確率解析メモ

百合川

2018 年 5 月 4 日

目次

連続関数の空間の位相

$[0,\infty)$ 上の $\mathbb{R}^d$ 値連続関数 の全体を $C[0,\infty)^d$ と表す．$C[0,\infty)^d$ は

$$d(w_1,w_2) \coloneqq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \left\{ \sup_{t\le k} |w_1(t)-w_2(t)| \wedge 1 \right\}, \quad (w_1,w_2 \in C[0,\infty)^d)$$

により定める距離で完備可分距離空間となる．以下，$C[0,\infty)^d$ には d により広義一様収束位相を導入する．

連続関数の空間の Borel 集合族

$n=1,2,\cdots$，$B \in \mathfrak{B}((\mathbb{R}^d)^n)$, $0 \le t_1 < \cdots < t_n$ により

$$C = \left\{ w \in C[0,\infty)^d \ ; \quad (w(t_1),\cdots,w(t_n)) \in B \right\}$$

と表される $C[0,\infty)^d$ の部分集合 C の全体を $\mathscr{C}$ とおく．このとき，$\mathfrak{B}(C[0,\infty)^d) = \sigma[\mathscr{C}]$ が成り立つ．

証明． $w_0 \in C[0,\infty)^d$ とする．任意に $w \in C[0,\infty)^d$ を取れば，w の連続性により $d(w_0,w)$ の各項について

$$\sup_{t\le n} |w_0(t)-w(t)| = \sup_{r\in[0,n]\cap\mathbb{Q}} |w_0(r)-w(r)| \quad (n=1,2,\cdots)$$

と表現できる．いま，任意に実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ を取れば

$$\left\{ w \in C[0,\infty)^d \ ; \quad \sup_{r\in[0,n]\cap\mathbb{Q}} |w_0(r)-w(r)| \le \alpha \right\} = \bigcap_{r\in[0,n]\cap\mathbb{Q}} \left\{ w \in C[0,\infty)^d \ ; \quad |w_0(r)-w(r)| \le \alpha \right\}$$

が成立し，右辺の各集合は $\mathscr{C}$ に属するから 左辺 $\in \sigma[\mathscr{C}]$ となる．従って

$$\psi_n : C[0,\infty)^d \ni w \longmapsto \sup_{r\in[0,n]\cap\mathbb{Q}} |w_0(r)-w(r)| \in \mathbb{R}, \quad (n=1,2,\cdots)$$

で定める ψ_n は可測 $\sigma[\mathscr{C}]/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ である．$x \longmapsto x \wedge 1$ の連続性より $\psi_n \wedge 1$ も $\sigma[\mathscr{C}]/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$-可測性を持ち，

$$d(w_0,w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} (\psi_n(w) \wedge 1)$$

により $C[0,\infty)^d \ni w \longmapsto d(w_0,w) \in \mathbb{R}$ の $\sigma[\mathscr{C}]/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$-可測性が出るから，任意の $\epsilon > 0$ に対する球について

$$\left\{ w \in C[0,\infty)^d \ ; \quad d(w_0,w) < \epsilon \right\} \in \sigma[\mathscr{C}]$$

が成り立つ．$C[0,\infty)^d$ は第二可算公理を満たし，可算基底は上式の形の球で構成されるから，$\mathfrak{O}(C[0,\infty)^d) \subset \sigma[\mathscr{C}]$ が従い $\mathfrak{B}(C[0,\infty)^d) \subset \sigma[\mathscr{C}]$ を得る．次に逆の包含関係を示す．いま，任意に $n \in \mathbb{Z}_+$ と $t_1 < \cdots < t_n$ を選んで

$$\phi : C[0,\infty)^d \ni w \longmapsto (w(t_1),\cdots,w(t_n)) \in (\mathbb{R}^d)^n$$

