

解析学 6 等 レポート

基礎工学研究科システム創成専攻修士 1 年

学籍番号 29C17095

百合川尚学

選択番号

2017 年 8 月 7 日

1 以下の問いに答えよ。

(1) X を空でない集合とし、その部分集合族 \mathcal{F} を次で与える。

$$\mathcal{F} = \{A \subset X \mid A \text{ または } A^c \text{ は可算集合}\}$$

(i) \mathcal{F} は X 上の σ 集合体であることを示せ。

(ii) \mathcal{F} 上の関数 P を次で定義する。

$$P(A) = \begin{cases} 1 & (A^c \text{ は可算集合}) \\ 0 & (A \text{ は可算集合}) \end{cases} \quad (A \in \mathcal{F})$$

解答

- (i) 1. $X^c = \emptyset$ の濃度は 0 であるから $X \in \mathcal{F}$ である。
 2. $A \in \mathcal{F}$ であれば A または A^c が可算集合である。これは A^c または $(A^c)^c$ が可算集合であることと同じであるから $A^c \in \mathcal{F}$ である。
 3. $A_n \in \mathcal{F}$ ($n = 1, 2, \dots$) を取る。 A_n ($n = 1, 2, \dots$) がすべて可算集合であるなら $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ も可算集合であるから $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$ が成り立つ。ある $N \in \mathbb{N}$ について A_N が非可算集合である場合、 A_N^c が可算集合であって

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n^c \subset A_N^c$$

となるから $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n^c \in \mathcal{F}$ であることが判る。二番目の結果によりこの場合も $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$ が成り立つ。以上でいかなる場合も $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$ が成り立つことが示された。

以上で \mathcal{F} が σ 集合体であることの定義を満たしていることが確認された。

(ii) (i) の結果により (X, \mathcal{F}) は可測空間となる。定義された集合関数 P が確率測度の定義を満たしていることを確認する。

1. $X^c = \emptyset$ が可算集合であるから $P(X) = 1$ である。
 2. $\forall A \in \mathcal{F}$ に対し $P(A) = 0$ または 1 でしかないから $0 \leq P(A) \leq 1$ が満たされている。
 3. $A_n \in \mathcal{F}$ ($n = 1, 2, \dots$), $A_n \cap A_m = \emptyset$ ($n \neq m$) となる集合の系 $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に対して、 A_n ($n = 1, 2, \dots$) が全て可算集合であるなら $\sum_{n \in \mathbb{N}} A_n$ も可算集合となるから $P(\sum_{n \in \mathbb{N}} A_n) = 0$ となり、かつ全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して $P(A_n) = 0$ ともなっているから

$$P(\sum_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)$$

が成立する。或る $N \in \mathbb{N}$ について A_N が非可算集合となっている場合、 $n \neq N$ となる $n \in \mathbb{N}$ については $A_n \subset A_N^c$ が成り立つことから、非可算集合は A_N のみとなることに注意する。(i) を示した時と同じ理由で $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n^c$ が可算集合となるから $P(\sum_{n \in \mathbb{N}} A_n) = 1$ であり、

$$1 = P(A_N) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n) = P(\sum_{n \in \mathbb{N}} A_n)$$

が成り立つことから、いかなる場合も

$$P(\sum_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)$$

が成立することが示され、ゆえに P は \mathcal{F} の上で完全加法的である。

以上より P が可測空間 (X, \mathcal{F}) 上の確率測度であることが示された。 ■

(2) (Ω, \mathcal{F}, P) を確率空間とし, $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ とする。

(i) $n \geq 2$ に対して次の等式を示せ：

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} P\left(\bigcap_{m=1}^k A_{i_m}\right) \quad (1)$$

(ii) $n \geq 2$ に対して次の不等式を示せ：

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \geq \sum_{k=1}^n P(A_k) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) \quad (2)$$

解答

(i) 数学的帰納法で証明する。 $n = 2$ の場合

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1 + A_2 \setminus (A_1 \cap A_2)) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

となるから等式 (1) は成立している。 $n (\geq 2)$ 番目まで等式 (1) が成立していると仮定して $n + 1$ 番目を考える。 まず一般に

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) + P\left(A_{n+1} \setminus \bigcup_{k=1}^n A_k\right)$$

