確率解析レポート

基礎工学研究科システム創成専攻修士 1 年
学籍番号 29C17095
百合川尚学

2017 年 7 月 26 日

以下に定義する Brown 運動が存在する確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ を基礎に考える．

定義 (Brown 運動の講義における定義 (講義資料引用))． μ を $\mathbb{R}^N$ 上の分布 (i.e.Borel 確率測度) とする．確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 上の $\mathbb{R}^N$-値確率過程 $B = (B_t)_{t\geq 0}$ で以下を満たすものを，初期分布 μ の N 次元 Brown 運動という．とくに，μ が $x \in \mathbb{R}^N$ の Dirac 測度 δ_x のとき，B は x から出発する N 次元 Brown 運動と呼ばれる．

(i) 任意の $\omega \in \Omega$ に対して，$[0, \infty) \ni t \longmapsto B_t(\omega) \in \mathbb{R}^N$ は連続.

(ii) 任意の $0 \leq s < t$ に対して $B_t - B_s$ は $\mathcal{F}_s^B = \sigma(B_u \ : \ u \leq s)$ と独立.

(iii) 任意の $0 \leq s < t$ に対して $B_t - B_s$ は平均ベクトル 0，共分散行列 $(t-s)I_N$ の N 次元 Gauss 型確率変数である．ここで I_N は N 次元単位行列を表す.

(iv) $\mathrm{P}_{B_0} = \mu$.

定義 (Gauss 型確率変数 (講義資料引用))． $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 上の $\mathbb{R}^N$ 値確率変数 X が平均ベクトル 0，共分散行列 $(t-s)I_N$ の Gauss 型確率変数とは，任意の $0 \leq s < t$ と $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ に対して

$$\mathrm{P}(X \in E) = (2\pi(t-s))^{-\frac{N}{2}} \int_E \exp\left(-\frac{|x|^2}{2(t-s)}\right) dx$$

が成り立つことである．ここで記号 dx は N 次元 Lebesgue 測度による積分の記号を表し，$x = {}^t(x_1, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ に対して $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_N^2}$ とする．

1 レポート課題その 1

定理 3.8 の Brown 運動の性質 (1), (2), (3) を示せ．

(定理 3.8)． $B = (B_t)$ を原点から出発する N-次元 Brown 運動とするとき，いかが成り立つ．

(1) (回転不変性) 任意の $R \in O(N)$ に対して $RB = (RB_t)$ は原点から出発する Brown 運動である．ただし，$O(N)$ は N 次直交行列全体で Rx はベクトル x に左から行列 R をかけることいを意味する．

(2) (スケール則) 任意の $c > 0$ に対して $((1/\sqrt{c})B_{ct})$ は原点から出発する Brown 運動である．

(3) 任意の $h > 0$ に対して $(B_{t+h} - B_h)$ は原点から出発する Brown 運動である．

(4) B の各座標が定める実数値確率過程を $B_i = (B_i(t))$ $(i = 1, 2, \cdots, N)$ とすると，B_i $(i = 1, 2, \cdots, N)$ は独立な 1 次元 Brown 運動である．逆に，独立な 1 次元 Brown 運動 B_i $(i = 1, 2, \cdots, N)$ が与えられたとき $B(t) = {}^t(B_1(t), \cdots, B_N(t))$ とおくと $(B(t))$ は N 次元 Brown 運動である．

証明.

(1) 上に載せた定義の番号の順番に照合していく．(i) について，任意の N 次直交行列 R は，通常の Euclid ノルムの入ったノルム空間 $\mathbb{R}^N$(通常の位相空間としての $\mathbb{R}^N$ に同じ) において

$\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ の有界な線型作用素である．即ち $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ の連続写像であり，連続写像の合成である

$$[0,\infty) \ni t \longmapsto RB_t(\omega) \in \mathbb{R}^N, \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

もまた連続写像であるから，(i) は満たされている．次に (ii) を示す．$\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ は $\mathbb{R}^N$ の Borel 集合族を表すとする．まずは任意の $t \leq 0$ に対して

$$\left\{(RB_t)^{-1}(E) \;\middle|\; E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)\right\} = \left\{B_t^{-1}(E) \;\middle|\; E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)\right\} \tag{1}$$

が成り立つことを示す．これは次の理由による．任意の N 次直交行列 R は，通常の Euclid ノルムの入ったノルム空間 $\mathbb{R}^N$ において $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ の有界な線型作用素である．即ち $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ の連続写像であり，任意の Borel 集合 $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ を $\mathbb{R}^N$ の Borel 集合に引き戻す．また R が $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ の全単射であること (全射，単射であることは R の正則性により示される，つまり任意の $y \in \mathbb{R}^N$ に対して $Rx = y$ を満たすような x は $R^{-1}y$ であり，$Rx = Ry$ ならば $R(x-y) = 0$ の両辺に R^{-1} をかけて $x = y$ が出る．) と $\mathbb{R}^N$ の完備性により関数解析の値域定理が適用され，R の逆写像 R^{-1} もまた $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ の有界な線型作用素である．従って任意の Borel 集合の R による像は $\mathbb{R}^N$ の Borel 集合となる．以上より任意の Borel 集合 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ に対して

$$\begin{aligned}
(RB_t)^{-1}(A) &= B_t^{-1}\left(R^{-1}(A)\right) \in \left\{B_t^{-1}(E) \;\middle|\; E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)\right\}, \\
B_t^{-1}(A) &= B_t^{-1}\left(R^{-1}(R(A))\right) \in \left\{(RB_t)^{-1}(E) \;\middle|\; E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)\right\}
\end{aligned}$$

が示され，式 (1) が成り立つと判る．従って

$$\sigma(B_u \;:\; u \leq s) = \bigvee_{u \leq s} \left\{B_u^{-1}(E) \;\middle|\; E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)\right\} = \bigvee_{u \leq s} \left\{(RB_u)^{-1}(E) \;\middle|\; E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)\right\} = \sigma(RB_u \;:\; u \leq s)$$

