

目次

0.1	言語	1
0.2	項	2
0.3	式	3
0.4	部分式	4
0.5	始切片	4
0.6	スコープ	5
0.7	言語の拡張	7
	0.7.1 言語 \mathcal{L}_ε	8
	0.7.2 言語 \mathcal{L}	9
0.8	類と集合	11
0.9	式の書き換え	11
0.10	証明	13
0.11	推論	19
0.12	相等性	36
0.13	順序型について	46
0.14	超限再帰について	47
0.15	自然数の全体について	48
0.16	第一イプシロン定理メモ	48
	0.16.1 埋め込み定理	49
	0.16.2 階数	50
	0.16.3 アイデア	53
	参考文献	55

数学について注意深く考え込んでいると、うっかりとんでもない落とし穴にはまってしまうかもしれません。そのとき、きっと次の事柄に悩まされます。前提がわからない。明らかなものと明らかなでないものの線引きがわからない。日本語をどこまで信用してよいのかもわからない。突き詰めると何も見えなくなる。数学の立脚地は永遠に届かない... このノートがそういった受難を乗り越える役に立てますように。

前提その一 はじめに素朴な数字の概念は持っている。それによってモノを数えることもできる。モノの数え方は慣習どおり。

前提その二 当たり前のことが当たり前であるためには、言葉でそれを保証しなければならない。

ZF 集合論では存在という言葉が具体的な意味を持っていない。存在したらこうなるであろうという推論規則によってしか存在という概念を表現し得ない。 ε 項は集合である。それも、存在したら“取れる”集合である。 ε 項によって集合を具体的に扱える。さらに内包項によって閉じた世界を作ることが出来る。ZF 集合論では集合の宇宙は閉じていないので、存在したらそれに名前を付けて言語を保存拡大するという手法を取る。内包項を導入すれば、言語を拡大する必要はなくなる。公理とは、既に作られた世界においてどれが集合でどれが集合でないかを選び分ける用に使われる。

0.1 言語

本稿の世界を展開するために使用する言語は二つ種類がある。一つは自然言語の日本語であり、もう一つは記号のみで作られた人工的な言語である。その人工的な言語は記号列が数学の式となるための文法を指定し、そこで組み立てられた式のみが考察対象となる。日本語は式を解釈したり人工言語を補助するために使われる。

まず、人工的な言語である \mathcal{L}_ε を設定する。以下は \mathcal{L}_ε を構成する要素である：

矛盾記号 \perp

論理記号 $\rightarrow, \vee, \wedge, \implies$

量化子 \forall, \exists

述語記号 $=, \in$

使用文字 ローマ字及びギリシア文字。

接項子 \vdash

日本語と同様に、決められた規則に従って並ぶ記号列のみを \mathcal{L}_ε の単語や文章として扱う。 \mathcal{L}_ε において、名詞にあたるものは項 (**term**) と呼ばれる。文字は最もよく使われる項である。述語とは項同士を結ぶものであり、最小単位の文章を形成する。例えば

$$\in st$$

は \mathcal{L}_ε の文章となり、日本語には“ s は t の要素である”と翻訳される。 \mathcal{L}_ε の文章を式 (**formula**) 或いは論理式と呼ぶ。論理記号は主に式同士を繋ぐ役割を持つ。

論理学的な言語とは論理記号と変項記号を除く記号をすべて集めたものである。本稿で用意した記号で言うと、論理記号とは

$$\perp, \rightarrow, \vee, \wedge, \implies, \forall, \exists, =$$

であり、変項記号とは文字であって、 \mathcal{L}_ε の語彙は

$$\in, \vdash$$

しかない。だが本稿の目的は集合論の構築であって一般の言語について考察するわけではないので、論理記号も文字もすべて \mathcal{L}_e の一員と見做す方が自然である。ついでに記号の分類も主流の論理学とは変えていて、

- \perp はそれ単体で式であるので他の記号とは分ける。
- 論理記号とは式に作用するものとして $\neg, \vee, \wedge, \implies$ のみとする。
- \forall と \exists は項に作用するものであるから量化子として分類する。
- 等号 $=$ は‘等しい’という述語になっているから、論理記号ではなく述語記号に入れる。

以上の変更点は殆ど無意味であるが、いかに“直観的な”集合論を構築するかという目的を勘案すれば良いスタートであるように思える。

0.2 項

文字は項として使われるが、文字だけを項とするのは不十分であり、例えば 1000 個の相異なる項が必要であるといった場合には異体字まで駆使しても不足する。そこで、文字 x と y に対して

$$\mathfrak{h}xy$$

もまた項であると約束する。これは

$$\mathfrak{h}(x, y)$$

や

$$x\mathfrak{h}y$$

など書く方が見やすいかもしれないが、当面は始めの記法 (前置記法やポーランド記法と呼ばれる) を用いる。また、 τ と σ を項とするときに

$$\mathfrak{h}\tau\sigma$$

も項であると約束する。この約束に従えば、文字 x だけを用いたとしても

$$x, \mathfrak{h}xx, \mathfrak{h}\mathfrak{h}xxx, \mathfrak{h}\mathfrak{h}\mathfrak{h}xxxx$$

はいずれも項ということになる。極端なことを言えば、「1000 個の項を用意してくれ」と頼まれたとしても \mathfrak{h} と x だけで 1000 個の項を作り出すことが可能である。

大切なのは、 \mathfrak{h} を用いれば理屈の上では項に不足しないということであって、具体的な数式を扱うときに \mathfrak{h} が出てくるかと言えば否である。 \mathfrak{h} が必要になるほどに長い式を読解するのは困難であるから、通常は何らかの略記法を導入して複雑なところを覆い隠してしまう。

超記号

上で「 τ と σ を項とするときに」と書いたが、これは一時的に τ と σ をそれぞれ或る項に代用しているだけであって、 τ が指している項の本来の字面は x であるかもしれない。この場合の τ や σ を超記号と呼ぶ。「 A を式とする」など式にも超記号が宣言される。

項は形式的には次のよう定義される:

項

- 文字は項である。

- τ と σ を項とすると、 $\text{h}\tau\sigma$ は項である。
- 以上のみが項である。

上の定義では、はじめに発端を決めて、次に新しい項を作り出す手段を指定している。こういった定義の仕方を帰納的定義 (inductive definition) と呼ぶ。ただしそれだけでは項の範囲が定まらないので、最後に「以上のみが項である」と加えている。

「以上のみが項である」という約束によって、例えば「 τ が項である」という言明が与えられたとき、この言明が“ τ は或る文字に代用されている”か“項 x と項 y が取れて (いずれも超記号)、 τ は $\text{h}xy$ に代用されている”のどちらか一方にしか解釈され得ないのは、言うまでもない、であろうか。直感的にはそうであっても直感を万人が共有している保証はないから、やはりここは明示的に、「 τ が項である」という言明の解釈は

- τ は或る文字に代用されている
- 項 x と項 y が取れて (いずれも超記号)、 τ は $\text{h}xy$ に代用されている

に限られると決めてしまおう。こちらの方が誤解を生まない。

暗に宣言された超記号

上で「項 x と項 y が取れて」と書いたが、この x と y は唐突に出てきたので、それが表す文字そのものでしかないのか、或いは超記号であるのか、一見判然しない。本来は「二つの項、これをそれぞれ x と y で表す、が取れて」などと書くのが良いのかもしれないが、はじめの書き方でも文脈上は超記号として解釈するのが自然であるし、何より言い方がまどろこくない。このように見た目の簡潔さのために超記号の宣言を省略する場合もある。

0.3 式

式も項と同様に帰納的に定義される:

- 式
- \perp は式である。
 - σ と τ を項とすると、 $\in st$ と $= st$ は式である。これを原子式 (atomic formula) と呼ぶ。
 - φ を式とすると、 $\neg \varphi$ は式である。
 - φ と ψ を式とすると、 $\forall \varphi\psi, \wedge \varphi\psi, \implies \varphi\psi$ はいずれも式である。
 - x を項とし、 φ を式とすると、 $\forall x\varphi$ と $\exists x\varphi$ は式である。
 - 以上のみが式である。

例えば「 φ が式である」という言明の解釈は、

- φ は \perp である
- 項 s と項 t が得られて、 φ は $\in st$ である
- 項 s と項 t が得られて、 φ は $= st$ である
- 式 ψ が得られて、 φ は $\neg \psi$ である
- 式 ψ と式 ξ が得られて、 φ は $\forall \psi\xi$ である
- 式 ψ と式 ξ が得られて、 φ は $\wedge \psi\xi$ である
- 式 ψ と式 ξ が得られて、 φ は $\implies \psi\xi$ である
- 項 x と式 ψ が得られて、 φ は $\forall x\psi$ である
- 項 x と式 ψ が得られて、 φ は $\exists x\psi$ である

に限られる。

0.4 部分式

式から切り取ったひとつづきの部分列で、それ自身が式であるものを元の式に対して部分式 (**sub formula**) と呼ぶ。例えば φ と ψ を式とすると、 φ と ψ は $\forall\varphi\psi$ の部分式である。元の式全体も部分式と捉えることにするが、自分自身を除く部分式を特に真部分式 (**proper sub formula**) と呼ぶことにする。

0.5 始切片

φ を式とすると、 φ の左端から切り取るひとつづきの部分列を φ の始切片 (**initial segment**) と呼ぶ。例えば φ が

$$\implies \forall x \wedge \implies \in xy \in xz \implies \in xz \in xy = yz$$

である場合、

$$\implies \forall x \wedge \implies \in xy \in xz \implies \in xz \in xy = yz$$

や

$$\implies \forall x \wedge \implies \in xy \in xz \implies \in xz \in xy = yz$$

など赤字で分けられた部分は φ の始切片である。また φ 自身も φ の始切片である。

本節の主題は次である。

メタ定理 0.5.1. (★) φ を式とすると、 φ の始切片で式であるものは φ 自身に限られる。

これを示すには次の原理を用いる:

メタ公理 0.5.2 (式に対する構造的帰納法). 式に対する言明に対し、

- \perp に対してその言明が当てはまる。
- 原子式に対してその言明が当てはまる。
- 式が任意に与えられた⁴ときに、その全ての真部分式に対してその言明が当てはまるならば、その式自身に対してもその言明が当てはまる。

ならば、いかなる式に対してもその言明は当てはまる。

では定理を示す。 \perp については、その始切片は \perp に限られる。 $\in st$ なる原子式については、その始切片は

$$\in, \quad \in s, \quad \in st$$

のいずれかとなるが、このうち式であるものは $\in st$ のみである。 $= st$ なる原子式についても、その始切片で式であるものは $= st$ に限られる。

いま φ を任意に与えられた式とし、 φ の真部分式に対しては (★) が当てはまっているとする。

⁴ “任意に与えられた式” とはどう解釈するべきか。どんな式に対しても?

ケース 1 式 ψ が得られて φ が

$$\rightarrow \psi$$

であるとき、 ψ は φ の真部分式であるので (★) は当てはまる。 φ の始切片で式であるものは、式 ξ を用いて $\rightarrow \xi$ と表せるが、 ξ は ψ の始切片であるから、帰納法の仮定より ξ と ψ は一致する。ゆえに φ の始切片で式であるものは φ 自身に限られる。

ケース 2 式 ψ と ξ が得られて φ が

$$\forall \psi \xi$$

であるとする。 φ の始切片で式であるものも \forall が左端に来るので、式 η と式 ζ が得られて始切片は

$$\forall \eta \zeta$$

と表せる。 ψ と η 、 ξ と ζ はいずれも φ の真部分式であるので (★) が当てはまる。そして ψ と η は一方が他方の始切片であるので、(★) より一致する。すると ξ と ζ も一方が他方の始切片ということになり、(★) より一致する。ゆえに $\forall \psi \xi$ と $\forall \eta \zeta$ は一致する。つまり φ の始切片で式であるものは φ 自身に限られる。 φ が $\wedge \psi \xi$ や $\implies \psi \xi$ である場合も同じである。

ケース 3 項 x と式 ψ が得られて、 φ が

$$\forall x \psi$$

であるとき、 φ の始切片で式であるものは、式 ξ が取れて

$$\forall x \xi$$

と表せる。このとき ξ は ψ の始切片であるし、また ψ は φ の真部分式であるから、(★) より ψ と ξ は一致する。ゆえに φ の始切片で式であるものは φ 自身に限られる。 φ が $\forall x \psi$ である場合も同じである。 ■

0.6 スコープ

φ を式とし、 s を φ に現れた記号とすると、 s のその出現位置から始まる φ の部分式を s のスコープ (scope) と呼ぶ。具体的に、 φ を

$$\implies \forall x \wedge \implies \in xy \in xz \implies \in xz \in xy = yz$$

としよう。このとき φ の左から 6 番目に \in が現れるが、この \in から

$$\in xy$$

なる原子式が φ の上に現れている:

$$\implies \forall x \wedge \implies \in xy \in xz \implies \in xz \in xy = yz.$$

他にも、 φ の左から 4 番目に \wedge が現れるが、この右側に

$$\implies \in xy \in xz$$

と

$$\implies \in xz \in xy$$

の二つの式が続いていて、 \wedge を起点に

$$\wedge \implies \in xy \in xz \implies \in xz \in xy$$

なる式が φ の上に現れている:

$$\implies \forall x \wedge \implies \in xy \in xz \implies \in xz \in xy = yz.$$

