Karatzas-Shreve solutions

2018 年 5 月 20 日

目次

第 1 章 3
1.1 Stochastic Processes and σ-Fields . . . 3

第 2 章 10
2.1 Kolmogorov の拡張定理 . . . 13
2.2 Kolmogorov-Čentsov の定理 . . . 16

連続関数の空間の位相

$[0,\infty)$ 上の $\mathbb{R}^d$ 値連続関数 の全体を $C[0,\infty)^d$ と表す．$C[0,\infty)^d$ は

$$d(w_1,w_2) \coloneqq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\left\{\sup_{t\leq k}|w_1(t)-w_2(t)| \wedge 1\right\}, \quad (w_1,w_2 \in C[0,\infty)^d)$$

により定める距離で完備可分距離空間となる．以下，$C[0,\infty)^d$ には d により広義一様収束位相を導入する．

連続関数の空間の Borel 集合族

$n=1,2,\cdots,\ B \in \mathscr{B}((\mathbb{R}^d)^n),\ 0 \leq t_1 < \cdots < t_n$ により

$$C = \left\{\, w \in C[0,\infty)^d \ ; \quad (w(t_1),\cdots,w(t_n)) \in B \,\right\}$$

と表される $C[0,\infty)^d$ の部分集合 C の全体を $\mathscr{C}$ とおく．このとき，$\mathscr{B}(C[0,\infty)^d) = \sigma[\mathscr{C}]$ が成り立つ．

証明． $w_0 \in C[0,\infty)^d$ とする．任意に $w \in C[0,\infty)^d$ を取れば，w の連続性により $d(w_0,w)$ の各項について

$$\sup_{t\leq n}|w_0(t)-w(t)| = \sup_{r\in[0,n]\cap\mathbb{Q}}|w_0(r)-w(r)| \quad (n=1,2,\cdots)$$

と表現できる．いま，任意に実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ を取れば

$$\left\{\, w \in C[0,\infty)^d \ ; \quad \sup_{r\in[0,n]\cap\mathbb{Q}}|w_0(r)-w(r)| \leq \alpha \,\right\} = \bigcap_{r\in[0,n]\cap\mathbb{Q}}\left\{\, w \in C[0,\infty)^d \ ; \quad |w_0(r)-w(r)| \leq \alpha \,\right\}$$

が成立し，右辺の各集合は $\mathscr{C}$ に属するから 左辺 $\in \sigma[\mathscr{C}]$ となる．従って

$$\psi_n : C[0,\infty)^d \ni w \longmapsto \sup_{r\in[0,n]\cap\mathbb{Q}}|w_0(r)-w(r)| \in \mathbb{R}, \quad (n=1,2,\cdots)$$

で定める ψ_n は可測 $\sigma[\mathscr{C}]/\mathscr{B}(\mathbb{R})$ である．$x \longmapsto x \wedge 1$ の連続性より $\psi_n \wedge 1$ も $\sigma[\mathscr{C}]/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測性を持ち，

$$d(w_0,w) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(\psi_n(w)\wedge 1)$$

により $C[0,\infty)^d \ni w \longmapsto d(w_0,w) \in \mathbb{R}$ の $\sigma[\mathscr{C}]/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測性が出るから，任意の $\epsilon > 0$ に対する球について

$$\left\{\, w \in C[0,\infty)^d \ ; \quad d(w_0,w) < \epsilon \,\right\} \in \sigma[\mathscr{C}]$$

が成り立つ．$C[0,\infty)^d$ は第二可算公理を満たし，可算基底は上式の形の球で構成されるから，$\mathfrak{O}(C[0,\infty)^d) \subset \sigma[\mathscr{C}]$ が従い $\mathscr{B}(C[0,\infty)^d) \subset \sigma[\mathscr{C}]$ を得る．次に逆の包含関係を示す．いま，任意に $n \in \mathbb{Z}_+$ と $t_1 < \cdots < t_n$ を選んで

$$\phi : C[0,\infty)^d \ni w \longmapsto (w(t_1),\cdots,w(t_n)) \in (\mathbb{R}^d)^n$$

により定める写像は連続である．実際，w_0 での連続性を考えると，任意の $\epsilon > 0$ に対して $t_n \leq N$ を満たす $N \in \mathbb{N}$ を取れば，$d(w_0,w) < \epsilon/(n2^N)$ ならば $\sum_{i=1}^{n}|w_0(t_i)-w(t_i)| < \epsilon$ が成り立つ．よって ϕ は w_0 で連続であり (各点連続)

$$\mathscr{B}((\mathbb{R}^d)^n) \subset \left\{\, A \in \mathscr{B}((\mathbb{R}^d)^n) \ ; \quad \phi^{-1}(A) \in \mathscr{B}(C[0,\infty)^d) \,\right\}$$

が出る．任意の $C \in \mathscr{C}$ は，$n \in \mathbb{N}$ と時点 $t_1 < \cdots < t_n$ によって決まる写像 ϕ によって $C = \phi^{-1}(B)$ $(\exists B \in \mathscr{B}((\mathbb{R}^d)^n))$ と表現できるから，$\mathscr{C} \subset \mathscr{B}(C[0,\infty)^d)$ が成り立ち $\sigma[\mathscr{C}] \subset \mathscr{B}(C[0,\infty)^d)$ が得られる． ∎

連続関数の空間に値を取る確率変数

$\omega \in \Omega$ に $\mathbb{R}^d$ 値連続確率過程 X のパスを対応させる写像

$$X_\bullet : \Omega \ni \omega \longmapsto (t \longmapsto X_t(\omega)), \quad (t \geq 0)$$

は可測 $\mathcal{F}/\mathscr{B}(C[0,\infty)^d)$ である．

証明．　任意に $C \in \mathscr{C}$ を取れば $C = \left\{ w \in C[0,\infty)^d \ ; \quad (w(t_1), \cdots, w(t_n)) \in B \right\}$, $(B \in \mathscr{B}((\mathbb{R}^d)^n))$ と表されるから

$$\{\, \omega \in \Omega \ ; \quad X_\bullet(\omega) \in C \,\} = \{\, \omega \in \Omega \ ; \quad (X_{t_1}(\omega), \cdots, X_{t_n}(\omega)) \in B \,\}$$

が成り立つ．右辺は $\mathcal{F}$ に属するから

$$\mathscr{C} \subset \left\{ C \in \sigma[\mathscr{C}] \ ; \quad (X_\bullet)^{-1}(C) \in \mathcal{F} \right\}$$

が従い，右辺は σ 加法族であるから $X_\bullet$ の $\mathcal{F}/\sigma[\mathscr{C}]$-可測性，つまり $\mathcal{F}/\mathscr{B}(C[0,\infty)^d)$-可測性が出る． ∎

第 1 章

1.1 Stochastic Processes and σ-Fields

Problem 1.5

Let Y be a modification of X, and suppose that every sample path of both processes are right-continuous sample paths. Then X and Y are indistinguishable.

