

0.1 4

定義 0.1.1 (4.1). ポーランド記法における語彙とは対 (\mathcal{W}, α) であり, この \mathcal{W} は記号の集合, また α は関数 $\alpha: \mathcal{W} \rightarrow \omega$ である. $\mathcal{W}_n = \{s \in \mathcal{W} \mid \alpha(s) = n\}$ とし, \mathcal{W}_n に属する記号はアリティ n をもつということにする. 定義 I.10.3 で定めた通り $\mathcal{W}^{<\omega}$ は \mathcal{W} に属する記号から成る有限列の全体であるものとする. そのような列のうち (\mathcal{W}, α) の式 (または整形式ともいう) とは,

$$s \in \mathcal{W}_n \text{ であり, 各 } i < n \text{ について } \tau_i \text{ が式であるとき, } s\tau_0 \cdots \tau_{n-1} \text{ も式である}$$

なる規則に則って構成されたもののことをいう.

定理 0.1.2 (4.3). σ を語彙 (\mathcal{W}, α) の式とすると,

- (1) σ の芯の始切片はどれも式にならない.
- (2) σ の最初の記号が s でそのアリティが n だとすると, 式 $\tau_0, \dots, \tau_{n-1}$ を, σ が $s\tau_0 \cdots \tau_{n-1}$ の形になるように取れる. しかもそのような $\tau_0, \dots, \tau_{n-1}$ の取り方は一意である.

定義 0.1.3 (4.4). σ を語彙 (\mathcal{W}, α) の式とすると, σ の部分式とは σ の中のひとつながりの部分列でそれ自身が式であるもののことをいう.

定理 0.1.4 (4.5). σ を語彙 (\mathcal{W}, α) の式とすると, 各記号の σ における各出現位置は, それぞれ一意的な部分式の開始位置となる.

定義 0.1.5 (4.6). 語彙 (\mathcal{W}, α) の式 σ のある記号のある出現位置について, そのスコープとは, σ のその位置から始まる一意的な部分式のことをいう.

0.2 5

定義 0.2.1 (5.1). 論理記号とは次の 8 つの記号

$$\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists, =$$

と, それに加えて可算無限個の変数である. 変数全体の集合を VAR と書く. 通常, u, v, w, x, y, z に必要に応じて添字をつけたもので変数をあらわすものとする.

定義 0.2.2 (5.2). 述語論理の語彙とは, 論理外記号の集合 \mathcal{L} のことで, この \mathcal{L} は二つの互いに交わらない集合 \mathcal{F} (関数記号の集合) と \mathcal{P} (述語記号の集合) に分割される. \mathcal{F} と \mathcal{P} はいずれもアリティに応じて $\mathcal{F} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{F}_n$, $\mathcal{P} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{P}_n$ と分割される. \mathcal{F}_n に属する記号は n 変数関数記号と呼ばれる. \mathcal{P}_n に属する記号は n 項述語記号と呼ばれる. とくに, \mathcal{F}_0 に属する記号は定数記号と呼ばれ, \mathcal{P}_0 に属する記号は命題定項と呼ばれる.

定義 0.2.3 (5.3). 語彙 $\mathcal{L} = \mathcal{F} \cup \mathcal{P} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{F}_n \cup \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{P}_n$ が定義 5.2 のとおりに与えられたとすると,

- (1) \mathcal{L} の項とは定義 4.1 いう意味でのポーランド記法の語彙 $\mathcal{F} \cup \text{VAR}$ の整形式のこと. ただし, VAR に属する記号のアリティは 0 で, \mathcal{F}_n に属する記号のアリティは n であるものとする.
- (2) \mathcal{L} の原子論理式とは, $p\tau_1 \cdots \tau_n$ の形の記号列で, $n \geq 0$ であり, τ_1, \dots, τ_n は \mathcal{L} の項であって, $p \in \mathcal{P}_n$ であるもの, または, $n = 2$ であって p が等号 $=$ であるもののこと.
- (3) \mathcal{L} の論理式とは次のルールで構成される記号列のこと:
 - a 原子論理式は論理式である.
 - b φ が論理式で $x \in \text{VAR}$ のとき $\forall x\varphi$ と $\exists x\varphi$ も論理式である.
 - c φ が論理式のとき $\neg\varphi$ も論理式である.
 - d φ と ψ が論理式のとき $\vee\varphi\psi$ も $\wedge\varphi\psi$ も $\rightarrow\varphi\psi$ も $\leftrightarrow\varphi\psi$ も論理式である.

