

確率微分方程式

基礎工学研究科システム創成専攻修士 1 年

学籍番号 29C17095

百合川尚学

2017 年 10 月 14 日

レポート問題 1.

1 10/11

基礎の確率空間を $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ とする. $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ を部分 σ -加法族とし, Hilbert 空間 $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ とその閉部分空間 $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ を考える. 任意の $f \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ に対して, 射影定理により一意に定まる射影 $g \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ を

$$g = E[f | \mathcal{G}]$$

と表現する. $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ のときは $E[f | \mathcal{G}]$ を $E[f]$ と書いて f の期待値と呼ぶ.

レポート問題 2.

Hilbert 空間 $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ における内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$, ノルムを $\|\cdot\|_{L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)}$ と表示する. 次の C1 ~ C6 を示せ. 扱う関数は全て \mathbb{R} 値と考える. (係数体を実数体として Hilbert 空間を扱う.)

C1 $\forall f \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

$$E[f] = \int_{\Omega} f(x) \mu(dx)$$

C2 $\forall f \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu), \forall h \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$

$$\int_{\Omega} f(x)h(x) \mu(dx) = \int_{\Omega} E[f | \mathcal{G}](x)h(x) \mu(dx)$$

C3 $\forall f_1, f_2 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

$$E[f_1 + f_2 | \mathcal{G}] = E[f_1 | \mathcal{G}] + E[f_2 | \mathcal{G}]$$

C4 $\forall f_1, f_2 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

$$f_1 \leq f_2 \quad \text{a.s.} \quad \Rightarrow \quad E[f_1 | \mathcal{G}] \leq E[f_2 | \mathcal{G}] \quad \text{a.s.}$$

C5 $\forall f \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu), \forall g \in L^\infty(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$

$$E[gf | \mathcal{G}] = g E[f | \mathcal{G}]$$

C6 \mathcal{H} が \mathcal{G} の部分 σ -加法族ならば $\forall f \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

$$E[E[f | \mathcal{G}] | \mathcal{H}] = E[f | \mathcal{H}]$$

証明. C1 $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ とすれば, $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ の元は \mathcal{G} -可測でなくてはならないから Ω 上の定数関数である. 従って任意の $g \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ に或る定数 $\alpha \in \mathbb{R}$ が対応して $g(x) = \alpha (\forall x \in \Omega)$ と表せる. Hilbert 空間 $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ におけるノルムを $\|\cdot\|_{L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)}$ と表示すれば, 射影定理より任意の $f \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ の $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ への射影 $E[f | \mathcal{G}] = E[f]$ はノルム $\|f - g\|_{L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)}$

を最小にする $g \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ である. $g(x) = \alpha$ ($\forall x \in \Omega$) としてノルムを直接計算すれば,

$$\begin{aligned}
\|f - g\|_{L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)}^2 &= \int_{\Omega} |f(x) - \alpha|^2 \mu(dx) \\
&= \int_{\Omega} |f(x)|^2 - 2\alpha f(x) + |\alpha|^2 \mu(dx) \\
&= \int_{\Omega} |f(x)|^2 \mu(dx) - 2\alpha \int_{\Omega} f(x) \mu(dx) + |\alpha|^2 \\
&= \left| \alpha - \int_{\Omega} f(x) \mu(dx) \right|^2 - \left| \int_{\Omega} f(x) \mu(dx) \right|^2 + \int_{\Omega} |f(x)|^2 \mu(dx) \\
&= \left| \alpha - \int_{\Omega} f(x) \mu(dx) \right|^2 + \int_{\Omega} |f(x) - \beta|^2 \mu(dx) \quad (\beta := \int_{\Omega} f(x) \mu(dx))
\end{aligned}$$

と表現できて最終式は $\alpha = \int_{\Omega} f(x) \mu(dx)$ となることで最小となる. すなわち

$$E[f] = E[f | \mathcal{G}] = \int_{\Omega} f(x) \mu(dx).$$

C2 射影定理により, $f \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ の $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ への射影 $E[f | \mathcal{G}]$ は

$$\langle f - E[f | \mathcal{G}], h \rangle = 0 \quad (\forall h \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu))$$

を満たし, 内積の線型性から

$$\langle f, h \rangle = \langle E[f | \mathcal{G}], h \rangle \quad (\forall h \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu))$$

が成り立つ. 積分の形式で表示することにより

$$\int_{\Omega} f(x)h(x) \mu(dx) = \int_{\Omega} E[f | \mathcal{G}](x)h(x) \mu(dx) \quad (\forall h \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu))$$

が示された.

