

解析学 3・関数解析学概論・関数解析Ⅰレポート

基礎工学研究科システム創成専攻修士 1 年

学籍番号 29C17095

百合川尚学

選択番号 [4][5][9][10][11][12][13]

2017 年 8 月 2 日

約束及び定義 (問題用紙引用)

- 係数体は, 特に断らない限り, 複素数体 \mathbb{C} とする. $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$.
- 位相空間 X, Y に対し, $C(X, Y) = \{f \mid f \text{ は } X \text{ から } Y \text{ への連続写像}\}; C(X) = C(X, \mathbb{C})$. $C_b(X) = \{f \in C(X) \mid f \text{ は有界}\}$ は $\|u\| = \sup_{x \in X} |u(x)|$ をノルム (sup-norm) として Banach 空間である.
- ノルム空間 X と Y が同型 $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 線形全単射 $T : X \rightarrow Y$ で $\|Tx\| = \|x\|$ ($\forall x \in X$) なるものが存在する. (T をノルム空間としての同型写像という. 同様に Banach 空間に関する同型の概念を定める.)
- s を複素数列全体のなす線形空間とし, s の部分集合を以下のように定める:

$$l^p = \{a = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in s; \|a\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p)^{1/p} < \infty\}, \quad 1 \leq p < \infty$$

$$l^{\infty} = \{a = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in s; \|a\|_{l^{\infty}} = \sup_n |a_n| < \infty\}, \quad c_0 = \{a = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in s; \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0\}.$$

このとき l^p は $\|\cdot\|_p$ をノルムとして Banach 空間である.

[4]. $k \in \mathbb{N}_0$, $I = [a, b]$ とする. $C^k(I)$ は $\|f\|_k = \sum_{j=0}^k \sup_{x \in I} |f^{(j)}(x)|$ をノルムとして Banach 空間であることを示せ.

証明. 以下の手順で示す.

- (i) $\|\cdot\|_k$ が $C^k(I)$ におけるノルムである.
- (ii) $C^k(I)$ の $\|\cdot\|_k$ による Cauchy 列を取ると, 各 $j (= 0, 1, 2, \dots, k)$ 階導関数列に対し或る I 上の連続関数 f^j が存在し, j 階導関数列は f^j に I 上で一様収束する.
- (iii) 各 $j = 0, 1, 2, \dots, k-1$, について f^j は I 上連続微分可能で $f^{j+1}(x) = \frac{d}{dx} f^j(x)$ ($\forall x \in I$) が成り立っている.

- (i) $f, g \in C^k(I)$ と $\alpha \in \mathbb{C}$ を任意に取る. 正值性 $\|f\|_k \geq 0$ は右辺の各項が ≥ 0 であることから成り立つ. また $\|f\|_k = 0$ の場合, 右辺で $\sup_{x \in I} |f^{(j)}(x)| = 0$ ($j = 0, 1, 2, \dots, k$) が成り立ち, 特に f は I 上で零写像であるとわかるから $f = 0$ である. 逆に f が I 上で零写像ならば全ての導関数が零写像になるため右辺は 0 になり, 従って $\|f\|_k = 0$ となる. 同次性は

$$\|\alpha f\|_k = \sum_{j=0}^k \sup_{x \in I} |(\alpha f^{(j)})(x)| = \sum_{j=0}^k \sup_{x \in I} |\alpha f^{(j)}(x)| = \sum_{j=0}^k \sup_{x \in I} |\alpha| |f^{(j)}(x)| = |\alpha| \sum_{j=0}^k \sup_{x \in I} |f^{(j)}(x)| = |\alpha| \|f\|_k$$

により示される. 三角不等式は

$$\begin{aligned} \|f + g\|_k &= \sum_{j=0}^k \sup_{x \in I} |(f + g)^{(j)}(x)| \\ &= \sum_{j=0}^k \sup_{x \in I} |(f^{(j)} + g^{(j)})(x)| \\ &\leq \sum_{j=0}^k \sup_{x \in I} |f^{(j)}(x) + g^{(j)}(x)| \\ &\leq \sum_{j=0}^k \left(\sup_{x \in I} |f^{(j)}(x)| + \sup_{x \in I} |g^{(j)}(x)| \right) = \|f\|_k + \|g\|_k \end{aligned}$$

により示される.

- (ii) $f_n \in C^k(I)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を $C^k(I)$ の $\|\cdot\|_k$ による Cauchy 列とする. 任意の $\epsilon > 0$ に対し或る $N \in \mathbb{N}$ が存在して全ての $n, m > N$ で

$$\epsilon > \|f_n - f_m\|_k = \sum_{j=0}^k \sup_{x \in I} |f_n^{(j)}(x) - f_m^{(j)}(x)|$$

が成り立っているから, 各 $j = 0, 1, 2, \dots, k$ について $(f_n^{(j)})_{n=1}^{+\infty}$ は sup-norm に関して Cauchy 列をなしている. $(C(I), \text{sup-norm})$ が Banach 空間であることが認められているから, 各 $j = 0, 1, 2, \dots, k$ についてそれぞれ或る I 上の連続関数 f^j が存在して, $(f_n^{(j)})_{n=1}^{+\infty}$ は f^j に sup-norm で収束, 即ち I 上で一様収束する.

- (iii) 上で取った $(f_n)_{n=1}^{+\infty} \subset C^k(I)$ について, 全ての $n \in \mathbb{N}$ と $j = 0, 1, 2, \dots, k-1$ に対して次の関係が成り立っている.

$$f_n^{(j)}(x) - f_n^{(j)}(b) = \int_b^x f_n^{(j+1)}(t) dt, \quad (\forall x \in I).$$

ここで (ii) の結果から, 任意の $x \in I$ と $\epsilon > 0$ に対し或る $N = N(j, \epsilon) \in \mathbb{N}$ が存在して全ての $n > N$ で

$$\left| f^j(x) - f_n^{(j)}(x) \right| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \left| f_n^{(j+1)}(x) - f^{j+1}(x) \right| < \frac{\epsilon}{3(b-a)}$$

が成り立つようにできるから, 同じ n について

$$\begin{aligned} \left| (f^j(x) - f^j(b)) - \int_b^x f^{j+1}(t) dt \right| &= \left| (f^j(x) - f^j(b)) - (f_n^{(j)}(x) - f_n^{(j)}(b)) + \int_b^x f_n^{(j+1)}(t) dt - \int_b^x f^{j+1}(t) dt \right| \\ &\leq \left| f^j(x) - f_n^{(j)}(x) \right| + \left| f^j(b) - f_n^{(j)}(b) \right| + \int_b^x \left| f_n^{(j+1)}(t) - f^{j+1}(t) \right| dt \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + (b-a) \frac{\epsilon}{3(b-a)} = \epsilon \end{aligned}$$

が成り立つ. ϵ は任意だから

$$f^j(x) - f^j(b) = \int_b^x f^{j+1}(t) dt, \quad (\forall x \in I, j = 0, 1, 2, \dots, k-1)$$

が示されたことになる. 右辺は連続関数 f^{j+1} の積分だから左辺 f^j は x に関して微分可能関数 (端点は片側微分を考える) となり, 導関数は f^{j+1} である. ゆえに $f^0 \in C^k(I)$ が示される. 表記を改めて $f := f^0$, $f^{(j)} := f^j$ ($j = 1, 2, \dots, k$) と表せば, (ii) の結果より

$$\|f_n - f\|_k = \sum_{j=0}^k \sup_{x \in I} \left| f_n^{(j)}(x) - f^{(j)}(x) \right| \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)$$

が成り立つことで $C^k(I)$ が $\|\cdot\|_k$ をノルムとして Banach 空間をなしていると示される. ■

[5]. $X = C([0, 1])$ を sup-norm の入った Banach 空間とする. $0 < a < 1$, $Y = \{f \in X; [0, a] \text{ 上で } f(t) = 0\}$ とおく.

