

# 解析学 3・関数解析学概論・関数解析Ⅰレポート

基礎工学研究科システム創成専攻修士 1 年

学籍番号 29C17095

百合川尚学

選択番号 [4][5][9][10][11][12][13]

2017 年 10 月 28 日

約束及び定義 (問題用紙引用)

- 係数体は, 特に断らない限り, 複素数体  $\mathbb{C}$  とする.  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ .
- 位相空間  $X, Y$  に対し,  $C(X, Y) = \{f \mid f \text{ は } X \text{ から } Y \text{ への連続写像}\}; C(X) = C(X, \mathbb{C})$ .  $C_b(X) = \{f \in C(X) \mid f \text{ は有界}\}$  は  $\|u\| = \sup_{x \in X} |u(x)|$  をノルム (sup-norm) として Banach 空間である.
- ノルム空間  $X$  と  $Y$  が同型  $\stackrel{\text{def}}{\iff}$  線形全単射  $T : X \rightarrow Y$  で  $\|Tx\| = \|x\|$  ( $\forall x \in X$ ) なるものが存在する. ( $T$  をノルム空間としての同型写像という. 同様に Banach 空間に関する同型の概念を定める.)
- $s$  を複素数列全体のなす線形空間とし,  $s$  の部分集合を以下のように定める:

$$l^p = \{a = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in s; \|a\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p)^{1/p} < \infty\}, \quad 1 \leq p < \infty$$

$$l^{\infty} = \{a = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in s; \|a\|_{l^{\infty}} = \sup_n |a_n| < \infty\}, \quad c_0 = \{a = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in s; \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0\}.$$

このとき  $l^p$  は  $\|\cdot\|_p$  をノルムとして Banach 空間である.

[4].  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $I = [a, b]$  とする.  $C^k(I)$  は  $\|f\|_k = \sum_{j=0}^k \sup_{x \in I} |f^{(j)}(x)|$  をノルムとして Banach 空間であることを示せ.

証明. 以下の手順で示す.

- (i)  $\|\cdot\|_k$  が  $C^k(I)$  におけるノルムである.
- (ii)  $C^k(I)$  の  $\|\cdot\|_k$  による Cauchy 列を取ると, 各  $j (= 0, 1, 2, \dots, k)$  階導関数列に対し或る  $I$  上の連続関数  $f^j$  が存在し,  $j$  階導関数列は  $f^j$  に  $I$  上で一様収束する.
- (iii) 各  $j = 0, 1, 2, \dots, k-1$ , について  $f^j$  は  $I$  上連続微分可能で  $f^{j+1}(x) = \frac{d}{dx} f^j(x)$  ( $\forall x \in I$ ) が成り立っている.

- (i)  $f, g \in C^k(I)$  と  $\alpha \in \mathbb{C}$  を任意に取る. 正值性  $\|f\|_k \geq 0$  は右辺の各項が  $\geq 0$  であることから成り立つ. また  $\|f\|_k = 0$  の場合, 右辺で  $\sup_{x \in I} |f^{(j)}(x)| = 0$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, k$ ) が成り立ち, 特に  $f$  は  $I$  上で零写像であるとわかるから  $f = 0$  である. 逆に  $f$  が  $I$  上で零写像ならば全ての導関数が零写像になるため右辺は 0 になり, 従って  $\|f\|_k = 0$  となる. 同次性は

$$\|\alpha f\|_k = \sum_{j=0}^k \sup_{x \in I} |(\alpha f^{(j)})(x)| = \sum_{j=0}^k \sup_{x \in I} |\alpha f^{(j)}(x)| = \sum_{j=0}^k \sup_{x \in I} |\alpha| |f^{(j)}(x)| = |\alpha| \sum_{j=0}^k \sup_{x \in I} |f^{(j)}(x)| = |\alpha| \|f\|_k$$

により示される. 三角不等式は

$$\begin{aligned} \|f + g\|_k &= \sum_{j=0}^k \sup_{x \in I} |(f + g)^{(j)}(x)| \\ &= \sum_{j=0}^k \sup_{x \in I} |(f^{(j)} + g^{(j)})(x)| \\ &\leq \sum_{j=0}^k \sup_{x \in I} |f^{(j)}(x) + g^{(j)}(x)| \\ &\leq \sum_{j=0}^k \left( \sup_{x \in I} |f^{(j)}(x)| + \sup_{x \in I} |g^{(j)}(x)| \right) = \|f\|_k + \|g\|_k \end{aligned}$$

により示される.

- (ii)  $f_n \in C^k(I)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を  $C^k(I)$  の  $\|\cdot\|_k$  による Cauchy 列とする. 任意の  $\epsilon > 0$  に対し或る  $N \in \mathbb{N}$  が存在して全ての  $n, m > N$  で

$$\epsilon > \|f_n - f_m\|_k = \sum_{j=0}^k \sup_{x \in I} |f_n^{(j)}(x) - f_m^{(j)}(x)|$$

が成り立っているから, 各  $j = 0, 1, 2, \dots, k$  について  $(f_n^{(j)})_{n=1}^{+\infty}$  は sup-norm に関して Cauchy 列をなしている.  $(C(I), \text{sup-norm})$  が Banach 空間であることが認められているから, 各  $j = 0, 1, 2, \dots, k$  についてそれぞれ或る  $I$  上の連続関数  $f^j$  が存在して,  $(f_n^{(j)})_{n=1}^{+\infty}$  は  $f^j$  に sup-norm で収束, 即ち  $I$  上で一様収束する.

- (iii) 上で取った  $(f_n)_{n=1}^{+\infty} \subset C^k(I)$  について, 全ての  $n \in \mathbb{N}$  と  $j = 0, 1, 2, \dots, k-1$  に対して次の関係が成り立っている.

$$f_n^{(j)}(x) - f_n^{(j)}(b) = \int_b^x f_n^{(j+1)}(t) dt, \quad (\forall x \in I).$$

ここで (ii) の結果から, 任意の  $x \in I$  と  $\epsilon > 0$  に対し或る  $N = N(j, \epsilon) \in \mathbb{N}$  が存在して全ての  $n > N$  で

$$\left| f^j(x) - f_n^{(j)}(x) \right| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \left| f_n^{(j+1)}(x) - f^{j+1}(x) \right| < \frac{\epsilon}{3(b-a)}$$

が成り立つようにできるから, 同じ  $n$  について

$$\begin{aligned} \left| (f^j(x) - f^j(b)) - \int_b^x f^{j+1}(t) dt \right| &= \left| (f^j(x) - f^j(b)) - (f_n^{(j)}(x) - f_n^{(j)}(b)) + \int_b^x f_n^{(j+1)}(t) dt - \int_b^x f^{j+1}(t) dt \right| \\ &\leq \left| f^j(x) - f_n^{(j)}(x) \right| + \left| f^j(b) - f_n^{(j)}(b) \right| + \int_b^x \left| f_n^{(j+1)}(t) - f^{j+1}(t) \right| dt \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + (b-a) \frac{\epsilon}{3(b-a)} = \epsilon \end{aligned}$$

が成り立つ.  $\epsilon$  は任意だから

$$f^j(x) - f^j(b) = \int_b^x f^{j+1}(t) dt, \quad (\forall x \in I, j = 0, 1, 2, \dots, k-1)$$

が示されたことになる. 右辺は連続関数  $f^{j+1}$  の積分だから左辺  $f^j$  は  $x$  に関して微分可能関数 (端点は片側微分を考える) となり, 導関数は  $f^{j+1}$  である. ゆえに  $f^0 \in C^k(I)$  が示される. 表記を改めて  $f := f^0$ ,  $f^{(j)} := f^j$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ) と表せば, (ii) の結果より

$$\|f_n - f\|_k = \sum_{j=0}^k \sup_{x \in I} \left| f_n^{(j)}(x) - f^{(j)}(x) \right| \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)$$

が成り立つことで  $C^k(I)$  が  $\|\cdot\|_k$  をノルムとして Banach 空間をなしていると示される. ■

[5].  $X = C([0, 1])$  を sup-norm の入った Banach 空間とする.  $0 < a < 1$ ,  $Y = \{f \in X; [0, a] \text{ 上で } f(t) = 0\}$  とおく.

