:

$$[f] < [g] \ ([g] > [f]) \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad f < g \quad \mu\text{-a.s.}$$

この定義は well-defined である．実際任意の $f' \in [f], g' \in [g]$ に対して

$$\{f' \geq g'\} \subset \{f \neq f'\} \cup \{f \geq g\} \cup \{g \neq g'\}$$

の右辺は零集合であるから

$$[f] < [g] \Leftrightarrow [f'] < [g']$$

が従う．$<$ ($>$) または $=$ であることを $\leq$ ($\geq$) と書くとき，任意の $[f],[g],[h] \in L^0(\mu)$ に対し，

- $[f] \leq [f]$ が成り立つ．
- $[f] \leq [g]$ かつ $[g] \leq [f]$ ならば $[f] = [g]$ が成り立つ．
- $[f] \leq [g]$, $[g] \leq [h]$ ならば $[f] \leq [h]$ が成り立つ．

が満たされるから $\leq$ は $L^0(\mu)$ における順序となる．

定義 A.9.5 (商空間におけるノルムの定義).

$$\|[f]\|_{L^p} := \|f\|_{\mathscr{L}^p} \quad (f \in \mathscr{L}^p(X, \mathscr{F}, \mu),\ 1 \leq p \leq \infty)$$

により定める $\|\cdot\|_{L^p} : L^0(X, \mathscr{F}, \mu) \to \mathbf{R}$ は関数類の代表に依らずに値が確定する．そして

$$L^p(X, \mathscr{F}, \mu) := \left\{ [f] \in L^0(X, \mathscr{F}, \mu) \ :\ \ \|[f]\|_{L^p} < \infty \right\} \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

として定める空間は $\|\cdot\|_{L^p}$ をノルムとしてノルム空間となる．

定理 A.9.6 (L^p は Banach 空間). ノルム空間 $L^p(X, \mathscr{F}, \mu)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ の任意の Cauchy 列 $([f_n])_{n=1}^{\infty}$ に対してノルム収束極限 $[f] \in L^p(\mu)$ が存在する．また，このとき或る部分列 $\left([f_{n_k}]\right)_{k=1}^{\infty}$ の代表 f_{n_k} は f に概収束する:

$$\lim_{k \to \infty} f_{n_k} = f, \quad \mu\text{-a.e.}$$

証明． 任意に Cauchy 列 $[f_n] \in L^p(\mu)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を取れば，或る $N_1 \in \mathbf{N}$ が存在して

$$\|[f_n] - [f_m]\|_{L^p} < \frac{1}{2} \quad (\forall n > m \geq N_1)$$

を満たす．ここで $m > N_1$ を一つ選び n_1 とおく．同様に $N_2 > N_1$ を満たす $N_2 \in \mathbf{N}$ が存在して

$$\|[f_n] - [f_m]\|_{L^p} < \frac{1}{2^2} \quad (\forall n > m \geq N_2)$$

を満たすから，$m > N_2$ を一つ選び n_2 とおけば

$$\left\| [f_{n_1}] - [f_{n_2}] \right\|_{L^p} < \frac{1}{2}$$

が成り立つ．同様の操作を繰り返して

$$\left\| [f_{n_k}] - [f_{n_{k+1}}] \right\|_{L^p} < \frac{1}{2^k} \quad (n_k < n_{k+1},\ k = 1, 2, 3, \cdots) \tag{A.52}$$

を満たす部分添数列 $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ を構成する．

$p = \infty$ の場合 $[f_{n_k}]$ の代表 f_{n_k} $(k = 1, 2, \cdots)$ に対して

$$\begin{aligned} A_k &:= \left\{ x \in X \ :\ \ \left|f_{n_k}(x)\right| > \left\| f_{n_k} \right\|_{\mathscr{L}^\infty} \right\}, \\ A^k &:= \left\{ x \in X \ :\ \ \left|f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)\right| > \left\| f_{n_k} - f_{n_{k+1}} \right\|_{\mathscr{L}^\infty} \right\} \end{aligned}$$

とおけば，補題 A.9.1 より $\mu(A_k) = \mu(A^k) = 0$ $(k = 1, 2, \cdots)$ が成り立つ．

$$A_\circ := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \quad A^\circ := \bigcup_{k=1}^{\infty} A^k, \quad A := A_\circ \cup A^\circ$$

として μ-零集合 A を定めて

$$\hat{f}_{n_k} := f_{n_k} 1\!\!1_{X \setminus A} \quad (\forall k = 1, 2, \cdots)$$

とおけば各 $\hat{f}_{n_k}$ は $\left[\hat{f}_{n_k}\right] = \left[f_{n_k}\right]$ を満たす有界可測関数であり，(A.9) より

$$\sup_{x\in X}\left|\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}_{n_{k+1}}(x)\right| \leq \left\| \hat{f}_{n_k} - \hat{f}_{n_{k+1}} \right\|_{\mathscr{L}^\infty} < \frac{1}{2^k} \quad (k = 1,2,3,\cdots)$$

が成り立つ．このとき任意の $\epsilon > 0$ に対し $1/2^N < \epsilon$ を満たす $N \in \mathbf{N}$ を取れば，$\ell > k > N$ なら

$$\left|\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}_{n_\ell}(x)\right| \leq \sum_{j=k}^{\ell-1}\left|\hat{f}_{n_j}(x) - \hat{f}_{n_{j+1}}(x)\right| < \sum_{k>N}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^N} < \epsilon \quad (\forall x \in X)$$

となるから，各点 $x \in X$ で $\left(\hat{f}_{n_k}(x)\right)_{k=1}^{\infty}$ は $\mathbf{C}$ の Cauchy 列となり収束する．

$$\hat{f}(x) \coloneqq \lim_{k\to\infty}\hat{f}_{n_k}(x) \quad (\forall x \in X)$$

として $\hat{f}$ を定めれば，$\hat{f}$ は可測 $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$ であり，且つ任意に $k \in \mathbf{N}$ を取れば

$$\sup_{x\in X}|\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}(x)| \leq \frac{1}{2^{k-1}} \tag{A.53}$$

を満たす．実際或る $y \in X$ で $\alpha \coloneqq |\hat{f}_{n_k}(y) - \hat{f}(y)| > 1/2^{k-1}$ が成り立つと仮定すれば，

$$\left|\hat{f}_{n_k}(y) - \hat{f}_{n_\ell}(y)\right| \leq \sum_{j=k}^{\ell-1}\sup_{x\in X}\left|\hat{f}_{n_j}(x) - \hat{f}_{n_{j+1}}(x)\right| < \sum_{j=k}^{\infty}\frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{k-1}} \quad (\forall \ell > k)$$

より

$$0 < \alpha - \frac{1}{2^{k-1}} < \left|\hat{f}_{n_k}(y) - \hat{f}(y)\right| - \left|\hat{f}_{n_k}(y) - \hat{f}_{n_\ell}(y)\right| \leq \left|\hat{f}(y) - \hat{f}_{n_\ell}(y)\right| \quad (\forall \ell > k)$$

が従い各点収束に反する．不等式 (A.9) により

$$\sup_{x\in X}\left|\hat{f}(x)\right| < \sup_{x\in X}\left|\hat{f}(x) - \hat{f}_{n_k}(x)\right| + \sup_{x\in X}\left|\hat{f}_{n_k}(x)\right| \leq \frac{1}{2^{k-1}} + \left\|\hat{f}_{n_k}\right\|_{\mathscr{L}^\infty}$$

が成り立つから $\left[\hat{f}\right] \in L^\infty(\mu)$ が従い，

$$\left\| \left[f_{n_k}\right] - \left[\hat{f}\right] \right\|_{L^\infty} = \left\| \left[\hat{f}_{n_k}\right] - \left[\hat{f}\right] \right\|_{L^\infty} \leq \sup_{x\in X}|\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}(x)| \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty)$$

により部分列 $\left(\left[f_{n_k}\right]\right)_{k=1}^{\infty}$ が $\left[\hat{f}\right]$ に収束するから元の Cauchy 列も $\left[\hat{f}\right]$ に収束する．

$1 \leq p < \infty$ の場合 $\left[f_{n_k}\right]$ の代表 f_{n_k} $(k = 1,2,\cdots)$ は

$$f_{n_k}(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{k}\left(f_{n_j}(x) - f_{n_{j-1}}(x)\right) \quad (\forall x \in X)$$

を満たし，これに対して

$$g_k(x) \coloneqq \left|f_{n_1}(x)\right| + \sum_{j=1}^{k}\left|f_{n_j}(x) - f_{n_{j-1}}(x)\right| \quad (\forall x \in X,\ k = 1,2,\cdots)$$

により単調非減少な可測関数列 $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ を定めれば，Minkowski の不等式と (A.9) により

$$\|\, g_k \,\|_{\mathscr{L}^p} \leq \|\, f_{n_1} \,\|_{\mathscr{L}^p} + \sum_{j=1}^{k}\|\, f_{n_j} - f_{n_{j-1}} \,\|_{\mathscr{L}^p} < \|\, f_{n_1} \,\|_{\mathscr{L}^p} + 1 < \infty \quad (k = 1,2,\cdots)$$

が成り立つ．ここで

$$B_N \coloneqq \bigcap_{k=1}^{\infty} \{\, x \in X \quad : \quad g_k(x) \le N \,\}, \quad B \coloneqq \bigcup_{N=1}^{\infty} B_N$$

とおけば $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ は B 上で各点収束し $X \backslash B$ 上では発散するが，$X \backslash B$ は零集合である．実際

$$\int_X g_k^p \, d\mu = \int_B g_k^p \, d\mu + \int_{X \backslash B} g_k^p \, d\mu \le \left(\| f_{n_1} \|_{\mathscr{L}^p} + 1 \right)^p, \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

が満たされているから，単調収束定理より

$$\int_B \lim_{k \to \infty} g_k^p \, d\mu + \int_{X \backslash B} \lim_{k \to \infty} g_k^p \, d\mu \le \left(\| f_{n_1} \|_{\mathscr{L}^p} + 1 \right)^p$$

が成り立ち $\mu(X \backslash B) = 0$ が従う．$\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測関数 g, f を

$$g \coloneqq \lim_{k \to \infty} g_k \mathbb{1}_B, \quad f \coloneqq \lim_{k \to \infty} f_{n_k} \mathbb{1}_B$$

で定義すれば，$|f| \le g$ と g^p の可積分性により $[f] \in L^p(\mu)$ が成り立つ．また $\left| f_{n_k} - f \right|^p \le 2^p g^p$ $(\forall k = 1, 2, \cdots)$ が満たされているから，Lebesgue の収束定理により

$$\lim_{k \to \infty} \left\| \left[f_{n_k} \right] - [f] \right\|_{L^p}^p = \lim_{k \to \infty} \int_X \left| f_{n_k} - f \right|^p \, d\mu = 0$$

が従い，部分列の収束により元の Cauchy 列も $[f]$ に収束する． ∎

A.10 複素測度

定義 A.10.1 (複素測度). $(X, \mathscr{F})$ を可測空間とするとき，$\mathscr{F}$ で定義される完全加法的な複素数値関数を $(X, \mathscr{F})$ 上の複素測度 (complex measure) という．

λ を可測空間 $(X, \mathscr{F})$ の複素測度とする．任意の全単射 $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ に対し

$$(E \coloneqq) \sum_{i=1}^{\infty} E_i = \sum_{i=1}^{\infty} E_{\sigma(i)}$$

が成り立つから

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i) = \lambda(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_{\sigma(i)})$$

が従い，Riemann の級数定理より $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i)$ は絶対収束する．ここで，

$$|\lambda(E)| \le \mu(E) \quad (\forall E \in \mathscr{F}) \tag{A.54}$$

を満たすような或る $(X, \mathscr{F})$ 上の測度 μ が存在すると考える．このとき μ は

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(E_i)| \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) = \mu\left(\sum_{i=1}^{\infty} E_i \right)$$

を満たすから

$$\sup\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda(A_i)| \quad : \quad E=\sum_{i=1}^{\infty}A_i,\ \{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subset\mathscr{F}\right\}\leq\mu(E),\quad (\forall E\in\mathscr{F})$$

が成立する．実は，

$$|\lambda|(E)\coloneqq\sup\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda(A_i)| \quad : \quad E=\sum_{i=1}^{\infty}A_i,\ \{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subset\mathscr{F}\right\},\quad (\forall E\in\mathscr{F}) \tag{A.55}$$

で定める $|\lambda|$ は (A.10) を満たす最小の有限測度となる (定理 A.10.3，定理 A.10.5).

