

# 確率微分方程式講義録

基礎工学研究科システム創成専攻修士 1 年

学籍番号 29C17095

百合川尚学

2018 年 1 月 8 日

# 目次

|       |                                       |    |
|-------|---------------------------------------|----|
| 第 1 章 | 関数解析                                  | 2  |
| 1.1   | Hölder の不等式と Minkowski の不等式 . . . . . | 2  |
| 1.2   | 空間 $L^p$ . . . . .                    | 6  |
| 1.3   | 補助定理 . . . . .                        | 11 |
| 第 2 章 | 条件付き期待値作用素                            | 15 |
| 2.1   | $L^2$ における条件付き期待値 . . . . .           | 15 |
| 2.2   | 条件付き期待値作用素の拡張 . . . . .               | 20 |
| 2.3   | 独立性 . . . . .                         | 26 |
| 第 3 章 | 停止時刻                                  | 30 |
| 3.1   | 停止時刻 . . . . .                        | 30 |
| 第 4 章 | マルチンゲール                               | 37 |
| 4.1   | Doob の不等式・任意抽出定理 . . . . .            | 37 |
| 4.2   | 二次変分 . . . . .                        | 43 |
| 第 5 章 | 伊藤積分                                  | 58 |
| 5.1   | パスの変動を制限する停止時刻 . . . . .              | 58 |
| 5.2   | 可予測過程 . . . . .                       | 62 |
| 5.3   | 伊藤積分 . . . . .                        | 67 |

# 第 1 章

## 関数解析

### 1.1 Hölder の不等式と Minkowski の不等式

$\mathbb{K}$  を  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  或は  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  とおく. 測度空間を  $(X, \mathcal{F}, m)$  とし, 可測  $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{K})$  関数  $f$  に対して

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p} := \begin{cases} \inf \{ r \in \mathbb{R} ; |f(x)| \leq r, \text{ a.e. } x \in X \} & (p = \infty) \\ \left( \int_X |f(x)|^p m(dx) \right)^{\frac{1}{p}} & (0 < p < \infty) \end{cases}$$

と定め,

$$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, m) := \{ f : X \rightarrow \mathbb{K} ; f : \text{可測 } \mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{K}), \|f\|_{\mathcal{L}^p} < \infty \} \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

として空間  $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$  を定義する. この空間は  $\mathbb{K}$  上の線形空間となるが, そのことを保証するために次の二つの不等式が成り立つことを証明する.

定理 1.1.1 (Hölder の不等式).  $1 \leq p, q \leq \infty$ ,  $p + q = pq$  ( $p = \infty$  なら  $q = 1$ ) とする. このとき任意の可測  $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{K})$  関数  $f, g$  に対して次が成り立つ:

$$\int_X |f(x)g(x)| m(dx) \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p} \|g\|_{\mathcal{L}^q}. \quad (1.1)$$

まず次の補助定理を証明する.

補題 1.1.2.  $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{F}, m)$  ならば

$$|f(x)| \leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty} \quad (\text{a.e. } x \in X).$$

証明 (補題 1.1.2).  $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{F}, m)$  の定義により任意の実数  $\alpha > \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}$  に対して

$$m(\{ x \in X ; |f(x)| > \alpha \}) = 0$$

が成り立つから,

$$\{ x \in X ; |f(x)| > \|f\|_{\mathcal{L}^\infty} \} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ x \in X ; |f(x)| > \|f\|_{\mathcal{L}^\infty} + 1/n \}$$

の右辺は  $m$ -零集合となる.

証明 (定理 1.1.1).  $p = \infty, q = 1$  の場合  $\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} = \infty$  又は  $\|g\|_{\mathcal{L}^1} = \infty$  なら不等式 (1.1) は成り立つから, 以下では  $\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} < \infty$  かつ  $\|g\|_{\mathcal{L}^1} < \infty$  の場合を考える. 補助定理により或る  $m$ -零集合  $A \in \mathcal{F}$  を除いて  $|f(x)| \leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}$  が成り立つから

$$|f(x)g(x)| \leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty} |g(x)| \quad (\forall x \in X \setminus A).$$

とでき, 従って

$$\int_X |f(x)g(x)| m(dx) = \int_{X \setminus A} |f(x)g(x)| m(dx) \leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty} \int_{X \setminus A} |g(x)| m(dx) = \|f\|_{\mathcal{L}^\infty} \|g\|_{\mathcal{L}^1}$$

となり不等式 (1.1) が成り立つ.

$1 < p, q < \infty$  の場合  $\|f\|_{\mathcal{L}^p} = \infty$  又は  $\|g\|_{\mathcal{L}^q} = \infty$  なら不等式 (1.1) は成り立つから, 以下では  $\|f\|_{\mathcal{L}^p} < \infty$  かつ  $\|g\|_{\mathcal{L}^q} < \infty$  の場合を考える.  $\|f\|_{\mathcal{L}^p} = 0$  であるとする

$$B := \{ x \in X ; |f(x)| > 0 \}$$

は  $m$ -零集合となるから,

$$\int_X |f(x)g(x)| m(dx) = \int_B |f(x)g(x)| m(dx) + \int_{X \setminus B} |f(x)g(x)| m(dx) = 0$$

となり不等式 (1.1) が成り立つ.  $\|g\|_{\mathcal{L}^q} = 0$  の場合も同じである.

最後に  $0 < \|f\|_{\mathcal{L}^p}, \|g\|_{\mathcal{L}^q} < \infty$  の場合を示す.  $-\log t$  ( $t > 0$ ) は凸関数であるから,  $1/p + 1/q = 1$  に対して

$$-\log \left( \frac{s}{p} + \frac{t}{q} \right) \leq \frac{1}{p} (-\log s) + \frac{1}{q} (-\log t) \quad (\forall s, t > 0)$$

が成り立ち, 従って

$$s^{1/p} t^{1/q} \leq \frac{s}{p} + \frac{t}{q} \quad (\forall s, t > 0)$$

を得る. この不等式を用いれば

$$F(x) := |f(x)|^p / \|f\|_{\mathcal{L}^p}^p, \quad G(x) := |g(x)|^q / \|g\|_{\mathcal{L}^q}^q \quad (\forall x \in X)$$

とした可積分関数  $F, G$  に対し

$$F(x)^{1/p} G(x)^{1/q} \leq \frac{1}{p} F(x) + \frac{1}{q} G(x) \quad (\forall x \in X)$$

となるから, 両辺を積分して

$$\begin{aligned} \int_X F(x)^{1/p} G(x)^{1/q} m(dx) &\leq \frac{1}{p} \int_X F(x) m(dx) + \frac{1}{q} \int_X G(x) m(dx) \\ &= \frac{1}{p} \frac{1}{\|f\|_{\mathcal{L}^p}^p} \int_X |f(x)|^p m(dx) + \frac{1}{q} \frac{1}{\|g\|_{\mathcal{L}^q}^q} \int_X |g(x)|^q m(dx) \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{aligned}$$

が成り立つ。最左辺と最右辺を比べて

$$\int_X \frac{|f(x)|}{\|f\|_{\mathcal{L}^p}} \frac{|g(x)|}{\|g\|_{\mathcal{L}^q}} m(dx) = \int_X F(x)^{1/p} G(x)^{1/q} m(dx) \leq 1$$

となるから不等式

$$\int_X |f(x)g(x)| m(dx) \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p} \|g\|_{\mathcal{L}^q}$$

が示された。 ■

定理 1.1.3 (Minkowski の不等式).  $1 \leq p \leq \infty$  とする. このとき任意の可測  $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  関数  $f, g$  に対して次が成り立つ:

$$\|f + g\|_{\mathcal{L}^p} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p} + \|g\|_{\mathcal{L}^p}. \quad (1.2)$$

証明.

$p = \infty$  の場合 各点  $x \in X$  で

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$$

となるから,  $\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} = \infty$  又は  $\|g\|_{\mathcal{L}^\infty} = \infty$  なら不等式 (1.2) は成り立つ.  $\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} < \infty$  かつ  $\|g\|_{\mathcal{L}^\infty} < \infty$  の場合は

$$C := \{x \in X; |f(x)| > \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}\} \cup \{x \in X; |g(x)| > \|g\|_{\mathcal{L}^\infty}\}$$

が  $m$ -零集合となり

$$|f(x) + g(x)| \leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty} + \|g\|_{\mathcal{L}^\infty} \quad (\forall x \in X \setminus C)$$

を得て  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^\infty}$  の定義と併せて不等式 (1.2) が成り立つ.

$p = 1$  の場合

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \quad (\forall x \in X)$$

の両辺を積分することにより不等式 (1.2) が成り立つ.

$1 < p < \infty$  の場合  $p + q = pq$  が成り立つように  $q > 1$  を取る.

$$|f(x) + g(x)|^p = |f(x) + g(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} \leq |f(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} + |g(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1}$$

の両辺を積分すれば, Hölder の不等式により

$$\begin{aligned}
\|f + g\|_{\mathcal{L}^p}^p &= \int_X |f(x) + g(x)|^p m(dx) \\
&\leq \int_X |f(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} m(dx) + \int_X |g(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} m(dx) \\
&\leq \left( \int_X |f(x)|^p m(dx) \right)^{1/p} \left( \int_X |f(x) + g(x)|^{q(p-1)} m(dx) \right)^{1/q} \\
&\quad + \left( \int_X |g(x)|^p m(dx) \right)^{1/p} \left( \int_X |f(x) + g(x)|^{q(p-1)} m(dx) \right)^{1/q} \\
&= \left( \int_X |f(x)|^p m(dx) \right)^{1/p} \left( \int_X |f(x) + g(x)|^p m(dx) \right)^{1/q} \\
&\quad + \left( \int_X |g(x)|^p m(dx) \right)^{1/p} \left( \int_X |f(x) + g(x)|^p m(dx) \right)^{1/q} \\
&= \|f\|_{\mathcal{L}^p} \|f + g\|_{\mathcal{L}^p}^{p/q} + \|g\|_{\mathcal{L}^p} \|f + g\|_{\mathcal{L}^p}^{p/q} \\
&= \|f\|_{\mathcal{L}^p} \|f + g\|_{\mathcal{L}^p}^{p-1} + \|g\|_{\mathcal{L}^p} \|f + g\|_{\mathcal{L}^p}^{p-1} \tag{1.3}
\end{aligned}$$

となる.  $\|f + g\|_{\mathcal{L}^p} = 0$  の場合は不等式 (1.2) が成り立つからそうでない場合を考える.  
 $\|f + g\|_{\mathcal{L}^p} = \infty$  の場合,

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq 2 \max\{|f(x)|, |g(x)|\} \quad (\forall x \in X)$$

より

$$|f(x) + g(x)|^p \leq 2^p \max\{|f(x)|, |g(x)|\} \leq 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p) \quad (\forall x \in X)$$

の両辺を積分して

$$\|f + g\|_{\mathcal{L}^p}^p \leq 2^p (\|f\|_{\mathcal{L}^p}^p + \|g\|_{\mathcal{L}^p}^p)$$

という関係が出るから,  $\|f\|_{\mathcal{L}^p}$  か  $\|g\|_{\mathcal{L}^p}$  の一方は  $\infty$  となり不等式 (1.2) が成り立つ.  
 $0 < \|f + g\|_{\mathcal{L}^p} < \infty$  の場合,  $\|f\|_{\mathcal{L}^p} + \|g\|_{\mathcal{L}^p} = \infty$  なら不等式 (1.2) は成り立ち,  $\|f\|_{\mathcal{L}^p} + \|g\|_{\mathcal{L}^p} < \infty$  の場合でも上式 (1.3) より得る

$$\|f + g\|_{\mathcal{L}^p}^p \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p} \|f + g\|_{\mathcal{L}^p}^{p-1} + \|g\|_{\mathcal{L}^p} \|f + g\|_{\mathcal{L}^p}^{p-1}$$

の両辺を  $\|f + g\|_{\mathcal{L}^p}^{p-1}$  で割って不等式 (1.2) が成り立つ. ■

以上の結果より  $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$  は線形空間となる. 実際加法とスカラ倍は

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) := \alpha f(x), \quad (\forall x \in X, f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, m), \alpha \in \mathbb{C})$$

により定義され, Minkowski の不等式により加法について閉じている.

**補題 1.1.4** ( $\mathcal{L}^p$  のセミノルム).  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p}$  は線形空間  $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$  においてセミノルムとなる.

証明.

正值性 定義の仕方による.

同次性  $1 \leq p < \infty$  なら

$$\left( \int_X |\alpha f(x)|^p m(dx) \right)^{1/p} = \left( |\alpha|^p \int_X |f(x)|^p m(dx) \right)^{1/p} = |\alpha| \left( \int_X |f(x)|^p m(dx) \right)^{1/p}$$

により, また  $p = \infty$  なら

$$\inf \{ r \in \mathbb{R} ; \quad |\alpha f(x)| \leq r, \text{ a.e. } x \in X \} = |\alpha| \inf \{ r \in \mathbb{R} ; \quad |f(x)| \leq r, \text{ a.e. } x \in X \}$$

により, 任意の  $\alpha \in \mathbb{K}$  と任意の  $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) に対して

$$\|\alpha f\|_{\mathcal{L}^p} = |\alpha| \|f\|_{\mathcal{L}^p}$$

が成り立つ.

三角不等式 Minkowski の不等式による. ■

## 1.2 空間 $L^p$

可測関数全体の商集合  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p}$  は  $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$  のノルムとはならない.  $\|f\|_{\mathcal{L}^p} = 0$  であっても  $f$  が零写像であるとは限らず, 実際  $m$ -零集合の上で  $1 \in \mathbb{K}$  を取るような関数  $g$  でも  $\|g\|_{\mathcal{L}^p} = 0$  を満たすからである. ここで可測関数全体の集合を

$$\mathcal{L}^0(X, \mathcal{F}, m) := \{ f : X \rightarrow \mathbb{K} ; \quad f : \text{可測 } \mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{K}) \}$$

とおく.

$$f, g \in \mathcal{L}^0(X, \mathcal{F}, m), \quad f \sim g \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f(x) = g(x) \quad \text{a.e. } x \in X$$

と定義した関係  $\sim$  は  $\mathcal{L}^0(X, \mathcal{F}, m)$  における同値関係となり, この関係で  $\mathcal{L}^0(X, \mathcal{F}, m)$  を割った商集合を  $L^0(X, \mathcal{F}, m)$  と表す.

商集合における算法  $L^0(X, \mathcal{F}, m)$  の元である関数類 (同値類) を  $[f]$  ( $f$  は関数類の代表元) と表し,  $L^0(X, \mathcal{F}, m)$  における加法とスカラー倍を次のように定義すれば  $L^0(X, \mathcal{F}, m)$  は  $\mathbb{K}$  上の線形空間となる<sup>\*1</sup>:

$$\begin{aligned} [f] + [g] &:= [f + g] & (\forall [f], [g] \in L^0(X, \mathcal{F}, m)), \\ \alpha[f] &:= [\alpha f] & (\forall [f] \in L^0(X, \mathcal{F}, m), \alpha \in \mathbb{K}). \end{aligned}$$

---

<sup>\*1</sup> この表現は well-defined, つまり代表元に依らずに値がただ一つに定まる. 任意の  $f' \in [f]$  と  $g' \in [g]$  に対して

$$[f + g] = [f' + g'], \quad [\alpha f] = [\alpha f']$$

となるからである. 実際

$$\{f \neq g\} := \{x \in X ; \quad f(x) \neq g(x)\}$$

と略記して

$$\begin{aligned} \{f + g \neq f' + g'\} &\subset \{f \neq f'\} \cup \{g \neq g'\}, \\ \{\alpha f \neq \alpha f'\} &= \{f \neq f'\} \end{aligned}$$

と表現でき, どれも右辺は  $m$ -零集合であるから  $[f + g] = [f' + g']$ ,  $[\alpha f] = [\alpha f']$  が成り立つ.

また乗法も次のように定義できる:

$$[f][g] := [fg] \quad (\forall [f], [g] \in L^0(X, \mathcal{F}, m)).$$

この乗法は可換であり, 加法と併せて  $L^0(X, \mathcal{F}, m)$  は可換環をなす. 従って関数類に対して加減乗算が自由にできるようになった<sup>\*2</sup>. また  $[f][f] = [f^2]$  を  $[f]^2$  と表記し,  $[f]^n := [f]^{n-1}[f]$  と帰納的に定義すれば  $[f]^n = [f^n]$  となる.

商集合における順序  $[f], [g] \in L^0(X, \mathcal{F}, m)$  に対して次の関係  $< (>)$  を定める:

$$[f] < [g] \quad ([g] > [f]) \quad := \quad f < g \quad m\text{-a.s.} \quad (1.4)$$

この定義は well-defined である. 実際任意の  $f' \in [f], g' \in [g]$  に対し,

$$\{f' > g'\} \subset \{f \neq f'\} \cup \{f > g\} \cup \{g \neq g'\}$$

の右辺が零集合となり

$$[f] < [g] \Leftrightarrow [f'] < [g']$$

が従う.  $<$  または  $=$  であることを  $\leq$  と表記し, 同様に  $\geq$  を定める. この関係は次に示すように順序の定義を満たし,  $L^0(X, \mathcal{F}, m)$  はこれを順序として順序環となる.

- $[f] \leq [f]$ .
- $[f] \leq [g], [g] \leq [f] \Rightarrow m(f > g) = 0, m(g > f) = 0 \Rightarrow [f] = [g]$ .
- $[f] \leq [g], [g] \leq [h] \Rightarrow m(f > h) \leq m(f > g) + m(g > h) = 0 \Rightarrow [f] \leq [h]$ .

補題 1.2.1 (商空間におけるノルムの定義).

$$\|[f]\|_{L^p} := \|f\|_{\mathcal{L}^p} \quad (1 \leq p \leq \infty, f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, m))$$

として  $\|\cdot\|_{L^p} : L^0(X, \mathcal{F}, m) \rightarrow \mathbb{R}$  を定義すればこれは well-defined である. つまり代表元に依らずに値がただ一つに定まる. 更に次で定義する空間

$$L^p(X, \mathcal{F}, m) := \{[f] \in L^0(X, \mathcal{F}, m) ; \|[f]\|_{L^p} < \infty\} \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

は  $\|\cdot\|_{L^p}$  をノルムとしてノルム空間となる.

証明.

<sup>\*2</sup> 加法乗法が可換であることと結合則は代表元の関数の空間が加法乗法について可換であることと結合則を満たすことによる. また分配測は

$$\begin{aligned} ([f] + [g])[h] &= [f + g][h] = [(f + g)h] = [fh + gh] = [fh] + [gh] = [f][h] + [g][h], \\ [h]([f] + [g]) &= [h][f + g] = [h(f + g)] = [hf + hg] = [hf] + [hg] = [h][f] + [h][g] \end{aligned}$$

により成り立つ. そして零元は零写像の関数類で  $[0]$  と表し, 単位元は恒等的に 1 を取る関数の関数類で  $[1]$  と表す. また  $-[f] = [-f]$  であるから減法は

$$[f] - [g] := [f] + (-[g]) = [f] + [-g] = [f - g]$$

で定義される.



well-defined であること  $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$  に対し, 任意に  $g \in [f]$  を選ぶ. 示すことは  $\|f\|_{\mathcal{L}^p}^p = \|g\|_{\mathcal{L}^p}^p$  が成り立つことである.

$$A := \{x \in X; f(x) \neq g(x)\} \in \mathcal{F}$$

とおく.  $A$  は  $m(A) = 0$  を満たす.

$p = \infty$  の場合  $A^c$  の上で  $f(x) = g(x)$  となるから

$$\begin{aligned} \{x \in X; |g(x)| > \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}\} &\subset A + A^c \cap \{x \in X; |g(x)| > \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}\} \\ &= A + A^c \cap \{x \in X; |f(x)| > \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}\} \\ &\subset A + \{x \in X; |f(x)| > \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}\} \end{aligned}$$

が成り立ち, 最右辺は 2 項とも  $m$ -零集合であるから  $\|g\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}$  が従う. 逆向きの不等号も同様に示されて  $\|g\|_{\mathcal{L}^\infty} = \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}$  を得る.

$1 \leq p < \infty$  の場合  $m(A) = 0$  により

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p}^p = \int_X f(x) m(dx) = \int_{A^c} f(x) m(dx) = \int_{A^c} g(x) m(dx) = \int_X g(x) m(dx) = \|g\|_{\mathcal{L}^p}^p$$

が成り立つ.

ノルムとなること 任意に  $[f], [g] \in L^p(X, \mathcal{F}, m)$  と  $\alpha \in \mathbb{K}$  を取る.  $\|[f]\|_{L^p}$  の正値性は  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p}$  の正値性から従う. また  $m(f \neq 0) > 0$  なら  $\|f\|_{\mathcal{L}^p} > 0$  となるから, 対偶により  $\|[f]\|_{L^p} = 0$  なら  $[f]$  は零元  $[0]$ , 逆に  $[f] = [0]$  なら  $\|[f]\|_{L^p} = \|0\|_{\mathcal{L}^p} = 0$  となる.  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p}$  の同次性と Minkowski の不等式から

$$\begin{aligned} \|\alpha[f]\|_{L^p} &= \|[\alpha f]\|_{L^p} = \|\alpha f\|_{\mathcal{L}^p} = |\alpha| \|f\|_{\mathcal{L}^p} = |\alpha| \|[f]\|_{L^p} \\ \|[f] + [g]\|_{L^p} &= \|[f + g]\|_{L^p} = \|f + g\|_{\mathcal{L}^p} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p} + \|g\|_{\mathcal{L}^p} = \|[f]\|_{L^p} + \|[g]\|_{L^p} \end{aligned}$$

も成り立ち,  $\|\cdot\|_{L^p}$  が  $L^p(X, \mathcal{F}, m)$  においてノルムとなると示された. ■

**命題 1.2.2 ( $L^p$  の完備性).** 上で定義したノルム空間  $L^p(X, \mathcal{F}, m)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) は Banach 空間である.

**証明.** 任意に  $L^p(X, \mathcal{F}, m)$  の Cauchy 列  $[f_n] \in L^p(X, \mathcal{F}, m)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を取る. Cauchy 列であるから  $1/2$  に対して或る  $N_1 \in \mathbb{N}$  が取れて,  $n > m \geq N_1$  ならば  $\|[f_n] - [f_m]\|_{L^p} = \|f_n - f_m\|_{\mathcal{L}^p} < 1/2$  となる. ここで  $m = n_1$  と表記することにする. 同様に  $1/2^2$  に対して或る  $N_2 \in \mathbb{N}$  ( $N_2 > N_1$ ) が取れて,  $n' > m' \geq N_2$  ならば  $\|[f_{n'}] - [f_{m'}]\|_{L^p} < 1/2^2$  となる. 先ほどの  $n$  について,  $n > N_2$  となるように取れるからこれを  $n = n_2$  と表記し, 更に  $m' = n_2$  としておく. 今のところ

$$\|[f_{n_1}] - [f_{n_2}]\|_{L^p} < 1/2$$

と表示できる. 再び同様に  $1/2^3$  に対して或る  $N_3 \in \mathbb{N}$  ( $N_3 > N_2$ ) が取れて,  $n'' > m'' \geq N_3$  ならば  $\|[f_{n''}] - [f_{m''}]\|_{L^p} < 1/2^3$  となる. 先ほどの  $n'$  について  $n' > N_3$  となるように取れるからこれを  $n' = n_3$  と表記し, 更に  $m'' = n_3$  としておく. 今までのところで

$$\begin{aligned} \|[f_{n_1}] - [f_{n_2}]\|_{L^p} &< 1/2 \\ \|[f_{n_2}] - [f_{n_3}]\|_{L^p} &< 1/2^2 \end{aligned}$$

が成り立っている．数学的帰納法により

$$\| [f_{n_k} - f_{n_{k+1}}] \|_{L^p} < 1/2^k \quad (n_{k+1} > n_k, k = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.5)$$

が成り立つように自然数の部分列  $(n_k)_{k=1}^\infty$  を取ることができる．

$p = \infty$  の場合

$[f_{n_k}]$  の代表元  $f_{n_k}$  について,

$$\begin{aligned} A_k &:= \left\{ x \in X ; \quad |f_{n_k}(x)| > \|f_{n_k}\|_{\mathcal{L}^\infty} \right\}, \\ A^k &:= \left\{ x \in X ; \quad |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| > \|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_{\mathcal{L}^\infty} \right\} \end{aligned}$$

とおけば Hölder の不等式の証明中の補助定理より  $m(A_k) = m(A^k) = 0$  であり,

$$A := \left( \bigcup_{k=1}^\infty A_k \right) \cup \left( \bigcup_{k=1}^\infty A^k \right)$$

として  $m$ -零集合を定め

$$\hat{f}_{n_k}(x) = \begin{cases} f_{n_k}(x) & (x \notin A) \\ 0 & (x \in A) \end{cases} \quad (\forall x \in X)$$

と定義した  $\hat{f}_{n_k}$  もまた  $[f_{n_k}]$  の元となる． $\hat{f}_{n_k}$  は  $X$  上の有界可測関数であり

$$\| \hat{f}_{n_k} - \hat{f}_{n_{k+1}} \|_{\mathcal{L}^\infty} = \sup_{x \in X} |\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}_{n_{k+1}}(x)| < 1/2^k \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.6)$$

が成り立つから, 各点  $x \in X$  で  $(\hat{f}_{n_k}(x))_{k=1}^\infty$  は  $\mathbb{R}$  の Cauchy 列となり<sup>\*3</sup> 各点  $x \in X$  での極限を  $\hat{f}(x)$  と表す．一般に距離空間に値を取る可測関数列の各点収束の極限関数は可測関数であるから  $\hat{f}$  もまた可測  $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  である．また  $\hat{f}$  は有界である．実際式 (1.6) から任意の  $l > k$  に対し

$$|\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}_{n_l}(x)| \leq \sum_{j=k}^{l-1} |\hat{f}_{n_j}(x) - \hat{f}_{n_{j+1}}(x)| \leq \sum_{j=k}^{l-1} \sup_{x \in X} |\hat{f}_{n_j}(x) - \hat{f}_{n_{j+1}}(x)| < 1/2^{k-1}$$

が成り立つから, 極限関数  $\hat{f}(x)$  も

$$\sup_{x \in X} |\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}(x)| \leq 1/2^{k-1} \quad (1.7)$$

を満たすことになる．なぜなら, もし或る  $x \in X$  で  $\alpha := |\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}(x)| > 1/2^{k-1}$  となる場合, 任意の  $l > k$  に対し

$$0 < \alpha - 1/2^{k-1} < |\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}(x)| - |\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}_{n_l}(x)| \leq |\hat{f}_{n_l}(x) - \hat{f}(x)|$$

となり各点収束に反するからである．不等式 (1.7) により任意の  $x \in X$  において

$$|\hat{f}(x)| < |\hat{f}_{n_k}(x)| + 1/2^{k-1} \leq \| \hat{f}_{n_k} \|_{\mathcal{L}^\infty} + 1/2^{k-1}$$

---

<sup>\*3</sup> 任意の  $\epsilon > 0$  に対し  $1/2^N < \epsilon$  を満たす  $N \in \mathbb{N}$  を取れば, 全ての  $l > k > N$  に対して

$$|\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}_{n_l}(x)| \leq \sum_{j=k}^{l-1} |\hat{f}_{n_j}(x) - \hat{f}_{n_{j+1}}(x)| < \sum_{k>N} 1/2^k = 1/2^N < \epsilon$$

が成り立つ．

が成り立ち  $\hat{f}$  の有界性が判る. 以上で極限関数  $\hat{f}$  が有界可測関数であると示された.  $\hat{f}$  を代表元とする  $[\hat{f}] \in L^\infty(X, \mathcal{F}, m)$  に対し, 不等式 (1.7) により

$$\| [f_{n_k}] - [\hat{f}] \|_{L^\infty} = \| \hat{f}_{n_k} - \hat{f} \|_{\mathcal{L}^\infty} = \sup_{x \in X} |\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}(x)| \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty)$$

となり Cauchy 列  $([f_n])_{n=1}^\infty$  の部分列  $([f_{n_k}])_{k=1}^\infty$  は  $[\hat{f}]$  に収束する. 元の Cauchy 列も  $[\hat{f}]$  に収束するから  $L^\infty(X, \mathcal{F}, m)$  は Banach 空間である.

