ε 項を用いた Henkin 拡大とクラスの導入による具体的で直観的な集合論の構築

関根深澤研修士二年百合川尚学

2020 年 1 月 19 日

目次

第 1 章

序論

1.1　導入

Hilbert の ε 計算とは項を形成するオペレーター ε を用いた述語計算の拡張である．ε は式 $\varphi(x)$ から項 $\varepsilon x \varphi(x)$ を作るものであり，この項は次の主要論理式によって制御される：

$$\varphi(t) \;\rightarrow\; \varphi(\varepsilon x \varphi(x)).$$

Hilbert が ε を導入したのは述語計算を命題計算に埋め込むためであり，その際には $\exists$ や $\forall$ の付いた式を

$$\varphi(\varepsilon x \varphi(x)) \overset{\mathrm{def}}{\longleftrightarrow} \exists x \varphi(x),$$
$$\varphi(\varepsilon x \neg\varphi(x)) \overset{\mathrm{def}}{\longleftrightarrow} \forall x \varphi(x)$$

と変換する．

この変換は本稿において最も重要な公理の基となるが，ただし本稿において ε を導入したのは述語計算を埋め込むためではなく，集合を「具体化」するためである．本稿で実践しているのは Hilbert の ε 計算ではなく一種の Henkin 拡大であり，先述の主要論理式は本稿では全く不要であって，代わりに

$$\exists x \varphi(x) \;\rightarrow\; \varphi(\varepsilon x \varphi(x))$$

が主要な公理となる．「具体化」に対する問題意識の源は，通常の公理的集合論においては集合が無定義であるという不可解さである．純粋に一階述語論理の言語から構築される集合論を **ZF** 集合論と呼ぶが，**ZF** 集合論の言語では集合というオブジェクトが用意されていないため「存在」は「実在」を意味しない．たとえば

$$\exists x \, \forall y \, (\, y \notin x \,)$$

は「空集合は存在する」という定理を表しているが，存在するはずの空集合を実際に取ってくることは出来ないのである．それなのに集合論において $\emptyset$ が恰も実在するオブジェクトとして扱われているのは，一つには $\forall y \, (\, y \notin \emptyset \,)$ を $\emptyset$ の定義式として $\emptyset$ を言語に追加している (定義による拡張) のであろうが，ε を使えば単に

$$\varepsilon x \, \forall y \, (\, y \notin x \,)$$

と書くだけで「存在」を「実在」に格上げする効果がある．適切な公理と集合の定義によって，ε 項及び ε 項に等しいオブジェクトが全て集合であり，かつ集合はこれらに限られるといった体系を構築できるので，この意味で ε 項によって集合の「具体化」が実現する．その他にも ε 項を導入することで得られるメリットとして，直感的な証明が組み立てやすくなったり，証明で用いる推論規則が三段論法のみで済むといった点がある．

ブルバキ [4] や島内 [6] でも ε 計算を使った集合論を展開している (ブルバキ [4] では ε ではなく τ が使われている)．ところで，本稿では ε 項だけではなく，「$\varphi(x)$ を満たす集合 x の全体」の役割を期して

$$\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$$

というオブジェクトも取り入れる．ブルバキ [4] や島内 [6] では

$$\{\, x \mid \varphi(x) \,\} \overset{\text{def}}{=\!=} \varepsilon x \, \forall u \, (\, \varphi(u) \ \leftrightarrow \ u \in x \,)$$

と定めるが，これは欠点がある．

$$\exists x \, \forall u \, (\, \varphi(u) \ \leftrightarrow \ u \in x \,)$$

が成立しない場合は「$\varphi(x)$ を満たす集合 x の全体」という意味を持たないためである．この欠点を解消するには，竹内 [5] に倣って φ から直接 $\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$ の形のオブジェクトを作ればよい．

$\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$ なる項は「モノの集まり」という観点からはまさしく「集合」なのだが，たとえば Russell のパラドックスが示す通り

$$\{\, x \mid x \notin x \,\}$$

は数学の世界での集合であってはならず，パラドックスを回避するためには「モノの集まり」を数学の世界の集合であるものとそうでないものとに分類しなくてはならない．数学の世界では単なる「モノの集まり」は類 (class) と呼ばれ，集合でない類は真類 (proper class) と呼ばれる．ε 項を採用している本稿では

$$\varepsilon x \varphi(x), \quad \{\, x \mid \varphi(x) \,\}$$

の形の項を類と定義し，類 a が集合であることの判断基準は，竹内 [5] に倣って

$$\exists x \, (\, a = x \,)$$

が成り立つことであるとする．また $\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$ に対して「$\varphi(x)$ を満たす集合 x の全体」の意味を実質的に与えるために，

$$\forall u \, (\, u \in \{\, x \mid \varphi(x) \,\} \ \leftrightarrow \ \varphi(u) \,)$$

と

$$a \in \{\, x \mid \varphi(x) \,\} \ \rightarrow \ \exists s \, (\, a = s \,)$$

を集合論の公理とする．前者の公理によって $\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$ は「$\varphi(x)$ を満たす x の全体」となり，後者の公理によって「$\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$ の要素は全て集合である」ということになる．

本稿で行う集合論の拡張は妥当なものである．妥当であるとは本稿の集合論が現代数学で受容可能であるということであり，それは **ZF** 集合論のどの命題に対しても「**ZF** 集合論で証明可能である」ことと「本稿の集合論で証明可能である」ことが同じであるという意味である．このような妥当な拡張のことを**保存拡大 (conservative extension)** と呼ぶ．

1.2　章立て

第 2 章では集合論の言語というものを導入し，また構文論的な性質についていくつか述べる．その際 3 つの言語が登場するが，**ZF** 集合論の言語は $\mathcal{L}_{\in}$ と書き，それに ε 項を追加した言語を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ と書き，最後に $\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$ なる形の項を追加した言語を $\mathcal{L}$ と書く．第 3 章では証明とは何かを規定する．本稿の証明体系は主に古典論理に準じているが，ε 項を利用するために若干変更を施す．第 4 章では言語 $\mathcal{L}$ と第 3 章の証明体系で集合論が展開できることを実演する．第 5 章では，本稿の集合論が **ZF** 集合論の保存拡大になっていることを示す．

メタ定理とは式や項の形状的な性質に対する主張であって，メタ証明はメタ定理の妥当性を日本語によって検証するものである．またメタ証明に必要な直感的真理をメタ公理として提示する．

第 2 章

言語

本稿の世界を展開するために使用する言語には二つ種類がある．一つは自然言語の日本語であり，もう一つは新しくこれから作る言語である．その人工的な言語は記号列が数学の式となるための文法を指定し，そこで組み立てられた式のみが考察対象となる．日本語は式を解釈したり人工言語を補助するために使われる．

さっそく人工的な言語 $\mathcal{L}_{\in}$ を構築するが，これは本論においてはスタンダードな言語ではなく，後で $\mathcal{L}_{\in}$ をより複雑な言語に拡張するという意味で原始的である．以下は $\mathcal{L}_{\in}$ を構成する要素である:

矛盾記号　$\perp$
論理記号　$\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$
量化子　$\forall$, $\exists$
述語記号　$=$, $\in$
変項　後述 (第 2.1 節).

日本語と同様に，決められた規則に従って並ぶ記号列のみを $\mathcal{L}_{\in}$ の単語や文章として扱う．$\mathcal{L}_{\in}$ において，名詞にあたるものは**項 (term)** と呼ばれる．文字は最もよく使われる項である．述語とは項同士を結ぶものであり，最小の文章を形成する．例えば

$$\in st$$

は $\mathcal{L}_{\in}$ の文章となり，「s は t の要素である」と読む．$\mathcal{L}_{\in}$ の文章を $\mathcal{L}_{\in}$ の**式 (formula)** 或いは $\mathcal{L}_{\in}$ の**論理式**と呼ぶ．論理記号は主に式同士を繋ぐ役割を持つ．

論理学的な言語とは論理記号と変項以外の記号をすべて集めたものである．本稿で用意した記号で言うと，論理記号とは

$$\perp, \neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \forall, \exists$$

であり，変項記号とは文字であって，$\mathcal{L}_{\in}$ の語彙は

$$=, \in$$

しかない．だが本稿の目的は集合論の構築であって一般の言語について考察するわけではないので，論理記号も文字もすべて $\mathcal{L}_{\in}$ の一員と見做す方が自然である．ついでに記号の分類も主流の論理学とは変えていて，

- $\perp$ はそれ単体で式であるので他の記号とは分ける．
- 論理記号とは式に作用するものとして $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$ のみとする．
- $\forall$ と $\exists$ は項に作用するものであるから量化子として分類する．

- 等号 = は′ 等しい′ という述語になっているから，論理記号ではなく述語記号に入れる．

以上の変更は殆ど無意味であるが，いかに “直観的[*1] な” 集合論を構築するかという目的を勘案すれば良いスタートであるように思える．

2.1 変項

変項 (variable) と呼ばれる最も典型的なものは文字であり，本稿では以下の文字を変項として用いる：

$$
\begin{aligned}
&a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z,\\
&A,B,C,D,E,F,G,H,U,J,K,L,M,N,O,P,Q,R,S,T,U,V,W,X,Y,Z,\\
&\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon,\zeta,\eta,\theta,\iota,\kappa,\lambda,\mu,\nu,\xi,\pi,\rho,\sigma,\tau,\upsilon,\phi,\chi,\psi,\omega,\\
&\Gamma,\Delta,\Theta,\Lambda,\Xi,\Pi,\Sigma,\Upsilon,\Phi,\Psi,\Omega,\\
&\vartheta,\ \varpi,\ \varrho,\ \varsigma,\ \varphi
\end{aligned}
$$

だが文字だけを変項とするのは不十分であり，例えば 200 個の相異なる変項が必要であるといった場合には上の文字だけでは不足してしまう．そこで，文字 x に対して

$$\natural x$$

もまた変項であると約束する．さらに，τ を変項とするときに[*2]

$$\natural \tau$$

も変項であると約束する．この約束に従えば，文字 x だけを用いたとしても

$$x,\quad \natural x,\quad \natural\natural x,\quad \natural\natural\natural x$$

はいずれも変項ということになる．極端なことを言えば，$\natural$ と x だけで無数の相異なる変項を作り出せるのである．

大切なのは，$\natural$ を用いれば理屈の上では変項に不足しないということであって，具体的な数式を扱うときに $\natural$ が出てくるかと言えば否である．$\natural$ が必要になるほどに長い式を読解するのは困難であるから，通常は何らかの略記法を導入して複雑なところを覆い隠してしまう．

変項は形式的には次のよう定義される:

> メタ定義 2.1.1 (変項). 文字は変項である．また，τ を変項とするとき $\natural\tau$ は変項である．以上のみが変項である．

[*1] ここでの直観とは**直観主義論理**の意味ではなく日常的な感覚としての意味である．直観主義論理は最小論理に爆発律のみを追加した論理体系であるが，本稿は古典論理に準じているので爆発律よりも強い二重否定の除去が公理となる．通ずるものがあるとすれば**真偽**についての観点であって，本稿では「真である」ということは「証明できること」であるとする．また証明も**構成的**であることにこだわり，「…と仮定すると矛盾する」といった**背理法**はなるべく用いない．ただし，その代わりに**対偶法**はよく用いる．対偶法とは二重否定の除去から導かれ，そもそも二重否定の除去とは最小論理の下で背理法と同値なのであるが，矛盾に頼っていないように見えるという点で対偶法による証明は “構成的” になる．

[*2]

超記号 「τ を変項とするときに」と書いたが，これは一時的に τ を或る変項に代用しているだけであって，τ が指している変項の本来の字面は x であるかもしれない．この場合の τ を**超記号 (meta symbol)** と呼ぶ．「A を式とする」など式にも超記号が宣言される．

上の定義では，はじめに発端を決めて，次に新しい項を作り出す手段を指定している．こういった定義の仕方を**帰納的定義 (inductive definition)** と呼ぶ．ただしそれだけでは項の範囲が定まらないので，最後に「以上のみが項である」と付け加えている．「以上のみが変項である」という約束によって，例えば「τ が項である」という言明が与えられたとき，この言明は

- τ は或る文字に代用されている
- 項 σ が取れて[*3]，τ は $\natural\sigma$ に代用されている

のどちらか一方にしか解釈され得ない．

2.2 項と式

$\mathcal{L}_{\in}$ の**項 (term)** と**式 (formula)** も変項と同様に帰納的に定義される:

メタ定義 2.2.1 ($\mathcal{L}_{\in}$ の項). 変項は $\mathcal{L}_{\in}$ の項であり，またこれらのみが $\mathcal{L}_{\in}$ の項である．

メタ定義 2.2.2 ($\mathcal{L}_{\in}$ の式).

- $\bot$ は式である．
- σ と τ を項とするとき，$\in st$ と $= st$ は式である．これらを**原子式 (atomic formula)** と呼ぶ．
- φ を式とするとき，$\rightarrow\varphi$ は式である．
- φ と ψ を式とするとき，$\vee\varphi\psi$，$\wedge\varphi\psi$，$\rightarrow\ \varphi\psi$ はいずれも式である．
- x を項とし，φ を式とするとき，$\forall x\varphi$ と $\exists x\varphi$ は式である．
- 以上のみが式である．

変項と同様に，「φ が式である」という言明の解釈は

- φ は $\bot$ である
- 項 s と項 t が得られて，φ は $\in st$ である
- 項 s と項 t が得られて，φ は $= st$ である
- 式 ψ が得られて，φ は $\rightarrow\psi$ である
- 式 ψ と式 ξ が得られて，φ は $\vee\psi\xi$ である
- 式 ψ と式 ξ が得られて，φ は $\wedge\psi\xi$ である
- 式 ψ と式 ξ が得られて，φ は $\rightarrow\ \psi\xi$ である
- 項 x と式 ψ が得られて，φ は $\forall x\psi$ である
- 項 x と式 ψ が得られて，φ は $\exists x\psi$ である

のいずれか一つに限られる．

[*3] 「変項 σ が取れて」と書いたが，この σ は唐突に出てきたので，それが表す文字そのものでしかないのか，或いは超記号であるのか，一見判然しない．本来は「変項が取れて，これを σ で表すと」などと書くのが良いのかもしれないが，はじめの書き方でも文脈上は超記号として解釈するのが自然であるし，何より言い方がまどろこくない．このように見た目の簡潔さのために超記号の宣言を省略する場合もある．

2.3 構造的帰納法

まず

$$\forall x \in xy$$

なる式を考える．中置記法 (後述) で

$$\forall x\,(\,x \in y\,)$$

と書けば若干見やすくなる．冠頭詞 $\forall$ は直後の x に係って「任意の x に対し...」の意味を持ち，この式は「任意の x に対して x は y の要素である」と読むのであるが，このとき x は $\forall x \in xy$ で**束縛されている (bound)** や或いは**量化されている (quantified)** と言う．$\forall$ が $\exists$ に代わっても，今度は “x は $\exists x \in xy$ で束縛されている” と言う．つまり，**量化子の直後に続く項 (量化子が係っている項) は，その量化子から始まる式の中で束縛されている**と解釈することになっている．

では

$$\rightarrow\ \forall x \in xy \in xz$$

という式はどうであるか．$\forall x$ の後ろには x が二か所に現れているが，どちらの x も $\forall$ によって束縛されているのか？結論を言えば $\in xy$ の x は束縛されていて，$\in xz$ の x は束縛されていない．というのも式の構成法を思い返せば，$\forall x\varphi$ が式であると言ったら φ は式であるはずで，今の例で $\forall x$ に後続する式は

$$\in xy$$

しかないのだから，$\forall$ から始まる式は

$$\forall x \in xy$$

しかないのである．$\forall$ が係る x が束縛されている範囲は “$\forall$ から始まる式” であるので，$\in xz$ の x とは量化子 $\forall$ による “束縛” から漏れた “自由な”x ということになる．

上の例でみたように，量化はその範囲が重要になる．量化子 $\forall$ が式 φ に現れたとき，その $\forall$ から始まる φ の部分式を $\forall$ の**スコープ**と呼ぶが，いつでもスコープが取れることは明白であるとして，$\forall$ のスコープは唯一つでないと都合が悪い．もしも異なるスコープが存在したら，同じ式なのに全く違う解釈に分かれてしまうからである．実際そのような心配は無用であると後で保証するわけだが，その準備に**始切片**という概念から取り掛かる．

メタ定義 2.3.1 (部分項・部分式).

部分項 項から切り取ったひとつづきの部分列で，それ自体が項であるものを元の項に対して**部分項 (sub term)** と呼ぶ．元の項全体も部分項と捉えるが，自分自身を除く部分項を特に**真部分項 (proper sub term)** と呼ぶ．例えば，文字 x の部分項は x 自身のみであって，また τ を項とすると τ は $\natural\tau$ の部分項である．

部分式 式から切り取ったひとつづきの部分列で，それ自体が式であるものを元の式に対して**部分式 (sub formula)** と呼ぶ．例えば φ と ψ を式とするとき，φ と ψ は $\vee\varphi\psi$ の部分式である．元の式全体も部分式と捉えるが，自分自身を除く部分式を特に**真部分式 (proper sub formula)** と呼ぶ．

2.3.1　始切片

φ を $\mathcal{L}_\in$ の式とするとき，φ の左端から切り取るひとつづきの部分列を φ の始切片 **(initial segment)** と呼ぶ．例えば φ が

$$\rightarrow\ \forall x \wedge\ \rightarrow \in xy \in xz\ \rightarrow \in xz \in xy = yz$$

である場合，

$$\rightarrow\ \forall x \wedge\ \rightarrow \in xy \in xz\ \rightarrow \in xz \in xy = yz$$

や

$$\rightarrow\ \forall x \wedge\ \rightarrow \in xy \in xz\ \rightarrow \in xz \in xy = yz$$

など赤字で分けられた部分は φ の始切片である．また φ 自身も φ の始切片である．

項についても同様に，項の左端から切り取るひとつづきの部分列をその項の始切片と呼ぶ．

本節の主題は次である．

メタ定理 2.3.2 (始切片の一意性).　τ を $\mathcal{L}_\in$ の項とするとき，τ の始切片で $\mathcal{L}_\in$ の項であるものは τ 自身に限られる．また φ を $\mathcal{L}_\in$ の式とするとき，φ の始切片で $\mathcal{L}_\in$ の式であるものは φ 自身に限られる．

「項の始切片で項であるものはその項自身に限られる．また，式の始切片で式であるものはその式自身に限られる.」という言明を (★) と書くことにする．このメタ定理を示すには次の原理を用いる:

メタ公理 2.3.3 ($\mathcal{L}_\in$ の項に対する構造的帰納法).　$\mathcal{L}_\in$ の項に対する言明 X に対し (X とは，例えば上の (★))，

- 文字に対して X が言える．
- 無作為に選ばれた項 τ について，その全ての真部分項に対して X が言えると仮定すれば，τ に対しても X が言える．

ならば，いかなる項に対しても X が言える．

メタ公理 2.3.4 ($\mathcal{L}_\in$ の式に対する構造的帰納法).　$\mathcal{L}_\in$ の式に対する言明 X に対し (X とは，例えば上の (★))，

- 原子式に対して X が言える．
- 無作為に選ばれた式 φ について，その全ての真部分式に対して X が言えると仮定すれば，φ に対しても X が言える．

ならば，いかなる式に対しても X が言える．

では定理を示す．

メタ証明．

項について　s を項とするとき，s が文字ならば s の始切片は s のみである．つまり (★) が言える．s が文字でないとき，

IH (帰納法の仮定)

s の全ての真部分項に対して (★) が言える．

と仮定する．(項の構成法より) 項 t が取れて s は

$$\natural t$$

と表せる．u を s の始切片で項であるものとすると u に対しても (項の構成法より) 項 v が取れて，u は

$$\natural v$$

と表せる．このとき v は t の始切片であり，t については (IH) より (★) が言えるので，t と v は一致する．ゆえに s と u は一致する．ゆえに s に対しても (★) が言える．

式について　$\perp$ については，その始切片は $\perp$ に限られる．$\in st$ なる原子式については，その始切片は

$$\in, \quad \in s, \quad \in st$$

のいずれかとなるが，このうち式であるものは $\in st$ のみである．$= st$ なる原子式についても，その始切片で式であるものは $= st$ に限られる．

いま φ を任意に与えられた式とし，

IH (帰納法の仮定)

φ の真部分式に対しては (★) が言える．

と仮定する．このとき

case1　φ が

$$\neg\psi$$

なる形の式であるとき，φ の始切片で式であるものもまた

$$\neg\xi$$

なる形をしている．このとき ξ は ψ の始切片であるから，(IH) より ξ と ψ は一致する．ゆえに φ の始切片で式であるものは φ 自身に限られる．

case2　φ が

$$\vee\psi\xi$$

なる形の式であるとき，φ の始切片で式であるものもまた

$$\vee\eta\zeta$$

なる形をしている．このとき ψ と η は一方が他方の始切片であるので (IH) より一致する．すると ξ と ζ も一方が他方の始切片ということになり，(IH) より一致する．ゆえに φ の始切片で式であるものは φ 自身に限られる．

case3　φ が

$$\exists x \psi$$

なる形の式であるとき，φ の始切片で式であるものもまた

$$\exists y \xi$$

なる形の式である．このとき x と y は一方が他方の始切片であり，これらは変項であるから前段の結果より一致する．すると ψ と χ も一方が他方の始切片ということになり，(IH) より一致する．ゆえに φ の始切片で式であるものは φ 自身に限られる．■

2.3.2　スコープ

φ を式とし，s を "$\natural, \in, \perp, \neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \exists, \forall$" のいずれかの記号とし，$\varphi$ に s が現れたとする．このとき，s のその出現位置から始まる φ の部分式，ただし s が $\natural$ である場合は部分項，を s の**スコープ (scope)** と呼ぶ．具体的に，φ を

$$\rightarrow \ \forall x \wedge \ \rightarrow \in xy \in xz \ \rightarrow \in xz \in xy = yz$$

なる式とするとき，φ の左から 6 番目に $\in$ が現れるが，この $\in$ から

$$\in xy$$

なる原子式が φ の上に現れている:

$$\rightarrow \ \forall x \wedge \ \rightarrow \ {\color{red} \in xy} \in xz \ \rightarrow \in xz \in xy = yz.$$

これは φ **における左から 6 番目の** $\in$ **のスコープ**である．他にも，φ の左から 4 番目に $\wedge$ が現れるが，この右側に

$$\rightarrow \in xy \in xz$$

と

$$\rightarrow \in xz \in xy$$

の二つの式が続いていて，$\wedge$ を起点に

$$\wedge \ \rightarrow \in xy \in xz \ \rightarrow \in xz \in xy$$

なる式が φ の上に現れている:

$$\rightarrow \ \forall x {\color{red} \wedge \ \rightarrow \in xy \in xz \ \rightarrow \in xz \in xy} = yz.$$

これは φ **における左から 4 番目の** $\wedge$ **のスコープ**である．φ の左から 2 番目には $\forall$ が現れて，この $\forall$ に対して項 x と

$$\wedge \ \rightarrow \in xy \in xz \ \rightarrow \in xz \in xy$$

なる式が続き，

$$\forall x \land \ \rightarrow \in xy \in xz \ \rightarrow \in xz \in xy$$

なる式が φ の上に現れている:

$$\rightarrow \ \forall x \land \ \rightarrow \in xy \in xz \ \rightarrow \in xz \in xy = yz.$$

しかも $\in, \land, \forall$ のスコープは上にあげた部分式のほかに取りようが無い．上の具体例を見れば，直感的に「現れた記号のスコープはただ一つだけ，必ず取ることが出来る」ということが一般の式に対しても当てはまるように思えるが，直感を排除してこれを認めるには構造的帰納法の原理が必要になる．

当然ながら $\mathcal{L}_{\in}$ の式には同じ記号が何か所にも出現しうるので，式 φ に記号 s が現れたと言ってもそれがどこの s を指定しているのかはっきりしない．しか**しスコープを考える際には，φ に複数現れうる s のどれか一つを選んで，その s に終始注目している**のであり，「その s の...」や「s のその出現位置から...」のように限定詞を付けてそのことを示唆することにする．

メタ定理 2.3.5 (スコープの存在). φ を式，或いは項とするとき，

(a) $\natural$ が φ に現れたとき，項 t が得られて，$\natural$ のその出現位置から $\natural t$ なる項が φ の上に現れる．

(b) $\in$ が φ に現れたとき，項 σ と項 τ が得られて，$\in$ のその出現位置から $\in \sigma\tau$ なる式が φ の上に現れる．

(c) $\rightarrow$が φ に現れたとき，式 ψ が得られて，$\rightarrow$のその出現位置から $\rightarrow\psi$ なる式が φ の上に現れる．

(d) $\lor$ が φ に現れたとき，式 ψ と式 ξ が得られて，$\lor$ のその出現位置から $\lor\psi\xi$ なる式が φ の上に現れる．

(e) $\exists$ が φ に現れたとき，項 x と式 ψ が得られて，$\exists$ のその出現位置から $\exists x\psi$ なる式が φ の上に現れる．

(b) では $\in$ を $=$ に替えたって同じ主張が成り立つし，(d) では $\lor$ を $\land$ や $\rightarrow$ に替えても同じである．(e) では $\exists$ を $\forall$ に替えても同じことが言える．

メタ証明.

case1 「項に $\natural$ が現れたとき，項 t が取れて，その $\natural$ の出現位置から $\natural t$ がその項の部分項として現れる」—(※)，を示す．s を項とするとき，s が文字ならば s に対して (※) が言える．s が文字でないとき，s の全ての真部分項に対して (※) が言えるとする．s は文字ではないので，(項の構成法より) 項 t が取れて s は

$$\natural t$$

と表せる．s に現れる $\natural$ とは s の左端のものであるか t の中に現れるものであるが，t は s の真部分項であって，t については (※) が言えるので，結局 s に対しても (※) が言えるのである．

case2 $\in st$ なる式に対しては，$\in$ のスコープは $\in st$ に他ならない．実際，$\in$ から始まる $\in st$ の部分式は，項 u, v が取れて

$$\in uv$$

と書けるが，このとき u と s は一方が他方の始切片となっているので，メタ定理 2.3.2 より u と s は一致する．すると今度は v と t について一方が他方の始切片となるので，メタ定理 2.3.2 より v と t も一致する．

$\in st$ に $\natural$ が現れた場合，これが s に現れているとすると，前段より項 u が取れて，この $\natural$ の出現位置から $\natural u$ なる項が s の上に現れる．$\natural$ が t に現れたときも同じである．以上より $\in st$ に対して定理の主張が当てはまる．

case3　φ を任意に与えられた式として

IH (帰納法の仮定)

φ の全ての真部分式に対しては (a) から (e) の主張が当てはまる

と仮定する．このとき，

- φ が

$$\neg\psi$$

なる形の式であるとき，$\natural, \in, \vee, \exists$ が φ に現れたなら，それらは ψ の中に現れているのだから (IH) よりスコープが取れる．また φ に $\neg$ が現れた場合，その $\neg$ が ψ の中のものならば (IH) に訴えれば良いし，φ の左端の $\neg$ を指しているならスコープとして φ 自身を取れば良い．

- φ が

$$\vee\psi\chi$$

なる形の式であるとき，$\natural, \in, \neg, \exists$ が φ に現れたなら，それらは ψ か χ の中に現れているのだから (IH) よりスコープが取れる．また φ に $\vee$ が現れた場合，その $\vee$ が ψ, χ の中のものならば (IH) に訴えれば良いし，φ の左端の $\vee$ を指しているならスコープとして φ 自身を取れば良い．

- φ が

$$\exists x\psi$$

なる形の式であるとき，$\natural, \in, \neg, \vee$ が φ に現れたなら，それらは ψ の中に現れているのだから (IH) よりスコープが取れる．また φ に $\exists$ が現れた場合，その $\exists$ が ψ の中のものならば (IH) に訴えれば良いし，φ の左端の $\exists$ を指しているならスコープとして φ 自身を取れば良い．■

始切片に関する定理からスコープの一意性を示すことが出来る．

メタ定理 2.3.6 (スコープの一意性).　φ を式とし，s を $\natural, \in, \perp, \neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \exists, \forall$ のいずれかの記号とし，φ に s が現れたとする．このとき φ におけるその s のスコープは唯一つである．

メタ証明.

case1　$\natural$ が φ に現れた場合，スコープの存在定理 2.3.5 より項 τ が取れて

$$\natural\tau$$

なる形の項が $\natural$ のその出現位置から φ の上に現れるわけだが，

$$\natural\sigma$$

なる項も $\natural$ のその出現位置から φ の上に出現しているといった場合，τ と σ は一方が他方の始切片となるわけで，始切片のメタ定理 2.3.2 より τ と σ は一致する．

case2　$\rightarrow$ が φ に現れた場合，これは case1 において項であったところが式に替わるだけで殆ど同じ証明となる．

case3　$\vee$ が φ に現れた場合，定理 2.3.5 より式 ψ, ξ が取れて

$$\vee\psi\xi$$

なる形の式が $\vee$ のその出現位置から φ の上に現れる．ここで

$$\vee\eta\Gamma$$

なる式も $\vee$ のその出現位置から φ の上に出現しているといった場合，まず ψ と η は一方が他方の始切片となるわけで，メタ定理 2.3.2 より ψ と η は一致する．すると今度は ξ と Γ について一方が他方の始切片となるので，同様に ξ と Γ も一致する．$\wedge$ や $\longrightarrow$ のスコープの一意性も同様に示される．

case4　$\exists$ が φ に現れた場合，定理 2.3.5 より項 x と式 ψ が取れて

$$\exists x\psi$$

なる形の式が $\exists$ のその出現位置から φ の上に現れる．ここで

$$\exists y\xi$$

なる式も $\exists$ のその出現位置から φ の上に出現しているといった場合，まず項 x と項 y は一方が他方の始切片となるわけで，メタ定理 2.3.2 より x と y は一致する．すると今度は ψ と ξ が一方が他方の始切片の関係となるので，この両者も一致する．$\forall$ のスコープの一意性も同様に示される． ∎

2.4　拡張

通常は集合論の言語には $\mathcal{L}_\in$ が使われる．しかし乍ら，当然集合論と称している以上は「集合」というモノを扱っている筈なのに，当の「集合」は $\mathcal{L}_\in$ では実体を持たない空想でしかない．どういう意味かというと，例えば

$$\exists x \forall y \, (\, y \notin x \,)$$

と書けば「$\forall y \, (\, y \notin x \,)$ を満たすような集合 x が存在する」と読むわけだが，その在るべき x を $\mathcal{L}_\in$ では特定できないのである ($\mathcal{L}_\in$ の “名詞” は変項だけなので)．しかし言語の拡張の仕方によっては，この “空虚な存在” を実在で補強することが可能になる．

言語の拡張は二段階を踏む．項 x が自由に現れる式 $A(x)$ に対して

$$\{\, x \mid A(x) \,\}$$

なる形の項を導入する．この項の記法は**内包的記法 (intensional notation)** と呼ばれる．導入の意図は "$A(x)$ を満たす集合 x の全体" という意味を込めた式の対象化であって，実際に後で

$$\forall u\ (\, u \in \{\, x \mid A(x)\,\} \ \leftrightarrow\ A(u)\,)$$

を保証する (内包性公理).

追加する項はもう一種類ある．$A(x)$ を上記のものとするが，この $A(x)$ は x に関する性質という見方もできる．そして "$A(x)$ という性質を具えている集合 x" という意味を込めて

$$\varepsilon x A(x)$$

なる形の項を導入するのだ．これは Hilbert の ε **項 (epsilon term)** と呼ばれるオブジェクトであるが，導入の意図とは裏腹に $\varepsilon x A(x)$ は性質 $A(x)$ を持つとは限らない．$\varepsilon x A(x)$ が性質 $A(x)$ を持つのは，$A(x)$ を満たす集合 x が存在するとき，またその時に限られる (この点については後述の $\exists$ に関する定理によって明らかになる)．$A(x)$ を満たす集合 x が存在しない場合は，$\varepsilon x A(x)$ は正体不明のオブジェクトとなる．

2.4.1 ε 項

まずは ε 項を項として追加した言語 $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ に拡張する．$\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の構成要素は以下である:

矛盾記号 $\perp$

論理記号 $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$

量化子 $\forall$, $\exists$

述語記号 $=$, $\in$

変項 2.1 節のもの．

イプシロン ε

$\mathcal{L}_{\in}$ からの変更点は，"使用文字" が "変項" に代わったことと ε が加わったことである．続いて項と式の定義に移るが，帰納のステップは $\mathcal{L}_{\in}$ より複雑になる:

- $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の変項は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項である．
- $\perp$ は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式である．
- σ と τ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項とするとき，$\in st$ と $= st$ は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式である．
- φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とするとき，$\neg\varphi$ は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式である．
- φ と ψ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とするとき，$\vee\varphi\psi$, $\wedge\varphi\psi$, $\rightarrow\ \varphi\psi$ はいずれも $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式である．
- x を変項とし，φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とするとき，$\forall x\varphi$ と $\exists x\varphi$ は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式である．
- x を変項とし，φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とするとき，$\varepsilon x\varphi$ は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項である．
- 以上のみが $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項と式である．

$\mathcal{L}_{\in}$ に対して行った帰納的定義との大きな違いは，**項と式の定義が循環している**点にある．$\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式が $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項を用いて作られるのは当然ながら，その逆に $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項もまた $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式から作られるのである．

定義 2.4.1 (ε 項). $\varepsilon x\varphi$ なる項を $\boldsymbol{\varepsilon}$ **項 (epsilon term)** と呼ぶ．ここで x は変項であり，φ は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式である．

定義通りなら，式 φ に x が自由に現れていない場合でも $\varepsilon x\varphi$ は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項である．ただしそのような項は全く無用であるから，後で実際に集合論を構築する際には排除してしまう (2.4.6 節参照).

メタ定理 2.4.2. A を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とするとき，$\varepsilon x A$ なる形の ε 項は A には現れない．

もし A に $\varepsilon x A$ が現れるならば，当然 A の中の $\varepsilon x A$ にも $\varepsilon x A$ が現れるし，A の中の $\varepsilon x A$ の中の $\varepsilon x A$ にも $\varepsilon x A$ が現れるといった具合に，この入れ子には終わりがなくなる．だが，当然こんなことは起こり得ない．

メタ証明． A が指す記号列のどの部分を切り取ってもそれは A より短い記号列であって，$\varepsilon x A$ の現れる余地など無いからである． ∎

定義の循環によって構造が見えづらくなっているが，$\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項と式は次の手順で作られている．

1. $\mathcal{L}_{\in}$ の式から ε 項を作り，その ε 項を第 1 世代 ε 項と呼ぶことにする．
2. 変項と第 1 世代 ε 項を項として式を作り，これらを第 2 世代の式と呼ぶことにする．また第 2 世代の式で作る ε 項を第 2 世代 ε 項と呼ぶことにする．
3. 第 n 世代の ε 項をが出来たら，それらと変項を項として第 $n+1$ 世代の式を作り，第 $n+1$ 世代 ε 項を作る．
    - ちなみに，このように考えると第 n 世代 ε 項は第 $n+1$ 世代 ε 項でもある．

$\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項と式は以上のような帰納的構造を持っているのだから，$\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ における構造的帰納法はこれに則ったものになる．まずは粗く考察してみると，項と式に対する言明 X が与えられたとき，

1. まずは $\mathcal{L}_{\in}$ の項と式に対して X が言えて，かつ第 1 世代の ε 項に対しても X が言えることがスタート地点である．
2. 第 2 世代の式に対して X が言えることと，第 2 世代の ε 項に対して X が言えることを示す．
   $\vdots$
3. 第 n 世代までのすべての式と項に対して X が言えることを仮定して，第 $n+1$ 世代の式に対して X が言えることと，第 $n+1$ 世代の ε 項に対して X が言えることを示す．

の以上が検査出来れば，$\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ のすべての項と式に対して X が言えると結論するのは妥当である．ただし第 n 世代だとかいうカテゴライズは直感的考察を補佐するためのインフォーマルなものであり，更に簡略されたやり方でこの操作が実質的に為されることが期される．

メタ公理 2.4.3 ($\mathcal{L}_\mathcal{E}$ の項と式に対する構造的帰納法). $\mathcal{L}_\mathcal{E}$ の項に対する言明 X と式に対する言明 Y に対し，

1. $\mathcal{L}_\in$ の項と式，および $\mathcal{L}_\in$ の式で作る ε 項に対して X 及び Y が言える．
2. φ を任意に与えられた $\mathcal{L}_\mathcal{E}$ の式として，φ に現れる全ての項及び真部分式に対して X 及び Y が言えると仮定するとき，
   - φ が $\in \sigma\tau$ なる形の原子式であるとき φ に対して Y が言える．
   - φ が $\neg\varphi$ なる形の式であるとき φ に対して Y が言える．
   - φ が $\vee\psi\chi$ なる形の式であるとき φ に対して Y が言える．
   - φ が $\exists x\psi$ なる形の式であるとき φ に対して Y が言える．
   - $\varepsilon x\varphi$ なる ε 項に対して X が言える．

ならば，いかなる項と式に対しても X が言える．

φ を $\mathcal{L}_\mathcal{E}$ の式としたら，φ の部分式とは，φ から切り取られる一続きの記号列で，それ自身が $\mathcal{L}_\mathcal{E}$ の式であるものを指す．φ 自身もまた φ の部分式である．

メタ定理 2.4.4 ($\mathcal{L}_\mathcal{E}$ の始切片の一意性). τ を $\mathcal{L}_\mathcal{E}$ の項とするとき，τ の始切片で $\mathcal{L}_\mathcal{E}$ の項であるものは τ 自身に限られる．また φ を $\mathcal{L}_\mathcal{E}$ の式とするとき，φ の始切片で $\mathcal{L}_\mathcal{E}$ の式であるものは φ 自身に限られる．

メタ証明.

step1 $\mathcal{L}_\in$ の式と項についてはメタ定理 2.3.2 より当座の定理の主張が従う．また φ を $\mathcal{L}_\in$ の式とし，τ を $\mathcal{L}_\mathcal{E}$ の項とし，また τ は

$$\varepsilon x\varphi$$

なる ε 項の始切片とするとき，τ の左端は ε であるから

$$\varepsilon y\psi$$

なる形をしているはずである．すると x と y とは一方が他方の始切片となるのでメタ定理 2.3.2 より y は x に一致する．するとまた φ と ψ はは一方が他方の始切片となるので一致する．つまり τ は $\varepsilon x\varphi$ そのものである．

step2 φ を $\mathcal{L}_\mathcal{E}$ の式とするとき，φ のすべての項や真部分式に対して定理の主張が当たっているなら φ に対しても定理の主張通りのことが満たされる，ということはメタ定理 2.3.2 と同じように示される．もう一度書けば，

IH (帰納法の仮定)

φ に現れる任意の項 τ に対して，その始切片で項であるものは τ に限られる．また φ に現れる任意の真部分式 ψ に対して，その始切片で式であるものは ψ に限られる．

として

case1　φ が

$$\in st$$

なる原子式であるとき，φ の始切片で式であるものもまた

$$\in uv$$

なる形をしているが，u と s は一方が他方の始切片となっているので (IH) より一致する．すると v と t も一方が他方の始切片となるので (IH) より一致する．ゆえに φ の始切片で式であるものは φ 自信に限られる．

case2　φ が

$$\neg\psi$$

なる形の式であるとき，φ の始切片で式であるももまた

$$\neg\xi$$

なる形をしている．このとき ξ は ψ の始切片であるから，(IH) より ξ と ψ は一致する．ゆえに φ の始切片で式であるものは φ 自身に限られる．

case3　φ が

$$\vee\psi\xi$$

なる形の式であるとき，φ の始切片で式であるものもまた

$$\vee\eta\zeta$$

なる形をしている．このとき ψ と η は一方が他方の始切片であるので (IH) より一致する．すると ξ と ζ も一方が他方の始切片ということになり，(IH) より一致する．ゆえに φ の始切片で式であるものは φ 自身に限られる．

case4　φ が

$$\exists x\psi$$

なる形の式であるとき，φ の始切片で式であるものもまた

$$\exists y\xi$$

なる形の式である．このとき x と y は一方が他方の始切片であり，これらは変項であるからメタ定理 2.3.2 より一致する．すると ψ と χ も一方が他方の始切片ということになり，(IH) より一致する．ゆえに φ の始切片で式であるものは φ 自身に限られる．

case5　$\varepsilon x\varphi$ の始切片で項であるものは

$$\varepsilon y\psi$$

なる形をしている筈である．このとき，まずメタ定理 2.3.2 より x と y は一致する．すると ψ は φ の始切片であることになるが，前段までの結果から φ と ψ は一致する．■

メタ定理 2.4.5 ($\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ のスコープの存在). φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式，或いは項とするとき，

(a) $\natural$ が φ に現れたとき，変項 t が得られて，$\natural$ のその出現位置から $\natural t$ なる変項が φ の上に現れる．
(b) $\in$ が φ に現れたとき，$\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項 σ,τ が得られて，$\in$ のその出現位置から $\in\sigma\tau$ なる式が φ の上に現れる．
(c) $\neg$ が φ に現れたとき，$\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式 ψ が得られて，$\neg$ のその出現位置から $\neg\psi$ なる式が φ の上に現れる．
(d) $\vee$ が φ に現れたとき，$\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式 ψ,ξ が得られて，$\vee$ のその出現位置から $\vee\psi\xi$ なる式が φ の上に現れる．
(e) $\exists$ が φ に現れたとき，変項 x と $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式 ψ が得られて，$\exists$ のその出現位置から $\exists x\psi$ なる式が φ の上に現れる．

(b) では $\in$ を $=$ に替えたって同じ主張が成り立つし，(d) では $\vee$ を $\wedge$ や $\rightarrow$ に替えても同じである．(e) では $\exists$ を $\forall$ に替えても同じであるのは良いとして，ε 項の成り立ちから $\exists$ を ε に替えても同様の主張が成り立つ．

示すのはスコープの存在だけで良い．一意性は始切片の定理からすぐに従う．実際 φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式として，その中に ε が出現したとすると，“スコープの存在が保証されていれば！”ε のその出現位置から

$$\varepsilon x\psi$$

なる ε 項が φ の上に現れるわけだが，他の誰かが「$\varepsilon y\xi$ という ε 項がその ε の出現位置から抜き取れるぞ」と言ってきたとしても，当然ながら x と y は一方が他方の始切片となるので一致する変項であるし (メタ定理 2.3.2)，すると今度は ψ と ξ の一方が他方の始切片となるが，そのときもメタ定理 2.4.4 より両者は一致する．

メタ証明.

step1 φ が $\mathcal{L}_{\in}$ の式であるときは，スコープの存在はメタ定理 2.3.5 で既に示されている．また $\mathcal{L}_{\in}$ の式 ψ に対して，

$$\varepsilon x\psi$$

なる形の ε 項に対しても (a) から (e) が満たされる．実際，(b) から (e) に関しては，$\in,\neg,\vee,\exists$ は ψ の中にしか出現し得ないので，スコープの存在はメタ定理 2.3.5 により保証される．(a) については，$\natural$ は ψ の中に現れる場合と x の中に現れる場合があるが，いずれの場合もメタ定理 2.3.5 よりスコープは取れる．

ここで φ を任意に与えられた $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式として，次の仮定を置く．

IH(帰納法の仮定)

φ の全ての部分式，及び φ に現れる全ての ε 項の式，つまり $\varepsilon x\psi$ なる項なら ψ のこと，に対して (a) から (e) まで言えると仮定する．

step2 式 φ が $\in st$ なる形の式であるとき．

case1 $\natural$ が $\in st$ に現れたとしよう．s や t が変項であれば (a) の成立は見た目通りである．s が

$$\varepsilon x\psi$$

なる形の ε 項であって，s にその $\natural$ が現れているとしよう．$\natural$ が x に現れている場合はメタ定理 2.3.5 に訴えればよい．$\natural$ が ψ に現れている場合は，(a) の成立は (IH) から従う．

case2　$\in$ が $\in st$ に現れたとしよう．それが左端の $\in$ であれば，(b) の成立を言うには s と t を取れば良い．$\in$ が s に現れたとすれば，s は ε 項であることになり，変項 x と $\mathcal{L}_\mathcal{E}$ の式 ψ が取れて，s は

$$\varepsilon x \psi$$

と表せる．$\in$ は ψ に現れるので，(IH) より $\mathcal{L}_\mathcal{E}$ の項 u, v が取れて，$\in$ のその出現位置から $\in st$ なる式が ψ の上に現れる．$\in$ が t に現れる場合も同様に (b) の成立が言える．

case3　$\in st$ に論理記号 ($\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \exists, \forall$ のいずれか) が現れたとしよう．そしてその現れた記号を便宜上 σ と書こう．σ の出現位置が s にあるとすれば，そのことは s が

$$\varepsilon x \psi$$

なる形の ε 項であることを意味する．当然 σ は ψ の中にあるわけで，(c) もしくは (d) の成立は (IH) から従う．

case4　$\in st$ に ε が現れたとしよう．ε の出現位置が s にあるとすれば，そのことは s が

$$\varepsilon x \psi$$

なる形の ε 項であることを意味する．ε の出現位置が s の左端である場合，(e) の成立を言うにはこの x と ψ を取れば良い．ε が ψ の中にある場合は，(e) の成立は (IH) から従う．

step3　式 φ が $\neg\psi$ なる形のとき，φ に現れた記号は左端の $\neg$ であるか，そうでなければ ψ の中に現れる．左端の $\neg$ のスコープは φ 自身である．ψ に現れた記号のスコープの存在は (IH) により保証される．

step4　式 φ が $\vee\psi\xi$ なる形のとき，φ に現れた記号は左端の $\vee$ であるか，そうでなければ $\psi\xi$ の中に現れる．左端の $\vee$ のスコープは φ 自身である．$\psi\xi$ に現れた記号のスコープの存在は (IH) により保証される．

step5　式 φ が $\exists x\psi$ なる形のとき，φ に現れた記号は左端の $\exists$ であるか，そうでなければ ψ の中に現れる．左端の $\exists$ のスコープは φ 自身である．ψ に現れた記号のスコープの存在は (IH) により保証される．■

2.4.2　内包項

本稿における主流の言語は，次に定める $\mathcal{L}$ である．$\mathcal{L}$ の最大の特徴は

$$\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$$

なる形のオブジェクトが “正式に” 項として用いられることである．他の多くの集合論の本では $\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$ なる項はインフォーマルに導入されるものであるが，インフォーマルなものでありながらこの種のオブジェクトはいたるところで堂々と登場するので，やはりフォーマルに導入して然るべきである．

$\mathcal{L}$ の構成要素は以下のものである．

矛盾記号　$\perp$

論理記号　$\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$

量化子　$\forall$, $\exists$

述語記号　$=$, $\in$

変項　2.1 節のもの．

補助記号　$\{, |, \}$

$\mathcal{L}$ の項と式の構成規則は $\mathcal{L}_{\in}$ のものと大差ない．

項
- 変項は $\mathcal{L}$ の項である．
- $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項は $\mathcal{L}$ の項である．
- x を $\mathcal{L}$ の変項とし，φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とするとき，$\{x \mid \varphi\}$ なる記号列は $\mathcal{L}$ の項である．
- 以上のみが $\mathcal{L}$ の項である．

によって正式に定義される．

式
- $\perp$ は $\mathcal{L}$ の式である．
- σ と τ を $\mathcal{L}$ の項とするとき，$\in st$ と $= st$ は $\mathcal{L}$ の式である．これらは $\mathcal{L}$ の**原子式 (atomic formula)** である．
- φ を $\mathcal{L}$ の式とするとき，$\neg\varphi$ は $\mathcal{L}$ の式である．
- φ と ψ を $\mathcal{L}$ の式とするとき，$\vee\varphi\psi$, $\wedge\varphi\psi$, $\rightarrow \varphi\psi$ はいずれも $\mathcal{L}$ の式である．
- x を変項とし，φ を $\mathcal{L}$ の式とするとき，$\forall x\varphi$ と $\exists x\varphi$ は $\mathcal{L}$ の式である．

定義 2.4.6 (内包項).　$\{x \mid \varphi\}$ なる項を**内包項**と呼ぶ．ここで x は変項であり，φ は $\mathcal{L}$ の式である．

定義通りなら，$\{x \mid y = y\}$ のように式 φ に x が自由に現れていない場合でも $\{x \mid \varphi\}$ は $\mathcal{L}$ の項である．ただしそのような項は全く無用であるから，後で実際に集合論を構築する際には排除してしまう (2.4.6 節参照).

メタ定理 2.4.7.　$\mathcal{L}_{\in}$ の式は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式であり，また $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式は $\mathcal{L}$ の式である．

メタ証明.

step1　式の構成法より $\mathcal{L}_{\in}$ の原子式は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式である．また φ を任意に与えられた $\mathcal{L}_{\in}$ の式とするとき，

IH (帰納法の仮定)

φ のすべての真部分式は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式である

と仮定すると，φ が

case1　$\neg\psi$

case2　$\vee\psi\chi$

case3　$\exists x\psi$

のいずれの形の式であっても，ψ も χ も (IH) より $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式であるから，式の構成法より φ 自信も $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式である．ゆえに $\mathcal{L}_{\in}$ の式は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式である．

step2　$\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式が $\mathcal{L}$ の式であることを示す．まず，$\mathcal{L}$ の式の構成において使える項を変項に制限すれば全ての $\mathcal{L}_{\in}$ の式が作られるのだから $\mathcal{L}_{\in}$ の式は $\mathcal{L}$ の式である．また φ を任意に与えられた $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とするとき，

IH (帰納法の仮定)

φ のすべての真部分式は $\mathcal{L}$ の式である

と仮定すると (今回は予め $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項は $\mathcal{L}$ の項とされているので，真部分式に対する仮定のみで十分である)，

case1　φ が $\in \sigma\tau$ なる形の原子式であるとき，σ も τ も $\mathcal{L}$ の項であるから $\in \sigma\tau$ は $\mathcal{L}$ の式である．

case2　φ が $\neg\psi$ なる形の式であるとき，(IH) より ψ は $\mathcal{L}$ の式であるから $\neg\psi$ も $\mathcal{L}$ の式である．

case3　φ が $\vee\psi\chi$ なる形の式であるとき，(IH) より ψ も χ も $\mathcal{L}$ の式であるから $\vee\psi\chi$ も $\mathcal{L}$ の式である．

case4　φ が $\exists x\psi$ なる形の式であるとき，(IH) より ψ は $\mathcal{L}$ の式であるから $\exists x\psi$ も $\mathcal{L}$ の式である．

となる．ゆえに $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式は $\mathcal{L}$ の式である． ∎

メタ公理 2.4.8 ($\mathcal{L}$ の式に対する構造的帰納法).　$\mathcal{L}$ の式に対する言明 X に対し，

- 原子式に対して X が言える．
- 無作為に選ばれた式 φ について，その全ての真部分式に対して X が言えると仮定すれば，φ に対しても X が言える．

ならば，いかなる式に対しても X が言える．

$\mathcal{L}$ の項は帰納的な構成になっていないので構造的帰納法は不要である．

メタ定理 2.4.9 ($\mathcal{L}$ の始切片の一意性).　τ を $\mathcal{L}$ の項とするとき，τ の始切片で $\mathcal{L}$ の項であるものは τ 自信に限られる．また φ を $\mathcal{L}$ の式とするとき，φ の始切片で $\mathcal{L}$ の式であるものは φ 自信に限られる．

メタ証明.