- (1) Y が X の閉線形部分空間であることを示せ.
- (2) X/Y と $C([0, a])$ (sup-norm を入れる) は Banach 空間として同型であることを示せ.

証明.

- (1) Y が X の線形部分空間であることは, 任意の $f, g \in Y$ と任意の複素数 $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned}(f + g)(t) &= f(t) + g(t) = 0, \quad (\forall t \in [0, a]) \\ (\alpha f)(t) &= \alpha f(t) = 0, \quad (\forall t \in [0, a])\end{aligned}$$

が成り立つことで示される. 後は sup-norm に関して Y が閉集合となっていることを示せばよい. $f_n \in Y$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を sup-norm に関する Cauchy 列とする. $(C([0, 1]), \text{sup-norm})$ の完備性から $(f_n)_{n=1}^\infty$ は或る $f \in C([0, 1])$ に $[0, 1]$ 上で一様に収束するが, もし或る $x \in [0, a]$ について $|f(x)| > 0$ であるならば, この x において $f_n(x) = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) であることから

$$0 < |f(x)| = |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{t \in [0, 1]} |f_n(t) - f(t)|, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

となり $(f_n)_{n=1}^\infty$ が f に収束することに反する. 従って f も $[0, a]$ 上で 0 でなくてはならず, f は Y に属することになる. これは Y が sup-norm の下で完備ノルム空間となっていることを主張し, 以上より Y は X の閉線形部分空間であると示された.

- (2) X の sup-norm を $\|\cdot\|$ で表し, X を Y で割った商空間 X/Y の元を $[f]$ (代表元 $f \in X$) で表す. Y が閉線形部分空間であるから X/Y は

$$\|[f]\|_{X/Y} := \inf_{g \in Y} \|f - g\|, \quad ([f] \in X/Y)$$

をノルムとしてノルム空間となり, さらに $(X, \|\cdot\|)$ が Banach 空間であるから $(X/Y, \|\cdot\|_{X/Y})$ も Banach 空間となる. 任意の $[f] \in X/Y$ について $f_1, f_2 \in [f]$ は $f_1 - f_2 \in Y$ を満たすから即ち

$$f_1(t) = f_2(t) \quad (\forall t \in [0, a])$$

が成り立っている. ここで

$$\|[f]\|_{X/Y} = \inf_{g \in Y} \|f - g\| = \inf_{g \in Y} \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) - g(t)| = \sup_{t \in [0, a]} |f(t)| \quad (1)$$

が成り立つことを示す. 任意の $g \in Y$ に対して

$$\sup_{t \in [0, a]} |f(t)| = \sup_{t \in [0, a]} |f(t) - g(t)| \leq \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) - g(t)|$$

が成り立つから

$$\sup_{t \in [0, a]} |f(t)| \leq \inf_{g \in Y} \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) - g(t)| = \|[f]\|_{X/Y} \quad (2)$$

の関係がまず示される．後は式 (2) 右辺の \inf を実現する $g \in Y$ の存在を言えばよい．例えば区間 $[a, 1]$ 上で f と $|f(a)|$ の距離を保ち続ける連続関数 g により \inf は実現される．つまり $f(a)$ の正負に応じて

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, a] \\ f(t) - |f(a)| & t \in [a, 1] \end{cases}, \quad (f(a) \geq 0)$$

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, a] \\ f(t) + |f(a)| & t \in [a, 1] \end{cases}, \quad (f(a) < 0)$$

となるような $g \in Y$ を考えればよい． X/Y と $C([0, a])$ が Banach 空間として同型であることを示すために，まず X/Y から $C([0, a])$ への線形全単射が存在することを示す． $[f] (\in X/Y)$ の代表元の定義域を $[0, a]$ に制限した関数は $C([0, a])$ の或る元に一致し， $[f_1] \neq [f_2] ([f_1], [f_2] \in X/Y)$ ならば対応する $C([0, a])$ の元も違う．一方で $C([0, a])$ の任意の元は定義域を $[0, 1]$ に拡張 (例えば $[a, 1]$ 上では適当な一次関数でおく) すれば $X = C([0, 1])$ の元となるから X/Y の或る同値類に属することになる．従って写像 $X/Y \ni [f] \mapsto f|_{[0, a]} \in C([0, a])$ は X/Y から $C([0, a])$ への全単射である．この写像を T と表す．式 (1) により T は $\|[f]\|_{X/Y} = \|f|_{[0, a]}\| = \|T[f]\|$ の意味で等長である．そして T の線型性は

$$T([f] + [h]) = T[f + h] = (f + h)|_{[0, a]} = f|_{[0, a]} + h|_{[0, a]} = T[f] + T[h],$$

$$T(\alpha[f]) = T[\alpha f] = (\alpha f)|_{[0, a]} = \alpha f|_{[0, a]} = \alpha T[f]$$

により示される．ゆえに T は $X/Y \mapsto C([0, a])$ の同型写像であり， X/Y と $C([0, a])$ が Banach 空間として同型であることが示された． ■

[9]. (S, \mathfrak{M}, μ) は σ -有限な測度空間, $X = L^2(S, \mathfrak{M}, \mu) = L^2(\mu)$ とする. 可測関数 $a : S \rightarrow \mathbb{C}$ に対して, X 上の掛け算作用素 M_a を次で定める:

$$D(M_a) = \{u \in X \mid au \in X\}, \quad (M_a u)(x) = a(x)u(x) \quad (x \in S).$$

- (1) $D(M_a)$ が X で稠密であることを示せ.
- (2) $a \in L^\infty(S, \mathfrak{M}, \mu)$ ならば $M_a \in B(X)$ であり, $\|M_a\| = \|a\|_{L^\infty(\mu)}$ が成り立つことを示せ.
- (3) 逆に $M_a \in B(X)$ ならば $a \in L^\infty(S, \mathfrak{M}, \mu)$ であることを示せ.

証明.

- (1) 任意の $v \in X$ に対して $v_n := v \mathbb{1}_{(|a| \leq n)}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) として関数列 $(v_n)_{n=1}^\infty$ を作る. ただし $\mathbb{1}_{(|a| \leq n)}$ は定義関数で $|a(x)| \leq n$ となる $x \in S$ の集合の上で 1, その外では 0 となるものである. 全ての $x \in S$ で $|v_n(x)| \leq |v(x)|$ となるから $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ である. さらに全ての $n \in \mathbb{N}$ について

$$\int_S |a(x)v_n(x)|^2 \mu(dx) = \int_{(|a| \leq n)} |a(x)v(x)|^2 \mu(dx) \leq n^2 \int_S |v(x)|^2 \mu(dx)$$

が成り立つから $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(M_a)$ でもある. X のノルムを $\|\cdot\|_{L^2(\mu)}$ で表せば

$$\|v - v_n\|_{L^2(\mu)}^2 = \int_S |v(x) - v_n(x)|^2 \mu(dx) = \int_S \mathbb{1}_{(|a| > n)}(x) |v(x)|^2 \mu(dx) \quad (3)$$

となり, a は \mathbb{C} 値であるから各点 $x \in S$ で $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{1}_{(|a| > n)}(x) = 0$ が成り立つ. 式 (3) の右辺の被積分関数は n に関係なく可積分関数 $|v|^2$ で抑えられ各点で $n \rightarrow +\infty$ で 0 に収束するから, Lebesgue の収束定理を適用すれば

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|v - v_n\|_{L^2(\mu)}^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_S \mathbb{1}_{(|a| > n)}(x) |v(x)|^2 \mu(dx) = \int_S \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{1}_{(|a| > n)}(x) |v(x)|^2 \mu(dx) = 0$$

が成立する. これはノルム空間 $X = (X, \|\cdot\|_{L^2(\mu)})$ において v の任意の近傍に $D(M_a)$ の元 v_n が存在することを表していて, v は任意に選んでいたから $D(M_a)$ は X で稠密であると示された.