により定める写像は連続である．実際，w_0 での連続性を考えると，任意の $\epsilon > 0$ に対して $t_n \le N$ を満たす $N \in \mathbb{N}$ を取れば，$d(w_0,w) < \epsilon/(n2^N)$ ならば $\sum_{i=1}^n |w_0(t_i)-w(t_i)| < \epsilon$ が成り立つ．よって ϕ は w_0 で連続であり (各点連続)

$$\mathfrak{B}((\mathbb{R}^d)^n) \subset \left\{ A \in \mathfrak{B}((\mathbb{R}^d)^n) \ ; \quad \phi^{-1}(A) \in \mathfrak{B}(C[0,\infty)^d) \right\}$$

が出る．任意の $C \in \mathscr{C}$ は，$n \in \mathbb{N}$ と時点 $t_1 < \cdots < t_n$ によって決まる写像 ϕ によって $C = \phi^{-1}(B)$ $(\exists B \in \mathfrak{B}((\mathbb{R}^d)^n))$ と表現できるから，$\mathscr{C} \subset \mathfrak{B}(C[0,\infty)^d)$ が成り立ち $\sigma[\mathscr{C}] \subset \mathfrak{B}(C[0,\infty)^d)$ が得られる． ∎

次の事柄は後の定理の証明で使うからここで証明しておく．

定理 0.0.1 ($\mathscr{C}$ は乗法族である). $\mathscr{C}$ は交演算について閉じている．

証明. 任意に $A_1, A_2 \in \mathscr{C}$ を取れば，A_1, A_2 それぞれに対し $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $C_1 \in \mathfrak{B}((\mathbb{R}^d)^{n_1})$, $C_2 \in \mathfrak{B}((\mathbb{R}^d)^{n_2})$, $t_1 < \cdots < t_{n_1}$ それから $s_1 < \cdots < s_{n_2}$ が決まっていて，

$$A_1 = \left\{ w \in C[0,\infty)^d \quad | \quad (w(t_1), \cdots, w(t_{n_1})) \in C_1 \right\}$$
$$A_2 = \left\{ w \in C[0,\infty)^d \quad | \quad (w(s_1), \cdots, w(s_{n_2})) \in C_2 \right\}$$

と表されている．A_1, A_2 の時点に重複があるかないかで場合分けして示す．

時点に重複がない場合　集合を次のように同値な表記に直す：

$$A_1 = \left\{ w \in C[0,\infty)^d \quad | \quad (w(t_1), \cdots, w(t_{n_1}), w(s_1), \cdots, w(s_{n_2})) \in C_1 \times (\mathbb{R}^d)^{n_2} \right\}$$
$$A_2 = \left\{ w \in C[0,\infty)^d \quad | \quad (w(t_1), \cdots, w(t_{n_1}), w(s_1), \cdots, w(s_{n_2})) \in (\mathbb{R}^d)^{n_1} \times C_2 \right\}$$

表現を変えれば乗法を考えやすくなり，上の場合は

$$A_1 \cap A_2 = \left\{ w \in C[0,\infty)^d \quad | \quad (w(t_1), \cdots, w(t_{n_1}), w(s_1), \cdots, w(s_{n_2})) \in C_1 \times C_2 \right\}$$

と表現できる．$t_1, \cdots, s_{n_2}$ の並びが気になるなら，この時点の並びを昇順に変換する $(dn_1 + dn_2) \times (dn_1 + dn_2)$ 行列 J_1 を用いて (J_1 は連続, 線型, 全単射),

$$A_1 \cap A_2 = \left\{ w \in C[0,\infty)^d \quad | \quad J_1 \boldsymbol{w} \in J_1(C_1 \times C_2) \right\}$$
$$(\boldsymbol{w} = {}^T(w(t_1), \cdots, w(t_{n_1}), w(s_1), \cdots, w(s_{n_2})))$$

とすれば，$J(C_1 \times C_2) \in \mathfrak{B}((\mathbb{R}^d)^{n_1+n_2})$ であるから，$A_1 \cap A_2 \in \mathscr{C}$ であることが明確になる．