が成り立つ．任意の $0 \leq s < t$ に対して $B_t - B_s$ は $\mathcal{F}_s^B = \sigma(B_u \;:\; u \leq s)$ と独立であるから，任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ と $F \in \sigma(RB_u \;:\; u \leq s) = \sigma(B_u \;:\; u \leq s)$ に対して，$R^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ に注意すれば

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\{RB_t - RB_s \in A\} \cap F\right) &= \mathrm{P}\left(\{R(B_t - B_s) \in A\} \cap F\right) \\
&= \mathrm{P}\left(\{B_t - B_s \in R^{-1}(A)\} \cap F\right) \\
&= \mathrm{P}\left(B_t - B_s \in R^{-1}(A)\right)\mathrm{P}(F) \\
&= \mathrm{P}\left(R(B_t - B_s) \in A\right)\mathrm{P}(F) = \mathrm{P}\left(RB_t - RB_s \in A\right)\mathrm{P}(F)
\end{aligned}$$

が成り立つ．これは任意の $0 \leq s < t$ に対して $RB_t - RB_s$ と $\sigma(RB_u \;:\; u \leq s)$ とが独立であることを表しているから，(ii) も示されたことになる．(iii) について，行列式 $\det(R)$ が ± 1 になることに注意すれば，任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(RB_t - RB_s \in A) &= \mathrm{P}\left(B_t - B_s \in R^{-1}(A)\right) \\
&= (2\pi(t-s))^{-\frac{N}{2}} \int_{R^{-1}(A)} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2(t-s)}\right) dx \\
&= (2\pi(t-s))^{-\frac{N}{2}} \int_{A} \exp\left(-\frac{|y|^2}{2(t-s)}\right) dy \qquad (y = Rx \text{ として変数変換})
\end{aligned}$$

が成り立つことにより，任意の $0 \le s < t$ に対して $RB_t - RB_s$ もまた平均ベクトル 0，共分散行列 $(t-s)I_N$ の N 次元 Gauss 型確率変数であることが示された．最後に (iv) が満たされていることを確認する．全単射線型写像 R について $0 \in A \Leftrightarrow 0 \in R^{-1}(A)$ $(\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$ であることに注意すれば

$$\mathrm{P}_{RB_0}(A) = \mathrm{P}\left(B_0^{-1}\left(R^{-1}(A)\right)\right) = \begin{cases} 1 & 0 \in R^{-1}(A) \\ 0 & 0 \notin R^{-1}(A) \end{cases} = \begin{cases} 1 & 0 \in A \\ 0 & 0 \notin A \end{cases}$$

となり，P_{RB_0} と δ_0 は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ の上で一致する．

(2) 上に載せた定義の番号の順番に照合していく．(i) について，これも連続写像の合成

$$[0,\infty) \ni t \longmapsto ct \longmapsto \frac{1}{\sqrt{c}}B_{ct}(\omega) \in \mathbb{R}^N, \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

と見做せばよい．(ii) について，(i) と同様に考えればよい．写像 $\mathbb{R}^N \ni x \longmapsto x/\sqrt{c} \in \mathbb{R}^N$ は $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ の連続な全単射であり，明らかに逆写像 $\mathbb{R}^N \ni x \longmapsto \sqrt{c} \in \mathbb{R}^N$ もまた連続な全単射である．従って任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ に対して

$$\frac{1}{\sqrt{c}}A \coloneqq \left\{x/\sqrt{c} \mid x \in A\right\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \qquad \sqrt{c}A \coloneqq \left\{\sqrt{c}x \mid x \in A\right\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$$

が成り立つから，任意の $t \ge 0$ に対して

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{c}}B_{ct} \in A \;\middle|\; A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)\right\} = \left\{B_{ct} \in A \mid A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)\right\}$$

が成り立つ．即ち任意の $s \ge 0$ に対して

$$\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{c}}B_{cu} \;:\; u \le s\right) \coloneqq \bigvee_{u \le s}\left\{\frac{1}{\sqrt{c}}B_{cu} \in A \;\middle|\; A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)\right\} = \bigvee_{u \le s}\left\{B_{cu} \in A \;\middle|\; A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)\right\} = \sigma(B_{cu} \;:\; u \le s)$$

となっていて，さらに設問の仮定により任意の $0 \le s < t$ に対して $B_{ct} - B_{cs}$ は $\sigma(B_{cu} \;:\; u \le s)$ と独立である．以上より，任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ と $F \in \sigma\left(\frac{1}{\sqrt{c}}B_{cu} \;:\; u \le s\right) = \sigma(B_{cu} \;:\; u \le s)$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\left\{\frac{1}{\sqrt{c}}B_{ct} - \frac{1}{\sqrt{c}}B_{cs} \in A\right\} \cap F\right) &= \mathrm{P}\left(\left\{B_{ct} - B_{cs} \in \sqrt{c}A\right\} \cap F\right) \\
&= \mathrm{P}\left(B_{ct} - B_{cs} \in \sqrt{c}A\right)\mathrm{P}(F) \\
&= \mathrm{P}\left(\frac{1}{\sqrt{c}}B_{ct} - \frac{1}{\sqrt{c}}B_{cs} \in A\right)\mathrm{P}(F)
\end{aligned}$$

が成り立つから，任意の $0 \le s < t$ に対して $\frac{1}{\sqrt{c}}B_{ct} - \frac{1}{\sqrt{c}}B_{cs}$ は $\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{c}}B_{cu} \;:\; u \le s\right)$ と独立であると示された．(iii) について，これもヤコビアンが $\left(\sqrt{c}\right)^N$ になることに注意すれば

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\frac{1}{\sqrt{c}}B_{ct} - \frac{1}{\sqrt{c}}B_{cs} \in A\right) &= \mathrm{P}\left(B_{ct} - B_{cs} \in \sqrt{c}A\right) \\
&= (2\pi(ct-cs))^{-\frac{N}{2}}\int_{\sqrt{c}A}\exp\left(-\frac{|x|^2}{2(ct-cs)}\right)dx \\
&= (2\pi(t-s))^{-\frac{N}{2}}\int_{A}\exp\left(-\frac{|y|^2}{2(t-s)}\right)dy \qquad \left(y = \frac{1}{\sqrt{c}}x \text{ と変数変換}\right)
\end{aligned}$$

