

# 関数解析レポート

百合川

2017 年 7 月 23 日

(約束及び定義)

- 係数体は複素数体  $\mathbb{C}$ .
- 位相空間  $X, Y$  に対し,  $C(X, Y) = \{f \mid f \text{ は } X \text{ から } Y \text{ への連続写像}\}; C(X) = C(X, \mathbb{C})$ .  $C_b(X) = \{f \in C(X) \mid f \text{ は有界}\}$  は  $\|u\| = \sup_{x \in X} |u(x)|$  をノルム (sup-norm) として Banach 空間である.
- $s$  を複素数列全体のなす線形空間とする.  $l^\infty = \{a = (a_n)_{n=1}^\infty \in s \mid \|a\|_\infty = \sup_n |a_n| < \infty\}$ ,  $c_0 = \{a = (a_n)_{n=1}^\infty \in s \mid \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0\}$ . このとき  $l^\infty$  は  $\|a\|_\infty$  をノルムとして Banach 空間である.

[4].  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $I = [a, b]$  とする.  $C^k(I)$  は  $\|f\|_k = \sum_{j=1}^k \sup_{x \in I} |f^{(j)}(x)|$  をノルムとして Banach 空間であることを示せ.

証明. 以下の手順で示す.

- $\|f\|_k$  が  $C^k(I)$  におけるノルムをなすこと.
- $C^k(I)$  の  $\|\cdot\|_k$  による Cauchy 列を取ると, 各  $j (= 0, 1, 2, \dots, k)$  階導関数列に対しそれぞれ或る  $I$  上の連続関数  $f^j$  が存在し, それぞれの導関数列はこの関数に  $I$  上で一様収束する.
- 各  $j = 0, 1, 2, \dots, k-1$ , について  $f^j$  は  $I$  上連続微分可能で  $f^{j+1}(x) = \frac{d}{dx} f^j(x) (\forall x \in I)$  が成り立っている.

(i) について,  $\forall f, g \in C^k(I)$  に対し, 正值性  $\|f\|_k \geq 0$  は右辺の各項が  $\geq 0$  であることから成り立つ. また  $\|f\|_k = 0$  の場合, 右辺で  $\sup_{x \in I} |f^{(j)}(x)| = 0 (j = 0, 1, 2, \dots, k)$  が成り立ち, 特に  $f$  は  $I$  上で零写像であるとわかるから  $f = 0$  である. 逆に  $f$  が  $I$  上で零写像ならば全ての導関数が零写像になるため右辺は 0 になり, 従って  $\|f\|_k = 0$  となる. 同次性は

$$\|\alpha f\|_k = \sum_{j=1}^k \sup_{x \in I} |(\alpha f^{(j)})(x)| = \sum_{j=1}^k \sup_{x \in I} |\alpha f^{(j)}(x)| = \sum_{j=1}^k \sup_{x \in I} |\alpha| |f^{(j)}(x)| = |\alpha| \sum_{j=1}^k \sup_{x \in I} |f^{(j)}(x)| = |\alpha| \|f\|_k, \quad (\forall \alpha \in \mathbb{C})$$

により示される. 三角不等式は

$$\|f + g\|_k = \sum_{j=1}^k \sup_{x \in I} |(f^{(j)} + g^{(j)})(x)| \leq \sum_{j=1}^k \sup_{x \in I} |f^{(j)}(x) + g^{(j)}(x)| \leq \sum_{j=1}^k \left( \sup_{x \in I} |f^{(j)}(x)| + \sup_{x \in I} |g^{(j)}(x)| \right) = \|f\|_k + \|g\|_k$$

により示される.

(ii) について,  $f_n \in C^k(I) (n = 1, 2, 3, \dots)$  を  $C^k(I)$  の  $\|\cdot\|_k$  による Cauchy 列とする. 任意の  $\epsilon > 0$  に対し或る  $N \in \mathbb{N}$  が存在して全ての  $n, m > N$  で

$$\epsilon > \|f_n - f_m\|_k = \sum_{j=1}^k \sup_{x \in I} |f_n^{(j)}(x) - f_m^{(j)}(x)|$$

が成り立っているから, 各  $j = 0, 1, 2, \dots, k$  について  $(f_n^{(j)})_{n=1}^{+\infty}$  は sup-norm に関して Cauchy 列をなしている.  $(C(I), \text{sup-norm})$  が Banach 空間であることが認められているから, 各  $j = 0, 1, 2, \dots, k$  についてそれぞれ或る  $I$  上の連続関数  $f^j$  が存在して  $(f_n^{(j)})_{n=1}^{+\infty}$  は  $f^j$  に sup-norm で収束, 即ち  $I$  上で一様収束する.

(iii) について, 上で取った  $(f_n)_{n=1}^{+\infty} \subset C^k(I)$  について, 全ての  $n \in \mathbb{N}$  と  $j = 0, 1, 2, \dots, k-1$  に対して次の関係が成り立っている.

$$f_n^{(j)}(x) - f_n^{(j)}(b) = \int_b^x f_n^{(j+1)}(t) dt, \quad (\forall x \in I).$$

ここで (ii) の結果から, 任意の  $x \in I$  と  $\epsilon > 0$  に対し或る  $N \in \mathbb{N}$  が存在して全ての  $n > N$  で

$$\left| f^j(x) - f_n^{(j)}(x) \right| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \left| f_n^{(j+1)}(x) - f^{j+1}(x) \right| < \frac{\epsilon}{3(b-a)}$$