証明. Karatzas-Shreve の問題文には "suppose that both processes have a.s. right-continuous sample paths" と書いてあるがこれは誤植である．実際，或る零集合 $\emptyset \neq N \in \mathscr{F}$ が存在し，$\omega \in \Omega \backslash N$ に対する X, Y のパスが右連続であるとする．このとき

$$\begin{aligned}\{X_t = Y_t,\ \forall t \geq 0\} &= \{X_t = Y_t,\ \forall t \geq 0\} \cap N + \{X_t = Y_t,\ \forall t \geq 0\} \cap N^c \\ &= \{X_t = Y_t,\ \forall t \geq 0\} \cap N + \bigcap_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,\infty)} \{X_r = Y_r\} \cap N^c\end{aligned}$$

が成り立つが，右辺第一項は $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ が完備である場合でないと可測集合であるという保証がない．従って全てのサンプルパスが右連続であると仮定し直す必要がある．この場合

$$\{X_t = Y_t,\ \forall t \geq 0\} = \bigcap_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,\infty)} \{X_r = Y_r\}$$

が成立するから，$P(X_r = Y_r) = 1\ (\forall r \geq 0)$ より

$$P(X_t = Y_t,\ \forall t \geq 0) = P\Bigg(\bigcap_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,\infty)} \{X_r = Y_r\}\Bigg) = 1$$

が従う． ∎

Problem 1.7

Let X be a process with every sample path RCLL. Let A be the event that X is continuous on $[0, t_0)$. Show that $A \in \mathscr{F}^X_{t_0}$.

証明. $[0, t_0)$ に属する有理数の全体を $\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q} \cap [0, t_0)$ と表すとき，

$$A = \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{\substack{p,q \in \mathbb{Q}^* \\ |p-q| < 1/n}} \left\{ \omega \in \Omega\ ;\quad \left|X_p(\omega) - X_q(\omega)\right| < \frac{1}{m} \right\}$$

が成立することを示せばよい．これが示されれば，$\omega \longmapsto \left(X_p(\omega), X_q(\omega)\right)$ の $\mathscr{F}_{t_0}^X/\mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$-可測性と

$$\Phi : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \ni (x,y) \longmapsto |x-y| \in \mathbb{R}$$

の $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2)/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-可測性より

$$\left\{\, \omega\in\Omega \;;\quad \left|X_p(\omega)-X_q(\omega)\right| < \frac{1}{m} \,\right\} = \left\{\, \omega\in\Omega \;;\quad \left(X_p(\omega), X_q(\omega)\right) \in \Phi^{-1}\left(B_{1/m}(0)\right) \,\right\} \in \mathscr{F}_{t_0}^X$$

が得られ $A \in \mathscr{F}_{t_0}^X$ が従う．($B_{1/m}(0) = \{\, x\in\mathbb{R} \;;\quad |x| < 1/m \,\}$.)

第一段　$\omega \in A^c$ を任意にとる．このとき或る $s\in(0,t_0)$ が存在して，$t\longmapsto X_t(\omega)$ は $t=s$ において左側不連続である．従って或る $m\geq 1$ については，任意の $n\geq 1$ に対し $0<s-u<1/3n$ を満たす u が存在して

$$|X_u(\omega)-X_s(\omega)| \geq \frac{1}{m}$$

を満たす．一方でパスの右連続性より $0<p-s,\ q-u<1/3n$ を満たす $p,q\in\mathbb{Q}^*$ が存在して

$$\left|X_p(\omega)-X_s(\omega)\right| < \frac{1}{4m},\quad \left|X_q(\omega)-X_u(\omega)\right| < \frac{1}{4m}$$

が成立する．このとき $0<|p-q|<1/n$ かつ

$$\left|X_p(\omega)-X_q(\omega)\right| \geq \left|X_p(\omega)-X_s(\omega)\right| - |X_s(\omega)-X_u(\omega)| - \left|X_q(\omega)-X_u(\omega)\right| \geq \frac{1}{2m}$$

が従い

$$\omega \in \bigcup_{m\geq 1}\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{\substack{p,q\in\mathbb{Q}^* \\ |p-q|<1/n}} \left\{\, \omega\in\Omega \;;\quad \left|X_p(\omega)-X_q(\omega)\right| \geq \frac{1}{m} \,\right\}$$

を得る．

第二段　任意に $\omega\in A$ を取る．各点で有限な左極限が存在するという仮定から，

$$X_{t_0}(\omega) \coloneqq \lim_{t\uparrow t_0} X_t(\omega)$$

と定めることにより[*1] $t\longmapsto X_t(\omega)$ は $[0,t_0]$ 上で一様連続となる．従って

$$\omega \in \bigcap_{m\geq 1}\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{\substack{p,q\in\mathbb{Q}^* \\ |p-q|<1/n}} \left\{\, \omega\in\Omega \;;\quad \left|X_p(\omega)-X_q(\omega)\right| < \frac{1}{m} \,\right\}$$

を得る． ∎

[*1] 実際 $X_{t_0}(\omega)$ は所与のものであるが，いまは $[0,t_0]$ 上での連続性を考えればよいから便宜上値を取り替える．

定義 1.1.1 (積 σ-加法族). Λ を空でない任意濃度の添字集合とする．$(S_\lambda, \mathcal{M}_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$ を可測空間の族とし，$S \coloneqq \prod_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ とおく．λ 射影を $p_\lambda : S \longrightarrow S_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$ と書くとき，

$$\left\{\, p_\lambda^{-1}(A_\lambda) \;;\quad A_\lambda \in \mathcal{M}_\lambda,\ \lambda \in \Lambda \,\right\}$$

が生成する σ-加法族を $(\mathcal{M}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の積 σ-加法族と呼び，$\prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{M}_\lambda$ で表す．$\Lambda = \{1, 2, \cdots\}$ の場合，

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{M}_\lambda = \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 \otimes \cdots$$

とも表記する．

Lemma1 for Exercise 1.8

Λ を空でない高々可算集合とする．$(S_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を第二可算公理を満たす位相空間の族とし $S \coloneqq \prod_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ とおくとき，

$$\mathscr{B}(S) = \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{B}(S_\lambda) \tag{1.1}$$

が成立する．(S には直積位相を導入する．この場合，S もまた第二可算公理を満たす．)

証明. 各 S_λ の開集合系及び可算基を $\mathcal{O}_\lambda$, $\mathscr{B}_\lambda$，S の開集合系を $\mathscr{O}$ とし，また λ 射影を $p_\lambda : S \longrightarrow S_\lambda$ と書く．先ず，任意の $O_\lambda \in \mathscr{O}_\lambda$ に対して $p_\lambda^{-1}(O_\lambda) \in \mathscr{O}$ が満たされるから

$$\mathscr{O}_\lambda \subset \left\{\, A_\lambda \in \mathscr{B}(S_\lambda) \;;\quad p_\lambda^{-1}(A_\lambda) \in \mathscr{B}(S) \,\right\}$$

が従い，右辺が σ-加法族であるから

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{B}(S_\lambda) = \sigma\left[\left\{\, p_\lambda^{-1}(A_\lambda) \;;\quad A_\lambda \in \mathscr{B}(S_\lambda),\ \lambda \in \Lambda \,\right\}\right] \subset \mathscr{B}(S)$$

を得る．一方で

$$\mathscr{B} \coloneqq \left\{\, \bigcap_{\lambda\in\Lambda'} p_\lambda^{-1}(B_\lambda) \;;\quad B_\lambda \in \mathscr{B}_\lambda,\ \Lambda' \subset \Lambda : \textit{finite subset} \,\right\}$$

