

ε 計算とクラスの導入による具体的で直観的な集合論の構築

関根深澤研 百合川尚学
学籍番号 : 29C17095

February 8, 2020

Contents

- 1 導入
- 2 言語
- 3 式の書き換え
- 4 証明
- 5 保存拡大
- 6 いくつかの性質
- 7 証明が簡単になる例

ε について

- ε 計算は数論の無矛盾性証明のために Hilbert[1] が開発.
- ε によって \exists, \forall を使う証明を命題論理の証明に埋め込める.
- 式 $\varphi(x)$ に対して

$$\varepsilon x \varphi(x)$$

という形のモノを作り, ε 項と呼ぶ. 命題論理の証明に埋め込む際には, \exists や \forall の付いた式を

$$\varphi(x/\varepsilon x \varphi(x)) \stackrel{\text{def}}{\longleftrightarrow} \exists x \varphi(x),$$

$$\varphi(x/\varepsilon x \rightarrow x \varphi(x)) \stackrel{\text{def}}{\longleftrightarrow} \forall x \varphi(x)$$

によって変換する.

ε について

- 今回 ε 項を導入したのは「存在」と「実在」を同義とするため.
- つまり, 導入の意図は存在文に対して証人を与えること (Henkin 拡大):

$$\exists x\varphi(x) \rightarrow \varphi(\varepsilon x\varphi(x)).$$

この式は \exists に関する主要な公理.

- 「 φ である集合が存在すれば, その一つは $\varepsilon x\varphi(x)$ である。」
- 「 $\rightarrow \forall x\varphi(x) \rightarrow \exists x \rightarrow \varphi(x)$ 」と組み合わせると

$$\varphi(\varepsilon x \rightarrow \varphi(x)) \rightarrow \forall x\varphi(x)$$

が出る.

ε について

- ZF 集合論では集合というモノが用意されていないため、「存在」は「実在」ではない。たとえば

$$\exists x \forall y (y \notin x)$$

は定理であり「空集合は存在する」と読むが、空集合を
“実際に取ってくる”ことは不可能。

- 空集合を手に入れる一つの方法は「定義による拡大」。
- ε 項を使えば、 \exists の公理と空集合の存在定理によって次が成立：

$$\forall y (y \notin \varepsilon x \forall y (y \notin x)).$$

ε 項を使う他のメリット

- 証明で用いる推論規則は三段論法のみで済む。
- 量化の範囲が具体的になる。
- 証明が容易になる場合がある。

クラスについて

- Bourbaki[4] や島内 [5] でも ε 項を使った集合論を展開.
- ところで, 「 φ である集合の全体」の意味の

$$\{x \mid \varphi(x)\}$$

というモノも取り入れたい.

- Bourbaki[4] や島内 [5] では

$$\{x \mid \varphi(x)\} \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon y \forall x (\varphi(x) \leftrightarrow x \in y)$$

と定めるが,

$$\exists y \forall x (\varphi(x) \leftrightarrow x \in y)$$

が成立しない場合は「 φ である集合の全体」という意味を持たない.

- **ZF** 集合論では「定義による拡大」 or インフォーマルな導入.
- 式 φ から直接 $\{x \mid \varphi(x)\}$ の形のモノを作ればよい (Bernays[6], 竹内 [7]).

クラスについて

クラス

式 φ に x のみが自由に現れているとき, $\varepsilon x\varphi(x)$, $\{x \mid \varphi(x)\}$ の形のモノをクラス (**class**) と呼ぶ.

- クラスである ε 項は集合である.
- 集合でないクラスもある. たとえば $\{x \mid x = x\}$ や $\{x \mid x \notin x\}$ は集合ではない.

集合の定義は竹内 [7] に倣う.

集合

クラス c が

$$\exists x (c = x)$$

を満たすとき c を集合 (**set**) と呼ぶ. $\rightarrow \exists x (c = x)$ である場合は真クラス (**proper class**) と呼ぶ. 定義により **集合はクラスである**.

