# 解析学 5・関数解析学特論・関数解析 II レポート

基礎工学研究科システム創成専攻修士 1 年
学籍番号 29C17095
百合川尚学
選択番号 [4][5][6][7][8][9]

2018 年 2 月 4 日

約束引用:以下，係数体を $\mathbb{C}$ とする．位相空間 $X$ 上の有界な複素数値連続関数全体のなす空間 $C_b(X)$ は，sup-norm により Banach 空間とみなす．

[4]

$a>0, I=[0,a]$ とおく．$C(I)$ から $C(I)$ への線型作用素 $T$ を次で定める:

$$\mathcal{D}(T) \coloneqq \left\{ u \in C^1(I) \ ; \quad u(0)+u(a)=0 \right\}, \quad Tu(x)=u'(x) \quad (x \in I).$$

このとき，$\sigma_p(T)$ 及び $\sigma(T)$ を求めよ．

証明．sup-norm を $\|\cdot\|$，$C(I)$ 上の恒等写像を $\mathrm{I}(\neq I)$ と表す．

**$T$ が閉作用素であること**　先ず $T$ が閉作用素であることを示す．$u_n \in \mathcal{D}(T)$ $(n=1,2,\cdots)$ に対し或る $u,v \in C(I)$ が存在して，$\|u_n-u\| \longrightarrow 0$ かつ $\|Tu_n-v\| \longrightarrow 0$ が成り立つとき，任意の $x \in I$ に対して

$$\begin{aligned}\left| u(x) - \int_0^x v(t)\,dt \right| &\leq |u(x)-u_n(x)| + \left| \int_0^x Tu_n(t)\,dt - \int_0^x v(t)\,dt \right| \\ &\leq \|u-u_n\| + a\|Tu_n - v\| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)\end{aligned}$$

が成り立つから

$$u(x) = \int_0^x v(t)\,dt \quad (\forall x \in I)$$

となり，$u \in C^1(I)$ かつ $Tu=v$ が従う．そして

$$|u(0)+u(a)| \leq |u(0)-u_n(0)| + |u_n(a)-u(a)| \leq 2\|u-u_n\| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

により，$u \in \mathcal{D}(T)$ が成り立つ．これにより $T$ は閉作用素である．

**点スペクトルについて**　$u \in \mathcal{D}(T)$ とする．$\lambda u - Tu = 0$ を満たす $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し，微分方程式を解けば

$$u(x) = Ce^{\lambda x} \quad (x \in I,\ C \in \mathbb{C})$$

と表せる．今 $u(0)+u(a)=0$ が満たされているから，

$$C + Ce^{\lambda a} = 0$$

が成り立つ．これは $C=0$ 或は $\lambda \in \left\{ \sqrt{-1}(2n+1)\pi/a \ ; \quad n \in \mathbb{Z} \right\}$ の場合に実現する．$\lambda \notin \left\{ \sqrt{-1}(2n+1)\pi/a \ ; \quad n \in \mathbb{Z} \right\}$ ならば $C=0$ となり，この場合 $\lambda u - Tu = 0$ を満たす $u \neq 0$ が存在しないから

$$\sigma_p(T) \subset \left\{ \sqrt{-1}\frac{(2n+1)\pi}{a} \ ; \quad n \in \mathbb{Z} \right\}$$

が従う．逆に $n \in \mathbb{Z}$ を取り $\lambda = (2n+1)\pi/a$ とおけば，任意の $0 \neq C \in \mathbb{C}$ に対して $u(x) = Ce^{\lambda x}$ $(x \in I)$ は

$$\lambda u(x) - Tu(x) = 0 \quad (\forall x \in I), \quad u(0)+u(a)=0$$

を満たすから

$$\sigma_p(T) \supset \left\{ \sqrt{-1}\frac{(2n+1)\pi}{a} \ ; \quad n \in \mathbb{Z} \right\}$$

が成り立ち，$\sigma_p(T) = \left\{ \sqrt{-1}(2n+1)\pi/a \ ; \quad n \in \mathbb{Z} \right\}$ が得られる．

スペクトルについて　レゾルベント集合が $\rho(T) = \mathbb{C}\backslash\sigma_p(T)$ を満たすことを示す．これにより $\sigma(T) = \sigma_p(T)$ が従う．

$\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma_p(T), f \in C(I)$ を任意に取り

$$\begin{cases} u'(x) - \lambda u(x) = f(x) \\ u(0) + u(a) = 0 \end{cases} \quad (x \in I)$$

を満たす $u$ を考えれば，

$$\begin{aligned} &\begin{cases} u'(x) - \lambda u(x) = f(x) \\ u(0) + u(a) = 0 \end{cases} \quad (x \in I) \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} u(x) = e^{\lambda x}u(0) + \int_0^x e^{\lambda(x-s)} f(s)\, ds \\ u(0) + u(a) = 0 \end{cases} \quad (x \in I) \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} u(x) = e^{\lambda x}u(0) + \int_0^x e^{\lambda(x-s)} f(s)\, ds \\ u(0) + e^{\lambda a}u(0) + \int_0^a e^{\lambda(a-s)} f(s)\, ds = 0 \end{cases} \quad (x \in I) \\ \Leftrightarrow\ & u(x) = -\frac{e^{\lambda x}}{1 + e^{\lambda a}} \int_0^a e^{\lambda(a-s)} f(s)\, ds + \int_0^x e^{\lambda(x-s)} f(s)\, ds \quad (x \in I)^{*1} \end{aligned} \tag{1}$$