φ の左から 2 番目には \forall が現れて、この \forall に対して項 x と

$$\wedge \implies \in xy \in xz \implies \in xz \in xy$$

なる式が続き、

$$\forall x \wedge \implies \in xy \in xz \implies \in xz \in xy$$

なる式が φ の上に現れている:

$$\implies \forall x \wedge \implies \in xy \in xz \implies \in xz \in xy = yz.$$

しかも \in, \wedge, \forall のスコープは上にあげた部分式のほかに取りようが無い。上の具体例を見れば、直感的に「現れた記号のスコープはただ一つだけ、必ず取ることが出来る」が一般の式に対しても当てはまるように思えるが、直感を排除してこれを認めるには構造的帰納法の原理が必要になる。

メタ定理 0.6.1. (★★) φ を式とすると、

- \mathfrak{q} が φ に現れたとき、項 σ と項 τ が得られて、 \mathfrak{q} のその出現位置から $\mathfrak{q}\sigma\tau$ なる項が φ の上に現れる。また \mathfrak{q} のその出現位置から始まる φ 上の項は $\mathfrak{q}\sigma\tau$ に限られる。
- \in が φ に現れたとき、項 σ と項 τ が得られて、 \in のその出現位置から $\in\sigma\tau$ なる式が φ の上に現れる。また \in のその出現位置から始まる φ の部分式は $\in\sigma\tau$ に限られる。 \in が $=$ であっても同じ主張が成り立つ。
- \rightarrow が φ に現れたとき、式 ψ が得られて、 \rightarrow のその出現位置から $\rightarrow\psi$ なる式が φ の上に現れる。また \rightarrow のその出現位置から始まる φ の部分式は $\rightarrow\psi$ に限られる。
- \forall が φ に現れたとき、式 ψ と式 ξ が得られて、 \forall のその出現位置から $\forall\psi\xi$ なる式が φ の上に現れる。また \forall のその出現位置から始まる φ の部分式は $\forall\psi\xi$ に限られる。 \forall が \wedge や \implies であっても同じ主張が成り立つ。
- \exists が φ に現れたとき、項 x と式 ψ が得られて、 \exists のその出現位置から $\exists x\psi$ なる式が φ の上に現れる。また \exists のその出現位置から始まる φ の部分式は $\exists x\psi$ に限られる。 \exists が \forall であっても同じ主張が成り立つ。

\perp に対しては上の言明は当てはまる。

$\in\tau\sigma$ なる式に対しては、 \in のスコープは $\in\tau\sigma$ に他ならない。 $=\tau\sigma$ なる式についても、 $=$ のスコープは $=\tau\sigma$ に他ならない。

φ を任意に与えられた式とし、 φ の真部分式に対しては (★★) が当てはまっているとする。

ケース 1

式 φ と ψ に対して上の言明が当てはまるとする. 式 $\rightarrow \varphi$ に対して, σ が左端の \rightarrow であるとき $\sigma\varphi$ は $\rightarrow \varphi$ の部分式である. また $\sigma\psi$ が σ のその出現位置から始まる $\rightarrow \varphi$ の部分式であるとする, ψ は φ の左端から始まる φ の部分式ということになるので帰納法の仮定より φ と ψ は一致する. σ が φ に現れる記号であれば, 帰納法の仮定より σ から始まる φ の部分式が一意的に得られる. その部分式は $\rightarrow \varphi$ の部分式でもあるし, $\rightarrow \varphi$ の部分式としての一意性は帰納法の仮定より従う.

式 $\forall \varphi\psi$ に対して, σ が左端の \forall であるとき, 式 ξ と η が得られて $\sigma\xi\eta$ が $\forall \varphi\psi$ の部分式となったとすると, ξ と φ は左端を同じくし, どちらか一方は他方の部分式である. ξ が φ の部分式であるならば, 帰納法の仮定より ξ と φ は一致する. φ が ξ の部分式であるならば, ξ と ψ が重なるとなると ψ の左端の記号から始まる ξ の部分式と ψ は一致しなくてはならない.

量化

φ に \forall が現れるとき, その \forall に後続する項 x が取れるが, このとき項 x は \forall のスコープ内で**量化**されている (**quantified**) という. 詳しく言い直せば, 項 x と式 ψ が取れて, その \forall のスコープは

$$\forall x\psi$$

なる式で表されるが, このとき x は $\forall x\psi$ において量化されているという.

A を式とし, a を A に現れる項とする. このとき A の中の項 a を全て項 x に置き換えた式を

$$(x \mid a)A$$

で表す. 特に項 a と項 x が同一の項である場合は $(x \mid a)A$ は A 自身に一致する. また A の中で自由に現れる項が a のみであって, かつ a が自由に現れる箇所がどれも項 x の量化スコープではないとき, A に現れる項 a のうち, 自由に現れる箇所を全て項 x に置き換えた式を

$$A(x)$$

と書く. A に現れる項 a が全て自由であるときは $A(a)$ は A 自身に一致する.

0.7 言語の拡張

項 x が自由に現れる式 $A(x)$ に対して

$$\{x \mid A(x)\}$$

なる形の項を導入する. この項の記法は**内包的記法 (international notation)** と呼ばれる. 導入の意図は “ $A(x)$ を満たす集合 x の全体” という意味を込めた式の対象化であって, 実際に後で

$$\forall x (x \in \{x \mid A(x)\} \iff A(x))$$

を保証する (内包性公理).

追加する項はもう一つある. $A(x)$ を上記のものとするが, この $A(x)$ は x に関する性質という見方もできる. そして “ $A(x)$ という性質を具えている集合 x ” という意味を込めて

$$\varepsilon x A(x)$$

なる形の項を導入する. これは Hilbert の ε 項 (**epsilon term**) と呼ばれるオブジェクトであるが, 導入の意図とは裏腹に $\varepsilon x A(x)$ は性質 $A(x)$ を持つとは限らない. $\varepsilon x A(x)$ が性質 $A(x)$ を持つのは, $A(x)$ を満たす集合 x が存在すると

き、またその時に限られる (この点については後述のヨに関する定理によって明らかになる). $A(x)$ を満たす集合 x が存在しない場合は、 $\varepsilon x A(x)$ は集合の山を賑わせるだけの枯れ木に過ぎない.

0.7.1 言語 \mathcal{L}_ε

言語 \mathcal{L}_ε の拡張は二段階に分けて行う. まずは ε 項を項として追加した言語 \mathcal{L}_ε に拡張する. \mathcal{L}_ε の構成要素は以下である:

矛盾記号 \perp

論理記号 $\rightarrow, \vee, \wedge, \implies$

量化子 \forall, \exists

述語記号 $=, \in$

変項 \mathcal{L}_ε の項は \mathcal{L}_ε の変項 (variable) である. またこれらのみが \mathcal{L}_ε の変項である.

イプシロン ε

\mathcal{L}_ε からの変更点は, “使用文字” が “変項” に代わったことと ε が加わったことである. 続いて項と式の定義に移るが, 帰納のステップは \mathcal{L}_ε より複雑になる:

- \mathcal{L}_ε の変項は \mathcal{L}_ε の項である.
- \perp は \mathcal{L}_ε の式である.
- σ と τ を \mathcal{L}_ε の項とすると, $\in st$ と $= st$ は \mathcal{L}_ε の式である.
- φ を \mathcal{L}_ε の式とすると, $\rightarrow \varphi$ は \mathcal{L}_ε の式である.
- φ と ψ を \mathcal{L}_ε の式とすると, $\vee \varphi \psi, \wedge \varphi \psi, \implies \varphi \psi$ はいずれも \mathcal{L}_ε の式である.
- x を \mathcal{L}_ε の変項とし, φ を \mathcal{L}_ε の式とすると, $\forall x \varphi$ と $\exists x \varphi$ は \mathcal{L}_ε の式である.
- x を \mathcal{L}_ε の変項とし, φ を \mathcal{L}_ε の式とすると, $\varepsilon x \varphi$ は \mathcal{L}_ε の項である.
- 以上のみが \mathcal{L}_ε の項と式である.

\mathcal{L}_ε に対して行った帰納的定義との大きな違いは, 項と式の定義が循環している点にある. \mathcal{L}_ε の式が \mathcal{L}_ε の項を用いて作られるのは当然ながら, その逆に \mathcal{L}_ε の項もまた \mathcal{L}_ε の式から作られるのである.

定義の循環によって構造が見えづらくなっているが, 次のように捉えることが出来る.

1. \mathcal{L}_ε の式から ε 項を作り, その ε 項を第 1 世代 ε 項と呼ぶことにする.
2. \mathcal{L}_ε の項と第 1 世代 ε 項を項として式を作り, その式で作る ε 項を第 2 世代 ε 項と呼ぶことにする.
3. 第 n 世代の ε 項が出来たら, それらと \mathcal{L}_ε の項を項として式を作り, その式で第 $n+1$ 世代 ε 項を作る.
 - ちなみに, このように考えると第 n 世代 ε 項は第 $n+1$ 世代 ε 項でもある.

次の性質は至極当たり前であるが,

メタ定理 0.7.1 (無限入れ子は起こらない). A を \mathcal{L}_ε の式としたとき, $\varepsilon x A$ なる形の ε 項は A には現れない.

もし A に $\varepsilon x A$ が現れるならば, 当然 A の中の $\varepsilon x A$ にも $\varepsilon x A$ が現れるし, A の中の $\varepsilon x A$ の中の $\varepsilon x A$ にも $\varepsilon x A$ が現れるといった具合に, この入れ子には終わりがなくなる. だが, 当然こんなことは起こり得ない. A が指す記号列のどの部分を切り取ってもそれは A より短い記号列であって, $\varepsilon x A$ の現れる余地など無いからである.

しかしながら, やはり実物を扱えない世界の話になると, 何か超然的な力が働いて現世の常識を捻じ曲げうるのではないか, という不安がぬぐえない. 基礎論の基礎にあるのは, 直感や常識の正体の究明ではないのか.

0.7.2 言語 \mathcal{L}

本稿における主流の言語は、次に定める \mathcal{L} である。 \mathcal{L} の最大の特徴は

$$\{x \mid A\}$$

なる形のオブジェクトが項として用いられることである。ただし注意しておくべきは、ここで使われる A とは \mathcal{L}_ϵ の式に限るということである。つまり、 ϵ 項を含む式はオブジェクト化の対象から外す。

\mathcal{L} の構成要素は \mathcal{L}_ϵ のそれらと少し変わって

矛盾記号 \perp

論理記号 $\rightarrow, \vee, \wedge, \implies$

量化子 \forall, \exists

述語記号 $=, \in$

変項 \mathcal{L}_ϵ の項は \mathcal{L} の変項である。またこれらのみが \mathcal{L} の変項である。

補助記号 $\{, |, \}$

である。また \mathcal{L} の項は

- 項
 - \mathcal{L}_ϵ の項は \mathcal{L} の項である。
 - x を \mathcal{L} の変項とし、 A を \mathcal{L}_ϵ の式とすると、 $\{x \mid A\}$ なる記号列は \mathcal{L} の項である。
 - 以上のみが \mathcal{L} の項である。

によって正式に定義される。ここで、 \mathcal{L}_ϵ の項は \mathcal{L}_ϵ の項でもあるから、すなわち \mathcal{L} の項でもある。つまり、定義には書いていないが \mathcal{L} の変項は \mathcal{L} の項である。

最後に \mathcal{L} の式を定義する。下に見るように、今度は ϵ 項の生成過程は設けない。項が増えたことを除けば \mathcal{L}_ϵ の式の生成と全く同じである。

- 式
 - \perp は \mathcal{L} の式である。
 - σ と τ を \mathcal{L} の項とすると、 $\in st$ と $= st$ は \mathcal{L} の式である。
 - φ を \mathcal{L} の式とすると、 $\rightarrow \varphi$ は \mathcal{L} の式である。
 - φ と ψ を \mathcal{L} の式とすると、 $\forall \varphi \psi, \wedge \varphi \psi, \implies \varphi \psi$ はいずれも \mathcal{L} の式である。
 - x を \mathcal{L} の変項とし、 φ を \mathcal{L} の式とすると、 $\forall x \varphi$ と $\exists x \varphi$ は \mathcal{L} の式である。

言語の拡張の仕方より明らかであるが、次が成り立つ:

メタ定理 0.7.2. \mathcal{L}_ϵ の式は \mathcal{L}_ϵ の式であり、また \mathcal{L}_ϵ の式は \mathcal{L} の式である。

定義 0.7.3 (類). A を \mathcal{L}_ϵ の式とし、 x を A に現れる項とし、 A の中で項 x のみが自由に現れるとき、 $\{x \mid A(x)\}$ 及び $\epsilon x A(x)$ を類 (class) と呼ぶ。

φ を \mathcal{L} の式とし、 s を φ に現れる記号とすると、

- (1) s は文字である。
- (2) s は \mathfrak{q} である。

- (2) s は $\{$ である.
- (3) s は $|$ である.
- (4) s は $\}$ である.
- (5) s は \perp である.
- (6) s は \in か $=$ である.
- (7) s は \rightarrow である.
- (8) s は $\vee, \wedge, \rightarrow$ のいずれかである.

(★★) いま, φ を任意に与えられた式としよう.

