複素対数関数メモ

基礎工学研究科システム創成専攻修士 1 年
学籍番号 29C17095
百合川尚学

2017 年 12 月 28 日

定義 0.0.1 (複素対数).

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \quad (\forall z \in \mathbb{C})$$

として指数関数を定める．右辺の収束半径は ∞ であるから e は $\mathbb{C}$ の整関数であり，いかなる $z \in \mathbb{C}$ に対しても e^z は 0 を取りえない．$z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ の対数を，

$$e^w = z \tag{1}$$

を満たす w であると定義して

$$w = \log z$$

と表記する．e が 0 を取らないから $z = 0$ の対数は定義されない．

$z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ に対して

$$e^w = z$$

を満たす $w \in \mathbb{C}$ を一つ取る．$\mathbb{R}^2$ と $\mathbb{C}$ は対応 $\mathbb{C} \ni z \longmapsto (\Re\mathrm{e}\, z, \Im\mathrm{m}\, z) \in \mathbb{R}^2$ により位相同型であるから

$$w = x + iy$$

を満たす $x, y \in \mathbb{R}$ の組がただ一つ存在すし，これを (1) に代入すれば

$$z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

を満たし

$$w = \log|z| + iy$$

が従う．ただし $\log|z|$ は正実数についての実数値対数関数を表す．Euler の公式より

$$z = e^w = e^{\log|z|+iy} = |z|e^{iy} = |z|(\cos y + i\sin y) \tag{2}$$

が成り立つが，実際 y について 2π の整数倍の違いを許しても右辺は同じ値を表現できる．z に対し (2) を満たす y の全体 (集合) を $\arg z$ と表記し z の**偏角**と呼ぶ．つまり

$$z \longmapsto \arg z$$

は無限多価 (集合値) 関数の意味を持ち，従って

$$z \longmapsto \log z$$

も無限多価 (集合値) 関数を表し

$$\log z = \log|z| + i\arg z$$

と表現される．$\log z$ を一価の関数として扱うためには偏角を制限しなくてはならない．この操作を**対数の枝を取る**といい，例えば偏角を $(-\pi, \pi]$ に制限した複素対数を**主値**と定めて特別に $\mathrm{Log}\, z$ と表記したりする．また以降は主値 $\mathrm{Log}\, z$ の虚部を特別に $\mathrm{Arg}\, z$ と書く．

定理 0.0.2 (対数の主値の正則性). 上述の通りに主値を定め，また複素平面から 0 と負の実軸を除いた領域を Ω と書く[*1]．このとき

$$\Omega \ni z \longmapsto \operatorname{Log} z$$

は Ω 上で正則となり

$$\frac{d}{dz} \operatorname{Log} z = \frac{1}{z}$$

が成り立つ．

証明.

$$\Omega \ni z \longmapsto \operatorname{Log} z$$

は一価であり

$$\Omega \ni z \longmapsto e^z$$

の逆写像となっている．指数関数は整関数であるから，主値の連続性が判れば主値の正則性が従う．

[*1] 主値自体は $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ において定義されているが，負の実軸上にある z に対し，$\Re z = \Re w_n$ かつ $\Im z > \Im w_n$ を満たす点列 w_n を z に近づけても偏角は連続となりえない．$\operatorname{Arg} z = \pi$ であるが $\operatorname{Arg} w_n$ は $-\pi$ の付近にあるためである．従ってこの z において主値は連続ではない．以上の理由で領域 Ω を定めている．また偏角の取り方により Ω の定め方は変わる．