より $f$ に対して $u \in \mathcal{D}(T)$ は唯一つ定まる．この $f$ から $u$ への単射対応を $R_\lambda : C(I) \overset{\text{op}}{\to} \mathcal{D}(T)$ と表せば，$f$ の任意性より $\mathcal{D}(R_\lambda) = C(I)$ が成り立ち，且つ積分の線型性により $R_\lambda$ も線型性を持つ．また (1) の最終式より

$$\| R_\lambda f \| \leq \left( \frac{\sup_{x\in I} \left|e^{\lambda x}\right|}{\left|1 + e^{\lambda a}\right|} \int_0^a \left|e^{\lambda(a-s)}\right|\, ds + \sup_{x\in I} \left|e^{\lambda x}\right| \int_0^a \left|e^{-\lambda s}\right|\, ds \right) \| f \| \quad (\forall f \in C(I))$$

が成り立つから $R_\lambda$ は有界であり，さらに $R_\lambda$ の定め方と (1) より

$$\begin{aligned} -R_\lambda(\lambda \mathrm{I} - T)u = u \quad (\forall u \in \mathcal{D}(T)), \\ -(\lambda \mathrm{I} - T)R_\lambda f = f \quad (\forall f \in C(I)) \end{aligned}$$

が満たされるから $-R_\lambda = (\lambda \mathrm{I} - T)^{-1}$ が成り立ち $\lambda \in \rho(T)$ が従う．以上より $\rho(T) = \mathbb{C}\backslash\sigma_p(T)$ である．　∎

[*1] $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma_p(T)$ より $1 + e^{\lambda a} \neq 0$ である．

[5]

$X, Y$ をそれぞれ $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$ の空でないコンパクト部分集合とし，$K \in C(X \times Y)$ とするとき

$$T : C(Y) \to C(X), \quad Tf(x) = \int_Y K(x,y)f(y)\,dy \quad (f \in C(Y))$$

はコンパクト作用素であることを示せ．

証明． $m\ (n)$ 次元 Lebesgue 測度を $\mu_m\ (\mu_n)$ と表す．また $\mathrm{L}^\infty(\mu_m) = \mathrm{L}^\infty(X, \mathfrak{B}(X), \mu_m)$, $\mathrm{L}^\infty(\mu_n) = \mathrm{L}^\infty(Y, \mathfrak{B}(Y), \mu_n)$ とおき，関数と関数類は表記上区別しない．$C(X)$ と $\mathrm{L}^\infty(\mu_m)$ のノルムをそれぞれ $\|\cdot\|_{C(X)}, \|\cdot\|_{\mathrm{L}^\infty(\mu_m)}$ と表す．講義中の例より

$$\tilde{T}f(x) = \int_Y K(x,y)f(y)\,\mu_n(dy), \quad (f \in \mathrm{L}^\infty(\mu_n))$$

により定める $\tilde{T}$ は $\mathrm{L}^\infty(\mu_n)$ から $\mathrm{L}^\infty(\mu_m)$ へのコンパクト作用素である．そして $C(Y) \subset \mathscr{L}^\infty(\mu_n)$, $C(X) \subset \mathscr{L}^\infty(\mu_m)$ より $\tilde{T}$ は $T$ の拡張となっている[*2]．$C(Y)$ から任意に有界列 $(f_n)_{n=1}^\infty$ を取れば，$\tilde{T}$ がコンパクト作用素であるから $\left(\tilde{T}f_n\right)_{n=1}^\infty$ の或る部分列 $\left(\tilde{T}f_{n_k}\right)_{k=1}^\infty$ は Banach 空間 $\mathrm{L}^\infty(\mu_m)$ で強収束する．今 $Tf_n = \tilde{T}f_n\ (n = 1, 2, \cdots)$ 且つ $f_n$ の連続性により

$$\|Tf_n\|_{C(X)} = \left\|\tilde{T}f_n\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\mu_m)} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{2}$$

が満たされる．実際，ess.sup の定義より $\|Tf_n\|_{C(X)} \geq \left\|\tilde{T}f_n\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\mu_m)}$ は成り立つが，等号が成り立たないと仮定すると，$\tilde{T}f_n$ の代表 $Tf_n$ の連続性より $Tf_n(x) = \|Tf_n\|_{C(X)}$ を達成する $x$ の或る $\epsilon$ 近傍 $B_\epsilon$ 上でも $Tf_n > \left\|\tilde{T}f_n\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\mu_m)}$ が満たされ，

$$0 < \mu_m(B_\epsilon) \leq \mu_m\left(\left\{\, x \in X\ ;\quad |Tf_n(x)| > \left\|\tilde{T}f_n\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\mu_m)} \right\}\right) = 0$$