C3 射影定理により任意の $h \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ に対して

$$\langle (f_1 + f_2) - E[f_1 + f_2 | \mathcal{G}], h \rangle = 0, \langle f_1 - E[f_1 | \mathcal{G}], h \rangle = 0, \langle f_2 - E[f_2 | \mathcal{G}], h \rangle = 0$$

が成り立っている. 従って任意の $h \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ に対して

$$\begin{aligned}
0 &= \langle (f_1 + f_2) - E[f_1 + f_2 | \mathcal{G}], h \rangle - \langle f_1 - E[f_1 | \mathcal{G}], h \rangle - \langle f_2 - E[f_2 | \mathcal{G}], h \rangle \\
&= \langle (f_1 + f_2) - E[f_1 + f_2 | \mathcal{G}], h \rangle - \langle (f_1 + f_2) - (E[f_1 | \mathcal{G}] + E[f_2 | \mathcal{G}]), h \rangle \\
&= \langle E[f_1 | \mathcal{G}] + E[f_2 | \mathcal{G}] - E[f_1 + f_2 | \mathcal{G}], h \rangle
\end{aligned}$$

となり, 特に $h = E[f_1 | \mathcal{G}] + E[f_2 | \mathcal{G}] - E[f_1 + f_2 | \mathcal{G}] \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ とすれば

$$\|E[f_1 | \mathcal{G}] + E[f_2 | \mathcal{G}] - E[f_1 + f_2 | \mathcal{G}]\|_{L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)}^2 = 0$$

が成り立つことになるから

$$E[f_1 | \mathcal{G}] + E[f_2 | \mathcal{G}] = E[f_1 + f_2 | \mathcal{G}]$$

が示された.

- C4 「任意の $f \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ に対して, $f \geq 0$ a.s. ならば $E[f | \mathcal{G}] \geq 0$ a.s.」—(※) を示せばよい. これが示されれば $f_1, f_2 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ で $f_1 \leq f_2$ a.s. となるものに対し

$$0 \leq f_2 - f_1 \text{ a.s.} \Rightarrow 0 \leq E[f_2 - f_1 | \mathcal{G}] = E[f_2 | \mathcal{G}] - E[f_1 | \mathcal{G}] \text{ a.s.}$$

が成り立つ. しかし, この場合本題に入る前に次の命題を証明する必要がある. これは等号 $E[f_2 - f_1 | \mathcal{G}] = E[f_2 | \mathcal{G}] - E[f_1 | \mathcal{G}]$ が成り立つことを保証するためである.

命題. 考えている空間は今までと同じ Hilbert 空間 $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ である. 任意の実数 α と任意の $f \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ に対して次が成立する:

$$E[\alpha f | \mathcal{G}] = \alpha E[f | \mathcal{G}].$$

証明. 射影定理より

$$\langle f - E[f | \mathcal{G}], h \rangle = 0, \quad \langle \alpha f - E[\alpha f | \mathcal{G}], h \rangle = 0 \quad (\forall h \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu))$$

が成り立っているから

$$\begin{aligned} \langle E[\alpha f | \mathcal{G}] - \alpha E[f | \mathcal{G}], h \rangle &= \langle E[\alpha f | \mathcal{G}] - \alpha f, h \rangle - \langle \alpha E[f | \mathcal{G}] - \alpha f, h \rangle \\ &= \langle E[\alpha f | \mathcal{G}] - \alpha f, h \rangle - \alpha \langle f - E[f | \mathcal{G}], h \rangle = 0. \quad (\forall h \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)) \end{aligned}$$

特に $h = E[\alpha f | \mathcal{G}] - \alpha E[f | \mathcal{G}] \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ として

$$\|E[\alpha f | \mathcal{G}] - \alpha E[f | \mathcal{G}]\|_{L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)}^2 = 0$$

だから $E[\alpha f | \mathcal{G}] = \alpha E[f | \mathcal{G}]$ が成り立つ. ■

次に (※) を示す.

$$A := \{x \in \Omega \mid f(x) < 0\} \quad (\in \mathcal{F}),$$

$$B := \{x \in \Omega \mid E[f | \mathcal{G}](x) < 0\} \quad (\in \mathcal{G})$$

として $\mu(A) = 0 \Rightarrow \mu(B) = 0$ が成り立つと言えればよく, $\mu(A) = 0$ の下で $\mu(B) > 0$ と仮定しては不合理であることを以下に記述する.