- (2) 任意の $a \in L^\infty(S, \mathfrak{M}, \mu)$ に対して, $\|a\|_{L^\infty(\mu)}$ は

$$\|a\|_{L^\infty(\mu)} = \inf \{b \in [0, +\infty) \mid \mu(\{x \in S \mid |a(x)| > b\}) = 0\}$$

と表される. 特に

$$N_m := \{x \in S \mid |a(x)| \geq \|a\|_{L^\infty(\mu)} + 1/m\}, \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

と置けば $\mu(N_m) = 0$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) であって, μ 零集合 N を

$$N := \bigcup_{m=1}^{\infty} N_m$$

で定めれば

$$|a(x)| \leq \|a\|_{L^\infty(\mu)}, \quad (\forall x \in S \cap N^c) \quad (4)$$

が成り立つ．また $0 < c < \|a\|_{L^\infty(\mu)}$ となるような任意の c については

$$\mu(\{x \in S \mid |a(x)| > c\}) > 0 \quad (5)$$

が成り立つことにも注意しておく．全ての $u \in X$ に対して，(4) により

$$\begin{aligned} \|M_a u\|_{L^2(\mu)}^2 &= \int_S |a(x)u(x)|^2 \mu(dx) \\ &= \int_{S \cap N^c} |a(x)u(x)|^2 \mu(dx) \\ &\leq \int_{S \cap N^c} \|a\|_{L^\infty(\mu)}^2 |u(x)|^2 \mu(dx) \\ &= \int_S \|a\|_{L^\infty(\mu)}^2 |u(x)|^2 \mu(dx) = \|a\|_{L^\infty(\mu)}^2 \|u\|_{L^2(\mu)}^2 \end{aligned}$$

が成り立っていることから， $\|M_a\| \leq \|a\|_{L^\infty(\mu)}$ であり $M_a \in B(X)$ が示される．さらに， (S, \mathfrak{M}, μ) が σ -有限な測度空間であるという条件の下では， $\|M_a\| = \|a\|_{L^\infty(\mu)}$ であることが次のように示される． $\|a\|_{L^\infty(\mu)} = 0$ ならば明らかに M_a は零作用素で $0 = \|M_a\| = \|a\|_{L^\infty(\mu)}$ である． $\|a\|_{L^\infty(\mu)} > 0$ である場合， $\|a\|_{L^\infty(\mu)} > \epsilon > 0$ を満たすような ϵ を任意に取り，

$$G_\epsilon := \{x \in S \cap N^c \mid \|a\|_{L^\infty(\mu)} - \epsilon < |a(x)|\}$$

として μ 可測集合 G_ϵ を作る．(5) により， $\mu(G_\epsilon) > 0$ であることが次で示される．

$$\begin{aligned} \mu(G_\epsilon) &= \mu(\{x \in S \mid \|a\|_{L^\infty(\mu)} - \epsilon < |a(x)|\} \cap N^c) \\ &= \mu(\{x \in S \mid \|a\|_{L^\infty(\mu)} - \epsilon < |a(x)|\}) \quad (\because \mu(N) = 0) \\ &> 0. \quad (\because (5)). \end{aligned}$$

σ -有限の仮定より，単調増大な μ 可測集合列 $S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \cdots$ で $\mu(S_k) < +\infty$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) と $\cup_{k=1}^\infty S_k = S$ を満たすものが存在して

$$0 < \mu(G_\epsilon) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(S_k \cap G_\epsilon)$$

となるから，必ず或る S_k に対して

$$r_\epsilon := \mu(S_k \cap G_\epsilon) > 0$$

となっている．

$$u_\epsilon(x) := \begin{cases} 1/\sqrt{r_\epsilon} & x \in S_k \cap G_\epsilon \\ 0 & x \notin S_k \cap G_\epsilon \end{cases}$$

と定義すれば， $\mu(S_k \cap G_\epsilon) < +\infty$ であるから $u_\epsilon \in X$ であって

$$\|u_\epsilon\|_{L^2(\mu)} = 1$$

となっている．この u_ϵ に対して

$$(\|a\|_{L^\infty(\mu)} - \epsilon)^2 < \int_{S_k \cap G_\epsilon} |a(x)u_\epsilon(x)|^2 \mu(dx) = \int_S |a(x)u_\epsilon(x)|^2 \mu(dx) \leq \|a\|_{L^\infty(\mu)}^2$$

により

$$\|a\|_{L^\infty(\mu)} - \epsilon < \|M_a u_\epsilon\|_{L^2(\mu)} \leq \|a\|_{L^\infty(\mu)}$$

が成り立っているから、先に示した $\|M_a\| \leq \|a\|_{L^\infty(\mu)}$ と合わせて

$$\|a\|_{L^\infty(\mu)} - \epsilon < \sup_{0 \neq u \in X} \frac{\|M_a u\|_{L^2(\mu)}}{\|u\|_{L^2(\mu)}} = \|M_a\| \leq \|a\|_{L^\infty(\mu)}$$

である。 $\epsilon > 0$ は任意に取っていたから、 $\epsilon \rightarrow 0$ で考えれば

$$\|a\|_{L^\infty(\mu)} = \|M_a\|$$

が示されたことになる。

(3) $M_a \in B(X)$ ならば

$$\int_S |a(x)u(x)|^2 \mu(dx) = \|M_a u\|_{L^2(\mu)}^2 \leq \|M_a\|^2 \|u\|_{L^2(\mu)}^2 = \|M_a\|^2 \int_S |u(x)|^2 \mu(dx)$$

が成立している。 (S, \mathfrak{M}, μ) が σ -有限な測度空間であるという条件の下では

$$\mu(\{x \in S \mid |a(x)| > \|M_a\|\}) = 0$$

が成り立つことを示す。これが示されれば μ -零集合を除いて a は有界となるから $a \in L^\infty(S, \mathfrak{M}, \mu)$ が従う。 σ -有限の仮定より、単調増大な μ 可測集合列 $S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \dots$ で $\mu(S_k) < +\infty$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) と $\cup_{k=1}^\infty S_k = S$ を満たすものが存在する。 μ 可測集合

$$G := \{x \in S \mid |a(x)| > \|M_a\|\}$$

について、これが仮に $\mu(G) > 0$ であるとすると

$$0 < \mu(G) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(S_k \cap G)$$

により或る $K \in \mathbb{N}$ が存在して $\mu(S_k \cap G) > 0$ ($\forall k > K$) が成立する。 $k > K$ を満たす k を選んで

$$u(x) = \begin{cases} 1 & x \in S_k \cap G \\ 0 & x \notin S_k \cap G \end{cases}$$

と置けば、 $\mu(S_k \cap G) < +\infty$ であることから $u \in X$ であって、

$$\|u\|_{L^2(\mu)}^2 = \int_S |u(x)|^2 \mu(dx) = \int_{S_k \cap G} |u(x)|^2 \mu(dx) = \mu(S_k \cap G)$$

が成り立っている。 G 上で $|a(x)| > \|M_a\|$ であるから

$$\begin{aligned} \|M_a\|^2 \|u\|_{L^2(\mu)}^2 &= \|M_a\|^2 \int_S |u(x)|^2 \mu(dx) \\ &= \|M_a\|^2 \int_{S_k \cap G} |u(x)|^2 \mu(dx) \\ &< \int_{S_k \cap G} |a(x)u(x)|^2 \mu(dx) \\ &= \int_S |a(x)u(x)|^2 \mu(dx) \\ &\leq \|M_a\|^2 \|u\|_{L^2(\mu)}^2 \end{aligned}$$

となるが、最右辺と最左辺を $\|u\|_{L^2(\mu)}^2$ で割ると

$$\|M_a\| < \|M_a\|$$

と矛盾が出る。従って $\mu(G) = 0$ でなくてはならない。 ■

[10]. X をノルム空間, X_0 をその部分空間とする. $i : X_0 \rightarrow X$ を $i(x) = x (x \in X_0)$ なる包含写像とする. $T : X^* \ni x^* \mapsto x^* \circ i \in X_0^*$ により線型写像を定める.

