note

基礎工学研究科システム創成専攻修士 1 年
学籍番号 29C17095
百合川尚学

2017 年 12 月 7 日

目次

第 1 章

空間 $\mathscr{L}^p$ と空間 L^p

1.1 Hölder の不等式と Minkowski の不等式

$\mathbb{K}$ を $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 或は $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ とおく．測度空間を $(X,\mathcal{F},m)$ とし，可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ 関数 f に対して

$$\|f\|_{\mathscr{L}^p} \coloneqq \begin{cases} \inf\{\, r\in\mathbb{R}\,;\quad |f(x)|\leq r,\ \text{a.e.}x\in X\,\} & (p=\infty) \\ \left(\int_X |f(x)|^p\, m(dx)\right)^{\frac{1}{p}} & (0<p<\infty) \end{cases}$$

と定め，

$$\mathscr{L}^p(X,\mathcal{F},m) \coloneqq \{\, f: X\to\mathbb{K}\,;\quad f: \text{可測}\ \mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{K}),\ \|f\|_{\mathscr{L}^p}<\infty\,\} \quad (1\leq p\leq\infty)$$

として空間 $\mathscr{L}^p(X,\mathcal{F},m)$ を定義する．この空間は $\mathbb{K}$ 上の線形空間となるが，そのことを保証するために次の二つの不等式が成り立つことを証明する．

定理 1.1.1 (Hölder の不等式). $1\leq p,q\leq\infty$，$p+q=pq$ ($p=\infty$ なら $q=1$) とする．このとき任意の可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ 関数 f,g に対して次が成り立つ:

$$\int_X |f(x)g(x)|\, m(dx) \leq \|f\|_{\mathscr{L}^p}\|g\|_{\mathscr{L}^q}. \tag{1.1}$$

まず次の補助定理を証明する．

補題 1.1.2. $f\in\mathscr{L}^\infty(X,\mathcal{F},m)$ ならば

$$|f(x)|\leq\|f\|_{\mathscr{L}^\infty}\quad (\text{a.e.}x\in X).$$

証明 (補題 1.1.2). $\mathscr{L}^\infty(X,\mathcal{F},m)$ の定義により任意の実数 $\alpha>\|f\|_{\mathscr{L}^\infty}$ に対して

$$m(\{\, x\in X\,;\quad |f(x)|>\alpha\,\})=0$$

が成り立つから，

$$\{\, x\in X\,;\quad |f(x)|>\|f\|_{\mathscr{L}^\infty}\,\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{\, x\in X\,;\quad |f(x)|>\|f\|_{\mathscr{L}^\infty}+1/n\,\}$$

の右辺は m-零集合となる． ∎

証明 (定理 1.1.1). 定理の証明に入る．

$p=\infty,\ q=1$ の場合 $\|f\|_{\mathscr{L}^\infty}=\infty$ 又は $\|g\|_{\mathscr{L}^1}=\infty$ なら不等式 (1.1) は成り立つから，以下では $\|f\|_{\mathscr{L}^\infty}<\infty$ かつ $\|g\|_{\mathscr{L}^1}<\infty$ の場合を考える．補助定理により或る m-零集合 $A\in\mathcal{F}$ を除いて $|f(x)|\leq\|f\|_{\mathscr{L}^\infty}$ が成り立つから

$$|f(x)g(x)|\leq\|f\|_{\mathscr{L}^\infty}|g(x)|\quad(\forall x\in X\backslash A).$$

とでき，従って

$$\int_X|f(x)g(x)|\,m(dx)=\int_{X\backslash A}|f(x)g(x)|\,m(dx)\leq\|f\|_{\mathscr{L}^\infty}\int_{X\backslash A}|g(x)|\,m(dx)=\|f\|_{\mathscr{L}^\infty}\|g\|_{\mathscr{L}^1}$$

となり不等式 (1.1) が成り立つ．

$1<p,q<\infty$ の場合 $\|f\|_{\mathscr{L}^p}=\infty$ 又は $\|g\|_{\mathscr{L}^q}=\infty$ なら不等式 (1.1) は成り立つから，以下では $\|f\|_{\mathscr{L}^p}<\infty$ かつ $\|g\|_{\mathscr{L}^q}<\infty$ の場合を考える．$\|f\|_{\mathscr{L}^p}=0$ であるとすると

$$B:=\{\,x\in X\,;\quad|f(x)|>0\,\}$$

は m-零集合となるから，

$$\int_X|f(x)g(x)|\,m(dx)=\int_B|f(x)g(x)|\,m(dx)+\int_{X\backslash B}|f(x)g(x)|\,m(dx)=0$$

となり不等式 (1.1) が成り立つ．$\|g\|_{\mathscr{L}^q}=0$ の場合も同じである．

最後に $0<\|f\|_{\mathscr{L}^p},\|g\|_{\mathscr{L}^q}<\infty$ の場合を示す．$-\log t\quad(t>0)$ は凸関数であるから，$1/p+1/q=1$ に対して

$$-\log\left(\frac{s}{p}+\frac{t}{q}\right)\leq\frac{1}{p}(-\log s)+\frac{1}{q}(-\log t)\quad(\forall s,t>0)$$

が成り立ち，従って

$$s^{1/p}t^{1/q}\leq\frac{s}{p}+\frac{t}{q}\quad(\forall s,t>0)$$

を得る．この不等式を用いれば

$$F(x):=|f(x)|^p/\|f\|_{\mathscr{L}^p}^p,\quad G(x):=|g(x)|^q/\|g\|_{\mathscr{L}^q}^q\quad(\forall x\in X)$$

とした可積分関数 F,G に対し

$$F(x)^{1/p}G(x)^{1/q}\leq\frac{1}{p}F(x)+\frac{1}{q}G(x)\quad(\forall x\in X)$$

となるから，両辺を積分して

$$\begin{aligned}\int_X F(x)^{1/p}G(x)^{1/q}\,m(dx)&\leq\frac{1}{p}\int_X F(x)\,m(dx)+\frac{1}{q}\int_X G(x)\,m(dx)\\&=\frac{1}{p}\frac{1}{\|f\|_{\mathscr{L}^p}^p}\int_X|f(x)|^p\,m(dx)+\frac{1}{q}\frac{1}{\|g\|_{\mathscr{L}^q}^q}\int_X|g(x)|^q\,m(dx)\\&=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\end{aligned}$$

が成り立つ．最左辺と最右辺を比べて

$$\int_X \frac{|f(x)|}{\|f\|_{\mathscr{L}^p}} \frac{|g(x)|}{\|g\|_{\mathscr{L}^q}}\, m(dx) = \int_X F(x)^{1/p} G(x)^{1/q}\, m(dx) \leq 1$$

となるから不等式

$$\int_X |f(x)g(x)|\, m(dx) \leq \|f\|_{\mathscr{L}^p} \|g\|_{\mathscr{L}^q}$$

が示された． ∎

定理 1.1.3 (Minkowski の不等式). $1 \leq p \leq \infty$ とする．このとき任意の可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ 関数 f, g に対して次が成り立つ:

$$\|f+g\|_{\mathscr{L}^p} \leq \|f\|_{\mathscr{L}^p} + \|g\|_{\mathscr{L}^p}. \tag{1.2}$$

証明.