が成り立つようにできるから, 同じ  $n$  について

$$\begin{aligned} \left| (f^j(x) - f^j(b)) - \int_b^x f^{j+1}(t) dt \right| &= \left| (f^j(x) - f^j(b)) - (f_n^{(j)}(x) - f_n^{(j)}(b)) + \int_b^x f_n^{(j+1)}(t) dt - \int_b^x f^{j+1}(t) dt \right| \\ &\leq \left| f^j(x) - f_n^{(j)}(x) \right| + \left| f^j(b) - f_n^{(j)}(b) \right| + \int_b^x \left| f_n^{(j+1)}(t) - f^{j+1}(t) \right| dt \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + (b-a) \frac{\epsilon}{3(b-a)} = \epsilon \end{aligned}$$

が成り立つ.  $\epsilon$  は任意だから

$$f^j(x) - f^j(b) = \int_b^x f^{j+1}(t) dt, \quad (\forall x \in I, j = 0, 1, 2, \dots, k-1)$$

が示されたことになる. 右辺は連続関数  $f^{j+1}$  の積分だから左辺  $f^j$  は  $x$  に関して微分可能関数 (端点は片側微分を考える) となり, 導関数は  $f^{j+1}$  である. ゆえに  $f^0 \in C^k(I)$  が示される. 表記を改めて  $f := f^0, f^{(j)} := f^j (j = 1, 2, \dots, k)$  とすれば

$$\|f_n - f\|_k = \sum_{j=1}^k \sup_{x \in I} \left| f_n^{(j)}(x) - f^{(j)}(x) \right| \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)$$

が成り立つから,  $C^k(I)$  が  $\|\cdot\|_k$  をノルムとして Banach 空間をなしていると示された. ■

[11].

- (1)  $c_0$  は  $l^\infty$  の閉線形部分空間であることを示せ.
- (2)  $l^\infty$  と  $c_0$  が可分であるかどうか判定せよ.

証明.

- (1) まず  $c_0 \subset l^\infty$  であることを示す.  $\forall a = (a_n)_{n=1}^\infty \in c_0$  は収束点列であるから

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N) |a_n| < \epsilon$$

となり

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \leq \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, \epsilon\} < +\infty$$

が成り立ち  $a \in l^\infty$  であるとわかる. 従って  $c_0 \subset l^\infty$  である. つぎに  $c_0$  が  $l^\infty$  の線形部分空間であることを示す.  $\forall a = (a_n)_{n=1}^\infty, b = (b_n)_{n=1}^\infty \in c_0, \alpha \in \mathbb{C}$  に対し

$$\begin{aligned} |a_n + b_n| &\leq |a_n| + |b_n| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow +\infty), \\ |\alpha a_n| &= |\alpha| |a_n| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow +\infty) \end{aligned}$$

が成り立つことにより  $a + b \in c_0$  と  $\alpha a \in c_0$  が示される. 従って  $c_0$  は  $s$  の線形部分空間であり, さらに  $l^\infty$  の線形部分空間でもある. 最後に  $c_0$  が  $l^\infty$  で閉集合となっていることを示す.  $l^\infty$  は  $\|\cdot\|_{l^\infty}$  をノルムとして Banach 空間となっているから, その部分空間である  $c_0$  が  $\|\cdot\|_{l^\infty}$  をノルムとして Banach 空間をなしていることを示せばよい.  $a^{(n)} = (a_m^{(n)})_{m=1}^\infty \in c_0$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を  $\|\cdot\|_{l^\infty}$  に関する Cauchy 列とする.  $(l^\infty, \|\cdot\|_{l^\infty})$  が完備であるから,  $(a^n)_{n=1}^\infty$  は或る  $a^* = (a_m^*)_{m=1}^\infty \in l^\infty$  に  $m$  に関して一様に収束している. つまり任意の  $\epsilon > 0$  に対して或る  $N \in \mathbb{N}$  が存在して, 全ての  $n > N$  について

$$\|a^{(n)} - a^*\|_{l^\infty} = \sup_{m \in \mathbb{N}} |a_m^{(n)} - a_m^*| < \epsilon$$

が成り立っている.  $a^* = (a_m^*)_{m=1}^\infty$  が  $c_0$  の元であることは帰謬法で示す.  $a^* \notin c_0$  であると仮定すると, 或る  $\delta > 0$  に対しては, いかなる  $N \in \mathbb{N}$  を取っても必ず  $n > N$  なる自然数で

$$|a_n^*| \geq \delta$$

を満たすものが存在する.  $(a_m^*)_{m=1}^\infty$  の部分列  $(a_{m_k}^*)_{k=1}^\infty$  を

$$|a_{m_k}^*| \geq \delta, \quad (m_k < m_{k+1}, k = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすものとして取ることが出来て, この部分添数列に対して或る  $N_\delta \in \mathbb{N}$  を取れば, 全ての  $n > N_\delta$  で

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} |a_{m_k}^{(n)} - a_{m_k}^*| < \frac{\delta}{2}$$

が成立することになる.  $n > N_\delta$  なる  $n$  に対し数列  $a_n = (a_m^{(n)})_{m=1}^\infty$  は  $c_0$  の元であるから, 或る  $N_\delta^n \in \mathbb{N}$  が存在して全ての  $p > N_\delta^n$  に対し

$$|a_p^{(n)}| < \frac{\delta}{2}$$

となるはずであるが, 或る  $k \in \mathbb{N}$  について  $m_k > N_\delta^n$  となるような添数  $m_k$  が存在することに注意すれば, ここにおいて

$$\frac{\delta}{2} \leq |a_{m_k}^*| - \frac{\delta}{2} < |a_{m_k}^{(n)}| < \frac{\delta}{2}$$

と矛盾が出る. 従って  $a^* \in c_0$  であるべきで, これは  $c_0$  が  $\|\cdot\|_{l^\infty}$  をノルムとして完備であることを示したことになる. ゆえに  $c_0$  は  $l^\infty$  の閉線形部分空間である.

