山崎君講義メモ

2018 年 2 月 11 日

定理 0.0.1. $a : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ を $a(0) = 0$ を満たす連続写像，$\kappa : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ を

$$\kappa(0) = 0, \quad \int_0^1 \frac{1}{\kappa(u)}\,du = \infty$$

を満たす単調非減少関数とする．a, κ が次を満たすとき，$a(t) = 0\ (\forall t \geq 0)$ が成り立つ:

$$|a(t) - a(s)| \leq \int_s^t \kappa(a(u))\,du \quad (\forall t \geq s \geq 0). \tag{1}$$

証明. $A(t)\ (t \geq 0)$ を a の $[0,t]$ 上の総変動とすれば[*1]，$t \longmapsto A(t)$ は連続且つ非減少である．A により定める Stieltjes 測度を A と表せば単調族定理より

$$dA \leq \kappa(a(t))\,dt$$

が成り立つ．特に

$$a(t) = a(t) - a(0) \leq A(t) \quad (\forall t \geq 0)$$

が満たされる．今，任意に $T > 0$ を取り固定する．任意の $\epsilon > 0$ に対し

$$\begin{aligned}\int_{A(0)}^{A(T)} \frac{1}{\kappa(u) + \epsilon}\,du &= \int_0^T \frac{1}{\kappa(A(u)) + \epsilon}\,dA(u) \\ &\leq \int_0^T \frac{1}{\kappa(a(u)) + \epsilon}\,dA(u) \leq \int_0^T \frac{1}{\kappa(a(u)) + \epsilon}\kappa(a(u))\,du \leq T\end{aligned}$$

が成り立つ．$A(T) > 0$ の場合，左辺は単調収束定理より $\epsilon \longrightarrow +0$ で発散するから，不等式と整合性を保つためには $A(T) = 0$ でなくてはならない．これより主張を得る． ∎

[*1] 条件 (0.0.1) より a は任意の閉区間上で有界変動である．