ε 計算とクラスの導入による具体的で直観的な集合論の構築

関根深澤研修士二年百合川尚学

2020 年 1 月 11 日

目次

0.1 導入

Hilbert の ε 計算は，項を形成するオペレーター ε を用いた述語計算の拡張である．ε は式 $\varphi(x)$ から項 $\varepsilon x \varphi(x)$ を作るものであり，この項は次の主要論理式によって制御される：

$$\varphi(t) \rightarrow \varphi(\varepsilon x \varphi(x)).$$

Hilbert が ε を導入したのは述語計算を命題計算に埋め込むためであり，その際には $\exists$ や $\forall$ の付いた式を

$$\varphi(\varepsilon x \varphi(x)) \overset{\mathrm{def}}{\longleftrightarrow} \exists x \varphi(x),$$
$$\varphi(\varepsilon x \neg \varphi(x)) \overset{\mathrm{def}}{\longleftrightarrow} \forall x \varphi(x)$$

と変換する．

この変換は本稿において最も重要な公理の基となるが，ただし本稿において ε を導入したのは述語計算を埋め込むためではなく，集合を「具体化」するためである．本稿で実践しているのは Hilbert の ε 計算ではなく一種の Henkin 拡大であり，先述の主要論理式は本稿では全く不要であって，代わりに

$$\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(\varepsilon x \varphi(x))$$

が主要な公理となる．「具体化」に対する問題意識の源は，通常の公理的集合論においては集合が「無定義」であるという不可解さである．純粋に一階述語論理の言語から構築される集合論を “生の” 集合論と呼ぶことにすれば，“生の” 集合論の言語では集合というオブジェクトが用意されていないため「存在」は「実在」を意味しない．たとえば

$$\exists x \forall y \, (\, y \notin x \,)$$

は「空集合は存在する」という定理を表しているが，存在するはずの空集合を実際に取ってくることは出来ないのである．それなのに集合論において $\emptyset$ が恰も実在するオブジェクトとして扱われているのは，一つには $\forall y \, (\, y \notin \emptyset \,)$ を $\emptyset$ の定義式として $\emptyset$ を言語に追加している (定義による拡張) か，或いは $\exists x \forall y \, (\, y \notin x \,)$ と書くべきところをインフォーマルに $\emptyset$ を用いて略記しているかであろうが，ε 項はそのどちらでもなく，単に

$$\varepsilon x \forall y \, (\, y \notin x \,)$$

と書くだけで「存在」を「実在」に格上げする効果がある．適切な推論規則と集合の定義によって，ε 項及び ε 項に等しいオブジェクトが全て集合であり，かつ集合はこれらに限られるといった体系を構築できるので，この意味で ε 項によって集合の「具体化」が実現する．その他にも ε 項を導入することで得られるメリットとして，直感的な証明が組み立てやすくなったり，証明で用いる推論規則が三段論法のみで済むといった点がある．

ブルバキ [4] や島内 [6] でも ε 計算を使った集合論を展開している (ブルバキ [4] では ε ではなく τ が使われている)．ところで，本稿では ε 項だけではなく，「$\varphi(x)$ を満たす集合 x の全体」の役割を期して

$$\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$$

というオブジェクトも取り入れる．ブルバキ [4] や島内 [6] では

$$\{\, x \mid \varphi(x) \,\} \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon x \forall u \, (\, \varphi(u) \leftrightarrow u \in x \,)$$

と定めるが，これは欠点がある．

$$\exists x \forall u \, (\, \varphi(u) \leftrightarrow u \in x \,)$$

が成立しない場合は「$\varphi(x)$ を満たす集合 x の全体」という意味を持たないためである．この欠点を解消するには，竹内 [5] に倣って φ から直接 $\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$ の形のオブジェクトを作ればよい．

$\{\, x \mid \varphi \,\}$ なる項は「モノの集まり」という観点からはまさしく「集合」なのだが，たとえば Russell のパラドックスが示す通り

$$\{\, x \mid x \notin x \,\}$$

は数学の世界での集合であってはならず，パラドックスを回避するためには「モノの集まり」を数学の世界の集合であるものとそうでないものとに分類しなくてはならない．数学の世界では単なる「モノの集まり」は類 (class) と呼ばれ，集合でない類は真類 (proper class) と呼ばれる．ε 項を採用している本稿では

$$\varepsilon x \varphi(x), \quad \{\, x \mid \varphi(x) \,\}$$

の形の項を類と定義し，類 a が集合であることの判断基準は，竹内 [5] に倣って

$$\exists x \,(\, a = x \,)$$

が成り立つことであるとする．

メタ定理とは式や項の形状的な性質に対する主張であって，メタ証明はメタ定理の妥当性を日本語によって検証するものである．またメタ証明に必要な直感的真理をメタ公理として提示する．

第 1 章

言語

この世のはじめに言葉ありきといわれるが，この原則は数学の世界でも同じである．本稿の世界を展開するために使用する言語には二つ種類がある．一つは自然言語の日本語であり，もう一つは新しくこれから作る言語である．その人工的な言語は記号列が数学の式となるための文法を指定し，そこで組み立てられた式のみが考察対象となる．日本語は式を解釈したり人工言語を補助するために使われる．

さっそく人工的な言語 $\mathcal{L}_{\in}$ を構築するが，これは本論においてはスタンダードな言語ではなく，後で $\mathcal{L}_{\in}$ をより複雑な言語に拡張するという意味で原始的である．以下は $\mathcal{L}_{\in}$ を構成する要素である:

矛盾記号　$\perp$
論理記号　$\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\longrightarrow$
量化子　$\forall$, $\exists$
述語記号　$=$, $\in$
変項　後述 (第 1.1 節).

日本語と同様に，決められた規則に従って並ぶ記号列のみを $\mathcal{L}_{\in}$ の単語や文章として扱う．$\mathcal{L}_{\in}$ において，名詞にあたるものは**項 (term)** と呼ばれる．文字は最もよく使われる項である．述語とは項同士を結ぶものであり，最小の文章を形成する．例えば

$$\in st$$

は $\mathcal{L}_{\in}$ の文章となり，「s は t の要素である」と読む．$\mathcal{L}_{\in}$ の文章を ($\mathcal{L}_{\in}$ の) **式 (formula)** 或いは ($\mathcal{L}_{\in}$ の) **論理式**と呼ぶ．論理記号は主に式同士を繋ぐ役割を持つ．

論理学的な言語とは論理記号と変項以外の記号をすべて集めたものである．本稿で用意した記号で言うと，論理記号とは

$$\perp,\ \neg,\ \vee,\ \wedge,\ \longrightarrow,\ \forall,\ \exists,\ =$$

であり，変項記号とは文字であって，$\mathcal{L}_{\in}$ の語彙は

$$\in$$

しかない．だが本稿の目的は集合論の構築であって一般の言語について考察するわけではないので，論理記号も文字もすべて $\mathcal{L}_{\in}$ の一員と見做す方が自然である．ついでに記号の分類も主流の論理学とは変えていて，

- $\perp$ はそれ単体で式であるので他の記号とは分ける．
- 論理記号とは式に作用するものとして $\neg, \vee, \wedge, \longrightarrow$ のみとする．

- ∀ と ∃ は項に作用するものであるから量化子として分類する．
- 等号 = は' 等しい' という述語になっているから，論理記号ではなく述語記号に入れる．

以上の変更点は殆ど無意味であるが，いかに "直観的[*1] な" 集合論を構築するかという目的を勘案すれば良いスタートであるように思える．

1.1　変項

変項 (variable) と呼ばれる最も典型的なものは文字であり，本稿では以下の文字を変項として用いる：

$$\begin{aligned}&a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z,\\&A,B,C,D,E,F,G,H,U,J,K,L,M,N,O,P,Q,R,S,T,U,V,W,X,Y,Z,\\&\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon,\zeta,\eta,\theta,\iota,\kappa,\lambda,\mu,\nu,\xi,\pi,\rho,\sigma,\tau,\upsilon,\phi,\chi,\psi,\omega,\\&\Gamma,\Delta,\Theta,\Lambda,\Xi,\Pi,\Sigma,\Upsilon,\Phi,\Psi,\Omega,\\&\vartheta,\ \varpi,\ \varrho,\ \varsigma,\ \varphi\end{aligned}$$

だが文字だけを変項とするのは不十分であり，例えば 200 個の相異なる変項が必要であるといった場合には上の文字だけでは不足してしまう．そこで，文字 x に対して

$$\natural x$$

もまた変項であると約束する．さらに，τ を変項とするときに[*2]

$$\natural\tau$$

も変項であると約束する．この約束に従えば，文字 x だけを用いたとしても

$$x,\quad \natural x,\quad \natural\natural x,\quad \natural\natural\natural x$$

はいずれも変項ということになる．極端なことを言えば，「1000 個の変項を用意してくれ」と頼まれたとしても $\natural$ と x だけで 1000 個の変項を作り出すことが可能なのだ．

大切なのは，$\natural$ を用いれば理屈の上では変項に不足しないということであって，具体的な数式を扱うときに $\natural$ が出てくるかと言えば否である．$\natural$ が必要になるほどに長い式を読解するのは困難であるから，通常は何らかの略記法を導入して複雑なところを覆い隠してしまう．

変項は形式的には次のよう定義される:

メタ定義 1.1.1 (変項).　文字は変項である．また，τ を変項とするとき $\natural\tau$ は変項である．以上のみが変項である．

[*1] ここでの直観とは**直観主義論理**の意味ではなく日常的な感覚としての意味である．直観主義論理は最小論理に爆発律のみを追加した論理体系であるが，本稿は古典論理に準じているので爆発律よりも強い二重否定の除去が公理となる．通ずるものがあるとすれば**真偽**についての観点であって，本稿では「真である」ということは「証明できること」であるとする．また証明も**構成的**であることにこだわり，「…と仮定すると矛盾する」といった**背理法**はなるべく用いない．ただし，その代わりに**対偶法**はよく用いる．対偶法とは二重否定の除去から導かれ，そもそも二重否定の除去とは最小論理の下で背理法と同値なのであるが，矛盾に頼っていないように見えるという点で対偶法による証明は "構成的" になる．

[*2]

超記号　「τ を変項とするときに」と書いたが，これは一時的に τ を或る変項に代用しているだけであって，τ が指している変項の本来の字面は x であるかもしれない．この場合の τ を**超記号 (meta symbol)** と呼ぶ．「A を式とする」など式にも超記号が宣言される．

上の定義では，はじめに発端を決めて，次に新しい項を作り出す手段を指定している．こういった定義の仕方を**帰納的定義 (inductive definition)** と呼ぶ．ただしそれだけでは項の範囲が定まらないので，最後に「以上のみが項である」と付け加えている．「以上のみが変項である」という約束によって，例えば「τ が項である」という言明が与えられたとき，この言明は

- τ は或る文字に代用されている
- 項 σ が取れて[*3]，τ は $\natural\sigma$ に代用されている

のどちらか一方にしか解釈され得ない．

1.2　項と式

$\mathcal{L}_\in$ の**項 (term)** と**式 (formula)** も変項と同様に帰納的に定義される:

メタ定義 1.2.1 ($\mathcal{L}_\in$ の項).　変項は $\mathcal{L}_\in$ の項であり，またこれらのみが $\mathcal{L}_\in$ の項である．

メタ定義 1.2.2 ($\mathcal{L}_\in$ の式).

- $\perp$ は式である．
- σ と τ を項とするとき，$\in st$ と $= st$ は式である．これらを**原子式 (atomic formula)** と呼ぶ．
- φ を式とするとき，$\rightharpoondown\varphi$ は式である．
- φ と ψ を式とするとき，$\vee\varphi\psi$，$\wedge\varphi\psi$，$\longrightarrow\ \varphi\psi$ はいずれも式である．
- x を項とし，φ を式とするとき，$\forall x\varphi$ と $\exists x\varphi$ は式である．
- 以上のみが式である．

変項と同様に，「φ が式である」という言明の解釈は

- φ は $\perp$ である
- 項 s と項 t が得られて，φ は $\in st$ である
- 項 s と項 t が得られて，φ は $= st$ である
- 式 ψ が得られて，φ は $\rightharpoondown\psi$ である
- 式 ψ と式 ξ が得られて，φ は $\vee\psi\xi$ である
- 式 ψ と式 ξ が得られて，φ は $\wedge\psi\xi$ である
- 式 ψ と式 ξ が得られて，φ は $\longrightarrow\ \psi\xi$ である
- 項 x と式 ψ が得られて，φ は $\forall x\psi$ である
- 項 x と式 ψ が得られて，φ は $\exists x\psi$ である

のいずれか一つに限られる．

[*3] 「変項 σ が取れて」と書いたが，この σ は唐突に出てきたので，それが表す文字そのものでしかないのか，或いは超記号であるのか，一見判然しない．本来は「変項が取れて，これを σ で表すと」などと書くのが良いのかもしれないが，はじめの書き方でも文脈上は超記号として解釈するのが自然であるし，何より言い方がまどろこくない．このように見た目の簡潔さのために超記号の宣言を省略する場合もある．

1.3　構造的帰納法

まず

$$\forall x \in xy$$

なる式を考える．中置記法 (後述) で

$$\forall x \,(\, x \in y \,)$$

と書けば若干見やすくなる．冠頭詞 $\forall$ は直後の x に係って「任意の x に対し...」の意味を持ち，この式は「任意の x に対して x は y の要素である」と読むのであるが，このとき x は $\forall x \in xy$ で**束縛されている (bound)** や或いは**量化されている (quantified)** と言う．$\forall$ が $\exists$ に代わっても，今度は “x は $\exists x \in xy$ で束縛されている” と言う．つまり，**量化子の直後に続く項 (量化子が係っている項) は，その量化子から始まる式の中で束縛されている**と解釈することになっている．

では

$$\rightarrow \; \forall x \in xy \in xz$$

という式はどうであるか．$\forall x$ の後ろには x が二か所に現れているが，どちらの x も $\forall$ によって束縛されているのか？結論を言えば $\in xy$ の x は束縛されていて，$\in xz$ の x は束縛されていない．というのも式の構成法を思い返せば，$\forall x \varphi$ が式であると言ったら φ は式であるはずで，今の例で $\forall x$ に後続する式は

$$\in xy$$

しかないのだから，$\forall$ から始まる式は

$$\forall x \in xy$$

しかないのである．$\forall$ が係る x が束縛されている範囲は “$\forall$ から始まる式” であるので，$\in xz$ の x とは量化子 $\forall$ による “束縛” から漏れた “自由な”x ということになる．

上の例でみたように，量化はその範囲が重要になる．量化子 $\forall$ が式 φ に現れたとき，その $\forall$ から始まる φ の部分式を $\forall$ の**スコープ**と呼ぶが，いつでもスコープが取れることは明白であるとして，$\forall$ のスコープは唯一つでないと都合が悪い．もしも異なるスコープが存在したら，同じ式なのに全く違う解釈に分かれてしまうからである．実際そのような心配は無用であると後で保証するわけだが，その準備に**始切片**という概念から取り掛かる．

メタ定義 1.3.1 (部分項・部分式).

部分項　項から切り取ったひとつづきの部分列で，それ自体が項であるものを元の項に対して**部分項 (sub term)** と呼ぶ．元の項全体も部分項と捉えるが，自分自身を除く部分項を特に**真部分項 (proper sub term)** と呼ぶ．例えば，文字 x の部分項は x 自身のみであって，また τ を項とすると τ は $\natural\tau$ の部分項である．

部分式　式から切り取ったひとつづきの部分列で，それ自体が式であるものを元の式に対して**部分式 (sub formula)** と呼ぶ．例えば φ と ψ を式とするとき，φ と ψ は $\vee\varphi\psi$ の部分式である．元の式全体も部分式と捉えるが，自分自身を除く部分式を特に**真部分式 (proper sub formula)** と呼ぶ．

1.3.1　始切片

φ を $\mathcal{L}_\in$ の式とするとき，φ の左端から切り取るひとつづきの部分列を φ の始切片 **(initial segment)** と呼ぶ．例えば φ が

$$\rightarrow\ \forall x \wedge\ \rightarrow \in xy \in xz\ \rightarrow \in xz \in xy = yz$$

である場合，

$$\rightarrow\ \forall x \wedge\ \rightarrow \in xy \in xz\ \rightarrow \in xz \in x$$

や

$$\rightarrow\ \forall x \wedge\ \rightarrow \in xy$$

など赤字で分けられた部分は φ の始切片である．また φ 自身も φ の始切片である．

項についても同様に，項の左端から切り取るひとつづきの部分列をその項の始切片と呼ぶ．

本節の主題は次である．

メタ定理 1.3.2 (始切片の一意性).　τ を $\mathcal{L}_\in$ の項とするとき，τ の始切片で $\mathcal{L}_\in$ の項であるものは τ 自身に限られる．また φ を $\mathcal{L}_\in$ の式とするとき，φ の始切片で $\mathcal{L}_\in$ の式であるものは φ 自身に限られる．

「項の始切片で項であるものはその項自身に限られる．また，式の始切片で式であるものはその式自身に限られる．」という言明を (★) と書くことにする．このメタ定理を示すには次の原理を用いる:

メタ公理 1.3.3 ($\mathcal{L}_\in$ の項に対する構造的帰納法).　$\mathcal{L}_\in$ の項に対する言明 X に対し (X とは，例えば上の (★)),

- 文字に対して X が言える．
- 無作為に選ばれた項 τ について，その全ての真部分項に対して X が言えると仮定すれば，τ に対しても X が言える．

ならば，いかなる項に対しても X が言える．

メタ公理 1.3.4 ($\mathcal{L}_\in$ の式に対する構造的帰納法).　$\mathcal{L}_\in$ の式に対する言明 X に対し (X とは，例えば上の (★)),

- 原子式に対して X が言える．
- 無作為に選ばれた式 φ について，その全ての真部分式に対して X が言えると仮定すれば，φ に対しても X が言える．

ならば，いかなる式に対しても X が言える．

では定理を示す．

メタ証明.

項について　s を項とするとき，s が文字ならば s の始切片は s のみである．つまり (★) が言える．s が文字でないとき，

IH (帰納法の仮定)

s の全ての真部分項に対して (★) が言える．

と仮定する．(項の構成法より) 項 t が取れて s は

$$\natural t$$

と表せる．u を s の始切片で項であるものとすると u に対しても (項の構成法より) 項 v が取れて，u は

$$\natural v$$

と表せる．このとき v は t の始切片であり，t については (IH) より (★) が言えるので，t と v は一致する．ゆえに s と u は一致する．ゆえに s に対しても (★) が言える．

式について　$\perp$ については，その始切片は $\perp$ に限られる．$\in st$ なる原子式については，その始切片は

$$\in, \quad \in s, \quad \in st$$

のいずれかとなるが，このうち式であるものは $\in st$ のみである．$= st$ なる原子式についても，その始切片で式であるものは $= st$ に限られる．

いま φ を任意に与えられた式とし，

IH (帰納法の仮定)

φ の真部分式に対しては (★) が言える．

と仮定する．このとき

case1　φ が

$$\rightarrow\psi$$

なる形の式であるとき，φ の始切片で式であるものもまた

$$\rightarrow\xi$$

なる形をしている．このとき ξ は ψ の始切片であるから，(IH) より ξ と ψ は一致する．ゆえに φ の始切片で式であるものは φ 自身に限られる．

case2　φ が

$$\vee\psi\xi$$

なる形の式であるとき，φ の始切片で式であるものもまた

$$\vee\eta\zeta$$

なる形をしている．このとき ψ と η は一方が他方の始切片であるので (IH) より一致する．すると ξ と ζ も一方が他方の始切片ということになり，(IH) より一致する．ゆえに φ の始切片で式であるものは φ 自身に限られる．

case3　φ が

$$\exists x\psi$$

なる形の式であるとき，φ の始切片で式であるものもまた

$$\exists y \xi$$

なる形の式である．このとき x と y は一方が他方の始切片であり，これらは変項であるから前段の結果より一致する．すると ψ と χ も一方が他方の始切片ということになり，(IH) より一致する．ゆえに φ の始切片で式であるものは φ 自身に限られる． ∎

1.3.2　スコープ

φ を式とし，s を "$\natural, \in, \perp, \neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \exists, \forall$" のいずれかの記号とし，$\varphi$ に s が現れたとする．このとき，s のその出現位置から始まる φ の部分式，ただし s が $\natural$ である場合は部分項，を s のスコープ **(scope)** と呼ぶ．具体的に，φ を

$$\rightarrow \ \forall x \wedge \ \rightarrow \in xy \in xz \ \rightarrow \in xz \in xy = yz$$

なる式とするとき，φ の左から 6 番目に $\in$ が現れるが，この $\in$ から

$$\in xy$$

なる原子式が φ の上に現れている:

$$\rightarrow \ \forall x \wedge \ \rightarrow \ \in xy \in xz \ \rightarrow \in xz \in xy = yz.$$

これは φ **における左から 6 番目の** $\in$ **のスコープ**である．他にも，φ の左から 4 番目に $\wedge$ が現れるが，この右側に

$$\rightarrow \in xy \in xz$$

と

$$\rightarrow \in xz \in xy$$

の二つの式が続いていて，$\wedge$ を起点に

$$\wedge \ \rightarrow \in xy \in xz \ \rightarrow \in xz \in xy$$

なる式が φ の上に現れている:

$$\rightarrow \ \forall x \wedge \ \rightarrow \in xy \in xz \ \rightarrow \in xz \in xy = yz.$$

これは φ **における左から 4 番目の** $\wedge$ **のスコープ**である．φ の左から 2 番目には $\forall$ が現れて，この $\forall$ に対して項 x と

$$\wedge \ \rightarrow \in xy \in xz \ \rightarrow \in xz \in xy$$

なる式が続き，

$$\forall x \wedge \ \rightarrow \in xy \in xz \ \rightarrow \in xz \in xy$$

なる式が φ の上に現れている:

$$\rightarrow \ \forall x \wedge \ \rightarrow \in xy \in xz \ \rightarrow \in xz \in xy = yz.$$

しかも $\in, \wedge, \forall$ のスコープは上にあげた部分式のほかに取りようが無い．上の具体例を見れば，直感的に「現れた記号のスコープはただ一つだけ，必ず取ることが出来る」ということが一般の式に対しても当てはまるように思えるが，直感を排除してこれを認めるには構造的帰納法の原理が必要になる．

当然ながら $\mathcal{L}_{\in}$ の式には同じ記号が何か所にも出現しうるので，式 φ に記号 s が現れたと言ってもそれがどこの s を指定しているのかははっきりしない．しかし**スコープを考える際には，φ に複数現れうる s のどれか一つを選んで，その s に終始注目しているの**であり，「その s の...」や「s のその出現位置から...」のように限定詞を付けてそのことを示唆することにする．

メタ定理 1.3.5 (スコープの存在). φ を式，或いは項とするとき，

(a) $\natural$ が φ に現れたとき，項 t が得られて，$\natural$ のその出現位置から $\natural t$ なる項が φ の上に現れる．
(b) $\in$ が φ に現れたとき，項 σ と項 τ が得られて，$\in$ のその出現位置から $\in \sigma\tau$ なる式が φ の上に現れる．
(c) $\rightarrow$ が φ に現れたとき，式 ψ が得られて，$\rightarrow$ のその出現位置から $\rightarrow\psi$ なる式が φ の上に現れる．
(d) $\vee$ が φ に現れたとき，式 ψ と式 ξ が得られて，$\vee$ のその出現位置から $\vee\psi\xi$ なる式が φ の上に現れる．
(e) $\exists$ が φ に現れたとき，項 x と式 ψ が得られて，$\exists$ のその出現位置から $\exists x\psi$ なる式が φ の上に現れる．

(b) では $\in$ を $=$ に替えたって同じ主張が成り立つし，(d) では $\vee$ を $\wedge$ や $\rightarrow$ に替えても同じである．(e) では $\exists$ を $\forall$ に替えても同じことが言える．

メタ証明.

case1 「項に $\natural$ が現れたとき，項 t が取れて，その $\natural$ の出現位置から $\natural t$ がその項の部分項として現れる」—(※)，を示す．s を項とするとき，s が文字ならば s に対して (※) が言える．s が文字でないとき，s の全ての真部分項に対して (※) が言えるとする．s は文字ではないので，(項の構成法より) 項 t が取れて s は

$$\natural t$$

と表せる．s に現れる $\natural$ とは s の左端のものであるか t の中に現れるものであるが，t は s の真部分項であって，t については (※) が言えるので，結局 s に対しても (※) が言えるのである．

case2 $\in st$ なる式に対しては，$\in$ のスコープは $\in st$ に他ならない．実際，$\in$ から始まる $\in st$ の部分式は，項 u, v が取れて

$$\in uv$$

と書けるが，このとき u と s は一方が他方の始切片となっているので，メタ定理 1.3.2 より u と s は一致する．すると今度は v と t について一方が他方の始切片となるので，メタ定理 1.3.2 より v と t も一致する．
$\in st$ に $\natural$ が現れた場合，これが s に現れているとすると，前段より項 u が取れて，この $\natural$ の出現位置から $\natural u$ なる項が s の上に現れる．$\natural$ が t に現れたときも同じである．以上より $\in st$ に対して定理の主張が当てはまる．

case3 φ を任意に与えられた式として

IH (帰納法の仮定)

φ の全ての真部分式に対しては (a) から (e) の主張が当てはまる

と仮定する．このとき，

- φ が
$$\rightharpoondown\psi$$
なる形の式であるとき，$\natural, \in, \vee, \exists$ が φ に現れたなら，それらは ψ の中に現れているのだから (IH) よりスコープが取れる．また φ に $\rightharpoondown$ が現れた場合，その $\rightharpoondown$ が ψ の中のものならば (IH) に訴えれば良いし，φ の左端の $\rightharpoondown$ を指しているならスコープとして φ 自身を取れば良い．
- φ が
$$\vee\psi\chi$$
なる形の式であるとき，$\natural, \in, \rightharpoondown, \exists$ が φ に現れたなら，それらは ψ か χ の中に現れているのだから (IH) よりスコープが取れる．また φ に $\vee$ が現れた場合，その $\vee$ が ψ, χ の中のものならば (IH) に訴えれば良いし，φ の左端の $\vee$ を指しているならスコープとして φ 自身を取れば良い．
- φ が
$$\exists x\psi$$
なる形の式であるとき，$\natural, \in, \rightharpoondown, \vee$ が φ に現れたなら，それらは ψ の中に現れているのだから (IH) よりスコープが取れる．また φ に $\exists$ が現れた場合，その $\exists$ が ψ の中のものならば (IH) に訴えれば良いし，φ の左端の $\exists$ を指しているならスコープとして φ 自身を取れば良い． ∎

始切片に関する定理からスコープの一意性を示すことが出来る．

メタ定理 1.3.6 (スコープの一意性). φ を式とし，s を $\natural, \in, \perp, \rightharpoondown, \vee, \wedge, \rightarrow, \exists, \forall$ のいずれかの記号とし，φ に s が現れたとする．このとき φ におけるその s のスコープは唯一つである．

メタ証明.

case1　$\natural$ が φ に現れた場合，スコープの存在定理 1.3.5 より項 τ が取れて
$$\natural\tau$$
なる形の項が $\natural$ のその出現位置から φ の上に現れるわけだが，
$$\natural\sigma$$
なる項も $\natural$ のその出現位置から φ の上に出現しているといった場合，τ と σ は一方が他方の始切片となるわけで，始切片のメタ定理 1.3.2 より τ と σ は一致する．

case2　$\rightharpoondown$ が φ に現れた場合，これは case1 において項であったところが式に替わるだけで殆ど同じ証明となる．

case3　$\vee$ が φ に現れた場合，定理 1.3.5 より式 ψ, ξ が取れて
$$\vee\psi\xi$$
なる形の式が $\vee$ のその出現位置から φ の上に現れる．ここで
$$\vee\eta\Gamma$$

なる式も $\vee$ のその出現位置から φ の上に出現しているといった場合，まず ψ と η は一方が他方の始切片となるわけで，メタ定理 1.3.2 より ψ と η は一致する．すると今度は ξ と Γ について一方が他方の始切片となるので，同様に ξ と Γ も一致する．$\wedge$ や $\rightarrow$ のスコープの一意性も同様に示される．

case4　$\exists$ が φ に現れた場合，定理 1.3.5 より項 x と式 ψ が取れて

$$\exists x \psi$$

なる形の式が $\exists$ のその出現位置から φ の上に現れる．ここで

$$\exists y \xi$$

なる式も $\exists$ のその出現位置から φ の上に出現しているといった場合，まず項 x と項 y は一方が他方の始切片となるわけで，メタ定理 1.3.2 より x と y は一致する．すると今度は ψ と ξ が一方が他方の始切片の関係となるので，この両者も一致する．$\forall$ のスコープの一意性も同様に示される．■

1.4　拡張

通常は集合論の言語には $\mathcal{L}_{\in}$ が使われる．しかし乍ら，当然集合論と称している以上は「集合」というモノを扱っている筈なのに，当の「集合」は $\mathcal{L}_{\in}$ では実体を持たない空想でしかない．どういう意味かというと，例えば

$$\exists x \, \forall y \, (\, y \notin x \,)$$

と書けば「$\forall y \, (\, y \notin x \,)$ を満たすような集合 x が存在する」と読むわけだが，その在るべき x を $\mathcal{L}_{\in}$ では特定できないのである ($\mathcal{L}_{\in}$ の “名詞” は変項だけなので)．しかし言語の拡張の仕方によっては，この “空虚な存在” を実在で補強することが可能になる．

言語の拡張は二段階を踏む．項 x が自由に現れる式 $A(x)$ に対して

$$\{ \, x \mid A(x) \, \}$$

なる形の項を導入する．この項の記法は**内包的記法 (intentional notation)** と呼ばれる．導入の意図は “$A(x)$ を満たす集合 x の全体” という意味を込めた式の対象化であって，実際に後で

$$\forall u \ (\, u \in \{ \, x \mid A(x) \, \} \ \leftrightarrow \ A(u) \,)$$

を保証する (内包性公理).

追加する項はもう一種類ある．$A(x)$ を上記のものとするが，この $A(x)$ は x に関する性質という見方もできる．そして “$A(x)$ という性質を具えている集合 x” という意味を込めて

$$\varepsilon x A(x)$$

なる形の項を導入するのだ．これは Hilbert の **ε 項 (epsilon term)** と呼ばれるオブジェクトであるが，導入の意図とは裏腹に $\varepsilon x A(x)$ は性質 $A(x)$ を持つとは限らない．$\varepsilon x A(x)$ が性質 $A(x)$ を持つのは，$A(x)$ を満たす集合 x が存在するとき，またその時に限られる (この点については後述の $\exists$ に関する定理によって明らかになる)．$A(x)$ を満たす集合 x が存在しない場合は，$\varepsilon x A(x)$ は正体不明のオブジェクトとなる．

1.4.1　ε 項

まずは ε 項を項として追加した言語 $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ に拡張する．$\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の構成要素は以下である:

矛盾記号　$\perp$

論理記号　$\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$

量化子　$\forall$, $\exists$

述語記号　$=$, $\in$

変項　1.1 節のもの．

イプシロン　ε

$\mathcal{L}_{\in}$ からの変更点は，“使用文字” が “変項” に代わったことと ε が加わったことである．続いて項と式の定義に移るが，帰納のステップは $\mathcal{L}_{\in}$ より複雑になる:

- $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の変項は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項である．
- $\perp$ は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式である．
- σ と τ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項とするとき，$\in st$ と $= st$ は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式である．
- φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とするとき，$\neg\varphi$ は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式である．
- φ と ψ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とするとき，$\vee\varphi\psi$, $\wedge\varphi\psi$, $\rightarrow \varphi\psi$ はいずれも $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式である．
- x を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の**変項**とし，φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とするとき，$\forall x\varphi$ と $\exists x\varphi$ は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式である．
- x を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の**変項**とし，φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とするとき，$\varepsilon x\varphi$ は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項である．
- 以上のみが $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項と式である．

$\mathcal{L}_{\in}$ に対して行った帰納的定義との大きな違いは，**項と式の定義が循環している**点にある．$\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式が $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項を用いて作られるのは当然ながら，その逆に $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項もまた $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式から作られるのである．

定義 1.4.1 (ε 項).　$\varepsilon x\varphi$ なる項を **ε 項 (epsilon term)** と呼ぶ．ここで x は変項であり，φ は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式である．

定義通りなら，式 φ に x が自由に現れていない場合でも $\varepsilon x\varphi$ は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項である．ただしそのような項は全く無用であるから，後で実際に集合論を構築する際には排除してしまう (1.4.6 節参照).

メタ定理 1.4.2.　A を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とするとき，εxA なる形の ε 項は A には現れない．

もし A に εxA が現れるならば，当然 A の中の εxA にも εxA が現れるし，A の中の εxA の中の εxA にも εxA が現れるといった具合に，この入れ子には終わりがなくなる．だが，当然こんなことは起こり得ない．

メタ証明．　A が指す記号列のどの部分を切り取ってもそれは A より短い記号列であって，εxA の現れる余地など無いからである． ∎

定義の循環によって構造が見えづらくなっているが，$\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項と式は次の手順で作られている．

1. $\mathcal{L}_{\in}$ の式から ε 項を作り，その ε 項を第 1 世代 ε 項と呼ぶことにする．
2. 変項と第 1 世代 ε 項を項として式を作り，これらを第 2 世代の式と呼ぶことにする．また第 2 世代の式で作る

ε 項を第 2 世代 ε 項と呼ぶことにする．

3. 第 n 世代の ε 項をが出来たら，それらと変項を項として第 $n+1$ 世代の式を作り，第 $n+1$ 世代 ε 項を作る．
   - ちなみに，このように考えると第 n 世代 ε 項は第 $n+1$ 世代 ε 項でもある．

$\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項と式は以上のような帰納的構造を持っているのだから，$\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ における構造的帰納法はこれに則ったものになる．まずは粗く考察してみると，項と式に対する言明 X が与えられたとき，

1. まずは $\mathcal{L}_{\in}$ の項と式に対して X が言えて，かつ第 1 世代の ε 項に対しても X が言えることがスタート地点である．
2. 第 2 世代の式に対して X が言えることと，第 2 世代の ε 項に対して X が言えることを示す．

   $\vdots$

3. 第 n 世代までのすべての式と項に対して X が言えることを仮定して，第 $n+1$ 世代の式に対して X が言えることと，第 $n+1$ 世代の ε 項に対して X が言えることを示す．

の以上が検査出来れば，$\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ のすべての項と式に対して X が言えると結論するのは妥当である．ただし第 n 世代だとかいうカテゴライズは直感的考察を補佐するためのインフォーマルなものであり，更に簡略されたやり方でこの操作が実質的に為されることが期される．

メタ公理 1.4.3 ($\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項と式に対する構造的帰納法).　$\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項に対する言明 X と式に対する言明 Y に対し，

1. $\mathcal{L}_{\in}$ の項と式，および $\mathcal{L}_{\in}$ の式で作る ε 項に対して X 及び Y が言える．
2. φ を任意に与えられた $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式として，φ に現れる全ての項及び真部分式に対して X 及び Y が言えると仮定するとき，
   - φ が $\in \sigma\tau$ なる形の原子式であるとき φ に対して Y が言える．
   - φ が $\neg\varphi$ なる形の式であるとき φ に対して Y が言える．
   - φ が $\vee\psi\chi$ なる形の式であるとき φ に対して Y が言える．
   - φ が $\exists x\psi$ なる形の式であるとき φ に対して Y が言える．
   - $\varepsilon x\varphi$ なる ε 項に対して X が言える．

ならば，いかなる項と式に対しても X が言える．

φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式としたら，φ の部分式とは，φ から切り取られる一続きの記号列で，それ自身が $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式であるものを指す．φ 自身もまた φ の部分式である．

メタ定理 1.4.4 ($\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の始切片の一意性).　τ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項とするとき，τ の始切片で $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項であるものは τ 自身に限られる．また φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とするとき，φ の始切片で $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式であるものは φ 自身に限られる．

メタ証明.

step1　$\mathcal{L}_{\in}$ の式と項についてはメタ定理 1.3.2 より当座の定理の主張が従う．また φ を $\mathcal{L}_{\in}$ の式とし，τ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項とし，また τ は

$$\varepsilon x\varphi$$

なる ε 項の始切片とするとき，τ の左端は ε であるから

$$\varepsilon y \psi$$

なる形をしているはずである．すると x と y とは一方が他方の始切片となるのでメタ定理 1.3.2 より y は x に一致する．するとまた φ と ψ はは一方が他方の始切片となるので一致する．つまり τ は $\varepsilon x \varphi$ そのものである．

step2　φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とするとき，φ のすべての項や真部分式に対して定理の主張が当たっているなら φ に対しても定理の主張通りのことが満たされる，ということはメタ定理 1.3.2 と同じように示される．もう一度書けば，

IH (帰納法の仮定)

> φ に現れる任意の項 τ に対して，その始切片で項であるものは τ に限られる．また φ に現れる任意の真部分式 ψ に対して，その始切片で式であるものは ψ に限られる．

として

case1　φ が

$$\in st$$

なる原子式であるとき，φ の始切片で式であるものもまた

$$\in uv$$

なる形をしているが，u と s は一方が他方の始切片となっているので (IH) より一致する．すると v と t も一方が他方の始切片となるので (IH) より一致する．ゆえに φ の始切片で式であるものは φ 自信に限られる．

case2　φ が

$$\neg \psi$$

なる形の式であるとき，φ の始切片で式であるももまた

$$\neg \xi$$

なる形をしている．このとき ξ は ψ の始切片であるから，(IH) より ξ と ψ は一致する．ゆえに φ の始切片で式であるものは φ 自身に限られる．

case3　φ が

$$\vee \psi \xi$$

なる形の式であるとき，φ の始切片で式であるものもまた

$$\vee \eta \zeta$$

なる形をしている．このとき ψ と η は一方が他方の始切片であるので (IH) より一致する．すると ξ と ζ も一方が他方の始切片ということになり，(IH) より一致する．ゆえに φ の始切片で式であるものは φ 自身に限られる．

case4　φ が

$$\exists x \psi$$

なる形の式であるとき，φ の始切片で式であるものもまた

$$\exists y \xi$$

なる形の式である．このとき x と y は一方が他方の始切片であり，これらは変項であるからメタ定理 1.3.2 より一致する．すると ψ と χ も一方が他方の始切片ということになり，(IH) より一致する．ゆえに φ の始切片で式であるものは φ 自身に限られる．

case5　$\varepsilon x \varphi$ の始切片で項であるものは

$$\varepsilon y \psi$$

なる形をしている筈である．このとき，まずメタ定理 1.3.2 より x と y は一致する．すると ψ は φ の始切片であることになるが，前段までの結果から φ と ψ は一致する．■

メタ定理 1.4.5 ($\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ のスコープの存在).　φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式，或いは項とするとき，

(a)　$\natural$ が φ に現れたとき，変項 t が得られて，$\natural$ のその出現位置から $\natural t$ なる変項が φ の上に現れる．

(b)　$\in$ が φ に現れたとき，$\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項 σ, τ が得られて，$\in$ のその出現位置から $\in \sigma\tau$ なる式が φ の上に現れる．

(c)　$\rightarrow$ が φ に現れたとき，$\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式 ψ が得られて，$\rightarrow$ のその出現位置から $\rightarrow \psi$ なる式が φ の上に現れる．

(d)　$\vee$ が φ に現れたとき，$\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式 ψ, ξ が得られて，$\vee$ のその出現位置から $\vee \psi \xi$ なる式が φ の上に現れる．

(e)　$\exists$ が φ に現れたとき，変項 x と $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式 ψ が得られて，$\exists$ のその出現位置から $\exists x \psi$ なる式が φ の上に現れる．

(b) では $\in$ を $=$ に替えたって同じ主張が成り立つし，(d) では $\vee$ を $\wedge$ や $\rightarrow$ に替えても同じである．(e) では $\exists$ を $\forall$ に替えても同じであるのは良いとして，ε 項の成り立ちから $\exists$ を ε に替えても同様の主張が成り立つ．

示すのはスコープの存在だけで良い．一意性は始切片の定理からすぐに従う．実際 φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式として，その中に ε が出現したとすると，“スコープの存在が保証されていれば！”ε のその出現位置から

$$\varepsilon x \psi$$

なる ε 項が φ の上に現れるわけだが，他の誰かが「$\varepsilon y \xi$ という ε 項がその ε の出現位置から抜き取れるぞ」と言ってきたとしても，当然ながら x と y は一方が他方の始切片となるので一致する変項であるし (メタ定理 1.3.2)，すると今度は ψ と ξ の一方が他方の始切片となるが，そのときもメタ定理 1.4.4 より両者は一致する．

メタ証明.

step1　φ が $\mathcal{L}_{\in}$ の式であるときは，スコープの存在はメタ定理 1.3.5 で既に示されている．また $\mathcal{L}_{\in}$ の式 ψ に対して，

$$\varepsilon x \psi$$

なる形の ε 項に対しても (a) から (e) が満たされる．実際，(b) から (e) に関しては，$\in, \rightarrow, \vee, \exists$ は ψ の中にしか出現し得ないので，スコープの存在はメタ定理 1.3.5 により保証される．(a) については，$\natural$ は ψ の中に現れる場合と x の中に現れる場合があるが，いずれの場合もメタ定理 1.3.5 よりスコープは取れる．

ここで φ を任意に与えられた $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式として，次の仮定を置く．

IH(帰納法の仮定)

φ の全ての部分式，及び φ に現れる全ての ε 項の式，つまり $\varepsilon x\psi$ なる項なら ψ のこと，に対して (a) から (e) まで言えると仮定する．

step2　式 φ が $\in st$ なる形の式であるとき．

case1　$\natural$ が $\in st$ に現れたとしよう．s や t が変項であれば (a) の成立は見た目通りである．s が

$$\varepsilon x\psi$$

なる形の ε 項であって，s にその $\natural$ が現れているとしよう．$\natural$ が x に現れている場合はメタ定理 1.3.5 に訴えればよい．$\natural$ が ψ に現れている場合は，(a) の成立は (IH) から従う．

case2　$\in$ が $\in st$ に現れたとしよう．それが左端の $\in$ であれば，(b) の成立を言うには s と t を取れば良い．$\in$ が s に現れたとすれば，s は ε 項であることになり，変項 x と $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式 ψ が取れて，s は

$$\varepsilon x\psi$$

と表せる．$\in$ は ψ に現れるので，(IH) より $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項 u, v が取れて，$\in$ のその出現位置から $\in st$ なる式が ψ の上に現れる．$\in$ が t に現れる場合も同様に (b) の成立が言える．

case3　$\in st$ に論理記号 ($\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \exists, \forall$ のいずれか) が現れたとしよう．そしてその現れた記号を便宜上 σ と書こう．σ の出現位置が s にあるとすれば，そのことは s が

$$\varepsilon x\psi$$

なる形の ε 項であることを意味する．当然 σ は ψ の中にあるわけで，(c) もしくは (d) の成立は (IH) から従う．

case4　$\in st$ に ε が現れたとしよう．ε の出現位置が s にあるとすれば，そのことは s が

$$\varepsilon x\psi$$

なる形の ε 項であることを意味する．ε の出現位置が s の左端である場合，(e) の成立を言うにはこの x と ψ を取れば良い．ε が ψ の中にある場合は，(e) の成立は (IH) から従う．

step3　式 φ が $\neg\psi$ なる形のとき，φ に現れた記号は左端の $\neg$ であるか，そうでなければ ψ の中に現れる．左端の $\neg$ のスコープは φ 自身である．ψ に現れた記号のスコープの存在は (IH) により保証される．

step4　式 φ が $\vee\psi\xi$ なる形のとき，φ に現れた記号は左端の $\vee$ であるか，そうでなければ $\psi\xi$ の中に現れる．左端の $\vee$ のスコープは φ 自身である．$\psi\xi$ に現れた記号のスコープの存在は (IH) により保証される．

step5　式 φ が $\exists x\psi$ なる形のとき，φ に現れた記号は左端の $\exists$ であるか，そうでなければ ψ の中に現れる．左端の $\exists$ のスコープは φ 自身である．ψ に現れた記号のスコープの存在は (IH) により保証される．　■

1.4.2　内包項

本稿における主流の言語は，次に定める $\mathcal{L}$ である．$\mathcal{L}$ の最大の特徴は

$$\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$$

なる形のオブジェクトが“正式に”項として用いられることである．他の多くの集合論の本では $\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$ なる項はインフォーマルに導入されるものであるが，インフォーマルなものでありながらこの種のオブジェクトはいたるところで堂々と登場するので，やはりフォーマルに導入して然るべきである．

$\mathcal{L}$ の構成要素は以下のものである．

矛盾記号　$\perp$

論理記号　$\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$

量化子　$\forall$, $\exists$

述語記号　$=$, $\in$

変項　1.1 節のもの．

補助記号　$\{$, $|$, $\}$

$\mathcal{L}$ の項と式の構成規則は $\mathcal{L}_{\in}$ のものと大差ない．

項
- 変項は $\mathcal{L}$ の項である．
- $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項は $\mathcal{L}$ の項である．
- x を $\mathcal{L}$ の変項とし，φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とするとき，$\{x \mid \varphi\}$ なる記号列は $\mathcal{L}$ の項である．
- 以上のみが $\mathcal{L}$ の項である．

によって正式に定義される．

式
- $\perp$ は $\mathcal{L}$ の式である．
- σ と τ を $\mathcal{L}$ の項とするとき，$\in st$ と $= st$ は $\mathcal{L}$ の式である．これらは $\mathcal{L}$ の**原子式 (atomic formula)** である．
- φ を $\mathcal{L}$ の式とするとき，$\neg\varphi$ は $\mathcal{L}$ の式である．
- φ と ψ を $\mathcal{L}$ の式とするとき，$\vee\varphi\psi$, $\wedge\varphi\psi$, $\rightarrow \varphi\psi$ はいずれも $\mathcal{L}$ の式である．
- x を $\mathcal{L}$ の**変項**とし，φ を $\mathcal{L}$ の式とするとき，$\forall x\varphi$ と $\exists x\varphi$ は $\mathcal{L}$ の式である．

定義 1.4.6 (内包項).　$\{x \mid \varphi\}$ なる項を**内包項**と呼ぶ．ここで x は変項であり，φ は $\mathcal{L}$ の式である．

定義通りなら，$\{x \mid y = y\}$ のように式 φ に x が自由に現れていない場合でも $\{x \mid \varphi\}$ は $\mathcal{L}$ の項である．ただしそのような項は全く無用であるから，後で実際に集合論を構築する際には排除してしまう (1.4.6 節参照).

メタ定理 1.4.7.　$\mathcal{L}_{\in}$ の式は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式であり，また $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式は $\mathcal{L}$ の式である．

メタ証明.

step1　式の構成法より $\mathcal{L}_{\in}$ の原子式は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式である．また φ を任意に与えられた $\mathcal{L}_{\in}$ の式とするとき，

IH (帰納法の仮定)

φ のすべての真部分式は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式である

と仮定すると，φ が

case1　$\neg\psi$

case2　$\vee\psi\chi$

case3　$\exists x\psi$

のいずれの形の式であっても，ψ も χ も (IH) より $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式であるから，式の構成法より φ 自信も $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式で

ある．ゆえに $\mathcal{L}_{\in}$ の式は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式である．

step2 $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式が $\mathcal{L}$ の式であることを示す．まず，$\mathcal{L}$ の式の構成において使える項を変項に制限すれば全ての $\mathcal{L}_{\in}$ の式が作られるのだから $\mathcal{L}_{\in}$ の式は $\mathcal{L}$ の式である．また φ を任意に与えられた $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とするとき，

IH (帰納法の仮定)

φ のすべての真部分式は $\mathcal{L}$ の式である

と仮定すると (今回は予め $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項は $\mathcal{L}$ の項とされているので，真部分式に対する仮定のみで十分である)，

case1　φ が $\in \sigma\tau$ なる形の原子式であるとき，σ も τ も $\mathcal{L}$ の項であるから $\in \sigma\tau$ は $\mathcal{L}$ の式である．

case2　φ が $\rightharpoondown\psi$ なる形の式であるとき，(IH) より ψ は $\mathcal{L}$ の式であるから $\rightharpoondown\psi$ も $\mathcal{L}$ の式である．

case3　φ が $\vee\psi\chi$ なる形の式であるとき，(IH) より ψ も χ も $\mathcal{L}$ の式であるから $\vee\psi\chi$ も $\mathcal{L}$ の式である．

case4　φ が $\exists x\psi$ なる形の式であるとき，(IH) より ψ は $\mathcal{L}$ の式であるから $\exists x\psi$ も $\mathcal{L}$ の式である．

となる．ゆえに $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式は $\mathcal{L}$ の式である．■

メタ公理 1.4.8 ($\mathcal{L}$ の式に対する構造的帰納法).　$\mathcal{L}$ の式に対する言明 X に対し，

- 原子式に対して X が言える．
- 無作為に選ばれた式 φ について，その全ての真部分式に対して X が言えると仮定すれば，φ に対しても X が言える．

ならば，いかなる式に対しても X が言える．

$\mathcal{L}$ の項は帰納的な構成になっていないので構造的帰納法は不要である．

メタ定理 1.4.9 ($\mathcal{L}$ の始切片の一意性).　τ を $\mathcal{L}$ の項とするとき，τ の始切片で $\mathcal{L}$ の項であるものは τ 自信に限られる．また φ を $\mathcal{L}$ の式とするとき，φ の始切片で $\mathcal{L}$ の式であるものは φ 自信に限られる．

メタ証明.

項について　τ を項とするとき，τ が変項ならばメタ定理 1.3.2 によって，τ が $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項ならばメタ定理 1.4.4 によって，τ の始切片で $\mathcal{L}$ の項であるものは τ 自身に限られる．τ が

$$\{\, x \mid \varphi \,\}$$

なる内包項である場合，τ の始切片で項であるものも

$$\{\, y \mid \psi \,\}$$

なる形をしている．メタ定理 1.3.2 より x と y が一致し，メタ定理 1.4.4 より φ と ψ も一致するので，この場合も τ の始切片で項であるものは τ 自身に限られる．

式について　$\in st$ なる原子式については，その始切片で式であるものは

$$\in uv$$

なる形をしているが，前段の結果より s と u，t と v は一致する．$= st$ なる原子式についても，その始切片で $\mathcal{L}$ の式であるものは $= st$ に限られる．

いま φ を任意に与えられた $\mathcal{L}$ の式とし，

IH (帰納法の仮定)

φ に現れる任意の真部分式 ψ に対して，その始切片で式であるものは ψ に限られる．

と仮定する．このとき

case1　φ が

$$\neg\psi$$

なる形の式であるとき，φ の始切片で式であるものもまた

$$\neg\xi$$

なる形をしている．このとき ξ は ψ の始切片であるから，(IH) より ξ と ψ は一致する．ゆえに φ の始切片で式であるものは φ 自身に限られる．

case2　φ が

$$\vee\psi\xi$$

なる形の式であるとき，φ の始切片で式であるものもまた

$$\vee\eta\zeta$$

なる形をしている．このとき ψ と η は一方が他方の始切片であるので (IH) より一致する．すると ξ と ζ も一方が他方の始切片ということになり，(IH) より一致する．ゆえに φ の始切片で式であるものは φ 自身に限られる．

case3　φ が

$$\exists x\psi$$

なる形の式であるとき，φ の始切片で式であるものもまた

$$\exists y\xi$$

なる形の式である．このとき x と y は一方が他方の始切片であり，これらは変項であるからメタ定理 1.3.2 より一致する．すると ψ と χ も一方が他方の始切片ということになり，(IH) より一致する．ゆえに φ の始切片で式であるものは φ 自身に限られる．■

φ を $\mathcal{L}$ の式とし，s を

$$\natural,\ \{,\ \in,\ \neg,\ \vee,\ \wedge,\ \rightarrow,\ \exists,\ \forall,\ \varepsilon$$

のいずれかの記号とするとき，s が φ に現れたら s のその出現位置から始まる φ の部分式 (ただし s が “$\natural, \{, \varepsilon$” である場合は部分項) を s の**スコープ (scope)** と呼ぶ．ところで φ には

$$|,\quad \}$$

も現れるので，これらにもスコープを割り当てるために

- φ に “$|$” が現れたら，“$|$” のその出現位置を跨いで φ の上に現れる内包項 $\{x \mid \psi\}$ をその “$|$” のスコープと呼ぶ．つまり現れた “$|$” とは $\{x \mid \psi\}$ の中心線 “$|$” のことである．
- φ に “$\}$” が現れたら，“$\}$” のその出現位置を右端にして φ の上に現れる内包項 $\{x \mid \psi\}$ をその “$\}$” のスコープと呼ぶ．つまり現れた “$\}$” とは $\{x \mid \psi\}$ の右端の “$\}$” のことである．

と定める．すると，次のメタ定理によって “$\natural$, $\{$, $|$, $\}$, $\in$, $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\exists$, $\forall$, ε” の全ての記号に対してスコープが取れることが保証される．

取れるスコープの唯一性はメタ定理 1.4.9 からすぐに従い，その証明は $\mathcal{L}_{\in}$ や $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の場合と殆ど同様であるが，“$|$” と “$\}$” のスコープの唯一性について書いておくと

- φ の中で “$|$” のスコープ $\{x \mid \psi\}$ と $\{y \mid \chi\}$ が取れたとすれば，ψ と χ は φ の中で同じ位置から始まる式であるからメタ定理 1.4.4 より一致する．また x と y は変項であるからその中に “$\{$” が現れるはずはなく，x と y も一致すると判る．
- φ の中で “$\}$” のスコープ $\{x \mid \psi\}$ と $\{y \mid \chi\}$ が取れたとすれば，ψ と χ は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式であるからその中に “$|$” が現れるはずはなく，両者は一致していなくてはならない．すると上と同様に x と y も一致していなくてはならない．

メタ定理 1.4.10 ($\mathcal{L}$ のスコープの存在).　φ を $\mathcal{L}$ の式，或いは $\mathcal{L}$ の項とするとき，

(a) $\natural$ が φ に現れたとき，変項 t が得られて，$\natural$ のその位置から $\natural t$ なる項が φ の上に現れる．

(b) $\{$ が φ に現れたとき，変項 x と $\mathcal{L}$ の式 ψ が得られて，$\{$ のその出現位置から $\{x \mid \psi\}$ なる項が φ の上に現れる．

(c) $|$ が φ に現れたとき，変項 x と $\mathcal{L}$ の式 ψ が得られて，$|$ のその出現位置を跨いで $\{x \mid \psi\}$ なる項が φ の上に現れる．

(d) $\}$ が φ に現れたとき，変項 x と $\mathcal{L}$ の式 ψ が得られて，$\}$ のその出現位置右端にして $\{x \mid \psi\}$ なる項が φ の上に現れる．

(e) $\in$ が φ に現れたとき，$\mathcal{L}$ の項 σ, τ が得られて，$\in$ のその出現位置から $\in \sigma\tau$ なる式が φ の上に現れる．

(f) $\neg$ が φ に現れたとき，$\mathcal{L}$ の式 ψ が得られて，$\neg$ のその出現位置から $\neg\psi$ なる式が φ の上に現れる．

(g) $\vee$ が φ に現れたとき，$\mathcal{L}$ の式 ψ, ξ が得られて，$\vee$ のその出現位置から $\vee\psi\xi$ なる式が φ の上に現れる．

(h) $\exists$ が φ に現れたとき，変項 x と $\mathcal{L}$ の式 ψ が得られて，$\exists$ のその出現位置から $\exists x\psi$ なる式が φ の上に現れる．

メタ証明.

case1　$\in st$ なる原子式に対しては，

- $\natural, \neg, \vee, \exists$ が現れたとすれば，それらは s か t の中に現れているのであり，メタ定理 1.3.5 とメタ定理 1.4.5 よりそれらのスコープは取れる．仮に s と t の一方が

$$\{x \mid \psi\}$$

なる内包項であるとしても，$\natural, \neg, \vee, \exists$ が現れうるのは x 或いは ψ の中であるから，スコープの存在は上記のメタ定理に訴えればよい．
- $\in st$ に $\in$ が現れたとすれば，それが s, t の中のものならば上記の定理によってスコープは取れるし，それ

が $\in st$ の左端の $\in$ を指しているなら $\in st$ 自身をスコープとして取れば良い．

- $\in st$ に $\{, |, \}$ が現れたとすれば，s と t の少なくとも一方は
$$\{ x \mid \psi \}$$
なる項であることになるので，スコープとしてこの内包項を取れば良い．

case2　φ を任意に与えられた $\mathcal{L}$ の式として φ を任意に与えられた式として

IH (帰納法の仮定)

φ の全ての真部分式に対しては (a) から (h) の主張が当てはまる

と仮定する．このとき，

- φ が
$$\neg\psi$$
なる形の式であるとき，$\natural, \{, |, \}, \in, \vee, \exists$ が φ に現れたなら，それらは ψ の中に現れているのだから (IH) よりスコープが取れる．また φ に $\neg$ が現れた場合，その $\neg$ が ψ の中のものならば (IH) に訴えれば良いし，φ の左端の $\neg$ を指しているならスコープとして φ 自身を取れば良い．
- φ が
$$\vee\psi\chi$$
なる形の式であるとき，$\natural, \{, |, \}, \in, \neg, \exists$ が φ に現れたなら，それらは ψ か χ の中に現れているのだから (IH) よりスコープが取れる．また φ に $\vee$ が現れた場合，その $\vee$ が ψ, χ の中のものならば (IH) に訴えれば良いし，φ の左端の $\vee$ を指しているならスコープとして φ 自身を取れば良い．
- φ が
$$\exists x\psi$$
なる形の式であるとき，$\natural, \{, |, \} \in, \neg, \vee$ が φ に現れたなら，それらは ψ の中に現れているのだから (IH) よりスコープが取れる．また φ に $\exists$ が現れた場合，その $\exists$ が ψ の中のものならば (IH) に訴えれば良いし，φ の左端の $\exists$ を指しているならスコープとして φ 自身を取れば良い．■

1.4.3　量化

φ を $\mathcal{L}$ の式とする．もし φ に $\forall$ が現れたら，その $\forall$ に後続する変項 x と式 ψ が取れるが，そのとき x は
$$\forall x\psi$$
の中で**「量化されている」(quantified)** や**「束縛されている」(bound)** という．同様に φ の中に $\exists$ や ε が現れたら，その $\exists$ (または ε) の直後にくる変項は，「その $\exists$ (または ε) のスコープの中で量化されている」といい，また φ の中に
$$\{ x \mid \psi \}$$
なる内包項が現れたら，x は「この内包項の中で量化されている」という．まとめれば，$\forall, \exists, \varepsilon$, そして $\{$ は直後の変項をそのスコープ内で量化しているのである．たとえば
$$\forall x (x \in y)$$

においては x は量化されているし,

$$\{u \mid u = z\}$$

において u は量化されている．量化は二重に行われることもある．例えば

$$\forall x\,(\forall x\,(x \in y) \rightarrow (x \in z))$$

なる式においては, $\forall x\,(x \in y)$ にある x は上式で一番左の $\forall$ のスコープ内の x でもあるので，これらの x は二重に量化されていることになる．仮に「何重にも量化されている場合は最も狭いスコープで量化されていることにする」と決めても良いが，ただし重要なのは変項が量化されているか否かであって，それが二重でも三重でもどうでも構わない．

上の例では y と z は量化されていないが，考えている項や式の中で量化されていない変項を**自由な (free)** 変項と呼ぶ．現れる変項が自由であるか否かは当然その出現位置に依存しているのであり，たとえば

$$\forall x\,(x \in y) \rightarrow (x \in z)$$

なる式では左の二つの x が量化されている一方で右の x は自由であるように，同じ変項が複数個所に現れる場合はその変項が量化されているか自由であるかは一概には言えない．式 φ の中に量化されていない変項が現れている場合は，その変項が "その位置" に現れていることを**自由な出現 (free occurrence)** と呼ぶ．

1.4.4　代入

変項とは束縛されうる項であったが，別の項を代入されうる項でもある．代入とは別の項で置き換えるということであり，また代入されうるのは式の中で自由な変項のみである．ただし，代入には「**式の中の自由な変項を別の変項に取り替えても式の意味を変えてはならない**」という大前提がある．たとえば

$$\forall u\,(u \in x)$$

という式で考察すると，この式で x は自由であるから別の項を代入して良いのであり，z を代入すれば

$$\forall u\,(u \in z)$$

となる．そしてこの場合はどちらの式も意味は同じである．意味が同じであるとは量化してみれば一目瞭然であって，両式を全称記号で量化すれば

$$\forall x\,\forall u\,(u \in x),$$
$$\forall z\,\forall u\,(u \in z)$$

はどちらも「どの集合も，全ての集合を要素に持つ」と解釈され，両式を存在記号で量化すれば

$$\exists x\,\forall u\,(u \in x),$$
$$\exists z\,\forall u\,(u \in z)$$

はどちらも「或る集合は，全ての集合を要素に持つ」と解釈される．ところが x に u を代入すると

$$\forall u\,(u \in u)$$

となり，これは「全ての集合は自分自身を要素に持つ」という意味に変わる．つまり先の大前提に立てば，代入する際には**代入後に束縛されてしまう変項は使ってはいけない**のである．

代入するのは変項だけではない．ε 項や内包項だって上の x に代入して良い．ただし上と同様の注意が必要で，ε 項や内包項に u が自由に現れている場合とそうでない場合では代入後の式の意味が分かれてしまうので，代入して良い項は u が自由に現れていないものに限る．

以上の考察を一般的な代入規則に敷衍して言えば，

代入可能な項

φ を $\mathcal{L}$ の式とし，x を φ に自由に現れる変項とするとき，φ に自由に現れる x に代入して良いのは

- 代入した後で束縛されない変項
- 代入するのが ε 項や内包項である場合は，その項の中に自由に現れる変項が，代入した箇所で束縛されないもの

に限る．$\mathcal{L}$ の項 τ がこの条件を満たすとき，**「τ は φ の中で x への代入について自由である」**という．

ちなみに φ に自由に現れる x に τ を代入する際は，特筆が無い限り φ に自由に現れる<u>全ての x</u> に τ を代入する．そして「τ が φ の中で x への代入について自由である」とは，τ は φ に代入されたどの箇所でも束縛の影響を受けないということである．φ に自由に現れる x に τ を代入した後の式を

$$\varphi(x/\tau)$$

と書く (x/τ とは "replace x by τ" の順である)．特に，φ の中に自由に現れている変項が x だけである場合は，$\varphi(x/\tau)$ を

$$\varphi(\tau)$$

とも書く．τ が x 自身である場合は $\varphi(x)$ は φ そのものであるが，「φ に自由に現れているのは x だけである」ということを強調するために

$$\varphi(x)$$

と書くことも多い．

1.4.5　類

元々の意図としては，例えば x のみが自由に現れる式 $\varphi(x)$ に対して "$\varphi(x)$ を満たすいずれかの集合 x" という意味を込めて

$$\varepsilon x \varphi(x)$$

を作ったのだし，"$\varphi(x)$ を満たす集合 x の全体" という意味を込めて

$$\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$$

を作ったのである．つまりこの場合の $\varepsilon x \varphi(x)$ と $\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$ は "意味を持っている" わけである．これが，もし x とは別の変項 y が φ に自由に現れているとすれば，$\varepsilon x \varphi$ も $\{\, x \mid \varphi \,\}$ も y に依存してしまい意味が定まらなくなる．というのも，変項とは代入可能な項であるから，y に代入する項ごとに $\varepsilon x \varphi$ と $\{\, x \mid \varphi \,\}$ は別の意味を持ち得るのである．また項が閉じていても意味不明な場合がある．たとえば，ψ が文であるときに

$$\varepsilon y \psi$$

や

$$\{ y \mid \psi \}$$

なる項は閉じてはいるが，導入の意図には適っていない．意味不明ながらこういった項が存在しているのは導入時にこれらを排除する面倒を避けたからであり，また一旦すべてを作り終えた後で余計なものを排除するほうが楽である．

とりあえず，導入の意図に適っている項は特別の名前を持っていて然るべきである．

定義 1.4.11 (類). φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とし，x を φ に自由に現れる変項とし，φ に自由に現れる項は x のみであるとするとき，$\varepsilon x \varphi$ と $\{ x \mid \varphi \}$ を**類 (class)** と呼ぶ．またこれらのみが類である．

類には二種類あるので，それらも名前を分けておく．

定義 1.4.12 (主要 ε 項). 類である ε 項を**主要 ε 項 (critical epsilon term)** と呼ぶ．

定義 1.4.13 (主要内包項). 類である内包項を**主要内包項**と呼ぶ．

内包項に関しては便宜上自由な変項の出現も許すことにするが，たとえば $\{ x \mid \varphi \}$ と書いたら少なくとも x は φ に自由に現れているべきであり，この意味で性質の良い内包項に対しても特別な名前を付けておく．

定義 1.4.14 (正則内包項). φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とし，x を変項とし，φ に x が自由に現れているとするとき，$\{ x \mid \varphi \}$ を**正則内包項**と呼ぶ．

1.4.6　扱う式の制限

以降では扱う式は，そこに現れる ε 項は全て主要 ε 項であり，現れる内包項は全て正則内包項であるとする．

1.4.7　式の書き換え

ε 項を取り入れた当初の目的は，「$\varphi(x)$ を満たす集合 x が存在するならば $\varepsilon x \varphi(x)$ はその x の一つである」という意味で**存在文 (existential sentence)** に対して**証人 (witness)** を付けることであった．ただし ε 項を作れる式は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式のみであるので，φ が $\mathcal{L}$ の式であると $\varepsilon x \varphi(x)$ を使うことが出来ない．だが $\mathcal{L}$ の式の存在文も往々にして登場するからそういった場合でも証人を用意できると便利である．そこで $\mathcal{L}$ の式を "同値" な $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き換えて，その書き換えた式で作る ε 項を使うことにする．つまり φ が $\mathcal{L}$ の式である場合は，φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式 $\hat{\varphi}$ に書き換えてから

$$\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(\varepsilon x \hat{\varphi}(x))$$

を保証するのである．書き換える必要があるのは内包項を含んでいる式のみであり，式を書き換える際にはその式の中で内包項が使われている原子式だけを書き換えれば十分である．書き換えが "同値" というのは後述の 3.7 節で述べてあるような意味であるが，それは直感的に妥当なものである．原子式の書き換えは次の要領で行う：

元の式	書き換え後
$a = \{\, z \mid \psi \,\}$	$\forall v\,(\, v \in a \;\leftrightarrow\; \psi(z/v)\,)$
$\{\, y \mid \varphi \,\} = b$	$\forall u\,(\, \varphi(y/u) \;\leftrightarrow\; u \in b\,)$
$\{\, y \mid \varphi \,\} = \{\, z \mid \psi \,\}$	$\forall u\,(\, \varphi(y/u) \;\leftrightarrow\; \psi(z/u)\,)$
$a \in \{\, z \mid \psi \,\}$	$\psi(z/a)$
$\{\, y \mid \varphi \,\} \in b$	$\exists s\,(\, \forall u\,(\, \varphi(y/u) \;\leftrightarrow\; u \in s\,) \wedge s \in b\,)$
$\{\, y \mid \varphi \,\} \in \{\, z \mid \psi \,\}$	$\exists s\,(\, \forall u\,(\, \varphi(y/u) \;\leftrightarrow\; u \in s\,) \wedge \psi(z/s)\,)$

ただし上の記号に課している条件は

- a, b は $\mathcal{L}_\mathcal{E}$ の項である (1.4.6 節の約束によって a, b は変項であるか主要 ε 項である).
- φ, ψ は $\mathcal{L}_\mathcal{E}$ の式である.
- φ には y が自由に現れ，ψ には z が自由に現れている (1.4.6 節の約束によってどちらも正則内包項である).
- u は φ の中で y への代入について自由であり，v は ψ の中で z への代入について自由である.
- 注意が必要なのは a が変項である場合の $a \in \{\, z \mid \psi \,\}$ の書き換えであり，a を ψ の中の自由な z に代入した後で a が束縛される場合，束縛変項の名前替えをしなくてはならない．たとえば

  $$a \in \{\, z \mid \forall a\,(\, z \in a\,)\,\}$$

  という式では，左辺の a は自由であるのに，書き換えの規則を直接適用すると

  $$\forall a\,(\, a \in a\,)$$

  となり束縛されてしまう．代入後の a が束縛されないためには

  $$a \in \{\, z \mid \forall b\,(\, z \in b\,)\,\}$$

  のように束縛変項 a を別の変項 b に替えて

  $$\forall b\,(\, a \in b\,)$$

  とすればよい.

