

# 確率微分方程式講義録

基礎工学研究科システム創成専攻修士 1 年

学籍番号 29C17095

百合川尚学

2017 年 12 月 27 日

# 目次

第 1 章	関数解析	2
1.1	Hölder の不等式と Minkowski の不等式 . . . . .	2
1.2	空間 $L^p$ . . . . .	6
1.3	補助定理 . . . . .	11
第 2 章	条件付き期待値作用素	16
2.1	$L^2$ における条件付き期待値 . . . . .	16
2.2	条件付き期待値作用素の拡張 . . . . .	22
2.3	独立性 . . . . .	27
第 3 章	停止時刻	31
3.1	停止時刻 . . . . .	31
第 4 章	マルチンゲール	38
4.1	Doob の不等式・任意抽出定理 . . . . .	38
4.2	二次変分 . . . . .	44
第 5 章	確率積分	60
5.1	パスの変動を制限する停止時刻 . . . . .	60

# 第 1 章

## 関数解析

### 1.1 Hölder の不等式と Minkowski の不等式

$\mathbb{K}$  を  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  或は  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  とおく. 測度空間を  $(X, \mathcal{F}, m)$  とし, 可測  $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{K})$  関数  $f$  に対して

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p} := \begin{cases} \inf \{ r \in \mathbb{R} ; |f(x)| \leq r, \text{ a.e. } x \in X \} & (p = \infty) \\ \left( \int_X |f(x)|^p m(dx) \right)^{\frac{1}{p}} & (0 < p < \infty) \end{cases}$$

と定め,

$$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, m) := \{ f : X \rightarrow \mathbb{K} ; f : \text{可測 } \mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{K}), \|f\|_{\mathcal{L}^p} < \infty \} \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

として空間  $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$  を定義する. この空間は  $\mathbb{K}$  上の線形空間となるが, そのことを保証するために次の二つの不等式が成り立つことを証明する.

定理 1.1.1 (Hölder の不等式).  $1 \leq p, q \leq \infty$ ,  $p + q = pq$  ( $p = \infty$  なら  $q = 1$ ) とする. このとき任意の可測  $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{K})$  関数  $f, g$  に対して次が成り立つ:

$$\int_X |f(x)g(x)| m(dx) \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p} \|g\|_{\mathcal{L}^q}. \quad (1.1)$$

まず次の補助定理を証明する.

補題 1.1.2.  $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{F}, m)$  ならば

$$|f(x)| \leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty} \quad (\text{a.e. } x \in X).$$

証明 (補題 1.1.2).  $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{F}, m)$  の定義により任意の実数  $\alpha > \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}$  に対して

$$m(\{ x \in X ; |f(x)| > \alpha \}) = 0$$

が成り立つから,

$$\{ x \in X ; |f(x)| > \|f\|_{\mathcal{L}^\infty} \} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ x \in X ; |f(x)| > \|f\|_{\mathcal{L}^\infty} + 1/n \}$$

の右辺は  $m$ -零集合となる. ■

証明 (定理 1.1.1).  $p = \infty, q = 1$  の場合  $\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} = \infty$  又は  $\|g\|_{\mathcal{L}^1} = \infty$  なら不等式 (1.1) は成り立つから, 以下では  $\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} < \infty$  かつ  $\|g\|_{\mathcal{L}^1} < \infty$  の場合を考える. 補助定理により或る  $m$ -零集合  $A \in \mathcal{F}$  を除いて  $|f(x)| \leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}$  が成り立つから

$$|f(x)g(x)| \leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty} |g(x)| \quad (\forall x \in X \setminus A).$$

とでき, 従って

$$\int_X |f(x)g(x)| m(dx) = \int_{X \setminus A} |f(x)g(x)| m(dx) \leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty} \int_{X \setminus A} |g(x)| m(dx) = \|f\|_{\mathcal{L}^\infty} \|g\|_{\mathcal{L}^1}$$

となり不等式 (1.1) が成り立つ.

$1 < p, q < \infty$  の場合  $\|f\|_{\mathcal{L}^p} = \infty$  又は  $\|g\|_{\mathcal{L}^q} = \infty$  なら不等式 (1.1) は成り立つから, 以下では  $\|f\|_{\mathcal{L}^p} < \infty$  かつ  $\|g\|_{\mathcal{L}^q} < \infty$  の場合を考える.  $\|f\|_{\mathcal{L}^p} = 0$  であるとする

$$B := \{ x \in X ; |f(x)| > 0 \}$$

は  $m$ -零集合となるから,

$$\int_X |f(x)g(x)| m(dx) = \int_B |f(x)g(x)| m(dx) + \int_{X \setminus B} |f(x)g(x)| m(dx) = 0$$

となり不等式 (1.1) が成り立つ.  $\|g\|_{\mathcal{L}^q} = 0$  の場合も同じである.

最後に  $0 < \|f\|_{\mathcal{L}^p}, \|g\|_{\mathcal{L}^q} < \infty$  の場合を示す.  $-\log t$  ( $t > 0$ ) は凸関数であるから,  $1/p + 1/q = 1$  に対して

$$-\log \left( \frac{s}{p} + \frac{t}{q} \right) \leq \frac{1}{p} (-\log s) + \frac{1}{q} (-\log t) \quad (\forall s, t > 0)$$

が成り立ち, 従って

$$s^{1/p} t^{1/q} \leq \frac{s}{p} + \frac{t}{q} \quad (\forall s, t > 0)$$

を得る. この不等式を用いれば

$$F(x) := |f(x)|^p / \|f\|_{\mathcal{L}^p}^p, \quad G(x) := |g(x)|^q / \|g\|_{\mathcal{L}^q}^q \quad (\forall x \in X)$$

とした可積分関数  $F, G$  に対し

$$F(x)^{1/p} G(x)^{1/q} \leq \frac{1}{p} F(x) + \frac{1}{q} G(x) \quad (\forall x \in X)$$

となるから, 両辺を積分して

$$\begin{aligned} \int_X F(x)^{1/p} G(x)^{1/q} m(dx) &\leq \frac{1}{p} \int_X F(x) m(dx) + \frac{1}{q} \int_X G(x) m(dx) \\ &= \frac{1}{p} \frac{1}{\|f\|_{\mathcal{L}^p}^p} \int_X |f(x)|^p m(dx) + \frac{1}{q} \frac{1}{\|g\|_{\mathcal{L}^q}^q} \int_X |g(x)|^q m(dx) \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{aligned}$$

が成り立つ。最左辺と最右辺を比べて

$$\int_X \frac{|f(x)|}{\|f\|_{\mathcal{L}^p}} \frac{|g(x)|}{\|g\|_{\mathcal{L}^q}} m(dx) = \int_X F(x)^{1/p} G(x)^{1/q} m(dx) \leq 1$$

となるから不等式

$$\int_X |f(x)g(x)| m(dx) \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p} \|g\|_{\mathcal{L}^q}$$

が示された。 ■

**定理 1.1.3 (Minkowski の不等式).**  $1 \leq p \leq \infty$  とする。このとき任意の可測  $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  関数  $f, g$  に対して次が成り立つ:

$$\|f + g\|_{\mathcal{L}^p} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p} + \|g\|_{\mathcal{L}^p}. \quad (1.2)$$

**証明.**

$p = \infty$  の場合 各点  $x \in X$  で

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$$

となるから,  $\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} = \infty$  又は  $\|g\|_{\mathcal{L}^\infty} = \infty$  なら不等式 (1.2) は成り立つ.  $\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} < \infty$  かつ  $\|g\|_{\mathcal{L}^\infty} < \infty$  の場合は

$$C := \{x \in X ; |f(x)| > \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}\} \cup \{x \in X ; |g(x)| > \|g\|_{\mathcal{L}^\infty}\}$$

が  $m$ -零集合となり

$$|f(x) + g(x)| \leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty} + \|g\|_{\mathcal{L}^\infty} \quad (\forall x \in X \setminus C)$$

を得て  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^\infty}$  の定義と併せて不等式 (1.2) が成り立つ.

$p = 1$  の場合

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \quad (\forall x \in X)$$

の両辺を積分することにより不等式 (1.2) が成り立つ.

$1 < p < \infty$  の場合  $p + q = pq$  が成り立つように  $q > 1$  を取る.

$$|f(x) + g(x)|^p = |f(x) + g(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} \leq |f(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} + |g(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1}$$

の両辺を積分すれば, Hölder の不等式により

$$\begin{aligned}
\|f + g\|_{\mathcal{L}^p}^p &= \int_X |f(x) + g(x)|^p m(dx) \\
&\leq \int_X |f(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} m(dx) + \int_X |g(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} m(dx) \\
&\leq \left( \int_X |f(x)|^p m(dx) \right)^{1/p} \left( \int_X |f(x) + g(x)|^{q(p-1)} m(dx) \right)^{1/q} \\
&\quad + \left( \int_X |g(x)|^p m(dx) \right)^{1/p} \left( \int_X |f(x) + g(x)|^{q(p-1)} m(dx) \right)^{1/q} \\
&= \left( \int_X |f(x)|^p m(dx) \right)^{1/p} \left( \int_X |f(x) + g(x)|^p m(dx) \right)^{1/q} \\
&\quad + \left( \int_X |g(x)|^p m(dx) \right)^{1/p} \left( \int_X |f(x) + g(x)|^p m(dx) \right)^{1/q} \\
&= \|f\|_{\mathcal{L}^p} \|f + g\|_{\mathcal{L}^p}^{p/q} + \|g\|_{\mathcal{L}^p} \|f + g\|_{\mathcal{L}^p}^{p/q} \\
&= \|f\|_{\mathcal{L}^p} \|f + g\|_{\mathcal{L}^p}^{p-1} + \|g\|_{\mathcal{L}^p} \|f + g\|_{\mathcal{L}^p}^{p-1} \tag{1.3}
\end{aligned}$$

となる.  $\|f + g\|_{\mathcal{L}^p} = 0$  の場合は不等式 (1.2) が成り立つからそうでない場合を考える.  
 $\|f + g\|_{\mathcal{L}^p} = \infty$  の場合,

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq 2 \max\{|f(x)|, |g(x)|\} \quad (\forall x \in X)$$

より

$$|f(x) + g(x)|^p \leq 2^p \max\{|f(x)|, |g(x)|\} \leq 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p) \quad (\forall x \in X)$$

の両辺を積分して

$$\|f + g\|_{\mathcal{L}^p}^p \leq 2^p (\|f\|_{\mathcal{L}^p}^p + \|g\|_{\mathcal{L}^p}^p)$$

という関係が出るから,  $\|f\|_{\mathcal{L}^p}$  か  $\|g\|_{\mathcal{L}^p}$  の一方は  $\infty$  となり不等式 (1.2) が成り立つ.  
 $0 < \|f + g\|_{\mathcal{L}^p} < \infty$  の場合,  $\|f\|_{\mathcal{L}^p} + \|g\|_{\mathcal{L}^p} = \infty$  なら不等式 (1.2) は成り立ち,  $\|f\|_{\mathcal{L}^p} + \|g\|_{\mathcal{L}^p} < \infty$  の場合でも上式 (1.3) より得る

$$\|f + g\|_{\mathcal{L}^p}^p \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p} \|f + g\|_{\mathcal{L}^p}^{p-1} + \|g\|_{\mathcal{L}^p} \|f + g\|_{\mathcal{L}^p}^{p-1}$$

の両辺を  $\|f + g\|_{\mathcal{L}^p}^{p-1}$  で割って不等式 (1.2) が成り立つ.

■

以上の結果より  $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$  は線形空間となる. 実際加法とスカラ倍は

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) := \alpha f(x), \quad (\forall x \in X, f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, m), \alpha \in \mathbb{C})$$

により定義され, Minkowski の不等式により加法について閉じている.

**補題 1.1.4** ( $\mathcal{L}^p$  のセミノルム).  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p}$  は線形空間  $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$  においてセミノルムとなる.

証明.

正值性 定義の仕方による.

同次性  $1 \leq p < \infty$  なら

$$\left( \int_X |\alpha f(x)|^p m(dx) \right)^{1/p} = \left( |\alpha|^p \int_X |f(x)|^p m(dx) \right)^{1/p} = |\alpha| \left( \int_X |f(x)|^p m(dx) \right)^{1/p}$$

により, また  $p = \infty$  なら

$$\inf \{ r \in \mathbb{R} ; | \alpha f(x) | \leq r, \text{ a.e. } x \in X \} = |\alpha| \inf \{ r \in \mathbb{R} ; |f(x)| \leq r, \text{ a.e. } x \in X \}$$

により, 任意の  $\alpha \in \mathbb{K}$  と任意の  $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) に対して

$$\| \alpha f \|_{\mathcal{L}^p} = |\alpha| \| f \|_{\mathcal{L}^p}$$

が成り立つ.

三角不等式 Minkowski の不等式による.

■

## 1.2 空間 $L^p$

可測関数全体の商集合  $\| \cdot \|_{\mathcal{L}^p}$  は  $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$  のノルムとはならない.  $\| f \|_{\mathcal{L}^p} = 0$  であっても  $f$  が零写像であるとは限らず, 実際  $m$ -零集合の上で  $1 \in \mathbb{K}$  を取るような関数  $g$  でも  $\| g \|_{\mathcal{L}^p} = 0$  を満たすからである. ここで可測関数全体の集合を

$$\mathcal{L}^0(X, \mathcal{F}, m) := \{ f : X \rightarrow \mathbb{K} ; f : \text{可測 } \mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{K}) \}$$

とおく.

$$f, g \in \mathcal{L}^0(X, \mathcal{F}, m), \quad f \sim g \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f(x) = g(x) \quad \text{a.e. } x \in X$$

と定義した関係  $\sim$  は  $\mathcal{L}^0(X, \mathcal{F}, m)$  における同値関係となり, この関係で  $\mathcal{L}^0(X, \mathcal{F}, m)$  を割った商集合を  $L^0(X, \mathcal{F}, m)$  と表す.

商集合における算法  $L^0(X, \mathcal{F}, m)$  の元である関数類 (同値類) を  $[f]$  ( $f$  は関数類の代表元) と表し,  $L^0(X, \mathcal{F}, m)$  における加法とスカラー倍を次のように定義すれば  $L^0(X, \mathcal{F}, m)$  は  $\mathbb{K}$  上の線形空間となる<sup>\*1</sup>:

$$[f] + [g] := [f + g] \quad (\forall [f], [g] \in L^0(X, \mathcal{F}, m)),$$

<sup>\*1</sup> この表現は well-defined, つまり代表元に依らずに値がただ一つに定まる. 任意の  $f' \in [f]$  と  $g' \in [g]$  に対して

$$[f + g] = [f' + g'], \quad [\alpha f'] = [\alpha f]$$

となるからである. 実際

$$\{f \neq g\} := \{x \in X ; f(x) \neq g(x)\}$$

と略記して

$$\begin{aligned} \{f + g \neq f' + g'\} &\subset \{f \neq f'\} \cup \{g \neq g'\}, \\ \{\alpha f \neq \alpha f'\} &= \{f \neq f'\} \end{aligned}$$

と表現でき, どれも右辺は  $m$ -零集合であるから  $[f + g] = [f' + g']$ ,  $[\alpha f'] = [\alpha f]$  が成り立つ.

$$\alpha[f] := [\alpha f] \quad (\forall [f] \in L^0(X, \mathcal{F}, m), \alpha \in \mathbb{K}).$$

また乗法も次のように定義できる:

$$[f][g] := [fg] \quad (\forall [f], [g] \in L^0(X, \mathcal{F}, m)).$$

この乗法は可換であり, 加法と併せて  $L^0(X, \mathcal{F}, m)$  は可換環をなす. 従って関数類に対して加減乗算が自由にできるようになった\*2. また  $[f][f] = [f^2]$  を  $[f]^2$  と表記し,  $[f]^n := [f]^{n-1}[f]$  と帰納的に定義すれば  $[f]^n = [f^n]$  となる.

商集合における順序 次に  $L^0(X, \mathcal{F}, m)$  における順序を定める.  $[f], [g] \in L^0(X, \mathcal{F}, m)$  に対して

$$[f] \leq [g] \stackrel{\text{def}}{\iff} f \leq g \quad m\text{-a.s.} \quad (1.4)$$

として関係“ $\leq$ ”(記号は  $\mathcal{L}^0(X, \mathcal{F}, m)$  におけるものと同じであるが) を定義すればこれは  $L^0(X, \mathcal{F}, m)$  において順序となる. この定義が代表元の取り方に依存しないことは

$$\{f' > g'\} \subset \{f \neq f'\} \cup \{f > g\} \cup \{g \neq g'\}$$

の右辺が零集合であることにより, また次に示すように順序の定義を満たしている:

- $f = f$  により  $[f] \leq [f]$ ,
- $[f] \leq [g]$  かつ  $[g] \leq [f]$  なら  $\{f > g\}$  と  $\{g > f\}$  は  $m$ -零集合だから  $[f] = [g]$ ,
- $[f] \leq [g]$  かつ  $[g] \leq [h]$  なら  $\{f > h\} \subset \{f > g\} \cup \{g > h\}$  により  $[f] \leq [h]$ .

補題 1.2.1 (商空間におけるノルムの定義).

$$\|[f]\|_{L^p} := \|f\|_{\mathcal{L}^p} \quad (1 \leq p \leq \infty, f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, m))$$

として  $\|\cdot\|_{L^p} : L^0(X, \mathcal{F}, m) \rightarrow \mathbb{R}$  を定義すればこれは well-defined である. つまり代表元に依らずに値がただ一つに定まる. 更に次で定義する空間

$$L^p(X, \mathcal{F}, m) := \{[f] \in L^0(X, \mathcal{F}, m) ; \|[f]\|_{L^p} < \infty\} \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

は  $\|\cdot\|_{L^p}$  をノルムとしてノルム空間となる.

証明.

well-defined であること  $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$  に対し, 任意に  $g \in [f]$  を選ぶ. 示すことは  $\|f\|_{\mathcal{L}^p}^p = \|g\|_{\mathcal{L}^p}^p$  が成り立つことである.

$$A := \{x \in X ; f(x) \neq g(x)\} \in \mathcal{F}$$

\*2 加法乗法が可換であることと結合則は代表元の関数の空間が加法乗法について可換であることと結合則を満たすことによる. また分配測は

$$\begin{aligned} ([f] + [g])[h] &= [f + g][h] = [(f + g)h] = [fh + gh] = [fh] + [gh] = [f][h] + [g][h], \\ [h]([f] + [g]) &= [h][f + g] = [h(f + g)] = [hf + hg] = [hf] + [hg] = [h][f] + [h][g] \end{aligned}$$

により成り立つ. そして零元は零写像の関数類で  $[0]$  と表し, 単位元は恒等的に 1 を取る関数の関数類で  $[1]$  と表す. また  $-[f] = [-f]$  であるから減法は

$$[f] - [g] := [f] + (-[g]) = [f] + [-g] = [f - g]$$

で定義される.



とおく.  $A$  は  $m(A) = 0$  を満たす.

$p = \infty$  の場合  $A^c$  の上で  $f(x) = g(x)$  となるから

$$\begin{aligned} \{x \in X; |g(x)| > \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}\} &\subset A + A^c \cap \{x \in X; |g(x)| > \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}\} \\ &= A + A^c \cap \{x \in X; |f(x)| > \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}\} \\ &\subset A + \{x \in X; |f(x)| > \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}\} \end{aligned}$$

が成り立ち, 最右辺は 2 項とも  $m$ -零集合であるから  $\|g\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}$  が従う. 逆向きの不等号も同様に示されて  $\|g\|_{\mathcal{L}^\infty} = \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}$  を得る.

$1 \leq p < \infty$  の場合  $m(A) = 0$  により

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p}^p = \int_X f(x) m(dx) = \int_{A^c} f(x) m(dx) = \int_{A^c} g(x) m(dx) = \int_X g(x) m(dx) = \|g\|_{\mathcal{L}^p}^p$$

が成り立つ.

ノルムとなること 任意に  $[f], [g] \in L^p(X, \mathcal{F}, m)$  と  $\alpha \in \mathbb{K}$  を取る.  $\|[f]\|_{L^p}$  の正値性は  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p}$  の正値性から従う. また  $m(f \neq 0) > 0$  なら  $\|f\|_{\mathcal{L}^p} > 0$  となるから, 対偶により  $\|[f]\|_{L^p} = 0$  なら  $[f]$  は零元  $[0]$ , 逆に  $[f] = [0]$  なら  $\|[f]\|_{L^p} = \|0\|_{\mathcal{L}^p} = 0$  となる.  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p}$  の同次性と Minkowski の不等式から

$$\begin{aligned} \|\alpha[f]\|_{L^p} &= \|[\alpha f]\|_{L^p} = \|\alpha f\|_{\mathcal{L}^p} = |\alpha| \|f\|_{\mathcal{L}^p} = |\alpha| \|[f]\|_{L^p} \\ \|[f] + [g]\|_{L^p} &= \|[f + g]\|_{L^p} = \|f + g\|_{\mathcal{L}^p} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p} + \|g\|_{\mathcal{L}^p} = \|[f]\|_{L^p} + \|[g]\|_{L^p} \end{aligned}$$

も成り立ち,  $\|\cdot\|_{L^p}$  が  $L^p(X, \mathcal{F}, m)$  においてノルムとなると示された.

■

**命題 1.2.2 ( $L^p$  の完備性).** 上で定義したノルム空間  $L^p(X, \mathcal{F}, m)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) は Banach 空間である.

**証明.** 任意に  $L^p(X, \mathcal{F}, m)$  の Cauchy 列  $[f_n] \in L^p(X, \mathcal{F}, m)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を取る. Cauchy 列であるから  $1/2$  に対して或る  $N_1 \in \mathbb{N}$  が取れて,  $n > m \geq N_1$  ならば  $\|[f_n] - [f_m]\|_{L^p} = \|f_n - f_m\|_{\mathcal{L}^p} < 1/2$  となる. ここで  $m = n_1$  と表記することにする. 同様に  $1/2^2$  に対して或る  $N_2 \in \mathbb{N}$  ( $N_2 > N_1$ ) が取れて,  $n' > m' \geq N_2$  ならば  $\|[f_{n'}] - [f_{m'}]\|_{L^p} < 1/2^2$  となる. 先ほどの  $n$  について,  $n > N_2$  となるように取れるからこれを  $n = n_2$  と表記し, 更に  $m' = n_2$  としておく. 今のところ

$$\|[f_{n_1}] - [f_{n_2}]\|_{L^p} < 1/2$$

と表示できる. 再び同様に  $1/2^3$  に対して或る  $N_3 \in \mathbb{N}$  ( $N_3 > N_2$ ) が取れて,  $n'' > m'' \geq N_3$  ならば  $\|[f_{n''}] - [f_{m''}]\|_{L^p} < 1/2^3$  となる. 先ほどの  $n'$  について  $n' > N_3$  となるように取れるからこれを  $n' = n_3$  と表記し, 更に  $m'' = n_3$  としておく. 今までのところで

$$\begin{aligned} \|[f_{n_1}] - [f_{n_2}]\|_{L^p} &< 1/2 \\ \|[f_{n_2}] - [f_{n_3}]\|_{L^p} &< 1/2^2 \end{aligned}$$

が成り立っている．数学的帰納法により

$$\| [f_{n_k} - f_{n_{k+1}}] \|_{L^p} < 1/2^k \quad (n_{k+1} > n_k, k = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.5)$$

が成り立つように自然数の部分列  $(n_k)_{k=1}^\infty$  を取ることができる．

$p = \infty$  の場合

$[f_{n_k}]$  の代表元  $f_{n_k}$  について,

$$\begin{aligned} A_k &:= \left\{ x \in X ; \quad |f_{n_k}(x)| > \|f_{n_k}\|_{\mathcal{L}^\infty} \right\}, \\ A^k &:= \left\{ x \in X ; \quad |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| > \|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_{\mathcal{L}^\infty} \right\} \end{aligned}$$

とおけば Hölder の不等式の証明中の補助定理より  $m(A_k) = m(A^k) = 0$  であり,

$$A := \left( \bigcup_{k=1}^\infty A_k \right) \cup \left( \bigcup_{k=1}^\infty A^k \right)$$

として  $m$ -零集合を定め

$$\hat{f}_{n_k}(x) = \begin{cases} f_{n_k}(x) & (x \notin A) \\ 0 & (x \in A) \end{cases} \quad (\forall x \in X)$$

と定義した  $\hat{f}_{n_k}$  もまた  $[f_{n_k}]$  の元となる． $\hat{f}_{n_k}$  は  $X$  上の有界可測関数であり

$$\| \hat{f}_{n_k} - \hat{f}_{n_{k+1}} \|_{\mathcal{L}^\infty} = \sup_{x \in X} |\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}_{n_{k+1}}(x)| < 1/2^k \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.6)$$

が成り立つから, 各点  $x \in X$  で  $(\hat{f}_{n_k}(x))_{k=1}^\infty$  は  $\mathbb{R}$  の Cauchy 列となり<sup>\*3</sup> 各点  $x \in X$  での極限を  $\hat{f}(x)$  と表す．一般に距離空間に値を取る可測関数列の各点収束の極限関数は可測関数であるから  $\hat{f}$  もまた可測  $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  である．また  $\hat{f}$  は有界である．実際式 (1.6) から任意の  $l > k$  に対し

$$|\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}_{n_l}(x)| \leq \sum_{j=k}^{l-1} |\hat{f}_{n_j}(x) - \hat{f}_{n_{j+1}}(x)| \leq \sum_{j=k}^{l-1} \sup_{x \in X} |\hat{f}_{n_j}(x) - \hat{f}_{n_{j+1}}(x)| < 1/2^{k-1}$$

が成り立つから, 極限関数  $\hat{f}(x)$  も

$$\sup_{x \in X} |\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}(x)| \leq 1/2^{k-1} \quad (1.7)$$

を満たすことになる．なぜなら, もし或る  $x \in X$  で  $\alpha := |\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}(x)| > 1/2^{k-1}$  となる場合, 任意の  $l > k$  に対し

$$0 < \alpha - 1/2^{k-1} < |\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}(x)| - |\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}_{n_l}(x)| \leq |\hat{f}_{n_l}(x) - \hat{f}(x)|$$

となり各点収束に反するからである．不等式 (1.7) により任意の  $x \in X$  において

$$|\hat{f}(x)| < |\hat{f}_{n_k}(x)| + 1/2^{k-1} \leq \| \hat{f}_{n_k} \|_{\mathcal{L}^\infty} + 1/2^{k-1}$$

---

<sup>\*3</sup> 任意の  $\epsilon > 0$  に対し  $1/2^N < \epsilon$  を満たす  $N \in \mathbb{N}$  を取れば, 全ての  $l > k > N$  に対して

$$|\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}_{n_l}(x)| \leq \sum_{j=k}^{l-1} |\hat{f}_{n_j}(x) - \hat{f}_{n_{j+1}}(x)| < \sum_{k>N} 1/2^k = 1/2^N < \epsilon$$

が成り立つ．

が成り立ち  $\hat{f}$  の有界性が判る．以上で極限関数  $\hat{f}$  が有界可測関数であると示された． $\hat{f}$  を代表元とする  $[\hat{f}] \in L^\infty(X, \mathcal{F}, m)$  に対し，不等式 (1.7) により

$$\| [f_{n_k}] - [\hat{f}] \|_{L^\infty} = \| \hat{f}_{n_k} - \hat{f} \|_{\mathcal{L}^\infty} = \sup_{x \in X} |\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}(x)| \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty)$$