が成立している。 ここで右辺の第二項を分解していくと

$$\begin{aligned} P\left(A_{n+1} \setminus \bigcup_{k=1}^n A_k\right) &= P(A_{n+1}) - P\left(\bigcup_{k_1=1}^n A_{k_1} \cap A_{n+1}\right) \\ &= P(A_{n+1}) - \sum_{k_1=1}^n P\left(A_{k_1} \cap A_{n+1} \setminus \bigcup_{k_2=1}^{k_1-1} A_{k_2} \cap A_{n+1}\right) \\ &= P(A_{n+1}) - \sum_{k_1=1}^n P(A_{k_1} \cap A_{n+1}) + \sum_{k_1=1}^n P\left(\bigcup_{k_2=1}^{k_1-1} A_{k_2} \cap A_{k_1} \cap A_{n+1}\right) \\ &= P(A_{n+1}) - \sum_{k_1=1}^n P(A_{k_1} \cap A_{n+1}) + \sum_{k_1=1}^n P\left(\sum_{k_2=1}^{k_1-1} A_{k_2} \cap A_{k_1} \cap A_{n+1} \setminus \bigcup_{k_3=1}^{k_2-1} A_{k_3} \cap A_{k_1} \cap A_{n+1}\right) \\ &= P(A_{n+1}) - \sum_{k_1=1}^n P(A_{k_1} \cap A_{n+1}) + \sum_{k_1=2}^n \sum_{k_2=1}^{k_1-1} P\left(A_{k_2} \cap A_{k_1} \cap A_{n+1} \setminus \bigcup_{k_3=1}^{k_2-1} A_{k_3} \cap A_{k_1} \cap A_{n+1}\right) \\ &= P(A_{n+1}) - \sum_{k_1=1}^n P(A_{k_1} \cap A_{n+1}) + \sum_{k_1=2}^n \sum_{k_2=1}^{k_1-1} P(A_{k_2} \cap A_{k_1} \cap A_{n+1}) \\ &\quad - \sum_{k_1=2}^n \sum_{k_2=1}^{k_1-1} P\left(\bigcup_{k_3=1}^{k_2-1} A_{k_3} \cap A_{k_2} \cap A_{k_1} \cap A_{n+1}\right) \\ &= P(A_{n+1}) - \sum_{k_1=1}^n P(A_{k_1} \cap A_{n+1}) + \sum_{k_1=2}^n \sum_{k_2=1}^{k_1-1} P(A_{k_2} \cap A_{k_1} \cap A_{n+1}) \\ &\quad - \sum_{k_1=3}^n \sum_{k_2=2}^{k_1-1} P\left(\sum_{k_3=1}^{k_2-1} A_{k_3} \cap A_{k_2} \cap A_{k_1} \cap A_{n+1} \setminus \bigcup_{k_4=1}^{k_3-1} A_{k_4} \cap A_{k_2} \cap A_{k_1} \cap A_{n+1}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= P(A_{n+1}) - \sum_{k_1=1}^n P(A_{k_1} \cap A_{n+1}) + \sum_{k_1=2}^n \sum_{k_2=1}^{k_1-1} P(A_{k_2} \cap A_{k_1} \cap A_{n+1}) \\
&\quad - \sum_{k_1=3}^n \sum_{k_2=2}^{k_1-1} \sum_{k_3=1}^{k_2-1} P(A_{k_3} \cap A_{k_2} \cap A_{k_1} \cap A_{n+1}) \\
&\quad - \sum_{k_1=4}^n \sum_{k_2=3}^{k_1-1} \sum_{k_3=2}^{k_2-1} P(\bigcup_{k_4=1}^{k_3-1} A_{k_4} \cap A_{k_3} \cap A_{k_2} \cap A_{k_1} \cap A_{n+1}) \\
&\quad \vdots \\
&= P(A_{n+1}) - \sum_{k_1=1}^n P(A_{k_1} \cap A_{n+1}) + \sum_{k_1=2}^n \sum_{k_2=1}^{k_1-1} P(A_{k_2} \cap A_{k_1} \cap A_{n+1}) \\
&\quad - \sum_{k_1=3}^n \sum_{k_2=2}^{k_1-1} \sum_{k_3=1}^{k_2-1} P(A_{k_3} \cap A_{k_2} \cap A_{k_1} \cap A_{n+1}) \\
&\quad - \sum_{k_1=4}^n \sum_{k_2=3}^{k_1-1} \sum_{k_3=2}^{k_2-1} P(\bigcup_{k_4=1}^{k_3-1} A_{k_4} \cap A_{k_3} \cap A_{k_2} \cap A_{k_1} \cap A_{n+1}) \\
&\quad \dots \\
&\quad + (-1)^n \sum_{k_1=n}^n \sum_{k_2=n-1}^{k_1-1} \dots \sum_{k_{n-1}=2}^{k_{n-2}-1} P(\bigcup_{k_n=1}^{k_{n-1}-1} A_{k_n} \cap \dots \cap A_{k_2} \cap A_{k_1} \cap A_{n+1}) \\
&= P(A_{n+1}) + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} P(\bigcap_{m=1}^k A_{i_m} \cap A_{n+1})
\end{aligned}$$

