ε 計算とクラスの導入による具体的で直観的な集合論の構築

百合川尚学

平成 32 年 1 月 22 日

1　導入

2　言語

本稿の言語は三つある．一つ目は言語 $\mathcal{L}_{\in}$ であり，その語彙は次から成る：

矛盾記号 $\perp$

論理記号 $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$

量化子 $\forall$, $\exists$

述語記号 $=$, $\in$

変項 $x, y, z, \cdots$.

$\mathcal{L}_{\in}$ の項と式は次で定義される：

項 変項のみが $\mathcal{L}_{\in}$ の項である．

式
- $\perp$ は式である．
- s, t を項とするとき $\in st, = st$ は式である．
- φ, ψ を式とするとき $\vee\varphi\psi, \wedge\varphi\psi, \rightarrow\varphi\psi$ は式である．
- x を項とし φ を式とするとき $\exists x\varphi, \exists x\varphi$ は式である．

二つ目は言語 $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ であり，その語彙は $\mathcal{L}_{\in}$ の語彙に ε を追加したものである．$\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の項と式は循環定義になる．

- $\perp$ は式である．
- s, t を項とするとき $\in st, = st$ は式である．
- φ, ψ を式とするとき $\vee\varphi\psi, \wedge\varphi\psi, \rightarrow\varphi\psi$ は式である．
- x を変項とし φ を式とするとき $\exists x\varphi, \exists x\varphi$ は式である．
- x を変項とし φ を式とするとき $\varepsilon x\varphi$ は項である．

x を変項とし φ を $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の式とするとき，以下では $\varepsilon x\varphi$ なる項を ε 項と呼び，$\{\, x \mid \varphi \,\}$ なる項を内包項と呼ぶ．三つめは言語 $\mathcal{L}$ である．$\mathcal{L}$ の語彙は $\mathcal{L}_{\in}$ の語彙に ε 項及び内包項が加えたものである．

項 変項，ε 項，内包項のみが項である．

式
- $\perp$ は式である．
- s, t を項とするとき $\in st, = st$ は式である．
- φ, ψ を式とするとき $\vee\varphi\psi, \wedge\varphi\psi, \rightarrow\varphi\psi$ は式である．
- x を項とし φ を式とするとき $\exists x\varphi, \exists x\varphi$ は式である．

ε 項と内包項の中でも性質の良いものは

3　証明と公理

4　類と集合

5　保存拡大