- (2) 結論は,  $l^\infty$  は可分ではなく  $c_0$  は可分である. 順番に示す.  $l^\infty$  の部分集合として 0 と 1 のみで成る数列全体

$$M := \{a \in l^\infty \mid a = (a_n)_{n=1}^{+\infty}, a_n \in \{0, 1\}, n = 1, 2, 3, \dots\}$$

を考える. また任意の  $a = (a_n)_{n=1}^\infty, b = (b_n)_{n=1}^\infty \in M$  に対し

$$\|a - b\|_{l^\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n| = \begin{cases} 1 & (a \neq b) \\ 0 & (a = b) \end{cases}$$

が成り立つから,  $M$  の異なる 2 元の  $\|\cdot\|_{l^\infty}$  による距離は 1 で固定されている. もし  $l^\infty$  が可分であるとすれば,  $\|\cdot\|_{l^\infty}$  に関して  $l^\infty$  で稠密な可算部分集合  $C$  が存在することになる. 任

意の  $a \in M$  に対してその  $1/2$  近傍 (sup-norm) の内部に  $C$  の元が存在していることになるから、そのうちの一つを  $c_a$  と表し対応を付ける.  $a \in M$  に対応する  $c_a \in C$  は他の  $M$  の元の  $1/2$  近傍に属することはない. もし  $c_a$  が或る  $a \neq b \in M$  の  $1/2$  近傍に入ると

$$1 = \|a - b\|_{l^\infty} \leq \|a - c_a\|_{l^\infty} + \|b - c_a\|_{l^\infty} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

と矛盾ができるからである. 即ち  $M$  から  $C$  への対応関係  $M \ni a \mapsto c_a \in C$  は単射である. ここで  $M$  の濃度  $2^{\mathbb{N}}$  が連続体濃度であることに注意すれば, 単射の存在により  $C$  の濃度が連続体濃度以上であることになり  $C$  が可算集合であることに反する. 従って  $l^\infty$  は可分ではない. 一方で  $c_0$  は  $\|\cdot\|_{l^\infty}$  をノルムとして可分なノルム空間をなす.  $c_0$  の可算部分集合を

$$S := \left\{ a \in c_0 \left| a = (\alpha_n + i\beta_n)_{n=1}^{+\infty}, \begin{cases} \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{Q}, & n = 1, 2, \dots, N, \\ \alpha_n = \beta_n = 0, & n \geq N + 1, \end{cases} (N = 1, 2, 3, \dots) \right. \right\}$$

として取る. ただし  $i$  は  $i^2 = -1$  なる虚数単位で  $\mathbb{Q}$  は有理数全体である. 任意の  $a = (a_n)_{n=1}^{+\infty} \in c_0$  について, 任意の正数  $\epsilon > 0$  に対して或る  $N \in \mathbb{N}$  を取れば全ての  $n > N$  で

$$|a_n| < \epsilon$$

が成り立つから, 後は  $(a_n)_{n=1}^N$  の部分で

$$\sup_{n=1,2,\dots,N} |a_n - b_n| < \epsilon$$

となるように  $S$  の元  $b = (b_n)_{n=1}^{+\infty}$  ( $b_n = 0, n > N$ ) を取れば

$$\|a - b\|_{l^\infty} < \epsilon$$

が成り立つ. 即ち  $S$  が  $c_0$  において  $\|\cdot\|_{l^\infty}$  に関して稠密であるとわかり,  $c_0$  が可分であると示された. ■

[5].  $X = C([0, 1])$  を sup-norm の入った Banach 空間とする.  $0 < a < 1$ ,  $Y = \{f \in X; [0, a] \text{ 上で } f(t) = 0\}$  とおく.

- (1)  $Y$  が  $X$  の閉線形部分空間であることを示せ.
- (2)  $X/Y$  と  $C([0, a])$ (sup-norm を入れる) は Banach 空間として同型であることを示せ.

証明.

- (1)  $Y$  が  $X$  の線形部分空間であることは, 任意の  $f, g \in Y$  と任意の複素数  $\alpha \in \mathbb{C}$  に対して

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t) = 0, \quad (\forall t \in [0, a])$$

$$(\alpha f)(t) = \alpha f(t) = 0, \quad (\forall t \in [0, a])$$

が成り立つことから示される. 後は sup-norm に関して  $Y$  が閉集合となっていることを示せばよい.  $f_n \in Y$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を sup-norm に関する Cauchy 列とする.  $(C([0, 1]), \text{sup-norm})$  の完備性から  $(f_n)_{n=1}^\infty$  は或る  $f \in C([0, 1])$  に  $[0, 1]$  上で一様に収束するが, もし或る  $x \in [0, a]$  について  $|f(x)| > 0$  であるならば, この  $x$  において  $f_n(x) = 0$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) であることから

$$0 < |f(x)| = |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{t \in [0, 1]} |f_n(t) - f(t)|, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

となり  $(f_n)_{n=1}^\infty$  が  $f$  に収束することに反する. 従って  $f$  も  $[0, a]$  上で 0 でなくてはならず,  $f$  は  $Y$  に属することになる. これは  $Y$  が sup-norm の下で完備ノルム空間となっていることを主張し, 以上より  $Y$  は  $X$  の閉線形部分空間であると示された.

