# 測度論メモ

基礎工学研究科システム創成専攻修士 1 年
学籍番号 29C17095
百合川尚学

2017 年 12 月 6 日

# 第 1 章

# Lebesgue-Radon-Nikodym の定理

## 1.1　複素測度

$(X, \mathcal{M})$ を可測空間，$\lambda$ を $\mathcal{M}$ 上の複素測度 (complex measure) とする．$\lambda$ は複素数値であるから，任意の $E \in \mathcal{M}$ に対して $|\lambda(E)| < \infty$ となっていることに注意する．測度としての性質から，どの二つも互いに素な集合列 $E_i \in \mathcal{M}$ $(i = 1, 2, \cdots)$ と

$$E := \sum_{i=1}^{\infty} E_i$$

に対して

$$\lambda(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i)$$

が成り立つが，左辺が $\mathbb{C}$ 値であるから右辺の級数は収束していなくてはならない．$\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を任意の並び替え[*1]として，$(E_i)_{i=1}^{\infty}$ に対して

$$E = \sum_{i=1}^{\infty} E_{\sigma(i)}$$

が成り立つから，測度の性質を持つ $\lambda$ は

$$\lambda(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_{\sigma(i)})$$

を満たす．つまり複素数列 $(\lambda(E_i))_{i=1}^{\infty}$ は任意の並び替えに対し総和が不変で収束していることになり，Riemann の級数定理よりこの列は絶対収束している:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(E_i)| < \infty.$$

$\lambda$ に対し，或る $\mathcal{M}$ 上の測度 $\mu$ で $\lambda$ を支配する，つまり

$$|\lambda(E)| \leq \mu(E) \quad (\forall E \in \mathcal{M}) \tag{1.1}$$

[*1] $\sigma$ は $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への全単射である．

を満たすものを，できるだけ小さいものとして取ろうと考える[*2]．このような $\mu$ は次を満たすことになる:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(E_i)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) = \mu(E)$$

を満たすことになり，ゆえに

$$\mu(E) \geq \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(E_i)| \tag{1.2}$$

でなくてはならず (上限は $E$ のあらゆる分割 $E = \sum_i E_i$ に対して取るものである)，ここで $\mathcal{M}$ 上の関数として $|\lambda|$ を

$$|\lambda|(E) \coloneqq \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(E_i)| \quad (\forall E \in \mathcal{M}) \tag{1.3}$$

として置いてみるとよさそうである．$E$ に対し $E$ 自体を一つの分割と見做せば，(1.3) より $|\lambda|$ は $\lambda$ を支配していることになり，更に $|\lambda|$ は $\mathcal{M}$ 上の測度となる (後述) から，(1.2) と併せて当座の問題の解となる．

**定義 1.1.1 (総変動・総変動測度).** 可測空間 $(X, \mathcal{M})$ 上の複素測度 $\lambda$ に対し，上で定めた測度 $|\lambda| : \mathcal{M} \longrightarrow [0, \infty)$ を $\lambda$ の総変動測度 (total variation measure) といい，$|\lambda|(X)$ を $\lambda$ の総変動 (total variation) という．特に $\lambda$ が正値有限測度である場合は $\lambda = |\lambda|$ が成り立つ．[*3]

以降で $|\lambda|$ の性質

(1) $|\lambda|$ は測度である．
(2) $|\lambda|(X) < \infty$ が成り立つ．

を証明する．特に (2) により任意の $E \in \mathcal{M}$ に対し

$$|\lambda(E)| \leq |\lambda|(E) \leq |\lambda|(X) < \infty$$

が従うから，複素測度は有界であると判明する．

**定理 1.1.2 ($|\lambda|$ は測度となる).** 可測空間 $(X, \mathcal{M})$ 上の複素測度 $\lambda$ に対し (1.3) で定義する $|\lambda|$ は $(X, \mathcal{M})$ において測度となる．

[*2] つまり (1.1) を満たす $\mu$ のうちから，同様に (1.1) を満たす任意の測度 $\mu'$ に対し

$$\mu(E) \leq \mu'(E) \quad (\forall E \in \mathcal{M})$$

を満たすものを選べるかどうかを考える．

[*3] 複素測度の虚部が 0 であるものとして考えれば $0 \leq \lambda(E) \leq \lambda(X) < \infty$ $(\forall E \in \mathcal{M})$ が成り立つ．また実際任意の $E \in \mathcal{M}$ とその分割 $(E_i)_{i=1}^{\infty}$ に対して

$$|\lambda|(E) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(E_i)| = \sup \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i) = \sup \lambda(E) = \lambda(E)$$