主結果

- ε 計算とクラスの直接的な導入を組み合わせたが、これが **ZF** 集合論の“妥当”な拡張であるかどうかが問題になる。
- 妥当性は、**ZF** 集合論の命題 ψ に対して

ZF 集合論で ψ が証明可能 \iff 新しい集合論で ψ が証明可能
 が成り立つかどうかで検証する。より精しく書くと、

主結果

\mathcal{L}_ε の任意の文 (自由な変項が現れない式) ψ に対して、「 Γ から ψ への **HK** の証明で \mathcal{L}_ε の式の列であるものが取れる」ことと「 Σ から ψ への **HE** の証明で \mathcal{L} の文の列であるものが取れる」ことは同値。

ここで、

- Γ は \mathcal{L}_ε の文で書かれた **ZF** 集合論の公理系。
- Σ は \mathcal{L} の文で書かれた本論文の公理系。
- **HK** と **HE** は証明体系 (論理的公理+推論規則)。

以下詳細。

言語 \mathcal{L}_\in

\mathcal{L}_\in とは **ZF** 集合論の言語である.

言語 \mathcal{L}_\in の語彙 (参考: 菊池 [14])

矛盾記号 \perp

論理記号 $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$

量化子 \forall, \exists

述語記号 $=, \in$

変項 x, y, z, \dots

言語 \mathcal{L}_E の項と式

\mathcal{L}_E の項と式は次の規則で生成する.

\mathcal{L}_E の項と式

項 変項は項であり, またこれらのみが項である.

- 式
- \perp は式である.
 - 項 τ と項 σ に対して $\tau \in \sigma$ と $\tau = \sigma$ は式である.
 - 式 φ に対して $\neg \varphi$ は式である.
 - 式 φ と式 ψ に対して $\varphi \vee \psi$ と $\varphi \wedge \psi$ と $\varphi \rightarrow \psi$ はいずれも式である.
 - 式 φ と項 x に対して $\exists x\varphi$ と $\forall x\varphi$ は式である.
 - これらのみが式である.

言語の拡張

- クラスを正式に導入するために言語を拡張する.
- 拡張は二段階に分けて行う. 始めに ε 項のために拡張し, 次に $\{x \mid \varphi(x)\}$ の形の項のために拡張する.
- 始めの拡張で作る言語を \mathcal{L}_ε と名付ける.

言語 \mathcal{L}_ε の語彙 (参考: 島内 [5])

矛盾記号 \perp

論理記号 $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$

量化子 $\forall, \exists, \varepsilon$

述語記号 $=, \in$

変項 x, y, z, \dots

\mathcal{L}_ε の項と式

\mathcal{L}_ε の項と式の定義 (参考 : Moser&Zach[2])

- 変項は項である.
 - \perp は式である.
 - 項 τ と項 σ に対して $\tau \in \sigma$ と $\tau = \sigma$ は式である.
 - 式 φ に対して $\neg \varphi$ は式である.
 - 式 φ と式 ψ に対して $\varphi \vee \psi$ と $\varphi \wedge \psi$ と $\varphi \rightarrow \psi$ はいずれも式である.
 - 式 φ と変項 x に対して $\exists x\varphi$ と $\forall x\varphi$ は式である.
 - 式 φ と変項 x に対して $\varepsilon x\varphi$ は項である.
 - これらのみが項と式である.
-
- \mathcal{L}_\in との大きな違いは項と式の生成が循環している点.
 - \mathcal{L}_ε の式が \mathcal{L}_ε の項を用いて作られるのは当然ながら, その逆に \mathcal{L}_ε の項もまた \mathcal{L}_ε の式から作られる.
 - \mathcal{L}_\in の式は \mathcal{L}_ε の式でもある.

言語 \mathcal{L}

- \mathcal{L}_ε の式 φ と変項 x で作られる $\varepsilon x\varphi$ なる項を **ε 項 (epsilon term)** という.
- \mathcal{L}_ε の式 φ と変項 x で作られる $\{x \mid \varphi\}$ なる項を **内包項** ということにする.