定義 A.10.2 (総変動・総変動測度). 可測空間 $(X,\mathscr{F})$ 上の複素測度 λ に対し，(A.10) で定める $|\lambda|$ を λ の総変動測度 (total variation measure) といい，$|\lambda|(X)$ を λ の総変動 (total variation) という．

特に λ が正値有限測度である場合は $\lambda=|\lambda|$ が成り立つ．実際，任意の $E\in\mathscr{F}$ に対して

$$|\lambda|(E)=\sup\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda(A_i)| \quad : \quad E=\sum_{i=1}^{\infty}A_i,\ \{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subset\mathscr{F}\right\}=\lambda(E)$$

が成立する．

定理 A.10.3 ($|\lambda|$ は測度). 可測空間 $(X,\mathscr{F})$ 上の複素測度 λ に対して，(A.10) で定める $|\lambda|$ は正値測度である．

証明. $|\lambda|$ の正値性は (A.10) より従うから，$|\lambda|$ の完全加法性を示す．いま，互いに素な集合列 $E_i\in\mathscr{F}$ $(i=1,2,\cdots)$ を取り $E\coloneqq\sum_{i=1}^{\infty}E_i$ とおく．このとき，任意の $\epsilon>0$ に対して E_i の或る分割 $(A_{ij})_{j=1}^{\infty}\subset\mathscr{F}$ が存在して

$$|\lambda|(E_i)\geq\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda(A_{ij})|>|\lambda|(E_i)-\frac{\epsilon}{2^i}$$

を満たすから，$E=\sum_{i,j=1}^{\infty}A_{ij}$ と併せて

$$|\lambda|(E)\geq\sum_{i,j=1}^{\infty}|\lambda(A_{ij})|\geq\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda(A_{ij})|>\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda|(E_i)-\epsilon$$

となり，$\epsilon>0$ の任意性より

$$|\lambda|(E)\geq\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda|(E_j)$$

が従う．一方で E の任意の分割 $(A_j)_{j=1}^{\infty}\subset\mathscr{F}$ に対し

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda(A_j)|=\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{i=1}^{\infty}\lambda(A_j\cap E_i)\right|\leq\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda|(A_j\cap E_i)\leq\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda|(E_i)$$

が成り立つから，E の分割について上限を取って

$$|\lambda|(E)\leq\sum_{i=1}|\lambda|(E_i)$$

を得る． ∎

補題 A.10.4. $z_1,\cdots,z_N$ を複素数とする．このとき，次を満たす或る部分集合 $S \subset \{1,\cdots,N\}$ が存在する:

$$\left|\sum_{k\in S} z_k\right| \geq \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}|z_k|.$$

証明. $i=\sqrt{-1}$ として，$z_k = |z_k|e^{i\alpha_k}$ $(-\pi \leq \alpha_k < \pi,\ k=1,\cdots,N)$ を満たす $\alpha_1,\cdots,\alpha_N$ を取り

$$S(\theta) \coloneqq \{\ k \in \{1,\cdots,N\} \quad : \quad \cos(\alpha_k - \theta) > 0\ \}, \quad (-\pi \leq \theta \leq \pi)$$

とおく．このとき，$\cos^+ x \coloneqq 0 \vee \cos x$ $(x \in \mathbf{R})$ とすれば

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k\in S(\theta)} z_k\right| &= |e^{-i\theta}|\left|\sum_{k\in S(\theta)} z_k\right| = \left|\sum_{k\in S(\theta)} |z_k|e^{i(\alpha_k-\theta)}\right| \\ &\geq \mathrm{Re}\sum_{k\in S(\theta)}|z_k|e^{i(\alpha_k-\theta)} = \sum_{k\in S(\theta)}|z_k|\cos(\alpha_k-\theta) = \sum_{k=1}^{N}|z_k|\cos^+(\alpha_k-\theta)\end{aligned}$$

が成り立ち，最右辺は θ に関して連続であるから最大値を達成する $\theta_0 \in [-\pi,\pi]$ が存在する．$S \coloneqq S(\theta_0)$ として

$$\left|\sum_{k\in S} z_k\right| \geq \sum_{k=1}^{N}|z_k|\cos^+(\alpha_k-\theta_0) \geq \sum_{k=1}^{N}|z_k|\cos^+(\alpha_k-\theta) \quad (\forall\theta \in [-\pi,\pi])$$

となり，積分して

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k\in S} z_k\right| &\geq \sum_{k=1}^{N}|z_k|\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]}\cos^+(\alpha_k-\theta)\,d\theta \\ &= \sum_{k=1}^{N}|z_k|\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]}\cos^+\theta\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}|z_k|\end{aligned}$$

が得られる． ∎

定理 A.10.5 (複素測度の有界性). 可測空間 $(X,\mathscr{F})$ 上の複素測度 λ の総変動測度 $|\lambda|$ について次が成り立つ:

$$|\lambda|(X) < \infty.$$

証明. $|\lambda|(X)=\infty$ と仮定して背理法により定理を導く．

第一段 或る $E \in \mathscr{F}$ に対し $|\lambda|(E)=\infty$ が成り立っているなら，

$$|\lambda(A)| > 1, \quad |\lambda(B)| > 1, \quad E = A + B$$

を満たす $A,B \in \mathscr{F}$ が存在することを示す．いま，$t \coloneqq 2\pi(1+|\lambda(E)|)$ とおけば

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda(E_i)| > t$$

を満たす E の分割 $(E_i)_{i=1}^{\infty}$ が存在する．従って或る $N \in \mathbf{N}$ に対し

$$\sum_{i=1}^{N} |\lambda(E_i)| > t$$

が成り立ち，補題 A.10.4 より

$$\left|\sum_{k \in S} \lambda(E_k)\right| \geq \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N} |\lambda(E_k)| > \frac{t}{2\pi} > 1$$

を満たす $S \subset \{1, \cdots, N\}$ が取れる．ここで $A := \sum_{k \in S} E_k$, $B := E - A$ とおけば，$|\lambda(A)| > 1$ かつ

$$|\lambda(B)| = |\lambda(E) - \lambda(A)| \geq |\lambda(A)| - |\lambda(E)| > \frac{t}{2\pi} - |\lambda(E)| = 1$$

が成り立つ．また，

$$|\lambda|(E) = |\lambda|(A) + |\lambda|(B)$$

より $|\lambda|(A)$, $|\lambda|(B)$ の少なくとも一方は ∞ となる．

第二段 いま，$|\lambda|(X) = \infty$ と仮定すると，前段の結果より

$$|\lambda|(B_1) = \infty, \quad |\lambda(A_1)| > 1, \quad |\lambda(B_1)| > 1, \quad X = A_1 + B_1$$

を満たす $A_1, B_1 \in \mathscr{F}$ が存在する．同様に B_1 に対しても

$$|\lambda|(B_2) = \infty, \quad |\lambda(A_2)| > 1, \quad |\lambda(B_2)| > 1, \quad B_1 = A_2 + B_2$$

を満たす $A_2, B_2 \in \mathscr{F}$ が存在する．繰り返せば $|\lambda(A_j)| > 1$ $(j = 1, 2, \cdots)$ を満たす互いに素な集合列 $(A_j)_{j=1}^{\infty}$ が構成され，このとき $\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda(A_j)| = \infty$ となる．一方で Riemann の級数定理より $\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda(A_j)| < \infty$ が成り立つから矛盾が生じ，$|\lambda|(X) < \infty$ が出る． ∎

定理 A.10.6 (総変動測度は有限分割で表現できる). 可測空間 $(X, \mathscr{F})$ 上の複素測度 λ に対して次が成り立つ:

$$|\lambda|(E) = \sup\left\{ \sum_{i=1}^{n} |\lambda(A_i)| \quad : \quad E = \sum_{i=1}^{n} A_i,\ \{A_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathscr{F},\ n = 1, 2, \cdots \right\}, \quad (\forall E \in \mathscr{F}).$$

証明. 任意の $E \in \mathscr{F}$ で，$E = \sum_{i=1}^{n} A_i$ に対し $A_{i+1} = A_{i+2} = \cdots = \emptyset$ とすれば $E = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$ となるから

$$|\lambda|(E) \geq \sup\left\{ \sum_{i=1}^{n} |\lambda(A_i)| \quad : \quad E = \sum_{i=1}^{n} A_i,\ \{A_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathscr{F},\ n = 1, 2, \cdots \right\} \tag{A.56}$$

が従う．一方で $|\lambda|(E) > 0$ の場合，$|\lambda|(E) > \alpha > 0$ を満たす α を任意に取れば

$$|\lambda|(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(A_i)| > \alpha, \quad E = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$$

を満たす $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}$ が存在し，このとき $B_n := \sum_{i=n}^{\infty} A_i$ とおけば

$$0 \leq \sum_{i=n}^{\infty} |\lambda(A_i)| - |\lambda(B_n)| \leq \sum_{i=n}^{\infty} |\lambda(A_i)| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

となるから，或る $n \geq 1$ で

$$|\lambda|(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(A_i)| \geq |\lambda(A_1)| + \cdots + |\lambda(A_{n-1})| + |\lambda(B_n)| > \alpha$$

が満たされる．$E = A_1 + \cdots + A_{n-1} + B_n$ であるから，(A.10) と併せて

$$|\lambda|(E) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} |\lambda(A_i)| \quad : \quad E = \sum_{i=1}^{n} A_i,\ \{A_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathscr{F},\ n = 1, 2, \cdots \right\}$$

が得られる．$|\lambda|(E) = 0$ なら (A.10) で等号成立となる． ∎

定理 A.10.7 (総変動ノルム). 可測空間 $(X, \mathscr{F})$ 上の複素測度の全体を $CM(X, \mathscr{F})$ と書くとき，

$$(\alpha\lambda + \beta\mu)(E) \coloneqq \alpha\lambda(E) + \beta\mu(E), \quad (\lambda, \mu \in CM(X, \mathscr{F}),\ \alpha, \beta \in \mathbf{C},\ E \in \mathscr{F})$$

を線型演算として $CM(X, \mathscr{F})$ は線形空間となり，また

$$\| \lambda \|_{TV} \coloneqq |\lambda|(X) \quad (\lambda \in CM(X, \mathscr{F}))$$

により $CM(X, \mathscr{F})$ にノルム $\| \cdot \|_{TV}$ が定まる．この $\| \cdot \|_{TV}$ を総変動ノルムという．

証明. $\| \cdot \|_{TV}$ がノルムであることを示す．

第一段 $\lambda = 0$ なら $\| \lambda \|_{TV} = |\lambda|(X) = 0$ となる．また $|\lambda(E)| \leq |\lambda|(E) \leq \| \lambda \|_{TV}$ より $\| \lambda \|_{TV} = 0$ なら $\lambda = 0$ が従う．

第二段 任意の $\lambda \in CM(X, \mathscr{F})$ と $c \in \mathbf{C}$ に対し

$$\| c\lambda \|_{TV} = \sup \sum_{i} |(c\lambda)(E_i)| = \sup \sum_{i} |c\lambda(E_i)| = |c| \sup \sum_{i} |\lambda(E_i)| = |c| \, \| \lambda \|_{TV}$$

が成り立ち同次性が得られる．

第三段 $\lambda, \mu \in CM(X, \mathscr{F})$ を任意に取る．このとき，X の任意の分割 $X = \sum_{i=1}^{\infty} E_i$ $(E_i \in \mathscr{F})$ に対して

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(\lambda + \mu)(E_i)| = \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(E_i) + \mu(E_i)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(E_i)| + \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)| \leq \| \lambda \|_{TV} + \| \mu \|_{TV}$$

が成り立つから $\| \lambda + \mu \|_{TV} \leq \| \lambda \|_{TV} + \| \mu \|_{TV}$ が従う． ∎

可測空間 $(X, \mathscr{F})$ の上の完全加法的な $\mathbf{R}$-値関数を符号付き測度 (signed measure) という．

定義 A.10.8 (正変動と負変動・Jordan の分解). $(X, \mathscr{F})$ を可測空間とする．$(X, \mathscr{F})$ 上の符号付き測度 μ に対し

$$\mu^+ \coloneqq \frac{1}{2}(|\mu| + \mu), \quad \mu^- \coloneqq \frac{1}{2}(|\mu| - \mu)$$

として正値有限測度 μ^+, μ^- を定める．μ^+ (μ^-) を μ の正 (負) 変動 (positive (negative) variation) と呼び，

$$\mu = \mu^+ - \mu^-$$

を符号付き測度 μ の Jordan 分解 (Jordan decomposition) という．同時に $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ も成り立つ．

定義 A.10.9 (絶対連続・特異). $(X,\mathscr{F})$ を可測空間，μ を $\mathscr{F}$ 上の正値測度，$\lambda,\lambda_1,\lambda_2$ を $\mathscr{F}$ 上の任意の測度とする．

- $\mu(E)=0$ ならば $\lambda(E)=0$ となるとき，λ は μ に関して絶対連続である (absolutely continuous) といい
$$\lambda \ll \mu$$
と書く．
- 或る $A\in\mathscr{F}$ が存在して
$$\lambda(E)=\lambda(A\cap E), \quad (\forall E\in\mathscr{F})$$
が成り立つとき，λ は A に集中している (concentrated on A) という．λ_1 が A_1 に，λ_2 が A_2 に集中し，かつ $A_1\cap A_2=\emptyset$ であるとき，λ_1,λ_2 は互いに特異である (mutually singular) といい
$$\lambda_1 \perp \lambda_2$$
と書く．

定理 A.10.10 (絶対連続性の同値条件). λ,μ をそれぞれ可測空間 $(X,\mathscr{F})$ 上の複素測度，正値測度とするとき，次は同値である:

(1) $\lambda \ll \mu$,

(2) $|\lambda| \ll \mu$

(3) 任意の $\epsilon>0$ に対し或る $\delta>0$ が存在して $\mu(E)<\delta$ なら $|\lambda|(E)<\epsilon$ となる．

証明.

