

確率解析レポート

基礎工学研究科システム創成専攻修士 1 年

学籍番号 29C17095

百合川尚学

2017 年 7 月 23 日

定義 0.1 (Brown 運動の講義における定義 (講義資料引用)). μ を \mathbb{R}^N 上の分布 (i.e. Borel 確率測度) とする. 確率空間 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 上の \mathbb{R}^N -値確率過程 $B = (B_t)_{t \geq 0}$ で以下を満たすものを, 初期分布 μ の N 次元 Brown 運動という. とくに, μ が $x \in \mathbb{R}^N$ の Dirac 測度 δ_x のとき, B は x から出発する N 次元 Brown 運動と呼ばれる.

- (i) 任意の $\omega \in \Omega$ に対して, $[0, \infty) \ni t \mapsto B_t(\omega) \in \mathbb{R}^N$ は連続.
- (ii) 任意の $0 \leq s < t$ に対して $B_t - B_s$ は $\mathfrak{F}_s^B = \sigma(B_u : u \leq s)$ と独立.
- (iii) 任意の $0 \leq s < t$ に対して $B_t - B_s$ は平均ベクトル 0, 共分散行列 $(t-s)I_N$ の N 次元 Gauss 型確率変数である. ここで I_N は N 次元単位行列を表す.
- (iv) $P_{B_0} = \mu$.

1 レポート課題その 1

定理 3.8 の Brown 運動の性質 (1), (2), (3) を示せ.

- (1) (回転不変性) 任意の $R \in O(N)$ に対して $RB = (RB_t)$ は原点から出発する Brown 運動である. ただし, $O(N)$ は N 次直交行列全体で Rx はベクトル x に左から行列 R をかけることいを意味する.
- (2) (スケール則) 任意の $c > 0$ に対して $((1/\sqrt{c})B_{ct})$ は原点から出発する Brown 運動である.
- (3) 任意の $h > 0$ に対して $(B_{t+h} - B_h)$ は原点から出発する Brown 運動である.

証明.

- (1) 上に載せた定義の番号の順番に照合していく. (i) について, 任意の N 次直交行列 R は, 通常の Euclid ノルムの入ったノルム空間 \mathbb{R}^N (通常の位相空間としての \mathbb{R}^N に同じ) において $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ の有界な線型作用素である. 即ち $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ の連続写像であり, 連続写像の合成である

$$[0, \infty) \ni t \mapsto RB_t(\omega) \in \mathbb{R}^N, \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

もまた連続写像であるから, (i) は満たされている. 次に (ii) を示す. $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^N)$ は \mathbb{R}^N の Borel 集合族を表すとする. まずは任意の $t \geq 0$ に対して

$$\{(RB_t)^{-1}(E) \mid E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^N)\} = \{B_t^{-1}(E) \mid E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^N)\} \quad (1)$$

が成り立つことを示す. これは次の理由による. 任意の N 次直交行列 R は, 通常の Euclid ノルムの入ったノルム空間 \mathbb{R}^N において $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ の有界な線型作用素である. 即ち $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ の連続写像であり, 任意の Borel 集合 $E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^N)$ を \mathbb{R}^N の Borel 集合に引き戻す. また R が $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ の全単射であること (全射, 単射であることは R の正則性により示される, つまり任意の $y \in \mathbb{R}^N$ に対して $Rx = y$ を満たすような x は $R^{-1}y$ であり, $Rx = Ry$ ならば $R(x-y) = 0$ の両辺に R^{-1} をかけて $x = y$ が出る.) と \mathbb{R}^N の完備性により関数解析の値域定理が適用され, R の逆写像 R^{-1} もまた $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ の有界な線型作用素である. 従って任意の Borel 集合の R による像は \mathbb{R}^N の Borel 集合となる. 以上より任意の Borel 集合