定理 0.2.4 (5.4). 論理式 φ においては, $\mathcal{P} \cup \{\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists, =\}$ に属するどの記号のどの出現のスコープも論理式であり, $\mathcal{F} \cup \text{VAR}$ に属する記号のいかなる出現のスコープも項である.

そうしたスコープのことを φ の部分論理式とか部分項とか言う.

定義 0.2.5 (5.5). 論理式 φ 中の変数 y の出現が束縛されているとは, この出現箇所が, y に作用する (すなわち直後に y が続くような) \forall か \exists のスコープ内に含まれていることである. 束縛されていない出現のことを自由な出現という. 自由な変数がない論理式 φ のことを文という.

式 φ に変数 x が現れて, φ で自由に出現するものが x のみであるとき

定義 0.2.6 (5.6). 論理式 φ の全称閉包とは, $\forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi$, $n \geq 0$ の形の任意の文のことである.

0.3 7

定義 0.3.1 (7.1). 述語論理の語彙 $\mathcal{L} = \mathcal{F} \cup \mathcal{P} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{F}_n \cup \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{P}_n$ が (定義 5.2, 5.3 の要領で) 与えられたとすると, \mathcal{L} に対する構造とは, 対 $\mathfrak{A} = (A, \mathcal{I})$ であって A は空でない集合であり \mathcal{I} は \mathcal{L} を定義域とする関数で, $\mathcal{I}(s)$ が適切なタイプのセマンティクス的な実体であるもの, すなわち $\mathcal{I}(s)$ のことを $s_{\mathfrak{A}}$ と表記したとして,

- $n > 0$ で $f \in \mathcal{F}_n$ のときは $f_{\mathfrak{A}} : A^n \rightarrow A$,
- $n > 0$ で $p \in \mathcal{P}_n$ のときは $p_{\mathfrak{A}} \subset A^n$,
- $c \in \mathcal{F}_0$ のときは $c_{\mathfrak{A}} \in A$,
- $p \in \mathcal{P}_0$ のときは $p_{\mathfrak{A}} \in 2 = \{0, 1\} = \{F, T\}$

をみたすもの, とする.

定義 0.3.2 (7.2). 項 τ に対し, $V(\tau)$ とは, τ に出現する変数全体の集合とする. 論理式 φ に対し, $V(\varphi)$ とは, φ に自由に出現する変数全体の集合とする.

定義 0.3.3 (7.3). α が項あるいは論理式であったとして, α に対する A への割り当てとは, $V(\alpha) \subset \text{dom}(\sigma) \subset \text{VAR}$ と $\text{ran}(\sigma) \subset A$ を満たす関数 σ のことである.

定義 0.3.4 (7.5). \mathfrak{A} を語彙 \mathcal{L} に対する構造とするとき, \mathcal{L} の項 τ と, τ に対する A への割り当て σ について A の要素 $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)[\sigma]$ を次のように定める:

- (1) $x \in \text{dom}(\sigma)$ のとき $\text{val}_{\mathfrak{A}}(x)[\sigma] = \sigma(x)$,
- (2) $c \in \mathcal{F}_0$ のとき $\text{val}_{\mathfrak{A}}(c)[\sigma] = c_{\mathfrak{A}}$,
- (3) $f \in \mathcal{F}_n$ で $n > 0$ のとき

$$\text{val}_{\mathfrak{A}}(f\tau_1 \cdots \tau_n)[\sigma] = f_{\mathfrak{A}}(\text{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_1)[\sigma], \dots, \text{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_n)[\sigma]).$$

とくに $V(\tau) = \emptyset$ のとき, $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)[\emptyset]$ のことを $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)$ と略記する.

定理 0.3.5 (7.5). $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)[\sigma]$ は $\sigma \upharpoonright_{V(\tau)}$ だけに依存する. すなわち, もしも $\sigma' \upharpoonright_{V(\tau)} = \sigma \upharpoonright_{V(\tau)}$ であれば $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)[\sigma'] = \text{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)[\sigma]$ となる.