となり Cauchy 列  $([f_n])_{n=1}^\infty$  の部分列  $([f_{n_k}])_{k=1}^\infty$  は  $[\hat{f}]$  に収束する．元の Cauchy 列も  $[\hat{f}]$  に収束するから  $L^\infty(X, \mathcal{F}, m)$  は Banach 空間である．

$1 \leq p < \infty$  の場合

$[f_{n_k}]$  の代表元  $f_{n_k}$  に対して

$$f_{n_k}(x) := f_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^k (f_{n_j}(x) - f_{n_{j-1}}(x)) \quad (1.8)$$

と表現できるから，これに対して

$$g_k(x) := |f_{n_1}(x)| + \sum_{j=1}^k |f_{n_j}(x) - f_{n_{j-1}}(x)|$$

として可測関数列  $(g_k)_{k=1}^\infty$  を定める．Minkowski の不等式と式 (1.5) より

$$\| g_k \|_{\mathcal{L}^p} \leq \| f_{n_1} \|_{\mathcal{L}^p} + \sum_{j=1}^k \| f_{n_j} - f_{n_{j-1}} \|_{\mathcal{L}^p} < \| f_{n_1} \|_{\mathcal{L}^p} + \sum_{j=1}^k 1/2^j < \| f_{n_1} \|_{\mathcal{L}^p} + 1 < \infty$$

が成り立つ．各点  $x \in X$  で  $g_k(x)$  は  $k$  について単調増大であるから，単調収束定理より

$$\| g \|_{\mathcal{L}^p}^p = \lim_{k \rightarrow \infty} \| g_k \|_{\mathcal{L}^p}^p < \| f_{n_1} \|_{\mathcal{L}^p}^p + 1 < \infty$$

となるので  $g \in L^p(X, \mathcal{F}, m)$  である．従って

$$B_n := \{ x \in X ; \quad g(x) \leq n \} \in \mathcal{F},$$

$$B := \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

とおけば  $m(X \setminus B) = 0$  であり，式 (1.8) の級数は  $B$  上で絶対収束する (各点)．

$$f(x) := \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) & (x \in B) \\ 0 & (x \in X \setminus B) \end{cases}$$

として可測  $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  関数  $f$  を定義すれば， $|f(x)| \leq g(x)$  ( $\forall x \in X$ ) と  $g^p$  の可積分性から  $f$  の関数類  $[f]$  は  $L^p(X, \mathcal{F}, m)$  の元となる．関数列  $((f_{n_k})_{k=1}^\infty)$  は  $f$  に概収束し，また  $|f_{n_k}(x) - f(x)|^p \leq 2^p(|f_{n_k}(x)|^p + |f(x)|^p) \leq 2^{p+1}g(x)^p$  ( $\forall x \in X$ ) となるから，Lebesgue の収束定理により

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \| [f_{n_k}] - [f] \|_{L^p}^p = \lim_{k \rightarrow \infty} \| f_{n_k} - f \|_{\mathcal{L}^p}^p = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X |f_{n_k}(x) - f(x)|^p m(dx) = 0$$

が成り立ち，Cauchy 列  $([f_n])_{n=1}^\infty$  の部分列  $([f_{n_k}])_{k=1}^\infty$  が  $[f]$  に収束すると示された．従って元の Cauchy 列も  $[f]$  に収束するから  $L^p(X, \mathcal{F}, m)$  は Banach 空間である．

■

### 1.3 補助定理

以後の準備として、線型作用素の拡張定理、射影定理、kolmos の補題を証明する。

**定理 1.3.1 (線型作用素の拡張).**  $X, Y$  を  $\mathbb{K}$  上の Banach 空間とし、ノルムをそれぞれ  $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y$  と表記する.  $X$  の部分空間  $X_0$  が  $X$  で稠密なら、 $X_0$  を定義域とする任意の有界線型作用素  $T: X_0 \rightarrow Y$  に対し、定義域を  $X$  とする  $T$  の拡張  $\tilde{T}: X \rightarrow Y$  で、作用素ノルムを変えず、かつ有界線型作用素となるものが一意に存在する。

**証明.** 作用素ノルムを  $\|\cdot\|$  と表記する.  $X_0$  が  $X$  で稠密であるから、任意の  $x \in X$  に対して  $\|x_n - x\|_X \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow +\infty$ ) を満たす  $x_n \in X_0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) を取れる. 任意の  $m, n \in \mathbb{N}$  に対して

$$\|Tx_m - Tx_n\|_Y \leq \|T\| \|x_m - x_n\|_X$$

が成り立ち、右辺が  $X_0$  の Cauchy 列をなしているから  $(Tx_n)_{n=1}^{+\infty}$  も  $Y$  の Cauchy 列となる.  $Y$  の完備性から  $(Tx_n)_{n=1}^{+\infty}$  は或る  $y \in Y$  に収束し、 $y$  は  $x \in X$  に対して一意に定まる. 実際  $x$  への別の収束列  $z_n \in X_0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) を取った場合、 $(Tz_n)_{n=1}^{+\infty}$  の収束先を  $u \in Y$  として、任意の  $n, m \in \mathbb{N}$  に対して

$$\begin{aligned} \|y - u\|_Y &= \|y - Tx_n + Tx_n - Tz_m + Tz_m - u\|_Y \\ &\leq \|y - Tx_n\|_Y + \|Tx_n - Tz_m\|_Y + \|Tz_m - u\|_Y \\ &\leq \|y - Tx_n\|_Y + \|T\| \|x_n - z_m\|_X + \|Tz_m - u\|_Y \\ &\leq \|y - Tx_n\|_Y + \|T\| (\|x_n - x\|_X + \|x - z_m\|_X) + \|Tz_m - u\|_Y \end{aligned}$$

となるから  $n, m \rightarrow +\infty$  で右辺は 0 に収束し  $y = u$  が成り立つ. ゆえに  $x$  に  $y$  を対応させる関係は  $X \rightarrow Y$  の写像となり、この写像を  $\tilde{T}$  と表す. この  $\tilde{T}$  が有界な線型作用素であることを示す.

**線型性** 任意に  $x, z \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$  と  $x, z$  への収束列  $(x_n)_{n=1}^{+\infty}, (z_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X_0$  を取れば  $(\alpha x_n + \beta z_n)_{n=1}^{+\infty}$  が  $\alpha x + \beta z$  への収束列となるから

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}(\alpha x + \beta z) - \alpha \tilde{T}x - \beta \tilde{T}z\|_Y &= \|\tilde{T}(\alpha x + \beta z) - T(\alpha x_n + \beta z_n) + \alpha Tx_n + \beta Tz_n - \alpha \tilde{T}x - \beta \tilde{T}z\|_Y \\ &\leq \|\tilde{T}(\alpha x + \beta z) - T(\alpha x_n + \beta z_n)\|_Y + \|\alpha Tx_n - \alpha \tilde{T}x\|_Y + \|\beta Tz_n - \beta \tilde{T}z\|_Y \\ &\leq \|\tilde{T}(\alpha x + \beta z) - T(\alpha x_n + \beta z_n)\|_Y + |\alpha| \|Tx_n - \tilde{T}x\|_Y + |\beta| \|Tz_n - \tilde{T}z\|_Y \\ &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty) \end{aligned}$$

が成り立つから

$$\tilde{T}(\alpha x + \beta z) = \alpha \tilde{T}x + \beta \tilde{T}z \quad (\forall x, z \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{K})$$

が従う.

**有界性** 任意に  $x \in X$  と  $x$  への収束列  $x_n \in X_0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) を取る. 任意の  $\epsilon > 0$  に対し或る  $K \in \mathbb{N}$  が存在して全ての  $k > K$  について

$$\|\tilde{T}x\|_Y < \|Tx_n\|_Y + \epsilon, \quad \|x\|_X < \|x_n\|_X + \epsilon / \|T\|$$

が成り立つようにできるから

$$\|\tilde{T}x\|_Y < \|Tx\|_Y + \epsilon < \|T\| \|x\|_X + 2\epsilon$$

となり  $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$  が成り立つ.

さらに

$$\|\tilde{T}\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X=1}} \|\tilde{T}x\|_Y \geq \sup_{\substack{x \in X_0 \\ \|x\|_X=1}} \|\tilde{T}x\|_Y = \sup_{\substack{x \in X_0 \\ \|x\|_X=1}} \|Tx\|_Y = \|T\|$$

も成り立つから  $\|\tilde{T}\| = \|T\|$  が従い,  $\tilde{T}$  が作用素ノルムを変えない拡張であると示された. 拡張が一意であることは  $X_0$  が  $X$  で稠密であることと有界作用素の連続性による. ■

**定理 1.3.2 (射影定理).**  $H$  を  $\mathbb{K}$  上の Hilbert 空間とし, 内積とノルムをそれぞれ  $\langle \cdot, \cdot \rangle, \|\cdot\|$  と表記する.  $C \subset H$  が閉凸集合なら,  $f \in H$  に対し或る  $y \in C$  がただ一つ存在して

$$\|f - y\| = \inf_{h \in C} \|f - h\|$$

を満たす. また  $C$  が  $H$  の閉部分空間なら,  $y \in C$  が  $f$  の射影であることと

$$\langle f - y, h \rangle = 0 \quad (\forall h \in C)$$

が成り立つことは同値になる.

**証明.**

**射影の存在**  $C$  が凸集合であるとする.  $f \in H \setminus C$  として

$$\delta := \inf_{h \in C} \|f - h\|$$

とおけば,  $C$  が閉であるから  $\delta > 0$  となる.  $h_n \in C$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - h_n\|$$

となるように取れば, 任意の  $\epsilon > 0$  に対して或る  $N \in \mathbb{N}$  が存在し

$$\|f - h_n\|^2 < \delta^2 + \epsilon/4 \quad (\forall n > N)$$

が成り立つ.  $n, m > N$  ならば, 内積空間の中線定理と  $(h_n + h_m)/2 \in C$  により

$$\begin{aligned} \|h_n - h_m\|^2 &= 2(\|f - h_m\|^2 + \|f - h_n\|^2) - \|2f - (h_n + h_m)\|^2 \\ &= 2(\|f - h_m\|^2 + \|f - h_n\|^2) - 4\left\|f - \frac{h_n + h_m}{2}\right\|^2 \\ &< 2\delta^2 + \epsilon - 4\delta^2 = \epsilon \end{aligned}$$

が成り立ち  $(h_n)_{n=1}^\infty$  は  $H$  の Cauchy 列となり,  $H$  が Hilbert 空間で  $C$  が  $H$  で閉だから極限  $y \in H$  が存在して  $y \in C$  が従う.

$$\begin{aligned} |\delta - \|f - y\|| &\leq |\delta - \|f - h_n\|| + |\|f - h_n\| - \|f - y\|| \\ &\leq |\delta - \|f - h_n\|| + \|h_n - y\| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

より  $\delta = \|f - y\|$  となり射影の存在が示された.  $f \in C$  の場合は  $f$  が自身の射影である.  
射影の一意性  $z \in C$  もまた  $\delta = \|f - z\|$  を満たすとすれば,  $C$  の凸性により

$$2\delta \leq 2 \left\| f - \frac{y+z}{2} \right\| \leq \|f - y\| + \|f - z\| = 2\delta$$

が成り立つから, 中線定理より

$$\|y - z\|^2 = 2(\|f - z\|^2 + \|f - y\|^2) - 4 \left\| f - \frac{y+z}{2} \right\|^2 = 0$$

となって  $y = z$  が従う.

$C$  が閉部分空間の場合  $f \in H \setminus C$  に対して  $f$  の  $C$  への射影を  $y \in C$  とする. ( $f \in C$  の場合は  $y = f$ .) 或る  $h \in C$  に対して

$$\langle f - y, h \rangle \neq 0$$

となると仮定すれば ( $f \neq y$  より  $h \neq 0$ ),

$$\hat{y} := y + \left( \frac{\langle f - y, h \rangle}{\|h\|^2} \right) h \in C$$

に対して<sup>\*4</sup>

$$\begin{aligned} \|f - \hat{y}\|^2 &= \left\langle f - y - \frac{\langle f - y, h \rangle}{\|h\|^2} h, f - y - \frac{\langle f - y, h \rangle}{\|h\|^2} h \right\rangle \\ &= \|f - y\|^2 - \frac{|\langle f - y, h \rangle|^2}{\|h\|^2} \\ &< \|f - y\|^2 \end{aligned}$$

が成り立つから  $y$  が射影であることに反する. 従って射影  $y$  は

$$\langle f - y, h \rangle = 0 \quad (\forall h \in C) \tag{1.9}$$

を満たす. 逆に  $y \in C$  に対して式 (1.9) が成り立っているとすれば  $y$  は  $f$  の射影となる. 実際任意の  $h \in C$  に対して

$$\begin{aligned} \|f - h\|^2 &= \langle f - y + y - h, f - y + y - h \rangle \\ &= \|f - y\|^2 + 2\operatorname{Re} \langle f - y, y - h \rangle + \|y - h\|^2 \\ &= \|f - y\|^2 + \|y - h\|^2 \\ &\geq \|f - y\|^2 \end{aligned}$$

となり

$$\|f - y\| = \inf_{h \in C} \|f - h\|$$

が成り立つ.

■

<sup>\*4</sup>  $\hat{y} \in C$  となるためには  $C$  が部分空間である必要がある. 凸性だけではこれが成り立たない.

定理 1.3.3 (Kolmos の補題).  $H$  を Hilbert 空間,  $\|\cdot\|$  を  $H$  の内積により導入されるノルムとする.  $f_n \in H$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) が  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\| < \infty$  を満たすとき,

$$\exists g_n \in \text{Conv}[\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2} \dots\}]^{*5} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

が取れて  $(g_n)_{n=1}^\infty$  は  $H$  の Cauchy 列となる.

証明.  $F := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\| < \infty$  とし

$$A := \sup_{n \geq 1} \inf \{ \|g\| \ ; \ g \in \text{Conv}[\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2} \dots\}] \}$$

とおけば  $A \leq F$  となる. 実際各  $n \in \mathbb{N}$  について任意に  $g \in \text{Conv}[\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2} \dots\}]$  を取れば

$$g = \sum_{i=0}^N c_i f_{n+i} \quad \left( 0 \leq c_i \leq 1, \sum_{i=0}^N c_i = 1 \right)$$

と表現できるから,

$$\|g\| = \left\| \sum_{i=0}^N c_i f_{n+i} \right\| \leq \sum_{i=0}^N c_i \|f_n\| \leq F$$

が成り立ち,

$$\inf \{ \|g\| \ ; \ g \in \text{Conv}[\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2} \dots\}] \} \leq F \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

が従い  $A \leq F$  を得る. また全ての  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$\inf \{ \|g\| \ ; \ g \in \text{Conv}[\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2} \dots\}] \} \leq A$$

が成り立つから, 或る  $g_n \in \text{Conv}[\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2} \dots\}]$  を

$$\|g_n\| \leq A + \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \dots) \tag{1.10}$$

を満たすよう取ることができる. 一方で

$$\left( \inf \{ \|g\| \ ; \ g \in \text{Conv}[\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2} \dots\}] \} \right)_{n=1}^\infty$$

が単調増大列である (下限を取る範囲が縮小していく) から, 任意に  $m \in \mathbb{N}$  を取れば或る  $N(m) \in \mathbb{N}$  ( $N(m) > m$ ) が存在し, 全ての  $n \geq N(m)$  に対して

$$\inf \{ \|g\| \ ; \ g \in \text{Conv}[\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2} \dots\}] \} \geq A - \frac{1}{m}$$

が成り立つ. 任意の  $l, k \geq N(m)$  に対し  $(g_l + g_k)/2 \in \text{Conv}[\{f_{N(m)}, f_{N(m)+1}, f_{N(m)+2} \dots\}]$  となるから

$$\left\| \frac{g_l + g_k}{2} \right\| \geq A - \frac{1}{m}$$

\*5  $\text{Conv}[\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2} \dots\}]$  は  $f_n, f_{n+1}, f_{n+2} \dots$  を含む最小の凸集合である. すなわち

$$\text{Conv}[\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2} \dots\}] = \left\{ \sum_{i=0}^\infty c_i f_{n+i} \ ; \ 0 \leq c_i \leq 1, \exists j \in \mathbb{N}, c_i = 0 \ (\forall i \geq j), \sum_{i=0}^\infty c_i = 1 \right\}$$

で定義される.

が従い、中線定理と (1.10) を併せれば

$$\|g_l - g_k\|^2 = 2\|g_l\| + 2\|g_k\| + \|g_l + g_k\|^2 \leq 4\left(A + \frac{1}{N(m)}\right)^2 - 4\left(A - \frac{1}{m}\right)^2 \leq \frac{16A}{m}$$

が成り立つ.  $A \leq F < \infty$  であったから, これは  $(g_n)_{n=1}^\infty$  が Cauchy 列をなしていることを表現している. ■



## 第 2 章

# 条件付き期待値作用素

### 2.1 $L^2$ における条件付き期待値

基礎におく確率空間を  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ , 係数体を  $\mathbb{R}$  とする.

$L^2$  における内積 ノルム空間  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  は

$$\langle [f], [g] \rangle_{L^2(\mathcal{F})} := \int_{\Omega} f(x)g(x) \mu(dx) \quad ([f], [g] \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)) \quad (2.1)$$

を内積として Hilbert 空間となる. まず左辺は代表元の選び方に依らない. 実際任意に  $f' \in [f]$  と  $g' \in [g]$  を取っても,

$$E := \{x \in \Omega ; \quad f(x) \neq f'(x)\}, \quad F := \{x \in \Omega ; \quad g(x) \neq g'(x)\}$$

は  $\mu$ -零集合であって

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x)g(x) \mu(dx) &= \int_{\Omega \setminus (E \cup F)} f(x)g(x) \mu(dx) \\ &= \int_{\Omega \setminus (E \cup F)} f'(x)g'(x) \mu(dx) = \int_{\Omega} f'(x)g'(x) \mu(dx) \end{aligned}$$

が成り立ち, Hölder の不等式から  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\mathcal{F})}$  は実数値として確定する. また次に示すように内積の公理を満たす:

正值性 ノルムとの対応  $\|[f]\|_{L^2(\mathcal{F})}^2 = \langle [f], [f] \rangle_{L^2(\mathcal{F})} \quad (\forall [f] \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu))$  による.

対称性 (2.1) において被積分関数を  $gf$  にしても積分値は変わらない.

双線型性 任意の  $[f], [g], [h] \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  と  $a \in \mathbb{R}$  に対して

$$\begin{aligned} \langle [f], [g] + [h] \rangle_{L^2(\mathcal{F})} &= \langle [f], [g + h] \rangle_{L^2(\mathcal{F})} = \int_{\Omega} f(x)(g(x) + h(x)) \mu(dx) \\ &= \int_{\Omega} f(x)g(x) \mu(dx) + \int_{\Omega} f(x)h(x) \mu(dx) = \langle [f], [g] \rangle_{L^2(\mathcal{F})} + \langle [f], [h] \rangle_{L^2(\mathcal{F})}, \\ \langle [f], \alpha[g] \rangle_{L^2(\mathcal{F})} &= \langle [f], [\alpha g] \rangle_{L^2(\mathcal{F})} \\ &= \int_{\Omega} \alpha f(x)g(x) \mu(dx) = \alpha \int_{\Omega} f(x)g(x) \mu(dx) = \alpha \langle [f], [g] \rangle_{L^2(\mathcal{F})} \end{aligned}$$

が成り立つことと対称性による.

そしてノルム空間としての完備性から  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  は Hilbert 空間となる.

条件付き期待値の存在  $\mathcal{F}$  の部分  $\sigma$ -加法族  $\mathcal{G}$  についての Hilbert 空間  $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  を考えれば, 任意の  $\langle g \rangle \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)^{*1}$  に対し  $g$  は可測  $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  であるから, 対応する  $[g] \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  が存在する.  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  より  $\langle g \rangle \subset [g]$  であり必ずしも  $\langle g \rangle = [g]$  とはならないが, 次の線型単射

$$J: L^0(\Omega, \mathcal{G}, \mu) \ni \langle g \rangle \mapsto [g] \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \quad (2.2)$$

によって  $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  は  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  に等長に埋め込まれ<sup>\*2</sup>,  $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  の完備性から埋め込まれた部分集合  $JL^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  は  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  の閉部分空間となる. 従って射影定理により任意の  $[f] \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  に対して射影  $[g] \in JL^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  がただ一つ決まる.  $J$  の値域を  $JL^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  に制限したものを  $J'$  とすれば  $J'$  は全単射となり,  $[f]$  に対して  $J'^{-1}[g] \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  がただ一つ決まる. 以上で定まる  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  から  $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  への対応が条件付き期待値作用素となる.

関数類と関数の表記 以降は関数類と関数は表記上で区別することはあまりせず, 状況に応じて  $f$  を関数類  $[f]$  の意味で使ったり関数  $f$  として扱ったりする. ただし主に  $f(x)$  と表記しているときや計算中は関数として扱っていて, 以下に定義する条件付き期待値を作用させる場合は関数類として扱っている.

定義 2.1.1 ( $L^2$  における条件付き期待値作用素).  $f \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  に対して, 射影定理により一意に定まる射影  $g \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  を

$$g = E[f | \mathcal{G}]$$

と表現し, これを  $\mathcal{G}$  で条件付けた  $f$  の条件付き期待値と呼ぶ.  $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$  の場合は特別に

$$E[f | \mathcal{G}] = E[f]$$

と書いて  $f$  の期待値と呼ぶ.

<sup>\*1</sup>  $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  は  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  とは空間が違うから関数類の表示を変えた.

<sup>\*2</sup> 任意の  $1 \leq p \leq \infty$  に対し  $L^p$  は  $L^0$  の部分集合であるから, 実際の単射は  $L^p(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  を  $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  に等長に埋め込む.

命題 2.1.2 (条件付き期待値作用素の性質). Hilbert 空間  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  における内積を  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\mathcal{F})}$ , ノルムを  $\|\cdot\|_{L^2(\mathcal{F})}$  と表記し,  $\mathcal{G}, \mathcal{H}$  を  $\mathcal{F}$  の部分  $\sigma$ -加法族とする.

C1 任意の  $f \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  に対して次が成り立つ:

$$E[f] = \int_{\Omega} f(x) \mu(dx).$$

C2 任意の  $f \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  と  $h \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  に対して次が成り立つ:

$$\int_{\Omega} f(x)h(x) \mu(dx) = \int_{\Omega} E[f | \mathcal{G}](x)h(x) \mu(dx).$$

C3 任意の  $f, f_1, f_2 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  と  $\alpha \in \mathbb{R}$  に対して次が成り立つ:

$$E[f_1 + f_2 | \mathcal{G}] = E[f_1 | \mathcal{G}] + E[f_2 | \mathcal{G}], \quad E[\alpha f | \mathcal{G}] = \alpha E[f | \mathcal{G}].$$

C4 任意の  $f_1, f_2 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  に対して次が成り立つ:

$$f_1 \leq f_2 \Rightarrow E[f_1 | \mathcal{G}] \leq E[f_2 | \mathcal{G}] \quad *3$$

C5 任意の  $f \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  と  $g \in L^\infty(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  に対して次が成り立つ:

$$E[gf | \mathcal{G}] = g E[f | \mathcal{G}].$$

C6  $\mathcal{H}$  が  $\mathcal{G}$  の部分  $\sigma$ -加法族ならば, 任意の  $f \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  に対して次が成り立つ:

$$E[E[f | \mathcal{G}] | \mathcal{H}] = E[f | \mathcal{H}].$$

証明.

C1  $\mathcal{M} = \{\emptyset, \Omega\}$  とすれば,  $L^2(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$  の関数類の代表は  $\mathcal{M}$ -可測でなくてはならないから  $\Omega$  上定数である. 従って各  $g \in L^2(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$  には定数  $\alpha \in \mathbb{R}$  が対応して  $g(x) = \alpha (\forall x \in \Omega)$  と表せる. 射影定理より  $f \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  に対する  $E[f | \mathcal{M}] = E[f]$  は, (2.2) の埋め込み  $J$  を用いて, ノルム  $\|f - Jg\|_{L^2(\mathcal{F})}$  を最小にする  $g \in L^2(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$  のことである.  $g(x) = \alpha (\forall x \in \Omega)$  としてノルムを直接計算すれば,

$$\begin{aligned} \|f - Jg\|_{L^2(\mathcal{F})}^2 &= \int_{\Omega} |f(x) - \alpha|^2 \mu(dx) \\ &= \int_{\Omega} |f(x)|^2 - 2\alpha f(x) + |\alpha|^2 \mu(dx) \\ &= \int_{\Omega} |f(x)|^2 \mu(dx) - 2\alpha \int_{\Omega} f(x) \mu(dx) + |\alpha|^2 \\ &= \left| \alpha - \int_{\Omega} f(x) \mu(dx) \right|^2 - \left| \int_{\Omega} f(x) \mu(dx) \right|^2 + \int_{\Omega} |f(x)|^2 \mu(dx) \\ &= \left| \alpha - \int_{\Omega} f(x) \mu(dx) \right|^2 + \int_{\Omega} |f(x) - \beta|^2 \mu(dx) \quad (\beta := \int_{\Omega} f(x) \mu(dx)) \end{aligned}$$

\*3 関数類に対する順序 (式 (1.4)) を表している.

と表現できて最終式は  $\alpha = \int_{\Omega} f(x) \mu(dx)$  で最小となる． すなわち

$$E[f] = E[f | \mathcal{M}] = \int_{\Omega} f(x) \mu(dx)^{*4}.$$

C2 射影定理により,  $f \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  の  $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  への射影  $E[f | \mathcal{G}]$  は

$$\langle f - JE[f | \mathcal{G}], h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} = 0 \quad (\forall h \in JL^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu))$$

を満たし, 内積の線型性から

$$\langle f, h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} = \langle JE[f | \mathcal{G}], h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} \quad (\forall h \in JL^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu))$$

が成り立つ. 積分の形式で表示すれば

$$\int_{\Omega} f(x)h(x) \mu(dx) = \int_{\Omega} E[f | \mathcal{G}](x)h(x) \mu(dx) \quad (\forall h \in JL^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu))$$

を得る.

C3

加法について 射影定理により任意の  $h \in JL^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  に対して

$$\begin{aligned} \langle (f_1 + f_2) - JE[f_1 + f_2 | \mathcal{G}], h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} &= 0, \\ \langle f_1 - JE[f_1 | \mathcal{G}], h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} &= 0, \\ \langle f_2 - JE[f_2 | \mathcal{G}], h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} &= 0 \end{aligned}$$

が成り立っている. 従って任意の  $h \in JL^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  に対して

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (f_1 + f_2) - JE[f_1 + f_2 | \mathcal{G}], h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} \\ &\quad - \langle f_1 - JE[f_1 | \mathcal{G}], h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} - \langle f_2 - JE[f_2 | \mathcal{G}], h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} \\ &= \langle JE[f_1 | \mathcal{G}] + JE[f_2 | \mathcal{G}] - JE[f_1 + f_2 | \mathcal{G}], h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} \end{aligned}$$

となり, 特に  $h = JE[f_1 | \mathcal{G}] + JE[f_2 | \mathcal{G}] - JE[f_1 + f_2 | \mathcal{G}] \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  とすれば

$$\| JE[f_1 | \mathcal{G}] + JE[f_2 | \mathcal{G}] - JE[f_1 + f_2 | \mathcal{G}] \|_{L^2(\mathcal{F})}^2 = 0$$

が成り立つ.  $J$  の線型性と等長性により

$$\begin{aligned} 0 &= \| JE[f_1 | \mathcal{G}] + JE[f_2 | \mathcal{G}] - JE[f_1 + f_2 | \mathcal{G}] \|_{L^2(\mathcal{F})} \\ &= \| E[f_1 | \mathcal{G}] + E[f_2 | \mathcal{G}] - E[f_1 + f_2 | \mathcal{G}] \|_{L^2(\mathcal{G})} \end{aligned}$$

が従うから

$$E[f_1 | \mathcal{G}] + E[f_2 | \mathcal{G}] = E[f_1 + f_2 | \mathcal{G}]$$

となる.

