関数解析後期メモ

百合川

2018 年 1 月 23 日

目次

$(X, \mathcal{M}, \mu)$ を σ-有限な測度空間，$H = \mathrm{L}^2(X, \mathcal{M}, \mu) = \mathrm{L}^2(\mu)$ とする．$\mathcal{M}$-可測関数 $a : X \to \mathbb{C}$ に対して，H から H へのかけ算作用素 M_a を次で定める:

$$\mathcal{D}(M_a) = \{\, u \in H \ ; \quad au \in H \,\}, \quad (M_a u)(x) = a(x)u(x) \quad (x \in X).$$

(1) M_a は線型作用素で，$\mathcal{D}(M_a)$ は H で稠密なことを示せ．

(2) $M_a^* = M_{\overline{a}}$ が成り立つことを示せ．

(3) $\sigma(M_a) = \left\{\, \lambda \in \mathbb{C} \ ; \quad \forall \epsilon > 0 \text{ に対し } \mu\left(a^{-1}(U_\epsilon(\lambda))\right) > 0 \,\right\}$ を示せ．(ただし $U_\epsilon(\lambda)$ は λ の ϵ-近傍．)

(4) $\sigma_p(M_a) = \left\{\, \lambda \in \mathbb{C} \ ; \quad \mu\left(a^{-1}(\{\lambda\})\right) > 0 \,\right\}$ を示せ．

証明． σ-有限であるから或る系 $(X_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{M}$ が存在して $X_1 \subset X_2 \subset \cdots$，$\mu(X_n) < \infty \ (\forall n \in \mathbb{N})$，$\cup_{n\in\infty} X_n = X$ を満たす．

(1) 任意に $v \in H$ を取り $v_n := v\mathbb{1}_{\{|a|\leq n\}} \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ として関数列 $(v_n)_{n=1}^\infty$ を作る．全ての $x \in S$ で $|v_n(x)| \leq |v(x)|$ が満たされているから $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ である．また全ての $n \in \mathbb{N}$ について

$$\int_S |a(x)v_n(x)|^2 \mu(dx) = \int_{\{|a|\leq n\}} |a(x)v(x)|^2 \mu(dx) \leq n^2 \int_S |v(x)|^2 \mu(dx)$$

が成り立つから $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(M_a)$ も満たされる．

$$\|\, v - v_n \,\|^2 = \int_S |v(x) - v_n(x)|^2 \, \mu(dx) = \int_S \mathbb{1}_{\{|a|>n\}}(x)|v(x)|^2 \, \mu(dx)$$

となり，右辺の被積分関数は各点で 0 に収束し，かつ n に関係なく可積分関数 $|v|^2$ で抑えられるから，Lebesgue の収束定理より

$$\lim_{n\to\infty} \|\, v - v_n \,\|_{\mathrm{L}^2(\mu)}^2 = \lim_{n\to\infty} \int_S \mathbb{1}_{\{|a|>n\}}(x)|v(x)|^2 \, \mu(dx) = \int_S \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{\{|a|>n\}}(x)|v(x)|^2 \, \mu(dx) = 0$$

が得られる．v は任意に選んでいたから $D(M_a)$ は X において稠密である．

(2) 任意の $u, v \in \mathcal{D}(M_a) = \mathcal{D}(M_{\overline{a}})$ に対して

$$\langle M_a u, v \rangle = \int_X a(x)u(x)\overline{v(x)} \, \mu(dx) = \int_X u(x)\overline{\overline{a(x)}v(x)} \, \mu(dx) = \langle u, M_{\overline{a}} v \rangle$$

が成り立つから，$v \in \mathcal{D}(M_a^*)$ 且つ $M_a^* v = M_{\overline{a}} v \ (\forall v \in \mathcal{D}(M_{\overline{a}}))$ が従う．逆に任意に $u \in \mathcal{D}(M_a), v \in \mathcal{D}(M_a^*)$ を取れば,

$$\langle u, M_a^* v \rangle = \langle M_a u, v \rangle = \langle u, M_{\overline{a}} v \rangle$$

となり $M_a^* v = M_{\overline{a}} v \ (\forall v \in \mathcal{D}(M_a^*))$ が従う．

(4) 先ず $\sigma_p(M_a) \subset \left\{\, \lambda \in \mathbb{C} \ ; \quad \mu\left(a^{-1}(\{\lambda\})\right) > 0 \,\right\}$ が成り立つことを示す．任意の $\lambda \in \sigma_p(M_a)$ に対して固有ベクトル $u \in H$ が存在する．$u \neq 0$ (関数類の意味で) より

$$N := \{\, x \in X \ ; \quad u(x) \neq 0 \,\}$$

とおけば $\mu(N) > 0$ が満たされる．一方で点スペクトルの定義より $(\lambda I - M_a)u = 0$ が成り立つから

$$0 = \|\, (\lambda I - M_a)u \,\|^2 = \int_X |\lambda - a(x)|^2 |u(x)|^2 \, \mu(dx) = \int_N |\lambda - a(x)|^2 |u(x)|^2 \, \mu(dx)$$

となり

$$\mu(\{\, x \in N \ ; \quad |\lambda - a(x)| > 0 \,\}) = 0$$

が従う．$\mu(N) > 0$ であるから

$$\mu\left(a^{-1}(\{\lambda\})\right) \geq \mu\left(\{\, x \in N \;;\quad |\lambda - a(x)| = 0 \,\}\right) > 0$$

が成り立ち $\lambda \in \left\{\, \lambda \in \mathbb{C} \;;\quad \mu\left(a^{-1}(\{\lambda\})\right) > 0 \,\right\}$ を得る．次に $\sigma_p(M_a) \supset \left\{\, \lambda \in \mathbb{C} \;;\quad \mu\left(a^{-1}(\{\lambda\})\right) > 0 \,\right\}$ が成り立つことを示す．任意の $\lambda \in \left\{\, \lambda \in \mathbb{C} \;;\quad \mu\left(a^{-1}(\{\lambda\})\right) > 0 \,\right\}$ に対して

$$\Lambda \coloneqq a^{-1}(\{\lambda\})$$

とおけば $\mu(\Lambda) > 0$ が満たされている．

$$\mu(\Lambda) = \lim_{n \to \infty} \mu(\Lambda \cap X_n)$$

が成り立つから，或る $n \in \mathbb{N}$ が存在して $\mu(\Lambda \cap X_n) > 0$ を満たす．

$$u(x) \coloneqq \begin{cases} 1 & (x \in \Lambda \cap X_n), \\ 0 & (x \notin \Lambda \cap X_n) \end{cases}$$

として u を定めれば u は二乗可積分であり，$\mu(\Lambda \cap X_n) > 0$ であるから関数類として $u \neq 0$ を満たす．また

$$\|\, (\lambda I - M_a)u \,\|^2 = \int_X |\lambda - a(x)|^2 |u(x)|^2 \, \mu(dx) = \int_{\Lambda \cap X_n} |\lambda - a(x)|^2 |u(x)|^2 \, \mu(dx) = 0$$

が成り立ち $(\lambda I - M_a)u = 0$ が従うから u は λ の固有ベクトルであり，$\lambda \in \sigma_p(M_a)$ を得る．