$A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^N)$ に対して

$$\begin{aligned}(RB_t)^{-1}(A) &= B_t^{-1}(R^{-1}(A)) \in \{B_t^{-1}(E) \mid E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^N)\}, \\ B_t^{-1}(A) &= B_t^{-1}(R^{-1}(R(A))) \in \{(RB_t)^{-1}(E) \mid E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^N)\}\end{aligned}$$

が示され、式 (1) が成り立つと判る。従って

$$\sigma(B_u : u \leq s) = \bigvee_{u \leq s} \{B_u^{-1}(E) \mid E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^N)\} = \bigvee_{u \leq s} \{(RB_u)^{-1}(E) \mid E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^N)\} = \sigma(RB_u : u \leq s)$$

が成り立つ。任意の $0 \leq s < t$ に対して $B_t - B_s$ は $\mathfrak{F}_s^B = \sigma(B_u : u \leq s)$ と独立であるから、任意の $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^N)$ と $F \in \sigma(RB_u : u \leq s) = \sigma(B_u : u \leq s)$ に対して、 $R^{-1}(A) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^N)$ に注意すれば

$$\begin{aligned}P(\{RB_t - RB_s \in A\} \cap F) &= P(\{R(B_t - B_s) \in A\} \cap F) \\ &= P(\{B_t - B_s \in R^{-1}(A)\} \cap F) \\ &= P(B_t - B_s \in R^{-1}(A))P(F) \\ &= P(R(B_t - B_s) \in A)P(F) = P(RB_t - RB_s \in A)P(F)\end{aligned}$$

が成り立つ。これは任意の $0 \leq s < t$ に対して $RB_t - RB_s$ と $\sigma(RB_u : u \leq s)$ とが独立であることを表しているから、(ii) も示されたことになる。(iii) について、行列式 $\det(R)$ が ± 1 になることに注意すれば、任意の $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^N)$ に対して

$$\begin{aligned}P(RB_t - RB_s \in A) &= P(B_t - B_s \in R^{-1}(A)) \\ &= (2\pi(t-s))^{-\frac{N}{2}} \int_{R^{-1}(A)} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2(t-s)}\right) dx \\ &= (2\pi(t-s))^{-\frac{N}{2}} \int_A \exp\left(-\frac{|y|^2}{2(t-s)}\right) dy \quad (y = Rx \text{ として変数変換})\end{aligned}$$

が成り立つことにより、任意の $0 \leq s < t$ に対して $RB_t - RB_s$ もまた平均ベクトル 0 、共分散行列 $(t-s)I_N$ の N 次元 Gauss 型確率変数であることが示された。最後に (iv) が満たされていることを確認する。今、 $P_{B_0} = \delta_0$ を仮定している。全単射線型写像 R について $0 \in A \Leftrightarrow 0 \in R^{-1}(A)$ ($\forall A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^N)$) であることに注意すれば

$$P_{RB_0}(A) = P_{B_0}(R^{-1}(A)) = \begin{cases} 1 & 0 \in R^{-1}(A) \\ 0 & 0 \notin R^{-1}(A) \end{cases} = \begin{cases} 1 & 0 \in A \\ 0 & 0 \notin A \end{cases} = P_{B_0}(A)$$

となり、 P_{RB_0} と P_{B_0} は $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^N)$ の上で一致する。 ■

- (2) 上に載せた定義の番号の順番に照合していく。(i) について、これも連続写像の合成

$$[0, \infty) \ni t \mapsto ct \mapsto \frac{1}{\sqrt{c}} B_{ct}(\omega) \in \mathbb{R}^N, \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

と見做せばよい。(ii) について、(i) と同様に考えればよい。写像 $\mathbb{R}^N \ni x \mapsto x/\sqrt{c} \in \mathbb{R}^N$ は $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ の連続な全単射であり、明らかに逆写像 $\mathbb{R}^N \ni x \mapsto \sqrt{c}x \in \mathbb{R}^N$ もまた連続な全単射である。従って任意の $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^N)$ に対して

$$\frac{1}{\sqrt{c}}A := \{x/\sqrt{c} \mid x \in A\} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^N), \quad \sqrt{c}A := \{\sqrt{c}x \mid x \in A\} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^N)$$

