微分方程式の基礎

2017 年 10 月 28 日

1　高階方程式の場合

D を $\mathbb{R}^n$ の閉区間として，$\mathbb{R}$ の閉区間 $[a,b]$ 上で定義された微分可能関数 $x_i : [a,b] \ni t \longmapsto x_i(t) \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \cdots, n)$ が $(x_1(t), \cdots, x_n(t)) \in D$ $(\forall t \in [a,b])$ を満たしていると仮定する．$\mathbb{R}^{n+1}$ 上の閉区間 $\Omega \coloneqq [a,b] \times D$ 上で定義された $\mathbb{R}$ 値連続関数 f_i $(i = 1, \cdots, n)$ に対して，次の連立方程式を解く．

$$\frac{dx_i}{dt}(t) = f_i(t, x_1(t), \cdots, x_n(t)) \qquad (i = 1, \cdots, n)$$
$$x_i(t_0) = x_i^0 \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

$\mathbb{R}^n$ の点を $\boldsymbol{y} = {}^T(y_1, \cdots, y_n)$ と表し，Ω 上の $\mathbb{R}^n$ 値関数として $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}) \coloneqq {}^T(f_1(t, \boldsymbol{y}), \cdots, f_n(t, \boldsymbol{y}))$ と表すと連立方程式は

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t))$$
$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 = (x_1^0, \cdots, x_n^0) \tag{1}$$

と簡単に表現できる．この微分方程式についての解の存在と一意性を示す．

命題 1.1.　上で定義した $\boldsymbol{f}$ が，Ω において (t に関して一様に)$\boldsymbol{y}$ について Lipschitz 連続であるとする．すなわち或る正数 $K > 0$ が存在して

$$|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}_1) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}_2)| \leq K|\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2| \quad (\forall t \in [a,b],\ \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in D)$$

が成り立っている．ただし $|\boldsymbol{y}| = (y_1^2 + \cdots + y_n^2)^{1/2}$ $(\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n)$ とする．このとき Ω の任意の内点 $(t_0, \boldsymbol{x}_0)$ に対して或る $\delta > 0$ が取れて，閉区間 $I_\delta \coloneqq [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ 上で (1) の解がただ一つ存在する．

証明.

存在の証明

$|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y})| = \sqrt{\sum_{i=1}^n f_i(t, \boldsymbol{y})}$ は Ω 上で連続であるから有界であり，適当な正数 $M > 0$ により

$$|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y})| \leq M \quad (\forall (t, \boldsymbol{y}) \in \Omega)$$

が成り立つ．正数 $\delta > 0$ を，閉集合

$$G \coloneqq \{\, (t, y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \quad | \quad |t - t_0| \leq \delta, \quad |y_i - x_i^0| \leq M|t - t_0| \ (i = 1, \cdots, n) \,\}$$

が Ω に含まれ且つ $\delta \leq 1/2nK$ を満たすように取り，G 上で再帰的に解を構成する．構成の手続きは以下である: 全ての $i = 1, \cdots, n$ と $t \in I_\delta$ に対し

$$x_i^0(t) = x_i^0,$$
$$x_i^k(t) = x_i^0 + \int_{t_0}^{t} f_i(\tau, x_1^{k-1}(\tau), \cdots, x_n^{k-1}(\tau))\, d\tau \quad (k = 1, 2, \cdots),$$
$$x_i(t) = \lim_{k \to \infty} x_i^k(t)$$

とする．まず示すことは，全ての $k \geq 0$ にわたって $(t, x_1^k(t), \cdots, x_n^k(t)) \in G$ $(t \in I_\delta)$ が成り立つことである．数学的帰納法によれば，$k = 0$ の場合は明らかに $(t, x_1^0(t), \cdots, x_n^0(t)) = (t, \boldsymbol{x}_0) \in G$ が成り立っているから，$k = m \geq 0$ の場合 $(t, x_1^m(t), \cdots, x_n^m(t)) \in G$ を仮定して

$$|x_i^{m+1}(t) - x_i^0| = \left| \int_{t_0}^t f_i(\tau, x_1^m(\tau), \cdots, x_n^m(\tau))\, d\tau \right| \leq \int_{t_0}^t |f_i(\tau, x_1^m(\tau), \cdots, x_n^m(\tau))|\, |d\tau| \leq M|t - t_0|$$