---

<sup>\*4</sup> 本来恒等的に  $\int_{\Omega} f(x) \mu(dx)$  を取るような関数を代表とする関数類が  $E[f]$  となるが,  $L^2(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$  と  $\mathbb{R}$  は一対一に対応しているから  $E[f]$  が実数と対応していると思ふことができる.

スカラ倍について 射影定理より

$$\langle f - JE[f | \mathcal{G}], h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} = 0, \quad \langle \alpha f - JE[\alpha f | \mathcal{G}], h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} = 0, \quad (\forall h \in JL^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu))$$

が成り立っているから, 任意の  $h \in JL^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  に対して

$$\begin{aligned} \langle JE[\alpha f | \mathcal{G}] - \alpha JE[f | \mathcal{G}], h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} &= \langle JE[\alpha f | \mathcal{G}] - \alpha f, h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} - \langle \alpha JE[f | \mathcal{G}] - \alpha f, h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} \\ &= \langle JE[\alpha f | \mathcal{G}] - \alpha f, h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} - \alpha \langle f - JE[f | \mathcal{G}], h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} = 0 \end{aligned}$$

となる. 特に  $h = JE[\alpha f | \mathcal{G}] - \alpha JE[f | \mathcal{G}] \in JL^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  として

$$\| JE[\alpha f | \mathcal{G}] - \alpha JE[f | \mathcal{G}] \|_{L^2(\mathcal{F})}^2 = 0$$

を満たすから  $J$  の線型性と等長性より  $E[\alpha f | \mathcal{G}] = \alpha E[f | \mathcal{G}]$  が従う.

**C4** 「任意の  $f \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  に対して,  $f \geq 0$  ならば  $E[f | \mathcal{G}] \geq 0$ 」 —(※) を示せばよい. これ  
が示されれば,  $f_1, f_2 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  が  $f_1 \leq f_2$  となるなら

$$0 \leq f_2 - f_1 \Rightarrow 0 \leq E[f_2 - f_1 | \mathcal{G}] = E[f_2 | \mathcal{G}] - E[f_1 | \mathcal{G}]$$

が従う. ここで  $0$  は零写像の関数類である.  $A \in \mathcal{F}$  と  $B \in \mathcal{G}$  を

$$A := \{x \in \Omega; f(x) < 0\}, \quad B := \{x \in \Omega; E[f | \mathcal{G}](x) < 0\}$$

として  $\mu(A) = 0$  ならば  $\mu(B) = 0$  が成り立つと言えよ. 従って  $\mu(A) = 0, \mu(B) > 0$  と仮定  
して矛盾を導く.

$$h(x) := \begin{cases} E[f | \mathcal{G}](x) & (x \in \Omega \setminus B) \\ 0 & (x \in B) \end{cases}$$

として  $\mathcal{G}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -可測関数を定義すると

$$\begin{aligned} \|f - Jh\|_{L^2(\mathcal{F})}^2 &= \int_{\Omega} |f(x) - h(x)|^2 \mu(dx) \\ &= \int_{A^c \cap B^c} |f(x) - h(x)|^2 \mu(dx) + \int_{A^c \cap B} |f(x) - h(x)|^2 \mu(dx) \\ &= \int_{A^c \cap B^c} |f(x) - E[f | \mathcal{G}](x)|^2 \mu(dx) + \int_{A^c \cap B} |f(x)|^2 \mu(dx) \\ &< \int_{A^c \cap B^c} |f(x) - E[f | \mathcal{G}](x)|^2 \mu(dx) + \int_{A^c \cap B} |f(x) - E[f | \mathcal{G}](x)|^2 \mu(dx) \\ &= \|f - JE[f | \mathcal{G}]\|_{L^2(\mathcal{F})}^2 \end{aligned}$$

が成り立つ. 不等号  $<$  は  $\mu(A^c \cap B) = \mu(B) - \mu(A \cap B) = \mu(B) > 0$  であることと

$$0 \leq f(x) < f(x) - E[f | \mathcal{G}](x) \quad (\forall x \in A^c \cap B)$$

による. しかし

$$\|f - Jh\|_{L^2(\mathcal{F})} < \|f - JE[f | \mathcal{G}]\|_{L^2(\mathcal{F})}$$

を満たす  $h \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  が存在することは  $JE[f | \mathcal{G}]$  が  $f$  の射影であることに矛盾する.  
従って  $\mu(B) = 0$  でなくてはならず, (※) が示された.

C5  $\|E[gh|\mathcal{G}] - gE[f|\mathcal{G}]\|_{L^2(\mathcal{F})} = 0$  が成り立つことを示す．任意の  $h \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  に対して

$$\langle E[gh|\mathcal{G}] - gE[f|\mathcal{G}], h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} = \langle E[gh|\mathcal{G}] - gh, h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} + \langle gh - gE[f|\mathcal{G}], h \rangle_{L^2(\mathcal{F})}$$

を考えると，右辺が 0 になることが次のように証明される．先ず右辺第一項について， $gh$  は  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  に入る． $g$  は或る  $\mu$ -零集合  $E \in \mathcal{G}$  を除いて有界であるから，或る正数  $\alpha$  によって  $|g(x)| \leq \alpha$  ( $\forall x \in E^c$ ) と抑えられ，

$$\int_{\Omega} |g(x)f(x)|^2 \mu(dx) = \int_{E^c} |g(x)|^2 |f(x)|^2 \mu(dx) \leq \alpha^2 \int_{E^c} |f(x)|^2 \mu(dx) = \alpha^2 \int_{\Omega} |f(x)|^2 \mu(dx) < \infty$$

が成り立つからである．従って射影定理により

$$\langle E[gh|\mathcal{G}] - gh, h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} = 0 \quad (\forall h \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)).$$

右辺第二項について，

$$\langle gh - gE[f|\mathcal{G}], h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} = \int_{\Omega} (f(x) - E[f|\mathcal{G}](x)) g(x) h(x) \mu(dx) = \langle f - E[f|\mathcal{G}], gh \rangle_{L^2(\mathcal{F})}$$

であって，先と同様の理由で  $gh \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  ( $\forall h \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ ) が成り立つから射影定理より

$$\langle gh - gE[f|\mathcal{G}], h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} = 0 \quad (\forall h \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu))$$

であると判明した．始めの式に戻れば

$$\langle E[gh|\mathcal{G}] - gE[f|\mathcal{G}], h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} = 0 \quad (\forall h \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu))$$

が成り立つことになり，特に  $h = E[gh|\mathcal{G}] - gE[f|\mathcal{G}] \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  に対しては

$$\|E[gh|\mathcal{G}] - gE[f|\mathcal{G}]\|_{L^2(\mathcal{F})}^2 = 0$$

となることから  $E[gh|\mathcal{G}] = gE[f|\mathcal{G}]$  が示された．

C6 任意の  $h \in L^2(\Omega, \mathcal{H}, \mu) \subset L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  に対し，射影定理より

$$\begin{aligned} & \langle E[E[f|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] - E[f|\mathcal{H}], h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} \\ &= \langle E[E[f|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] - E[f|\mathcal{G}], h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} \\ & \quad + \langle E[f|\mathcal{G}] - f, h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} + \langle f - E[f|\mathcal{H}], h \rangle_{L^2(\mathcal{F})} = 0 \end{aligned}$$

が成り立つ．特に  $h = E[E[f|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] - E[f|\mathcal{H}] \in L^2(\Omega, \mathcal{H}, \mu)$  とすれば

$$\|E[E[f|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] - E[f|\mathcal{H}]\|_{L^2(\mathcal{F})}^2 = 0$$

ということになるので  $E[E[f|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = E[f|\mathcal{H}]$  であることが示された．

■

## 2.2 条件付き期待値作用素の拡張

命題 2.1.2[C3] より, 条件付き期待値が  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  から  $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  への線型作用素 (写像) であることが示された. Hölder の不等式より  $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  は  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  の部分空間であり, 同様に  $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  も  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  の部分空間であるから, 条件付き期待値は  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  から  $L^1(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  への線型作用素と見做すことができる. 条件付き期待値が有界な線型作用素であり, 且つ定義域  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  が  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  において稠密であるならば, 定理 1.3.1 より条件付き期待値作用素は  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  上の線型写像に拡張可能となる.

補題 2.2.1 (条件付き期待値作用素の有界性).

条件付き期待値を  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  から  $L^1(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  への線型作用素と考えたとき, 作用素ノルムは 1 以下である:

$$\sup_{\substack{f \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \\ f \neq 0}} \frac{\|E[f | \mathcal{G}]\|_{L^1(\mathcal{G})}}{\|f\|_{L^1(\mathcal{F})}} \leq 1.$$

証明.

$$\begin{aligned} \|E[f | \mathcal{G}]\|_{L^1(\mathcal{F})} &= \int_{\Omega} |E[f | \mathcal{G}](x)| \mu(dx) \\ &= \int_{\Omega} E[f | \mathcal{G}](x) \mathbb{1}_{\{E[f | \mathcal{G}] \geq 0\}}(x) - E[f | \mathcal{G}](x) \mathbb{1}_{\{E[f | \mathcal{G}] < 0\}}(x) \mu(dx) \\ &= \int_{\Omega} f(x) \mathbb{1}_{\{E[f | \mathcal{G}] \geq 0\}}(x) - f(x) \mathbb{1}_{\{E[f | \mathcal{G}] < 0\}}(x) \mu(dx) \quad (\because \text{命題 2.1.2[C2]}) \\ &\leq \int_{\Omega} |f(x)| \mathbb{1}_{\{E[f | \mathcal{G}] \geq 0\}}(x) + |f(x)| \mathbb{1}_{\{E[f | \mathcal{G}] < 0\}}(x) \mu(dx) \\ &= \|f\|_{L^1(\mathcal{F})}. \end{aligned}$$

定理 2.2.2 (条件付き期待値作用素の拡張). 定義域を  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  としている条件付き期待値  $E[\cdot | \mathcal{G}]$  に対して, 作用素ノルムを変えない拡張である  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  上の有界線型作用素

$$\tilde{E}[\cdot | \mathcal{G}] : L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \ni f \mapsto \tilde{E}[f | \mathcal{G}] \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$$

が一意に存在する.

$\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$  である場合は  $\tilde{E}[f | \mathcal{G}] = \tilde{E}[f]$  と表示することにする.

証明. 定理 1.3.1 と補題 2.2.1 より, 拡張可能性を示すには  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  が  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  で稠密なこ

とをいえばよい. 任意の  $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  に対して,

$$f_n(x) := f(x) \mathbb{1}_{|f| \leq n}(x) \quad (\forall x \in \Omega, n = 1, 2, 3, \dots)$$

とおけば  $(f_n)_{n=1}^\infty \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  となり, また関数列は  $f$  に各点収束しているから Lebesgue の収束定理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^1(\mathcal{F})} = 0$$

が成り立つ. ■

命題 2.2.3 (拡張された条件付き期待値作用素の性質).  $\tilde{E}[\cdot | \mathcal{G}]$  について, 命題 2.1.2 の C1~6 に対応する次の  $\tilde{C}1 \sim 6$  が成り立つ:

$\tilde{C}1$  任意の  $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  に対して次が成り立つ:

$$\tilde{E}[f] = \int_{\Omega} f(x) \mu(dx).$$

$\tilde{C}2$  任意の  $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  と  $h \in L^\infty(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  に対して次が成り立つ:

$$\int_{\Omega} f(x) h(x) \mu(dx) = \int_{\Omega} \tilde{E}[f | \mathcal{G}](x) h(x) \mu(dx).$$

$\tilde{C}3$  任意の  $f, f_1, f_2 \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  と  $\alpha \in \mathbb{R}$  に対して次が成り立つ:

$$\tilde{E}[f_1 + f_2 | \mathcal{G}] = \tilde{E}[f_1 | \mathcal{G}] + \tilde{E}[f_2 | \mathcal{G}], \quad \tilde{E}[\alpha f | \mathcal{G}] = \alpha \tilde{E}[f | \mathcal{G}].$$

$\tilde{C}4$  任意の  $f_1, f_2 \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  に対して次が成り立つ:

$$f_1 \leq f_2 \quad \text{a.s.} \quad \Rightarrow \quad \tilde{E}[f_1 | \mathcal{G}] \leq \tilde{E}[f_2 | \mathcal{G}] \quad \text{a.s.}$$

$\tilde{C}5$  任意の  $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  と  $g \in L^\infty(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  に対して次が成り立つ:

$$\tilde{E}[gf | \mathcal{G}] = g \tilde{E}[f | \mathcal{G}].$$

$\tilde{C}6$   $\mathcal{H}$  が  $\mathcal{G}$  の部分  $\sigma$ -加法族ならば, 任意の  $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  に対して次が成り立つ:

$$\tilde{E}[\tilde{E}[f | \mathcal{G}] | \mathcal{H}] = \tilde{E}[f | \mathcal{H}].$$

証明.

$\tilde{C}1$   $f$  に対して, 先の (2.2) と同じように関数列  $(f_n)_{n=1}^\infty \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  を作る. C1 により全ての  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$\tilde{E}[f_n] = \int_{\Omega} f_n(x) \mu(dx)$$



が成り立っているから、Lebesgue の収束定理と作用素の有界性により

$$\left| \tilde{E}[f] - \int_{\Omega} f(x) \mu(dx) \right| \leq |\tilde{E}[f] - \tilde{E}[f_n]| + \left| \int_{\Omega} f_n(x) \mu(dx) - \int_{\Omega} f(x) \mu(dx) \right| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つ。ゆえに

$$\tilde{E}[f] = \int_{\Omega} f(x) \mu(dx)$$

が示された。

- Č2  $f$  に対して、先の (2.2) と同じように関数列  $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  を作る。  $h \in L^{\infty}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  であることに注意すれば、C2 により全ての  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$\int_{\Omega} f_n(x) h(x) \mu(dx) = \int_{\Omega} \tilde{E}[f_n | \mathcal{G}](x) h(x) \mu(dx)$$

が成り立つ。

$$A := \left\{ x \in \Omega \mid |h(x)| > \|h\|_{L^{\infty}(\mathcal{F}, \mu)} \right\}$$

とおけば  $\mu(A) = 0$  であり、拡張が作用素ノルムを変えないことと補助定理 2.2.1 の結果より

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} f(x) h(x) \mu(dx) - \int_{\Omega} \tilde{E}[f | \mathcal{G}](x) h(x) \mu(dx) \right| \\ & \leq \left| \int_{\Omega} f(x) h(x) \mu(dx) - \int_{\Omega} f_n(x) h(x) \mu(dx) \right| \\ & \quad + \left| \int_{\Omega} \tilde{E}[f_n | \mathcal{G}](x) h(x) \mu(dx) - \int_{\Omega} \tilde{E}[f | \mathcal{G}](x) h(x) \mu(dx) \right| \\ & \leq \|h\|_{L^{\infty}(\mathcal{F}, \mu)} \int_{\Omega \setminus A} |f(x) - f_n(x)| \mu(dx) + \|h\|_{L^{\infty}(\mathcal{F}, \mu)} \int_{\Omega \setminus A} |\tilde{E}[f_n | \mathcal{G}](x) - \tilde{E}[f | \mathcal{G}](x)| \mu(dx) \\ & = \|h\|_{L^{\infty}(\mathcal{F}, \mu)} \|f - f_n\|_{L^1(\mathcal{F})} + \|h\|_{L^{\infty}(\mathcal{F}, \mu)} \|\tilde{E}[f | \mathcal{G}] - \tilde{E}[f_n | \mathcal{G}]\|_{L^1(\mathcal{F})} \\ & \leq 2 \|h\|_{L^{\infty}(\mathcal{F}, \mu)} \|f - f_n\|_{L^1(\mathcal{F})} \quad (\because \text{補助定理 2.2.1}) \end{aligned}$$

が成り立つ。  $(f_n)_{n=1}^{\infty}$  の作り方から Lebesgue の収束定理が適用されて

$$\|f - f_n\|_{L^1(\mathcal{F})} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となるから

$$\int_{\Omega} f(x) h(x) \mu(dx) = \int_{\Omega} \tilde{E}[f | \mathcal{G}](x) h(x) \mu(dx)$$

が示された。

- Č3 作用素  $\tilde{E}[\cdot | \mathcal{G}]$  の線型性による。  
 Č4 作用素の線型性から、C4 の証明と同様に「任意の  $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  に対して、  $f \geq 0$  a.s. ならば  $\tilde{E}[f | \mathcal{G}] \geq 0$  a.s.」を示せばよい。  $f$  に対して、先の (2.2) と同じように関数列  $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  を作る。全ての  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$\{x \in \Omega \mid f_n(x) < 0\} \subset \{x \in \Omega \mid f(x) < 0\}$$

が成り立っているから、右辺が  $\mu$ -零集合と仮定すれば C4 より

$$\tilde{E}[f_n | \mathcal{G}] \geq 0 \text{ a.s. } (n = 1, 2, 3, \dots)$$

となる。従って

$$A_n := \left\{ x \in \Omega \mid \tilde{E}[f_n | \mathcal{G}](x) < 0 \right\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

とすれば  $\mu(A) = 0$  となり,

$$B := \left\{ x \in \Omega \mid \tilde{E}[f | \mathcal{G}](x) < 0 \right\}$$

に対して  $\mu(B \cap A^c) = \mu(B) - \mu(B \cap A) = \mu(B)$  が成り立つから、示せばよいのは  $\mu(B \cap A^c) = 0$  となることである。  $B \cap A^c$  の上では全ての  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$|\tilde{E}[f | \mathcal{G}](x) - \tilde{E}[f_n | \mathcal{G}](x)| = \tilde{E}[f_n | \mathcal{G}](x) - \tilde{E}[f | \mathcal{G}](x) \geq -\tilde{E}[f | \mathcal{G}](x) > 0$$

が成り立っていることから,

$$C_k := \left\{ x \in B \cap A^c \mid |\tilde{E}[f | \mathcal{G}](x)| > 1/k \right\} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

とおけば

$$B \cap A^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$$

が成り立つ。全ての  $k \in \mathbb{N}$  に対して

$$\begin{aligned} \|\tilde{E}[f | \mathcal{G}] - \tilde{E}[f_n | \mathcal{G}]\|_{L^1(\mathcal{F})} &= \int_{\Omega} |\tilde{E}[f | \mathcal{G}](x) - \tilde{E}[f_n | \mathcal{G}](x)| \mu(dx) \\ &\geq \int_{C_k} |\tilde{E}[f | \mathcal{G}](x) - \tilde{E}[f_n | \mathcal{G}](x)| \mu(dx) \\ &> \mu(C_k)/k \end{aligned}$$

が成り立つことから、  $C_k$  が  $n$  に無関係なことから左辺が  $n \rightarrow \infty$  で 0 に収束することから  $\mu(C_k) = 0$  ( $\forall k = 1, 2, 3, \dots$ ) でなくてはならず,

$$\mu(B) = \mu(B \cap A^c) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(C_k) = 0$$

となり  $\tilde{E}[f | \mathcal{G}] \geq 0$  a.s. が示された。

**Č5**  $f$  に対して、先の (2.2) と同じように関数列  $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  を作る。  $f_n$  については C5 より

$$\tilde{E}[gf_n | \mathcal{G}] = g\tilde{E}[f_n | \mathcal{G}] \tag{2.3}$$

が成り立っている。

$$E := \left\{ x \in \Omega \mid |g(x)| > \|g\|_{L^\infty(\mathcal{F}, \mu)} \right\}$$

とおけば  $\mu(E) = 0$  であって、拡張が作用素ノルムを変えないことと補助定理 2.2.1, また Lebesgue の収束定理を適用すれば

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{E}[gf | \mathcal{G}] - \tilde{E}[gf_n | \mathcal{G}] \right\|_{L^1(\mathcal{F})} &\leq \|gf - gf_n\|_{L^1(\mathcal{F})} \leq \int_{\Omega} |g(x)| |f(x) - f_n(x)| \mu(dx) \\ &= \int_{\Omega \setminus E} |g(x)| |f(x) - f_n(x)| \mu(dx) \leq \|g\|_{L^\infty(\mathcal{F}, \mu)} \|f - f_n\|_{L^1(\mathcal{F})} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

が成り立つ. 同様にして

$$\begin{aligned} \left\| g\tilde{E}[f | \mathcal{G}] - g\tilde{E}[f_n | \mathcal{G}] \right\|_{L^1(\mathcal{F})} &= \int_{\Omega} |g(x)\tilde{E}[f | \mathcal{G}](x) - g(x)\tilde{E}[f_n | \mathcal{G}](x)| \mu(dx) \\ &\leq \|g\|_{L^\infty(\mathcal{F}, \mu)} \int_{\Omega \setminus E} |\tilde{E}[f | \mathcal{G}](x) - \tilde{E}[f_n | \mathcal{G}](x)| \mu(dx) \\ &= \|g\|_{L^\infty(\mathcal{F}, \mu)} \int_{\Omega} |\tilde{E}[f | \mathcal{G}](x) - \tilde{E}[f_n | \mathcal{G}](x)| \mu(dx) \\ &\leq \|g\|_{L^\infty(\mathcal{F}, \mu)} \|f - f_n\|_{L^1(\mathcal{F})} \\ &\longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

も成り立つから, 式 (2.3) と併せて

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{E}[gf | \mathcal{G}] - g\tilde{E}[f | \mathcal{G}] \right\|_{L^1(\mathcal{F})} &\leq \left\| \tilde{E}[gf | \mathcal{G}] - \tilde{E}[gf_n | \mathcal{G}] \right\|_{L^1(\mathcal{F})} + \left\| g\tilde{E}[f_n | \mathcal{G}] - g\tilde{E}[f | \mathcal{G}] \right\|_{L^1(\mathcal{F})} \\ &\longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

となり  $\tilde{E}[gf | \mathcal{G}] = g\tilde{E}[f | \mathcal{G}]$  が示された.

**C6**  $f$  に対して, 先の (2.2) と同じように関数列  $(f_n)_{n=1}^\infty \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  を作る.  $f_n$  については C6 より

$$\tilde{E}[\tilde{E}[f_n | \mathcal{G}] | \mathcal{H}] = \tilde{E}[f_n | \mathcal{H}]$$

が成り立っている.

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{E}[f | \mathcal{H}] - \tilde{E}[f_n | \mathcal{H}] \right\|_{L^1(\mathcal{F})} &\leq \|f - f_n\|_{L^1(\mathcal{F})}, \\ \left\| \tilde{E}[\tilde{E}[f | \mathcal{G}] | \mathcal{H}] - \tilde{E}[\tilde{E}[f_n | \mathcal{G}] | \mathcal{H}] \right\|_{L^1(\mathcal{F})} &\leq \left\| \tilde{E}[f | \mathcal{G}] - \tilde{E}[f_n | \mathcal{G}] \right\|_{L^1(\mathcal{F})} \leq \|f - f_n\|_{L^1(\mathcal{F})} \end{aligned}$$

が成り立つことと Lebesgue の収束定理より

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{E}[\tilde{E}[f_n | \mathcal{G}] | \mathcal{H}] - \tilde{E}[f_n | \mathcal{H}] \right\|_{L^1(\mathcal{F})} &\leq \left\| \tilde{E}[f | \mathcal{H}] - \tilde{E}[f_n | \mathcal{H}] \right\|_{L^1(\mathcal{F})} + \left\| \tilde{E}[\tilde{E}[f | \mathcal{G}] | \mathcal{H}] - \tilde{E}[\tilde{E}[f_n | \mathcal{G}] | \mathcal{H}] \right\|_{L^1(\mathcal{F})} \\ &\leq 2\|f - f_n\|_{L^1(\mathcal{F})} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

となり  $\tilde{E}[\tilde{E}[f_n | \mathcal{G}] | \mathcal{H}] = \tilde{E}[f_n | \mathcal{H}]$  が示された.

■

定義 2.2.4 (条件付き期待値の再定義). 定理 2.2.2 で定義された  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  から  $L^1(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  への有界線型作用素  $\tilde{E}[\cdot | \mathcal{G}]$  を  $E[\cdot | \mathcal{G}]$  と表記し直し,  $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  に対して

$$E[f | \mathcal{G}]$$

を  $\mathcal{G}$  で条件付けた  $f$  の条件付き期待値と呼ぶ.  $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$  の場合は特別に

$$E[f | \mathcal{G}] = E[f]$$

と書いて  $f$  の期待値と呼ぶ.

## 2.3 独立性

基礎におく確率空間を  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  とする. 任意の有界実連続関数  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  と任意の可測  $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  関数  $X$  に対して, その合成  $h(X)$  が  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  で可積分であることに注意すればその条件付き期待値を考えることができ, これを用いて独立性を次で定義する.

定義 2.3.1 (独立性).  $X$  を可測  $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  関数,  $\mathcal{G}$  を  $\mathcal{F}$  の部分  $\sigma$ -加法族とする. この下で  $X$  と  $\mathcal{G}$  が独立であることを以下で定義する:

任意の有界実連続関数  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  に対し次が成り立つ.

$$E[h(X) | \mathcal{G}] = E[h(X)] \quad P\text{-a.s.}$$

上で定義した独立性が,  $X$  の生成する  $\sigma$ -加法族と  $\mathcal{G}$  との間の  $\sigma$ -加法族としての独立性と同値であることを示す.

命題 2.3.2 (独立性の同値条件). 任意の有界実連続関数  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  に対し

$$E[h(X) | \mathcal{G}] = E[h(X)] \quad P\text{-a.s.}$$

が成立すること (—(1) とする) と,

$$P(X^{-1}(E) \cap A) = P(X^{-1}(E))P(A) \quad (\forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), A \in \mathcal{G})$$

が成立すること (—(2) とする) は同値である.

証明.