- (1) T は連続かつ全射であることを示せ.
- (2) X_0 が X で稠密ならば, T はノルム空間としての同型写像であることを示せ.
- (3) X_0 が X で稠密でないならば, T は単射でないことを示せ.

証明. X, X^*, X_0^* におけるノルムをそれぞれ $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_{X^*}, \|\cdot\|_{X_0^*}$ で表現する.

- (1) 任意の $x^* \in X^*$ と $u \in X_0$ に対して

$$|(x^* \circ i)(u)| = |x^*(u)| \leq \|x^*\|_{X^*} \|u\|_X$$

が成り立つから $\|x^* \circ i\|_{X_0^*} \leq \|x^*\|_{X^*} (\forall x^* \in X^*)$ が成立する. 従って

$$\|Tx^*\|_{X_0^*} = \|x^* \circ i\|_{X_0^*} \leq \|x^*\|_{X^*} \quad (\forall x^* \in X^*)$$

となり T が有界作用素であることが示される. T が全射であることは Hahn-Banach の定理による. 任意の $f_0 \in X_0^*$ に対して X 上のセミノルムとして $X \ni x \mapsto \|f_0\|_{X_0^*} \|x\|_X \in \mathbb{C}$ を考えれば

$$|f_0(x)| \leq \|f_0\|_{X_0^*} \|x\|_X \quad (\forall x \in X_0)$$

が成り立っているから, Hahn-Banach の定理が適用されて X 上の線型汎関数 $f \in X^*$ で

$$\begin{cases} |f(x)| \leq \|f_0\|_{X_0^*} \|x\|_X & (\forall x \in X), \\ f(x) = f_0(x) & (\forall x \in X_0) \end{cases}$$

を満たすものが存在する. 明らかに $f \circ i = f_0$ が成り立っているから T が全射であることが示された.

- (2) X_0 が X で稠密であるなら, 任意の $f_0 \in X_0^*$ はノルムを変えずに $f \in X^*$ に一意に拡張されるということが示される. まずはこのことを証明する. これが示されれば, (1) の結果と合わせて

- $T : X \mapsto X_0$ は線型全単射である.
- $\|Tx^*\|_{X_0^*} = \|x^* \circ i\|_{X_0^*} = \|x^*\|_{X^*}$

が成り立つことが示され, T がノルム空間としての同型写像であると判る. X_0 が X で稠密であるということにより, 任意の $x \in X$ に対して $x_k \in X_0 (k = 1, 2, \dots)$ で $\|x_k - x\|_X \rightarrow 0 (k \rightarrow +\infty)$ となるものを取りることができる. 任意に $f_0 \in X_0^*$ を取れば, 任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|f_0(x_m) - f_0(x_n)| \leq \|f_0\|_{X_0^*} \|x_m - x_n\|_X$$

が成り立つから, 右辺が X_0 の Cauchy 列をなすことにより $(f_0(x_n))_{n=1}^{+\infty}$ も \mathbb{C} の Cauchy 列となる. \mathbb{C} の完備性から $(f_0(x_n))_{n=1}^{+\infty}$ は或る $u \in \mathbb{C}$ に収束し, u は $x \in X$ に対して一意に定まる. なぜならば, x への別の収束列 $y_k \in X_0 (k = 1, 2, \dots)$ を取った場合の $(f_0(y_n))_{n=1}^{+\infty}$ の収束

先が $v \in \mathbb{C}$ であるとして, 任意の $n, m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
|u - v| &= |u - f_0(x_n) + f_0(x_n) - f_0(y_m) + f_0(y_m) - v| \\
&\leq |u - f_0(x_n)| + |f_0(x_n) - f_0(y_m)| + |f_0(y_m) - v| \\
&\leq |u - f_0(x_n)| + \|f_0\|_{X_0^*} \|x_n - y_m\|_X + |f_0(y_m) - v| \\
&\leq |u - f_0(x_n)| + \|f_0\|_{X_0^*} (\|x_n - x\|_X + \|x - y_m\|_X) + |f_0(y_m) - v|
\end{aligned}$$

となるから $n, m \rightarrow +\infty$ で右辺は 0 に収束し, $u = v$ が示されるためである. つまり x に u に対応させる関係は $X \rightarrow \mathbb{C}$ の写像となり, この写像を f と表すことにする. f の線型性も次のように示される. 任意の $x, y \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して, x, y への収束列 $(x_k)_{k=1}^{+\infty}, (y_k)_{k=1}^{+\infty} \subset X_0$ を取れば $(\alpha x_k + \beta y_k)_{k=1}^{+\infty}$ が $\alpha x + \beta y$ への収束列となるから

$$\begin{aligned}
|f(\alpha x + \beta y) - \alpha f(x) - \beta f(y)| &= |f(\alpha x + \beta y) - f_0(\alpha x_k + \beta y_k) + \alpha f_0(x_k) + \beta f_0(y_k) - \alpha f(x) - \beta f(y)| \\
&\leq |f(\alpha x + \beta y) - f_0(\alpha x_k + \beta y_k)| + |\alpha f_0(x_k) - \alpha f(x)| + |\beta f_0(y_k) - \beta f(y)| \\
&\leq |f(\alpha x + \beta y) - f_0(\alpha x_k + \beta y_k)| + |\alpha| |f_0(x_k) - f(x)| + |\beta| |f_0(y_k) - f(y)| \\
&\rightarrow 0 \quad (k \rightarrow +\infty)
\end{aligned}$$

が成り立つ. ゆえに $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ ($\forall x, y \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$) である. また f は有界な線型作用素である. なぜなら, 任意に $x \in X$ と x への収束列 $x_k \in X_0$ ($k = 1, 2, \dots$) を取れば, 任意の $\epsilon > 0$ に対し或る $K \in \mathbb{N}$ が存在して全ての $k > K$ について

$$|f(x)| < |f_0(x_k)| + \epsilon, \quad \|x\|_X < \|x_k\|_X + \epsilon / \|f_0\|_{X_0^*}$$

が成り立つようにできるから, この下で

$$|f(x)| < |f_0(x)| + \epsilon < \|f_0\|_{X_0^*} \|x\|_X + 2\epsilon$$

となり $f \in X^*$ であることと $\|f\|_{X^*} \leq \|f_0\|_{X_0^*}$ が判るからである. さらに

$$\|f\|_{X^*} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X=1}} |f(x)| \geq \sup_{\substack{x \in X_0 \\ \|x\|_X=1}} |f(x)| = \sup_{\substack{x \in X_0 \\ \|x\|_X=1}} |f_0(x)| = \|f_0\|_{X_0^*}$$