時点に重複がある場合　$(r_{k_1}, \cdots, r_{k_l}) \subset (t_1, \cdots, t_{n_1})$ が重複時点であるとき，A_1, A_2 の同値な表記は次のようにすればよい：

$$A_1 = \left\{ w \in C[0,\infty)^d \quad | \quad (w(t_1), ., w(r_{k_1}), ., w(r_{k_l}), ., w(t_{n_1}), (s_1, \cdots, s_{n_2} \text{ から } r_{k_1}, \cdots, r_{k_l} \text{ を抜いたものを並べる})) \in C_1 \times (\mathbb{R}^d)^{n_2 - l} \right\}$$

$$A_2 = \left\{ w \in C[0,\infty)^d \quad | \quad (w(s_1), ., w(r_{k_1}), ., w(r_{k_l}), ., w(s_{n_2}), (t_1, \cdots, t_{n_1} \text{ から } r_{k_1}, \cdots, r_{k_l} \text{ を抜いたものを並べる})) \in C_2 \times (\mathbb{R}^d)^{n_1 - l} \right\}$$

A_2 について，条件中の時点の並びを変換し A_1 の条件の順番に合わせる行列 J_2(連続, 線型, 全単射) を用いて

$$A_2 = \left\{ w \in C[0,\infty)^d \quad | \quad (w(t_1), ., w(r_{k_1}), ., w(r_{k_l}), ., w(t_{n_1}), (s_1, \cdots, s_{n_2} \text{ から } r_{k_1}, \cdots, r_{k_l} \text{ を抜いたものを並べる})) \in J_2(C_2 \times (\mathbb{R}^d)^{n_1 - l}) \right\}$$

と書き直せば，$A_1 \cap A_2$ は前段の様に表現可能であり，前段と同様に最後に時点を昇順に変換する行列を用いることで $A_1 \cap A_2 \in \mathscr{C}$ となることが明確に判る．

∎

連続関数の空間に値を取る確率変数

$\omega \in \Omega$ に $\mathbb{R}^d$ 値連続確率過程 X のパスを対応させる写像

$$X_\bullet : \Omega \ni \omega \longmapsto (t \longmapsto X_t(\omega)), \quad (t \geq 0)$$

は可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(C[0,\infty)^d)$ である．

証明． 任意に $C \in \mathscr{C}$ を取れば $C = \left\{ w \in C[0,\infty)^d \ ; \quad (w(t_1), \cdots, w(t_n)) \in B \right\}$, $(B \in \mathfrak{B}((\mathbb{R}^d)^n))$ と表されるから

$$\{ \omega \in \Omega \ ; \quad X_\bullet(\omega) \in C \} = \{ \omega \in \Omega \ ; \quad (X_{t_1}(\omega), \cdots, X_{t_n}(\omega)) \in B \}$$

が成り立つ．右辺は $\mathcal{F}$ に属するから

$$\mathscr{C} \subset \left\{ C \in \sigma[\mathscr{C}] \ ; \quad (X_\bullet)^{-1}(C) \in \mathcal{F} \right\}$$

が従い，右辺は σ 加法族であるから $X_\bullet$ の $\mathcal{F}/\sigma[\mathscr{C}]$-可測性，つまり $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(C[0,\infty)^d)$-可測性が出る． ■

定理 0.0.2. Let X be a process with every sample path LCRL, and let A be the event that X is continuous on $[0, x_0]$. Let X be adapted to a right-continuous filtration $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$. Show that $A \in \mathscr{F}_{t_0}$.

証明．

第一段 $\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q} \cap [0, t_0]$ とおく．いま，任意の $n \geq 1$ と $r \in \mathbb{Q}^*$ に対し

$$B_n(r) := \bigcup_{m\geq 1} \bigcap_{k\leq m} \left\{ \omega \in \Omega \ ; \quad \left| X_r(\omega) - X_{r+\frac{1}{k}}(\omega) \right| \leq \frac{1}{n} \right\}$$

と定めるとき，

$$A = \bigcap_{r\in\mathbb{Q}^*} \bigcap_{n\geq 1} B_n(r)$$

が成立することを示す．これが示されれば，

$$\left\{ \omega \in \Omega \ ; \quad \left| X_r(\omega) - X_{r+\frac{1}{k}}(\omega) \right| \leq \frac{1}{n} \right\} \in \mathscr{F}_{r+\frac{1}{k}}, \quad (\forall r \in \mathbb{Q}^*, \ k \geq 1)$$