は $\mathscr{O}$ の基底の一つである．実際，任意に $O \in \mathscr{O}$ を取れば，任意の $x \in O$ に対し或る有限集合 $\Lambda' \subset \Lambda$ が存在して

$$x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda'} p_\lambda^{-1}(O_\lambda) \subset O$$

が成立するが，更に S_λ の第二可算性より或る $\mathscr{B}'_\lambda \subset \mathscr{B}_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda')$ が存在して

$$x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda'} p_\lambda^{-1}(O_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda'} \bigcup_{B_\lambda\in\mathscr{B}'_\lambda} p_\lambda^{-1}(B_\lambda)$$

が満たされる．すなわち，任意の $O \in \mathscr{O}$ は

$$O = \bigcup_{E\in\mathscr{B}'} E, \quad (\exists \mathscr{B}' \subset \mathscr{B})$$

と表される．$\mathscr{B}$ は高々可算の濃度を持ち[*2]，$\mathscr{B} \subset \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{B}(S_\lambda)$ が満たされるから

$$\mathscr{O} \subset \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{B}(S_\lambda)$$

[*2] $L_0 \coloneqq \{\, \Lambda' \;;\quad \Lambda' \subset \Lambda : \textit{finite subset} \,\}$ は高々可算集合である．実際，$\Lambda_n \coloneqq \Lambda \times \cdots \times \Lambda$ (n copies of Λ) として $L \coloneqq \bigcup_{n=1}^{\#\Lambda} \Lambda_n$ とおき，$(x_1, \cdots, x_n) \in L$ に対し $\{x_1, \cdots, x_n\} \in L_0$ を対応させる $f : L \longrightarrow L_0$ を考えれば全射であるから $\mathrm{card}\, L_0 \leq \mathrm{card}\, L \leq \aleph_0$ が従う．

が従い (1.1) を得る． ∎

Lemma2 for Exercise 1.8

$T=\{1,2,\cdots\}$ を高々可算集合とし，S_i を第二可算公理を満たす位相空間，X_i を確率空間 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上の S_i-値確率変数とする $(i\in T)$．このとき，任意の並び替え $\pi:T\longrightarrow T$ に対して $S\coloneqq\prod_{i\in T}S_{\pi(i)}$ とおけば次が成立する:

$$\sigma(X_i;\ i\in T)=\left\{\,\{(X_{\pi(1)},X_{\pi(2)},\cdots)\in A\}\ ;\quad A\in\mathscr{B}(S)\,\right\}. \tag{1.2}$$

証明.

第一段　射影 $S\longrightarrow S_{\pi(n)}$ を p_n で表す．任意に $t_i\in T$ を取り $n\coloneqq\pi^{-1}(i)$ とおけば，任意の $B\in\mathscr{B}(S_n)$ に対して

$$X_i^{-1}(B)=\left\{(\cdots,X_{\pi(n)},\cdots)\in p_n^{-1}(B)\right\}\in\left\{\,\{(X_{\pi(1)},X_{\pi(2)},\cdots)\in A\}\ ;\quad A\in\mathscr{B}(S)\,\right\}$$

が成り立つから $\sigma(X_i;\ i\in T)\subset\left\{\,\{(X_{\pi(1)},X_{\pi(2)},\cdots)\in A\}\ ;\quad A\in\mathscr{B}(S)\,\right\}$ が従う．

第二段　任意の有限部分集合 $j\in T$ と $B_j\in\mathscr{B}(S_{\pi(j)})$ に対し

$$\left\{(X_{\pi(1)},X_{\pi(2)},\cdots)\in p_j^{-1}(B_j)\right\}=X_{\pi(j)}^{-1}(B_j)\in\sigma(X_i;\ i\in T)$$

が成立するから

$$\left\{\,p_i^{-1}(B_i)\ ;\quad B_i\in\mathscr{B}(S_{\pi(i)}),\ i\in T\,\right\}\subset\left\{\,A\in\mathscr{B}(S)\ ;\quad\{(X_{\pi(1)},X_{\pi(2)},\cdots)\in A\}\in\sigma(X_i;\ i\in T)\,\right\}$$

が従う．右辺は σ-加法族であり，前補題より左辺は $\mathscr{B}(S)$ を生成するから前段と併せて (1.2) を得る． ∎

Lemma3 for Exercise 1.8

$X=\{\,X_t\ ;\quad 0\le t<\infty\,\}$ を確率空間 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上の $\mathbb{R}^d$-値確率過程とする．任意の空でない $S\subset[0,\infty)$ に対し

$$\mathcal{F}_S^X\coloneqq\sigma(X_s;\ s\in S)$$

とおくとき，任意の空でない $T\subset[0,\infty)$ に対して次が成立する:

$$\mathcal{F}_T^X\coloneqq\bigcup_{S\subset T:at\ most\ countable}\mathcal{F}_S^X. \tag{1.3}$$

証明.　便宜上

$$\mathcal{F}\coloneqq\bigcup_{S\subset T:at\ most\ countable}\mathcal{F}_S^X$$

とおく．まず，任意の $S\subset T$ に対し $\mathcal{F}_S^X\subset\mathcal{F}_T^X$ が成り立つから

$$\mathcal{F}\subset\mathcal{F}_T^X$$

が従う．また $\sigma(X_t)=\mathcal{F}_{\{t\}}^X,\ (\forall t\in T)$ より

$$\bigcup_{t\in T}\sigma(X_t)\subset\mathcal{F}$$

が成り立つから，あとは $\mathcal{F}$ が σ-加法族であることを示せばよい．実際，$\mathcal{F}$ は σ-加法族の合併であるから Ω を含みかつ補演算で閉じる．また $B_n \in \mathcal{F}$, $n = 1, 2, \cdots$ に対しては，$B_n \in \mathcal{F}^X_{S_n}$ を満たす高々可算集合 $S_n \subset T$ が対応して

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}^X_{S_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(X_s;\ s \in S_n) \subset \sigma\Bigl(X_s;\ s \in \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\Bigr)$$

が成り立つから，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \sigma\Bigl(X_s;\ s \in \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\Bigr) \subset \mathcal{F}$$

が従う．ゆえに $\mathcal{F}$ は σ-加法族であり (1.3) を得る． ∎

Exercise 1.8

Let X be a process whose sample paths are RCLL almost surely, and let A be the event that X is continuous on $[0, t_0)$. Show that A can fail to be in $\mathscr{F}^X_{t_0}$, but if $\{\, \mathscr{F}_t \;;\quad t \geq 0 \,\}$ is a fitration satisfying $\mathscr{F}^X_t \subset \mathscr{F}_t,\ t \geq 0$, and $\mathscr{F}^X_{t_0}$ contains all P-null sets of $\mathscr{F}$, then $A \in \mathscr{F}_{t_0}$.

証明.