が成り立つ．上の結果と帰納法の仮定を使えば

$$\begin{aligned}
&P(\bigcup_{k=1}^n A_k) + P(A_{n+1} \setminus \bigcup_{k=1}^n A_k) \\
&= P(\bigcup_{k=1}^n A_k) + P(A_{n+1}) + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} P(\bigcap_{m=1}^k A_{i_m} \cap A_{n+1}) \\
&= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} P(\bigcap_{m=1}^k A_{i_m}) + P(A_{n+1}) + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} P(\bigcap_{m=1}^k A_{i_m} \cap A_{n+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n+1} P(\bigcap_{m=1}^k A_{i_m})
\end{aligned}$$

が成り立つから

$$P(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n+1} P(\bigcap_{m=1}^k A_{i_m})$$

となり， $n+1$ 番目にも等式 (1) が成立していることが示される．以上で数学的帰納法により全ての自然数 $n \geq 2$ で等式 (1) が成立していることが示された．

(ii) これも数学的帰納法による． $n=2$ の場合は

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

により不等式 (2) は成立している． $n (\geq 2)$ 番目まで不等式 (2) が成立していると仮定して $n + 1$ 番目を考えれば

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) &= P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) + P\left(A_{n+1} \setminus \bigcup_{k=1}^n A_k\right) \\
&= P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) + P(A_{n+1}) - P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k \cap A_{n+1}\right) \\
&\geq P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) + P(A_{n+1}) - \sum_{k=1}^n P(A_k \cap A_{n+1}) \\
&\geq \sum_{k=1}^n P(A_k) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + P(A_{n+1}) - \sum_{k=1}^n P(A_k \cap A_{n+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} P(A_k) - \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} P(A_i \cap A_j)
\end{aligned}$$

となり， $n + 1$ 番目にも不等式 (2) が成立していることが示される．以上で数学的帰納法により全ての自然数 $n \geq 2$ で不等式 (2) が成立していることが示された． ■

2 確率測度の列 $(\mu_n)_{n=1}^\infty$ を次で定める.

$$\mu_n(\{k\}) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

- (1) 確率測度 μ_n の特性関数 $\phi_n(\xi)$ を計算せよ.
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(\xi)$ を求めよ.
- (3) 確率測度 μ を次で定める.

$$\mu(\{k\}) = \frac{1}{e \cdot k!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

μ の特性関数 $\phi(\xi)$ を計算し, $\mu_n \Rightarrow \mu$ を示せ.

解答

- (1) $i = \sqrt{-1}$ とする. 任意の $\xi \in \mathbb{R}^1$ に対して

$$\begin{aligned} \phi_n(\xi) &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k} e^{i\xi k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{e^{i\xi}}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k} \\ &= \left(1 + \frac{e^{i\xi} - 1}{n}\right)^n \end{aligned}$$

が成り立つ.

- (2) $\xi \neq 0$ のとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{e^{i\xi} - 1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{e^{i\xi} - 1}{n}\right)^{n/(e^{i\xi} - 1)}\right)^{e^{i\xi} - 1} = e^{e^{i\xi} - 1}$$

が成り立ち, $\xi = 0$ の場合は全ての $n = 1, 2, \dots$ について $\phi_n(0) = 1$ であるから極限も 1 である. 従って全ての $\xi \in \mathbb{R}^1$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(\xi) = e^{e^{i\xi} - 1}$$

となる.

- (3) 任意の $\xi \in \mathbb{R}^1$ に対して

$$\phi(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{e \cdot k!} e^{i\xi k} = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{i\xi})^k}{k!} = e^{e^{i\xi} - 1}$$

が成り立つ. (2) の結果と合わせて ϕ_n は ϕ に各点 $\xi \in \mathbb{R}^1$ で収束しているから, 講義中の定理 2.2.5 により $\mu_n \Rightarrow \mu$ が示された. ■