$p = \infty$ の場合　各点 $x \in X$ で

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$$

となるから，$\|f\|_{\mathscr{L}^\infty} = \infty$ 又は $\|g\|_{\mathscr{L}^\infty} = \infty$ なら不等式 (1.2) は成り立つ．$\|f\|_{\mathscr{L}^\infty} < \infty$ かつ $\|g\|_{\mathscr{L}^\infty} < \infty$ の場合は

$$C \coloneqq \{\, x \in X;\quad |f(x)| > \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} \,\} \bigcup \{\, x \in X;\quad |g(x)| > \|g\|_{\mathscr{L}^\infty} \,\}$$

が m-零集合となり

$$|f(x) + g(x)| \leq \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} + \|g\|_{\mathscr{L}^\infty} \quad (\forall x \in X \backslash C)$$

を得て $\|\cdot\|_{\mathscr{L}^\infty}$ の定義と併せて不等式 (1.2) が成り立つ．

$p = 1$ の場合

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \quad (\forall x \in X)$$

の両辺を積分することにより不等式 (1.2) が成り立つ．

$1 < p < \infty$ の場合　$p + q = pq$ が成り立つように $q > 1$ を取る．

$$|f(x) + g(x)|^p = |f(x) + g(x)||f(x) + g(x)|^{p-1} \leq |f(x)||f(x) + g(x)|^{p-1} + |g(x)||f(x) + g(x)|^{p-1}$$

の両辺を積分すれば，Hölder の不等式により

$$
\begin{aligned}
\|f+g\|_{\mathscr{L}^p}^p &= \int_X |f(x)+g(x)|^p \, m(dx) \\
&\leq \int_X |f(x)||f(x)+g(x)|^{p-1} \, m(dx) + \int_X |g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1} \, m(dx) \\
&\leq \left(\int_X |f(x)|^p \, m(dx)\right)^{1/p} \left(\int_X |f(x)+g(x)|^{q(p-1)} \, m(dx)\right)^{1/q} \\
&\qquad + \left(\int_X |g(x)|^p \, m(dx)\right)^{1/p} \left(\int_X |f(x)+g(x)|^{q(p-1)} \, m(dx)\right)^{1/q} \\
&= \left(\int_X |f(x)|^p \, m(dx)\right)^{1/p} \left(\int_X |f(x)+g(x)|^{p} \, m(dx)\right)^{1/q} \\
&\qquad + \left(\int_X |g(x)|^p \, m(dx)\right)^{1/p} \left(\int_X |f(x)+g(x)|^{p} \, m(dx)\right)^{1/q} \\
&= \|f\|_{\mathscr{L}^p} \|f+g\|_{\mathscr{L}^p}^{p/q} + \|g\|_{\mathscr{L}^p} \|f+g\|_{\mathscr{L}^p}^{p/q} \\
&= \|f\|_{\mathscr{L}^p} \|f+g\|_{\mathscr{L}^p}^{p-1} + \|g\|_{\mathscr{L}^p} \|f+g\|_{\mathscr{L}^p}^{p-1} \qquad (1.3)
\end{aligned}
$$

となる．$\|f+g\|_{\mathscr{L}^p} = 0$ の場合は不等式 (1.2) が成り立つからそうでない場合を考える．$\|f+g\|_{\mathscr{L}^p} = \infty$ の場合，

$$
|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq 2 \max\{|f(x)|, |g(x)|\} \quad (\forall x \in X)
$$

より

$$
|f(x)+g(x)|^p \leq 2^p \max\{|f(x)|, |g(x)|\} \leq 2^p \left(|f(x)|^p + |g(x)|^p\right) \quad (\forall x \in X)
$$

の両辺を積分して

$$
\|f+g\|_{\mathscr{L}^p}^p \leq 2^p \left(\|f\|_{\mathscr{L}^p}^p + \|g\|_{\mathscr{L}^p}^p\right)
$$

という関係が出るから，$\|f\|_{\mathscr{L}^p}$ か $\|g\|_{\mathscr{L}^p}$ の一方は ∞ となり不等式 (1.2) が成り立つ．$0 < \|f+g\|_{\mathscr{L}^p} < \infty$ の場合，$\|f\|_{\mathscr{L}^p} + \|g\|_{\mathscr{L}^p} = \infty$ なら不等式 (1.2) は成り立ち，$\|f\|_{\mathscr{L}^p} + \|g\|_{\mathscr{L}^p} < \infty$ の場合でも上式 (1.3) より得る

$$
\|f+g\|_{\mathscr{L}^p}^p \leq \|f\|_{\mathscr{L}^p} \|f+g\|_{\mathscr{L}^p}^{p-1} + \|g\|_{\mathscr{L}^p} \|f+g\|_{\mathscr{L}^p}^{p-1}
$$

の両辺を $\|f+g\|_{\mathscr{L}^p}^{p-1}$ で割って不等式 (1.2) が成り立つ．

∎

以上の結果より $\mathscr{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$ は線形空間となる．実際加法とスカラ倍は

$$
(f+g)(x) \coloneqq f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) \coloneqq \alpha f(x), \quad (\forall x \in X,\ f, g \in \mathscr{L}^p(X, \mathcal{F}, m),\ \alpha \in \mathbb{C})
$$

により定義され，Minkowski の不等式により加法について閉じている．

補題 1.1.4 ($\mathscr{L}^p$ のセミノルム). $\|\cdot\|_{\mathscr{L}^p}$ は線形空間 $\mathscr{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$ においてセミノルムとなる．

証明.

正値性　定義の仕方による.

同次性　$1 \leq p < \infty$ なら

$$\left(\int_X |\alpha f(x)|^p \, m(dx) \right)^{1/p} = \left(|\alpha|^p \int_X |f(x)|^p \, m(dx) \right)^{1/p} = |\alpha| \left(\int_X |f(x)|^p \, m(dx) \right)^{1/p}$$

により，また $p = \infty$ なら

$$\inf \{ \, r \in \mathbb{R} \, ; \quad |\alpha f(x)| \leq r, \ \text{a.e.} x \in X \, \} = |\alpha| \inf \{ \, r \in \mathbb{R} \, ; \quad |f(x)| \leq r, \ \text{a.e.} x \in X \, \}$$

により，任意の $\alpha \in \mathbb{K}$ と任意の $f \in \mathscr{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ に対して

$$\| \alpha f \|_{\mathscr{L}^p} = |\alpha| \, \| f \|_{\mathscr{L}^p}$$

が成り立つ.

