2019年10月11日

クラスの導入と ε 項

目次

1　導入

- 集合論の言語 $\mathcal{L}_\in = \{\in\}$ の自然な拡張によりクラスを導入することは容易い:

$$\left\{ x \mid \quad \varphi(x) \right\} \quad (\varphi \text{ は } \mathcal{L}_\in \text{ の式})$$

　なるオブジェクトを取り入れればよい.

- これが持つ意味は

$$\forall u \ \left(u \in \left\{ x \mid \quad \varphi(x) \right\} \Longleftrightarrow \varphi(u) \right)$$

　を満たすモノ.

- $\mathcal{L}_\in$ においては無定義概念であった集合が

$$\exists x\,(\,x = a\,)$$

を満たすクラス a のことであると定義できる.

- ∃とはどういう意味を持つか？
- ∃に形式的な意味を付ける方法としてHilbertのε項がある: 式$\varphi(x)$に対して

$$\varepsilon x \varphi(x).$$

- これが持つ意味は

$$\exists x \varphi(x) \Longleftrightarrow \varphi\left(\varepsilon x \varphi(x)\right)$$

  を満たすモノ．論理学では証人と呼ばれる.
- たとえば，島内のε項，ブルバキのτ項.
- しかし式$\varphi(x)$に対して$\varepsilon x \varphi(x)$なるオブジェクトを項とすると項と式の定義が入れ子になってしまう.

- 言語の適切な拡張により ε 項の良さを活かしたまま入れ子の問題を解消し，またクラスの導入により直観的な集合論を構築した.
- この言語の拡張がZFCの単純な保存拡大ではないのでZFCと厳密にどう関係しているかは不明.

2　言語

- 本稿で使う言語は，論理学的に書けば

$$\mathcal{L}_\in = \{\in, \natural\}$$

  及びその拡張言語 $\mathcal{L}$.
- $\natural$ とは何か？通常は集合論の言語は $\mathcal{L}_\in = \{\in\}$.
- 導入の意図の前に，そもそも述語論理では可算個の変項 (variable) として

$$v_0,\ v_1,\ v_2,\ \cdots$$

  を用意していたりする．集合論の解説書も同様の記号列を変項としている...

- でも実際の式に$v_0, v_1, v_2, \cdots$なんて現れず，通常は文字(アルファベット)が使われる.
- だったら始めから文字を変項とすれば良い.
- ということで，本稿では文字は変項であると約束する.
- ただし変項が文字だけだと足りないので,

  τとσを変項とするとき,

  $$\natural\tau\sigma$$

  も変項である(ポーランド記法)

  とも約束しておく.

- $\natural$を使うことの利点:
  - 文字そのものを変項としているので自然.
  - 添え字の数字や“可算個”という言葉を用いることなく，実質的に可算個の変項を用意できる.

$$\natural xx,\ \natural\natural xxx,\ \natural\natural\natural xxxx,\ \natural\natural\natural\natural xxxxx,\ \cdots$$

    のように，$\natural$とxだけで何個でも変項を作れる.
  - ↑数字や“可算”の概念は集合論の中で定義されるものと現実に我々が感覚として持っているものの二つがあるが，字面では同じなのであまり使いたくない.

3　∃の規則

推論規則 3.1 (∃の導入).　$\mathcal{L}$ の式 $\varphi(x)$ と ε 項 τ に対して

$$\varphi(\tau) \vdash \exists x \varphi(x).$$

とくに，任意の ε 項 τ に対して

$$\tau = \tau$$

だから

$$\exists x \, (\, x = \tau \,)$$

が成り立つ．つまり ε 項はすべて集合.

推論規則 3.2 (∃の除去(NG版)). $\mathcal{L}$の式$\varphi(x)$に対して

$$\exists x\varphi(x) \vdash \varphi(\varepsilon x\varphi(x)).$$

※これは間違い！ φに内包項やε項が現れる場合

$$\varepsilon x\varphi(x)$$

なる項は無い(無理矢理つくると入れ子問題).

