確率微分方程式レポート

基礎工学研究科システム創成専攻修士 1 年
学籍番号 29C17095
百合川尚学

2017 年 10 月 20 日

1 10/4 講義ノート

レポート問題 1. 係数体を $\mathbb{K}$，$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 或は $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ と考える．測度空間を $(X, \mathcal{F}, m)$ とし，可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ 関数 f に対して

$$\|f\|_{\mathscr{L}^p} := \begin{cases} \inf\{\, r \in \mathbb{R} \quad | \quad |f(x)| \le r,\ \text{a.e.} x \in X \,\} & (p = \infty) \\ \left(\int_X |f(x)|^p \, m(dx)\right)^{\frac{1}{p}} & (0 < p < \infty) \end{cases}$$

と定め，

$$\mathscr{L}^p(X, \mathcal{F}, m) := \{\, f : X \to \mathbb{K} \quad | \quad f : \text{可測}\ \mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{K}),\ \|f\|_{\mathscr{L}^p} < \infty \,\} \quad (1 \le p \le \infty)$$

として空間 $\mathscr{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$ を定義する．この空間は $\mathbb{K}$ 上の線形空間となるが，そのことを保証するために次の二つの不等式が成り立つことを証明する．

定理 1.1 (Hölder の不等式). $1 \le p, q \le \infty$，$p + q = pq$ ($p = \infty$ なら $q = 1$) とする．このとき任意の可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ 関数 f, g に対して次が成り立つ:

$$\int_X |f(x)g(x)| \, m(dx) \le \|f\|_{\mathscr{L}^p} \|g\|_{\mathscr{L}^q}. \tag{1}$$

証明. まず次の補助定理を証明する．

補助定理 1.2. $f \in \mathscr{L}^\infty(X, \mathcal{F}, m)$ ならば

$$|f(x)| \le \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} \quad (\text{a.e.} x \in X).$$

証明. $\mathscr{L}^\infty(X, \mathcal{F}, m)$ の定義により，任意の実数 $\alpha > \|f\|_{\mathscr{L}^\infty}$ に対して

$$m(\{\, x \in X \quad | \quad |f(x)| > \alpha \,\}) = 0$$

である．これにより

$$\{\, x \in X \quad | \quad |f(x)| > \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} \,\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\, x \in X \quad | \quad |f(x)| > \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} + 1/n \,\}$$

の右辺は m-零集合となり補題が証明された． ∎

定理の証明に入る．

$p = \infty$, $q = 1$ の場合 $\|f\|_{\mathscr{L}^\infty} = \infty$ 又は $\|g\|_{\mathscr{L}^1} = \infty$ の場合は明らかに不等式 (1) が成り立つから，$\|f\|_{\mathscr{L}^\infty} < \infty$ かつ $\|g\|_{\mathscr{L}^1} < \infty$ の場合を考える．補助定理により，或る m-零集合 $A \in \mathcal{F}$ を除いて $|f(x)| \le \|f\|_{\mathscr{L}^\infty}$ が成り立つから，

$$|f(x)g(x)| \le \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} |g(x)| \quad (\forall x \in X \backslash A).$$

従って

$$\int_X |f(x)g(x)|\, m(dx) = \int_{X\setminus A} |f(x)g(x)|\, m(dx) \leq \| f \|_{\mathscr{L}^\infty} \int_{X\setminus A} |g(x)|\, m(dx) = \| f \|_{\mathscr{L}^\infty} \| g \|_{\mathscr{L}^1}$$

となり不等式 (1) が成り立つ．

$1 < p, q < \infty$ **の場合**　$\| f \|_{\mathscr{L}^p} = \infty$ 又は $\| g \|_{\mathscr{L}^q} = \infty$ の場合は明らかに不等式 (1) が成り立つから，$\| f \|_{\mathscr{L}^p} < \infty$ かつ $\| g \|_{\mathscr{L}^q} < \infty$ の場合を考える．$\| f \|_{\mathscr{L}^p} = 0$ であるとすると

$$B \coloneqq \{\, x \in X \quad | \quad |f(x)| > 0 \,\}$$

は m-零集合となるから，

$$\int_X |f(x)g(x)|\, m(dx) = \int_B |f(x)g(x)|\, m(dx) + \int_{X\setminus B} |f(x)g(x)|\, m(dx) = 0$$

となり不等式 (1) が成り立つ．$\| g \|_{\mathscr{L}^q} = 0$ の場合も同じである．

最後に $0 < \| f \|_{\mathscr{L}^p}, \| g \|_{\mathscr{L}^q} < \infty$ の場合を示す．$-\log t \quad (t > 0)$ は凸関数であるから，$1/p + 1/q = 1$ に対して

$$-\log\left(\frac{s}{p} + \frac{t}{q}\right) \leq \frac{1}{p}(-\log s) + \frac{1}{q}(-\log t) \quad (\forall s, t > 0)$$

が成り立ち，従って

$$s^{1/p} t^{1/q} \leq \frac{s}{p} + \frac{t}{q} \quad (\forall s, t > 0)$$

が成り立つ．この不等式を用いれば

$$F(x) \coloneqq |f(x)|^p / \| f \|_{\mathscr{L}^p}^p, \quad G(x) \coloneqq |g(x)|^q / \| g \|_{\mathscr{L}^q}^q \quad (\forall x \in X)$$

とした F, G に対し

$$F(x)^{1/p} G(x)^{1/q} \leq \frac{1}{p} F(x) + \frac{1}{q} G(x) \quad (\forall x \in X)$$

となり，両辺を積分して

$$\begin{aligned}
\int_X F(x)^{1/p} G(x)^{1/q}\, m(dx) &\leq \frac{1}{p} \int_X F(x)\, m(dx) + \frac{1}{q} \int_X G(x)\, m(dx) \\
&= \frac{1}{p} \frac{1}{\| f \|_{\mathscr{L}^p}^p} \int_X |f(x)|^p\, m(dx) + \frac{1}{q} \frac{1}{\| g \|_{\mathscr{L}^q}^q} \int_X |g(x)|^q\, m(dx) \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1
\end{aligned}$$

が成り立つ．最左辺と最右辺を比べて

$$1 \geq \int_X F(x)^{1/p} G(x)^{1/q}\, m(dx) = \int_X \frac{|f(x)|}{\| f \|_{\mathscr{L}^p}} \frac{|g(x)|}{\| g \|_{\mathscr{L}^q}}\, m(dx)$$

から不等式

$$\int_X |f(x)g(x)|\, m(dx) \leq \| f \|_{\mathscr{L}^p} \| g \|_{\mathscr{L}^q}$$

が示された． ∎

定理 1.3 (Minkowski の不等式). $1 \le p \le \infty$ とする．このとき任意の可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ 関数 f, g に対して次が成り立つ:

$$\| f + g \|_{\mathscr{L}^p} \le \| f \|_{\mathscr{L}^p} + \| g \|_{\mathscr{L}^p} . \tag{2}$$

証明.

