

2019年12月29日

---

## $\varepsilon$ 項とクラスの導入による具体的で直観的な集合論の構築

---

# 目次

---

1	導入	2
1.1	$\varepsilon$ 計算について . . . . .	2
1.2	クラスについて . . . . .	4
2	言語	6
2.1	言語 $\mathcal{L}_\varepsilon$ . . . . .	7
2.2	言語の拡張 . . . . .	8
3	$\exists$ の規則	11
4	式の書き換え	13
5	$\exists$ の除去規則	15
6	$\forall$ の導入	16
7	成り立つこと	18

# 1 導入

---

## 1.1 $\varepsilon$ 計算について

---

- 量化 $\exists, \forall$ を使う証明を命題論理の証明に埋め込むために Hilbert が開始.
- 式  $\varphi(x)$  に対して

$$\varepsilon x \varphi(x)$$

という形のオブジェクトを作り,  $\varepsilon$  項と呼ぶ. また

$$\begin{aligned}\exists x \varphi(x) &\leftrightarrow \varphi(x / \varepsilon x \varphi(x)), \\ \forall x \varphi(x) &\leftrightarrow \varphi(x / \varepsilon x \rightarrow x \varphi(x))\end{aligned}$$

を公理とする.

- 命題論理の証明に埋め込む際には $\exists$ や $\forall$ の付いた式を $\varepsilon$ 項を代入した式に変換すればよい.
- ただし, 今回 $\varepsilon$ 項を導入したのは埋め込むためではなく **集合を「具体化」**するため.

- “生の”集合論では集合というオブジェクトが用意されていないため、「存在」は「実在」ではない。たとえば

$$\exists x \forall y (y \notin x)$$

は定理であり「空集合は存在する」と読むが、空集合を“実際に取ってくる”ことは不可能。

- $\varepsilon$ 項を使えば、 $\exists$ の公理と空集合の存在定理によって

$$\forall y (y \notin \varepsilon x \forall y (y \notin x))$$

が成り立つ。つまり  $\varepsilon$ 項は「存在」を「実在」に昇華する(上の  $\varepsilon$ 項は集合である)。

#### $\varepsilon$ 項のメリット

- 「存在」を「実在」で補強できる。
- ある種の  $\varepsilon$ 項は集合であり、集合を具体的なオブジェクトとして扱える。
- 証明で用いる推論規則は三段論法のみで済む。
- 証明は全て閉じた式で行える。

## 1.2 クラスについて

---

- ブルバキ[]や島内[]でも $\varepsilon$ 項を使った集合論を展開.
- ところで, 「 $\varphi(x)$ を満たす集合 $x$ の全体」の意味の

$$\{x \mid \varphi(x)\}$$

というオブジェクトも取り入れたい.

- “生の”集合論では“インフォーマル”な導入.
- ブルバキ[]や島内[]では

$$\{x \mid \varphi(x)\} \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon x \forall u (\varphi(u) \leftrightarrow u \in x)$$

と定めるが, これは欠点がある.

$$\exists x \forall u (\varphi(u) \leftrightarrow u \in x)$$

が成立しない場合は「 $\varphi(x)$ を満たす集合 $x$ の全体」という意味を持たない.

- 式 $\varphi$ から直接 $\{x \mid \varphi(x)\}$ の形のオブジェクトを作ればよい.

**定義 1.1 (クラス).** 式  $\varphi$  に  $x$  のみが自由に現れているとき,

$$\varepsilon x \varphi(x), \quad \{x \mid \varphi(x)\}$$

の形のオブジェクトをクラス (**class**) と呼ぶ.

- クラスである  $\varepsilon$  項は集合である.
- 集合でないクラスもある. たとえば  $\{x \mid x = x\}$  や  $\{x \mid x \notin x\}$  は集合ではない.

集合の定義は竹内[]に倣う. 定義により**集合はクラスである**.

**定義 1.2 (集合).** クラス  $c$  が

$$\exists x (c = x)$$

を満たすとき  $c$  を**集合 (set)** と呼び, そうでない場合は**真クラス (proper class)** と呼ぶ.

