関数解析後期メモ

百合川

2018 年 4 月 7 日

目次

第 1 章

ノルム空間

$\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}$ 又は $\mathbb{C}$ とする．$\mathbb{K}$ 上のノルム空間 X におけるノルムを $\|\cdot\|_X$ と表記し，X にノルム位相を導入する．

1.1　ノルム空間と次元

定理 1.1.1 (有限次元空間は完備).
$\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}$ 又は $\mathbb{C}$ とし，X を $\mathbb{K}$ 上のノルム空間とする．$\dim X < \infty$ ならば X は Banach 空間である．

証明.　X の次元数 n による帰納法で証明する．

第一段　$n = 1$ のとき X の基底を u_1 とすれば，X の任意の Cauchy 列は $(\alpha_m u_1)_{m=1}^{\infty}$　$(\alpha_m \in \mathbb{K},\ m = 1, 2, \cdots)$ と表せる．

$$|\alpha_n - \alpha_m| \, \| u_1 \|_X = \| \alpha_n u_1 - \alpha_m u_1 \|_X \longrightarrow 0 \quad (n, m \longrightarrow \infty)$$

が成り立つから $(\alpha_m)_{m=1}^{\infty}$ は Cauchy 列であり，$\mathbb{K}$ の完備性より或る $\alpha \in \mathbb{K}$ が存在して

$$\left| \alpha_{m_k} - \alpha \right| \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty)$$

を満たし

$$\left\| \alpha_{m_k} u_1 - \alpha u_1 \right\|_X \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty)$$

が従う．

第二段　$n = k$ のとき定理の主張が成り立つと仮定し，$n = k + 1$ として X の基底を $u_1, \cdots, u_{k+1}$ と表す．X から任意に Cauchy 列 $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ を取れば，各 x_j は

$$x_j = y_j + \beta_j u_{k+1} \quad (y_j \in \mathrm{L.h.}\,[\,\{\, u_1, \cdots, u_k \,\}\,],\ \beta_j \in \mathbb{K})$$

として一意に表示される．$(\beta_j)_{j=1}^{\infty}$ が有界列でないと仮定すると $\beta_{j_s} \geq s\ (j_s < j_{s+1},\ s = 1, 2, \cdots)$ を満たす部分列 $\left(\beta_{j_s}\right)_{s=1}^{\infty}$ が存在し，$(x_j)_{j=1}^{\infty}$ の有界性と併せて

$$\left\| u_{k+1} + \tfrac{1}{\beta_{j_s}} y_{j_s} \right\|_X \leq \left\| u_{k+1} + \tfrac{1}{\beta_{j_s}} y_{j_s} - \tfrac{1}{\beta_{j_s}} x_{j_s} \right\|_X + \left\| \tfrac{1}{\beta_{j_s}} x_{j_s} \right\|_X = \left\| \tfrac{1}{\beta_{j_s}} x_{j_s} \right\|_X \longrightarrow 0 \quad (s \longrightarrow \infty)$$

が成り立つが，帰納法の仮定より $u_{k+1} \in \mathrm{L.h.}\,[\,\{\, u_1, \cdots, u_k \,\}\,]$ が従い矛盾が生じる．よって $(\beta_j)_{j=1}^{\infty}$ は $\mathbb{K}$ の有界列でなくてはならず，Bolzano-Weierstrass の定理より部分列 $\left(\beta_{j_\nu}\right)_{\nu=1}^{\infty}$ と $\beta \in \mathbb{K}$ が存在して

$$\left| \beta_{j_\nu} - \beta \right| \longrightarrow 0 \quad (\nu \longrightarrow \infty)$$

を満たす．また $\left(x_{j_\nu}\right)_{\nu=1}^{\infty}$ と $\left(\beta_{j_\nu}u_{k+1}\right)_{\nu=1}^{\infty}$ が共に Cauchy 列であるから $\left(y_{j_\nu}\right)_{\nu=1}^{\infty}$ も Cauchy 列であり，帰納法の仮定より或る $y \in \mathrm{L.h.}\,[\,\{\,u_1, \cdots, u_k\,\}\,]$ が存在して

$$\left\| y_{j_\nu} - y \right\|_X \longrightarrow 0 \quad (\nu \longrightarrow \infty)$$

を満たす．よって

$$\left\| x_{j_\nu} - (y + \beta u_{k+1}) \right\|_X \leq \left\| y_{j_\nu} - y \right\|_X + \left|\beta_{j_\nu} - \beta\right| \| u_{k+1} \|_X \longrightarrow 0 \quad (\nu \longrightarrow \infty)$$

が成り立ち，部分列の収束から $x_j \to y + \beta u_{k+1}$ $(j \to \infty)$ が従う． ∎

定理 1.1.2 (有限次元空間における有界点列の収束 (局所コンパクト性)).
$\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}$ 又は $\mathbb{C}$ とし，X を $\mathbb{K}$ 上のノルム空間とする．$\dim X < \infty$ ならば X の任意の有界点列は収束部分列を含む．

証明.　X の次元数 n による帰納法で証明する．

第一段　$n = 1$ のとき X の基底を u_1 とすれば，X の任意の有界点列は $(\alpha_m u_1)_{m=1}^{\infty}$　$(\alpha_m \in \mathbb{K},\ m = 1, 2, \cdots)$ と表せる．$(\alpha_m)_{m=1}^{\infty}$ は有界列であるから，Bolzano-Weierstrass の定理より部分列 $(\alpha_{m_k})_{k=1}^{\infty}$ と $\alpha \in \mathbb{K}$ が存在して

$$\left|\alpha_{m_k} - \alpha\right| \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty)$$

を満たし

$$\left\| \alpha_{m_k} u_1 - \alpha u_1 \right\|_X \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty)$$

が従う．

第二段　$n = k$ のとき定理の主張が成り立つと仮定し，$n = k + 1$ として X の基底を $u_1, \cdots, u_{k+1}$ と表す．X から任意に有界列 $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ を取れば，各 x_j は

$$x_j = y_j + \beta_j u_{k+1} \quad (y_j \in \mathrm{L.h.}\,[\,\{\,u_1, \cdots, u_k\,\}\,],\ \beta_j \in \mathbb{K})$$

として一意に表示される．$(\beta_j)_{j=1}^{\infty}$ が有界でないと仮定すると $\beta_{j_s} \geq s$ $(j_s < j_{s+1},\ s = 1, 2, \cdots)$ を満たす部分列 $\left(\beta_{j_s}\right)_{s=1}^{\infty}$ が存在し，$(x_j)_{j=1}^{\infty}$ の有界性と併せて

$$\left\| u_{k+1} + \tfrac{1}{\beta_{j_s}} y_{j_s} \right\|_X \leq \left\| u_{k+1} + \tfrac{1}{\beta_{j_s}} y_{j_s} - \tfrac{1}{\beta_{j_s}} x_{j_s} \right\|_X + \left\| \tfrac{1}{\beta_{j_s}} x_{j_s} \right\|_X = \left\| \tfrac{1}{\beta_{j_s}} x_{j_s} \right\|_X \longrightarrow 0 \quad (s \longrightarrow \infty)$$

が成り立つが，定理 1.1.1 より $u_{k+1} \in \mathrm{L.h.}\,[\,\{\,u_1, \cdots, u_k\,\}\,]$ が従い矛盾が生じる．よって $(\beta_j)_{j=1}^{\infty}$ は $\mathbb{K}$ の有界列でなくてはならず，Bolzano-Weierstrass の定理より部分列 $\left(\beta_{j(1,i)}\right)_{i=1}^{\infty}$ と $\beta \in \mathbb{K}$ が存在して

$$\left|\beta_{j(1,i)} - \beta\right| \longrightarrow 0 \quad (i \longrightarrow \infty)$$

を満たす．また $\left(y_{j(1,i)}\right)_{i=1}^{\infty}$ も有界列となるから，或る $y \in \mathrm{L.h.}\,[\,\{\,u_1, \cdots, u_k\,\}\,]$ と部分列 $\left(y_{j(2,i)}\right)_{i=1}^{\infty}$ が存在して

$$\left\| y_{j(2,i)} - y \right\|_X \longrightarrow 0 \quad (i \longrightarrow \infty)$$

を満たす．従って

$$\left\| x_{j(2,i)} - (y + \beta u_{k+1}) \right\|_X \leq \left\| y_{j(2,i)} - y \right\|_X + \left|\beta_{j(1,i)} - \beta\right| \| u_{k+1} \|_X \longrightarrow 0 \quad (i \longrightarrow \infty)$$

が成り立つ． ∎

定理 1.1.3 (閉部分空間との点の距離).　X をノルム空間，$L \subsetneq X$ を閉部分空間とする．このとき任意の $1 > \epsilon > 0$ に対して或る $e \in X$ が存在し，$\| e \|_X = 1$ かつ次を満たす:

$$\inf_{x \in L} \| e - x \|_X > 1 - \epsilon.$$

証明.　任意に $y \in X \backslash L$ を取れば，L は閉であるから

$$\delta := \inf_{x \in L} \| y - x \|_X > 0$$

となる．

$$\lim_{n \to \infty} \| y - x_n \|_X = \delta \tag{1.1}$$

を満たすように点列 $x_n \in L$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を取り

$$e_n := \frac{1}{\| y - x_n \|_X}(y - x_n) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

とおけば，$\| e_n \|_X = 1$ 且つ任意の $x \in L$ に対して

$$\| e_n - x \|_X = \frac{1}{\| y - x_n \|_X} \Big\| y - x_n - \| y - x_n \|_X \, x \Big\|_X \geq \frac{\delta}{\| y - x_n \|_X}$$

が成り立つから

$$\inf_{x \in L} \| e_n - x \|_X \geq \frac{\delta}{\| y - x_n \|_X} \tag{1.2}$$

が従う．(1.1) より

$$\frac{\delta}{\| y - x_n \|_X} \longrightarrow 1 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

であるから，任意の $1 > \epsilon > 0$ に対し $(1 - \epsilon) \| y - x_n \|_X < \delta$ となる n を取れば (1.2) より

$$\inf_{x \in L} \| e_n - x \|_X > 1 - \epsilon$$

が成り立つ． ∎

定理 1.1.4 (単位球面がコンパクトなら有限次元).　X をノルム空間，S を X の単位球面とする．S がコンパクトならば $\dim X < \infty$ である．

証明.　対偶を証明する．距離空間のコンパクト性についての一般論より，S がコンパクトであることと S の任意の点列が S で収束する部分列を含むことは同値である．$\dim X = \infty$ と仮定する．任意に一つ $e_1 \in S$ を取り $L_1 := \mathrm{L.h.}[\{ e_1 \}]$ とおけば，L_1 は X の閉部分空間であるから定理 1.1.3 より或る $e_2 \in S$ が存在して

$$\inf_{x \in L_1} \| e_2 - x \|_X > \frac{1}{2}$$

を満たす．$L_2 \coloneqq \mathrm{L.h.}[\{e_1, e_2\}]$ も X の閉部分空間であるから或る $e_3 \in S$ が存在して

$$\inf_{x \in L_2} \| e_3 - x \|_X > \frac{1}{2}$$

を満たす．この操作を繰り返して S の点列 $e_1, e_2, \cdots$ を構成すれば，

$$\| e_n - e_m \|_X > \frac{1}{2} \quad (\forall n, m \in \mathbb{N},\ n \neq m)$$

が成り立ち $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ は収束部分列を含みえない． ∎

1.2　商ノルム空間

ノルム空間 X の閉部分空間 Y に対し

$$x \sim y \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} x - y \in Y \quad (\forall x, y \in X)$$

として X における同値関係 $\sim$ を定める[*1]．以降，関係 $\sim$ による $x \in X$ の同値類を $[x]$ と表し，商集合を X/Y と表す．

定理 1.2.1 (商集合における線型演算).　X/Y において

$$[x] + [y] \coloneqq [x + y], \quad \alpha[x] \coloneqq [\alpha x] \quad (\forall [x], [y] \in X/Y,\ \alpha \in \mathbb{K}) \tag{1.3}$$

として演算を定義すれば，X/Y はこれを線型演算として線形空間となる．

証明.

well-defined　先ず (1.3) の定義が well-defined であることを示す．任意に $u \in [x], v \in [y], \alpha \in \mathbb{K}$ を取り

$$[u + v] = [x + y], \quad [\alpha u] = [\alpha x]$$

が成り立つことをいえばよい．実際 $x \sim u$ かつ $y \sim v$ であるから

$$(x + y) - (u + v) = (x - u) + (y - v) \in Y, \quad \alpha x - \alpha v = \alpha(x - u) \in Y$$

が成り立ち (1.3) が従う．

X が線形空間であるから X/Y は (1.3) の演算で閉じている．よってあとは以下の事項を確認すればよい．

加法　X/Y が加法について可換群をなすことを示す．任意に $[x], [y], [z] \in X/Y$ を取れば

$$([x] + [y]) + [z] = [x + y] + [z] = [(x + y) + z] = [x + (y + z)] = [x] + [y + z] = [x] + ([y] + [z])$$

が成り立ち結合律が従う．可換性は

$$[x] + [y] = [x + y] = [y + x] = [y] + [x]$$

により従い，また $[x]$ の逆元は $(-1)[x]$ [*2]，X/Y の零元は $Y = [0]$ である．

[*1] $x, y, z \in X$ を取る．Y は線形空間であるから，反射率は $x - x = 0 \in Y$ により従い，対称律は $x - y \in Y$ なら $y - x = -(x - y) \in Y$ が成り立つことにより従う．推移律についても，$x \sim y$ かつ $y \sim z$ が満たされているなら $x - z = (x - y) + (y - z) \in Y$ が成り立ち $x \sim z$ が従う．

[*2] $[x] + (-1)[y]$ は $[x] - [y]$ と表す．

スカラ倍　任意に $[x],[y]\in X/Y$ と $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$ を取れば以下が成り立つ:

(1)　$(\alpha\beta)[x]=[(\alpha\beta)x]=[\alpha(\beta x)]=\alpha[\beta x]=\alpha(\beta[x])$,

(2)　$(\alpha+\beta)[x]=[(\alpha+\beta)x]=[\alpha x+\beta x]=[\alpha x]+[\beta x]=\alpha[x]+\beta[x]$,

(3)　$\alpha([x]+[y])=\alpha[x+y]=[\alpha(x+y)]=[\alpha x+\alpha y]=[\alpha x]+[\alpha y]=\alpha[x]+\alpha[y]$,

(4)　$1[x]=[x]$. ∎

補題 1.2.2 (同値類は閉集合).　任意の $[x]\in X/Y$ は X において閉集合となる.

証明.　任意に $[x]\in X/Y$ を取る．距離空間の一般論より $u_n\in[x]$ $(n=1,2,\cdots)$ が或る $u\in X$ に収束するとき $u\in[x]$ が成り立つことを示せばよい．各 $n\in\mathbb{N}$ について $u_n-x\in Y$ であり，かつ

$$\|(u_n-x)-(u-x)\|_X=\|u_n-u\|_X\longrightarrow 0\quad(n\longrightarrow\infty)$$

が成り立つから，Y が閉であることにより $u-x\in Y$ が従う． ∎

定理 1.2.3 (商空間におけるノルムの定義).　X/Y において

$$\|[x]\|_{X/Y}\coloneqq\inf_{u\in[x]}\|u\|_X\quad(\forall[x]\in X/Y)\tag{1.4}$$

として $\|\cdot\|_{X/Y}:X/Y\to\mathbb{R}$ を定めれば，これはノルムとなる.

証明.

正値性　$\|\cdot\|_{X/Y}$ が非負値であることは定義式 (1.4) 右辺の非負性による．また $[x]=[0]$ である場合,

$$\inf_{u\in[x]}\|u\|_X=\|0\|_X=0$$

が成り立ち $\|[x]\|_{X/Y}=0$ が従う．逆に $\|[x]\|_{X/Y}=0$ である場合,

$$\|u_n\|_X\leq\frac{1}{n}\quad(n=1,2,\cdots)$$

を満たす点列 $u_n\in[x]$ $(n=1,2,\cdots)$ が存在する．すなわち $u_n\longrightarrow 0\quad(n\longrightarrow\infty)$ であるから，補助定理 1.2.2 により $0\in[x]$ が成り立ち $[x]=[0]$ が従う.

同次性　任意に $[x]\in X/Y$ と $\alpha\in\mathbb{K}$ を取る．$\alpha=0$ の場合は

$$\|0[x]\|_{X/Y}=\|[0]\|_{X/Y}=0=0\|[x]\|_{X/Y}$$

が成り立つ．$\alpha\neq 0$ の場合は

$$u\in[\alpha x]\quad\Leftrightarrow\quad\frac{1}{\alpha}u\in[x]$$

が成り立つから

$$\|\alpha[x]\|_{X/Y}=\|[\alpha x]\|_{X/Y}=\inf_{u\in[\alpha x]}\|u\|_X=|\alpha|\inf_{u\in[\alpha x]}\|(1/\alpha)u\|_X=|\alpha|\inf_{v\in[x]}\|v\|_X=|\alpha|\|[x]\|_{X/Y}$$

が従う.

劣加法性　任意に $[x],[y] \in X/Y$ を取り

$$L := \{\, u+v \ ; \quad u \in [x],\ v \in [y] \,\}$$

とおけば，任意の $u+v \in L$ に対し $(u+v)-(x+y) \in Y$ となるから $L \subset [x+y]$ が成り立つ．また

$$\| u+v \|_X \leq \| u \|_X + \| v \|_X$$

により

$$\inf_{u'+v' \in L} \left\| u'+v' \right\|_X \leq \| u \|_X + \| v \|_X \quad (\forall u \in [x],\ v \in [y])$$

が成り立つから，

$$\inf_{u'+v' \in L} \left\| u'+v' \right\|_X \leq \inf_{u \in [x]} \| u \|_X + \inf_{v \in [y]} \| v \|_X = \| [x] \|_{X/Y} + \| [y] \|_{X/Y}$$

が従い

$$\| [x]+[y] \|_{X/Y} = \| [x+y] \|_{X/Y} = \inf_{w \in [x+y]} \| w \|_X \leq \inf_{u+v \in L} \| u+v \|_X \leq \| [x] \|_{X/Y} + \| [y] \|_{X/Y}$$

を得る．∎

定理 1.2.4 (商空間の完備性).　X が Banach 空間ならば X/Y も Banach 空間である．

証明.　任意に X/Y から Cauchy 列 $([x_n])_{n=1}^{\infty}$ を取る．

$$\left\| [x_{n_k}] - [x_{n_{k+1}}] \right\|_{X/Y} < \frac{1}{2^k} \quad (k=1,2,\cdots)$$

を満たす部分列 $([x_{n_k}])_{k=1}^{\infty}$ を抜き取り，また $u_k \in [x_{n_{k+1}} - x_{n_k}]$ $(k=1,2,\cdots)$ を

$$\| u_k \|_X \leq \left\| [x_{n_{k+1}} - x_{n_k}] \right\|_{X/Y} + \frac{1}{2^k}$$

を満たすように取り

$$S_0 = 0, \quad S_\nu := \sum_{k=1}^{\nu} u_k \quad (\nu = 1,2,\cdots)$$

とおく．X が Banach 空間であるから $(S_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ は X で収束し，かつ

$$[x_{n_k}] = [x_{n_1}] + \sum_{j=1}^{k-1} \left[x_{n_{j+1}} - x_{n_j} \right] = [x_{n_1}] + \sum_{j=1}^{k-1} [u_j] = [x_{n_1}] + [S_{k-1}] \quad (k=1,2,\cdots)$$

を満たすから，

$$S := \lim_{\nu \to \infty} S_\nu \in X$$

とおけば

$$\left\| [x_{n_1} + S] - [x_{n_k}] \right\|_{X/Y} = \| [S - S_{k-1}] \|_{X/Y} \leq \| S - S_{k-1} \|_X \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty)$$

が成り立つ．部分列の収束により $[x_n] \longrightarrow [x_{n_1} + S]$ $(n \longrightarrow \infty)$ が従う．∎

第 2 章

閉作用素

本章を通じて X, Y を複素ノルム空間とし，ノルムをそれぞれ $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y$ と表す．

2.1 直積ノルム空間の位相

命題 2.1.1 (直積ノルム空間). $x \in X, y \in Y$ の組を $[x, y]$ と表し，X と Y の直積 (product) を

$$X \times Y \coloneqq \{\, [x, y] \;;\quad x \in X, y \in Y \,\}$$

で定める．そして写像 $\|\cdot\|_{X\times Y} : X \times Y \to \mathbb{R}$ を次で定める:

$$\|\,[x, y]\,\|_{X\times Y} \coloneqq \|\,x\,\|_X + \|\,y\,\|_Y \quad (\forall [x, y] \in X \times Y).$$

このとき次が成り立つ:

(1) $X \times Y$ は

$$[x, y] + [s, t] \coloneqq [x + s, y + t], \quad \alpha[x, y] \coloneqq [\alpha x, \alpha y] \quad (\forall [x, y], [s, t] \in X \times Y,\ \alpha \in \mathbb{C})$$

を線型演算として線形空間となる．

(2) 線形空間 $X \times Y$ は $\|\cdot\|_{X\times Y}$ をノルムとしてノルム空間となる．

定理 2.1.2 (ノルム位相と直積位相は一致する). $\|\cdot\|_{X\times Y}$ によるノルム位相と X, Y の直積位相は一致する．

定理 2.1.3 (X, Y が完備なら $X \times Y$ も完備). X, Y が Banach 空間であるとき，$X \times Y$ も Banach 空間である．

2.2 閉作用素と閉グラフ定理

定理 2.2.1 (Banach 空間値の有界な閉作用素の定義域は閉). Y が Banach 空間であるとき，閉作用素 $T : X \overset{\mathrm{op}}{\to} Y$ が有界なら $\mathcal{D}(T)$ は X の閉部分空間である．

証明.　$\mathcal{D}(T)$ の点列 $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ が $u_n \longrightarrow u \in X$ を満たせば

$$\|Tu_n - Tu_m\|_Y \leq \|T\|_{\mathrm{B}(X,Y)} \|u_n - u_m\|_X \longrightarrow 0 \quad (n, m \longrightarrow \infty)$$

が成り立ち，Y の完備性より $(Tu_n)_{n=1}^{\infty}$ は或る $v \in Y$ に強収束する．T は閉作用素であるから $v = Tu$ が従う． ∎

定理 2.2.2 (閉作用素の逆も閉).　$T : X \overset{\mathrm{op}}{\to} Y$ を閉作用素とするとき，T^{-1} が存在すればこれも閉作用素となる．

証明.　$U : X \times Y \ni [x, y] \longmapsto [y, x] \in Y \times X$ として同相写像 U を定める．仮定より $\mathcal{G}(T)$ は $X \times Y$ の閉集合であり

$$\mathcal{G}\left(T^{-1}\right) = U\mathcal{G}(T)$$

が成り立つから，$\mathcal{G}\left(T^{-1}\right)$ は $Y \times X$ の閉集合である． ∎

定理 2.2.3 (閉グラフ定理).

第 3 章

Bochner 積分

本章を通じて係数体を $\mathbb{C}$ とし，ノルム空間 E におけるノルムを $\|\cdot\|_E$ と書きノルム位相を導入する．また $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を σ-有限な測度空間 (μ:正値測度)，B を複素 Banach 空間とする．

3.1 ノーミング

定理 3.1.1 (Hahn-Banach の拡張定理). E を線形空間，F を E の線型部分空間とし，或る $p : E \to \mathbb{C}$ が存在して

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \quad (\forall x, y \in E,\ \lambda \in \mathbb{C}) \tag{3.1}$$

が成り立つとする．このとき F 上の線型汎関数 f が

$$|f(x)| \leq p(x) \quad (\forall x \in F)$$

を満たすなら，次の関係を持つ f の拡張線型汎関数 $\tilde{f} : E \to \mathbb{C}$ が存在する:

$$\left|\tilde{f}(x)\right| \leq p(x) \quad (\forall x \in E).$$

証明. see Kreyszig.

系 3.1.2 (ノルム空間における拡張定理). E をノルム空間，F を E の部分ノルム空間とする．

(1) 任意の $f^* \in F^*$ に対し，f^* の拡張である $g^* \in E^*$ が存在して $\|g^*\|_{E^*} = \|f^*\|_{F^*}$ を満たす．

(2) 任意の $x \in E$ に対し $\|x\|_E = \sup\{\, |g^*(x)| \ ;\ g^* \in E^*, \|g^*\|_{E^*} = 1 \,\}$ が成り立つ．

証明.

(1) f^* は有界であるから

$$|f^*(x)| \leq \|f^*\|_{F^*} \|x\|_E \quad (\forall x \in F)$$

が成り立つ．$E \ni x \longmapsto \|f^*\|_{F^*}\|x\|_E$ は (3.1) を満たすから，定理 3.1.1 より或る f^* の拡張 $g^* \in E^*$ が存在して

$$|g^*(x)| \le \|f^*\|_{F^*}\|x\|_E \quad (\forall x \in E)$$

となり $\|g^*\|_{E^*} \le \|f^*\|_{F^*}$ が従う．また $g^*|_F = f^*$ であるから

$$\|f^*\|_{F^*} = \sup_{\substack{x\in F \\ \|x\|_E\le 1}} |f^*(x)| = \sup_{\substack{x\in F \\ \|x\|_E\le 1}} |g^*(x)| \le \sup_{\substack{x\in E \\ \|x\|_E\le 1}} |g^*(x)| = \|g^*\|_{E^*}$$

も成り立ち $\|g^*\|_{E^*} = \|f^*\|_{F^*}$ を得る．

(2)　$x = 0$ の場合は全ての $g^* \in E^*$ に対して $g^*(x) = 0$ となるから主張が得られる．$x \neq 0$ の場合，まずは

$$h^*(x) = \|x\|_E, \quad \|h^*\|_{E^*} = 1 \tag{3.2}$$

を満たす $h^* \in E^*$ が存在することを示す．実際

$$F := \{\, \lambda x \ ; \quad \lambda \in \mathbb{C} \,\}$$

として E の部分ノルム空間を構成し

$$f^* : F \ni \lambda x \longrightarrow \lambda\|x\|_E$$

として等長作用素 $f^* \in F^*$ を定めれば，

$$f^*(x) = \|x\|_E, \quad \|f^*\|_{F^*} = 1$$

が成り立ち，(1) より (3.2) を満たす f^* の拡張 $h^* \in E^*$ が存在する．今，任意の $g^* \in E^*$ に対して

$$\frac{|g^*(x)|}{\|g^*\|_{E^*}} \le \|x\|_E$$

が成り立っているが，$g^* = h^*$ とすれば等号が成立するから

$$\sup_{\substack{g^*\in E^* \\ \|g^*\|_{E^*}=1}} |g^*(x)| = \|x\|_E$$

を得る．■

定義 3.1.3 (**ノーミング**).　E をノルム空間，E_0 を E の部分集合とする．或る E^* の部分集合 $\tilde{E}^*$ が存在して

$$\|x\|_E = \sup_{\substack{g^*\in \tilde{E}^* \\ \|g^*\|_{E^*}=1}} |g^*(x)| \quad (\forall x \in E_0) \tag{3.3}$$

を満たすとき，$\tilde{E}^*$ を E_0 のノーミング (norming) と呼ぶ．系 3.1.2 より E^* はノーミングの一つである．

補題 3.1.4 (**単位球面上にノーミングが存在する**).　E をノルム空間とし，E の部分集合 E_0 が可分であるとする．E^* の部分集合 $\tilde{E}^*$ が E_0 のノーミングであるなら，E_0 のノーミングとなる単位点列 $(g_n^*)_{n=1}^{\infty} \subset \tilde{E}^*$ が存在する．

証明． $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ が E_0 において稠密であるとし，$\delta_n := 1/2^n$ とおく．(3.3) より各 $n \in \mathbb{N}$ に対し或る $g_n^* \in \tilde{E}^*$ が存在して

$$\left\| g_n^* \right\|_{E^*} = 1, \quad (1-\delta_n) \| x_n \|_E \leq \left| g_n^*(x_n) \right|$$

を満たす．任意に $x \in E_0$, $\epsilon > 0$ を取れば，$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ の稠密性と $\delta_n \longrightarrow 0$ より或る $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\left\| x - x_{n_0} \right\|_E < \epsilon, \quad \delta_{n_0} < \epsilon$$

を同時に満たす．$\left\| g_n^* \right\|_{E^*} = 1$ より

$$\left| g_{n_0}^*(x_{n_0}) \right| \leq \left| g_{n_0}^*(x_{n_0}) - g_{n_0}^*(x) \right| + \left| g_{n_0}^*(x) \right| < \epsilon + \left| g_{n_0}^*(x) \right|$$

が成り立つから

$$(1-\epsilon) \| x \|_E \leq (1-\delta_{n_0}) \| x \|_E \leq \left| g_n^*(x_{n_0}) \right| < \epsilon + \left| g_{n_0}^*(x) \right|$$

が従い，$\epsilon > 0$ の任意性から

$$\| x \|_E \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| g_n^*(x) \right|$$

を得る．系 3.1.2 と併せれば

$$\| x \|_E \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| g_n^*(x) \right| \leq \sup_{\substack{g^* \in E^* \\ \| g^* \|_{E^*} = 1}} |g^*(x)| = \| x \|_E$$

が成り立つから，$(g_n^*)_{n=1}^{\infty}$ は E_0 のノーミングである． ∎

定義 3.1.5 (分離)． E をノルム空間，E_0 を E の部分集合とする．或る E^* の部分集合 $\tilde{E}^*$ が存在して，任意に二点 $x, y \in E_0$, $x \neq y$ を選んでも $g^*(x) \neq g^*(y)$ を満たす $g^* \in \tilde{E}^*$ が取れるとき，$\tilde{E}^*$ は E_0 を分離するという．

定理 3.1.6 (ノーミングは分離する)． E をノルム空間，E_0 を E の部分集合とする．E^* の部分集合 $\tilde{E}^*$ が E_0 のノーミングであるなら，$\tilde{E}^*$ は E_0 を分離する．

証明． 背理法で証明する．$\tilde{E}^*$ が E_0 のノーミングであるとき，$x \neq y$ を満たす或る組 $x, y \in E_0$ に対して

$$g^*(x) = g^*(y) \quad \left(\forall g^* \in \tilde{E}^* \right)$$

が成り立つとすると，(3.3) より

$$\| x - y \|_E = \sup_{\substack{g^* \in \tilde{E}^* \\ \| g^* \|_{E^*} = 1}} |g^*(x-y)| = 0$$

が従い $x \neq y$ に矛盾する． ∎

補題 3.1.7 (可分な集合は可算列により分離される)． E をノルム空間，E_0 を E の可分な部分集合とする．E^* の部分集合 $\tilde{E}^*$ が E_0 を分離するとき，E_0 を分離する可算列 $(g_n^*)_{n=1}^{\infty} \subset \tilde{E}^*$ が存在する．

証明.　$\tilde{E}^*$ が E_0 を分離するなら，任意に $x \in E_0 \backslash \{0\}$ を取れば或る $g_x^* \in \tilde{E}^*$ が存在して $g_x^*(x) \neq g_x^*(0) = 0$ を満たす．

$$V_x := \{\, y \in E_0 \;;\quad g_x^*(y) \neq 0 \,\}$$

と定めれば，g_x^* の連続性より V_x は $E_0 \backslash \{0\}$ の開集合である[*1]．$x \in V_x$ $(\forall x \in E_0 \backslash \{0\})$ が満たされているから $(V_x)_{x \in E_0 \backslash \{0\}}$ は $E_0 \backslash \{0\}$ の開被覆である．更に可分性より $E_0 \backslash \{0\}$ は第二可算公理を満たし[*2] Lindelöf 性が従うから，$E_0 \backslash \{0\}$ を覆う $(V_x)_{x \in E_0 \backslash \{0\}}$ の可算部分列 $(V_{x_n})_{n=1}^{\infty}$ が取れる．ここで $g_n^* := g_{x_n}^*$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とおけば $(g_n^*)_{n=1}^{\infty}$ は E_0 を分離する．実際 $x \neq y$ を満たす任意の組 $x, y \in E_0$ に対し，或る $n \in \mathbb{N}$ が存在して $x - y \in V_{x_n}$ となるから

$$g_n^*(x - y) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad g_n^*(x) \neq g_n^*(y)$$

が成り立つ．　■

3.2　Pettis の強可測性定理

補題 3.2.1 (距離空間値の可測関数列の各点極限は可測).　(S, d) を距離空間，$(X, \mathcal{M})$ を可測空間とする．$\mathcal{M}/\mathfrak{B}(S)$-可測関数列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ が各点収束すれば，$f := \lim_{n \to \infty} f_n$ で定める関数 f もまた可測 $\mathcal{M}/\mathfrak{B}(S)$ となる．

証明.　任意に S の閉集合 A を取り，閉集合の系 $(A_m)_{m=1}^{\infty}$ を次で定める:

$$A_m := \left\{ y \in S \;;\quad d(y, A) \leq \frac{1}{m} \right\}, \quad (m = 1, 2, \cdots).$$ [*3]

$f(x) \in A$ を取れば $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ が満たされているから，任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し或る $N = N(x, m) \in \mathbb{N}$ が対応して

$$d\,(f_n(x), A) \leq d\,(f_n(x), f(x)) < \frac{1}{m} \quad (\forall n \geq N)$$

が成り立ち

$$f^{-1}(A) \subset \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} f_n^{-1}(A_m) \tag{3.4}$$

が従う．一方 $f(x) \notin A$ については，$0 < \epsilon < d(f(x), A)$ を満たす ϵ に対し或る $N = N(x, \epsilon) \in \mathbb{N}$ が存在して

$$d\,(f_n(x), f(x)) < \epsilon \quad (\forall n \geq N)$$

が成り立つから，$1/m < d(f(x), A) - \epsilon$ を満たす $m \in \mathbb{N}$ を取れば

$$\frac{1}{m} < d(f(x), A) - d(f(x), f_n(x)) \leq d(f_n(x), A) \quad (\forall n \geq N)$$

が従い

$$f^{-1}(A^c) \subset \bigcup_{m \geq 1} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} f_n^{-1}(A_m^c) \subset \bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq N} f_n^{-1}(A_m^c)$$

[*1] $E_0 \backslash \{0\}$ は E の部分位相空間であり V_x は E の開集合であるから，相対位相の意味で V_x は $E_0 \backslash \{0\}$ の開集合となる．

[*2] E のノルム位相は $d : (x, y) \longmapsto \|x - y\|_E$ で定まる距離で導入する位相に一致し，また相対位相としての $E_0 \backslash \{0\}$ の位相は相対距離により導入される位相に一致する．従って $E_0 \backslash \{0\}$ において可分であることと第二可算公理が満たされることは同値になる．

[*3] $S \ni y \longmapsto d(y, A) \in [0, \infty)$ は連続であるから，閉集合 $[0, 1/m]$ は S の閉集合に引き戻される．

が得られる．(3.4) と併せれば

$$f^{-1}(A) = \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} f_n^{-1}(A_m)$$

が成り立つ．S の閉集合は f により $\mathcal{M}$ の元に引き戻されるから f は可測 $\mathcal{M}/\mathfrak{B}(S)$ である．∎

3.3　Bochner 積分

定義 3.3.1 (Bochner 積分).　e

第 4 章

共役作用素

4.1 ノルム空間の共役作用素

係数体を $\mathbb{C}$ とする．以下ではノルム空間 X におけるノルムを $\|\cdot\|_X$ と表記し，位相はこのノルムにより導入する．

定義 4.1.1 (共役作用素). X, Y をノルム空間，$T : X \overset{\text{op}}{\to} Y$ を線型作用素とし，$\overline{\mathcal{D}(T)} = X$ を満たすとする．

$$\mathcal{D} := \{\, g \in Y^* \;;\quad \text{或る } f \in X^* \text{ が存在して } f(x) = g(Tx) \quad (\forall x \in \mathcal{D}(T)) \text{ を満たす．} \} \tag{4.1}$$

と定めれば，$g \in \mathcal{D}$ に対して (4.1) の関係を満たす f の存在は一意的であり[*1]この対応を

$$T^* : \mathcal{D} \ni g \longmapsto f$$

で表し $\mathcal{D}(T^*) := \mathcal{D}$ とおく．この $T^* : Y^* \overset{\text{op}}{\to} X^*$ を T の共役作用素という．

上の定義で T が零作用素の場合，T の定義域は X 全体であるが (4.1) を満たすような f は零作用素のみであり，一方で g としては何を取っても成り立つから，共役作用素もまた零作用素となる．

定理 4.1.2 (共役作用素は閉線型). X, Y をノルム空間，$T : X \overset{\text{op}}{\to} Y$ を線型作用素とし，$\overline{\mathcal{D}(T)} = X$ を満たすとする．このとき T^* は閉線型作用素である．

この定理を証明するために以下にいくつか準備をする．$x \in X$ と $f \in X^*$ に対して $f(x)$ を次の双線型形式で表現する:

$$\langle x, f \rangle_{X,X^*} := f(x).$$

双線型形式で表現することで内積空間を扱っているように捉えることができ，例えば (4.1) において

$$\langle x, f \rangle_{X,X^*} = \langle Tx, g \rangle_{Y,Y^*} \quad (\forall x \in \mathcal{D}(T))$$

と表現できる．また $A \subset X,\ B \subset X^*$ に対して

$$A^\perp := \left\{\, f \in X^* \;;\quad \forall x \in A,\ \langle x, f \rangle_{X,X^*} = 0 \,\right\}, \quad {}^\perp B := \left\{\, x \in X \;;\quad \forall f \in B,\ \langle x, f \rangle_{X,X^*} = 0 \,\right\}$$

と表記を定める．例えば B に対して $B^\perp$ と書いたらこれは X^{**} の部分集合を表す．

[*1] g に対し f とは別に (4.1) を満たす $f' \in X^*$ が存在すれば

$$f(x) = f'(x) \quad (\forall x \in \mathcal{D}(T))$$

が成り立つ．$\mathcal{D}(T)$ は X で稠密であるから f, f' の連続性より $f = f'$ が従う．

補題 4.1.3.　$A \subset X$ に対し $A^{\perp}$ は X^* において閉部分空間となる．

証明．　$A^{\perp}$ が X^* において完備部分空間であることを示せばよい．

線型性　任意の $f_1, f_2 \in A^{\perp}$ と $\alpha \in \mathbb{K}$ に対し

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = 0, \quad (\alpha f_1)(x) = \alpha f_1(x) = 0, \quad (\forall x \in A)$$

が成り立つ．

完備性　$f_n \in A^{\perp}$ が収束列であるとすれば X^* の完備性から $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ は或る $f \in X^*$ に (作用素ノルムで) 収束する．任意の $x \in A$ に対して

$$|f(x)| = |f(x) - f_n(x)| \leq \| f - f_n \|_{X^*} \| x \|_X \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成り立ち $f \in A^{\perp}$ となる．

■

補助定理について補足　実際はさらに

$${}^{\perp}(A^{\perp}) = \overline{\mathrm{L.h.}\,[\,A\,]}$$

が成り立つ．$A \subset {}^{\perp}(A^{\perp})$ かつ ${}^{\perp}(A^{\perp})$ は X の閉部分空間であるから $\overline{\mathrm{L.h.}\,[\,A\,]} \subset {}^{\perp}(A^{\perp})$ が先ず判る．逆向きの包含関係について，$X = \overline{\mathrm{L.h.}\,[\,A\,]}$ の場合は成り立つが，そうでない場合は次のように考える．Hahn-Banach の定理の系によれば任意の $x_0 \in X \backslash \overline{\mathrm{L.h.}\,[\,A\,]}$ を一つ取って

$$f_0(x) = \begin{cases} 0 & (x \in \overline{\mathrm{L.h.}\,[\,A\,]}) \\ f_0(x_0) \neq 0 & (x = x_0) \end{cases}$$

を満たす $f_0 \in X^*$ が存在する．$f_0 \in A^{\perp}$ であるが $x_0 \notin {}^{\perp}(A^{\perp})$ となり ${}^{\perp}(A^{\perp}) \subset \overline{\mathrm{L.h.}\,[\,A\,]}$ が従う．■

二つのノルム空間 X, Y の直積空間 $X \times Y$ における直積ノルムを

$$\| [x, y] \|_{X \times Y} = \| x \|_X + \| y \|_Y \quad (\forall [x, y] \in X \times Y)$$

で定める．$Y \times X$ の共役空間 $(Y \times X)^*$ の任意の元 F に対し

$$\begin{aligned} F_Y(y) &\coloneqq F[y, 0] \quad (y \in Y) \\ F_X(x) &\coloneqq F[0, x] \quad (x \in X) \end{aligned} \tag{4.2}$$

と定めれば $F_Y \in Y^*$，$F_X \in X^*$ かつ $F[y, x] = F_Y(y) + F_X(x)$ が成り立つ．逆に $g \in Y^*$ と $f \in X^*$ に対し

$$F[y, x] = g(y) + f(x) \quad (\forall [y, x] \in Y \times X)$$

と定義すれば $F \in (Y \times X)^*$ となり，従って対応 $(Y \times X)^* \ni F \longmapsto [F_Y, F_X] \in Y^* \times X^*$ は全単射である．

補題 4.1.4.　次の写像は線形，同相である:

$$\varphi : (Y \times X)^* \ni F \longmapsto [F_Y, F_X] \in Y^* \times X^*$$

証明.