$p = \infty$ の場合

$$|f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \quad (\forall x \in X)$$

である．従って $\| f \|_{\mathscr{L}^\infty} = \infty$ 又は $\| g \|_{\mathscr{L}^\infty} = \infty$ の場合に不等式 (2) が成り立つことは明らかである．$\| f \|_{\mathscr{L}^\infty} < \infty$ かつ $\| g \|_{\mathscr{L}^\infty} < \infty$ の場合は

$$C \coloneqq \{\, x \in X \quad | \quad |f(x)| > \| f \|_{\mathscr{L}^\infty} \,\} \bigcup \{\, x \in X \quad | \quad |g(x)| > \| g \|_{\mathscr{L}^\infty} \,\}$$

が m-零集合となり，$\| \cdot \|_{\mathscr{L}^\infty}$ の定義と

$$|f(x) + g(x)| \le \| f \|_{\mathscr{L}^\infty} + \| g \|_{\mathscr{L}^\infty} \quad (\forall x \in X \backslash C)$$

の関係により不等式 (2) が成り立つ．

$p = 1$ の場合

$$|f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \quad (\forall x \in X)$$

の両辺を積分することにより不等式 (2) が成り立つ．

$1 < p < \infty$ の場合　$p + q = pq$ が成り立つように $q > 1$ を取る．

$$|f(x) + g(x)|^p = |f(x) + g(x)||f(x) + g(x)|^{p-1} \le |f(x)||f(x) + g(x)|^{p-1} + |g(x)||f(x) + g(x)|^{p-1}$$

の両辺を積分すれば，Hölder の不等式により

$$\begin{aligned}
\| f + g \|_{\mathscr{L}^p}^p &= \int_X |f(x) + g(x)|^p \, m(dx) \\
&\le \int_X |f(x)||f(x) + g(x)|^{p-1} \, m(dx) + \int_X |g(x)||f(x) + g(x)|^{p-1} \, m(dx) \\
&\le \left(\int_X |f(x)|^p \, m(dx) \right)^{1/p} \left(\int_X |f(x) + g(x)|^{q(p-1)} \, m(dx) \right)^{1/q} \\
&\qquad + \left(\int_X |g(x)|^p \, m(dx) \right)^{1/p} \left(\int_X |f(x) + g(x)|^{q(p-1)} \, m(dx) \right)^{1/q} \\
&= \left(\int_X |f(x)|^p \, m(dx) \right)^{1/p} \left(\int_X |f(x) + g(x)|^{p} \, m(dx) \right)^{1/q} \\
&\qquad + \left(\int_X |g(x)|^p \, m(dx) \right)^{1/p} \left(\int_X |f(x) + g(x)|^{p} \, m(dx) \right)^{1/q} \\
&= \| f \|_{\mathscr{L}^p} \| f + g \|_{\mathscr{L}^p}^{p/q} + \| g \|_{\mathscr{L}^p} \| f + g \|_{\mathscr{L}^p}^{p/q} \\
&= \| f \|_{\mathscr{L}^p} \| f + g \|_{\mathscr{L}^p}^{p-1} + \| g \|_{\mathscr{L}^p} \| f + g \|_{\mathscr{L}^p}^{p-1}
\end{aligned}$$

が成り立つ．$\| f+g \|_{\mathscr{L}^p} = 0$ の場合は明らかに不等式 (2) が成り立つ．$\| f+g \|_{\mathscr{L}^p} = \infty$ の場合，

$$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq 2\max(|f(x)|, |g(x)|) \quad (\forall x \in X)$$

より

$$|f(x)+g(x)|^p \leq 2^p \max\left(|f(x)|^p, |g(x)|^p\right) \leq 2^p \left(|f(x)|^p + |g(x)|^p\right) \quad (\forall x \in X)$$

から両辺を積分して

$$\| f+g \|_{\mathscr{L}^p}^p \leq 2^p \left(\| f \|_{\mathscr{L}^p}^p + \| g \|_{\mathscr{L}^p}^p \right)$$

という関係が出るから，上式右辺も ∞ となり不等式 (2) が成り立つ．$0 < \| f+g \|_{\mathscr{L}^p} < \infty$ の場合，$\| f \|_{\mathscr{L}^p} + \| g \|_{\mathscr{L}^p} = \infty$ なら不等式 (2) は明らかに成り立ち，$\| f \|_{\mathscr{L}^p} + \| g \|_{\mathscr{L}^p} < \infty$ の場合は

$$\| f+g \|_{\mathscr{L}^p}^p \leq \| f \|_{\mathscr{L}^p} \| f+g \|_{\mathscr{L}^p}^{p-1} + \| g \|_{\mathscr{L}^p} \| f+g \|_{\mathscr{L}^p}^{p-1}$$

の両辺を $\| f+g \|_{\mathscr{L}^p}^{p-1}$ で割って不等式 (2) が成り立つと判る． ∎

$\| \cdot \|_{\mathscr{L}^p}$ は線形空間 $\mathscr{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$ においてセミノルムとなる．

なぜならば.