- (2)  $X$  の sup-norm を  $\|\cdot\|$  で表現する.  $X$  を  $Y$  で割った商空間  $X/Y$  の元を  $[f]$  (代表元  $f \in X$ ) で表現して,  $Y$  が閉線形部分空間であるから  $X/Y$  は

$$\|[f]\|_{X/Y} := \inf_{g \in Y} \|f - g\|, \quad ([f] \in X/Y)$$

をノルムとしてノルム空間となり, さらに  $(X, \|\cdot\|)$  が Banach 空間であるから  $(X/Y, \|\cdot\|_{X/Y})$  も Banach 空間となる. 任意の  $[f] \in X/Y$  について  $f_1, f_2 \in [f]$  は  $f_1 - f_2 \in Y$  を満たすから即ち

$$f_1(t) = f_2(t) \quad (\forall t \in [0, a])$$

が成り立っている.

$$\|[f]\|_{X/Y} = \inf_{g \in Y} \|f - g\| = \inf_{g \in Y} \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) - g(t)| = \sup_{t \in [0, a]} |f(t)|$$

が成り立つことに注意する.

$$\sup_{t \in [0, a]} |f(t)| = \sup_{t \in [0, a]} |f(t) - g(t)| \leq \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) - g(t)| \quad (\forall g \in Y)$$

$$\sup_{t \in [0, a]} |f(t)| \leq \inf_{g \in Y} \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) - g(t)|$$

$[f]$  の元の定義域を  $[0, a]$  に制限した関数は  $C([0, a])$  の或る元に一致する.  $C([0, a])$  の任意の元は定義域を  $[0, 1]$  に拡張 (例えば  $[a, 1]$  上では適当な一次関数でおく) すれば  $X = C([0, 1])$  の或る元に一致するから或る  $X/Y$  の或る元 (同値類) に属するしていることになる. 写像  $X/Y \ni [f] \mapsto f|_{[0, a]} \in C([0, a])$  は  $X/Y$  から  $C([0, a])$  への全単射である. この写像を  $T$  と表すとする.  $T$  は次の意味で等長である.  $\|[f]\|_{X/Y} = \|f|_{[0, a]}\| = \|T[f]\|$ .  $T$  の線型性は

$$\begin{aligned} T([f] + [h]) &= T[f + h] = (f + h)|_{[0, a]} = f|_{[0, a]} + h|_{[0, a]} = T[f] + T[h], \\ T(\alpha[f]) &= T[\alpha f] = (\alpha f)|_{[0, a]} = \alpha f|_{[0, a]} = \alpha T[f] \end{aligned}$$

により示される. ゆえに  $T$  は  $X/Y \mapsto C([0, a])$  の同型写像であり,  $X/Y$  と  $C([0, a])$  が Banach 空間として同型であることが示された. ■

[6].  $I = [0, 1]$  とし,  $X = C(I)$  を sup-norm の入った Banach 空間とする.  $K \in C(I \times I)$  とし,  $A = \sup_{(t,s) \in I \times I} |K(t, s)|$  とおく.  $u \in X$  に対して  $Tu : I \mapsto \mathbb{C}$  を次で定める:

$$Tu(t) = \int_0^t K(t, s)u(s) ds, \quad (t \in I).$$

- (1)  $u \in X$  ならば  $Tu \in X$  を示せ.  
(2) 写像  $X \ni u \mapsto Tu \in X$  を同じ記号  $T$  であらわすとき,  $T \in B(X)$  及び  $\|T^n\| \leq A^n/n!$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ) を示せ.

- (3)  $I - T$  は逆作用素を持ち,  $(I - T)^{-1} \in B(X)$  であることを示せ. ただし  $I$  は  $X$  の高等写像である.

**証明.**  $X$  における sup-norm を  $\|\cdot\|_X$  と表す. また  $T^0 = I$  (恒等写像) として考える.

- (1)  $u \in X$  に対して  $Tu$  が  $I$  上で連続であることを示せばよい. 任意の正数  $\epsilon > 0$  に対して  $\delta = \epsilon/A\|u\|_X$  と取れば,  $t \in [0, 1]$  と  $t+h \in [0, 1] \cap (t, t+\delta)$  に対して

$$\begin{aligned} |Tu(t+h) - Tu(t)| &= \left| \int_0^{t+h} K(t, s)u(s) ds - \int_0^t K(t, s)u(s) ds \right| \\ &\leq \left| \int_t^{t+h} K(t, s)u(s) ds \right| \\ &\leq \int_t^{t+h} |K(t, s)||u(s)| ds \\ &\leq \int_t^{t+h} \sup_{s \in I} |K(t, s)||u(s)| ds \\ &\leq A\|u\|_X h < \epsilon \end{aligned}$$

が成り立つことにより  $Tu$  が  $[0, 1]$  上右連続であることが示される. 同様に  $Tu$  が  $(0, 1]$  上で左連続であることも示されるから,  $Tu \in X$  が示される.