- (1)  $Y$  が  $X$  の閉線形部分空間であることを示せ.
- (2)  $X/Y$  と  $C([0, a])$ (sup-norm を入れる) は Banach 空間として同型であることを示せ.

証明.

- (1)  $Y$  が  $X$  の線形部分空間であることは, 任意の  $f, g \in Y$  と任意の複素数  $\alpha \in \mathbb{C}$  に対して

$$\begin{aligned}(f + g)(t) &= f(t) + g(t) = 0, \quad (\forall t \in [0, a]) \\ (\alpha f)(t) &= \alpha f(t) = 0, \quad (\forall t \in [0, a])\end{aligned}$$

が成り立つことで示される. 後は sup-norm に関して  $Y$  が閉集合となっていることを示せばよい.  $f_n \in Y$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を sup-norm に関する Cauchy 列とする.  $(C([0, 1]), \text{sup-norm})$  の完備性から  $(f_n)_{n=1}^\infty$  は或る  $f \in C([0, 1])$  に  $[0, 1]$  上で一様に収束するが, もし或る  $x \in [0, a]$  について  $|f(x)| > 0$  であるならば, この  $x$  において  $f_n(x) = 0$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) であることから

$$0 < |f(x)| = |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{t \in [0, 1]} |f_n(t) - f(t)|, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

となり  $(f_n)_{n=1}^\infty$  が  $f$  に収束することに反する. 従って  $f$  も  $[0, a]$  上で 0 でなくてはならず,  $f$  は  $Y$  に属することになる. これは  $Y$  が sup-norm の下で完備ノルム空間となっていることを主張し, 以上より  $Y$  は  $X$  の閉線形部分空間であると示された.

- (2)  $X$  の sup-norm を  $\|\cdot\|$  で表し,  $X$  を  $Y$  で割った商空間  $X/Y$  の元を  $[f]$  (代表元  $f \in X$ ) で表す.  $Y$  が閉線形部分空間であるから  $X/Y$  は

$$\|[f]\|_{X/Y} := \inf_{g \in Y} \|f - g\|, \quad ([f] \in X/Y)$$

をノルムとしてノルム空間となり, さらに  $(X, \|\cdot\|)$  が Banach 空間であるから  $(X/Y, \|\cdot\|_{X/Y})$  も Banach 空間となる. 任意の  $[f] \in X/Y$  について  $f_1, f_2 \in [f]$  は  $f_1 - f_2 \in Y$  を満たすから即ち

$$f_1(t) = f_2(t) \quad (\forall t \in [0, a])$$

が成り立っている. ここで

$$\|[f]\|_{X/Y} = \inf_{g \in Y} \|f - g\| = \inf_{g \in Y} \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) - g(t)| = \sup_{t \in [0, a]} |f(t)| \quad (1)$$

が成り立つことを示す. 任意の  $g \in Y$  に対して

$$\sup_{t \in [0, a]} |f(t)| = \sup_{t \in [0, a]} |f(t) - g(t)| \leq \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) - g(t)|$$

が成り立つから

$$\sup_{t \in [0, a]} |f(t)| \leq \inf_{g \in Y} \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) - g(t)| = \|[f]\|_{X/Y} \quad (2)$$

の関係がまず示される．後は式 (2) 右辺の  $\inf$  を実現する  $g \in Y$  の存在を言えばよい．例えば区間  $[a, 1]$  上で  $f$  と  $|f(a)|$  の距離を保ち続ける連続関数  $g$  により  $\inf$  は実現される．つまり  $f(a)$  の正負に応じて

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, a] \\ f(t) - |f(a)| & t \in [a, 1] \end{cases}, \quad (f(a) \geq 0)$$

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, a] \\ f(t) + |f(a)| & t \in [a, 1] \end{cases}, \quad (f(a) < 0)$$

となるような  $g \in Y$  を考えればよい． $X/Y$  と  $C([0, a])$  が Banach 空間として同型であることを示すために，まず  $X/Y$  から  $C([0, a])$  への線形全単射が存在することを示す． $[f] (\in X/Y)$  の代表元の定義域を  $[0, a]$  に制限した関数は  $C([0, a])$  の或る元に一致し， $[f_1] \neq [f_2] ([f_1], [f_2] \in X/Y)$  ならば対応する  $C([0, a])$  の元も違う．一方で  $C([0, a])$  の任意の元は定義域を  $[0, 1]$  に拡張 (例えば  $[a, 1]$  上では適当な一次関数でおく) すれば  $X = C([0, 1])$  の元となるから  $X/Y$  の或る同値類に属することになる．従って写像  $X/Y \ni [f] \mapsto f|_{[0, a]} \in C([0, a])$  は  $X/Y$  から  $C([0, a])$  への全単射である．この写像を  $T$  と表す．式 (1) により  $T$  は  $\|[f]\|_{X/Y} = \|f|_{[0, a]}\| = \|T[f]\|$  の意味で等長である．そして  $T$  の線型性は

$$T([f] + [h]) = T[f + h] = (f + h)|_{[0, a]} = f|_{[0, a]} + h|_{[0, a]} = T[f] + T[h],$$

$$T(\alpha[f]) = T[\alpha f] = (\alpha f)|_{[0, a]} = \alpha f|_{[0, a]} = \alpha T[f]$$

により示される．ゆえに  $T$  は  $X/Y \mapsto C([0, a])$  の同型写像であり， $X/Y$  と  $C([0, a])$  が Banach 空間として同型であることが示された． ■

[9].  $(S, \mathfrak{M}, \mu)$  は  $\sigma$ -有限な測度空間,  $X = L^2(S, \mathfrak{M}, \mu) = L^2(\mu)$  とする. 可測関数  $a : S \rightarrow \mathbb{C}$  に対して,  $X$  上の掛け算作用素  $M_a$  を次で定める:

$$D(M_a) = \{u \in X \mid au \in X\}, \quad (M_a u)(x) = a(x)u(x) \quad (x \in S).$$

- (1)  $D(M_a)$  が  $X$  で稠密であることを示せ.
- (2)  $a \in L^\infty(S, \mathfrak{M}, \mu)$  ならば  $M_a \in B(X)$  であり,  $\|M_a\| = \|a\|_{L^\infty(\mu)}$  が成り立つことを示せ.
- (3) 逆に  $M_a \in B(X)$  ならば  $a \in L^\infty(S, \mathfrak{M}, \mu)$  であることを示せ.

証明.

- (1) 任意の  $v \in X$  に対して  $v_n := v \mathbb{1}_{(|a| \leq n)}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) として関数列  $(v_n)_{n=1}^\infty$  を作る. ただし  $\mathbb{1}_{(|a| \leq n)}$  は定義関数で  $|a(x)| \leq n$  となる  $x \in S$  の集合の上で 1, その外では 0 となるものである. 全ての  $x \in S$  で  $|v_n(x)| \leq |v(x)|$  となるから  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  である. さらに全ての  $n \in \mathbb{N}$  について

$$\int_S |a(x)v_n(x)|^2 \mu(dx) = \int_{(|a| \leq n)} |a(x)v(x)|^2 \mu(dx) \leq n^2 \int_S |v(x)|^2 \mu(dx)$$

が成り立つから  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(M_a)$  でもある.  $X$  のノルムを  $\|\cdot\|_{L^2(\mu)}$  で表せば

$$\|v - v_n\|_{L^2(\mu)}^2 = \int_S |v(x) - v_n(x)|^2 \mu(dx) = \int_S \mathbb{1}_{(|a| > n)}(x) |v(x)|^2 \mu(dx) \quad (3)$$

となり,  $a$  は  $\mathbb{C}$  値であるから各点  $x \in S$  で  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{1}_{(|a| > n)}(x) = 0$  が成り立つ. 式 (3) の右辺の被積分関数は  $n$  に関係なく可積分関数  $|v|^2$  で抑えられ各点で  $n \rightarrow +\infty$  で 0 に収束するから, Lebesgue の収束定理を適用すれば

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|v - v_n\|_{L^2(\mu)}^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_S \mathbb{1}_{(|a| > n)}(x) |v(x)|^2 \mu(dx) = \int_S \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{1}_{(|a| > n)}(x) |v(x)|^2 \mu(dx) = 0$$

が成立する. これはノルム空間  $X = (X, \|\cdot\|_{L^2(\mu)})$  において  $v$  の任意の近傍に  $D(M_a)$  の元  $v_n$  が存在することを表していて,  $v$  は任意に選んでいたから  $D(M_a)$  は  $X$  で稠密であると示された.