三角不等式　Minkowski の不等式による.

∎

1.2　空間 L^p

$\| \cdot \|_{\mathscr{L}^p}$ は $\mathscr{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$ のノルムとはならない．$\| f \|_{\mathscr{L}^p} = 0$ であっても f が零写像であるとは限らず，実際 m-零集合の上で $1 \in \mathbb{K}$ を取るような関数 g でも $\| g \|_{\mathscr{L}^p} = 0$ を満たすからである．ここで可測関数全体の集合を

$$\mathcal{M} := \{ \, f : X \to \mathbb{K} \, ; \quad f : \text{可測 } \mathcal{F} / \mathfrak{B}(\mathbb{K}) \, \}$$

とおく.

$$f, g \in \mathcal{M}, \quad f \sim g \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} f(x) = g(x) \quad \text{a.e.} x \in X$$

と定義した関係 $\sim$ は $\mathcal{M}$ における同値関係となり，この関係で $\mathcal{M}$ を割った商集合を $M := \mathcal{M}/\sim$ と表す．M の元を $[f]$ (f は同値類の代表元) と表し，M における加法とスカラ倍を次のように定義すれば M は $\mathbb{K}$ 上の線形空間となる[*1]:

$$\begin{aligned} [f] + [g] &:= [f + g] && (\forall [f], [g] \in M), \\ \alpha [f] &:= [\alpha f] && (\forall [f] \in M, \ \alpha \in \mathbb{K}). \end{aligned}$$

[*1] この表現は well-defined，つまり代表元に依らずに値がただ一つに定まる．任意の $f' \in [f]$ と $g' \in [g]$ に対して

$$[f + g] = [f' + g'], \quad [\alpha f'] = [\alpha f]$$

となるからである．実際

$$\{ f \neq g \} := \{ \, x \in X \, ; \quad f(x) \neq g(x) \, \}$$

と簡略した表記を使えば

$$\begin{aligned} &\{ f + g \neq f' + g' \} \subset \{ f \neq f' \} \cup \{ g \neq g' \}, \\ &\{ \alpha f \neq \alpha f' \} = \{ f \neq f' \} \end{aligned}$$

と表現でき，どれも右辺は m-零集合であるから $[f + g] = [f' + g']$, $[\alpha f'] = [\alpha f]$ が成り立つ．∎

次に商線型空間 M におけるノルムを定義する．

補題 1.2.1 (商空間 L^p におけるノルムの定義).

$$\|[f]\|_{\mathrm{L}^p} \coloneqq \|f\|_{\mathscr{L}^p} \quad (1 \leq p \leq \infty,\ f \in \mathscr{L}^p(X, \mathcal{F}, m))$$

として $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^p} : M \to \mathbb{R}$ を定義すればこれは well-defined である．つまり代表元に依らずに値がただ一つに定まる．更に次で定義する空間

$$\mathrm{L}^p(X, \mathcal{F}, m) \coloneqq \{\, [f] \in M\,; \quad \|[f]\|_{\mathrm{L}^p} < \infty \,\} \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

は $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^p}$ をノルムとしてノルム空間となる．

証明.

well-defined であること　$f \in \mathscr{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$ に対し，任意に $g \in [f]$ を選ぶ．示すことは $\|f\|_{\mathscr{L}^p}^p = \|g\|_{\mathscr{L}^p}^p$ が成り立つことである．

$$A \coloneqq \{\, x \in X\,; \quad f(x) \neq g(x) \,\} \quad \in \mathcal{F}$$

として m-零集合を用意する．

$p = \infty$ の場合　A^c の上で $f(x) = g(x)$ となるから

$$\begin{aligned}
\{\, x \in X\,; \quad |g(x)| > \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} \,\} &\subset A + A^c \cap \{\, x \in X\,; \quad |g(x)| > \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} \,\} \\
&= A + A^c \cap \{\, x \in X\,; \quad |f(x)| > \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} \,\} \\
&\subset A + \{\, x \in X\,; \quad |f(x)| > \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} \,\}
\end{aligned}$$

が成り立ち，最右辺は 2 項とも m-零集合であるから $\|g\|_{\mathscr{L}^\infty} \leq \|f\|_{\mathscr{L}^\infty}$ が従う．逆向きの不等号も同様に示されて $\|g\|_{\mathscr{L}^\infty} = \|f\|_{\mathscr{L}^\infty}$ を得る．

$1 \leq p < \infty$ の場合　$m(A) = 0$ により

$$\|f\|_{\mathscr{L}^p}^p = \int_X f(x)\, m(dx) = \int_{A^c} f(x)\, m(dx) = \int_{A^c} g(x)\, m(dx) = \int_X g(x)\, m(dx) = \|g\|_{\mathscr{L}^p}^p$$

が成り立つ．

ノルムとなること　任意に $[f], [g] \in \mathrm{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$ と $\alpha \in \mathbb{K}$ を取る．$\|[f]\|_{\mathrm{L}^p}$ の正値性は $\|\cdot\|_{\mathscr{L}^p}$ の正値性から従う．また $m(f \neq 0) > 0$ なら $\|f\|_{\mathscr{L}^p} > 0$ となるから，対偶により $\|[f]\|_{\mathrm{L}^p} = 0$ なら $[f]$ は零元 $[0]$ [*2]，逆に $[f] = [0]$ なら $\|[f]\|_{\mathrm{L}^p} = \|0\|_{\mathscr{L}^p} = 0$ となる．$\|\cdot\|_{\mathscr{L}^p}$ の同次性と Minkowski の不等式から

$$\begin{aligned}
&\|\alpha[f]\|_{\mathrm{L}^p} = \|[\alpha f]\|_{\mathrm{L}^p} = \|\alpha f\|_{\mathscr{L}^p} = |\alpha|\, \|f\|_{\mathscr{L}^p} = |\alpha|\, \|[f]\|_{\mathrm{L}^p} \\
&\|[f] + [g]\|_{\mathrm{L}^p} = \|[f + g]\|_{\mathrm{L}^p} = \|f + g\|_{\mathscr{L}^p} \leq \|f\|_{\mathscr{L}^p} + \|g\|_{\mathscr{L}^p} = \|[f]\|_{\mathrm{L}^p} + \|[g]\|_{\mathrm{L}^p}
\end{aligned}$$

