

# 関数解析レポート

百合川

2018 年 2 月 4 日

約束引用:以下, 係数体を  $\mathbb{C}$  とする. 位相空間  $X$  上の有界な複素数値連続関数全体のなす空間  $C_b(X)$  は, sup-norm により Banach 空間とみなす.

[4]

$a > 0, I = [0, a]$  とおく.  $C(I)$  から  $C(I)$  への線型作用素  $T$  を次で定める:

$$\mathcal{D}(T) := \left\{ u \in C^1(I) ; \quad u(0) + u(a) = 0 \right\}, \quad Tu(x) = u'(x) \quad (x \in I).$$

このとき,  $\sigma_p(T)$  及び  $\sigma(T)$  を求めよ.

証明. sup-norm を  $\|\cdot\|$ ,  $C(I)$  上の恒等写像を  $I(\neq I)$  と表す.

$T$  が閉作用素であること 先ず  $T$  が閉作用素であることを示す.  $u_n \in \mathcal{D}(T)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) に対し或る  $u, v \in C(I)$  が存在して,  $\|u_n - u\| \rightarrow 0$  かつ  $\|Tu_n - v\| \rightarrow 0$  が成り立つとき, 任意の  $x \in I$  に対して

$$\begin{aligned} \left| u(x) - \int_0^x v(t) dt \right| &\leq |u(x) - u_n(x)| + \left| \int_0^x Tu_n(t) dt - \int_0^x v(t) dt \right| \\ &\leq \|u - u_n\| + a \|Tu_n - v\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

が成り立つから

$$u(x) = \int_0^x v(t) dt \quad (\forall x \in I)$$

となり,  $u \in C^1(I)$  かつ  $Tu = v$  が従う. そして

$$|u(0) + u(a)| \leq |u(0) - u_n(0)| + |u_n(a) - u(a)| \leq 2\|u - u_n\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

により,  $u \in \mathcal{D}(T)$  が成り立つ. これにより  $T$  は閉作用素である.

点スペクトルについて  $u \in \mathcal{D}(T)$  とする.  $\lambda u - Tu = 0$  を満たす  $\lambda \in \mathbb{C}$  に対し, 微分方程式を解けば

$$u(x) = Ce^{\lambda x} \quad (x \in I, C \in \mathbb{C})$$

と表せる. 今  $u(0) + u(a) = 0$  が満たされているから,

$$C + Ce^{\lambda a} = 0$$

が成り立つ. これは  $C = 0$  或は  $\lambda = \frac{1}{a} \log(-1)$  の場合に実現する.  $\lambda = \frac{1}{a} \log(-1)$  でなければ  $C = 0$  でなくてはならないが, このとき  $u = 0$  となり固有ベクトルにならないから

$$\sigma_p(T) \subset \left\{ \sqrt{-1} \frac{(2n+1)\pi}{a} ; \quad n \in \mathbb{Z} \right\}$$

が従う. 逆に  $n \in \mathbb{Z}$  を取り  $\lambda = (2n+1)\pi/a$  とおけば, 任意の  $0 \neq C \in \mathbb{C}$  に対して  $u(x) = Ce^{\lambda x}$  ( $x \in I$ ) は

$$\lambda u(x) - Tu(x) = 0 \quad (\forall x \in I), \quad u(0) + u(a) = 0$$

を満たすから

$$\sigma_p(T) \supset \left\{ \sqrt{-1} \frac{(2n+1)\pi}{a} ; \quad n \in \mathbb{Z} \right\}$$

が成り立ち,  $\sigma_p(T) = \left\{ \sqrt{-1} (2n+1)\pi/a ; \quad n \in \mathbb{Z} \right\}$  が得られる.

スペクトルについて レゾルベント集合が<sup>s</sup> $\rho(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma_p(T)$  を満たすことを示す. これにより  $\sigma(T) = \sigma_p(T)$  が従う.  
 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_p(T), f \in C(I)$  を任意に取り

$$\begin{cases} u'(x) - \lambda u(x) = f(x) \\ u(0) + u(a) = 0 \end{cases} \quad (x \in I)$$