- (2) (1) の結果より  $X \ni u \mapsto Tu \in X$  が判っているから, 後は写像  $T : X \mapsto X$  の線型性を示せば,  $T$  が  $X$  を定義域とする線型作用素であること, 即ち  $T \in B(X)$  が示される.  $T$  の線型性は, 任意の  $u, v \in X$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $t \in I$  に対して

$$T(u+v)(t) = \int_0^t K(t, s)(u+v)(s) ds = \int_0^t K(t, s)(u(s) + v(s)) ds = \int_0^t K(t, s)u(s) ds + \int_0^t K(t, s)v(s) ds = Tu(t) + Tv(t)$$

$$T(\alpha u)(t) = \int_0^t K(t, s)(\alpha u)(s) ds = \int_0^t K(t, s)(\alpha u(s)) ds = \alpha \int_0^t K(t, s)u(s) ds = \alpha Tu(t)$$

が成り立つことにより示される. 次に  $\|T^n\| \leq A^n/n!$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ) を示すが, その準備に次のことを示す.

$$|T^n u(t)| \leq \frac{A^n}{n!} \|u\|_X t^n, \quad (t \in I, n = 1, 2, 3, \dots). \quad (1)$$

証明は数学的帰納法による.  $n = 1$  のとき

$$|Tu(t)| = \left| \int_0^t K(t, s)u(s) ds \right| \leq \int_0^t |K(t, s)||u(s)| ds \leq \int_0^t \sup_{s \in I} |K(t, s)||T^k u(s)| ds \leq A\|u\|_X \int_0^t ds = A\|u\|_X t$$

が成り立つ.  $n = k$  のとき (1) を仮定すると,

$$|T^{k+1} u(t)| = |T(T^k u)(t)| = \left| \int_0^t K(t, s)T^k u(s) ds \right| \leq \int_0^t |K(t, s)||T^k u(s)| ds \leq \int_0^t \sup_{s \in I} |K(t, s)| \frac{A^k}{k!} \|u\|_X s^k ds \leq \frac{A^{k+1}}{(k+1)!} t^{k+1}$$

となることにより (1) が任意の  $n \in \mathbb{N}$  で成立すると示された. 従って  $t \in I$  についての上限を取れば

$$\|T^n u\|_X = \sup_{t \in I} |T^n u(t)| \leq \sup_{t \in I} \frac{A^n}{n!} \|u\|_X t^n = \frac{A^n}{n!} \|u\|_X, \quad (\forall u \in X, n = 1, 2, 3, \dots)$$

となる.  $n = 0$  の場合は,  $\|Iu\|_X = \|u\|_X$  ( $\forall u \in X$ ) により  $\|T^0\| = \|I\| = 1$  である. 以上より  $\|T^n\| \leq A^n/n!$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ) となることが示された.

- (3)  $(X, \|\cdot\|_X)$  が Banach 空間であるから  $B(X)$  も作用素ノルムの下で Banach 空間となっている. 従って級数

$$\sum_{n=0}^{+\infty} T^n \quad (2)$$

が収束することの十分条件は

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|T^n\| < +\infty$$

が成り立つことである. 今, (2) の結果より

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|T^n\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} = e^A < +\infty$$

が成り立っているから (2) は収束する. つまり

$$T^* := \sum_{n=0}^{+\infty} T^n$$

と表せば  $T^*$  は  $B(X)$  の元であり, 部分和を  $T_N := \sum_{n=0}^N T^n$  ( $N = 0, 1, 2, \dots$ ) と表現して  $T_N \rightarrow T^*$  ( $N \rightarrow +\infty$ ) が成り立っていることになる. これと

$$\|(TT^* - TT_N)u\|_X = \|TT^*u - TT_Nu\|_X = \|T(T^*u) - T(T_Nu)\|_X = \|T(T^*u - T_Nu)\|_X = \|T(T^* - T_N)u\|_X$$

と

$$\|(T^*T - T_NT)u\|_X = \|T^*Tu - T_NT u\|_X = \|T^*(Tu) - T_N(Tu)\|_X = \|(T^* - T_N)Tu\|_X$$

から,

$$\|TT^* - TT_N\| \leq \|T\| \|T^* - T_N\| \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow +\infty) \quad (3)$$

と

$$\|T^*T - T_NT\| \leq \|T^* - T_N\| \|T\| \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow +\infty) \quad (4)$$

が成り立つ. (3) により

$$TT^* = \lim_{N \rightarrow \infty} TT_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{N+1} T^n = \sum_{n=1}^{+\infty} T^n = T^* - I$$

が成り立つから  $I = T^* - TT^* = (I - T)T^*$  と表現でき, また (4) により

$$T^*T = \lim_{N \rightarrow \infty} T_NT = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{N+1} T^n = \sum_{n=1}^{+\infty} T^n = T^* - I$$

も成り立つから  $I = T^* - T^*T = T^*(I - T)$  と表現できる. ゆえに  $I = (I - T)T^* = T^*(I - T)$  が成り立ち, この等式は  $I - T$  が  $X \mapsto X$  の全単射であり  $T^* \in B(X)$  を逆写像にもつことを示している. ■



[9].  $(S, \mathfrak{M}, \mu)$  は  $\sigma$ -有限な測度空間,  $X = L^2(S, \mathfrak{M}, \mu) = L^2(\mu)$  とする. 可測関数  $a : S \rightarrow \mathbb{C}$  に対して,  $X$  上の掛け算作用素  $M_a$  を次で定める:

$$D(M_a) = \{u \in X \mid au \in X\}, \quad (M_a u)(x) = a(x)u(x) \quad (x \in S).$$

- (1)
- (2)  $a \in L^\infty(S, \mathfrak{M}, \mu)$  ならば  $M_a \in B(X)$  であり,  $\|M_a\| = \|a\|_{L^\infty(\mu)}$  が成り立つことを示せ.
- (3) 逆に  $M_a \in B(X)$  ならば  $a \in L^\infty(S, \mathfrak{M}, \mu)$  であることを示せ.

証明.