項について　τ を項とするとき，τ が変項ならばメタ定理 2.3.2 によって，τ が $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項ならばメタ定理 2.4.4 によって，τ の始切片で $\mathcal{L}$ の項であるものは τ 自身に限られる．τ が

$$\{\, x \mid \varphi \,\}$$

なる内包項である場合，τ の始切片で項であるものも

$$\{\, y \mid \psi \,\}$$

なる形をしている．メタ定理 2.3.2 より x と y が一致し，メタ定理 2.4.4 より φ と ψ も一致するので，この場合も τ の始切片で項であるものは τ 自身に限られる．

式について　$\in st$ なる原子式については，その始切片で式であるものは

$$\in uv$$

なる形をしているが，前段の結果より s と u，t と v は一致する．$= st$ なる原子式についても，その始切片で $\mathcal{L}$ の式であるものは $= st$ に限られる．

いま φ を任意に与えられた $\mathcal{L}$ の式とし，

IH (帰納法の仮定)

φ に現れる任意の真部分式 ψ に対して，その始切片で式であるものは ψ に限られる．

と仮定する．このとき

case1　φ が

$$\neg\psi$$

なる形の式であるとき，φ の始切片で式であるものもまた

$$\neg\xi$$

なる形をしている．このとき ξ は ψ の始切片であるから，(IH) より ξ と ψ は一致する．ゆえに φ の始切片で式であるものは φ 自身に限られる．

case2　φ が

$$\vee\psi\xi$$

なる形の式であるとき，φ の始切片で式であるものもまた

$$\vee\eta\zeta$$

なる形をしている．このとき ψ と η は一方が他方の始切片であるので (IH) より一致する．すると ξ と ζ も一方が他方の始切片ということになり，(IH) より一致する．ゆえに φ の始切片で式であるものは φ 自身に限られる．

case3　φ が

$$\exists x\psi$$

なる形の式であるとき，φ の始切片で式であるものもまた

$$\exists y\xi$$

なる形の式である．このとき x と y は一方が他方の始切片であり，これらは変項であるからメタ定理 2.3.2 より一致する．すると ψ と χ も一方が他方の始切片ということになり，(IH) より一致する．ゆえに φ の始切片で式であるものは φ 自身に限られる．■

φ を $\mathcal{L}$ の式とし，s を

$$\natural,\ \{,\ \in,\ \neg,\ \vee,\ \wedge,\ \rightarrow,\ \exists,\ \forall,\ \varepsilon$$

のいずれかの記号とするとき，s が φ に現れたら s のその出現位置から始まる φ の部分式 (ただし s が “$\natural, \{, \varepsilon$” である場合は部分項) を s の**スコープ (scope)** と呼ぶ．ところで φ には

$$|,\quad \}$$

も現れるので，これらにもスコープを割り当てるために

- φ に “$|$” が現れたら，“$|$” のその出現位置を跨いで φ の上に現れる内包項 $\{\, x \mid \psi \,\}$ をその “$|$” のスコープと呼ぶ．つまり現れた “$|$” とは $\{\, x \mid \psi \,\}$ の中心線 “$|$” のことである．

- φ に “$\}$” が現れたら，“$\}$” のその出現位置を右端にして φ の上に現れる内包項 $\{x \mid \psi\}$ をその “$\}$” のスコープと呼ぶ．つまり現れた “$\}$” とは $\{x \mid \psi\}$ の右端の “$\}$” のことである．

と定める．すると，次のメタ定理によって “$\natural$, $\{$, $|$, $\}$, $\in$, $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\exists$, $\forall$, ε” の全ての記号に対してスコープが取れることが保証される．

取れるスコープの唯一性はメタ定理 2.4.9 からすぐに従い，その証明は $\mathcal{L}_{\in}$ や $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の場合と殆ど同様であるが，“$|$” と “$\}$” のスコープの唯一性について書いておくと

- φ の中で “$|$” のスコープ $\{x \mid \psi\}$ と $\{y \mid \chi\}$ が取れたとすれば，ψ と χ は φ の中で同じ位置から始まる式であるからメタ定理 2.4.4 より一致する．また x と y は変項であるからその中に “$\{$” が現れるはずはなく，x と y も一致すると判る．
- φ の中で “$\}$” のスコープ $\{x \mid \psi\}$ と $\{y \mid \chi\}$ が取れたとすれば，ψ と χ は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式であるからその中に “$|$” が現れるはずはなく，両者は一致していなくてはならない．すると上と同様に x と y も一致していなくてはならない．

メタ定理 2.4.10 ($\mathcal{L}$ のスコープの存在). φ を $\mathcal{L}$ の式，或いは $\mathcal{L}$ の項とするとき，

(a) $\natural$ が φ に現れたとき，変項 t が得られて，$\natural$ のその位置から $\natural t$ なる項が φ の上に現れる．

(b) $\{$ が φ に現れたとき，変項 x と $\mathcal{L}$ の式 ψ が得られて，$\{$ のその出現位置から $\{x \mid \psi\}$ なる項が φ の上に現れる．

(c) $|$ が φ に現れたとき，変項 x と $\mathcal{L}$ の式 ψ が得られて，$|$ のその出現位置を跨いで $\{x \mid \psi\}$ なる項が φ の上に現れる．

(d) $\}$ が φ に現れたとき，変項 x と $\mathcal{L}$ の式 ψ が得られて，$\}$ のその出現位置右端にして $\{x \mid \psi\}$ なる項が φ の上に現れる．

(e) $\in$ が φ に現れたとき，$\mathcal{L}$ の項 σ, τ が得られて，$\in$ のその出現位置から $\in \sigma\tau$ なる式が φ の上に現れる．

(f) $\neg$ が φ に現れたとき，$\mathcal{L}$ の式 ψ が得られて，$\neg$ のその出現位置から $\neg\psi$ なる式が φ の上に現れる．

(g) $\vee$ が φ に現れたとき，$\mathcal{L}$ の式 ψ, ξ が得られて，$\vee$ のその出現位置から $\vee\psi\xi$ なる式が φ の上に現れる．

(h) $\exists$ が φ に現れたとき，変項 x と $\mathcal{L}$ の式 ψ が得られて，$\exists$ のその出現位置から $\exists x\psi$ なる式が φ の上に現れる．

メタ証明.

case1 $\in st$ なる原子式に対しては，

- $\natural, \neg, \vee, \exists$ が現れたとすれば，それらは s か t の中に現れているのであり，メタ定理 2.3.5 とメタ定理 2.4.5 よりそれらのスコープは取れる．仮に s と t の一方が

$$\{x \mid \psi\}$$

なる内包項であるとしても，$\natural, \neg, \vee, \exists$ が現れうるのは x 或いは ψ の中であるから，スコープの存在は上記のメタ定理に訴えればよい．

- $\in st$ に $\in$ が現れたとすれば，それが s, t の中のものならば上記の定理によってスコープは取れるし，それが $\in st$ の左端の $\in$ を指しているなら $\in st$ 自身をスコープとして取れば良い．
- $\in st$ に $\{, |, \}$ が現れたとすれば，s と t の少なくとも一方は

$$\{\, x \mid \psi \,\}$$

なる項であることになるので，スコープとしてこの内包項を取れば良い．

case2　φ を任意に与えられた $\mathcal{L}$ の式として φ を任意に与えられた式として

IH (帰納法の仮定)

φ の全ての真部分式に対しては (a) から (h) の主張が当てはまる

と仮定する．このとき，

- φ が

$$\neg\psi$$

なる形の式であるとき，$\natural, \{, |, \}, \in, \vee, \exists$ が φ に現れたなら，それらは ψ の中に現れているのだから (IH) よりスコープが取れる．また φ に $\neg$ が現れた場合，その $\neg$ が ψ の中のものならば (IH) に訴えれば良いし，φ の左端の $\neg$ を指しているならスコープとして φ 自身を取れば良い．
- φ が

$$\vee\psi\chi$$

なる形の式であるとき，$\natural, \{, |, \}, \in, \neg, \exists$ が φ に現れたなら，それらは ψ か χ の中に現れているのだから (IH) よりスコープが取れる．また φ に $\vee$ が現れた場合，その $\vee$ が ψ, χ の中のものならば (IH) に訴えれば良いし，φ の左端の $\vee$ を指しているならスコープとして φ 自身を取れば良い．
- φ が

$$\exists x\psi$$

なる形の式であるとき，$\natural, \{, |, \} \in, \neg, \vee$ が φ に現れたなら，それらは ψ の中に現れているのだから (IH) よりスコープが取れる．また φ に $\exists$ が現れた場合，その $\exists$ が ψ の中のものならば (IH) に訴えれば良いし，φ の左端の $\exists$ を指しているならスコープとして φ 自身を取れば良い． ▮

2.4.3　量化

φ を $\mathcal{L}$ の式とする．もし φ に $\forall$ が現れたら，その $\forall$ に後続する変項 x と式 ψ が取れるが，そのとき x は

$$\forall x\psi$$

の中で「**量化されている**」**(quantified)** や「**束縛されている**」**(bound)** という．同様に φ の中に $\exists$ や ε が現れたら，その $\exists$ (または ε) の直後にくる変項は，「その $\exists$ (または ε) のスコープの中で量化されている」といい，また φ の中に

$$\{\, x \mid \psi \,\}$$

なる内包項が現れたら，x は「この内包項の中で量化されている」という．他方で ψ の中に x とは別の変項が現れていても，その変項は $\forall x\psi$, $\exists x\psi$, $\varepsilon x\psi$, $\{ x \mid \psi \}$ の中では「量化されていない」と解釈する．まとめれば，$\forall, \exists, \varepsilon$, そして $\{$ は直後に来る変項のみをそのスコープ内で量化しているのである．たとえば

$$\forall x (x \in y)$$

においては x は量化されているし，

$$\{ u \mid u = z \}$$

において u は量化されている．量化は二重に行われることもある．例えば

$$\forall x (\forall x (x \in y) \rightarrow (x \in z))$$

なる式においては，$\forall x (x \in y)$ にある x は上式で一番左の $\forall$ のスコープ内の x でもあるので，これらの x は二重に量化されていることになる．仮に「何重にも量化されている場合は最も狭いスコープで量化されていることにする」と決めても良いが，ただし重要なのは変項が量化されているか否かであって，それが二重でも三重でもどうでも構わない．

上の例では y と z は量化されていないが，考えている項や式の中で量化されていない変項を**自由な (free)** 変項と呼ぶ．現れる変項が自由であるか否かは当然その出現位置に依存しているのであり，たとえば

$$\forall x (x \in y) \rightarrow (x \in z)$$

なる式では左の二つの x が量化されている一方で右の x は自由であるように，同じ変項が複数個所に現れる場合はその変項が量化されているか自由であるかは一概には言えない．式 φ の中に量化されていない変項が現れている場合は，その変項が “その位置” に現れていることを**自由な出現 (free occurrence)** と呼ぶ.

メタ定義 2.4.11 (文). 自由な変項が現れない $\mathcal{L}$ の式を**文 (sentence)** や**閉式 (closed formula)** と呼ぶ.

2.4.4 代入

変項とは束縛されうる項であったが，別の項を代入されうる項でもある．代入とは別の項で置き換えるということであり，また代入されうるのは式の中で自由な変項のみである．ただし，代入には「**式の中の自由な変項を別の変項に取り替えても式の意味を変えてはならない**」という大前提がある．たとえば

$$\forall u (u \in x)$$

という式で考察すると，この式で x は自由であるから別の項を代入して良いのであり，z を代入すれば

$$\forall u (u \in z)$$

となる．そしてこの場合はどちらの式も意味は同じである．意味が同じであるとは量化してみれば一目瞭然であって，両式を全称記号で量化すれば

$$\forall x \, \forall u (u \in x),$$
$$\forall z \, \forall u (u \in z)$$

はどちらも「どの集合も，全ての集合を要素に持つ」と解釈され，両式を存在記号で量化すれば

$$\exists x \, \forall u \, (u \in x),$$
$$\exists z \, \forall u \, (u \in z)$$

はどちらも「或る集合は，全ての集合を要素に持つ」と解釈される．ところが x に u を代入すると

$$\forall u \, (u \in u)$$

となり，これは「全ての集合は自分自身を要素に持つ」という意味に変わる．つまり先の大前提に立てば，代入する際には**代入後に束縛されてしまう変項は使ってはいけない**のである．

代入するのは変項だけではない．ε 項や内包項だって上の x に代入して良い．ただし上と同様の注意が必要で，ε 項や内包項に u が自由に現れている場合とそうでない場合では代入後の式の意味が分かれてしまうので，代入して良い項は u が自由に現れていないものに限る．

以上の考察を一般的な代入規則に敷衍して言えば，

代入可能な項

φ を $\mathcal{L}$ の式とし，x を φ に自由に現れる変項とし，τ を $\mathcal{L}$ の項とする．このとき「φ に自由に現れる x に τ を代入する」とは，特筆が無い限り φ に自由に現れる全ての x に τ を代入することであって，その際に τ が満たすべき条件は

- τ が変項ならば τ は φ に代入されたどの箇所でも自由である
- τ が ε 項や内包項である場合は，τ の中に自由に現れる変項があったとしても，それらは全て τ が代入されたどの箇所でも束縛されない

とする．τ がこの条件を満たすとき，**「τ は φ の中で x への代入について自由である」**という．

φ に自由に現れる x に τ を代入した後の式を

$$\varphi(x/\tau)$$

と書く (x/τ は "replace x by τ" の順)．特に φ の中に自由に現れている変項が x だけである場合は，$\varphi(x/\tau)$ を

$$\varphi(\tau)$$

とも書く．τ が x 自身である場合は $\varphi(x)$ は φ そのものであるが，「φ に自由に現れているのは x だけである」ということを強調するために

$$\varphi(x)$$

と書くことも多い．φ に別の変項 y が現れていて，y に項 σ を代入するときは，

$$\varphi(x/\tau)(y/\sigma)$$

を

$$\varphi(x/\tau, y/\sigma)$$

とも書く．特に φ の中に自由に現れている変項が x と y だけである場合は，τ と σ の代入先がはっきりしていれば

$$\varphi(\tau, \sigma)$$

とも書くし，「φ に自由に現れているのは x と y だけである」ということを強調するために

$$\varphi(x, y)$$

と書くことも多い．φ に x が自由に現れていない場合でも $\varphi(x/\tau)$ などと書かれていたら，その式は φ のことであると理解する．

2.4.5　類

元々の意図としては，例えば x のみが自由に現れる式 $\varphi(x)$ に対して "$\varphi(x)$ を満たすいずれかの集合 x" という意味を込めて

$$\varepsilon x \varphi(x)$$

を作ったのだし，"$\varphi(x)$ を満たす集合 x の全体" という意味を込めて

$$\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$$

を作ったのである．つまりこの場合の $\varepsilon x \varphi(x)$ と $\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$ は "意味を持っている" わけである．これが，もし x とは別の変項 y が φ に自由に現れているとすれば，$\varepsilon x \varphi$ も $\{\, x \mid \varphi \,\}$ も y に依存してしまい意味が定まらなくなる．というのも，変項とは代入可能な項であるから，y に代入する項ごとに $\varepsilon x \varphi$ と $\{\, x \mid \varphi \,\}$ は別の意味を持ち得るのである．また項が閉じていても意味不明な場合がある．たとえば，ψ が文であるときに

$$\varepsilon y \psi$$

や

$$\{\, y \mid \psi \,\}$$

なる項は閉じてはいるが，導入の意図には適っていない．意味不明ながらこういった項が存在しているのは導入時にこれらを排除する面倒を避けたからであり，また一旦すべてを作り終えた後で余計なものを捨てる方が楽だからである．

とりあえず，導入の意図に適っている項は特別の名前を持っていて然るべきである．

定義 2.4.12 (類).　φ を $\mathcal{L}_\mathcal{E}$ の式とし，x を φ に自由に現れる変項とし，φ に自由に現れる項は x のみであるとするとき，$\varepsilon x \varphi$ と $\{\, x \mid \varphi \,\}$ を**類 (class)** と呼ぶ．またこれらのみが類である．

類には二種類あるので，それらも名前を分けておく．

定義 2.4.13 (主要 ε 項).　類である ε 項を**主要 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 項 (critical epsilon term)** と呼ぶ．

定義 2.4.14 (主要内包項).　類である内包項を**主要内包項**と呼ぶ．

内包項に関しては便宜上自由な変項の出現も許すことにするが，たとえば $\{x \mid \varphi\}$ と書いたら少なくとも x は φ に自由に現れているべきであり，この意味で性質の良い内包項に対しても特別な名前を付けておく．

定義 2.4.15 (正則内包項). φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とし，x を変項とし，φ に x が自由に現れているとするとき，$\{x \mid \varphi\}$ を**正則内包項**と呼ぶ．

2.4.6 扱う式の制限

以降では扱う式は，特筆が無い限りそこに現れる ε 項は全て主要 ε 項であり，現れる内包項は全て正則内包項であるとする． 項の中に現れる ε 項も，項の中の項の中に現れる ε 項も，現れうる ε 項は全て主要 ε 項である．

2.4.7 式の書き換え

ε 項を取り入れたのは**存在文 (existential sentence)** に対して**証人 (witnessing term)** を与えるためであり，それは

$$\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(\varepsilon x \varphi(x))$$

なる式を公理とすることで裏付けされる．ただし ε 項を作れるのは $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式のみであるから，φ が内包項を含んだ式であると $\varepsilon x \varphi(x)$ を使うことが出来ない．とはいえ内包項を含んだ存在文も往々にして登場するので，それらに対しても証人を用意できると便利である．そこで φ を内包項を含んだ $\mathcal{L}$ の式とするとき，φ を "同値" な $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式 $\hat{\varphi}$ に書き換えて

$$\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(\varepsilon x \hat{\varphi}(x))$$

を公理とする (量化公理 3.2.28)．注意点は同値な書き換えはいくらでも作れるということであり，$\check{\varphi}$ も φ の書き換えならば

$$\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(\varepsilon x \check{\varphi}(x))$$

も公理とする．書き換える必要があるのは内包項を含んでいる式のみであり，またそのような式の原子式の部分，つまり $\in$ と $=$ のスコープ，だけを書き換えれば十分である．書き換えが "同値" というのは後述の 4.4 節で述べてあるような意味であるが，直感的に妥当な範囲でしかない．原子式の書き換えは次の要領で行う：

元の式	書き換え後	付記
$a = \{z \mid \psi\}$	$\forall v\,(v \in a \leftrightarrow \psi(z/v))$	
$\{y \mid \varphi\} = b$	$\forall u\,(\varphi(y/u) \leftrightarrow u \in b)$	
$\{y \mid \varphi\} = \{z \mid \psi\}$	$\forall u\,(\varphi(y/u) \leftrightarrow \psi(z/u))$	
$a \in \{z \mid \psi\}$	$\psi(z/a)$	必要なら束縛変項の名前替えをする
$\{y \mid \varphi\} \in b$	$\exists s\,(\forall u\,(\varphi(y/u) \leftrightarrow u \in s) \wedge s \in b)$	
$\{y \mid \varphi\} \in \{z \mid \psi\}$	$\exists s\,(\forall u\,(\varphi(y/u) \leftrightarrow u \in s) \wedge \psi(z/s))$	

ただし上の記号に課している条件は

- a, b は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項である (2.4.6 節より a, b は変項か主要 ε 項).
- $\{ y \mid \varphi \}$ と $\{ z \mid \psi \}$ を正則内包項である.
- u は φ の中で y への代入について自由であり，u, v, s は ψ の中で z への代入について自由である．上の式の書き換えにおいては変項 u, v, s を追加したが，代入について自由である限りどの変項を選んでも構わない．従って式の書き換えは一つに決まらないということになるが，違う変項を選んでも式の意味は変わらない．
- 付記「束縛変項の名前替え」について．a を ψ の中の自由な z に代入した後で a が束縛される場合，束縛変項の名前替えをしなくてはならない．たとえば

  $$a \in \{ z \mid \forall a \, (z \in a) \}$$

  という式では左辺の a は自由であるのに，書き換えの規則をそのまま適用すると

  $$\forall a \, (a \in a)$$

  となり束縛されてしまう．代入後の a が束縛されないためには

  $$a \in \{ z \mid \forall b \, (z \in b) \}$$

  のように束縛変項 a を別の変項 b に替えて

  $$\forall b \, (a \in b)$$

  とすればよい．

メタ定義 2.4.16 (式の書き換え). φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式ではない $\mathcal{L}$ の式とするとき，φ の原子式の部分，つまり $\in$ と $=$ のスコープを全て上表に従って直した式を φ の**書き換え**と呼ぶ.

メタ定理 2.4.17 (書き換えは $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式). φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式ではない $\mathcal{L}$ の式とし，$\hat{\varphi}$ を φ の書き換えとするとき，$\hat{\varphi}$ は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式である.

メタ証明.

step1　φ が原子式なら，表の通り $\hat{\varphi}$ は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式である.

step2　φ が原子式ないとき，

IH (帰納法の仮定)

φ の任意の真部分式は，それが $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式でない場合その書き換えは $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式である.

と仮定する.

case1　φ が

$$\neg \psi$$

なる式のとき，φ の $\in, =$ のスコープはいずれも ψ の部分原子式であり，逆に ψ の $\in, =$ のどのスコープも φ の部分原子式であるから，φ の原子式の部分を全て書き換えるということは ψ の原子

式の部分を全て書き換えるということになる．$\hat{\varphi}$ は

$$\neg\hat{\psi}$$

なる式で書けるが，$\hat{\psi}$ は ψ の書き換えであり，(IH) より $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式である．ゆえに $\hat{\varphi}$ も $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式である．

case2　φ が

$$\vee\psi\chi$$

なる式のとき，φ の $\in,=$ のスコープはいずれも ψ か χ の一方の部分原子式であり (始切片の一意性のメタ定理 2.4.9 より φ の真部分式が ψ と χ の境を跨ぐことはない)，逆に ψ,χ の $\in,=$ のどのスコープも φ の部分原子式であるから，φ の原子式の部分を全て書き換えるということは ψ と χ の原子式の部分を全て書き換えるということになる．$\hat{\varphi}$ は

$$\vee\hat{\psi}\hat{\chi}$$

なる式で書けるが，$\hat{\psi},\hat{\chi}$ はそれぞれ ψ,χ の書き換えであり (もしくは，ψ,χ の一方は元から $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式かもしれない)，(IH) よりどちらも $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式である．ゆえに $\hat{\varphi}$ も $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式である．

case3　φ が

$$\exists x\psi$$

なる式のとき，case1 と同様の理由で φ の原子式の部分を全て書き換えるということは ψ の原子式の部分を全て書き換えるということになる．$\hat{\varphi}$ は

$$\exists x\hat{\psi}$$

なる式で書けるが，$\hat{\psi}$ は ψ の書き換えであり，(IH) より $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式である．ゆえに $\hat{\varphi}$ も $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式である．∎

メタ定理 2.4.18 (部分式の書き換えとの関係).　φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式ではない $\mathcal{L}$ の式とするとき，

case1　φ が $\neg\psi$ なる式のとき，φ の書き換え $\hat{\varphi}$ は $\neg\hat{\psi}$ なる式であるが，このとき $\hat{\psi}$ は ψ の書き換えである．逆に $\check{\psi}$ を ψ の書き換えとすれば $\neg\check{\psi}$ は φ の書き換えである．

case2　φ が $\vee\psi\chi$ なる式のとき，φ の書き換え $\hat{\varphi}$ は $\vee\hat{\psi}\hat{\chi}$ なる式であるが，このとき $\hat{\psi},\hat{\chi}$ はそれぞれ ψ,χ の書き換えである．逆に $\check{\psi},\check{\chi}$ をそれぞれ ψ,χ の書き換えとすれば $\vee\check{\psi}\check{\chi}$ は φ の書き換えである．なお，ψ,χ の一方は元から $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式かもしれないが，たとえば ψ がそうなら $\hat{\psi}$ も $\check{\psi}$ も ψ であるとする．

case3　φ が $\exists x\psi$ なる式のとき，φ の書き換え $\hat{\varphi}$ は $\exists x\hat{\psi}$ なる式であるが，このとき $\hat{\psi}$ は ψ の書き換えである．逆に $\check{\psi}$ を ψ の書き換えとすれば $\exists x\check{\psi}$ は φ の書き換えである．

メタ証明.　証明は前定理の説明と大方被ってしまうがもう一度載せて置く．

case1　φ の $\in, =$ のスコープはいずれも ψ の部分原子式であり，逆に ψ の $\in, =$ のどのスコープも φ の部分原子式であるから，φ の原子式の部分を全て書き換えることと ψ の原子式の部分を全て書き換えることは同じである．従って $\hat{\psi}$ は ψ の書き換えであり，$\rightarrow\check{\psi}$ は φ の書き換えである．

case2　φ の $\in, =$ のスコープはいずれも ψ か χ の一方の部分原子式であり (始切片の一意性のメタ定理 2.4.9 より φ の真部分式が ψ と χ の境を跨ぐことはない)，逆に ψ, χ の $\in, =$ のどのスコープも φ の部分原子式であるから，φ の原子式の部分を全て書き換えることと ψ と χ の原子式の部分を全て書き換えることは同じである．従って $\hat{\psi}, \hat{\chi}$ はそれぞれ ψ, χ の書き換えであり，$\rightarrow\check{\psi}\check{\chi}$ は φ の書き換えである．

case3　case1 と同じ理由によって，$\hat{\psi}$ は ψ の書き換えであり，$\exists x\check{\psi}$ は φ の書き換えである．■

メタ定理 2.4.19 (書き換え後も自由な変項は増減しない).　φ を $\mathcal{L}$ の式とし，これを $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き換えたものを $\hat{\varphi}$ とする．このとき φ に自由に現れる変項と $\hat{\varphi}$ に自由に現れる変項は一致する．

メタ証明．

step1　φ が原子式であるときは上の書き換え表より一目瞭然である．

step2　φ が一般の式であるとき

IH (帰納法の仮定)

φ の任意の真部分式 ψ と，それを $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き換えた $\hat{\psi}$ は，自由に現れる変項が一致する

と仮定する．すると

case1　φ が

$$\rightarrow\psi$$

なる式の場合，φ に自由に現れる変項は ψ に自由に現れる変項と一致するが，それは $\hat{\psi}$ に自由に現れる変項と一致するので，$\rightarrow\hat{\psi}$ に自由に現れる変項とも一致する．

case2　φ が

$$\vee\psi\chi$$

なる式の場合，φ に自由に現れる変項は ψ, χ に自由に現れる変項と一致するが，それは $\hat{\psi}, \hat{\chi}$ に自由に現れる変項と一致するので，$\rightarrow\hat{\psi}\hat{\chi}$ に自由に現れる変項とも一致する．

φ が

$$\exists x\psi$$

なる式の場合，φ に自由に現れる変項は ψ に自由に現れる x 以外の変項と一致するが，それは $\hat{\psi}$ に自由に現れる x 以外の変項変項と一致するので，$\rightarrow\hat{\psi}$ に自由に現れる変項とも一致する．■

2.4.8 中置記法

たとえば $\in st$ なる原子式は「s は t の要素である (s is in t)」と読むのだから，語順通りに，或いは s が t の中にあるというイメージ通りに

$$s \in t$$

と書きかえる方が見やすくなる．同じように，$\vee\varphi\psi$ なる式も「φ または ψ」と読むのだから

$$\varphi \vee \psi$$

と書きかえる方が見やすくなる．$\rightarrow\ \vee\varphi\psi \wedge \chi\xi$ のように長い式も，上の作法に倣えば

$$\begin{gathered} \rightarrow\ \vee\varphi\psi \wedge \chi\xi \\ \rightarrow\ {\color{red}\varphi \vee \psi}{\color{blue}\chi \wedge \xi} \\ {\color{red}\varphi \vee \psi} \rightarrow {\color{blue}\chi \wedge \xi} \end{gathered}$$

と書きかえることになるが，一々色分けするわけにもいかないので “(” と “)” を使って

$$(\varphi \vee \psi)\ \rightarrow\ (\chi \wedge \xi)$$

と書くようにすれば良い．

中置記法 (infix notation)

$\mathcal{L}$ の式は以下の手順で中置記法に書き換える．

1. $\in st$ なる形の原子式は $s \in t$ と書きかえる．$= st$ も同様に書き換える．
2. $\neg\varphi$ なる形の式はそのままにする．
3. $\vee\varphi\psi$ なる形の式は $(\varphi \vee \psi)$ と書きかえる．$\wedge\varphi\psi$ と $\rightarrow\ \varphi\psi$ の形の式も同様に書き換える．
4. $\exists x\varphi$ なる形の式はそのままにする．$\forall x\varphi$ なる形の式も同様にする．

上の書き換え法では，たとえば $\rightarrow\ \vee\varphi\psi \wedge \chi\xi$ なる式は

$$((\varphi \vee \psi)\ \rightarrow\ (\chi \wedge \xi))$$

となるが，括弧はあくまで式の境界の印として使うものであるから，一番外側の括弧は外して

$$(\varphi \vee \psi)\ \rightarrow\ (\chi \wedge \xi)$$

と書く方が良い．よって**中置記法に書き換え終わったときに一番外側にある括弧は外すことにする**．

$\wedge \vee \exists x\varphi\psi \neg\rightarrow\ \chi \in st$ なる式は

$$\begin{gathered} \wedge \vee \exists x\varphi\psi \neg\rightarrow\ \chi s \in t \\ \wedge(\exists x\varphi \vee \psi) \neg(\chi\ \rightarrow\ s \in t) \\ (\exists x\varphi \vee \psi) \wedge \neg(\chi\ \rightarrow\ s \in t) \end{gathered}$$

となる．

ただしあまり括弧が連なると読みづらくなるので，

$$(\varphi \vee \psi)\ \rightarrow\ \chi$$

なる形の式は

$$\varphi \vee \psi \ \rightarrow \ \chi$$

に，同様に

$$\varphi \ \rightarrow \ (\psi \vee \chi)$$

なる形の式は

$$\varphi \ \rightarrow \ \psi \vee \chi$$

とも書く．また $\vee$ が $\wedge$ であっても同じように括弧を省く．

第 3 章

推論

第 2.4.6 節で決めた通り，扱う式は全て，そこに現れる ε 項は全て主要 ε 項であり，現れる内包項は全て正則内包項である．

3.1　証明

本節では**論理的公理 (logical axiom)** を導入し，基本的な**論理的定理**を導出する．論理的定理とは本稿で勝手に付けた名前であり，別に単に定理と呼んでも何も問題は無いのだが，集合論特有の定理と区別するために敢えて名前を変えている．

以下では

$$\vdash$$

なる記号を用いて，

$$\varphi \vdash \psi$$

などと書き，「$\vdash$ の右の文は，$\vdash$ の左の文から証明できる」と読む．$\vdash$ の左右にあるのは必ず $\mathcal{L}$ の文であって，右側に置かれる文は必ず一本だけであるが，左側には文がいくつあっても良いし，全く無くても良い．特に

$$\vdash \psi$$

を満たす文 ψ を論理的定理と呼ぶ．

まずは**証明 (proof)** とは何かを規定する．証明される式や証明の過程で出てくる式は全て文である．本稿では証明された文を**真な (true)** 文と呼ぶことにするが，“証明された” や “真である” という状況は議論が立脚している前提に依存する．ここでいう前提とは，論理的公理や言語ではなくて**公理系 (axioms)** と呼ばれるものを指している．公理系とは文の集まりである．$\mathscr{S}$ を公理系とするとき，$\mathscr{S}$ に収容された文を $\mathscr{S}$ の**公理 (axiom)** と呼ぶ．以下では本稿の集合論が立脚する公理系を Σ と書くが，Σ に属する文は単に公理と呼んだりもする．

Σ とは以下の文からなる:

外延性　a と b を類とするとき

$$\forall x \, (\, x \in a \;\leftrightarrow\; x \in b \,) \;\rightarrow\; a = b.$$

相等性　a,b,c を類とするとき

$$a = b \ \rightarrow\ b = a,$$
$$a = b \ \rightarrow\ (\, a \in c \ \rightarrow\ b \in c\,),$$
$$a = b \ \rightarrow\ (\, c \in a \ \rightarrow\ c \in b\,).$$

内包性　φ を $\mathcal{L}$ の式とし，y を φ に自由に現れる変項とし，φ に自由に現れる項は y のみであるとし，x は φ で y への代入について自由であるとするとき，

$$\forall x\, (\, x \in \{\, y \mid \varphi(y)\,\} \ \leftrightarrow\ \varphi(x)\,).$$

要素　a,b を類とするとき

$$a \in b \ \rightarrow\ \exists x\, (\, x = a\,).$$

置換　φ を $\mathcal{L}$ の式とし，s,t を φ に自由に現れる変項とし，φ に自由に現れる項は s,t のみであるとし，x は φ で s への代入について自由であり，y,z は φ で t への代入について自由であるとするとき，

$$\forall x\, \forall y\, \forall z\, (\, \varphi(x,y) \wedge \varphi(x,z) \ \rightarrow\ y = z\,) \ \rightarrow\ \forall a\, \exists z\, \forall y\, (\, y \in z \ \leftrightarrow\ \exists x\, (\, x \in a \wedge \varphi(x,y)\,)\,).$$

対

$$\forall x\, \forall y\, \exists p\, \forall z\, (\, x = z \vee y = z \ \leftrightarrow\ z \in p\,).$$

合併

$$\forall x\, \exists u\, \forall y\, (\, \exists z\, (\, z \in x \wedge y \in z\,) \ \leftrightarrow\ y \in u\,).$$

冪

$$\forall x\, \exists p\, \forall y\, (\, \forall z\, (\, z \in y \ \rightarrow\ z \in x\,) \ \leftrightarrow\ y \in p\,).$$

正則性

$$\forall r\, (\, \exists x\, (\, x \in r\,) \ \rightarrow\ \exists y\, (\, y \in r \wedge \forall z\, (\, z \in r \ \rightarrow\ z \notin y\,)\,)\,).$$

無限

$$\exists x\, (\, \exists s\, (\, \forall t\, (\, t \notin s\,) \wedge s \in x\,) \wedge \forall y\, (\, y \in x \ \rightarrow\ \exists u\, (\, \forall v\, (\, v \in u \ \leftrightarrow\ v \in y \vee v = y\,) \wedge u \in x\,)\,)\,).$$

メタ定義 3.1.1 (証明可能).　文 φ が公理系 $\mathscr{S}$ から**証明された**や**証明可能である (provable)** とは，

- φ は論理的公理である．
- φ は $\mathscr{S}$ の公理である．
- 文 ψ で，ψ と $\psi \rightarrow \varphi$ が $\mathscr{S}$ から既に証明されているものが取れる (**三段論法 (Modus Pones)**).

のいずれかが満たされているということである．

三段論法のように或る式から他の式を導き出す規則のことを**推論規則 (rule of inference)** と呼ぶ．
φ が $\mathscr{S}$ から証明可能であることを

$$\mathscr{S} \vdash \varphi$$

と書く．ただし公理系を変項した場合の証明可能性には，後述の演繹定理およびその逆の結果を適用することが出来る．

たとえばどんな文 φ に対しても

$$\varphi \vdash \varphi$$

となるし，どんな文 ψ を追加しても

$$\varphi, \psi \vdash \varphi$$

となる．これらは最も単純なケースであり，大抵の定理は数多くの複雑なステップを踏まなくては得られない．$\mathscr{S}$ から証明済みの φ を起点にして $\mathscr{S} \vdash \psi$ であると判明すれば，φ から始めて ψ が真であることに辿り着くまでの一連の作業を ψ の $\mathscr{S}$ からの**証明 (proof)** と呼び，ψ を $\mathscr{S}$ の**定理 (theorem)** と呼ぶ．

$A, B \vdash \varphi$ とは A と B の二つの文のみを公理とした体系において φ が証明可能であることを表している．特に論理的定理とは論理的公理だけから導かれる定理のことである．

ではさっそく演繹定理の証明に進む．ところで，後で見るとおり演繹定理とは証明が持つ性質に対する言明であって，つまりメタ視点での定理ということになるので，演繹定理の "証明" とは言っても上で規定した証明とは意味が違う．メタ定理の "証明" は，本稿では**メタ証明**と呼んで区別する．

ここで論理記号の名称を書いておく．

- $\vee$ を**論理和 (logical disjunction)** や**選言**と呼ぶ．
- $\wedge$ を**論理積 (logical conjunction)** や**連言**と呼ぶ．
- $\rightarrow$ を**含意 (implication)** と呼ぶ．
- $\neg$ を**否定 (negation)** と呼ぶ．

論理的公理 3.1.2 (含意の分配律). A, B, C を文とするとき

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)).$$

上の言明は "どんな文でも持ってくれば，その式に対して含意の分配律が成立する" という意味である．このように無数に存在し得る定理を一括して表す書き方は**公理図式 (schema)** と呼ばれる．公理に限らず論理的定理や定理であっても図式であるものが多い．

論理的公理 3.1.3 (含意の導入). A, B を文とするとき

$$B \rightarrow (A \rightarrow B).$$

論理的定理 3.1.4 (含意の反射律). A を文とするとき

$$\vdash A \rightarrow A.$$

証明. 含意の導入より

$$\vdash A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A), \tag{3.1}$$

$$\vdash A \rightarrow (A \rightarrow A) \tag{3.2}$$

が成り立ち，含意の分配律より

$$\vdash (A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)) \tag{3.3}$$

が成り立つ．(3.1) と (3.3) との三段論法より

$$\vdash (A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A) \tag{3.4}$$

となり，(3.2) と (3.4) との三段論法より

$$\vdash A \rightarrow A$$

が出る．■

メタ公理 3.1.5 (証明に対する構造的帰納法). $\mathscr{S}$ を公理系とし，X を文に対する何らかの言明とするとき，

- $\mathscr{S}$ の公理に対して X が言える．
- 論理的公理に対して X が言える．
- φ と $\varphi \rightarrow \psi$ が $\mathscr{S}$ の定理であるような文 φ と文 ψ が取れたとき，φ と $\varphi \rightarrow \psi$ に対して X が言えるならば，ψ に対して X が言える．

のすべてが満たされていれば，$\mathscr{S}$ から証明可能なあらゆる文に対して X が言える．

公理系 $\mathscr{S}$ に文 A を追加した公理系を

$$A, \mathscr{S}$$

や

$$\mathscr{S}, A$$

と書く．A が既に $\mathscr{S}$ の公理であってもこのように表記するが，その場合は $\mathscr{S}, A$ や $A, \mathscr{S}$ とは $\mathscr{S}$ そのものである．

メタ定理 3.1.6 (演繹定理). $\mathscr{S}$ を公理系とし，A を文とするとき，$\mathscr{S}, A$ の任意の定理 B に対して

$$\mathscr{S} \vdash A \rightarrow B$$

が成り立つ．

メタ証明.

第一段 B を $\mathscr{S}, A$ の公理か或いは論理的公理とする．B が A ならば含意の反射律 (論理的定理 3.1.4) より

$$\vdash A \rightarrow B$$

が成り立つので

$$\mathscr{S} \vdash A \rightarrow B$$

となる．B が $\mathscr{S}$ の公理又は論理的公理であるとき，まず

$$\mathscr{S} \vdash B$$

が成り立つが，他方で含意の導入より

$$\mathscr{S} \vdash B \rightarrow (A \rightarrow B)$$

も成り立つので，証明可能性の定義より

$$\mathscr{S} \vdash A \rightarrow B$$

が従う．

第二段　C 及び $C \rightarrow B$ が $\mathscr{S}$ の定理であるような文 C と文 B が取れた場合，

$$\mathscr{S} \vdash A \rightarrow (C \rightarrow B)$$

かつ

$$\mathscr{S} \vdash A \rightarrow C$$

であると仮定する．含意の分配律より

$$\mathscr{S} \vdash (A \rightarrow (C \rightarrow B)) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B))$$

が満たされるので，証明可能性の定義の通りに

$$\mathscr{S} \vdash (A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

が従い，

$$\mathscr{S} \vdash A \rightarrow B$$

が従う．以上と構造的帰納法より，$\mathscr{S}, A$ の任意の定理 B に対して

$$\mathscr{S} \vdash A \rightarrow B$$

が言える．∎

演繹定理の逆も得られる．つまり，$\mathscr{S}$ を公理系とし，A と B を文とするとき，

$$\mathscr{S} \vdash A \rightarrow B$$

であれば

$$A,\ \mathscr{S} \vdash B$$

が成り立つ．実際

$$A,\ \mathscr{S} \vdash A$$

が成り立つのは証明の定義の通りであるし，$A \rightarrow B$ が $\mathscr{S}$ の定理ならば

$$A,\ \mathscr{S} \vdash A \rightarrow B \tag{3.5}$$

が成り立つので，併せて

$$A,\ \mathscr{S} \vdash B$$

が従う．ただし (3.5) に関しては次のメタ定理を示さなくてはいけない．

メタ定理 3.1.7 (公理が増えても証明可能). $\mathscr{S}$ を公理系とし，A を文とするとき，$\mathscr{S}$ の任意の定理 B に対して

$$A,\ \mathscr{S} \vdash B$$

が成り立つ．

メタ証明． B が $\mathscr{S}$ の公理であるか論理的公理であれば

$$A,\ \mathscr{S} \vdash B$$

は言える．また

$$\begin{aligned} &\mathscr{S} \vdash C, \\ &\mathscr{S} \vdash C \longrightarrow B \end{aligned}$$

を満たす文 C が取れるとき，

$$\begin{aligned} &A,\ \mathscr{S} \vdash C, \\ &A,\ \mathscr{S} \vdash C \longrightarrow B \end{aligned}$$

と仮定すれば

$$A,\ \mathscr{S} \vdash B$$

となる．以上と構造的帰納法より $\mathscr{S}$ の任意の定理 B に対して

$$A,\ \mathscr{S} \vdash B$$

が成り立つ． ∎

メタ定理 3.1.8 (演繹定理の逆). $\mathscr{S}$ を公理系とし，A と B を文とするとき，

$$\mathscr{S} \vdash A \longrightarrow B$$

であれば

$$A,\ \mathscr{S} \vdash B$$

が成り立つ．

3.2 推論

この節では後の集合論で使ういくつかの論理的定理を導出する．

論理的公理 3.2.1 (矛盾の導入). 否定が共に成り立つとき矛盾が起きる．A を文とするとき

$$A \rightarrow (\neg A \rightarrow \bot),$$
$$\neg A \rightarrow (A \rightarrow \bot).$$

論理的公理 3.2.2 (否定の導入). 矛盾が導かれるとき否定が成り立つ．A を文とするとき

$$(A \rightarrow \bot) \rightarrow \neg A.$$

$\varphi \rightarrow \psi$ なる式に対して

$$\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$$

を $\varphi \rightarrow \psi$ の**対偶 (contraposition)** と呼ぶ．

論理的定理 3.2.3 (対偶律 1). A と B を文とするとき

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A).$$

証明. 証明可能性の定義より

$$A, \neg B, A \rightarrow B \vdash A,$$
$$A, \neg B, A \rightarrow B \vdash A \rightarrow B$$

となるので，三段論法より

$$A, \neg B, A \rightarrow B \vdash B \tag{3.6}$$

が従う．同じく証明可能性の定義より

$$A, \neg B, A \rightarrow B \vdash \neg B \tag{3.7}$$

も成り立つ．ところで矛盾の導入より

$$\vdash B \rightarrow (\neg B \rightarrow \bot)$$

が成り立つので，証明可能性の定義より

$$A, \neg B, A \rightarrow B \vdash B \rightarrow (\neg B \rightarrow \bot)$$

となる．これと (3.6) との三段論法より

$$A, \neg B, A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow \bot$$

が従い，これと (3.7) との三段論法より

$$A,\ \neg B,\ A \rightarrow B \vdash \perp$$

が従う．演繹定理より

$$\neg B,\ A \rightarrow B \vdash A \rightarrow \perp$$

となるが，今度は否定の導入より

$$\neg B,\ A \rightarrow B \vdash (A \rightarrow \perp) \rightarrow \neg A$$

が満たされるので，三段論法より

$$\neg B,\ A \rightarrow B \vdash \neg A$$

が出る．そして演繹定理より

$$A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow \neg A$$

が得られ，再び演繹定理より

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$$

が得られる． ∎

公理系 $\mathscr{S}$ の下で $A \rightarrow B$ が導かれたとすれば，上の論理的定理より

$$\mathscr{S} \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$$

が成り立つので三段論法より

$$\mathscr{S} \vdash \neg B \rightarrow \neg A$$

が従う．以下では，$\mathscr{S} \vdash A \rightarrow B$ であるときに「**対偶を取る**」と宣言して $\mathscr{S} \vdash \neg B \rightarrow \neg A$ に繋げることもある．

式 φ に対して，$\neg$を二つ連結させた式

$$\neg\neg\varphi$$

を φ の**二重否定 (double negation)** と呼ぶ．

論理的定理 3.2.4 (二重否定の導入). A を文とするとき

$$\vdash A \rightarrow \neg\neg A.$$

証明. 矛盾の導入より

$$A,\ \neg A \vdash \perp$$

となるので，演繹定理より

$$A \vdash \neg A \to \bot \tag{3.8}$$

が従う．また否定の導入より

$$\vdash (\neg A \to \bot) \to \neg\neg A$$

が成り立つので，証明可能性の定義より

$$A \vdash (\neg A \to \bot) \to \neg\neg A$$

も成り立ち，(3.8) との三段論法より

$$A \vdash \neg\neg A$$

が従う．そして演繹定理より

$$\vdash A \to \neg\neg A$$

が得られる． ∎

論理的定理 3.2.5 (対偶律 2). A と B を文とするとき

$$\vdash (A \to \neg B) \to (B \to \neg A).$$

略証. 対偶律 1 (論理的定理 3.2.3) より

$$A \to \neg B \vdash \neg\neg B \to \neg A$$

が成り立ち，二重否定の導入 (論理的定理 3.2.4) より

$$B \vdash \neg\neg B$$

が成り立つので，三段論法より

$$B,\ A \to \neg B \vdash \neg A$$

が従い，演繹定理より

$$A \to \neg B \vdash B \to \neg A$$

が得られる． ∎

論理的公理 3.2.6 (論理積の除去). A と B を文とするとき

$$A \wedge B \to A,$$
$$A \wedge B \to B.$$

肯定と否定は両立しない．

論理的定理 3.2.7 (無矛盾律). A を文とするとき

$$\vdash \neg(A \wedge \neg A).$$

証明. 論理積の除去より

$$A \wedge \neg A \vdash A,$$
$$A \wedge \neg A \vdash \neg A$$

が成り立ち，また矛盾の導入より

$$A \wedge \neg A \vdash A \rightarrow (\neg A \rightarrow \bot)$$

が成り立つので，三段論法より

$$A \wedge \neg A \vdash \bot$$

が従う．ゆえに演繹定理より

$$\vdash (A \wedge \neg A) \rightarrow \bot$$

となり，否定の導入

$$\vdash ((A \wedge \neg A) \rightarrow \bot) \rightarrow \neg(A \wedge \neg A)$$

との三段論法より

$$\vdash \neg(A \wedge \neg A)$$

が得られる． ∎

ここで新しい論理記号 $\leftrightarrow$ を定めるが，そのときに $\overset{\text{def}}{\longleftrightarrow}$ なる記号を用いる．これは**定義記号**と呼ばれ，

$$P \overset{\text{def}}{\longleftrightarrow} \varphi$$

と書けば「式 φ を記号 P で置き換えて良い」という意味での略記法を導入できる．

メタ定義 3.2.8 (同値記号). A と B を $\mathcal{L}$ の式とするとき，

$$A \leftrightarrow B \overset{\text{def}}{\longleftrightarrow} (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

により $\leftrightarrow$ を定め，式 '$A \leftrightarrow B$' を「A と B は**同値である (equivalent)**」と読む．

定義を中置記法で書いたが，元々の前置記法で書けば

$$\leftrightarrow AB \overset{\text{def}}{\longleftrightarrow} \wedge \rightarrow AB \rightarrow BA$$

となる．

以降で **De Morgan の法則 (De Morgan's laws)**

$$
\begin{aligned}
\neg(\varphi \lor \psi) &\leftrightarrow \neg\varphi \land \neg\psi, \\
\neg(\varphi \land \psi) &\leftrightarrow \neg\varphi \lor \neg\psi
\end{aligned}
$$

を順番に示していくが，区別するために前者を**弱 De Morgan の法則**と呼び，後者を**強 De Morgan の法則**と呼ぶ．

論理的公理 3.2.9 (論理和の除去). A と B と C を文とするとき

$$(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \lor B \rightarrow C)).$$

論理和の除去は**場合分け (proof by case)** とも呼ばれる．

論理的定理 3.2.10 (弱 De Morgan の法則 (1)). A と B を文とするとき

$$\vdash \neg A \land \neg B \rightarrow \neg(A \lor B).$$

証明. 論理積の除去より

$$\neg A \land \neg B \vdash \neg A \tag{3.9}$$

となり，また矛盾の導入より

$$\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow \bot)$$

が成り立つので

$$\neg A \land \neg B \vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow \bot)$$

も成り立ち，(3.9) との三段論法より

$$\neg A \land \neg B \vdash A \rightarrow \bot \tag{3.10}$$

が従う．同様に

$$\neg A \land \neg B \vdash B \rightarrow \bot \tag{3.11}$$

も得られる．ところで論理和の除去より

$$\vdash (A \rightarrow \bot) \rightarrow ((B \rightarrow \bot) \rightarrow (A \lor B \rightarrow \bot))$$

が成り立つので，(3.10) と (3.11) との三段論法より

$$
\begin{aligned}
&\neg A \land \neg B \vdash (A \rightarrow \bot) \rightarrow ((B \rightarrow \bot) \rightarrow (A \lor B \rightarrow \bot)), \\
&\neg A \land \neg B \vdash (B \rightarrow \bot) \rightarrow (A \lor B \rightarrow \bot), \\
&\neg A \land \neg B \vdash A \lor B \rightarrow \bot
\end{aligned}
$$

となり，否定の導入

$$\vdash (A \lor B \rightarrow \bot) \rightarrow \neg(A \lor B)$$

との三段論法より

$$\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B)$$

が得られる．そして演繹定理より

$$\vdash \neg A \wedge \neg B \;\rightarrow\; \neg(A \vee B)$$

が出る． ∎

論理的定理 3.2.11 (強 De Morgan の法則 (1)). A と B を文とするとき

$$\vdash \neg A \vee \neg B \;\rightarrow\; \neg(A \wedge B).$$

証明． 論理積の除去より

$$\vdash (A \wedge B) \;\rightarrow\; A$$

が成り立つので，対偶を取れば

$$\vdash \neg A \;\rightarrow\; \neg(A \wedge B) \tag{3.12}$$

が成り立つ (論理的定理 3.2.3)．同様に

$$\vdash \neg B \;\rightarrow\; \neg(A \wedge B) \tag{3.13}$$

も得られる．また論理和の除去より

$$\vdash (\neg A \;\rightarrow\; \neg(A \wedge B)) \;\rightarrow\; ((\neg B \;\rightarrow\; \neg(A \wedge B)) \;\rightarrow\; (\neg A \vee \neg B \;\rightarrow\; \neg(A \wedge B)))$$

が成り立つので，(3.12) との三段論法より

$$\vdash (\neg B \;\rightarrow\; \neg(A \wedge B)) \;\rightarrow\; (\neg A \vee \neg B \;\rightarrow\; \neg(A \wedge B))$$

が従い，(3.13) との三段論法より

$$\vdash \neg A \vee \neg B \;\rightarrow\; \neg(A \wedge B)$$

が得られる． ∎

論理的公理 3.2.12 (論理和の導入). A と B を文とするとき

$$\begin{aligned} A \;&\rightarrow\; A \vee B, \\ B \;&\rightarrow\; A \vee B. \end{aligned}$$