とフィルトレーションの右連続性から

$$B_n(r) \in \bigcap_{k\geq m} \mathscr{F}_{r+\frac{1}{k}} = \mathscr{F}_{r+} = \mathscr{F}_r$$

が従い $A \in \mathscr{F}_{t_0}$ が出る．

第二段

証明.

$$\mathscr{G} \coloneqq \{\, \{T < \infty\} \cap E \ ; \quad E \in \mathscr{F} \,\}$$

とおけば X_T は可測 $\mathscr{G}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ である．$\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ より

$$\mathscr{H} \coloneqq \{\, \{X_T \in A\},\ \{X_T \in A\} \cup \{T = \infty\} \ ; \quad A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \,\}$$

に対して $\mathscr{H} \subset \mathscr{F}$ が成立する．あとは $\mathscr{H}$ が σ-加法族であることを示せばよい．実際，$A = \mathbb{R}$ のとき

$$\{X_T \in A\} \cup \{T = \infty\} = \{T < \infty\} \cup \{T = \infty\} = \Omega$$

より $\Omega \in \mathcal{H}$．また

$$\{X_T \in A\}^c = \{X_T \in A^c\} \cup \{T = \infty\}, (\{X_T \in A\} \cup \{T = \infty\})^c = \{X_T \in A^c\} \cap \{T < \infty\} = \{X_T \in A^c\}$$

より $\mathscr{H}$ は補演算で閉じる．

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \left\{ X_T \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \left\{ X_T \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\} \cup \{T = \infty\}$$

定理 0.0.3 (Dynkin system theorem). Let $\mathscr{C}$ be a collection of subsets of Ω which is closed under pairwise intersection. If $\mathscr{D}$ is a Dynkin system containing $\mathscr{C}$, then $\mathscr{D}$ also contains the σ-field $\sigma(\mathscr{C})$ generated by $\mathscr{C}$.

証明. $\mathscr{C}$ を含む最小の Dynkin 族を $\delta(\mathscr{C})$ と書く.

第一段 $\delta(\mathscr{C})$ が交演算について閉じていれば $\delta(\mathscr{C})$ は σ-加法族である．実際,

$$A^c = \Omega \backslash A$$

より $\delta(\mathscr{C})$ は補演算について閉じているから，交演算について閉じていれば

$$A \cup B = (A^c \cap B^c)^c \in \delta(\mathscr{C}), \quad (A, B \in \delta(\mathscr{C}))$$

が満たされる．このとき $A_n \in \delta(\mathscr{C})$ $(n = 1, 2, \cdots)$ に対し

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \in \delta(\mathscr{C})$$

が従い，$\sigma(\mathscr{C}) \subset \delta(\mathscr{C}) \subset \mathscr{D}$ が得られる[*1]．

第二段 $\delta(\mathscr{C})$ が交演算について閉じていることを示す．いま,

$$\mathscr{D}_1 \coloneqq \{\, B \in \delta(\mathscr{C}) \ ; \quad A \cap B \in \delta(\mathscr{C}),\ \forall A \in \mathscr{C} \,\}$$

により定める $\mathscr{D}_1$ は Dynkin 族であり $\mathscr{C}$ を含むから

$$\delta(\mathscr{C}) \subset \mathscr{D}_1$$

が成立する．従って

$$\mathscr{D}_2 \coloneqq \{\, B \in \delta(\mathscr{C}) \ ; \quad A \cap B \in \delta(\mathscr{C}),\ \forall A \in \delta(\mathscr{C}) \,\}$$

により Dynkin 族 $\mathscr{D}_2$ を定めれば，$\mathscr{C} \subset \mathscr{D}_2$ が満たされ

$$\delta(\mathscr{C}) \subset \mathscr{D}_2$$

が得られる．よって $\delta(\mathscr{C})$ は交演算について閉じている. ∎

定理 0.0.4. Dynkin 族の定義 (iii) は，$\mathscr{D}$ が可算直和で閉じていることと同値である.