- (1)
- (2)  $a \in L^\infty(S, \mathfrak{M}, \mu)$  ならば,  $\|\cdot\|_{L^\infty(\mu)}$  の定義より

$$\|a\|_{L^\infty(\mu)} = \inf \{b \in [0, +\infty) \mid \mu(\{x \in S \mid |a(x)| > b\}) = 0\} < +\infty$$

である. 特に

$$N_m := \left\{x \in S \mid |a(x)| \geq \|a\|_{L^\infty(\mu)} + \frac{1}{m}\right\}, \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

と置けば  $\mu(N_m) = 0$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ) であって,  $\mu$  零集合  $N$  を

$$N := \bigcup_{m=1}^{\infty} N_m$$

で定めれば

$$|a(x)| \leq \|a\|_{L^\infty(\mu)}, \quad (\forall x \in S \cap N^c)$$

が成り立つ. また  $0 < c < \|a\|_{L^\infty(\mu)}$  となるような任意の  $c$  については

$$\mu(\{x \in S \mid |a(x)| > c\}) > 0 \tag{5}$$

が成り立つことにも注意しておく. 全ての  $u \in X$  に対して

$$\begin{aligned} \|M_a u\|_{L^2(\mu)}^2 &= \int_S |a(x)u(x)|^2 \mu(dx) \\ &= \int_{S/N} |a(x)u(x)|^2 \mu(dx) \\ &\leq \int_{S/N} \|a\|_{L^\infty(\mu)}^2 |u(x)|^2 \mu(dx) \\ &= \int_S \|a\|_{L^\infty(\mu)}^2 |u(x)|^2 \mu(dx) = \|a\|_{L^\infty(\mu)}^2 \|u\|_{L^2(\mu)}^2 \end{aligned}$$

が成り立っていることから,  $\|M_a\| \leq \|a\|_{L^\infty(\mu)}$  であり  $M_a \in B(X)$  が示される. さらに,  $(S, \mathfrak{M}, \mu)$  が  $\sigma$ -有限な測度空間であるという条件の下では,  $\|M_a\| = \|a\|_{L^\infty(\mu)}$  であることが次のように示される.  $\|a\|_{L^\infty(\mu)} = 0$  ならば明らかに  $M_a$  は零作用素で  $0 = \|M_a\| = \|a\|_{L^\infty(\mu)}$  である.  $\|a\|_{L^\infty(\mu)} > 0$  である場合,  $\|a\|_{L^\infty(\mu)} > 1/n_0$  を満たすような  $n_0 \in \mathbb{N}$  を一つ取り,  $n > n_0$  なる全ての  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$G_n := \left\{x \in S \cap N^c \mid \|a\|_{L^\infty(\mu)} - \frac{1}{n} < |a(x)| \leq \|a\|_{L^\infty(\mu)}\right\}$$

として  $\mu$  可測集合の族  $(G_n)_{n>n_0}$  を作る. (5) により全ての  $n > n_0$  に対して  $\mu(G_n) > 0$  である. これは次で示される.

$$\begin{aligned}
\mu(G_n) &= \mu\left(\left\{x \in S \mid \|a\|_{L^\infty(\mu)} - \frac{1}{n} < |a(x)| \leq \|a\|_{L^\infty(\mu)}\right\} \cap N^c\right) \\
&= \mu\left(\left\{x \in S \mid \|a\|_{L^\infty(\mu)} - \frac{1}{n} < |a(x)| \leq \|a\|_{L^\infty(\mu)}\right\}\right) \quad (\because \mu(N) = 0) \\
&= \mu\left(\left\{x \in S \mid \|a\|_{L^\infty(\mu)} - \frac{1}{n} < |a(x)|\right\} \cap \left\{x \in S \mid |a(x)| \leq \|a\|_{L^\infty(\mu)}\right\}\right) \\
&= \mu\left(\left\{x \in S \mid \|a\|_{L^\infty(\mu)} - \frac{1}{n} < |a(x)|\right\}\right) \quad (\because \mu\left(\left\{x \in S \mid |a(x)| > \|a\|_{L^\infty(\mu)}\right\}\right) = 0) \\
&> 0. \quad (\because (5))
\end{aligned}$$

単調増大な  $\mu$  可測集合列  $S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \dots$ ,  $\mu(S_k) < +\infty$  で  $\bigcup_{k=1}^\infty S_k = S$  なるものに対して ( $\sigma$ -有限の仮定よりこのような集合列が存在する). 全ての  $n > n_0$  に対して

$$0 < \mu(G_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(S_k \cap G_n)$$

となるから, 必ず或る  $S_{k_n}$  に対して

$$r_n := \mu(S_{k_n} \cap G_n) > 0$$

となっている.

$$u_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{r_n}} & x \in S_{k_n} \cap G_n \\ 0 & x \notin S_{k_n} \cap G_n \end{cases} \quad (n > n_0)$$

と定義すれば,  $\mu(S_{k_n} \cap G_n) < +\infty$  であるから  $u_n \in X$  ( $n > n_0$ ) であって

$$\|u_n\|_{L^2(\mu)} = 1 \quad (n > n_0)$$

が満たされている. この  $u_n$  に対して

$$\|a\|_{L^\infty(\mu)} - \frac{1}{n} < \|M_a u_n\|_{L^2(\mu)} \leq \|a\|_{L^\infty(\mu)}$$

が成り立っているから

$$\|a\|_{L^\infty(\mu)} - \frac{1}{n} < \sup_{0 \neq u \in X} \frac{\|M_a u\|_{L^2(\mu)}}{\|u\|_{L^2(\mu)}} = \|M_a\| \leq \|a\|_{L^\infty(\mu)} \quad (n > n_0)$$

である.  $n$  は  $n > n_0$  で任意に大きくできるから

$$\|a\|_{L^\infty(\mu)} = \|M_a\|$$

が示されたことになる.