線型性　対応のさせ方 (4.2) に基づけば，任意の $[y,x] \in Y \times X$ と $F_1, F_2 \in (Y \times X)^*$，$\alpha \in \mathbb{K}$ に対して

$$\begin{aligned}\varphi(F_1 + F_2)[y,x] &= (F_1 + F_2)[y,0] + (F_1 + F_2)[0,x] = \varphi(F_1)[y,x] + \varphi(F_2)[y,x]\\ \varphi(\alpha F_1)[y,x] &= (\alpha F_1)[y,0] + (\alpha F_1)[0,x] = \alpha\varphi(F_1)[y,x]\end{aligned}$$

が成り立つ．

同相　φ は Banach 空間から Banach 空間への線型全単射であるから，φ^{-1} が有界であるなら値域定理より φ も線型有界となり，従って φ は同相写像となる．実際

$$\|[F_Y, F_X]\|_{Y^* \times X^*} = \|F_Y\|_{Y^*} + \|F_X\|_{X^*}$$

であることと

$$\left\|\varphi^{-1}[F_Y, F_X]\right\|_{(Y \times X)^*} = \sup_{\substack{[y,x] \in Y \times X \\ [y,x] \neq [0,0]}} \frac{|F_Y(y) + F_X(x)|}{\|[y,x]\|_{Y \times X}} \leq \|F_Y\|_{Y^*} + \|F_X\|_{X^*}$$

により

$$\sup_{\substack{[F_Y, F_X] \in Y^* \times X^* \\ [F_Y, F_X] \neq [0,0]}} \frac{\left\|\varphi^{-1}[F_Y, F_X]\right\|_{(Y \times X)^*}}{\|[F_Y, F_X]\|_{Y^* \times X^*}} \leq 1$$

が成り立つ．

■

証明 (定理 4.1.2).

$$U : X \times Y \ni [x,y] \longmapsto [y, -x] \in Y \times X$$

として写像 U(等長，全単射) を定義する．T^* のグラフ $\mathcal{G}(T^*)$ は

$$\mathcal{G}(T^*) = \left\{ [g, T^*g] \in Y^* \times X^* \ ; \quad \forall [x, Tx] \in \mathcal{G}(T), \quad \langle Tx, g \rangle_{Y,Y^*} = \langle x, T^*g \rangle_{X,X^*} \right\}$$

で表される．補助定理 4.1.4 により $[g, T^*g]$ に対応する $F_g \in (Y \times X)^*$ がただ一つ存在して

$$\langle Tx, g \rangle_{Y,Y^*} - \langle x, T^*g \rangle_{X,X^*} = F_g[Tx, -x] = F_g U[x, Tx], \quad ([x, Tx] \in \mathcal{G}(T))$$

と書き直せるから，補助定理 4.1.4 の同相写像 φ により

$$[U\mathcal{G}(T)]^{\perp} = \{ F \in (Y \times X)^* \ ; \quad \forall [x, Tx] \in \mathcal{G}(T), \quad FU[x, Tx] = 0 \} = \varphi^{-1}\mathcal{G}(T^*) \tag{4.3}$$

が成り立つ．補助定理 4.1.3 より $[U\mathcal{G}(T)]^{\perp}$ が $Y^* \times X^*$ の閉部分空間であるから $\mathcal{G}(T^*) = \varphi[U\mathcal{G}(T)]^{\perp}$ も $(Y \times X)^*$ の閉部分空間であり，従って T^* は閉線型である． ■

定理 4.1.5 (閉拡張の共役作用素は元の共役作用素に一致する).　X, Y をノルム空間，$T : X \overset{\text{op}}{\to} Y$ を線型作用素とする．$\overline{\mathcal{D}(T)} = X$ かつ T が可閉であるとき次が成り立つ:

$$\mathcal{G}\left(\overline{T}^*\right) = \mathcal{G}(T^*).$$

証明.　(4.3) より $\mathcal{G}\left(\overline{T}^*\right) = \varphi\left[U\mathcal{G}\left(\overline{T}\right)\right]^\perp$ が成り立っているから，

$$\varphi\left[U\mathcal{G}\left(\overline{T}\right)\right]^\perp = \varphi\left[U\mathcal{G}(T)\right]^\perp$$

を示せばよい．

⊂ について　任意の $[g, f] \in \varphi\left[U\mathcal{G}\left(\overline{T}\right)\right]^\perp$ に対して

$$\left\langle \overline{T}x, g\right\rangle_{Y,Y^*} = \langle x, f\rangle_{X,X^*} \quad \left(\forall [x, \overline{T}x] \in \mathcal{G}\left(\overline{T}\right)\right)$$

が成り立っている．

$$\mathcal{G}(T) \subset \overline{\mathcal{G}(T)} = \mathcal{G}\left(\overline{T}\right)$$

より

$$\langle Tx, g\rangle_{Y,Y^*} = \langle x, f\rangle_{X,X^*} \quad (\forall [x, Tx] \in \mathcal{G}(T))$$

が従い $[g, f] \in \varphi\left[U\mathcal{G}(T)\right]^\perp$ が成り立つ．

⊃ について　任意に $[g, f] \in \varphi\left[U\mathcal{G}(T)\right]^\perp$ を取る．任意の $[x, y] \in \mathcal{G}\left(\overline{T}\right)$ に対して $[x_n, Tx_n] \in \mathcal{G}(T)$ を取り

$$\|x_n - x\|_X \longrightarrow 0, \quad \|Tx_n - y\|_Y \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成り立つようにできるから，

$$\left|\langle y, g\rangle_{Y,Y^*} - \langle x, f\rangle_{X,X^*}\right| \leq \left|\langle y, g\rangle_{Y,Y^*} - \langle Tx_n, g\rangle_{Y,Y^*}\right| + \left|\langle x_n, f\rangle_{X,X^*} - \langle x, f\rangle_{X,X^*}\right| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成り立ち

$$[g, f] \in \varphi\left[U\mathcal{G}\left(\overline{T}\right)\right]^\perp$$

が従う．

∎

補題 4.1.6 (定義域が稠密となるための条件).　X, Y をノルム空間，$T : X \overset{\text{op}}{\to} Y$ の線型作用素とする．このとき $\mathcal{D}(T)$ が X で稠密であるための必要十分条件は，$[0, f] \in \varphi\left[U\mathcal{G}(T)\right]^\perp$ ならば $f = 0$ となることである．

証明.

必要性　(4.3) より，$\overline{\mathcal{D}(T)} = X$ ならば T^* が存在して $\mathcal{G}(T^*) = \varphi\left[U\mathcal{G}(T)\right]^\perp$ を満たすから $f = 0$ となる．

十分性　$\varphi[0, f] \in \left[U\mathcal{G}(T)\right]^\perp$ なら

$$(\varphi[0, f])\,[Tx, -x] = -f(x) = 0 \quad (\forall [x, Tx] \in \mathcal{G}(T))$$

が成り立つ．そして

$$f(x) = 0 \quad (\forall x \in \mathcal{D}(T)) \text{ ならば } f = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\mathcal{D}(T)} = X$$

により $\overline{\mathcal{D}(T)} = X$ となる．実際 $\overline{\mathcal{D}(T)} \subsetneq X$ である場合，Hahn-Banach の定理の系より $f \neq 0$ なる $f \in X^*$ で $f(x) = 0 \quad (\forall x \in \mathcal{D}(T))$ を満たすものが存在する．逆に $\overline{\mathcal{D}(T)} = X$ であるなら，$f \in X^*$ の連続性より $f(x) = 0 \quad (\forall x \in \mathcal{D}(T))$ ならば $f = 0$ が従う．∎

ノルム空間 X, Y の第二共役空間 X^{**}, Y^{**} への自然な単射を J_X, J_Y と表す．そして

$$J : [X, Y] \ni [x, y] \longmapsto [J_X x, J_Y y] \in [X^{**}, Y^{**}]$$

として J を定めれば J は等長かつ線型単射となる．

定理 4.1.7.　X, Y をノルム空間，T を $X \to Y$ の線型作用素とし $\mathcal{D}(T)$ が X で稠密であるとする．

(1)　$\overline{\mathcal{D}(T^*)} = Y^*$ ならば T は可閉であり

$$J\mathcal{G}\left(\overline{T}\right) \subset \mathcal{G}(T^{**})$$

が成り立つ．

(2)　Y が反射的 Banach 空間なら，T が可閉であることと $\overline{D}(T^*) = Y^*$ であることは同値となり

$$T^{**}J_X = J_Y\overline{T}$$

が成り立つ．

証明.　(1)　$\overline{\mathcal{D}(T^*)} = Y^*$ ならば T^* の共役作用素 $T^{**} : X^{**} \to Y^{**}$ が定義される．任意の $x \in \mathcal{D}(T)$ に対し

$$\langle T^* g, J_X x\rangle_{X^*, X^{**}} = \langle x, T^* g\rangle_{X, X^*} = \langle Tx, g\rangle_{Y, Y^*} = \langle g, J_Y Tx\rangle_{Y^*, Y^{**}} \quad (\forall [g, T^* g] \in \mathcal{G}(T^*))$$

が成り立つから，$J_X x \in \mathcal{D}(T^{**}))$ かつ

$$T^{**}J_X x = J_Y T x \quad (\forall [x, Tx] \in \mathcal{G}(T))$$

が従う．すなわち

$$J\mathcal{G}(T) \subset \mathcal{G}(T^{**})$$

が成り立つ．また

$$J\overline{\mathcal{G}(T)} \subset \overline{J\mathcal{G}(T)} \subset \mathcal{G}(T^{**}) \tag{4.4}$$

が成り立つ．実際定理 4.1.2 より T^{**} は閉線型であるから二番目の不等式は成り立つ．だから初めの不等式を示せばよい．任意に $[J_X x, J_Y y] \in J\overline{\mathcal{G}(T)}$ を取れば，$[x_n, Tx_n] \in \mathcal{G}(T)$ を取り

$$\|x_n - x\|_X \longrightarrow 0, \quad \|Tx_n - y\|_Y \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成り立つようにできる．J_X, J_Y の等長性より

$$\|J_X x_n - J_X x\|_{X^{**}} \longrightarrow 0, \quad \|J_Y T x_n - J_Y y\|_{Y^{**}} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

となり $[J_X x, J_Y y] \in \overline{J\mathcal{G}(T)}$ が判る．(4.4) より $[0, y] \in \overline{\mathcal{G}(T)}$ ならば $[0, J_Y y] \in \mathcal{G}(T^{**})$ が従い $J_Y y = 0$ となる．J_Y は単射であるから $y = 0$ となり $\overline{\mathcal{G}(T)}$ がグラフとなるから T は可閉である．

定理 4.1.8 (共役作用素の有界性).　X, Y をノルム空間，$T : X \to Y$ を線型作用素とし $\mathcal{D}(T)$ が X で稠密であるとする．T が有界なら T^* も有界で

$$\| T^* \|_{\mathcal{D}(T^*)} \leq \| T \|_{\mathcal{D}(T)}$$

が成り立ち，特に $T \in \mathrm{B}(X, Y)$ ならば $T^* \in \mathrm{B}(Y^*, X^*)$ かつ $\| T^* \|_{\mathrm{B}(Y^*,X^*)} = \| T \|_{\mathrm{B}(X,Y)}$ を満たす．[*2]

証明.　任意の $[x, Tx] \in \mathcal{G}(T)$ と $[g, T^*g] \in \mathcal{G}(T^*)$ に対して

$$\left|\langle x, T^*g\rangle_{X,X^*}\right| = \left|\langle Tx, g\rangle_{Y,Y^*}\right| \leq \| T \|_{\mathcal{D}(T)} \| g \|_{Y^*} \| x \|_X$$

が成り立つから

$$\| T^*g \|_{X^*} = \sup_{0 \neq x \in X} \frac{\left|\langle x, T^*g\rangle_{X,X^*}\right|}{\| x \|_X} \leq \| T \|_{\mathcal{D}(T)} \| g \|_{Y^*}$$

となる．従って $\| T^* \|_{\mathcal{D}(T^*)} \leq \| T \|_{\mathcal{D}(T)}$ を得る．$T \in \mathrm{B}(X, Y)$ である場合，任意の $g \in Y^*$ に対して

$$f : X \ni x \longmapsto g(Tx)$$

と定義すれば，$f \in X^*$ となり (4.1) を満たすから $T^* \in \mathrm{B}(Y^*, X^*)$ が成り立つ．また

$$\| Tx \|_Y = \sup_{\substack{g \in Y^* \\ \| g \|_{Y^*} = 1}} |g(Tx)| = \sup_{\substack{g \in Y^* \\ \| g \|_{Y^*} = 1}} |T^*g(x)| \leq \sup_{\substack{g \in Y^* \\ \| g \|_{Y^*} = 1}} \| T^*g \|_{X^*} \| x \|_X \leq \| T^* \|_{\mathrm{B}(Y^*,X^*)} \| x \|_X$$

が成り立つから $\| T^* \|_{\mathrm{B}(Y^*,X^*)} = \| T \|_{\mathrm{B}(X,Y)}$ が従う．∎

定理 4.1.9 (共役作用素の合成).　X, Y, Z をノルム空間，$T : X \to Y$, $U : Y \to Z$ を線型作用素とし $\overline{\mathcal{D}(T)} = X$, $\overline{\mathcal{D}(U)} = Y$, $\overline{\mathcal{D}(UT)} = X$ を満たすとする．このとき

$$T^*U^* \subset (UT)^*$$

が成り立ち，特に $U \in \mathrm{B}(Y, Z)$ である場合は $T^*U^* = (UT)^*$ となる．

証明.　任意の $h \in \mathcal{D}(T^*U^*)$ に対して

$$\langle (UT)x, h\rangle_{Z,Z^*} = \langle Tx, U^*h\rangle_{Y,Y^*} = \langle x, T^*U^*h\rangle_{X,X^*} \quad (\forall [x, Tx] \in \mathcal{G}(UT))$$

が成り立つから，$h \in \mathcal{D}((UT)^*)$ かつ $(UT)^*h = T^*U^*h$ を満たす[*3]．ゆえに

$$T^*U^* \subset (UT)^*$$

となる．$U \in \mathrm{B}(Y, Z)$ の場合，$\mathcal{D}(UT) = \mathcal{D}(T)$ と $U^* \in \mathrm{B}(Z^*, Y^*)$(定理 4.1.8) が従うから，任意の $h \in \mathcal{D}((UT)^*)$ に対して

$$\langle (UT)x, h\rangle_{Z,Z^*} = \langle x, (UT)^*h\rangle_{X,X^*} \quad (\forall x \in \mathcal{G}(T))$$

[*2] $\|\cdot\|_{\mathcal{D}(T)}, \|\cdot\|_{\mathcal{D}(T^*)}$ および $\|\cdot\|_{\mathrm{B}(X,Y)}, \|\cdot\|_{\mathrm{B}(Y^*,X^*)}$ は作用素ノルムを表す．

[*3] $\mathcal{G}(UT)$ は X で稠密であるから $(UT)^*h = T^*U^*h$ でなくてはならない．

かつ

$$\langle (UT)x, h\rangle_{Z,Z^*} = \langle Tx, U^*h\rangle_{Y,Y^*} \quad (\forall x \in \mathcal{G}(T))$$

より $U^*h \in \mathcal{D}(T^*)$ となり $T^*U^*h = (UT)^*h$ を満たす．従って $(UT)^* \subset T^*U^*$ が成り立ち

$$(UT)^* = T^*U^*$$

を得る． ∎

定理 4.1.10 (共役作用素の和).　X, Y をノルム空間，$T : X \to Y$, $U : X \to Y$ を線型作用素とし $\overline{\mathcal{D}(T)} = X$, $\overline{\mathcal{D}(U)} = X$, $\overline{\mathcal{D}(T+U)} = X$ を満たすとする．このとき

$$T^* + U^* \subset (T+U)^*$$

が成り立ち，特に $T, U \in \mathrm{B}(X, Y)$ である場合は $T^* + U^* = (T+U)^*$ となる．

証明.　任意の $g \in \mathcal{D}(T^* + U^*)$ に対し，

$$\langle (T+U)x, g\rangle_{Y,Y^*} = \langle Tx, g\rangle_{Y,Y^*} + \langle Ux, g\rangle_{Y,Y^*} = \langle x, T^*g\rangle_{X,X^*} + \langle x, U^*g\rangle_{X,X^*} \ ^{*4} = \langle x, (T^* + U^*)g\rangle_{X,X^*} \quad (\forall x \in \mathcal{D}(T+U))$$

が成り立つ．従って $g \in \mathcal{D}((T+U)^*)$ かつ $(T+U)^*g = (T^* + U^*)g$ を満たす．特に $T, U \in \mathrm{B}(X, Y)$ のとき，任意の $g \in \mathcal{D}((T+U)^*)$ に対し

$$\langle (T+U)x, g\rangle_{Y,Y^*} = \langle x, (T+U)^*g\rangle_{X,X^*} \quad (\forall x \in X)$$

かつ

$$\langle (T+U)x, g\rangle_{Y,Y^*} = \langle Tx, g\rangle_{Y,Y^*} + \langle Ux, g\rangle_{Y,Y^*} = \langle x, (T^* + U^*)g\rangle_{X,X^*} \quad (\forall x \in X)$$

が成り立つから $g \in \mathcal{D}(T^* + U^*)$ かつ $(T+U)^* = (T^* + U^*)$ が従う． ∎

定理 4.1.11 (共役作用素のスカラ倍).　X, Y をノルム空間，$T : X \to Y$ を線型作用素とし $\overline{\mathcal{D}(T)} = X$ を満たすとする．任意の $\lambda \in \mathbb{K}$ に対し次が成り立つ．

$$(\lambda T)^* = \lambda T^*.$$

証明.　$\lambda = 0$ の場合，零作用素の共役作用素もまた零作用素となるから $(\lambda T)^* = \lambda T^*$ が成り立つ．$\lambda \neq 0$ の場合，任意の $g \in \mathcal{D}((\lambda T)^*)$ に対して

$$\langle x, (\lambda T)^*g\rangle_{X,X^*} = \langle (\lambda T)x, g\rangle_{Y,Y^*} = \lambda \langle Tx, g\rangle_{Y,Y^*} = \lambda \langle x, T^*g\rangle_{X,X^*} \quad (\forall x \in \mathcal{D}(T))$$

---

*4　$\mathcal{D}(T+U) \subset \mathcal{D}(T), \mathcal{D}(U)$ である．

が成り立つから $g \in \mathcal{D}(T^*)$ かつ

$$(\lambda T)^* g = \lambda T^* g$$

が成り立つ．一方 $g \in \mathcal{D}(T^*)$ に対して

$$\langle (\lambda T)x, g\rangle_{Y,Y^*} = \lambda \langle x, T^*\rangle_{X,X^*} \quad (\forall x \in \mathcal{D}(T))$$

も成り立ち，$g \in \mathcal{D}((\lambda T)^*)$ かつ

$$(\lambda T)^* g = \lambda T^* g$$

を満たす． ∎

定理 4.1.12.　X, Y をノルム空間とする．$T : X \overset{\text{op}}{\to} Y$ が単射で $\overline{\mathcal{D}(T)} = X, \overline{\mathcal{R}(T)} = Y$ を満たすとき，$\left(T^{-1}\right)^* = (T^*)^{-1}$ が成り立つ．

補題 4.1.13.　X を Banach 空間，Y をノルム空間とする．$T : X \overset{\text{op}}{\to} Y$ が閉線型で $\overline{\mathcal{D}(T)} = X$ を満たすとき次が成り立つ:

(1)　$\mathcal{R}(T)^\perp = \mathcal{N}(T^*)$.

(2)　$\mathcal{N}(T) \subset {}^\perp\mathcal{R}(T^*)$.

(3)　$T \in \mathrm{B}(X, Y)$ なら $\mathcal{D}(T^*) = X^*$ かつ $\mathcal{N}(T) = {}^\perp\mathcal{R}(T^*)$.

定理 4.1.14.　X を Banach 空間，Y をノルム空間とする．$T : X \overset{\text{op}}{\to} Y$ が閉線型で $\overline{\mathcal{D}(T)} = X$ を満たすとき，

$$\exists T^{-1} \in \mathrm{B}(Y, X) \quad \Leftrightarrow \quad \exists (T^*)^{-1} \in \mathrm{B}(X^*, Y^*)$$

が成り立ち，さらに一方が成立すれば $\left(T^{-1}\right)^* = (T^*)^{-1}$ が成り立つ．

定理 4.1.15.　X をノルム空間，$T : X \overset{\text{op}}{\to} X$ を線型作用素，I を X 上の恒等写像とする．$\overline{\mathcal{D}(T)} = X$ が満たされていれば $(\lambda I - T)^* = \lambda I - T^*$ $(\forall \lambda \in \mathbb{C})$ が成り立つ．

証明.　任意に $\lambda \in \mathbb{C}$ を取り固定する．$\mathcal{D}(\lambda I - T) = \mathcal{D}(T)$ が成り立つから $(\lambda I - T)^*$ が定義され

$$\langle (\lambda I - T)x, g\rangle_{X,X^*} = \langle x, (\lambda I - T)^* g\rangle_{X,X^*} \quad (\forall x \in \mathcal{D}(T),\ g \in \mathcal{D}((\lambda I - T)^*))$$

が満たされる．一方で任意の $x \in \mathcal{D}(T)$, $g \in \mathcal{D}((\lambda I - T)^*)$ に対し

$$\langle (\lambda I - T)x, g\rangle_{X,X^*} = \langle x, \lambda g\rangle_{X,X^*} - \langle Tx, g\rangle_{X,X^*}$$

が成り立つから，

$$\langle Tx, g\rangle_{X,X^*} = \langle x, \lambda g\rangle_{X,X^*} - \langle x, (\lambda I - T)^* g\rangle_{X,X^*} \quad (\forall x \in \mathcal{D}(T))$$

となり $g \in \mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}(\lambda I - T^*)$ かつ

$$(\lambda I - T)^* g = (\lambda I - T^*)\, g \quad (g \in \mathcal{D}((\lambda I - T)^*))$$

が従う．後は $\mathcal{D}(\lambda I - T^*) \subset \mathcal{D}((\lambda I - T)^*)$ を示せば主張が得られる．実際任意に $g \in \mathcal{D}(\lambda I - T^*)$ を取れば，

$$\langle Tx, g \rangle_{X,X^*} = \langle x, T^* g \rangle_{X,X^*} \quad (\forall x \in \mathcal{D}(T))$$

が成り立つから

$$\langle (\lambda I - T)x, g \rangle_{X,X^*} = \langle \lambda x, g \rangle_{X,X^*} - \langle Tx, g \rangle_{X,X^*} = \langle x, (\lambda I - T^*)\, g \rangle_{X,X^*} \quad (\forall x \in \mathcal{D}(T))$$

が従い $g \in \mathcal{D}((\lambda I - T)^*)$ を得る． ∎

4.2　Hilbert 空間の共役作用素

以降は係数体を $\mathbb{C}$ とし，Hilbert 空間 X における内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$，ノルムを $\|\cdot\|_X$ と表しノルム位相を導入する．

定義 4.2.1 (共役作用素).　X, Y を Hilbert 空間，$T : X \overset{\mathrm{op}}{\to} Y$ を線型作用素とし，$\overline{\mathcal{D}(T)} = X$ を満たすとする．

$$\mathcal{D} := \{\, y \in Y \ ; \quad \text{或る } u \in X \text{ が存在して } \langle x, u \rangle_X = \langle Tx, y \rangle_Y \quad (\forall x \in \mathcal{D}(T)) \text{ を満たす．} \} \tag{4.5}$$

と定めれば，$y \in \mathcal{D}$ に対して (4.5) の関係を満たす u の存在は一意的であり[*5]この対応を

$$T^* : \mathcal{D} \ni y \longmapsto u$$

で表し $\mathcal{D}(T^*) := \mathcal{D}$ とおく．この $T^* : Y \overset{\mathrm{op}}{\to} X$ を T の共役作用素という．

定理 4.2.2.　H を複素 Hilbert 空間，$T : H \overset{\mathrm{op}}{\to} H$ を線型作用素，I を H 上の恒等写像とする．$\overline{\mathcal{D}(T)} = H$ が満たされていれば $(\lambda I - T)^* = \overline{\lambda} I - T^*$ $(\forall \lambda \in \mathbb{C})$ が成り立つ．

証明.　任意に $\lambda \in \mathbb{C}$ を取り固定する．$\mathcal{D}(\lambda I - T) = \mathcal{D}(T)$ が成り立つから $(\lambda I - T)^*$ が定義され

$$\langle (\lambda I - T)u, v \rangle_H = \langle u, (\lambda I - T)^* v \rangle_H \quad (\forall u \in \mathcal{D}(T),\ v \in \mathcal{D}((\lambda I - T)^*))$$

が満たされる．一方で任意の $u \in \mathcal{D}(T)$, $v \in \mathcal{D}((\lambda I - T)^*)$ に対し

$$\langle (\lambda I - T)u, v \rangle_H = \left\langle u, \overline{\lambda} v \right\rangle_H - \langle Tu, v \rangle_H$$

が成り立つから，

$$\langle Tu, v \rangle_H = \left\langle u, \overline{\lambda} v \right\rangle_H - \langle u, (\lambda I - T)^* v \rangle_H \quad (\forall u \in \mathcal{D}(T))$$

[*5] y に対し u とは別に (4.5) を満たす $u' \in X$ が存在すれば

$$\langle x, u \rangle_X = \langle x, u' \rangle_X \quad (\forall x \in \mathcal{D}(T))$$

が成り立つ．$\mathcal{D}(T)$ は X で稠密であるから内積の連続性より $u = u'$ が従う．

となり $v \in \mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}\left(\overline{\lambda}I - T^*\right)$ かつ

$$(\lambda I - T)^* v = \left(\overline{\lambda}I - T^*\right) v \quad (v \in \mathcal{D}((\lambda I - T)^*))$$

が従う．後は $\mathcal{D}\left(\overline{\lambda}I - T^*\right) \subset \mathcal{D}((\lambda I - T)^*)$ を示せば主張が得られる．実際任意に $v \in \mathcal{D}\left(\overline{\lambda}I - T^*\right)$ を取れば，

$$\langle Tu, v\rangle_H = \langle u, T^* v\rangle_H \quad (\forall u \in \mathcal{D}(T))$$

が成り立つから

$$\langle(\lambda I - T)u, v\rangle_H = \langle\lambda u, v\rangle_H - \langle Tu, v\rangle_H = \left\langle u, \left(\overline{\lambda}I - T^*\right) v\right\rangle_H \quad (\forall u \in \mathcal{D}(T))$$

が従い $v \in \mathcal{D}((\lambda I - T)^*)$ を得る． ∎

第 5 章

レゾルベントとスペクトル

本章を通じて X を複素 Banach 空間とし，ノルムを $\|\cdot\|$ で表す．

5.1 レゾルベントとスペクトル

例 5.1.1 (微分作用素のスペクトル). $I \coloneqq [0,a]$ $(a>0)$, $X \coloneqq C(I)$ とし，X 上の作用素 $T_0,\cdots,T_4$ を次で定める:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(T_0) &\coloneqq \left\{ u \in C^1(I)\ ;\quad u(0)=u(a)=0 \right\},\\
\mathcal{D}(T_1) &\coloneqq \left\{ u \in C^1(I)\ ;\quad u(0)=0 \right\},\\
\mathcal{D}(T_2) &\coloneqq \left\{ u \in C^1(I)\ ;\quad u(0)=u(a) \right\},\\
\mathcal{D}(T_3) &\coloneqq C^1(I),\\
\mathcal{D}(T_4) &\coloneqq \left\{ u \in C^1(I)\ ;\quad u(0)+u(a)=0 \right\}
\end{aligned}$$

$u \in \mathcal{D}\left(T_j\right)$ に対し $T_j u = u'$ $(j=0,\cdots,4)$．この下で $\sigma_p(T_j)$ 及び $\sigma(T_j)$ $(j=0,\cdots,4)$ を求める．

補題 5.1.2 (微分方程式の解). $I \coloneqq [0,a]$ $(a>0)$, $X \coloneqq C(I)$ とおく．任意の $f \in C^1(I)$, $\lambda, u_0 \in \mathbb{C}$ に対し

$$\begin{cases} u'(x) - \lambda u(x) = f(x) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \qquad (x \in I) \tag{5.1}$$

は $C^1(I)$ において唯一つの解

$$u(x) = e^{\lambda x} u_0 + \int_0^x e^{\lambda(x-s)} f(s)\,ds \quad (x \in I) \tag{5.2}$$

を持つ．

証明 (補題 5.1.2). (5.2) で与えられる $u \in C^1(I)$ は

$$u'(x) = \lambda u_0 e^{\lambda x} + \lambda e^{\lambda x} \int_0^x e^{-\lambda s} f(s)\,ds + f(x) = \lambda u(x) + f(x) \quad (\forall x \in I)$$

を満たすから微分方程式 (5.1) の解であるから，あとは解の一意性を示せばよい．$v \in C^1(I)$ が (5.1) の解であるとき，

$$u'(x) - \lambda u(x) = v'(x) - \lambda v(x) \quad (\forall x \in I), \quad u(0) - v(0) = 0$$

が成り立つから，$w := u - v \in C^1(I)$ は次の確率微分方程式を満たす:

$$\begin{cases} w'(x) = \lambda w(x) \\ w(0) = 0 \end{cases} \quad (\forall x \in I).$$

これを満たす w は $w = 0$ のみであるから $u = v$ が得られる． ∎

証明 (例 5.1.1).　先ず各 T_j が閉作用素であることを示す．$u_n \in \mathcal{D}\left(T_j\right)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ に対し或る $u, v \in C(I)$ が存在して，$\|u_n - u\| \longrightarrow 0$ かつ $\left\|T_j u_n - v\right\| \longrightarrow 0$ が成り立つとき，任意の $x \in I$ に対して

$$\begin{aligned} \left|u(x) - \int_0^x v(t)\,dt\right| &\leq |u(x) - u_n(x)| + \left|\int_0^x T_j u_n(t)\,dt - \int_0^x v(t)\,dt\right| \\ &\leq \|u - u_n\| + a\left\|T_j u_n - v\right\| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

が成り立つから

$$u(x) = \int_0^x v(t)\,dt \quad (\forall x \in I)$$

となり，$u \in C^1(I)$ かつ $u' = v$ が得られる．後は $u \in \mathcal{D}\left(T_j\right)$ を満たせばよい．$j = 0, 1$ の場合は

$$|u(x)| = |u(x) - u_n(x)| \leq \|u - u_n\| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty,\ x = 0, a)$$

により，$j = 2$ の場合は

$$|u(0) - u(a)| \leq |u(0) - u_n(0)| + |u_n(a) - u(a)| \leq 2\|u - u_n\| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

により，$j = 4$ の場合は

$$|u(0) + u(a)| \leq |u(0) - u_n(0)| + |u_n(a) - u(a)| \leq 2\|u - u_n\| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

により，いずれの場合も $u \in \mathcal{D}\left(T_j\right)$ が成り立つ．次に $\sigma_p(T_j)$ と $\sigma(T_j)$ を考察する．

$j = 0$ の場合

$j = 1$ の場合

$j = 4$ の場合

証明.　sup-norm を $\|\cdot\|$，$C(I)$ 上の恒等写像を $\mathrm{I}(\neq I)$ と表す．

T が閉作用素であること　先ず T が閉作用素であることを示す．$u_n \in \mathcal{D}(T)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ に対し或る $u, v \in C(I)$ が存在して，$\|u_n - u\| \longrightarrow 0$ かつ $\|Tu_n - v\| \longrightarrow 0$ が成り立つとき，任意の $x \in I$ に対して

$$\begin{aligned} \left|u(x) - \int_0^x v(t)\,dt\right| &\leq |u(x) - u_n(x)| + \left|\int_0^x Tu_n(t)\,dt - \int_0^x v(t)\,dt\right| \\ &\leq \|u - u_n\| + a\|Tu_n - v\| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

が成り立つから

$$u(x) = \int_0^x v(t)\,dt \quad (\forall x \in I)$$

となり，$u \in C^1(I)$ かつ $Tu = v$ が従う．そして

$$|u(0) + u(a)| \leq |u(0) - u_n(0)| + |u_n(a) - u(a)| \leq 2\|u - u_n\| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

により，$u \in \mathcal{D}(T)$ が成り立つ．これにより T は閉作用素である．

点スペクトルについて　$u \in \mathcal{D}(T)$ とする．$\lambda u - Tu = 0$ を満たす $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し，微分方程式を解けば

$$u(x) = Ce^{\lambda x} \quad (x \in I,\ C \in \mathbb{C})$$

と表せる．今 $u(0) + u(a) = 0$ が満たされているから，

$$C + Ce^{\lambda a} = 0$$

が成り立つ．これは $C = 0$ 或は $\lambda \in \left\{ \sqrt{-1}(2n+1)\pi/a\ ;\ \ n \in \mathbb{Z} \right\}$ の場合に実現する．$\lambda \notin \left\{ \sqrt{-1}(2n+1)\pi/a\ ;\ \ n \in \mathbb{Z} \right\}$ ならば $C = 0$ となり，この場合 $\lambda u - Tu = 0$ を満たす $u \neq 0$ が存在しないから

$$\sigma_p(T) \subset \left\{ \sqrt{-1}\frac{(2n+1)\pi}{a}\ ;\quad n \in \mathbb{Z} \right\}$$

が従う．逆に $n \in \mathbb{Z}$ を取り $\lambda = (2n+1)\pi/a$ とおけば，任意の $0 \neq C \in \mathbb{C}$ に対して $u(x) = Ce^{\lambda x}$ $(x \in I)$ は

$$\lambda u(x) - Tu(x) = 0 \quad (\forall x \in I), \quad u(0) + u(a) = 0$$

を満たすから

$$\sigma_p(T) \supset \left\{ \sqrt{-1}\frac{(2n+1)\pi}{a}\ ;\quad n \in \mathbb{Z} \right\}$$

が成り立ち，$\sigma_p(T) = \left\{ \sqrt{-1}(2n+1)\pi/a\ ;\ \ n \in \mathbb{Z} \right\}$ が得られる．

スペクトルについて　レゾルベント集合が $\rho(T) = \mathbb{C} \backslash \sigma_p(T)$ を満たすことを示す．これにより $\sigma(T) = \sigma_p(T)$ が従う．$\lambda \in \mathbb{C} \backslash \sigma_p(T), f \in C(I)$ を任意に取り

$$\begin{cases} u'(x) - \lambda u(x) = f(x) \\ u(0) + u(a) = 0 \end{cases} \quad (x \in I)$$

を満たす u を考えれば，

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} u'(x) - \lambda u(x) = f(x) \\ u(0) + u(a) = 0 \end{cases} \quad (x \in I) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} u(x) = e^{\lambda x}u(0) + \int_0^x e^{\lambda(x-s)} f(s)\, ds \\ u(0) + u(a) = 0 \end{cases} \quad (x \in I) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} u(x) = e^{\lambda x}u(0) + \int_0^x e^{\lambda(x-s)} f(s)\, ds \\ u(0) + e^{\lambda a}u(0) + \int_0^a e^{\lambda(a-s)} f(s)\, ds = 0 \end{cases} \quad (x \in I) \\
&\Leftrightarrow u(x) = -\frac{e^{\lambda x}}{1 + e^{\lambda a}} \int_0^a e^{\lambda(a-s)} f(s)\, ds + \int_0^x e^{\lambda(x-s)} f(s)\, ds \quad (x \in I)^{*1}
\end{aligned} \tag{5.3}$$

より f に対して $u \in \mathcal{D}(T)$ は唯一つ定まる．この f から u への単射対応を $R_\lambda : C(I) \overset{\text{op}}{\to} \mathcal{D}(T)$ と表せば，f の任意性より $\mathcal{D}(R_\lambda) = C(I)$ が成り立ち，且つ積分の線型性により R_λ も線型性を持つ．また (5.3) の最終式より

$$\| R_\lambda f \| \leq \left(\frac{\sup_{x \in I} \left| e^{\lambda x} \right|}{\left| 1 + e^{\lambda a} \right|} \int_0^a \left| e^{\lambda(a-s)} \right|\, ds + \sup_{x \in I} \left| e^{\lambda x} \right| \int_0^a \left| e^{-\lambda s} \right|\, ds \right) \| f \| \quad (\forall f \in C(I))$$

*1 $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \sigma_p(T)$ より $1 + e^{\lambda a} \neq 0$ である．

が成り立つから R_λ は有界であり，さらに R_λ の定め方と (5.3) より

$$
\begin{aligned}
-R_\lambda(\lambda\mathrm{I}-T)u &= u \quad (\forall u \in \mathcal{D}(T)),\\
-(\lambda\mathrm{I}-T)R_\lambda f &= f \quad (\forall f \in C(I))
\end{aligned}
$$

が満たされるから $-R_\lambda = (\lambda\mathrm{I}-T)^{-1}$ が成り立ち $\lambda \in \rho(T)$ が従う．以上より $\rho(T) = \mathbb{C}\backslash\sigma_p(T)$ である． ∎

補題 5.1.3 (レゾルベントは閉作用素). T を X 上の線型作用素，λ を複素数とするとき，次は同値である:

(1) T は閉作用素である．

(2) $\lambda I - T$ は閉作用素である．

(3) $(\lambda I - T)^{-1}$ が存在すれば，これは閉作用素である．

証明.

(1)⇒(2)　$[u_n, (\lambda I - T)u_n] \in \mathcal{G}((\lambda I - T))$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が $u_n \longrightarrow u \in X$, $(\lambda I - T)u_n \longrightarrow v \in X$ を満たすとき，

$$
\|(\lambda u - v) - Tu_n\| \leq \|(\lambda I - T)u_n - v\| + \|\lambda u_n - \lambda u\| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)
$$

より $Tu_n \longrightarrow \lambda u - v$ が成り立つ．T が閉作用素なら $Tu = \lambda u - v$ が従い $v = (\lambda I - T)u$ を得る．

(2)⇒(1)　$[u_n, Tu_n] \in \mathcal{G}(T)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が $u_n \longrightarrow u \in X$, $Tu_n \longrightarrow v \in X$ を満たすとき，

$$
\|(\lambda I - T)u_n - (\lambda u - v)\| \leq \|\lambda u_n - \lambda u\| + \|v - Tu_n\| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)
$$

より $(\lambda I - T)u_n \longrightarrow \lambda u - v$ が成り立つ．$(\lambda I - T)$ が閉作用素なら $(\lambda I - T)u = \lambda u - v$ が従い $Tu = v$ を得る．

(2)⇔(3)　定理 2.2.2 による． ∎

定理 5.1.4 (レゾルベントの共役). X を複素 banach 空間，$T : X \overset{\text{op}}{\to} X$ を閉線型作用素，I を X 上の恒等写像とする．$\overline{\mathcal{D}(T)} = X$ が満たされていれば，$\rho(T^*) = \rho(T)$ かつ $(\lambda I - T^*)^{-1} = \left((\lambda I - T)^{-1}\right)^*$ $(\forall \lambda \in \rho(T^*))$ が成り立つ．

証明.

