2019年12月29日

ε計算とクラスの導入による 具体的で直感的な集合論の構築

目次

1 導入

1.1 ε計算について

- 量化∃, ∀を使う証明を命題論理の証明に埋め込むためにHilbertが開始.
- 式$\varphi(x)$に対して

$$\varepsilon x \varphi(x)$$

という形のオブジェクトを作り，ε項と呼ぶ．また

$$\begin{aligned} \exists x \varphi(x) &\leftrightarrow \varphi(x/\varepsilon x \varphi(x)), \\ \forall x \varphi(x) &\leftrightarrow \varphi(x/\varepsilon \neg x \varphi(x)) \end{aligned}$$

を公理とする.

- 命題論理の証明に埋め込む際には∃や∀の付いた式をε項を代入した式に変換すればよい.
- ただし，今回ε項を導入したのは埋め込むためではなく集合を「具体化」するため.

- “生の”集合論では集合というオブジェクトが用意されていないため，「存在」は「実在」ではない．たとえば

$$\exists x\,(\,x = x\,)$$

は公理であり「集合は存在する」と読むが，集合を“実際に取ってくる”ことはできない．
- ε 項を使えば，ヨの公理と集合の存在公理によって

$$\varepsilon x\,(\,x = x\,) = \varepsilon x\,(\,x = x\,)$$

が成り立つ．つまり ε 項は「存在」を「実在」に変える(ある種の ε 項は集合である)．

ε 項のメリット

- 「存在」と「実在」が同じになる．
- ある種の ε 項は集合であり，集合を具体的なオブジェクトとして扱える．
- 証明で用いる推論規則は三段論法のみで済む．
- 証明は全て閉じた式で行える．

1.2 クラスについて

- ブルバキ[]や島内[]でもε項を使った集合論を展開.
- ところで,「$\varphi(x)$を満たす集合xの全体」の意味の

$$\left\{\, x \mid \varphi(x) \,\right\}$$

というオブジェクトも取り入れたい.
- “生の”集合論では“インフォーマル”な導入.
- ブルバキ[]や島内[]では

$$\left\{\, x \mid \varphi(x) \,\right\} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \varepsilon x\, \forall u\, (\, \varphi(u) \ \leftrightarrow\ u \in x\,)$$

と定める．これは欠点がある.

$$\exists x\, \forall u\, (\, \varphi(u) \ \leftrightarrow\ u \in x\,)$$

が成立しない場合は「$\varphi(x)$を満たす集合xの全体」という意味を持たない.
- 式φから直接$\left\{\, x \mid \varphi(x) \,\right\}$の形のオブジェクトを作ればよい.

定義 1.1 (クラス). 式φにxが自由に現れていて，かつ自由に現れているのはxのみであるとき，

$$\varepsilon x \varphi(x), \quad \left\{\, x \mid \varphi(x) \,\right\}$$

の形のオブジェクトを**クラス(class)**と呼ぶ.

- 集合はクラスである.
- クラスであるε項は集合である.
- 集合でないクラスもある．たとえば$\{\, x \mid x = x \,\}$や$\{\, x \mid x \notin x \,\}$は集合ではない.

集合の定義は竹内[]に倣う.

定義 1.2 (集合).

$$\exists x\,(\, c = x \,)$$

を満たすクラスcを**集合(set)**と呼ぶ.

NBG集合論　クラスの概念を取り入れたNBG集合論というものがあるが，こちらのクラスは「実在」しない.

2　言語

- クラスという新しいオブジェクトを導入したら，この導入操作が“妥当”であるかどうかが問題になる．
- 妥当性は，“生の”集合論の式 φ に対して

$$\text{“生の”集合論で}\,\varphi\,\text{が証明される} \Longleftrightarrow \text{新しい集合論で}\,\varphi\,\text{が証明される}$$

  が成り立つかどうかで判断する．
- 精密な検証のためには，集合論の言語と証明のルールを明らかにしなくてはならない．
- 言語とは「変項」，「述語記号」，「論理記号」とその他もろもろの記号からなる．たとえば文字は主な変項であり，

$$s \in t$$

  と書けば一つの「式」が出来上がる．
- まず“生の”集合論の言語

$$\mathcal{L}_\in$$

  を明示する．

2.1 “生の”集合論の言語

$\mathcal{L}_\in$

矛盾記号　$\perp$

論理記号　$\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\to$

量化子　$\forall$, $\exists$

述語記号　$=$, $\in$

変項　$x, y, z, \cdots$ など.

また $\mathcal{L}_\in$ の項(term)と式(formula)は次の規則で生成する.

$\mathcal{L}_\in$ の項と式

項　変項は項であり，またこれらのみが項である.

式 • 項 τ と項 σ に対して $\tau \in \sigma$ と $\tau = \sigma$ は式である.

- 式 φ に対して $\neg\varphi$ は式である.
- 式 φ と式 ψ に対して $\varphi \vee \psi$ と $\varphi \wedge \psi$ と $\varphi \to \psi$ はいずれも式である.
- 式 φ と項 x に対して $\exists x\varphi$ と $\forall x\varphi$ は式である.
- これらのみが式である.

