

# $\varepsilon$ 計算とクラスの導入による具体的で直観的な集合論の構築

関根深澤研 百合川尚学  
学籍番号 : 29C17095  
指導教員 深澤正彰 教授

February 10, 2020

# Contents

- 1 導入
- 2 言語
- 3 式の書き換え
- 4 証明
- 5 保存拡大
- 6 いくつかの性質
- 7 証明が簡単になる例
- 8 まとめ

## $\varepsilon$ について

- $\varepsilon$  計算は数論の無矛盾性証明のために Hilbert[1] が開発.
- $\varepsilon$  によって  $\exists, \forall$  を使う証明を命題論理の証明に埋め込める.
- 式  $\varphi(x)$  に対して

$$\varepsilon x \varphi(x)$$

という形のモノを作り,  $\varepsilon$  項と呼ぶ. 命題論理の証明に埋め込む際には,  $\exists$  や  $\forall$  の付いた式を

$$\varphi(x/\varepsilon x \varphi(x)) \stackrel{\text{def}}{\longleftrightarrow} \exists x \varphi(x),$$

$$\varphi(x/\varepsilon x \rightarrow x \varphi(x)) \stackrel{\text{def}}{\longleftrightarrow} \forall x \varphi(x)$$

によって変換する.

## $\varepsilon$ について

- 今回  $\varepsilon$  項を導入したのは「存在」と「実在」を同義とするため.
- 導入の意図は存在文に対して証人を与えること (Henkin 拡大) :

$$\exists x\varphi(x) \rightarrow \varphi(\varepsilon x\varphi(x)).$$

この式は  $\exists$  に関する主要な公理.

- 「 $\varphi$  である集合が存在すれば、その一つは  $\varepsilon x\varphi(x)$  である。」
- 「 $\rightarrow \forall x\varphi(x) \rightarrow \exists x \rightarrow \varphi(x)$ 」と組み合わせると

$$\varphi(\varepsilon x \rightarrow \varphi(x)) \rightarrow \forall x\varphi(x)$$

が出る.

## $\varepsilon$ について

- ZF 集合論では集合というモノが用意されていないため、「存在」は「実在」ではない。たとえば

$$\exists x \forall y (y \notin x)$$

は定理であり「空集合は存在する」と読むが、空集合を  
“実際に取ってくる”ことは不可能。

- 空集合を手に入れる一つの方法は「定義による拡大」。
- $\forall y (y \notin \emptyset)$  を  $\emptyset$  の定義式として公理に追加し、 $\emptyset$  を“語彙”に追加。

## $\varepsilon$ について

- $\varepsilon$  項を使えば、 $\exists$  の公理と空集合の存在定理によって次が成立：

$$\forall y (y \notin \varepsilon x \rightarrow \forall y (y \notin x)).$$

赤字の部分が空集合を表す.

- 「定義による拡大」と  $\varepsilon$  項による拡大の違い：
  - 前者は “ $\exists x \varphi(x)$ ” が証明されたらその度に集合論を拡大.
  - 後者は全ての存在文に対して、その成立不成立に関係なく対応する集合を一気に追加.

### $\varepsilon$ 項を使うメリット

- 「存在」の「実在」による補強が簡単で明示的.
- 量化  $\forall, \exists$  の範囲が具体的に掴める.
- 証明で用いる推論規則は三段論法のみで済む.
- 証明が容易になる場合がある.

## クラスについて

- Bourbaki[3] や島内 [4] でも  $\varepsilon$  項を使った集合論を展開.
- ところで, 「 $\varphi$  である集合の全体」の意味の

$$\{x \mid \varphi(x)\}$$

というモノも取り入れたい.

- Bourbaki[3] や島内 [4] では

$$\{x \mid \varphi(x)\} \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon y \forall x (\varphi(x) \leftrightarrow x \in y)$$

と定めるが,

$$\exists y \forall x (\varphi(x) \leftrightarrow x \in y)$$

が成立しない場合は「 $\varphi$  である集合の全体」という意味を持たない.

- **ZF** 集合論では「定義による拡大」 or インフォーマルな導入.

## クラスについて

- 「集合しか扱わない」という立場では集合ではない「モノの集まり」は扱えない．それらを合法的に扱いたい．
- クラスを扱う理論として **BG** や **MK** がある．これらはクラス用の変項 (大文字) を用意して，

$$\exists X \forall x (\varphi(x) \leftrightarrow x \in X)$$

が成り立ったら「定義による拡大」で  $\{x \mid \varphi(x)\}$  を追加．

- クラス用の変項は不要で，あらゆる式に対して一気にクラスを導入する方法がある．
- 式  $\varphi$  から直接  $\{x \mid \varphi\}$  を作ればよい (Bernays[5], 竹内 [6]).



