金融確率解析レポート

基礎工学研究科システム創成専攻修士 2 年
学籍番号 29C17095
百合川尚学
選択問題 1) 5) 6)

2020 年 1 月 30 日

5)

定数 $-1 \leq \rho \leq 1$ を用いて

$$\bar{W}_t := \rho W_t^1 + \sqrt{1-\rho^2} W_t^2, \quad t \geq 0$$

を定義する．$(\bar{W}_t)_{t\geq 0}$ は標準ブラウン運動であることを示せ．また W_t^1 と $\bar{W}_t$ との共分散を求めよ．

答案.

連続性　連続関数の定数倍も連続関数同士の和も連続関数になるので $t \longmapsto \bar{W}_t$ は連続である．

0 出発　$W_0^1 = 0$ かつ $W_0^2 = 0$ なので $\bar{W}_0 = 0$ である．

独立増分性と分布　$(\bar{W}_t)_{t\geq 0}$ の独立増分性と任意の時点 $0 \leq s < t$ に対して $\bar{W}_t - \bar{W}_s$ が $N(0, t-s)$ に従うことを言うには，任意の自然数 n に対して任意の $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ および任意の実数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ を取って

$$\mathrm{E}\left[\exp\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j (\bar{W}_{t_j} - \bar{W}_{t_{j-1}})\right)\right] = \prod_{j=1}^n \exp\left(\frac{1}{2}\alpha_j^2 (t_j - t_{j-1})\right)$$

を示せばよい．まず

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left[\exp\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j (\bar{W}_{t_j} - \bar{W}_{t_{j-1}})\right)\right] \\
&= \mathrm{E}\left[e^{\sum_{j=1}^n \rho\alpha_j (W_{t_j}^1 - W_{t_{j-1}}^1)} e^{\sum_{j=1}^n \sqrt{1-\rho^2}\alpha_j (W_{t_j}^2 - W_{t_{j-1}}^2)}\right] \\
&= \mathrm{E}\left[e^{\sum_{j=1}^n \rho\alpha_j (W_{t_j}^1 - W_{t_{j-1}}^1)}\right] \mathrm{E}\left[e^{\sum_{j=1}^n \sqrt{1-\rho^2}\alpha_j (W_{t_j}^2 - W_{t_{j-1}}^2)}\right] \qquad (W^1 \text{ と } W^2 \text{ は独立なので})
\end{aligned}$$

となるが，ここで W^1 の独立増分性より

$$\mathrm{E}\left[e^{\sum_{j=1}^n \rho\alpha_j (W_{t_j}^1 - W_{t_{j-1}}^1)}\right] = \prod_{j=1}^n \mathrm{E}\left[e^{\rho\alpha_j (W_{t_j}^1 - W_{t_{j-1}}^1)}\right]$$

が成り立つ．この右辺については

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left[e^{\rho\alpha_j(W^1_{t_j}-W^1_{t_{j-1}})}\right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\rho\alpha_j x}\frac{1}{\sqrt{2\pi(t_j-t_{j-1})}}e^{-\frac{x^2}{2(t_j-t_{j-1})}}\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\rho\alpha_j\sqrt{t_j-t_{j-1}}x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \\
&= e^{\frac{1}{2}\rho^2\alpha_j^2(t_j-t_{j-1})}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\rho\alpha_j\sqrt{t_j-t_{j-1}})^2}{2}}\,dx \\
&= e^{\frac{1}{2}\rho^2\alpha_j^2(t_j-t_{j-1})}
\end{aligned}
$$

が成り立つので

$$
\mathrm{E}\left[e^{\sum_{j=1}^n\rho\alpha_j(W^1_{t_j}-W^1_{t_{j-1}})}\right]=\prod_{j=1}^n e^{\frac{1}{2}\rho^2\alpha_j^2(t_j-t_{j-1})}
$$

となる．同様にして

$$
\mathrm{E}\left[e^{\sum_{j=1}^n\sqrt{1-\rho^2}\alpha_j(W^2_{t_j}-W^2_{t_{j-1}})}\right]=\prod_{j=1}^n e^{\frac{1}{2}(1-\rho^2)\alpha_j^2(t_j-t_{j-1})}
$$