第一段　高々可算な集合 $S = \{t_1, t_2, \cdots\} \subset [0, t_0]$ に対し，昇順に並び替えたものを $t_{\pi(1)} < t_{\pi(2)} < \cdots$ と表し

$$\mathcal{F}^X_S := \Bigl\{ \bigl\{(X_{t_{\pi(1)}}, X_{t_{\pi(2)}}, \cdots) \in B\bigr\} \;;\quad B \in \mathscr{B}((\mathbb{R}^d)^{\#S}) \Bigr\}$$

とおく．ただし S が可算無限の場合は $(\mathbb{R}^d)^{\#S} = \mathbb{R}^\infty$ である．このとき (1.2) より

$$\sigma(X_s;\ s \in S) = \mathcal{F}^X_S$$

が成り立ち，(1.3) より

$$\mathscr{F}^X_{t_0} = \sigma(X_t;\ 0 \leq t \leq t_0) = \bigcup_{S \subset [0,t_0]:\mathit{at\ most\ countable}} \mathcal{F}^X_S$$

が満たされる．すなわち，$\mathscr{F}^X_{t_0}$ の任意の元は $\{(X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots) \in B\}$, $(t_1 < t_2 < \cdots)$ の形で表される．

第二段

Problem 1.10 unsolved

Let X be a process with every sample path LCRL, and let A be the event that X is continuous on $[0, x_0]$. Let X be adapted to a right-continuous filtration $(\mathscr{F}_t)_{t \geq 0}$. Show that $A \in \mathscr{F}_{t_0}$.

証明.

第一段　$\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q} \cap [0, t_0]$ とおく．いま，任意の $n \geq 1$ と $r \in \mathbb{Q}^*$ に対し

$$B_n(r) := \bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{k \leq m} \left\{ \omega \in \Omega \;;\quad \Bigl| X_r(\omega) - X_{r+\frac{1}{k}}(\omega) \Bigr| \leq \frac{1}{n} \right\}$$

と定めるとき，

$$A = \bigcap_{r\in\mathbb{Q}^*}\bigcap_{n\geq 1} B_n(r)$$

が成立することを示す．これが示されれば，

$$\left\{ \omega\in\Omega \ ; \quad \left| X_r(\omega) - X_{r+\frac{1}{k}}(\omega) \right| \leq \frac{1}{n} \right\} \in \mathscr{F}_{r+\frac{1}{k}}, \quad (\forall r\in\mathbb{Q}^*,\ k\geq 1)$$

とフィルトレーションの右連続性から

$$B_n(r) \in \bigcap_{k\geq m} \mathscr{F}_{r+\frac{1}{k}} = \mathscr{F}_{r+} = \mathscr{F}_r$$

が従い $A\in\mathscr{F}_{t_0}$ が出る．

第二段

Problem 1.16

If the process X is measurable and the random time T is finite, then the function X_T is a random variable.

証明.

$$\tau : \Omega \ni \omega \longmapsto (T(\omega),\omega) \in [0,\infty)\times\Omega$$

とおけば，任意の $A\in\mathscr{B}([0,\infty))$, $B\in\mathscr{F}$ に対して

$$\tau^{-1}(A\times B) = \{\ \omega\in\Omega \ ; \quad (T(\omega),\omega)\in A\times B\ \} = T^{-1}(A)\cap B \in \mathscr{F}$$

が満たされる

$$\{\ A\times B \ ; \quad A\in\mathscr{B}([0,\infty)),\ B\in\mathscr{F}\ \} \subset \left\{ E\in\mathscr{B}([0,\infty))\otimes\mathscr{F} \ ; \quad \tau^{-1}(E)\in\mathscr{F} \right\}$$

が従い τ の $\mathscr{F}/\mathscr{B}([0,\infty))\otimes\mathscr{F}$-可測性が出る．$X_T = X\circ\tau$ より X_T は可測 $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$ である． ■

Problem 1.17

Let X be a measurable process and T a random time. Show that the collection of all sets of the form $\{X_T\in A\}$ and $\{X_T\in A\}\cup\{T=\infty\}; A\in\mathscr{B}(\mathbb{R})$, forms a sub-$\sigma$-field of $\mathscr{F}$.

証明. X_T の定義域は $\{T<\infty\}$ であるから，

$$\mathscr{G} := \{\ \{T<\infty\}\cap E \ ; \quad E\in\mathscr{F}\ \}$$

とおけば，前問の結果より X_T は可測 $\mathscr{G}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$ である．$\mathscr{G}\subset\mathscr{F}$ より

$$\mathscr{H} := \{\ \{X_T\in A\},\ \{X_T\in A\}\cup\{T=\infty\} \ ; \quad A\in\mathscr{B}(\mathbb{R})\ \}$$

に対して $\mathscr{H}\subset\mathscr{F}$ が成立する．あとは $\mathscr{H}$ が σ-加法族であることを示せばよい．実際，$A=\mathbb{R}$ のとき

$$\{X_T\in A\}\cup\{T=\infty\} = \{T<\infty\}\cup\{T=\infty\} = \Omega$$

となり $\Omega \in \mathscr{H}$ が従い，また

$$
\begin{aligned}
&\{X_T \in A\}^c = \{X_T \in A^c\} \cup \{T = \infty\}, \\
&(\{X_T \in A\} \cup \{T = \infty\})^c = \{X_T \in A^c\} \cap \{T < \infty\} = \{X_T \in A^c\}
\end{aligned}
$$

より $\mathscr{H}$ は補演算で閉じる．更に $B_n \in \mathscr{H}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を取れば，

$$
\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \left\{ X_T \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}
$$

或は

$$
\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \left\{ X_T \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\} \cup \{T = \infty\}
$$

が成立し $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathscr{H}$ を得る． ∎

第 2 章

> **定理 2.0.1.** Dynkin 族の定義 (iii) は，$\mathscr{D}$ が可算直和で閉じていることと同値である．

証明． $\mathscr{D}$ が可算直和について閉じているとする．このとき単調増大列 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ を取り

$$B_1 \coloneqq A_1, \quad B_n \coloneqq A_n \backslash A_{n-1}, \quad (n \geq 2)$$

とおけば，Dynkin 族の定義 (ii) より $B_n \in \mathscr{D}$ $(n \geq 1)$ が満たされ

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathscr{D}$$

が成立する．逆に $\mathscr{D}$ が (iii) を満たしているとして，互いに素な集合列 $(B_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{D}$ を取る．$A^c = \Omega \backslash A$ と Dynkin 族の定義 (i)(ii) より，$A, B \in \mathscr{D}$ が $A \cap B = \emptyset$ を満たしていれば $A^c \cap B^c = A^c - B \in \mathscr{D}$ が成り立ち

$$B_1^c \cap B_2^c \cap \cdots \cap B_n^c = \left(\cdots \left(\left(B_1^c \cap B_2^c \right) \cap B_3^c \right) \cap \cdots \cap B_{n-1}^c \right) \cap B_n^c \in \mathscr{D}, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

が得られる．よって

$$D_n \coloneqq \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega \backslash \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i^c \right), \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

により定める単調増大列 $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ は $\mathscr{D}$ に含まれ

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathscr{D}$$

が成立する． ∎

> **Dynkin system theorem**
>
> Let $\mathscr{C}$ be a collection of subsets of Ω which is closed under pairwise intersection. If $\mathscr{D}$ is a Dynkin system containing $\mathscr{C}$, then $\mathscr{D}$ also contains the σ-field $\sigma(\mathscr{C})$ generated by $\mathscr{C}$.

