金融数理概論レポート

基礎工学研究科システム創成専攻修士 1 年
学籍番号 29C17095
百合川尚学
選択問題 1) 2) 3) 8) 9) 10)

2017 年 10 月 28 日

1. $\mathbb{T} \coloneqq \{0, 1, \cdots, T\}$ $(T \in \mathbb{N})$ を時刻を表す集合とする．安全運用過程

$$(B_t)_{t\in\mathbb{T}}$$

は

$$B_0 = 1, \quad \frac{B_t - B_{t-1}}{B_{t-1}} = r$$

を満たす．ここで r は金利を表す定数である．また株価過程

$$(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$$

は

$$S_0 > 0, \quad \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} = R_t.$$

ただし $(R_t)_{t\in\mathbb{T}\setminus\{0\}}$ は独立同分布な確率変数列であり

$$R_t = \begin{cases} u & \text{with probability } p, \\ l & \text{with probability } 1-p \end{cases}$$

を満たしている．以下の問いに答えよ．

1) リスク中立確率 $\mathbb{Q}$ が存在するための条件を求め，$\mathbb{Q}$ の下での株価過程の上昇 (下降) 確率を求めよ．

2) 満期 T でのペイオフが $f(S_T)$ の (ヨーロピアン) デリバティブを時刻 0 で

$$C_1 < \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left[B_T^{-1} f(S_T)\right] < C_2$$

を満たす C_1 か C_2 で売買できたとする．このとき，それぞれどのような運用を行えば裁定機会が産まれるか論じなさい．

解答　講義と同じく $l < u$ として考える．

1) リスク中立的であるということは株価の割引過程がマルチンゲールとなっていることである．与えられた確率測度の下での条件付き期待値を数式で表すと次のようになる．

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_{t-1}\left[\tilde{S}_t\right] &= \mathrm{E}_{t-1}\left[\tilde{S}_t - \tilde{S}_{t-1} + \tilde{S}_{t-1}\right] \\
&= \mathrm{E}_{t-1}\left[\tilde{S}_t - \tilde{S}_{t-1}\right] + \tilde{S}_{t-1} \\
&= \mathrm{E}_{t-1}\left[\frac{1+R_t}{1+r} - 1\right] + \tilde{S}_{t-1} \\
&= \mathrm{E}\left[\frac{1+R_t}{1+r} - 1\right] + \tilde{S}_{t-1} && (\because \text{独立性}) \\
&= p\left(\frac{1+u}{1+r} - 1\right) + (1-p)\left(\frac{1+l}{1+r} - 1\right) + \tilde{S}_{t-1} \\
&= \frac{pu + (1-p)l - r}{1+r} + \tilde{S}_{t-1}, \quad (\forall t = 1, 2, \cdots, T).
\end{aligned}$$

従ってまずリスク中立的であるためには最右辺の第一項が消えればよいから

$$p = (R_t = u \text{ となる確率}) = \frac{r-l}{u-l}, \quad (l \leq r \leq u), \quad (\forall t = 1, 2, \cdots, T) \tag{1}$$

が満たされていなければならないことが判る．しかし p は与えられた確率であるから，上式を満たすリスク中立確率測度を構成する必要がある．

$$q \coloneqq \frac{r-l}{u-l}$$

とおき，さらに

$$0 < p < 1 \tag{2}$$

となっている下で

$$Z_t \coloneqq \frac{q}{p}\mathbb{1}_{(R_t=u)} + \frac{1-q}{1-p}\mathbb{1}_{(R_t=l)}, \quad (\forall t = 1, 2, \cdots, T)$$

