関数解析後期メモ

百合川

2017 年 11 月 4 日

0.1 共役作用素は閉作用素

係数体を $\mathbb{K}$，X, Y をノルム空間，T を $X \to Y$ の線型作用素とする．以下では X, Y 及びその共役空間 X^*, Y^* における ノルムを $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$, $\|\cdot\|_{X^*}$, $\|\cdot\|_{Y^*}$ と表記し，位相は全てこれらのノルムにより導入されるものと考える．T の定義域 $\mathscr{D}(T)$ が X で稠密であるときは T の共役作用素 T^* が定義される．この共役作用素について，本節の目標は次の定理の証明である．[*1]

定理 0.1.1. T^* は閉作用素である．

この定理を証明するために以下にいくつか準備をする．

$x \in X$ と $f \in X^*$ に対して $f(x)$ を次の形式で表現する:

$$f(x) = \langle x, f \rangle_{X,X^*} .$$

これは双線型形式，つまり $\langle \alpha x_1 + \beta x_2, f \rangle_{X,X^*} = \alpha \langle x_1, f \rangle_{X,X^*} + \beta \langle x_2, f \rangle_{X,X^*}$ と $\langle x, \alpha f_1 + \beta f_2 \rangle_{X,X^*} = \alpha \langle x, f_1 \rangle_{X,X^*} + \beta \langle x, f_2 \rangle_{X,X^*}$ を満たす．これは f の線型性と X^* における線型演算の定義による．双線型形式で表現することで内積空間を扱っているように捉えることができ，例えば，$A \subset X$ に対し全ての $x \in A$ で $\langle x, f \rangle_{X,X^*} = 0$ となるような $f \in X^*$ の全体は A の直交空間である様に見做すことができる．

補助定理 0.1.2. $A \subset X$ に対し

$$A^\perp := \left\{ f \in X^* \quad \middle| \quad \forall x \in A,\ \langle x, f \rangle_{X,X^*} = 0 \right\}$$

とおけば，$A^\perp$ は X^* において閉となる．

証明. $A^\perp$ が X^* において完備部分集合であることを示せばよい．$f_n \in A^\perp$ が収束列であるとすれば X^* の完備性から $(f_n)_{n=1}^\infty$ は或る $f \in X^*$ に (作用素ノルムで) 収束する．任意の $x \in A$ に対して

$$|f(x)| = |f(x) - f_n(x)| \leq \| f - f_n \|_{X^*} \| x \|_X \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成り立ち $f \in A^\perp$ となるから $A^\perp$ は完備であると示された． ∎

補助定理について補足 実際はさらに

$$(A^\perp)^\perp = \overline{\mathrm{L.h.}A}$$

となることが証明される．ここで $(A^\perp)^\perp = \left\{ x \in X \quad \middle| \quad \forall f \in A^\perp,\ \langle x, f \rangle_{X,X^*} = 0 \right\}$ と表現している．$A \subset (A^\perp)^\perp$ により $(A^\perp)^\perp \supset \overline{\mathrm{L.h.}A}$ が先ず判る．逆向きの包含関係について，$X = \overline{\mathrm{L.h.}A}$ の場合は成り立つからそうでない場合を考える．Hahn-Banach の定理の系によれば任意の $x_0 \in X \backslash \overline{\mathrm{L.h.}A}$ を一つ取って

$$f_0(x) = \begin{cases} 0 & (x \in \overline{\mathrm{L.h.}A}) \\ f_0(x_0) \neq 0 & (x = x_0) \end{cases}$$

を満たす $f_0 \in X^*$ が存在する．$f_0 \in A^\perp$ ではあるが $x_0 \notin (A^\perp)^\perp$ となり，$(A^\perp)^\perp \subset \overline{\mathrm{L.h.}A}$ が示されたことになる． ∎

[*1] 関数解析の教科書では証明が略されていたので簡単に証明できると思い試みたが，T が有界とは限らない場合にどうもうまくいかなかった．土居先生の講義ノートを基に電子化しておく．

二つのノルム空間 X, Y の直積空間 $X \times Y$ における直積ノルムを

$$\|[x,y]\|_{X\times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y \quad (\forall [x,y] \in X \times Y)$$