$1 \leq p < \infty$  の場合

$[f_{n_k}]$  の代表元  $f_{n_k}$  に対して

$$f_{n_k}(x) := f_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^k (f_{n_j}(x) - f_{n_{j-1}}(x)) \quad (1.8)$$

と表現できるから, これに対して

$$g_k(x) := |f_{n_1}(x)| + \sum_{j=1}^k |f_{n_j}(x) - f_{n_{j-1}}(x)|$$

として可測関数列  $(g_k)_{k=1}^\infty$  を定める. Minkowski の不等式と式 (1.5) より

$$\| g_k \|_{\mathcal{L}^p} \leq \| f_{n_1} \|_{\mathcal{L}^p} + \sum_{j=1}^k \| f_{n_j} - f_{n_{j-1}} \|_{\mathcal{L}^p} < \| f_{n_1} \|_{\mathcal{L}^p} + \sum_{j=1}^k 1/2^j < \| f_{n_1} \|_{\mathcal{L}^p} + 1 < \infty$$

が成り立つ. 各点  $x \in X$  で  $g_k(x)$  は  $k$  について単調増大であるから, 単調収束定理より

$$\| g \|_{\mathcal{L}^p}^p = \lim_{k \rightarrow \infty} \| g_k \|_{\mathcal{L}^p}^p < \| f_{n_1} \|_{\mathcal{L}^p}^p + 1 < \infty$$

となるので  $g \in L^p(X, \mathcal{F}, m)$  である. 従って

$$B_n := \{ x \in X ; \quad g(x) \leq n \} \in \mathcal{F},$$

$$B := \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

とおけば  $m(X \setminus B) = 0$  であり, 式 (1.8) の級数は  $B$  上で絶対収束する (各点).

$$f(x) := \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) & (x \in B) \\ 0 & (x \in X \setminus B) \end{cases}$$

として可測  $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  関数  $f$  を定義すれば,  $|f(x)| \leq g(x)$  ( $\forall x \in X$ ) と  $g^p$  の可積分性から  $f$  の関数類  $[f]$  は  $L^p(X, \mathcal{F}, m)$  の元となる. 関数列  $((f_{n_k})_{k=1}^\infty)$  は  $f$  に概収束し, また  $|f_{n_k}(x) - f(x)|^p \leq 2^p(|f_{n_k}(x)|^p + |f(x)|^p) \leq 2^{p+1}g(x)^p$  ( $\forall x \in X$ ) となるから, Lebesgue の収束定理により

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \| [f_{n_k}] - [f] \|_{L^p}^p = \lim_{k \rightarrow \infty} \| f_{n_k} - f \|_{\mathcal{L}^p}^p = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X |f_{n_k}(x) - f(x)|^p m(dx) = 0$$

が成り立ち, Cauchy 列  $([f_n])_{n=1}^\infty$  の部分列  $([f_{n_k}])_{k=1}^\infty$  が  $[f]$  に収束すると示された. 従って元の Cauchy 列も  $[f]$  に収束するから  $L^p(X, \mathcal{F}, m)$  は Banach 空間である. ■

### 1.3 補助定理

以後の準備として、線型作用素の拡張定理、射影定理、kolmos の補題を証明する。

**定理 1.3.1 (線型作用素の拡張).**  $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$  を  $\mathbb{K}$  上のノルム空間とし、それぞれにノルム位相を導入する.  $Y$  が Banach 空間であるなら、 $X$  の稠密な部分空間  $X_0$  を定義域とする任意の有界線型作用素  $T : X \rightarrow Y$  に対し、 $T$  の拡張となる線型作用素で、作用素ノルムを変えず、かつ定義域を  $X$  全体とするものが一意に存在する。

**証明.** 作用素ノルムを  $\|\cdot\|$  と表記する.  $X_0$  が  $X$  で稠密であるから、任意の  $x \in X$  に対して  $\|x_n - x\|_X \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ) を満たす  $(x_n)_{n=1}^\infty$  が存在する.  $T$  の有界性から

$$\|Tx_m - Tx_n\|_Y \leq \|T\| \|x_m - x_n\|_X \quad (\forall n, m \in \mathbb{N})$$

が成り立ち、 $(Tx_n)_{n=1}^\infty$  が Cauchy 列であることと  $Y$  の完備性から  $(Tx_n)_{n=1}^\infty$  は或る  $y \in Y$  に収束する.  $y$  は  $x \in X$  に対して一意である. 実際  $x$  への別の収束列  $(z_n)_{n=1}^\infty$  を取り  $Tz_n \rightarrow u \in Y$  とすれば、

$$\begin{aligned} \|y - u\|_Y &= \|y - Tx_n + Tx_n - Tz_m + Tz_m - u\|_Y \\ &\leq \|y - Tx_n\|_Y + \|Tx_n - Tz_m\|_Y + \|Tz_m - u\|_Y \\ &\leq \|y - Tx_n\|_Y + \|T\| (\|x_n - x\|_X + \|x - z_m\|_X) + \|Tz_m - u\|_Y \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

より  $y = u$  が従う.  $x$  に  $y$  を対応させる関係を  $\tilde{T}$  と表せば、これは有界かつ線型である.

**線型性** 任意に  $x, z \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$  と  $x, z$  への収束列  $(x_n)_{n=1}^\infty, (z_n)_{n=1}^\infty \subset X_0$  を取れば

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}(\alpha x + \beta z) - \alpha \tilde{T}x - \beta \tilde{T}z\|_Y &= \|\tilde{T}(\alpha x + \beta z) - T(\alpha x_n + \beta z_n) + \alpha Tx_n + \beta Tz_n - \alpha \tilde{T}x - \beta \tilde{T}z\|_Y \\ &\leq \|\tilde{T}(\alpha x + \beta z) - T(\alpha x_n + \beta z_n)\|_Y + |\alpha| \|Tx_n - \tilde{T}x\|_Y + |\beta| \|Tz_n - \tilde{T}z\|_Y \\ &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty) \end{aligned}$$

が成り立つ.

**有界性** 任意に  $x \in X$  と  $x$  への収束列  $(x_n)_{n=1}^\infty$  を取る. 任意の  $\epsilon > 0$  に対し或る  $K \in \mathbb{N}$  が存在して

$$\|\tilde{T}x\|_Y < \|Tx_k\|_Y + \epsilon, \quad \|x\|_X < \|x_k\|_X + \frac{\epsilon}{\|T\|} \quad (\forall k \geq K)$$

が成り立つから、

$$\|\tilde{T}x\|_Y < \|Tx\|_Y + \epsilon < \|T\| \|x\|_X + 2\epsilon$$

となり  $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$  を得る.

さらに

$$\|\tilde{T}\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X=1}} \|\tilde{T}x\|_Y \geq \sup_{\substack{x \in X_0 \\ \|x\|_X=1}} \|\tilde{T}x\|_Y = \sup_{\substack{x \in X_0 \\ \|x\|_X=1}} \|Tx\|_Y = \|T\|$$

より  $\|\tilde{T}\| = \|T\|$  が得られる. 拡張の一意性は  $X_0$  の稠密性と有界作用素の連続性による. ■

定理 1.3.2 (射影定理).  $H$  を  $\mathbb{K}$  上の Hilbert 空間とし, 内積とノルムをそれぞれ  $\langle \cdot, \cdot \rangle, \|\cdot\|$  と表記する.  $C \subset H$  が閉凸集合なら,  $f \in H$  に対し或る  $y \in C$  がただ一つ存在して

$$\|f - y\| = \inf_{h \in C} \|f - h\|$$

を満たす. また  $C$  が  $H$  の閉部分空間なら,  $y \in C$  が  $f$  の射影であることと

$$\langle f - y, h \rangle = 0 \quad (\forall h \in C)$$

が成り立つことは同値になる.

証明.

射影の存在  $C$  が凸集合であるとする.  $f \in H \setminus C$  として

$$\delta := \inf_{h \in C} \|f - h\|$$

とおけば,  $C$  が閉であるから  $\delta > 0$  となる.  $h_n \in C$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - h_n\|$$

となるように取れば, 任意の  $\epsilon > 0$  に対して或る  $N \in \mathbb{N}$  が存在し

$$\|f - h_n\|^2 < \delta^2 + \epsilon/4 \quad (\forall n > N)$$

が成り立つ.  $n, m > N$  ならば, 内積空間の中線定理と  $(h_n + h_m)/2 \in C$  により

$$\begin{aligned} \|h_n - h_m\|^2 &= 2(\|f - h_m\|^2 + \|f - h_n\|^2) - \|2f - (h_n + h_m)\|^2 \\ &= 2(\|f - h_m\|^2 + \|f - h_n\|^2) - 4\left\|f - \frac{h_n + h_m}{2}\right\|^2 \\ &< 2\delta^2 + \epsilon - 4\delta^2 = \epsilon \end{aligned}$$

が成り立ち  $(h_n)_{n=1}^\infty$  は  $H$  の Cauchy 列となり,  $H$  が Hilbert 空間で  $C$  が  $H$  で閉だから極限  $y \in H$  が存在して  $y \in C$  が従う.

$$\begin{aligned} |\delta - \|f - y\|| &\leq |\delta - \|f - h_n\|| + \left| \|f - h_n\| - \|f - y\| \right| \\ &\leq |\delta - \|f - h_n\|| + \|h_n - y\| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

より  $\delta = \|f - y\|$  となり射影の存在が示された.  $f \in C$  の場合は  $f$  が自身の射影である.  
射影の一意性  $z \in C$  もまた  $\delta = \|f - z\|$  を満たすとすれば,  $C$  の凸性により

$$2\delta \leq 2\left\|f - \frac{y+z}{2}\right\| \leq \|f - y\| + \|f - z\| = 2\delta$$

が成り立つから, 中線定理より

$$\|y - z\|^2 = 2(\|f - z\|^2 + \|f - y\|^2) - 4\left\|f - \frac{y+z}{2}\right\|^2 = 0$$

となって  $y = z$  が従う.

$C$  が閉部分空間の場合  $f \in H \setminus C$  に対して  $f$  の  $C$  への射影を  $y \in C$  とする. ( $f \in C$  の場合は  $y = f$ .) 或る  $h \in C$  に対して

$$\langle f - y, h \rangle \neq 0$$

となると仮定すれば ( $f \neq y$  より  $h \neq 0$ ),

$$\hat{y} := y + \left( \frac{\langle f - y, h \rangle}{\|h\|^2} \right) h \in C$$

に対して<sup>\*4</sup>

$$\begin{aligned} \|f - \hat{y}\|^2 &= \left\langle f - y - \frac{\langle f - y, h \rangle}{\|h\|^2} h, f - y - \frac{\langle f - y, h \rangle}{\|h\|^2} h \right\rangle \\ &= \|f - y\|^2 - \frac{|\langle f - y, h \rangle|^2}{\|h\|^2} \\ &< \|f - y\|^2 \end{aligned}$$

が成り立つから  $y$  が射影であることに反する. 従って射影  $y$  は

$$\langle f - y, h \rangle = 0 \quad (\forall h \in C) \quad (1.9)$$

を満たす. 逆に  $y \in C$  に対して式 (1.9) が成り立っているとすれば  $y$  は  $f$  の射影となる. 実際任意の  $h \in C$  に対して

$$\begin{aligned} \|f - h\|^2 &= \langle f - y + y - h, f - y + y - h \rangle \\ &= \|f - y\|^2 + 2\operatorname{Re} \langle f - y, y - h \rangle + \|y - h\|^2 \\ &= \|f - y\|^2 + \|y - h\|^2 \\ &\geq \|f - y\|^2 \end{aligned}$$

となり

$$\|f - y\| = \inf_{h \in C} \|f - h\|$$

が成り立つ. ■

**定理 1.3.3 (Kolmos の補題).**  $H$  を Hilbert 空間,  $\|\cdot\|$  を  $H$  の内積により導入されるノルムとする.  $f_n \in H$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) が  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\| < \infty$  を満たすとき,

$$\exists g_n \in \operatorname{Conv}[\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2} \dots\}]^{*5} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

が取れて  $(g_n)_{n=1}^\infty$  は  $H$  の Cauchy 列となる.

<sup>\*4</sup>  $\hat{y} \in C$  となるためには  $C$  が部分空間である必要がある. 凸性だけではこれが成り立たない.

<sup>\*5</sup>  $\operatorname{Conv}[\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2} \dots\}]$  は  $f_n, f_{n+1}, f_{n+2} \dots$  を含む最小の凸集合である. すなわち

$$\operatorname{Conv}[\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2} \dots\}] = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} c_i f_{n+i} ; \quad 0 \leq c_i \leq 1, \exists j \in \mathbb{N}, c_i = 0 \ (\forall i \geq j), \sum_{i=0}^{\infty} c_i = 1 \right\}$$

で定義される.

証明.  $F := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\| < \infty$  とおく.

$$A := \sup_{n \geq 1} \inf \{ \|g\| \ ; \ g \in \text{Conv} [\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2} \cdots\}] \}$$

とおけば  $A \leq F$  が成り立つ. 実際各  $n \in \mathbb{N}$  について任意に  $g \in \text{Conv} [\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2} \cdots\}]$  を取れば

$$g = \sum_{i=0}^N c_i f_{n+i} \quad (0 \leq c_i \leq 1, \sum_{i=0}^N c_i = 1)$$

と表現できるから,

$$\|g\| = \left\| \sum_{i=0}^N c_i f_{n+i} \right\| \leq \sum_{i=0}^N c_i \|f_{n+i}\| \leq F$$

より

$$\inf \{ \|g\| \ ; \ g \in \text{Conv} [\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2} \cdots\}] \} \leq F \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

が従い  $A \leq F$  を得る. また全ての  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$\inf \{ \|g\| \ ; \ g \in \text{Conv} [\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2} \cdots\}] \} \leq A$$

が成り立つから, 各  $n \in \mathbb{N}$  について

$$\|g_n\| \leq A + \frac{1}{n} \tag{1.10}$$

を満たす  $g_n \in \text{Conv} [\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2} \cdots\}]$  が存在する. 一方で, 下限を取る範囲が縮小していくから

$$\left( \inf \{ \|g\| \ ; \ g \in \text{Conv} [\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2} \cdots\}] \} \right)_{n=1}^{\infty}$$

は単調増大列であり, 任意に  $m \in \mathbb{N}$  を取れば或る  $N(m) \in \mathbb{N}$  ( $N(m) > m$ ) が存在して

$$\inf \{ \|g\| \ ; \ g \in \text{Conv} [\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2} \cdots\}] \} \geq A - \frac{1}{m} \quad (\forall n \geq N(m))$$

が成り立つ. 任意の  $l, k \geq N(m)$  に対し  $(g_l + g_k)/2 \in \text{Conv} [\{f_{N(m)}, f_{N(m)+1}, f_{N(m)+2} \cdots\}]$  となるから

$$\left\| \frac{g_l + g_k}{2} \right\| \geq A - \frac{1}{m}$$

が従い, 中線定理と (1.10) を併せて

$$\|g_l - g_k\|^2 = 2\|g_l\|^2 + 2\|g_k\|^2 - \|g_l + g_k\|^2 \leq 4\left(A + \frac{1}{N(m)}\right)^2 - 4\left(A - \frac{1}{m}\right)^2 \leq \frac{16A}{m}$$

が成り立つ.  $A \leq F < \infty$  より右边は  $m \rightarrow \infty$  で 0 に収束するから  $(g_n)_{n=1}^{\infty}$  は Cauchy 列である. ■

## 第 2 章

# 条件付き期待値作用素

### 2.1 $L^2$ における条件付き期待値

基礎におく確率空間を  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ , 係数体を  $\mathbb{R}$  とする.

$L^2$  における内積 ノルム空間  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  は次の  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を内積として Hilbert 空間となる:

$$\langle [f], [g] \rangle_{L^2(\mathcal{F})} := \int_{\Omega} f(x)g(x) \mu(dx) \quad ([f], [g] \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)) \quad (2.1)$$

まず (2.1) は well-defined である. 実際任意の  $f' \in [f]$  と  $g' \in [g]$  に対して

$$E := \{x \in \Omega; \quad f(x) \neq f'(x)\}, \quad F := \{x \in \Omega; \quad g(x) \neq g'(x)\}$$

は  $\mu$ -零集合であるから

$$\int_{\Omega} f(x)g(x) \mu(dx) = \int_{\Omega} f'(x)g'(x) \mu(dx)$$

が成り立ち, Hölder の不等式より  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\mathcal{F})}$  は実数値として確定する. また次に示すように内積の公理を満たす:

正值性 ノルムとの対応  $\|[f]\|_{L^2(\mathcal{F})}^2 = \langle [f], [f] \rangle_{L^2(\mathcal{F})}$  ( $\forall [f] \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ) により従う.

対称性 (2.1) において被積分関数を  $gf$  としても積分値は変わらない.

双線型性 対称性があるから片側の線型性を示せばよい. 今, 任意に  $[f], [g], [h] \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  と  $a \in \mathbb{R}$  を取れば

$$\begin{aligned} \langle [f], [g] + [h] \rangle_{L^2(\mathcal{F})} &= \langle [f], [g + h] \rangle_{L^2(\mathcal{F})} = \int_{\Omega} f(x)(g(x) + h(x)) \mu(dx) \\ &= \int_{\Omega} f(x)g(x) \mu(dx) + \int_{\Omega} f(x)h(x) \mu(dx) = \langle [f], [g] \rangle_{L^2(\mathcal{F})} + \langle [f], [h] \rangle_{L^2(\mathcal{F})}, \\ \langle [f], \alpha[g] \rangle_{L^2(\mathcal{F})} &= \langle [f], [\alpha g] \rangle_{L^2(\mathcal{F})} \\ &= \int_{\Omega} \alpha f(x)g(x) \mu(dx) = \alpha \int_{\Omega} f(x)g(x) \mu(dx) = \alpha \langle [f], [g] \rangle_{L^2(\mathcal{F})} \end{aligned}$$

が成り立つ.

そしてノルム空間としての完備性から  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  は Hilbert 空間となる.

条件付き期待値の存在  $\mathcal{G}$  を  $\mathcal{F}$  の部分  $\sigma$ -加法族として Hilbert 空間  $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  を考える. 任意の  $[g]_{\mathcal{G}} \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ <sup>\*1</sup> に対し  $g$  は可測  $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  であるから,  $g$  を代表とする  $[g]_{\mathcal{F}} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

<sup>\*1</sup>  $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  は  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  とは空間が違うから関数類の表示を変えた.



が存在するから、次の線型単射

$$J_{\mathcal{G}} : L^0(\Omega, \mathcal{G}, \mu) \ni [g]_{\mathcal{G}} \mapsto [g]_{\mathcal{F}} \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \quad (2.2)$$

によって  $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  は  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  に等長に埋め込まれ<sup>\*2</sup>,  $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  の完備性より  $J_{\mathcal{G}} L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  は  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  の閉部分空間となる. 任意の  $[f]_{\mathcal{F}} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  に対して  $J_{\mathcal{G}} L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  への射影を対応させる写像を  $P_{\mathcal{G}}$  と表し, また単射  $J_{\mathcal{G}}$  の値域を  $J_{\mathcal{G}} L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  に制限した全単射を  $T_{\mathcal{G}}$  と表す. この  $P_{\mathcal{G}}$  と  $T_{\mathcal{G}}^{-1}$  の合成写像

$$T_{\mathcal{G}}^{-1} P_{\mathcal{G}} : L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \longrightarrow L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu) \quad (2.3)$$

が条件付き期待値作用素となる.

**関数類と関数の表記** 以降は関数類と関数は表記上で区別することはあまりせず, 状況に応じて  $f$  を関数類  $[f]$ , 或は関数  $f$  の意味で扱う. またどの空間の関数類であるかを明示することもあまりない. 例えば関数  $f$  が  $\mathcal{G}$ -可測,  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  の場合, 関数類として書く  $f$  を  $L^0(\mathcal{G})$  の元として扱っているか  $L^0(\mathcal{F})$  の元として扱っているかは文脈による. ただし主に  $f(x)$  と表記しているときや計算中は関数として, 条件付き期待値を作用させる場合は関数類として扱う.

**定義 2.1.1** ( $L^2$  における条件付き期待値作用素). (2.3) で定めた  $T_{\mathcal{G}}^{-1} P_{\mathcal{G}}$  を

$$E[\cdot | \mathcal{G}] : L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \ni f \longrightarrow E[f | \mathcal{G}] \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu) \quad (2.4)$$

と表現し,  $\mathcal{G}$  で条件付けた条件付き期待値 (conditional expectation) と呼ぶ.  $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$  の場合は特別に  $E[\cdot] := E[\cdot | \mathcal{G}]$  と書いて期待値と呼ぶ.

<sup>\*2</sup> 任意の  $1 \leq p \leq \infty$  に対し  $L^p$  は  $L^0$  の部分集合であるから, 実際この単射は  $L^p(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  を  $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  に等長に埋め込む.

命題 2.1.2 (条件付き期待値作用素の性質). Hilbert 空間  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  における内積を  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\mathcal{F})}$ , ノルムを  $\|\cdot\|_{L^2(\mathcal{F})}$  と表記し,  $\mathcal{G}, \mathcal{H}$  を  $\mathcal{F}$  の部分  $\sigma$ -加法族とする.

C1 任意の  $f \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  に対して次が成り立つ:

$$E[f] = \int_{\Omega} f(x) \mu(dx).$$

C2 任意の  $f \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  と  $h \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  に対して次が成り立つ:

$$\int_{\Omega} f(x)h(x) \mu(dx) = \int_{\Omega} E[f | \mathcal{G}](x)h(x) \mu(dx).$$

C3 任意の  $f, f_1, f_2 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  と  $\alpha \in \mathbb{R}$  に対して次が成り立つ:

$$E[f_1 + f_2 | \mathcal{G}] = E[f_1 | \mathcal{G}] + E[f_2 | \mathcal{G}], \quad E[\alpha f | \mathcal{G}] = \alpha E[f | \mathcal{G}].$$

C4 任意の  $f_1, f_2 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  に対して次が成り立つ:

$$f_1 \leq f_2 \Rightarrow E[f_1 | \mathcal{G}] \leq E[f_2 | \mathcal{G}] \quad *^3$$

C5 任意の  $f \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  と  $g \in L^\infty(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  に対して次が成り立つ:

$$E[gf | \mathcal{G}] = g E[f | \mathcal{G}].$$

C6  $\mathcal{H}$  が  $\mathcal{G}$  の部分  $\sigma$ -加法族ならば, 任意の  $f \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  に対して次が成り立つ:

$$E[E[f | \mathcal{G}] | \mathcal{H}] = E[f | \mathcal{H}].$$

証明.

C1 (2.2) で定めた単射  $J_{\mathcal{G}}$  を  $J$  と表す.  $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$  とすれば,  $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  の元の代表は  $\mathcal{G}$ -可測でなくてはならないから定数関数である. 従って各  $g \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  にはただ一つの定数  $\alpha \in \mathbb{R}$  が対応して  $g(x) = \alpha (\forall x \in \Omega)$  と表すことができ, かつ関数  $g$  を代表とする  $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  の関数類は関数  $g$  のみからなる. 射影定理よりノルム  $\|f - Jg\|_{L^2(\mathcal{F})}$  を最小にする  $g \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  が  $E[f]$  である. 今  $g(x) = \alpha (\forall x \in \Omega)$  であるとして

$$\beta := \int_{\Omega} f(x) \mu(dx)$$

とおけば,

$$\begin{aligned} \|f - Jg\|_{L^2(\mathcal{F})}^2 &= \int_{\Omega} |f(x) - \alpha|^2 \mu(dx) \\ &= \int_{\Omega} |f(x)|^2 \mu(dx) - 2\alpha\beta + |\alpha|^2 \\ &= |\alpha - \beta|^2 + \int_{\Omega} |f(x) - \beta|^2 \mu(dx) \end{aligned}$$

\*3 関数類に対する順序 (式 (1.4)) を表している.

が成り立ち、最終式は  $\alpha = \int_{\Omega} f(x) \mu(dx)$  のとき最小となる。従って

$$E[f] = \int_{\Omega} f(x) \mu(dx)^{*4}$$

を得る。

**C2** (2.2) で定めた単射  $J_{\mathcal{G}}$  を  $J$  と表す。射影定理により、 $f \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  に対する  $E[f | \mathcal{G}]$  は

$$\langle f - JE[f | \mathcal{G}], h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} = 0 \quad (\forall h \in JL^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu))$$

を満たすから、内積の線型性より任意の  $h \in JL^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  に対して

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x)h(x) \mu(dx) &= \langle f, h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} \\ &= \langle JE[f | \mathcal{G}], h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} = \int_{\Omega} E[f | \mathcal{G}](x)h(x) \mu(dx) \end{aligned}$$

が成り立つ。

**C3** (2.2) で定めた単射  $J_{\mathcal{G}}$  を  $J$  と表す。

加法について 射影定理により任意の  $h \in JL^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  に対して

$$\begin{aligned} \langle (f_1 + f_2) - JE[f_1 + f_2 | \mathcal{G}], h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} &= 0, \\ \langle f_1 - JE[f_1 | \mathcal{G}], h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} &= 0, \quad \langle f_2 - JE[f_2 | \mathcal{G}], h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} = 0 \end{aligned}$$

が成り立つから、任意の  $h \in JL^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  に対して

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (f_1 + f_2) - JE[f_1 + f_2 | \mathcal{G}], h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} \\ &\quad - \langle f_1 - JE[f_1 | \mathcal{G}], h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} - \langle f_2 - JE[f_2 | \mathcal{G}], h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} \\ &= \langle JE[f_1 | \mathcal{G}] + JE[f_2 | \mathcal{G}] - JE[f_1 + f_2 | \mathcal{G}], h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} \end{aligned}$$

となり、特に  $h = JE[f_1 | \mathcal{G}] + JE[f_2 | \mathcal{G}] - JE[f_1 + f_2 | \mathcal{G}] \in JL^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  として

$$\| JE[f_1 | \mathcal{G}] + JE[f_2 | \mathcal{G}] - JE[f_1 + f_2 | \mathcal{G}] \|_{L^2(\mathcal{F})}^2 = 0$$

を得る。  $J$  の線型単射性により

$$E[f_1 | \mathcal{G}] + E[f_2 | \mathcal{G}] = E[f_1 + f_2 | \mathcal{G}]$$

が従う。

スカラ倍について 射影定理より任意の  $h \in JL^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  に対して

$$\langle f - JE[f | \mathcal{G}], h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} = 0, \quad \langle \alpha f - JE[\alpha f | \mathcal{G}], h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} = 0$$

が成り立つから

$$\begin{aligned} \langle JE[\alpha f | \mathcal{G}] - \alpha JE[f | \mathcal{G}], h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} \\ = \langle JE[\alpha f | \mathcal{G}] - \alpha f, h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} - \alpha \langle JE[f | \mathcal{G}] - f, h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} = 0 \end{aligned}$$

となる。特に  $h = JE[\alpha f | \mathcal{G}] - \alpha JE[f | \mathcal{G}] \in JL^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  として

$$\| JE[\alpha f | \mathcal{G}] - \alpha JE[f | \mathcal{G}] \|_{L^2(\mathcal{F})}^2 = 0$$

が得られ、 $J$  の線型単射性より  $E[\alpha f | \mathcal{G}] = \alpha E[f | \mathcal{G}]$  が従う。

<sup>\*4</sup> 本来恒等的に  $\int_{\Omega} f(x) \mu(dx)$  のみを取る定数関数を代表とする関数類が  $E[f]$  である。ただ実際  $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  と  $\mathbb{R}$  は一対一に対応しているからこのように表記する。

- C4 (2.2) で定めた単射  $J_{\mathcal{G}}$  を  $J$  と表す. 任意の  $f \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  に対して,  $f \geq 0$  ならば  $E[f | \mathcal{G}] \geq 0$  となることを示す. 実際これが示されれば,  $f_1, f_2 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  が  $f_1 \leq f_2$  を満たすとき

$$0 \leq f_2 - f_1 \Rightarrow 0 \leq E[f_2 - f_1 | \mathcal{G}] = E[f_2 | \mathcal{G}] - E[f_1 | \mathcal{G}]$$

が従う. 証明は背理法を使う.

$$A := \{x \in \Omega ; f(x) < 0\}, \quad B := \{x \in \Omega ; E[f | \mathcal{G}](x) < 0\}$$

とおき,  $\mu(A) = 0$  の下で  $\mu(B) > 0$  が成り立つと仮定して矛盾を導く.

$$h(x) := \begin{cases} E[f | \mathcal{G}](x) & (x \in \Omega \setminus B) \\ 0 & (x \in B) \end{cases}$$

として  $\mathcal{G}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ -可測関数を定義すれば

$$\begin{aligned} \|f - Jh\|_{L^2(\mathcal{F})}^2 &= \int_{\Omega} |f(x) - h(x)|^2 \mu(dx) \\ &= \int_{A^c \cap B^c} |f(x) - E[f | \mathcal{G}](x)|^2 \mu(dx) + \int_{A^c \cap B} |f(x)|^2 \mu(dx) \\ &< \int_{A^c \cap B^c} |f(x) - E[f | \mathcal{G}](x)|^2 \mu(dx) + \int_{A^c \cap B} |f(x) - E[f | \mathcal{G}](x)|^2 \mu(dx) \\ &= \|f - JE[f | \mathcal{G}]\|_{L^2(\mathcal{F})}^2 \end{aligned}$$

が成り立つ. 途中の不等号  $<$  は,  $\mu(A^c \cap B) = \mu(B) - \mu(A \cap B) = \mu(B) > 0$  であることと

$$0 \leq f(x) < f(x) - E[f | \mathcal{G}](x) \quad (\forall x \in A^c \cap B)$$

による. しかし

$$\|f - Jh\|_{L^2(\mathcal{F})} < \|f - JE[f | \mathcal{G}]\|_{L^2(\mathcal{F})}$$

を満たす  $h \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  が存在することは  $JE[f | \mathcal{G}]$  が  $f$  の射影であることに矛盾する. よって  $\mu(A) = 0$  の下では  $\mu(B) = 0$  でなくてはならず, 冒頭の主張が従う.

- C5 (2.2) で定めた単射  $J_{\mathcal{G}}$  を  $J$  と表す.  $\|E[gf | \mathcal{G}] - gE[f | \mathcal{G}]\|_{L^2(\mathcal{G})} = 0$  が成り立つことを示す. 任意の  $h \in JL^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  に対して

$$\langle JE[gf | \mathcal{G}] - JgE[f | \mathcal{G}], h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} = \langle JE[gf | \mathcal{G}] - gf, h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} + \langle gf - JgE[f | \mathcal{G}], h \rangle_{L^2(\mathcal{F})}$$

を考えると, 右辺が 0 になることが次のように証明される. 先ず右辺第一項について,  $gf$  は  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  に入る.  $g$  は或る  $\mu$ -零集合  $E \in \mathcal{G}$  を除いて有界であるから, 或る正数  $\alpha$  によって  $|g(x)| \leq \alpha$  ( $\forall x \in E^c$ ) と抑えられ,

$$\int_{\Omega} |g(x)f(x)|^2 \mu(dx) = \int_{E^c} |g(x)|^2 |f(x)|^2 \mu(dx) \leq \alpha^2 \int_{E^c} |f(x)|^2 \mu(dx) = \alpha^2 \int_{\Omega} |f(x)|^2 \mu(dx) < \infty$$

が成り立つからである. 従って射影定理により

$$\langle E[gf | \mathcal{G}] - gf, h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} = 0 \quad (\forall h \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)).$$

右辺第二項について,

$$\langle gf - gE[f|\mathcal{G}], h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} = \int_{\Omega} (f(x) - E[f|\mathcal{G}](x))g(x)h(x)\mu(dx) = \langle f - E[f|\mathcal{G}], gh \rangle_{L^2(\mathcal{F})}$$

であって, 先と同様の理由で  $gh \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  ( $\forall h \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ ) が成り立つから射影定理より

$$\langle gf - gE[f|\mathcal{G}], h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} = 0 \quad (\forall h \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu))$$

であると判明した. 始めの式に戻れば

$$\langle E[gh|\mathcal{G}] - gE[f|\mathcal{G}], h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} = 0 \quad (\forall h \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu))$$

が成り立つことになり, 特に  $h = E[gh|\mathcal{G}] - gE[f|\mathcal{G}] \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  に対しては

$$\|E[gh|\mathcal{G}] - gE[f|\mathcal{G}]\|_{L^2(\mathcal{F})}^2 = 0$$

となることから  $E[gh|\mathcal{G}] = gE[f|\mathcal{G}]$  が示された.