# クラスについて

## クラス

式  $\varphi$  に  $x$  のみが自由に現れているとき,  $\varepsilon x\varphi(x), \{x \mid \varphi(x)\}$  の形のモノをクラス (**class**) と呼ぶ.

- クラスである  $\varepsilon$  項は集合である (定理).
- 集合でないクラスもある. たとえば  $\{x \mid x = x\}$  と  $\{x \mid x \notin x\}$ .

集合の定義は竹内 [6] に倣う.

## 集合

クラス  $c$  が

$$\exists x (c = x)$$

を満たすとき  $c$  を集合 (**set**) と呼ぶ.  $\rightarrow \exists x (c = x)$  である場合は真クラス (**proper class**) と呼ぶ. 定義により **集合はクラスである**.

## 主結果

- $\varepsilon$  項とクラスの直接的な導入を組み合わせたが、これが **ZF** 集合論の“妥当”な拡張であるかどうか問題になる.
- 実際、**ZF** 集合論の命題  $\psi$  に対して

**ZF** 集合論で  $\psi$  が証明可能  $\iff$  新しい集合論で  $\psi$  が証明可能  
が成り立つ. より精しく書くと,

### 主結果

$\mathcal{L}_\varepsilon$  の任意の文 (自由な変項が現れない式)  $\psi$  に対して、「 $\Gamma$  から  $\psi$  への **HK** の証明で  $\mathcal{L}_\varepsilon$  の式の列であるものが取れる」ことと「 $\Sigma$  から  $\psi$  への **HE** の証明で  $\mathcal{L}$  の文の列であるものが取れる」ことは同値.

ここで,

- $\Gamma$  は  $\mathcal{L}_\varepsilon$  の文で書かれた **ZF** 集合論の公理系.
- $\Sigma$  は  $\mathcal{L}$  の文で書かれた本論文の公理系.
- **HK** と **HE** は証明体系 (論理的公理+推論規則).

以下詳細.

# 言語 $\mathcal{L}_\in$

$\mathcal{L}_\in$  とは **ZF** 集合論の言語である.

言語  $\mathcal{L}_\in$  の語彙 (参考: 菊池 [10])

矛盾記号  $\perp$

論理記号  $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$

量化子  $\forall, \exists$

述語記号  $=, \in$

変項  $x, y, z, \dots$

## 言語 $\mathcal{L}_E$ の項と式

$\mathcal{L}_E$  の項と式は次の規則で生成する.

### $\mathcal{L}_E$ の項と式

**項** 変項は項であり, またこれらのみが項である.

- 式**
- $\perp$  は式である.
  - 項  $\tau$  と項  $\sigma$  に対して  $\tau \in \sigma$  と  $\tau = \sigma$  は式である.
  - 式  $\varphi$  に対して  $\neg \varphi$  は式である.
  - 式  $\varphi$  と式  $\psi$  に対して  $\varphi \vee \psi$  と  $\varphi \wedge \psi$  と  $\varphi \rightarrow \psi$  はいずれも式である.
  - 式  $\varphi$  と項  $x$  に対して  $\exists x\varphi$  と  $\forall x\varphi$  は式である.
  - これらのみが式である.

## 言語の拡張

- クラスを正式に導入するために言語を拡張する.
- 拡張は二段階に分けて行う. 始めに  $\varepsilon$  項のために拡張し, 次に  $\{x \mid \varphi(x)\}$  の形の項のために拡張する.
- 始めの拡張で作る言語を  $\mathcal{L}_\varepsilon$  と名付ける.

言語  $\mathcal{L}_\varepsilon$  の語彙 (参考: 島内 [4])