1.4.8　中置記法

たとえば $\in st$ なる原子式は「s は t の要素である (s is in t)」と読むのだから，語順通りに，或いは s が t の中にあるというイメージ通りに

$$s \in t$$

と書きかえる方が見やすくなる．同じように，$\vee\varphi\psi$ なる式も「φ または ψ」と読むのだから

$$\varphi \vee \psi$$

と書きかえる方が見やすくなる．$\rightarrow\ \vee\varphi\psi \wedge \chi\xi$ のように長い式も，上の作法に倣えば

$$\begin{gathered} \rightarrow\ \vee\varphi\psi \wedge \chi\xi \\ \rightarrow\ \varphi \vee \psi\chi \wedge \xi \\ \varphi \vee \psi \rightarrow \chi \wedge \xi \end{gathered}$$

と書きかえることになるが，一々色分けするわけにもいかないので “(” と “)” を使って

$$(\varphi \vee \psi) \ \rightarrow \ (\chi \wedge \xi)$$

と書くようにすれば良い．

中置記法 (infix notation)

$\mathcal{L}$ の式は以下の手順で中置記法に書き換える．

1. $\in st$ なる形の原子式は $s \in t$ と書きかえる．$= st$ も同様に書き換える．
2. $\rightarrow \varphi$ なる形の式はそのままにする．
3. $\vee \varphi \psi$ なる形の式は $(\varphi \vee \psi)$ と書きかえる．$\wedge \varphi \psi$ と $\rightarrow \ \varphi \psi$ の形の式も同様に書き換える．
4. $\exists x \varphi$ なる形の式はそのままにする．$\forall x \varphi$ なる形の式も同様にする．

上の書き換え法では，たとえば $\rightarrow \ \vee \varphi \psi \wedge \chi \xi$ なる式は

$$((\varphi \vee \psi) \ \rightarrow \ (\chi \wedge \xi))$$

となるが，括弧はあくまで式の境界の印として使うものであるから，一番外側の括弧は外して

$$(\varphi \vee \psi) \ \rightarrow \ (\chi \wedge \xi)$$

と書く方が良い．よって**中置記法に書き換え終わったときに一番外側にある括弧は外すことにする．**

$\wedge \vee \exists x \varphi \psi \rightarrow \rightarrow \ \chi \in st$ なる式は

$$\begin{gathered}\wedge \vee \exists x \varphi \psi \rightarrow \rightarrow \ \chi s \in t \\ \wedge (\exists x \varphi \vee \psi) \rightarrow (\chi \ \rightarrow \ s \in t) \\ (\exists x \varphi \vee \psi) \wedge \rightarrow (\chi \ \rightarrow \ s \in t)\end{gathered}$$

となる．

ただしあまり括弧が連なると読みづらくなるので，

$$(\varphi \vee \psi) \ \rightarrow \ \chi$$

なる形の式は

$$\varphi \vee \psi \ \rightarrow \ \chi$$

に，同様に

$$\varphi \ \rightarrow \ (\psi \vee \chi)$$

なる形の式は

$$\varphi \ \rightarrow \ \psi \vee \chi$$

とも書く．また $\vee$ が $\wedge$ であっても同じように括弧を省く．

第 2 章

推論

第 1.4.6 節で決めた通り，扱う式は全て，そこに現れる ε 項は全て主要 ε 項であり，現れる内包項は全て正則内包項であるとする．

2.1 証明

本節では**推論規則 (rule of inference)** を導入し，基本的な**推論法則**を導出する．推論法則とは，他の本ではそれが用いている証明体系の定理などと呼ばれるが，本稿では集合論の定理と入り混じってややこしくなるので推論法則と呼ぶ．以下では

$$\vdash$$

なる記号を用いて，

$$\varphi \vdash \psi$$

などと書く．$\vdash$ の左右にあるのは必ず ($\mathcal{L}$ の) 文であって，右側に置かれる文は必ず一本だけであるが，左側には文がいくつあっても良いし，全く無くても良い．特に

$$\vdash \psi$$

を満たす文 ψ を推論法則と呼ぶ．**“$\vdash$ の右の文は，$\vdash$ の左の文から証明できる”**，と読むが，証明とはどのようにされるのだとか，$\vdash \psi$ を満たすとはどういう意味なのか，とかいったことは後に回して，とりあえず記号のパズルゲームと見立てて $\vdash$ のルールを定める．

推論規則 2.1.1 (演繹規則). A, B, C, D を文とするとき，

(a) $A \vdash D$ ならば $\vdash A \longrightarrow D$ が成り立つ．

(b) $A, B \vdash D$ ならば

$$B \vdash A \longrightarrow D, \quad A \vdash B \longrightarrow D$$

が成り立つ．

(c) $A, B, C \vdash D$ ならば

$$B, C \vdash A \longrightarrow D, \quad A, C \vdash B \longrightarrow D, \quad A, B \vdash C \longrightarrow D$$

のいずれも成り立つ．

演繹規則においては $\vdash$ の左側にせいぜい三つの文しかないのだが，実は $\vdash$ の左側に不特定多数の文を持ってきても演繹規則じみたことが成立する (後述の演繹法則).

では**証明 (proof)** とは何かを規定する.

自由な変項が現れない ($\mathcal{L}$ の) 式を**文 (sentence)** や**閉式 (closed formula)** と呼ぶ．証明される式や証明の過程で出てくる式は全て文である．本稿では証明された文を**真な (true)** 文と呼ぶことにするが，“証明された” や “真である” という状態は議論が立脚している前提に依存する．ここでいう前提とは，推論規則や言語ではなくて**公理系 (axioms)** と呼ばれるものを指している．公理系とは文の集まりである．$\mathscr{S}$ を公理系とするとき，$\mathscr{S}$ に集められた文を $\mathscr{S}$ の**公理 (axiom)** と呼ぶ．以下では本稿の集合論が立脚する公理系を Σ と書くが，Σ に属する文は単に公理と呼んだりもする.

Σ とは以下の文からなる:

相等性　a, b, c を類とするとき

$$a = b \rightarrow (a \in c \rightarrow b \in c),$$
$$a = b \rightarrow (c \in a \rightarrow c \in b).$$

外延性　a と b を類とするとき

$$\forall x\,(x \in a \leftrightarrow x \in b) \rightarrow a = b.$$

内包性　φ を $\mathcal{L}$ の式とし，y を φ に自由に現れる変項とし，φ に自由に現れる項は y のみであるとし，x は φ で y への代入について自由であるとするとき，

$$\forall x\ \left(x \in \{\, y \mid \varphi(y) \,\} \leftrightarrow \varphi(x)\right).$$

要素　a, b を類とするとき

$$a \in b \rightarrow \exists x\,(x = a).$$

対　$\forall x\,\forall y\,\exists p\,\forall z\,(x = z \vee y = z \leftrightarrow z \in p).$

合併　$\forall x\,\exists u\,\forall y\,(\exists z\,(z \in x \wedge y \in z) \leftrightarrow y \in u).$

冪　$\forall x\,\exists p\,\forall y\,(\forall z\,(z \in y \rightarrow z \in x) \leftrightarrow y \in p).$

置換　φ を $\mathcal{L}$ の式とし，s, t を φ に自由に現れる変項とし，φ に自由に現れる項は s, t のみであるとし，x は φ で s への代入について自由であり，y, z は φ で t への代入について自由であるとするとき，

$$\forall x\,\forall y\,\forall z\,(\varphi(x, y) \wedge \varphi(x, z) \rightarrow y = z) \rightarrow \forall a\,\exists z\,\forall y\,(y \in z \leftrightarrow \exists x\,(x \in a \wedge \varphi(x, y))).$$

正則性　a を類とするとき，

$$\exists x\,(x \in a) \rightarrow \exists y\,(y \in a \wedge \forall z\,(z \in y \rightarrow z \notin a)).$$

無限　$\exists x\,(\exists s\,(\forall t\,(t \notin s) \wedge s \in x) \wedge \forall y\,(y \in x \rightarrow \exists u\,(\forall v\,(v \in u \leftrightarrow v \in y \vee v = y) \wedge u \in x))).$

選択

メタ定義 2.1.2 (証明可能).　文 φ が公理系 $\mathscr{S}$ から**証明された**だとか**証明可能である (provable)** ということは，

- φ は $\mathscr{S}$ の公理である.
- $\vdash \varphi$ である.
- 文 ψ で，ψ と $\psi \rightarrow \varphi$ が $\mathscr{S}$ から証明されているものが取れる (**三段論法 (Modus Pones)**).

のいずれかが満たされているということである.

φ が $\mathscr{S}$ から証明可能であることを

$$\mathscr{S} \vdash \varphi$$

と書く．ただし，**公理系に変項が生じた場合の証明可能性には演繹規則や後述の演繹法則，およびその逆の結果を適用することが出来る．**

たとえばどんな文 φ に対しても

$$\varphi \vdash \varphi$$

となるし，どんな文 ψ を追加しても

$$\varphi, \psi \vdash \varphi$$

となる．これらは最も単純なケースであり，大抵の定理は数多くの複雑なステップを踏まなくては得られない．$\mathscr{S}$ から証明済みの φ を起点にして $\mathscr{S} \vdash \psi$ であると判明すれば，φ から始めて ψ が真であることに辿り着くまでの一連の作業は ψ の $\mathscr{S}$ からの**証明 (proof)** と呼ばれ，ψ は $\mathscr{S}$ の**定理 (theorem)** と呼ばれる．

$A, B \vdash \varphi$ とは A と B の二つの文のみを公理とした体系において φ が証明可能であることを表している．特に**推論法則とは公理の無い体系で推論規則だけから導かれる定理**のことである．

ではさっそく演繹法則の証明に進む．ところで，後で見るとおり演繹法則とは証明が持つ性質に対する言明であって，つまりメタ視点での定理ということになるので，演繹法則の“証明”とは言っても上で規定した証明とは意味が違う．メタ定理の“証明”は，本稿では**メタ証明**と呼んで区別する．演繹法則を示す前に推論法則を三本用意しなくてはならない．

推論法則 2.1.3 (含意の反射律).　A を文とするとき

$$\vdash A \rightarrow A.$$

上の言明は“どんな文でも持ってくれば，その式に対して反射律が成立する”という意味である．このように無数に存在し得る定理を一括して表す式は**公理図式 (schema)** と呼ばれる．

証明.　$A \vdash A$ であるから，演繹規則より $\vdash A \rightarrow A$ となる． ■

推論法則 2.1.4 (含意の導入).　A, B を文とするとき

$$\vdash B \rightarrow (A \rightarrow B).$$

証明.

$$A, B \vdash B$$

より演繹規則から

$$B \vdash A \rightarrow B$$

となり，再び演繹規則より

$$\vdash B \rightarrow (A \rightarrow B)$$

が得られる． ∎

演繹法則を示すための推論法則の導出は次で最後である．

推論法則 2.1.5 (含意の分配則). A, B, C を文とするとき

$$\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)).$$

証明. 証明可能性の規則より

$$A \rightarrow (B \rightarrow C),\ A \rightarrow B,\ A \vdash A,$$
$$A \rightarrow (B \rightarrow C),\ A \rightarrow B,\ A \vdash A \rightarrow B$$

となるので

$$A \rightarrow (B \rightarrow C),\ A \rightarrow B,\ A \vdash B$$

が成り立つし，同じように

$$A \rightarrow (B \rightarrow C),\ A \rightarrow B,\ A \vdash A,$$
$$A \rightarrow (B \rightarrow C),\ A \rightarrow B,\ A \vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$$

であるから

$$A \rightarrow (B \rightarrow C),\ A \rightarrow B,\ A \vdash B \rightarrow C$$

も成り立つ．これによって

$$A \rightarrow (B \rightarrow C),\ A \rightarrow B,\ A \vdash C$$

も成り立つから，あとは演繹規則を順次適用すれば

$$A \rightarrow (B \rightarrow C),\ A \rightarrow B \vdash A \rightarrow C,$$
$$A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C),$$
$$\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

となる． ∎

メタ公理 2.1.6 (証明に対する構造的帰納法). $\mathscr{S}$ を公理系とし，X を文に対する何らかの言明とするとき，

- $\mathscr{S}$ の公理に対して X が言える．
- 推論法則に対して X が言える．
- φ と $\varphi \rightarrow \psi$ が $\mathscr{S}$ の定理であるような文 φ と文 ψ が取れたとき，φ と $\varphi \rightarrow \psi$ に対して X が言えるならば，ψ に対して X が言える．

のすべてが満たされていれば，$\mathscr{S}$ から証明可能なあらゆる文に対して X が言える．

公理系 $\mathscr{S}$ に文 A を追加した公理系を

$$A,\ \mathscr{S}$$

や

$$\mathscr{S},\ A$$

と書く．A が既に $\mathscr{S}$ の公理であってもこのように表記するが，その場合は $\mathscr{S},A$ や $A,\mathscr{S}$ とは $\mathscr{S}$ そのものである．

メタ定理 2.1.7 (演繹法則). $\mathscr{S}$ を公理系とし，A を文とするとき，$\mathscr{S},A$ の任意の定理 B に対して

$$\mathscr{S} \vdash A \rightarrow B$$

が成り立つ．

メタ証明.

第一段　B を $\mathscr{S},A$ の公理か或いは推論法則とする．B が A ならば含意の反射律 (推論法則 2.1.3) より

$$\vdash A \rightarrow B$$

が成り立つので

$$\mathscr{S} \vdash A \rightarrow B$$

となる．B が $\mathscr{S}$ の公理又は推論法則であるとき，まず

$$\mathscr{S} \vdash B$$

が成り立つが，他方で含意の導入 (推論法則 2.1.4) より

$$\mathscr{S} \vdash B \rightarrow (A \rightarrow B)$$

も成り立つので，証明可能性の定義より

$$\mathscr{S} \vdash A \rightarrow B$$

が従う．

第二段　C 及び $C \rightarrow B$ が $\mathscr{S}$ の定理であるような文 C と文 B が取れた場合，

$$\mathscr{S} \vdash A \rightarrow (C \rightarrow B)$$

かつ

$$\mathscr{S} \vdash A \rightarrow C$$

であると仮定する．含意の分配則 (2.1.5) より

$$\mathscr{S} \vdash (A \rightarrow (C \rightarrow B)) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B))$$

が満たされるので，証明可能性の定義の通りに

$$\mathscr{S} \vdash (A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

が従い，

$$\mathscr{S} \vdash A \longrightarrow B$$

が従う．以上と構造的帰納法より，$\mathscr{S}, A$ の任意の定理 B に対して

$$\mathscr{S} \vdash A \longrightarrow B$$

が言える． ∎

演繹法則の逆も得られる．つまり，$\mathscr{S}$ を公理系とし，A と B を文とするとき，

$$\mathscr{S} \vdash A \longrightarrow B$$

であれば

$$A, \mathscr{S} \vdash B$$

が成り立つ．実際

$$A, \mathscr{S} \vdash A$$

が成り立つのは証明の定義の通りであるし，$A \longrightarrow B$ が $\mathscr{S}$ の定理ならば

$$A, \mathscr{S} \vdash A \longrightarrow B \tag{2.1}$$

が成り立つので，併せて

$$A, \mathscr{S} \vdash B$$

が従う．ただし (2.1) に関しては次のメタ定理を示さなくてはいけない．

メタ定理 2.1.8 (公理が増えても証明可能).　$\mathscr{S}$ を公理系とし，A を文とするとき，$\mathscr{S}$ の任意の定理 B に対して

$$A, \mathscr{S} \vdash B$$

が成り立つ．

メタ証明.　B が $\mathscr{S}$ の公理であるか推論規則であれば

$$A, \mathscr{S} \vdash B$$

は言える．また

$$\mathscr{S} \vdash C,$$
$$\mathscr{S} \vdash C \longrightarrow B$$

を満たす文 C が取れるとき，

$$A, \mathscr{S} \vdash C,$$
$$A, \mathscr{S} \vdash C \longrightarrow B$$

と仮定すれば

$$A, \mathscr{S} \vdash B$$

となる．以上と構造的帰納法より $\mathscr{S}$ の任意の定理 B に対して

$$A, \mathscr{S} \vdash B$$

が成り立つ． ∎

メタ定理 2.1.9 (演繹法則の逆).　$\mathscr{S}$ を公理系とし，A と B を文とするとき，

$$\mathscr{S} \vdash A \rightarrow B$$

であれば

$$A, \mathscr{S} \vdash B$$

が成り立つ．

2.2　推論

この節では「類は集合であるか真類であるかのいずれかには定まる」と「集合であり真類でもある類は存在しない」の二つの言明を得ることを主軸に基本的な推論法則を導出する．

ここで論理記号の名称を書いておく．

- $\vee$ を論理和 **(logical disjunction)** や選言と呼ぶ．
- $\wedge$ を論理積 **(logical conjunction)** や連言と呼ぶ．
- $\rightarrow$ を含意 **(implication)** と呼ぶ．
- $\neg$ を否定 **(negation)** と呼ぶ．

推論公理 2.2.1 (否定と矛盾に関する規則).　A を文とするとき以下が成り立つ:

矛盾の導入　否定が共に成り立つとき矛盾が起きる:

$$A, \neg A \vdash \perp.$$

否定の導入　矛盾が導かれるとき否定が成り立つ:

$$A \rightarrow \perp \vdash \neg A.$$

矛盾の導入規則に演繹規則を適用すれば

$$\vdash A \rightarrow (\neg A \rightarrow \perp)$$

が得られる．証明可能性の定義では推論法則を直接用いることはが許されているので，実際の証明の最中にこの規則を

“適用する” ときは，上ように推論法則に直したものを使う．たとえば公理系 $\mathscr{S}$ の下で

$$\mathscr{S} \vdash A \tag{2.2}$$

と

$$\mathscr{S} \vdash \neg A \tag{2.3}$$

が導かれたとすれば，矛盾の導入規則から得られた推論法則は

$$\mathscr{S} \vdash A \rightarrow (\neg A \rightarrow \perp)$$

を満たすので，(2.2) との三段論法より

$$\mathscr{S} \vdash \neg A \rightarrow \perp$$

となり，(2.3) との三段論法より

$$\mathscr{S} \vdash \perp$$

が従う，といった要領である．これを始めと結論だけ見て直感的に

$$\frac{\mathscr{S} \vdash A \qquad \mathscr{S} \vdash \neg A}{\mathscr{S} \vdash \perp}$$

と書いてみれば，こちらは矛盾の導入規則そのままの形に似ているので，あたかも矛盾の導入規則を “直接” 適用したように見える．他の推論規則も実際の証明では推論法則に直したものを用いるのであるが，始めと結論だけ見れば

$$\frac{\mathscr{S} \vdash A \rightarrow \perp}{\mathscr{S} \vdash \neg A}$$

であったり

$$\frac{\mathscr{S} \vdash A}{\mathscr{S} \vdash A \vee B}$$

であったり

$$\frac{\mathscr{S} \vdash A(\tau)}{\mathscr{S} \vdash \exists x A(x)}$$

であったりが “成り立つ” のである．そしてこれらの水平線が入った規則もどきは他の証明体系では正式な推論規則であったりする．どうせすぐに推論法則に直してしまうものを，どうしてわざわざ推論規則として導入したのかというと (推論法則の形で推論の公理として導入しても同じである)，他の証明体系の規則との対応を意識しているのと，$\vdash$ によって前後に分割してある方が若干見やすいからである．

定義 2.2.2 (対偶). $\varphi \rightarrow \psi$ なる式に対して

$$\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$$

を $\varphi \rightarrow \psi$ の**対偶 (contraposition)** と呼ぶ.

推論法則 2.2.3 (対偶命題が導かれる). A と B を文とするとき

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A).$$

証明.　証明可能性の定義より

$$A,\ \neg B,\ A \rightarrow B \vdash A,$$
$$A,\ \neg B,\ A \rightarrow B \vdash A \rightarrow B$$

となるので，三段論法より

$$A,\ \neg B,\ A \rightarrow B \vdash B \tag{2.4}$$

が従う．同じく証明可能性の定義より

$$A,\ \neg B,\ A \rightarrow B \vdash \neg B \tag{2.5}$$

も成り立つ．ところで矛盾の導入規則より

$$\vdash B \rightarrow (\neg B \rightarrow \bot)$$

が成り立つので，証明可能性の定義より

$$A,\ \neg B,\ A \rightarrow B \vdash B \rightarrow (\neg B \rightarrow \bot)$$

となる．これと (2.4) との三段論法より

$$A,\ \neg B,\ A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow \bot$$

が従い，これと (2.5) との三段論法より

$$A,\ \neg B,\ A \rightarrow B \vdash \bot$$

が従う．演繹規則より

$$\neg B,\ A \rightarrow B \vdash A \rightarrow \bot$$

となるが，今度は否定の導入規則より

$$\neg B,\ A \rightarrow B \vdash (A \rightarrow \bot) \rightarrow \neg A$$

が満たされるので，三段論法より

$$\neg B,\ A \rightarrow B \vdash \neg A$$

が出る．そして演繹規則より

$$A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow \neg A$$

が得られ，再び演繹規則より

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$$

が得られる． ∎

公理系 $\mathscr{S}$ の下で $A \longrightarrow B$ が導かれたとすれば，上の推論法則より

$$\mathscr{S} \vdash (A \longrightarrow B) \longrightarrow (\neg B \longrightarrow \neg A)$$

が成り立つので三段論法より

$$\mathscr{S} \vdash \neg B \longrightarrow \neg A$$

が従う．以下では，$\mathscr{S} \vdash A \longrightarrow B$ であるときに**「対偶を取る」**と宣言して $\mathscr{S} \vdash \neg B \longrightarrow \neg A$ に繋げることもある．

定義 2.2.4 (二重否定).　式 φ に対して，$\neg$を二つ連結させた式

$$\neg\neg\varphi$$

を φ の**二重否定 (double negation)** と呼ぶ．

推論法則 2.2.5 (二重否定の導入).　A を文とするとき

$$\vdash A \longrightarrow \neg\neg A.$$

証明.　矛盾の導入規則より

$$A, \neg A \vdash \bot$$

となるので，演繹規則より

$$A \vdash \neg A \longrightarrow \bot \tag{2.6}$$

が従う．また否定の導入規則より

$$\vdash (\neg A \longrightarrow \bot) \longrightarrow \neg\neg A$$

が成り立つので，証明可能性の定義より

$$A \vdash (\neg A \longrightarrow \bot) \longrightarrow \neg\neg A$$

も成り立ち，(2.6) との三段論法より

$$A \vdash \neg\neg A$$

が従う．そして演繹規則より

$$\vdash A \longrightarrow \neg\neg A$$

が得られる．∎

推論公理 2.2.6 (論理積の除去).　A と B を文とするとき

$$A \wedge B \vdash A,$$
$$A \wedge B \vdash B.$$

肯定と否定は両立しない．

推論法則 2.2.7 (無矛盾律).　A を文とするとき
$$\vdash \neg(A \wedge \neg A).$$

証明.　論理積の除去規則より
$$A \wedge \neg A \vdash A,$$
$$A \wedge \neg A \vdash \neg A$$
が成り立ち，また矛盾の導入規則より
$$A \wedge \neg A \vdash A \rightarrow (\neg A \rightarrow \bot)$$
が成り立つので，三段論法より
$$A \wedge \neg A \vdash \bot$$
が従う．ゆえに演繹規則より
$$\vdash (A \wedge \neg A) \rightarrow \bot$$
となり，否定の導入規則
$$\vdash ((A \wedge \neg A) \rightarrow \bot) \rightarrow \neg(A \wedge \neg A)$$
との三段論法より
$$\vdash \neg(A \wedge \neg A)$$
が得られる． ∎

ここで新しい論理記号 $\leftrightarrow$ を定めるが，そのときに $\overset{\mathrm{def}}{\longleftrightarrow}$ なる記号を用いる．これは**定義記号**と呼ばれ，
$$P \overset{\mathrm{def}}{\longleftrightarrow} \varphi$$
と書けば「式 φ を記号 P で置き換えて良い」という意味で略記法を導入できる．

定義 2.2.8 (同値記号).　A と B を $\mathcal{L}$ の式とするとき，
$$A \leftrightarrow B \overset{\mathrm{def}}{\longleftrightarrow} (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$
により $\leftrightarrow$ を定め，式 '$A \leftrightarrow B$' を「A と B は**同値である (equivalent)**」と読む．

以降で **De Morgan の法則 (De Morgan's laws)**
$$\vdash \neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi,$$
$$\vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$$

を順番に示していくが，区別するために前者を**弱 De Morgan の法則**と呼び，後者を**強 De Morgan の法則**と呼ぶ．

推論公理 2.2.9 (論理和の除去).　A と B と C を文とするとき

$$A \rightarrow C,\ B \rightarrow C \vdash A \vee B \rightarrow C.$$

論理和の除去とは**場合分け (proof by case)** とも呼ばれる．また場合分け規則に演繹規則を二回適用すれば

$$\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$$

なる推論法則が得られる．場合分け規則を実際に用いる際には主にこちらの推論法則を使う．

推論法則 2.2.10 (弱 De Morgan の法則 (1)).　A と B を文とするとき

$$\vdash \neg A \wedge \neg B \rightarrow \neg (A \vee B).$$

証明．　論理積の除去規則より

$$\neg A \wedge \neg B \vdash \neg A \tag{2.7}$$

となり，また矛盾の導入規則より

$$\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow \bot)$$

が成り立つので

$$\neg A \wedge \neg B \vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow \bot)$$

も成り立ち，(2.7) との三段論法より

$$\neg A \wedge \neg B \vdash A \rightarrow \bot \tag{2.8}$$

が従う．同様に

$$\neg A \wedge \neg B \vdash B \rightarrow \bot \tag{2.9}$$

も得られる．ところで場合分け規則より

$$\vdash (A \rightarrow \bot) \rightarrow ((B \rightarrow \bot) \rightarrow (A \vee B \rightarrow \bot))$$

が成り立つので，(2.8) と (2.9) との三段論法より

$$\begin{aligned}
&\neg A \wedge \neg B \vdash (A \rightarrow \bot) \rightarrow ((B \rightarrow \bot) \rightarrow (A \vee B \rightarrow \bot)),\\
&\neg A \wedge \neg B \vdash (B \rightarrow \bot) \rightarrow (A \vee B \rightarrow \bot),\\
&\neg A \wedge \neg B \vdash A \vee B \rightarrow \bot
\end{aligned}$$

となり，否定の導入規則から得られる推論法則

$$\vdash (A \vee B \rightarrow \bot) \rightarrow \neg (A \vee B)$$

との三段論法より

$$\neg A \wedge \neg B \vdash \neg (A \vee B)$$

が得られる．そして演繹規則より

$$\vdash \neg A \wedge \neg B \ \rightarrow\ \neg(A \vee B)$$

が出る． ∎

推論法則 2.2.11 (強 De Morgan の法則 (1)). A と B を文とするとき

$$\vdash \neg A \vee \neg B \ \rightarrow\ \neg(A \wedge B).$$

証明． 論理積の除去より

$$\vdash (A \wedge B) \ \rightarrow\ A$$

が成り立つので，対偶を取れば

$$\vdash \neg A \ \rightarrow\ \neg(A \wedge B) \tag{2.10}$$

が成り立つ (推論法則 2.2.3)．同様に

$$\vdash \neg B \ \rightarrow\ \neg(A \wedge B) \tag{2.11}$$

も得られる．また論理和の除去規則より

$$\vdash (\neg A \ \rightarrow\ \neg(A \wedge B)) \ \rightarrow\ ((\neg B \ \rightarrow\ \neg(A \wedge B)) \ \rightarrow\ (\neg A \vee \neg B \ \rightarrow\ \neg(A \wedge B)))$$

が成り立つので，(2.10) との三段論法より

$$\vdash (\neg B \ \rightarrow\ \neg(A \wedge B)) \ \rightarrow\ (\neg A \vee \neg B \ \rightarrow\ \neg(A \wedge B))$$

が従い，(2.11) との三段論法より

$$\vdash \neg A \vee \neg B \ \rightarrow\ \neg(A \wedge B)$$

が得られる． ∎

推論公理 2.2.12 (論理和の導入). A と B を文とするとき

$$A \vdash A \vee B,$$
$$B \vdash A \vee B.$$

推論法則 2.2.13 (論理和の可換律). A, B を文とするとき

$$\vdash A \vee B \ \rightarrow\ B \vee A.$$

証明． 論理和の導入規則と演繹規則により

$$\vdash A \rightarrow B \vee A \tag{2.12}$$

と

$$\vdash B \rightarrow B \vee A \tag{2.13}$$

が成り立つ．また場合分け規則より

$$\vdash (A \rightarrow B \vee A) \rightarrow ((B \rightarrow B \vee A) \rightarrow (A \vee B \rightarrow B \vee A))$$

が成り立つので，(2.12) と三段論法より

$$\vdash (B \rightarrow B \vee A) \rightarrow (A \vee B \rightarrow B \vee A)$$

となり，(2.13) と三段論法より

$$\vdash A \vee B \rightarrow B \vee A$$

となる． ∎

推論公理 2.2.14 (論理積の導入). A と B を文とするとき

$$A,\ B \vdash A \wedge B.$$

論理積の導入に演繹規則を適用すれば

$$\begin{aligned} A, B &\vdash A \wedge B, \\ A &\vdash B \rightarrow A \wedge B, \\ &\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B) \end{aligned}$$

となる．これで

$$\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$$

なる推論法則が得られた．

推論法則 2.2.15 (弱 De Morgan の法則 (2)). A と B を文とするとき

$$\vdash \neg(A \vee B) \rightarrow \neg A \wedge \neg B.$$

証明． 論理和の導入規則より

$$\vdash A \rightarrow A \vee B$$

が成り立つが，対偶を取れば

$$\vdash \neg(A \vee B) \rightarrow \neg A \tag{2.14}$$

となる (推論法則 2.2.3)．同じく論理和の導入規則より

$$\vdash B \rightarrow A \vee B$$

が成り立つので

$$\vdash \neg(A \vee B) \rightarrow \neg B \tag{2.15}$$

も得られる．ここで (2.14) と (2.15) と演繹法則の逆より

$$\neg(A \vee B) \vdash \neg A, \tag{2.16}$$
$$\neg(A \vee B) \vdash \neg B \tag{2.17}$$

が従う．ところで論理積の導入規則より

$$\vdash \neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A \wedge \neg B)$$

が成り立つので，(2.16) と (2.17) との三段論法より

$$\neg(A \vee B) \vdash \neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A \wedge \neg B),$$
$$\neg(A \vee B) \vdash \neg B \rightarrow \neg A \wedge \neg B,$$
$$\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B$$

が従い，演繹規則より

$$\vdash \neg(A \vee B) \rightarrow \neg A \wedge \neg B$$

が得られる． ∎

推論法則 2.2.16 (論理積の可換律).　A, B を文とするとき

$$\vdash A \wedge B \rightarrow B \wedge A.$$

証明.　論理積の除去と演繹規則より

$$A \wedge B \vdash A \tag{2.18}$$

と

$$A \wedge B \vdash B \tag{2.19}$$

が成り立つ．また論理積の導入により

$$\vdash B \rightarrow (A \rightarrow B \wedge A)$$

となるので

$$A \wedge B \vdash B \rightarrow (A \rightarrow B \wedge A)$$

も成り立ち，(2.19) との三段論法より

$$A \wedge B \vdash A \rightarrow B \wedge A$$

となり，(2.18) との三段論法より

$$A \wedge B \vdash B \wedge A$$

となり，演繹規則より

$$\vdash A \wedge B \rightarrow B \wedge A$$

が得られる．∎

推論公理 2.2.17 (二重否定の除去).　A を文とするとき以下が成り立つ:

$$\neg\neg A \vdash A.$$

推論法則 2.2.18 (対偶論法の原理).　A と B を文とするとき

$$\vdash (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B).$$

証明.　二重否定の導入 (推論法則 2.2.5) より

$$\neg B \rightarrow \neg A \vdash A \rightarrow \neg\neg A$$

が成り立つので，演繹法則の逆より

$$A, \neg B \rightarrow \neg A \vdash \neg\neg A$$

となる．また $\neg B \rightarrow \neg A$ の対偶を取れば

$$A, \neg B \rightarrow \neg A \vdash \neg\neg A \rightarrow \neg\neg B$$

が成り立つので (定理 2.2.3)，三段論法より

$$A, \neg B \rightarrow \neg A \vdash \neg\neg B$$

となる．ここで二重否定の除去より

$$A, \neg B \rightarrow \neg A \vdash \neg\neg B \rightarrow B$$

となるので，三段論法より

$$A, \neg B \rightarrow \neg A \vdash B$$

が従い，演繹規則より

$$\begin{aligned} \neg B \rightarrow \neg A \vdash A \rightarrow B, \\ \vdash (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B) \end{aligned}$$

が得られる．∎

推論法則 2.2.19 (背理法の原理).　A を文とするとき

$$\vdash (\neg A \rightarrow \bot) \rightarrow A.$$

証明.　否定の導入規則より

$$\neg A \rightarrow \bot \vdash \neg\neg A$$

が成り立ち，二重否定の法則より

$$\neg A \rightarrow \bot \vdash \neg\neg A \rightarrow A$$

が成り立つので，三段論法より

$$\neg A \rightarrow \bot \vdash A$$

となる．そして演繹規則より

$$\vdash (\neg A \rightarrow \bot) \rightarrow A$$

が得られる．∎

次の**爆発律 (principle of explosion)** とは「矛盾からはあらゆる式が導かれる」ことを表している．またなぜ $\bot$ が「矛盾」と呼ばれるのかが明確になる．実際，公理系 $\mathscr{S}$ からひとたび $\bot$ が導かれれば，爆発律との三段論法によってどんな式でも $\mathscr{S}$ の定理となる．すると $\mathscr{S}$ においては A とその否定 $\neg A$ など食い違う結論が共に定理となってしまい，まさしく“矛盾”が引き起こされるのである．

推論法則 2.2.20 (爆発律).　A を文とするとき

$$\vdash \bot \rightarrow A.$$

証明.　含意の導入 (推論法則 2.1.4) より

$$\vdash \bot \rightarrow (\neg A \rightarrow \bot)$$

が成り立つので，演繹法則の逆より

$$\bot \vdash \neg A \rightarrow \bot$$

となる．また背理法の原理 (推論法則 2.2.19) より

$$\bot \vdash (\neg A \rightarrow \bot) \rightarrow A$$

が成り立つので，三段論法より

$$\bot \vdash A$$

が従い，演繹規則より

$$\vdash \bot \rightarrow A$$

が得られる．∎

推論法則 2.2.21 (否定の論理和は含意で書ける).　A と B を文とするとき

$$\vdash (\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B).$$

証明.　矛盾の導入規則より

$$A, \neg A \vdash \bot$$

が成り立ち，爆発律 (推論法則 2.2.20) より

$$A, \neg A \vdash \bot \rightarrow B$$

が成り立つので，三段論法より

$$A, \neg A \vdash B$$

が従い，演繹規則より

$$\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B) \tag{2.20}$$

が得られる．また含意の導入 (推論法則 2.1.4) より

$$\vdash B \rightarrow (A \rightarrow B) \tag{2.21}$$

も得られる．ところで場合分け規則より

$$\vdash (\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow ((B \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (\neg A \vee B \rightarrow (A \rightarrow B)))$$

が成り立つので，(2.20) との三段論法より

$$\vdash (B \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (\neg A \vee B \rightarrow (A \rightarrow B))$$

となり，(2.21) との三段論法より

$$\vdash \neg A \vee B \rightarrow (A \rightarrow B)$$

が得られる． ∎

推論法則 2.2.22 (排中律).　A を文とするとき

$$\vdash A \vee \neg A.$$

証明.

$$\neg(A \vee \neg A), A \vdash A$$

と $\vee$ の導入より

$$\neg(A \vee \neg A), A \vdash A \vee \neg A$$

が成り立つ．一方で

$$\neg(A \vee \neg A), A \vdash \neg(A \vee \neg A)$$

も成り立つので

$$\neg(A \vee \neg A), A \vdash \perp$$

が成り立つ．演繹法則より

$$\neg(A \vee \neg A) \vdash A \rightarrow \perp$$

が成り立つので，否定の導出より

$$\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A$$

が成り立つ．再び $\vee$ の導入によって

$$\neg(A \vee \neg A) \vdash A \vee \neg A$$

が成り立つ．再び否定の導出より

$$\neg(A \vee \neg A) \vdash \perp$$

が成り立つ．ゆえに

$$\vdash \neg(A \vee \neg A) \rightarrow \perp$$

が成り立ち，背理法の原理より

$$\vdash A \vee \neg A$$

が得られる．∎

排中律の言明は「いかなる文も肯定か否定の一方は成り立つ」と読めるが，肯定と否定のどちらか一方が証明可能であるということを保証しているわけではない．無矛盾律についても似たようなことが言える．無矛盾律とは「肯定と否定は両立しない」と読めるわけだが，もしかすると，或る公理系 $\mathscr{S}$ の下では或る文 A に対して

$$\mathscr{S} \vdash A \wedge \neg A$$

が導かれるかもしれない．この場合 $\mathscr{S}$ は矛盾することになるが，予め $\mathscr{S}$ が無矛盾であることが判っていない限りはこの事態が起こらないとは言い切れない (極端な例では，矛盾 $\perp$ が公理であっても無矛盾律は定理である)．

推論法則 2.2.23 (含意の論理和への遺伝性).　A, B, C を文とするとき

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (A \vee C \rightarrow B \vee C).$$

略証.　三段論法より

$$A,\ A \rightarrow B \vdash B$$

が成り立ち，また論理和の導入規則より

$$A,\ A \rightarrow B \vdash B \rightarrow B \vee C$$

も成り立つので，三段論法より

$$A,\ A \rightarrow B \vdash B \vee C$$

となり，演繹規則より

$$A \rightarrow B \vdash A \rightarrow B \vee C \tag{2.22}$$

が得られる．また論理和の導入規則より

$$A \rightarrow B \vdash C \rightarrow B \vee C \tag{2.23}$$

得られる. ところで論理和の除去規則より

$$A \rightarrow B \vdash (A \rightarrow B \vee C) \rightarrow ((B \rightarrow B \vee C) \rightarrow (A \vee C \rightarrow B \vee C))$$

が成り立つので，(2.22) との三段論法より

$$A \rightarrow B \vdash (B \rightarrow B \vee C) \rightarrow (A \vee C \rightarrow B \vee C)$$

となり，(2.23) との三段論法より

$$A \rightarrow B \vdash A \vee C \rightarrow B \vee C$$

が従う． ∎

推論法則 2.2.24 (含意は否定と論理和で表せる).　A と B を文とするとき

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B).$$

証明.　含意の論理和への遺伝性 (推論法則 2.2.23) より

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (A \vee \neg A \rightarrow B \vee \neg A)$$

が成り立つので，演繹法則の逆より

$$A \rightarrow B \vdash A \vee \neg A \rightarrow B \vee \neg A$$

が成り立つ．また排中律 (推論法則 2.2.22) より

$$A \rightarrow B \vdash A \vee \neg A$$

も成り立つので，三段論法より

$$A \rightarrow B \vdash B \vee \neg A$$

となる．論理和の可換性 (推論法則 2.2.13) より

$$A \longrightarrow B \vdash B \vee \neg A \longrightarrow \neg A \vee B$$

が成り立つので，三段論法より

$$A \longrightarrow B \vdash \neg A \vee B$$

が従い，演算規則より

$$\vdash (A \longrightarrow B) \longrightarrow (\neg A \vee B)$$

が得られる．∎

推論法則 2.2.25 (強 De Morgan の法則 (2)). A と B を文とするとき

$$\vdash \neg(A \wedge B) \longrightarrow \neg A \vee \neg B.$$

証明．論理積の導入規則より

$$A \vdash B \longrightarrow A \wedge B$$

が成り立つので，これの対偶を取って

$$A \vdash \neg(A \wedge B) \longrightarrow \neg B$$

を得る (推論法則 2.2.3)．そして演繹法則の逆より

$$A, \neg(A \wedge B) \vdash \neg B$$

が成立し，演繹規則より

$$\neg(A \wedge B) \vdash A \longrightarrow \neg B$$

となる．推論法則 2.2.24 より

$$\neg(A \wedge B) \vdash (A \longrightarrow \neg B) \longrightarrow (\neg A \vee \neg B)$$

が成り立つので三段論法より

$$\neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B$$

が従う．そして演繹規則より

$$\vdash \neg(A \wedge B) \longrightarrow \neg A \vee \neg B.$$

を得る．∎

推論公理 2.2.26 (量化記号に関する規則).　A を $\mathcal{L}$ の式とし，x を A に自由に現れる変項とし，A に自由に現れる項が x のみであるとする．また τ を主要 ε 項とする．このとき以下を推論規則とする．

$$A(\tau) \vdash \exists x A(x),$$
$$\exists x A(x) \vdash A(\varepsilon x \hat{A}(x)),$$
$$\forall x A(x) \vdash A(\tau),$$
$$\neg \forall x A(x) \vdash \exists x \neg A(x).$$

ただし $\hat{A}$ とは必要に応じて A を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き直したものである．

存在記号の推論規則より

$$\vdash \exists x \neg A \;\rightarrow\; \neg A(\varepsilon x \widehat{\neg A})$$

が成り立つが，ここで $\widehat{\neg A}$ と $\neg \hat{A}$ は同一の記号列なので (もとより A が $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式ならばどちらも $\neg A$ である)

$$\vdash \exists x \neg A \;\rightarrow\; \neg A(\varepsilon x \neg \hat{A})$$

となり，量化の四番目の推論規則との三段論法で

$$\neg \forall x A \vdash \neg A(\varepsilon x \neg \hat{A})$$

が従う．そして対偶論法 (推論法則 2.2.18) より

$$\vdash A(\varepsilon x \neg \hat{A}) \;\rightarrow\; \forall x A$$

が得られる．これは非常に有用な結果であるから一つの定理として述べておく．

推論法則 2.2.27 (ε 項による全称の導出).　A を $\mathcal{L}$ の式とし，x を A に自由に現れる変項とし，A に自由に現れる項が x のみであるとする．このとき

$$\vdash A(\varepsilon x \neg \hat{A}(x)) \;\rightarrow\; \forall x A(x).$$

ただし $\hat{A}$ とは必要に応じて A を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き直したものである．

どれでも一つ，$A(\tau)$ を成り立たせるような主要 ε 項 τ が取れれば $\exists x A(x)$ が成り立つのだし，逆に $\exists x A(x)$ が成り立つならば $\varepsilon x A(x)$ なる ϵ 項が $A(\varepsilon x A(x))$ を満たすのである．そして主要 ε 項は集合であるから (定理 3.1.3)，「$A(x)$ を満たす集合 x が存在する」ということと「$A(x)$ を満たす集合 x が **“実際に取れる”**」ということが同じ意味になる．

$\forall x A(x)$ が成り立つならばいかなる主要 ε 項 τ も $A(\tau)$ を満たすし，逆にいかなる主要 ε 項 τ も $A(\tau)$ を満たすならば，特に $\varepsilon x \neg A(x)$ なる ε 項も $A(\varepsilon x \neg A(x))$ を満たすのだから $\forall x A(x)$ が成立する．つまり，「$\forall x A(x)$ が成り立つ」ということと「任意の主要 ε 項 τ が $A(\tau)$ を満たす」ということは同じ意味になる．

後述することであるが，主要 ε 項はどれも集合であって (定理 3.1.3)，また集合である類はいずれかの主要 ε 項と等しい (定理 3.0.2)．ゆえに，**量化子の亘る範囲は集合に制限される**のである．

量化記号についても De Morgan の法則があり，それを

弱 De Morgan の法則　$\exists x \neg A(x) \;\leftrightarrow\; \neg \forall x A(x),$
強 De Morgan の法則　$\forall x \neg A(x) \;\leftrightarrow\; \neg \exists x A(x),$

と呼ぶことにする．

推論法則 2.2.28 (量化記号に対する弱 De Morgan の法則 (1)).　A を $\mathcal{L}$ の式とし，x を A に自由に現れる変項とし，また A に自由に現れる変項は x のみであるとする．このとき

$$\vdash \exists x \neg A(x) \rightarrow \neg\forall x A(x).$$

略証.　必要に応じて A を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き換えたものを $\hat{A}$ とする．存在記号の推論規則より

$$\exists x \neg A(x) \vdash \neg A(\varepsilon x \neg\hat{A}(x)) \tag{2.24}$$

となる．また全称記号の推論規則より

$$\vdash \forall x A(x) \rightarrow A(\varepsilon x \neg\hat{A}(x))$$

が成り立つので，対偶を取って

$$\vdash \neg A(\varepsilon x \neg\hat{A}(x)) \rightarrow \neg\forall x A(x) \tag{2.25}$$

となる (推論法則 2.2.3)．(2.24) と (2.25) の三段論法より

$$\exists x \neg A(x) \vdash \neg\forall x A(x)$$

が従い，演繹規則より

$$\vdash \exists x \neg A(x) \rightarrow \neg\forall x A(x)$$

が得られる． ∎

推論法則 2.2.29 (量化記号に対する弱 De Morgan の法則 (2)).　A を $\mathcal{L}$ の式とし，x を A に自由に現れる変項とし，また A に自由に現れる変項は x のみであるとする．このとき

$$\vdash \neg\forall x A(x) \rightarrow \exists x \neg A(x).$$

略証.　推論規則

$$\neg\forall x A(x) \vdash \exists x \neg A(x)$$

に演繹規則を適用して得られる． ∎

推論法則 2.2.30 (量化記号に対する強 De Morgan の法則 (1)).　A を $\mathcal{L}$ の式とし，x を A に自由に現れる変項とし，また A に自由に現れる変項は x のみであるとする．このとき

$$\vdash \forall x \neg A(x) \rightarrow \neg\exists x A(x).$$

略証．　必要に応じて A を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き換えたものを $\hat{A}$ とする．まず存在記号の推論規則より

$$\vdash \exists x A(x) \ \rightarrow \ A(\varepsilon x \hat{A}(x))$$

が成り立つので，対偶を取って

$$\vdash \rightharpoondown A(\varepsilon x \hat{A}(x)) \ \rightarrow \ \rightharpoondown \exists x A(x)$$

が成り立つ (推論法則 2.2.3)．また全称記号の推論規則より

$$\forall x \rightharpoondown A(x) \vdash \rightharpoondown A(\varepsilon x \hat{A}(x))$$

が成り立つので，三段論法より

$$\forall x \rightharpoondown A(x) \vdash \rightharpoondown \exists x A(x)$$

が従い，演繹規則より

$$\vdash \forall x \rightharpoondown A(x) \ \rightarrow \ \rightharpoondown \exists x A(x)$$

が得られる． ∎

推論法則 2.2.31 (量化記号に対する強 De Morgan の法則 (2))．　A を $\mathcal{L}$ の式とし，x を A に自由に現れる変項とし，また A に自由に現れる変項は x のみであるとする．このとき

$$\vdash \rightharpoondown \exists x A(x) \ \rightarrow \ \forall x \rightharpoondown A(x).$$

略証．　必要に応じて A を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き換えたものを $\hat{A}$ とする．まず存在記号の推論規則より

$$\vdash A(\varepsilon x \rightharpoondown\rightharpoondown \hat{A}(x)) \ \rightarrow \ \exists x A(x)$$

が成り立つので，対偶を取って

$$\vdash \rightharpoondown \exists x A(x) \ \rightarrow \ \rightharpoondown A(\varepsilon x \rightharpoondown\rightharpoondown \hat{A}(x))$$

が成り立ち (推論法則 2.2.3)，演繹法則の逆より

$$\rightharpoondown \exists x A(x) \vdash \rightharpoondown A(\varepsilon x \rightharpoondown\rightharpoondown \hat{A}(x))$$

が従う．また全称の導出 (推論法則 2.2.27) より

$$\vdash \rightharpoondown A(\varepsilon x \rightharpoondown\rightharpoondown \hat{A}(x)) \ \rightarrow \ \forall x \rightharpoondown A(x)$$

が成り立つので，三段論法より

$$\rightharpoondown \exists x A(x) \vdash \forall x \rightharpoondown A(x)$$

が従い，演繹規則より

$$\vdash \rightharpoondown \exists x A(x) \ \rightarrow \ \forall x \rightharpoondown A(x)$$

が得られる． ∎

2.3　その他の推論規則

推論法則 2.3.1 (含意の推移律).　A, B, C を文とするとき

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)).$$

証明.

$$\begin{aligned} &A \rightarrow B,\ B \rightarrow C,\ A \vdash A, \\ &A \rightarrow B,\ B \rightarrow C,\ A \vdash A \rightarrow B, \end{aligned}$$

と三段論法より

$$A \rightarrow B,\ B \rightarrow C,\ A \vdash B$$

となる．これと

$$A \rightarrow B,\ B \rightarrow C,\ A \vdash B \rightarrow C$$

と三段論法より

$$A \rightarrow B,\ B \rightarrow C,\ A \vdash C$$

となる．これに演繹規則を三回適用すれば

$$\begin{aligned} A \rightarrow B,\ B \rightarrow C &\vdash A \rightarrow C, \\ A \rightarrow B &\vdash (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C), \\ &\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)) \end{aligned}$$

が得られる． ∎

推論法則 2.3.2 (二式が同時に導かれるならその論理積が導かれる).　A, B, C を文とするとき

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C)).$$

証明.

$$\begin{aligned} &A \rightarrow B,\ A \rightarrow C,\ A \vdash A, \\ &A \rightarrow B,\ A \rightarrow C,\ A \vdash A \rightarrow B \end{aligned}$$

と三段論法より

$$A \rightarrow B,\ A \rightarrow C,\ A \vdash B \tag{2.26}$$

が得られ，同様に

$$
\begin{aligned}
A \to B,\, A \to C,\, A &\vdash A, \\
A \to B,\, A \to C,\, A &\vdash A \to C
\end{aligned}
$$

と三段論法より

$$A \to B,\, A \to C,\, A \vdash C \tag{2.27}$$

が得られる．ここで論理積の導入より

$$\vdash B \to (C \to B \wedge C)$$

が成り立つので

$$A \to B,\, A \to C,\, A \vdash B \to (C \to B \wedge C)$$

も成り立つ．これと (2.26) との三段論法より

$$A \to B,\, A \to C,\, A \vdash C \to B \wedge C$$

となり，(2.27) との三段論法より

$$A \to B,\, A \to C,\, A \vdash B \wedge C$$

となる．あとは演繹規則を三回適用すれば

$$
\begin{aligned}
A \to B,\, A \to C &\vdash A \to B \wedge C, \\
A \to B &\vdash (A \to C) \to (A \to B \wedge C), \\
&\vdash (A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to B \wedge C))
\end{aligned}
$$

が得られる． ∎

推論法則 2.3.3 (含意は遺伝する).　A, B, C を $\mathcal{L}'$ の閉式とするとき以下が成り立つ:

(a)　$(A \to B) \to ((A \vee C) \to (B \vee C))$.
(b)　$(A \to B) \to ((A \wedge C) \to (B \wedge C))$.
(c)　$(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$.
(c)　$(A \to B) \to ((C \to A) \to (C \to B))$.

証明.

(a)　いま $A \to B$ が成り立っていると仮定する．論理和の導入により

$$C \to (B \vee C)$$

は定理であるから，含意の推移律より

$$A \to (B \vee C)$$

が従い，場合分け法則より

$$(A \vee C) \longrightarrow (B \vee C)$$

が成立する．ここに演繹法則を適用して

$$(A \longrightarrow B) \longrightarrow ((A \vee C) \longrightarrow (B \vee C))$$

が得られる．

(b) いま $A \longrightarrow B$ が成り立っていると仮定する．論理積の除去より

$$(A \wedge C) \longrightarrow A$$

は定理であるから，含意の推移律より

$$(A \wedge C) \longrightarrow B$$

が従い，他方で論理積の除去より

$$(A \wedge C) \longrightarrow C$$

も満たされる．そして推論法則 2.3.2 から

$$(A \wedge C) \longrightarrow (B \wedge C)$$

が成り立ち，演繹法則より

$$(A \longrightarrow B) \longrightarrow ((A \wedge C) \longrightarrow (B \wedge C))$$

が得られる．

(c) いま $A \longrightarrow B$，$B \longrightarrow C$ および A が成り立っていると仮定する．このとき三段論法より B が成り立つので再び三段論法より C が成立する．ゆえに演繹法則より $A \longrightarrow B$ と $B \longrightarrow C$ が成り立っている下で

$$A \longrightarrow C$$

が成立し，演繹法則を更に順次適用すれば

$$(A \longrightarrow B) \longrightarrow ((B \longrightarrow C) \longrightarrow (A \longrightarrow C))$$

が得られる．

(d) いま $A \longrightarrow B$，$C \longrightarrow A$ および C が成り立っていると仮定する．このとき三段論法より A が成り立つので再び三段論法より B が成立し，ここに演繹法則を適用すれば，$A \longrightarrow B$ と $C \longrightarrow A$ が成立している下で

$$C \longrightarrow B$$

が成立する．演繹法則を更に順次適用すれば

$$(A \longrightarrow B) \longrightarrow ((C \longrightarrow A) \longrightarrow (C \longrightarrow B))$$

が得られる．■

推論法則 2.3.4 (同値記号の遺伝性質).　A, B, C を $\mathcal{L}'$ の閉式とするとき以下の式が成り立つ:

(a)　$(A \leftrightarrow B) \rightarrow ((A \vee C) \leftrightarrow (B \vee C))$.

(b)　$(A \leftrightarrow B) \rightarrow ((A \wedge C) \leftrightarrow (B \wedge C))$.

(c)　$(A \leftrightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \leftrightarrow (A \rightarrow C))$.

(d)　$(A \leftrightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow A) \leftrightarrow (C \rightarrow B))$.

証明.　まず (a) を示す．いま $A \leftrightarrow B$ が成り立っていると仮定する．このとき $A \rightarrow B$ と $B \rightarrow A$ が共に成立し，他方で含意の遺伝性質より

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \vee C) \rightarrow (B \vee C)),$$
$$(B \rightarrow A) \rightarrow ((B \vee C) \rightarrow (A \vee C))$$

が成立するから三段論法より $(A \vee C) \rightarrow (B \vee C)$ と $(B \vee C) \rightarrow (A \vee C)$ が共に成立する．ここに $\wedge$ の導入を適用すれば

$$(A \vee C) \leftrightarrow (B \vee C)$$

が成立し，演繹法則を適用すれば

$$(A \leftrightarrow B) \rightarrow ((A \vee C) \leftrightarrow (B \vee C))$$

が得られる．(b)(c)(d) も含意の遺伝性を適用すれば得られる． ∎

文 A が $\mathscr{S} \vdash \neg A$ を満たすとき，A は公理系 $\mathscr{S}$ において**偽である (false)** という．

推論法則 2.3.5 (偽な式は矛盾を導く).　A を文とするとき

$$\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow \perp).$$

証明.　矛盾の規則より

$$A, \neg A \vdash \perp$$

である．演繹法則より

$$\neg A \vdash A \rightarrow \perp$$

が成り立ち，再び演繹法則より

$$\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow \perp)$$

が得られる． ∎

$A, B \vdash C$ と $A \wedge B \vdash C$ は同値である．$A, B \vdash C$ が成り立っているとすると，$\vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$ が成り立つ．$A \wedge B \vdash A$ と三段論法より $A \wedge B \vdash B \rightarrow C$ が成り立ち，$A \wedge B \vdash B$ と三段論法より $A \wedge B \vdash C$ が成り立つ．逆に

$A \wedge B \vdash C$ が成り立っているとすると $\vdash (A \wedge B) \rightarrow C$ が成り立つ．$A, B \vdash A \wedge B$ と三段論法より $A, B \vdash C$ が成り立つ．

定理 2.3.6 (類は集合であるか真類であるかのいずれかに定まる).　a を類とするとき

$$\vdash \mathrm{set}\,(a) \vee \rightarrow \mathrm{set}\,(a).$$

証明.　排中律を適用することにより従う．∎

推論法則 2.3.7 (矛盾を導く式はあらゆる式を導く).　A, B を文とするとき

$$\vdash (A \rightarrow \perp) \rightarrow (A \rightarrow B).$$

証明.　推論法則 2.2.20 より

$$\vdash \perp \rightarrow B$$

が成り立つので

$$A \rightarrow \perp \vdash \perp \rightarrow B$$

が成り立つ．

$$A \rightarrow \perp \vdash A \rightarrow \perp$$

も成り立つので，含意の推移律 (推論法則 2.3.1) より

$$A \rightarrow \perp \vdash A \rightarrow B$$

が成り立つ．そして演繹法則より

$$\vdash (A \rightarrow \perp) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

が得られる．∎

空虚な真

A, B を文とするとき，偽な式は矛盾を導くので (推論法則 2.3.5)

$$\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow \perp)$$

が成り立ち，矛盾を導く式はあらゆる式を導くから (推論法則 2.3.7)

$$\vdash (A \rightarrow \perp) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

が成り立つ．以上と含意の推移律より

$$\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$$

が得られる．つまり“偽な式はあらゆる式を導く”のであり，この現象を**空虚な真 (vacuous truth)** と呼ぶ.

推論法則 2.3.8 (含意は否定と論理和で表せる).　A, B を文とするとき

$$\vdash (A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B).$$

証明.

第一段　含意の遺伝性質より

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \vee \neg A) \rightarrow (B \vee \neg A))$$

が成り立つので

$$A \rightarrow B \vdash (A \vee \neg A) \rightarrow (B \vee \neg A)$$

となる．排中律より

$$A \rightarrow B \vdash A \vee \neg A$$

も成り立つので，三段論法より

$$A \rightarrow B \vdash B \vee \neg A$$

が成り立ち，論理和の可換律 (推論法則 2.2.13) より

$$A \rightarrow B \vdash \neg A \vee B$$

が得られ，演繹法則より

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)$$

が得られる．

第二段　推論法則 2.3.5 より

$$\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow \perp)$$

が成り立ち，一方で推論法則 2.3.7 より

$$\vdash (A \rightarrow \perp) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

も成り立つので，含意の推移律より

$$\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$$

が成立する．推論法則 2.1.4 より

$$\vdash B \rightarrow (A \rightarrow B)$$

も成り立つから，場合分けの法則より

$$\vdash (\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

が成り立つ． ∎

推論法則 2.3.9 (二重否定の法則の逆が成り立つ).　A を文とするとき

$$\vdash A \rightarrow \neg\neg A.$$

証明．　排中律より

$$\vdash \neg A \vee \neg\neg A$$

が成立し，また推論法則 2.3.8 より

$$\vdash (\neg A \vee \neg\neg A) \rightarrow (A \rightarrow \neg\neg A)$$

も成り立つので，三段論法より

$$\vdash A \rightarrow \neg\neg A$$

が成立する． ∎

推論法則 2.3.10 (対偶命題は同値).　A, B を文とするとき

$$\vdash (A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A).$$

証明．

第一段　含意は否定と論理和で表せるので (推論法則 2.3.8)

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B) \tag{2.28}$$

が成り立つ．また論理和は可換であるから (推論法則 2.2.13)

$$\vdash (\neg A \vee B) \rightarrow (B \vee \neg A) \tag{2.29}$$

が成り立つ．ところで二重否定の法則の逆 (推論法則 2.3.9) より

$$\vdash B \rightarrow \neg\neg B$$

が成り立ち，また含意の遺伝性質より

$$\vdash (B \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow ((B \vee \neg A) \rightarrow (\neg\neg B \vee \neg A))$$

も成り立つから，三段論法より

$$\vdash (B \vee \neg A) \rightarrow (\neg\neg B \vee \neg A) \tag{2.30}$$

が成立する．再び推論法則 2.3.8 によって

$$\vdash (\neg\neg B \vee \neg A) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A) \tag{2.31}$$

が成り立つ．(2.28) と (2.29) と (2.30) と (2.31) に含意の推移律を適用すれば

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$$

が得られる．

第二段　含意は否定と論理和で表せるので (推論法則 2.3.8)

$$\vdash (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (\neg\neg B \vee \neg A) \tag{2.32}$$

が成り立つ．ところで二重否定の法則より

$$\vdash \neg\neg B \rightarrow B$$

が成り立ち，また含意の遺伝性質より

$$\vdash (\neg\neg B \rightarrow B) \rightarrow ((\neg\neg B \vee \neg A) \rightarrow (B \vee \neg A))$$

も成り立つから，三段論法より

$$\vdash (\neg\neg B \vee \neg A) \rightarrow (B \vee \neg A) \tag{2.33}$$

が成立する．論理和は可換であるから (推論法則 2.2.13)

$$\vdash (B \vee \neg A) \rightarrow (\neg A \vee B) \tag{2.34}$$

が成り立つ．再び推論法則 2.3.8 によって

$$\vdash (\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B) \tag{2.35}$$

が成り立つ．(2.32) と (2.33) と (2.34) と (2.35) に含意の推移律を適用すれば

$$\vdash (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

が得られる． ∎

上の証明は簡単に書けば

$$\begin{aligned}(A \rightarrow B) &\leftrightarrow (\neg A \vee B)\\ &\leftrightarrow (B \vee \neg A)\\ &\leftrightarrow (\neg\neg B \vee \neg A)\\ &\leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)\end{aligned}$$

で足りる．

推論法則 2.3.11 (De Morgan の法則).　A, B を文とするとき

- $\vdash \neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$.
- $\vdash \neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$.

証明.

第一段　論理和の導入の対偶を取れば

$$\vdash \neg(A \vee B) \rightarrow \neg A$$

と

$$\vdash \neg(A \vee B) \rightarrow \neg B$$

が成り立つ (推論法則 2.2.3)．二式が同時に導かれるならその論理積も導かれるので (推論法則 2.3.2)

$$\vdash \neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$$

が得られる．また

$$A, \neg A \wedge \neg B \vdash A$$

かつ

$$A, \neg A \wedge \neg B \vdash \neg A$$

より

$$A, \neg A \wedge \neg B \vdash \perp$$

が成り立つので，演繹法則より

$$A \vdash (\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \perp$$

が従い，否定の導入により

$$A \vdash \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

が成り立つ．同様にして

$$B \vdash \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

も成り立つので，場合分け法則より

$$\vdash (A \lor B) \;\rightarrow \neg(\neg A \land \neg B)$$

が成立する．この対偶を取れば

$$\vdash (\neg A \land \neg B) \;\rightarrow \neg(A \lor B)$$

が得られる (推論法則 2.2.3).

第二段　前段の結果より

$$\vdash (\neg\neg A \land \neg\neg B) \leftrightarrow \neg(\neg A \lor \neg B)$$

が成り立つ．ところで二重否定の法則とその逆 (推論法則 2.3.9) より

$$\vdash (\neg\neg A \land \neg\neg B) \;\leftrightarrow\; (A \land B)$$

が成り立つので

$$\vdash (A \land B) \;\leftrightarrow \neg(\neg A \lor \neg B)$$

が成り立つ．対偶命題の同値性 (推論法則 2.2.3) から

$$\vdash \neg(A \land B) \;\leftrightarrow\; (\neg A \lor \neg B)$$

が得られる． ∎

以上で“集合であり真類でもある類は存在しない”という言明を証明する準備が整いました．

定理 2.3.12 (集合であり真類でもある類は存在しない).　a を類とするとき

$$\vdash \neg(\,\mathrm{set}\,(a) \land \neg\mathrm{set}\,(a)\,).$$

証明.　a を類とするとき，排中律より

$$\vdash \mathrm{set}\,(a) \lor \neg\mathrm{set}\,(a)$$

が成り立ち，論理和の可換律より

$$\vdash \neg\mathrm{set}\,(a) \lor \mathrm{set}\,(a)$$

も成立する．そして De Morgan の法則より

$$\vdash \neg(\,\neg\neg\mathrm{set}\,(a) \land \neg\mathrm{set}\,(a)\,)$$

が成り立つが，二重否定の法則より $\neg\neg\mathrm{set}\,(a)$ と $\mathrm{set}\,(a)$ は同値となるので

$$\vdash \neg(\,\mathrm{set}\,(a) \land \neg\mathrm{set}\,(a)\,)$$

が成り立つ． ∎

「集合であり真類でもある類は存在しない」とは言ったものの，それはあくまで

$$\Sigma \vdash \neg(\,\mathrm{set}\,(a) \wedge \neg \mathrm{set}\,(a)\,)$$

を翻訳したに過ぎないのであって，もしかすると

$$\Sigma \vdash \mathrm{set}\,(a) \wedge \neg \mathrm{set}\,(a)$$

も導かれるかもしれない．この場合 Σ は矛盾することになるが，Σ の無矛盾性が不明であるためこの事態が起こらないとは言えない．

推論法則 2.3.13 (量化記号の性質 (ロ)). A, B を $\mathcal{L}'$ の式とし，x を A, B に現れる文字とするとき，x のみが A, B で量化されていないならば以下は定理である:

(a) $\exists x(A(x) \vee B(x)) \leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$.

(b) $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$.

証明.