証明. $\mathscr{D}$ が可算直和について閉じているとする．このとき単調増大列 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ を取り

$$B_1 \coloneqq A_1, \quad B_n \coloneqq A_n \backslash A_{n-1}, \quad (n \geq 2)$$

とおけば，Dynkin 族の定義 (ii) より $B_n \in \mathscr{D}$ $(n \geq 1)$ が満たされ

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathscr{D}$$

[*1] σ-加法族は Dynkin 族であるから，$\delta(\mathscr{C}) \subset \sigma(\mathscr{C})$ が成り立ち $\sigma(\mathscr{C}) = \delta(\mathscr{C})$ となる.

が成立する．逆に $\mathscr{D}$ が (iii) を満たしているとして，互いに素な集合列 $(B_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{D}$ を取る．$B^c = \Omega \backslash B$ と Dynkin 族の定義 (i)(ii) より，$A, B \in \mathscr{D}$ が $A \cap B = \emptyset$ を満たしていれば $A^c \cap B^c \in \mathscr{D}$ が成り立ち

$$B_1^c \cap B_2^c \cap \cdots \cap B_n^c = \left(\cdots\left(\left(B_1^c \cap B_2^c\right) \cap B_3^c\right) \cap \cdots \cap B_{n-1}^c\right) \cap B_n^c \in \mathscr{D}$$

が得られる．よって

$$D_n := \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega \backslash \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i^c\right), \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

により定める単調増大列 $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ は $\mathscr{D}$ に含まれ

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathscr{D}$$

が成立する． ∎

定理 0.0.5. Let $X = \{ X_t \ ; \quad 0 \leq t < \infty \}$ be a stochastic process for which $X_0, X_{t_1} - X_{t_0}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ are independent random variables, for every integer $n \geq 1$ and indices $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty$. Then for any fixed $0 \leq s < t < \infty$, the increment $X_t - X_s$ is independent of $\mathscr{F}_s^X$.

この主張の逆も成立する:

証明. 先ず任意の $s \leq t \leq r$ に対し $\sigma(X_t - X_s) \subset \mathscr{F}_r^X$ が成り立つ．実際，

$$\Phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \ni (x, y) \longmapsto x - y$$

の連続性と $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ より，任意の $E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$(X_t - X_s)^{-1}(E) = \left\{(X_t, X_s) \in \Phi^{-1}(E)\right\} \in \sigma(X_s, X_t) \subset \mathscr{F}_r^X \tag{1}$$

が満たされる．よって任意に $A_0 \in \sigma(X_0)$, $A_i \in \sigma(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})$ を取れば，$X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ が $\mathscr{F}_{t_{n-1}}^X$ と独立であるから

$$\mathrm{P}(A_0 \cap A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathrm{P}(A_0 \cap A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})\, \mathrm{P}(A_n)$$

が成立する．帰納的に

$$\mathrm{P}(A_0 \cap A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathrm{P}(A_0)\, \mathrm{P}(A_1) \cdots \mathrm{P}(A_n)$$

が従い $X_0, X_{t_1} - X_{t_0}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ の独立性を得る． ∎

証明 (定理 0.0.5).

第一段 Dynkin 族を次で定める:

$$\mathscr{D} := \{ A \in \mathscr{F} \ ; \quad \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\, \mathrm{P}(B),\ \forall B \in \sigma(X_t - X_s) \}.$$

いま，任意に $0 = s_0 < \cdots < s_n = s$ を取り固定し

$$\mathscr{A}_{s_0, \cdots, s_n} := \left\{ \bigcap_{i=0}^{n} A_i \ ; \quad A_0 \in \sigma(X_0),\ A_i \in \sigma(X_{s_i} - X_{s_j}),\ i = 1, \cdots, n \right\}$$

により乗法族を定めれば，仮定より $\sigma(X_{s_i} - X_{s_{i-1}})$ と $\sigma(X_t - X_s)$ が独立であるから

$$\mathscr{A}_{s_0,\cdots,s_n} \subset \mathscr{D}$$

が成立し，Dynkin 族定理により

$$\sigma(X_{s_0}, X_{s_1} - X_{s_0}, \cdots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}}) = \sigma\left[\mathscr{A}_{s_0,\cdots,s_n}\right] \subset \mathscr{D} \tag{2}$$