矛盾記号  $\perp$

論理記号  $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$

量化子  $\forall, \exists, \varepsilon$

述語記号  $=, \in$

変項  $x, y, z, \dots$

## $\mathcal{L}_E$ の項と式

### $\mathcal{L}_E$ の項と式の定義 (参考 : Moser&Zach[2])

- 変項は項である.
  - $\perp$  は式である.
  - 項  $\tau$  と項  $\sigma$  に対して  $\tau \in \sigma$  と  $\tau = \sigma$  は式である.
  - 式  $\varphi$  に対して  $\neg \varphi$  は式である.
  - 式  $\varphi$  と式  $\psi$  に対して  $\varphi \vee \psi$  と  $\varphi \wedge \psi$  と  $\varphi \rightarrow \psi$  はいずれも式である.
  - 式  $\varphi$  と変項  $x$  に対して  $\exists x\varphi$  と  $\forall x\varphi$  は式である.
  - 式  $\varphi$  と変項  $x$  に対して  $\varepsilon x\varphi$  は項である.
  - これらのみが項と式である.
- 
- $\mathcal{L}_E$  との大きな違いは項と式の生成が循環している点.
  - $\mathcal{L}_E$  の式が  $\mathcal{L}_E$  の項を用いて作られるのは当然ながら, その逆に  $\mathcal{L}_E$  の項もまた  $\mathcal{L}_E$  の式から作られる.
  - $\mathcal{L}_E$  の式は  $\mathcal{L}_E$  の式でもある.

## 言語 $\mathcal{L}$

- $\mathcal{L}_\varepsilon$  の式  $\varphi$  と変項  $x$  で作られる  $\varepsilon x\varphi$  なる項を  $\varepsilon$  項 (epsilon term) という.
- $\mathcal{L}_\varepsilon$  の式  $\varphi$  と変項  $x$  で作られる  $\{x \mid \varphi\}$  なる項を内包項ということにする.

$\mathcal{L}$  は本論文特有の言語である. 内包項を直接導入するのは竹内 [6] を参考にしているが,  $\mathcal{L}_\varepsilon$  の式を使うという点が本論文の特徴である.

### 言語 $\mathcal{L}$ の語彙

矛盾記号  $\perp$

論理記号  $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$

量化子  $\forall, \exists$

述語記号  $=, \in$

変項  $x, y, z, \dots$

$\varepsilon$  項と内包項 上記のもの

# $\mathcal{L}$ の項と式

## $\mathcal{L}$ の項と式の定義

項 変項,  $\varepsilon$  項, 内包項は項である. またこれらのみが項である.

- 式
- $\perp$  は式である.
  - 項  $\tau$  と項  $\sigma$  に対して  $\tau \in \sigma$  と  $\tau = \sigma$  は式である.
  - 式  $\varphi$  に対して  $\neg \varphi$  は式である.
  - 式  $\varphi$  と式  $\psi$  に対して  $\varphi \vee \psi$  と  $\varphi \wedge \psi$  と  $\varphi \rightarrow \psi$  はいずれも式である.
  - 式  $\varphi$  と変項  $x$  に対して  $\exists x \varphi$  と  $\forall x \varphi$  は式である.
  - これらのみが式である.

言語  $\mathcal{L}$  こそが本論文の標準言語である.



## 扱う式の制限

上で作った項や式の中には

$$\varepsilon x(y = y), \quad \{x \mid z \neq z\}, \quad \forall x(u \in v)$$

のような意味の通らないものが氾濫しているので、排除する.

- $\varepsilon x\varphi$  なる形の  $\varepsilon$  項は,  $\varphi$  に  $x$  “のみ” 自由に現れているとき **主要  $\varepsilon$  項**と呼ぶことにする.
- $\{x \mid \varphi\}$  なる形の内包項は,  $\varphi$  に  $x$  “が” 自由に現れているとき, **正則内包項**と呼ぶことにする.
- 以降扱う式に現れる  $\varepsilon$  項は全て主要  $\varepsilon$  項, 内包項は全て正則内包項であるとし,  $\forall x\varphi$  や  $\exists x\varphi$  なる式は  $\varphi$  に  $x$  が自由に現れているとする.

# クラス

$\{x \mid \varphi\}$  なる形の内包項は,  $\varphi$  に  $x$  “のみ” 自由に現れているとき, **主要内包項**と呼ぶことにする.

## クラス

主要  $\varepsilon$  項と主要内包項をクラス (class) と呼ぶ. またこれらのみがクラスである.

主要  $\varepsilon$  項は実際は集合である (後述).

## $\mathcal{L}$ の式を $\mathcal{L}_\varepsilon$ の式に書き換える

- $\varepsilon$  項を導入したのは、存在文に対して証人を付けるため：

$$\exists x\varphi(x) \rightarrow \varphi(\varepsilon x\varphi(x)).$$

- しかし  $\varphi$  に内包項が使われているとき、 $\varepsilon x\varphi(x)$  は使えない (作られていない).
- そのときは、 $\varphi$  を “同値” な  $\mathcal{L}_\varepsilon$  の式  $\hat{\varphi}$  に書き換えて

$$\exists x\varphi(x) \rightarrow \varphi(\varepsilon x\hat{\varphi}(x))$$

を公理とする.