が成り立つことにより，任意の $0 \leq s < t$ に対して $\frac{1}{\sqrt{c}}B_{ct} - \frac{1}{\sqrt{c}}B_{cs}$ は平均ベクトル 0，共分散行列 $(t-s)I_N$ の N 次元 Gauss 型確率変数である．最後に (iv) を示す．任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ に対して $0 \in A \Leftrightarrow 0 \in \sqrt{c}A$ であることに注意すれば，

$$\mathrm{P}_{\frac{1}{\sqrt{c}}B_0}(A) = \mathrm{P}\left(B_0^{-1}(\sqrt{c}A)\right) = \begin{cases} 1 & 0 \in \sqrt{c}A \\ 0 & 0 \notin \sqrt{c}A \end{cases} = \begin{cases} 1 & 0 \in A \\ 0 & 0 \notin A \end{cases}$$

が成り立つから $\mathrm{P}_{\frac{1}{\sqrt{c}}B_0}$ と δ_0 は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ の上で一致する．

(3) 定義の (i) から見ていく．$B = (B_t)$ が Brown 運動であるならば

$$[0,\infty) \ni t \longmapsto B_{t+h}(\omega) - B_h(\omega) \in \mathbb{R}^N, \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

が連続写像であることは明らかである．次に (ii) を確認する．任意の $t \geq 0$ に対して B_{t+h} は可測 $\mathcal{F}^B_{t+h}/\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$，$B_h$ は可測 $\mathcal{F}^B_h/\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ であって，$\mathcal{F}^B_h \subset \mathcal{F}^B_{t+h}$ により $B_{t+h} - B_h$ は可測 $\mathcal{F}^B_{t+h}/\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ である．従って

$$\left\{ (B_{t+h} - B_h)^{-1}(A) \;\middle|\; A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \right\} \subset \mathcal{F}^B_{t+h} = \sigma(B_u \ : \ u \leq t+h)$$

が成り立つ．明らかに

$$\sigma(B_{u+h} - B_h \ : \ u \leq s) = \bigvee_{u \leq s} \left\{ (B_{u+h} - B_h)^{-1}(A) \;\middle|\; A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \right\} \subset \sigma(B_u \ : \ u \leq s+h)$$

が成り立っている．従って任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ と $F \in \sigma(B_{u+h} - B_h \ : \ u \leq s) \subset \sigma(B_u \ : \ u \leq s+h)$ に対して

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\{(B_{t+h} - B_h) - (B_{s+h} - B_h) \in A\} \cap F) &= \mathrm{P}(\{B_{t+h} - B_{s+h} \in A\} \cap F) \\ &= \mathrm{P}(B_{t+h} - B_{s+h} \in A)\,\mathrm{P}(F) \\ &= \mathrm{P}((B_{t+h} - B_h) - (B_{s+h} - B_h) \in A)\,\mathrm{P}(F) \end{aligned}$$

となるから，任意の $0 \leq s < t$ に対して $(B_{t+h} - B_h) - (B_{s+h} - B_h)$ は $\sigma(B_{u+h} - B_h \ : \ u \leq s)$ と独立であることが示された．(iii) について，任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ に対して

$$\begin{aligned} \mathrm{P}((B_{t+h} - B_h) - (B_{s+h} - B_h) \in A) &= \mathrm{P}(B_{t+h} - B_{s+h} \in A) \\ &= (2\pi((t+h) - (s+h)))^{-\frac{N}{2}} \int_A \exp\left(-\frac{|x|^2}{2((t+h)-(s+h))} \right) dx \\ &= (2\pi(t-s))^{-\frac{N}{2}} \int_A \exp\left(-\frac{|x|^2}{2(t-s)} \right) dx \end{aligned}$$

が成り立つから，任意の $0 \leq s < t$ に対して $(B_{t+h} - B_h) - (B_{s+h} - B_h)$ は平均ベクトル 0，共分散行列 $(t-s)I_N$ の N 次元 Gauss 型確率変数であると示された．最後に (iv) を確認する．便宜上 $Y_t \coloneqq B_{t+h} - B_h \ (\forall t \geq 0)$ と表記する．$t = 0$ の場合 Ω 上で $Y_0 = 0$ が成り立っているから，任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ に対して

$$\mathrm{P}_{Y_0}(A) = \mathrm{P}\left(Y_0^{-1}(A)\right) = \begin{cases} 1 & 0 \in A \\ 0 & 0 \notin A \end{cases}$$

となり，Y_0 の分布は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ 上で δ_0 に一致する． ∎

(4) 一般に N 次元実確率変数 $X = (X_1, \cdots, X_N)$ の各成分も 1 次元実確率変数である．これは射影を考えればよい．$B = (B_i(t))$ $(i = 1, \cdots, N)$ が N 次元 Brown 運動であるとする．写像 $pr_i : \mathbb{R}^N \longmapsto \mathbb{R}^1$ $(i = 1, \cdots, N)$ を i 射影とすると，各 $i = 1, 2, \cdots, N$ について，任意の $0 \leq s < t$ と $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ に対して

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(B_i(t) - B_i(s) \in A) &= \mathrm{P}(pr_i \circ (B(t) - B(s)) \in A) \\
&= \mathrm{P}(B(t) - B(s) \in pr_i^{-1}(A)) \\
&= (2\pi(t-s))^{-\frac{N}{2}} \int_{pr_i^{-1}(A)} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2(t-s)}\right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_A \exp\left(-\frac{x_i^2}{2(t-s)}\right) dx_i \prod_{j \neq i} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{\mathbb{R}^1} \exp\left(-\frac{x_j^2}{2(t-s)}\right) dx_j\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_A \exp\left(-\frac{x_i^2}{2(t-s)}\right) dx_i
\end{aligned}
$$