が従う．

第二段 $\sigma(X_{s_0}, X_{s_1} - X_{s_0}, \cdots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}})$ の全体が $\mathscr{F}^X_s$ を生成することを示す．先ず，(1) より

$$\bigcup_{\substack{n\geq 1 \\ s_0<\cdots<s_n}} \sigma(X_{s_0}, X_{s_1} - X_{s_0}, \cdots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}}) \subset \mathscr{F}^X_s \tag{3}$$

が成立する．一方で，任意の $X_r^{-1}(E)$ ($\forall E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$, $0 < r \leq s$) について，

$$\Psi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \ni (x, y) \longmapsto x + y$$

で定める連続写像を用いれば

$$X_r^{-1}(E) = (X_r - X_0 + X_0)^{-1}(E) = \left\{(X_r - X_0, X_0) \in \Psi^{-1}(E)\right\}$$

となり，$X_r^{-1}(E) \in \sigma(X_0, X_r - X_0)$ が満たされ

$$\sigma(X_r) \subset \sigma(X_0, X_r - X_0) \subset \sigma(X_0, X_r - X_0, X_s - X_r) \tag{4}$$

が出る．$\sigma(X_0) \subset \sigma(X_0, X_s - X_0)$ も成り立ち

$$\bigcup_{0\leq r\leq s} \sigma(X_r) \subset \bigcup_{\substack{n\geq 1 \\ s_0<\cdots<s_n}} \sigma(X_{s_0}, X_{s_1} - X_{s_0}, \cdots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}})$$

が従うから，(3) と併せて

$$\mathscr{F}^X_s = \sigma\left[\bigcup_{\substack{n\geq 1 \\ s_0<\cdots<s_n}} \sigma(X_{s_0}, X_{s_1} - X_{s_0}, \cdots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}})\right] \tag{5}$$

が得られる．

第三段 任意の $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = s$ に対し，(1) と (4) より

$$\sigma(X_{s_0}, X_{s_1} - X_{s_0}, \cdots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}}) = \sigma(X_{s_0}, X_{s_1}, \cdots, X_{s_n}) \tag{6}$$

が成り立つ．

第四段 二つの節点 $0 = s_0 < \cdots < s_n = s$ と $0 = r_0 < \cdots < r_m = s$ の合併を $0 = u_0 < \cdots < u_k = s$ と書けば

$$\sigma(X_{s_0}, \cdots, X_{s_n}) \cup \sigma(X_{r_0}, \cdots, X_{r_m}) \subset \sigma(X_{u_0}, \cdots, X_{u_k})$$

が成り立つから

$$\bigcup_{\substack{n\geq 1 \\ s_0<\cdots<s_n}} \sigma(X_{s_0}, X_{s_1}, \cdots, X_{s_n})$$

は交演算で閉じている．従って (2)，(5)，(6) 及び Dynkin 族定理により

$$\mathscr{F}^X_s = \sigma\left[\bigcup_{\substack{n\geq 1 \\ s_0<\cdots<s_n}} \sigma(X_{s_0}, X_{s_1} - X_{s_0}, \cdots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}})\right] = \sigma\left[\bigcup_{\substack{n\geq 1 \\ s_0<\cdots<s_n}} \sigma(X_{s_0}, X_{s_1}, \cdots, X_{s_n})\right] \subset \mathscr{D}$$

が従い定理の主張を得る． ∎

0.1 Kolmogorov の拡張定理

定理 0.1.1 (Daniell, Kolmogorov). Let $(Q_t)_{t\in T}$ be a consistent family of finite-dimensional distributions. Then there is a probability measure P on $\left(\mathbb{R}^{d,[0,\infty)}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{d,[0,\infty)})\right)$, such that (2.2) holds for every $t \in T$.

証明.