C6 (2.2) で定めた単射  $J_{\mathcal{G}}$  を  $J_1$  と表し, 同様に  $J_{\mathcal{H}}$  を  $J_2$  と表す. 今

$$J_2 L^2(\Omega, \mathcal{H}, \mu) \subset J_1 L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$$

が満たされているから, 射影定理より任意の  $h \in J_2 L^2(\Omega, \mathcal{H}, \mu)$  に対して

$$\begin{aligned} & \langle J_2 E[E[f|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] - J_2 E[f|\mathcal{H}], h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} \\ &= \langle J_2 E[E[f|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] - J_1 E[f|\mathcal{G}], h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} \\ & \quad + \langle J_1 E[f|\mathcal{G}] - f, h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} + \langle f - J_2 E[f|\mathcal{H}], h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} = 0 \end{aligned}$$

が成り立つ. 特に  $h = J_2 E[E[f|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] - J_2 E[f|\mathcal{H}] \in J_2 L^2(\Omega, \mathcal{H}, \mu)$  とすれば

$$\|J_2 E[E[f|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] - J_2 E[f|\mathcal{H}]\|_{L^2(\mathcal{F})}^2 = 0$$

が得られ,  $J_2$  の線型単射性より  $E[E[f|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = E[f|\mathcal{H}]$  が従う. ■

## 2.2 条件付き期待値作用素の拡張

命題 2.1.2 の C3 で示した通り, (2.4) で定めた条件付き期待値は  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  から  $JL^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  への線型作用素 (写像) である.  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  は  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  の部分空間であり, 同様に  $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  も  $L^1(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  の部分空間であるから, 条件付き期待値は  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  から  $L^1(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  への線型作用素でもある. 条件付き期待値が有界で, 且つ定義域  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  が  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  において稠密ならば, 定理 1.3.1 より条件付き期待値作用素は  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  上の線型写像に拡張可能となる.

補題 2.2.1 (条件付き期待値作用素の有界性).

$L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  から  $L^1(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  への線型作用素  $E[\cdot|\mathcal{G}]$  の作用素ノルムは 1 以下である:

$$\sup_{\substack{f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \\ f \neq 0}} \frac{\|E[f|\mathcal{G}]\|_{L^1(\mathcal{G})}}{\|f\|_{L^1(\mathcal{F})}} \leq 1.$$

証明. 命題 2.1.2 の C2 より, 任意の  $0 \neq f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  に対して

$$\begin{aligned} \|E[f | \mathcal{G}]\|_{L^1(\mathcal{G})} &= \int_{\Omega} |E[f | \mathcal{G}](x)| \mu(dx) \\ &= \int_{\Omega} E[f | \mathcal{G}](x) \mathbb{1}_{\{E[f | \mathcal{G}] \geq 0\}}(x) - E[f | \mathcal{G}](x) \mathbb{1}_{\{E[f | \mathcal{G}] < 0\}}(x) \mu(dx) \\ &= \int_{\Omega} f(x) \mathbb{1}_{\{E[f | \mathcal{G}] \geq 0\}}(x) - f(x) \mathbb{1}_{\{E[f | \mathcal{G}] < 0\}}(x) \mu(dx) \\ &\leq \int_{\Omega} |f(x)| \mathbb{1}_{\{E[f | \mathcal{G}] \geq 0\}}(x) + |f(x)| \mathbb{1}_{\{E[f | \mathcal{G}] < 0\}}(x) \mu(dx) \\ &= \|f\|_{L^1(\mathcal{F})}. \end{aligned}$$

が成り立つ. ■

定理 2.2.2 (条件付き期待値作用素の拡張). (2.4) で定めた条件付き期待値  $E[\cdot | \mathcal{G}]$  に対して, 作用素ノルムを変えない拡張線型作用素

$$\tilde{E}[\cdot | \mathcal{G}] : L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \ni f \mapsto \tilde{E}[f | \mathcal{G}] \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$$

が唯一つ存在する. ただし  $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$  の場合は特別に  $\tilde{E}[\cdot] := \tilde{E}[\cdot | \mathcal{G}]$  と表示する.

証明. 定理 1.3.1 より,  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  が  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  で稠密ならば補題 2.2.1 と併せて拡張可能となる. 今任意に  $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  を取り

$$f_n(x) := f(x) \mathbb{1}_{|f| \leq n}(x) \quad (\forall x \in \Omega, n = 1, 2, 3, \dots)$$

とおけば,  $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  であり, かつ Lebesgue の収束定理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^1(\mathcal{F})} = 0$$

が成り立つ. ■

補題 2.2.3 (凸関数は片側微分可能).  $\mathbb{R}$  から  $\mathbb{R}$  への凸関数は各点で左右の微係数が存在する.

証明.  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を凸関数とする. 先ず凸性から

$$\frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x} \leq \frac{\varphi(z) - \varphi(x)}{z - x} \leq \frac{\varphi(z) - \varphi(y)}{z - y} \quad (\forall x < y < z) \quad (2.5)$$

を得る. 今任意に  $x$  を取り固定する.  $x$  に単調減少で近づく点列  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  を一つ取れば, (2.5) より

$$\left( \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} \right)_{n=1}^{\infty}$$

は下に有界な単調減少列であり極限が存在する.  $x$  に単調減少で近づく別の点列  $(y_k)_{k=1}^{\infty}$  を取れば

$$\inf_{k \in \mathbb{N}} \frac{f(y_k) - f(x)}{y_k - x} \leq \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

となるから

$$\inf_{k \in \mathbb{N}} \frac{f(y_k) - f(x)}{y_k - x} \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x}$$

が成り立つ。逆向きの不等号も同様に成り立つから、極限は取る点列に依らず確定し  $\varphi$  は  $x$  で右側微係数を持つ。同様の理由で左側微係数も存在し、特に  $\varphi$  の連続性及び Borel 可測性が従う。 ■

命題 2.2.4 (拡張条件付き期待値の性質).  $\mathcal{G}, \mathcal{H}$  を  $\mathcal{F}$  の部分  $\sigma$ -加法族とする。

Č1 任意の  $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  に対して次が成り立つ:

$$\tilde{\mathbb{E}}[f] = \int_{\Omega} f(x) \mu(dx).$$

Č2 任意の  $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  と  $h \in L^\infty(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  に対して次が成り立つ:

$$\int_{\Omega} f(x)h(x) \mu(dx) = \int_{\Omega} \tilde{\mathbb{E}}[f | \mathcal{G}](x)h(x) \mu(dx).$$

Č3 任意の  $f, f_1, f_2 \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  と  $\alpha \in \mathbb{R}$  に対して次が成り立つ:

$$\tilde{\mathbb{E}}[f_1 + f_2 | \mathcal{G}] = \tilde{\mathbb{E}}[f_1 | \mathcal{G}] + \tilde{\mathbb{E}}[f_2 | \mathcal{G}], \quad \tilde{\mathbb{E}}[\alpha f | \mathcal{G}] = \alpha \tilde{\mathbb{E}}[f | \mathcal{G}].$$

Č4 任意の  $f_1, f_2 \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  に対して次が成り立つ:

$$f_1 \leq f_2 \quad \text{a.s.} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathbb{E}}[f_1 | \mathcal{G}] \leq \tilde{\mathbb{E}}[f_2 | \mathcal{G}] \quad \text{a.s.}$$

Č5  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を凸関数とする.  $f, \varphi(f) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ならば次が成り立つ:

$$\varphi(\mathbb{E}[f | \mathcal{G}]) \leq \mathbb{E}[\varphi(f) | \mathcal{G}].$$

この不等式を Jensen の不等式と呼ぶ。

Č6 任意の  $f \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  と  $g \in L^q(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  に対して次が成り立つ:

$$\tilde{\mathbb{E}}[gf | \mathcal{G}] = g \tilde{\mathbb{E}}[f | \mathcal{G}].$$

ただし  $p, q$  は  $1/p + 1/q = 1$ , ( $1 \leq p, q \leq \infty$ ) を満たし,  $p = 1$  ならば  $q = \infty$  とする。

Č7  $\mathcal{H}$  が  $\mathcal{G}$  の部分  $\sigma$ -加法族ならば, 任意の  $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  に対して次が成り立つ:

$$\tilde{\mathbb{E}}[\tilde{\mathbb{E}}[f | \mathcal{G}] | \mathcal{H}] = \tilde{\mathbb{E}}[f | \mathcal{H}].$$

証明.

Č1  $f$  に対して, (2.2) と同じように  $(f_n)_{n=1}^\infty \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  を作る. 命題 2.1.2 の C1 により

$$\tilde{\mathbb{E}}[f_n] = \int_{\Omega} f_n(x) \mu(dx) \quad (\forall n = 1, 2, \dots)$$

が満たされるから,  $\tilde{E}[\cdot]$  の有界性と Lebesgue の収束定理により

$$\left| \tilde{E}[f] - \int_{\Omega} f(x) \mu(dx) \right| \leq \|f - f_n\|_{L^1(\mathcal{F})} + \|f - f_n\|_{L^1(\mathcal{F})} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成り立つ.

$\tilde{C}2$   $f$  に対して, (2.2) と同じように  $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  を作る. 命題 2.1.2 の C2 により

$$\int_{\Omega} f_n(x) h(x) \mu(dx) = \int_{\Omega} \tilde{E}[f_n | \mathcal{G}](x) h(x) \mu(dx) \quad (\forall n = 1, 2, \dots)$$

が成り立つ. 補助定理 2.2.1 と Lebesgue の収束定理より

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} f(x) h(x) \mu(dx) - \int_{\Omega} \tilde{E}[f | \mathcal{G}](x) h(x) \mu(dx) \right| \\ & \leq \left| \int_{\Omega} f(x) h(x) \mu(dx) - \int_{\Omega} f_n(x) h(x) \mu(dx) \right| \\ & \quad + \left| \int_{\Omega} \tilde{E}[f_n | \mathcal{G}](x) h(x) \mu(dx) - \int_{\Omega} \tilde{E}[f | \mathcal{G}](x) h(x) \mu(dx) \right| \\ & \leq 2 \|h\|_{L^{\infty}(\mathcal{F}, \mu)} \|f - f_n\|_{L^1(\mathcal{F})} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

が成り立ち

$$\int_{\Omega} f(x) h(x) \mu(dx) = \int_{\Omega} \tilde{E}[f | \mathcal{G}](x) h(x) \mu(dx)$$

が従う.

$\tilde{C}3$  定理 2.2.2 より  $\tilde{E}[\cdot | \mathcal{G}]$  は線型作用素である.

$\tilde{C}4$   $\tilde{E}[\cdot | \mathcal{G}]$  が線型であるから, 命題 2.1.2 の C4 と同様に, 任意の  $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  に対して  $f \geq 0$  ならば  $\tilde{E}[f | \mathcal{G}] \geq 0$  となることを示せばよい.  $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  を取り

$$A := \{x \in \Omega ; f(x) < 0\}, \quad B := \{x \in \Omega ; \tilde{E}[f | \mathcal{G}](x) < 0\}$$

とおき,  $\mu(A) = 0$  の下で  $\mu(B) = 0$  が成り立つことを示す.  $f$  に対して, (2.2) と同じように  $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  を作る.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \Omega ; f_n(x) < 0\} \subset \{x \in \Omega ; f(x) < 0\}$$

が成り立つから,  $\mu(A) = 0$  の仮定と C4 により

$$\tilde{E}[f_n | \mathcal{G}] \geq 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が従う.

$$C_n := \{x \in \Omega ; \tilde{E}[f_n | \mathcal{G}](x) < 0\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad C := \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$$

とおけば  $\mu(C) = 0$  となり

$$\mu(B \cap C^c) = \mu(B) - \mu(B \cap C) = \mu(B)$$

が成り立つから,  $\mu(B \cap C^c) = 0$  を示せばよい.  $B \cap C^c$  の上では

$$|\tilde{E}[f | \mathcal{G}](x) - \tilde{E}[f_n | \mathcal{G}](x)| > 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$



より,

$$D_k := \{x \in B \cap A^c ; \quad |\tilde{E}[f|\mathcal{G}](x)| > 1/k\} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

とおけば

$$B \cap C^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$$

が満たされる. 全ての  $k \in \mathbb{N}$  に対して

$$\|\tilde{E}[f|\mathcal{G}] - \tilde{E}[f_n|\mathcal{G}]\|_{L^1(\mathcal{G})} \geq \int_{C_k} |\tilde{E}[f|\mathcal{G}](x) - \tilde{E}[f_n|\mathcal{G}](x)| \mu(dx) > \frac{\mu(C_k)}{k}$$

が成り立ち, 左辺は  $n \rightarrow \infty$  で 0 に収束するから  $\mu(C_k) = 0$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) が得られ

$$\mu(B) = \mu(B \cap C^c) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(D_k) = 0$$

が従う.

Č5 補題 2.2.3 より  $\varphi$  は各点  $x \in \mathbb{R}$  で右側接線を持つから, それを  $t \mapsto a_x t + b_x$  と表せば

$$\varphi(x) = \sup_{r \in \mathbb{Q}} \{a_r x + b_r\} \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad (2.6)$$

が成り立つ. 実際或る点  $x_0 \in \mathbb{R}$  で

$$\varphi(x_0) > \epsilon := \sup_{r \in \mathbb{Q}} \{a_r x_0 + b_r\} \quad (2.7)$$

が成り立つとする. 任意に  $\delta_1 > 0$  を取り

$$\alpha := |a_{x_0 - \delta_1}| \vee |a_{x_0 + \delta_1}|$$

とおけば, (2.5) より  $x \mapsto a_x$  は単調非減少であるから,  $|x_0 - r| < \delta_1$  を満たす  $r \in \mathbb{Q}$  に対し

$$|a_r| \leq \alpha$$

が成り立つ. また  $\varphi$  の連続性より或る  $\delta_2 > 0$  が存在して,  $|x_0 - r| < \delta_2$  となる限り

$$|\varphi(x_0) - \varphi(r)| < \frac{\epsilon}{2}$$

が満たされる. 従って

$$\delta_3 := \delta_1 \wedge \delta_2 \wedge \frac{\epsilon}{2\alpha} \quad *5$$

とおけば,  $|x_0 - r| < \delta_3$  を満たす  $r \in \mathbb{Q}$  に対して

$$|\varphi(x_0) - (a_r x_0 + b_r)| \leq |\varphi(x_0) - \varphi(r)| + |a_r| |x_0 - r| < \epsilon$$

となり (2.7) に矛盾する. 今, (2.6) より任意の  $a_r, b_r$  ( $r \in \mathbb{Q}$ ) に対して

$$\varphi(f(\omega)) \geq a_r f(\omega) + b_r \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

---

\*5  $\alpha = 0$  の場合は  $\delta_3 = \delta_1 \wedge \delta_2$  とおけばよい.

が成り立つから,  $\tilde{C}3$  と  $\tilde{C}4$  より

$$E[\varphi(f) | \mathcal{G}] \geq a_r E[f | \mathcal{G}] + b_r \quad (\forall r \in \mathbb{Q})$$

が従い

$$E[\varphi(f) | \mathcal{G}] \geq \varphi(E[f | \mathcal{G}])$$

を得る.

$\tilde{C}6$   $f, g$  に対して, (2.2) と同じように  $(f_n)_{n=1}^\infty, (g_n)_{n=1}^\infty$  を作る.  
 $p = 1$  の場合 命題 2.1.2 の  $C5$  より

$$\tilde{E}[gf_n | \mathcal{G}] = g\tilde{E}[f_n | \mathcal{G}] \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.8)$$

が成り立っている. 補助定理 2.2.1 と Lebesgue の収束定理より

$$\begin{aligned} \|\tilde{E}[gf | \mathcal{G}] - \tilde{E}[gf_n | \mathcal{G}]\|_{L^1(\mathcal{G})} &\leq \|gf - gf_n\|_{L^1(\mathcal{F})} \\ &\leq \|g\|_{L^\infty(\mathcal{F}, \mu)} \|f - f_n\|_{L^1(\mathcal{F})} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

が成り立ち, 同様にして

$$\|g\tilde{E}[f | \mathcal{G}] - g\tilde{E}[f_n | \mathcal{G}]\|_{L^1(\mathcal{G})} \leq \|g\|_{L^\infty(\mathcal{F})} \|f - f_n\|_{L^1(\mathcal{F})} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

も成り立つから, 式 (2.8) と併せて

$$\begin{aligned} &\|\tilde{E}[gf | \mathcal{G}] - g\tilde{E}[f | \mathcal{G}]\|_{L^1(\mathcal{G})} \\ &\leq \|\tilde{E}[gf | \mathcal{G}] - \tilde{E}[gf_n | \mathcal{G}]\|_{L^1(\mathcal{G})} + \|g\tilde{E}[f_n | \mathcal{G}] - g\tilde{E}[f | \mathcal{G}]\|_{L^1(\mathcal{G})} \\ &\longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

が従う.

$1 < p < \infty$  の場合  $f \in L^p(\mathcal{F}) \subset L^1(\mathcal{F}), g_n \in L^\infty(\mathcal{G})$  であるから, 前段の結果より

$$\tilde{E}[g_n f | \mathcal{G}] = g_n \tilde{E}[f | \mathcal{G}] \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.9)$$

が成り立つ. Jensen の不等式と Hölder の不等式より

$$\begin{aligned} \|\tilde{E}[gf | \mathcal{G}] - \tilde{E}[g_n f | \mathcal{G}]\|_{L^1(\mathcal{G})} &\leq \|gf - g_n f\|_{L^1(\mathcal{F})} \leq \|g - g_n\|_{L^q(\mathcal{G})} \|f\|_{L^p(\mathcal{F})}, \\ \|g_n \tilde{E}[f | \mathcal{G}] - g\tilde{E}[f | \mathcal{G}]\|_{L^1(\mathcal{G})} &\leq \|g_n - g\|_{L^q(\mathcal{G})} \|\tilde{E}[f | \mathcal{G}]\|_{L^p(\mathcal{F})} \leq \|g_n - g\|_{L^q(\mathcal{G})} \|f\|_{L^p(\mathcal{F})} \end{aligned}$$

が成り立つから, (2.9) と Lebesgue の収束定理より

$$\begin{aligned} &\|\tilde{E}[gf | \mathcal{G}] - g\tilde{E}[f | \mathcal{G}]\|_{L^1(\mathcal{G})} \\ &\leq \|\tilde{E}[gf | \mathcal{G}] - \tilde{E}[g_n f | \mathcal{G}]\|_{L^1(\mathcal{G})} + \|g_n \tilde{E}[f | \mathcal{G}] - g\tilde{E}[f | \mathcal{G}]\|_{L^1(\mathcal{G})} \\ &\longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

が従う.

$\tilde{C}7$   $f$  に対して, (2.2) と同じように  $(f_n)_{n=1}^\infty \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  を作る. 命題 2.1.2 の  $C6$  より

$$\tilde{E}[\tilde{E}[f_n | \mathcal{G}] | \mathcal{H}] = \tilde{E}[f_n | \mathcal{H}] \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.10)$$

が成り立っている。補助定理 2.2.1 と Lebesgue の収束定理より

$$\begin{aligned}\|\tilde{E}[f|\mathcal{H}] - \tilde{E}[f_n|\mathcal{H}]\|_{L^1(\mathcal{H})} &\leq \|f - f_n\|_{L^1(\mathcal{F})} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty), \\ \|\tilde{E}[\tilde{E}[f|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] - \tilde{E}[\tilde{E}[f_n|\mathcal{G}]|\mathcal{H}]\|_{L^1(\mathcal{H})} &\leq \|f - f_n\|_{L^1(\mathcal{F})} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)\end{aligned}$$

が成り立つから, (2.10) と併せて

$$\begin{aligned}\|\tilde{E}[\tilde{E}[f|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] - \tilde{E}[f|\mathcal{H}]\|_{L^1(\mathcal{H})} \\ \leq \|\tilde{E}[\tilde{E}[f|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] - \tilde{E}[\tilde{E}[f_n|\mathcal{G}]|\mathcal{H}]\|_{L^1(\mathcal{H})} + \|\tilde{E}[f|\mathcal{H}] - \tilde{E}[f_n|\mathcal{H}]\|_{L^1(\mathcal{H})} \\ \leq 2\|f - f_n\|_{L^1(\mathcal{F})} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)\end{aligned}$$

が従う。 ■

**定義 2.2.5 (条件付き期待値の再定義).** 定理 2.2.2 で定義した有界線型作用素  $\tilde{E}[\cdot|\mathcal{G}]$  を  $E[\cdot|\mathcal{G}]$  と表記し直し,  $\mathcal{G}$  で条件付けた条件付き期待値と呼ぶ.  $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$  の場合は特別に  $E[\cdot] := E[\cdot|\mathcal{G}]$  と書いて期待値と呼ぶ.

## 2.3 独立性

基礎におく確率空間を  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  とする. 任意の有界実連続関数  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  と任意の可測  $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  関数  $X$  に対して, その合成  $h(X)$  が  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  で可積分であることに注意すればその条件付き期待値を考えることができ, これを用いて独立性を次で定義する.

**定義 2.3.1 (独立性).**  $X$  を可測  $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  関数,  $\mathcal{G}$  を  $\mathcal{F}$  の部分  $\sigma$ -加法族とする. この下で  $X$  と  $\mathcal{G}$  が独立であることを以下で定義する:

任意の有界実連続関数  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  に対し次が成り立つ.

$$E[h(X)|\mathcal{G}] = E[h(X)] \quad P\text{-a.s.}$$

上で定義した独立性が,  $X$  の生成する  $\sigma$ -加法族と  $\mathcal{G}$  との間の  $\sigma$ -加法族としての独立性と同値であることを示す.

**命題 2.3.2 (独立性の同値条件).** 任意の有界実連続関数  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  に対し

$$E[h(X)|\mathcal{G}] = E[h(X)] \quad P\text{-a.s.}$$

が成立すること (—(1) とする) と,

$$P(X^{-1}(E) \cap A) = P(X^{-1}(E))P(A) \quad (\forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), A \in \mathcal{G})$$

が成立すること (—(2) とする) は同値である.

証明.

(1)  $\Rightarrow$  (2) について 示したいことは

$$\mathfrak{B}(\mathbb{R}) = \left\{ E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \mid P(X^{-1}(E) \cap A) = P(X^{-1}(E))P(A), \quad \forall A \in \mathcal{G} \right\}$$

である. 証明の手順としてまず上式右边が Dynkin 族となることを示し, 次に  $\mathbb{R}$  の閉集合系が右边に含まれることを示せば, Dynkin 族定理より上式が成立することが判る. 右边を

$$\mathcal{D} := \left\{ E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \mid P(X^{-1}(E) \cap A) = P(X^{-1}(E))P(A), \quad \forall A \in \mathcal{G} \right\}$$

とおいて表示を簡単にしておく.  $\mathcal{D}$  が Dynkin 族であることを示すには次の 3 条件を確認すればよい:

(i).  $\mathbb{R} \in \mathcal{D}$ ,

(ii).  $D_1, D_2 \in \mathcal{D}, D_1 \subset D_2 \Rightarrow D_2 - D_1 \in \mathcal{D}$ ,

(iii).  $D_n \in \mathcal{D}, D_n \cap D_m = \emptyset (n \neq m) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathcal{D}$

(i) について,  $\Omega = X^{-1}(\mathbb{R})$  により  $P(X^{-1}(\mathbb{R}) \cap A) = P(A) = P(X^{-1}(\mathbb{R}))P(A)$  ( $\forall A \in \mathcal{G}$ ) であるから  $\mathbb{R} \in \mathcal{D}$  となる. (ii) について,

$$\begin{aligned} P(X^{-1}(D_2 - D_1) \cap A) &= P(X^{-1}(D_2) \cap A) - P(X^{-1}(D_1) \cap A) \\ &= (P(X^{-1}(D_2)) - P(X^{-1}(D_1)))P(A) = P(X^{-1}(D_2 - D_1))P(A), \quad (\forall A \in \mathcal{G}) \end{aligned}$$

により  $D_2 - D_1 \in \mathcal{D}$  となる. (iii) について,

$$\begin{aligned} P(X^{-1}(\sum_{n=1}^{\infty} D_n) \cap A) &= P(\sum_{n=1}^{\infty} X^{-1}(D_n) \cap A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X^{-1}(D_n) \cap A) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(X^{-1}(D_n))P(A) = P(X^{-1}(\sum_{n=1}^{\infty} D_n))P(A), \quad (\forall A \in \mathcal{G}) \end{aligned}$$

により  $\sum_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathcal{D}$  となる. 以上で  $\mathcal{D}$  が Dynkin 族であることが判った. 次に  $\mathbb{R}$  の閉集合系が  $\mathcal{D}$  に含まれることを示す.  $E$  を  $\mathbb{R}$  の任意の閉集合とする.

$$d(\cdot, E) : \mathbb{R} \ni x \mapsto \inf\{|x - y| \mid y \in E\}$$

として集合との距離の関数を表せばこれは  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  の実連続関数であり,

$$h_n : \mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{1}{1 + nd(x, E)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

は有界実連続関数となる.  $E$  が閉集合であるから  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = \mathbb{1}_E(x)$  ( $\forall x \in \mathbb{R}$ ) であり, また  $h_n$  の有界連続性から  $h_n \circ X \in L^1(\mathcal{F}, \mu)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) であることに注意すれば, 任意の

$A \in \mathcal{G}$  に対して

$$\begin{aligned}
P(X^{-1}(E) \cap A) &= \int_{\Omega} \mathbb{1}_E(X(\omega)) \mathbb{1}_A(\omega) P(d\omega) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} h_n(X(\omega)) \mathbb{1}_A(\omega) P(d\omega) & (\because \text{Lebesgue の収束定理}) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} E[h_n(X) | \mathcal{G}](\omega) \mathbb{1}_A(\omega) P(d\omega) & (\because \text{定理 2.2}[\tilde{C}2]) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} E[h_n(X)] \int_{\Omega} \mathbb{1}_A(\omega) P(d\omega) & (\because (1) \text{ より, } E[h_n(X) | \mathcal{G}] \neq E[h_n(X)] \text{ の部分は積分に影響しない.}) \\
&= P(A) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} h_n(X(\omega)) P(d\omega) & (\because \text{定理 2.2}[\tilde{C}1]) \\
&= P(A) \int_{\Omega} \mathbb{1}_E(X(\omega)) P(d\omega) & (\because \text{Lebesgue の収束定理}) \\
&= P(X^{-1}(E)) P(A)
\end{aligned}$$

が成り立ち,  $\mathbb{R}$  の閉集合系が  $\mathcal{D}$  に含まれることが示された. 閉集合系は乗法族であり  $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  を生成するから (2) が成り立つと判明する.

(2)  $\Rightarrow$  (1) について 任意の  $A \in \mathcal{G}$  に対し

$$\int_{\Omega} \mathbb{1}_A(\omega) E[h(X) | \mathcal{G}](\omega) P(d\omega) = P(A) E[h(X)] = \int_{\Omega} \mathbb{1}_A(\omega) E[h(X)] P(d\omega)$$

が成立することをいえばよい. 有界実連続関数  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が非負であるとして  $h$  の単関数近似を考えると, 例えば

$$\begin{aligned}
E_n^j &:= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{j-1}{3^n} \leq h(x) < \frac{j}{3^n} \right\}, \quad (j = 1, 2, \dots, n3^n - 1, n = 1, 2, 3, \dots) \\
E_n^{n3^n} &:= \{ x \in \mathbb{R} \mid n \leq h(x) \}
\end{aligned}$$

として

$$h_n(x) = \sum_{j=1}^{n3^n} \frac{j}{3^n} \mathbb{1}_{E_n^j}(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}, n = 1, 2, 3, \dots)$$

とおけば,  $h$  が可測  $\mathfrak{B}(\mathbb{R})/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  であるから  $E_n^j$  は全て Borel 集合であり, 任意の  $A \in \mathcal{G}$  に対して

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \mathbb{1}_A(\omega) E[h(X) | \mathcal{G}](\omega) P(d\omega) &= \int_{\Omega} \mathbb{1}_A(\omega) h(X(\omega)) P(d\omega) & (\because \text{定理 2.2}[\tilde{C}2]) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \mathbb{1}_A(\omega) h_n(X(\omega)) P(d\omega) & (\because \text{積分の定義}) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n3^n} \int_{\Omega} \mathbb{1}_A(\omega) \mathbb{1}_{X^{-1}(E_n^j)}(\omega) P(d\omega) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n3^n} P(X^{-1}(E_n^j) \cap A) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n3^n} P(X^{-1}(E_n^j)) P(A) & (\because (2) \text{ より.})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= P(A) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n3^n} \int_{\Omega} \mathbb{1}_{X^{-1}(E_n^j)}(\omega) P(d\omega) \\
&= P(A) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} h_n(X(\omega)) P(d\omega) \\
&= P(A) \int_{\Omega} h(X(\omega)) P(d\omega) \\
&= P(A) E[h(X)]
\end{aligned}$$

が成り立つ．一般の有界実連続関数  $h$  についても  $\{x \in \mathbb{R} \mid h(x) \geq 0\}$  の部分と  $\{x \in \mathbb{R} \mid h(x) < 0\}$  の部分に分解して上と同様に考えれば

$$\int_{\Omega} \mathbb{1}_A(\omega) E[h(X) | \mathcal{G}](\omega) P(d\omega) = P(A) E[h(X)] \quad (\forall A \in \mathcal{G})$$

となる．従って  $\mathcal{G}$  の元  $\{\omega \in \Omega \mid E[h(X) | \mathcal{G}](\omega) > E[h(X)]\}$  も  $\{\omega \in \Omega \mid E[h(X) | \mathcal{G}](\omega) < E[h(X)]\}$  も  $P$ -零集合でなくてはならず，

$$E[h(X) | \mathcal{G}] = E[h(X)] \quad P\text{-a.s.}$$

が示された．

■

レポート問題 1.  $A, B \in \mathcal{F}$  に対し,  $X = \mathbb{1}_A$ ,  $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega, B, B^c\}$  とする．この時

$$X \text{ と } \mathcal{G} \text{ が独立} \iff P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

証明.  $\forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  に対して

$$X^{-1}(E) = \begin{cases} \emptyset & (0, 1 \notin E) \\ A & (0 \notin E, 1 \in E) \\ A^c & (0 \in E, 1 \notin E) \\ \Omega & (0, 1 \in E) \end{cases}$$

であることに注意する． $\Rightarrow$  については前命題より成り立ち， $\Leftarrow$  については

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

ならば

$$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A)P(B) = (1 - P(A))P(B) = P(A^c)P(B)$$

も成り立ち， $A$  を  $\Omega, \emptyset$  にしても上の等式は成り立つから，前命題により  $X$  と  $\mathcal{G}$  が独立であると判る．

■

## 第 3 章

# 停止時刻

### 3.1 停止時刻

確率空間を  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  とする. 集合  $I$  によって確率過程の時点を表現し, 以降でこれは  $[0, \infty)$  や  $\{0, 1, \dots, n\}$  など実数の区間や高々可算集合を指すものと考え,  $I$  が高々可算集合の場合は離散位相,  $\mathbb{R}$  の区間の場合は相対位相を考える. また扱う確率変数は全て実数値で考える.