が成り立ち矛盾が生じる．(2) により $(Tf_{n_k})_{k=1}^\infty$ は $\|\cdot\|_{C(X)}$ に関して Cauchy 列をなし，$(C(X), \|\cdot\|_{C(X)})$ が Banach 空間であるから $(Tf_{n_k})_{k=1}^\infty$ は $C(X)$ で強収束する．ゆえに $T$ はコンパクト作用素である． ∎

[*2] 任意の $f \in C(Y)$ に対し，$f$ を代表とする関数類 $[f]$ が $\mathrm{L}^\infty(\mu_m)$ に存在する．そして $T$ と $\tilde{T}$ は次の関係を満たしている:

$$[Tf] = \tilde{T}[f] \quad (\forall f \in C(Y)).$$

[6]

$a \in C_b(\mathbb{R}^d), \lambda > d$ とする．$f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ に対し，

$$T_a f(x) = \int_{|x-y|>1} \frac{a(x)f(y)}{|x-y|^\lambda}\,dy \quad (\text{a.e.}\,x \in \mathbb{R}^d)$$

により $T_a : \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ を定める．

(1) $T_a$ は連続であることを示せ.

(2) $\lim_{|x|\to\infty} a(x) = 0$ ならば $T_a$ はコンパクト作用素であることを示せ.

証明. $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ のノルムを $\|\cdot\|_2$，$\mathrm{B}(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d))$ の作用素ノルムを $\|\cdot\|$ と表し，$M := \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |a(x)| < \infty$ とおく．

(1) 任意の $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ に対し $T_a f$ が二乗可積分であることと $T_a$ の連続性を同時に示す．Hölder の不等式より

$$\begin{aligned}\int_{|x-y|>1} \frac{|a(x)f(y)|}{|x-y|^\lambda}\,dy &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{|a(x)|}{|x-y|^{\frac{\lambda}{2}}} \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{\frac{\lambda}{2}}}\,dy \\ &\le \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{|a(x)|^2}{|x-y|^\lambda}\,dy\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{|f(y)|^2}{|x-y|^\lambda}\,dy\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (3)\end{aligned}$$

が任意の $x \in \mathbb{R}^d$ で成立する．右辺第一項について，$\lambda > d$ であるから，変数変換を用いて

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{|a(x)|^2}{|x-y|^\lambda}\,dy \le M^2 \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{1}{|x-y|^\lambda}\,dy = M^2 \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{|u|>1} \frac{1}{|u|^\lambda}\,du < \infty$$

が満たされる[*3]．従って $U := \int_{|x-y|>1} 1/|x-y|^\lambda\,dy$ とおけば $U$ は $x$ に依らない定数である．$\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \ni (x,y) \longmapsto \mathbb{1}_{\{|x-y|>1\}} f(y)/|x-y|^\lambda$ は $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d) \times \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)/\mathfrak{B}(\mathbb{C})$-可測であるから，Fubini の定理より

$$\begin{aligned}\|T_a f\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} \left|\int_{|x-y|>1} \frac{a(x)f(y)}{|x-y|^\lambda}\,dy\right|^2 dx \\ &\le \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{|a(x)|^2}{|x-y|^\lambda}\,dy\right)\left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{|f(y)|^2}{|x-y|^\lambda}\,dy\right) dx \\ &\le M^2 U \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{|f(y)|^2}{|x-y|^\lambda}\,dy\,dx \\ &= M^2 U \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^2\,dy \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{1}{|x-y|^\lambda}\,dx \\ &= M^2 U^2 \|f\|_2^2 \qquad (4)\end{aligned}$$

が得られる．$T_a$ が線型性を持てば有界性と連続性は一致するから，あとは $T_a$ が線型性を持つことを示せばよい．実際，任意の $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ に対して (3) が満たされているから，任意の $f, g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned}T_a(\alpha f + \beta g) &= \int_{|x-y|>1} \frac{a(x)\,(\alpha f(y) + \beta g(y))}{|x-y|^\lambda}\,dy \\ &= \alpha \int_{|x-y|>1} \frac{a(x)f(y)}{|x-y|^\lambda}\,dy + \beta \int_{|x-y|>1} \frac{a(x)g(y)}{|x-y|^\lambda}\,dy = \alpha T_a f + \beta T_a g\end{aligned}$$

---

[*3] $u = (u_1, \cdots, u_d) \in \mathbb{R}^d$ に対して $|u|^\lambda \ge |u_1|^{\lambda/d} \cdots |u_d|^{\lambda/d}$ が満たされているから，$\lambda/d > 1$ なら

$$\int_{|u|>1} \frac{1}{|u|^\lambda}\,du \le \left(\int_{|u_1|>1/\sqrt{d}} \frac{1}{|u_1|^{\lambda/d}}\,du_1\right)^d < \infty$$