も成り立ち，$\|\cdot\|_{\mathrm{L}^p}$ が $\mathrm{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$ においてノルムとなると示された．

∎

[*2] 零写像を 0 と表している．

命題 1.2.2 (L^p の完備性). 上で定義したノルム空間 $\mathrm{L}^p(X,\mathcal{F},m)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ は Banach 空間である．

証明. 任意に $\mathrm{L}^p(X,\mathcal{F},m)$ の Cauchy 列 $[f_n] \in \mathrm{L}^p(X,\mathcal{F},m)$ $(n = 1,2,3,\cdots)$ を取る．Cauchy 列であるから $1/2$ に対して或る $N_1 \in \mathbb{N}$ が取れて，$n > m \geq N_1$ ならば $\|[f_n]-[f_m]\|_{\mathrm{L}^p} = \|[f_n - f_m]\|_{\mathrm{L}^p} < 1/2$ となる．ここで $m = n_1$ と表記することにする．同様に $1/2^2$ に対して或る $N_2 \in \mathbb{N}$ $(N_2 > N_1)$ が取れて，$n' > m' \geq N_2$ ならば $\|[f_{n'} - f_{m'}]\|_{\mathrm{L}^p} < 1/2^2$ となる．先ほどの n について，$n > N_2$ となるように取れるからこれを $n = n_2$ と表記し，更に $m' = n_2$ ともしておく．今のところ

$$\left\| [f_{n_1} - f_{n_2}] \right\|_{\mathrm{L}^p} < 1/2$$

と表示できる．再び同様に $1/2^3$ に対して或る $N_3 \in \mathbb{N}$ $(N_3 > N_2)$ が取れて，$n'' > m'' \geq N_2$ ならば $\|[f_{n''} - f_{m''}]\|_{\mathrm{L}^p} < 1/2^3$ となる．先ほどの n' について $n' > N_3$ となるように取れるからこれを $n' = n_3$ と表記し，更に $m'' = n_3$ ともしておく．今までのところで

$$\begin{aligned} \left\| [f_{n_1} - f_{n_2}] \right\|_{\mathrm{L}^p} &< 1/2 \\ \left\| [f_{n_2} - f_{n_3}] \right\|_{\mathrm{L}^p} &< 1/2^2 \end{aligned}$$

が成り立っている．数学的帰納法により

$$\left\| [f_{n_k} - f_{n_{k+1}}] \right\|_{\mathrm{L}^p} < 1/2^k \quad (n_{k+1} > n_k,\ k = 1,2,3,\cdots) \tag{1.4}$$

が成り立つように自然数の部分列 $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ を取ることができる．

$p = \infty$ の場合

$[f_{n_k}]$ の代表元 f_{n_k} について，

$$\begin{aligned} A_k &:= \left\{ x \in X ;\quad |f_{n_k}(x)| > \left\| f_{n_k} \right\|_{\mathscr{L}^\infty} \right\}, \\ A^k &:= \left\{ x \in X ;\quad |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| > \left\| f_{n_k} - f_{n_{k+1}} \right\|_{\mathscr{L}^\infty} \right\} \end{aligned}$$

とおけば Hölder の不等式の証明中の補助定理より $m(A_k) = m(A^k) = 0$ であり，

$$A := \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) \bigcup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A^k \right)$$

として m-零集合を定め

$$\hat{f}_{n_k}(x) = \begin{cases} f_{n_k}(x) & (x \notin A) \\ 0 & (x \in A) \end{cases} \quad (\forall x \in X)$$

と定義した $\hat{f}_{n_k}$ もまた $[f_{n_k}]$ の元となる．代表元を f_{n_k} に替えて $\hat{f}_{n_k}$ とすれば，$\hat{f}_{n_k}$ は X 上の有界可測関数であり

$$\left\| \hat{f}_{n_k} - \hat{f}_{n_{k+1}} \right\|_{\mathscr{L}^\infty} = \sup_{x \in X} |\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}_{n_{k+1}}(x)| < 1/2^k \quad (k = 1,2,3,\cdots) \tag{1.5}$$

が成り立っていることになるから，各点 $x \in X$ で $\left(\hat{f}_{n_k}(x)\right)_{k=1}^{\infty}$ は $\mathbb{K}$ の Cauchy 列となる．(これは $\sum_{k>N} 1/2^k = 1/2^N \longrightarrow 0$ $(N \longrightarrow \infty)$ による．) 従って各点 $x \in X$ で極限が存在するから

これを $\hat{f}(x)$ として表す．一般に距離空間に値を取る可測関数列の各点収束の極限関数は可測関数であるから $\hat{f}$ もまた可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ である．また $\hat{f}$ は有界である．これは次のように示される．式 (1.5) から任意の $l > k$ に対し

$$|\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}_{n_l}(x)| \leq \sum_{j=k}^{l-1} |\hat{f}_{n_j}(x) - \hat{f}_{n_{j+1}}(x)| \leq \sum_{j=k}^{l-1} \sup_{x\in X} |\hat{f}_{n_j}(x) - \hat{f}_{n_{j+1}}(x)| < 1/2^{k-1}$$

が成り立つから，極限関数 $\hat{f}(x)$ も

$$\sup_{x\in X} |\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}(x)| \leq 1/2^{k-1} \tag{1.6}$$

を満たすことになる．なぜなら，もし或る $x \in X$ で $\alpha := |\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}(x)| > 1/2^{k-1}$ となる場合，任意の $l > k$ に対し

$$0 < \alpha - 1/2^{k-1} < |\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}(x)| - |\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}_{n_l}(x)| \leq |\hat{f}_{n_l}(x) - \hat{f}(x)|$$

となり各点収束に反するからである．不等式 (1.6) により任意の $x \in X$ において

$$|\hat{f}(x)| < |\hat{f}_{n_k}(x)| + 1/2^{k-1} \leq \left\| \hat{f}_{n_k} \right\|_{\mathscr{L}^\infty} + 1/2^{k-1}$$

が成り立ち $\hat{f}$ の有界性が判る．以上で極限関数 $\hat{f}$ が有界可測関数であると示された．$\hat{f}$ を代表元とする $[\hat{f}] \in \mathrm{L}^\infty(X, \mathcal{F}, m)$ に対し，不等式 (1.6) により

$$\left\| [f_{n_k}] - [\hat{f}] \right\|_{\mathrm{L}^\infty} = \left\| \hat{f}_{n_k} - \hat{f} \right\|_{\mathscr{L}^\infty} = \sup_{x\in X} |\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}(x)| \longrightarrow 0 \ (k \longrightarrow \infty)$$

