ε 計算とクラスの導入による具体的で直観的な集合論の構築

関根深澤研修士二年 百合川尚学
学籍番号：29C17095

2020 年 1 月 28 日

本論文では類 (class) を扱うための **ZF** 集合論の一つの拡張を提示したが，そこでの主要な定理は，**ZF** 集合論のどの命題に対しても「**ZF** 集合論で証明可能」ならば「本論文の集合論で証明可能」であり，逆に「本論文の集合論で証明可能」ならば「**ZF** 集合論で証明可能」であるということである．これを精密に言い直せば，**ZF** 集合論の任意の命題 ψ に対して「Γ から ψ への **HK** の証明で $\mathcal{L}_{\in}$ の式の列であるものが取れる」ことと「Σ から ψ への **HE** の証明で $\mathcal{L}$ の文の列であるものが取れる」ことが同値であるということになる．以下で記号を解説する．

$\mathcal{L}_{\in}$ とは **ZF** 集合論の言語のことである．本論文ではもう二つの言語 $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ と $\mathcal{L}$ があり，項および式の形成規則はそれぞれの言語の中で指定される．Γ とは $\mathcal{L}_{\in}$ の文で書かれた **ZF** 集合論の公理系 (外延性・相等性・置換・対・合併・冪・正則性・無限) であり，ここで文とは変項の自由な出現が無い式を指す．**HK** とは古典論理の Hilbert 流証明体系のことであり，「Γ からの **HK** の証明で $\mathcal{L}_{\in}$ の式の列であるもの」とは，$\mathcal{L}_{\in}$ の式の列 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ で，各 φ_i について以下のいずれかが満たされるものである：(1) **HK** の公理である．(2) Γ の公理である．(3) 列の前の式から三段論法で得られる．(4) 列の前の式から汎化で得られる．

一方で $\mathcal{L}$ も Σ も **HE** も本論文特有のものである．$\mathcal{L}$ とは $\mathcal{L}_{\in}$ の語彙を拡張した言語であり，拡張の中間に $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ がある．$\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ は $\mathcal{L}_{\in}$ に ε を追加した言語であるが，この ε とは数論の無矛盾性の考察過程で Hilbert[1] が発案したものである．$\mathcal{L}$ には $\{\, x \mid \varphi \,\}$ の形の項 (内包項) を追加し，正式に類が扱えるようになる．Σ とは本論文における集合論の公理系であり，Γ の「外延性」と「相等性」が類に対する言明に変更され，また「内包性」と「要素」の公理が新たに追加される．内包性公理は

$$\forall u \,(\, u \in \{\, x \mid \varphi(x) \,\} \leftrightarrow \varphi(u) \,)$$

なる式を指し，$\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$ に対して「φ である x の全体」の意味を与える．要素の公理は

$$a \in b \;\rightarrow\; \exists x \,(\, a = x \,)$$

なる式を指し，これによって要素となりうるものは集合に限られる．右辺の $\exists x \,(\, a = x \,)$ は「a は集合である」の意味の式であり，竹内 [2] の集合の定義を引用したものである．**HE** とは **HK** の量化の公理を改造した証明体系である．**HE** では **HK** の公理である $\forall y \,(\, \psi \;\rightarrow\; \varphi(x/y) \,) \;\rightarrow\; (\, \psi \;\rightarrow\; \forall x \varphi \,)$ と $\forall y \,(\, \varphi(x/y) \;\rightarrow\; \psi \,) \;\rightarrow\; (\, \exists x \varphi \;\rightarrow\; \psi \,)$ が削除され，代わりに

$$\neg \forall x \varphi \;\rightarrow\; \exists x \, \neg \varphi,$$
$$\exists x \varphi \;\rightarrow\; \varphi(x/\varepsilon x \varphi)$$

が公理となる．**HE** の証明は全て文で行う．「Σ からの **HE** の証明で $\mathcal{L}$ の文の列であるもの」とは，$\mathcal{L}$ の文の列 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ で，各 φ_i について以下のいずれかが満たされるものである：(1) **HE** の公理である．(2) Σ の公理である．(3) 列の前の式から三段論法で得られる．ε 項の作用によって **HE** では汎化は不要になる．

なお，$\varepsilon x \varphi$ なる形の項を ε 項と呼ぶが，特に φ に x のみ自由に現れている場合は主要 ε 項と呼ぶ．また $\{\, x \mid \varphi \,\}$ なる内包項に関しては φ に x が自由に現れている場合に正則内包項と呼ぶ．そして扱う $\mathcal{L}$ の式には次の制限を付ける：(1) 式に現れる ε 項は主要 ε 項である．(2) 式に現れる内包項は正則内包項である．**HE** の量化公理と外延性公理および集合の定義式によって，主要 ε 項は全て集合となり，また集合である類はいずれかの主要 ε 項と等しいものに限られる．

参考文献

[1] D. Hilbert and P. Bernays, 数学の基礎 (吉田夏彦, 渕野昌訳), 丸善出版株式会社, 2012, pp. 23-63, ISBN 978-4-621-06405-4.

[2] 竹内外史, 現代集合論入門, 増強版, 日本評論社, 2016, p. 159, ISBN 978-4-535-60116-1.