が成り立つ．

が成立する．

(2) $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ が Banach 空間であるから $\mathrm{B}_c(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d))$ は $\mathrm{B}(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d))$ の閉部分空間であり，$T_a$ に作用素ノルムで収束する $\mathrm{B}_c(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d))$ の列が存在すれば $T_a \in \mathrm{B}_c(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d))$ が従う．任意に $\epsilon > 0$ を取れば，仮定より或る $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$|a(x)| < \epsilon \quad (|x| > N) \tag{5}$$

を満たす．また

$$a_n(x) \coloneqq a(x)\mathbb{1}_{|x|\leq n} \quad (\forall x \in \mathbb{R}^d,\ n = 1, 2, \cdots)$$

により $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ を定めれば，各 $n$ に対し

$$\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{|a_n(x)|^2}{|x-y|^{2\lambda}}\, dxdy < \infty$$

が成り立つから，

$$T_{a_n} f(x) = \int_{|x-y|>1} \frac{a_n(x) f(y)}{|x-y|^{\lambda}}\, dy \quad \left(\text{a.e.} x \in \mathbb{R}^d,\ \forall f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)\right)$$

により定める $T_{a_n}$ は Hilbert-Schmidt 型積分作用素であり，従ってコンパクト作用素である．(4) より

$$\left\| T_a - T_{a_n} \right\| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |a(x) - a_n(x)| U$$

が成り立ち，(5) より $n > N$ ならば $\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |a(x) - a_n(x)| < \epsilon$ となるから，$\epsilon$ の任意性より

$$\left\| T_a - T_{a_n} \right\| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が従う．冒頭に書いた理由により $T_a$ はコンパクト作用素である． ∎

[7]

$a = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^{\infty}$ に対して $T : \ell^2 \to \ell^2$ を $Tx = (a_n x_n)_{n=1}^{\infty}$ $(x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^2)$ で定める．

(1) $T$ がコンパクト作用素であるための必要十分条件を求めよ．

(2) $T$ が Hilbert-Schmidt 型作用素であるための必要十分条件を求めよ．

証明.

(1) 求める必要十分条件が $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であることを示す．

**十分性** 任意に $\ell^2$ の有界列 $(x^{\nu})_{\nu=1}^{\infty}$ $\left(x^{\nu} = (x_n^{\nu})_{n=1}^{\infty}\right)$ を取る．対角線論法により，或る部分添数列 $(\nu(k))_{k=1}^{\infty}$ が存在して，全ての $n \in \mathbb{N}$ に対し $\left(x_n^{\nu(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ が $\mathbb{C}$ の Cauchy 列となるようにできる．実際 $\left(x_1^{\nu}\right)_{\nu=1}^{\infty}$ は $\mathbb{C}$ の有界列であるから，Bolzano-Weierstrass の定理より或る部分列 $\left(x_1^{\nu(k,1)}\right)_{k=1}^{\infty}$ は $\mathbb{C}$ の Cauchy 列となる．$\left(x_2^{\nu(k,1)}\right)_{\nu=1}^{\infty}$ も $\mathbb{C}$ の有界列であるから，$(\nu(k,1))_{k=1}^{\infty}$ の部分添数列 $(\nu(k,2))_{k=1}^{\infty}$ が存在し $\left(x_2^{\nu(k,2)}\right)_{k=1}^{\infty}$ は $\mathbb{C}$ の Cauchy 列となる．同様に部分列を取る操作を繰り返し，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\left(x_n^{\nu(k,n)}\right)_{k=1}^{\infty}$ が $\mathbb{C}$ の Cauchy 列となるようにできる．$\nu(k) := \nu(k,k)$ $(k = 1, 2, \cdots)$ として $(\nu(k))_{k=1}^{\infty}$ を定めればよい．

$$M := \sup_{\nu\in\mathbb{N}} \| x^{\nu} \|_{\ell^2} < \infty$$

とおき，任意に $\epsilon > 0$ を取る．$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ より或る $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ が存在して

$$|a_n| \leq \frac{\epsilon}{2M} \quad (\forall n > N)$$

を満たすから，任意の $k, m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
\left\| T x^{\nu(k)} - T x^{\nu(m)} \right\|_{\ell^2}^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \left| x_n^{\nu(k)} - x_n^{\nu(m)} \right|^2 \\
&\leq \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 \left| x_n^{\nu(k)} - x_n^{\nu(m)} \right|^2 + 2\frac{\epsilon^2}{4M^2} \sum_{n=N+1}^{\infty} \left( \left| x_n^{\nu(k)} \right|^2 + \left| x_n^{\nu(m)} \right|^2 \right) \\
&\leq \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 \left| x_n^{\nu(k)} - x_n^{\nu(m)} \right|^2 + \epsilon^2
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで $A := \max_{1\leq n\leq N} |a_n|$ とおけば，或る $N_j = N_j(\epsilon) \in \mathbb{N}$ $(j = 1, \cdots, N)$ が存在して

$$\left| x_j^{\nu(k)} - x_j^{\nu(m)} \right| < \frac{\epsilon}{\sqrt{N}A} \quad (\forall k, m > N_j,\ j = 1, \cdots, N)$$