も成り立つから結局 $\|f\|_{X^*} = \|f_0\|_{X_0^*}$ であると判る. 以上より任意の $f_0 \in X_0^*$ がノルムを変えないまま或る $f \in X^*$ に拡張されることが示された. 拡張の一意性について, f_0 の X^* への別の拡張 g が存在したとする. つまり g は X 上の有界な線型汎関数で X_0 の上では f_0 と一致するものである. g が f に X 上で完全に一致することを示すには f と g が $X \setminus X_0$ で一致することを見ればよい. 任意の $x \in X \setminus X_0$ に対して $x_k \in X_0$ ($k = 1, 2, \dots$) で $x_k \rightarrow x$ ($k \rightarrow +\infty$) となるものを取れば

$$\begin{aligned}
|f(x) - g(x)| &= |f(x) - f(x_k) + g(x_k) - g(x)| \\
&\leq |f(x) - f(x_k)| + |g(x_k) - g(x)| \\
&\leq \|f\|_{X^*} \|x_k - x\|_X + \|g\|_{X^*} \|x_k - x\|_X \\
&\rightarrow 0 \quad (k \rightarrow +\infty)
\end{aligned}$$

が成り立つから $f(x) = g(x)$ ($\forall x \in X \setminus X_0$), すなわち $f(x) = g(x)$ ($\forall x \in X$) が成り立つと示された. 任意の $x^* \in X^*$ は $x^* \circ i \in X_0^*$ を X^* の元に拡張したものであるから, つまり $x^*, y^* \in X^*$

に対して X_0 上で $x^* \circ i = y^* \circ i$ が成り立っているならば拡張の一意性により X 上で $x^* = y^*$ が成り立つから T は単射である. (全射であることは (1) で示した.) またノルムを変えない拡張であるから $\|Tx^*\|_{X_0^*} = \|x^* \circ i\|_{X_0^*} = \|x^*\|_{X^*}$ の意味で T は等長で, 以上で T が $X^* \rightarrow X_0^*$ の線形全単射, すなわち同型写像であることが示された.

- (3) X_0 が X で稠密でない場合, X_0 の $\|\cdot\|_X$ による閉包を $[X_0]^a$ と表せば $X \setminus [X_0]^a \neq \emptyset$ である. 任意の $x^*, y^* \in X^*$ に対して定義域を $[X_0]^a$ に制限したものを $x^*|_{[X_0]^a}, y^*|_{[X_0]^a}$ と表わせればこれは $[X_0]^a$ 上の有界な線型汎関数であり, もちろん $x^*|_{[X_0]^a} \circ i = x^* \circ i$ かつ $y^*|_{[X_0]^a} \circ i = y^* \circ i$ である. 従って (2) の結果により

$$x^* \circ i = y^* \circ i \quad \Leftrightarrow \quad x^*|_{[X_0]^a} = y^*|_{[X_0]^a}$$

が成り立つ. つまり $X \setminus [X_0]^a$ の上での x^*, y^* の値に関係なく, 両者が X_0 の上で一致するための必要十分条件は $[X_0]^a$ の上で一致していることである. T が単射でないことは, $[X_0]^a$ の上では一致し, その外側で一致しない X^* の元の組が存在することで示される. $x^* \in X^*$ を零写像であるとする. x^* に対して上記の性質を満たす $y^* \in X^*$ の存在を Hahn-Banach の定理により示す. $X \setminus [X_0]^a \neq \emptyset$ であるから $w \in X \setminus [X_0]^a$ を取ればこれは $w \neq 0$ でありかつ $d := \inf_{x \in [X_0]^a} \|w - x\|_X > 0$ を満たす. w と $[X_0]^a$ が生成する X の部分空間を

$$L := \{\alpha w + x \mid \alpha \in \mathbb{C}, x \in [X_0]^a\}$$

と表し, L 上の写像 f を

$$f(\alpha w + x) = \alpha d, \quad (\forall \alpha w + x \in L)$$

と定義する. $w \notin [X_0]^a$ により L の元 $\alpha w + x$ の表し方は一意で (つまり $\alpha w + x = \alpha' w + x' \Rightarrow \alpha = \alpha'$ かつ $x = x'$) あるから f が一価関数であることが保証されている. さらに f は明らかに線型性を持ち,

$$|\alpha|d \leq |\alpha| \|w + \alpha^{-1}x\|_X = \|\alpha w + x\|_X \quad (\forall \alpha \in \mathbb{C}, x \in [X_0]^a)$$

により

$$|f(u)| \leq \|u\|_X \quad (\forall u \in L)$$

が成り立つから f は L 上の有界線型汎関数でもある. f の作用素ノルムを $\|f\|_L$ と表せば $|f(u)| \leq \|f\|_L \|u\|_X$ ($\forall u \in L$) が成り立ち, 右辺は明らかに L の上のセミノルムとなっているから, Hahn-Banach の定理により f は X 上の有界な線型汎関数 F に拡張される. (有界性は F が不等式 $|F(u)| \leq \|f\|_L \|u\|_X$ ($\forall u \in X$) を満たすことによる.) F は少なくとも

$$\begin{cases} F(u) = 0 & u \in [X_0]^a, \\ F(u) = \alpha d & u \in L, \alpha \neq 0 \end{cases}$$

を満たす X^* の元であるから, $y^* = F$ と置けば x^*, y^* は $x^* \circ i = y^* \circ i$ であるけれども $x^* \neq y^*$ 満たす X^* の元の組である. 以上で T が単射でないことが示された. ■

[11].

- (1) c_0 は l^∞ の閉線形部分空間であることを示せ.
- (2) l^∞ と c_0 が可分であるかどうか判定せよ.

証明.

- (1) まず $c_0 \subset l^\infty$ であることを示す. $\forall a = (a_n)_{n=1}^\infty \in c_0$ は収束点列である. 任意の $\epsilon > 0$ に対して或る $N \in \mathbb{N}$ を取れば, N 以降の $n \in \mathbb{N}$ については $|a_n| < \epsilon$ で抑えられるから

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \leq \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, \epsilon\} < +\infty$$

が成り立ち $a \in l^\infty$ が判る. 従って $c_0 \subset l^\infty$ である. つぎに c_0 が線型空間 l^∞ の線形部分空間であることを示す. 任意の $a = (a_n)_{n=1}^\infty, b = (b_n)_{n=1}^\infty \in c_0, \alpha \in \mathbb{C}$ に対し

$$\begin{aligned} |a_n + b_n| &\leq |a_n| + |b_n| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow +\infty), \\ |\alpha a_n| &= |\alpha| |a_n| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow +\infty) \end{aligned}$$

が成り立つことにより $a + b \in c_0$ と $\alpha a \in c_0$ が示される. 従って c_0 は l^∞ の線形部分空間である. 最後に c_0 が l^∞ で閉集合となっていることを示す. l^∞ は $\|\cdot\|_{l^\infty}$ をノルムとして Banach 空間となっているから, その部分空間である c_0 が $\|\cdot\|_{l^\infty}$ をノルムとして Banach 空間をなしていることを示せばよい. $a^{(n)} = (a_m^{(n)})_{m=1}^\infty \in c_0$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) を $\|\cdot\|_{l^\infty}$ に関する Cauchy 列とする. ($l^\infty, \|\cdot\|_{l^\infty}$) が完備であるから, $(a^{(n)})_{n=1}^\infty$ は或る $a^* = (a_m^*)_{m=1}^\infty \in l^\infty$ に m に関して一様に収束している. つまり任意の $\epsilon > 0$ に対して或る $N \in \mathbb{N}$ が存在して, 全ての $n > N$ について

$$\|a^{(n)} - a^*\|_{l^\infty} = \sup_{m \in \mathbb{N}} |a_m^{(n)} - a_m^*| < \epsilon \quad (6)$$