- (2) 任意の  $a \in L^\infty(S, \mathfrak{M}, \mu)$  に対して,  $\|a\|_{L^\infty(\mu)}$  は

$$\|a\|_{L^\infty(\mu)} = \inf \{b \in [0, +\infty) \mid \mu(\{x \in S \mid |a(x)| > b\}) = 0\}$$

と表される. 特に

$$N_m := \{x \in S \mid |a(x)| \geq \|a\|_{L^\infty(\mu)} + 1/m\}, \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

と置けば  $\mu(N_m) = 0$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ) であって,  $\mu$  零集合  $N$  を

$$N := \bigcup_{m=1}^{\infty} N_m$$

で定めれば

$$|a(x)| \leq \|a\|_{L^\infty(\mu)}, \quad (\forall x \in S \cap N^c) \quad (4)$$

が成り立つ．また  $0 < c < \|a\|_{L^\infty(\mu)}$  となるような任意の  $c$  については

$$\mu(\{x \in S \mid |a(x)| > c\}) > 0 \quad (5)$$

が成り立つことにも注意しておく．全ての  $u \in X$  に対して，(4) により

$$\begin{aligned} \|M_a u\|_{L^2(\mu)}^2 &= \int_S |a(x)u(x)|^2 \mu(dx) \\ &= \int_{S \cap N^c} |a(x)u(x)|^2 \mu(dx) \\ &\leq \int_{S \cap N^c} \|a\|_{L^\infty(\mu)}^2 |u(x)|^2 \mu(dx) \\ &= \int_S \|a\|_{L^\infty(\mu)}^2 |u(x)|^2 \mu(dx) = \|a\|_{L^\infty(\mu)}^2 \|u\|_{L^2(\mu)}^2 \end{aligned}$$

が成り立っていることから， $\|M_a\| \leq \|a\|_{L^\infty(\mu)}$  であり  $M_a \in B(X)$  が示される．さらに， $(S, \mathfrak{M}, \mu)$  が  $\sigma$ -有限な測度空間であるという条件の下では， $\|M_a\| = \|a\|_{L^\infty(\mu)}$  であることが次のように示される． $\|a\|_{L^\infty(\mu)} = 0$  ならば明らかに  $M_a$  は零作用素で  $0 = \|M_a\| = \|a\|_{L^\infty(\mu)}$  である． $\|a\|_{L^\infty(\mu)} > 0$  である場合， $\|a\|_{L^\infty(\mu)} > \epsilon > 0$  を満たすような  $\epsilon$  を任意に取り，

$$G_\epsilon := \{x \in S \cap N^c \mid \|a\|_{L^\infty(\mu)} - \epsilon < |a(x)|\}$$

として  $\mu$  可測集合  $G_\epsilon$  を作る．(5) により， $\mu(G_\epsilon) > 0$  であることが次で示される．

$$\begin{aligned} \mu(G_\epsilon) &= \mu(\{x \in S \mid \|a\|_{L^\infty(\mu)} - \epsilon < |a(x)|\} \cap N^c) \\ &= \mu(\{x \in S \mid \|a\|_{L^\infty(\mu)} - \epsilon < |a(x)|\}) \quad (\because \mu(N) = 0) \\ &> 0. \quad (\because (5)). \end{aligned}$$

$\sigma$ -有限の仮定より，単調増大な  $\mu$  可測集合列  $S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \cdots$  で  $\mu(S_k) < +\infty$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) と  $\cup_{k=1}^\infty S_k = S$  を満たすものが存在して

$$0 < \mu(G_\epsilon) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(S_k \cap G_\epsilon)$$

となるから，必ず或る  $S_k$  に対して

$$r_\epsilon := \mu(S_k \cap G_\epsilon) > 0$$

となっている．

$$u_\epsilon(x) := \begin{cases} 1/\sqrt{r_\epsilon} & x \in S_k \cap G_\epsilon \\ 0 & x \notin S_k \cap G_\epsilon \end{cases}$$

と定義すれば， $\mu(S_k \cap G_\epsilon) < +\infty$  であるから  $u_\epsilon \in X$  であって

$$\|u_\epsilon\|_{L^2(\mu)} = 1$$

となっている．この  $u_\epsilon$  に対して

$$(\|a\|_{L^\infty(\mu)} - \epsilon)^2 < \int_{S_k \cap G_\epsilon} |a(x)u_\epsilon(x)|^2 \mu(dx) = \int_S |a(x)u_\epsilon(x)|^2 \mu(dx) \leq \|a\|_{L^\infty(\mu)}^2$$

により

$$\|a\|_{L^\infty(\mu)} - \epsilon < \|M_a u_\epsilon\|_{L^2(\mu)} \leq \|a\|_{L^\infty(\mu)}$$



が成り立っているから、先に示した  $\|M_a\| \leq \|a\|_{L^\infty(\mu)}$  と合わせて

$$\|a\|_{L^\infty(\mu)} - \epsilon < \sup_{0 \neq u \in X} \frac{\|M_a u\|_{L^2(\mu)}}{\|u\|_{L^2(\mu)}} = \|M_a\| \leq \|a\|_{L^\infty(\mu)}$$

である。  $\epsilon > 0$  は任意に取っていたから、  $\epsilon \rightarrow 0$  で考えれば

$$\|a\|_{L^\infty(\mu)} = \|M_a\|$$

が示されたことになる。

(3)  $M_a \in B(X)$  ならば

$$\int_S |a(x)u(x)|^2 \mu(dx) = \|M_a u\|_{L^2(\mu)}^2 \leq \|M_a\|^2 \|u\|_{L^2(\mu)}^2 = \|M_a\|^2 \int_S |u(x)|^2 \mu(dx)$$

が成立している。  $(S, \mathfrak{M}, \mu)$  が  $\sigma$ -有限な測度空間であるという条件の下では

$$\mu(\{x \in S \mid |a(x)| > \|M_a\|\}) = 0$$

が成り立つことを示す。これが示されれば  $\mu$ -零集合を除いて  $a$  は有界となるから  $a \in L^\infty(S, \mathfrak{M}, \mu)$  が従う。  $\sigma$ -有限の仮定より、単調増大な  $\mu$  可測集合列  $S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \dots$  で  $\mu(S_k) < +\infty$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) と  $\cup_{k=1}^\infty S_k = S$  を満たすものが存在する。  $\mu$  可測集合

$$G := \{x \in S \mid |a(x)| > \|M_a\|\}$$

について、これが仮に  $\mu(G) > 0$  であるとすると

$$0 < \mu(G) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(S_k \cap G)$$

により或る  $K \in \mathbb{N}$  が存在して  $\mu(S_k \cap G) > 0$  ( $\forall k > K$ ) が成立する。  $k > K$  を満たす  $k$  を選んで

$$u(x) = \begin{cases} 1 & x \in S_k \cap G \\ 0 & x \notin S_k \cap G \end{cases}$$

と置けば、  $\mu(S_k \cap G) < +\infty$  であることから  $u \in X$  であって、

$$\|u\|_{L^2(\mu)}^2 = \int_S |u(x)|^2 \mu(dx) = \int_{S_k \cap G} |u(x)|^2 \mu(dx) = \mu(S_k \cap G)$$

が成り立っている。  $G$  上で  $|a(x)| > \|M_a\|$  であるから

$$\begin{aligned} \|M_a\|^2 \|u\|_{L^2(\mu)}^2 &= \|M_a\|^2 \int_S |u(x)|^2 \mu(dx) \\ &= \|M_a\|^2 \int_{S_k \cap G} |u(x)|^2 \mu(dx) \\ &< \int_{S_k \cap G} |a(x)u(x)|^2 \mu(dx) \\ &= \int_S |a(x)u(x)|^2 \mu(dx) \\ &\leq \|M_a\|^2 \|u\|_{L^2(\mu)}^2 \end{aligned}$$

となるが、最右辺と最左辺を  $\|u\|_{L^2(\mu)}^2$  で割ると

$$\|M_a\| < \|M_a\|$$

と矛盾が出る。従って  $\mu(G) = 0$  でなくてはならない。 ■

[10].  $X$  をノルム空間,  $X_0$  をその部分空間とする.  $i : X_0 \rightarrow X$  を  $i(x) = x$  ( $x \in X_0$ ) なる包含写像とする.  $T : X^* \ni x^* \mapsto x^* \circ i \in X_0^*$  により線型写像を定める.

