関数解析後期メモ

百合川

2018 年 1 月 24 日

目次

$a > 0, I = [0, a]$ とおく．$C(I)$ から $C(I)$ への線型作用素 T を次で定める:

$$\mathcal{D}(T) := \left\{ u \in C^1(I) \ ; \quad u(0) + u(a) = 0 \right\}, \quad Tu(x) = u'(x) \quad (x \in I).$$

このとき，$\sigma_p(T)$ 及び $\sigma(T)$ を求めよ．

証明.

点スペクトルについて　$(\lambda I - T)u = 0$ を満たす λ に対し，微分方程式を解けば

$$u(x) = Ce^{\lambda x} \quad (x \in I,\ C \in \mathbb{C})$$

と表せる．今 $u(0) + u(a) = 0$ が仮定されているから，

$$C + Ce^{\lambda a} = 0$$

が成り立つ．これは $C = 0$ 或は $\lambda = \frac{1}{a}\log(-1)$ の場合に実現する．$\lambda = \frac{1}{a}\log(-1)$ でなければ $C = 0$ でなくてはならないが，このとき $u = 0$ となり固有ベクトルにならないから $\lambda = \frac{1}{a}\log(-1)$ でなくてはならない．従って

$$\sigma_p(T) \subset \left\{ \sqrt{-1}\frac{(2n+1)\pi}{a} \ ; \quad n \in \mathbb{Z} \right\}$$

が得られる．逆に或る $n \in \mathbb{Z}$ に対して $\lambda = (2n+1)\pi/a$ と表されているとき，任意の $C \in \mathbb{C}$ に対して $u(x) = Ce^{\lambda x}$ $(x \in I)$ とおけば

$$\lambda u(x) - Tu(x) = 0 \quad (\forall x \in I), \quad u(0) + u(a) = 0$$

が満たされるから

$$\sigma_p(T) \supset \left\{ \sqrt{-1}\frac{(2n+1)\pi}{a} \ ; \quad n \in \mathbb{Z} \right\}$$

が成り立ち，$\sigma_p(T) = \left\{ \sqrt{-1}\frac{(2n+1)\pi}{a} \ ; \quad n \in \mathbb{Z} \right\}$ が得られる．
スペクトルについて

$(X, \mathcal{M}, \mu)$ を σ-有限な測度空間，$H = \mathrm{L}^2(X, \mathcal{M}, \mu) = \mathrm{L}^2(\mu)$ とする．$\mathcal{M}$-可測関数 $a : X \to \mathbb{C}$ に対して，H から H へのかけ算作用素 M_a を次で定める:

$$\mathcal{D}(M_a) = \{ u \in H \ ; \quad au \in H \}, \quad (M_a u)(x) = a(x)u(x) \quad (x \in X).$$

(1)　M_a は線型作用素で，$\mathcal{D}(M_a)$ は H で稠密なことを示せ．
(2)　$M_a^* = M_{\overline{a}}$ が成り立つことを示せ．
(3)　$\sigma(M_a) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \ ; \quad \forall \epsilon > 0 \text{ に対し } \mu\left(a^{-1}(U_\epsilon(\lambda))\right) > 0 \right\}$ を示せ．(ただし $U_\epsilon(\lambda)$ は λ の ϵ-近傍．)
(4)　$\sigma_p(M_a) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \ ; \quad \mu\left(a^{-1}(\{\lambda\})\right) > 0 \right\}$ を示せ．

証明.　σ-有限であるから或る系 $(X_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ が存在して $X_1 \subset X_2 \subset \cdots$, $\mu(X_n) < \infty$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, $\cup_{n\in\infty} X_n = X$ を満たす．

(1) 任意に $v \in H$ を取り $v_n := v\mathbb{1}_{\{|a|\le n\}}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ として関数列 $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ を作る．全ての $x \in S$ で $|v_n(x)| \le |v(x)|$ が満たされているから $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ である．また全ての $n \in \mathbb{N}$ について

$$\int_S |a(x)v_n(x)|^2\mu(dx) = \int_{\{|a|\le n\}} |a(x)v(x)|^2\mu(dx) \le n^2 \int_S |v(x)|^2\mu(dx)$$

が成り立つから $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(M_a)$ も満たされる．

$$\| v - v_n \|^2 = \int_S |v(x) - v_n(x)|^2\,\mu(dx) = \int_S \mathbb{1}_{\{|a|>n\}}(x)|v(x)|^2\,\mu(dx)$$