を満たす  $u$  を考えれば,

$$\begin{aligned} & \begin{cases} u'(x) - \lambda u(x) = f(x) \\ u(0) + u(a) = 0 \end{cases} \quad (x \in I) \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) = e^{\lambda x} u(0) + \int_0^x e^{\lambda(x-s)} f(s) ds \\ u(0) + u(a) = 0 \end{cases} \quad (x \in I) \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) = e^{\lambda x} u(0) + \int_0^x e^{\lambda(x-s)} f(s) ds \\ u(0) + e^{\lambda a} u(0) + \int_0^a e^{\lambda(a-s)} f(s) ds = 0 \end{cases} \quad (x \in I) \\ & \Leftrightarrow u(x) = -\frac{e^{\lambda x}}{1 + e^{\lambda a}} \int_0^a e^{\lambda(a-s)} f(s) ds + \int_0^x e^{\lambda(x-s)} f(s) ds \quad (x \in I)^{*1} \end{aligned} \quad (1)$$

より  $f$  に対して  $u \in \mathcal{D}(T)$  は唯一つ定まる. この  $f$  から  $u$  への単射対応を  $R_\lambda : C(I) \xrightarrow{\text{op}} \mathcal{D}(T)$  と表せば,  $f$  の任意性より  $\mathcal{D}(R_\lambda) = C(I)$  が成り立ち, 且つ積分の線型性により  $R_\lambda$  も線型性を持つ. また (1) の最終式より

$$\|R_\lambda f\| \leq \left( \frac{\sup_{x \in I} |e^{\lambda x}|}{|1 + e^{\lambda a}|} \int_0^a |e^{\lambda(a-s)}| ds + \sup_{x \in I} |e^{\lambda x}| \int_0^a |e^{-\lambda s}| ds \right) \|f\|$$

が成り立つから  $R_\lambda$  は有界であり, さらに  $R_\lambda$  の定め方と (1) より

$$\begin{aligned} -R_\lambda(\lambda I - T)u &= u \quad (\forall u \in \mathcal{D}(T)), \\ -(\lambda I - T)R_\lambda f &= f \quad (\forall f \in C(I)) \end{aligned}$$

が満たされるから  $-R_\lambda = (\lambda I - T)^{-1}$  が成り立ち  $\lambda \in \rho(T)$  が従う. これにより  $\rho(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma_p(T)$  が得られる. ■

---

<sup>\*1</sup>  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_p(T)$  より  $1 + e^{\lambda a} \neq 0$  である.

[5]

$X, Y$  をそれぞれ  $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$  の空でないコンパクト部分集合とし,  $K \in C(X \times Y)$  とするとき

$$T : C(Y) \rightarrow C(X), \quad Tf(x) = \int_Y K(x, y)f(y) dy \quad (f \in C(Y))$$

はコンパクト作用素であることを示せ.

証明.  $m(n)$  次元 Lebesgue 測度を  $\mu_m(\mu_n)$  と表す. また  $L^\infty(\mu_m) = L^\infty(X, \mathfrak{B}(X), \mu_m)$ ,  $L^\infty(\mu_n) = L^\infty(Y, \mathfrak{B}(Y), \mu_n)$  とおき, 関数と関数類は表記上区別しない.  $C(X)$  と  $L^\infty(\mu_m)$  のノルムをそれぞれ  $\|\cdot\|_{C(X)}, \|\cdot\|_{L^\infty(\mu_m)}$  と表す. 講義中の例より

$$\tilde{T}f(x) = \int_Y K(x, y)f(y) \mu_n(dy), \quad (f \in L^\infty(\mu_n))$$

により定める  $\tilde{T}$  は  $L^\infty(\mu_n)$  から  $L^\infty(\mu_m)$  へのコンパクト作用素である. そして  $C(Y) \subset \mathcal{L}^\infty(\mu_n)$ ,  $C(X) \subset \mathcal{L}^\infty(\mu_m)$  より  $\tilde{T}$  は  $T$  の拡張となっている<sup>\*2</sup>.  $C(Y)$  から任意に有界列  $(f_n)_{n=1}^\infty$  を取れば,  $\tilde{T}$  がコンパクト作用素であるから  $(\tilde{T}f_n)_{n=1}^\infty$  の或る部分列  $(\tilde{T}f_{n_k})_{k=1}^\infty$  は Banach 空間  $L^\infty(\mu_m)$  で強収束する. 今  $Tf_n = \tilde{T}f_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 且つ

$$\|Tf_n\|_{C(X)} = \|\tilde{T}f_n\|_{L^\infty(\mu_m)} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

が満たされているから,  $(Tf_{n_k})_{k=1}^\infty$  もまた  $C(X)$  で  $\|\cdot\|_{C(X)}$  により Cauchy 列をなしていて,  $(C(X), \|\cdot\|_{C(X)})$  が Banach 空間であるから  $(Tf_{n_k})_{k=1}^\infty$  は  $C(X)$  で強収束する. ゆえに  $T$  はコンパクト作用素である. ■

$a \in C_b(\mathbb{R}^d), \lambda > d$  とする.  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$  に対し,

$$T_a f(x) = \int_{|x-y|>1} \frac{a(x)f(y)}{|x-y|^\lambda} dy \quad (\text{a.e. } x \in \mathbb{R}^d)$$

により  $T_a : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$  を定める.