論理的定理 3.2.13 (論理和の可換律). A, B を文とするとき

$$\vdash A \vee B \;\rightarrow\; B \vee A.$$

証明. 論理和の導入により

$$\vdash A \longrightarrow B \vee A \tag{3.14}$$

と

$$\vdash B \longrightarrow B \vee A \tag{3.15}$$

が成り立つ．また論理和の除去より

$$\vdash (A \longrightarrow B \vee A) \longrightarrow ((B \longrightarrow B \vee A) \longrightarrow (A \vee B \longrightarrow B \vee A))$$

が成り立つので，(3.14) と三段論法より

$$\vdash (B \longrightarrow B \vee A) \longrightarrow (A \vee B \longrightarrow B \vee A)$$

となり，(3.15) と三段論法より

$$\vdash A \vee B \longrightarrow B \vee A$$

となる． ∎

論理的公理 3.2.14 (論理積の導入). A と B を文とするとき

$$A \longrightarrow (B \longrightarrow A \wedge B).$$

論理的定理 3.2.15 (弱 De Morgan の法則 (2)). A と B を文とするとき

$$\vdash \neg(A \vee B) \longrightarrow \neg A \wedge \neg B.$$

証明. 論理和の導入より

$$\vdash A \longrightarrow A \vee B$$

が成り立つが，対偶を取れば

$$\vdash \neg(A \vee B) \longrightarrow \neg A \tag{3.16}$$

となる (論理的定理 3.2.3)．同じく論理和の導入より

$$\vdash B \longrightarrow A \vee B$$

が成り立つので

$$\vdash \neg(A \vee B) \longrightarrow \neg B \tag{3.17}$$

も得られる．ここで (3.16) と (3.17) と演繹定理の逆より

$$\neg(A \vee B) \vdash \neg A, \tag{3.18}$$

$$\neg(A \vee B) \vdash \neg B \tag{3.19}$$

が従う．ところで論理積の導入より

$$\vdash \neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A \wedge \neg B)$$

が成り立つので，(3.18) と (3.19) との三段論法より

$$\begin{aligned}
&\neg(A \vee B) \vdash \neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A \wedge \neg B), \\
&\neg(A \vee B) \vdash \neg B \rightarrow \neg A \wedge \neg B, \\
&\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B
\end{aligned}$$

が従い，演繹定理より

$$\vdash \neg(A \vee B) \rightarrow \neg A \wedge \neg B$$

が得られる． ∎

論理的定理 3.2.16 (論理積の可換律). A, B を文とするとき

$$\vdash A \wedge B \rightarrow B \wedge A.$$

証明. 論理積の除去と演繹定理の逆より

$$A \wedge B \vdash A \tag{3.20}$$

と

$$A \wedge B \vdash B \tag{3.21}$$

が成り立つ．また論理積の導入により

$$\vdash B \rightarrow (A \rightarrow B \wedge A)$$

となるので

$$A \wedge B \vdash B \rightarrow (A \rightarrow B \wedge A)$$

も成り立ち，(3.21) との三段論法より

$$A \wedge B \vdash A \rightarrow B \wedge A$$

となり，(3.20) との三段論法より

$$A \wedge B \vdash B \wedge A$$

となり，演繹定理より

$$\vdash A \wedge B \rightarrow B \wedge A$$

が得られる． ∎

論理的公理 3.2.17 (二重否定の除去). A を文とするとき以下が成り立つ:

$$\neg\neg A \rightarrow A.$$

論理的定理 3.2.18 (対偶律 3). A と B を文とするとき

$$\vdash (\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow A).$$

略証. 対偶律 1 (論理的定理 3.2.3) より

$$\neg A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow \neg\neg A$$

が成り立つので，演繹定理の逆より

$$\neg B, \neg A \rightarrow B \vdash \neg\neg A$$

となる．二重否定の除去より

$$\vdash \neg\neg A \rightarrow A$$

が成り立つので，三段論法より

$$\neg B, \neg A \rightarrow B \vdash A$$

が従い，演繹定理より

$$\neg A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow A$$

が得られる． ∎

論理的定理 3.2.19 (対偶律 4). A と B を文とするとき

$$\vdash (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B).$$

証明. 二重否定の導入 (論理的定理 3.2.4) より

$$\neg B \rightarrow \neg A \vdash A \rightarrow \neg\neg A$$

が成り立つので，演繹定理の逆より

$$A, \neg B \rightarrow \neg A \vdash \neg\neg A$$

となる．また $\neg B \rightarrow \neg A$ の対偶を取れば

$$A, \neg B \rightarrow \neg A \vdash \neg\neg A \rightarrow \neg\neg B$$

が成り立つので (論理的定理 3.2.3)，三段論法より

$$A,\ \neg B \rightarrow \neg A \vdash \neg\neg B$$

となる．ここで二重否定の除去より

$$A,\ \neg B \rightarrow \neg A \vdash \neg\neg B \rightarrow B$$

となるので，三段論法より

$$A,\ \neg B \rightarrow \neg A \vdash B$$

が従い，演繹定理より

$$\neg B \rightarrow \neg A \vdash A \rightarrow B,$$
$$\vdash (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

が得られる． ∎

論理的定理 3.2.20 (背理法の原理). A を文とするとき

$$\vdash (\neg A \rightarrow \bot) \rightarrow A.$$

証明. 否定の導入より

$$\neg A \rightarrow \bot \vdash \neg\neg A$$

が成り立ち，二重否定の法則より

$$\neg A \rightarrow \bot \vdash \neg\neg A \rightarrow A$$

が成り立つので，三段論法より

$$\neg A \rightarrow \bot \vdash A$$

となる．そして演繹定理より

$$\vdash (\neg A \rightarrow \bot) \rightarrow A$$

が得られる． ∎

次の**爆発律 (principle of explosion)** とは「矛盾からはあらゆる式が導かれる」ことを表している．またなぜ $\bot$ が「矛盾」と呼ばれるのかが明確になる．実際，公理系 $\mathscr{S}$ からひとたび $\bot$ が導かれれば，爆発律との三段論法によってどんな式でも $\mathscr{S}$ の定理となる．すると $\mathscr{S}$ においては A とその否定 $\neg A$ など食い違う結論が共に定理となってしまい，まさしく“矛盾”が引き起こされるのである．

論理的定理 3.2.21 (爆発律). A を文とするとき

$$\vdash \bot \rightarrow A.$$

証明． 含意の導入より

$$\vdash \bot \to (\neg A \to \bot)$$

が成り立つので，演繹定理の逆より

$$\bot \vdash \neg A \to \bot$$

となる．また背理法の原理 (論理的定理 3.2.20) より

$$\bot \vdash (\neg A \to \bot) \to A$$

が成り立つので，三段論法より

$$\bot \vdash A$$

が従い，演繹定理より

$$\vdash \bot \to A$$

が得られる． ∎

論理的定理 3.2.22 (否定の論理和は含意で書ける). A と B を文とするとき

$$\vdash (\neg A \vee B) \to (A \to B).$$

証明． 矛盾の導入より

$$A, \neg A \vdash \bot$$

が成り立ち，爆発律 (論理的定理 3.2.21) より

$$A, \neg A \vdash \bot \to B$$

が成り立つので，三段論法より

$$A, \neg A \vdash B$$

が従い，演繹定理より

$$\vdash \neg A \to (A \to B) \tag{3.22}$$

が得られる．また含意の導入より

$$\vdash B \to (A \to B) \tag{3.23}$$

も得られる．ところで論理和の除去より

$$\vdash (\neg A \to (A \to B)) \to ((B \to (A \to B)) \to (\neg A \vee B \to (A \to B)))$$

が成り立つので，(3.22) との三段論法より

$$\vdash (B \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (\neg A \vee B \rightarrow (A \rightarrow B))$$

となり，(3.23) との三段論法より

$$\vdash \neg A \vee B \rightarrow (A \rightarrow B)$$

が得られる． ∎

定理 3.2.23 (驚嘆すべき帰結). A を文とするとき

$$\vdash (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A.$$

略証. 三段論法より

$$\neg A, \neg A \rightarrow A \vdash A$$

が成り立ち，他方で矛盾の導入 (CTD1) より

$$\neg A, \neg A \rightarrow A \vdash A \rightarrow (\neg A \rightarrow \bot)$$

も成り立つので，三段論法より

$$\neg A, \neg A \rightarrow A \vdash \neg A \rightarrow \bot$$

が従う．

$$\neg A, \neg A \rightarrow A \vdash \neg A$$

との三段論法より

$$\neg A, \neg A \rightarrow A \vdash \bot$$

となり，演繹定理より

$$\neg A \rightarrow A \vdash \neg A \rightarrow \bot$$

が従う．背理法の原理 (論理的定理 3.2.20) より

$$\neg A \rightarrow A \vdash (\neg A \rightarrow \bot) \rightarrow A$$

が成り立つので三段論法より

$$\neg A \rightarrow A \vdash A$$

となり，演繹定理より

$$\vdash (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$$

が得られる． ∎

論理的定理 3.2.24 (排中律). A を文とするとき

$$\vdash A \vee \neg A.$$

証明. 論理和の導入より

$$A \vdash A \vee \neg A$$

となり，他方で矛盾の導入より

$$A \vdash (A \vee \neg A) \rightarrow (\neg (A \vee \neg A) \rightarrow \perp)$$

も成り立つので三段論法より

$$A \vdash \neg (A \vee \neg A) \rightarrow \perp$$

が従う．演繹定理の逆より

$$\neg (A \vee \neg A), A \vdash \perp$$

となり，演繹定理より

$$\neg (A \vee \neg A) \vdash A \rightarrow \perp$$

となる．否定の導入より

$$\neg (A \vee \neg A) \vdash (A \rightarrow \perp) \rightarrow \neg A$$

が成り立つので三段論法より

$$\neg (A \vee \neg A) \vdash \neg A$$

が従う．論理和の導入より

$$\neg (A \vee \neg A) \vdash \neg A \rightarrow A \vee \neg A$$

が成り立つので三段論法より

$$\neg (A \vee \neg A) \vdash A \vee \neg A$$

が従い，演繹定理より

$$\vdash \neg (A \vee \neg A) \rightarrow A \vee \neg A$$

が成り立つ．驚嘆すべき帰結 (論理的定理 3.2.23) より

$$\vdash (\neg (A \vee \neg A) \rightarrow A \vee \neg A) \rightarrow A \vee \neg A$$

が成り立つので三段論法より

$$\vdash A \vee \neg A$$

が出る． ∎

排中律の言明は「いかなる文も肯定か否定の一方は成り立つ」と読めるが，肯定と否定のどちらか一方が証明可能であるということを保証しているわけではない．無矛盾律についても似たようなことが言える．無矛盾律とは「肯定と否定は両立しない」と読めるわけだが，もしかすると，或る公理系 $\mathscr{S}$ の下では或る文 A に対して

$$\mathscr{S} \vdash A \wedge \neg A$$

が導かれるかもしれない．この場合 $\mathscr{S}$ は矛盾することになるが，予め $\mathscr{S}$ が無矛盾であることが判っていない限りはこの事態が起こらないとは言い切れない (極端な例では，矛盾 $\perp$ が公理であっても無矛盾律は定理である).

論理的定理 3.2.25 (含意の論理和への遺伝性). A, B, C を文とするとき

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (A \vee C \rightarrow B \vee C).$$

略証. 三段論法より

$$A,\ A \rightarrow B \vdash B$$

が成り立ち，また論理和の導入より

$$A,\ A \rightarrow B \vdash B \rightarrow B \vee C$$

も成り立つので，三段論法より

$$A,\ A \rightarrow B \vdash B \vee C$$

となり，演繹定理より

$$A \rightarrow B \vdash A \rightarrow B \vee C \tag{3.24}$$

が得られる．また論理和の導入より

$$A \rightarrow B \vdash C \rightarrow B \vee C \tag{3.25}$$

得られる. ところで論理和の除去より

$$A \rightarrow B \vdash (A \rightarrow B \vee C) \rightarrow ((B \rightarrow B \vee C) \rightarrow (A \vee C \rightarrow B \vee C))$$

が成り立つので，(3.24) との三段論法より

$$A \rightarrow B \vdash (B \rightarrow B \vee C) \rightarrow (A \vee C \rightarrow B \vee C)$$

となり，(3.25) との三段論法より

$$A \rightarrow B \vdash A \vee C \rightarrow B \vee C$$

が従う． ∎

論理的定理 3.2.26 (含意は否定と論理和で表せる). A と B を文とするとき

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B).$$

証明. 含意の論理和への遺伝性 (論理的定理 3.2.25) より

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (A \vee \neg A \rightarrow B \vee \neg A)$$

が成り立つので，演繹定理の逆より

$$A \rightarrow B \vdash A \vee \neg A \rightarrow B \vee \neg A$$

が成り立つ．また排中律 (論理的定理 3.2.24) より

$$A \rightarrow B \vdash A \vee \neg A$$

も成り立つので，三段論法より

$$A \rightarrow B \vdash B \vee \neg A$$

となる．論理和の可換性 (論理的定理 3.2.13) より

$$A \rightarrow B \vdash B \vee \neg A \rightarrow \neg A \vee B$$

が成り立つので，三段論法より

$$A \rightarrow B \vdash \neg A \vee B$$

が従い，演繹定理より

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)$$

が得られる． ∎

論理的定理 3.2.27 (強 De Morgan の法則 (2)). A と B を文とするとき

$$\vdash \neg(A \wedge B) \rightarrow \neg A \vee \neg B.$$

証明. 論理積の導入より

$$A \vdash B \rightarrow A \wedge B$$

が成り立つので，これの対偶を取って

$$A \vdash \neg(A \wedge B) \rightarrow \neg B$$

を得る (論理的定理 3.2.3)．そして演繹定理の逆より

$$A, \neg(A \wedge B) \vdash \neg B$$

が成立し，演繹定理より

$$\neg(A \wedge B) \vdash A \rightarrow \neg B$$

となる．論理的定理 3.2.26 より

$$\neg(A \wedge B) \vdash (A \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$$

が成り立つので三段論法より

$$\neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B$$

が従う．そして演繹定理より

$$\vdash \neg(A \wedge B) \rightarrow \neg A \vee \neg B.$$

を得る． ∎

論理的公理 3.2.28 (量化記号に関する公理). A を $\mathcal{L}$ の式とし，A を $\mathcal{L}$ の式とし，x を変項とし，A には x のみが自由に現れるとする．また τ を主要 ε 項とする．このとき以下を公理とする．

$$\begin{aligned}
\neg\forall x A(x) &\rightarrow \exists x \neg A(x), \\
\forall x A(x) &\rightarrow A(\tau), \\
A(\tau) &\rightarrow \exists x A(x), \\
\exists x A(x) &\rightarrow A(\varepsilon x \hat{A}(x)).
\end{aligned}$$

ただし $\hat{A}$ とは，A が $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式でないときは A を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き直したものであり，小節 2.4.7 の通りの書き換えならばどんな式でも良い．A が $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式であるときは $\hat{A}$ は A そのものとする．

$\hat{A}$ を，A が $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式でないときは A を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き直したものとし，A が $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式であるときは A そのものとする．存在記号の論理的公理より

$$\vdash \exists x \neg A(x) \rightarrow \neg A(\varepsilon x \neg \hat{A})$$

が成り立つので，

$$\neg\forall x A(x) \vdash \exists x \neg A(x)$$

との三段論法で

$$\neg\forall x A(x) \vdash \neg A(\varepsilon x \neg \hat{A})$$

が従う．そして対偶律 4 (論理的定理 3.2.19) より

$$\vdash A(\varepsilon x \neg \hat{A}) \rightarrow \forall x A(x)$$

が得られる．これは非常に有用な結果であるから一つの定理として述べておく．

論理的定理 3.2.29 (ε 項による全称の導出). A を $\mathcal{L}$ の式とし，x を変項とし，A には x のみが自由に現れるとする．このとき

$$\vdash A(\varepsilon x \neg \hat{A}(x)) \rightarrow \forall x A(x).$$

ただし $\hat{A}$ とは，A が $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式でないときは A を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き直したものであり，A が $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式であるときは A そのものである．

どれでも一つ，$A(\tau)$ を成り立たせるような主要 ε 項 τ が取れれば $\exists x A(x)$ が成り立つのだし，逆に $\exists x A(x)$ が成り立つならば $\varepsilon x A(x)$ なる ϵ 項が $A(\varepsilon x A(x))$ を満たすのである．そして主要 ε 項は集合であるから (定理 4.1.3)，「$A(x)$ を満たす集合 x が存在する」ということと「$A(x)$ を満たす集合 x が **“実際に取れる”**」ということが同じ意味になる．

$\forall x A(x)$ が成り立つならばいかなる主要 ε 項 τ も $A(\tau)$ を満たすし，逆にいかなる主要 ε 項 τ も $A(\tau)$ を満たすならば，特に $\varepsilon x \neg A(x)$ なる ε 項も $A(\varepsilon x \neg A(x))$ を満たすのだから $\forall x A(x)$ が成立する．つまり，「$\forall x A(x)$ が成り立つ」ということと「任意の主要 ε 項 τ が $A(\tau)$ を満たす」ということは同じ意味になる．

後述することであるが，主要 ε 項はどれも集合であって (定理 4.1.3)，また集合である類はいずれかの主要 ε 項と等しい (定理 4.0.2)．ゆえに，**量化子の亘る範囲は集合に制限される**のである．

量化記号についても De Morgan の法則があり，それを

弱 De Morgan の法則 $\exists x \neg A(x) \leftrightarrow \neg \forall x A(x)$,
強 De Morgan の法則 $\forall x \neg A(x) \leftrightarrow \neg \exists x A(x)$,

と呼ぶことにする．

論理的定理 3.2.30 (量化記号に対する弱 De Morgan の法則 (1)). A を $\mathcal{L}$ の式とし，x を A に自由に現れる変項とし，また A に自由に現れる変項は x のみであるとする．このとき

$$\vdash \exists x \neg A(x) \rightarrow \neg \forall x A(x).$$

略証. 必要に応じて A を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き換えたものを $\hat{A}$ とする．存在記号の論理的公理より

$$\exists x \neg A(x) \vdash \neg A(\varepsilon x \neg \hat{A}(x)) \tag{3.26}$$

となる．また全称記号の論理的公理より

$$\vdash \forall x A(x) \rightarrow A(\varepsilon x \neg \hat{A}(x))$$

が成り立つので，対偶を取って

$$\vdash \neg A(\varepsilon x \neg \hat{A}(x)) \rightarrow \neg \forall x A(x) \tag{3.27}$$

となる (論理的定理 3.2.3)．(3.26) と (3.27) の三段論法より

$$\exists x \neg A(x) \vdash \neg \forall x A(x)$$

が従い，演繹定理より

$$\vdash \exists x \neg A(x) \rightarrow \neg \forall x A(x)$$

が得られる． ∎

論理的定理 3.2.31 (量化記号に対する弱 De Morgan の法則 (2)). A を $\mathcal{L}$ の式とし，x を A に自由に現れる変項とし，また A に自由に現れる変項は x のみであるとする．このとき

$$\vdash \neg\forall x A(x) \rightarrow \exists x \neg A(x).$$

略証. 論理的公理

$$\neg\forall x A(x) \rightarrow \exists x \neg A(x)$$

により得られる． ∎

論理的定理 3.2.32 (量化記号に対する強 De Morgan の法則 (1)). A を $\mathcal{L}$ の式とし，x を A に自由に現れる変項とし，また A に自由に現れる変項は x のみであるとする．このとき

$$\vdash \forall x \neg A(x) \rightarrow \neg\exists x A(x).$$

略証. 必要に応じて A を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き換えたものを $\hat{A}$ とする．まず存在記号の論理的公理より

$$\vdash \exists x A(x) \rightarrow A(\varepsilon x \hat{A}(x))$$

が成り立つので，対偶を取って

$$\vdash \neg A(\varepsilon x \hat{A}(x)) \rightarrow \neg\exists x A(x)$$

が成り立つ (論理的定理 3.2.3)．また全称記号の論理的公理より

$$\forall x \neg A(x) \vdash \neg A(\varepsilon x \hat{A}(x))$$

が成り立つので，三段論法より

$$\forall x \neg A(x) \vdash \neg\exists x A(x)$$

が従い，演繹定理より

$$\vdash \forall x \neg A(x) \rightarrow \neg\exists x A(x)$$

が得られる． ∎

論理的定理 3.2.33 (量化記号に対する強 De Morgan の法則 (2)). A を $\mathcal{L}$ の式とし，x を A に自由に現れる変項とし，また A に自由に現れる変項は x のみであるとする．このとき

$$\vdash \neg\exists x A(x) \rightarrow \forall x \neg A(x).$$

略証．　必要に応じて A を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き換えたものを $\hat{A}$ とする．まず存在記号の論理的公理より

$$\vdash A(\varepsilon x \neg\neg\hat{A}(x)) \rightarrow \exists x A(x)$$

が成り立つので，対偶を取って

$$\vdash \neg\exists x A(x) \rightarrow \neg A(\varepsilon x \neg\neg\hat{A}(x))$$

が成り立ち (論理的定理 3.2.3)，演繹定理の逆より

$$\neg\exists x A(x) \vdash \neg A(\varepsilon x \neg\neg\hat{A}(x))$$

が従う．また全称の導出 (論理的定理 3.2.29) より

$$\vdash \neg A(\varepsilon x \neg\neg\hat{A}(x)) \rightarrow \forall x \neg A(x)$$

が成り立つので，三段論法より

$$\neg\exists x A(x) \vdash \forall x \neg A(x)$$

が従い，演繹定理より

$$\vdash \neg\exists x A(x) \rightarrow \forall x \neg A(x)$$

が得られる．　■

第 4 章

集合

x, y を $\mathcal{L}$ の項とするとき，

$$x \notin y \overset{\mathrm{def}}{\longleftrightarrow} \neg x \in y$$

で $x \notin y$ を定める．同様に

$$x \neq y \overset{\mathrm{def}}{\longleftrightarrow} \neg x = y$$

で $x \neq y$ を定める．

集合は類の一部として定義されるが，類が全て集合であると考えると矛盾が起こる．たとえば Russell のパラドックスで有名な

$$R \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \{\, x \mid x \notin x \,\}$$

なる類が集合であるとすると ($\overset{\mathrm{def}}{\longleftrightarrow}$ は "式" に対する略記の導入に使ったが (P. 45)，これと同様に $\overset{\mathrm{def}}{=\!=}$ とは " 類" に対する略記を導入するために使う定義記号である)

$$\Sigma \vdash R \notin R \;\leftrightarrow\; R \in R$$

が成り立ってしまい，これは $\Sigma \vdash \bot$ を導く (定理 4.1.9)．この種の矛盾を回避するために類を導入したのであり，集合とは類の中で特定の性質をもつものに限られる．

定義 4.0.1 (集合). a を類とするとき，「a が集合である」という式を

$$\mathrm{set}\,(a) \overset{\mathrm{def}}{\longleftrightarrow} \exists x\,(\, a = x\,)$$

で定める．$\Sigma \vdash \mathrm{set}\,(a)$ を満たす類 a を**集合 (set)** と呼び，$\Sigma \vdash \neg\,\mathrm{set}\,(a)$ を満たす類 a を**真類 (proper class)** と呼ぶ．

φ を $\mathcal{L}$ の式とし，x を φ に自由に現れる変項とし，x のみが φ で自由であるとする．このとき

$$\mathrm{set}\,(\{\, x \mid \varphi(x)\,\}) \vdash \mathrm{set}\,(\{\, x \mid \varphi(x)\,\})$$

が満たされている．つまり

$$\mathrm{set}\,(\{\, x \mid \varphi(x)\,\}) \vdash \exists y\ \left(\{\, x \mid \varphi(x)\,\} = y\,\right)$$

が成り立っているということであるが，$\{x \mid \varphi(x)\} = y$ を

$$\forall x\,(\varphi(x) \leftrightarrow x \in y)$$

と書き換えれば，存在記号の論理的公理より

$$\mathrm{set}(\{x \mid \varphi(x)\}) \vdash \{x \mid \varphi(x)\} = \varepsilon y\,\forall x\,(\varphi(x) \leftrightarrow x \in y)$$

が得られる．

定理 4.0.2 (集合である内包項は ε 項で書ける). φ を $\mathcal{L}$ の式とし，x を φ に自由に現れる変項とし，x のみが φ で自由であるとする．このとき

$$\mathrm{set}(\{x \mid \varphi(x)\}) \vdash \{x \mid \varphi(x)\} = \varepsilon y\,\forall x\,(\varphi(x) \leftrightarrow x \in y).$$

ブルバキ [5] では τ 項を，島内 [6] では ε 項のみを導入して $\varepsilon y \forall x\,(\varphi(x) \leftrightarrow x \in y)$ によって $\{x \mid \varphi(x)\}$ を定めているが，この定め方には欠点がある．というのも，本稿と同じくブルバキ [5] の τ 項も島内 [6] の ε 項も集合であるから，

$$\exists y\,\forall x\,(\varphi(x) \leftrightarrow x \in y)$$

が成立しない場合は $\varepsilon y \forall x\,(\varphi(x) \leftrightarrow x \in y)$ は正体不明になってしまい，$\{x \mid \varphi(x)\}$ が「性質 φ を持つ集合の全体」の意味を持たないのである．本稿では内包項と ε 項を別々に生成しているのでこの欠点は解消される．

4.1 相等性

本稿において “等しい” とは項に対する言明であって，a と b を項とするとき

$$a = b$$

なる式で表される．この記号

$$=$$

は等号 **(equal sign)** と呼ばれるが，現時点では述語として導入されているだけで，推論操作における働きは不明のままである．本節では，いつ類は等しくなるのか，そして，等しい場合に何が起きるのか，の二つが主題となる．

公理 4.1.1 (外延性の公理 (Extensionality)). a と b を類とするとき次の式を **EXT** により参照する：

$$\forall x\,(x \in a \leftrightarrow x \in b) \rightarrow a = b.$$

定理 4.1.2 (任意の類は自分自身と等しい). a を類とするとき

$$\mathbf{EXT} \vdash a = a.$$

略証.　いま

$$\sigma \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon s \rightharpoondown (s \in a \ \leftrightarrow \ s \in a)$$

とおく．含意の反射律 (論理的定理 3.1.4) と論理積の導入より

$$\vdash \sigma \in a \ \leftrightarrow \ \sigma \in a$$

が成り立つから，全称の導出 (論理的定理 3.2.29) より

$$\vdash \forall s \, (s \in a \ \leftrightarrow \ s \in a)$$

が成り立つ．外延性の公理より

$$\mathbf{EXT} \vdash \forall s \, (s \in a \ \leftrightarrow \ s \in a) \ \rightarrow \ a = a$$

となるので，三段論法より

$$\mathbf{EXT} \vdash a = a$$

が得られる．▮

定理 4.1.3 (主要 ε 項は集合である).　τ を主要 ε 項とするとき

$$\mathbf{EXT} \vdash \mathrm{set}\,(\tau).$$

略証.　定理 4.1.2 より

$$\mathbf{EXT} \vdash \tau = \tau$$

が成立するので，存在記号の論理的公理より

$$\mathbf{EXT} \vdash \exists x \ (\tau = x)$$

が成立する．▮

例えば

$$a = b$$

と書いてあったら “a と b は等しい” と読めるわけだが，明らかに a は b とは違うではないではないか！こんなことはしょっちゅう起こることであって，上で述べたように $\{ x \mid A(x) \}$ が集合なら

$$\{ x \mid A(x) \} = \varepsilon y \forall x \ \big(A(x) \ \leftrightarrow \ x \in y \big)$$

が成り立ったりする．そこで “数学的に等しいとは何事か” という疑問が浮かぶのは至極自然であって，それに答えるのが次の相等性公理である．

公理 4.1.4 (相等性公理). a, b, c を類とするとき次の式を **EQ** により参照する：

$$a = b \rightarrow b = a,$$
$$a = b \rightarrow (a \in c \rightarrow b \in c),$$
$$a = b \rightarrow (c \in a \rightarrow c \in b).$$

定理 4.1.5 (外延性の公理の逆も成り立つ). a と b を類とするとき

$$\mathbf{EQ} \vdash a = b \rightarrow \forall x (x \in a \leftrightarrow x \in b).$$

証明．いま

$$\tau \stackrel{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon x \neg (x \in a \leftrightarrow x \in b)$$

とおく．相等性公理より

$$\mathbf{EQ} \vdash a = b \rightarrow (\tau \in a \rightarrow \tau \in b)$$

となるので，演繹定理の逆より

$$a = b, \mathbf{EQ} \vdash \tau \in a \rightarrow \tau \in b \tag{4.1}$$

となる．また相等性公理と演繹定理の逆により

$$a = b, \mathbf{EQ} \vdash b = a$$

が成り立ち，同じく相等性公理より

$$\mathbf{EQ} \vdash b = a \rightarrow (\tau \in b \rightarrow \tau \in a)$$

も成り立つので，三段論法より

$$a = b, \mathbf{EQ} \vdash \tau \in b \rightarrow \tau \in a \tag{4.2}$$

も得られる．論理積の導入により

$$a = b, \mathbf{EQ} \vdash (\tau \in a \rightarrow \tau \in b) \rightarrow ((\tau \in b \rightarrow \tau \in a) \rightarrow (\tau \in a \leftrightarrow \tau \in b))$$

が成り立つので，(4.1) との三段論法より

$$a = b, \mathbf{EQ} \vdash (\tau \in b \rightarrow \tau \in a) \rightarrow (\tau \in a \leftrightarrow \tau \in b)$$

が従い，(4.2) との三段論法より

$$a = b, \mathbf{EQ} \vdash \tau \in a \leftrightarrow \tau \in b$$

が従う．全称の導出 (論理的定理 3.2.29) より

$$a = b, \mathbf{EQ} \vdash \forall x (x \in a \leftrightarrow x \in b)$$

が成立し，演繹定理より

$$\mathbf{EQ} \vdash a = b \rightarrow \forall x (x \in a \leftrightarrow x \in b)$$

が得られる． ∎

公理 4.1.6 (内包性公理). φ を $\mathcal{L}$ の式とし，y を φ に自由に現れる変項とし，φ に自由に現れる項は y のみであるとし，x は φ で y への代入について自由であるとするとき，次の式を **COM** により参照する：

$$\forall x \, (\, x \in \{\, y \mid \varphi(y) \,\} \leftrightarrow \varphi(x) \,).$$

定理 4.1.7 (主要 ε 項は内包項で書ける). τ を主要 ε 項とするとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \{\, x \mid x \in \tau \,\} = \tau.$$

略証. 内包性公理より直接

$$\mathbf{COM} \vdash \forall x \, (\, x \in \{\, x \mid x \in \tau \,\} \leftrightarrow x \in \tau \,)$$

が成り立つので，

$$\mathbf{EXT} \vdash \forall x \, (\, x \in \{\, x \mid x \in \tau \,\} \leftrightarrow x \in \tau \,) \rightarrow \{\, x \mid x \in \tau \,\} = \tau$$

と三段論法より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \{\, x \mid x \in \tau \,\} = \tau$$

が得られる． ∎

定理 4.1.8 (条件を満たす集合は要素である). φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とし，x を変項とし，φ には x のみが自由に現れているとする．このとき，任意の類 a に対して

$$\mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \varphi(a) \rightarrow (\, \mathrm{set}\,(a) \rightarrow a \in \{\, x \mid \varphi(x) \,\} \,).$$

略証.

$$\mathrm{set}\,(a) \vdash \exists x \, (\, a = x \,)$$

より，

$$\tau \stackrel{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon x \, (\, a = x \,)$$

とおけば

$$\mathrm{set}\,(a) \vdash a = \tau$$

となる．相等性の公理より

$$\mathrm{set}\,(a), \mathbf{EQ} \vdash a = \tau \rightarrow (\, \varphi(a) \rightarrow \varphi(\tau) \,)$$

となるので，三段論法と演繹定理の逆より

$$\varphi(a), \mathrm{set}\,(a), \mathbf{EQ} \vdash \varphi(\tau)$$

となる．内包性公理より

$$\varphi(a), \mathrm{set}\,(a), \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \tau \in \{\, x \mid A(x) \,\}$$

が従い，相等性の公理から

$$\varphi(a), \mathrm{set}\,(a), \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash a \in \{\, x \mid A(x) \,\}$$

が成立する．演繹定理より

$$\varphi(a), \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \mathrm{set}\,(a) \;\longrightarrow\; a \in \{\, x \mid A(x) \,\},$$
$$\mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \varphi(a) \;\longrightarrow\; \big(\mathrm{set}\,(a) \;\longrightarrow\; a \in \{\, x \mid \varphi(x) \,\}\big)$$

が従う． ∎

定理 4.1.9 (Russell のパラドックス).

$$\mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \mathrm{set}\,(\{\, x \mid x \notin x \,\}) \;\longrightarrow\; \bot.$$

略証． いま $R \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \{\, x \mid x \notin x \,\}$ とし

$$\tau \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon x\,(\,R = x\,)$$

とおけば，存在記号の論理的公理より

$$\mathrm{set}\,(R) \vdash R = \tau \tag{4.3}$$

が成立する．また全称記号の論理的公理と論理積の除去より

$$\mathbf{COM} \vdash \tau \in R \;\longrightarrow\; \tau \notin \tau, \tag{4.4}$$
$$\mathbf{COM} \vdash \tau \notin \tau \;\longrightarrow\; \tau \in R \tag{4.5}$$

が成り立つ．

step1　まず

$$\mathrm{set}\,(R),\; \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \tau \in R \;\longrightarrow\; \bot \tag{4.6}$$

を示す．(4.3) と

$$\mathbf{EQ} \vdash R = \tau \;\longrightarrow\; (\,\tau \in R \;\longrightarrow\; \tau \in \tau\,)$$

との三段論法より

$$\tau \in R,\; \mathrm{set}\,(R),\; \mathbf{EQ} \vdash \tau \in \tau$$

がとなり，また (4.4) より

$$\tau \in R,\; \mathbf{COM} \vdash \tau \notin \tau$$

も成り立つので，矛盾の導入

$$\vdash \tau \in \tau \;\longrightarrow\; (\,\tau \notin \tau \;\longrightarrow\; \bot\,)$$

との三段論法および演繹定理より (4.6) が得られる．

step2　次に

$$\mathrm{set}(R),\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \tau \notin R \ \longrightarrow\ \bot \tag{4.7}$$

を示す．まず (4.5) と対偶律 3 (論理的定理 3.2.18) より

$$\mathbf{COM} \vdash \tau \notin R \ \longrightarrow\ \tau \in \tau$$

が成り立ち

$$\tau \notin R,\ \mathbf{COM} \vdash \tau \in \tau \tag{4.8}$$

が従う．また (4.3) と

$$\mathbf{EQ} \vdash R = \tau \ \longrightarrow\ \tau = R$$

より

$$\mathrm{set}(R),\ \mathbf{EQ} \vdash \tau = R$$

となり，

$$\mathbf{EQ} \vdash \tau = R \ \longrightarrow\ (\,\tau \in \tau \ \longrightarrow\ \tau \in R\,)$$

との三段論法より

$$\mathrm{set}(R),\ \mathbf{EQ} \vdash \tau \in \tau \ \longrightarrow\ \tau \in R$$

が成り立つので，対偶律 1 (論理的定理 3.2.3) より

$$\mathrm{set}(R),\ \mathbf{EQ} \vdash \tau \notin R \ \longrightarrow\ \tau \notin \tau$$

が成り立ち，

$$\tau \notin R,\ \mathrm{set}(R),\ \mathbf{EQ} \vdash \tau \notin \tau \tag{4.9}$$

が従う．(4.8)(4.9) と矛盾の導入および演繹定理より (4.7) が得られる．

step3　(4.6) と (4.7) と論理和の除去より

$$\mathrm{set}(R),\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \tau \in R \vee \tau \notin R \ \longrightarrow\ \bot$$

が成り立つが，排中律 (論理的定理 3.2.24) より

$$\vdash \tau \in R \vee \tau \notin R$$

が成り立つので

$$\mathrm{set}(R),\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \bot$$

が出る． ∎

Russell のパラドックスと否定の導入により

$$\mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \neg \mathrm{set}\,(\{\, x \mid x \notin x \,\})$$

が成り立つ．つまり $\{\, x \mid x \notin x \,\}$ は真類である．そして定理 4.9.2 によって $\{\, x \mid x \notin x \,\}$ が次の宇宙 $\mathbf{V}$ と等しいことが判る．

定義 4.1.10 (宇宙). $\mathbf{V} \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \{\, x \mid x = x \,\}$ で定める類 $\mathbf{V}$ を**宇宙 (Universe)** と呼ぶ．

宇宙とは集合の全体を表すが，これ自体は集合ではない．ここで $\mathbf{V}$ が集合の全体を表すとは，任意の類 a に対して「a が $\mathbf{V}$ の要素ならば a は集合であり，逆に a が集合ならば a は $\mathbf{V}$ の要素である」という意味である (定理 4.1.12).

公理 4.1.11 (要素). 次の公理を **ELE** によって参照する: a と b を類とするとき

$$a \in b \;\longrightarrow\; \mathrm{set}\,(a).$$

要素の公理は**要素となりうる類は集合である**と規制している．もともと $\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$ に期されていた「$\varphi(x)$ を満たす集合 x の全体」の意味を実質化するために要素の公理を設けたのである．

定理 4.1.12 ($\mathbf{V}$ は集合の全体である). a を類とするとき次が成り立つ:

$$\mathbf{ELE} \vdash a \in \mathbf{V} \;\longrightarrow\; \mathrm{set}\,(a),$$
$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \mathrm{set}\,(a) \;\longrightarrow\; a \in \mathbf{V}.$$

証明． a を類とするとき，まず要素の公理より

$$\mathbf{ELE} \vdash a \in \mathbf{V} \;\longrightarrow\; \mathrm{set}\,(a)$$

が得られる．逆を示す．いま

$$\tau \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon x\,(\, a = x \,)$$

とおくと，

$$\mathrm{set}\,(a) \vdash \exists x\,(\, a = x \,)$$

と

$$\mathrm{set}\,(a) \vdash \exists x\,(\, a = x \,) \;\longrightarrow\; a = \tau$$

(存在記号の論理的公理) より

$$\mathrm{set}\,(a) \vdash a = \tau \tag{4.10}$$

が成り立つ．他方で定理 4.1.2 と内包性公理より

$$\mathbf{EXT} \vdash \tau = \tau,$$
$$\mathbf{COM} \vdash \tau = \tau \;\longrightarrow\; \tau \in \mathbf{V}$$

が成り立つので，三段論法より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \tau \in \mathbf{V} \tag{4.11}$$

となる．ここで相等性公理より

$$\mathbf{EQ} \vdash a = \tau \;\rightarrow\; \tau = a$$

が成り立つので，(4.10) と三段論法より

$$\mathrm{set}\,(a), \mathbf{EQ} \vdash \tau = a \tag{4.12}$$

となる．同じく相等性公理より

$$\mathbf{EQ} \vdash \tau = a \;\rightarrow\; (\,\tau \in \mathbf{V} \;\rightarrow\; a \in \mathbf{V}\,)$$

が成り立つので，(4.12) と三段論法より

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EQ} \vdash \tau \in \mathbf{V} \;\rightarrow\; a \in \mathbf{V}$$

となり，(4.11) と三段論法より

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash a \in \mathbf{V}$$

が成り立つ．最後に演繹定理より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \mathrm{set}\,(a) \;\rightarrow\; a \in \mathbf{V}$$

が得られる． ∎

定理 4.9.2 より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE}, \mathbf{PAI}, \mathbf{REG} \vdash \mathbf{V} \notin \mathbf{V}$$

が成り立つので，前の定理より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE}, \mathbf{PAI}, \mathbf{REG} \vdash \rightharpoondown \mathrm{set}\,(\mathbf{V})$$

が従う．つまり $\mathbf{V}$ は真類である．

論理的定理 4.1.13 (同値関係の可換律). A, B を $\mathcal{L}$ の文とするとき

$$\vdash (A \;\leftrightarrow\; B) \;\rightarrow\; (B \;\leftrightarrow\; A).$$

略証. 論理積の除去より

$$A \;\leftrightarrow\; B \vdash A \;\rightarrow\; B, \tag{4.13}$$
$$A \;\leftrightarrow\; B \vdash B \;\rightarrow\; A \tag{4.14}$$

となる．他方で論理積の導入より

$$\vdash (B \;\rightarrow\; A) \;\rightarrow\; ((A \;\rightarrow\; B) \;\rightarrow\; (B \;\leftrightarrow\; A))$$

が成り立つので

$$A \leftrightarrow B \vdash (B \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (B \leftrightarrow A))$$

も成り立つ．これと (4.13) との三段論法より

$$A \leftrightarrow B \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (B \leftrightarrow A)$$

となり，(4.14) との三段論法より

$$A \leftrightarrow B \vdash B \leftrightarrow A$$

が得られる． ∎

論理的定理 4.1.14 (同値関係の推移律). A, B, C を $\mathcal{L}$ の文とするとき

$$\vdash (A \leftrightarrow B) \rightarrow ((B \leftrightarrow C) \rightarrow (A \leftrightarrow C)).$$

略証． 論理積の除去法則より

$$A \leftrightarrow B \vdash A \rightarrow B,$$
$$A \leftrightarrow B \vdash B \rightarrow A$$

が成り立つので

$$A \leftrightarrow B,\ B \leftrightarrow C \vdash A \rightarrow B, \tag{4.15}$$
$$A \leftrightarrow B,\ B \leftrightarrow C \vdash B \rightarrow A$$

も成り立つし，対称的に

$$A \leftrightarrow B,\ B \leftrightarrow C \vdash B \rightarrow C, \tag{4.16}$$
$$A \leftrightarrow B,\ B \leftrightarrow C \vdash C \rightarrow B$$

も成り立つ．

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

も成り立つので，(4.15) との三段論法より

$$A \leftrightarrow B,\ B \leftrightarrow C \vdash (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$$

が成り立ち，(4.16) との三段論法より

$$A \leftrightarrow B,\ B \leftrightarrow C \vdash A \rightarrow C \tag{4.17}$$

が成り立つ．同様にして

$$A \leftrightarrow B,\ B \leftrightarrow C \vdash C \rightarrow A \tag{4.18}$$

も得られる．論理積の導入より

$$\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow (A \leftrightarrow C))$$

が成り立つので，(4.17) との三段論法より

$$A \leftrightarrow B,\ B \leftrightarrow C \vdash (C \rightarrow A) \rightarrow (A \leftrightarrow C)$$

となり，(4.18) との三段論法より

$$A \leftrightarrow B,\ B \leftrightarrow C \vdash A \leftrightarrow C$$

となる．あとは演繹定理を二回適用すれば

$$\vdash (A \leftrightarrow B) \rightarrow ((B \leftrightarrow C) \rightarrow (A \leftrightarrow C))$$

が得られる． ∎

定理 4.1.15 (等号の推移律). a, b, c を類とするとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash a = b \rightarrow (a = c \rightarrow b = c).$$

略証． まずは

$$a = b,\ a = c,\ \mathbf{EQ} \vdash \forall x\,(x \in b \leftrightarrow x \in c)$$

を示したいので

$$\tau \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon x \neg(x \in b \leftrightarrow x \in c)$$

とおく (b, c が $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項でなければ $x \in b \leftrightarrow x \in c$ を書き換える)．相等性公理より

$$a = b,\ a = c,\ \mathbf{EQ} \vdash a = b \rightarrow (\tau \in a \rightarrow \tau \in b)$$

が成り立つので，

$$a = b,\ a = c,\ \mathbf{EQ} \vdash a = b \tag{4.19}$$

との三段論法より

$$a = b,\ a = c,\ \mathbf{EQ} \vdash \tau \in a \rightarrow \tau \in b \tag{4.20}$$

となる．同じく相等性公理より

$$a = b,\ a = c,\ \mathbf{EQ} \vdash a = b \rightarrow b = a,$$

が成り立つので，(4.19) との三段論法より

$$a = b,\ a = c,\ \mathbf{EQ} \vdash b = a$$

となり，同様に相等性公理から

$$a = b,\ a = c,\ \mathbf{EQ} \vdash b = a \ \rightarrow\ (\tau \in b \ \rightarrow\ \tau \in a)$$

が成り立つので，三段論法より

$$a = b,\ a = c,\ \mathbf{EQ} \vdash \tau \in b \ \rightarrow\ \tau \in a \tag{4.21}$$

となる．論理積の導入より

$$a = b,\ a = c,\ \mathbf{EQ} \vdash (\tau \in a \ \rightarrow\ \tau \in b) \rightarrow ((\tau \in b \ \rightarrow\ \tau \in a) \rightarrow (\tau \in a \ \leftrightarrow\ \tau \in b))$$

が成り立つので，(4.20) との三段論法より

$$a = b,\ a = c,\ \mathbf{EQ} \vdash (\tau \in b \ \rightarrow\ \tau \in a) \rightarrow (\tau \in a \ \leftrightarrow\ \tau \in b)$$

となり，(4.21) との三段論法より

$$a = b,\ a = c,\ \mathbf{EQ} \vdash \tau \in a \ \leftrightarrow\ \tau \in b \tag{4.22}$$

となる．対称的に

$$a = b,\ a = c,\ \mathbf{EQ} \vdash \tau \in a \ \leftrightarrow\ \tau \in c \tag{4.23}$$

も得られる．ここで含意の可換律 (論理的定理 4.1.13) より

$$a = b,\ a = c,\ \mathbf{EQ} \vdash (\tau \in a \ \leftrightarrow\ \tau \in b) \rightarrow (\tau \in b \ \leftrightarrow\ \tau \in a)$$

が成り立つので，(4.22) との三段論法より

$$a = b,\ a = c,\ \mathbf{EQ} \vdash \tau \in b \ \leftrightarrow\ \tau \in a \tag{4.24}$$

となる．また含意の推移律 (論理的定理 4.1.14) より

$$a = b,\ a = c,\ \mathbf{EQ} \vdash (\tau \in b \ \leftrightarrow\ \tau \in a) \rightarrow ((\tau \in a \ \leftrightarrow\ \tau \in c) \rightarrow (\tau \in b \ \leftrightarrow\ \tau \in c))$$

が成り立つので，(4.24) との三段論法より

$$a = b,\ a = c,\ \mathbf{EQ} \vdash (\tau \in a \ \leftrightarrow\ \tau \in c) \rightarrow (\tau \in b \ \leftrightarrow\ \tau \in c)$$

となり，(4.23) との三段論法より

$$a = b,\ a = c,\ \mathbf{EQ} \vdash \tau \in b \ \leftrightarrow\ \tau \in c$$

が得られる．全称の導出 (論理的定理 3.2.29) より

$$a = b,\ a = c,\ \mathbf{EQ} \vdash (\tau \in b \ \leftrightarrow\ \tau \in c) \rightarrow \forall x\,(x \in b \ \leftrightarrow\ x \in c)$$

となるので，三段論法より

$$a = b,\ a = c,\ \mathbf{EQ} \vdash \forall x\,(x \in b \ \leftrightarrow\ x \in c)$$

となり，外延性公理より

$$a = b,\ a = c,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash \forall x\,(x \in b \ \leftrightarrow\ x \in c) \ \rightarrow\ b = c$$

となるので，三段論法より

$$a = b,\ a = c,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash b = c$$

が得られる． ∎

等号の対称律と推移律について

本稿では等号の対称律

$$a = b \rightarrow b = a$$

を公理としたが，逆に推移律を公理にすれば

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash a = b \rightarrow b = a$$

が成立する．実際

$$\begin{aligned} a = b,\ \mathbf{EQ} &\vdash a = a \rightarrow b = a, \\ \mathbf{EXT} &\vdash a = a, && (\text{定理 } 4.1.2), \\ a = b,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} &\vdash b = a && (\text{三段論法}) \end{aligned}$$

となる．つまり等号の対称律と推移律は外延性公理の下で同値なのである．

4.2　代入原理

a と b を類とし，φ を x のみが自由に現れる式とするとき，

$$a = b$$

ならば a と b をそれぞれ φ の自由な x に代入しても

$$\varphi(a) \leftrightarrow \varphi(b)$$

が成立するというのは**代入原理 (the principle of substitution)** と呼ばれる．第 2.4.6 節で決めたことをここでも注意しておくと，**扱う式は全て，そこに現れる ε 項は全て主要 ε 項であり，現れる内包項は全て正則内包項であるとする．**始めにいくつか必要な定理を示しておく．

論理的定理 4.2.1.　ψ, χ, ψ', χ' を文とするとき，

$$\psi \rightarrow \psi',\ \chi \rightarrow \chi' \vdash \psi \vee \chi \rightarrow \psi' \vee \chi', \tag{4.25}$$

$$\psi \rightarrow \psi',\ \chi \rightarrow \chi' \vdash \psi \wedge \chi \rightarrow \psi' \wedge \chi', \tag{4.26}$$

$$\psi' \rightarrow \psi,\ \chi \rightarrow \chi' \vdash (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\psi' \rightarrow \chi'). \tag{4.27}$$

略証.