定義 0.3.6 (7.6). \mathfrak{A} を語彙 \mathcal{L} に対する構造とするとき, \mathcal{L} の任意の原子論理式 φ とそれに対する A への任意の割り当て σ について $\{0, 1\}$ (すなわち $\{F, T\}$) の要素 $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma]$ を次のとおりに定める:

- (1) $p \in \mathcal{P}_0$ のとき, $\text{val}_{\mathfrak{A}}(p)[\sigma] = p_{\mathfrak{A}}$,
- (2) $p \in \mathcal{P}_n$ で $n > 0$ のとき, $\text{val}_{\mathfrak{A}}(p\tau_1 \cdots \tau_n)[\sigma] = T$ となることは $(\text{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_1)[\sigma], \dots, \text{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_n)[\sigma]) \in p_{\mathfrak{A}}$ と同値,
- (3) $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_1 \tau_2)[\sigma] = T$ となることは $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_1)[\sigma] = \text{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_2)[\sigma]$ と同値.

定義 0.3.7 (7.7). $\sigma + (y/a) = \sigma \upharpoonright_{\text{VAR} \setminus \{y\}} \cup \{(y, a)\}$.

定義 0.3.8 (7.8). \mathfrak{A} を語彙 \mathcal{L} に対する構造とするとき, \mathcal{L} の任意の論理式 φ とそれに対する A への割り当て σ について, $\{0, 1\}$ すなわち $\{F, T\}$ の要素 $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma]$ を次のとおりに定める.

- (1) $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\neg\varphi)[\sigma] = 1 - \text{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma]$.
- (2) $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\wedge\varphi\psi)[\sigma]$ と $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\vee\varphi\psi)[\sigma]$ と $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\rightarrow\varphi\psi)[\sigma]$ と $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\leftrightarrow\varphi\psi)[\sigma]$ とは, $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma]$ と $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\psi)[\sigma]$ から $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ の真理値表にもとづいて決める.
- (3) $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\exists y\varphi)[\sigma] = T$ となるのは, ある $a \in A$ について $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma + (y/a)] = T$ となるときで, そしてそのときに限る.
- (4) $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\forall y\varphi)[\sigma] = T$ となるのは, すべての $a \in A$ について $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma + (y/a)] = T$ となるときで, そしてそのときに限る.

また, $\mathfrak{A} \models \varphi[\sigma]$ とは $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma] = T$ のことである. $V(\varphi) = \emptyset$ のとき, すなわち φ が文のときには, $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\emptyset]$ を $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)$ と略記し, また $\mathfrak{A} \models \varphi$ とは $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi) = T$ のことであるとする.

定理 0.3.9 (7.9). $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma]$ は $\sigma \upharpoonright_{V(\varphi)}$ だけに依存する. すなわち, もしも $\sigma' \upharpoonright_{V(\varphi)} = \sigma \upharpoonright_{V(\varphi)}$ であれば $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma'] = \text{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma]$ である.

定義 0.3.10 (7.11). \mathfrak{A} が語彙 \mathcal{L} に対するある構造で, Σ が \mathcal{L} の文のある集合のとき, $\mathfrak{A} \models \Sigma$ とは, すべての $\varphi \in \Sigma$ について $\mathfrak{A} \models \varphi$ であるということ.

定義 0.3.11 (7.12). Σ を語彙 \mathcal{L} の文のある集合, ψ を \mathcal{L} のある文とすると, $\Sigma \models \psi$ とは $\mathfrak{A} \models \Sigma$ であるようなすべての \mathcal{L} -構造 \mathfrak{A} について $\mathfrak{A} \models \psi$ であることをいう.

定義 0.3.12 (7.13). Σ を語彙 \mathcal{L} の文の或る集合とすると, Σ がセマンティクスの無矛盾であるあるいは充足可能である (これを $\text{Con}_{\models}(\Sigma)$ と書く) とは, ある構造 \mathfrak{A} について $\mathfrak{A} \models \Sigma$ となることである. セマンティクスの無矛盾でないことを「セマンティクスの矛盾する」という.

定理 0.3.13 (7.14). Σ を語彙 \mathcal{L} の文のある集合とし, ψ を \mathcal{L} のある文とすると,

- (a) $\Sigma \models \psi$ は $\Sigma \cup \{\neg\psi\}$ がセマンティクスの矛盾することと同値.
- (b) $\Sigma \models \neg\psi$ は $\Sigma \cup \{\psi\}$ がセマンティクスの矛盾することと同値.