**定義 3.1.1 (フィルトレーション).**  $\mathcal{F}$  の部分  $\sigma$ -加法族の部分系  $\{\mathcal{F}_\alpha; \alpha \in I\}$  がフィルトレーション (filtration) であるとは, 任意の  $\alpha, \beta \in I$  に対して  $\alpha \leq \beta$  ならば  $\mathcal{F}_\alpha \subset \mathcal{F}_\beta$  の関係をもつことで定義する.

**定義 3.1.2 (停止時刻).**  $\Omega$  上の関数で次を満たすものを  $(\mathcal{F}_\alpha)$ -停止時刻 (stopping time) という:

$$\tau : \Omega \longrightarrow I \quad \text{s.t.} \quad \forall \alpha \in I, \{\tau \leq \alpha\} \in \mathcal{F}_\alpha.$$

**注意 3.1.3 (停止時刻は可測).** 上で定義した  $\tau$  は可測  $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(I)$  である.

証明.

$I$  が  $\mathbb{R}$  の区間である場合 任意の  $\alpha \in I$  に対して  $I_\alpha := (-\infty, \alpha) \cap I$  は  $I$  における (相対の) 開集合であり  $\tau^{-1}(I_\alpha) = \{\tau \leq \alpha\} \in \mathcal{F}_\alpha \subset \mathcal{F}$  が成り立つ. つまり

$$\{I_\alpha; \alpha \in I\} \subset \{A \in \mathfrak{B}(I); \tau^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$$

が成り立ち, 左辺の  $I_\alpha$  の形の全体は  $\mathfrak{B}(I)$  を生成するから  $\tau$  の可測性が証明された.

$I$  が高々可算集合である場合 先ず  $\alpha \in I$  に対して  $\{\tau < \alpha\}$  が  $\mathcal{F}_\alpha$  に属することを示す.  $\alpha$  に対して直前の元  $\beta \in I$  が存在するか  $\alpha$  が  $I$  の最小限である場合, 前者なら  $\{\tau < \alpha\} = \{\tau \leq \beta\}$  となり後者なら  $\{\tau < \alpha\} = \emptyset$  となるからどちらも  $\mathcal{F}_\alpha$  に属する. そうでない場合は  $\alpha - 1/n < x < \alpha$  を満たす点列  $x_n \in I$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を取れば,  $\{\tau < \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\tau \leq \alpha - 1/n\}$  により  $\{\tau < \alpha\} \in \mathcal{F}_\alpha$  が判る. 以上の準備の下で任意の  $\alpha \in I$  に対して  $\tau^{-1}(\{\alpha\}) = \{\tau \leq \alpha\} - \{\tau < \alpha\} \in \mathcal{F}_\alpha$  が成り立ち, 更に可算集合  $I$  には離散位相が入っているから任意の  $A \in \mathfrak{B}(I)$  は一点集合の可算和で

表現できて,  $\tau^{-1}(A) \in \mathcal{F}$  であると証明された.

■

**定義 3.1.4 (停止時刻の再定義).** 今  $\tau$  の終集合は  $I$  であるが,  $I \rightarrow \mathbb{R}$  の恒等写像  $i$  を用いて  $\tau^* := i \circ \tau$  とすれば,

$$\mathfrak{B}(I) = \{ A \cap I ; \quad A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \} = \{ i^{-1}(A) ; \quad A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \}$$

により ( $i$  が可測  $\mathfrak{B}(I)/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  であるから) 合成写像  $\tau^*$  は可測  $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  となる. 以降はこの  $\tau^*$  を停止時刻  $\tau$  と表記して扱うことにする.

定数関数は停止時刻となる.  $\tau$  が  $\Omega$  上の定数関数なら ( $\tau \leq \alpha$ ) は空集合か全体集合にしかならないからである. また  $\sigma, \tau$  を  $I$  に値を取る停止時刻とすると  $\sigma \vee \tau$  と  $\sigma \wedge \tau$  も停止時刻となる. 実際

$$\begin{cases} \{\sigma \wedge \tau \leq \alpha\} = \{\sigma \leq \alpha\} \cup \{\tau \leq \alpha\}, \\ \{\sigma \vee \tau \leq \alpha\} = \{\sigma \leq \alpha\} \cap \{\tau \leq \alpha\} \end{cases}, (\forall \alpha \in I)$$

が成り立つからである.

**定義 3.1.5 (停止時刻の前に決まっている事象系).**  $\tau$  を  $I$  に値を取る停止時刻とする.  $\tau$  に対し次の集合系を定義する.

$$\mathcal{F}_\tau := \{ A \in \mathcal{F} ; \quad \{\tau \leq \alpha\} \cap A \in \mathcal{F}_\alpha, \forall \alpha \in I \}.$$

**命題 3.1.6 (停止時刻の性質).**  $I \subset \mathbb{R}$  に値を取る停止時刻  $\sigma, \tau$  に対し次が成り立つ.

- (1)  $\mathcal{F}_\tau$  は  $\sigma$ -加法族である.
- (2) 或る  $\alpha \in I$  に対して  $\tau(\omega) = \alpha$  ( $\forall \omega \in \Omega$ ) なら  $\mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F}_\tau$ .
- (3)  $\sigma(\omega) \leq \tau(\omega)$  ( $\forall \omega \in \Omega$ ) ならば  $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$ .
- (4)  $\mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau} = \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$ .
- (5)  $\mathcal{F}_{\sigma \vee \tau} = \mathcal{F}_\sigma \vee \mathcal{F}_\tau$ .

**証明.**

- (1) 停止時刻の定義より  $\Omega \in \mathcal{F}_\tau$  である. また  $A \in \mathcal{F}_\tau$  なら  $A^c \cap \{\tau \leq \alpha\} = \{\tau \leq \alpha\} - A \cap \{\tau \leq \alpha\} \in \mathcal{F}_\alpha$  より  $A^c \in \mathcal{F}_\tau$  となる. 可算個の  $A_n \in \mathcal{F}_\tau$  については  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap \{\tau \leq \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap \{\tau \leq \alpha\}) \in \mathcal{F}_\alpha$  により  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}_\tau$  が成り立つ.
- (2)  $A \in \mathcal{F}_\alpha$  なら任意の  $\beta \in I$  に対して

$$A \cap \{\tau \leq \beta\} = \begin{cases} A & \alpha \leq \beta \\ \emptyset & \alpha > \beta \end{cases}$$

が成り立つから, いずれの場合も  $A \in \mathcal{F}_\beta$  となり  $A \in \mathcal{F}_\tau$  が成り立つ. 逆に  $A \in \mathcal{F}_\tau$  のとき,  $A = A \cap \{\tau \leq \alpha\} \in \mathcal{F}_\alpha$  が成り立ち  $\mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F}_\tau$  が示された.



(3)  $A \in \mathcal{F}_\sigma$  なら任意の  $\alpha \in I$  に対して

$$A \cap \{\tau \leq \alpha\} = A \cap \{\sigma \leq \alpha\} \cap \{\tau \leq \alpha\} \in \mathcal{F}_\alpha$$

が成り立つから  $A \in \mathcal{F}_\tau$  となる.

(4)  $\sigma \wedge \tau$  が停止時刻であることと (3) より  $\mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau} \subset \mathcal{F}_\sigma$  と  $\mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau} \subset \mathcal{F}_\tau$  が判る. また  $A \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$  に対し

$$A \cap \{\sigma \wedge \tau \leq \alpha\} = (A \cap \{\sigma \leq \alpha\}) \cup (A \cap \{\tau \leq \alpha\}) \in \mathcal{F}_\alpha \quad (\forall \alpha \in I)$$

より  $A \in \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}$  も成り立つ.

(5) 先ず  $\sigma \vee \tau$  が停止時刻であることと (3) より  $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}$  と  $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}$  が判る. 逆に  $A \in \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}$  に対して

命題 3.1.7 (停止時刻と条件付き期待値).  $X \in L^1(\mathcal{F}, P)$  と  $I$  に値を取る停止時刻  $\sigma, \tau$  に対し以下が成立する.

- (1)  $E[\mathbb{1}_{(\sigma > \tau)} X \mid \mathcal{F}_\tau] = E[\mathbb{1}_{(\sigma > \tau)} X \mid \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}]$ .
- (2)  $E[\mathbb{1}_{(\sigma \geq \tau)} X \mid \mathcal{F}_\tau] = E[\mathbb{1}_{(\sigma \geq \tau)} X \mid \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}]$ .
- (3)  $E[E[X \mid \mathcal{F}_\tau] \mid \mathcal{F}_\sigma] = E[X \mid \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}]$ .

証明.

第一段  $\mathbb{1}_{(\sigma > \tau)}$  が可測  $\mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  であることを示す.  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  に対し

$$\mathbb{1}_{(\sigma > \tau)}^{-1}(A) = \begin{cases} \Omega & (0 \in A, 1 \in A) \\ (\sigma > \tau) & (0 \notin A, 1 \in A) \\ (\sigma > \tau)^c & (0 \in A, 1 \notin A) \\ \emptyset & (0 \notin A, 1 \notin A) \end{cases}$$

と表現できるから, 示すことは任意の  $\alpha \in I$  に対して

$$(\sigma > \tau) \cap (\sigma \wedge \tau \leq \alpha) \in \mathcal{F}_\alpha$$

が成立することである. これが示されれば

$$(\sigma > \tau)^c \cap (\sigma \wedge \tau \leq \alpha) = (\sigma \wedge \tau \leq \alpha) \setminus [(\sigma > \tau) \cap (\sigma \wedge \tau \leq \alpha)] \in \mathcal{F}_\alpha$$

も成り立ち, 更に  $(\sigma > \tau)^c = (\sigma \leq \tau)$  であることと  $\sigma, \tau$  の対等性により  $\mathbb{1}_{(\sigma \geq \tau)}$  もまた可測  $\mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  であることが判る. 目的の式は次が成り立つことにより示される.

$$\begin{aligned} (\sigma > \tau) \cap (\sigma \wedge \tau \leq \alpha) &= (\sigma > \tau) \cap (\sigma \leq \alpha) + (\sigma > \tau) \cap (\sigma > \alpha) \cap (\tau \leq \alpha) \\ &= \left[ \bigcup_{\substack{\beta \in \mathbb{Q} \cap I \\ \beta \leq \alpha}} (\sigma > \beta) \cap (\tau \leq \beta) \right] \cap (\sigma \leq \alpha) + (\sigma > \alpha) \cap (\tau \leq \alpha) \quad (3.1) \\ &\in \mathcal{F}_\alpha. \end{aligned}$$

第二段 一般の実確率変数  $Y$  と停止時刻  $\tau$  に対して

- $Y$  が可測  $\mathcal{F}_\tau/\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow$  任意の  $\alpha \in I$  に対し  $Y\mathbb{1}_{\tau \leq \alpha}$  が可測  $\mathcal{F}_\alpha/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$

が成り立つことを示す.

$\Rightarrow$  について  $Y$  の単関数近似列  $(Y_n)_{n=1}^\infty$  の一つ一つは  $Y_n = \sum_{j=1}^{N_n} a_{j,n} \mathbb{1}_{A_{j,n}}$  ( $A_{j,n} \in \mathcal{F}_\tau$ ) の形で表現できる.  $\alpha \in I$  と  $A \in \mathcal{F}_\tau$  の指示関数  $\mathbb{1}_A$  に対し

$$(\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{(\tau \leq \alpha)})^{-1}(E) = \begin{cases} \Omega & (0 \in E, 1 \in E) \\ A \cap (\tau \leq \alpha) & (0 \notin E, 1 \in E) \\ [A \cap (\tau \leq \alpha)]^c & (0 \in E, 1 \notin E) \\ \emptyset & (0 \notin E, 1 \notin E) \end{cases} \quad (\forall E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$$

となり,  $A \cap (\tau \leq \alpha) \in \mathcal{F}_\alpha$  より  $\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{(\tau \leq \alpha)}$  が可測  $\mathcal{F}_\alpha/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  であると判る.  $(Y_n)_{n=1}^\infty$  は  $Y$  に各点収束していくから  $Y$  も可測  $\mathcal{F}_\alpha/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  となり,  $\alpha \in I$  の任意性から” $\Rightarrow$ ” が示された.

$\Leftarrow$  について 任意の  $E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  に対して

$$\{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) \mathbb{1}_{(\tau \leq \alpha)}(\omega) \in E\} = \begin{cases} Y^{-1}(E) \cap (\tau \leq \alpha) & (0 \notin E) \\ Y^{-1}(E) \cap (\tau \leq \alpha) + (\tau \leq \alpha)^c & (0 \in E) \end{cases}$$

がいずれも  $\mathcal{F}_\alpha$  に属する. 特に下段について  $(\tau \leq \alpha)^c \in \mathcal{F}_\alpha$  より  $Y^{-1}(E) \cap (\tau \leq \alpha) \in \mathcal{F}_\alpha$  となるから, 結局  $Y^{-1}(E) \cap (\tau \leq \alpha) \in \mathcal{F}_\alpha$  ( $\forall E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ ) が成り立つ.  $\alpha \in I$  の任意性から  $Y^{-1}(E) \in \mathcal{F}_\tau$  ( $\forall E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ ) が示された.

第三段 (1) の式を示す. 第一段と性質  $\tilde{C}5$  より

$$E[\mathbb{1}_{(\sigma > \tau)} X \mid \mathcal{F}_\tau] = \mathbb{1}_{(\sigma > \tau)} E[X \mid \mathcal{F}_\tau]$$

が成り立つから, あとは右辺が (関数とみて) 可測  $\mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  であればよく, このためには第二段の結果より任意の  $\alpha \in I$  に対して  $E[X \mid \mathcal{F}_\tau] \mathbb{1}_{(\sigma > \tau)} \mathbb{1}_{(\sigma \wedge \tau \leq \alpha)}$  が可測  $\mathcal{F}_\alpha/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  であることを示せばよい. 式 (3.1) を使えば

$$\mathbb{1}_{(\sigma > \tau)} \mathbb{1}_{(\sigma \wedge \tau \leq \alpha)} = \sup_{\substack{\beta \in \mathbb{Q} \cap I \\ \beta \leq \alpha}} \mathbb{1}_{(\sigma > \beta)} \mathbb{1}_{(\tau \leq \beta)} \mathbb{1}_{(\sigma \leq \alpha)} + \mathbb{1}_{(\sigma > \alpha)} \mathbb{1}_{(\tau \leq \alpha)}$$

が成り立つ.  $\beta \leq \alpha$  ならば,  $E[X \mid \mathcal{F}_\tau]$  が可測  $\mathcal{F}_\tau/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  であることと第二段の結果より  $E[X \mid \mathcal{F}_\tau] \mathbb{1}_{(\tau \leq \beta)}$  が可測  $\mathcal{F}_\beta/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  すなわち可測  $\mathcal{F}_\alpha/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  となるから, これで  $E[X \mid \mathcal{F}_\tau] \mathbb{1}_{(\sigma > \tau)} \mathbb{1}_{(\sigma \wedge \tau \leq \alpha)}$  が可測  $\mathcal{F}_\alpha/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  であると判り  $\mathbb{1}_{(\sigma > \tau)} E[X \mid \mathcal{F}_\tau]$  が可測  $\mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  であることが示された. 以上で

$$E[E[\mathbb{1}_{(\sigma > \tau)} X \mid \mathcal{F}_\tau] \mid \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}] = E[\mathbb{1}_{(\sigma > \tau)} E[X \mid \mathcal{F}_\tau] \mid \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}] = \mathbb{1}_{(\sigma > \tau)} E[X \mid \mathcal{F}_\tau] = E[\mathbb{1}_{(\sigma > \tau)} X \mid \mathcal{F}_\tau]$$

が成り立ち,

$$E[E[\mathbb{1}_{(\sigma > \tau)} X \mid \mathcal{F}_\tau] \mid \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}] = \mathbb{1}_{(\sigma > \tau)} E[X \mid \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}] = E[\mathbb{1}_{(\sigma > \tau)} X \mid \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}]$$

と併せて (1) の式を得る. (2) の式も以上と同じ理由で成り立つ.

第四段 (3) の式を示す.

$$\begin{aligned}
E[E[X|\mathcal{F}_\tau]|\mathcal{F}_\sigma] &= E[E[X|\mathcal{F}_\tau]\mathbb{1}_{(\sigma>\tau)}|\mathcal{F}_\sigma] + E[E[X|\mathcal{F}_\tau]\mathbb{1}_{(\sigma\leq\tau)}|\mathcal{F}_\sigma] \\
&= E[E[X|\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}]\mathbb{1}_{(\sigma>\tau)}|\mathcal{F}_\sigma] + E[E[X|\mathcal{F}_\tau]\mathbb{1}_{(\sigma\leq\tau)}|\mathcal{F}_\sigma] \quad (\because (1)) \\
&= E[X|\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}]\mathbb{1}_{(\sigma>\tau)} + E[E[X|\mathcal{F}_\tau]\mathbb{1}_{(\sigma\leq\tau)}|\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}] \quad (\because (2)) \\
&= E[X|\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}]\mathbb{1}_{(\sigma>\tau)} + E[X|\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}]\mathbb{1}_{(\sigma\leq\tau)} \\
&= E[X|\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}].
\end{aligned}$$

(2) 式を使った箇所では  $X$  を  $E[X|\mathcal{F}_\tau]$  に置き換え  $\tau$  と  $\sigma$  を入れ替えて適用した.

定理 3.1.8 (停止時刻との合成写像の可測性).  $I = [0, T]$ , フィルトレーションを  $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ ,  $\tau$  を停止時刻とし,  $M$  を  $I \times \Omega$  上の  $\mathbb{R}$  値関数とする. 全ての  $\omega \in \Omega$  に対し  $I \ni t \mapsto M(t, \omega)$  が右連続でかつ  $(\mathcal{F}_t)$ -適合ならば, 写像  $\omega \mapsto M(\tau(\omega), \omega)$  は可測  $\mathcal{F}_\tau/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  となる.

証明. 任意に  $t \in I$  を取り  $t_j^n := jt/2^n$  ( $j = 0, 1, \dots, 2^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ) とおくと, 右連続性により任意の  $s \in [0, t]$  に対して

$$M(s, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{2^n} M_{t_j^n}(\omega) \mathbb{1}_{(t_{j-1}^n, t_j^n]}(s) + M_0(\omega) \mathbb{1}_{\{0\}}(s) \quad (\omega \in \Omega) \quad (3.2)$$

が成り立つ. 右辺は各  $n$  で可測  $\mathcal{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  であるから  $M$  も可測  $\mathcal{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  となる. ( $t$  の任意性から  $M$  は  $(\mathcal{F}_t)$ -発展的可測である.) 一方停止時刻  $\tau$  について,  $\tau \wedge t$  が可測  $\mathcal{F}_t/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  であるから

$$\Omega \ni \omega \mapsto (\tau(\omega) \wedge t, \omega) \in [0, t] \times \Omega$$

は可測  $\mathcal{F}_t/\mathcal{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t$  である. 従って合成写像

$$\Omega \ni \omega \mapsto M(\tau(\omega) \wedge t, \omega) \in \mathbb{R}$$

は可測  $\mathcal{F}_t/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  となる. 任意の  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  に対して

$$\{\omega \in \Omega; M(\tau(\omega), \omega) \in A\} \cap \{\tau \leq t\} = \{\omega \in \Omega; M(\tau(\omega) \wedge t, \omega) \in A\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

が成り立つから, 写像  $\omega \mapsto M(\tau(\omega), \omega)$  は可測  $\mathcal{F}_\tau/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  である<sup>\*1</sup>.

<sup>\*1</sup> 写像  $\omega \mapsto M(\tau(\omega), \omega)$  が可測  $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  となっていないことにはこの結論が従わない. この点を確認すれば, 式 (3.2) より  $M$  が可測  $\mathcal{B}(I) \times \mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  であることは確かであるから,  $\omega \mapsto (\tau(\omega), \omega)$  が可測  $\mathcal{F}/\mathcal{B}(I) \times \mathcal{F}$  であることと併せて写像  $\omega \mapsto M(\tau(\omega), \omega)$  が可測  $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  であることが判明する.

定理 3.1.9 (閉集合と停止時刻).  $I = [0, T] \subset \mathbb{R}$ ,  $(E, \rho)$  を距離空間,  $(X_t)_{t \in I}$  を  $E$  値確率変数の族とし,  $\mathcal{F}_0$  が  $\mu$ -零集合を全て含んでいると仮定する.  $\mu$ -零集合  $N$  を除いて  $I \ni t \mapsto X_t(\omega)$  が右連続で, かつ  $(X_t)_{t \in I}$  が  $(\mathcal{F}_t)$ -適合であるなら, 任意の閉集合  $F \subset E$  に対し

$$\tau(\omega) := \begin{cases} 0 & (\omega \in N) \\ \inf \{ t \in I ; X_t(\omega) \in F \} \wedge T & (\omega \in \Omega \setminus N)^{*2} \end{cases}$$

として  $\tau: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  を定めれば  $\tau$  は停止時刻となる. また  $N'$  ( $N \subset N'$ ) を除いて  $I \ni t \mapsto X_t(\omega)$  が連続であるなら

$$X_{t \wedge \tau(\omega)}(\omega) \in \{X_0(\omega)\} \cup F^{ic} \quad (\forall \omega \in N', t \in I)$$

が成り立つ. ただし  $F^i$  は  $F$  の内核を表し  $F^{ic}$  は  $F^i$  の補集合を表す.

確率空間が完備である場合は

$$\tau(\omega) := \inf \{ t \in I ; X_t(\omega) \in F \} \wedge T \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

として  $\tau$  は停止時刻となる. 実際任意の  $t \in I$  に対して,

$$\{\tau \leq t\} = \{\tau \leq t\} \cap N + \{\omega \in \Omega \setminus N ; \tau(\omega) \leq t\}$$

の右辺第一項は完備性より  $\mu$ -零集合, 第二項は以下で  $\mathcal{F}_t$  に属すると証明される.

証明.

$$D_t(\omega) := \begin{cases} 1 & (\omega \in N) \\ \inf \{ \rho(X_r(\omega), F) ; r \in ([0, t] \cap \mathbb{Q}) \cup \{t\} \} & (\omega \in \Omega \setminus N) \end{cases}$$

とおけば<sup>\*3</sup>,  $D_t$  は可測  $\mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  となる<sup>\*4</sup>. ここでは任意の  $t \in [0, T]$  に対して

$$\{\omega \in \Omega \setminus N ; \tau(\omega) \leq t\} = \{\omega \in \Omega \setminus N ; D_t(\omega) = 0\} \quad (3.3)$$

<sup>\*2</sup>  $\{t \in I ; X_t(\omega) \in F\} = \emptyset$  の場合は

$$\inf \{t \in I ; X_t(\omega) \in F\} = \infty$$

と考え,  $\tau(\omega) = T$  とする. 以後本稿でこのように表記する場合も同様に対処する.

<sup>\*3</sup>  $\rho(X_r(\omega), F) = \inf_{y \in F} \rho(X_r(\omega), y)$  である.

<sup>\*4</sup> 写像  $E \ni x \mapsto \rho(x, F) \in \mathbb{R}$  は連続であるから, 合成写像

$$\Omega \ni \omega \mapsto \rho(X_t(\omega), F)$$

は可測  $\mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  となる. 任意の  $\lambda \in \mathbb{R}$  に対し

$$\{\inf \{ \rho(X_r, F) ; r \in ([0, t] \cap \mathbb{Q}) \cup \{t\} \} \geq \lambda\} = \bigcap_{r \in ([0, t] \cap \mathbb{Q}) \cup \{t\}} \{\rho(X_r, F) \geq \lambda\}$$

となり右辺の各集合は  $\in \mathcal{F}_t$  であるから写像  $\Omega \ni \omega \mapsto \inf \{ \rho(X_r(\omega), F) ; r \in ([0, t] \cap \mathbb{Q}) \cup \{t\} \}$  も可測  $\mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  となる. 任意の  $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  に対し

$$D_t^{-1}(A) = \begin{cases} N \cup \{\inf \{ \rho(X_r, F) ; r \in ([0, t] \cap \mathbb{Q}) \cup \{t\} \} \in A\} & (1 \in A) \\ \{\inf \{ \rho(X_r, F) ; r \in ([0, t] \cap \mathbb{Q}) \cup \{t\} \} \in A\} & (1 \notin A) \end{cases}$$

となるが,  $N \in \mathcal{F}_0$  であるから  $D_t$  もまた可測  $\mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  となる.

が成り立つことを示す．実際これが示されれば任意の  $t \in I$  に対し

$$\{\tau \leq t\} = \begin{cases} \Omega & (t = T) \\ N + \{\omega \in \Omega \setminus N ; D_t(\omega) = 0\} & (t < T) \end{cases}$$

となるから  $\tau$  は停止時刻となる．式 (3.3) が成立することを示すには包含関係  $\subset, \supset$  のそれぞれを満たすことを確認すればよい．

⊂ について 任意に  $t \in [0, T)$  を固定する． $\tau(\omega) \leq t$  となる  $\omega \in \Omega \setminus N$  に対し  $s := \tau(\omega)$  とおくと  $X_s(\omega) \in F$  となる．もし  $X_s(\omega) \notin F$  であるとすれば， $F$  が閉集合であることと  $s \mapsto X_s(\omega)$  の右連続性から或る  $\delta > 0$  が存在し，任意の  $0 < h < \delta$  に対して  $X_{s+h}(\omega) \notin F$  となり  $s = \tau(\omega)$  であることに矛盾する．今  $\rho(X_s(\omega), F) = 0$  が示されたが， $D_t(\omega) = 0$  も成り立っている．実際もし  $D_t(\omega) > 0$  であるとすれば， $a := D_t(\omega)$  に対して

$$\rho(X_s(\omega), X_r(\omega)) < a/2$$

を満たす  $r \in ((s, t] \cap \mathbb{Q}) \cup \{t\}$  が存在するから

$$\rho(X_s(\omega), F) \geq \rho(X_r(\omega), F) - \rho(X_s(\omega), X_r(\omega)) > a - a/2 = a/2$$

となり矛盾が生じてしまう．

⊃ について 任意に  $t \in [0, T)$  を固定する． $D_t(\omega) = 0$  となる  $\omega \in \Omega \setminus N$  について

$$\rho(X_{s_n}(\omega), F) < 1/n$$

となるように  $s_n \in ([0, t] \cap \mathbb{Q}) \cup \{t\}$  を取ることができる． $(s_n)_{n=1}^\infty$  は  $[0, t]$  に集積点  $s$  を持ち， $F$  が閉であるから  $X_s(\omega) \in F$  となる．従って  $\tau(\omega) \leq s \leq t$  が成り立つ．

以上で  $\tau$  が停止時刻であることが示されたから，次に定理の後半の主張を示す． $N'$  を除いて  $I \ni t \mapsto X_t(\omega)$  が連続である場合， $\tau(\omega) = 0$  なら  $X_0(\omega) \in F$  である． $\tau(\omega) > 0$  のとき， $t < \tau(\omega)$  ( $\omega \in \Omega \setminus N'$ ) に対しては  $X_t(\omega) \in F^c$  が成り立っているから，示せばよいのは

$$X_{\tau(\omega)}(\omega) \in F^{ic} \tag{3.4}$$

が成り立つことである． $s = \tau(\omega)$  とおく．もし  $X_s(\omega) \in F^i$  であるとすれば連続性から或る  $\delta$  が存在し， $0 < h < \delta$  を満たす任意の  $h$  に対し

$$X_{s-h}(\omega) \in F^i$$

となるが，

$$s > s - h \geq \inf \{ t \in I ; X_t(\omega) \in F \}$$

が成り立ち矛盾が生じるから (3.4) が従う．

■

## 第 4 章

# マルチンゲール

### 4.1 Doob の不等式・任意抽出定理

$I$  を  $[0, \infty)$  の部分集合として基礎に置フィルター付き確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, (\mathcal{F}_t)_{t \in I})$  と表す.

**定義 4.1.1 (マルチンゲール).** フィルター付き確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, (\mathcal{F}_t)_{t \in I})$  上の実確率変数の族  $(M_t)_{t \in I} \subset \mathcal{L}^p(\mathcal{F}, \mu)$  ( $p \geq 1$ ) が次の四条件を満たすとき, これを  $L^p$ -劣マルチンゲール ( $L^p$ -submartingale) という.

(M.1)  $\forall t \in I$  に対し  $M_t$  は可測  $\mathcal{F}_t/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  である.

(M.2) 任意の  $s \leq t$  ( $s, t \in I$ ) に対し  $E[M_t | \mathcal{F}_s] \geq M_s$  (同値類に対する順序関係) が成り立つ.

(M.3) 各  $\omega \in \Omega$  において, 任意の  $t \in I$  で左極限が存在する:  $\exists \lim_{s \uparrow t} M_s(\omega) \in \mathbb{R}$ .

(M.4) 各  $\omega \in \Omega$  において, 任意の  $t \in I$  で右連続である:  $M_t(\omega) = \lim_{s \downarrow t} M_s(\omega)$ .

条件 (M.2) の不等号が逆向き " $\leq$ " の場合,  $(M_t)_{t \in I}$  を  $L^p$ -優マルチンゲール ( $L^p$ -supermartingale) といい, 劣かつ優マルチンゲールであるものをマルチンゲールという.