- (1)  $T$  は連続かつ全射であることを示せ.
- (2)  $X_0$  が  $X$  で稠密ならば,  $T$  はノルム空間としての同型写像であることを示せ.
- (3)  $X_0$  が  $X$  で稠密でないならば,  $T$  は単射でないことを示せ.

証明.  $X, X^*, X_0^*$  におけるノルムをそれぞれ  $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_{X^*}, \|\cdot\|_{X_0^*}$  で表現する.

- (1) 任意の  $x^* \in X^*$  と  $u \in X_0$  に対して

$$|(x^* \circ i)(u)| = |x^*(u)| \leq \|x^*\|_{X^*} \|u\|_X$$

が成り立つから  $\|x^* \circ i\|_{X_0^*} \leq \|x^*\|_{X^*}$  ( $\forall x^* \in X^*$ ) が成立する. 従って

$$\|Tx^*\|_{X_0^*} = \|x^* \circ i\|_{X_0^*} \leq \|x^*\|_{X^*} \quad (\forall x^* \in X^*)$$

となり  $T$  が有界作用素であることが示される.  $T$  が全射であることは Hahn-Banach の定理による. 任意の  $f_0 \in X_0^*$  に対して  $X$  上のセミノルムとして  $X \ni x \mapsto \|f_0\|_{X_0^*} \|x\|_X \in \mathbb{C}$  を考えれば

$$|f_0(x)| \leq \|f_0\|_{X_0^*} \|x\|_X \quad (\forall x \in X_0)$$

が成り立っているから, Hahn-Banach の定理が適用されて  $X$  上の線型汎関数  $f \in X^*$  で

$$\begin{cases} |f(x)| \leq \|f_0\|_{X_0^*} \|x\|_X & (\forall x \in X), \\ f(x) = f_0(x) & (\forall x \in X_0) \end{cases}$$

を満たすものが存在する. 明らかに  $f \circ i = f_0$  が成り立っているから  $T$  が全射であることが示された.

- (2)  $X_0$  が  $X$  で稠密であるなら, 任意の  $f_0 \in X_0^*$  はノルムを変えずに  $f \in X^*$  に一意に拡張されるということが示される. まずはこのことを証明する. これが示されれば, (1) の結果と合わせて

- $T : X \mapsto X_0$  は線型全単射である.
- $\|Tx^*\|_{X_0^*} = \|x^* \circ i\|_{X_0^*} = \|x^*\|_{X^*}$

が成り立つことが示され,  $T$  がノルム空間としての同型写像であると判る.  $X_0$  が  $X$  で稠密であるということにより, 任意の  $x \in X$  に対して  $x_k \in X_0$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) で  $\|x_k - x\|_X \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow +\infty$ ) となるものを取りることができる. 任意に  $f_0 \in X_0^*$  を取れば, 任意の  $m, n \in \mathbb{N}$  に対して

$$|f_0(x_m) - f_0(x_n)| \leq \|f_0\|_{X_0^*} \|x_m - x_n\|_X$$

が成り立つから, 右辺が  $X_0$  の Cauchy 列をなすことにより  $(f_0(x_n))_{n=1}^{+\infty}$  も  $\mathbb{C}$  の Cauchy 列となる.  $\mathbb{C}$  の完備性から  $(f_0(x_n))_{n=1}^{+\infty}$  は或る  $u \in \mathbb{C}$  に収束し,  $u$  は  $x \in X$  に対して一意に定まる. なぜならば,  $x$  への別の収束列  $y_k \in X_0$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) を取った場合の  $(f_0(y_n))_{n=1}^{+\infty}$  の収束

先が  $v \in \mathbb{C}$  であるとして, 任意の  $n, m \in \mathbb{N}$  に対して

$$\begin{aligned}
|u - v| &= |u - f_0(x_n) + f_0(x_n) - f_0(y_m) + f_0(y_m) - v| \\
&\leq |u - f_0(x_n)| + |f_0(x_n) - f_0(y_m)| + |f_0(y_m) - v| \\
&\leq |u - f_0(x_n)| + \|f_0\|_{X_0^*} \|x_n - y_m\|_X + |f_0(y_m) - v| \\
&\leq |u - f_0(x_n)| + \|f_0\|_{X_0^*} (\|x_n - x\|_X + \|x - y_m\|_X) + |f_0(y_m) - v|
\end{aligned}$$

となるから  $n, m \rightarrow +\infty$  で右辺は 0 に収束し,  $u = v$  が示されるためである. つまり  $x$  に  $u$  に対応させる関係は  $X \rightarrow \mathbb{C}$  の写像となり, この写像を  $f$  と表すことにする.  $f$  の線型性も次のように示される. 任意の  $x, y \in X$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  に対して,  $x, y$  への収束列  $(x_k)_{k=1}^{+\infty}, (y_k)_{k=1}^{+\infty} \subset X_0$  を取れば  $(\alpha x_k + \beta y_k)_{k=1}^{+\infty}$  が  $\alpha x + \beta y$  への収束列となるから

$$\begin{aligned}
|f(\alpha x + \beta y) - \alpha f(x) - \beta f(y)| &= |f(\alpha x + \beta y) - f_0(\alpha x_k + \beta y_k) + \alpha f_0(x_k) + \beta f_0(y_k) - \alpha f(x) - \beta f(y)| \\
&\leq |f(\alpha x + \beta y) - f_0(\alpha x_k + \beta y_k)| + |\alpha f_0(x_k) - \alpha f(x)| + |\beta f_0(y_k) - \beta f(y)| \\
&\leq |f(\alpha x + \beta y) - f_0(\alpha x_k + \beta y_k)| + |\alpha| |f_0(x_k) - f(x)| + |\beta| |f_0(y_k) - f(y)| \\
&\rightarrow 0 \quad (k \rightarrow +\infty)
\end{aligned}$$

が成り立つ. ゆえに  $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$  ( $\forall x, y \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ) である. また  $f$  は有界な線型作用素である. なぜなら, 任意に  $x \in X$  と  $x$  への収束列  $x_k \in X_0$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) を取れば, 任意の  $\epsilon > 0$  に対し或る  $K \in \mathbb{N}$  が存在して全ての  $k > K$  について

$$|f(x)| < |f_0(x_k)| + \epsilon, \quad \|x\|_X < \|x_k\|_X + \epsilon / \|f_0\|_{X_0^*}$$

が成り立つようにできるから, この下で

$$|f(x)| < |f_0(x)| + \epsilon < \|f_0\|_{X_0^*} \|x\|_X + 2\epsilon$$

となり  $f \in X^*$  であることと  $\|f\|_{X^*} \leq \|f_0\|_{X_0^*}$  が判るからである. さらに

$$\|f\|_{X^*} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X=1}} |f(x)| \geq \sup_{\substack{x \in X_0 \\ \|x\|_X=1}} |f(x)| = \sup_{\substack{x \in X_0 \\ \|x\|_X=1}} |f_0(x)| = \|f_0\|_{X_0^*}$$