第一段 $C \in \mathscr{C}$ について，$C = \left\{ \omega \in \mathbb{R}^{d,[0,\infty)} \ ; \quad (\omega(t_1), \cdots, \omega(t_n)) \in A \right\}$ という表示に対し

$$Q(C) := Q_t(A)$$

により $Q(C)$ を定めると，$Q(C)$ は well-defined であり，Q は $\mathscr{C}$ 上の初等確率測度となる: いま，

$$\begin{aligned} C &= \left\{ \omega \in \mathbb{R}^{d,[0,\infty)} \ ; \quad (\omega(t_1), \cdots, \omega(t_n)) \in A \right\} \\ &= \left\{ \omega \in \mathbb{R}^{d,[0,\infty)} \ ; \quad (\omega(s_1), \cdots, \omega(s_m)) \in B \right\} \end{aligned}$$

という二つの表示があるとする.

case1 s が t の並び替えである場合，或る $\{1, \cdots, n\}$ の全単射 φ が存在して

$$(s_1, \cdots, s_n) = (t_{\varphi(1)}, \cdots, t_{\varphi(n)})$$

と書ける.

$$F : (\mathbb{R}^d)^n \ni x \longmapsto x \circ \varphi \in (\mathbb{R}^d)^n$$

により線型同型写像 F を定めれば

$$\omega \circ t \in A \quad \Leftrightarrow \quad \omega \circ t \circ \varphi = F(\omega \circ t) \in F(A), \quad (\omega \in \mathbb{R}^{d,[0,\infty)})$$

が成り立つから

$$\begin{aligned} \left\{ \omega \in \mathbb{R}^{d,[0,\infty)} \ ; \quad (\omega(t_1), \cdots, \omega(t_n)) \in A \right\} &= \left\{ \omega \in \mathbb{R}^{d,[0,\infty)} \ ; \quad (\omega(t_{\varphi(1)}), \cdots, \omega(t_{\varphi(n)})) \in F(A) \right\} \\ &= \left\{ \omega \in \mathbb{R}^{d,[0,\infty)} \ ; \quad (\omega(s_1), \cdots, \omega(s_m)) \in B \right\} \end{aligned}$$

が従い $B = F(A)$ が出る．F は逆写像も込めて有限次元空間上の線型同型であるから同相であり

$$F(A) \in \mathfrak{B}((\mathbb{R}^d)^n)$$

が満たされ，特に矩形集合に対しては

$$F(E_1 \times \cdots \times E_n) = E_{\varphi(1)} \times \cdots \times E_{\varphi(n)}, \quad (E_i \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d))$$

が成立する．$(Q_t)_{t\in T}$ の consistency により

$$\left\{ E_1 \times \cdots \times E_n \ ; \quad E_i \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d),\ i = 1, \cdots, n \right\} \subset \left\{ E \in \mathfrak{B}((\mathbb{R}^d)^n) \ ; \quad Q_t(E) = Q_s(F(E)) \right\}$$

が成り立ち，Dynkin 族定理より $Q_t(A) = Q_s(B)$ を得る．

case2　$n < m$ かつ $\{t_1, \cdots, t_n\} \subset \{s_1, \cdots, s_m\}$ の場合，或る $\{1, \cdots, m\}$ 上の全単射 ψ が存在して

$$(s_{\psi(1)}, \cdots, s_{\psi(m)}) = (t_1, \cdots, t_n, s_{\psi(n+1)}, \cdots, s_{\psi(m)})$$

を満たす．

$$G : (\mathbb{R}^d)^m \ni x \longmapsto x \circ \psi \in (\mathbb{R}^d)^m$$

により線型同型かつ同相な写像 G を定めれば

$$\omega \circ s \in B \quad \Leftrightarrow \quad \omega \circ s \circ \psi = G(\omega \circ s) \in G(B), \quad (\omega \in \mathbb{R}^{d,[0,\infty)})$$