(3)  $M_a \in B(X)$  ならば  $M_a$  の作用素ノルム  $\|M_a\|$  は有限な実数値で

$$\int_S |a(x)u(x)|^2 \mu(dx) = \|M_a u\|_{L^2(\mu)}^2 \leq \|M_a\|^2 \|u\|_{L^2(\mu)}^2 = \|M_a\|^2 \int_S |u(x)|^2 \mu(dx)$$

が成立している.  $(S, \mathfrak{M}, \mu)$  が  $\sigma$ -有限な測度空間であるという条件の下では

$$\mu(\{x \in S \mid |a(x)| > \|M_a\|\}) = 0$$

が成り立つことを示す。これが示されれば  $a \in L^\infty(S, \mathfrak{M}, \mu)$  が従う。問題の仮定により、ある  $\mu$  測度有限で単調増大な  $\mu$  可測集合列  $S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \cdots$  が存在して  $\bigcup_{k=1}^\infty S_k = S$  が満たされている。

$$G := \{x \in S \mid |a(x)| > \|M_a\|\}$$

と置けばこれは  $\mu$  可測集合であり、 $\mu(G) > 0$  とすると

$$0 < \mu(G) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(S_k \cap G)$$

により或る  $K \in \mathbb{N}$  が存在して  $\mu(S_k \cap G) > 0$  ( $\forall k > K$ ) が成立する。 $k > K$  を満たす  $k$  を選んで

$$u(x) = \begin{cases} 1 & x \in S_k \cap G \\ 0 & x \notin S_k \cap G \end{cases}$$

と置けば、 $\mu(S_k \cap G) < +\infty$  であることから  $u \in X$  であって、

$$\|u\|_{L^2(\mu)}^2 = \int_S |u(x)|^2 \mu(dx) = \mu(S_k \cap G)$$

が成り立っている。 $G$  上で  $|a(x)| > \|M_a\|$  であるから

$$\begin{aligned} \|M_a\|^2 \|u\|_{L^2(\mu)}^2 &= \|M_a\|^2 \int_S |u(x)|^2 \mu(dx) = \|M_a\|^2 \int_{S_k \cap G} |u(x)|^2 \mu(dx) \\ &< \int_{S_k \cap G} |a(x)u(x)|^2 \mu(dx) \\ &\leq \int_S |a(x)u(x)|^2 \mu(dx) \\ &\leq \|M_a\|^2 \|u\|_{L^2(\mu)}^2 \end{aligned}$$

となるが、最右辺と最左辺を  $\|u\|_{L^2(\mu)}^2$  で割ると

$$\|M_a\| < \|M_a\|$$

と矛盾が出る。従って  $\mu(G) = 0$  でなくてはならない。 ■

[12].  $a = (a_n)_{n=1}^\infty \in l^1$  に対して  $T_a : c_0 \mapsto \mathbb{C}$  を次で定める：

$$T_a(x) = \sum_{n=1}^\infty a_n x_n \quad (x = (x_n) \in c_0).$$

- (1)  $\forall a = (a_n) \in l^1, T_a \in c_0^*$  かつ  $\|T_a\| = \|a\|_{l^1}$  であることを示せ。
- (2)  $T : l^1 \ni a \mapsto T_a \in c_0^*$  は Banach 空間としての同系写像であることを示せ。

**証明.**

- (1) 設問 [11] の結果により、 $T_a$  の定義域である  $c_0$  は  $\|\cdot\|_\infty$  をノルムとして  $l^\infty$  の閉線型部分空間であり、よって Banach 空間である。このことに留意して以下進む。 $a = (a_n)_{n=1}^\infty \in l^1$  を任意に取って固定する。任意の  $x = (x_n) \in c_0$  に対して

$$\sum_{n=1}^\infty |a_n| |x_n| \leq \sum_{n=1}^\infty |a_n| \|x\|_\infty = \|a\|_{l^1} \|x\|_\infty < +\infty$$

となり級数  $T_a(x)$  ( $\forall x \in c_0$ ) は有限確定するから、級数の被積分項の和は級数の和に一致し、スカラ倍は級数全体のスカラ倍に一致する。よって任意に  $x = (x_n), y = (y_n) \in c_0$  と  $\alpha \in \mathbb{C}$  を取れば、

$$\begin{aligned} T_a(x+y) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n x_n + a_n y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n = T_a x + T_a y, \\ T_a(\alpha x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\alpha x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \alpha) x_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n) x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(a_n x_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = \alpha T_a(x) \end{aligned}$$

により  $T_a$  の線型性が示されるから、 $T_a$  は  $c_0 \rightarrow \mathbb{C}$  の線型汎関数である。有界性は式により

$$|T_a(x)| \leq \|a\|_{l^1} \|x\|_{l^\infty}$$

から  $\|T_a\| \leq \|a\|_{l^1}$  となるとわかる。ゆえに  $T_a \in c_0^*$  ( $\forall a \in l^1$ ) である。また  $\|T_a\| = \|a\|_{l^1}$  について、 $a = 0$  の場合は  $T_a$  が零作用素になるから明らかに成り立つ。 $a \neq 0$  の場合、任意の  $\|a\|_{l^1} > \epsilon > 0$  に対して或る  $N \in \mathbb{N}$  が存在して

$$\|a\|_{l^1} - \epsilon < \sum_{n=1}^N |a_n|$$

とできる。 $x \in c_0$  を

$$x_n = \begin{cases} \overline{a_n}/|a_n| & a_n \neq 0, \text{ and } n \leq N \\ 0 & a_n = 0, \text{ or } n > N \end{cases}$$