第一段 (1) $\Longleftrightarrow$ (2) を示す．任意の $E\in\mathscr{F}$ に対し $|\lambda(E)|\leq|\lambda|(E)$ より (2) $\Longrightarrow$ (1) が従う．また $\lambda\ll\mu$ のとき，$E\in\mathscr{F}$ の任意の分割 $E=\sum_{i=1}^{\infty}A_i$ に対し $\mu(E)=0$ なら $\lambda(A_i)=0$ $(\forall i\geq 1)$ となり (1) $\Longrightarrow$ (2) が従う．

第二段 (2) $\Longleftrightarrow$ (3) を示す．実際 (3) が満たされているとき，$\mu(E)=0$ なら任意の $\delta>0$ に対し $\mu(E)<\delta$ となるから $|\lambda|(E)<\epsilon$ $(\forall\epsilon>0)$ となり $|\lambda|(E)=0$ が出る．逆に (3) が満たされていないとき，或る $\epsilon>0$ に対して
$$\mu(E_n)<\frac{1}{2^{n+1}}, \quad |\lambda|(E_n)\geq\epsilon, \quad (n=1,2,\cdots)$$
を満たす $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathscr{F}$ が存在する．このとき
$$A_n \coloneqq \bigcup_{i=n}^{\infty}E_i, \quad A\coloneqq\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$$
とおけば
$$\mu(A)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)\leq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$$
かつ
$$|\lambda|(A)=\lim_{n\to\infty}|\lambda|(A_n)\geq\lim_{n\to\infty}|\lambda|(E_n)\geq\epsilon$$
が成り立ち，対偶を取れば (2) $\Longrightarrow$ (3) が従う． ∎

補題 A.10.11. $(X, \mathscr{F}, \mu)$ を σ-有限測度空間とするとき，$0 < w < 1$ を満たす可積分関数 w が存在する．

証明. $\mu(X) = 0$ なら $w \equiv 1/2$ とすればよい．$\mu(X) > 0$ の場合，σ-有限の仮定より

$$0 < \mu(X_n) < \infty, \ (\forall n \geq 1), \quad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

を満たす $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}$ が存在する．ここで

$$w_n(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{2^n\,(1 + \mu(X_n))}, & x \in X_n, \\ 0, & x \in X \backslash X_n, \end{cases} \qquad n = 1, 2, \cdots$$

に対して

$$w := \sum_{n=1}^{\infty} w_n$$

と定めれば，任意の $x \in X$ は或る X_n に属するから

$$0 < w_n(x) \leq w(x)$$

が成り立ち，かつ

$$w(x) = w_1(x) + \sum_{n=2}^{\infty} w_n(x) \leq \frac{1}{2\,(1 + \mu(X_1))} + \frac{1}{2} < 1, \quad (\forall x \in X)$$

が満たされる．また単調収束定理より

$$\int_X w \, d\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_X w_n \, d\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(X_n)}{2^n\,(1 + \mu(X_n))} \leq 1$$

となり w の可積分性が出る． ∎

定理 A.10.12 (Lebesgue-Radon-Nikodym). $(X, \mathscr{F})$ を可測空間，λ を $(X, \mathscr{F})$ 上の複素測度，μ を $(X, \mathscr{F})$ 上の σ-有限正値測度 $(\mu(X) > 0)$ とするとき，以下が成立する:

Lebesgue 分解　λ は μ に関して絶対連続な λ_a 及び μ と互いに特異な λ_s に一意に分解される:

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s, \quad \lambda_a \ll \mu, \quad \lambda_s \perp \mu.$$

密度関数の存在　λ_a に対し或る $g \in L^1(\mu) = L^1(X, \mathscr{F}, \mu)$ が唯一つ存在して次を満たす:

$$\lambda_a(E) = \int_E g \, d\mu, \quad (\forall E \in \mathscr{F}).$$

証明.

第一段　Lebesgue の分解の一意性を示す．$\lambda'_a \ll \mu$ と $\lambda'_s \perp \mu$ により

$$\lambda_a + \lambda_s = \lambda'_a + \lambda'_s$$

が成り立つとき，

$$\Lambda \coloneqq \lambda_a - \lambda'_a = \lambda'_s - \lambda_s, \quad \Lambda \ll \mu, \quad \Lambda \perp \mu$$

となり $\Lambda = 0$ が従い分解の一意性が出る．

第二段　密度関数の一意性を示す．実際，可積分関数 f に対して

$$\int_E f \, d\mu = 0, \quad (\forall E \in \mathscr{F})$$

が成り立つとき，定理 A.6.9 より $f = 0$, μ-a.e. が成り立つ．

第三段　Lebesgue の分解と密度関数の存在を示す．

定理 A.10.13 (Vitali-Hahn-Saks).　$(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ を可測空間 $(X, \mathscr{F})$ の複素測度の列とするとき，任意の $E \in \mathscr{F}$ で

$$\lambda(E) \coloneqq \lim_{n \to \infty} \lambda_n(E)$$

が確定すれば λ もまた $(X, \mathscr{F})$ 上の複素測度となる．また $(CM(X, \mathscr{F}), \| \cdot \|_{TV})$ は Banach 空間である．

証明．　$\lambda_n \equiv 0$ $(\forall n \geq 1)$ なら $\lambda \equiv 0$ で複素測度となるから，或る n と $E \in \mathscr{F}$ に対し $\lambda_n(E) \neq 0$ と仮定する．

第一段　$(X, \mathscr{F})$ 上の有限測度を

$$\mu \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n (1 + \| \lambda_n \|_{TV})} |\lambda_n|$$

により定めるとき，任意の $\epsilon > 0$ に対して或る $\delta > 0$ が存在し

$$\mu(E) < \delta \quad \Rightarrow \quad |\lambda_n|(E) < \epsilon \ (\forall n \geq 1) \tag{A.57}$$

となることを示す．任意の $n \geq 1$ に対して $\lambda_n \ll \mu$ であるから Lebesgue-Radon-Nikodym の定理より

$$\lambda_n(E) = \int_E g_n \, d\mu, \quad (\forall E \in \mathscr{F})$$

を満たす $g_n \in L^1(\mu)$ が存在し，このとき

$$\left| \int_E g_n \, d\mu \right| \leq |\lambda_n|(E) \leq 2^n (1 + \| \lambda_n \|_{TV}) \mu(E), \quad (\forall E \in \mathscr{F})$$

が成立するから定理 A.6.9 より

$$\| g_n \|_{L^\infty(\mu)} \leq 2^n (1 + \| \lambda_n \|_{TV})$$

が従う．いま，任意の $E \in \mathscr{F}$ に対し $f_E \coloneqq [1\!\!1_E]$ として

$$L \coloneqq \{ \, f_E \quad : \quad E \in \mathscr{F} \, \}$$

とおけば，$\mu(X) < \infty$ より $L \subset L^1(\mu)$ となり，また

$$d(f_E, f_{E'}) \coloneqq \| f_E - f_{E'} \|_{L^1(\mu)}$$

で定める距離 d により L は完備距離空間となる．実際，定理 A.9.6 より L の任意の Cauchy 列 $\left(f_{E_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ に対し極限 $f \in L^1(\mu)$ が存在し，或る部分列 $\left(1\!\!1_{E_{n_k}}\right)_{k=1}^{\infty}$ は或る μ-零集合 A を除いて各点収束するから

$$\varphi \coloneqq \lim_{k\to\infty} 1\!\!1_{E_{n_k}} 1\!\!1_{X \setminus A}$$

に対し $E \coloneqq \{\varphi = 1\}$ とおけば $f = [1\!\!1_E] \in L$ が満たされる．ここで

$$\Phi_n : L \ni f_E \longmapsto \int_X |g_n| f_E \, d\mu$$

とおけば，任意の $E \in \mathscr{F}$ に対し $|\lambda_n|(E) \leq \Phi_n(f_E)$ が満たされ，また Hölder の不等式より

$$|\Phi_n(f_E) - \Phi_n(f_{E'})| \leq \int_X |g_n||f_E - f_{E'}| \, d\mu \leq \| g_n \|_{L^\infty(\mu)} \, d(f_E, f_{E'}), \quad (\forall f_E, f_{E'} \in L)$$

がとなるから Φ_n は L 上の連続写像である．いま $\epsilon > 0$ を任意に取れば，$\eta \coloneqq \epsilon/4$ に対して

$$F_n(\eta) \coloneqq \left\{ f_E \in L \ : \ \sup_{k\geq 1} |\Phi_n(f_E) - \Phi_{n+k}(f_E)| \leq \eta \right\} = \bigcap_{k\geq 1} \{ \, f_E \in L \ : \ |\Phi_n(f_E) - \Phi_{n+k}(f_E)| \leq \eta \, \}$$

により定める $F_n(\delta)$ は閉集合であり，任意の $f_E \in L$ は

$$\begin{aligned}
\sup_{k\geq 1} |\Phi_n(f_E) - \Phi_{n+k}(f_E)| &\leq |\Phi_n(f_E) - \lambda(E)| + \sup_{k\geq 1} |\lambda(E) - \Phi_{n+k}(f_E)| \\
&= |\lambda_n(E) - \lambda(E)| + \sup_{k\geq 1} |\lambda(E) - \lambda_{n+k}(E)| \\
&\longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)
\end{aligned}$$

を満たすから

$$L = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(\eta)$$

が成り立ち，Baire の範疇定理 (P. 126) より或る $F_{n_0}(\eta)$ は内点 f_{E_0} を持つ．つまり或る $\delta_0 > 0$ が存在して

$$d(f_{E_0}, f_E) < \delta_0 \quad \Rightarrow \quad \sup_{k\geq 1} |\Phi_n(f_E) - \Phi_{n+k}(f_E)| \leq \eta$$

となる．$\mu(E) < \delta_0$ ならば，

$$E_1 \coloneqq E \cup E_0, \quad E_2 \coloneqq E_0 \setminus (E \cap E_0)$$

とすれば $f_E = [1\!\!1_E] = [1\!\!1_{E_1} - 1\!\!1_{E_2}] = [1\!\!1_{E_1}] - [1\!\!1_{E_2}] = f_{E_1} - f_{E_2}$ かつ

$$d(f_{E_0}, f_{E_1}) = \mu(E \setminus E_0) < \delta_0, \quad d(f_{E_0}, f_{E_2}) = \mu(E \cap E_0) < \delta_0$$

が満たされるから，$n > n_0$ なら

$$\begin{aligned}
|\Phi_n(f_E)| &\leq \left|\Phi_{n_0}(f_E)\right| + \left|\Phi_n(f_E) - \Phi_{n_0}(f_E)\right| \\
&\leq \left|\Phi_{n_0}(f_E)\right| + \left|\Phi_n(f_{E_1}) - \Phi_{n_0}(f_{E_1})\right| + \left|\Phi_n(f_{E_2}) - \Phi_{n_0}(f_{E_2})\right| \\
&\leq \left|\Phi_{n_0}(f_E)\right| + 2\eta
\end{aligned}$$

が従い，一方で $n = 1, 2, \cdots, n_0$ に対しては，定理 A.6.10 より或る $\delta_n > 0$ が存在して

$$\mu(E) < \delta_n \Longrightarrow \Phi_n(f_E) = \int_E |g_n| \, d\mu < \frac{\epsilon}{2}$$

が成立し，$\delta \coloneqq \min\{\delta_0, \delta_1, \cdots, \delta_{n_0}\}$ として

$$\mu(E) < \delta_n \Longrightarrow |\lambda_n|(E) \leq \Phi_n(f_E) < \epsilon, \ (\forall n \geq 1)$$

が得られる．

第二段 λ の可算加法性を示す．任意の互いに素な $A, B \in \mathscr{F}$ を取れば

$$\lambda(A+B) = \lim_{n\to\infty} \lambda_n(A+B) = \lim_{n\to\infty} \lambda_n(A) + \lim_{n\to\infty} \lambda_n(B) = \lambda(A) + \lambda(B)$$

となるから λ は有限加法的であり，このとき任意の互いに素な列 $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}$ に対し

$$\lambda\left(\sum_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lambda\left(\sum_{i=1}^{N} E_i\right) + \lambda\left(\sum_{i=N+1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \lambda(E_i) + \lambda\left(\sum_{i=N+1}^{\infty} E_i\right)$$

が任意の $N \geq 1$ について満たされるが，

$$\mu\left(\sum_{i=N+1}^{\infty} E_i\right) \longrightarrow 0 \quad (N \longrightarrow \infty)$$