が全ての $i = 1, \cdots, n$ について成り立つ．つまり $(t, x_1^{m+1}(t), \cdots, x_n^{m+1}(t)) \in G$ $(t \in I_\delta)$ が示された．次に示すことは $\left(x_i^k(t)\right)_{k=0}^\infty$ $(i = 1, \cdots, n)$ が各 $t \in I_\delta$ で収束することである．適当に $p, q \in \mathbb{N}$ $(p < q)$ を取れば，

$$x_i^q(t) - x_i^p(t) = \sum_{j=p+1}^q (x_i^j(t) - x_i^{j-1}(t)) \quad , i = 1, \cdots, n,\ t \in I_\delta \tag{2}$$

と表せるが，$\delta \leq 1/2nK$ としておいたことにより

$$\begin{aligned}
|x_i^j(t) - x_i^{j-1}(t)| &= \left| \int_{t_0}^t f_1(\tau, x_1^{j-1}(\tau), \cdots, x_n^{j-1}(\tau)) - f_1(\tau, x_1^{j-2}(\tau), \cdots, x_n^{j-2}(\tau))\, d\tau \right| \\
&\leq \int_{t_0}^t K|\boldsymbol{x}_{j-1}(\tau) - \boldsymbol{x}_{j-2}(\tau)||d\tau| \\
&= K \sup_{|t-t_0|\leq\delta} |\boldsymbol{x}_{j-1}(t) - \boldsymbol{x}_{j-2}(t)||t - t_0| \\
&\leq \frac{1}{2n} \sup_{|t-t_0|\leq\delta} |\boldsymbol{x}_{j-1}(t) - \boldsymbol{x}_{j-2}(t)|
\end{aligned}$$

が各 $t \in I_\delta$ で成り立つ．$|\boldsymbol{x}_{j-1}(t) - \boldsymbol{x}_{j-2}(t)| \leq \sum_{i=1}^n |x_i^{j-1}(t) - x_i^{j-2}(t)|$ であるから先の不等式は

$$|x_i^j(t) - x_i^{j-1}(t)| \leq \frac{1}{2n} \sup_{|t-t_0|\leq\delta} \sum_{i=1}^n |x_i^{j-1}(t) - x_i^{j-2}(t)|, \quad t \in I_\delta$$

まで発展し，これが全ての $i = 1, \cdots, n$ で成り立つから

$$\sum_{i=1}^n |x_i^j(t) - x_i^{j-1}(t)| \leq \frac{1}{2} \sup_{|t-t_0|\leq\delta} \sum_{i=1}^n |x_i^{j-1}(t) - x_i^{j-2}(t)|, \quad t \in I_\delta$$

が成り立つ．帰納的な手順で

$$\sum_{i=1}^n |x_i^j(t) - x_i^{j-1}(t)| \leq \frac{1}{2^{j-1}} \sup_{|t-t_0|\leq\delta} \sum_{i=1}^n |x_i^1(t) - x_i^0(t)|, \quad t \in I_\delta$$

と表され，右辺が $t \in I_\delta$ に依存しないところから

$$\sup_{|t-t_0|\leq\delta} \sum_{i=1}^n |x_i^j(t) - x_i^{j-1}(t)| \leq \frac{1}{2^{j-1}} \sup_{|t-t_0|\leq\delta} \sum_{i=1}^n |x_i^1(t) - x_i^0(t)|$$

が成り立つ．$x_1^1, \cdots, x_n^1$ が $[a, b]$ 上の連続関数であるから $\sup_{|t-t_0|\leq\delta} \sum_{i=1}^n |x_i^1(t) - x_i^0(t)|$ は有限確定し，これを c と置けば式 (2) の関係は

$$\sup_{|t-t_0|\leq\delta} |x_i^q(t) - x_i^p(t)| \leq \sum_{j=p+1}^q |x_i^j(t) - x_i^{j-1}(t)| \leq c \sum_{j=p+1}^q \frac{1}{2^{j-1}} \quad , i = 1, \cdots, n$$

となり，連続関数の列 $\left(x_i^k(t)\right)_{k=0}^{\infty}$ $(i=1,\cdots,n)$ が I_δ 上で絶対一様収束していることが判る．従って極限関数 x_i $(i=1,\cdots,n)$ は I_δ 上で連続であり，

$$|f_i(t,\boldsymbol{x}_k(t))-f_i(t,\boldsymbol{x}(t))|\le|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_k(t))-\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}(t))|\le K|\boldsymbol{x}_k(t)-\boldsymbol{x}(t)|\le K\sup_{|t-t_0|\le\delta}\sum_{i=1}^{n}|x_i^k(t)-x_i(t)|$$