が成り立つので

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left[\exp\left(\sum_{j=1}^n\alpha_j(\bar{W}_{t_j}-\bar{W}_{t_{j-1}})\right)\right] \\
&= \mathrm{E}\left[e^{\sum_{j=1}^n\rho\alpha_j(W^1_{t_j}-W^1_{t_{j-1}})}\right]\mathrm{E}\left[e^{\sum_{j=1}^n\sqrt{1-\rho^2}\alpha_j(W^2_{t_j}-W^2_{t_{j-1}})}\right] \\
&= \prod_{j=1}^n e^{\frac{1}{2}\rho^2\alpha_j^2(t_j-t_{j-1})}e^{\frac{1}{2}(1-\rho^2)\alpha_j^2(t_j-t_{j-1})} \\
&= \prod_{j=1}^n e^{\frac{1}{2}\alpha_j^2(t_j-t_{j-1})}
\end{aligned}
$$

が従う．これで求める式を得た． ∎

6)

USD/JPY 為替レート過程を表す S^1 と EUR/JPY 為替レート過程を表す S^2 が

$$
\begin{aligned}
dS^1_t &= S^1_t(\sigma_1 dW^1_t+\mu_1 dt), \quad S^1_0>0, \\
dS^2_t &= S^2_t(\sigma_2 dW^2_t+\mu_2 dt), \quad S^2_0>0,
\end{aligned}
$$

と与えられている (すなわち，時刻 t で 1USD が S^1_t 円であり，1EUR が S^2_t 円である)．ただし $\sigma_1,\sigma_2>0$, $\mu_1,\mu_2\in\mathbb{R}$ である．このとき USD/EUR 為替レート過程を計算し，そのボラティリティと期待収益率を求めよ．

答案．　USD/EUR 為替レート過程は S^1/S^2 を計算すればよい．

$$
d\begin{bmatrix}X^1_t\\X^2_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S^1_t & 0\\0 & S^2_t\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0\\0 & \sigma_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}dW^1_t\\dW^2_t\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{bmatrix}dt\right)
$$

なので，伊藤の公式より

$$
\begin{aligned}
\frac{S_t^1}{S_t^2} &= \frac{S_0^1}{S_0^2} + \int_0^t \frac{1}{S_s^2}\, dS_s^1 + \int_0^t \frac{-S_s^1}{(S_s^2)^2}\, dS_s^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{(S_s^2)^2} \\ \frac{-1}{(S_s^2)^2} & \frac{2S_s^1}{(S_s^2)^3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S_s^1\sigma_1 & 0 \\ 0 & S_s^2\sigma_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S_s^1\sigma_1 & 0 \\ 0 & S_s^2\sigma_2 \end{bmatrix}\right) ds \\
&= \frac{S_0^1}{S_0^2} + \int_0^t \frac{1}{S_s^2}\, dS_s^1 + \int_0^t \frac{-S_s^1}{(S_s^2)^2}\, dS_s^2 + \int_0^t \frac{S_s^1}{S_s^2}\sigma_2^2\, ds \\
&= \frac{S_0^1}{S_0^2} + \int_0^t \frac{1}{S_s^2}\, S_s^1(\sigma_1 dW_s^1 + \mu_1 ds) \\
&\quad + \int_0^t \frac{-S_s^1}{(S_s^2)^2}\, S_s^2(\sigma_2 dW_s^2 + \mu_2 ds) \\
&\quad + \int_0^t \frac{S_s^1}{S_s^2}\sigma_2^2\, ds \\
&= \frac{S_0^1}{S_0^2} + \int_0^t \frac{S_s^1}{S_s^2}\sigma_1\, dW_s^1 + \int_0^t \frac{-S_s^1}{S_s^2}\sigma_2\, dW_s^2 + \int_0^t \frac{S_s^1}{S_s^2}(\mu_1 - \mu_2 + \sigma_2^2)\, ds
\end{aligned}
$$

が成り立つ．