を満たす．$N' := \max_{1\leq j\leq N} N_j$ とおけば

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 \left| x_n^{\nu(k)} - x_n^{\nu(m)} \right|^2 \leq A^2 N \frac{\epsilon^2}{NA^2} = \epsilon^2 \quad (\forall k, m > N')$$

が従うから，

$$\left\| T x^{\nu(k)} - T x^{\nu(m)} \right\|_{\ell^2}^2 \leq 2\epsilon^2 \quad (\forall k, m > N')$$

が成り立つ．$\ell^2$ の完備性により $\left(T x_n^{\nu(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ は収束するから，$T$ はコンパクト作用素である．

**必要性**　対偶を示す．つまり $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ が満たされないとき或る有界点列 $(x^k)_{k=1}^\infty \subset \ell^2$ が存在して，$(Tx^k)_{k=1}^\infty$ のいかなる部分列も収束しないことを示す．或る $\epsilon > 0$ に対し $(a_n)_{n=1}^\infty$ の或る部分列 $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$ が存在して

$$\left|a_{n_k}\right| \geq \epsilon \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

を満たすとき，

$$x_n^k := \begin{cases} 1 & (n = n_k) \\ 0 & (n \neq n_k) \end{cases} \quad (n, k = 1, 2, \cdots)$$

として $\ell^2$ の点列 $(x^k)_{k=1}^\infty$ を定めれば，$k \neq m$ なら

$$\left\| Tx^k - Tx^m \right\|^2 = |a_{n_k}|^2 + |a_{n_m}|^2 \geq 2\epsilon^2$$

を満たすから $(Tx^k)_{k=1}^\infty$ のいかなる部分列も収束しえない．

(2)

[8]

$(X, \mathcal{M}, \mu)$ を $\sigma$-有限な測度空間，$H = \mathrm{L}^2(X, \mathcal{M}, \mu) = \mathrm{L}^2(\mu)$ とする．$\mathcal{M}$-可測関数 $a : X \to \mathbb{C}$ に対して，$H$ から $H$ へのかけ算作用素 $M_a$ を次で定める:

$$\mathcal{D}(M_a) = \{ u \in H \ ; \quad au \in H \}, \quad (M_a u)(x) = a(x)u(x) \quad (x \in X).$$

(1) $M_a$ は線型作用素で，$\mathcal{D}(M_a)$ は $H$ で稠密なことを示せ．

(2) $M_a^* = M_{\overline{a}}$ が成り立つことを示せ．

(3) $\sigma(M_a) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \ ; \quad \forall \epsilon > 0 \text{ に対し } \mu\left(a^{-1}(U_\epsilon(\lambda))\right) > 0 \right\}$ を示せ．(ただし $U_\epsilon(\lambda)$ は $\lambda$ の $\epsilon$-近傍．)

(4) $\sigma_p(M_a) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \ ; \quad \mu\left(a^{-1}(\{\lambda\})\right) > 0 \right\}$ を示せ．

**証明．** $\sigma$-有限の仮定により，或る集合の系 $(X_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{M}$ が存在して $X_1 \subset X_2 \subset \cdots$, $\mu(X_n) < \infty$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, $\cup_{n\in\mathbb{N}} X_n = X$ を満たす．また $H$ におけるノルムと内積をそれぞれ $\|\cdot\|, \langle\cdot,\cdot\rangle$ と表し，$H$ 上の恒等写像を $I$ とする．

(1) **$M_a$ が線型作用素であること**　先ず $\mathcal{D}(M_a)$ が $H$ の線型部分空間であることを示す．任意に $u, v \in \mathcal{D}(M_a)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ を取れば，$H$ が線形空間であることにより $\alpha u + \beta v \in H$ が満たされ，且つ $au, av \in H$ により

$$a(\alpha u + \beta v) = \alpha au + \beta av \in H$$

も成り立つから $\alpha u + \beta v \in \mathcal{D}(M_a)$ が従う．また任意の $u, v \in \mathcal{D}(M_a)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned} M_a(\alpha u + \beta v)(x) &= a(x)(\alpha u(x) + \beta v(x)) \\ &= \alpha a(x)u(x) + \beta a(x)v(x) = \alpha(M_a u)(x) + \beta(M_a v)(x) \quad (\mu\text{-a.e.} x \in X) \end{aligned}$$

が満たされるから $M_a$ は線型作用素である．

**$\mathcal{D}(M_a)$ が $H$ で稠密なこと**　任意に $v \in H$ を取り $v_n := v\mathbb{1}_{\{|a|\leq n\}}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ として関数列 $(v_n)_{n=1}^\infty$ を作る．全ての $x \in X$ で $|v_n(x)| \leq |v(x)|$ が満たされているから $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ である．また全ての $n \in \mathbb{N}$ について

$$\int_X |a(x)v_n(x)|^2 \mu(dx) = \int_{\{|a|\leq n\}} |a(x)v(x)|^2 \mu(dx) \leq n^2 \int_X |v(x)|^2 \mu(dx) < \infty$$