- (4.25) を示す．

$$\psi,\ \psi \rightarrow \psi',\ \chi \rightarrow \chi' \vdash \psi'$$

と論理和の導入より

$$\psi,\ \psi \rightarrow \psi',\ \chi \rightarrow \chi' \vdash \psi' \vee \chi'$$

が成り立つので

$$\psi \rightarrow \psi',\, \chi \rightarrow \chi' \vdash \psi \rightarrow \psi' \vee \chi'$$

が従う．同様に

$$\psi \rightarrow \psi',\, \chi \rightarrow \chi' \vdash \chi \rightarrow \psi' \vee \chi'$$

も成り立ち，論理和の除去より

$$\psi \rightarrow \psi',\, \chi \rightarrow \chi' \vdash \psi \vee \chi \rightarrow \psi' \vee \chi'$$

が得られる．

- (4.26) を示す．論理積の除去より

$$\psi \wedge \chi,\, \psi \rightarrow \psi',\, \chi \rightarrow \chi' \vdash \psi$$

が成り立つので三段論法より

$$\psi \wedge \chi,\, \psi \rightarrow \psi',\, \chi \rightarrow \chi' \vdash \psi'$$

が従う．同様に

$$\psi \wedge \chi,\, \psi \rightarrow \psi',\, \chi \rightarrow \chi' \vdash \chi'$$

も成り立ち，論理積の導入より

$$\psi \wedge \chi,\, \psi \rightarrow \psi',\, \chi \rightarrow \chi' \vdash \psi' \wedge \chi'$$

が得られる．

- (4.27) を示す．

$$\psi',\, \psi \rightarrow \chi,\, \psi' \rightarrow \psi,\, \chi \rightarrow \chi' \vdash \psi,$$
$$\psi',\, \psi \rightarrow \chi,\, \psi' \rightarrow \psi,\, \chi \rightarrow \chi' \vdash \psi \rightarrow \chi$$

より

$$\psi',\, \psi \rightarrow \chi,\, \psi' \rightarrow \psi,\, \chi \rightarrow \chi' \vdash \chi$$

が成り立ち，再び三段論法より

$$\psi',\, \psi \rightarrow \chi,\, \psi' \rightarrow \psi,\, \chi \rightarrow \chi' \vdash \chi'$$

が従う．演繹定理より

$$\psi' \rightarrow \psi,\, \chi \rightarrow \chi' \vdash (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\psi' \rightarrow \chi')$$

が得られる． ∎

代入原理を示すには構造的帰納法の原理が必要になるので，証明はメタなものとなる．

定理 4.2.2 (代入原理). a, b を類とし，φ を $\mathcal{L}$ の式とし，x を変項とし，φ には x のみ自由に現れるとする．このとき

$$\mathbf{EXT},\ \mathbf{EQ},\ \mathbf{COM},\ \mathbf{ELE} \vdash a = b \ \rightarrow\ (\,\varphi(a)\ \leftrightarrow\ \varphi(b)\,)$$

が成り立つ．ただし φ が $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式であるときは

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash a = b \ \rightarrow\ (\,\varphi(a)\ \leftrightarrow\ \varphi(b)\,).$$

φ が $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式であるとして証明すれば十分である．実際 φ を x のみが自由に現れる $\mathcal{L}$ の式とし，φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き直したものを $\hat{\varphi}$ と書くと，$\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に対して代入原理が成り立つのであれば

$$a = b,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash \hat{\varphi}(a)\ \leftrightarrow\ \hat{\varphi}(b)$$

がとなるが，書き換えの同値性 (4.4 節) より

$$\mathbf{EXT},\ \mathbf{EQ},\ \mathbf{COM},\ \mathbf{ELE} \vdash \varphi(a)\ \rightarrow\ \hat{\varphi}(a),$$
$$\mathbf{EXT},\ \mathbf{EQ},\ \mathbf{COM},\ \mathbf{ELE} \vdash \hat{\varphi}(b)\ \rightarrow\ \varphi(b)$$

が成り立つので

$$a = b,\ \mathbf{EXT},\ \mathbf{EQ},\ \mathbf{COM},\ \mathbf{ELE} \vdash \varphi(a)\ \leftrightarrow\ \varphi(b)$$

が従う．

略証.

step1　始めの 3 ステップでは φ が原子式であるとして考察する．c を類とすると，相等性公理から直接

$$a = b,\ \mathbf{EQ} \vdash a \in c\ \rightarrow\ b \in c$$

となる．また

$$a = b,\ \mathbf{EQ} \vdash b = a$$

より

$$a = b,\ \mathbf{EQ} \vdash b \in c\ \rightarrow\ a \in c$$

も成り立つ．従って

$$a = b,\ \mathbf{EQ} \vdash a \in c\ \leftrightarrow\ b \in c$$

が得られる．同様に

$$a = b,\ \mathbf{EQ} \vdash c \in a\ \leftrightarrow\ c \in b$$

も得られるので，φ が

$$x \in c$$

や

$$c \in x$$

なる式であるときは

$$\mathbf{EQ} \vdash a = b \ \longrightarrow \ (\,\varphi(a) \ \leftrightarrow \ \varphi(b)\,)$$

が成り立つ．

step2　c を類とすると，等号の推移律 (定理 4.1.15) より

$$a = b,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash a = c \ \longrightarrow \ b = c$$

となる．また

$$a = b,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} b = a$$

と等号の推移律 (定理 4.1.15) より

$$a = b,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash b = c \ \longrightarrow \ a = c$$

も成り立つ．従って

$$a = b,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash a = c \ \leftrightarrow \ b = c$$

が得られる．つまり φ が

$$x = c$$

なる式であるときは

$$\mathbf{EQ} \vdash a = b \ \longrightarrow \ (\,\varphi(a) \ \leftrightarrow \ \varphi(b)\,)$$

が成り立つ．

step3　c を類とすると，等号の推移律 (定理 4.1.15) より

$$a = b,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash a = c \ \longrightarrow \ b = c$$

となるが，ここで

$$c = a,\ \mathbf{EQ} \vdash a = c$$

なので

$$c = a,\ a = b,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash b = c$$

が成り立ち，また

$$\mathbf{EQ} \vdash b = c \ \longrightarrow \ c = b$$

より

$$c = a,\ a = b,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash c = b$$

が従い，演繹定理より

$$a = b,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash c = a\ \longrightarrow\ c = b \tag{4.28}$$

が得られる．

$$a = b,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash b = a$$

と (4.28) より

$$a = b,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash c = b\ \longrightarrow\ c = a$$

も得られるので

$$a = b,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash c = a\ \leftrightarrow\ c = b$$

が成り立つ．従って φ が

$$c = x$$

なる式であるときも

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash a = b\ \longrightarrow\ (\ \varphi(a)\ \leftrightarrow\ \varphi(b)\ )$$

が成り立つ．

step4　φ を x のみが自由に現れる $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式として

IH (帰納法の仮定)

φ の任意の真部分式 ψ に対して，ψ に x が自由に現れているならば

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash a = b\ \longrightarrow\ (\ \psi(a)\ \leftrightarrow\ \psi(b)\ )$$

と仮定する．このとき

case1　φ が

$$\neg\psi$$

なる式であるとき，(IH) より

$$a = b,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash \psi(a)\ \leftrightarrow\ \psi(b)$$

が成り立つので，対偶を取れば

$$a = b,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash \neg\psi(a)\ \leftrightarrow\ \neg\psi(b)$$

が成り立つ．

case2　φ が

$$\psi \vee \chi$$

なる式であるとき，

$$\psi_a \overset{\text{def}}{\longleftrightarrow} \begin{cases} \psi(a) & \text{if } \psi \text{ に } x \text{ が自由に現れる} \\ \psi & \text{if } \psi \text{ に } x \text{ が自由に現れない} \end{cases}$$

と定め，同様に ψ_b, χ_a, χ_b も定めれば，(IH) より

$$a = b,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash \psi_a \leftrightarrow \psi_b,$$
$$a = b,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash \chi_a \leftrightarrow \chi_b$$

が満たされる．(4.25) より

$$a = b,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash \neg\psi_a \vee \chi_a \leftrightarrow \neg\psi_b \vee \chi_b$$

が成り立つ．φ が

$$\psi \wedge \chi$$

や

$$\psi \rightarrow \chi$$

なる式であるときも同様である．

case3

4.3 空集合

論理的定理 4.3.1 (分配された論理積の簡約). A, B, C を $\mathcal{L}$ の文とするとき，

$$\vdash (A \wedge C) \wedge (B \wedge C) \rightarrow A \wedge B.$$

略証. 論理積の除去より

$$(A \wedge C) \wedge (B \wedge C) \vdash A \wedge C$$

となり，また同じく論理積の除去より

$$(A \wedge C) \wedge (B \wedge C) \vdash A \wedge C \rightarrow A$$

となるので，三段論法より

$$(A \wedge C) \wedge (B \wedge C) \vdash A, \tag{4.29}$$

が従う．同様にして

$$(A \wedge C) \wedge (B \wedge C) \vdash B \tag{4.30}$$

も得られる．ここで論理積の導入より

$$(A \wedge C) \wedge (B \wedge C) \vdash A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$$

が成り立つので，(4.29) と (4.30) との三段論法より

$$(A \wedge C) \wedge (B \wedge C) \vdash A \wedge B$$

が出る． ∎

定義 4.3.2 (空集合). $\emptyset \overset{\mathrm{def}}{=} \{\, x \mid x \neq x \,\}$ で定める類 $\emptyset$ を**空集合 (empty set)** と呼ぶ.

x が集合であれば

$$x = x$$

が成り立つので，$\emptyset$ に入る集合など存在しない．つまり $\emptyset$ は丸っきり "空っぽ" なのである．さて，$\emptyset$ は集合であるか否か，という問題を考える．当然これが "大きすぎる集まり" であるはずはないし，そもそも名前に "集合" と付いているのだから $\emptyset$ は集合であるべきだと思われるのだが，実際にこれが集合であることを示すには少し骨が折れる．まずは置換公理と分出定理を拵えなくてはならない．

公理 4.3.3 (置換公理). φ を $\mathcal{L}$ の式とし，s,t を φ に自由に現れる変項とし，φ に自由に現れる項は s,t のみであるとし，x は φ で s への代入について自由であり，y,z,v は φ で t への代入について自由であるとするとき，次の式を **REP** により参照する：

$$\forall x\, \forall y\, \forall z\, (\, \varphi(x,y) \wedge \varphi(x,z) \;\rightarrow\; y = z \,) \;\rightarrow\; \forall a\, \exists u\, \forall v\, (\, v \in u \;\leftrightarrow\; \exists x\, (\, x \in a \wedge \varphi(x,v) \,)\,).$$

$\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$ は集合であるとは限らないが，集合 a との交叉 (後述)

$$a \cap \{\, x \mid \varphi(x) \,\}$$

は当然 a より "小さい集まり" なのだから，集合であってほしいものである．これを公理化した式は**分出公理 (axiom of separation)** と呼ばれるが，公理化せずとも置換公理によって導かれる．

定理 4.3.4 (分出定理). φ を $\mathcal{L}$ の式とし，x を変項とし，φ には x のみが自由に現れるとするとき，

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE}, \mathbf{REP} \vdash \forall a\, \exists s\, \forall x\, (\, x \in s \;\leftrightarrow\; x \in a \wedge \varphi(x) \,). \tag{4.31}$$

が成り立つ．ただし φ が $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式であるときは

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{REP} \vdash \forall a\, \exists s\, \forall x\, (\, x \in s \;\leftrightarrow\; x \in a \wedge \varphi(x) \,).$$

略証. y を，φ の x への代入について自由である変項とする．そして x と y が自由に現れる式 $\psi(x,y)$ を

$$x = y \wedge \varphi(x)$$

と設定する．

step1　まず

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash \forall x\, \forall y\, \forall z\, (\, \psi(x,y) \wedge \psi(x,z) \;\rightarrow\; y = z \,) \tag{4.32}$$

が成り立つことを示す．これを見越して

$$\begin{aligned} \tau &\overset{\mathrm{def}}{=} \varepsilon x \rightarrow \forall y\, \forall z\, (\, \psi(x,y) \wedge \psi(x,z) \;\rightarrow\; y = z \,), \\ \sigma &\overset{\mathrm{def}}{=} \varepsilon y \rightarrow \forall z\, (\, \psi(\tau,y) \wedge \psi(\tau,z) \;\rightarrow\; y = z \,), \\ \rho &\overset{\mathrm{def}}{=} \varepsilon z \rightarrow (\, \psi(\tau,\sigma) \wedge \psi(\tau,z) \;\rightarrow\; \sigma = z \,) \end{aligned}$$

とおく．$\psi(\tau,\sigma) \wedge \psi(\tau,\rho)$ は縮約可能であって (論理的定理 4.3.1)

$$\vdash (\tau = \sigma \wedge \varphi(\tau)) \wedge (\tau = \rho \wedge \varphi(\tau)) \rightarrow \tau = \sigma \wedge \tau = \rho$$

が成り立つので

$$\psi(\tau,\sigma) \wedge \psi(\tau,\rho) \vdash \tau = \sigma \wedge \tau = \rho$$

がとなり，さらに論理積の除去より

$$\psi(\tau,\sigma) \wedge \psi(\tau,\rho) \vdash \tau = \sigma,$$
$$\psi(\tau,\sigma) \wedge \psi(\tau,\rho) \vdash \tau = \rho$$

が出る．ここで等号の推移律 (定理 4.1.15) より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash \tau = \sigma \rightarrow (\tau = \rho \rightarrow \sigma = \rho)$$

が成り立つので，三段論法を二回用いれば

$$\psi(\tau,\sigma) \wedge \psi(\tau,\rho),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash \sigma = \rho$$

が得られる．ゆえに演繹定理より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash \psi(\tau,\sigma) \wedge \psi(\tau,\rho) \rightarrow \sigma = \rho$$

となり，全称の導出 (論理的定理 3.2.29) より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash \forall z\,(\psi(\tau,\sigma) \wedge \psi(\tau,z) \rightarrow \sigma = z),$$
$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash \forall y\,\forall z\,(\psi(\tau,y) \wedge \psi(\tau,z) \rightarrow y = z),$$
$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash \forall x\,\forall y\,\forall z\,(\psi(x,y) \wedge \psi(x,z) \rightarrow y = z)$$

が従う．

step2　置換公理より

$$\mathbf{REP} \vdash \forall x\,\forall y\,\forall z\,(\psi(x,y) \wedge \psi(x,z) \rightarrow y = z) \rightarrow \forall a\,\exists u\,\forall v\,(v \in u \leftrightarrow \exists x\,(x \in a \wedge \psi(x,v)))$$

が成り立つので，(4.32) との三段論法より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{REP} \vdash \forall a\,\exists u\,\forall v\,(v \in u \leftrightarrow \exists x\,(x \in a \wedge \psi(x,v))) \tag{4.33}$$

が成立する．(4.31) を示したいので

$$\alpha \stackrel{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon a \rightarrow \exists s\,\forall x\,(x \in s \leftrightarrow x \in a \wedge \varphi(x))$$

とおくと，全称記号の論理的公理より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{REP} \vdash \forall a\,\exists u\,\forall v\,(v \in u \leftrightarrow \exists x\,(x \in a \wedge \psi(x,v)))$$
$$\rightarrow \exists u\,\forall v\,(v \in u \leftrightarrow \exists x\,(x \in \alpha \wedge \psi(x,v)))$$

となるので，(4.33) との三段論法より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{REP} \vdash \exists u\,\forall v\,(v \in u \leftrightarrow \exists x\,(x \in \alpha \wedge \psi(x,v)))$$

が従う．ここで

$$\zeta \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon u\, \forall v\,(\, v \in u \;\leftrightarrow\; \exists x\,(\, x \in \alpha \wedge \psi(x, v)\,)\,)$$

とおけば，存在記号の論理的公理により

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{REP} \vdash \forall v\,(\, v \in \zeta \;\leftrightarrow\; \exists x\,(\, x \in \alpha \wedge \psi(x, v)\,)\,) \tag{4.34}$$

が成り立つ．

step3　最後に

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE}, \mathbf{REP} \vdash \forall x\,(\, x \in \zeta \;\leftrightarrow\; x \in \alpha \wedge \varphi(x)\,) \tag{4.35}$$

となることを示す．いま

$$\tau \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon x \neg(\, x \in \zeta \;\leftrightarrow\; x \in \alpha \wedge \varphi(x)\,)$$

とおけば，(4.34) と全称記号の論理的公理より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{REP} \vdash \tau \in \zeta \;\leftrightarrow\; \exists x\,(\, x \in \alpha \wedge \psi(x, \tau)\,) \tag{4.36}$$

が従う．ゆえに

$$\tau \in \zeta,\; \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{REP} \vdash \exists x\,(\, x \in \alpha \wedge \psi(x, \tau)\,)$$

となる．ここで

$$\sigma \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon x\,(\, x \in \alpha \wedge \psi(x, \tau)\,)$$

とおけば

$$\tau \in \zeta,\; \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{REP} \vdash \sigma \in \alpha \wedge \psi(\sigma, \tau)$$

となるので，

$$\begin{aligned} \tau \in \zeta,\; \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{REP} &\vdash \sigma \in \alpha, \\ \tau \in \zeta,\; \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{REP} &\vdash \sigma = \tau, \\ \tau \in \zeta,\; \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{REP} &\vdash \varphi(\sigma) \end{aligned}$$

が従う．ところで相等性公理と代入原理 (定理 4.2.2) より

$$\begin{aligned} \tau \in \zeta,\; \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{REP} &\vdash \sigma = \tau \;\rightarrow\; (\sigma \in \alpha \;\rightarrow\; \tau \in \alpha\,), \\ \tau \in \zeta,\; \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE}, \mathbf{REP} &\vdash \sigma = \tau \;\rightarrow\; (\varphi(\sigma) \;\rightarrow\; \varphi(\tau)\,), \end{aligned} \tag{4.37}$$

が成り立つので，三段論法より

$$\begin{aligned} \tau \in \zeta,\; \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{REP} &\vdash \tau \in \alpha, \\ \tau \in \zeta,\; \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE}, \mathbf{REP} &\vdash \varphi(\tau) \end{aligned}$$

が従い

$$\tau \in \zeta,\; \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE}, \mathbf{REP} \vdash \tau \in \alpha \wedge \varphi(\tau)$$

となる．以上で

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE}, \mathbf{REP} \vdash \tau \in \zeta \ \rightarrow \ \tau \in \alpha \land \varphi(\tau) \tag{4.38}$$

が得られた．逆に定理 4.1.2 と併せて

$$\tau \in \alpha \land \varphi(\tau),\ \mathbf{EXT} \vdash \tau \in \alpha \land (\, \tau = \tau \land \varphi(\tau)\,)$$

が成り立つので，存在記号の論理的公理より

$$\tau \in \alpha \land \varphi(\tau),\ \mathbf{EXT} \vdash \exists x\,(\, x \in \alpha \land \psi(x, \tau)\,)$$

となる．他方で (4.36) より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{REP} \vdash \exists x\,(\, x \in \alpha \land \psi(x, \tau)\,) \ \rightarrow \ \tau \in \zeta$$

が成り立つので，三段論法より

$$\tau \in \alpha \land \varphi(\tau),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{REP} \vdash \tau \in \zeta$$

が従う．以上で

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{REP} \vdash \tau \in \alpha \land \varphi(\tau) \ \rightarrow \ \tau \in \zeta \tag{4.39}$$

も得られた．(4.38) と (4.39) および存在記号の論理的公理より (4.35) が出る．すると存在記号の論理的公理より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE}, \mathbf{REP} \vdash \exists s\, \forall x\,(\, x \in s \ \leftrightarrow \ x \in \alpha \land \varphi(x)\,)$$

となり，全称の導出 (論理的定理 3.2.29) より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE}, \mathbf{REP} \vdash \forall a\, \exists s\, \forall x\,(\, x \in s \ \leftrightarrow \ x \in a \land \varphi(x)\,)$$

が従う．φ が $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式である場合は (4.37) で **COM** と **ELE** が追加されないので

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{REP} \vdash \forall a\, \exists s\, \forall x\,(\, x \in s \ \leftrightarrow \ x \in a \land \varphi(x)\,)$$

が得られる． ∎

定理 4.3.5 ($\emptyset$ は集合).

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{REP} \vdash \mathrm{set}\,(\emptyset).$$

略証． 分出定理 (4.3.4) より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{REP} \vdash \forall a\, \exists s\, \forall x\,(\, x \in s \ \leftrightarrow \ x \in a \land x \neq x\,)$$

が成立する．α を類である ε 項とすれば，全称記号の論理的公理より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{REP} \vdash \exists s\, \forall x\,(\, x \in s \ \leftrightarrow \ x \in \alpha \land x \neq x\,)$$

となり，また

$$\sigma \stackrel{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon s\, \forall x\, (\, x \in s \;\leftrightarrow\; x \in \alpha \wedge x \neq x\,)$$

とおけば存在記号の論理的公理より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{REP} \vdash \forall x\, (\, x \in \sigma \;\leftrightarrow\; x \in \alpha \wedge x \neq x\,) \tag{4.40}$$

が成立する．いま

$$\tau \stackrel{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon x \, \neg (\, x \in s \;\leftrightarrow\; x \neq x\,)$$

とおけば，(4.40) と全称記号の論理的公理より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{REP} \vdash \tau \in \sigma \;\leftrightarrow\; \tau \in \alpha \wedge \tau \neq \tau$$

となるので

$$\tau \in \sigma,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{REP} \vdash \tau \in \alpha \wedge \tau \neq \tau$$

が従い，論理積の除去により

$$\tau \in \sigma,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{REP} \vdash \tau \neq \tau$$

が従う．以上で

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{REP} \vdash \tau \in \sigma \;\rightarrow\; \tau \neq \tau \tag{4.41}$$

が得られた．逆に，定理 4.1.2 より

$$\mathbf{EXT} \vdash \tau = \tau$$

が成り立つので矛盾の導入と併せて

$$\tau \neq \tau,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{REP} \vdash \bot$$

となり，爆発律 (論理的定理 3.2.21) より

$$\tau \neq \tau,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{REP} \vdash \tau \in \sigma$$

が従う．以上で

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{REP} \vdash \tau \neq \tau \;\rightarrow\; \tau \in \sigma \tag{4.42}$$

も得られた．ゆえに (4.41) と (4.42) より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{REP} \vdash \tau \in \sigma \;\leftrightarrow\; \tau \neq \tau$$

が成立し，全称の導出 (論理的定理 3.2.29) より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{REP} \vdash \forall x\, (\, x \in \sigma \;\leftrightarrow\; x \neq x\,) \tag{4.43}$$

が得られる．

次に

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{REP} \vdash \forall x\,(\,x \in \sigma \;\leftrightarrow\; x \in \{\,x \mid x \neq x\,\}\,) \tag{4.44}$$

を示す．いま

$$\chi \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon x \neg(\,x \in \sigma \;\leftrightarrow\; x \in \{\,x \mid x \neq x\,\}\,)$$

とおけば，(4.43) と全称記号の論理的公理より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{REP} \vdash \chi \in \sigma \;\leftrightarrow\; \chi \neq \chi$$

となり，他方で内包性公理より

$$\mathbf{COM} \vdash \chi \neq \chi \;\leftrightarrow\; \chi \in \{\,x \mid x \neq x\,\}$$

が成り立つので，同値関係の推移律 (論理的定理 4.1.14) より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{REP} \vdash \chi \in \sigma \;\leftrightarrow\; \chi \in \{\,x \mid x \neq x\,\}$$

が従い，全称の導出 (論理的定理 3.2.29) より (4.44) が出る．ゆえに外延性公理より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{REP} \vdash \sigma = \emptyset$$

となり，存在記号の論理的公理より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{REP} \vdash \exists s\,(\,\emptyset = s\,)$$

が得られる． ∎

定理 4.3.6 (空集合はいかなる集合も持たない).

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \forall x\,(\,x \notin \emptyset\,).$$

略証. $\forall x\,(\,x \notin \emptyset\,)$ とは

$$\forall x \neg(\,x \in \emptyset\,)$$

の略記であり，これを $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き換えると

$$\forall x \neg(\,x \neq x\,)$$

となる．ここで

$$\tau \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon x \neg(\neg(\,x \neq x\,))$$

とおけば，内包性公理と全称記号の論理的公理より

$$\mathbf{COM} \vdash \tau \in \emptyset \;\rightarrow\; \tau \neq \tau$$

が成り立つから，対偶を取れば

$$\mathbf{COM} \vdash \tau = \tau \;\longrightarrow\; \tau \notin \emptyset$$

が成り立つ (論理的定理 3.2.3)．定理 4.1.2 より

$$\mathbf{EXT} \vdash \tau = \tau$$

となるので，三段論法より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \tau \notin \emptyset$$

が成り立つ．そして全称の導出 (論理的定理 3.2.29) より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \forall x\,(\,x \notin \emptyset\,)$$

が得られる． ∎

定理 4.3.7 (空の類は空集合に等しい). a を類とするとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \forall x\,(\,x \notin a\,) \;\longrightarrow\; a = \emptyset,$$
$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash a = \emptyset \;\longrightarrow\; \forall x\,(\,x \notin a\,).$$

証明.

step1　いま

$$\varepsilon x \neg(\,x \in a \;\leftrightarrow\; x \in \emptyset\,)$$

(実際には $x \in a \;\leftrightarrow\; x \in \emptyset$ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き換える) とすれば，

$$\forall x\,(\,x \notin a\,) \vdash \tau \notin a$$

と論理和の導入により

$$\forall x\,(\,x \notin a\,) \vdash \tau \notin a \vee \tau \in \emptyset$$

となり，含意に書き換えれば (論理的定理 3.2.22)

$$\forall x\,(\,x \notin a\,) \vdash \tau \in a \;\longrightarrow\; \tau \in \emptyset \tag{4.45}$$

が得られる．また定理 4.3.6 より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \tau \notin \emptyset$$

が成り立つので

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \tau \notin \emptyset \vee \tau \in a$$

となり，含意に書き換えれば

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \tau \in \emptyset \;\longrightarrow\; \tau \in a \tag{4.46}$$

が得られる．(4.45) と (4.46) より

$$\forall x\,(\,x \notin a\,),\ \mathbf{EXT},\mathbf{COM} \vdash \tau \in a \ \leftrightarrow\ \tau \in \emptyset$$

が従い，全称の導出 (論理的定理 3.2.29) より

$$\forall x\,(\,x \notin a\,),\ \mathbf{EXT},\mathbf{COM} \vdash \forall x\,(\,x \in a \ \leftrightarrow\ x \in \emptyset\,)$$

が従い，外延性公理より

$$\forall x\,(\,x \notin a\,),\ \mathbf{EXT},\mathbf{COM} \vdash a = \emptyset$$

が従い，演繹定理より

$$\mathbf{EXT},\mathbf{COM} \vdash \forall x\,(\,x \notin a\,) \ \longrightarrow\ a = \emptyset$$

が得られる．

step2　外延性公理の逆 (定理 4.1.5) より

$$a = \emptyset,\ \mathbf{EQ} \vdash \forall x\,(\,x \in a \ \leftrightarrow\ x \in \emptyset\,) \tag{4.47}$$

が成り立つ．ここで

$$\tau \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon x \rightharpoondown (\,x \notin a\,)$$

とおけば (必要ならば $x \notin a$ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き換える)，(4.47) と全称記号の論理的公理より

$$a = \emptyset,\ \mathbf{EQ} \vdash \tau \in a \ \longrightarrow\ \tau \in \emptyset$$

が成立し，これの対偶を取れば

$$a = \emptyset,\ \mathbf{EQ} \vdash \tau \notin \emptyset \ \longrightarrow\ \tau \notin a \tag{4.48}$$

となる (論理的定理 3.2.3)．ところで定理 4.3.6 より

$$\mathbf{EXT},\mathbf{COM} \vdash \tau \notin \emptyset$$

が成り立つので，(4.48) との三段論法より

$$a = \emptyset,\ \mathbf{EXT},\mathbf{EQ},\mathbf{COM} \vdash \tau \notin a$$

が従う．全称の導出 (論理的定理 3.2.29) より

$$a = \emptyset,\ \mathbf{EXT},\mathbf{EQ},\mathbf{COM} \vdash \forall x\,(\,x \notin a\,)$$

が成り立ち，演繹定理より

$$\mathbf{EXT},\mathbf{EQ},\mathbf{COM} \vdash a = \emptyset \ \longrightarrow\ \forall x\,(\,x \notin a\,)$$

が得られる． ∎

定理 4.3.8 (類を要素として持てば空ではない).　a, b を類とするとき

$$\mathbf{EQ},\mathbf{ELE} \vdash a \in b \ \longrightarrow\ \exists x\,(\,x \in b\,).$$

証明．　要素の公理より

$$\mathbf{ELE} \vdash a \in b \;\longrightarrow\; \mathrm{set}\,(a)$$

が成立するので，

$$\tau \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon x\,(\,a = x\,)$$

とおけば (必要ならば $a = x$ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き換える)，存在記号の論理的公理から

$$a \in b,\; \mathbf{ELE} \vdash a = \tau$$

が成り立つ．相等性の公理より

$$\mathbf{EQ} \vdash a = \tau \;\longrightarrow\; (\,a \in b \;\longrightarrow\; \tau \in b\,)$$

となるので，三段論法より

$$a \in b,\; \mathbf{EQ}, \mathbf{ELE} \vdash \tau \in b$$

となる．存在記号の論理的公理より

$$a \in b,\; \mathbf{EQ}, \mathbf{ELE} \vdash \exists x\,(\,x \in b\,)$$

が成り立ち，演繹定理から

$$\mathbf{EQ}, \mathbf{ELE} \vdash a \in b \;\longrightarrow\; \exists x\,(\,x \in b\,)$$

が得られる． ∎

定義 4.3.9 (部分類).　x, y を $\mathcal{L}$ の項とするとき，

$$x \subset y \overset{\mathrm{def}}{\longleftrightarrow} \forall z\,(\,z \in x \;\longrightarrow\; z \in y\,)$$

と定める．式 $z \subset y$ を「x は y の**部分類 (subclass)** である」や「x は y に含まれる」などと翻訳し，特に x が集合である場合は「x は y の**部分集合 (subset)** である」と翻訳する．また

$$x \subsetneq y \overset{\mathrm{def}}{\longleftrightarrow} x \subset y \wedge x \neq y$$

と定め，これを「x は y に**真に含まれる**」と翻訳する．

空虚な真の一例として次の結果を得る．

定理 4.3.10 (空集合は全ての類に含まれる).　a を類とするとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \emptyset \subset a.$$

証明．　いま

$$\tau \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon x \neg(\,x \in \emptyset \;\longrightarrow\; x \in a\,)$$

とおく (実際は $x \in \emptyset \;\longrightarrow\; x \in a$ は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き換える)．定理 4.3.6 より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \tau \notin \emptyset$$

が成り立つから，論理和の導入により

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \tau \notin \emptyset \vee \tau \in a$$

が成り立つ．これを含意の形になおせば

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \tau \in \emptyset \;\longrightarrow\; \tau \in a$$

が成り立ち (論理的定理 3.2.22)，全称の導出 (論理的定理 3.2.29) より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \forall x\,(\,x \in \emptyset \;\longrightarrow\; x \in a\,)$$

が従う． ▮

$a \subset b$ とは a に属する全ての “類である ε 項” が b に属するという定義であったが，要素となりうる類は集合であるという公理から，a に属する全ての類もまた b に属する．

定理 4.3.11 (類はその部分類に属する全ての類を要素に持つ). a, b, c を類とするとき

$$\mathbf{EQ}, \mathbf{ELE} \vdash a \subset b \;\longrightarrow\; (\,c \in a \;\longrightarrow\; c \in b\,).$$

証明. 要素の公理より

$$c \in a,\ \mathbf{ELE} \vdash \mathrm{set}\,(c)$$

が成り立つので，

$$\tau \stackrel{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon x\,(\,c = x\,)$$

とおくと (必要ならば $c = x$ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き換える) 存在記号の論理的公理より

$$c \in a,\ \mathbf{ELE} \vdash c = \tau \tag{4.49}$$

となる．相等性公理より

$$\mathbf{EQ} \vdash c = \tau \;\longrightarrow\; (\,c \in a \;\longrightarrow\; \tau \in a\,)$$

が成り立つので，三段論法より

$$c \in a,\ \mathbf{EQ}, \mathbf{ELE} \vdash \tau \in a$$

が従う．ところで，$\subset$ の定義と全称記号の論理的公理より

$$a \subset b \vdash \tau \in a \;\longrightarrow\; \tau \in b$$

が成り立つので，三段論法より

$$a \subset b,\ c \in a,\ \mathbf{EQ}, \mathbf{ELE} \vdash \tau \in b \tag{4.50}$$

が従う．相等性公理より

$$\mathbf{EQ} \vdash c = \tau \ \rightarrow \ \tau = c$$

が成り立つので，(4.49) との三段論法より

$$a \subset b,\ c \in a,\ \mathbf{EQ}, \mathbf{ELE} \vdash \tau = c \tag{4.51}$$

となり，相等性公理より

$$\mathbf{EQ} \vdash \tau = c \ \rightarrow \ (\,\tau \in b \ \rightarrow \ c \in b\,)$$

が成り立つので，(4.51) と (4.50) との三段論法より

$$a \subset b,\ c \in a,\ \mathbf{EQ}, \mathbf{ELE} \vdash c \in b$$

が従う．そして演繹定理より

$$\mathbf{EQ}, \mathbf{ELE} \vdash a \subset b \ \rightarrow \ (\,c \in a \ \rightarrow \ c \in b\,)$$

が得られる．■

宇宙 $\mathbf{V}$ は類の一つであった．当然のようであるが，それは最大の類である．

定理 4.3.12 ($\mathbf{V}$ は最大の類である). a を類とするとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash a \subset \mathbf{V}.$$

略証. いま

$$\tau \stackrel{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon x \rightharpoondown (\,x \in a \ \rightarrow \ a \in \mathbf{V}\,)$$

とおく．定理 4.1.2 より

$$\mathbf{EXT} \vdash \tau = \tau$$

となり，他方で内包性公理より

$$\mathbf{COM} \vdash \tau = \tau \ \rightarrow \ \tau \in \mathbf{V}$$

が成り立つので，三段論法より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \tau \in \mathbf{V}$$

が成立する．ゆえに

$$\tau \in a,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \tau \in \mathbf{V}$$

も成り立ち，演繹定理より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \tau \in a \ \rightarrow \ \tau \in \mathbf{V}$$

が従い，全称の導出 (論理的定理 3.2.29) より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \forall x\,(\,x \in a \ \rightarrow \ x \in \mathbf{V}\,)$$

が得られる．■

定理 4.3.13 (等しい類は相手を包含する). a, b を類とするとき

$$\mathbf{EQ} \vdash a = b \longrightarrow a \subset b \wedge b \subset a.$$

略証. いま

$$\tau \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varepsilon x \neg (x \in a \longrightarrow x \in b)$$

とおけば，外延性公理の逆 (定理 4.1.5) と全称記号の論理的公理，および論理積の除去により

$$a = b, \ \mathbf{EQ} \vdash \tau \in a \longrightarrow \tau \in b$$

が成り立つので，全称の導出 (論理的定理 3.2.29) より

$$a = b, \ \mathbf{EQ} \vdash \forall x (x \in a \longrightarrow x \in b)$$

が成り立つ．また τ を

$$\tau \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varepsilon x \neg (x \in b \longrightarrow x \in a)$$

として，先ほどの a と b を入れ替えれば

$$\mathbf{EQ} \vdash b = a \longrightarrow (\tau \in b \longrightarrow \tau \in a)$$

が得られるが，相等性公理より

$$a = b, \ \mathbf{EQ} \vdash b = a$$

が成り立つので三段論法より

$$a = b, \ \mathbf{EQ} \vdash \tau \in b \longrightarrow \tau \in a$$

が従う．ゆえに全称の導出 (論理的定理 3.2.29) より

$$a = b, \ \mathbf{EQ} \vdash b \subset a$$

も得られる． ∎

定理 4.3.14 (互いに相手を包含する類同士は等しい). a, b を類とするとき

$$\mathbf{EXT} \vdash a \subset b \wedge b \subset a \longrightarrow a = b.$$

略証. いま

$$\tau \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varepsilon x \neg (x \in a \longleftrightarrow x \in b)$$

とおく．論理積の除去により

$$a \subset b \wedge b \subset a \vdash a \subset b$$

となり，全称記号の論理的公理より

$$a \subset b \wedge b \subset a \vdash \tau \in a \ \rightarrow\ \tau \in b$$

が成り立つ．同様にして

$$a \subset b \wedge b \subset a \vdash \tau \in b \ \rightarrow\ \tau \in a$$

も成り立つので，論理積の導入により

$$a \subset b \wedge b \subset a \vdash \tau \in a \ \leftrightarrow\ \tau \in b$$

となり，全称の導出 (論理的定理 3.2.29) より

$$a \subset b \wedge b \subset a \vdash \forall x \,(\, x \in a \ \leftrightarrow\ x \in b\,)$$

が得られる．そして外延性公理により

$$a \subset b \wedge b \subset a,\ \mathbf{EXT} \vdash a = b$$

が得られる． ∎

4.4 書き換えの同値性

$\mathcal{L}$ の式を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に変換するときは，まず原子式に対して

元の式	書き換え後
$a = \{\, z \mid \psi \,\}$	$\forall v\,(\, v \in a \ \leftrightarrow\ \psi(z/v)\,)$
$\{\, y \mid \varphi \,\} = b$	$\forall u\,(\, \varphi(y/u) \ \leftrightarrow\ u \in b\,)$
$\{\, y \mid \varphi \,\} = \{\, z \mid \psi \,\}$	$\forall u\,(\, \varphi(y/u) \ \leftrightarrow\ \psi(z/u)\,)$
$a \in \{\, z \mid \psi \,\}$	$\psi(z/a)$
$\{\, y \mid \varphi \,\} \in b$	$\exists s\,(\, \forall u\,(\, \varphi(y/u) \ \leftrightarrow\ u \in s\,) \wedge s \in b\,)$
$\{\, y \mid \varphi \,\} \in \{\, z \mid \psi \,\}$	$\exists s\,(\, \forall u\,(\, \varphi(y/u) \ \leftrightarrow\ u \in s\,) \wedge \psi(z/s)\,)$

とし，あとは帰納的に式を書き換えることによって $\mathcal{L}$ の式 φ から $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式 $\hat{\varphi}$ を得たのであった．この節では φ が文であるときに

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE} \vdash \varphi \ \leftrightarrow\ \hat{\varphi} \tag{4.52}$$

が成り立つことを示す．これが示されれば，仮に φ に変項 x が自由に現れていても

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE} \vdash \forall x\,(\, \varphi(x) \ \leftrightarrow\ \hat{\varphi}(x)\,)$$

が成り立つし，x に加えて y が自由に現れていても

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE} \vdash \forall x\, \forall y\,(\, \varphi(x, y) \ \leftrightarrow\ \hat{\varphi}(x, y)\,)$$

が成り立つ．前者の場合は

$$\tau \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon x \neg(\hat{\varphi}(x) \leftrightarrow \hat{\varphi}(x))$$

に対して

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE} \vdash \varphi(\tau) \leftrightarrow \hat{\varphi}(\tau)$$

が成り立つのだし，後者の場合は

$$\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon x \neg\forall y\,(\hat{\varphi}(x,y) \leftrightarrow \hat{\varphi}(x,y)),$$
$$\rho \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon y \neg(\hat{\varphi}(\sigma,y) \leftrightarrow \hat{\varphi}(\sigma,y))$$

に対して

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE} \vdash \varphi(\sigma,\rho) \leftrightarrow \hat{\varphi}(\sigma,\rho)$$

が成り立つので，全称の導出 (論理的定理 3.2.29) を適用すればいい．一般の式 φ に対して (4.52) を示すには φ が原子式であるときに (4.52) が成り立つことを言えば十分であり，それについて先に結論を書いておくと

$$\begin{aligned}
\mathbf{EQ}, \mathbf{COM} &\vdash a = \{\, z \mid \psi(z) \,\} \rightarrow \forall v\,(v \in a \leftrightarrow \psi(v)),\\
\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} &\vdash \forall v\,(v \in a \leftrightarrow \psi(v)) \rightarrow a = \{\, z \mid \psi(z) \,\},\\
\mathbf{EQ}, \mathbf{COM} &\vdash \{\, y \mid \varphi(y) \,\} = b \rightarrow \forall u\,(\varphi(u) \leftrightarrow u \in b),\\
\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} &\vdash \forall u\,(\varphi(u) \leftrightarrow u \in b) \rightarrow \{\, y \mid \varphi(y) \,\} = b,\\
\mathbf{EQ}, \mathbf{COM} &\vdash \{\, y \mid \varphi(y) \,\} = \{\, z \mid \psi(z) \,\} \rightarrow \forall u\,(\varphi(u) \leftrightarrow \psi(u)),\\
\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} &\vdash \forall u\,(\varphi(u) \leftrightarrow \psi(u)) \rightarrow \{\, y \mid \varphi(y) \,\} = \{\, z \mid \psi(z) \,\},\\
\mathbf{COM} &\vdash a \in \{\, z \mid \psi(z) \,\} \rightarrow \psi(a),\\
\mathbf{COM} &\vdash \psi(a) \rightarrow a \in \{\, z \mid \psi(z) \,\},\\
\mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE} &\vdash \{\, y \mid \varphi(y) \,\} \in b \rightarrow \exists s\,(\forall u\,(\varphi(u) \leftrightarrow u \in s) \wedge s \in b),\\
\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} &\vdash \exists s\,(\forall u\,(\varphi(u) \leftrightarrow u \in s) \wedge s \in b) \rightarrow \{\, y \mid \varphi(y) \,\} \in b,\\
\mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE} &\vdash \{\, y \mid \varphi(y) \,\} \in \{\, z \mid \psi(z) \,\} \rightarrow \exists s\,(\forall u\,(\varphi(u) \leftrightarrow u \in s) \wedge \psi(s)),\\
\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} &\vdash \exists s\,(\forall u\,(\varphi(u) \leftrightarrow u \in s) \wedge \psi(s)) \rightarrow \{\, y \mid \varphi(y) \,\} \in \{\, z \mid \psi(z) \,\}
\end{aligned}$$

が成立する．

論理的定理 4.4.1 (同値記号の対称律). A, B を $\mathcal{L}$ の文とするとき

$$\vdash (A \leftrightarrow B) \rightarrow (B \leftrightarrow A).$$

証明. 論理積の除去より

$$A \leftrightarrow B \vdash A \rightarrow B,$$
$$A \leftrightarrow B \vdash B \rightarrow A$$

となる．他方で論理積の導入より

$$\vdash (B \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A) \wedge (A \rightarrow B))$$

が成り立つので，三段論法を二回適用すれば

$$A \leftrightarrow B \vdash (B \rightarrow A) \wedge (A \rightarrow B)$$

となる．つまり

$$A \leftrightarrow B \vdash B \leftrightarrow A$$

が得られた． ∎

定理 4.4.2. a を主要 ε 項とし，ψ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とし，z を ψ に自由に現れる変項とし，ψ に自由に現れる変項は z のみであるとする．このとき

$$\mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash a = \{\, z \mid \psi(z) \,\} \rightarrow \forall v\, (\, v \in a \leftrightarrow \psi(v)\,).$$

略証． いま

$$\tau \stackrel{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon v \neg (\, v \in a \leftrightarrow \psi(v)\,)$$

とおく．外延性公理の逆 (定理 4.1.5) より

$$a = \{\, z \mid \psi(z) \,\},\ \mathbf{EQ} \vdash \tau \in a \leftrightarrow \tau \in \{\, z \mid \psi(z) \,\}$$

が成り立ち，他方で内包性公理より

$$\mathbf{COM} \vdash \tau \in \{\, z \mid \psi(z) \,\} \leftrightarrow \psi(\tau)$$

が成り立つので，同値記号の推移律 (論理的定理 4.1.14) より

$$a = \{\, z \mid \psi(z) \,\},\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \tau \in a \leftrightarrow \psi(\tau)$$

が従う．そして全称の導出 (論理的定理 3.2.29) より

$$a = \{\, z \mid \psi(z) \,\},\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \forall v\, (\, v \in a \leftrightarrow \psi(v)\,)$$

が得られる． ∎

定理 4.4.3. a を主要 ε 項とし，ψ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とし，z を ψ に自由に現れる変項とし，ψ に自由に現れる変項は z のみであるとする．このとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \forall v\, (\, v \in a \leftrightarrow \psi(v)\,) \rightarrow a = \{\, z \mid \psi(z) \,\}.$$

略証． いま

$$\tau \stackrel{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon x \neg (\, x \in a \leftrightarrow x \in \{\, z \mid \psi(z) \,\}\,)$$

とおく．まず全称記号の論理的公理より

$$\forall v\,(\,v \in a \;\leftrightarrow\; \psi(v)\,) \vdash \tau \in a \;\leftrightarrow\; \psi(\tau) \tag{4.53}$$

が成り立つ．また内包性公理より

$$\mathbf{COM} \vdash \tau \in \{\,z \mid \psi(z)\,\} \;\leftrightarrow\; \psi(\tau)$$

となるので，同値記号の対称律 (4.4.1) より

$$\mathbf{COM} \vdash \psi(\tau) \;\leftrightarrow\; \tau \in \{\,z \mid \psi(z)\,\} \tag{4.54}$$

が成り立つ．(4.53) と (4.54) と同値記号の推移律 (論理的定理 4.1.14) より

$$\forall v\,(\,v \in a \;\leftrightarrow\; \psi(v)\,),\ \mathbf{COM} \vdash \tau \in a \;\leftrightarrow\; \tau \in \{\,z \mid \psi(z)\,\}$$

となり，全称の導出 (論理的定理 3.2.29) より

$$\forall v\,(\,v \in a \;\leftrightarrow\; \psi(v)\,),\ \mathbf{COM} \vdash \forall x\,(\,x \in a \;\leftrightarrow\; x \in \{\,z \mid \psi(z)\,\}\,)$$

となり，外延性公理より

$$\forall v\,(\,v \in a \;\leftrightarrow\; \psi(v)\,),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash a = \{\,z \mid \psi(z)\,\}$$

が得られる． ∎

定理 4.4.4. b を主要 ε 項とし，φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とし，y を φ に自由に現れる変項とし，φ に自由に現れる変項は y のみであるとする．このとき

$$\mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \{\,y \mid \varphi(y)\,\} = b \;\rightarrow\; \forall u\,(\,\varphi(u) \;\leftrightarrow\; u \in b\,).$$

略証. いま

$$\tau \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon u \neg(\,\varphi(u) \;\leftrightarrow\; u \in b\,)$$

とおけば，まず外延性公理の逆 (定理 4.1.5) より

$$\{\,y \mid \varphi(y)\,\} = b,\ \mathbf{EQ} \vdash \tau \in \{\,y \mid \varphi(z)\,\} \;\leftrightarrow\; \tau \in b \tag{4.55}$$

が成り立つ．他方で内包性公理より

$$\mathbf{COM} \vdash \tau \in \{\,y \mid \varphi(y)\,\} \;\leftrightarrow\; \varphi(\tau)$$

となり，同値記号の対称律 (4.4.1) より

$$\mathbf{COM} \vdash \varphi(\tau) \;\leftrightarrow\; \tau \in \{\,y \mid \varphi(y)\,\} \tag{4.56}$$

が成り立つ．(4.55) と (4.56) と同値記号の推移律 (論理的定理 4.1.14) より

$$\{\,y \mid \varphi(y)\,\} = b,\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \varphi(\tau) \;\leftrightarrow\; \tau \in b$$

が成り立ち，全称の導出 (論理的定理 3.2.29) より

$$\{\,y \mid \varphi(y)\,\} = b,\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \forall u\,(\,\varphi(u) \;\leftrightarrow\; u \in b\,)$$

が得られる． ∎

定理 4.4.5. b を主要 ε 項とし，φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とし，y を φ に自由に現れる変項とし，φ に自由に現れる変項は y のみであるとする．このとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \forall u\, (\, \varphi(u) \leftrightarrow u \in b\,) \rightarrow \{\, y \mid \varphi(y)\, \} = b.$$

略証． いま

$$\tau \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon x \neg (\, x \in \{\, y \mid \varphi(y)\, \} \leftrightarrow x \in b\,)$$

とおく．まず全称記号の論理的公理より

$$\forall u\, (\, \varphi(u) \leftrightarrow u \in b\,) \vdash \varphi(\tau) \leftrightarrow \tau \in b \tag{4.57}$$

が成り立ち，また内包性公理より

$$\mathbf{COM} \vdash \tau \in \{\, y \mid \varphi(y)\, \} \leftrightarrow \varphi(\tau) \tag{4.58}$$

が成り立つので，(4.57) と (4.58) と同値記号の推移律 (論理的定理 4.1.14) より

$$\forall u\, (\, \varphi(u) \leftrightarrow u \in b\,), \mathbf{COM} \vdash \tau \in \{\, y \mid \varphi(y)\, \} \leftrightarrow \tau \in b$$

が成り立つ．全称の導出 (論理的定理 3.2.29) より

$$\forall u\, (\, \varphi(u) \leftrightarrow u \in b\,), \mathbf{COM} \vdash \forall x\, (\, x \in \{\, y \mid \varphi(y)\, \} \leftrightarrow x \in b\,)$$

となり，外延性公理より

$$\forall u\, (\, \varphi(u) \leftrightarrow u \in b\,), \mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \{\, y \mid \varphi(y)\, \} = b$$

が得られる． ∎

定理 4.4.6. φ と ψ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とし，y を φ に自由に現れる変項とし，z を ψ に自由に現れる変項とし，φ に自由に現れる変項は y のみであるとし，ψ に自由に現れる変項は z のみであるとし，する．このとき

$$\mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \{\, y \mid \varphi(y)\, \} = \{\, z \mid \psi(z)\, \} \rightarrow \forall u\, (\, \varphi(u) \leftrightarrow \psi(u)\,).$$

略証． いま

$$\tau \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon u \neg (\, \varphi(u) \leftrightarrow \psi(u)\,)$$

とおけば，まず外延性公理の逆 (定理 4.1.5) より

$$\{\, y \mid \varphi(y)\, \} = \{\, z \mid \psi(z)\, \}, \mathbf{EQ} \vdash \tau \in \{\, y \mid \varphi(z)\, \} \leftrightarrow \tau \in \{\, z \mid \psi(z)\, \} \tag{4.59}$$

が成り立つ．また内包性公理より

$$\mathbf{COM} \vdash \tau \in \{\, y \mid \varphi(y)\, \} \leftrightarrow \varphi(\tau), \tag{4.60}$$

$$\mathbf{COM} \vdash \tau \in \{\, z \mid \varphi(z)\, \} \leftrightarrow \psi(\tau) \tag{4.61}$$

が成り立つが，(4.60) と同値記号の対称律 (4.4.1) より

$$\mathbf{COM} \vdash \varphi(\tau) \leftrightarrow \tau \in \{\, y \mid \varphi(y) \,\} \tag{4.62}$$

も成り立つ．(4.62) と (4.59) と同値記号の推移律 (論理的定理 4.1.14) より

$$\{\, y \mid \varphi(y) \,\} = \{\, z \mid \psi(z) \,\},\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \varphi(\tau) \leftrightarrow \tau \in \{\, z \mid \psi(z) \,\} \tag{4.63}$$

が従い，(4.63) と (4.61) と同値記号の推移律より

$$\{\, y \mid \varphi(y) \,\} = \{\, z \mid \psi(z) \,\},\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \varphi(\tau) \leftrightarrow \psi(\tau)$$

が従う．そして全称の導出 (論理的定理 3.2.29) より

$$\{\, y \mid \varphi(y) \,\} = \{\, z \mid \psi(z) \,\},\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \forall u\, (\, \varphi(u) \leftrightarrow \psi(u)\,)$$

が得られる． ■

定理 4.4.7. φ と ψ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とし，y を φ に自由に現れる変項とし，z を ψ に自由に現れる変項とし，φ に自由に現れる変項は y のみであるとし，ψ に自由に現れる変項は z のみであるとし，する．このとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \forall u\, (\, \varphi(u) \leftrightarrow \psi(u)\,) \rightarrow \{\, y \mid \varphi(y) \,\} = \{\, z \mid \psi(z) \,\}.$$

略証． いま

$$\tau \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon x \neg (\, x \in \{\, y \mid \varphi(y) \,\} \leftrightarrow x \in \{\, z \mid \psi(z) \,\}\,)$$

とおく．まず全称記号の論理的公理より

$$\forall u\, (\, \varphi(u) \leftrightarrow \psi(u)\,) \vdash \varphi(\tau) \leftrightarrow \psi(\tau) \tag{4.64}$$

が成り立つ．また内包性公理より

$$\begin{aligned} &\mathbf{COM} \vdash \tau \in \{\, y \mid \varphi(y) \,\} \leftrightarrow \varphi(\tau), \\ &\mathbf{COM} \vdash \tau \in \{\, z \mid \psi(z) \,\} \leftrightarrow \psi(\tau) \end{aligned} \tag{4.65}$$

となり，同値記号の対称律 (4.4.1) より

$$\mathbf{COM} \vdash \psi(\tau) \leftrightarrow \tau \in \{\, z \mid \psi(z) \,\} \tag{4.66}$$

も成り立つ．(4.64) と (4.65) と同値記号の推移律 (論理的定理 4.1.14) より

$$\forall u\, (\, \varphi(u) \leftrightarrow \psi(u)\,),\ \mathbf{COM} \vdash \tau \in \{\, y \mid \varphi(y) \,\} \leftrightarrow \psi(\tau) \tag{4.67}$$

となり，(4.66) と (4.67) と同値記号の推移律より

$$\forall u\, (\, \varphi(u) \leftrightarrow \psi(u)\,),\ \mathbf{COM} \vdash \tau \in \{\, y \mid \varphi(y) \,\} \leftrightarrow \tau \in \{\, z \mid \psi(z) \,\}$$

となり，全称の導出 (論理的定理 3.2.29) より

$$\forall u\,(\,\varphi(u) \;\leftrightarrow\; \psi(u)\,),\ \mathbf{COM} \vdash \forall x\,(\,x \in \{\,y \mid \varphi(y)\,\} \;\leftrightarrow\; x \in \{\,z \mid \psi(z)\,\}\,)$$