も成り立つから結局  $\|f\|_{X^*} = \|f_0\|_{X_0^*}$  であると判る. 以上より任意の  $f_0 \in X_0^*$  がノルムを変えないまま或る  $f \in X^*$  に拡張されることが示された. 拡張の一意性について,  $f_0$  の  $X^*$  への別の拡張  $g$  が存在したとする. つまり  $g$  は  $X$  上の有界な線型汎関数で  $X_0$  の上では  $f_0$  と一致するものである.  $g$  が  $f$  に  $X$  上で完全に一致することを示すには  $f$  と  $g$  が  $X \setminus X_0$  で一致することを見ればよい. 任意の  $x \in X \setminus X_0$  に対して  $x_k \in X_0$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) で  $x_k \rightarrow x$  ( $k \rightarrow +\infty$ ) となるものを取れば

$$\begin{aligned}
|f(x) - g(x)| &= |f(x) - f(x_k) + g(x_k) - g(x)| \\
&\leq |f(x) - f(x_k)| + |g(x_k) - g(x)| \\
&\leq \|f\|_{X^*} \|x_k - x\|_X + \|g\|_{X^*} \|x_k - x\|_X \\
&\rightarrow 0 \quad (k \rightarrow +\infty)
\end{aligned}$$

が成り立つから  $f(x) = g(x)$  ( $\forall x \in X \setminus X_0$ ), すなわち  $f(x) = g(x)$  ( $\forall x \in X$ ) が成り立つと示された. 任意の  $x^* \in X^*$  は  $x^* \circ i \in X_0^*$  を  $X^*$  の元に拡張したものであるから, つまり  $x^*, y^* \in X^*$

に対して  $X_0$  上で  $x^* \circ i = y^* \circ i$  が成り立っているならば拡張の一意性により  $X$  上で  $x^* = y^*$  が成り立つから  $T$  は単射である。(全射であることは (1) で示した。) またノルムを変えない拡張であるから  $\|Tx^*\|_{X_0^*} = \|x^* \circ i\|_{X_0^*} = \|x^*\|_{X^*}$  の意味で  $T$  は等長で、以上で  $T$  が  $X^* \rightarrow X_0^*$  の線形全単射、すなわち同型写像であることが示された。

- (3)  $X_0$  が  $X$  で稠密でない場合、 $X_0$  の  $\|\cdot\|_X$  による閉包を  $[X_0]^a$  と表せば  $X \setminus [X_0]^a \neq \emptyset$  である。任意の  $x^*, y^* \in X^*$  に対して定義域を  $[X_0]^a$  に制限したものを  $x^*|_{[X_0]^a}, y^*|_{[X_0]^a}$  と表わせればこれは  $[X_0]^a$  上の有界な線型汎関数であり、もちろん  $x^*|_{[X_0]^a} \circ i = x^* \circ i$  かつ  $y^*|_{[X_0]^a} \circ i = y^* \circ i$  である。従って (2) の結果により

$$x^* \circ i = y^* \circ i \quad \Leftrightarrow \quad x^*|_{[X_0]^a} = y^*|_{[X_0]^a}$$

が成り立つ。つまり  $X \setminus [X_0]^a$  の上での  $x^*, y^*$  の値に関係なく、両者が  $X_0$  の上で一致するための必要十分条件は  $[X_0]^a$  の上で一致していることである。 $T$  が単射でないことは、 $[X_0]^a$  の上では一致し、その外側で一致しない  $X^*$  の元の組が存在することで示される。 $x^* \in X^*$  を零写像であるとする。 $x^*$  に対して上記の性質を満たす  $y^* \in X^*$  の存在を Hahn-Banach の定理により示す。 $X \setminus [X_0]^a \neq \emptyset$  であるから  $w \in X \setminus [X_0]^a$  を取ればこれは  $w \neq 0$  でありかつ  $d := \inf_{x \in [X_0]^a} \|w - x\|_X > 0$  を満たす。 $w$  と  $[X_0]^a$  が生成する  $X$  の部分空間を

$$L := \{\alpha w + x \mid \alpha \in \mathbb{C}, x \in [X_0]^a\}$$

と表し、 $L$  上の写像  $f$  を

$$f(\alpha w + x) = \alpha d, \quad (\forall \alpha w + x \in L)$$

と定義する。 $w \notin [X_0]^a$  により  $L$  の元  $\alpha w + x$  の表し方は一意で (つまり  $\alpha w + x = \alpha' w + x' \Rightarrow \alpha = \alpha'$  かつ  $x = x'$ ) あるから  $f$  が一価関数であることが保証されている。さらに  $f$  は明らかに線型性を持ち、

$$|\alpha|d \leq |\alpha| \|w + \alpha^{-1}x\|_X = \|\alpha w + x\|_X \quad (\forall \alpha \in \mathbb{C}, x \in [X_0]^a)$$

により

$$|f(u)| \leq \|u\|_X \quad (\forall u \in L)$$

が成り立つから  $f$  は  $L$  上の有界線型汎関数でもある。 $f$  の作用素ノルムを  $\|f\|_L$  と表せば  $|f(u)| \leq \|f\|_L \|u\|_X$  ( $\forall u \in L$ ) が成り立ち、右辺は明らかに  $L$  の上のセミノルムとなっているから、Hahn-Banach の定理により  $f$  は  $X$  上の有界な線型汎関数  $F$  に拡張される。(有界性は  $F$  が不等式  $|F(u)| \leq \|f\|_L \|u\|_X$  ( $\forall u \in X$ ) を満たすことによる。)  $F$  は少なくとも

$$\begin{cases} F(u) = 0 & u \in [X_0]^a, \\ F(u) = \alpha d & u \in L, \alpha \neq 0 \end{cases}$$

を満たす  $X^*$  の元であるから、 $y^* = F$  と置けば  $x^*, y^*$  は  $x^* \circ i = y^* \circ i$  であるけれども  $x^* \neq y^*$  満たす  $X^*$  の元の組である。以上で  $T$  が単射でないことが示された。 ■

[11].

- (1)  $c_0$  は  $l^\infty$  の閉線形部分空間であることを示せ.
- (2)  $l^\infty$  と  $c_0$  が可分であるかどうか判定せよ.

証明.

- (1) まず  $c_0 \subset l^\infty$  であることを示す.  $\forall a = (a_n)_{n=1}^\infty \in c_0$  は収束点列である. 任意の  $\epsilon > 0$  に対して或る  $N \in \mathbb{N}$  を取れば,  $N$  以降の  $n \in \mathbb{N}$  については  $|a_n| < \epsilon$  で抑えられるから

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \leq \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, \epsilon\} < +\infty$$

が成り立ち  $a \in l^\infty$  が判る. 従って  $c_0 \subset l^\infty$  である. つぎに  $c_0$  が線型空間  $l^\infty$  の線形部分空間であることを示す. 任意の  $a = (a_n)_{n=1}^\infty, b = (b_n)_{n=1}^\infty \in c_0, \alpha \in \mathbb{C}$  に対し

$$\begin{aligned} |a_n + b_n| &\leq |a_n| + |b_n| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow +\infty), \\ |\alpha a_n| &= |\alpha| |a_n| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow +\infty) \end{aligned}$$

が成り立つことにより  $a + b \in c_0$  と  $\alpha a \in c_0$  が示される. 従って  $c_0$  は  $l^\infty$  の線形部分空間である. 最後に  $c_0$  が  $l^\infty$  で閉集合となっていることを示す.  $l^\infty$  は  $\|\cdot\|_{l^\infty}$  をノルムとして Banach 空間となっているから, その部分空間である  $c_0$  が  $\|\cdot\|_{l^\infty}$  をノルムとして Banach 空間をなしていることを示せばよい.  $a^{(n)} = (a_m^{(n)})_{m=1}^\infty \in c_0$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ) を  $\|\cdot\|_{l^\infty}$  に関する Cauchy 列とする. ( $l^\infty, \|\cdot\|_{l^\infty}$ ) が完備であるから,  $(a^{(n)})_{n=1}^\infty$  は或る  $a^* = (a_m^*)_{m=1}^\infty \in l^\infty$  に  $m$  に関して一様に収束している. つまり任意の  $\epsilon > 0$  に対して或る  $N \in \mathbb{N}$  が存在して, 全ての  $n > N$  について

$$\|a^{(n)} - a^*\|_{l^\infty} = \sup_{m \in \mathbb{N}} |a_m^{(n)} - a_m^*| < \epsilon \quad (6)$$