正値性　これは明らかである．

同次性

$$\left(\int_X |\alpha f(x)|^p \, m(dx) \right)^{1/p} = \left(|\alpha|^p \int_X |f(x)|^p \, m(dx) \right)^{1/p} = |\alpha| \left(\int_X |f(x)|^p \, m(dx) \right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty)$$

と

$$\inf\{\, r \in \mathbb{R} \quad | \quad |\alpha f(x)| \leq r, \ \text{a.e.} x \in X \,\} = |\alpha| \inf\{\, r \in \mathbb{R} \quad | \quad |f(x)| \leq r, \ \text{a.e.} x \in X \,\}$$

により，任意の $\alpha \in \mathbb{K}$ と任意の $f \in \mathscr{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ に対して

$$\| \alpha f \|_{\mathscr{L}^p} = |\alpha| \| f \|_{\mathscr{L}^p}$$

が成り立つ．

三角不等式　Minkowski の不等式による．

∎

しかし $\| \cdot \|_{\mathscr{L}^p}$ は $\mathscr{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$ のノルムとはならない．$\| f \|_{\mathscr{L}^p} = 0$ であっても $f(x) = 0$ $(\forall x \in X)$ とは限らず，m-零集合の上で $1 \in \mathbb{K}$ を取るような関数 g でも $\| g \|_{\mathscr{L}^p} = 0$ を満たすからである．ここで次のものを考える．可測関数の集合を

$$\mathcal{M} := \{\, f : X \to \mathbb{K} \quad | \quad f : \text{可測 } \mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{K}) \}$$

と表すことにする．

$$f,g\in\mathcal{M},\quad f\sim g\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}f(x)=g(x)\quad\text{a.e.}x\in X$$

と定義した関係 $\sim$ は $\mathcal{M}$ における同値関係となり，この関係で $\mathcal{M}$ を割った商を $M:=\mathcal{M}/\sim$ と表す．M の元を $[f]$ (f は同値類の代表元) と表し，M における加法とスカラ倍を次のように定義すれば M は $\mathbb{K}$ 上の線形空間となる:

$$\begin{aligned}&[f]+[g]:=[f+g] &&(\forall[f],[g]\in M),\\ &\alpha[f]:=[\alpha f] &&(\forall[f]\in M,\ \alpha\in\mathbb{K}).\end{aligned}$$

そしてこの表現は well-defined である．つまり代表元に依らずに値がただ一つに定まる．

なぜならば.
任意の $f'\in[f]$ と $g'\in[g]$ に対して，$[f']=[f]$, $[g']=[g]$ であるから

$$[f+g]=[f'+g'],\quad[\alpha f']=[\alpha f]$$

をいえばよい．

$$(f\neq g):=\{\,x\in X\quad|\quad f(x)\neq g(x)\,\}$$

と簡略した表記を使えば

$$\begin{aligned}&(f+g\neq f'+g')\subset(f\neq f')\cup(g\neq g'),\\ &(\alpha f\neq\alpha f')=(f\neq f')\end{aligned}$$

であり，どちらも右辺は m-零集合であるから $[f+g]=[f'+g']$, $[\alpha f']=[\alpha f]$ である． ∎

次に商空間 M におけるノルムを定義する．

$$\|[f]\|_{\mathrm{L}^p}:=\|f\|_{\mathscr{L}^p}\quad(1\leq p\leq\infty)$$

として $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^p}$ を定義すればこれは well-defined である．つまり代表元に依らずに値がただ一つに定まる．

なぜならば.
$f\in\mathscr{L}^p(X,\mathcal{F},m)$ とし，任意に $g\in[f]$ で $f\neq g$ となるものを選ぶ．示すことは $\|f\|_{\mathscr{L}^p}^p=\|g\|_{\mathscr{L}^p}^p$ が成り立つことである．

$$A:=\{\,x\in X\quad|\quad f(x)\neq g(x)\,\}\quad\in\mathcal{F}$$

とおけば，f,g は同じ同値類の元同士であるから $m(A)=0$ である．

$p=\infty$ の場合　A^c の上で $f(x)=g(x)$ となるから

$$\begin{aligned}\{\,x\in X\quad|\quad|g(x)|>\|f\|_{\mathscr{L}^\infty}\,\}&\subset A+A^c\cap\{\,x\in X\quad|\quad|g(x)|>\|f\|_{\mathscr{L}^\infty}\,\}\\ &=A+A^c\cap\{\,x\in X\quad|\quad|f(x)|>\|f\|_{\mathscr{L}^\infty}\,\}\\ &\subset A+\{\,x\in X\quad|\quad|f(x)|>\|f\|_{\mathscr{L}^\infty}\,\}\end{aligned}$$

が成り立ち，最右辺は 2 項とも m-零集合であるから最左辺も m-零集合となる．すなわち $\|g\|_{\mathscr{L}^\infty} \leq \|f\|_{\mathscr{L}^\infty}$ が示された．逆向きの不等号も同様に示されるから $\|g\|_{\mathscr{L}^\infty} = \|f\|_{\mathscr{L}^\infty}$ となる．

$1 \leq p < \infty$ の場合　$m(A) = 0$ により

$$\|f\|_{\mathscr{L}^p}^p = \int_X f(x)\, m(dx) = \int_{A^c} f(x)\, m(dx) = \int_{A^c} g(x)\, m(dx) = \int_X g(x)\, m(dx) = \|g\|_{\mathscr{L}^p}^p$$

が成り立つ．

∎

$\mathscr{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$ に代わって

$$\mathrm{L}^p(X, \mathcal{F}, m) := \{\, [f] \in M \quad | \quad \|[f]\|_{\mathrm{L}^p} < \infty \,\} \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

を定義すると，$\mathrm{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$ は $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^p}$ をノルムとしてノルム空間となる．

なぜならば．
任意の $[f], [g] \in \mathrm{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$ と $\alpha \in \mathbb{K}$ に対して，$\|[f]\|_{\mathrm{L}^p} \geq 0$ であることは $\|\cdot\|_{\mathscr{L}^p}$ の正値性による．また関数が 0 でない $x \in X$ の集合の測度が正となるとノルムは正となるから，$\|[f]\|_{\mathrm{L}^p} = 0$ であるなら $[f]$ は零写像 (これを 0 と表す) の同値類 (線形空間の零元)，つまり $[f] = [0]$ である．逆に $[f] = [0]$ なら $\|[f]\|_{\mathrm{L}^p} = 0$ である．$\|\cdot\|_{\mathscr{L}^p}$ の同次性と Minkowski の不等式から

$$\begin{aligned}
&\|\alpha[f]\|_{\mathrm{L}^p} = \|[\alpha f]\|_{\mathrm{L}^p} = \|\alpha f\|_{\mathscr{L}^p} = |\alpha|\,\|f\|_{\mathscr{L}^p} = |\alpha|\,\|[f]\|_{\mathrm{L}^p} \\
&\|[f] + [g]\|_{\mathrm{L}^p} = \|[f+g]\|_{\mathrm{L}^p} = \|f+g\|_{\mathscr{L}^p} \leq \|f\|_{\mathscr{L}^p} + \|g\|_{\mathscr{L}^p} = \|[f]\|_{\mathrm{L}^p} + \|[g]\|_{\mathrm{L}^p}
\end{aligned}$$

も成り立つ．以上より $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^p}$ は $\mathrm{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$ におけるノルムとなる． ∎