(a) いま $c(x) \overset{\mathrm{def}}{\leftrightarrow} A(x) \vee B(x)$ とおけば，$\exists x(A(x) \vee B(x))$ と $\exists x(C(x))$ は同じ記号列であるから

$$\exists x(A(x) \vee B(x)) \rightarrow \exists x C(x) \tag{2.36}$$

が成立する．また推論法則 2.3.1 より

$$\exists x C(x) \rightarrow C(\varepsilon x C(x)) \tag{2.37}$$

が成立する．$C(\varepsilon x C(x))$ と $A(\varepsilon x C(x)) \vee B(\varepsilon x C(x))$ は同じ記号列であるから

$$C(\varepsilon x C(x)) \rightarrow A(\varepsilon x C(x)) \vee B(\varepsilon x C(x)) \tag{2.38}$$

が成立する．ここで推論法則 2.3.1 と推論規則**??**より

$$\begin{aligned} A(\varepsilon x C(x)) &\rightarrow \exists x A(x) \\ &\rightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x), \\ B(\varepsilon x C(x)) &\rightarrow \exists x B(x) \\ &\rightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x) \end{aligned}$$

が成立するので，場合分け法則より

$$A(\varepsilon x C(x)) \vee B(\varepsilon x C(x)) \rightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x) \tag{2.39}$$

が成り立つ．(2.36) (2.37) (2.38) (2.39) に推論法則 2.3.1 を順次適用すれば

$$\exists x(A(x) \vee B(x)) \rightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$$

が得られる．他方，推論規則 2.2.26 より

$$\begin{aligned} \exists x A(x) &\rightarrow A(\varepsilon x A(x)) \\ &\rightarrow A(\varepsilon x A(x)) \vee B(\varepsilon x A(x)) \\ &\rightarrow C(\varepsilon x A(x)) \\ &\rightarrow C(\varepsilon x C(x)) \\ &\rightarrow \exists x C(x) \\ &\rightarrow \exists x(A(x) \vee B(x)) \end{aligned}$$

が成立し，A を B に置き換えれば $\exists x B(x) \;\rightarrow\; \exists x(A(x) \vee B(x))$ も成り立つので，場合分け法則より

$$\exists x A(x) \vee \exists x B(x) \;\rightarrow\; \exists x(A(x) \vee B(x))$$

も得られる．

(b)　簡略して説明すれば

$$\begin{aligned}
\forall x\,(A(x) \wedge B(x)) &\leftrightarrow \neg\exists x\,\neg(A(x) \wedge B(x)) && (\text{推論法則 } 2.2.30)\\
&\leftrightarrow \neg\exists x\,(\neg A(x) \vee \neg B(x)) && (\text{De Morgan の法則})\\
&\leftrightarrow \neg(\exists x\,\neg A(x) \vee \exists x\,\neg B(x)) && (\text{前段の対偶})\\
&\leftrightarrow \neg(\neg\forall x A(x) \vee \neg\forall x B(x)) && (\text{推論法則 } 2.2.28)\\
&\leftrightarrow \neg\neg\forall x A(x) \wedge \neg\neg\forall x B(x) && (\text{De Morgan の法則})\\
&\leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x) && (\text{二重否定の法則})
\end{aligned}$$

となる． ∎

推論法則 2.3.14 (量化記号の性質 (イ)).　A, B を $\mathcal{L}'$ の式とし，x を A, B に現れる文字とし，x のみが A, B で量化されていないとする．$\mathcal{L}$ の任意の対象 τ に対して

$$A(\tau) \;\leftrightarrow\; B(\tau)$$

が成り立っているとき，

$$\exists x A(x) \;\leftrightarrow\; \exists x B(x)$$

および

$$\forall x A(x) \;\leftrightarrow\; \forall x B(x)$$

が成り立つ．

証明.　いま，$\mathcal{L}$ の任意の対象 τ に対して

$$A(\tau) \;\leftrightarrow\; B(\tau) \tag{2.40}$$

が成り立っているとする．ここで

$$\exists x A(x)$$

が成り立っていると仮定すると，

$$\tau \overset{\text{def}}{=\!=} \varepsilon x A(x)$$

とおけば存在記号に関する規則より

$$A(\tau)$$

が成立し，(2.40) と併せて

$$B(\tau)$$

が成立する．再び存在記号に関する規則より

$$\exists x B(x)$$

が成り立つので，演繹法則から

$$\exists x A(x) \rightarrow \exists x B(x)$$

が得られる．A と B の立場を入れ替えれば

$$\exists x B(x) \rightarrow \exists x A(x)$$

も得られる．今度は

$$\forall x A(x)$$

が成り立っていると仮定すると，推論法則**??**より $\mathcal{L}$ の任意の対象 τ に対して

$$A(\tau)$$

が成立し，(2.40) と併せて

$$B(\tau)$$

が成立する．τ の任意性と推論法則**??**より

$$\forall x B(x)$$

が成り立つので，演繹法則から

$$\forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x)$$

が得られる．A と B の立場を入れ替えれば

$$\forall x B(x) \rightarrow \forall x A(x)$$

も得られる． ∎

推論法則 2.3.15 (量化記号に対する De Morgan の法則).　A を $\mathcal{L}'$ の式とし，x を A に現れる文字とし，x のみが A で量化されていないとする．このとき

$$\exists x \neg A(x) \leftrightarrow \neg \forall x A(x)$$

および

$$\forall x \neg A(x) \leftrightarrow \neg \exists x A(x)$$

が成り立つ．

略証.　推論規則 2.2.26 より

$$\exists x \neg A(x) \leftrightarrow \neg A(\varepsilon x \neg A(x))$$

は定理である．他方で推論規則 2.2.26 より

$$A(\varepsilon x \neg A(x)) \leftrightarrow \forall x A(x)$$

もまた定理であり，この対偶を取れば

$$\neg A(\varepsilon x \neg A(x)) \leftrightarrow \neg \forall x A(x)$$

が成り立つ．ゆえに

$$\exists x \neg A(x) \leftrightarrow \neg \forall x A(x)$$

が従う．A を $\neg A$ に置き換えれば

$$\forall x \neg A(x) \leftrightarrow \neg \exists x \neg\neg A(x)$$

が成り立ち，また $\mathcal{L}$ の任意の対象 τ に対して

$$A(\tau) \leftrightarrow \neg\neg A(\tau)$$

が成り立つので，推論法則 2.3.14 より

$$\exists x \neg\neg A(x) \leftrightarrow \exists x A(x)$$

も成り立つ．ゆえに

$$\forall x \neg A(x) \leftrightarrow \neg \exists x A(x)$$

が従う．　∎

第 3 章

集合

a, b を $\mathcal{L}$ の項とするとき，

$$a \notin b \overset{\text{def}}{\longleftrightarrow} \neg a \in b$$

で $a \notin b$ を定める．同様に

$$a \neq b \overset{\text{def}}{\longleftrightarrow} \neg a = b$$

で $a \neq b$ を定める．

類とされた項の多くは集合であるが，**類が全て集合であると考えると矛盾が起こる**．たとえば Russell のパラドックスで有名な

$$R \overset{\text{def}}{=\!=} \{\, x \mid x \notin x \,\}$$

なる類が集合であるとすると ($\overset{\text{def}}{\longleftrightarrow}$ は "式" に対する略記の導入に使ったが，$\overset{\text{def}}{=\!=}$ とは "類" に対する略記を導入するために使う定義記号である)

$$\Sigma \vdash R \notin R \ \leftrightarrow \ R \in R$$

が成り立ってしまい (正式な推論は無視してラフに考えれば)，これは $\Sigma \vdash \perp$ を導く．この種の矛盾を回避するために類を導入したのであり，集合とは類の中で特定の性質をもつものに限られる．

定義 3.0.1 (集合). a を類とするとき，a が集合であるという言明を

$$\operatorname{set}(a) \overset{\text{def}}{\longleftrightarrow} \exists x \,(\, a = x \,)$$

で定める．$\Sigma \vdash \operatorname{set}(a)$ を満たす類 a を**集合 (set)** と呼び，$\Sigma \vdash \neg\operatorname{set}(a)$ を満たす類 a を**真類 (proper class)** と呼ぶ．

φ を $\mathcal{L}$ の式とし，x を φ に自由に現れる変項とし，x のみが φ で自由であるとする．このとき

$$\operatorname{set}(\{\, x \mid \varphi(x) \,\}) \vdash \operatorname{set}(\{\, x \mid \varphi(x) \,\})$$

が満たされている．つまり

$$\operatorname{set}(\{\, x \mid \varphi(x) \,\}) \vdash \exists y \ \left(\{\, x \mid \varphi(x) \,\} = y \right)$$

が成り立っているということであるが，$\{\, x \mid \varphi(x) \,\} = y$ を

$$\forall x\,(\,\varphi(x) \;\leftrightarrow\; x \in y\,)$$

と書き換えれば，存在記号の推論規則より

$$\mathrm{set}\,(\{\, x \mid \varphi(x) \,\}) \vdash \{\, x \mid \varphi(x) \,\} = \varepsilon y\, \forall x\,(\,\varphi(x) \;\leftrightarrow\; x \in y\,)$$

が得られる．

定理 3.0.2 (集合である内包項は ε 項で書ける).　φ を $\mathcal{L}$ の式とし，x を φ に自由に現れる変項とし，x のみが φ で自由であるとする．このとき

$$\mathrm{set}\,(\{\, x \mid \varphi(x) \,\}) \vdash \{\, x \mid \varphi(x) \,\} = \varepsilon y\, \forall x\,(\,\varphi(x) \;\leftrightarrow\; x \in y\,).$$

ブルバキ [5] では τ 項を，島内 [6] では ε 項のみを導入して $\varepsilon y \forall x\,(\,\varphi(x) \;\leftrightarrow\; x \in y\,)$ によって $\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$ を定めているが，この定め方には欠点がある．というのも，本稿と同じくブルバキ [5] の τ 項も島内 [6] の ε 項も集合であるから，

$$\exists y\, \forall x\,(\,\varphi(x) \;\leftrightarrow\; x \in y\,)$$

が成立しない場合は $\varepsilon y \forall x\,(\,\varphi(x) \;\leftrightarrow\; x \in y\,)$ は正体不明になってしまい，$\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$ が「性質 φ を持つ集合の全体」の意味を持たないのである．本稿では内包項と ε 項を別々に生成しているのでこの欠点は解消される．

3.1　相等性

本稿において “等しい” とは項に対する言明であって，a と b を項とするとき

$$a = b$$

なる式で表される．この記号

$$=$$

は等号 **(equal sign)** と呼ばれるが，現時点では述語として導入されているだけで，推論操作における働きは不明のままである．本節では，いつ類は等しくなるのか，そして，等しい場合に何が起きるのか，の二つが主題となる．

公理 3.1.1 (外延性の公理 (Extensionality)).　a と b を類とするとき次の式を **EXT** により参照する：

$$\forall x\,(\,x \in a \;\leftrightarrow\; x \in b\,) \;\rightarrow\; a = b.$$

定理 3.1.2 (任意の類は自分自身と等しい).　任意の類 τ に対して

$$\mathbf{EXT} \vdash \tau = \tau.$$

略証.　いま

$$\sigma \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon s \neg(\,s \in \tau \;\leftrightarrow\; s \in \tau\,)$$

とおく．推論法則 2.1.3 より

$$\vdash \sigma \in \tau \leftrightarrow \sigma \in \tau$$

が成り立つから，全称の導出 (推論法則 2.2.27) より

$$\vdash \forall s\,(\, s \in \tau \leftrightarrow s \in \tau\,)$$

が成り立つ．外延性の公理より

$$\mathbf{EXT} \vdash \forall s\,(\, s \in \tau \leftrightarrow s \in \tau\,) \longrightarrow \tau = \tau$$

となるので，三段論法より

$$\mathbf{EXT} \vdash \tau = \tau$$

が得られる． ∎

定理 3.1.3 (主要 ε 項は集合である). τ を類である ε 項とするとき

$$\mathbf{EXT} \vdash \mathrm{set}\,(\tau).$$

略証. 定理 3.1.2 より

$$\mathbf{EXT} \vdash \tau = \tau$$

が成立するので，存在記号の推論規則より

$$\mathbf{EXT} \vdash \exists x\ (\,\tau = x\,)$$

が成立する． ∎

例えば

$$a = b$$

と書いてあったら “a と b は等しい” と読めるわけだが，明らかに a は b とは違うではないではないか！こんなことはしょっちゅう起こることであって，上で述べたように $\{\, x \mid A(x)\,\}$ が集合なら

$$\{\, x \mid A(x)\,\} = \varepsilon y \forall x\ \big(A(x) \leftrightarrow x \in y\big)$$

が成り立ったりする．そこで “数学的に等しいとは何事か” という疑問が浮かぶのは至極自然であって，それに答えるのが次の相等性公理である．

公理 3.1.4 (相等性公理). a, b, c を類とするとき次の式を **EQ** により参照する：

$$\begin{aligned} &a = b \longrightarrow b = a, \\ &a = b \longrightarrow (\,a \in c \longrightarrow b \in c\,), \\ &a = b \longrightarrow (\,c \in a \longrightarrow c \in b\,). \end{aligned}$$

定理 3.1.5 (外延性の公理の逆も成り立つ).　a と b を類とするとき

$$\mathbf{EQ} \vdash a = b \;\rightarrow\; \forall x\,(\,x \in a \;\leftrightarrow\; x \in b\,).$$

証明.　いま

$$\tau \stackrel{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon x \rightharpoondown (\,x \in a \;\leftrightarrow\; x \in b\,)$$

とおく．相等性公理より

$$\mathbf{EQ} \vdash a = b \;\rightarrow\; (\,\tau \in a \;\rightarrow\; \tau \in b\,)$$

となるので，演繹法則の逆より

$$a = b,\ \mathbf{EQ} \vdash \tau \in a \;\rightarrow\; \tau \in b \tag{3.1}$$

となる．また相等性公理と演繹法則の逆により

$$a = b,\ \mathbf{EQ} \vdash b = a$$

が成り立ち，同じく相等性公理より

$$\mathbf{EQ} \vdash b = a \;\rightarrow\; (\,\tau \in b \;\rightarrow\; \tau \in a\,)$$

も成り立つので，三段論法より

$$a = b,\ \mathbf{EQ} \vdash \tau \in b \;\rightarrow\; \tau \in a \tag{3.2}$$

も得られる．論理積の導入により

$$a = b,\ \mathbf{EQ} \vdash (\,\tau \in a \;\rightarrow\; \tau \in b\,) \;\rightarrow\; (\,(\,\tau \in b \;\rightarrow\; \tau \in a\,) \;\rightarrow\; (\,\tau \in a \;\leftrightarrow\; \tau \in b\,)\,)$$

が成り立つので，(3.1) との三段論法より

$$a = b,\ \mathbf{EQ} \vdash (\,\tau \in b \;\rightarrow\; \tau \in a\,) \;\rightarrow\; (\,\tau \in a \;\leftrightarrow\; \tau \in b\,)$$

が従い，(3.2) との三段論法より

$$a = b,\ \mathbf{EQ} \vdash \tau \in a \;\leftrightarrow\; \tau \in b$$

が従う．全称の導出 (推論法則 2.2.27) より

$$a = b,\ \mathbf{EQ} \vdash \forall x\,(\,x \in a \;\leftrightarrow\; x \in b\,)$$

が成立し，演繹法則より

$$\mathbf{EQ} \vdash a = b \;\rightarrow\; \forall x\,(\,x \in a \;\leftrightarrow\; x \in b\,)$$

が得られる．　∎

公理 3.1.6 (内包性公理). φ を $\mathcal{L}$ の式とし，y を φ に自由に現れる変項とし，φ に自由に現れる項は y のみであるとし，x は φ で y への代入について自由であるとするとき，次の式を **COM** により参照する：

$$\forall x\,(\,x \in \{\,y \mid \varphi(y)\,\} \leftrightarrow \varphi(x)\,).$$

定理 3.1.7 (条件を満たす集合は要素である). φ を $\mathcal{L}$ の式とし，x を φ に自由に現れる変項とし，x のみが φ で束縛されていないとする．このとき，任意の類 a に対して

$$\mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \varphi(a) \rightarrow \big(\mathrm{set}\,(a) \rightarrow a \in \{\,x \mid \varphi(x)\,\}\big)\,.$$

略証.

$$\mathrm{set}\,(a) \vdash \exists x\,(\,a = x\,)$$

より，

$$\tau \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon x\,(\,a = x\,)$$

とおけば

$$\mathrm{set}\,(a) \vdash a = \tau$$

となる．相等性の公理より

$$\mathrm{set}\,(a), \mathbf{EQ} \vdash a = \tau \rightarrow (\,\varphi(a) \rightarrow \varphi(\tau)\,)$$

となるので，三段論法と演繹法則の逆より

$$\varphi(a), \mathrm{set}\,(a), \mathbf{EQ} \vdash \varphi(\tau)$$

となる．内包性公理より

$$\varphi(a), \mathrm{set}\,(a), \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \tau \in \{\,x \mid A(x)\,\}$$

が従い，相等性の公理から

$$\varphi(a), \mathrm{set}\,(a), \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash a \in \{\,x \mid A(x)\,\}$$

が成立する．演繹法則より

$$\varphi(a), \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \mathrm{set}\,(a) \rightarrow a \in \{\,x \mid A(x)\,\},$$
$$\mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \varphi(a) \rightarrow \big(\mathrm{set}\,(a) \rightarrow a \in \{\,x \mid \varphi(x)\,\}\big)$$

が従う． ∎

定義 3.1.8 (宇宙). $\mathbf{V} \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \{\,x \mid x = x\,\}$ で定める類 $\mathbf{V}$ を宇宙 **(Universe)** と呼ぶ.

宇宙とは集合の全体を表すが，これ自体は集合ではない (定理**??**)．ここで $\mathbf{V}$ が集合の全体を表すとは，任意の類 a に対して「a が $\mathbf{V}$ の要素ならば a は集合であり，逆に a が集合ならば a は $\mathbf{V}$ の要素である」という意味である (定理 3.1.10)．また $\mathbf{V}$ のより具体的な構造ものちに判る (定理**??**)．ちなみに名前の V とは Von Neumann の V である．

公理 3.1.9 (要素の公理). 次の公理を **ELE** によって参照する: a と b を類とするとき

$$a \in b \;\longrightarrow\; \mathrm{set}\,(a).$$

要素の公理は**要素となりうる類は集合である**と規制している．もともと $\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$ に期されていた「$\varphi(x)$ を満たす集合 x の全体」の意味を実質化するために要素の公理を設けたのである．

定理 3.1.10 ($\mathbf{V}$ は集合の全体である). a を類とするとき次が成り立つ:

$$\mathbf{ELE} \vdash a \in \mathbf{V} \;\longrightarrow\; \mathrm{set}\,(a),$$
$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \mathrm{set}\,(a) \;\longrightarrow\; a \in \mathbf{V}.$$

証明． a を類とするとき，まず要素の公理より

$$\mathbf{ELE} \vdash a \in \mathbf{V} \;\longrightarrow\; \mathrm{set}\,(a)$$

が得られる．逆を示す．いま

$$\tau \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon x\,(\, a = x \,)$$

とおくと，

$$\mathrm{set}\,(a) \vdash \exists x\,(\, a = x \,)$$

と

$$\mathrm{set}\,(a) \vdash \exists x\,(\, a = x \,) \;\longrightarrow\; a = \tau$$

(存在記号の推論規則) より

$$\mathrm{set}\,(a) \vdash a = \tau \tag{3.3}$$

が成り立つ．他方で定理 3.1.2 と内包性公理より

$$\mathbf{EXT} \vdash \tau = \tau,$$
$$\mathbf{COM} \vdash \tau = \tau \;\longrightarrow\; \tau \in \mathbf{V}$$

が成り立つので，三段論法より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \tau \in \mathbf{V} \tag{3.4}$$

となる．ここで相等性公理より

$$\mathbf{EQ} \vdash a = \tau \;\longrightarrow\; \tau = a$$

が成り立つので，(3.3) と三段論法より

$$\mathrm{set}\,(a), \mathbf{EQ} \vdash \tau = a \tag{3.5}$$

となる．同じく相等性公理より

$$\mathbf{EQ} \vdash \tau = a \;\rightarrow\; (\,\tau \in \mathbf{V} \;\rightarrow\; a \in \mathbf{V}\,)$$

が成り立つので，(3.5) と三段論法より

$$\mathrm{set}\,(a),\; \mathbf{EQ} \vdash \tau \in \mathbf{V} \;\rightarrow\; a \in \mathbf{V}$$

となり，(3.4) と三段論法より

$$\mathrm{set}\,(a),\; \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash a \in \mathbf{V}$$

が成り立つ．最後に演繹法則より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \mathrm{set}\,(a) \;\rightarrow\; a \in \mathbf{V}$$

が得られる． ∎

推論法則 3.1.11 (同値関係の可換律).　A, B を $\mathcal{L}$ の文とするとき

$$\vdash (A \;\leftrightarrow\; B) \;\rightarrow\; (B \;\leftrightarrow\; A).$$

略証.　論理積の除去規則より

$$A \;\leftrightarrow\; B \vdash A \;\rightarrow\; B, \tag{3.6}$$

$$A \;\leftrightarrow\; B \vdash B \;\rightarrow\; A \tag{3.7}$$

となる．他方で論理積の導入規則より

$$\vdash (B \;\rightarrow\; A) \;\rightarrow\; ((A \;\rightarrow\; B) \;\rightarrow\; (B \;\leftrightarrow\; A))$$

が成り立つので

$$A \;\leftrightarrow\; B \vdash (B \;\rightarrow\; A) \;\rightarrow\; ((A \;\rightarrow\; B) \;\rightarrow\; (B \;\leftrightarrow\; A))$$

も成り立つ．これと (3.6) との三段論法より

$$A \;\leftrightarrow\; B \vdash (A \;\rightarrow\; B) \;\rightarrow\; (B \;\leftrightarrow\; A)$$

となり，(3.7) との三段論法より

$$A \;\leftrightarrow\; B \vdash B \;\leftrightarrow\; A$$

が得られる． ∎

推論法則 3.1.12 (同値関係の推移律).　A, B, C を $\mathcal{L}$ の文とするとき

$$\vdash (A \leftrightarrow B) \rightarrow ((B \leftrightarrow C) \rightarrow (A \leftrightarrow C)).$$

略証.　論理積の除去法則より

$$A \leftrightarrow B \vdash A \rightarrow B,$$
$$A \leftrightarrow B \vdash B \rightarrow A$$

が成り立つので

$$A \leftrightarrow B,\ B \leftrightarrow C \vdash A \rightarrow B, \qquad (3.8)$$
$$A \leftrightarrow B,\ B \leftrightarrow C \vdash B \rightarrow A$$

も成り立つし，対称的に

$$A \leftrightarrow B,\ B \leftrightarrow C \vdash B \rightarrow C, \qquad (3.9)$$
$$A \leftrightarrow B,\ B \leftrightarrow C \vdash C \rightarrow B$$

も成り立つ．含意の推移律 (推論法則 2.3.1) より

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

となるので，(3.8) との三段論法より

$$A \leftrightarrow B,\ B \leftrightarrow C \vdash (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$$

が成り立ち，(3.9) との三段論法より

$$A \leftrightarrow B,\ B \leftrightarrow C \vdash A \rightarrow C \qquad (3.10)$$

が成り立つ．同様にして

$$A \leftrightarrow B,\ B \leftrightarrow C \vdash C \rightarrow A \qquad (3.11)$$

も得られる．論理積の導入規則より

$$\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow (A \leftrightarrow C))$$

が成り立つので，(3.10) との三段論法より

$$A \leftrightarrow B,\ B \leftrightarrow C \vdash (C \rightarrow A) \rightarrow (A \leftrightarrow C)$$

となり，(3.11) との三段論法より

$$A \leftrightarrow B,\ B \leftrightarrow C \vdash A \leftrightarrow C$$

となる．あとは演繹規則を二回適用すれば

$$\vdash (A \leftrightarrow B) \rightarrow ((B \leftrightarrow C) \rightarrow (A \leftrightarrow C))$$

が得られる．　∎

定理 3.1.13 (等号の推移律).　a, b, c を類とするとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash a = b \ \rightarrow \ (\, a = c \ \rightarrow \ b = c \,).$$

略証.　まずは

$$a = b,\ a = c,\ \mathbf{EQ} \vdash \forall x \,(\, x \in b \ \leftrightarrow \ x \in c \,)$$

を示したいので

$$\tau \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon x \neg (\, x \in b \ \leftrightarrow \ x \in c \,)$$

とおく (b, c が $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項でなければ $x \in b \ \leftrightarrow \ x \in c$ を書き換える)．相等性公理より

$$a = b,\ a = c,\ \mathbf{EQ} \vdash a = b \ \rightarrow \ (\, \tau \in a \ \rightarrow \ \tau \in b \,)$$

が成り立つので，

$$a = b,\ a = c,\ \mathbf{EQ} \vdash a = b \tag{3.12}$$

との三段論法より

$$a = b,\ a = c,\ \mathbf{EQ} \vdash \tau \in a \ \rightarrow \ \tau \in b \tag{3.13}$$

となる．同じく相等性公理より

$$a = b,\ a = c,\ \mathbf{EQ} \vdash a = b \ \rightarrow \ b = a,$$

が成り立つので，(3.12) との三段論法より

$$a = b,\ a = c,\ \mathbf{EQ} \vdash b = a$$

となり，同様に相等性公理から

$$a = b,\ a = c,\ \mathbf{EQ} \vdash b = a \ \rightarrow \ (\, \tau \in b \ \rightarrow \ \tau \in a \,)$$

が成り立つので，三段論法より

$$a = b,\ a = c,\ \mathbf{EQ} \vdash \tau \in b \ \rightarrow \ \tau \in a \tag{3.14}$$

となる．論理積の導入規則より

$$a = b,\ a = c,\ \mathbf{EQ} \vdash (\tau \in a \ \rightarrow \ \tau \in b) \ \rightarrow \ ((\tau \in b \ \rightarrow \ \tau \in a) \ \rightarrow \ (\tau \in a \ \leftrightarrow \ \tau \in b))$$

が成り立つので，(3.13) との三段論法より

$$a = b,\ a = c,\ \mathbf{EQ} \vdash (\tau \in b \ \rightarrow \ \tau \in a) \ \rightarrow \ (\tau \in a \ \leftrightarrow \ \tau \in b)$$

となり，(3.14) との三段論法より

$$a = b,\ a = c,\ \mathbf{EQ} \vdash \tau \in a \ \leftrightarrow \ \tau \in b \tag{3.15}$$

となる．対称的に

$$a = b,\ a = c,\ \mathbf{EQ} \vdash \tau \in a \leftrightarrow \tau \in c \tag{3.16}$$

も得られる．ここで含意の可換律 (推論法則 3.1.11) より

$$a = b,\ a = c,\ \mathbf{EQ} \vdash (\tau \in a \leftrightarrow \tau \in b) \rightarrow (\tau \in b \leftrightarrow \tau \in a)$$

が成り立つので，(3.15) との三段論法より

$$a = b,\ a = c,\ \mathbf{EQ} \vdash \tau \in b \leftrightarrow \tau \in a \tag{3.17}$$

となる．また含意の推移律 (推論法則 3.1.12) より

$$a = b,\ a = c,\ \mathbf{EQ} \vdash (\tau \in b \leftrightarrow \tau \in a) \rightarrow ((\tau \in a \leftrightarrow \tau \in c) \rightarrow (\tau \in b \leftrightarrow \tau \in c))$$

が成り立つので，(3.17) との三段論法より

$$a = b,\ a = c,\ \mathbf{EQ} \vdash (\tau \in a \leftrightarrow \tau \in c) \rightarrow (\tau \in b \leftrightarrow \tau \in c)$$

となり，(3.16) との三段論法より

$$a = b,\ a = c,\ \mathbf{EQ} \vdash \tau \in b \leftrightarrow \tau \in c$$

が得られる．全称の導出 (推論法則 2.2.27) より

$$a = b,\ a = c,\ \mathbf{EQ} \vdash (\tau \in b \leftrightarrow \tau \in c) \rightarrow \forall x (x \in b \leftrightarrow x \in c)$$

となるので，三段論法より

$$a = b,\ a = c,\ \mathbf{EQ} \vdash \forall x (x \in b \leftrightarrow x \in c)$$

となり，外延性公理より

$$a = b,\ a = c,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash \forall x (x \in b \leftrightarrow x \in c) \rightarrow b = c$$

となるので，三段論法より

$$a = b,\ a = c,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash b = c$$

が得られる． ∎

等号の対称律と推移律について

本稿では等号の対称律

$$a = b \;\rightarrow\; b = a$$

を公理としたが，逆に推移律を公理にすれば

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash a = b \;\rightarrow\; b = a$$

が成立する．実際

$$\begin{aligned} a = b,\ \mathbf{EQ} &\vdash a = a \;\rightarrow\; b = a, \\ \mathbf{EXT} &\vdash a = a, && (\text{定理 } 3.1.2), \\ a = b,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} &\vdash b = a && (\text{三段論法}) \end{aligned}$$

となる．つまり等号の対称律と推移律は外延性公理の下で同値なのである．

3.2　代入原理

a と b を類とし，φ を x のみが自由に現れる式とするとき，

$$a = b$$

ならば a と b をそれぞれ φ の自由な x に代入しても

$$\varphi(a) \;\leftrightarrow\; \varphi(b)$$

が成立するというのは**代入原理 (the principle of substitution)** と呼ばれる．この原理の証明は相等性公理に負うところが多いが，本稿では ε 項という厄介なものを抱え込んでいるため **EQ** だけでは不十分であり，次に追加する公理が必要になる．

公理 3.2.1 (ε 項に対する相等性公理)．　a, b を類とし，φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とし，φ には変項 x, y が自由に現れ，また φ に自由に現れる変項はこれらのみであるとする．このとき

$$\mathbf{EQ}_{\mathcal{E}} \overset{\text{def}}{\longleftrightarrow} a = b \;\rightarrow\; \varepsilon x \varphi(x, a) = \varepsilon x \varphi(x, b).$$

代入原理を示すには構造的帰納法の原理が必要になるので，証明はメタなものとなる．

定理 3.2.2 (代入原理)．　a, b を類とし，φ を $\mathcal{L}$ の式とし，x を φ に自由に現れる変項とし，φ に自由に現れる変項は x のみであるとする．このとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{EQ}_{\mathcal{E}} \vdash a = b \;\rightarrow\; (\,\varphi(a) \;\leftrightarrow\; \varphi(b)\,).$$

略証．

step1　c を類として，φ が

$$x \in c$$

なる式であるとき，

$$a = b,\ \mathbf{EQ} \vdash a \in c\ \rightarrow\ b \in c$$

となる．また

$$a = b,\ \mathbf{EQ} \vdash b = a$$

より

$$a = b,\ \mathbf{EQ} \vdash b \in c\ \rightarrow\ a \in c$$

も成り立つ．ゆえに

$$a = b,\ \mathbf{EQ} \vdash a \in c\ \leftrightarrow\ b \in c$$

が得られる．同様に

$$a = b,\ \mathbf{EQ} \vdash c \in a\ \leftrightarrow\ c \in b$$

も得られる．

step2　φ が

$$x \in \varepsilon y\, R(x, y)$$

なる式であるとき，

$$a = b,\ \mathbf{EQ}_{\mathcal{E}} \vdash \varepsilon y\, R(a, y) = \varepsilon y\, R(b, y)$$

となる．

$$a = b,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash (\ \varepsilon y\, R(a, y) = \varepsilon y\, R(b, y)\,)\ \rightarrow\ (\ a \in \varepsilon y\, R(a, y)\ \leftrightarrow\ a \in \varepsilon y\, R(b, y)\,)$$

なので

$$a = b,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{EQ}_{\mathcal{E}} \vdash a \in \varepsilon y\, R(a, y)\ \leftrightarrow\ a \in \varepsilon y\, R(b, y)$$

となる．

$$a = b,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash a \in \varepsilon y\, R(b, y)\ \leftrightarrow\ b \in \varepsilon y\, R(b, y)$$

も成り立つので

$$a = b,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{EQ}_{\mathcal{E}} \vdash a \in \varepsilon y\, R(a, y)\ \leftrightarrow\ b \in \varepsilon y\, R(b, y)$$

が得られる．

step3　φ が

$$\varepsilon y R(x,y) \in \varepsilon z T(x,z)$$

なる形のとき，

$$a=b,\ \mathbf{EQ}_{\mathcal{E}} \vdash \varepsilon y R(a,y) = \varepsilon y R(b,y)$$

と

$$a=b,\ \mathbf{EQ}, \mathbf{EQ}_{\mathcal{E}} \vdash (\ \varepsilon y R(a,y) = \varepsilon y R(b,y)\ ) \ \longrightarrow\ (\ \varepsilon y R(a,y) \in \varepsilon z T(a,z)\ \leftrightarrow\ \varepsilon y R(b,y) \in \varepsilon z T(a,z)\ )$$

より

$$a=b,\ \mathbf{EQ}, \mathbf{EQ}_{\mathcal{E}} \vdash \varepsilon y R(a,y) \in \varepsilon z T(a,z)\ \leftrightarrow\ \varepsilon y R(b,y) \in \varepsilon z T(a,z)$$

が成り立つ．他方で

$$a=b,\ \mathbf{EQ}_{\mathcal{E}} \vdash \varepsilon z T(a,z) = \varepsilon z T(b,z)$$

と

$$a=b,\ \mathbf{EQ}, \mathbf{EQ}_{\mathcal{E}} \vdash (\ \varepsilon z T(a,z) = \varepsilon z T(b,z)\ ) \ \longrightarrow\ (\ \varepsilon y R(b,y) \in \varepsilon z T(a,z)\ \leftrightarrow\ \varepsilon y R(b,y) \in \varepsilon z T(b,z)\ )$$

より

$$a=b,\ \mathbf{EQ}, \mathbf{EQ}_{\mathcal{E}} \vdash \varepsilon y R(b,y) \in \varepsilon z T(a,z)\ \leftrightarrow\ \varepsilon y R(b,y) \in \varepsilon z T(b,z)$$

が成り立つ．同値関係の推移律 (3.1.12) より

$$a=b,\ \mathbf{EQ}, \mathbf{EQ}_{\mathcal{E}} \vdash \varepsilon y R(a,y) \in \varepsilon z T(a,z)\ \leftrightarrow\ \varepsilon y R(b,y) \in \varepsilon z T(b,z)$$

が成立する．

3.3　空集合

推論法則 3.3.1 (分配された論理積の簡約).　A, B, C を $\mathcal{L}$ の文とするとき，

$$\vdash (A \wedge C) \wedge (B \wedge C)\ \longrightarrow\ A \wedge B.$$

略証.　論理積の除去規則より

$$(A \wedge C) \wedge (B \wedge C) \vdash A \wedge C$$

となり，また同じく論理積の除去規則より

$$(A \wedge C) \wedge (B \wedge C) \vdash A \wedge C\ \longrightarrow\ A$$

となるので，三段論法より

$$(A \wedge C) \wedge (B \wedge C) \vdash A, \tag{3.18}$$

が従う．同様にして

$$(A \wedge C) \wedge (B \wedge C) \vdash B \tag{3.19}$$

も得られる．ここで論理積の導入規則より

$$(A \wedge C) \wedge (B \wedge C) \vdash A \;\rightarrow\; (B \;\rightarrow\; A \wedge B)$$

が成り立つので，(3.18) と (3.19) との三段論法より

$$(A \wedge C) \wedge (B \wedge C) \vdash A \wedge B$$

が出る． ▮

定義 3.3.2 (空集合). $\emptyset \overset{\text{def}}{=\!=} \{\, x \mid x \neq x \,\}$ で定める類 $\emptyset$ を**空集合 (empty set)** と呼ぶ.

x が集合であれば

$$x = x$$

が成り立つので，$\emptyset$ に入る集合など存在しない．つまり $\emptyset$ は丸っきり“空っぽ”なのである．さて，$\emptyset$ は集合であるか否か，という問題を考える．当然これが“大きすぎる集まり”であるはずはないし，そもそも名前に“集合”と付いているのだから $\emptyset$ は集合であるべきだと思われるのだが，実際にこれが集合であることを示すには少し骨が折れる．まずは置換公理と分出定理を拵えなくてはならない．

公理 3.3.3 (置換公理). φ を $\mathcal{L}$ の式とし，s, t を φ に自由に現れる変項とし，φ に自由に現れる項は s, t のみであるとし，x は φ で s への代入について自由であり，y, z, v は φ で t への代入について自由であるとするとき，

$$\mathbf{REP} \overset{\text{def}}{\longleftrightarrow} \forall x\, \forall y\, \forall z\, (\, \varphi(x,y) \wedge \varphi(x,z) \;\rightarrow\; y = z \,) \;\rightarrow\; \forall a\, \exists u\, \forall v\, (\, v \in u \;\leftrightarrow\; \exists x\, (\, x \in a \wedge \varphi(x,v)\,)\,).$$

$\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$ は集合であるとは限らないが，集合 a に対して

$$a \cap \{\, x \mid \varphi(x) \,\}$$

なる類は当然 a より“小さい集まり”なのだから，集合であってほしいものである．置換公理によってそのこと保証され，分出定理として知られている．

定理 3.3.4 (分出定理). φ を $\mathcal{L}$ の式とし，x を φ に自由に現れる変項とし，φ に自由に現れる項は x のみであるとする．このとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{EQ}_{\mathcal{E}}, \mathbf{REP} \vdash \forall a\, \exists s\, \forall x\, (\, x \in s \;\leftrightarrow\; x \in a \wedge \varphi(x)\,).$$

略証． y を，φ の x への代入について自由である変項とする．そして x と y が自由に現れる式 $\psi(x,y)$ を

$$x = y \wedge \varphi(x)$$

と設定する．

step1　まず

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash \forall x\, \forall y\, \forall z\, (\, \psi(x,y) \wedge \psi(x,z) \;\rightarrow\; y = z\,) \tag{3.20}$$

が成り立つことを示す．これを見越して

$$\tau \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon x \neg \forall y\, \forall z\, (\, \psi(x,y) \wedge \psi(x,z) \;\rightarrow\; y = z\,),$$
$$\sigma \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon y \neg \forall z\, (\, \psi(\tau,y) \wedge \psi(\tau,z) \;\rightarrow\; y = z\,),$$
$$\rho \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon z \neg (\, \psi(\tau,\sigma) \wedge \psi(\tau,z) \;\rightarrow\; \sigma = z\,)$$

とおく．$\psi(\tau,\sigma) \wedge \psi(\tau,\rho)$ は縮約可能であって (推論法則 3.3.1)

$$\vdash (\, \tau = \sigma \wedge \varphi(\tau)\,) \wedge (\, \tau = \rho \wedge \varphi(\tau)\,) \;\rightarrow\; \tau = \sigma \wedge \tau = \rho$$

が成り立つので

$$\psi(\tau,\sigma) \wedge \psi(\tau,\rho) \vdash \tau = \sigma \wedge \tau = \rho$$

がとなり，さらに論理積の除去法則より

$$\psi(\tau,\sigma) \wedge \psi(\tau,\rho) \vdash \tau = \sigma,$$
$$\psi(\tau,\sigma) \wedge \psi(\tau,\rho) \vdash \tau = \rho$$

が出る．ここで等号の推移律 (定理 3.1.13) より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash \tau = \sigma \;\rightarrow\; (\, \tau = \rho \;\rightarrow\; \sigma = \rho\,)$$

が成り立つので，三段論法を二回用いれば

$$\psi(\tau,\sigma) \wedge \psi(\tau,\rho),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash \sigma = \rho$$

が得られる．ゆえに演繹法則より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash \psi(\tau,\sigma) \wedge \psi(\tau,\rho) \;\rightarrow\; \sigma = \rho$$

となり，全称の導出 (推論法則 2.2.27) より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash \forall z\, (\, \psi(\tau,\sigma) \wedge \psi(\tau,z) \;\rightarrow\; \sigma = z\,),$$
$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash \forall y\, \forall z\, (\, \psi(\tau,y) \wedge \psi(\tau,z) \;\rightarrow\; y = z\,),$$
$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash \forall x\, \forall y\, \forall z\, (\, \psi(x,y) \wedge \psi(x,z) \;\rightarrow\; y = z\,)$$

が従う．

step2　置換公理より

$$\mathbf{REP} \vdash \forall x\,\forall y\,\forall z\,(\,\psi(x,y)\wedge\psi(x,z)\ \rightarrow\ y=z\,)\ \rightarrow\ \forall a\,\exists u\,\forall v\,(\,v\in u\ \leftrightarrow\ \exists x\,(\,x\in a\wedge\psi(x,v)\,)\,)$$

が成り立つので，(3.20) との三段論法より

$$\mathbf{EXT},\mathbf{EQ},\mathbf{REP} \vdash \forall a\,\exists u\,\forall v\,(\,v\in u\ \leftrightarrow\ \exists x\,(\,x\in a\wedge\psi(x,v)\,)\,) \tag{3.21}$$

が成立する．(3.20) を示したいので

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon a \rightarrow \exists s\,\forall x\,(\,x\in s\ \leftrightarrow\ x\in a\wedge\varphi(x)\,)$$

とおくと，全称記号の推論規則より

$$\begin{aligned}\mathbf{EXT},\mathbf{EQ},\mathbf{REP} \vdash &\forall a\,\exists u\,\forall v\,(\,v\in u\ \leftrightarrow\ \exists x\,(\,x\in a\wedge\psi(x,v)\,)\,)\\ &\rightarrow\ \exists u\,\forall v\,(\,v\in u\ \leftrightarrow\ \exists x\,(\,x\in \alpha\wedge\psi(x,v)\,)\,)\end{aligned}$$

となるので，(3.21) との三段論法より

$$\mathbf{EXT},\mathbf{EQ},\mathbf{REP} \vdash \exists u\,\forall v\,(\,v\in u\ \leftrightarrow\ \exists x\,(\,x\in \alpha\wedge\psi(x,v)\,)\,)$$

が従う．ここで

$$\zeta \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon u\,\forall v\,(\,v\in u\ \leftrightarrow\ \exists x\,(\,x\in \alpha\wedge\psi(x,v)\,)\,)$$

とおけば，量化子の推論規則と (3.21) との三段論法により

$$\mathbf{EXT},\mathbf{EQ},\mathbf{REP} \vdash \forall v\,(\,v\in \zeta\ \leftrightarrow\ \exists x\,(\,x\in \alpha\wedge\psi(x,v)\,)\,) \tag{3.22}$$

が成り立つ．

step3　最後に

$$\mathbf{EXT},\mathbf{EQ},\mathbf{EQ}_{\mathcal{E}},\mathbf{REP} \vdash \forall x\,(\,x\in \zeta\ \leftrightarrow\ x\in \alpha\wedge\varphi(x)\,) \tag{3.23}$$

となることを示す．いま

$$\tau \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon x \rightarrow (\,x\in \zeta\ \leftrightarrow\ x\in \alpha\wedge\varphi(x)\,)$$

とおけば，(3.22) と全称記号の推論規則より

$$\mathbf{EXT},\mathbf{EQ},\mathbf{REP} \vdash \tau\in\zeta\ \leftrightarrow\ \exists x\,(\,x\in \alpha\wedge\psi(x,\tau)\,) \tag{3.24}$$

が従う．ゆえに

$$\tau\in\zeta,\ \mathbf{EXT},\mathbf{EQ},\mathbf{REP} \vdash \exists x\,(\,x\in \alpha\wedge\psi(x,\tau)\,)$$

となる．ここで

$$\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon x\,(\,x\in \alpha\wedge\psi(x,\tau)\,)$$

とおけば

$$\tau\in\zeta,\ \mathbf{EXT},\mathbf{EQ},\mathbf{REP} \vdash \sigma\in\alpha\wedge\psi(\sigma,\tau)$$

となるので，

$$\tau \in \zeta,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{REP} \vdash \sigma \in \alpha,$$
$$\tau \in \zeta,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{REP} \vdash \sigma = \tau,$$
$$\tau \in \zeta,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{REP} \vdash \varphi(\sigma)$$

が従う．ところで相等性公理と代入原理 (定理 3.2.2) より

$$\tau \in \zeta,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{REP} \vdash \sigma = \tau \ \rightarrow \ (\sigma \in \alpha \ \rightarrow \ \tau \in \alpha),$$
$$\tau \in \zeta,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{EQ}_{\mathcal{E}}, \mathbf{REP} \vdash \sigma = \tau \ \rightarrow \ (\varphi(\sigma) \ \rightarrow \ \varphi(\tau)), \tag{3.25}$$

が成り立つので，三段論法より

$$\tau \in \zeta,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{REP} \vdash \tau \in \alpha,$$
$$\tau \in \zeta,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{EQ}_{\mathcal{E}}, \mathbf{REP} \vdash \varphi(\tau)$$

が従い

$$\tau \in \zeta,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{EQ}_{\mathcal{E}}, \mathbf{REP} \vdash \tau \in \alpha \wedge \varphi(\tau)$$

となる．以上で

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{EQ}_{\mathcal{E}}, \mathbf{REP} \vdash \tau \in \zeta \ \rightarrow \ \tau \in \alpha \wedge \varphi(\tau) \tag{3.26}$$

が得られた．逆に定理 3.1.2 と併せて

$$\tau \in \alpha \wedge \varphi(\tau),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{EQ}_{\mathcal{E}}, \mathbf{REP} \vdash \tau \in \alpha \wedge (\tau = \tau \wedge \varphi(\tau))$$

が成り立つので，存在記号の推論規則より

$$\tau \in \alpha \wedge \varphi(\tau),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{EQ}_{\mathcal{E}}, \mathbf{REP} \vdash \exists x\,(\,x \in \alpha \wedge \psi(x, \tau))$$

となる．他方で (3.24) より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{REP} \vdash \exists x\,(\,x \in \alpha \wedge \psi(x, \tau)) \ \rightarrow \ \tau \in \zeta$$

が成り立つので，三段論法より

$$\tau \in \alpha \wedge \varphi(\tau),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{EQ}_{\mathcal{E}}, \mathbf{REP} \vdash \tau \in \zeta$$

が従う．以上で

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{EQ}_{\mathcal{E}}, \mathbf{REP} \vdash \tau \in \alpha \wedge \varphi(\tau) \ \rightarrow \ \tau \in \zeta \tag{3.27}$$

も得られた．(3.26) と (3.27) および存在記号の推論規則より (3.23) が出る．すると存在記号の推論規則より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{EQ}_{\mathcal{E}}, \mathbf{REP} \vdash \exists s\, \forall x\,(\,x \in s \ \leftrightarrow \ x \in \alpha \wedge \varphi(x))$$

となり，全称の導出 (推論法則 2.2.27) より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{EQ}_{\mathcal{E}}, \mathbf{REP} \vdash \forall a\, \exists s\, \forall x\,(\,x \in s \ \leftrightarrow \ x \in a \wedge \varphi(x))$$

が従う． ∎

分出定理は $\mathbf{EQ}_{\mathcal{E}}$ を前提としているが，ステートメントの $\varphi(x)$ が

$$x \neq x$$

なる式の場合は

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{REP} \vdash \forall a \, \exists s \, \forall x \, (\, x \in s \;\leftrightarrow\; x \in a \wedge x \neq x \,)$$

が成立する．そもそも分出定理の証明で $\mathbf{EQ}_{\mathcal{E}}$ が必要になったのは

$$\sigma = \tau \;\rightarrow\; (\,\varphi(\sigma) \;\rightarrow\; \varphi(\tau)\,)$$

を用いるためであったが (3.25)，$\varphi(x)$ が $x \neq x$ なる単純な式である場合は

$$\mathbf{EXT} \vdash \sigma = \tau \;\rightarrow\; (\,\sigma \neq \sigma \;\rightarrow\; \tau \neq \tau\,)$$

が成り立つのである．実際

$$\begin{aligned}
\sigma = \tau,\ \tau = \tau,\ \mathbf{EXT} &\vdash \sigma = \sigma, && (\text{定理 } 3.1.2)\\
\sigma = \tau,\ \mathbf{EXT} &\vdash \tau = \tau \;\rightarrow\; \sigma = \sigma, && (\text{演繹法則 (メタ定理 } 2.1.7))\\
\sigma = \tau,\ \mathbf{EXT} &\vdash \sigma \neq \sigma \;\rightarrow\; \tau \neq \tau, && (\text{対偶 (推論法則 } 2.2.3))
\end{aligned}$$

となる．

定理 3.3.5 ($\emptyset$ は集合).

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{REP} \vdash \mathrm{set}\,(\emptyset).$$

略証.　前述のとおり

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{REP} \vdash \forall a \, \exists s \, \forall x \, (\, x \in s \;\leftrightarrow\; x \in a \wedge x \neq x \,)$$

が成立する．α を類である ε 項とすれば，全称記号の推論規則より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{REP} \vdash \exists s \, \forall x \, (\, x \in s \;\leftrightarrow\; x \in \alpha \wedge x \neq x \,)$$

となり，また

$$\sigma \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon s \, \forall x \, (\, x \in s \;\leftrightarrow\; x \in \alpha \wedge x \neq x \,)$$

とおけば存在記号の推論規則より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{REP} \vdash \forall x \, (\, x \in \sigma \;\leftrightarrow\; x \in \alpha \wedge x \neq x \,) \tag{3.28}$$

が成立する．いま

$$\tau \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon x \neg (\, x \in s \;\leftrightarrow\; x \neq x \,)$$

とおけば，(3.28) と全称記号の推論規則より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{REP} \vdash \tau \in \sigma \;\leftrightarrow\; \tau \in \alpha \wedge \tau \neq \tau$$

となるので

$$\tau \in \sigma,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{REP} \vdash \tau \in \alpha \wedge \tau \neq \tau$$

が従い，論理積の除去により

$$\tau \in \sigma,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{REP} \vdash \tau \neq \tau$$

が従う．以上で

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{REP} \vdash \tau \in \sigma \ \longrightarrow\ \tau \neq \tau \tag{3.29}$$

が得られた．逆に，定理 3.1.2 より

$$\mathbf{EXT} \vdash \tau = \tau$$

が成り立つので矛盾の推論規則と併せて

$$\tau \neq \tau,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{REP} \vdash \bot$$

となり，爆発律 (推論法則 2.2.20) より

$$\tau \neq \tau,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{REP} \vdash \tau \in \sigma$$

が従う．以上で

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{REP} \vdash \tau \neq \tau \ \longrightarrow\ \tau \in \sigma \tag{3.30}$$

も得られた．ゆえに (3.29) と (3.30) より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{REP} \vdash \tau \in \sigma \ \leftrightarrow\ \tau \neq \tau$$

が成立し，全称の導出 (推論法則 2.2.27) より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{REP} \vdash \forall x\,(\,x \in \sigma \ \leftrightarrow\ x \neq x\,) \tag{3.31}$$

が得られる．

次に

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{REP} \vdash \forall x\,(\,x \in \sigma \ \leftrightarrow\ x \in \{\,x \mid x \neq x\,\}\,) \tag{3.32}$$

を示す．いま

$$\chi \overset{\text{def}}{=\!=} x \to (\,x \in \sigma \ \leftrightarrow\ x \in \{\,x \mid x \neq x\,\}\,)$$

とおけば，(3.31) と全称記号の推論規則より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{REP} \vdash \chi \in \sigma \ \leftrightarrow\ \chi \neq \chi$$

となり，他方で内包性公理より

$$\mathbf{COM} \vdash \chi \neq \chi \ \leftrightarrow\ \chi \in \{\,x \mid x \neq x\,\}$$

が成り立つので，同値関係の推移律 (推論法則 3.1.12) より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{REP} \vdash \chi \in \sigma \ \leftrightarrow \ \chi \in \{ x \mid x \neq x \}$$

が従い，全称の導出 (推論法則 2.2.27) より (3.32) が出る．ゆえに外延性公理より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{REP} \vdash \sigma = \emptyset$$

となり，存在記号の推論規則より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{REP} \vdash \exists s \, (\emptyset = s)$$

が得られる． ∎

定理 3.3.6 (空集合はいかなる集合も持たない).

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \forall x \, (x \notin \emptyset).$$

略証．　$\forall x \, (x \notin \emptyset)$ とは

$$\forall x \rightharpoondown (x \in \emptyset)$$

の略記であり，これを $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き換えると

$$\forall x \rightharpoondown (x \neq x)$$

となる．ここで

$$\tau \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon x \rightharpoondown (\rightharpoondown (x \neq x))$$

とおけば，内包性公理と全称記号の推論規則より

$$\mathbf{COM} \vdash \tau \in \emptyset \ \longrightarrow \ \tau \neq \tau$$

が成り立つから，対偶を取れば

$$\mathbf{COM} \vdash \tau = \tau \ \longrightarrow \ \tau \notin \emptyset$$

が成り立つ (推論法則 2.2.3)．定理 3.1.2 より

$$\mathbf{EXT} \vdash \tau = \tau$$

となるので，三段論法より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \tau \notin \emptyset$$

が成り立つ．そして全称の導出 (推論法則 2.2.27) より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \forall x \, (x \notin \emptyset)$$

が得られる． ∎

定理 3.3.7 (空の類は空集合に等しい). a を類とするとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \forall x\,(\, x \notin a\,) \;\longrightarrow\; a = \emptyset,$$
$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash a = \emptyset \;\longrightarrow\; \forall x\,(\, x \notin a\,).$$

証明.

step1　いま

$$\varepsilon x \rceil (\, x \in a \;\leftrightarrow\; x \in \emptyset\,)$$

(実際には $x \in a \;\leftrightarrow\; x \in \emptyset$ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き換える) とすれば,

$$\forall x\,(\, x \notin a\,) \vdash \tau \notin a$$

と論理和の導入により

$$\forall x\,(\, x \notin a\,) \vdash \tau \notin a \vee \tau \in \emptyset$$

となり，含意に書き換えれば (推論法則 2.3.8)

$$\forall x\,(\, x \notin a\,) \vdash \tau \in a \;\longrightarrow\; \tau \in \emptyset \tag{3.33}$$

が得られる．また定理 3.3.6 より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \tau \notin \emptyset$$

が成り立つので

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \tau \notin \emptyset \vee \tau \in a$$

となり，含意に書き換えれば

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \tau \in \emptyset \;\longrightarrow\; \tau \in a \tag{3.34}$$

が得られる．(3.33) と (3.34) より

$$\forall x\,(\, x \notin a\,),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \tau \in a \;\leftrightarrow\; \tau \in \emptyset$$

が従い，全称の導出 (推論法則 2.2.27) より

$$\forall x\,(\, x \notin a\,),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \forall x\,(\, x \in a \;\leftrightarrow\; x \in \emptyset\,)$$

が従い，外延性公理より

$$\forall x\,(\, x \notin a\,),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash a = \emptyset$$

が従い，演繹法則より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \forall x\,(\, x \notin a\,) \;\longrightarrow\; a = \emptyset$$

が得られる．

step2　外延性公理の逆 (定理 3.1.5) より

$$a = \emptyset,\ \mathbf{EQ} \vdash \forall x\,(\,x \in a \ \leftrightarrow\ x \in \emptyset\,) \tag{3.35}$$

が成り立つ．ここで

$$\tau \overset{\text{def}}{=\!=} \varepsilon x \neg(\,x \notin a\,)$$

とおけば (必要ならば $x \notin a$ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き換える)，(3.35) と全称記号の推論規則より

$$a = \emptyset,\ \mathbf{EQ} \vdash \tau \in a \ \longrightarrow\ \tau \in \emptyset$$

が成立し，これの対偶を取れば

$$a = \emptyset,\ \mathbf{EQ} \vdash \tau \notin \emptyset \ \longrightarrow\ \tau \notin a \tag{3.36}$$

となる (推論法則 2.2.3)．ところで定理 3.3.6 より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \tau \notin \emptyset$$

が成り立つので，(3.36) との三段論法より

$$a = \emptyset,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \tau \notin a$$

が従う．全称の導出 (推論法則 2.2.27) より

$$a = \emptyset,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \forall x\,(\,x \notin a\,)$$

が成り立ち，演繹法則より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash a = \emptyset \ \longrightarrow\ \forall x\,(\,x \notin a\,)$$

が得られる． ∎

定理 3.3.8 (類を要素として持てば空ではない).　a, b を類とするとき

$$\mathbf{EQ}, \mathbf{ELE} \vdash a \in b \ \longrightarrow\ \exists x\,(\,x \in b\,).$$

証明．　要素の公理より

$$\mathbf{ELE} \vdash a \in b \ \longrightarrow\ \mathrm{set}\,(a)$$

が成立するので，

$$\tau \overset{\text{def}}{=\!=} \varepsilon x\,(\,a = x\,)$$

とおけば (必要ならば $a = x$ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き換える)，存在記号の推論規則から

$$a \in b,\ \mathbf{ELE} \vdash a = \tau$$

が成り立つ．相等性の公理より

$$\mathbf{EQ} \vdash a = \tau \ \rightarrow \ (\, a \in b \ \rightarrow \ \tau \in b \,)$$

となるので，三段論法より

$$a \in b,\ \mathbf{EQ}, \mathbf{ELE} \vdash \tau \in b$$

となる．存在記号の推論規則より

$$a \in b,\ \mathbf{EQ}, \mathbf{ELE} \vdash \exists x \,(\, x \in b \,)$$

が成り立ち，演繹法則から

$$\mathbf{EQ}, \mathbf{ELE} \vdash a \in b \ \rightarrow \ \exists x \,(\, x \in b \,)$$

が得られる． ∎

定義 3.3.9 (部分類).　x, y を $\mathcal{L}$ の項とするとき，

$$x \subset y \overset{\text{def}}{\longleftrightarrow} \forall z \,(\, z \in x \ \rightarrow \ z \in y \,)$$

と定める．式 $z \subset y$ を「x は y の**部分類 (subclass)** である」や「x は y に含まれる」などと翻訳し，特に x が集合である場合は「x は y の**部分集合 (subset)** である」と翻訳する．また

$$x \subsetneq y \overset{\text{def}}{\longleftrightarrow} x \subset y \wedge x \neq y$$

と定め，これを「x は y に**真に含まれる**」と翻訳する．

空虚な真の一例として次の結果を得る．

定理 3.3.10 (空集合は全ての類に含まれる).　a を類とするとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \emptyset \subset a.$$

証明.　いま

$$\tau \overset{\text{def}}{=\!=} \varepsilon x \neg (\, x \in \emptyset \ \rightarrow \ x \in a \,)$$

とおく (実際は $x \in \emptyset \ \rightarrow \ x \in a$ は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き換える)．定理 3.3.6 より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \tau \notin \emptyset$$

が成り立つから，論理和の導入により

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \tau \notin \emptyset \vee \tau \in a$$

が成り立つ．これを含意の形になおせば

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \tau \in \emptyset \ \rightarrow \ \tau \in a$$

が成り立ち (推論法則 2.3.8)，全称の導出 (推論法則 2.2.27) より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \forall x \, (\, x \in \emptyset \; \rightarrow \; x \in a \,)$$

が従う．∎

$a \subset b$ とは a に属する全ての “類である ε 項” が b に属するという定義であったが，要素となりうる類は集合であるという公理から，a に属する全ての類もまた b に属する．

定理 3.3.11 (類はその部分類に属する全ての類を要素に持つ). a, b, c を類とするとき

$$\mathbf{EQ}, \mathbf{ELE} \vdash a \subset b \; \rightarrow \; (\, c \in a \; \rightarrow \; c \in b \,).$$

証明. 要素の公理より

$$c \in a, \; \mathbf{ELE} \vdash \mathrm{set}\,(c)$$

が成り立つので，

$$\tau \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon x \, (\, c = x \,)$$

とおくと (必要ならば $c = x$ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き換える) 存在記号の推論規則より

$$c \in a, \; \mathbf{ELE} \vdash c = \tau \tag{3.37}$$

となる．相等性公理より

$$\mathbf{EQ} \vdash c = \tau \; \rightarrow \; (\, c \in a \; \rightarrow \; \tau \in a \,)$$

が成り立つので，三段論法より

$$c \in a, \; \mathbf{EQ}, \mathbf{ELE} \vdash \tau \in a$$

が従う．ところで，$\subset$ の定義と全称記号の推論規則より

$$a \subset b \vdash \tau \in a \; \rightarrow \; \tau \in b$$

が成り立つので，三段論法より

$$a \subset b, \; c \in a, \; \mathbf{EQ}, \mathbf{ELE} \vdash \tau \in b \tag{3.38}$$

が従う．相等性公理より

$$\mathbf{EQ} \vdash c = \tau \; \rightarrow \; \tau = c$$

が成り立つので，(3.37) との三段論法より

$$a \subset b, \; c \in a, \; \mathbf{EQ}, \mathbf{ELE} \vdash \tau = c \tag{3.39}$$

となり，相等性公理より

$$\mathbf{EQ} \vdash \tau = c \; \rightarrow \; (\, \tau \in b \; \rightarrow \; c \in b \,)$$

が成り立つので，(3.39) と (3.38) との三段論法より

$$a \subset b,\ c \in a,\ \mathbf{EQ}, \mathbf{ELE} \vdash c \in b$$

が従う．そして演繹法則より

$$\mathbf{EQ}, \mathbf{ELE} \vdash a \subset b \ \rightarrow\ (c \in a \ \rightarrow\ c \in b)$$

が得られる． ∎

宇宙 $\mathbf{V}$ は類の一つであった．当然のようであるが，それは最大の類である．

定理 3.3.12 ($\mathbf{V}$ は最大の類である). a を類とするとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash a \subset \mathbf{V}.$$

略証. いま

$$\tau \overset{\text{def}}{=\!=} \varepsilon x \rightharpoondown (x \in a \ \rightarrow\ a \in \mathbf{V})$$

とおく．定理 3.1.2 より

$$\mathbf{EXT} \vdash \tau = \tau$$

となり，他方で内包性公理より

$$\mathbf{COM} \vdash \tau = \tau \ \rightarrow\ \tau \in \mathbf{V}$$

が成り立つので，三段論法より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \tau \in \mathbf{V}$$

が成立する．ゆえに

$$\tau \in a,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \tau \in \mathbf{V}$$

も成り立ち，演繹法則より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \tau \in a \ \rightarrow\ \tau \in \mathbf{V}$$

が従い，全称の導出 (推論法則 2.2.27) より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \forall x\,(x \in a \ \rightarrow\ x \in \mathbf{V})$$

が得られる． ∎

定理 3.3.13 (等しい類は相手を包含する). a, b を類とするとき

$$\mathbf{EQ} \vdash a = b \ \rightarrow\ a \subset b \wedge b \subset a.$$

略証．　いま

$$\tau \overset{\text{def}}{=\!=} \varepsilon x \neg (x \in a \ \rightarrow \ x \in b)$$

とおけば，外延性公理の逆 (定理 3.1.5) と全称記号の推論規則，および論理積の除去により

$$a = b,\ \mathbf{EQ} \vdash \tau \in a \ \rightarrow \ \tau \in b$$

が成り立つので，全称の導出 (推論法則 2.2.27) より

$$a = b,\ \mathbf{EQ} \vdash \forall x\, (x \in a \ \rightarrow \ x \in b)$$

が成り立つ．また τ を

$$\tau \overset{\text{def}}{=\!=} \varepsilon x \neg (x \in b \ \rightarrow \ x \in a)$$

として，先ほどの a と b を入れ替えれば

$$\mathbf{EQ} \vdash b = a \ \rightarrow \ (\tau \in b \ \rightarrow \ \tau \in a)$$

が得られるが，相等性公理より

$$a = b,\ \mathbf{EQ} \vdash b = a$$

が成り立つので三段論法より

$$a = b,\ \mathbf{EQ} \vdash \tau \in b \ \rightarrow \ \tau \in a$$

が従う．ゆえに全称の導出 (推論法則 2.2.27) より

$$a = b,\ \mathbf{EQ} \vdash b \subset a$$

も得られる． ∎

定理 3.3.14 (互いに相手を包含する類同士は等しい).　a, b を類とするとき

$$\mathbf{EXT} \vdash a \subset b \wedge b \subset a \ \rightarrow \ a = b.$$

略証．　いま

$$\tau \overset{\text{def}}{=\!=} \varepsilon x \neg (x \in a \ \leftrightarrow \ x \in b)$$

とおく．論理積の除去により

$$a \subset b \wedge b \subset a \vdash a \subset b$$

となり，全称記号の推論規則より

$$a \subset b \wedge b \subset a \vdash \tau \in a \ \rightarrow \ \tau \in b$$

が成り立つ．同様にして

$$a \subset b \land b \subset a \vdash \tau \in b \ \rightarrow \ \tau \in a$$

も成り立つので，論理積の導入により

$$a \subset b \land b \subset a \vdash \tau \in a \ \leftrightarrow \ \tau \in b$$

となり，全称の導出 (推論法則 2.2.27) より

$$a \subset b \land b \subset a \vdash \forall x \, (\, x \in a \ \leftrightarrow \ x \in b\,)$$

が得られる．そして外延性公理により

$$a \subset b \land b \subset a,\ \mathbf{EXT} \vdash a = b$$

が得られる． ∎

3.4　順序型について

(A, R) を整列集合とするとき，

$$x \longmapsto \begin{cases} \min A \backslash \operatorname{ran}(x) & \text{if } \operatorname{ran}(x) \subsetneq A \\ A & \text{o.w.} \end{cases}$$

なる写像 G に対して

$$\forall \alpha \, F(\alpha) = G(F \upharpoonright \alpha)$$

なる写像 F を取り

$$\alpha \overset{\text{def}}{=\!=} \min \{\, \alpha \in \mathrm{ON} \mid F(\alpha) = A \,\}$$

とおけば，α は (A, R) の順序型．

3.5　超限再帰について

$\mathbf{V}$ 上の写像 G が与えられたら，

$$F \overset{\text{def}}{=\!=} \{\, (\alpha, x) \mid \operatorname{ord}(\alpha) \land \exists f \ \big(f : \text{on}\, \alpha \land \forall \beta \in \alpha \ \big(f(\beta) = G(f \upharpoonright \beta) \big) \land x = G(f) \big) \,\}$$

により F を定めれば

$$\forall \alpha \, F(\alpha) = G(F \upharpoonright \alpha)$$

が成立する．

任意の順序数 α および α 上の写像 f と g に対して，

$$\forall \beta \in \alpha \ \big(f(\beta) = G(f \restriction \beta) \big)$$

かつ

$$\forall \beta \in \alpha \ \big(g(\beta) = G(g \restriction \beta) \big)$$

ならば $f = g$ である．

まず

$$f(0) = G(f \restriction 0) = G(0) = G(g \restriction 0) = g(0)$$

が成り立つ．また

$$\forall \delta \in \beta \ \big(\delta \in \alpha \ \rightarrow \ f(\delta) = g(\delta) \big)$$

ならば，$\beta \in \alpha$ であるとき

$$f \restriction \beta = g \restriction \beta$$

となるので

$$\beta \in \alpha \ \rightarrow \ f(\beta) = g(\beta)$$

が成り立つ．ゆえに

$$f = g$$

が得られる．

任意の順序数 α に対して，α 上の写像 f で

$$\forall \beta \in \alpha \ \big(f(\beta) = G(f \restriction \beta) \big)$$

を満たすものが取れる．

$\alpha = 0$ のとき $f \overset{\text{def}}{=\!=} 0$ とすればよい．α の任意の要素 β に対して

$$g : \mathrm{on}\, \beta \wedge \forall \gamma \in \beta \ \big(g(\gamma) = G(g \restriction \gamma) \big)$$

なる g が存在するとき，

$$f \overset{\text{def}}{=\!=} \{ (\beta, x) \mid \beta \in \alpha \wedge \exists g \ \big(g : \mathrm{on}\, \beta \wedge \forall \gamma \in \beta \ \big(g(\gamma) = G(g \restriction \gamma) \big) \wedge x = G(g) \big) \}$$

と定めれば，f は α 上の写像であって

$$\forall \beta \in \alpha \ \big(f(\beta) = G(f \restriction \beta) \big)$$

を満たす．

任意の順序数 α に対して $F(\alpha) = G(F \restriction \alpha)$ が成り立つ．

$\alpha = 0$ ならば，0 上の写像は 0 のみなので

$$F(0) = G(0) = G(F{\restriction}0)$$

である．

$$\forall \beta \in \alpha\, F(\beta) = G(F{\restriction}\beta)$$

が成り立っているとき，

$$\forall \beta \in \alpha\, f(\beta) = G(f{\restriction}\beta)$$

を満たす α 上の写像 f を取れば，前の一意性より

$$f = F{\restriction}\alpha$$

が成立する．よって

$$F(\alpha) = G(f) = G(F{\restriction}\alpha)$$

となる． ∎

3.6　自然数の全体について

$\mathbf{N}$ を

$$\mathbf{N} \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \{\, \beta \mid \alpha \leq \beta \text{ である } \alpha \text{ は } 0 \text{ であるか後続型順序数} \,\}$$

によって定めれば，無限公理より

$$\mathrm{set}\,(\mathbf{N})$$

である．また $\mathrm{ord}\,(\mathbf{N})$ と $\mathrm{lim.o}\,(\mathbf{N})$ も証明できるはず．$\mathbf{N}$ が最小の極限数であることは $\mathbf{N}$ を定義した論理式より従う．

3.7　書き換えの同値性

$\mathcal{L}$ の式を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に変換するときは，まず原子式に対して

元の式	書き換え後
$a = \{\, z \mid \psi \,\}$	$\forall v\,(\, v \in a \;\leftrightarrow\; \psi(z/v)\,)$
$\{\, y \mid \varphi \,\} = b$	$\forall u\,(\, \varphi(y/u) \;\leftrightarrow\; u \in b\,)$
$\{\, y \mid \varphi \,\} = \{\, z \mid \psi \,\}$	$\forall u\,(\, \varphi(y/u) \;\leftrightarrow\; \psi(z/u)\,)$
$a \in \{\, z \mid \psi \,\}$	$\psi(z/a)$
$\{\, y \mid \varphi \,\} \in b$	$\exists s\,(\,\forall u\,(\, \varphi(y/u) \;\leftrightarrow\; u \in s\,) \wedge s \in b\,)$
$\{\, y \mid \varphi \,\} \in \{\, z \mid \psi \,\}$	$\exists s\,(\,\forall u\,(\, \varphi(y/u) \;\leftrightarrow\; u \in s\,) \wedge \psi(z/s)\,)$

とし，あとは帰納的に式を書き換えることによって $\mathcal{L}$ の式 φ から $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式 $\hat{\varphi}$ を得たのであった．この節では φ が文であるときに

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE} \vdash \varphi \;\leftrightarrow\; \hat{\varphi} \tag{3.40}$$

が成り立つことを示す．これが示されれば，仮に φ に変項 x が自由に現れていても

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE} \vdash \forall x\,(\,\varphi(x) \leftrightarrow \hat{\varphi}(x)\,)$$

が成り立つし，x に加えて y が自由に現れていても

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE} \vdash \forall x\,\forall y\,(\,\varphi(x,y) \leftrightarrow \hat{\varphi}(x,y)\,)$$

が成り立つ．前者の場合は

$$\tau \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon x \neg(\,\hat{\varphi}(x) \leftrightarrow \hat{\varphi}(x)\,)$$

に対して

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE} \vdash \varphi(\tau) \leftrightarrow \hat{\varphi}(\tau)$$

が成り立つのだし，後者の場合は

$$\begin{aligned} \sigma &\overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon x \neg\forall y\,(\,\hat{\varphi}(x,y) \leftrightarrow \hat{\varphi}(x,y)\,), \\ \rho &\overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon y \neg(\,\hat{\varphi}(\sigma,y) \leftrightarrow \hat{\varphi}(\sigma,y)\,) \end{aligned}$$

に対して

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE} \vdash \varphi(\sigma,\rho) \leftrightarrow \hat{\varphi}(\sigma,\rho)$$

が成り立つので，全称の導出 (推論法則 2.2.27) を適用すればいい．一般の式 φ に対して (3.40) を示すには φ が原子式であるときに (3.40) が成り立つことを言えば十分であり，それについて先に結論を書いておくと

$$\begin{aligned}
\mathbf{EQ}, \mathbf{COM} &\vdash a = \{\,z \mid \psi(z)\,\} \rightarrow \forall v\,(\,v \in a \leftrightarrow \psi(v)\,), \\
\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} &\vdash \forall v\,(\,v \in a \leftrightarrow \psi(v)\,) \rightarrow a = \{\,z \mid \psi(z)\,\}, \\
\mathbf{EQ}, \mathbf{COM} &\vdash \{\,y \mid \varphi(y)\,\} = b \rightarrow \forall u\,(\,\varphi(u) \leftrightarrow u \in b\,), \\
\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} &\vdash \forall u\,(\,\varphi(u) \leftrightarrow u \in b\,) \rightarrow \{\,y \mid \varphi(y)\,\} = b, \\
\mathbf{EQ}, \mathbf{COM} &\vdash \{\,y \mid \varphi(y)\,\} = \{\,z \mid \psi(z)\,\} \rightarrow \forall u\,(\,\varphi(u) \leftrightarrow \psi(u)\,), \\
\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} &\vdash \forall u\,(\,\varphi(u) \leftrightarrow \psi(u)\,) \rightarrow \{\,y \mid \varphi(y)\,\} = \{\,z \mid \psi(z)\,\}, \\
\mathbf{COM} &\vdash a \in \{\,z \mid \psi(z)\,\} \rightarrow \psi(a), \\
\mathbf{COM} &\vdash \psi(a) \rightarrow a \in \{\,z \mid \psi(z)\,\}, \\
\mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE} &\vdash \{\,y \mid \varphi(y)\,\} \in b \rightarrow \exists s\,(\,\forall u\,(\,\varphi(u) \leftrightarrow u \in s\,) \wedge s \in b\,), \\
\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} &\vdash \exists s\,(\,\forall u\,(\,\varphi(u) \leftrightarrow u \in s\,) \wedge s \in b\,) \rightarrow \{\,y \mid \varphi(y)\,\} \in b, \\
\mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE} &\vdash \{\,y \mid \varphi(y)\,\} \in \{\,z \mid \psi(z)\,\} \rightarrow \exists s\,(\,\forall u\,(\,\varphi(u) \leftrightarrow u \in s\,) \wedge \psi(s)\,), \\
\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} &\vdash \exists s\,(\,\forall u\,(\,\varphi(u) \leftrightarrow u \in s\,) \wedge \psi(s)\,) \rightarrow \{\,y \mid \varphi(y)\,\} \in \{\,z \mid \psi(z)\,\}
\end{aligned}$$

が成立する．

推論法則 3.7.1 (同値記号の対称律).　A, B を $\mathcal{L}$ の文とするとき

$$\vdash (A \leftrightarrow B) \rightarrow (B \leftrightarrow A).$$

証明.　$\wedge$ の除去 (推論規則 2.2.6) より

$$A \leftrightarrow B \vdash A \rightarrow B,$$
$$A \leftrightarrow B \vdash B \rightarrow A$$

となる．他方で論理積の導入 (推論規則 2.2.14) より

$$\vdash (B \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A) \wedge (A \rightarrow B))$$