## 式の書き換え

$\varphi$  の部分式のうち原子式であるところを表に従って直したものを「 $\varphi$  の書き換え」と呼ぶ.

	元の式	書き換え後
(1)	$a = \{z \mid \psi\}$	$\forall v (v \in a \leftrightarrow \psi(z/v))$
(2)	$\{y \mid \varphi\} = b$	$\forall u (\varphi(y/u) \leftrightarrow u \in b)$
(3)	$\{y \mid \varphi\} = \{z \mid \psi\}$	$\forall u (\varphi(y/u) \leftrightarrow \psi(z/u))$
(4)	$a \in \{z \mid \psi\}$	$\psi(z/a)$
(5)	$\{y \mid \varphi\} \in b$	$\exists s (\forall u (\varphi(y/u) \leftrightarrow u \in s) \wedge s \in b)$
(6)	$\{y \mid \varphi\} \in \{z \mid \psi\}$	$\exists s (\forall u (\varphi(y/u) \leftrightarrow u \in s) \wedge \psi(z/s))$

ここで,

- $a, b$  は変項か主要  $\varepsilon$  項.
- $\psi(z/v)$  は  $\psi$  に自由に現れている  $z$  に  $v$  を代入した式.

## ZF の公理系

$\Gamma$  の公理 (参考 : Kunen[8])

**外延性** 「同一の要素を持つ集合同士は等しい」

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y).$$

**相等性** 「等しい集合同士の服属関係は一致する」

$$\forall x \forall y (x = y \rightarrow y = x),$$

$$\forall x \forall y \forall z (x = y \rightarrow (x \in z \rightarrow y \in z)),$$

$$\forall x \forall y \forall z (x = y \rightarrow (z \in x \rightarrow z \in y)).$$

**置換** 「集合を写像で写した像は集合」 次の式の全称閉包 :

$$\forall x \forall y \forall z (\varphi(x, y) \wedge \varphi(x, z) \rightarrow y = z)$$

$$\rightarrow \forall a \exists z \forall y (y \in z \leftrightarrow \exists x (x \in a \wedge \varphi(x, y))).$$

置換公理は式  $\varphi$  ごとに公理となるので **図式 (schema)** と呼ばれる。

# ZF の公理系

## $\Gamma$ の公理

対 「対集合が存在する」

$$\forall x \forall y \exists p \forall z (x = z \vee y = z \leftrightarrow z \in p).$$

合併 「合併集合が存在する」

$$\forall x \exists u \forall y (\exists z (z \in x \wedge y \in z) \leftrightarrow y \in u).$$

冪 「冪集合が存在する」

$$\forall x \exists p \forall y (\forall z (z \in y \rightarrow z \in x) \leftrightarrow y \in p).$$

これらの公理によって既存の集合から新しい集合が作られる。

# ZF の公理系

## $\Gamma$ の公理

**正則性** 「空でない集合は自分自身と交わらない要素を持つ」

$$\forall r (\exists x (x \in r) \rightarrow \exists y (y \in r \wedge \forall z (z \in r \rightarrow z \notin y))).$$

**無限** 「自然数の全体を含む集合が存在する」

$$\begin{aligned} \exists x (\exists s (\forall t (t \notin s) \wedge s \in x) \wedge \forall y (y \in x \rightarrow \\ \exists u (\forall v (v \in u \leftrightarrow v \in y \vee v = y) \wedge u \in x))). \end{aligned}$$

正則性公理によって集合の範囲が決定する (整礎集合). また無限公理は唯一「集合の存在」に言及している.

# 古典論理

**HK** とは古典論理 (classical logic) の Hilbert 流証明体系である。

## HK の論理的公理 (命題論理)(参考 : 戸次 [9])

**含意の分配**  $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)).$

**含意の導入**  $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi).$

**矛盾の導入**  $\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \perp), \quad \neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \perp).$

**否定の導入**  $(\varphi \rightarrow \perp) \rightarrow \neg\varphi.$

**論理和の導入**  $\varphi \rightarrow \varphi \vee \psi, \quad \psi \rightarrow \varphi \vee \psi.$

**論理和の除去**  $(\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \vee \psi \rightarrow \chi)).$

**論理積の導入**  $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi)).$

**論理積の除去**  $\varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi, \quad \varphi \wedge \psi \rightarrow \psi.$

**二重否定の除去**  $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi.$



# 古典論理

## HK の論理的公理 (量化)(参考 : 戸次 [9])

全称の導入  $\forall y(\psi \rightarrow \varphi(x/y)) \rightarrow (\psi \rightarrow \forall x\varphi).$