命題 (L^p の完備性).　上で定義したノルム空間 $\mathrm{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$ は Banach 空間である．$(1 \leq p \leq \infty)$

証明.　随意に $\mathrm{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$ の Cauchy 列 $[f_n] \in \mathrm{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を取る．Cauchy 列であるから $1/2$ に対して或る $N_1 \in \mathbb{N}$ が取れて，$n > m \geq N_1$ ならば $\|[f_n] - [f_m]\|_{\mathrm{L}^p} = \|[f_n - f_m]\|_{\mathrm{L}^p} < 1/2$ となる．ここで $m = n_1$ と表記することにする．同様に $1/2^2$ に対して或る $N_2 \in \mathbb{N}$ $(N_2 > N_1)$ が取れて，$n' > m' \geq N_2$ ならば $\|[f_{n'} - f_{m'}]\|_{\mathrm{L}^p} < 1/2^2$ となる．先ほどの n について，$n > N_2$ となるように取れるからこれを $n = n_2$ と表記し，更に $m' = n_2$ ともしておく．今のところ

$$\left\|[f_{n_2} - f_{n_1}]\right\|_{\mathrm{L}^p} < 1/2$$

と表示できる．再び同様に $1/2^3$ に対して或る $N_3 \in \mathbb{N}$ $(N_3 > N_2)$ が取れて，$n'' > m'' \geq N_2$ ならば $\|[f_{n''} - f_{m''}]\|_{\mathrm{L}^p} < 1/2^3$ となる．先ほどの n' について $n' > N_3$ となるように取れるからこれを $n' = n_3$ と表記し，更に $m'' = n_3$ ともしておく．今までのところで

$$\begin{aligned}
&\left\|[f_{n_2} - f_{n_1}]\right\|_{\mathrm{L}^p} < 1/2 \\
&\left\|[f_{n_3} - f_{n_2}]\right\|_{\mathrm{L}^p} < 1/2^2
\end{aligned}$$

が成り立っている．数学的帰納法により

$$\left\| [f_{n_{k+1}} - f_{n_k}] \right\|_{\mathrm{L}^p} < 1/2^k \quad (n_{k+1} > n_k,\ k = 1,2,3,\cdots) \tag{3}$$

が成り立つように自然数の部分列 $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ を取ることができる．

$p = \infty$ の場合

$[f_n]$ の代表元 f_n について，

$$A_n := \{\, x \in X \quad | \quad |f_n(x)| > \| f_n \|_{\mathscr{L}^\infty} \}$$

とおけば Hölder の不等式の証明中の補助定理より $m(A_n) = 0$ であり，

$$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

として m-零集合を定め

$$\hat{f}_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & (x \notin A) \\ 0 & (x \in A) \end{cases} \quad (\forall x \in X)$$

と定義した $\hat{f}_n$ もまた $[f_n]$ の元となる．代表元を f_n に替えて $\hat{f}_n$ とすれば，$\hat{f}_n$ は X 上の有界可測関数であり

$$\left\| [f_{n_{k+1}} - f_{n_k}] \right\|_{\mathrm{L}^\infty} = \left\| [\hat{f}_{n_{k+1}} - \hat{f}_{n_k}] \right\|_{\mathrm{L}^\infty} = \left\| \hat{f}_{n_{k+1}} - \hat{f}_{n_k} \right\|_{\mathscr{L}^\infty} < 1/2^k \quad (k = 1,2,3,\cdots) \tag{4}$$

を満たしている．すなわち

$$\sup_{x \in X} |\hat{f}_{n_{k+1}}(x) - \hat{f}_{n_k}(x)| < 1/2^k \quad (k = 1,2,3,\cdots)$$

が成り立っていることになるから，各点 $x \in X$ で $\left(\hat{f}_{n_k}(x)\right)_{k=1}^{\infty}$ は $\mathbb{K}$ の Cauchy 列となる．(これは $\sum_{k>N} 1/2^k = 1/2^N \longrightarrow 0\ (N \longrightarrow \infty)$ による．) 従って各点 $x \in X$ で極限が存在するからこれを $\hat{f}(x)$ として表す．一般に距離空間に値を取る可測関数列の各点収束の極限関数は可測関数であるから $\hat{f}$ もまた可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ である．また $\hat{f}$ は有界である．これは次のように示される．式 (4) から

$$\left| \left\| \hat{f}_{n_{k+1}} \right\|_{\mathscr{L}^\infty} - \left\| \hat{f}_{n_k} \right\|_{\mathscr{L}^\infty} \right| \leq \left\| \hat{f}_{n_{k+1}} - \hat{f}_{n_k} \right\|_{\mathscr{L}^\infty} < 1/2^k \quad (k = 1,2,3,\cdots)$$

となるから，$\left(\left\| \hat{f}_{n_k} \right\|_{\mathscr{L}^\infty}\right)_{k=1}^{\infty}$ は実数の Cauchy 列となり有界となる．

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \left\| \hat{f}_{n_k} \right\|_{\mathscr{L}^\infty} < \alpha$$

となるように実数 $\alpha > 0$ を取れば，各点 $x \in X$ で収束数列 $\left(\hat{f}_{n_k}(x)\right)_{k=1}^{\infty}$ は開区間 $(-\alpha, \alpha)$ の範囲内に収まっているのだから，その収束先は $\hat{f}(x) \in (-\alpha, \alpha)$ であり $\hat{f}$ が X 上で有界であると判る．以上で $\hat{f}$ が有界可測関数であることが示された．$\hat{f}$ を代表元とする $[\hat{f}] \in \mathrm{L}^\infty(X, \mathcal{F}, m)$ に対し

$$\left\| [f_{n_k}] - [\hat{f}] \right\|_{\mathrm{L}^\infty} = \left\| \hat{f}_{n_k} - \hat{f} \right\|_{\mathscr{L}^\infty} = \sup_{x \in X} |\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}(x)| \longrightarrow 0\ (k \longrightarrow \infty)$$

が成り立つから，Cauchy 列 $([f_{n_k}])_{k=1}^{\infty}$ が $[\hat{f}]$ に収束すると示されて $\mathrm{L}^\infty(X, \mathcal{F}, m)$ が Banach 空間であると判明した．

$1 \leq p < \infty$ の場合

$k = 1, 2, 3, \cdots$ に対して

$$f_{n_k}(x) \coloneqq f_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{k}(f_{n_j}(x) - f_{n_{j-1}}(x))$$