(1)

(2)

定理 5.1.5 (レゾルベントの共役). H を複素 Hilbert 空間，$T : H \overset{\text{op}}{\to} H$ を閉線型作用素，I を H 上の恒等写像とする．$\overline{\mathcal{D}(T)} = H$ が満たされていれば，$\rho(T^*) = \rho(T)$ かつ $(\lambda I - T^*)^{-1} = \left((\lambda I - T)^{-1}\right)^*$ $(\forall \lambda \in \rho(T^*))$ が成り立つ．

例 5.1.6.　$(X,\mathcal{M},\mu)$ を σ-有限な測度空間，$H = \mathrm{L}^2(X,\mathcal{M},\mu) = \mathrm{L}^2(\mu)$ とする．$\mathcal{M}$-可測関数 $a : X \to \mathbb{C}$ に対して，H から H へのかけ算作用素 M_a を次で定める:

$$\mathcal{D}(M_a) = \{\, u \in H\ ;\quad au \in H \,\},\quad (M_a u)(x) = a(x)u(x)\quad (x \in X).$$

(1)　M_a は線型作用素で，$\mathcal{D}(M_a)$ は H で稠密なことを示せ．

(2)　$M_a^* = M_{\overline{a}}$ が成り立つことを示せ．

(3)　$\sigma(M_a) = \left\{\, \lambda \in \mathbb{C}\ ;\quad \forall\epsilon > 0 \text{ に対し } \mu\left(a^{-1}(U_\epsilon(\lambda))\right) > 0 \,\right\}$ を示せ．(ただし $U_\epsilon(\lambda)$ は λ の ϵ-近傍．)

(4)　$\sigma_p(M_a) = \left\{\, \lambda \in \mathbb{C}\ ;\quad \mu\left(a^{-1}(\{\lambda\})\right) > 0 \,\right\}$ を示せ．

証明．σ-有限の仮定により，或る集合の系 $(X_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{M}$ が存在して $X_1 \subset X_2 \subset \cdots$, $\mu(X_n) < \infty$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, $\cup_{n\in\mathbb{N}} X_n = X$ を満たす．また H におけるノルムと内積をそれぞれ $\|\cdot\|, \langle\cdot,\cdot\rangle$ と表し，H 上の恒等写像を I とする．

(1)　**M_a が線型作用素であること**　先ず $\mathcal{D}(M_a)$ が H の線型部分空間であることを示す．任意に $u,v \in \mathcal{D}(M_a)$, $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ を取れば，H が線形空間であることにより $\alpha u + \beta v \in H$ が満たされ，且つ $au, av \in H$ により

$$a(\alpha u + \beta v) = \alpha au + \beta av \in H$$

も成り立つから $\alpha u + \beta v \in \mathcal{D}(M_a)$ が従う．また任意の $u,v \in \mathcal{D}(M_a)$, $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned} M_a(\alpha u + \beta v)(x) &= a(x)(\alpha u(x) + \beta v(x)) \\ &= \alpha a(x)u(x) + \beta a(x)v(x) = \alpha(M_a u)(x) + \beta(M_a v)(x) \quad (\mu\text{-a.e.}x \in X) \end{aligned}$$

が満たされるから M_a は線型作用素である．

$\mathcal{D}(M_a)$ が H で稠密なこと　任意に $v \in H$ を取り $v_n := v\mathbb{1}_{\{|a|\le n\}}$ $(n = 1,2,3,\cdots)$ として関数列 $(v_n)_{n=1}^\infty$ を作る．全ての $x \in X$ で $|v_n(x)| \le |v(x)|$ が満たされているから $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ である．また全ての $n \in \mathbb{N}$ について

$$\int_X |a(x)v_n(x)|^2 \mu(dx) = \int_{\{|a|\le n\}} |a(x)v(x)|^2 \mu(dx) \le n^2 \int_X |v(x)|^2 \mu(dx) < \infty$$

が成り立つから $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(M_a)$ が従う．

$$\|v - v_n\|^2 = \int_X |v(x) - v_n(x)|^2\,\mu(dx) = \int_X \mathbb{1}_{\{|a|>n\}}(x)|v(x)|^2\,\mu(dx)$$

の右辺の被積分関数は各点で 0 に収束し，かつ可積分関数 $|v|^2$ で抑えられるから，Lebesgue の収束定理より

$$\lim_{n\to\infty} \|v - v_n\|^2 = \lim_{n\to\infty} \int_X \mathbb{1}_{\{|a|>n\}}(x)|v(x)|^2\,\mu(dx) = \int_X \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{\{|a|>n\}}(x)|v(x)|^2\,\mu(dx) = 0$$

が得られる．v は任意に選んでいたから $\mathcal{D}(M_a)$ の稠密性が従う．

(2)　$\mathcal{D}(M_a)$ が H で稠密であるから M_a の共役作用素を定義できる．任意の $u,v \in \mathcal{D}(M_a) = \mathcal{D}(M_{\overline{a}})$ に対して

$$\langle M_a u, v\rangle = \int_X a(x)u(x)\overline{v(x)}\,\mu(dx) = \int_X u(x)\overline{\overline{a(x)}v(x)}\,\mu(dx) = \langle u, M_{\overline{a}}v\rangle$$

が成り立つから $v \in \mathcal{D}(M_a^*)$ 且つ $M_a^* v = M_{\overline{a}}v$ $(\forall v \in \mathcal{D}(M_{\overline{a}}))$ が従う．逆に任意の $u \in \mathcal{D}(M_a), v \in \mathcal{D}(M_a^*)$ に対し

$$\langle u, M_a^* v\rangle = \langle M_a u, v\rangle = \langle u, M_{\overline{a}} v\rangle$$

が成り立つから，$\mathcal{D}(M_a)$ の稠密性により $M_a^* v = M_{\overline{a}} v$ $(\forall v \in \mathcal{D}(M_a^*))$ が従う．以上より $M_a^* = M_{\overline{a}}$ を得る．

(3)　$\lambda \in \mathbb{C}$ を任意に取り固定し，$V_\epsilon := a^{-1}(U_\epsilon(\lambda))\ (\forall\epsilon > 0)$ とおく．或る $\epsilon > 0$ が存在して $\mu(V_\epsilon) = 0$ が成り立つ場合，

$$b(x) := \begin{cases} 1/\left(\lambda - a(x)\right) & (x \in X \backslash V_\epsilon) \\ 0 & (x \in V_\epsilon) \end{cases}$$

として b を定めれば，任意の $u \in H$ に対して

$$\int_X |b(x)u(x)|^2\,\mu(dx) = \int_{X\backslash V_\epsilon} \frac{1}{|\lambda - a(x)|^2}|u(x)|^2\,\mu(dx) \leq \frac{1}{\epsilon^2}\int_X |u(x)|^2\,\mu(dx) < \infty$$

が成り立つから，M_b は $\mathcal{D}(M_b) = H$ を満たす有界線型作用素である．更に $b(x)\,(\lambda - a(x)) = 1\ (\forall x \in V_\epsilon)$ により

$$\begin{aligned} b(x)\,(\lambda - a(x))\,u(x) &= u(x) \quad (\mu\text{-a.e.}x \in X,\ \forall u \in \mathcal{D}(M_a)), \\ (\lambda - a(x))\,b(x)u(x) &= u(x) \quad (\mu\text{-a.e.}x \in X,\ \forall u \in H) \end{aligned}$$

が成り立つから，$M_b = (\lambda I - M_a)^{-1}$ となり $\lambda \in \rho(M_a)$ が従う．以上より

$$\sigma(M_a) \subset \left\{\, \lambda \in \mathbb{C}\ ;\quad \forall\epsilon > 0 \text{ に対し } \mu\left(a^{-1}(U_\epsilon(\lambda))\right) > 0 \,\right\} \tag{5.4}$$

が成立する．次に逆の包含関係を示す．$\mu(V_\epsilon) > 0\ (\forall\epsilon > 0)$ が満たされている時，任意に $\epsilon > 0$ を取り固定する．

$$\mu(V_\epsilon) = \lim_{n\to\infty}\mu(V_\epsilon \cap X_n)$$

が成り立つから，或る $N \in \mathbb{N}$ が存在して $\mu(V_\epsilon \cap X_N) > 0$ を満たす．

$$u_\epsilon(x) := \begin{cases} 1 & (x \in V_\epsilon \cap X_N) \\ 0 & (x \notin V_\epsilon \cap X_N) \end{cases}$$

として u_ϵ を定めれば，u_ϵ は二乗可積分であり

$$\int_X |a(x)u_\epsilon(x)|^2\,\mu(dx) = \int_{V_\epsilon\cap X_N} |a(x)u_\epsilon(x)|^2\,\mu(dx) \leq (\epsilon + |\lambda|)^2\,\mu\left(V_\epsilon \cap X_N\right) < \infty$$

を満たすから $u_\epsilon \in \mathcal{D}(M_a)$ が従う．また

$$\begin{aligned} \|(\lambda I - M_a)u_\epsilon\|^2 &= \int_X |\lambda - a(x)|^2|u_\epsilon(x)|^2\,\mu(dx) \\ &= \int_{V_\epsilon\cap X_N} |\lambda - a(x)|^2|u_\epsilon(x)|^2\,\mu(dx) \leq \epsilon^2\int_X |u_\epsilon(x)|^2\,\mu(dx) = \epsilon^2\,\|u_\epsilon\|^2 \end{aligned}$$

を満たす．$\epsilon > 0$ は任意に選んでいたから，任意の $\epsilon > 0$ に対し或る $u_\epsilon \in \mathcal{D}(M_a)$ が存在して

$$\|(\lambda I - M_a)u_\epsilon\| \leq \epsilon\,\|u_\epsilon\|$$

が成り立つ．この場合 $(\lambda I - M_a)^{-1}$ が存在しても，$u_\epsilon = (\lambda I - M_a)^{-1}v_\epsilon$ を満たす $v_\epsilon \in \mathcal{D}\left((\lambda I - M_a)^{-1}\right)$ に対して

$$\frac{1}{\epsilon} \leq \frac{\left\|(\lambda I - M_a)^{-1}v_\epsilon\right\|}{\|v_\epsilon\|}$$

が従い，ϵ の任意性より $(\lambda I - M_a)^{-1}$ の作用素ノルムは非有界である．ゆえに $\lambda \in \sigma(M_a)$ が成立し，(5.4) と併せて

$$\sigma(M_a) = \left\{\, \lambda \in \mathbb{C}\ ;\quad \forall\epsilon > 0 \text{ に対し } \mu\left(a^{-1}(U_\epsilon(\lambda))\right) > 0 \,\right\}$$

が得られる．

(4)　先ず $\sigma_p(M_a) \subset \left\{\, z \in \mathbb{C}\ ;\quad \mu\left(a^{-1}(\{z\})\right) > 0 \,\right\}$ が成り立つことを示す．任意の $\lambda \in \sigma_p(M_a)$ に対しては固有ベクトル $u \in H$ が存在し，固有ベクトルは $u \neq 0$ を満たすから

$$N := \{\, x \in X\ ;\quad u(x) \neq 0 \,\}$$

とおけば $\mu(N) > 0$ が成り立つ．一方で点スペクトルの定義より u は $(\lambda I - M_a)u = 0$ を満たすから，

$$0 = \|\,(\lambda I - M_a)u\,\|^2 = \int_X |\lambda - a(x)|^2 |u(x)|^2\ \mu(dx) = \int_N |\lambda - a(x)|^2 |u(x)|^2\ \mu(dx)$$

が成り立ち

$$\mu\,(\{\, x \in N\ ;\quad |\lambda - a(x)| > 0 \,\}) = 0$$

が従う．よって

$$\mu\left(a^{-1}(\{\lambda\})\right) \geq \mu\,(\{\, x \in N\ ;\quad |\lambda - a(x)| = 0 \,\}) = \mu(N) > 0$$

となり $\lambda \in \left\{\, z \in \mathbb{C}\ ;\quad \mu\left(a^{-1}(\{z\})\right) > 0 \,\right\}$ が成り立つ．次に $\sigma_p(M_a) \supset \left\{\, z \in \mathbb{C}\ ;\quad \mu\left(a^{-1}(\{z\})\right) > 0 \,\right\}$ が成り立つことを示す．任意に $\lambda \in \left\{\, z \in \mathbb{C}\ ;\quad \mu\left(a^{-1}(\{z\})\right) > 0 \,\right\}$ を取り

$$\Lambda := a^{-1}(\{\lambda\})$$

とおく．

$$0 < \mu(\Lambda) = \lim_{n\to\infty} \mu(\Lambda \cap X_n)$$

が成り立つから，或る $n \in \mathbb{N}$ が存在して $\mu(\Lambda \cap X_n) > 0$ を満たす．

$$u(x) := \begin{cases} 1 & (x \in \Lambda \cap X_n), \\ 0 & (x \notin \Lambda \cap X_n) \end{cases}$$

として u を定めれば u は二乗可積分であり，$\mu(\Lambda \cap X_n) > 0$ であるから $u \neq 0$ を満たす．また

$$\|\,(\lambda I - M_a)u\,\|^2 = \int_X |\lambda - a(x)|^2 |u(x)|^2\ \mu(dx) = \int_{\Lambda\cap X_n} |\lambda - a(x)|^2 |u(x)|^2\ \mu(dx) = 0$$

により $(\lambda I - M_a)u = 0$ が従うから u は λ の固有ベクトルであり，$\lambda \in \sigma_p(M_a)$ が成立する．　∎

第 6 章

コンパクト作用素

6.1 コンパクト作用素の性質

係数体を $\mathbb{C}$，X, Y をノルム空間とし，K を X から Y への線型作用素とする．また X, Y 及び共役空間 X^*, Y^* におけるノルムを $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$, $\|\cdot\|_{X^*}$, $\|\cdot\|_{Y^*}$ と表記し，位相はこれらのノルムにより導入する．

定義 6.1.1 (コンパクト作用素). K がコンパクト作用素 (compact operator) であるということを次で定義する:

- $\mathcal{D}(K) = X$ を満たし，かつ X の任意の有界部分集合 B に対して KB が相対コンパクト (KB の閉包 $\overline{KB}$ がコンパクト) となる．

補題 6.1.2 (コンパクト作用素となるための十分条件の一つ). $\mathcal{D}(K) = X$ とする．$B_1 := \{\, x \in X \ ; \quad \|x\|_X < 1 \,\}$ に対して $\overline{KB_1}$ がコンパクトであるなら K はコンパクト作用素となる．

証明. $B \subset X$ が有界集合なら或る $\lambda > 0$ が存在して $B \subset \lambda B_1$ ($= \{\, \lambda x \ ; \quad x \in B_1 \,\}$) が成り立つ．$\overline{K(\lambda B_1)}$ がコンパクトとなるならその閉部分集合である $\overline{KB}$ もコンパクトとなるから，$\overline{K(\lambda B_1)}$ がコンパクトとなることを示せばよい．先ず

$$\overline{K(\lambda B_1)} = \lambda \overline{KB_1}$$

が成り立つことを示す．$x \in \overline{K(\lambda B_1)}$ に対しては点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset K(\lambda B_1)$ が取れて $\|x_n - x\|_X \longrightarrow 0$ ($n \longrightarrow \infty$) を満たす．$y_n := x_n/\lambda$ とおけば K の線型性により $y_n \in KB_1$ となり，$\|y_n - x/\lambda\|_X = \|x_n - x\|_X /\lambda \longrightarrow 0$ ($n \longrightarrow \infty$) となるから $x/\lambda \in \overline{KB_1}$，すなわち $x \in \lambda\overline{KB_1}$ である．逆に $x \in \lambda\overline{KB_1}$ に対しては $x/\lambda \in \overline{KB_1}$ となるから，或る点列 $(t_n)_{n=1}^{\infty} \subset KB_1$ が存在して $\|t_n - x/\lambda\|_X \longrightarrow 0$ ($n \longrightarrow \infty$) を満たす．$s_n = \lambda t_n$ とおけば K の線型性により $s_n \in K(\lambda B_1)$ となり，$\|s_n - x\|_X = \lambda \|t_n - x/\lambda\|_X \longrightarrow 0$ ($n \longrightarrow \infty$) が成り立つから $x \in \overline{K(\lambda B_1)}$ である．以上で $\overline{K(\lambda B_1)} = \lambda\overline{KB_1}$ が示された．$\overline{K(\lambda B_1)}$ を覆う任意の開被覆 $\cup_{\mu \in M} O_\mu$ (M は任意濃度) に対し

$$\overline{KB_1} \subset \bigcup_{\mu \in M} \frac{1}{\lambda} O_\mu$$

が成り立ち[*1]，仮定より $\overline{KB_1}$ はコンパクトであるから，M から有限個の添数 μ_i ($i = 1, \cdots, n$) を取り出して

$$\overline{KB_1} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda} O_{\mu_i}$$

[*1] 開集合 O_μ は $1/\lambda$ でスケールを変えてもまた開集合となる．

となる．

$$\overline{K(\lambda B_1)} = \lambda\overline{KB_1} \subset \bigcup_{i=1}^{n} O_{\mu_i}$$

が従うから $\overline{K(\lambda B_1)}$ はコンパクトである． ∎

補題 6.1.3 (コンパクト作用素であることの同値条件). $\mathcal{D}(K) = X$ とする．(1)K がコンパクトであることと，(2)X の任意の有界点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ に対し点列 $(Kx_n)_{n=1}^{\infty}$ が $\overline{(Kx_n)_{n=1}^{\infty}}$ で収束する部分列を含むことは同値である．

証明.

(1)⇒(2)　$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ は X において有界集合であるから $(Kx_n)_{n=1}^{\infty}$ は相対コンパクトである．距離空間におけるコンパクト性の一般論により $\overline{(Kx_n)_{n=1}^{\infty}}$ は点列コンパクトとなり (2) が従う．

(2)⇒(1)　距離空間の一般論より，任意の有界集合 $B \subset X$ に対して $\overline{KB}$ がコンパクトとなることと $\overline{KB}$ が点列コンパクトとなることは同値である．従って次の主張

主張 (※)

KB の任意の点列が $\overline{KB}$ で収束する部分列を含むなら $\overline{KB}$ は点列コンパクトである．

を示せばよい．実際 (※) が示されたとする．KB から任意に点列 $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ を取れば，これに対し或る $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset B$ が対応して $y_n = Kx_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ と表現され，(2) の仮定より $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ は $\overline{(y_n)_{n=1}^{\infty}}$ で収束する部分列を持つ．よって (※) と上の一般論により $\overline{KB}$ はコンパクトとなる．(※) を示す．$\overline{KB}$ の任意の点列 $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ に対して $\|y_n - z_n\|_Y < 1/n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を満たす $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subset KB$ が存在する．部分列 $(z_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ が $y \in \overline{KB}$ に収束するなら，任意の $\epsilon > 0$ に対し或る $N_1 \in \mathbb{N}$ が取れて $k \geq N_1$ ならば $\left\|y - z_{n_k}\right\|_Y < \epsilon/2$ を満たす．更に或る $N_2 \in \mathbb{N}$ が取れて $k \geq N_2$ なら $1/n_k < \epsilon/2$ も満たされるから，全ての $k \geq \max\{N_1, N_2\}$ に対して

$$\left\|y - y_{n_k}\right\|_Y \leq \left\|y - z_{n_k}\right\|_Y + \left\|z_{n_k} - y_{n_k}\right\|_Y < \epsilon$$

が成り立つ． ∎

定義 6.1.4 (コンパクト作用素の空間). ここで新しく次の表記を導入する:

$$\mathrm{B}_c(X, Y) := \{\, K : X \to Y \ ; \quad K \text{ はコンパクト作用素}\,\}.$$

$Y = X$ の場合は $\mathrm{B}_c(X, X) = \mathrm{B}_c(X)$ と表記する．有界作用素の空間に似た表記をしているが，定義右辺では作用素の有界性を要件に入れていない．しかし実際コンパクト作用素は有界である (命題 6.1.5).

命題 6.1.5 (コンパクト作用素の有界性・コンパクト作用素の合成のコンパクト性).

(1)　$\mathrm{B}_c(X,Y)$ は $\mathrm{B}(X,Y)$ の線型部分空間となる．

(2)　Z をノルム空間とする．$A \in \mathrm{B}(X,Y)$ と $B \in \mathrm{B}(Y,Z)$ に対して A 又は B がコンパクト作用素なら BA もまたコンパクト作用素となる．

証明.

(1)　任意に $K \in \mathrm{B}_c(X,Y)$ を取れば，コンパクト作用素の定義より $\mathcal{D}(K) = X$ が満たされている．また $B_1 := \{\, x \in X \;;\; \|x\|_X \leq 1 \,\}$ とおけば，$\overline{KB_1}$ のコンパクト性により KB_1 は有界であるから

$$\sup_{0<\|x\|_X\leq 1} \|Kx\|_Y = \sup_{x\in B_1\setminus\{0\}} \|Kx\|_Y < \infty$$

となり $K \in \mathrm{B}(X,Y)$ が従う．次に $\mathrm{B}_c(X,Y)$ が線形空間であることを示す．$K_1, K_2 \in \mathrm{B}_c(X,Y)$ と $\alpha \in \mathbb{C}$ を任意に取る．補助定理 6.1.3 より，X の任意の有界点列 $(x_n)_{n=1}^\infty$ に対して $((K_1+K_2)(x_n))_{n=1}^\infty$ と $((\alpha K_1)(x_n))_{n=1}^\infty$ が収束部分列を含むことを示せばよい．補助定理 6.1.3 により，$(K_1x_n)_{n=1}^\infty$ は $\overline{(K_1x_n)_{n=1}^\infty}$ で収束する部分列 $(K_1x_{n(1,k)})_{k=1}^\infty$ を持つ．また $(K_2x_{n(1,k)})_{k=1}^\infty$ も $\overline{(K_2x_{n(1,k)})_{k=1}^\infty}$ で収束する部分列 $(K_2x_{n(2,k)})_{k=1}^\infty$ を持ち，更に $(K_1x_{n(2,k)})_{k=1}^\infty$ は収束列 $(K_1x_{n(1,k)})_{k=1}^\infty$ の部分列となるから，$((K_1+K_2)(x_{n(2,k)}))_{k=1}^\infty$ が収束列となり $K_1+K_2 \in \mathrm{B}_c(X,Y)$ が従う．$(\alpha K_1 x_{n(1,k)})_{k=1}^\infty$ もまた収束列であるから $\alpha K_1 \in \mathrm{B}_c(X,Y)$ も従う．以上より $\mathrm{B}_c(X,Y)$ は線形空間である．

(2)　**A がコンパクト作用素である場合**　補助定理 6.1.3 により，X の任意の点列 $(x_n)_{n=1}^\infty$ に対し $(Ax_n)_{n=1}^\infty$ は収束部分列 $(Ax_{n_k})_{k=1}^\infty$ を持つ．B の連続性により $(BAx_{n_k})_{k=1}^\infty$ も収束列となるから，補助定理 6.1.3 より BA はコンパクト作用素である．

B がコンパクト作用素である場合　任意の有界集合 $S \subset X$ に対して，A の有界性と併せて AS は有界となる．従って $\overline{BAS}$ がコンパクトとなるから BA はコンパクト作用素である．∎

命題 6.1.6 (Y が完備なら $\mathrm{B}_c(X,Y)$ は閉).　Y が Banach 空間ならば $\mathrm{B}_c(X,Y)$ は $\mathrm{B}(X,Y)$ の閉部分空間である．

証明.　Y が Banach 空間ならば $\mathrm{B}(X,Y)$ は作用素ノルム $\|\cdot\|_{\mathrm{B}(X,Y)}$ について Banach 空間となるから，$\mathrm{B}_c(X,Y)$ の任意の Cauchy 列は少なくとも $\mathrm{B}(X,Y)$ で収束する．よって次を示せば補助定理 6.1.3 により定理の主張が従う．

- $A_n \in \mathrm{B}_c(X,Y)$ $(n=1,2,\cdots)$ が Cauchy 列をなし $A \in \mathrm{B}(X,Y)$ に収束するとき，X の任意の有界点列 $(x_n)_{n=1}^\infty$ に対して $(Ax_n)_{n=1}^\infty$ が Y で収束する部分列を持つ．

証明には対角線論法を使う．先ず A_1 について，補助定理 6.1.3 により $(A_1x_n)_{n=1}^\infty$ の或る部分列 $\left(A_1x_{k(1,j)}\right)_{j=1}^\infty$ は収束する．A_2 についても $\left(A_2x_{k(1,j)}\right)_{j=1}^\infty$ の或る部分列 $\left(A_2x_{k(2,j)}\right)_{j=1}^\infty$ は収束する．以下収束部分列を抜き取る操作を繰り返し，一般の A_n に対して $\left(A_nx_{k(n,j)}\right)_{j=1}^\infty$ が収束列となるようにできる．ここで $x_{k_j} := x_{k(j,j)}$ $(j=1,2,\cdots)$ として点列 $(x_{k_j})_{j=1}^\infty$ を定めれば，これは $(x_n)_{n=1}^\infty$ の部分列であり，また全ての $n=1,2,\cdots$ に対して $\left(A_nx_{k_j}\right)_{j=n}^\infty$ は収束列 $\left(A_nx_{k(n,j)}\right)_{j=1}^\infty$ の部分列となるから $\left(A_nx_{k_j}\right)_{j=1}^\infty$ は収束列である．この $(x_{k_j})_{j=1}^\infty$ に対して $\left(Ax_{k_j}\right)_{j=1}^\infty$ が Cauchy 列をなすならば A のコンパクト性が

従う[*2]．$A_n \to A$ を書き直せば，任意の $\epsilon > 0$ に対して或る $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ が存在し，$n > N$ なら $\| A_n - A \|_{\mathrm{B}(X,Y)} < \epsilon$ となる．また $n > N$ を満たす n を一つ取れば，$\left(A_n x_{k_j}\right)_{j=1}^{\infty}$ は収束列であるから或る $J = J(n, \epsilon) \in \mathbb{N}$ が存在し全ての $j_1, j_2 > J$ に対して $\left\| A_n x_{k_{j_1}} - A_n x_{k_{j_2}} \right\|_Y < \epsilon$ が成り立つ．$M := \sup_{n \in \mathbb{N}} \| x_n \|_X < \infty$ とおけば，全ての $j_1, j_2 > J$ に対して

$$\left\| A x_{k_{j_1}} - A x_{k_{j_2}} \right\|_Y \leq M \| A - A_n \|_{\mathrm{B}(X,Y)} + \left\| A_n x_{k_{j_1}} - A_n x_{k_{j_2}} \right\|_Y + M \| A - A_n \|_{\mathrm{B}(X,Y)} < (2M + 1)\epsilon$$

が従うから，$\left(A x_{k_j}\right)_{j=1}^{\infty}$ は Cauchy 列すなわち収束列である． ■

定理 6.1.7 (コンパクト作用素の共役作用素のコンパクト性).

(1)　$A \in \mathrm{B}_c(X, Y) \Rightarrow A^* \in \mathrm{B}_c(Y^*, X^*)$ が成り立つ．

(2)　Y が Banach 空間ならば，任意の $A \in \mathrm{B}(X, Y)$ に対し $A^* \in \mathrm{B}_c(Y^*, X^*) \Rightarrow A \in \mathrm{B}_c(X, Y)$ が成り立つ．

証明.

(1)　定理 4.1.8 より $A \in \mathrm{B}(X, Y)$ なら $A^* \in \mathrm{B}(Y^*, X^*)$ が成り立つ．

$$S_1 := \{ x \in X \ ; \quad 0 < \| x \|_X \leq 1 \}$$

とおけば仮定より $L := \overline{AS}$ は Y のコンパクト部分集合であり，任意に有界点列 $(y_n^*)_{n=1}^{\infty} \subset Y^*$ を取り

$$f_n : L \ni y \longmapsto y_n^*(y) \in \mathbb{C} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

と定める．関数族 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ は正規族となる[*3] から，Ascoli-Arzela の定理により L 上の連続関数の全体 $C(L)$ において収束する部分列 $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ を含む．

$$\begin{aligned}
\left\| A^* y_{n_k}^* - A^* y_{n_j}^* \right\|_{X^*} &= \sup_{x \in S_1} \left| \left\langle x, A^* y_{n_k}^* - A^* y_{n_j}^* \right\rangle_{X,X^*} \right| && (\because \text{作用素ノルムの定義より.}) \\
&= \sup_{x \in S_1} \left| \left\langle Ax, y_{n_k}^* - y_{n_j}^* \right\rangle_{Y,Y^*} \right| && (\because \mathcal{D}(A^*) = Y^* \text{ より.}) \\
&= \sup_{y \in AS_1} \left| \left\langle y, y_{n_k}^* - y_{n_j}^* \right\rangle_{Y,Y^*} \right| \\
&= \sup_{y \in L} \left| \left\langle y, y_{n_k}^* - y_{n_j}^* \right\rangle_{Y,Y^*} \right| && (\because y_{n_k}^* - y_{n_j}^* \text{ の連続性より.}) \\
&= \left\| f_{n_k} - f_{n_j} \right\|_{C(L)} && (\because C(L) \text{ における sup-norm を表す.})
\end{aligned}$$

[*2] Y が Banach 空間であるから Cauchy 列であることと収束列であることは同値である．

[*3] 関数族 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ の同等連続性と各点での有界性を示す．

同等連続性　$(y_n^*)_{n=1}^{\infty}$ は有界であるから，$M := \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| y_n^* \right\|_{Y^*}$ とおけば

$$|f_n(y_1) - f_n(y_2)| = |y_n^*(y_1) - y_n^*(y_2)| \leq M \| y_1 - y_2 \|_Y \quad (\forall y_1, y_2 \in L,\ n = 1, 2, \cdots)$$

が成り立ち同等連続性が従う．

各点で有界　上で定めた M に対し

$$|f_n(y)| \leq M \| y \|_Y \quad (\forall y \in L,\ n = 1, 2, \cdots)$$

が成り立つ．

が成り立つ．$(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ が sup-norm について Cauchy 列をなすから $\left(A^* y^*_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ も Cauchy 列となり，X^* の完備性と補助定理 6.1.3 より $A^* \in \mathrm{B}_c(Y^*, X^*)$ が従う．

(2) **証明 1** $J_X : X \longrightarrow X^{**}$, $J_Y : Y \longrightarrow Y^{**}$ を自然な等長埋め込みとする．任意に $x \in X$ を取れば

$$\langle A^* y^*, J_X x\rangle_{X^*, X^{**}} = \langle x, A^* y^*\rangle_{X, X^*} = \langle Ax, y^*\rangle_{Y, Y^*} = \langle y^*, J_Y Ax\rangle_{Y^*, Y^{**}} \quad (\forall y^* \in Y^* = \mathcal{D}(A^*))$$

が成り立ち，$\mathcal{D}(A^*) = Y^*$ であるから A^{**} が定義され

$$A^{**} J_X x = J_Y Ax \quad (\forall x \in X) \tag{6.1}$$

が従う．また前段の結果と A^* のコンパクト性から A^{**} もコンパクト作用素となる．X から任意に有界点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ を取れば，J_X の等長性より $(J_X x_n)_{n=1}^{\infty}$ も X^{**} において有界となり，補助定理 6.1.3 により $(A^{**} J_X x_n)_{n=1}^{\infty}$ の或る部分列 $(A^{**} J_X x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ は Cauchy 列となる．(6.1) より $(J_Y A x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ も Cauchy 列となるから，J_Y の等長性より $(A x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ は Banach 空間 Y で収束し $A \in \mathrm{B}_c(X, Y)$ が従う．

証明 2 X の任意の有界点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ に対して

$$\| A x_n \|_Y = \sup_{\| y^* \|_{Y^*} \leq 1} |y^*(A x_n)| = \sup_{\| y^* \|_{Y^*} \leq 1} |\langle y^*, A x_n\rangle_{Y^*, Y}| = \sup_{\| y^* \|_{Y^*} \leq 1} |\langle A^* y^*, x_n\rangle_{X^*, X}| = \sup_{x^* \in V} |\langle x^*, x_n\rangle_{X^*, X}|$$

が成り立つ．ただし $V := \overline{\{\, A^* y^* \mid \| y^* \|_{Y^*} \leq 1 \,\}}$ としていて，また第 1 の等号は

$$\| y \|_Y = \sup_{\substack{0 \neq g \in Y^* \\ \| g \|_{Y^*} \leq 1}} \frac{|g(y)|}{\| g \|_{Y^*}} = \sup_{\| g \|_{Y^*} = 1} |g(y)| = \sup_{\| g \|_{Y^*} \leq 1} |g(y)|$$

の関係を使った[*4]．A^* がコンパクトだから V が X^* のコンパクト集合となるから $M := \sup_{x^* \in V} \| x^* \|_{X^*}$ とおけば $M < \infty$ である．また $(\| x_n \|_X)_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{R}$ において有界列となるから収束する部分列 $\left(\left\| x_{n_k} \right\|_X\right)_{k=1}^{\infty}$ を取ることができる．この部分列と全ての $x^* \in V$ に対して

$$|x^*(x_{n_k}) - x^*(x_{n_j})| \leq M \left\| x_{n_k} - x_{n_j} \right\|_X \longrightarrow 0 \quad (k, j \longrightarrow \infty)$$

が成り立つから，

$$\left\| A x_{n_k} - A x_{n_j} \right\|_Y = \sup_{x^* \in V} \left| \left\langle x^*, x_{n_k} - x_{n_j} \right\rangle_{X^*, X} \right| \longrightarrow 0 \quad (k, j \longrightarrow \infty)$$

が従い $A \in B_c(X, Y)$ が判明する．■

定理 6.1.8 (反射的 Banach 空間の弱点列コンパクト性).
X が反射的 Banach 空間なら，X の任意の有界点列は弱収束する部分列を含む．

定理 6.1.9 (有限次元空間における有界点列の収束). $A \in \mathrm{B}(X, Y)$ に対し $\mathrm{rank}\, A = \dim \mathcal{R}(A) < \infty$ ならば $A \in \mathrm{B}_c(X, Y)$ が成り立つ．また X, Y が Hilbert 空間であるなら逆が成立する．

証明. $\mathcal{R}(A) = AX$ は有限次元空間となるから主張の前半は定理 1.1.2 により従う．A コンパクト作用素なら AX は可分，$\overline{AX}$ は Hilbert より完全正規直交系存在．■

[*4] Hahn-Banach の定理の系を参照．始めの sup は $\| g \|_{Y^*} \leq 1$ の範囲で制限しているが，等号成立する g のノルムが 1 であるから問題ない．

定理 6.1.10 (恒等写像がコンパクト作用素なら有限次元).　X をノルム空間とする．X の恒等写像 I がコンパクト作用素であるなら $\dim X < \infty$ が成り立つ．

証明.　X の単位球面を S と表す．S は X の閉集合である．実際点列 $x_n \in S$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が $x_n \to x \in X$ となるとき，

$$\left| \|x\|_X - \|x_n\|_X \right| \leq \|x - x_n\|_X \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

より $x \in S$ が従う．$I \in \mathrm{B}_c(X)$ なら $\overline{IS} = \overline{S} = S$ は点列コンパクトとなるから，定理 1.1.4 より $\dim X < \infty$ となる．■

定理 6.1.11 (コンパクト作用素は弱収束列を強収束列に写す).
X, Y をノルム空間とし，任意に $A \in B(X, Y)$ を取る．

(1)　$A \in B_c(X, Y)$ なら A は X の任意の弱収束列を強収束列に写す．

(2)　X が反射的 Banach 空間なら (1) の逆が成り立つ．

証明.　(1)　X から任意に弱収束列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ を取り弱極限を $x \in X$ とする．このとき $(Ax_n)_{n=1}^{\infty}$ の任意の部分列が強収束する部分列を含み，且つその収束先が全て Ax であるならば，距離空間における点列の収束の一般論[*5] により (1) の主張が従う．$(Ax_n)_{n=1}^{\infty}$ から任意に部分列 $(Ax_{n(1,k)})_{k=1}^{\infty}$ を取る．定理 A.1.6 より $(x_{n(1,k)})_{k=1}^{\infty}$ は有界列であるから，定理 6.1.3 より部分列 $(Ax_{n(2,k)})_{k=1}^{\infty}$ が或る $y \in \overline{(Ax_{n(1,k)})_{k=1}^{\infty}}$ に強収束する．定理 4.1.8 より A^* が存在して $Y^* = \mathcal{D}(Y^*)$ を満たすから，任意に $g \in Y^*$ を取れば

$$\left\langle x_{n(2,k)}, A^* g \right\rangle_{X,X^*} = \left\langle Ax_{n(2,k)}, g \right\rangle_{Y,Y^*}$$

が成り立つ．左辺は $\text{w-}\lim_{n\to\infty} x_n = x$ の仮定より

$$\left\langle x_{n(2,k)}, A^* g \right\rangle_{X,X^*} \longrightarrow \langle x, A^* g \rangle_{X,X^*} = \langle Ax, g \rangle_{Y,Y^*} \quad (k \longrightarrow \infty)$$

を満たし，一方で右辺は $\lim_{k\to\infty} Ax_{n(2,k)} = y$ より

$$\left\langle Ax_{n(2,k)}, g \right\rangle_{Y,Y^*} \longrightarrow \langle y, g \rangle_{Y,Y^*} \quad (k \longrightarrow \infty)$$

を満たすから

$$\langle Ax, g \rangle_{Y,Y^*} = \langle y, g \rangle_{Y,Y^*} \quad (\forall g \in Y^*)$$

が成り立ち $Ax = y$ が従う．

(2)　X が反射的 Banach 空間ならば X の任意の有界点列は弱収束する部分列を含む．(2) の仮定よりその部分列を A で写せば Y で強収束するから，定理 6.1.3 より A のコンパクト性が従う．■

[*5] (S, d) を距離空間とし，S の点 s と点列 $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ を取る．このとき $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ 任意の部分列が s に収束する部分列を含むなら，$(s_n)_{n=1}^{\infty}$ は s に収束する．実際もし $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ が s に収束しないとすれば，或る $\epsilon > 0$ に対し部分列 $\left(s_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ が存在して

$$d\left(s_{n_k}, s\right) \geq \epsilon \quad (\forall k = 1, 2, \cdots)$$

を満たすから，$\left(s_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ のいかなる部分列も s には収束し得ない．

例 6.1.12 (Hilbert-Schmidt 型積分作用素). $(X,\mathcal{M},\mu),(Y,\mathcal{N},\nu)$ を σ-有限な測度空間，$1\leq p,q\leq\infty$ とする．ただし $p+q=pq$ を満たし，また $p=1$ のとき $q=\infty$，$p=\infty$ のとき $q=1$ とする．そして $\mathrm{L}^p(\mu):=\mathrm{L}^p(X,\mathcal{M},\mu)$, $\mathrm{L}^p(\nu):=\mathrm{L}^p(Y,\mathcal{N},\nu)$, $\mathrm{L}^q(\mu\times\nu):=\mathrm{L}^q(X\times Y,\mathcal{M}\times\mathcal{N},\mu\times\nu)$ とおく．このとき $K\in\mathrm{L}^q(\mu\times\nu)$ に対し

$$T:\mathrm{L}^p(\nu)\ni f\longmapsto\int_Y K(x,y)f(y)\,\nu(dy)\in\mathrm{L}^p(\mu)$$

により定める T はコンパクト作用素である．特に $p=q=2$ の場合，T を Hilbert-Schmidt 型の積分作用素という．

証明． $\mathrm{L}^p(\mu)$ のノルムを $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^p(\mu)}$ とし，他の空間のノルムも同様に書く．ただし T の作用素ノルムは $\|T\|$ と書く．

第一段　T が $\mathrm{L}^p(\nu)$ から $\mathrm{L}^p(\mu)$ への有界線型作用素であることを示す．Hölder の不等式より任意の $f\in\mathrm{L}^p(\nu)$ に対し

$$\left|\int_Y K(x,y)f(y)\,\nu(dy)\right|\leq\left(\int_Y|K(x,y)|^q\,\nu(dy)\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_Y|f(y)|^p\,\nu(dy)\right)^{\frac{1}{p}}$$

が成り立つから，

$$\|Tf\|_{\mathrm{L}^p(\mu)}^p=\int_X\left|\int_Y K(x,y)f(y)\,\nu(dy)\right|^p\,\mu(dx)\leq\|K\|_{\mathrm{L}^q(\mu\times\nu)}^p\|f\|_{\mathrm{L}^p(\nu)}^p$$

が従い $Tf\in\mathrm{L}^p(\mu)$ 且つ T の有界性が得られる．次に T の線型性を示す．

$$\int_X\int_Y|K(x,y)|^q\,\nu(dy)\,\mu(dx)<\infty$$

であるから，

$$A:=\left\{\,x\in X\ ;\quad\int_Y|K(x,y)|^q\,\nu(dy)=\infty\,\right\}$$

は μ-零集合である[*6]．$x\in X\backslash A$ の場合，$f,g\in\mathrm{L}^p(\nu)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ に対し

$$\begin{aligned}|T(\alpha f+\beta g)(x)|&\leq\int_Y|K(x,y)||\alpha f(y)+\beta g(y)|\,\nu(dy)\\&\leq\left(\int_Y|K(x,y)|^q\,\nu(dy)\right)^{\frac{1}{q}}\left(|\alpha|\,\|f\|_{\mathrm{L}^p(\nu)}+|\beta|\,\|g\|_{\mathrm{L}^p(\nu)}\right)<\infty\end{aligned}$$

が成り立つから

$$T(\alpha f+\beta g)(x)=(\alpha Tf+\beta Tg)(x)\quad(\forall x\in X\backslash A)$$

が従い，$\mu(A)=0$ により $T(\alpha f+\beta g)=\alpha Tf+\beta Tg$ が得られる．

第二段　K を単関数で近似できることを示す．仮定より単調増大列 $X_1\subset X_2\subset\cdots\in\mathcal{M}$, $Y_1\subset Y_2\subset\cdots\in\mathcal{N}$ が存在して $\mu(X_n)<\infty$, $\nu(Y_n)<\infty$ $(n=1,2,\cdots)$ 且つ $\cup_{n=1}^{\infty}X_n=X$, $\cup_{n=1}^{\infty}Y_n=Y$ が成り立つ．よって $(X_n\times Y_n)_{n=1}^{\infty}$ は $\mu\times\nu(X_n\times Y_n)=\mu(X_n)\nu(Y_n)<\infty$ $(n=1,2,\cdots)$ と $\cup_{n=1}^{\infty}X_n\times Y_n=X\times Y$ を満たすから，測度空間 $(X\times Y,\mathcal{M}\times\mathcal{N},\mu\times\nu)$ もまた σ-有限である．$K_n:=K1\!\!1_{X_n\times Y_n}$ $(n=1,2,\cdots)$ として関数列 $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ を定めれば，Lebesgue の収束定理より

$$\int_X\int_Y|K_n(x,y)-K(x,y)|^q\,\nu(dy)\,\mu(dx)=\int_{X\times Y}|K_n(x,y)-K(x,y)|^q\,\mu\times\nu(dxdy)\longrightarrow 0\quad(n\longrightarrow\infty)$$

[*6] Fubini の定理より $x\longmapsto\int_Y|K(x,y)|\,\nu(dy)$ は可測 $\mathcal{M}/\mathfrak{B}([-\infty,\infty])$ である．

が成り立つから，任意に $\epsilon > 0$ を取れば或る N が存在して

$$\| K_N - K \|_{\mathrm{L}^q(\mu\times\nu)} < \frac{\epsilon}{3}$$

を満たす．K_N は $(X_N \times Y_N)^c$ 上で 0 であるから，K_N の単関数近似列 $(K_N^n)_{n=1}^\infty$ は

$$K_N^n = \sum_{i=0}^{m_n} \alpha_{n,i} 1\!\!1_{E_{n,i}} \quad (\alpha_{n,i} \in \mathbb{C},\ E_{n,i} \in \mathcal{M}\times\mathcal{N},\ \alpha_{n,0} = 0,\ X_N \times Y_N \subset E_{n,0})$$

を満たすように構成できる．そして或る $N' \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\left\| K_N - K_N^{N'} \right\|_{\mathrm{L}^q(\mu\times\nu)} < \frac{\epsilon}{3}$$

を満たす．また $\mu \times \nu(E) < \infty$ を満たす任意の $E \in \mathcal{M}\times\mathcal{N}$ と任意の $\eta > 0$ に対し，或る $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{M}$ と $B_1, B_2, \cdots \in \mathcal{N}$ が存在して

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \times B_j, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\nu(B_j) < \mu \times \nu(E) + \frac{\eta}{2}$$

が成り立つようにでき，さらに或る $N'' \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\bigcup_{j=N''+1}^{\infty} \mu(A_j)\nu(B_j) < \frac{\eta}{2}$$

を満たすから，

$$E_\eta := \bigcup_{j=1}^{N''} A_j \times B_j$$

とおけば

$$\mu \times \nu(E \cap E_\eta^c) + \mu \times \nu(E^c \cap E_\eta) \leq \mu \times \nu\left(\bigcup_{j=N''+1}^{\infty} A_j \times B_j \right) + \mu \times \nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \times B_j \backslash E \right) < \eta$$

が成り立つ．従って $K_N^{N'}$ に対し $1\!\!1_{A\times B}$ $(A \in \mathcal{M}, B \in \mathcal{N})$ の形の線型結合で表される関数 $\tilde{K}$ が存在して

$$\left\| K_N^{N'} - \tilde{K} \right\|_{\mathrm{L}^q(\mu\times\nu)} < \frac{\epsilon}{3}$$

を満たす．よって

$$\left\| K - \tilde{K} \right\|_{\mathrm{L}^q(\mu\times\nu)} < \epsilon$$

が成り立つ．ϵ は任意であったから，任意の $\nu \in \mathbb{N}$ に対して或る $\tilde{K}_\nu$ が存在し，

$$\left\| K - \tilde{K}_\nu \right\|_{\mathrm{L}^q(\mu\times\nu)} < \frac{1}{\nu}$$

を満たし，$\tilde{K}_\nu$ は

$$\tilde{K}_\nu = \sum_{i=0}^{M_\nu} \beta_{\nu,i} 1\!\!1_{A_{\nu,i}\times B_{\nu,i}} \quad (\beta_{\nu,i} \in \mathbb{C},\ A_{\nu,i} \in \mathcal{M}, B_{\nu,i} \in \mathcal{N},\ \beta_{\nu,0} = 0,\ X_N \times Y_N \subset A_{\nu,0} \times B_{\nu,0})$$

の形で表現できる．T_ν を $\tilde{K}_\nu$ を積分核とする作用素とすれば，任意の $f \in \mathrm{L}^p(\nu)$ に対して

$$T_\nu f(x) = \int_Y \sum_{i=0}^{M_\nu} \beta_{\nu,i} 1\!\!1_{A_{\nu,i}\times B_{\nu,i}}(x,y) f(y)\, \nu(dy) = \sum_{i=0}^{M_\nu} \beta_{\nu,i} \int_{B_{\nu,i}} f(y)\, \nu(dy) 1\!\!1_{A_{\nu,i}}(x) \quad (x \in X)$$

となり，$T_\nu Y$ は有限次元空間である． ∎

6.2 Fredholm 性

補題 6.2.1 (商空間のコンパクト作用素).　X を複素ノルム空間，Y を X の閉部分空間とする．$A \in \mathrm{B}_c(X)$ が $AY \subset Y$ を満たすとき次が成り立つ:

(1)　$A_1 : Y \ni y \longmapsto Ay \in Y$ として A_1 を定めれば $A_1 \in \mathrm{B}_c(Y)$ が成り立つ．

(2)　$A_2 : X/Y \ni [x] \longmapsto [Ax] \in X/Y$ として A_2 を定めれば $A_2 \in \mathrm{B}_c(X/Y)$ が成り立つ．

証明.