が成り立つ．

**証明**． (1.3) により $|\lambda|$ は正値であるから，ここで示すことは $|\lambda|$ が完全加法的であるということである．任意に $\epsilon > 0$ とどの二つも互いに素な集合列 $E_i \in \mathcal{M}\ (i = 1, 2, \cdots)$ を取る．示すことは $E \coloneqq \sum_{i=1}^{\infty} E_i$ に対して

$$|\lambda|(E) = \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda|(E_i)$$

が成り立つことである．(1.3) により $E_i$ の分割 $(A_{ij})_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ を

$$|\lambda|(E_i) \geq \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda(A_{ij})| > |\lambda|(E_i) - \epsilon/2^i$$

となるように取ることができる．また $E = \sum_{i,j=1}^{\infty} A_{ij}$ でもあるから

$$|\lambda|(E) \geq \sum_{i,j=1}^{\infty} |\lambda(A_{ij})| \geq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda(A_{ij})| > \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda|(E_i) - \epsilon$$

が成り立つ．$\epsilon > 0$ は任意であるから

$$|\lambda|(E) \geq \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda|(E_j)$$

が従う．逆向きの不等号について，$E$ の任意の分割 $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ に対し

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda(A_j)| = \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_j \cap E_i) \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(A_j \cap E_i)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda|(E_i)^{*4}$$

が成り立つから，左辺の上限を取って

$$|\lambda|(E) \leq \sum_{i=1} |\lambda|(E_i)$$

を得る． ∎

**定理 1.1.3 (総変動測度は有界)**． 可測空間 $(X, \mathcal{M})$ 上の複素測度 $\lambda$ の総変動測度 $|\lambda|$ について次が成り立つ:

$$|\lambda|(X) < \infty.$$

先ずは次の補題を示す．

---

*4 正項級数は和の順序に依らないから

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(A_j \cap E_i)| = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda(A_j \cap E_i)|$$

が成り立つ．これと (1.3) を併せれば最後の不等号が従う．

補題 1.1.4.　$z_1,\cdots,z_N$ を複素数とする．これらの添数集合の或る部分 $S\subset\{1,\cdots,N\}$ を抜き取れば次が成り立つ:

$$\left|\sum_{k\in S} z_k\right| \geq \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}|z_k|.$$

証明 (補題).　$z_k=|z_k|e^{i\alpha_k}$ $(-\pi\leq\alpha_k<\pi,\ k=1,\cdots,N)$ となるように $\alpha_1,\cdots,\alpha_N$ を取る．ここで $i$ は虚数単位である．また $-\pi\leq\theta\leq\pi$ に対し

$$S(\theta) := \{\, k\in\{1,\cdots,N\}\,;\quad \cos(\alpha_k-\theta)>0\,\}$$

とおく．このとき

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k\in S(\theta)} z_k\right| &= |e^{-i\theta}|\left|\sum_{k\in S(\theta)} z_k\right| = \left|\sum_{k\in S(\theta)}|z_k|e^{i(\alpha_k-\theta)}\right| \\ &\geq \Re\mathrm{e}\left[\sum_{k\in S(\theta)}|z_k|e^{i(\alpha_k-\theta)}\right] = \sum_{k\in S(\theta)}|z_k|\cos(\alpha_k-\theta) = \sum_{k=1}^{N}|z_k|\cos^+(\alpha_k-\theta)\end{aligned}$$[*5]

が成り立ち，最右辺は $\theta$ に関して連続となるから $[-\pi,\pi]$ 上で式を最大にする $\theta_0$ が存在する．$S:=S(\theta_0)$ とおき，$\theta_0$ と任意の $\theta\in[-\pi,\pi]$ に対して

$$\left|\sum_{k\in S} z_k\right| \geq \sum_{k=1}^{N}|z_k|\cos^+(\alpha_k-\theta_0) \geq \sum_{k=1}^{N}|z_k|\cos^+(\alpha_k-\theta)$$

が成り立つから，左辺右辺を積分して

$$\left|\sum_{k\in S} z_k\right| \geq \sum_{k=1}^{N}|z_k|\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]}\cos^+(\alpha_k-\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}|z_k|$$

が成り立つ[*6]．　■

証明 (定理 1.1.3).