が成り立っている.  $a^* = (a_m^*)_{m=1}^\infty$  が  $c_0$  の元であることは帰謬法で示す.  $a^* \notin c_0$  であると仮定すると, 或る  $\delta > 0$  に対しては, いかなる  $N \in \mathbb{N}$  を取っても必ず  $n > N$  なる自然数で

$$|a_n^*| \geq \delta$$

を満たすものが存在する.  $(a_m^*)_{m=1}^\infty$  の部分列  $(a_{m_k}^*)_{k=1}^\infty$  を

$$|a_{m_k}^*| \geq \delta, \quad (m_k < m_{k+1}, k = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすものとして取ることが出来て, (6) により或る  $N_\delta \in \mathbb{N}$  を取れば, 全ての  $n > N_\delta$  で

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} |a_{m_k}^{(n)} - a_{m_k}^*| < \frac{\delta}{2}$$

が成立することになる.  $n > N_\delta$  番目の数列  $a^{(n)} = (a_m^{(n)})_{m=1}^\infty$  は  $c_0$  の元であるから, 或る  $N_\delta^n \in \mathbb{N}$  が存在して全ての  $p > N_\delta^n$  に対し

$$|a_p^{(n)}| < \frac{\delta}{2}$$

となるはずであるが,  $m_1 < m_2 < m_3 < \dots \rightarrow +\infty$  であるから  $m_k > N_\delta^n$  となるような添数  $m_k$  が存在してしまい,

$$\frac{\delta}{2} \leq |a_{m_k}^*| - \frac{\delta}{2} < |a_{m_k}^{(n)}| < \frac{\delta}{2}$$

と矛盾が出る．従って  $a^* \in c_0$  であるべきで，これは  $c_0$  が  $\|\cdot\|_\infty$  をノルムとして完備であることを示したことになる．ゆえに  $c_0$  は  $l^\infty$  の閉線形部分空間である．

- (2) 結論は， $l^\infty$  は可分ではなく  $c_0$  は可分である．順番に示す． $l^\infty$  の部分集合として 0 と 1 のみで成る数列全体

$$M := \{a \in l^\infty \mid a = (a_n)_{n=1}^{+\infty}, a_n \in \{0, 1\}, n = 1, 2, 3, \dots\}$$

を考える．また任意の  $a = (a_n)_{n=1}^\infty, b = (b_n)_{n=1}^\infty \in M$  に対し

$$\|a - b\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n| = \begin{cases} 1 & (a \neq b) \\ 0 & (a = b) \end{cases}$$

が成り立つから， $M$  の異なる 2 元の  $\|\cdot\|_\infty$  による距離は 1 で固定されている．もし  $l^\infty$  が可分であるとすれば， $\|\cdot\|_\infty$  に関して  $l^\infty$  で稠密な可算部分集合  $C$  が存在することになる．任意の  $a \in M$  に対してその  $1/2$  近傍 (sup-norm) の内部に  $C$  の元が存在していることになるから，そのうちの一つを  $c_a$  と表し対応を付ける． $a \in M$  に対応する  $c_a \in C$  は他の  $M$  の元の  $1/2$  近傍に属することはない．もし  $c_a$  が或る  $a \neq b \in M$  の  $1/2$  近傍に入ると

$$1 = \|a - b\|_\infty \leq \|a - c_a\|_\infty + \|b - c_a\|_\infty < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

と矛盾ができるからである．即ち  $M$  から  $C$  への対応関係  $M \ni a \mapsto c_a \in C$  は単射である．ここで  $M$  の濃度  $2^{\mathbb{N}}$  が連続体濃度であることに注意すれば，単射の存在により  $C$  の濃度は連続体濃度以上で  $C$  が可算集合であることに反する．従って  $l^\infty$  は可分ではない．一方で  $c_0$  は  $\|\cdot\|_\infty$  をノルムとして可分なノルム空間をなす． $c_0$  の可算部分集合を

$$S := \left\{ b \in c_0 \mid b = (\alpha_n + i\beta_n)_{n=1}^{+\infty}, \begin{cases} \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{Q}, & n = 1, 2, \dots, N, \\ \alpha_n = \beta_n = 0, & n \geq N + 1, \end{cases} (N = 1, 2, 3, \dots) \right\}$$

として取る．ただし  $i$  は  $i^2 = -1$  なる虚数単位で  $\mathbb{Q}$  は有理数全体である．任意の  $a = (a_n)_{n=1}^{+\infty} \in c_0$  について，任意の正数  $\epsilon > 0$  に対して或る  $N \in \mathbb{N}$  を取れば全ての  $n > N$  で

$$|a_n| < \epsilon$$

が成り立つから，後は  $(a_n)_{n=1}^N$  の部分で

$$\sup_{n=1,2,\dots,N} |a_n - b_n| < \epsilon$$

となるように  $S$  の元  $b = (b_n)_{n=1}^{+\infty}$  ( $b_n = 0, n > N$ ) を取れば

$$\|a - b\|_\infty < \epsilon$$

が成り立つ．即ち  $S$  が  $c_0$  において  $\|\cdot\|_\infty$  に関して稠密であるとわかり， $c_0$  が可分であると示された．

[12].  $a = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in l^1$  に対して  $T_a : c_0 \mapsto \mathbb{C}$  を次で定める:

$$T_a(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \quad (x = (x_n) \in c_0).$$

- (1)  $\forall a = (a_n) \in l^1, T_a \in c_0^*$  かつ  $\|T_a\| = \|a\|_{l^1}$ であることを示せ.
- (2)  $T : l^1 \ni a \mapsto T_a \in c_0^*$  は Banach 空間としての同系写像であることを示せ.

証明.

- (1) 設問 [11] の結果により,  $T_a$  の定義域である  $c_0$  は  $\|\cdot\|_{l^\infty}$  をノルムとして  $l^\infty$  の閉線型部分空間であり, よって Banach 空間である. このことに留意して以下進む.  $a = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in l^1$  を任意に取って固定する. 任意の  $x = (x_n) \in c_0$  に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| |x_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \|x\|_{l^\infty} = \|a\|_{l^1} \|x\|_{l^\infty} < +\infty \quad (7)$$

となり級数  $T_a(x)$  ( $\forall x \in c_0$ ) は有限確定するから, 任意の  $x = (x_n), y = (y_n) \in c_0, \alpha \in \mathbb{C}$  に対して以下に示す式変形が正当化される.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n x_n + a_n y_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n y_n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha a_n x_n = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n, \quad \left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| |x_n|.$$

従って任意に  $x = (x_n), y = (y_n) \in c_0$  と  $\alpha \in \mathbb{C}$  を取れば,

$$\begin{aligned} T_a(x+y) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n x_n + a_n y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n = T_a x + T_a y, \\ T_a(\alpha x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\alpha x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \alpha) x_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n) x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha (a_n x_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = \alpha T_a(x) \end{aligned}$$

により  $T_a$  の線型性が示されるから,  $T_a$  は  $c_0 \rightarrow \mathbb{C}$  の線型汎関数である. 有界性は式 (7) により

$$|T_a(x)| \leq \|a\|_{l^1} \|x\|_{l^\infty}$$

から  $\|T_a\| \leq \|a\|_{l^1}$  となるとわかる. ゆえに  $T_a \in c_0^*$  ( $\forall a \in l^1$ ) である. また  $\|T_a\| = \|a\|_{l^1}$  について,  $a = 0$  の場合は  $T_a$  が零作用素になるから明らかに成り立つ.  $a \neq 0$  の場合, 任意の  $\|a\|_{l^1} > \epsilon > 0$  に対して或る  $N \in \mathbb{N}$  が存在して

$$\|a\|_{l^1} - \epsilon < \sum_{n=1}^N |a_n|$$

とできる.  $x \in c_0$  を

$$x_n = \begin{cases} \overline{a_n}/|a_n| & a_n \neq 0, \text{ and } n \leq N \\ 0 & a_n = 0, \text{ or } n > N \end{cases}$$