解決法

$\mathcal{L}$の式を$\mathcal{L}_{\in}$の式に書き換える手順を用意する.

4　式の書き換え

- 式に ε 項が含まれていると書き換え不可.
- ε 項が現れない式を甲種式，そうでない式を乙種式と分類.

次の書き換え規則によって，甲種式はすべて $\mathcal{L}_{\in}$ の式に書き換え可能(構造的帰納法による).

- $x \in \{\, y \mid \quad \psi(y) \,\}$ は $\psi(x)$
- $\{\, x \mid \quad \varphi(x) \,\} \in y$ は

$$\exists s \ \left(s \in y \wedge \forall x \ \left(x \in s \iff \varphi(x) \right) \right)$$

- $\{\, x \mid \quad \varphi(x) \,\} \in \{\, y \mid \quad \psi(y) \,\}$ は

$$\exists s \ \left(\psi(s) \wedge \forall x \ \left(x \in s \iff \varphi(x) \right) \right)$$

- $x = \left\{\, y \mid \quad \psi(y) \,\right\}$は

$$\forall u \ \left(u \in x \iff \psi(u) \right)$$

- $\left\{\, x \mid \quad \varphi(x) \,\right\} = y$は

$$\forall u \ \left(\varphi(u) \iff u \in y \right)$$

- $\left\{\, x \mid \quad \varphi(x) \,\right\} = \left\{\, y \mid \quad \psi(y) \,\right\}$は

$$\exists u \ \left(\varphi(u) \iff \psi(u) \right)$$

5　∃の除去規則

甲種式 φ を $\mathcal{L}_{\in}$ の式に書き換えたものを $\hat{\varphi}$ と書く.

推論規則 5.1 (∃の除去).　甲種式 $\varphi(x)$ に対して

$$\exists x \varphi(x) \vdash \varphi\left(\varepsilon x \hat{\varphi}(x)\right).$$

定理 5.2.　甲種式 $\varphi(x)$ に対して

$$\exists x \varphi(x) \Longleftrightarrow \varphi\left(\varepsilon x \hat{\varphi}(x)\right).$$

略証.　$\Longrightarrow$ は∃の除去規則, $\Longleftarrow$ は∃の導入規則. ∎

6　∀の導入

推論規則 6.1 (∀の導入).　甲種式 $\varphi(x)$ に対し，すべての ε 項 τ で $\varphi(\tau)$ が成り立つなら

$$\forall x \varphi(x).$$

推論規則 6.2 (∀の除去).　甲種式 $\varphi(x)$ に対し，$\forall x \varphi(x)$ が定理ならばすべての ε 項 τ で

$$\varphi(\tau).$$

ε 項は集合であるから，量化の範囲は集合の上だけ.

定理 6.3. 甲種式 $\varphi(x)$ に対して

$$\forall x \varphi(x) \Longleftrightarrow \varphi\left(\varepsilon x \rightharpoondown \hat{\varphi}(x)\right).$$

次の定理は他の公理および構造的帰納法と併せて示される.

定理 6.4 (書き換えの同値性). 甲種式 $\varphi(x)$ に対して

$$\forall x \left(\varphi(x) \Longleftrightarrow \hat{\varphi}(x)\right).$$

7　成り立つこと

定理 7.1.　内包項 $\left\{ x \mid \quad \varphi(x) \right\}$ が集合であれば

$$\left\{ x \mid \quad \varphi(x) \right\} = \varepsilon y \forall x \left(x \in y \Longleftrightarrow \varphi(x) \right).$$

略証.　$\exists y \left(\left\{ x \mid \quad \varphi(x) \right\} = y \right)$ を $\mathcal{L}_{\in}$ の式に書き直せば

$$\exists y \forall x \left(x \in y \Longleftrightarrow \varphi(x) \right).$$

存在記号の規則より結論が従う.　■