(1)  $\Rightarrow$  (2) について 示したいことは

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \left\{ E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mid P(X^{-1}(E) \cap A) = P(X^{-1}(E))P(A), \quad \forall A \in \mathcal{G} \right\}$$

である．証明の手順としてまず上式右辺が Dynkin 族となることを示し，次に  $\mathbb{R}$  の閉集合系が右辺に含まれることを示せば，Dynkin 族定理より上式が成立することが判る．右辺を

$$\mathcal{D} := \left\{ E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \mid P(X^{-1}(E) \cap A) = P(X^{-1}(E))P(A), \quad \forall A \in \mathcal{G} \right\}$$

とおいて表示を簡単にしておく． $\mathcal{D}$  が Dynkin 族であることを示すには次の 3 条件を確認すればよい：

(i).  $\mathbb{R} \in \mathcal{D}$ ,

(ii).  $D_1, D_2 \in \mathcal{D}, D_1 \subset D_2 \Rightarrow D_2 - D_1 \in \mathcal{D}$ ,

(iii).  $D_n \in \mathcal{D}, D_n \cap D_m = \emptyset (n \neq m) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathcal{D}$

(i) について， $\Omega = X^{-1}(\mathbb{R})$  により  $P(X^{-1}(\mathbb{R}) \cap A) = P(A) = P(X^{-1}(\mathbb{R}))P(A) (\forall A \in \mathcal{G})$  であるから  $\mathbb{R} \in \mathcal{D}$  となる．(ii) について，

$$\begin{aligned} P(X^{-1}(D_2 - D_1) \cap A) &= P(X^{-1}(D_2) \cap A) - P(X^{-1}(D_1) \cap A) \\ &= (P(X^{-1}(D_2)) - P(X^{-1}(D_1)))P(A) = P(X^{-1}(D_2 - D_1))P(A), \quad (\forall A \in \mathcal{G}) \end{aligned}$$

により  $D_2 - D_1 \in \mathcal{D}$  となる．(iii) について，

$$\begin{aligned} P(X^{-1}(\sum_{n=1}^{\infty} D_n) \cap A) &= P(\sum_{n=1}^{\infty} X^{-1}(D_n) \cap A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X^{-1}(D_n) \cap A) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(X^{-1}(D_n))P(A) = P(X^{-1}(\sum_{n=1}^{\infty} D_n))P(A), \quad (\forall A \in \mathcal{G}) \end{aligned}$$

により  $\sum_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathcal{D}$  となる．以上で  $\mathcal{D}$  が Dynkin 族であることが判った．次に  $\mathbb{R}$  の閉集合系が  $\mathcal{D}$  に含まれることを示す． $E$  を  $\mathbb{R}$  の任意の閉集合とする．

$$d(\cdot, E) : \mathbb{R} \ni x \mapsto \inf\{|x - y| \mid y \in E\}$$

として集合との距離の関数を表せばこれは  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  の実連続関数であり，

$$h_n : \mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{1}{1 + nd(x, E)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

は有界実連続関数となる． $E$  が閉集合であるから  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = \mathbb{1}_E(x) (\forall x \in \mathbb{R})$  であり，また  $h_n$  の有界連続性から  $h_n \circ X \in L^1(\mathcal{F}, \mu) (n = 1, 2, 3, \dots)$  であることに注意すれば，任意の  $A \in \mathcal{G}$  に対して

$$\begin{aligned} P(X^{-1}(E) \cap A) &= \int_{\Omega} \mathbb{1}_E(X(\omega)) \mathbb{1}_A(\omega) P(d\omega) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} h_n(X(\omega)) \mathbb{1}_A(\omega) P(d\omega) \quad (\because \text{Lebesgue の収束定理}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} E[h_n(X) \mid \mathcal{G}](\omega) \mathbb{1}_A(\omega) P(d\omega) \quad (\because \text{定理 2.2}[\tilde{C}2]) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} E[h_n(X)] \int_{\Omega} \mathbb{1}_A(\omega) P(d\omega) \quad (\because (1) \text{ より } E[h_n(X) \mid \mathcal{G}] \neq E[h_n(X)] \text{ の部分は積分に影響しない.}) \\ &= P(A) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} h_n(X(\omega)) P(d\omega) \quad (\because \text{定理 2.2}[\tilde{C}1]) \\ &= P(A) \int_{\Omega} \mathbb{1}_E(X(\omega)) P(d\omega) \quad (\because \text{Lebesgue の収束定理}) \\ &= P(X^{-1}(E))P(A) \end{aligned}$$

が成り立ち， $\mathbb{R}$  の閉集合系が  $\mathcal{D}$  に含まれることが示された．閉集合系は乗法族であり  $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  を生成するから (2) が成り立つと判明する．

(2)  $\Rightarrow$  (1) について 任意の  $A \in \mathcal{G}$  に対し

$$\int_{\Omega} \mathbb{1}_A(\omega) E[h(X) | \mathcal{G}](\omega) P(d\omega) = P(A) E[h(X)] = \int_{\Omega} \mathbb{1}_A(\omega) E[h(X)] P(d\omega)$$

が成立することをいえばよい. 有界実連続関数  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が非負であるとして  $h$  の単関数近似を考えると, 例えば

$$E_n^j := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{j-1}{3^n} \leq h(x) < \frac{j}{3^n} \right\}, \quad (j = 1, 2, \dots, n3^n - 1, n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$E_n^{n3^n} := \{ x \in \mathbb{R} \mid n \leq h(x) \}$$

として

$$h_n(x) = \sum_{j=1}^{n3^n} \frac{j}{3^n} \mathbb{1}_{E_n^j}(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}, n = 1, 2, 3, \dots)$$

とおけば,  $h$  が可測  $\mathfrak{B}(\mathbb{R})/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  であるから  $E_n^j$  は全て Borel 集合であり, 任意の  $A \in \mathcal{G}$  に対して

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbb{1}_A(\omega) E[h(X) | \mathcal{G}](\omega) P(d\omega) &= \int_{\Omega} \mathbb{1}_A(\omega) h(X(\omega)) P(d\omega) & (\because \text{定理 2.2}[\tilde{C}2]) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \mathbb{1}_A(\omega) h_n(X(\omega)) P(d\omega) & (\because \text{積分の定義}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n3^n} \int_{\Omega} \mathbb{1}_A(\omega) \mathbb{1}_{X^{-1}(E_n^j)}(\omega) P(d\omega) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n3^n} P(X^{-1}(E_n^j) \cap A) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n3^n} P(X^{-1}(E_n^j)) P(A) & (\because (2) \text{より}) \\ &= P(A) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n3^n} \int_{\Omega} \mathbb{1}_{X^{-1}(E_n^j)}(\omega) P(d\omega) \\ &= P(A) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} h_n(X(\omega)) P(d\omega) \\ &= P(A) \int_{\Omega} h(X(\omega)) P(d\omega) \\ &= P(A) E[h(X)] \end{aligned}$$

が成り立つ. 一般の有界実連続関数  $h$  についても  $\{x \in \mathbb{R} \mid h(x) \geq 0\}$  の部分と  $\{x \in \mathbb{R} \mid h(x) < 0\}$  の部分に分解して上と同様に考えれば

$$\int_{\Omega} \mathbb{1}_A(\omega) E[h(X) | \mathcal{G}](\omega) P(d\omega) = P(A) E[h(X)] \quad (\forall A \in \mathcal{G})$$

となる. 従って  $\mathcal{G}$  の元  $\{\omega \in \Omega \mid E[h(X) | \mathcal{G}](\omega) > E[h(X)]\}$  も  $\{\omega \in \Omega \mid E[h(X) | \mathcal{G}](\omega) < E[h(X)]\}$  も  $P$ -零集合でなくてはならず,

$$E[h(X) | \mathcal{G}] = E[h(X)] \quad P\text{-a.s.}$$

が示された.

レポート問題 1.  $A, B \in \mathcal{F}$  に対し,  $X = \mathbb{1}_A$ ,  $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega, B, B^c\}$  とする. この時

$$X \text{ と } \mathcal{G} \text{ が独立} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

証明.  $\forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  に対して

$$X^{-1}(E) = \begin{cases} \emptyset & (0, 1 \notin E) \\ A & (0 \notin E, 1 \in E) \\ A^c & (0 \in E, 1 \notin E) \\ \Omega & (0, 1 \in E) \end{cases}$$

であることに注意する.  $\Rightarrow$  については前命題より成り立ち,  $\Leftarrow$  については

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

ならば

$$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A)P(B) = (1 - P(A))P(B) = P(A^c)P(B)$$

も成り立ち,  $A$  を  $\Omega, \emptyset$  にしても上の等式は成り立つから, 前命題により  $X$  と  $\mathcal{G}$  が独立であると判る.

次に条件付き期待値に対して Jensen の不等式が成り立つことを証明する. その前に凸関数の性質を書いておく.

定理 2.3.3 (Jensen の不等式).  $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を凸関数とし,  $X, \psi(X) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$  とする.  $\mathcal{G}$  を  $\mathcal{F}$  の部分  $\sigma$ -加法族とすれば次の不等式が成り立つ:

$$E[\psi(X) | \mathcal{G}] \geq \psi(E[X | \mathcal{G}])$$

## 第 3 章

# 停止時刻

### 3.1 停止時刻

確率空間を  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  とする. 集合  $I$  によって確率過程の時点を表現し, 以降でこれは  $[0, \infty)$  や  $\{0, 1, \dots, n\}$  など実数の区間や高々可算集合を指すものと考え,  $I$  が高々可算集合の場合は離散位相,  $\mathbb{R}$  の区間の場合は相対位相を考える. また扱う確率変数は全て実数値で考える.

**定義 3.1.1 (フィルトレーション).**  $\mathcal{F}$  の部分  $\sigma$ -加法族の部分系  $\{\mathcal{F}_\alpha; \alpha \in I\}$  がフィルトレーション (filtration) であるとは, 任意の  $\alpha, \beta \in I$  に対して  $\alpha \leq \beta$  ならば  $\mathcal{F}_\alpha \subset \mathcal{F}_\beta$  の関係をもつことで定義する.

**定義 3.1.2 (停止時刻).**  $\Omega$  上の関数で次を満たすものを  $(\mathcal{F}_\alpha)$ -停止時刻 (stopping time) という:

$$\tau : \Omega \longrightarrow I \quad \text{s.t.} \quad \forall \alpha \in I, \{\tau \leq \alpha\} \in \mathcal{F}_\alpha.$$

**注意 3.1.3 (停止時刻は可測).** 上で定義した  $\tau$  は可測  $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(I)$  である.

証明.

$I$  が  $\mathbb{R}$  の区間である場合 任意の  $\alpha \in I$  に対して  $I_\alpha := (-\infty, \alpha) \cap I$  は  $I$  における (相対の) 開集合であり  $\tau^{-1}(I_\alpha) = \{\tau \leq \alpha\} \in \mathcal{F}_\alpha \subset \mathcal{F}$  が成り立つ. つまり

$$\{I_\alpha; \alpha \in I\} \subset \{A \in \mathfrak{B}(I); \tau^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$$

が成り立ち, 左辺の  $I_\alpha$  の形の全体は  $\mathfrak{B}(I)$  を生成するから  $\tau$  の可測性が証明された.

$I$  が高々可算集合である場合 先ず  $\alpha \in I$  に対して  $\{\tau < \alpha\}$  が  $\mathcal{F}_\alpha$  に属することを示す.  $\alpha$  に対して直前の元  $\beta \in I$  が存在するか  $\alpha$  が  $I$  の最小限である場合, 前者なら  $\{\tau < \alpha\} = \{\tau \leq \beta\}$  となり後者なら  $\{\tau < \alpha\} = \emptyset$  となるからどちらも  $\mathcal{F}_\alpha$  に属する. そうでない場合は  $\alpha - 1/n < x < \alpha$  を満たす点列  $x_n \in I$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を取れば,  $\{\tau < \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\tau \leq \alpha - 1/n\}$  により  $\{\tau < \alpha\} \in \mathcal{F}_\alpha$  が判る. 以上の準備の下で任意の  $\alpha \in I$  に対して  $\tau^{-1}(\{\alpha\}) = \{\tau \leq \alpha\} - \{\tau < \alpha\} \in \mathcal{F}_\alpha$  が成り立ち, 更に可算集合  $I$  には離散位相が入っているから任意の  $A \in \mathfrak{B}(I)$  は一点集合の可算和で



表現できて,  $\tau^{-1}(A) \in \mathcal{F}$  であると証明された.

■

**定義 3.1.4 (停止時刻の再定義).** 今  $\tau$  の終集合は  $I$  であるが,  $I \rightarrow \mathbb{R}$  の恒等写像  $i$  を用いて  $\tau^* := i \circ \tau$  とすれば,

$$\mathfrak{B}(I) = \{ A \cap I ; \quad A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \} = \{ i^{-1}(A) ; \quad A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \}$$

により ( $i$  が可測  $\mathfrak{B}(I)/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  であるから) 合成写像  $\tau^*$  は可測  $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  となる. 以降はこの  $\tau^*$  を停止時刻  $\tau$  と表記して扱うことにする.

定数関数は停止時刻となる.  $\tau$  が  $\Omega$  上の定数関数なら ( $\tau \leq \alpha$ ) は空集合か全体集合にしかならないからである. また  $\sigma, \tau$  を  $I$  に値を取る停止時刻とすると  $\sigma \vee \tau$  と  $\sigma \wedge \tau$  も停止時刻となる. 実際

$$\begin{cases} \{\sigma \wedge \tau \leq \alpha\} = \{\sigma \leq \alpha\} \cup \{\tau \leq \alpha\}, \\ \{\sigma \vee \tau \leq \alpha\} = \{\sigma \leq \alpha\} \cap \{\tau \leq \alpha\} \end{cases}, (\forall \alpha \in I)$$

が成り立つからである.

**定義 3.1.5 (停止時刻の前に決まっている事象系).**  $\tau$  を  $I$  に値を取る停止時刻とする.  $\tau$  に対し次の集合系を定義する.

$$\mathcal{F}_\tau := \{ A \in \mathcal{F} ; \quad \{\tau \leq \alpha\} \cap A \in \mathcal{F}_\alpha, \forall \alpha \in I \}.$$

**命題 3.1.6 (停止時刻の性質).**  $I \subset \mathbb{R}$  に値を取る停止時刻  $\sigma, \tau$  に対し次が成り立つ.

- (1)  $\mathcal{F}_\tau$  は  $\sigma$ -加法族である.
- (2) 或る  $\alpha \in I$  に対して  $\tau(\omega) = \alpha$  ( $\forall \omega \in \Omega$ ) なら  $\mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F}_\tau$ .
- (3)  $\sigma(\omega) \leq \tau(\omega)$  ( $\forall \omega \in \Omega$ ) ならば  $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$ .
- (4)  $\mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau} = \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$ .
- (5)  $\mathcal{F}_{\sigma \vee \tau} = \mathcal{F}_\sigma \vee \mathcal{F}_\tau$ .

**証明.**

- (1) 停止時刻の定義より  $\Omega \in \mathcal{F}_\tau$  である. また  $A \in \mathcal{F}_\tau$  なら  $A^c \cap \{\tau \leq \alpha\} = \{\tau \leq \alpha\} - A \cap \{\tau \leq \alpha\} \in \mathcal{F}_\alpha$  より  $A^c \in \mathcal{F}_\tau$  となる. 可算個の  $A_n \in \mathcal{F}_\tau$  については  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap \{\tau \leq \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap \{\tau \leq \alpha\}) \in \mathcal{F}_\alpha$  により  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}_\tau$  が成り立つ.
- (2)  $A \in \mathcal{F}_\alpha$  なら任意の  $\beta \in I$  に対して

$$A \cap \{\tau \leq \beta\} = \begin{cases} A & \alpha \leq \beta \\ \emptyset & \alpha > \beta \end{cases}$$

が成り立つから, いずれの場合も  $A \in \mathcal{F}_\beta$  となり  $A \in \mathcal{F}_\tau$  が成り立つ. 逆に  $A \in \mathcal{F}_\tau$  のとき,  $A = A \cap \{\tau \leq \alpha\} \in \mathcal{F}_\alpha$  が成り立ち  $\mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F}_\tau$  が示された.

- (3)  $A \in \mathcal{F}_\sigma$  なら任意の  $\alpha \in I$  に対して

$$A \cap \{\tau \leq \alpha\} = A \cap \{\sigma \leq \alpha\} \cap \{\tau \leq \alpha\} \in \mathcal{F}_\alpha$$

が成り立つから  $A \in \mathcal{F}_\tau$  となる.

- (4)  $\sigma \wedge \tau$  が停止時刻であることと (3) より  $\mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau} \subset \mathcal{F}_\sigma$  と  $\mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau} \subset \mathcal{F}_\tau$  が判る. また  $A \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$  に対し

$$A \cap \{\sigma \wedge \tau \leq \alpha\} = (A \cap \{\sigma \leq \alpha\}) \cup (A \cap \{\tau \leq \alpha\}) \in \mathcal{F}_\alpha \quad (\forall \alpha \in I)$$

より  $A \in \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}$  も成り立つ.

- (5) 先ず  $\sigma \vee \tau$  が停止時刻であることと (3) より  $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}$  と  $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}$  が判る. 逆に  $A \in \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}$  に対して

命題 3.1.7 (停止時刻と条件付き期待値).  $X \in L^1(\mathcal{F}, P)$  と  $I$  に値を取る停止時刻  $\sigma, \tau$  に対し以下が成立する.

- (1)  $E[\mathbb{1}_{(\sigma > \tau)} X \mid \mathcal{F}_\tau] = E[\mathbb{1}_{(\sigma > \tau)} X \mid \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}]$ .
- (2)  $E[\mathbb{1}_{(\sigma \geq \tau)} X \mid \mathcal{F}_\tau] = E[\mathbb{1}_{(\sigma \geq \tau)} X \mid \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}]$ .
- (3)  $E[E[X \mid \mathcal{F}_\tau] \mid \mathcal{F}_\sigma] = E[X \mid \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}]$ .

証明.

第一段  $\mathbb{1}_{(\sigma > \tau)}$  が可測  $\mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  であることを示す.  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  に対し

$$\mathbb{1}_{(\sigma > \tau)}^{-1}(A) = \begin{cases} \Omega & (0 \in A, 1 \in A) \\ (\sigma > \tau) & (0 \notin A, 1 \in A) \\ (\sigma > \tau)^c & (0 \in A, 1 \notin A) \\ \emptyset & (0 \notin A, 1 \notin A) \end{cases}$$

と表現できるから, 示すことは任意の  $\alpha \in I$  に対して

$$(\sigma > \tau) \cap (\sigma \wedge \tau \leq \alpha) \in \mathcal{F}_\alpha$$

が成立することである. これが示されれば

$$(\sigma > \tau)^c \cap (\sigma \wedge \tau \leq \alpha) = (\sigma \wedge \tau \leq \alpha) \setminus [(\sigma > \tau) \cap (\sigma \wedge \tau \leq \alpha)] \in \mathcal{F}_\alpha$$

も成り立ち, 更に  $(\sigma > \tau)^c = (\sigma \leq \tau)$  であることと  $\sigma, \tau$  の対等性により  $\mathbb{1}_{(\sigma \geq \tau)}$  もまた可測  $\mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  であることが判る. 目的の式は次が成り立つことにより示される.

$$\begin{aligned} (\sigma > \tau) \cap (\sigma \wedge \tau \leq \alpha) &= (\sigma > \tau) \cap (\sigma \leq \alpha) + (\sigma > \tau) \cap (\sigma > \alpha) \cap (\tau \leq \alpha) \\ &= \left[ \bigcup_{\substack{\beta \in \mathbb{Q} \cap I \\ \beta \leq \alpha}} (\sigma > \beta) \cap (\tau \leq \beta) \right] \cap (\sigma \leq \alpha) + (\sigma > \alpha) \cap (\tau \leq \alpha) \quad (3.1) \\ &\in \mathcal{F}_\alpha. \end{aligned}$$

第二段 一般の実確率変数  $Y$  と停止時刻  $\tau$  に対して

- $Y$  が可測  $\mathcal{F}_\tau/\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow$  任意の  $\alpha \in I$  に対し  $Y\mathbb{1}_{\tau \leq \alpha}$  が可測  $\mathcal{F}_\alpha/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$

が成り立つことを示す.

$\Rightarrow$  について  $Y$  の単関数近似列  $(Y_n)_{n=1}^\infty$  の一つ一つは  $Y_n = \sum_{j=1}^{N_n} a_{j,n} \mathbb{1}_{A_{j,n}}$  ( $A_{j,n} \in \mathcal{F}_\tau$ ) の形で表現できる.  $\alpha \in I$  と  $A \in \mathcal{F}_\tau$  の指示関数  $\mathbb{1}_A$  に対し

$$(\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{(\tau \leq \alpha)})^{-1}(E) = \begin{cases} \Omega & (0 \in E, 1 \in E) \\ A \cap (\tau \leq \alpha) & (0 \notin E, 1 \in E) \\ [A \cap (\tau \leq \alpha)]^c & (0 \in E, 1 \notin E) \\ \emptyset & (0 \notin E, 1 \notin E) \end{cases} \quad (\forall E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$$

となり,  $A \cap (\tau \leq \alpha) \in \mathcal{F}_\alpha$  より  $\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{(\tau \leq \alpha)}$  が可測  $\mathcal{F}_\alpha/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  であると判る.  $(Y_n)_{n=1}^\infty$  は  $Y$  に各点収束していくから  $Y$  も可測  $\mathcal{F}_\alpha/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  となり,  $\alpha \in I$  の任意性から” $\Rightarrow$ ”が示された.

$\Leftarrow$  について 任意の  $E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  に対して

$$\{\omega \in \Omega \mid Y(\omega)\mathbb{1}_{(\tau \leq \alpha)}(\omega) \in E\} = \begin{cases} Y^{-1}(E) \cap (\tau \leq \alpha) & (0 \notin E) \\ Y^{-1}(E) \cap (\tau \leq \alpha) + (\tau \leq \alpha)^c & (0 \in E) \end{cases}$$

がいずれも  $\mathcal{F}_\alpha$  に属する. 特に下段について  $(\tau \leq \alpha)^c \in \mathcal{F}_\alpha$  より  $Y^{-1}(E) \cap (\tau \leq \alpha) \in \mathcal{F}_\alpha$  となるから, 結局  $Y^{-1}(E) \cap (\tau \leq \alpha) \in \mathcal{F}_\alpha$  ( $\forall E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ ) が成り立つ.  $\alpha \in I$  の任意性から  $Y^{-1}(E) \in \mathcal{F}_\tau$  ( $\forall E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ ) が示された.

第三段 (1) の式を示す. 第一段と性質  $\tilde{C}5$  より

$$E[\mathbb{1}_{(\sigma > \tau)} X \mid \mathcal{F}_\tau] = \mathbb{1}_{(\sigma > \tau)} E[X \mid \mathcal{F}_\tau]$$

が成り立つから, あとは右辺が (関数とみて) 可測  $\mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  であればよく, このためには第二段の結果より任意の  $\alpha \in I$  に対して  $E[X \mid \mathcal{F}_\tau] \mathbb{1}_{(\sigma > \tau)} \mathbb{1}_{(\sigma \wedge \tau \leq \alpha)}$  が可測  $\mathcal{F}_\alpha/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  であることを示せばよい. 式 (3.1) を使えば

$$\mathbb{1}_{(\sigma > \tau)} \mathbb{1}_{(\sigma \wedge \tau \leq \alpha)} = \sup_{\substack{\beta \in \mathbb{Q} \cap I \\ \beta \leq \alpha}} \mathbb{1}_{(\sigma > \beta)} \mathbb{1}_{(\tau \leq \beta)} \mathbb{1}_{(\sigma \leq \alpha)} + \mathbb{1}_{(\sigma > \alpha)} \mathbb{1}_{(\tau \leq \alpha)}$$

が成り立つ.  $\beta \leq \alpha$  ならば,  $E[X \mid \mathcal{F}_\tau]$  が可測  $\mathcal{F}_\tau/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  であることと第二段の結果より  $E[X \mid \mathcal{F}_\tau] \mathbb{1}_{(\tau \leq \beta)}$  が可測  $\mathcal{F}_\beta/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  すなわち可測  $\mathcal{F}_\alpha/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  となるから, これで  $E[X \mid \mathcal{F}_\tau] \mathbb{1}_{(\sigma > \tau)} \mathbb{1}_{(\sigma \wedge \tau \leq \alpha)}$  が可測  $\mathcal{F}_\alpha/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  であると判り  $\mathbb{1}_{(\sigma > \tau)} E[X \mid \mathcal{F}_\tau]$  が可測  $\mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  であることが示された. 以上で

$$E[E[\mathbb{1}_{(\sigma > \tau)} X \mid \mathcal{F}_\tau] \mid \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}] = E[\mathbb{1}_{(\sigma > \tau)} E[X \mid \mathcal{F}_\tau] \mid \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}] = \mathbb{1}_{(\sigma > \tau)} E[X \mid \mathcal{F}_\tau] = E[\mathbb{1}_{(\sigma > \tau)} X \mid \mathcal{F}_\tau]$$

が成り立ち,

$$E[E[\mathbb{1}_{(\sigma > \tau)} X \mid \mathcal{F}_\tau] \mid \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}] = \mathbb{1}_{(\sigma > \tau)} E[X \mid \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}] = E[\mathbb{1}_{(\sigma > \tau)} X \mid \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}]$$

と併せて (1) の式を得る. (2) の式も以上と同じ理由で成り立つ.

第四段 (3) の式を示す.

$$\begin{aligned}
E[E[X|\mathcal{F}_\tau]|\mathcal{F}_\sigma] &= E[E[X|\mathcal{F}_\tau]\mathbb{1}_{(\sigma>\tau)}|\mathcal{F}_\sigma] + E[E[X|\mathcal{F}_\tau]\mathbb{1}_{(\sigma\leq\tau)}|\mathcal{F}_\sigma] \\
&= E[E[X|\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}]\mathbb{1}_{(\sigma>\tau)}|\mathcal{F}_\sigma] + E[E[X|\mathcal{F}_\tau]\mathbb{1}_{(\sigma\leq\tau)}|\mathcal{F}_\sigma] \quad (\because (1)) \\
&= E[X|\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}]\mathbb{1}_{(\sigma>\tau)} + E[E[X|\mathcal{F}_\tau]\mathbb{1}_{(\sigma\leq\tau)}|\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}] \quad (\because (2)) \\
&= E[X|\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}]\mathbb{1}_{(\sigma>\tau)} + E[X|\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}]\mathbb{1}_{(\sigma\leq\tau)} \\
&= E[X|\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}].
\end{aligned}$$

(2) 式を使った箇所では  $X$  を  $E[X|\mathcal{F}_\tau]$  に置き換え  $\tau$  と  $\sigma$  を入れ替えて適用した.

定理 3.1.8 (停止時刻との合成写像の可測性).  $I = [0, T]$ , フィルトレーションを  $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ ,  $\tau$  を停止時刻とし,  $M$  を  $I \times \Omega$  上の  $\mathbb{R}$  値関数とする. 全ての  $\omega \in \Omega$  に対し  $I \ni t \mapsto M(t, \omega)$  が右連続でかつ  $(\mathcal{F}_t)$ -適合ならば, 写像  $\omega \mapsto M(\tau(\omega), \omega)$  は可測  $\mathcal{F}_\tau/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  となる.

証明. 任意に  $t \in I$  を取り  $t_j^n := jt/2^n$  ( $j = 0, 1, \dots, 2^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ) とおくと, 右連続性により任意の  $s \in [0, t]$  に対して

$$M(s, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{2^n} M_{t_j^n}(\omega) \mathbb{1}_{[t_{j-1}^n, t_j^n)}(s) + M_t(\omega) \mathbb{1}_{\{t\}}(s) \quad (\omega \in \Omega) \quad (3.2)$$

が成り立つ. 右辺は各  $n$  で可測  $\mathcal{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  であるから  $M$  も可測  $\mathcal{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  となる. ( $t$  の任意性から  $M$  は  $(\mathcal{F}_t)$ -発展的可測である.) 一方停止時刻  $\tau$  について,  $\tau \wedge t$  が可測  $\mathcal{F}_t/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  であるから

$$\Omega \ni \omega \mapsto (\tau(\omega) \wedge t, \omega) \in [0, t] \times \Omega$$

は可測  $\mathcal{F}_t/\mathcal{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t$  である. 従って合成写像

$$\Omega \ni \omega \mapsto M(\tau(\omega) \wedge t, \omega) \in \mathbb{R}$$

は可測  $\mathcal{F}_t/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  となる. 任意の  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  に対して

$$\{\omega \in \Omega; M(\tau(\omega), \omega) \in A\} \cap \{\tau \leq t\} = \{\omega \in \Omega; M(\tau(\omega) \wedge t, \omega) \in A\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

が成り立つから, 写像  $\omega \mapsto M(\tau(\omega), \omega)$  は可測  $\mathcal{F}_\tau/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  である<sup>\*1</sup>.