定理 0.3.14 (7.15). Σ を語彙 \mathcal{L} の文のある集合とすると, 次のことが成り立つ.

- (1) Σ のすべての有限部分集合がそれぞれセマンティクスの無矛盾であるとき, Σ もセマンティクスの無矛盾である.
- (2) $\Sigma \models \psi$ のとき, ある有限の $\Delta \subset \Sigma$ について $\Delta \models \psi$ となる

定義 0.3.15 (7.16). \mathfrak{A} を語彙 \mathcal{L} のある構造とし, その宇宙を A とするとき, $|\mathfrak{A}|$ とは $|A|$ のことだとする.

定理 0.3.16 (7.17). Σ を語彙 \mathcal{L} の文のある集合とし, すべての有限な n に対し Σ はサイズ n 以上 (無限でもよい) のモデルをもつものとする. このとき, $\max(|\mathcal{L}|, \aleph_0)$ 以上の任意の基数 κ に対して, Σ はサイズ κ のモデルをもつ.

0.4 8

定義 0.4.1 (8.1). ψ を語彙 \mathcal{L} の論理式とすると, ψ が論理的に妥当であるとは, すべての \mathcal{L} -構造 \mathfrak{A} と, \mathfrak{A} における ψ に対するすべての割り当て σ について $\mathfrak{A} \models \psi[\sigma]$ となることである.

文 ψ が論理的に妥当であることと $\emptyset \models \psi$ とは同値.

定義 0.4.2 (8.2). φ と ψ を語彙 \mathcal{L} の論理式とすると、両者が論理的に同値であるとは、論理式 $\varphi \leftrightarrow \psi$ が論理的に妥当であることとする。

定理 0.4.3 (8.3). φ が論理式で文 ψ と χ がいずれも φ の全称閉包であるとすれば、 ψ と χ とは論理的に同値である。

定義 0.4.4 (8.4). φ と ψ が語彙 \mathcal{L} の論理式で、 Σ が \mathcal{L} の文のある集合であるとき、 φ と ψ が Σ のもとで同値とは、論理式 $\varphi \leftrightarrow \psi$ の全称閉包が Σ の全てのモデルにおいて真となることとする。 τ_1 と τ_2 を項とすると、それらが Σ のもとで同値とは、 $\mathfrak{A} \models \Sigma$ であるようなすべての \mathfrak{A} と τ_1, τ_2 に対する A へのすべての割り当て σ について $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_1)[\sigma] = \text{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_2)[\sigma]$ となることとする。

定理 0.4.5 (8.5). すべての \mathfrak{A} とすべての σ について $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_1)[\sigma] = \text{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_2)[\sigma]$ であるなら τ_1 と τ_2 は同一の項である。

定義 0.4.6 (8.6). β と τ が項で x が変数であるとき、 $\beta(x \rightsquigarrow \tau)$ とは β における x のすべての自由な出現を τ に置き換えた結果として得られる項のこととする。

定理 0.4.7 (8.7). 語彙 \mathcal{L} に対する構造 \mathfrak{A} と、項 β と τ の両方に対する A への割り当て σ (定義 7.3) について、 $a = \text{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)[\sigma]$ とするとき

$$\text{val}_{\mathfrak{A}}(\beta(x \rightsquigarrow \tau))[\sigma] = \text{val}_{\mathfrak{A}}(\beta)[\sigma + (x/a)]$$

が成り立つ。

定義 0.4.8 (8.8). φ を論理式、 x を変数、 τ を項とすると、 $\varphi(x \rightsquigarrow \tau)$ とは φ における x のすべての自由な出現を τ に置き換えた結果として得られる論理式のこととする。

定義 0.4.9 (8.9). 項 τ が論理式 φ 内で変数 x に対して自由であるとは、 τ に出現する変数 y についての量化 $\exists y$ あるいは $\forall y$ のスコープ内に、 x の自由な出現がまったくないことをいう。