2.2　言語の拡張

•

$\{ x \mid \varphi(x) \}$ の形の項を内包項，$\varepsilon x \varphi(x)$ の形の項を ε 項と呼ぶことにして，$\mathcal{L}_\in$ に内包項と ε 項を追加した言語を

$$\mathcal{L}$$

と名付ける．また $\mathcal{L}_\in$ の項は($\mathcal{L}$ の)変項と呼ぶ.

$\mathcal{L}$ の項と式の定義

項　内包項と ε 項と変項は項である．これらのみが項である.

式　式の生成規則は $\mathcal{L}_\in$ と殆ど同じであるが，

- 式 φ と変項 x に対して $\exists x \varphi$ と $\forall x \varphi$ は式である.

の箇所のみ変える.

3　∃の規則

推論規則 3.1 (∃の導入).　$\mathcal{L}$ の式 $\varphi(x)$ と ε 項 τ に対して

$$\varphi(\tau) \vdash \exists x \varphi(x).$$

とくに，任意の ε 項 τ に対して

$$\tau = \tau.$$

だから

$$\exists x \,(\, x = \tau \,)$$

が成り立つ．つまり ε 項はすべて集合．

推論規則 3.2 (∃の除去 (NG 版)). $\mathcal{L}$ の式 $\varphi(x)$ に対して

$$\exists x \varphi(x) \vdash \varphi(\varepsilon x \varphi(x)).$$

φ に内包項や ε 項が現れる場合

$$\varepsilon x \varphi(x)$$

なる項は無い (無理矢理つくると入れ子問題).

解決法

$\mathcal{L}$ の式を $\mathcal{L}_{\in}$ の式に書き換える手順を用意する.

4　式の書き換え

- 式に ε 項が含まれていると書き換え不可.
- ε 項が現れない式を甲種式，そうでない式を乙種式と分類.

次の書き換え規則によって，甲種式はすべて $\mathcal{L}_\in$ の式に書き換え可能(構造的帰納法による).

- $x \in \{\, y \mid \psi(y) \,\}$ は $\psi(x)$
- $\{\, x \mid \varphi(x) \,\} \in y$ は

$$\exists s \ \big(s \in y \land \forall x \ \big(x \in s \iff \varphi(x) \big) \big)$$

- $\{\, x \mid \varphi(x) \,\} \in \{\, y \mid \psi(y) \,\}$ は

$$\exists s \ \big(\psi(s) \land \forall x \ \big(x \in s \iff \varphi(x) \big) \big)$$

- $x = \{ y \mid \psi(y) \}$ は

$$\forall u \ \big(u \in x \Longleftrightarrow \psi(u) \big)$$

- $\{ x \mid \varphi(x) \} = y$ は

$$\forall u \ \big(\varphi(u) \Longleftrightarrow u \in y \big)$$

- $\{ x \mid \varphi(x) \} = \{ y \mid \psi(y) \}$ は

$$\forall u \ \big(\varphi(u) \Longleftrightarrow \psi(u) \big)$$

5　∃の除去規則

甲種式φを$\mathcal{L}_{\in}$の式に書き換えたものを$\hat{\varphi}$と書く.

推論規則 5.1 (∃の除去).　甲種式$\varphi(x)$に対して

$$\exists x \varphi(x) \vdash \varphi\left(\varepsilon x \hat{\varphi}(x)\right).$$

∃の除去規則と導入規則により次を得る.

定理 5.2.　甲種式$\varphi(x)$に対して

$$\exists x \varphi(x) \Longleftrightarrow \varphi\left(\varepsilon x \hat{\varphi}(x)\right).$$

6 ∀の導入

推論規則 6.1 (∀の導入). 式 $\varphi(x)$ に対し，すべての ε 項 τ で $\varphi(\tau)$ が成り立つなら

$$\forall x\varphi(x).$$

推論規則 6.2 (∀の除去). 式 $\varphi(x)$ と ε 項 τ に対して

$$\forall x\varphi(x) \vdash \varphi(\tau).$$

ε 項は集合であるから，量化の亘る範囲は集合の上だけ.

定理 6.3. 甲種式 $\varphi(x)$ に対して

$$\forall x \varphi(x) \Longleftrightarrow \varphi\left(\varepsilon x \rightarrow \hat{\varphi}(x)\right).$$

次の定理は他の公理および構造的帰納法と併せて示される.

定理 6.4 (書き換えの同値性). 甲種式 $\varphi(x)$ に対して

$$\forall x \left(\varphi(x) \Longleftrightarrow \hat{\varphi}(x) \right).$$

7　成り立つこと

定理 7.1.　内包項$\left\{ x \mid \varphi(x) \right\}$が集合であれば

$$\left\{ x \mid \varphi(x) \right\} = \varepsilon y \, \forall x \, \left(x \in y \Longleftrightarrow \varphi(x) \right).$$

略証.　$\exists y \, \left(\left\{ x \mid \varphi(x) \right\} = y \right)$を$\mathcal{L}_{\in}$の式に書き直せば

$$\exists y \, \forall x \, \left(x \in y \Longleftrightarrow \varphi(x) \right).$$

存在記号の規則より結論が従う. ■