が成り立つので，三段論法を二回適用すれば

$$A \leftrightarrow B \vdash (B \rightarrow A) \wedge (A \rightarrow B)$$

となる．つまり

$$A \leftrightarrow B \vdash B \leftrightarrow A$$

が得られた． ∎

定理 3.7.2.　a を主要 ε 項とし，ψ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とし，z を ψ に自由に現れる変項とし，ψ に自由に現れる変項は z のみであるとする．このとき

$$\mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash a = \{\, z \mid \psi(z) \,\} \rightarrow \forall v\, (\, v \in a \leftrightarrow \psi(v)\,).$$

略証.　いま

$$\tau \overset{\text{def}}{=\!=} \varepsilon v \rightharpoondown (\, v \in a \leftrightarrow \psi(v)\,)$$

とおく．外延性公理の逆 (定理 3.1.5) より

$$a = \{\, z \mid \psi(z) \,\},\ \mathbf{EQ} \vdash \tau \in a \leftrightarrow \tau \in \{\, z \mid \psi(z) \,\}$$

が成り立ち，他方で内包性公理より

$$\mathbf{COM} \vdash \tau \in \{\, z \mid \psi(z) \,\} \leftrightarrow \psi(\tau)$$

が成り立つので，同値記号の推移律 (推論法則 3.1.12) より

$$a = \{\, z \mid \psi(z) \,\},\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \tau \in a \leftrightarrow \psi(\tau)$$

が従う．そして全称の導出 (推論法則 2.2.27) より

$$a = \{\, z \mid \psi(z) \,\},\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \forall v\, (\, v \in a \leftrightarrow \psi(v)\,)$$

が得られる． ∎

定理 3.7.3.　a を主要 ε 項とし，ψ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とし，z を ψ に自由に現れる変項とし，ψ に自由に現れる変項は z のみであるとする．このとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \forall v\, (\, v \in a \leftrightarrow \psi(v)\,) \rightarrow a = \{\, z \mid \psi(z) \,\}.$$

略証． いま

$$\tau \overset{\mathrm{def}}{=} \varepsilon x \neg (x \in a \leftrightarrow x \in \{ z \mid \psi(z) \})$$

とおく．まず全称記号の推論規則より

$$\forall v (v \in a \leftrightarrow \psi(v)) \vdash \tau \in a \leftrightarrow \psi(\tau) \tag{3.41}$$

が成り立つ．また内包性公理より

$$\mathbf{COM} \vdash \tau \in \{ z \mid \psi(z) \} \leftrightarrow \psi(\tau)$$

となるので，同値記号の対称律 (3.7.1) より

$$\mathbf{COM} \vdash \psi(\tau) \leftrightarrow \tau \in \{ z \mid \psi(z) \} \tag{3.42}$$

が成り立つ．(3.41) と (3.42) と同値記号の推移律 (推論法則 3.1.12) より

$$\forall v (v \in a \leftrightarrow \psi(v)), \mathbf{COM} \vdash \tau \in a \leftrightarrow \tau \in \{ z \mid \psi(z) \}$$

となり，全称の導出 (推論法則 2.2.27) より

$$\forall v (v \in a \leftrightarrow \psi(v)), \mathbf{COM} \vdash \forall x (x \in a \leftrightarrow x \in \{ z \mid \psi(z) \})$$

となり，外延性公理より

$$\forall v (v \in a \leftrightarrow \psi(v)), \mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash a = \{ z \mid \psi(z) \}$$

が得られる． ∎

定理 3.7.4. b を主要 ε 項とし，φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とし，y を φ に自由に現れる変項とし，φ に自由に現れる変項は y のみであるとする．このとき

$$\mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \{ y \mid \varphi(y) \} = b \rightarrow \forall u (\varphi(u) \leftrightarrow u \in b).$$

略証． いま

$$\tau \overset{\mathrm{def}}{=} \varepsilon u \neg (\varphi(u) \leftrightarrow u \in b)$$

とおけば，まず外延性公理の逆 (定理 3.1.5) より

$$\{ y \mid \varphi(y) \} = b, \mathbf{EQ} \vdash \tau \in \{ y \mid \varphi(z) \} \leftrightarrow \tau \in b \tag{3.43}$$

が成り立つ．他方で内包性公理より

$$\mathbf{COM} \vdash \tau \in \{ y \mid \varphi(y) \} \leftrightarrow \varphi(\tau)$$

となり，同値記号の対称律 (3.7.1) より

$$\mathbf{COM} \vdash \varphi(\tau) \leftrightarrow \tau \in \{ y \mid \varphi(y) \} \tag{3.44}$$

が成り立つ．(3.43) と (3.44) と同値記号の推移律 (推論法則 3.1.12) より

$$\{ y \mid \varphi(y) \} = b,\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \varphi(\tau) \leftrightarrow \tau \in b$$

が成り立ち，全称の導出 (推論法則 2.2.27) より

$$\{ y \mid \varphi(y) \} = b,\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \forall u\,(\,\varphi(u) \leftrightarrow u \in b\,)$$

が得られる． ∎

定理 3.7.5. b を主要 ε 項とし，φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とし，y を φ に自由に現れる変項とし，φ に自由に現れる変項は y のみであるとする．このとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \forall u\,(\,\varphi(u) \leftrightarrow u \in b\,) \rightarrow \{ y \mid \varphi(y) \} = b.$$

略証． いま

$$\tau \overset{\text{def}}{=\!=} \varepsilon x \neg(\, x \in \{ y \mid \varphi(y) \} \leftrightarrow x \in b\,)$$

とおく．まず全称記号の推論規則より

$$\forall u\,(\,\varphi(u) \leftrightarrow u \in b\,) \vdash \varphi(\tau) \leftrightarrow \tau \in b \tag{3.45}$$

が成り立ち，また内包性公理より

$$\mathbf{COM} \vdash \tau \in \{ y \mid \varphi(y) \} \leftrightarrow \varphi(\tau) \tag{3.46}$$

が成り立つので，(3.45) と (3.46) と同値記号の推移律 (推論法則 3.1.12) より

$$\forall u\,(\,\varphi(u) \leftrightarrow u \in b\,),\ \mathbf{COM} \vdash \tau \in \{ y \mid \varphi(y) \} \leftrightarrow \tau \in b$$

が成り立つ．全称の導出 (推論法則 2.2.27) より

$$\forall u\,(\,\varphi(u) \leftrightarrow u \in b\,),\ \mathbf{COM} \vdash \forall x\,(\, x \in \{ y \mid \varphi(y) \} \leftrightarrow x \in b\,)$$

となり，外延性公理より

$$\forall u\,(\,\varphi(u) \leftrightarrow u \in b\,),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \{ y \mid \varphi(y) \} = b$$

が得られる． ∎

定理 3.7.6. φ と ψ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とし，y を φ に自由に現れる変項とし，z を ψ に自由に現れる変項とし，φ に自由に現れる変項は y のみであるとし，ψ に自由に現れる変項は z のみであるとし，する．このとき

$$\mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \{ y \mid \varphi(y) \} = \{ z \mid \psi(z) \} \rightarrow \forall u\,(\,\varphi(u) \leftrightarrow \psi(u)\,).$$

略証． いま

$$\tau \overset{\text{def}}{=\!=} \varepsilon u \neg (\varphi(u) \leftrightarrow \psi(u))$$

とおけば，まず外延性公理の逆 (定理 3.1.5) より

$$\{ y \mid \varphi(y) \} = \{ z \mid \psi(z) \},\ \mathbf{EQ} \vdash \tau \in \{ y \mid \varphi(z) \} \leftrightarrow \tau \in \{ z \mid \psi(z) \} \tag{3.47}$$

が成り立つ．また内包性公理より

$$\mathbf{COM} \vdash \tau \in \{ y \mid \varphi(y) \} \leftrightarrow \varphi(\tau), \tag{3.48}$$
$$\mathbf{COM} \vdash \tau \in \{ z \mid \varphi(z) \} \leftrightarrow \psi(\tau) \tag{3.49}$$

が成り立つが，(3.48) と同値記号の対称律 (3.7.1) より

$$\mathbf{COM} \vdash \varphi(\tau) \leftrightarrow \tau \in \{ y \mid \varphi(y) \} \tag{3.50}$$

も成り立つ．(3.50) と (3.47) と同値記号の推移律 (推論法則 3.1.12) より

$$\{ y \mid \varphi(y) \} = \{ z \mid \psi(z) \},\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \varphi(\tau) \leftrightarrow \tau \in \{ z \mid \psi(z) \} \tag{3.51}$$

が従い，(3.51) と (3.49) と同値記号の推移律より

$$\{ y \mid \varphi(y) \} = \{ z \mid \psi(z) \},\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \varphi(\tau) \leftrightarrow \psi(\tau)$$

が従う．そして全称の導出 (推論法則 2.2.27) より

$$\{ y \mid \varphi(y) \} = \{ z \mid \psi(z) \},\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \forall u (\varphi(u) \leftrightarrow \psi(u))$$

が得られる． ∎

定理 3.7.7. φ と ψ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とし，y を φ に自由に現れる変項とし，z を ψ に自由に現れる変項とし，φ に自由に現れる変項は y のみであるとし，ψ に自由に現れる変項は z のみであるとし，する．このとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \forall u (\varphi(u) \leftrightarrow \psi(u)) \rightarrow \{ y \mid \varphi(y) \} = \{ z \mid \psi(z) \}.$$

略証． いま

$$\tau \overset{\text{def}}{=\!=} \varepsilon x \neg (x \in \{ y \mid \varphi(y) \} \leftrightarrow x \in \{ z \mid \psi(z) \})$$

とおく．まず全称記号の推論規則より

$$\forall u (\varphi(u) \leftrightarrow \psi(u)) \vdash \varphi(\tau) \leftrightarrow \psi(\tau) \tag{3.52}$$

が成り立つ．また内包性公理より

$$\mathbf{COM} \vdash \tau \in \{ y \mid \varphi(y) \} \leftrightarrow \varphi(\tau), \tag{3.53}$$
$$\mathbf{COM} \vdash \tau \in \{ z \mid \psi(z) \} \leftrightarrow \psi(\tau)$$

となり，同値記号の対称律 (3.7.1) より

$$\mathbf{COM} \vdash \psi(\tau) \leftrightarrow \tau \in \{\, z \mid \psi(z) \,\} \tag{3.54}$$

も成り立つ．(3.52) と (3.53) と同値記号の推移律 (推論法則 3.1.12) より

$$\forall u\,(\,\varphi(u) \leftrightarrow \psi(u)\,),\ \mathbf{COM} \vdash \tau \in \{\, y \mid \varphi(y) \,\} \leftrightarrow \psi(\tau) \tag{3.55}$$

となり，(3.54) と (3.55) と同値記号の推移律より

$$\forall u\,(\,\varphi(u) \leftrightarrow \psi(u)\,),\ \mathbf{COM} \vdash \tau \in \{\, y \mid \varphi(y) \,\} \leftrightarrow \tau \in \{\, z \mid \psi(z) \,\}$$

となり，全称の導出 (推論法則 2.2.27) より

$$\forall u\,(\,\varphi(u) \leftrightarrow \psi(u)\,),\ \mathbf{COM} \vdash \forall x\,(\,x \in \{\, y \mid \varphi(y) \,\} \leftrightarrow x \in \{\, z \mid \psi(z) \,\}\,)$$

となり，外延性公理より

$$\forall u\,(\,\varphi(u) \leftrightarrow \psi(u)\,),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \{\, y \mid \varphi(y) \,\} = \{\, z \mid \psi(z) \,\}$$

が得られる． ∎

定理 3.7.8.　a を主要 ε 項とし，ψ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とし，z を ψ に自由に現れる変項とし，ψ に自由に現れる変項は z のみであるとする．このとき

$$\mathbf{COM} \vdash a \in \{\, z \mid \psi(z) \,\} \rightarrow \psi(a).$$

略証．　a は主要 ε 項であるから，内包性公理より

$$\mathbf{COM} \vdash a \in \{\, z \mid \psi(z) \,\} \rightarrow \psi(a)$$

が成り立つ． ∎

定理 3.7.9.　a を主要 ε 項とし，ψ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とし，z を ψ に自由に現れる変項とし，ψ に自由に現れる変項は z のみであるとする．このとき

$$\mathbf{COM} \vdash \psi(a) \rightarrow a \in \{\, z \mid \psi(z) \,\}.$$

略証．　a は主要 ε 項であるから，内包性公理より

$$\mathbf{COM} \vdash \psi(a) \rightarrow a \in \{\, z \mid \psi(z) \,\}$$

が成り立つ． ∎

定理 3.7.10.　b を主要 ε 項とし，φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とし，y を φ に自由に現れる変項とし，φ に自由に現れる変項は y のみであるとする．このとき

$$\mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE} \vdash \{\, y \mid \varphi(y) \,\} \in b \ \rightarrow\ \exists s\,(\,\forall u\,(\,\varphi(u)\ \leftrightarrow\ u \in s\,) \wedge s \in b\,).$$

略証.　要素の公理より

$$\{\, y \mid \varphi(y) \,\} \in b,\ \mathbf{ELE} \vdash \exists s\,(\,\{\, y \mid \varphi(y) \,\} = s\,)$$

が成り立つので，

$$\sigma \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon s\, \forall u\,(\,\varphi(u)\ \leftrightarrow\ u \in s\,)$$

とおけば存在記号の推論規則より

$$\{\, y \mid \varphi(y) \,\} \in b,\ \mathbf{ELE} \vdash \{\, y \mid \varphi(y) \,\} = \sigma \tag{3.56}$$

となる．ここで相等性公理より

$$\mathbf{EQ} \vdash \{\, y \mid \varphi(y) \,\} = \sigma\ \rightarrow\ (\,\{\, y \mid \varphi(y) \,\} \in b\ \rightarrow\ \sigma \in b\,)$$

が成り立つので，(3.56) と三段論法より

$$\{\, y \mid \varphi(y) \,\} \in b,\ \mathbf{EQ}, \mathbf{ELE} \vdash \sigma \in b \tag{3.57}$$

が得られる．他方で定理 3.7.4 より

$$\mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \{\, y \mid \varphi(y) \,\} = \sigma\ \rightarrow\ \forall u\,(\,\varphi(u)\ \leftrightarrow\ u \in \sigma\,)$$

が成り立つので，(3.56) と三段論法より

$$\{\, y \mid \varphi(y) \,\} \in b,\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE} \vdash \forall u\,(\,\varphi(u)\ \leftrightarrow\ u \in \sigma\,) \tag{3.58}$$

も得られる．(3.57) と (3.58) と論理積の導入規則より

$$\{\, y \mid \varphi(y) \,\} \in b,\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE} \vdash \forall u\,(\,\varphi(u)\ \leftrightarrow\ u \in \sigma\,) \wedge \sigma \in b$$

が成り立つので，存在記号の推論規則より

$$\{\, y \mid \varphi(y) \,\} \in b,\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE} \vdash \exists s\,(\,\forall u\,(\,\varphi(u)\ \leftrightarrow\ u \in s\,) \wedge s \in b\,)$$

が得られる． ∎

定理 3.7.11.　b を主要 ε 項とし，φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とし，y を φ に自由に現れる変項とし，φ に自由に現れる変項は y のみであるとする．このとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \exists s\,(\,\forall u\,(\,\varphi(u)\ \leftrightarrow\ u \in s\,) \wedge s \in b\,)\ \rightarrow\ \{\, y \mid \varphi(y) \,\} \in b.$$

略証． いま

$$\sigma \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varepsilon s\,(\,\forall u\,(\,\varphi(u)\ \leftrightarrow\ u \in s\,) \wedge s \in b\,)$$

とおけば，存在記号の推論規則と論理積の除去より

$$\exists s\,(\,\forall u\,(\,\varphi(u)\ \leftrightarrow\ u \in s\,) \wedge s \in b\,) \vdash \forall u\,(\,\varphi(u)\ \leftrightarrow\ u \in \sigma\,), \tag{3.59}$$
$$\exists s\,(\,\forall u\,(\,\varphi(u)\ \leftrightarrow\ u \in s\,) \wedge s \in b\,) \vdash \sigma \in b \tag{3.60}$$

が成り立つ．ここで定理 3.7.5 より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \forall u\,(\,\varphi(u)\ \leftrightarrow\ u \in \sigma\,)\ \rightarrow\ \{\,y \mid \varphi(y)\,\} = \sigma$$

が成り立つので，(3.59) との三段論法より

$$\exists s\,(\,\forall u\,(\,\varphi(u)\ \leftrightarrow\ u \in s\,) \wedge s \in b\,),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \{\,y \mid \varphi(y)\,\} = \sigma \tag{3.61}$$

が得られる．また相等性公理より

$$\mathbf{EQ} \vdash \{\,y \mid \varphi(y)\,\} = \sigma\ \rightarrow\ \sigma = \{\,y \mid \varphi(y)\,\},$$
$$\mathbf{EQ} \vdash \sigma = \{\,y \mid \varphi(y)\,\}\ \rightarrow\ (\,\sigma \in b\ \rightarrow\ \{\,y \mid \varphi(y)\,\} \in b\,)$$

が成り立つので，(3.60) と (3.61) との三段論法より

$$\exists s\,(\,\forall u\,(\,\varphi(u)\ \leftrightarrow\ u \in s\,) \wedge s \in b\,),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \{\,y \mid \varphi(y)\,\} \in b$$

が従う． ∎

定理 3.7.12. φ と ψ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とし，y を φ に自由に現れる変項とし，z を ψ に自由に現れる変項とし，φ に自由に現れる変項は y のみであるとし，ψ に自由に現れる変項は z のみであるとし，する．このとき

$$\mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE} \vdash \{\,y \mid \varphi(y)\,\} \in \{\,z \mid \psi(z)\,\}\ \rightarrow\ \exists s\,(\,\forall u\,(\,\varphi(u)\ \leftrightarrow\ u \in s\,) \wedge \psi(s)\,).$$

略証． まず (3.56) と (3.58) と同様に，

$$\sigma \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varepsilon s\,\forall u\,(\,\varphi(u)\ \leftrightarrow\ u \in s\,)$$

とおけば

$$\{\,y \mid \varphi(y)\,\} \in \{\,z \mid \psi(z)\,\},\ \mathbf{ELE} \vdash \{\,y \mid \varphi(y)\,\} = \sigma \tag{3.62}$$

と

$$\{\,y \mid \varphi(y)\,\} \in \{\,z \mid \psi(z)\,\},\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE} \vdash \forall u\,(\,\varphi(u)\ \leftrightarrow\ u \in \sigma\,) \tag{3.63}$$

が成り立つ．また相等性公理より

$$\mathbf{EQ} \vdash \{\,y \mid \varphi(y)\,\} = \sigma\ \rightarrow\ (\,\{\,y \mid \varphi(y)\,\} \in \{\,z \mid \psi(z)\,\}\ \rightarrow\ \sigma \in \{\,z \mid \psi(z)\,\}\,)$$

となるので，(3.62) との三段論法より

$$\{\, y \mid \varphi(y) \,\} \in \{\, z \mid \psi(z) \,\},\ \mathbf{EQ}, \mathbf{ELE} \vdash \sigma \in \{\, z \mid \psi(z) \,\}$$

が成り立ち，内包性公理より

$$\mathbf{COM} \vdash \sigma \in \{\, z \mid \psi(z) \,\} \ \rightarrow\ \psi(\sigma)$$

が成り立つので

$$\{\, y \mid \varphi(y) \,\} \in \{\, z \mid \psi(z) \,\},\ \mathbf{EQ}, \mathbf{ELE} \vdash \psi(\sigma) \tag{3.64}$$

が得られる．(3.63) と (3.64) と論理積の導入規則より

$$\{\, y \mid \varphi(y) \,\} \in \{\, z \mid \psi(z) \,\},\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE} \vdash \forall u \,(\, \varphi(u) \ \leftrightarrow\ u \in \sigma \,) \wedge \psi(\sigma)$$

が成り立ち，存在記号の推論規則より

$$\{\, y \mid \varphi(y) \,\} \in \{\, z \mid \psi(z) \,\},\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE} \vdash \exists s \,(\forall u \,(\, \varphi(u) \ \leftrightarrow\ u \in x \,) \wedge \psi(x)\,)$$

が得られる． ∎

定理 3.7.13. φ と ψ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とし，y を φ に自由に現れる変項とし，z を ψ に自由に現れる変項とし，φ に自由に現れる変項は y のみであるとし，ψ に自由に現れる変項は z のみであるとし，する．このとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \exists s \,(\forall u \,(\, \varphi(u) \ \leftrightarrow\ u \in s \,) \wedge \psi(s)\,) \ \rightarrow\ \{\, y \mid \varphi(y) \,\} \in \{\, z \mid \psi(z) \,\}.$$

略証． いま

$$\sigma \stackrel{\text{def}}{=\!=} \varepsilon s \,(\forall u \,(\, \varphi(u) \ \leftrightarrow\ u \in s \,) \wedge \psi(s)\,)$$

とおけば，存在記号の推論規則と論理積の除去より

$$\begin{aligned} &\exists s \,(\forall u \,(\, \varphi(u) \ \leftrightarrow\ u \in s \,) \wedge \psi(s)\,) \vdash \forall u \,(\, \varphi(u) \ \leftrightarrow\ u \in \sigma \,), \\ &\exists s \,(\forall u \,(\, \varphi(u) \ \leftrightarrow\ u \in s \,) \wedge \psi(s)\,) \vdash \psi(\sigma) \end{aligned} \tag{3.65}$$

が成り立つ．ここで定理 3.7.5 より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \forall u \,(\, \varphi(u) \ \leftrightarrow\ u \in \sigma \,) \ \rightarrow\ \{\, y \mid \varphi(y) \,\} = \sigma$$

が成り立つので，(3.65) との三段論法より

$$\exists s \,(\forall u \,(\, \varphi(u) \ \leftrightarrow\ u \in s \,) \wedge \psi(s)\,),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \{\, y \mid \varphi(y) \,\} = \sigma \tag{3.66}$$

が得られる．また内包性公理より

$$\mathbf{COM} \vdash \psi(\sigma) \ \rightarrow\ \sigma \in \{\, z \mid \psi(z) \,\}$$

が成り立つので，(3.65) との三段論法より

$$\exists s \,(\forall u \,(\, \varphi(u) \ \leftrightarrow\ u \in s \,) \wedge \psi(s)\,),\ \mathbf{COM} \vdash \sigma \in \{\, z \mid \psi(z) \,\} \tag{3.67}$$

が得られる．相等性公理より

$$\mathbf{EQ} \vdash \{\, y \mid \varphi(y) \,\} = \sigma \ \rightarrow\ \sigma = \{\, y \mid \varphi(y) \,\},$$
$$\mathbf{EQ} \vdash \sigma = \{\, y \mid \varphi(y) \,\} \ \rightarrow\ (\, \sigma \in \{\, z \mid \psi(z) \,\} \ \rightarrow\ \{\, y \mid \varphi(y) \,\} \in \{\, z \mid \psi(z) \,\}\,)$$

が成り立つので，(3.66) と (3.67) との三段論法より

$$\exists s\,(\,\forall u\,(\,\varphi(u) \ \leftrightarrow\ u \in s\,) \wedge \psi(s)\,),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \{\, y \mid \varphi(y) \,\} \in \{\, z \mid \psi(z) \,\}$$

が従う． ∎

3.8　対

a と b を類とするとき，a か b の少なくとも一方に等しい集合の全体，つまり

$$a = x \vee b = x$$

を満たす全ての集合 x を集めたものを a と b の対と呼び

$$\{a, b\}$$

と書く．解釈としては “a と b のみを要素とする類” のことであり，当然 a が集合であるならば

$$a \in \{a, b\}$$

が成立する．しかし a と b が共に真類であるときは，いかなる集合も a にも b にも等しくないため

$$\{a, b\} = \emptyset$$

となる．以上が大雑把な対の説明である．

定義 3.8.1 (対).　x, y を $\mathcal{L}$ の項とし，z を x にも y にも自由に現れない変項とするとき，

$$\{x, y\} \overset{\text{def}}{=\!=} \{\, z \mid x = z \vee y = z \,\}$$

で $\{x, y\}$ を定義し，これを x と y の対 **(pair)** と呼ぶ．特に $\{x, x\}$ を $\{x\}$ と書く．

上の定義では省略したが，x や y が内包項である場合は $z = x \vee z = y$ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き換えてから $\{x, y\}$ を定めるのである．つまり

$$\varphi \overset{\text{def}}{\longleftrightarrow} x = z \vee y = z$$

とおけば，φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き換えた式 $\hat{\varphi}$ によって

$$\{x, y\} \overset{\text{def}}{=\!=} \{\, z \mid \hat{\varphi}(z) \,\}$$

と定めるのである．たとえば φ に自由に現れる変項が z だけならば

$$\mathbf{COM} \vdash \forall z\,(\, z \in \{x, y\} \ \leftrightarrow\ \hat{\varphi}(z)\,)$$

が成立するし，同時に定理 3.7.2 と定理 3.7.3 より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \forall z \,(\, \hat{\varphi}(z) \leftrightarrow \varphi(z)\,)$$

も成り立つので

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \forall z \,(\, z \in \{x, y\} \leftrightarrow x = z \vee y = z\,)$$

が得られる．

定理 3.8.2 (対は表示されている要素しか持たない). a と b を類とするとき次が成立する:

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \forall x \,(\, x \in \{a, b\} \leftrightarrow a = x \vee b = x\,).$$

略証. 大まかな流れは前述したので

定理 3.8.3 (要素の表示の順番を入れ替えても対は等しい). a と b を類とするとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \{a, b\} = \{b, a\}.$$

略証. いま

$$\tau \overset{\text{def}}{=\!=} \varepsilon x \rightharpoondown (\, x \in \{a, b\} \leftrightarrow x \in \{b, a\}\,)$$

とおく (必要に応じて $x \in \{a, b\} \leftrightarrow x \in \{b, a\}$ は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き換える)．定理 3.8.2 より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \tau \in \{a, b\} \rightarrow a = \tau \vee b = \tau$$

が成り立つので，演繹法則の逆より

$$\tau \in \{a, b\},\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash a = \tau \vee b = \tau$$

となる．また論理和の可換律 (推論法則 2.2.13) より

$$\tau \in \{a, b\},\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash b = \tau \vee a = \tau$$

が成り立ち，定理 3.8.2 より

$$\tau \in \{a, b\},\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \tau \in \{b, a\}$$

が従う．そして演繹規則より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \tau \in \{a, b\} \rightarrow \tau \in \{b, a\}$$

が得られる．a と b を入れ替えれば

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \tau \in \{b, a\} \rightarrow \tau \in \{a, b\}$$

が得られるので，論理積の導入規則より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \tau \in \{a, b\} \;\leftrightarrow\; \tau \in \{b, a\}$$

が成り立ち，全称の導出 (推論法則 2.2.27) より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \forall x \,(\, x \in \{a, b\} \;\leftrightarrow\; x \in \{b, a\}\,)$$

となり，外延性公理より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \{a, b\} = \{b, a\}$$

が従う． ∎

公理 3.8.4 (対の公理).

$$\mathbf{PAI} \overset{\text{def}}{\longleftrightarrow} \forall x \,\forall y \,\exists p \,\forall z \,(\, x = z \lor y = z \;\leftrightarrow\; z \in p\,).$$

定理 3.8.5 (集合の対は集合である).　a と b を類とするとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{PAI} \vdash \mathrm{set}\,(a) \land \mathrm{set}\,(b) \;\longrightarrow\; \mathrm{set}\,(\{a, b\}).$$

略証.

step1　論理積の除去規則より

$$\mathrm{set}\,(a) \land \mathrm{set}\,(b) \vdash \exists x \,(\, a = x\,),$$
$$\mathrm{set}\,(a) \land \mathrm{set}\,(b) \vdash \exists x \,(\, b = x\,)$$

が成り立つので，

$$\tau \overset{\text{def}}{=\!=} \varepsilon x \,(\, a = x\,),$$
$$\sigma \overset{\text{def}}{=\!=} \varepsilon x \,(\, b = x\,)$$

とおけば

$$\mathrm{set}\,(a) \land \mathrm{set}\,(b) \vdash a = \tau, \tag{3.68}$$
$$\mathrm{set}\,(a) \land \mathrm{set}\,(b) \vdash b = \sigma$$

が成り立つ．対の公理より τ と σ に対しては

$$\mathbf{PAI} \vdash \exists p \,\forall z \,(\, \tau = z \lor \sigma = z \;\leftrightarrow\; z \in p\,)$$

が成り立つので，

$$\rho \overset{\text{def}}{=\!=} \varepsilon p \,\forall z \,(\, \tau = z \lor \sigma = z \;\leftrightarrow\; z \in p\,)$$

とおけば

$$\mathbf{PAI} \vdash \forall z \,(\, \tau = z \lor \sigma = z \;\leftrightarrow\; z \in \rho\,) \tag{3.69}$$

となる．

step2　次に

$$\forall z\,(\,z \in \{a, b\} \leftrightarrow z \in \rho\,)$$

を示すために

$$\zeta \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varepsilon z \neg(\,z \in \{a, b\} \leftrightarrow z \in \rho\,)$$

とおく (当然 $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き換える)．等号の推移律 (定理 3.1.13) より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash a = \tau \rightarrow (\,a = \zeta \rightarrow \tau = \zeta\,)$$

が成り立つので，(3.68) との三段論法より

$$\mathrm{set}\,(a) \wedge \mathrm{set}\,(b),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash a = \zeta \rightarrow \tau = \zeta$$

が成り立ち，論理和の導入規則より

$$\mathrm{set}\,(a) \wedge \mathrm{set}\,(b),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash a = \zeta \rightarrow \tau = \zeta \vee \sigma = \zeta$$

が従う．同様にして

$$\mathrm{set}\,(a) \wedge \mathrm{set}\,(b),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash b = \zeta \rightarrow \tau = \zeta \vee \sigma = \zeta$$

も成り立つので，論理和の除去規則より

$$\mathrm{set}\,(a) \wedge \mathrm{set}\,(b),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash a = \zeta \vee b = \zeta \rightarrow \tau = \zeta \vee \sigma = \zeta$$

が得られる．同様に

$$\mathrm{set}\,(a) \wedge \mathrm{set}\,(b),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash \tau = \zeta \vee \sigma = \zeta \rightarrow a = \zeta \vee b = \zeta$$

も得られ，論理積の導入規則より

$$\mathrm{set}\,(a) \wedge \mathrm{set}\,(b),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash a = \zeta \vee b = \zeta \leftrightarrow \tau = \zeta \vee \sigma = \zeta$$

が従う．他方で定理 3.8.2 より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \zeta \in \{a, b\} \leftrightarrow a = \zeta \vee b = \zeta$$

が成り立ち，また (3.69) より

$$\mathbf{PAI} \vdash \tau = \zeta \vee \sigma = \zeta \leftrightarrow \zeta \in \rho$$

も成り立つので，同値記号の推移律 (推論法則 3.1.12) より

$$\mathrm{set}\,(a) \wedge \mathrm{set}\,(b),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{PAI} \vdash \zeta \in \{a, b\} \leftrightarrow \zeta \in \rho$$

が従う．そして全称の導出 (推論法則 2.2.27) より

$$\mathrm{set}\,(a) \wedge \mathrm{set}\,(b),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{PAI} \vdash \forall z\,(\,z \in \{a, b\} \leftrightarrow z \in \rho\,)$$

が成り立ち，外延性公理より

$$\mathrm{set}\,(a) \wedge \mathrm{set}\,(b),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{PAI} \vdash \{a, b\} = \rho$$

が従い，存在記号の推論規則より

$$\mathrm{set}\,(a) \wedge \mathrm{set}\,(b),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{PAI} \vdash \exists p\,(\,\{a, b\} = p\,)$$

が成り立つ． ∎

定理 3.8.6 (集合は対の要素となれる).　a と b を類とするとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \mathrm{set}\,(a) \ \rightarrow\ a \in \{a, b\},$$
$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \mathrm{set}\,(b) \ \rightarrow\ b \in \{a, b\}.$$

略証.

step1　いま

$$\tau \stackrel{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon x\,(\,a = x\,)$$

とおくと

$$\mathrm{set}\,(a) \vdash a = \tau \tag{3.70}$$

が成り立ち，論理和の導入規則より

$$\mathrm{set}\,(a) \vdash a = \tau \vee b = \tau$$

も成り立つ．定理 3.8.2 より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash a = \tau \vee b = \tau \ \rightarrow\ \tau \in \{a, b\}$$

が成り立つので三段論法より

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \tau \in \{a, b\} \tag{3.71}$$

が従う．また (3.70) と相等性公理より

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EQ} \vdash \tau = a$$

となり

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EQ} \vdash \tau \in \{a, b\} \ \rightarrow\ a \in \{a, b\}$$

となるので，(3.71) と三段論法より

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash a \in \{a, b\}$$

が成立する．

step2　前段で a と b を入れ替えれば

$$\mathrm{set}\,(b),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash b \in \{b, a\} \tag{3.72}$$

が成立する．ところで対の対称性 (定理 3.8.3) より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \{b, a\} = \{a, b\}$$

が成立し，また相等性公理より

$$\mathbf{EQ} \vdash \{b, a\} = \{a, b\} \ \rightarrow\ (\,b \in \{b, a\} \ \rightarrow\ b \in \{a, b\}\,)$$

も成り立つので，三段論法より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash b \in \{b, a\} \ \rightarrow \ b \in \{a, b\} \tag{3.73}$$

が従う．(3.72) と (3.73) と三段論法より

$$\mathrm{set}\,(b),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash b \in \{a, b\}$$

が得られる． ∎

a を集合とすれば対の公理より $\{a\}$ も集合となるので，定理 3.8.6 より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \mathrm{set}\,(a) \ \rightarrow \ a \in \{a\}$$

が成立する．一方で a も b も真類であると $\{a, b\}$ は空になる．

定理 3.8.7 (真類同士の対は空). a と b を類とするとき，

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \rightharpoondown \mathrm{set}\,(a) \wedge \rightharpoondown \mathrm{set}\,(b) \ \rightarrow \ \{a, b\} = \emptyset.$$

略証． いま

$$\tau \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varepsilon x \rightharpoondown (\, x \notin \{a, b\} \,)$$

とおく ($x \notin \{a, b\}$ は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き換える).

$$\rightharpoondown \mathrm{set}\,(a) \wedge \ \rightharpoondown \mathrm{set}\,(b) \vdash \rightharpoondown \exists x\,(\, a = x \,)$$

が成り立ち，De Morgan の法則 (推論法則 2.2.31) より

$$\rightharpoondown \mathrm{set}\,(a) \wedge \rightharpoondown \mathrm{set}\,(b) \vdash \forall x\,(\, a \neq x \,)$$

が従い，全称記号の推論規則より

$$\rightharpoondown \mathrm{set}\,(a) \wedge \rightharpoondown \mathrm{set}\,(b) \vdash a \neq \tau$$

となる．同様にして

$$\rightharpoondown \mathrm{set}\,(a) \wedge \rightharpoondown \mathrm{set}\,(b) \vdash b \neq \tau$$

も成り立つので，論理積の導入規則より

$$\rightharpoondown \mathrm{set}\,(a) \wedge \rightharpoondown \mathrm{set}\,(b) \vdash a \neq \tau \wedge b \neq \tau$$

が成立し，De Morgan の法則 (推論法則 2.2.10) より

$$\rightharpoondown \mathrm{set}\,(a) \wedge \rightharpoondown \mathrm{set}\,(b) \vdash \rightharpoondown (\, a = \tau \vee b = \tau \,) \tag{3.74}$$

が従う．ところで定理 3.8.2 より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \tau \in \{a, b\} \ \rightarrow \ a = \tau \vee b = \tau$$

が成り立つので，対偶を取って

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \neg (a = \vee b = \tau) \rightarrow \tau \notin \{a, b\}$$

が成り立つ (推論法則 2.2.3)．そして (3.74) との三段論法より

$$\neg \mathrm{set}(a) \wedge \neg \mathrm{set}(b),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \tau \notin \{a, b\}$$

が従い，全称の導出 (推論法則 2.2.27) より

$$\neg \mathrm{set}(a) \wedge \neg \mathrm{set}(b),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \forall x (x \notin \{a, b\})$$

が従う．要素を持たない類は空集合である (定理 3.3.7) ので

$$\neg \mathrm{set}(a) \wedge \neg \mathrm{set}(b),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \{a, b\} = \emptyset$$

が得られる． ■

上の定理とは逆に $\{a, b\}$ が空ならば a も b も真類である．

定理 3.8.8 (空な対に表示されている類は集合ではない)． a と b を類とするとき，

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \{a, b\} = \emptyset \rightarrow \neg \mathrm{set}(a) \wedge \neg \mathrm{set}(b).$$

略証． いま

$$\tau \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon x (a = x)$$

とおけば

$$\mathrm{set}(a) \vdash a = \tau$$

が成立し，また定理 3.8.6 より

$$\mathrm{set}(a),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash a \in \{a, b\}$$

が成り立つので相等性公理より

$$\mathrm{set}(a),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \tau \in \{a, b\}$$

が従い，存在記号の推論規則より

$$\mathrm{set}(a),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \exists x (x \in \{a, b\})$$

が成り立つ．演繹規則より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \mathrm{set}(a) \rightarrow \exists x (x \in \{a, b\})$$

となり，対偶を取れば

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \neg \exists x (x \in \{a, b\}) \rightarrow \neg \mathrm{set}(a) \tag{3.75}$$

が得られる (推論法則 2.2.3)．他方で空の類は要素を持たない (定理 3.3.7) ので

$$\mathbf{EXT},\mathbf{EQ},\mathbf{COM} \vdash \{a,b\} = \emptyset \ \rightarrow\ \forall x\,(\,x \notin \{a,b\}\,) \tag{3.76}$$

が成り立ち，また De Morgan の法則 (推論法則 2.2.30) より

$$\vdash \forall x\,(\,x \notin \{a,b\}\,) \ \rightarrow\ \neg\exists x\,(\,x \in \{a,b\}\,) \tag{3.77}$$

も成り立つので，(3.76) (3.77) (3.75) を併せて

$$\mathbf{EXT},\mathbf{EQ},\mathbf{COM} \vdash \{a,b\} = \emptyset \ \rightarrow\ \neg\mathrm{set}\,(a)$$

が従う．同様にして

$$\mathbf{EXT},\mathbf{EQ},\mathbf{COM} \vdash \{a,b\} = \emptyset \ \rightarrow\ \neg\mathrm{set}\,(b)$$

も成り立ち，論理積の導入規則より

$$\mathbf{EXT},\mathbf{EQ},\mathbf{COM} \vdash \{a,b\} = \emptyset \ \rightarrow\ \neg\mathrm{set}\,(a) \wedge \neg\mathrm{set}\,(b)$$

が得られる． ∎

3.9　合併

a を空でない類とするとするとき，a の要素もまた空でなければ要素を持つ．a の要素の要素を全て集めたものを a の合併と呼び，その受け皿の意味を込めて

$$\bigcup a$$

と書く．当然ながら，空の合併は空となる．

定義 3.9.1 (合併).　x を $\mathcal{L}$ の項とするとき，x の合併 **(union)** を

$$\bigcup x \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \{\,y \mid \exists z \in x\,(\,y \in z\,)\,\}$$

で定める．

量化子が付いた式の略記法　上の定義で

$$\exists z \in x\,(\,y \in z\,)$$

という式を書いたが，これは

$$\exists z \in x\,(\,y \in z\,) \overset{\mathrm{def}}{\longleftrightarrow} \exists z\,(\,z \in x \wedge y \in z\,)$$

により定義される省略形である．同様にして，φ を式とするとき

$$\exists z\ \left(\,z \in x \wedge \varphi\,\right)$$

なる式を

$$\exists z \in x\, \varphi$$

と略記する．また全称記号についても

$$\forall z\, \left(z \in x \rightarrow \varphi \right)$$

なる式を

$$\forall z \in x\, \varphi$$

と略記する．

定理 3.9.2 (合併の内包性).　a を類とするとき

$$\mathbf{COM} \vdash \forall y\, (y \in \bigcup a \leftrightarrow \exists z\, (z \in a \wedge y \in z)).$$

略証.　a が主要 ε 項である場合は内包性公理から直接

$$\mathbf{COM} \vdash \forall y\, (y \in \bigcup a \leftrightarrow \exists z\, (z \in a \wedge y \in z))$$

が成立する．a が $\{ x \mid \varphi(x) \}$ なる内包項の場合は

$$\bigcup a \overset{\text{def}}{=\!=} \{ y \mid \exists z\, (\varphi(z) \wedge y \in z) \}$$

と定義されることになり，

$$\mathbf{COM} \vdash \forall y\, (y \in \bigcup a \leftrightarrow \exists z\, (\varphi(z) \wedge y \in z)) \tag{3.78}$$

が成立する．ここで

$$\mathbf{COM} \vdash \forall y\, (y \in \bigcup a \leftrightarrow \exists z\, (z \in a \wedge y \in z))$$

を示すために

$$\eta \overset{\text{def}}{=\!=} \varepsilon y \neg (y \in \bigcup a \leftrightarrow \exists z\, (z \in a \wedge y \in z))$$

とおく (右辺は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に直す).

step1　いま

$$\zeta \overset{\text{def}}{=\!=} \varepsilon z\, (\varphi(z) \wedge \eta \in z)$$

とおけば，(3.78) より

$$\eta \in \bigcup a,\ \mathbf{COM} \vdash \varphi(\zeta) \wedge \eta \in \zeta$$

が成立する．他方で

$$\mathbf{COM} \vdash \varphi(\zeta) \rightarrow \zeta \in a$$

も成り立つので

$$\eta \in \bigcup a,\ \mathbf{COM} \vdash \zeta \in a \wedge \eta \in \zeta$$

が従う．ゆえに

$$\mathbf{COM} \vdash \eta \in \bigcup a \ \rightarrow\ \exists z\,(\,z \in a \wedge \eta \in z\,) \tag{3.79}$$

が得られる．

step2　ζ を先と同じものにすれば

$$\exists z\,(\,z \in a \wedge \eta \in z\,) \vdash \zeta \in a \wedge \eta \in \zeta$$

が成立する．また

$$\mathbf{COM} \vdash \zeta \in a \ \rightarrow\ \varphi(\zeta)$$

も成り立つので

$$\exists z\,(\,z \in a \wedge \eta \in z\,),\ \mathbf{COM} \vdash \varphi(\zeta) \wedge \eta \in \zeta$$

が従う．(3.78) より

$$\mathbf{COM} \vdash \varphi(\zeta) \wedge \eta \in \zeta \ \rightarrow\ \eta \in \bigcup a$$

も成り立つので

$$\exists z\,(\,z \in a \wedge \eta \in z\,),\ \mathbf{COM} \vdash \eta \in \bigcup a \tag{3.80}$$

が得られる．

step3　(3.79) と (3.80) より

$$\mathbf{COM} \vdash \eta \in \bigcup a \ \leftrightarrow\ \exists z\,(\,z \in a \wedge \eta \in z\,)$$

が成立するので，全称の導出 (推論法則 2.2.27) より

$$\mathbf{COM} \vdash \forall y\,(\,y \in \bigcup a \ \leftrightarrow\ \exists z\,(\,z \in a \wedge y \in z\,)\,)$$

が得られる． ∎

公理 3.9.3 (合併の公理).　次の式を **UNI** によって参照する:

$$\forall x\, \exists u\, \forall y\,(\,\exists z\,(\,z \in x \wedge y \in z\,) \ \leftrightarrow\ y \in u\,).$$

定理 3.9.4 (集合の合併は集合).　a を類とするとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{UNI} \vdash \mathrm{set}\,(a) \ \rightarrow\ \mathrm{set}\,(\bigcup a).$$

略証.

step1　まず

$$\tau \stackrel{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon x\,(\,a = x\,)$$

とおけば (必要に応じて $a = x$ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き換える),

$$\mathrm{set}\,(a) \vdash a = \tau$$

が成立する．τ に対して

$$\mathbf{UNI} \vdash \exists u\,\forall y\,(\,\exists z\,(\,z \in \tau \wedge y \in z\,) \;\leftrightarrow\; y \in u\,)$$

が成り立つので,

$$v \stackrel{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon u\,\forall y\,(\,\exists z\,(\,z \in \tau \wedge y \in z\,) \;\leftrightarrow\; y \in u\,)$$

とおけば

$$\mathbf{UNI} \vdash \forall y\,(\,\exists z\,(\,z \in \tau \wedge y \in z\,) \;\leftrightarrow\; y \in v\,) \tag{3.81}$$

が成立する．次に τ を a に置き換えた場合に

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EQ}, \mathbf{UNI} \vdash \forall y\,(\,\exists z\,(\,z \in a \wedge y \in z\,) \;\leftrightarrow\; y \in v\,)$$

が成立することを示す．

step2　いま

$$\eta \stackrel{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon y \rightharpoondown\!(\,\exists z\,(\,z \in a \wedge y \in z\,) \;\leftrightarrow\; y \in v\,)$$

とおけば，(3.81) より

$$\mathbf{UNI} \vdash \exists z\,(\,z \in \tau \wedge \eta \in z\,) \;\leftrightarrow\; \eta \in v$$

が成立する．

$$\zeta \stackrel{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon z\,(\,z \in a \wedge \eta \in z\,)$$

とおけば

$$\exists z\,(\,z \in a \wedge \eta \in z\,) \vdash \zeta \in a \wedge \eta \in \zeta$$

が成り立ち，

$$\mathbf{EQ} \vdash a = \tau \;\longrightarrow\; (\,\zeta \in a \;\longrightarrow\; \zeta \in \tau\,)$$

と併せて

$$\exists z\,(\,z \in a \wedge \eta \in z\,),\ \mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EQ} \vdash \zeta \in \tau \wedge \eta \in \zeta$$

が成立する．また (3.81) より

$$\mathbf{UNI} \vdash (\,\zeta \in \tau \wedge \eta \in \zeta\,) \;\longrightarrow\; \eta \in v$$

が成り立つので

$$\exists z\,(\,z \in a \wedge \eta \in z\,),\ \mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EQ}, \mathbf{UNI} \vdash \eta \in \upsilon$$

が従う．ゆえに

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EQ}, \mathbf{UNI} \vdash \exists z\,(\,z \in a \wedge \eta \in z\,) \ \longrightarrow\ \eta \in \upsilon \tag{3.82}$$

が得られた．

step3　逆に (3.81) より

$$\eta \in \upsilon,\ \mathbf{UNI} \vdash \exists z\,(\,z \in \tau \wedge \eta \in z\,)$$

が成り立つので

$$\eta \in \upsilon,\ \mathbf{UNI} \vdash \zeta \in \tau \wedge \eta \in \zeta$$

が従い，

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EQ} \vdash \zeta \in \tau \ \longrightarrow\ \zeta \in a$$

と併せて

$$\eta \in \upsilon,\ \mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EQ}, \mathbf{UNI} \vdash \zeta \in a \wedge \eta \in \zeta$$

が従い，

$$\eta \in \upsilon,\ \mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EQ}, \mathbf{UNI} \vdash \exists z\,(\,z \in a \wedge \eta \in z\,)$$

が従う．そして演繹規則より

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EQ}, \mathbf{UNI} \vdash \eta \in \upsilon \ \longrightarrow\ \exists z\,(\,z \in a \wedge \eta \in z\,) \tag{3.83}$$

も得られる．

step4　(3.82) と (3.83) より

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EQ}, \mathbf{UNI} \vdash \exists z\,(\,z \in a \wedge \eta \in z\,) \ \longleftrightarrow\ \eta \in \upsilon$$

が得られ，全称の導出 (推論法則 2.2.27) より

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EQ}, \mathbf{UNI} \vdash \forall y\,(\,\exists z\,(\,z \in a \wedge y \in z\,) \ \longleftrightarrow\ y \in \upsilon\,)$$

となり，定理 3.7.5 より

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{UNI} \vdash \{\,z \mid \exists z\,(\,z \in a \wedge y \in z\,)\,\} = \upsilon$$

が成り立つ．存在記号の推論規則より

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{UNI} \vdash \exists u\,(\,\{\,z \mid \exists z\,(\,z \in a \wedge y \in z\,)\,\} = u\,)$$

が成り立つので，定理が得られた． ∎

定理 3.9.5 (空集合の合併は空).　次が成立する:

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \bigcup \emptyset = \emptyset.$$

略証.　いま

$$\zeta \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varepsilon z \rightharpoondown (z \notin \bigcup \emptyset),$$
$$\eta \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varepsilon y \rightharpoondown\!\!\rightharpoondown (y \in \emptyset \wedge \zeta \in y)$$

とおく．定理 3.3.6 より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \eta \notin \emptyset$$

が成り立つので

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \eta \notin \emptyset \vee \zeta \notin \eta$$

も成立し，De Morgan の法則 (推論法則 2.2.11) より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \rightharpoondown (\eta \in \emptyset \wedge \zeta \in \eta)$$

が成立し，全称の導出 (推論法則 2.2.27) より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \forall y \rightharpoondown (y \in \emptyset \wedge \zeta \in y)$$

が成立する．そして量化子の De Morgan の法則 (推論法則 2.2.30) より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \rightharpoondown \exists y (y \in \emptyset \wedge \zeta \in y) \tag{3.84}$$

が得られる．他方で

$$\mathbf{COM} \vdash \zeta \in \bigcup \emptyset \rightarrow \exists y (y \in \emptyset \wedge \zeta \in y)$$

が成り立つので，対偶を取って

$$\mathbf{COM} \vdash \rightharpoondown \exists y (y \in \emptyset \wedge \zeta \in y) \rightarrow \zeta \notin \bigcup \emptyset \tag{3.85}$$

が得られる．(3.84) と (3.85) より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \zeta \notin \bigcup \emptyset$$

が成り立つので，全称の導出 (推論法則 2.2.27) より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \forall z (z \notin \bigcup \emptyset)$$

が従い，定理 3.3.7 より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \bigcup \emptyset = \emptyset$$

が得られる． ∎

定理 3.9.6 (等しい類の合併は等しい).　a と b を類とするとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash a = b \rightarrow \bigcup a = \bigcup b.$$

略証.　いま

$$\eta \overset{\text{def}}{=\!=} \varepsilon y \neg (y \in \bigcup a \leftrightarrow y \in \bigcup b)$$

とおく．合併の内包性 (定理 3.9.2) より

$$\eta \in \bigcup a, \ \mathbf{COM} \vdash \exists z (z \in a \wedge \eta \in z)$$

が成り立つので，

$$\zeta \overset{\text{def}}{=\!=} \varepsilon z (z \in a \wedge \eta \in z)$$

とおけば

$$\eta \in \bigcup a, \ \mathbf{COM} \vdash \zeta \in a \wedge \eta \in \zeta$$

となる．ところで

$$\mathbf{EQ} \vdash a = b \rightarrow (\zeta \in a \rightarrow \zeta \in b)$$

が成り立つので

$$a = b, \ \eta \in \bigcup a, \ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \zeta \in b \wedge \eta \in \zeta$$

が得られ，

$$a = b, \ \eta \in \bigcup a, \ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \exists z (z \in b \wedge \eta \in z)$$

が従う．そして合併の内包性 (定理 3.9.2) より

$$a = b, \ \eta \in \bigcup a, \ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \eta \in \bigcup b \tag{3.86}$$

が得られる．a と b を入れ替えれば

$$\mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash b = a \rightarrow (\eta \in \bigcup b \rightarrow \eta \in \bigcup a)$$

となるが，

$$a = b, \ \mathbf{EQ} \vdash b = a$$

と併せて

$$a = b, \ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \eta \in \bigcup b \rightarrow \eta \in \bigcup a \tag{3.87}$$

が得られる．(3.86) と (3.87) より

$$a = b, \ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \eta \in \bigcup a \leftrightarrow \eta \in \bigcup b$$

が従い，全称の導出 (推論法則 2.2.27) より

$$a = b,\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \forall y\, (\, y \in \bigcup a \ \leftrightarrow\ y \in \bigcup b\,)$$

が成立し，外延性公理と併せて

$$a = b,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \bigcup a = \bigcup b$$

を得る． ∎

対の合併

x と y を $\mathcal{L}$ の項とするとき，その対の合併を

$$x \cup y \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \bigcup \{x, y\}$$

と書く．

定理 3.9.7 (対の合併の対称性).　a と b を類とするとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash a \cup b = b \cup a.$$

略証．　定理 3.8.3 より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \{a, b\} = \{b, a\}$$

が成り立つので，定理 3.9.6 から

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash a \cup b = b \cup a$$

が従う． ∎

定理 3.9.8 (二つの集合の合併はそれぞれの要素を合わせたもの).　a と b を類とするとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \forall x\, (\, x \in a \cup b \ \longrightarrow\ x \in a \vee x \in b\,),$$
$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \mathrm{set}\,(a) \ \longrightarrow\ \forall x\, (\, x \in a \ \longrightarrow\ x \in a \cup b\,).$$

定理の二つ目の主張で a と b を入れ替えれば

$$\mathrm{set}\,(b),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \forall x\, (\, x \in b \ \longrightarrow\ x \in b \cup a\,)$$

が成り立つが，対の合併の対称性 (定理 3.9.7) より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash b \cup a = a \cup b$$

が成り立つので

$$\mathrm{set}\,(b),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \forall x\, (\, x \in b \ \longrightarrow\ x \in a \cup b\,)$$

が従う．ゆえに

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathrm{set}\,(b),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \forall x\,(\,x \in a \vee x \in b\ \rightarrow\ x \in a \cup b\,)$$

が成り立つ．そして一つ目の主張と併せれば

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathrm{set}\,(b),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \forall x\,(\,x \in a \cup b\ \leftrightarrow\ x \in a \vee x \in b\,)$$

が得られる．つまり，“二つの集合の合併は” それぞれの要素を合わせたものに等しいのである．

略証.

step1　いま

$$\tau \stackrel{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon x \rightharpoondown (\,x \in a \cup b\ \rightarrow\ x \in a \vee x \in b\,)$$

とおくと，定理 3.9.2 より

$$\tau \in a \cup b,\ \mathbf{COM} \vdash \exists z\,(\,z \in \{a, b\} \wedge \tau \in z\,)$$

が成り立つので，

$$\zeta \stackrel{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon z\,(\,z \in \{a, b\} \wedge \tau \in z\,)$$

とおけば

$$\tau \in a \cup b,\ \mathbf{COM} \vdash \zeta \in \{a, b\}, \tag{3.88}$$

$$\tau \in a \cup b,\ \mathbf{COM} \vdash \tau \in \zeta \tag{3.89}$$

が成り立つ．(3.89) と

$$a = \zeta,\ \mathbf{EQ} \vdash \zeta = a,$$

$$a = \zeta,\ \mathbf{EQ} \vdash \zeta = a\ \rightarrow\ (\,\tau \in \zeta\ \rightarrow\ \tau \in a\,)$$

より

$$\tau \in a \cup b,\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash a = \zeta\ \rightarrow\ \tau \in a$$

が従い，

$$\tau \in a \cup b,\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash a = \zeta\ \rightarrow\ \tau \in a \vee \tau \in b$$

が成り立つ．同様に

$$\tau \in a \cup b,\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash b = \zeta\ \rightarrow\ \tau \in a \vee \tau \in b$$

が成り立ち，場合分け規則より

$$\tau \in a \cup b,\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash a = \zeta \vee b = \zeta\ \rightarrow\ \tau \in a \vee \tau \in b \tag{3.90}$$

が成り立つ．他方で定理 3.8.2 より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \zeta \in \{a, b\}\ \rightarrow\ a = \zeta \vee b = \zeta$$

が成り立つので，(3.88) と併せて

$$\tau \in a \cup b,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash a = \zeta \vee b = \zeta$$

が成り立つ．よって (3.90) と併せて

$$\tau \in a \cup b,\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \tau \in a \vee \tau \in b$$

が従い，全称の導出 (推論法則 2.2.27) より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \forall x\,(\, x \in a \cup b \ \longrightarrow\ x \in a \vee x \in b\,)$$

が得られる．

step2　いま

$$\chi \stackrel{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon x \neg(\, x \in a \ \longrightarrow\ x \in a \cup b\,),$$
$$\tau \stackrel{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon s\,(\, a = s\,)$$

とおく (右辺は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き換える)．まず存在記号の推論規則より

$$\mathrm{set}\,(a) \vdash a = \tau$$

が成り立つ．また集合は対の要素になれる (定理 3.8.6) ので

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash a \in \{a, b\}$$

も成り立ち，相等性公理より

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \tau \in \{a, b\}$$

が従う．同じく相等性公理より

$$\chi \in a,\ \mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \chi \in \tau$$

も成立する．ゆえに

$$\chi \in a,\ \mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \tau \in \{a, b\} \wedge \chi \in \tau$$

が成立し，存在記号の推論規則より

$$\chi \in a,\ \mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \exists z\,(\, z \in \{a, b\} \wedge \chi \in z\,)$$

が従う．合併の内包性 (定理 3.9.2) より

$$\chi \in a,\ \mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \chi \in a \cup b$$

となり，演繹法則より

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \chi \in a \ \longrightarrow\ \chi \in a \cup b$$

となり，全称の導出 (推論法則 2.2.27) より

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \forall x\,(\, x \in a \ \longrightarrow\ x \in a \cup b\,)$$

が得られる．　∎

定理 3.9.9 (要素の部分集合は合併の部分集合).　a を類とするとき

$$\forall x \left[\exists t \in a \, (\, x \subset t \,) \rightarrow x \subset \bigcup a \right].$$

略証.　χ を $\mathcal{L}$ の任意の対象として

$$\exists t \in a \, (\, x \subset t \,) \tag{3.91}$$

であるとする．ここで

$$\tau \overset{\text{def}}{=\!=} \varepsilon t \, (\, t \in a \wedge \chi \subset t \,)$$

とおく．s を $\mathcal{L}$ の任意の対象として

$$s \in \chi$$

であるとすると，

$$\chi \subset \tau$$

より

$$\tau \in a \wedge s \in \tau$$

が成立するので，存在記号の規則より

$$\exists t \; (\, t \in a \wedge s \in t \,)$$

が成り立ち

$$s \in \bigcup a$$

が従う．s は任意に与えられていたので，(3.91) の下で

$$\forall s \, (\, s \in \chi \rightarrow s \in \bigcup a \,)$$

すなわち

$$\chi \subset \bigcup a$$

が成り立つ．ゆえに

$$\exists t \in a \; (\, \chi \subset t \,) \rightarrow \chi \subset \bigcup a$$

が従い，χ も任意に与えられていたので

$$\forall x \left[\exists t \in a \, (\, x \subset t \,) \rightarrow x \subset \bigcup a \right]$$

が得られる． ∎

定理 3.9.10 (部分集合の合併は部分類).　a と b を類とするとき

$$\forall x \in a\,(\,x \subset b\,) \rightarrow \bigcup a \subset b.$$

略証.　いま

$$\forall x \in a\,(\,x \subset b\,) \tag{3.92}$$

が成り立っているとする．χ を $\mathcal{L}$ の任意の対象とし，

$$\chi \in \bigcup a$$

であるとする．すると

$$\exists t\ (\,t \in a \wedge \chi \in t\,)$$

が成り立つので，

$$\tau \stackrel{\text{def}}{=\!=} \varepsilon t\ (\,t \in a \wedge \chi \in t\,)$$

とおけば

$$\tau \in a \wedge \chi \in \tau$$

が成立する．ここで (3.92) より

$$\tau \subset b$$

となるから

$$\chi \in b$$

が従い，演繹法則より (3.92) の下で

$$\chi \in \bigcup a \rightarrow \chi \in b$$

が成立する．χ の任意性ゆえに (3.92) の下で

$$\bigcup a \subset b$$

が成立し，演繹法則より

$$\forall x \in a\,(\,x \subset b\,) \rightarrow \bigcup a \subset b$$

が得られる． ∎

3.10　交叉

交叉とは合併の対となる概念である．a を類とするとき，a の全ての要素が共通して持つ集合の全体を a の交叉と呼び，合併の記号を上下に反転させて

$$\bigcap a$$

と書く．またいささか奇妙な結果であるが，空虚な真の為せる業により空の交叉は宇宙に一致する．

定義 3.10.1 (交叉). a を類とするとき，a の**交叉 (intersection)** を

$$\bigcap a \overset{\mathrm{def}}{=} \{\, x \mid \forall t \in a\,(\, x \in t\,)\}$$

で定める．

上の定義に現れた

$$\forall t \in a\,(\, x \in t\,)$$

とは

$$\forall t\,(\, t \in a \Longrightarrow x \in t\,)$$

を略記した式である．

定理 3.10.2 (空集合の交叉は宇宙となる). 次が成立する:

$$\bigcap \emptyset = \mathbf{V}.$$

証明. x を $\mathcal{L}$ の任意の対象とするとき，空虚な真より

$$t \in \emptyset \Longrightarrow x \in t$$

は $\mathcal{L}$ のいかなる対象 t に対してもに真となる．ゆえに

$$\forall t \in \emptyset\,(\, x \in t\,)$$

が成立し

$$\forall x\,(\, x \in \bigcap \emptyset\,)$$

が従う．

$$\forall x\,(\, x \in \mathbf{V}\,)$$

も成り立つから

$$\forall x\,(\, x \in \mathbf{V} \Longleftrightarrow x \in \bigcap \emptyset\,)$$

が成立して，外延性の公理より

$$\bigcap\emptyset = \mathbf{V}$$

が従う． ∎

定理 3.10.3 (交叉は全ての要素に含まれる).　a を類とするとき

$$\forall x\,(\,x \in a \Longrightarrow \bigcap a \subset x\,).$$

定理 3.10.4 (全ての要素に共通して含まれる類は交叉にも含まれる).　a と b を類とするとき

$$\forall x \in a\,(\,b \subset x\,) \Longrightarrow b \subset \bigcap a.$$

定理 3.10.5 (等しい類の交叉は等しい).　a と b を類とするとき

$$a = b \Longrightarrow \bigcap a = \bigcap b.$$

対の交叉

a と b を類とするとき，その対の交叉を

$$a \cap b \overset{\mathrm{def}}{=} \bigcap\{a, b\}$$

と書く．

定理 3.10.6.

$$\forall x\,(\,x \in a \cap b \Longleftrightarrow x \in a \wedge x \in b\,).$$

定理 3.10.7 (交叉の可換律).

$$a \cap b = b \cap a.$$

定理 3.10.8 (対の交叉が空ならばその構成要素は共通元を持たない).　a, b を類とするとき次が成立する:

$$a \cap b = \emptyset \Longleftrightarrow \forall x\,(\,x \in a \Longrightarrow x \notin b\,).$$

略証.　定理 3.3.7 より

$$a \cap b = \emptyset \Longleftrightarrow \forall x\ (\,x \notin a \cap b\,)$$

が成立する．また

$$\forall x\ (\,x \notin a \cap b \Longleftrightarrow x \notin a \vee x \notin b\,)$$

かつ

$$\forall x\,((\,x \notin a \vee x \notin b\,) \Longleftrightarrow (\,x \in a \Longrightarrow x \notin b\,))$$

が成り立つので

$$\forall x\,(\,x \notin a \cap b \Longleftrightarrow (\,x \in a \Longrightarrow x \notin b\,))$$

が成立し，

$$\forall x\,(\,x \notin a \cap b\,) \Longleftrightarrow \forall x\,(\,x \in a \Longrightarrow x \notin b\,)$$

が従う．ゆえに

$$a \cap b = \emptyset \Longleftrightarrow \forall x\,(\,x \in a \Longrightarrow x \notin b\,).$$

が得られる．■

定義 3.10.9 (差類). a, b を類するとき，a に属するが b には属さない集合の全体を a から b を引いた**差類 (class difference)** と呼び，記号は

$$a \backslash b \overset{\text{def}}{=\!=} \{\, x \mid x \in a \wedge x \notin b \,\}$$

で定める．特に $a \backslash b$ が集合であるときこれを**差集合 (set difference)** と呼ぶ．また

$$b \subset a$$

である場合，$a \backslash b$ を a における b の**補類 (complement)** 或いは $a \backslash b$ が集合であるとき**補集合**と呼ぶ.

$\mathrm{set}\,(a) \Longrightarrow \mathrm{set}\,(a \backslash b)$

定理 3.10.10. a と b を類とするとき，

$$b \subset a$$

であれば

$$\mathrm{set}\,(a \backslash b) \wedge \mathrm{set}\,(b) \Longrightarrow \mathrm{set}\,(a).$$

略証.　対の公理から

$$\{a \backslash b, b\}$$

は集合であり，合併の公理と

$$a = (a \backslash b) \cup b$$

より

$$\mathrm{set}\,(a)$$

が従う．■

定理 3.10.11 (合併を引いた類は要素の差の交叉で書ける).　a と b を類とするとき，a が集合であれば

$$a \backslash \bigcup b = \bigcap \{ a \backslash t \mid t \in b \}.$$

上の定理の式で

$$\{ a \backslash t \mid t \in b \}$$

と書いていますが，これは

$$\{ x \mid \exists t \in b \, (x = a \backslash t) \}$$

の略記です．ところがこれもまだ略記されたもので，正しく書くと

$$\{ x \mid \exists t \in b \, \forall s \, (s \in x \Longleftrightarrow s \in a \wedge s \notin t) \}$$

となります．以降も煩雑さを避けるためにこのように略記します．

定理 3.10.12 (二つの類の合併の差類は差類同士の交叉).　a と b と c を類とするとき

$$a \backslash (b \cup c) = (a \backslash b) \cap (a \backslash c).$$

定理 3.10.13 (交叉を引いた類は要素の差の合併で書ける).　a と b を類とするとき

$$a \backslash \bigcap b = \bigcup \{ a \backslash t \mid t \in b \}.$$

定理 3.10.14 (二つの類の交叉の差類は差類同士の合併).　a と b と c を類とするとき

$$a \backslash (b \cap c) = (a \backslash b) \cup (a \backslash c).$$

定理 3.10.15.

証明.