証明． $\mathscr{C}$ を含む最小の Dynkin 族を $\delta(\mathscr{C})$ と書く．

第一段 $\delta(\mathscr{C})$ が交演算について閉であれば $\delta(\mathscr{C})$ は σ-加法族である．実際，

$$A^c = \Omega \backslash A$$

より $\delta(\mathscr{C})$ は補演算で閉じるから，交演算で閉じていれば，$A_n \in \delta(\mathscr{C})\ (n = 1, 2, \cdots)$ に対し

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_{n-1}^c \cap A_n \in \delta(\mathscr{C})$$

が従い $\sigma(\mathscr{C}) \subset \delta(\mathscr{C}) \subset \mathscr{D}$ が得られる[*1]．

第二段 $\delta(\mathscr{C})$ が交演算について閉じていることを示す．いま，

$$\mathscr{D}_1 \coloneqq \{\, B \in \delta(\mathscr{C}) \ ; \quad A \cap B \in \delta(\mathscr{C}),\ \forall A \in \mathscr{C} \,\}$$

により定める $\mathscr{D}_1$ は Dynkin 族であり $\mathscr{C}$ を含むから

$$\delta(\mathscr{C}) \subset \mathscr{D}_1$$

が成立する．従って

$$\mathscr{D}_2 \coloneqq \{\, B \in \delta(\mathscr{C}) \ ; \quad A \cap B \in \delta(\mathscr{C}),\ \forall A \in \delta(\mathscr{C}) \,\}$$

により Dynkin 族 $\mathscr{D}_2$ を定めれば，$\mathscr{C} \subset \mathscr{D}_2$ が満たされ

$$\delta(\mathscr{C}) \subset \mathscr{D}_2$$

が得られる．よって $\delta(\mathscr{C})$ は交演算について閉じている． ∎

Problem 1.4

Let $X = \{\, X_t \ ; \quad 0 \leq t < \infty \,\}$ be a stochastic process for which $X_0, X_{t_1} - X_{t_0}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ are independent random variables, for every integer $n \geq 1$ and indices $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty$. Then for any fixed $0 \leq s < t < \infty$, the increment $X_t - X_s$ is independent of $\mathscr{F}_s^X$.

この主張の逆も成立する:

証明． 先ず任意の $s \leq t \leq r$ に対し $\sigma(X_t - X_s) \subset \mathscr{F}_r^X$ が成り立つ．実際，

$$\Phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \ni (x, y) \longmapsto x - y$$

の連続性と $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) = \mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ より，任意の $E \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$(X_t - X_s)^{-1}(E) = \left\{ (X_t, X_s) \in \Phi^{-1}(E) \right\} \in \sigma(X_s, X_t) \subset \mathscr{F}_r^X \tag{2.1}$$

が満たされる．よって任意に $A_0 \in \sigma(X_0)$, $A_i \in \sigma(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})$ を取れば，$X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ が $\mathscr{F}_{t_{n-1}}^X$ と独立であるから

$$\mathrm{P}(A_0 \cap A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathrm{P}(A_0 \cap A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})\,\mathrm{P}(A_n)$$

が成立する．帰納的に

$$\mathrm{P}(A_0 \cap A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathrm{P}(A_0)\,\mathrm{P}(A_1) \cdots \mathrm{P}(A_n)$$

が従い $X_0, X_{t_1} - X_{t_0}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ の独立性を得る． ∎

[*1] σ-加法族は Dynkin 族であるから，$\delta(\mathscr{C}) \subset \sigma(\mathscr{C})$ が成り立ち $\sigma(\mathscr{C}) = \delta(\mathscr{C})$ となる．

証明 (Problem 1.4).

第一段 Dynkin 族を次で定める:

$$\mathscr{D} := \{\, A \in \mathscr{F} \ ; \quad \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B),\ \forall B \in \sigma(X_t - X_s)\,\}.$$

いま，任意に $0 = s_0 < \cdots < s_n = s$ を取り固定し

$$\mathscr{A}_{s_0,\cdots,s_n} := \left\{ \bigcap_{i=0}^{n} A_i \ ; \quad A_0 \in \sigma(X_0),\ A_i \in \sigma(X_{s_i} - X_{s_j}),\ i = 1, \cdots, n \right\}$$

により乗法族を定めれば，仮定より $\sigma(X_{s_i} - X_{s_{i-1}})$ と $\sigma(X_t - X_s)$ が独立であるから

$$\mathscr{A}_{s_0,\cdots,s_n} \subset \mathscr{D}$$

が成立し，Dynkin 族定理により

$$\sigma(X_{s_0}, X_{s_1} - X_{s_0}, \cdots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}}) = \sigma\left[\mathscr{A}_{s_0,\cdots,s_n}\right] \subset \mathscr{D} \tag{2.2}$$

が従う．

第二段 $\sigma(X_{s_0}, X_{s_1} - X_{s_0}, \cdots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}})$ の全体が $\mathscr{F}_s^X$ を生成することを示す．先ず，(2.1) より

$$\bigcup_{\substack{n \geq 1 \\ s_0 < \cdots < s_n}} \sigma(X_{s_0}, X_{s_1} - X_{s_0}, \cdots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}}) \subset \mathscr{F}_s^X \tag{2.3}$$

が成立する．一方で，任意の $X_r^{-1}(E)$ ($\forall E \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$, $0 < r \leq s$) について，

$$\Psi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \ni (x, y) \longmapsto x + y$$

で定める連続写像を用いれば

$$X_r^{-1}(E) = (X_r - X_0 + X_0)^{-1}(E) = \left\{(X_r - X_0, X_0) \in \Psi^{-1}(E)\right\}$$

となり，$X_r^{-1}(E) \in \sigma(X_0, X_r - X_0)$ が満たされ

$$\sigma(X_r) \subset \sigma(X_0, X_r - X_0) \subset \sigma(X_0, X_r - X_0, X_s - X_r) \tag{2.4}$$

が出る．$\sigma(X_0) \subset \sigma(X_0, X_s - X_0)$ も成り立ち

$$\bigcup_{0 \leq r \leq s} \sigma(X_r) \subset \bigcup_{\substack{n \geq 1 \\ s_0 < \cdots < s_n}} \sigma(X_{s_0}, X_{s_1} - X_{s_0}, \cdots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}})$$

が従うから，(2.3) と併せて

$$\mathscr{F}_s^X = \sigma\left[\bigcup_{\substack{n \geq 1 \\ s_0 < \cdots < s_n}} \sigma(X_{s_0}, X_{s_1} - X_{s_0}, \cdots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}})\right] \tag{2.5}$$

が得られる．

第三段 任意の $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = s$ に対し，(2.1) と (2.4) より

$$\sigma(X_{s_0}, X_{s_1} - X_{s_0}, \cdots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}}) = \sigma(X_{s_0}, X_{s_1}, \cdots, X_{s_n}) \tag{2.6}$$

が成り立つ．

第四段　二つの節点 $0 = s_0 < \cdots < s_n = s$ と $0 = r_0 < \cdots < r_m = s$ の合併を $0 = u_0 < \cdots < u_k = s$ と書けば

$$\sigma(X_{s_0}, \cdots, X_{s_n}) \cup \sigma(X_{r_0}, \cdots, X_{r_m}) \subset \sigma(X_{u_0}, \cdots, X_{u_k})$$

が成り立つから

$$\bigcup_{\substack{n \geq 1 \\ s_0 < \cdots < s_n}} \sigma(X_{s_0}, X_{s_1}, \cdots, X_{s_n})$$

は交演算で閉じている．従って (2.2)，(2.5)，(2.6) 及び Dynkin 族定理により

$$\mathscr{F}_s^X = \sigma\left[\bigcup_{\substack{n \geq 1 \\ s_0 < \cdots < s_n}} \sigma(X_{s_0}, X_{s_1} - X_{s_0}, \cdots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}})\right] = \sigma\left[\bigcup_{\substack{n \geq 1 \\ s_0 < \cdots < s_n}} \sigma(X_{s_0}, X_{s_1}, \cdots, X_{s_n})\right] \subset \mathscr{D}$$

が従い定理の主張を得る． ∎

2.1 Kolmogorov の拡張定理

Daniell, Kolmogorov

Let $(Q_t)_{t \in T}$ be a consistent family of finite-dimensional distributions. Then there is a probability measure P on $\left(\mathbb{R}^{d,[0,\infty)}, \mathscr{B}(\mathbb{R}^{d,[0,\infty)})\right)$, such that (2.2) holds for every $t \in T$.