(1)　任意に Y から有界点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ を取る．補助定理 6.1.3 より $(Ax_n)_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $(Ax_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ は或る $y \in X$ に収束し，Y が閉であるから $y \in Y$ を満たす．$A_1 x_{n_k} = Ax_{n_k}$ $(k = 1, 2, \cdots)$ より $A_1 x_{n_k} \longrightarrow y$ $(k \longrightarrow \infty)$ が従い，補助定理 6.1.3 より $A_1 \in \mathrm{B}_c(Y)$ が成り立つ．

(2)　**well-defined**　A_2 の定義は well-defined である．つまり同値類の表示の仕方に依らない．実際 $[x] = [x']$ なら

$$Ax - Ax' = A(x - x') \in Y$$

が成り立つから $A_2[x] = [Ax] = [Ax'] = A_2[x']$ が従う．また $[x], [y] \in X/Y$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ に対し

$$A_2(\alpha[x] + \beta[y]) = A_2[\alpha x + \beta y] = [A(\alpha x + \beta y)] = [\alpha Ax + \beta Ay] = \alpha[Ax] + \beta[Ay] = \alpha A_2[x] + \beta A_2[y]$$

が成り立つから A_2 は線型作用素である．

コンパクト性　B を X/Y の単位開球とする．B から任意に取った点列 $([x_n])_{n=1}^{\infty}$ に対して $(A_2[x_n])_{n=1}^{\infty}$ が X/Y で収束する部分列を含むなら，定理 6.1.3 の証明中の (※) の主張により $A_2 B$ は相対コンパクトとなり，定理 6.1.2 により A のコンパクト性が従う．各 $n \in \mathbb{N}$ について $\|[x_n]\|_{X/Y} < 1$ であるから $\|u_n\|_X \leq 2$ を満たす $u_n \in [x_n]$ が存在する．定理 6.1.3 より $(Au_n)_{n=1}^{\infty}$ の或る部分列 $(Au_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ は或る $y \in Y$ に収束するから

$$\left\| A_2 [x_{n_k}] - [y] \right\|_{X/Y} = \left\| [Ax_{n_k} - y] \right\|_{X/Y} \leq \left\| Ax_{n_k} - y \right\|_X \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty)$$

が成り立つ．■

定理 6.2.2 (複素 Banach 空間上のコンパクト作用素の値域の余次元，核の次元).
X を複素 Banach 空間，I を X 上の恒等写像とし，$0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ と $A \in \mathrm{B}_c(X)$ に対して $T := \lambda I - A$ とおく．このとき $\mathcal{R}(T)$ は X の閉部分空間であり，$\dim \mathcal{N}(T) < \infty$ かつ $\operatorname{codim} \mathcal{R}(T) < \infty$[*7]が成り立つ．

証明.

$\mathcal{R}(T)$ が閉となること

$$\hat{T} : X/\mathcal{N}(T) \ni [x] \longmapsto Tx \in \mathcal{R}(T)$$

*7　$\operatorname{codim} \mathcal{R}(T) = \dim X/\mathcal{R}(T)$ である．

と定めれば $\hat{T}$ は線型同型かつ連続となる:

全単射　$\hat{T}$ が単射であることは，$T[x] = T[x']$ ならば $x - x' \in \mathcal{N}(T)$ より $[x] = [x']$ が従い，また任意の $y \in \mathcal{R}(T)$ に対して，$y = Tx$ を満たす $x \in X$ の同値類 $[x] \in X/\mathcal{N}(T)$ が $\hat{T}[x] = y$ を満たすから $\hat{T}$ は全射である．

線型性　任意に $[x], [y] \in X/\mathcal{N}(T)$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ を取れば

$$\hat{T}(\alpha[x] + \beta[y]) = \hat{T}([\alpha x] + [\beta y]) = T(\alpha x + \beta y) = \alpha T x + \beta T y = \alpha\hat{T}[x] + \beta\hat{T}[y]$$

が成立する．

連続性　定理 6.1.5 より A は有界であるから

$$\|T\|_{\mathrm{B}(X)} = \|\lambda I - A\|_{\mathrm{B}(X)} \leq |\lambda| + \|A\|_{\mathrm{B}(X)} < \infty$$

が成り立ち，任意の $[x] \in X/\mathcal{N}(T)$ に対して

$$\left\|\hat{T}[x]\right\|_X = \|Tx\|_X \leq \|T\|_{\mathrm{B}(X)}\|x\|_X$$

が従うから $\hat{T}$ は連続である．

$\mathcal{R}(T) = \mathcal{R}\left(\hat{T}\right)$ であるから $\mathcal{R}\left(\hat{T}\right)$ が X の閉部分空間となることを示せばよい．まず或る $C > 0$ が存在して

$$C\left\|\hat{T}[x]\right\|_X \geq \|[x]\|_{X/\mathcal{N}(T)} \quad (\forall x \in X) \tag{6.2}$$

を満たすことを示す．

(6.2) の証明　このような C が存在しないなら

$$\left\|\hat{T}[x_n]\right\|_X < \frac{1}{n}\|[x_n]\|_{X/\mathcal{N}(T)} \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{6.3}$$

を満たす $X/\mathcal{N}(T)$ の点列 $([x_n])_{n=1}^{\infty}$ が存在する．

$$[y_n] := \frac{1}{\|[x_n]\|_{X/\mathcal{N}(T)}}[x_n] \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

とおけば $([y_n])_{n=1}^{\infty}$ も (6.3) を満たし，かつ $\hat{T}[y_n] = \hat{T}[u_n] = Tu_n$ であるから

$$\|Tu_n\|_X = \left\|\hat{T}[y_n]\right\|_X < \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \tag{6.4}$$

が成立する．$\|[y_n]\|_{X/\mathcal{N}(T)} = 1$ であるからノルムの定義 (1.4) より $\|u_n\|_X \leq 2$ となる $u_n \in [y_n]$ が存在し，定理 6.1.3 より $(Au_n)_{n=1}^{\infty}$ の或る部分列 $(Au_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ は或る $y \in X$ に収束するから

$$\left\|y - \lambda u_{n_k}\right\|_X = \left\|y - Au_{n_k} - Tu_{n_k}\right\|_X \leq \left\|y - Au_{n_k}\right\|_X + \left\|Tu_{n_k}\right\|_X \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty)$$

が成り立ち，更に T の有界性と (6.4) より

$$\|Ty\|_X \leq \left\|Ty - \lambda Tu_{n_k}\right\|_X + |\lambda|\left\|Tu_{n_k}\right\|_X \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty)$$

となり $y \in \mathcal{N}(T)$ が従う．一方で

$$\left|\|[y]\|_{X/\mathcal{N}(T)} - \left\|\lambda[y_{n_k}]\right\|_{X/\mathcal{N}(T)}\right| \leq \left\|[y] - \lambda[y_{n_k}]\right\|_{X/\mathcal{N}(T)} \leq \left\|y - \lambda u_{n_k}\right\|_X \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty)$$

が成り立つから $\|[y]\|_{X/\mathcal{N}(T)} = |\lambda| > 0$ が従い $y \in \mathcal{N}(T)$ に矛盾する．

$\mathcal{R}\bigl(\hat{T}\bigr)$ の点列 $\bigl(\hat{T}[v_n]\bigr)_{n=1}^{\infty}$ が $\hat{T}[v_n] \to x \in X$ を満たすなら，(6.2) より

$$\| [v_n] - [v_m] \|_{X/\mathcal{N}(T)} \leq C \left\| \hat{T}[v_n] - \hat{T}[v_m] \right\|_X \longrightarrow 0 \quad (n, m \longrightarrow \infty)$$

が成り立ち，定理 1.2.4 より $([v_n])_{n=1}^{\infty}$ は或る $[v] \in X/\mathcal{N}(T)$ に収束する．よって $\hat{T}$ の連続性から

$$\left\| x - \hat{T}[v] \right\|_X \leq \left\| x - \hat{T}[v_n] \right\|_X + \left\| \hat{T} \right\|_{\mathrm{B}(\hat{T})} \| [v_n] - [v] \|_X \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成り立ち $x = \hat{T}[v] \in \mathcal{R}\bigl(\hat{T}\bigr)$ が従う．

$\dim \mathcal{N}(T) < \infty$ となること　$T = \lambda I - A$ より

$$\lambda x = Ax \quad (\forall x \in \mathcal{N}(T)) \tag{6.5}$$

が成り立つから

$$TAx = T\lambda x = \lambda T x = 0 \quad (\forall x \in \mathcal{N}(T))$$

となり $A\mathcal{N}(T) \subset \mathcal{N}(T)$ が従う．よって $\mathcal{N}(T)$ から任意に有界点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ を取れば $(Ax_n)_{n=1}^{\infty}$ は閉部分空間 $\mathcal{N}(T)$ に含まれ，定理 6.1.3 より或る部分列 $(Ax_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ は或る $x \in \mathcal{N}(T)$ に収束する．そして (6.5) より

$$\left\| \frac{1}{\lambda} x - x_{n_k} \right\|_X = \frac{1}{|\lambda|} \left\| x - \lambda x_{n_k} \right\|_X = \frac{1}{|\lambda|} \left\| x - A x_{n_k} \right\|_X \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty)$$

が成り立つから，定理 6.1.10 より $\dim X < \infty$ が従う．

$\operatorname{codim} \mathcal{R}(T) < \infty$ となること　$\mathcal{R}(T)$ は X の閉部分空間であるから商ノルム空間 $X/\mathcal{R}(T)$ を定義できる．

$$U : X/\mathcal{R}(T) \ni [x] \longmapsto [Ax] \in X/\mathcal{R}(T)$$

と定めれば定理 6.2.1 より U はコンパクト作用素である．

$$[0] = [Tx] = [\lambda x - Ax] = \lambda[x] - [Ax] = \lambda[x] - U[x] \quad (\forall x \in X)$$

が成り立つから，定理 6.1.10 より $\dim X/\mathcal{R}(T) < \infty$ が従う． ■

定理 6.2.3 (Fredholm の交代定理).

補題 6.2.4.　E を複素ノルム空間，E_1, E_2 を E の線型部分空間とし $E = E_1 + E_2$ が成り立っているとする[*8]．また $E, E_1 \times E_2$ におけるノルムをそれぞれ $\|\cdot\|_E, \|\cdot\|_{E_1 \times E_2}$ としてノルム位相を導入し

$$\Phi : E \ni x \longmapsto [x_1, x_2] \in E_1 \times E_2 \quad (x = x_1 + x_2)$$

を定める．このとき次が成り立つ:

(1)　Φ は全単射かつ閉線型である．
(2)　Φ^{-1} は連続である．
(3)　Φ が連続ならば E_1, E_2 は閉部分空間である．
(4)　E が Banach 空間で E_1, E_2 が閉部分空間ならば Φ は線型同型かつ同相である．
(5)　$\dim E_1 < \infty$ かつ E_2 が閉ならば Φ は線型同型かつ同相である．

[*8] つまり $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ であり，かつ E の任意の元 x は或る $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2$ によって $x = x_1 + x_2$ と一意に表される．一意性について，

証明.

(1) **全単射であること**　任意に $[x_1, x_2] \in E_1 \times E_2$ を取れば $x_1 + x_2 \in E$ を満たすから Φ は全射である．また $E_1 \times E_2$ の二元が $[x_1, x_2] = [y_1, y_2]$ を満たせば $x_1 = y_1$ かつ $x_2 = y_2$ となるから Φ は単射である．

閉線型であること　$x, y \in E, \alpha \in \mathbb{C}$ を任意に取り $\Phi x = [x_1, x_2], \Phi y = [y_1, y_2]$ とすれば，

$$\begin{aligned}\Phi(x+y) &= [x_1 + y_1, x_2 + y_2] = [x_1, x_2] + [y_1, y_2] = \Phi x + \Phi y, \\ \Phi(\alpha x) &= [\alpha x_1, \alpha x_2] = \alpha[x_1, x_2] = \alpha \Phi x\end{aligned}$$

より Φ の線型性が従う．また $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset E$ が $x_n \to u \in X$ かつ $\Phi x_n \to [u_1, u_2] \in E_1 \times E_2$ を満たす場合，

$$\| u - (u_1 + u_2) \|_E \leq \| u - x_n \|_E + \| \Phi x_n - [u_1, u_2] \|_{E_1 \times E_2} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成り立ち $\Phi u = [u_1, u_2]$ が従うから Φ は閉作用素である．

(2) (1) より逆写像 $\Phi^{-1} : E_1 \times E_2 \to E$ (線形全単射) が存在し，任意の $[0, 0] \neq [x_1, x_2] \in E_1 \times E_2$ に対して

$$\frac{\left\| \Phi^{-1}[x_1, x_2] \right\|_E}{\| [x_1, x_2] \|_{E_1 \times E_2}} = \frac{\| x_1 + x_2 \|_E}{\| x_1 \|_E + \| x_2 \|_E} \leq 1$$

を満たす．

(3) ノルム空間において一点集合 $\{0\}$ は閉であるから，直積位相において $E_1 \times \{0\}$ 及び $\{0\} \times E_2$ は閉集合である．従って Φ の連続性と $E_1 = \Phi^{-1}(E_1 \times \{0\})$ 及び $E_2 = \Phi^{-1}(\{0\} \times E_2)$ が成り立つことから E_1, E_2 は閉集合となる．

(4) $E, E_1 \times E_2$ は Banach 空間でありかつ $\mathcal{D}(\Phi) = E$ が満たされているから，閉グラフ定理より Φ は有界となる．(1)(2) と併せれば Φ, Φ^{-1} は共に連続且つ線型全単射であるから主張が従う．

(5) $E \to E$ の恒等写像を I と表す．また

$$p_1 : E \ni x \longmapsto [x] \in E/E_2, \quad p_2 : E/E_2 \ni [x] \longmapsto x_1 \in E_1 \quad (x = x_1 + x_2,\ x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2)$$

と定めれば p_1 は線型連続であり p_2 は線型同型かつ連続である:

p_1 **について**　任意に $x, y \in E$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ を取れば

$$p_1(\alpha x + \beta y) = [\alpha x + \beta y] = [\alpha x] + [\beta y] = \alpha[x] + \beta[y] = \alpha p_1 x + \beta p_1 y$$

が成り立ち p_1 の線型性が従う．また $x \in E,\ x \neq 0$ に対して

$$\frac{\| p_1 x \|_{E/E_2}}{\| x \|_E} = \frac{\| [x] \|_{E/E_2}}{\| x \|_E} \leq \frac{\| x \|_E}{\| x \|_E} = 1$$

となるから p_1 は連続である．

p_2 **について**　E から E_1 への線型準同型を

$$p : E \ni x \longmapsto x_1 \in E_1 \quad (x = x_1 + x_2,\ x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2)$$

$x = y_1 + y_2$ $(y_1 \in E_1, y_2 \in E_2)$ が同時に成り立っているとすれば

$$E_1 \ni x_1 - y_1 = y_2 - x_2 \in E_2$$

となるから $x_1 - y_1 = y_2 - x_2 = 0$ が従う．

で定める．$\mathcal{R}(p) = E_1$ かつ $\mathcal{N}(p) = E_2$ であるから，準同型定理より p_2 は線型同型となる．また $\dim E_1 < \infty$ であるから $\dim E/E_2 = \dim E_1 < \infty$ となり[*9] p_2 の連続性が従う．

Φ は p_1, p_2 を用いて

$$\Phi x = [p_2 p_1 x, (I - p_2 p_1)x] \quad (\forall x \in E)$$

と表現できるから

$$\| \Phi x \|_{E_1 \times E_2} = \| p_2 p_1 x \|_E + \| (I - p_2 p_1) x \|_E$$

により Φ の連続性が従い，(1)(2) と併せて主張を得る． ■

補題 6.2.5 (T が単射なら全射). X を複素 Banach 空間，I を X 上の恒等写像とし，$0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ と $A \in \mathrm{B}_c(X)$ に対して $T := \lambda I - A$ とおく．このとき T が単射ならば T は全射である．

証明． 背理法で示す．今 T が単射であり全射ではないとする．このとき

$$\mathcal{R}\left(T^k\right) \supsetneq \mathcal{R}\left(T^{k+1}\right) \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

が成り立つ[*10]．実際或る $k \in \mathbb{N}$ で $\mathcal{R}\left(T^k\right) = \mathcal{R}\left(T^{k+1}\right)$ が成り立つなら，任意の $y \in X$ に対し或る $x \in X$ が存在して

$$T^k y = T^{k+1} x = T^k T x$$

を満たすが，T^k が単射であるから $y = Tx$ が従い T が全射でないという仮定に反する．

$$X_k := \mathcal{R}\left(T^k\right) \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

と簡単に表せば，定理 6.2.2 より X_k は X の閉部分空間であり，定理 1.1.3 より

$$\| x_k \|_X = 1, \quad \inf_{x \in X_k} \| x_k - x \|_X > \frac{1}{2} \tag{6.6}$$

を満たす $x_k \in X_k \backslash X_{k+1}$ $(k = 1, 2, \cdots)$ が存在する．$n < m$ となる $n, m \in \mathbb{N}$ を取れば

$$T x_n + A x_m = T x_n + \lambda x_m - T x_m \in X_{n+1}$$

が成り立つから，(6.6) より

$$\| A x_n - A x_m \|_X = \| \lambda x_n - T x_n - A x_m \|_X > \frac{|\lambda|}{2}$$

が従い $(A x_k)_{k=1}^{\infty}$ は収束部分列を含み得ないが，これは定理 6.1.3 に矛盾する． ■

[*9] 一般の線形空間 X, Y に対し，$\dim X = k < \infty$ 且つ線型同型 $f : X \to Y$ が存在するなら $\dim Y = k$ が成り立つ．実際 X の基底を $x_1, \cdots, x_k$ とすれば $f(x_1), \cdots, f(x_k)$ は Y の基底となる．$\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ に対し

$$\alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_k f(x_k) = 0$$

が成り立っている場合，f が線型かつ単射であるから

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k = 0$$

となり $f(x_1), \cdots, f(x_k)$ の線型独立性が従う．また任意に $y \in Y$ を取れば或る $x \in X$ が対応し $f(x) = y$ を満たすから，

$$y = f(x) = f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k) = \alpha f(x_1) + \cdots + \alpha f(x_k)$$

が成り立ち $Y = \mathrm{L.h.}\left[\{ f(x_1), \cdots, f(x_k) \}\right]$ が従う．

[*10] 写像の性質より $\mathcal{R}\left(T^k\right) \supset \mathcal{R}\left(T^{k+1}\right)$ は既に成り立っている．実際任意の $x \in X$ に対し $T^{k+1} x = T^k T x \in T^k X$ が成り立つ．

6.3 コンパクト自己共役作用素のスペクトル分解

H を複素 Hilbert 空間とし内積を $\langle\cdot,\cdot\rangle$，ノルムを $\|\cdot\|$ と表す．

定義 6.3.1 (自己共役作用素). H 上の線型作用素 A が $\overline{\mathcal{D}(A)} = H$ かつ $A = A^*$ を満たすとき，A を自己共役作用素 (self adjoint operator) という．自己共役作用素は閉作用素である．

定理 6.3.2 (自己共役作用素の二次形式は実数). H 上の線型作用素 A が自己共役なら，任意の $u \in \mathcal{D}(A)$ に対し $\langle Au, u\rangle$ は実数値である．

証明. $A = A^*$ であるから $u \in \mathcal{D}(A) \Leftrightarrow u \in \mathcal{D}(A^*)$ となり

$$\langle Au, u\rangle = \langle u, A^*u\rangle = \langle u, Au\rangle = \overline{\langle Au, u\rangle} \quad (\forall u \in \mathcal{D}(A)) \tag{6.7}$$

が成り立つ． ∎

命題 6.3.3 (自己共役作用素のスペクトルは実数). A を H 上の自己共役作用素，I を H 上の恒等写像とする．

(1) $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ であり，かつ任意の $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ に対し次が満たされる:

$$\left\| (\lambda I - A)^{-1} \right\|_{\mathrm{B}(H)} \leq \frac{1}{|\mathrm{Im}\,[\lambda]|}.$$

(2) $u, v \in H$ を A の異なる固有値 λ, μ に対する固有ベクトルとすれば $\langle u, v\rangle = 0$ が成り立つ．

証明.

(1) 任意に $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ を取る．定理 6.3.2 より

$$\mathrm{Im}\,[\langle(\lambda I - A)u, u\rangle] = \mathrm{Im}\left[\lambda \|u\|^2 - \langle Au, u\rangle\right] = \mathrm{Im}\,[\lambda]\,\|u\|^2 \quad (\forall u \in \mathcal{D}(A))$$

が成り立つから，Schwartz の不等式より

$$|\mathrm{Im}\,[\lambda]|\,\|u\| \leq \|(\lambda I - A)u\| \tag{6.8}$$

が従う．ゆえに $(\lambda I - A)$ は単射であり $(\lambda I - A)^{-1}$ が定義され，(6.8) より

$$|\mathrm{Im}\,[\lambda]|\left\|(\lambda I - A)^{-1}v\right\| \leq \|v\| \quad \left(\forall v \in \mathcal{D}\left((\lambda I - A)^{-1}\right)\right)$$

が成り立つから

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\|_{\mathrm{B}(H)} = \sup_{\substack{v \in \mathcal{D}\left((\lambda I - A)^{-1}\right) \\ v \neq 0}} \frac{\left\|(\lambda I - A)^{-1}v\right\|}{\|v\|} \leq \frac{1}{|\mathrm{Im}\,[\lambda]|} \tag{6.9}$$

を得る．後は $\mathcal{D}\left((\lambda I - A)^{-1}\right) = \mathcal{R}(\lambda I - A) = H$ を示せば主張が得られる．A は閉作用素であるから補題 5.1.3 より $(\lambda I - A)^{-1}$ も閉作用素であり，従って定理 2.2.1 より $\mathcal{D}\left((\lambda I - A)^{-1}\right)$ は H の閉部分空間である．

$$\mathcal{R}(\lambda I - A) = \overline{\mathcal{R}(\lambda I - A)} = \mathcal{N}\left((\lambda I - A)^*\right)^{\perp} = \mathcal{N}\left(\overline{\lambda} I - A^*\right)^{\perp} = \mathcal{N}\left(\overline{\lambda} I - A\right)^{\perp}$$

が成り立つ．$\overline{\lambda} \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ より (6.8) が λ を $\overline{\lambda}$ に替えて成り立つから，$\overline{\lambda} I - A$ は単射であり

$$\mathcal{R}(\lambda I - A) = \mathcal{N}\left(\overline{\lambda} I - A\right)^{\perp} = \{0\}^{\perp} = H$$

を得る．(6.9) と併せれば $\lambda \in \rho(A)$ が成り立ち主張を得る．

(2)　今 $Au = \lambda u,\ Av = \mu v$ が満たされているから，(6.7) と同様にして

$$\lambda \langle u, v \rangle = \langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle = \overline{\mu} \langle u, v \rangle$$

が成り立つ．(1) より $\mu \in \mathbb{R}$ であるから $(\lambda - \mu)\langle u, v \rangle = 0$ が得られ，$\lambda \neq \mu$ の仮定より $\langle u, v \rangle = 0$ が従う． ∎

定義 6.3.4 (直交射影).　H を複素 Hilbert 空間とする．線型写像 $p : H \to H$ が直交射影であるとは，或る H の閉部分空間 H_0 が存在し，$x \in H$ とその直交分解 $x = x_1 + x_2\ (x_1 \in H_0, x_2 \in H_0^{\perp})$ に対し次を満たすことをいう[11]:

$$p : H \ni x \longmapsto x_1 \in H_0.$$

また H 上の直交射影全体を $\mathrm{Proj}(H)$ と書く．

命題 6.3.5 (直交射影の存在).　H を複素 Hilbert 空間とする．H の任意の閉部分空間 L に対し或る $p \in \mathrm{Proj}(H)$ が存在して $p : H \to L$ を満たす．特に $\mathcal{R}(p) = L$ が成り立つ．

証明.　Hilbert 空間の射影定理により，任意の $x \in H$ は $x = x_1 + x_2\ (x_1 \in L, x_2 \in L^{\perp})$ の形に一意に分解されるから

$$p : H \ni x \longmapsto x_1 \in L$$

として線型写像を定めれば $p \in \mathrm{Proj}(H)$ が従う．特に任意の $u \in L$ に対しては $pu = u$ が満たされる． ∎

命題 6.3.6 (直交射影は冪等・自己共役).　H を複素 Hilbert 空間とする．任意の $p : H \to H$ に対し次は同値である:

(1)　$p \in \mathrm{Proj}(H)$.
(2)　p は $p \in \mathrm{B}(H),\ p^2 = p,\ p^* = p$ を満たす．

証明.

(1)　$p \in \mathrm{Proj}(H)$ ならば或る H の閉部分空間 L が存在して

$$p : H \ni x \longmapsto x_1 \quad (x = x_1 + x_2,\ x_1 \in L,\ x_2 \in L^{\perp})$$

[11] 射影定理より $x \in H$ の直交分解は一意に定まるから，p は写像として well-defined である．

を満たすから $\|p\|_{\mathrm{B}(H)} \leq 1$ が従う．また $pu = u\ (\forall u \in L)$ より $p^2 = p$ が成り立ち，更に任意に $x, y \in H$ を取れば

$$x = x_1 + x_2, \quad y = y_1 + y_2 \quad (x_1, y_1 \in L,\ x_2, y_2 \in L^{\perp})$$

と分解されるから，直交性より

$$\langle px, y\rangle = \langle x_1, y_1 + y_2\rangle = \langle x_1, y_1\rangle = \langle x_1 + x_2, y_1\rangle = \langle x, py\rangle$$

が成り立ち $y \in \mathcal{D}(p^*)$ 及び $p^* = p$ を得る．

(2)　仮定を満たす p について，$\mathcal{R}(p) \perp \mathcal{R}(I-p)$ が成り立つことを示す．任意に $x \in \mathcal{R}(p), y \in \mathcal{R}(I-p)$ を取れば，$x = px'$, $y = (I-p)y'$ を満たす $x', y' \in H$ が存在する．$p^* = p$ より $\mathcal{D}(p^*) = \mathcal{D}(p)$ であるから，

$$\langle x, y\rangle = \langle px', (I-p)y'\rangle = \langle x', p^*(I-p)y'\rangle = \langle x', p(I-p)y'\rangle = \left\langle x', (p-p^2)y'\right\rangle = 0$$

が成り立ち $\mathcal{R}(p) \perp \mathcal{R}(I-p)$ が従う．

$$\mathcal{R}(p) = \mathcal{R}(I-p)^{\perp} = \left(\mathcal{R}(p)^{\perp}\right)^{\perp}$$

となるから $\mathcal{R}(p)$ は H の閉部分空間であり $p \in \mathrm{Proj}(H)$ が得られる．■

補題 6.3.7 (一様有界な作用素の極限は有界). X をノルム空間，Y を Banach 空間とし，ノルムをそれぞれ $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y$ で表す．$A_n \in \mathrm{B}(X,Y)\ (n = 1, 2, \cdots)$ が

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\|_{\mathrm{B}(X,Y)} < \infty$$

を満たし，かつ或る X で稠密な部分集合 S が存在して全ての $x \in S$ に対し $(A_n x)_{n=1}^{\infty}$ が Y で収束するとき，

$$\lim_{n\to\infty} A_n x = Ax \quad (\forall x \in X)$$

を満たす $A \in \mathrm{B}(X,Y)$ が一意に存在する．

証明． 先ず任意の $x \in X$ に対し $(A_n x)_{n=1}^{\infty}$ が Y で収束することを示す．任意に $\epsilon > 0$ を取る．

$$a \coloneqq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\|_{\mathrm{B}(X,Y)}$$

とおき $\|x - z\|_X < \epsilon/a$ を満たす $z \in S$ を一つ選べば，仮定より或る $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\|A_n z - A_m z\|_Y < \epsilon \quad (\forall n > m \geq N)$$

が成り立つから，

$$\|A_n x - A_m x\|_Y \leq a\|x - z\|_X + \|A_n z - A_m z\|_Y + a\|x - z\|_X < 3\epsilon$$

が従う．よって $(A_n x)_{n=1}^{\infty}$ は Y の Cauchy 列であり，Y の完備性より収束する．

$$Ax \coloneqq \lim_{n\to\infty} A_n x \quad (\forall x \in X)$$

として A を定めれば，任意の $x, y \in X$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対し

$$\begin{aligned}
&\|A(\alpha x + \beta y) - \alpha Ax - \beta Ay\|_Y \\
&\quad \leq \|A(\alpha x + \beta y) - A_n(\alpha x + \beta y)\|_Y + |\alpha|\,\|Ax - A_n x\|_Y + |\beta|\,\|Ax - A_n x\|_Y \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)
\end{aligned}$$

が満たされるから A は線形作用素であり，かつ任意の $x \in X$ に対して

$$\|Ax\|_Y \leq \|Ax - A_n x\|_Y + \|A_n x\|_Y \leq \|Ax - A_n x\|_Y + \|A_n\|_{\mathrm{B}(X,Y)} \|x\|_X$$

が成り立ち，右辺で下極限を取れば

$$\|Ax\|_Y \leq \liminf_{n\to\infty} \|A_n\|_{\mathrm{B}(X,Y)} \|x\|_X$$

が従う．

$$\|A\|_{\mathrm{B}(X,Y)} \leq \liminf_{n\to\infty} \|A_n\|_{\mathrm{B}(X,Y)} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{\nu\geq n} \|A_\nu\|_{\mathrm{B}(X,Y)} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\|_{\mathrm{B}(X,Y)}$$

より $A \in \mathrm{B}(X,Y)$ を得る． ∎

命題 6.3.8 (直交射影の積・和の性質).　H を複素 Hilbert 空間とする．

(1)　$P, Q \in \mathrm{Proj}(H)$ に対し次が成り立つ:

$$\mathcal{R}(P) \perp \mathcal{R}(Q) \quad \Leftrightarrow \quad PQ = 0 \quad \Leftrightarrow \quad QP = 0.$$

(2)　$P_1, \cdots, P_n \in \mathrm{Proj}(H)$ に対し $P := \sum_{i=1}^n P_i$ とおけば次が成り立つ:

$$P \in \mathrm{Proj}(H) \quad \Leftrightarrow \quad P_i P_j = \delta_{ij} P_j \quad (i, j = 1, \cdots, n).$$

ただし δ_{ij} は Kronecker のデルタである．

(3)　$P_1, P_2, \cdots \in \mathrm{Proj}(H)$ が $P_i P_j = \delta_{ij} P_j$ $(\forall i, j \in \mathbb{N})$ を満たしているとする．

$$H_0 := \overline{\mathrm{L.h.}\left[\cup_{i=1}^{\infty} \mathcal{R}(P_i)\right]}$$

に対して，$P \in \mathrm{Proj}(H)$ が $\mathcal{R}(P) = H_0$ を満たすとき次が成り立つ:

$$Px = \sum_{i=1}^{\infty} P_i x \quad (\forall x \in H).$$

証明.

(1)　$\mathcal{R}(P) \perp \mathcal{R}(Q)$ なら，命題 7.5 より任意の $x, y \in H$ に対し

$$0 = \langle Px, Qy \rangle = \langle x, P^* Qy \rangle = \langle x, PQy \rangle$$

が成り立つ．特に $x = PQy$ とすれば

$$\|PQy\| = 0 \quad (\forall y \in H)$$

が従い $PQ = 0$ を得る．逆に $PQ = 0$ ならば

$$\langle Px, Qy \rangle = 0 \quad (\forall x, y \in H)$$

が成り立つから $\mathcal{R}(P) \perp \mathcal{R}(Q)$ が得られる．同様にして $\mathcal{R}(P) \perp \mathcal{R}(Q) \Leftrightarrow QP = 0$ も成り立つ．

(2)　$\Longleftarrow$　命題 7.5 を使う．B(H) は線形空間であるから先ず $P \in$ B(H) が成り立つ．また $P_iP_j = \delta_{ij}P_j$ より

$$P^2 = \sum_{i=1}^{n} P_i^2 = \sum_{i=1}^{n} P_i = P$$

が従い，更に任意の $x, y \in H$ に対して

$$\langle Px, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle P_i x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, P_i y\rangle = \langle x, Py\rangle$$

が成り立つから $P^* = P$ が得られる．

$\Longrightarrow$　$(P_i)_{i=1}^{n} \in \mathrm{Proj}(H)$ であるから，$i = j$ なら命題 7.5 より $P_iP_j = P_i$ が成り立つ．また任意の $x \in H$ に対し

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n} \left\| P_iP_jx \right\|^2 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left\langle P_iP_jx, P_iP_jx \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left\langle P_iP_jx, P_jx \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left\langle \sum_{i=1}^{n} P_iP_jx, P_jx \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \left\langle PP_jx, P_jx \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \left\| PP_jx \right\|^2 \leq \sum_{j=1}^{n} \left\| P_jx \right\|^2\end{aligned}$$

が成り立ち，一方で

$$\sum_{i,j=1}^{n} \left\| P_iP_jx \right\|^2 = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} \left\| P_iP_jx \right\|^2 + \sum_{j=1}^{n} \left\| P_j^2x \right\|^2 = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} \left\| P_iP_jx \right\|^2 + \sum_{j=1}^{n} \left\| P_jx \right\|^2$$

も成り立つから，

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} \left\| P_iP_jx \right\|^2 = 0 \quad (\forall x \in H)$$

が従い $P_iP_j = 0\ (i \neq j)$ を得る．　■

(3)　$P_iP_j = \delta_{ij}P_j\ (\forall i, j \in \mathbb{N})$ が満たされているから，任意の $x \in H$ と $N \in \mathbb{N}$ に対し

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} P_nx \right\|^2 = \left\langle \sum_{n=1}^{N} P_nx, \sum_{n=1}^{N} P_nx \right\rangle = \sum_{n=1}^{N} \langle P_nx, P_nx\rangle + \sum_{\substack{n,m=1 \\ n\neq m}}^{N} \langle P_mP_nx, x\rangle = \sum_{n=1}^{N} \| P_nx \|^2$$

が成り立つ．また

$$x = \sum_{n=1}^{N} P_nx + \left(x - \sum_{n=1}^{N} P_nx \right)$$

とすれば，(2) より $\sum_{n=1}^{N} P_n \in \mathrm{Proj}(H)$ であるから

$$\left\langle \sum_{n=1}^{N} P_nx, x - \sum_{n=1}^{N} P_nx \right\rangle = 0$$

が満たされ，

$$\| x \|^2 = \left\| \sum_{n=1}^{N} P_nx \right\|^2 + \left\| x - \sum_{n=1}^{N} P_nx \right\|^2 \leq \sum_{n=1}^{N} \| P_nx \|^2$$

を得る．ゆえに

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| P_n x \|^2 \leq \| x \|^2 \quad (\forall x \in H)$$

かつ

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} P_n \right\|_{\mathrm{B}(H)} \leq 1 \quad (\forall N \in \mathbb{N})$$

が成り立つ．

$$\left\| \sum_{n=p}^{q} P_n x \right\|^2 = \sum_{n=p}^{q} \| P_n x \|^2$$

が成り立つから $\sum_{n=1}^{\infty} P_n x$ は H で収束する．補題 6.3.7 より

$$Qx := \sum_{n=1}^{\infty} P_n x \quad (\forall x \in H)$$

として Q を定めれば $Q \in \mathrm{B}(H)$ となる．$Q = P$ となることを示す．任意の $x \in \mathcal{R}(P_n)$ に対しては，$P_i P_j = \delta_{ij} P_j$ $(\forall i, j \in \mathbb{N})$ より

$$x = Px = Qx$$

が成り立つから P, Q は $\mathrm{L.h.}\left[\cup_{i=1}^{\infty} \mathcal{R}(P_i) \right]$ で一致し，連続性から H_0 上で一致する．また $x \in H_0^{\perp}$ に対しても，$P_n x = 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ より

$$0 = Px = Qx$$

が成り立つ．任意の $x \in X$ は $x = x_1 + x_2$ $(x_1 \in H_0,\ x_2 \in H_0^{\perp})$ と分解されるから H 上で $P = Q$ が成り立つ． ∎

第 7 章

自己共役作用素のスペクトル分解

7.1 複素測度

定義 7.1.1 (複素測度). $(X, \mathcal{M})$ を可測空間とする．$\lambda : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ が任意の互いに素な列 $(E_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ に対し

$$\lambda\Bigl(\sum_{i=1}^{\infty} E_i\Bigr) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i) \tag{7.1}$$

を満たすとき，λ を複素測度 (complex measure) という．

任意の全単射 $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ に対し

$$\sum_{i=1}^{\infty} E_i = \sum_{i=1}^{\infty} E_{\sigma(i)}$$

が成り立つから (7.1) より

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_{\sigma(i)})$$

が従い，Riemann の級数定理の系 B.0.2 より $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i)$ は絶対収束する．今，λ を支配する，つまり

$$|\lambda(E)| \le \mu(E) \quad (\forall E \in \mathcal{M}) \tag{7.2}$$

を満たす $(X, \mathcal{M})$ 上の或る測度 μ を，できるだけ小さいものとして取ろうと考える[*1]．このような μ は次を満たす:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(E_i)| \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) = \mu\Bigl(\sum_{i=1}^{\infty} E_i\Bigr).$$

ゆえに，任意の $E \in \mathcal{M}$ に対し，$E := \sum_{i=1}^{\infty} E_i$ を満たすあらゆる分割に対する上限を取れば

$$\sup \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(E_i)| \le \mu(E)$$

[*1] つまり (7.2) を満たす μ のうちから，同様に (7.2) を満たす任意の測度 μ' に対し

$$\mu(E) \le \mu'(E) \quad (\forall E \in \mathcal{M})$$

を満たすものが存在するかどうかを考える．

が成立する．この場合 (7.2) を満たす最小の測度は

$$|\lambda|(E) \coloneqq \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(E_i)| \quad (\forall E \in \mathcal{M}) \tag{7.3}$$

で定まる．実際，E 自体が E の分割であるから $|\lambda|$ は λ を支配し，また $|\lambda|$ は $(X, \mathcal{M})$ 上の測度である (定理 7.1.3).