(1)　a^{-1} の任意の要素 t に対し或る V の要素 x, y が存在して

$$(x, y) \in a \wedge t = (y, x)$$

を満たす．$((x, y), (y, x)) \in f$ より $((x, y), t) \in f$ が成り立つから $t \in f * a$ となる．逆に $f * a$ の任意の要素 t に対して a の或る要素 x が存在して

$$x \in a \wedge (x, t) \in f$$

となる．x に対し V の或る要素 a, b が存在して $x = (a, b)$ となるので

$$((a, b), t) \in f$$

となり，V の或る要素 c, d が存在して

$$((a, b), t) = ((c, d), (d, c))$$

となる．$(a, b) = (c, d)$ より $a = c$ かつ $b = d$ となり，$t = (d, c)$ かつ $(d, c) = (b, a)$ より $t = (b, a)$，従って $t \in a^{-1}$ が成り立つ．

3.11　冪

定義 3.11.1 (冪).　x を $\mathcal{L}$ の項とするとき，

$$\mathrm{P}(x) \overset{\text{def}}{=\!=} \{\, y \mid \forall z\,(\, z \in y \;\rightarrow\; z \in x\,)\,\}$$

で定める項 (必要に応じて $z \in x$ は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き換える) を x の**冪 (power)** と呼ぶ．

x の冪とはすなわち「x の部分集合の全体」である:

$$\mathrm{P}(x) = \{\, y \mid y \subset x \,\}.$$

公理 3.11.2 (冪の公理).　次の公理を **POW** によって参照する:

$$\forall x\, \exists p\, \forall y\,(\,\forall z\,(\, z \in y \;\rightarrow\; z \in x\,) \;\leftrightarrow\; y \in p\,).$$

定理 3.11.3 (集合の冪は集合).　a を類とするとき

$$\textbf{EXT}, \textbf{EQ}, \textbf{COM}, \textbf{POW} \vdash \mathrm{set}\,(a) \;\rightarrow\; \mathrm{set}\,(\mathrm{P}\,(a)).$$

略証.

step1　a が主要 ε 項であるとき，

$$\textbf{POW} \vdash \exists p\, \forall y\,(\,\forall z\,(\, z \in y \;\rightarrow\; z \in a\,) \;\leftrightarrow\; y \in p\,)$$

が成り立つので

$$\rho \overset{\text{def}}{=\!=} \varepsilon p\, \forall y\,(\,\forall z\,(\, z \in y \;\rightarrow\; z \in a\,) \;\leftrightarrow\; y \in p\,)$$

とおけば

$$\textbf{POW} \vdash \forall y\,(\,\forall z\,(\, z \in y \;\rightarrow\; z \in a\,) \;\leftrightarrow\; y \in \rho\,) \tag{3.93}$$

となる．よって定理 3.7.5 より

$$\textbf{EXT}, \textbf{COM}, \textbf{POW} \vdash \{\, y \mid \forall z\,(\, z \in y \;\rightarrow\; z \in a\,)\,\} = \rho$$

が従い，存在記号の推論規則より

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM}, \mathbf{POW} \vdash \exists p\,(\{\, y \mid \forall z\,(z \in y \rightarrow z \in a\,)\} = p\,)$$

が得られる．

step2　a が $\{\, x \mid \varphi(x)\,\}$ なる形の項であるとき (φ は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式),

$$\tau \overset{\text{def}}{=\!=} \varepsilon x\,(\,a = x\,),$$
$$\rho \overset{\text{def}}{=\!=} \varepsilon p\,\forall y\,(\forall z\,(\,z \in y \rightarrow z \in \tau\,) \leftrightarrow y \in p\,)$$

とおけば，前段の (3.93) より

$$\mathbf{POW} \vdash \forall y\,(\forall z\,(\,z \in y \rightarrow z \in \tau\,) \leftrightarrow y \in \rho\,) \tag{3.94}$$

が成立する．今の場合の $\mathrm{P}\,(a)$ は

$$\mathrm{P}\,(a) \overset{\text{def}}{=\!=} \{\, y \mid \forall z\,(\,z \in y \rightarrow \varphi(z)\,)\,\}$$

によって定められているので，

$$\forall y\,(\forall z\,(\,z \in y \rightarrow \varphi(z)\,) \leftrightarrow y \in \rho\,)$$

を導くために

$$\eta \overset{\text{def}}{=\!=} \varepsilon y\,\neg(\forall z\,(\,z \in y \rightarrow \varphi(z)\,) \leftrightarrow y \in \rho\,)$$

とおき，まずは

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \forall z\,(\,z \in \eta \rightarrow \varphi(z)\,) \leftrightarrow \forall z\,(\,z \in \eta \rightarrow z \in \tau\,) \tag{3.95}$$

を示す．

- (3.95) の $\rightarrow$ をしめす．

  $$\zeta \overset{\text{def}}{=\!=} \varepsilon z\,\neg(\,z \in \eta \rightarrow z \in \tau\,)$$

  とおけば

  $$\forall z\,(\,z \in \eta \rightarrow \varphi(z)\,) \vdash \zeta \in \eta \rightarrow \varphi(\zeta)$$

  が成り立つが，

  $$\mathbf{COM} \vdash \varphi(\zeta) \rightarrow \zeta \in a$$

  と

  $$\mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EQ} \vdash \zeta \in a \rightarrow \zeta \in \tau$$

  より

  $$\forall z\,(\,z \in \eta \rightarrow \varphi(z)\,),\ \mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \zeta \in \eta \rightarrow \zeta \in \tau$$

  が従い，全称の導出 (推論法則 2.2.27) より

  $$\forall z\,(\,z \in \eta \rightarrow \varphi(z)\,),\ \mathrm{set}\,(a),\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \forall z\,(\,z \in \eta \rightarrow z \in \tau\,)$$

  が得られる．

- (3.95) の逆を示す．

$$\zeta \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \varepsilon z \neg (z \in \eta \rightarrow \varphi(z))$$

とおけば

$$\forall z (z \in \eta \rightarrow z \in \tau) \vdash \zeta \in \eta \rightarrow \zeta \in \tau$$

が成り立つが，

$$\mathbf{COM} \vdash \zeta \in a \rightarrow \varphi(\zeta)$$

と

$$\mathrm{set}(a),\ \mathbf{EQ} \vdash \zeta \in \tau \rightarrow \zeta \in a$$

より

$$\forall z (z \in \eta \rightarrow z \in \tau),\ \mathrm{set}(a),\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \zeta \in \eta \rightarrow \varphi(\zeta)$$

が従い，全称の導出 (推論法則 2.2.27) より

$$\forall z (z \in \eta \rightarrow z \in \tau),\ \mathrm{set}(a),\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \forall z (z \in \eta \rightarrow \varphi(z))$$

が得られる．

(3.94) より

$$\mathbf{POW} \vdash \forall z (z \in \eta \rightarrow z \in \tau) \leftrightarrow \eta \in \rho \tag{3.96}$$

が成り立つので，(3.95) と (3.96) と同値記号の推移律 (推論法則 3.1.12) より

$$\mathrm{set}(a),\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{POW} \vdash \forall z (z \in \eta \rightarrow \varphi(z)) \leftrightarrow \eta \in \rho$$

が得られ，全称の導出 (推論法則 2.2.27) より

$$\mathrm{set}(a),\ \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{POW} \vdash \forall y (\forall z (z \in y \rightarrow \varphi(z)) \leftrightarrow y \in \rho)$$

が従う．そして定理 3.7.5 と併せて

$$\mathrm{set}(a),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{POW} \vdash \{ y \mid \forall z (z \in y \rightarrow \varphi(z)) \} = \rho$$

が従い，存在記号の推論規則より

$$\mathrm{set}(a),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{POW} \vdash \exists p (\{ y \mid \forall z (z \in y \rightarrow \varphi(z)) \} = p)$$

が得られる． ∎

3.12　関係

定義 3.12.1 (順序対).　x と y を $\mathcal{L}$ の項とするとき，

$$(x, y) \overset{\text{def}}{=\!=} \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

で定める項 (x, y) を x と y の順序対 **(ordered pair)** と呼ぶ.

定理 3.12.2 (集合の順序対は集合).　a と b を類とするとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{PAI} \vdash \mathrm{set}\,(a) \wedge \mathrm{set}\,(b) \;\longrightarrow\; \mathrm{set}\,((a, b)).$$

証明.　集合の対は集合 (定理 3.8.5) であるから

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathrm{set}\,(b),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{PAI} \vdash \mathrm{set}\,(\{a\}),$$
$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathrm{set}\,(b),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{PAI} \vdash \mathrm{set}\,(\{a, b\})$$

が成り立つので

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathrm{set}\,(b),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{PAI} \vdash \mathrm{set}\,(\{a\}) \wedge \mathrm{set}\,(\{a, b\})$$

が従い，再び定理 3.8.5 より

$$\mathrm{set}\,(a),\ \mathrm{set}\,(b),\ \mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{PAI} \vdash \mathrm{set}\,((a, b))$$

となる. ∎

定理 3.12.3 (順序対の相等性).　a, b, c, d を集合とするとき

$$(a, b) = (c, d) \;\longrightarrow\; a = c \wedge b = d.$$

略証.　$(a, b) = (c, d)$ と仮定すると，

$$\{a\} \in \{\{c\}, \{c, d\}\}$$

より

$$\{a\} = \{c\} \vee \{a\} = \{c, d\}$$

が成り立つ.

$$\{a\} = \{c\} \;\longrightarrow\; a \in \{c\} \;\longrightarrow\; a = c$$

となるし，

$$\{a\} = \{c, d\} \;\longrightarrow\; c \in \{a\} \;\longrightarrow\; a = c$$

となるので

$$a = c$$

が成り立つ．ゆえに

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a, d\}\}$$

である．$(a, b) = (c, d)$ に加えて

$$a = d$$

と仮定すると，

$$\{a, b\} = \{a\} \vee \{a, b\} = \{a, d\}$$

と

$$\{a, b\} = \{a\} \ \longrightarrow \ b = a = d$$

となり，

$$\begin{gathered} \{a, b\} = \{a, d\} \ \longrightarrow \ b = a \vee b = d, \\ b = a \ \longrightarrow \ b = d, \\ b = d \ \longrightarrow \ b = d \end{gathered}$$

より

$$\{a, b\} = \{a, d\} \ \longrightarrow \ b = d$$

も成り立つ．ゆえに

$$a = d \ \longrightarrow \ b = d$$

である．今度は $(a, b) = (c, d)$ に加えて

$$a \neq d$$

と仮定する．

$$\{a, d\} = \{a\} \vee \{a, d\} = \{a, b\}$$

と

$$\{a, d\} \neq \{a\}$$

より

$$\{a, d\} = \{a, b\}$$

が成り立ち，

$$d = a \vee d = b$$

が成り立つ．$d \neq a$ より

$$d = b$$

が従う．ゆえに

$$a \neq d \;\longrightarrow\; b = d$$

でもある．∎

定義 3.12.4 (Cartesian 積).　x と y を $\mathcal{L}$ の項とするとき，

$$x \times y \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \{\, u \mid \exists s \in x\, \exists t \in y\, (\, u = (s,t)\,)\,\}$$

で定める項 $x \times y$ を x と y の **Cartesian 積 (Cartesian product)** と呼ぶ.

$a \times b$ は

$$\{\, (s,t) \mid s \in a \wedge t \in b \,\}$$

と簡略して書かれることも多い．

二つの類を用いて得られる最大の Cartesian 積は

$$\{\, x \mid \exists s, t\, (\, x = (s,t)\,)\,\}$$

で与えられ，これは $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ に等しい．

定理 3.12.5 ($\mathbf{V}$ の Cartesian 積).　次が成り立つ:

$$\mathbf{V} \times \mathbf{V} = \{\, x \mid \exists s, t\, (\, x = (s,t)\,)\,\}.$$

証明．　$\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ は形式的には $\{\, x \mid \exists s, t \in \mathbf{V}\, (\, x = (s,t)\,)\,\}$ で定められるが，正式には

$$\{\, x \mid \exists s\; (\, s = s \wedge \exists t\, (\, t = t \wedge x = (s,t)\,)\,)\,\}$$

で定められる．ここで χ を $\mathcal{L}$ の任意の対象として

$$\exists s\; (\, s = s \wedge \exists t\, (\, t = t \wedge \chi = (s,t)\,)\,) \Longleftrightarrow \exists s\; (\, \exists t\, (\, \chi = (s,t)\,)\,) \tag{3.97}$$

が成り立つことを示す．いま $\exists s\; (\, s = s \wedge \exists t\, (\, t = t \wedge \chi = (s,t)\,)\,)$ が成り立っていると仮定する．このとき

$$\sigma := \varepsilon s\; (\, s = s \wedge \exists t\, (\, t = t \wedge \chi = (s,t)\,)\,)$$

とおけば存在記号に関する規則より

$$\sigma = \sigma \wedge \exists t\, (\, t = t \wedge \chi = (\sigma, t)\,)$$

が成立し，このとき $\wedge$ の除去より $\exists t\, (\, t = t \wedge \chi = (\sigma, t)\,)$ が成り立つので

$$\tau := \varepsilon t\, (\, t = t \wedge \chi = (\sigma, t)\,)$$

とおけば

$$\tau = \tau \land \chi = (\sigma, \tau)$$

が成立する．$\land$ の除去より $\chi = (\sigma, \tau)$ となり，存在記号に関する規則より

$$\exists t\,(\,\chi = (\sigma, t)\,)$$

が成立し，再び存在記号に関する規則から

$$\exists s\ (\,\exists t\,(\,\chi = (s, t)\,)\,)$$

が成立する．ここで演繹法則を適用すれば

$$\exists s\ (\,s = s \land \exists t\,(\,t = t \land \chi = (s, t)\,)\,) \Longrightarrow \exists s\ (\,\exists t\,(\,\chi = (s, t)\,)\,)$$

が得られる．逆に $\exists s\ (\,\exists t\,(\,\chi = (s, t)\,)\,)$ が成り立っているとすると，

$$\sigma' \coloneqq \varepsilon s\ (\,\exists t\,(\,\chi = (s, t)\,)\,)$$

とおけば存在記号に関する規則より

$$\exists t\,(\,\chi = (\sigma', t)\,)$$

が成立し，

$$\tau' \coloneqq \varepsilon t\,(\,\chi = (\sigma', t)\,)$$

とおけば

$$\chi = (\sigma', \tau')$$

が成立する．ここで定理 3.1.2 より $\tau' = \tau'$ が満たされるので $\land$ の導入により

$$\tau' = \tau' \land \chi = (\sigma', \tau')$$

が成り立ち，存在記号に関する規則より

$$\exists t\,(\,t = t \land \chi = (\sigma', t)\,)$$

が成り立つ．同じく $\sigma' = \sigma'$ も満たされて

$$\sigma' = \sigma' \land \exists t\,(\,t = t \land \chi = (\sigma', t)\,)$$

が成り立ち，存在記号に関する規則より

$$\exists s\ (\,s = s \land \exists t\,(\,t = t \land \chi = (s, t)\,)\,)$$

が成立する．ここに演繹法則を適用すれば

$$\exists s\ (\,\exists t\,(\,\chi = (s, t)\,)\,) \Longrightarrow \exists s\ (\,s = s \land \exists t\,(\,t = t \land \chi = (s, t)\,)\,)$$

が得られる．以上より式 (3.97) が成立する．ところで類の公理より

$$\chi \in \mathbf{V} \times \mathbf{V} \Longleftrightarrow \exists s\ (\,s = s \land \exists t\,(\,t = t \land \chi = (s, t)\,)\,),$$
$$\chi \in \{\, x \mid \exists s, t\,(\,x = (s, t)\,)\,\} \Longleftrightarrow \exists s\ (\,\exists t\,(\,\chi = (s, t)\,)\,)$$

が成り立つので，含意の推移律から

$$\chi \in \mathbf{V} \times \mathbf{V} \Longleftrightarrow \chi \in \{ x \mid \exists s, t\, (x = (s, t)) \}$$

が成立する．そして χ の任意性と推論法則**??**から

$$\forall y \ \left(y \in \mathbf{V} \times \mathbf{V} \Longleftrightarrow y \in \{ x \mid \exists s, t\, (x = (s, t)) \} \right)$$

が従い，外延性の公理より定理の主張が得られる． ∎

定義 3.12.6 (関係). $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ の部分類を**関係 (relation)** と呼ぶ．また類 a に対して

$$\mathrm{rel}\,(a) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} a \subset \mathbf{V} \times \mathbf{V}$$

と定める．

いま，関係 E を

$$E = \{ x \mid \exists s, t \ (x = (s, t) \wedge s = t) \}$$

と定めてみる．このとき E は次の性質を満たす:

(a) $\forall x \ ((x, x) \in E)$.

(b) $\forall x, y \ ((x, y) \in E \Longrightarrow (y, x) \in E)$.

(c) $\forall x, y, z \ ((x, y) \in E \wedge (y, z) \in E \Longrightarrow (x, z) \in E)$.

性質 (a) を反射律と呼ぶ．性質 (b) を対称律と呼ぶ．性質 (c) を推移律と呼ぶ．

定義 3.12.7 (同値関係). a を類とし，R を関係とする．R が $R \subset a \times a$ を満たし，さらに

反射律 $\forall x \in a \ ((x, x) \in R)$.

対称律 $\forall x, y \in a \ ((x, y) \in R \Longrightarrow (y, x) \in R)$.

推移律 $\forall x, y, z \in a \ ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Longrightarrow (x, z) \in R)$.

も満たすとき，R を a 上の**同値関係 (equivalence relation)** と呼ぶ．

集合 a に対して $R = E \cap (a \times a)$ とおけば R は a 上の同値関係となります．

E とは別の関係 O を

$$O = \{ x \mid \exists s, t \ (x = (s, t) \wedge s \subset t) \}$$

により定めてみる．このとき O は次の性質を満たす:

(a) $\forall x \ ((x, x) \in O)$.

(b') $\forall x, y \ ((x, y) \in O \wedge (y, x) \in O \Longrightarrow x = y)$.

(c) $\forall x, y, z \ ((x, y) \in O \wedge (y, z) \in O \Longrightarrow (x, z) \in O)$.

性質 (b′) を反対称律と呼ぶ.

定義 3.12.8 (順序関係). a を類とし，R を関係とする．R が $R \subset a \times a$ を満たし，さらに

反射律　$\forall x \in a\,(\,(x,x) \in R\,)$.
反対称律　$\forall x,y \in a\,(\,(x,y) \in R \land (y,x) \in R \Longrightarrow x = y\,)$.
推移律　$\forall x,y,z \in a\,(\,(x,y) \in R \land (y,z) \in R \Longrightarrow (x,z) \in R\,)$.

も満たすとき，R を a 上の**順序 (order)** と呼ぶ．a が集合であるときは対 (a,R) を**順序集合 (ordered set)** と呼ぶ．特に

$$\forall x,y \in a\,(\,(x,y) \in R \lor (y,x) \in R\,)$$

が成り立つとき，R を a 上の**全順序 (total order)** と呼ぶ.

反射律と推移律のみを満たす関係を**前順序 (preorder)** と呼びます．また全順序は**線型順序 (linear order)** とも呼ばれます.

定義 3.12.9 (上限).

定義 3.12.10 (整列集合). x が**整列集合 (wellordered set)** であるとは，x が集合 a と a 上の順序 R の対 (a,R) に等しく，かつ a の空でない任意の部分集合が R に関する最小元を持つことをいう．またこのときの R を**整列順序 (wellorder)** と呼ぶ.

定理 3.12.11 (整列順序は全順序).

$A(x)$ という式を満たすような x が '**唯一つ存在する**' という概念を定義しましょう．当然 $A(x)$ を満たす x が存在していなくてはいけませんから $\exists x A(x)$ は満たされるべきですが，これに加えて 'y と z に対して $A(y)$ と $A(z)$ が成り立つなら $y = z$ である' という条件を付けるのです．しかしこのままでは '唯一つである' ことを表す式は長くなりますから，新しい記号 $\exists!$ を用意して簡略します．その形式的な定義は下に述べます．ちなみに，'唯一つである' ことは '**一意に存在する**' などの言明によっても示唆されます.

A を $\mathcal{L}'$ の式とし，x を A に現れる文字とし，A に文字 y,z が現れないとするとき，

$$\exists! x A(x) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists x A(x) \land \forall y,z\,(\,A(y) \land A(z) \Longrightarrow y = z\,)$$

で $\exists!$ の意味を定める.

定義 3.12.12 (定義域・値・値域).　a を類とするとき，

$$\mathrm{dom}\,(a) := \{\, x \mid \exists y\, (\,(x, y) \in a\,)\,\}, \quad \mathrm{ran}\,(a) := \{\, y \mid \exists x\, (\,(x, y) \in a\,)\,\}$$

と定めて，$\mathrm{dom}\,(a)$ を a の**定義域 (domain)** と呼び，$\mathrm{ran}\,(a)$ を a の**値域 (range)** と呼ぶ．また

$$a(t) := \{\, x \mid \exists y\, (\, x \in y \wedge (t, y) \in a\,)\,\}$$

とおき，これを t の a による**値 (value)** と呼ぶ．

定義 3.12.13 (single-valued).　a を類とするとき，a が **single-valued** であるということを

$$\mathrm{sing}\,(a) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \forall x, y, z\, (\,(x, y) \in a \wedge (x, z) \in a \Longrightarrow y = z\,)$$

で定める．

定理 3.12.14 (値とは要素となる順序対の片割れである).　a を類とするとき

$$\mathrm{sing}\,(a) \Longrightarrow \forall t \in \mathrm{dom}\,(a)\, (\,(t, a(t)) \in a\,).$$

略証．　$\mathrm{sing}\,(a)$ が成り立っていると仮定する．このとき t を $\mathrm{dom}\,(a)$ の任意の要素とすれば，

$$(t, \eta) \in a$$

を満たす η が取れる．この η が $a(t)$ に等しいことを示せば良い．いま x を任意の集合とする．

$$x \in \eta$$

が成り立っているとすると

$$\exists y\, (\, x \in y \wedge (t, y) \in a\,)$$

が従うので

$$x \in a(t)$$

となる．ゆえに先ず

$$x \in \eta \Longrightarrow x \in a(t)$$

が得られた．逆に

$$x \in a(t)$$

が成り立っているとき，

$$\xi := \varepsilon y\, (\, x \in y \wedge (t, y) \in a\,)$$

とおけば

$$x \in \xi \wedge (t, \xi) \in a$$

が満たされるが，$(t,\eta)\in a$ と $\mathrm{sing}\,(a)$ より

$$\xi=\eta$$

となるので，相等性の公理から

$$x\in\eta$$

も成立する．ゆえに

$$x\in a(t)\Longrightarrow x\in\eta$$

も得られた．x の任意性と外延性の公理から

$$a(t)=\eta$$

が従う．このとき

$$(t,\eta)=(t,a(t))$$

となり，$(t,\eta)\in a$ と相等性の公理から

$$(t,a(t))\in a$$

が満たされる．以上を総合すれば

$$\mathrm{sing}\,(a)\Longrightarrow\forall t\in\mathrm{dom}\,(a)\,(\,(t,a(t))\in a\,)$$

が出る．∎

定理 3.12.15 (single-valued ならば値は一意). a を類とするとき

$$\mathrm{sing}\,(a)\Longrightarrow\forall s,t\in\mathrm{dom}\,(a)\,(\,s=t\Longrightarrow a(s)=a(t)\,).$$

略証. $\mathrm{sing}\,(a)$ が成り立っていると仮定する．s,t を $\mathrm{dom}\,(a)$ の任意の要素とすれば，定理 3.12.14 より

$$(s,a(s))\in a\wedge(t,a(t))\in a$$

が成立する．このとき

$$s=t$$

ならば

$$(s,a(s))=(t,a(s))$$

となるので

$$(t,a(s))\in a$$

が従い，$\mathrm{sing}(a)$ と $(t, a(t)) \in a$ から

$$a(s) = a(t)$$

が成立する．ゆえに

$$s = t \Longrightarrow a(s) = a(t)$$

が示された． ∎

定義 3.12.16 (写像).　f, a, b を類とするとき，以下の概念と $\mathcal{L}'$ における派生記号を定める．

- f が**写像 (mapping)** であるということ:

$$\mathrm{fnc}(f) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \mathrm{rel}(f) \wedge \mathrm{sing}(f).$$

- f が a 上の写像であるということ:

$$f : \mathrm{on}\, a \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \mathrm{fnc}(f) \wedge \mathrm{dom}(f) = a.$$

- f が a から b への写像であるということ:

$$f : a \longrightarrow b \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} f : \mathrm{on}\, a \wedge \mathrm{ran}(f) \subset b.$$

- f が a から b への**単射 (injection)** であるということ:

$$f : a \xrightarrow{1:1} b \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} f : a \longrightarrow b \wedge \forall x, y, z \left((x, z) \in f \wedge (y, z) \in f \Longrightarrow x = y \right).$$

- f が a から b への**全射 (surjection)** であるということ:

$$f : a \xrightarrow{\mathrm{onto}} b \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} f : a \longrightarrow b \wedge \forall y \in b\, \exists x \in a \left((x, y) \in f \right).$$

- f が a から b への**全単射 (bijection)** であるということ:

$$f : a \xrightarrow[\mathrm{onto}]{1:1} b \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} f : a \xrightarrow{1:1} b \wedge f : a \xrightarrow{\mathrm{onto}} b.$$

定理 3.12.17 (定義域と値が一致する写像は等しい).　f, g を類とするとき次が成り立つ:

$$\begin{aligned} &\mathrm{fnc}(f) \wedge \mathrm{fnc}(g) \\ &\Longrightarrow \left(\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g) \wedge \forall t \in \mathrm{dom}(f) \left(f(t) = g(t) \right) \Longrightarrow f = g \right). \end{aligned}$$

証明.　いま $\left(\mathrm{fnc}(f) \wedge \mathrm{fnc}(g) \right) \wedge \left(\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g) \right)$ と $\forall t \left(t \in \mathrm{dom}(f) \Longrightarrow f(t) = g(t) \right)$ が成り立っていると仮定する．このとき χ を $\mathcal{L}$ の任意の対象として $\chi \in f$ が満たされているとすれば，$f \subset \mathbf{V} \times \mathbf{V}$ より

$$\exists s \left(\exists t \left(\chi = (s, t) \right) \right)$$

が成立する．ここで $\sigma \coloneqq \varepsilon s\ (\exists t\,(\chi = (s,t)))$ とおけば存在記号に関する規則より

$$\exists t\,(\chi = (\sigma,t))$$

が成立し，更に $\tau \coloneqq \varepsilon t\,(\chi = (\sigma,t))$ とおけば

$$\chi = (\sigma,\tau)$$

が成立する．$\chi \in f$ と相等性の公理より

$$(\sigma,\tau) \in f$$

が従い，存在記号に関する規則より

$$\exists y\,((\sigma,y) \in f)$$

が成立するので

$$\sigma \in \mathrm{dom}\,(f)$$

となる．このとき $\mathrm{fnc}\,(f)$ と定理**??**より

$$(\sigma, f(\sigma)) \in f$$

が成立し，$(\sigma,\tau) \in f \wedge (\sigma, f(\sigma)) \in f$ と $\mathrm{sing}\,(f)$ が満たされるので

$$\tau = f(\sigma)$$

が成り立つ．他方で $\forall t\ \big(t \in \mathrm{dom}\,(f) \Longrightarrow f(t) = g(t)\big)$ と推論法則**??**より

$$f(\sigma) = g(\sigma)$$

が満たされ，相等性の公理より

$$\tau = g(\sigma)$$

が成り立つ．また $\sigma \in \mathrm{dom}\,(f)$ と相等性の公理より

$$\sigma \in \mathrm{dom}\,(g)$$

が成り立ち，定理**??**より

$$(\sigma, g(\sigma)) \in g$$

となるが，$\tau = g(\sigma)$ と定理 3.12.3 より

$$(\sigma, g(\sigma)) = (\sigma,\tau)$$

が満たされるので，相等性の公理より

$$(\sigma,\tau) \in g$$

が成り立ち，再び相等性の公理より $\chi \in g$ が成り立つ．ここで演繹法則を適用すれば

$$\chi \in f \Longrightarrow \chi \in g$$

が得られる．f と g の立場を替えれば $\chi \in g \Longrightarrow \chi \in f$ も得られ，χ の任意性と推論法則**??**より

$$\forall x \, (\, x \in f \Longleftrightarrow x \in g \,)$$

が従う．そして外延性の公理より

$$f = g$$

が出てくる．最後に演繹法則を二回適用すれば定理の主張が得られる．∎

定義 3.12.18 (反転).　a を類とするとき，その**反転 (inverse)** を

$$a^{-1} \overset{\text{def}}{=\!=} \{ \, x \mid \exists s, t \, (\, x = (s, t) \wedge (t, s) \in a \,) \, \}$$

で定める．

定義 3.12.19 (像・原像).　a, b を類とするとき，b の a による像を

$$a * b \overset{\text{def}}{=\!=} \{ \, y \mid \exists x \in b \, (\, (x, y) \in a \,) \, \}$$

で定める．また

$$a^{-1} * b$$

を b の a による原像と呼ぶ．

定理 3.12.20 (原像はそこに写される定義域の要素の全体).　a, b を類とするとき，

$$a^{-1} * b = \{ \, x \mid \exists y \in b \, (\, (x, y) \in a \,) \, \}.$$

略証.　x を $a^{-1} * b$ の要素とすれば，

$$(y, x) \in a^{-1}$$

を満たす b の要素 y が取れる．このとき

$$(x, y) \in a$$

となるので

$$\exists y \in b \, (\, (x, y) \in a \,)$$

が成立し

$$x \in \{ \, x \mid \exists y \in b \, (\, (x, y) \in a \,) \, \}$$

が従う．逆に x を $\{ \, x \mid \exists y \in b \, (\, (x, y) \in a \,) \, \}$ の要素とすれば，

$$(x, y) \in a$$

を満たす b の要素 y が取れる．このとき

$$(y,x) \in a^{-1}$$

となるので

$$\exists y \in b\,(\,(y,x) \in a^{-1}\,)$$

が成立し

$$x \in a^{-1} * b$$

が従う． ∎

定理 3.12.21 (single-valued な類の像は値の全体).　a, b を類とするとき，

$$\mathrm{sing}\,(a) \wedge b \subset \mathrm{dom}\,(a) \Longrightarrow a * b = \{\, x \mid \exists t \in b\,(\, x = a(t)\,)\,\}.$$

定理 3.12.22 (像は制限写像の値域に等しい).　a, b を類とするとき次が成り立つ:

$$a * b = \mathrm{ran}\,(a|_b).$$

定理 3.12.23 (空集合は写像である).　以下が成立する．

(イ)　$\mathrm{fnc}\,(\emptyset)$.

(ロ)　$\mathrm{dom}\,(\emptyset) = \emptyset$.

(ハ)　$\mathrm{ran}\,(\emptyset) = \emptyset$.

(ニ)　$\emptyset$ は単射である．

証明.

(イ)　定理 3.3.10 より

$$\emptyset \subset \mathbf{V} \times \mathbf{V}$$

となるので $\emptyset$ は関係である．また x, y, z を $\mathcal{L}$ の任意の対象とすれば，定理 3.3.6 より

$$(x,y) \notin \emptyset$$

が成り立つので

$$\big(\,(x,y) \notin \emptyset \vee (x,z) \notin \emptyset\,\big) \vee y = z$$

が成立する．従って

$$(x,y) \in \emptyset \wedge (x,z) \in \emptyset \Longrightarrow y = z$$

が成立し，x, y, z の任意性より

$$\forall x, y, z \; \big((x, y) \in \emptyset \land (x, z) \in \emptyset \Longrightarrow y = z \big)$$

が成り立つ．よって $\mathrm{sing}\,(\emptyset)$ も満たされる．

(ロ)　χ を $\mathcal{L}$ の任意の対象とすれば

$$\chi \in \mathrm{dom}\,(\emptyset) \Longleftrightarrow \exists y \, ((\chi, y) \in \emptyset \,)$$

が成り立つので，対偶を取れば

$$\chi \notin \mathrm{dom}\,(\emptyset) \Longleftrightarrow \forall y \, ((\chi, y) \notin \emptyset \,)$$

が従う．定理 3.3.6 より

$$\forall y \, ((\chi, y) \notin \emptyset \,)$$

が満たされるので

$$\chi \notin \mathrm{dom}\,(\emptyset)$$

が従い，χ の任意性より

$$\forall x \, (\, x \notin \mathrm{dom}\,(\emptyset) \,)$$

が成立する．そして定理 3.3.7 より

$$\mathrm{dom}\,(\emptyset) = \emptyset$$

が得られる．

(ニ)　空虚な真により

$$\forall x, y, z \; \big((x, z) \in \emptyset \land (y, z) \in \emptyset \Longrightarrow x = y \big)$$

が成り立つから $\emptyset$ は単射である．　∎

定義 3.12.24 (空写像).　$\emptyset$ を空写像 **(empty mapping)** とも呼ぶ．

定義 3.12.25 (合成).　a, b を類とするとき，a と b の合成 **(composition)** を

$$a \circ b \overset{\mathrm{def}}{=} \{ \, x \mid \exists s, t, u \; (\, x = (s, u) \land (s, t) \in b \land (t, u) \in a \,) \, \}$$

で定める．

定義 3.12.26 (族・系).　x を集合 a から集合 b への写像とするとき，x のことを “a を添字集合 (index set) とする b の族 (family) (或は系 (collection))” とも呼び，$x(i)$ を x_i と書いて

$$(x_i)_{i \in a} \overset{\mathrm{def}}{=} x$$

とも表記する．

族 $(x_i)_{i\in a}$ は写像 x と同じであるが，一方で丸括弧を中括弧に替えた

$$\{x_i\}_{i\in a}$$

は

$$\{\, x(i) \mid i \in a \,\}$$

によって定められる集合であって，$(x_i)_{i\in a}$ とは別物である．

定理 3.12.27 (全射ならば原像の像で元に戻る). f, a, b, v を類とする．f が a から b への写像であるとき

$$v \subset b \Longrightarrow f * \left(f^{-1} * v\right) \subset v$$

が成立し，特に f が全射なら

$$f * \left(f^{-1} * v\right) = v$$

が成り立つ．

略証． y を $f * \left(f^{-1} * v\right)$ の要素とすると，

$$y = f(x)$$

を満たす $f^{-1} * v$ の要素 x が取れて

$$f(x) \in v$$

が成り立つから

$$y \in v$$

が従う．ゆえに

$$f * \left(f^{-1} * v\right) \subset v$$

が成立する．f が全射であるとき，y を v の要素とすれば

$$y = f(x)$$

を満たす a の要素 x が取れて，

$$x \in f^{-1} * v$$

が成り立つので

$$y \in f * \left(f^{-1} * v\right)$$

が従う．ゆえに f が全射である場合には

$$v \subset f * \left(f^{-1} * v\right)$$

も成立して

$$v = f * \left(f^{-1} * v\right)$$

となる． ∎

定理 3.12.28 (単射ならば像の原像で元に戻る).　f,a,b,u を類とする．f が a から b への写像であるとき

$$u \subset a \Longrightarrow u \subset f^{-1} * \left(f * u\right)$$

が成立し，特に f が単射なら

$$u = f^{-1} * \left(f * u\right)$$

が成り立つ．

略証．　x を u の要素とすると

$$f(x) \in f * u$$

が成り立つから

$$x \in f^{-1} * \left(f * u\right)$$

が成立する．ゆえに

$$u \subset f^{-1} * \left(f * u\right)$$

が成立する．y を $f^{-1} * \left(f * u\right)$ の要素とすれば

$$f(y) \in f * u$$

が成り立って

$$f(y) = f(z)$$

を満たす u の要素 z が取れる．ゆえに，f が単射であるとき

$$y = z$$

となって

$$y \in u$$

が従い，

$$f^{-1} * \left(f * u\right) \subset u$$

が成立する．ゆえに，f が単射であれば

$$u = f^{-1} * \left(f * u\right)$$

が成立する．∎

3.13　順序数

$0,1,2,\cdots$ で表される数字は，集合論において

$$\begin{aligned}0 &\overset{\mathrm{def}}{=} \emptyset,\\ 1 &\overset{\mathrm{def}}{=} \{0\} = \{\emptyset\},\\ 2 &\overset{\mathrm{def}}{=} \{0,1\} = \{\emptyset,\{\emptyset\}\},\\ 3 &\overset{\mathrm{def}}{=} \{0,1,2\} = \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}\end{aligned}$$

といった反復操作で定められる．上の操作を受け継いで “頑張れば手で書き出せる” 類を自然数と呼ぶ．0 は集合であり，対集合の公理から 1 もまた集合である．そして和集合の公理から 2 が集合であること，更には $3,4,\cdots$ と続く自然数が全て集合であることがわかる．自然数の冪も自然数同士の集合演算もその結果は全て集合になるが，ここで

集合は 0 に集合演算を施しただけの素姓が明らかなものに限られるか

という疑問というか期待が自然に生まれてくる．実際それは正則性公理によって肯定されるわけだが，そこでキーになるのは順序数と呼ばれる概念である．

推論法則 3.13.1 (論理和・論理積の結合律).　A,B,C を $\mathcal{L}'$ の閉式とするとき次が成り立つ:

(イ)　$(A \vee B) \vee C \Longleftrightarrow A \vee (B \vee C)$.

(ロ)　$(A \wedge B) \wedge C \Longleftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$.

推論法則 3.13.2 (論理和・論理積の分配律).　A,B,C を $\mathcal{L}'$ の閉式とするとき次が成り立つ:

(イ)　$(A \vee B) \wedge C \Longleftrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$.

(ロ)　$(A \wedge B) \vee C \Longleftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$.

証明.

(イ)　いま $(A \vee B) \wedge C$ が成立していると仮定する．このとき論理積の除去により $A \vee B$ と C が同時に成り立つ．ここで A が成り立っているとすれば，論理積の導入により

$$A \wedge C$$

が成り立つので演繹法則より

$$A \Longrightarrow (A \wedge C)$$

が成立する．他方で論理和の導入より

$$(A \wedge C) \Longrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

も成り立つので，含意の推移律から

$$A \Longrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

が従う．A と B を入れ替えれば

$$B \Longrightarrow (B \wedge C) \vee (A \wedge C)$$

が成り立つが，論理和の可換律より

$$(B \wedge C) \vee (A \wedge C) \Longrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

が成り立つので

$$B \Longrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

が従う．よって場合分け法則から

$$(A \vee B) \Longrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

が成立するが，いま $A \vee B$ は満たされているので三段論法より

$$(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

が成立する．ここに演繹法則を適用すれば

$$(A \vee B) \wedge C \Longrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

が得られる．次に $A \wedge C$ が成り立っていると仮定する．このとき A が成り立つので $A \vee B$ も成立し，同時に C も成り立つので $(A \vee B) \wedge C$ が成立する．すなわち

$$A \wedge C \Longrightarrow (A \vee B) \wedge C$$

が成立する．A と B を入れ替えれば

$$B \wedge C \Longrightarrow (A \vee B) \wedge C$$

も成立するので

$$(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \Longrightarrow (A \vee B) \wedge C$$

が得られる．

(ロ)　(イ) の結果を $\rightharpoondown A, \rightharpoondown B, \rightharpoondown C$ に適用すれば

$$(\rightharpoondown A \vee \rightharpoondown B) \wedge \rightharpoondown C \Longleftrightarrow (\rightharpoondown A \wedge \rightharpoondown C) \vee (\rightharpoondown B \wedge \rightharpoondown C)$$

が得られる．ここで De Morgan の法則と同値記号の遺伝性質から

$$\begin{aligned}(\rightharpoondown A \vee \rightharpoondown B) \wedge \rightharpoondown C &\Longleftrightarrow \rightharpoondown (A \wedge B) \wedge \rightharpoondown C \\ &\Longleftrightarrow \rightharpoondown ((A \wedge B) \vee C)\end{aligned}$$

が成立し，一方で

$$\begin{aligned}(\rightharpoondown A \wedge \rightharpoondown C) \vee (\rightharpoondown B \wedge \rightharpoondown C) &\Longleftrightarrow \rightharpoondown (A \vee C) \vee \rightharpoondown (B \vee C) \\ &\Longleftrightarrow \rightharpoondown ((A \vee C) \wedge (B \vee C))\end{aligned}$$

も成立するから，含意の推移律より

$$\rightharpoondown ((A \wedge B) \vee C) \Longleftrightarrow \rightharpoondown ((A \vee C) \wedge (B \vee C))$$

が従う．最後に対偶を取れば

$$(A \wedge B) \vee C \Longleftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

が得られる． ∎

推論法則 3.13.3 (選言三段論法). A, B, C を $\mathcal{L}'$ の閉式とするとき次が成り立つ:

$$(A \vee B) \wedge \rightharpoondown B \Longrightarrow A.$$

証明. 分配律 (推論法則 3.13.2) より

$$(A \vee B) \wedge \rightharpoondown B \Longrightarrow (A \wedge \rightharpoondown B) \vee (B \wedge \rightharpoondown B)$$

が成立する．ここで矛盾に関する規則から

$$B \wedge \rightharpoondown B \Longrightarrow \perp$$

が満たされるので

$$(A \wedge \rightharpoondown B) \vee (B \wedge \rightharpoondown B) \Longrightarrow (A \wedge \rightharpoondown B) \vee \perp$$

が従う．また，論理積の除去より

$$(A \wedge \rightharpoondown B) \Longrightarrow A$$

が成り立ち，他方で矛盾に関する規則より

$$\perp \Longrightarrow A$$

も成り立つから，場合分け法則より

$$(A \wedge \rightharpoondown B) \vee \perp \Longrightarrow A$$

が従う．以上の式と含意の推移律から

$$(A \vee B) \wedge \rightharpoondown B \Longrightarrow A$$

が得られる． ∎

公理 3.13.4 (正則性公理). a を類とするとき，a は空でなければ自分自身と交わらない要素を持つ:

$$a \neq \emptyset \Longrightarrow \exists x \in a\,(\,x \cap a = \emptyset\,).$$

定理 3.13.5 (いかなる類も自分自身を要素に持たない). a, b, c を類とするとき次が成り立つ:

(イ)　$a \notin a$.

(ロ)　$a \notin b \vee b \notin a$.

(ハ)　$a \notin b \vee b \notin c \vee c \notin a$.

証明.

(イ)　a を類とする．まず要素の公理の対偶より

$$\rightharpoondown \mathrm{set}\,(a) \Longrightarrow a \notin a$$

が満たされる．次に a が集合であるとする．このとき定理 3.8.6 より

$$a \in \{a\}$$

が成り立つから，正則性公理より

$$\exists x\ (\, x \in \{a\} \wedge x \cap \{a\} = \emptyset \,)$$

が従う．ここで $\chi \coloneqq \varepsilon x\ (\, x \in \{a\} \wedge x \cap \{a\} = \emptyset \,)$ とおけば

$$\chi = a$$

となるので，相等性の公理より

$$a \cap \{a\} = \emptyset$$

が成り立つ．$a \in \{a\}$ であるから定理 3.10.8 より $a \notin a$ が従い，演繹法則から

$$\mathrm{set}\,(a) \Longrightarrow a \notin a$$

が得られる．そして場合分け法則から

$$\mathrm{set}\,(a) \vee \rightharpoondown \mathrm{set}\,(a) \Longrightarrow a \notin a$$

が成立し，排中律と三段論法から

$$a \notin a$$

が出る．

(ロ)　要素の公理より

$$a \in b \Longrightarrow \mathrm{set}\,(a)$$

となり，定理 3.8.6 より

$$\mathrm{set}\,(a) \Longrightarrow a \in \{a, b\}$$

となるので，

$$a \in b \Longrightarrow a \in \{a, b\}$$

が成立する．また定理 3.10.8 より

$$\begin{aligned} a \in b \wedge a \in \{a, b\} &\Longrightarrow \exists x\ (\, x \in b \wedge x \in \{a, b\} \,) \\ &\Longrightarrow b \cap \{a, b\} \neq \emptyset \end{aligned}$$

が成立する．他方で正則性公理より

$$
\begin{aligned}
a \in \{a,b\} &\Longrightarrow \exists x\ (\,x \in \{a,b\}\,) \\
&\Longrightarrow \{a,b\} \neq \emptyset \\
&\Longrightarrow \exists x\ (\,x \in \{a,b\} \wedge x \cap \{a,b\} = \emptyset\,)
\end{aligned}
$$

も成立する．以上を踏まえて $a \in b$ が成り立っていると仮定する．このとき

$$a \in \{a,b\}$$

が成立するので

$$b \cap \{a,b\} \neq \emptyset$$

も成り立ち，さらに

$$\exists x\ (\,x \in \{a,b\} \wedge x \cap \{a,b\} = \emptyset\,)$$

も満たされる．ここで

$$\chi \coloneqq \varepsilon x\ (\,x \in \{a,b\} \wedge x \cap \{a,b\} = \emptyset\,)$$

とおけば $\chi \in \{a,b\}$ から

$$\chi = a \vee \chi = b$$

が従うが，相等性の公理より

$$\chi = b \Longrightarrow b \cap \{a,b\} = \emptyset$$

となるので，$b \cap \{a,b\} \neq \emptyset$ と併せて

$$\chi \neq b$$

が成立する．選言三段論法 (推論法則 3.13.3) より

$$(\chi = a \vee \chi = b) \wedge \chi \neq b \Longrightarrow \chi = a$$

となるから

$$\chi = a$$

が従い，相等性の公理より

$$a \cap \{a,b\} = \emptyset$$

が成立する．いま要素の公理より

$$\rightharpoondown \mathrm{set}\,(b) \Longrightarrow b \notin a$$

が満たされ，他方で定理 3.8.6 より

$$\mathrm{set}\,(b) \Longrightarrow b \in \{a,b\},$$

$a \cap \{a, b\}$ の仮定と定理 3.10.8 より

$$b \in \{a, b\} = \emptyset \Longrightarrow b \notin a$$

が満たされるので

$$\mathrm{set}\,(b) \Longrightarrow b \notin a$$

が成立する．従って

$$b \notin a$$

が従い，演繹法則より

$$a \in b \Longrightarrow b \notin a$$

が得られる．これは $a \notin b \vee b \notin a$ と同値である．

(ハ)　$a \in b \wedge b \in c$ が満たされていると仮定すれば，a, b は集合であるから

$$a, b \in \{a, b, c\}$$

が成立する．ゆえに $b \cap \{a, b, c\} \neq \emptyset$ と $c \cap \{a, b, c\} \neq \emptyset$ が従う．他方，正則性公理より

$$\tau \in \{a, b, c\} \wedge \tau \cap \{a, b, c\} = \emptyset$$

を満たす $\mathcal{L}$ の対象 τ が取れる．ここで $\tau \in \{a, b, c\}$ より

$$\tau = a \vee \tau = b \vee \tau = a$$

が成り立つが，$b \cap \{a, b, c\} \neq \emptyset$ と $c \cap \{a, b, c\} \neq \emptyset$ より $\tau \neq b$ かつ $\tau \neq c$ となる．よって $\tau = a$ となり

$$a \cap \{a, b, c\} = \emptyset$$

が従う．c が真類ならば要素の公理より $c \notin a$ となり，c が集合ならば $c \in \{a, b, c\}$ となるので，いずれにせよ

$$c \notin a$$

が成立する．以上で

$$a \in b \wedge b \in c \Longrightarrow c \notin a$$

が得られる．■

定義 3.13.6 (順序数).　類 a に対して，a が**推移的類 (transitive class)** であるということを

$$\mathrm{tran}\,(a) \overset{\mathrm{def}}{\longleftrightarrow} \forall s\,(\,s \in a \Longrightarrow s \subset a\,)$$

で定める．また a が (集合であるならば) **順序数 (ordinal number)** であるということを

$$\mathrm{ord}\,(a) \overset{\mathrm{def}}{\longleftrightarrow} \mathrm{tran}\,(a) \wedge \forall t, u \in a\,(\,t \in u \vee t = u \vee u \in t\,)$$

で定める．順序数の全体を

$$\mathrm{ON} \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \{\,x \mid \mathrm{ord}\,(x)\,\}$$

とおく．

空虚な真の一例であるが，例えば 0 は順序数の性質を満たす．ここに一つの順序数が得られたが，いま仮に α を順序数とすれば

$$\alpha \cup \{\alpha\}$$

もまた順序数となることが直ちに判明する．数字の定め方から

$$\begin{gathered} 1 = 0 \cup \{0\}, \\ 2 = 1 \cup \{1\}, \\ 3 = 2 \cup \{2\}, \\ \vdots \end{gathered}$$

が成り立つから，数字は全て順序数である．

いま ON 上の関係を

$$\leq \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \{\, x \mid \exists \alpha, \beta \in \mathrm{ON} \,(\, x = (\alpha, \beta) \wedge \alpha \subset \beta \,)\,\}$$

と定める．

中置記法について

x と y を項とするとき，

$$(x, y) \in \leq$$

なることを往々にして

$$x \leq y$$

とも書くが，このような書き方を**中置記法 (infix notation)** と呼ぶ．同様にして，

$$(x, y) \in \leq \wedge x \neq y$$

なることを

$$x < y$$

とも書く．

以下順序数の性質を列挙するが，長いので主張だけ先に述べておく．

- ON は推移的類である．
- $\leq$ は ON において整列順序となる．
- a を $a \subset \mathrm{ON}$ なる集合とすると，$\bigcup a$ は a の $\leq$ に関する上限となる．
- ON は集合ではない．

定理 3.13.7 (推移的で $\in$ が全順序となる類は ON に含まれる).　S を類とするとき

$$\mathrm{ord}\,(S) \Longrightarrow S \subset \mathrm{ON}.$$

略証． x を S の要素とする．まず

$$\forall s, t \in x\,(\,s \in t \vee s = t \vee t \in s\,) \tag{3.98}$$

が成り立つことを示す．実際 S の推移性より

$$x \subset S$$

が成り立つので，x の要素は全て S の要素となり (3.98) が満たされる．次に

$$\mathrm{tran}\,(x)$$

が成り立つことを示す．y を x の要素とする．また z を y の要素とする．このとき

$$x \subset S$$

から

$$y \in S$$

が成り立つので

$$y \subset S$$

が成り立ち，ゆえに

$$z \in S$$

となる．従って

$$z \in x \vee z = x \vee x \in z \tag{3.99}$$

が成立する．ところで定理 3.13.5 より

$$z \in y \Longrightarrow y \notin z$$

が成り立つから

$$y \notin z \tag{3.100}$$

が成立する．また相当性の公理から

$$z = x \vee y \in x \Longrightarrow y \in z$$

が成り立つので，その対偶と (3.99) から

$$z \neq x \vee y \notin x$$

も満たされる．いま

$$y \in x$$

が成り立っていて，さらに選言三段論法より

$$(\,z \neq x \vee y \notin x\,) \wedge y \in x \Longrightarrow z \neq x$$

も成り立つから，

$$z \neq x$$

が成立する．他方で定理 3.13.5 より

$$z \in y \wedge y \in x \Longrightarrow x \notin z$$

が成立するから，ゆえにいま

$$z \neq x \wedge x \notin z$$

が，つまり

$$\rightharpoondown (z = x \vee x \in z) \tag{3.101}$$

が成立している．ここで選言三段論法より

$$(z \in x \vee z = x \vee x \in z) \wedge \rightharpoondown (z = x \vee x \in z) \Longrightarrow z \in x$$

も成り立つので，(3.100) と (3.101) と併せて

$$z \in x$$

が従う．以上より，y を x の要素とすれば

$$\forall z \in y \, (z \in y \Longrightarrow z \in x)$$

が成り立ち，ゆえに

$$y \subset x$$

が成り立つ．ゆえに x は推移的である．ゆえに

$$\mathrm{ord}\,(x)$$

が成立し

$$x \in \mathrm{ON}$$

となる．x の任意性より

$$S \subset \mathrm{ON}$$

が得られる． ∎

定理 3.13.8 (ON は推移的).　tran (ON) が成立する．

証明.　x を順序数とすると

$$\mathrm{ord}\,(x)$$

が成り立つので，定理 3.13.7 から

$$x \subset \mathrm{ON}$$

が成立する．ゆえに ON は推移的である． ∎

定理 3.13.9 (ON において ∈ と < は同義).

$$\forall \alpha, \beta \in \mathrm{ON}\,(\,\alpha \in \beta \Longleftrightarrow \alpha < \beta\,).$$

証明.　α, β を任意に与えられた順序数とする．

$$\alpha \in \beta$$

が成り立っているとすると，順序数の推移性より

$$\alpha \subset \beta$$

が成り立つ．定理 3.13.5 より

$$\alpha \neq \beta$$

も成り立つから

$$\alpha < \beta$$

が成り立つ．ゆえに

$$\alpha \in \beta \Longrightarrow \alpha < \beta$$

が成立する．逆に

$$\alpha < \beta$$

が成り立っているとすると

$$\beta \backslash \alpha \neq \emptyset$$

が成り立つので，正則性公理より

$$\gamma \in \beta \backslash \alpha \wedge \gamma \cap (\beta \backslash \alpha) = \emptyset$$

を満たす γ が取れる．このとき

$$\alpha = \gamma$$

が成り立つことを示す．x を α の任意の要素とすれば，x, γ は共に β に属するから

$$x \in \gamma \vee x = \gamma \vee \gamma \in x \tag{3.102}$$

が成り立つ．ところで相等性の公理から

$$x = \gamma \wedge x \in \alpha \Longrightarrow \gamma \in \alpha$$

が成り立ち，α の推移性から

$$\gamma \in x \wedge x \in \alpha \Longrightarrow \gamma \in \alpha$$

が成り立つから，それぞれ対偶を取れば

$$\gamma \notin \alpha \Longrightarrow x \neq \gamma \vee x \notin \alpha$$

と

$$\gamma \notin \alpha \Longrightarrow \gamma \notin x \vee x \notin \alpha$$

が成立する．いま

$$\gamma \notin \alpha$$

が成り立っているので

$$x \neq \gamma \vee x \notin \alpha$$

と

$$\gamma \notin x \vee x \notin \alpha$$

が共に成り立ち，また

$$x \in \alpha$$

でもあるから選言三段論法より

$$x \neq \gamma$$

と

$$\gamma \notin x$$

が共に成立する．そして (3.102) と選言三段論法より

$$x \in \gamma$$

が従うので

$$\alpha \subset \gamma$$

が得られる．逆に x を γ に任意の要素とすると

$$x \in \beta \wedge x \notin \beta \backslash \alpha$$

が成り立つから，すなわち

$$x \in \beta \wedge (x \notin \beta \vee x \in \alpha)$$

が成立する．ゆえに選言三段論法より

$$x \in \alpha$$

が成り立ち，x の任意性より

$$\gamma \subset \alpha$$

となる．従って

$$\gamma = \alpha$$

が成立し，

$$\gamma \in \beta$$

なので

$$\alpha \in \beta$$

が成り立つ．以上で

$$\alpha < \beta \Longrightarrow \alpha \in \beta$$

も得られた． ∎

定理 3.13.10 (ON の整列性).　$\leq$ は ON 上の整列順序である．また次が成り立つ．

$$\forall \alpha, \beta \in \mathrm{ON} \left(\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha \right).$$

証明.

第一段　α, β, γ を順序数とすれば

$$\alpha \subset \alpha$$

かつ

$$\alpha \subset \beta \wedge \beta \subset \alpha \Longrightarrow \alpha = \beta$$

かつ

$$\alpha \subset \beta \wedge \beta \subset \gamma \Longrightarrow \alpha \subset \gamma$$

が成り立つ．ゆえに $\leq$ は ON 上の順序である．

第二段　$\leq$ が全順序であることを示す．α と β を順序数とする．このとき

$$\mathrm{ord}\,(\alpha \cap \beta)$$

が成り立ち，他方で定理 3.13.5 より

$$\alpha \cap \beta \notin \alpha \cap \beta$$

が満たされるので

$$\alpha \cap \beta \notin \alpha \vee \alpha \cap \beta \notin \beta \tag{3.103}$$

が成立する．ところで

$$\alpha \cap \beta \subset \alpha$$

は正しいので定理 3.13.9 から

$$\alpha \cap \beta \in \alpha \vee \alpha \cap \beta = \alpha$$

が成立する．従って

$$\alpha \cap \beta \notin \alpha \Longrightarrow (\alpha \cap \beta \in \alpha \vee \alpha \cap \beta = \alpha) \wedge \alpha \cap \beta \notin \alpha \tag{3.104}$$

が成り立ち，他方で選言三段論法より

$$(\alpha \cap \beta \in \alpha \vee \alpha \cap \beta = \alpha) \wedge \alpha \cap \beta \notin \alpha \Longrightarrow \alpha \cap \beta = \alpha \tag{3.105}$$

も成り立ち，かつ

$$\alpha \cap \beta = \alpha \Longrightarrow \alpha \subset \beta \tag{3.106}$$

も成り立つので，(3.104) と (3.105) と (3.106) から

$$\alpha \cap \beta \notin \alpha \Longrightarrow \alpha \subset \beta$$

が得られる．同様にして

$$\alpha \cap \beta \notin \beta \Longrightarrow \beta \subset \alpha$$

も得られる．さらに論理和の規則から

$$\alpha \cap \beta \notin \alpha \Longrightarrow \alpha \subset \beta \vee \beta \subset \alpha$$

と

$$\alpha \cap \beta \notin \beta \Longrightarrow \alpha \subset \beta \vee \beta \subset \alpha$$

が従うので，(3.103) と場合分け法則より

$$\alpha \subset \beta \vee \beta \subset \alpha$$

が成立して

$$(\alpha, \beta) \in \leq \vee (\beta, \alpha) \in \leq$$

が成立する．ゆえに $\leq$ は全順序である．

第三段　$\leq$ が整列順序であることを示す．a を ON の空でない部分集合とする．このとき正則性公理より

$$x \in a \wedge x \cap a = \emptyset$$

を満たす集合 x が取れるが，この x が a の最小限である．実際，任意に a から要素 y を取ると

$$x \cap a = \emptyset$$

から

$$y \notin x$$

が従い，また前段の結果より

$$x \in y \vee x = y \vee y \in x$$

も成り立つので，選言三段論法より

$$x \in y \vee x = y \tag{3.107}$$

が成り立つ．y は推移的であるから

$$x \in y \Longrightarrow x \subset y$$

が成立して，また

$$x = y \Longrightarrow x \subset y$$

も成り立つから，(3.107) と場合分け法則から

$$(x, y) \in \leq$$

が従う．y の任意性より

$$\forall y \in a \left[(x, y) \in \leq \right]$$

が成立するので x は a の最小限である．∎

定理 3.13.11 (ON の部分集合の合併は順序数となる).

$$\forall a \left(a \subset \mathrm{ON} \Longrightarrow \bigcup a \in \mathrm{ON} \right).$$

証明． 和集合の公理より $\bigcup a \in \mathbf{V}$ となる．また順序数の推移性より $\bigcup a$ の任意の要素は順序数であるから，定理 3.13.10 より

$$\forall x, y \in \bigcup a \, (\, x \in y \vee x = y \vee y \in x \,)$$

も成り立つ．最後に $\mathrm{Tran}(\bigcup a)$ が成り立つことを示す．b を $\bigcup a$ の任意の要素とすれば，a の或る要素 x に対して

$$b \in x$$

となるが，x の推移性より $b \subset x$ となり，$x \subset \bigcup a$ と併せて

$$b \subset \bigcup a$$

が従う．∎

定理 3.13.12 (Burali-Forti).　順序数の全体は集合ではない．

$$\rightharpoondown \mathrm{set}\,(\mathrm{ON}).$$

証明.　a を類とするとき，定理 3.1.7 より

$$\mathrm{ord}\,(a) \Longrightarrow (\,\mathrm{set}\,(a) \Longrightarrow a \in \mathrm{ON}\,)$$

が成り立つ．定理 3.13.8 と定理 3.13.10 より

$$\mathrm{ord}\,(\mathrm{ON})$$

が成り立つから

$$\mathrm{set}\,(\mathrm{ON}) \Longrightarrow \mathrm{ON} \in \mathrm{ON} \tag{3.108}$$

が従い，また定理 3.13.5 より

$$\mathrm{ON} \notin \mathrm{ON}$$

も成り立つので，(3.108) の対偶から

$$\rightharpoondown \mathrm{set}\,(\mathrm{ON})$$

が成立する．∎

定義 3.13.13 (後者).　x を集合とするとき，

$$x \cup \{x\}$$

を x の**後者 (latter)** と呼ぶ．

定理 3.13.14 (順序数の後者は順序数である).　α が順序数であるということと $\alpha \cup \{\alpha\}$ が順序数であるということとは同値である．

$$\forall \alpha \,(\, \alpha \in \mathrm{ON} \Longleftrightarrow \alpha \cup \{\alpha\} \in \mathrm{ON}\,).$$

略証.

第一段　α を順序数とする．そして x を

$$x \in \alpha \cup \{\alpha\} \tag{3.109}$$

なる任意の集合とすると，

$$y \in x$$

なる任意の集合 y に対して定理 3.9.8 より

$$y \in \alpha \vee y \in \{\alpha\} \tag{3.110}$$

が成立する．α が順序数であるから

$$y \in \alpha \Longrightarrow y \subset \alpha \tag{3.111}$$

が成立する．他方で定理 3.8.2 より

$$y \in \{\alpha\} \Longrightarrow y = \alpha$$

が成立し，

$$y = \alpha \Longrightarrow y \subset \alpha$$

であるから

$$y \in \{\alpha\} \Longrightarrow y \subset \alpha \tag{3.112}$$

が従う．定理 3.9.9 より

$$y \subset \alpha \Longrightarrow y \subset \alpha \cup \{\alpha\}$$

が成り立つので，(3.111) と (3.112) と併せて

$$y \in \alpha \Longrightarrow y \subset \alpha \cup \{\alpha\}$$

かつ

$$y \in \{\alpha\} \Longrightarrow y \subset \alpha \cup \{\alpha\}$$

が成立し，場合分け法則より

$$y \in \alpha \vee y \in \{\alpha\} \Longrightarrow y \subset \alpha \cup \{\alpha\}$$

が従う．そして (3.110) と併せて

$$y \subset \alpha \cup \{\alpha\}$$

が成立する．y の任意性ゆえに (3.109) の下で

$$\forall y \left(y \in x \Longrightarrow y \subset \alpha \cup \{\alpha\} \right)$$

が成り立ち，演繹法則と x の任意性から

$$\forall x \left(x \in \alpha \cup \{\alpha\} \Longrightarrow x \subset \alpha \cup \{\alpha\} \right)$$

が従う．ゆえにいま

$$\mathrm{tran}\,(\alpha \cup \{\alpha\}) \tag{3.113}$$

が得られた．また s と t を $\alpha \cup \{\alpha\}$ の任意の要素とすると

$$s \in \alpha \vee s = \alpha$$

と

$$t \in \alpha \vee t = \alpha$$

が成り立つが，

$$s \in \alpha \Longrightarrow s \in \mathrm{ON}$$

かつ

$$s = \alpha \Longrightarrow s \in \mathrm{ON}$$

から

$$s \in \alpha \lor s = \alpha \Longrightarrow s \in \mathrm{ON}$$

が従い，同様にして

$$t \in \alpha \lor t = \alpha \Longrightarrow t \in \mathrm{ON}$$

も成り立つので，

$$s \in \mathrm{ON}$$

かつ

$$t \in \mathrm{ON}$$

となる．このとき定理 3.13.10 より

$$s \in t \lor s = t \lor t \in s$$

が成り立つので，s および t の任意性より

$$\forall s, t \in \alpha \cup \{\alpha\} \,(\, s \in t \lor s = t \lor t \in s\,)$$

が得られた．(3.113) と併せて

$$\mathrm{ord}\,(\alpha \cup \{\alpha\})$$

が従い，演繹法則より

$$\alpha \in \mathrm{ON} \Longrightarrow \alpha \cup \{\alpha\} \in \mathrm{ON}$$

を得る．

第二段

定理 3.13.15 (順序数は後者が直後の数となる).　α を順序数とすれば，ON において $\alpha \cup \{\alpha\}$ は α の直後の数である:

$$\forall \alpha \in \mathrm{ON}\, \left[\, \forall \beta \in \mathrm{ON}\,(\,\alpha < \beta \Longrightarrow \alpha \cup \{\alpha\} \leq \beta\,)\,\right].$$

略証．　α と β を任意に与えられた順序数とし，

$$\alpha < \beta$$

であるとする．定理 3.13.9 より，このとき

$$\alpha \in \beta$$

が成り立ち，$\leq$ の定義より

$$\alpha \subset \beta$$

も成り立つ．ところで，いま t を任意の集合とすると

$$t \in \{\alpha\} \Longrightarrow t = \alpha$$

かつ

$$t = \alpha \Longrightarrow t \in \beta$$

が成り立つので，

$$\{\alpha\} \subset \beta$$

が成り立つ．ゆえに

$$\forall x \ \left(x \in \{\alpha, \{\alpha\}\} \Longrightarrow x \subset \beta \right)$$

が成り立つ．ゆえに定理 3.9.10 より

$$\alpha \cup \{\alpha\} \subset \beta.$$

すなわち

$$\alpha \cup \{\alpha\} \leq \beta$$

が成り立つ．■

3.14　無限

定義 3.14.1 (極限数).　類 α が**極限数 (limit ordinal)** であるということを

$$\mathrm{lim.o}\,(\alpha) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \mathrm{ord}\,(\alpha) \wedge \alpha \neq \emptyset \wedge \forall \beta \in \mathrm{ON} \ \left(\alpha \neq \beta \cup \{\beta\} \right)$$

により定める．つまり，極限数とはいずれの順序数の後者でもない 0 を除く順序数のことである．

定理 3.14.2 (全ての要素の後者で閉じていれば極限数).　空でない順序数は，すべての要素の後者について閉じていれば極限数である:

$$\forall \alpha \in \mathrm{ON} \ \left[\alpha \neq \emptyset \wedge \forall \beta \ \left(\beta \in \alpha \Longrightarrow \beta \cup \{\beta\} \in \alpha \right) \Longrightarrow \mathrm{lim.o}\,(\alpha) \right].$$

略証．　α を順序数とし，

$$\alpha \neq \emptyset \wedge \forall \beta \ \left(\beta \in \alpha \Longrightarrow \beta \cup \{\beta\} \in \alpha \right) \tag{3.114}$$

が成り立っているとする．ここで β を順序数とすると

$$\beta \in \alpha \lor \beta = \alpha \lor \alpha \in \beta$$

が成り立つ．

$$\beta = \alpha$$

と

$$\alpha \in \beta$$

の場合はいずれも

$$\alpha \in \beta \cup \{\beta\}$$

が成り立つので，定理 3.13.5 より

$$\alpha \neq \beta \cup \{\beta\}$$

が成立する．ゆえに

$$(\beta = \alpha \lor \beta \in \alpha) \Longrightarrow \alpha \neq \beta \cup \{\beta\} \tag{3.115}$$

が成立する．他方で (3.114) より

$$\beta \in \alpha \Longrightarrow \beta \cup \{\beta\} \in \alpha$$

も満たされて，

$$\beta \cup \{\beta\} \in \alpha \Longrightarrow \beta \cup \{\beta\} \neq \alpha$$

と併せて

$$\beta \in \alpha \Longrightarrow \beta \cup \{\beta\} \neq \alpha \tag{3.116}$$

が成り立つ．そして (3.115) と (3.116) と場合分け法則により

$$\left(\beta \in \alpha \lor \beta = \alpha \lor \alpha \in \beta\right) \Longrightarrow \alpha \neq \beta \cup \{\beta\}$$

が成立する．ゆえに

$$\forall \beta \in \mathrm{ON}\left(\alpha \neq \beta \cup \{\beta\}\right)$$

が成立する．ゆえに α は極限数である． ∎

次の無限公理は極限数の存在を保証する．

公理 3.14.3 (無限公理).　空集合を要素に持ち，全ての要素の後者について閉じている集合が存在する:

$$\exists a\ [\emptyset \in a \land \forall x\ (x \in a \Longrightarrow x \cup \{x\} \in a)].$$

定理 3.14.4 (極限数は存在する).

$$\exists \alpha \in \mathrm{ON}\ (\mathrm{lim.o}\,(\alpha)).$$

証明． 無限公理より

$$\emptyset \in a \wedge \forall x \, (\, x \in a \Longrightarrow x \cup \{x\} \in a \,)$$

を満たす集合 a が取れる．

$$b \overset{\mathrm{def}}{=} a \cap \mathrm{ON}$$

とおくとき

$$\bigcup b$$

が極限数となることを示す．まず

$$\emptyset \in a \cap \mathrm{ON} \wedge \{\emptyset\} \in a \cap \mathrm{ON}$$

が成り立つから

$$\emptyset \in \bigcup b$$

が成り立つ．ゆえに $\bigcup b$ は空ではない．また定理 3.13.11 より

$$\bigcup b \in \mathrm{ON}$$

が成立する．α を $\bigcup b$ の要素とすると，

$$x \in b \wedge \alpha \in x$$

を満たす順序数 x が取れる．このとき

$$\alpha \cup \{\alpha\} \in x$$

か

$$\alpha \cup \{\alpha\} = x$$

が成り立つが，いずれの場合も

$$\alpha \cup \{\alpha\} \in x \cup \{x\}$$

が成立する．他方で

$$x \cup \{x\} \in a \cap \mathrm{ON}$$

も成立するから

$$\alpha \cup \{\alpha\} \in \bigcup b$$

が成立する．ゆえに

$$\forall \alpha \left(\alpha \in \bigcup b \Longrightarrow \alpha \cup \{\alpha\} \in \bigcup b \right)$$

が成立する．ゆえに定理 3.14.2 より $\bigcup b$ は極限数である． ∎

無限公理から極限数の存在が示されましたが，無限公理の代わりに極限数の存在を公理に採用しても無限公理の主張は導かれます．すなわち無限公理の主張と極限数が存在するという主張は同値なのです．本稿の流れでは極限数の存在を公理とした方が自然に感じられますが，しかし無限公理の方が主張が簡単ですし，他の文献ではこちらを公理としているようです．

定理 3.14.5 (極限数は上限で表せる).

$$\mathrm{lim.o}(\alpha) \Longrightarrow \alpha = \bigcup \{ \beta \mid \beta \in \alpha \}.$$

略証. α を極限数とする．x を α の要素とすれば，

$$x \cup \{x\} \neq \alpha$$

が成り立つから

$$x \cup \{x\} \in \alpha$$

が成り立ち

$$x \in \bigcup \{ \beta \mid \beta \in \alpha \}$$

が成立する．x を $\bigcup \{ \beta \mid \beta \in \alpha \}$ の要素とすれば

$$x \in \beta \wedge \beta \in \alpha$$

なる順序数 β が取れて，順序数の推移性より

$$x \in \alpha$$

が従う．x の任意性から

$$\alpha = \bigcup \{ \beta \mid \beta \in \alpha \}$$

が成立する． ∎

定義 3.14.6 (自然数). 最小の極限数を

$$\mathbf{N}$$

と書く．また $\mathbf{N}$ の要素を**自然数 (natural number)** と呼ぶ．

$\mathbf{N}$ は最小の極限数であるから，その要素である自然数はどれも極限数ではない．従って $\emptyset$ を除く自然数は必ずいずれかの自然数の後者である．

定義 3.14.7 (無限).　本稿においては，**無限 (infinity)** を表す記号 ∞ を

$$\infty \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \mathbf{N}$$

によって定める．

3.15　超限帰納法

x を任意に与えられた集合としたとき，x の任意の要素 y で

$$A(y)$$

が成り立つならば

$$A(x)$$

が成り立つとする．すると，なんと $A(x)$ は普遍的に成り立つのである．つまり

$$\forall x \left[\forall y \in x\, A(y) \Longrightarrow A(x) \right] \Longrightarrow \forall x A(x)$$

が成り立つわけだが，この事実を本稿では**集合の帰納法**と呼ぶ．また派生形としては，集合を順序数に制限した場合の**超限帰納法 (transfinite induction)** と，自然数に制限した場合の**数学的帰納法 (mathematical induction)** がある．

定理 3.15.1 (集合の帰納法).　A を $\mathcal{L}'$ の式とし，x を A に現れる文字とし，y を A に現れない文字とし，A に現れる文字で x のみが量化されていないとする．このとき

$$\forall x \left[\forall y \in x\, A(y) \Longrightarrow A(x) \right] \Longrightarrow \forall x A(x).$$

略証．　いま

$$a \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \{\, x \mid\!\rightharpoonup A(x) \,\}$$

とおく．正則性公理より

$$a \neq \emptyset \Longrightarrow \exists x \,(\, x \in a \wedge x \cap a = \emptyset \,)$$

が成り立つので，対偶を取れば

$$\forall x \,(\, x \notin a \vee x \cap a \neq \emptyset \,) \Longrightarrow a = \emptyset \tag{3.117}$$

が成り立つ．ここで

$$x \cap a \neq \emptyset \Longleftrightarrow \exists y \in x \,(\, y \in a \,)$$

が成り立つので (3.117) から

$$\forall x \left[\, x \notin a \vee \exists y \in x \,(\, y \in a \,) \right] \Longrightarrow a = \emptyset$$