- (1)  $T_a$  は連続であることを示せ.
- (2)  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} a(x) = 0$  ならば  $T_a$  はコンパクト作用素であることを示せ.

証明.

- (1) 任意の  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$  に対し  $T_a f$  が二乗可積分であることと  $T_a$  の連続性を同時に示す. 以下,  $L^2(\mathbb{R}^d)$  のノルムを  $\|\cdot\|$  と書き,  $M := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |a(x)| < \infty$  とおく.  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$  に対し, Hölder の不等式より

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{|a(x)f(y)|}{|x-y|^\lambda} dy &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{|a(x)|}{|x-y|^{\frac{\lambda}{2}}} \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{\frac{\lambda}{2}}} dy \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{|a(x)|^2}{|x-y|^\lambda} dy \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{|f(y)|^2}{|x-y|^\lambda} dy \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

<sup>\*2</sup> 任意の  $f \in C(Y)$  に対し,  $f$  を代表とする関数類  $[f]$  が  $L^\infty$  に存在する. そして  $T$  と  $\tilde{T}$  は次の関係を満たしている:

$$[Tf] = \tilde{T}[f] \quad (\forall f \in C(Y))$$

が任意の  $x \in \mathbb{R}^d$  で成立する. 右辺第一項について,  $\lambda > d \geq 1$  であるから, 変数変換を用いて

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{|a(x)|^2}{|x-y|^\lambda} dy \leq M^2 \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{1}{|x-y|^\lambda} dy = M^2 \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{|u|>1} \frac{1}{|u|^\lambda} du < \infty$$

が満たされる. 従って  $U := \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{1}{|x-y|^\lambda} dy$  とおけば  $U$  は  $x$  に依らない定数である. 今,  $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto (a(x)f(y))/|x-y|^\lambda$  は各  $y \in \mathbb{R}^d \setminus \{x\}$  で連続,  $\mathbb{R}^d \ni y \mapsto \mathbb{1}_{\{|x-y|>1\}}(a(x)f(y))/|x-y|^\lambda$  は各  $x \in \mathbb{R}^d$  で  $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)/\mathfrak{B}(\mathbb{C})$ -可測より,  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \ni (x, y) \mapsto \mathbb{1}_{\{|x-y|>1\}}(a(x)f(y))/|x-y|^\lambda$  は  $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d) \times \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)/\mathfrak{B}(\mathbb{C})$ -可測であるから, Fubini の定理より

$$\begin{aligned} \|T_a f\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{|x-y|>1} \frac{a(x)f(y)}{|x-y|^\lambda} dy \right|^2 dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left( \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{|a(x)|^2}{|x-y|^\lambda} dy \right) \left( \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{|f(y)|^2}{|x-y|^\lambda} dy \right) dx \\ &\leq M^2 U \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{|f(y)|^2}{|x-y|^\lambda} dy dx \\ &= M^2 U \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^2 dy \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{1}{|x-y|^\lambda} dx \\ &= M^2 U^2 \|f\|^2 \end{aligned} \quad (2)$$

が得られる.  $T_a$  が線型性を持てば有界性と連続性は一致するから, あとは  $T_a$  が線型性を持つことを示せばよい.