となっているもので取れば,

$$\|a\|_{l^1} - \epsilon < \sum_{n=1}^N |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = T_a(x) = |T_a(x)|$$

が成立することになる．  $\|x\|_{l^\infty} = 1$  であることに注意すれば

$$\|a\|_{l^1} - \epsilon < T_a(x) = \frac{|T_a(x)|}{\|x\|_{l^\infty}} \leq \sup_{0 \neq y \in c_0} \frac{|T_a(y)|}{\|y\|_{l^\infty}} = \|T_a\| \leq \|a\|_{l^1}$$

が成り立ち，  $\epsilon$  が任意であるから，  $a = 0$  の場合と合わせて  $\|T_a\| = \|a\|_{l^1}$  ( $\forall a \in l^1$ ) が示された．

- (2) まず，  $l^1$  は  $\|\cdot\|_{l^1}$  をノルムとして Banach 空間となり，  $c_0^*$  は  $T_a$  の値域  $\mathbb{C}$  が Banach 空間であるから作用素ノルムにより Banach 空間となっている．写像  $T$  が

$$\|Ta\| = \|T_a\| = \|a\|_{l^1} \quad (\forall a \in l^1)$$

の意味で等長であることは (1) で示してあるから，後は  $T$  が線型全単射であることを証明すればよい．任意の  $a = (a_n), b = (b_n) \in l^1$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$  に対して

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)x_n &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n x_n + b_n x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n, \\ \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n)x_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(a_n x_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \end{aligned}$$

が成り立つから

$$\begin{aligned} T(a+b) &= T_{a+b} = T_a + T_b = Ta + Tb \\ T(\alpha a) &= T_{\alpha a} = \alpha T_a = \alpha Ta \end{aligned}$$

も成り立つことにより  $T$  の線型性が示される．また  $a = (a_n), b = (b_n) \in l^1$  に対して，  $a \neq b$  であるなら或る  $N \in \mathbb{N}$  番目で  $a_N \neq b_N$  となっているはずであるから，

$$x_N = \begin{cases} 1 & n = N \\ 0 & n \neq N \end{cases}$$

となる  $x = (x_n) \in c_0$  に対して

$$T_a(x) = a_N \neq b_N = T_b(x)$$

となり，  $T$  が単射であることが示される．最後に  $T$  が全射であることを示す．任意に  $L \in c_0^*$  を取る．或る  $a \in l^1$  に対して  $L$  が  $T_a$  に一致することを見ればよい．Kronecker のデルタを用いて

$$e_n := (\delta_{jn})_{j=1}^{\infty}$$

で表現される  $e_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) は  $c_0$  の元であり，各  $n = 1, 2, 3, \dots$  に対して

$$a_n := L(e_n) \tag{8}$$

とおく．任意の  $x = (x_n) \in c_0$  に対して

$$x^{(N)} = \sum_{n=1}^N x_n e_n, \quad (N = 1, 2, 3, \dots)$$



として作られる数列の族  $(x^{(N)})_{N=1}^{\infty}$  は  $l^{\infty}$  において収束し,  $x^{(N)} \rightarrow x (N \rightarrow +\infty)$  が成り立つ. これは  $x = (x_n)$  が収束数列であることによる. 任意の  $\epsilon > 0$  に対して或る  $N \in \mathbb{N}$  を選べば

$$|x_n| < \epsilon, \quad (\forall n > N)$$

が成り立つから,  $n > N$  なる任意の自然数  $n$  に対して

$$\|x - x^{(N)}\|_{l^{\infty}} = \sup_{m > N} |x_m| < \epsilon$$

となり,  $x^{(N)} \rightarrow x (N \rightarrow +\infty)$  が示されるのである.  $L$  が有界線型汎関数であることも併せれば

$$|L(x) - L(x^{(N)})| \leq \|L\| \|x - x^{(N)}\|_{l^{\infty}} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow +\infty)$$

により

$$L(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} L(x^{(N)}) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N L(x_n e_n) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N a_n x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n \quad (\forall x \in c_0)$$

が成り立つ. 後は (8) で定義した複素数列  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  が  $l^1$  に属していることを示せば, 写像  $L: c_0 \rightarrow \mathbb{C}$  が  $T_a: c_0 \rightarrow \mathbb{C}$  に一致していると証明される. これは次のように示される.  $n \leq M$  を満たす少なくとも一つの  $n \in \mathbb{N}$  については  $a_n \neq 0$  となるように十分大きいところの  $M \in \mathbb{N}$  を取って, この  $M$  に対して  $x = (x_n) \in c_0$  として

$$x_n = \begin{cases} \overline{a_n}/|a_n| & a_n \neq 0, \text{ and } n \leq M \\ 0 & a_n = 0, \text{ or } n > M \end{cases}$$

となるものを取れば,

$$L(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N a_n x_n = \sum_{n=1}^M |a_n|$$

が成り立つ.  $\|x\|_{l^{\infty}} = 1$  であることに注意すれば

$$\sum_{n=1}^M |a_n| = L(x) = |L(x)| \leq \|L\| \|x\|_{l^{\infty}} = \|L\|$$

となる.  $M$  は任意に大きく取って問題ないから,

$$\sum_{n=1}^{M'} |a_n| \leq \|L\|, \quad (\forall M' \geq M)$$

が成り立ち, 従って

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \|L\|$$

となることにより  $a \in l^1$  であることが示された. ■

[13].  $1 < p < \infty$  とする.  $l^p$  の点列  $x(1), x(2), x(3), \dots$  (ただし  $x(j) = (x(j)_n)_{n=1}^\infty$ ) と  $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in l^p$  に対し, 次の (i), (ii) が同値であることを示せ:

- (i)  $w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x(j) = x.$
- (ii)  $\{x(j); j \in \mathbb{N}\}$  は有界でかつ  $\forall n \in \mathbb{N} \lim_{j \rightarrow \infty} x(j)_n = x_n.$

証明.  $l^p$  の共役空間, 第二共役空間の作用素ノルムをそれぞれ  $\|\cdot\|_{(l^p)^*}$ ,  $\|\cdot\|_{(l^p)^{**}}$  と表す.  
 $l^p$  の共役空間 まず  $l^p$  の共役空間の任意の元  $f \in (l^p)^*$  が或る  $v = (v_n)_{n=1}^\infty \in l^q$  ( $1/p + 1/q = 1$ ) に対応して

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n v_n, \quad (x = (x_n)_{n=1}^\infty \in l^p)$$

で表現されることを示す. Kronecker のデルタを用いて

$$e_n := (\delta_{jn})_{j=1}^\infty$$

で表現される  $e_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) は  $l^p$  の元であり, 各  $n = 1, 2, 3, \dots$  に対して

$$v_n := f(e_n)$$

とおく. 任意の  $x = (x_n) \in l^p$  に対して

$$x^{(N)} = \sum_{n=1}^N x_n e_n, \quad (N = 1, 2, 3, \dots)$$

として作られる数列の族  $(x^{(N)})_{N=1}^\infty$  は  $l^p$  において収束し  $x^{(N)} \rightarrow x$  ( $N \rightarrow +\infty$ ) が成り立つ. これは級数の収束を考えれば

$$\|x - x^{(N)}\|_{l^p}^p = \sum_{n=N+1}^{+\infty} |x_n|^p \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow +\infty)$$

が成り立つからである.  $f$  が有界線型汎関数であることも併せれば

$$|f(x) - f(x^{(N)})| \leq \|f\|_{(l^p)^*} \|x - x^{(N)}\|_{l^p} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow +\infty)$$

により

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} f(x^{(N)}) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N f(x_n e_n) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N x_n v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n v_n \quad (\forall x \in l^p) \quad (9)$$