となり，右辺の被積分関数は各点で 0 に収束し，かつ n に関係なく可積分関数 $|v|^2$ で抑えられるから，Lebesgue の収束定理より

$$\lim_{n\to\infty} \| v - v_n \|_{\mathrm{L}^2(\mu)}^2 = \lim_{n\to\infty} \int_S \mathbb{1}_{\{|a|>n\}}(x)|v(x)|^2\,\mu(dx) = \int_S \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{\{|a|>n\}}(x)|v(x)|^2\,\mu(dx) = 0$$

が得られる．v は任意に選んでいたから $D(M_a)$ は X において稠密である．

(2) 任意の $u, v \in \mathcal{D}(M_a) = \mathcal{D}(M_{\overline{a}})$ に対して

$$\langle M_a u, v\rangle = \int_X a(x)u(x)\overline{v(x)}\,\mu(dx) = \int_X u(x)\overline{\overline{a(x)}v(x)}\,\mu(dx) = \langle u, M_{\overline{a}}v\rangle$$

が成り立つから，$v \in \mathcal{D}(M_a^*)$ 且つ $M_a^* v = M_{\overline{a}}v$ $(\forall v \in \mathcal{D}(M_{\overline{a}}))$ が従う．逆に任意に $u \in \mathcal{D}(M_a), v \in \mathcal{D}(M_a^*)$ を取れば，

$$\langle u, M_a^* v\rangle = \langle M_a u, v\rangle = \langle u, M_{\overline{a}}v\rangle$$

となり $M_a^* v = M_{\overline{a}}v$ $(\forall v \in \mathcal{D}(M_a^*))$ が従う．

(3) $\lambda \in \mathbb{C}$ を任意に取り固定し，任意の $\epsilon > 0$ に対して $V_\epsilon := a^{-1}(U_\epsilon(\lambda))$ とおく．或る $\epsilon > 0$ が存在して $\mu(V_\epsilon) = 0$ が成り立つ場合，

$$b(x) := \begin{cases} \frac{1}{\lambda - a(x)} & (x \in X\backslash V_\epsilon) \\ 0 & (x \in V_\epsilon) \end{cases}$$

と定めれば，任意の $u \in H$ に対して

$$\int_X |b(x)u(x)|^2\,\mu(dx) = \int_{X\backslash V_\epsilon} \frac{1}{|\lambda - a(x)|^2}|u(x)|^2\,\mu(dx) \le \frac{1}{\epsilon^2}\int_X |u(x)|^2\,\mu(dx) < \infty$$

が成り立つから $\mathcal{D}(M_b) = H$ である．更に

$$\begin{aligned} b(\lambda - a)u &= u \quad (\mu\text{-a.e., } \forall u \in \mathcal{D}(M_a)), \\ (\lambda - a)bu &= u \quad (\mu\text{-a.e., } \forall u \in H) \end{aligned}$$

が成り立つから $M_b = (\lambda I - M_a)^{-1}$ であり，$M_b \in \mathrm{B}(H)$ であるから $\lambda \in \rho(M_a)$ が成り立つ．一方任意の $\epsilon > 0$ に対して $\mu(V_\epsilon) = 0$ となる場合，任意に $\epsilon > 0$ を取り固定する．

$$\mu(V_\epsilon) = \lim_{n\to\infty} \mu(V_\epsilon \cap X_n)$$

が成り立つから，或る $N \in \mathbb{N}$ が存在して $\mu(V_\epsilon \cap X_N) > 0$ を満たす．

$$u_\epsilon(x) := \begin{cases} 1 & (x \in V_\epsilon \cap X_N) \\ 0 & (x \notin V_\epsilon \cap X_N) \end{cases}$$

と定めれば，u_ϵ は二乗可積分であり

$$\int_X |a(x)u_\epsilon(x)|^2\,\mu(dx) = \int_{V_\epsilon \cap X_N} |a(x)u_\epsilon(x)|^2\,\mu(dx) < \infty$$

を満たすから $u_\epsilon \in \mathcal{D}(M_a)$ である．また

$$\|(\lambda I - M_a)u_\epsilon\|^2 = \int_X |\lambda - a(x)|^2 |u_\epsilon(x)|^2\,\mu(dx) = \int_{V_\epsilon \cap X_N} |\lambda - a(x)|^2 |u_\epsilon(x)|^2\,\mu(dx) \leq \epsilon^2 \int_X |u_\epsilon(x)|^2\,\mu(dx) = \epsilon^2 \|u_\epsilon\|^2$$

