

Kunen note

sy

2020 年 2 月 4 日

目次

0.1 完全性定理	1
---------------------	---

0.1 完全性定理

定理 0.1.1 (補題 2.12.3). 補題 2.12.2 から定理 2.12.1 が得られる.

略証. 健全性定理より $\Sigma \vdash \varphi$ なら $\Sigma \models \varphi$ となる. $\text{CON}_{\models}(\Sigma)$ であれば, $\mathfrak{A} \models \Sigma$ なるモデル \mathfrak{A} が取れるが, $\Sigma \vdash \varphi$ ならば $\mathfrak{A} \models \varphi$ となる. 従って $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$ となる. 従って $\Sigma \not\models \neg\varphi$ となる. 以上より

$$\text{CON}_{\models}(\Sigma) \implies \text{CON}_{\vdash}(\Sigma)$$

となる. $\Sigma \models \varphi$ ならば $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ を充足するモデルは存在しない. つまり $\neg\text{CON}_{\models}(\Sigma \cup \{\neg\varphi\})$. すなわち

$$\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \perp.$$

すなわち $\Sigma \vdash \varphi$. ■

定理 0.1.2 (補題 2.12.6). $\tau \in CT_0(\mathcal{L})$ のとき $\text{val}_{\mathfrak{A}_0}(\tau) \equiv \tau$.

略証. $\tau \in \mathcal{F}_0$ なら $\text{val}_{\mathfrak{A}_0}(\tau) \equiv \tau_{\mathfrak{A}_0} \equiv \tau$. いま $\tau_1, \dots, \tau_n \in CT_0(\mathcal{L})$ に対して

$$\text{val}_{\mathfrak{A}_0}(\tau_i) \equiv \tau_i, \quad (i = 1, \dots, n)$$

と仮定すると,

$$\begin{aligned} \text{val}_{\mathfrak{A}_0}(f\tau_1 \cdots \tau_n) &\equiv f_{\mathfrak{A}_0}(\text{val}_{\mathfrak{A}_0}(\tau_1), \dots, \text{val}_{\mathfrak{A}_0}(\tau_n)) \\ &\equiv f_{\mathfrak{A}_0}(\tau_1, \dots, \tau_n) \\ &\equiv f\tau_1 \cdots \tau_n \end{aligned}$$

となる.

定理 0.1.3 (定義 2.12.9 の正当性の検証). $\text{val}_{\mathfrak{A}}()$ は商写像であるから同地類の代表云々は関係ない. 問題は $[\tau_i] \equiv [\sigma_i]$ のとき $f\tau_1 \cdots \tau_n \sim f\sigma_1 \cdots \sigma_n$ となり, $\Sigma \vdash p\tau_1 \cdots \tau_n \iff \Sigma \vdash p\sigma_1 \cdots \sigma_n$ となるか.

つまり $f_{\mathfrak{A}}$ が写像であるということを示すということ。定義 2.12.9 では商写像 $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\tau) \equiv [\tau]$ から始めて、 $f \in \mathcal{F}_n$ の解釈を

$$f_{\mathfrak{A}} : ([\tau_1], \dots, [\tau_n]) \mapsto \text{val}_{\mathfrak{A}}(f \tau_1 \cdots \tau_n) \equiv [f \tau_1 \cdots \tau_n]$$

と定めている。また $p_{\mathfrak{A}}$ は

$$p_{\mathfrak{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \{ ([\tau_1], \dots, [\tau_n]) \mid \Sigma \vdash p \tau_1 \cdots \tau_n \}$$

により定めている。

定理 0.1.4 (補題 2.12.10). 語彙 \mathcal{L} の文の集合 Σ を考える。ただし $\mathcal{F}_0 \neq \emptyset$ と仮定する。 $\mathfrak{A} = \mathcal{C}\mathfrak{I}(\mathcal{L}, \Sigma)$ としよう。このとき