$\tau$  を停止時刻,  $(M_t)_{t \in I}$  を実確率変数の族とする.  $\tau(\Omega)$  が高々可算集合である場合,  $t$  に関する停止時刻との合成関数は

$$M_\tau = \sum_{t \in \tau(\Omega)} M_t \mathbf{1}_{\{\tau=t\}}$$

と表される. 全ての  $t \in \tau(\Omega)$  について  $M_t$  が可測  $\mathcal{F}_t/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  であるなら  $M_\tau$  は可測  $\mathcal{F}_\tau/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  である. なぜならば任意の  $t \in I$  と  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  に対して

$$\{M_\tau \in A\} \cap \{\tau \leq t\} = \bigcup_{\substack{s \in \tau(\Omega) \\ s \leq t}} \{M_s \in A\} \cap \{\tau = s\} \in \mathcal{F}_t$$

が成り立つからである.  $M_\tau$  の可測性を確認したところで次の定理を証明する.

**定理 4.1.2 (任意抽出定理 (1)).**  $I = \{0, 1, \dots, n\}$  とし, 実確率変数の族  $(M_t)_{t \in I}$  が  $L^p$ -劣マルチンゲールであるとする. このとき  $I$  に値を取る停止時刻  $\sigma$  と  $\tau$  について次が成立する:

$$E[M_\tau | \mathcal{F}_\sigma] \geq M_{\sigma \wedge \tau}. \quad (4.1)$$

$(M_t)_{t \in I}$  が  $L^p$ -マルチンゲールなら (4.1) は等号で成立する.

証明.

$\sigma \leq \tau$  の場合  $F_t := \mathbb{1}_{\{\sigma < t \leq \tau\}} (t \in I)$  とおくと,

$$\{\sigma < t \leq \tau\} = \{\sigma < t\} \cap \{t \leq \tau\} = \{\sigma \leq t-1\} \cap \{\tau \leq t-1\}^c$$

より  $F_t$  は可測  $\mathcal{F}_{t-1}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  となる.

$$N_0 = 0, \quad N_t := \sum_{s=0}^{t-1} F_{s+1}(M_{s+1} - M_s) \quad (t \in I \setminus \{0\})$$

として  $N$  を定めれば,  $N$  もまた  $L^p$ -劣マルチンゲールとなる. 実際  $N_t$  の右辺の最終項  $F_t(M_t - M_{t-1})$  が可測  $\mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  であるから  $N_t$  も可測  $\mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  であり, また  $M_t (t \in I)$  が  $p$  乗可積分であるからその有限個の結合で表現される  $N_t (t \in I)$  もまた  $p$  乗可積分となる. 更に  $s \leq t (s, t \in I)$  に対して

$$N_t - N_s = \sum_{u=s}^{t-1} F_{u+1}(M_{u+1} - M_u)$$

となるから, 命題 2.2.4 の  $\tilde{C}5$ ,  $\tilde{C}6$ , そして  $(M_t)_{t \in I}$  の劣マルチンゲール性より

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N_t - N_s | \mathcal{F}_s] &= \sum_{u=s}^{t-1} \mathbb{E}[F_{u+1}(M_{u+1} - M_u) | \mathcal{F}_s] \\ &= \sum_{u=s}^{t-1} \mathbb{E}[F_{u+1} \mathbb{E}[M_{u+1} - M_u | \mathcal{F}_u] | \mathcal{F}_s] \geq 0 \quad *1 \end{aligned}$$

が成り立ち  $(N_t)_{t \in I}$  の劣マルチンゲール性が従う.

$$N_n = \sum_{s=\sigma}^{\tau-1} (M_{s+1} - M_s) = M_\tau - M_\sigma$$

と表現すれば,  $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$  として

$$\mathbb{E}[M_\tau - M_\sigma] = \mathbb{E}[N_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[N_n | \mathcal{F}_0] | \mathcal{G}] \geq \mathbb{E}[N_0] = 0 \quad (4.2)$$

が成り立つ. 特に任意の  $E \in \mathcal{F}_\sigma$  に対して

$$\sigma_E(\omega) := \begin{cases} \sigma(\omega) & (\omega \in E) \\ n & (\omega \in \Omega \setminus E) \end{cases}, \quad \tau_E(\omega) := \begin{cases} \tau(\omega) & (\omega \in E) \\ n & (\omega \in \Omega \setminus E) \end{cases}$$

と定めれば  $\sigma_E, \tau_E$  も停止時刻となり<sup>\*2</sup>,  $\sigma_E \leq \tau_E$  を満たすから (4.2) より

$$\int_{\Omega} M(\tau_E(\omega), \omega) \mu(d\omega) \geq \int_{\Omega} M(\sigma_E(\omega), \omega) \mu(d\omega)$$

<sup>\*1</sup> 順序は関数類に対する順序であり, 0 は関数類の零元を表す.

<sup>\*2</sup> 任意の  $t \in I$  に対し

$$\{\tau_E \leq t\} = \{\tau_E \leq t\} \cap E + \{\tau_E \leq t\} \cap (\Omega \setminus E) = \begin{cases} \{\tau \leq t\} \cap E & (t < n) \\ \Omega & (t = n) \end{cases}$$

が成り立つ.  $\mathcal{F}_\sigma$  の定義より  $\{\tau \leq t\} \cap E \in \mathcal{F}_t$  である.

が成り立つ． $\tau_E$  の定め方より

$$\int_{\Omega} M(\tau_E(\omega), \omega) \mu(d\omega) = \int_E M(\tau(\omega), \omega) \mu(d\omega) + \int_{\Omega \setminus E} M(n, \omega) \mu(d\omega)$$

とでき， $\sigma_E$  についても同じ表現ができるから

$$\int_E M(\tau(\omega), \omega) \mu(d\omega) \geq \int_E M(\sigma(\omega), \omega) \mu(d\omega)$$

が従う．よって命題 2.2.4 の  $\tilde{C}2$  より

$$\int_E E[M_{\tau} | \mathcal{F}_{\sigma}](\omega) \mu(d\omega) \geq \int_E M(\sigma(\omega), \omega) \mu(d\omega)$$

が成り立ち， $E \in \mathcal{F}_{\sigma}$  の任意性により

$$E[M_{\tau} | \mathcal{F}_{\sigma}] \geq M_{\sigma} = M_{\sigma \wedge \tau}$$

を得る．

一般の場合  $\sigma, \tau$  を一般の停止時刻とする．命題 3.1.7 より

$$\begin{aligned} E[M_{\tau} | \mathcal{F}_{\sigma}] &= E[M_{\tau} \mathbb{1}_{\{\tau > \sigma\}} | \mathcal{F}_{\sigma}] + E[M_{\tau} \mathbb{1}_{\{\tau \leq \sigma\}} | \mathcal{F}_{\sigma}] \\ &= E[M_{\tau \vee \sigma} \mathbb{1}_{\{\tau > \sigma\}} | \mathcal{F}_{\sigma}] + E[M_{\tau \wedge \sigma} \mathbb{1}_{\{\tau \leq \sigma\}} | \mathcal{F}_{\sigma}] \\ &\geq M_{\sigma} \mathbb{1}_{\{\tau > \sigma\}} + M_{\tau \wedge \sigma} \mathbb{1}_{\{\tau \leq \sigma\}} = M_{\tau \wedge \sigma} \end{aligned}$$

が成り立つ．

■

定理 4.1.3 (Doob の不等式 (1)).  $I = \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$  をフィルトレーション,  $(M_t)_{t \in I}$  を  $L^1$ -劣マルチンゲールとし,  $M^* := \max_{t \in I} M_t$  とおく． $(M_t)_{t \in I}$  が非負値なら次が成り立つ:

(1) 任意の  $\lambda > 0$  に対して

$$\mu(M^* \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\{M^* \geq \lambda\}} M_n(\omega) \mu(d\omega) \leq \frac{1}{\lambda} \|M_n\|_{\mathcal{L}^1}.$$

(2) 任意の  $p > 1$  に対して  $M_t$  ( $\forall t \in I$ ) が  $p$  乗可積分なら

$$\|M^*\|_{\mathcal{L}^p} \leq \frac{p}{p-1} \|M_n\|_{\mathcal{L}^p}.$$

証明.

$$\tau(\omega) := \min \{ i \in I ; M_i(\omega) \geq \lambda \} \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

とおけば  $\tau$  は  $I$  に値を取る停止時刻となる．ただし全ての  $i \in I$  で  $M_i(\omega) < \lambda$  となるような  $\omega$  につ



いては  $\tau(\omega) = n$  とする． 実際停止時刻となることは

$$\begin{aligned}\{\tau = i\} &= \bigcap_{j=0}^{i-1} \{M_j < \lambda\} \cap \{M_i \geq \lambda\} \in \mathcal{F}_i, \quad (i = 0, 1, \dots, n-1), \\ \{\tau = n\} &= \bigcap_{j=0}^{n-1} \{M_j < \lambda\} \in \mathcal{F}_n\end{aligned}$$

により判る． 任意抽出定理より

$$\mathbb{E}[M_n \mid \mathcal{F}_\tau] \geq M_{n \wedge \tau} = M_\tau \quad (\because \tau \leq n)$$

が成り立つから， 期待値を取って

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} M_n(\omega) \mu(d\omega) &\geq \int_{\Omega} M_\tau(\omega) \mu(d\omega)^{*3} \\ &= \int_{\{M^* \geq \lambda\}} M_\tau(\omega) \mu(d\omega) + \int_{\{M^* < \lambda\}} M_\tau(\omega) \mu(d\omega) \\ &\geq \lambda \mu(M^* \geq \lambda)^{*4} + \int_{\{M^* < \lambda\}} M_n(\omega) \mu(d\omega) \quad (\because M^*(\omega) < \lambda \text{ ならば } \tau(\omega) = n \text{ である.})\end{aligned}$$

が成り立つ． 従って

$$\lambda \mu(M^* \geq \lambda) \leq \int_{\{M^* \geq \lambda\}} M_n(\omega) \mu(d\omega) \leq \|M_n\|_{\mathcal{L}^1} \quad (4.3)$$

を得る． これは

$$\mu(M^* > \lambda) \leq \int_{\{M^* > \lambda\}} M_n(\omega) \mu(d\omega) \quad (4.4)$$

としても成り立つ<sup>\*5</sup>． 次に (2) を示す．  $K \in \mathbb{N}$  とする．

$$\begin{aligned}\|M^* \wedge K\|_{\mathcal{L}^p}^p &= \int_{\Omega} |M^*(\omega) \wedge K|^p \mu(d\omega) \\ &= p \int_{\Omega} \int_0^{M^*(\omega) \wedge K} t^{p-1} dt \mu(d\omega) \\ &= p \int_{\Omega} \int_0^K t^{p-1} \mathbb{1}_{\{M^*(\omega) > t\}} dt \mu(d\omega)^{*6}\end{aligned}$$

---

<sup>\*4</sup> 性質  $\tilde{C}2$  より

$$\int_{\Omega} M_n(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\Omega} \mathbb{E}[M_n \mid \mathcal{F}_\tau](\omega) \mu(d\omega) \geq \int_{\Omega} M_\tau(\omega) \mu(d\omega)$$

が成り立つ．

<sup>\*4</sup> 最後の不等式は次の理由で成り立つ:

$$M_\tau \mathbb{1}_{\{M^* \geq \lambda\}} = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \mathbb{1}_{\{\tau=i\}} + M_n \mathbb{1}_{\{\tau=n\}} \mathbb{1}_{\{M^* \geq \lambda\}} \geq \lambda.$$

<sup>\*5</sup> 式 (4.3) により任意の  $n \in \mathbb{N}$  で

$$\mu(M^* \geq \lambda + 1/n) \leq \int_{\{M^* \geq \lambda + 1/n\}} M_n(\omega) \mu(d\omega)$$

が成り立っているから，  $n \rightarrow \infty$  とすればよい．

$$\begin{aligned}
&= p \int_0^K t^{p-1} \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{M^*(\omega) > t\}} \mu(d\omega) dt && (\because \text{Fubini の定理より}) \\
&= p \int_0^K t^{p-1} \mu(M^* > t) dt \\
&\leq p \int_0^K t^{p-2} \int_{\{M^* > t\}} M_n(\omega) \mu(d\omega) && (\because \text{式 (4.4) より}) \\
&= p \int_{\Omega} M_n(\omega) \int_0^K t^{p-2} \mathbb{1}_{\{M^*(\omega) > t\}} dt \mu(d\omega) \\
&= \frac{p}{p-1} \int_{\Omega} M_n(\omega) |M^*(\omega) \wedge K|^{p-1} \mu(d\omega) \\
&\leq \frac{p}{p-1} \|M_n\|_{\mathcal{L}^p} \|M^*(\omega) \wedge K\|_{\mathcal{L}^p}^{p-1}
\end{aligned}$$

となるから,

$$\|M^* \wedge K\|_{\mathcal{L}^p} \leq \frac{p}{p-1} \|M_n\|_{\mathcal{L}^p}$$

が成り立つ.  $K \rightarrow \infty$  として単調収束定理より

$$\|M^*\|_{\mathcal{L}^p} \leq \frac{p}{p-1} \|M_n\|_{\mathcal{L}^p}$$

を得る. ■

$I = [0, T] \subset \mathbb{R}$  ( $T > 0$ ) を考える.  $t \mapsto M_t$  は右連続であるから  $\sup_{t \in I} M_t$  は確率変数となる. これは

$$\sup_{t \in I} M_t(\omega) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \max_{j=0,1,\dots,2^n} M_{\frac{j}{2^n}T}(\omega) \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

が成り立つからである. 実際各点  $\omega \in \Omega$  で

$$\alpha = \alpha(\omega) := \sup_{t \in I} M_t(\omega), \quad \beta = \beta(\omega) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \max_{j=0,1,\dots,2^n} M_{\frac{j}{2^n}T}(\omega)$$

とおけば,  $\alpha$  の方が上限を取る範囲が広いから  $\alpha \geq \beta$  は成り立つ. だがもし  $\alpha > \beta$  とすれば, 或る  $s \in I$  が存在して

$$M_s(\omega) > \frac{\alpha + \beta}{2}$$

---

\*6 写像  $[0, K] \times \Omega \ni (t, \omega) \mapsto \mathbb{1}_{\{M^*(\omega) > t\}}$  は可測  $\mathfrak{B}([0, K]) \times \mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  である. 実際,

$$f(t, \omega) := \mathbb{1}_{\{M^*(\omega) > t\}}, \quad f_n(t, \omega) := \mathbb{1}_{\{M^*(\omega) > (j+1)/2^n\}} \quad (t \in [\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}), j = 0, 1, \dots, K2^n - 1)$$

とおけば, 任意の  $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  に対して

$$f_n^{-1}(A) = \begin{cases} \emptyset & (0 \notin A, 1 \notin A) \\ \bigcup_{j=0}^{K2^n-1} \left[ \frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n} \right) \times \left\{ \omega ; M^*(\omega) > \frac{j+1}{2^n} \right\} & (0 \notin A, 1 \in A) \\ \bigcup_{j=0}^{K2^n-1} \left[ \frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n} \right) \times \left\{ \omega ; M^*(\omega) \leq \frac{j+1}{2^n} \right\} & (0 \in A, 1 \notin A) \\ [0, n] \times \Omega & (0 \in A, 1 \in A) \end{cases}$$

が成り立つから  $f_n$  は可測  $\mathfrak{B}([0, K]) \times \mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  である. また各点  $(t, \omega) \in [0, K] \times \Omega$  において

$$f(t, \omega) - f_n(t, \omega) = \mathbb{1}_{\{t < M^*(\omega) \leq (j+1)/2^n\}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となり  $f_n$  は  $f$  に各点収束するから, 可測性は保存され  $f$  も可測  $\mathfrak{B}([0, K]) \times \mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  となる.  $t^{p-1}$  も 2 変数関数として  $g(t, \omega) := t^{p-1} \mathbb{1}_{\Omega}(\omega)$  と見做せば可測  $\mathfrak{B}([0, K]) \times \mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  で, よって  $gf$  に対し Fubini の定理を適用できる.

を満たすから、右連続性により  $s$  の近傍から  $jT/2^n$  の形の点を取ることができて

$$(\beta \geq) M_{\frac{j}{2^n}T}(\omega) > \frac{\alpha + \beta}{2}$$

となりこれは矛盾である。

定理 4.1.4 (Doob の不等式 (2)).  $I = [0, T]$ ,  $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$  をフィルトレーション,  $(M_t)_{t \in I}$  を  $L^p$ -劣マルチンゲールとし,  $M^* := \sup_{t \in I} M_t$  とおく.  $(M_t)_{t \in I}$  が非負値なら次が成り立つ:

(1) 任意の  $\lambda > 0$  に対して

$$\mu(M^* \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^p} \|M_T\|_{\mathcal{L}^p}^p.$$

(2)  $p > 1$  なら

$$\|M^*\|_{\mathcal{L}^p} \leq \frac{p}{p-1} \|M_T\|_{\mathcal{L}^p}.$$

証明.

$$D_n := \left\{ \frac{j}{2^n}T ; \quad j = 0, 1, \dots, 2^n \right\}$$

とおく. Jensen の不等式より, 任意の  $0 \leq s < t \leq T$  に対して

$$\mathbb{E}[M_t^p | \mathcal{F}_s] \geq \mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s]^p \leq M_s^p$$

が成り立つ. 従って  $(M_t^p)_{t \in I}$  は  $L^1$ -劣マルチンゲールであり, 前定理の結果を使えば

$$\mu(\max_{r \in D_n} M_r^p \geq \lambda^p) \leq \frac{1}{\lambda^p} \|M_T\|_{\mathcal{L}^p}^p$$

が任意の  $n \in \mathbb{N}$  で成り立つ. 非負性から  $\max_{r \in D_n} M_r^p = (\max_{r \in D_n} M_r)^p$  となり

$$\mu(\max_{r \in D_n} M_r \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^p} \|M_T\|_{\mathcal{L}^p}^p$$

と書き直すことができ,

$$\mu(M^* \geq \lambda) = \mu(\sup_{n \in \mathbb{N}} \max_{r \in D_n} M_r \geq \lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\max_{r \in D_n} M_r \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^p} \|M_T\|_{\mathcal{L}^p}^p$$

が成り立つ. 同じく前定理<sup>\*7</sup>を適用し,

$$\left\| \max_{r \in D_n} M_r \right\|_{\mathcal{L}^p} \leq \frac{p}{p-1} \|M_T\|_{\mathcal{L}^p}$$

を保って  $n \rightarrow \infty$  とすれば単調収束定理より (2) を得る. ■

<sup>\*7</sup>  $L^p$ -劣マルチンゲールなら  $L^1$ -劣マルチンゲールであるから前定理の結果を適用できる.

定理 4.1.5 (任意抽出定理 (2)).  $I = [0, T]$ ,  $p > 1$ ,  $(M_t)_{t \in I}$  を  $L^p$ -マルチンゲールとする. このとき  $I$  に値を取る任意の停止時刻  $\tau, \sigma$  に対し次が成り立つ:

$$E[M_\tau | \mathcal{F}_\sigma] = M_{\tau \wedge \sigma}.$$

証明.

$$\tau_n := \min \left\{ T, \frac{1 + [2^n \tau]}{2^n} \right\}, \quad \sigma_n := \min \left\{ T, \frac{1 + [2^n \sigma]}{2^n} \right\}, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とおく. このとき  $\tau_n, \sigma_n$  は停止時刻で  $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_{\sigma_n}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) が成り立つ. 実際任意の  $0 \leq t < T$  に対して

$$\{\tau_n \leq t\} = \{1 + [2^n \tau] \leq 2^n t\} = \{\tau_n \leq [2^n t]/2^n\} \in \mathcal{F}_t$$

となり,  $t = T$  の時も

$$\{\tau_n \leq T\} = \{1 + [2^n \tau] > 2^n T\} + \{1 + [2^n \tau] \leq 2^n T\} \in \mathcal{F}_T$$

が成り立つから  $\tau_n$  は停止時刻\*8で,

$$2^n \sigma_n \leq 1 + [2^n \sigma] \Rightarrow \sigma < \sigma_n$$

により  $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_{\sigma_n}$  となる. 前定理により任意の  $A \in \mathcal{F}_\sigma$  に対して

$$\int_A M_{\tau_n(\omega)}(\omega) \mu(d\omega) = \int_A M_{\tau_n(\omega) \wedge \sigma_n(\omega)}(\omega) \mu(d\omega)$$

が成り立ち,  $(|M_t|)_{t \in I}$  が  $L^p$ -劣マルチンゲールであることから Doob の不等式により  $\sup_{t \in I} M_t$  は可積分である\*9. 従って  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \tau$  と  $M$  の右連続性から, Lebesgue の収束定理より

$$\begin{aligned} \int_A M_{\tau(\omega)}(\omega) \mu(d\omega) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A M_{\tau_n(\omega)}(\omega) \mu(d\omega) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A M_{\tau_n(\omega) \wedge \sigma_n(\omega)}(\omega) \mu(d\omega) = \int_A M_{\tau(\omega) \wedge \sigma(\omega)}(\omega) \mu(d\omega) \end{aligned}$$

が成り立つ. ■

## 4.2 二次変分

以降では  $I := [0, T]$  ( $T > 0$ ) とし, このフィルトレーション  $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$  が次の仮定を満たす:

$$\mathcal{N} := \{ N \in \mathcal{F} ; \quad \mu(N) = 0 \} \subset \mathcal{F}_0.$$

以下, いくつか集合を定義する.

\*8 もとより  $\tau_n$  は可測関数である.  $\mathbb{R} \ni x \mapsto [x] \in \mathbb{R}$  は可測  $\mathcal{B}(\mathbb{R})/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  であるから  $[2^n \tau]$  は可測  $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  であり, 従って  $\tau_n$  も可測  $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  となっている.

\*9  $\sup_{t \in I} |M_t|^p = (\sup_{t \in I} |M_t|)^p$  である.

(1)  $\mathcal{A}^+ \quad \mathcal{A}^+$  は以下を満たす  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  上の可測関数族  $A = (A_t)_{t \in I}$  の全体である.

適合性 任意の  $t \in I$  に対し, 写像  $\Omega \ni \omega \mapsto A_t(\omega) \in \mathbb{R}$  は可測  $\mathcal{F}_t / \mathcal{B}(\mathbb{R})$  である.

連続性  $\mu$ -a.s. に写像  $I \ni t \mapsto A_t(\omega) \in \mathbb{R}$  が連続である.

単調非減少性  $\mu$ -a.s. に写像  $I \ni t \mapsto A_t(\omega) \in \mathbb{R}$  が単調非減少である.

(2)  $\mathcal{A} \quad \mathcal{A} := \{A^1 - A^2; \quad A^1, A^2 \in \mathcal{A}^+\}$  と定義する.  $\mu$ -a.s. に写像  $t \mapsto A_t^1(\omega)$  と  $t \mapsto A_t^2(\omega)$  が連続かつ単調非減少となるからすなわち  $\mu$ -a.s. に写像  $t \mapsto A_t^1(\omega) - A_t^2(\omega)$  は有界連続となっている.

(3)  $\mathcal{M}_{p,c} \quad (p \geq 1) \quad \mathcal{M}_{p,c}$  は以下を満たす可測関数族  $M = (M_t)_{t \in I} \subset \mathcal{L}^p(\mathcal{F}, \mu)$  の全体である.

0 出発  $M_0 = 0 \quad \mu$ -a.s. を満たす.

$L^p$ -マルチンゲール  $M = (M_t)_{t \in I}$  は  $L^p$ -マルチンゲールである.

連続性  $\mu$ -a.s.  $\omega$  に対し写像  $I \ni t \mapsto M_t(\omega) \in \mathbb{R}$  が連続である.

(4)  $\mathcal{M}_{b,c} \quad \mathcal{M}_{b,c}$  は  $\mu$ -a.s. に連続で一様有界な  $L^1$ -マルチンゲールの全体とする. つまり

$$\mathcal{M}_{b,c} := \left\{ M = (M_t)_{t \in I} \in \mathcal{M}_{1,c}; \quad \sup_{t \in I} \|M_t\|_{\mathcal{L}^\infty} < \infty \right\}$$

として定義されている.

(5)  $\mathcal{T} \quad \mathcal{T}$  は以下を満たすような,  $I$  に値を取る停止時刻の列  $(\tau_j)_{j=1}^\infty$  の全体とする.

a)  $\tau_0 = 0 \quad \mu$ -a.s.

b)  $\tau_j \leq \tau_{j+1} \quad \mu$ -a.s. ( $j = 1, 2, \dots$ ).

c)  $(\tau_j)_{j=1}^\infty$  に対し或る  $\mu$ -零集合  $N_T$  が存在し, 任意の  $\omega \in \Omega \setminus N_T$  に対し或る  $n = n(\omega) \in \mathbb{N}$  が存在して  $\tau_n(\omega) = T$  が成り立つ.

例えば  $\tau_j = jT/2^n$  なら  $(\tau_j)_{j=1}^\infty \in \mathcal{T}$  となる. 上の条件において, a) が零集合  $N_0$  を除いて成立し, b) が各  $j$  について零集合  $N_j$  を除いて成立するとき,  $N := N_0 \cup N_T \cup (\cup_{j=1}^\infty N_j)$  とすればこれも  $\mu$ -零集合であり, 任意の  $\omega \in \Omega \setminus N$  に対して

$$\tau_0(\omega) = 0, \quad \tau_j(\omega) \leq \tau_{j+1}(\omega) \quad (j = 1, 2, \dots), \quad \tau_n(\omega) = T \quad (\exists n = n(\omega) \in \mathbb{N})$$

が成立する.

(4)  $\mathcal{M}_{c,loc} \quad \mathcal{M}_{c,loc}$  の元を「連続な局所マルチンゲール」という.  $\mathcal{M}_{c,loc}$  は次で定義される:

$$\mathcal{M}_{c,loc} := \left\{ M = (M_t)_{t \in I} \subset \mathcal{L}^1(\mathcal{F}, \mu); \quad \exists (\tau_j)_{j=1}^\infty \in \mathcal{T} \text{ s.t. } M^{\tau_j} = (M_{\tau_j \wedge t})_{t \in I} \in \mathcal{M}_{b,c} \quad (\forall j \in \mathbb{N}) \right\}.$$

補題 4.2.1 ( $\mathcal{M}_{p,c}$  は線形空間となる).

任意の  $M, N \in \mathcal{M}_{p,c}$  と  $\alpha \in \mathbb{R}$  に対して線型演算を

$$M + N := (M_t + N_t)_{t \in I}, \quad \alpha M := (\alpha M_t)_{t \in I} \quad (4.5)$$

として定義すれば,  $\mathcal{M}_{p,c}$  は  $\mathbb{R}$  上の線形空間となる.

証明.  $\mathcal{M}_{p,c}$  が (4.5) の演算について閉じていることを示す.

\*9 全ての  $t, \omega$  に対し  $0 \in \mathbb{R}$  を取るもの.

加法について 先ず  $M+N$  が  $L^p$ -マルチンゲールの定義を満たすことを確認する. 適合性について, 各  $t \in I$  について  $M_t, N_t$  は  $\mathcal{F}_t$ -可測であるから  $M_t+N_t$  も  $\mathcal{F}_t$ -可測であり, また Minkowski の不等式より  $M_t+N_t \in \mathcal{L}^p(\mu)$  であることも従う. 任意の  $\omega \in \Omega$  でパス  $I \ni t \mapsto M_t(\omega) + N_t(\omega)$  が右連続且つ左極限を持つことも  $M, N$  のパスが右連続且つ左極限を持つことにより従い, さらに任意に  $0 \leq s \leq t \leq T$  を取れば, 条件付き期待値の線型性より

$$E[M_t + N_t | \mathcal{F}_s] = E[M_t | \mathcal{F}_s] + E[N_t | \mathcal{F}_s] = M_s + N_s$$

も成り立つ. 以上より  $M + N = (M_t + N_t)_{t \in I}$  は  $L^p$ -マルチンゲールである. 次に写像  $I \ni t \mapsto M_t(\omega) + N_t(\omega) \in \mathbb{R}$  の連続性を示す.  $M, N$  に対して或る  $\mu$ -零集合  $E$  が存在し,  $\omega \notin E$  について  $t \mapsto M_t(\omega)$  と  $t \mapsto N_t(\omega)$  が共に連続となるから  $t \mapsto M_t(\omega) + N_t(\omega)$  も連続となる. 以上で  $M + N \in \mathcal{M}_{p,c}$  が示された.

スカラ倍について 任意の  $0 \leq s \leq t \leq T$  に対し, 条件付き期待値の線型性 (性質  $\tilde{C}3$ ) により

$$E[\alpha M_t | \mathcal{F}_s] = \alpha E[M_t | \mathcal{F}_s] = \alpha M_s$$

が成り立つ. 定数倍しているだけであるから,  $\alpha M$  が  $L^p$ -マルチンゲールであるためのその他の条件, 及び  $\mu$ -a.s. にパスが連続であることも成り立ち,  $\alpha M \in \mathcal{M}_{p,c}$  となる.

■

補題 4.2.2 ( $\mathcal{M}_{p,c}$  における同値関係の導入).

任意の  $M, N \in \mathcal{M}_{p,c}$  ( $p \geq 1$ ) に対して, 関係  $R$  を

$$M R N \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \left\{ \omega \in \Omega ; \sup_{r \in (I \cap \mathbb{Q}) \cup \{T\}} |M_r(\omega) - N_r(\omega)| > 0 \right\} \text{ が } \mu\text{-零集合}$$

として定義すれば, 関係  $R$  は同値関係となる. そして  $M R N$  となることと  $\mu$ -a.s. にパスが一致することは同値である.