が成り立つ．これは Gauss 型確率変数の定義より $B_i(t)$ $(i = 1, 2, \cdots, N)$ がそれぞれ平均 0, 分散 $t - s$ の 1 次元 Gauss 型確率変数であることを示している．代表として $(B_1(t))_{t \geq 0}$ が 1 次元 Brown 運動であることを確認する．写像 $[0, \infty) \ni t \longmapsto B_1(t) \in \mathbb{R}^1$ が連続写像であることは明らかである．(ii) について，任意の s と $u \leq s$ と $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ ついて

$$
(B_1(u) \in A) = \Big(B(u) \in pr_1^{-1}(A)\Big), \quad pr_1^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)
$$

であることに注意して

$$
\mathcal{F}_s^1 := \bigvee_{u \leq s} \Big\{(B_1(u) \in A) \;\Big|\; A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)\Big\} \subset \bigvee_{u \leq s} \Big\{(B(u) \in E) \;\Big|\; E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)\Big\}
$$

と $\mathcal{F}_s^1$ を定義する．任意の $0 \leq s < t$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ と $F \in \mathcal{F}_s^1$ に対して

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(\{B_1(t) - B_1(s) \in A\} \cap F) &= \mathrm{P}\Big(\Big\{B(t) - B(s) \in pr_1^{-1}(A)\Big\} \cap F\Big) \\
&= \mathrm{P}\Big(B(t) - B(s) \in pr_1^{-1}(A)\Big)\mathrm{P}(F) \\
&= \mathrm{P}\left(B_1(t) - B_1(s) \in A\right)\mathrm{P}(F)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．これは任意の $0 \leq s < t$ について $(B_1(t) - B_1(s))$ が $\mathcal{F}_s^1$ と独立であることを示している．(iv) を確認する．任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ に対して $0 \in A \Leftrightarrow 0 \in pr_1^{-1}(A)$(両辺で 0 の次元は違う) に注意すれば

$$
\mathrm{P}(B_1(0) \in A) = \mathrm{P}(B(0) \in pr_1^{-1}(A)) = \begin{cases} 1 & 0 \in pr_1^{-1}(A) \\ 0 & 0 \notin pr_1^{-1}(A) \end{cases} = \begin{cases} 1 & 0 \in A \\ 0 & 0 \notin A \end{cases}
$$

が成り立つ．これは $B_1(0)$ の分布と 1 次元 Dirac 分布 δ_0 が $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ 上で一致することを示す．最後に $(B_i(t))_{i=1}^N$ が独立な確率変数の族であることを示す．$0 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leq N$ として任意に n 個 (n も任意) の確率変数 $(B_{i_j}(t))_{j=1}^n$ を取る．$F_{i_j} \in \mathcal{F}_t^{i_j}$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ を取れば,

各 F_{i_j} は或る $A_{i_j} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ によって $F_{i_j} = \left(B_{i_j}(t) \in A_{i_j}\right)$ と表現されるから，

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap \cdots \cap F_{i_n}\right) &= \mathrm{P}\left((B_{i_1}(t) \in A_{i_1}) \cap \cdots \cap (B_{i_n}(t) \in A_{i_n})\right) \\
&= \mathrm{P}\left(B(t) \in pr_{i_1}^{-1}(A_{i_1}) \cap \cdots \cap pr_{i_n}^{-1}(A_{i_n})\right) \\
&= \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{A_{i_j}} \exp\left(-\frac{x_{i_j}^2}{2(t-s)}\right) dx_{i_j} \\
&= \mathrm{P}\left(F_{i_1}\right) \mathrm{P}\left(F_{i_2}\right) \cdots \mathrm{P}\left(F_{i_n}\right)
\end{aligned}$$

によって $(B_i(t))_{i=1}^N$ の独立性が示された．次に

2 レポート課題その 2

勝手で申し訳ございませんが，レポート問題ではなくても問題を解く際に必要になる部分をメモとしてここに載せることにいたします.

定義 (($\mathcal{F}_t$)-Brown **運動 (講義資料引用)**). μ を $\mathbb{R}^N$ 上の分布 (i.e.Borel 確率測度) とする．フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}, (\mathcal{F}_t))$ 上の $(\mathcal{F}_t)$-適合 $\mathbb{R}^N$-値確率過程 $B = (B_t)_{t \geq 0}$ で以下をみたすものを，初期分布 μ の N 次元 $(\mathcal{F}_t)$-Brown 運動という．とくに，μ が $x \in \mathbb{R}^N$ の Dirac 測度 δ_x のとき，B は x から出発する $(\mathcal{F}_t)$-Brown 運動と呼ばれる.

(i) 任意の $\omega \in \Omega$ に対して，$[0, \infty) \ni t \longmapsto B_t(\omega) \in \mathbb{R}^N$ は連続.

(ii) 任意の $0 \leq s < t$ に対して $B_t - B_s$ は $\mathcal{F}_s$ と独立.

(iii) 任意の $0 \leq s < t$ に対して $B_t - B_s$ は平均ベクトル 0，共分散行列 $(t - s)I_N$ の N 次元 Gauss 型確率変数である．ここで I_N は N 次元単位行列を表す.

(iv) $\mathrm{P}_{B_0} = \mu$.

(命題 3.9’ : 命題 3.9 を点 x 出発の $(\mathcal{F}_t)$-Brown 運動で考えたもの). $B = (B_t)$ を点 $x \in \mathbb{R}^1$ から出発する 1 次元 $(\mathcal{F}_t)$-Brown 運動とするとき，以下の事実を確かめることができる.

(1) $s, t \geq 0$ に対して $\mathrm{E}[B(t)B(s)] = t \wedge s + x^2$.