<sup>\*1</sup> 写像  $\omega \mapsto M(\tau(\omega), \omega)$  が可測  $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  となっていないことにはこの結論が従わない. この点を確認すれば, 式 (3.2) より  $M$  が可測  $\mathcal{B}(I) \times \mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  であることは確かであるから,  $\omega \mapsto (\tau(\omega), \omega)$  が可測  $\mathcal{F}/\mathcal{B}(I) \times \mathcal{F}$  であることと併せて写像  $\omega \mapsto M(\tau(\omega), \omega)$  が可測  $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  であることが判明する.

定理 3.1.9 (閉集合と停止時刻).  $I = [0, T] \subset \mathbb{R}$ ,  $(E, \rho)$  を距離空間,  $(X_t)_{t \in I}$  を  $E$  値確率変数の族とし,  $\mathcal{F}_0$  が  $\mu$ -零集合を全て含んでいると仮定する.  $\mu$ -零集合  $N$  を除いて  $I \ni t \mapsto X_t(\omega)$  が右連続で, かつ  $(X_t)_{t \in I}$  が  $(\mathcal{F}_t)$ -適合であるなら, 任意の閉集合  $F \subset E$  に対し

$$\tau(\omega) := \begin{cases} 0 & (\omega \in N) \\ \inf \{ t \in I ; X_t(\omega) \in F \} \wedge T & (\omega \in \Omega \setminus N) \end{cases}$$

として  $\tau: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  を定めれば  $\tau$  は停止時刻となる. また  $N'$  ( $N \subset N'$ ) を除いて  $I \ni t \mapsto X_t(\omega)$  が連続であるなら

$$X_{t \wedge \tau(\omega)}(\omega) \in \{X_0(\omega)\} \cup F^{ic} \quad (\forall \omega \in N', t \in I)$$

が成り立つ. ただし  $F^i$  は  $F$  の内核を表し  $F^{ic}$  は  $F^i$  の補集合を表す.

確率空間が完備である場合は

$$\tau(\omega) := \inf \{ t \in I ; X_t(\omega) \in F \} \wedge T \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

として  $\tau$  は停止時刻となる. 実際任意の  $t \in I$  に対して,

$$\{\tau \leq t\} = \{\tau \leq t\} \cap N + \{\omega \in \Omega \setminus N ; \tau(\omega) \leq t\}$$

の右辺第一項は完備性より  $\mu$ -零集合, 第二項は以下で  $\mathcal{F}_t$  に属すると証明される.

証明.

$$D_t(\omega) := \begin{cases} 1 & (\omega \in N) \\ \inf \{ \rho(X_r(\omega), F) ; r \in ([0, t] \cap \mathbb{Q}) \cup \{t\} \} & (\omega \in \Omega \setminus N) \end{cases}$$

とおけば<sup>\*2</sup>,  $D_t$  は可測  $\mathcal{F}_t/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  となる<sup>\*3</sup>. ここでは任意の  $t \in [0, T]$  に対して

$$\{\omega \in \Omega \setminus N ; \tau(\omega) \leq t\} = \{\omega \in \Omega \setminus N ; D_t(\omega) = 0\} \quad (3.3)$$

が成り立つことを示す. 実際これが示されれば任意の  $t \in I$  に対し

$$\{\tau \leq t\} = \begin{cases} \Omega & (t = T) \\ N + \{\omega \in \Omega \setminus N ; D_t(\omega) = 0\} & (t < T) \end{cases}$$

<sup>\*2</sup>  $\rho(X_r(\omega), F) = \inf_{y \in F} \rho(X_r(\omega), y)$  である.

<sup>\*3</sup> 写像  $E \ni x \mapsto \rho(x, F) \in \mathbb{R}$  は連続であるから, 合成写像

$$\Omega \ni \omega \mapsto \rho(X_t(\omega), F)$$

は可測  $\mathcal{F}_t/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  となる. 任意の  $\lambda \in \mathbb{R}$  に対し

$$\{\inf \{ \rho(X_r, F) ; r \in ([0, t] \cap \mathbb{Q}) \cup \{t\} \} \geq \lambda\} = \bigcap_{r \in ([0, t] \cap \mathbb{Q}) \cup \{t\}} \{\rho(X_r, F) \geq \lambda\}$$

となり右辺の各集合は  $\in \mathcal{F}_t$  であるから写像  $\Omega \ni \omega \mapsto \inf \{ \rho(X_r(\omega), F) ; r \in ([0, t] \cap \mathbb{Q}) \cup \{t\} \}$  も可測  $\mathcal{F}_t/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  となる. 任意の  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  に対し

$$D_t^{-1}(A) = \begin{cases} N \cup \{\inf \{ \rho(X_r, F) ; r \in ([0, t] \cap \mathbb{Q}) \cup \{t\} \} \in A\} & (1 \in A) \\ \{\inf \{ \rho(X_r, F) ; r \in ([0, t] \cap \mathbb{Q}) \cup \{t\} \} \in A\} & (1 \notin A) \end{cases}$$

となるが,  $N \in \mathcal{F}_0$  であるから  $D_t$  もまた可測  $\mathcal{F}_t/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  となる.

となるから  $\tau$  は停止時刻となる．式 (3.3) が成立することを示すには包含関係  $\subset, \supset$  のそれぞれを満たすことを確認すればよい．

⊂ について 任意に  $t \in [0, T)$  を固定する． $\tau(\omega) \leq t$  となる  $\omega \in \Omega \setminus N$  に対し  $s := \tau(\omega)$  とおくと  $X_s(\omega) \in F$  となる．もし  $X_s(\omega) \notin F$  であるとすれば， $F$  が閉集合であることと  $s \mapsto X_s(\omega)$  の右連続性から或る  $\delta > 0$  が存在し，任意の  $0 < h < \delta$  に対して  $X_{s+h}(\omega) \notin F$  となり  $s = \tau(\omega)$  であることに矛盾する．今  $\rho(X_s(\omega), F) = 0$  が示されたが， $D_t(\omega) = 0$  も成り立っている．実際もし  $D_t(\omega) > 0$  であるとすれば， $a := D_t(\omega)$  に対して

$$\rho(X_s(\omega), X_r(\omega)) < a/2$$

を満たす  $r \in ((s, t] \cap \mathbb{Q}) \cup \{t\}$  が存在するから

$$\rho(X_s(\omega), F) \geq \rho(X_r(\omega), F) - \rho(X_s(\omega), X_r(\omega)) > a - a/2 = a/2$$

となり矛盾が生じてしまう．

⊃ について 任意に  $t \in [0, T)$  を固定する． $D_t(\omega) = 0$  となる  $\omega \in \Omega \setminus N$  について

$$\rho(X_{s_n}(\omega), F) < 1/n$$

となるように  $s_n \in ([0, t] \cap \mathbb{Q}) \cup \{t\}$  を取ることができる． $(s_n)_{n=1}^\infty$  は  $[0, t]$  に集積点  $s$  を持ち， $F$  が閉であるから  $X_s(\omega) \in F$  となる．従って  $\tau(\omega) \leq s \leq t$  が成り立つ．

以上で  $\tau$  が停止時刻であることが示されたから，次に定理の後半の主張を示す． $N'$  を除いて  $I \ni t \mapsto X_t(\omega)$  が連続である場合， $\tau(\omega) = 0$  なら  $X_0(\omega) \in F$  である．実際  $F$  が閉集合であることとパスの連続性により  $0$  のある近傍内においても  $X_t(\omega) \notin F$  となる．従って  $X_{t \wedge \tau(\omega)}(\omega) \in F^{ic}$  であるとは限らない． $\tau(\omega) > 0$  のとき， $t < \tau(\omega)$  ( $\omega \in \Omega \setminus N'$ ) に対しては  $X_t(\omega) \in F^c$  が成り立っているから，示せばよいのは

$$X_{\tau(\omega)}(\omega) \in F^{ic} \tag{3.4}$$

が成り立つことである． $s = \tau(\omega)$  とおく．もし  $X_s(\omega) \in F^i$  であるとすれば連続性から或る  $\delta$  が存在し， $0 < h < \delta$  を満たす任意の  $h$  に対し

$$X_{s-h}(\omega) \in F^i$$

となるが，

$$s > s - h \geq \inf \{ t \in I ; X_t(\omega) \in F \}$$

が従い矛盾が生じる．よって (3.4) が示された． ■

## 第 4 章

# マルチンゲール

### 4.1 Doob の不等式・任意抽出定理

$I$  を  $[0, \infty)$  の部分集合として基礎に置フィルター付き確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, (\mathcal{F}_t)_{t \in I})$  と表す.

**定義 4.1.1 (マルチンゲール).** フィルター付き確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, (\mathcal{F}_t)_{t \in I})$  上の実確率変数の族  $(M_t)_{t \in I} \subset \mathcal{L}^p(\mathcal{F}, \mu)$  ( $p \geq 1$ ) が次の四条件を満たすとき, これを  $L^p$ -劣マルチンゲール ( $L^p$ -submartingale) という.

(M.1)  $\forall t \in I$  に対し  $M_t$  は可測  $\mathcal{F}_t/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  である.

(M.2) 任意の  $s \leq t$  ( $s, t \in I$ ) に対し  $E[M_t | \mathcal{F}_s] \geq M_s$  (同値類に対する順序関係) が成り立つ.

(M.3) 各  $\omega \in \Omega$  において, 任意の  $t \in I$  で左極限が存在する:  $\exists \lim_{s \uparrow t} M_s(\omega) \in \mathbb{R}$ .

(M.4) 各  $\omega \in \Omega$  において, 任意の  $t \in I$  で右連続である:  $M_t(\omega) = \lim_{s \downarrow t} M_s(\omega)$ .

条件 (M.2) の不等号が逆向き " $\leq$ " の場合,  $(M_t)_{t \in I}$  を  $L^p$ -優マルチンゲール ( $L^p$ -supermartingale) といい, 劣かつ優マルチンゲールであるものをマルチンゲールという.

$\tau$  を停止時刻,  $(M_t)_{t \in I}$  を実確率変数の族とする.  $\tau(\Omega)$  が高々可算集合である場合,  $t$  に関する停止時刻との合成関数は

$$M_\tau = \sum_{t \in \tau(\Omega)} M_t \mathbf{1}_{\{\tau=t\}}$$

と表される. 全ての  $t \in \tau(\Omega)$  について  $M_t$  が可測  $\mathcal{F}_t/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  であるなら  $M_\tau$  は可測  $\mathcal{F}_\tau/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  である. なぜならば任意の  $t \in I$  と  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  に対して

$$\{M_\tau \in A\} \cap \{\tau \leq t\} = \bigcup_{\substack{s \in \tau(\Omega) \\ s \leq t}} \{M_s \in A\} \cap \{\tau = s\} \in \mathcal{F}_t$$

が成り立つからである.  $M_\tau$  の可測性を確認したところで次の定理を証明する.

**定理 4.1.2 (任意抽出定理 (1)).**  $I = \{0, 1, \dots, n\}$  とし, 実確率変数の族  $(M_t)_{t \in I}$  が  $L^p$ -劣マルチンゲールであるとする. このとき  $I$  に値を取る停止時刻  $\sigma$  と  $\tau$  について次が成立する:

$$E[M_\tau | \mathcal{F}_\sigma] \geq M_{\sigma \wedge \tau}. \quad (4.1)$$

$(M_t)_{t \in I}$  が  $L^p$ -マルチンゲールなら (4.1) は等号で成立する.

証明.

$\sigma \leq \tau$  の場合  $F_t := \mathbb{1}_{\{\sigma < t \leq \tau\}} (t \in I)$  とおくと,

$$\{\sigma < t \leq \tau\} = \{\sigma < t\} \cap \{t \leq \tau\} = \{\sigma \leq t-1\} \cap \{\tau \leq t-1\}^c$$

より  $F_t$  は可測  $\mathcal{F}_{t-1}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  となる.

$$N_0 = 0, \quad N_t := \sum_{s=0}^{t-1} F_{s+1}(M_{s+1} - M_s) \quad (t \in I \setminus \{0\})$$

として  $N$  を定めれば,  $N$  もまた  $L^p$ -劣マルチンゲールとなる. 実際  $N_t$  の右辺の最終項  $F_t(M_t - M_{t-1})$  が可測  $\mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  であるから  $N_t$  も可測  $\mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  であり, また  $M_t (t \in I)$  が  $p$  乗可積分であるからその有限個の結合で表現される  $N_t (t \in I)$  もまた  $p$  乗可積分となる. 更に  $s \leq t (s, t \in I)$  に対して

$$N_t - N_s = \sum_{u=s}^{t-1} F_{u+1}(M_{u+1} - M_u)$$

となるから, 命題 2.2.3 の  $\tilde{C}5$ ,  $\tilde{C}6$ , そして  $(M_t)_{t \in I}$  の劣マルチンゲール性より

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N_t - N_s | \mathcal{F}_s] &= \sum_{u=s}^{t-1} \mathbb{E}[F_{u+1}(M_{u+1} - M_u) | \mathcal{F}_s] \\ &= \sum_{u=s}^{t-1} \mathbb{E}[F_{u+1} \mathbb{E}[M_{u+1} - M_u | \mathcal{F}_u] | \mathcal{F}_s] \geq 0 \quad *1 \end{aligned}$$

が成り立ち  $(N_t)_{t \in I}$  の劣マルチンゲール性が従う.

$$N_n = \sum_{s=\sigma}^{\tau-1} (M_{s+1} - M_s) = M_\tau - M_\sigma$$

と表現すれば,  $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$  として

$$\mathbb{E}[M_\tau - M_\sigma] = \mathbb{E}[N_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[N_n | \mathcal{F}_0] | \mathcal{G}] \geq \mathbb{E}[N_0] = 0 \quad (4.2)$$

が成り立つ. 特に任意の  $E \in \mathcal{F}_\sigma$  に対して

$$\sigma_E(\omega) := \begin{cases} \sigma(\omega) & (\omega \in E) \\ n & (\omega \in \Omega \setminus E) \end{cases}, \quad \tau_E(\omega) := \begin{cases} \tau(\omega) & (\omega \in E) \\ n & (\omega \in \Omega \setminus E) \end{cases}$$

と定めれば  $\sigma_E, \tau_E$  も停止時刻となり<sup>\*2</sup>,  $\sigma_E \leq \tau_E$  を満たすから (4.2) より

$$\int_{\Omega} M(\tau_E(\omega), \omega) \mu(d\omega) \geq \int_{\Omega} M(\sigma_E(\omega), \omega) \mu(d\omega)$$

<sup>\*1</sup> 順序は関数類に対する順序であり, 0 は関数類の零元を表す.

<sup>\*2</sup> 任意の  $t \in I$  に対し

$$\{\tau_E \leq t\} = \{\tau_E \leq t\} \cap E + \{\tau_E \leq t\} \cap (\Omega \setminus E) = \begin{cases} \{\tau \leq t\} \cap E & (t < n) \\ \Omega & (t = n) \end{cases}$$

が成り立つ.  $\mathcal{F}_\sigma$  の定義より  $\{\tau \leq t\} \cap E \in \mathcal{F}_t$  である.



が成り立つ． $\tau_E$  の定め方より

$$\int_{\Omega} M(\tau_E(\omega), \omega) \mu(d\omega) = \int_E M(\tau(\omega), \omega) \mu(d\omega) + \int_{\Omega \setminus E} M(n, \omega) \mu(d\omega)$$

とでき， $\sigma_E$  についても同じ表現ができるから

$$\int_E M(\tau(\omega), \omega) \mu(d\omega) \geq \int_E M(\sigma(\omega), \omega) \mu(d\omega)$$

が従う．よって命題 2.2.3 の  $\tilde{C}2$  より

$$\int_E E[M_{\tau} | \mathcal{F}_{\sigma}](\omega) \mu(d\omega) \geq \int_E M(\sigma(\omega), \omega) \mu(d\omega)$$

が成り立ち， $E \in \mathcal{F}_{\sigma}$  の任意性により

$$E[M_{\tau} | \mathcal{F}_{\sigma}] \geq M_{\sigma} = M_{\sigma \wedge \tau}$$

を得る．

一般の場合  $\sigma, \tau$  を一般の停止時刻とする．命題 3.1.7 より

$$\begin{aligned} E[M_{\tau} | \mathcal{F}_{\sigma}] &= E[M_{\tau} \mathbb{1}_{\{\tau > \sigma\}} | \mathcal{F}_{\sigma}] + E[M_{\tau} \mathbb{1}_{\{\tau \leq \sigma\}} | \mathcal{F}_{\sigma}] \\ &= E[M_{\tau \vee \sigma} \mathbb{1}_{\{\tau > \sigma\}} | \mathcal{F}_{\sigma}] + E[M_{\tau \wedge \sigma} \mathbb{1}_{\{\tau \leq \sigma\}} | \mathcal{F}_{\sigma}] \\ &\geq M_{\sigma} \mathbb{1}_{\{\tau > \sigma\}} + M_{\tau \wedge \sigma} \mathbb{1}_{\{\tau \leq \sigma\}} = M_{\tau \wedge \sigma} \end{aligned}$$

が成り立つ．

■

定理 4.1.3 (Doob の不等式 (1)).  $I = \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$  をフィルトレーション,  $(M_t)_{t \in I}$  を  $L^1$ -劣マルチンゲールとし,  $M^* := \max_{t \in I} M_t$  とおく． $(M_t)_{t \in I}$  が非負値なら次が成り立つ:

(1) 任意の  $\lambda > 0$  に対して

$$\mu(M^* \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\{M^* \geq \lambda\}} M_n(\omega) \mu(d\omega) \leq \frac{1}{\lambda} \|M_n\|_{\mathcal{L}^1}.$$

(2) 任意の  $p > 1$  に対して  $M_t$  ( $\forall t \in I$ ) が  $p$  乗可積分なら

$$\|M^*\|_{\mathcal{L}^p} \leq \frac{p}{p-1} \|M_n\|_{\mathcal{L}^p}.$$

証明.

$$\tau(\omega) := \min \{ i \in I ; M_i(\omega) \geq \lambda \} \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

とおけば  $\tau$  は  $I$  に値を取る停止時刻となる．ただし全ての  $i \in I$  で  $M_i(\omega) < \lambda$  となるような  $\omega$  につ

いては  $\tau(\omega) = n$  とする． 実際停止時刻となることは

$$\begin{aligned}\{\tau = i\} &= \bigcap_{j=0}^{i-1} \{M_j < \lambda\} \cap \{M_i \geq \lambda\} \in \mathcal{F}_i, \quad (i = 0, 1, \dots, n-1), \\ \{\tau = n\} &= \bigcap_{j=0}^{n-1} \{M_j < \lambda\} \in \mathcal{F}_n\end{aligned}$$

により判る． 任意抽出定理より

$$\mathbb{E}[M_n \mid \mathcal{F}_\tau] \geq M_{n \wedge \tau} = M_\tau \quad (\because \tau \leq n)$$

が成り立つから， 期待値を取って

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} M_n(\omega) \mu(d\omega) &\geq \int_{\Omega} M_\tau(\omega) \mu(d\omega)^{*3} \\ &= \int_{\{M^* \geq \lambda\}} M_\tau(\omega) \mu(d\omega) + \int_{\{M^* < \lambda\}} M_\tau(\omega) \mu(d\omega) \\ &\geq \lambda \mu(M^* \geq \lambda)^{*4} + \int_{\{M^* < \lambda\}} M_n(\omega) \mu(d\omega) \quad (\because M^*(\omega) < \lambda \text{ ならば } \tau(\omega) = n \text{ である.})\end{aligned}$$

が成り立つ． 従って

$$\lambda \mu(M^* \geq \lambda) \leq \int_{\{M^* \geq \lambda\}} M_n(\omega) \mu(d\omega) \leq \|M_n\|_{\mathcal{L}^1} \quad (4.3)$$

を得る． これは

$$\mu(M^* > \lambda) \leq \int_{\{M^* > \lambda\}} M_n(\omega) \mu(d\omega) \quad (4.4)$$

としても成り立つ<sup>\*5</sup>． 次に (2) を示す．  $K \in \mathbb{N}$  とする．

$$\begin{aligned}\|M^* \wedge K\|_{\mathcal{L}^p}^p &= \int_{\Omega} |M^*(\omega) \wedge K|^p \mu(d\omega) \\ &= p \int_{\Omega} \int_0^{M^*(\omega) \wedge K} t^{p-1} dt \mu(d\omega) \\ &= p \int_{\Omega} \int_0^K t^{p-1} \mathbb{1}_{\{M^*(\omega) > t\}} dt \mu(d\omega)^{*6}\end{aligned}$$

---

<sup>\*4</sup> 性質  $\tilde{C}2$  より

$$\int_{\Omega} M_n(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\Omega} \mathbb{E}[M_n \mid \mathcal{F}_\tau](\omega) \mu(d\omega) \geq \int_{\Omega} M_\tau(\omega) \mu(d\omega)$$

が成り立つ．

<sup>\*4</sup> 最後の不等式は次の理由で成り立つ:

$$M_\tau \mathbb{1}_{\{M^* \geq \lambda\}} = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \mathbb{1}_{\{\tau=i\}} + M_n \mathbb{1}_{\{\tau=n\}} \mathbb{1}_{\{M^* \geq \lambda\}} \geq \lambda.$$

<sup>\*5</sup> 式 (4.3) により任意の  $n \in \mathbb{N}$  で

$$\mu(M^* \geq \lambda + 1/n) \leq \int_{\{M^* \geq \lambda + 1/n\}} M_n(\omega) \mu(d\omega)$$

が成り立っているから，  $n \rightarrow \infty$  とすればよい．

$$\begin{aligned}
&= p \int_0^K t^{p-1} \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{M^*(\omega) > t\}} \mu(d\omega) dt && (\because \text{Fubini の定理より}) \\
&= p \int_0^K t^{p-1} \mu(M^* > t) dt \\
&\leq p \int_0^K t^{p-2} \int_{\{M^* > t\}} M_n(\omega) \mu(d\omega) && (\because \text{式 (4.4) より}) \\
&= p \int_{\Omega} M_n(\omega) \int_0^K t^{p-2} \mathbb{1}_{\{M^*(\omega) > t\}} dt \mu(d\omega) \\
&= \frac{p}{p-1} \int_{\Omega} M_n(\omega) |M^*(\omega) \wedge K|^{p-1} \mu(d\omega) \\
&\leq \frac{p}{p-1} \|M_n\|_{\mathcal{L}^p} \|M^*(\omega) \wedge K\|_{\mathcal{L}^p}^{p-1}
\end{aligned}$$

となるから,

$$\|M^* \wedge K\|_{\mathcal{L}^p} \leq \frac{p}{p-1} \|M_n\|_{\mathcal{L}^p}$$

が成り立つ.  $K \rightarrow \infty$  として単調収束定理より

$$\|M^*\|_{\mathcal{L}^p} \leq \frac{p}{p-1} \|M_n\|_{\mathcal{L}^p}$$

を得る. ■

$I = [0, T] \subset \mathbb{R}$  ( $T > 0$ ) を考える.  $t \mapsto M_t$  は右連続であるから  $\sup_{t \in I} M_t$  は確率変数となる. これは

$$\sup_{t \in I} M_t(\omega) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \max_{j=0,1,\dots,2^n} M_{\frac{j}{2^n}T}(\omega) \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

が成り立つからである. 実際各点  $\omega \in \Omega$  で

$$\alpha = \alpha(\omega) := \sup_{t \in I} M_t(\omega), \quad \beta = \beta(\omega) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \max_{j=0,1,\dots,2^n} M_{\frac{j}{2^n}T}(\omega)$$

とおけば,  $\alpha$  の方が上限を取る範囲が広いから  $\alpha \geq \beta$  は成り立つ. だがもし  $\alpha > \beta$  とすれば, 或る  $s \in I$  が存在して

$$M_s(\omega) > \frac{\alpha + \beta}{2}$$

---

\*6 写像  $[0, K] \times \Omega \ni (t, \omega) \mapsto \mathbb{1}_{\{M^*(\omega) > t\}}$  は可測  $\mathfrak{B}([0, K]) \times \mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  である. 実際,

$$f(t, \omega) := \mathbb{1}_{\{M^*(\omega) > t\}}, \quad f_n(t, \omega) := \mathbb{1}_{\{M^*(\omega) > (j+1)/2^n\}} \quad (t \in [\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}), j = 0, 1, \dots, K2^n - 1)$$

とおけば, 任意の  $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  に対して

$$f_n^{-1}(A) = \begin{cases} \emptyset & (0 \notin A, 1 \notin A) \\ \bigcup_{j=0}^{K2^n-1} [\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}) \times \left\{ \omega ; M^*(\omega) > \frac{j+1}{2^n} \right\} & (0 \notin A, 1 \in A) \\ \bigcup_{j=0}^{K2^n-1} [\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}) \times \left\{ \omega ; M^*(\omega) \leq \frac{j+1}{2^n} \right\} & (0 \in A, 1 \notin A) \\ [0, n] \times \Omega & (0 \in A, 1 \in A) \end{cases}$$

が成り立つから  $f_n$  は可測  $\mathfrak{B}([0, K]) \times \mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  である. また各点  $(t, \omega) \in [0, K] \times \Omega$  において

$$f(t, \omega) - f_n(t, \omega) = \mathbb{1}_{\{t < M^*(\omega) \leq (j+1)/2^n\}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となり  $f_n$  は  $f$  に各点収束するから, 可測性は保存され  $f$  も可測  $\mathfrak{B}([0, K]) \times \mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  となる.  $t^{p-1}$  も 2 変数関数として  $g(t, \omega) := t^{p-1} \mathbb{1}_{\Omega}(\omega)$  と見做せば可測  $\mathfrak{B}([0, K]) \times \mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  で, よって  $gf$  に対し Fubini の定理を適用できる.

を満たすから、右連続性により  $s$  の近傍から  $jT/2^n$  の形の点を取ることができて

$$(\beta \geq) M_{\frac{j}{2^n}T}(\omega) > \frac{\alpha + \beta}{2}$$

となりこれは矛盾である。

定理 4.1.4 (Doob の不等式 (2)).  $I = [0, T]$ ,  $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$  をフィルトレーション,  $(M_t)_{t \in I}$  を  $L^p$ -劣マルチンゲールとし,  $M^* := \sup_{t \in I} M_t$  とおく.  $(M_t)_{t \in I}$  が非負値なら次が成り立つ:

(1) 任意の  $\lambda > 0$  に対して

$$\mu(M^* \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^p} \|M_T\|_{\mathcal{L}^p}^p.$$

(2)  $p > 1$  なら

$$\|M^*\|_{\mathcal{L}^p} \leq \frac{p}{p-1} \|M_T\|_{\mathcal{L}^p}.$$

証明.

$$D_n := \left\{ \frac{j}{2^n}T ; \quad j = 0, 1, \dots, 2^n \right\}$$

とおく. Jensen の不等式より, 任意の  $0 \leq s < t \leq T$  に対して

$$\mathbb{E}[M_t^p | \mathcal{F}_s] \geq \mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s]^p \leq M_s^p$$

が成り立つ. 従って  $(M_t^p)_{t \in I}$  は  $L^1$ -劣マルチンゲールであり, 前定理の結果を使えば

$$\mu(\max_{r \in D_n} M_r^p \geq \lambda^p) \leq \frac{1}{\lambda^p} \|M_T\|_{\mathcal{L}^p}^p$$

が任意の  $n \in \mathbb{N}$  で成り立つ. 非負性から  $\max_{r \in D_n} M_r^p = (\max_{r \in D_n} M_r)^p$  となり

$$\mu(\max_{r \in D_n} M_r \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^p} \|M_T\|_{\mathcal{L}^p}^p$$

と書き直すことができ,

$$\mu(M^* \geq \lambda) = \mu(\sup_{n \in \mathbb{N}} \max_{r \in D_n} M_r \geq \lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\max_{r \in D_n} M_r \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^p} \|M_T\|_{\mathcal{L}^p}^p$$

が成り立つ. 同じく前定理<sup>\*7</sup>を適用し,

$$\left\| \max_{r \in D_n} M_r \right\|_{\mathcal{L}^p} \leq \frac{p}{p-1} \|M_T\|_{\mathcal{L}^p}$$

を保って  $n \rightarrow \infty$  とすれば単調収束定理より (2) を得る. ■

<sup>\*7</sup>  $L^p$ -劣マルチンゲールなら  $L^1$ -劣マルチンゲールであるから前定理の結果を適用できる.