定義 7.1.2 (総変動・総変動測度).　可測空間 $(X, \mathcal{M})$ 上の複素測度 λ に対し，(7.3) で定める $|\lambda|$ を λ の総変動測度 (total variation measure) といい，$|\lambda|(X)$ を λ の総変動 (total variation) という．

特に λ が正値有限測度である場合は $\lambda = |\lambda|$ が成り立つ．実際，複素測度の虚部が 0 であるものとして考えれば

$$0 \leq \lambda(E) \leq \lambda(X) < \infty \quad (\forall E \in \mathcal{M})$$

が成り立ち，また任意の $E \in \mathcal{M}$ とその分割 $(E_i)_{i=1}^{\infty}$ に対して

$$|\lambda|(E) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(E_i)| = \sup \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i) = \sup \lambda(E) = \lambda(E)$$

が満たされる．以降で $|\lambda|$ の性質

(1)　$|\lambda|$ は $(X, \mathcal{M})$ 上の測度である．

(2)　$|\lambda|(X) < \infty$ が成り立つ．

を証明する．特に (2) より

$$|\lambda(E)| \leq |\lambda|(E) \leq |\lambda|(X) < \infty \quad (\forall E \in \mathcal{M})$$

が従い複素測度の有界性が出る．

定理 7.1.3 ($|\lambda|$ は測度).　可測空間 $(X, \mathcal{M})$ 上の複素測度 λ に対して，(7.3) で定める $|\lambda|$ は測度である．

証明.　(7.3) より $|\lambda|$ の正値性は出ているから，以下では $|\lambda|$ の完全加法性を示す．互いに素な集合列 $E_i \in \mathcal{M}$ $(i = 1, 2, \cdots)$ を取り $E \coloneqq \sum_{i=1}^{\infty} E_i$ とおく．(7.3) により，任意の $\epsilon > 0$ に対して E_i の或る分割 $(A_{ij})_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ が存在して

$$|\lambda|(E_i) \geq \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda(A_{ij})| > |\lambda|(E_i) - \frac{\epsilon}{2^i}$$

を満たすから，$E = \sum_{i,j=1}^{\infty} A_{ij}$ と併せて

$$|\lambda|(E) \geq \sum_{i,j=1}^{\infty} |\lambda(A_{ij})| \geq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda(A_{ij})| > \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda|(E_i) - \epsilon$$

が成り立ち，$\epsilon > 0$ の任意性より

$$|\lambda|(E) \geq \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda|(E_j)$$

が従う．一方で E の任意の分割 $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ に対し

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda(A_j)| = \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_j \cap E_i) \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(A_j \cap E_i)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda|(E_i) \text{ *2}$$

が成り立つから，左辺の上限を取って

$$|\lambda|(E) \leq \sum_{i=1} |\lambda|(E_i)$$

を得る．■

定理 7.1.4 (総変動測度は有界). 可測空間 $(X, \mathcal{M})$ 上の複素測度 λ の総変動測度 $|\lambda|$ について次が成り立つ:

$$|\lambda|(X) < \infty.$$

先ずは次の補題を示す．

補題 7.1.5. $z_1, \cdots, z_N$ を複素数とする．添数集合の或る部分 $S \subset \{1, \cdots, N\}$ を抜き取れば次が成り立つ:

$$\left| \sum_{k \in S} z_k \right| \geq \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N} |z_k|.$$

証明 (補題). $z_k = |z_k| e^{i\alpha_k}$ $(-\pi \leq \alpha_k < \pi,\ k = 1, \cdots, N)$ となるように $\alpha_1, \cdots, \alpha_N$ を取る．ここで i は虚数単位である．また $-\pi \leq \theta \leq \pi$ に対し

$$S(\theta) := \{\, k \in \{1, \cdots, N\}\ ; \quad \cos(\alpha_k - \theta) > 0 \,\}$$

とおく．このとき

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k \in S(\theta)} z_k \right| &= |e^{-i\theta}| \left| \sum_{k \in S(\theta)} z_k \right| = \left| \sum_{k \in S(\theta)} |z_k| e^{i(\alpha_k - \theta)} \right| \\ &\geq \mathrm{Re} \left[\sum_{k \in S(\theta)} |z_k| e^{i(\alpha_k - \theta)} \right] = \sum_{k \in S(\theta)} |z_k| \cos(\alpha_k - \theta) = \sum_{k=1}^{N} |z_k| \cos^+(\alpha_k - \theta) \ ^{*3} \end{aligned}$$

が成り立ち，最右辺は θ に関して連続となるから $[-\pi, \pi]$ 上で最大値を達成する θ_0 が存在する．$S := S(\theta_0)$ とすれば

$$\left| \sum_{k \in S} z_k \right| \geq \sum_{k=1}^{N} |z_k| \cos^+(\alpha_k - \theta_0) \geq \sum_{k=1}^{N} |z_k| \cos^+(\alpha_k - \theta) \quad (\forall \theta \in [-\pi, \pi])$$

が成り立つから，左辺右辺を積分して

$$\left| \sum_{k \in S} z_k \right| \geq \sum_{k=1}^{N} |z_k| \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} \cos^+(\alpha_k - \theta)\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N} |z_k|$$

---

*2 正項級数は和の順序に依らないから

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(A_j \cap E_i)| = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda(A_j \cap E_i)|$$

が成り立つ．これと (7.3) を併せれば最後の不等号が従う．

*3 $\cos^+ x = 0 \vee \cos x$ $(x \in \mathbb{R})$ である．

が成り立つ[*4]. ∎

証明 (定理 7.1.4).

第一段　或る $E \in \mathcal{M}$ に対し $|\lambda|(E) = \infty$ が成り立っていると仮定する．$t \coloneqq 2\pi(1 + |\lambda(E)|)$ とおけば (複素測度であるから $|\lambda(E)| < \infty$) $|\lambda|(E) > t$ となるから，(7.3) より E の分割 $(E_i)_{i=1}^{\infty}$ を

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(E_i)| > t$$

となるように取ることができる．従って或る $N \in \mathbb{N}$ を取れば

$$\sum_{i=1}^{N} |\lambda(E_i)| > t$$

が成り立つ．$z_i \coloneqq \lambda(E_i)$ $(i = 1, \cdots, N)$ として補題 7.1.5 を使えば，或る $S \subset \{1, \cdots, N\}$ に対し

$$\left| \sum_{k \in S} \lambda(E_k) \right| \geq \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N} |\lambda(E_k)| > \frac{t}{2\pi} > 1$$

となる．$A \coloneqq \sum_{k \in S} E_k$ とおいて $B \coloneqq E - A$ とすれば

$$|\lambda(B)| = |\lambda(E) - \lambda(A)| \geq |\lambda(A)| - |\lambda(E)| > \frac{t}{2\pi} - |\lambda(E)| = 1$$

が成り立つから，つまり $|\lambda|(E) = \infty$ の場合，E の直和分割 A, B で

$$|\lambda(A)| > 1, \quad |\lambda(B)| > 1$$

を満たすものが取れると示された．そして $|\lambda|$ の加法性から

$$|\lambda|(E) = |\lambda|(A) + |\lambda|(B)$$

も成り立つから，この場合右辺の少なくとも一方は ∞ となる．

第二段　背理法により定理の主張することを証明する．今 $|\lambda|(X) = \infty$ と仮定すると，前段の結果より X の或る直和分割 A_1, B_1 で

$$|\lambda|(B_1) = \infty, \quad |\lambda(A_1)| > 1, \quad |\lambda(B_1)| > 1$$

を満たすものが取れる．B_1 についてもその直和分割 A_2, B_2 で

$$|\lambda|(B_2) = \infty, \quad |\lambda(A_2)| > 1, \quad |\lambda(B_2)| > 1$$

を満たすものが取れる．この操作を繰り返せば，どの二つも互いに素な集合列 $(A_j)_{j=1}^{\infty}$ で $|\lambda(A_j)| > 1$ $(j = 1, 2, \cdots)$ を満たすものを構成できる．$A \coloneqq \sum_{j=1}^{\infty}$ について，$|\lambda(A)| < \infty$ でなくてはならないから，Riemann の級数定理より

$$\lambda(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(A_j)$$

[*4] 三角関数の周期性を使えば任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$\int_{[-\pi,\pi]} \cos^{+}(\alpha - \theta)\, d\theta = \int_{[\alpha-\pi,\alpha+\pi]} \cos^{+} \theta\, d\theta = \int_{[-\pi,\pi]} \cos^{+} \theta\, d\theta = 1$$

が成り立つ．

の右辺は絶対収束する．従って $0 < \epsilon < 1$ に対し或る $N \in \mathbb{N}$ が存在して $n > N$ なら $|\lambda(A_n)| < \epsilon$ が成り立つはずであるが，これは $|\lambda(A_n)| > 1$ であることに矛盾する．背理法により $|\lambda|(X) < \infty$ であることが示された．

∎

定理 7.1.6 (複素測度の一致の定理).　μ, ν を可測空間 $(X, \mathcal{M})$ 上の複素測度，$\mathscr{A}$ を X の部分集合の族とする．$\mathscr{A}$ 乗法族で $\mathcal{M}$ を生成し，μ と ν が $\mathscr{A} \cup \{X\}$ の上で一致しているとき，μ と ν は $\mathcal{M}$ の上で一致している．

証明.

$$\mathcal{D} := \{\, A \in \mathcal{M} \;;\quad \mu(A) = \nu(A) \,\}$$

とおけば $\mathcal{D}$ は Dynkin 族であり $\mathscr{A}$ を含むから，Dynkin 族定理により $\mathcal{D} = \mathcal{M}$ が従う． ∎

定理 7.1.7 (複素測度の空間・ノルムの定義).　可測空間 $(X, \mathcal{M})$ 上の複素測度の全体を $\mathrm{Meas}_{\mathbb{C}} = \mathrm{Meas}_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{M})$ と表す．$\lambda, \mu \in \mathrm{Meas}_{\mathbb{C}}$, $c \in \mathbb{C}$, $E \in \mathcal{M}$ に対し

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu)(E) &:= \lambda(E) + \mu(E),\\ (c\lambda)(E) &:= c\lambda(E)\end{aligned} \tag{7.4}$$

を線型演算として $\mathrm{Meas}_{\mathbb{C}}$ は線形空間となり，特に定理 7.1.4 により $\lambda \in \mathrm{Meas}_{\mathbb{C}}$ に対して $|\lambda| \in \mathrm{Meas}_{\mathbb{C}}$ が成り立つ．また $\|\cdot\| : \mathrm{Meas}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}$ を

$$\|\lambda\| := |\lambda|(X) \quad (\lambda \in \mathrm{Meas}_{\mathbb{C}})$$

と定義すればこれは $\mathrm{Meas}_{\mathbb{C}}$ においてノルムとなり，$(\mathrm{Meas}_{\mathbb{C}}, \|\cdot\|)$ は Banach 空間となる．

証明.　総変動の正値性からノルムの正値性が従うから，以下では同次性と三角不等式が成り立つことを示す．

同次性　総変動測度の定義 (7.3) とスカラ倍の定義 (7.4) より，任意の $\lambda \in \mathrm{Meas}_{\mathbb{C}}$ と $c \in \mathbb{C}$ に対し

$$\|c\lambda\| = \sup \sum_i |(c\lambda)(E_i)| = \sup \sum_i |c\lambda(E_i)| = |c| \sup \sum_i |\lambda(E_i)| = |c|\,\|\lambda\|$$

が成り立つ．

三角不等式　任意の $\lambda, \mu \in \mathrm{Meas}_{\mathbb{C}}$ に対し

$$\|\lambda + \mu\| = |\lambda + \mu|(X) = \sup \sum_i |(\lambda + \mu)(E_i)| = \sup \sum_i |\lambda(E_i) + \mu(E_i)|$$

となるが，ここで

$$\sum_i |\lambda(E_i) + \mu(E_i)| \leq \sum_i |\lambda(E_i)| + \sum_i |\mu(E_i)| \leq \|\lambda\| + \|\mu\|$$

が成り立つから

$$\|\lambda + \mu\| = \sup \sum_i |\lambda(E_i) + \mu(E_i)| \leq \|\lambda\| + \|\mu\|$$

が従う．

∎

可測空間 $(X, \mathcal{M})$ において，実数にしか値を取らない複素測度を符号付き測度 (signed measure) という．

定義 7.1.8 (正変動と負変動・Jordan の分解).　$(X, \mathcal{M})$ を可測空間とする．$(X, \mathcal{M})$ 上の符号付き測度 μ を取り

$$\mu^+ \coloneqq \frac{1}{2}(|\mu| + \mu), \quad \mu^- \coloneqq \frac{1}{2}(|\mu| - \mu)$$

として μ^+, μ^- を定めれば，どちらも正値有限測度となる[*5]．この μ^+ を μ の正変動 (positive variation) といい μ^- を μ の負変動 (negative variation) という．また

$$\mu = \mu^+ - \mu^-, \quad |\mu| = \mu^+ + \mu^-$$

が成り立ち，上の表現を符号付き測度 μ の Jordan 分解という．

定義 7.1.9 (絶対連続・特異).　$(X, \mathcal{M})$ を可測空間，μ を $\mathcal{M}$ 上の正値測度[*6]，$\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ を $\mathcal{M}$ 上の任意の測度とする．

- λ が μ に関して絶対連続である (absolutely continuous) とは $\mu(E) = 0$ となる全ての $E \in \mathcal{M}$ について $\lambda(E) = 0$ が成り立つことを指し，

$$\lambda \ll \mu$$

と表記する．
- 或る $A \in \mathcal{M}$ が存在して $\lambda(E) = \lambda(A \cap E)$ $(\forall E \in \mathcal{M})$ が成り立つとき，λ は A に集中している (concentrated on A) という．λ_1, λ_2 に対し或る $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$ が存在し，λ_1 が A_1 に，λ_2 が A_2 に集中しかつ $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ が満たされているとき，λ_1, λ_2 は互いに特異である (mutually singular) といい

$$\lambda_1 \perp \lambda_2$$

と表記する．

[*5] $\mathcal{M}$ 上で $|\mu|(E) \geq |\mu(E)|$ であることと定理 7.1.4 による．

[*6] 正値測度という場合は ∞ も取りうる．従って正値測度は複素測度の範疇にはない．μ として例えば k 次元 Lebesgue 測度を想定している．

命題 7.1.10 (絶対連続性と特異性に関する性質). $(X, \mathcal{M})$ を可測空間，μ を $\mathcal{M}$ 上の正値測度，$\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ を $\mathcal{M}$ 上の複素測度とする．このとき以下に羅列する事柄が成り立つ．

(1) λ が $A \in \mathcal{M}$ に集中しているなら $|\lambda|$ も A に集中している．

(2) $\lambda_1 \perp \lambda_2$ ならば $|\lambda_1| \perp |\lambda_2|$.

(3) $\lambda_1 \perp \mu$ かつ $\lambda_2 \perp \mu$ ならば $\lambda_1 + \lambda_2 \perp \mu$.

(4) $\lambda_1 \ll \mu$ かつ $\lambda_2 \ll \mu$ ならば $\lambda_1 + \lambda_2 \ll \mu$.

(5) $\lambda \ll \mu$ ならば $|\lambda| \ll \mu$.

(6) $\lambda_1 \ll \mu$ かつ $\lambda_2 \perp \mu$ ならば $\lambda_1 \perp \lambda_2$.

(7) $\lambda \ll \mu$ かつ $\lambda \perp \mu$ ならば $\lambda = 0$.

7.2　複素測度に関する積分

定理 7.2.1 (複素数値関数の可測性). $(X, \mathcal{M})$ を可測空間とする．$f : X \to \mathbb{C}$ について次が成り立つ:

(1) f が可測 $\mathcal{M}/\mathfrak{B}(\mathbb{C})$ であることと f の実部 u 虚部 v がそれぞれ可測 $\mathcal{M}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であることは同値である．

(2) $\mathcal{M}/\mathfrak{B}(\mathbb{C})$-可測関数列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ が f に各点収束するなら f もまた可測 $\mathcal{M}/\mathfrak{B}(\mathbb{C})$ となる．

証明.

(1) $z \in \mathbb{C}$ に対し $x, y \in \mathbb{C}$ の組が唯一つ対応し $z = x + iy$ と表される．この対応関係により定める写像

$$\varphi : \mathbb{C} \ni z \longmapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

は位相同型である．射影を $p_1 : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \longmapsto x,\ p_2 : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \longmapsto y$ とすれば

$$u = p_1 \circ \varphi \circ f, \quad v = p_2 \circ \varphi \circ f$$

と表せるから，f が可測 $\mathcal{M}/\mathfrak{B}(\mathbb{C})$ であると仮定すれば，p_1, p_2, φ の連続性により任意の $A \in \mathfrak{B}(R)$ に対して

$$u^{-1}(A) = f^{-1} \circ \varphi^{-1} \circ p_1^{-1}(A) \in \mathcal{M}, \quad v^{-1}(A) = f^{-1} \circ \varphi^{-1} \circ p_2^{-1}(A) \in \mathcal{M}$$

が成り立ち u, v の可測性が従う．逆に u, v が共に可測 $\mathcal{M}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であるとき，任意の $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$ に対し

$$f^{-1}(B) = \{\ x \in X\ ;\quad (u(x), v(x)) \in \varphi(B)\ \} \in \mathcal{M}$$

が成り立つから f の可測性が得られる．

(2) 補題 3.2.1 による． ∎

定義 7.2.2 (複素数値可測関数の正値測度に関する積分). $(X, \mathcal{M})$ を可測空間, μ を $\mathcal{M}$ 上の正値測度とし，$\mathcal{M}/\mathfrak{B}(\mathbb{C})$-可測関数 f が実数値関数 u, v を用いて $f = u + iv$ と表現されているとする．u, v が μ に関して X 上可積分であるとき[*7]，f は μ に関して X 上可積分であるといい，μ に関する f の積分を次で定める:

$$\int_E f(x)\,\mu(dx) \coloneqq \int_E u(x)\,\mu(dx) + i\int_E v(x)\,\mu(dx) \quad (\forall E \in \mathcal{M}).$$

定理 7.2.3 (正値測度に関する積分の性質). $(X, \mathcal{M})$ を可測空間とし，μ を $\mathcal{M}$ 上の正値測度とする．

(1) μ に関して可積分な $\mathcal{M}/\mathfrak{B}(\mathbb{C})$-可測関数 f と複素数 $\gamma = \alpha + i\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ に対して次が成り立つ:

$$\int_E \gamma f(x)\,\mu(dx) = \gamma\int_E f(x)\,\mu(dx) \quad (\forall E \in \mathcal{M}).$$

(2) μ に関して可積分な $\mathcal{M}/\mathfrak{B}(\mathbb{C})$-可測関数 f がに対して次が成り立つ:

$$\left|\int_E f(x)\,\mu(dx)\right| \leq \int_E |f(x)|\,\mu(dx) < \infty \quad (\forall E \in \mathcal{M}).$$

(3) $\mathcal{M}/\mathfrak{B}(\mathbb{C})$-可測関数 f, g が μ に関して可積分であり

$$\int_E f(x)\,\mu(dx) = \int_E g(x)\,\mu(dx) \quad (\forall E \in \mathcal{M})$$

を満たすとき，μ-a.e. に $f = g$ が成り立つ．

(4) f が $\mathcal{M}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$-可測かつ μ に関して可積分であり

$$0 \leq \int_E f(x)\,\mu(dx) \leq \mu(E) \quad (\forall E \in \mathcal{M})$$

が成り立つとき，μ-a.e.x に対して $0 \leq f(x) \leq 1$ が満たされる．

証明.

(1) f に対して或る実数値可積分関数 u, v が存在して $f = u + iv$ と表現できる．このとき

$$\gamma f = (\alpha u - \beta v) + i(\alpha v + \beta u)$$

が成り立つから，任意の $E \in \mathcal{M}$ に対して次を得る:

$$\begin{aligned}\int_E \gamma f\,d\mu &= \int_E (\alpha u - \beta v) + i(\alpha v + \beta u)\,d\mu \\ &= \int_E \alpha u - \beta v\,d\mu + i\int_E \alpha v + \beta u\,d\mu = (\alpha + i\beta)\left(\int_E u\,d\mu + i\int_E u\,d\mu\right) = \gamma\int_E f\,d\mu.\end{aligned}$$

(2) f に対して或る実数値可積分関数 u, v が存在して $f = u + iv$ と表現でき，u, v の可積分性から

$$\int_E |f(x)|\,\mu(dx) \leq \int_E |u(x)|\,\mu(dx) + \int_E |v(x)|\,\mu(dx) < \infty \quad (\forall E \in \mathcal{M})$$

*7 定理 7.2.1 により u, v は $\mathcal{M}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$-可測である．

が従う．次に初めの不等式を示す．任意に $E \in \mathcal{M}$ を取り $\alpha := \int_E f\, d\mu$ とおく．$\alpha \neq 0$ の場合，(1) の結果より

$$|\alpha| = \frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|}\int_E f(x)\,\mu(dx) = \int_E \frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|} f(x)\,\mu(dx)$$

が成り立ち，

$$\mathrm{Re}\left[\frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|}f(x)\right] \leq |f(x)| \quad (\forall x \in X)$$

が満たされるから

$$|\alpha| = \mathrm{Re}\left[\int_E \frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|}f(x)\,\mu(dx)\right] = \int_E \mathrm{Re}\left[\frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|}f(x)\right]\mu(dx) \leq \int_E |f(x)|\,\mu(dx)$$

が従う．$\alpha = 0$ の場合も不等式は成り立つ．

(3)　f, g に対し或る実数値可積分関数 u_1, u_2, v_1, v_2 が存在して

$$f = u_1 + iv_1, \quad g = u_2 + iv_2$$

と表現できる．自然数 n に対して

$$E_n := \left\{ x \in X \ ; \quad u_1(x) - u_2(x) \geq \frac{1}{n} \right\}$$

と定めれば $E_n \in \mathcal{M}$ が満たされるから，仮定より

$$\int_{E_n} u_1(x) - u_2(x)\,\mu(dx) = 0$$

が成り立つ．ここで $\mu(E_n) > 0$ と仮定すると

$$0 < \frac{1}{n}\mu(E_n) \leq \int_{E_n} u_1(x) - u_2(x)\,\mu(dx) = 0$$

が従い矛盾が生じるから，$\mu(E_n) = 0\ (\forall n \in \mathbb{N})$ が満たされ

$$\mu(u_1 > u_2) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n) = 0$$

が得られる．同様にして $\mu(u_1 < u_2) = 0$ 及び $\mu(v_1 \neq v_2) = 0$ となり，

$$\mu(f \neq g) \leq \mu(u_1 \neq u_2) + \mu(v_1 \neq v_2) = 0$$

により μ-a.e. に $f = g$ が成り立つ．

(4)　任意の自然数 n に対し

$$E_n^- := \left\{ x \in X \ ; \quad f(x) \leq -\frac{1}{n} \right\}, \quad E_n^+ := \left\{ x \in X \ ; \quad f(x) \geq 1 + \frac{1}{n} \right\}$$

とおく．ここで或る自然数 n に対して $\mu(E_n^-) > 0$ が満たされているとすると

$$0 \leq \int_{E_n^-} f(x)\,\mu(dx) \leq -\frac{1}{n}\mu(E_n^-) < 0$$

が成り立ち矛盾が生じるから，$\mu(E_n^-) = 0\ (\forall n \in \mathbb{N})$ が従う．同様の理由により $\mu(E_n^+) = 0\ (\forall n \in \mathbb{N})$ が得られ

$$\mu(f \notin [0,1]) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^-\right) + \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^+\right) = 0$$

が成り立つ． ■

定義 7.2.4 (複素測度に関する積分).　$(X,\mathcal{M})$ を可測空間とし，μ を $(X,\mathcal{M})$ 上の複素測度とする．μ の総変動測度 $|\mu|$ に関して可積分となる関数 $f: X \to \mathbb{C}$ について，f の μ に関する積分を次で定める:

f が可測単関数の場合　有限個の複素数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ と集合 $A_1,\cdots,A_k \in \mathcal{M}$ によって

$$f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \tag{7.5}$$

と表されるとき[*8]，f の μ に関する積分を

$$\int_X f(x)\,\mu(dx) \coloneqq \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(A_i) \tag{7.6}$$

で定める．

f が一般の可測関数の場合

$$\int_X f_n(x)\,|\mu|(dx) \longrightarrow \int_X f(x)\,|\mu|(dx) \tag{7.7}$$

を満たす f の可測単関数近似列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ を取り，f の μ に関する積分を

$$\int_X f(x)\,\mu(dx) \coloneqq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\,\mu(dx) \tag{7.8}$$

で定める．

定理 7.2.5 (積分の定義は well-defined).　定義 7.2.4 において，(7.6) は (7.5) の表示の仕方に依らずに定まり，(7.8) も (7.7) を満たす単関数近似列の選び方に依らずに定まる．更に任意の $f \in MF$ に対して次が成り立つ:

$$\left|\int_X f(x)\,\mu(dx)\right| \leq \int_X |f(x)|\,|\mu|(dx). \tag{7.9}$$

証明.

f が可測単関数の場合　f が (7.5) の表示とは別に

$$f = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mathbb{1}_{B_j} \quad \left(\beta_j \in \mathbb{C},\ B_j \in \mathcal{M},\ X = \textstyle\sum_{j=1}^{m} B_j\right)$$

と表現できるとしても

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{k} \beta_j \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(B_j)$$

*8　$A_1,\cdots,A_k$ は互いに素であり $X = \sum_{i=1}^{k} A_i$ を満たす．

が成り立つ．また (7.3) より

$$\left|\int_X f(x)\,\mu(dx)\right| = \left|\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(A_i)\right| \leq \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|\,|\mu|(A_i) = \int_X |f(x)|\,|\mu|(dx) \tag{7.10}$$

も成り立つ．

f が一般の可測関数の場合　(7.8) は有限確定している．実際 (7.7) を満たす単関数近似列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ に対して (7.10) より

$$\left|\int_X f_n(x)\,\mu(dx) - \int_X f_m(x)\,\mu(dx)\right| \leq \int_X |f_n(x) - f_m(x)|\ |\mu|(dx) \quad (\forall n, m \in \mathbb{N})$$

が成り立つから，$\left(\int_X f_n(x)\,\mu(dx)\right)_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{C}$ において Cauchy 列をなし極限が存在する．$(f_n)_{n=1}^{\infty}$ とは別に (7.7) を満たす f の単関数近似列 $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ が存在しても

$$\begin{aligned}\left|\int_X f_n(x)\,\mu(dx) - \int_X g_m(x)\,\mu(dx)\right| &\leq \int_X |f_n(x) - g_m(x)|\ |\mu|(dx) \\ &\leq \int_X |f_n(x) - f(x)|\ |\mu|(dx) + \int_X |f(x) - g_m(x)|\ |\mu|(dx) \longrightarrow 0 \quad (n, m \longrightarrow \infty)\end{aligned}$$

が成り立つから，

$$\alpha \coloneqq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\,\mu(dx), \quad \beta \coloneqq \lim_{n\to\infty} \int_X g_n(x)\,\mu(dx)$$

とおけば

$$\begin{aligned}|\alpha - \beta| &\leq \left|\alpha - \int_X f_n(x)\,\mu(dx)\right| + \left|\int_X f_n(x)\,\mu(dx) - \int_X g_m(x)\,\mu(dx)\right| + \left|\int_X g_m(x)\,\mu(dx) - \beta\right| \\ &\longrightarrow 0 \quad (n, m \longrightarrow \infty)\end{aligned}$$

が従い $\alpha = \beta$ を得る．また (7.10) より

$$\left|\int_X f_n(x)\,\mu(dx)\right| \leq \int_X |f_n(x)|\,|\mu|(dx) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

が満たされているから，両辺で $n \longrightarrow \infty$ として (7.9) を得る． ∎

定義 7.2.4 において，(7.8) は (7.6) の拡張となっている．実際 f が可測単関数の場合，(7.7) を満たす単関数近似列として f 自身を選べばよい．定理 7.2.5 より (7.8) による f の積分は一意に確定し (7.6) の左辺に一致する．

定理 7.2.6 (積分の線型性).　定義 7.2.4 で定めた積分について，任意の $f, g \in \mathscr{L}^1(X, \mathcal{M}, |\mu|)$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対し

$$\int_X \alpha f(x) + \beta g(x)\,\mu(dx) = \alpha \int_X f(x)\,\mu(dx) + \beta \int_X g(x)\,\mu(dx)$$

が成り立つ．

証明.

第一段　f, g が可測単関数の場合，(7.6) で定める積分が線型性を持つことを示す．$u_1, \cdots, u_k, v_1, \cdots, v_r \in \mathbb{C}$ と $A_1, \cdots, A_k, B_1, \cdots, B_r \in \mathcal{M}$ ($X = \sum_{i=1}^{k} A_i = \sum_{j=1}^{r} B_j$) によって

$$f = \sum_{i=1}^{k} u_i \mathbb{1}_{A_i}, \quad g = \sum_{j=1}^{r} v_j \mathbb{1}_{B_j}$$

と表示されているとき，

$$\alpha f + \beta g = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{r} (\alpha u_i + \beta v_j) 1\!\!1_{A_i \cap B_j}$$

と表現できるから

$$\begin{aligned}\int_X \alpha f(x) + \beta g(x)\, \mu(dx) &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{r} (\alpha u_i + \beta v_j) \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{k} u_i \mu(A_i) + \beta \sum_{j=1}^{r} v_j \mu(B_j) = \alpha \int_X f(x)\, \mu(dx) + \beta \int_X g(x)\, \mu(dx)\end{aligned}$$

が成り立つ．

第二段　f, g を一般の可測関数とし，f, g それぞれについて (7.7) を満たす単関数近似列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}, (g_n)_{n=1}^{\infty}$ を一つ選ぶ．

$$\begin{aligned}&\int_X |(\alpha f_n(x) + \beta g_n(x)) - (\alpha f(x) + \beta g(x))|\ |\mu|(dx) \\ &\quad \leq |\alpha| \int_X |f_n(x) - f(x)|\ |\mu|(dx) + |\beta| \int_X |g_n(x) - g(x)|\ |\mu|(dx) \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)\end{aligned}$$

が成り立つから $\alpha f + \beta g$ の μ に関する積分は

$$\int_X \alpha f(x) + \beta g(x)\, \mu(dx) := \lim_{n \to \infty} \int_X \alpha f_n(x) + \beta g_n(x)\, \mu(dx)$$

で定義され，前段の結果より

$$\begin{aligned}&\left| \int_X \alpha f(x) + \beta g(x)\, \mu(dx) - \alpha \int_X f(x)\, \mu(dx) - \beta \int_X g(x)\, \mu(dx) \right| \\ &\quad \leq \left| \int_X \alpha f(x) + \beta g(x)\, \mu(dx) - \int_X \alpha f_n(x) + \beta g_n(x)\, \mu(dx) \right| \\ &\qquad + \left| \alpha \int_X f_n(x)\, \mu(dx) + \beta \int_X g_n(x)\, \mu(dx) - \alpha \int_X f(x)\, \mu(dx) - \beta \int_X g(x)\, \mu(dx) \right| \\ &\longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)\end{aligned}$$

が従う． ∎

定理 7.2.7 (積分の測度に関する線型性).　$(X, \mathcal{M})$ を可測空間，μ, ν をこの上の複素測度とする．$f : X \to \mathbb{C}$ が $|\mu|$ と $|\nu|$ について可積分であるなら，$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対し $|\alpha\mu|, |\beta\nu|, |\alpha\mu + \beta\nu|$ についても可積分であり，更に次が成り立つ:

$$\int_X f(x)\, (\alpha\mu + \beta\nu)(dx) = \alpha \int_X f(x)\, \mu(dx) + \beta \int_X f(x)\, \nu(dx).$$

証明.　**第一段**　f が可測単関数の場合について証明する．$a_i \in \mathbb{C},\ A_i \in \mathcal{M}\ (i = 1, \cdots, n,\ \sum_{i=1}^{n} A_i = X)$ を用いて

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i 1\!\!1_{A_i}$$

と表されている場合，

$$
\begin{aligned}
\int_X f(x)\,(\alpha\mu+\beta\nu)(dx) &= \sum_{i=1}^{n} a_i(\alpha\mu+\beta\nu)(A_i) \\
&= \alpha\sum_{i=1}^{n} a_i\mu(A_i) + \beta\sum_{i=1}^{n} a_i\nu(A_i) = \alpha\int_X f(x)\,\mu(dx) + \beta\int_X f(x)\,\nu(dx)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

第二段　f が一般の可測関数の場合について証明する．任意の $A \in \mathcal{M}$ に対して

$$
|(\alpha\mu+\beta\nu)(A)| \leq |\alpha||\mu(A)| + |\beta||\nu(A)| \leq |\alpha||\mu|(A) + |\beta||\nu|(A)
$$

が成り立つから，左辺で A を任意に分割しても右辺との大小関係は変わらず

$$
|\alpha\mu+\beta\nu|(A) \leq |\alpha||\mu|(A) + |\beta||\nu|(A)
$$

となる．従って f が $|\mu|$ と $|\nu|$ について可積分であるなら

$$
\int_X |f(x)|\,|\alpha\mu+\beta\nu|(dx) \leq |\alpha|\int_X |f(x)|\,|\mu|(dx) + |\beta|\int_X |f(x)|\,|\nu|(dx) < \infty
$$

が成り立ち前半の主張を得る．f の単関数近似列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ を取れば，前段の結果と積分の定義より

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_X f(x)\,(\alpha\mu+\beta\nu)(dx) - \alpha\int_X f(x)\,\mu(dx) - \beta\int_X f(x)\,\nu(dx)\right| \\
&\quad\leq \left|\int_X f(x)\,(\alpha\mu+\beta\nu)(dx) - \int_X f_n(x)\,(\alpha\mu+\beta\nu)(dx)\right| \\
&\qquad + |\alpha|\left|\int_X f(x)\,\mu(dx) - \int_X f_n(x)\,\mu(dx)\right| + |\beta|\left|\int_X f(x)\,\nu(dx) - \int_X f_n(x)\,\nu(dx)\right| \\
&\quad\longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)
\end{aligned}
$$

が成り立ち後半の主張が従う．■

定理 7.2.8 (収束定理).　$(X, \mathcal{M})$ を可測空間，μ をこの上の複素測度とする．$\mathcal{M}/\mathfrak{B}(\mathbf{C})$-可測関数列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ が各点で収束し，かつ或る $g \in \mathscr{L}^1(X, \mathcal{M}, |\mu|)$ が存在して $|f_n| \leq |g|$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を満たすとき，次が成り立つ:

$$
\int_X \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mu(dx) = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)\,\mu(dx).
$$

証明.

$$
f(x) \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad (\forall x \in X)
$$

とおく．Lebesgue の収束定理より $f \in \mathscr{L}^1(X, \mathcal{M}, |\mu|)$ かつ

$$
\int_X f(x)\,|\mu|(dx) = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)\,|\mu|(dx)
$$

が成り立つから，定理 7.2.6 及び定理 7.2.5 より

$$\left|\int_X f(x)\,\mu(dx) - \int_X f_n(x)\,\mu(dx)\right| \le \int_X |f(x) - f_n(x)|\ |\mu|(dx) \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が従う. ∎

定理 7.2.9 (順序交換定理).

証明. $|\mu| \times |\nu| \le |\mu \times \nu|$ より $|\mu|, |\nu|, |\mu \times \nu|$ に Fubini の定理を適用.

$$\int_X \int_Y f_n(x, y)\,\nu(dy)\,\mu(dx) = \int_{X\times Y} f_n(x, y)\,(\mu \times \nu)(dx \times dy) = \int_Y \int_X f_n(x, y)\,\mu(dy)\,\nu(dx)$$

f が $|\mu \times \nu|$ に関して可積分なら

$$\int_{X\times Y} f(x, y)\,(\mu \times \nu)(dx \times dy)$$

が定義され，更に

$$\int_Y |f(x, y)|\,|\nu|(dy) < \infty$$

だから

$$\int_Y f(x, y)\,\nu(dy)$$

も定義される.

$$\left|\int_Y f(x, y)\,\nu(dy)\right| \le \int_Y |f(x, y)|\,|\nu|(dy)$$

が $|\mu|$ について可積分であるから

$$\int_X \int_Y f(x, y)\,\nu(dy)\,\mu(dx)$$

も定義される.

7.3 Riesz の表現定理

定義 7.3.1 (記号の定義). 位相空間 X に対し $C(X) \coloneqq \{\, f : X \to \mathbb{C}\ ;\quad 連続 \,\}$ とおく．先ず

$$C_c(X) \coloneqq \{\, f \in C(X)\ ;\quad \mathrm{supp}\, f \text{ がコンパクト．} \,\},$$
$$C_0(X) \coloneqq \{\, f \in C(X)\ ;\quad \text{任意の } \epsilon > 0 \text{ に対して } \{\, x \in X\ ;\quad |f(x)| \geq \epsilon \,\} \text{ がコンパクト．} \,\}$$

により二つの空間を定め，そして開集合 V，コンパクト集合 K，$f \in C_c(X)$ に対し

$$f \prec V \quad \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} \quad 0 \leq f \leq 1, \quad \mathrm{supp}\, f \subset V,$$
$$K \prec f \quad \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} \quad 0 \leq f \leq 1, \quad f(x) = 1\ (\forall x \in K)$$

により二項関係 $\prec$ を定める．

特に $X = \mathbb{R}^d$ の場合，$f \in C_0(X)$ は原点を中心にして遠方で 0 になる関数である．実際

$$C_0(\mathbb{R}^d) = \left\{\, f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}\ ;\quad \lim_{|x| \to \infty} |f(x)| = 0 \,\right\}$$

が成り立つ．

定理 7.3.2 (C_c は C_0 で稠密).

補題 7.3.3. X を局所コンパクトな Hausdorff 空間，K を X のコンパクト集合，V を X の開集合とすると，或る閉包がコンパクトな開集合 U が次を満たす:

$$K \subset U \subset \overline{U} \subset V.$$

証明.

補題 7.3.4 (コンパクト集合上の一の分割). X を局所コンパクトな Hausdorff 空間，K を X のコンパクト集合，$V_1, \cdots, V_n$ を X の開集合とし $K \subset V_1 \cup \cdots \cup V_n$ を満たすものとする．このとき或る $h_1, \cdots, h_n \in C_c(X)$ が存在して

$$h_i \prec V_i, \quad (i = 1, \cdots, n), \quad h_1(x) + \cdots + h_n(x) = 1, \quad (\forall x \in K)$$

を満たす．

証明.