が全ての $i=1,\cdots,n$ と $t\in I_\delta$ で成り立つから，右辺が $k\longrightarrow\infty$ で 0 に収束することにより $(f_i(t,\boldsymbol{x}_k(t)))_{k=0}^{\infty}$ が I_δ 上で $f_i(t,\boldsymbol{x}(t))$ に一様収束している $(i=1,\cdots,n)$．以上より

$$\begin{aligned}
&\left|x_i(t)-x_i^0-\int_{t_0}^{t}f_i(\tau,x_1(\tau),\cdots,x_n(\tau))\,d\tau\right|\\
&\le|x_i(t)-x_i^k(t)|+\left|x_i^k(t)-x_i^0-\int_{t_0}^{t}f_i(\tau,x_1^{k-1}(\tau),\cdots,x_n^{k-1}(\tau))\,d\tau\right|\\
&\quad+\left|\int_{t_0}^{t}f_i(\tau,x_1^{k-1}(\tau),\cdots,x_n^{k-1}(\tau))\,d\tau-\int_{t_0}^{t}f_i(\tau,x_1(\tau),\cdots,x_n(\tau))\,d\tau\right|\\
&\le|x_i(t)-x_i^k(t)|+\int_{t_0}^{t}|f_i(\tau,x_1^{k-1}(\tau),\cdots,x_n^{k-1}(\tau))-f_i(\tau,x_1(\tau),\cdots,x_n(\tau))|\,|d\tau|\\
&\longrightarrow 0\quad(k\longrightarrow\infty)
\end{aligned}$$

が全ての $i=1,\cdots,n$ と $t\in I_\delta$ で成り立つ．こうして求められた

$$x_i(t)=x_i^0+\int_{t_0}^{t}f_i(\tau,x_1(\tau),\cdots,x_n(\tau))\,d\tau,\quad i=1,\cdots,n,\ t\in I_\delta$$

は微分方程式 (1) を満たす解である．解が存在する範囲は I_δ 上だけとは限らない．たとえば，次は初期点を $(t_0+\delta,\boldsymbol{x}(t_0+\delta))$ として範囲を拡張できる．

一意性の証明

$(\phi_i)_{i=1}^n,(\psi_i)_{i=1}^n$ が微分方程式 (1) を満たす解であるとする．つまり

$$\phi_i(t)=x_i^0+\int_{t_0}^{t}f_i(\tau,\phi_1(\tau),\cdots,\phi_n(\tau))\,d\tau,\quad i=1,\cdots,n,\ t\in I_\delta,$$

$$\psi_i(t)=x_i^0+\int_{t_0}^{t}f_i(\tau,\psi_1(\tau),\cdots,\psi_n(\tau))\,d\tau,\quad i=1,\cdots,n,\ t\in I_\delta$$

が同時に成り立っているとする．全ての $i=1,\cdots,n$ について

$$\begin{aligned}
|\phi_i(t)-\psi_i(t)|&\le\int_{t_0}^{t}|f_i(\tau,\phi_1(\tau),\cdots,\phi_n(\tau))-f_i(\tau,\psi_1(\tau),\cdots,\psi_n(\tau))|\,|d\tau|\\
&\le\int_{t_0}^{t}K\sum_{i=1}^{n}|\phi_i(\tau)-\psi_i(\tau)|\,|d\tau|\\
&\le\frac{1}{2n}\sup_{|t-t_0|\le\delta}\sum_{i=1}^{n}|\phi_i(t)-\psi_i(t)|
\end{aligned}$$

が成り立っているから，先と同様にして

$$\sup_{|t-t_0|\le\delta}\sum_{i=1}^{n}|\phi_i(t)-\psi_i(t)|\le\frac{1}{2}\sup_{|t-t_0|\le\delta}\sum_{i=1}^{n}|\phi_i(t)-\psi_i(t)|$$

が成り立ち $\phi_i(t)=\psi_i(t)$ $(i=1,\cdots,n,\ t\in I_\delta)$ が示される．これは I_δ 上だけの一意性ではない．解が存在する範囲では初期値が同じであれば解はただ一つである． ∎

参考文献

[1] 笠原晧司, 微分方程式の基礎, 朝倉書店, 1982, ISBN978-4-254-11415-7.