となり，外延性公理より

$$\forall u\,(\,\varphi(u) \;\leftrightarrow\; \psi(u)\,),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \{\,y \mid \varphi(y)\,\} = \{\,z \mid \psi(z)\,\}$$

が得られる． ∎

定理 4.4.8. a を主要 ε 項とし，ψ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とし，z を ψ に自由に現れる変項とし，ψ に自由に現れる変項は z のみであるとする．このとき

$$\mathbf{COM} \vdash a \in \{\,z \mid \psi(z)\,\} \;\rightarrow\; \psi(a).$$

略証. a は主要 ε 項であるから，内包性公理より

$$\mathbf{COM} \vdash a \in \{\,z \mid \psi(z)\,\} \;\rightarrow\; \psi(a)$$

が成り立つ． ∎

定理 4.4.9. a を主要 ε 項とし，ψ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とし，z を ψ に自由に現れる変項とし，ψ に自由に現れる変項は z のみであるとする．このとき

$$\mathbf{COM} \vdash \psi(a) \;\rightarrow\; a \in \{\,z \mid \psi(z)\,\}.$$

略証. a は主要 ε 項であるから，内包性公理より

$$\mathbf{COM} \vdash \psi(a) \;\rightarrow\; a \in \{\,z \mid \psi(z)\,\}$$

が成り立つ． ∎

定理 4.4.10. b を主要 ε 項とし，φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とし，y を φ に自由に現れる変項とし，φ に自由に現れる変項は y のみであるとする．このとき

$$\mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE} \vdash \{\,y \mid \varphi(y)\,\} \in b \;\rightarrow\; \exists s\,(\,\forall u\,(\,\varphi(u) \;\leftrightarrow\; u \in s\,) \wedge s \in b\,).$$

略証. 要素の公理より

$$\{\,y \mid \varphi(y)\,\} \in b,\ \mathbf{ELE} \vdash \exists s\,(\,\{\,y \mid \varphi(y)\,\} = s\,)$$

が成り立つので，

$$\sigma \stackrel{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon s\, \forall u\, (\, \varphi(u) \ \leftrightarrow\ u \in s\,)$$

とおけば存在記号の論理的公理より

$$\{\, y \mid \varphi(y)\, \} \in b,\ \mathbf{ELE} \vdash \{\, y \mid \varphi(y)\, \} = \sigma \tag{4.68}$$

となる．ここで相等性公理より

$$\mathbf{EQ} \vdash \{\, y \mid \varphi(y)\, \} = \sigma\ \rightarrow\ (\, \{\, y \mid \varphi(y)\, \} \in b\ \rightarrow\ \sigma \in b\,)$$

が成り立つので，(4.68) と三段論法より

$$\{\, y \mid \varphi(y)\, \} \in b,\ \mathbf{EQ}, \mathbf{ELE} \vdash \sigma \in b \tag{4.69}$$

が得られる．他方で定理 4.4.4 より

$$\mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \{\, y \mid \varphi(y)\, \} = \sigma\ \rightarrow\ \forall u\, (\, \varphi(u)\ \leftrightarrow\ u \in \sigma\,)$$

が成り立つので，(4.68) と三段論法より

$$\{\, y \mid \varphi(y)\, \} \in b,\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE} \vdash \forall u\, (\, \varphi(u)\ \leftrightarrow\ u \in \sigma\,) \tag{4.70}$$

も得られる．(4.69) と (4.70) と論理積の導入より

$$\{\, y \mid \varphi(y)\, \} \in b,\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE} \vdash \forall u\, (\, \varphi(u)\ \leftrightarrow\ u \in \sigma\,) \wedge \sigma \in b$$

が成り立つので，存在記号の論理的公理より

$$\{\, y \mid \varphi(y)\, \} \in b,\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE} \vdash \exists s\, (\, \forall u\, (\, \varphi(u)\ \leftrightarrow\ u \in s\,) \wedge s \in b\,)$$

が得られる． ∎

定理 4.4.11. b を主要 ε 項とし，φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とし，y を φ に自由に現れる変項とし，φ に自由に現れる変項は y のみであるとする．このとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \exists s\, (\, \forall u\, (\, \varphi(u)\ \leftrightarrow\ u \in s\,) \wedge s \in b\,)\ \rightarrow\ \{\, y \mid \varphi(y)\, \} \in b.$$

略証. いま

$$\sigma \stackrel{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon s\, (\, \forall u\, (\, \varphi(u)\ \leftrightarrow\ u \in s\,) \wedge s \in b\,)$$

とおけば，存在記号の論理的公理と論理積の除去より

$$\exists s\, (\, \forall u\, (\, \varphi(u)\ \leftrightarrow\ u \in s\,) \wedge s \in b\,) \vdash \forall u\, (\, \varphi(u)\ \leftrightarrow\ u \in \sigma\,), \tag{4.71}$$

$$\exists s\, (\, \forall u\, (\, \varphi(u)\ \leftrightarrow\ u \in s\,) \wedge s \in b\,) \vdash \sigma \in b \tag{4.72}$$

が成り立つ．ここで定理 4.4.5 より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \forall u\, (\, \varphi(u)\ \leftrightarrow\ u \in \sigma\,)\ \rightarrow\ \{\, y \mid \varphi(y)\, \} = \sigma$$

が成り立つので，(4.71) との三段論法より

$$\exists s\,(\,\forall u\,(\,\varphi(u)\ \leftrightarrow\ u \in s\,) \wedge s \in b\,),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \{\, y \mid \varphi(y)\,\} = \sigma \tag{4.73}$$

が得られる．また相等性公理より

$$\mathbf{EQ} \vdash \{\, y \mid \varphi(y)\,\} = \sigma\ \longrightarrow\ \sigma = \{\, y \mid \varphi(y)\,\},$$
$$\mathbf{EQ} \vdash \sigma = \{\, y \mid \varphi(y)\,\}\ \longrightarrow\ (\,\sigma \in b\ \longrightarrow\ \{\, y \mid \varphi(y)\,\} \in b\,)$$

が成り立つので，(4.72) と (4.73) との三段論法より

$$\exists s\,(\,\forall u\,(\,\varphi(u)\ \leftrightarrow\ u \in s\,) \wedge s \in b\,),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \{\, y \mid \varphi(y)\,\} \in b$$

が従う． ∎

定理 4.4.12. φ と ψ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とし，y を φ に自由に現れる変項とし，z を ψ に自由に現れる変項とし，φ に自由に現れる変項は y のみであるとし，ψ に自由に現れる変項は z のみであるとし，する．このとき

$$\mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE} \vdash \{\, y \mid \varphi(y)\,\} \in \{\, z \mid \psi(z)\,\}\ \longrightarrow\ \exists s\,(\,\forall u\,(\,\varphi(u)\ \leftrightarrow\ u \in s\,) \wedge \psi(s)\,).$$

略証． まず (4.68) と (4.70) と同様に，

$$\sigma \overset{\text{def}}{=\!=} \varepsilon s\,\forall u\,(\,\varphi(u)\ \leftrightarrow\ u \in s\,)$$

とおけば

$$\{\, y \mid \varphi(y)\,\} \in \{\, z \mid \psi(z)\,\},\ \mathbf{ELE} \vdash \{\, y \mid \varphi(y)\,\} = \sigma \tag{4.74}$$

と

$$\{\, y \mid \varphi(y)\,\} \in \{\, z \mid \psi(z)\,\},\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE} \vdash \forall u\,(\,\varphi(u)\ \leftrightarrow\ u \in \sigma\,) \tag{4.75}$$

が成り立つ．また相等性公理より

$$\mathbf{EQ} \vdash \{\, y \mid \varphi(y)\,\} = \sigma\ \longrightarrow\ (\,\{\, y \mid \varphi(y)\,\} \in \{\, z \mid \psi(z)\,\}\ \longrightarrow\ \sigma \in \{\, z \mid \psi(z)\,\}\,)$$

となるので，(4.74) との三段論法より

$$\{\, y \mid \varphi(y)\,\} \in \{\, z \mid \psi(z)\,\},\ \mathbf{EQ}, \mathbf{ELE} \vdash \sigma \in \{\, z \mid \psi(z)\,\}$$

が成り立ち，内包性公理より

$$\mathbf{COM} \vdash \sigma \in \{\, z \mid \psi(z)\,\}\ \longrightarrow\ \psi(\sigma)$$

が成り立つので

$$\{\, y \mid \varphi(y)\,\} \in \{\, z \mid \psi(z)\,\},\ \mathbf{EQ}, \mathbf{ELE} \vdash \psi(\sigma) \tag{4.76}$$

が得られる．(4.75) と (4.76) と論理積の導入より

$$\{\, y \mid \varphi(y) \,\} \in \{\, z \mid \psi(z) \,\},\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE} \vdash \forall u\, (\, \varphi(u) \ \leftrightarrow\ u \in \sigma \,) \wedge \psi(\sigma)$$

が成り立ち，存在記号の論理的公理より

$$\{\, y \mid \varphi(y) \,\} \in \{\, z \mid \psi(z) \,\},\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE} \vdash \exists s\, (\forall u\, (\, \varphi(u) \ \leftrightarrow\ u \in x \,) \wedge \psi(x))$$

が得られる． ∎

定理 4.4.13. φ と ψ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とし，y を φ に自由に現れる変項とし，z を ψ に自由に現れる変項とし，φ に自由に現れる変項は y のみであるとし，ψ に自由に現れる変項は z のみであるとし，する．このとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \exists s\, (\forall u\, (\, \varphi(u) \ \leftrightarrow\ u \in s \,) \wedge \psi(s)) \ \rightarrow\ \{\, y \mid \varphi(y) \,\} \in \{\, z \mid \psi(z) \,\}.$$

略証． いま

$$\sigma \overset{\text{def}}{=\!=} \varepsilon s\, (\forall u\, (\, \varphi(u) \ \leftrightarrow\ u \in s \,) \wedge \psi(s))$$

とおけば，存在記号の論理的公理と論理積の除去より

$$\begin{aligned} &\exists s\, (\forall u\, (\, \varphi(u) \ \leftrightarrow\ u \in s \,) \wedge \psi(s)) \vdash \forall u\, (\, \varphi(u) \ \leftrightarrow\ u \in \sigma \,), \\ &\exists s\, (\forall u\, (\, \varphi(u) \ \leftrightarrow\ u \in s \,) \wedge \psi(s)) \vdash \psi(\sigma) \end{aligned} \tag{4.77}$$

が成り立つ．ここで定理 4.4.5 より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \forall u\, (\, \varphi(u) \ \leftrightarrow\ u \in \sigma \,) \ \rightarrow\ \{\, y \mid \varphi(y) \,\} = \sigma$$

が成り立つので，(4.77) との三段論法より

$$\exists s\, (\forall u\, (\, \varphi(u) \ \leftrightarrow\ u \in s \,) \wedge \psi(s)),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \{\, y \mid \varphi(y) \,\} = \sigma \tag{4.78}$$

が得られる．また内包性公理より

$$\mathbf{COM} \vdash \psi(\sigma) \ \rightarrow\ \sigma \in \{\, z \mid \psi(z) \,\}$$

が成り立つので，(4.77) との三段論法より

$$\exists s\, (\forall u\, (\, \varphi(u) \ \leftrightarrow\ u \in s \,) \wedge \psi(s)),\ \mathbf{COM} \vdash \sigma \in \{\, z \mid \psi(z) \,\} \tag{4.79}$$

が得られる．相等性公理より

$$\begin{aligned} &\mathbf{EQ} \vdash \{\, y \mid \varphi(y) \,\} = \sigma \ \rightarrow\ \sigma = \{\, y \mid \varphi(y) \,\}, \\ &\mathbf{EQ} \vdash \sigma = \{\, y \mid \varphi(y) \,\} \ \rightarrow\ (\, \sigma \in \{\, z \mid \psi(z) \,\} \ \rightarrow\ \{\, y \mid \varphi(y) \,\} \in \{\, z \mid \psi(z) \,\}) \end{aligned}$$

が成り立つので，(4.78) と (4.79) との三段論法より

$$\exists s\, (\forall u\, (\, \varphi(u) \ \leftrightarrow\ u \in s \,) \wedge \psi(s)),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \{\, y \mid \varphi(y) \,\} \in \{\, z \mid \psi(z) \,\}$$

が従う． ∎

4.5　対

a と b を類とするとき，a か b の少なくとも一方に等しい集合の全体，つまり

$$a = x \vee b = x$$

を満たす全ての集合 x を集めたものを a と b の対と呼び

$$\{a, b\}$$

と書く．解釈としては “a と b のみを要素とする類” のことであり，当然 a が集合であるならば

$$a \in \{a, b\}$$

が成立する．しかし a と b が共に真類であるときは，いかなる集合も a にも b にも等しくないため

$$\{a, b\} = \emptyset$$

となる．以上が大雑把な対の説明である．

定義 4.5.1 (対).　x, y を $\mathcal{L}$ の項とし，z を x にも y にも自由に現れない変項とするとき，

$$\{x, y\} \overset{\text{def}}{=\!=} \{\, z \mid x = z \vee y = z \,\}$$

で $\{x, y\}$ を定義し，これを x と y の対 **(pair)** と呼ぶ．特に $\{x, x\}$ を $\{x\}$ と書く．

上の定義では省略したが，x や y が内包項である場合は $z = x \vee z = y$ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き換えてから $\{x, y\}$ を定めるのである．つまり

$$\varphi \overset{\text{def}}{\longleftrightarrow} x = z \vee y = z$$

とおけば，φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き換えた式 $\hat{\varphi}$ によって

$$\{x, y\} \overset{\text{def}}{=\!=} \{\, z \mid \hat{\varphi}(z) \,\}$$

と定めるのである．たとえば a や b を類として

$$\varphi \overset{\text{def}}{\longleftrightarrow} a = z \vee b = z$$

とおけば，

$$\mathbf{COM} \vdash \forall z \, (\, z \in \{a, b\} \ \leftrightarrow \ \hat{\varphi}(z) \,)$$

が成立するし，同時に定理 4.4.2 と定理 4.4.3 より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \forall z \, (\, \hat{\varphi}(z) \ \leftrightarrow \ \varphi(z) \,)$$

も成り立つので

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \forall z \, (\, z \in \{a, b\} \ \leftrightarrow \ a = z \vee b = z \,)$$

が得られる．

定理 4.5.2 (対は表示されている要素しか持たない). a と b を類とするとき次が成立する:

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \forall x\,(\,x \in \{a, b\} \leftrightarrow a = x \vee b = x\,).$$

ELE を加えれば次が得られる．

定理 4.5.3 (対の要素は表示されている要素の一方には等しい). a, b, c を類とするとき次が成立する:

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE} \vdash c \in \{a, b\} \rightarrow a = c \vee b = c.$$

略証． 要素の公理より

$$c \in \{a, b\},\ \mathbf{ELE} \vdash \mathrm{set}\,(c)$$

が成り立つので

$$\tau \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon s\,(\,c = s\,)$$

とおけば

$$c \in \{a, b\},\ \mathbf{ELE} \vdash c = \tau \tag{4.80}$$

となる．τ に対しては定理 4.5.2 より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \tau \in \{a, b\} \rightarrow a = \tau \vee b = \tau$$

が成り立つが，ここで (4.80) より

$$c \in \{a, b\},\ \mathbf{EQ}, \mathbf{ELE} \vdash \tau \in \{a, b\}$$

となるので

$$c \in \{a, b\},\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE} \vdash a = \tau \vee b = \tau$$

が従い，代入原理 (定理 4.2.2) と (4.80) より

$$c \in \{a, b\},\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE} \vdash a = c \vee b = c$$

が得られる． ∎

この逆，つまり

$$a = c \vee b = c \rightarrow c \in \{a, b\}$$

は一般には成立しない．実際 a, b が共に真類であるときは

$$\{a, b\} = \emptyset$$

となるためである (定理 4.5.8).

定理 4.5.4 (表示の順番を入れ替えても対は等しい). a と b を類とするとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \{a, b\} = \{b, a\}.$$

略証. いま

$$\tau \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varepsilon x \neg (x \in \{a, b\} \leftrightarrow x \in \{b, a\})$$

とおく (必要に応じて $x \in \{a, b\} \leftrightarrow x \in \{b, a\}$ は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き換える). 定理 4.5.2 より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \tau \in \{a, b\} \rightarrow a = \tau \vee b = \tau$$

が成り立つので，演繹定理の逆より

$$\tau \in \{a, b\}, \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash a = \tau \vee b = \tau$$

となる. また論理和の可換律 (論理的定理 3.2.13) より

$$\tau \in \{a, b\}, \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash b = \tau \vee a = \tau$$

が成り立ち，定理 4.5.2 より

$$\tau \in \{a, b\}, \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \tau \in \{b, a\}$$

が従う. そして演繹定理より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \tau \in \{a, b\} \rightarrow \tau \in \{b, a\}$$

が得られる. a と b を入れ替えれば

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \tau \in \{b, a\} \rightarrow \tau \in \{a, b\}$$

が得られるので，論理積の導入より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \tau \in \{a, b\} \leftrightarrow \tau \in \{b, a\}$$

が成り立ち，全称の導出 (論理的定理 3.2.29) より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \forall x (x \in \{a, b\} \leftrightarrow x \in \{b, a\})$$

となり，外延性公理より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \{a, b\} = \{b, a\}$$

が従う. ∎

公理 4.5.5 (対の公理). 次の式を **PAI** により参照する：

$$\forall x \forall y \exists p \forall z (x = z \vee y = z \leftrightarrow z \in p).$$

定理 4.5.6 (集合の対は集合である).　a と b を類とするとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{PAI} \vdash \mathrm{set}\,(a) \wedge \mathrm{set}\,(b) \;\longrightarrow\; \mathrm{set}\,(\{a, b\}).$$

略証.

step1　論理積の除去より

$$\mathrm{set}\,(a) \wedge \mathrm{set}\,(b) \vdash \exists x\,(\,a = x\,),$$
$$\mathrm{set}\,(a) \wedge \mathrm{set}\,(b) \vdash \exists x\,(\,b = x\,)$$

が成り立つので，

$$\tau \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon x\,(\,a = x\,),$$
$$\sigma \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon x\,(\,b = x\,)$$

とおけば

$$\mathrm{set}\,(a) \wedge \mathrm{set}\,(b) \vdash a = \tau, \tag{4.81}$$
$$\mathrm{set}\,(a) \wedge \mathrm{set}\,(b) \vdash b = \sigma$$

が成り立つ．対の公理より τ と σ に対しては

$$\mathbf{PAI} \vdash \exists p\, \forall z\,(\,\tau = z \vee \sigma = z \;\leftrightarrow\; z \in p\,)$$

が成り立つので，

$$\rho \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon p\, \forall z\,(\,\tau = z \vee \sigma = z \;\leftrightarrow\; z \in p\,)$$

とおけば

$$\mathbf{PAI} \vdash \forall z\,(\,\tau = z \vee \sigma = z \;\leftrightarrow\; z \in \rho\,) \tag{4.82}$$

となる．

step2　次に

$$\forall z\,(\,z \in \{a, b\} \;\leftrightarrow\; z \in \rho\,)$$

を示すために

$$\zeta \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon z \neg(\,z \in \{a, b\} \;\leftrightarrow\; z \in \rho\,)$$

とおく (当然 $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き換える)．等号の推移律 (定理 4.1.15) より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash a = \tau \;\longrightarrow\; (\,a = \zeta \;\longrightarrow\; \tau = \zeta\,)$$

が成り立つので，(4.81) との三段論法より

$$\mathrm{set}\,(a) \wedge \mathrm{set}\,(b),\; \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash a = \zeta \;\longrightarrow\; \tau = \zeta$$

が成り立ち，論理和の導入より

$$\mathrm{set}\,(a) \wedge \mathrm{set}\,(b),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash a = \zeta \ \rightarrow\ \tau = \zeta \vee \sigma = \zeta$$

が従う．同様にして

$$\mathrm{set}\,(a) \wedge \mathrm{set}\,(b),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash b = \zeta \ \rightarrow\ \tau = \zeta \vee \sigma = \zeta$$

も成り立つので，論理和の除去より

$$\mathrm{set}\,(a) \wedge \mathrm{set}\,(b),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash a = \zeta \vee b = \zeta \ \rightarrow\ \tau = \zeta \vee \sigma = \zeta$$

が得られる．同様に

$$\mathrm{set}\,(a) \wedge \mathrm{set}\,(b),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash \tau = \zeta \vee \sigma = \zeta \ \rightarrow\ a = \zeta \vee b = \zeta$$

も得られ，論理積の導入より

$$\mathrm{set}\,(a) \wedge \mathrm{set}\,(b),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash a = \zeta \vee b = \zeta \ \leftrightarrow\ \tau = \zeta \vee \sigma = \zeta$$

が従う．他方で定理 4.5.2 より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \zeta \in \{a, b\} \ \leftrightarrow\ a = \zeta \vee b = \zeta$$

が成り立ち，また (4.82) より

$$\mathbf{PAI} \vdash \tau = \zeta \vee \sigma = \zeta \ \leftrightarrow\ \zeta \in \rho$$

も成り立つので，同値記号の推移律 (論理的定理 4.1.14) より

$$\mathrm{set}\,(a) \wedge \mathrm{set}\,(b),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{PAI} \vdash \zeta \in \{a, b\} \ \leftrightarrow\ \zeta \in \rho$$

が従う．そして全称の導出 (論理的定理 3.2.29) より

$$\mathrm{set}\,(a) \wedge \mathrm{set}\,(b),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{PAI} \vdash \forall z\,(\, z \in \{a, b\} \ \leftrightarrow\ z \in \rho\,)$$

が成り立ち，外延性公理より

$$\mathrm{set}\,(a) \wedge \mathrm{set}\,(b),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{PAI} \vdash \{a, b\} = \rho$$

が従い，存在記号の論理的公理より

$$\mathrm{set}\,(a) \wedge \mathrm{set}\,(b),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{PAI} \vdash \exists p\,(\, \{a, b\} = p\,)$$

が成り立つ． ∎

定理 4.5.7 (集合は自分自身の対の要素である). a と b を類とするとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \mathrm{set}\,(a) \ \rightarrow\ a \in \{a, b\},$$
$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \mathrm{set}\,(b) \ \rightarrow\ b \in \{a, b\}.$$

略証.

step1　いま

$$\tau \overset{\text{def}}{=\!=} \varepsilon x\,(\,a = x\,)$$

とおくと

$$\mathrm{set}\,(a) \vdash a = \tau \tag{4.83}$$

が成り立ち，論理和の導入より

$$\mathrm{set}\,(a) \vdash a = \tau \vee b = \tau$$

も成り立つ．定理 4.5.2 より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash a = \tau \vee b = \tau \;\longrightarrow\; \tau \in \{a, b\}$$

が成り立つので三段論法より

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \tau \in \{a, b\} \tag{4.84}$$

が従う．また (4.83) と相等性公理より

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EQ} \vdash \tau = a$$

となり

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EQ} \vdash \tau \in \{a, b\} \;\longrightarrow\; a \in \{a, b\}$$

となるので，(4.84) と三段論法より

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash a \in \{a, b\}$$

が成立する．

step2　前段で a と b を入れ替えれば

$$\mathrm{set}\,(b),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash b \in \{b, a\} \tag{4.85}$$

が成立する．ところで対の対称性 (定理 4.5.4) より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \{b, a\} = \{a, b\}$$

が成立し，また相等性公理より

$$\mathbf{EQ} \vdash \{b, a\} = \{a, b\} \;\longrightarrow\; (\,b \in \{b, a\} \;\longrightarrow\; b \in \{a, b\}\,)$$

も成り立つので，三段論法より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash b \in \{b, a\} \;\longrightarrow\; b \in \{a, b\} \tag{4.86}$$

が従う．(4.85) と (4.86) と三段論法より

$$\mathrm{set}\,(b),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash b \in \{a, b\}$$

が得られる．　■

a を集合とすれば対の公理より $\{a\}$ も集合となるので，定理 4.5.7 より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \mathrm{set}\,(a) \;\rightarrow\; a \in \{a\}$$

が成立する．一方で a も b も真類であると $\{a, b\}$ は空になる．

定理 4.5.8 (真類同士の対は空). a と b を類とするとき，

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \rightharpoondown \mathrm{set}\,(a) \wedge \rightharpoondown \mathrm{set}\,(b) \;\rightarrow\; \{a, b\} = \emptyset.$$

略証． いま

$$\tau \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon x \rightharpoondown (\, x \notin \{a, b\} \,)$$

とおく ($x \notin \{a, b\}$ は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き換える).

$$\rightharpoondown \mathrm{set}\,(a) \wedge \;\rightharpoondown \mathrm{set}\,(b) \vdash \rightharpoondown \exists x \,(\, a = x \,)$$

が成り立ち，De Morgan の法則 (論理的定理 3.2.33) より

$$\rightharpoondown \mathrm{set}\,(a) \wedge \rightharpoondown \mathrm{set}\,(b) \vdash \forall x \,(\, a \neq x \,)$$

が従い，全称記号の論理的公理より

$$\rightharpoondown \mathrm{set}\,(a) \wedge \rightharpoondown \mathrm{set}\,(b) \vdash a \neq \tau$$

となる．同様にして

$$\rightharpoondown \mathrm{set}\,(a) \wedge \rightharpoondown \mathrm{set}\,(b) \vdash b \neq \tau$$

も成り立つので，論理積の導入より

$$\rightharpoondown \mathrm{set}\,(a) \wedge \rightharpoondown \mathrm{set}\,(b) \vdash a \neq \tau \wedge b \neq \tau$$

が成立し，De Morgan の法則 (論理的定理 3.2.10) より

$$\rightharpoondown \mathrm{set}\,(a) \wedge \rightharpoondown \mathrm{set}\,(b) \vdash \rightharpoondown (\, a = \tau \vee b = \tau \,) \tag{4.87}$$

が従う．ところで定理 4.5.2 より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \tau \in \{a, b\} \;\rightarrow\; a = \tau \vee b = \tau$$

が成り立つので，対偶を取って

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \rightharpoondown (\, a = \vee b = \tau \,) \;\rightarrow\; \tau \notin \{a, b\}$$

が成り立つ (論理的定理 3.2.3)．そして (4.87) との三段論法より

$$\rightharpoondown \mathrm{set}\,(a) \wedge \rightharpoondown \mathrm{set}\,(b),\; \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \tau \notin \{a, b\}$$

が従い，全称の導出 (論理的定理 3.2.29) より

$$\rightharpoondown \mathrm{set}\,(a) \wedge \rightharpoondown \mathrm{set}\,(b),\; \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \forall x \,(\, x \notin \{a, b\} \,)$$

が従う．要素を持たない類は空集合である (定理 4.3.7) ので

$$\rightharpoondown \mathrm{set}\,(a) \wedge \rightharpoondown \mathrm{set}\,(b),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \{a, b\} = \emptyset$$

が得られる． ∎

上の定理とは逆に $\{a, b\}$ が空ならば a も b も真類である．

定理 4.5.9 (空な対に表示されている類は集合ではない). a と b を類とするとき，

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \{a, b\} = \emptyset \ \longrightarrow\ \rightharpoondown \mathrm{set}\,(a) \wedge \rightharpoondown \mathrm{set}\,(b).$$

略証． いま

$$\tau \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon x\,(\,a = x\,)$$

とおけば

$$\mathrm{set}\,(a) \vdash a = \tau$$

が成立し，また定理 4.5.7 より

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash a \in \{a, b\}$$

が成り立つので相等性公理より

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \tau \in \{a, b\}$$

が従い，存在記号の論理的公理より

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \exists x\,(\,x \in \{a, b\}\,)$$

が成り立つ．演繹定理より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \mathrm{set}\,(a) \ \longrightarrow\ \exists x\,(\,x \in \{a, b\}\,)$$

となり，対偶を取れば

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \rightharpoondown \exists x\,(\,x \in \{a, b\}\,) \ \longrightarrow\ \rightharpoondown \mathrm{set}\,(a) \tag{4.88}$$

が得られる (論理的定理 3.2.3)．他方で空の類は要素を持たない (定理 4.3.7) ので

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \{a, b\} = \emptyset \ \longrightarrow\ \forall x\,(\,x \notin \{a, b\}\,) \tag{4.89}$$

が成り立ち，また De Morgan の法則 (論理的定理 3.2.32) より

$$\vdash \forall x\,(\,x \notin \{a, b\}\,) \ \longrightarrow\ \rightharpoondown \exists x\,(\,x \in \{a, b\}\,) \tag{4.90}$$

も成り立つので，(4.89) (4.90) (4.88) を併せて

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \{a, b\} = \emptyset \ \longrightarrow\ \rightharpoondown \mathrm{set}\,(a)$$

が従う．同様にして

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \{a, b\} = \emptyset \rightarrow \neg\mathrm{set}(b)$$

も成り立ち，論理積の導入より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \{a, b\} = \emptyset \rightarrow \neg\mathrm{set}(a) \wedge \neg\mathrm{set}(b)$$

が得られる． ∎

4.6 合併

a を空でない類とするとするとき，a の要素もまた空でなければ要素を持つ．a の要素の要素を全て集めたものを a の合併と呼び，その受け皿の意味を込めて

$$\bigcup a$$

と書く．当然ながら，空の合併は空となる．

定義 4.6.1 (合併). x を $\mathcal{L}$ の項とするとき，x の**合併 (union)** を

$$\bigcup x \overset{\mathrm{def}}{=} \{\, y \mid \exists z \in x \,(\, y \in z \,)\, \}$$

で定める (x が内包項なら $\exists z \in x\,(\, y \in z\,)$ は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き換える).

量化子が付いた式の略記法　上の定義で

$$\exists z \in x\,(\, y \in z\,)$$

という式を書いたが，これは

$$\exists z \in x\,(\, y \in z\,) \overset{\mathrm{def}}{\longleftrightarrow} \exists z\,(\, z \in x \wedge y \in z\,)$$

により定義される省略形である．同様にして，φ を式とするとき

$$\exists z\,\left(\, z \in x \wedge \varphi \,\right)$$

なる式を

$$\exists z \in x\, \varphi$$

と略記する．また全称記号についても

$$\forall z\,\left(\, z \in x \rightarrow \varphi \,\right)$$

なる式を

$$\forall z \in x\, \varphi$$

と略記する．

定理 4.6.2 (合併の内包性). a を類とするとき

$$\mathbf{COM} \vdash \forall y \,(\, y \in \bigcup a \;\leftrightarrow\; \exists z \,(\, z \in a \wedge y \in z \,)\,).$$

略証. a が主要 ε 項である場合は内包性公理から直接

$$\mathbf{COM} \vdash \forall y \,(\, y \in \bigcup a \;\leftrightarrow\; \exists z \,(\, z \in a \wedge y \in z \,)\,)$$

が成立する．a が $\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$ なる内包項の場合は

$$\bigcup a \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \{\, y \mid \exists z \,(\, \varphi(z) \wedge y \in z \,)\,\}$$

と定義されることになり，

$$\mathbf{COM} \vdash \forall y \,(\, y \in \bigcup a \;\leftrightarrow\; \exists z \,(\, \varphi(z) \wedge y \in z \,)\,) \tag{4.91}$$

が成立する．ここで

$$\mathbf{COM} \vdash \forall y \,(\, y \in \bigcup a \;\leftrightarrow\; \exists z \,(\, z \in a \wedge y \in z \,)\,)$$

を示すために

$$\eta \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon y \neg (\, y \in \bigcup a \;\leftrightarrow\; \exists z \,(\, z \in a \wedge y \in z \,)\,)$$

とおく (右辺は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に直す).

step1　いま

$$\zeta \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon z \,(\, \varphi(z) \wedge \eta \in z \,)$$

とおけば，(4.91) より

$$\eta \in \bigcup a,\; \mathbf{COM} \vdash \varphi(\zeta) \wedge \eta \in \zeta$$

が成立する．他方で

$$\mathbf{COM} \vdash \varphi(\zeta) \;\rightarrow\; \zeta \in a$$

も成り立つので

$$\eta \in \bigcup a,\; \mathbf{COM} \vdash \zeta \in a \wedge \eta \in \zeta$$

が従う．ゆえに

$$\mathbf{COM} \vdash \eta \in \bigcup a \;\rightarrow\; \exists z \,(\, z \in a \wedge \eta \in z \,) \tag{4.92}$$

が得られる．

step2　ζ を先と同じものにすれば

$$\exists z\,(\,z \in a \wedge \eta \in z\,) \vdash \zeta \in a \wedge \eta \in \zeta$$

が成立する．また

$$\mathbf{COM} \vdash \zeta \in a \;\longrightarrow\; \varphi(\zeta)$$

も成り立つので

$$\exists z\,(\,z \in a \wedge \eta \in z\,),\ \mathbf{COM} \vdash \varphi(\zeta) \wedge \eta \in \zeta$$

が従う．(4.91) より

$$\mathbf{COM} \vdash \varphi(\zeta) \wedge \eta \in \zeta \;\longrightarrow\; \eta \in \bigcup a$$

も成り立つので

$$\exists z\,(\,z \in a \wedge \eta \in z\,),\ \mathbf{COM} \vdash \eta \in \bigcup a \tag{4.93}$$

が得られる．

step3　(4.92) と (4.93) より

$$\mathbf{COM} \vdash \eta \in \bigcup a \;\leftrightarrow\; \exists z\,(\,z \in a \wedge \eta \in z\,)$$

が成立するので，全称の導出 (論理的定理 3.2.29) より

$$\mathbf{COM} \vdash \forall y\,(\,y \in \bigcup a \;\leftrightarrow\; \exists z\,(\,z \in a \wedge y \in z\,)\,)$$

が得られる．■

公理 4.6.3 (合併の公理).　次の式を **UNI** によって参照する:

$$\forall x\, \exists u\, \forall y\,(\,\exists z\,(\,z \in x \wedge y \in z\,) \;\leftrightarrow\; y \in u\,).$$

定理 4.6.4 (集合の合併は集合).　a を類とするとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{UNI} \vdash \mathrm{set}\,(a) \;\longrightarrow\; \mathrm{set}\,(\bigcup a).$$

略証.

step1　まず

$$\tau \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon x\,(\,a = x\,)$$

とおけば (必要に応じて $a = x$ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き換える),

$$\mathrm{set}\,(a) \vdash a = \tau$$

が成立する．τ に対して

$$\mathbf{UNI} \vdash \exists u \, \forall y \, (\, \exists z \, (\, z \in \tau \wedge y \in z \,) \leftrightarrow y \in u \,)$$

が成り立つので，

$$v \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon u \, \forall y \, (\, \exists z \, (\, z \in \tau \wedge y \in z \,) \leftrightarrow y \in u \,)$$

とおけば

$$\mathbf{UNI} \vdash \forall y \, (\, \exists z \, (\, z \in \tau \wedge y \in z \,) \leftrightarrow y \in v \,) \tag{4.94}$$

が成立する．次に τ を a に置き換えた場合に

$$\mathrm{set}\,(a), \; \mathbf{EQ}, \mathbf{UNI} \vdash \forall y \, (\, \exists z \, (\, z \in a \wedge y \in z \,) \leftrightarrow y \in v \,)$$

が成立することを示す．

step2　いま

$$\eta \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon y \, \neg (\, \exists z \, (\, z \in a \wedge y \in z \,) \leftrightarrow y \in v \,)$$

とおけば，(4.94) より

$$\mathbf{UNI} \vdash \exists z \, (\, z \in \tau \wedge \eta \in z \,) \leftrightarrow \eta \in v$$

が成立する．

$$\zeta \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon z \, (\, z \in a \wedge \eta \in z \,)$$

とおけば

$$\exists z \, (\, z \in a \wedge \eta \in z \,) \vdash \zeta \in a \wedge \eta \in \zeta$$

が成り立ち，

$$\mathbf{EQ} \vdash a = \tau \rightarrow (\, \zeta \in a \rightarrow \zeta \in \tau \,)$$

と併せて

$$\exists z \, (\, z \in a \wedge \eta \in z \,), \; \mathrm{set}\,(a), \; \mathbf{EQ} \vdash \zeta \in \tau \wedge \eta \in \zeta$$

が成立する．また (4.94) より

$$\mathbf{UNI} \vdash (\, \zeta \in \tau \wedge \eta \in \zeta \,) \rightarrow \eta \in v$$

が成り立つので

$$\exists z \, (\, z \in a \wedge \eta \in z \,), \; \mathrm{set}\,(a), \; \mathbf{EQ}, \mathbf{UNI} \vdash \eta \in v$$

が従う．ゆえに

$$\mathrm{set}\,(a), \; \mathbf{EQ}, \mathbf{UNI} \vdash \exists z \, (\, z \in a \wedge \eta \in z \,) \rightarrow \eta \in v \tag{4.95}$$

が得られた．

step3　逆に (4.94) より

$$\eta \in \upsilon,\ \mathbf{UNI} \vdash \exists z\,(\,z \in \tau \wedge \eta \in z\,)$$

が成り立つので

$$\eta \in \upsilon,\ \mathbf{UNI} \vdash \zeta \in \tau \wedge \eta \in \zeta$$

が従い，

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EQ} \vdash \zeta \in \tau\ \longrightarrow\ \zeta \in a$$

と併せて

$$\eta \in \upsilon,\ \mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EQ}, \mathbf{UNI} \vdash \zeta \in a \wedge \eta \in \zeta$$

が従い，

$$\eta \in \upsilon,\ \mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EQ}, \mathbf{UNI} \vdash \exists z\,(\,z \in a \wedge \eta \in z\,)$$

が従う．そして演繹定理より

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EQ}, \mathbf{UNI} \vdash \eta \in \upsilon\ \longrightarrow\ \exists z\,(\,z \in a \wedge \eta \in z\,) \tag{4.96}$$

も得られる．

step4　(4.95) と (4.96) より

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EQ}, \mathbf{UNI} \vdash \exists z\,(\,z \in a \wedge \eta \in z\,)\ \longleftrightarrow\ \eta \in \upsilon$$

が得られ，全称の導出 (論理的定理 3.2.29) より

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EQ}, \mathbf{UNI} \vdash \forall y\,(\,\exists z\,(\,z \in a \wedge y \in z\,)\ \longleftrightarrow\ y \in \upsilon\,)$$

となり，定理 4.4.5 より

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{UNI} \vdash \{\,z \mid \exists z\,(\,z \in a \wedge y \in z\,)\,\} = \upsilon$$

が成り立つ．存在記号の論理的公理より

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{UNI} \vdash \exists u\,(\,\{\,z \mid \exists z\,(\,z \in a \wedge y \in z\,)\,\} = u\,)$$

が成り立つので，定理が得られた．∎

定理 4.6.5 (空集合の合併は空).

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \bigcup \emptyset = \emptyset.$$

略証．　いま

$$\zeta \overset{\mathrm{def}}{=} \varepsilon z \rightharpoondown (\,z \notin \bigcup \emptyset\,),$$

$$\eta \overset{\mathrm{def}}{=} \varepsilon y \longrightharpoondown (\,y \in \emptyset \wedge \zeta \in y\,)$$

とおく．定理 4.3.6 より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \eta \notin \emptyset$$

が成り立つので

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \eta \notin \emptyset \vee \zeta \notin \eta$$

も成立し，De Morgan の法則 (論理的定理 3.2.11) より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \neg (\, \eta \in \emptyset \wedge \zeta \in \eta \,)$$

が成立し，全称の導出 (論理的定理 3.2.29) より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \forall y \neg (\, y \in \emptyset \wedge \zeta \in y \,)$$

が成立する．そして量化子の De Morgan の法則 (論理的定理 3.2.32) より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \neg \exists y \, (\, y \in \emptyset \wedge \zeta \in y \,) \tag{4.97}$$

が得られる．他方で

$$\mathbf{COM} \vdash \zeta \in \bigcup \emptyset \ \rightarrow \ \exists y \, (\, y \in \emptyset \wedge \zeta \in y \,)$$

が成り立つので，対偶を取って

$$\mathbf{COM} \vdash \neg \exists y \, (\, y \in \emptyset \wedge \zeta \in y \,) \ \rightarrow \ \zeta \notin \bigcup \emptyset \tag{4.98}$$

が得られる．(4.97) と (4.98) より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \zeta \notin \bigcup \emptyset$$

が成り立つので，全称の導出 (論理的定理 3.2.29) より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \forall z \, (\, z \notin \bigcup \emptyset \,)$$

が従い，定理 4.3.7 より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \bigcup \emptyset = \emptyset$$

が得られる． ∎

定理 4.6.6 (等しい類の合併は等しい). a と b を類とするとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash a = b \ \rightarrow \ \bigcup a = \bigcup b.$$

略証． いま

$$\eta \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon y \neg (\, y \in \bigcup a \ \leftrightarrow \ y \in \bigcup b \,)$$

とおく．合併の内包性 (定理 4.6.2) より

$$\eta \in \bigcup a,\ \mathbf{COM} \vdash \exists z\,(\,z \in a \land \eta \in z\,)$$

が成り立つので，

$$\zeta \overset{\text{def}}{=\!=} \varepsilon z\,(\,z \in a \land \eta \in z\,)$$

とおけば

$$\eta \in \bigcup a,\ \mathbf{COM} \vdash \zeta \in a \land \eta \in \zeta$$

となる．ところで

$$\mathbf{EQ} \vdash a = b\ \longrightarrow\ (\,\zeta \in a\ \longrightarrow\ \zeta \in b\,)$$

が成り立つので

$$a = b,\ \eta \in \bigcup a,\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \zeta \in b \land \eta \in \zeta$$

が得られ，

$$a = b,\ \eta \in \bigcup a,\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \exists z\,(\,z \in b \land \eta \in z\,)$$

が従う．そして合併の内包性 (定理 4.6.2) より

$$a = b,\ \eta \in \bigcup a,\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \eta \in \bigcup b \tag{4.99}$$

が得られる．a と b を入れ替えれば

$$\mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash b = a\ \longrightarrow\ (\,\eta \in \bigcup b\ \longrightarrow\ \eta \in \bigcup a\,)$$

となるが，

$$a = b,\ \mathbf{EQ} \vdash b = a$$

と併せて

$$a = b,\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \eta \in \bigcup b\ \longrightarrow\ \eta \in \bigcup a \tag{4.100}$$

が得られる．(4.99) と (4.100) より

$$a = b,\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \eta \in \bigcup a\ \leftrightarrow\ \eta \in \bigcup b$$

が従い，全称の導出 (論理的定理 3.2.29) より

$$a = b,\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \forall y\,(\,y \in \bigcup a\ \leftrightarrow\ y \in \bigcup b\,)$$

が成立し，外延性公理と併せて

$$a = b,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \bigcup a = \bigcup b$$

を得る． ∎

対の合併

x と y を $\mathcal{L}$ の項とするとき，その対の合併を

$$x \cup y \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \bigcup \{x, y\}$$

と書く．

定理 4.6.7 (対の合併の対称性). a と b を類とするとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash a \cup b = b \cup a.$$

略証． 定理 4.5.4 より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \{a, b\} = \{b, a\}$$

が成り立つので，定理 4.6.6 から

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash a \cup b = b \cup a$$

が従う． ∎

定理 4.6.8 (二つの集合の合併はそれぞれの要素を合わせたもの). a と b を類とするとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \forall x \, (\, x \in a \cup b \;\longrightarrow\; x \in a \vee x \in b\,),$$
$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \mathrm{set}\,(a) \;\longrightarrow\; \forall x \, (\, x \in a \;\longrightarrow\; x \in a \cup b\,).$$

定理の二つ目の主張で a と b を入れ替えれば

$$\mathrm{set}\,(b),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \forall x \, (\, x \in b \;\longrightarrow\; x \in b \cup a\,)$$

が成り立つが，対の合併の対称性 (定理 4.6.7) より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash b \cup a = a \cup b$$

が成り立つので

$$\mathrm{set}\,(b),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \forall x \, (\, x \in b \;\longrightarrow\; x \in a \cup b\,)$$

が従う．ゆえに

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathrm{set}\,(b),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \forall x \, (\, x \in a \vee x \in b \;\longrightarrow\; x \in a \cup b\,)$$

が成り立つ．そして一つ目の主張と併せれば

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathrm{set}\,(b),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \forall x \, (\, x \in a \cup b \;\longleftrightarrow\; x \in a \vee x \in b\,)$$

が得られる．つまり，“二つの集合の合併は” それぞれの要素を合わせたものに等しいのである．

略証．

step1　いま

$$\tau \overset{\text{def}}{=\!=} \varepsilon x \neg(\, x \in a \cup b \ \rightarrow\ x \in a \vee x \in b \,)$$

とおくと，定理 4.6.2 より

$$\tau \in a \cup b,\ \mathbf{COM} \vdash \exists z\,(\, z \in \{a, b\} \wedge \tau \in z \,)$$

が成り立つので，

$$\zeta \overset{\text{def}}{=\!=} \varepsilon z\,(\, z \in \{a, b\} \wedge \tau \in z \,)$$

とおけば

$$\tau \in a \cup b,\ \mathbf{COM} \vdash \zeta \in \{a, b\}, \tag{4.101}$$

$$\tau \in a \cup b,\ \mathbf{COM} \vdash \tau \in \zeta \tag{4.102}$$

が成り立つ．(4.102) と

$$a = \zeta,\ \mathbf{EQ} \vdash \zeta = a,$$
$$a = \zeta,\ \mathbf{EQ} \vdash \zeta = a \ \rightarrow\ (\, \tau \in \zeta \ \rightarrow\ \tau \in a \,)$$

より

$$\tau \in a \cup b,\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash a = \zeta \ \rightarrow\ \tau \in a$$

が従い，

$$\tau \in a \cup b,\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash a = \zeta \ \rightarrow\ \tau \in a \vee \tau \in b$$

が成り立つ．同様に

$$\tau \in a \cup b,\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash b = \zeta \ \rightarrow\ \tau \in a \vee \tau \in b$$

が成り立ち，論理和の除去より

$$\tau \in a \cup b,\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash a = \zeta \vee b = \zeta \ \rightarrow\ \tau \in a \vee \tau \in b \tag{4.103}$$

が成り立つ．他方で定理 4.5.2 より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \zeta \in \{a, b\} \ \rightarrow\ a = \zeta \vee b = \zeta$$

が成り立つので，(4.101) と併せて

$$\tau \in a \cup b,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash a = \zeta \vee b = \zeta$$

が成り立つ．よって (4.103) と併せて

$$\tau \in a \cup b,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \tau \in a \vee \tau \in b$$

が従い，全称の導出 (論理的定理 3.2.29) より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \forall x\,(\, x \in a \cup b \ \rightarrow\ x \in a \vee x \in b \,)$$

が得られる．

step2　いま

$$\chi \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon x \neg(x \in a \;\longrightarrow\; x \in a \cup b),$$
$$\tau \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon s\,(a = s)$$

とおく (右辺は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き換える)．まず存在記号の論理的公理より

$$\mathrm{set}\,(a) \vdash a = \tau$$

が成り立つ．また集合は対の要素になれる (定理 4.5.7) ので

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash a \in \{a, b\}$$

も成り立ち，相等性公理より

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \tau \in \{a, b\}$$

が従う．同じく相等性公理より

$$\chi \in a,\ \mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \chi \in \tau$$

も成立する．ゆえに

$$\chi \in a,\ \mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \tau \in \{a, b\} \wedge \chi \in \tau$$

が成立し，存在記号の論理的公理より

$$\chi \in a,\ \mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \exists z\,(\,z \in \{a, b\} \wedge \chi \in z\,)$$

が従う．合併の内包性 (定理 4.6.2) より

$$\chi \in a,\ \mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \chi \in a \cup b$$

となり，演繹定理より

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \chi \in a \;\longrightarrow\; \chi \in a \cup b$$

となり，全称の導出 (論理的定理 3.2.29) より

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \forall x\,(\,x \in a \;\longrightarrow\; x \in a \cup b\,)$$

が得られる． ∎

定理 4.6.9 (要素の部分集合は合併の部分集合).　a を類とするとき

$$\forall x \left[\, \exists t \in a\,(\,x \subset t\,) \;\longrightarrow\; x \subset \bigcup a \,\right].$$

略証． χ を $\mathcal{L}$ の任意の対象として

$$\exists t \in a\,(\, x \subset t\,) \tag{4.104}$$

であるとする．ここで

$$\tau \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon t\,(\, t \in a \wedge \chi \subset t\,)$$

とおく．s を $\mathcal{L}$ の任意の対象として

$$s \in \chi$$

であるとすると，

$$\chi \subset \tau$$

より

$$\tau \in a \wedge s \in \tau$$

が成立するので，存在記号の論理的公理より

$$\exists t\ (\, t \in a \wedge s \in t\,)$$

が成り立ち

$$s \in \bigcup a$$

が従う．s は任意に与えられていたので，(4.104) の下で

$$\forall s\,(\, s \in \chi\ \rightarrow\ s \in \bigcup a\,)$$

すなわち

$$\chi \subset \bigcup a$$

が成り立つ．ゆえに

$$\exists t \in a\ (\, \chi \subset t\,)\ \rightarrow\ \chi \subset \bigcup a$$

が従い，χ も任意に与えられていたので

$$\forall x\,\left[\exists t \in a\,(\, x \subset t\,)\ \rightarrow\ x \subset \bigcup a\right]$$

が得られる． ∎

定理 4.6.10 (部分集合の合併は部分類). a と b を類とするとき

$$\forall x \in a\,(\, x \subset b\,)\ \rightarrow\ \bigcup a \subset b.$$

略証． いま

$$\forall x \in a\,(\,x \subset b\,) \tag{4.105}$$

が成り立っているとする．χ を $\mathcal{L}$ の任意の対象とし，

$$\chi \in \bigcup a$$

であるとする．すると

$$\exists t\ (\,t \in a \wedge \chi \in t\,)$$

が成り立つので，

$$\tau \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon t\ (\,t \in a \wedge \chi \in t\,)$$

とおけば

$$\tau \in a \wedge \chi \in \tau$$

が成立する．ここで (4.105) より

$$\tau \subset b$$

となるから

$$\chi \in b$$

が従い，演繹定理より (4.105) の下で

$$\chi \in \bigcup a \ \rightarrow\ \chi \in b$$

が成立する．χ の任意性ゆえに (4.105) の下で

$$\bigcup a \subset b$$

が成立し，演繹定理より

$$\forall x \in a\,(\,x \subset b\,) \ \rightarrow\ \bigcup a \subset b$$

が得られる． ∎

4.7 冪

定義 4.7.1 (冪). x を $\mathcal{L}$ の項とするとき，

$$\mathrm{P}\,(x) \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \{\,y \mid \forall z\,(\,z \in y \ \rightarrow\ z \in x\,)\,\}$$

で定める項 (必要に応じて $z \in x$ は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き換える) を x の**冪 (power)** と呼ぶ．

x の冪とはすなわち「x の部分集合の全体」である:

$$\mathrm{P}(x) = \{\, y \mid y \subset x \,\}.$$

公理 4.7.2 (冪の公理). 次の公理を **POW** によって参照する:

$$\forall x\, \exists p\, \forall y\, (\, \forall z\, (\, z \in y \;\rightarrow\; z \in x\,) \;\leftrightarrow\; y \in p\,).$$

定理 4.7.3 (集合の冪は集合). a を類とするとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{POW} \vdash \mathrm{set}\,(a) \;\rightarrow\; \mathrm{set}\,(\mathrm{P}\,(a)).$$

略証.

step1 a が主要 ε 項であるとき,

$$\mathbf{POW} \vdash \exists p\, \forall y\, (\, \forall z\, (\, z \in y \;\rightarrow\; z \in a\,) \;\leftrightarrow\; y \in p\,)$$

が成り立つので

$$\rho \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon p\, \forall y\, (\, \forall z\, (\, z \in y \;\rightarrow\; z \in a\,) \;\leftrightarrow\; y \in p\,)$$