- (1) \mathcal{L} の閉項 τ に対して $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\tau) \equiv [\tau]$.
- (3) φ が原子論理式である文のときは、 $\Sigma \vdash \varphi$ と $\mathfrak{A} \models \varphi$ が同値。
- (4)

略証. (1) について、 $\text{val}_{\mathfrak{A}}()$ はもともと商写像として設定されているのでこの問いはナンセンス。(3) について、 $\Sigma \vdash p \tau_1 \cdots \tau_n$ と $([\tau_1], \dots, [\tau_n]) \in p_{\mathfrak{A}}$ は同値。

$$([\tau_1], \dots, [\tau_n]) \equiv (\text{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_1), \dots, \text{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_n)).$$

$(\text{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_1), \dots, \text{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_n)) \in p_{\mathfrak{A}}$ と $\mathfrak{A} \models p \tau_1 \cdots \tau_n$ は同値。他方で、 $\Sigma \vdash \tau = \sigma$ と $[\tau] \equiv [\sigma]$ は同値。つまり

$$\begin{aligned} \Sigma \vdash \tau = \sigma &\iff \text{val}_{\mathfrak{A}}(\tau) \equiv \text{val}_{\mathfrak{A}}(\sigma) \\ &\iff \text{val}_{\mathfrak{A}}(\tau = \sigma) = T \end{aligned}$$

となる。

Σ が矛盾していれば $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi) = 1$ かつ $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi) = 0$ となるので $\text{val}_{\mathfrak{A}}()$ は写像ではない。ゆえに \mathfrak{A} は Σ のモデルとはなりえない。

定義 0.1.5 (定義 2.12.11). 語彙 \mathcal{L} の文の集合 Σ は次の条件を満たすとき極大 (\vdash, \mathcal{L}) 無矛盾であるといわれる：

- (1) $\text{CON}_{\vdash, \mathcal{L}}(\Sigma)$
- (2) Σ に属さないいかなる文 φ に対しても $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathcal{L}} \perp$.

定理 0.1.6 (補題 2.12.12). Δ が \mathcal{L} の文の集合で $\text{CON}_{\vdash, \mathcal{L}}(\Delta)$ であるものとする。 \mathcal{L} の文の集合 Σ で、 Δ を含んで極大 (\vdash, \mathcal{L}) 無矛盾であるようなものが存在する。

略証. S を \mathcal{L} の文の全体とする。このとき

$$\forall \Pi \in P(S) (\text{CON}_{\vdash, \mathcal{L}}(\Pi) \iff \forall \Omega \subset \Pi (\text{Fin}(\Omega) \implies \text{CON}_{\vdash, \mathcal{L}}(\Omega)))$$

が成り立つ．実際， $\text{CON}_{\mathcal{L}}(\Pi)$ のとき， Ω を Π の有限部分集合として $\Omega \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ であるとする， Ω からの任意の演繹の列 π は Π からの演繹の列でもあって， $\text{CON}_{\mathcal{L}}(\Pi)$ より π の終点は $\rightarrow\varphi$ ではない．すなわち $\text{CON}_{\mathcal{L}}(\Omega)$ である．今度は Π の任意の有限部分集合 Ω に対して $\text{CON}_{\mathcal{L}}(\Omega)$ であるとし，

$$\Pi \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$$

とする．この演繹の列を π とし， π に使われている Π の公理の全体を $Ax(\pi)$ とする．このとき， Π からの任意の演繹の列 ρ を取っても，

$$\Omega \stackrel{\text{def}}{=} Ax(\pi) \cup Ax(\rho)$$

とおけば $\text{CON}_{\mathcal{L}}(\Omega)$ かつ $\Omega \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ なので， Ω から $\rightarrow\varphi$ は導かれない． ρ は Ω からの演繹の列でもあるから ρ の終点は $\rightarrow\varphi$ ではない．つまりどのように ρ を取っても $\rightarrow\varphi$ に到着することはない．ゆえに $\text{CON}_{\mathcal{L}}(\Pi)$ である．