と表現できるから，これに対して

$$g_k(x) \coloneqq |f_{n_1}(x)| + \sum_{j=1}^{k}|f_{n_j}(x) - f_{n_{j-1}}(x)|$$

として可測関数列 $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ を用意する．Minkowski の不等式と式 (3) より

$$\| g_k \|_{\mathscr{L}^p} \leq \left\| f_{n_1} \right\|_{\mathscr{L}^p} + \sum_{j=1}^{k} \left\| f_{n_j} - f_{n_{j-1}} \right\|_{\mathscr{L}^p} < \left\| f_{n_1} \right\|_{\mathscr{L}^p} + \sum_{j=1}^{k} 1/2^j < \left\| f_{n_1} \right\|_{\mathscr{L}^p} + 1 < \infty$$

が成り立つ．各点 $x \in X$ で $g_k(x)$ は k について単調増大であるから，単調収束定理より

$$\| g \|_{\mathscr{L}^p}^p = \lim_{k \to \infty} \| g_k \|_{\mathscr{L}^p}^p < \left\| f_{n_1} \right\|_{\mathscr{L}^p} + 1 < \infty$$

となるので $g \in \mathrm{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$ であると判る．

2 10/11

基礎の確率空間を $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ とする．$\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ を部分 σ-加法族とし，Hilbert 空間 $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ とその閉部分空間 $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ を考える．任意の $f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ に対して，射影定理により一意に定まる射影 $g \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ を

$$g = \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}]$$

と表現する．$\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ のときは $\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}]$ を $\mathrm{E}[f]$ と書いて f の期待値と呼ぶ．

レポート問題 2.

Hilbert 空間 $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ における内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}$，ノルムを $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}$ と表示する．次の C1 ~ C6 を示せ．扱う関数は全て $\mathbb{R}$ 値と考える．(係数体を実数体として Hilbert 空間を扱う．)

C1 $\forall f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

$$\mathrm{E}[f] = \int_\Omega f(x)\, \mu(dx)$$

C2 $\forall f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, $\forall h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$

$$\int_\Omega f(x)h(x)\, \mu(dx) = \int_\Omega \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x)h(x)\, \mu(dx)$$

C3 $\forall f_1, f_2 \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

$$\mathrm{E}[f_1 + f_2 \mid \mathcal{G}] = \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}] + \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}]$$

C4 $\forall f_1, f_2 \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

$$f_1 \le f_2 \quad \text{a.s.} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}] \le \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}] \quad \text{a.s.}$$

C5 $\forall f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, $\forall g \in \mathrm{L}^\infty(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$

$$\mathrm{E}[gf \mid \mathcal{G}] = g\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}]$$

C6 $\mathcal{H}$ が $\mathcal{G}$ の部分 σ-加法族ならば $\forall f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

$$\mathrm{E}\big[\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \,\big|\, \mathcal{H}\big] = \mathrm{E}[f \mid \mathcal{H}]$$

証明. C1 $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ とすれば，$\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ の元は $\mathcal{G}$-可測でなくてはならないから Ω 上の定数関数である．従って各 $g \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ には定数 $\alpha \in \mathbb{R}$ が対応して $g(x) = \alpha\ (\forall x \in \Omega)$ と表せる．射影定理より任意の $f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ の $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ への射影 $\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] = \mathrm{E}[f]$ はノルム $\|f - g\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}$ を最小にする $g \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ である．$g(x) = \alpha\ (\forall x \in \Omega)$ としてノルムを直接

計算すれば,

$$
\begin{aligned}
\|f-g\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} &= \int_\Omega |f(x)-\alpha|^2\,\mu(dx)\\
&= \int_\Omega |f(x)|^2 - 2\alpha f(x) + |\alpha|^2\,\mu(dx)\\
&= \int_\Omega |f(x)|^2\,\mu(dx) - 2\alpha\int_\Omega f(x)\,\mu(dx) + |\alpha|^2\\
&= \left|\alpha - \int_\Omega f(x)\,\mu(dx)\right|^2 - \left|\int_\Omega f(x)\,\mu(dx)\right|^2 + \int_\Omega |f(x)|^2\,\mu(dx)\\
&= \left|\alpha - \int_\Omega f(x)\,\mu(dx)\right|^2 + \int_\Omega |f(x)-\beta|^2\,\mu(dx) \qquad \left(\beta := \int_\Omega f(x)\,\mu(dx)\right)
\end{aligned}
$$

と表現できて最終式は $\alpha = \int_\Omega f(x)\,\mu(dx)$ で最小となる．すなわち

$$
\mathrm{E}[f] = \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] = \int_\Omega f(x)\,\mu(dx).
$$

C2　射影定理により，$f \in \mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ の $\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ への射影 $\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}]$ は

$$
\langle f - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0 \quad (\forall h \in \mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu))
$$

を満たし，内積の線型性から

$$
\langle f, h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = \langle \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} \quad (\forall h \in \mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu))
$$

が成り立つ．積分の形式で表示することにより

$$
\int_\Omega f(x)h(x)\,\mu(dx) = \int_\Omega \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x)h(x)\,\mu(dx) \quad (\forall h \in \mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu))
$$

が示された．

C3　射影定理により任意の $h \in \mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\langle (f_1+f_2) - \mathrm{E}[f_1+f_2 \mid \mathcal{G}], h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0,\\
&\langle f_1 - \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}], h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0,\\
&\langle f_2 - \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}], h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0
\end{aligned}
$$

が成り立っている．従って任意の $h \in \mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ に対して

$$
\begin{aligned}
0 &= \langle (f_1+f_2) - \mathrm{E}[f_1+f_2 \mid \mathcal{G}], h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} - \langle f_1 - \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}], h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} - \langle f_2 - \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}], h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}\\
&= \langle (f_1+f_2) - \mathrm{E}[f_1+f_2 \mid \mathcal{G}], h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} - \langle (f_1+f_2) - (\mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}] + \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}]), h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}\\
&= \langle \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}] + \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}] - \mathrm{E}[f_1+f_2 \mid \mathcal{G}], h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}
\end{aligned}
$$

となり，特に $h = \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}] + \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}] - \mathrm{E}[f_1+f_2 \mid \mathcal{G}] \in \mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ とすれば

$$
\left\| \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}] + \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}] - \mathrm{E}[f_1+f_2 \mid \mathcal{G}] \right\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0
$$

が成り立つことになるから

$$
\mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}] + \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}] = \mathrm{E}[f_1+f_2 \mid \mathcal{G}]
$$

