解析学 6 等 レポート

基礎工学研究科システム創成専攻修士 1 年
学籍番号 29C17095
百合川尚学
選択番号$\boxed{1}$ $\boxed{2}$

2017 年 10 月 28 日

$\boxed{1}$ 以下の問いに答えよ．

(1) X を空でない集合とし，その部分集合族 $\mathcal{F}$ を次で与える．

$$\mathcal{F} = \{A \subset X \mid A \text{ または } A^c \text{ は可算集合}\}$$

(i) $\mathcal{F}$ は X 上の σ 集合体であることを示せ．

(ii) $\mathcal{F}$ 上の関数 P を次で定義する．

$$\mathrm{P}(A) = \begin{cases} 1 & (A^c \text{ は可算集合}) \\ 0 & (A \text{ は可算集合}) \end{cases} \quad (A \in \mathcal{F})$$

解答

(i)
1. $X^c = \emptyset$ の濃度は 0 であるから $X \in \mathcal{F}$ である．
2. $A \in \mathcal{F}$ であれば A または A^c が可算集合である．これは A^c または $(A^c)^c$ が可算集合であることと同じであるから $A^c \in \mathcal{F}$ である．
3. $A_n \in \mathcal{F}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を取る．A_n $(n = 1, 2, \cdots)$ がすべて可算集合であるなら $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ も可算集合であるから $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$ が成り立つ．ある $N \in \mathbb{N}$ について A_N が非可算集合である場合，A_N^c が可算集合であって
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c \subset A_N^c$$
となるから $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c \in \mathcal{F}$ であることが判る．二番目の結果によりこの場合も $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$ が成り立つ．以上でいかなる場合も $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$ が成り立つことが示された．

以上で $\mathcal{F}$ が σ 集合体であることの定義を満たしていることが確認された．

(ii) (i) の結果により $(X, \mathcal{F})$ は可測空間となる．定義された集合関数 P が確率測度の定義を満たしていることを確認する．
1. $X^c = \emptyset$ が可算集合であるから $\mathrm{P}(X) = 1$ である．
2. $\forall A \in \mathcal{F}$ に対し $\mathrm{P}(A) = 0$ または 1 でしかないから $0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$ が満たされている．
3. $A_n \in \mathcal{F}$ $(n = 1, 2, \cdots)$，$A_n \cap A_m = \emptyset$ $(n \neq m)$ となる集合の系 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，A_n $(n = 1, 2, \cdots)$ が全て可算集合であるなら $\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n$ も可算集合となるから $\mathrm{P}(\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 0$ となり，かつ全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して $\mathrm{P}(A_n) = 0$ ともなっているから
$$\mathrm{P}(\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{P}(A_n)$$
が成立する．或る $N \in \mathbb{N}$ について A_N が非可算集合となっている場合，$n \neq N$ となる $n \in \mathbb{N}$ については $A_n \subset A_N^c$ が成り立つことから，非可算集合は A_N のみとなることに注意する．(i) を示した時と同じ理由で $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c$ が可算集合となるから $\mathrm{P}(\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 1$ であり，
$$1 = \mathrm{P}(A_N) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{P}(A_n) = \mathrm{P}(\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n)$$
が成り立つことから，いかなる場合も
$$\mathrm{P}(\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{P}(A_n)$$
が成立することが示され，ゆえに P は $\mathcal{F}$ の上で完全加法的である．

以上より P が可測空間 $(X,\mathcal{F})$ 上の確率測度であることが示された． ∎

(2) $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ を確率空間とし，$A_1,A_2,\cdots\in\mathcal{F}$ とする．

(i) $n\geq 2$ に対して次の等式を示せ：

$$\mathrm{P}(\bigcup_{k=1}^{n}A_k)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n}\mathrm{P}(\bigcap_{m=1}^{k}A_{i_m}) \tag{1}$$

(ii) $n\geq 2$ に対して次の不等式を示せ：

$$\mathrm{P}(\bigcup_{k=1}^{n}A_k)\geq\sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}(A_k)-\sum_{1\leq i<j\leq n}\mathrm{P}(A_i\cap A_j) \tag{2}$$

解答

(i) 数学的帰納法で証明する．$n=2$ の場合

$$\mathrm{P}(A_1\cup A_2)=\mathrm{P}(A_1+A_2\backslash(A_1\cap A_2))=\mathrm{P}(A_1)+\mathrm{P}(A_2)-\mathrm{P}(A_1\cap A_2)$$

となるから等式 (1) は成立している．$n\ (\geq 2)$ 番目まで等式 (1) が成立していると仮定して $n+1$ 番目を考える．まず一般に

$$\mathrm{P}(\bigcup_{k=1}^{n+1}A_k)=\mathrm{P}(\bigcup_{k=1}^{n}A_k)+\mathrm{P}(A_{n+1}\backslash\bigcup_{k=1}^{n}A_k)$$