言語 \mathcal{L} は本論文特有の言語である. 内包項の導入は竹内 [7] を参考にして
いるが, \mathcal{L}_ε の式を使って入れるという点が本論文の特徴である.

言語 \mathcal{L} の語彙

矛盾記号 \perp

論理記号 $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$

量化子 \forall, \exists

述語記号 $=, \in$

変項 x, y, z, \dots

ε 項と内包項 上記のもの

\mathcal{L} の項と式

\mathcal{L} の項と式の定義

項 変項, ε 項, 内包項は項である. またこれらのみが項である.

- 式**
- \perp は式である.
 - 項 τ と項 σ に対して $\tau \in \sigma$ と $\tau = \sigma$ は式である.
 - 式 φ に対して $\neg \varphi$ は式である.
 - 式 φ と式 ψ に対して $\varphi \vee \psi$ と $\varphi \wedge \psi$ と $\varphi \rightarrow \psi$ はいずれも式である.
 - 式 φ と変項 x に対して $\exists x \varphi$ と $\forall x \varphi$ は式である.
 - これらのみが式である.

言語 \mathcal{L} こそが本論文の標準言語である.

扱う式の制限

上で作った項や式の中には

$$\varepsilon x(y = y), \quad \{x \mid z \neq z\}, \quad \forall x(u \in v)$$

のような意味の通らないものが氾濫しているので，排除する．

- $\varepsilon x\varphi$ なる形の ε 項は， φ に x “のみ” 自由に現れているとき **主要 ε 項**と呼ぶことにする．
- $\{x \mid \varphi\}$ なる形の内包項は， φ に x “が” 自由に現れているとき，**正則内包項**と呼ぶことにする．
- 以降扱う式に現れる ε 項は全て主要 ε 項，内包項は全て正則内包項であるとし， $\forall x\varphi$ や $\exists x\varphi$ なる式は φ に x が自由に現れているとする．

クラス

主要 ε 項と同様に, $\{x \mid \varphi\}$ なる形の内包項は, φ に x “のみ” 自由に現れているとき, **主要内包項**と呼ぶことにする.

クラス

主要 ε 項と主要内包項をクラス (class) と呼ぶ. またこれらのみがクラスである.

主要 ε 項は実際は集合である (後述).

\mathcal{L} の式を \mathcal{L}_ε の式に書き換える

- ε 項を導入したのは、存在文に対して証人を付けるため：

$$\exists x\varphi(x) \rightarrow \varphi(\varepsilon x\varphi(x)).$$

- しかし φ に内包項が使われているとき、 $\varepsilon x\varphi(x)$ は使えない (作られていない).
- そのときは、 φ を “同値” な \mathcal{L}_ε の式 $\hat{\varphi}$ に書き換えて

$$\exists x\varphi(x) \rightarrow \varphi(\varepsilon x\hat{\varphi}(x))$$

を公理とすればよい.

式の書き換え

φ の部分式のうち原子式であるところを表に従って直したものを「 φ の書き換え」と呼ぶ.

	元の式	書き換え後
(1)	$a = \{z \mid \psi\}$	$\forall v (v \in a \leftrightarrow \psi(z/v))$
(2)	$\{y \mid \varphi\} = b$	$\forall u (\varphi(y/u) \leftrightarrow u \in b)$
(3)	$\{y \mid \varphi\} = \{z \mid \psi\}$	$\forall u (\varphi(y/u) \leftrightarrow \psi(z/u))$
(4)	$a \in \{z \mid \psi\}$	$\psi(z/a)$
(5)	$\{y \mid \varphi\} \in b$	$\exists s (\forall u (\varphi(y/u) \leftrightarrow u \in s) \wedge s \in b)$
(6)	$\{y \mid \varphi\} \in \{z \mid \psi\}$	$\exists s (\forall u (\varphi(y/u) \leftrightarrow u \in s) \wedge \psi(z/s))$

ここで,

- a, b は変項か主要 ε 項.
- $\psi(z/v)$ は ψ に自由に現れている z に v を代入した式.