- \mathfrak{h} が φ に現れたとき, \mathcal{L}_ϵ の項 τ と σ が得られて, $\mathfrak{h}\tau\sigma$ は \mathfrak{h} のその出現位置から始まる \mathcal{L}_ϵ の項となる. また \mathfrak{h} のその出現位置から始まる \mathcal{L}_ϵ の項は $\mathfrak{h}\tau\sigma$ のみである.
- $\{$ が φ に現れたとき, \mathcal{L}_ϵ の変項 x 及び \mathcal{L}_ϵ の式 A が得られて, $\{x|A\}$ は $\{$ のその出現位置から始まる項となる. また $\{$ のその出現位置から始まる項は $\{x|A\}$ のみである.
- $|$ が φ に現れたとき, 変項 x と \mathcal{L}_ϵ の式 A が得られて, $\{x|A\}$ は $|$ のその出現位置から広がる項となる. また $|$ のその出現位置から広がる項は $\{x|A\}$ のみである.
- $\}$ が φ に現れたとき, 変項 x と式 A が得られて, $\{x|A\}$ は $\}$ のその出現位置を終点とする項となる. また $\}$ のその出現位置を終点とする項は $\{x|A\}$ のみである.

\mathfrak{h} に対して $\mathfrak{h}\tau\sigma$ なる変項 τ と σ が得られること \mathfrak{h} が原子項に現れたら, 原子項とは文字 x, y によって

$$\mathfrak{h}xy$$

と表されるものであるから, \mathfrak{h} に対して変項 τ, σ (すなわち文字 x, y) が取れたことになる. \mathfrak{h} が項に現れたとする. 項とは, 変項 x, y によって

$$\mathfrak{h}xy$$

で表されるものであり, \mathfrak{h} は左端の \mathfrak{h} であるか, x に現れるか, y に現れる. \mathfrak{h} が x か y に現れるときは帰納法の仮定により, \mathfrak{h} が左端のものである場合は x が τ , y が σ ということになる.

変項の始切片で変項であるものは自分自身のみ x が文字である場合はそう. x の任意の部分変項が言明を満たしているなら, x は $\mathfrak{h}st$ なる変項である (生成規則) から, x の始切片は $\mathfrak{h}uv$ なる変項である. s, t, u, v はいずれも x の部分変項なので仮定が適用されている. ゆえに s と u は一方が他方の始切片であり, 一致する. すなわち t と v も一方が他方の始切片であり一致する. ゆえに x の始切片で変項であるものは x 自身である.

\mathfrak{h} に対して得られる変項の一意性 $\mathfrak{h}xy$ と $\mathfrak{h}st$ が共に変項であるとき, x と s , y と t は一致するか. $\mathfrak{h}xy$ が原子項であるときは明らかである. x の始切片で変項であるものは x 自身に限られるので, x と s は一致する. ゆえに t は y の始切片であり, t と y も一致する.

生成規則より x と A が得られるか φ が原子式であるとき, $\{$ が現れるとすれば項の中である. 項とは \mathcal{L}_ϵ の項であるか $\{x|A\}$ なるものである. $\{$ が現れたならば $\{$ とは $\{x|A\}$ の $\{$ である.

φ の任意の部分式に対して言明が満たされているとする. φ とは $\rightarrow \psi, \vee \psi \xi, \dots$ の形であるから, φ に現れた $\{$ とは ψ や ξ に現れるのである. ゆえに仮定より x と A が取れるわけである.

$\{$ に対して 項の生成規則より x と A が得られる. $\{y|B\}$ もまた $\{$ から始まる項である場合, 順番に見ていって x と y は一方が他方の始切片という関係になるから一致する. すると A と B は一方が他方の始切片という関係になり, (★) より A と B は一致する.

| について 項の生成規則より x と A が得られる. $\{y|B\}$ もまた | から広がる項である場合, 順番に見ていって x にも y にも $\{$ という記号は現れないので x と y は一致する. A と B は一方が他方の始切片という関係になるので (★) より A と B は一致する.

} について 項の生成規則より x と A が得られる. $\{y|B\}$ もまた } のその出現位置を終点とする変項である場合, A と B は \mathcal{L}_ϵ の式なので | という記号は現れない. ゆえに A と B は一致する. すると x と y は右端で揃うが, x にも y にも $\{$ という記号は現れないので x と y は一致する.

0.8 類と集合

定義 0.8.1 (類と集合). a を類とするとき, a が集合であるという言明を

$$\text{set}(a) \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists x (x = a)$$

で定める. $\text{set}(a)$ を満たす類 a を **集合 (set)** と呼び, $\neg \text{set}(a)$ を満たす類 a を **真類 (proper class)** と呼ぶ.

ちなみに $\epsilon x A(x)$ は集合である. なぜならば

$$\epsilon x A(x) = \epsilon x A(x)$$

だから

$$\exists a (a = \epsilon x A(x)).$$

また $\{x \mid A(x)\}$ が集合であるとき

$$\exists s (\{x \mid A(x)\} = s)$$

が成り立つが, 量化の規則より

$$\{x \mid A(x)\} = \epsilon s \forall u (u \in s \iff A(u))$$

が得られる. ブルバキや島内では右辺の項で内包表記を導入しているため, $\forall u (u \in s \iff A(s))$ を満たす集合 s が取れなければ $\{x \mid A(x)\}$ は正体不明の対象となる. 一方で本稿では内包項の意味は ϵ 項に依らずにはっきり決まっている.

0.9 式の書き換え

$\{x \mid A(x)\}$ なる形の項を内包項, $\epsilon x A(x)$ なる形の項を ϵ 項と呼び, これらを類と総称することにする. また ϵ 項が現れない \mathcal{L} の式を甲種式, 乙種項が現れる \mathcal{L} の式を乙種式と呼ぶことにする.

乙種式は書き換えない

たとえば, $x \in \varepsilon y B(y)$ なる式を \mathcal{L}_ε の式に書き換えるならば, ε 項に込められた意味から

$$\exists t (x \in t \wedge (\exists y B(y) \implies B(t)))$$

とするのが妥当であるだろう. しかしこうすると集合論では

$$\forall x (x \in \varepsilon y (y = y))$$

が成り立ってしまい, これは矛盾を起こす. 実際, 任意の集合 x に対して, t として $\{x\}$ を取れば

$$\exists t (x \in t \wedge (\exists y B(y) \implies B(t)))$$

が満たされるので

$$\forall x \exists t (x \in t \wedge (\exists y (y = y) \implies t = t))$$

すなわち $\forall x (x \in \varepsilon y (y = y))$ が成り立つ. ところが本稿の体系では $\varepsilon y (y = y)$ は集合であり, その一方で全ての集合を要素に持つ集まりというのは集合ではないから, 矛盾が起こる.

他に乙種式を \mathcal{L}_ε の式に変換する有効な方法が見つかれば話は別だが, それが見つかからないうちは乙種式は書き換えの対象ではない.

- $x \in \{y \mid B(y)\}$ は $B(x)$ と書き換える.

これは次の公理

$$\forall x (x \in \{y \mid B(y)\} \leftrightarrow B(x))$$

に基づく式の書き換えである.

- $\{x \mid A(x)\} \in y$ は $\exists s (s \in y \wedge \forall u (u \in s \iff A(s)))$ と書き換える. この同値性は

$$a \in b \implies \exists x (a = x)$$

の公理による.

量化は ε 項についての規則とする. 甲種乙種関係なく, 式 $A(x)$ と任意の ε 項 τ に対して

$$A(\tau) \vdash \exists x A(x).$$

$A(x)$ が甲種式であるとき,

$$\exists x A(x) \vdash A(\varepsilon x \mathcal{L} A(x)).$$

甲種乙種関係なく, $A(x)$ を式とすると, 全ての ε 項 τ で $A(\tau)$ が成り立てば $\forall x A(x)$ が成り立つ.

$$(\tau) A(\tau) \vdash \forall x A(x).$$

甲種乙種関係なく, $A(x)$ を式とすると, 任意の ε 項 τ に対して

$$\forall x A(x) \vdash A(\tau).$$

$A(x)$ が甲種式であるとき, 明らかに

$$\vdash \forall x A(x) \implies A(\varepsilon x \rightarrow \mathcal{L} A(x)).$$

0.10 証明

本節では、「集合でも真類でもない類は存在しない」と「集合であり真類でもある類は存在しない」の二つの言明の正否の決定を主軸にして推論規則 (rule of inference) を導入し、基本的な推論法則を導出する。推論法則とは他の本で恒真式 (tautology) と呼ばれるものであるが、それらの本では真理表を前提にしているのに対し、本稿では真理表は用いずに推論規則から形式的に導き出す。以下では

$$\vdash$$

なる記号を用いて、

$$\vdash \varphi$$

を満たす (\mathcal{L} の) 文 φ を推論法則と呼ぶことにするが、 $\vdash \varphi$ を満たすだけとか $\vdash \varphi$ が成り立つだけとかはどのような意味なのか、といったことは後に回して、とりあえず記号のパズルゲームと見立てて \vdash のルールを定める。

推論規則 0.10.1 (演繹規則). A, B, C, D を文とするととき、

- (a) $A \vdash D$ ならば $\vdash A \implies D$ が成り立つ.
- (b) $A, B \vdash D$ ならば

$$B \vdash A \implies D, \quad A \vdash B \implies D$$

が成り立つ.

- (c) $A, B, C \vdash D$ ならば

$$B, C \vdash A \implies D, \quad A, C \vdash B \implies D, \quad A, B \vdash C \implies D$$

のいずれも成り立つ.

演繹規則においては \vdash の左側にせいぜい三つの文しかないのだが、実は \vdash の左側に不特定多数の文を持ってきても演繹規則じみたことが成立する (後述の演繹法則).

推論規則 0.10.2 (三段論法). A と B を文とするとき

$$A, A \implies B \vdash B.$$

三段論法によって

$$A, A \implies B \vdash B$$

が成り立つが、ここに演繹規則を適用すれば

$$A \vdash (A \implies B) \implies B$$

および

$$\vdash A \implies ((A \implies B) \implies B)$$

が得られる。最後の式は三段論法を推論法則に直したものであり、証明の過程において最も重要な役割を果たす。ここで証明 (proof) とは何かを規定してしまおう。

自由な変項が現れない (\mathcal{L} の) 式を文 (sentence) や閉式 (closed formula) と呼ぶ。証明される式や証明の過程で出てくる式は全て文である。本稿では証明された文を真な (true) 文と呼ぶことにするが、“証明された”や“真である”という状態は議論が立脚している前提に依存する。ここでいう前提とは、推論規則や言語ではなくて公理系 (axioms) と呼ばれるものを指している。公理系とは文の集まりである。 \mathcal{S} を公理系とすると、 \mathcal{S} に集められた文を \mathcal{S} の公理 (axiom) と呼ぶ。以下では本稿の集合論が立脚する公理系を Σ と書くが、 Σ に属する文は単に公理と呼んだりもする。

Σ とは以下の文からなる:

相等性

外延性 a と b を類とするとき

$$\forall x (x \in a \iff x \in b) \implies a = b.$$

内包性

$$\forall x (x \in \{y \mid B(y)\} \iff B(x)).$$

合併

対

幂

置換

正則性

無限

選択

\mathcal{S} を公理系とすると、文 φ が \mathcal{S} から証明されただとか証明可能である (provable) ということは、

- φ は \mathcal{S} の公理である。
- $\vdash \varphi$ である。
- 文 ψ で、 ψ と $\psi \rightarrow \varphi$ が \mathcal{S} から証明されているものが取れる。

のいずれかが満たされているということであり、 φ が \mathcal{S} から証明可能であることを

$$\mathcal{S} \vdash \varphi$$

と書く。

\mathcal{S} から証明済みの φ を起点にして $\mathcal{S} \vdash \psi$ であると判明すれば、 φ から始めて ψ が真であることに辿り着くまでの一連の作業は ψ の \mathcal{S} からの証明 (proof) と呼ばれ、 ψ は \mathcal{S} の定理 (theorem) と呼ばれる。

$A, B \vdash \varphi$ とは A と B の二つの文のみを公理とした体系において φ が証明可能であることを表している。特に推論法則とは公理の無い体系で推論規則だけから導かれる定理のことである。

ではさっそく演繹法則の証明に進む。ところで、後で見るとおり演繹法則とは証明が持つ性質に対する言明であって、つまりメタ視点での定理ということになるので、演繹法則の“証明”とは言っても上で規定した証明とは意味が違う。メタ定理の“証明”は、本稿ではメタ証明と呼んで区別する。演繹法則を示す前に推論法則を三本用意しなくてはならない。

推論法則 0.10.3 (含意の反射律). A を文とするとき

$$\vdash A \implies A.$$

上の言明は“どんな文でも持ってくれば、その式に対して反射律が成立する”という意味である。このように無数に存在し得る定理を一括して表す式は公理図式 (**schema**) と呼ばれる。

証明. $A \vdash A$ であるから、演繹規則より $\vdash A \implies A$ となる。 ■

推論法則 0.10.4 (正しい式は仮定を選ばない). A, B を文とするとき

$$\vdash B \implies (A \implies B).$$

証明.

$$A, B \vdash B$$

より演繹規則から

$$B \vdash A \implies B$$

となり、再び演繹規則より

$$\vdash B \implies (A \implies B)$$

が得られる。 ■

演繹法則を示すための推論法則の導出は次で最後である。

推論法則 0.10.5 (含意の分配則). A, B, C を文とするとき

$$\vdash (A \implies (B \implies C)) \implies ((A \implies B) \implies (A \implies C)).$$

証明. 証明可能性の規則より

$$\begin{aligned} &A \implies (B \implies C), A \implies B, A \vdash A, \\ &A \implies (B \implies C), A \implies B, A \vdash A \implies B \end{aligned}$$

となるので

$$A \implies (B \implies C), A \implies B, A \vdash B$$

が成り立つし、同じように

$$\begin{aligned} &A \implies (B \implies C), A \implies B, A \vdash A, \\ &A \implies (B \implies C), A \implies B, A \vdash A \implies (B \implies C) \end{aligned}$$

であるから

$$A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \Rightarrow B, A \vdash B \Rightarrow C$$

も成り立つ。これによって

$$A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \Rightarrow B, A \vdash C$$

も成り立つから、あとは演繹規則を順次適用すれば

$$\begin{aligned} A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \Rightarrow B &\vdash A \Rightarrow C, \\ A \Rightarrow (B \Rightarrow C) &\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C), \\ &\vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)) \end{aligned}$$

となる。

メタ公理 0.10.6 (証明に対する構造的帰納法). \mathcal{S} を公理系とし、 X を文に対する何らかの言明とすると、

- \mathcal{S} の公理に対して X が言える。
- 推論法則に対して X が言える。
- φ と $\varphi \Rightarrow \psi$ が \mathcal{S} の定理であるような文 φ と文 ψ が取れたとき、 φ と $\varphi \Rightarrow \psi$ に対して X が言えるならば、 ψ に対して X が言える。

のすべてが満たされていれば、 \mathcal{S} から証明可能なあらゆる文に対して X が言える。

公理系 \mathcal{S} に文 A を追加した公理系を

$$\mathcal{S}, A$$

と書く。もし A が既に \mathcal{S} の公理であってもこのように表記するが、その場合は \mathcal{S}, A とは \mathcal{S} のことである。

メタ定理 0.10.7 (演繹法則). \mathcal{S} を公理系とし、 A を文とすると、 \mathcal{S}, A の任意の定理 B に対して

$$\mathcal{S} \vdash A \Rightarrow B$$

が成り立つ。

メタ証明.