- (2)  $L^2(\mathbb{R}^d)$  が Banach 空間であるから,  $B_c(L^2)$  は  $B(L^2)$  の閉部分空間であり,  $T_a$  に作用素ノルムで収束する  $B_c(L^2)$  の列が存在すれば  $T_a \in B_c(L^2)$  が従う. 今, 任意に  $\epsilon > 0$  を取れば, 仮定より或る  $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$  が存在して

$$|a(x)| < \epsilon \quad (|x| > N) \quad (3)$$

が成り立つ. また

$$a_n(x) := a(x) \mathbb{1}_{|x| \leq n} \quad (\forall x \in \mathbb{R}^d, n = 1, 2, \dots)$$

により  $(a_n)_{n=1}^\infty$  を定めれば, 各  $n$  に対し

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto \mathbb{1}_{|x-y|>1} \frac{a_n(x)}{|x-y|^\lambda}$$

は二乗可積分であるから  $T_{a_n}$  は Hilbert-Schmidt 型積分作用素であり, 従ってコンパクト作用素である. (2) より

$$\|T_a - T_{a_n}\| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |a(x) - a_n(x)| U$$

が成り立ち, (3) より  $n > N$  ならば  $\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |a(x) - a_n(x)| < \epsilon$  となるから,  $\epsilon$  の任意性より

$$\|T_a - T_{a_n}\| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が従う. 冒頭に書いた理由により  $T_a$  はコンパクト作用素である. ■

$a = (a_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty$  に対して  $T: \ell^2 \rightarrow \ell^2$  を  $Tx = (a_n x_n)_{n=1}^\infty$  ( $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^2$ ) で定める.

- (1)  $T$  がコンパクト作用素であるための必要十分条件を求めよ.  
 (2)  $T$  が Hilbert-Schmidt 型作用素であるための必要十分条件を求めよ.

証明.

(1) 求める必要十分条件が  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  であることを示す.

**十分性** 任意に  $\ell^2$  の有界列  $(x^\nu)_{\nu=1}^\infty$  ( $x^\nu = (x_n^\nu)_{n=1}^\infty$ ) を取る. 対角線論法により, 或る部分添数列  $(\nu(k))_{k=1}^\infty$  が存在して, 全ての  $n \in \mathbb{N}$  について  $(x_n^{\nu(k)})_{k=1}^\infty$  が  $\mathbb{C}$  の Cauchy 列となるようにできる. 実際  $(x_1^\nu)_{\nu=1}^\infty$  は  $\mathbb{C}$  において有界列であるから, Bolzano-Weierstrass の定理より或る部分列  $(x_1^{\nu(k,1)})_{k=1}^\infty$  は  $\mathbb{C}$  の Cauchy 列となる.  $(x_2^\nu)_{\nu=1}^\infty$  も  $\mathbb{C}$  において有界列であるから,  $(\nu(k,1))_{k=1}^\infty$  の部分添数列  $(\nu(k,2))_{k=1}^\infty$  が存在し  $(x_2^{\nu(k,2)})_{k=1}^\infty$  は  $\mathbb{C}$  の Cauchy 列となる. 同様に部分列を取る操作を繰り返し, 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対し  $(x_n^{\nu(k,n)})_{k=1}^\infty$  が  $\mathbb{C}$  の Cauchy 列となるようにできる.  $\nu(k) := \nu(k, k)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) として  $(\nu(k))_{k=1}^\infty$  を定めればよい.

$$M := \sup_{\nu \in \mathbb{N}} \|x^\nu\|_{\ell^2} < \infty$$

とおき, 任意に  $\epsilon > 0$  を取る.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  より或る  $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$  が存在して

$$|a_n| \leq \frac{\epsilon}{2M} \quad (\forall n > N)$$

を満たすから, 任意の  $k, m \in \mathbb{N}$  に対して

$$\begin{aligned} \|Tx^{\nu(k)} - Tx^{\nu(m)}\|_{\ell^2}^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 |x_n^{\nu(k)} - x_n^{\nu(m)}|^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^N |a_n|^2 |x_n^{\nu(k)} - x_n^{\nu(m)}|^2 + 2 \frac{\epsilon^2}{4M^2} \sum_{n=N+1}^{\infty} (|x_n^{\nu(k)}|^2 + |x_n^{\nu(m)}|^2) \\ &\leq \sum_{n=1}^N |a_n|^2 |x_n^{\nu(k)} - x_n^{\nu(m)}|^2 + \epsilon^2 \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで  $A := \max_{1 \leq n \leq N} |a_n|$  とおけば, 或る  $N_j = N_j(\epsilon) \in \mathbb{N}$  ( $j = 1, \dots, N$ ) が存在して

$$|x_j^{\nu(k)} - x_j^{\nu(m)}| < \frac{\epsilon}{\sqrt{N}A} \quad (\forall k, m > N_j, j = 1, \dots, N)$$

が成り立つ.  $N' := \max_{1 \leq j \leq N} N_j$  とおけば

$$\sum_{n=1}^N |a_n|^2 |x_n^{\nu(k)} - x_n^{\nu(m)}|^2 \leq A^2 N \frac{\epsilon^2}{NA^2} = \epsilon^2 \quad (\forall k, m > N')$$

が従うから,

$$\|Tx^{\nu(k)} - Tx^{\nu(m)}\|_{\ell^2}^2 \leq 2\epsilon^2 \quad (\forall k, m > N')$$

が成り立つ.  $\epsilon$  の任意性より  $(Tx_n^{\nu(k)})_{k=1}^\infty$  は収束列であり,  $T$  はコンパクト作用素である.