が従い，そして論理和は否定と含意で書き直せる (推論法則 2.3.8) から

$$\forall x \left[\forall y \in x \, (\, y \notin a \,) \Longrightarrow x \notin a \right] \Longrightarrow a = \emptyset$$

が従う．ところで類の公理より

$$x \notin a \Longleftrightarrow A(x)$$

が成り立つから

$$\forall x \left[\forall y \in x \, A(y) \Longrightarrow A(x) \right] \Longrightarrow \forall x A(x)$$

を得る． ∎

本稿では正則性公理を認めているが，いまだけは認めないことにして代わりに集合の帰納法が正しいと仮定してみると，今度は正則性公理が定理として導かれる．実際，a を類とすれば

$$\forall x \left[\forall y \in x \, (\, y \notin a \,) \Longrightarrow \ x \notin a \right] \Longrightarrow \forall x \, (\, x \notin a \,)$$

が成立するが，ここで対偶を取れば

$$\exists x \, (\, x \in a \,) \Longrightarrow \exists x \in a \left[\forall y \in x \, (\, y \notin a \,) \right]$$

が成立し，

$$a \neq \emptyset \Longleftrightarrow \exists x \, (\, x \in a \,)$$

と

$$\forall y \in x \, (\, y \notin a \,) \Longleftrightarrow x \cap a = \emptyset$$

が成り立つことを併せれば

$$a \neq \emptyset \Longrightarrow \exists x \in a \, (\, x \cap a = \emptyset \,)$$

が出る．この意味で正則性公理は**帰納法の公理**とも呼ばれる．

定理 3.15.2 (超限帰納法). A を $\mathcal{L}'$ の式，α を A に現れる文字，β を A に現れない文字とする．このとき，A に現れる文字で α のみが A で量化されていない場合，次が成り立つ:

$$\forall \alpha \in \mathrm{ON} \, \big(\forall \beta \in \alpha \, A(\beta) \Longrightarrow A(\alpha) \big) \Longrightarrow \forall \alpha \in \mathrm{ON} \, A(\alpha).$$

証明． 定理 3.15.1 より

$$\forall \alpha \left[\forall \beta \in \alpha \, (\, \beta \in \mathrm{ON} \Longrightarrow A(\beta) \,) \Longrightarrow (\, \alpha \in \mathrm{ON} \Longrightarrow A(\alpha) \,) \right] \Longrightarrow \forall \alpha \, (\, \alpha \in \mathrm{ON} \Longrightarrow A(\alpha) \,) \tag{3.118}$$

が成り立つ．いま

$$\forall \alpha \in \mathrm{ON} \, \big(\forall \beta \in \alpha \, A(\beta) \Longrightarrow A(\alpha) \big) \tag{3.119}$$

が成り立っているとする．その上で α を集合とし，

$$\forall \beta \in \alpha \, (\, \beta \in \mathrm{ON} \Longrightarrow A(\beta) \,) \tag{3.120}$$

が成り立っているとする．さらにその上で

$$\alpha \in \mathrm{ON}$$

が成り立っているとする．このとき β を

$$\beta \in \alpha$$

なる集合とすると，順序数の推移性より

$$\beta \in \mathrm{ON}$$

が成り立つので，(3.120) と併せて

$$A(\beta)$$

が成り立つ．すなわちいま

$$\forall \beta \in \alpha \, A(\beta)$$

が成り立つ．また (3.119) より

$$\forall \beta \in \alpha \, A(\beta) \Longrightarrow A(\alpha)$$

が成り立つので，いま

$$A(\alpha)$$

が成立する．つまり，(3.120) までを仮定したときには

$$\alpha \in \mathrm{ON} \Longrightarrow A(\alpha)$$

が成立する．ゆえに (3.119) までを仮定したときには

$$\forall \beta \in \alpha \, (\, \beta \in \mathrm{ON} \Longrightarrow A(\beta) \,) \Longrightarrow (\, \alpha \in \mathrm{ON} \Longrightarrow A(\alpha) \,)$$

が成立し，α の任意性から

$$\forall \alpha \, \left[\, \forall \beta \in \alpha \, (\, \beta \in \mathrm{ON} \Longrightarrow A(\beta) \,) \Longrightarrow (\, \alpha \in \mathrm{ON} \Longrightarrow A(\alpha) \,) \, \right]$$

が成立する．ゆえに，何も仮定しなくても

$$(3.119) \Longrightarrow \forall \alpha \, \left[\, \forall \beta \in \alpha \, (\, \beta \in \mathrm{ON} \Longrightarrow A(\beta) \,) \Longrightarrow (\, \alpha \in \mathrm{ON} \Longrightarrow A(\alpha) \,) \, \right] \tag{3.121}$$

が成立する．(3.118) と (3.121) と含意の推移性より

$$\forall \alpha \in \mathrm{ON} \, \left(\, \forall \beta \in \alpha \, A(\beta) \Longrightarrow A(\alpha) \, \right) \Longrightarrow \forall \alpha \, (\, \alpha \in \mathrm{ON} \Longrightarrow A(\alpha) \,)$$

が従うが，

$$\forall \alpha \, (\, \alpha \in \mathrm{ON} \Longrightarrow A(\alpha) \,)$$

を略記したものが

$$\forall \alpha \in \mathrm{ON}\, A(\alpha)$$

であるから

$$\forall \alpha \in \mathrm{ON}\, \big(\forall \beta \in \alpha\, A(\beta) \Longrightarrow A(\alpha) \big) \Longrightarrow \forall \alpha \in \mathrm{ON}\, A(\alpha)$$

が成り立つことになる． ∎

以後本稿では超限帰納法を頻繁に扱うので，ここでその**利用方法**を述べておく．順序数に対する何らかの言明 A が与えられたとき，それがいかなる順序数に対しても真であることを示したいとする．往々にして

$$\forall \alpha \in \mathrm{ON}\, A(\alpha)$$

をいきなり示すのは難しく，一方で

$$\forall \beta \in \alpha\, A(\beta)$$

から

$$A(\alpha)$$

を導くことは容易い．それは順序数の “順番” 的な性質の良さによるが，超限帰納法のご利益は

$$\forall \alpha \in \mathrm{ON}\, \big(\forall \beta \in \alpha\, A(\beta) \Longrightarrow A(\alpha) \big)$$

が成り立つことさえ示してしまえばいかなる順序数に対しても A が真となってくれるところにある．

α を任意に与えられた順序数とするとき，

$$\alpha = 0$$

であると空虚な真によって

$$\forall \beta \in \alpha\, A(\beta)$$

は必ず真となるから，まずは

$$A(0)$$

が成り立つことを示さなければならない．$A(0)$ が偽であると

$$\forall \beta \in \alpha\, A(\beta) \wedge \neg A(0)$$

が真となって

$$\forall \beta \in \alpha\, A(\beta) \Longrightarrow A(0)$$

が偽となってしまうからである．α が 0 でないときは素直に

$$\forall \beta \in \alpha\, A(\beta)$$

が成り立つとき

$$A(\alpha)$$

が成り立つことを示せば良い．以上超限帰納法の利用法をまとめると，

超限帰納法の利用手順

順序数に対する何らかの言明 A が与えられて，それがいかなる順序数に対しても真なることを示したいならば，

- まずは $A(0)$ が成り立つことを示し，
- 次は α を 0 でない順序数として $\forall \beta \in \alpha\, A(\beta) \Longrightarrow A(\alpha)$ が成り立つことを示す．

定理 3.15.3 (数学的帰納法の原理). $\mathbf{N}$ は次の意味で最小の無限集合である:

$$\forall a\ [\, \emptyset \in a \wedge \forall x\, (\, x \in a \Longrightarrow x \cup \{x\} \in a\,) \Longrightarrow \mathbf{N} \subset a\,].$$

証明． a を集合とし，

$$\emptyset \in a \wedge \forall x\, (\, x \in a \Longrightarrow x \cup \{x\} \in a\,) \tag{3.122}$$

が成り立っているとする．このとき

$$\forall \alpha \in \mathrm{ON}\, (\, \alpha \in \mathbf{N} \Longrightarrow \alpha \in a\,)$$

が成り立つことを超限帰納法で示す．まずは

$$0 \in a$$

から

$$\emptyset \in \mathbf{N} \Longrightarrow \emptyset \in a$$

が成立する．次に α を任意に与えられた 0 でない順序数とする．

$$\forall \beta \in \alpha\, (\, \beta \in \mathbf{N} \Longrightarrow \beta \in a\,) \tag{3.123}$$

が成り立っているとすると，

$$\alpha \in \mathbf{N}$$

なら α は極限数でないから

$$\alpha = \beta \cup \{\beta\}$$

を満たす自然数 β が取れて，(3.123) より

$$\beta \in a$$

が成り立ち，(3.122) より

$$\alpha \in a$$

が従う．以上で

$$\forall \alpha \in \mathrm{ON} \left[\forall \beta \in \alpha (\beta \in \mathbf{N} \Longrightarrow \beta \in a) \Longrightarrow (\alpha \in \mathbf{N} \Longrightarrow \alpha \in a) \right]$$

が得られた．超限帰納法により

$$\forall \alpha \in \mathrm{ON} (\alpha \in \mathbf{N} \Longrightarrow \alpha \in a)$$

が成り立つから

$$\mathbf{N} \subset a$$

が従う． ∎

3.16　再帰的定義

例えば

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4, \quad \cdots \quad a_n, \quad \cdots$$

なる列が与えられたときに，その n 重の順序対を

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

などと書くことがある．まあ

$$(a_0, a_1)$$

ならば単なる順序対であり，

$$(a_0, a_1, a_2)$$

も

$$((a_0, a_1), a_2)$$

で定められ，

$$(a_0, a_1, a_2, a_3)$$

も

$$(((a_0, a_1), a_2), a_3)$$

で定められる．このように具体的に全ての要素を書き出せるうちは何も問題は無い．ただし，同じ操作を n 回反復するということを表現するために

$$\cdots$$

なる不明瞭な記号を無断で用いることは $\mathcal{L}'$ において許されない．そもそもまだ “n 回の反復” をどんな式で表現したら良いかもわからないのである．次の定理は，このような再帰的な操作が $\mathcal{L}'$ で可能であることを保証する．

定理 3.16.1 (超限帰納法による写像の構成).　類 G を $\mathbf{V}$ 上の写像とするとき，

$$K \overset{\mathrm{def}}{=} \{\, f \mid \exists \alpha \in \mathrm{ON} \left(f : \mathrm{on}\ \alpha \wedge \forall \beta \in \alpha \left(f(\beta) = G(f|_{\beta}) \right) \right) \}$$

とおいて

$$F \overset{\mathrm{def}}{=} \bigcup K$$

と定めると，F は ON 上の写像であって

$$\forall \alpha \in \mathrm{ON} \left(F(\alpha) = G(F|_{\alpha}) \right)$$

を満たす．また ON 上の写像で上式を満たすのは F のみである．

証明.

第二段　F が写像であることを示す．まず K の任意の要素は $V \times V$ の部分集合であるから

$$F \subset V \times V$$

となる．x, y, z を任意の集合とする．$(x, y) \in F$ かつ $(x, z) \in F$ のとき，K の或る要素 f と g が存在して

$$(x, y) \in f \wedge (x, z) \in g$$

を満たすが，ここで $f(x) = g(x)$ となることを言うために，$\alpha = \mathrm{dom}(f)$, $\beta = \mathrm{dom}(g)$ とおき，

$$\forall \gamma \in \mathrm{ON} \left(\gamma \in \alpha \wedge \gamma \in \beta \Longrightarrow f(\gamma) = g(\gamma) \right) \tag{3.124}$$

が成り立つことを示す．いま γ を任意の順序数とする．$\gamma = \emptyset$ の場合は $f|_{\gamma} = \emptyset$ かつ $g|_{\gamma} = \emptyset$ となるから

$$f(\gamma) = G(\emptyset) = g(\gamma)$$

が成立する．$\gamma \neq \emptyset$ の場合は

$$\forall \xi \in \gamma \left(\xi \in \alpha \wedge \xi \in \beta \Longrightarrow f(\xi) = g(\xi) \right)$$

が成り立っていると仮定する．このとき $\gamma \in \alpha \wedge \gamma \in \beta$ ならば順序数の推移性より γ の任意の要素 ξ は $\xi \in \alpha \wedge \xi \in \beta$ を満たすから

$$\forall \xi \in \gamma \left(f(\xi) = g(\xi) \right)$$

が成立する．従って

$$f|_{\gamma} = g|_{\gamma}$$

が成立するので $f(\gamma) = g(\gamma)$ が得られる．超限帰納法より (3.124) が得られる．以上より

$$y = f(x) = g(x) = z$$

となるので F は single-valued である．

第三段　$\mathrm{dom}(F) \subset \mathrm{ON}$ が成り立つことを示す．実際

$$\mathrm{dom}(F) = \bigcup_{f \in K} \mathrm{dom}(f)$$

かつ $\forall f \in K\ (\ \mathrm{dom}(f) \subset \mathrm{ON}\ )$ だから $\mathrm{dom}(F) \subset \mathrm{ON}$ となる．

第四段　$\mathrm{Tran}(\mathrm{dom}(F))$ であることを示す．実際任意の集合 x, y について

$$y \in x \wedge x \in \mathrm{dom}(F)$$

が成り立っているとき，或る $f \in K$ で $x \in \mathrm{dom}(f)$ となり，$\mathrm{dom}(f)$ は順序数なので，順序数の推移律から

$$y \in \mathrm{dom}(f)$$

が従う．ゆえに $y \in \mathrm{dom}(F)$ となる．

第五段　$\forall \alpha \in \mathrm{dom}(F)\ (\ F(\alpha) = G(F|_\alpha)\ )$ が成り立つことを示す．実際，$\alpha \in \mathrm{dom}(F)$ なら K の或る要素 f に対して $\alpha \in \mathrm{dom}(f)$ となるが，$f \subset F$ であるから

$$f(\alpha) = F(\alpha)$$

が成り立つ．これにより $f|_\alpha = f \cap (\alpha \times V) = F \cap (\alpha \times V) = F|_\alpha$ より

$$G(f|_\alpha) = G(F|_\alpha)$$

も成り立つ．$f(\alpha) = G(f|_\alpha)$ と併せて $F(\alpha) = G(F|_\alpha)$ を得る．

第六段　α を任意の順序数として $\forall \beta \in \alpha\ (\ \beta \in \mathrm{dom}(F)\ ) \Longrightarrow \alpha \in \mathrm{dom}(F)$ が成り立つことを示す．$\alpha = \emptyset$ の場合は

$$\forall f \in K\ (\ \mathrm{dom}(f) \neq \emptyset \Longrightarrow \emptyset \in \mathrm{dom}(f)\ )$$

が満たされるので $\alpha \in \mathrm{dom}(F)$ となる (定理**??**)．$\alpha \neq \emptyset$ の場合，

$$\forall \beta \in \alpha\ (\ \beta \in \mathrm{dom}(F)\ )$$

が成り立っているとして $f = F|_\alpha$ とおけば，f は α 上の写像であり，α の任意の要素 β に対して

$$f(\beta) = F|_\alpha(\beta) = F(\beta) = G(F|_\beta) = G(f|_\beta)$$

を満たすから $f \in K$ である．このとき $f' = f \cup \{(\alpha, G(f))\}$ も K に属するので

$$\alpha \in \mathrm{dom}(f') \subset \mathrm{dom}(F)$$

が成立する．超限帰納法より

$$\forall \alpha \in \mathrm{ON}\ (\ \alpha \in \mathrm{dom}(F)\ )$$

が成立し，前段の結果と併せて

$$\mathrm{ON} = \mathrm{dom}(F)$$

を得る．

第七段　F の一意性を示す．類 H が

$$H : \mathrm{ON} \longrightarrow V \wedge \forall \alpha \in \mathrm{ON} \, (\, H(\alpha) = G(H|_\alpha) \,)$$

を満たすとき，$F = H$ が成り立つことを示す．いま，α を任意に与えられた順序数とする．$\alpha = \emptyset$ の場合は

$$F|_\emptyset = \emptyset = H|_\emptyset$$

より $F(\emptyset) = H(\emptyset)$ となる．$\alpha \neq \emptyset$ の場合，

$$\forall \beta \in \alpha \, (\, F(\beta) = H(\beta) \,)$$

が成り立っていると仮定すれば

$$F|_\alpha = H|_\alpha$$

が成り立つから $F(\alpha) = H(\alpha)$ となる．以上で

$$\forall \alpha \in \mathrm{ON} \, \big(\, \forall \beta \in \alpha \, (\, F(\beta) = H(\beta) \,) \Longrightarrow F(\alpha) = H(\alpha) \, \big)$$

が得られた．超限帰納法より

$$\forall \alpha \in \mathrm{ON} \, (\, F(\alpha) = H(\alpha) \,)$$

が従い $F = H$ が出る． ∎

再帰的定義の応用：多数の要素からなる順序対

a を $\mathbf{N}$ から集合 A への写像とすると，

$$a_n \overset{\mathrm{def}}{=} a(n)$$

と書けば

$$a_0, a_1, a_2, \cdots$$

なる列が作られる．ここでは

$$(a_0, a_1, \cdots, a_n)$$

のような記法の集合論的意味付けを考察する．

$\mathbf{V}$ 上の写像 G を

$$G(x) = \begin{cases} a_0 & \text{if } \mathrm{dom}\,(x) = \emptyset \\ (x(k), a(\mathrm{dom}\,(x))) & \text{if } \mathrm{dom}\,(x) = k \cup \{k\} \wedge k \in \mathbf{N} \\ \emptyset & \text{o.w.} \end{cases}$$

によって定めてみると，つまり G とは

$$\begin{aligned} \{\, (x, y) \mid \quad & \big(\mathrm{dom}\,(x) = \emptyset \Longrightarrow y = a_0 \big) \\ & \wedge \forall k \in \mathbf{N} \, \big(\mathrm{dom}\,(x) = k \cup \{k\} \Longrightarrow y = (x(k), a(\mathrm{dom}\,(x))) \big) \\ & \wedge \big[\, \mathrm{dom}\,(x) \neq \emptyset \wedge \forall k \in \mathbf{N} \, (\, \mathrm{dom}\,(x) \neq k \cup \{k\} \,) \Longrightarrow y = \emptyset \, \big] \,\} \end{aligned}$$

のことであるが，ON 上の写像 p で

$$p(n) = \begin{cases} a_0 & \text{if } (n=0) \\ (a_0, a_1) & \text{if } (n=1) \\ ((a_0, a_1), a_2) & \text{if } (n=2) \\ (((a_0, a_1), a_2), a_3) & \text{if } (n=3) \end{cases}$$

を満たすものが取れる．先の

$$(a_0, a_1, \cdots, a_n)$$

という一見不正確であった記法は，この

$$p(n)$$

によって定めてしまえば無事解決である．

3.17　整礎集合

いま $\mathbf{V}$ 上の写像 G を

$$x \longmapsto \begin{cases} \emptyset & \text{if } \operatorname{dom}(x) = \emptyset \\ \mathrm{P}\left(x(\beta)\right) & \text{if } \beta \in \mathrm{ON} \wedge \operatorname{dom}(x) = \beta \cup \{\beta\} \\ \bigcup \operatorname{ran}(x) & \text{o.w.} \end{cases}$$

なる関係により定めると，つまり正式には

$$\begin{aligned} \{\, (x, y) \mid \quad & \bigl(\operatorname{dom}(x) = \emptyset \Longrightarrow y = \alpha \bigr) \\ & \wedge \forall \beta \in \mathrm{ON} \; \bigl(\operatorname{dom}(x) = \beta \cup \{\beta\} \Longrightarrow y = \mathrm{P}\left(x(\beta)\right) \bigr) \\ & \wedge \Bigl[\operatorname{dom}(x) \neq \emptyset \wedge \forall \beta \in \mathrm{ON} \; \bigl(\operatorname{dom}(x) \neq \beta \cup \{\beta\} \bigr) \Longrightarrow y = \bigcup \operatorname{ran}(x) \Bigr] \,\} \end{aligned}$$

で定めると，

$$\forall \alpha \in \mathrm{ON} \, (\, R(\alpha) = G(R|_{\alpha}) \,)$$

を満たす ON 上の写像 R が取れる．R とは，その定義の仕方より

$$\mathrm{ON} \ni \alpha \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{if } \alpha = 0 \\ \mathrm{P}\left(R(\beta)\right) & \text{if } \beta \in \mathrm{ON} \wedge \alpha = \beta \cup \{\beta\} \\ \bigcup_{\beta \in \alpha} R(\beta) & \text{if } \lim.\mathrm{o}\,(\alpha) \end{cases}$$

を満たす写像である．本節ではこの R が考察対象となる．

定義 3.17.1 (整礎集合).　$\bigcup_{\alpha \in \mathrm{ON}} R(\alpha)$ の要素を**整礎集合 (well-founded set)** と呼ぶ.

この R を用いると次の美しい式が導かれる．ただしこれは偶然得られた訳ではなく，John Von Neumann はこの結果を予定して正則性公理を導入したのである．

定理 3.17.2 (すべての集合は整礎的である).

$$\mathbf{V} = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{ON}} R(\alpha).$$

証明． S を類として，S が ON の空でない部分類ならば

$$\mathbf{V} \neq \bigcup_{\alpha \in S} R(\alpha) \Longrightarrow S \neq \mathrm{ON}$$

が成り立つことを示す．

$$\mathbf{V} \neq \bigcup_{\alpha \in S} R(\alpha)$$

が成り立っているとすると，正則性公理より

$$a \in \mathbf{V} \backslash \bigcup_{\alpha \in S} R(\alpha) \wedge a \cap \mathbf{V} \backslash \bigcup_{\alpha \in S} R(\alpha) = \emptyset$$

を満たす集合 a が取れる．つまり

$$a \notin \bigcup_{\alpha \in S} R(\alpha) \wedge a \subset \bigcup_{\alpha \in S} R(\alpha)$$

が成り立っている．ここで a の要素 s に対して

$$s \in R(\alpha)$$

を満たす順序数 α のうちで $\leq$ に関して最小のものを対応させる関係を f とすると，つまり

$$f \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\, x \mid \exists s \in a \, \exists \alpha \in \mathrm{ON} \left[\, x = (s, \alpha) \wedge s \in R(\alpha) \wedge \forall \beta \in \mathrm{ON} \, (\, s \in R(\beta) \Longrightarrow \alpha \leq \beta \,) \,\right] \}$$

と定めれば，

$$f : a \longrightarrow \mathrm{ON}$$

が成り立つ．従って

$$\beta \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigcup f * a$$

とおけば β は順序数である．このとき

$$t \in a \Longrightarrow t \in R(f(t)) \Longrightarrow t \in R(\beta)$$

が成り立つから

$$a \subset R(\beta)$$

が成り立ち，そして

$$R\left(\beta \cup \{\beta\}\right) = \mathrm{P}\left(R(\beta)\right)$$

であるから

$$a \in R\left(\beta \cup \{\beta\}\right)$$

が従う．

$$\forall \alpha \in S \, (\, a \notin R(\alpha) \,)$$

であったから

$$\beta \cup \{\beta\} \notin S$$

が成り立つので

$$S \neq \mathrm{ON}$$

である．定理の主張は対偶を取れば得られる． ∎

定義 3.17.3 (集合の階数).

定義 3.17.4 (選択関数). a を集合とするとき，

$$f : \mathrm{on}\, a \wedge \forall x \in a\, (\, x \neq \emptyset \Longrightarrow f(x) \in x\,)$$

を満たす写像 f を a 上の**選択関数 (choice function)** と呼ぶ．

$a = \emptyset$ ならば空写像が a 上の選択関数となる．選択公理とは，空集合に限らずどの集合の上にも選択関数が存在することを保証する．

公理 3.17.5 (選択公理). いかなる集合の上にも選択関数が存在する:

$$\forall a\, \exists f\, \left[\, f : \mathrm{on}\, a \wedge \forall x \in a\, (\, x \neq \emptyset \Longrightarrow f(x) \in x\,)\,\right].$$

後述する直積は選択公理と密接な関係がある．いま a を集合として

$$b \overset{\mathrm{def}}{=\!=} a \backslash \{\emptyset\}$$

とおき，h を b 上の恒等写像とすると

$$\forall x \in b\, (\, h(x) \neq \emptyset\,)$$

が成り立つが，ここで

$$\forall x \in b\, (\, g(x) \in h(x)\,)$$

を満たす b 上の写像 g が取れるとする．この主張は “h の直積は空ではない” という意味なのだが，このとき

$$f \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \begin{cases} g \cup \{(\emptyset, \emptyset)\} & \text{if } \emptyset \in a \\ g & \text{if } \emptyset \notin a \end{cases}$$

により a 上の写像 f を定めれば

$$\forall x \in a\, (\, x \neq \emptyset \Longrightarrow f(x) \in x\,)$$

が成立する．つまり**空な値を取らない写像の直積は空でない**という主張を真とすれば選択公理が導かれるのだが，実は両者は同値である．本稿では選択公理はその名の通り公理であるから，この主張は定理として得られることになる．

定義 3.17.6 (直積).　a を類とし，h を a 上の写像とするとき，

$$\prod_{x \in a} h(x) \overset{\mathrm{def}}{=} \{\, f \mid f : \mathrm{on}\, a \wedge \forall x \in a\, (\, f(x) \in h(x)\,)\,\}$$

で定める類を h の**直積 (direct product)** と呼ぶ.

a を集合とし，h を a 上の写像とし，

$$h(x) = \emptyset$$

なる a の要素 x が取れるとする．このとき

$$\prod_{x \in a} h(x) = \emptyset$$

が成立する．実際，a 上の任意の写像 f に対して必ず

$$f(x) \notin h(x)$$

が成り立つので

$$f \notin \prod_{x \in a} h(x)$$

が成立する．つまり任意の集合 a 及び a 上の写像 h に対して

$$\exists x \in a\, (\, h(x) = \emptyset\,) \Longrightarrow \prod_{x \in a} h(x) = \emptyset$$

が成り立つわけだが，選択公理から演繹すればこの逆の主張も得られる．

定理 3.17.7 (空な値を取らない写像の直積は空でない).

$$\forall a\, \forall h\, \left(h : \mathrm{on}\, a \wedge \forall x \in a\, (\, h(x) \neq \emptyset\,) \Longrightarrow \prod_{x \in a} h(x) \neq \emptyset \right).$$

略証.　いま a を集合とし，h を a 上の写像とし，

$$\forall x \in a\, (\, h(x) \neq \emptyset\,) \tag{3.125}$$

が成り立っているとする．このとき

$$b \overset{\mathrm{def}}{=} h * a$$

とおけば，選択公理より b 上の写像 g で

$$\forall t \in b\, \left(\, t \neq \emptyset \Longrightarrow g(t) \in t\,\right) \tag{3.126}$$

を満たすものが取れる．ここで

$$f \overset{\mathrm{def}}{=} \{\, t \mid \exists x \in a\, \left[\, t = (x, g(h(x)))\,\right]\,\}$$

と定めれば，f は a 上の写像であって

$$\forall x \in a \ \big(f(x) \in h(x) \big)$$

が成立する．実際，任意の集合 s, t, u に対して

$$(s, t) \in f \wedge (s, u) \in f$$

であるとすれば

$$(s, t) = (x, g(h(x)))$$

を満たす a の要素 x と

$$(s, u) = (y, g(h(y)))$$

を満たす a の要素 y が取れるが，このとき

$$x = s = y$$

が成り立つので

$$t = g(h(x)) = g(h(y)) = u$$

が従う．また x を a の要素とすれば

$$(x, g(h(x))) \in f$$

が成り立つので

$$x \in \operatorname{dom}(f)$$

となり，逆に x を $\operatorname{dom}(f)$ の要素とすれば

$$(x, y) \in f$$

を満たす集合 y が取れるが，このとき

$$(x, y) = (z, g(h(z)))$$

を満たす a の要素 z が取れるので

$$x \in a$$

が従う．ゆえに f は a 上の写像である．そして x を a の要素とすれば

$$f(x) = g(h(x))$$

が成り立つが，(3.125) より

$$h(x) \neq \emptyset$$

が満たされるので，(3.126) より

$$f(x) \in h(x)$$

が成立する．∎

3.18　整列可能定理

整列可能定理の証明は幾分技巧的で見通しが悪いですから，はじめに直感的な解説をしておきます．定理の主張は集合 a に対して順序数 α と写像 f で

$$f : \alpha \xrightarrow[\text{onto}]{1:1} a$$

を満たすものが取れるというものです．順序数は

$$0, 1, 2, 3, \cdots$$

と順番に並んでいますから，まず 0 に対して a の何らかの要素 x_0 を対応させます．次は 1 に対して $a \backslash \{x_0\}$ の何らかの要素 x_1 を対応させ，その次は 2 に対して $a \backslash \{x_0, x_1\}$ の要素を対応させ... と，同様の操作を a の要素が尽きるまで繰り返します．操作が終了した時点で，それまでに使われなかった順序数のうちで最小のものを α とすれば，写像

$$f : \alpha \ni \beta \longmapsto x_\beta \in a$$

が得られるという寸法です．'$a \backslash \{\cdots\}$ の何らかの要素を対応させる$'$ という不明瞭な操作を $\mathcal{L}'$ のことばで表現する際に選択公理が使われますから整列可能定理は選択公理から導かれると言えますが，逆に整列可能定理が真であると仮定すれば選択公理の主張が導かれます．つまり (**??**節で登場した公理体系の下で) 選択公理と整列可能定理は同値な主張となります．

定理 3.18.1 (整列可能定理).　任意の集合は，或る順序数との間に全単射を持つ:

$$\forall a \, \exists \alpha \in \mathrm{ON} \, \exists f \left(f : \alpha \xrightarrow[\text{onto}]{1:1} a \right).$$

次の主張は整列可能定理と証明が殆ど被るのでまとめて述べておく．

定理 3.18.2 (整列集合は唯一つの順序数に順序同型である).　(a, O_W) を整列集合とするとき，或るただ一つの順序数 α と α から a への全単射 f が存在して

$$\gamma \leq \delta \Longrightarrow (f(\gamma), f(\delta)) \in O_W$$

を満たす．

証明．　χ を任意に与えられた $\mathcal{L}$ の対象とする．

第一段　$\chi = \emptyset$ の場合，

$$\emptyset : \emptyset \xrightarrow[\text{onto}]{1:1} \chi$$

が満たされるから

$$\exists f\left(f:\emptyset\xrightarrow[\text{onto}]{1:1}\chi\right)$$

が成立し，$\emptyset$ は ON の要素であるから

$$\exists\alpha\in\mathrm{ON}\,\exists f\left(f:\alpha\xrightarrow[\text{onto}]{1:1}\chi\right)$$

が従う．以上より

$$\chi=\emptyset\Longrightarrow\exists\alpha\in\mathrm{ON}\,\exists f\left(f:\alpha\xrightarrow[\text{onto}]{1:1}\chi\right)$$

が成り立つ．

第二段　$\chi\neq\emptyset$ の場合，

$$P\coloneqq\mathrm{P}(\chi)\backslash\{\chi\}$$

とおけば

$$\forall p\in P\,(\,\chi\backslash p\neq\emptyset\,)$$

が満たされるので，選択公理より

$$g:\mathrm{on}\,P\wedge\forall p\in P\,(\,g(p)\in\chi\backslash p\,)$$

を満たす写像 g が存在する．

$$G\coloneqq\{\,z\mid\exists s\,\left(\left(\mathrm{ran}(s)\in P\Longrightarrow z=(s,g(\mathrm{ran}(s)))\right)\wedge(\,\mathrm{ran}(s)\notin P\Longrightarrow z=(s,\emptyset)\,)\right)\}$$

で $\mathbf{V}$ 上の写像 G を定めれば

$$\forall\alpha\in\mathrm{ON}\,(\,F(\alpha)=G(F|_\alpha)\,)$$

を満たす類 F が存在して，G の定め方より

$$\alpha\in\mathrm{ON}\Longrightarrow F(\alpha)=\begin{cases}g(F*\alpha) & (F*\alpha\subsetneq\chi)\\ \emptyset & (F*\alpha=a\vee F*\alpha\not\subset\chi)\end{cases}$$

が成立する．

$$\forall\alpha\in\mathrm{ON}\,\left(F*\alpha\subsetneq\chi\Longrightarrow g(F*\alpha)\in\chi\right)$$

が満たさるので

$$F:\mathrm{ON}\longrightarrow\chi\cup\{\emptyset\}$$

が成立することに注意しておく．以下，適当な順序数 γ を選べば

$$F|_\gamma$$

が γ から χ への全単射となることを示す．

第三段　S を類とするとき

$$\mathrm{ord}\,(S) \wedge \forall \alpha \in S\ (\ F * \alpha \neq \chi\ ) \Longrightarrow \mathrm{set}\,(F * S) \wedge F|_S : S \xrightarrow[\text{onto}]{1:1} F * S \wedge \mathrm{set}\,(S) \tag{3.127}$$

が成り立つことを示す．いま

$$\mathrm{ord}\,(S) \wedge \forall \alpha \in S\ (\ F * \alpha \neq \chi\ )$$

が成り立っているとする．このとき

$$F(\emptyset) = g(\emptyset) \in \chi$$

が成立し，また α を任意の順序数とすれば，

$$\forall \beta \in \alpha\ \big(\ \beta \in S \Longrightarrow F(\beta) \in \chi\ \big)$$

が満たされているとき

$$\begin{aligned} \alpha \in S &\Longrightarrow \alpha \subset S \\ &\Longrightarrow \forall \beta \in \alpha\,(\ \beta \in S\ ) \\ &\Longrightarrow \forall \beta \in \alpha\,(\ F(\beta) \in \chi\ ) \\ &\Longrightarrow F * \alpha \subset \chi, \\ \alpha \in S &\Longrightarrow F * \alpha \neq \chi \end{aligned}$$

より

$$\alpha \in S \Longrightarrow F(\alpha) \in \chi$$

が成立する．よって超限帰納法より

$$\forall \alpha \in S\,(\ F(\alpha) \in \chi\ )$$

となる．従って

$$F * S \subset \chi$$

が得られる．そして χ は集合であるから

$$\mathrm{set}\,(F * S)$$

が出る．次に $F|_S$ が単射であることを示す．$\mathrm{ord}\,(S)$ から

$$S \subset \mathrm{ON}$$

が満たされるので，$\beta, \gamma \in S$ に対して $\beta \neq \gamma$ ならば

$$\beta \in \gamma \vee \gamma \in \beta$$

が成り立つ．$\beta \in \gamma$ の場合

$$F(\gamma) = g(F * \gamma) \in \chi \backslash (F * \gamma)$$

が成り立つので

$$F(\gamma) \notin F * \gamma$$

が従う．他方で

$$F(\beta) \in F * \gamma$$

が満たされるので

$$F(\gamma) \neq F(\beta)$$

が満たされる．よって

$$\beta \in \gamma \Longrightarrow F(\gamma) \neq F(\beta)$$

が成立する．β と γ を入れ替えれば

$$\gamma \in \beta \Longrightarrow F(\gamma) \neq F(\beta)$$

も得られるので，場合分け法則より

$$\beta \neq \gamma \Longrightarrow F(\gamma) \neq F(\beta)$$

が成り立つ．よって $F|_S$ は単射である．このとき

$$F|_S : S \xrightarrow[\text{onto}]{1:1} F * S$$

となり

$$S = F|_S{}^{-1}(F * S)$$

が成り立つので，置換公理より

$$\mathrm{set}\,(S)$$

が出る．

第四段　Burali-Forti の定理より

$$\rightharpoondown \mathrm{set}\,(\mathrm{ON})$$

が成り立つので，式 (3.127) の対偶から

$$\rightharpoondown \mathrm{ord}\,(\mathrm{ON}) \vee \exists \alpha \in \mathrm{ON}\ (\, F * \alpha = \chi\,)$$

が従う．一方で

$$\mathrm{ord}\,(\mathrm{ON})$$

は正しいので，選言三段論法より

$$\exists \alpha \in \mathrm{ON}\ (\, F * \alpha = \chi\,)$$

が成立する．γ を

$$F * \alpha = \chi$$

を満たす順序数 α のうちで最小のものとすれば，式 (3.127) より

$$F|_{\gamma} : \gamma \xrightarrow[\text{onto}]{1:1} \chi$$

が成り立つので，

$$\chi \neq \emptyset \Longrightarrow \exists \alpha \in \mathrm{ON}\, \exists f \left(f : \alpha \xrightarrow[\text{onto}]{1:1} \chi \right)$$

も得られた．場合分け法則より

$$\chi = \emptyset \vee \chi \neq \emptyset \Longrightarrow \exists \alpha \in \mathrm{ON}\, \exists f \left(f : \alpha \xrightarrow[\text{onto}]{1:1} \chi \right)$$

が成立し，排中律から

$$\exists f \left(f : \alpha \xrightarrow[\text{onto}]{1:1} \chi \right)$$

は真となる．そして χ の任意性より定理の主張が出る． ∎

整列定理によりいかなる集合の上にも整列順序が定められます．実際，a を集合として

$$g := \varepsilon f \left(f : \alpha \xrightarrow[\text{onto}]{1:1} a \right)$$

とおき，

$$R := \{\, x \mid \exists s, t \in a \ \left(g^{-1}(s) \subset g^{-1}(t) \wedge x = (s, t) \right) \}$$

で a 上の関係を定めれば，R は a 上の整列順序となります．まさしく ‘整列可能’ なのですね．

定義 3.18.3 (有限・可算・無限).

定理 3.18.4 (任意の無限集合は可算集合を含む).

$$\forall a \ \left(\exists \alpha \in \mathrm{ON} \backslash \omega \ (\alpha \approx a) \Longrightarrow \exists b \ (b \subset a \wedge \omega \approx b) \right).$$

定義 3.18.5 (対等). $\mathbf{V}$ 上の関係 $\approx$ を

$$\approx \overset{\text{def}}{=\!=} \{\, x \mid \exists s, t \left[x = (s, t) \wedge \exists f \left(f : s \xrightarrow[\text{onto}]{1:1} t \right) \right] \}$$

で定める．a と b を集合とするとき，

$$(a, b) \in \approx$$

なる式を “a と b は対等である **(equipotent)**” と翻訳し，中置記法によって

$$a \approx b$$

とも書く．

定理 3.18.6 (対等関係は同値関係).　$\approx$ は $\mathbf{V}$ 上の同値関係である．

定義 3.18.7 (濃度・基数).　集合 a に対して，a と対等な順序数のうち最小のものを対応させる関係を

$$\# \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{ x \mid \exists a \, \exists \alpha \in \mathrm{ON} \left[x = (a, \alpha) \land a \approx \alpha \land \forall \beta \in \mathrm{ON} \left(a \approx \beta \Longrightarrow \alpha \leq \beta \right) \right] \right\}$$

で定める．$\# a$ を a の**濃度 (cardinal)** と呼び，

$$\# \alpha = \alpha$$

を満たす順序数 α を**基数 (cardinal number)** と呼ぶ．また基数の全体を

$$\mathrm{CN} \overset{\text{def}}{=\!=} \{ \alpha \mid \alpha \in \mathrm{ON} \land \# \alpha = \alpha \}$$

とおく．

整列可能定理の結果より，全ての集合には濃度が定められるのですね．

定理 3.18.8 (順序数はその濃度より小さくない).

$$\forall \alpha \in \mathrm{ON} \, (\# \alpha \leq \alpha).$$

略証.　α 上の恒等写像は α から α への全単射であるから

$$\alpha \in \{ \beta \mid \beta \in \mathrm{ON} \land \beta \approx \alpha \}$$

が満たされる．従って

$$\# \alpha \leq \alpha$$

が成立する． ∎

定理 3.18.9 (濃度は基数).　次が成り立つ:

$$\forall a \, (\# a = \# \# a).$$

略証.　a を集合とする．まず定理 3.18.8 より

$$\# \# a \leq \# a$$

が満たされる．他方で

$$a \approx \# a \land \# a \approx \# \# a$$

が成り立っているので

$$a \approx \#\#a$$

が従い

$$\#a \leq \#\#a$$

も満たされる． ∎

定理 3.18.10 (CN は濃度の全体である).　次が成り立つ:

$$\mathrm{CN} = \{\, x \mid \exists a\ (\, x = \#a \,)\,\}.$$

略証.　α を CN の任意の要素とすれば

$$\alpha = \#\alpha$$

となるから，

$$\exists a\ (\, \alpha = \#a \,)$$

が満たされ

$$\alpha \in \{\, x \mid \exists a\ (\, x = \#a \,)\,\}$$

が従う．逆に α を $\{\, x \mid \exists a\ (\, x = \#a \,)\,\}$ の任意の要素とすれば，或る集合 a が存在して

$$\alpha = \#a$$

となる．このとき定理 3.18.9 より

$$\#a = \#\#a$$

が成り立つので

$$\exists \beta \in \mathrm{ON}\,(\, \#\beta = \beta \wedge \#a = \beta \,)$$

が満たされ

$$\alpha = \#a \in \mathrm{CN}$$

が従う． ∎

定理 3.18.11.　次が成り立つ:

$$\forall a\, \forall b\ (\, a \approx b \Longleftrightarrow \#a = \#b \,).$$

証明． $a \approx b$ が成り立っていると仮定する．このとき

$$\#a \approx a \wedge a \approx b$$

が成り立つので

$$\#a \approx b$$

が従い，

$$\#b \leq \#a$$

となる．a と b を入れ替えれば

$$\#a \leq \#b$$

も得られ，

$$\#a = \#b$$

が成立する．以上より

$$a \approx b \Longrightarrow \#a = \#b$$

が示された．逆に $\#a = \#b$ が成り立っていると仮定する．このとき

$$\begin{aligned} f_1 &:= \varepsilon f \left(f : a \xrightarrow[\text{onto}]{1:1} \#a \right), \\ f_2 &:= \{ x \mid \exists s \in \#a \, (x = (s, s)) \}, \\ f_3 &:= \varepsilon f \left(f : \#b \xrightarrow[\text{onto}]{1:1} b \right) \end{aligned}$$

とおけば f_1, f_2, f_3 はどれも全単射であるから，

$$g := (f_3 \circ f_2) \circ f_1$$

は a から b への全単射となる．よって $a \approx b$ が従い

$$\#a = \#b \Longrightarrow a \approx b$$

も示された． ∎

定理 3.18.12 (集合が大きい方が濃度も大きい).

$$\forall a \, \forall b \, (a \subset b \Longrightarrow \#a \leq \#b).$$

略証． a, b を集合として $a \subset b$ が成り立っていると仮定する．

$$\beta := \#b$$

とおいて

$$f : b \xrightarrow[\text{onto}]{1:1} \beta$$

なる f を取り

$$c \coloneqq f * a$$

とおけば，c の順序型である順序数 α と

$$g : \alpha \xrightarrow[\text{onto}]{1:1} c$$

および

$$\forall \zeta, \eta \in \alpha \ \big(\zeta < \eta \Longrightarrow g(\zeta) < g(\eta) \big)$$

を満たす g が取れる．このとき

$$\forall \zeta \in \alpha \ \big(\zeta \leq g(\zeta) \big)$$

が成り立つことが超限帰納法から示され，

$$\alpha \subset \beta$$

が従う．

$$\#a = \#c = \#\alpha \leq \alpha \leq \beta$$

から

$$\#a \leq \#b$$

が得られる． ∎

定理 3.18.13 (単射が存在すれば濃度は小さい).

$$\forall a \, \forall b \left(\exists f \left(f : a \xrightarrow{1:1} b \right) \Longrightarrow \#a \leq \#b \right)$$

略証.　f を集合 a から集合 b への単射とするとき，

$$a \approx f * a \subset b$$

より

$$\#a = \#(f * a) \leq \#b$$

が成り立つ． ∎

定理 3.18.14 (単射が存在すれば全射が存在し，全射が存在すれば単射が存在する).

$$\forall a \, \forall b \left[\exists f \left(f : a \xrightarrow{1:1} b \right) \Longleftrightarrow \exists g \left(g : b \xrightarrow{\text{onto}} a \right) \right].$$

略証.　a, b を集合とする．

$$\exists f \left(f : a \xrightarrow{1:1} b \right)$$

が成り立っているとき，

$$f \overset{\text{def}}{=\!=} \varepsilon f \left(f : a \xrightarrow{1:1} b \right)$$

とおいて，a の要素 a_0 を取り

$$g \overset{\text{def}}{=\!=} \{ x \mid \exists y \in b \left(y \in f * a \Longrightarrow x = (y, f^{-1}(y)) \wedge y \notin f * a \Longrightarrow x = (y, a_0) \right) \}$$

で g を定めれば，

$$g : b \xrightarrow{\text{onto}} a$$

が成立する．よって

$$\exists f \left(f : a \xrightarrow{1:1} b \right) \Longrightarrow \exists g \left(g : b \xrightarrow{\text{onto}} a \right)$$

が成り立つ．逆に

$$\exists g \left(g : b \xrightarrow{\text{onto}} a \right)$$

が成り立っているとき，

$$g \overset{\text{def}}{=\!=} \varepsilon g \left(g : b \xrightarrow{\text{onto}} a \right)$$

とおいて

$$h \overset{\text{def}}{=\!=} \{ t \mid \exists x \in a \left(t = (x, \{ y \mid y \in b \wedge x = g(y) \}) \right) \}$$

で h を定めれば，

$$h : \text{on}\, a$$

かつ

$$\forall x \in a \, (h(x) \neq \emptyset)$$

が成り立つので

$$f : \text{on}\, a \wedge \forall x \in a \, (f(x) \in h(x))$$

なる f が取れる．

$$f(x) = f(x') \Longrightarrow x = g(f(x)) = g(f(x')) = x'$$

が成り立つので f は単射である．従って

$$\exists g \left(g : b \xrightarrow{\text{onto}} a \right) \Longrightarrow \exists f \left(f : a \xrightarrow{1:1} b \right)$$

が成り立つ． ∎

定理 3.18.15 (全射が存在すれば濃度は大きい).

$$\forall a \, \forall b \left(\exists f \left(f : a \xrightarrow{\text{onto}} b \right) \Longrightarrow \#b \leq \#a \right).$$

証明． a, b を集合とするとき，

$$\exists f \left(f : a \xrightarrow{\text{onto}} b \right) \Longrightarrow \exists g \left(g : b \xrightarrow{1:1} a \right)$$

と

$$\exists g \left(g : b \xrightarrow{1:1} a \right) \Longrightarrow \#b \leq \#a$$

が成り立つので

$$\exists f \left(f : a \xrightarrow{\text{onto}} b \right) \Longrightarrow \#b \leq \#a$$

が成立する． ∎

定理 3.18.16 (対等な集合同士は冪も対等).

$$\forall a \, \forall b \, (a \approx b \Longrightarrow \mathrm{P}(a) \approx \mathrm{P}(b)).$$

略証． a, b を集合とし，$a \approx b$ が成り立っているとする．このとき

$$f : a \xrightarrow[\text{onto}]{1:1} b$$

なる集合 f を取り

$$g := \{ x \mid \exists s \in \mathrm{P}(a) \left(x = (s, f * s) \right) \}$$

で g を定めれば，

$$g : \mathrm{P}(a) \xrightarrow[\text{onto}]{1:1} \mathrm{P}(b)$$

が成立する．実際，x, y を $\mathrm{P}(a)$ の任意の要素とすれば

$$x = y \Longrightarrow f * x = f * y$$

となるので g は写像である．また

$$f * x = f * y$$

のとき

$$x = f^{-1} * \left(f * x\right) = f^{-1} * \left(f * y\right) = y$$

となるので g は単射である．そして z を $\mathrm{P}(b)$ の任意の要素とすれば，

$$w := f^{-1} * z$$

とおけば

$$f * w = z$$

となるので g は全射である．■

定理 3.18.17 (Cantor の定理).　いかなる集合もその冪集合の濃度は真に大きい:

$$\forall a\ (\#a < \#\mathrm{P}(a)).$$

略証.　a を集合とし，f を a から $\mathrm{P}(a)$ への写像とする．このとき

$$\mathrm{ran}(f) \neq \mathrm{P}(a) \tag{3.128}$$

が成り立つことを示す．

$$B \overset{\text{def}}{=\!=} \{\, x \mid x \in a \wedge x \notin f(x) \,\}$$

とおくと

$$\forall x \in a\ \left(B \neq f(x)\right)$$

が成立するので

$$B \notin \mathrm{ran}(f)$$

となる．他方で

$$B \in \mathrm{P}(a)$$

であるから (3.128) が従う．ゆえに a から $\mathrm{P}(a)$ への全射は存在しない．ゆえに a から $\mathrm{P}(a)$ への全単射は存在しない．ところで

$$g \overset{\text{def}}{=\!=} \{\, x \mid \exists t \in a\,(\,x = (t, \{t\})\,)\,\}$$

とおけば

$$g : a \xrightarrow{1:1} \mathrm{P}(a)$$

となり

$$\#a \leq \#\mathrm{P}(a)$$

が成り立つので，

$$\#a < \#\mathrm{P}(a)$$

が成立する． ∎

定理 3.18.18 (CN は集合でない).

$$\rightharpoondown \operatorname{set}(\mathrm{CN}).$$

略証.

$$S \subset \mathrm{ON} \wedge \operatorname{set}(S) \Longrightarrow \# \bigcup S \notin S$$

が成り立つことを示す．

定理 3.18.19 (自然数は基数).　次が成立する．

$$\mathbf{N} \subset \mathrm{CN}.$$

定理 3.18.20 (N は基数).　次が成立する．

$$\mathbf{N} \in \mathrm{CN}.$$

3.19　アレフ数

有限基数を抜いた基数の全体を

$$\mathrm{ICN} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{CN} \backslash \mathbf{N}$$

とおく．'I' を付けたのは，これが無限濃度の全体を表しているからである．ICN は ON の部分集合であるが，ON から ICN への順序同型写像を取ることが出来る．それは

$$\aleph$$

と書かれ，アレフ数と呼ばれる．

定義 3.19.1 (無限基数割り当て写像 $\aleph$).　$\mathbf{V}$ 上の写像 G を

$$G \overset{\text{def}}{=\!=} \{\, x \mid \exists s\, \exists \alpha \in \mathrm{ON}\, \left[\, x = (s, \alpha) \wedge \alpha \in \mathrm{ICN} \backslash \operatorname{ran}(s) \wedge \forall \beta \in \mathrm{ON}\, \left(\, \beta \in \mathrm{ICN} \backslash \operatorname{ran}(s) \Longrightarrow \beta \leq \alpha \,\right) \right] \}$$

で定めるとき，超限帰納法による写像の構成から

$$\forall \beta \in \mathrm{ON}\, \left(\aleph(\beta) = \mu\alpha\, (\, \alpha \in \mathrm{ICN} \backslash \aleph * \beta \,) \right)$$

を満たす ON 上の写像 $\aleph$ が取れる．α を順序数とするとき，

$$\aleph(\alpha)$$

のことを

$$\aleph_\alpha$$

と書く．

次の定理は異なる無限がいくらでも存在することを主張している．

定理 3.19.2 ($\aleph$ は ON と順序同型).　$\aleph$ は ON から ICN への順序同型となる．つまり

$$\aleph : \mathrm{ON} \xrightarrow[\text{onto}]{1:1} \mathrm{ICN} \wedge \forall \gamma, \delta \in \mathrm{ON}\, \left(\, \gamma < \delta \Longrightarrow \aleph_\gamma < \aleph_\delta \,\right).$$

略証.　いま γ, δ を ON の要素として

$$\gamma < \delta$$

であると仮定する．このとき

$$F * \gamma \subset F * \delta$$

かつ

$$F(\delta) \in \mathrm{ICN} \backslash F * \delta$$

が満たされるので

$$F(\delta) \in \mathrm{ICN} \backslash F * \gamma$$

が成立する．従って

$$F(\gamma) \leq F(\delta)$$

が成立する．一方で

$$F(\gamma) \in F * \delta \wedge F(\delta) \in \mathrm{ICN} \backslash F * \delta$$

から

$$F(\gamma) \neq F(\delta)$$

も満たされるので

$$F(\gamma) < F(\delta)$$

が従う．以上より

$$\forall \gamma, \delta \in \mathrm{ON}\,(\,\gamma < \delta \Longrightarrow F(\gamma) < F(\delta)\,)$$

が得られる．またこの結果より F が単射であることも従う．

定理 3.19.3.　α が極限数であるならば

$$\bigcup_{\beta \in \alpha} \aleph_\beta = \aleph_\alpha.$$

略証．　γ を

$$\mathbf{N} \leq \gamma < \aleph_\alpha$$

を満たす順序数とすると

$$\#\gamma = \aleph_\beta$$

を満たす α の要素 β が取れる．このとき

$$\#\gamma < \aleph_{\beta+1}$$

であるから

$$\gamma < \aleph_{\beta+1}$$

が成り立つ．なぜならば，任意の基数 δ に対して

$$\delta \leq \gamma \Longrightarrow \delta = \#\delta \leq \#\gamma$$

が成り立つからである．以上より

$$\gamma < \aleph_{\beta+1} < \aleph_\alpha$$

が従う．ゆえに

$$\bigcup_{\beta \in \alpha} \aleph_\beta = \aleph_\alpha$$

を得た． ∎

定理 3.19.4 (順序数がそのアレフ数を超えることはない).　任意の順序数 α に対して

$$\alpha \leq \aleph_\alpha.$$

略証.　超限帰納法により示す．まず

$$0 \leq \aleph_0.$$

次に α を 0 でない順序数とし，α の任意の要素 β に対して

$$\beta \leq \aleph_\beta$$

が成り立っているとする．

$$\alpha = \beta + 1$$

を満たす順序数 β が取れるとき，

$$\beta < \aleph_\alpha$$

より

$$\alpha = \beta + 1 \leq \aleph_\alpha$$

が従う．α が極限数であるとき，

$$\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha} \beta \leq \bigcup_{\beta\in\alpha} \aleph_\beta = \aleph_\alpha$$

が成立する．ゆえに超限帰納法より，任意の順序数 α に対して

$$\alpha \leq \aleph_\alpha$$

が成立する． ∎

定理 3.19.5 (無限順序数は後続数と濃度が等しい).

$$\forall \alpha \in \mathrm{ON}\,(\,\mathbf{N} \leq \alpha \;\rightarrow\; \#\alpha = \#(\alpha+1)\,).$$

略証.　$\alpha + 1$ から α への全単射を

$$\alpha + 1 \ni x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{if } x = \alpha, \\ x+1 & \text{if } x < \mathbf{N}, \\ x & \text{if } x \neq \alpha \wedge \mathbf{N} \leq x \end{cases}$$

によって定めることが出来るので

$$\#\alpha = \#(\alpha+1)$$

となる． ∎

定理 3.19.6 (無限基数は極限数).

$$\forall \alpha \in \mathrm{ON}\,\mathrm{lim.o}\,(\aleph_\alpha).$$

略証． β を $\aleph_\alpha$ の要素とすれば，

$$\beta < \mathbf{N}$$

ならば

$$\beta < \beta + 1 < \mathbf{N} \leq \aleph_\alpha$$

となる．他方で

$$\mathbf{N} \leq \beta$$

ならば

$$\beta + 1 \leq \aleph_\alpha$$

かつ

$$\#\beta = \#(\beta + 1) \leq \beta < \aleph_\alpha$$

となるので

$$\beta + 1 < \aleph_\alpha$$

となる．以上で

$$\forall \beta \in \aleph_\alpha \left(\beta + 1 < \aleph_\alpha \right)$$

が得られ

$$\mathrm{lim.o}\,(\aleph_\alpha)$$

が出る． ∎

3.20　極大原理

いま，P が集合で，O が P 上の順序関係であるとする．c が P の部分集合で

$$\forall x, y \in c \left((x, y) \in O \vee (y, x) \in O \right)$$

を満たすとき，つまり c のどの 2 要素も比較可能であるということだが，c を順序集合 (P, O) の鎖 **(chain)** と呼ぶ．ここで (P, O) の鎖の全体を

$$\mathscr{C}$$

とする．つまり $\mathscr{C}$ とは

$$\mathscr{C} \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \left\{ c \mid c \subset P \wedge \forall x, y \in c \left((x, y) \in O \vee (y, x) \in O \right) \right\}$$

で定められた集合である．$\mathscr{C}$ の要素 c で

$$\forall u \in \mathscr{C} \left(c \subset u \Longrightarrow c = u \right)$$

を満たすものを (P, O) の**極大鎖 (maximal chain)** と呼ぶ．つまり，c が (P, O) の極大鎖であるとは c を含む鎖が c の他に無いということである．

> **定理 3.20.1 (極大鎖は必ず存在する).** P を集合とし，O を P 上の順序関係とするとき，(P, O) の極大鎖を取ることが出来る．

P が空ならば O は当然空であるから (空虚な真により $\emptyset$ は P 上の順序関係である),

$$\mathscr{C} = \{\emptyset\}$$

が成り立つ．従って (P, O) の極大鎖は $\emptyset$ ということになる．以下では P は空でないとする．つまり P の要素 x が取れるわけだが,

$$\{x\}$$

はこれで一つの鎖をなすので $\mathscr{C}$ は空ではない．

略証.

第一段　始めに全体のあらすじを書いておく．$\mathscr{C}$ 上の写像 h を

$$\mathscr{C} \ni c \longmapsto \begin{cases} \{\, u \in \mathscr{C} \mid c \subset u \wedge c \neq u \,\} & \text{if } \exists u \in \mathscr{C} \, (\, c \subset u \wedge c \neq u \,) \\ \{c\} & \text{if } \forall u \in \mathscr{C} \, (\, \rightarrow c \subset u \vee c = u \,) \end{cases}$$

なる関係により定めると，定理 (3.17.7) より $\mathscr{C}$ 上の写像 f で，$\mathscr{C}$ の任意の要素 c に対して

$$\begin{cases} c \subset f(c) \wedge c \neq f(c) & \text{if } \exists u \in \mathscr{C} \, (\, c \subset u \wedge c \neq u \,) \\ c = f(c) & \text{if } \forall u \in \mathscr{C} \, (\, \rightarrow c \subset u \vee c = u \,) \end{cases}$$

を満たすものが取れる．ここで $\mathscr{C}$ から要素 c を選び，また $\mathbf{V}$ の上の写像 G を

$$x \longmapsto \begin{cases} c & \text{if } \operatorname{dom}(x) = \emptyset \\ f(x(\beta)) & \text{if } \beta \in \mathrm{ON} \wedge \operatorname{dom}(x) = \beta + 1 \wedge x(\beta) \in \mathscr{C} \\ \bigcup \operatorname{ran}(x) & \text{otherwise} \end{cases}$$

なる関係により定めると，ON 上の写像 F で

- $F(0) = c$
- 任意の順序数 α に対して，$F(\alpha) \in \mathscr{C}$ ならば $F(\alpha + 1) = f(F(\alpha))$
- α が極限数ならば $F(\alpha) = \bigcup_{\beta \in \alpha} F(\beta)$

を満たすものが取れる．以降はこの F をメインに考察する．
まず，次の第二段では，任意の順序数 α に対して $F(\alpha)$ が (P, O) の鎖であること，つまり

$$\forall \alpha \in \mathrm{ON} \, (\, F(\alpha) \in \mathscr{C} \,)$$

が成り立つことを示す．
第三段では，α を極限数としたときに，$F(\alpha)$ が極大鎖でないならば

$$\#\alpha \leq \#F(\alpha)$$

が成り立つことを示す．

第四段では，任意の順序数 β に対して，

$$\#\beta \leq \#F(\beta)$$

が満たされていてかつ $F(\beta)$ が極大鎖ではないときに

$$\#(\beta+1) \leq \#F(\beta+1)$$

が成り立つこと，つまり

$$\#\beta \leq \#F(\beta) \wedge \exists u \in \mathscr{C} \left(F(\beta) \subset u \wedge F(\beta) \neq u \right) \Longrightarrow \#(\beta+1) \leq \#F(\beta+1)$$

が成り立つことを示す．
以上を踏まえて，いま

$$\delta \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \#P$$

とおけば，定理 3.19.4 より

$$\#F(\aleph_{\delta+1}) \leq \#P = \delta < \aleph_{\delta+1}$$

が成り立つから，

$$\#F(\alpha) < \#\alpha$$

を満たす最小の順序数 α を取ることが出来る．

$$0 \leq \#F(0)$$

なので α は 0 ではない．α が極限数であるとき，第三段の対偶より $F(\alpha)$ は極大鎖である．α が極限数でないとき，つまり

$$\alpha = \beta + 1$$

を満たす順序数 β が取れるとき，α の取り方より

$$\#\beta \leq \#F(\beta)$$

が成り立つので，第四段の対偶と選言三段論法 (P. 147) より

$$\rightharpoondown \exists u \in \mathscr{C} \, (\, F(\beta) \subset u \wedge F(\beta) \neq u \,)$$

が従う．つまり $F(\beta)$ は (P, O) の極大鎖である．以上より，いずれの場合も極大鎖は取れる．

第二段　始めに

$$\forall \beta, \gamma \in \mathrm{ON} \left(\beta < \gamma \wedge \forall \delta \in \gamma \, (\, F(\delta) \in \mathscr{C} \,) \Longrightarrow F(\beta) \subset F(\gamma) \right)$$

が成り立つことを示す．これは，β を任意の順序数として

$$\forall \gamma \in \mathrm{ON} \left(\beta < \gamma \wedge \forall \delta \in \gamma \, (\, F(\delta) \in \mathscr{C} \,) \Longrightarrow F(\beta) \subset F(\gamma) \right)$$

が成り立つことを超限帰納法で示せばよい．

$$\gamma = 0$$

の場合は

$$\beta < \gamma \wedge \forall \delta \in \gamma\,(\,F(\delta) \in \mathscr{C}\,)$$

の仮定が偽になるので

$$\beta < \gamma \wedge \forall \delta \in \gamma\,(\,F(\delta) \in \mathscr{C}\,) \Longrightarrow F(\beta) \subset F(\gamma)$$

は成立する．次に γ を 0 でない順序数として，γ の任意の要素 ρ に対して

$$\beta < \rho \wedge \forall \delta \in \rho\,(\,F(\delta) \in \mathscr{C}\,) \Longrightarrow F(\beta) \subset F(\rho) \tag{3.129}$$

が成り立っているとし，この下で

$$\beta < \gamma \wedge \forall \delta \in \gamma\,(\,F(\delta) \in \mathscr{C}\,)$$

が満たされているとする．

$$\gamma = \rho + 1$$

を満たす順序数 ρ が取れるとき，

$$\beta = \rho$$

ならば

$$F(\beta) \subset f(F(\beta)) = F(\gamma)$$

が成り立ち，

$$\beta < \rho$$

ならば (3.129) より

$$F(\beta) \subset F(\rho) \subset f(F(\rho)) = F(\gamma)$$

が成り立つ．γ が極限数であるとき，

$$F(\beta) \subset \bigcup_{\delta \in \gamma} F(\delta) = F(\gamma)$$

が成り立つ．以上と超限帰納法より

$$\forall \gamma \in \mathrm{ON}\,\left(\beta < \gamma \wedge \forall \delta \in \gamma\,(\,F(\delta) \in \mathscr{C}\,) \Longrightarrow F(\beta) \subset F(\gamma)\right)$$

を得る．

では，任意の順序数 α に対して $F(\alpha)$ が鎖であることを超限帰納法により示す．まず

$$F(0) = c$$

なので

$$F(0) \in \mathscr{C}$$

が成り立つ．次に α を 0 でない任意の順序数として

$$\forall \beta \in \alpha \, (\, F(\beta) \in \mathscr{C} \,)$$

が満たされているとする．このとき

$$\alpha = \beta + 1$$

を満たす順序数 β が取れるならば

$$F(\alpha) = f(F(\beta))$$

が成り立つので $F(\alpha)$ は鎖である．α が極限数である場合，x と y を $F(\alpha)$ の任意の要素とすれば，

$$F(\alpha) = \bigcup_{\beta \in \alpha} F(\beta)$$

より

$$x \in F(\beta)$$

を満たす α の要素 β と

$$y \in F(\gamma)$$

を満たす α の要素 γ が取れて，

$$F(\beta) \subset F(\gamma)$$

または

$$F(\gamma) \subset F(\beta)$$

が成り立つが，いずれの場合も

$$(x, y) \in O \vee (y, x) \in O$$

が従う．つまりこの場合も $F(\alpha)$ は鎖である．よって超限帰納法より

$$\forall \alpha \in \mathrm{ON} \, (\, F(\alpha) \in \mathscr{C} \,)$$

が成立する．

第三段　α が極限数であるとし，$F(\alpha)$ が極大鎖でないとする．α の任意の要素 β に対して

$$F(\beta) \subset F(\alpha)$$

が成り立つので $F(\beta)$ もまた極大鎖ではなく，ゆえに

$$F(\beta) \subset F(\beta + 1) \wedge F(\beta) \neq F(\beta + 1)$$

が成立する．定理 (3.17.7) より α 上の写像 g で，α の任意の要素 β に対して

$$g(\beta) \in F(\beta + 1) \wedge g(\beta) \notin F(\beta)$$

を満たすものが取れる．この g は単射である．実際，α の二要素 β と γ に対して，

$$\beta < \gamma$$

ならば

$$F(\beta+1) \subset F(\gamma)$$

が成り立つが，

$$g(\beta) \in F(\beta+1)$$

かつ

$$g(\gamma) \notin F(\gamma)$$

が満たされているので

$$g(\beta) \neq g(\gamma)$$

が従う．α から $F(\alpha)$ への単射が得られたので

$$\#\alpha \leq \#F(\alpha)$$

が成立する．

第四段　いま β を順序数として

$$\#\beta \leq \#F(\beta)$$

が満たされていて，かつ $F(\beta)$ は極大鎖ではないとする．ここで β から $\#\beta$ への全単射を p とし，$\#F(\beta)$ から $F(\beta)$ への全単射を q とすると，$q \circ p$ は β から $F(\beta)$ への単射である．いま $F(\beta)$ は極大鎖ではないので

$$x \notin F(\beta) \wedge x \in F(\beta+1)$$

を満たす x が取れて，

$$g \overset{\mathrm{def}}{=\!=} (q \circ p) \cup \{(\beta, x)\}$$

と g を定めると，g は $\beta+1$ から $F(\beta+1)$ への単射となる．すなわち

$$\#(\beta+1) \leq \#F(\beta+1)$$

が成立する． ∎

3.21　共終数

順序数 α, β に対して，α から β への写像 f で

$$\forall \delta, \zeta \in \alpha \, (\, \delta < \zeta \;\rightarrow\; f(\delta) < f(\zeta)\,)$$

と

$$\forall \gamma \in \beta \, \exists \delta \in \alpha \, (\, \gamma < f(\delta) \,)$$

を満たすもの (**共終写像 (cofinal function)**) が存在することを

$$\mathrm{cof} \, (\alpha, \beta)$$

と書く．つまり

$$\begin{aligned} \mathrm{cof} \, (\alpha, \beta) \overset{\mathrm{def}}{\longleftrightarrow} \exists f \, (\, & f : \alpha \, \rightarrow \, \beta \\ & \wedge \forall \delta, \zeta \in \alpha \, (\, \delta < \zeta \, \rightarrow \, f(\delta) < f(\zeta) \,) \\ & \wedge \forall \gamma \in \beta \, \exists \delta \in \alpha \, (\, \gamma < f(\delta) \,) \,) \end{aligned}$$

である．また β に対して $\mathrm{cof} \, (\alpha, \beta)$ を満たす最小の順序数 α を

$$cf(\beta)$$

と書き，β の**共終数 (cofinality)** と呼ぶ.

定理 3.21.1 (共終の概念は極限数のみに使われる).

$$\forall \alpha, \beta \in \mathrm{ON} \, (\, \mathrm{cof} \, (\alpha, \beta) \, \rightarrow \, \mathrm{lim.o} \, (\beta) \,),$$
$$\forall \alpha, \beta \in \mathrm{ON} \, (\, \mathrm{cof} \, (\alpha, \beta) \, \rightarrow \, \mathrm{lim.o} \, (\alpha) \,)$$

略証.　$\mathrm{cof} \, (\alpha, \beta)$ であるとし，f を α から β への共終写像とする．β の任意の要素 γ に対して

$$\gamma < f(\delta) < \beta$$

なる α の要素 δ が取れるので，

$$\forall \gamma \in \beta \, (\, \gamma + 1 \neq \beta \,)$$

である．ゆえに β は極限数である．α の任意の要素 δ に対して

$$f(\delta) < f(\zeta)$$

なる α の要素 ζ が取れて，f の単調増大性より

$$\delta < \zeta$$

となるので，

$$\forall \delta \in \alpha \, (\, \delta + 1 \neq \alpha \,)$$

である．ゆえに α も極限数である． ∎

定理 3.21.2 (極限数は自分自身と共終).

$$\forall \alpha \in \mathrm{ON} \, (\, \mathrm{lim.o} \, (\alpha) \, \rightarrow \, \mathrm{cof} \, (\alpha, \alpha) \,)$$

略証.　α 上の恒等写像が共終写像となる.

定理 3.21.3 (共終数は基数である).

$$\forall \alpha \in \mathrm{ON}\,(\,\mathrm{lim.o}\,(\alpha) \;\longrightarrow\; cf(\alpha) \in \mathrm{CN}\,).$$

定義 3.21.4 (正則基数).　$cf(\alpha) = \alpha$ を満たす基数 α を正則基数 **(regular cardinal)** と呼ぶ．そうでない基数を特異基数 **(singular cardinal)** と呼ぶ.