定理 4.1.5 (任意抽出定理 (2)).  $I = [0, T]$ ,  $p > 1$ ,  $(M_t)_{t \in I}$  を  $L^p$ -マルチンゲールとする. このとき  $I$  に値を取る任意の停止時刻  $\tau, \sigma$  に対し次が成り立つ:

$$E[M_\tau | \mathcal{F}_\sigma] = M_{\tau \wedge \sigma}.$$

証明.

$$\tau_n := \min \left\{ T, \frac{1 + [2^n \tau]}{2^n} \right\}, \quad \sigma_n := \min \left\{ T, \frac{1 + [2^n \sigma]}{2^n} \right\}, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とおく. このとき  $\tau_n, \sigma_n$  は停止時刻で  $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_{\sigma_n}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) が成り立つ. 実際任意の  $0 \leq t < T$  に対して

$$\{\tau_n \leq t\} = \{1 + [2^n \tau] \leq 2^n t\} = \{\tau_n \leq [2^n t]/2^n\} \in \mathcal{F}_t$$

となり,  $t = T$  の時も

$$\{\tau_n \leq T\} = \{1 + [2^n \tau] > 2^n T\} + \{1 + [2^n \tau] \leq 2^n T\} \in \mathcal{F}_T$$

が成り立つから  $\tau_n$  は停止時刻\*8で,

$$2^n \sigma_n \leq 1 + [2^n \sigma] \Rightarrow \sigma < \sigma_n$$

により  $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_{\sigma_n}$  となる. 前定理により任意の  $A \in \mathcal{F}_\sigma$  に対して

$$\int_A M_{\tau_n(\omega)}(\omega) \mu(d\omega) = \int_A M_{\tau_n(\omega) \wedge \sigma_n(\omega)}(\omega) \mu(d\omega)$$

が成り立ち,  $(|M_t|)_{t \in I}$  が  $L^p$ -劣マルチンゲールであることから Doob の不等式により  $\sup_{t \in I} M_t$  は可積分である\*9. 従って  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \tau$  と  $M$  の右連続性から, Lebesgue の収束定理より

$$\begin{aligned} \int_A M_{\tau(\omega)}(\omega) \mu(d\omega) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A M_{\tau_n(\omega)}(\omega) \mu(d\omega) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A M_{\tau_n(\omega) \wedge \sigma_n(\omega)}(\omega) \mu(d\omega) = \int_A M_{\tau(\omega) \wedge \sigma(\omega)}(\omega) \mu(d\omega) \end{aligned}$$

が成り立つ. ■

## 4.2 二次変分

以降では  $I := [0, T]$  ( $T > 0$ ) とし, このフィルトレーション  $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$  が次の仮定を満たす:

$$\mathcal{N} := \{ N \in \mathcal{F} ; \quad \mu(N) = 0 \} \subset \mathcal{F}_0.$$

以下, いくつか集合を定義する.

\*8 もとより  $\tau_n$  は可測関数である.  $\mathbb{R} \ni x \mapsto [x] \in \mathbb{R}$  は可測  $\mathcal{B}(\mathbb{R})/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  であるから  $[2^n \tau]$  は可測  $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  であり, 従って  $\tau_n$  も可測  $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  となっている.

\*9  $\sup_{t \in I} |M_t|^p = (\sup_{t \in I} |M_t|)^p$  である.

(1)  $\mathcal{A}^+ \quad \mathcal{A}^+$  は以下を満たす  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  上の可測関数族  $A = (A_t)_{t \in I}$  の全体である.

適合性 任意の  $t \in I$  に対し, 写像  $\Omega \ni \omega \mapsto A_t(\omega) \in \mathbb{R}$  は可測  $\mathcal{F}_t / \mathcal{B}(\mathbb{R})$  である.

連続性  $\mu$ -a.s. に写像  $I \ni t \mapsto A_t(\omega) \in \mathbb{R}$  が連続である.

単調非減少性  $\mu$ -a.s. に写像  $I \ni t \mapsto A_t(\omega) \in \mathbb{R}$  が単調非減少である.

(2)  $\mathcal{A} \quad \mathcal{A} := \{A^1 - A^2; \quad A^1, A^2 \in \mathcal{A}^+\}$  と定義する.  $\mu$ -a.s. に写像  $t \mapsto A_t^1(\omega)$  と  $t \mapsto A_t^2(\omega)$  が連続かつ単調非減少となるからすなわち  $\mu$ -a.s. に写像  $t \mapsto A_t^1(\omega) - A_t^2(\omega)$  は有界連続となっている.

(3)  $\mathcal{M}_{p,c}$  ( $p \geq 1$ )  $\mathcal{M}_{p,c}$  は以下を満たす可測関数族  $M = (M_t)_{t \in I} \subset \mathcal{L}^p(\mathcal{F}, \mu)$  の全体である.

0 出発  $M_0 = 0$   $\mu$ -a.s. を満たす.

$L^p$ -マルチンゲール  $M = (M_t)_{t \in I}$  は  $L^p$ -マルチンゲールである.

連続性  $\mu$ -a.s.  $\omega$  に対し写像  $I \ni t \mapsto M_t(\omega) \in \mathbb{R}$  が連続である.

(4)  $\mathcal{M}_{b,c} \quad \mathcal{M}_{b,c}$  は  $\mu$ -a.s. に連続で一様有界な  $L^1$ -マルチンゲールの全体とする. つまり

$$\mathcal{M}_{b,c} := \left\{ M = (M_t)_{t \in I} \in \mathcal{M}_{1,c}; \quad \sup_{t \in I} \|M_t\|_{\mathcal{L}^\infty} < \infty \right\}$$

として定義されている.

(5)  $\mathcal{T} \quad \mathcal{T}$  は以下を満たすような,  $I$  に値を取る停止時刻の列  $(\tau_j)_{j=1}^\infty$  の全体とする.

a)  $\tau_0 = 0$   $\mu$ -a.s.

b)  $\tau_j \leq \tau_{j+1}$   $\mu$ -a.s. ( $j = 1, 2, \dots$ ).

c)  $(\tau_j)_{j=1}^\infty$  に対し或る  $\mu$ -零集合  $N_T$  が存在し, 任意の  $\omega \in \Omega \setminus N_T$  に対し或る  $n = n(\omega) \in \mathbb{N}$  が存在して  $\tau_n(\omega) = T$  が成り立つ.

例えば  $\tau_j = jT/2^n$  なら  $(\tau_j)_{j=1}^\infty \in \mathcal{T}$  となる. 上の条件において, a) が零集合  $N_0$  を除いて成立し, b) が各  $j$  について零集合  $N_j$  を除いて成立するとき,  $N := N_0 \cup N_T \cup (\cup_{j=1}^\infty N_j)$  とすればこれも  $\mu$ -零集合であり, 任意の  $\omega \in \Omega \setminus N$  に対して

$$\tau_0(\omega) = 0, \quad \tau_j(\omega) \leq \tau_{j+1}(\omega) \quad (j = 1, 2, \dots), \quad \tau_n(\omega) = T \quad (\exists n = n(\omega) \in \mathbb{N})$$

が成立する.

(4)  $\mathcal{M}_{c,loc} \quad \mathcal{M}_{c,loc}$  の元を「連続な局所マルチンゲール」という.  $\mathcal{M}_{c,loc}$  は次で定義される:

$$\mathcal{M}_{c,loc} := \left\{ M = (M_t)_{t \in I} \subset \mathcal{L}^1(\mathcal{F}, \mu); \quad \exists (\tau_j)_{j=1}^\infty \in \mathcal{T} \text{ s.t. } M^{\tau_j} = (M_{\tau_j \wedge t})_{t \in I} \in \mathcal{M}_{b,c} \quad (\forall j \in \mathbb{N}) \right\}.$$

補題 4.2.1 ( $\mathcal{M}_{p,c}$  は線形空間となる).

任意の  $M, N \in \mathcal{M}_{p,c}$  と  $\alpha \in \mathbb{R}$  に対して線型演算を

$$M + N := (M_t + N_t)_{t \in I}, \quad \alpha M := (\alpha M_t)_{t \in I} \quad (4.5)$$

として定義すれば,  $\mathcal{M}_{p,c}$  は  $\mathbb{R}$  上の線形空間となる.

証明.  $\mathcal{M}_{p,c}$  が (4.5) の演算について閉じていることを示す.

\*9 全ての  $t, \omega$  に対し  $0 \in \mathbb{R}$  を取るもの.

加法について 先ず  $M+N$  が  $L^p$ -マルチンゲールの定義を満たすことを確認する. 適合性について, 各  $t \in I$  について  $M_t, N_t$  は  $\mathcal{F}_t$ -可測であるから  $M_t + N_t$  も  $\mathcal{F}_t$ -可測であり, また Minkowski の不等式より  $M_t + N_t \in \mathcal{L}^p(\mu)$  であることも従う. 任意の  $\omega \in \Omega$  でパス  $I \ni t \mapsto M_t(\omega) + N_t(\omega)$  が右連続且つ左極限を持つことも  $M, N$  のパスが右連続且つ左極限を持つことにより従い, さらに任意に  $0 \leq s \leq t \leq T$  を取れば, 条件付き期待値の線型性より

$$E[M_t + N_t | \mathcal{F}_s] = E[M_t | \mathcal{F}_s] + E[N_t | \mathcal{F}_s] = M_s + N_s$$

も成り立つ. 以上より  $M + N = (M_t + N_t)_{t \in I}$  は  $L^p$ -マルチンゲールである. 次に写像  $I \ni t \mapsto M_t(\omega) + N_t(\omega) \in \mathbb{R}$  の連続性を示す.  $M, N$  に対して或る  $\mu$ -零集合  $E$  が存在し,  $\omega \notin E$  について  $t \mapsto M_t(\omega)$  と  $t \mapsto N_t(\omega)$  が共に連続となるから  $t \mapsto M_t(\omega) + N_t(\omega)$  も連続となる. 以上で  $M + N \in \mathcal{M}_{p,c}$  が示された.

スカラ倍について 任意の  $0 \leq s \leq t \leq T$  に対し, 条件付き期待値の線型性 (性質  $\tilde{C}3$ ) により

$$E[\alpha M_t | \mathcal{F}_s] = \alpha E[M_t | \mathcal{F}_s] = \alpha M_s$$

が成り立つ. 定数倍しているだけであるから,  $\alpha M$  が  $L^p$ -マルチンゲールであるためのその他の条件, 及び  $\mu$ -a.s. にパスが連続であることも成り立ち,  $\alpha M \in \mathcal{M}_{p,c}$  となる.

■

補題 4.2.2 ( $\mathcal{M}_{p,c}$  における同値関係の導入).

任意の  $M, N \in \mathcal{M}_{p,c}$  ( $p \geq 1$ ) に対して, 関係  $R$  を

$$M R N \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \left\{ \omega \in \Omega ; \sup_{r \in (I \cap \mathbb{Q}) \cup \{T\}} |M_r(\omega) - N_r(\omega)| > 0 \right\} \text{ が } \mu\text{-零集合}$$

として定義すれば, 関係  $R$  は同値関係となる. そして  $M R N$  となることと  $\mu$ -a.s. にパスが一致することは同値である.

証明. 反射律と対称律は  $R$  の定義式より判然しているから推移律について確認する.  $M, N$  とは別に  $U = (U_t)_{t \in I} \in \mathcal{M}_{p,c}$  を取って  $M R N$  かつ  $N R U$  となっているとすれば, 各  $r \in (I \cap \mathbb{Q}) \cup \{T\}$  にて

$$\{|M_r - U_r| > 0\} \subset \{|M_r - N_r| > 0\} \cup \{|N_r - U_r| > 0\}$$

の関係が成り立っているから  $M R U$  が従う.\*<sup>10</sup> 後半の主張を示す.  $M, N$  に対し或る零集合  $E$  が存在して,  $\omega \in \Omega \setminus E$  に対し  $I \ni t \mapsto M_t(\omega)$  と  $I \ni t \mapsto N_t(\omega)$  は共に連続写像となっている. 今  $M R N$  であるとする.

$$F := \left\{ \omega \in \Omega ; \sup_{r \in (I \cap \mathbb{Q}) \cup \{T\}} |M_r(\omega) - N_r(\omega)| > 0 \right\}$$

とおけば  $F^c \cap E^c$  上で  $M$  と  $N$  のパスは完全に一致し, また  $F \cup E$  が零集合であるから  $\mu$ -a.s. にパスが一致しているということになる. 逆に  $\mu$ -a.s. にパスが一致しているとすれば, 或る零集合  $G$  が

\*<sup>10</sup>  $\{|M_r - N_r| > 0\} = \{\omega \in \Omega ; |M_r(\omega) - N_r(\omega)| > 0\}$ .

存在して  $G^c$  上でパスが一致している.

$$G^c \subset F^c$$

の関係から  $F \subset G$  となり  $F$  が零集合となるから  $M R N$  が従う. ■

補題 4.2.3 ( $\mathcal{M}_{p,c}$  の商空間の定義). 補題 4.2.2 で導入した同値関係  $R$  による  $\mathcal{M}_{p,c}$  ( $p \geq 1$ ) の商集合を  $\mathfrak{M}_{p,c}$  と表記する.  $M \in \mathcal{M}_{p,c}$  の関係  $R$  による同値類を  $\overline{M}$  と表記し,  $\mathfrak{M}_{p,c}$  において

$$\overline{M} + \overline{N} := \overline{M + N}, \quad \alpha \overline{M} := \overline{\alpha M} \quad (4.6)$$

として演算を定義すれば, これは代表元の選び方に依らない (well-defined). そして (4.6) で定義した算法を加法とスカラ倍として  $\mathfrak{M}_{p,c}$  は  $\mathbb{R}$  上の線形空間となる.

証明.  $M' \in \overline{M}, N' \in \overline{N}$  を任意に選べば,

$$\begin{aligned} \left\{ |M_r + N_r - M'_r - N'_r| > 0 \right\} &\subset \left\{ |M_r - M'_r| > 0 \right\} \cup \left\{ |N_r - N'_r| > 0 \right\} \\ \left\{ |\alpha M_r - \alpha M'_r| > 0 \right\} &= \left\{ |M_r - M'_r| > 0 \right\} \end{aligned}$$

により  $(M + N) R (M' + N'), (\alpha M) R (\alpha M')$  が成り立ち

$$\overline{M + N} = \overline{M' + N'}, \quad \overline{\alpha M} = \overline{\alpha M'}$$

が従う. ■

補題 4.2.4 ( $\mathfrak{M}_{2,c}$  における内積の定義). 写像<sup>\*11</sup>  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{M}_{2,c} \times \mathfrak{M}_{2,c} \rightarrow \mathbb{R}$  を次で定義すれば, これは  $\mathfrak{M}_{2,c}$  において内積となる:

$$\langle \overline{M}, \overline{N} \rangle := \int_{\Omega} M_T(\omega) N_T(\omega) \mu(d\omega), \quad (\overline{M}, \overline{N} \in \mathfrak{M}_{2,c}). \quad (4.7)$$

証明.

well-defined であること 先ずは上の  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  の定義が代表元の取り方に依らないことを確認する.

$M' \in \overline{M}$  と  $N' \in \overline{N}$  に対して, 同値関係の定義から  $\mu$ -a.s. に  $M'_T = M_T, N'_T = N_T$  であり

$$\int_{\Omega} M_T(\omega) N_T(\omega) \mu(d\omega) = \int_{\Omega} M'_T(\omega) N'_T(\omega) \mu(d\omega)$$

が成り立つから,  $\langle \overline{M}, \overline{N} \rangle$  は一つの値に確定している. 次に  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  が内積であることを証明する.

<sup>\*11</sup> 実数値として確定することは,  $M_T, N_T$  が共に二乗可積分であることと Hölder の不等式による.



正值性 先ず任意の  $\overline{M} \in \mathfrak{M}_{2,c}$  に対して  $\langle \overline{M}, \overline{M} \rangle = \|M_T\|_{\mathcal{L}^2}^2 \geq 0$  が成り立つ. 次に  $\langle \overline{M}, \overline{M} \rangle = 0 \Leftrightarrow \overline{M} = \overline{0}$  が成り立つことを示す.  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  の定義により  $\Leftarrow$  は判然しているから,  $\Rightarrow$  について示す.  $M$  は  $L^2$ -マルチンゲールであるから, Jensen の不等式より  $(|M_t|)_{t \in I}$  が  $L^2$ -劣マルチンゲールとなる. Doob の不等式を適用すれば

$$\int_{\Omega} \left( \sup_{t \in I} |M_t(\omega)| \right)^2 \mu(d\omega) \leq 4 \int_{\Omega} M_T(\omega)^2 \mu(d\omega) = 0$$

が成り立ち,

$$\left\{ \sup_{t \in I} |M_t| > 0 \right\} = \left\{ \sup_{t \in I} |M_t|^2 > 0 \right\} = \left\{ \left( \sup_{t \in I} |M_t(\omega)| \right)^2 > 0 \right\}$$

であるから

$$\mu \left( \sup_{t \in I} |M_t| > 0 \right) = 0$$

が従う. よって  $\overline{M} = \overline{0}$  となる.

双線型性 双線型性は積分の線型性による.

命題 4.2.5 ( $\mathfrak{M}_{2,c}$  は Hilbert 空間である).  $\mathfrak{M}_{2,c}$  は補題 4.2.4 で導入した  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を内積として Hilbert 空間となる.

証明. 内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  により導入されるノルムを  $\|\cdot\|$  と表記する.  $\overline{M}^{(n)} \in \mathfrak{M}_{2,c}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) を Cauchy 列として取れば, 各代表元  $M^{(n)}$  に対し或る  $\mu$ -零集合  $E_n$  が存在して,  $\omega \in \Omega \setminus E_n$  なら写像  $I \ni t \mapsto M_t^{(n)}(\omega) \in \mathbb{R}$  が連続となる. 後で連続関数列の一様収束を扱うからここで次の処理を行う:

$$E := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

として,  $M^{(n)} = (M_t^{(n)})_{t \in I}$  を零集合  $E$  上で修正した過程  $(N_t^{(n)})_{t \in I}$  を

$$N_t^{(n)}(\omega) := \begin{cases} M_t^{(n)}(\omega) & (\omega \in \Omega \setminus E) \\ 0 & (\omega \in E) \end{cases}, \quad (\forall n = 1, 2, \dots, t \in I)$$

として定義すれば,  $N^{(n)}$  は  $\Omega$  全体でパスが連続, かつ  $L^2$ -マルチンゲールであるから<sup>\*12</sup>  $\mathfrak{M}_{2,c}$  の元となる. また零集合  $E$  を除いて  $M^{(n)}$  とパスが一致するから,  $\overline{N}^{(n)} = \overline{M}^{(n)}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) が成立し

$$\|\overline{M}^{(n)} - \overline{M}^{(m)}\|^2 = \|\overline{N}^{(n)} - \overline{N}^{(m)}\|^2 = \|\overline{N}^{(n)} - N^{(m)}\|^2 = \int_{\Omega} |N_T^{(n)}(\omega) - N_T^{(m)}(\omega)|^2 \mu(d\omega)$$

<sup>\*12</sup>  $L^2$ -マルチンゲールとなることを証明する. パスの右連続性と左極限の存在は連続性により成り立つことである. 適合性については, フィルトレーションの仮定より  $E \in \mathcal{F}_0$  であることに注意すれば,  $N_t^{(n)} = M_t^{(n)} \mathbf{1}_{\Omega \setminus E}$  であることと  $M_t^{(n)}$  が適合過程であることから  $N_t^{(n)}$  も可測  $\mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  となる. また各  $t \in I$  に対し  $N_t^{(n)}$  と  $M_t^{(n)}$  の関数類は一致するから, 任意に  $0 \leq s \leq t \leq T$  を取って

$$\mathbb{E}[N_t^{(n)} | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[M_t^{(n)} | \mathcal{F}_s] = M_s^{(n)} = N_s^{(n)}$$

が成り立つ.  $N_t^{(n)} = M_t^{(n)} \mathbf{1}_{\Omega \setminus E}$  の二乗可積分性は  $M_t^{(n)}$  の二乗可積分性から従う.

と表現できる．任意の  $n, m \in N$  の組に対し， $\mathcal{M}_{2,c}$  が線形空間であるから  $(|N_t^{(n)} - N_t^{(m)}|)_{t \in T}$  は連続な  $L^2$ -劣マルチンゲールとなり，Doob の不等式を適用して

$$\lambda^2 \mu \left( \sup_{t \in I} |N_t^{(n)} - N_t^{(m)}| > \lambda \right) \leq \int_{\Omega} |N_T^{(n)}(\omega) - N_T^{(m)}(\omega)|^2 \mu(d\omega) = \|\overline{M^{(n)}} - \overline{M^{(m)}}\|^2 \quad (\forall \lambda > 0)$$

が成り立つ．この不等式と  $(\overline{M^{(n)}})_{n=1}^{\infty}$  が Cauchy 列であることを併せれば，

$$\|\overline{M^{(n_k)}} - \overline{M^{(n_{k+1})}}\| < 1/4^k, \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (4.8)$$

となるように添数の部分列  $(n_k)_{k=1}^{\infty}$  を抜き出して

$$\mu \left( \sup_{t \in I} |N_t^{(n_k)} - N_t^{(n_{k+1})}| > 1/2^k \right) < 1/2^k, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

が成り立つようにできる．

$$F := \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq N} \left\{ \omega \in \Omega ; \sup_{t \in I} |N_t^{(n_k)}(\omega) - N_t^{(n_{k+1})}(\omega)| \leq 1/2^k \right\}$$

とおけば，Borel-Cantelli の補題により  $F^c$  は  $\mu$ -零集合であって， $\omega \in F$  なら全ての  $t \in I$  について数列  $(N_t^{(n_k)}(\omega))_{k=1}^{\infty}$  は Cauchy 列となる．実数の完備性から数列  $(N_t^{(n_k)}(\omega))_{k=1}^{\infty}$  ( $\omega \in F$ ) に極限  $N_t^*(\omega)$  が存在し，この収束は  $t$  に関して一様である<sup>\*13</sup>から写像  $t \mapsto N_t^*(\omega)$  は連続で，

$$N_t(\omega) := \begin{cases} N_t^*(\omega) & (\omega \in F) \\ 0 & (\omega \in \Omega \setminus F) \end{cases}$$

として  $N$  を定義すればこれは  $\mathcal{M}_{2,c}$  の元となる． $N$  は全てのパスが連続であるから  $L^2$ -マルチンゲールとなっていることを示す．マルチンゲールの定義の (M.3)(M.4) はパスの連続性により従うことであるから，後は (M.1) と (M.2) を証明すればよい．

(M.1) 適合性について 今任意に  $t \in I$  を取り固定する． $N_t^{n_k}$  の定義域を  $F$  に制限した写像を  $N_t^{F(k)}$  と表記し

$$\mathcal{F}_t^F := \{ F \cap B ; B \in \mathcal{F}_t \}$$

とおけば， $N_t^{F(k)}$  は可測  $\mathcal{F}_t^F / \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  となる．従って各点収束先の関数である  $N_t^*$  もまた可測  $\mathcal{F}_t^F / \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  となる．任意の  $C \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  に対して

$$N_t^{-1}(C) = \begin{cases} (\Omega \setminus F) \cup N_t^{*-1}(C) & (0 \in C) \\ N_t^{*-1}(C) & (0 \notin C) \end{cases}$$

が成り立ち，フィルトレーションの仮定から  $F \in \mathcal{F}_0$  であり  $\mathcal{F}_t^F \subset \mathcal{F}_t$  が従うから， $N_t$  は可測  $\mathcal{F}_t / \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  である．

(M.1) 二乗可積分性について 任意に  $t \in I$  を取り固定する． $N_t^{(n_k)}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) は二乗可積分関数  $M_t^{(n_k)}$  と零集合  $E$  を除いて一致し， $N_t$  に概収束する．また添数列  $(n_k)_{k=1}^{\infty}$  の抜き出し方 (4.8) と Doob の不等式より

$$\left\| \sup_{t \in I} |N_t^{(n_k)} - N_t^{(n_{k+1})}| \right\|_{\mathcal{L}^2} \leq 2 \left\| N_T^{(n_k)} - N_T^{(n_{k+1})} \right\|_{\mathcal{L}^2} < 2/4^k$$

<sup>\*13</sup>  $|N_t^{(n_k)}(\omega) - N_t^*(\omega)| \leq \sum_{j=k}^{\infty} |N_t^{(n_j)}(\omega) - N_t^{(n_{j+1})}(\omega)| \leq \sum_{j=k}^{\infty} \sup_{t \in I} |N_t^{(n_j)}(\omega) - N_t^{(n_{j+1})}(\omega)| < 1/2^k, \quad (\forall t \in T)$  による．

が成り立つから  $\|N_t^{(n_k)} - N_t^{(n_{k+1})}\|_{\mathcal{L}^2} < 2/4^k \leq 1/2^k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) を得る. 特に  $j \in \mathbb{N}$  を固定すれば全ての  $k > j$  に対して  $\|N_t^{(n_j)} - N_t^{(n_k)}\|_{\mathcal{L}^2} < 1/2^j$  となるから, Fatou の補題より

$$\|N_t^{(n_j)} - N_t\|_{\mathcal{L}^2}^2 = \int_{\Omega \setminus F} \liminf_{k \rightarrow \infty} |N_t^{(n_j)}(\omega) - N_t^{(n_k)}(\omega)|^2 \mu(d\omega) < 1/4^j \quad (4.9)$$

が従い, Minkowski の不等式より

$$\|N_t\|_{\mathcal{L}^2} \leq \|N_t - N_t^{(n_j)}\|_{\mathcal{L}^2} + \|N_t^{(n_j)}\|_{\mathcal{L}^2} < \infty$$

が成り立つ.

