ε 計算とクラスの導入による具体的で直観的な集合論の構築

関根深澤研 百合川尚学
学籍番号：29C17095

February 4, 2020

Contents

導入 ε について

- 量化 ∃, ∀ を使う証明を命題論理の証明に埋め込むために Hilbert が開始.
- 式 $\varphi(x)$ に対して

$$\varepsilon x \varphi(x)$$

という形のオブジェクトを作り，ε 項と呼ぶ．また命題論理の証明に埋め込む際には，∃ や ∀ の付いた式を

$$\varphi(x/\varepsilon x \varphi(x)) \overset{\text{def}}{\longleftrightarrow} \exists x \varphi(x),$$
$$\varphi(x/\varepsilon x \neg x \varphi(x)) \overset{\text{def}}{\longleftrightarrow} \forall x \varphi(x)$$

によって変換すればよい.

- 今回 ε 項を導入したのは「存在」と「実在」を同義とするため.
- Hilbert の ε 計算ではなく，ε 項を用いて一種の Henkin 拡大を行う.

導入 ε について

- ZF 集合論では集合というオブジェクトが用意されていないため，「存在」は「実在」ではない．たとえば

$$\exists x \forall y (y \notin x)$$

は定理であり「空集合は存在する」と読むが，空集合を“実際に取ってくる”ことは不可能.

- ε 項を使えば，∃ の公理と空集合の存在定理によって

$$\forall y (y \notin \varepsilon x \forall y (y \notin x))$$

が成り立つ

ε 項を使うメリット

- 証明で用いる推論規則は三段論法のみで済む.
- 証明が容易になる場合がある.

導入 クラスについて

- ブルバキ [] や島内 [] でも ε 項を使った集合論を展開.
- ところで,「φ である集合の全体」の意味の

$$\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$$

というオブジェクトも取り入れたい.
- **ZF** 集合論では定義による拡大 or インフォーマルな導入.
- ブルバキ [] や島内 [] では

$$\{\, x \mid \varphi(x) \,\} \overset{\text{def}}{=\!=} \varepsilon y \, \forall x \, (\, \varphi(x) \ \leftrightarrow \ x \in y \,)$$

と定めるが,

$$\exists y \, \forall x \, (\, \varphi(x) \ \leftrightarrow \ x \in y \,)$$

が成立しない場合は「φ である集合の全体」という意味を持たない.
- 式 φ から直接 $\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$ の形のオブジェクトを作ればよい.

クラス

式 φ に x のみが自由に現れているとき，$\varepsilon x \varphi(x)$, $\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$ の形のオブジェクトをクラス **(class)** と呼ぶ.

- クラスである ε 項は集合である.
- 集合でないクラスもある．たとえば $\{\, x \mid x = x \}$ や $\{\, x \mid x \notin x \}$ は集合ではない.

集合の定義は竹内 [] に倣う．定義により集合はクラスである.

集合

クラス c が

$$\exists x \,(\, c = x \,)$$

を満たすとき c を集合 **(set)** と呼び，そうでない場合は真クラス **(proper class)** と呼ぶ.

言語

- クラスという新しいオブジェクトを導入したら，この導入操作が “妥当” であるかどうかが問題になる．
- 妥当性は，**ZF** 集合論の命題 φ に対して

$$\textbf{ZF} \text{ 集合論で } \varphi \text{ が証明可能} \iff \text{新しい集合論で } \varphi \text{ が証明可能}$$

  が成り立つかどうかで検証する．
- 集合論の言語と証明のルールを明らかにしなくてはならない．
- 言語とは「変項」，「述語記号」，「論理記号」とその他もろもろの記号からなる．そして「式 (formula)」は言語の記号を用いて作られる．式を作るためには「項 (term)」が必要であり，文字は最もよく使われる項である．たとえば

$$s \in t$$

  と書けば一つの式が出来上がる．
- まず **ZF** 集合論の言語 $\mathcal{L}_\in$ を明示する．

言語 $\mathcal{L}_\in$

言語 $\mathcal{L}_\in$

矛盾記号	$\bot$
論理記号	$\neg,\ \vee,\ \wedge,\ \rightarrow$
量化子	$\forall,\ \exists$
述語記号	$=,\ \in$
変項	$x, y, z, \cdots$.

言語 $\mathcal{L}_{\in}$ の項と式

$\mathcal{L}_{\in}$ の項と式は次の規則で生成する．

$\mathcal{L}_{\in}$ の項と式

項 変項は項であり，またこれらのみが項である．

式
- $\perp$ は式である．
- 項 τ と項 σ に対して $\tau \in \sigma$ と $\tau = \sigma$ は式である．
- 式 φ に対して $\neg\varphi$ は式である．
- 式 φ と式 ψ に対して $\varphi \vee \psi$ と $\varphi \wedge \psi$ と $\varphi \rightarrow \psi$ はいずれも式である．
- 式 φ と項 x に対して $\exists x\varphi$ と $\forall x\varphi$ は式である．
- これらのみが式である．

言語の拡張

- クラスを正式に導入するには言語を拡張しなくてはならない．
- 拡張は二段階に分けて行う．始めに ε 項のために拡張し，次に $\{\, x \mid \varphi(x) \,\}$ の形の項のために拡張する．
- 始めの拡張により得る言語を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ と名付ける．

言語 $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$

矛盾記号	$\perp$
論理記号	$\neg,\ \vee,\ \wedge,\ \rightarrow$
量化子	$\forall,\ \exists,\ \varepsilon$
述語記号	$=,\ \in$
変項	$x, y, z, \cdots.$

$\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項と式

$\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項と式の定義

- 変項は項である.
- $\perp$ は式である.
- 項 τ と項 σ に対して $\tau \in \sigma$ と $\tau = \sigma$ は式である.
- 式 φ に対して $\neg\varphi$ は式である.
- 式 φ と式 ψ に対して $\varphi \vee \psi$ と $\varphi \wedge \psi$ と $\varphi \rightarrow \psi$ はいずれも式である.
- 式 φ と変項 x に対して $\exists x\varphi$ と $\forall x\varphi$ は式である.
- 式 φ と変項 x に対して $\varepsilon x\varphi$ は項である.
- これらのみが項と式である.

- $\mathcal{L}_{\in}$ との大きな違いは項と式の定義が循環している点.
- $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式が $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項を用いて作られるのは当然ながら，その逆に $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項もまた $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式から作られる.
- $\mathcal{L}_{\in}$ の式は $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式でもある.

言語 $\mathcal{L}$

矛盾記号	$\perp$
論理記号	$\neg,\ \vee,\ \wedge,\ \rightarrow$
量化子	$\forall,\ \exists$
述語記号	$=,\ \in$
変項	$x, y, z, \cdots$.
補助記号	$\{,\ \mid,\ \}$

$\mathcal{L}$ の項と式の定義

項

- 変項は項である.
- $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項は項である.
- x を変項とし，φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とするとき，$\{x \mid \varphi\}$ なる記号列は項である.
- これらのみが項である.

式

- $\perp$ は式である.
- 項 τ と項 σ に対して $\tau \in \sigma$ と $\tau = \sigma$ は式である.

いろんなブロック

ブロック

これは普通のブロックです

警告ブロック

警告！ これは警告ブロックだ！

例ブロック

例えば、こんなブロックです。