とおけば

$$\mathbf{POW} \vdash \forall y\, (\, \forall z\, (\, z \in y \;\rightarrow\; z \in a\,) \;\leftrightarrow\; y \in \rho\,) \tag{4.106}$$

となる．よって定理 4.4.5 より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM}, \mathbf{POW} \vdash \{\, y \mid \forall z\, (\, z \in y \;\rightarrow\; z \in a\,)\,\} = \rho$$

が従い，存在記号の論理的公理より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM}, \mathbf{POW} \vdash \exists p\, (\, \{\, y \mid \forall z\, (\, z \in y \;\rightarrow\; z \in a\,)\,\} = p\,)$$

が得られる．

step2 a が $\{\, x \mid \varphi(x)\,\}$ なる形の項であるとき (φ は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式),

$$\tau \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon x\, (\, a = x\,),$$
$$\rho \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon p\, \forall y\, (\, \forall z\, (\, z \in y \;\rightarrow\; z \in \tau\,) \;\leftrightarrow\; y \in p\,)$$

とおけば，前段の (4.106) より

$$\mathbf{POW} \vdash \forall y\, (\, \forall z\, (\, z \in y \;\rightarrow\; z \in \tau\,) \;\leftrightarrow\; y \in \rho\,) \tag{4.107}$$

が成立する．今の場合の $\mathrm{P}\,(a)$ は

$$\mathrm{P}\,(a) \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \{\, y \mid \forall z\, (\, z \in y \;\rightarrow\; \varphi(z)\,)\,\}$$

によって定められているので，

$$\forall y\,(\forall z\,(z \in y \rightarrow \varphi(z)) \leftrightarrow y \in \rho)$$

を導くために

$$\eta \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon y \neg(\forall z\,(z \in y \rightarrow \varphi(z)) \leftrightarrow y \in \rho)$$

とおき，まずは

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \forall z\,(z \in \eta \rightarrow \varphi(z)) \leftrightarrow \forall z\,(z \in \eta \rightarrow z \in \tau) \tag{4.108}$$

を示す．

- (4.108) の $\rightarrow$ をしめす．

  $$\zeta \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon z \neg(z \in \eta \rightarrow z \in \tau)$$

  とおけば

  $$\forall z\,(z \in \eta \rightarrow \varphi(z)) \vdash \zeta \in \eta \rightarrow \varphi(\zeta)$$

  が成り立つが，

  $$\mathbf{COM} \vdash \varphi(\zeta) \rightarrow \zeta \in a$$

  と

  $$\mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EQ} \vdash \zeta \in a \rightarrow \zeta \in \tau$$

  より

  $$\forall z\,(z \in \eta \rightarrow \varphi(z)),\ \mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \zeta \in \eta \rightarrow \zeta \in \tau$$

  が従い，全称の導出 (論理的定理 3.2.29) より

  $$\forall z\,(z \in \eta \rightarrow \varphi(z)),\ \mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \forall z\,(z \in \eta \rightarrow z \in \tau)$$

  が得られる．
- (4.108) の逆を示す．

  $$\zeta \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon z \neg(z \in \eta \rightarrow \varphi(z))$$

  とおけば

  $$\forall z\,(z \in \eta \rightarrow z \in \tau) \vdash \zeta \in \eta \rightarrow \zeta \in \tau$$

  が成り立つが，

  $$\mathbf{COM} \vdash \zeta \in a \rightarrow \varphi(\zeta)$$

  と

  $$\mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EQ} \vdash \zeta \in \tau \rightarrow \zeta \in a$$

より

$$\forall z\,(\,z \in \eta \;\rightarrow\; z \in \tau\,),\ \mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \zeta \in \eta \;\rightarrow\; \varphi(\zeta)$$

が従い，全称の導出 (論理的定理 3.2.29) より

$$\forall z\,(\,z \in \eta \;\rightarrow\; z \in \tau\,),\ \mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \forall z\,(\,z \in \eta \;\rightarrow\; \varphi(z)\,)$$

が得られる．

(4.107) より

$$\mathbf{POW} \vdash \forall z\,(\,z \in \eta \;\rightarrow\; z \in \tau\,) \;\leftrightarrow\; \eta \in \rho \tag{4.109}$$

が成り立つので，(4.108) と (4.109) と同値記号の推移律 (論理的定理 4.1.14) より

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{POW} \vdash \forall z\,(\,z \in \eta \;\rightarrow\; \varphi(z)\,) \;\leftrightarrow\; \eta \in \rho$$

が得られ，全称の導出 (論理的定理 3.2.29) より

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{POW} \vdash \forall y\,(\,\forall z\,(\,z \in y \;\rightarrow\; \varphi(z)\,) \;\leftrightarrow\; y \in \rho\,)$$

が従う．そして定理 4.4.5 と併せて

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{POW} \vdash \{\, y \mid \forall z\,(\,z \in y \;\rightarrow\; \varphi(z)\,)\,\} = \rho$$

が従い，存在記号の論理的公理より

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{POW} \vdash \exists p\,(\,\{\, y \mid \forall z\,(\,z \in y \;\rightarrow\; \varphi(z)\,)\,\} = p\,)$$

が得られる． ∎

4.8 関係

定義 4.8.1 (順序対). x と y を $\mathcal{L}$ の項とするとき，

$$(x, y) \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

で定める項 (x, y) を x と y の順序対 **(ordered pair)** と呼ぶ．

定理 4.8.2 (集合の順序対は集合). a と b を類とするとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{PAI} \vdash \mathrm{set}\,(a) \wedge \mathrm{set}\,(b) \;\rightarrow\; \mathrm{set}\,((a, b)).$$

証明. 集合の対は集合 (定理 4.5.6) であるから

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathrm{set}\,(b),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{PAI} \vdash \mathrm{set}\,(\{a\}),$$
$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathrm{set}\,(b),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{PAI} \vdash \mathrm{set}\,(\{a, b\})$$

が成り立つので

$$\text{set}(a),\ \text{set}(b),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{PAI} \vdash \text{set}(\{a\}) \wedge \text{set}(\{a,b\})$$

が従い，再び定理 4.5.6 より

$$\text{set}(a),\ \text{set}(b),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{PAI} \vdash \text{set}((a,b))$$

となる． ∎

定理 4.8.3 (順序対の相等性). a,b,c,d を集合とするとき

$$(a,b) = (c,d) \ \rightarrow\ a = c \wedge b = d.$$

略証． $(a,b) = (c,d)$ と仮定すると，

$$\{a\} \in \{\{c\},\{c,d\}\}$$

より

$$\{a\} = \{c\} \vee \{a\} = \{c,d\}$$

が成り立つ．

$$\{a\} = \{c\} \ \rightarrow\ a \in \{c\} \ \rightarrow\ a = c$$

となるし，

$$\{a\} = \{c,d\} \ \rightarrow\ c \in \{a\} \ \rightarrow\ a = c$$

となるので

$$a = c$$

が成り立つ．ゆえに

$$\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{a\},\{a,d\}\}$$

である．$(a,b) = (c,d)$ に加えて

$$a = d$$

と仮定すると，

$$\{a,b\} = \{a\} \vee \{a,b\} = \{a,d\}$$

と

$$\{a,b\} = \{a\} \ \rightarrow\ b = a = d$$

となり，

$$
\begin{aligned}
\{a,b\} = \{a,d\} &\longrightarrow b = a \vee b = d, \\
b = a &\longrightarrow b = d, \\
b = d &\longrightarrow b = d
\end{aligned}
$$

より

$$\{a,b\} = \{a,d\} \longrightarrow b = d$$

も成り立つ．ゆえに

$$a = d \longrightarrow b = d$$

である．今度は $(a,b) = (c,d)$ に加えて

$$a \neq d$$

と仮定する．

$$\{a,d\} = \{a\} \vee \{a,d\} = \{a,b\}$$

と

$$\{a,d\} \neq \{a\}$$

より

$$\{a,d\} = \{a,b\}$$

が成り立ち，

$$d = a \vee d = b$$

が成り立つ．$d \neq a$ より

$$d = b$$

が従う．ゆえに

$$a \neq d \longrightarrow b = d$$

でもある． ∎

定義 4.8.4 (Cartesian 積). x と y を $\mathcal{L}$ の項とするとき，

$$x \times y \stackrel{\mathrm{def}}{=\!=} \{\, u \mid \exists s \in x\, \exists t \in y\, (\, u = (s,t)\,)\,\}$$

で定める項 $x \times y$ を x と y の **Cartesian 積 (Cartesian product)** と呼ぶ.

$a \times b$ は

$$\{\, (s,t) \mid s \in a \wedge t \in b \,\}$$

と簡略して書かれることも多い．

二つの類を用いて得られる最大の Cartesian 積は

$$\{ x \mid \exists s, t \,(x = (s,t)) \}$$

で与えられ，これは $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ に等しい．

定理 4.8.5 (V の Cartesian 積). 次が成り立つ:

$$\mathbf{V} \times \mathbf{V} = \{ x \mid \exists s, t \,(x = (s,t)) \}.$$

証明. $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ は形式的には $\{ x \mid \exists s, t \in \mathbf{V} \,(x = (s,t)) \}$ で定められるが，正式には

$$\{ x \mid \exists s \;(s = s \wedge \exists t \,(t = t \wedge x = (s,t))) \}$$

で定められる．ここで χ を $\mathcal{L}$ の任意の対象として

$$\exists s \;(s = s \wedge \exists t \,(t = t \wedge \chi = (s,t))) \Longleftrightarrow \exists s \;(\exists t \,(\chi = (s,t))) \tag{4.110}$$

が成り立つことを示す．いま $\exists s \;(s = s \wedge \exists t \,(t = t \wedge \chi = (s,t)))$ が成り立っていると仮定する．このとき

$$\sigma \coloneqq \varepsilon s \;(s = s \wedge \exists t \,(t = t \wedge \chi = (s,t)))$$

とおけば存在記号に関する規則より

$$\sigma = \sigma \wedge \exists t \,(t = t \wedge \chi = (\sigma,t))$$

が成立し，このとき $\wedge$ の除去より $\exists t \,(t = t \wedge \chi = (\sigma,t))$ が成り立つので

$$\tau \coloneqq \varepsilon t \,(t = t \wedge \chi = (\sigma,t))$$

とおけば

$$\tau = \tau \wedge \chi = (\sigma,\tau)$$

が成立する．$\wedge$ の除去より $\chi = (\sigma,\tau)$ となり，存在記号に関する規則より

$$\exists t \,(\chi = (\sigma,t))$$

が成立し，再び存在記号に関する規則から

$$\exists s \;(\exists t \,(\chi = (s,t)))$$

が成立する．ここで演繹法則を適用すれば

$$\exists s \;(s = s \wedge \exists t \,(t = t \wedge \chi = (s,t))) \Longrightarrow \exists s \;(\exists t \,(\chi = (s,t)))$$

が得られる．逆に $\exists s \;(\exists t \,(\chi = (s,t)))$ が成り立っているとすると，

$$\sigma' \coloneqq \varepsilon s \;(\exists t \,(\chi = (s,t)))$$

とおけば存在記号に関する規則より

$$\exists t \,(\chi = (\sigma',t))$$

が成立し，

$$\tau' \coloneqq \varepsilon t\,(\,\chi = (\sigma', t)\,)$$

とおけば

$$\chi = (\sigma', \tau')$$

が成立する．ここで定理 4.1.2 より $\tau' = \tau'$ が満たされるので $\wedge$ の導入により

$$\tau' = \tau' \wedge \chi = (\sigma', \tau')$$

が成り立ち，存在記号に関する規則より

$$\exists t\,(\,t = t \wedge \chi = (\sigma', t)\,)$$

が成り立つ．同じく $\sigma' = \sigma'$ も満たされて

$$\sigma' = \sigma' \wedge \exists t\,(\,t = t \wedge \chi = (\sigma', t)\,)$$

が成り立ち，存在記号に関する規則より

$$\exists s\ (\,s = s \wedge \exists t\,(\,t = t \wedge \chi = (s, t)\,)\,)$$

が成立する．ここに演繹法則を適用すれば

$$\exists s\ (\,\exists t\,(\,\chi = (s, t)\,)\,) \Longrightarrow \exists s\ (\,s = s \wedge \exists t\,(\,t = t \wedge \chi = (s, t)\,)\,)$$

が得られる．以上より式 (4.110) が成立する．ところで類の公理より

$$\chi \in \mathbf{V} \times \mathbf{V} \Longleftrightarrow \exists s\ (\,s = s \wedge \exists t\,(\,t = t \wedge \chi = (s, t)\,)\,),$$
$$\chi \in \{\,x \mid \exists s, t\,(\,x = (s, t)\,)\,\} \Longleftrightarrow \exists s\ (\,\exists t\,(\,\chi = (s, t)\,)\,)$$

が成り立つので，含意の推移律から

$$\chi \in \mathbf{V} \times \mathbf{V} \Longleftrightarrow \chi \in \{\,x \mid \exists s, t\,(\,x = (s, t)\,)\,\}$$

が成立する．そして χ の任意性と論理的定理**??**から

$$\forall y\ \left(\,y \in \mathbf{V} \times \mathbf{V} \Longleftrightarrow y \in \{\,x \mid \exists s, t\,(\,x = (s, t)\,)\,\}\,\right)$$

が従い，外延性の公理より定理の主張が得られる． ∎

定義 4.8.6 (関係). $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ の部分類を**関係 (relation)** と呼ぶ．また類 a に対して

$$\mathrm{rel}\,(a) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} a \subset \mathbf{V} \times \mathbf{V}$$

と定める．

いま，関係 E を

$$E = \{\,x \mid \exists s, t\ (\,x = (s, t) \wedge s = t\,)\,\}$$

と定めてみる．このとき E は次の性質を満たす:

(a) $\forall x\ (\ (x,x) \in E\ )$.

(b) $\forall x, y\ (\ (x,y) \in E \Longrightarrow (y,x) \in E\ )$.

(c) $\forall x, y, z\ (\ (x,y) \in E \wedge (y,z) \in E \Longrightarrow (x,z) \in E\ )$.

性質 (a) を反射律と呼ぶ．性質 (b) を対称律と呼ぶ．性質 (c) を推移律と呼ぶ．

定義 4.8.7 (同値関係). a を類とし，R を関係とする．R が $R \subset a \times a$ を満たし，さらに

反射律 $\forall x \in a\ (\ (x,x) \in R\ )$.

対称律 $\forall x, y \in a\ (\ (x,y) \in R \Longrightarrow (y,x) \in R\ )$.

推移律 $\forall x, y, z \in a\ (\ (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Longrightarrow (x,z) \in R\ )$.

も満たすとき，R を a 上の**同値関係 (equivalence relation)** と呼ぶ．

集合 a に対して $R = E \cap (a \times a)$ とおけば R は a 上の同値関係となります．

E とは別の関係 O を

$$O = \{\ x \mid \exists s, t\ (\ x = (s,t) \wedge s \subset t\ )\ \}$$

により定めてみる．このとき O は次の性質を満たす:

(a) $\forall x\ (\ (x,x) \in O\ )$.

(b') $\forall x, y\ (\ (x,y) \in O \wedge (y,x) \in O \Longrightarrow x = y\ )$.

(c) $\forall x, y, z\ (\ (x,y) \in O \wedge (y,z) \in O \Longrightarrow (x,z) \in O\ )$.

性質 (b′) を反対称律と呼ぶ．

定義 4.8.8 (順序関係). a を類とし，R を関係とする．R が $R \subset a \times a$ を満たし，さらに

反射律 $\forall x \in a\ (\ (x,x) \in R\ )$.

反対称律 $\forall x, y \in a\ (\ (x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \Longrightarrow x = y\ )$.

推移律 $\forall x, y, z \in a\ (\ (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Longrightarrow (x,z) \in R\ )$.

も満たすとき，R を a 上の**順序 (order)** と呼ぶ．a が集合であるときは対 (a, R) を**順序集合 (ordered set)** と呼ぶ．特に

$$\forall x, y \in a\ (\ (x,y) \in R \vee (y,x) \in R\ )$$

が成り立つとき，R を a 上の**全順序 (total order)** と呼ぶ．

反射律と推移律のみを満たす関係を**前順序 (preorder)** と呼びます．また全順序は**線型順序 (linear order)** とも呼ばれます．

定義 4.8.9 (上限).

定義 4.8.10 (整列集合). x が**整列集合 (wellordered set)** であるとは，x が集合 a と a 上の順序 R の対 (a,R) に等しく，かつ a の空でない任意の部分集合が R に関する最小元を持つことをいう．またこのときの R を**整列順序 (wellorder)** と呼ぶ．

定理 4.8.11 (整列順序は全順序).

$A(x)$ という式を満たすような x が '**唯一つ存在する**' という概念を定義しましょう．当然 $A(x)$ を満たす x が存在していなくてはいけませんから $\exists x A(x)$ は満たされるべきですが，これに加えて 'y と z に対して $A(y)$ と $A(z)$ が成り立つなら $y=z$ である' という条件を付けるのです．しかしこのままでは '唯一つである' ことを表す式は長くなりますから，新しい記号 $\exists!$ を用意して簡略します．その形式的な定義は下に述べます．ちなみに，'唯一つである' ことは '**一意に存在する**' などの言明によっても示唆されます．

A を $\mathcal{L}'$ の式とし，x を A に現れる文字とし，A に文字 y,z が現れないとするとき，

$$\exists! x A(x) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \exists x A(x) \wedge \forall y,z\,(\,A(y) \wedge A(z) \Longrightarrow y=z\,)$$

で $\exists!$ の意味を定める．

定義 4.8.12 (定義域・値・値域). a を類とするとき，

$$\mathrm{dom}\,(a) := \{\,x \mid \exists y\,(\,(x,y) \in a\,)\,\},\quad \mathrm{ran}\,(a) := \{\,y \mid \exists x\,(\,(x,y) \in a\,)\,\}$$

と定めて，$\mathrm{dom}\,(a)$ を a の**定義域 (domain)** と呼び，$\mathrm{ran}\,(a)$ を a の**値域 (range)** と呼ぶ．また

$$a(t) := \{\,x \mid \exists y\,(\,x \in y \wedge (t,y) \in a\,)\,\}$$

とおき，これを t の a による**値 (value)** と呼ぶ．

定義 4.8.13 (single-valued). a を類とするとき，a が **single-valued** であるということを

$$\mathrm{sing}\,(a) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \forall x,y,z\,(\,(x,y) \in a \wedge (x,z) \in a \Longrightarrow y=z\,)$$

で定める．

定理 4.8.14 (値とは要素となる順序対の片割れである). a を類とするとき

$$\mathrm{sing}\,(a) \Longrightarrow \forall t \in \mathrm{dom}\,(a)\,(\,(t,a(t)) \in a\,).$$

略証. $\mathrm{sing}\,(a)$ が成り立っていると仮定する．このとき t を $\mathrm{dom}\,(a)$ の任意の要素とすれば，

$$(t,\eta) \in a$$

を満たす η が取れる．この η が $a(t)$ に等しいことを示せば良い．いま x を任意の集合とする．

$$x \in \eta$$

が成り立っているとすると

$$\exists y\,(\,x \in y \wedge (t, y) \in a\,)$$

が従うので

$$x \in a(t)$$

となる．ゆえに先ず

$$x \in \eta \Longrightarrow x \in a(t)$$

が得られた．逆に

$$x \in a(t)$$

が成り立っているとき，

$$\xi \coloneqq \varepsilon y\,(\,x \in y \wedge (t, y) \in a\,)$$

とおけば

$$x \in \xi \wedge (t, \xi) \in a$$

が満たされるが，$(t, \eta) \in a$ と $\mathrm{sing}\,(a)$ より

$$\xi = \eta$$

となるので，相等性の公理から

$$x \in \eta$$

も成立する．ゆえに

$$x \in a(t) \Longrightarrow x \in \eta$$

も得られた．x の任意性と外延性の公理から

$$a(t) = \eta$$

が従う．このとき

$$(t, \eta) = (t, a(t))$$

となり，$(t, \eta) \in a$ と相等性の公理から

$$(t, a(t)) \in a$$

が満たされる．以上を総合すれば

$$\mathrm{sing}\,(a) \Longrightarrow \forall t \in \mathrm{dom}\,(a)\,(\,(t, a(t)) \in a\,)$$

が出る． ∎

定理 4.8.15 (single-valued ならば値は一意). a を類とするとき

$$\mathrm{sing}\,(a) \Longrightarrow \forall s,t \in \mathrm{dom}\,(a)\,(\, s = t \Longrightarrow a(s) = a(t)\,).$$

略証. $\mathrm{sing}\,(a)$ が成り立っていると仮定する．s,t を $\mathrm{dom}\,(a)$ の任意の要素とすれば，定理 4.8.14 より

$$(s,a(s)) \in a \wedge (t,a(t)) \in a$$

が成立する．このとき

$$s = t$$

ならば

$$(s,a(s)) = (t,a(s))$$

となるので

$$(t,a(s)) \in a$$

が従い，$\mathrm{sing}\,(a)$ と $(t,a(t)) \in a$ から

$$a(s) = a(t)$$

が成立する．ゆえに

$$s = t \Longrightarrow a(s) = a(t)$$

が示された． ∎

定義 4.8.16 (写像). f, a, b を類とするとき，以下の概念と $\mathcal{L}'$ における派生記号を定める．

- f が写像 **(mapping)** であるということ:

$$\mathrm{fnc}\,(f) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \mathrm{rel}\,(f) \wedge \mathrm{sing}\,(f).$$

- f が a 上の写像であるということ:

$$f : \mathrm{on}\, a \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \mathrm{fnc}\,(f) \wedge \mathrm{dom}\,(f) = a.$$

- f が a から b への写像であるということ:

$$f : a \longrightarrow b \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} f : \mathrm{on}\, a \wedge \mathrm{ran}\,(f) \subset b.$$

- f が a から b への単射 **(injection)** であるということ:

$$f : a \xrightarrow{1:1} b \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} f : a \longrightarrow b \wedge \forall x, y, z\,(\,(x,z) \in f \wedge (y,z) \in f \Longrightarrow x = y\,).$$

- f が a から b への全射 **(surjection)** であるということ:

$$f : a \xrightarrow{\mathrm{onto}} b \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} f : a \longrightarrow b \wedge \forall y \in b\, \exists x \in a\,(\,(x,y) \in f\,).$$

- f が a から b への全単射 **(bijection)** であるということ:

$$f : a \xrightarrow[\mathrm{onto}]{1:1} b \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} f : a \xrightarrow{1:1} b \wedge f : a \xrightarrow{\mathrm{onto}} b.$$

定理 4.8.17 (定義域と値が一致する写像は等しい). f, g を類とするとき次が成り立つ:

$$\begin{aligned} &\mathrm{fnc}\,(f) \wedge \mathrm{fnc}\,(g) \\ &\Longrightarrow \big(\,\mathrm{dom}\,(f) = \mathrm{dom}\,(g) \wedge \forall t \in \mathrm{dom}\,(f)\ \big(\,f(t) = g(t)\big) \Longrightarrow f = g\,\big)\,. \end{aligned}$$

証明． いま $\big(\mathrm{fnc}\,(f) \wedge \mathrm{fnc}\,(g)\big) \wedge \big(\mathrm{dom}\,(f) = \mathrm{dom}\,(g)\big)$ と $\forall t\ \big(t \in \mathrm{dom}\,(f) \Longrightarrow f(t) = g(t)\big)$ が成り立っていると仮定する．このとき χ を $\mathcal{L}$ の任意の対象として $\chi \in f$ が満たされているとすれば，$f \subset \mathbf{V} \times \mathbf{V}$ より

$$\exists s\ (\,\exists t\,(\,\chi = (s,t)\,)\,)$$

が成立する．ここで $\sigma := \varepsilon s\ (\,\exists t\,(\,\chi = (s,t)\,)\,)$ とおけば存在記号に関する規則より

$$\exists t\,(\,\chi = (\sigma, t)\,)$$

が成立し，更に $\tau := \varepsilon t\,(\,\chi = (\sigma, t)\,)$ とおけば

$$\chi = (\sigma, \tau)$$

が成立する．$\chi \in f$ と相等性の公理より

$$(\sigma, \tau) \in f$$

が従い，存在記号に関する規則より

$$\exists y\,((\sigma, y) \in f\,)$$

が成立するので

$$\sigma \in \mathrm{dom}\,(f)$$

となる．このとき $\mathrm{fnc}\,(f)$ と定理**??**より

$$(\sigma, f(\sigma)) \in f$$

が成立し，$(\sigma, \tau) \in f \wedge (\sigma, f(\sigma)) \in f$ と $\mathrm{sing}\,(f)$ が満たされるので

$$\tau = f(\sigma)$$

が成り立つ．他方で $\forall t\ \big(t \in \mathrm{dom}\,(f) \Longrightarrow f(t) = g(t)\big)$ と論理的定理**??**より

$$f(\sigma) = g(\sigma)$$

が満たされ，相等性の公理より

$$\tau = g(\sigma)$$

が成り立つ．また $\sigma \in \mathrm{dom}\,(f)$ と相等性の公理より

$$\sigma \in \mathrm{dom}\,(g)$$

が成り立ち，定理**??**より

$$(\sigma, g(\sigma)) \in g$$

となるが，$\tau = g(\sigma)$ と定理 4.8.3 より

$$(\sigma, g(\sigma)) = (\sigma, \tau)$$

が満たされるので，相等性の公理より

$$(\sigma, \tau) \in g$$

が成り立ち，再び相等性の公理より $\chi \in g$ が成り立つ．ここで演繹法則を適用すれば

$$\chi \in f \Longrightarrow \chi \in g$$

が得られる．f と g の立場を替えれば $\chi \in g \Longrightarrow \chi \in f$ も得られ，χ の任意性と論理的定理**??**より

$$\forall x\,(\,x \in f \Longleftrightarrow x \in g\,)$$

が従う．そして外延性の公理より

$$f = g$$

が出てくる．最後に演繹法則を二回適用すれば定理の主張が得られる． ∎

定義 4.8.18 (反転).　a を類とするとき，その反転 **(inverse)** を

$$a^{-1} \overset{\text{def}}{=\!=} \{\, x \mid \exists s, t\, (\, x = (s,t) \wedge (t,s) \in a\,)\,\}$$

で定める．

定義 4.8.19 (像・原像).　a, b を類とするとき，b の a による像を

$$a * b \overset{\text{def}}{=\!=} \{\, y \mid \exists x \in b\, (\, (x,y) \in a\,)\,\}$$

で定める．また

$$a^{-1} * b$$

を b の a による原像と呼ぶ．

定理 4.8.20 (原像はそこに写される定義域の要素の全体).　a, b を類とするとき，

$$a^{-1} * b = \{\, x \mid \exists y \in b\, (\, (x,y) \in a\,)\,\}.$$

略証．　x を $a^{-1} * b$ の要素とすれば，

$$(y,x) \in a^{-1}$$

を満たす b の要素 y が取れる．このとき

$$(x,y) \in a$$

となるので

$$\exists y \in b\, (\, (x,y) \in a\,)$$

が成立し

$$x \in \{\, x \mid \exists y \in b\, (\, (x,y) \in a\,)\,\}$$

が従う．逆に x を $\{\, x \mid \exists y \in b\, (\, (x,y) \in a\,)\,\}$ の要素とすれば，

$$(x,y) \in a$$

を満たす b の要素 y が取れる．このとき

$$(y,x) \in a^{-1}$$

となるので

$$\exists y \in b\, (\, (y,x) \in a^{-1}\,)$$

が成立し

$$x \in a^{-1} * b$$

が従う．　∎

定理 4.8.21 (single-valued な類の像は値の全体). a, b を類とするとき,

$$\mathrm{sing}\,(a) \wedge b \subset \mathrm{dom}\,(a) \Longrightarrow a * b = \{\, x \mid \exists t \in b\,(\, x = a(t)\,)\,\}.$$

定理 4.8.22 (像は制限写像の値域に等しい). a, b を類とするとき次が成り立つ:

$$a * b = \mathrm{ran}\,(a|_b).$$

定理 4.8.23 (空集合は写像である). 以下が成立する.

(イ) $\mathrm{fnc}\,(\emptyset)$.

(ロ) $\mathrm{dom}\,(\emptyset) = \emptyset$.

(ハ) $\mathrm{ran}\,(\emptyset) = \emptyset$.

(ニ) $\emptyset$ は単射である.

証明.

(イ) 定理 4.3.10 より

$$\emptyset \subset \mathbf{V} \times \mathbf{V}$$

となるので $\emptyset$ は関係である. また x, y, z を $\mathcal{L}$ の任意の対象とすれば, 定理 4.3.6 より

$$(x, y) \notin \emptyset$$

が成り立つので

$$\bigl(\,(x, y) \notin \emptyset \vee (x, z) \notin \emptyset\,\bigr) \vee y = z$$

が成立する. 従って

$$(x, y) \in \emptyset \wedge (x, z) \in \emptyset \Longrightarrow y = z$$

が成立し, x, y, z の任意性より

$$\forall x, y, z\,\bigl(\,(x, y) \in \emptyset \wedge (x, z) \in \emptyset \Longrightarrow y = z\,\bigr)$$

が成り立つ. よって $\mathrm{sing}\,(\emptyset)$ も満たされる.

(ロ) χ を $\mathcal{L}$ の任意の対象とすれば

$$\chi \in \mathrm{dom}\,(\emptyset) \Longleftrightarrow \exists y\,(\,(\chi, y) \in \emptyset\,)$$

が成り立つので, 対偶を取れば

$$\chi \notin \mathrm{dom}\,(\emptyset) \Longleftrightarrow \forall y\,(\,(\chi, y) \notin \emptyset\,)$$

が従う. 定理 4.3.6 より

$$\forall y\,(\,(\chi, y) \notin \emptyset\,)$$

が満たされるので

$$\chi \notin \mathrm{dom}(\emptyset)$$

が従い，χ の任意性より

$$\forall x\,(\,x \notin \mathrm{dom}(\emptyset)\,)$$

が成立する．そして定理 4.3.7 より

$$\mathrm{dom}(\emptyset) = \emptyset$$

が得られる．

(二)　空虚な真により

$$\forall x, y, z\ \big(\,(x, z) \in \emptyset \wedge (y, z) \in \emptyset \Longrightarrow x = y\,\big)$$

が成り立つから $\emptyset$ は単射である． ∎

定義 4.8.24 (空写像). $\emptyset$ を空写像 **(empty mapping)** とも呼ぶ．

定義 4.8.25 (合成). a, b を類とするとき，a と b の合成 **(composition)** を

$$a \circ b \overset{\mathrm{def}}{=} \{\, x \mid \exists s, t, u\ (\,x = (s, u) \wedge (s, t) \in b \wedge (t, u) \in a\,)\,\}$$

で定める．

定義 4.8.26 (族・系). x を集合 a から集合 b への写像とするとき，x のことを “a を添字集合 (index set) とする b の族 (family) (或は系 (collection))” とも呼び，$x(i)$ を x_i と書いて

$$(x_i)_{i \in a} \overset{\mathrm{def}}{=} x$$

とも表記する．

族 $(x_i)_{i \in a}$ は写像 x と同じであるが，一方で丸括弧を中括弧に替えた

$$\{x_i\}_{i \in a}$$

は

$$\{\, x(i) \mid i \in a \,\}$$

によって定められる集合であって，$(x_i)_{i \in a}$ とは別物である．

定理 4.8.27 (全射ならば原像の像で元に戻る). f, a, b, v を類とする．f が a から b への写像であるとき

$$v \subset b \Longrightarrow f * \left(f^{-1} * v\right) \subset v$$

が成立し，特に f が全射なら

$$f * \left(f^{-1} * v\right) = v$$

が成り立つ．

略証. y を $f * \left(f^{-1} * v\right)$ の要素とすると，

$$y = f(x)$$

を満たす $f^{-1} * v$ の要素 x が取れて

$$f(x) \in v$$

が成り立つから

$$y \in v$$

が従う．ゆえに

$$f * \left(f^{-1} * v\right) \subset v$$

が成立する．f が全射であるとき，y を v の要素とすれば

$$y = f(x)$$

を満たす a の要素 x が取れて，

$$x \in f^{-1} * v$$

が成り立つので

$$y \in f * \left(f^{-1} * v\right)$$

が従う．ゆえに f が全射である場合には

$$v \subset f * \left(f^{-1} * v\right)$$

も成立して

$$v = f * \left(f^{-1} * v\right)$$

となる． ∎

定理 4.8.28 (単射ならば像の原像で元に戻る). f,a,b,u を類とする．f が a から b への写像であるとき

$$u \subset a \Longrightarrow u \subset f^{-1} * (f * u)$$

が成立し，特に f が単射なら

$$u = f^{-1} * (f * u)$$

が成り立つ．

略証． x を u の要素とすると

$$f(x) \in f * u$$

が成り立つから

$$x \in f^{-1} * (f * u)$$

が成立する．ゆえに

$$u \subset f^{-1} * (f * u)$$

が成立する．y を $f^{-1} * (f * u)$ の要素とすれば

$$f(y) \in f * u$$

が成り立って

$$f(y) = f(z)$$

を満たす u の要素 z が取れる．ゆえに，f が単射であるとき

$$y = z$$

となって

$$y \in u$$

が従い，

$$f^{-1} * (f * u) \subset u$$

が成立する．ゆえに，f が単射であれば

$$u = f^{-1} * (f * u)$$

が成立する． ∎

4.9 順序数

$0, 1, 2, \cdots$ で表される数字は，集合論において

$$
\begin{aligned}
0 &\overset{\text{def}}{=\!=} \emptyset, \\
1 &\overset{\text{def}}{=\!=} \{0\} = \{\emptyset\}, \\
2 &\overset{\text{def}}{=\!=} \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \\
3 &\overset{\text{def}}{=\!=} \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}
\end{aligned}
$$

といった反復操作で定められる．上の操作を受け継いで“頑張れば手で書き出せる”類を自然数と呼ぶ．0 は集合であり，集合の対は集合であるから 1 もまた集合である．更には集合の合併も集合であるから $2, 3, 4, \cdots$ と続く自然数が全て集合であることがわかる．自然数の冪も自然数同士の集合演算もその結果は全て集合になるが，ここで「集合は 0 に集合演算を施しただけの素姓が明らかなものに限られるか」という疑問というか期待が自然に生まれてくる．実際それは正則性公理によって肯定されるわけだが，そこでキーになるのは順序数と呼ばれる概念である．

公理 4.9.1 (正則性公理). 次の式を **REG** で参照する:

$$\forall r \, (\exists x \, (x \in r) \rightarrow \exists y \, (y \in r \wedge \forall z \, (z \in r \rightarrow z \notin y))).$$

正則性公理の主張は「空でない集合は自分自身と交わらない要素を持つ」ということである．

定理 4.9.2 (類は自分自身を要素に持たない). a を類とするとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE}, \mathbf{PAI}, \mathbf{REG} \vdash a \notin a.$$

略証. 要素の公理の対偶より

$$\mathbf{ELE} \vdash \neg \mathrm{set}\,(a) \rightarrow a \notin a$$

が成り立つので，後は

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE}, \mathbf{PAI}, \mathbf{REG} \vdash \mathrm{set}\,(a) \rightarrow a \notin a$$

を示せばよい．集合の対は集合である (定理 4.5.6) から

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{PAI} \vdash \mathrm{set}\,(\{a\})$$

が成り立つ．ここで

$$\tau \overset{\text{def}}{=\!=} \varepsilon x \, (\{a\} = x)$$

とおけば，量化記号の論理的公理より

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{PAI} \vdash \{a\} = \tau \tag{4.111}$$

と

$$
\mathbf{REG} \vdash \exists x\,(\,x \in \tau\,) \;\longrightarrow\; \exists y\,(\,y \in \tau \wedge \forall z\,(\,z \in \tau \;\longrightarrow\; z \notin y\,)\,) \tag{4.112}
$$

が成り立つ．集合は自分自身の対の要素である (定理 4.5.7) から

$$
\mathrm{set}\,(a),\;\mathbf{EXT},\mathbf{EQ},\mathbf{COM} \vdash a \in \{a\} \tag{4.113}
$$

が成り立ち，(4.111) と併せて

$$
\mathrm{set}\,(a),\;\mathbf{EXT},\mathbf{EQ},\mathbf{COM},\mathbf{PAI} \vdash a \in \tau
$$

が成り立つ．これによって

$$
\mathrm{set}\,(a),\;\mathbf{EXT},\mathbf{EQ},\mathbf{COM},\mathbf{ELE},\mathbf{PAI} \vdash \exists x\,(\,x \in \tau\,)
$$

が従い (定理 4.3.8)，(4.112) との三段論法より

$$
\mathrm{set}\,(a),\;\mathbf{EXT},\mathbf{EQ},\mathbf{COM},\mathbf{ELE},\mathbf{PAI},\mathbf{REG} \vdash \exists y\,(\,y \in \tau \wedge \forall z\,(\,z \in \tau \;\longrightarrow\; z \notin y\,)\,)
$$

となる．

$$
\begin{aligned}
\zeta &\overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon x\,(\,a = x\,),\\
\eta &\overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon y\,(\,y \in \tau \wedge \forall z\,(\,z \in \tau \;\longrightarrow\; z \notin y\,)\,)
\end{aligned}
$$

とおけば存在記号の論理的公理より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{set}\,(a) &\vdash a = \zeta, && (4.114)\\
\mathrm{set}\,(a),\;\mathbf{EXT},\mathbf{EQ},\mathbf{COM},\mathbf{ELE},\mathbf{PAI},\mathbf{REG} &\vdash \eta \in \tau, && (4.115)\\
\mathrm{set}\,(a),\;\mathbf{EXT},\mathbf{EQ},\mathbf{COM},\mathbf{ELE},\mathbf{PAI},\mathbf{REG} &\vdash \forall z\,(\,z \in \tau \;\longrightarrow\; z \notin \eta\,) && (4.116)
\end{aligned}
$$

が成り立つが，まず (4.113) と (4.111) と (4.114) より

$$
\mathrm{set}\,(a),\;\mathbf{EXT},\mathbf{EQ},\mathbf{COM} \vdash \zeta \in \tau
$$

が成り立つので，(4.116) より

$$
\mathrm{set}\,(a),\;\mathbf{EXT},\mathbf{EQ},\mathbf{COM},\mathbf{ELE},\mathbf{PAI},\mathbf{REG} \vdash \zeta \notin \eta \tag{4.117}
$$

が従う．また (4.115) と (4.111) より

$$
\mathrm{set}\,(a),\;\mathbf{EXT},\mathbf{EQ},\mathbf{COM},\mathbf{ELE},\mathbf{PAI},\mathbf{REG} \vdash \eta \in \{a\}
$$

が成り立つので，定理 4.5.2 より

$$
\mathrm{set}\,(a),\;\mathbf{EXT},\mathbf{EQ},\mathbf{COM},\mathbf{ELE},\mathbf{PAI},\mathbf{REG} \vdash \eta = a
$$

が従い，(4.117) と (4.114) と併せて

$$
\mathrm{set}\,(a),\;\mathbf{EXT},\mathbf{EQ},\mathbf{COM},\mathbf{ELE},\mathbf{PAI},\mathbf{REG} \vdash a \notin a
$$

が出る． ∎

論理的定理 4.9.3 (選言三段論法). A と B を文とするとき

$$\vdash A \vee B \rightarrow (\neg A \rightarrow B).$$

略証. まず含意の導入より

$$\vdash B \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$$

が成り立つ．また矛盾の導入より

$$A,\ \neg A \vdash \bot$$

が成り立つが，爆発律 (論理的定理 3.2.21) より

$$A,\ \neg A \vdash B$$

が従い，演繹定理より

$$\vdash A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$$

も得られる．そして論理和の除去より

$$\vdash A \vee B \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$$

が出る． ∎

定理 4.9.4 (集合のどの二組も所属関係で堂々巡りしない).

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE}, \mathbf{PAI}, \mathbf{REG} \vdash \forall x \forall y (x \in y \rightarrow y \notin x).$$

略証. いま

$$\chi \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon x \neg \forall y (x \in y \rightarrow y \notin x),$$
$$\eta \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon y \neg (\tau \in y \rightarrow y \notin \tau)$$

とおく．χ と η は主要 ε 項であるから定理 4.1.3 より

$$\mathbf{EXT} \vdash \mathrm{set}(\chi),$$
$$\mathbf{EXT} \vdash \mathrm{set}(\eta)$$

となり，従って定理 4.5.6 より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{PAI} \vdash \mathrm{set}(\{\chi, \eta\})$$

となり，また定理 4.5.7 より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \chi \in \{\chi, \eta\} \tag{4.118}$$

となる．ここで

$$\tau \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon x\,(\,\{\chi,\eta\} = x\,)$$

とおけば

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{PAI} \vdash \{\chi,\eta\} = \tau \tag{4.119}$$

および

$$\mathbf{REG} \vdash \exists x\,(\,x \in \tau\,) \;\longrightarrow\; \exists y\,(\,y \in \tau \wedge \forall z\,(\,z \in \tau \;\longrightarrow\; z \notin y\,)) \tag{4.120}$$

が成り立つ．(4.118) と (4.119) より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{PAI} \vdash \chi \in \tau \tag{4.121}$$

が成り立つので定理 4.3.8 より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE}, \mathbf{PAI} \vdash \exists x\,(\,x \in \tau\,)$$

が成り立ち，(4.120) より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE}, \mathbf{PAI}, \mathbf{REG} \vdash \exists y\,(\,y \in \tau \wedge \forall z\,(\,z \in \tau \;\longrightarrow\; z \notin y\,))$$

が従う．ここで

$$\gamma \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon y\,(\,y \in \tau \wedge \forall z\,(\,z \in \tau \;\longrightarrow\; z \in y\,))$$

とおけば

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE}, \mathbf{PAI}, \mathbf{REG} \vdash \gamma \in \tau, \tag{4.122}$$

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE}, \mathbf{PAI}, \mathbf{REG} \vdash \forall z\,(\,z \in \tau \;\longrightarrow\; z \notin \gamma\,) \tag{4.123}$$

が成り立つ．(4.123) より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE}, \mathbf{PAI}, \mathbf{REG} \vdash \chi \in \tau \;\longrightarrow\; \chi \notin \gamma$$

となり，(4.121) との三段論法より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE}, \mathbf{PAI}, \mathbf{REG} \vdash \chi \notin \gamma \tag{4.124}$$

が成り立つが，

$$\mathbf{EQ} \vdash \chi \notin \gamma \;\longrightarrow\; (\,\eta = \gamma \;\longrightarrow\; \chi \notin \eta\,)$$

も成り立つので三段論法より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE}, \mathbf{PAI}, \mathbf{REG} \vdash \eta = \gamma \;\longrightarrow\; \chi \notin \eta$$

となり，対偶律 2 (論理的定理 3.2.5) と演繹定理の逆より

$$\chi \in \eta,\; \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE}, \mathbf{PAI}, \mathbf{REG} \vdash \eta \neq \gamma \tag{4.125}$$

が従う．他方で (4.119) と (4.122) より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE}, \mathbf{PAI}, \mathbf{REG} \vdash \gamma \in \{\chi, \eta\}$$

が成り立つので，定理 4.5.2 より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE}, \mathbf{PAI}, \mathbf{REG} \vdash \chi = \gamma \vee \eta = \gamma$$

が従う．これと (4.125) と選言三段論法 (論理的定理 4.9.3) より

$$\chi \in \eta,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE}, \mathbf{PAI}, \mathbf{REG} \vdash \chi = \gamma \tag{4.126}$$

が従う．(4.124) を導いたのと同様にして

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE}, \mathbf{PAI}, \mathbf{REG} \vdash \eta \notin \gamma$$

も成り立つので，(4.126) と相等性公理より

$$\chi \in \eta,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE}, \mathbf{PAI}, \mathbf{REG} \vdash \eta \notin \chi$$

が従う．演繹定理より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE}, \mathbf{PAI}, \mathbf{REG} \vdash \chi \in \eta \ \rightarrow\ \eta \notin \chi$$

が成り立ち，全称の導出 (論理的定理 3.2.29) より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE}, \mathbf{PAI}, \mathbf{REG} \vdash \forall x \forall y \,(\, x \in y \ \rightarrow\ y \notin x\,)$$

が得られる． ■

定理 4.9.5 (集合のどの三組も所属関係で堂々巡りしない).

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE}, \mathbf{PAI}, \mathbf{REG} \vdash \forall x \forall y \forall z \,(\, x \in y \wedge y \in z \ \rightarrow\ z \notin x\,).$$

定理 4.9.6 (いかなる類も自分自身を要素に持たない). a, b, c を類とするとき次が成り立つ:

(イ) $a \notin a$.

(ロ) $a \notin b \vee b \notin a$.

(ハ) $a \notin b \vee b \notin c \vee c \notin a$.

証明.

(イ) a を類とする．まず要素の公理の対偶より

$$\rightharpoondown \operatorname{set}(a) \Longrightarrow a \notin a$$

が満たされる．次に a が集合であるとする．このとき定理 4.5.7 より

$$a \in \{a\}$$

が成り立つから，正則性公理より

$$\exists x\ (\, x \in \{a\} \wedge x \cap \{a\} = \emptyset \,)$$

が従う．ここで $\chi \coloneqq \varepsilon x\ (\, x \in \{a\} \wedge x \cap \{a\} = \emptyset \,)$ とおけば

$$\chi = a$$

となるので，相等性の公理より

$$a \cap \{a\} = \emptyset$$

が成り立つ．$a \in \{a\}$ であるから定理**??**より $a \notin a$ が従い，演繹法則から

$$\mathrm{set}\,(a) \Longrightarrow a \notin a$$

が得られる．そして場合分け法則から

$$\mathrm{set}\,(a) \vee \rightharpoondown \mathrm{set}\,(a) \Longrightarrow a \notin a$$

が成立し，排中律と三段論法から

$$a \notin a$$

が出る．

(ロ) 要素の公理より

$$a \in b \Longrightarrow \mathrm{set}\,(a)$$

となり，定理 4.5.7 より

$$\mathrm{set}\,(a) \Longrightarrow a \in \{a, b\}$$

となるので，

$$a \in b \Longrightarrow a \in \{a, b\}$$

が成立する．また定理**??**より

$$\begin{aligned} a \in b \wedge a \in \{a, b\} &\Longrightarrow \exists x\ (\, x \in b \wedge x \in \{a, b\} \,) \\ &\Longrightarrow b \cap \{a, b\} \neq \emptyset \end{aligned}$$

が成立する．他方で正則性公理より

$$\begin{aligned} a \in \{a, b\} &\Longrightarrow \exists x\ (\, x \in \{a, b\} \,) \\ &\Longrightarrow \{a, b\} \neq \emptyset \\ &\Longrightarrow \exists x\ (\, x \in \{a, b\} \wedge x \cap \{a, b\} = \emptyset \,) \end{aligned}$$

も成立する．以上を踏まえて $a \in b$ が成り立っていると仮定する．このとき

$$a \in \{a, b\}$$

が成立するので

$$b \cap \{a, b\} \neq \emptyset$$

も成り立ち，さらに

$$\exists x\ (\, x \in \{a, b\} \wedge x \cap \{a, b\} = \emptyset\,)$$

も満たされる．ここで

$$\chi := \varepsilon x\ (\, x \in \{a, b\} \wedge x \cap \{a, b\} = \emptyset\,)$$

とおけば $\chi \in \{a, b\}$ から

$$\chi = a \vee \chi = b$$

が従うが，相等性の公理より

$$\chi = b \Longrightarrow b \cap \{a, b\} = \emptyset$$

となるので，$b \cap \{a, b\} \neq \emptyset$ と併せて

$$\chi \neq b$$

が成立する．選言三段論法 (論理的定理 4.9.3) より

$$(\chi = a \vee \chi = b) \wedge \chi \neq b \Longrightarrow \chi = a$$

となるから

$$\chi = a$$

が従い，相等性の公理より

$$a \cap \{a, b\} = \emptyset$$

が成立する．いま要素の公理より

$$\rightharpoondown \mathrm{set}\,(b) \Longrightarrow b \notin a$$

が満たされ，他方で定理 4.5.7 より

$$\mathrm{set}\,(b) \Longrightarrow b \in \{a, b\},$$

$a \cap \{a, b\}$ の仮定と定理**??**より

$$b \in \{a, b\} = \emptyset \Longrightarrow b \notin a$$

が満たされるので

$$\mathrm{set}\,(b) \Longrightarrow b \notin a$$

が成立する．従って

$$b \notin a$$

が従い，演繹法則より

$$a \in b \Longrightarrow b \notin a$$

が得られる．これは $a \notin b \vee b \notin a$ と同値である．

(ハ)　$a \in b \wedge b \in c$ が満たされていると仮定すれば，a, b は集合であるから

$$a, b \in \{a, b, c\}$$

が成立する．ゆえに $b \cap \{a, b, c\} \neq \emptyset$ と $c \cap \{a, b, c\} \neq \emptyset$ が従う．他方，正則性公理より

$$\tau \in \{a, b, c\} \wedge \tau \cap \{a, b, c\} = \emptyset$$

を満たす $\mathcal{L}$ の対象 τ が取れる．ここで $\tau \in \{a, b, c\}$ より

$$\tau = a \vee \tau = b \vee \tau = a$$

が成り立つが，$b \cap \{a, b, c\} \neq \emptyset$ と $c \cap \{a, b, c\} \neq \emptyset$ より $\tau \neq b$ かつ $\tau \neq c$ となる．よって $\tau = a$ となり

$$a \cap \{a, b, c\} = \emptyset$$

が従う．c が真類ならば要素の公理より $c \notin a$ となり，c が集合ならば $c \in \{a, b, c\}$ となるので，いずれにせよ

$$c \notin a$$

が成立する．以上で

$$a \in b \wedge b \in c \Longrightarrow c \notin a$$

が得られる．■

定義 4.9.7 (順序数).　類 a に対して，a が**推移的類 (transitive class)** であるということを

$$\mathrm{tran}\,(a) \overset{\mathrm{def}}{\longleftrightarrow} \forall s\,(\, s \in a \Longrightarrow s \subset a\,)$$

で定める．また a が (集合であるならば) **順序数 (ordinal number)** であるということを

$$\mathrm{ord}\,(a) \overset{\mathrm{def}}{\longleftrightarrow} \mathrm{tran}\,(a) \wedge \forall t, u \in a\,(\, t \in u \vee t = u \vee u \in t\,)$$

で定める．順序数の全体を

$$\mathrm{ON} \overset{\mathrm{def}}{=} \{\, x \mid \mathrm{ord}\,(x)\,\}$$

とおく．

空虚な真の一例であるが，例えば 0 は順序数の性質を満たす．ここに一つの順序数が得られたが，いま仮に α を順序数とすれば

$$\alpha \cup \{\alpha\}$$

もまた順序数となることが直ちに判明する．数字の定め方から

$$1 = 0 \cup \{0\},$$
$$2 = 1 \cup \{1\},$$
$$3 = 2 \cup \{2\},$$
$$\vdots$$

が成り立つから，数字は全て順序数である．

いま ON 上の関係を

$$\leq \overset{\text{def}}{=\!=} \{\, x \mid \exists \alpha, \beta \in \mathrm{ON}\,(\, x = (\alpha, \beta) \wedge \alpha \subset \beta\,)\,\}$$

と定める．

中置記法について

x と y を項とするとき，

$$(x, y) \in \leq$$

なることを往々にして

$$x \leq y$$

とも書くが，このような書き方を**中置記法 (infix notation)** と呼ぶ．同様にして，

$$(x, y) \in \leq \wedge x \neq y$$

なることを

$$x < y$$

とも書く．

以下順序数の性質を列挙するが，長いので主張だけ先に述べておく．

- ON は推移的類である．
- $\leq$ は ON において整列順序となる．
- a を $a \subset \mathrm{ON}$ なる集合とすると，$\bigcup a$ は a の $\leq$ に関する上限となる．
- ON は集合ではない．

定理 4.9.8 (推移的で $\in$ が全順序となる類は ON に含まれる). S を類とするとき

$$\mathrm{ord}\,(S) \;\longrightarrow\; S \subset \mathrm{ON}.$$

略証． x を S の要素とする．まず

$$\forall s, t \in x\,(\, s \in t \vee s = t \vee t \in s\,) \tag{4.127}$$

が成り立つことを示す．実際 S の推移性より

$$x \subset S$$

が成り立つので，x の要素は全て S の要素となり (4.127) が満たされる．次に

$$\mathrm{tran}\,(x)$$

が成り立つことを示す．y を x の要素とする．また z を y の要素とする．このとき

$$x \subset S$$

から

$$y \in S$$

が成り立つので

$$y \subset S$$

が成り立ち，ゆえに

$$z \in S$$

となる．従って

$$z \in x \vee z = x \vee x \in z \tag{4.128}$$

が成立する．ところで定理 4.9.6 より

$$z \in y \Longrightarrow y \notin z$$

が成り立つから

$$y \notin z \tag{4.129}$$

が成立する．また相当性の公理から

$$z = x \vee y \in x \Longrightarrow y \in z$$

が成り立つので，その対偶と (4.128) から

$$z \neq x \vee y \notin x$$

も満たされる．いま

$$y \in x$$

が成り立っていて，さらに選言三段論法より

$$(z \neq x \vee y \notin x) \wedge y \in x \Longrightarrow z \neq x$$

も成り立つから，

$$z \neq x$$

が成立する．他方で定理 4.9.6 より

$$z \in y \wedge y \in x \Longrightarrow x \notin z$$

が成立するから，ゆえにいま

$$z \neq x \wedge x \notin z$$

が，つまり

$$\neg (z = x \vee x \in z) \tag{4.130}$$

が成立している．ここで選言三段論法より

$$(z \in x \vee z = x \vee x \in z) \wedge \rightharpoondown (z = x \vee x \in z) \Longrightarrow z \in x$$

も成り立つので，(4.129) と (4.130) と併せて

$$z \in x$$

が従う．以上より，y を x の要素とすれば

$$\forall z \in y \, (z \in y \Longrightarrow z \in x)$$

が成り立ち，ゆえに

$$y \subset x$$

が成り立つ．ゆえに x は推移的である．ゆえに

$$\mathrm{ord}(x)$$

が成立し

$$x \in \mathrm{ON}$$

となる．x の任意性より

$$S \subset \mathrm{ON}$$

が得られる． ∎

定理 4.9.9 (ON は推移的). tran(ON) が成立する．

証明. x を順序数とすると

$$\mathrm{ord}(x)$$

が成り立つので，定理 4.9.8 から

$$x \subset \mathrm{ON}$$

が成立する．ゆえに ON は推移的である． ∎

定理 4.9.10 (ON において $\in$ と $<$ は同義).

$$\forall \alpha, \beta \in \mathrm{ON} \, (\alpha \in \beta \Longleftrightarrow \alpha < \beta).$$

証明．　α, β を任意に与えられた順序数とする．

$$\alpha \in \beta$$

が成り立っているとすると，順序数の推移性より

$$\alpha \subset \beta$$

が成り立つ．定理 4.9.6 より

$$\alpha \neq \beta$$

も成り立つから

$$\alpha < \beta$$

が成り立つ．ゆえに

$$\alpha \in \beta \Longrightarrow \alpha < \beta$$

が成立する．逆に

$$\alpha < \beta$$

が成り立っているとすると

$$\beta \backslash \alpha \neq \emptyset$$

が成り立つので，正則性公理より

$$\gamma \in \beta \backslash \alpha \wedge \gamma \cap (\beta \backslash \alpha) = \emptyset$$

を満たす γ が取れる．このとき

$$\alpha = \gamma$$

が成り立つことを示す．x を α の任意の要素とすれば，x, γ は共に β に属するから

$$x \in \gamma \vee x = \gamma \vee \gamma \in x \tag{4.131}$$

が成り立つ．ところで相等性の公理から

$$x = \gamma \wedge x \in \alpha \Longrightarrow \gamma \in \alpha$$

が成り立ち，α の推移性から

$$\gamma \in x \wedge x \in \alpha \Longrightarrow \gamma \in \alpha$$

が成り立つから，それぞれ対偶を取れば

$$\gamma \notin \alpha \Longrightarrow x \neq \gamma \vee x \notin \alpha$$

と

$$\gamma \notin \alpha \Longrightarrow \gamma \notin x \vee x \notin \alpha$$

が成立する．いま

$$\gamma \notin \alpha$$

が成り立っているので

$$x \neq \gamma \vee x \notin \alpha$$

と

$$\gamma \notin x \vee x \notin \alpha$$

が共に成り立ち，また

$$x \in \alpha$$

でもあるから選言三段論法より

$$x \neq \gamma$$

と

$$\gamma \notin x$$

が共に成立する．そして (4.131) と選言三段論法より

$$x \in \gamma$$

が従うので

$$\alpha \subset \gamma$$

が得られる．逆に x を γ に任意の要素とすると

$$x \in \beta \wedge x \notin \beta \backslash \alpha$$

が成り立つから，すなわち

$$x \in \beta \wedge (x \notin \beta \vee x \in \alpha)$$

が成立する．ゆえに選言三段論法より

$$x \in \alpha$$

が成り立ち，x の任意性より

$$\gamma \subset \alpha$$

となる．従って

$$\gamma = \alpha$$

が成立し，

$$\gamma \in \beta$$

なので

$$\alpha \in \beta$$

が成り立つ．以上で

$$\alpha < \beta \Longrightarrow \alpha \in \beta$$

も得られた． ■

定理 4.9.11 (ON の整列性). $\leq$ は ON 上の整列順序である．また次が成り立つ．

$$\forall \alpha, \beta \in \mathrm{ON} \left(\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha \right).$$

証明.