(M.2) について 各  $t \in I$ ,  $k \in \mathbb{N}$  について  $(M_t^{(n_k)})_{t \in I}$  が  $L^2$ -マルチンゲールであるということを利用すればよい. 任意の  $0 \leq s \leq t \leq T$  と  $A \in \mathcal{F}_s$  に対して

$$\begin{aligned} \int_A \mathbb{E}[N_t^{(n_k)} | \mathcal{F}_s](\omega) \mu(d\omega) &= \int_A \mathbb{E}[M_t^{(n_k)} | \mathcal{F}_s](\omega) \mu(d\omega) \\ &= \int_A M_s^{(n_k)}(\omega) \mu(d\omega) = \int_A N_s^{(n_k)}(\omega) \mu(d\omega) \end{aligned}$$

が全ての  $k = 1, 2, \dots$  で成り立つから, Hölder の不等式及び (4.9) より

$$\begin{aligned} & \left| \int_A \mathbb{E}[N_t | \mathcal{F}_s](\omega) \mu(d\omega) - \int_A N_s(\omega) \mu(d\omega) \right| \\ & \leq \left| \int_A \mathbb{E}[N_t | \mathcal{F}_s](\omega) \mu(d\omega) - \int_A \mathbb{E}[N_t^{(n_k)} | \mathcal{F}_s](\omega) \mu(d\omega) \right| \\ & \quad + \left| \int_A N_s^{(n_k)}(\omega) \mu(d\omega) - \int_A N_s(\omega) \mu(d\omega) \right| \\ & = \left| \int_A N_t(\omega) - N_t^{(n_k)}(\omega) \mu(d\omega) \right| + \left| \int_A N_s^{(n_k)}(\omega) - N_s(\omega) \mu(d\omega) \right| \\ & \leq \int_A |N_t(\omega) - N_t^{(n_k)}(\omega)| \mu(d\omega) + \int_A |N_s^{(n_k)}(\omega) - N_s(\omega)| \mu(d\omega) \\ & \leq \|N_t - N_t^{(n_k)}\|_{\mathcal{L}^2} + \|N_s^{(n_k)} - N_s\|_{\mathcal{L}^2} \\ & \leq 1/2^{k-1} \end{aligned}$$

が全ての  $k = 1, 2, \dots$  で成り立つ.  $k$  の任意性から

$$\int_A \mathbb{E}[N_t | \mathcal{F}_s](\omega) \mu(d\omega) = \int_A N_s(\omega) \mu(d\omega)$$

が従い,  $\mathbb{E}[N_t | \mathcal{F}_s] = N_s$  in  $L^2(\mathcal{F}, \mu)$  となる.

最後に,  $N$  の  $\mathfrak{M}_{2,c}$  における同値類  $\bar{N}$  が Cauchy 列  $(\overline{M^{(n)}})_{n=1}^\infty$  の極限であるということを明示して証明を完全に終える. 部分列  $(\overline{M^{(n_k)}})_{k=1}^\infty$  に対して, (4.9) より

$$\|\bar{N} - \overline{M^{(n_k)}}\| = \|\bar{N} - \overline{N^{(n_k)}}\| = \|N_T - N_T^{(n_k)}\|_{\mathcal{L}^2} \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty)$$

が成り立つ. 部分列が収束することは Cauchy 列が収束することになるから  $\|\bar{N} - \overline{M^{(n)}}\| \longrightarrow 0$  が従い,  $\mathfrak{M}_{2,c}$  が Hilbert 空間であることが証明された. ■

**命題 4.2.6.** 任意の  $p \geq 1$  に対し,  $\mathcal{M}_{p,c} \subset \mathcal{M}_{c,loc}$  が成り立つ.

この証明には次の補題を使う.

補題 4.2.7 (各点で右連続であり左極限を持つ関数は閉区間上で有界).

$(E, \rho)$  を距離空間,  $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$  とする.  $f: J \rightarrow E$  が各点  $x \in J$  で右連続且つ左極限を持つ<sup>\*14</sup>なら  $f$  は  $J$  上で有界である.

証明 (補題). 任意に  $\epsilon > 0$  を取り固定する.  $f$  は各点  $x \in [a, b]$  で右連続であるから,  $0 < \delta_x < b - x$  を  $0 < \forall h < \delta_x$  が  $\rho(f(x), f(x+h)) < \epsilon$  を満たすように取り,

$$V_x := [x, x + \delta_x) \quad (\forall x \in [a, b))$$

とおく. また  $f$  は各点  $x \in (a, b]$  で左極限も持つから, 左極限を  $f(x-)$  と表して  $0 < \gamma_x < x - a$  を  $0 < \forall h < \gamma_x$  が  $\rho(f(x-), f(x-h)) < \epsilon$  を満たすように取り,

$$U_x := (x - \gamma_x, x] \quad (\forall x \in (a, b])$$

とおく. 特に  $U_a := (-\infty, a]$ ,  $V_b := [b, \infty)$  とおけば

$$J \subset \bigcup_{x \in J} U_x \cup V_x$$

が成り立つが,  $J$  は  $\mathbb{R}$  のコンパクト部分集合であるから, このうち有限個を選び

$$J = \bigcup_{i=1}^n (U_{x_i} \cup V_{x_i}) \cap J$$

とできる.  $U_{x_i} \cap J$ ,  $V_{x_i} \cap J$  での  $f$  の挙動の振れ幅は  $2\epsilon$  で抑えられるから  $J$  全体での挙動の振れ幅は  $2n\epsilon$  より小さい<sup>\*15</sup>. ゆえに有界である. ■

証明 (命題 4.2.6). 任意に  $M \in \mathcal{M}_{p,c}$  を取る. 或る零集合  $E$  が存在し, 全ての  $\omega \in \Omega \setminus E$  に対して

$$M_0(\omega) = 0$$

を満たし且つ  $I \ni t \mapsto M_t(\omega)$  が連続となる. 全ての  $\omega \in \Omega$  に対し写像  $I \ni t \mapsto M_t(\omega)$  は右連続且つ左極限を持つから, 定理 3.1.9 より

$$\tau_j(\omega) := \inf \{ t \in I ; |M_t(\omega)| \geq j \} \wedge T \quad (\forall \omega \in \Omega, j = 0, 1, 2, \dots)$$

として  $\tau_j$  は停止時刻となり  $(\tau_j)_{j=0}^\infty \in \mathcal{T}$  が成り立つ. 実際全ての  $\omega \in \Omega$  について  $\tau_0(\omega) = 0$  であり, また  $t \mapsto M_t(\omega)$  の右連続性から  $\tau_j \leq \tau_{j+1}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) も成り立つ. 更に補題 4.2.7 より  $\sup_{t \in I} |M_t(\omega)| < \infty$  ( $\forall \omega \in \Omega$ ) であるから  $J > \sup_{t \in I} |M_t(\omega)|$  を満たす  $J = J(\omega)$  に対して

<sup>\*14</sup> 左端点では左極限を考えず, 右端点では右連続性を考えない.

<sup>\*15</sup>  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  と仮定し, 区間  $U_{x_i} \cup V_{x_i}$  と  $U_{x_{i+1}} \cup V_{x_{i+1}}$  の共通点の一つ取り  $z_i$  と表す.  $\rho(f(x), f(y))$  ( $x, y \in J$ ) の上界を知りたいから  $x \in U_{x_1} \cup V_{x_1}$ ,  $y \in U_{x_n} \cup V_{x_n}$  の場合を調べればよい. このとき

$$\begin{aligned} \rho(f(x), f(y)) &\leq \rho(f(x), f(x_1)) + \rho(f(x_1), f(x_2)) + \dots + \rho(f(x_{n-1}), f(x_n)) + \rho(f(x_n), f(y)) \\ &\leq \rho(f(x), f(x_1)) + \rho(f(x_1), f(z_1)) + \rho(f(z_1), f(x_2)) + \dots + \rho(f(z_{n-1}), f(x_n)) + \rho(f(x_n), f(y)) \\ &< 2n\epsilon \end{aligned}$$

が成り立つ.

$\tau_j(\omega) = T$  ( $\forall j \geq J$ ) となる．後は  $M^{\tau_j} \in \mathcal{M}_{b,c}$  が成立することを示せばよい．先ず Doob の不等式 (定理 4.1.4) より  $\sup_{t \in I} |M_t|$  が  $p$  乗可積分となるから  $M_t^{\tau_j} = M_{t \wedge \tau_j}$  ( $\forall t \in I$ ) は可積分である．また  $\omega \in \Omega \setminus E$  なら  $t \mapsto M_t(\omega)$  が連続であるから  $I \ni t \mapsto M_t^{\tau_j}(\omega)$  もまた連続であり，かつ

$$\sup_{t \in I} |M_{t \wedge \tau_j}(\omega)| \leq j$$

が成り立つから

$$\|M_t^{\tau_j}\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq j \quad (\forall t \in I)$$

が従う．そして任意抽出定理 (定理 4.1.5) より

$$\mathbb{E}[M_t^{\tau_j} | \mathcal{F}_s] = M_{t \wedge \tau_j \wedge s} = M_s^{\tau_j} \quad (0 \leq s < t \leq T)$$

を得る．以上より  $M^{\tau_j} \in \mathcal{M}_{b,c}$  ( $j = 1, 2, \dots$ )，すなわち  $M \in \mathcal{M}_{c,loc}$  である．

補題 4.2.8.  $X \in \mathcal{M}_{2,c}$  と停止時刻  $\tau \geq \sigma$  に対し， $\|M_\sigma\|_{\mathcal{L}^\infty} < \infty$  ならば次が成り立つ:

- (1)  $\mathbb{E}[(X_\tau - X_\sigma)^2] = \mathbb{E}[X_\tau^2 - X_\sigma^2]$ ,
- (2)  $\mathbb{E}[(X_\tau - X_\sigma)^2 | \mathcal{F}_\sigma] = \mathbb{E}[X_\tau^2 - X_\sigma^2 | \mathcal{F}_\sigma]$ .

証明. 以下の式中では関数ではなく関数類を扱う．

(1)  $\mathcal{G} = \{\Omega, \emptyset\}$  とおく．条件付き期待値の性質 (定理 2.2.2) を使えば

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X_\tau - X_\sigma)^2] &= \mathbb{E}[(X_\tau - X_\sigma)^2 | \mathcal{G}] \\ &= \mathbb{E}[X_\tau^2 + X_\sigma^2 | \mathcal{G}] - 2\mathbb{E}[X_\tau X_\sigma | \mathcal{G}] \\ &= \mathbb{E}[X_\tau^2 + X_\sigma^2 | \mathcal{G}] - 2\mathbb{E}[\mathbb{E}[X_\tau X_\sigma | \mathcal{F}_\sigma] | \mathcal{G}] \\ &= \mathbb{E}[X_\tau^2 + X_\sigma^2 | \mathcal{G}] - 2\mathbb{E}[X_\sigma \mathbb{E}[X_\tau | \mathcal{F}_\sigma] | \mathcal{G}] & (\because \text{定理 3.1.8}) \\ &= \mathbb{E}[X_\tau^2 + X_\sigma^2 | \mathcal{G}] - 2\mathbb{E}[X_\sigma^2 | \mathcal{G}] & (\because \text{定理 4.1.5}) \\ &= \mathbb{E}[X_\tau^2 - X_\sigma^2 | \mathcal{G}] \\ &= \mathbb{E}[X_\tau^2 - X_\sigma^2] \end{aligned}$$

が成り立つ．

(2) (1) と同様に

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X_\tau - X_\sigma)^2 | \mathcal{F}_\sigma] &= \mathbb{E}[X_\tau^2 + X_\sigma^2 | \mathcal{F}_\sigma] - 2\mathbb{E}[X_\tau X_\sigma | \mathcal{F}_\sigma] \\ &= \mathbb{E}[X_\tau^2 + X_\sigma^2 | \mathcal{F}_\sigma] - 2X_\sigma^2 \\ &= \mathbb{E}[X_\tau^2 + X_\sigma^2 | \mathcal{F}_\sigma] - 2\mathbb{E}[X_\sigma^2 | \mathcal{F}_\sigma] \\ &= \mathbb{E}[X_\tau^2 - X_\sigma^2 | \mathcal{F}_\sigma] \end{aligned}$$

が成り立つ．

命題 4.2.9 (有界変動かつ連続な二乗可積分マルチンゲールのパスは定数となる).

$A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{M}_{2,c}$  に対し,  $\|A_0\|_{\mathcal{L}^\infty} < \infty$  ならば  $A_t = A_0$  ( $\forall t \in I$ )  $\mu$ -a.s. が成り立つ.

証明.  $A \in \mathcal{A}$  であるから,  $A$  に対し或る  $A^{(1)}, A^{(2)} \in \mathcal{A}^+$  が存在して

$$A = A^{(1)} - A^{(2)}$$

と表現できる. 或る  $\mu$ -零集合  $E$  を取れば, 全ての  $\omega \in \Omega \setminus E$  に対し写像  $I \ni t \mapsto A_t^{(1)}(\omega)$  と  $I \ni t \mapsto A_t^{(2)}(\omega)$  が連続且つ単調非減少となるようにできるから,

$$\tau_m(\omega) := \begin{cases} 0 & (\omega \in E) \\ \inf \left\{ t \in I ; \left( A_t^{(1)}(\omega) - A_0^{(1)} \right) \vee \left( A_t^{(2)}(\omega) - A_0^{(2)} \right) \geq m \right\} & (\omega \in \Omega \setminus E) \end{cases} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

と定義すれば, 定理 3.1.9 よりこれは停止時刻となる. また連続性から  $\tau_m \leq \tau_{m+1}$  となり更に  $\lim_{m \rightarrow \infty} \tau_m(\omega) = T$  ( $\forall \omega \in \Omega \setminus E$ ) も成り立つ. 今  $t \in I$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$  を任意に取って固定する.

$$\sigma_j^n := \tau_m \wedge \frac{tj}{2^n} \quad (j = 0, 1, \dots, 2^n)$$

とおけば, 補題 4.2.8 により<sup>\*16</sup>

$$\mathbb{E} \left[ \sum_{j=0}^{2^n-1} \left( A_{\sigma_{j+1}^n} - A_{\sigma_j^n} \right)^2 \right] = \sum_{j=0}^{2^n-1} \mathbb{E} \left[ A_{\sigma_{j+1}^n}^2 - A_{\sigma_j^n}^2 \right] = \mathbb{E} \left[ A_{\tau_m \wedge t}^2 - A_0^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \left( A_{\tau_m \wedge t} - A_0 \right)^2 \right]$$

が成り立つ. 左辺の中の式は

$$\sum_{j=0}^{2^n-1} \left( A_{\sigma_{j+1}^n} - A_{\sigma_j^n} \right)^2 \leq \sup_j \left| A_{\sigma_{j+1}^n} - A_{\sigma_j^n} \right| \sum_{j=0}^{2^n-1} \left| A_{\sigma_{j+1}^n} - A_{\sigma_j^n} \right|$$

となり, 全ての  $\omega \in \Omega \setminus E$  に対して  $I \ni t \mapsto A_t(\omega)$  は (一様) 連続だから

$$\sup_j \left| A_{\sigma_{j+1}^n}(\omega) - A_{\sigma_j^n}(\omega) \right| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty).$$

また定理 3.1.9 より全ての  $\omega \in \Omega \setminus E$  と  $t \in I$  に対して

$$\left( A_{\tau_m \wedge t}^{(1)}(\omega) - A_0^{(1)}(\omega) \right) \vee \left( A_{\tau_m \wedge t}^{(2)}(\omega) - A_0^{(2)}(\omega) \right) \leq m$$

が成り立つから

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2^n-1} \left| A_{\sigma_{j+1}^n}(\omega) - A_{\sigma_j^n}(\omega) \right| &\leq \sum_{j=0}^{2^n-1} \left( A_{\sigma_{j+1}^n}^{(1)}(\omega) - A_{\sigma_j^n}^{(1)}(\omega) + A_{\sigma_{j+1}^n}^{(2)}(\omega) - A_{\sigma_j^n}^{(2)}(\omega) \right) \\ &= \left( A_{\tau_m \wedge t}^{(1)}(\omega) - A_0^{(1)}(\omega) \right) + \left( A_{\tau_m \wedge t}^{(2)}(\omega) - A_0^{(2)}(\omega) \right) \leq 2m \end{aligned}$$

<sup>\*16</sup> 補題の有界性の仮定を満たしていることを確認する. 任意の  $j \in \mathbb{N}$  番目の  $\sigma_j^n$  を取る.  $\omega \in \Omega \setminus E$  に対し写像  $t \mapsto A_t(\omega)$  は連続であるから

$$\left| A_{\sigma_j^n}(\omega) - A_0(\omega) \right| \leq \left| A_{\tau_m(\omega) \wedge \frac{tj}{2^n}}^{(1)}(\omega) - A_0^{(1)}(\omega) \right| + \left| A_{\tau_m(\omega) \wedge \frac{tj}{2^n}}^{(2)}(\omega) - A_0^{(2)}(\omega) \right| \leq 2m$$

が成り立つ. また補題 1.1.2 より或る零集合  $E'$  を除いて  $|A_0| \leq \|A_0\|_{\mathcal{L}^\infty}$  が成り立っているから,

$$\left| A_{\sigma_j^n}(\omega) \right| \leq 2m + \|A_0\|_{\mathcal{L}^\infty} \quad (\forall \omega \in \Omega \setminus (E \cup E'))$$

となり  $\|A_{\sigma_j^n}\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq 2m + \|A_0\|_{\mathcal{L}^\infty}$  であると判る.

となり, Lebesgue の収束定理により

$$\int_{\Omega} \sum_{j=0}^{2^n-1} \left( A_{\sigma_{j+1}^n(\omega)}(\omega) - A_{\sigma_j^n(\omega)}(\omega) \right)^2 \mu(d\omega) \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

を得る. ゆえに

$$\int_{\Omega} (A_{\tau_m(\omega) \wedge t}(\omega) - A_0(\omega))^2 \mu(d\omega) = 0 \quad (m = 1, 2, \dots)$$

が成り立ち, 更に Doob の不等式より  $|A_{\tau_m \wedge t} - A_0| \leq \sup_{t \in I} |A_t - A_0| \in \mathcal{L}^2$  であるから, 再び Lebesgue の収束定理を適用して

$$\int_{\Omega} (A_{\tau_m(\omega) \wedge t}(\omega) - A_0(\omega))^2 \mu(d\omega) \longrightarrow \int_{\Omega} (A_t(\omega) - A_0(\omega))^2 \mu(d\omega) \quad (n \longrightarrow \infty)$$

を得る.  $t \in I$  は任意に取っていたからつまり

$$A_t = A_0 \quad \mu\text{-a.s.} \quad (\forall t \in I)$$

が示されたが, 実際  $\omega \in \Omega \setminus E$  に対しパスは連続であるから

$$\{ \omega \in \Omega \setminus E ; \quad A_t(\omega) = A_0(\omega) \quad (\forall t \in I) \} = \bigcap_{r \in I \cap \mathbb{Q}} \{ \omega \in \Omega \setminus E ; \quad A_r(\omega) = A_0(\omega) \}$$

と表せる.

$$\{ \omega \in \Omega \setminus E ; \quad A_t(\omega) \neq A_0(\omega) \quad (\exists t \in I) \} \subset E + \bigcup_{r \in I \cap \mathbb{Q}} \{ \omega \in \Omega \setminus E ; \quad A_r(\omega) \neq A_0(\omega) \}$$

の右辺は零集合であるから  $A_t = A_0 \quad (\forall t \in I) \quad \mu\text{-a.s.}$  が成り立つ. ■

**補題 4.2.10 (二次変分補題).** 任意に  $n \in \mathbb{N}$  と  $M \in \mathcal{M}_{b,c}$  を取る.  $\tau_j^n = jT/2^n \quad (j = 0, 1, \dots, 2^n)$  に対し

$$Q_t^n := \sum_{j=0}^{2^n-1} \left( M_{t \wedge \tau_{j+1}^n} - M_{t \wedge \tau_j^n} \right)^2 \quad (\forall t \in I) \tag{4.10}$$

とおけば  $M^2 - Q^n \in \mathcal{M}_{b,c}$  となり, さらに次が成り立つ:

$$\| M_T - M_0 - Q_T^n \|_{\mathcal{L}^2} \leq 2 \sup_{t \in I} \| M_t \|_{\mathcal{L}^\infty} \| M_T - M_0 \|_{\mathcal{L}^2}.$$

**証明.** 先ず  $Q^n$  は  $\mathcal{F}_t$ -適合である. これは任意の停止時刻  $\tau$  に対し  $M_{t \wedge \tau}$  が可測  $\mathcal{F}_t/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  であることによる. 今任意に  $0 \leq s < t \leq T$  を取り固定する.  $\tau_k^n \leq s < \tau_{k+1}^n$  となる  $k$  を選べば, 補題 4.2.8

と任意抽出定理 4.1.5 を使って次のように式変形できる:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Q_t^n - Q_s^n \mid \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}\left[\sum_{j=0}^{2^n-1} \left(M_{t \wedge \tau_{j+1}^n} - M_{t \wedge \tau_j^n}\right)^2 - \sum_{j=0}^{2^n-1} \left(M_{s \wedge \tau_{j+1}^n} - M_{s \wedge \tau_j^n}\right)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{j=k}^{2^n-1} \left\{\left(M_{t \wedge \tau_{j+1}^n} - M_{t \wedge \tau_j^n}\right)^2 - \left(M_{s \wedge \tau_{j+1}^n} - M_{s \wedge \tau_j^n}\right)^2\right\} \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= \sum_{j=k+1}^{2^n-1} \mathbb{E}\left[\left(M_{t \wedge \tau_{j+1}^n} - M_{t \wedge \tau_j^n}\right)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] + \mathbb{E}\left[\left(M_{t \wedge \tau_{k+1}^n} - M_{t \wedge \tau_k^n}\right)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] - \mathbb{E}\left[\left(M_s - M_{\tau_k^n}\right)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= \sum_{j=k+1}^{2^n-1} \mathbb{E}\left[M_{t \wedge \tau_{j+1}^n}^2 - M_{t \wedge \tau_j^n}^2 \mid \mathcal{F}_s\right] + \mathbb{E}\left[\left(M_{t \wedge \tau_{k+1}^n} - M_{\tau_k^n}\right)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] - \left(M_s - M_{\tau_k^n}\right)^2 \\
&= \mathbb{E}\left[M_t^2 - M_{t \wedge \tau_{k+1}^n}^2 \mid \mathcal{F}_s\right] + \mathbb{E}\left[\left(M_{t \wedge \tau_{k+1}^n} - M_{\tau_k^n}\right)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] - \left(M_s - M_{\tau_k^n}\right)^2 \\
&= \mathbb{E}\left[M_t^2 \mid \mathcal{F}_s\right] - 2\mathbb{E}\left[M_{t \wedge \tau_{k+1}^n} M_{\tau_k^n} \mid \mathcal{F}_s\right] + \mathbb{E}\left[M_{\tau_k^n}^2 \mid \mathcal{F}_s\right] - M_s^2 + 2M_s M_{\tau_k^n} - M_{\tau_k^n}^2 \\
&= \mathbb{E}\left[M_t^2 \mid \mathcal{F}_s\right] - 2M_{\tau_k^n} \mathbb{E}\left[M_{t \wedge \tau_{k+1}^n} \mid \mathcal{F}_s\right] + M_{\tau_k^n}^2 - M_s^2 + 2M_s M_{\tau_k^n} - M_{\tau_k^n}^2 \\
&= \mathbb{E}\left[M_t^2 \mid \mathcal{F}_s\right] - M_s^2.
\end{aligned}$$

従って次を得た:

$$\mathbb{E}\left[M_t^2 - Q_t^n \mid \mathcal{F}_s\right] = M_s^2 - Q_s^n, \quad (\forall 0 \leq s < t \leq T). \quad (4.11)$$

ここで

$$N := M^2 - Q^n$$

とおけば  $N \in \mathcal{M}_{b,c}$  であり<sup>\*17</sup>,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(N_T - N_0)^2\right] &= \mathbb{E}\left[N_T^2 - N_0^2\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{j=0}^{2^n-1} \left(N_{\tau_{j+1}^n}^2 - N_{\tau_j^n}^2\right)\right] \\
&= \sum_{j=0}^{2^n-1} \mathbb{E}\left[\left(N_{\tau_{j+1}^n} - N_{\tau_j^n}\right)^2\right]
\end{aligned}$$

<sup>\*17</sup>  $M \in \mathcal{M}_{b,c}$  より全ての  $\omega \in \Omega$  において写像  $t \mapsto M_t(\omega)$  は各点で右連続かつ左極限を持つ.  $Q^n$  についても Gauss 記号を用いて  $Q_t^n = \sum_{j=0}^{[2^n t]/T} \left(M_t^n - M_{\tau_j^n}\right)^2$  と表せば,  $t \mapsto Q_t^n(\omega)$  ( $\forall \omega \in \Omega$ ) が各点で右連続かつ左極限を持つことが明確になる. よって全ての  $\omega \in \Omega$  において  $t \mapsto N_t(\omega)$  は各点で右連続かつ左極限を持つ. また同じ理由で  $t \mapsto M_t(\omega)$  が連続となる点で  $t \mapsto N_t(\omega)$  も連続となるからつまり  $\mu$ -a.s. に  $t \mapsto N_t$  は連続. 一様有界性については,  $\sup_{t \in I} \|M_t\|_{\mathcal{L}^\infty} < \infty$  であるから, 任意の  $t \in I$  に対し或る零集合  $E_t$  が存在して  $\omega \notin E_t$  なら  $|M_t(\omega)| \leq \sup_{t \in I} \|M_t\|_{\mathcal{L}^\infty}$  が成り立つ. 同様に  $Q_t^n$  についても  $\omega \notin E_t \cup \bigcup_{j=0}^{[2^n t]/T} E_{\tau_j^n}$  なら

$$|Q_t^n(\omega)| \leq \sum_{j=0}^{[2^n t]/T} \left(2 \sup_{t \in I} \|M_t\|_{\mathcal{L}^\infty}\right)^2 \leq 2^{n+1} \sup_{t \in I} \|M_t\|_{\mathcal{L}^\infty}^2.$$

ゆえに

$$|N_t(\omega)| \leq |M_t(\omega)| + |Q_t^n(\omega)| \leq (2^{n+1} + 1) \sup_{t \in I} \|M_t\|_{\mathcal{L}^\infty}^2, \quad \left(\forall \omega \notin E_t \cup \bigcup_{j=0}^{[2^n t]/T} E_{\tau_j^n}\right).$$

この右辺は  $t$  に依らないから

$$\sup_{t \in I} \|N_t\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq (2^{n+1} + 1) \sup_{t \in I} \|M_t\|_{\mathcal{L}^\infty}^2$$

を得る. 以上の結果と (4.11) を併せて  $N \in \mathcal{M}_{b,c}$  となる.



$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{2^n-1} \mathbb{E} \left[ \left\{ M_{\tau_{j+1}}^2 - M_{\tau_j}^2 - \left( Q_{\tau_{j+1}}^n - Q_{\tau_j}^n \right) \right\}^2 \right] \\
&= \sum_{j=0}^{2^n-1} \mathbb{E} \left[ \left\{ M_{\tau_{j+1}}^2 - M_{\tau_j}^2 - \left( M_{\tau_{j+1}}^n - M_{\tau_j}^n \right) \right\}^2 \right] \\
&= \sum_{j=0}^{2^n-1} \mathbb{E} \left[ \left\{ -2M_{\tau_j}^n \left( M_{\tau_{j+1}}^n - M_{\tau_j}^n \right) \right\}^2 \right] \\
&= 4 \mathbb{E} \left[ \sum_{j=0}^{2^n-1} M_{\tau_j}^2 \left( M_{\tau_{j+1}}^n - M_{\tau_j}^n \right)^2 \right] \\
&\leq 4 \sup_{t \in I} \|M_t\|_{\mathcal{L}^\infty}^2 \mathbb{E} \left[ \sum_{j=0}^{2^n-1} \left( M_{\tau_{j+1}}^n - M_{\tau_j}^n \right)^2 \right] \\
&= 4 \sup_{t \in I} \|M_t\|_{\mathcal{L}^\infty}^2 \mathbb{E} \left[ M_T^2 - M_0^2 \right]
\end{aligned}$$

が成り立つ。これより

$$\|M_T - M_0 - Q_T^n\|_{\mathcal{L}^2} \leq 2 \sup_{t \in I} \|M_t\|_{\mathcal{L}^\infty} \|M_T - M_0\|_{\mathcal{L}^2}.$$

定理 4.2.11 (二次変分の存在).

任意の  $M \in \mathcal{M}_{c,loc}$  に対し或る  $A \in \mathcal{A}^+$  が一意的に存在して<sup>\*18</sup>次を満たす:

- $A_0 = 0$   $\mu$ -a.s.
- $M^2 - A \in \mathcal{M}_{c,loc}$ .