定理 3.21.5 (N は正則である).

$$cf(\mathbf{N}) = \mathbf{N}.$$

略証.　$\mathrm{lim.o}\,(\mathbf{N})$ より

$$\mathrm{cof}\,(\mathbf{N}, \mathbf{N})$$

が成り立つので

$$cf(\mathbf{N}) \leq \mathbf{N}$$

となる．他方で

$$\mathrm{lim.o}\,(cf(\mathbf{N}))$$

より

$$\mathbf{N} \leq cf(\mathbf{N})$$

である. ∎

定理 3.21.6 (共終数は正則である).

$$\forall \alpha \in \mathrm{ON}\,(\,\mathrm{lim.o}\,(\alpha) \;\longrightarrow\; cf(cf(\alpha)) = cf(\alpha)\,).$$

略証.

$$\mathrm{cof}\,(cf(\alpha), cf(\alpha))$$

より

$$cf(cf(\alpha)) \leq cf(\alpha)$$

となる．また

$$\begin{aligned}&\operatorname{cof}(cf(cf(\alpha)), cf(\alpha)),\\&\operatorname{cof}(cf(\alpha), \alpha)\end{aligned}$$

より

$$\operatorname{cof}(cf(cf(\alpha)), \alpha)$$

が従い，

$$cf(cf(\alpha)) \leq cf(\alpha)$$

も得られる． ∎

第 4 章

イプシロン定理

4.1 言語

EC **EC**(Elementary calculus) の言語を $L(EC)$ と書く．$L(EC)$ の構成要素は

矛盾記号 $\perp$

論理記号 $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$

述語記号 $=, \in$

変項 $x_0, x_1, x_2, \cdots$

とする．変項は $L(EC)$ の項であって，また $L(EC)$ の項は変項だけである．$L(EC)$ の式は

- 項 s と式 t に対して $\in st$ と $= st$ は式である．
- 式 φ と式 ψ に対して $\neg\varphi, \vee\varphi\psi, \wedge\varphi\psi, \rightarrow\varphi\psi$ は式である．
- 以上のみが $L(EC)$ の式である．

PC **PC**(Predicate calculus) の言語を $L(PC)$ と書く．$L(PC)$ の構成要素は

矛盾記号 $\perp$

論理記号 $\neg, \vee, \wedge, \Longrightarrow$

量化子 $\forall, \exists$

述語記号 $=, \in$

変項 $x_0, x_1, x_2, \cdots$

とする．変項は $L(PC)$ の項であって，また $L(PC)$ の項は変項だけである．$L(PC)$ の式は

- 項 s と式 t に対して $\in st$ と $= st$ は式である．
- 式 φ と式 ψ に対して $\neg\varphi, \vee\varphi\psi, \wedge\varphi\psi, \rightarrow\varphi\psi$ は式である．
- 式 φ と変項 x に対して，$\forall x\varphi$ と $\exists x\varphi$ は式である．
- 以上のみが $L(PC)$ の式である．

$L(EC)$ と $L(PC)$ に ε 項を追加した言語をそれぞれ $L(EC_\varepsilon), L(PC_\varepsilon)$ とする．

EC$_\varepsilon$ 言語 $L(EC_\varepsilon)$ の構成要素は

矛盾記号 $\perp$

論理記号 $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$

述語記号 $=, \in$

変項 $x_0, x_1, x_2, \cdots$

ε 記号 ε

とする．$L(EC_\varepsilon)$ の項と式は

- 変項は項である．
- 項 s と式 t に対して $\in st$ と $= st$ は式である．
- 式 φ と式 ψ に対して $\neg\,\varphi, \vee\varphi\psi,\ \wedge\varphi\psi, \to\,\varphi\psi$ は式である．
- 式 φ と変項 x に対して，$\epsilon x\varphi$ は項である．
- 以上のみが $L(EC_\varepsilon)$ の項と式である．

PC$_\varepsilon$　言語 $L(PC_\varepsilon)$ の構成要素は

矛盾記号　$\perp$

論理記号　$\neg, \vee, \wedge, \Longrightarrow$

量化子　$\forall, \exists$

述語記号　$=, \in$

変項　$x_0, x_1, x_2, \cdots$

ε 記号　ε

とする．$L(PC_\varepsilon)$ の項と式は

- 変項は項である．
- 項 s と式 t に対して $\in st$ と $= st$ は式である．
- 式 φ と式 ψ に対して $\neg\,\varphi, \vee\varphi\psi,\ \wedge\varphi\psi, \to\,\varphi\psi$ は式である．
- 式 φ と変項 x に対して，$\forall x\varphi$ と $\exists x\varphi$ は式である．
- 式 φ と変項 x に対して，$\epsilon x\varphi$ は項である．
- 以上のみが $L(PC_\varepsilon)$ の項と式である．

4.2　証明

EC

EC の公理

φ と ψ と ξ を $L(EC)$ の式とするとき，次は **EC** の公理である．

(S)　$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$.

(K)　$\varphi \to (\psi \to \varphi)$.

(DI1)　$\varphi \to (\varphi \vee \psi)$.

(DI2)　$\psi \to (\varphi \vee \psi)$.

(DE)　$(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to ((\varphi \vee \psi) \to \chi))$.

(CI)　$\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$.

(CE1)　$(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$.

(CE2)　$(\varphi \wedge \psi) \to \psi$.

(CTI)　$\varphi \to (\neg\,\varphi \to \perp)$.

(NI)　$(\varphi \to \perp) \to \neg\,\varphi$.

(DNE)　$\neg\neg\,\varphi \to \varphi$.

Γ を公理系という場合は，Γ は $L(EC)$ の式の集合である．Γ が空である場合もある．$L(EC)$ の式 χ に対して Γ

から **EC** の証明が存在する (証明可能である) ことを

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{EC}} \chi$$

と書くが，**EC** における Γ から χ への証明とは，$L(EC)$ の式の列 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ であって，φ_n は χ であり，各 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ に対して

- φ_i は **EC** の公理である．
- φ_i は Γ の公理である．
- φ_i は前の式から推論規則を用いて得られる式である．**EC** の推論規則とは，
  三段論法　$j, k < i$ なる k, j が取れて，φ_k は $\varphi_j \to \varphi_i$ である．

が満たされているものである．

PC　φ をいずれかの言語の式とし，x を変項とする．φ に x が自由に現れているとき，φ に自由に現れている x を変項 t で置き換えた式を

$$\varphi(t/x)$$

とする．ただし t は $\varphi(t/x)$ で x に置き換わった位置で束縛されないとする．このことを t は φ の中で x への代入について自由であるとも言う．

PC の公理

φ と ψ と ξ を $L(PC)$ の式とし，x と t を変項とするとき，次は **PC** の公理である．

(S)　$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$.
(K)　$\varphi \to (\psi \to \varphi)$.
(DI1)　$\varphi \to (\varphi \lor \psi)$.
(DI2)　$\psi \to (\varphi \lor \psi)$.
(DE)　$(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to ((\varphi \lor \psi) \to \chi))$.
(CI)　$\varphi \to (\psi \to (\varphi \land \psi))$.
(CE1)　$(\varphi \land \psi) \to \varphi$.
(CE2)　$(\varphi \land \psi) \to \psi$.
(UE)　$\forall x \varphi \to \varphi(t/x)$.
　ただし，φ には x が自由に現れて，t は φ の中で x への代入について自由である．
(EI)　$\varphi(t/x) \to \exists x \varphi$.
　ただし，φ には x が自由に現れて，t は φ の中で x への代入について自由である．
(CTI)　$\varphi \to (\rightharpoondown \varphi \to \bot)$.
(NI)　$(\varphi \to \bot) \to \rightharpoondown \varphi$.
(DNE)　$\rightharpoondown\rightharpoondown \varphi \to \varphi$.

Γ を公理系という場合は，Γ は $L(PC)$ の文の集合である．Γ が空である場合もある．$L(PC)$ の式 χ に対して Γ から **PC** の証明が存在する (証明可能である) ことを

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{PC}} \chi$$

と書くが，**PC** における Γ から χ への証明とは，$L(PC)$ の式の列 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ であって，φ_n は χ であり，各 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ に対して

- φ_i は **PC** の公理である．

- φ_i は Γ の公理である．
- φ_i は前の式から推論規則を用いて得られる式である．**PC** の推論規則とは，

  三段論法　$j,k < i$ なる k,j が取れて，φ_k は $\varphi_j \to \varphi_i$ である．

  存在汎化　$j < i$ なる j が取れて，φ_j は $\varphi(t/x) \to \psi$ なる式であって，φ_i は $\exists x\varphi \to \psi$ なる式である．

  ただし，φ には x が自由に現れ，t は φ の中で x への代入について自由である．また t は φ と ψ には自由に現れない．

  全称汎化　$j < i$ なる j が取れて，φ_j は $\psi \to \varphi(t/x)$ なる式であって，φ_i は $\psi \to \forall x\varphi$ なる式である．

  ただし，φ には x が自由に現れ，t は φ の中で x への代入について自由である．また t は φ と ψ には自由に現れない．

が満たされているものである．

主要論理式　$\mathbf{EC}_\varepsilon$ と $\mathbf{PC}_\varepsilon$ の公理には

$$\varphi(x/\tau) \to \varphi(x/\varepsilon x\varphi)$$

なる形の式が追加される．ただし x は φ に自由に現れて，τ は項である．この形の式を**主要論理式 (principal formula)** と呼ぶ．

$\mathbf{EC}_\varepsilon$　ε 項 $\varphi x\varphi$ において，x は束縛されている．また t を φ に自由に現れる変項とするとき，t は $\varphi x\varphi$ にも自由に現れていると言う．

$\mathbf{EC}_\varepsilon$ の公理

φ と ψ と ξ を $L(EC_\varepsilon)$ の式とするとき，次は $\mathbf{EC}_\varepsilon$ の公理である．

(S)　$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$.

(K)　$\varphi \to (\psi \to \varphi)$.

(DI1)　$\varphi \to (\varphi \lor \psi)$.

(DI2)　$\psi \to (\varphi \lor \psi)$.

(DE)　$(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to ((\varphi \lor \psi) \to \chi))$.

(CI)　$\varphi \to (\psi \to (\varphi \land \psi))$.

(CE1)　$(\varphi \land \psi) \to \varphi$.

(CE2)　$(\varphi \land \psi) \to \psi$.

(CTI)　$\varphi \to (\neg\, \varphi \to \bot)$.

(NI)　$(\varphi \to \bot) \to \neg\, \varphi$.

(DNE)　$\neg\neg\, \varphi \to \varphi$.

(PF)　$\varphi(\tau/x) \to \varphi(\varepsilon x\varphi/x)$.

ただし，φ には x が自由に現れて，τ は項である．

Γ を公理系とする．$L(EC_\varepsilon)$ の式 χ に対して Γ から $\mathbf{EC}_\varepsilon$ の証明が存在する (証明可能である) ことを

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{EC}_\varepsilon} \chi$$

と書くが，$\mathbf{EC}_\varepsilon$ における Γ から χ への証明とは，$L(EC_\varepsilon)$ の式の列 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ であって，φ_n は χ であり，各 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ に対して

- φ_i は $\mathbf{EC}_\varepsilon$ の公理である．
- φ_i は Γ の公理である．
- φ_i は前の式から推論規則を用いて得られる式である．$\mathbf{EC}_\varepsilon$ の推論規則とは，

三段論法　$j,k<i$ なる k,j が取れて，φ_k は $\varphi_j \to \varphi_i$ である．

が満たされているものである．

PC$_\varepsilon$

PC$_\varepsilon$ の公理

φ と ψ と ξ を $L(PC_\varepsilon)$ の式とし，x と t を変項とするとき，次は **PC**$_\varepsilon$ の公理である．

(S)　$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$.

(K)　$\varphi \to (\psi \to \varphi)$.

(DI1)　$\varphi \to (\varphi \lor \psi)$.

(DI2)　$\psi \to (\varphi \lor \psi)$.

(DE)　$(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to ((\varphi \lor \psi) \to \chi))$.

(CI)　$\varphi \to (\psi \to (\varphi \land \psi))$.

(CE1)　$(\varphi \land \psi) \to \varphi$.

(CE2)　$(\varphi \land \psi) \to \psi$.

(UE)　$\forall x\varphi \to \varphi(\tau/x)$.

ただし，φ には x が自由に現れて，t は φ の中で x への代入について自由である．

(EI)　$\varphi(\tau/x) \to \exists x\varphi$.

ただし，φ には x が自由に現れて，t は φ の中で x への代入について自由である．

(CTI)　$\varphi \to (\neg\, \varphi \to \bot)$.

(NI)　$(\varphi \to \bot) \to \neg\, \varphi$.

(DNE)　$\neg\neg\, \varphi \to \varphi$.

(PF)　$\varphi(t/x) \to \varphi(\varepsilon x\varphi/x)$.

ただし，φ には x が自由に現れて，t は φ の中で x への代入について自由である．

Γ を公理系とする．$L(PC_\varepsilon)$ の式 χ に対して Γ から **PC**$_\varepsilon$ の証明が存在する (証明可能である) ことを

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{PC}_\varepsilon} \chi$$

と書くが，**PC**$_\varepsilon$ における Γ から χ への証明とは，$L(PC_\varepsilon)$ の式の列 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ であって，φ_n は χ であり，各 $i \in \{1,2,\cdots,n\}$ に対して

- φ_i は **PC**$_\varepsilon$ の公理である．
- φ_i は Γ の公理である．
- φ_i は前の式から推論規則を用いて得られる式である．**PC**$_\varepsilon$ の推論規則とは，

  三段論法　$j,k<i$ なる k,j が取れて，φ_k は $\varphi_j \to \varphi_i$ である．

  存在汎化　$j<i$ なる j が取れて，φ_j は $\varphi(t/x) \to \psi$ なる式であって，φ_i は $\exists x\varphi \to \psi$ なる式である．

  ただし，φ には x が自由に現れ，t は φ の中で x への代入について自由である．また t は φ と ψ には自由に現れない．

  全称汎化　$j<i$ なる j が取れて，φ_j は $\psi \to \varphi(t/x)$ なる式であって，φ_i は $\psi \to \forall x\varphi$ なる式である．

  ただし，φ には x が自由に現れ，t は φ の中で x への代入について自由である．また t は φ と ψ には自由に現れない．

が満たされているものである．

4.3　第一イプシロン定理メモ

4.3.1　埋め込み定理

A を $L(PC_\varepsilon)$ の式とするとき，A を $L(EC_\varepsilon)$ の式に書き換える．

$$
\begin{aligned}
&x^\varepsilon \text{は}\ x \\
&(\in \tau\sigma)^\varepsilon \text{は} \in \tau^\varepsilon \sigma^\varepsilon \\
&(= \tau\sigma)^\varepsilon \text{は} = \tau^\varepsilon \sigma^\varepsilon \\
&(\neg\ \varphi)^\varepsilon \text{は} \neg\ \varphi^\varepsilon \\
&(\vee\varphi\psi)^\varepsilon \text{は} \vee\ \varphi^\varepsilon \psi^\varepsilon \\
&(\wedge\varphi\psi)^\varepsilon \text{は} \wedge\ \varphi^\varepsilon \psi^\varepsilon \\
&(\rightarrow \varphi\psi)^\varepsilon \text{は} \rightarrow \varphi^\varepsilon \psi^\varepsilon \\
&(\exists x\varphi)^\varepsilon \text{は} \varphi^\varepsilon(\varepsilon x \varphi^\varepsilon) \\
&(\forall x\varphi)^\varepsilon \text{は} \varphi^\varepsilon(\varepsilon x \neg\ \varphi^\varepsilon) \\
&(\varepsilon x\psi)^\varepsilon \text{は} \varepsilon x \varphi^\varepsilon
\end{aligned}
$$

A が $L(PC_\varepsilon)$ の式で，x が A に自由に現れて，かつ A に自由に現れているのが x のみであるとき，A^ε にも x が自由に現れて，かつ A^ε に自由に現れているのは x のみである．

メタ定理 4.3.1 (埋め込み定理).　A を $L(PC_\varepsilon)$ の文とし，$\vdash_{\mathbf{PC}_\varepsilon} A$ であるとする．このとき $\vdash_{\mathbf{EC}_\varepsilon} A^\varepsilon$ である．

4.3.2　階数

$B(x,y,z)$ を，変項 x,y,z が，そしてこれらのみが自由に現れる $L(EC)$ の式とする．このとき

$$\exists x\, \exists y\, \exists z\, B(x,y,z) \tag{4.1}$$

に対して，z から順に ε 項に変換していくと

$$\exists x\, \exists y\, B(x,y,\varepsilon z B(x,y,z)), \tag{4.2}$$
$$\exists x\ B(x,\varepsilon y B(x,y,\varepsilon z B(x,y,z)),\varepsilon z B(x,\varepsilon y B(x,y,\varepsilon z B(x,y,z)),z)) \tag{4.3}$$

となるが，最後に $\exists x$ を無くすと式が長くなりすぎるので一旦止めておく．さて z に注目すれば，B に自由に現れていた z はまず

$$\varepsilon z B(x,y,z)$$

に置き換えられる (4.2)．この時点では x と y は自由なままであるから，この ε 項を

$$e_1[x,y]$$

と略記する．次に y は

$$\varepsilon y B(x,y,\varepsilon z B(x,y,z))$$

に置き換えられる (4.3) が，$e_1[x,y]$ を使えば

$$\varepsilon y B(x, y, e_1[x,y])$$

と書ける．この ε 項でも x は自由なままであるから

$$e_2[x]$$

と略記する．e_1 と e_2 を用いれば (4.3) の式は

$$\exists x\, B\,(x, e_2[x], e_1[x, e_2[x]])$$

と見やすく書き直せる．残る ∃ を除去するには x を

$$\varepsilon x B\,(x, e_2[x], e_1[x, e_2[x]])$$

に置き換えれば良い．この ε 項を e_3 と書く．以上で (4.1) の式は $\mathcal{L}(\mathrm{EC}_\varepsilon)$ の式

$$B\,(e_3, e_2[e_3], e_1[e_3, e_2[e_3]])$$

に変換されたわけである．それはさておき，ここで考察するのは**項間の主従関係**である．$e_2[x]$ は x のみによってコントロールされているのだから，x を司る e_3 を親分だと思えば $e_2[x]$ は e_3 の直属の子分である．$e_1[x,y]$ は y によってもコントロールされているので，$e_1[x,y]$ とは $e_2[x]$ の子分であり，すなわち e_3 の子分の子分であって，この例において一番身分が低いわけである．

ε 項を構文解析して，それが何重の子分を従えているかを測った指標を**階数 (rank)** と呼ぶ．とはいえ直属の子分が複数いることもあり得るので，子分の子分の子分の子分…と次々に枝分かれしていく従属関係の中で，最も深いものを辿って階数を定めることにする．

メタ定義 4.3.2 (従属).　$\varepsilon x A$ を $\mathcal{L}(\mathrm{EC}_\varepsilon)$ の ε 項とし，e を A に現れる $\mathcal{L}(\mathrm{EC}_\varepsilon)$ の ε 項とするとき，x が e に自由に現れているなら e は $\varepsilon x A$ **に従属している (subordinate to** $\varepsilon x A$**)** という．

はじめの例では，$e_2[x]$ と $e_1[x, e_2[x]]$ は共に e_3 に従属しているし，$e_1[x,y]$ は $e_2[x]$ に従属している．$e_1[x, e_2[x]]$ に従属している ε 項は無いし，$e_1[x,y]$ に従属している ε 項も無い．

メタ定義 4.3.3 (階数).　e を $\mathcal{L}(\mathrm{EC}_\varepsilon)$ の ε 項とするとき，e の**階数 (rank)** を以下の要領で定義する．

1. e に従属する ε 項が無いならば，e の階数を 1 とする．
2. e に従属する ε 項があるならば，e に従属する ε 項の階数の最大値に 1 を足したものを e の階数とする．

また e の階数を $rk(e)$ と書く．

メタ定理 4.3.4 (階数定理).　e を $\mathcal{L}(\mathrm{EC}_\varepsilon)$ の ε 項とし，s と t を $\mathcal{L}(\mathrm{EC}_\varepsilon)$ の項とし，e の中で束縛されている変項はどれも s, t の中に自由に現れないとする．このとき，e に現れる s の一つを t に置き換えた式を e^t とすれば

$$rk(e) = rk(e^t)$$

が成り立つ．e に s が現れなければ e^t は e とする．

メタ証明.

step1　e の中に ε 項 u が現れているとして，u に (もし現れているなら) 現れる s が t に置き換わった項を u^t と書く．
u が e に従属していないとき，u^t は e に従属しない．実際，e を

$$\varepsilon xA$$

なる ε 項だとして，x は t に自由に現れないので u^t にも x は自由に現れない．
u が e に従属している場合，u^t の階数は u^t に従属する ε 項によって定まるのだから，u^t の階数がどうなるかは u に従属する ε 項の階数が置換によって変動するか否かにかかっている．
u に従属する ε 項の階数についても，それに従属する ε 項の階数が置換によって変動するか否かで決まる．
従属する ε 項を辿っていけば，いずれは従属する ε 項を持たない ε 項に行きつくのであるから，e には従属する ε 項が現れないとして e と e^t の階数が等しいことを示せば良い．それは次段で示す．

step2　e に従属する ε 項が無ければ，e^t に従属する ε 項も無い．なぜならば，s にも t にも x は自由に現れていないのであり，仮に e に現れる ε 項の中に s があったとしても，それが t へ置き換わったところで e には従属しないからである． ∎

$\varepsilon xA(x)$ と $\varepsilon yA(y)$ のランクは同じ？

メタ定理 4.3.5 (置換定理).　π を $L(EC_\varepsilon)$ の証明とし，e を，π の主要 ε 項の中で階数が最大であって，かつ階数が最大の π の主要 ε 項の中で極大であるものとする．また $B(y/s) \rightarrow B(y/\varepsilon yB)$ を π の主要論理式とし，e と εyB は別物であるとする．そして，$B(y/s) \rightarrow B(y/\varepsilon yB)$ に現れる e を全て項 t に置き換えた式を C とする．このとき，

(1)　C は主要論理式である．C に属する ε 項を e' と書く．
(2)　$rk(\varepsilon yB) = rk(e')$ が成り立つ．
(3)　$rk(\varepsilon yB) = rk(e)$ ならば εyB と e' は一致する．

(2) が言っているのは ε 項の階数は置換の前後で変わらないということであり，(3) が言っているのは，階数が最大である (今の場合は $rk(e)$ に等しい)ε 項は増えないということである．

メタ証明.

step1　y から代わった s (或いは εyB) の少なくとも一つを部分項として含む形で e が $B(y/s)$ (或いは $B(y/\varepsilon yB)$) に出現しているとする．
実はこれは起こり得ない．もし起きたとすると，e に現れる s (或いは εyB) を元の y に戻した項を e^y とすれば，e^y には y が自由に現れるので (そうでないと y は s (或いは εyB) に置き換えられない)，e^y は y とは別の変項 x と式 A によって

$$\varepsilon xA$$

なる形をしている．e^y は εyB に従属していることになり[*1]，階数定理と併せて

$$rk(e) = rk(e^y) < rk(\varepsilon yB)$$

が成り立ってしまう．しかしこれは $rk(e)$ が最大であることに矛盾する．

[*1] e^y が ε 項であって B に現れることの証明.

step2　$rk(\varepsilon yB) = rk(\pi)$ ならば B に e は現れない．なぜならば，e は階数が $rk(\pi)$ である π の主要 ε 項の中で極大であるからである．εyB にも e は現れず，前段の結果より $B(y/\varepsilon yB)$ に e が現れることもない．ゆえに，s に (もし現れるなら) 現れる e を t に置換した項を s' とすれば，C は

$$B(y/s') \ \to \ B(y/\varepsilon yB)$$

となる．

step3　$rk(\varepsilon yB) < rk(\pi)$ である場合

$$rk(\varepsilon yB) = rk(e')$$

が成り立つことを示す．B に e が現れないならば e' は εyB に一致する．B に e が現れる場合，B に現れる e を t に置き換えた式を B' とする．このとき階数定理より

$$rk(\varepsilon yB) = rk(\varepsilon yB')$$

となる．また $B(y/s)$ に現れる e を t に置き換えた式は，$B(y/s)$ において y から置き換えられた s を跨ぐようには e は現れないので

$$B'(y/s')$$

となり，同様に $B(y/\varepsilon yB)$ に現れる e を t に置き換えた式は

$$B'(y/\varepsilon yB')$$

となる．すなわち C は

$$B'(y/s') \ \to \ B'(y/\varepsilon yB')$$

なる主要論理式である． ∎

4.3.3　アイデア

主要論理式

$$A(t/x) \to A(\varepsilon xA/x)$$

において，εxA は $A(t/x) \to A(\varepsilon xA/x)$ に**属している**と言うことにする．

EC_ε の式の列 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ を π と書くとき，$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ の中で主要論理式である式を **π の主要論理式**や **π に現れる主要論理式**と呼ぶことにする．また π の主要論理式に属している ε 項を **π の主要 ε 項**と呼ぶことにする．また，π の主要 ε 項の階数の最大値を **π の階数**と呼ぶことにする．

メタ定理 4.3.6 (第一イプシロン定理).　B を $L(EC)$ の式とし，$\vdash_{\mathbf{EC}_\varepsilon} B$ とする．このとき $\vdash_{\mathbf{EC}} B$ である．

第一イプシロン定理の証明の流れ

- B への証明 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ を π とする．
- e を，π の主要 ε 項のうち階数が最大であって，かつその階数を持つ π の主要 ε 項の中で極大である (他の ε 項の部分項ではない) ものとする．
- e が属する π の主要論理式の一つ $A(t/x) \rightarrow A(e/x)$ を取る (つまりこのとき e は $\varepsilon x A$ なる ε 項).
- $A(t/x) \rightarrow A(e/x)$ を用いずに **EC** から B への証明 π' を構成する．このとき以下が満たされる．
    1. $A(t/x) \rightarrow A(e/x)$ なる主要論理式は排除される．
    2. π に $A(u/x) \rightarrow A(e/x)$ なる主要論理式があれば，この式は π' にも残っている．ただし π' に現れる主要論理式のうち，e が属するものは他に無い．つまり，**e が属する主要論理式は $A(t/x) \rightarrow A(e/x)$ の分だけ減る．**
    3. π' に現れる主要論理式の本数は増加するかもしれないが，**e と同じ階数の主要 ε 項の個数は増えない．**
- 従って，まずは e が属する主要論理式から一本ずつ排除できる．e が属する主要論理式が全て証明から排除されたら，次は別の最高階数の ε 項を一つ選んでそれが属する主要論理式を一本ずつ排除していく．この段取りで，証明の階数を落としながら，最後には主要論理式が現れない証明が得られる．
- 最後に得られた証明に現れる式は，いずれも主要論理式以外の $\mathbf{EC}_\varepsilon$ の定理であるから，項を取り替えても $\mathbf{EC}_\varepsilon$ の定理のままである．証明に残っている ε 項を全て **EC** の項に置き換えれば **EC** からの B への証明が得られる．

以下では，上のフローのうち $A(t/x) \rightarrow A(e/x)$ を排除するところの詳細を書く．はじめに大まかに言えば，まず $\rightharpoondown A(t/x) \rightarrow B$ と $A(t/x) \rightarrow B$ の証明を構成し，それから排中律と $A(t/x) \vee \rightharpoondown A(t/x) \rightarrow B$ に訴えて B への証明を得るという寸法である．

$\rightharpoondown A(t/x) \rightarrow B$ の証明を構成する　φ_i が $A(t/x) \rightarrow A(e/x)$ でない $\mathbf{EC}_\varepsilon$ の公理ならば，φ_i と φ_{i+1} の間に

$$\varphi_i \rightarrow (\rightharpoondown A(t/x) \rightarrow \varphi_i),$$
$$\rightharpoondown A(t/x) \rightarrow \varphi_i$$

を挿入する (この時点で，$A(t/x) \rightarrow A(e/x)$ でない主要論理式は無傷のまま残ることが判る)．φ_i が φ_j と $\varphi_k \equiv \varphi_j \rightarrow \varphi_i$ から三段論法で得られる場合は，φ_i を

$$(\rightharpoondown A(t/x) \rightarrow (\varphi_j \rightarrow \varphi_i)) \rightarrow [(\rightharpoondown A(t/x) \rightarrow \varphi_j) \rightarrow (\rightharpoondown A(t/x) \rightarrow \varphi_i)],$$
$$(\rightharpoondown A(t/x) \rightarrow \varphi_j) \rightarrow (\rightharpoondown A(t/x) \rightarrow \varphi_i),$$
$$\rightharpoondown A(t/x) \rightarrow \varphi_i$$

で置き換える．φ_i が $A(t/x) \rightarrow A(e/x)$ であるときは，φ_i を

$$\rightharpoondown A(t/x) \rightarrow (A(t/x) \rightarrow A(e/x))$$

で置き換える．

$A(t/x) \rightarrow B$ の証明の構成　$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ に現れる e を (e が部分項として現れる場合も)t に置き換えた式を

$$\tilde{\varphi}_1,\ \tilde{\varphi}_2, \cdots, \tilde{\varphi}_n$$

と書く．このとき，任意の $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ で

1. φ_i が主要論理式でない $\mathbf{EC}_\varepsilon$ の定理なら $\tilde{\varphi}_i$ も主要論理式でない $\mathbf{EC}_\varepsilon$ の定理である．
2. φ_i が $A(u/x) \rightarrow A(e/x)$ なる形の主要論理式ならば，$\tilde{\varphi}_i$ は $A(v/x) \rightarrow A(t/x)$ の形の式である．ただし v とは，u に e が現れていたらそれを t に置き換えた項である[*2]．

3. φ_i が主要論理式で，e が属していないならば，$\tilde{\varphi}_i$ も主要論理式である (置換定理).

[*3]

φ_i が $A(t/x) \to A(e/x)$ でない EC_ε の公理ならば，$\tilde{\varphi}_i$ と $\tilde{\varphi}_{i+1}$ の間に

$$\tilde{\varphi}_i \to \left(A(t/x) \to \tilde{\varphi}_i\right),$$
$$A(t/x) \to \tilde{\varphi}_i$$

を挿入する．φ_i が φ_j と $\varphi_k \equiv \varphi_j \to \varphi_i$ からモーダスポンネスで得られる場合は，$\tilde{\varphi}_i$ を

$$\left(A(t/x) \to \left(\tilde{\varphi}_j \to \tilde{\varphi}_i\right)\right) \to \left[\left(A(t/x) \to \tilde{\varphi}_j\right) \to \left(A(t/x) \to \tilde{\varphi}_i\right)\right],$$
$$\left(A(t/x) \to \tilde{\varphi}_j\right) \to \left(A(t/x) \to \tilde{\varphi}_i\right),$$
$$A(t) \to \tilde{\varphi}_i$$

で置き換える．φ_i が e が属する主要論理式 $A(u/x) \to A(e/x)$ であるときは，$\tilde{\varphi}_i$ とは

$$A(v/x) \to A(t/x)$$

なる形の式であるが，$\tilde{\varphi}_i$ を

$$A(t/x) \to (A(v/x) \to A(t/x))$$

で置き換える．

B への証明の構成　以上で $A(t/x) \to B$ と $\neg A(t/x) \to B$ に対して $A(t/x) \to A(e/x)$ を用いない $\mathbf{EC}_\varepsilon$ の証明が得られた．後はこれに

$$(A(t/x) \to B) \to [(\neg A(t/x) \to B) \to (A(t/x) \vee \neg A(t/x) \to B)]$$

への証明を追加し (これは $(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi \to \chi))$ の形の $\mathbf{EC}_\varepsilon$ の定理である)，

$$(\neg A(t/x) \to B) \to (A(t/x) \vee \neg A(t/x) \to B),$$
$$A(t/x) \vee \neg A(t/x) \to B,$$
$$A(t) \vee \neg A(t),$$
$$B$$

を追加すれば，$A(t/x) \to A(e/x)$ を用いない B への $\mathbf{EC}_\varepsilon$ の証明となる． ∎

4.4　第二イプシロン定理

$\exists x \forall y \exists z B(x, y, z)$ を $L(PC)$ の冠頭標準形 (つまり $B(x, y, z)$ は $L(EC)$ の式である) とし，B に自由に現れる変項は x, y, z のみであるとする．また

$$\vdash_{\mathbf{PC}_\varepsilon} \exists x \forall y \exists z B(x, y, z)$$

[*2] x を A に現れている自由な変項とすれば，e とは $\varepsilon x A$ のことであるし，$A(\varepsilon x A/x)$ とは A に自由に現れる x を $\varepsilon x A$ に置換した式である．A には $\varepsilon x A$ は現れていないので (A に $\varepsilon x A$ が収まるはずはない)，$A(e/x)$ に現れる e を t に変換した式は $A(t/x)$ になる．同様に，$A(u/x)$ に e が現れるとすれば，その e は u の部分項でしかありえない．すなわち，$A(u/x)$ に現れる e を t で置換した式は，v を u に現れる e を t に変換した項として $A(v/x)$ となるわけである．

[*3] φ_i が e が属する主要論理式ならば，φ_i は $A(u/x) \to A(e/x)$ なる式である．実際，φ_i に属する ε 項を $\varepsilon y B$ とすれば，$\varepsilon x A$ と $\varepsilon y B$ は記号列として一致するので，x と y は一致するし，式 A と式 B も一致する．

であるとする．

f を $L(PC)$ には無い一変数関数記号とし，

$$
\begin{aligned}
L'(PC) &\stackrel{\text{def}}{=} L(PC) \cup \{f\}, \\
L'(EC) &\stackrel{\text{def}}{=} L(EC) \cup \{f\}, \\
L'(PC_\varepsilon) &\stackrel{\text{def}}{=} L(PC_\varepsilon) \cup \{f\}, \\
L'(EC_\varepsilon) &\stackrel{\text{def}}{=} L(EC_\varepsilon) \cup \{f\}
\end{aligned}
$$

とする．そして，$L'(PC_\varepsilon)$ の式を用いた証明 (公理と推論規則は **PC** のもの) が存在することを

$$\vdash_{\mathbf{PC'}_\varepsilon}$$

と書く (同様に $\vdash_{\mathbf{EC'}}, \vdash_{\mathbf{EC'}_\varepsilon}, \vdash_{\mathbf{PC'}}$ を使う．)．このとき，$\mathbf{PC}_\varepsilon$ の証明は $\mathbf{PC'}_\varepsilon$ の証明でもあるから

$$\vdash_{\mathbf{PC'}_\varepsilon} \exists x \forall y \exists z B(x,y,z)$$

である．また

$$
\begin{aligned}
&\vdash_{\mathbf{PC'}_\varepsilon} \exists x \forall y \exists z B(x,y,z), \\
&\vdash_{\mathbf{PC'}_\varepsilon} \exists x \forall y \exists z B(x,y,z) \to \forall y \exists z B(\tau,y,z), \qquad (\tau \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon x \forall y \exists z B(x,y,z)) \\
&\vdash_{\mathbf{PC'}_\varepsilon} \forall y \exists z B(\tau,y,z), \\
&\vdash_{\mathbf{PC'}_\varepsilon} \forall y \exists z B(\tau,y,z) \to \exists z B(\tau,f\tau,z), \\
&\vdash_{\mathbf{PC'}_\varepsilon} \exists z B(\tau,f\tau,z), \\
&\vdash_{\mathbf{PC'}_\varepsilon} \exists z B(\tau,f\tau,z) \to \exists x \exists z B(x,fx,z), \\
&\vdash_{\mathbf{PC'}_\varepsilon} \exists x \exists z B(x,fx,z)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．すると埋め込み定理より，

$$
\begin{aligned}
\zeta &\stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon z B(x,fx,z), \\
\tau &\stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon x B(x,fx,\zeta)
\end{aligned}
$$

とおけば

$$\vdash_{\mathbf{EC'}_\varepsilon} B(\tau,f\tau,\zeta)$$

が成り立つ．そして，或る $p > 1$ と，p 個の $L'(EC)$ の項 r_i と，同じく p 個の $L'(EC)$ の項 s_i が取れて，

$$\vdash_{\mathbf{EC'}} \bigvee_{i=1}^{p} B(r_i, fr_i, s_i)$$

が成り立つ **(次の小節)**．同じ証明で

$$\vdash_{\mathbf{PC'}} \bigvee_{i=1}^{p} B(r_i, fr_i, s_i)$$

であることも言える．

$$\vdash_{\mathbf{PC'}} \bigvee_{i=1}^{p-1} B(r_i, fr_i, s_i) \vee B(r_p, fr_p, s_p)$$

より，まず

$$\vdash_{\mathbf{PC'}} \bigvee_{i=1}^{p-1} B(r_i, fr_i, s_i) \lor \exists z B(r_p, fr_p, z)$$

となる．続いて，fr_p は $\bigvee_{i=1}^{p-1} B(r_i, fr_i, s_i)$ には現れないので

$$\vdash_{\mathbf{PC'}} \bigvee_{i=1}^{p-1} B(r_i, fr_i, s_i) \lor \forall y \exists z B(r_p, y, z)$$

となる．最後に

$$\vdash_{\mathbf{PC'}} \bigvee_{i=1}^{p-1} B(r_i, fr_i, s_i) \lor \exists x \forall y \exists z B(x, y, z)$$

となる．これを繰り返せば

$$\vdash_{\mathbf{PC'}} \exists x \forall y \exists z B(x, y, z) \lor \cdots \lor \exists x \forall y \exists z B(x, y, z)$$

が得られるので

$$\vdash_{\mathbf{PC'}} \exists x \forall y \exists z B(x, y, z)$$

となる．最後に，$\exists x \forall y \exists z B(x, y, z)$ への証明に残っている f を含む項を $L(PC)$ の項に置き換えれば，**PC** から $\exists x \forall y \exists z B(x, y, z)$ への証明が得られる．

4.4.1 $\bigvee_{i=1}^{p} B(r_i, fr_i, s_i)$ への証明

第一イプシロン定理と証明は殆ど変わらない．

1. $B(\tau, f\tau, \zeta)$ への EC_ε の証明を $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_n$ とする．
2. e を，この証明の主要 ε 項のうち階数が最大であって，かつその階数を持つ π の主要 ε 項の中で極大である (他の ε 項の部分項ではない) ものとする．
3. この証明から，e が属する主要論理式の一つ

   $$A(t/x) \to A(e/x)$$

   を取る．以下では

   $$B(\tau, f\tau, \zeta) \lor B(\tau', f\tau', \zeta')$$

   への $A(t/x) \to A(e/x)$ を用いない証明を構成する．ただし τ', ζ' はそれぞれ τ, ζ に現れる e を t に置き換えた項である．
4. それ以降の流れは第一イプシロン定理と同様であって，階数が大きい ε 項から順番に，それが属する主要論理式を一本ずつ排除しながら証明を構成するが，証明される式は

   $$B(\tau, f\tau, \zeta) \lor B(\tau', f\tau', \zeta') \lor B(\tau'', f\tau'', \zeta'') \lor \cdots$$

   のように増えていく．そして，最終的に

   $$\bigvee_{i=1}^{p} B(\tau_i, f\tau_i, \zeta_i)$$

   への $\mathbf{EC'}_\varepsilon$ の証明が得られる．最後に証明に残っている ε 項を $L(EC)$ の項に置き換える．

step1　φ_i が $A(t/x) \to A(e/x)$ でない $\mathbf{EC}_\varepsilon$ の公理ならば，φ_i と φ_{i+1} の間に

$$\begin{aligned}&\varphi_i \to (\rightharpoondown A(t/x) \to \varphi_i),\\ &\rightharpoondown A(t/x) \to \varphi_i\end{aligned}$$

を挿入する (この時点で，$A(t/x) \to A(e/x)$ でない主要論理式は無傷のまま残ることが判る)．φ_i が φ_j と $\varphi_k \equiv \varphi_j \to \varphi_i$ から三段論法で得られる場合は，φ_i を

$$\begin{aligned}&(\rightharpoondown A(t/x) \to (\varphi_j \to \varphi_i)) \to [(\rightharpoondown A(t/x) \to \varphi_j) \to (\rightharpoondown A(t/x) \to \varphi_i)],\\ &(\rightharpoondown A(t/x) \to \varphi_j) \to (\rightharpoondown A(t/x) \to \varphi_i),\\ &\rightharpoondown A(t/x) \to \varphi_i\end{aligned}$$

で置き換える．φ_i が $A(t/x) \to A(e/x)$ であるときは，φ_i を

$$\rightharpoondown A(t/x) \to (A(t/x) \to A(e/x))$$

で置き換える．以上で $\rightharpoondown A(t/x) \to B(\tau, f\tau, \zeta)$ への証明が得られた．

step2　$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ に現れる e を (e が部分項として現れる場合も)t に置き換えた式を

$$\tilde{\varphi}_1,\ \tilde{\varphi}_2, \cdots, \tilde{\varphi}_n$$

と書く．このとき，任意の $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ で

1. φ_i が主要論理式でない $\mathbf{EC}_\varepsilon$ の定理なら $\tilde{\varphi}_i$ も主要論理式でない $\mathbf{EC}_\varepsilon$ の定理である．
2. φ_i が $A(u/x) \to A(e/x)$ なる形の主要論理式ならば，$\tilde{\varphi}_i$ は $A(v/x) \to A(t/x)$ の形の式である．ただし v とは，u に e が現れていたらそれを t に置き換えた項である．
3. φ_i が主要論理式で，e が属していないならば，$\tilde{\varphi}_i$ も主要論理式である (置換定理)．

φ_i が $A(t/x) \to A(e/x)$ でない EC_ε の公理ならば，$\tilde{\varphi}_i$ と $\tilde{\varphi}_{i+1}$ の間に

$$\begin{aligned}&\tilde{\varphi}_i \to \left(A(t/x) \to \tilde{\varphi}_i\right),\\ &A(t/x) \to \tilde{\varphi}_i\end{aligned}$$

を挿入する．φ_i が φ_j と $\varphi_k \equiv \varphi_j \to \varphi_i$ からモーダスポンネスで得られる場合は，$\tilde{\varphi}_i$ を

$$\begin{aligned}&\left(A(t/x) \to \left(\tilde{\varphi}_j \to \tilde{\varphi}_i\right)\right) \to \left[\left(A(t/x) \to \tilde{\varphi}_j\right) \to \left(A(t/x) \to \tilde{\varphi}_i\right)\right],\\ &\left(A(t/x) \to \tilde{\varphi}_j\right) \to \left(A(t/x) \to \tilde{\varphi}_i\right),\\ &A(t) \to \tilde{\varphi}_i\end{aligned}$$

で置き換える．φ_i が e が属する主要論理式 $A(u/x) \to A(e/x)$ であるときは，$\tilde{\varphi}_i$ とは

$$A(v/x) \to A(t/x)$$

なる形の式であるが，$\tilde{\varphi}_i$ を

$$A(t/x) \to (A(v/x) \to A(t/x))$$

で置き換える．以上で $A(t/x) \to B(\tau', f\tau', \zeta')$ への証明が得られた．

B への証明の構成　$B(\tau, f\tau, \zeta) \vee B(\tau', f\tau', \zeta')$ を C とおく．まずは $\rightharpoondown A(t/x) \to C$ への証明を得るために

$$(\rightharpoondown A(t/x) \to B(\tau, f\tau, \zeta)) \to [(B(\tau, f\tau, \zeta) \to C) \to (\rightharpoondown A(t/x) \to C)]$$

(これは $(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$ の形の $\mathbf{EC}_\varepsilon$ の定理である) への証明と

$$\begin{aligned}
&(B(\tau, f\tau, \zeta) \to C) \to (\neg A(t/x) \to C),\\
&B(\tau, f\tau, \zeta) \to C,\\
&\neg A(t/x) \to C
\end{aligned}$$

を追加する．同様にして

$$A(t/x) \to C$$

への証明も得られる．あとは，

$$(A(t/x) \to C) \to [(\neg A(t/x) \to C) \to (A(t/x) \vee \neg A(t/x) \to C)]$$

への証明を追加し (これは $(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi \to \chi))$ の形の $\mathbf{EC}_\varepsilon$ の定理である)，

$$\begin{aligned}
&(\neg A(t/x) \to C) \to (A(t/x) \vee \neg A(t/x) \to C),\\
&A(t/x) \vee \neg A(t/x) \to C,\\
&A(t) \vee \neg A(t),\\
&C
\end{aligned}$$

を追加すれば，$A(t/x) \to A(e/x)$ を用いない B への $\mathbf{EC}_\varepsilon$ の証明となる． ∎

第 5 章

メモ

5.1　量化再考

推論公理 5.1.1 (量化の公理).

1. $\forall y \left(\forall x \varphi(x) \Longrightarrow \varphi(y) \right)$
2. $\forall x \left(\varphi(x) \Longrightarrow \exists y \varphi(y) \right)$
3. $\forall y \left(\varphi \Longrightarrow \psi(y) \right) \Longrightarrow \left(\varphi \Longrightarrow \forall y \psi(y) \right)$
4. $\forall x \left(\varphi(x) \Longrightarrow \psi \right) \Longrightarrow \left(\exists x \varphi(x) \Longrightarrow \psi \right)$
5. $\forall x \left(\varphi(x) \Longrightarrow \psi(x) \right) \Longrightarrow \left(\forall x \varphi(x) \Longrightarrow \forall x \psi(x) \right)$
6. $\forall x \varphi(x) \Longrightarrow \exists x \varphi(x)$

$\forall x \varphi(x) \Longrightarrow \forall y \varphi(y).$

$$
\begin{aligned}
&\forall y \left(\forall x \varphi(x) \Longrightarrow \varphi(y) \right) && \text{(公理 1)} \\
&\forall y \left(\forall x \varphi(x) \Longrightarrow \varphi(y) \right) \Longrightarrow \left(\forall x \varphi(x) \Longrightarrow \forall y \varphi(y) \right), && \text{(公理 3)} \\
&\forall x \varphi(x) \Longrightarrow \forall y \varphi(y). && \text{(MP)}
\end{aligned}
$$

$\exists x \varphi(x) \Longrightarrow \exists y \varphi(y).$

$$
\begin{aligned}
&\forall x \left(\varphi(x) \Longrightarrow \exists y \varphi(y) \right) && \text{(公理 2)} \\
&\forall x \left(\varphi(x) \Longrightarrow \exists y \varphi(y) \right) \Longrightarrow \left(\exists x \varphi(x) \Longrightarrow \exists y \varphi(y) \right), && \text{(公理 4)} \\
&\exists x \varphi(x) \Longrightarrow \exists y \varphi(y). && \text{(MP)}
\end{aligned}
$$

$\forall x \left(\varphi(x) \Longrightarrow \psi \right) \Longrightarrow \left(\forall x \varphi(x) \Longrightarrow \psi \right).$

$\forall x\ \big(\varphi(x) \Longrightarrow \psi\big)$ と $\forall x\varphi(x)$ からなる文の集合を Γ とすると，

$$
\begin{aligned}
&\Gamma \vdash \forall x\ \big(\varphi(x) \Longrightarrow \psi\big)\\
&\Gamma \vdash \forall x\ \big(\varphi(x) \Longrightarrow \psi\big) \Longrightarrow \big(\exists x\varphi(x) \Longrightarrow \psi\big)\\
&\Gamma \vdash \exists x\varphi(x) \Longrightarrow \psi\\
\\
&\Gamma \vdash \forall x\varphi(x)\\
&\Gamma \vdash \forall x\varphi(x) \Longrightarrow \exists x\varphi\\
&\Gamma \vdash \exists x\varphi(x)\\
\\
&\Gamma \vdash \psi
\end{aligned}
$$

が成り立つので，演繹法則より

$$\vdash \forall x\ \big(\varphi(x) \Longrightarrow \psi\big) \Longrightarrow \big(\forall x\varphi(x) \Longrightarrow \psi\big)$$

が得られる．

τ を $\mathcal{L}_\in$ には無い定数記号として，$\mathcal{L}'_\in = \mathcal{L}_\in \cup \{\tau\}$ とおく．φ を $\mathcal{L}'_\in$ の式とし，

$$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}'_\in} \varphi$$

であるとする．項 x を，もし τ が φ に現れるならば φ の中の τ の出現位置で束縛されない変項とする．このとき，τ が φ に現れるならば

$$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}_\in} \forall x\varphi(x/\tau)$$

が成り立つ．τ が φ に現れなければ

$$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}_\in} \varphi$$

が成り立つ．

略証． φ が Σ の公理であるときは

$$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}_\in} \varphi$$

となるし，φ が推論法則であるときは，φ に τ が現れなければ

$$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}_\in} \varphi$$

となるし，φ に τ が現れても

$$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}_\in} \forall x\varphi(x/\tau)$$

が成立する．φ が三段論法によって示されるとき，つまり $\mathcal{L}'_\in$ の文 ψ で

$$
\begin{aligned}
&\Sigma \vdash_{\mathcal{L}'_\in} \psi,\\
&\Sigma \vdash_{\mathcal{L}'_\in} \psi \Longrightarrow \varphi
\end{aligned}
$$

を満たすものが取れるとき，y を ψ にも φ にも表れない変項とする．また φ と ψ に τ が現れているかいないかで

case1　φ にも ψ にも τ が現れていないとき，

$$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}_{\in}} \psi$$

かつ

$$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}_{\in}} \psi \Longrightarrow \varphi$$

case2　φ には τ が現れているが，ψ には τ が現れていないとき，

$$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}_{\in}} \psi$$

かつ

$$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}_{\in}} \forall y\,(\,\psi \Longrightarrow \varphi(y/\tau)\,)$$

case3　φ には τ が現れていないが，ψ には τ が現れているとき，

$$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}_{\in}} \forall y \psi(y/\tau)$$

かつ

$$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}_{\in}} \forall y\,(\,\psi(y/\tau) \Longrightarrow \varphi\,)$$

case4　φ にも ψ にも τ が現れているとき，

$$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}_{\in}} \forall y \psi(y/\tau)$$

かつ

$$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}_{\in}} \forall y\,(\,\psi(y/\tau) \Longrightarrow \varphi(y/\tau)\,)$$

のいずれかのケースを一つ仮定する．

case1　証明可能性の定義より

$$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}_{\in}} \varphi$$

が成り立つ．

case2　公理 2 と併せて

$$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}_{\in}} \psi \Longrightarrow \forall y \varphi(y/\tau)$$

が成り立つので，証明可能性の定義より

$$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}_{\in}} \forall y \varphi(y/\tau)$$

となる．そして

$$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}_{\in}} \forall x \varphi(x/\tau)$$

も成り立つ．

case3

$$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}_\in} \forall y \psi(y/\tau) \Longrightarrow \varphi$$

が成り立つので，，証明可能性の定義より

$$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}_\in} \varphi$$

となる．

case4　公理 5 より

$$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}_\in} \forall y \psi(y/\tau) \Longrightarrow \forall y \varphi(y/\tau)$$

が成り立つので，証明可能性の定義より

$$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}_\in} \forall y \varphi(y/\tau)$$

となる．そして

$$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}_\in} \forall x \varphi(x/\tau)$$

も成り立つ． ∎

$\forall x \varphi(x), \forall x\,(\,\varphi(x) \Longrightarrow \psi(x)\,) \vdash \forall x \psi(x)$.

公理 5 より

$$\forall x\,(\,\varphi(x) \Longrightarrow \psi(x)\,) \vdash \forall x \varphi(x) \Longrightarrow \forall x \psi(x)$$

が成り立つので，三段論法より

$$\forall x \varphi(x), \forall x\,(\,\varphi(x) \Longrightarrow \psi(x)\,) \vdash \forall x \psi(x)$$

が従う．

τ を定項とし，$\mathcal{L}'_\in = \mathcal{L}_\in \cup \{\tau\}$ とする．また φ を $\mathcal{L}_\in$ の式とし，項 x が φ に自由に現れて，また φ で自由に現れる項は x のみであるとする．このとき $\vdash_{\mathcal{L}'_\in} \varphi(\tau)$ なら $\vdash_{\mathcal{L}_\in} \forall x \varphi(x)$.

推論法則 5.1.2 (De Morgan 1). $\vdash_{\mathcal{L}_\in} \forall x \rightharpoondown \varphi(x) \Longrightarrow \rightharpoondown \exists x \varphi(x)$.

公理 4 より

$$\vdash_{\mathcal{L}_\in} \forall x\,(\,\varphi(x) \Longrightarrow \rightharpoondown \forall x \rightharpoondown \varphi(x)\,) \Longrightarrow (\,\exists x \varphi(x) \Longrightarrow \rightharpoondown \forall x \rightharpoondown \varphi(x)\,)$$

が成り立ち，また公理 1 より

$$\vdash_{\mathcal{L}_\in} \forall x\,(\,\forall x \rightharpoondown \varphi(x) \Longrightarrow \varphi(x)\,)$$

が成り立つので

$$\vdash_{\mathcal{L}_\in} \forall x\,(\,\rightharpoondown \varphi(x) \Longrightarrow \rightharpoondown \forall x \rightharpoondown \varphi(x)\,)$$

も成り立つ．そして三段論法より

$$\vdash_{\mathcal{L}_\in} \exists x \varphi(x) \Longrightarrow \neg \forall x \neg \varphi(x)$$

が従う．ゆえに

$$\vdash_{\mathcal{L}_\in} \forall x \neg \varphi(x) \Longrightarrow \neg \exists x \varphi(x)$$

となる．

推論法則 5.1.3 (De Morgan 2).　$\vdash_{\mathcal{L}_\in} \neg \exists x \varphi(x) \Longrightarrow \forall x \neg \varphi(x)$.

$$\begin{aligned}
&\forall y \,(\varphi(y) \Longrightarrow \exists x \varphi(x)\,) && \text{(公理 2)}\\
&\forall y \,(\neg \exists x \varphi(x) \Longrightarrow \neg \varphi(y)\,) && ()\\
&\forall y \,(\neg \exists x \varphi(x) \Longrightarrow \neg \varphi(y)\,) \Longrightarrow (\neg \exists x \varphi(x) \Longrightarrow \forall y \neg \varphi(y)\,) && \text{(公理 3)}\\
&\neg \exists x \varphi(x) \Longrightarrow \forall y \neg \varphi(y) && \text{(MP)}\\
&\forall y \neg \varphi(y) \Longrightarrow \forall x \neg \varphi(x) && ()\\
&\neg \exists x \varphi(x) \Longrightarrow \forall x \neg \varphi(x) && ()
\end{aligned}$$

より．

$\neg \forall x \varphi(x) \Longrightarrow \exists x \neg \varphi(x)$.

公理 7 より

$$\vdash \neg \forall x \neg\neg \varphi(x) \Longrightarrow \exists x \neg \varphi(x)$$

が成り立つ．また

$$\vdash \forall x \,(\neg\neg \varphi(x) \Longrightarrow \varphi(x)\,)$$

と公理 5 より

$$\vdash \forall x \neg\neg \varphi(x) \Longrightarrow \forall x \varphi(x)$$

が成り立つので，対偶を取って

$$\vdash \neg \forall x \varphi(x) \Longrightarrow \neg \forall x \neg\neg \varphi(x)$$

が得られる．よって

$$\vdash \neg \forall x \varphi(x) \Longrightarrow \exists x \neg \varphi(x)$$

となる．

$\vdash \exists x \neg \varphi(x) \Longrightarrow \neg \forall x \varphi(x)$.

$\vdash_{\mathcal{L}'_\in} \varphi(\tau) \Longrightarrow \neg\neg \varphi(\tau)$ より

$$\vdash \forall x \varphi(x) \Longrightarrow \forall x \neg\neg \varphi(x)$$

が成り立ち，さらに公理 7 より

$$\vdash \forall x \rightharpoondown\rightharpoondown \varphi(x) \Longrightarrow \rightharpoondown \exists x \rightharpoondown \varphi(x)$$

が成り立つので，

$$\vdash \forall x \varphi(x) \Longrightarrow\Longrightarrow \rightharpoondown \exists x \rightharpoondown \varphi(x)$$

が得られる．

5.2　置換公理

置換公理の二つの形式の同値性をざっくりと．

(T)　$\mathrm{sing}\,(f) \Longrightarrow \forall a\ \mathrm{set}\,(f * a)$.

(K)　$\forall a\ \big[\, \forall x \in a\, \exists! y \varphi(x,y) \Longrightarrow \exists z\, \forall y\, (\, y \in z \Longleftrightarrow \exists x\, (\, x \in a \wedge \varphi(x,y)\,)\,)\,\big]$.

ただし

$$\mathrm{sing}\,(f) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \forall x, y, z\, (\,(x,y) \in f \wedge (x,z) \in f \Longrightarrow y = z\,),$$

$$f * a \overset{\mathrm{def}}{=} \{\, y \mid \exists x \in a\, (\,(x,y) \in f\,)\,\},$$

$$\mathrm{set}\,(s) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \exists x\, (\, s = x\,)$$

であるし，φ に自由に現れているのは二つの変項のみで，それらが s と t とおけば，φ に自由に現れている s を全て x に，φ に自由に現れている t を全て y に置き換えた式が

$$\varphi(x,y)$$

である．またこのとき x も y も $\varphi(x,y)$ で束縛されていないものとする (x と y はそのように選ばれた変項であるということである).

(T)$\Longrightarrow$(K)　a を任意の集合とし，

$$\forall x \in a \exists! y \varphi(x,y)$$

であるとする．

$$f \overset{\mathrm{def}}{=} \{\,(x,y) \mid x \in a \wedge \varphi(x,y)\,\}$$

とおけば f は a 上の写像であって，(T) より

$$\exists z\, (\, z = f * a\,)$$

となる．ところで $f * a$ とは

$$\{\, y \mid \exists x \in a\, (\,(x,y) \in f\,)\,\}$$

なので

$$f * a = \{\, y \mid \exists x \in a \varphi(x,y)\,\}.$$

ゆえに

$$\exists z\,\forall y\,(\,y \in z \Longleftrightarrow \exists x \in a\varphi(x,y)\,)$$

が成り立つ．

(K)⟹(T)　$\mathrm{sing}\,(f)$ とし，a を集合とする．

$$b \overset{\mathrm{def}}{=\!=} a \cap \mathrm{dom}\,(f)$$

とおけば，(K) からは分出公理が示せるので b は集合である．そして

$$\forall x \in b\,\exists! y\,(\,(x,y) \in f\,)$$

が成り立つのだから，(K) より

$$z = \{\,y \mid \exists x \in b\,(\,(x,y) \in f\,)\,\}$$

が従う．ここで

$$\{\,y \mid \exists x \in b\,(\,(x,y) \in f\,)\,\} = f * b = f * a$$

であるから (T) が得られる． ∎

第 6 章

定理参照メモ

6.1　証明

推論公理 6.1.1 (演繹規則).　**??** A, B, C, D を文とするとき，

(a)　$A \vdash D$ ならば $\vdash A \rightarrow D$ が成り立つ．

(b)　$A, B \vdash D$ ならば

$$B \vdash A \rightarrow D, \quad A \vdash B \rightarrow D$$

が成り立つ．

(c)　$A, B, C \vdash D$ ならば

$$B, C \vdash A \rightarrow D, \quad A, C \vdash B \rightarrow D, \quad A, B \vdash C \rightarrow D$$

のいずれも成り立つ．

メタ定義 6.1.2 (証明可能).　文 φ が公理系 $\mathscr{S}$ から証明されただとか証明可能である **(provable)** ということは，

- φ は $\mathscr{S}$ の公理である．
- $\vdash \varphi$ である．
- 文 ψ で，ψ と $\psi \rightarrow \varphi$ が $\mathscr{S}$ から証明されているものが取れる (三段論法 **(Modus Pones)**).

のいずれかが満たされているということであり，φ が $\mathscr{S}$ から証明可能であることを

$$\mathscr{S} \vdash \varphi$$

と書く．ただし，公理系に変項が生じた場合の証明可能性には演繹規則や後述の演繹法則，およびその逆の結果を適用することが出来る．

推論法則 6.1.3 (含意の反射律).　2.1.3 A を文とするとき

$$\vdash A \rightarrow A.$$

推論法則 6.1.4 (含意の導入). 2.1.4 A, B を文とするとき

$$\vdash B \rightarrow (A \rightarrow B).$$

推論法則 6.1.5 (含意の分配則). 2.1.5 A, B, C を文とするとき

$$\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)).$$

メタ公理 6.1.6 (証明に対する構造的帰納法). $\mathscr{S}$ を公理系とし，X を文に対する何らかの言明とするとき，

- $\mathscr{S}$ の公理に対して X が言える．
- 推論法則に対して X が言える．
- φ と $\varphi \rightarrow \psi$ が $\mathscr{S}$ の定理であるような文 φ と文 ψ が取れたとき，φ と $\varphi \rightarrow \psi$ に対して X が言えるならば，ψ に対して X が言える．

のすべてが満たされていれば，$\mathscr{S}$ から証明可能なあらゆる文に対して X が言える．

メタ定理 6.1.7 (演繹法則). 2.1.7 $\mathscr{S}$ を公理系とし，A を文とするとき，$\mathscr{S}, A$ の任意の定理 B に対して

$$\mathscr{S} \vdash A \rightarrow B$$

が成り立つ．

メタ定理 6.1.8 (公理が増えても証明可能). $\mathscr{S}$ を公理系とし，A を文とするとき，$\mathscr{S}$ の任意の定理 B に対して

$$\mathscr{S}, A \vdash B$$

が成り立つ．

メタ定理 6.1.9 (演繹法則の逆). 2.1.9 $\mathscr{S}$ を公理系とし，A と B を文とするとき，

$$\mathscr{S} \vdash A \rightarrow B$$

であれば

$$A,\ \mathscr{S} \vdash B$$

が成り立つ．

6.2　推論

推論公理 6.2.1 (否定と矛盾に関する規則).　2.2.1 A を文とするとき以下が成り立つ:

矛盾の導入　否定が共に成り立つとき矛盾が起きる:

$$A,\ \neg A \vdash \bot.$$

否定の導入　矛盾が導かれるとき否定が成り立つ:

$$A \rightarrow \bot \vdash \neg A.$$

定義 6.2.2 (対偶).　$\varphi \rightarrow \psi$ なる式に対して

$$\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$$

を $\varphi \rightarrow \psi$ の**対偶 (contraposition)** と呼ぶ.

推論法則 6.2.3 (対偶命題が導かれる).　2.2.3 A と B を文とするとき

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A).$$

定義 6.2.4 (二重否定).　式 φ に対して，$\neg$ を二つ連結させた式

$$\neg\neg\varphi$$

を φ の**二重否定 (double negation)** と呼ぶ.

推論法則 6.2.5 (二重否定の導入).　2.2.5 A を文とするとき

$$\vdash A \rightarrow \neg\neg A.$$

推論公理 6.2.6 (論理積の除去).　2.2.6 A と B を文とするとき

$$A \wedge B \vdash A,$$
$$A \wedge B \vdash B.$$

推論法則 6.2.7 (無矛盾律).　2.2.7 A を文とするとき

$$\vdash \neg(A \wedge \neg A).$$

定義 6.2.8 (同値記号).　A と B を $\mathcal{L}$ の式とするとき，

$$A \leftrightarrow B \overset{\mathrm{def}}{\longleftrightarrow} (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

により $\leftrightarrow$ を定め，式 '$A \leftrightarrow B$' を「A と B は同値である **(equivalent)**」と読む．

推論公理 6.2.9 (場合分け規則).　2.2.9 A と B と C を文とするとき

$$A \rightarrow C,\ B \rightarrow C \vdash A \vee B \rightarrow C.$$

推論法則 6.2.10 (弱 De Morgan の法則 (1)).　2.2.10 A と B を文とするとき

$$\vdash \neg A \wedge \neg B \rightarrow \neg(A \vee B).$$

推論法則 6.2.11 (強 De Morgan の法則 (1)).　2.2.11 A と B を文とするとき

$$\vdash \neg A \vee \neg B \rightarrow \neg(A \wedge B).$$

推論公理 6.2.12 (論理和の導入).　2.2.12 A と B を文とするとき

$$A \vdash A \vee B,$$
$$B \vdash A \vee B.$$

推論法則 6.2.13 (論理和の可換律).　2.2.13 A, B を文とするとき

$$\vdash A \vee B \rightarrow B \vee A.$$

推論公理 6.2.14 (論理積の導入).　2.2.14 A と B を文とするとき

$$A,\ B \vdash A \wedge B.$$

推論法則 6.2.15 (弱 De Morgan の法則 (2)).　2.2.15 A と B を文とするとき

$$\vdash \neg(A \vee B) \rightarrow \neg A \wedge \neg B.$$

推論法則 6.2.16 (論理積の可換律).　2.2.16 A, B を文とするとき

$$\vdash A \wedge B \rightarrow B \wedge A.$$

推論公理 6.2.17 (二重否定の除去).　2.2.17 A を文とするとき以下が成り立つ:

$$\neg\neg A \vdash A.$$

推論法則 6.2.18 (対偶論法の原理).　2.2.18 A と B を文とするとき

$$\vdash (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B).$$

推論法則 6.2.19 (背理法の原理).　2.2.19 A を文とするとき

$$\vdash (\neg A \rightarrow \bot) \rightarrow A.$$

推論法則 6.2.20 (爆発律).　2.2.20 A を文とするとき

$$\vdash \bot \rightarrow A.$$

推論法則 6.2.21 (否定の論理和は含意で書ける).　2.2.21 A と B を文とするとき

$$\vdash \neg A \vee B \rightarrow (A \rightarrow B).$$

推論法則 6.2.22 (排中律).　2.2.22 A を文とするとき

$$\vdash A \vee \neg A.$$

推論法則 6.2.23 (含意の論理和への遺伝性).　2.2.23 A, B, C を文とするとき

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (A \vee C \rightarrow B \vee C).$$

推論法則 6.2.24 (含意は否定と論理和で表せる).　2.2.24 A と B を文とするとき

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B).$$

推論法則 6.2.25 (強 De Morgan の法則 (2)).　2.2.25 A と B を文とするとき

$$\vdash \neg(A \wedge B) \rightarrow \neg A \vee \neg B.$$

推論公理 6.2.26 (量化記号に関する規則).　2.2.26 A を $\mathcal{L}$ の式とし，x を A に自由に現れる変項とし，A に自由に現れる項が x のみであるとする．また τ を任意の ε 項とする．このとき以下を推論規則とする．

$$A(\tau) \vdash \exists x A(x),$$
$$\exists x A(x) \vdash A(\varepsilon x A(x)),$$
$$\forall x A(x) \vdash A(\tau),$$
$$A(\varepsilon x \neg A(x)) \vdash \forall x A(x).$$

推論法則 6.2.27 (量化記号に対する弱 De Morgan の法則 (1)). 2.2.28 A を $\mathcal{L}$ の式とし，x を A に自由に現れる変項とし，また A に自由に現れる変項は x のみであるとする．このとき

$$\vdash \exists x \rightharpoondown A(x) \rightarrow \rightharpoondown \forall x A(x).$$

推論法則 6.2.28 (量化記号に対する弱 De Morgan の法則 (2)). 2.2.29 A を $\mathcal{L}$ の式とし，x を A に自由に現れる変項とし，また A に自由に現れる変項は x のみであるとする．このとき

$$\vdash \rightharpoondown \forall x A(x) \rightarrow \exists x \rightharpoondown A(x).$$

推論法則 6.2.29 (量化記号に対する強 De Morgan の法則 (1)). 2.2.30 A を $\mathcal{L}$ の式とし，x を A に自由に現れる変項とし，また A に自由に現れる変項は x のみであるとする．このとき

$$\vdash \forall x \rightharpoondown A(x) \rightarrow \rightharpoondown \exists x A(x).$$

推論法則 6.2.30 (量化記号に対する強 De Morgan の法則 (2)). 2.2.31 A を $\mathcal{L}$ の式とし，x を A に自由に現れる変項とし，また A に自由に現れる変項は x のみであるとする．このとき

$$\vdash \rightharpoondown \exists x A(x) \rightarrow \forall x \rightharpoondown A(x).$$

6.3　その他の推論法則

推論法則 6.3.1 (含意の推移律). 2.3.1 A, B, C を文とするとき

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)).$$

推論法則 6.3.2 (二式が同時に導かれるならその論理積が導かれる). 2.3.2 A, B, C を文とするとき

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C)).$$

推論法則 6.3.3 (含意は遺伝する). 2.3.3 A, B, C を $\mathcal{L}'$ の閉式とするとき以下が成り立つ:

(a)　$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \vee C) \rightarrow (B \vee C))$.
(b)　$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \wedge C) \rightarrow (B \wedge C))$.
(c)　$(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$.
(c)　$(A \rightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B))$.

推論法則 6.3.4 (同値記号の遺伝性質). 2.3.4 A, B, C を $\mathcal{L}'$ の閉式とするとき以下の式が成り立つ:

(a) $(A \leftrightarrow B) \rightarrow ((A \vee C) \leftrightarrow (B \vee C))$.

(b) $(A \leftrightarrow B) \rightarrow ((A \wedge C) \leftrightarrow (B \wedge C))$.

(c) $(A \leftrightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \leftrightarrow (A \rightarrow C))$.

(d) $(A \leftrightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow A) \leftrightarrow (C \rightarrow B))$.

推論法則 6.3.5 (偽な式は矛盾を導く). 2.3.5 A を文とするとき

$$\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow \bot).$$

定理 6.3.6 (類は集合であるか真類であるかのいずれかに定まる). a を類とするとき

$$\vdash \mathrm{set}(a) \vee \neg \mathrm{set}(a).$$

推論法則 6.3.7 (矛盾を導く式はあらゆる式を導く). 2.3.7 A, B を文とするとき

$$\vdash (A \rightarrow \bot) \rightarrow (A \rightarrow B).$$

推論法則 6.3.8 (含意は否定と論理和で表せる). 2.3.8 A, B を文とするとき

$$\vdash (A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B).$$

推論法則 6.3.9 (二重否定の法則の逆が成り立つ). 2.3.9 A を文とするとき

$$\vdash A \rightarrow \neg\neg A.$$

推論法則 6.3.10 (対偶命題は同値). 2.3.10 A, B を文とするとき

$$\vdash (A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A).$$

推論法則 6.3.11 (De Morgan の法則). A, B を文とするとき

- $\vdash \neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$.
- $\vdash \neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$.