第一段 α, β, γ を順序数とすれば

$$\alpha \subset \alpha$$

かつ

$$\alpha \subset \beta \wedge \beta \subset \alpha \Longrightarrow \alpha = \beta$$

かつ

$$\alpha \subset \beta \wedge \beta \subset \gamma \Longrightarrow \alpha \subset \gamma$$

が成り立つ．ゆえに $\leq$ は ON 上の順序である．

第二段 $\leq$ が全順序であることを示す．α と β を順序数とする．このとき

$$\mathrm{ord}\,(\alpha \cap \beta)$$

が成り立ち，他方で定理 4.9.6 より

$$\alpha \cap \beta \notin \alpha \cap \beta$$

が満たされるので

$$\alpha \cap \beta \notin \alpha \vee \alpha \cap \beta \notin \beta \tag{4.132}$$

が成立する．ところで

$$\alpha \cap \beta \subset \alpha$$

は正しいので定理 4.9.10 から

$$\alpha \cap \beta \in \alpha \vee \alpha \cap \beta = \alpha$$

が成立する．従って

$$\alpha \cap \beta \notin \alpha \Longrightarrow (\alpha \cap \beta \in \alpha \vee \alpha \cap \beta = \alpha) \wedge \alpha \cap \beta \notin \alpha \tag{4.133}$$

が成り立ち，他方で選言三段論法より

$$(\alpha \cap \beta \in \alpha \vee \alpha \cap \beta = \alpha) \wedge \alpha \cap \beta \notin \alpha \Longrightarrow \alpha \cap \beta = \alpha \tag{4.134}$$

も成り立ち，かつ

$$\alpha \cap \beta = \alpha \Longrightarrow \alpha \subset \beta \tag{4.135}$$

も成り立つので，(4.133) と (4.134) と (4.135) から

$$\alpha \cap \beta \notin \alpha \Longrightarrow \alpha \subset \beta$$

が得られる．同様にして

$$\alpha \cap \beta \notin \beta \Longrightarrow \beta \subset \alpha$$

も得られる．さらに論理和の規則から

$$\alpha \cap \beta \notin \alpha \Longrightarrow \alpha \subset \beta \vee \beta \subset \alpha$$

と

$$\alpha \cap \beta \notin \beta \Longrightarrow \alpha \subset \beta \vee \beta \subset \alpha$$

が従うので，(4.132) と場合分け法則より

$$\alpha \subset \beta \vee \beta \subset \alpha$$

が成立して

$$(\alpha, \beta) \in \leq \vee (\beta, \alpha) \in \leq$$

が成立する．ゆえに $\leq$ は全順序である．

第三段　$\leq$ が整列順序であることを示す．a を ON の空でない部分集合とする．このとき正則性公理より

$$x \in a \wedge x \cap a = \emptyset$$

を満たす集合 x が取れるが，この x が a の最小限である．実際，任意に a から要素 y を取ると

$$x \cap a = \emptyset$$

から

$$y \notin x$$

が従い，また前段の結果より

$$x \in y \vee x = y \vee y \in x$$

も成り立つので，選言三段論法より

$$x \in y \vee x = y \tag{4.136}$$

が成り立つ．y は推移的であるから

$$x \in y \Longrightarrow x \subset y$$

が成立して，また

$$x = y \Longrightarrow x \subset y$$

も成り立つから，(4.136) と場合分け法則から

$$(x, y) \in \leq$$

が従う．y の任意性より

$$\forall y \in a \left[(x, y) \in \leq \right]$$

が成立するので x は a の最小限である． ∎

定理 4.9.12 (ON の部分集合の合併は順序数となる).

$$\forall a \left(a \subset \mathrm{ON} \Longrightarrow \bigcup a \in \mathrm{ON} \right).$$

証明. 和集合の公理より $\bigcup a \in \mathbf{V}$ となる．また順序数の推移性より $\bigcup a$ の任意の要素は順序数であるから，定理 4.9.11 より

$$\forall x, y \in \bigcup a \, (x \in y \vee x = y \vee y \in x)$$

も成り立つ．最後に $\mathrm{Tran}(\bigcup a)$ が成り立つことを示す．b を $\bigcup a$ の任意の要素とすれば，a の或る要素 x に対して

$$b \in x$$

となるが，x の推移性より $b \subset x$ となり，$x \subset \bigcup a$ と併せて

$$b \subset \bigcup a$$

が従う． ∎

定理 4.9.13 (Burali-Forti). 順序数の全体は集合ではない．

$$\rightharpoondown \mathrm{set}\,(\mathrm{ON}).$$

証明. a を類とするとき，定理 4.1.8 より

$$\mathrm{ord}\,(a) \Longrightarrow (\,\mathrm{set}\,(a) \Longrightarrow a \in \mathrm{ON}\,)$$

が成り立つ．定理 4.9.9 と定理 4.9.11 より

$$\mathrm{ord}\,(\mathrm{ON})$$

が成り立つから

$$\mathrm{set}(\mathrm{ON}) \Longrightarrow \mathrm{ON} \in \mathrm{ON} \tag{4.137}$$

が従い，また定理 4.9.6 より

$$\mathrm{ON} \notin \mathrm{ON}$$

も成り立つので，(4.137) の対偶から

$$\rightharpoondown \mathrm{set}(\mathrm{ON})$$

が成立する． ∎

定義 4.9.14 (後者). x を集合とするとき，

$$x \cup \{x\}$$

を x の**後者 (latter)** と呼ぶ．

定理 4.9.15 (順序数の後者は順序数である). α が順序数であるということと $\alpha \cup \{\alpha\}$ が順序数であるということは同値である．

$$\forall \alpha \, (\, \alpha \in \mathrm{ON} \Longleftrightarrow \alpha \cup \{\alpha\} \in \mathrm{ON}\,).$$

略証．

第一段 α を順序数とする．そして x を

$$x \in \alpha \cup \{\alpha\} \tag{4.138}$$

なる任意の集合とすると，

$$y \in x$$

なる任意の集合 y に対して定理 4.6.8 より

$$y \in \alpha \vee y \in \{\alpha\} \tag{4.139}$$

が成立する．α が順序数であるから

$$y \in \alpha \Longrightarrow y \subset \alpha \tag{4.140}$$

が成立する．他方で定理 4.5.2 より

$$y \in \{\alpha\} \Longrightarrow y = \alpha$$

が成立し，

$$y = \alpha \Longrightarrow y \subset \alpha$$

であるから

$$y \in \{\alpha\} \Longrightarrow y \subset \alpha \tag{4.141}$$

が従う．定理 4.6.9 より

$$y \subset \alpha \Longrightarrow y \subset \alpha \cup \{\alpha\}$$

が成り立つので，(4.140) と (4.141) と併せて

$$y \in \alpha \Longrightarrow y \subset \alpha \cup \{\alpha\}$$

かつ

$$y \in \{\alpha\} \Longrightarrow y \subset \alpha \cup \{\alpha\}$$

が成立し，場合分け法則より

$$y \in \alpha \vee y \in \{\alpha\} \Longrightarrow y \subset \alpha \cup \{\alpha\}$$

が従う．そして (4.139) と併せて

$$y \subset \alpha \cup \{\alpha\}$$

が成立する．y の任意性ゆえに (4.138) の下で

$$\forall y \left(y \in x \Longrightarrow y \subset \alpha \cup \{\alpha\} \right)$$

が成り立ち，演繹法則と x の任意性から

$$\forall x \, (x \in \alpha \cup \{\alpha\} \Longrightarrow x \subset \alpha \cup \{\alpha\})$$

が従う．ゆえにいま

$$\mathrm{tran}\,(\alpha \cup \{\alpha\}) \tag{4.142}$$

が得られた．また s と t を $\alpha \cup \{\alpha\}$ の任意の要素とすると

$$s \in \alpha \vee s = \alpha$$

と

$$t \in \alpha \vee t = \alpha$$

が成り立つが，

$$s \in \alpha \Longrightarrow s \in \mathrm{ON}$$

かつ

$$s = \alpha \Longrightarrow s \in \mathrm{ON}$$

から

$$s \in \alpha \vee s = \alpha \Longrightarrow s \in \mathrm{ON}$$

が従い，同様にして

$$t \in \alpha \vee t = \alpha \Longrightarrow t \in \mathrm{ON}$$

も成り立つので，

$$s \in \mathrm{ON}$$

かつ

$$t \in \mathrm{ON}$$

となる．このとき定理 4.9.11 より

$$s \in t \vee s = t \vee t \in s$$

が成り立つので，s および t の任意性より

$$\forall s, t \in \alpha \cup \{\alpha\} \, (s \in t \vee s = t \vee t \in s)$$

が得られた．(4.142) と併せて

$$\mathrm{ord}\,(\alpha \cup \{\alpha\})$$

が従い，演繹法則より

$$\alpha \in \mathrm{ON} \Longrightarrow \alpha \cup \{\alpha\} \in \mathrm{ON}$$

を得る．

第二段

定理 4.9.16 (順序数は後者が直後の数となる). α を順序数とすれば，ON において $\alpha \cup \{\alpha\}$ は α の直後の数である:

$$\forall \alpha \in \mathrm{ON} \left[\forall \beta \in \mathrm{ON} \, (\alpha < \beta \Longrightarrow \alpha \cup \{\alpha\} \leq \beta) \right].$$

略証. α と β を任意に与えられた順序数とし，

$$\alpha < \beta$$

であるとする．定理 4.9.10 より，このとき

$$\alpha \in \beta$$

が成り立ち，$\leq$ の定義より

$$\alpha \subset \beta$$

も成り立つ．ところで，いま t を任意の集合とすると

$$t \in \{\alpha\} \Longrightarrow t = \alpha$$

かつ

$$t = \alpha \Longrightarrow t \in \beta$$

が成り立つので，

$$\{\alpha\} \subset \beta$$

が成り立つ．ゆえに

$$\forall x \ \left(x \in \{\alpha, \{\alpha\}\} \Longrightarrow x \subset \beta \right)$$

が成り立つ．ゆえに定理 4.6.10 より

$$\alpha \cup \{\alpha\} \subset \beta.$$

すなわち

$$\alpha \cup \{\alpha\} \leq \beta$$

が成り立つ． ∎

第 5 章

保存拡大

第 3 章では明記しなかったが，

$$\mathscr{S} \vdash \varphi$$

ということは次の条件を満たす $\mathcal{L}$ の文の列 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ [*1] が取れるということである．

- 各 φ_i は次のいずれかを満たす：
  - φ_i は論理的公理である．
  - φ_i は $\mathscr{S}$ の公理である．
  - φ_i は，これより前の文 φ_j と φ_k の三段論法で得られる．つまり φ_j が $\varphi_k \longrightarrow \varphi_i$ なる式であるか，φ_k が $\varphi_j \longrightarrow \varphi_i$ なる式である．
- φ_n は φ である．

以下ではこの列 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ を $\mathscr{S}$ から φ への**証明 (proof)** と呼ぶ．第 3 章で規定した証明とは若干違うが，異なる証明体系を比較するには証明は列であると考える方が都合が良い．ただし，集合の章で実演した通り実際の証明でこのような列を構成することは殆どなく，第 3 章で規定した証明プロセスの方が現実的であろう．

この章の主題は，本稿の集合論が **ZF** 集合論の妥当な拡張であるかどうかである．当然，**ZF** 集合論の定理とは何か，つまり証明がどのように行われるかが判っていなければならないが，ここでは**古典論理 (classical logic)** と呼ばれる (Hilbert 流) **証明体系 (proof system)** を採用する．証明体系とは論理的公理と推論規則を合わせたものであり，第 3 章で出した論理的公理と三段論法も一つの証明体系をなしている．この証明体系を便宜上 **HE** と書き，古典論理の証明体系は **HK** と書く．妥当性の判断は，**ZF** 集合論の任意の命題 (つまり $\mathcal{L}_\in$ の任意の文) ψ に対して「Σ から ψ への **HE** の証明で $\mathcal{L}$ の文の列であるものが取れる」ことと「Γ から ψ への **HK** の証明で $\mathcal{L}_\in$ の式の列であるものが取れる」ことが同値であるということを示して決着をつける．この Γ とは Σ の公理を $\mathcal{L}_\in$ の文に直した公理系である (参照 P. 179)．ただいきなりこれを示すのは難しいので，次の段階をふんで明らかにしていく．

step1　「Σ から ψ への **HE** の証明で $\mathcal{L}_\mathcal{E}$ の文の列であるものが取れる」ならば「Γ から ψ への **HK** の証明で $\mathcal{L}_\in$ の式の列であるものが取れる」ことを示す (第 5.2 節)．

step2　「Γ から ψ への **HK** の証明で $\mathcal{L}_\in$ の式の列であるものが取れる」ならば「Σ から ψ への **HE** の証明で

[*1] ここで添え字に数字が使われているが，これらは集合論の中で定義される数字ではなく生活の中にありふれた数字である．足し算や大小の比較は日常的な感覚で行えるものとする．

$\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の文の列であるものが取れる」ことを示す (第 5.3 節).

step3 「Σ から ψ への **HE** の証明で $\mathcal{L}$ の文の列であるものが取れる」ならば「Σ から ψ への **HE** の証明で $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の文の列であるものが取れる」ことを示す (第 5.4 節).

5.1 古典論理

HK の公理は以下のように与えられる．ここで扱う項と式は $\mathcal{L}_{\in}$ のものか $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ のものを想定している．第 3 章では証明に使われる式は全て文であるとしたが，**HK** の証明では文に限らず一般の式も使用する.

論理的公理 5.1.1 (**HK** の公理 (命題論理)).　φ と ψ と ξ を式とするとき

(S)　$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$.

(K)　$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$.

(CTD1)　$\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \bot)$.

(CTD2)　$\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \bot)$.

(NI)　$(\varphi \rightarrow \bot) \rightarrow \neg\varphi$.

(DI1)　$\varphi \rightarrow \varphi \vee \psi$.

(DI2)　$\psi \rightarrow \varphi \vee \psi$.

(DE)　$(\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \vee \psi \rightarrow \chi))$.

(CI)　$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi))$.

(CE1)　$\varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi$.

(CE2)　$\varphi \wedge \psi \rightarrow \psi$.

(DNE)　$\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$.

論理的公理 5.1.2 (**HK** の公理 (量化)).　φ と ψ と ξ を式とし，x と y を変項とし，t を項とする．また y は $\psi, \forall x\varphi, \exists x\varphi$ には自由に現れず，φ には x が自由に現れ，y と t は φ の中で x への代入について自由であるとする.

(UI)　$\forall y(\psi \rightarrow \varphi(x/y)) \rightarrow (\psi \rightarrow \forall x\varphi)$.

(UE)　$\forall x\varphi \rightarrow \varphi(x/t)$.

(EI)　$\varphi(x/t) \rightarrow \exists x\varphi$.

(EE)　$\forall y(\varphi(x/y) \rightarrow \psi) \rightarrow (\exists x\varphi \rightarrow \psi)$.

HK の推論規則は「三段論法」と「汎化 (generalization)」の二つである．式 φ が式 χ から汎化で得られるとは，変項 a, x と x が自由に現れる式 ψ が取れて，a は ψ の中で x への代入について自由であり，χ は

$$\psi(x/a)$$

なる式，φ は

$$\forall x\psi$$

なる式であるということである．ただし a は $\forall x\psi$ に自由に現れず，また公理系 $\mathscr{S}$ が与えられているならば a は $\mathscr{S}$ のどの公理にも自由に現れない．a をこの汎化の**固有変項 (eigenvariable)** と呼ぶ.

メタ定義 5.1.3 (HK における証明). $\mathscr{S}$ を式からなる公理系とする．このとき式の列 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ が $\mathscr{S}$ から φ_n への **HK** の証明であるとは，各 φ_i が次のいずれかであるということである：

- φ_i は **HK** の公理である．
- φ_i は $\mathscr{S}$ の公理である．
- φ_i は，これより前の式 φ_j と φ_k の三段論法で得られる．
- φ_i は，これより前の式 φ_j から汎化で得られる．

本稿では複数の言語を同時に扱っているので，混乱を避けるために「$\mathscr{S}$ から式 φ への **HK** の証明で $\mathcal{L}_{\in}$ の式の列であるものが取れる」ことを

$$\mathscr{S} \vdash_{\mathbf{HK},\mathcal{L}_{\in}} \varphi$$

と書き，「$\mathscr{S}$ から式 φ への **HK** の証明で $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式の列であるものが取れる」ことを

$$\mathscr{S} \vdash_{\mathbf{HK},\mathcal{L}_{\mathcal{E}}} \varphi$$

と書く．ただこれでは見た目が悪いので $\vdash_{\mathbf{HK}}$ とだけ書くこともある．この場合は $\vdash_{\mathbf{HK}}$ は $\vdash_{\mathbf{HK},\mathcal{L}_{\in}}$ か $\vdash_{\mathbf{HK},\mathcal{L}_{\mathcal{E}}}$ のどちらか一方を指しているのだが，一つの定理の中で $\vdash_{\mathbf{HK}}$ が指すのは一貫して片方だけである．

5.1.1 演繹定理

メタ定理 5.1.4 (HK の演繹定理). $\mathscr{S}$ を公理系とし，φ と ψ を式とするとき

(1) $\mathscr{S} \vdash_{\mathbf{HK}} \varphi \rightarrow \psi$ ならば $\varphi, \mathscr{S} \vdash_{\mathbf{HK}} \psi$.

(2) $\varphi, \mathscr{S} \vdash_{\mathbf{HK}} \psi$ ならば $\mathscr{S} \vdash_{\mathbf{HK}} \varphi \rightarrow \psi$.

メタ証明.

(1) $\mathscr{S} \vdash_{\mathbf{HK}} \varphi \rightarrow \psi$ であるとき，$\mathscr{S}$ から $\varphi \rightarrow \psi$ への **HK** の証明を $\varphi_1, \varphi_2 \cdots, \varphi_n$ とすれば

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \cdots,\ \varphi_n,\ \varphi,\ \psi$$

は $\varphi, \mathscr{S}$ から ψ への **HK** の証明である．

(2) $\varphi, \mathscr{S} \vdash_{\mathbf{HK}} \psi$ であるとき，$\varphi, \mathscr{S}$ から ψ への **HK** の証明を $\varphi_1, \varphi_2 \cdots, \varphi_n$ とし，以下の要領で φ_1 から順番に，式を削除して別の式で置き換えたり式を新しく追加したりしていく．

case1　φ_i が **HK** の公理または $\mathscr{S}$ の公理であるとき，φ_i と φ_{i+1} との間に

$$\begin{aligned}&\varphi_i \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi_i),\\ &\varphi \rightarrow \varphi_i\end{aligned}$$

を追加する．上の式は公理 (K) の形の式であり，φ_i との三段論法で $\varphi \rightarrow \varphi_i$ が出るという図になる．

case2　φ_i が φ であるとき φ_i を証明列から削除し，その位置は

$$(\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)) \to ((\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)),$$
$$\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi),$$
$$(\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi),$$
$$\varphi \to (\varphi \to \varphi),$$
$$\varphi \to \varphi$$

で置き換える．上の式は公理 (S)(K) の形の式の三段論法で $\varphi \to \varphi$ が出るという図になる．

case3　φ_i が前の式 φ_j と φ_k の三段論法で得られているとする．ここで φ_k は $\varphi_j \to \varphi_i$ なる形の式とする．このとき φ_i を証明列から削除し，その位置は

$$(\varphi \to (\varphi_j \to \varphi_i)) \to ((\varphi \to \varphi_j) \to (\varphi \to \varphi_i)),$$
$$(\varphi \to \varphi_j) \to (\varphi \to \varphi_i),$$
$$\varphi \to \varphi_i$$

で置き換える．上の式は，$\varphi \to \varphi_j$ と $\varphi \to \varphi_k$ に至る式の列が得られていれば公理 (S)(K) の形の式との三段論法で $\varphi \to \varphi_i$ が出るという図になる．

case4　φ_i が前の式 φ_j から汎化で得られているとする．つまり変項 a, x と x が自由に現れる式 ψ が取れて，φ_j は $\psi(x/a)$，φ_i は $\forall x\psi$ である．ただし a は $\forall x\psi$ にも φ にも $\mathscr{S}$ のどの公理にも自由に現れず，また ψ の中で x への代入について自由である．このとき φ_i を証明列から削除し，その位置は

$$\forall a(\varphi \to \psi(x/a)),$$
$$\forall a(\varphi \to \psi(x/a)) \to (\varphi \to \forall x\psi),$$
$$\varphi \to \forall x\psi$$

で置き換える．上の式は，$\varphi \to \varphi_j$ に至る式の列が得られていれば汎化および公理 (UI) の形の式との三段論法で $\varphi \to \varphi_i$ が出るという図になる．

以上の追加と置換の操作を φ_1 から順に φ_n まで施していけば，最終的に得る式の列は $\varphi \to \psi$ への **HK** の証明になっている． ∎

5.1.2　最小論理

HK の公理から二重否定除去 (DNE) を抜いた体系を**最小論理 (minimal logic)** と呼ぶ．この体系では背理法が成り立たないので「〜と仮定すると矛盾するので…」といった論法は使えない．

定理 5.1.5 (対偶律 1).　φ と ψ を式とするとき

$$\vdash_{\mathbf{HK}} (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi).$$

略証．　φ と $\varphi \to \psi$ の三段論法から

$$\varphi, \neg\psi, \varphi \to \psi \vdash_{\mathbf{HK}} \psi$$

が成り立ち，

$$\varphi,\ \neg\psi,\ \varphi \rightarrow \psi \vdash_{\mathbf{HK}} \neg\psi$$

も成り立つので，矛盾の規則 (DTC1) より

$$\varphi,\ \neg\psi,\ \varphi \rightarrow \psi \vdash_{\mathbf{HK}} \perp$$

が従う．演繹定理より

$$\neg\psi,\ \varphi \rightarrow \psi \vdash_{\mathbf{HK}} \varphi \rightarrow \perp$$

となり，否定の導入 (NI) より

$$\neg\psi,\ \varphi \rightarrow \psi \vdash_{\mathbf{HK}} \neg\varphi$$

が従う．そして演繹定理より

$$\varphi \rightarrow \psi \vdash_{\mathbf{HK}} \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$$

が得られる． ∎

定理 5.1.6 (弱 De Morgan の法則 1). φ を式とし，変項 x が φ に自由に現れるとするとき，

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \neg\exists x\varphi \rightarrow \forall x\,\neg\varphi.$$

略証． y を φ には現れない変項とすると，存在記号の導入規則より

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \varphi(x/y) \rightarrow \exists x\varphi$$

が成り立ち，対偶律 1 (定理 5.1.5) より

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \neg\exists x\varphi \rightarrow \neg\varphi(x/y)$$

となる．汎化により

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \forall y\,(\neg\exists x\varphi \rightarrow \neg\varphi(x/y))$$

が成り立つので，量化の公理 (UI) との三段論法より

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \neg\exists x\varphi \rightarrow \forall x\,\neg\varphi$$

が得られる． ∎

定理 5.1.7 (強 De Morgan の法則 1). φ を式とし，変項 x が φ に自由に現れるとするとき，

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \exists x\,\neg\varphi \rightarrow \neg\forall x\varphi.$$

略証． y を φ に現れない変項とすれば，量化の公理 (UE) より

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \forall x \varphi \rightarrow \varphi(x/y)$$

が成り立ち，対偶律 1 (定理 5.1.5) より

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \neg\varphi(x/y) \rightarrow \neg\forall x \varphi$$

となる．汎化によって

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \forall y\,(\neg\varphi(x/y) \rightarrow \neg\forall x \varphi\,)$$

が成り立ち，量化の公理 (EE) より

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \exists x \neg\varphi \rightarrow \neg\forall x \varphi$$

が得られる． ∎

定理 5.1.8 (二重否定の導入). φ を式とするとき

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi.$$

略証． 矛盾の導入 (CTD1) より

$$\varphi \vdash_{\mathbf{HK}} \neg\varphi \rightarrow \bot$$

が成り立ち，否定の導入 (NI) より

$$\varphi \vdash_{\mathbf{HK}} \neg\neg\varphi$$

が従う． ∎

定理 5.1.9 (対偶律 2). φ と ψ を式とするとき

$$\vdash_{\mathbf{HK}} (\,\varphi \rightarrow \neg\psi\,) \rightarrow (\,\psi \rightarrow \neg\varphi\,).$$

略証． 対偶律 1 (定理 5.1.5) より

$$\varphi \rightarrow \neg\psi \vdash_{\mathbf{HK}} \neg\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$$

が成り立ち，他方で二重否定の導入 (定理 5.1.8) より

$$\psi \vdash_{\mathbf{HK}} \neg\neg\psi$$

が成り立つので，三段論法より

$$\psi,\ \varphi \rightarrow \neg\psi \vdash_{\mathbf{HK}} \neg\varphi$$

が従い，演繹定理より

$$\varphi \rightarrow \neg\psi \vdash_{\mathbf{HK}} \psi \rightarrow \neg\varphi$$

が得られる． ∎

定理 5.1.10 (弱 De Morgan の法則 2). φ を式とし，変項 x が φ に自由に現れるとするとき，

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \forall x \neg\varphi \rightarrow \neg\exists x\varphi.$$

略証． y を φ に現れない変項とすれば，量化の公理 (UE) より

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \forall x \neg\varphi \rightarrow \neg\varphi(x/y)$$

となるので，対偶律 2 (定理 5.1.9) より

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \varphi(x/y) \rightarrow \neg\forall x \neg\varphi$$

となる．汎化によって

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \forall y\,(\,\varphi(x/y) \rightarrow \neg\forall x \neg\varphi\,)$$

が成り立ち，量化の公理 (EE) によって

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \exists x \neg\varphi \rightarrow \neg\forall x \neg\varphi$$

が従い，再び対偶律 2 (定理 5.1.9) より

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \forall x \neg\varphi \rightarrow \neg\exists x\varphi$$

が得られる． ∎

定理 5.1.11 (De Morgan の法則 1). φ と ψ を式とするとき

$$\vdash_{\mathbf{HK}} (\,\neg\varphi \vee \psi\,) \rightarrow \neg(\,\varphi \wedge \neg\psi\,).$$

略証． 論理積の除去 (CE1)(CE2) より

$$\varphi \wedge \neg\psi \vdash_{\mathbf{HK}} \neg\varphi,$$
$$\varphi \wedge \neg\psi \vdash_{\mathbf{HK}} \psi$$

が成り立つので，矛盾の導入 (CTD1)(CTD2) より

$$\varphi \wedge \neg\psi \vdash_{\mathbf{HK}} \varphi \rightarrow \bot,$$
$$\varphi \wedge \neg\psi \vdash_{\mathbf{HK}} \neg\psi \rightarrow \bot$$

となり，論理和の除去 (DE) より

$$\varphi \wedge \neg\psi \vdash_{\mathbf{HK}} \varphi \vee \neg\psi \rightarrow \perp$$

が従い，否定の導入 (NI) より

$$\varphi \wedge \neg\psi \vdash_{\mathbf{HK}} \neg(\varphi \vee \neg\psi)$$

が得られる． ∎

定理 5.1.12 (論理和の対称律). φ と ψ を式とするとき，

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \varphi \vee \psi \rightarrow \psi \vee \varphi.$$

略証. 論理和の導入 (DI1)(DI2) より

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \varphi \rightarrow \psi \vee \varphi,$$
$$\vdash_{\mathbf{HK}} \psi \rightarrow \psi \vee \varphi$$

が成り立つので，論理和の除去 (DE) より

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \varphi \vee \psi \rightarrow \psi \vee \varphi$$

が従う． ∎

定理 5.1.13 (含意の論理和への遺伝性). φ と ψ と χ を式とするとき，

$$\vdash_{\mathbf{HK}} (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \wedge \chi \rightarrow \psi \wedge \chi).$$

略証. 三段論法より

$$\varphi, \varphi \rightarrow \psi \vdash_{\mathbf{HK}} \psi$$

が成り立ち，論理和の導入 (DI1) より

$$\varphi, \varphi \rightarrow \psi \vdash_{\mathbf{HK}} \psi \vee \chi$$

が従い，演繹定理より

$$\varphi \rightarrow \psi \vdash_{\mathbf{HK}} \varphi \rightarrow \psi \vee \chi$$

が得られる．他方で論理和の導入 (DI2) より

$$\varphi \rightarrow \psi \vdash_{\mathbf{HK}} \chi \rightarrow \psi \vee \chi$$

も成り立つので，論理和の除去 (DE) より

$$\varphi \rightarrow \psi \vdash_{\mathbf{HK}} \varphi \vee \chi \rightarrow \psi \vee \chi$$

が得られる． ∎

定理 5.1.14 (含意の論理積への遺伝性). φ と ψ と χ を式とするとき,

$$\vdash_{\mathbf{HK}} (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi \wedge \chi).$$

略証. 論理積の除去 (CE1)(CE2) 及び三段論法より

$$\psi \rightarrow \chi, \varphi \wedge \psi \vdash_{\mathbf{HK}} \varphi,$$
$$\psi \rightarrow \chi, \varphi \wedge \psi \vdash_{\mathbf{HK}} \psi,$$

そして

$$\psi \rightarrow \chi, \varphi \wedge \psi \vdash_{\mathbf{HK}} \chi$$

が成り立つので，論理積の導入 (CI) より

$$\psi \rightarrow \chi, \varphi \wedge \psi \vdash_{\mathbf{HK}} \varphi \wedge \chi$$

が従う. ■

定理 5.1.15 (論理積と全称の交換). φ と ψ を式とし，ψ には変項 x が自由に現れるとするとき,

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \forall x (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi \wedge \forall x \psi.$$

略証. 量化の公理 (UE) より

$$\forall x (\varphi \wedge \psi) \vdash_{\mathbf{HK}} \varphi \wedge \psi$$

が成り立ち，論理積の除去 (CE1)(CE2) より

$$\forall x (\varphi \wedge \psi) \vdash_{\mathbf{HK}} \varphi,$$
$$\forall x (\varphi \wedge \psi) \vdash_{\mathbf{HK}} \psi$$

となる．汎化によって

$$\forall x (\varphi \wedge \psi) \vdash_{\mathbf{HK}} \forall x \psi$$

が成り立ち，論理積の導入 (CI) によって

$$\forall x (\varphi \wedge \psi) \vdash_{\mathbf{HK}} \varphi \wedge \forall x \psi$$

が得られる. ■

定理 5.1.16. φ と ψ に変項 x が自由に現れるとき,

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \forall x (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\exists x \varphi \rightarrow \exists x \psi).$$

略証． 量化の公理 (UE) より

$$\forall x (\varphi \rightarrow \psi) \vdash_{\mathbf{HK}} \varphi \rightarrow \psi$$

となるので，演繹定理より

$$\varphi, \forall x (\varphi \rightarrow \psi) \vdash_{\mathbf{HK}} \psi$$

が成り立つ．量化の公理 (EI) より

$$\varphi, \forall x (\varphi \rightarrow \psi) \vdash_{\mathbf{HK}} \exists x \psi$$

が成り立ち，演繹定理より

$$\forall x (\varphi \rightarrow \psi) \vdash_{\mathbf{HK}} \varphi \rightarrow \exists x \psi$$

が従う．汎化によって

$$\forall x (\varphi \rightarrow \psi) \vdash_{\mathbf{HK}} \forall x (\varphi \rightarrow \exists x \psi)$$

となり，量化の公理 (EE) より

$$\forall x (\varphi \rightarrow \psi) \vdash_{\mathbf{HK}} \exists x \varphi \rightarrow \exists x \psi$$

が従う． ∎

5.1.3 二重否定の除去

定理 5.1.17 (対偶律 3). φ と ψ を式とするとき

$$\vdash_{\mathbf{HK}} (\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \varphi).$$

略証． 対偶律 1 (定理 5.1.5) より

$$\neg\varphi \rightarrow \psi \vdash_{\mathbf{HK}} \neg\psi \rightarrow \neg\neg\varphi$$

が成り立つので，演繹定理より

$$\neg\psi, \neg\varphi \rightarrow \psi \vdash_{\mathbf{HK}} \neg\neg\varphi$$

となり，二重否定の除去 (DNE) より

$$\neg\psi, \neg\varphi \rightarrow \psi \vdash_{\mathbf{HK}} \varphi$$

が従う．そして演繹定理より

$$\neg\varphi \rightarrow \psi \vdash_{\mathbf{HK}} \neg\psi \rightarrow \varphi$$

が得られる． ∎

定理 5.1.18 (強 De Morgan の法則 2). φ を式とし，変項 x が φ に自由に現れるとするとき，

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \neg\forall x\varphi \rightarrow \exists x\,\neg\varphi.$$

略証. y を φ に現れない変項とすれば，量化の公理 (EI) より

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \neg\varphi(x/y) \rightarrow \exists x\,\neg\varphi$$

となり，対偶律 3 (定理 5.1.17) より

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \neg\exists x\varphi \rightarrow \varphi(x/y)$$

が成り立つ．汎化によって

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \forall y\,(\neg\exists x\varphi \rightarrow \varphi(x/y))$$

となり，量化の公理 (UI) より

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \neg\exists x\varphi \rightarrow \forall x\varphi$$

が従い，再び対偶律 3 (定理 5.1.17) より

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \neg\forall x\varphi \rightarrow \exists x\,\neg\varphi$$

が得られる． ∎

定理 5.1.19 (対偶律 4). φ と ψ を式とするとき

$$\vdash_{\mathbf{HK}} (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi).$$

略証. 対偶律 3 (定理 5.1.17) と演繹定理より

$$\neg\varphi \rightarrow \neg\psi \vdash_{\mathbf{HK}} \neg\neg\psi \rightarrow \varphi$$

が成り立つ．二重否定の導入 (定理 5.1.8) より

$$\psi \vdash_{\mathbf{HK}} \neg\neg\psi$$

が成り立つので，三段論法より

$$\psi, \neg\varphi \rightarrow \neg\psi \vdash_{\mathbf{HK}} \varphi$$

が従い，演繹定理より

$$\neg\varphi \rightarrow \neg\psi \vdash_{\mathbf{HK}} \psi \rightarrow \varphi$$

が得られる． ∎

定理 5.1.20 (背理法の原理). φ を式とするとき

$$\vdash_{\mathbf{HK}} (\neg\varphi \to \bot) \to \varphi.$$

略証. 否定の導入 (NI) と演繹定理より

$$\neg\varphi \to \bot \vdash_{\mathbf{HK}} \neg\neg\varphi$$

が成り立ち，二重否定の除去 (DNE) より

$$\neg\varphi \to \bot \vdash_{\mathbf{HK}} \varphi$$

が従う． ∎

定理 5.1.21 (爆発律). φ を式とするとき

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \bot \to \varphi.$$

略証. 含意の導入 (K) と演繹定理より

$$\bot \vdash_{\mathbf{HK}} \neg\varphi \to \bot$$

が成り立ち，背理法の原理 (定理 5.1.20) より

$$\bot \vdash_{\mathbf{HK}} \varphi$$

が従う． ∎

定理 5.1.22 (否定の論理和は含意で表せる). φ と ψ を式とするとき

$$\vdash_{\mathbf{HK}} (\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi).$$

略証. 矛盾の導入 (CTD1) と演繹定理より

$$\neg\varphi, \varphi \vdash_{\mathbf{HK}} \bot$$

となり，爆発律 (定理 5.1.21) より

$$\neg\varphi, \varphi \vdash_{\mathbf{HK}} \psi$$

となり，演繹定理より

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$$

が得られる．他方で含意の導入 (K) より

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$$

も成り立つので，論理和の除去 (DE) より

$$\vdash_{\mathbf{HK}} (\neg\varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$$

が従う． ∎

定理 5.1.23 (驚嘆すべき帰結). φ を式とするとき

$$\vdash_{\mathbf{HK}} (\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi.$$

略証． 三段論法より

$$\neg\varphi, \neg\varphi \rightarrow \varphi \vdash_{\mathbf{HK}} \varphi$$

が成り立ち，矛盾の導入 (CTD1) より

$$\neg\varphi, \neg\varphi \rightarrow \varphi \vdash_{\mathbf{HK}} \neg\varphi \rightarrow \bot$$

が成り立ち，三段論法より

$$\neg\varphi, \neg\varphi \rightarrow \varphi \vdash_{\mathbf{HK}} \bot$$

が従う．演繹定理より

$$\neg\varphi \rightarrow \varphi \vdash_{\mathbf{HK}} \neg\varphi \rightarrow \bot$$

となり，背理法の原理 (定理 5.1.20) より

$$\neg\varphi \rightarrow \varphi \vdash_{\mathbf{HK}} \varphi$$

が従う． ∎

定理 5.1.24 (排中律). φ を式とするとき

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \varphi \vee \neg\varphi.$$

略証． 論理和の導入 (DI1) と演繹定理より

$$\varphi \vdash_{\mathbf{HK}} \varphi \vee \neg\varphi$$

が成り立ち，矛盾の導入 (CTD1) より

$$\varphi \vdash_{\mathbf{HK}} \neg(\varphi \vee \neg\varphi) \rightarrow \bot$$

が成り立ち，演繹定理より

$$\varphi, \neg(\varphi \vee \neg\varphi) \vdash_{\mathbf{HK}} \bot$$

となり，再び演繹定理より

$$\neg(\varphi \vee \neg\varphi) \vdash_{\mathbf{HK}} \varphi \rightarrow \bot$$

となり，否定の導入 (NI) より

$$\neg(\varphi \vee \neg\varphi) \vdash_{\mathbf{HK}} \neg\varphi$$

が成り立つ．論理和の導入 (DI2) より

$$\neg(\varphi \vee \neg\varphi) \vdash_{\mathbf{HK}} \varphi \vee \neg\varphi$$

が従い，演繹定理より

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \neg(\varphi \vee \neg\varphi) \rightarrow \varphi \vee \neg\varphi$$

が成り立ち，驚嘆すべき帰結 (定理 5.1.23) との三段論法より

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \varphi \vee \neg\varphi$$

が得られる． ∎

定理 5.1.25 (含意は否定と論理和で表せる). φ と ψ を式とするとき

$$\vdash_{\mathbf{HK}} (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\varphi \vee \psi).$$

略証. 含意の論理和への遺伝性 (定理 5.1.13) と演繹定理より

$$\varphi \rightarrow \psi \vdash_{\mathbf{HK}} \varphi \vee \neg\varphi \rightarrow \psi \vee \neg\varphi$$

が成り立ち，排中律 (定理 5.1.24) との三段論法より

$$\varphi \rightarrow \psi \vdash_{\mathbf{HK}} \psi \vee \neg\varphi$$

が従い，論理和の対称律 (定理 5.1.12) より

$$\varphi \rightarrow \psi \vdash_{\mathbf{HK}} \neg\varphi \vee \psi$$

が得られる． ∎

定理 5.1.26 (De Morgan の法則 2). φ と ψ を式とするとき

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \neg(\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow (\neg\varphi \vee \psi).$$

略証．　論理積の導入 (CI2) より

$$\varphi \vdash_{\mathbf{HK}} \neg\psi \rightarrow \varphi \wedge \neg\psi$$

が成り立つので，対偶律 3 (定理 5.1.17) より

$$\varphi \vdash_{\mathbf{HK}} \neg(\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow \psi$$

が成り立つ．演繹定理より

$$\begin{aligned} \varphi, \neg(\varphi \wedge \neg\psi) &\vdash_{\mathbf{HK}} \psi, \\ \neg(\varphi \wedge \neg\psi) &\vdash_{\mathbf{HK}} \varphi \rightarrow \psi \end{aligned}$$

が従い，右辺を否定と論理和に書き換えれば

$$\neg(\varphi \wedge \neg\psi) \vdash_{\mathbf{HK}} \neg\varphi \vee \psi$$

が得られる (定理 5.1.25)．■

5.1.4　保存拡大の補題

定理 5.1.27.　φ と ψ を式とし，ψ には x が自由に現れているとするとき，

$$\vdash_{\mathbf{HK}} (\varphi \rightarrow \exists x\psi) \rightarrow \exists x(\varphi \rightarrow \psi).$$

略証．　含意は否定と論理和で表せる (定理 5.1.25) ので

$$\varphi \rightarrow \exists x\psi \vdash_{\mathbf{HK}} \neg\varphi \vee \exists x\psi$$

となり，De Morgan の法則 (定理 5.1.11) より

$$\varphi \rightarrow \exists x\psi \vdash_{\mathbf{HK}} \neg(\varphi \wedge \neg\exists x\psi) \tag{5.1}$$

となる．ところで量化記号についての De Morgan の法則 (定理 5.1.10) より

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \forall x \neg\psi \rightarrow \neg\exists x\psi$$

が成り立つので，含意の論理積への遺伝性 (定理 5.1.14) より

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \varphi \wedge \forall x \neg\psi \rightarrow \varphi \wedge \neg\exists x\psi$$

が得られ，対偶律 4 (定理 5.1.19) より

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \neg(\varphi \wedge \neg\exists x\psi) \rightarrow \neg(\varphi \wedge \forall x \neg\psi)$$

となり，(5.1) との三段論法より

$$\varphi \rightarrow \exists x\psi \vdash_{\mathbf{HK}} \neg(\varphi \wedge \forall x \neg\psi) \tag{5.2}$$

が従う．また論理積と全称の交換 (定理 5.1.15) と対偶律 4 (定理 5.1.19) より

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \neg(\varphi \wedge \forall x \neg\psi) \rightarrow \neg\forall x(\varphi\wedge\neg\psi)$$

が成り立つので，(5.2) との三段論法より

$$\varphi \rightarrow \exists x\psi \vdash_{\mathbf{HK}} \neg\forall x(\varphi\wedge\neg\psi)$$

が従い，量化記号についての De Morgan の法則 (定理 5.1.18) より

$$\varphi \rightarrow \exists x\psi \vdash_{\mathbf{HK}} \exists x\neg(\varphi\wedge\neg\psi) \tag{5.3}$$

が従う．ここで De Morgan の法則 (定理 5.1.26) と汎化により

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \forall x(\neg(\varphi\wedge\neg\psi) \rightarrow (\neg\varphi\vee\psi))$$

が成り立つので，定理 5.1.16 より

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \exists x\neg(\varphi\wedge\neg\psi) \rightarrow \exists x(\neg\varphi\vee\psi)$$

が得られ，(5.3) との三段論法より

$$\varphi \rightarrow \exists x\psi \vdash_{\mathbf{HK}} \exists x(\neg\varphi\vee\psi) \tag{5.4}$$

が従う．同様に定理 5.1.22 と汎化により

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \forall x((\neg\varphi\vee\psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi))$$

が成り立つので，定理 5.1.16 より

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \exists x(\neg\varphi\vee\psi) \rightarrow \exists x(\varphi \rightarrow \psi)$$

が得られ，(5.4) との三段論法より

$$\varphi \rightarrow \exists x\psi \vdash_{\mathbf{HK}} \exists x(\varphi \rightarrow \psi)$$

が従う． ∎

定理 5.1.28. φ と式とし，x と y を変項とし，φ には x が自由に現れて，y は φ の中で x への代入について自由であるとするとき，

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \exists x\varphi \rightarrow \exists y\varphi(x/y).$$

略証. 量化の公理 (EI) より

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \varphi \rightarrow \exists y\varphi(x/y)$$

が成り立ち，汎化によって

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \forall x(\varphi \rightarrow \exists y\varphi(x/y))$$

となり，量化の公理 (EE) によって

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \exists x\varphi \rightarrow \exists y\varphi(x/y).$$

が得られる． ∎

定理 5.1.29. φ と式とし，x と y を変項とし，φ には x が自由に現れて，y は φ の中で x への代入について自由であるとするとき，

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \exists y\,(\exists x\varphi \rightarrow \varphi(x/y)).$$

略証. 定理 5.1.27 より

$$\vdash_{\mathbf{HK}} (\exists x\varphi \rightarrow \exists y\varphi(x/y)) \rightarrow \exists y\,(\exists x\varphi \rightarrow \varphi(x/y))$$

が成り立ち，定理 5.1.28 より

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \exists x\varphi \rightarrow \exists y\varphi(x/y)$$

が成り立つので，三段論法より

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \exists y\,(\exists x\varphi \rightarrow \varphi(x/y))$$

が出る．

5.2 Henkin 拡大

この節では「Σ から ψ への **HE** の証明で $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の文の列であるものが取れる」ならば「Γ から ψ への **HK** の証明で $\mathcal{L}_{\in}$ の式の列であるものが取れる」ことを示す．**HE** の証明に使われる式は全て文である．

論理的公理 5.2.1 (HE の公理 (命題論理)). φ と ψ と ξ を文とするとき

(S) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$.
(K) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$.
(CTD1) $\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \bot)$.
(CTD2) $\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \bot)$.
(DI) $(\varphi \rightarrow \bot) \rightarrow \neg\varphi$.
(DI1) $\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$.
(DI2) $\psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$.
(DE) $(\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi))$.
(CI) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi))$.
(CE1) $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$.
(CE2) $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$.
(DNE) $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$.

論理的公理 5.2.2 (HE の公理 (量化)). φ を式とし，τ を主要 ε 項とし，x を変項とし，φ には x のみが自由に現れているとするとき

(DM) $\neg\forall x\varphi \rightarrow \exists x \neg\varphi$.

(UE) $\forall x\varphi \rightarrow \varphi(x/\tau)$.

(EI) $\varphi(x/\tau) \rightarrow \exists x\varphi$.