全称の除去  $\forall x\varphi \rightarrow \varphi(x/t).$

存在の導入  $\varphi(x/t) \rightarrow \exists x\varphi.$

存在の除去  $\forall y(\varphi(x/y) \rightarrow \psi) \rightarrow (\exists x\varphi \rightarrow \psi).$

## HK の証明 (参考 : 戸次 [9])

「 $\Gamma$  からの **HK** の証明で  $\mathcal{L}_E$  の式の列であるもの」とは、 $\mathcal{L}_E$  の式の列  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  で、各  $\varphi_i$  が次のいずれかであるもの :

- **HK** の公理である
- $\Gamma$  の公理である
- $\varphi_j, \varphi_k$  ( $j, k < i$ ) から三段論法で得られる
- $\varphi_j$  ( $j < i$ ) から汎化で得られる.

## $\Sigma$ の公理

- $\Sigma$  は「対」「合併」「冪」「正則性」「無限」は  $\Gamma$  と共通.
- $\Sigma$  の「置換」は、二つの変項が現れる式に対しての言明に替わる.
- 新しく「内包性」と「要素」の公理が追加.

### $\Sigma$ の公理 (参考 : 竹内 [6])

$a, b, c$  をクラスとすると

**外延性** 「同一の要素を持つクラス同士は等しい」

$$\forall z (z \in a \leftrightarrow z \in b) \rightarrow a = b.$$

**相等性** 「等しい集合同士の服属関係は一致する」

$$a = b \rightarrow b = a,$$

$$a = b \rightarrow (a \in c \rightarrow b \in c),$$

$$a = b \rightarrow (c \in a \rightarrow c \in b).$$

## $\Sigma$ の公理

### $\Sigma$ の公理

$a, b$  をクラスとすると

**内包性** 「 $\{y \mid \varphi(y)\}$  は  $\varphi$  であるモノの全体」

$$\forall x (x \in \{y \mid \varphi(y)\} \leftrightarrow \varphi(x)).$$

ただし  $\{y \mid \varphi(y)\}$  は主要内包項.

**要素** 「要素となりうるものは集合に限る」

$$a \in b \rightarrow \exists x (a = x).$$

- クラスは量化しないのでこれらの公理は図式 (schema) である.
- 要素の公理は Gödel[7] から引用.

## HE の公理

**HE** は本論文特有の証明体系である。命題論理の論理的公理は **HK** と共通するが、量化公理が違う。

### HE の論理的公理 (量化)

**De Morgan の法則**  $\neg \forall x \varphi(x) \rightarrow \exists x \neg \varphi(x)$ .

**全称の除去**  $\forall x \varphi \rightarrow \varphi(x/\tau)$ .

**存在の導入**  $\varphi(x/\tau) \rightarrow \exists x \varphi$ .

**存在の除去**  $\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(\varepsilon x \hat{\varphi}(x))$ .

$\hat{\varphi}$  とは、 $\varphi$  が  $\mathcal{L}_\varepsilon$  の式でない場合に書き換えたもの。  $\varphi$  が  $\mathcal{L}_\varepsilon$  の式ならば  $\hat{\varphi}$  は  $\varphi$  とする。また  $\tau$  は主要  $\varepsilon$  項とする。

**HE** の公理により、量化  $\forall x, \exists x$  の亘る範囲は主要  $\varepsilon$  項の上となる。

# HE の証明

HK と違い, **HE** の証明は文で行う.

## HE の証明

「 $\Sigma$  からの **HE** の証明で  $\mathcal{L}$  の文の列であるもの」とは,  $\mathcal{L}$  の文の列  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  で, 各  $\varphi_i$  が次のいずれかであるもの:

- **HE** の公理である
- $\Sigma$  の公理である
- $\varphi_j, \varphi_k$  ( $j, k < i$ ) から三段論法で得られる

「 $\Sigma$  から  $\psi$  への **HE** の証明で  $\mathcal{L}$  の文の列であるもの」が取れることを

$$\Sigma \vdash \psi$$

と書く.