が成り立つから $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(M_a)$ が従う．

$$\|v - v_n\|^2 = \int_X |v(x) - v_n(x)|^2 \, \mu(dx) = \int_X \mathbb{1}_{\{|a|>n\}}(x)|v(x)|^2 \, \mu(dx)$$

の右辺の被積分関数は各点で 0 に収束し，かつ可積分関数 $|v|^2$ で抑えられるから，Lebesgue の収束定理より

$$\lim_{n\to\infty} \|v - v_n\|^2 = \lim_{n\to\infty} \int_X \mathbb{1}_{\{|a|>n\}}(x)|v(x)|^2 \, \mu(dx) = \int_X \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{\{|a|>n\}}(x)|v(x)|^2 \, \mu(dx) = 0$$

が得られる．$v$ は任意に選んでいたから $\mathcal{D}(M_a)$ の稠密性が従う．

(2) $\mathcal{D}(M_a)$ が $H$ で稠密であるから $M_a$ の共役作用素を定義できる．任意の $u, v \in \mathcal{D}(M_a) = \mathcal{D}(M_{\overline{a}})$ に対して

$$\langle M_a u, v \rangle = \int_X a(x)u(x)\overline{v(x)} \, \mu(dx) = \int_X u(x)\overline{\overline{a(x)}v(x)} \, \mu(dx) = \langle u, M_{\overline{a}} v \rangle$$

が成り立つから $v \in \mathcal{D}(M_a^*)$ 且つ $M_a^* v = M_{\overline{a}} v$ $(\forall v \in \mathcal{D}(M_{\overline{a}}))$ が従う．逆に任意の $u \in \mathcal{D}(M_a), v \in \mathcal{D}(M_a^*)$ に対し

$$\langle u, M_a^* v \rangle = \langle M_a u, v \rangle = \langle u, M_{\overline{a}} v \rangle$$

が成り立つから，$\mathcal{D}(M_a)$ の稠密性により $M_a^* v = M_{\overline{a}} v$ $(\forall v \in \mathcal{D}(M_a^*))$ が従う．以上より $M_a^* = M_{\overline{a}}$ を得る．

(3)　$\lambda \in \mathbb{C}$ を任意に取り固定し，$V_\epsilon := a^{-1}(U_\epsilon(\lambda))\ (\forall \epsilon > 0)$ とおく．或る $\epsilon > 0$ が存在して $\mu(V_\epsilon) = 0$ が成り立つ場合，

$$b(x) := \begin{cases} 1/\,(\lambda - a(x)) & (x \in X \backslash V_\epsilon) \\ 0 & (x \in V_\epsilon) \end{cases}$$

として $b$ を定めれば，任意の $u \in H$ に対して

$$\int_X |b(x)u(x)|^2\, \mu(dx) = \int_{X\backslash V_\epsilon} \frac{1}{|\lambda - a(x)|^2} |u(x)|^2\, \mu(dx) \leq \frac{1}{\epsilon^2} \int_X |u(x)|^2\, \mu(dx) < \infty$$

が成り立つから，$M_b$ は $\mathcal{D}(M_b) = H$ を満たす有界線型作用素である．更に $b(x)\,(\lambda - a(x)) = 1\ (\forall x \in V_\epsilon)$ により

$$\begin{aligned} b(x)\,(\lambda - a(x))\, u(x) = u(x) \quad &(\mu\text{-a.e.}x \in X,\ \forall u \in \mathcal{D}(M_a)), \\ (\lambda - a(x))\, b(x) u(x) = u(x) \quad &(\mu\text{-a.e.}x \in X,\ \forall u \in H) \end{aligned}$$

が成り立つから，$M_b = (\lambda I - M_a)^{-1}$ となり $\lambda \in \rho(M_a)$ が従う．以上より

$$\sigma(M_a) \subset \left\{\, \lambda \in \mathbb{C}\ ;\quad \forall \epsilon > 0 \text{ に対し } \mu\left(a^{-1}(U_\epsilon(\lambda))\right) > 0 \,\right\} \tag{6}$$

が成立する．次に逆の包含関係を示す．$\mu(V_\epsilon) > 0\ (\forall \epsilon > 0)$ が満たされている時，任意に $\epsilon > 0$ を取り固定する．

$$\mu(V_\epsilon) = \lim_{n\to\infty} \mu(V_\epsilon \cap X_n)$$

が成り立つから，或る $N \in \mathbb{N}$ が存在して $\mu(V_\epsilon \cap X_N) > 0$ を満たす．

$$u_\epsilon(x) := \begin{cases} 1 & (x \in V_\epsilon \cap X_N) \\ 0 & (x \notin V_\epsilon \cap X_N) \end{cases}$$