が示された．

C4　「任意の $f \in \mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ に対して，$f \geq 0$ a.s. ならば $\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}] \geq 0$ a.s.」—(※) を示せばよい．これが示されれば $f_1, f_2 \in \mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ で $f_1 \leq f_2$ a.s. となるものに対し

$$0 \leq f_2 - f_1 \text{ a.s.} \quad \Rightarrow 0 \leq \mathrm{E}[f_2 - f_1\,|\,\mathcal{G}] = \mathrm{E}[f_2\,|\,\mathcal{G}] - \mathrm{E}[f_1\,|\,\mathcal{G}] \text{ a.s.}$$

が成り立つ．しかし，この場合本題に入る前に次の命題を証明する必要がある．これは等号 $\mathrm{E}[f_2 - f_1\,|\,\mathcal{G}] = \mathrm{E}[f_2\,|\,\mathcal{G}] - \mathrm{E}[f_1\,|\,\mathcal{G}]$ が成り立つことを保証するためである．

命題.　考えている空間は今までと同じ Hilbert 空間 $\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)$, $\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ である．任意の実数 α と任意の $f \in \mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ に対して次が成立する:

$$\mathrm{E}[\alpha f\,|\,\mathcal{G}] = \alpha\,\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}].$$

証明.　射影定理より

$$\langle f - \mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}], h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0, \quad \langle \alpha f - \mathrm{E}[\alpha f\,|\,\mathcal{G}], h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0 \quad (\forall h \in \mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu))$$

が成り立っているから

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{E}[\alpha f\,|\,\mathcal{G}] - \alpha\,\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}], h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} &= \langle \mathrm{E}[\alpha f\,|\,\mathcal{G}] - \alpha f, h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} - \langle \alpha\,\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}] - \alpha f, h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} \\ &= \langle \mathrm{E}[\alpha f\,|\,\mathcal{G}] - \alpha f, h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} - \alpha\langle f - \mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}], h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} \\ &= 0. \quad (\forall h \in \mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu))\end{aligned}$$

特に $h = \mathrm{E}[\alpha f\,|\,\mathcal{G}] - \alpha\,\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}] \in \mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ として

$$\left\| \mathrm{E}[\alpha f\,|\,\mathcal{G}] - \alpha\,\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}] \right\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0$$

だから $\mathrm{E}[\alpha f\,|\,\mathcal{G}] = \alpha\,\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}]$ が成り立つ． ■

次に (※) を示す．

$$\begin{aligned}A &:= \{x \in \Omega \mid \ f(x) < 0\} && (\in \mathcal{F}), \\ B &:= \{x \in \Omega \mid \ \mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}](x) < 0\} && (\in \mathcal{G})\end{aligned}$$

として $\mu(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu(B) = 0$ が成り立つと言えばよく，$\mu(A) = 0$ の下で $\mu(B) > 0$ と仮定しては不合理であることを以下に記述する．
$\mu(A) = 0,\ \mu(B) > 0$ であるとする．$\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ の元を

$$h(x) := \begin{cases} \mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}](x) & (x \in B^c) \\ 0 & (x \in B) \end{cases}$$

として定義すると

$$
\begin{aligned}
\|f-h\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} &= \int_\Omega |f(x)-h(x)|^2\,\mu(dx)\\
&= \int_{A^c\cap B^c} |f(x)-h(x)|^2\,\mu(dx) + \int_{A^c\cap B} |f(x)-h(x)|^2\,\mu(dx)\\
&= \int_{A^c\cap B^c} |f(x)-\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}](x)|^2\,\mu(dx) + \int_{A^c\cap B} |f(x)|^2\,\mu(dx)\\
&< \int_{A^c\cap B^c} |f(x)-\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}](x)|^2\,\mu(dx) + \int_{A^c\cap B} |f(x)-\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}](x)|^2\,\mu(dx)\\
&= \left\|f-\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}]\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．これは $\mu(A)=0$ であること，$\mu(A^c\cap B)=\mu(B)-\mu(A\cap B)=\mu(B)>0$ であること，それから $A^c\cap B$ の上で

$$
\begin{gathered}
|f(x)-\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}](x)|^2-|f(x)|^2=\left(f(x)-\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}](x)+f(x)\right)\left(-\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}](x)\right)>0\\
(\because f(x)\geq 0,\ \mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}](x)<0,\quad \forall x\in A^c\cap B)
\end{gathered}
$$

が成り立っていることによる．上の結果，すなわち

$$
\|f-h\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} < \left\|f-\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}]\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}
$$

を満たす $h\in\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ が存在することは $\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}]$ が f の射影であることに違反している．以上より $\mu(B)=0$ でなくてはならず，(※) が示された．

C5 $\left\|\mathrm{E}[gf\,|\,\mathcal{G}]-g\,\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}]\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}=0$ が成り立つことを示す．任意の $h\in\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ に対して

$$
\langle \mathrm{E}[gf\,|\,\mathcal{G}]-g\,\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}],h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = \langle \mathrm{E}[gf\,|\,\mathcal{G}]-gf,h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} + \langle gf-g\,\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}],h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}
$$

を考えると，右辺が 0 になることが次のように証明される．先ず右辺第一項について，gf は $\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ に入る．g は或る μ-零集合 $E\in\mathcal{G}$ を除いて有界であるから，或る正数 α によって $|g(x)|\leq\alpha\ (\forall x\in E^c)$ と抑えられ，

$$
\int_\Omega |g(x)f(x)|^2\,\mu(dx)=\int_{E^c}|g(x)|^2|f(x)|^2\,\mu(dx)\leq\alpha^2\int_{E^c}|f(x)|^2\,\mu(dx)=\alpha^2\int_\Omega|f(x)|^2\,\mu(dx)<\infty
$$

が成り立つからである．従って射影定理により

$$
\langle \mathrm{E}[gf\,|\,\mathcal{G}]-gf,h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}=0\quad(\forall h\in\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu)).
$$

右辺第二項について，

$$
\langle gf-g\,\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}],h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}=\int_\Omega\left(f(x)-\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}](x)\right)g(x)h(x)\,\mu(dx)=\langle f-\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}],gh\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}
$$

であって，先と同様の理由で $gh\in\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu)\ (\forall h\in\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu))$ が成り立つから射影定理より

$$
\langle gf-g\,\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}],h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}=0\quad(\forall h\in\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu))
$$

であると判明した．始めの式に戻れば

$$
\langle \mathrm{E}[gf\,|\,\mathcal{G}]-g\,\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}],h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}=0\quad(\forall h\in\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu))
$$