証明. 反射律と対称律は  $R$  の定義式より判然しているから推移律について確認する.  $M, N$  とは別に  $U = (U_t)_{t \in I} \in \mathcal{M}_{p,c}$  を取って  $M R N$  かつ  $N R U$  となっているとすれば, 各  $r \in (I \cap \mathbb{Q}) \cup \{T\}$  にて

$$\{|M_r - U_r| > 0\} \subset \{|M_r - N_r| > 0\} \cup \{|N_r - U_r| > 0\}$$

の関係が成り立っているから  $M R U$  が従う.\*<sup>10</sup> 後半の主張を示す.  $M, N$  に対し或る零集合  $E$  が存在して,  $\omega \in \Omega \setminus E$  に対し  $I \ni t \mapsto M_t(\omega)$  と  $I \ni t \mapsto N_t(\omega)$  は共に連続写像となっている. 今  $M R N$  であるとする.

$$F := \left\{ \omega \in \Omega ; \sup_{r \in (I \cap \mathbb{Q}) \cup \{T\}} |M_r(\omega) - N_r(\omega)| > 0 \right\}$$

とおけば  $F^c \cap E^c$  上で  $M$  と  $N$  のパスは完全に一致し, また  $F \cup E$  が零集合であるから  $\mu$ -a.s. にパスが一致しているということになる. 逆に  $\mu$ -a.s. にパスが一致しているとすれば, 或る零集合  $G$  が

\*<sup>10</sup>  $\{|M_r - N_r| > 0\} = \{\omega \in \Omega ; |M_r(\omega) - N_r(\omega)| > 0\}$ .

存在して  $G^c$  上でパスが一致している.

$$G^c \subset F^c$$

の関係から  $F \subset G$  となり  $F$  が零集合となるから  $M R N$  が従う. ■

補題 4.2.3 ( $\mathcal{M}_{p,c}$  の商空間の定義). 補題 4.2.2 で導入した同値関係  $R$  による  $\mathcal{M}_{p,c}$  ( $p \geq 1$ ) の商集合を  $\mathfrak{M}_{p,c}$  と表記する.  $M \in \mathcal{M}_{p,c}$  の関係  $R$  による同値類を  $\overline{M}$  と表記し,  $\mathfrak{M}_{p,c}$  において

$$\overline{M} + \overline{N} := \overline{M + N}, \quad \alpha \overline{M} := \overline{\alpha M} \quad (4.6)$$

として演算を定義すれば, これは代表元の選び方に依らない (well-defined). そして (4.6) で定義した算法を加法とスカラ倍として  $\mathfrak{M}_{p,c}$  は  $\mathbb{R}$  上の線形空間となる.

証明.  $M' \in \overline{M}, N' \in \overline{N}$  を任意に選べば,

$$\begin{aligned} \left\{ |M_r + N_r - M'_r - N'_r| > 0 \right\} &\subset \left\{ |M_r - M'_r| > 0 \right\} \cup \left\{ |N_r - N'_r| > 0 \right\} \\ \left\{ |\alpha M_r - \alpha M'_r| > 0 \right\} &= \left\{ |M_r - M'_r| > 0 \right\} \end{aligned}$$

により  $(M + N) R (M' + N'), (\alpha M) R (\alpha M')$  が成り立ち

$$\overline{M + N} = \overline{M' + N'}, \quad \overline{\alpha M} = \overline{\alpha M'}$$

が従う. ■

補題 4.2.4 ( $\mathfrak{M}_{2,c}$  における内積の定義). 写像<sup>\*11</sup>  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{M}_{2,c} \times \mathfrak{M}_{2,c} \rightarrow \mathbb{R}$  を次で定義すれば, これは  $\mathfrak{M}_{2,c}$  において内積となる:

$$\langle \overline{M}, \overline{N} \rangle := \int_{\Omega} M_T(\omega) N_T(\omega) \mu(d\omega), \quad (\overline{M}, \overline{N} \in \mathfrak{M}_{2,c}). \quad (4.7)$$

証明.

well-defined であること 先ずは上の  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  の定義が代表元の取り方に依らないことを確認する.

$M' \in \overline{M}$  と  $N' \in \overline{N}$  に対して, 同値関係の定義から  $\mu$ -a.s. に  $M'_T = M_T, N'_T = N_T$  であり

$$\int_{\Omega} M_T(\omega) N_T(\omega) \mu(d\omega) = \int_{\Omega} M'_T(\omega) N'_T(\omega) \mu(d\omega)$$

が成り立つから,  $\langle \overline{M}, \overline{N} \rangle$  は一つの値に確定している. 次に  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  が内積であることを証明する.

<sup>\*11</sup> 実数値として確定することは,  $M_T, N_T$  が共に二乗可積分であることと Hölder の不等式による.

正值性 先ず任意の  $\overline{M} \in \mathfrak{M}_{2,c}$  に対して  $\langle \overline{M}, \overline{M} \rangle = \|M_T\|_{\mathcal{L}^2}^2 \geq 0$  が成り立つ. 次に  $\langle \overline{M}, \overline{M} \rangle = 0 \Leftrightarrow \overline{M} = \overline{0}$  が成り立つことを示す.  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  の定義により  $\Leftarrow$  は判然しているから,  $\Rightarrow$  について示す.  $M$  は  $L^2$ -マルチンゲールであるから, Jensen の不等式より  $(|M_t|)_{t \in I}$  が  $L^2$ -劣マルチンゲールとなる. Doob の不等式を適用すれば

$$\int_{\Omega} \left( \sup_{t \in I} |M_t(\omega)| \right)^2 \mu(d\omega) \leq 4 \int_{\Omega} M_T(\omega)^2 \mu(d\omega) = 0$$

が成り立ち,

$$\left\{ \sup_{t \in I} |M_t| > 0 \right\} = \left\{ \sup_{t \in I} |M_t|^2 > 0 \right\} = \left\{ \left( \sup_{t \in I} |M_t(\omega)| \right)^2 > 0 \right\}$$

であるから

$$\mu \left( \sup_{t \in I} |M_t| > 0 \right) = 0$$

が従う. よって  $\overline{M} = \overline{0}$  となる.

双線型性 双線型性は積分の線型性による.

■

命題 4.2.5 ( $\mathfrak{M}_{2,c}$  は Hilbert 空間である).  $\mathfrak{M}_{2,c}$  は補題 4.2.4 で導入した  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を内積として Hilbert 空間となる.

証明. 内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  により導入されるノルムを  $\|\cdot\|$  と表記する.  $\overline{M}^{(n)} \in \mathfrak{M}_{2,c}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) を Cauchy 列として取れば, 各代表元  $M^{(n)}$  に対し或る  $\mu$ -零集合  $E_n$  が存在して,  $\omega \in \Omega \setminus E_n$  なら写像  $I \ni t \mapsto M_t^{(n)}(\omega) \in \mathbb{R}$  が連続となる. 後で連続関数列の一様収束を扱うからここで次の処理を行う:

$$E := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

として,  $M^{(n)} = (M_t^{(n)})_{t \in I}$  を零集合  $E$  上で修正した過程  $(N_t^{(n)})_{t \in I}$  を

$$N_t^{(n)}(\omega) := \begin{cases} M_t^{(n)}(\omega) & (\omega \in \Omega \setminus E) \\ 0 & (\omega \in E) \end{cases}, \quad (\forall n = 1, 2, \dots, t \in I)$$

として定義すれば,  $N^{(n)}$  は  $\Omega$  全体でパスが連続, かつ  $L^2$ -マルチンゲールであるから<sup>\*12</sup>  $\mathfrak{M}_{2,c}$  の元となる. また零集合  $E$  を除いて  $M^{(n)}$  とパスが一致するから,  $\overline{N}^{(n)} = \overline{M}^{(n)}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) が成立し

$$\|\overline{M}^{(n)} - \overline{M}^{(m)}\|^2 = \|\overline{N}^{(n)} - \overline{N}^{(m)}\|^2 = \|\overline{N}^{(n)} - N^{(m)}\|^2 = \int_{\Omega} |N_T^{(n)}(\omega) - N_T^{(m)}(\omega)|^2 \mu(d\omega)$$

<sup>\*12</sup>  $L^2$ -マルチンゲールとなることを証明する. パスの右連続性と左極限の存在は連続性により成り立つことである. 適合性については, フィルトレーションの仮定より  $E \in \mathcal{F}_0$  であることに注意すれば,  $N_t^{(n)} = M_t^{(n)} \mathbf{1}_{\Omega \setminus E}$  であることと  $M_t^{(n)}$  が適合過程であることから  $N_t^{(n)}$  も可測  $\mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  となる. また各  $t \in I$  に対し  $N_t^{(n)}$  と  $M_t^{(n)}$  の関数類は一致するから, 任意に  $0 \leq s \leq t \leq T$  を取って

$$\mathbb{E}[N_t^{(n)} | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[M_t^{(n)} | \mathcal{F}_s] = M_s^{(n)} = N_s^{(n)}$$

が成り立つ.  $N_t^{(n)} = M_t^{(n)} \mathbf{1}_{\Omega \setminus E}$  の二乗可積分性は  $M_t^{(n)}$  の二乗可積分性から従う.



と表現できる．任意の  $n, m \in N$  の組に対し， $\mathcal{M}_{2,c}$  が線形空間であるから  $(|N_t^{(n)} - N_t^{(m)}|)_{t \in T}$  は連続な  $L^2$ -劣マルチンゲールとなり，Doob の不等式を適用して

$$\lambda^2 \mu \left( \sup_{t \in I} |N_t^{(n)} - N_t^{(m)}| > \lambda \right) \leq \int_{\Omega} |N_T^{(n)}(\omega) - N_T^{(m)}(\omega)|^2 \mu(d\omega) = \|\overline{M^{(n)}} - \overline{M^{(m)}}\|^2 \quad (\forall \lambda > 0)$$

が成り立つ．この不等式と  $(\overline{M^{(n)}})_{n=1}^{\infty}$  が Cauchy 列であることを併せれば，

$$\|\overline{M^{(n_k)}} - \overline{M^{(n_{k+1})}}\| < 1/4^k, \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (4.8)$$

となるように添数の部分列  $(n_k)_{k=1}^{\infty}$  を抜き出して

$$\mu \left( \sup_{t \in I} |N_t^{(n_k)} - N_t^{(n_{k+1})}| > 1/2^k \right) < 1/2^k, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

が成り立つようにできる．

$$F := \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq N} \left\{ \omega \in \Omega ; \sup_{t \in I} |N_t^{(n_k)}(\omega) - N_t^{(n_{k+1})}(\omega)| \leq 1/2^k \right\}$$

とおけば，Borel-Cantelli の補題により  $F^c$  は  $\mu$ -零集合であって， $\omega \in F$  なら全ての  $t \in I$  について数列  $(N_t^{(n_k)}(\omega))_{k=1}^{\infty}$  は Cauchy 列となる．実数の完備性から数列  $(N_t^{(n_k)}(\omega))_{k=1}^{\infty}$  ( $\omega \in F$ ) に極限  $N_t^*(\omega)$  が存在し，この収束は  $t$  に関して一様である<sup>\*13</sup>から写像  $t \mapsto N_t^*(\omega)$  は連続で，

$$N_t(\omega) := \begin{cases} N_t^*(\omega) & (\omega \in F) \\ 0 & (\omega \in \Omega \setminus F) \end{cases}$$

として  $N$  を定義すればこれは  $\mathcal{M}_{2,c}$  の元となる． $N$  は全てのパスが連続であるから  $L^2$ -マルチンゲールとなっていることを示す．マルチンゲールの定義の (M.3)(M.4) はパスの連続性により従うことであるから，後は (M.1) と (M.2) を証明すればよい．

(M.1) 適合性について 今任意に  $t \in I$  を取り固定する． $N_t^{n_k}$  の定義域を  $F$  に制限した写像を  $N_t^{F(k)}$  と表記し

$$\mathcal{F}_t^F := \{ F \cap B ; B \in \mathcal{F}_t \}$$

とおけば， $N_t^{F(k)}$  は可測  $\mathcal{F}_t^F / \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  となる．従って各点収束先の関数である  $N_t^*$  もまた可測  $\mathcal{F}_t^F / \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  となる．任意の  $C \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  に対して

$$N_t^{-1}(C) = \begin{cases} (\Omega \setminus F) \cup N_t^{*-1}(C) & (0 \in C) \\ N_t^{*-1}(C) & (0 \notin C) \end{cases}$$

が成り立ち，フィルトレーションの仮定から  $F \in \mathcal{F}_0$  であり  $\mathcal{F}_t^F \subset \mathcal{F}_t$  が従うから， $N_t$  は可測  $\mathcal{F}_t / \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  である．

(M.1) 二乗可積分性について 任意に  $t \in I$  を取り固定する． $N_t^{(n_k)}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) は二乗可積分関数  $M_t^{(n_k)}$  と零集合  $E$  を除いて一致し， $N_t$  に概収束する．また添数列  $(n_k)_{k=1}^{\infty}$  の抜き出し方 (4.8) と Doob の不等式より

$$\left\| \sup_{t \in I} |N_t^{(n_k)} - N_t^{(n_{k+1})}| \right\|_{\mathcal{L}^2} \leq 2 \left\| N_T^{(n_k)} - N_T^{(n_{k+1})} \right\|_{\mathcal{L}^2} < 2/4^k$$

<sup>\*13</sup>  $|N_t^{(n_k)}(\omega) - N_t^*(\omega)| \leq \sum_{j=k}^{\infty} |N_t^{(n_j)}(\omega) - N_t^{(n_{j+1})}(\omega)| \leq \sum_{j=k}^{\infty} \sup_{t \in I} |N_t^{(n_j)}(\omega) - N_t^{(n_{j+1})}(\omega)| < 1/2^k, \quad (\forall t \in T)$  による．

が成り立つから  $\|N_t^{(n_k)} - N_t^{(n_{k+1})}\|_{\mathcal{L}^2} < 2/4^k \leq 1/2^k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) を得る. 特に  $j \in \mathbb{N}$  を固定すれば全ての  $k > j$  に対して  $\|N_t^{(n_j)} - N_t^{(n_k)}\|_{\mathcal{L}^2} < 1/2^j$  となるから, Fatou の補題より

$$\|N_t^{(n_j)} - N_t\|_{\mathcal{L}^2}^2 = \int_{\Omega \setminus F} \liminf_{k \rightarrow \infty} |N_t^{(n_j)}(\omega) - N_t^{(n_k)}(\omega)|^2 \mu(d\omega) < 1/4^j \quad (4.9)$$

が従い, Minkowski の不等式より

$$\|N_t\|_{\mathcal{L}^2} \leq \|N_t - N_t^{(n_j)}\|_{\mathcal{L}^2} + \|N_t^{(n_j)}\|_{\mathcal{L}^2} < \infty$$

が成り立つ.

(M.2) について 各  $t \in I$ ,  $k \in \mathbb{N}$  について  $(M_t^{(n_k)})_{t \in I}$  が  $L^2$ -マルチンゲールであるということを利用すればよい. 任意の  $0 \leq s \leq t \leq T$  と  $A \in \mathcal{F}_s$  に対して

$$\begin{aligned} \int_A \mathbb{E}[N_t^{(n_k)} | \mathcal{F}_s](\omega) \mu(d\omega) &= \int_A \mathbb{E}[M_t^{(n_k)} | \mathcal{F}_s](\omega) \mu(d\omega) \\ &= \int_A M_s^{(n_k)}(\omega) \mu(d\omega) = \int_A N_s^{(n_k)}(\omega) \mu(d\omega) \end{aligned}$$

が全ての  $k = 1, 2, \dots$  で成り立つから, Hölder の不等式及び (4.9) より

$$\begin{aligned} & \left| \int_A \mathbb{E}[N_t | \mathcal{F}_s](\omega) \mu(d\omega) - \int_A N_s(\omega) \mu(d\omega) \right| \\ & \leq \left| \int_A \mathbb{E}[N_t | \mathcal{F}_s](\omega) \mu(d\omega) - \int_A \mathbb{E}[N_t^{(n_k)} | \mathcal{F}_s](\omega) \mu(d\omega) \right| \\ & \quad + \left| \int_A N_s^{(n_k)}(\omega) \mu(d\omega) - \int_A N_s(\omega) \mu(d\omega) \right| \\ & = \left| \int_A N_t(\omega) - N_t^{(n_k)}(\omega) \mu(d\omega) \right| + \left| \int_A N_s^{(n_k)}(\omega) - N_s(\omega) \mu(d\omega) \right| \\ & \leq \int_A |N_t(\omega) - N_t^{(n_k)}(\omega)| \mu(d\omega) + \int_A |N_s^{(n_k)}(\omega) - N_s(\omega)| \mu(d\omega) \\ & \leq \|N_t - N_t^{(n_k)}\|_{\mathcal{L}^2} + \|N_s^{(n_k)} - N_s\|_{\mathcal{L}^2} \\ & \leq 1/2^{k-1} \end{aligned}$$

が全ての  $k = 1, 2, \dots$  で成り立つ.  $k$  の任意性から

$$\int_A \mathbb{E}[N_t | \mathcal{F}_s](\omega) \mu(d\omega) = \int_A N_s(\omega) \mu(d\omega)$$

が従い,  $\mathbb{E}[N_t | \mathcal{F}_s] = N_s$  in  $L^2(\mathcal{F}, \mu)$  となる.

最後に,  $N$  の  $\mathfrak{M}_{2,c}$  における同値類  $\bar{N}$  が Cauchy 列  $(\bar{M}^{(n)})_{n=1}^\infty$  の極限であるということを明示して証明を完全に終える. 部分列  $(\bar{M}^{(n_k)})_{k=1}^\infty$  に対して, (4.9) より

$$\|\bar{N} - \bar{M}^{(n_k)}\| = \|\bar{N} - \bar{N}^{(n_k)}\| = \|N_T - N_T^{(n_k)}\|_{\mathcal{L}^2} \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty)$$

が成り立つ. 部分列が収束することは Cauchy 列が収束することになるから  $\|\bar{N} - \bar{M}^{(n)}\| \longrightarrow 0$  が従い,  $\mathfrak{M}_{2,c}$  が Hilbert 空間であることが証明された. ■

**命題 4.2.6.** 任意の  $p \geq 1$  に対し,  $\mathcal{M}_{b,c} \subset \mathcal{M}_{p,c} \subset \mathcal{M}_{c,loc}$  が成り立つ.

この証明には次の補題を使う.

補題 4.2.7 (各点で右連続であり左極限を持つ関数は閉区間上で有界).

$(E, \rho)$  を距離空間,  $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$  とする.  $f: J \rightarrow E$  が各点  $x \in J$  で右連続且つ左極限を持つ<sup>\*14</sup>なら  $f$  は  $J$  上で有界である.

証明 (補題). 任意に  $\epsilon > 0$  を取り固定する.  $f$  は各点  $x \in [a, b]$  で右連続であるから,  $0 < \delta_x < b - x$  を  $0 < \forall h < \delta_x$  が  $\rho(f(x), f(x+h)) < \epsilon$  を満たすように取り,

$$V_x := [x, x + \delta_x) \quad (\forall x \in [a, b))$$

とおく. また  $f$  は各点  $x \in (a, b]$  で左極限も持つから, 左極限を  $f(x-)$  と表して  $0 < \gamma_x < x - a$  を  $0 < \forall h < \gamma_x$  が  $\rho(f(x-), f(x-h)) < \epsilon$  を満たすように取り,

$$U_x := (x - \gamma_x, x] \quad (\forall x \in (a, b])$$

とおく. 特に  $U_a := (-\infty, a]$ ,  $V_b := [b, \infty)$  とおけば

$$J \subset \bigcup_{x \in J} U_x \cup V_x$$

が成り立つが,  $J$  は  $\mathbb{R}$  のコンパクト部分集合であるから, このうち有限個を選び

$$J = \bigcup_{i=1}^n (U_{x_i} \cup V_{x_i}) \cap J$$

とできる.  $U_{x_i} \cap J$ ,  $V_{x_i} \cap J$  での  $f$  の挙動の振れ幅は  $2\epsilon$  で抑えられるから  $J$  全体での挙動の振れ幅は  $2n\epsilon$  より小さい<sup>\*15</sup>. ゆえに有界である. ■

証明 (命題 4.2.6). a.s. に有界な関数は  $p$  乗して可積分であるから  $\mathcal{M}_{b,c} \subset \mathcal{M}_{p,c}$  である.  $\mathcal{M}_{p,c} \subset \mathcal{M}_{c,loc}$  を示す. 任意に  $M \in \mathcal{M}_{p,c}$  を取れば, 或る零集合  $E$  が存在して全ての  $\omega \in \Omega \setminus E$  に対し

$$M_0(\omega) = 0$$

となり, 且つ  $I \ni t \mapsto M_t(\omega)$  が連続となる. 全ての  $\omega \in \Omega$  に対し写像  $I \ni t \mapsto M_t(\omega)$  は右連続且つ左極限を持つから, 定理 3.1.9 より

$$\tau_j(\omega) := \inf \{ t \in I ; |M_t(\omega)| \geq j \} \wedge T \quad (\forall \omega \in \Omega, j = 0, 1, 2, \dots)^{*16}$$

として  $\tau_j$  は停止時刻となり  $(\tau_j)_{j=0}^\infty \in \mathcal{T}$  が成り立つ. 実際全ての  $\omega \in \Omega$  について  $\tau_0(\omega) = 0$  であり, また  $t \mapsto M_t(\omega)$  の右連続性から  $\tau_j \leq \tau_{j+1}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) も成り立つ. 更に補題 4.2.7

<sup>\*14</sup> 左端点では左極限を考えず, 右端点では右連続性を考えない.

<sup>\*15</sup>  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  と仮定し, 区間  $U_{x_i} \cup V_{x_i}$  と  $U_{x_{i+1}} \cup V_{x_{i+1}}$  の共通点の一つ取り  $z_i$  と表す.  $\rho(f(x), f(y))$  ( $x, y \in J$ ) の上界を知りたいから  $x \in U_{x_1} \cup V_{x_1}$ ,  $y \in U_{x_n} \cup V_{x_n}$  の場合を調べればよい. このとき

$$\begin{aligned} \rho(f(x), f(y)) &\leq \rho(f(x), f(x_1)) + \rho(f(x_1), f(x_2)) + \dots + \rho(f(x_{n-1}), f(x_n)) + \rho(f(x_n), f(y)) \\ &\leq \rho(f(x), f(x_1)) + \rho(f(x_1), f(z_1)) + \rho(f(z_1), f(x_2)) + \dots + \rho(f(z_{n-1}), f(x_n)) + \rho(f(x_n), f(y)) \\ &< 2n\epsilon \end{aligned}$$

が成り立つ.

<sup>\*16</sup> 定理 3.1.9 の脚注に書いた通り  $\{ t \in I ; |M_t(\omega)| \geq j \} = \emptyset$  の場合は  $\tau(\omega) = T$  とする.

より  $\sup_{t \in I} |M_t(\omega)| < \infty$  ( $\forall \omega \in \Omega$ ) であるから,  $J > \sup_{t \in I} |M_t(\omega)|$  を満たす  $J = J(\omega)$  に対して  $\tau_j(\omega) = T$  ( $\forall j \geq J$ ) となる. 後は  $M^{\tau_j} \in \mathcal{M}_{b,c}$  が成立することを示せばよい. 先ず Doob の不等式 (定理 4.1.4) より  $\sup_{t \in I} |M_t|$  が  $p$  乗可積分となるから  $M_t^{\tau_j} = M_{t \wedge \tau_j}$  ( $\forall t \in I$ ) は可積分である. また  $\omega \in \Omega \setminus E$  なら  $t \mapsto M_t(\omega)$  が連続であるから  $I \ni t \mapsto M_t^{\tau_j}(\omega)$  もまた連続であり, かつ

$$\sup_{t \in I} |M_{t \wedge \tau_j}(\omega)| \leq j$$

が成り立つから

$$\|M_t^{\tau_j}\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq j \quad (\forall t \in I)$$

が従う. そして任意抽出定理 (定理 4.1.5) より

$$\mathbb{E}[M_t^{\tau_j} | \mathcal{F}_s] = M_{t \wedge \tau_j \wedge s}^{\tau_j} = M_s^{\tau_j} \quad (0 \leq s < t \leq T)$$

を得る. 以上より  $M^{\tau_j} \in \mathcal{M}_{b,c}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ), すなわち  $M \in \mathcal{M}_{c,loc}$  である. ■

**補題 4.2.8.**  $X \in \mathcal{M}_{2,c}$  と停止時刻  $\tau \geq \sigma$  に対し,  $\|M_\sigma\|_{\mathcal{L}^\infty} < \infty$  ならば次が成り立つ:

- (1)  $\mathbb{E}[(X_\tau - X_\sigma)^2] = \mathbb{E}[X_\tau^2 - X_\sigma^2],$
- (2)  $\mathbb{E}[(X_\tau - X_\sigma)^2 | \mathcal{F}_\sigma] = \mathbb{E}[X_\tau^2 - X_\sigma^2 | \mathcal{F}_\sigma].$

**証明.**

- (1)  $X \in \mathcal{M}_{2,c}$  であるから Doob の不等式 (定理 4.1.4) により  $X_\tau, X_\sigma$  は二乗可積分である. また定理 3.1.8 より  $X_\sigma$  は可測  $\mathcal{F}_\sigma/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  であり, 任意抽出定理 (定理 4.1.5) と  $\tau \geq \sigma$  の仮定より

$$\mathbb{E}[X_\tau | \mathcal{F}_\sigma] = X_{\tau \wedge \sigma} = X_\sigma$$

も成り立つ. これらを用いれば

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X_\tau - X_\sigma)^2] &= \mathbb{E}[X_\tau^2 + X_\sigma^2] - 2\mathbb{E}[X_\tau X_\sigma] \\ &= \mathbb{E}[X_\tau^2 + X_\sigma^2] - 2\mathbb{E}[\mathbb{E}[X_\tau X_\sigma | \mathcal{F}_\sigma]] \\ &= \mathbb{E}[X_\tau^2 + X_\sigma^2] - 2\mathbb{E}[X_\sigma \mathbb{E}[X_\tau | \mathcal{F}_\sigma]] \\ &= \mathbb{E}[X_\tau^2 + X_\sigma^2] - 2\mathbb{E}[X_\sigma^2] \\ &= \mathbb{E}[X_\tau^2 - X_\sigma^2] \end{aligned}$$

が成り立つ.

- (2) (1) と同様にして

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X_\tau - X_\sigma)^2 | \mathcal{F}_\sigma] &= \mathbb{E}[X_\tau^2 + X_\sigma^2 | \mathcal{F}_\sigma] - 2\mathbb{E}[X_\tau X_\sigma | \mathcal{F}_\sigma] \\ &= \mathbb{E}[X_\tau^2 + X_\sigma^2 | \mathcal{F}_\sigma] - 2X_\sigma^2 \\ &= \mathbb{E}[X_\tau^2 - X_\sigma^2 | \mathcal{F}_\sigma] \end{aligned}$$

が成り立つ.

命題 4.2.9 (有界変動な連続二乗可積分マルチンゲールのパスは定数).

$A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{M}_{2,c}$  に対し  $A_t = 0$  ( $\forall t \in I$ )  $\mu$ -a.s. が成り立つ.

証明.  $A$  に対し或る  $A^{(1)}, A^{(2)} \in \mathcal{A}^+$  が存在して

$$A = A^{(1)} - A^{(2)}$$

と表現できる. また或る  $\mu$ -零集合  $E$  が存在し, 全ての  $\omega \in \Omega \setminus E$  に対して

$$A_0^{(1)}(\omega) = A_0^{(2)}(\omega) = 0$$

且つ  $I \ni t \mapsto A_t^{(1)}(\omega)$  と  $I \ni t \mapsto A_t^{(2)}(\omega)$  が共に連続, 単調非減少となるから,

$$\tau_m(\omega) := \begin{cases} 0 & (\omega \in E) \\ \inf \{ t \in I ; A_t^{(1)}(\omega) \vee A_t^{(2)}(\omega) \geq m \} \wedge T & (\omega \in \Omega \setminus E) \end{cases} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

は定理 3.1.9 より停止時刻となる. そして  $\omega \in \Omega \setminus E$  に対する  $A^{(1)}, A^{(2)}$  のパスの連続性から

$$\tau_i(\omega) = T \quad (\exists i = i(\omega) \in \mathbb{N}, \forall \omega \in \Omega \setminus E)$$

が成り立ち, かつ  $\tau_m \leq \tau_{m+1}$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) も満たされている. 今  $t \in I$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$  を固定する.

$$\sigma_j^n := \tau_m \wedge \frac{tj}{2^n} \quad (j = 0, 1, \dots, 2^n)$$

とおけば,  $\sigma_j^n \leq \sigma_{j+1}^n$  ( $j = 0, 1, \dots, 2^n - 1$ ) と

$$\|A_{\sigma_j^n}\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq 2m \quad (j = 0, 1, \dots, 2^n)$$

を満たすから<sup>\*17</sup> 補題 4.2.8 より

$$\mathbb{E} \left[ \sum_{j=0}^{2^n-1} (A_{\sigma_{j+1}^n} - A_{\sigma_j^n})^2 \right] = \sum_{j=0}^{2^n-1} \mathbb{E} [A_{\sigma_{j+1}^n}^2 - A_{\sigma_j^n}^2] = \mathbb{E} [A_{\tau_m \wedge t}^2 - A_0^2] = \mathbb{E} [(A_{\tau_m \wedge t} - A_0)^2]$$

が成り立つ. 左辺の中の式は

$$\sum_{j=0}^{2^n-1} (A_{\sigma_{j+1}^n} - A_{\sigma_j^n})^2 \leq \sup_j |A_{\sigma_{j+1}^n} - A_{\sigma_j^n}| \sum_{j=0}^{2^n-1} |A_{\sigma_{j+1}^n} - A_{\sigma_j^n}|$$

<sup>\*17</sup>  $\omega \in \Omega \setminus E$  に対する  $A^{(1)}, A^{(2)}$  のパスが連続であるから, 定理 3.1.9 より

$$A_t^{(1)}(\omega) \vee A_t^{(2)}(\omega) \leq m \quad (\forall t \leq \tau_m(\omega), \omega \in \Omega \setminus E)$$

が成り立ち

$$|A_{\sigma_j^n}(\omega)| \leq \left| A_{\tau_m(\omega) \wedge \frac{tj}{2^n}}^{(1)}(\omega) \right| + \left| A_{\tau_m(\omega) \wedge \frac{tj}{2^n}}^{(2)}(\omega) \right| \leq 2m \quad (\forall \omega \in \Omega \setminus E)$$

が従う.