**必要性** 対偶, つまり  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  が満たされない場合に或る有界点列  $(x^k)_{k=1}^\infty \subset \ell^2$  が存在して,  $(Tx^k)_{k=1}^\infty$  のいかなる部分列も収束しないことを示す. 今, 或る  $\epsilon > 0$  に対し  $(a_n)_{n=1}^\infty$  の或る部分列  $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$  が

$$|a_{n_k}| \geq \epsilon$$

を満たす.

$$x_n^k := \begin{cases} 1 & (n = n_k) \\ 0 & (n \neq n_k) \end{cases} \quad (n, k = 1, 2, \dots)$$

として  $\ell^2$  の点列  $(x^k)_{k=1}^\infty$  を定めれば,  $k \neq m$  なら

$$\|Tx^k - Tx^m\|^2 = |a_{n_k}|^2 + |a_{n_m}|^2 \geq 2\epsilon^2$$

を満たすから  $(Tx^k)_{k=1}^\infty$  のいかなる部分列も収束しえない.

(2)

$(X, \mathcal{M}, \mu)$  を  $\sigma$ -有限な測度空間,  $H = L^2(X, \mathcal{M}, \mu) = L^2(\mu)$  とする.  $\mathcal{M}$ -可測関数  $a : X \rightarrow \mathbb{C}$  に対して,  $H$  から  $H$  へのかけ算作用素  $M_a$  を次で定める:

$$\mathcal{D}(M_a) = \{ u \in H ; \quad au \in H \}, \quad (M_a u)(x) = a(x)u(x) \quad (x \in X).$$

- (1)  $M_a$  は線型作用素で,  $\mathcal{D}(M_a)$  は  $H$  で稠密なことを示せ.
- (2)  $M_a^* = M_{\bar{a}}$  が成り立つことを示せ.
- (3)  $\sigma(M_a) = \{ \lambda \in \mathbb{C} ; \quad \forall \epsilon > 0 \text{ に対し } \mu(a^{-1}(U_\epsilon(\lambda))) > 0 \}$  を示せ. (ただし  $U_\epsilon(\lambda)$  は  $\lambda$  の  $\epsilon$ -近傍.)
- (4)  $\sigma_p(M_a) = \{ \lambda \in \mathbb{C} ; \quad \mu(a^{-1}(\{\lambda\})) > 0 \}$  を示せ.

証明.  $\sigma$ -有限であるから或る系  $(X_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{M}$  が存在して  $X_1 \subset X_2 \subset \cdots$ ,  $\mu(X_n) < \infty$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ),  $\cup_{n \in \mathbb{N}} X_n = X$  を満たす.

- (1) 任意に  $v \in H$  を取り  $v_n := v \mathbb{1}_{\{|a| \leq n\}}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) として関数列  $(v_n)_{n=1}^\infty$  を作る. 全ての  $x \in S$  で  $|v_n(x)| \leq |v(x)|$  が満たされているから  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H$  である. また全ての  $n \in \mathbb{N}$  について

$$\int_S |a(x)v_n(x)|^2 \mu(dx) = \int_{\{|a| \leq n\}} |a(x)v(x)|^2 \mu(dx) \leq n^2 \int_S |v(x)|^2 \mu(dx)$$

が成り立つから  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(M_a)$  も満たされる.

$$\|v - v_n\|^2 = \int_S |v(x) - v_n(x)|^2 \mu(dx) = \int_S \mathbb{1}_{\{|a| > n\}}(x) |v(x)|^2 \mu(dx)$$

となり, 右辺の被積分関数は各点で 0 に収束し, かつ  $n$  に関係なく可積分関数  $|v|^2$  で抑えられるから, Lebesgue の収束定理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v - v_n\|_{L^2(\mu)}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S \mathbb{1}_{\{|a| > n\}}(x) |v(x)|^2 \mu(dx) = \int_S \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{\{|a| > n\}}(x) |v(x)|^2 \mu(dx) = 0$$

が得られる.  $v$  は任意に選んでいたから  $\mathcal{D}(M_a)$  は  $X$  において稠密である.