$\mu(A) = 0, \mu(B) > 0$ であるとする. $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ の元を

$$h(x) := \begin{cases} E[f | \mathcal{G}](x) & (x \in B^c) \\ 0 & (x \in B) \end{cases}$$

として定義すると

$$\begin{aligned} \|f - h\|_{L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)}^2 &= \int_{\Omega} |f(x) - h(x)|^2 \mu(dx) \\ &= \int_{A^c \cap B^c} |f(x) - h(x)|^2 \mu(dx) + \int_{A^c \cap B} |f(x) - h(x)|^2 \mu(dx) \\ &= \int_{A^c \cap B^c} |f(x) - E[f | \mathcal{G}](x)|^2 \mu(dx) + \int_{A^c \cap B} |f(x)|^2 \mu(dx) \\ &< \int_{A^c \cap B^c} |f(x) - E[f | \mathcal{G}](x)|^2 \mu(dx) + \int_{A^c \cap B} |f(x) - E[f | \mathcal{G}](x)|^2 \mu(dx) \\ &= \|f - E[f | \mathcal{G}]\|_{L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)}^2 \end{aligned}$$

が成り立つ。これは $\mu(A) = 0$ であること, $\mu(A^c \cap B) = \mu(B) - \mu(A \cap B) = \mu(B) > 0$ であること, それから $A^c \cap B$ の上で

$$|f(x) - E[f | \mathcal{G}](x)|^2 - |f(x)|^2 = (f(x) - E[f | \mathcal{G}](x) + f(x))(-E[f | \mathcal{G}](x)) > 0$$

$$(\because f(x) \geq 0, E[f | \mathcal{G}](x) < 0, \quad \forall x \in A^c \cap B)$$

が成り立っていることによる。上の結果, すなわち

$$\|f - h\|_{L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)} < \|f - E[f | \mathcal{G}]\|_{L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)}$$

を満たす $h \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ が存在することは $E[f | \mathcal{G}]$ が f の射影であることに違反している。以上より $\mu(B) = 0$ でなくてはならず, (※) が示された。

C5 $\|E[gh | \mathcal{G}] - gE[f | \mathcal{G}]\|_{L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)} = 0$ が成り立つことを示す。任意の $h \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ に対して

$$\langle E[gh | \mathcal{G}] - gE[f | \mathcal{G}], h \rangle = \langle E[gh | \mathcal{G}] - gh, h \rangle + \langle gh - gE[f | \mathcal{G}], h \rangle$$

を考えると, 右辺が 0 になることが次のように証明される。先ず右辺第一項について, gh は $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ に入る。 g は或る μ -零集合 $E \in \mathcal{G}$ を除いて有界であるから, 或る正数 α によって $|g(x)| \leq \alpha$ ($\forall x \in E^c$) と抑えられ,

$$\int_{\Omega} |g(x)f(x)|^2 \mu(dx) = \int_{E^c} |g(x)|^2 |f(x)|^2 \mu(dx) \leq \alpha^2 \int_{E^c} |f(x)|^2 \mu(dx) = \alpha^2 \int_{\Omega} |f(x)|^2 \mu(dx) < \infty$$

が成り立つからである。従って射影定理により

$$\langle E[gh | \mathcal{G}] - gh, h \rangle = 0 \quad (\forall h \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)).$$

右辺第二項について,

$$\langle gh - gE[f | \mathcal{G}], h \rangle = \int_{\Omega} (f(x) - E[f | \mathcal{G}](x)) g(x) h(x) \mu(dx) = \langle f - E[f | \mathcal{G}], gh \rangle$$

であって, 先と同様の理由で $gh \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ ($\forall h \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$) が成り立つから射影定理より

$$\langle gh - gE[f | \mathcal{G}], h \rangle = 0 \quad (\forall h \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu))$$

であると判明した。始めの式に戻れば

$$\langle E[gh | \mathcal{G}] - gE[f | \mathcal{G}], h \rangle = 0 \quad (\forall h \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu))$$

が成り立つことになり, 特に $h = E[gh | \mathcal{G}] - gE[f | \mathcal{G}] \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ に対しては

$$\|E[gh | \mathcal{G}] - gE[f | \mathcal{G}]\|_{L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)}^2 = 0$$

となることから $E[gh | \mathcal{G}] = gE[f | \mathcal{G}]$ が示された。