と (A.10) より

$$\lambda\left(\sum_{i=N+1}^{\infty} E_i\right) \longrightarrow 0 \quad (N \longrightarrow \infty)$$

が従い

$$\lambda\left(\sum_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i)$$

が得られる．よって λ は複素測度である．

第三段 $(\nu_n)_{n=1}^{\infty}$ を $CM(X, \mathscr{F})$ の Cauchy 列とすれば任意の $E \in \mathscr{F}$ で

$$|\nu_n(E) - \nu_m(E)| \leq \| \nu_n - \nu_m \|_{TV} \longrightarrow 0 \quad (n, m \longrightarrow \infty)$$

となるから，$\mathbf{C}$ の完備性より $\nu \coloneqq \lim_{n\to\infty} \nu_n$ で複素測度 ν が定まる．このとき ▮

定理 A.10.14 (L^p の共役空間). $1 \leq p < \infty$，q を p の共役指数とし，また $(X, \mathscr{F}, \mu)$ を σ-有限な正値測度空間とするとき，$g \in L^q(\mu)$ に対して定める次の写像

$$\Phi_g : L^p(\mu) \ni f \longmapsto \int_X fg \, d\mu \tag{A.58}$$

は有界線形作用素となる．また

$$\Phi : L^q(\mu) \ni g \longmapsto \Phi_g \in (L^p(\mu))^*$$

で定める Φ は $(L^p(\mu))^*$ から $L^q(\mu)$ への線型同型であり，次の意味で等長である:

$$\| g \|_{L^q(\mu)} = \left\| \Phi_g \right\|_{(L^p(\mu))^*}. \tag{A.59}$$

$p = \infty$ の場合，$\mu(X) < \infty$ かつ $\varphi \in (L^\infty(\mu))^*$ に対し $\mathscr{F} \ni A \longmapsto \varphi(1\!\!1_A)$ が可算加法的ならば，φ に対し或る $g \in L^1(\mu)$ が唯一つ存在して $\varphi = \Phi_g$ と (A.10.14) を満たす．

証明.

第一段 Φ_g が (A.10.14) で与えられていれば，Hölder の不等式より

$$\left|\Phi_g(f)\right| \leq \| g \|_{L^q(\mu)} \| f \|_{L^p(\mu)}$$

が成り立つから

$$\left\| \Phi_g \right\|_{(L^p(\mu))^*} \leq \| g \|_{L^q(\mu)} \tag{A.60}$$

が従う．よって $\Phi_g \in (L^p(\mu))^*$ となる．

第二段 $\varphi \in (L^p(\mu))^*$ に対して $\Phi(g) = \varphi$ を満たす $g \in L^q(\mu)$ が存在するとき，g が φ に対して一意に決まることを示す．σ-有限の仮定より

$$\mu(X_n) < \infty, \ (\forall n \geq 1); \quad X = \bigcup_{n=1}^\infty X_n \tag{A.61}$$

を満たす $\{X_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathscr{F}$ が存在する．いま，$g, g' \in L^q(\mu)$ に対して

$$\int_X fg \, d\mu = \int_X fg' \, d\mu, \quad (\forall f \in L^p(\mu))$$

が成り立っているとすれば，任意の $E \in \mathscr{F}$ に対して $1\!\!1_{E \cap X_n} \in L^p(\mu)$ であるから

$$\int_{E \cap X_n} g - g' \, d\mu = 0, \quad (\forall n \geq 1)$$

となり，Lebesgue の収束定理より

$$\int_E g - g' \, d\mu = 0$$

が従い $L^q(\mu)$ で $g = g'$ が成立する．

第三段 $1 \le p < \infty$ の場合，$\mu(X) < \infty$ なら任意の $\varphi \in (L^p(\mu))^*$ に対して $\Phi(g) = \varphi$ を満たす $g \in L^q(\mu)$ が存在することを示す．

$$\lambda(E) \coloneqq \varphi(1\!\!1_E) \tag{A.62}$$

により λ を定めれば

$$\lambda(A+B) = \varphi(1\!\!1_{A+B}) = \varphi(1\!\!1_A + 1\!\!1_B) = \varphi(1\!\!1_A) + \varphi(1\!\!1_B) = \lambda(A) + \lambda(B)$$

となり λ の加法性が出る．また任意の互いに素な $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathscr{F}$ に対して

$$A_k \coloneqq \sum_{n=1}^{k} E_n, \quad A \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} E_n$$

とおけば

$$\begin{aligned}\left|\lambda(A) - \sum_{n=1}^{k} \lambda(E_n)\right| &= |\lambda(A) - \lambda(A_k)| = \left|\varphi(1\!\!1_A - 1\!\!1_{A_k})\right| \\ &\le \|\varphi\|_{(L^p(\mu))^*} \left\|1\!\!1_A - 1\!\!1_{A_k}\right\|_{L^p(\mu)} = \|\varphi\|_{(L^p(\mu))^*}\, \mu(A - A_k)^{1/p} \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty)\end{aligned}$$

が成り立つから λ は複素測度である．また

$$|\lambda(E)| \le \|\varphi\|_{(L^p(\mu))^*}\, \mu(E)^{1/p}$$

より $\lambda \ll \mu$ となるから，Lebesgue-Radon-Nikodym の定理より

$$\varphi(1\!\!1_E) = \lambda(E) = \int_X 1\!\!1_E g \, d\mu, \quad (\forall E \in \mathscr{F}) \tag{A.63}$$

を満たす $g \in L^1(\mu)$ が存在する．φ の線型性より任意の単関数の同値類 f に対して

$$\varphi(f) = \int_X fg \, d\mu \tag{A.64}$$

が成立し，特に $f \in L^\infty(\mu)$ に対しては

$$B \coloneqq \left\{ x \in X \ : \quad |f(x)| > \|f\|_{L^\infty(\mu)} \right\}$$

とおけば $\mu(B) = 0$ となり，有界可測関数 $f 1\!\!1_{X \setminus B}$ を一様に近似する単関数列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ が存在して

$$\begin{aligned}\left|\varphi(f) - \int_X fg \, d\mu\right| &\le |\varphi(f) - \varphi(f_n)| + \left|\int_X f_n g \, d\mu - \int_X fg \, d\mu\right| \\ &\le \|\varphi\|_{(L^p(\mu))^*} \|f - f_n\|_{L^p(\mu)} + \int_X |f_n - f||g| \, d\mu \\ &\longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)\end{aligned}$$

となるから (A.10) が成立する．

第四段 $p = \infty$, $\mu(X) < \infty$ の場合，$\varphi \in (L^p(\mu))^*$ に対して $\mathscr{F} \ni A \longmapsto \varphi(1\!\!1_A)$ が可算加法的ならば (A.10) で定める λ は複素測度となり，前段と同じ理由で (A.10) を満たす $g \in L^1(\mu)$ が存在し

$$\varphi(f) = \int_X fg \, d\mu, \quad (\forall f \in L^\infty(\mu))$$

が成立する．すなわち $\varphi = \Phi_g$ であり，このとき $f \coloneqq 1\!\!1_{\{g \neq 0\}} \overline{g}/g \in L^\infty(\mu)$ に対して

$$\|g\|_{L^1(\mu)} = \int_X fg \, d\mu = \varphi(f) \le \|\varphi\|_{(L^\infty(\mu))^*}$$

となるから，(A.10) と併せて (A.10.14) が満たされる．以降は $p < \infty$ とする．

第五段　$g \in L^q(\mu)$ であることを示す．$p = 1$ の場合，任意の $E \in \mathscr{F}$ に対して $f = 1\!\!1_E$ とすれば，(A.10) より

$$\left|\int_E g\ d\mu\right| = |\varphi(1\!\!1_E)| \leq \|\,\varphi\,\|_{(L^p(\mu))^*}\,\mu(E)$$

が成立し

$$\|\,g\,\|_{L^q(\mu)} \leq \|\,\varphi\,\|_{(L^p(\mu))^*} \tag{A.65}$$

が従う．$1 < p < \infty$ の場合は $\alpha \coloneqq 1\!\!1_{\{g \neq 0\}}\overline{g}/g$ と

$$E_n \coloneqq \{\, x \in X \ \ : \ \ |g(x)| \leq n \,\}, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

に対して $f \coloneqq 1\!\!1_{E_n}|g|^{q-1}\alpha$ とおけば，

$$fg = 1\!\!1_{E_n}|g|^q = |f|^p$$

が成り立ち $|f|^p \in L^\infty(\mu)$ となるから (A.10) より

$$\int_X 1\!\!1_{E_n}|g|^q\ d\mu = \int_X fg\ d\mu = \varphi(f) \leq \|\,\varphi\,\|_{(L^p(\mu))^*}\,\|\,f\,\|_{L^p(\mu)} = \|\,\varphi\,\|_{(L^p(\mu))^*}\left\{\int_X 1\!\!1_{E_n}|g|^q\ d\mu\right\}^{1/p}$$

が従い

$$\left\{\int_X 1\!\!1_{E_n}|g|^q\ d\mu\right\}^{1/q} \leq \|\,\varphi\,\|_{(L^p(\mu))^*}$$

が得られ，単調収束定理より

$$\|\,g\,\|_{L^q(\mu)} \leq \|\,\varphi\,\|_{(L^p(\mu))^*} \tag{A.66}$$

が出る．

第六段　任意の $f \in L^p(\mu)$ に対して，単関数近似列 $(f_n)_{n=1}^\infty$ は (A.10) を満たすから，Hölder の不等式と Lebesgue の収束定理より

$$\begin{aligned}\left|\varphi(f) - \int_X fg\ d\mu\right| &\leq |\varphi(f) - \varphi(f_n)| + \left|\int_X f_n g\ d\mu - \int_X fg\ d\mu\right| \\ &\leq \|\,\varphi\,\|_{(L^p(\mu))^*}\,\|\,f - f_n\,\|_{L^p(\mu)} + \|\,f - f_n\,\|_{L^p(\mu)}\,\|\,g\,\|_{L^q(\mu)} \\ &\longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)\end{aligned}$$

となり

$$\varphi = \Phi(g)$$

が成り立つ．また，このとき (A.10) と (A.10) 或は (A.10) より

$$\|\,g\,\|_{L^q(\mu)} = \|\,\varphi\,\|_{(L^p(\mu))^*}$$

が満たされる．

第七段　$\mu(X) = \infty$ の場合，補題 A.10.11 の関数 w を用いて

$$\tilde{\mu}(E) \coloneqq \int_E w\ d\mu, \quad (\forall E \in \mathscr{F})$$

により有限測度 $\tilde{\mu}$ を定める．このとき任意の $f \in L^p(\mu)$ に対して

$$F \coloneqq w^{-1/p} f$$

とおけば

$$\int_X |F|^p \, d\tilde{\mu} = \int_X |F|^p w \, d\mu = \int_X |f|^p \, d\mu \tag{A.67}$$

が成立し，

$$L^p \ni f \longmapsto w^{-1/p} f \in L^p(\tilde{\mu})$$

は等長な線型同型となる．ここで任意の $\varphi \in (L^p(\mu))^*$ に対して

$$\Psi(F) \coloneqq \varphi\left(w^{1/p} F\right), \quad (\forall F \in L^p(\tilde{\mu}))$$

で線形作用素 Ψ を定めれば

$$|\Psi(F)| = \left|\varphi\left(w^{1/p} F\right)\right| \leq \|\varphi\|_{(L^p(\mu))^*} \left\|w^{1/p} F\right\|_{L^p(\mu)} = \|\varphi\|_{(L^p(\mu))^*} \|F\|_{L^p(\tilde{\mu})}$$

より $\Psi \in (L^p(\tilde{\mu}))^*$ が満たされ，かつ任意の $f \in L^p(\mu)$ に対して

$$|\varphi(f)| = \left|\Psi\left(w^{-1/p} f\right)\right| \leq \|\Psi\|_{(L^p(\mu))^*} \left\|w^{-1/p} f\right\|_{L^p(\tilde{\mu})} = \|\Psi\|_{(L^p(\tilde{\mu}))^*} \|f\|_{L^p(\mu)}$$

も成り立ち

$$\|\varphi\|_{(L^p(\mu))^*} = \|\Psi\|_{(L^p(\tilde{\mu}))^*}$$

が得られる．前段までの結果より Ψ に対し或る $G \in L^q(\tilde{\mu})$ が存在して

$$\Psi(F) = \int_X FG \, d\tilde{\mu}$$

が成立するから，任意の $f \in L^p(\mu)$ に対して

$$\varphi(f) = \Psi\left(w^{-1/p} f\right) = \int_X w^{-1/p} f G w \, d\mu = \begin{cases} \displaystyle\int_X fG \, d\mu, & (p = 1), \\ \displaystyle\int_X f w^{1/q} G \, d\mu, & (1 < p < \infty) \end{cases}$$

が従い，

$$g \coloneqq \begin{cases} G, & (p = 1), \\ w^{1/q} G, & (1 < p < \infty) \end{cases}$$