- (2) 任意の  $u, v \in \mathcal{D}(M_a) = \mathcal{D}(M_{\bar{a}})$  に対して

$$\langle M_a u, v \rangle = \int_X a(x)u(x)\overline{v(x)} \mu(dx) = \int_X u(x)\overline{a(x)v(x)} \mu(dx) = \langle u, M_{\bar{a}} v \rangle$$

が成り立つから,  $v \in \mathcal{D}(M_a^*)$  且つ  $M_a^* v = M_{\bar{a}} v$  ( $\forall v \in \mathcal{D}(M_{\bar{a}})$ ) が従う. 逆に任意に  $u \in \mathcal{D}(M_a)$ ,  $v \in \mathcal{D}(M_a^*)$  を取れば,

$$\langle u, M_a^* v \rangle = \langle M_a u, v \rangle = \langle u, M_{\bar{a}} v \rangle$$

となり  $M_a^* v = M_{\bar{a}} v$  ( $\forall v \in \mathcal{D}(M_a^*)$ ) が従う.

- (3)  $\lambda \in \mathbb{C}$  を任意に取り固定し, 任意の  $\epsilon > 0$  に対して  $V_\epsilon := a^{-1}(U_\epsilon(\lambda))$  とおく. 或る  $\epsilon > 0$  が存在して  $\mu(V_\epsilon) = 0$  が成り立つ場合,

$$b(x) := \begin{cases} \frac{1}{\lambda - a(x)} & (x \in X \setminus V_\epsilon) \\ 0 & (x \in V_\epsilon) \end{cases}$$

と定めれば, 任意の  $u \in H$  に対して

$$\int_X |b(x)u(x)|^2 \mu(dx) = \int_{X \setminus V_\epsilon} \frac{1}{|\lambda - a(x)|^2} |u(x)|^2 \mu(dx) \leq \frac{1}{\epsilon^2} \int_X |u(x)|^2 \mu(dx) < \infty$$

が成り立つから  $\mathcal{D}(M_b) = H$  である. 更に

$$\begin{aligned} b(\lambda - a)u &= u \quad (\mu\text{-a.e.}, \forall u \in \mathcal{D}(M_a)), \\ (\lambda - a)bu &= u \quad (\mu\text{-a.e.}, \forall u \in H) \end{aligned}$$

が成り立つから  $M_b = (\lambda I - M_a)^{-1}$  であり,  $M_b \in \mathbf{B}(H)$  であるから  $\lambda \in \rho(M_a)$  が成り立つ. 一方任意の  $\epsilon > 0$  に対して  $\mu(V_\epsilon) = 0$  となる場合, 任意に  $\epsilon > 0$  を取り固定する.

$$\mu(V_\epsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(V_\epsilon \cap X_n)$$

が成り立つから, 或る  $N \in \mathbb{N}$  が存在して  $\mu(V_\epsilon \cap X_N) > 0$  を満たす.

$$u_\epsilon(x) := \begin{cases} 1 & (x \in V_\epsilon \cap X_N) \\ 0 & (x \notin V_\epsilon \cap X_N) \end{cases}$$

と定めれば,  $u_\epsilon$  は二乗可積分であり

$$\int_X |a(x)u_\epsilon(x)|^2 \mu(dx) = \int_{V_\epsilon \cap X_N} |a(x)u_\epsilon(x)|^2 \mu(dx) < \infty$$

を満たすから  $u_\epsilon \in \mathcal{D}(M_a)$  である. また

$$\|(\lambda I - M_a)u_\epsilon\|^2 = \int_X |\lambda - a(x)|^2 |u_\epsilon(x)|^2 \mu(dx) = \int_{V_\epsilon \cap X_N} |\lambda - a(x)|^2 |u_\epsilon(x)|^2 \mu(dx) \leq \epsilon^2 \int_X |u_\epsilon(x)|^2 \mu(dx) = \epsilon^2 \|u_\epsilon\|^2$$

を満たす. つまり任意の  $\epsilon$  に対し或る  $u_\epsilon \in \mathcal{D}(M_a)$  が存在し

$$\frac{1}{\epsilon} \leq \frac{\|u_\epsilon\|}{\|(\lambda I - M_a)u_\epsilon\|}$$