**NBG 集合論** クラスの概念を取り入れた NBG 集合論というものがあるが, こちらのクラスは「実在」しない.

## 2 言語

---

- クラスという新しいオブジェクトを導入したら、この導入操作が“妥当”であるかどうかの問題になる。

- 妥当性は、“生の”集合論の式  $\varphi$  に対して

“生の”集合論で  $\varphi$  が証明される  $\iff$  新しい集合論で  $\varphi$  が証明される

が成り立つかどうかで検証する。

- 精密な検証のためには、集合論の言語と証明のルールを明らかにしなければならない。
- 言語とは「変項」, 「述語記号」, 「論理記号」とその他もろもろの記号からなる。そして「(数)式」は言語の記号を用いて作られる。式を作るためには「項」が必要であり、文字は最もよく使われる項である。たとえば

$$s \in t$$

と書けば一つの式が出来上がる。

- まず“生の”集合論の言語  $\mathcal{L}_\in$  を明示する。

## 2.1 言語 $\mathcal{L}_\in$

言語  $\mathcal{L}_\in$

矛盾記号  $\perp$

論理記号  $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$

量化子  $\forall, \exists$

述語記号  $=, \in$

変項  $x, y, z, \dots$  など.

また  $\mathcal{L}_\in$  の項 (term) と式 (formula) は次の規則で生成する.

$\mathcal{L}_\in$  の項と式

項 変項は項であり, またこれらのみが項である.

式 •  $\perp$  は式である.

- 項  $\tau$  と項  $\sigma$  に対して  $\tau \in \sigma$  と  $\tau = \sigma$  は式である.
- 式  $\varphi$  に対して  $\neg \varphi$  は式である.
- 式  $\varphi$  と式  $\psi$  に対して  $\varphi \vee \psi$  と  $\varphi \wedge \psi$  と  $\varphi \rightarrow \psi$  はいずれも式である.
- 式  $\varphi$  と項  $x$  に対して  $\exists x \varphi$  と  $\forall x \varphi$  は式である.
- これらのみが式である.



## 2.2 言語の拡張

---

- クラスを正式に導入するには言語を拡張しなくてはならない.
- 拡張は二段階に分けて行う. 始めに  $\varepsilon$  項のために拡張し, 次に  $\{x \mid \varphi(x)\}$  の形の項のために拡張する.
- 始めの拡張により得る言語を  $\mathcal{L}_\varepsilon$  と名付ける.

言語  $\mathcal{L}_\varepsilon$

矛盾記号  $\perp$

論理記号  $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$

量化子  $\forall, \exists$

述語記号  $=, \in$

変項  $x, y, z, \dots$  など.

イプシロン  $\varepsilon$

## $\mathcal{L}_\varepsilon$ の項と式の定義

- 変項は項である.
- $\perp$  は式である.
- 項  $\tau$  と項  $\sigma$  に対して  $\tau \in \sigma$  と  $\tau = \sigma$  は式である.
- 式  $\varphi$  に対して  $\neg \varphi$  は式である.
- 式  $\varphi$  と式  $\psi$  に対して  $\varphi \vee \psi$  と  $\varphi \wedge \psi$  と  $\varphi \rightarrow \psi$  はいずれも式である.
- 式  $\varphi$  と変項  $x$  に対して  $\exists x \varphi$  と  $\forall x \varphi$  は式である.
- 式  $\varphi$  と変項  $x$  に対して  $\varepsilon x \varphi$  は項である.
- これらのみが項と式である.

- $\mathcal{L}_\in$  との大きな違いは項と式の定義が循環している点にある.
- $\mathcal{L}_\varepsilon$  の式が  $\mathcal{L}_\varepsilon$  の項を用いて作られるのは当然ながら, その逆に  $\mathcal{L}_\varepsilon$  の項もまた  $\mathcal{L}_\varepsilon$  の式から作られる.
- $\mathcal{L}_\in$  の式は  $\mathcal{L}_\varepsilon$  の式でもある.

## 言語 $\mathcal{L}$

矛盾記号  $\perp$

論理記号  $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$

量化子  $\forall, \exists$

述語記号  $=, \in$

変項  $x, y, z, \dots$  など.

補助記号  $\{, |, \}$

## $\mathcal{L}$ の項と式の定義

項 • 変項は項である.

- $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$  の項は項である.
- $x$  を変項とし,  $\varphi$  を  $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$  の式とするとき,  $\{x \mid \varphi\}$  なる記号列は項である.
- これらのみが項である.

式 •  $\perp$  は式である.

- 項  $\tau$  と項  $\sigma$  に対して  $\tau \in \sigma$  と  $\tau = \sigma$  は式である.
- 式  $\varphi$  に対して  $\neg \varphi$  は式である.
- 式  $\varphi$  と式  $\psi$  に対して  $\varphi \vee \psi$  と  $\varphi \wedge \psi$  と  $\varphi \rightarrow \psi$  はいずれも式である.
- 式  $\varphi$  と変項  $x$  に対して  $\exists x \varphi$  と  $\forall x \varphi$  は式である.
- これらのみが式である.