となっているもので取れば、

$$\|a\|_{l^1} - \epsilon < \sum_{n=1}^N |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = T_a(x) = |T_a(x)|$$

が成立することになる。 $\|x\|_{l^\infty} = 1$  であることに注意すれば

$$\|a\|_{l^1} - \epsilon < T_a(x) = \frac{|T_a(x)|}{\|x\|_{l^\infty}} \leq \sup_{0 \neq y \in c_0} \frac{|T_a(y)|}{\|y\|_{l^\infty}} = \|T_a\| \leq \|a\|_{l^1}$$

が成り立ち、 $\epsilon$  が任意であるから、 $a = 0$  の場合と合わせて  $\|T_a\| = \|a\|_{l^1}$  ( $\forall a \in l^1$ ) が示された。

- (2) まず、 $l^1$  は  $\|\cdot\|_{l^1}$  をノルムとして **Banach** 空間となり、 $c_0^*$  は  $T_a$  の値域  $\mathbb{C}$  が **Banach** 空間であるから作用素ノルムにより **Banach** 空間となっている。写像  $T$  が

$$\|Ta\| = \|T_a\| = \|a\|_{l^1} \quad (\forall a \in l^1)$$

の意味で等長であることは (1) で示してあるから、後は  $T$  が線型全単射であることを証明すればよい。任意の  $a = (a_n), b = (b_n) \in l^1$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$  に対して

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)x_n &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n x_n + b_n x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n, \\ \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n)x_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(a_n x_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \end{aligned}$$

が成り立つから

$$\begin{aligned} T(a+b) &= T_{a+b} = T_a + T_b = Ta + Tb \\ T(\alpha a) &= T_{\alpha a} = \alpha T_a = \alpha Ta \end{aligned}$$

も成り立つことにより  $T$  の線型性が示される. また  $a = (a_n), b = (b_n) \in l^1$  に対して,  $a \neq b$  であるなら或る  $N \in \mathbb{N}$  番目で  $a_N \neq b_N$  となっているはずであるから,

$$x_N = \begin{cases} 1 & n = N \\ 0 & n \neq N \end{cases}$$

となる  $x = (x_n) \in c_0$  に対して

$$T_a(x) = a_N \neq b_N = T_b(x)$$

となり,  $T$  が単射であることが示される. 最後に  $T$  が全射であることを示す. 任意に  $L \in c_0^*$  を取る. 或る  $a \in l^1$  に対して  $L$  が  $T_a$  に一致することを見ればよい. Kronecker のデルタを用いて

$$e_n := (\delta_{jn})_{j=1}^\infty$$

で表現される  $e_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) は  $c_0$  の元であり, 各  $n = 1, 2, 3, \dots$  に対して

$$a_n := L(e_n) \quad (6)$$

とおく. 任意の  $x = (x_n) \in c_0$  に対して

$$x^{(N)} = \sum_{n=1}^N x_n e_n, \quad (N = 1, 2, 3, \dots)$$

として作られる数列の族  $(x^{(N)})_{N=1}^\infty$  は  $l^\infty$  において収束し,  $x^{(N)} \rightarrow x$  ( $N \rightarrow +\infty$ ) が成り立つ. これは  $x = (x_n)$  が収束数列であることによる. 任意の  $\epsilon > 0$  に対して或る  $N \in \mathbb{N}$  を選べば

$$|x_n| < \epsilon, \quad (\forall n > N)$$

が成り立つから,  $n > N$  なる任意の自然数  $n$  に対して

$$\|x - x^{(N)}\|_{l^\infty} = \sup_{m>N} |x_m| < \epsilon$$

となり,  $x^{(N)} \rightarrow x$  ( $N \rightarrow +\infty$ ) が示されるのである.  $L$  が有界線型汎関数であることも併せれば

$$|L(x) - L(x^{(N)})| \leq \|L\| \|x - x^{(N)}\|_{l^\infty} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow +\infty)$$

により

$$L(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} L(x^{(N)}) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N L(x_n e_n) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N a_n x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n \quad (\forall x \in c_0)$$

が成り立つ. 後は (6) で定義した複素数列  $(a_n)_{n=1}^\infty$  が  $l^1$  に属していることを示せば, 写像  $L : c_0 \rightarrow \mathbb{C}$  が  $T_a : c_0 \rightarrow \mathbb{C}$  に一致していると証明される. これは次のように示される.  $a_n \neq 0$  ( $\exists n \leq M$ ) となるような  $M \in \mathbb{N}$  を取って, この  $M$  に対して  $x = (x_n) \in c_0$  として

$$x_n = \begin{cases} \overline{a_n}/|a_n| & a_n \neq 0, \text{ and } n \leq M \\ 0 & a_n = 0, \text{ or } n > M \end{cases}$$

となるものを取れば,

$$L(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N a_n x_n = \sum_{n=1}^M |a_n|$$

が成り立つ.  $\|x\|_\infty = 1$  であることに注意すれば

$$\sum_{n=1}^M |a_n| = L(x) = |L(x)| \leq \|L\| \|x\|_\infty = \|L\|$$

となる.  $M$  は任意に大きく取って問題ないから,

$$\sum_{n=1}^{M'} |a_n| \leq \|L\|, \quad (\forall M' \geq M)$$

が成り立ち, 従って

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \|L\|$$

となることにより  $a \in l^1$  であることが示された.