が成り立つことになり，特に $h = \mathrm{E}[gf \mid \mathcal{G}] - g\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ に対しては

$$\left\| \mathrm{E}[gf \mid \mathcal{G}] - g\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \right\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0$$

となることから $\mathrm{E}[gf \mid \mathcal{G}] = g\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}]$ が示された．

C6　任意の $h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{H}, \mu) \subset \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ に対し，射影定理より

$$\begin{aligned}
&\left\langle \mathrm{E}\left[\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \,\middle|\, \mathcal{H}\right] - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{H}], h \right\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} \\
&\quad = \left\langle \mathrm{E}\left[\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \,\middle|\, \mathcal{H}\right] - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h \right\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} \\
&\qquad + \langle \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] - f, h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} + \langle f - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{H}], h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0
\end{aligned}$$

が成り立つ．特に $h = \mathrm{E}\left[\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \,\middle|\, \mathcal{H}\right] - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{H}] \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{H}, \mu)$ とすれば

$$\left\| \mathrm{E}\left[\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \,\middle|\, \mathcal{H}\right] - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{H}] \right\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0$$

ということになるので $\mathrm{E}\left[\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \,\middle|\, \mathcal{H}\right] = \mathrm{E}[f \mid \mathcal{H}]$ であることが示された．

$\blacksquare$

3　10/17

基礎の確率空間を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ とする．

定義 3.1 (独立性).　X を可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ 関数，$\mathcal{G}$ を $\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族とする．この下で X と $\mathcal{G}$ が独立であることを以下で定義する:

任意の有界実連続関数 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対し次が成り立つ．

$$\mathrm{E}\left[h(X) \mid \mathcal{G}\right] = \mathrm{E}\left[h(X)\right] \quad \mathrm{P}-\text{a.s.}$$

命題 (独立性の同値条件).　任意の有界実連続関数 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対し

$$\mathrm{E}\left[h(X) \mid \mathcal{G}\right] = \mathrm{E}\left[h(X)\right] \quad \mathrm{P}-\text{a.s.}$$

が成立すること (—(1) とする) と，

$$\mathrm{P}\left(X^{-1}(E) \cap A\right) = \mathrm{P}\left(X^{-1}(E)\right)\mathrm{P}(A) \quad (\forall E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}),\ A \in \mathcal{G})$$

が成立すること (—(2) とする) は同値である．

証明.

(1) ⇒ (2) について　示したいことは

$$\mathfrak{B}(\mathbb{R}) = \left\{ E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \quad \middle| \quad \mathrm{P}\left(X^{-1}(E) \cap A\right) = \mathrm{P}\left(X^{-1}(E)\right)\mathrm{P}(A), \quad \forall A \in \mathcal{G} \right\}$$

である．証明の手順としてまず上式右辺が Dynkin 族となることを示し，次に $\mathbb{R}$ の閉集合系が右辺に含まれることを示せば，Dynkin 族定理より上式が成立することが判る．右辺を

$$\mathscr{D} := \left\{ E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \quad \middle| \quad \mathrm{P}\left(X^{-1}(E) \cap A\right) = \mathrm{P}\left(X^{-1}(E)\right)\mathrm{P}(A), \quad \forall A \in \mathcal{G} \right\}$$

とおいて表示を簡単にしておく．$\mathscr{D}$ が Dynkin 族であることを示すには次の 3 条件を確認すればよい:

(i).　$\mathbb{R} \in \mathscr{D}$,

(ii).　$D_1, D_2 \in \mathscr{D},\ D_1 \subset D_2 \quad \Rightarrow \quad D_2 - D_1 \in \mathscr{D}$,

(iii).　$D_n \in \mathscr{D},\ D_n \cap D_m = \emptyset\ (n \neq m) \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathscr{D}$

(i) について，$\Omega = X^{-1}(\mathbb{R})$ により $\mathrm{P}\left(X^{-1}(\mathbb{R}) \cap A\right) = \mathrm{P}(A) = \mathrm{P}\left(X^{-1}(\mathbb{R})\right)\mathrm{P}(A)\ (\forall A \in \mathcal{G})$ であるから $\mathbb{R} \in \mathscr{D}$ となる．(ii) について，

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(X^{-1}(D_2 - D_1) \cap A\right) &= \mathrm{P}\left(X^{-1}(D_2) \cap A\right) - \mathrm{P}\left(X^{-1}(D_1) \cap A\right) \\
&= \left(\mathrm{P}\left(X^{-1}(D_2)\right) - \mathrm{P}\left(X^{-1}(D_1)\right)\right)\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}\left(X^{-1}(D_2 - D_1)\right)\mathrm{P}(A), \quad (\forall A \in \mathcal{G})
\end{aligned}$$

により $D_2 - D_1 \in \mathscr{D}$ となる．(iii) について，

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(X^{-1}\left(\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} D_n\right) \cap A\right) &= \mathrm{P}\left(\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} X^{-1}(D_n) \cap A\right) = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\left(X^{-1}(D_n) \cap A\right) \\
&= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\left(X^{-1}(D_n)\right)\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}\left(X^{-1}\left(\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} D_n\right)\right)\mathrm{P}(A), \quad (\forall A \in \mathcal{G})
\end{aligned}$$

により $\sum_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathscr{D}$ となる．以上で $\mathscr{D}$ が Dynkin 族であることが判った．次に $\mathbb{R}$ の閉集合系が $\mathscr{D}$ に含まれることを示す．E を $\mathbb{R}$ の任意の閉集合とする．

$$d(\cdot, E) : \mathbb{R} \ni x \longmapsto \inf\{\, |x-y| \quad | \quad y \in E \,\}$$

として集合との距離の関数を表せばこれは $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の実連続関数であり，

$$h_n : \mathbb{R} \ni x \longmapsto \frac{1}{1 + nd(x,E)} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