を満たす. ここで  $(\lambda I - M_a)$  に対し逆作用素  $(\lambda I - M_a)^{-1}$  が存在するとしても,  $u_\epsilon \in \mathcal{D}(M_a)$  に対して或る  $v_\epsilon \in \mathcal{D}((\lambda I - M_a)^{-1})$  が存在して  $u_\epsilon = (\lambda I - M_a)^{-1}v_\epsilon$  を満たすが,

$$\frac{1}{\epsilon} \leq \frac{\|(\lambda I - M_a)^{-1}v_\epsilon\|}{\|v_\epsilon\|}$$

が従い,  $\epsilon$  の任意性より  $(\lambda I - M_a)^{-1}$  の作用素ノルムは非有界である. 従ってこの場合  $\lambda \in \sigma(M_a)$  が成り立つ.

- (4) 先ず  $\sigma_p(M_a) \subset \{ \lambda \in \mathbb{C} ; \mu(a^{-1}(\{\lambda\})) > 0 \}$  が成り立つことを示す. 任意の  $\lambda \in \sigma_p(M_a)$  に対して固有ベクトル  $u \in H$  が存在する.  $u \neq 0$  (関数類の意味で) より

$$N := \{ x \in X ; u(x) \neq 0 \}$$

とおけば  $\mu(N) > 0$  が満たされる. 一方で点スペクトルの定義より  $(\lambda I - M_a)u = 0$  が成り立つから

$$0 = \|(\lambda I - M_a)u\|^2 = \int_X |\lambda - a(x)|^2 |u(x)|^2 \mu(dx) = \int_N |\lambda - a(x)|^2 |u(x)|^2 \mu(dx)$$

となり

$$\mu(\{ x \in N ; |\lambda - a(x)| > 0 \}) = 0$$



が従う。  $\mu(N) > 0$  であるから

$$\mu(a^{-1}(\{\lambda\})) \geq \mu(\{x \in N; |\lambda - a(x)| = 0\}) > 0$$

が成り立ち  $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C}; \mu(a^{-1}(\{\lambda\})) > 0\}$  を得る。次に  $\sigma_p(M_a) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}; \mu(a^{-1}(\{\lambda\})) > 0\}$  が成り立つことを示す。任意の  $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C}; \mu(a^{-1}(\{\lambda\})) > 0\}$  に対して

$$\Lambda := a^{-1}(\{\lambda\})$$

とおけば  $\mu(\Lambda) > 0$  が満たされている。

$$\mu(\Lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\Lambda \cap X_n)$$

が成り立つから、或る  $n \in \mathbb{N}$  が存在して  $\mu(\Lambda \cap X_n) > 0$  を満たす。

$$u(x) := \begin{cases} 1 & (x \in \Lambda \cap X_n), \\ 0 & (x \notin \Lambda \cap X_n) \end{cases}$$

として  $u$  を定めれば  $u$  は二乗可積分であり、 $\mu(\Lambda \cap X_n) > 0$  であるから関数類として  $u \neq 0$  を満たす。また

$$\|(\lambda I - M_a)u\|^2 = \int_X |\lambda - a(x)|^2 |u(x)|^2 \mu(dx) = \int_{\Lambda \cap X_n} |\lambda - a(x)|^2 |u(x)|^2 \mu(dx) = 0$$

が成り立ち  $(\lambda I - M_a)u = 0$  が従うから  $u$  は  $\lambda$  の固有ベクトルであり、 $\lambda \in \sigma_p(M_a)$  を得る。

$(\mathbb{C}, \mathfrak{B}(\mathbb{C}), \mu)$  を  $\sigma$ -有限な測度空間、 $H = L^2(\mathbb{C}, \mathfrak{B}(\mathbb{C}), \mu) = L^2(\mu)$  とする。Borel 可測関数  $a: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  に対して、 $H$  から  $H$  へのかけ算作用素  $M_a$  を次で定める：

$$\mathcal{D}(M_a) = \{u \in H; au \in H\}, \quad (M_a u)(z) = a(z)u(z) \quad (z \in \mathbb{C}).$$

また  $E(A) = M_{\mathbb{1}_{a^{-1}(A)}}$  ( $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$ ) と定める。

- (1)  $E$  は、 $\mathfrak{B}(\mathbb{C})$  で定義され、 $H$  上の直交射影を値とするスペクトル測度であることを示せ。
- (2) Borel 可測関数  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  に対し、

$$T_f := \int_{\mathbb{C}} f(z) E(dxdy) \quad (z = x + iy, (x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

と定める。このとき、 $T_f = M_{f \circ a}$  を示せ。

証明.