第一段 B を \mathcal{S}, A の公理か或いは推論法則とする。 B が A ならば含意の反射律 (推論法則 0.10.3) より

$$\vdash A \Rightarrow B$$

が成り立つので

$$\mathcal{S} \vdash A \Rightarrow B$$

となる。 B が \mathcal{S} の公理又は推論法則であるとき、まず

$$\mathcal{S} \vdash B$$

が成り立つが，他方で推論法則 0.10.4 より

$$\mathcal{S} \vdash B \implies (A \implies B)$$

も成り立つので，証明可能性の定義より

$$\mathcal{S} \vdash A \implies B$$

が従う．

第二段 C 及び $C \implies B$ が \mathcal{S} の定理であるような文 C と文 B が取れた場合，

$$\mathcal{S} \vdash A \implies (C \implies B)$$

かつ

$$\mathcal{S} \vdash A \implies C$$

であると仮定する．含意の分配則 (0.10.5) より

$$\mathcal{S} \vdash (A \implies (C \implies B)) \implies ((A \implies C) \implies (A \implies B))$$

が満たされるので，証明可能性の定義の通りに

$$\mathcal{S} \vdash (A \implies C) \implies (A \implies B)$$

が従い，

$$\mathcal{S} \vdash A \implies B$$

が従う．以上と構造的帰納法より， \mathcal{S}, A の任意の定理 B に対して

$$\mathcal{S} \vdash A \implies B$$

と言える．

演繹法則の逆も得られる．つまり， \mathcal{S} を文の集合とし， A と B を文とすると，

$$\mathcal{S} \vdash A \implies B$$

であれば

$$\mathcal{S}, A \vdash B$$

が成り立つ．実際

$$\mathcal{S}, A \vdash A$$

が成り立つのは証明の定義の通りであるし， $A \implies B$ が \mathcal{S} の定理ならば

$$\mathcal{S}, A \vdash A \implies B \tag{1}$$

が成り立つので，併せて

$$\mathcal{S}, A \vdash B$$

が従う。ただし (1) に関しては次のメタ定理を示さなくてはならない。

メタ定理 0.10.8 (公理が増えても証明可能). \mathcal{S} を公理系とし, A を文とすると, \mathcal{S} の任意の定理 B に対して

$$\mathcal{S}, A \vdash B$$

が成り立つ。

メタ証明. B が \mathcal{S} の公理であるか推論規則であれば

$$\mathcal{S}, A \vdash B$$

は言える。また

$$\begin{aligned} \mathcal{S} \vdash C, \\ \mathcal{S} \vdash C \implies B \end{aligned}$$

を満たす文 C が取れるとき,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}, A \vdash C, \\ \mathcal{S}, A \vdash C \implies B \end{aligned}$$

と仮定すれば

$$\mathcal{S}, A \vdash B$$

となる。以上と構造的帰納法より \mathcal{S} の任意の定理 B に対して

$$\mathcal{S}, A \vdash B$$

が成り立つ。 ■

\vee の導入 A と B を文とすると

$$\begin{aligned} A \vdash A \vee B, \\ B \vdash A \vee B. \end{aligned}$$

\wedge の導入 A と B を文とすると

$$A, B \vdash A \wedge B.$$

\wedge の除去 A と B を文とすると

$$\begin{aligned} A \wedge B \vdash A, \\ A \wedge B \vdash B. \end{aligned}$$

場合分け法則 A と B と C を文とすると

$$A \vee B, A \implies C, B \implies C \vdash C.$$

例えばいま

$$\mathcal{S} \vdash A$$

かつ

$$\mathcal{S} \vdash B$$

であるとすれば

$$\mathcal{S} \vdash A \wedge B$$

が成り立つ。実際、 \wedge の導入に演繹規則を二度適用すれば

$$\vdash A \implies (B \implies (A \wedge B))$$

が成り立つのであるから、 \mathcal{S} からの A への証明に $A \implies (B \implies (A \wedge B))$ と $B \implies (A \wedge B)$ を追加した文の列は \mathcal{S} からの $B \implies (A \wedge B)$ への証明となり、ここに \mathcal{S} からの B への証明を追加して最後に $A \wedge B$ を載せれば、その文の列は \mathcal{S} からの $A \wedge B$ への証明となっている。

$$A(\varepsilon x \rightarrow A(x)) \vdash \forall x A(x)$$

によって

$$\{A(\tau) \mid \tau : term\} \vdash \forall x A(x)$$

となる。

$$\vdash A(\varepsilon x \rightarrow A(x)) \implies \forall x A(x)$$

と

$$\{A(\tau) \mid \tau : term\} \vdash A(\varepsilon x \rightarrow A(x))$$

より、

$$\vdash \rightarrow A(\tau) \implies \rightarrow A(\varepsilon x \rightarrow A(x))$$

より

$$\vdash A(\varepsilon x \rightarrow A(x)) \implies A(\tau).$$

0.11 推論

いま x, y を \mathcal{L} の項とすると、

$$x \notin y \stackrel{\text{def}}{\iff} \rightarrow x \in y$$

で $x \notin y$ を定める。同様に

$$x \neq y \stackrel{\text{def}}{\iff} \rightarrow x = y$$

で $x \neq y$ を定める.

定義記号 $\stackrel{\text{def}}{=}$ と同様に, ' $A \stackrel{\text{def}}{\iff} B$ ' とは式 B を記号列 A で置き換えて良いという意味で使われる. また, 式中に記号列 A が出てくるときは, 暗黙裡にその A を B に戻して式を読む. $\stackrel{\text{def}}{=}$ も $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ も略記法を定めるための記号である.

ここで論理記号の名称を書いておく.

- \perp を矛盾 (**contradiction**) と呼ぶ.
- \vee を論理和 (**logical disjunction**) と呼ぶ.
- \wedge を論理積 (**logical conjunction**) と呼ぶ.
- \implies を含意 (**implication**) と呼ぶ.
- \neg を否定 (**negation**) と呼ぶ.

推論規則 0.11.1 (基本的な推論規則). 上述

演繹法則について, “ A を公理に追加する” ことを “ A が成り立っていると仮定する” などの言明により示唆することが多いです.

推論法則 0.11.2 (論理和・論理積の可換律). A, B を文とするとき

- $\vdash (A \vee B) \implies (B \vee A).$
- $\vdash (A \wedge B) \implies (B \wedge A).$

証明. \vee の導入により

$$\vdash A \implies (B \vee A)$$

と

$$\vdash B \implies (A \vee B)$$

が成り立つので, 場合分け法則より

$$\vdash (A \vee B) \implies (B \vee A)$$

が成り立つ. また, \wedge の除去より

$$A \wedge B \vdash A$$

と

$$A \wedge B \vdash B$$

となるので, \wedge の導入により

$$A \wedge B \vdash B \wedge A$$

が成り立つ. よって演繹法則より

$$\vdash (A \wedge B) \implies (B \wedge A)$$

が成り立つ.

推論法則 0.11.3 (含意の推移律). A, B, C を文とするとき

$$\vdash ((A \implies B) \wedge (B \implies C)) \implies (A \implies C).$$

証明.

$$(A \implies B) \wedge (B \implies C), A \vdash (A \implies B) \wedge (B \implies C)$$

であるから, \wedge の除去より

$$(A \implies B) \wedge (B \implies C), A \vdash A \implies B$$

となる. また

$$(A \implies B) \wedge (B \implies C), A \vdash A$$

でもあるから, 三段論法より

$$(A \implies B) \wedge (B \implies C), A \vdash B$$

となる. \wedge の除去より

$$(A \implies B) \wedge (B \implies C), A \vdash B \implies C$$

も成り立つから, 再び三段論法より

$$(A \implies B) \wedge (B \implies C), A \vdash C$$

となる. よって演繹法則より

$$(A \implies B) \wedge (B \implies C) \vdash A \implies C$$

となり,

$$\vdash ((A \implies B) \wedge (B \implies C)) \implies (A \implies C)$$

を得る.

推論法則 0.11.4 (二式が同時に導かれるならその論理積が導かれる). A, B, C を文とするとき

$$\vdash ((A \implies B) \wedge (A \implies C)) \implies (A \implies (B \wedge C))$$

証明.

$$(A \implies B) \wedge (A \implies C), A \vdash (A \implies B) \wedge (A \implies C)$$

であるから、 \wedge の除去より

$$(A \implies B) \wedge (A \implies C), A \vdash A \implies B$$

が成り立つ。

$$(A \implies B) \wedge (A \implies C), A \vdash A$$

でもあるから

$$(A \implies B) \wedge (A \implies C), A \vdash B$$

となる。同様にして

$$(A \implies B) \wedge (A \implies C), A \vdash C$$

となるので、 \wedge の導入により

$$(A \implies B) \wedge (A \implies C), A \vdash B \wedge C$$

となり、演繹法則より

$$(A \implies B) \wedge (A \implies C) \vdash A \implies (B \wedge C)$$

が成り立つ。ゆえに

$$\vdash ((A \implies B) \wedge (A \implies C)) \implies (A \implies (B \wedge C))$$

が得られる。

推論法則 0.11.5 (含意は遺伝する). A, B, C を \mathcal{L}' の閉式とするとき以下が成り立つ:

- (a) $(A \implies B) \implies ((A \vee C) \implies (B \vee C)).$
- (b) $(A \implies B) \implies ((A \wedge C) \implies (B \wedge C)).$
- (c) $(A \implies B) \implies ((B \implies C) \implies (A \implies C)).$
- (c) $(A \implies B) \implies ((C \implies A) \implies (C \implies B)).$

証明.

(a) いま $A \implies B$ が成り立っていると仮定する。論理和の導入により

$$C \implies (B \vee C)$$

は定理であるから、含意の推移律より

$$A \implies (B \vee C)$$

が従い、場合分け法則より

$$(A \vee C) \implies (B \vee C)$$

が成立する．ここに演繹法則を適用して

$$(A \implies B) \implies ((A \vee C) \implies (B \vee C))$$

が得られる．

- (b) いま $A \implies B$ が成り立っていると仮定する．論理積の除去より

$$(A \wedge C) \implies A$$

は定理であるから，含意の推移律より

$$(A \wedge C) \implies B$$

が従い，他方で論理積の除去より

$$(A \wedge C) \implies C$$

も満たされる．そして推論法則 0.11.4 から

$$(A \wedge C) \implies (B \wedge C)$$

が成り立ち，演繹法則より

$$(A \implies B) \implies ((A \wedge C) \implies (B \wedge C))$$

が得られる．

- (c) いま $A \implies B$, $B \implies C$ および A が成り立っていると仮定する．このとき三段論法より B が成り立つので再び三段論法より C が成立する．ゆえに演繹法則より $A \implies B$ と $B \implies C$ が成り立っている下で

$$A \implies C$$

が成立し，演繹法則を更に順次適用すれば

$$(A \implies B) \implies ((B \implies C) \implies (A \implies C))$$

が得られる．

- (d) いま $A \implies B$, $C \implies A$ および C が成り立っていると仮定する．このとき三段論法より A が成り立つので再び三段論法より B が成立し，ここに演繹法則を適用すれば， $A \implies B$ と $C \implies A$ が成立している下で

$$C \implies B$$

が成立する．演繹法則を更に順次適用すれば

$$(A \implies B) \implies ((C \implies A) \implies (C \implies B))$$

が得られる．

A と B を \mathcal{L}' の式とするととき，

$$(A \iff B) \stackrel{\text{def}}{\iff} (A \implies B \wedge B \implies A)$$

により \iff を定め，式 ' $A \iff B$ ' を " A と B は同値である (equivalent)" と翻訳する．

推論法則 0.11.6 (同値記号の可換律). A と B を \mathcal{L}' の閉式とするとき

$$(A \iff B) \implies (B \iff A).$$

略証. $A \iff B$ が成り立っているならば, 推論法則 0.11.2 より

$$B \implies A \wedge A \implies B$$

が成立する. すなわち

$$B \iff A$$

が成立する. そして演繹法則から

$$(A \iff B) \implies (B \iff A)$$

が成立する. ■

推論法則 0.11.7 (同値記号の遺伝性質). A, B, C を \mathcal{L}' の閉式とするとき以下の式が成り立つ:

- (a) $(A \iff B) \implies ((A \vee C) \iff (B \vee C)).$
- (b) $(A \iff B) \implies ((A \wedge C) \iff (B \wedge C)).$
- (c) $(A \iff B) \implies ((B \implies C) \iff (A \implies C)).$
- (d) $(A \iff B) \implies ((C \implies A) \iff (C \implies B)).$

証明. まず (a) を示す. いま $A \iff B$ が成り立っていると仮定する. このとき $A \implies B$ と $B \implies A$ が共に成立し, 他方で含意の遺伝性質より

$$\begin{aligned} (A \implies B) &\implies ((A \vee C) \implies (B \vee C)), \\ (B \implies A) &\implies ((B \vee C) \implies (A \vee C)) \end{aligned}$$

が成立するから三段論法より $(A \vee C) \implies (B \vee C)$ と $(B \vee C) \implies (A \vee C)$ が共に成立する. ここに \wedge の導入を適用すれば

$$(A \vee C) \iff (B \vee C)$$

が成立し, 演繹法則を適用すれば

$$(A \iff B) \implies ((A \vee C) \iff (B \vee C))$$

が得られる. (b)(c)(d) も含意の遺伝性を適用すれば得られる. ■

推論規則 0.11.8 (矛盾と否定に関する規則). A を文とすると以下が成り立つ:

矛盾の発生 否定が共に成り立つとき矛盾が起きる:

$$A, \neg A \vdash \perp.$$

否定の導出 矛盾が導かれるとき否定が成り立つ:

$$A \Rightarrow \perp \vdash \neg A.$$

二重否定の法則 二重に否定された式は元の式を導く:

$$\neg\neg A \vdash A.$$

文 A が $\mathcal{S} \vdash \neg A$ を満たすとき, A は公理系 \mathcal{S} において偽である (**false**) という.

推論法則 0.11.9 (偽な式は矛盾を導く). A を文とすると

$$\vdash \neg A \Rightarrow (A \Rightarrow \perp).$$

証明. 矛盾の規則より

$$A, \neg A \vdash \perp$$

である. 演繹法則より

$$\neg A \vdash A \Rightarrow \perp$$

が成り立ち, 再び演繹法則より

$$\vdash \neg A \Rightarrow (A \Rightarrow \perp)$$

が得られる. ■

$A, B \vdash C$ と $A \wedge B \vdash C$ は同値である. $A, B \vdash C$ が成り立っているとする, $\vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ が成り立つ. $A \wedge B \vdash A$ と三段論法より $A \wedge B \vdash B \Rightarrow C$ が成り立ち, $A \wedge B \vdash B$ と三段論法より $A \wedge B \vdash C$ が成り立つ. 逆に $A \wedge B \vdash C$ が成り立っているとする $\vdash (A \wedge B) \Rightarrow C$ が成り立つ. $A, B \vdash A \wedge B$ と三段論法より $A, B \vdash C$ が成り立つ.

推論法則 0.11.10 (背理法の原理). A を文とすると

$$\vdash (\neg A \Rightarrow \perp) \Rightarrow A.$$

証明. 否定の導出より

$$\vdash (\neg A \Rightarrow \perp) \Rightarrow \neg\neg A$$

が成り立ち、二重否定の法則より

$$\vdash \neg\neg A \Rightarrow A$$

が成り立つので、 \wedge の導入より

$$\vdash ((\neg A \Rightarrow \perp) \Rightarrow \neg\neg A) \wedge (\neg\neg A \Rightarrow A)$$

が成り立つ。含意の推移律 (推論法則 0.11.3) より

$$\vdash ((\neg A \Rightarrow \perp) \Rightarrow \neg\neg A) \wedge (\neg\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow ((\neg A \Rightarrow \perp) \Rightarrow A)$$

が成り立つので、三段論法より

$$\vdash (\neg A \Rightarrow \perp) \Rightarrow A$$

が得られる。

推論法則 0.11.11 (排中律). A を文とすると

$$\vdash A \vee \neg A.$$

証明.

$$\neg(A \vee \neg A), A \vdash A$$

と \vee の導入より

$$\neg(A \vee \neg A), A \vdash A \vee \neg A$$

が成り立つ。一方で

$$\neg(A \vee \neg A), A \vdash \neg(A \vee \neg A)$$

も成り立つので

$$\neg(A \vee \neg A), A \vdash \perp$$

が成り立つ。演繹法則より

$$\neg(A \vee \neg A) \vdash A \Rightarrow \perp$$

が成り立つので、否定の導出より

$$\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A$$

が成り立つ。再び \vee の導入によって

$$\neg(A \vee \neg A) \vdash A \vee \neg A$$

が成り立つ。再び否定の導出より

$$\rightarrow (A \vee \rightarrow A) \vdash \perp$$

が成り立つ。ゆえに

$$\vdash \rightarrow (A \vee \rightarrow A) \Rightarrow \perp$$

が成り立ち、背理法の原理より

$$\vdash A \vee \rightarrow A$$

が得られる。

定理 0.11.12 (類は集合であるか真類であるかのいずれかに定まる). a を類とするとき

$$\Sigma \vdash \text{set}(a) \vee \rightarrow \text{set}(a).$$

証明. 排中律を適用することにより従う。

推論法則 0.11.13 (矛盾からはあらゆる式が導かれる). A を文とするとき

$$\vdash \perp \Rightarrow A.$$

証明. 推論法則 0.10.4 より

$$\vdash \perp \Rightarrow (\rightarrow A \Rightarrow \perp)$$

が成り立つ。また背理法の原理より

$$\vdash (\rightarrow A \Rightarrow \perp) \Rightarrow A$$

が成り立つので、含意の推移律を適用すれば

$$\vdash \perp \Rightarrow A$$

が得られる。

推論法則 0.11.14 (矛盾を導く式はあらゆる式を導く). A, B を文とするとき

$$\vdash (A \Rightarrow \perp) \Rightarrow (A \Rightarrow B).$$

証明. 推論法則 0.11.13 より

$$\vdash \perp \Longrightarrow B$$

が成り立つので

$$A \Longrightarrow \perp \vdash \perp \Longrightarrow B$$

が成り立つ.

$$A \Longrightarrow \perp \vdash A \Longrightarrow \perp$$

も成り立つので, 含意の推移律 (推論法則 0.11.3) より

$$A \Longrightarrow \perp \vdash A \Longrightarrow B$$

が成り立つ. そして演繹法則より

$$\vdash (A \Longrightarrow \perp) \Longrightarrow (A \Longrightarrow B)$$

が得られる.

空虚な真

A, B を文とすると, 偽な式は矛盾を導くので (推論法則 0.11.9)

$$\vdash \neg A \Longrightarrow (A \Longrightarrow \perp)$$

が成り立ち, 矛盾を導く式はあらゆる式を導くから (推論法則 0.11.14)

$$\vdash (A \Longrightarrow \perp) \Longrightarrow (A \Longrightarrow B)$$

が成り立つ. 以上と含意の推移律より

$$\vdash \neg A \Longrightarrow (A \Longrightarrow B)$$

が得られる. つまり “偽な式はあらゆる式を導く” のであり, この現象を空虚な真 (**vacuous truth**) と呼ぶ.

推論法則 0.11.15 (含意は否定と論理和で表せる). A, B を文とすると

$$\vdash (A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg A \vee B).$$

証明.

第一段 含意の遺伝性質より

$$\vdash (A \Longrightarrow B) \Longrightarrow ((A \vee \neg A) \Longrightarrow (B \vee \neg A))$$

が成り立つので

$$A \Longrightarrow B \vdash (A \vee \neg A) \Longrightarrow (B \vee \neg A)$$

となる。排中律より

$$A \implies B \vdash A \vee \neg A$$

も成り立つので、三段論法より

$$A \implies B \vdash B \vee \neg A$$

が成り立ち、論理和の可換律 (推論法則 0.11.2) より

$$A \implies B \vdash \neg A \vee B$$

が得られ、演繹法則より

$$\vdash (A \implies B) \implies (\neg A \vee B)$$

が得られる。

第二段 推論法則 0.11.9 より

$$\vdash \neg A \implies (A \implies \perp)$$

が成り立ち、一方で推論法則 0.11.14 より

$$\vdash (A \implies \perp) \implies (A \implies B)$$

も成り立つので、含意の推移律より

$$\vdash \neg A \implies (A \implies B)$$

が成立する。推論法則 0.10.4 より

$$\vdash B \implies (A \implies B)$$

も成り立つから、場合分けの法則より

$$\vdash (\neg A \vee B) \implies (A \implies B)$$

が成り立つ。

推論法則 0.11.16 (二重否定の法則の逆が成り立つ). A を文とすると

$$\vdash A \implies \neg\neg A.$$

証明. 排中律より

$$\vdash \neg A \vee \neg\neg A$$

が成立し、また推論法則 0.11.15 より

$$\vdash (\neg A \vee \neg\neg A) \implies (A \implies \neg\neg A)$$

も成り立つので、三段論法より

$$\vdash A \implies \neg\neg A$$

が成立する。

推論法則 0.11.17 (対偶命題は同値). A, B を文とするとき

$$\vdash (A \implies B) \iff (\neg B \implies \neg A).$$

証明.

第一段 含意は否定と論理和で表せるので (推論法則 0.11.15)

$$\vdash (A \implies B) \implies (\neg A \vee B) \quad (2)$$

が成り立つ. また論理和は可換であるから (推論法則 0.11.2)

$$\vdash (\neg A \vee B) \implies (B \vee \neg A) \quad (3)$$

が成り立つ. ところで二重否定の法則の逆 (推論法則 0.11.16) より

$$\vdash B \implies \neg\neg B$$

が成り立ち, また含意の遺伝性質より

$$\vdash (B \implies \neg\neg B) \implies ((B \vee \neg A) \implies (\neg\neg B \vee \neg A))$$

も成り立つから, 三段論法より

$$\vdash (B \vee \neg A) \implies (\neg\neg B \vee \neg A) \quad (4)$$

が成立する. 再び推論法則 0.11.15 によって

$$\vdash (\neg\neg B \vee \neg A) \implies (\neg B \implies \neg A) \quad (5)$$

が成り立つ. (2) と (3) と (4) と (5) に含意の推移律を適用すれば

$$\vdash (A \implies B) \implies (\neg B \implies \neg A)$$

が得られる.

第二段 含意は否定と論理和で表せるので (推論法則 0.11.15)

$$\vdash (\neg B \implies \neg A) \implies (\neg\neg B \vee \neg A) \quad (6)$$

が成り立つ. ところで二重否定の法則より

$$\vdash \neg\neg B \implies B$$

が成り立ち, また含意の遺伝性質より

$$\vdash (\neg\neg B \implies B) \implies ((\neg\neg B \vee \neg A) \implies (B \vee \neg A))$$

も成り立つから, 三段論法より

$$\vdash (\neg\neg B \vee \neg A) \implies (B \vee \neg A) \quad (7)$$

が成立する．論理和は可換であるから (推論法則 0.11.2)

$$\vdash (B \vee \rightarrow A) \Longrightarrow (\rightarrow A \vee B) \quad (8)$$

が成り立つ．再び推論法則 0.11.15 によって

$$\vdash (\rightarrow A \vee B) \Longrightarrow (A \Longrightarrow B) \quad (9)$$

が成り立つ．(6) と (7) と (8) と (9) に含意の推移律を適用すれば

$$\vdash (\rightarrow B \Longrightarrow \rightarrow A) \Longrightarrow (A \Longrightarrow B)$$

が得られる．

上の証明は簡単に書けば

$$\begin{aligned} (A \Longrightarrow B) &\Longleftrightarrow (\rightarrow A \vee B) \\ &\Longleftrightarrow (B \vee \rightarrow A) \\ &\Longleftrightarrow (\rightarrow \rightarrow B \vee \rightarrow A) \\ &\Longleftrightarrow (\rightarrow B \Longrightarrow \rightarrow A) \end{aligned}$$

で足りる．

推論法則 0.11.18 (De Morgan の法則). A, B を文とすると

- $\vdash \rightarrow (A \vee B) \Longleftrightarrow \rightarrow A \wedge \rightarrow B$.
- $\vdash \rightarrow (A \wedge B) \Longleftrightarrow \rightarrow A \vee \rightarrow B$.

証明.

第一段 論理和の導入の対偶を取れば

$$\vdash \rightarrow (A \vee B) \Longrightarrow \rightarrow A$$

と

$$\vdash \rightarrow (A \vee B) \Longrightarrow \rightarrow B$$

が成り立つ (推論法則 0.11.17). 二式が同時に導かれるならその論理積も導かれるので (推論法則 0.11.4)

$$\vdash \rightarrow (A \vee B) \Longrightarrow (\rightarrow A \wedge \rightarrow B)$$

が得られる．また

$$A, \rightarrow A \wedge \rightarrow B \vdash A$$

かつ

$$A, \rightarrow A \wedge \rightarrow B \vdash \rightarrow A$$

より

$$A, \neg A \wedge \neg B \vdash \perp$$

が成り立つので、演繹法則より

$$A \vdash (\neg A \wedge \neg B) \implies \perp$$

が従い、否定の導入により

$$A \vdash \neg (\neg A \wedge \neg B)$$

が成り立つ。同様にして

$$B \vdash \neg (\neg A \wedge \neg B)$$

も成り立つので、場合分け法則より

$$\vdash (A \vee B) \implies \neg (\neg A \wedge \neg B)$$

が成立する。この対偶を取れば

$$\vdash (\neg A \wedge \neg B) \implies \neg (A \vee B)$$

が得られる (推論法則 0.11.17).