は有界実連続関数となる．E が閉集合であるから $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = \mathbb{1}_E(x)\ (\forall x \in \mathbb{R})$ であり，また h_n の有界連続性から $h_n \circ X \in \mathrm{L}^2(\mathcal{F}, \mu)\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ であることに注意すれば，任意の $A \in \mathcal{G}$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(X^{-1}(E) \cap A\right) &= \int_\Omega \mathbb{1}_E(X(\omega))\mathbb{1}_A(\omega)\ \mathrm{P}(d\omega) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega h_n(X(\omega))\mathbb{1}_A(\omega)\ \mathrm{P}(d\omega) && (\because \text{Lebesgue の収束定理}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \mathrm{E}[h_n(X) \mid \mathcal{G}](\omega)\mathbb{1}_A(\omega)\ \mathrm{P}(d\omega) && (\because \text{レポート問題 2[C2]}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[h_n(X)] \int_\Omega \mathbb{1}_A(\omega)\ \mathrm{P}(d\omega) && (\because \text{(1) より．} \mathrm{E}[h_n(X) \mid \mathcal{G}] \neq \mathrm{E}[h_n(X)] \text{ の部分は積分に影響しない．}) \\
&= \mathrm{P}(A) \lim_{n\to\infty} \int_\Omega h_n(X(\omega))\ \mathrm{P}(d\omega) && (\because \text{レポート問題 2[C1]}) \\
&= \mathrm{P}(A) \int_\Omega \mathbb{1}_E(X(\omega))\ \mathrm{P}(d\omega) && (\because \text{Lebesgue の収束定理}) \\
&= \mathrm{P}\left(X^{-1}(E)\right)\mathrm{P}(A)
\end{aligned}$$

が成り立ち，$\mathbb{R}$ の閉集合系が $\mathscr{D}$ に含まれることが示された．閉集合系は乗法族であり $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ を生成するから (2) が成り立つと判明する．

(2) ⇒ (1) について　任意の $A \in \mathcal{G}$ に対し

$$\int_\Omega \mathbb{1}_A(\omega)\mathrm{E}[h(X) \mid \mathcal{G}](\omega)\ \mathrm{P}(d\omega) = \mathrm{P}(A)\mathrm{E}[h(X)] = \int_\Omega \mathbb{1}_A(\omega)\mathrm{E}[h(X)]\mathrm{P}(d\omega)$$

が成立することをいえばよい．有界実連続関数 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が非負であるとして h の単関数近似を考えると，例えば

$$\begin{aligned}
E_n^j &:= \left\{ x \in \mathbb{R} \quad \middle| \quad \frac{j-1}{3^n} \leq h(x) < \frac{j}{3^n} \right\}, \quad (j = 1, 2, \cdots, n3^n - 1,\ n = 1, 2, 3, \cdots) \\
E_n^{n3^n} &:= \{\, x \in \mathbb{R} \quad | \quad n \leq h(x) \,\}
\end{aligned}$$

として

$$h_n(x) = \sum_{j=1}^{n3^n} \frac{j}{3^n} \mathbb{1}_{E_n^j}(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R},\ n = 1, 2, 3, \cdots)$$

とおけば，h が可測 $\mathfrak{B}(\mathbb{R})/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であるから E_n^j は全て Borel 集合であり，任意の $A \in \mathcal{G}$ に対

して

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \mathbb{1}_A(\omega)\,\mathrm{E}\left[h(X)\,|\,\mathcal{G}\right](\omega)\ \mathrm{P}(d\omega) &= \int_\Omega \mathbb{1}_A(\omega) h(X(\omega))\ \mathrm{P}(d\omega) && (\because \text{レポート問題 2[C2]}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \mathbb{1}_A(\omega) h_n(X(\omega))\ \mathrm{P}(d\omega) && (\because \text{積分の定義}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n3^n} \int_\Omega \mathbb{1}_A(\omega)\mathbb{1}_{X^{-1}(E_n^j)}(\omega)\ \mathrm{P}(d\omega) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n3^n} \mathrm{P}\left(X^{-1}(E_n^j)\cap A\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n3^n} \mathrm{P}\left(X^{-1}(E_n^j)\right)\mathrm{P}(A) && (\because \text{(2) より.}) \\
&= \mathrm{P}(A) \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n3^n} \int_\Omega \mathbb{1}_{X^{-1}(E_n^j)}(\omega)\ \mathrm{P}(d\omega) \\
&= \mathrm{P}(A) \lim_{n\to\infty} \int_\Omega h_n(X(\omega))\ \mathrm{P}(d\omega) \\
&= \mathrm{P}(A) \int_\Omega h(X(\omega))\ \mathrm{P}(d\omega) \\
&= \mathrm{P}(A)\,\mathrm{E}\left[h(X)\right]
\end{aligned}
$$

が成り立つ．一般の有界実連続関数 h についても $\{\, x \in \mathbb{R} \mid h(x) \geq 0 \,\}$ の部分と $\{\, x \in \mathbb{R} \mid h(x) < 0 \,\}$ の部分に分解して上と同様に考えれば

$$\int_\Omega \mathbb{1}_A(\omega)\,\mathrm{E}\left[h(X)\,|\,\mathcal{G}\right](\omega)\ \mathrm{P}(d\omega) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{E}\left[h(X)\right] \quad (\forall A \in \mathcal{G})$$

となる．従って $\mathcal{G}$ の元 $\{\, \omega \in \Omega \mid \mathrm{E}\left[h(X)\,|\,\mathcal{G}\right](\omega) > \mathrm{E}\left[h(X)\right] \,\}$ も $\{\, \omega \in \Omega \mid \mathrm{E}\left[h(X)\,|\,\mathcal{G}\right](\omega) < \mathrm{E}\left[h(X)\right] \,\}$ も P-零集合でなくてはならず，

$$\mathrm{E}\left[h(X)\,|\,\mathcal{G}\right] = \mathrm{E}\left[h(X)\right] \quad \mathrm{P}-\text{a.s.}$$

が示された．

∎

レポート問題 3. $A, B \in \mathcal{F}$ に対し，$X = \mathbb{1}_A$，$\mathcal{G} = \{\emptyset,\ \Omega,\ B,\ B^c\}$ とする．この時

$$X \text{ と } \mathcal{G} \text{ が独立} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{P}(A\cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B).$$

証明. $\forall E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$X^{-1}(E) = \begin{cases} \emptyset & (0, 1 \notin E) \\ A & (0 \notin E,\ 1 \in E) \\ A^c & (0 \in E,\ 1 \notin E) \\ \Omega & (0, 1 \in E) \end{cases}$$

であることに注意する．$\Rightarrow$ については前命題より成り立ち，$\Leftarrow$ については

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$$

ならば

$$\mathrm{P}(A^c \cap B) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B) = (1 - \mathrm{P}(A))\,\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A^c)\,\mathrm{P}(B)$$

も成り立ち，A を Ω, $\emptyset$ にしても上の等式は成り立つから，前命題により X と $\mathcal{G}$ が独立であると判る． ∎