証明. まず  $M \in \mathcal{M}_{b,c}$  に対し  $A$  の存在を証明し, 次にその結果を  $\mathcal{M}_{c,loc}$  に拡張する.

第一段  $M \in \mathcal{M}_{b,c}$  とする. 補題 4.2.10 に従って  $Q^n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) を構成し  $N^n := M^2 - Q^n \in \mathcal{M}_{b,c}$  とおけば

$$\|N_T^n - N_0^n\|_{\mathcal{L}^2} \leq 2 \sup_{t \in I} \|M_t\|_{\mathcal{L}^\infty} \|M_T - M_0\|_{\mathcal{L}^2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

を満たす.  $Q^n$  の構成方法 (4.10) より  $N_0^n(\omega) = M_0^2(\omega)$  ( $\forall \omega \in \Omega, n = 1, 2, \dots$ ) となるから

$$\|N_T^n\|_{\mathcal{L}^2} \leq 2 \sup_{t \in I} \|M_t\|_{\mathcal{L}^\infty} \|M_T - M_0\|_{\mathcal{L}^2} + \|M_0^2\|_{\mathcal{L}^2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

が成り立ち, 従って  $N^n$  の同値類<sup>\*19</sup>  $\overline{N^n}$  の列  $(\overline{N^n})_{n=1}^\infty$  は Hilbert 空間  $\mathfrak{M}_{2,c}$  において有界列となる. Kolmos の補題より  $\overline{N^n}$  の線型結合の列  $\hat{N}^n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) が存在して  $\mathfrak{M}_{2,c}$  において Cauchy 列となるから, その極限を  $\overline{N} \in \mathfrak{M}_{2,c}$  と表す. 線型結合を

$$\hat{N}^n = \sum_{j=0}^\infty c_j^n \overline{N^{n+j}}, \quad \hat{N}^n := \sum_{j=0}^\infty c_j^n N^{n+j}, \quad \hat{Q}^n := \sum_{j=0}^\infty c_j^n Q^{n+j}$$

<sup>\*18</sup>  $A, A' \in \mathcal{A}^+$  が主張の二条件を満たすときは  $\mu$ -a.s. にパスが一致する, という意味で存在が一意的である.

<sup>\*19</sup> 補題 4.2.2 で導入した同値関係  $R$  による同値類.

と表せば  $\hat{N}^n = M^2 - \hat{Q}^n$  となり<sup>\*20</sup> , 任意に  $N \in \bar{N}$  を取り

$$A := M^2 - N \quad (4.12)$$

とおけば, Doob の不等式 (定理 4.1.4) により

$$\begin{aligned} \left\| \sup_{t \in I} |\hat{Q}_t^n - A_t| \right\|_{\mathcal{L}^2} &= \left\| \sup_{t \in I} |N_t - \hat{N}_t^n| \right\|_{\mathcal{L}^2} \\ &\leq \|N_T - \hat{N}_T^n\|_{\mathcal{L}^2} = \left\| \bar{N} - \hat{N}^n \right\|_{\mathfrak{M}_{2,c}} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

が成り立つ<sup>\*21</sup> . これより Fatou の補題を使えば

$$\left\| \liminf_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in I} |\hat{Q}_t^n - A_t| \right\|_{\mathcal{L}^2} = 0$$

が成り立つから, 或る  $\mu$ -零集合  $E$  が存在して

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in I} |\hat{Q}_t^n(\omega) - A_t(\omega)| = 0 \quad (\forall \omega \in \Omega \setminus E) \quad (4.13)$$

となる.

$$D_n := \left\{ \frac{j}{2^n} T ; \quad j = 0, 1, \dots, 2^n \right\} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とおけば, (4.10) より全ての  $m \geq n$ ,  $\omega \in \Omega$  に対して  $t \mapsto Q_t^m(\omega)$  は  $D_n$  上で単調非減少となるから, その線型結合である  $\hat{Q}_t^m$  も  $D_n$  上で単調非減少となり, (4.13) より  $\omega \in \Omega \setminus E$  に対しては  $t \mapsto A_t(\omega)$  も  $D_n$  上で単調非減少となる<sup>\*22</sup>.  $D := \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$  とおけば  $D$  は  $I$  で稠密であり, 更に  $A$  は或る零集合  $E'$  を除いてパスが連続となるから<sup>\*23</sup> , 写像

<sup>\*20</sup> 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $(c_j^n)_{j=0}^{\infty}$  は  $\sum_{j=0}^{\infty} c_j^n = 1$  を満たし, 且つ  $\neq 0$  であるのは有限個である.

<sup>\*21</sup>  $\|\cdot\|_{\mathfrak{M}_{2,c}}$  は (4.7) で定義される内積により導入されるノルムを表す.

<sup>\*22</sup> 或る  $j$  と  $u \in \Omega \setminus E$  で  $A_{\frac{j}{2^n}T}(u) > A_{\frac{j+1}{2^n}T}(u)$  が成り立っているとする. 式 (4.13) を詳しく書けば

$$\sup_{n \geq 1} \inf_{v \geq n} \sup_{t \in I} |\hat{Q}_t^v(\omega) - A_t(\omega)| = 0 \quad (\forall \omega \in \Omega \setminus E)$$

ということになるから

$$\inf_{v \geq n} \sup_{t \in I} |\hat{Q}_t^v(\omega) - A_t(\omega)| = 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \omega \in \Omega \setminus E)$$

を得る. 従って任意の  $\epsilon > 0$  に対し必ず或る  $v \geq 1$  が存在して

$$\sup_{t \in I} |\hat{Q}_t^v(\omega) - A_t(\omega)| < \epsilon \quad (\forall \omega \in \Omega \setminus E) \quad (4.14)$$

を満たすから,

$$\alpha := A_{\frac{j}{2^n}T}(u), \quad \beta := A_{\frac{j+1}{2^n}T}(u)$$

とおけば或る  $v \geq 1$  に対し

$$\left| \hat{Q}_{\frac{j}{2^n}T}^v(u) - A_{\frac{j}{2^n}T}(u) \right| < \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad \left| \hat{Q}_{\frac{j+1}{2^n}T}^v(u) - A_{\frac{j+1}{2^n}T}(u) \right| < \frac{\alpha - \beta}{2}$$

を同時に満たすが,

$$\hat{Q}_{\frac{j}{2^n}T}^v(u) > \frac{\alpha + \beta}{2} > \hat{Q}_{\frac{j+1}{2^n}T}^v(u)$$

が従うので  $t \mapsto \hat{Q}_t^v(u)$  の単調増大性に矛盾する. 同様にして  $A_0(\omega) = 0$  ( $\forall \omega \in \Omega \setminus E$ ) も成り立つ. 或る  $v \in \Omega \setminus E$  で  $A_0(v) \neq 0$  であるとすれば,  $Q_0^n(v) = 0$  ( $\forall n$ ) であるから (4.14) に矛盾する.

<sup>\*23</sup>  $M \in \mathcal{M}_{b,c}$ ,  $N \in \mathcal{M}_{2,c}$  より  $M, N$  のパスが連続でない  $\omega$  の全体は或る零集合に含まれる. それを  $E'$  とおけばよい.

$I \ni t \mapsto A_t(\omega) (\forall \omega \in \Omega \setminus (E \cup E'))$  は連続且つ単調非減少である． $A$  の適合性は (4.12) より判明しているから，以上で  $A \in \mathcal{A}^+$  であることが示された． $A_0(\omega) = 0 (\forall \omega \in \Omega \setminus E)$  であることも脚注\*22 で証明したから， $N = M^2 - A \in \mathcal{M}_{b,c} \subset \mathcal{M}_{c,loc}$  (命題 4.2.6) より定理の主張を満たす  $A$  の存在が言えた．

存在の一意性は命題 4.2.9 による．今  $A' \in \mathcal{A}^+$  もまた定理の主張を満たしているなら， $N' = M^2 - A'$  として， $A - A' \in \mathcal{A}$  かつ

$$A - A' = N' - N \in \mathcal{M}_{2,c}$$

となり  $A_t - A'_t = 0 (\forall t \in I)$   $\mu$ -a.s. が従う．

第二段  $M \in \mathcal{M}_{c,loc}$  を任意に取る．或る  $(\tau_j)_{j=1}^\infty \in \mathcal{T}$  が存在して  $M^n \in \mathcal{M}_{b,c} (\forall t \in I, M_t^n = M_{t \wedge \tau_n})$  となるから，前段の結果より或る  $A^n \in \mathcal{A}^+$  が存在して

$$N^n := (M^n)^2 - A^n \in \mathcal{M}_{b,c}$$

を満たす．或る  $\mu$ -零集合  $E_1$  が存在して\*24 全ての  $\omega \in \Omega \setminus E_1$  で  $(\tau_n(\omega))_{n=1}^\infty$  は 0 出発，単調非減少かつ或る  $n(\omega)$  番目以降は  $T$  に一致する．今任意に  $n \leq m, n, m \in \mathbb{N}$  を取って固定する． $\omega \in \Omega \setminus E_1$  に対しては

$$M_{t \wedge \tau_n}^m(\omega) = M_{t \wedge \tau_n(\omega) \wedge \tau_m(\omega)}(\omega) = M_t^n(\omega) \quad (\forall t \in I)$$

となり関数類として  $[M_{t \wedge \tau_n}^m] = [M_t^n] (\forall t \in I)$  が成り立つから，任意抽出定理 (定理 4.1.5) より

$$\mathbb{E}[(M_t^m)^2 - A_t^m \mid \mathcal{F}_{\tau_n}] = (M_{t \wedge \tau_n}^m)^2 - A_{t \wedge \tau_n}^m = (M_t^n)^2 - A_{t \wedge \tau_n}^m \quad (\forall t \in I)$$

を得る．一方で  $N^m \in \mathcal{M}_{2,c}$  であるから

$$\mathbb{E}[(M_t^m)^2 - A_t^m \mid \mathcal{F}_{\tau_n}] = \mathbb{E}[N_t^m \mid \mathcal{F}_{\tau_n}] = N_{t \wedge \tau_n}^m \quad (\forall t \in I)$$

も成り立ち，任意抽出定理 (定理 4.1.5) より  $\tau_n$  で停めた過程も二乗可積分マルチンゲールとなる．関数類としての意味を強調すれば  $[(M_t^n)^2 - A_{t \wedge \tau_n}^m] = [N_{t \wedge \tau_n}^m] (\forall t \in I)$  が成り立っているから  $((M_t^n)^2 - A_{t \wedge \tau_n}^m)_{t \in I}$  が二乗可積分マルチンゲールであることになり，前段の一意性から或る  $\mu$ -零集合  $E^{n,m}$  が存在して

$$A_{t \wedge \tau_n}^m(\omega) = A_t^n(\omega) \quad (\forall t \in I, \omega \in \Omega \setminus E^{n,m})$$

が従う．特に  $\omega \in \Omega \setminus (E_1 \cup E^{n,m})$  なら

$$A_t^n(\omega) = A_{t \wedge \tau_n}^m(\omega) = A_t^m(\omega) \quad (t \leq \tau_n(\omega))$$

となる．

$$E_2 := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E^{n,n+1}$$

---

\*24 或る零集合  $E_1^{(1)}$  があり  $\tau_0(\omega) = 0 (\forall \omega \in \Omega \setminus E_1^{(1)})$ ，また或る零集合  $E_1^j$  があり  $\tau_j(\omega) \leq \tau_{j+1}(\omega) (\forall \omega \in \Omega \setminus E_1^j)$ ，更に或る零集合  $E_1^{(T)}$  を取れば，各  $\omega \in \Omega \setminus E_1^{(T)}$  について或る  $n(\omega)$  番目以降は  $\tau_n(\omega) = T (\forall n \geq n(\omega))$  が成り立つ．

$$E_1 = \left( \bigcup_{j=1}^\infty E_1^j \right) \cup E_1^{(1)} \cup E_1^{(T)}$$

とおけばよい．

とおき

$$A_t(\omega) := \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} A_t^n(\omega) & (\omega \in \Omega \setminus (E_1 \cup E_2)) \\ 0 & (\omega \in E_1 \cup E_2) \end{cases} \quad (\forall t \in I)$$

として  $A$  を定めれば  $A \in \mathcal{A}^+$  を満たす<sup>\*25</sup> . そして  $N := M^2 - A$  とおけば  $\Omega \setminus (E_1 \cup E_2)$  上で

$$N_{t \wedge \tau_n} = M_{t \wedge \tau_n}^2 - A_{t \wedge \tau_n} = \left( M_{t \wedge \tau_n}^n \right)^2 - A_{t \wedge \tau_n}^n = N_{t \wedge \tau_n}^n \quad (\forall t \in I, n \in \mathbb{N})$$

が成り立つから  $N \in \mathcal{M}_{c,loc}$  となる.  $A$  の一意性について,

---

<sup>\*25</sup>

**連続性・単調非減少性**  $\omega \in \Omega \setminus (E_1 \cup E_2)$  の場合に確認する. 任意に  $s, u \in I$ ,  $(s < u)$  を取れば  $u \leq \tau_n(\omega)$  となる  $n$  が存在し  $A_t(\omega) = A_t^n(\omega)$  ( $\forall t \leq \tau_n(\omega)$ ) を満たす. 写像  $I \ni t \mapsto A_t^n(\omega)$  は連続且つ単調非減少であるから  $t \mapsto A_t(\omega)$  も  $t = s, u$  において連続であり, 且つ  $A_s(\omega) = A_s^n(\omega) \leq A_u^n(\omega) = A_u(\omega)$  により単調非減少である.

**適合性** 各  $n \in \mathbb{N}$  に対し  $A^n$  は  $(\mathcal{F}_t)$ -適合である.  $t \in I$  を固定し

$$\tilde{\mathcal{F}}_t := \{ B \cap (E_1 \cup E_2)^c ; \quad B \in \mathcal{F}_t \}$$

とおく. 写像  $\Omega \ni \omega \mapsto A_t^n(\omega)$  を  $\Omega \setminus (E_1 \cup E_2)$  に制限した  $\tilde{A}_t^n := A_t^n|_{\Omega \setminus (E_1 \cup E_2)}$  は可測  $\tilde{\mathcal{F}}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  であり, 各点収束先の  $\tilde{A}_t := A_t|_{\Omega \setminus (E_1 \cup E_2)}$  もまた可測  $\tilde{\mathcal{F}}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  となる. 任意の  $C \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  に対して

$$A_t^{-1}(C) = \begin{cases} \tilde{A}_t^{-1}(C) & (0 \notin C) \\ (E_1 \cup E_2) \cup \tilde{A}_t^{-1}(C) & (0 \in C) \end{cases}$$

となり,  $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{F}_0$  により  $\tilde{\mathcal{F}}_t \subset \mathcal{F}_t$  であるから  $A_t$  は可測  $\mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  となる.

## 第 5 章

# 確率積分

$I := [0, T]$  ( $T > 0$ ) に対して, 基礎に置くフィルター付き確率空間を  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, (\mathcal{F}_t)_{t \in I})$  とする. また次を仮定する:

$$\mathcal{N} := \{ N \in \mathcal{F} ; \mu(N) = 0 \} \subset \mathcal{F}_0.$$

以後, 確率過程が連続であるを書く場合は全てのパスが連続であることを指す.

### 5.1 パスの変動を制限する停止時刻

定義 5.1.1 (パスの変動を制限する停止時刻).  $X = (X^1, \dots, X^d)$  を連続な  $\mathbb{R}^d$  値適合過程<sup>\*1</sup>とする.  $X$  と  $\epsilon > 0$  に対して

$$\sum_{i=1}^d \|X_{t \wedge \tau_{j+1}}^i - X_{t \wedge \tau_j}^i\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq \epsilon, \quad (\forall t \in I, j = 0, 1, 2, \dots)$$

を満たす  $(\tau_j)_{j=0}^\infty \in \mathcal{T}$  の全体を  $\mathcal{T}(X, \epsilon)$  と表す.

定理 5.1.2 (パスの変動を制限する停止時刻の存在).  $X = (X^1, \dots, X^d)$  を連続な  $\mathbb{R}^d$  値適合過程とする. 任意の  $\epsilon > 0$  に対して,  $\tau_0 = 0$  かつ

$$\tau_{j+1}(\omega) := \inf \left\{ t \in I ; \left| X_t(\omega) - X_{t \wedge \tau_j}(\omega) \right| \geq \epsilon/d \right\} \wedge T, \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

と定めれば  $(\tau_j)_{j=0}^\infty \in \mathcal{T}(X, \epsilon)$  となる.

証明. 数学的帰納法で示す.  $\tau_0$  は定義より停止時刻であるから,  $\tau_j$  が停止時刻であると仮定して  $\tau_{j+1}$  が停止時刻となることを示せばよい.

第一段

$$I \ni t \mapsto \sup_{s \in [0, t]} |X_s - X_{s \wedge \tau_j}|$$

<sup>\*1</sup> 定理 3.1.8 により, 任意の停止時刻  $\tau$  に対し写像  $\omega \mapsto X^i(\tau(\omega), \omega)$  ( $i = 1, \dots, d$ ) は可測  $\mathcal{F}_\tau / \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  となり,  $\|X_{t \wedge \tau_{j+1}}^i - X_{t \wedge \tau_j}^i\|_{\mathcal{L}^\infty}$  を考えることができる.

は連続であり

$$\Omega \ni \omega \mapsto \sup_{s \in [0, t]} |X_s(\omega) - X_{s \wedge \tau_j}(\omega)|$$

は全ての  $t \in I$  に対し可測  $\mathcal{F}_t/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  であることを示す.

**連続性** 任意に  $t \in I$  を取り  $t$  における連続性を調べる. 表記を簡単にするため, 任意の  $\omega \in \Omega$  に対し

$$f_\omega(t) := |X_t(\omega) - X_{t \wedge \tau_j}(\omega)| \quad (t \in I)$$

とおく.  $f_\omega(t) < \sup_{s \in [0, t]} f_\omega(s)$  の場合,  $s \mapsto f_\omega(s)$  の連続性より  $t$  の十分小さな近傍を取っても上限は変化しない.  $f_\omega(t) = \sup_{s \in [0, t]} f_\omega(s)$  の場合,  $s < t$  なら

$$\sup_{u \in [0, t]} f_\omega(u) - \sup_{u \in [0, s]} f_\omega(u) \leq f_\omega(t) - f_\omega(s)$$

となり,  $s \mapsto f_\omega(s)$  が連続だから左側で連続である. 同じく  $s \mapsto f_\omega(s)$  の連続性より, 任意の  $\delta > 0$  に対し十分小さな  $h > 0$  を取れば, 全ての  $t < u < t + h$  に対し

$$f_\omega(u) < f_\omega(t) + \delta$$

とできるから

$$\sup_{u \in [0, s]} f_\omega(u) - f_\omega(t) < \delta \quad (t < \forall s < t + h)$$

が成り立つ.

**可測性** 定理 3.1.8 により  $X_{s \wedge \tau_j}$  は  $\mathcal{F}_{s \wedge \tau_j}$ -可測であるから,  $X$  の適合性及び絶対値の連続性と併せて写像  $|X_s - X_{s \wedge \tau_j}|$  は可測  $\mathcal{F}_s/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ , すなわち可測  $\mathcal{F}_t/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  となる.

$$D_t^n := \left\{ \frac{jt}{2^n} ; \quad j = 0, 1, \dots, 2^n \right\} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

として,  $X$  のパスの連続性により

$$\sup_{s \in [0, t]} |X_s(\omega) - X_{s \wedge \tau_j}(\omega)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{s \in D_t^n} |X_s(\omega) - X_{s \wedge \tau_j}(\omega)| \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

が成り立つから  $\sup_{s \in [0, t]} |X_s - X_{s \wedge \tau_j}|$  も可測  $\mathcal{F}_t/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  となる.

**第二段**  $\tau_j$  が停止時刻であるとして  $\tau_{j+1}$  が停止時刻であることを示す. 前段の結果より, 任意の  $t \in [0, T)$  に対して

$$\{\tau_{j+1} \leq t\} = \left\{ \sup_{s \in [0, t]} |X_s - X_{s \wedge \tau_j}| \geq \epsilon/d \right\} \quad (5.1)$$

が成り立つことをいえばよい.  $t = T$  の場合は  $\{\tau_{j+1} \leq T\} = \Omega$  である.

$$\sup_{s \in [0, t]} |X_s(\omega) - X_{s \wedge \tau_j}(\omega)| < \epsilon/d$$

を満たす  $\omega$  について, 前段で示した連続性より, 或る  $h > 0$  が取れて  $[0, t + h]$  が  $\{u \in I ; |X_u(\omega) - X_{u \wedge \tau_j}(\omega)| \geq \epsilon/d\}$  の下界の集合となるから  $t < \tau_{j+1}(\omega)$  が従う. 逆に

$$\sup_{s \in [0, t]} |X_s(\omega) - X_{s \wedge \tau_j}(\omega)| \geq \epsilon/d$$

を満たす  $\omega$  について、パスの連続性より  $\sup$  は  $\max$  と一致するから、或る  $u \in [0, t]$  で

$$|X_u(\omega) - X_{u \wedge \tau_j(\omega)}(\omega)| \geq \epsilon/d$$

が成り立ち  $\tau_{j+1}(\omega) \leq u \leq t$  が従う。以上で (5.1) が示された。前段で示した可測性より

$$\{\tau_{j+1} \leq t\} = \left\{ \sup_{s \in [0, t]} |X_s - X_{s \wedge \tau_j}| \geq \epsilon/d \right\} \in \mathcal{F}_t$$

が任意の  $t \in I$  に対して成立するから  $\tau_{j+1}$  は停止時刻である。

第三段  $(\tau_j)_{j=0}^\infty$  が  $\mathcal{T}$  の元であることを示す。今任意に  $\omega \in \Omega$  を取り固定する。先ず定義より  $\tau_0(\omega) = 0$  は満たされている。また、各  $j \in \mathbb{N}_0$  について  $\tau_{j+1}(\omega)$  は

$$|X_t(\omega) - X_{t \wedge \tau_j(\omega)}(\omega)| \geq \epsilon/d$$

を満たす  $t$  の下限であり、 $t \leq \tau_j(\omega)$  のときは左辺が 0 となるから

$$\tau_j(\omega) < \tau_{j+1}(\omega) \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

を満たす。

第四段  $(\tau_j)_{j=0}^\infty \in \mathcal{T}(X, \epsilon)$  を示す。任意に  $\omega \in \Omega$  と  $t \in I$  を取り固定する。 $(\tau_j)_{j=0}^\infty$  の作り方より

$$|X_{t \wedge \tau_{j+1}}(\omega) - X_{t \wedge \tau_j}(\omega)| \leq \epsilon/d \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

が満たされている。実際もし或る  $j$  で

$$|X_{t \wedge \tau_{j+1}}(\omega) - X_{t \wedge \tau_j}(\omega)| > \epsilon/d$$

が成り立つとすれば、この場合は  $t \geq \tau_j(\omega)$  でなくてはならないが、 $t \geq \tau_{j+1}(\omega)$  ならば、パスの連続性より  $\tau_{j+1}(\omega) > s$  を満たす  $s$  についても

$$|X_s(\omega) - X_{\tau_j(\omega)}(\omega)| > \epsilon/d$$

が成り立ち、下限の定義から  $\tau_{j+1}(\omega) > s \geq \tau_{j+1}(\omega)$  が従い矛盾が生じる。 $t < \tau_{j+1}(\omega)$  のときも  $\tau_{j+1}(\omega) > t \geq \tau_{j+1}(\omega)$  が従い矛盾が生じる。よって

$$|X_{t \wedge \tau_{j+1}}^i(\omega) - X_{t \wedge \tau_j}^i(\omega)| \leq \epsilon/d \quad (i = 1, \dots, d, j = 0, 1, 2, \dots)$$

が成り立ち、 $\omega, t$  の任意性から

$$\sum_{i=1}^d \|X_{t \wedge \tau_{j+1}}^i - X_{t \wedge \tau_j}^i\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq \epsilon \quad (\forall t \in I, j = 0, 1, 2, \dots)$$

が従う。

■

定理 5.1.3 (停止時刻によるパスの変動の制限).  $X = (X^1, \dots, X^d)$  を連続な  $\mathbb{R}^d$  値適合過程とし, 任意に  $\epsilon > 0$  を取る. このとき任意の  $(\tau_j)_{j=0}^\infty \in \mathcal{T}(X, \epsilon)$  に対して或る零集合  $N$  が存在し, 任意の  $\omega \in \Omega \setminus N$  に対して

$$\tau_0(\omega) = 0, \quad \tau_j(\omega) \leq \tau_{j+1}(\omega) \quad (j = 1, 2, \dots), \quad \tau_n(\omega) = T \quad (\exists n = n(\omega) \in \mathbb{N})$$

かつ

$$\sum_{i=1}^d \left| X_{t \wedge \tau_{j+1}}^i(\omega) - X_{t \wedge \tau_j}^i(\omega) \right| \leq \epsilon, \quad (\forall t \in I, j = 0, 1, 2, \dots)$$

が満たされる.

証明. 任意に  $t \in I$  を取り固定する.

$$A_{t,j}^i := \left\{ \left| X_{t \wedge \tau_{j+1}}^i - X_{t \wedge \tau_j}^i \right| > \left\| X_{t \wedge \tau_{j+1}}^i - X_{t \wedge \tau_j}^i \right\|_{\mathcal{L}^\infty} \right\} \quad (i = 1, \dots, d, j = 0, 1, 2, \dots)$$

とおけば, 補題 1.1.2 により  $A_{t,j}^i$  は  $\mu$ -零集合となる. また

$$A_{t,j} := \bigcup_{i=1}^d A_{t,j}^i, \quad A_t := \bigcup_{j=0}^\infty A_{t,j}$$

とおけば, 任意の  $\omega \in \Omega \setminus A_t$  に対して

$$\sum_{i=1}^d \left| X_{t \wedge \tau_{j+1}}^i(\omega) - X_{t \wedge \tau_j}^i(\omega) \right| \leq \epsilon, \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

が成り立つ. 更に

$$A := \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap I} A_r$$

とすれば, 任意の  $\omega \in \Omega \setminus A$  に対して

$$\sum_{i=1}^d \left| X_{t \wedge \tau_{j+1}}^i(\omega) - X_{t \wedge \tau_j}^i(\omega) \right| \leq \epsilon, \quad (\forall t \in I, j = 0, 1, 2, \dots)$$

が成り立つ. 実際もし或る  $t \in I, j \in \mathbb{N}_0$  で

$$\sum_{i=1}^d \left| X_{t \wedge \tau_{j+1}}^i(\omega) - X_{t \wedge \tau_j}^i(\omega) \right| > \epsilon$$

となると,  $t \mapsto X_t$  の連続性より或る  $r \in \mathbb{Q} \cap I$  に対して

$$\sum_{i=1}^d \left| X_{r \wedge \tau_{j+1}}^i(\omega) - X_{r \wedge \tau_j}^i(\omega) \right| > \epsilon$$

が従うがこれは矛盾である. 今  $(\tau_j)_{j=0}^\infty \in \mathcal{T}$  としているから, 或る  $\mu$ -零集合  $B$  が存在し, 任意の  $\omega \in \Omega \setminus B$  に対して

$$\tau_0(\omega) = 0, \quad \tau_j(\omega) \leq \tau_{j+1}(\omega) \quad (j = 1, 2, \dots), \quad \tau_n(\omega) = T \quad (\exists n = n(\omega) \in \mathbb{N})$$

を満たす. 従って  $N := A \cup B$  とすればよい. ■