が成り立つから，Cauchy 列 $([f_n])_{n=1}^\infty$ の部分列 $([f_{n_k}])_{k=1}^\infty$ が $[\hat{f}]$ に収束すると示された．Cauchy 列の部分列が収束すれば，元の Cauchy 列はその部分列と同じ収束先に収束するから $\mathrm{L}^\infty(X, \mathcal{F}, m)$ は Banach 空間である．

$1 \leq p < \infty$ の場合

$[f_{n_k}]$ の代表元 f_{n_k} に対して

$$f_{n_k}(x) := f_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{k} (f_{n_j}(x) - f_{n_{j-1}}(x)) \tag{1.7}$$

と表現できるから，これに対して

$$g_k(x) := |f_{n_1}(x)| + \sum_{j=1}^{k} |f_{n_j}(x) - f_{n_{j-1}}(x)|$$

として可測関数列 $(g_k)_{k=1}^\infty$ を用意する．Minkowski の不等式と式 (1.4) より

$$\| g_k \|_{\mathscr{L}^p} \leq \left\| f_{n_1} \right\|_{\mathscr{L}^p} + \sum_{j=1}^{k} \left\| f_{n_j} - f_{n_{j-1}} \right\|_{\mathscr{L}^p} < \left\| f_{n_1} \right\|_{\mathscr{L}^p} + \sum_{j=1}^{k} 1/2^j < \left\| f_{n_1} \right\|_{\mathscr{L}^p} + 1 < \infty$$

が成り立つ．各点 $x \in X$ で $g_k(x)$ は k について単調増大であるから，単調収束定理より

$$\| g \|_{\mathscr{L}^p}^p = \lim_{k\to\infty} \| g_k \|_{\mathscr{L}^p}^p < \left\| f_{n_1} \right\|_{\mathscr{L}^p} + 1 < \infty$$

となるので $g \in \mathrm{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$ である．従って

$$
\begin{aligned}
B_n &\coloneqq \{ x \in X ; \quad g(x) \leq n \} \in \mathcal{F}, \\
B &\coloneqq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n
\end{aligned}
$$

とおけば $m(X \backslash B) = 0$ であり，式 (1.7) の級数は B 上で絶対収束する (各点).

$$
f(x) \coloneqq \begin{cases} \lim_{k \to \infty} f_{n_k}(x) & (x \in B) \\ 0 & (x \in X \backslash B) \end{cases}
$$

として可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ 関数 f を定義すれば，$|f(x)| \leq g(x)$ $(\forall x \in X)$ と g^p が可積分であることから f を代表元とする同値類 $[f]$ は $\mathrm{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$ の元となる．関数列 $((f_{n_k})_{k=1}^{\infty})$ は f に概収束し，$|f_{n_k}(x) - f(x)|^p \leq 2^p(|f_{n_k}(x)|^p + |f(x)|^p) \leq 2^{p+1} g(x)^p$ $(\forall x \in X)$ となるから Lebesgue の収束定理により

$$
\lim_{k \to \infty} \left\| [f_{n_k}] - [f] \right\|_{\mathrm{L}^p}^p = \lim_{k \to \infty} \left\| f_{n_k} - f \right\|_{\mathscr{L}^p}^p = \lim_{k \to \infty} \int_X |f_{n_k}(x) - f(x)|^p \, m(dx) = 0
$$

が成り立ち，Cauchy 列 $([f_n])_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $([f_{n_k}])_{k=1}^{\infty}$ が $[f]$ に収束すると示された．Cauchy 列の部分列が収束すれば，元の Cauchy 列はその部分列と同じ収束先に収束するから $\mathrm{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$ は Banach 空間である．

∎

第 2 章

Lebesgue-Radon-Nikodym の定理

2.1 複素測度

$(X, \mathcal{M})$ を可測空間，λ を $\mathcal{M}$ 上の複素測度 (complex measure) とする．λ は複素数値であるから，任意の $E \in \mathcal{M}$ に対して $|\lambda(E)| < \infty$ となっていることに注意する．測度としての性質から，どの二つも互いに素な集合列 $E_i \in \mathcal{M}$ $(i = 1, 2, \cdots)$ と

$$E := \sum_{i=1}^{\infty} E_i$$

に対して

$$\lambda(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i)$$

が成り立つが，左辺が $\mathbb{C}$ 値であるから右辺の級数は収束していなくてはならない．$\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を任意の並び替え[*1]として，$(E_i)_{i=1}^{\infty}$ に対して

$$E = \sum_{i=1}^{\infty} E_{\sigma(i)}$$

が成り立つから，測度の性質を持つ λ は

$$\lambda(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_{\sigma(i)})$$

を満たす．つまり複素数列 $(\lambda(E_i))_{i=1}^{\infty}$ は任意の並び替えに対し総和が不変で収束していることになり，Riemann の級数定理よりこの列は絶対収束している:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(E_i)| < \infty.$$

λ に対し，或る $\mathcal{M}$ 上の測度 μ で λ を支配する，つまり

$$|\lambda(E)| \leq \mu(E) \quad (\forall E \in \mathcal{M}) \tag{2.1}$$

[*1] σ は $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への全単射である．

を満たすものを，できるだけ小さいものとして取ろうと考える[*2]．このような μ は次を満たすことになる:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(E_i)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) = \mu(E)$$

を満たすことになり，ゆえに

$$\mu(E) \geq \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(E_i)| \tag{2.2}$$

でなくてはならず (上限は E のあらゆる分割 $E = \sum_i E_i$ に対して取るものである)，ここで $\mathcal{M}$ 上の関数として $|\lambda|$ を

$$|\lambda|(E) := \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(E_i)| \quad (\forall E \in \mathcal{M}) \tag{2.3}$$

として置いてみるとよさそうである．E に対し E 自体を一つの分割と見做せば，(2.3) より $|\lambda|$ は λ を支配していることになり，更に $|\lambda|$ は $\mathcal{M}$ 上の測度となる (後述) から，(2.2) と併せて当座の問題の解となる．

定義 2.1.1 (総変動・総変動測度). 可測空間 $(X, \mathcal{M})$ 上の複素測度 λ に対し，上で定めた測度 $|\lambda| : \mathcal{M} \longrightarrow [0, \infty)$ を λ の総変動測度 (total variation measure) といい，$|\lambda|(X)$ を λ の総変動 (total variation) という．特に λ が正値有限測度である場合は $\lambda = |\lambda|$ が成り立つ．[*3]