第二段 前段の結果より

$$\vdash (\neg\neg A \wedge \neg\neg B) \iff \neg (\neg A \vee \neg B)$$

が成り立つ。ところで二重否定の法則とその逆 (推論法則 0.11.16) より

$$\vdash (\neg\neg A \wedge \neg\neg B) \iff (A \wedge B)$$

が成り立つので

$$\vdash (A \wedge B) \iff \neg (\neg A \vee \neg B)$$

が成り立つ。対偶命題の同値性 (推論法則 0.11.17) から

$$\vdash \neg (A \wedge B) \iff (\neg A \vee \neg B)$$

が得られる。

以上で“集合であり真類でもある類は存在しない”という言明を証明する準備が整いました。

定理 0.11.19 (集合であり真類でもある類は存在しない). a を類とするとき

$$\Sigma \vdash \neg (\text{set}(a) \wedge \neg \text{set}(a)).$$

証明. a を類とするとき, 排中律より

$$\vdash \text{set}(a) \vee \neg \text{set}(a)$$

が成り立ち, 論理和の可換律より

$$\vdash \neg \text{set}(a) \vee \text{set}(a)$$

も成立する. そして De Morgan の法則より

$$\vdash \neg (\neg \neg \text{set}(a) \wedge \neg \text{set}(a))$$

が成り立つが, 二重否定の法則より $\neg \neg \text{set}(a)$ と $\text{set}(a)$ は同値となるので

$$\vdash \neg (\text{set}(a) \wedge \neg \text{set}(a))$$

が成り立つ.

「集合であり真類でもある類は存在しない」とは言ったものの, それはあくまで

$$\Sigma \vdash \neg (\text{set}(a) \wedge \neg \text{set}(a))$$

を翻訳したに過ぎないのであって, もしかすると

$$\Sigma \vdash \text{set}(a) \wedge \neg \text{set}(a)$$

も導かれるかもしれない. この場合 Σ は矛盾することになるが, Σ の無矛盾性が不明であるためこの事態が起こらないとは言えない.

推論規則 0.11.20 (量化記号に関する規則). A を \mathcal{L}' の式とし, x を A に現れる文字とすると, x のみが A で量化されていないならば以下を認める:

ε 記号の導入 $\varepsilon x A(x)$ は \mathcal{L} の或る対象に代用される.

存在記号の規則 $A(\varepsilon x A(x)) \iff \exists x A(x)$ が成り立つ.

全称記号の規則 $A(\varepsilon x \rightarrow A(x)) \iff \forall x A(x)$ が成り立つ.

存在記号の基本性質 τ を \mathcal{L} の対象とすると $A(\tau) \implies \exists x A(x)$ が成り立つ.

ε 記号は Hilbert のイプシロン関数と呼ばれるもので, 量化記号の働きを形式的に表現するには簡便かつ有能である. また ε 記号が指定する対象を \mathcal{L} のものと約束することで, \exists と \forall の作用範囲を \mathcal{L} の対象全体に制限している.

推論法則 0.11.21 (全称記号と任意性). A を \mathcal{L}' の式とし, x を A に現れる文字とし, x のみが A で量化されていないとする. このとき $\forall x A(x)$ が成り立つならば \mathcal{L} のいかなる対象 τ に対しても $A(\tau)$ が成り立つ. 逆に, \mathcal{L} のいかなる対象 τ に対しても $A(\tau)$ が成り立てば $\forall x A(x)$ が成り立つ.

証明. τ を \mathcal{L} の任意の対象とすれば, 存在記号に関する推論規則より

$$\rightarrow A(\tau) \implies \exists x \rightarrow A(x)$$

と

$$\exists x \rightarrow A(x) \implies \rightarrow A(\varepsilon x \rightarrow A(x))$$

が成り立つから、推論法則 0.11.3 より

$$\rightarrow A(\tau) \implies \rightarrow A(\varepsilon x \rightarrow A(x))$$

が成り立ち、対偶を取って

$$A(\varepsilon x \rightarrow A(x)) \implies A(\tau)$$

が成り立つ。全称記号に関する推論規則より

$$\forall x A(x) \implies A(\varepsilon x \rightarrow A(x))$$

が満たされているので

$$\forall x A(x) \implies A(\tau)$$

が従う。逆にいかなる対象 τ に対しても $A(\tau)$ が成り立つとき、特に

$$A(\varepsilon x \rightarrow A(x))$$

が成り立つので $\forall x A(x)$ も成り立つ。 ■

推論法則 0.11.21 を根拠にして、当面は $\forall x A(x)$ という式を“ \mathcal{L} の任意の対象 x に対して $A(x)$ が成立する”と翻訳することになります。また後述する相等性の公理によれば、これは“任意の集合 x に対して $A(x)$ が成立する”と翻訳しても同義です。

推論法則 0.11.22 (量化記号の性質 (イ)). A, B を \mathcal{L}' の式とし、 x を A, B に現れる文字とし、 x のみが A, B で量化されていないとする。 \mathcal{L} の任意の対象 τ に対して

$$A(\tau) \iff B(\tau)$$

が成り立っているとき、

$$\exists x A(x) \iff \exists x B(x)$$

および

$$\forall x A(x) \iff \forall x B(x)$$

が成り立つ。

証明. いま、 \mathcal{L} の任意の対象 τ に対して

$$A(\tau) \iff B(\tau) \tag{10}$$

が成り立っているとする。ここで

$$\exists x A(x)$$

が成り立っていると仮定すると、

$$\tau \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon x A(x)$$

とおけば存在記号に関する規則より

$$A(\tau)$$

が成立し、(10) と併せて

$$B(\tau)$$

が成立する。再び存在記号に関する規則より

$$\exists x B(x)$$

が成り立つので、演繹法則から

$$\exists x A(x) \Longrightarrow \exists x B(x)$$

が得られる。 A と B の立場を入れ替えれば

$$\exists x B(x) \Longrightarrow \exists x A(x)$$

も得られる。今度は

$$\forall x A(x)$$

が成り立っていると仮定すると、推論法則 0.11.21 より \mathcal{L} の任意の対象 τ に対して

$$A(\tau)$$

が成立し、(10) と併せて

$$B(\tau)$$

が成立する。 τ の任意性と推論法則 0.11.21 より

$$\forall x B(x)$$

が成り立つので、演繹法則から

$$\forall x A(x) \Longrightarrow \forall x B(x)$$

が得られる。 A と B の立場を入れ替えれば

$$\forall x B(x) \Longrightarrow \forall x A(x)$$

も得られる。



推論法則 0.11.23 (量化記号に対する De Morgan の法則). A を \mathcal{L}' の式とし, x を A に現れる文字とし, x のみが A で量化されていないとする. このとき

$$\exists x \rightarrow A(x) \iff \rightarrow \forall x A(x)$$

および

$$\forall x \rightarrow A(x) \iff \rightarrow \exists x A(x)$$

が成り立つ.

略証. 推論規則 0.11.20 より

$$\exists x \rightarrow A(x) \iff \rightarrow A(\varepsilon x \rightarrow A(x))$$

は定理である. 他方で推論規則 0.11.20 より

$$A(\varepsilon x \rightarrow A(x)) \iff \forall x A(x)$$

もまた定理であり, この対偶を取れば

$$\rightarrow A(\varepsilon x \rightarrow A(x)) \iff \rightarrow \forall x A(x)$$

が成り立つ. ゆえに

$$\exists x \rightarrow A(x) \iff \rightarrow \forall x A(x)$$

が従う. A を $\rightarrow A$ に置き換えれば

$$\forall x \rightarrow A(x) \iff \rightarrow \exists x \rightarrow \rightarrow A(x)$$

が成り立ち, また \mathcal{L} の任意の対象 τ に対して

$$A(\tau) \iff \rightarrow \rightarrow A(\tau)$$

が成り立つので, 推論法則 0.11.22 より

$$\exists x \rightarrow \rightarrow A(x) \iff \exists x A(x)$$

も成り立つ. ゆえに

$$\forall x \rightarrow A(x) \iff \rightarrow \exists x A(x)$$

が従う.

0.12 相等性

本稿において“等しい”とは項に対する言明であって, a と b を項とすると

$$a = b$$

なる式で表される。この記号

=

は等号 (**equal sign**) と呼ばれるが、現時点では述語として導入されているだけで、推論操作における働きはまだ明文化していない。本節では、いつ類は等しくなるのか、そして、等しい場合に何が起きるのか、の二つが主題となる。

公理 0.12.1 (外延性の公理). a, b を類とすると、次が成り立つ:

$$\forall x (x \in a \iff x \in b) \implies a = b.$$

定理 0.12.2 (任意の類は自分自身と等しい). a を類とすると次が成り立つ:

$$a = a.$$

略証. 任意の ε 項 τ に対して、推論法則 0.10.3 より

$$\tau \in a \iff \tau \in a$$

が成り立つから、 τ の任意性より

$$\forall x (x \in a \iff x \in a)$$

が成り立つ。外延性の公理と三段論法より

$$a = a$$

が得られる。 ■

定理 0.12.3 (ε 項は集合である). 任意の ε 項 $\varepsilon x A(x)$ に対して

$$\text{set}(\varepsilon x A(x)).$$

略証. 定理 0.12.2 より

$$\varepsilon x A(x) = \varepsilon x A(x)$$

が成立するので、存在記号の推論規則より

$$\exists y (\varepsilon x A(x) = y)$$

が成立する。 ■

A を \mathcal{L}_ε の式とし、 x を A に現れる変項とし、 x のみが A で自由であるとし、かつ

$$\text{set}(\{x \mid A(x)\})$$

が満たされているとする。つまり

$$\exists y (\{x \mid A(x)\} = y)$$

が成り立っているということであるが、 $\{x \mid A(x)\} = y$ を

$$\forall x (A(x) \iff x \in y)$$

と書き換えれば、存在記号の推論規則より

$$\{x \mid A(x)\} = \varepsilon y \forall x (A(x) \iff x \in y)$$

が得られる。

定理 0.12.4 (集合である内包項は ε 項で書ける). 任意の内包項 $\{x \mid A(x)\}$ に対して、 $\{x \mid A(x)\}$ が集合であれば

$$\{x \mid A(x)\} = \varepsilon y \forall x (A(x) \iff x \in y).$$

ブルバキでは τ 項を、島内では ε 項のみを導入して $\varepsilon y \forall x (A(x) \iff x \in y)$ によって $\{x \mid A(x)\}$ を定めている。本稿と同じくブルバキの τ 項も島内の ε 項も集合を表すものであるから、

$$\exists y \forall x (A(x) \iff x \in y)$$

を満たさないような性質 A に対しては $\varepsilon y \forall x (A(x) \iff x \in y)$ は不定の集合を指す。本稿では

公理 0.12.5 (要素の公理). 要素となりうる類は集合である。つまり、 a, b を類とすると

$$a \in b \implies \text{set}(a).$$

公理 0.12.6 (内包性公理). A を \mathcal{L}_ε の式とし、 x を A に現れる変項とし、 y を $A(x)$ に現れない変項とし、 x のみが A で自由であるとする。このとき

$$\forall y (y \in \{x \mid A(x)\} \iff A(y)).$$

要素の公理で要求していることは類を構成できるのは集合に限られるということであり、内包性公理は甲種項はその固有の性質を持つ集合の全体であるという意味を持つ。

例えば

$$a = b$$

と書いてあったら“ a と b は等しい”と読めるわけだが、明らかに a は b とは違うではないではないか！こんなことはしょっちゅう起こることであって、上で述べたように $\{x \mid A(x)\}$ が集合なら

$$\{x \mid A(x)\} = \varepsilon y \forall x (A(x) \iff x \in y)$$

が成り立ったりする。そこで“数学的に等しいとは何事か”という疑問が浮かぶのは至極自然であって、それに答えるのが次の相等性公理である。

公理 0.12.7 (相等性公理). A を \mathcal{L}' の式とし, x を A に現れる文字とし, x のみが A で量化されていないとする. このとき a, b を類とすれば次が成り立つ:

$$a = b \implies (A(a) \iff A(b)).$$

定理 0.12.8 (外延性の公理の逆も成り立つ). a と b を類とすると

$$a = b \implies \forall x (x \in a \iff x \in b).$$

証明. $a = b$ が成り立っていると仮定すれば, 相等性の公理より \mathcal{L} の任意の対象 τ に対して

$$\tau \in a \iff \tau \in b$$

が満たされるから, 推論法則 0.11.21 より

$$\forall x (x \in a \iff x \in b)$$

が成立する. よって演繹法則より

$$a = b \implies \forall x (x \in a \iff x \in b)$$

が成り立つ. ■

等しい類同士は同じ \mathcal{L} の対象を要素に持つと示されましたが, このとき要素に持つ集合まで一致します. これは相等性の公理から明らかですが, 詳しくは部分類の箇所の説明いたしましょう.