## 主結果の証明方針

次の 3 ステップに分割する：

**step1** 「 $\Sigma$  から  $\psi$  への **HE** の証明で  $\mathcal{L}_E$  の文の列であるものが取れる」ならば「 $\Gamma$  から  $\psi$  への **HK** の証明で  $\mathcal{L}_E$  の式の列であるものが取れる」ことを示す。

**step2** 「 $\Gamma$  から  $\psi$  への **HK** の証明で  $\mathcal{L}_E$  の式の列であるものが取れる」ならば「 $\Sigma$  から  $\psi$  への **HE** の証明で  $\mathcal{L}_E$  の文の列であるものが取れる」ことを示す。

**step3** 「 $\Sigma$  から  $\psi$  への **HE** の証明で  $\mathcal{L}$  の文の列であるものが取れる」ならば「 $\Sigma$  から  $\psi$  への **HE** の証明で  $\mathcal{L}_E$  の文の列であるものが取れる」ことを示す。

**step3 の逆は明らか。**  $\mathcal{L}_E$  の文は  $\mathcal{L}$  の文なので。

## step1 の略証

### step1

「 $\Sigma$  から  $\psi$  への **HE** の証明で  $\mathcal{L}_E$  の文の列であるものが取れる」ならば  
「 $\Gamma$  から  $\psi$  への **HK** の証明で  $\mathcal{L}_E$  の式の列であるものが取れる」

### 補題

「 $\Sigma$  から  $\psi$  への **HE** の証明で  $\mathcal{L}_E$  の文の列であるものが取れる」ならば  
「 $\Gamma$  から  $\psi$  への **HE** の証明で  $\mathcal{L}_E$  の文の列であるものが取れる」

$\Sigma$  の公理で  $\mathcal{L}_E$  の文で書かれているものに対して「 $\Gamma$  から  $\psi$  への **HE** の証明で  $\mathcal{L}_E$  の文の列であるものが取れる」ことを示せばよい.

## step1 の略証

**HK** に  $\exists x\varphi \rightarrow \varphi(x/\varepsilon x\varphi)$  の形の公理を追加した証明体系を **HK $_{\varepsilon}$**  とする.

### 補題

「 $\Gamma$  から  $\psi$  への **HE** の証明で  $\mathcal{L}_{\varepsilon}$  の文の列であるものが取れる」ならば  
「 $\Gamma$  から  $\psi$  への **HK $_{\varepsilon}$**  の証明で  $\mathcal{L}_{\varepsilon}$  の文の列であるものが取れる」

**HE** の公理で **HK $_{\varepsilon}$**  の公理でないものは

$$\rightarrow\forall x\varphi \rightarrow \exists x\rightarrow\varphi$$

のみ. これは **HK** の定理なので **HK $_{\varepsilon}$**  の定理でもある.



## step1 の略証

- 「 $\Gamma$  から  $\psi$  への  $\mathbf{HK}_\varepsilon$  の証明で  $\mathcal{L}_\varepsilon$  の文の列であるもの」の中の  $\exists x\varphi \rightarrow \varphi(x/\varepsilon x\varphi)$  の形の公理を演繹定理で外に出すと：

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}, \mathcal{L}_\varepsilon} (\exists x\varphi \rightarrow \varphi(x/\varepsilon x\varphi)) \rightarrow \psi.$$

- 上の証明に現れる  $\varepsilon x\varphi$  を新しい変項  $y$  で置き換えると

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}, \mathcal{L}_\varepsilon} (\exists x\varphi \rightarrow \varphi(x/y)) \rightarrow \psi.$$

- $\mathbf{HK}$  の汎化と量化公理より

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}, \mathcal{L}_\varepsilon} \exists y (\exists x\varphi \rightarrow \varphi(x/y)) \rightarrow \psi.$$

- $\vdash_{\mathbf{HK}, \mathcal{L}_\varepsilon} \exists y (\exists x\varphi \rightarrow \varphi(x/y))$  なので、三段論法で

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}, \mathcal{L}_\varepsilon} \psi.$$

## step2 の略証

### step2

「 $\Gamma$  から  $\psi$  への **HK** の証明で  $\mathcal{L}_\epsilon$  の式の列であるものが取れる」ならば  
「 $\Sigma$  から  $\psi$  への **HE** の証明で  $\mathcal{L}_\epsilon$  の文の列であるものが取れる」

- 「 $\Gamma$  から  $\psi$  への **HK** の証明で  $\mathcal{L}_\epsilon$  の式の列であるもの」を正則証明 (汎化の固有変項が一度しか使われない証明) に変換.
- 得られた正則証明に自由に現れる変項のうち、固有変項以外のものをすべて主要  $\epsilon$  項に置き換える.
- 固有変項を主要  $\epsilon$  項に置き換える. このとき

$$\varphi(x/\epsilon x \rightarrow \varphi) \rightarrow \forall x \varphi$$

が **HE** の定理であることを利用する.