が成り立つから、任意の $t \geq 0$ に対して

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{c}} B_{ct} \in A \mid A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^N) \right\} = \left\{ B_{ct} \in A \mid A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^N) \right\}$$

が成り立つ。即ち任意の $s \geq 0$ に対して

$$\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{c}} B_{cu} : u \leq s\right) := \bigvee_{u \leq s} \left\{ \frac{1}{\sqrt{c}} B_{cu} \in A \mid A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^N) \right\} = \bigvee_{u \leq s} \left\{ B_{cu} \in A \mid A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^N) \right\} = \sigma(B_{cu} : u \leq s)$$

となっていて、さらに設問の仮定により任意の $0 \leq s < t$ に対して $B_{ct} - B_{cs}$ は $\sigma(B_{cu} : u \leq s)$ と独立である。以上より、任意の $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^N)$ と $F \in \sigma\left(\frac{1}{\sqrt{c}} B_{cu} : u \leq s\right) = \sigma(B_{cu} : u \leq s)$ に対して

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\left\{\frac{1}{\sqrt{c}} B_{ct} - \frac{1}{\sqrt{c}} B_{cs} \in A\right\} \cap F\right) &= \mathbf{P}\left(\left\{B_{ct} - B_{cs} \in \sqrt{c}A\right\} \cap F\right) \\ &= \mathbf{P}\left(B_{ct} - B_{cs} \in \sqrt{c}A\right) \mathbf{P}(F) \\ &= \mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{c}} B_{ct} - \frac{1}{\sqrt{c}} B_{cs} \in A\right) \mathbf{P}(F) \end{aligned}$$

が成り立つから、任意の $0 \leq s < t$ に対して $\frac{1}{\sqrt{c}} B_{ct} - \frac{1}{\sqrt{c}} B_{cs}$ は $\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{c}} B_{cu} : u \leq s\right)$ と独立であると示された。(iii) について、これもヤコビアンが \sqrt{c} になることに注意すれば

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{c}} B_{ct} - \frac{1}{\sqrt{c}} B_{cs} \in A\right) &= \mathbf{P}\left(B_{ct} - B_{cs} \in \sqrt{c}A\right) \\ &= (2\pi(ct - cs))^{-\frac{N}{2}} \int_{\sqrt{c}A} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2(ct - cs)}\right) dx \\ &= (2\pi(t - s))^{-\frac{N}{2}} \int_A \exp\left(-\frac{|y|^2}{2(t - s)}\right) dy \quad \left(y = \frac{1}{\sqrt{c}}x \text{ と変数変換}\right) \end{aligned}$$

が成り立つことにより、任意の $0 \leq s < t$ に対して $\frac{1}{\sqrt{c}} B_{ct} - \frac{1}{\sqrt{c}} B_{cs}$ は平均ベクトル 0 、共分散行列 $(t - s)I_N$ の N 次元 Gauss 型確率変数である。最後に (iv) を示す。任意の $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^N)$ に対して $0 \in A \Leftrightarrow 0 \in \sqrt{c}A$ であることに注意すれば、

$$\mathbf{P}_{\frac{1}{\sqrt{c}} B_0}(A) = \mathbf{P}_{B_0}(\sqrt{c}A) = \begin{cases} 1 & 0 \in \sqrt{c}A \\ 0 & 0 \notin \sqrt{c}A \end{cases} = \begin{cases} 1 & 0 \in A \\ 0 & 0 \notin A \end{cases} = \mathbf{P}_{B_0}(A)$$

が成り立つから $\mathbf{P}_{\frac{1}{\sqrt{c}} B_0}$ と \mathbf{P}_{B_0} は $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^N)$ の上で一致する。