第一段　或る $E\in\mathcal{M}$ に対し $|\lambda|(E)=\infty$ が成り立っていると仮定する．$t:=2\pi(1+|\lambda(E)|)$ とおけば (複素測度であるから $|\lambda(E)|<\infty$) $|\lambda|(E)>t$ となるから，(1.3) より $E$ の分割 $(E_i)_{i=1}^{\infty}$ を

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda(E_i)|>t$$

---

[*5] $\cos^+ x = 0\vee\cos x$ $(x\in\mathbb{R})$ である．

[*6] 最後の積分について，実際三角関数の周期性を使えば任意の $\alpha\in\mathbb{R}$ に対して

$$\int_{[-\pi,\pi]}\cos^+(\alpha-\theta)\,d\theta = \int_{[\alpha-\pi,\alpha+\pi]}\cos^+\theta\,d\theta = \int_{[-\pi,\pi]}\cos^+\theta\,d\theta = 1$$

が成り立つ．

となるように取ることができる．従って或る $N \in \mathbb{N}$ を取れば

$$\sum_{i=1}^{N} |\lambda(E_i)| > t$$

が成り立つ．$z_i := \lambda(E_i)$ $(i = 1, \cdots, N)$ として補題 1.1.4 を使えば，或る $S \subset \{1, \cdots, N\}$ に対し

$$\left|\sum_{k \in S} \lambda(E_k)\right| \geq \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N} |\lambda(E_k)| > \frac{t}{2\pi} > 1$$

となる．$A := \sum_{k \in S} E_k$ とおいて $B := E - A$ とすれば

$$|\lambda(B)| = |\lambda(E) - \lambda(A)| \geq |\lambda(A)| - |\lambda(E)| > \frac{t}{2\pi} - |\lambda(E)| = 1$$

が成り立つから，つまり $|\lambda|(E) = \infty$ の場合，$E$ の直和分割 $A, B$ で

$$|\lambda(A)| > 1, \quad |\lambda(B)| > 1$$

を満たすものが取れると示された．そして $|\lambda|$ の加法性から

$$|\lambda|(E) = |\lambda|(A) + |\lambda|(B)$$

も成り立つから，この場合右辺の少なくとも一方は $\infty$ となる．

**第二段**　背理法により定理の主張することを証明する．今 $|\lambda|(X) = \infty$ と仮定すると，前段の結果より $X$ の或る直和分割 $A_1, B_1$ で

$$|\lambda|(B_1) = \infty, \quad |\lambda(A_1)| > 1, \quad |\lambda(B_1)| > 1$$

を満たすものが取れる．$B_1$ についてもその直和分割 $A_2, B_2$ で

$$|\lambda|(B_2) = \infty, \quad |\lambda(A_2)| > 1, \quad |\lambda(B_2)| > 1$$

を満たすものが取れる．この操作を繰り返せば，どの二つも互いに素な集合列 $(A_j)_{j=1}^{\infty}$ で $|\lambda(A_j)| > 1$ $(j = 1, 2, \cdots)$ を満たすものを構成できる．$A := \sum_{j=1}^{\infty}$ について，$|\lambda(A)| < \infty$ でなくてはならないから，Riemann の級数定理より

$$\lambda(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(A_j)$$

の右辺は絶対収束する．従って $0 < \epsilon < 1$ に対し或る $N \in \mathbb{N}$ が存在して $n > N$ なら $|\lambda(A_n)| < \epsilon$ が成り立つはずであるが，これは $|\lambda(A_n)| > 1$ であることに矛盾する．背理法により $|\lambda|(X) < \infty$ であることが示された．

$\blacksquare$

**定義 1.1.5 (複素測度の空間・ノルムの定義).** 可測空間 $(X, \mathcal{M})$ 上の複素測度の全体を $CM$ と表す．$\lambda, \mu \in CM$, $c \in \mathbb{C}$, $E \in \mathcal{M}$ に対し

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu)(E) &\coloneqq \lambda(E) + \mu(E), \\ (c\lambda)(E) &\coloneqq c\lambda(E)\end{aligned} \tag{1.4}$$

を線型演算として $CM$ は線形空間となり，特に定理 1.1.3 により $\lambda \in CM$ に対して $|\lambda| \in CM$ が成り立つ．また $\|\cdot\| : CM \to \mathbb{R}$ を

$$\|\lambda\| \coloneqq |\lambda|(X) \quad (\lambda \in CM)$$

と定義すればこれは $CM$ においてノルムとなる．

上で定義した $\|\cdot\|$ がノルムとなることを証明する．総変動の正値性からノルムの正値性が従うから，以下示すのは同次性と三角不等式である．

**同次性** 総変動測度の定義 (1.3) とスカラ倍の定義 (1.4) より，任意の $\lambda \in CM$ と $c \in \mathbb{C}$ に対し

$$\|c\lambda\| = \sup \sum_i |(c\lambda)(E_i)| = \sup \sum_i |c\lambda(E_i)| = |c| \sup \sum_i |\lambda(E_i)| = |c| \|\lambda\|$$