以降で $|\lambda|$ の性質

(1) $|\lambda|$ は測度である．

(2) $|\lambda|(X) < \infty$ が成り立つ．

を証明する．特に (2) により任意の $E \in \mathcal{M}$ に対し

$$|\lambda(E)| \leq |\lambda|(E) \leq |\lambda|(X) < \infty$$

が従うから，複素測度は有界であると判明する．

定理 2.1.2 ($|\lambda|$ は測度となる). 可測空間 $(X, \mathcal{M})$ 上の複素測度 λ に対し (2.3) で定義する $|\lambda|$ は $(X, \mathcal{M})$ において測度となる．

[*2] つまり (2.1) を満たす μ のうちから，同様に (2.1) を満たす任意の測度 μ' に対し

$$\mu(E) \leq \mu'(E) \quad (\forall E \in \mathcal{M})$$

を満たすものを選べるかどうかを考える．

[*3] 複素測度の虚部が 0 であるものとして考えれば $0 \leq \lambda(E) \leq \lambda(X) < \infty$ $(\forall E \in \mathcal{M})$ が成り立つ．また実際任意の $E \in \mathcal{M}$ とその分割 $(E_i)_{i=1}^{\infty}$ に対して

$$|\lambda|(E) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(E_i)| = \sup \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i) = \sup \lambda(E) = \lambda(E)$$

が成り立つ．

証明. (2.3) により $|\lambda|$ は正値であるから，ここで示すことは $|\lambda|$ が完全加法的であるということである．任意に $\epsilon > 0$ とどの二つも互いに素な集合列 $E_i \in \mathcal{M}$ $(i = 1, 2, \cdots)$ を取る．示すことは $E \coloneqq \sum_{i=1}^{\infty} E_i$ に対して

$$|\lambda|(E) = \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda|(E_i)$$

が成り立つことである．(2.3) により E_i の分割 $(A_{ij})_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ を

$$|\lambda|(E_i) \geq \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda(A_{ij})| > |\lambda|(E_i) - \epsilon/2^i$$

となるように取ることができる．また $E = \sum_{i,j=1}^{\infty} A_{ij}$ でもあるから

$$|\lambda|(E) \geq \sum_{i,j=1}^{\infty} |\lambda(A_{ij})| \geq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda(A_{ij})| > \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda|(E_i) - \epsilon$$

が成り立つ．$\epsilon > 0$ は任意であるから

$$|\lambda|(E) \geq \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda|(E_j)$$

が従う．逆向きの不等号について，E の任意の分割 $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ に対し

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda(A_j)| = \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_j \cap E_i) \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(A_j \cap E_i)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda|(E_i)^{*4}$$

が成り立つから，左辺の上限を取って

$$|\lambda|(E) \leq \sum_{i=1} |\lambda|(E_i)$$

を得る． ▮

定理 2.1.3 (総変動測度は有界). 可測空間 $(X, \mathcal{M})$ 上の複素測度 λ の総変動測度 $|\lambda|$ について次が成り立つ:

$$|\lambda|(X) < \infty.$$

先ずは次の補題を示す．

[*4] 正項級数は和の順序に依らないから

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(A_j \cap E_i)| = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda(A_j \cap E_i)|$$

が成り立つ．これと (2.3) を併せれば最後の不等号が従う．

補題 2.1.4. $z_1, \cdots, z_N$ を複素数とする．これらの添数集合の或る部分 $S \subset \{1, \cdots, N\}$ を抜き取れば次が成り立つ:

$$\left|\sum_{k \in S} z_k\right| \geq \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N} |z_k|.$$

証明 (補題). $z_k = |z_k| e^{i\alpha_k}$ $(-\pi \leq \alpha_k < \pi,\ k = 1, \cdots, N)$ となるように $\alpha_1, \cdots, \alpha_N$ を取る．ここで i は虚数単位である．また $-\pi \leq \theta \leq \pi$ に対し

$$S(\theta) \coloneqq \{\, k \in \{1, \cdots, N\}\,; \quad \cos(\alpha_k - \theta) > 0 \,\}$$

とおく．このとき

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k \in S(\theta)} z_k\right| &= |e^{-i\theta}| \left|\sum_{k \in S(\theta)} z_k\right| = \left|\sum_{k \in S(\theta)} |z_k| e^{i(\alpha_k - \theta)}\right| \\ &\geq \Re\mathrm{e}\left[\sum_{k \in S(\theta)} |z_k| e^{i(\alpha_k - \theta)}\right] = \sum_{k \in S(\theta)} |z_k| \cos(\alpha_k - \theta) = \sum_{k=1}^{N} |z_k| \cos^+(\alpha_k - \theta)^{*5}\end{aligned}$$

が成り立ち，最右辺は θ に関して連続となるから $[-\pi, \pi]$ 上で式を最大にする θ_0 が存在する．$S \coloneqq S(\theta_0)$ とおき，θ_0 と任意の $\theta \in [-\pi, \pi]$ に対して

$$\left|\sum_{k \in S} z_k\right| \geq \sum_{k=1}^{N} |z_k| \cos^+(\alpha_k - \theta_0) \geq \sum_{k=1}^{N} |z_k| \cos^+(\alpha_k - \theta)$$

が成り立つから，左辺右辺を積分して

$$\left|\sum_{k \in S} z_k\right| \geq \sum_{k=1}^{N} |z_k| \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} \cos^+(\alpha_k - \theta)\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N} |z_k|$$

が成り立つ[*6]. ∎

証明 (定理 2.1.3).

第一段　或る $E \in \mathcal{M}$ に対し $|\lambda|(E) = \infty$ が成り立っていると仮定する．$t \coloneqq 2\pi(1 + |\lambda(E)|)$ とおけば (複素測度であるから $|\lambda(E)| < \infty$) $|\lambda|(E) > t$ となるから，(2.3) より E の分割 $(E_i)_{i=1}^{\infty}$ を

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(E_i)| > t$$

*5 $\cos^+ x = 0 \vee \cos x$ $(x \in \mathbb{R})$ である．

*6 最後の積分について，実際三角関数の周期性を使えば任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$\int_{[-\pi,\pi]} \cos^+(\alpha - \theta)\, d\theta = \int_{[\alpha-\pi,\alpha+\pi]} \cos^+ \theta\, d\theta = \int_{[-\pi,\pi]} \cos^+ \theta\, d\theta = 1$$

が成り立つ．

となるように取ることができる．従って或る $N \in \mathbb{N}$ を取れば

$$\sum_{i=1}^{N} |\lambda(E_i)| > t$$

が成り立つ．$z_i \coloneqq \lambda(E_i)$ $(i = 1, \cdots, N)$ として補題 2.1.4 を使えば，或る $S \subset \{1, \cdots, N\}$ に対し

$$\left| \sum_{k \in S} \lambda(E_k) \right| \geq \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N} |\lambda(E_k)| > \frac{t}{2\pi} > 1$$

