計算数理 A　試験問題案

大阪大学大学院基礎工学研究科システム創成専攻
百合川尚学

2018 年 7 月 21 日

(1) 次の定積分の値を手計算によって導け。

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2a\cos\theta+a^2}\,d\theta, \quad (0<a<1).$$

(2) (1) の結果が正しいかどうか，Mathematica を用いて $a=1/2, 1/3, 1/4$ の場合で検証せよ．

解．(1) について，$z=e^{i\theta}$ とすれば，この積分は複素平面の単位円周 $|z|=1$ 上の左回り線積分と書き直せる:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2a\cos\theta+a^2}\,d\theta = i\oint_{|z|=1} \frac{1}{az^2-(a^2+1)z+a}\,dz.$$

方程式 $az^2-(a^2+1)z+a=0$ は二つの実数解 α,β $(\alpha<\beta)$ をもち，$0<\alpha<1<\beta$ であるから，

$$f(z) \coloneqq \frac{1}{az^2-(a^2+1)z+a} = \frac{1}{a(z-\alpha)(z-\beta)}$$

とおけば α は f の $|z|<1$ での一位の極になっていて，留数定理より

$$\oint_{|z|=1} f(z)\,dz = 2\pi i Res(\alpha, f) = 2\pi i \lim_{z\to\alpha} \frac{1}{a(z-\beta)} = \frac{2\pi i}{a(\alpha-\beta)}$$

が従う．

$$\alpha+\beta = \frac{a^2+1}{a}, \quad \alpha\beta = 1$$

より

$$\alpha-\beta = -\frac{1-a^2}{a}$$

となるから，

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2a\cos\theta+a^2}\,d\theta = \frac{2\pi}{1-a^2}$$

が出る．∎