とおけば (A.10) より $g \in L^q(\mu)$ となり，$\varphi = \Phi(g)$ かつ

$$\|\varphi\|_{(L^p(\mu))^*} = \|\Psi\|_{(L^p(\tilde{\mu}))^*} = \|G\|_{L^q(\tilde{\mu})} = \|g\|_{L^q(\mu)}$$

が満たされる． ∎

A.11 複素測度に関する積分

A.11.1 極分解

定理 A.11.1 (複素測度の極分解). 可測空間 $(X, \mathscr{F})$ 上の任意の複素測度 μ に対し，次の意味での極分解

$$\mu(E) = \int_E e^{i\theta}\, d|\mu|, \quad (\forall E \in \mathscr{F})$$

を満たす $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測関数 θ が存在する．$\lambda \not\equiv 0$ なら $e^{i\theta}$ は $L^1(|\mu|)$ の元として唯一つに決まる．

証明. $\mu \equiv 0$ なら $|\mu| \equiv 0$ より $\theta \equiv \pi$ でよい．$\mu \not\equiv 0$ の場合，Lebesgue-Radon-Nikodym の定理より

$$\mu(E) = \int_E h\, d|\mu|, \quad (\forall E \in \mathscr{F})$$

を満たす $[h] \in L^1(|\mu|)$ が唯一つ存在する．このとき $|\mu|(E) > 0$ なら

$$\frac{1}{|\mu|(E)} \left| \int_E h\, d|\mu| \right| = \frac{|\mu(E)|}{|\mu|(E)} \leq 1$$

となるから，定理 A.6.9 より $|\mu|$-a.e. に $|h| \leq 1$ となる．また

$$E_r := \{|h| \leq r\}$$

とおき $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}$ を E_r の任意の分割とすれば，

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(A_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_{A_n} h\, d|\mu| \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |h|\, d|\mu| \leq r \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|(A_n) = r|\mu|(E_r)$$

が成り立つから $r < 1$ なら $|\mu|(E_r) = 0$ となり

$$|\mu|\,(|h| < 1) = |\mu| \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_{1-1/n} \right) = 0$$

が従う．よって $|\mu|$-a.e. に $|h| = 1$ となる．$\tilde{h} := \mathbb{1}_{\{|h|=1\}} h + \mathbb{1}_{\{|h| \neq 1\}}$ とおいて

$$\theta(x) := \begin{cases} \operatorname{Arg} \tilde{h}(x), & (\tilde{h}(x) \neq -1), \\ \pi, & (\tilde{h}(x) = -1) \end{cases}$$

と定めれば $[h] = [e^{i\theta}]$ が成立する． ∎

定義 A.11.2 (複素測度に関する積分). $(X, \mathscr{F})$ を可測空間，μ を $(X, \mathscr{F})$ 上の複素測度，f を $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測関数とする．$f$ が $|\mu|$-可積分であるとき，極分解 $d\mu = e^{i\theta}\, d|\mu|$ を用いて

$$\int_E f\, d\mu := \int_E f e^{i\theta}\, d|\mu|, \quad (\forall E \in \mathscr{F})$$

により f の μ に関する積分を定める．

$\mu \not\equiv 0$ なら極分解は定理 A.11.1 の意味で一意であるから μ に関する積分は well-defined である．$\mu \equiv 0$ なら $|\mu| \equiv 0$ であるから任意の可測写像は $|\mu|$ について可積分となり，μ に関する積分値は 0 で確定する (well-defined)．また定義より

$$\int_E f\, d\mu = \int_E f e^{i\theta}\, d|\mu| = \int_X \mathbb{1}_E f e^{i\theta}\, d|\mu| = \int_X \mathbb{1}_E f\, d\mu, \quad (\forall E \in \mathscr{F})$$

が満たされる．

定理 A.11.3 (総変動測度の積分表現). $(X, \mathscr{F}, \mu)$ を正値測度空間，f を $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測な μ-可積分関数とするとき，

$$\lambda(E) \coloneqq \int_E f\, d\mu, \quad (\forall E \in \mathscr{F})$$

で複素測度 λ を定めれば次が成り立つ:

$$|\lambda|(E) = \int_E |f|\, d\mu, \quad (\forall E \in \mathscr{F}).$$

定理 A.11.4 (積分の測度に関する線型性). $(X, \mathscr{F})$ を可測空間，μ, ν をこの上の複素測度とする．$f : X \to \mathbf{C}$ が $|\mu|$ と $|\nu|$ について可積分であるなら，$\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ に対し $|\alpha\mu + \beta\nu|$ についても可積分であり，更に次が成り立つ:

$$\int_X f\, d(\alpha\mu + \beta\nu) = \alpha \int_X f\, d\mu + \beta \int_X f\, d\nu.$$

証明． **第一段** f が可測単関数の場合について証明する．$a_i \in \mathbf{C}$, $A_i \in \mathcal{M}$ $(i = 1, \cdots, n,\ \sum_{i=1}^n A_i = X)$ を用いて

$$f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i}$$

と表されている場合，

$$\begin{aligned}\int_X f(x)\,(\alpha\mu + \beta\nu)(dx) &= \sum_{i=1}^n a_i (\alpha\mu + \beta\nu)(A_i) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i) + \beta \sum_{i=1}^n a_i \nu(A_i) = \alpha \int_X f(x)\,\mu(dx) + \beta \int_X f(x)\,\nu(dx)\end{aligned}$$

が成り立つ．

第二段 f が一般の可測関数の場合について証明する．任意の $A \in \mathcal{M}$ に対して

$$|(\alpha\mu + \beta\nu)(A)| \leq |\alpha||\mu(A)| + |\beta||\nu(A)| \leq |\alpha||\mu|(A) + |\beta||\nu|(A)$$

が成り立つから，左辺で A を任意に分割しても右辺との大小関係は変わらず

$$|\alpha\mu + \beta\nu|(A) \leq |\alpha||\mu|(A) + |\beta||\nu|(A)$$

となる．従って f が $|\mu|$ と $|\nu|$ について可積分であるなら

$$\int_X |f(x)|\, |\alpha\mu + \beta\nu|(dx) \leq |\alpha| \int_X |f(x)|\, |\mu|(dx) + |\beta| \int_X |f(x)|\, |\nu|(dx) < \infty$$

が成り立ち前半の主張を得る．f の単関数近似列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ を取れば，前段の結果と積分の定義より

$$\begin{aligned}
&\left|\int_X f(x)\,(\alpha\mu+\beta\nu)(dx) - \alpha\int_X f(x)\,\mu(dx) - \beta\int_X f(x)\,\nu(dx)\right| \\
&\quad \leq \left|\int_X f(x)\,(\alpha\mu+\beta\nu)(dx) - \int_X f_n(x)\,(\alpha\mu+\beta\nu)(dx)\right| \\
&\qquad + |\alpha|\left|\int_X f(x)\,\mu(dx) - \int_X f_n(x)\,\mu(dx)\right| + |\beta|\left|\int_X f(x)\,\nu(dx) - \int_X f_n(x)\,\nu(dx)\right| \\
&\quad \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)
\end{aligned}$$

が成り立ち後半の主張が従う． ∎

定理 A.11.5 (積分の複素共役). $(X,\mathscr{F})$ を可測空間，μ を複素測度，$f : X \to \mathbf{C}$ を $|\mu|$ について可積分な $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測関数とするとき次が成り立つ:

$$\int_X f\,d\overline{\mu} = \overline{\int_X \overline{f}\,d\mu}.$$

証明. $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$, $\gamma = \operatorname{Re}\mu$, $\theta = \operatorname{Im}\mu$ とすれば，定理 A.11.4 より

$$\begin{aligned}
\int_X f\,d\overline{\mu} &= \int_X f\,d\gamma - i\int_X f\,d\theta \\
&= \int_X u\,d\gamma + i\int_X v\,d\gamma - i\int_X u\,d\theta + \int_X v\,d\theta \\
&= \overline{\int_X u\,d\gamma - i\int_X v\,d\gamma + i\int_X u\,d\theta + \int_X v\,d\theta} \\
&= \overline{\int_X \overline{f}\,d\gamma + i\int_X \overline{f}\,d\theta} \\
&= \overline{\int_X \overline{f}\,d\mu}
\end{aligned}$$

が成立する． ∎

定理 A.11.6 (Riesz の表現定理 (複素測度)).

A.11.2 複素積分

γ を $[\alpha,\beta]$ から $\mathbf{C}$ への区分的 C^1 関数，f を $X := \gamma([\alpha,\beta])$ から $\mathbf{C}$ への $\mathscr{B}(X)/\mathscr{B}(\mathbf{C})$ 可測関数，λ を一次元 Lebesgue 測度とするとき，

$$\mu(E) := \int_E \gamma'\,d\lambda, \quad (\forall E \in \mathscr{B}([\alpha,\beta]))$$

により $([\alpha,\beta],\mathscr{B}([\alpha,\beta]))$ 上に複素測度が定まる．このとき

$$\mu\gamma'^{-1}(A) := \mu\left(\gamma'^{-1}(A)\right), \quad (\forall A \in \mathscr{B}(X))$$

は $(X,\mathscr{B}(X))$ 上の複素測度となり

$$\int_X f\ d\mu\gamma'^{-1} = \int_{[\alpha,\beta]} f(\gamma)\gamma'\ d\lambda$$

A.12 条件付き期待値

定義 A.12.1 (**条件付き期待値**). $(X,\mathscr{F},\mu)$ を測度空間，$f \in L^1(\mu)$ とする．部分 σ-加法族 $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ に対し $\nu := \mu|_{\mathscr{G}}$ が σ-有限であるとき，

$$\lambda(A) := \int_A f\ d\mu, \quad (\forall A \in \mathscr{G})$$

により $(X,\mathscr{G})$ 上に複素測度 λ が定まり，$\lambda \ll \nu$ であるから Lebesgue-Radon-Nikodym の定理より

$$\lambda(A) = \int_A g\ d\nu, \quad (\forall A \in \mathscr{G})$$

を満たす $g \in L^1(\nu) = L^1(X,\mathscr{G},\nu)$ が唯一つ存在する．この g を $\mathscr{G}$ で条件付けた f の条件付き期待値と呼び

$$g = E\left(f\,|\,\mathscr{G}\right)$$

と書く．

$f \in \mathscr{L}^1(\mu)$ が μ-a.e. に $\mathbf{R}$ 値なら λ は正値測度となるから，定理 A.6.9 より $E(f\,|\,\mathscr{G})$ も ν-a.e. に $\mathbf{R}$ 値となる．

補題 A.12.2 (**凸関数の片側微係数の存在**). 任意の凸関数 $\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ には各点で左右の微係数が存在する．特に，凸関数は連続であり，すなわち Borel 可測である．

証明. 凸性より任意の $x < y < z$ に対して

$$\frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x} \leq \frac{\varphi(z)-\varphi(x)}{z-x} \leq \frac{\varphi(z)-\varphi(y)}{z-y}$$

が満たされる．従って，x を固定すれば，x に単調減少に近づく任意の点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ に対し

$$\left(\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}\right)_{n=1}^{\infty}$$

は下に有界な単調減少列となり下限が存在する．x に単調減少に近づく別の点列 $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ を取れば

$$\inf_{k\in\mathbf{N}} \frac{f(y_k)-f(x)}{y_k-x} \leq \frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x} \quad (n = 1,2,\cdots)$$

より

$$\inf_{k\in\mathbf{N}} \frac{f(y_k)-f(x)}{y_k-x} \leq \inf_{n\in\mathbf{N}} \frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}$$

が成立し，$(x_n), (y_k)$ の立場を変えれば逆向きの不等号も得られる．すなわち極限は点列に依らず確定し，φ は x で右側微係数を持つ．同様に左側微係数も存在し，特に φ の連続性及び Borel 可測性が従う． ∎

定理 A.12.3 (Jensen の不等式). $(X, \mathscr{F}, \mu)$ を測度空間，$\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ を部分 σ-加法族とし，$\mu|_{\mathscr{G}}$ が σ-有限であるとする．このとき，任意の $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{R})$-可測関数 f と凸関数 $\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ に対し，$f, \varphi(f)$ が μ-可積分なら次が成立する:

$$\varphi\left(E\left(f \,|\, \mathscr{G}\right)\right) \leq E\left(\varphi(f) \,|\, \mathscr{G}\right).$$

証明. φ は各点 $x \in \mathbf{R}$ で右側接線を持つから，それを $\mathbf{R} \ni t \longmapsto a_x t + b_x$ と表せば，

$$\varphi(t) = \sup_{r \in \mathbf{Q}} \{a_r t + b_r\} \quad (\forall t \in \mathbf{R}) \tag{A.68}$$

が成立する．よって任意の $r \in \mathbf{Q}$ に対して

$$\varphi(f(x)) \geq a_r f(x) + b_r$$

が満たされるから

$$E\left(\varphi(f) \,|\, \mathscr{G}\right) \geq a_r E\left(f \,|\, \mathscr{G}\right) + b_r \quad \mu\text{-a.e.}, \quad \forall r \in \mathbf{Q}$$