として $u_\epsilon$ を定めれば，$u_\epsilon$ は二乗可積分であり

$$\int_X |a(x)u_\epsilon(x)|^2\, \mu(dx) = \int_{V_\epsilon \cap X_N} |a(x)u_\epsilon(x)|^2\, \mu(dx) \leq (\epsilon + |\lambda|)^2\, \mu\,(V_\epsilon \cap X_N) < \infty$$

を満たすから $u_\epsilon \in \mathcal{D}(M_a)$ が従う．また

$$\begin{aligned} \|\,(\lambda I - M_a)u_\epsilon\,\|^2 &= \int_X |\lambda - a(x)|^2 |u_\epsilon(x)|^2\, \mu(dx) \\ &= \int_{V_\epsilon \cap X_N} |\lambda - a(x)|^2 |u_\epsilon(x)|^2\, \mu(dx) \leq \epsilon^2 \int_X |u_\epsilon(x)|^2\, \mu(dx) = \epsilon^2\, \|\,u_\epsilon\,\|^2 \end{aligned}$$

を満たす．$\epsilon > 0$ は任意に選んでいたから，任意の $\epsilon > 0$ に対し或る $u_\epsilon \in \mathcal{D}(M_a)$ が存在して

$$\|\,(\lambda I - M_a)u_\epsilon\,\| \leq \epsilon\, \|\,u_\epsilon\,\|$$

が成り立つ．この場合 $(\lambda I - M_a)^{-1}$ が存在しても，$u_\epsilon = (\lambda I - M_a)^{-1} v_\epsilon$ を満たす $v_\epsilon \in \mathcal{D}\left((\lambda I - M_a)^{-1}\right)$ に対して

$$\frac{1}{\epsilon} \leq \frac{\left\|\,(\lambda I - M_a)^{-1} v_\epsilon\,\right\|}{\|\,v_\epsilon\,\|}$$

が従い，$\epsilon$ の任意性より $(\lambda I - M_a)^{-1}$ の作用素ノルムは非有界である．ゆえに $\lambda \in \sigma(M_a)$ が成立し，(6) と併せて

$$\sigma(M_a) = \left\{\, \lambda \in \mathbb{C}\ ;\quad \forall \epsilon > 0 \text{ に対し } \mu\left(a^{-1}(U_\epsilon(\lambda))\right) > 0 \,\right\}$$

が得られる．

(4) 先ず $\sigma_p(M_a) \subset \left\{ z \in \mathbb{C} \ ; \quad \mu\left(a^{-1}(\{z\})\right) > 0 \right\}$ が成り立つことを示す．任意の $\lambda \in \sigma_p(M_a)$ に対しては固有ベクトル $u \in H$ が存在し，固有ベクトルは $u \neq 0$ を満たすから

$$N := \{ \, x \in X \ ; \quad u(x) \neq 0 \, \}$$

とおけば $\mu(N) > 0$ が成り立つ．一方で点スペクトルの定義より $u$ は $(\lambda I - M_a)u = 0$ を満たすから，

$$0 = \| (\lambda I - M_a)u \|^2 = \int_X |\lambda - a(x)|^2 |u(x)|^2 \, \mu(dx) = \int_N |\lambda - a(x)|^2 |u(x)|^2 \, \mu(dx)$$

が成り立ち

$$\mu\left(\{ \, x \in N \ ; \quad |\lambda - a(x)| > 0 \, \}\right) = 0$$

が従う．よって

$$\mu\left(a^{-1}(\{\lambda\})\right) \geq \mu\left(\{ \, x \in N \ ; \quad |\lambda - a(x)| = 0 \, \}\right) = \mu(N) > 0$$

となり $\lambda \in \left\{ z \in \mathbb{C} \ ; \quad \mu\left(a^{-1}(\{z\})\right) > 0 \right\}$ が成り立つ．次に $\sigma_p(M_a) \supset \left\{ z \in \mathbb{C} \ ; \quad \mu\left(a^{-1}(\{z\})\right) > 0 \right\}$ が成り立つことを示す．任意に $\lambda \in \left\{ z \in \mathbb{C} \ ; \quad \mu\left(a^{-1}(\{z\})\right) > 0 \right\}$ を取り

$$\Lambda := a^{-1}(\{\lambda\})$$

とおく．

$$0 < \mu(\Lambda) = \lim_{n \to \infty} \mu(\Lambda \cap X_n)$$

が成り立つから，或る $n \in \mathbb{N}$ が存在して $\mu(\Lambda \cap X_n) > 0$ を満たす．

$$u(x) := \begin{cases} 1 & (x \in \Lambda \cap X_n), \\ 0 & (x \notin \Lambda \cap X_n) \end{cases}$$

として $u$ を定めれば $u$ は二乗可積分であり，$\mu(\Lambda \cap X_n) > 0$ であるから $u \neq 0$ を満たす．また

$$\| (\lambda I - M_a)u \|^2 = \int_X |\lambda - a(x)|^2 |u(x)|^2 \, \mu(dx) = \int_{\Lambda \cap X_n} |\lambda - a(x)|^2 |u(x)|^2 \, \mu(dx) = 0$$