定理 6.3.12 (集合であり真類でもある類は存在しない). a を類とするとき

$$\vdash \neg(\mathrm{set}(a) \wedge \neg \mathrm{set}(a)).$$

推論法則 6.3.13 (量化記号の性質 (ロ)). 2.3.13 A, B を $\mathcal{L}'$ の式とし，x を A, B に現れる文字とするとき，x のみが A, B で量化されていないならば以下は定理である:

(a) $\exists x(A(x) \vee B(x)) \leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$.

(b) $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$.

推論法則 6.3.14 (量化記号の性質 (イ)). 2.3.14 A, B を $\mathcal{L}'$ の式とし，x を A, B に現れる文字とし，x のみが A, B で量化されていないとする．$\mathcal{L}$ の任意の対象 τ に対して

$$A(\tau) \leftrightarrow B(\tau)$$

が成り立っているとき，

$$\exists x A(x) \leftrightarrow \exists x B(x)$$

および

$$\forall x A(x) \leftrightarrow \forall x B(x)$$

が成り立つ．

推論法則 6.3.15 (量化記号に対する De Morgan の法則). 2.3.15 A を $\mathcal{L}'$ の式とし，x を A に現れる文字とし，x のみが A で量化されていないとする．このとき

$$\exists x \neg A(x) \leftrightarrow \neg \forall x A(x)$$

および

$$\forall x \neg A(x) \leftrightarrow \neg \exists x A(x)$$

が成り立つ．

6.4　集合

定義 6.4.1 (集合). a を類とするとき，a が集合であるという言明を

$$\mathrm{set}\,(a) \overset{\mathrm{def}}{\longleftrightarrow} \exists x\,(\,a = x\,)$$

で定める．$\Sigma \vdash \mathrm{set}\,(a)$ を満たす類 a を**集合 (set)** と呼び，$\Sigma \vdash \neg \mathrm{set}\,(a)$ を満たす類 a を**真類 (proper class)** と呼ぶ．

定理 6.4.2 (集合である内包項は ε 項で書ける). φ を $\mathcal{L}$ の式とし，x を φ に自由に現れる変項とし，x のみが φ で自由であるとする．このとき

$$\mathrm{set}\,(\{\,x \mid \varphi(x)\,\}) \vdash \{\,x \mid \varphi(x)\,\} = \varepsilon y\, \forall x\,(\,\varphi(x) \leftrightarrow x \in y\,).$$

6.5　相等性

公理 6.5.1 (外延性の公理 (Extensionality)).　任意の類 a, b に対して

$$\mathbf{EXT} \overset{\text{def}}{\longleftrightarrow} \forall x\,(\,x \in a \ \leftrightarrow\ x \in b\,) \ \rightarrow\ a = b.$$

定理 6.5.2 (任意の類は自分自身と等しい).　3.1.2 任意の類 τ に対して

$$\mathbf{EXT} \vdash \tau = \tau.$$

定理 6.5.3 (類である ε 項は集合である).　τ を類である ε 項とするとき

$$\mathbf{EXT} \vdash \mathrm{set}\,(\tau).$$

公理 6.5.4 (相等性公理).　a, b, c を類とするとき

$$\mathbf{EQ} \overset{\text{def}}{\longleftrightarrow} \begin{cases} a = b \ \rightarrow\ b = a, \\ a = b \ \rightarrow\ (\,a \in c \ \rightarrow\ b \in c\,), \\ a = b \ \rightarrow\ (\,c \in a \ \rightarrow\ c \in b\,). \end{cases}$$

定理 6.5.5 (外延性の公理の逆も成り立つ).　3.1.5 a と b を類とするとき

$$\mathbf{EQ} \vdash a = b \ \rightarrow\ \forall x\,(\,x \in a \ \leftrightarrow\ x \in b\,).$$

公理 6.5.6 (内包性公理).　φ を $\mathcal{L}$ の式とし，y を φ に自由に現れる変項とし，φ に自由に現れる項は y のみであるとし，x は φ で y への代入について自由であるとするとき，

$$\mathbf{COM} \overset{\text{def}}{\longleftrightarrow} \forall x\,(\,x \in \{\,y \mid \varphi(y)\,\} \ \leftrightarrow\ \varphi(x)\,).$$

定理 6.5.7 (条件を満たす集合は要素である).　3.1.7 φ を $\mathcal{L}$ の式とし，x を φ に自由に現れる変項とし，x のみが φ で束縛されていないとする．このとき，任意の類 a に対して

$$\mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \varphi(a) \ \rightarrow\ \bigl(\,\mathrm{set}\,(a) \ \rightarrow\ a \in \{\,x \mid \varphi(x)\,\}\,\bigr)\,.$$

定義 6.5.8 (宇宙).　$\mathbf{V} \overset{\text{def}}{=} \{\,x \mid x = x\,\}$ で定める類 $\mathbf{V}$ を宇宙 **(Universe)** と呼ぶ.

公理 6.5.9 (要素の公理).　要素となりうる類は集合である．つまり，a, b を類とするとき

$$\mathbf{ELE} \overset{\text{def}}{\longleftrightarrow} a \in b \ \rightarrow\ \mathrm{set}\,(a).$$

定理 6.5.10 ($\mathbf{V}$ は集合の全体である).　3.1.10 a を類とするとき次が成り立つ:

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{ELE}, \mathbf{COM} \vdash \mathrm{set}(a) \leftrightarrow a \in \mathbf{V}.$$

推論法則 6.5.11 (同値関係の可換律).　3.1.11 A, B を $\mathcal{L}$ の文とするとき

$$\vdash (A \leftrightarrow B) \rightarrow (B \leftrightarrow A).$$

推論法則 6.5.12 (同値関係の推移律).　3.1.12 A, B, C を $\mathcal{L}$ の文とするとき

$$\vdash (A \leftrightarrow B) \rightarrow ((B \leftrightarrow C) \rightarrow (A \leftrightarrow C)).$$

定理 6.5.13 (等号の推移律).　3.1.13 a, b, c を類とするとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ} \vdash a = b \rightarrow (a = c \rightarrow b = c).$$

6.6　代入原理

公理 6.6.1 (ε 項に対する相等性公理).　a, b を類とし，φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とし，φ には変項 x, y が自由に現れ，また φ に自由に現れる変項はこれらのみであるとする．このとき

$$\mathbf{EQ}_{\mathcal{E}} \overset{\mathrm{def}}{\longleftrightarrow} a = b \rightarrow \varepsilon x \varphi(x, a) = \varepsilon x \varphi(x, b).$$

定理 6.6.2 (代入原理).　3.2.2 a, b を類とし，φ を $\mathcal{L}$ の式とし，x を φ に自由に現れる変項とし，φ に自由に現れる変項は x のみであるとする．このとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{EQ}_{\mathcal{E}} \vdash a = b \rightarrow (\varphi(a) \leftrightarrow \varphi(b)).$$

6.7　空集合

推論法則 6.7.1 (分配された論理積の簡約).　3.3.1 A, B, C を $\mathcal{L}$ の文とするとき，

$$\vdash (A \wedge C) \wedge (B \wedge C) \rightarrow A \wedge B.$$

定義 6.7.2 (空集合).　$\emptyset \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \{\, x \mid x \neq x \,\}$ で定める類 $\emptyset$ を空集合 (**empty set**) と呼ぶ.

公理 6.7.3 (置換公理).　φ を $\mathcal{L}$ の式とし，s,t を φ に自由に現れる変項とし，φ に自由に現れる項は s,t のみであるとし，x は φ で s への代入について自由であり，y,z,v は φ で t への代入について自由であるとするとき，

$$\mathbf{REP} \overset{\text{def}}{\longleftrightarrow} \forall x\,\forall y\,\forall z\,(\,\varphi(x,y) \land \varphi(x,z) \;\rightarrow\; y = z\,) \;\rightarrow\; \forall a\,\exists u\,\forall v\,(\,v \in u \;\leftrightarrow\; \exists x\,(\,x \in a \land \varphi(x,v)\,)\,).$$

定理 6.7.4 (分出定理).　3.3.4 φ を $\mathcal{L}$ の式とし，x を φ に自由に現れる変項とし，φ に自由に現れる項は x のみであるとする．このとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{EQ}_{\mathcal{E}}, \mathbf{REP} \vdash \forall a\,\exists s\,\forall x\,(\,x \in s \;\leftrightarrow\; x \in a \land \varphi(x)\,).$$

定理 6.7.5 ($\emptyset$ は集合).　3.3.5

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{REP} \vdash \mathrm{set}\,(\emptyset).$$

定理 6.7.6 (空集合はいかなる集合も持たない).　3.3.6

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \forall x\,(\,x \notin \emptyset\,).$$

定理 6.7.7 (空の類は空集合に等しい).　3.3.7 a を類とするとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \forall x\,(\,x \notin a\,) \;\rightarrow\; a = \emptyset,$$
$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash a = \emptyset \;\rightarrow\; \forall x\,(\,x \notin a\,).$$

定理 6.7.8 (類を要素として持てば空ではない).　3.3.8 a,b を類とするとき

$$\mathbf{EQ}, \mathbf{ELE} \vdash a \in b \;\rightarrow\; \exists x\,(\,x \in b\,).$$

定義 6.7.9 (部分類).　x,y を $\mathcal{L}$ の項とするとき，

$$x \subset y \overset{\text{def}}{\longleftrightarrow} \forall z\,(\,z \in x \;\rightarrow\; z \in y\,)$$

と定める．式 $z \subset y$ を「x は y の**部分類 (subclass)** である」や「x は y に含まれる」などと翻訳し，特に x が集合である場合は「x は y の**部分集合 (subset)** である」と翻訳する．また

$$x \subsetneq y \overset{\text{def}}{\longleftrightarrow} x \subset y \land x \neq y$$

と定め，これを「x は y に**真に含まれる**」と翻訳する．

定理 6.7.10 (空集合は全ての類に含まれる).　3.3.10 a を類とするとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \emptyset \subset a.$$

定理 6.7.11 (類はその部分類に属する全ての類を要素に持つ). 3.3.11 a, b, c を類とするとき

$$\mathbf{EQ}, \mathbf{ELE} \vdash a \subset b \ \rightarrow \ (\, c \in a \ \rightarrow \ c \in b \,).$$

定理 6.7.12 (V は最大の類である). a を類とするとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash a \subset \mathbf{V}.$$

定理 6.7.13 (等しい類は相手を包含する). 3.3.13 a, b を類とするとき

$$\mathbf{EQ} \vdash a = b \ \rightarrow \ a \subset b \wedge b \subset a.$$

定理 6.7.14 (互いに相手を包含する類同士は等しい). 3.3.14 a, b を類とするとき

$$\mathbf{EXT} \vdash a \subset b \wedge b \subset a \ \rightarrow \ a = b.$$

6.8　変換の同値性

推論法則 6.8.1 (同値記号の対称律). 3.7.1 A, B を $\mathcal{L}$ の文とするとき

$$\vdash (A \ \leftrightarrow \ B) \ \rightarrow \ (B \ \leftrightarrow \ A).$$

定理 6.8.2. 3.7.2 a を主要 ε 項とし，ψ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とし，z を ψ に自由に現れる変項とし，ψ に自由に現れる変項は z のみであるとする．このとき

$$\mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash a = \{\, z \mid \psi(z) \,\} \ \rightarrow \ \forall v \, (\, v \in a \ \leftrightarrow \ \psi(v) \,).$$

定理 6.8.3. 3.7.3 a を主要 ε 項とし，ψ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とし，z を ψ に自由に現れる変項とし，ψ に自由に現れる変項は z のみであるとする．このとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \forall v \, (\, v \in a \ \leftrightarrow \ \psi(v) \,) \ \rightarrow \ a = \{\, z \mid \psi(z) \,\}.$$

定理 6.8.4. 3.7.4 b を主要 ε 項とし，φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とし，y を φ に自由に現れる変項とし，φ に自由に現れる変項は y のみであるとする．このとき

$$\mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \{\, y \mid \varphi(y) \,\} = b \ \rightarrow \ \forall u \, (\, \varphi(u) \ \leftrightarrow \ u \in b \,).$$

定理 6.8.5. 3.7.5 b を主要 ε 項とし，φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とし，y を φ に自由に現れる変項とし，φ に自由に現れる変項は y のみであるとする．このとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \forall u\,(\,\varphi(u) \;\leftrightarrow\; u \in b\,) \;\rightarrow\; \{\,y \mid \varphi(y)\,\} = b.$$

定理 6.8.6. 3.7.6 φ と ψ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とし，y を φ に自由に現れる変項とし，z を ψ に自由に現れる変項とし，φ に自由に現れる変項は y のみであるとし，ψ に自由に現れる変項は z のみであるとし，する．このとき

$$\mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \{\,y \mid \varphi(y)\,\} = \{\,z \mid \psi(z)\,\} \;\rightarrow\; \forall u\,(\,\varphi(u) \;\leftrightarrow\; \psi(u)\,).$$

定理 6.8.7. 3.7.7 φ と ψ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とし，y を φ に自由に現れる変項とし，z を ψ に自由に現れる変項とし，φ に自由に現れる変項は y のみであるとし，ψ に自由に現れる変項は z のみであるとし，する．このとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{COM} \vdash \forall u\,(\,\varphi(u) \;\leftrightarrow\; \psi(u)\,) \;\rightarrow\; \{\,y \mid \varphi(y)\,\} = \{\,z \mid \psi(z)\,\}.$$

定理 6.8.8. 3.7.8 a を主要 ε 項とし，ψ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とし，z を ψ に自由に現れる変項とし，ψ に自由に現れる変項は z のみであるとする．このとき

$$\mathbf{COM} \vdash a \in \{\,z \mid \psi(z)\,\} \;\rightarrow\; \psi(a).$$

定理 6.8.9. 3.7.9 a を主要 ε 項とし，ψ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とし，z を ψ に自由に現れる変項とし，ψ に自由に現れる変項は z のみであるとする．このとき

$$\mathbf{COM} \vdash \psi(a) \;\rightarrow\; a \in \{\,z \mid \psi(z)\,\}.$$

定理 6.8.10. 3.7.10 b を主要 ε 項とし，φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とし，y を φ に自由に現れる変項とし，φ に自由に現れる変項は y のみであるとする．このとき

$$\mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE} \vdash \{\,y \mid \varphi(y)\,\} \in b \;\rightarrow\; \exists s\,(\,\forall u\,(\,\varphi(u) \;\leftrightarrow\; u \in s\,) \wedge s \in b\,).$$

定理 6.8.11. 3.7.11 b を主要 ε 項とし，φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とし，y を φ に自由に現れる変項とし，φ に自由に現れる変項は y のみであるとする．このとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \exists s\,(\,\forall u\,(\,\varphi(u) \;\leftrightarrow\; u \in s\,) \wedge s \in b\,) \;\rightarrow\; \{\,y \mid \varphi(y)\,\} \in b.$$

定理 6.8.12. 3.7.12 φ と ψ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とし，y を φ に自由に現れる変項とし，z を ψ に自由に現れる変項とし，φ に自由に現れる変項は y のみであるとし，ψ に自由に現れる変項は z のみであるとし，する．このとき

$$\mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{ELE} \vdash \{\,y \mid \varphi(y)\,\} \in \{\,z \mid \psi(z)\,\} \;\rightarrow\; \exists s\,(\,\forall u\,(\,\varphi(u) \;\leftrightarrow\; u \in s\,) \wedge \psi(s)\,).$$

定理 6.8.13. 3.7.13 φ と ψ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とし，y を φ に自由に現れる変項とし，z を ψ に自由に現れる変項とし，φ に自由に現れる変項は y のみであるとし，ψ に自由に現れる変項は z のみであるとし，する．このとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \exists s \, (\, \forall u \, (\, \varphi(u) \leftrightarrow u \in s \,) \land \psi(s) \,) \rightarrow \{\, y \mid \varphi(y) \,\} \in \{\, z \mid \psi(z) \,\}.$$

6.9　対

定義 6.9.1 (対). x, y を $\mathcal{L}$ の項とし，z を x にも y にも自由に現れない変項とするとき，

$$\{x, y\} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\, z \mid x = z \lor y = z \,\}$$

で $\{x, y\}$ を定義し，これを x と y の対 **(pair)** と呼ぶ．特に $\{x, x\}$ を $\{x\}$ と書く．

定理 6.9.2 (対は表示されている要素しか持たない). 3.8.2 a と b を類とするとき次が成立する:

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \forall x \, (\, x \in \{a, b\} \leftrightarrow a = x \lor b = x \,).$$

定理 6.9.3 (対の対称性). 3.8.3 a と b を類とするとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \{a, b\} = \{b, a\}.$$

公理 6.9.4 (対の公理).

$$\mathbf{PAI} \stackrel{\mathrm{def}}{\longleftrightarrow} \forall x \, \forall y \, \exists p \, \forall z \, (\, x = z \lor y = z \leftrightarrow z \in p \,).$$

定理 6.9.5 (集合の対は集合である). 3.8.5 a と b を類とするとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM}, \mathbf{PAI} \vdash \mathrm{set}\,(a) \land \mathrm{set}\,(b) \rightarrow \mathrm{set}\,(\{a, b\}).$$

定理 6.9.6 (集合は対の要素となれる). 3.8.6 a と b を類とするとき

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \mathrm{set}\,(a) \rightarrow a \in \{a, b\},$$
$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \mathrm{set}\,(b) \rightarrow b \in \{a, b\}.$$

定理 6.9.7 (真類同士の対は空). 3.8.7 a と b を類とするとき，

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \neg\mathrm{set}\,(a) \land \neg\mathrm{set}\,(b) \rightarrow \{a, b\} = \emptyset.$$

定理 6.9.8 (空な対に表示されている類は集合ではない).　3.8.8 a と b を類とするとき，

$$\mathbf{EXT}, \mathbf{EQ}, \mathbf{COM} \vdash \{a, b\} = \emptyset \ \rightarrow \ \neg\mathrm{set}\,(a) \wedge \neg\mathrm{set}\,(b).$$

第 7 章

Hilbert 流証明論

参考文献: 戸次大介「数理論理学」

この章に出てくる式と項は言語 $\mathcal{L}_\in$ のものとする．証明論の奇妙なところは，扱う式が文とは限らないところである．式に自由な変項が残ったままであるとその式の意味は定まらない．逆に変更が全て束縛されている文は，それが表す意味は非常に判然としている．奇妙なのは，φ が文であって，これが証明されたとしても，その証明の過程には文でない式が出現し得る点である．意味が不明瞭な式をもって意味がはっきり定まった式を導こうというところが腑に落ちない．と今まで思っていたが，どうも勉強しているうちにそれほど不自然には感じなくなってきた．

7.1 **HK**

証明体系には様々な流派があるが，流派の一つ Hilbert 流と呼ばれる証明体系のうちで最も標準的なものが **HK** であると，と理解している．証明のシステムを概括するために，抽象的に **H** を Hilbert 流の証明体系とする．はじめに，**H** の (論理的) 公理と推論規則と言われるものが与えられる．また証明の前には公理系と呼ばれる式の集合も与えられる．公理系に属する式をその公理系の公理と呼ぶが，公理は意味のはっきりした式であるべきだと思うので**全て文とする**．いま公理系を Γ とすれば，φ が Γ の公理であるか **H** の公理であることを

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{H}} \varphi$$

と書く．通常は公理が全くない場合も考察対象であり，その場合は φ が **H** の公理であることを

$$\vdash_{\mathbf{H}} \varphi$$

と書くのである．φ が一般の式である場合は，$\Gamma \vdash_{\mathbf{H}} \varphi$ なることを「φ は Γ の下での定理である」といった趣旨の言い方をする．つまり Γ の公理や **H** の公理は Γ の下での定理であるわけであるが，他の式については，それがすでに既に定理とされた式から **H** の推論規則によって得られているときに限り定理となる．

まずは一番弱い体系の **SK** から始める．以下で Γ と書いたらそれは公理系を表す．

7.1.1 SK

SK の公理

φ と ψ と ξ を式とするとき，次は **SK** の公理である．

(S)　$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$.
(K)　$\varphi \to (\psi \to \varphi)$.

そして

$$\vdash_{\mathbf{SK}} (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$$

および

$$\vdash_{\mathbf{SK}} \varphi \to (\psi \to \varphi)$$

と書く．

SK の推論規則

φ と ψ を式とするとき，次は **SK** の推論規則である．

三段論法　$\Gamma \vdash_{\mathbf{SK}} \psi$ かつ $\Gamma \vdash_{\mathbf{SK}} \psi \to \varphi$ ならば $\Gamma \vdash_{\mathbf{SK}} \varphi$ である．

SK から証明可能な式

(I)　$\varphi \to \varphi$
(B)　$(\psi \to \chi) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$.
(C)　$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi))$.
(W)　$(\varphi \to (\varphi \to \psi)) \to (\varphi \to \psi)$.
(B')　$(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$.
(C*)　$\varphi \to ((\varphi \to \psi) \to \psi)$

7.1.2 否定

SK の公理に否定の公理を追加し，推論規則はそのまま据え置いた証明体系を **SK′** とする．

SK′ で追加された公理

φ と ψ と ξ を式とするとき，**SK′** の公理は (S)(K) に以下の式を加えたものである．

(CTI1)　$\varphi \to (\neg\varphi \to \bot)$.
(CTI2)　$\neg\varphi \to (\varphi \to \bot)$.
(NI)　$(\varphi \to \bot) \to \neg\varphi$.

このとき証明可能な式

(DNI)　$\varphi \to \neg\neg\varphi$.
(CON1)　$(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$.
(CON2)　$(\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \neg\varphi)$.

7.1.3 HM

HM とは最小論理と呼ばれる証明体系である．**HK** においては $\perp$ が示されるとあらゆる式が導かれることになるが (爆発律)，**HM** ではそれが起こらないので矛盾許容論理と言われる．また背理法が成立しないので「$\neg A$ と仮定すると矛盾するので A」という論法は使えず，証明は矛盾に頼らないという意味で "構成的" になる．

$$\varphi(t/x)$$

とは，式 φ に自由に現れる変項 x を項 t で置き換えた式を表す．ただし t は φ の中で x への代入について自由である．

HM の公理

φ と ψ と ξ を式とし，x と t を変項とし，τ を項とするとき，次は **HM** の公理である．

(S) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$.
(K) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$.
(DI1) $\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$.
(DI2) $\psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$.
(DE) $(\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi))$.
(CI) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi))$.
(CE1) $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$.
(CE2) $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$.
(UI) $\forall t(\psi \rightarrow \varphi(t/x)) \rightarrow (\psi \rightarrow \forall x\varphi)$.
(UE) $\forall x\varphi \rightarrow \varphi(\tau/x)$.
(EI) $\varphi(\tau/x) \rightarrow \exists x\varphi$.
(EE) $\forall t(\varphi(t/x) \rightarrow \psi) \rightarrow (\exists x\varphi \rightarrow \psi)$.

SK と同様に，上の **HM** の公理は全て $\vdash_{\mathbf{HM}} \ldots$ と書かれる．

HM の推論規則

φ と ψ を式とするとき，次は **HM** の推論規則である．

三段論法　$\Gamma \vdash_{\mathbf{HM}} \psi$ かつ $\Gamma \vdash_{\mathbf{HM}} \psi \rightarrow \varphi$ ならば $\Gamma \vdash_{\mathbf{HM}} \varphi$ である．
汎化　ψ に変項 x が自由に現れているとき，$\Gamma \vdash_{\mathbf{HM}} \psi(y/x)$ ならば $\Gamma \vdash_{\mathbf{HM}} \forall x\psi$ である．ただし y は $\forall x\psi$ に自由には現れない変項とする．

HM から証明可能な式

(LNC) $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$.
(DIST∧) $\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$.
(DIST∨) $\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$.
(DM∨) $\neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi$.

略証 (LNC).

$$\varphi \wedge \neg\varphi \vdash_{\mathbf{HM}} \varphi,$$

$$
\begin{aligned}
\varphi\wedge\neg\varphi &\vdash_{\mathbf{HM}} \neg\varphi,\\
\varphi\wedge\neg\varphi &\vdash_{\mathbf{HM}} \varphi \to (\neg\varphi \to \bot),\\
\varphi\wedge\neg\varphi &\vdash_{\mathbf{HM}} \neg\varphi \to \bot,\\
\varphi\wedge\neg\varphi &\vdash_{\mathbf{HM}} \bot,\\
&\vdash_{\mathbf{HM}} (\varphi\wedge\neg\varphi) \to \bot,\\
&\vdash_{\mathbf{HM}} ((\varphi\wedge\neg\varphi) \to \bot) \to \neg(\varphi\wedge\neg\varphi),\\
&\vdash_{\mathbf{HM}} \neg(\varphi\wedge\neg\varphi).
\end{aligned}
$$

∎

略証 (DM∨).

$$
\begin{aligned}
&\vdash_{\mathbf{HM}} \varphi \to (\varphi\vee\psi), && \text{(DI1)}\\
&\vdash_{\mathbf{HM}} (\varphi \to (\varphi\vee\psi)) \to (\neg(\varphi\vee\psi) \to \neg\varphi), && \text{(CON1)}\\
&\vdash_{\mathbf{HM}} \neg(\varphi\vee\psi) \to \neg\varphi, && \text{(MP)}\\
\neg(\varphi\vee\psi) &\vdash_{\mathbf{HM}} \neg\varphi. && \text{(DR)}
\end{aligned}
$$

同様に

$$\neg(\varphi\vee\psi) \vdash_{\mathbf{HM}} \neg\psi$$

となり，

$$
\begin{aligned}
\neg(\varphi\vee\psi) &\vdash_{\mathbf{HM}} \neg\varphi \to (\neg\psi \to (\neg\varphi\wedge\neg\psi)), && \text{(CI)}\\
\neg(\varphi\vee\psi) &\vdash_{\mathbf{HM}} \neg\psi \to (\neg\varphi\wedge\neg\psi), && \text{(MP)}\\
\neg(\varphi\vee\psi) &\vdash_{\mathbf{HM}} \neg\varphi\wedge\neg\psi && \text{(MP)}
\end{aligned}
$$

が得られる．逆に

$$
\begin{aligned}
\neg\varphi\wedge\neg\psi &\vdash_{\mathbf{HM}} \neg\varphi, && \text{(CE1)}\\
\neg\varphi\wedge\neg\psi &\vdash_{\mathbf{HM}} \neg\varphi \to (\varphi \to \bot), && \text{(CTI2)}\\
\neg\varphi\wedge\neg\psi &\vdash_{\mathbf{HM}} \varphi \to \bot && \text{(MP)}
\end{aligned}
$$

となり，同様に

$$\neg\varphi\wedge\neg\psi \vdash_{\mathbf{HM}} \psi \to \bot$$

も成り立つ．よって

$$
\begin{aligned}
\neg\varphi\wedge\neg\psi &\vdash_{\mathbf{HM}} (\varphi \to \bot) \to ((\psi \to \bot) \to ((\varphi\vee\psi) \to \bot)), && \text{(DE)}\\
\neg\varphi\wedge\neg\psi &\vdash_{\mathbf{HM}} (\psi \to \bot) \to ((\varphi\vee\psi) \to \bot), && \text{(MP)}\\
\neg\varphi\wedge\neg\psi &\vdash_{\mathbf{HM}} (\varphi\vee\psi) \to \bot, && \text{(MP)}\\
\neg\varphi\wedge\neg\psi &\vdash_{\mathbf{HM}} ((\varphi\vee\psi) \to \bot) \to \neg(\varphi\vee\psi), && \text{(NI)}\\
\neg\varphi\wedge\neg\psi &\vdash_{\mathbf{HM}} \neg(\varphi\vee\psi) && \text{(MP)}
\end{aligned}
$$

が得られる． ∎

定理 7.1.1.　φ と ψ を式とし，x を変項とし，φ と ψ には x が自由に現れているとする．このとき

$$\forall x(\varphi \leftrightarrow \psi) \vdash_{\mathbf{HM}} \exists x\varphi \rightarrow \exists x\psi.$$

略証．　a を φ と ψ に自由に現れない変項として，

$$\begin{aligned}
&\forall x(\varphi \leftrightarrow \psi) \vdash_{\mathbf{HM}} \varphi(x/a) \leftrightarrow \psi(x/a),\\
&\forall x(\varphi \leftrightarrow \psi) \vdash_{\mathbf{HM}} (\varphi(x/a) \leftrightarrow \psi(x/a)) \rightarrow (\varphi(x/a) \rightarrow \psi(x/a)),\\
&\forall x(\varphi \leftrightarrow \psi) \vdash_{\mathbf{HM}} \varphi(x/a) \rightarrow \psi(x/a)
\end{aligned}$$

が成り立つので，演繹法則より

$$\varphi(x/a), \forall x(\varphi \leftrightarrow \psi) \vdash_{\mathbf{HM}} \psi(x/a)$$

が成り立つ．存在記号の推論公理 (EI) より

$$\begin{aligned}
&\varphi(x/a), \forall x(\varphi \leftrightarrow \psi) \vdash_{\mathbf{HM}} \psi(x/a) \rightarrow \exists x\psi,\\
&\varphi(x/a), \forall x(\varphi \leftrightarrow \psi) \vdash_{\mathbf{HM}} \exists x\psi
\end{aligned}$$

が成り立ち，演繹法則より

$$\forall x(\varphi \leftrightarrow \psi) \vdash_{\mathbf{HM}} \varphi(x/a) \rightarrow \exists x\psi$$

が成り立つ．そして全称記号の推論公理 (UE) より

$$\forall x(\varphi \leftrightarrow \psi) \vdash_{\mathbf{HM}} \forall x(\varphi \rightarrow \exists x\psi)$$

となり，存在記号の推論公理 (EE) より

$$\begin{aligned}
&\forall x(\varphi \leftrightarrow \psi) \vdash_{\mathbf{HM}} \forall x(\varphi \rightarrow \exists x\psi) \rightarrow (\exists x\varphi \rightarrow \exists x\psi),\\
&\forall x(\varphi \leftrightarrow \psi) \vdash_{\mathbf{HM}} \exists x\varphi \rightarrow \exists x\psi
\end{aligned}$$

が得られる． ∎

7.1.4　HK

HM の推論規則はそのままに，公理に二重否定除去を追加すると古典論理の証明体系 **HK** となる．

HK の公理

HM の公理に次を追加:

(DNE)　$\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi.$

HK から証明可能な式

(CON3)　$(\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \varphi).$

(CON4)　$(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi).$

(RAA)　$(\neg\varphi \to \bot) \to \varphi$.

(EFQ)　$\bot \to \varphi$.

略証 (CON3).

$$
\begin{array}{rll}
\neg\varphi \to \psi, \neg\psi \vdash_{\mathbf{HK}} & \neg\psi \to \neg\neg\varphi, & \text{(CON1)} \\
\neg\varphi \to \psi, \neg\psi \vdash_{\mathbf{HK}} & \neg\psi, & \\
\neg\varphi \to \psi, \neg\psi \vdash_{\mathbf{HK}} & \neg\neg\varphi, & \text{(MP)} \\
\neg\varphi \to \psi, \neg\psi \vdash_{\mathbf{HK}} & \neg\neg\varphi \to \varphi, & \text{(DNE)} \\
\neg\varphi \to \psi, \neg\psi \vdash_{\mathbf{HK}} & \varphi, & \text{(MP)} \\
\neg\varphi \to \psi \vdash_{\mathbf{HK}} & \neg\psi \to \varphi. & \text{(DR)}
\end{array}
$$

∎

略証 (CON4).

$$
\begin{array}{rll}
\neg\varphi \to \neg\psi, \psi \vdash_{\mathbf{HK}} & \psi, & \\
\neg\varphi \to \neg\psi, \psi \vdash_{\mathbf{HK}} & \psi \to \neg\neg\psi, & \text{(DNI)} \\
\neg\varphi \to \neg\psi, \psi \vdash_{\mathbf{HK}} & \neg\neg\psi. & \text{(MP)}
\end{array}
$$

及び，(CON3) より

$$\neg\varphi \to \neg\psi, \psi \vdash_{\mathbf{HK}} \neg\neg\psi \to \varphi$$

となるので，(MP) より

$$\neg\varphi \to \neg\psi, \psi \vdash_{\mathbf{HK}} \varphi$$

が成り立つ．よって演繹法則より

$$\neg\varphi \to \neg\psi \vdash_{\mathbf{HK}} \psi \to \varphi$$

が得られる． ∎

略証 (RAA).

$$
\begin{array}{rll}
\vdash_{\mathbf{HK}} & (\neg\varphi \to \bot) \to \neg\neg\varphi, & \text{(NI)} \\
\neg\varphi \to \bot \vdash_{\mathbf{HK}} & \neg\neg\varphi, & \text{(DR)} \\
\neg\varphi \to \bot \vdash_{\mathbf{HK}} & \neg\neg\varphi \to \varphi, & \text{(DNE)} \\
\neg\varphi \to \bot \vdash_{\mathbf{HK}} & \varphi, & \text{(MP)} \\
\vdash_{\mathbf{HK}} & (\neg\varphi \to \bot) \to \varphi. & \text{(DR)}
\end{array}
$$

∎

略証 (EFQ).

$$
\begin{array}{rll}
& \vdash_{\mathbf{HK}} \bot \to (\neg\varphi \to \bot), & \text{(K)} \\
\bot & \vdash_{\mathbf{HK}} \neg\varphi \to \bot, & \text{(DR)} \\
\bot & \vdash_{\mathbf{HK}} (\neg\varphi \to \bot) \to \varphi, & \text{(RAA)} \\
\bot & \vdash_{\mathbf{HK}} \varphi, & \text{(MP)} \\
& \vdash_{\mathbf{HK}} \bot \to \varphi. & \text{(DR)}
\end{array}
$$

∎

定理 7.1.2.

$$\vdash_{\mathbf{HK}} (\varphi \to \psi) \to (\neg\varphi \lor \psi).$$

定理 7.1.3.

$$\vdash_{\mathbf{HK}} (\neg\varphi \lor \psi) \to \neg(\varphi \land \neg\psi).$$

定理 7.1.4.

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \forall x \neg\psi \to \neg\exists x\psi.$$

定理 7.1.5.

$$\vdash_{\mathbf{HK}} (\psi \to \gamma) \to (\varphi \land \psi \to \varphi \land \gamma).$$

定理 7.1.6.

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \forall x(\varphi \land \psi) \to (\varphi \land \forall\psi).$$

定理 7.1.7.

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \neg\forall x\psi \to \exists x \neg\psi.$$

定理 7.1.8.

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \neg(\varphi \land \neg\psi) \to (\neg\varphi \lor \psi).$$

定理 7.1.9.

$$\vdash_{\mathbf{HK}} (\varphi \to \exists x\psi) \to \exists x(\varphi \to \psi).$$

略証.

$$
\begin{aligned}
(\varphi \to \exists x\psi) &\to (\neg\varphi \lor \exists x\psi),\\
(\neg\varphi \lor \exists x\psi) &\to \neg(\varphi \land \neg\exists x\psi),\\
\neg(\varphi \land \neg\exists x\psi) &\to \neg(\varphi \land \forall x \neg\psi),\\
\neg(\varphi \land \forall x \neg\psi) &\to \neg\forall x(\varphi \land \neg\psi),\\
\neg\forall x(\varphi \land \neg\psi) &\to \exists x \neg(\varphi \land \neg\psi),\\
\exists x \neg(\varphi \land \neg\psi) &\to \exists x(\neg\varphi \lor \psi),\\
\exists x(\neg\varphi \lor \psi) &\to \exists x(\varphi \to \psi)
\end{aligned}
$$

7.2 HK′

HK の量化公理から (UI) と (EE) を取り除き，三段論法に加え**存在汎化**と**全称汎化**といった推論規則を用いた証明体系を **HK′** とする．つまり，

HK′ の公理

φ と ψ と ξ を式とし，x を変項とし，τ を項とするとき，次は **HK′** の公理である．

(S)　$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$.
(K)　$\varphi \to (\psi \to \varphi)$.
(DI1)　$\varphi \to (\varphi \lor \psi)$.
(DI2)　$\psi \to (\varphi \lor \psi)$.
(DE)　$(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to ((\varphi \lor \psi) \to \chi))$.
(CI)　$\varphi \to (\psi \to (\varphi \land \psi))$.
(CE1)　$(\varphi \land \psi) \to \varphi$.
(CE2)　$(\varphi \land \psi) \to \psi$.
(UE)　$\forall x\varphi \to \varphi(\tau/x)$.
(EI)　$\varphi(\tau/x) \to \exists x\varphi$.
(CTI1)　$\varphi \to (\neg\varphi \to \bot)$.
(CTI2)　$\neg\varphi \to (\varphi \to \bot)$.
(NI)　$(\varphi \to \bot) \to \neg\varphi$.
(DNE)　$\neg\neg\varphi \to \varphi$.

とし，推論規則には，三段論法に加えて

HK′ の汎化規則

φ と ψ を式とし，x と t を変項とし，φ に x が自由に現れるとし，また ψ と $\exists x\varphi$ に t **は自由に現れないとする．**

存在汎化　$\Gamma \vdash_{\mathbf{HK'}} \varphi(t/x) \to \psi$ ならば $\Gamma \vdash_{\mathbf{HK'}} \exists x\varphi \to \psi$ となる．
全称汎化　$\Gamma \vdash_{\mathbf{HK'}} \psi \to \varphi(t/x)$ ならば $\Gamma \vdash_{\mathbf{HK'}} \psi \to \forall x\varphi$ となる．

を用いる．規則の前提で太字で強調した文言は**固有変項条件**と呼ばれる．

メタ定理 7.2.1 (HK と HK′ は同値). 任意の式 φ に対して，$\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \varphi$ ならば $\Gamma \vdash_{\mathbf{HK'}} \varphi$ であり，その逆もまた然り．

メタ証明.

HK′ から示されたら HK からも証明可能　いま

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{HK'}} \varphi$$

であるとする．φ が **HK′** の公理であれば **HK** の公理でもあるし，Γ の公理であれば言わずもがな，これらの場合は

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \varphi$$

となる．φ が存在汎化によって得られているとき，つまり，φ とは

$$\exists x\psi \rightarrow \chi$$

なる形の式であって，$\psi(t/x) \rightarrow \chi$ から存在汎化で得られている場合，ここで t は χ と $\exists x\psi$ に自由に現れない変項であるが，このとき，

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \psi(t/x) \rightarrow \chi$$

であると仮定すれば，汎化と量化公理 (EE) によって

$$\begin{aligned}
&\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \forall t(\psi(t/x) \rightarrow \chi), \\
&\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \forall t(\psi(t/x) \rightarrow \chi) \rightarrow (\exists x\psi \rightarrow \chi), \\
&\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \exists x\psi \rightarrow \chi
\end{aligned}$$

となる．また φ が全称汎化によって得られているとき，つまり，φ とは

$$\chi \rightarrow \forall x\psi$$

なる形の式であって，$\chi \rightarrow \psi(t/x)$ から存在汎化で得られている場合，ここで t は χ と $\forall x\psi$ に自由に現れない変項であるが，このとき，

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \chi \rightarrow \psi(t/x)$$

であると仮定すれば，汎化と量化公理 (UI) によって

$$\begin{aligned}
&\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \forall t(\chi \rightarrow \psi(t/x)), \\
&\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \forall t(\chi \rightarrow \psi(t/x)) \rightarrow (\chi \rightarrow \forall x\psi), \\
&\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \chi \rightarrow \forall x\psi
\end{aligned}$$

となる．φ が三段論法で得られている場合，つまり ψ と $\psi \rightarrow \varphi$ なる形の式が **HK′** から示されている場合であるが，

$$\begin{aligned}
&\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \psi, \\
&\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \psi \rightarrow \varphi
\end{aligned}$$

と仮定すれば $\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \varphi$ も従う．

HK から示されたら HK′ からも証明可能　いま

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{HK}} \varphi$$

とする．φ が量化公理 (UI)(EE) 以外の **HK** の公理か，Γ の公理であれば

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{HK'}} \varphi$$

である．φ が

$$\forall t(\chi \rightarrow \psi(t/x)) \rightarrow (\chi \rightarrow \forall x\psi)$$

なる形の公理であるとき (t は χ と $\forall x\psi$ には自由に現れない),

$$\begin{aligned}
&\Gamma \vdash_{\mathbf{HK'}} \forall t(\chi \rightarrow \psi(t/x)) \rightarrow (\chi \rightarrow \psi(t/x)),\\
\chi \rightarrow \psi(t/x),\ &\Gamma \vdash_{\mathbf{HK'}} \chi \rightarrow \psi(t/x),\\
\chi \rightarrow \psi(t/x),\ &\Gamma \vdash_{\mathbf{HK'}} \chi \rightarrow \forall x\psi,\\
&\Gamma \vdash_{\mathbf{HK'}} (\chi \rightarrow \psi(t/x)) \rightarrow (\chi \rightarrow \forall x\psi),\\
\forall t(\chi \rightarrow \psi(t/x)),\ &\Gamma \vdash_{\mathbf{HK'}} \forall t(\chi \rightarrow \psi(t/x)),\\
\forall t(\chi \rightarrow \psi(t/x)),\ &\Gamma \vdash_{\mathbf{HK'}} \forall t(\chi \rightarrow \psi(t/x)) \rightarrow (\chi \rightarrow \psi(t/x)),\\
\forall t(\chi \rightarrow \psi(t/x)),\ &\Gamma \vdash_{\mathbf{HK'}} \chi \rightarrow \psi(t/x),\\
\forall t(\chi \rightarrow \psi(t/x)),\ &\Gamma \vdash_{\mathbf{HK'}} (\chi \rightarrow \psi(t/x)) \rightarrow (\chi \rightarrow \forall x\psi),\\
\forall t(\chi \rightarrow \psi(t/x)),\ &\Gamma \vdash_{\mathbf{HK'}} \chi \rightarrow \forall x\psi,\\
&\Gamma \vdash_{\mathbf{HK'}} \forall t(\chi \rightarrow \psi(t/x)) \rightarrow (\chi \rightarrow \forall x\psi)
\end{aligned}$$

となる (赤字で **HK′** の全称汎化規則を用いた箇所を示している)．つまり (UI) は **HK′** の定理である．同様に (EE) も **HK′** の定理である．実際,

$$\begin{aligned}
&\Gamma \vdash_{\mathbf{HK'}} \forall t(\psi(t/x) \rightarrow \chi) \rightarrow (\psi(t/x) \rightarrow \chi),\\
\psi(t/x) \rightarrow \chi,\ &\Gamma \vdash_{\mathbf{HK'}} \psi(t/x) \rightarrow \chi,\\
\psi(t/x) \rightarrow \chi,\ &\Gamma \vdash_{\mathbf{HK'}} \exists x\psi \rightarrow \chi,\\
&\Gamma \vdash_{\mathbf{HK'}} (\psi(t/x) \rightarrow \chi) \rightarrow (\exists x\psi \rightarrow \chi),\\
\forall t(\psi(t/x) \rightarrow \chi),\ &\Gamma \vdash_{\mathbf{HK'}} \forall t(\psi(t/x) \rightarrow \chi),\\
\forall t(\psi(t/x) \rightarrow \chi),\ &\Gamma \vdash_{\mathbf{HK'}} \forall t(\psi(t/x) \rightarrow \chi) \rightarrow (\psi(t/x) \rightarrow \chi),\\
\forall t(\psi(t/x) \rightarrow \chi),\ &\Gamma \vdash_{\mathbf{HK'}} \psi(t/x) \rightarrow \chi,\\
\forall t(\psi(t/x) \rightarrow \chi),\ &\Gamma \vdash_{\mathbf{HK'}} (\psi(t/x) \rightarrow \chi) \rightarrow (\exists x\psi \rightarrow \chi),\\
\forall t(\psi(t/x) \rightarrow \chi),\ &\Gamma \vdash_{\mathbf{HK'}} \exists x\psi \rightarrow \chi,\\
&\Gamma \vdash_{\mathbf{HK'}} \forall t(\psi(t/x) \rightarrow \chi) \rightarrow (\exists x\psi \rightarrow \chi)
\end{aligned}$$

となる．φ が汎化によって導かれているとき，つまり φ は

$$\forall x\psi$$

なる式であって，先に $\psi(t/x)$ なる式が **HK** から証明されているとき (x は ψ に自由に現れ，t は $\forall x\psi$ に自由に現れない変項である),

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{HK'}} \psi(t/x)$$

と仮定したら

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{HK'}} \forall x \psi$$

が成り立つ．実際，φ を $\chi \rightarrow \chi$ といった文とすれば

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{HK'}} \varphi \rightarrow \psi(t/x)$$

が成り立つので，全称汎化より

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{HK'}} \varphi \rightarrow \forall x \psi$$

となり，

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{HK'}} \varphi$$

と併せて

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{HK'}} \forall x \psi$$

が従う． ∎

7.3　直観主義と古典論理

任意の式 φ に対してその否定翻訳を φ^N と書く．$\vdash_{\mathbf{HM}} \varphi^N$ ならば $\vdash_{\mathbf{HK}} \varphi^N$ は当たり前．逆に $\vdash_{\mathbf{HK}} \varphi^N$ ならば $\vdash_{\mathbf{HK}} \varphi$ を経由して $\vdash_{\mathbf{HM}} \varphi^N$ となる．式を否定翻訳に制限すれば直観主義と古典論理は変わらない．

第 8 章

保存拡大

8.1　古典論理

推論公理 8.1.1 (HK の公理 (命題論理)).　φ と ψ と ξ を式とするとき，次は **HK** の公理である．

(S)　$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$.

(K)　$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$.

(CTD1)　$\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \bot)$.

(CTD2)　$\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \bot)$.

(DI)　$(\varphi \rightarrow \bot) \rightarrow \neg\varphi$.

(DI1)　$\varphi \rightarrow \varphi \vee \psi$.

(DI2)　$\psi \rightarrow \varphi \vee \psi$.

(DE)　$(\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \vee \psi \rightarrow \chi))$.

(CI)　$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi))$.

(CE1)　$\varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi$.

(CE2)　$\varphi \wedge \psi \rightarrow \psi$.

(DNE)　$\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$.

推論公理 8.1.2 (HK の公理 (量化)).　φ と ψ と ξ を式とし，x と y を変項とし，t を項とする．また y は ψ には自由に現れず，φ には x が自由に現れ，y と t は φ の中で x への代入について自由であるとする．このとき次は **HK** の公理である．

(UI)　$\forall y(\psi \rightarrow \varphi(x/y)) \rightarrow (\psi \rightarrow \forall x\varphi)$.

(UE)　$\forall x\varphi \rightarrow \varphi(x/t)$.

(EI)　$\varphi(x/t) \rightarrow \exists x\varphi$.

(EE)　$\forall y(\varphi(x/y) \rightarrow \psi) \rightarrow (\exists x\varphi \rightarrow \psi)$.

古典論理で証明可能なことを $\vdash_{\mathbf{HK}}$ と書く．

メタ定義 8.1.3 (HK における証明可能性).　式 φ が公理系 $\mathscr{S}$ から証明されただとか証明可能である **(provable)** ということは，

- φ は $\mathscr{S}$ の公理である．
- φ は **HK** の公理である．
- 式 ψ で，ψ と $\psi \rightarrow \varphi$ が $\mathscr{S}$ から証明されているものが取れる (三段論法 **(Modus Pones)**).
- 式 ψ と変項 a が取れて，ψ には x が自由に現れていて，a は φ の中で x への代入について自由であり，また $\mathscr{S}$ のどの公理の中にも a は自由に現れないとする．そして $\mathscr{S}$ から $\psi(x/a)$ が証明されていて，φ とは $\forall x\psi$ なる形の式である (汎化 **(generalization)**).

のいずれかが満たされているということである．

定理 8.1.4.　φ を $\mathcal{L}_\mathcal{E}$ の式とし，変項 x が φ に自由に現れるとき，

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \neg\exists x\varphi \;\rightarrow\; \forall x \neg\varphi.$$

略証.　a を，φ には現れず，かつ φ の中で x への代入について自由である変項とすると，存在記号の導入規則より

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \varphi(x/a) \;\rightarrow\; \exists x\varphi$$

が成り立つので，対偶を取って

$$\neg\exists x\varphi \vdash_{\mathbf{HK}} \neg\varphi(x/a)$$

となる．汎化により

$$\neg\exists x\varphi \vdash_{\mathbf{HK}} \forall x \neg\varphi$$

が成り立つ．∎

定理 8.1.5.　φ を $\mathcal{L}_\mathcal{E}$ の式とし，変項 x が φ に自由に現れるとき，

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \forall x \neg\varphi \;\rightarrow\; \neg\exists x\varphi.$$

定理 8.1.6.　φ を $\mathcal{L}_\mathcal{E}$ の式とし，変項 x が φ に自由に現れるとき，

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \neg\forall x\varphi \;\rightarrow\; \exists x \neg\varphi.$$

定理 8.1.7.　φ を $\mathcal{L}_\mathcal{E}$ の式とし，変項 x が φ に自由に現れるとき，

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \exists x \neg\varphi \;\rightarrow\; \neg\forall x\varphi.$$

略証.

定理 8.1.8.　φ と ψ に変項 x が自由に現れるとき,

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \forall x\,(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\exists x\varphi \rightarrow \exists x\psi).$$

略証.　全称記号の除去より

$$\forall x\,(\varphi \rightarrow \psi) \vdash_{\mathbf{HK}} \varphi \rightarrow \psi$$

となるので,

$$\varphi,\ \forall x\,(\varphi \rightarrow \psi) \vdash_{\mathbf{HK}} \psi$$

が成り立ち，存在記号の導入より

$$\varphi,\ \forall x\,(\varphi \rightarrow \psi) \vdash_{\mathbf{HK}} \exists x\psi$$

が成り立ち，演繹法則より

$$\forall x\,(\varphi \rightarrow \psi) \vdash_{\mathbf{HK}} \varphi \rightarrow \exists x\psi$$

が従う．汎化によって

$$\forall x\,(\varphi \rightarrow \psi) \vdash_{\mathbf{HK}} \forall x\,(\varphi \rightarrow \exists x\psi)$$

となり，存在記号の除去より

$$\forall x\,(\varphi \rightarrow \psi) \vdash_{\mathbf{HK}} \exists x\varphi \rightarrow \exists x\psi$$

が従う．

定理 8.1.9.　φ と ψ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とし，ψ には x が自由に現れて，φ には x が自由に現れないとき,

$$\vdash_{\mathbf{HK}} (\varphi \rightarrow \exists x\psi) \rightarrow \exists x\,(\varphi \rightarrow \psi).$$

略証.

$$\begin{aligned}
(\varphi \rightarrow \exists x\psi) &\rightarrow (\neg\varphi \vee \exists x\psi),\\
(\neg\varphi \vee \exists x\psi) &\rightarrow \neg(\varphi \wedge \neg\exists x\psi),\\
\neg(\varphi \wedge \neg\exists x\psi) &\rightarrow \neg(\varphi \wedge \forall x\,\neg\psi),\\
\neg(\varphi \wedge \forall x\,\neg\psi) &\rightarrow \neg\forall x\,(\varphi \wedge \neg\psi),\\
\neg\forall x\,(\varphi \wedge \neg\psi) &\rightarrow \exists x\,\neg(\varphi \wedge \neg\psi),\\
\exists x\,\neg(\varphi \wedge \neg\psi) &\rightarrow \exists x\,(\neg\varphi \vee \psi),\\
\exists x\,(\neg\varphi \vee \psi) &\rightarrow \exists x\,(\varphi \rightarrow \psi)
\end{aligned}$$

8.2　Henkin 拡大

第 2 章における証明を **HK** の証明に書き直す．第 2 章における証明体系は，次を推論の公理とした証明体系 **HE** と実質的に同一である．もちろん **HE** の推論規則は三段論法のみである．

推論公理 8.2.1 (HE の公理 (命題論理)). φ と ψ と ξ を $\mathcal{L}_\mathcal{E}$ の文とするとき，次は **HE** の公理である．

(S)　$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$.

(K)　$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$.

(CTD1)　$\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \perp)$.

(CTD2)　$\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \perp)$.

(DI)　$(\varphi \rightarrow \perp) \rightarrow \neg\varphi$.

(DI1)　$\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$.

(DI2)　$\psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$.

(DE)　$(\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi))$.

(CI)　$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi))$.

(CE1)　$(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$.

(CE2)　$(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$.

(DNE)　$\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$.

推論公理 8.2.2 (HE の公理 (量化)). φ を $\mathcal{L}_\mathcal{E}$の 式とし，t を主要 ε 項とし，x を変項とし，φ には x のみが自由に現れているとする．このとき次は **HE** の公理である．

(UI)　$\varphi(x/\varepsilon x \neg\varphi) \rightarrow \forall x\varphi$.

(UE)　$\forall x\varphi \rightarrow \varphi(x/t)$.

(EI)　$\varphi(x/t) \rightarrow \exists x\varphi$.

(EE)　$\exists x\varphi \rightarrow \varphi(x/\varepsilon x\varphi)$.

証明を書き直す手順は次のとおりである．

step1　まずは **HK** の公理に

存在記号の除去　変項 x のみが自由に現れる $\mathcal{L}_\mathcal{E}$ の式 φ に対して

$$\exists x\varphi \rightarrow \varphi(\varepsilon x\varphi)$$

を追加した証明体系を **HK**ε とし，第 2 章における証明を **HK**ε の証明に書き直す．

step2　**HK**$_\varepsilon$ の証明から **HK** の証明を構成する．

step3　step2 で得られた証明に残っている主要 ε 項を何らかの変項に置き換えれば，$\mathcal{L}_\in$ の式による **HK** の証明が得られる．

第 2 章の Σ の公理は $\mathcal{L}_\mathcal{E}$ の文の集まりであったが，それらを $\mathcal{L}_\in$ の文に直した公理体系を $\mathscr{S}$ と書く．$\mathscr{S}$ とは

相等性

$$\forall x \forall y \forall z (x = y \rightarrow (x \in z \rightarrow y \in z)),$$

$$\forall x\,\forall y\,\forall z\,(\,x = y \;\rightarrow\; (\,z \in x \;\rightarrow\; z \in y\,)).$$

外延性　$\forall x\,\forall y\,(\,\forall z\,(\,z \in x \;\leftrightarrow\; z \in y\,) \;\rightarrow\; x = y\,)$.

対　$\forall x\,\forall y\,\exists p\,\forall z\,(\,x = z \vee y = z \;\leftrightarrow\; z \in p\,)$.

合併　$\forall x\,\exists u\,\forall y\,(\,\exists z\,(\,z \in x \wedge y \in z\,) \;\leftrightarrow\; y \in u\,)$.

冪　$\forall x\,\exists p\,\forall y\,(\,\forall z\,(\,z \in y \;\rightarrow\; z \in x\,) \;\leftrightarrow\; y \in p\,)$.

置換　φ を $\mathcal{L}_{\in}$ の式とし，s, t を φ に自由に現れる変項とし，φ に自由に現れる項は s, t のみであるとし，x は φ で s への代入について自由であり，y, z は φ で t への代入について自由であるとするとき，

$$\forall x\,\forall y\,\forall z\,(\,\varphi(x,y) \wedge \varphi(x,z) \;\rightarrow\; y = z\,) \;\rightarrow\; \forall a\,\exists z\,\forall y\,(\,y \in z \;\leftrightarrow\; \exists x\,(\,x \in a \wedge \varphi(x,y)\,)).$$

正則性　$\forall a\,(\,\exists x\,(\,x \in a\,) \;\rightarrow\; \exists y\,(\,y \in a \wedge \forall z\,(\,z \in y \;\rightarrow\; z \notin a\,)))$.

無限　$\exists x\,(\,\exists s\,(\,\forall t\,(\,t \notin s\,) \wedge s \in x\,) \wedge \forall y\,(\,y \in x \;\rightarrow\; \exists u\,(\,\forall v\,(\,v \in u \;\leftrightarrow\; v \in y \vee v = y\,) \wedge u \in x\,)))$.

選択

である．

step0　step1 に入る前に公理系を $\mathscr{S}$ に揃える．いま ψ を $\mathcal{L}_{\in}$ の文とし，

$$\Sigma \vdash \psi$$

であるとする．このとき

$$\mathscr{S} \vdash \psi$$

である．これには Σ の公理が $\mathscr{S}$ から証明可能であることを示せばよい．たとえば外延性公理については，どんな主要 ε 項 a, b に対しても全称記号の推論規則によって

$$\mathscr{S} \vdash \forall x\,\forall y\,(\,\forall z\,(\,z \in x \;\leftrightarrow\; z \in y\,) \;\rightarrow\; x = y\,),$$
$$\mathscr{S} \vdash \forall y\,(\,\forall z\,(\,z \in a \;\leftrightarrow\; z \in y\,) \;\rightarrow\; a = y\,),$$
$$\mathscr{S} \vdash \forall z\,(\,z \in a \;\leftrightarrow\; z \in b\,) \;\rightarrow\; a = b$$

となる．他の公理も同様に $\mathscr{S}$ から証明可能である．ただし内包性公理だけは $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の文ではありえないので考慮する必要はない．

step1　ψ を $\mathcal{L}_{\in}$ の文とし，

$$\mathscr{S} \vdash \psi$$

であるとする．このとき

$$\mathscr{S} \vdash_{\mathbf{HK}\varepsilon} \psi$$

であることを示す．第 2 章の推論規則であって $\mathbf{HK}\varepsilon$ の公理でないものは

$$\varphi(\varepsilon x \neg\varphi) \;\rightarrow\; \forall x \varphi$$

の形の文のみであるから，これが $\mathbf{HK}\varepsilon$ から導かれることを示せばよい．いま φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とし，φ には変項 x のみが自由に現れているとする．このとき

$$\vdash_{\mathbf{HK}\varepsilon} \neg\forall x \varphi \;\rightarrow\; \exists x \neg\varphi$$

と

$$\vdash_{\mathbf{HK}\varepsilon} \exists x \neg\varphi \rightarrow \neg\varphi(\varepsilon x \neg\varphi)$$

が成り立つので

$$\vdash_{\mathbf{HK}\varepsilon} \neg\forall x\varphi \rightarrow \neg\varphi(\varepsilon x \neg\varphi)$$

が従い，対偶論法より

$$\vdash_{\mathbf{HK}\varepsilon} \varphi(\varepsilon x \neg\varphi) \rightarrow \forall x\varphi$$

が得られる．

step2　ψ を $\mathcal{L}_{\in}$ の文とし，

$$\mathscr{S} \vdash_{\mathbf{HK}\varepsilon} \psi$$

であるとする．このときの証明を $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ とし，この中から「存在記号の除去」であるものを全て取り出して $\varphi_{i_1}, \cdots \varphi_{i_m}$ と並べる．すると，

$$\mathscr{S} \cup \{\varphi_{i_1}, \cdots, \varphi_{i_m}\} \vdash_{\mathbf{HK}} \psi$$

ということになる．各 φ_{i_j} は

$$\exists x_j F_j(x_j) \rightarrow F_j(\varepsilon x_j F_j)$$

なる形をしているが，ここで $\varepsilon x_m F_m$ は $\varepsilon x_1 F_1, \cdots, \varepsilon x_m F_m$ の中で極大である (他の項の真部分項ではない) とする．すると

$$\mathscr{S} \cup \{\varphi_{i_1}, \cdots, \varphi_{i_{m-1}}\} \vdash_{\mathbf{HK}} \psi$$

が示される．実際，

$$\mathscr{S} \cup \{\varphi_{i_1}, \cdots, \varphi_{i_m}\} \vdash_{\mathbf{HK}} \psi$$

に対して演繹法則より

$$\mathscr{S} \cup \{\varphi_{i_1}, \cdots, \varphi_{i_{m-1}}\} \vdash_{\mathbf{HK}} (\exists x_m F_m(x_m) \rightarrow F_m(\varepsilon x_m F_m)) \rightarrow \psi$$

が成り立つので，$\mathscr{S} \cup \{\varphi_{i_1}, \cdots, \varphi_{i_{m-1}}\}$ から $(\exists x_m F_m(x_m) \rightarrow F_m(\varepsilon x_m F_m)) \rightarrow \psi$ への証明に現れる $\varepsilon x_m F_m$ を，この証明に使われていない変項 y に置き換えれば

$$\mathscr{S} \cup \{\varphi_{i_1}, \cdots, \varphi_{i_{m-1}}\} \vdash_{\mathbf{HK}} (\exists x_m F_m(x_m) \rightarrow F_m(y)) \rightarrow \psi$$

が成り立つ．すると汎化により

$$\mathscr{S} \cup \{\varphi_{i_1}, \cdots, \varphi_{i_{m-1}}\} \vdash_{\mathbf{HK}} \forall y\,((\exists x_m F_m(x_m) \rightarrow F_m(y)) \rightarrow \psi)$$

となり，量化規則 (EE) により

$$\mathscr{S} \cup \{\varphi_{i_1}, \cdots, \varphi_{i_{m-1}}\} \vdash_{\mathbf{HK}} \exists y\,(\exists x_m F_m(x_m) \rightarrow F_m(y)) \rightarrow \psi$$

が従う．他方で

$$\vdash_{\mathbf{HK}} \exists x_m F_m(x_m) \rightarrow \exists y F_m(y)$$

と

$$\vdash_{\mathbf{HK}} (\exists x_m F_m(x_m) \rightarrow \exists y F_m(y)) \rightarrow \exists y (\exists x_m F_m(x_m) \rightarrow F_m(y))$$

が成り立つので，三段論法より

$$\mathscr{S} \cup \{\varphi_{i_1}, \cdots, \varphi_{i_{m-1}}\} \vdash_{\mathbf{HK}} \psi$$

が得られる．以降も同様にして，極大な主要 ε 項が属する「存在記号の除去」を一本ずつ削除していけば

$$\mathscr{S} \vdash_{\mathbf{HK}} \psi$$

が出る． ∎

8.3　正則証明

今度は逆に，$\mathcal{L}_{\in}$ の式による **HK** の証明から $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の文による第 2 章の証明を構成する．**HK** の証明の中で汎化が使われている場合，その固有変項を適当な主要 ε 項に置き換えることになる．たとえば

$$\psi(x/a)$$

から (ψ は x のみ自由に現れる式とする)

$$\forall x \psi$$

が汎化で導かれる場合，a を $\varepsilon x \neg \psi$ に置き換えれば

$$\psi(x/\varepsilon x \neg \psi), \quad \psi(x/\varepsilon x \neg \psi) \rightarrow \forall x \psi$$

から三段論法で $\forall x \psi$ が出てくる．しかし二つの汎化に対して同じ固有変項が使われている場合は，その固有変項をどういった主要 ε 項に置き換えれば良いのかわからない．ゆえに，一つの固有変項が一つの汎化にしか用いられないように証明を直す必要がある．

メタ定義 8.3.1 (正則証明).　**正則証明 (regular proof)** とは，その証明の中に現れるどの固有変項も一度しか汎化に用いられていないものである．

メタ定理 8.3.2 (どんな証明も正則化できる).

$\mathcal{L}_{\in}$ の正則証明は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の証明に書き直せる．ψ を $\mathcal{L}_{\in}$ の文とし，

$$\mathscr{S} \vdash_{\mathbf{HK}\varepsilon} \psi$$

$\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ を ψ への $\mathcal{L}_{\in}$ の正則証明とする．そして

$$a_1, \cdots, a_m$$

をこの証明に使われる固有変項とし，$a_1, a_2, \cdots$ の順に汎化に用いられるとする．

step1　まず $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ の中に自由に現れる変項のうち，$a_1,\cdots,a_m$ 以外のものをすべて相異なる主要 ε 項に置き換える．たとえば x が $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ のいずれかの式の中に自由に現れているなら，主要 ε 項 τ を取ってきて，$\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ に自由に現れている x を一斉に τ に置き換えるといった要領である．$a_1,\cdots,a_m$ 以外の自由な変項を全て主要 ε 項に置き換え終わった式の列を

$$\hat{\varphi}_1,\cdots,\hat{\varphi}_n$$

と書く．このとき，

- φ_i が (UI) と (EE) 以外の **HK** の公理ならば $\hat{\varphi}_i$ は第 2 章の推論法則である．
- φ_i が (UI) か (EE) ならば $\hat{\varphi}_i$ は第 2 章の体系から証明可能である (step3).
- φ_i が $\mathscr{S}$ の公理ならば，φ_i は変項の置換による影響を受けないので $\hat{\varphi}_i$ は φ_i と同一である．
- φ_i が前の式 φ_j,φ_k から三段論法で得られているならば，$\hat{\varphi}_i$ も $\hat{\varphi}_j,\hat{\varphi}_k$ から三段論法で得られる．
- φ_i が前の式 φ_j から汎化で得られているならば，$\hat{\varphi}_i$ も $\hat{\varphi}_j$ から汎化で得られる．

step2　次に $a_m,a_{m-1},\cdots$ の順に固有変項を置き換える．a_i が

$$F(a_i)$$

から

$$\forall x F$$

への汎化に使われているならば，$\hat{\varphi}_1,\cdots,\hat{\varphi}_n$ に自由に現れる a_i を全て $\varepsilon x \neg F$ に置き換えて，$\forall x F$ の前の列に

$$F(\varepsilon x \neg F) \rightarrow \forall x F$$

を挿入すればよい．

step3　step2 の終了後に得られる式の列を $\tilde{\varphi}_1,\cdots,\tilde{\varphi}_m$ とする．これらは全て $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の文であるが，この中には **HK** の公理 (UI) と (EE) の形の式が残っている場合があるので，これはまだ第 2 章における証明とはなっていない．(UI) と (EE) は第 2 章の体系で証明可能であるから，$\tilde{\varphi}_1,\cdots,\tilde{\varphi}_m$ の中で (UI) または (EE) の形の式があれば，それより前の列に第 2 章の体系からその式への証明を挿入すればよい．

最後に (UI) と (EE) が第 2 章の体系で証明可能であることを示す．

(UI)　$\forall y\,(\psi \rightarrow \varphi(x/y)) \rightarrow (\psi \rightarrow \forall x\varphi)$ を示す．全称記号に関する規則より

$$\forall y\,(\psi \rightarrow \varphi(x/y)) \vdash \psi \rightarrow \varphi(x/\varepsilon x \neg\varphi)$$

が成り立つので

$$\psi,\ \forall y\,(\psi \rightarrow \varphi(x/y)) \vdash \varphi(x/\varepsilon x \neg\varphi)$$

が成り立ち，

$$\vdash \varphi(x/\varepsilon x \neg\varphi) \rightarrow \forall x\varphi$$

との三段論法より

$$\psi,\ \forall y\,(\psi \rightarrow \varphi(x/y)) \vdash \forall x\varphi$$

が従う．よって演繹規則より

$$\vdash \forall y\,(\psi \rightarrow \varphi(x/y)) \rightarrow (\psi \rightarrow \forall x\varphi)$$

が得られる．∎

(EE)　$\forall y\,(\varphi(x/y) \to \psi) \to (\exists x\varphi \to \psi)$ を示す．全称記号に関する規則より

$$\forall y\,(\varphi(x/y) \to \psi) \vdash \varphi(x/\varepsilon x\varphi) \to \psi$$

が成り立ち，他方で

$$\exists x\varphi \vdash \varphi(x/\varepsilon x\varphi)$$

も成り立つので，三段論法より

$$\exists x\varphi,\ \forall y\,(\varphi(x/y) \to \psi) \vdash \psi$$

が成り立つ．よって演繹規則より

$$\vdash \forall y\,(\varphi(x/y) \to \psi) \to (\exists x\varphi \to \psi)$$

が得られる．　■

以上で $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の文による φ への証明が得られる．

8.4　$\mathcal{L}$ の証明の変換

$\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の証明は $\mathcal{L}$ の証明でもあるが，逆に $\mathcal{L}$ の証明を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の証明にっ変換することも出来る．

いま φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の文とし，$\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ を φ への $\mathcal{L}$ の証明とする．そして φ_i を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式に書き直し，$\hat{\varphi}_i$ と書く．一般に式の書き換えは新しく用意する変項の違いで一意性を欠くが，同じ式を書き換える際に変項を揃えれば解決できる．たとえば，$\mathcal{L}$ の文の列

$$\varphi, \quad \varphi \to \psi, \quad \psi$$

を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の文に書き換えるときは，左の φ を $\hat{\varphi}$ に書き換えたならば，真ん中の $\varphi \to \psi$ は $\hat{\varphi} \to \tilde{\psi}$ に書き換えて，右の ψ は $\tilde{\psi}$ に書き換えればよい．また

$$\exists x G(x) \to G(\varepsilon x \hat{G}(x))$$

なる $\mathcal{L}$ の文については，

参考文献

[1] Moser, G. and Zach, R., "The Epsilon Calculus and Herbrand Complexity", Studia Logica 82, 133-155 (2006)

[2] 高橋優太, "1 階述語論理に対する ε 計算",
http://www2.kobe-u.ac.jp/ mkikuchi/ss2018files/takahashi1.pdf

[3] キューネン数学基礎論講義

[4] ブルバキ, 数学原論 集合論 1,

[5] 竹内外史, 現代集合論入門,

[6] 島内剛一, 数学の基礎,

[7] 戸次大介, 数理論理学,