を満たす．つまり任意の ϵ に対し或る $u_\epsilon \in \mathcal{D}(M_a)$ が存在し

$$\frac{1}{\epsilon} \leq \frac{\|u_\epsilon\|}{\|(\lambda I - M_a)u_\epsilon\|}$$

を満たす．ここで $(\lambda I - M_a)$ に対し逆作用素 $(\lambda I - M_a)^{-1}$ が存在するとしても，$u_\epsilon \in \mathcal{D}(M_a)$ に対して或る $v_\epsilon \in \mathcal{D}\left((\lambda I - M_a)^{-1}\right)$ が存在して $u_\epsilon = (\lambda I - M_a)^{-1} v_\epsilon$ を満たすが，

$$\frac{1}{\epsilon} \leq \frac{\left\|(\lambda I - M_a)^{-1} v_\epsilon\right\|}{\|v_\epsilon\|}$$

が従い，ϵ の任意性より $(\lambda I - M_a)^{-1}$ の作用素ノルムは非有界である．従ってこの場合 $\lambda \in \sigma(M_a)$ が成り立つ．

(4) 先ず $\sigma_p(M_a) \subset \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;;\quad \mu\left(a^{-1}(\{\lambda\})\right) > 0 \right\}$ が成り立つことを示す．任意の $\lambda \in \sigma_p(M_a)$ に対して固有ベクトル $u \in H$ が存在する．$u \neq 0$ (関数類の意味で) より

$$N := \{\, x \in X \;;\quad u(x) \neq 0 \,\}$$

とおけば $\mu(N) > 0$ が満たされる．一方で点スペクトルの定義より $(\lambda I - M_a)u = 0$ が成り立つから

$$0 = \|(\lambda I - M_a)u\|^2 = \int_X |\lambda - a(x)|^2 |u(x)|^2\,\mu(dx) = \int_N |\lambda - a(x)|^2 |u(x)|^2\,\mu(dx)$$

となり

$$\mu(\{\, x \in N \;;\quad |\lambda - a(x)| > 0 \,\}) = 0$$

が従う．$\mu(N) > 0$ であるから

$$\mu\left(a^{-1}(\{\lambda\})\right) \geq \mu(\{\, x \in N \;;\quad |\lambda - a(x)| = 0 \,\}) > 0$$

が成り立ち $\lambda \in \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;;\quad \mu\left(a^{-1}(\{\lambda\})\right) > 0 \right\}$ を得る．次に $\sigma_p(M_a) \supset \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;;\quad \mu\left(a^{-1}(\{\lambda\})\right) > 0 \right\}$ が成り立つことを示す．任意の $\lambda \in \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;;\quad \mu\left(a^{-1}(\{\lambda\})\right) > 0 \right\}$ に対して

$$\Lambda := a^{-1}(\{\lambda\})$$

とおけば $\mu(\Lambda) > 0$ が満たされている．

$$\mu(\Lambda) = \lim_{n \to \infty} \mu(\Lambda \cap X_n)$$

が成り立つから，或る $n \in \mathbb{N}$ が存在して $\mu(\Lambda \cap X_n) > 0$ を満たす．

$$u(x) := \begin{cases} 1 & (x \in \Lambda \cap X_n), \\ 0 & (x \notin \Lambda \cap X_n) \end{cases}$$

として u を定めれば u は二乗可積分であり，$\mu(\Lambda \cap X_n) > 0$ であるから関数類として $u \neq 0$ を満たす．また

$$\|(\lambda I - M_a)u\|^2 = \int_X |\lambda - a(x)|^2 |u(x)|^2\,\mu(dx) = \int_{\Lambda \cap X_n} |\lambda - a(x)|^2 |u(x)|^2\,\mu(dx) = 0$$

が成り立ち $(\lambda I - M_a)u = 0$ が従うから u は λ の固有ベクトルであり，$\lambda \in \sigma_p(M_a)$ を得る．

$(\mathbb{C}, \mathfrak{B}(\mathbb{C}), \mu)$ を σ-有限な測度空間，$H = \mathrm{L}^2(\mathbb{C}, \mathfrak{B}(\mathbb{C}), \mu) = \mathrm{L}^2(\mu)$ とする．Borel 可測関数 $a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ に対して，H から H へのかけ算作用素 M_a を次で定める:

$$\mathcal{D}(M_a) = \{\, u \in H \ ; \quad au \in H \,\}, \quad (M_a u)(z) = a(z)u(z) \quad (z \in \mathbb{C}).$$

また $E(A) = M_{\mathbb{1}_{a^{-1}(A)}}$ $(A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C}))$ と定める．

(1) E は，$\mathfrak{B}(\mathbb{C})$ で定義され，H 上の直交射影を値とするスペクトル測度であることを示せ．

(2) Borel 可測関数 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ に対し，

$$T_f \coloneqq \int_{\mathbb{C}} f(z)\, E(dxdy) \quad (z = x + iy,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

と定める．このとき，$T_f = M_{f \circ a}$ を示せ．

証明.