と表すことにする．$Y \times X$ の共役空間 $(Y \times X)^*$ の任意の元 F に対し

$$\begin{aligned} F_Y(y) &\coloneqq F[y,0] \quad (y \in Y) \\ F_X(x) &\coloneqq F[0,x] \quad (x \in X) \end{aligned} \tag{1}$$

として F_Y, F_X を定義すれば，F の線型性，有界性から $F_Y \in Y^*$，$F_X \in X^*$ となり，特に $F[y,x] = F_Y(y) + F_X(x)$ が成り立つ．逆に $g \in Y^*$ と $f \in X^*$ に対し

$$F[y,x] = g(y) + f(x) \quad (\forall [y,x] \in Y \times X)$$

と定義すれば $F \in (Y \times X)^*$ となり，対応 $(Y \times X)^* \ni F \longmapsto [F_Y, F_X] \in Y^* \times X^*$ が全単射であると判る．これについて次の事実を定理として載せておく．

補助定理 0.1.3. 次の写像

$$\phi : (Y \times X)^* \ni F \longmapsto [F_Y, F_X] \in Y^* \times X^*$$

は線形，同相である．

証明.

線型性 対応のさせ方 (1) に基づけば，任意の $[y,x] \in Y \times X$ と $F_1, F_2 \in (Y \times X)^*$，$\alpha \in \mathbb{K}$ に対して

$$\begin{aligned} \phi(F_1 + F_2)[y,x] &= (F_1 + F_2)[y,0] + (F_1 + F_2)[0,x] = \phi(F_1)[y,x] + \phi(F_2)[y,x] \\ \phi(\alpha F_1)[y,x] &= (\alpha F_1)[y,0] + (\alpha F_1)[0,x] = \alpha\phi(F_1)[y,x] \end{aligned}$$

が成り立つから ϕ が線型であることが判る．

同相 ϕ が Banach 空間から Banach 空間への線型全単射であることが示されたから，ϕ が有界であるなら値域定理より逆写像 ϕ^{-1} も線型有界となり，従って ϕ が同相写像であると判る．

$$\|\phi(F)\|_{Y^*\times X^*} = \|[F_Y, F_X]\|_{Y^*\times X^*} = \|F_Y\|_{Y^*} + \|F_X\|_{X^*}$$

であることと

$$\|F\|_{(Y\times X)^*} = \sup_{\substack{[y,x]\in Y\times X \\ [y,x]\neq[0,0]}} \frac{|F_Y(y) + F_X(x)|}{\|[y,x]\|_{Y\times X}} \leq \|F_Y\|_{Y^*} + \|F_X\|_{X^*}$$

により

$$\sup_{\substack{F\in(Y\times X)^* \\ F\neq 0}} \frac{\|\phi(F)\|_{Y^*\times X^*}}{\|F\|_{(Y\times X)^*}} = \sup_{\substack{F\in(Y\times X)^* \\ F\neq 0}} \frac{\|[F_Y, F_X]\|_{Y^*\times X^*}}{\|F\|_{(Y\times X)^*}} \leq 1$$

が成り立つから ϕ は有界である．

∎

以上の準備の下定理の証明に入る．

証明 (**定理** 0.1.1).

$$U : X \times Y \ni [x, y] \longmapsto [y, -x] \in Y \times X$$

として写像 U(等長，全単射) を定義する．T^* のグラフ $\mathscr{G}(T^*)$ は

$$\mathscr{G}(T^*) = \{\, [g, T^*g] \in Y^* \times X^* \quad | \quad \forall [x, Tx] \in \mathscr{G}(T), \quad g(Tx) + T^*g(-x) = 0 \,\}$$

で表される．補助定理 0.1.3 により $[g, T^*g]$ に対応する $F_g \in (Y \times X)^*$ がただ一つ存在して $g(Tx) + T^*g(-x) = F_g[Tx, -x] = F_g U[x, Tx]$ ($[x, Tx] \in \mathscr{G}(T)$) と書き直せるから，補助定理 0.1.3 の同相写像 ϕ により $\mathscr{G}(T^*)$ に対して

$$[U\mathscr{G}(T)]^\perp = \{\, F \in (Y \times X)^* \quad | \quad F[Tx, -x] = 0 \,\}$$

という表現が対応する．補助定理 0.1.2 より $[U\mathscr{G}(T)]^\perp$ が $Y^* \times X^*$ で閉となるから $\mathscr{G}(T^*) = \phi\,[U\mathscr{G}(T)]^\perp$ は $(Y \times X)^*$ において閉となり，以上で T^* が閉作用素であると示された． ∎