定理 7.3.5 (Riesz の表現定理).　X を局所コンパクトな Hausdorff 空間とする．各 $\mu \in \mathrm{Meas}_{\mathbb{C}} = \mathrm{Meas}_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{M})$ に対し

$$\Psi_\mu : C_0(X) \ni f \longmapsto \int_X f(x)\,\mu(dx)$$

で定める Ψ_μ は $C_0(X)^*$ の元であり，次で定める写像

$$\Psi : \mathrm{Meas}_{\mathbb{C}} \ni \mu \longmapsto \Psi_\mu \in C_0(X)^*$$

は $\mathrm{Meas}_{\mathbb{C}}$ から $C_0(X)^*$ への Banach 空間としての等長同型写像である．

証明.　任意に $\Phi \in C_0(X)^*$ を取る．このとき $\Phi = \Psi_\mu$ を満たす複素測度 μ がただ一つだけ存在することを示す．

第一段　μ の一意性を示す．

第二段　μ の存在を示す．次を満たす $C_0(X)$ 上の正値有界線形汎関数 Λ を構成する:

$$|\Phi f| \leq \Lambda|f| \leq \|\Phi\|\,\|f\|_{C_0(X)} \quad (\forall f \in C_0(X)).$$

実際これを満たす Λ が存在すれば，Λ により導入する $\mathcal{M}$ 上の正値測度 λ は

$$\lambda(X) = \sup\{\,\Lambda f \ ; \quad f \prec X\,\}$$

を満たすから

$$\lambda(X) \leq \|\Phi\|$$

が従う．また

$$\Lambda f = \int_X f(x)\,\lambda(dx) \quad (\forall f \in C_c(X))$$

の関係から

$$|\Phi f| \leq \Lambda|f| = \|f\|_{\mathrm{L}^1(\lambda)} \quad (\forall f \in C_c(X))$$

が得られ，$C_c(X)$ は $C_0(X)$ において sup-norm で稠密だから

$$|\Phi f| \leq \|f\|_{\mathrm{L}^1(\lambda)} \quad (\forall f \in C_0(X))$$

が成立する．実際任意の $f \in C_0(X)$ に対して

$$\begin{aligned} \big||\Phi f| - |\Phi f_n|\big| &\leq \|\Phi\|\,\|f - f_n\|_{C_0(X)} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty), \\ \big|\|f\|_{\mathrm{L}^1(\lambda)} - \|f_n\|_{\mathrm{L}^1(\lambda)}\big| &\leq \lambda(X)\|f - f_n\|_{C_0(X)} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

を満たすように $f_n \in C_c(X)$ を選ぶことができる．また $C_0(X)$ は $\mathrm{L}^1(\lambda)$ において稠密であるから，Φ は $\mathrm{L}^1(\lambda)$ 上の有界線形作用素 $\tilde{\Phi}$ にノルム保存拡張される．従って或る $g \in \mathrm{L}^\infty(\lambda)$ が存在して

$$\tilde{\Phi} f = \int_X f(x)g(x)\,\lambda(dx) \quad (\forall f \in \mathrm{L}^1(\lambda))$$

を満たす．このとき任意の $E \in \mathcal{M}$ に対して，λ の有限性より $1\!\!1_E \in \mathrm{L}^1(\lambda)$ であるから

$$\left|\int_E g(x)\,\lambda(dx)\right| = \left|\tilde{\Phi}1\!\!1_E\right| \leq \|\,1\!\!1_E\,\|_{\mathrm{L}^1(\lambda)} = \lambda(E)$$

が成り立ち $|g| \leq 1$ が得られる．従って $d\mu := gd\lambda$ により $\mu \in \mathrm{Meas}_{\mathbb{C}}$ を定めれば

$$|\mu|(X) = \int_X |g(x)|\,\lambda(dx) \leq \lambda(X) \leq \|\,\Phi\,\|$$

が出る．一方で

$$|\mu|(X) = \int_X |g(x)|\,\lambda(dx) \geq \sup\left\{\,|\tilde{\Phi}f|\ ;\quad 0 \leq f \leq 1,\ f \in \mathrm{L}^1(\lambda)\,\right\} = \left\|\,\tilde{\Phi}\,\right\| = \|\,\Phi\,\|$$

も成り立つ．

第三段　Ψ の線形等長性を示す．

7.4　スペクトル測度

$H \neq \{0\}$ を複素 Hilbert 空間としノルム位相を導入する．H 上の直交射影全体を $\mathrm{Proj}(H)$ とし，H における内積とノルムをそれぞれ $\langle\cdot,\cdot\rangle, \|\cdot\|$ で表す．また $(X, \mathcal{M})$ を可測空間とする．

定義 7.4.1 (スペクトル測度).　I を H 上の恒等写像とする．$E : \mathcal{M} \to \mathrm{Proj}(H)$ がスペクトル測度 (spectral measure) であるとは，$E(X) = I$ かつ，互いに素な列 $A_n \in \mathcal{M}\ (n = 1, 2, \cdots)$ に対して次を満たすことをいう:

$$\sum_{n=1}^{\infty} E(A_n)u = E\Big(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\Big)u \quad (\forall u \in H). \tag{7.11}$$

補題 7.4.2 (スペクトル測度の積).　$\mathcal{M}$ から $\mathrm{Proj}(H)$ へのスペクトル測度 H は次を満たす:

(1)　$E(\emptyset) = 0$.

(2)　$A, B \in \mathcal{M}$ に対し $E(A)E(B) = E(A \cap B)$.

証明.

(1)　(7.11) において $A_n = \emptyset\ (n = 1, 2, \cdots)$ とすれば

$$E(\emptyset) = \sum_{n=1}^{\infty} E(\emptyset) = E(\emptyset) + \sum_{n=2}^{\infty} E(\emptyset)$$

が成り立ち[*9]

$$\sum_{n=2}^{\infty} E(\emptyset) = 0$$

が従う．

$$S := \sum_{n=2}^{\infty} E(\emptyset), \quad S_N := \sum_{n=2}^{N} E(\emptyset) \quad (N = 1, 2, \cdots)$$

とおけば，$(S_N)_{N=2}^{\infty}$ は S にノルム収束するから Cauchy 列であり，

$$\| S_{N+1} - S_N \| \longrightarrow 0 \quad (N \longrightarrow \infty)$$

より $E(\emptyset) = 0$ が得られる．

(2)　$F \cap G = \emptyset$ となる $F, G \in \mathcal{M}$ に対し，F 又は G が $\emptyset$ なら (1) より $E(F)E(G) = 0$，そうでない場合は (7.11) より

$$E(F) \neq E(G), \quad E(F) + E(G) = E(F + G) \in \mathrm{Proj}(H)$$

が成り立つから，命題 6.3.8 より $E(F)E(G) = 0$ が従う．これと命題 7.5 より，$A, B \in \mathcal{M}$ に対し

$$E(A)E(B) = (E(A \cap B) + E(A \cap B^c))\,(E(A \cap B) + E(B \cap A^c)) = E(A \cap B)$$

が得られる． ∎

補題 7.4.3 (スペクトル測度で導入する複素測度).　$E : \mathcal{M} \to \mathrm{Proj}(H)$ をスペクトル測度とする．各 $u, v \in H$ に対し $\mu_{u,v} : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ と $\mu_u : \mathcal{M} \to [0, \infty)$ を次で定める:

$$\mu_{u,v}(\Lambda) := \langle E(\Lambda)u, v \rangle \quad (\forall \Lambda \in \mathcal{M}), \quad \mu_u := \mu_{u,u} \tag{7.12}$$

(1)　$\mu_{u,v}$ は $(X, \mathcal{M})$ 上の複素測度であり，μ_u は $(X, \mathcal{M})$ 上の実数値有限測度である．

(2)　任意の $\Lambda \in \mathcal{M}$ に対し次が成り立つ:

$$|\mu_{u,v}(\Lambda)| \leq \mu_u(\Lambda)^{\frac{1}{2}} \mu_v(\Lambda)^{\frac{1}{2}}. \tag{7.13}$$

(3)　$\mathcal{M}/\mathfrak{B}([0, \infty))$-可測関数 f, g に対して次が成り立つ:

$$\int_X f(x)g(x)\, |\mu_{u,v}|(dx) \leq \left(\int_X |f(x)|^2\, \mu_u(dx) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_X |g(x)|^2\, \mu_v(dx) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

証明.

[*9]

$$a := \sum_{n=1}^{\infty} E(\emptyset), \quad a' := \sum_{n=2}^{\infty} E(\emptyset), \quad a_N := \sum_{n=1}^{N} E(\emptyset), \quad a'_N := \sum_{n=2}^{N} E(\emptyset)$$

とおけば

$$\left\| a - (E(\emptyset) - a') \right\| \leq \| a - a_N \| + \left\| a_N - \left(E(\emptyset) - a'_N \right) \right\| + \left\| a'_N - a' \right\| \longrightarrow 0 \quad (N \longrightarrow \infty)$$

が成り立つ．

(1)　(7.12) より $\mu_{u,v}$ は複素数値である．また命題 7.5 より

$$\langle E(\Lambda)u, v\rangle = \left\langle E(\Lambda)^2 u, v\right\rangle = \langle E(\Lambda)u, E(\Lambda)^* v\rangle = \langle E(\Lambda)u, E(\Lambda)v\rangle \tag{7.14}$$

が成り立つから $\mu_u(\Lambda) = \| E(\Lambda)u\|^2$ を得る．互いに素な列 $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{M}$ を取れば，(7.11) より

$$\left|\left\langle \sum_{n=1}^{\infty} E(A_n)u, v\right\rangle - \left\langle \sum_{n=1}^{N} E(A_n)u, v\right\rangle\right| \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} E(A_n)u - \sum_{n=1}^{N} E(A_n)u \right\| \| v \| \longrightarrow 0 \quad (N \longrightarrow \infty)$$

が成り立つから，

$$\left\langle \sum_{n=1}^{N} E(A_n)u, v\right\rangle = \sum_{n=1}^{N} \langle E(A_n)u, v\rangle$$

の右辺も収束し

$$\left\langle \sum_{n=1}^{\infty} E(A_n)u, v\right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle E(A_n)u, v\rangle$$

が得られ $\mu_{u,v}$ の完全加法性が従う．

(2)　(7.14) より

$$\left|\mu_{u,v}(A)\right| = |\langle E(A)u, E(A)v\rangle| \leq \| E(A)u \| \| E(A)v \| = \mu_u(A)^{\frac{1}{2}} \mu_v(A)^{\frac{1}{2}} \quad (\forall A \in \mathcal{M})$$

が成り立つから，任意の $\Lambda \in \mathcal{M}$ とその有限分割 $\Lambda = \sum_{i=1}^{n} A_i$ $(A_i \in \mathcal{M})$ に対し

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\mu_{u,v}(A_i)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \mu_u(A_i)^{\frac{1}{2}} \mu_v(A_i)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_u(A_i)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_v(A_i)\right)^{\frac{1}{2}} = \mu_u(\Lambda)^{\frac{1}{2}} \mu_v(\Lambda)^{\frac{1}{2}}$$

が得られ，左辺で分割の取り方の上限を取り (7.13) が従う．

(3)　f, g が可測単関数の場合，

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1\!\!1_{A_i}, \quad g = \sum_{i=1}^{n} \beta_i 1\!\!1_{A_i} \quad (\alpha_i, \beta_i \in [0, \infty),\ \sum_{i=1}^{n} A_i = X)$$

と表されているとして

$$\begin{aligned}\int_X f(x)g(x)\, |\mu_{u,v}|(dx) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i |\mu_{u,v}|(A_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_u(A_i)^{\frac{1}{2}} \beta_i \mu_v(A_i)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_X |f(x)|^2\, \mu_u(dx)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_X |g(x)|^2\, \mu_v(dx)\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

が成り立つ．一般の可測関数については，単関数近似と単調収束定理より主張が従う．∎

以後は $E : \mathcal{M} \to \mathrm{Proj}(H)$ をスペクトル測度とし，次の記号を定める:

$$\begin{aligned} MF = MF(X, \mathcal{M}) &:= \{\, f : X \to \mathbb{C}\ ;\quad f \text{ は } \mathcal{M}/\mathfrak{B}(\mathbb{C})\text{-可測関数.}\, \}, \\ MSF = MSF(X, \mathcal{M}) &:= \{\, f : X \to \mathbb{C}\ ;\quad f \text{ は } \mathcal{M}/\mathfrak{B}(\mathbb{C})\text{-可測単関数.}\, \}. \end{aligned}$$

定義 7.4.4 (MSF-近似列).　$f \in MF$ に対し $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ $(\forall x \in X)$ かつ $|f_n| \leq |f|$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を満たす $f_n \in MSF$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を f の MSF-近似列と呼び，特に $(|f_n|)_{n=1}^{\infty}$ が単調増加なら MSF-単調近似列と呼ぶ．

命題 7.4.5 (MSF-単調近似列の存在). 任意の $f \in MF$ に対して MSF-単調近似列が存在する.

証明. 任意に $f \in MF$ を取り，f の実部と虚部をそれぞれ g, h と表す．$g^+ := g\mathbb{1}_{\{g \geq 0\}}$，$g^- := g^+ - g$ と定め，同様に h^+, h^- を定めれば，g^+, g^-, h^+, h^- はそれぞれ非負で可測 $\mathcal{M}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であるから MSF-単調近似列 $(g_n^+)_{n=1}^{\infty}$ が存在する．

$$|g_n|^2 = \left|g_n^+\right|^2 + \left|g_n^-\right|^2 \leq \left|g^+\right|^2 + \left|g^-\right|^2 = |g|^2$$

が成り立つから，

$$f_n := g_n^+ - g_n^- + i\,(h_n^+ - h_n^-) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

とおけば

$$|f_n|^2 = \left|g_n^+ - g_n^-\right|^2 + \left|h_n^+ - h_n^-\right|^2 \leq |g|^2 + |h|^2 = |f|^2$$

が得られる． ∎

定義 7.4.6 (スペクトル積分). $f \in MF$ に対し，スペクトル積分 (spectral integral) T_f を以下で定める:

f が可測単関数の場合　$\alpha_i \in \mathbb{C}$ と $A_i \in \mathcal{M}$, $\sum_{i=1}^{n} A_i = X$ によって

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$$

と表示されているとき，

$$\mathcal{D}\left(T_f\right) := H, \quad T_f := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E(A_i) \tag{7.15}$$

と定める．

f が一般の可測関数の場合　f の MSF-近似列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ を一つ取り

$$\mathcal{D}\left(T_f\right) := \left\{ u \in H \ ; \ \int_X |f(x)|^2 \, \mu_u(dx) < \infty \right\}, \tag{7.16}$$

$$T_f u := \lim_{n \to \infty} T_{f_n} u \quad (\forall u \in \mathcal{D}\left(T_f\right)) \tag{7.17}$$

と定める．

作用素の線型演算　$f, g \in MF$ に対して

$$\left(T_f + T_g\right) u := T_f u + T_g u \quad \left(u \in \mathcal{D}\left(T_f\right) \cap \mathcal{D}\left(T_g\right)\right),$$
$$\left(\lambda T_f\right) u := \lambda T_f u \quad \left(u \in \mathcal{D}\left(T_f\right)\right)$$

として線型演算を定める．また上式の通り $\mathcal{D}\left(T_f + T_g\right) = \mathcal{D}\left(T_f\right) \cap \mathcal{D}\left(T_g\right)$，$\mathcal{D}\left(\lambda T_f\right) = \mathcal{D}\left(T_f\right)$ である．

T_f の積分表示　上で定義した T_f を，スペクトル測度 E による積分に見立てた形式で次の様に表現する:

$$T_f = \int_X f(x) \, E(dx).$$

補題 7.4.7.　(7.15) による T_f の定義は f の表示に依らない．

証明．　$\alpha_i,\beta_j \in \mathbb{C}$ と $A_i, B_j \in \mathcal{M}$, $\sum_{i=1}^n A_i = \sum_{j=1}^m B_j = X$ によって

$$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} = \sum_{j=1}^m \beta_i \mathbb{1}_{B_i}$$

と表示されているとき，

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i E(A_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i E(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \beta_j E(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^m \beta_j E(B_j)$$

が成り立つ． ∎

補題 7.4.8.　$f, g \in MSF$, $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$, $u, v \in H$ に対して次が成り立つ:

(1)　$T_{\alpha f+\beta g} = \alpha T_f + \beta T_f$,　$T_f T_g = T_{fg}$,　$T_f^* = T_{\overline{f}}$,　$T_{\mathbb{1}_A} = E(A)$　$(\forall A \in \mathcal{M})$.

(2)　$\left\langle T_f u, T_g v\right\rangle = \int_X f(x)\overline{g(x)}\,\mu_{u,v}(dx)$.

証明．

(1)　$a_i, b_i \in \mathbb{C}$, $A_i \in \mathcal{M}$ $\sum_{i=1}^n A_i = X$ によって

$$f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i}, \quad g = \sum_{i=1}^n b_i \mathbb{1}_{A_i}$$

と表示されているとする．先ず

$$T_{\alpha f+\beta g} = \sum_{i=1}^n (\alpha a_i + \beta b_i) E(A_i) = \alpha \sum_{i=1}^n a_i E(A_i) + \beta \sum_{i=1}^n b_i E(A_i) = \alpha T_f + \beta T_f$$

が成り立つ．また補題 7.4.2 より

$$T_f T_g = \sum_{i=1} a_i b_i E(A_i) = T_{fg}$$

が従い，また命題 7.5 より

$$T_f^* = \left(\sum_{i=1}^n a_i E(A_i)\right)^* = \sum_{i=1}^n \overline{a_i} E(A_i)^* = T_{\overline{f}}$$

も得られる．$T_{\mathbb{1}_A} = E(A)$ は (7.15) による．

(2)　命題 7.5 と命題 7.4.2 より $\mathcal{R}\left(E(A_j)\right) \perp \mathcal{R}(E(A_k))$ $(j \neq k)$ が成り立つから，(7.14) より

$$\left\langle T_f u, T_g v\right\rangle = \sum_{i=1}^n a_i \overline{b_i} \langle E(A_i)u, E(A_i)v\rangle = \sum_{i=1}^n a_i \overline{b_i} \langle E(A_i)u, v\rangle = \int_X f(x)\overline{g(x)}\,\mu_{u,v}(dx)$$

を得る． ∎

定理 7.4.9.　(7.17) で定める T_f は well-defined であり，特に (7.15) による定義の拡張となっている．

証明.

第一段　(7.17) の極限が存在することを示す．$f \in MF$ に対し MSF-近似列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ を取れば

$$\left\| T_{f_n}u - T_{f_m}u \right\| = \left\| T_{f_n - f_m}u \right\| = \int_X |f_n(x) - f_m(x)|^2 \, \mu_u(dx) \quad \left(\forall u \in \mathcal{D}\left(T_f\right)\right)$$

が成り立つ．$|f_n - f| \leq 2|f|$ かつ各点で $|f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0$ となるから，Lebesgue の収束定理より

$$\int_X |f_n(x) - f_m(x)|^2 \, \mu_u(dx) \leq 2\int_X |f_n(x) - f(x)|^2 \, \mu_u(dx) + 2\int_X |f_m(x) - f(x)|^2 \, \mu_u(dx) \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が得られる．従って $\left(T_{f_n}u\right)_{n=1}^{\infty}$ は Hilbert 空間 H において Cauchy 列であり極限が存在する．

第二段　(7.17) の極限が近似列に依存しないことを示す．前段の f に対し別の MSF-近似列 $(g_m)_{m=1}^{\infty}$ を取り

$$T_1 u \coloneqq \lim_{n\to\infty} T_{f_n}u, \quad T_2 u \coloneqq \lim_{m\to\infty} T_{g_m}u \quad \left(\forall u \in \mathcal{D}\left(T_f\right)\right)$$

とおく．各 $u \in \mathcal{D}\left(T_f\right)$ に対し

$$\begin{aligned}\left\| T_{f_n}u - T_{g_m}u \right\|^2 &= \int_X |f_n(x) - g_m(x)|^2 \, \mu_u(dx) \\ &\leq 2\int_X |f_n(x) - f(x)|^2 \, \mu_u(dx) + 2\int_X |f(x) - g_m(x)|^2 \, \mu_u(dx) \longrightarrow 0 \quad (n, m \longrightarrow \infty)\end{aligned}$$

が成り立つから

$$\| T_1 u - T_2 u \| \leq \left\| T_1 u - T_{f_n}u \right\| + \left\| T_{f_n}u - T_{g_m}u \right\| + \left\| T_{g_m}u - T_2 u \right\| \longrightarrow 0 \quad (n, m \longrightarrow \infty)$$

が従い極限の一意性を得る．$f \in MSF$ の場合は $f_n = f$ を MSF-近似列とすれば後半の主張が得られる．■

補題 7.4.10 ($\mathcal{D}\left(T_f\right)$ は線型・稠密).　(7.16) で定めた $\mathcal{D}\left(T_f\right)$ は H の線型部分空間で $\overline{\mathcal{D}\left(T_f\right)} = H$ を満たす．

証明.

線型性　$u, v \in \mathcal{D}\left(T_f\right)$ に対して

$$\int_X |f(x)|^2 \, \mu_u(dx) < \infty, \quad \int_X |f(x)|^2 \, \mu_v(dx) < \infty$$

が満たされている．(7.14) より任意の $\Lambda \in \mathcal{M}$ に対して

$$\mu_{u+v}(\Lambda) = \| E(\Lambda)(u+v) \|^2 \leq 2 \| E(\Lambda)u \|^2 + 2 \| E(\Lambda)v \|^2 = 2\mu_u(\Lambda) + 2\mu_v(\Lambda)$$

が成り立つから

$$\int_X |f(x)|^2 \, \mu_{u+v}(dx) \leq 2\int_X |f(x)|^2 \, \mu_u(dx) + 2\int_X |f(x)|^2 \, \mu_v(dx) < \infty$$

が従い $u+v \in \mathcal{D}\left(T_f\right)$ を得る．また任意に $\lambda \in \mathbb{C}$ を取れば

$$\mu_{\lambda u}(\Lambda) = \|\lambda E(\Lambda)u\|^2 = |\lambda|^2 \mu_u(\Lambda)$$

が成り立ち $\lambda u \in \mathcal{D}\left(T_f\right)$ も従う．

稠密性　任意に $u \in H$ を取る．

$$A_k := \{\, x \in X \ ; \quad |f(x)| \leq k \,\} \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

に対して $u_k := E(A_k)u$ とおけば，$(A_k)_{k=1}^{\infty}$ は単調に増加し X に収束するから

$$\|u - u_k\| = \|E(X)u - E(A_k)u\| \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty) \tag{7.18}$$

が成り立つ．一方で任意の $\Lambda \in \mathcal{M}$ に対して，命題 7.4.2 と (7.14) より

$$\mu_{u_k}(\Lambda) = \langle E(\Lambda)E(A_k)u, E(A_k)u \rangle = \langle E(\Lambda \cap A_k)u, u \rangle = \mu_u(\Lambda \cap A_k)$$

と表せるから μ_{u_k} は A_k に集中している．よって

$$\int_X |f(x)|^2 \, \mu_{u_k}(dx) = \int_{A_k} |f(x)|^2 \, \mu_{u_k}(dx) \leq k^2 \mu_u(A_k) < \infty$$

が成り立ち $u_k \in \mathcal{D}\left(T_f\right)$ が従い，(7.18) より主張を得る． ∎

定理 7.4.11 (T_f の定義域は 0 ではない).　任意の $f \in MF$ に対し $\mathcal{D}\left(T_f\right) \neq \{0\}$ が成り立つ．

証明.　Hausdorff 位相空間において一点集合は閉だから，$\mathcal{D}\left(T_f\right) = \{0\}$ なら $H = \{0\}$ が従い本章の仮定に反する． ∎

定理 7.4.12 (T の性質).　$f, g \in MF$ とする．

(1)　T_f は H から H への線型作用素である．

(2)　$u \in \mathcal{D}\left(T_f\right)$, $v \in \mathcal{D}\left(T_g\right)$ ならば次が成り立つ:

$$\int_X \left| f(x)\overline{g(x)} \right| \, |\mu_{u,v}|(dx) \leq \|f\|_{\mathrm{L}^2(\mu_u)} \|g\|_{\mathrm{L}^2(\mu_v)}, \qquad \int_X f(x)\overline{g(x)} \, \mu_{u,v}(dx) = \left\langle T_f u, T_g v \right\rangle.$$

(3)　$T_f + T_g \subset T_{f+g}$ が成り立ち，特に g が有界なら等号が成立する．

(4)　$T_f T_g \subset T_{fg}$ が成り立ち，特に g が有界なら等号が成立する．

(5)　$T_f^* = T_{\overline{f}}$ が成り立つ．特に T_f は閉作用素であり，また f が $\mathbb{R}$ 値なら T_f は自己共役である．

(6)　$\lambda \in \mathbb{C}$ が $\lambda \neq 0$ なら $T_{\lambda f} = \lambda T_f$ が成り立つ．

証明.

(1)　補題 7.4.10 より T_f の定義域は線形空間であるから，後は T_f が線型演算を満たすことを示せばよい．f の MSF-近似列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ を取れば，定義式 (7.15) より T_{f_n} は線型作用素であるから

$$\begin{aligned}\left\| T_f(\alpha u + \beta v) - \alpha T_f u - \beta T_f v \right\| &\leq \left\| T_f(\alpha u + \beta v) - T_{f_n}(\alpha u + \beta v) \right\| + |\alpha| \left\| T_f u - T_{f_n} u \right\| + |\beta| \left\| T_f v - T_{f_n} v \right\| \\ &\longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)\end{aligned}$$

が成り立つ．

(2)　$f, g \in MSF$ のとき，任意の $u, v \in H$ に対して

$$\int_X \left| f(x)\overline{g(x)} \right| \, |\mu_{u,v}|(dx) \leq \| f \|_{\mathrm{L}^2(\mu_u)} \| g \|_{\mathrm{L}^2(\mu_v)}, \quad \left\langle T_f u, T_g v \right\rangle = \int_X f(x)\overline{g(x)} \, \mu_{u,v}(dx)$$

が成り立つ．第二式は補題 (7.4.8) による．第一式について，

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}, \quad g = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbb{1}_{A_i}$$

と表示されているとして

$$\int_X \left| f(x)\overline{g(x)} \right| \, |\mu_{u,v}|(dx) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i||\beta_i||\mu_{u,v}|(A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i||\beta_i|\mu_u(A_i)^{\frac{1}{2}}\mu_v(A_i)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_X |f(x)|^2 \, \mu_u(dx) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_X |g(x)|^2 \, \mu_v(dx) \right)^{\frac{1}{2}}$$

が成り立つ．一般の $f, g \in MF$ については，MSF-近似列と Fatou の補題より従う．

(3)　$\mathcal{D}\left(T_f + T_g\right) = \mathcal{D}\left(T_f\right) \cap \mathcal{D}\left(T_g\right)$ であるから，任意の $u \in \mathcal{D}\left(T_f + T_g\right)$ に対して

$$\int_X |f(x)|^2 \, \mu_u(dx) < \infty, \quad \int_X |g(x)|^2 \, \mu_u(dx) < \infty$$

が満たされ

$$\int_X |f(x) + g(x)|^2 \, \mu_u(dx) \leq 2 \int_X |f(x)|^2 \, \mu_u(dx) + 2 \int_X |g(x)|^2 \, \mu_u(dx) < \infty$$

が従い $u \in \mathcal{D}\left(T_{f+g}\right)$ が成り立つ．また任意の $u \in \mathcal{D}\left(T_f + T_g\right)$ に対して，内積を展開し (2) の結果を適用すれば

$$\begin{aligned}\left\| T_{f+g}u - T_f u - T_g u \right\|^2 &= \int_X |f + g|^2 \, d\mu_u + \int_X |f|^2 \, d\mu_u + \int_X |g|^2 \, \mu_u \\ &\quad - 2 \int_X \mathrm{Re}\left[(f + g)f \right] \, d\mu_u - 2 \int_X \mathrm{Re}\left[(f + g)g \right] \, d\mu_u + 2 \int_X \mathrm{Re}\left[fg \right] \, d\mu_u = 0\end{aligned}$$

が成り立ち $T_f + T_g \subset T_{f+g}$ が従う．g が有界な場合，補題 7.4.3 より全ての $u \in H$ に対して μ_u が有限測度であるから，$\mathcal{D}\left(T_g\right)$ は H に一致し $\mathcal{D}\left(T_f + T_g\right) = \mathcal{D}\left(T_f\right)$ が成り立つ．また任意の $u \in \mathcal{D}\left(T_{f+g}\right)$ に対して

$$\int_X |f(x)|^2 \, \mu_u(dx) \leq 2 \int_X |f(x) + g(x)|^2 \, \mu_u(dx) + 2 \int_X |g(x)|^2 \, \mu_u(dx) < \infty$$

となり $u \in \mathcal{D}\left(T_f + T_g\right)$ が従うから，前半の結果と併せて $T_f + T_g = T_{f+g}$ が得られる．

(4)

(5)　補題 7.4.10 より $\mathcal{D}\left(T_f\right)$ が H で稠密であるから T_f^* が定義される．(2) の結果より

$$\left\langle T_f u, v \right\rangle = \int_X f(x) \, \mu_{u,v}(dx) = \left\langle u, T_{\overline{f}} v \right\rangle \quad \left(\forall u, v \in \mathcal{D}\left(T_f\right) = \mathcal{D}\left(T_{\overline{f}}\right) \right) \tag{7.19}$$

が成り立ち，先ず $T_{\overline{f}} \subset T_f^*$ が従う．後は $\mathcal{D}\left(T_f^*\right) = \mathcal{D}\left(T_{\overline{f}}\right)$ が成り立つことを示せばよい．

$$A_k \coloneqq \{\, x \in X \;;\quad |f(x)| \leq k \,\} \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

とおいて，任意に $v \in \mathcal{D}\left(T_f^*\right)$ を取り

$$v_k \coloneqq T_{\overline{f}\mathbb{1}_{A_k}} v \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

とすれば，各 $k \in \mathbb{N}$ について

$$\left\| T_f v_k \right\| = \left\| T_f T_{\overline{f}\mathbb{1}_{A_k}} v \right\|^2 = \int_{A_k} |f(x)|^4 \, \mu_v(dx) < k^4 \mu_v(A_k) < \infty$$

が成り立つから $v_k \in \mathcal{D}\left(T_f\right)$ である．(7.19) と同様にすれば

$$\| v_k \|^2 = \left\langle T_{\overline{f}\mathbb{1}_{A_k}} v, T_{\overline{f}\mathbb{1}_{A_k}} v \right\rangle = \left\langle T_{f\mathbb{1}_{A_k}} T_{\overline{f}\mathbb{1}_{A_k}} v, v \right\rangle = \left\langle T_f v_k, v \right\rangle = \left\langle v_k, T_f^* v \right\rangle$$

となり，Schwartz の不等式より

$$\| v_k \| \leq \left\| T_f^* v \right\| \tag{7.20}$$

が得られる．一方で

$$\| v_k \|^2 = \left\| T_{\overline{f}\mathbb{1}_{A_k}} v \right\|^2 = \int_{A_k} |f(x)|^2 \, \mu_v(dx)$$

が成り立つから，(7.20) と併せて

$$\int_{A_k} |f(x)|^2 \, \mu_v(dx) \leq \left\| T_f^* v \right\|^2$$

が従う．$(A_k)_{k=1}^{\infty}$ は単調増大列で $\cup_{k=1}^{\infty} A_k = X$ を満たすから，単調収束定理より

$$\int_X |f(x)|^2 \, \mu_v(dx) \leq \left\| T_f^* v \right\|^2$$

となり $v \in \mathcal{D}\left(T_f\right)$ が得られる．特に $T_f = T_{\overline{f}}^*$ が従い，共役作用素が閉線型であるから T_f も閉作用素である．

(6)　$\lambda = 0$ の場合は，$\mathcal{D}\left(T_{\lambda f}\right) = \mathcal{D}(T_0) = H$ であるが $\mathcal{D}\left(T_f\right) = H$ とは限らないから主張が従わない．$\lambda \neq 0$ の場合

$$\int_X |\lambda f(x)|^2 \, \mu_u(dx) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_X |f(x)|^2 \, \mu_u(dx) < \infty$$

が成り立つから $\mathcal{D}\left(T_{\lambda f}\right) = \mathcal{D}\left(T_f\right) = \mathcal{D}\left(\lambda T_f\right)$ である．また f の MSF-近似列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ については補題 7.4.8 より

$$T_{\lambda f_n} u = \lambda T_{f_n} u \quad \left(u \in \mathcal{D}\left(T_{\lambda f}\right)\right)$$

が満たされているから，任意の $u \in \mathcal{D}\left(T_{\lambda f}\right)$ に対して

$$\left\| T_{\lambda f} u - \lambda T_f u \right\| \leq \left\| T_{\lambda f} u - T_{\lambda f_n} u \right\| + |\lambda| \left\| T_f u - T_{f_n} u \right\| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が従う．　■

系 7.4.13.　$f, g \in MF$ とする．

(1)　$T_f = T_g$ であることと $E(\{\, x \in X \;;\; f(x) \neq g(x) \,\}) = 0$ (零写像) であることは同値である．

(2)　f が有界ならば $T_f \in \mathrm{B}(H)$ であり $\left\| T_f \right\|_{\mathrm{B}(H)} \leq \sup_{x \in X} |f(x)|$ が成り立つ．

(3)　或る $L > 0$ に対し $E(\{\, x \in X \;;\; |f(x)| > L \,\}) = 0$ が成り立つとき，$T_f \in \mathrm{B}(H)$ であり次が成り立つ:

$$\left\| T_f \right\|_{\mathrm{B}(H)} = \inf \{\, L > 0 \;;\; E(\{\, x \in X \;;\; |f(x)| > L \,\}) = 0 \,\}.$$

(4)　$\lambda \in \mathbb{C}, \epsilon > 0$ に対し $U_\epsilon(\lambda) \coloneqq \{\, z \in \mathbb{C} \;;\; |z - \lambda| < \epsilon \,\}$ とおく．T_f のレゾルベント集合[*10]は

$$\rho(T_f) = \left\{\, \lambda \in \mathbb{C} \;;\; \text{或る } \epsilon > 0 \text{ が存在して } E\left(f^{-1}(U_\epsilon(\lambda))\right) = 0 \text{ を満たす．} \,\right\} \tag{7.21}$$

で与えられ，さらに $\lambda \in \rho(T_f)$ に対して $\epsilon > 0$ が $E\left(f^{-1}(U_\epsilon(\lambda))\right) = 0$ を満たすとすれば

$$\left(\lambda I - T_f\right)^{-1} = T_{\frac{1}{\lambda - f} \mathbb{1}_{X \setminus f^{-1}(U_\epsilon(\lambda))}}$$

が成り立つ．ただし I は H 上の恒等写像を表す．

証明.

(1)　今 $N \coloneqq \{\, x \in X \;;\; f(x) \neq g(x) \,\}$ とおく．$T_f = T_g$ が成り立っているとすると，$u \in \mathcal{D}\left(T_f\right)$ に対し

$$0 = \left\| T_f u - T_g u \right\|^2 = \left\| T_{f-g} u \right\|^2 = \int_X |f(x) - g(x)|^2 \, \mu_u(dx) \tag{7.22}$$

が従い $\mu_u(N) = \| E(N)u \|^2 = 0$ となる．$\mathcal{D}\left(T_f\right)$ の稠密性と直交射影 $E(N)$ の連続性より $E(N) = 0$ を得る．逆に $E(N) = 0$ の場合，任意の $u \in \mathcal{D}\left(T_f\right)$ に対して $\mu_u(N) = \| E(N)u \|^2 = 0$ が成り立つから

$$\int_X |g(x)|^2 \, \mu_u(dx) \leq 2 \int_X |f(x) - g(x)|^2 \, \mu_u(dx) + 2 \int_X |f(x)|^2 \, \mu_u(dx) = 2 \int_X |f(x)|^2 \, \mu_u(dx) < \infty$$

となり，(7.22) と併せて $T_f \subset T_g$ が従う．同様に $T_g \subset T_f$ も成り立つから $T_f = T_g$ を得る．

(3)　$E(\{\, x \in X \;;\; |f(x)| > L \,\}) = 0$ を満たす $L > 0$ に対し

$$A_L \coloneqq \{\, x \in X \;;\; |f(x)| \leq L \,\}$$

とおけば，任意の $u \in H$ に対し

$$\mu_u(\Lambda) = \langle E(\Lambda)u, u \rangle = \langle E(\Lambda \cap A_L)u, u \rangle = \mu_u(\Lambda \cap A_L)$$

が成り立つから μ_u は A_L に集中している．従って定理 7.4.12(2) と μ_u の定義 (7.12) より

$$\left\| T_f u \right\|^2 = \int_X |f(x)|^2 \, \mu_u(dx) = \int_{A_L} |f(x)|^2 \, \mu_u(dx) \leq L^2 \mu_u(X) = L^2 \| u \|^2 < \infty$$

となるから，$\mathcal{D}\left(T_f\right) = H$ 且つ $\left\| T_f \right\|_{\mathrm{B}(H)} \leq L$ を得る．これにより $T_f \in \mathrm{B}(H)$ と

$$\left\| T_f \right\|_{\mathrm{B}(H)} \leq \inf \{\, L > 0 \;;\; E(\{\, x \in X \;;\; |f(x)| > L \,\}) = 0 \,\}$$

が成り立つ．ここで $\left\| T_f \right\|_{\mathrm{B}(H)} < \inf \{\, L > 0 \;;\; E(\{\, x \in X \;;\; |f(x)| > L \,\}) = 0 \,\}$ が成り立つとすると

[*10] 定理 7.4.12 より T_f は閉作用素であるからレゾルベントを考察できる．

(4)　$\lambda \in \mathbb{C}$ を固定する．任意の $\epsilon > 0$ に対し $V_\epsilon := f^{-1}(U_\epsilon(\lambda))$ とおけば f の可測性から $V_\epsilon \in \mathcal{M}$ であり，また

$$x \in V_\epsilon \quad \Leftrightarrow \quad |\lambda - f(x)| < \epsilon$$

が成り立つから，$X \backslash V_\epsilon$ 上で $1/|\lambda - f| \leq 1/\epsilon$ が満たされる．

第一段　$E(V_\epsilon) = 0$ を満たす ϵ が存在しない場合, 任意に $\epsilon > 0$ を取り固定する．$E(V_\epsilon) \neq 0$ であるから $\| u_\epsilon \|^2 = 1$ である $u_\epsilon \in \mathcal{R}(E(V_\epsilon))$ が存在し，或る $v_\epsilon \in H$ が対応し $E(V_\epsilon)v_\epsilon = u_\epsilon$ を満たす．任意に $\Lambda \in \mathcal{M}$ を取れば

$$\mu_{u_\epsilon}(\Lambda) = \langle E(\Lambda)u_\epsilon, E(\Lambda)u_\epsilon \rangle = \langle E(\Lambda \cap V_\epsilon)v_\epsilon, E(\Lambda \cap V_\epsilon)v_\epsilon \rangle = \mu_{v_\epsilon}(\Lambda \cap V_\epsilon)$$

が成り立つから μ_{u_ϵ} は V_ϵ に集中し，従って

$$\int_X |f(x)|^2 \, \mu_{u_\epsilon}(dx) = \int_{V_\epsilon} |f(x)|^2 \, \mu_{u_\epsilon}(dx) \leq (\epsilon + |\lambda|)^2 \, \mu_{u_\epsilon}(V_\epsilon) < \infty$$

となり $u_\epsilon \in \mathcal{D}\left(T_f\right)$ を得る．定理 7.4.12 より

$$\left(\lambda I - T_f\right) u = \left(\lambda T_1 - T_f\right) u = T_{\lambda - f} u \qquad \left(\forall u \in \mathcal{D}\left(T_f\right)\right)$$

が成り立ち，特に $u_\epsilon \in \mathcal{D}\left(T_f\right)$ であるから次を得る:

$$\left\| \left(\lambda I - T_f\right) u_\epsilon \right\|^2 = \int_{V_\epsilon} |\lambda - f(x)|^2 \, \mu_{u_\epsilon}(dx) \leq \epsilon^2 \mu_{u_\epsilon}(X) = \epsilon^2 \, \| u_\epsilon \|^2 .$$

ここで逆作用素 $\left(\lambda I - T_f\right)^{-1}$ が存在する場合，或る $w_\epsilon \in H$ が存在して $u_\epsilon = \left(\lambda I - T_f\right)^{-1} w_\epsilon$ を満たすから

$$\| w_\epsilon \| \leq \epsilon \left\| \left(\lambda I - T_f\right)^{-1} w_\epsilon \right\|$$

が従い

$$\frac{1}{\epsilon} \leq \frac{\left\| \left(\lambda I - T_f\right)^{-1} w_\epsilon \right\|}{\| w_\epsilon \|} \leq \left\| \left(\lambda I - T_f\right)^{-1} \right\|_{\mathrm{B}(H)}$$

が成り立つが，$\epsilon > 0$ の任意性より $\left(\lambda I - T_f\right)^{-1}$ は有界ではない．よって $\lambda \notin \rho(T_f)$ が得られる．

第二段　前段の結果より (7.21) の等号を $\subset$ に置き換えたものは真である．次は逆向きの包含関係を示す．今，或る $\epsilon > 0$ が存在して $E(V_\epsilon) = 0$ を満たすとする．

$$\left| \frac{1}{\lambda - f} \mathbb{1}_{X \backslash V_\epsilon} \right| \leq \frac{1}{\epsilon}$$

が成り立つから $(1/(\lambda - f)) \, \mathbb{1}_{X \backslash V_\epsilon}$ は有界であり，定理 7.4.12 より

$$\left(\lambda I - T_f\right) T_{\frac{1}{\lambda - f} \mathbb{1}_{X \backslash V_\epsilon}} = T_{\lambda - f} T_{\frac{1}{\lambda - f} \mathbb{1}_{X \backslash V_\epsilon}} = T_{\mathbb{1}_{X \backslash V_\epsilon}} = E(X) - E(V_\epsilon) = I$$

が成り立つ．同様に

$$T_{\frac{1}{\lambda - f} \mathbb{1}_{X \backslash V_\epsilon}} \left(\lambda I - T_f\right) = I$$

も得られ，写像の性質の一般論より

$$\left(\lambda I - T_f\right)^{-1} = T_{\frac{1}{\lambda - f} \mathbb{1}_{X \backslash V_\epsilon}}$$

が従う．(2) の結果より $T_{\frac{1}{\lambda - f} \mathbb{1}_{X \backslash V_\epsilon}} \in \mathrm{B}(H)$ であるから $\lambda \in \rho(T_f)$ となる． ■

系 7.4.14.　$(X, \mathcal{M}) = \left(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)\right)$ の場合，

$$\operatorname{supp} E \coloneqq \left\{ x \in \mathbb{R}^d \ ; \quad x \text{ の任意の開近傍 } V \text{ に対して } E(V) = 0 \text{ が成り立つ．} \right\}$$

として E の台を定める．このとき任意の連続写像 $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ について

$$\sigma(T_f) = \overline{f(\operatorname{supp} E)}$$

が成り立つ．特に $\operatorname{supp} E$ がコンパクトなら $\sigma(T_f) = f(\operatorname{supp} E)$ となる．

証明．　任意に $x \in \operatorname{supp} E$ を取る．$f(x)$ の任意の ϵ 近傍 $U_\epsilon = U_\epsilon(f(x))$ に対し，f の連続性から $f^{-1}(U_\epsilon)$ は x の開近傍となるから，$E(f^{-1}(U_\epsilon)) = 0$ が成り立ち $f(x) \in \sigma(T_f)$ が従う．$\sigma(T_f)$ は閉集合であるから $\overline{f(\operatorname{supp} E)} \subset \sigma(T_f)$ を得る．逆に任意に $\lambda \in \overline{f(\operatorname{supp} E)}$ を取れば，或る $\epsilon > 0$ が存在して $U_\epsilon(\lambda) \cap \overline{f(\operatorname{supp} E)} = \emptyset$ を満たすから $f^{-1}(U_\epsilon(\lambda)) \cap \operatorname{supp} E = \emptyset$ が成り立つ．$f^{-1}(U_\epsilon(\lambda))$ に属する $\mathbb{R}^d$ の有理点全体を $\mathbb{Q}_f$ と表せば，各 $r \in \mathbb{Q}_f$ に対し或る開近傍 V_r が存在して $E(V_r) = 0$ を満たすから $E\left(V_r \cap f^{-1}(U_\epsilon(\lambda))\right) = 0\ (\forall r \in \mathbb{Q}_f)$ が従う．$\mathbb{Q}_f$ は可付番であり添数を変えれば

$$f^{-1}(U_\epsilon(\lambda)) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n \cap f^{-1}(U_\epsilon(\lambda))$$

と表されるから，任意の $u \in H$ に対し

$$E\left(f^{-1}(U_\epsilon(\lambda))\right)u = \lim_{N \to \infty} E\left(\cup_{n=1}^N V_n \cap f^{-1}(U_\epsilon(\lambda))\right)u = 0$$

が成り立ち $\lambda \in \rho(E)$ となる．連続写像によるコンパクト集合の像はコンパクトであるから後半の主張を得る． ∎

定理 7.4.15.