により $(\lambda I - M_a)u = 0$ が従うから $u$ は $\lambda$ の固有ベクトルであり，$\lambda \in \sigma_p(M_a)$ が成立する． ∎

[9]

前問の設定の下，$\mathfrak{B}(\mathbb{C})$ を $\mathbb{C}$ のボレル集合族とし，$E(A) = M_{\mathbb{1}_{a^{-1}(A)}} \in \mathrm{B}(H)$ $(A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C}))$ と定める．

(1) $E$ は，$\mathfrak{B}(\mathbb{C})$ で定義され，$H$ 上の直交射影を値とするスペクトル測度であることを示せ．

(2) Borel 可測関数 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ に対し，

$$T_f := \int_{\mathbb{C}} f(z)\, E(dxdy) \quad (z = x + iy,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

と定める．このとき，$T_f = M_{f\circ a}$ を示せ．

証明.

(1) 任意の $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$ に対し $\mathbb{1}_{a^{-1}(A)}$ は有界であるから，春学期のレポート問題より $M_{\mathbb{1}_{a^{-1}(A)}} \in \mathrm{B}(H)$ が成り立つ．ゆえに $E$ は $\mathfrak{B}(\mathbb{C})$ 全体で定義される．次に任意に $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$ を取り $E(A)$ が $H$ 上の直交射影であることを示す．実際

$$E(A)^2 u = M_{\mathbb{1}_{a^{-1}(A)}} M_{\mathbb{1}_{a^{-1}(A)}} u = \mathbb{1}_{a^{-1}(A)} \mathbb{1}_{a^{-1}(A)} u = \mathbb{1}_{a^{-1}(A)} u = E(A)u \quad (\forall u \in H)$$

が成り立ち $E(A)^2 = E(A)$ が得られ，また $\mathbb{1}_{a^{-1}(A)}$ は実数値であるから

$$E(A)^* = M^*_{\mathbb{1}_{a^{-1}(A)}} = M_{\mathbb{1}_{a^{-1}(A)}} = E(A)$$

が成り立ち，$E(A)$ は自己共役である．最後に $E$ がスペクトル測度であることを示す．先ず

$$E(\mathbb{R}^d)u = M_{\mathbb{1}_{\mathbb{C}}} u = u$$

より $E(\mathbb{R}^d) = I$ を得る．また任意の互いに素な集合列 $A_1, A_2, \cdots \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$ を取れば

$$E(\sum_{n=1}^{\infty} A_n)u = \sum_{n=1}^{\infty} E(A_n)u \quad (\forall u \in H)$$

が成り立つ．

(2) $\mathcal{D}\left(T_f\right) = \mathcal{D}\left(M_{f\circ a}\right)$ を示さなくてはいけない．$f$ が可測単関数の場合，

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$$

として

$$\int_{\mathbb{C}} |f(x)|^2\, \mu_u(dx) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \langle E(A_i)u, u\rangle = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \int_{\mathbb{C}} \mathbb{1}_{a^{-1}(A_i)} |u(x)|^2\, \mu(dx) = \int_{\mathbb{C}} |f(a(x))|^2 |u(x)|^2\, \mu(dx)$$

が成り立つ．$f$ が一般の可測関数の場合は $MSF$-単調近似列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ を取れば

$$\int_{\mathbb{C}} |f_n(x)|^2\, \mu_u(dx) = \int_{\mathbb{C}} |f_n(a(x))|^2 |u(x)|^2\, \mu(dx) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

が従い，単調収束定理より両辺はそれぞれ $\int_{\mathbb{C}} |f(x)|^2\, \mu_u(dx), \int_{\mathbb{C}} |f(a(x))|^2 |u(x)|^2\, \mu(dx)$ に収束する．従って

$$u \in \mathcal{D}\left(T_f\right) \quad \Leftrightarrow \quad u \in \mathcal{D}\left(M_{f\circ a}\right)$$

が成り立つ．次に $T_f u = M_{f\circ a}u$ $(\forall u \in \mathcal{D}\big(T_f\big))$ を示す．$f$ が可測単関数の場合，

$$T_f u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E(A_i)u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{a^{-1}(A_i)}u = f_n \circ au = M_{f_n\circ a}u \quad (\forall u \in H)$$

が成り立つ．一般の $f$ に対しては，$MSF$-単調近似列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ を取る．

$$\left\| T_f u - M_{f\circ a}u \right\| \leq \left\| T_f u - T_{f_n}u \right\| + \left\| M_{f_n\circ a}u - M_{f\circ a}u \right\|$$

が成り立つ．スペクトル積分 $T_f$ の定義より

$$\left\| T_f u - T_{f_n}u \right\| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成り立ち，また Lebesgue の収束定理より

$$\left\| M_{f_n\circ a}u - M_{f\circ a}u \right\|^2 = \int_{\mathbb{C}} |f_n(a(x))u(x) - f(a(x))u(x)|^2 \ \mu(dx) \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

を得る．ゆえに

$$\left\| T_f u - M_{f\circ a}u \right\| = 0$$

が成り立つ．