証明.

第一段　$C \in \mathscr{C}$ について，$C = \left\{\, \omega \in \mathbb{R}^{d,[0,\infty)} \ ; \quad (\omega(t_1), \cdots, \omega(t_n)) \in A \,\right\}$ という表示に対し

$$Q(C) \coloneqq Q_t(A)$$

により $Q(C)$ を定めると，$Q(C)$ は well-defined であり，Q は $\mathscr{C}$ 上の初等確率測度となる: いま，

$$\begin{aligned} C &= \left\{\, \omega \in \mathbb{R}^{d,[0,\infty)} \ ; \quad (\omega(t_1), \cdots, \omega(t_n)) \in A \,\right\} \\ &= \left\{\, \omega \in \mathbb{R}^{d,[0,\infty)} \ ; \quad (\omega(s_1), \cdots, \omega(s_m)) \in B \,\right\} \end{aligned}$$

という二つの表示があるとする．

case1　s が t の並び替えである場合，或る $\{1, \cdots, n\}$ の全単射 φ が存在して

$$(s_1, \cdots, s_n) = (t_{\varphi(1)}, \cdots, t_{\varphi(n)})$$

と書ける．

$$F : (\mathbb{R}^d)^n \ni x \longmapsto x \circ \varphi \in (\mathbb{R}^d)^n$$

により線型同型写像 F を定めれば

$$\omega \circ t \in A \quad \Leftrightarrow \quad \omega \circ t \circ \varphi = F(\omega \circ t) \in F(A), \quad (\omega \in \mathbb{R}^{d,[0,\infty)})$$

が成り立つから

$$\left\{ \omega \in \mathbb{R}^{d,[0,\infty)} \;;\quad (\omega(t_1),\cdots,\omega(t_n)) \in A \right\} = \left\{ \omega \in \mathbb{R}^{d,[0,\infty)} \;;\quad (\omega(t_{\varphi(1)}),\cdots,\omega(t_{\varphi(n)})) \in F(A) \right\}$$
$$= \left\{ \omega \in \mathbb{R}^{d,[0,\infty)} \;;\quad (\omega(s_1),\cdots,\omega(s_m)) \in B \right\}$$

が従い $B = F(A)$ が出る．F は逆写像も込めて有限次元空間上の線型同型であるから同相であり

$$F(A) \in \mathscr{B}((\mathbb{R}^d)^n)$$

が満たされ，特に矩形集合に対しては

$$F(E_1 \times \cdots \times E_n) = E_{\varphi(1)} \times \cdots \times E_{\varphi(n)}, \quad (E_i \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$$

が成立する．$(Q_t)_{t\in T}$ の consistency により

$$\left\{ E_1 \times \cdots \times E_n \;;\quad E_i \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d),\ i = 1,\cdots,n \right\} \subset \left\{ E \in \mathscr{B}((\mathbb{R}^d)^n) \;;\quad Q_t(E) = Q_s(F(E)) \right\}$$

が成り立ち，Dynkin 族定理より $Q_t(A) = Q_s(B)$ を得る．

case2　$n < m$ かつ $\{t_1,\cdots,t_n\} \subset \{s_1,\cdots,s_m\}$ の場合，或る $\{1,\cdots,m\}$ 上の全単射 ψ が存在して

$$(s_{\psi(1)},\cdots,s_{\psi(m)}) = (t_1,\cdots,t_n,s_{\psi(n+1)},\cdots,s_{\psi(m)})$$

を満たす．

$$G : (\mathbb{R}^d)^m \ni x \longmapsto x \circ \psi \in (\mathbb{R}^d)^m$$

により線型同型かつ同相な写像 G を定めれば

$$\omega \circ s \in B \quad\Leftrightarrow\quad \omega \circ s \circ \psi = G(\omega \circ s) \in G(B), \quad (\omega \in \mathbb{R}^{d,[0,\infty)})$$

が成り立つから

$$\left\{ \omega \in \mathbb{R}^{d,[0,\infty)} \;;\quad (\omega(t_1),\cdots,\omega(t_n)) \in A \right\} = \left\{ \omega \in \mathbb{R}^{d,[0,\infty)} \;;\quad (\omega(s_1),\cdots,\omega(s_m)) \in B \right\}$$
$$= \left\{ \omega \in \mathbb{R}^{d,[0,\infty)} \;;\quad (\omega(t_1),\cdots,\omega(t_n),\omega(s_{\psi(n+1)}),\cdots,\omega(s_{\psi(m)})) \in G(B) \right\}$$

が従い $G(B) = A \times (\mathbb{R}^d)^{m-n}$ が出る．$(Q_t)_{t\in T}$ の consistency と case1 の結果を併せて

$$Q_t(A) = Q_{s\circ\psi}(A \times (\mathbb{R}^d)^{m-n}) = Q_{s\circ\psi}(G(B)) = Q_s(B)$$

を得る．

case3　$\{u_1,\cdots,u_k\} \coloneqq \{t_1,\cdots,t_n\} \cup \{s_1,\cdots,s_m\}$ により $u \in T$ を定める．$n \vee m = k$ なら case1 或は case2 に該当するので，$n \vee m < k$ の場合を考える．このとき $\{1,\cdots,k\}$ 上の全単射 φ_1,φ_2 が存在して

$$(u_{\varphi_1(1)},\cdots,u_{\varphi_1(k)}) = (t_1,\cdots,t_n,u_{\varphi_1(n+1)},\cdots,u_{\varphi_1(k)}),$$
$$(u_{\varphi_2(1)},\cdots,u_{\varphi_2(k)}) = (s_1,\cdots,s_m,u_{\varphi_2(m+1)},\cdots,u_{\varphi_2(k)})$$

を満たす．いま，

$$H : (\mathbb{R}^d)^m \ni x \longmapsto x \circ \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 \in (\mathbb{R}^d)^m$$

により線型同型かつ同相な写像 H を定めれば

$$\omega \circ u \circ \varphi_2 \in B \times (\mathbb{R}^d)^{k-m} \quad\Leftrightarrow\quad \omega \circ u \circ \varphi_1 = H(\omega \circ u \circ \varphi_2) \in H\left(B \times (\mathbb{R}^d)^{k-m}\right), \quad (\omega \in \mathbb{R}^{d,[0,\infty)})$$