(2) $t \geq 0$ と正整数 n に対して

$$\mathrm{E}\left[(B(t) - B(0))^n\right] = \begin{cases} 0 & n \text{ が奇数} \\ (n-1)!!t^{n/2} & n \text{ が偶数} \end{cases},$$

ただし $(2n - 1)!! = (2n - 1)(2n - 3) \cdots 3 \cdot 1$.

(3)

証明.

(1) $t = s = 0$ の場合,

$$\mathrm{E}\left[B(0)^2\right] = x^2.$$

$t = s > 0$ の場合,

$$\mathrm{E}\left[B(t)^2\right] = \mathrm{E}\left[(B(t) - B(0) + B(0))^2\right] = \mathrm{E}\left[(B(t) - B(0))^2\right] + 2\,\mathrm{E}\left[(B(t) - B(0))B(0)\right] + \mathrm{E}\left[B(0)^2\right] = t + x^2.$$

$t > s \geq 0$ の場合,

$$\mathrm{E}[B(t)B(s)] = \mathrm{E}[(B(t) - B(s) + B(s))B(s)] = \mathrm{E}[(B(t) - B(s))B(s)] + \mathrm{E}\left[B(s)^2\right] = \mathrm{E}\left[B(s)^2\right] = s + x^2.$$

N を正整数，$x = {}^t(x_1, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ に対して，$|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_N^2}$ で Euclid のノルムを定義する．$B^x = (B^x(t))_{t \geq 0}$ を x から出発する N-次元 $(\mathcal{F}_t)$-Brown 運動とし，σ を $(\mathcal{F}_t)$-停止時間とする，このとき，次の (1), (2), (3) に回答せよ.

(1) $|B_x|^2 = \left(|B^x(t)|^2\right)_{t\ge 0}$ はクラス (DL) に属する SbMG であることを示し，その Doob-Meyer 分解を求めよ．

(2) 任意の $t \ge 0$ に対して $\mathrm{E}\left[|B^x(\sigma \wedge t)|^2\right] = N\,\mathrm{E}\,[\sigma \wedge t] + |x|^2$ が成り立つことを示せ．

(3) D を $\mathbb{R}^N$ の有界領域とし，$x \in D$ とする．σ_D を領域 D からの脱出時間 $\sigma_D = \inf\{t > 0 \ : B^x(t) \in \mathbb{R}^N \backslash D\}$ とするとき，$\mathrm{P}\,(\sigma_D < \infty) = 1$ が成り立つことを示せ．

証明．

(1) 命題 3.9 により $B_i^{x_i}$ $(i = 1, 2, \cdots, N)$ が $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲールであるとわかっているから，凸関数 $|\cdot|^2$ で変換することにより $\left|B_i^{x_i}\right|^2$ $(i = 1, 2, \cdots, N)$ は $(\mathcal{F}_t)$-劣マルチンゲールである．従ってその有限和で表される $|B^x|^2 = \left(|B^x(t)|^2\right)_{t\ge 0}$ も $(\mathcal{F}_t)$-劣マルチンゲールである．実際，$B_i^{x_i}$ $(i = 1, 2, \cdots, N)$ が $(\mathcal{F}_t)$-適合過程で命題 3.9 より任意の $t \ge 0$ で二乗可積分であることから，$|B^x|^2$ についても $(\mathcal{F}_t)$-適合で任意の $t \ge 0$ で可積分であることが従い，また任意の $0 \le s < t$ に対して $A \in \mathcal{F}_s$ を任意に取れば

$$\int_A |B^x(t,\omega)|^2 \ \mathrm{P}\,(d\omega) = \sum_{i=1}^N \int_A |B_i^{x_i}(t,\omega)|^2 \ \mathrm{P}\,(d\omega) \ge \sum_{i=1}^N \int_A |B_i^{x_i}(s,\omega)|^2 \ \mathrm{P}\,(d\omega) = \int_A |B^x(s,\omega)|^2 \ \mathrm{P}\,(d\omega)$$

が成り立つから $|B^x|^2$ が $(\mathcal{F}_t)$-劣マルチンゲールであると判る．次に $|B^x|^2$ がクラス (DL) に属することを示す．任意に $a > 0$ を固定する．講義資料に倣い $\mathbf{S_a}$ を $\sigma(\omega) \le a$ $(\forall\omega \in \Omega)$ を満たす $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\ge 0})$ 上の停止時刻 σ 全体を表すとする．任意抽出定理 (講義資料定理 2.21) を適用すれば，任意の $\sigma \in \mathbf{S_a}$ と $c > 0$ に対して

$$\int_{|B^x(\sigma)|^2 \ge c} |B^x(\sigma(\omega),\omega)|^2 \ \mathrm{P}\,(d\omega) \le \int_{|B^x(\sigma)|^2 \ge c} |B^x(a,\omega)|^2 \ \mathrm{P}\,(d\omega)$$

が成り立つ．Chebyshev の不等式により

$$\mathrm{P}\left(|B^x(\sigma)|^2 \ge c\right) \le \frac{1}{c} \int_\Omega |B^x(a,\omega)|^2 \ \mathrm{P}\,(d\omega) \tag{2}$$

も成り立ち，右辺が可積分であるから σ によらずに c の値のみで右辺をいくらでも小さくできる．可積分関数 $|B^x(\sigma)|^2$ について，任意の $\epsilon > 0$ に対して或る $\delta > 0$ が存在し，$\mathrm{P}\,(A) < \delta$ なる任意の $A \in \mathcal{F}$ 上での積分は $< \epsilon$ となる．従って (2) の右辺を $< \delta$ となるような $c > 0$ を選べば，全ての $c' > c$ に対して

$$\sup_{\sigma\in\mathbf{S_a}} \int_{|B^x(\sigma)|^2 \ge c'} |B^x(\sigma(\omega),\omega)|^2 \ \mathrm{P}\,(d\omega) < \epsilon$$