が成立している．ここで右辺の第二項を分解していくと

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A_{n+1}\backslash\bigcup_{k=1}^{n}A_k)&=\mathrm{P}(A_{n+1})-\mathrm{P}(\bigcup_{k_1=1}^{n}A_{k_1}\cap A_{n+1})\\
&=\mathrm{P}(A_{n+1})-\sum_{k_1=1}^{n}\mathrm{P}(A_{k_1}\cap A_{n+1}\backslash\bigcup_{k_2=1}^{k_1-1}A_{k_2}\cap A_{n+1})\\
&=\mathrm{P}(A_{n+1})-\sum_{k_1=1}^{n}\mathrm{P}(A_{k_1}\cap A_{n+1})+\sum_{k_1=1}^{n}\mathrm{P}(\bigcup_{k_2=1}^{k_1-1}A_{k_2}\cap A_{k_1}\cap A_{n+1})\\
&=\mathrm{P}(A_{n+1})-\sum_{k_1=1}^{n}\mathrm{P}(A_{k_1}\cap A_{n+1})+\sum_{k_1=1}^{n}\mathrm{P}(\sum_{k_2=1}^{k_1-1}A_{k_2}\cap A_{k_1}\cap A_{n+1}\backslash\bigcup_{k_3=1}^{k_2-1}A_{k_3}\cap A_{k_1}\cap A_{n+1})\\
&=\mathrm{P}(A_{n+1})-\sum_{k_1=1}^{n}\mathrm{P}(A_{k_1}\cap A_{n+1})+\sum_{k_1=2}^{n}\sum_{k_2=1}^{k_1-1}\mathrm{P}(A_{k_2}\cap A_{k_1}\cap A_{n+1}\backslash\bigcup_{k_3=1}^{k_2-1}A_{k_3}\cap A_{k_1}\cap A_{n+1})\\
&=\mathrm{P}(A_{n+1})-\sum_{k_1=1}^{n}\mathrm{P}(A_{k_1}\cap A_{n+1})+\sum_{k_1=2}^{n}\sum_{k_2=1}^{k_1-1}\mathrm{P}(A_{k_2}\cap A_{k_1}\cap A_{n+1})\\
&\quad-\sum_{k_1=2}^{n}\sum_{k_2=1}^{k_1-1}\mathrm{P}(\bigcup_{k_3=1}^{k_2-1}A_{k_3}\cap A_{k_2}\cap A_{k_1}\cap A_{n+1})\\
&=\mathrm{P}(A_{n+1})-\sum_{k_1=1}^{n}\mathrm{P}(A_{k_1}\cap A_{n+1})+\sum_{k_1=2}^{n}\sum_{k_2=1}^{k_1-1}\mathrm{P}(A_{k_2}\cap A_{k_1}\cap A_{n+1})\\
&\quad-\sum_{k_1=3}^{n}\sum_{k_2=2}^{k_1-1}\mathrm{P}(\sum_{k_3=1}^{k_2-1}A_{k_3}\cap A_{k_2}\cap A_{k_1}\cap A_{n+1}\backslash\bigcup_{k_4=1}^{k_3-1}A_{k_4}\cap A_{k_2}\cap A_{k_1}\cap A_{n+1})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{P}(A_{n+1}) - \sum_{k_1=1}^{n} \mathrm{P}(A_{k_1} \cap A_{n+1}) + \sum_{k_1=2}^{n} \sum_{k_2=1}^{k_1-1} \mathrm{P}(A_{k_2} \cap A_{k_1} \cap A_{n+1}) \\
&\quad - \sum_{k_1=3}^{n} \sum_{k_2=2}^{k_1-1} \sum_{k_3=1}^{k_2-1} \mathrm{P}(A_{k_3} \cap A_{k_2} \cap A_{k_1} \cap A_{n+1}) \\
&\quad + \sum_{k_1=4}^{n} \sum_{k_2=3}^{k_1-1} \sum_{k_3=2}^{k_2-1} \mathrm{P}(\bigcup_{k_4=1}^{k_3-1} A_{k_4} \cap A_{k_3} \cap A_{k_2} \cap A_{k_1} \cap A_{n+1}) \\
&\vdots \\
&= \mathrm{P}(A_{n+1}) - \sum_{k_1=1}^{n} \mathrm{P}(A_{k_1} \cap A_{n+1}) + \sum_{k_1=2}^{n} \sum_{k_2=1}^{k_1-1} \mathrm{P}(A_{k_2} \cap A_{k_1} \cap A_{n+1}) \\
&\quad - \sum_{k_1=3}^{n} \sum_{k_2=2}^{k_1-1} \sum_{k_3=1}^{k_2-1} \mathrm{P}(A_{k_3} \cap A_{k_2} \cap A_{k_1} \cap A_{n+1}) \\
&\quad + \sum_{k_1=4}^{n} \sum_{k_2=3}^{k_1-1} \sum_{k_3=2}^{k_2-1} \mathrm{P}(\bigcup_{k_4=1}^{k_3-1} A_{k_4} \cap A_{k_3} \cap A_{k_2} \cap A_{k_1} \cap A_{n+1}) \\
&\quad \cdots \\
&\quad + (-1)^n \sum_{k_1=n}^{n} \sum_{k_2=n-1}^{k_1-1} \cdots \sum_{k_{n-1}=2}^{k_{n-2}-1} \mathrm{P}(\bigcup_{k_n=1}^{k_{n-1}-1} A_{k_n} \cap \cdots \cap A_{k_2} \cap A_{k_1} \cap A_{n+1}) \\
&= \mathrm{P}(A_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} \mathrm{P}(\bigcap_{m=1}^{k} A_{i_m} \cap A_{n+1})
\end{aligned}
$$