が成り立つから，case1 の結果より

$$H\left(B \times (\mathbb{R}^d)^{k-m}\right) = A \times (\mathbb{R}^d)^{k-n}$$

かつ

$$Q_t(A) = Q_{u\circ\varphi_1}\left(A \times (\mathbb{R}^d)^{k-n}\right) = Q_{u\circ\varphi_1}\left(H\left(B \times (\mathbb{R}^d)^{k-m}\right)\right) = Q_{u\circ\varphi_2}\left(B \times (\mathbb{R}^d)^{k-m}\right) = Q_s(B)$$

が出る．

以上より Q は well-defined である．次に Q が初等確率測度であることを示す．実際，

$$\mathbb{R}^{d,[0,\infty)} = \left\{\ \omega \in \mathbb{R}^{d,[0,\infty)}\ ;\quad (\omega(t_1),\cdots,\omega(t_n)) \in (\mathbb{R}^d)^n\ \right\}$$

により $Q(\mathbb{R}^{d,[0,\infty)}) = Q_t((\mathbb{R}^d)^n) = 1$ が従い，また $C_1, C_2 \in \mathscr{C}$, $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ に対して

$$\begin{aligned} C_1 &= \left\{\ \omega \in \mathbb{R}^{d,[0,\infty)}\ ;\quad (\omega(t_1),\cdots,\omega(t_n)) \in A_1\ \right\}, \\ C_2 &= \left\{\ \omega \in \mathbb{R}^{d,[0,\infty)}\ ;\quad (\omega(s_1),\cdots,\omega(s_m)) \in A_2\ \right\} \end{aligned}$$

という表示があるとして，case1~3 の証明と同様にすれば $Q(C_1 + C_2) = Q(C_1) + Q(C_2)$ が得られる．

Problem 1.5

Show that the just defined family $(Q_t)_{t\in T}$ is consistent.

証明． Karatzas-Shreve の解答が間違っているので訂正する．Karatzas-Shreve の解答では $(Q_t)_{t\in T}$ が整合性条件を満たしていることを証明する前に Kolmogorov の拡張定理を適用し，$(\mathbb{R}^{[0,\infty)}, \mathscr{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)}))$ 上の確率測度 P によって $(Q_t)_{t\in T}$ の整合性条件を示しているが，これは論理が転倒している．$(Q_t)_{t\in T}$ の構成からやり直さなければならない．まず任意に

$$t \in T, \quad (t = (t_1,\cdots,t_n))$$

を取る．このとき $t_1,\cdots,t_n$ は昇順に並んでいるとは限らないが，これを昇順にした並び替え

$$t_{i_1} < t_{i_2} < \cdots < t_{i_n}$$

がただ一つ存在する．ここで並び替え i は $\{1,\cdots,n\}$ 上の全単射とみなせる．

$$s := (t_{i_1},\cdots,t_{i_n}), \quad J_{ts} : \mathbb{R}^n \ni x \longmapsto x \circ i \in \mathbb{R}^n$$

により s と J_{ts} を定めれば，J_{ts} は線型同型 ($\mathbb{R}^n$ は有限次元なので同相，すなわち Borel 同型) であり，

$$J_{ts}t = t \circ i = (t_{i_1},\cdots,t_{i_n}) = s$$

となる．分布 Q_s は式 (2.5) の分布関数により定めることができるから，Q_t については

$$Q_t(A) := Q_s(J_{ts}A), \quad (\forall A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$$

で定義する．このとき，t と s に対して整合性条件の (a) が成立する:

$$Q_t(A_1 \times \cdots \times A_n) = Q_s(A_{i_1} \times \cdots \times A_{i_n}), \quad (\forall A_i \in \mathscr{B}(\mathbb{R})).$$

s を媒介することにより，t の任意の並び替え u に対する Q_u も定まり，t, u 間の整合性条件 (a) が満たされる．実際，J_{us} と J_{tu} を J_{ts} と同様に定めれば $J_{us}^{-1} J_{ts} = J_{tu}$ の関係があるので

$$Q_t(A) = Q_s(J_{ts}A) = Q_s(J_{us}J_{us}^{-1}J_{ts}A) = Q_u(J_{us}^{-1}J_{ts}A) = Q_u(J_{tu}A), \quad (\forall A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$$

が得られる．以上で分布族 $(Q_t)_{t\in T}$ を構成する．あとは $(Q_t)_{t\in T}$ が整合性条件の (b) を満たせばよい．t の拡張

$$t' := (t_1, \cdots, t_n, t_{n+1})$$

に対して，その昇順並び替えを s' と書くとき，

$$Q_{t'}(A_1 \times \cdots \times A_n \times \mathbb{R}) = Q_{s'}(J_{t's'}(A_1 \times \cdots \times A_n \times \mathbb{R})) = Q_s(J_{ts}(A_1 \times \cdots \times A_n)) = Q_t(A_1 \times \cdots \times A_n)$$

が成立する．実際，昇順に並び替える全単射 $i : \{1, \cdots, n+1\} \longrightarrow \{1, \cdots, n+1\}$ により

$$s' = (t_{i_1}, \cdots, t_{i_{n+1}})$$

と表せるとき，$j := i^{-1}(n+1)$ とおいて，n 次元 Lebesgue 測度を μ_n と書けば，Fubini の定理より

$$\begin{aligned}
&Q_{t'}(A_1 \times \cdots \times A_n \times \mathbb{R}) \\
&= Q_{s'}(A_{i_1} \times \cdots \times A_{i_{j-1}} \times \mathbb{R} \times A_{i_{j+1}} \times \cdots \times A_{i_{n+1}}) \\
&= \int_{A_{i_1}\times\cdots\times\mathbb{R}\times\cdots\times A_{i_{n+1}}} p(s_{i_1}; 0, y_1) p(s_{i_2} - s_{i_1}; y_1, y_2) \cdots p(s_{i_{n+1}} - s_{i_n}; y_n, y_{n+1}) \, \mu_{n+1}(dy_1 \cdots dy_1) \\
&= \int_{A_{i_1}} \cdots \int_{A_{i_{n+1}}} p(s_{i_1}; 0, y_1) \cdots \left[\int_{\mathbb{R}} p(s_{i_{j+1}} - s_{i_j}; y_i, y_{i+1}) p(s_{i_j} - s_{i_{j-1}}; y_{i-1}, y_i) \, dy_j \right] dy_{n+1} \cdots dy_1 \\
&= \int_{A_{i_1}} \cdots \int_{A_{i_{n+1}}} p(s_{i_1}; 0, y_1) \cdots p(s_{i_{n+1}} - s_{i_n}; y_n, y_{n+1}) \left[p(s_{i_{j+1}} - s_{i_{j-1}}; y_{i-1}, y_{i+1}) \right] dy_{n+1} \cdots dy_1 \\
&= \int_{A_{i_1}\times\cdots\times A_{i_{n+1}}} p(s_{i_1}; 0, y_1) \cdots p(s_{i_{j+1}} - s_{i_{j-1}}; y_{i-1}, y_{i+1}) \cdots p(s_{i_{n+1}} - s_{i_n}; y_n, y_{n+1}) \, \mu_n(dy_1 \cdots dy_{n+1}) \\
&= Q_s(A_{i_1} \times \cdots \times A_{i_{j-1}} \times A_{i_{j+1}} \times \cdots \times A_{i_{n+1}}) \\
&= Q_t(A_1 \times \cdots \times A_n)
\end{aligned}$$

を得る．これにより

$$\{\, A_1 \times \cdots \times A_n \ ; \quad A_i \in \mathscr{B}(\mathbb{R}),\ i = 1, \cdots, n \,\} \subset \{\, A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \ ; \quad Q_{t'}(A \times \mathbb{R}) = Q_t(A) \,\}$$

が従い，Dynkin 族定理より整合性条件の (b) が満たされる． ∎

2.2 Kolmogorov-Čentsov の定理

Exercise 2.7

The only $\mathscr{B}((\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)})$-measurable set contained in $C[0,\infty)$ is the empty set.