例 7.4.16.　$(\mathbb{C}, \mathfrak{B}(\mathbb{C}), \mu)$ を σ-有限な測度空間，$H = \mathrm{L}^2(\mathbb{C}, \mathfrak{B}(\mathbb{C}), \mu) = \mathrm{L}^2(\mu)$ とする．Borel 可測関数 $a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ に対して，H から H へのかけ算作用素 M_a を次で定める:

$$\mathcal{D}(M_a) = \{\, u \in H \ ; \quad au \in H \,\}, \quad (M_a u)(z) = a(z)u(z) \quad (z \in \mathbb{C}).$$

また $E(A) = M_{\mathbb{1}_{a^{-1}(A)}}\ (A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C}))$ と定める．

(1)　E は，$\mathfrak{B}(\mathbb{C})$ で定義され，H 上の直交射影を値とするスペクトル測度であることを示せ．

(2)　Borel 可測関数 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ に対し，

$$T_f \coloneqq \int_{\mathbb{C}} f(z)\, E(dxdy) \quad (z = x + iy,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

と定める．このとき，$T_f = M_{f \circ a}$ を示せ．

証明．　H のノルムと内積をそれぞれ $\|\cdot\|, \langle\cdot, \cdot\rangle$ と表す．

(1)　任意の $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$ に対し $\mathbb{1}_{a^{-1}(A)}$ は有界であるから，春学期のレポート問題より $M_{\mathbb{1}_{a^{-1}(A)}} \in \mathrm{B}(H)$ が成り立つ．ゆえ

に E は $\mathfrak{B}(\mathbb{C})$ 全体で定義される．次に任意の $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$ に対し $E(A)$ が H 上の直交射影であることを示す．実際

$$E(A)^2 u = M_{\mathbb{1}_{a^{-1}(A)}} M_{\mathbb{1}_{a^{-1}(A)}} u = \mathbb{1}_{a^{-1}(A)} \mathbb{1}_{a^{-1}(A)} u = \mathbb{1}_{a^{-1}(A)} u = E(A)u \quad (\forall u \in H)$$

により $E(A)^2 = E(A)$ が成り立ち，また前問 [8] の (2) により

$$E(A)^* = M^*_{\mathbb{1}_{a^{-1}(A)}} = M_{\mathbb{1}_{a^{-1}(A)}} = E(A)$$

が成り立つから $E(A)$ は自己共役である．従って $E(A)$ は H 上の直交射影である．最後に E がスペクトル測度であることを示す．先ず $a^{-1}(\mathbb{C}) = X$ より

$$(E(\mathbb{C})u)(x) = \left(M_{\mathbb{1}_X} u\right)(x) = \mathbb{1}_X(x)u(x) = u(x) \quad (\mu\text{-a.e.}x \in X,\ \forall u \in H)$$

が成り立ち $E(\mathbb{C}) = I$ を得る．後は任意の互いに素な集合列 $A_1, A_2, \cdots \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$ に対して，$A \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ として

$$E(A)u = \sum_{n=1}^{\infty} E(A_n)u \quad (\forall u \in H) \tag{7.23}$$

が成立することを示せばよい:

第一段　先ず (7.23) の右辺の級数が H で収束することを示す．任意に $u \in H$ を取り

$$v_n \coloneqq \sum_{i=1}^{n} E(A_i)u \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

として $(v_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$ を定める．任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \| E(A_i)u \|^2 &= \sum_{i=1}^{n} \int_X \mathbb{1}_{a^{-1}(A_i)}(x)\, |u(x)|^2\ \mu(dx) \\ &= \int_X \mathbb{1}_{a^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)}(x)\, |u(x)|^2\ \mu(dx) \leq \int_X |u(x)|^2\ \mu(dx) = \| u \|^2\end{aligned}$$

が満たされるから

$$\sum_{i=1}^{\infty} \| E(A_i)u \|^2 \leq \| u \|^2 < \infty \tag{7.24}$$

が従い，一方で任意の $p, q \in \mathbb{N},\ p < q$ に対し

$$\left\| v_q - v_p \right\|^2 = \int_X \left| \sum_{i=p+1}^{q} \mathbb{1}_{a^{-1}(A_i)}(x)u(x) \right|^2 \mu(dx) = \int_X \sum_{i=p+1}^{q} \mathbb{1}_{a^{-1}(A_i)}(x)|u(x)|^2\ \mu(dx) = \sum_{i=p+1}^{q} \| E(A_i)u \|^2$$

が成り立つから，(7.24) より $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ は H で Cauchy 列をなし，H の完備性により或る $v \in H$ に強収束する．

第二段　$E(A)u = v$ が成り立つことを示す．任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$|v_n(x) - (E(A)u)(x)| \leq 2|u(x)| \quad (\forall x \in X)$$

が満たされ，かつ

$$v_n(x) \longrightarrow (E(A)u)(x) \quad (n \longrightarrow \infty,\ \forall x \in X)$$

が成り立つから Lebesgue の収束定理より

$$\| E(A)u - v_n \|^2 = \int_X |(E(A)u)(x) - v_n(x)|^2\ \mu(dx) \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が従う．前段の結果と併せれば

$$\| E(A)u - v \| \leq \| E(A)u - v_n \| + \| v_n - v \| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

により $E(A)u = v$ が成立する．u の任意性により (7.23) が得られる．

(2)　先ず $\mathcal{D}\left(T_f\right) = \mathcal{D}\left(M_{f\circ a}\right)$ が成り立つことを示す．f が可測単関数の場合，

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \quad \left(\alpha_i \in \mathbb{C},\ A_i \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})\ (i = 1, \cdots, n),\ \mathbb{C} = \sum_{i=1}^{n} A_i\right)$$

と表せば，任意の $u \in H$ に対して

$$\int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2\, \mu_u(dz) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \left\langle E(A_i)u, u\right\rangle = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \int_X \mathbb{1}_{a^{-1}(A_i)} |u(x)|^2\, \mu(dx) = \int_X |f(a(x))|^2 |u(x)|^2\, \mu(dx)$$

が成り立つ[*11]．f が一般の可測関数の場合は f の MSF-単調近似列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ を取れば，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\int_{\mathbb{C}} |f_n(x)|^2\, \mu_u(dx) = \int_X |f_n(a(x))|^2 |u(x)|^2\, \mu(dx) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

が満たされる．そして単調収束定理より

$$\int_{\mathbb{C}} |f(x)|^2\, \mu_u(dx) = \int_X |f(a(x))|^2 |u(x)|^2\, \mu(dx)$$

が成り立つから

$$u \in \mathcal{D}\left(T_f\right) \quad \Leftrightarrow \quad u \in \mathcal{D}\left(M_{f\circ a}\right)$$

が従う．次に $T_f u = M_{f\circ a} u\ (\forall u \in \mathcal{D}\left(T_f\right))$ を示す．f が可測単関数の場合，

$$T_f u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E(A_i) u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{a^{-1}(A_i)} u = f_n \circ a u = M_{f_n \circ a} u \quad (\forall u \in H)$$

が成り立つ．一般の f に対しては，MSF-単調近似列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ を取れば任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\left\| T_f u - M_{f\circ a} u \right\| \leq \left\| T_f u - T_{f_n} u \right\| + \left\| M_{f_n\circ a} u - M_{f\circ a} u \right\|$$

が成立する．スペクトル積分 T_f の定義より

$$\left\| T_f u - T_{f_n} u \right\| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が満たされ，また Lebesgue の収束定理より[*12]

$$\left\| M_{f_n\circ a} u - M_{f\circ a} u \right\|^2 = \int_X |f_n(a(x))u(x) - f(a(x))u(x)|^2\, \mu(dx) \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

[*11] $u \in H$ に対する μ_u は

$$\mu_u(\Lambda) := \left\langle E(\Lambda)u, u\right\rangle \quad (\Lambda \in \mathfrak{B}(\mathbb{C}))$$

により定められる有限正値測度を表す．

[*12] $u \in \mathcal{D}\left(T_f\right) = \mathcal{D}\left(M_{f\circ a}\right)$ に対しては $f \circ au \in H$ が満たされている．また MSF-単調近似列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ は $|f_n| \leq |f|\ (\forall n \in \mathbb{N})$ を満たすから

$$|f_n(a(x))u(x) - f(a(x))u(x)|^2 \leq 2|f(a(x))u(x)|^2 \quad (\forall x \in X)$$

が従い，左辺は n に無関係に可積分関数で抑えられる．かつ $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ が f に各点収束するから

$$f_n(a(x))u(x) \longrightarrow f(a(x))u(x) \quad (n \longrightarrow \infty,\ \forall x \in X)$$

も成り立つ．

も成り立つから

$$\left\| T_f u - M_{f\circ a} u \right\| = 0 \quad (\forall u \in \mathcal{D}\left(T_f\right))$$

が従い $T_f = M_{f\circ a}$ が得られる． ∎

7.5　自己共役作用素のスペクトル分解

H を複素 Hilbert 空間とし，内積とノルムをそれぞれ $\langle\cdot,\cdot\rangle, \|\cdot\|$ と表す．また I を H 上の恒等写像とし，$\mathrm{Meas}_{\mathbb{C}} = \mathrm{Meas}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d))$ と $C_0(\mathbb{R}^d)$ のノルムをそれぞれ $\|\cdot\|_{\mathrm{Meas}_{\mathbb{C}}}, \|\cdot\|_\infty$ で表す．

定理 7.5.1 (スペクトル分解定理).　写像 $T : C_0(\mathbb{R}^d) \to \mathrm{B}(H)$ が有界線型で次を満たすとする:

(1)　$T_f T_g = T_{fg} \quad (\forall f, g \in C_0(\mathbb{R}^d))$.

(2)　$T_f^* = T_{\overline{f}} \quad (\forall f \in C_0(\mathbb{R}^d))$.

(3)　或る $C_0(\mathbb{R}^d)$ の列 $(\phi_n)_{n=1}^\infty$ が存在して次を満たす:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\phi_n\|_\infty < \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = 1 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^d),$$
$$\left\| T_{\phi_n} u - u \right\| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty,\ \forall u \in H).$$

このとき次の表現を持つスペクトル測度 $E : \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d) \to \mathrm{Proj}(H)$ が唯一つ存在する:

$$T_f = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, E(dx) \quad (\forall f \in C_0(\mathbb{R}^d)). \tag{7.25}$$

定理 7.5.1 において T の条件 (3) が要求されていないとする．この場合 T を零写像としても (1)(2) は満たされるが，

$$E(\mathbb{R}^d)u = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \phi_n(x)\, E(dx)u = 0 \quad (\forall u \in H)$$

が従い $E(\mathbb{R}^d) = I$ に反する．

証明.

第一段　E の存在を示す．任意の $u, v \in H$ に対し

$$S_{u,v} : C_0(\mathbb{R}^d) \ni f \longmapsto \left\langle T_f u, v \right\rangle \in \mathbb{C}$$

と定めれば $S_{u,v} \in C_0(\mathbb{R}^d)^*$ となる．実際 T, T_f 及び内積の線型性より，任意の $f, g \in C_0(\mathbb{R}^d), \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して

$$S_{u,v}(\alpha f + \beta g) = \left\langle T_{\alpha f + \beta g} u, v \right\rangle = \left\langle (\alpha T_f + \beta T_g) u, v \right\rangle = \alpha S_{u,v} f + \beta S_{u,v} g$$

が成り立つから $S_{u,v}$ の線型性が従い，また Schwartz の不等式と T, T_f の有界性より

$$\left| S_{u,v} f \right| \leq \left\| T_f u \right\| \|v\| \leq \|T\|_{\mathrm{B}(C_0(\mathbb{R}^d),\mathrm{B}(H))} \|u\| \|v\| \|f\|_\infty \quad (\forall f \in C_0(\mathbb{R}^d)) \tag{7.26}$$

も成り立つから $S_{u,v}$ の有界性が従う．よって定理 7.3.5 より或る $\mu_{u,v}$ が唯一つ対応し

$$\left\langle T_f u, v\right\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mu_{u,v}(dx) \quad (\forall f \in C_0(\mathbb{R}^d)) \tag{7.27}$$

と表現できる．このとき任意に $\Lambda \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ に取り固定すれば，対応

$$H \times H \ni [u,v] \longmapsto \mu_{u,v}(\Lambda) \tag{7.28}$$

は準双線型であり

$$\left|\mu_{u,v}(\Lambda)\right| \leq \|T\|_{\mathrm{B}(C_0(\mathbb{R}^d),\mathrm{B}(H))}\|u\|\|v\| \quad (\forall u,v \in H) \tag{7.29}$$

を満たすから，或る $E(\Lambda) \in \mathrm{B}(H)$ が唯一つ存在して

$$\langle E(\Lambda)u, v\rangle = \mu_{u,v}(\Lambda) \quad (\forall u,v \in H) \tag{7.30}$$

が成り立つ．以下，上に列記した事柄を証明する．

(7.28) の準双線型性　先ず任意の $v \in H$ に対し $u \longmapsto \mu_{u,v}(\Lambda)$ が線型であることを示す．任意に $u,w \in H, \alpha,\beta \in \mathbb{C}$ と $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ を取れば，T_f の線型性と (7.27) の表現及び定理 7.2.7 より

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mu_{\alpha u+\beta w,v}(dx) &= \left\langle T_f(\alpha u + \beta w), v\right\rangle \\ &= \alpha\left\langle T_f u, v\right\rangle + \beta\left\langle T_f w, v\right\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\left(\alpha\mu_{u,v} + \beta\mu_{w,v}\right)(dx)\end{aligned} \tag{7.31}$$

が成り立つ．$\mathbb{R}^d$ の任意の開集合 A に対し $|f_n| \leq 1$ 且つ $f_n \longrightarrow 1\!\!1_A$ (各点) を満たす $C_0(\mathbb{R}^d)$ の列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ が存在するから，定理 7.2.8 より

$$\mu_{\alpha u+\beta w,v}(A) = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\,\mu_{\alpha u+\beta w,v}(dx) = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\,\left(\alpha\mu_{u,v} + \beta\mu_{w,v}\right)(dx) = \left(\alpha\mu_{u,v} + \beta\mu_{w,v}\right)(A)$$

が従い，定理 7.1.6 より $\mu_{\alpha u+\beta w,v} = \alpha\mu_{u,v} + \beta\mu_{w,v}$ が得られる．$v \longmapsto \mu_{u,v}(\Lambda)$ についても同様であるが，内積の準双線型性より (7.31) のスカラーが共役に替わり $\mu_{u,\alpha v+\beta w} = \overline{\alpha}\mu_{u,v} + \overline{\beta}\mu_{u,w}$ $(\forall u,v,w \in H, \alpha,\beta \in \mathbb{C})$ が従う．

(7.29) の証明　定理 7.3.5 の等長性と (7.26) (7.27) より，任意の $u,v \in H$ に対して次が成り立つ:

$$\left\|\mu_{u,v}\right\|_{\mathrm{Meas}_{\mathbb{C}}} = \sup_{\substack{f\in C_0(\mathbb{R}^d)\\ \|f\|_\infty \leq 1}}\left|\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mu_{u,v}(dx)\right| = \sup_{\substack{f\in C_0(\mathbb{R}^d)\\ \|f\|_\infty \leq 1}}\left|\left\langle T_f u, v\right\rangle\right| \leq \|T\|_{\mathrm{B}(C_0(\mathbb{R}^d),\mathrm{B}(H))}\|u\|\|v\|.$$

$E(\Lambda)$ の存在と一意性　上の結果より任意の $u \in H$ に対して $Q_u : H \ni v \longmapsto \mu_{u,v}(\Lambda)$ は $\overline{Q_u} \in H^*$ を満たすから，Hilbert 空間における Riesz の表現定理より或る $a(\Lambda)_u \in H$ が唯一つ存在し

$$\overline{Q_u(v)} = \langle v, a(\Lambda)_u\rangle = \overline{\langle a(\Lambda)_u, v\rangle} \quad (\forall v \in H)$$

を満たす．写像 $H \ni u \longmapsto a(\Lambda)_u \in H$ を $E(\Lambda)$ と表せば

$$\langle E(\Lambda)u, v\rangle = Q_u(v) = \mu_{u,v}(\Lambda) \quad (\forall u,v \in H)$$

が成り立つ．次に $E(\Lambda)$ の一意性を示す．或る $F(\Lambda) : H \to H$ が存在し

$$\langle F(\Lambda)u, v\rangle = \mu_{u,v}(\Lambda) \quad (\forall u,v \in H)$$

を満たすなら

$$\langle (E(\Lambda) - F(\Lambda))\,u, v\rangle = 0 \quad (\forall u,v \in H)$$

となるから，特に $v = (E(\Lambda) - F(\Lambda))\,u$ として

$$(E(\Lambda) - F(\Lambda))\,u = 0 \quad (\forall u \in H)$$

が従い $E(\Lambda) = F(\Lambda)$ が得られる．

$E(\Lambda)$ の線型有界性　(7.30) と (7.28) の準双線型性より，任意の $u, v, w \in H$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して

$$\langle E(\Lambda)(\alpha u + \beta v), w \rangle = \mu_{\alpha u+\beta v,w}(\Lambda) = \alpha \mu_{u,w}(\Lambda) + \beta \mu_{v,w}(\Lambda) = \alpha \langle E(\Lambda)u, w \rangle + \beta \langle E(\Lambda)v, w \rangle$$

が成り立つ．特に $w = E(\Lambda)(\alpha u + \beta v) - \alpha E(\Lambda)u - \beta E(\Lambda)v$ とすれば

$$E(\Lambda)(\alpha u + \beta v) - \alpha E(\Lambda)u - \beta E(\Lambda)v = 0 \quad (\forall u, v \in H,\ \alpha, \beta \in \mathbb{C})$$

が従い $E(\Lambda)$ の線型性を得る．また (7.29) より任意の $u, v \in H$ に対して

$$|\langle E(\Lambda)u, v \rangle| \leq \|T\|_{\mathrm{B}(C_0(\mathbb{R}^d),\mathrm{B}(H))} \|u\| \|v\|$$

が成り立つから，特に $v = E(\Lambda)u$ とすれば

$$\|E(\Lambda)u\| \leq \|T\|_{\mathrm{B}(C_0(\mathbb{R}^d),\mathrm{B}(H))} \|u\| \quad (\forall u \in H)$$

が得られ $E(\Lambda)$ の有界性が従う．

第二段　任意の $\Lambda \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ に対して $E(\Lambda)$ が直交射影であることを示す．前段で $E(\Lambda) \in \mathrm{B}(H)$ が示されたから，命題より後は $E(\Lambda)^2 = E(\Lambda)$ と $E(\Lambda)^* = E(\Lambda)$ を示せばよい．$T_f^* = T_{\overline{f}}$ $(\forall f \in C_0(\mathbb{R}^d))$ の仮定より

$$\left\langle T_f u, v \right\rangle = \left\langle u, T_f^* v \right\rangle = \left\langle u, T_{\overline{f}} v \right\rangle \quad (\forall u, v \in H)$$

が成り立つから，(7.27) より

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, \mu_{u,v}(dx) = \left\langle T_f u, v \right\rangle = \overline{\left\langle T_{\overline{f}} v, u \right\rangle} = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, \overline{\mu_{v,u}}(dx) \quad (\forall f \in C_0(\mathbb{R}^d))$$

が従う．前段で (7.28) の準双線型性を示した時と同様にして $\mu_{u,v} = \overline{\mu_{v,u}}$ が成り立つから

$$\langle E(\Lambda)u, v \rangle = \mu_{u,v}(\Lambda) = \overline{\mu_{v,u}(\Lambda)} = \overline{\langle E(\Lambda)v, u \rangle} = \langle u, E(\Lambda)v \rangle \quad (\forall u, v \in H)$$

となり $E(\Lambda)^* = E(\Lambda)$ が得られる．次に Λ が開集合であるとする．$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq 1$ かつ $\mathbb{1}_\Lambda$ に各点収束する関数列 $(f_n)_{n=1}^\infty \subset C_0(\mathbb{R}^d)$ を取れば，(7.27) と (7.30) より

$$\left\langle T_{f_n} u, u \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\, \mu_u(dx) \leq \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_\Lambda(x)\, \mu_u(dx) = \langle E(\Lambda)u, u \rangle \quad (\forall u \in H,\ n = 1, 2, \cdots)$$

が成り立ち，更に $\mu_u(\Lambda) < \infty$ $(\forall u \in H)$ であるから Lebesgue の収束定理より

$$\left\langle \left(E(\Lambda) - T_{f_n}\right) u, u \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_\Lambda(x) - f_n(x)\, \mu_u(dx) \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty,\ \forall u \in H)$$

となる．$\left\| T_{f_n} u \right\| \leq \|T\|_{\mathrm{B}(C_0(\mathbb{R}^d),\mathrm{B}(H))} \|u\|$ より

$$\left\| E(\Lambda) - T_{f_n} \right\|_{\mathrm{B}(H)} \leq \|E(\Lambda)\|_{\mathrm{B}(H)} + \|T\|_{\mathrm{B}(C_0(\mathbb{R}^d),\mathrm{B}(H))} \quad (\forall n = 1, 2, \cdots)$$

が成り立つから，$C \coloneqq \|E(\Lambda)\|_{\mathrm{B}(H)} + \|T\|_{\mathrm{B}(C_0(\mathbb{R}^d),\mathrm{B}(H))}$ とおけば

$$\left\| \left(E(\Lambda) - T_{f_n}\right) u \right\| \leq \sqrt{C \left\langle \left(E(\Lambda) - T_{f_n}\right) u, u \right\rangle} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty,\ \forall u \in H)$$

が従う．またこれは $g_n \coloneqq f_n^2$ に対しても成り立つ．ゆえに

$$|\langle E(\Lambda)u, E(\Lambda)u \rangle - \langle E(\Lambda)u, u \rangle| \leq \left| \langle E(\Lambda)u, E(\Lambda)u \rangle - \left\langle T_{f_n} u, T_{f_n} u \right\rangle \right| + \left| \left\langle T_{f_n^2} u, u \right\rangle - \langle E(\Lambda)u, u \rangle \right| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

となり $E(\Lambda)^* = E(\Lambda)$ と併せて $E(\Lambda)^2 = E(\Lambda)$ が得られる．

第三段　$E(\mathbb{R}^d) = I$ を示す．任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\langle \phi_n u, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \phi_n(x)\, \mu_{u,v}(dx)$$

が成り立つ．また仮定より任意の $u \in H$ に対して

$$|\langle \phi_n u, v\rangle - \langle u, v\rangle| \leq \| \phi_n u - u \| \| v \| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

かつ

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi_n(x)\, \mu_{u,v}(dx) \longrightarrow \mu_{u,v}(\mathbb{R}^d) = \left\langle E(\mathbb{R}^d)u, v \right\rangle$$

が成り立つから，

$$\left| \langle u, v\rangle - \left\langle E(\mathbb{R}^d)u, v \right\rangle \right| \leq |\langle u, v\rangle - \langle \phi_n u, v\rangle| + \left| \int_{\mathbb{R}^d} \phi_n(x)\, \mu_{u,v}(dx) - \left\langle E(\mathbb{R}^d)u, v \right\rangle \right| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

となり $\langle u, v\rangle = \left\langle E(\mathbb{R}^d)u, v \right\rangle$ $(\forall u, v \in H)$ が成り立つ．特に $v = u - E(\mathbb{R}^d)u$ とすれば $u = E(\mathbb{R}^d)u$ $(\forall u \in H)$ が従い $E(\mathbb{R}^d) = I$ を得る．

第四段　E の完全加法性を示す．任意の $A, B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$, $u, v \in H$ に対し

$$\begin{aligned}\langle (E(A+B) - E(A) - E(B))\, u, v\rangle &= \langle E(A+B)u, v\rangle - \langle E(Au, v\rangle - \langle E(B)u, v\rangle \\ &= \mu_{u,v}(A+B) - \mu_{u,v}(A) - \mu_{u,v}(B) = 0\end{aligned}$$

が成り立つから

$$E(A+B)u = E(A)u + E(B)u \quad (\forall u \in H)$$

が得られる．次に任意に互いに素な列 $\Lambda_1, \Lambda_2, \cdots \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ を取り $\Lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$, $\Lambda_N \coloneqq \sum_{n=1}^{N} \Lambda_n$ とおけば，

$$\| (E(\Lambda) - E(\Lambda_N))\, u \| \leq \sqrt{\langle (E(\Lambda) - E(\Lambda_N))\, u, u\rangle} = \leq \sqrt{\mu_u(\Lambda) - \mu_u(\Lambda_N)} \longrightarrow 0 \quad (N \longrightarrow \infty,\ \forall u \in H)$$

が成り立ち，一方で

$$E(\Lambda_N)u = \sum_{n=1}^{N} E(\Lambda_n)u \quad (\forall N \in \mathbb{N},\ u \in H)$$

となるから，命題 6.3.8 より任意の $i, j \in \mathbb{N}$ に対して $E(\Lambda_i)E(\Lambda_j) = \delta_{ij}E(\Lambda_i)$ が成り立ち $\sum_{n=1}^{\infty} E(\Lambda_n)u$ は絶対収束する．

$$E(\Lambda)u = \sum_{n=1}^{\infty} E(\Lambda_n)u \quad (\forall u \in H)$$

が得られる．

第五段　(7.25) を示す．$f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ が単関数の場合は

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\, \mu_{u,v}(dx) = \left\langle \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\, E(dx)u, v \right\rangle \quad (\forall u, v \in H)$$

が成り立つ．一般の $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ に対しては，MSF-単調近似列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ を取れば

$$\begin{aligned}&\left| \left\langle T_f u, v \right\rangle - \left\langle \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, E(dx)\, u, v \right\rangle \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, \mu_{u,v}(dx) - \left\langle \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, E(dx)\, u, v \right\rangle \right| \\ &\quad \leq \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, \mu_{u,v}(dx) - \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\, \mu_{u,v}(dx) \right| + \left\| \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\, E(dx)u - \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, E(dx)u \right\| \| v \| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)\end{aligned}$$

が成り立つ．

第六段　E の一意性を示す．開集合の上で E は一意．一致の定理より E は一意．∎

第 8 章

位相線形空間

8.1 有向集合とフィルター

定義 8.1.1 (有向集合). 集合 Λ において，次の性質を持つ二項関係 $\leq$ $(\geq)$[*1]が定まっているとき，Λ を有向集合 (directed set)，或は有向擬順序集合 (directed preorder) と呼ぶ．

反射的 $\lambda \leq \lambda$ $(\forall \lambda \in \Lambda)$,

推移的 $\lambda \leq \mu$ かつ $\mu \leq \nu$ なら $\lambda \leq \nu$ $(\forall \lambda, \mu, \nu \in \Lambda)$,

有向的 任意に $\lambda, \mu \in \Lambda$ を取れば或る $\nu \in \Lambda$ が存在し $\lambda \leq \nu$ かつ $\mu \leq \nu$ を満たす．

（順序集合に対して三番目の性質を追加しても有向集合となるが，本節では反対称性を使うことはない．）

定義 8.1.2 (有向族による収束の記述). 位相空間 X において，有向集合 Λ を添数集合とする系 $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を有向族 (directed family) と呼ぶ．$(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が $x \in X$ に収束するとは，x の任意の近傍 U に対して或る $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在し，$x_\lambda \in U$ $(\forall \lambda \geq \lambda_0)$ が成り立つことにより定める．これは距離空間における点列収束の一般化である．

定理 8.1.3 (有向点族による連続性の特徴づけ). X, Y を位相空間とする．写像 $f : X \longrightarrow Y$ が点 $x \in X$ で連続であるための必要十分条件について，次がいえる:

(1) x が可算な基本近傍系をもつとき，必要十分条件は，x に収束する任意の点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ に対し $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ が $f(x)$ に収束することである．すなわち，X が第一可算公理を満たすなら点列連続性と連続性は一致する．

(2) X が一般の位相空間の場合，必要十分条件は，x に収束する任意の有向点族 $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ に対し $(f(x_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ が $f(x)$ に収束することである．

証明.

必要性 点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ は有向点族であるから，必要性の証明は (2) に対して示せばよい．$(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を x に収束する有向点

[*1] $\lambda, \mu \in \Lambda$ について $\lambda \leq \mu \Leftrightarrow \mu \geq \lambda$.

族とする．f が x で連続であるとき，$f(x)$ の任意の近傍 V に対して或る x の近傍 U が存在し

$$f(U) \subset V$$

が満たされる．この U に対し或る $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在して $x_\lambda \in U\ (\forall \lambda \geq \lambda_0)$ が成り立ち $f(x_\lambda) \in V\ (\forall \lambda \geq \lambda_0)$ が従う．

十分性　(1) と (2) それぞれの場合について，対偶を証明する．いま，f が x で連続ではないと仮定する．

(1)　x に対し可算基本近傍系 $(U_n)_{n=1}^\infty$ が存在する．近傍系は有限回の交演算で閉じるから

$$W_n := U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

により x の単調減少な可算近傍系 $(W_n)_{n=1}^\infty$ が定まり，仮定より $f(x)$ の或る近傍 V が存在して

$$f(W_n) \not\subset V, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

が成り立つから，各 n に対し $f(x_n) \notin V$ を満たす $x_n \in W_n$ が取れる．ゆえに $f(x_n) \nrightarrow f(x)$ であるが，一方で x の任意の近傍 U に対し或る U_{n_0} が U に含まれ，$x_n \in W_n \subset U\ (\forall n \geq n_0)$ が従い $(x_n)_{n=1}^\infty$ は x に収束する．

(2)　x の近傍全体を Λ とおけば，$U \leq V \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} U \supset V\ (U, V \in \Lambda)$ により Λ は有向集合となる．仮定より $f(x)$ の或る近傍 V が存在して全ての $U \in \Lambda$ に対し或る $x_U \in U$ が存在して $f(x_U) \notin V$ を満たすから，

8.2　位相線形空間

以下，位相空間 X の点 x の近傍を次で考える:

$$V \subset X \text{ が } x \text{ の近傍である．} \quad \Leftrightarrow \quad x \text{ は } U \text{ の内点である．}$$

x の近傍全体を $\mathscr{V}_x$ と表す．また x の基本近傍系を

$$\mathscr{B}_x := \{\, V \in \mathscr{V}_x \;;\quad \}$$

により定める．位相空間 X が分離公理 T_1 を満たすとは，或いは T_1-空間であるとは，任意の $x, y \in X$ に対して y の近傍 U_y で $x \notin U_y$ となるものが存在することをいう．

定理 8.2.1 (T_1-空間の特徴づけ).　位相空間 X が T_1-空間であるための必要十分条件は，X の任意の一点集合が閉であることである．

証明.　TBA

以下，体 K 上の線形空間 X と $A, B \subset X$, $x \in X$, $\alpha \in K$ に対し

$$\begin{aligned}
x + A &:= \{\, x + y \;;\quad y \in A \,\}, \\
x - A &:= \{\, x - y \;;\quad y \in A \,\}, \\
A + B &:= \{\, x + y \;;\quad x \in A,\ y \in B \,\} = \bigcup_{x \in A} (x + B) = \bigcup_{y \in B} (y + A), \\
\alpha A &:= \{\, \alpha x \;;\quad x \in A \,\}
\end{aligned}$$

と定める．

定義 8.2.2 (位相線形空間).　X を体 $K = \mathbb{R}$ 或は $K = \mathbb{C}$ 上の線形空間とする．X に対し次を満たす位相 τ が付随しているとき，τ を線型位相 (vector topology)，X を位相線形空間 (topological vector space) と呼ぶ．

(i)　(X, τ) は T_1-空間である．つまり，X の一点集合は閉である．

(ii)　X 上の線型演算

$$X \times X \ni (x, y) \longmapsto x + y \in X, \quad K \times X \ni (\alpha, x) \longmapsto \alpha x \in X$$

が τ と K の位相に関して連続である．

定理 8.2.3 (平行移動作用素・スカラ倍作用素).　$a \in X$ と $\alpha \in K$ を任意に取り $T_a : x \longmapsto a + x$ と $M_\alpha : x \longmapsto \alpha x$ を定めれば，T_a, M_α $(\alpha \neq 0)$ は X 上の自己同相である．

証明.

全単射　$\alpha \neq 0$ とする．任意の $x \in X$ に対し $x = T_a \circ T_{-a}(x) = T_{-a} \circ T_a(x)$ かつ $x = M_\alpha \circ M_{\alpha^{-1}}(x) = M_{\alpha^{-1}} \circ M_\alpha(x)$ が成り立つから，T_a, M_α は X 上の全単射でありそれぞれ $T_{-a}, M_{\alpha^{-1}}$ を逆写像に持つ．

連続性　加法を Φ，スカラ倍を Ψ と表す．線型位相空間の定義より，任意の $x \in X$ について，$a + x$ の任意の近傍 U に対し或る a の近傍 V_1 と x の近傍 V_2 が存在して $\Phi(V_1 \times V_2) = V_1 + V_2 \subset U$ を満たす．ゆえに $V_2 \subset T_a^{-1}(U)$ が従うから T_a は各点で連続である．同様に αx の任意の近傍 U' に対し或る α の近傍 V_1' と x の近傍 V_2' が存在して $\Psi(V_1' \times V_2') \subset U$ を満たすから，$V_2' \subset M_\alpha^{-1}(U')$ が従い M_α の連続性が出る． ∎

定義 8.2.4 (均整集合・有界集合・対称集合).　(X, τ) を $K = \mathbb{R}$ 或は $K = \mathbb{C}$ 上の線型位相空間とする．このとき部分集合 $A \subset X$ に対して，$\alpha A \subset A$ $(\forall|\alpha| \leq 1)$ が成り立つとき A は均整である (balanced) といい，任意の 0 の近傍 V に対して或る $\alpha > 0$ が対応し $A \subset \beta V$ $(\beta > \alpha)$ を満たすとき A は有界である (bounded) という．また A が対称的であるとは $A = -A$ が成立することである．

定理 8.2.5.　線型位相空間において 0 の近傍全体は任意の $x \in X$ の近傍全体と一対一対応．位相は 0 の基本近傍系のみで記述される．

定理 8.2.6 (互いに素なコンパクト集合と閉集合を覆う互いに素な開集合の存在).

定理 8.2.7.

証明.　任意に $E \neq X$ を満たす $E \in \mathscr{B}_x$ と $x \in X \backslash \overline{E}$ を取る．一点集合はコンパクトであるから，前定理より或る $V \in \mathscr{B}_x$ が存在して

$$(x + V) \cap (\overline{E} + V) = \emptyset$$

が成立し，

$$V \subset x + V \subset (\overline{E} + V)^c \subset \overline{E}^c$$

が成り立つ．

定理 8.2.8.　任意の線型位相空間は Hausdorff 空間である．従って特に，任意のコンパクト部分集合は閉である．

第 9 章

垣田高夫「シュワルツ超関数入門」だんだんわからなくなってきたからメモ

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$, $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, \cdots\}$ とする．また複素線形空間 E_i $(i = 1, \cdots, n)$ の直積 $E_1 \times \cdots \times E_n$ において

$$(e_1, \cdots, e_n) + (f_1, \cdots, f_n) \coloneqq (e_1 + f_1, \cdots, e_n + f_n), \quad \alpha(e_1, \cdots, e_n) \coloneqq (\alpha e_1, \cdots, \alpha e_n)$$

により線型演算を定め，ノルム空間 $(X_i, \|\cdot\|_i)$ $(i = 1, \cdots, n)$ の直積空間 $X_1 \times \cdots \times X_n$ におけるノルムは $\|x_1\|_1 + \cdots + \|x_n\|_n$ $(x_i \in X_i)$ とする．以降，線型空間は全て複素係数である．

9.1 あんまり意味ないメモ

$\Omega \neq \emptyset$ を $\mathbb{R}^n$ の開集合とする．Ω に含まれるコンパクト集合を台とする C^∞-級関数 $(\Omega \longrightarrow \mathbb{C})$ を（Ω 上の）**テスト関数 (test function)** と呼び，その全体を $\mathscr{D}(\Omega)$ で表す．以後考察対象となるデルタ近似関数は $\mathbb{R}^n$ 上のテスト関数である．

$$f(t) \coloneqq \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & (t > 0), \\ 0 & (t \leq 0) \end{cases}$$

により $\mathbb{R}$ 上無限回微分可能な f を定めれば，

$$g(t) \coloneqq f(1-t)f(1+t) = \begin{cases} e^{-\frac{2}{1-t^2}} & (|t| < 1), \\ 0 & (|t| \geq 1) \end{cases}$$

で定める g もまた Libniz の公式より $\mathbb{R}$ 上で無限回微分可能である．指数関数は 0 を取りえないから

$$\{\, t \in \mathbb{R} \ ; \quad g(t) \neq 0 \,\} = \{\, t \in \mathbb{R} \ ; \quad |t| < 1 \,\}$$

が成り立つ．$\mathbb{R}^n \ni x \longmapsto |x|^2$ もまた無限回微分可能であるから

$$h(x) \coloneqq g(|x|^2) = g(x_1^2 + \cdots + x_n^2), \quad (\forall x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n)$$

とおけば $h \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ が満たされ，

$$c \coloneqq \int_{\mathbb{R}^n} h(x)\, dx > 0$$

に対し $\rho \coloneqq (1/c)h$ で定める $\rho \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ は

$$\operatorname{supp} \rho = \{\, x \in \mathbb{R}^n \ ; \quad |x| \leq 1 \,\}$$

かつ

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\,dx = 1$$

を満たす．

定義 9.1.1 (デルタ近似関数).　Dirac のデルタ関数を近似する関数をデルタ近似関数と呼び，任意の $\epsilon > 0$ に対し

$$\rho_\epsilon(x) := \epsilon^n \rho(x/\epsilon), \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n)$$

により定めるテスト関数 ρ_ϵ はデルタ近似関数である．

定理 9.1.2 (デルタ近似関数 ρ_ϵ の性質).

(1)　$\rho_\epsilon \geq 0$.

(2)　$\check{\rho}_\epsilon = \rho_\epsilon$.

(3)　$\operatorname{supp}\rho_\epsilon = \{\, x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \ |x| \leq \epsilon \,\}$.

(4)　$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\epsilon(x)\,dx = 1$.