が従い，各 $r \in \mathbf{Q}$ に対し

$$N_r := \left\{\, x \in X \;\;:\;\; E\left(\varphi(f) \,|\, \mathscr{G}\right)(x) < a_r E\left(f \,|\, \mathscr{G}\right)(x) + b_r \,\right\}$$

とおけば $\mu(N_r) = 0$ かつ

$$E\left(\varphi(f) \,|\, \mathscr{G}\right)(x) \geq a_r E\left(f \,|\, \mathscr{G}\right)(x) + b_r, \quad \forall r \in \mathbf{Q},\ x \notin \bigcup_{r \in \mathbf{Q}} N_r$$

となる．r の任意性と (A.12) より

$$E\left(\varphi(f) \,|\, \mathscr{G}\right) \geq \varphi\left(E\left(f \,|\, \mathscr{G}\right)\right), \quad \mu\text{-a.e.}$$

が得られる． ∎

定理 A.12.4 (条件付き期待値の性質). $(X,\mathscr{F},\mu)$ を測度空間，$\mathscr{H},\mathscr{G}$ を $\mathscr{H}\subset\mathscr{G}$ を満たす $\mathscr{F}$ の部分 σ-加法族とし，$\theta\coloneqq\mu|_{\mathscr{H}},\gamma\coloneqq\mu|_{\mathscr{G}}$ がそれぞれ σ-有限測度であるとする．このとき以下が成立する:

(1) $E(\cdot\,|\,\mathscr{G})$ は $L^1(X,\mathscr{F},\mu)$ から $L^1(X,\mathscr{G},\gamma)$ への有界線形作用素であり，次を満たす:

$$|E(f\,|\,\mathscr{G})|\le E(|f|\,|\,\mathscr{G}),\quad (\forall f\in L^1(\mu)). \tag{A.69}$$

(2) $f\in L^1(\mu),\ g\in L^0(\gamma)$ に対して，$gf\in L^1(\mu)$ なら $gE(f\,|\,\mathscr{G})\in L^1(\gamma)$ であり

$$E(gf\,|\,\mathscr{G})=gE(f\,|\,\mathscr{G}). \tag{A.70}$$

(3) $f\in L^1(\mu)$ に対して

$$E(E(f\,|\,\mathscr{G})\,|\,\mathscr{H})=E(f\,|\,\mathscr{H}).$$

(4) $f\in L^1(\mu)\cap L^p(\mu)$ に対し，$1\le p<\infty$ のとき

$$|E(f\,|\,\mathscr{G})|^p\le E(|f|^p\,|\,\mathscr{G})$$

が満たされ，$1\le p\le\infty$ のとき

$$\|E(f\,|\,\mathscr{G})\|_{L^p(\gamma)}\le\|f\|_{L^p(\mu)} \tag{A.71}$$

も成立する．すなわち $E(\cdot\,|\,\mathscr{G})$ は $L^1(\mu)\cap L^p(\mu)$ から $L^1(\gamma)\cap L^p(\gamma)$ への有界線形作用素である．

証明.

(1) 任意の $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbf{C},\ f_1,f_2\in L^1(\mu)$ と $A\in\mathscr{G}$ に対して

$$\begin{aligned}\int_A E(\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2\,|\,\mathscr{G})\,d\gamma&=\int_A\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2\,d\mu=\alpha_1\int_A f_1\,d\mu+\alpha_2\int_A f_2\,d\mu\\&=\alpha_1\int_A E(f_1\,|\,\mathscr{G})\,d\gamma+\alpha_2\int_A E(f_2\,|\,\mathscr{G})\,d\gamma=\int_A\alpha_1 E(f_1\,|\,\mathscr{G})+\alpha_2 E(f_2\,|\,\mathscr{G})\,d\gamma\end{aligned}$$

が成立するから，$L^1(\nu)$ で

$$E(\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2\,|\,\mathscr{G})=\alpha_1 E(f_1\,|\,\mathscr{G})+\alpha_2 E(f_2\,|\,\mathscr{G})$$

となり $E(\cdot\,|\,\mathscr{G})$ の線型性が出る．いま，$f\in L^1(\mu),\ g\in L^\infty(\gamma)$ に対して

$$E(gf\,|\,\mathscr{G})=gE(f\,|\,\mathscr{G}). \tag{A.72}$$

が成り立つことを示す．実際，任意の $A,B\in\mathscr{G}$ に対して

$$\int_A \mathbb{1}_B f\,d\mu=\int_{A\cap B}f\,d\mu=\int_{A\cap B}E(f\,|\,\mathscr{G})\,d\gamma=\int_A\mathbb{1}_B E(f\,|\,\mathscr{G})\,d\gamma$$

となるから，g の単関数近似列 $(g_n)_{n=1}^\infty,\ (g_n\in L^\infty(\gamma),|g_n|\le|g|)$ に対して

$$\int_A g_n f\,d\mu=\int_A g_n E(f\,|\,\mathscr{G})\,d\gamma,\quad(\forall n\ge 1)$$

が成り立ち，$gf \in L^1(\mu)$ かつ $gE(f\,|\,\mathscr{G}) \in L^1(\gamma)$ であるから Lebesgue の収束定理より

$$\int_A gE(f\,|\,\mathscr{G})\ d\gamma = \int_A gf\ d\mu = \int_A E(gf\,|\,\mathscr{G})\ d\gamma$$

が従い (A.12) が得られる．ここで $f \in L^1(\mu)$ に対し

$$\alpha := \mathbb{1}_{\{E(f\,|\,\mathscr{G}) \neq 0\}} \frac{\overline{E(f\,|\,\mathscr{G})}}{|E(f\,|\,\mathscr{G})|}$$

により $\alpha \in L^\infty(\gamma)$ を定めれば，任意の $A \in \mathscr{G}$ に対して

$$\begin{aligned}\int_A |E(f\,|\,\mathscr{G})|\ d\gamma &= \int_A \alpha E(f\,|\,\mathscr{G})\ d\gamma = \int_A E(\alpha f\,|\,\mathscr{G})\ d\gamma \\ &= \int_A \alpha f\ d\mu \leq \int_A |f|\ d\mu = \int_A E(|f|\,|\,\mathscr{G})\ d\gamma\end{aligned}$$

が成り立つから，(A.12.4) 及び $E(\cdot\,|\,\mathscr{G})$ の有界性が得られる．

(2)　$(g_n)_{n=1}^\infty$ を g の単関数近似列とすれば，単調収束定理と (A.12) より

$$\int_X |g| E(|f|\,|\,\mathscr{G})\ d\gamma = \lim_{n\to\infty} \int_X |g_n| E(|f|\,|\,\mathscr{G})\ d\gamma = \lim_{n\to\infty} \int_X |g_n||f|\ d\mu = \int_X |g||f|\ d\mu$$

となり $gE(f\,|\,\mathscr{G})$ の可積分性が従う．従って，Lebesgue の収束定理より任意の $A \in \mathscr{G}$ に対して

$$\int_A gE(f\,|\,\mathscr{G})\ d\gamma = \lim_{n\to\infty} \int_A g_n E(f\,|\,\mathscr{G})\ d\gamma = \lim_{n\to\infty} \int_A g_n f\ d\mu = \int_A gf\ d\mu$$

が成り立ち (A.12.4) が得られる．

(3)　任意の $A \in \mathscr{H}$ に対して

$$\int_A E(f\,|\,\mathscr{H})\ d\theta = \int_A f\ d\mu = \int_A E(f\,|\,\mathscr{G})\ d\gamma = \int_A E(E(f\,|\,\mathscr{G})\,|\,\mathscr{H})\ d\theta$$

が成立する．

(4)　$1 \leq p < \infty$ の場合，(A.12.4) と Jensen の不等式より

$$|E(f\,|\,\mathscr{G})|^p \leq E(|f|\,|\,\mathscr{G})^p \leq E(|f|^p\,|\,\mathscr{G})$$

が成り立つ．$p = \infty$ の場合は任意の $A \in \mathscr{G}$ に対して

$$\int_A |E(f\,|\,\mathscr{G})|\ d\gamma \leq \int_A |f|\ d\mu \leq \mu(A)\|f\|_{L^\infty} = \gamma(A)\|f\|_{L^\infty}$$

となり，$1 \leq p < \infty$ の場合も込めて (A.12.4) が従う．　∎

定理 A.12.5.　(1)　$X_n \leq X_{n+1}$ $X_n \longrightarrow X$ $a.s.P$ $E(X_n\,|\,\mathscr{G}) \longrightarrow E(X\,|\,\mathscr{G})$ $a.s.P$

(2)　$X_n \geq 0$ $E(\liminf X_n\,|\,\mathscr{G}) \leq \liminf E(X_n\,|\,\mathscr{G})$

(3)　$|X_n| \leq Y$ $X_n \longrightarrow X$ $a.s.P$ $E(X_n\,|\,\mathscr{G}) \longrightarrow E(X\,|\,\mathscr{G})$ $a.s.P$

A.13 正則条件付複素測度

定義 A.13.1 (正則条件付複素測度). $(X,\mathscr{F})$ を可測空間，$\mathscr{G}\subset\mathscr{F}$ を部分 σ-加法族，μ を $\mathscr{F}$ 上の複素測度とするとき，次の (1)(2)(3) を満たす写像

$$\mu(\cdot\,|\,\mathscr{G})(\cdot):\mathscr{F}\times X\ni(A,x)\longmapsto\mu(A\,|\,\mathscr{G})(x)\in\mathbf{C}$$

を $\mathscr{G}$ の下での μ の正則条件付複素測度 (regular conditional complex measure of μ with respect to $\mathscr{G}$) と呼ぶ:

(1) 任意の $x\in X$ で $\mathscr{F}\ni A\longmapsto\mu(A\,|\,\mathscr{G})(x)$ は複素測度である．

(2) 任意の $A\in\mathscr{F}$ で $X\ni x\longmapsto\mu(A\,|\,\mathscr{G})(x)$ は $\mathscr{G}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測かつ $|\mu|$-可積分である．

(3) 任意の $A\in\mathscr{F}$ と $B\in\mathscr{G}$ に対し次を満たす:

$$\mu(A\cap B)=\int_B\mu(A\,|\,\mathscr{G})\,d|\mu|.$$

定理 A.13.2 (正則条件付複素測度の一意性). $(X,\mathscr{F})$ を可測空間，$\mathscr{G}\subset\mathscr{F}$ を部分 σ-加法族，μ を $\mathscr{F}$ 上の複素測度とし，μ に対し $\mathscr{G}$ の下での正則条件付複素測度 $\mu(\cdot\,|\,\mathscr{G})(\cdot)$ と $\nu(\cdot\,|\,\mathscr{G})(\cdot)$ が存在しているとする．このとき，$\mathscr{F}$ が可算族で生成されるなら，或る $|\mu|$-零集合 $N\in\mathscr{G}$ が存在して次が成立する:

$$\mu(A\,|\,\mathscr{G})(x)=\nu(A\,|\,\mathscr{G})(x),\quad(\forall A\in\mathscr{F},\ \forall x\in X\backslash N).$$

証明. $\mathscr{F}$ を生成する可算族を $\mathscr{A}$ とし，

$$\mathscr{U}:=\left\{\bigcap_{i=1}^{n}A_i\ :\ A_i\in\mathscr{A},\ n=1,2,\cdots\right\}$$

により可算乗法族を定める．$\mathscr{A}$ は $\mathscr{F}$ を生成するから $\sigma(\mathscr{U})=\mathscr{F}$ となり，任意の $U\in\mathscr{U}$ に対し

$$\int_B\mu(U\,|\,\mathscr{G})\,d|\mu|=\int_B\nu(U\,|\,\mathscr{G})\,d|\mu|,\quad(\forall B\in\mathscr{G})$$

が満たされるから $N_U:=\{\mu(U\,|\,\mathscr{G})\neq\nu(U\,|\,\mathscr{G})\}$ は $\mathscr{G}$ の $|\mu|$-零集合となる．$N:=\bigcup_{U\in\mathscr{U}}N_U$ とおけば

$$\mathscr{D}:=\{\,A\in\mathscr{F}\ :\ \mu(A\,|\,\mathscr{G})(x)=\nu(A\,|\,\mathscr{G})(x),\ \forall x\in X\backslash N\,\}$$

により Dynkin 族が定まり，$\mathscr{D}$ は $\mathscr{U}$ を含むから Dynkin 族定理より定理の主張が従う． ∎

定理 A.13.3 (正則条件付複素測度の存在). $(X,\mathscr{F})$ を可測空間，$\mathscr{G}\subset\mathscr{F}$ を部分 σ-加法族，μ を $\mathscr{F}$ 上の複素測度とする．また $\mathscr{F}$ が可算族で生成され，かつ或るコンパクトクラス $\mathcal{K}$ が存在して，任意の $\epsilon>0$ と $A\in\mathscr{F}$ に対し

$$A_\epsilon\subset K_\epsilon\subset A,\quad|\mu|(A\backslash A_\epsilon)<\epsilon$$

を満たす $K_\epsilon\in\mathcal{K}$, $A_\epsilon\in\mathscr{F}$ が取れると仮定する．このとき $\mathscr{G}$ の下での μ の正則条件付複素測度が存在する．

A.14 一様可積分性

定理 A.14.1 (一様可積分性の同値条件). $(X, \mathscr{F}, \mu)$ を測度空間とし，$\mu(X) < \infty$ とする．任意の添数集合 Λ に対して $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測関数の族とするとき，次の (1) と (2) は同値である:

(1) $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が一様可積分．

(2)
$$\sup_{\lambda\in\Lambda} \int_X |f_\lambda| \, d\mu < \infty \tag{A.73}$$
かつ，任意の $\epsilon > 0$ に対し或る $\delta > 0$ が存在して次を満たす:
$$\mu(B) < \delta \Rightarrow \sup_{\lambda\in\Lambda} \int_B |f_\lambda| \, d\mu < \epsilon. \tag{A.74}$$

証明.