となり, 特に  $\omega \in \Omega \setminus E$  に対しては  $I \ni t \mapsto A_t(\omega)$  の連続性から

$$\sup_j \left| A_{\sigma_{j+1}^n}(\omega) - A_{\sigma_j^n}(\omega) \right| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

(概収束) と

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2^n-1} \left| A_{\sigma_{j+1}^n}(\omega) - A_{\sigma_j^n}(\omega) \right| &\leq \sum_{j=0}^{2^n-1} \left( A_{\sigma_{j+1}^n}^{(1)}(\omega) - A_{\sigma_j^n}^{(1)}(\omega) + A_{\sigma_{j+1}^n}^{(2)}(\omega) - A_{\sigma_j^n}^{(2)}(\omega) \right) \\ &= A_{\tau_m \wedge t}^{(1)}(\omega) + A_{\tau_m \wedge t}^{(2)}(\omega) \leq 2m \end{aligned}$$

が満たされるから, Lebesgue の収束定理を適用できて

$$\int_{\Omega} \sum_{j=0}^{2^n-1} \left( A_{\sigma_{j+1}^n}(\omega) - A_{\sigma_j^n}(\omega) \right)^2 \mu(d\omega) \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が従う. ゆえに

$$\int_{\Omega} (A_{\tau_m(\omega) \wedge t}(\omega) - A_0(\omega))^2 \mu(d\omega) = 0 \quad (m = 1, 2, \dots)$$

が成り立ち, Doob の不等式より  $|A_{\tau_m \wedge t} - A_0| \leq \sup_{t \in I} |A_t - A_0| \in \mathcal{L}^2$  であるから Lebesgue の収束定理を適用して

$$\int_{\Omega} (A_t(\omega) - A_0(\omega))^2 \mu(d\omega) = \int_{\Omega \setminus E} (A_t(\omega))^2 \mu(d\omega) = 0$$

を得る.  $t \in I$  は任意に取っていたから,

$$A_t = 0 \quad \mu\text{-a.s.} \quad (\forall t \in I)$$

が従い, また  $\omega \in \Omega \setminus E$  に対する  $A$  のパスの連続性により

$$\{ \omega \in \Omega \setminus E ; \quad A_t(\omega) = 0 \quad (\forall t \in I) \} = \bigcap_{r \in I \cap \mathbb{Q}} \{ \omega \in \Omega \setminus E ; \quad A_r(\omega) = 0 \}$$

と表すことができる. 従って

$$\{ \omega \in \Omega ; \quad A_t(\omega) \neq 0 \quad (\exists t \in I) \} \subset E + \bigcup_{r \in I \cap \mathbb{Q}} \{ \omega \in \Omega \setminus E ; \quad A_r(\omega) \neq 0 \}$$

が成り立ち, 右辺が零集合であるから  $\mu$ -a.s. に  $A_t = 0 \quad (\forall t \in I)$  となる. ■

**補題 4.2.10 (二次変分補題).**  $n \in \mathbb{N}$  と  $M \in \mathcal{M}_{b,c}$  を取り,  $\tau_j^n = jT/2^n$  ( $j = 0, 1, \dots, 2^n$ ) に対し

$$Q_t^n := \sum_{j=0}^{2^n-1} \left( M_{t \wedge \tau_{j+1}^n} - M_{t \wedge \tau_j^n} \right)^2 \quad (\forall t \in I) \tag{4.10}$$

とおけば,  $M^2 - Q^n \in \mathcal{M}_{b,c}$  かつ次が成り立つ:

$$\left\| M_T^2 - M_0^2 - Q_T^n \right\|_{\mathcal{L}^2} \leq 2 \sup_{t \in I} \|M_t\|_{\mathcal{L}^\infty} \|M_T - M_0\|_{\mathcal{L}^2}.$$

証明. 任意の停止時刻  $\tau$  に対し  $M_{t \wedge \tau}$  が可測  $\mathcal{F}_t / \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  であるから  $Q^n$  は  $\mathcal{F}_t$ -適合である. 今任意に  $s, t \in I$ , ( $s < t$ ) を取り固定する.  $\tau_k^n \leq s < \tau_{k+1}^n$  となる  $k$  を選べば, 補題 4.2.8 と任意抽出定理 4.1.5 より

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Q_t^n - Q_s^n \mid \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}\left[\sum_{j=k}^{2^n-1} \left\{ (M_{t \wedge \tau_{j+1}^n} - M_{t \wedge \tau_j^n})^2 - (M_{s \wedge \tau_{j+1}^n} - M_{s \wedge \tau_j^n})^2 \right\} \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= \sum_{j=k+1}^{2^n-1} \mathbb{E}\left[M_{t \wedge \tau_{j+1}^n}^2 - M_{t \wedge \tau_j^n}^2 \mid \mathcal{F}_s\right] + \mathbb{E}\left[(M_{t \wedge \tau_{k+1}^n} - M_{\tau_k^n})^2 \mid \mathcal{F}_s\right] - (M_s - M_{\tau_k^n})^2 \\
&= \mathbb{E}\left[M_t^2 - M_{t \wedge \tau_{k+1}^n}^2 \mid \mathcal{F}_s\right] + \mathbb{E}\left[(M_{t \wedge \tau_{k+1}^n} - M_{\tau_k^n})^2 \mid \mathcal{F}_s\right] - (M_s - M_{\tau_k^n})^2 \\
&= \mathbb{E}\left[M_t^2 \mid \mathcal{F}_s\right] - 2\mathbb{E}\left[M_{t \wedge \tau_{k+1}^n} M_{\tau_k^n} \mid \mathcal{F}_s\right] + \mathbb{E}\left[M_{\tau_k^n}^2 \mid \mathcal{F}_s\right] - M_s^2 + 2M_s M_{\tau_k^n} - M_{\tau_k^n}^2 \\
&= \mathbb{E}\left[M_t^2 \mid \mathcal{F}_s\right] - 2M_{\tau_k^n} \mathbb{E}\left[M_{t \wedge \tau_{k+1}^n} \mid \mathcal{F}_s\right] + M_{\tau_k^n}^2 - M_s^2 + 2M_s M_{\tau_k^n} - M_{\tau_k^n}^2 \\
&= \mathbb{E}\left[M_t^2 \mid \mathcal{F}_s\right] - M_s^2.
\end{aligned}$$

が成り立ち次を得る:

$$\mathbb{E}\left[M_t^2 - Q_t^n \mid \mathcal{F}_s\right] = M_s^2 - Q_s^n, \quad (\forall 0 \leq s < t \leq T). \quad (4.11)$$

ここで

$$N := M^2 - Q^n$$

とおけば  $N \in \mathcal{M}_{b,c}$  であり<sup>\*18</sup>,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(N_T - N_0)^2\right] &= \mathbb{E}\left[N_T^2 - N_0^2\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{j=0}^{2^n-1} \left(N_{\tau_{j+1}^n}^2 - N_{\tau_j^n}^2\right)\right] \\
&= \sum_{j=0}^{2^n-1} \mathbb{E}\left[\left\{M_{\tau_{j+1}^n}^2 - M_{\tau_j^n}^2 - (Q_{\tau_{j+1}^n}^n - Q_{\tau_j^n}^n)\right\}^2\right] \\
&= \sum_{j=0}^{2^n-1} \mathbb{E}\left[\left\{M_{\tau_{j+1}^n}^2 - M_{\tau_j^n}^2 - (M_{\tau_{j+1}^n} - M_{\tau_j^n})^2\right\}^2\right]
\end{aligned}$$

<sup>\*18</sup>  $M \in \mathcal{M}_{b,c}$  より全ての  $\omega \in \Omega$  において写像  $t \mapsto M_t(\omega)$  は各点で右連続かつ左極限を持つ.  $Q^n$  についても Gauss 記号を用いて  $Q_t^n = \sum_{j=0}^{[2^n t]/T} (M_t^n - M_{\tau_j^n})^2$  と表せば,  $t \mapsto Q_t^n(\omega)$  ( $\forall \omega \in \Omega$ ) が各点で右連続かつ左極限を持つことが明確になる. よって全ての  $\omega \in \Omega$  において  $t \mapsto N_t(\omega)$  は各点で右連続かつ左極限を持つ. また同じ理由で  $t \mapsto M_t(\omega)$  が連続となる点で  $t \mapsto N_t(\omega)$  も連続となるからつまり  $\mu$ -a.s. に  $t \mapsto N_t$  は連続. 一様有界性については,  $\sup_{t \in I} \|M_t\|_{\mathcal{L}^\infty} < \infty$  であるから, 任意の  $t \in I$  に対し或る零集合  $E_t$  が存在して  $\omega \notin E_t$  なら  $|M_t(\omega)| \leq \sup_{t \in I} \|M_t\|_{\mathcal{L}^\infty}$  が成り立つ. 同様に  $Q_t^n$  についても  $\omega \notin E_t \cup \bigcup_{j=0}^{[2^n t]/T} E_{\tau_j^n}$  なら

$$|Q_t^n(\omega)| \leq \sum_{j=0}^{[2^n t]/T} \left(2 \sup_{t \in I} \|M_t\|_{\mathcal{L}^\infty}\right)^2 \leq 2^{n+1} \sup_{t \in I} \|M_t\|_{\mathcal{L}^\infty}^2.$$

ゆえに

$$|N_t(\omega)| \leq |M_t(\omega)|^2 + |Q_t^n(\omega)| \leq (2^{n+1} + 1) \sup_{t \in I} \|M_t\|_{\mathcal{L}^\infty}^2, \quad (\forall \omega \notin E_t \cup \bigcup_{j=0}^{[2^n t]/T} E_{\tau_j^n}).$$

この右辺は  $t$  に依らないから

$$\sup_{t \in I} \|N_t\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq (2^{n+1} + 1) \sup_{t \in I} \|M_t\|_{\mathcal{L}^\infty}^2$$

を得る. 以上の結果と (4.11) を併せて  $N \in \mathcal{M}_{b,c}$  となる.

$$\begin{aligned}
&\leq 4 \sup_{t \in I} \|M_t\|_{\mathcal{L}^\infty}^2 \mathbb{E} \left[ \sum_{j=0}^{2^n-1} (M_{\tau_{j+1}^n} - M_{\tau_j^n})^2 \right] \\
&= 4 \sup_{t \in I} \|M_t\|_{\mathcal{L}^\infty}^2 \mathbb{E} [M_T^2 - M_0^2]
\end{aligned}$$

が成り立つ. ■

定理 4.2.11 (二次変分の存在).

任意の  $M \in \mathcal{M}_{c,loc}$  に対し或る  $A \in \mathcal{A}^+$  が一意的に存在して<sup>\*19</sup>次を満たす:

- $A_0 = 0$   $\mu$ -a.s.
- $M^2 - A \in \mathcal{M}_{c,loc}$ .

証明. まず  $M \in \mathcal{M}_{b,c}$  に対し  $A$  の存在を証明し, 次にその結果を  $\mathcal{M}_{c,loc}$  に拡張する.

第一段  $M \in \mathcal{M}_{b,c}$  とする. 補題 4.2.10 に従って  $Q^n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) を構成し  $N^n := M^2 - Q^n \in \mathcal{M}_{b,c}$  とおけば

$$\|N_T^n - N_0^n\|_{\mathcal{L}^2} \leq 2 \sup_{t \in I} \|M_t\|_{\mathcal{L}^\infty} \|M_T - M_0\|_{\mathcal{L}^2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

を満たす. (4.10) より  $N_0^n(\omega) = M_0^2(\omega)$  ( $\forall \omega \in \Omega, n = 1, 2, \dots$ ) となるから

$$\|N_T^n\|_{\mathcal{L}^2} \leq 2 \sup_{t \in I} \|M_t\|_{\mathcal{L}^\infty} \|M_T - M_0\|_{\mathcal{L}^2} + \|M_0^2\|_{\mathcal{L}^2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

が成り立ち,  $N^n$  の同値類<sup>\*20</sup>  $\overline{N^n}$  の列  $(\overline{N^n})_{n=1}^\infty$  は Hilbert 空間  $\mathfrak{M}_{2,c}$  において有界列となる. Kolmos の補題より  $\overline{N^n}$  の或る線型結合の列  $\hat{\overline{N^n}}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) が  $\mathfrak{M}_{2,c}$  において Cauchy 列をなすから, その極限を  $\overline{N} \in \mathfrak{M}_{2,c}$  と表す. 線型結合を

$$\hat{\overline{N^n}} = \sum_{j=0}^\infty c_j^n \overline{N^{n+j}}, \quad \hat{N^n} := \sum_{j=0}^\infty c_j^n N^{n+j}, \quad \hat{Q^n} := \sum_{j=0}^\infty c_j^n Q^{n+j}$$

と表せば  $\hat{N^n} = M^2 - \hat{Q^n}$  を満たし<sup>\*21</sup>,  $N \in \overline{N}$  を一つ取り

$$A := M^2 - N \tag{4.12}$$

とおけば, Doob の不等式 (定理 4.1.4) により

$$\begin{aligned}
\left\| \sup_{t \in I} |\hat{Q}_t^n - A_t| \right\|_{\mathcal{L}^2} &= \left\| \sup_{t \in I} |N_t - \hat{N}_t^n| \right\|_{\mathcal{L}^2} \\
&\leq \|N_T - \hat{N}_T^n\|_{\mathcal{L}^2} = \|\overline{N} - \hat{\overline{N^n}}\|_{\mathfrak{M}_{2,c}} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)
\end{aligned}$$

が成り立つ.<sup>\*22</sup> よって Borel-Cantelli の補題より部分列  $(n_k)_{k=1}^\infty$  と  $\mu$ -零集合  $E$  を取れば

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in I} |\hat{Q}_t^{n_k}(\omega) - A_t(\omega)| = 0 \quad (\forall \omega \in \Omega \setminus E) \tag{4.13}$$

<sup>\*19</sup>  $A, A' \in \mathcal{A}^+$  が主張の二条件を満たすときは  $\mu$ -a.s. にパスが一致する, という意味で存在が一意的である.

<sup>\*20</sup> 補題 4.2.2 で導入した同値関係  $R$  による同値類.

<sup>\*21</sup> 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $(c_j^n)_{j=0}^\infty$  は  $\sum_{j=0}^\infty c_j^n = 1$  を満たし, 且つ  $\neq 0$  であるのは有限個である.

<sup>\*22</sup>  $\|\cdot\|_{\mathfrak{M}_{2,c}}$  は (4.7) で定義される内積により導入されるノルムを表す.



が従い、まず  $A_0(\omega) = 0$  ( $\forall \omega \in \Omega \setminus E$ ) が成り立つ。

$$D_k := \left\{ \frac{j}{2^{n_k}} T ; \quad j = 0, 1, \dots, 2^{n_k} \right\} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

とおけば、(4.10) より全ての  $v \geq k$ ,  $\omega \in \Omega$  に対して  $t \mapsto Q_t^{n_v}(\omega)$  は  $D_k$  上で単調非減少となるから、その線型結合である  $\hat{Q}_t^{n_v}$  も  $D_k$  上で単調非減少となり、(4.13) より  $\omega \in \Omega \setminus E$  に対しては  $t \mapsto A_t(\omega)$  も  $D_k$  上で単調非減少となる<sup>\*23</sup>。  $D := \cup_{k=1}^{\infty} D_{n_k}$  とおけば  $D$  は  $I$  で稠密であり、更に  $A$  は或る零集合  $E'$  を除いてパスが連続となるから<sup>\*24</sup>、写像  $I \ni t \mapsto A_t(\omega)$  ( $\forall \omega \in \Omega \setminus (E \cup E')$ ) は連続且つ単調非減少である。また (4.12) より  $A$  は  $(\mathcal{F}_t)$ -適合でもあるから、以上より  $A \in \mathcal{A}^+$  である。  $N = M^2 - A \in \mathcal{M}_{b,c} \subset \mathcal{M}_{c,loc}$  (命題 4.2.6) より  $A$  は定理の主張を満たす。存在の一意性は命題 4.2.9 による。今  $A' \in \mathcal{A}^+$  もまた定理の主張を満たしているなら、  $N' = M^2 - A'$  として、  $A - A' \in \mathcal{A}$  かつ

$$A - A' = N' - N \in \mathcal{M}_{2,c}$$

となるから  $A_t - A'_t = 0$  ( $\forall t \in I$ )  $\mu$ -a.s. が従う。

第二段  $M \in \mathcal{M}_{c,loc}$  を任意に取る。或る  $(\tau_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathcal{T}$  が存在して  $M^n \in \mathcal{M}_{b,c}$  ( $\forall t \in I$ ,  $M_t^n = M_{t \wedge \tau_n}$ ) となるから、前段の結果より或る  $A^n \in \mathcal{A}^+$  が存在して

$$N^n := (M^n)^2 - A^n \in \mathcal{M}_{b,c}$$

を満たす。或る  $\mu$ -零集合  $E_1$  が存在して<sup>\*25</sup> 全ての  $\omega \in \Omega \setminus E_1$  で  $(\tau_n(\omega))_{n=1}^{\infty}$  は 0 出発、単調非減少かつ或る  $n(\omega)$  番目以降は  $T$  に一致する。今任意に  $n \leq m$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$  を取って固定する。  $\omega \in \Omega \setminus E_1$  に対しては

$$M_{t \wedge \tau_n(\omega)}^m(\omega) = M_{t \wedge \tau_n(\omega) \wedge \tau_m(\omega)}(\omega) = M_t^n(\omega) \quad (\forall t \in I)$$

となり関数類として  $[M_{t \wedge \tau_n}^m] = [M_t^n]$  ( $\forall t \in I$ ) が成り立つから、任意抽出定理 (定理 4.1.5) より

$$\mathbb{E} \left[ (M_t^m)^2 - A_t^m \mid \mathcal{F}_{\tau_n} \right] = (M_{t \wedge \tau_n}^m)^2 - A_{t \wedge \tau_n}^m = (M_t^n)^2 - A_{t \wedge \tau_n}^m \quad (\forall t \in I)$$

<sup>\*23</sup> 或る  $j$  と  $u \in \Omega \setminus E$  で  $A_{\frac{j}{2^{n_k}} T}(u) > A_{\frac{j+1}{2^{n_k}} T}(u)$  が成り立っているとす。式 (4.13) により、

$$\alpha := A_{\frac{j}{2^n} T}(u), \quad \beta := A_{\frac{j+1}{2^n} T}(u)$$

とおけば或る  $v \geq 1$  が存在して

$$\left| \hat{Q}_{\frac{j}{2^{n_k}} T}^{n_v}(u) - A_{\frac{j}{2^{n_k}} T}(u) \right| < \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad \left| \hat{Q}_{\frac{j+1}{2^{n_k}} T}^{n_v}(u) - A_{\frac{j+1}{2^{n_k}} T}(u) \right| < \frac{\alpha - \beta}{2}$$

を同時に満たすが、

$$\hat{Q}_{\frac{j}{2^{n_k}} T}^{n_v}(u) > \frac{\alpha + \beta}{2} > \hat{Q}_{\frac{j+1}{2^{n_k}} T}^{n_v}(u)$$

が従うので  $t \mapsto \hat{Q}_t^{n_v}(u)$  の単調増大性に矛盾する。

<sup>\*24</sup>  $M \in \mathcal{M}_{b,c}$ ,  $N \in \mathcal{M}_{2,c}$  より  $M, N$  のパスが連続でない  $\omega$  の全体は或る零集合に含まれる。それを  $E'$  とおけばよい。

<sup>\*25</sup> 或る零集合  $E_1^{(1)}$  があり  $\tau_0(\omega) = 0$  ( $\forall \omega \in \Omega \setminus E_1^{(1)}$ )、また或る零集合  $E_1^j$  があり  $\tau_j(\omega) \leq \tau_{j+1}(\omega)$  ( $\forall \omega \in \Omega \setminus E_1^j$ )、更に或る零集合  $E_1^{(T)}$  を取れば、各  $\omega \in \Omega \setminus E_1^{(T)}$  について或る  $n(\omega)$  番目以降は  $\tau_n(\omega) = T$  ( $\forall n \geq n(\omega)$ ) が成り立つ。

$$E_1 = \left( \cup_{j=1}^{\infty} E_1^j \right) \cup E_1^{(1)} \cup E_1^{(T)}$$

とおけばよい。

を得る．一方で  $N^m \in \mathcal{M}_{2,c}$  であるから

$$\mathbb{E}[(M_t^m)^2 - A_t^m \mid \mathcal{F}_{\tau_n}] = \mathbb{E}[N_t^m \mid \mathcal{F}_{\tau_n}] = N_{t \wedge \tau_n}^m \quad (\forall t \in I)$$

も成り立ち，任意抽出定理 (定理 4.1.5) より  $\tau_n$  で停めた過程も二乗可積分マルチンゲールとなる．関数類としての意味を強調すれば  $[(M_t^n)^2 - A_{t \wedge \tau_n}^m] = [N_{t \wedge \tau_n}^m] \quad (\forall t \in I)$  が成り立っているから  $((M_t^n)^2 - A_{t \wedge \tau_n}^m)_{t \in I}$  が二乗可積分マルチンゲールであることになり，前段の一意性から或る  $\mu$ -零集合  $E^{n,m}$  が存在して

$$A_{t \wedge \tau_n(\omega)}^m(\omega) = A_t^n(\omega) \quad (\forall t \in I, \omega \in \Omega \setminus E^{n,m})$$

が従う．特に  $\omega \in \Omega \setminus (E_1 \cup E^{n,m})$  なら

$$A_t^n(\omega) = A_{t \wedge \tau_n(\omega)}^m(\omega) = A_t^m(\omega) \quad (t \leq \tau_n(\omega))$$

となる．

$$E_2 := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E^{n,n+1}$$

とおき

$$A_t(\omega) := \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} A_t^n(\omega) & (\omega \in \Omega \setminus (E_1 \cup E_2)) \\ 0 & (\omega \in E_1 \cup E_2) \end{cases} \quad (\forall t \in I)$$

として  $A$  を定めれば  $A \in \mathcal{A}^+$  を満たす<sup>\*26</sup>．そして  $N := M^2 - A$  とおけば  $\Omega \setminus (E_1 \cup E_2)$  上で

$$N_{t \wedge \tau_n} = M_{t \wedge \tau_n}^2 - A_{t \wedge \tau_n} = (M_{t \wedge \tau_n}^n)^2 - A_{t \wedge \tau_n}^n = N_{t \wedge \tau_n}^n \quad (\forall t \in I, n \in \mathbb{N})$$

が成り立つから  $N \in \mathcal{M}_{c,loc}$  となる． $A$  の一意性について，

\*26

**連続性・単調非減少性**  $\omega \in \Omega \setminus (E_1 \cup E_2)$  の場合に確認する．任意に  $s, u \in I$ ,  $(s < u)$  を取れば  $u \leq \tau_n(\omega)$  となる  $n$  が存在し  $A_t(\omega) = A_t^n(\omega) \quad (\forall t \leq \tau_n(\omega))$  を満たす．写像  $I \ni t \mapsto A_t^n(\omega)$  は連続且つ単調非減少であるから  $t \mapsto A_t(\omega)$  も  $t = s, u$  において連続であり，且つ  $A_s(\omega) = A_s^n(\omega) \leq A_u^n(\omega) = A_u(\omega)$  により単調非減少である．  
**適合性** 各  $n \in \mathbb{N}$  に対し  $A^n$  は  $(\mathcal{F}_t)$ -適合である． $t \in I$  を固定し

$$\tilde{\mathcal{F}}_t := \{ B \cap (E_1 \cup E_2)^c ; \quad B \in \mathcal{F}_t \}$$

とおく．写像  $\Omega \ni \omega \mapsto A_t^n(\omega)$  を  $\Omega \setminus (E_1 \cup E_2)$  に制限した  $\tilde{A}_t^n := A_t^n|_{\Omega \setminus (E_1 \cup E_2)}$  は可測  $\tilde{\mathcal{F}}_t / \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  であり，各点収束先の  $\tilde{A}_t := A_t|_{\Omega \setminus (E_1 \cup E_2)}$  もまた可測  $\tilde{\mathcal{F}}_t / \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  となる．任意の  $C \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  に対して

$$A_t^{-1}(C) = \begin{cases} \tilde{A}_t^{-1}(C) & (0 \notin C) \\ (E_1 \cup E_2) \cup \tilde{A}_t^{-1}(C) & (0 \in C) \end{cases}$$

となり， $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{F}_0$  により  $\tilde{\mathcal{F}}_t \subset \mathcal{F}_t$  であるから  $A_t$  は可測  $\mathcal{F}_t / \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  となる．

## 第 5 章

# 伊藤積分

$I := [0, T]$  ( $T > 0$ ) に対して, 基礎に置くフィルター付き確率空間を  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, (\mathcal{F}_t)_{t \in I})$  とする. また次を仮定する:

$$\mathcal{N} := \{ N \in \mathcal{F} ; \mu(N) = 0 \} \subset \mathcal{F}_0.$$

以後, 確率過程が連続であるを書く場合は全てのパスが連続であることを指す.

### 5.1 パスの変動を制限する停止時刻

定義 5.1.1 (パスの変動を制限する停止時刻).  $X = (X^1, \dots, X^d)$  を連続な  $\mathbb{R}^d$  値適合過程<sup>\*1</sup>とする.  $X$  と  $\epsilon > 0$  に対して

$$\sum_{i=1}^d \|X_{t \wedge \tau_{j+1}}^i - X_{t \wedge \tau_j}^i\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq \epsilon, \quad (\forall t \in I, j = 0, 1, 2, \dots)$$

を満たす  $(\tau_j)_{j=0}^\infty \in \mathcal{T}$  の全体を  $\mathcal{T}(X, \epsilon)$  と表す.

定理 5.1.2 (パスの変動を制限する停止時刻の存在).  $X = (X^1, \dots, X^d)$  を連続な  $\mathbb{R}^d$  値適合過程とする. 任意の  $\epsilon > 0$  に対して,  $\tau_0 = 0$  かつ

$$\tau_{j+1}(\omega) := \inf \left\{ t \in I ; \left| X_t(\omega) - X_{t \wedge \tau_j}(\omega) \right| \geq \epsilon/d \right\} \wedge T, \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

と定めれば  $(\tau_j)_{j=0}^\infty \in \mathcal{T}(X, \epsilon)$  となる.

証明. 数学的帰納法で示す.  $\tau_0$  は定義より停止時刻であるから,  $\tau_j$  が停止時刻であると仮定して  $\tau_{j+1}$  が停止時刻となることを示せばよい.

第一段

$$I \ni t \mapsto \sup_{s \in [0, t]} |X_s - X_{s \wedge \tau_j}|$$

<sup>\*1</sup> 定理 3.1.8 により, 任意の停止時刻  $\tau$  に対し写像  $\omega \mapsto X^i(\tau(\omega), \omega)$  ( $i = 1, \dots, d$ ) は可測  $\mathcal{F}_\tau / \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  となり,  $\|X_{t \wedge \tau_{j+1}}^i - X_{t \wedge \tau_j}^i\|_{\mathcal{L}^\infty}$  を考えることができる.

は連続であり

$$\Omega \ni \omega \mapsto \sup_{s \in [0, t]} |X_s(\omega) - X_{s \wedge \tau_j}(\omega)|$$

は全ての  $t \in I$  に対し可測  $\mathcal{F}_t/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  であることを示す.

**連続性** 任意に  $t \in I$  を取り  $t$  における連続性を調べる. 表記を簡単にするため, 任意の  $\omega \in \Omega$  に対し

$$f_\omega(t) := |X_t(\omega) - X_{t \wedge \tau_j}(\omega)| \quad (t \in I)$$

とおく.  $f_\omega(t) < \sup_{s \in [0, t]} f_\omega(s)$  の場合,  $s \mapsto f_\omega(s)$  の連続性より  $t$  の十分小さな近傍を取っても上限は変化しない.  $f_\omega(t) = \sup_{s \in [0, t]} f_\omega(s)$  の場合,  $s < t$  なら

$$\sup_{u \in [0, t]} f_\omega(u) - \sup_{u \in [0, s]} f_\omega(u) \leq f_\omega(t) - f_\omega(s)$$

となり,  $s \mapsto f_\omega(s)$  が連続だから左側で連続である. 同じく  $s \mapsto f_\omega(s)$  の連続性より, 任意の  $\delta > 0$  に対し十分小さな  $h > 0$  を取れば, 全ての  $t < u < t + h$  に対し

$$f_\omega(u) < f_\omega(t) + \delta$$

とできるから

$$\sup_{u \in [0, s]} f_\omega(u) - f_\omega(t) < \delta \quad (t < \forall s < t + h)$$

が成り立つ.

**可測性** 定理 3.1.8 により  $X_{s \wedge \tau_j}$  は  $\mathcal{F}_{s \wedge \tau_j}$ -可測であるから,  $X$  の適合性及び絶対値の連続性と併せて写像  $|X_s - X_{s \wedge \tau_j}|$  は可測  $\mathcal{F}_s/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ , すなわち可測  $\mathcal{F}_t/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  となる.

$$D_t^n := \left\{ \frac{jt}{2^n} ; \quad j = 0, 1, \dots, 2^n \right\} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

として,  $X$  のパスの連続性により

$$\sup_{s \in [0, t]} |X_s(\omega) - X_{s \wedge \tau_j}(\omega)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{s \in D_t^n} |X_s(\omega) - X_{s \wedge \tau_j}(\omega)| \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

が成り立つから  $\sup_{s \in [0, t]} |X_s - X_{s \wedge \tau_j}|$  も可測  $\mathcal{F}_t/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  となる.