### 3 $\exists$ の規則

---

推論規則 3.1 ( $\exists$ の導入).  $\mathcal{L}$ の式 $\varphi(x)$ と $\varepsilon$ 項 $\tau$ に対して

$$\varphi(\tau) \vdash \exists x \varphi(x).$$

とくに, 任意の $\varepsilon$ 項 $\tau$ に対して

$$\tau = \tau.$$

だから

$$\exists x (x = \tau)$$

が成り立つ. つまり  $\varepsilon$ 項はすべて集合.

推論規則 3.2 ( $\exists$ の除去 (NG版)).  $\mathcal{L}$ の式  $\varphi(x)$ に対して

$$\exists x \varphi(x) \vdash \varphi(\varepsilon x \varphi(x)).$$

$\varphi$ に内包項や  $\varepsilon$ 項が現れる場合

$$\varepsilon x \varphi(x)$$

なる項は無い(無理矢理つくと入れ子問題).

解決法

$\mathcal{L}$ の式を  $\mathcal{L}_\varepsilon$ の式に書き換える手順を用意する.

## 4 式の書き換え

---

- 式に  $\varepsilon$  項が含まれていると書き換え不可.
- $\varepsilon$  項が現れない式を **甲種式**, そうでない式を **乙種式** と分類.

次の書き換え規則によって, 甲種式はすべて  $\mathcal{L}_\varepsilon$  の式に書き換え可能 (構造的帰納法による).

- $x \in \{y \mid \psi(y)\}$  は  $\psi(x)$
- $\{x \mid \varphi(x)\} \in y$  は

$$\exists s \left( s \in y \wedge \forall x \left( x \in s \iff \varphi(x) \right) \right)$$

- $\{x \mid \varphi(x)\} \in \{y \mid \psi(y)\}$  は

$$\exists s \left( \psi(s) \wedge \forall x \left( x \in s \iff \varphi(x) \right) \right)$$

•  $x = \{ y \mid \psi(y) \}$  は

$$\forall u \ ( u \in x \iff \psi(u) )$$

•  $\{ x \mid \varphi(x) \} = y$  は

$$\forall u \ ( \varphi(u) \iff u \in y )$$

•  $\{ x \mid \varphi(x) \} = \{ y \mid \psi(y) \}$  は

$$\forall u \ ( \varphi(u) \iff \psi(u) )$$

## 5 $\exists$ の除去規則

---

甲種式  $\varphi$  を  $\mathcal{L}_\epsilon$  の式に書き換えたものを  $\hat{\varphi}$  と書く.

**推論規則 5.1 ( $\exists$ の除去).** 甲種式  $\varphi(x)$  に対して

$$\exists x \varphi(x) \vdash \varphi(\epsilon x \hat{\varphi}(x)).$$

$\exists$ の除去規則と導入規則により次を得る.

**定理 5.2.** 甲種式  $\varphi(x)$  に対して

$$\exists x \varphi(x) \iff \varphi(\epsilon x \hat{\varphi}(x)).$$



## 6 $\forall$ の導入

---

推論規則 6.1 ( $\forall$  の導入). 式  $\varphi(x)$  に対し, すべての  $\varepsilon$  項  $\tau$  で  $\varphi(\tau)$  が成り立つなら

$$\forall x \varphi(x).$$

推論規則 6.2 ( $\forall$  の除去). 式  $\varphi(x)$  と  $\varepsilon$  項  $\tau$  に対して

$$\forall x \varphi(x) \vdash \varphi(\tau).$$

$\varepsilon$  項は集合であるから, 量化の亘る範囲は集合の上だけ.

定理 6.3. 甲種式  $\varphi(x)$  に対して

$$\forall x \varphi(x) \iff \varphi(\varepsilon x \rightarrow \hat{\varphi}(x)).$$

次の定理は他の公理および構造的帰納法と併せて示される.

定理 6.4 (書き換えの同値性). 甲種式  $\varphi(x)$  に対して

$$\forall x (\varphi(x) \iff \hat{\varphi}(x)).$$

## 7 成り立つこと

---

定理 7.1. 内包項  $\{x \mid \varphi(x)\}$  が集合であれば

$$\{x \mid \varphi(x)\} = \varepsilon y \, \forall x \, (x \in y \iff \varphi(x)).$$

略証.  $\exists y \, (\{x \mid \varphi(x)\} = y)$  を  $\mathcal{L}_\varepsilon$  の式に書き直せば

$$\exists y \, \forall x \, (x \in y \iff \varphi(x)).$$

存在記号の規則より結論が従う. ■