定理 9.1.3 (テスト関数を任意に構成する).　任意に $\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合 K と開集合 U $(K \subset U)$ を取れば，

$$0 \leq \eta \leq 1, \quad \eta(x) = \begin{cases} 1 & (x \in K), \\ 0 & (x \in \mathbb{R}^n \backslash U) \end{cases}$$

を満たす $\eta \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ が存在する．

証明.　任意の $x \in K$ に対し $B(x;\epsilon_x) := \{\, y \in \mathbb{R}^n \ ; \ \ |x-y| < \epsilon_x \,\} \subset U$ を満たす $\epsilon_x > 0$ が存在し，コンパクト性から有限個の $x_1, \cdots, x_m \in K$ により $K \subset B(x_1, \epsilon_1/3) \cup \cdots \cup B(x_m, \epsilon_m/3)$ が成り立つ．ここで $\epsilon := \min\{\epsilon_{x_1}/3, \cdots, \epsilon_{x_m}/3\}$ とおけば

$$\eta(x) := \rho_\epsilon * \mathbb{1}_K(x) = \int_K \rho_\epsilon(x-y)\,dy, \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n)$$

が求めるテスト関数である．先ず任意の $\alpha \in \mathbb{N}^n$ に対して

$$\partial^\alpha \eta(x) = \int_K \partial^\alpha \rho_\epsilon(x-y)\,dy, \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n)$$

が成り立つから η は $\mathbb{R}^n$ 上で無限回微分可能であり，$x \in \mathbb{R}^n \backslash U$ なら $|x-y| > \epsilon$ $(\forall y \in K)$ より $\eta(x) = 0$ が従う．

$$\eta(x) = \int_K \rho_\epsilon(x-y)\,dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\epsilon(x-y)\,dy = 1$$

より $0 \leq \eta \leq 1$ が成り立ち，また

9.2　緩増加関数

定義 9.2.1 (緩増加 C^m-関数).　$f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{C}$ が C^m-級で，各 $\alpha\in\mathbb{N}^n$ に対して或る定数 C_α と $\ell_\alpha\in\mathbb{N}$ が存在し

$$|\partial^\alpha f(x)|\le C_\alpha(1+|x|^2)^{\ell_\alpha},\quad (\forall x\in\mathbb{R}^n,\ |\alpha|\le m) \tag{9.1}$$

が成り立つとき，f を緩増加 C^m-関数 (tempered C^m-function) という．$m=0$ の場合 f を緩増加連続関数と呼び，$m=\infty$ の場合は緩増加関数と呼ぶ．また緩増加連続関数，緩増加関数の全体のなす線形空間を $\mathscr{O}_C$, $\mathscr{O}_M$ で表す．

緩増加 C^m-関数 f に対し (9.1) を満たす C_α と ℓ_α について，$C:=\max_{|\alpha|\le m}C_\alpha$, $\ell:=\max_{|\alpha|\le m}\ell_\alpha$ とおけば

$$|\partial^\alpha f(x)|\le C(1+|x|^2)^{\ell},\quad (\forall x\in\mathbb{R}^n,\ |\alpha|\le m) \tag{9.2}$$

が成立する．特に緩増加関数に対しては任意の $m\in\mathbb{N}$ ごとに C,ℓ が定まり (9.2) が満たされる．

定理 9.2.2 (緩増加連続関数により定まる緩増加超関数).　緩増加連続関数 $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{C}$ に対して

$$u_f:\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\ni\varphi\longmapsto\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\varphi(x)\,dx$$

により定める u_f は緩増加超関数である．またこの対応 $\mathscr{O}_C\longrightarrow\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ $(f\longmapsto u_f)$ は線型単射である．

証明.　f に対し或る定数 C と $\ell\in\mathbb{N}$ が存在して (9.1) が満たされ

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)||\varphi(x)|\,dx\le C\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|^2)^{\ell}|\varphi(x)|\,dx\le\left[C\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+|x|^2)^n}\,dx\right]p_{m+\ell}(\varphi)$$

が成立する．可積分性より u_f は線型性をもち，また半ノルム $p_{m+\ell}$ で抑えられているから u_f の連続性も出る．上の可積分性より $f\longmapsto u_f$ の線型性も従い，単射であることは変分法の基本補題より得られる．∎

9.3　緩増加超関数の構造定理

補題 9.3.1.　Λ を有限集合，$\big((X_\lambda,\|\cdot\|_\lambda)\big)_{\lambda\in\Lambda}$ をノルム空間の系とする．このとき，$f_\lambda\in X_\lambda^*$ $(\lambda\in\Lambda)$ を取り

$$F(x):=\sum_{\lambda\in\Lambda}f_\lambda(x_\lambda),\quad\Big(\forall x=(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\in\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda\Big) \tag{9.3}$$

により線型汎関数 F を定めれば $F\in\left(\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda\right)^*$ が満たされる．そしてこの対応により定まる次の写像

$$W:\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda^*\ni f=(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\longmapsto F\in\left(\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda\right)^*$$

は線型（・位相）同型である．

証明.　$X_\lambda^*, \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda^*, (\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda)^*$ におけるノルムをそれぞれ $\|\cdot\|_{X_\lambda^*}, \|\cdot\|_{\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda^*}, \|\cdot\|_{(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda)^*}$ と表す．先ず (9.3) において，

$$|F(x)| \leq \sum_{\lambda\in\Lambda} |f_\lambda(x_\lambda)| \leq \max_{\lambda\in\Lambda} \|f_\lambda\|_{X_\lambda^*} \sum_{\lambda\in\Lambda} \|x_\lambda\|_\lambda \tag{9.4}$$

となるから $F \in (\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda)^*$ を得る．次に W が全単射であることを示す．実際，任意の $G \in (\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda)^*$ に対して

$$x^{(\lambda)}(\nu) = x_\nu^{(\lambda)} := \begin{cases} x_\lambda & (\nu = \lambda) \\ 0 & (\nu \neq \lambda) \end{cases}, \quad g_\lambda(x_\lambda) := G(x^{(\lambda)}) \quad (\forall x_\lambda \in X_\lambda)$$

と定めれば $g_\lambda \in X_\lambda^*$ が成り立つから W は全射であり，また $f, g \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda^*$ に対し $Wf = Wg$ が満たされているとき，

$$f_\lambda(x_\lambda) = (Wf)(x^{(\lambda)}) = (Wg)(x^{(\lambda)}) = g(x_\lambda), \quad (\forall x_\lambda \in X_\lambda,\ \forall \lambda \in \Lambda)$$

が従い W の単射性が出る．そして

$$\begin{aligned} W(\alpha f + \beta g)(x) &= \sum_{\lambda\in\Lambda} (\alpha f_\lambda + \beta g_\lambda)(x_\lambda) \\ &= \alpha \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(x_\lambda) + \beta \sum_{\lambda\in\Lambda} g_\lambda(x_\lambda) = (\alpha W f + \beta W g)(x), \quad (\forall x = (x_\lambda)_\lambda,\ f = (f_\lambda)_\lambda, g = (g_\lambda)_\lambda,\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}) \end{aligned}$$

により W は線型性をもち，かつ (9.4) より

$$\|Wf\|_{(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda)^*} \leq \max_{\lambda\in\Lambda} \|f_\lambda\|_{X_\lambda^*} \leq \|f\|_{\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda^*}, \quad \left(\forall f = (f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda^*\right)$$

が成り立つから W は連続であり，開写像定理より W^{-1} もまた連続である．∎

補題 9.3.2.　任意の $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ に対して或る $c = c(u) > 0$ と $m = m(u) \in \mathbb{N}$ が存在し次を満たす:

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq c p_m(\varphi), \quad (\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)).$$

証明.　背理法で証明する．主張が満たされない場合，任意の $k \in \mathbb{Z}_+$ に対して或る $\varphi_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ が存在し

$$|\langle u, \varphi_k \rangle| > k p_k(\varphi_k)$$

が成立するから，$\psi_k := \varphi_k/[k p_k(\varphi_k)]$ $(k \in \mathbb{Z}_+)$ とおけば[*1]

$$|\langle u, \psi_k \rangle| = \frac{|\langle u, \varphi_k \rangle|}{k p_k(\varphi_k)} > 1 \quad (\forall k \in \mathbb{Z}_+) \tag{9.5}$$

が従う．一方で半ノルム系 $(p_m)_{m\in\mathbb{N}}$ は $p_0 \leq p_1 \leq p_2 \leq \cdots$ を満たすから，任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して

$$p_m(\psi_k) = \frac{p_m(\varphi_k)}{k p_k(\varphi_k)} \leq \frac{1}{k} \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty)$$

が成り立ち，u の連続性から $\langle u, \psi_k \rangle \longrightarrow \langle u, 0 \rangle = 0$ となるはずであるが，これは (9.5) と矛盾する．∎

[*1] $|\langle u, \varphi_k \rangle| > 0$ より φ_k は零写像ではない．従って $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ の半ノルム p_k の定義より $p_k(\varphi_k) > 0$ が満たされている．

定理 9.3.3 (緩増加超関数の構造定理).　$u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ とし，補題 9.3.2 により対応する $m \in \mathbb{N}$ を取る．また以下では α は n 次元多重指数を表すものとする．このとき或る系 $(g_\alpha)_{|\alpha|\leq m} \subset \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ が存在して次を満たす:

$$\langle u, \varphi \rangle = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^m g_\alpha(x) \left[\partial_1 \cdots \partial_n \partial^\alpha \varphi(x)\right] \, dx, \quad (\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)).$$

証明.　以下 $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ と $c > 0,\ m \in \mathbb{N}$ は固定する．

第一段　任意の $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$p_m(\varphi) \leq (m+1) \sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|y|^2)^m \left|\partial_1 \cdots \partial_n \partial^\alpha \varphi(y)\right| \, dy \tag{9.6}$$

が成り立つことを示す．任意の $\alpha \in \mathbb{N}^n$ と $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して，$x_j \geq 0$ を満たす $1 \leq j \leq n$ の個数を # で表し，$x_j < 0$ なら積分範囲 I_j を $(-\infty, x_j]$，$x_j \geq 0$ なら $I_j = [x_j, \infty)$ とすれば

$$\partial^\alpha \varphi(x) = (-1)^\# \int_{I_1} \cdots \int_{I_n} \partial_1 \cdots \partial_n \partial^\alpha \varphi(y) \, dy_n \cdots dy_1$$

が成り立つ．そして $y \in I_1 \times \cdots \times I_n$ なら $|x| \leq |y|$ が満たされるから，$0 \leq k \leq m$ に対し

$$\begin{aligned}
(1+|x|^2)^k \left|\partial^\alpha \varphi(x)\right| &\leq \int_{I_1} \cdots \int_{I_n} (1+|x|^2)^k \left|\partial_1 \cdots \partial_n \partial^\alpha \varphi(y)\right| \, dy_n \cdots dy_1 \\
&\leq \int_{I_1} \cdots \int_{I_n} (1+|y|^2)^k \left|\partial_1 \cdots \partial_n \partial^\alpha \varphi(y)\right| \, dy_n \cdots dy_1 \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1+|y|^2)^k \left|\partial_1 \cdots \partial_n \partial^\alpha \varphi(y)\right| \, dy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1+|y|^2)^m \left|\partial_1 \cdots \partial_n \partial^\alpha \varphi(y)\right| \, dy
\end{aligned}$$

が従い

$$\begin{aligned}
p_m(\varphi) &= \sum_{|\alpha|+k\leq m} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^k \left|\partial^\alpha \varphi(x)\right| \\
&\leq \sum_{|\alpha|+k\leq m} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|y|^2)^m \left|\partial_1 \cdots \partial_n \partial^\alpha \varphi(y)\right| \, dy \\
&\leq (m+1) \sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|y|^2)^m \left|\partial_1 \cdots \partial_n \partial^\alpha \varphi(y)\right| \, dy
\end{aligned}$$

を得る．

第二段　$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対し，$\psi_\alpha^\varphi(y) \coloneqq (1+|y|^2)^m \partial_1 \cdots \partial_n \partial^\alpha \varphi(y)$ により $\psi^\varphi = (\psi_\alpha^\varphi)_{|\alpha|\leq m}$ を定める．このとき

$$\Delta \coloneqq \left\{ \psi^\varphi = (\psi_\alpha^\varphi)_{|\alpha|\leq m} \ ; \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \right\}$$

で定める Δ は対応 $\varphi \longmapsto \psi^\varphi$ により $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ と線型同型となる．実際，この写像の線型性は微分の性質から従い，Δ の作り方より全射である．また $\varphi, \eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して，$(\psi_\alpha^\varphi)_{|\alpha|\leq m} = (\psi_\alpha^\eta)_{|\alpha|\leq m}$ ならば

$$(1+|y|^2)^m \partial_1 \cdots \partial_n \varphi(y) = (1+|y|^2)^m \partial_1 \cdots \partial_n \eta(y), \quad (\forall y \in \mathbb{R}^n)$$

が従い

$$
\begin{aligned}
\varphi(x) &= \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} \partial_1 \cdots \partial_n \varphi(y)\, dy_n \cdots dy_1 \\
&= \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} \partial_1 \cdots \partial_n \eta(y)\, dy_n \cdots dy_1 = \eta(x), \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n)
\end{aligned}
$$

が得られるから $\varphi \longmapsto \psi^{\varphi}$ は単射である．いま，

$$
\| \psi^{\varphi} \|_{\Delta} \coloneqq \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \psi_{\alpha}^{\varphi}(y) \right| \, dy = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |y|^2)^m \left| \partial_1 \cdots \partial_n \partial^{\alpha} \varphi(y) \right| \, dy \tag{9.7}
$$

として $\|\cdot\|_{\Delta}$ を定めれば，ψ_{α}^{φ} の連続性よりこれは Δ 上のノルムとなる．

第三段　ノルム空間 Δ 上の線型汎関数 L を

$$
L\psi^{\varphi} \coloneqq \langle u, \varphi \rangle, \quad (\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))
$$

により定めれば，L は連続である．実際 (9.6) と (9.7) より

$$
|L\psi^{\varphi}| \leq c(m+1) \| \psi^{\varphi} \|_{\Delta}, \quad (\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))
$$

が成立する．

第四段　$\psi^{\varphi} = (\psi_{\alpha}^{\varphi})_{|\alpha| \leq m}$ に対し，各成分 ψ_{α}^{φ} にこれを代表とする $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$ の元を対応させる等長な線型単射を U と表す:

$$
U : \Delta \ni \psi^{\varphi} \longmapsto U\psi^{\varphi} \in \prod_{|\alpha| \leq m} \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n).
$$

U の値域をその像に制限すれば逆写像 U^{-1} が存在し，合成写像 LU^{-1} は部分空間 $U\Delta$ 上で線型連続であるから Hahn-Banach の拡張定理より LU^{-1} のノルム保存拡張 $\tilde{L} \in \left(\prod_{|\alpha| \leq m} \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n) \right)^*$ が存在する．従って，

$$
W : \prod_{|\alpha| \leq m} \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)^* \longrightarrow \left(\prod_{|\alpha| \leq m} \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n) \right)^*
$$

を補題 9.3.1 における同型写像とすれば，或る $(\Phi_{\alpha})_{|\alpha| \leq m} \in \prod_{|\alpha| \leq m} \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)^*$ がただ一つ存在して $\tilde{L} = W\left((\Phi_{\alpha})_{|\alpha| \leq m} \right)$ と表される．一方でそれぞれの Φ_{α} には或る $g_{\alpha} \in \mathrm{L}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ がただ一つ対応して

$$
\Phi_{\alpha}(f) = \int_{\mathbb{R}^n} g_{\alpha}(x) f(x)\, dx, \quad \left(\forall f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n) \right)
$$

を満たすから，(9.3) で定める演算により

$$
\begin{aligned}
\langle u, \varphi \rangle &= L\psi^{\varphi} = \tilde{L} U \psi^{\varphi} = \left[W\left((\Phi_{\alpha})_{|\alpha| \leq m} \right) \right] U\psi^{\varphi} \\
&= \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^n} g_{\alpha}(x) \psi_{\alpha}^{\varphi}(x)\, dx = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^n} g_{\alpha}(x) (1 + |x|^2)^m \partial_1 \cdots \partial_n \partial^{\alpha} \varphi(x)\, dx
\end{aligned}
$$

が成り立ち定理の主張を得る． ∎

定理 9.3.4 (緩増加超関数の合成積の性質).　$u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ とする．

(1)　合成積 $u * \varphi$ に対し或る緩増加関数 f が存在して $u * \varphi = u_f$ を満たす．

(2)　$\mathscr{F}[u * \varphi] = \mathscr{F}[u] \mathscr{F}[\varphi]$.

(3)　$\mathscr{F}[u\varphi] = (2\pi)^{-n} \mathscr{F}[u] * \mathscr{F}[\varphi]$.

証明.

(1) 構造定理より u に対して或る $(g_\alpha)_{|\alpha|\le m}\subset \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ が存在し

$$\langle u,\varphi\rangle=\sum_{|\alpha|\le m}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|^2)^m g_\alpha(x)\left[\partial_1\cdots\partial_n\partial^\alpha\varphi(x)\right]\,dx,\quad (\forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)).$$

と表現できるから，Fubini の定理より任意の $\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\begin{aligned}\langle u*\varphi,\psi\rangle&=\langle u,\check{\varphi}*\psi\rangle\\&=\sum_{|\alpha|\le m}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|^2)^m g_\alpha(x)\left[\partial_1\cdots\partial_n\partial^\alpha\left(\check{\varphi}*\psi\right)(x)\right]\,dx\\&=\sum_{|\alpha|\le m}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|^2)^m g_\alpha(x)\left[\partial_1\cdots\partial_n\partial^\alpha\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(y-x)\psi(y)\,dy\right]\,dx\\&=\sum_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|^2)^m g_\alpha(x)\left[\int_{\mathbb{R}^n}\partial_1\cdots\partial_n\partial^\alpha\varphi(y-x)\psi(y)\,dy\right]\,dx\\&=\sum_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|^2)^m g_\alpha(x)\,\partial_1\cdots\partial_n\partial^\alpha\varphi(y-x)\,dx\right]\psi(y)\,dy\end{aligned}$$

が成立する．このとき，各 α に対して

$$f_\alpha:\mathbb{R}^n\ni y\longmapsto\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|^2)^m g_\alpha(x)\,\partial_1\cdots\partial_n\partial^\alpha\varphi(y-x)\,dx$$

は緩増加関数である．表記上簡単にするため $\partial_1\cdots\partial_n\partial^\alpha\varphi$ を η と書き，先ずは f_α の微分可能性を示す．実際

$$(1+|x|^2)\le(1+2|y-x|^2+2|y|^2)\le 2(1+|y-x|^2)(1+|y|^2)$$

であることを用いれば，任意の $1\le k\le n$ に対して

$$(1+|x|^2)^m|g_\alpha(x)|\,|\partial_k\eta(y-x)|\le 2^m\,\|g_\alpha\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n)}(1+|y|^2)^m p_{m+n+1}(\eta)\frac{1}{(1+|y-x|^2)^n},\quad(\forall x\in\mathbb{R}^n)$$

が成り立ち，右辺は x の関数として $\mathbb{R}^n$ 上可積分である．よって Lebesgue の収束定理より

$$\partial_k\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|^2)^m g_\alpha(x)\,\eta(y-x)\,dx=\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|^2)^m g_\alpha(x)\,\partial_k\eta(y-x)\,dx$$

が従い，帰納法により任意の $\beta\in\mathbb{N}^n$ に対して

$$\partial^\beta\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|^2)^m g_\alpha(x)\,\eta(y-x)\,dx=\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|^2)^m g_\alpha(x)\,\partial^\beta\eta(y-x)\,dx$$

が出る．そして

$$\begin{aligned}\left|\partial^\beta f_\alpha(y)\right|&\le\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|^2)^m|g_\alpha(x)|\,\left|\partial^\beta\eta(y-x)\right|\,dx\\&\le\left[2^m\,\|g_\alpha\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n)}\,p_{m+n+|\beta|}(\eta)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+|y-x|^2)^n}\,dx\right](1+|y|^2)^m\end{aligned}$$

が満たされるから f_α は緩増加関数であり，

$$f\coloneqq\sum_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}f_\alpha$$

により緩増加関数 f を定めれば $u*\varphi=u_f$ が得られる． ∎

9.4　緩増加超関数の台

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ を緩増加連続関数として，定理 9.2.2 で定める緩増加超関数 u_f の台を考察する．いま，$\Omega := (\operatorname{supp} f)^c$ とおけば，$\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega$ を満たす全ての $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して（定理 9.1.3 により φ は存在する．）

$$\left\langle u_f, \varphi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\, dx = 0$$

が成立する．これをもとに次を定義する．

定義 9.4.1 (緩増加関数の台).　$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とする．緩増加超関数 $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ が Ω で 0 であるとは, $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega$ を満たす任意の $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対し $\langle u, \varphi \rangle = 0$ が成り立つことであると定める．そして u の台 $\operatorname{supp} u$ を次で定める:

$$\operatorname{supp} u := \{u \text{ が } 0 \text{ になる最大の開集合}\}^c = \left[\bigcup_{\substack{\Omega:\text{open} \\ u:0 \text{ on } \Omega}} \Omega \right]^c .$$

定理 9.4.2.　緩増加連続関数 f に対して $\operatorname{supp} u_f = \operatorname{supp} f$ が成り立つ．

証明.　上で述べたことにより u_f は $(\operatorname{supp} f)^c$ で 0 になるから，$(\operatorname{supp} f)^c \subset (\operatorname{supp} u)^c$ すなわち $\operatorname{supp} u_f \subset \operatorname{supp} f$ が成り立つ．一方で任意の $x \in (\operatorname{supp} u_f)^c$ に対し[*2] 或る開近傍 U_x が存在し，$\operatorname{supp}\varphi \subset U_x$ を満たす任意の $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\int_{U_x} f(y)\varphi(y)\, dy = 0$$

が成立する．よって変分法の基本補題と f の連続性より f は U_x 上で 0 に張り付くから，

$$(\operatorname{supp} u_f)^c \subset \{\, x \in \mathbb{R}^n \ ; \quad f(x) = 0 \,\}^\circ = (\operatorname{supp} f)^c$$

が従い $\operatorname{supp} u_f \supset \operatorname{supp} f$ を得る．　∎

補題 9.4.3 (閉集合とコンパクト集合の和は閉).　$A, K \subset \mathbb{R}^n$ をそれぞれ閉集合，コンパクト集合とする．このとき

$$A + K = \{\, z = x + y \in \mathbb{R}^n \ ; \quad x \in A,\ y \in K \,\}$$

は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である．

証明.　$A + K$ の完備性を示す．$(z_n)_{n=1}^\infty$ を $A + K$ の Cauchy 列とし，$z_n = x_n + y_n$ $(x_n \in A,\ y_n \in K,\ n = 1, 2, \cdots)$ と考える．

第一段　$(x_n)_{n=1}^\infty$ が Cauchy 列である場合，$|y_n - y_m| \leq |z_n - z_m| + |x_n - x_m| \longrightarrow 0$ $(n, m \longrightarrow \infty)$ より $(y_n)_{n=1}^\infty$ も Cauchy 列である．A, K が閉集合であるから $x_n \longrightarrow {}^\exists x \in A,\ y_n \longrightarrow {}^\exists y \in K$ が満たされ，$z := x + y \in A + K$ とおけば

$$|z_n - z| \leq |x_n - x| + |y_n - y| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

[*2] $\operatorname{supp} u_f = \mathbb{R}^n$ の場合は自動的に $\operatorname{supp} u_f \supset \operatorname{supp} f$ が成立する．

が従う．$(x_n)_{n=1}^\infty$ と $(y_n)_{n=1}^\infty$ の立場を交換しても同じことが言える．

第二段　$(x_n)_{n=1}^\infty$ と $(y_n)_{n=1}^\infty$ のどちらも Cauchy 列でない場合，$(y_n)_{n=1}^\infty$ は有界であるから或る部分列 $(y_{n_k})_{k=1}^\infty$ が K で収束する．前段の結果より $(z_{n_k})_{k=1}^\infty$ は $A+K$ で収束し，$(z_n)_{n=1}^\infty$ も部分列と同じ極限に収束する．∎

定理 9.4.4.　$u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ とする．

(1)　任意のテスト関数 $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ に対し次が成り立つ:

$$\operatorname{supp} u * \varphi \subset \operatorname{supp} u + \operatorname{supp} \varphi. \tag{9.8}$$

(2)　$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ の位相に関して $u * \rho_\epsilon \longrightarrow u$ $(\epsilon \longrightarrow 0)$ が成立する．つまり次が成り立つ．

$$\langle u * \rho_\epsilon, \varphi \rangle \longrightarrow \langle u, \varphi \rangle, \quad (\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)).$$

証明.

(1)　$\operatorname{supp} u \neq \mathbb{R}^n$ の場合を考える．補題 9.4.3 より $\operatorname{supp} u + \operatorname{supp} \varphi$ は閉集合であるから，$x \notin \operatorname{supp} u + \operatorname{supp} \varphi$ を取れば $U \cap \operatorname{supp} u + \operatorname{supp} \varphi = \emptyset$ を満たす開近傍 U が存在する．このとき $U \subset (\operatorname{supp} u * \varphi)^c$ が成立し，

$$(\operatorname{supp} u + \operatorname{supp} \varphi)^c \subset (\operatorname{supp} u * \varphi)^c$$

が従い (9.8) が得られる．実際，$\operatorname{supp} \psi \subset U$ を満たす任意の $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ について

$$\check{\varphi} * \psi(y) = \int_U \varphi(z-y)\psi(z)\, dz = 0, \quad (\forall y \in \operatorname{supp} u)$$

が成り立ち[*3]

$$\langle u * \varphi, \psi \rangle = \langle u, \check{\varphi} * \psi \rangle = 0$$

が出る．すなわち $u * \varphi$ は U で 0 であり $U \subset (\operatorname{supp} u * \varphi)^c$ が満たされる．

(2)　任意の $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して $\langle u * \rho_\epsilon, \varphi \rangle = \langle u, \check{\rho}_\epsilon * \varphi \rangle = \langle u, \rho_\epsilon * \varphi \rangle$ が成り立つから，$|\langle u, \rho_\epsilon * \varphi - \varphi \rangle| \longrightarrow 0$ $(\epsilon \longrightarrow 0)$ となることを示せばよい．補題 9.3.2 より u に対し或る $c > 0$ と $m \in \mathbb{N}$ が存在して

$$|\langle u, \rho_\epsilon * \varphi - \varphi \rangle| \leq c p_m(\rho_\epsilon * \varphi - \varphi), \quad (\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$$

を満たす．

$$\begin{aligned} p_m(\rho_\epsilon * \varphi - \varphi) &= \sum_{|\alpha|+k \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^k \left| \rho_\epsilon * \partial^\alpha \varphi(x) - \partial^\alpha \varphi(x) \right| \\ &= \sum_{|\alpha|+k \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^k \left| \int_{|y| \leq \epsilon} (\partial^\alpha \varphi(x-y) - \partial^\alpha \varphi(x))\, \rho_\epsilon(y)\, dy \right| \\ &\leq \sum_{|\alpha|+k \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{|y| \leq \epsilon} (1+|x|^2)^k \left| \partial^\alpha \varphi(x-y) - \partial^\alpha \varphi(x) \right| \rho_\epsilon(y)\, dy \end{aligned} \tag{9.9}$$

[*3] 任意の $y \in \operatorname{supp} u$ に対して $z - y \notin \operatorname{supp} \varphi$ $(\forall z \in U)$ が満たされる．

まで半ノルムを展開し

$$\partial^\alpha \varphi(x-y) - \partial^\alpha \varphi(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\partial^\alpha \varphi(x-ty)\, dt = -\sum_{j=1}^n y_j \int_0^1 \partial_j \partial^\alpha \varphi(x-ty)\, dt$$

と式変形すれば，$\epsilon < 1$ なら $(1+|x|^2) \leq 2(1+|ty|^2)(1+|x-ty|^2) \leq 4(1+|x-ty|^2)$ $(|y| \leq \epsilon,\ |t| \leq 1)$ より

$$\begin{aligned}
(9.9) &= \sum_{|\alpha|+k\leq m} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \int_{|y|\leq\epsilon} (1+|x|^2)^k \left| \sum_{j=1}^n y_j \int_0^1 \partial_j \partial^\alpha \varphi(x-ty)\, dt \right| \rho_\epsilon(y)\, dy \\
&\leq n\epsilon \sum_{|\alpha|+k\leq m} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \int_{|y|\leq\epsilon} (1+|x|^2)^k \int_0^1 \left|\partial_j \partial^\alpha \varphi(x-ty)\right|\, dt\, \rho_\epsilon(y)\, dy \\
&\leq 4^m n\epsilon \sum_{|\alpha|+k\leq m} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \int_{|y|\leq\epsilon} \int_0^1 (1+|x-ty|^2)^k \left|\partial_j \partial^\alpha \varphi(x-ty)\right|\, dt\, \rho_\epsilon(y)\, dy \\
&\leq (4^m n p_{m+1}(\varphi))\, \epsilon
\end{aligned}$$

が成り立ち，ϵ を潰して $|\langle u * \rho_\epsilon, \varphi\rangle - \langle u, \varphi\rangle| \leq c p_m(\rho_\epsilon * \varphi - \varphi) \longrightarrow 0$ $(\epsilon \longrightarrow 0)$ を得る． ∎

定理 9.4.5 (コンパクト台を持つ緩増加超関数の Fourier 変換). $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ に対し，$K := \operatorname{supp} u$ とおく．このとき K 上で 1 を満たす任意の $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\hat{u}(\xi) := \left\langle u, e^{-ix\cdot\xi}\varphi \right\rangle {}^{*4}, \quad (\xi \in \mathbb{R}^n)$$

と定めれば，左辺は K 上で 1 を満たす急減少関数の選び方に依らずに確定する．また $\xi \longmapsto \hat{u}(\xi)$ は緩増加である．

---

*4 正確には $a_\xi : \mathbb{R}^n \ni x \longmapsto e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x)$ で定まる急減少関数 a_ξ を用いて $\hat{u}(\xi) := \left\langle u, a_\xi \right\rangle$ と表す．

付録 A

弱収束

A.1 ノルム空間における弱収束

$\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}$ 又は $\mathbb{C}$ とする．ノルム空間 X のノルムを $\|\cdot\|_X$ と表記し，また $J_X : X \to X^{**}$ を自然な等長単射とする．

定義 A.1.1 (弱収束). X を $\mathbb{K}$ 上のノルム空間とする．X の点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ が $x \in X$ に弱収束するとは

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) \quad (\forall f \in X^*)$$

が成り立つことを言い，$\text{w-}\lim_{n\to\infty} x_n = x$ と表記する．

定義 A.1.2 (汎弱収束). X を $\mathbb{K}$ 上のノルム空間とする．X^* の列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ が $f \in X^*$ に汎弱収束するとは

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad (\forall x \in X)$$

が成り立つことを言い，$*\text{w-}\lim_{n\to\infty} f_n = f$ と表記する．

定理 A.1.3 (弱収束及び汎弱収束極限の一意性). X を $\mathbb{K}$ 上のノルム空間とする．X の点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ が $u, v \in X$ に弱収束するなら $u = v$ が従い，X^* の列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ が $f, g \in X^*$ に汎弱収束するなら $f = g$ が従う．

証明. $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ が $u, v \in X$ に弱収束するとき，任意の $f \in X^*$ に対して

$$|f(u) - f(v)| \leq |f(u) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(v)| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成り立ち，Hahn-Banach の定理の系より $u = v$ が従う．また $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ が $f, g \in X^*$ に汎弱収束するとき，任意の $x \in X$ に対して

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - g(x)| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成り立ち $f = g$ が従う． ∎

定理 A.1.4 (弱収束と自然な等長単射の関係). X を $\mathbb{K}$ 上のノルム空間とする．$x_n \in X$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が $x \in X$ に弱収束することと $J_X x_n \in X^{**}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が $J_X x \in X^{**}$ に汎弱収束することは同値である．

証明.　自然な等長単射の定義より任意の $f \in X^*$ について $f(x_n) = J_X x_n(f)$ であるから，

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x) \quad (\forall f \in X^*)$$

が成り立つことと

$$\lim_{n \to \infty} J_X x_n(f) = J_X x(f) \quad (\forall f \in X^*)$$

が成り立つことは同じである． ∎

定理 A.1.5 (汎弱収束列の有界性).　X を $\mathbb{K}$ 上のノルム空間とし $X \neq \{0\}$ を仮定する．X^* の列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ が各点 $x \in X$ で Cauchy 列をなすとき，$(f_n)_{n=1}^{\infty}$ は有界となりさらに汎弱収束極限 $f \in X^*$ が存在して次が成り立つ [*1]:

$$\|f\|_{X^*} \leq \liminf_{n \to \infty} \|f_n\|_{X^*}.$$

証明.　任意の $x \in X$ に対して $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ は有界であるから，一様有界性の原理より $(\|f_n\|_{X^*})_{n=1}^{\infty}$ が有界となる．また

$$f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x) \quad (\forall x \in X) \tag{A.1}$$

として $f : X \to \mathbb{K}$ を定めれば，f は X^* に属する:

線型性　任意に $x, x_1, x_2 \in X$ と $\alpha \in \mathbb{K}$ を取れば

$$\begin{aligned} |f(x_1 + x_2) - f(x_1) - f(x_2)| &\leq |f(x_1 + x_2) - f_n(x_1 + x_2)| + |f(x_1) - f_n(x_1)| + |f(x_2) - f_n(x_2)| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \\ |f(\alpha x) - \alpha f(x)| &\leq |f(\alpha x) - f_n(\alpha x)| + |\alpha| \, |f(x) - f_n(x)| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

が成り立つ．

有界性　絶対値の連続性より

$$|f(x)| = \lim_{n \to \infty} |f_n(x)| \leq \liminf_{n \to \infty} \|f_n\|_{X^*} \|x\|_X$$

が成り立ち，特に $\|x\|_X = 1$ として

$$\sup_{\|x\|_X = 1} |f(x)| \leq \liminf_{n \to \infty} \|f_n\|_{X^*} < \infty$$

が従う．

f が f_n の汎弱収束極限であることは (A.1) より従う． ∎

[*1] 右辺は有限確定する．実際 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ が有界であるとして $M := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_{X^*}$ とおけば，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$\inf_{\nu \geq n} \|f_\nu\|_{X^*} \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_{X^*} = M$$

が成り立つから

$$\liminf_{n \to \infty} \|f_n\|_{X^*} \leq M$$

が従う．

定理 A.1.6 (弱収束列の有界性). X を $\mathbb{K}$ 上のノルム空間とし $X \neq \{0\}$ を仮定する．X の列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ が $x \in X$ に弱収束するとき，$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ は有界列であり次が成り立つ:

$$\| x \|_X \leq \liminf_{n\to\infty} \| x_n \|_X .$$

証明. 定理 A.1.4 より $(J_X x_n)_{n=1}^{\infty}$ が $J_X x \in X^{**}$ に汎弱収束するから，定理 A.1.5 より $(J_X x_n)_{n=1}^{\infty}$ は有界列で

$$\| J_X x \|_{X^{**}} \leq \liminf_{n\to\infty} \| J_X x_n \|_{X^{**}}$$

が成り立つ．J_X は等長であるから定理の主張が従う． ∎

定理 A.1.7 (反射的 Banach 空間の点列が弱収束するための十分条件). X を $\mathbb{K}$ 上の反射的 Banach 空間として点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ を取る．任意の $f \in X^*$ に対して $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列となるなら，$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ は或る $x \in X$ に弱収束する．

証明. $f(x_n) = J_X x_n(f)$ であることと定理の仮定より，任意の $f \in X^*$ で $(J_X x_n(f))_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{K}$ の Cauchy 列をなすから，

$$J(f) \coloneqq \lim_{n\to\infty} J_X x_n(f) \quad (\forall f \in X^*)$$

として $J : X^* \to \mathbb{K}$ を定めれば定理 A.1.5 より $J \in X^{**}$ が成り立つ．X の反射性から J に対し或る $x \in X$ が存在して $J = J_X x$ を満たし，定理 A.1.4 より定理の主張を得る． ∎

付録 B

Riemann の級数定理

複素数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ に対し，$\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への全単射 φ を用いて

$$a'_n := a_{\varphi(n)} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

により定める数列 $(a'_n)_{n=1}^{\infty}$ を $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ の再配列 (rearrangement) という．

定理 B.0.1 (Riemann の級数定理). $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ を実数列とする．$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ が条件収束するとき，任意の実数 $\beta \in \mathbb{R}$ に対して $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ の或る再配列 $(\alpha'_n)_{n=1}^{\infty}$ が存在し $\beta = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha'_n$ を満たす．

証明.

$$p_n := \frac{|\alpha_n| + \alpha_n}{2}, \quad q_n := \frac{|\alpha_n| - \alpha_n}{2} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

とおけば，$(p_n)_{n=1}^{\infty}, (q_n)_{n=1}^{\infty}$ は全て非負項で構成され，仮定より

$$p_n \longrightarrow 0, \quad q_n \longrightarrow 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} p_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} q_n = \infty$$

が成り立つ．実際 $\alpha_n \longrightarrow 0$ により $p_n, q_n \longrightarrow 0$ が満たされ，また $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ か $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ の一方が収束すると

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n = \sum_{n=1}^{N} p_n - \sum_{n=1}^{N} q_n \quad (\forall N \in \mathbb{N})$$

よりもう一方の級数も収束するから，$\infty = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n + q_n) < \infty$ が従い矛盾が生じる．α_n $(n = 1, 2, \cdots)$ から添数の順に非負項を取り出し，取り出した順番に並べて $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ とおく．同様に負値の項を取り出しその絶対値の列を $(Q_n)_{n=1}^{\infty}$ とおく．このとき $(P_n)_{n=1}^{\infty}, (Q_n)_{n=1}^{\infty}$ はそれぞれ $(p_n)_{n=1}^{\infty}, (q_n)_{n=1}^{\infty}$ と 0 の項を除いて一致するから

$$P_n \longrightarrow 0, \quad Q_n \longrightarrow 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} P_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} Q_n = \infty \tag{B.1}$$

が満たされる．今，任意に $\beta \in \mathbb{R}$ を取り，

$$P_1 + P_2 + \cdots + P_m > \beta$$

を満たす最小の m を s_1 と決める．次に

$$P_1 + \cdots + P_{s_1} - Q_1 - Q_2 - \cdots - Q_m < \beta$$

を満たす最小の m を u_1 と決める．始めの要領で

$$P_1 + \cdots + P_{s_1} - Q_1 - \cdots - Q_{u_1} + P_{s_1+1} + \cdots + P_m > \beta$$

を満たす最小の m を s_2 とし，

$$P_1 + \cdots + P_{s_1} - Q_1 - \cdots - Q_{u_1} + P_{s_1+1} + \cdots + P_{s_2} - Q_{u_1+1} - \cdots - Q_m < \beta$$

を満たす最小の m を u_2 とする．(B.1) より正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n$ が発散するからこの操作は可能であり，同様の操作を繰り返して $(s_n)_{n=1}^{\infty}, (u_n)_{n=1}^{\infty}$ を構成すれば $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ の再配列 $P_1, \cdots, P_{s_1}, Q_1, \cdots, Q_{u_1}, P_{s_1+1}, \cdots, P_{s_2}, Q_{u_1+1}, \cdots$ を得る．この再配列の部分和を A_n $(n = 1, 2, \cdots)$ と表す．(B.1) より任意の $\epsilon > 0$ に対し或る $K \in \mathbb{N}$ が存在して

$$P_m,\ Q_m < \epsilon \quad (\forall m \geq s_K + u_K)$$

を満たすから，$s_k \leq n < u_k$ $(k > K)$ なら

$$A_n \geq \beta, \quad A_n - P_{s_k} \leq \beta$$

より

$$0 \leq A_n - \beta \leq P_{s_k} < \epsilon$$

が成立し，或は $u_k \leq n < s_{k+1}$ $(k \geq K)$ なら

$$A_n \leq \beta, \quad A_n + Q_{u_k} \geq \beta$$

より

$$0 \leq \beta - A_n \leq Q_{u_k} < \epsilon$$

が成立するから，いずれの場合も

$$|A_n - \beta| < \epsilon \quad (\forall n \geq s_K + u_K)$$

が満たされ，$\epsilon > 0$ の任意性より定理の主張が得られる． ■

系 B.0.2 (**絶対収束と無条件収束は同値**).　任意の複素数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ に対し次は同値である:

(1)　$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$.

(2)　任意の全単射 $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ に対し $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{C}$.

証明.

(1) ⇒ (2)　$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を任意の全単射とする．任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し $N' := \max_{1 \leq n \leq N} \varphi(n)$ とおけば

$$\sum_{n=1}^{N} \left| a_{\varphi(n)} \right| \leq \sum_{n=1}^{N'} |a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

より $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ は収束する．従って任意の $\epsilon > 0$ に対し或る $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\sum_{n=p}^{q} |a_n| < \epsilon \quad (\forall p, q > N)$$

が成り立つから，$\{1, \cdots, N\} \subset \{\varphi(1), \cdots, \varphi(K)\}$ を満たす $K \in \mathbb{N}$ $(K > N)$ を取れば

$$\left| \sum_{n=1}^{K} a_n - \sum_{n=1}^{K} a_{\varphi(n)} \right| \leq \left| \sum_{n=N+1}^{K} a_n \right| + \left| \sum_{n \in \{\varphi(1), \cdots, \varphi(K)\} \setminus \{1, \cdots, N\}} a_n \right| < 2\epsilon$$

となり

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} \right| \leq \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{K} a_n \right| + \left| \sum_{n=1}^{K} a_n - \sum_{n=1}^{K} a_{\varphi(n)} \right| + \left| \sum_{n=1}^{K} a_{\varphi(n)} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} \right| \longrightarrow 0 \quad (K \longrightarrow \infty)$$

が従う．

(2) $\Rightarrow$ (1)　任意の a_n に対し或る $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$ が存在して $a_n = \alpha_n + i\beta_n$ と表せる．仮定より任意の φ に対し

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{\varphi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{\varphi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$$

が満たされているから，定理 B.0.1 の対偶により

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n| < \infty$$

が従い (1) が出る．∎