(EE) $\hat{\varphi}$ を，φ が $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式でないときは φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き直したものとし，φ が $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式であるときは φ そのものとする．このとき

$$\exists x\varphi \rightarrow \varphi(x/\varepsilon x\hat{\varphi}).$$

第 3 章での証明可能性の定義を列の概念を用いて書き直しておく．

メタ定義 5.2.3 (HE における証明). $\mathscr{S}$ を文からなる公理系とする．このとき文の列 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ が $\mathscr{S}$ から φ_n への **HE** の証明であるとは，各 φ_i が次のいずれかであるということである：

- φ_i は **HE** の公理である．
- φ_i は $\mathscr{S}$ の公理である．
- φ_i は，これより前の式 φ_j と φ_k の三段論法で得られる．

ψ を文とし，$\mathscr{S}$ を公理系とするとき，$\mathscr{S}$ から ψ への **HE** の証明で $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の文の列であるものが取れることを

$$\mathscr{S} \vdash_{\mathbf{HE}, \mathcal{L}_{\mathcal{E}}} \psi$$

と書く．他方で $\mathscr{S}$ から ψ への **HE** の証明で $\mathcal{L}$ の文の列であるものが取れることは，第 3 章の証明可能性と同義であるから

$$\mathscr{S} \vdash \psi$$

と書く．

いま **HK** の公理に **HE** の (EE) を追加した証明体系を **HK**ε とする．$\mathscr{T}$ を公理系とするとき，$\mathscr{T}$ に **HE** の (EE) を追加した公理系を $\mathscr{T}$ の **Henkin 拡大 (Henkin extension)** と呼ぶが，今回は **HK** の公理に追加しているので Henkin 拡大の一種と見ることが出来る．Henkin 拡大とはすなわち，全ての存在文に証人を付けるための拡大である．公理系 $\mathscr{S}$ から文 ψ への **HK**ε の証明で $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式の列であるものが取れることを

$$\mathscr{S} \vdash_{\mathbf{HK}\varepsilon, \mathcal{L}_{\mathcal{E}}} \psi$$

と書く．

メタ定理 5.2.4 (HE で証明可能なら HKε でも証明可能). $\mathscr{S}$ を $\mathcal{L}_{\in}$ の文からなる公理系とし，ψ を $\mathcal{L}_{\in}$ の文とする．このとき $\mathscr{S} \vdash_{\mathbf{HE}, \mathcal{L}_{\mathcal{E}}} \psi$ ならば $\mathscr{S} \vdash_{\mathbf{HK}\varepsilon, \mathcal{L}_{\mathcal{E}}} \psi$ である．

メタ証明. **HE** の公理で **HK**ε の公理でないものは

$$\neg\forall x\varphi \rightarrow \exists x \neg\varphi$$

だけであるが，これは De Morgan の法則 (定理 5.1.6) より導かれる．従って，証明の中に **HE** の公理 (DM) があれば，それより前の列に (DM) への **HK** の証明を挿入すれば，$\mathscr{S}$ から ψ への **HK**ε の証明になる． ∎

メタ定理 5.2.5 (ε 項を変項に取り替えても証明). $\mathscr{S}$ を $\mathcal{L}_{\in}$ の文からなる公理系とし，ψ を $\mathcal{L}_{\in}$ の文とし，$\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ を $\mathscr{S}$ から ψ への **HK** の証明で $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式の列であるものとする．また e をこの列の式に現れる主要 ε 項とし，y をこの証明に現れない変項とする．そして各 φ_i に対してそこに現れる e を全て y に取り替えた式を $\hat{\varphi}_i$ と書く．ただし取り替えるのは他の項の真部分項になっていない e のみであり，φ_i に e が現れなければ $\hat{\varphi}_i$ は φ_i とする．このとき

$$\hat{\varphi}_1, \cdots, \hat{\varphi}_n$$

は $\mathscr{S}$ から ψ への **HK** の証明である．

メタ証明.

case1　φ_i が **HK** の命題論理の公理であるとき，たとえば φ_i が

$$\varphi \rightarrow (\chi \rightarrow \varphi)$$

なる式なら，$\hat{\varphi}_i$ も

$$\hat{\varphi} \rightarrow (\hat{\chi} \rightarrow \hat{\varphi})$$

なる形の式となるので **HK** の公理である．他の場合も同様である．

case2　φ_i が **HK** の量化公理であるとき，つまり

$$\begin{aligned}
&\forall z(\chi \rightarrow \varphi(x/z)) \rightarrow (\chi \rightarrow \forall x\varphi),\\
&\forall x\varphi \rightarrow \varphi(x/t),\\
&\varphi(x/t) \rightarrow \exists x\varphi,\\
&\forall z(\varphi(x/z) \rightarrow \chi) \rightarrow (\exists x\varphi \rightarrow \chi)
\end{aligned}$$

のいずれかであるとき，$\hat{\varphi}_i$ は

$$\begin{aligned}
&\forall z(\hat{\chi} \rightarrow \hat{\varphi}(x/z)) \rightarrow (\hat{\chi} \rightarrow \forall x\hat{\varphi}),\\
&\forall x\hat{\varphi} \rightarrow \hat{\varphi}(x/t),\\
&\hat{\varphi}(x/t) \rightarrow \exists x\hat{\varphi},\\
&\forall z(\hat{\varphi}(x/z) \rightarrow \hat{\chi}) \rightarrow (\exists x\hat{\varphi} \rightarrow \hat{\chi})
\end{aligned}$$

なる形の式となり，**HK** の公理であるための変項の条件も満たされる．ここで注意しておくと，e が $\varphi(x/t)$ に現れる場合，φ で x に代入された t を含むようには e は現れない．もしそのような t が e に現れたら，e のその t を x に置き換えた ε 項 e' は，φ すなわち $\exists x\varphi$ の中に現れることになるが，e' は主要 ε 項ではないので第 2.4.6 節の約束に違反してしまう．従って $\varphi(x/t)$ に現れる e を y に置き換えた式は $\hat{\varphi}(x/t)$ なる形で書けるのである．

case3　φ_i が $\mathscr{S}$ の公理であるときは $\mathcal{L}_{\in}$ の文なので，$\hat{\varphi}_i$ は φ_i である．

case4　φ_i が前の式 φ_j, φ_k から三段論法で得られているとき，φ_k が $\varphi_j \rightarrow \varphi_i$ なる式なら $\hat{\varphi}_k$ は

$$\hat{\varphi}_j \rightarrow \hat{\varphi}_i$$

なる式であるから，$\hat{\varphi}_i$ は $\hat{\varphi}_j$ と $\hat{\varphi}_k$ から三段論法で得られる．

case5　φ_i が前の式 φ_j から汎化で得られているとき，つまり変項 a, x と x が自由に現れる式 χ が取れて，φ_j が $\chi(x/a)$ で φ_i が $\forall x \chi$ であるとき，$\hat{\varphi}_j$ は

$$\hat{\chi}(x/a)$$

なる式で (e は x に代入された a を含むようには現れない) $\hat{\varphi}_i$ は

$$\forall x \hat{\chi}$$

なる式であるから，$\hat{\varphi}_i$ は $\hat{\varphi}_j$ から汎化で得られる．∎

メタ定理 5.2.6 (HKε で証明可能なら HK でも証明可能).　$\mathscr{S}$ を $\mathcal{L}_\in$ の文からなる公理系とし，ψ を $\mathcal{L}_\in$ の文とするとき，$\mathscr{S} \vdash_{\mathbf{HK}\varepsilon, \mathcal{L}_\varepsilon} \psi$ ならば $\mathscr{S} \vdash_{\mathbf{HK}, \mathcal{L}_\varepsilon} \psi$ である．

略証．　$\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ の中から **HE** の (EE) であるものを全て取り出して $\varphi_{i_1}, \cdots \varphi_{i_m}$ と並べれば，$\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ は公理系 $\varphi_{i_1}, \cdots, \varphi_{i_m}, \mathscr{S}$ から ψ への **HK** の証明となる．各 φ_{i_j} は

$$\exists x_j F_j(x_j) \rightarrow F_j(\varepsilon x_j F_j)$$

なる形をしている．ここで $\varepsilon x_m F_m$ は $F_1, \cdots, F_{m-1}$ の中には現れないとすると[*2]

$$\varphi_{i_1}, \cdots, \varphi_{i_{m-1}}, \mathscr{S} \vdash_{\mathbf{HK}} \psi$$

が示される．実際，**HK** の演繹定理より

$$\varphi_{i_1}, \cdots, \varphi_{i_{m-1}}, \mathscr{S} \vdash_{\mathbf{HK}} (\exists x_m F_m(x_m) \rightarrow F_m(\varepsilon x_m F_m)) \rightarrow \psi$$

が成り立つが，このときの $\varphi_{i_1}, \cdots, \varphi_{i_{m-1}}, \mathscr{S}$ から $(\exists x_m F_m(x_m) \rightarrow F_m(\varepsilon x_m F_m)) \rightarrow \psi$ への証明に現れる $\varepsilon x_m F_m$ を，その証明に使われていない変項 y に置き換えれば[*3]，それで得られる式の列は $\varphi_{i_1}, \cdots, \varphi_{i_{m-1}}, \mathscr{S}$ から $(\exists x_m F_m(x_m) \rightarrow F_m(y)) \rightarrow \psi$ への **HK** の証明となる (メタ定理 5.2.5)．つまり

$$\varphi_{i_1}, \cdots, \varphi_{i_{m-1}}, \mathscr{S} \vdash_{\mathbf{HK}} (\exists x_m F_m(x_m) \rightarrow F_m(y)) \rightarrow \psi$$

が成り立つ．すると汎化により

$$\varphi_{i_1}, \cdots, \varphi_{i_{m-1}}, \mathscr{S} \vdash_{\mathbf{HK}} \forall y ((\exists x_m F_m(x_m) \rightarrow F_m(y)) \rightarrow \psi)$$

[*2] このような項 $\varepsilon x_m F_m$ は必ず取れる．たとえば $\varepsilon x_i F_i$ が F_j に現れたら，$\varepsilon x_j F_j$ は F_i には現れない．実際 F_i に現れたら $\varepsilon x_i F_i$ が F_i に現れることになるが，F_i より長い $\varepsilon x_i F_i$ が F_i に現れることなどあり得ない．同様に，$\varepsilon x_j F_j$ が F_k に現れたら，$\varepsilon x_k F_k$ は F_i と F_j には現れない．この確認を繰り返せばよい．

[*3] 置き換える $\varepsilon x_m F_m$ は他の項の真部分項になっていない箇所のものだけである．また $\varepsilon x_m F_m$ は $F_1, \cdots, F_{m-1}$ の中には現れないので $\varphi_{i_1}, \cdots, \varphi_{i_{m-1}}$ の中にも現れない．ここで注意しておくと，たとえば $\varepsilon x_m F_m$ が $F_1(\varepsilon x_1 F_1)$ に現れたとすると，その $\varepsilon x_m F_m$ の中の $\varepsilon x_1 F_1$ を x_1 に置き換えた ε 項が F_1 に現れることになる．しかしその ε 項は主要 ε 項ではなく，第 2.4.6 節の約束に違反してしまう．ゆえに $\varepsilon x_m F_m$ は $\varphi_{i_1}, \cdots, \varphi_{i_{m-1}}$ の中に現れず，これらの式は置換による影響を受けない．$\mathscr{S}$ の公理も $\mathcal{L}_\in$ の文であるから置換による影響を受けない．

となり，**HK** の公理 (EE) により

$$\varphi_{i_1}, \cdots, \varphi_{i_{m-1}}, \mathscr{S} \vdash_{\mathbf{HK}} \exists y\,(\,\exists x_m F_m(x_m) \;\rightarrow\; F_m(y)\,) \;\rightarrow\; \psi$$

が従う．定理 5.1.29 より

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \exists y\,(\,\exists x_m F_m(x_m) \;\rightarrow\; F_m(y)\,)$$

が成り立つので，三段論法より

$$\varphi_{i_1}, \cdots, \varphi_{i_{m-1}}, \mathscr{S} \vdash_{\mathbf{HK}} \psi$$

が従う．以降も同様にして **HK** の公理 (EE) を一本ずつ削除していけば，$\mathscr{S}$ から ψ への **HK** の証明で $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式の列であるものが得られる． ∎

第 3 章の Σ の公理は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の文の集まりであったが，それらを $\mathcal{L}_{\in}$ の文に直した公理体系を Γ と書く．Γ は次の文からなる．

外延性

$$\forall x\,\forall y\,(\,\forall z\,(\,z \in x \;\leftrightarrow\; z \in y\,) \;\rightarrow\; x = y\,).$$

相等性

$$\begin{aligned}
&\forall x\,\forall y\,(\,x = y \;\rightarrow\; y = x\,),\\
&\forall x\,\forall y\,\forall z\,(\,x = y \;\rightarrow\; (\,x \in z \;\rightarrow\; y \in z\,)),\\
&\forall x\,\forall y\,\forall z\,(\,x = y \;\rightarrow\; (\,z \in x \;\rightarrow\; z \in y\,)).
\end{aligned}$$

置換　φ を $\mathcal{L}_{\in}$ の式とし，s, t を φ に自由に現れる変項とし，x は φ で s への代入について自由であり，y, z は φ で t への代入について自由であるとするとき，次の式の全称閉包[*4]は公理である：

$$\forall x\,\forall y\,\forall z\,(\,\varphi(x,y) \wedge \varphi(x,z) \;\rightarrow\; y = z\,) \;\rightarrow\; \forall a\,\exists z\,\forall y\,(\,y \in z \;\leftrightarrow\; \exists x\,(\,x \in a \wedge \varphi(x,y)\,)).$$

対

$$\forall x\,\forall y\,\exists p\,\forall z\,(\,x = z \vee y = z \;\leftrightarrow\; z \in p\,).$$

合併

$$\forall x\,\exists u\,\forall y\,(\,\exists z\,(\,z \in x \wedge y \in z\,) \;\leftrightarrow\; y \in u\,).$$

冪

$$\forall x\,\exists p\,\forall y\,(\,\forall z\,(\,z \in y \;\rightarrow\; z \in x\,) \;\leftrightarrow\; y \in p\,).$$

正則性

$$\forall r\,(\,\exists x\,(\,x \in r\,) \;\rightarrow\; \exists y\,(\,y \in r \wedge \forall z\,(\,z \in r \;\rightarrow\; z \notin y\,))).$$

無限

$$\exists x\,(\,\exists s\,(\,\forall t\,(\,t \notin s\,) \wedge s \in x\,) \wedge \forall y\,(\,y \in x \;\rightarrow\; \exists u\,(\,\forall v\,(\,v \in u \;\leftrightarrow\; v \in y \vee v = y\,) \wedge u \in x\,))).$$

メタ定理 5.2.7 (Σ の定理は Γ の定理). ψ を $\mathcal{L}_{\in}$ の文とするとき，$\Sigma \vdash_{\mathbf{HE},\mathcal{L}_{\mathcal{E}}} \psi$ ならば $\Gamma \vdash_{\mathbf{HE},\mathcal{L}_{\mathcal{E}}} \psi$ である．

略証． Σ の公理が $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の文であるときに Γ から証明できることを示せばよい．Σ と Γ で形が違う公理は外延性，相等性，要素，置換である (内包性公理は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式ではありえないので今回は対象外).

外延性 a と b を主要 ε 項とするとき，**HE** の公理 (UE) によって

$$\begin{aligned}
&\Gamma \vdash_{\mathbf{HE},\mathcal{L}_{\mathcal{E}}} \forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y), \\
&\Gamma \vdash_{\mathbf{HE},\mathcal{L}_{\mathcal{E}}} \forall y (\forall z (z \in a \leftrightarrow z \in y) \rightarrow a = y), \\
&\Gamma \vdash_{\mathbf{HE},\mathcal{L}_{\mathcal{E}}} \forall z (z \in a \leftrightarrow z \in b) \rightarrow a = b
\end{aligned}$$

となる．Σ の相等性の公理も同様に導かれる．

要素 a と b を主要 ε 項とするとき，定理 4.1.2 と定理 4.1.3 の証明をもう一度おさらいすれば

$$\begin{aligned}
&\sigma \overset{\text{def}}{=\!=} \varepsilon z \neg(z \in a \leftrightarrow z \in a), && \\
&\quad \vdash_{\mathbf{HE},\mathcal{L}_{\mathcal{E}}} \sigma \in a \leftrightarrow \sigma \in a, && \text{含意の反射律 (論理的定理 3.1.4) と論理積の導入} \\
&\quad \vdash_{\mathbf{HE},\mathcal{L}_{\mathcal{E}}} \forall z (z \in a \leftrightarrow z \in a), && \text{全称の導出 (論理的定理 3.2.29)} \\
&\Gamma \vdash_{\mathbf{HE},\mathcal{L}_{\mathcal{E}}} \forall z (z \in a \leftrightarrow z \in a) \rightarrow a = a, && \text{前段の結果} \\
&\Gamma \vdash_{\mathbf{HE},\mathcal{L}_{\mathcal{E}}} a = a, && \text{三段論法} \\
&\Gamma \vdash_{\mathbf{HE},\mathcal{L}_{\mathcal{E}}} \exists x (a = x) && \textbf{HE}\ \text{の公理 (EI)}
\end{aligned}$$

となる．含意の導入 (K) より

$$\vdash_{\mathbf{HE},\mathcal{L}_{\mathcal{E}}} \exists x (a = x) \rightarrow (a \in b \rightarrow \exists x (a = x))$$

が成り立つので，三段論法より

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{HE},\mathcal{L}_{\mathcal{E}}} a \in b \rightarrow \exists x (a = x)$$

が従う．

置換 ψ が

$$\forall x \forall y \forall z (\varphi(x,y) \wedge \varphi(x,z) \rightarrow y = z) \rightarrow \forall a \exists z \forall y (y \in z \leftrightarrow \exists x (x \in a \wedge \varphi(x,y)))$$

なる文であるとき，φ に現れる主要 ε 項で φ の中で極大であるもの (他の項の真部分項になっていないもの) を ψ に現れない変項で置き換える．その際主要 ε 項ごとに違う変項を用いるが，同じ主要 ε 項は同じ変項で置き換える．そうして得られた式を $\tilde{\psi}$ とし，新しく追加した変項を $x_1, \cdots, x_n$ とすれば

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \tilde{\psi}(x_1, \cdots, x_n)$$

[4] φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とするとき，φ の全称閉包 **(universal closure)** とは

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi$$

なる形の文を指す．ただし $x_1, \cdots, x_n$ は φ に自由に現れる変項であって，また φ に自由に現れる変項はこれらのみであるとする．φ が文であるときは φ 自身を全称閉包とする．

は Γ の置換公理となる．$x_1, \cdots, x_n$ によって置き換えられた主要 ε 項を $\tau_1, \cdots, \tau_n$ とすれば，**HE** の公理 (UE) より

$$\begin{aligned}
&\Gamma \vdash_{\mathbf{HE}, \mathcal{L}_\varepsilon} \forall x_1 \cdots \forall x_n \tilde{\psi}(x_1, \cdots, x_n), \\
&\Gamma \vdash_{\mathbf{HE}, \mathcal{L}_\varepsilon} \forall x_2 \cdots \forall x_n \tilde{\psi}(\tau_1, x_2, \cdots, x_n), \\
&\Gamma \vdash_{\mathbf{HE}, \mathcal{L}_\varepsilon} \forall x_3 \cdots \forall x_n \tilde{\psi}(\tau_1, \tau_2, x_3, \cdots, x_n), \\
&\quad \vdots \\
&\Gamma \vdash_{\mathbf{HE}, \mathcal{L}_\varepsilon} \tilde{\psi}(\tau_1, \cdots, \tau_n),
\end{aligned}$$

が得られる．$\tilde{\psi}(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ とは ψ のことであるから ψ は Γ の定理である． ∎

メタ定理 5.2.8 (HE で証明可能なら HK でも証明可能). ψ を $\mathcal{L}_\in$ の文とするとき，$\Sigma \vdash_{\mathbf{HE}, \mathcal{L}_\varepsilon} \psi$ ならば $\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}, \mathcal{L}_\in} \psi$ である．

略証．$\Sigma \vdash_{\mathbf{HE}, \mathcal{L}_\varepsilon} \psi$ ならば，メタ定理 5.2.7 より

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{HE}, \mathcal{L}_\varepsilon} \psi$$

となり，メタ定理 5.2.4 より

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}\varepsilon, \mathcal{L}_\varepsilon} \psi$$

となり，メタ定理 5.2.6 より

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}, \mathcal{L}_\varepsilon} \psi$$

となる．最後の **HK** の証明を $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ とする．$\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ には主要 ε 項が残っている場合，$\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ の中で極大に現れる (他の項の真部分項ではない) 主要 ε 項が $e_1, \cdots, e_m$ で全てであるなら，$\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ に現れない相異なる変項 $y_1, \cdots, y_m$ を用意して，e_1 を y_1 に，e_2 を y_2 に，…，e_m を y_m に置き換える．全て置き換え終わった後の式の列はメタ定理 5.2.5 より **HK** の証明であるし，式自体は $\mathcal{L}_\in$ のものとなる． ∎

5.3 正則証明

この節では「Γ から ψ への **HK** の証明で $\mathcal{L}_\in$ の式の列であるものが取れる」ならば「Σ から ψ への **HE** の証明で $\mathcal{L}_\varepsilon$ の文の列であるものが取れる」ことを示す **HK** の証明の中で汎化が使われている場合，その固有変項は適当な主要 ε 項に置き換えることになる．たとえば

$$\psi(x/a)$$

から (ψ は x のみ自由に現れる式とする)

$$\forall x \psi$$

が汎化で導かれる場合，a を $\varepsilon x \neg\psi$ に置き換えれば

$$\psi(x/\varepsilon x \neg\psi),\quad \psi(x/\varepsilon x \neg\psi) \rightarrow \forall x\psi$$

から三段論法で $\forall x\psi$ が出てくる．ここで注意しておくと，汎化の固有変項の条件より a は $\forall x\psi$ に自由に現れないので，a は ψ にも自由に現れず，

$$\psi(x/a)(a/\varepsilon x \neg\psi)$$

と

$$\psi(x/\varepsilon x \neg\psi)$$

は一致しているのである．固有変項の置き換えは証明全体で一斉に行うので，二つの汎化に対して同じ固有変項が使われている場合は代入する主要 ε 項をうまく選ぶことが出来ない．従って，どの固有変項も一度の汎化にしか用いられないように証明を直す必要がある．

メタ定義 5.3.1 (正則証明). 正則証明 **(regular proof)** とは次を満たす証明 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ である．第一に，証明の中に現れるどの固有変項も一度の汎化にしか用いられない．第二に，a が φ_i から φ_j への汎化の固有変項ならば，a は φ_{i+1} 以降の式には自由に現れない．

HK の任意の証明は正則なものに変換することが出来る．

メタ定理 5.3.2 (証明に現れる変項に代入しても証明). $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式の列 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ を Γ から φ_n への **HK** の証明とし，a をこの証明に自由に現れる変項とし，b をこの証明に現れない $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項とする．

(1) b が変項である場合，$\varphi_1(a/b),\cdots,\varphi_n(a/b)$ は Γ からの **HK** の証明となる．

(2) b が変項でない場合[*5]，a がこの証明の固有変項でなければ $\varphi_1(a/b),\cdots,\varphi_n(a/b)$ は Γ からの **HK** の証明となる．

(1) の場合も (2) の場合も φ_i が φ_j の汎化で得られているなら $\varphi_i(a/b)$ も $\varphi_j(a/b)$ の汎化で得られる．

メタ証明. b が変項であるか否かが関係するのは case5 である．式の列が証明であるための条件に照合していく．各 φ_i に対して

case1 φ_i が **HK** の命題論理の公理である場合，たとえば φ_i が

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

なる形の公理ならば，$\varphi_i(a/b)$ は

$$\varphi(a/b) \rightarrow (\psi(a/b) \rightarrow \varphi(a/b))$$

なる式であるから **HK** の公理である．

case2 φ_i が **HK** の量化公理である場合，

[*5] 第 2.4.6 節の約束によって，この場合 b は主要 ε 項である．

- たとえば φ_i が **HK** の (UI)

$$\forall y\,(\,\psi \;\to\; \varphi(x/y)\,) \;\to\; (\,\psi \;\to\; \forall x\varphi\,)$$

であるとする．このとき，a が x であれば $\varphi_i(a/b)$ は

$$\forall y\,(\,\psi(a/b) \;\to\; \varphi(x/y)\,) \;\to\; (\,\psi(a/b) \;\to\; \forall x\varphi\,)$$

なる式となる．a が y であれば a は φ_i には自由に現れないので $\varphi_i(a/b)$ と φ_i は一致する．a が x とも y とも違うとき，$\varphi(x/y)(a/b)$ と $\varphi(a/b)(x/y)$ は一致するので $\varphi_i(a/b)$ は

$$\forall y\,(\,\psi(a/b) \;\to\; \varphi(a/b)(x/y)\,) \;\to\; (\,\psi(a/b) \;\to\; \forall x\varphi(a/b)\,)$$

なる式となる．ゆえにいずれの場合も $\varphi_i(a/b)$ は **HK** の (UI) となる．同様に φ_i が **HK** の (EE) であるときも $\varphi_i(a/b)$ は **HK** の (EE) となる．

- たとえば φ_i が **HK** の (EI)

$$\varphi(x/t) \;\to\; \exists x\varphi$$

であるとする．このとき，a が x であれば，x と t が違えば φ_i に a は自由に現れないので $\varphi_i(a/b)$ は φ_i に一致する．x と t が同じであれば $\varphi_i(a/b)$ は

$$\varphi(x/b) \;\to\; \exists x\varphi$$

なる式となる．a が t であれば (t と x は違うとする)，$\varphi(x/t)(a/b)$ と $\varphi(a/b)(x/b)$ は一致するので $\varphi_i(a/b)$ は

$$\varphi(a/b)(x/b) \;\to\; \exists x\varphi(a/b)$$

なる式となる．a が x とも t とも違うとき，$\varphi(x/t)(a/b)$ と $\varphi(a/b)(x/t)$ は一致するので $\varphi_i(a/b)$ は

$$\varphi(a/b)(x/t) \;\to\; \exists x\varphi(a/b)$$

なる式となる．ゆえにいずれの場合も $\varphi_i(a/b)$ は **HK** の (EI) となる．同様に φ_i が **HK** の (UE) であるときも $\varphi_i(a/b)$ は **HK** の (UE) となる．

case3　φ_i が Γ の公理である場合，φ_i は文なので $\varphi_i(a/b)$ は φ_i である．

case4　φ_i が前の式 φ_j, φ_k から三段論法で得られるとき，φ_k が $\varphi_j \;\to\; \varphi_i$ なる形の式ならば $\varphi_k(a/b)$ は

$$\varphi_j(a/b) \;\to\; \varphi_i(a/b)$$

なる式となる．つまり $\varphi_i(a/b)$ は $\varphi_j(a/b)$ と $\varphi_k(a/b)$ から三段論法で得られる．

case5　φ_i が前の式 φ_j から汎化で得られるとき，変項 e, x と x が自由に現れる式 ψ が取れて，φ_j は $\psi(x/e)$，φ_i は $\forall x\psi$ なる式である．また e は ψ の中で x への代入について自由であり，e は $\forall x\psi$ に自由に現れない．このとき

(1)　b が変項である場合，a が x であれば，x と e が同じなら $\varphi_j(a/b)$ は $\psi(x/b)$ となり，$\varphi_i(a/b)$ は $\forall x\psi$ のままである．x と e が違うなら $\psi(x/e)$ に a は自由に現れないので，$\varphi_j(a/b)$ は $\psi(x/e)$ のままであり，$\varphi_i(a/b)$ も $\forall x\psi$ のままである．

a が e であれば，ψ に e は自由に現れないので $\varphi_j(a/b)$ は $\psi(x/b)$ となり，$\varphi_i(a/b)$ は $\forall x\psi$ のままである．

a が x とも e とも違うとき，$\varphi_j(a/b)$ は $\psi(a/b)(x/e)$ に一致し，$\varphi_i(a/b)$ は $\forall x\psi(a/b)$ となる．

(2) b が変項でない場合，a は固有変項ではないので a と e は違う変項である．a が x であれば，$\psi(x/e)$ に a は自由に現れないので $\varphi_j(a/b)$ は $\psi(x/e)$ のままであり，$\varphi_i(a/b)$ も $\forall x\psi$ のままである．

a が x と違うとき，$\varphi_j(a/b)$ は $\psi(a/b)(x/e)$ に一致し，$\varphi_i(a/b)$ は $\forall x\psi(a/b)$ となる．

ゆえに，いずれの場合も $\varphi_i(a/b)$ は $\varphi_j(a/b)$ から汎化で得られる． ∎

メタ定理 5.3.3 (どんな証明も正則化できる). $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ を Γ から φ_n への **HK** の証明とするとき，Γ から φ_n への **HK** の正則証明が得られる．

メタ証明. $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ の中で汎化が使われていなければこれ自体が正則証明である．汎化が使われている場合，使われている箇所を

$$\begin{array}{ccc} \varphi_{i_1} & \text{から} & \varphi_{j_1}, \\ \varphi_{i_2} & \text{から} & \varphi_{j_2}, \\ & \vdots & \\ \varphi_{i_\ell} & \text{から} & \varphi_{j_\ell} \end{array}$$

とすべて列挙し ($i_1 < i_2 < \cdots < i_\ell$)，$a_1, \cdots, a_\ell$ をそれぞれの固有変項とする．ただし，もしかすると a_2 と a_5 は同じ文字 b であるかもしれない．いま想定しているのはそのような状況であり，これから正則証明を構成するのである．

φ_{i_1} の直後に φ_{j_1} を移動し，φ_{i_2} の直後に φ_{j_2} に移動し，…，φ_{i_ℓ} の直後に φ_{j_ℓ} を移動することによって $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ を並べ替えたものを

$$\psi_1, \cdots, \psi_n$$

と書けば，これもまた **HK** の証明となっている．なぜならこの並び替えでは三段論法と汎化の順番が崩れないからである．並び替えによって $\varphi_{i_1}, \cdots, \varphi_{i_\ell}$ の位置も変動しうるが，これらが動いた先をそれぞれ $\psi_{k_1}, \cdots, \psi_{k_\ell}$ とする．また $b_1, \cdots, b_\ell$ を $\varphi_{i_1}, \cdots, \varphi_{i_\ell}$ に現れない相異なる変項とする．このとき

$$\begin{aligned} &\psi_1(a_1/b_1),\ \cdots,\ \psi_{k_1+1}(a_1/b_1), \\ &\psi_1(a_2/b_2),\ \cdots,\ \psi_{k_1+1}(a_2/b_2),\ \cdots,\ \psi_{k_2+1}(a_2/b_2), \\ &\psi_1(a_3/b_3),\ \cdots,\ \psi_{k_1+2}(a_3/b_3),\ \cdots,\ \psi_{k_2+1}(a_3/b_3),\ \cdots,\ \psi_{k_3+1}(a_3/b_3), \\ &\vdots \\ &\psi_1(a_\ell/b_\ell),\ \cdots,\ \psi_{k_1+1}(a_\ell/b_\ell),\ \cdots,\ \psi_{k_2+1}(a_\ell/b_\ell),\ \cdots,\ \psi_{k_3+1}(a_\ell/b_\ell), \cdots,\ \psi_{k_\ell+1}(a_\ell/b_\ell), \\ &\psi_{k_\ell+2}(a_\ell/b_\ell),\ \cdots,\ \psi_n(a_\ell/b_\ell) \end{aligned}$$

は **HK** の証明となっている．ところで，固有変項の条件より a_1 は ψ_{k_1+1} に自由に現れないので $\psi_{k_1+1}(a_1/b_1)$ は ψ_{k_1+1} に一致する．同様に，赤字の $\psi_{k_2+1}(a_2/b_2)$，$\psi_{k_3+1}(a_3/a_3)$，$\cdots$，$\psi_{k_\ell+1}(a_\ell/b_\ell)$ はそれぞれ

ψ_{k_2+1}, ψ_{k_3+1}, $\cdots$, $\psi_{k_\ell+1}$ と同じ式である．つまり

$$\begin{aligned}
&\psi_1(a_1/b_1),\ \cdots,\ \psi_{k_1+1},\\
&\psi_1(a_2/b_2),\ \cdots,\ \psi_{k_1+1}(a_2/b_2),\ \cdots,\ \psi_{k_2+1},\\
&\psi_1(a_3/b_3),\ \cdots,\ \psi_{k_1+2}(a_3/b_3),\ \cdots,\ \psi_{k_2+1}(a_3/b_3),\ \cdots,\ \psi_{k_3+1},\\
&\vdots\\
&\psi_1(a_\ell/b_\ell),\ \cdots,\ \psi_{k_1+1}(a_\ell/b_\ell),\ \cdots,\ \psi_{k_2+1}(a_\ell/b_\ell),\ \cdots,\ \psi_{k_3+1}(a_\ell/b_\ell),\cdots,\ \psi_{k_\ell+1},\\
&\psi_{k_\ell+2}(a_\ell/b_\ell),\ \cdots,\ \psi_n(a_\ell/b_\ell)
\end{aligned}$$

は **HK** の証明である．

φ を $\mathcal{L}_\in$ の文とし，$\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ を $\mathcal{L}_\in$ の式からなる φ への **HK** の証明とする．φ_i から φ_j にかけて汎化が用いられ (固有変項 a)，φ_k から φ_ℓ にかけて汎化が用いられているとき (固有変項 a)，$\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ に自由に現れる a を b に置き換えたものを $\hat{\varphi}_1,\cdots,\hat{\varphi}_n$ と書けば，

$$\varphi_1,\cdots,\varphi_j,\hat{\varphi}_1,\cdots,\hat{\varphi}_{j-1},\hat{\varphi}_{j+1},\cdots,\hat{\varphi}_n$$

は φ への正則証明になっている． ∎

メタ定理 5.3.4 (HK の定理は HE の定理). $\mathscr{S}$ を $\mathcal{L}_\mathcal{E}$ の文からなる公理系とし，ψ を $\mathcal{L}_\in$ の文とするとき，$\mathscr{S} \vdash_{\mathbf{HK},\mathcal{L}_\in} \psi$ ならば $\mathscr{S} \vdash_{\mathbf{HE},\mathcal{L}_\mathcal{E}} \psi$ である．

メタ証明． $\mathcal{L}_\in$ の式の列 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ を $\mathscr{S}$ から ψ への **HK** の正則な証明とし，また

$$a_1,\cdots,a_m$$

をこの証明に使われる固有変項とし，$a_1,a_2,\cdots$ の順番に汎化に用いられるとする．

step1 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ の中に自由に現れる変項のうち，$a_1,\cdots,a_m$ 以外の全てを $x_1,\cdots,x_k$ とする．これらに対し相異なる主要 ε 項 $\tau_1,\cdots,\tau_k$ を用意して (これらは $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ に現れないものとする)，自由に現れる全ての x_i に τ_i を代入する ($1 \leq i \leq n$)．そして得られる式の列を $\tilde{\varphi}_1,\cdots,\tilde{\varphi}_n$ とする．この列は **HK** の証明である (メタ定理 5.3.2)．

step2 次に $a_m,a_{m-1},\cdots$ の順に固有変項を置き換える．a_m が

$$\varphi(x/a_m)$$

から

$$\forall x\varphi$$

への汎化に使われているなら，$\tilde{\varphi}_1,\cdots,\tilde{\varphi}_n$ に自由に現れる a_m を全て $\varepsilon x \neg\varphi$ に置き換えて，列の $\forall x\varphi$ の前に

$$\varphi(x/\varepsilon x \neg\varphi) \rightarrow \forall x\varphi$$

への **HE** の証明を挿入する (論理的定理 3.2.29)．同じ要領で $a_{m-1},\cdots,a_1$ も主要 ε 項に置き換えていく．

step3　step2 の終了後に得られる式の列を $\hat{\varphi}_1, \cdots, \hat{\varphi}_r$ とする．これらは全て $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の文であり，そして各 $\hat{\varphi}_i$ は次のいずれかである：

- φ_i が (UI) と (EE) 以外の **HK** の公理ならば $\hat{\varphi}_i$ は **HE** の公理である．
- φ_i が (UI) か (EE) ならば後述．
- φ_i が $\mathscr{S}$ の公理ならば，φ_i は変項の置換による影響を受けないので $\hat{\varphi}_i$ は φ_i と同一である．
- φ_i が前の式 φ_j, φ_k から三段論法で得られているならば，$\hat{\varphi}_i$ も $\hat{\varphi}_j, \hat{\varphi}_k$ から三段論法で得られる．
- φ_i が前の式から汎化で得られているならば，$\hat{\varphi}_i$ は前の式から三段論法で得られる．

この列の中に **HK** の公理 (UI) と (EE) の形の式が残っている場合はまだ **HE** の証明ではない．とはいえ下で示す通り (UI) と (EE) は **HE** で証明できるから，$\hat{\varphi}_1, \cdots, \hat{\varphi}_m$ の中で (UI) または (EE) の形の式があれば，その式の前の列にその式への **HE** の証明を挿入すればよい．

(UI) の証明　$\forall y\,(\,\psi \rightarrow \varphi(x/y)\,) \rightarrow (\,\psi \rightarrow \forall x\varphi\,)$ を示す．**HE** の公理 (UE) より

$$\forall y\,(\,\psi \rightarrow \varphi(x/y)\,) \vdash_{\mathbf{HE},\mathcal{L}_{\mathcal{E}}} \psi \rightarrow \varphi(x/\varepsilon x \neg\varphi)$$

が成り立つので

$$\psi,\ \forall y\,(\,\psi \rightarrow \varphi(x/y)\,) \vdash_{\mathbf{HE},\mathcal{L}_{\mathcal{E}}} \varphi(x/\varepsilon x \neg\varphi)$$

となり，全称の導出 (論理的定理 3.2.29)

$$\vdash_{\mathbf{HE},\mathcal{L}_{\mathcal{E}}} \varphi(x/\varepsilon x \neg\varphi) \rightarrow \forall x\varphi$$

との三段論法より

$$\psi,\ \forall y\,(\,\psi \rightarrow \varphi(x/y)\,) \vdash_{\mathbf{HE},\mathcal{L}_{\mathcal{E}}} \forall x\varphi$$

が従う．よって演繹定理より

$$\vdash_{\mathbf{HE},\mathcal{L}_{\mathcal{E}}} \forall y\,(\,\psi \rightarrow \varphi(x/y)\,) \rightarrow (\,\psi \rightarrow \forall x\varphi\,)$$

が得られる．

(EE) の証明　$\forall y\,(\,\varphi(x/y) \rightarrow \psi\,) \rightarrow (\,\exists x\varphi \rightarrow \psi\,)$ を示す．**HE** の公理 (UE) より

$$\forall y\,(\,\varphi(x/y) \rightarrow \psi\,) \vdash_{\mathbf{HE},\mathcal{L}_{\mathcal{E}}} \varphi(x/\varepsilon x\varphi) \rightarrow \psi$$

が成り立ち，他方で **HE** の公理 (EE) より

$$\exists x\varphi \vdash_{\mathbf{HE},\mathcal{L}_{\mathcal{E}}} \varphi(x/\varepsilon x\varphi)$$

も成り立つので，三段論法より

$$\exists x\varphi,\ \forall y\,(\,\varphi(x/y) \rightarrow \psi\,) \vdash_{\mathbf{HE},\mathcal{L}_{\mathcal{E}}} \psi$$

が成り立つ．よって演繹定理より

$$\vdash_{\mathbf{HE},\mathcal{L}_{\mathcal{E}}} \forall y\,(\,\varphi(x/y) \rightarrow \psi\,) \rightarrow (\,\exists x\varphi \rightarrow \psi\,)$$

が得られる． ∎

メタ定理 5.3.5 (Γ の定理は Σ の定理). ψ を $\mathcal{L}_{\in}$ の文とするとき，$\Gamma \vdash_{\mathbf{HK},\mathcal{L}_{\in}} \psi$ ならば $\Sigma \vdash_{\mathbf{HE},\mathcal{L}_{\mathcal{E}}} \psi$ である．

メタ証明. メタ定理 5.3.4 より $\Gamma \vdash_{\mathbf{HK},\mathcal{L}_{\in}} \psi$ ならば $\Gamma \vdash_{\mathbf{HE},\mathcal{L}_{\mathcal{E}}} \psi$ であるから，あとは Γ の公理が Σ から証明可能であることを示せばよい．Σ のものと違う Γ の公理は外延性，相等性，置換であるが，たとえば外延性

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)$$

については

$$a \stackrel{\text{def}}{=\!=} \varepsilon x \neg \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y),$$
$$b \stackrel{\text{def}}{=\!=} \varepsilon y \neg (\forall z (z \in a \leftrightarrow z \in y) \to a = y),$$

とおけば

$$\Sigma \vdash_{\mathbf{HE},\mathcal{L}_{\mathcal{E}}} \forall z (z \in a \leftrightarrow z \in b) \to a = b$$

が成り立つので，全称の導出 (論理的定理 3.2.29) より

$$\Sigma \vdash_{\mathbf{HE},\mathcal{L}_{\mathcal{E}}} \forall y (\forall z (z \in a \leftrightarrow z \in y) \to a = y),$$
$$\Sigma \vdash_{\mathbf{HE},\mathcal{L}_{\mathcal{E}}} \forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)$$

が従う．相等性と置換の公理も同様にして導かれる． ∎

5.4 $\mathcal{L}$ の証明の変換

この節では「Σ から ψ への $\mathbf{HE}$ の証明で $\mathcal{L}$ の文の列であるものが取れる」ならば「Σ から ψ への $\mathbf{HE}$ の証明で $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の文の列であるものが取れる」ことを示す

メタ定理 5.4.1 ($\mathcal{L}$ の文の証明は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の文の証明に直せる). ψ を $\mathcal{L}_{\in}$ の文とするとき，$\Sigma \vdash_{\mathbf{HE},\mathcal{L}} \psi$ ならば $\Sigma \vdash_{\mathbf{HE},\mathcal{L}_{\mathcal{E}}} \psi$ である．

メタ証明. $\Sigma \vdash \psi$ であるとき，$\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ を Σ から ψ への証明とし，これらを $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の文に書き換えたものを $\hat{\varphi}_1, \cdots, \hat{\varphi}_n$ と書く．ただし，同じ原子式の書き換えは証明全体で一致するようにしておく．このとき各 $\hat{\varphi}_i$ について次が満たされる：

(1) φ_i が論理的公理ならば $\hat{\varphi}_i$ は $\mathbf{HE}$ の公理である．

(2) φ_i が Σ の公理ならば $\hat{\varphi}_i$ は Σ の定理である．

(3) φ_i が前の文 φ_j, φ_k から三段論法で得られている場合は，$\hat{\varphi}_i$ は $\hat{\varphi}_j$ と $\hat{\varphi}_k$ から三段論法で得られる．

(1) については，例えば φ_i が

$$\exists x \varphi \to \varphi(\varepsilon x \tilde{\varphi})$$

なる公理であれば ($\tilde{\varphi}$ は φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き直したもの)，$\hat{\varphi}_i$ は

$$\exists x \hat{\varphi} \ \rightarrow \ \hat{\varphi}(\varepsilon x \tilde{\varphi})$$

なる形の式である．これは **HE** の公理である．

(3) については，φ_k を $\varphi_j \ \rightarrow \ \varphi_i$ なる文とすれば，同じ原子式の書き換えは証明全体で一致しているので $\hat{\varphi}_k$ は $\hat{\varphi}_j \ \rightarrow \ \hat{\varphi}_i$ なる文であり，$\hat{\varphi}_i$ は $\hat{\varphi}_j$ と $\hat{\varphi}_k$ から三段論法で得られるのである．

(2) について，内包項を含みうる Σ の公理は外延性，相等性，内包性，要素であるからこれらについて一つずつ示していく．

case1　φ_i が外延性公理

$$\forall x \, (\, x \in a \ \leftrightarrow \ x \in b \,) \ \rightarrow \ a = b$$

であるとき，a, b が共に主要 ε 項ならばこれは $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の文である．a が $\{ \, y \mid \varphi(y) \, \}$ なる項で b が主要 ε 項であるときは，$\hat{\varphi}_i$ は

$$\forall x \, (\, \varphi(x) \ \leftrightarrow \ x \in b \,) \ \rightarrow \ \forall z \, (\, \varphi(z) \ \leftrightarrow \ z \in b \,)$$

なる形の文となり，これは **HE** で証明可能である．実際

$$\zeta \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon z \neg (\, \varphi(z) \ \leftrightarrow \ z \in b \,)$$

とおけば

$$\forall x \, (\, \varphi(x) \ \leftrightarrow \ x \in b \,) \vdash_{\mathbf{HE}} \varphi(\zeta) \ \leftrightarrow \ \zeta \in b$$

が成り立つので，全称の導出 (論理的定理 3.2.29) より

$$\forall x \, (\, \varphi(x) \ \leftrightarrow \ x \in b \,) \vdash_{\mathbf{HE}} \forall z \, (\, \varphi(z) \ \leftrightarrow \ z \in b \,)$$

となる．a が $\{ \, y \mid \varphi(y) \, \}$ なる項で b が $\{ \, z \mid \psi(z) \, \}$ なる項のときは，$\hat{\varphi}_i$ は

$$\forall x \, (\, \varphi(x) \ \leftrightarrow \ \psi(x) \,) \ \rightarrow \ \forall u \, (\, \varphi(u) \ \leftrightarrow \ \psi(u) \,)$$

なる形の文となり，これも **HE** で証明可能である．a が主要 ε 項で b が $\{ \, z \mid \psi(z) \, \}$ なる項のときも同様に $\hat{\varphi}_i$ は **HE** で証明可能である．

case2　φ_i が内包性公理

$$\forall x \, (\, x \in \{ \, y \mid \varphi(y) \, \} \ \leftrightarrow \ \varphi(x) \,)$$

なる式であるとき，$\hat{\varphi}_i$ は

$$\forall x \, (\, x \in \varphi(x) \ \leftrightarrow \ \varphi(x) \,)$$

なる式であり，これは **HE** から証明可能である．実際

$$\tau \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon x \neg (\, \varphi(x) \ \leftrightarrow \ \varphi(x) \,)$$

とおけば，含意の反射律 (論理的定理 3.1.4) と論理積の導入より

$$\vdash_{\mathbf{HE}} \varphi(\tau) \ \leftrightarrow \ \varphi(\tau)$$

が成り立つので，全称の導出 (論理的定理 3.2.29) より

$$\vdash_{\mathbf{HE}} \forall x \, (\, x \in \varphi(x) \ \leftrightarrow \ \varphi(x) \,)$$

となる．

case3　φ_i が要素の公理

$$a \in b \ \rightarrow\ \exists x\,(\,a = x\,)$$

なる式であるとき，a も b も主要 ε 項ならば

$$\Sigma \vdash_{\mathbf{HE}} \exists x\,(\,a = x\,)$$

(定理 4.1.3) と含意の導入

$$\vdash_{\mathbf{HE}} \exists x\,(\,a = x\,) \ \rightarrow\ (\,a \in b \ \rightarrow\ \exists x\,(\,a = x\,))$$

から

$$\Sigma \vdash_{\mathbf{HE}} a \in b \ \rightarrow\ \exists x\,(\,a = x\,)$$

が従う．a が主要 ε 項で b が $\{\,z \mid \psi(z)\,\}$ なる項であるとき，$\hat{\varphi}_i$ は

$$\psi(a) \ \rightarrow\ \exists x\,(\,a = x\,)$$

となるが，上と同様にして **HE** で証明できる．a が $\{\,y \mid \varphi(y)\,\}$ なる項で b が主要 ε であるとき，$\hat{\varphi}_i$ は

$$\exists s\,(\,\forall u\,(\,\varphi(u) \ \leftrightarrow\ u \in s\,) \wedge s \in b\,) \ \rightarrow\ \exists x\,\forall v\,(\,\varphi(v) \ \leftrightarrow\ v \in x\,)$$

となるが，これも **HE** で証明可能で，実際

$$\sigma \overset{\text{def}}{=\!=} \varepsilon s\,(\,\forall u\,(\,\varphi(u) \ \leftrightarrow\ u \in s\,),$$
$$\tau \overset{\text{def}}{=\!=} \varepsilon v \neg(\,\varphi(v) \ \leftrightarrow\ v \in \sigma\,)$$

とおけば

$$\begin{aligned}
\exists s\,(\,\forall u\,(\,\varphi(u) \ \leftrightarrow\ u \in s\,) \wedge s \in b\,) &\vdash_{\mathbf{HE}} \forall u\,(\,\varphi(u) \ \leftrightarrow\ u \in \sigma\,) \wedge \sigma \in b, \\
\exists s\,(\,\forall u\,(\,\varphi(u) \ \leftrightarrow\ u \in s\,) \wedge s \in b\,) &\vdash_{\mathbf{HE}} \forall u\,(\,\varphi(u) \ \leftrightarrow\ u \in \sigma\,), \\
\exists s\,(\,\forall u\,(\,\varphi(u) \ \leftrightarrow\ u \in s\,) \wedge s \in b\,) &\vdash_{\mathbf{HE}} \varphi(\tau) \ \leftrightarrow\ \tau \in \sigma, \\
&\vdash_{\mathbf{HE}} \forall v\,(\,\varphi(v) \ \leftrightarrow\ v \in \sigma\,), \\
&\vdash_{\mathbf{HE}} \exists x\,\forall v\,(\,\varphi(v) \ \leftrightarrow\ v \in x\,)
\end{aligned}$$

が成り立つ．a が $\{\,y \mid \varphi(y)\,\}$ なる項で b が $\{\,z \mid \psi(z)\,\}$ なる項であるとき，$\hat{\varphi}_i$ は

$$\exists s\,(\,\forall u\,(\,\varphi(u) \ \leftrightarrow\ u \in s\,) \wedge \psi(s)\,) \ \rightarrow\ \exists x\,\forall v\,(\,\varphi(v) \ \leftrightarrow\ v \in x\,)$$

となるが，これも同様に **HE** で証明可能である．

case4　φ_i が相等性公理

$$a = b \ \rightarrow\ b = a$$

なる式である場合，たとえば a が $\{\,y \mid \varphi(y)\,\}$ なる項で b が主要 ε 項であれば，$\hat{\varphi}_i$ は

$$\forall u\,(\,\varphi(u) \ \leftrightarrow\ u \in b\,) \ \rightarrow\ \forall v\,(\,v \in b \ \leftrightarrow\ \varphi(v)\,)$$

となるが，これは **HE** で証明可能であって，実際

$$\tau \overset{\text{def}}{=\!=} \varepsilon v \neg(\,v \in b \ \leftrightarrow\ \varphi(v)\,)$$

とおけば

$$\begin{aligned} \forall u\,(\,\varphi(u) \ \leftrightarrow\ u \in b\,) &\vdash_{\mathbf{HE}} \varphi(\tau) \ \leftrightarrow\ \tau \in b, \\ \forall u\,(\,\varphi(u) \ \leftrightarrow\ u \in b\,) &\vdash_{\mathbf{HE}} \tau \in b \ \leftrightarrow\ \varphi(\tau), \\ &\vdash_{\mathbf{HE}} \forall v\,(\,v \in b \ \leftrightarrow\ \varphi(v)\,) \end{aligned}$$

が成り立つ．a も b も内包項である場合や，a が主要 ε 項で b が内包項である場合も同様のことが言える．

case5　φ_i が相等性公理

$$a = b \ \rightarrow\ (\,a \in c \ \rightarrow\ b \in c\,)$$

なる式である場合，

参考文献

[1] Moser, G. and Zach, R., “The Epsilon Calculus and Herbrand Complexity”, Studia Logica 82, 133-155 (2006)

[2] 高橋優太, “1 階述語論理に対する ε 計算”, http://www2.kobe-u.ac.jp/ mkikuchi/ss2018files/takahashi1.pdf

[3] キューネン数学基礎論講義

[4] ブルバキ, 数学原論 集合論 1,

[5] 竹内外史, 現代集合論入門,

[6] 島内剛一, 数学の基礎,

[7] 戸次大介, 数理論理学,