定理 0.12.9 (条件を満たす集合は要素である). A を \mathcal{L} の式とし, x を A に現れる文字とし, t を $A(x)$ に現れない文字とし, x のみが A で量化されていないとする. このとき, a を類とすると

$$A(a) \implies (\text{set}(a) \implies a \in \{x \mid A(x)\}).$$

略証. いま

$$A(a)$$

と

$$\text{set}(a)$$

が成立していると仮定する. このとき要素の公理から

$$\exists x (a = x)$$

が成立するので,

$$\tau \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon x (a = x)$$

とおけば

$$a = \tau$$

が成り立ち、相等性の公理より

$$A(\tau)$$

が成立する。よって類の公理より

$$\tau \in \{x \mid A(x)\}$$

が従い、相等性の公理から

$$a \in \{x \mid A(x)\}$$

が成立する。

定理 0.12.10 (\mathbf{V} は集合の全体である). a を類とするとき次が成り立つ:

$$\text{set}(a) \iff a \in \mathbf{V}.$$

証明. a を類とするとき、まず要素の公理より

$$a \in \mathbf{V} \implies \text{set}(a)$$

が得られる。逆に

$$\text{set}(a)$$

が成り立っていると仮定する。このとき

$$\tau \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon x (a = x)$$

とおけば、定理 0.12.2 より

$$\tau = \tau$$

となるので、類の公理より

$$\tau \in \mathbf{V}$$

が成り立つ。そして相等性の公理より

$$a \in \mathbf{V}$$

が従うから

$$\text{set}(a) \implies a \in \mathbf{V}$$

も得られる。

定義 0.12.11 (空集合). $\emptyset \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \neq x\}$ で定める類 \emptyset を空集合 (**empty set**) と呼ぶ.

定理 0.12.12 (\emptyset は集合). \emptyset は集合である:

$$\text{set}(\emptyset).$$

定理 0.12.13 (空集合は \mathcal{L} のいかなる対象も要素に持たない).

$$\forall x (x \notin \emptyset).$$

略証. τ を \mathcal{L} の対象とするととき, 類の公理より

$$\tau \in \emptyset \implies \tau \neq \tau$$

が成り立つから, 対偶を取れば

$$\tau = \tau \implies \tau \notin \emptyset$$

が成り立つ (推論法則 0.11.17). 定理 0.12.2 より

$$\tau = \tau$$

は正しいので, 三段論法より

$$\tau \notin \emptyset$$

が成り立つ. そして τ の任意性より

$$\forall x (x \notin \emptyset)$$

が得られる. ■

定理 0.12.14 (\mathcal{L} のいかなる対象も要素に持たない類は空集合に等しい). a を類とするととき次が成り立つ:

$$\forall x (x \notin a) \iff a = \emptyset.$$

証明. a を類として $\forall x (x \notin a)$ が成り立っていると仮定する. このとき τ を \mathcal{L} の任意の対象とすれば

$$\tau \notin a \vee \tau \in \emptyset$$

と

$$\tau \notin \emptyset \vee \tau \in a$$

が共に成り立つので, 推論法則 0.11.15 より

$$\tau \in a \implies \tau \in \emptyset$$

と

$$\tau \in \emptyset \implies \tau \in a$$

が共に成り立つ. よって

$$\tau \in a \iff \tau \in \emptyset$$

が成立し, τ の任意性と推論法則 0.11.21 から

$$\forall x (x \in a \iff x \in \emptyset)$$

が得られる. ゆえに外延性の公理より

$$a = \emptyset$$

が成立し, 演繹法則より

$$\forall x (x \notin a) \implies a = \emptyset$$

が得られる. 逆に

$$a = \emptyset$$

が成り立っていると仮定する. ここで χ を \mathcal{L} の任意の対象とすれば, 相等性の公理より

$$\chi \in a \implies \chi \in \emptyset$$

が成立するので, 対偶を取れば

$$\chi \notin \emptyset \implies \chi \notin a$$

が成り立つ. 定理 0.12.13 より

$$\chi \notin \emptyset$$

が満たされているので, 三段論法より

$$\chi \notin a$$

が成立し, χ の任意性と推論法則 0.11.21 より

$$\forall x (x \notin a)$$

が成立する. ここに演繹法則を適用して

$$a = \emptyset \implies \forall x (x \notin a)$$

も得られる.

定理 0.12.15 (空集合はいかなる類も要素に持たない). a, b を類とするととき次が成り立つ:

$$b = \emptyset \implies a \notin b.$$

証明. いま $a \in b$ が成り立っていると仮定する. このとき要素の公理と三段論法より

$$\text{set}(a)$$

が成立する. ここで

$$\tau \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon x (a = x)$$

とおけば, 存在記号に関する規則から

$$a = \tau$$

が成り立つので, 相等性の公理より

$$\tau \in b$$

が従い, 存在記号に関する規則より

$$\exists x (x \in b)$$

が成り立つ. よって演繹法則から

$$a \in b \implies \exists x (x \in b)$$

が成り立つ. この対偶を取り推論法則 0.11.23 を適用すれば

$$\forall x (x \notin b) \implies a \notin b$$

が得られる. 定理 0.12.14 より

$$b = \emptyset \implies \forall x (x \notin b)$$

も正しいので, 含意の推移律から

$$b = \emptyset \implies a \notin b$$

が得られる. ■

定義 0.12.16 (部分類). a, b を \mathcal{L}' の項とすると,

$$a \subset b \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall x (x \in a \implies x \in b)$$

と定める. 式 $a \subset b$ を “ a は b の部分類 (subclass) である” と翻訳し, 特に a が集合である場合は “ a は b の部分集合 (subset) である” と翻訳する. また次の記号も定める:

$$a \subsetneq b \stackrel{\text{def}}{\iff} a \subset b \wedge a \neq b.$$

空虚な真の一例として次の結果を得る.

定理 0.12.17 (空集合は全ての類に含まれる). a を類とすると次が成り立つ:

$$\emptyset \subset a.$$

証明. a を類とする. τ を \mathcal{L} の任意の対象とすれば

$$\tau \notin \emptyset$$

が成り立つから, 推論規則 0.11.1 を適用して

$$\tau \notin \emptyset \vee \tau \in a$$

が成り立つ. 従って

$$\tau \in \emptyset \implies \tau \in a$$

が成り立ち, τ の任意性と推論法則 0.11.21 より

$$\forall x (x \in \emptyset \implies x \in a)$$

が成立する. ■

$a \subset b$ とは a に属する全ての “ \mathcal{L} の対象” は b に属するという定義であったが, 要素となりうる類は集合であるという公理から, a に属する全ての “類” もまた b に属する.

定理 0.12.18 (類はその部分類に属する全ての類を要素に持つ). a, b, c を類とすれば次が成り立つ:

$$a \subset b \implies (c \in a \implies c \in b).$$

証明. いま $a \subset b$ が成り立っているとする. このとき

$$c \in a$$

が成り立っていると仮定すれば, 要素の公理より

$$\text{set}(c)$$

が成り立つ. ここで

$$\tau \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon x (c = x)$$

とおくと

$$c = \tau$$

が成り立つので, 相等性の公理より

$$\tau \in a$$

が成り立ち, $a \subset b$ と推論法則 0.11.21 から

$$\tau \in b$$

が従う. 再び相等性の公理を適用すれば

$$c \in b$$

が成り立つので、演繹法則より、 $a \subset b$ が成り立っている下で

$$c \in a \implies c \in b$$

が成立する。再び演繹法則を適用すれば定理の主張が得られる。 ■

宇宙 \mathbf{V} は類の一つであった。当然のようであるが、それは最大の類である。

定理 0.12.19 (\mathbf{V} は最大の類である). a を類とするとき次が成り立つ:

$$a \subset \mathbf{V}.$$

証明. τ を \mathcal{L} の任意の対象とすれば、定理 0.12.2 と類の公理より

$$\tau \in \mathbf{V}$$

が成立するので、推論規則 0.11.1 より

$$\tau \notin a \vee \tau \in \mathbf{V}$$

が成立する。このとき推論法則 0.11.15 より

$$\tau \in a \implies \tau \in \mathbf{V}$$

が成立し、 τ の任意性と推論法則 0.11.21 から

$$\forall x (x \in a \implies x \in \mathbf{V})$$

が従う。 ■

定理 0.12.20 (互いに互いの部分類となる類同士は等しい). a, b を類とするとき次が成り立つ:

$$a \subset b \wedge b \subset a \iff a = b.$$

略証. $a \subset b \wedge b \subset a$ が成り立っていると仮定する。このとき τ を \mathcal{L} の任意の対象とすれば、 $a \subset b$ と推論法則 0.11.21 より

$$\tau \in a \implies \tau \in b$$

が成立し、 $b \subset a$ と推論法則 0.11.21 より

$$\tau \in b \implies \tau \in a$$

が成立するので、

$$\tau \in a \iff \tau \in b$$

が成り立つ. τ の任意性と推論法則 0.11.21 および外延性の公理より

$$a = b$$

が出るので, 演繹法則より

$$a \subset b \wedge b \subset a \implies a = b$$

が得られる. 逆に $a = b$ が満たされていると仮定するとき, τ を \mathcal{L} の任意の対象とすれば

$$\tau \in a \implies \tau \in b$$

と

$$\tau \in b \implies \tau \in a$$

が共に成り立つ. よって推論法則 0.11.21 より

$$a \subset b$$

と

$$b \subset a$$

が共に従う. よって演繹法則より

$$a = b \implies a \subset b \wedge b \subset a$$

も得られる. ■

定理 0.12.18 と定理 0.12.20 より, 類 a, b が $a = b$ を満たすならば, a と b は要素に持つ \mathcal{L} の対象のみならず, 要素に持つ類までも一致するのですね.

0.13 順序型について

(A, R) を整列集合とするとき,

$$x \mapsto \begin{cases} \min A \setminus \text{ran}(x) & \text{if } \text{ran}(x) \subsetneq A \\ A & \text{o.w.} \end{cases}$$

なる写像 G に対して

$$\forall \alpha F(\alpha) = G(F \upharpoonright \alpha)$$

なる写像 F を取り

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \min \{ \alpha \in \text{ON} \mid F(\alpha) = A \}$$

とおけば, α は (A, R) の順序型.

0.14 超限再帰について

V 上の写像 G が与えられたら,

$$F \stackrel{\text{def}}{=} \{(\alpha, x) \mid \text{ord}(\alpha) \wedge \exists f (f : \text{on } \alpha \wedge \forall \beta \in \alpha (f(\beta) = G(f \upharpoonright \beta)) \wedge x = G(f))\}$$

により F を定めれば

$$\forall \alpha F(\alpha) = G(F \upharpoonright \alpha)$$

が成立する.

任意の順序数 α および α 上の写像 f と g に対して,

$$\forall \beta \in \alpha (f(\beta) = G(f \upharpoonright \beta))$$

かつ

$$\forall \beta \in \alpha (g(\beta) = G(g \upharpoonright \beta))$$

ならば $f = g$ である.

まず

$$f(0) = G(f \upharpoonright 0) = G(0) = G(g \upharpoonright 0) = g(0)$$

が成り立つ. また

$$\forall \delta \in \beta (\delta \in \alpha \implies f(\delta) = g(\delta))$$

ならば, $\beta \in \alpha$ であるとき

$$f \upharpoonright \beta = g \upharpoonright \beta$$

となるので

$$\beta \in \alpha \implies f(\beta) = g(\beta)$$

が成り立つ. ゆえに

$$f = g$$

が得られる.

任意の順序数 α に対して, α 上の写像 f で

$$\forall \beta \in \alpha (f(\beta) = G(f \upharpoonright \beta))$$

を満たすものが取れる.

$\alpha = 0$ のとき $f \stackrel{\text{def}}{=} 0$ とすればよい. α の任意の要素 β に対して

$$g : \text{on } \beta \wedge \forall \gamma \in \beta (g(\gamma) = G(g \upharpoonright \gamma))$$

なる g が存在するとき,

$$f \stackrel{\text{def}}{=} \{ (\beta, x) \mid \beta \in \alpha \wedge \exists g (g : \text{on } \beta \wedge \forall \gamma \in \beta (g(\gamma) = G(g \upharpoonright \gamma)) \wedge x = G(g)) \}$$

と定めれば, f は α 上の写像であって

$$\forall \beta \in \alpha (f(\beta) = G(f \upharpoonright \beta))$$

を満たす.

任意の順序数 α に対して $F(\alpha) = G(F \upharpoonright \alpha)$ が成り立つ.

$\alpha = 0$ ならば, 0 上の写像は 0 のみなので

$$F(0) = G(0) = G(F \upharpoonright 0)$$

である.

$$\forall \beta \in \alpha F(\beta) = G(F \upharpoonright \beta)$$

が成り立っているとき,

$$\forall \beta \in \alpha f(\beta) = G(f \upharpoonright \beta)$$

を満たす α 上の写像 f を取れば, 前の一意性より

$$f = F \upharpoonright \alpha$$

が成立する. よって

$$F(\alpha) = G(f) = G(F \upharpoonright \alpha)$$

となる. ■

0.15 自然数の全体について

\mathbf{N} を

$$\mathbf{N} \stackrel{\text{def}}{=} \{ \beta \mid \alpha \leq \beta \text{ である } \alpha \text{ は } 0 \text{ であるか後続型順序数} \}$$

によって定めれば, 無限公理より

$$\text{set}(\mathbf{N})$$

である. また $\text{ord}(\mathbf{N})$ と $\text{lim.o}(\mathbf{N})$ も証明できるはず. \mathbf{N} が最小の極限数であることは \mathbf{N} を定義した論理式より従う.