を定義する．$(R_t)_{t\in\mathbb{T}\setminus\{0\}}$ が独立な確率変数の系であるから，$(Z_t)_{t\in\mathbb{T}\setminus\{0\}}$ も独立な確率変数の系である．さらに

$$Z \coloneqq \prod_{t=1}^{T} Z_t$$

として確率変数 Z を定義し，さらに Z により構成される集合関数を

$$\mathrm{Q}(A) \coloneqq \int_A Z\, d\,\mathrm{P}$$

として定義すれば，これは確率測度となる．ただし P は元々与えられていた確率測度を表し，

$$\mathrm{P}\,(R_t = u) = p, \quad \mathrm{P}\,(R_t = l) = 1 - p$$

を満たすものである．任意の $t \in \{1, 2, \cdots, T\}$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathrm{Q}(R_t = u) &= \int_{(R_t=u)} Z\, d\,\mathrm{P} \\
&= \int_\Omega \mathbb{1}_{(R_t=u)} Z\, d\,\mathrm{P} \\
&= \int_\Omega \mathbb{1}_{(R_t=u)} Z_t\, d\,\mathrm{P} \prod_{s\neq t} \int_\Omega Z_s\, d\,\mathrm{P} \\
&= \frac{q}{p}\mathrm{P}\,(R_t = u) \\
&= q
\end{aligned}$$

が成り立つ．同様にして $\mathrm{Q}(R_t = l) = 1 - q$ も成立する．つまり Q は式 (1) を満たすから，確率測度 Q がリスク中立確率測度であると判る．以上より，式 (1) と式 (2) がリスク中立確率測度が存在するための十分条件である．つまり求める条件は

- $0 < p < 1$
- $l < r < u$

である．

2) 講義中の定理より時点 0 で価値 $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left[B_T^{-1} f(S_T)\right]$ のものを時点 T で確率 1 で $f(S_T)$ にする複製戦略が一意に定まる．この複製戦略を使えば，

デリバティブの売り手の場合　時点 0 で価格 C_2 でデリバティブを売却し，得た C_2 のお金のうち $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left[B_T^{-1}f(S_T)\right]$ を複製戦略で運用し $C_2-\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left[B_T^{-1}f(S_T)\right]$ (>0) の分を安全資産として銀行などに預ければ, 時点 T でデリバティブの購入者に $f(S_T)$ を払う必要があるが, それは複製戦略で運用していたもので相殺され, 安全資産の分 $\left(C_2-\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left[B_T^{-1}f(S_T)\right]\right)B_T$ (>0) のみ手元に残るから売り手にとって裁定機会が生じたことになる.

デリバティブの買い手の場合　時点 T で $f(S_T)$ 返済する約束で時点 0 で $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left[B_T^{-1}f(S_T)\right]$ のお金を借り，価格 C_1 でデリバティブを購入し残りの $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left[B_T^{-1}f(S_T)\right]-C_1$ (>0) を安全資産として銀行などに預ける．時点 T で買い手はデリバティブのペイオフとして $f(S_T)$ を得て，借金の返済額 $f(S_T)$ が相殺される．手元には安全資産としていた分 $\left(\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left[B_T^{-1}f(S_T)\right]-C_1\right)B_T$ (>0) のみ残るから，買い手にとって裁定機会が生じたことになる．

2. $\delta > 0$ とし $\mathbb{T} := \{0, \delta, \cdots, N\delta\}$ $(T = N\delta)$ を時刻を表す集合とする. 安全運用過程

$$(B_t)_{t\in\mathbb{T}}$$

は

$$B_0 = 1,\ \frac{B_t - B_{t-\delta}}{B_{t-\delta}} = r\delta$$

を満たす．ここで r は金利 (年利) を表す定数である．また株価過程

$$(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$$

は

$$S_0 > 0, \frac{S_t - S_{t-\delta}}{S_{t-\delta}} = R_t.$$

ただし $(R_t)_{t\in\mathbb{T}\backslash\{0\}}$ は独立同分布な確率変数列であり

$$R_t = \begin{cases} r\delta + \sigma\sqrt{\delta} & \text{with probability } 1/2, \\ r\delta - \sigma\sqrt{\delta} & \text{with probability } 1/2 \end{cases}$$

を満たしている.

3) $\delta \to 0$ とするとき，$\log \frac{S_t}{S_0}$ の分布はどのような分布に収束するか?

