確率解析メモ

百合川

2018 年 4 月 25 日

目次

連続関数の空間の位相

$[0,\infty)$ 上の $\mathbb{R}^d$ 値連続関数 の全体を $C[0,\infty)^d$ と表す．$C[0,\infty)^d$ は

$$d(w_1,w_2) \coloneqq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\left\{\sup_{t\leq k}|w_1(t)-w_2(t)| \wedge 1\right\}, \quad (w_1,w_2 \in C[0,\infty)^d)$$

により定める距離で完備可分距離空間となる．以下，$C[0,\infty)^d$ には d により広義一様収束位相を導入する．

連続関数の空間の Borel 集合族

$n=1,2,\cdots$, $B \in \mathfrak{B}((\mathbb{R}^d)^n)$, $0 \leq t_1 < \cdots < t_n$ により

$$C = \left\{\, w \in C[0,\infty)^d \ ; \quad (w(t_1),\cdots,w(t_n)) \in B \,\right\}$$

と表される $C[0,\infty)^d$ の部分集合 C の全体を $\mathscr{C}$ とおく．このとき，$\mathfrak{B}(C[0,\infty)^d) = \sigma[\mathscr{C}]$ が成り立つ．

証明． $w_0 \in C[0,\infty)^d$ とする．任意に $w \in C[0,\infty)^d$ を取れば，w の連続性により $d(w_0,w)$ の各項について

$$\sup_{t\leq n}|w_0(t)-w(t)| = \sup_{r\in[0,n]\cap\mathbb{Q}}|w_0(r)-w(r)| \quad (n=1,2,\cdots)$$

と表現できる．いま，任意に実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ を取れば

$$\left\{\, w \in C[0,\infty)^d \ ; \quad \sup_{r\in[0,n]\cap\mathbb{Q}}|w_0(r)-w(r)| \leq \alpha \,\right\} = \bigcap_{r\in[0,n]\cap\mathbb{Q}}\left\{\, w \in C[0,\infty)^d \ ; \quad |w_0(r)-w(r)| \leq \alpha \,\right\}$$

が成立し，右辺の各集合は $\mathscr{C}$ に属するから 左辺 $\in \sigma[\mathscr{C}]$ となる．従って

$$\psi_n : C[0,\infty)^d \ni w \longmapsto \sup_{r\in[0,n]\cap\mathbb{Q}}|w_0(r)-w(r)| \in \mathbb{R}, \quad (n=1,2,\cdots)$$

で定める ψ_n は可測 $\sigma[\mathscr{C}]/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ である．$x \longmapsto x \wedge 1$ の連続性より $\psi_n \wedge 1$ も $\sigma[\mathscr{C}]/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$-可測性を持ち，

$$d(w_0,w) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(\psi_n(w)\wedge 1)$$

により $C[0,\infty)^d \ni w \longmapsto d(w_0,w) \in \mathbb{R}$ の $\sigma[\mathscr{C}]/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$-可測性が出るから，任意の $\epsilon > 0$ に対する球について

$$\left\{\, w \in C[0,\infty)^d \ ; \quad d(w_0,w) < \epsilon \,\right\} \in \sigma[\mathscr{C}]$$

が成り立つ．$C[0,\infty)^d$ は第二可算公理を満たし，可算基底は上式の形の球で構成されるから，$\mathfrak{O}(C[0,\infty)^d) \subset \sigma[\mathscr{C}]$ が従い $\mathfrak{B}(C[0,\infty)^d) \subset \sigma[\mathscr{C}]$ を得る．次に逆の包含関係を示す．いま，任意に $n \in \mathbb{Z}_+$ と $t_1 < \cdots < t_n$ を選んで

$$\phi : C[0,\infty)^d \ni w \longmapsto (w(t_1),\cdots,w(t_n)) \in (\mathbb{R}^d)^n$$

により定める写像は連続である．実際，w_0 での連続性を考えると，任意の $\epsilon > 0$ に対して $t_n \leq N$ を満たす $N \in \mathbb{N}$ を取れば，$d(w_0,w) < \epsilon/(n2^N)$ ならば $\sum_{i=1}^n |w_0(t_i)-w(t_i)| < \epsilon$ が成り立つ．よって ϕ は w_0 で連続であり (各点連続)

$$\mathfrak{B}((\mathbb{R}^d)^n) \subset \left\{\, A \in \mathfrak{B}((\mathbb{R}^d)^n) \ ; \quad \phi^{-1}(A) \in \mathfrak{B}(C[0,\infty)^d) \,\right\}$$

が出る．任意の $C \in \mathscr{C}$ は，$n \in \mathbb{N}$ と時点 $t_1 < \cdots < t_n$ によって決まる写像 ϕ によって $C = \phi^{-1}(B)$ $(\exists B \in \mathfrak{B}((\mathbb{R}^d)^n))$ と表現できるから，$\mathscr{C} \subset \mathfrak{B}(C[0,\infty)^d)$ が成り立ち $\sigma[\mathscr{C}] \subset \mathfrak{B}(C[0,\infty)^d)$ が得られる． ∎

次の事柄は後の定理の証明で使うからここで証明しておく.

定理 0.0.1 ($\mathscr{C}$ は乗法族である). $\mathscr{C}$ は交演算について閉じている.