が成り立っている. $a^* = (a_m^*)_{m=1}^\infty$ が c_0 の元であることは帰謬法で示す. $a^* \notin c_0$ であると仮定すると, 或る $\delta > 0$ に対しては, いかなる $N \in \mathbb{N}$ を取っても必ず $n > N$ なる自然数で

$$|a_n^*| \geq \delta$$

を満たすものが存在する. $(a_m^*)_{m=1}^\infty$ の部分列 $(a_{m_k}^*)_{k=1}^\infty$ を

$$|a_{m_k}^*| \geq \delta, \quad (m_k < m_{k+1}, k = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすものとして取ることが出来て, (6) により或る $N_\delta \in \mathbb{N}$ を取れば, 全ての $n > N_\delta$ で

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} |a_{m_k}^{(n)} - a_{m_k}^*| < \frac{\delta}{2}$$

が成立することになる. $n > N_\delta$ 番目の数列 $a^{(n)} = (a_m^{(n)})_{m=1}^\infty$ は c_0 の元であるから, 或る $N_\delta^n \in \mathbb{N}$ が存在して全ての $p > N_\delta^n$ に対し

$$|a_p^{(n)}| < \frac{\delta}{2}$$

となるはずであるが, $m_1 < m_2 < m_3 < \dots \rightarrow +\infty$ であるから $m_k > N_\delta^n$ となるような添数 m_k が存在してしまい,

$$\frac{\delta}{2} \leq |a_{m_k}^*| - \frac{\delta}{2} < |a_{m_k}^{(n)}| < \frac{\delta}{2}$$

と矛盾が出る．従って $a^* \in c_0$ であるべきで，これは c_0 が $\|\cdot\|_\infty$ をノルムとして完備であることを示したことになる．ゆえに c_0 は l^∞ の閉線形部分空間である．

- (2) 結論は， l^∞ は可分ではなく c_0 は可分である．順番に示す． l^∞ の部分集合として 0 と 1 のみで成る数列全体

$$M := \{a \in l^\infty \mid a = (a_n)_{n=1}^{+\infty}, a_n \in \{0, 1\}, n = 1, 2, 3, \dots\}$$

を考える．また任意の $a = (a_n)_{n=1}^\infty, b = (b_n)_{n=1}^\infty \in M$ に対し

$$\|a - b\|_{l^\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n| = \begin{cases} 1 & (a \neq b) \\ 0 & (a = b) \end{cases}$$

が成り立つから， M の異なる 2 元の $\|\cdot\|_{l^\infty}$ による距離は 1 で固定されている．もし l^∞ が可分であるとすれば， $\|\cdot\|_{l^\infty}$ に関して l^∞ で稠密な可算部分集合 C が存在することになる．任意の $a \in M$ に対してその $1/2$ 近傍 (sup-norm) の内部に C の元が存在していることになるから，そのうちの一つを c_a と表し対応を付ける． $a \in M$ に対応する $c_a \in C$ は他の M の元の $1/2$ 近傍に属することはない．もし c_a が或る $a \neq b \in M$ の $1/2$ 近傍に入ると

$$1 = \|a - b\|_{l^\infty} \leq \|a - c_a\|_{l^\infty} + \|b - c_a\|_{l^\infty} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

と矛盾ができるからである．即ち M から C への対応関係 $M \ni a \mapsto c_a \in C$ は単射である．ここで M の濃度 $2^{\mathbb{N}}$ が連続体濃度であることに注意すれば，単射の存在により C の濃度は連続体濃度以上で C が可算集合であることに反する．従って l^∞ は可分ではない．一方で c_0 は $\|\cdot\|_{l^\infty}$ をノルムとして可分なノルム空間をなす． c_0 の可算部分集合を

$$S := \left\{ b \in c_0 \mid b = (\alpha_n + i\beta_n)_{n=1}^{+\infty}, \begin{cases} \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{Q}, & n = 1, 2, \dots, N, \\ \alpha_n = \beta_n = 0, & n \geq N + 1, \end{cases} (N = 1, 2, 3, \dots) \right\}$$

として取る．ただし i は $i^2 = -1$ なる虚数単位で \mathbb{Q} は有理数全体である．任意の $a = (a_n)_{n=1}^{+\infty} \in c_0$ について，任意の正数 $\epsilon > 0$ に対して或る $N \in \mathbb{N}$ を取れば全ての $n > N$ で

$$|a_n| < \epsilon$$

が成り立つから，後は $(a_n)_{n=1}^N$ の部分で

$$\sup_{n=1,2,\dots,N} |a_n - b_n| < \epsilon$$

となるように S の元 $b = (b_n)_{n=1}^{+\infty}$ ($b_n = 0, n > N$) を取れば

$$\|a - b\|_{l^\infty} < \epsilon$$

が成り立つ．即ち S が c_0 において $\|\cdot\|_{l^\infty}$ に関して稠密であるとわかり， c_0 が可分であると示された．

[12]. $a = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in l^1$ に対して $T_a : c_0 \mapsto \mathbb{C}$ を次で定める:

$$T_a(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \quad (x = (x_n) \in c_0).$$

- (1) $\forall a = (a_n) \in l^1, T_a \in c_0^*$ かつ $\|T_a\| = \|a\|_{l^1}$ であることを示せ.
- (2) $T : l^1 \ni a \mapsto T_a \in c_0^*$ は Banach 空間としての同系写像であることを示せ.

証明.

- (1) 設問 [11] の結果により, T_a の定義域である c_0 は $\|\cdot\|_{l^\infty}$ をノルムとして l^∞ の閉線型部分空間であり, よって Banach 空間である. このことに留意して以下進む. $a = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in l^1$ を任意に取って固定する. 任意の $x = (x_n) \in c_0$ に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \|x\|_{l^\infty} = \|a\|_{l^1} \|x\|_{l^\infty} < +\infty \quad (7)$$

となり級数 $T_a(x)$ ($\forall x \in c_0$) は有限確定するから, 任意の $x = (x_n), y = (y_n) \in c_0, \alpha \in \mathbb{C}$ に対して以下に示す式変形が正当化される.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n x_n + a_n y_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n y_n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha a_n x_n = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n, \quad \left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| |x_n|.$$

従って任意に $x = (x_n), y = (y_n) \in c_0$ と $\alpha \in \mathbb{C}$ を取れば,

$$\begin{aligned} T_a(x+y) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n x_n + a_n y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n = T_a x + T_a y, \\ T_a(\alpha x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\alpha x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \alpha) x_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n) x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha (a_n x_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = \alpha T_a(x) \end{aligned}$$

により T_a の線型性が示されるから, T_a は $c_0 \rightarrow \mathbb{C}$ の線型汎関数である. 有界性は式 (7) により

$$|T_a(x)| \leq \|a\|_{l^1} \|x\|_{l^\infty}$$

から $\|T_a\| \leq \|a\|_{l^1}$ となるとわかる. ゆえに $T_a \in c_0^*$ ($\forall a \in l^1$) である. また $\|T_a\| = \|a\|_{l^1}$ について, $a = 0$ の場合は T_a が零作用素になるから明らかに成り立つ. $a \neq 0$ の場合, 任意の $\|a\|_{l^1} > \epsilon > 0$ に対して或る $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\|a\|_{l^1} - \epsilon < \sum_{n=1}^N |a_n|$$