が成り立つから

$$\begin{aligned}\left\{\, \omega \in \mathbb{R}^{d,[0,\infty)} \ ; \quad (\omega(t_1), \cdots, \omega(t_n)) \in A \,\right\} &= \left\{\, \omega \in \mathbb{R}^{d,[0,\infty)} \ ; \quad (\omega(s_1), \cdots, \omega(s_m)) \in B \,\right\} \\ &= \left\{\, \omega \in \mathbb{R}^{d,[0,\infty)} \ ; \quad (\omega(t_1), \cdots, \omega(t_n), \omega(s_{\psi(n+1)}), \cdots, \omega(s_{\psi(m)})) \in G(B) \,\right\}\end{aligned}$$

が従い $G(B) = A \times (\mathbb{R}^d)^{m-n}$ が出る．$(Q_t)_{t \in T}$ の consistency と case1 の結果を併せて

$$Q_t(A) = Q_{s\circ\psi}(A \times (\mathbb{R}^d)^{m-n}) = Q_{s\circ\psi}(G(B)) = Q_s(B)$$

を得る．

case3　$\{u_1, \cdots, u_k\} \coloneqq \{t_1, \cdots, t_n\} \cup \{s_1, \cdots, s_m\}$ により $u \in T$ を定める．$n \vee m = k$ なら case1 或は case2 に該当するので，$n \vee m < k$ の場合を考える．このとき $\{1, \cdots, k\}$ 上の全単射 φ_1, φ_2 が存在して

$$\begin{aligned}(u_{\varphi_1(1)}, \cdots, u_{\varphi_1(k)}) &= (t_1, \cdots, t_n, u_{\varphi_1(n+1)}, \cdots, u_{\varphi_1(k)}), \\ (u_{\varphi_2(1)}, \cdots, u_{\varphi_2(k)}) &= (s_1, \cdots, s_m, u_{\varphi_2(m+1)}, \cdots, u_{\varphi_2(k)})\end{aligned}$$

を満たす．いま，

$$H : (\mathbb{R}^d)^m \ni x \longmapsto x \circ \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 \in (\mathbb{R}^d)^m$$

により線型同型かつ同相な写像 H を定めれば

$$\omega \circ u \circ \varphi_2 \in B \times (\mathbb{R}^d)^{k-m} \quad \Leftrightarrow \quad \omega \circ u \circ \varphi_1 = H(\omega \circ u \circ \varphi_2) \in H\left(B \times (\mathbb{R}^d)^{k-m}\right), \quad (\omega \in \mathbb{R}^{d,[0,\infty)})$$

が成り立つから，case1 の結果より

$$H\left(B \times (\mathbb{R}^d)^{k-m}\right) = A \times (\mathbb{R}^d)^{k-n}$$

かつ

$$Q_t(A) = Q_{u\circ\varphi_1}\left(A \times (\mathbb{R}^d)^{k-n}\right) = Q_{u\circ\varphi_1}\left(H\left(B \times (\mathbb{R}^d)^{k-m}\right)\right) = Q_{u\circ\varphi_2}\left(B \times (\mathbb{R}^d)^{k-m}\right) = Q_s(B)$$

が出る．

以上より Q は well-defined である．次に Q が初等確率測度であることを示す．実際，

$$\mathbb{R}^{d,[0,\infty)} = \left\{\, \omega \in \mathbb{R}^{d,[0,\infty)} \ ; \quad (\omega(t_1), \cdots, \omega(t_n)) \in (\mathbb{R}^d)^n \,\right\}$$

により $Q(\mathbb{R}^{d,[0,\infty)}) = Q_t((\mathbb{R}^d)^n) = 1$ が従い，また $C_1, C_2 \in \mathscr{C}$，$C_1 \cap C_2 = \emptyset$ に対して

$$\begin{aligned}C_1 &= \left\{\, \omega \in \mathbb{R}^{d,[0,\infty)} \ ; \quad (\omega(t_1), \cdots, \omega(t_n)) \in A_1 \,\right\}, \\ C_2 &= \left\{\, \omega \in \mathbb{R}^{d,[0,\infty)} \ ; \quad (\omega(s_1), \cdots, \omega(s_m)) \in A_2 \,\right\}\end{aligned}$$

という表示があるとして，case1~3 の証明と同様にすれば $Q(C_1 + C_2) = Q(C_1) + Q(C_2)$ が得られる．