第一段 (1) ⇒ (2) を示す．任意の $a > 0$ に対して
$$\int_X |f_\lambda| \, d\mu = \int_{\{|f_\lambda|>a\}} |f_\lambda| \, d\mu + \int_{\{|f_\lambda|\leq a\}} |f_\lambda| \, d\mu \leq \sup_{\lambda\in\Lambda} \int_{\{|f_\lambda|>a\}} |f_\lambda| \, d\mu + a\mu(X)$$
が成り立ち，一様可積分性より或る $a > 0$ に対して
$$\sup_{\lambda\in\Lambda} \int_{\{|f_\lambda|>a\}} |f_\lambda| \, d\mu < \infty$$
となるから (A.14.1) が従う．また任意の $B \in \mathscr{F}$ に対して
$$\int_B |f_\lambda| \, d\mu = \int_{\{|f_\lambda|>a\}\cap B} |f_\lambda| \, d\mu + \int_{\{|f_\lambda|\leq a\}\cap B} |f_\lambda| \, d\mu \leq \sup_{\lambda\in\Lambda} \int_{\{|f_\lambda|>a\}} |f_\lambda| \, d\mu + a\mu(B)$$
が成り立つから，任意の $\epsilon > 0$ に対して
$$\sup_{\lambda\in\Lambda} \int_{\{|f_\lambda|>a\}} |f_\lambda| \, d\mu < \frac{\epsilon}{2}$$
を満たす $a > 0$ を取り $\delta := \epsilon/(2a)$ とおけば (A.14.1) が成立する．

第二段 (2) ⇒ (1) を示す．任意の $a > 0$ に対して
$$\mu(|f_\lambda| > a) \leq \frac{1}{a} \int_X |f_\lambda| \, d\mu \leq \frac{1}{a} \sup_{\lambda\in\Lambda} \int_X |f_\lambda| \, d\mu$$
が成立するから，(A.14.1) を満たす $\delta > 0$ に対し或る $a_0 > 0$ が存在して
$$\mu(|f_\lambda| > a) < \delta, \quad (\forall\lambda \in \Lambda,\ \forall a > a_0)$$
となり
$$\int_{\{|f_\lambda|>a\}} |f_\lambda| \, d\mu < \epsilon, \quad (\forall\lambda \in \Lambda,\ \forall a > a_0)$$
が従う． ∎

定理 A.14.2 (一様可積分性と平均収束). $(X,\mathscr{F},\mu)$ を σ-有限測度空間とし，$(f_n)_{n=1}^{\infty}$ を $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測関数の族とする．$(f_n)_{n=1}^{\infty}$ が μ-a.e. に $\mathbf{C}$ で収束するとき，つまり或る零集合 A が存在して，

$$f \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n 1\!\!1_A$$

により $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbf{C})$-可測関数が定まるとき，次の (1) と (2) は同値である:

(1) $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ が一様可積分．

(2) f は μ-可積分で次を満たす:

$$\int_X |f - f_n|\, d\mu \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty).$$

定理 A.14.3 (一様可積分性と条件付き期待値). $(X,\mathscr{F},\mu)$ を測度空間とする．部分 σ-加法族 $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ に対し $\mu|_{\mathscr{G}}$ が σ-有限なら，μ-可積分関数 $f : X \longrightarrow \mathbf{R}$ に対し $(E(f\,|\,\mathscr{G}))_{\mathscr{G}\subset\mathscr{F}}$ は一様可積分である．

証明. 定理 A.12.4 より

$$\int_{|E(f\,|\,\mathscr{G})|>\lambda} |E(f\,|\,\mathscr{G})|\ d\mu \leq \int_{E(|f|\,|\,\mathscr{G})>\lambda} E(|f|\,|\,\mathscr{G})\ d\mu = \int_{E(|f|\,|\,\mathscr{G})>\lambda} |f|\ d\mu$$

が成り立つ．また X の可積分性より，任意の $\epsilon > 0$ に対して或る $\delta > 0$ が存在し

$$\mu(B) < \delta \Rightarrow \int_B |f|\ d\mu < \epsilon$$

が満たされる．いま，Chebyshev の不等式より

$$\mu(E(|f|\,|\,\mathscr{G}) > \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}\int_X E(|f|\,|\,\mathscr{G})\ d\mu = \frac{1}{\lambda}\int_X |f|\ d\mu$$

となるから，$\epsilon > 0$ に対し或る $\lambda_0 > 0$ が存在して

$$\sup_{\mathscr{G}\subset\mathscr{F}} \mu(E(|f|\,|\,\mathscr{G}) > \lambda) < \delta, \quad (\forall \lambda > \lambda_0)$$

が満たされ

$$\sup_{\mathscr{G}\subset\mathscr{F}} \int_{E(|f|\,|\,\mathscr{G})>\lambda} |f|\ d\mu < \epsilon, \quad (\forall \lambda > \lambda_0)$$

が従う． ∎

A.15 距離空間上の連続写像

A.15.1 広義一様収束を定める距離

$(X,d_X),(Y,d_Y)$ を距離空間とし，距離位相を導入して

$$C(X,Y) \coloneqq \{\, f : X \longrightarrow Y \ :\ \ f \text{ は連続写像} \,\}$$

とおく．このとき $K \subset X$ をコンパクト集合とすれば，

$$\rho_K(f,g) \coloneqq \sup_{x\in K} d_Y(f(x),g(x)), \quad (f,g \in C(X,Y))$$

により定める ρ_K は $C(X,Y)$ の擬距離となる．実際，$f(K), g(K)$ は Y のコンパクト部分集合であるから

$$\mathrm{diam}(f(K)) = \sup_{y,y'\in f(K)} d_Y(y,y') < \infty,$$

及び $\mathrm{diam}(g(K)) < \infty$ が成り立ち，任意に $x_0 \in K$ を取れば

$$\begin{aligned}\sup_{x\in K} d_Y(f(x),g(x)) &\leq \sup_{x\in K} d_Y(f(x),f(x_0)) + d_Y(f(x_0),g(x_0)) + \sup_{x\in K} d_Y(g(x_0),g(x)) \\ &\leq \mathrm{diam}(f(K)) + d_Y(f(x_0),g(x_0)) + \mathrm{diam}(g(K)) < \infty\end{aligned}$$

となるから ρ_K は $[0,\infty)$ 値である．また d_Y が対称性と三角不等式を満たすから ρ も対称性を持ち三角不等式を満たす．いま，X が σ-コンパクトであると仮定する．つまり

$$K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \cdots, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = X \tag{A.75}$$

を満たすコンパクト部分集合の増大列 $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ が存在するとき，$\rho_n = \rho_{K_n}$ とすれば

$$\rho_n(f,g) = 0 \ (\forall n \geq 1) \quad \Longrightarrow \quad f = g$$

が成り立つから，

$$\rho(f,g) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left(1 \wedge \rho_n(f,g)\right), \quad (f,g \in C(X,Y)) \tag{A.76}$$

により $C(X,Y)$ 上に距離 ρ が定まる．特に，定理 A.3.48 より X が可分かつ局所コンパクトなら

$$K_n \subset K_{n+1}^{\circ}, \quad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \tag{A.77}$$

を満たすコンパクト部分集合の列 $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ が存在するから ρ が定義される．

定理 A.15.1 (広義一様収束を定める距離). (X,d_X) を可分な局所コンパクト距離空間，(Y,d_Y) を距離空間とし，(A.15.1) を満たす $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ で ρ を定めるとき，$f, f_n \in C(X,Y)$ に対して次が成り立つ．

$$(f_n)_{n=1}^{\infty} \text{ が } f \text{ に広義一様収束する} \quad \Longleftrightarrow \quad \rho(f,f_n) \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty).$$

定理 A.15.2 ($C(X,Y)$ の可分性). (X,d_X) を σ-コンパクト距離空間，(Y,d_Y) を可分距離空間とするとき，$C(X,Y)$ は ρ により可分距離空間となる．

証明.

第一段 三段にわたり，コンパクト集合 $K \subset X$ に対して或る高々可算集合 $D(K) \subset C(X,Y)$ があり，任意の $\epsilon > 0$ と $f \in C(X,Y)$ に対して次を満たす $g \in D(K)$ が存在することを示す:

$$d_Y(f(x),g(x)) < \epsilon, \quad (\forall x \in K). \tag{A.78}$$

$x \in X$ の半径 $\delta > 0$ の開球を $B_\delta(x)$ と書けば，K のコンパクト性より任意の $m \in \mathbf{N}$ に対し

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{k(m)} B_{1/m}(x_i^m)$$

を満たす $\left\{x_1^m, \cdots, x_{k(m)}^m\right\} \subset K$ が存在する．また Y は Lindelöf 性を持つから，任意の $\ell \geq 1$ に対し

$$\mathscr{U}_\ell \coloneqq \left\{ U_j^\ell \ : \quad U_j^\ell : open,\ \mathrm{diam}\left(U_j^\ell\right) < \frac{1}{\ell};\ j = 1, 2, \cdots \right\}, \quad Y = \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j^\ell$$

を満たす開被覆 $\mathscr{U}_\ell$ が存在する．一方で，$f \in C(X, Y)$ は K 上で一様連続であるから

$$C_{m,n} \coloneqq \left\{ f \in C(X, Y) \ : \quad \text{任意の } x, x' \in K \text{ に対し } d_X(x, x') < \frac{1}{m} \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \frac{1}{n} \right\}$$

とすれば

$$C(X, Y) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} C_{m,n} \tag{A.79}$$

が成り立つ．いま，任意に m, n, ℓ 及び $i = (i_1, \cdots, i_{k(m)}) \in \mathbf{N}^{k(m)}$ を取り

$$D_{m,n,\ell}^i \coloneqq \left\{ g \in C_{m,n} \ : \quad g(x_j^m) \in U_{i_j}^\ell,\ (\forall j = 1, \cdots, k(m)) \right\}$$

とおけば，例えば $i = (1, \cdots, 1) \in \mathbf{N}^{k(m)}$ と $y \in U_1^\ell$ に対して恒等写像 $g : X \longrightarrow \{y\}$ は $g \in D_{m,n,\ell}^i$ となるから

$$\Phi_{m,n,\ell} \in \prod_{\substack{i \in \mathbf{N}^{k(m)} \\ D_{m,n,\ell}^i \neq \emptyset}} D_{m,n,\ell}^i$$

が存在する．ここで

$$D_{m,n,\ell} \coloneqq \left\{ \Phi_{m,n,\ell}(i) \ : \quad i \in \mathbf{N}^{k(m)} \right\}$$

により $D_{m,n,\ell}$ を定めて

$$D_{m,n} \coloneqq \bigcup_{\ell=1}^{\infty} D_{m,n,\ell}, \quad D(K) \coloneqq \bigcup_{m,n=1}^{\infty} D_{m,n}$$

とおく．

第二段　任意の $f \in C_{m,n}$ と $\epsilon > 0$ に対し或る $g \in D_{m,n}$ が存在して

$$d_Y\left(f(x_j^m), g(x_j^m)\right) < \epsilon, \quad (\forall j = 1, \cdots, k(m))$$

を満たすことを示す．実際，$1/\ell < \epsilon$ となる ℓ に対し $\mathscr{U}_\ell$ は Y の被覆であるから，

$$f(x_j^m) \in U_{i_j}^\ell, \quad (\forall j = 1, \cdots, k(m))$$

となる $i = (i_1, \cdots, i_{k(m)}) \in \mathbf{N}^{k(m)}$ が取れる．従って $D_{m,n,\ell}^i \neq \emptyset$ であり，

$$g \coloneqq \Phi_{m,n,\ell}(i)$$

に対して

$$d_Y\left(f(x_j^m), g(x_j^m)\right) < \frac{1}{\ell} < \epsilon, \quad (\forall j = 1, \cdots, k(m))$$