が成り立つ．これは確率変数の族 $\left(|B^x(\sigma)|^2\right)_{\sigma\in\mathbf{S_a}}$ が一様可積分であることを表している．最後に $|B^x(\sigma)|^2$ の Doob-Meyer 分解を求める．命題 3.9 により $\left(|B_i^{x_i}(t)|^2 - t\right)_{t\ge 0}$ が $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲールであるとわかっているから，$\left(|B^x(t)|^2 - Nt\right)_{t\ge 0}$ もまた $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲールである．実際，$(\mathcal{F}_t)$-適合であることと可積分性は上に書いた理由で問題なく，任意の $0 \le s < t$ と

$A \in \mathcal{F}_s$ に対して

$$
\begin{aligned}
\int_A |B^x(t,\omega)|^2 - Nt \ \mathrm{P}(d\omega) &= \int_A \sum_{i=1}^N |B_i^{x_i}(t,\omega)|^2 - Nt \ \mathrm{P}(d\omega) \\
&= \sum_{i=1}^N \int_A |B_i^{x_i}(t,\omega)|^2 - t \ \mathrm{P}(d\omega) \\
&= \sum_{i=1}^N \int_A |B_i^{x_i}(s,\omega)|^2 - s \ \mathrm{P}(d\omega) \\
&= \int_A |B^x(s,\omega)|^2 - Ns \ \mathrm{P}(d\omega)
\end{aligned}
$$

も成り立つと確認された．これが求める Doob-Meyer 分解になっていることを確認する．講義資料の定理 2.25 に則れば，まず $\left(|B^x(t)|^2\right)_{t\geq 0}$ がクラス (DL) に属している $(\mathcal{F}_t)$-劣マルチンゲールであり $\left(|B^x(t)|^2 - Nt\right)_{t\geq 0}$ は $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲールであるから，あとは $(Nt)_{t\geq 0}$ が予測可能な可積分増加過程であれば良い．Nt は明らかに左連続であって，更に $(\mathcal{F}_t)$-適合過程の差で表現できるから $(\mathcal{F}_t)$-適合過程で，従ってこれは予測可能である．また $\omega \in \Omega$ に無関係に $N0 = 0$，Nt は t の右連続な単調増加関数であって，全ての $t \geq 0$ で $\mathrm{E}[Nt] = Nt < +\infty$ が成り立っていることにより，これは可積分増加過程でもある． ∎

(2) 一般にマルチンゲールを停止時間で停めた過程もまたマルチンゲールとなることをいえばよい．フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}, (\mathcal{F}_t))$ 上の $\mathbb{R}^1$ 値確率過程 $(X_t)_{t\geq 0}$ が $(\mathcal{F}_t)$ マルチンゲールであるとする．この確率空間上の停止時間 σ を任意に取り $(X_{\sigma\wedge t})_{t\geq 0}$ を考える．$(x_t)_{t\geq 0}$ が連続で $(\mathcal{F}_t)$-適合であることから $(\mathcal{F}_t)$-発展的可測となり，講義資料命題 2.20 により全ての t で $X_{\sigma\wedge t}$ $(= X_{\sigma\wedge t} I_{(\sigma\wedge t<+\infty)})$ は可測 $\mathcal{F}_{\sigma\wedge t}/\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ となる．$\mathcal{F}_{\sigma\wedge t} \subset \mathcal{F}_t$ により $(X_{\sigma\wedge t})_{t\geq 0}$ もまた $(\mathcal{F}_t)$-適合であると判る．全ての t で $X_{\sigma\wedge t}$ が可積分となることは，任意抽出定理 (講義資料定理 2.21) により

$$
\mathrm{E}[X_t \mid \mathcal{F}_{\sigma\wedge t}] = X_{\sigma\wedge t}, \quad a.s.
$$

となることより従う．マルチンゲール性の三つ目の性質が満たされるかを確認する．任意の時間 $0 \leq s < t$ に対して $A \in \mathcal{F}_s$ を任意に取る．このとき

$$
A \cap \{\sigma\wedge t > s\} \cap \{\sigma \leq u\} = \begin{cases} A \cap \{s < \sigma \leq u\} \in \mathcal{F}_u & (u \geq s) \\ \emptyset \in \mathcal{F}_u & (u < s) \end{cases}, \quad \forall u \in [0,\infty)
$$

が成り立つことから $A \cap \{\sigma\wedge t > s\} \in \mathcal{F}_\sigma$ である．$\sigma\wedge t$ が停止時間であるから $A \cap \{\sigma\wedge t > s\} \in \mathcal{F}_s$ でもあり，従って

$$
A \cap \{\sigma\wedge t > s\} \in \mathcal{F}_s \cap \mathcal{F}_\sigma = \mathcal{F}_{\sigma\wedge s}
$$

が成り立つ．任意抽出定理 (講義資料定理 2.21) を適用すれば

$$
\int_{A\cap\{\sigma\wedge t>s\}} X(\sigma(\omega)\wedge t, \omega) \ \mathrm{P}(d\omega) = \int_{A\cap\{\sigma\wedge t>s\}} X(\sigma(\omega)\wedge s, \omega) \ \mathrm{P}(d\omega)
$$

と表すことができる．一方で $A \cap \{\sigma\wedge t \leq s\}$ 上の積分も考えると，$s < t$ としているからこの集合の上で $\sigma\wedge t = \sigma\wedge s = \sigma$ が成り立っていることに注意して

$$
\int_{A\cap\{\sigma\wedge t\leq s\}} X(\sigma(\omega)\wedge t, \omega) \ \mathrm{P}(d\omega) = \int_{A\cap\{\sigma\wedge t\leq s\}} X(\sigma(\omega)\wedge s, \omega) \ \mathrm{P}(d\omega)
$$

が成り立つ．二つの積分を併せれば

$$\int_A X(\sigma(\omega)\wedge t,\omega)\ \mathrm{P}(d\omega)=\int_A X(\sigma(\omega)\wedge s,\omega)\ \mathrm{P}(d\omega)$$

が成り立つ．時間 $0\le s<t$ と $A\in\mathcal{F}_s$ は任意であったから，σ で停めた過程 $(X_{\sigma\wedge t})_{t\ge 0}$ もまた $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲールであると示された．以上の結果を用いれば，(1) における $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲール $\left(|B^x(t)|^2-Nt\right)_{t\ge 0}$ に対して