ZF の公理系

Γ の公理 (参考 : Kunen[11])

外延性 「同一の要素を持つ集合同士は等しい」

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y).$$

相等性 「等しい集合同士の服属関係は一致する」

$$\forall x \forall y (x = y \rightarrow y = x),$$

$$\forall x \forall y \forall z (x = y \rightarrow (x \in z \rightarrow y \in z)),$$

$$\forall x \forall y \forall z (x = y \rightarrow (z \in x \rightarrow z \in y)).$$

置換 「集合を写像で写した像は集合」 次の式の全称閉包 :

$$\forall x \forall y \forall z (\varphi(x, y) \wedge \varphi(x, z) \rightarrow y = z)$$

$$\rightarrow \forall a \exists z \forall y (y \in z \leftrightarrow \exists x (x \in a \wedge \varphi(x, y))).$$

置換公理は式 φ ごとに公理となるので **図式 (schema)** と呼ばれる。

ZF の公理系

Γ の公理

対 「対集合が存在する」

$$\forall x \forall y \exists p \forall z (x = z \vee y = z \leftrightarrow z \in p).$$

合併 「合併集合が存在する」

$$\forall x \exists u \forall y (\exists z (z \in x \wedge y \in z) \leftrightarrow y \in u).$$

冪 「冪集合が存在する」

$$\forall x \exists p \forall y (\forall z (z \in y \rightarrow z \in x) \leftrightarrow y \in p).$$

これらの公理によって既存の集合から新しい集合が作られる。

ZF の公理系

Γ の公理

正則性 「空でない集合は自分自身と交わらない要素を持つ」

$$\forall r (\exists x (x \in r) \rightarrow \exists y (y \in r \wedge \forall z (z \in r \rightarrow z \notin y))).$$

無限 「自然数の全体を含む集合が存在する」

$$\begin{aligned} \exists x (\exists s (\forall t (t \notin s) \wedge s \in x) \wedge \forall y (y \in x \rightarrow \\ \exists u (\forall v (v \in u \leftrightarrow v \in y \vee v = y) \wedge u \in x))). \end{aligned}$$

正則性公理によって集合の範囲が決定する (整礎集合). また無限公理は唯一「集合の存在」に言及している.

古典論理

HK とは古典論理 (classical logic) の Hilbert 流証明体系である。

HK の論理的公理 (命題論理)(参考 : 戸次 [13])

含意の分配 $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)).$

含意の導入 $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi).$

矛盾の導入 $\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \perp), \quad \neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \perp).$

否定の導入 $(\varphi \rightarrow \perp) \rightarrow \neg\varphi.$

論理和の導入 $\varphi \rightarrow \varphi \vee \psi, \quad \psi \rightarrow \varphi \vee \psi.$

論理和の除去 $(\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \vee \psi \rightarrow \chi)).$

論理積の導入 $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi)).$

論理積の除去 $\varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi, \quad \varphi \wedge \psi \rightarrow \psi.$

二重否定の除去 $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi.$

古典論理

HK の論理的公理 (量化)(参考 : 戸次 [13])

全称の導入 $\forall y(\psi \rightarrow \varphi(x/y)) \rightarrow (\psi \rightarrow \forall x\varphi).$

全称の除去 $\forall x\varphi \rightarrow \varphi(x/t).$

存在の導入 $\varphi(x/t) \rightarrow \exists x\varphi.$

存在の除去 $\forall y(\varphi(x/y) \rightarrow \psi) \rightarrow (\exists x\varphi \rightarrow \psi).$

HK の証明 (参考 : 戸次 [13])

「 Γ からの **HK** の証明で \mathcal{L}_\in の式の列であるもの」とは、 \mathcal{L}_\in の式の列 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ で、各 φ_i が次のいずれかであるもの :

- **HK** の公理である
- Γ の公理である
- φ_j, φ_k ($j, k < i$) から三段論法で得られる
- φ_j ($j < i$) から汎化で得られる.