解答

3) 設問文の R_t の定義式より

$$S_t = S_{t-\delta}(1 + R_t) = S_{t-\delta}(1 + R_{\frac{t}{\delta}\delta}), \quad (\forall t \in \mathbb{T}\backslash\{0\})$$

が成り立っているから，続ければ

$$S_t = S_0(1 + R_\delta)(1 + R_{2\delta})\cdots(1 + R_{\frac{t}{\delta}\delta}) \quad (\forall t \in \mathbb{T}\backslash\{0\})$$

となり，対数変換で

$$\log\frac{S_t}{S_0} = \log(1 + R_\delta) + \log(1 + R_{2\delta}) + \cdots + \log(1 + R_{\frac{t}{\delta}\delta})$$

と表わせる．次は右辺の特性関数を計算し $\delta \to 0$ の極限を求める. 表記を簡単にするため $X_n := \log(1 + R_{n\delta})$ $(n = 1, 2, \cdots, N)$, $Y := X_1 + X_2 + \cdots + X_{\frac{t}{\delta}}$ とおけば，$i = \sqrt{-1}$ と任意の $z \in \mathbb{R}^1$ に対して

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[e^{izY}\right] = \mathrm{E}\left[e^{iz(X_1+X_2+\cdots+X_{\frac{t}{\delta}})}\right] &= \prod_{n=1}^{t/\delta}\mathrm{E}\left[e^{izX_n}\right] && (\because \text{独立性}) \\ &= \left(\mathrm{E}\left[e^{izX_1}\right]\right)^{\frac{t}{\delta}} && (\because \text{同分布}) \end{aligned}$$

と表せる．ここで右辺を計算しやすい形にするための準備をする．任意の $x \neq 0$ に対して，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{ix}\left(e^{ix}-1\right) &= \int_0^1 e^{isx}\,ds \\
&= \left[-(1-s)e^{isx}\right]_0^1 + ix\int_0^1 (1-s)e^{isx}\,ds \\
&= 1 + ix\left\{\left[-\frac{1}{2}(1-s)^2 e^{isx}\right]_0^1 + \frac{1}{2}ix\int_0^1 (1-s)^2 e^{isx}\,ds\right\} \\
&= 1 + \frac{ix}{2} - \frac{x^2}{2}\int_0^1 (1-s)^2 e^{isx}\,ds
\end{aligned}
$$

となるから，最左辺と最右辺で分母の ix を取り払えば

$$
\begin{aligned}
& e^{ix} - 1 = ix - \frac{x^2}{2} - \frac{ix^3}{2}\int_0^1 (1-s)^2 e^{isx}\,ds \\
\Rightarrow\quad & e^{ix} - \left(1 + ix - \frac{x^2}{2}\right) = -\frac{ix^3}{2}\int_0^1 (1-s)^2 e^{isx}\,ds
\end{aligned}
$$

が任意の $x \in \mathbb{R}^1$ に対して成り立ち ($x = 0$ の場合でも明らかに成り立つ)，x を確率変数 zX_1 に置き換えて期待値を取れば

$$
\begin{aligned}
\left|\mathrm{E}\left[e^{izX_1} - \left(1 + izX_1 - \tfrac{1}{2}z^2X_1^2\right)\right]\right| &= \left|\mathrm{E}\left[e^{izX_1}\right] - \mathrm{E}\left[1 + izX_1 - \tfrac{1}{2}z^2X_1^2\right]\right| \\
&= \left|\mathrm{E}\left[\tfrac{1}{2}iz^3X_1^3\int_0^1 (1-s)^2 e^{iszX_1}\,ds\right]\right| \\
&\leq \mathrm{E}\left[\left|\tfrac{1}{2}z^3X_1^3\right|\int_0^1 (1-s)^2\,ds\right] \\
&= \left|\tfrac{1}{6}z^3\right|\mathrm{E}\left[\left|X_1^3\right|\right] \qquad (3)
\end{aligned}
$$

と表せる．確率変数 X_1 は確率 $1/2$ で $\log(1 + r\delta + \sigma\sqrt{\delta})$ または $\log(1 + r\delta - \sigma\sqrt{\delta})$ となるものであるから，ここでこの対数の評価をしておく．まず $s \in (0,1)$ に対して

$$
\log(1+s) = s - \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3} - \frac{s^4}{4} + \frac{s^5}{5} - \cdots
$$