とできる. $x \in c_0$ を

$$x_n = \begin{cases} \overline{a_n}/|a_n| & a_n \neq 0, \text{ and } n \leq N \\ 0 & a_n = 0, \text{ or } n > N \end{cases}$$

となっているもので取れば,

$$\|a\|_{l^1} - \epsilon < \sum_{n=1}^N |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = T_a(x) = |T_a(x)|$$

が成立することになる． $\|x\|_{l^\infty} = 1$ であることに注意すれば

$$\|a\|_{l^1} - \epsilon < T_a(x) = \frac{|T_a(x)|}{\|x\|_{l^\infty}} \leq \sup_{0 \neq y \in c_0} \frac{|T_a(y)|}{\|y\|_{l^\infty}} = \|T_a\| \leq \|a\|_{l^1}$$

が成り立ち， ϵ が任意であるから， $a = 0$ の場合と合わせて $\|T_a\| = \|a\|_{l^1}$ ($\forall a \in l^1$) が示された．

- (2) まず， l^1 は $\|\cdot\|_{l^1}$ をノルムとして Banach 空間となり， c_0^* は T_a の値域 \mathbb{C} が Banach 空間であるから作用素ノルムにより Banach 空間となっている．写像 T が

$$\|Ta\| = \|T_a\| = \|a\|_{l^1} \quad (\forall a \in l^1)$$

の意味で等長であることは (1) で示してあるから，後は T が線型全単射であることを証明すればよい．任意の $a = (a_n), b = (b_n) \in l^1$, $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)x_n &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n x_n + b_n x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n, \\ \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n)x_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(a_n x_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \end{aligned}$$

が成り立つから

$$\begin{aligned} T(a+b) &= T_{a+b} = T_a + T_b = Ta + Tb \\ T(\alpha a) &= T_{\alpha a} = \alpha T_a = \alpha Ta \end{aligned}$$

も成り立つことにより T の線型性が示される．また $a = (a_n), b = (b_n) \in l^1$ に対して， $a \neq b$ であるなら或る $N \in \mathbb{N}$ 番目で $a_N \neq b_N$ となっているはずであるから，

$$x_N = \begin{cases} 1 & n = N \\ 0 & n \neq N \end{cases}$$

となる $x = (x_n) \in c_0$ に対して

$$T_a(x) = a_N \neq b_N = T_b(x)$$

となり， T が単射であることが示される．最後に T が全射であることを示す．任意に $L \in c_0^*$ を取る．或る $a \in l^1$ に対して L が T_a に一致することを見ればよい．Kronecker のデルタを用いて

$$e_n := (\delta_{jn})_{j=1}^{\infty}$$

で表現される e_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) は c_0 の元であり，各 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して

$$a_n := L(e_n) \tag{8}$$

とおく．任意の $x = (x_n) \in c_0$ に対して

$$x^{(N)} = \sum_{n=1}^N x_n e_n, \quad (N = 1, 2, 3, \dots)$$

として作られる数列の族 $(x^{(N)})_{N=1}^{\infty}$ は l^{∞} において収束し, $x^{(N)} \rightarrow x (N \rightarrow +\infty)$ が成り立つ. これは $x = (x_n)$ が収束数列であることによる. 任意の $\epsilon > 0$ に対して或る $N \in \mathbb{N}$ を選べば

$$|x_n| < \epsilon, \quad (\forall n > N)$$

が成り立つから, $n > N$ なる任意の自然数 n に対して

$$\|x - x^{(N)}\|_{l^{\infty}} = \sup_{m>n} |x_m| < \epsilon$$

となり, $x^{(N)} \rightarrow x (N \rightarrow +\infty)$ が示されるのである. L が有界線型汎関数であることも併せれば

$$|L(x) - L(x^{(N)})| \leq \|L\| \|x - x^{(N)}\|_{l^{\infty}} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow +\infty)$$

により

$$L(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} L(x^{(N)}) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N L(x_n e_n) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N a_n x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n \quad (\forall x \in c_0)$$

が成り立つ. 後は (8) で定義した複素数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ が l^1 に属していることを示せば, 写像 $L: c_0 \rightarrow \mathbb{C}$ が $T_a: c_0 \rightarrow \mathbb{C}$ に一致していると証明される. これは次のように示される. $n \leq M$ を満たす少なくとも一つの $n \in \mathbb{N}$ については $a_n \neq 0$ となるように十分大きいところの $M \in \mathbb{N}$ を取って, この M に対して $x = (x_n) \in c_0$ として

$$x_n = \begin{cases} \overline{a_n}/|a_n| & a_n \neq 0, \text{ and } n \leq M \\ 0 & a_n = 0, \text{ or } n > M \end{cases}$$

となるものを取れば,

$$L(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N a_n x_n = \sum_{n=1}^M |a_n|$$

が成り立つ. $\|x\|_{l^{\infty}} = 1$ であることに注意すれば

$$\sum_{n=1}^M |a_n| = L(x) = |L(x)| \leq \|L\| \|x\|_{l^{\infty}} = \|L\|$$

となる. M は任意に大きく取って問題ないから,

$$\sum_{n=1}^{M'} |a_n| \leq \|L\|, \quad (\forall M' \geq M)$$

が成り立ち, 従って

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \|L\|$$

となることにより $a \in l^1$ であることが示された. ■

[13]. $1 < p < \infty$ とする. l^p の点列 $x(1), x(2), x(3), \dots$ (ただし $x(j) = (x(j)_n)_{n=1}^\infty$) と $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in l^p$ に対し, 次の (i), (ii) が同値であることを示せ:

- (i) $w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x(j) = x.$
- (ii) $\{x(j); j \in \mathbb{N}\}$ は有界でかつ $\forall n \in \mathbb{N} \lim_{j \rightarrow \infty} x(j)_n = x_n.$

証明. l^p の共役空間, 第二共役空間の作用素ノルムをそれぞれ $\|\cdot\|_{(l^p)^*}$, $\|\cdot\|_{(l^p)^{**}}$ と表す.
 l^p の共役空間 まず l^p の共役空間の任意の元 $f \in (l^p)^*$ が或る $v = (v_n)_{n=1}^\infty \in l^q$ ($1/p + 1/q = 1$) に対応して

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n v_n, \quad (x = (x_n)_{n=1}^\infty \in l^p)$$

で表現されることを示す. Kronecker のデルタを用いて

$$e_n := (\delta_{jn})_{j=1}^\infty$$

で表現される e_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) は l^p の元であり, 各 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して

$$v_n := f(e_n)$$

とおく. 任意の $x = (x_n) \in l^p$ に対して

$$x^{(N)} = \sum_{n=1}^N x_n e_n, \quad (N = 1, 2, 3, \dots)$$

として作られる数列の族 $(x^{(N)})_{N=1}^\infty$ は l^p において収束し $x^{(N)} \rightarrow x$ ($N \rightarrow +\infty$) が成り立つ. これは級数の収束を考えれば

$$\|x - x^{(N)}\|_{l^p}^p = \sum_{n=N+1}^{+\infty} |x_n|^p \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow +\infty)$$

が成り立つからである. f が有界線型汎関数であることも併せれば

$$|f(x) - f(x^{(N)})| \leq \|f\|_{(l^p)^*} \|x - x^{(N)}\|_{l^p} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow +\infty)$$

により

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} f(x^{(N)}) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N f(x_n e_n) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N x_n v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n v_n \quad (\forall x \in l^p) \quad (9)$$