証明. 任意に $A_1, A_2 \in \mathscr{C}$ を取れば，A_1, A_2 それぞれに対し $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $C_1 \in \mathfrak{B}((\mathbb{R}^d)^{n_1})$, $C_2 \in \mathfrak{B}((\mathbb{R}^d)^{n_2})$, $t_1 < \cdots < t_{n_1}$ それから $s_1 < \cdots < s_{n_2}$ が決まっていて，

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \left\{ w \in C[0,\infty)^d \quad | \quad (w(t_1), \cdots, w(t_{n_1})) \in C_1 \right\} \\
A_2 &= \left\{ w \in C[0,\infty)^d \quad | \quad (w(s_1), \cdots, w(s_{n_2})) \in C_2 \right\}
\end{aligned}
$$

と表されている．A_1, A_2 の時点に重複があるかないかで場合分けして示す.

時点に重複がない場合 集合を次のように同値な表記に直す：

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \left\{ w \in C[0,\infty)^d \quad | \quad (w(t_1), \cdots, w(t_{n_1}), w(s_1), \cdots, w(s_{n_2})) \in C_1 \times (\mathbb{R}^d)^{n_2} \right\} \\
A_2 &= \left\{ w \in C[0,\infty)^d \quad | \quad (w(t_1), \cdots, w(t_{n_1}), w(s_1), \cdots, w(s_{n_2})) \in (\mathbb{R}^d)^{n_1} \times C_2 \right\}
\end{aligned}
$$

表現を変えれば乗法を考えやすくなり，上の場合は

$$
A_1 \cap A_2 = \left\{ w \in C[0,\infty)^d \quad | \quad (w(t_1), \cdots, w(t_{n_1}), w(s_1), \cdots, w(s_{n_2})) \in C_1 \times C_2 \right\}
$$

と表現できる．$t_1, \cdots, s_{n_2}$ の並びが気になるなら，この時点の並びを昇順に変換する $(dn_1 + dn_2) \times (dn_1 + dn_2)$ 行列 J_1 を用いて (J_1 は連続, 線型, 全単射),

$$
\begin{aligned}
A_1 \cap A_2 = \left\{ w \in C[0,\infty)^d \quad | \quad J_1 \boldsymbol{w} \in J_1(C_1 \times C_2) \right\} \\
(\boldsymbol{w} = {}^T(w(t_1), \cdots, w(t_{n_1}), w(s_1), \cdots, w(s_{n_2})))
\end{aligned}
$$

とすれば，$J(C_1 \times C_2) \in \mathfrak{B}((\mathbb{R}^d)^{n_1+n_2})$ であるから，$A_1 \cap A_2 \in \mathscr{C}$ であることが明確になる.

時点に重複がある場合 $(r_{k_1}, \cdots, r_{k_l}) \subset (t_1, \cdots, t_{n_1})$ が重複時点であるとき，A_1, A_2 の同値な表記は次のようにすればよい：

$$
A_1 = \left\{ w \in C[0,\infty)^d \quad | \quad (w(t_1), ., w(r_{k_1}), ., w(r_{k_l}), ., w(t_{n_1}), (s_1, \cdots, s_{n_2} \text{ から } r_{k_1}, \cdots, r_{k_l} \text{ を抜いたものを並べる})) \in C_1 \times (\mathbb{R}^d)^{n_2 - l} \right\}
$$

$$
A_2 = \left\{ w \in C[0,\infty)^d \quad | \quad (w(s_1), ., w(r_{k_1}), ., w(r_{k_l}), ., w(s_{n_2}), (t_1, \cdots, t_{n_1} \text{ から } r_{k_1}, \cdots, r_{k_l} \text{ を抜いたものを並べる})) \in C_2 \times (\mathbb{R}^d)^{n_1 - l} \right\}
$$

A_2 について，条件中の時点の並びを変換し A_1 の条件の順番に合わせる行列 J_2(連続, 線型, 全単射) を用いて

$$
A_2 = \left\{ w \in C[0,\infty)^d \quad | \quad (w(t_1), ., w(r_{k_1}), ., w(r_{k_l}), ., w(t_{n_1}), (s_1, \cdots, s_{n_2} \text{ から } r_{k_1}, \cdots, r_{k_l} \text{ を抜いたものを並べる})) \in J_2(C_2 \times (\mathbb{R}^d)^{n_1 - l}) \right\}
$$

と書き直せば，$A_1 \cap A_2$ は前段の様に表現可能であり，前段と同様に最後に時点を昇順に変換する行列を用いることで $A_1 \cap A_2 \in \mathscr{C}$ となることが明確に判る.

∎

連続関数の空間に値を取る確率変数

$\omega \in \Omega$ に $\mathbb{R}^d$ 値連続確率過程 X のパスを対応させる写像

$$X_\bullet : \Omega \ni \omega \longmapsto (t \longmapsto X_t(\omega)), \quad (t \geq 0)$$

は可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(C[0,\infty)^d)$ である．

証明． 任意に $C \in \mathscr{C}$ を取れば $C = \left\{ w \in C[0,\infty)^d \ ; \quad (w(t_1), \cdots, w(t_n)) \in B \right\}$, $(B \in \mathfrak{B}((\mathbb{R}^d)^n))$ と表されるから

$$\{ \omega \in \Omega \ ; \quad X_\bullet(\omega) \in C \} = \{ \omega \in \Omega \ ; \quad (X_{t_1}(\omega), \cdots, X_{t_n}(\omega)) \in B \}$$

が成り立つ．右辺は $\mathcal{F}$ に属するから

$$\mathscr{C} \subset \left\{ C \in \sigma[\mathscr{C}] \ ; \quad (X_\bullet)^{-1}(C) \in \mathcal{F} \right\}$$

が従い，右辺は σ 加法族であるから $X_\bullet$ の $\mathcal{F}/\sigma[\mathscr{C}]$-可測性，つまり $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(C[0,\infty)^d)$-可測性が出る． ∎