が成立する．

第三段 $D(K)$ が (A.15.1) を満たすことを示す．任意に $f \in C(X,Y)$ と $\epsilon > 0$ を取れば，(A.15.1) より $1/n < \epsilon/3$ を満たす n 及び或る m に対して $f \in C_{m,n}$ となる．このとき，前段の結果より或る $g \in D_{m,n} \subset D(K)$ が存在して

$$d_Y\left(f(x_j^m), g(x_j^m)\right) < \frac{\epsilon}{3}, \quad (\forall j = 1, \cdots, k(m))$$

を満たす．$f, g \in C_{m,n}$ より任意の $x \in B_{1/m}(x_j^m)$ に対して

$$d_Y\left(f(x), f(x_j^m)\right),\ d_Y\left(g(x), g(x_j^m)\right) < \frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{3}$$

が成り立ち，任意の $x \in K$ は或る $B_{1/m}(x_j^m)$ に含まれるから，

$$\begin{aligned} d_Y\left(f(x), g(x)\right) &\leq d_Y\left(f(x), f(x_j^m)\right) + d_Y\left(f(x_j^m), g(x_j^m)\right) + d_Y\left(g(x), g(x_j^m)\right) \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

が従い (A.15.1) が出る．

第四段 $(K_n)_{n=1}^\infty$ を (A.15.1) を満たすコンパクト集合列とすれば，各 K_n に対し $D(K_n)$ が存在し，

$$D := \bigcup_{n=1}^\infty D(K_n)$$

と定めれば D は $C(X,Y)$ で高々可算かつ稠密となる．実際，任意の $\epsilon > 0$ と $f \in C(X,Y)$ に対して，

$$\sum_{n=N+1}^\infty 2^{-n} < \frac{\epsilon}{2}$$

を満たす $N \geq 1$ を取れば，

$$\rho_N(f,g) < \frac{\epsilon}{2}$$

を満たす $g \in D(K_N) \subset D$ が存在するから

$$\begin{aligned} \rho(f,g) &= \sum_{n=1}^N 2^{-n}\left(1 \wedge \rho_n(f,g)\right) + \sum_{n=N+1}^\infty 2^{-n}\left(1 \wedge \rho_n(f,g)\right) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

が成り立つ． ■

定理 A.15.3 ($C(X,Y)$ の完備性). (X, d_X) を可分な局所コンパクト距離空間，(Y, d_Y) を距離空間，$(f_n)_{n=1}^\infty$ を $C(X,Y)$ の列とし，(A.15.1) を満たす $(K_n)_{n=1}^\infty$ で ρ を定める．このとき各点 $x \in X$ で $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在すれば

$$f := \lim_{n\to\infty} f_n \in C(X,Y), \quad \rho(f, f_n) \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \tag{A.80}$$

が成立する．特に (Y, d_Y) が完備なら $C(X,Y)$ は ρ により完備距離空間となる．

証明.

第一段　任意の $j \geq 1$ に対し

$$\rho_j(f_n, f) \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \tag{A.81}$$

が成り立つことを示す．実際，任意の $\epsilon > 0$ に対し或る $N \geq 1$ が存在して

$$\rho_j(f_n, f_m) < \frac{\epsilon}{2} \quad (\forall n, m \geq N)$$

が満たされ，また f の定め方より任意の $x \in K_j$ に対し

$$d_Y(f_m(x), f(x)) < \frac{\epsilon}{2}$$

を満たす $m \geq N$ が存在するから，

$$d_Y(f_n(x), f(x)) \leq d_Y(f_n(x), f_m(x)) + d_Y(f_m(x), f(x)) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \quad (\forall n \geq N)$$

が従い

$$\rho_j(f_n, f) \leq \epsilon, \quad (\forall n \geq N)$$

が成立する．

第二段　f の連続性を示す．任意に $\epsilon > 0$ と $x \in X$ 及び $x \in {K_j}^\circ$ を満たす K_j を取れば，(A.15.1) より

$$\rho_j(f_n, f) < \frac{\epsilon}{3}$$

を満たす $n \geq 1$ が存在する．また f_n の連続性より x の或る開近傍 W が存在して

$$d_Y(f_n(x), f_n(x')) < \frac{\epsilon}{3}, \quad (\forall x' \in W)$$

となるから，

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq d_Y(f(x), f_n(x)) + d_Y(f_n(x), f_n(x')) + d_Y(f_n(x'), f(x')) < \epsilon, \quad (\forall x' \in W \cap {K_j}^\circ)$$

が従い f の x における連続性が出る．

第三段　(A.15.3) を示す．任意の $\epsilon > 0$ に対し，

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{-k} < \frac{\epsilon}{2}$$

を満たす $k_0 \geq 1$ が存在する．また (A.15.1) より或る $n_0 \geq 1$ が存在して

$$\rho_{k_0}(f_n, f) < \frac{\epsilon}{2}, \quad (\forall n \geq n_0)$$

となるから

$$\rho(f_n, f) < \epsilon, \quad (\forall n \geq n_0)$$

が成立する． ∎

定理 A.15.4 ($C(X,Y)$ の完備可分性).　(X, d_X) を可分な局所コンパクト距離空間，(Y, d_Y) を完備距離空間とする．このとき (A.15.1) を満たす $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ で ρ を定めれば，$C(X,Y)$ は ρ により完備可分距離空間となる．

証明.　定理 A.15.2 と定理 A.15.3 より従う． ∎

A.15.2 正規族

定義 A.15.5 (正規族). $(X,d_X),(Y,d_Y)$ を距離空間，$\mathscr{F} \subset C(X,Y)$ とする．$\mathscr{F}$ の任意の列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ が X で広義一様収束する (収束先が連続写像である必要はない) 部分列を含むとき，$\mathscr{F}$ を正規族 (normal family) という．

定理 A.15.6 (正規族の相対コンパクト性). (X,d_X) を可分な局所コンパクト距離空間，(Y,d_Y) を距離空間とし，(A.15.1) を満たす $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ で ρ を定め $C(X,Y)$ に距離位相を導入する．このとき，正規族 $\mathscr{F}$ に対して

$$\overline{\mathscr{F}} \subset C(X,Y).$$

が成立し，また $\overline{\mathscr{F}}$ はコンパクトとなる．

定義 A.15.7 (一様同程度連続). $(X,d_X),(Y,d_Y)$ を距離空間，$\mathscr{F} \subset C(X,Y)$ とする．任意の $\epsilon > 0$ に対し

$$d_X(p,q) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_Y(f(p),f(q)) < \epsilon,\ (\forall f \in \mathscr{F})$$

を満たす $\delta > 0$ が存在するとき，$\mathscr{F}$ は一様同程度連続である (uniformly equicontinuous) という．

定理 A.15.8 (Ascoli-Arzela). (X,d_X) を可分な局所コンパクト距離空間，(Y,d_Y) を距離空間とするとき

$$\mathscr{F} \subset C(X,Y) \text{ が正規族} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \mathscr{F} \text{ が任意のコンパクト集合 } K \subset X \text{ で一様同程度連続,} \\ \text{各点 } x \in X \text{ で } \overline{\{\ f(x) \ :\ f \in \mathscr{F}\ \}} \text{ がコンパクトである.} \end{cases} \tag{A.82}$$

証明.

第一段 $E = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を X で可算稠密な集合とし，$\mathscr{F}$ が (A.15.8) 右辺の仮定を満たしているとする．$K \subset X$ を任意のコンパクト集合とすれば，一様同程度連続性より任意の $\epsilon > 0$ に対し或る $\delta > 0$ が存在して

$$p,q \in K,\ d_X(p,q) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \sup_{f \in \mathscr{F}} d_Y(f(p),f(q)) < \frac{\epsilon}{3}$$

が成立する．また半径 $\delta/2$ の K の開被覆 $B_1,\cdots,B_M$ が存在し，E は稠密であるから

$$p_j \in B_j \cap E, \quad j = 1,\cdots,M$$

を選んでおく．任意に $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}$ を取れば，

$$\overline{\{\ f_n(x_1) \ :\ n = 1,2,\cdots\ \}} \subset \overline{\{\ f(x) \ :\ f \in \mathscr{F}\ \}}$$

より $\overline{\{f_n(x_1)\}_{n=1}^{\infty}}$ はコンパクトであるから収束部分列 $\left\{f_{n(k,1)}(x_1)\right\}_{k=1}^{\infty}$ が存在する．同様に $\left\{f_{n(k,1)}(x_2)\right\}_{k=1}^{\infty}$ の或る部分列 $\left\{f_{n(k,2)}(x_2)\right\}_{k=1}^{\infty}$ は Y で収束し，繰り返せば部分添数系

$$\{n(k,1)\}_{k=1}^{\infty} \supset \{n(k,2)\}_{k=1}^{\infty} \supset \{n(k,3)\}_{k=1}^{\infty} \supset \cdots$$

が構成される．$n(k) := n(k,k)$, $(\forall k \geq 1)$ とおけば任意の $x_i \in E$ に対して $\left\{f_{n(k)}(x_i)\right\}_{k=i}^{\infty}$ は収束列 $\left\{f_{n(k,i)}(x_i)\right\}_{k=1}^{\infty}$ の部分列となるから収束し，従って或る $N \geq 1$ が存在して

$$u,v > N \quad \Longrightarrow \quad d_Y\left(f_{n(u)}(p_j), f_{n(v)}(p_j)\right) < \frac{\epsilon}{3},\ (\forall j = 1,2,\cdots,M)$$

を満たす．任意に $x \in K$ を取れば或る j で $x \in B_j$ かつ $d_X(x,p_j) < \delta$ となるから，$u,v > N$ なら

$$\begin{aligned} d_Y(f_{n(u)}(x), f_{n(v)}(x)) &\leq d_Y\left(f_{n(u)}(x), f_{n(u)}(p_j)\right) + d_Y\left(f_{n(u)}(p_j), f_{n(v)}(p_j)\right) + d_Y\left(f_{n(v)}(p_j), f_{n(v)}(x)\right) \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon \end{aligned} \tag{A.83}$$

が成り立つ．$\{f_{n(k)}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ は相対コンパクトであるから $\lim_{k\to\infty} f_{n(k)}(x) =: f(x) \in Y$ が存在し，(A.15.2) より $\left(f_{n(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ は f に K で一様収束するから $\mathscr{F}$ は正規族である．

第二段 X の可分性と定理 A.3.48 より

$$K_n \subset K_{n+1}^{\circ}, \quad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$$

を満たすコンパクト部分集合の列 $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ が存在するから，これに対し (A.15.1) の距離 ρ を定める．$\mathscr{F}$ が正規族であるなら $\mathscr{F}$ は ρ に関して全有界となるから，任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\mathscr{F} = \bigcup_{i=1}^{N} \{\, f \in \mathscr{F} \ :\ \ \rho(f, f_i) < \epsilon \,\}$$

を満たす $\{f_i\}_{i=1}^{N} \subset \mathscr{F}$ が存在する．$K \subset X$ がコンパクトなら或る n で $K \subset K_n$ となり，或る $\delta > 0$ が存在して

$$p,q \in K,\ d_X(p,q) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_Y(f_i(p), f_i(q)) < \epsilon,\ (\forall i = 1,\cdots,N)$$

が成り立つから，任意の $f \in \mathscr{F}$ に対し $\rho(f,f_i) < \epsilon$ を満たす f_i を取れば

$$\begin{aligned} p,q \in K,\ d_X(p,q) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_Y(f(p), f(q)) &\leq d_Y(f(p), f_i(p)) + d_Y(f_i(p), f_i(q)) + d_Y(f_i(q), f(q)) \\ &\leq 2^n\epsilon + \epsilon + 2^n\epsilon \\ &= (2^{n+1}+1)\epsilon \end{aligned}$$

となる．すなわち $\mathscr{F}$ は任意のコンパクト部分集合上で一様同程度連続である．また任意の $x \in X$ に対し

$$\Gamma(x) := \{\, f(x) \ :\ \ f \in \mathscr{F} \,\}$$

とおくとき，任意の $\{w_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \overline{\Gamma(x)}$ に対して

$$f_n(x) \in \Gamma(x), \quad d_Y(f_n(x), w_n) < \frac{1}{n}, \quad n = 1,2,\cdots$$

を満たす $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ を取れば，$\mathscr{F}$ が正規族であるから収束部分列 $\left(f_{n_k}(x)\right)_{k=1}^{\infty}$ が存在して

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = \lim_{k\to\infty} w_{n_k} \in \overline{\Gamma(x)}$$

が成り立つから $\overline{\Gamma(x)}$ はコンパクトである． ∎

参考文献

[1] I. Karatzas and S. Shreve, Brownian motion and stochastic calculus second edition, 1998.

[2] C. Chen, Study Notes in Matheamtics, available from http://www.stat.purdue.edu/~chen418/study_research/StochasticCalculus-note2.pdf, 2018/05/20.

[3] Mathematics Stack Exchange, A question about stochastic processes and stopping times, available from https://math.stackexchange.com/questions/84271/a-question-about-stochastic-processes-and-stopping-times, 2018/05/20.