(1) 任意の $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$ に対し $\mathbb{1}_{a^{-1}(A)}$ は有界であるから，春学期のレポート問題より $M_{\mathbb{1}_{a^{-1}(A)}} \in \mathrm{B}(H)$ が成り立つ．ゆえに E は $\mathfrak{B}(\mathbb{C})$ 全体で定義される．次に任意に $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$ を取り $E(A)$ が H 上の直交射影であることを示す．実際

$$E(A)^2 u = M_{\mathbb{1}_{a^{-1}(A)}} M_{\mathbb{1}_{a^{-1}(A)}} u = \mathbb{1}_{a^{-1}(A)} \mathbb{1}_{a^{-1}(A)} u = \mathbb{1}_{a^{-1}(A)} u = E(A)u \quad (\forall u \in H)$$

が成り立ち $E(A)^2 = E(A)$ が得られ，また $\mathbb{1}_{a^{-1}(A)}$ は実数値であるから

$$E(A)^* = M^*_{\mathbb{1}_{a^{-1}(A)}} = M_{\mathbb{1}_{a^{-1}(A)}} = E(A)$$

が成り立ち，$E(A)$ は自己共役である．最後に E がスペクトル測度であることを示す．先ず

$$E(\mathbb{R}^d)u = M_{\mathbb{1}_{\mathbb{C}}} u = u$$

より $E(\mathbb{R}^d) = I$ を得る．また任意の互いに素な集合列 $A_1, A_2, \cdots \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$ を取れば

$$E(\sum_{n=1}^{\infty} A_n)u = \sum_{n=1}^{\infty} E(A_n)u \quad (\forall u \in H)$$

が成り立つ．

(2) $\mathcal{D}\left(T_f\right) = \mathcal{D}\left(M_{f \circ a}\right)$ を示さなくてはいけない．f が可測単関数の場合，

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$$

として

$$\int_{\mathbb{C}} |f(x)|^2\, \mu_u(dx) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \langle E(A_i)u, u \rangle = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \int_{\mathbb{C}} \mathbb{1}_{a^{-1}(A_i)} |u(x)|^2\, \mu(dx) = \int_{\mathbb{C}} |f(a(x))|^2 |u(x)|^2\, \mu(dx)$$

が成り立つ．f が一般の可測関数の場合は MSF-単調近似列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ を取れば

$$\int_{\mathbb{C}} |f_n(x)|^2\, \mu_u(dx) = \int_{\mathbb{C}} |f_n(a(x))|^2 |u(x)|^2\, \mu(dx) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

が従い，単調収束定理より両辺はそれぞれ $\int_{\mathbb{C}} |f(x)|^2\, \mu_u(dx), \int_{\mathbb{C}} |f(a(x))|^2 |u(x)|^2\, \mu(dx)$ に収束する．従って

$$u \in \mathcal{D}\left(T_f\right) \quad \Leftrightarrow \quad u \in \mathcal{D}\left(M_{f \circ a}\right)$$

が成り立つ．次に $T_f u = M_{f\circ a} u$ $(\forall u \in \mathcal{D}\left(T_f\right))$ を示す．f が可測単関数の場合，

$$T_f u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E(A_i) u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{a^{-1}(A_i)} u = f_n \circ a u = M_{f_n \circ a} u \quad (\forall u \in H)$$

が成り立つ．一般の f に対しては，MSF-単調近似列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ を取る．

$$\left\| T_f u - M_{f\circ a} u \right\| \leq \left\| T_f u - T_{f_n} u \right\| + \left\| M_{f_n \circ a} u - M_{f\circ a} u \right\|$$

が成り立つ．スペクトル積分 T_f の定義より

$$\left\| T_f u - T_{f_n} u \right\| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成り立ち，また Lebesgue の収束定理より

$$\left\| M_{f_n \circ a} u - M_{f\circ a} u \right\|^2 = \int_{\mathbb{C}} |f_n(a(x))u(x) - f(a(x))u(x)|^2 \; \mu(dx) \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

を得る．ゆえに

$$\left\| T_f u - M_{f\circ a} u \right\| = 0$$

が成り立つ．