証明.

第一段　$\mathscr{B}((\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)}) = \sigma(B_t;\ 0 \le t < \infty)$ が成り立つことを示す．先ず，任意の $C \in \mathscr{C}$ は

$$\begin{aligned} C &= \left\{ \omega \in (\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)} \ ; \quad (\omega(t_1), \cdots, \omega(t_n)) \in A \right\} \\ &= \left\{ \omega \in (\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)} \ ; \quad (B_{t_1}(\omega), \cdots, B_{t_n}(\omega)) \in A \right\}, \quad (A \in \mathscr{B}((\mathbb{R}^d)^n)) \end{aligned}$$

の形で表されるから $\mathscr{C} \subset \sigma(B_t;\ 0 \le t < \infty)$ が従い $\mathscr{B}((\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)}) \subset \sigma(B_t;\ 0 \le t < \infty)$ を得る．逆に

$$\sigma(B_t) \subset \mathscr{C}, \quad (\forall t \ge 0)$$

より $\mathscr{B}((\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)}) \supset \sigma(B_t;\ 0 \le t < \infty)$ も成立し $\mathscr{B}((\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)}) = \sigma(B_t;\ 0 \le t < \infty)$ が出る．

第二段　高々可算集合 $S = \{t_1, t_2, \cdots\} \subset [0, \infty)$ に対して

$$\mathcal{E}_S := \left\{ \left\{ \omega \in (\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)} \ ; \quad (\omega(t_1), \omega(t_2), \cdots) \in A \right\} \ ; \quad A \in \mathscr{B}((\mathbb{R}^d)^{\#S}) \right\}$$

とおけば[*2]，座標過程 B は $(\omega(t_1), \omega(t_2), \cdots) = (B_{t_1}(\omega), B_{t_2}(\omega), \cdots)$ を満たすから

$$\mathcal{E}_S = \left\{ \{(B_{t_1}, B_{t_2}, \cdots) \in A\} \ ; \quad A \in \mathscr{B}((\mathbb{R}^d)^{\#S}) \right\} =: \mathcal{F}_S^B$$

が成立する．従って Lemma3 for Exercise 1.8 と前段の結果より

$$\begin{aligned} \mathscr{B}((\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)}) = \sigma(B_t;\ 0 \le t < \infty) = \mathcal{F}^B_{[0,\infty)} &= \bigcup_{S \subset [0,\infty):\textit{at most countable}} \mathcal{F}_S^B \\ &= \bigcup_{S \subset [0,\infty):\textit{at most countable}} \mathcal{E}_S \end{aligned}$$

を得る．すなわち，$\mathscr{B}((\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)})$ の任意の元は $\left\{ \omega \in (\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)} \ ; \quad (\omega(t_1), \omega(t_2), \cdots) \in A \right\}$ の形で表現され，$A \neq \emptyset$ ならば $\left\{ \omega \in (\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)} \ ; \quad (\omega(t_1), \omega(t_2), \cdots) \in A \right\} \not\subset C[0, \infty)$ となり主張が従う． ∎

Theorem 2.8 の主張は次のように変更するべきである:

Suppose that a process $X = \{ X_t \ ; \quad 0 \le t \le T \}$ on a probability space $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ satisfies the condition

$$E|X_t - X_s|^\alpha \le C|t - s|^{1+\beta}, \quad 0 \le s, t \le T,$$

for some positive constants α, β, and C. Then there exists a continuous modification $\tilde{X} = \left\{ \tilde{X}_t \ ; \quad 0 \le t \le T \right\}$ of X, which is locally Hölder-continuous with exponent γ for every $\gamma \in (0, \beta/\alpha)$. More precisely, for every $\gamma \in (0, \beta/\alpha)$,

$$\sup_{\substack{0<|t-s|<h(\omega) \\ s,t\in[0,T]}} \frac{\left|\tilde{X}_t(\omega) - \tilde{X}_s(\omega)\right|}{|t - s|^\gamma} \le \frac{2}{1 - 2^{-\gamma}}, \quad \forall \omega \in \Omega^*,$$

for some $\Omega^* \in \mathscr{F}$ with $P(\Omega^*) = 1$ and positive random variable h, where Ω^* and h depend on γ.

なぜならば，式 (2.8) において P の中身が Ω^* に一致するかどうかわからないためである．可測集合でなければ P で測ることはできない．ただし今の場合は $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ が完備確率空間ならば式 (2.8) の表記で問題ない．

Theorem 2.8 memo

証明中の式 (2.10) 直後の “where $n^*(\omega)$ is a positive, integer-valued random variable” について．

[*2] S が可算無限なら $(\mathbb{R}^d)^{\#S} = \mathbb{R}^\infty$.

証明． $\mathbb{N} \coloneqq \{1,2,\cdots\}$ とおき，$\mathbb{N}$ の冪集合を $2^{\mathbb{N}}$ で表せば，$(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$ は可測空間となる．示せばよいのは n^* の $\mathscr{F}/2^{\mathbb{N}}$-可測性である．ただし，$n^*$ は証明文中において well-defined でないため，明確な意味を持たせる必要がある．

$$A_0 \coloneqq \Omega, \quad A_n \coloneqq \left\{ \omega \in \Omega \ ; \quad \max_{1 \leq k \leq 2^n} \left| X_{k/2^n}(\omega) - X_{(k-1)/2^n}(\omega) \right| \geq 2^{-\gamma n} \right\}, \quad (n = 1,2,\cdots)$$

とおくとき，Ω^* は

$$\Omega^* \coloneqq \bigcup_{\ell=1}^{\infty} \bigcap_{n=\ell}^{\infty} A_n^c$$

により定まる集合である．任意の $\omega \in \Omega^*$ に対して或る $\ell \geq 1$ が存在し，

$$\max_{1 \leq k \leq 2^n} \left| X_{k/2^n}(\omega) - X_{(k-1)/2^n}(\omega) \right| < 2^{-\gamma n}, \quad (\forall n \geq \ell)$$

を満たす．このような ℓ のうち最小なものを $n^*(\omega)$ と定めれば

$$n^{*-1}(\ell) = \left\{ \bigcap_{n=\ell}^{\infty} A_n^c \right\} \cap \left\{ \bigcap_{n=\ell-1}^{\infty} A_n^c \right\}^c, \quad (\ell = 1,2,\cdots)$$

が成立し n^* の $\mathscr{F}/2^{\mathbb{N}}$-可測性が従う． ∎

確率変数 h について，厳密には

$$h(\omega) \coloneqq \begin{cases} 2^{-n^*(\omega)}, & (\omega \in \Omega^*), \\ 0, & (\omega \in \Omega \backslash \Omega^*) \end{cases}$$

とおけばよい．

Theorem 2.8 memo