定理 0.4.10 (8.10). \mathfrak{A} を \mathcal{L} に対する構造、 φ を \mathcal{L} の論理式、 τ を \mathcal{L} の項、 σ を φ に対する A への割り当て (定義 7.3) であり、かつ τ に対する A への割り当てでもあるとして、 $a = \text{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)[\sigma]$ とおく。いま τ が φ 内で変数 x に対して自由であったとする。このとき $\mathfrak{A} \models \varphi(x \rightsquigarrow \tau)[\sigma]$ と $\mathfrak{A} \models \varphi[\sigma + (x/a)]$ とは同値である。

記法

置き換えられる変数が x であることが文脈から明らかである場合に $\varphi(x \rightsquigarrow \tau)$ の略記として $\varphi(\tau)$ を用いる。この目的のため、議論の間は φ のことを $\varphi(x)$ とあらわすことがある。同様に φ を $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ とあらわしているときは、各変数 x_i のすべての自由な出現を τ_i に一斉に置き換えた結果として得られる論理式を $\varphi(\tau_1, \dots, \tau_n)$ とあらわす。

定理 0.4.11 (8.12). τ が $\varphi(x)$ 内で x に対して自由であるとすれば, $\forall x\varphi(x) \rightarrow \varphi(\tau)$ と $\varphi(\tau) \rightarrow \exists x\varphi(x)$ は論理的に妥当である.

定理 0.4.12 (8.13). \mathfrak{A} を \mathcal{L} に対する構造, $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ は \mathcal{L} の論理式で x_1, \dots, x_n の他には自由変数を持たないものとする. また τ_1, \dots, τ_n を \mathcal{L} の項とし, これらは自由変数を含まないものとする. $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_i)$ を a_i と書く. すると, $\mathfrak{A} \models \varphi(\tau_1, \dots, \tau_n)$ と $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$ とは同値である.

0.5 9

定義 0.5.1 (9.1). 基本論理式とは (ポーランド記法で表したとき) 命題結合子から始まっていないような論理式のことである.

定義 0.5.2 (9.2). \mathcal{L} に対する真偽割り当てとは, \mathcal{L} の基本論理式全体の集合から $\{0, 1\}$ すなわち $\{F, T\}$ への関数 v のこととする. そのような関数 v が与えられたとして $\{F, T\}$ の要素 $\bar{v}(\varphi)$ を次のように再帰的に定める:

- (1) $\bar{v}(\neg\varphi) = 1 - \bar{v}(\varphi)$
- (2) $\bar{v}(\wedge\varphi\psi), \bar{v}(\vee\varphi\psi), \bar{v}(\rightarrow\varphi\psi), \bar{v}(\leftrightarrow\varphi\psi)$ は $\bar{v}(\varphi)$ と $\bar{v}(\psi)$ からそれぞれ $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ の真理値表に従って定められる.

すべての真偽割り当て v に対して $\bar{v}(\varphi) = T$ となるような論理式 φ のことを**命題論理のトートロジー**という.

定理 0.5.3 (9.3). 命題論理のトートロジーはいずれも論理的に妥当である.

0.6 10

定義 0.6.1 (10.1). 論理の公理とは，次のリストにあるタイプの論理式の全称閉包 (定義 5.6) であるような文のことだとする．ここで x, y, z およびそれらに添字をつけたものは任意の変数をあらわすものとする．

- (1) すべての命題論理のトートロジー
- (2) x が φ において自由でないときの $\varphi \rightarrow \forall x \varphi$
- (3) $\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x \varphi \rightarrow \forall x \psi)$
- (4) 項 τ が φ 内の変数 x に対して自由であるときの $\forall x \varphi \rightarrow \varphi(x \rightsquigarrow \tau)$
- (5) 項 τ が φ 内の変数 x に対して自由であるときの $\varphi(x \rightsquigarrow \tau) \rightarrow \exists x \varphi$
- (6) $\forall x \neg \varphi \leftrightarrow \neg \exists x \varphi$
- (7) $x = x$
- (8) $x = y \leftrightarrow y = x$
- (9) $x = y \wedge y = z \rightarrow x = z$
- (10) $n > 0$ で f を \mathcal{L} の n 変数関数記号とするときの $x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \rightarrow (f x_1 \cdots x_n = f y_1 \cdots y_n)$
- (12) $n > 0$ で p を \mathcal{L} の n 変数述語記号とするときの $x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \rightarrow (p x_1 \cdots x_n \leftrightarrow p y_1 \cdots y_n)$