## step3 の略証

### step3

「 $\Sigma$  から  $\psi$  への **HE** の証明で  $\mathcal{L}$  の文の列であるものが取れる」ならば  
「 $\Sigma$  から  $\psi$  への **HE** の証明で  $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$  の文の列であるものが取れる」

- $\mathcal{L}$  の文の列である証明  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  を  $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$  の文に書き換える. このとき命題論理の公理と三段論法の形式は崩れない.
- **HE** の量化公理と  $\Sigma$  の公理は公理でない式に変わりうるが, それらが  $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$  の文で証明可能であることを示す.

# 集合

## 集合

クラス  $a$  が集合であるとは,

$$\Sigma \vdash \exists x (a = x)$$

となること.  $\Sigma \vdash \neg \exists x (a = x)$  なら  $a$  は真クラス (proper class).

## 主要 $\varepsilon$ 項は集合

任意の主要  $\varepsilon$  項  $\tau$  に対して  $\Sigma \vdash \exists x (\tau = x)$ .

実際, 外延性公理より  $\tau = \tau$  となり, また

$$\tau = \tau \rightarrow \exists x (\tau = x)$$

は **HE** の量化公理なので, 三段論法で  $\exists x (\tau = x)$  が出る.

## 全称式の導出

### 全称式の導出

$\varphi$  を,  $x$  のみが自由に現れる  $\mathcal{L}$  の式とすると,

$$\vdash \varphi(\varepsilon x \rightarrow \hat{\varphi}(x)) \rightarrow \forall x \varphi(x).$$

ただし  $\hat{\varphi}$  は必要に応じて  $\varphi$  を  $\mathcal{L}_{\varepsilon}$  の式に書き換えたもの.

実際,

$$\begin{aligned} & \rightarrow \forall x \varphi(x) \rightarrow \exists x \rightarrow \varphi(x), \\ & \exists x \rightarrow \varphi(x) \rightarrow \rightarrow \varphi(\varepsilon x \rightarrow \hat{\varphi}(x)) \end{aligned}$$

は **HE** の量化公理であり,

$$\rightarrow \forall x \varphi(x) \rightarrow \rightarrow \varphi(\varepsilon x \rightarrow \hat{\varphi}(x))$$

が導かれ, 対偶律より

$$\varphi(\varepsilon x \rightarrow \hat{\varphi}(x)) \rightarrow \forall x \varphi(x).$$

## 内包項の $\varepsilon$ 項表現

集合である主要内包項は  $\varepsilon$  項で書ける

$\varphi$  を,  $x$  のみが自由に現れる  $\mathcal{L}$  の式とすると,

$$\exists s (\{x \mid \varphi(x)\} = s) \vdash \{x \mid \varphi(x)\} = \varepsilon s \forall x (\varphi(x) \leftrightarrow x \in s).$$

$\forall x (\varphi(x) \leftrightarrow x \in s)$  は  $\{x \mid \varphi(x)\} = s$  の書き換えなので,

$$\exists s (\{x \mid \varphi(x)\} = s) \rightarrow \{x \mid \varphi(x)\} = \varepsilon s \forall x (\varphi(x) \leftrightarrow x \in s)$$

は **HE** の量化公理である. 従って  $\exists s (\{x \mid \varphi(x)\} = s)$  を公理とすれば

$$\{x \mid \varphi(x)\} = \varepsilon s \forall x (\varphi(x) \leftrightarrow x \in s)$$

が定理として出る.

## 書き換えの同値性

### 書き換えは同値

$\varphi$  を  $\mathcal{L}_E$  の文ではない  $\mathcal{L}$  の文とすると,

$$\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \hat{\varphi}.$$

ただし  $\hat{\varphi}$  は  $\varphi$  の書き換え.

内包性公理と要素の公理はこの同値性を得るためにある.

## $\exists x\varphi(x) \rightarrow \exists y\varphi(y)$ の証明

$\varphi$  は  $\mathcal{L}_E$  の式で、 $x$  のみ自由に現れているとし、 $y$  は  $x$  への代入について自由であるとするとき、

$$\vdash \exists x\varphi(x) \rightarrow \exists y\varphi(y).$$

**HE** で証明すると、

$$\begin{aligned}\exists x\varphi(x) &\rightarrow \varphi(\varepsilon x\varphi(x)), \\ \varphi(\varepsilon x\varphi(x)) &\rightarrow \exists y\varphi(y)\end{aligned}$$