0.2 コンパクト作用素

係数体を $\mathbb{C}$，X, Y をノルム空間，K を $X \to Y$ の線型写像 ($\mathscr{D}(K) = X$) とする．以下では X, Y におけるノルムを $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$ と表記し，位相はこれらのノルムにより導入されるものと考える．

定義 0.2.1 (**コンパクト作用素**). 任意の有界部分集合 $B \subset X$ に対して KB が相対コンパクトとなるとき，つまり KB の閉包 $\overline{KB}$ がコンパクトとなるとき，K をコンパクト作用素 (compact operator) という．

補助定理 0.2.2 (**コンパクト作用素となるための十分条件の一つ**). $B_1 := \{\, x \in X \quad | \quad \|x\|_X < 1 \,\}$ に対して $\overline{KB_1}$ がコンパクトであるなら K はコンパクト作用素となる．

証明. 任意の有界集合 $B \subset X$ に対しては或る λ が取れて $B \subset \lambda B_1$ ($= \{\, \lambda x \quad | \quad x \in B_1 \,\}$) となるようにできる．$K(\lambda B_1)$ の閉包がコンパクトとなるなら KB の閉包もコンパクトとなる (コンパクト集合の閉部分集合はコンパクトとなる) から，$\overline{K(\lambda B_1)}$ がコンパクトとなることを示せばよい．先ず

$$\overline{K(\lambda B_1)} = \lambda \overline{KB_1}$$

が成り立つことを示す．$x \in \overline{K(\lambda B_1)}$ に対しては点列 $(x_n)_{n=1}^\infty \subset K(\lambda B_1)$ が取れて $\|x_n - x\|_X \longrightarrow 0$ ($n \longrightarrow \infty$) が成り立つ．$y_n := x_n/\lambda$ とおけば K の線型性により $y_n \in KB_1$ となり，$\|y_n - x/\lambda\|_X = \|x_n - x\|_X / \lambda \longrightarrow 0$ ($n \longrightarrow \infty$) となるから $x/\lambda \in \overline{KB_1}$ すなわち $x \in \lambda\overline{KB_1}$ が判る．逆に $x \in \lambda\overline{KB_1}$ に対しては $x/\lambda \in \overline{KB_1}$ となるから，或る点列 $(t_n)_{n=1}^\infty \subset KB_1$ が存在して $\|t_n - x/\lambda\|_X \longrightarrow 0$ ($n \longrightarrow \infty$) が成り立つ．$s_n = \lambda t_n$ とおけば K の線型性により $s_n \in K(\lambda B_1)$ となり，$\|s_n - x\|_X = \lambda \|t_n - x/\lambda\|_X \longrightarrow 0$ ($n \longrightarrow \infty$) が成り立つから $x \in \overline{K(\lambda B_1)}$ が判る．以上で $\overline{K(\lambda B_1)} = \lambda\overline{KB_1}$ が示された．$\overline{K(\lambda B_1)}$ を覆う任意の開被覆 $\cup_{\mu \in M} O_\mu$ (M は任意濃度) に対し

$$\overline{KB_1} \subset \bigcup_{\mu \in M} \tfrac{1}{\lambda} O_\mu$$

が成り立ち[*2]，仮定より $\overline{KB_1}$ はコンパクトであるから M から有限個の μ_i $(i = 1, \cdots, n)$ を取り出して

$$\overline{KB_1} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda} O_{\mu_i}$$

とできる．従って $\overline{K(\lambda B_1)}$ は $O_{\mu_1} \cup \cdots \cup O_{\mu_n}$ で覆われることになるからコンパクトであると示された． ∎

補助定理 0.2.3 (コンパクト作用素であることの同値条件). (1)K がコンパクトであることと，(2)X の任意の有界点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ に対し点列 $(Tx_n)_{n=1}^{\infty}$ が $\overline{(Tx_n)_{n=1}^{\infty}}$ で収束する部分列を含むことは同値である．

証明.