Σ の公理

- Σ は「対」「合併」「冪」「正則性」「無限」は Γ と共通.
- Σ の「置換」は, 二つの変項が現れる式に対しての言明に替わる.
- 新しく「内包性」と「要素」の公理が追加.

Σ の公理 (参考: 竹内 [7])

a, b, c をクラスとすると

外延性 「同一の要素を持つクラス同士は等しい」

$$\forall z (z \in a \leftrightarrow z \in b) \rightarrow a = b.$$

相等性 「等しい集合同士の服属関係は一致する」

$$a = b \rightarrow b = a,$$

$$a = b \rightarrow (a \in c \rightarrow b \in c),$$

$$a = b \rightarrow (c \in a \rightarrow c \in b).$$

Σ の公理

Σ の公理

a, b をクラスとすると

内包性 「 $\{y \mid \varphi(y)\}$ は φ であるモノの全体」

$$\forall x (x \in \{y \mid \varphi(y)\} \leftrightarrow \varphi(x)).$$

ただし $\{y \mid \varphi(y)\}$ は主要内包項.

要素 「要素となりうるものは集合に限る」

$$a \in b \rightarrow \exists x (a = x).$$

- クラスは量化しないのでこれらの公理は図式 (schema) である.
- 要素の公理は Gödel[8] の引用である.

HE の公理

HE は本論文特有の証明体系である。命題論理の論理的公理は **HK** と共通するが、量化公理が違う。

HE の論理的公理 (量化)

De Morgan の法則 $\rightarrow \forall x \varphi(x) \rightarrow \exists x \rightarrow \varphi(x).$

全称の除去 $\forall x \varphi \rightarrow \varphi(x/\tau).$

存在の導入 $\varphi(x/\tau) \rightarrow \exists x \varphi.$

存在の除去 $\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(\varepsilon x \hat{\varphi}(x)).$

$\hat{\varphi}$ とは、 φ が \mathcal{L}_ε の式でない場合に書き換えたもの。 φ が \mathcal{L}_ε の式ならば $\hat{\varphi}$ は φ とする。 また τ は主要 ε 項とする。

HE の公理により、量化 $\forall x, \exists x$ の亘る範囲は主要 ε 項の上となる。

HE の証明

HK と違い, HE の証明は文で行う.

HE の証明

「 Σ からの **HE** の証明で \mathcal{L} の文の列であるもの」とは, \mathcal{L} の文の列 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ で, 各 φ_i が次のいずれかであるもの:

- **HE** の公理である
- Σ の公理である
- φ_j, φ_k ($j, k < i$) から三段論法で得られる

「 Σ から ψ への **HE** の証明で \mathcal{L} の文の列であるもの」が取れることを

$$\Sigma \vdash \psi$$

と書く.

主結果の証明方針

次の 3 ステップに分割する：

- step1 「 Σ から ψ への **HE** の証明で \mathcal{L}_ε の文の列であるものが取れる」ならば「 Γ から ψ への **HK** の証明で \mathcal{L}_∞ の式の列であるものが取れる」ことを示す。
- step2 「 Γ から ψ への **HK** の証明で \mathcal{L}_∞ の式の列であるものが取れる」ならば「 Σ から ψ への **HE** の証明で \mathcal{L}_ε の文の列であるものが取れる」ことを示す。
- step3 「 Σ から ψ への **HE** の証明で \mathcal{L} の文の列であるものが取れる」ならば「 Σ から ψ への **HE** の証明で \mathcal{L}_ε の文の列であるものが取れる」ことを示す。

集合

集合

クラス a が集合であるとは,

$$\Sigma \vdash \exists x (a = x)$$

となること. $\Sigma \vdash \neg \exists x (a = x)$ なら a は真クラス (proper class).