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |B^x(\sigma(\omega)\wedge t,\omega)|^2-N(\sigma(\omega)\wedge t)\ \mathrm{P}(d\omega)\\ &\qquad=\int_\Omega |B^x(0,\omega)|^2\ \mathrm{P}(d\omega)=\sum_{i=1}^N\int_\Omega B_i^{x_i}(0,\omega)^2\ \mathrm{P}(d\omega)=\sum_{i=1}^N x_i^2=|x|^2\end{aligned}$$

が成り立つ．右辺の変形は上に乗せた命題 3.9’ の (1) による．左辺の被積分関数はどちらも可積分関数であるから，以上で任意の $t\ge 0$ に対して

$$\mathrm{E}\left[|B^x(\sigma\wedge t)|^2\right]=N\,\mathrm{E}\left[\sigma\wedge t\right]+|x|^2$$

が成り立つことが示された．

(3) 講義資料定義 2.8 により σ_D は広義停止時間であるが，同資料仮定 2.11 によりフィルトレーションは右連続であるから，命題 2.7 により σ_D は停止時間として扱うことができる．(2) の結果により任意の $t\ge 0$ に対して

$$\mathrm{E}\left[|B^x(\sigma_D\wedge t)|^2\right]=N\,\mathrm{E}\left[\sigma_D\wedge t\right]+|x|^2 \tag{3}$$

が成り立つ．ここで左辺が t に関して一様に有界であることを証明する．各 $\omega\in\Omega$ ごとに，写像 $[0,+\infty)\ni t\longmapsto B^x(t,\omega)$ が連続であることと D が開集合であることにより $0\le s\le\sigma_D(\omega)$ であるような s に対して $B^x(s,\omega)\in\overline{D}$ となる．ここで $\overline{D}$ は D の閉包を表すとする．D が $\mathbb{R}^N$ の有界領域であるから (つまり十分大きな $n\in\mathbb{N}$ に対して D は原点中心半径 n の閉球に含まれる．) $\overline{D}$ も $\mathbb{R}^N$ の有界閉集合となる．ここで

$$d:=\sup\left\{|x-y|\ :\ x,y\in\overline{D}\right\}$$

とおく．等式 (3) の左辺の被積分関数について，時刻の部分は $\sigma_D(\omega)\wedge t\le\sigma_D(\omega)$ が全ての $\omega\in\Omega$ で成立しているから，ω ごとに $B^x(\sigma_D(\omega)\wedge t,\omega)$ は $\overline{D}$ に属している．従って $|B^x(\sigma_D(\omega)\wedge t,\omega)-x|\le d\ (\forall\omega\in\Omega)$ で抑えられるから

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[|B^x(\sigma_D\wedge t)|^2\right]&=\int_\Omega |B^x(\sigma_D(\omega)\wedge t,\omega)|^2\ \mathrm{P}(d\omega)\\&=\int_\Omega |B^x(\sigma_D(\omega)\wedge t,\omega)-x+x|^2\ \mathrm{P}(d\omega)\\&=\int_\Omega |B^x(\sigma_D(\omega)\wedge t,\omega)-x|^2+2\langle B^x(\sigma_D(\omega)\wedge t,\omega)-x,\ x\rangle+|x|^2\ \mathrm{P}(d\omega)\\&\le d^2+2d|x|+|x|^2\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $\mathbb{R}^N$ の標準的内積を表し (つまり $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^N x_iy_i$.)，最後の式変形で Schwarz の不等式を使った．等式 (3) にこの結果を適用すれば

$$\mathrm{E}\left[\sigma_D\wedge t\right]\le\frac{d^2+2d|x|}{N}$$

が $t \geq 0$ に依らずに成り立つ．これにより $\mathrm{P}(\sigma_D = +\infty) = 0$ が示される．もし $\alpha \coloneqq \mathrm{P}(\sigma_D = +\infty) > 0$ であるとすれば，集合 $\{\sigma_D = +\infty\}$ の上では σ_D の値をいくらでも大きくできるから $t > (d^2 + 2d|x|)/(\alpha N)$ となる t に対して

$$\frac{d^2 + 2d|x|}{\alpha N} \mathrm{P}(\sigma_D = +\infty) < \int_{\{\sigma_D = +\infty\}} \sigma_D(\omega) \wedge t \, \mathrm{P}(d\omega) \leq \int_{\Omega} \sigma_D(\omega) \wedge t \, \mathrm{P}(d\omega) \leq \frac{d^2 + 2d|x|}{N}$$

が成り立ち矛盾ができるからである．ゆえに $\mathrm{P}(\sigma_D < +\infty) = 1$ が示された． ∎

3　レポート課題その 3

$B = (B(t))_{t\geq 0}$, $W = (W(t))_{t\geq 0}$ は，ともに 0 から出発する独立な 1-次元 Brown 運動，a, b は $ab \neq 0$ なる実実数，n は 2 以上の整数とする．このとき，以下の (1), (2) の確率過程に Itô の公式が適用できることを確認し，適用したその結果を書け．(3) は Z の満たす確率微分方程式について考察せよ．

(1)　$X = (X(t))_{t\geq 0}$ は $t \geq 0$ に対して $X(t) = (B(t) + at)^n$ で定義される確率過程.

(2)　$Y = (Y(t))_{t\geq 0}$ は $t \geq 0$ に対して $Y(t) = B(t)W(t)$ で定義される確率過程.

(3)　$Z = (Z(t))_{t\geq 0}$ は $t \geq 0$ に対して $Z(t) = e^{-bt}\left(a + \int_0^t e^{bs}\, dB(s)\right)$ で定義される確率過程.