となるが，s の 3 乗以降の項については

$$
\frac{s^3}{3} - \frac{s^4}{4} + \frac{s^5}{5} - \cdots \leq \frac{s^3}{3} + \frac{s^4}{4} + \frac{s^5}{5} + \cdots \leq s^3 + s^4 + s^5 + \cdots = \frac{s^3}{1-s} \quad (\because s \in (0,1))
$$

となる．$\log(1-s)$ の場合も

$$
\log(1-s) = -s - \frac{s^2}{2} - \frac{s^3}{3} - \frac{s^4}{4} - \frac{s^5}{5} - \cdots
$$

となり，同様に s の 3 乗以降の項について

$$
\left|-\sum_{k=3}^{\infty}\frac{s^k}{k}\right| \leq \frac{s^3}{3} + \frac{s^4}{4} + \frac{s^5}{5} + \cdots \leq s^3 + s^4 + s^5 + \cdots = \frac{s^3}{1-s} \quad (\because s \in (0,1))
$$

となる．δ は後に 0 に近づける実数であるが，すでに δ が十分小さいと考えれば $0 < r\delta + \sigma\sqrt{\delta} < 1$ かつ $0 < \sigma\sqrt{\delta} - r\delta < 1$ となるから，s に $r\delta + \sigma\sqrt{\delta}$ 及び $\sigma\sqrt{\delta} - r\delta$ を代入すれば，いずれの場合も Landau の記法により

$$
\frac{s^3}{1-s} \leq \frac{s^3}{a} = o(\delta)
$$

と表現することができる．ただし a は $1 > a$ となるように無作為に選ぶ定数であり，s が十分小さければ (つまり δ が十分小さければ)$1 - s > a$ となるから上の不等式が成立する．$\log(1+r\delta+\sigma\sqrt{\delta})$ と $\log(1+r\delta-\sigma\sqrt{\delta}) = \log(1-(\sigma\sqrt{\delta}-r\delta))$ に対して上の結果を適用すれば

$$\begin{aligned}
\log(1 + r\delta + \sigma\sqrt{\delta}) &= r\delta + \sigma\sqrt{\delta} - \frac{(r\delta + \sigma\sqrt{\delta})^2}{2} + o(\delta) \\
&= r\delta + \sigma\sqrt{\delta} - \frac{r^2\delta^2 + 2r\sigma\delta^{\frac{3}{2}} + \sigma^2\delta}{2} + o(\delta) \\
&= \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\delta + \sigma\sqrt{\delta} + o(\delta), \\
\log(1 + r\delta - \sigma\sqrt{\delta}) &= \log(1 - (\sigma\sqrt{\delta} - r\delta)) \\
&= -(\sigma\sqrt{\delta} - r\delta) - \frac{(\sigma\sqrt{\delta} - r\delta)^2}{2} + o(\delta) \\
&= r\delta - \sigma\sqrt{\delta} - \frac{r^2\delta^2 - 2r\sigma\delta^{\frac{3}{2}} + \sigma^2\delta}{2} + o(\delta) \\
&= \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\delta - \sigma\sqrt{\delta} + o(\delta)
\end{aligned}$$

と表せる．この結果により確率変数 X_1 の 3 乗は $o(\delta)$ で表現できることになるから，z を固定して考えている下では式 (3) により

$$\mathrm{E}\left[e^{izX_1}\right] - \mathrm{E}\left[1 + izX_1 - \tfrac{1}{2}z^2X_1^2\right] = o(\delta) \tag{4}$$

と表現できる．さらに X_1 の期待値と 2 次モーメントも

$$\mathrm{E}\left[X_1\right] = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\delta + o(\delta), \quad \mathrm{E}\left[X_1^2\right] = \sigma^2\delta + o(\delta)$$

と表現できるから，式 (4) に適用すれば

$$\mathrm{E}\left[e^{izX_1}\right] = 1 + \delta\left(iz\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) - \frac{1}{2}z^2\sigma^2\right) + o(\delta)$$