主要 ε 項は集合

任意の主要 ε 項 τ に対して $\Sigma \vdash \exists x (\tau = x)$.

実際, 外延性公理より $\tau = \tau$ となり, また

$$\tau = \tau \rightarrow \exists x (\tau = x)$$

は **HE** の量化公理なので, 三段論法で $\exists x (\tau = x)$ が出る.

全称式の導出

全称式の導出

φ を, x のみが自由に現れる \mathcal{L} の式とすると,

$$\vdash \varphi(\varepsilon x \rightarrow \hat{\varphi}(x)) \rightarrow \forall x \varphi(x).$$

ただし $\hat{\varphi}$ は必要に応じて φ を $\mathcal{L}_{\varepsilon}$ の式に書き換えたもの.

実際,

$$\rightarrow \forall x \varphi(x) \rightarrow \exists x \rightarrow \varphi(x),$$

$$\exists x \rightarrow \varphi(x) \rightarrow \rightarrow \varphi(\varepsilon x \rightarrow \hat{\varphi}(x))$$

は **HE** の量化公理であり,

$$\rightarrow \forall x \varphi(x) \rightarrow \rightarrow \varphi(\varepsilon x \rightarrow \hat{\varphi}(x))$$

が導かれ, 対偶律より

$$\varphi(\varepsilon x \rightarrow \hat{\varphi}(x)) \rightarrow \forall x \varphi(x).$$

内包項の ε 項表現

集合である主要内包項は ε 項で書ける

φ を, x のみが自由に現れる \mathcal{L} の式とすると,

$$\exists s (\{x \mid \varphi(x)\} = s) \vdash \{x \mid \varphi(x)\} = \varepsilon s \forall x (\varphi(x) \leftrightarrow x \in s).$$

$\forall x (\varphi(x) \leftrightarrow x \in s)$ は $\{x \mid \varphi(x)\} = s$ の書き換えなので,

$$\exists s (\{x \mid \varphi(x)\} = s) \rightarrow \{x \mid \varphi(x)\} = \varepsilon s \forall x (\varphi(x) \leftrightarrow x \in s)$$

は **HE** の量化公理である. 従って $\exists s (\{x \mid \varphi(x)\} = s)$ を公理とすれば

$$\{x \mid \varphi(x)\} = \varepsilon s \forall x (\varphi(x) \leftrightarrow x \in s)$$

が定理として出る.

書き換えの同値性

書き換えは同値

φ を \mathcal{L}_E の文ではない \mathcal{L} の文とすると、

$$\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \hat{\varphi}.$$

ただし $\hat{\varphi}$ は φ の書き換え。

内包性公理と要素の公理はこの同値性を得るためにある。

$\exists x\varphi(x) \rightarrow \exists y\varphi(y)$ の証明

φ は \mathcal{L}_E の式で, x のみ自由に現れているとし, y は x への代入について自由であるとするとき,

$$\vdash \exists x\varphi(x) \rightarrow \exists y\varphi(y).$$

HE で証明すると,

$$\begin{aligned}\exists x\varphi(x) &\rightarrow \varphi(\varepsilon x\varphi(x)), \\ \varphi(\varepsilon x\varphi(x)) &\rightarrow \exists y\varphi(y)\end{aligned}$$

が共に **HE** の公理なので

$$\exists x\varphi(x) \rightarrow \exists y\varphi(y)$$

が従う.

$\exists x\varphi(x) \rightarrow \exists y\varphi(y)$ の証明

一方で **HK** で証明すると,

$$\varphi(x) \rightarrow \exists y\varphi(y)$$

は **HK** の公理であり, 汎化によって

$$\forall x(\varphi(x) \rightarrow \exists y\varphi(y))$$

が得られる.

$$\forall x(\varphi(x) \rightarrow \exists y\varphi(y)) \rightarrow (\exists x\varphi(x) \rightarrow \exists y\varphi(y))$$

が **HK** の公理なので, 三段論法で

$$\exists x\varphi(x) \rightarrow \exists y\varphi(y)$$

が出る.