が共に **HE** の公理なので

$$\exists x\varphi(x) \rightarrow \exists y\varphi(y)$$

が従う。



## $\exists x\varphi(x) \rightarrow \exists y\varphi(y)$ の証明

一方で **HK** で証明すると,

$$\varphi(x) \rightarrow \exists y\varphi(y)$$

は **HK** の公理であり, 汎化によって

$$\forall x(\varphi(x) \rightarrow \exists y\varphi(y))$$

が得られる.

$$\forall x(\varphi(x) \rightarrow \exists y\varphi(y)) \rightarrow (\exists x\varphi(x) \rightarrow \exists y\varphi(y))$$

が **HK** の公理なので, 三段論法で

$$\exists x\varphi(x) \rightarrow \exists y\varphi(y)$$

が出る.

## $\exists x\varphi(x) \rightarrow \exists y\varphi(y)$ の証明

**HE** で証明した際、 $A$  を  $\exists x\varphi(x)$ ,  $B$  を  $\varphi(\varepsilon x\varphi(x))$ ,  $C$  を  $\exists y\varphi(y)$  として

$$A \rightarrow B,$$

$$B \rightarrow C,$$

$$(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C)),$$

$$A \rightarrow (B \rightarrow C),$$

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)),$$

$$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C),$$

$$A \rightarrow C$$

を追加しなくては証明とならないが、証明の組み立ては **HK** よりも直観的である。

## $\exists y (\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(y))$ の証明

$\varphi$  は  $\mathcal{L}_E$  の式で、 $x$  のみ自由に現れているとし、 $y$  は  $x$  への代入について自由であるとするとき、

$$\vdash \exists y (\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(y)).$$

**HE** で証明すると、

$$\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(\varepsilon x \varphi(x))$$

は **HE** の公理であり、

$$(\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(\varepsilon x \varphi(x))) \rightarrow \exists y (\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(y))$$

も **HE** の公理なので、三段論法で

$$\exists y (\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(y))$$

が従う。

## $\exists y ( \exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(y) )$ の証明

一方で **HK** で証明すると,

$$\exists x \varphi(x) \rightarrow \exists y \varphi(y)$$

と

$$\begin{aligned} (\exists x \varphi(x) \rightarrow \exists y \varphi(y)) &\rightarrow (\neg \exists x \varphi(x) \vee \exists y \varphi(y)), \\ &\rightarrow \exists y (\neg \exists x \varphi(x) \vee \varphi(y)), \\ &\rightarrow \exists y (\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(y)) \end{aligned}$$

の証明が必要になる. 明らかに数行で終わる証明ではないし, 証明の方針も直観とはずれる.

## まとめ

- 本論文では  $\varepsilon$  計算 (オリジナルとは違うが) とクラスの直接的な導入を併せた集合論を構築した.
- それが, 集合に関する言明に対しては **ZF** 集合論と同じ証明力であることを示した.

### 何が具体的で直観的か

- 量化の範囲が具体的.
- 初めから集合とクラスが用意されていて, 集合とクラスの範囲が明確.
- 存在するなら取って来られる.

-  D. Hilbert and P. Bernays, 数学の基礎 (吉田夏彦, 渕野昌訳), 丸善出版株式会社, 2012, pp. 23-63, ISBN 978-4-621-06405-4.
-  G. Moser and R. Zach, “The epsilon calculus and Herbrand complexity,” *Studia Logica*, vol. 82, no. 1, pp. 133-155, 2006.
-  N. Bourbaki, 数学原論 集合論 1 (前原昭二訳), 第一刷, 東京都書株式会社, 1968, pp. 64-65.
-  島内剛一, 数学の基礎, 第 1 版, 日本評論社, 2016, p. 67, ISBN 978-4-535-60106-2.
-  P. Bernays, *Axiomatic Set Theory*, 2nd edition, North-Holland Publishing Company, 1968.
-  竹内外史, 現代集合論入門, 増強版, 日本評論社, 2016, pp. 138-183, ISBN 978-4-535-60116-1.
-  K. Gödel, *The Consistency of the Continuum Hypothesis*, 8th printing, Princeton University Press 1970, p. 3, ISBN 0-691-07927-7.



K. Kunen, キューネン数学基礎論講義 (藤田博司訳), 第 1 版, 日本評論社, 2016, pp. 123-221, ISBN 978-4-535-78748-3.



戸次大介, 数理論理学, 初版, 東京大学出版会, 2016, pp. 148-166, ISBN 978-4-13-062915-7.



菊池誠, 不完全性定理, 初版, 共立出版株式会社, 2017, pp. 86-91, ISBN 978-4-320-11096-0.