が成り立つ. 後は上で定義した複素数列  $v = (v_n)_{n=1}^\infty$  が  $l^q$  に属していることを示せばよい.  $v = 0$  の場合は明らかに  $v \in l^q$  であるから  $v \neq 0$  である場合を考える. 各  $n \in \mathbb{N}$  について

$$v_n = |v_n| e^{\sqrt{-1}\theta_n}$$

が成り立つように  $\theta_n \in \mathbb{R}^1$  を一つ選ぶ.  $v = (v_n)_{n=1}^{+\infty}$  に対して,  $n \leq N$  を満たす少なくとも一つの  $n \in \mathbb{N}$  については  $v_n \neq 0$  となるように, 十分大きいところの  $N \in \mathbb{N}$  を任意に取り,

$$w_n = \begin{cases} |v_n|^{q-1} e^{-\sqrt{-1}\theta_n} & (n = 1, 2, \dots, N), \\ 0 & (n = N+1, N+2, \dots) \end{cases}$$

として複素数列  $w = (w_n)_{n=1}^{+\infty}$  を作る. 有限個を除いて 0 となる数列だから  $w \in l^p$  であり,

$$\|w\|_p^p = \sum_{n=1}^N |w_n|^p = \sum_{n=1}^N |v_n|^q$$

が成り立っていることにより, 式 (9) の結果と合わせて

$$f(w) = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n v_n = \sum_{n=1}^N |v_n|^q = \left( \sum_{n=1}^N |v_n|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left( \sum_{n=1}^N |v_n|^q \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \sum_{n=1}^N |v_n|^q \right)^{\frac{1}{q}} \|w\|_p$$

と表現できる.  $f$  が有界線型作用素であることにより

$$\left( \sum_{n=1}^N |v_n|^q \right)^{\frac{1}{q}} \|w\|_p \leq \|f\|_{(l^p)^*} \|w\|_p$$

となるから, 十分大きな任意の  $N \in \mathbb{N}$  について

$$\sum_{n=1}^N |v_n|^q \leq \|f\|_{(l^p)^*}^q$$

が成り立つことになるから,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |v_n|^q \leq \|f\|_{(l^p)^*}^q$$

が示され  $v \in l^q$  であることがわかる.

(i)  $\Rightarrow$  (ii) 今, 各  $f \in (l^p)^*$  に対して

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} f(x(j)) = f(x) \quad (10)$$

が成り立っている. ここで Banach 空間  $(l^p)^*$  上で一様有界性の原理を適用するために以下のものを導入する. 任意の  $x \in l^p$  に対し,  $(l^p)^* \rightarrow \mathbb{C}$  への写像を

$$T_x : (l^p)^* \ni f \mapsto f(x) \in \mathbb{C}$$

と定義して対応させる. 任意の  $f, g \in (l^p)^*, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$  に対して

$$T_x(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)(x) = (\alpha f)(x) + (\beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha T_x(f) + \beta T_x(g)$$

が成り立つことにより  $T_x$  は  $(l^p)^*$  上の線型汎関数であり,

$$|T_x(f)| = |f(x)| \leq \|f\|_{(l^p)^*} \|x\|_p$$

により  $T_x$  は有界作用素である. 従って  $T_x$  は  $(l^p)$  の第二共役空間  $(l^p)^{**}$  の元であると判る.

また  $\|T_x\|_{(l^p)^{**}} = \|x\|_p$  であることが次のように示される:

$$\|T_x\|_{(l^p)^{**}} = \sup_{0 \neq f \in (l^p)^*} \frac{|T_x(f)|}{\|f\|_{(l^p)^*}}$$

の右辺が  $\|x\|_p$  に一致することを示せばよい.

$$\|f\|_{(l^p)^*} = \sup_{0 \neq x \in l^p} \frac{|f(x)|}{\|x\|_p}$$

であるから当然零写像を除く全ての  $f$  に対して  $\|x\|_{l^p} \geq |f(x)|/\|f\|_{(l^p)^*}$  が成り立っているが、 $x$  が生成する部分空間上で  $f_0(\alpha x) = \alpha \|x\|_{l^p}$  ( $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ ) となる有界線型汎関数  $f_0$  (作用素ノルムは 1) を Hahn-Banach の定理でノルムを  $\leq 1$  で保ったまま  $l^p$  上の線型汎関数まで拡張した写像  $f'$  に対し  $|f'(x)| = \|x\|_{l^p}$  と  $\|f'\|_{(l^p)^*} = 1$  ( $x$  の生成する部分空間の上では  $|f_0(x)| = |f'(x)| \leq \|f'\|_{(l^p)^*} \|x\|_{l^p}$  により拡張によりノルムが小さくなることはないため) が成り立つから、 $f'$  については不等式  $\|x\|_{l^p} \geq |f(x)|/\|f\|_{(l^p)^*}$  の等号が成立し

$$\|x\|_{l^p} = \sup_{0 \neq f \in (l^p)^*} \frac{|T_x(f)|}{\|f\|_{(l^p)^*}} = \|T_x\|_{(l^p)^{**}} \quad (11)$$

が成り立つことになる。  $l^p \ni x \mapsto T_x \in (l^p)^{**}$  を用いれば、式 (10) は

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} T_{x(j)}(f) = T_x(f) \quad (\forall f \in (l^p)^*)$$

と書き直せる。各  $f \in (l^p)^*$  ごとに  $|T_{x(j)}(f)|$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) が有界となるから、一様有界性の原理が適用されて

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \|T_{x(j)}\|_{(l^p)^{**}} < +\infty$$

が成り立つことになる。これは式 (11) によって

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \|x(j)\|_{l^p} < +\infty$$

が成り立っていることと同じであるから、以上で  $\{x(j); j \in \mathbb{N}\}$  が有界であることが示された。次に任意の  $n \in \mathbb{N}$  で  $\lim_{j \rightarrow \infty} x(j)_n = x_n$  が成り立つことを示す。任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して、Kronecker のデルタを用いて

$$v_n := (\delta_{ni})_{i=1}^{+\infty}$$

と表される数列  $v_n \in l^q$  に対し

$$f_{v_n}(u) = \sum_{i=1}^{+\infty} u_i \delta_{ni} \quad (\forall u = (u_i)_{i=1}^{+\infty} \in l^p)$$

で定義される  $f_{v_n}$  は  $(l^p)^*$  の元であり、弱収束の仮定により

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} |f_{v_n}(x(j)) - f_{v_n}(x)| = \lim_{j \rightarrow +\infty} |x(j)_n - x_n| = 0$$

が成り立つ。これにより任意の  $n \in \mathbb{N}$  で  $\lim_{j \rightarrow \infty} x(j)_n = x_n$  が成り立つことが示された。

(ii)  $\Rightarrow$  (i)  $x(j)$  が有界であるから、或る正数  $M$  が存在して

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \|x(j)\|_{l^p} \leq M$$

が成り立っている。即ち

$$\sup_{j, n \in \mathbb{N}} |x(j)_n| < +\infty$$

が成り立っていることになる。また  $\forall n \in \mathbb{N} \lim_{j \rightarrow \infty} x(j)_n = x_n$  の意味は  $n \in \mathbb{N}$  に関して  $x(j)$  が  $x$  に各点収束しているということである。  $f \in (l^p)^*$  を任意に取れば、  $f(x(j))$ ,  $f(x)$  は或る  $v = (v_n)_{n=1}^{\infty} \in l^q$  を用いて

$$f(x(j)) = \sum_{n=1}^{\infty} x(j)_n v_n, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n v_n$$

と表現できる．測度空間  $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \nu)$  ( $\nu(n) = \nu_n$ ) における積分の収束を考えていると見做せば，Lebesgue の優収束定理を適用することにより

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f(x(j)) = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} x(j)_n \nu_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{j \rightarrow \infty} x(j)_n \nu_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \nu_n = f(x)$$

が成り立つ． $f \in (l^p)^*$  は任意に取っているから  $w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x(j) = x$  が示されたことになる． ■

## 参考文献

- [1] 伊藤・黒田・藤田, 関数解析, 岩波基礎数学選書, 2009.