$\exists x\varphi(x) \rightarrow \exists y\varphi(y)$ の証明

HE で証明した際、 A を $\exists x\varphi(x)$, B を $\varphi(\varepsilon x\varphi(x))$, C を $\exists y\varphi(y)$ として

$$A \rightarrow B,$$

$$B \rightarrow C,$$

$$(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C)),$$

$$A \rightarrow (B \rightarrow C),$$

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)),$$

$$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C),$$

$$A \rightarrow C$$

を追加しなくては証明とならないが、証明の組み立ては **HK** よりも直観的である。

$\exists y (\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(y))$ の証明

φ は \mathcal{L}_E の式で, x のみ自由に現れているとし, y は x への代入について自由であるとするとき,

$$\vdash \exists y (\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(y)).$$

HE で証明すると,

$$\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(\varepsilon x \varphi(x))$$

は **HE** の公理であり,

$$\begin{aligned} & (\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(\varepsilon x \varphi(x))) \\ & \rightarrow \exists y (\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(y)) \end{aligned}$$

も **HE** の公理なので, 三段論法で

$$\exists y (\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(y))$$

が従う.

$\exists y (\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(y))$ の証明

一方で **HK** で証明すると,

$$\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(\varepsilon x \varphi(x))$$

と

$$\begin{aligned} (\exists x \varphi(x) \rightarrow \exists y \varphi(y)) &\rightarrow (\neg \exists x \varphi(x) \vee \exists y \varphi(y)), \\ &\rightarrow \exists y (\neg \exists x \varphi(x) \vee \varphi(y)), \\ &\rightarrow \exists y (\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(y)) \end{aligned}$$

の証明が必要になる. 明らかに数行で終わる証明ではないし, 証明の方針も直観とはずれる.



D. Hilbert and P. Bernays, 数学の基礎 (吉田夏彦, 湊野昌訳), 丸善出版株式会社, 2012, pp. 23-63, ISBN 978-4-621-06405-4.



G. Moser and R. Zach, “The epsilon calculus and Herbrand complexity,” *Studia Logica*, vol. 82, no. 1, pp. 133-155, 2006.



K. Miyamoto and G. Moser, “The epsilon calculus with equality and Herbrand complexity,” arXiv:1904.11304, 2019.



N. Bourbaki, 数学原論 集合論 1 (前原昭二訳), 第一刷, 東京都書株式会社, 1968, pp. 64-65.



島内剛一, 数学の基礎, 第 1 版, 日本評論社, 2016, p. 67, ISBN 978-4-535-60106-2.



P. Bernays, *Axiomatic Set Theory*, 2nd edition, North-Holland Publishing Company, 1968.



竹内外史, 現代集合論入門, 増強版, 日本評論社, 2016, pp. 138-183, ISBN 978-4-535-60116-1.



K. Gödel, *The Consistency of the Continuum Hypothesis*, 8th printing, Princeton University Press 1970, p. 3, ISBN 0-691-07927-7.



A. Morse, *A Theory of Sets*, Academic Press, 1965, pp. xix-xxiii.



W. Quine, *Mathematical Logic*, revised edition, Harvard University Press, 1965.



K. Kunen, キューネン数学基礎論講義 (藤田博司訳), 第 1 版, 日本評論社, 2016, pp. 123-221, ISBN 978-4-535-78748-3.



前原昭二, 記号論理入門, 新装版, 日本評論社, 2018, pp. 106-115, ISBN 4-535-60144-5.



戸次大介, 数理論理学, 初版, 東京大学出版会, 2016, pp. 148-166, ISBN 978-4-13-062915-7.



菊池誠, 不完全性定理, 初版, 共立出版株式会社, 2017, pp. 86-91, ISBN 978-4-320-11096-0.



G. Takeuti, *Proof Theory*, vol. 81, North-Holland Publishing Company, 1975, pp. 15-17, ISBN 0-7204-2200-0.