- (1) 任意の  $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$  に対し  $\mathbb{1}_{a^{-1}(A)}$  は有界であるから、春学期のレポート問題より  $M_{\mathbb{1}_{a^{-1}(A)}} \in B(H)$  が成り立つ。ゆえに  $E$  は  $\mathfrak{B}(\mathbb{C})$  全体で定義される。次に任意に  $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$  を取り  $E(A)$  が  $H$  上の直交射影であることを示す。実際

$$E(A)^2 u = M_{\mathbb{1}_{a^{-1}(A)}} M_{\mathbb{1}_{a^{-1}(A)}} u = \mathbb{1}_{a^{-1}(A)} \mathbb{1}_{a^{-1}(A)} u = \mathbb{1}_{a^{-1}(A)} u = E(A)u \quad (\forall u \in H)$$

が成り立ち  $E(A)^2 = E(A)$  が得られ、また  $\mathbb{1}_{a^{-1}(A)}$  は実数値であるから

$$E(A)^* = M_{\mathbb{1}_{a^{-1}(A)}}^* = M_{\mathbb{1}_{a^{-1}(A)}} = E(A)$$

が成り立ち、 $E(A)$  は自己共役である。最後に  $E$  がスペクトル測度であることを示す。先ず

$$E(\mathbb{R}^d)u = M_{\mathbb{1}_{\mathbb{C}}}u = u$$

より  $E(\mathbb{R}^d) = I$  を得る。また任意の互いに素な集合列  $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$  を取れば

$$E\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right)u = \sum_{n=1}^{\infty} E(A_n)u \quad (\forall u \in H)$$

が成り立つ。

(2)  $\mathcal{D}(T_f) = \mathcal{D}(M_{f \circ a})$  を示さなくてはならない。  $f$  が可測単関数の場合、

$$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$$

として

$$\int_{\mathbb{C}} |f(x)|^2 \mu_u(dx) = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \langle E(A_i)u, u \rangle = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \int_{\mathbb{C}} \mathbb{1}_{a^{-1}(A_i)} |u(x)|^2 \mu(dx) = \int_{\mathbb{C}} |f(a(x))|^2 |u(x)|^2 \mu(dx)$$

が成り立つ。  $f$  が一般の可測関数の場合は  $MSF$ -単調近似列  $(f_n)_{n=1}^{\infty}$  を取れば

$$\int_{\mathbb{C}} |f_n(x)|^2 \mu_u(dx) = \int_{\mathbb{C}} |f_n(a(x))|^2 |u(x)|^2 \mu(dx) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

が従い、単調収束定理より両辺はそれぞれ  $\int_{\mathbb{C}} |f(x)|^2 \mu_u(dx)$ ,  $\int_{\mathbb{C}} |f(a(x))|^2 |u(x)|^2 \mu(dx)$  に収束する。従って

$$u \in \mathcal{D}(T_f) \Leftrightarrow u \in \mathcal{D}(M_{f \circ a})$$

が成り立つ。次に  $T_f u = M_{f \circ a} u$  ( $\forall u \in \mathcal{D}(T_f)$ ) を示す。  $f$  が可測単関数の場合、

$$T_f u = \sum_{i=1}^n \alpha_i E(A_i)u = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{a^{-1}(A_i)} u = f_n \circ a u = M_{f_n \circ a} u \quad (\forall u \in H)$$

が成り立つ。一般の  $f$  に対しては、 $MSF$ -単調近似列  $(f_n)_{n=1}^{\infty}$  を取る。

$$\|T_f u - M_{f \circ a} u\| \leq \|T_f u - T_{f_n} u\| + \|M_{f_n \circ a} u - M_{f \circ a} u\|$$

が成り立つ。スペクトル積分  $T_f$  の定義より

$$\|T_f u - T_{f_n} u\| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成り立ち、また Lebesgue の収束定理より

$$\|M_{f_n \circ a} u - M_{f \circ a} u\|^2 = \int_{\mathbb{C}} |f_n(a(x))u(x) - f(a(x))u(x)|^2 \mu(dx) \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

を得る。ゆえに

$$\|T_f u - M_{f \circ a} u\| = 0$$

が成り立つ。