が成り立つ. 後は上で定義した複素数列 $v = (v_n)_{n=1}^\infty$ が l^q に属していることを示せばよい. $v = 0$ の場合は明らかに $v \in l^q$ であるから $v \neq 0$ である場合を考える. 各 $n \in \mathbb{N}$ について

$$v_n = |v_n| e^{\sqrt{-1}\theta_n}$$

が成り立つように $\theta_n \in \mathbb{R}^1$ を一つ選ぶ. $v = (v_n)_{n=1}^{+\infty}$ に対して, $n \leq N$ を満たす少なくとも一つの $n \in \mathbb{N}$ については $v_n \neq 0$ となるように, 十分大きいところの $N \in \mathbb{N}$ を任意に取り,

$$w_n = \begin{cases} |v_n|^{q-1} e^{-\sqrt{-1}\theta_n} & (n = 1, 2, \dots, N), \\ 0 & (n = N+1, N+2, \dots) \end{cases}$$

として複素数列 $w = (w_n)_{n=1}^{+\infty}$ を作る. 有限個を除いて 0 となる数列だから $w \in l^p$ であり,

$$\|w\|_p^p = \sum_{n=1}^N |w_n|^p = \sum_{n=1}^N |v_n|^q$$

が成り立っていることにより, 式 (9) の結果と合わせて

$$f(w) = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n v_n = \sum_{n=1}^N |v_n|^q = \left(\sum_{n=1}^N |v_n|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{n=1}^N |v_n|^q \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^N |v_n|^q \right)^{\frac{1}{q}} \|w\|_p$$

と表現できる. f が有界線型作用素であることにより

$$\left(\sum_{n=1}^N |v_n|^q \right)^{\frac{1}{q}} \|w\|_p \leq \|f\|_{(l^p)^*} \|w\|_p$$

となるから, 十分大きな任意の $N \in \mathbb{N}$ について

$$\sum_{n=1}^N |v_n|^q \leq \|f\|_{(l^p)^*}^q$$

が成り立つことになるから,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |v_n|^q \leq \|f\|_{(l^p)^*}^q$$

が示され $v \in l^q$ であることがわかる.

(i) \Rightarrow (ii) 今, 各 $f \in (l^p)^*$ に対して

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} f(x(j)) = f(x) \quad (10)$$

が成り立っている. ここで Banach 空間 $(l^p)^*$ 上で一様有界性の原理を適用するために以下のものを導入する. 任意の $x \in l^p$ に対し, $(l^p)^* \rightarrow \mathbb{C}$ への写像を

$$T_x : (l^p)^* \ni f \mapsto f(x) \in \mathbb{C}$$

と定義して対応させる. 任意の $f, g \in (l^p)^*$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して

$$T_x(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)(x) = (\alpha f)(x) + (\beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha T_x(f) + \beta T_x(g)$$

が成り立つことにより T_x は $(l^p)^*$ 上の線型汎関数であり,

$$|T_x(f)| = |f(x)| \leq \|f\|_{(l^p)^*} \|x\|_p$$

により T_x は有界作用素である. 従って T_x は (l^p) の第二共役空間 $(l^p)^{**}$ の元であると判る.

また $\|T_x\|_{(l^p)^{**}} = \|x\|_p$ であることが次のように示される:

$$\|T_x\|_{(l^p)^{**}} = \sup_{0 \neq f \in (l^p)^*} \frac{|T_x(f)|}{\|f\|_{(l^p)^*}}$$

の右辺が $\|x\|_p$ に一致することを示せばよい.

$$\|f\|_{(l^p)^*} = \sup_{0 \neq x \in l^p} \frac{|f(x)|}{\|x\|_p}$$

であるから当然零写像を除く全ての f に対して $\|x\|_{l^p} \geq |f(x)|/\|f\|_{(l^p)^*}$ が成り立っているが、 x が生成する部分空間上で $f_0(\alpha x) = \alpha \|x\|_{l^p}$ ($\forall \alpha \in \mathbb{C}$) となる有界線型汎関数 f_0 (作用素ノルムは 1) を Hahn-Banach の定理でノルムを ≤ 1 で保ったまま l^p 上の線型汎関数まで拡張した写像 f' に対し $|f'(x)| = \|x\|_{l^p}$ と $\|f'\|_{(l^p)^*} = 1$ (x の生成する部分空間の上では $|f_0(x)| = |f'(x)| \leq \|f'\|_{(l^p)^*} \|x\|_{l^p}$ により拡張によりノルムが小さくなることはないため) が成り立つから、 f' については不等式 $\|x\|_{l^p} \geq |f(x)|/\|f\|_{(l^p)^*}$ の等号が成立し

$$\|x\|_{l^p} = \sup_{0 \neq f \in (l^p)^*} \frac{|T_x(f)|}{\|f\|_{(l^p)^*}} = \|T_x\|_{(l^p)^{**}} \quad (11)$$

が成り立つことになる。 $l^p \ni x \mapsto T_x \in (l^p)^{**}$ を用いれば、式 (10) は

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} T_{x(j)}(f) = T_x(f) \quad (\forall f \in (l^p)^*)$$

と書き直せる。各 $f \in (l^p)^*$ ごとに $|T_{x(j)}(f)|$ ($j = 1, 2, \dots$) が有界となるから、一様有界性の原理が適用されて

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \|T_{x(j)}\|_{(l^p)^{**}} < +\infty$$

が成り立つことになる。これは式 (11) によって

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \|x(j)\|_{l^p} < +\infty$$

が成り立っていることと同じであるから、以上で $\{x(j); j \in \mathbb{N}\}$ が有界であることが示された。次に任意の $n \in \mathbb{N}$ で $\lim_{j \rightarrow \infty} x(j)_n = x_n$ が成り立つことを示す。任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、Kronecker のデルタを用いて

$$v_n := (\delta_{ni})_{i=1}^{+\infty}$$

と表される数列 $v_n \in l^q$ に対し

$$f_{v_n}(u) = \sum_{i=1}^{+\infty} u_i \delta_{ni} \quad (\forall u = (u_i)_{i=1}^{+\infty} \in l^p)$$

で定義される f_{v_n} は $(l^p)^*$ の元であり、弱収束の仮定により

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} |f_{v_n}(x(j)) - f_{v_n}(x)| = \lim_{j \rightarrow +\infty} |x(j)_n - x_n| = 0$$

が成り立つ。これにより任意の $n \in \mathbb{N}$ で $\lim_{j \rightarrow \infty} x(j)_n = x_n$ が成り立つことが示された。

(ii) \Rightarrow (i) $x(j)$ が有界であるから、或る正数 M が存在して

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \|x(j)\|_{l^p} \leq M$$

が成り立っている。即ち

$$\sup_{j, n \in \mathbb{N}} |x(j)_n| < +\infty$$

が成り立っていることになる。また $\forall n \in \mathbb{N} \lim_{j \rightarrow \infty} x(j)_n = x_n$ の意味は $n \in \mathbb{N}$ に関して $x(j)$ が x に各点収束しているということである。 $f \in (l^p)^*$ を任意に取れば、 $f(x(j))$, $f(x)$ は或る $v = (v_n)_{n=1}^{\infty} \in l^q$ を用いて

$$f(x(j)) = \sum_{n=1}^{\infty} x(j)_n v_n, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n v_n$$

と表現できる．測度空間 $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \nu)$ ($\nu(n) = \nu_n$) における積分の収束を考えていると見做せば，Lebesgue の優収束定理を適用することにより

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f(x(j)) = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} x(j)_n \nu_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{j \rightarrow \infty} x(j)_n \nu_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \nu_n = f(x)$$

が成り立つ． $f \in (l^p)^*$ は任意に取っているから $w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x(j) = x$ が示されたことになる． ■

参考文献

- [1] 伊藤・黒田・藤田, 関数解析, 岩波基礎数学選書, 2009.