が成り立つ．上の結果と帰納法の仮定を使えば

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) + \mathrm{P}(A_{n+1} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k) \\
&= \mathrm{P}(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) + \mathrm{P}(A_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} \mathrm{P}(\bigcap_{m=1}^{k} A_{i_m} \cap A_{n+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} \mathrm{P}(\bigcap_{m=1}^{k} A_{i_m}) + \mathrm{P}(A_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} \mathrm{P}(\bigcap_{m=1}^{k} A_{i_m} \cap A_{n+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n+1} \mathrm{P}(\bigcap_{m=1}^{k} A_{i_m})
\end{aligned}
$$

が成り立つから

$$
\mathrm{P}(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n+1} \mathrm{P}(\bigcap_{m=1}^{k} A_{i_m})
$$

となり，$n+1$ 番目にも等式 (1) が成立していることが示される．以上で数学的帰納法により全ての自然数 $n \ge 2$ で等式 (1) が成立していることが示された．

(ii)　これも数学的帰納法による．$n = 2$ の場合は

$$
\mathrm{P}(A_1 \cup A_2) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) - \mathrm{P}(A_1 \cap A_2)
$$

により不等式 (2) は成立している．$n\ (\geq 2)$ 番目まで不等式 (2) が成立していると仮定して $n+1$ 番目を考えれば

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k) &= \mathrm{P}(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) + \mathrm{P}(A_{n+1} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k) \\
&= \mathrm{P}(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) + \mathrm{P}(A_{n+1}) - \mathrm{P}(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \cap A_{n+1}) \\
&\geq \mathrm{P}(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) + \mathrm{P}(A_{n+1}) - \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k \cap A_{n+1}) \\
&\geq \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{P}(A_i \cap A_j) + \mathrm{P}(A_{n+1}) - \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k \cap A_{n+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{P}(A_k) - \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} \mathrm{P}(A_i \cap A_j)
\end{aligned}
$$

となり，$n+1$ 番目にも不等式 (2) が成立していることが示される．以上で数学的帰納法により全ての自然数 $n \geq 2$ で不等式 (2) が成立していることが示された． ∎

$\boxed{2}$ 確率測度の列 $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ を次で定める．

$$\mu_n(\{k\}) = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{1}{n}\right)^k\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

(1) 確率測度 μ_n の特性関数 $\phi_n(\xi)$ を計算せよ．

(2) $\lim_{n\to\infty}\phi_n(\xi)$ を求めよ．

(3) 確率測度 μ を次で定める．

$$\mu(\{k\}) = \frac{1}{e\cdot k!} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

μ の特性関数 $\phi(\xi)$ を計算し，$\mu_n \Rightarrow \mu$ を示せ．

解答

(1) $i = \sqrt{-1}$ とする．任意の $\xi \in \mathbb{R}^1$ に対して

$$\begin{aligned}\phi_n(\xi) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{1}{n}\right)^k\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k}e^{i\xi k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{e^{i\xi}}{n}\right)^k\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k}\\ &= \left(1+\frac{e^{i\xi}-1}{n}\right)^n\end{aligned}$$

が成り立つ．

(2) $\xi \neq 0$ のとき，

$$\lim_{n\to\infty}\phi_n(\xi) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{e^{i\xi}-1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{e^{i\xi}-1}{n}\right)^{n/(e^{i\xi}-1)}\right)^{e^{i\xi}-1} = e^{e^{i\xi}-1}$$

が成り立ち，$\xi = 0$ の場合は全ての $n = 1, 2, \cdots$ について $\phi_n(0) = 1$ であるから極限も 1 である．従って全ての $\xi \in \mathbb{R}^1$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}\phi_n(\xi) = e^{e^{i\xi}-1}$$

となる．

(3) 任意の $\xi \in \mathbb{R}^1$ に対して

$$\phi(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{e\cdot k!}e^{i\xi k} = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(e^{i\xi})^k}{k!} = e^{e^{i\xi}-1}$$

が成り立つ．(2) の結果と合わせて ϕ_n は ϕ に各点 $\xi \in \mathbb{R}^1$ で収束 $(n \to +\infty)$ しているから，講義中の定理 2.2.5 により $\mu_n \Rightarrow \mu$ が示された． ∎