が成り立つ．

**三角不等式** 任意の $\lambda, \mu \in CM$ に対し

$$\|\lambda + \mu\| = |\lambda + \mu|(X) = \sup \sum_i |(\lambda + \mu)(E_i)| = \sup \sum_i |\lambda(E_i) + \mu(E_i)|$$

となるが，ここで

$$\sum_i |\lambda(E_i) + \mu(E_i)| \leq \sum_i |\lambda(E_i)| + \sum_i |\mu(E_i)| \leq \|\lambda\| + \|\mu\|$$

が成り立つから

$$\|\lambda + \mu\| = \sup \sum_i |\lambda(E_i) + \mu(E_i)| \leq \|\lambda\| + \|\mu\|$$

が従う．

**定義 1.1.6 (正変動と負変動・Jordan の分解).** 可測空間 $(X, \mathcal{M})$ 上の複素測度の全体を $CM$ とし，実数値の $\mu \in CM$ を取る (このような $\mu$ を符号付き測度 (signed measure) という)．

$$\mu^+ \coloneqq \frac{1}{2}(|\mu| + \mu), \quad \mu^- \coloneqq \frac{1}{2}(|\mu| - \mu)$$

とおけば $\mu^+, \mu^-$ はどちらも正値有限測度となる[*7]．$\mu^+$ を $\mu$ の正変動 (positive variation) といい $\mu^-$ を $\mu$ の負変動 (negative variation) という．また

$$\mu = \mu^+ - \mu^-, \quad |\mu| = \mu^+ + \mu^-$$

が成り立ち，ここで示した符号付き測度の正変動と負変動による表現を Jordan の分解という．

[*7] $\mathcal{M}$ 上で $|\mu|(E) \geq |\mu(E)|$ であることと定理 1.1.3 による．

**定義 1.1.7 (絶対連続・特異).** $(X, \mathcal{M})$ を可測空間，$\mu$ を $\mathcal{M}$ 上の正値測度[*8]，$\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ を $\mathcal{M}$ 上の任意の測度 (正値測度或は複素測度) とする．

- $\lambda$ が $\mu$ に関して絶対連続である (absolutely continuous) ということを

$$\lambda \ll \mu$$

と書き，その意味は，「$\mu(E) = 0$ となる全ての $E \in \mathcal{M}$ について $\lambda(E) = 0$」である．

- 或る $A \in \mathcal{M}$ があって $\lambda(E) = \lambda(A \cap E)$ $(\forall E \in \mathcal{M})$ が成り立っているとき，$\lambda$ は $A$ に集中している (concentrated on A) という．$\lambda_1, \lambda_2$ に対し或る $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$ があって，$\lambda_1$ が $A_1$ に集中，$\lambda_2$ が $A_2$ に集中しかつ $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ を満たしているとき，これを互いに特異である (mutually singular) といい

$$\lambda_1 \perp \lambda_2$$

と書く．

**命題 1.1.8 (絶対連続性と特異性に関する性質).** $(X, \mathcal{M})$ を可測空間，$\mu$ を $\mathcal{M}$ 上の正値測度，$\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ を $\mathcal{M}$ 上の複素測度とする．このとき以下に羅列する事柄が成り立つ．

(1) $\lambda$ が $A \in \mathcal{M}$ に集中しているなら $|\lambda|$ も $A$ に集中している．

(2) $\lambda_1 \perp \lambda_2$ ならば $|\lambda_1| \perp |\lambda_2|$.

(3) $\lambda_1 \perp \mu$ かつ $\lambda_2 \perp \mu$ ならば $\lambda_1 + \lambda_2 \perp \mu$.

(4) $\lambda_1 \ll \mu$ かつ $\lambda_2 \ll \mu$ ならば $\lambda_1 + \lambda_2 \ll \mu$.

(5) $\lambda \ll \mu$ ならば $|\lambda| \ll \mu$.

(6) $\lambda_1 \ll \mu$ かつ $\lambda_2 \perp \mu$ ならば $\lambda_1 \perp \lambda_2$.

(7) $\lambda \ll \mu$ かつ $\lambda \perp \mu$ ならば $\lambda = 0$.

## 1.2 Lebesgue-Radon-Nikodym の定理

**補題 1.2.1.**

**定理 1.2.2 (Lebesgue-Radon-Nikodym).**

[*8] 正値測度という場合は $\infty$ も取りうる．従って正値測度は複素測度の範疇にはない．$\mu$ として例えば $k$ 次元 Lebesgue 測度を想定している．