が成立する．両辺を t/δ 乗して $\delta \longrightarrow +\infty$ とすれば右辺は $e^{iz\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)t-\frac{1}{2}z^2\sigma^2 t}$ となり，これは平均 $\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t$，分散 $\sigma^2 t$ の正規分布の特性関数である．特性関数が各点 $z \in \mathbb{R}^1$ で収束しているから対応する分布は弱収束していることになり，従って求める分布は平均 $\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t$，分散 $\sigma^2 t$ の正規分布である． ∎

4. $(w_t)_{t\geq 0}$ をブラウン運動とする．$\mathrm{E}_s[F] = \mathrm{E}[F \mid (w_u)_{0\leq u\leq s}]$ で確率変数 F の時刻 s までの情報に基づく条件付き期待値を表す．以下の問いに答えよ．

8) $Q_t \coloneqq w_t^2 - t\ (t \geq 0)$ がマルチンゲールであること，すなわち

$$\mathrm{E}_s[Q_t] = Q_s$$

が任意の $0 \leq s \leq t$ に対して成立することを示せ．

9) $L_t \coloneqq tw_t - \int_0^t w_s\, ds\ (t \geq 0)$ がマルチンゲールであることを示せ．

10) $Z_t \coloneqq \exp\left\{\sigma w_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right\}\ (t \geq 0,\ \sigma, \mu > 0)$ に対して $Y_t \coloneqq 1/Z_t$ と定義する．$(Y_t)_{t\geq 0}$ の優/劣マルチンゲールを判定せよ．

証明． 講義中のマルチンゲールの定義に合わせて示す．

8) 時刻 $0 \leq s < t$ を任意に取る．時刻 s までの情報で条件付けた期待値は

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_s[Q_t] &= \mathrm{E}_s\left[w_t^2 - t\right] \\
&= \mathrm{E}_s\left[(w_t - w_s + w_s)^2 - t\right] \\
&= \mathrm{E}_s\left[(w_t - w_s)^2 + 2w_s(w_t - w_s) + w_s^2\right] - t \\
&= \mathrm{E}_s\left[(w_t - w_s)^2\right] + \mathrm{E}_s[2w_s(w_t - w_s)] + \mathrm{E}_s\left[w_s^2\right] - t.
\end{aligned}$$

とまで表せる．ここでブラウン運動の定義より $w_t - w_s$ は時刻 s までの情報と独立，そして平均 0，分散 $t - s$ の正規分布に従っている．この性質と条件付期待値の性質を使ってさらに式変形すれば

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}_s\left[(w_t - w_s)^2\right] + \mathrm{E}_s[2w_s(w_t - w_s)] + \mathrm{E}_s\left[w_s^2\right] - t \\
&\quad = \mathrm{E}\left[(w_t - w_s)^2\right] + 2w_s\,\mathrm{E}[w_t - w_s] + w_s^2 - t \\
&\quad = t - s + w_s^2 - t = Q_s
\end{aligned}$$

が成り立つ．つまり $\mathrm{E}_s[Q_t] = Q_s$ が成り立ち，$(Q_t)_{t\geq 0}$ がマルチンゲールであることが示された．

9) 時刻 $0 \leq s < t$ を任意に取る．時刻 s までの情報で条件付けた期待値は

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_s[L_t] &= \mathrm{E}_s\left[tw_t - \int_0^t w_u\, du\right] \\
&= \mathrm{E}_s\left[t(w_t - w_s + w_s) - \int_0^s w_u\, du - \int_s^t w_u\, du\right] \\
&= \mathrm{E}_s\left[t(w_t - w_s) + tw_s - \int_0^s w_u\, du - \int_s^t w_u - w_s + w_s\, du\right] - t \\
&= t\,\mathrm{E}_s[w_t - w_s] + t\,\mathrm{E}_s[w_s] - \mathrm{E}_s\left[\int_0^s w_u\, du\right] - \mathrm{E}_s\left[\int_s^t w_u - w_s\, du\right] - \mathrm{E}_s\left[\int_s^t w_s\, du\right] \\
&= t\,\mathrm{E}_s[w_t - w_s] + t\,\mathrm{E}_s[w_s] - \mathrm{E}_s\left[\int_0^s w_u\, du\right] - \mathrm{E}_s\left[\int_s^t w_u - w_s\, du\right] - \mathrm{E}_s[(t - s)w_s]
\end{aligned}$$