解答　設問文ではただの Brown 運動と書いてありますが，講義資料内の仮定や (3) を考察した際に講義資料定義 2.1 の (5)(予測可能) を用いらざるを得なくなったため，講義資料 5 に合わせて，考えている確率空間は” 原点から出発する 1 次元 $(\mathcal{F}_t)$-Brown 運動 $B = (B_t)$ を備えた usual なフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}, (\mathcal{F}_t))$” とし，設問の B, W は 1-次元 $(\mathcal{F}_t)$-Brown 運動であると考えて以下に進みます.

(1)　講義資料定理 6.2 を適用する．

$$B(t) = \int_0^t dB(s)$$

であるから，講義資料中の式 (6.1) における $\Phi = (\Phi(t))_{t\geq 0}$, $\Psi = (\Psi(t))_{t\geq 0}$ はそれぞれ $\Phi(t) = 1$, $\Psi(t) = 0$ $(\forall t \geq 0)$ である．よって明らかに $\Phi \in \mathcal{L}_{2,loc}$, $\Psi \in \mathcal{L}_{1,loc}$ であるから，$(B(t))_{t\geq 0}$ は 1 次元 Itô 過程である．また定理 6.2 の $f : [0,T] \times \mathbb{R} \ni (t,x) \longmapsto f(t,x) \in \mathbb{R}$ はこの場合 $f(t,x) = (x + at)^n$ で表現される関数であり，$t \in [0,T]$ を固定して x の多項式関数であるから x の関数として C^2 級であり，$x \in \mathbb{R}$ を固定したとき t の関数としても多項式関数であるから $[0,T]$ で C^1 級である．以上より講義資料定理 6.2 を適用することができて，講義資料式 (6.5) により

$$(B(t) + at)^n = \int_0^t an(B(s) + at)^{n-1}\, ds + \int_0^t n(B(s) + at)^{n-1}\, dB(s) + \frac{1}{2}\int_0^t n(n-1)(B(s) + at)^{n-2}\, ds$$

が成り立つ.

(2)　講義資料定理 6.3 を適用する．B, W が独立な原点出発の 1 次元 Brown 運動であるから $(B(t),\ W(t))_{t\geq 0}$ も定理 3.8 により原点出発の 2 次元 Brown 運動である．

$$B(t) = \int_0^t dB(s), \quad W(t) = \int_0^t dW(s)$$

であるから，講義資料中の式 (6.8) における $\Phi = ((\Phi^{ik}(t))_{1\leq i,k\leq 2})_{t\geq 0}$, $\Psi = (\Psi^1(t),\ \Psi^2(t))_{t\geq 0}$ はそれぞれ $\Phi^{ik}(t) = \delta_{ik}$, $\Psi^i(t) = 0$ $(\forall t \geq 0,\ i,k = 1,2)$ である．ただし δ_{ik} は Kronecker のデルタである．従って $(B(t),\ W(t))_{t\geq 0}$ は 2 次元 Itô 過程である．また定理 6.3 の $f : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \ni (t,x) \longmapsto f(t,x) \in \mathbb{R}$ はこの場合 $f(t,x) = x_1 x_2$ $(x = {}^t(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2)$ で表現される関数であり，x の関数として C^2 級である．$x \in \mathbb{R}$ を固定したときは t についての定数関数であると見做せば $[0,T]$ で C^1 級である．以上より講義資料定理 6.3 を適用することができて，

$$B(t)W(t) = \int_0^t W(s)\, dB(s) + \int_0^t B(s)\, dW(s)$$

が成り立つ．

(3) $U(t) \coloneqq e^{bt}Z(t)$ $(\forall t \geq 0)$ と置けば

$$U(t) - U(0) = e^{bt}Z(t) - a = \int_0^t e^{bs}\, dB(s)$$

と表現できる．ここで講義資料定理 6.2 における関数 f として $f(t,x) = e^{bt}x$ とおき，確率過程 Φ や Ψ は未知であるけれども式 (6.5) を書けば

$$\begin{aligned} U(t) - U(0) &= f(t, Z(t)) - f(0, Z(0)) \\ &= \int_0^t be^{bs}Z(s)\, ds + \int_0^t e^{bs}\Phi(s)\, dB(s) + \int_0^t e^{bs}\Psi(s)\, ds \end{aligned} \tag{4}$$

と表すことができる．従ってこの場合 $\forall t \geq 0$ で次の等式が成り立つ．

$$\int_0^t e^{bs}\, dB(s) = \int_0^t be^{bs}Z(s)\, ds + \int_0^t e^{bs}\Phi(s)\, dB(s) + \int_0^t e^{bs}\Psi(s)\, ds. \tag{5}$$

例えば

$$\Phi(t) = 1, \quad \Psi(t) = -bZ(t) = -be^{-bt}\left(a + \int_0^t e^{bs}\, dB(s)\right), \quad (\forall t \geq 0)$$

が満たされているならば等式 (3) が満たされる．Φ は定数関数であるから $\mathcal{L}_{2,loc}$ の元であり，Ψ については $(e^{bt})_{t\geq 0}$ が $[0,+\infty)\times\Omega \to \mathbb{R}^1$ の関数として $\mathcal{L}_2$ の元であることと講義資料定理 5.8(1) により確率積分項が二乗可積分で連続な $(\mathcal{F}_t)$-適合過程であるから Ψ も連続な適合過程となり，もちろん左連続だから予測可能，連続性から任意の区間 $[0,T]$ で二乗可積分であるから $\Psi \in \mathcal{L}_{2,loc}$ である．即ちもし $Z = (Z(t))_{t\geq 0}$ が

$$\begin{cases} Z(0) = a, \\ Z(t) - Z(0) = \int_0^t dB(s) + \int_0^t -be^{-bs}\left(a + \int_0^s e^{bu}\, dB(u)\right) ds \quad (t > 0) \end{cases}$$

を満たす Itô 過程ならば，$f(t,x) = e^{bt}x$ として Itô の公式 (講義資料定理 6.2) を適用することにより等式 (3) が満たされ，上式 (3) により

$$e^{bt}Z(t) - a = \int_0^t e^{bs}\, dB(s)$$

が満たされる．