(1)⇒(2)　$B = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ とおけば B は X において有界集合となるから KB は相対コンパクトである．点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ は $\overline{KB}$ の点列でもあるから，コンパクト性の一般論により $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ は点列コンパクト，つまり収束部分列を持つ．

(2)⇒(1)　一般論より任意の有界集合 $B \subset X$ に対して $\overline{TB}$ がコンパクトとなるための同値条件は $\overline{TB}$ が点列コンパクトとなることである．このためには「TB が点列コンパクトなら $\overline{TB}$ も点列コンパクトとなる」—(※) を示せばよい．(※) が示されたとして，(2) を仮定すれば TB の任意の点列は $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset B$(有界) によって $(Tx_n)_{n=1}^{\infty}$ と表現できるから収束する部分列を持ち，(※) の主張と上の一般論により $\overline{TB}$ はコンパクトとなる．これより (※) を示す．$\overline{TB}$ の任意の点列 $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ に対して $\|y_n - z_n\|_Y < 1/n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を満たす $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subset TB$ が存在する．部分列 $(z_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ が $z \in TB$ に収束するなら，任意の $\epsilon > 0$ に対し或る $K_1 \in \mathbb{N}$ が取れて $k \geq K_1$ ならば $\left\| z - z_{n_k} \right\|_Y < \epsilon/2$ を満たす．更に或る $K_2 \in \mathbb{N}$ が取れて $k \geq K_2$ なら $1/n_k < \epsilon/2$ も満たされ，$\forall k \geq \max\{K_1, K_2\}$ に対して

$$\left\| z - y_{n_k} \right\|_Y \leq \left\| z - z_{n_k} \right\|_Y + \left\| z_{n_k} - y_{n_k} \right\|_Y < \epsilon$$

が成り立つ．これで $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ が収束部分列 $(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ を持つと示された．

∎

命題 0.2.4 (コンパクト作用素の空間・作用素の合成がコンパクトとなるための十分条件).

(1)　$B_c(X, Y) := \{\, K : X \to Y \mid K$:コンパクト作用素 $\}$ とおけば $B_c(X, Y)$ は $B(X, Y)$ の線型部分空間となる．

(2)　Z をノルム空間とする．$A \in B(X, Y)$ と $B \in B(Y, Z)$ に対して A 又は B がコンパクト作用素なら BA もまたコンパクト作用素となる．

証明.

(1)　$B_1 := \{\, x \in X \mid \|x\|_X \leq 1 \,\}$ とおけば任意の $K \in B_c(X, Y)$ に対して $\overline{TB_1}$ はコンパクトとなる．従って TB_1 は有界で

$$\infty > \sup_{x \in B_1 \setminus \{0\}} \|Kx\|_Y = \sup_{0 < \|x\|_{\leq} 1} \|Kx\|_Y$$

[*2] 開集合 O_μ は $1/\lambda$ でスケールを変えてもまた開集合となる．

が成り立ち，$K \in B(X,Y)$ であると示された．次に $B_c(X,Y)$ が線形空間であることを示す．$K_1, K_2 \in B_c(X,Y)$ と $\alpha \in \mathbb{C}$ を任意に取り，前補助定理を使う．補助定理によれば，任意の有界点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ に対して $(K_1 x_n)_{n=1}^{\infty}$ は収束部分列 $(K_1 x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ を持つ．この部分列 $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ に対して $(K_2 x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ もまた収束部分列 $(K_2 x_{n_{kl}})_{l=1}^{\infty}$ を持ち，$(K_1 x_{n_{kl}})_{l=1}^{\infty}$ もまた収束列であることに注意すれば $((K_1 + K_2)(x_{n_{kl}}))_{l=1}^{\infty}$ が収束部分列となるから前補助定理より $K_1 + K_2$ もコンパクト作用素となる．K_1 に対して，$(\alpha K_1 x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ もまた収束列であるから αK_1 もコンパクト作用素となる．以上で $B_c(X,Y)$ が線形空間であると示された．

(2)

A がコンパクト作用素である場合　補助定理により，X の任意の点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ に対し $(Ax_n)_{n=1}^{\infty}$ は収束部分列 $(Ax_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ を持つ．B の連続性により $(BAx_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ も収束列となるから，再び補助定理を適用して BA がコンパクト作用素であると示される．

B がコンパクト作用素である場合　任意の有界集合 $S \subset X$ に対して，A の有界性と併せて AS は有界となる．従って $\overline{BAS}$ がコンパクトとなり BA はコンパクト作用素であると示された．

∎