**第二段**  $\tau_j$  が停止時刻であるとして  $\tau_{j+1}$  が停止時刻であることを示す. 前段の結果より, 任意の  $t \in [0, T)$  に対して

$$\{\tau_{j+1} \leq t\} = \left\{ \sup_{s \in [0, t]} |X_s - X_{s \wedge \tau_j}| \geq \epsilon/d \right\} \quad (5.1)$$

が成り立つことをいえばよい.  $t = T$  の場合は  $\{\tau_{j+1} \leq T\} = \Omega$  である.

$$\sup_{s \in [0, t]} |X_s(\omega) - X_{s \wedge \tau_j}(\omega)| < \epsilon/d$$

を満たす  $\omega$  について, 前段で示した連続性より, 或る  $h > 0$  が取れて  $[0, t + h]$  が  $\{u \in I ; |X_u(\omega) - X_{u \wedge \tau_j}(\omega)| \geq \epsilon/d\}$  の下界の集合となるから  $t < \tau_{j+1}(\omega)$  が従う. 逆に

$$\sup_{s \in [0, t]} |X_s(\omega) - X_{s \wedge \tau_j}(\omega)| \geq \epsilon/d$$

を満たす  $\omega$  について、パスの連続性より  $\sup$  は  $\max$  と一致するから、或る  $u \in [0, t]$  で

$$|X_u(\omega) - X_{u \wedge \tau_j(\omega)}(\omega)| \geq \epsilon/d$$

が成り立ち  $\tau_{j+1}(\omega) \leq u \leq t$  が従う。以上で (5.1) が示された。前段で示した可測性より

$$\{\tau_{j+1} \leq t\} = \left\{ \sup_{s \in [0, t]} |X_s - X_{s \wedge \tau_j}| \geq \epsilon/d \right\} \in \mathcal{F}_t$$

が任意の  $t \in I$  に対して成立するから  $\tau_{j+1}$  は停止時刻である。

第三段  $(\tau_j)_{j=0}^\infty$  が  $\mathcal{T}$  の元であることを示す。今任意に  $\omega \in \Omega$  を取り固定する。先ず定義より  $\tau_0(\omega) = 0$  は満たされている。また、各  $j \in \mathbb{N}_0$  について  $\tau_{j+1}(\omega)$  は

$$|X_t(\omega) - X_{t \wedge \tau_j(\omega)}(\omega)| \geq \epsilon/d$$

を満たす  $t$  の下限であり、 $t \leq \tau_j(\omega)$  のときは左辺が 0 となるから

$$\tau_j(\omega) < \tau_{j+1}(\omega) \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

を満たす。

第四段  $(\tau_j)_{j=0}^\infty \in \mathcal{T}(X, \epsilon)$  を示す。任意に  $\omega \in \Omega$  と  $t \in I$  を取り固定する。 $(\tau_j)_{j=0}^\infty$  の作り方より

$$|X_{t \wedge \tau_{j+1}}(\omega) - X_{t \wedge \tau_j}(\omega)| \leq \epsilon/d \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

が満たされている。実際もし或る  $j$  で

$$|X_{t \wedge \tau_{j+1}}(\omega) - X_{t \wedge \tau_j}(\omega)| > \epsilon/d$$

が成り立つとすれば、この場合は  $t \geq \tau_j(\omega)$  でなくてはならないが、 $t \geq \tau_{j+1}(\omega)$  ならば、パスの連続性より  $\tau_{j+1}(\omega) > s$  を満たす  $s$  についても

$$|X_s(\omega) - X_{\tau_j(\omega)}(\omega)| > \epsilon/d$$

が成り立ち、下限の定義から  $\tau_{j+1}(\omega) > s \geq \tau_{j+1}(\omega)$  が従い矛盾が生じる。 $t < \tau_{j+1}(\omega)$  のときも  $\tau_{j+1}(\omega) > t \geq \tau_{j+1}(\omega)$  が従い矛盾が生じる。よって

$$|X_{t \wedge \tau_{j+1}}^i(\omega) - X_{t \wedge \tau_j}^i(\omega)| \leq \epsilon/d \quad (i = 1, \dots, d, j = 0, 1, 2, \dots)$$

が成り立ち、 $\omega, t$  の任意性から

$$\sum_{i=1}^d \|X_{t \wedge \tau_{j+1}}^i - X_{t \wedge \tau_j}^i\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq \epsilon \quad (\forall t \in I, j = 0, 1, 2, \dots)$$

が従う。

■

定理 5.1.3 (停止時刻によるパスの変動の制限).  $X = (X^1, \dots, X^d)$  を連続な  $\mathbb{R}^d$  値適合過程とし, 任意に  $\epsilon > 0$  を取る. このとき任意の  $(\tau_j)_{j=0}^\infty \in \mathcal{T}(X, \epsilon)$  に対して或る零集合  $N$  が存在し, 任意の  $\omega \in \Omega \setminus N$  に対して

$$\tau_0(\omega) = 0, \quad \tau_j(\omega) \leq \tau_{j+1}(\omega) \ (j = 1, 2, \dots), \quad \tau_n(\omega) = T \ (\exists n = n(\omega) \in \mathbb{N})$$

かつ

$$\sum_{i=1}^d \left| X_{t \wedge \tau_{j+1}}^i(\omega) - X_{t \wedge \tau_j}^i(\omega) \right| \leq \epsilon, \quad (\forall t \in I, j = 0, 1, 2, \dots)$$

が満たされる.

証明. 任意に  $t \in I$  を取り固定する.

$$A_{t,j}^i := \left\{ \left| X_{t \wedge \tau_{j+1}}^i - X_{t \wedge \tau_j}^i \right| > \left\| X_{t \wedge \tau_{j+1}}^i - X_{t \wedge \tau_j}^i \right\|_{\mathcal{L}^\infty} \right\} \quad (i = 1, \dots, d, j = 0, 1, 2, \dots)$$

とおけば, 補題 1.1.2 により  $A_{t,j}^i$  は  $\mu$ -零集合となる. また

$$A_{t,j} := \bigcup_{i=1}^d A_{t,j}^i, \quad A_t := \bigcup_{j=0}^\infty A_{t,j}$$

とおけば, 任意の  $\omega \in \Omega \setminus A_t$  に対して

$$\sum_{i=1}^d \left| X_{t \wedge \tau_{j+1}}^i(\omega) - X_{t \wedge \tau_j}^i(\omega) \right| \leq \epsilon, \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

が成り立つ. 更に

$$A := \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap I} A_r$$

とすれば, 任意の  $\omega \in \Omega \setminus A$  に対して

$$\sum_{i=1}^d \left| X_{t \wedge \tau_{j+1}}^i(\omega) - X_{t \wedge \tau_j}^i(\omega) \right| \leq \epsilon, \quad (\forall t \in I, j = 0, 1, 2, \dots)$$

が成り立つ. 実際もし或る  $t \in I, j \in \mathbb{N}_0$  で

$$\sum_{i=1}^d \left| X_{t \wedge \tau_{j+1}}^i(\omega) - X_{t \wedge \tau_j}^i(\omega) \right| > \epsilon$$

となると,  $t \mapsto X_t$  の連続性より或る  $r \in \mathbb{Q} \cap I$  に対して

$$\sum_{i=1}^d \left| X_{r \wedge \tau_{j+1}}^i(\omega) - X_{r \wedge \tau_j}^i(\omega) \right| > \epsilon$$

が従うがこれは矛盾である.  $(\tau_j)_{j=0}^\infty \in \mathcal{T}$  でもあるから, 或る  $\mu$ -零集合  $B$  が存在し, 任意の  $\omega \in \Omega \setminus B$  に対して

$$\tau_0(\omega) = 0, \quad \tau_j(\omega) \leq \tau_{j+1}(\omega) \ (j = 1, 2, \dots), \quad \tau_n(\omega) = T \ (\exists n = n(\omega) \in \mathbb{N})$$

を満たす. 従って  $N := A \cup B$  とすればよい. ■

## 5.2 可予測過程

定義 5.2.1 (可予測  $\sigma$ -加法族・可予測過程).  $\{0\} \times A$  ( $A \in \mathcal{F}_0$ ) の形, 或は  $(s, t] \times A$  ( $(s, t] \subset I, A \in \mathcal{F}_s$ ) の形の  $I \times \Omega$  の部分集合の全体を  $\Pi$  とおく. そして  $\Pi$  の生成する  $\sigma$ -加法族を  $\mathcal{P}$  と表し, これを可予測  $\sigma$ -加法族 (predictable  $\sigma$ -algebra) と呼ぶ. また  $\mathcal{P}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  可測の関数を可予測過程 (predictable process) という.

補題 5.2.2 ( $\Pi$  は乗法族). 定義 5.2.1 の  $\Pi$  は乗法族である.

証明. 任意に  $B_1, B_2 \in \Pi$  を取り,  $B_1 = (s_1, t_1] \times A_1, B_2 = (s_2, t_2] \times A_2$  ( $A_1 \in \mathcal{F}_{s_1}, A_2 \in \mathcal{F}_{s_2}, s_1 \leq s_2$ ) と仮定する.  $t_1 \leq s_2$  なら  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$  であり,  $s_2 < t_1$  とすれば  $A_1 \in \mathcal{F}_{s_2}$  であるから

$$B_1 \cap B_2 = (s_2, t_1 \wedge t_2] \times (A_1 \cap A_2) \in \Pi$$

が成り立つ.  $B_1 = \{0\} \times A_1$  ( $A_1 \in \mathcal{F}_0$ ) の場合,  $B_2 = \{0\} \times A_2$  ( $A_2 \in \mathcal{F}_0$ ) の形であれば  $B_1 \cap B_2 = \{0\} \times (A_1 \cap A_2)$ , そうでなければ  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$  となり, いずれの場合も交演算で閉じている. ■

補題 5.2.3 (可予測単関数の時間に関する可測性). 任意の  $B \in \mathcal{P}$  と任意の  $\omega \in \Omega$  に対し  $f_B : I \ni t \mapsto \mathbb{1}_B(t, \omega)$  は可測  $\mathfrak{B}(I)/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  である.

証明. 任意に  $C \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  を取り固定する.

$$\mathcal{D} := \{ B \in \mathcal{P} ; f_B \text{ が可測 } \mathfrak{B}(I)/\mathfrak{B}(\mathbb{R}). \}$$

とおけば  $\mathcal{D}$  は Dynkin 族である. 実際次が成り立つ:

- $B = I \times \Omega$  なら  $f_B^{-1}(C) = I$  又は  $\emptyset$  であるから  $I \times \Omega \in \mathcal{D}$  である.
- $B_1, B_2 \in \mathcal{D}$ ,  $B_1 \subset B_2$  に対して,  $f_{B_2 \setminus B_1} = f_{B_2} - f_{B_1}$  より  $B_2 \setminus B_1 \in \mathcal{D}$  が成り立つ.
- 互いに素な列  $B_n \in \mathcal{D}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) に対して,  $f_{\sum_{n=1}^{\infty} B_n} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{B_n}$  より  $\sum_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{D}$  が成り立つ.

補題 5.2.2 より  $\Pi$  は乗法族であるから,  $\Pi \subset \mathcal{D}$  ならば Dynkin 族定理により補題の主張が従う.  $B = (s, t] \times A$  ( $(s, t] \subset I, A \in \mathcal{F}_s$ ) と表されるとすれば,  $\omega \in A$  のとき

$$f_B^{-1}(C) = \begin{cases} I & (0 \in C, 1 \in C) \\ (s, t] & (0 \notin C, 1 \in C) \\ I \setminus (s, t] & (0 \in C, 1 \notin C) \\ \emptyset & (0 \notin C, 1 \notin C) \end{cases}$$

が成り立ち,  $\omega \notin A$  のとき

$$f_B^{-1}(C) = \begin{cases} I & (0 \in C) \\ \emptyset & (0 \notin C) \end{cases}$$

が成り立つ.  $B = \{0\} \times A$  の場合も同様であるから, いずれの場合も  $f_B^{-1}(C) \in \mathfrak{B}(I)$  を満たす. ■

定理 5.2.4 (( $\Omega \times I, \mathcal{P}$ ) における測度の構成). 任意の  $M \in \mathcal{M}_{2,c}, B \in \mathcal{P}$  に対して

$$\mu_M(B) := \int_{\Omega} \int_I \mathbb{1}_B(s, \omega) \langle M \rangle(ds, \omega) \mu(d\omega) \quad (5.2)$$

と定めれば,  $\mu_M$  は可測空間  $(I \times \Omega, \mathcal{P})$  上の測度となる.

証明.

第一段 任意の  $B \in \mathcal{P}, t \in I$  に対して

$$\Omega \ni \omega \mapsto \int_{[0,t]} \mathbb{1}_B(s, \omega) \langle M \rangle(ds, \omega) \quad (5.3)$$

が可測  $\mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  であることを示す<sup>\*2</sup>. 今,  $I \ni t \mapsto \langle M \rangle_t$  の単調非減少性より

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{[0,t]} \mathbb{1}_B(s, \omega) \langle M \rangle(ds, \omega) \\ &\leq \int_{[0,t]} \langle M \rangle(ds, \omega) = \langle M \rangle(t, \omega) < \infty \quad (\forall t \in I, B \in \mathcal{P}, \omega \in \Omega) \end{aligned} \quad (5.4)$$

が成り立ち, いかなる場合も可積分性は保証される.

$$\mathcal{D} := \{ B \in \mathcal{P} ; \text{ 任意の } t \in I \text{ に対し (5.3) が可測 } \mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R}). \}$$

とおけば  $\mathcal{D}$  は Dynkin 族である. 実際以下が成り立つ:

- $B = I \times \Omega$  の場合, (5.4) と  $\langle M \rangle$  の適合性より (5.3) は可測  $\mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  となる.
- $B_1, B_2 \in \mathcal{P}, B_1 \subset B_2$  に対して, (5.3) の積分は可積分であるから線型性より

$$\begin{aligned} &\int_{[0,t]} \mathbb{1}_{B_2 \setminus B_1}(s, \omega) \langle M \rangle(ds, \omega) \\ &= \int_{[0,t]} \mathbb{1}_{B_2}(s, \omega) \langle M \rangle(ds, \omega) - \int_{[0,t]} \mathbb{1}_{B_1}(s, \omega) \langle M \rangle(ds, \omega) \end{aligned}$$

が成り立ち  $B_2 \setminus B_1 \in \mathcal{P}$  が従う.

- 互いに素な列  $B_n \in \mathcal{P} (n \in \mathbb{N})$  に対して, 単調収束定理より

$$\int_{[0,t]} \mathbb{1}_{\sum_{n=1}^{\infty} B_n}(s, \omega) \langle M \rangle(ds, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,t]} \mathbb{1}_{B_n}(s, \omega) \langle M \rangle(ds, \omega) \quad (5.5)$$

が成り立つ. (5.4) より  $\omega$  ごとに右辺の級数は有限確定し  $\sum_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{P}$  が従う.

補題 5.2.3 と同様に  $\Pi \subset \mathcal{D}$  となることを示せば, Dynkin 族定理より第一段の主張が従う.

$B = (\alpha, \beta] \times A$  ( $A \in \mathcal{F}_{\alpha}$ ) として, 全ての  $\omega \in \Omega$  に対し

$$\begin{aligned} \int_{[0,t]} \mathbb{1}_B(s, \omega) \langle M \rangle(ds, \omega) &= \mathbb{1}_A(\omega) \int_{[0,t]} \mathbb{1}_{(\alpha, \beta]}(s) \langle M \rangle(ds, \omega) \\ &= \begin{cases} 0 & (t \leq \alpha) \\ \mathbb{1}_A(\omega) (\langle M \rangle(t \wedge \beta, \omega) - \langle M \rangle(\alpha, \omega)) & (t > \alpha) \end{cases} \end{aligned}$$

<sup>\*2</sup> 補題 5.2.3 より可測性が保証されているから, (5.3) の積分は Lebesgue-Stieltjes 積分として定義される.



が成り立つから,  $A \in \mathcal{F}_t$  であることと  $\langle M \rangle$  の適合性から  $(\alpha, \beta] \times A \in \mathcal{D}$  が従う.  $B = \{0\} \times A$  ( $A \in \mathcal{F}_0$ ) の場合は積分は常に 0 になる.

第二段 前段の結果より (5.2) 右辺の積分が定義される. この段では (5.2) で定める  $\mu_M$  が測度となることを示す. 先ず  $\mu_M$  の正值性は (5.4) より従う. また互いに素な列  $B_n \in \mathcal{P}$  を取れば, (5.5) と単調収束定理より

$$\int_{\Omega} \int_I \mathbb{1}_{\sum_{n=1}^{\infty} B_n}(s, \omega) \langle M \rangle(ds, \omega) \mu(d\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} \int_I \mathbb{1}_{B_n}(s, \omega) \langle M \rangle(ds, \omega) \mu(d\omega)$$

が成り立ち  $\mu_M$  の完全加法性が従う. ■

定義 5.2.5 (単純可予測過程).  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ ,  $F \in \mathcal{L}^{\infty}(\Omega, \mathcal{F}_0, \mu)$ ,  $F_i \in \mathcal{L}^{\infty}(\Omega, \mathcal{F}_{t_i}, \mu)$  ( $i = 0, \dots, n-1$ ) を任意に取り構成する次の過程

$$X(t, \omega) := F(\omega) \mathbb{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} F_i(\omega) \mathbb{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t) \quad (\forall \omega \in \Omega, t \in I) \quad (5.6)$$

を単純可予測過程 (simple predictable process) という. 単純可予測過程の全体を  $\mathcal{S}$  と表す.

補題 5.2.6 (単純可予測過程の性質).

- (1)  $\mathcal{S}$  は  $\mathbb{R}$  上の線形空間をなす.
- (2) 任意の  $X \in \mathcal{S}$  は可測  $\mathcal{P}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  である.
- (3)  $\mathcal{S}$  は  $\mathcal{L}^2(I \times \Omega, \mathcal{P}, \mu_M)$  の稠密な部分集合である.

証明.

- (1)  $\mathcal{S}$  が線型演算について閉じていることを示す.

加法  $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$  を取れば, 定義 5.2.5 に従って

$$S_1 = F \mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{i=0}^{n-1} F_i \mathbb{1}_{(t_i, t_{i+1}]}, \quad S_2 = G \mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{j=0}^{m-1} G_j \mathbb{1}_{(s_j, s_{j+1}]}$$

と表現できる. 今, 時点の分点の合併が  $0 = u_0 < u_1 < \cdots < u_r = T$  であるとする.

$$\begin{aligned} \tilde{F}_k &:= F_i \quad (t_i \leq u_k < t_{i+1}, i = 0, \dots, n-1), \\ \tilde{G}_k &:= G_j \quad (s_j \leq u_k < s_{j+1}, j = 0, \dots, m-1) \end{aligned}$$

とおけば, 全ての  $k = 0, \dots, r-1$  に対し  $\tilde{F}_k, \tilde{G}_k \in \mathcal{L}^{\infty}(\Omega, \mathcal{F}_{u_k}, \mu)$  であり, また

$$S_1 = F \mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{k=0}^{r-1} \tilde{F}_k \mathbb{1}_{(u_k, u_{k+1}]}, \quad S_2 = G \mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{k=0}^{r-1} \tilde{G}_k \mathbb{1}_{(u_k, u_{k+1}]}$$

と表現しなおせば

$$S_1 + S_2 = (F + G) \mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{k=0}^{r-1} (\tilde{F}_k + \tilde{G}_k) \mathbb{1}_{(u_k, u_{k+1}]} \quad (5.7)$$

が成り立つ。  $\mathcal{L}^\infty$  の線型性より  $S_1 + S_2 \in \mathcal{S}$  が従う。  
スカラ倍  $S \in \mathcal{S}$  と  $\alpha \in \mathbb{R}$  を取れば、

$$S = F \mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{i=0}^{n-1} F_i \mathbb{1}_{(t_i, t_{i+1}]}$$

と表されているとして

$$\alpha S = \alpha F \mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha F_i \mathbb{1}_{(t_i, t_{i+1}]}$$

となる。  $\mathcal{L}^\infty$  の線型性より  $\alpha S \in \mathcal{S}$  が従う。

- (2) (5.6) の各項が可測  $\mathcal{P}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  であることを示せばよい。  $(s, t] \in I$  と  $F \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}_s, \mu)$  を取る。  $F$  の単関数近似列  $(F_n)_{n=1}^\infty$  を取れば、一つ一つは

$$F_n = \sum_{j=1}^{N_n} \alpha_j^n \mathbb{1}_{A_j^n} \quad (\alpha_j^n \in \mathbb{R}, A_j^n \in \mathcal{F}_s, \sum_{j=1}^{N_n} A_j^n = \Omega)$$

と表現される。各  $j = 1, \dots, N_n$  について

$$I \times \Omega \ni (u, \omega) \mapsto \mathbb{1}_{A_j^n}(\omega) \mathbb{1}_{(s, t]}(u)$$

が可測  $\mathcal{P}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  であるから、  $F_n \mathbb{1}_{(s, t]}$  及びその各点極限の  $F \mathbb{1}_{(s, t]}$  も可測  $\mathcal{P}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  である。

- (3) まず  $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}^2(I \times \Omega, \mathcal{P}, \mu_M)$  であることを示す。 (5.6) の各項が二乗可積分であればよいから、任意に  $(s, t] \in I$  と  $F \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}_s, \mu)$  を取り  $F \mathbb{1}_{(s, t]}$  の二乗可積分性を示す。

$$E := \left\{ \|F\|_{\mathcal{L}^\infty(\mu)} < F \right\}$$

とおけば補題 1.1.2 より  $\mu(E) = 0$  となるから、  $\mu_M(I \times E) = 0$  が従い

$$\int_{I \times \Omega} |F(\omega)|^2 \mathbb{1}_{(s, t]}(u) \mu_M(d(u, \omega)) \leq \|F\|_{\mathcal{L}^\infty(\mu)}^2 \mu_M((s, t] \times (\Omega \setminus E))$$

が成り立つ。また  $M \in \mathcal{M}_{2,c}$  であるから  $t$  ごとに  $\langle M \rangle_t$  は可積分であり

$$\mu_M((s, t] \times (\Omega \setminus E)) = \int_{\Omega} \langle M \rangle_t(\omega) - \langle M \rangle_s(\omega) \mu(d\omega) < \infty$$

が得られる。次に  $\mathcal{S}$  が  $\mathcal{L}^2(I \times \Omega, \mathcal{P}, \mu_M)$  で稠密であることを示す。

$$\mathcal{D} := \left\{ B \in \mathcal{P} ; \quad \forall \epsilon > 0, \exists S \in \mathcal{S}, \text{ s.t. } \|\mathbb{1}_B - S\|_{\mathcal{L}^2(\mu_M)} < \epsilon. \right\}$$

とおけば  $\Pi \subset \mathcal{D}$  を満たす。実際任意の  $B \in \Pi$  は  $B = (s, t] \times A$  ( $A \in \mathcal{F}_s$ ) 或は  $B = \{0\} \times A$  ( $A \in \mathcal{F}_0$ ) と表現され、  $\mathbb{1}_A \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$  を満たすから  $\mathbb{1}_{(s, t]} \mathbb{1}_A \in \mathcal{S}$  が成り立つ。そしてまた、以下に示すように  $\mathcal{D}$  は Dynkin 族である。

- $B = I \times \Omega$  に対し  $S = \mathbb{1}_{\{0, T\} \times \Omega}$  とすれば

$$\|\mathbb{1}_B - S\|_{\mathcal{L}^2(\mu_M)}^2 = \mu_M(\{0\} \times \Omega) = 0$$

が成り立ち  $I \times \Omega \in \mathcal{D}$  が従う。

- $B_1, B_2 \in \mathcal{D}$ ,  $B_1 \subset B_2$  と  $\epsilon > 0$  を任意に取る.

$$\|\mathbb{1}_{B_1} - S_1\|_{\mathcal{L}^2(\mu_M)} < \frac{\epsilon}{2}, \quad \|\mathbb{1}_{B_2} - S_2\|_{\mathcal{L}^2(\mu_M)} < \frac{\epsilon}{2}$$

を満たす  $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$  を選べば, (1) より  $S_2 - S_1 \in \mathcal{S}$  であり, かつ

$$\|\mathbb{1}_{B_2} - \mathbb{1}_{B_1} - (S_2 - S_1)\|_{\mathcal{L}^2(\mu_M)} < \epsilon$$

が成り立つから  $B_2 \setminus B_1 \in \mathcal{D}$  が従う.

- 互いに素な列  $B_n \in \mathcal{D}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) と  $\epsilon > 0$  を任意に取る. 各  $B_n$  に対し

$$\|\mathbb{1}_{B_n} - S_n\|_{\mathcal{L}^2(\mu_M)} < \frac{\epsilon}{2^n}$$

を満たす  $S_n \in \mathcal{S}$  を選ぶ. 任意の  $N \in \mathbb{N}$  に対し

$$\begin{aligned} \left\| \mathbb{1}_{\sum_{n=1}^{\infty} B_n} - \sum_{n=1}^N S_n \right\|_{\mathcal{L}^2(\mu_M)} &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{B_n} - \sum_{n=1}^N S_n \right\|_{\mathcal{L}^2(\mu_M)} \\ &\leq \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \mathbb{1}_{B_n} \right\|_{\mathcal{L}^2(\mu_M)} + \left\| \sum_{n=1}^N \mathbb{1}_{B_n} - \sum_{n=1}^N S_n \right\|_{\mathcal{L}^2(\mu_M)} \\ &\leq \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \mathbb{1}_{B_n} \right\|_{\mathcal{L}^2(\mu_M)} + \sum_{n=1}^N \|\mathbb{1}_{B_n} - S_n\|_{\mathcal{L}^2(\mu_M)} \\ &< \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \mathbb{1}_{B_n} \right\|_{\mathcal{L}^2(\mu_M)} + \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

が成り立つ.  $\sum_{n=N+1}^{\infty} \mathbb{1}_{B_n}$  は可積分関数 1 で抑えられ, かつ各点  $(t, \omega) \in I \times \Omega$  において

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \mathbb{1}_{B_n}(t, \omega) \longrightarrow 0 \quad (N \longrightarrow \infty)$$

となるから Lebesgue の収束定理より

$$\left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \mathbb{1}_{B_n} \right\|_{\mathcal{L}^2(\mu_M)} \longrightarrow 0 \quad (N \longrightarrow \infty)$$

が成り立つ. 従って

$$\left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \mathbb{1}_{B_n} \right\|_{\mathcal{L}^2(\mu_M)} < \frac{\epsilon}{2}$$

を満たすように  $N \in \mathbb{N}$  を選べば, (1) より  $\sum_{n=1}^N S_n \in \mathcal{S}$  が成り立ち, かつ

$$\left\| \mathbb{1}_{\sum_{n=1}^{\infty} B_n} - \sum_{n=1}^N S_n \right\|_{\mathcal{L}^2(\mu_M)} < \epsilon$$

も得られ  $\sum_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{D}$  が従う.

以上で  $\mathcal{P} = \mathcal{D}$  が示された. つまり  $S$  は  $\mathcal{P}$ -可測の単関数を近似できるから主張が従う. ■

### 5.3 伊藤積分

定義 5.3.1 (単純可予測過程に対する伊藤積分). 任意の  $X \in \mathcal{S}$  は (5.6) に倣って

$$X = F \mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{i=0}^{n-1} F_i \mathbb{1}_{(t_i, t_{i+1}]} \quad (5.8)$$

と表現される.  $X$  に対し  $M \in \mathcal{M}_{2,c}$  を取り

$$I_M(X)(t, \omega) := \sum_{i=0}^{n-1} F_i(\omega) (M_{t \wedge t_{i+1}}(\omega) - M_{t \wedge t_i}(\omega)) \quad (\forall t \in I, \omega \in \Omega)$$

として定める  $I_M$  を単純可予測過程に対する伊藤積分作用素 (Itô integral operator) とする.

定理 5.3.2 (伊藤積分の連続線型性). 定義 5.3.1 の  $I_M$  は  $\mathcal{S}$  から  $\mathcal{M}_{2,c}$  への線型作用素であり, 次の意味で等長である:

$$\|X\|_{\mathcal{L}^2(\mu_M)} = \|I_M(X)\|_{\mathcal{M}_{2,c}} \quad (X \in \mathcal{S}).$$

ただし,  $f \in \mathcal{M}_{2,c}$  に対して  $\|f\|_{\mathcal{M}_{2,c}}$  を

$$\|f\|_{\mathcal{M}_{2,c}}^2 := \int_{\Omega} |f(T, \omega)|^2 \mu(d\omega)$$

と定める.

証明.

線型性 任意に  $X_1, X_2 \in \mathcal{S}$  と  $\alpha \in \mathbb{R}$  を取る.

加法  $X_1, X_2$  の表示を

$$X_1 = F \mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{i=0}^{n-1} F_i \mathbb{1}_{(t_i, t_{i+1}]}, \quad X_2 = G \mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{j=0}^{m-1} G_j \mathbb{1}_{(s_j, s_{j+1}]}$$

として, 時点の分点の合併を  $0 = u_0 < u_1 < \cdots < u_r = T$  と表し

$$\tilde{F}_k := F_i \quad (t_i \leq u_k < t_{i+1}, i = 0, \dots, n-1),$$

$$\tilde{G}_k := G_j \quad (s_j \leq u_k < s_{j+1}, j = 0, \dots, m-1)$$

とおく.  $\sum_{\alpha \leq u_k < \beta}^{(k)}$  と表記して  $\alpha \leq u_k < \beta$  を満たす  $k$  についての総和記号を定めれば

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{r-1} \tilde{F}_k(\omega) (M_{t \wedge u_{k+1}}(\omega) - M_{t \wedge u_k}(\omega)) &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{t_i \leq u_k < t_{i+1}}^{(k)} F_i(\omega) (M_{t \wedge u_{k+1}}(\omega) - M_{t \wedge u_k}(\omega)) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} F_i(\omega) (M_{t \wedge t_{i+1}}(\omega) - M_{t \wedge t_i}(\omega)) \end{aligned}$$

が成り立つから, (5.7) と併せて

$$\begin{aligned} I_M(X_1 + X_2)(t, \omega) &= \sum_{k=0}^{r-1} \left( \tilde{F}_k(\omega) + \tilde{G}_k(\omega) \right) (M_{t \wedge u_{k+1}}(\omega) - M_{t \wedge u_k}(\omega)) \\ &= I_M(X_1) + I_M(X_2)(t, \omega) \quad (\forall t \in I, \omega \in \Omega) \end{aligned}$$

が得られる.

スカラ倍  $X_1$  と  $\alpha$  に対して次が成り立つ:

$$\begin{aligned} I_M(\alpha X_1)(t, \omega) &= \sum_{i=0}^{n-1} \alpha F_i(\omega) (M_{t \wedge t_{i+1}}(\omega) - M_{t \wedge t_i}(\omega)) \\ &= \alpha \sum_{i=0}^{n-1} F_i(\omega) (M_{t \wedge t_{i+1}}(\omega) - M_{t \wedge t_i}(\omega)) = \alpha I_M(X_1)(t, \omega) \quad (\forall t \in I, \omega \in \Omega). \end{aligned}$$

等長性 任意に  $X \in \mathcal{S}$  を取り, (5.8) を  $X$  の表示とする.

$d$