となる．$A \coloneqq \sum_{k \in S} E_k$ とおいて $B \coloneqq E - A$ とすれば

$$|\lambda(B)| = |\lambda(E) - \lambda(A)| \geq |\lambda(A)| - |\lambda(E)| > \frac{t}{2\pi} - |\lambda(E)| = 1$$

が成り立つから，つまり $|\lambda|(E) = \infty$ の場合，E の直和分割 A, B で

$$|\lambda(A)| > 1, \quad |\lambda(B)| > 1$$

を満たすものが取れると示された．そして $|\lambda|$ の加法性から

$$|\lambda|(E) = |\lambda|(A) + |\lambda|(B)$$

も成り立つから，この場合右辺の少なくとも一方は ∞ となる．

第二段　背理法により定理の主張することを証明する．今 $|\lambda|(X) = \infty$ と仮定すると，前段の結果より X の或る直和分割 A_1, B_1 で

$$|\lambda|(B_1) = \infty, \quad |\lambda(A_1)| > 1, \quad |\lambda(B_1)| > 1$$

を満たすものが取れる．B_1 についてもその直和分割 A_2, B_2 で

$$|\lambda|(B_2) = \infty, \quad |\lambda(A_2)| > 1, \quad |\lambda(B_2)| > 1$$

を満たすものが取れる．この操作を繰り返せば，どの二つも互いに素な集合列 $(A_j)_{j=1}^{\infty}$ で $|\lambda(A_j)| > 1$ $(j = 1, 2, \cdots)$ を満たすものを構成できる．$A \coloneqq \sum_{j=1}^{\infty}$ について，$|\lambda(A)| < \infty$ でなくてはならないから，Riemann の級数定理より

$$\lambda(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(A_j)$$

の右辺は絶対収束する．従って $0 < \epsilon < 1$ に対し或る $N \in \mathbb{N}$ が存在して $n > N$ なら $|\lambda(A_n)| < \epsilon$ が成り立つはずであるが，これは $|\lambda(A_n)| > 1$ であることに矛盾する．背理法により $|\lambda|(X) < \infty$ であることが示された．

$\blacksquare$

定義 2.1.5 (複素測度の空間・ノルムの定義). 可測空間 $(X, \mathcal{M})$ 上の複素測度の全体を CM と表す．$\lambda, \mu \in CM$, $c \in \mathbb{C}$, $E \in \mathcal{M}$ に対し

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu)(E) &\coloneqq \lambda(E) + \mu(E), \\ (c\lambda)(E) &\coloneqq c\lambda(E)\end{aligned} \tag{2.4}$$

を線型演算として CM は線形空間となり，特に定理 2.1.3 により $\lambda \in CM$ に対して $|\lambda| \in CM$ が成り立つ．また $\|\cdot\| : CM \to \mathbb{R}$ を

$$\|\lambda\| \coloneqq |\lambda|(X) \quad (\lambda \in CM)$$

と定義すればこれは CM においてノルムとなる．

上で定義した $\|\cdot\|$ がノルムとなることを証明する．総変動の正値性からノルムの正値性が従うから，以下示すのは同次性と三角不等式である．

同次性 総変動測度の定義 (2.3) とスカラ倍の定義 (2.4) より，任意の $\lambda \in CM$ と $c \in \mathbb{C}$ に対し

$$\|c\lambda\| = \sup \sum_i |(c\lambda)(E_i)| = \sup \sum_i |c\lambda(E_i)| = |c| \sup \sum_i |\lambda(E_i)| = |c| \|\lambda\|$$

が成り立つ．

三角不等式 任意の $\lambda, \mu \in CM$ に対し

$$\|\lambda + \mu\| = |\lambda + \mu|(X) = \sup \sum_i |(\lambda + \mu)(E_i)| = \sup \sum_i |\lambda(E_i) + \mu(E_i)|$$

となるが，ここで

$$\sum_i |\lambda(E_i) + \mu(E_i)| \leq \sum_i |\lambda(E_i)| + \sum_i |\mu(E_i)| \leq \|\lambda\| + \|\mu\|$$

が成り立つから

$$\|\lambda + \mu\| = \sup \sum_i |\lambda(E_i) + \mu(E_i)| \leq \|\lambda\| + \|\mu\|$$

が従う．

定義 2.1.6 (正変動と負変動・Jordan の分解). 可測空間 $(X, \mathcal{M})$ 上の複素測度の全体を CM とし，実数値の $\mu \in CM$ を取る (このような μ を符号付き測度 (signed measure) という)．

$$\mu^+ \coloneqq \frac{1}{2}(|\mu| + \mu), \quad \mu^- \coloneqq \frac{1}{2}(|\mu| - \mu)$$

とおけば μ^+, μ^- はどちらも正値有限測度となる[*7]．μ^+ を μ の正変動 (positive variation) といい μ^- を μ の負変動 (negative variation) という．また

$$\mu = \mu^+ - \mu^-, \quad |\mu| = \mu^+ + \mu^-$$

が成り立ち，ここで示した符号付き測度の正変動と負変動による表現を Jordan の分解という．

[*7] $\mathcal{M}$ 上で $|\mu|(E) \geq |\mu(E)|$ であることと定理 2.1.3 による．

定義 2.1.7 (絶対連続・特異). $(X, \mathcal{M})$ を可測空間，μ を $\mathcal{M}$ 上の正値測度[*8]，$\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ を $\mathcal{M}$ 上の任意の測度 (正値測度或は複素測度) とする．

- λ が μ に関して絶対連続である (absolutely continuous) ということを

$$\lambda \ll \mu$$

と書き，その意味は，「$\mu(E) = 0$ となる全ての $E \in \mathcal{M}$ について $\lambda(E) = 0$」である．

- 或る $A \in \mathcal{M}$ があって $\lambda(E) = \lambda(A \cap E)$ $(\forall E \in \mathcal{M})$ が成り立っているとき，λ は A に集中している (concentrated on A) という．λ_1, λ_2 に対し或る $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$ があって，λ_1 が A_1 に集中，λ_2 が A_2 に集中しかつ $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ を満たしているとき，これを互いに特異である (mutually singular) といい

$$\lambda_1 \perp \lambda_2$$

と書く．

命題 2.1.8 (絶対連続性と特異性に関する性質). $(X, \mathcal{M})$ を可測空間，μ を $\mathcal{M}$ 上の正値測度，$\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ を $\mathcal{M}$ 上の複素測度とする．このとき以下に羅列する事柄が成り立つ．

(1) λ が $A \in \mathcal{M}$ に集中しているなら $|\lambda|$ も A に集中している．

(2) $\lambda_1 \perp \lambda_2$ ならば $|\lambda_1| \perp |\lambda_2|$.