となる．ここで 8) と同様にブラウン運動の性質と条件付期待値の性質により

$$
\begin{aligned}
&t\,\mathrm{E}_s\left[w_t - w_s\right] + t\,\mathrm{E}_s\left[w_s\right] - \mathrm{E}_s\left[\int_0^s w_u\,du\right] - \mathrm{E}_s\left[\int_s^t w_u - w_s\,du\right] - \mathrm{E}_s\left[(t-s)w_s\right] \\
&= tw_s - \int_0^s w_u\,du - \mathrm{E}_s\left[\int_s^t w_u - w_s\,du\right] - (t-s)w_s
\end{aligned}
$$

まで表せる．$\mathrm{E}_s\left[\int_s^t w_u - w_s\,du\right]$ の項について，Fubini の定理を適用すれば

$$
\mathrm{E}_s\left[\int_s^t w_u - w_s\,du\right] = \mathrm{E}\left[\int_s^t w_u - w_s\,du\right] = \int_s^t \mathrm{E}\left[w_u - w_s\right]\,du = 0
$$

が成り立つから，結局

$$
\mathrm{E}_s\left[L_t\right] = tw_s - \int_0^s w_u\,du - (t-s)w_s = sw_s - \int_0^s w_u\,du = L_s
$$

が成り立ち，$(L_t)_{t\geq 0}$ がマルチンゲールであることが示された．

10) $Y_t = e^{-\sigma w_t - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}$ である．時刻 $0 \leq s < t$ を任意に取り，時刻 s までの情報で条件付けた期待値を計算する．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}_s\left[Y_t\right] &= \mathrm{E}_s\left[e^{-\sigma w_t - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}\right] \\
&= e^{-\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}\,\mathrm{E}_s\left[e^{-\sigma(w_t - w_s + w_s)}\right] \\
&= e^{-\sigma w_s - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}\,\mathrm{E}_s\left[e^{-\sigma(w_t - w_s)}\right] \\
&= Y_s\,\mathrm{E}\left[e^{-\sigma(w_t - w_s)}\right]
\end{aligned}
$$

と表せる．ここで表記を簡単にするために確率変数 X を $X \sim N(0, t-s)$ として $\mathrm{E}\left[e^{-\sigma X}\right]$ を計算する．

$$
\mathrm{E}\left[e^{-\sigma X}\right] = \mathrm{E}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\sigma X)^n}{n!}\right] = \mathrm{E}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\sigma X)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\sigma X)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]
$$

となるが，ここで

$$
\mathrm{E}\left[X^{2n}\right] = (t-s)^n (2n-1)!!, \quad \mathrm{E}\left[X^{2n+1}\right] = 0, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)
$$

が成り立つから

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sigma^{2n}}{(2n)!}\,\mathrm{E}\left[X^{2n}\right] &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sigma^{2n}}{(2n)!}(t-s)^n (2n-1)!! \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\sigma^2 (t-s)}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \\
&= e^{\frac{\sigma^2}{2}(t-s)},
\end{aligned}
$$

$$
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sigma^{2n+1}}{(2n+1)!}\,\mathrm{E}\left[X^{2n+1}\right] = 0
$$

となり，Fubini の定理より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-\sigma X)^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-\sigma X)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right] &= \mathrm{E}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-\sigma X)^{2n}}{(2n)!}\right]+\mathrm{E}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-\sigma X)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sigma^{2n}}{(2n)!}\mathrm{E}\left[X^{2n}\right]+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sigma^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathrm{E}\left[X^{2n+1}\right] \\
&= e^{\frac{\sigma^2}{2}(t-s)}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．$s < t$ としているから $e^{\frac{\sigma^2}{2}(t-s)} > 1$ であり

$$
\mathrm{E}_s\left[Y_t\right] = Y_s\,\mathrm{E}\left[e^{-\sigma(w_t-w_s)}\right] = Y_s e^{\frac{\sigma^2}{2}(t-s)} \geq Y_s
$$

が成り立つから $(Y_t)_{t\geq 0}$ は劣マルチンゲールである． ∎