(3) $\lambda_1 \perp \mu$ かつ $\lambda_2 \perp \mu$ ならば $\lambda_1 + \lambda_2 \perp \mu$.

(4) $\lambda_1 \ll \mu$ かつ $\lambda_2 \ll \mu$ ならば $\lambda_1 + \lambda_2 \ll \mu$.

(5) $\lambda \ll \mu$ ならば $|\lambda| \ll \mu$.

(6) $\lambda_1 \ll \mu$ かつ $\lambda_2 \perp \mu$ ならば $\lambda_1 \perp \lambda_2$.

(7) $\lambda \ll \mu$ かつ $\lambda \perp \mu$ ならば $\lambda = 0$.

2.2 Lebesgue-Radon-Nikodym の定理

補題 2.2.1. $(X, \mathcal{M})$ を可測空間，μ を $\mathcal{M}$ 上の σ-有限な正値測度とする．この μ に対し次を満たす $w \in \mathscr{L}^1(\mu)$[*9]が存在する:

$$0 < w(x) < 1 \quad (\forall x \in X).$$

証明. μ は $(X, \mathcal{M})$ において σ-有限であるから，$\mu(E_n) < \infty$ かつ $X = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ を満たす集合の系

[*8] 正値測度という場合は ∞ も取りうる．従って正値測度は複素測度の範疇にはない．μ として例えば k 次元 Lebesgue 測度を想定している．

[*9] 以後測度が定義されている空間は同じだから $\mathscr{L}^1(\mu) = \mathscr{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ と略記する．L^p についても同様に略記する．

$(E_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ が存在する．

$$w_n(x) := \begin{cases} 0 & (x \in X - E_n) \\ \frac{1}{2^n(1+\mu(E_n))} & (x \in E_n) \end{cases} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

として定義した関数 w_n はどれも可測 $\mathcal{M}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であり，そして

$$w(x) := \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x) \quad (\forall x \in X)$$

として w を定義すれば，これもまた可測 $\mathcal{M}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であり $0 < w < 1$ を満たす．実際

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n(x) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

となるから級数は各点 $x \in X$ で収束し，従って w の可測性が従う．また任意の $x \in X$ は或る E_n に属しているから $w(x) \geq w_n(x) > 0$ となり，ゆえに $0 < w < 1$ も従う．最後に w が μ について可積分であることを示す．これは単調収束定理より

$$\int_X w(x)\,\mu(dx) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X w_n(x)\,\mu(dx) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(E_n)}{2^n(1+\mu(E_n))} < 1$$

が成り立つことによる． ■

定理 2.2.2 (Lebesgue-Radon-Nikodym).　$(X, \mathcal{M})$ を可測空間，λ を $\mathcal{M}$ 上の複素測度，そして μ を $\mathcal{M}$ 上の σ-有限な正値測度とする．このとき次の二つの主張が成り立つ:

(1)Lebesgue の分解　λ に対して或る複素測度 λ_a, λ_s が存在し，

$$\lambda(E) = \lambda_a(E) + \lambda_s(E) \quad (\forall E \in \mathcal{M})$$

かつ $\lambda_a \ll \mu$, $\lambda_s \perp \mu$ を満たす．これを Lebesgue の分解といい，分解は一意である．

(2) 密度関数の存在　(1) の λ_a に対し或る $[h] \in \mathrm{L}^1(\mu)$ がただ一つだけ存在し

$$\lambda_a(E) = \int_E h(x)\,\mu(dx) \quad (\forall E \in \mathcal{M})$$

を満たす．λ_a に対する上の関数 h を Radon-Nikodym の密度関数という．

証明.

$$\lambda_1(E) := \mathfrak{Re}\,[\lambda(E)], \quad \lambda_2(E) := \mathfrak{Im}\,[\lambda(E)] \quad (\forall E \in \mathcal{M})$$

として λ の実部と虚部を表す．Jordan の分解により λ_1, λ_2 は更に正変動 λ_1^+, λ_2^+ と負変動 λ_1^-, λ_2^- に分けらる．Lebesgue の分解と密度関数の存在の一意性を利用すれば，以下では正値有限測度に対して定理の主張が成り立つことを示せば十分である[*10]．

[*10] これが示されれば，$\lambda_1^+, \lambda_2^+, \lambda_1^-, \lambda_2^-$ のそれぞれに対し Lebesgue 分解と密度関数が存在する: それらを

$\lambda_{1,a}^{+}, \lambda_{1,s}^{+}, \lambda_{2,a}^{+}, \lambda_{2,s}^{+}, \lambda_{1,a}^{-}, \lambda_{1,s}^{-}, \lambda_{1,a}^{-}, \lambda_{1,s}^{-}$, $h_1^{+}, h_2^{+}, h_1^{-}, h_2^{-}$ と表せば,

$$\begin{aligned}\lambda(E) &= \lambda_1^{+}(E) - \lambda_1^{-}(E) + i\left(\lambda_2^{+}(E) - \lambda_2^{-}(E)\right) \\ &= \lambda_{1,a}^{+}(E) - \lambda_{1,a}^{-}(E) + \lambda_{1,s}^{+}(E) - \lambda_{1,s}^{-}(E) + i\left(\lambda_{2,a}^{+}(E) - \lambda_{2,a}^{-}(E) + \lambda_{2,s}^{+}(E) - \lambda_{2,s}^{-}(E)\right) \\ &= \left\{\lambda_{1,a}^{+}(E) - \lambda_{1,a}^{-}(E) + i\left(\lambda_{2,a}^{+}(E) - \lambda_{2,a}^{-}(E)\right)\right\} + \left\{\lambda_{1,s}^{+}(E) - \lambda_{1,s}^{-}(E) + i\left(\lambda_{2,s}^{+}(E) - \lambda_{2,s}^{-}(E)\right)\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda(E) &= \lambda_1^{+}(E) - \lambda_1^{-}(E) + i\left(\lambda_2^{+}(E) - \lambda_2^{-}(E)\right) \\ &= \lambda_{1,a}^{+}(E) - \lambda_{1,a}^{-}(E) + \lambda_{1,s}^{+}(E) - \lambda_{1,s}^{-}(E) + i\left(\lambda_{2,a}^{+}(E) - \lambda_{2,a}^{-}(E) + \lambda_{2,s}^{+}(E) - \lambda_{2,s}^{-}(E)\right)\end{aligned}$$