0.16 第一イプシロン定理メモ

言語 $L(EC)$ 及び $L(EC_\varepsilon)$ を高橋先生の資料と同じものとする. 主要論理式 (**principal formula**) とは

$$A(t) \implies A(\varepsilon x A)$$

なる形の $L(EC)$ の式を指す。ここで A とは $L(EC)$ の式であって、変項 x が A に自由に現れていて、また A に自由に出現するのは x のみである。 $A(t)$ とは A における x の自由な出現を全て閉項 t に置き換えた式であり、 $A(\varepsilon x A)$ とは A における x の自由な出現を全て項 $\varepsilon x A$ に置き換えた式である。このとき $\varepsilon x A$ は $A(t) \implies A(\varepsilon x A)$ に属しているという。

EC の公理とはトートロジーだけである。トートロジーは EC_ε の公理でもあるが、これに加えて主要論理式も EC_ε の公理である。

$\pi = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ を EC_ε の文の列とすると、 π の主要論理式や π に現れる主要論理式とは主要論理式である φ_i を指す。また π の主要論理式に属している ε 項を π の主要 ε 項と呼ぶ。

0.16.1 埋め込み定理

A を $L(PC_\varepsilon)$ の式とすると、 A を $L(EC_\varepsilon)$ の式に書き換える。

$$\begin{aligned}
 x^\varepsilon &\rightarrow x \\
 (\in \tau \sigma)^\varepsilon &\rightarrow \in \tau^\varepsilon \sigma^\varepsilon \\
 (= \tau \sigma)^\varepsilon &\rightarrow = \tau^\varepsilon \sigma^\varepsilon \\
 (\rightarrow \varphi)^\varepsilon &\rightarrow \rightarrow \varphi^\varepsilon \\
 (\vee \varphi \psi)^\varepsilon &\rightarrow \vee \varphi^\varepsilon \psi^\varepsilon \\
 (\wedge \varphi \psi)^\varepsilon &\rightarrow \wedge \varphi^\varepsilon \psi^\varepsilon \\
 (\implies \varphi \psi)^\varepsilon &\rightarrow \implies \varphi^\varepsilon \psi^\varepsilon \\
 (\exists x \varphi)^\varepsilon &\rightarrow \varphi^\varepsilon(\varepsilon x \varphi^\varepsilon) \\
 (\forall x \varphi)^\varepsilon &\rightarrow \varphi^\varepsilon(\varepsilon x \rightarrow \varphi^\varepsilon) \\
 (\varepsilon x \psi)^\varepsilon &\rightarrow \varepsilon x \varphi^\varepsilon
 \end{aligned}$$

A が $L(PC_\varepsilon)$ の式で、 x が A に自由に現れて、かつ A に自由に現れているのが x のみであるとき、 A^ε にも x が自由に現れて、かつ A^ε に自由に現れているのは x のみである。

$$(\varphi[x/\tau])^\varepsilon \rightarrow \varphi^\varepsilon(\varphi^\varepsilon[x/\tau^\varepsilon]).$$

— PC_ε の証明を EC_ε の証明に埋め込む —

A を $L(PC_\varepsilon)$ の文とし、 $PC_\varepsilon \vdash A$ であるとする。このとき $EC_\varepsilon \vdash A^\varepsilon$ である。

示すべきことは

- $A \in Ax(PC_\varepsilon)$ ならば $\vdash A^\varepsilon$ であること。
 - $\vdash A$ ならば $\vdash A^\varepsilon$ であること。
 - A に x が自由に現れて、かつ自由に現れているのが x のみであるとき、

$$\vdash A^\varepsilon(t^\varepsilon) \implies A^\varepsilon(\varepsilon x A^\varepsilon)$$

であること。

- A に x が自由に現れて、かつ自由に現れているのが x のみであるとき、

$$\vdash A^\varepsilon(\varepsilon x \rightarrow A^\varepsilon) \implies A^\varepsilon(t^\varepsilon)$$

であること.

- $PC_\varepsilon \vdash B$ かつ $PC_\varepsilon \vdash B \implies A$ である B が取れるとき, $(B \implies A)^\varepsilon$ は $B^\varepsilon \implies A^\varepsilon$ なので $EC_\varepsilon \vdash B^\varepsilon$ ならば $EC_\varepsilon \vdash A^\varepsilon$ となる.

0.16.2 階数

$B(x, y, z)$ を, 変項 x, y, z が, そしてこれらのみが自由に現れる $L(EC)$ の式とする. このとき

$$\exists x \exists y \exists z B(x, y, z) \quad (11)$$

に対して, z から順に ε 項に変換していくと

$$\exists x \exists y B(x, y, \varepsilon z B(x, y, z)), \quad (12)$$

$$\exists x B(x, \varepsilon y B(x, y, \varepsilon z B(x, y, z)), \varepsilon z B(x, \varepsilon y B(x, y, \varepsilon z B(x, y, z)), z)) \quad (13)$$

となるが, 最後に $\exists x$ を無くすと式が長くなりすぎるので一旦止めておく. さて z に注目すれば, B に自由に現れていた z はまず

$$\varepsilon z B(x, y, z)$$

に置き換えられる (12). この時点では x と y は自由なままであるから, この ε 項を

$$e_1[x, y]$$

と略記する. 次に y は

$$\varepsilon y B(x, y, \varepsilon z B(x, y, z))$$

に置き換えられる (13) が, $e_1[x, y]$ を使えば

$$\varepsilon y B(x, y, e_1[x, y])$$

と書ける. この ε 項でも x は自由なままであるから

$$e_2[x]$$

と略記する. e_1 と e_2 を用いれば (13) の式は

$$\exists x B(x, e_2[x], e_1[x, e_2[x]])$$

と見やすく書き直せる. 残る \exists を除去するには x を

$$\varepsilon x B(x, e_2[x], e_1[x, e_2[x]])$$

に置き換えれば良い. この ε 項を e_3 と書く. 以上で (11) の式は $L(EC_\varepsilon)$ の式

$$B(e_3, e_2[e_3], e_1[e_3, e_2[e_3]])$$

に変換されたわけである. それはさておき, ここで考察するのは項間の主従関係である. $e_2[x]$ は x のみによってコントロールされているのだから, x を司る e_3 を親分だと思えば $e_2[x]$ は e_3 の直属の子分である. $e_1[x, y]$ は y によってもコントロールされているので, $e_1[x, y]$ とは $e_2[x]$ の子分であり, すなわち e_3 の子分の子分であって, この例において一番身分が低いわけである.

ε 項を構文解析して、それが何重の子分を従えているかを測った指標を**階数 (rank)**と呼ぶ。とはいえ直属の子分が複数いることもあり得るので、子分の子分の子分の子分…と次々に枝分かれしていく従属関係の中で、最も深いものを辿って階数を定めることにする。

メタ定義 0.16.1 (従属). εxA を $L(EC_\varepsilon)$ の ε 項とし、 e を A に現れる $L(EC_\varepsilon)$ の ε 項とするとき、 x が e に自由に現れているなら e は εxA に従属している (**subordinate to εxA**) という。

はじめの例では、 $e_2[x]$ と $e_1[x, e_2[x]]$ は共に e_3 に従属しているし、 $e_1[x, y]$ は $e_2[x]$ に従属している。 $e_1[x, e_2[x]]$ に従属している ε 項は無いし、 $e_1[x, y]$ に従属している ε 項も無い。

メタ定義 0.16.2 (階数). e を $L(EC_\varepsilon)$ の ε 項とするとき、 e の**階数 (rank)** を以下の要領で定義する。

1. e に従属する ε 項が無いならば、 e の階数を 1 とする。
2. e に従属する ε 項があるならば、 e に従属する ε 項の階数の最大値に 1 を足したものを e の階数とする。

また e の階数を $rk(e)$ と書く。

実際に $L(EC_\varepsilon)$ の全ての ε 項に対して階数が定まっている。(構造的帰納法について準備不足だが、直感的に次の説明は妥当である...)

step1 e が $L(EC)$ の式で作られた ε 項ならば e の階数は 1 である。

step2 e に従属している全ての ε 項に対して階数が定まっているならば、 e の階数は定義通りに定めることが出来る。

メタ定理 0.16.3 (階数定理). e を $L(EC_\varepsilon)$ の ε 項とし、 s と t を、 e の中で束縛されている変項がどれも自由に現れない $L(EC_\varepsilon)$ の項とする。このとき、 e に現れる s の一つを t に置き換えた式を e^t とすれば

$$rk(e) = rk(e^t)$$

が成り立つ。 e に s が現れなければ e^t は e とする。

メタ証明.

step1 e の中に ε 項 u が現れているとして、 u に (もし現れているなら) 現れる s が t に置き換わった項を u^t と書く。 u が e に従属していないとき、 u^t は e に従属しない。実際、 e を

$$\varepsilon xA$$

なる ε 項だとして、 x は t に自由に現れないので u^t にも x は自由に現れない。

u が e に従属している場合、 u^t の階数は u^t に従属する ε 項によって定まるのだから、 u^t の階数の如何は u に従属する ε 項の階数が置換によって変動するか否かにかかっている。

u に従属する ε 項の階数についても、それに従属する ε 項の階数が置換によって変動するか否かで決まる。

従属する ε 項を辿っていけば、いずれは従属する ε 項を持たない ε 項に行きつくのであるから、 e には従属する ε 項が現れないとして e と e^t の階数が等しいことを示せば良い。それは次段で示す。

step2 e に従属する ε 項が無ければ、 e^t に従属する ε 項も無い。なぜならば、 s にも t にも x は自由に現れていないのであり、仮に e に現れる ε 項の中に s があったとしても、それが t へ置き換わったところで e には従属しない

からである。

$\varepsilon x A(x)$ と $\varepsilon y A(y)$ のランクは同じ？

メタ定理 0.16.4 (置換定理). π を $L(EC_\varepsilon)$ の証明とし, e を, π の主要 ε 項の中で階数が最大であって, かつ階数が最大の π の主要 ε 項の中で極大であるものとする. また $B(s) \implies B(\varepsilon y B)$ を π の主要論理式とし, e と $\varepsilon y B$ は別物であるとする. そして, $B(s) \implies B(\varepsilon y B)$ に現れる e を全て閉項 t に置き換えた式を C とする. このとき,

- (1) C は主要論理式である. C に属する ε 項を e' と書く.
- (2) $rk(\varepsilon y B) = rk(e')$ が成り立つ.
- (3) $rk(\varepsilon y B) = rk(e)$ ならば $\varepsilon y B$ と e' は一致する.

メタ証明.

step1 $B(s)$ (或いは $B(\varepsilon y B)$) とは, B で自由に現れる y を s (或いは $\varepsilon y B$) で置き換えた式である. y から代わった s (或いは $\varepsilon y B$) の少なくとも一つを部分項として含む形で e が $B(s)$ (或いは $B(\varepsilon y B)$) に出現しているとする. 実はこれは起こり得ない. もし起きたとすると, e に現れる s (或いは $\varepsilon y B$) を元の y に戻した項を e' とすれば, e' には y が自由に現れるので (そうでないと y は s (或いは $\varepsilon y B$) に置き換えられない), e' は y とは別の変項 x と適当な式 A によって

$$\varepsilon x A$$

なる形をしている. つまり e' は $\varepsilon y B$ に従属していることになり², 階数定理と併せて

$$rk(e) = rk(e') < rk(\varepsilon y B)$$

が成り立ってしまう. しかしこれは $rk(e)$ が最大であることに矛盾する.

step2 $rk(\varepsilon y B) = rk(\pi)$ ならば B に e は現れない. なぜならば, e は階数が $rk(\pi)$ である π の主要 ε 項の中で極大であるからである. $\varepsilon y B$ にも e は現れず, 前段の結果より $B(\varepsilon y B)$ に e が現れることもない. ゆえに, s に (もし現れるなら) 現れる e を t に置換した項を s' とすれば, C は

$$B(s') \implies B(\varepsilon y B)$$

となる.

step3 $rk(\varepsilon y B) < rk(\pi)$ である場合

$$rk(\varepsilon y B) = rk(e')$$

が成り立つことを示す. B に e が現れないならば e' は $\varepsilon y B$ に一致する. B に e が現れる場合, B に現れる e を t に置き換えた式を B^t とする. このとき階数定理より

$$rk(B) = rk(B^t)$$

となる. ゆえに

$$rk(\varepsilon y B) = rk(B) + 1 = rk(B^t) + 1 = rk(\varepsilon y B^t)$$

となる.

² e' が ε 項であって B に現れることの証明.

0.16.3 アイデア

$L(EC)$ の公理系を $AX(EC)$ と書く. $L(EC_\varepsilon)$ の公理系を $AX(EC_\varepsilon)$ と書く. $L(PC_\varepsilon)$ の公理系を $AX(PC_\varepsilon)$ と書く.

第一イプシロン定理の流れ

- B を EC の式とし, B が $AX(PC_\varepsilon)$ から証明可能であるとする.
- このとき $AX(EC_\varepsilon)$ から B への証明 π が得られる.
- e を, π の主要 ε 項のうち階数が最大であって, かつその階数を持つ π の主要 ε 項の中で次数が最大であるものとする.
- e が属する π の主要論理式の一つ $A(t) \Rightarrow A(e)$ を取る.
- π をベースにして, $A(t) \Rightarrow A(e)$ を用いずに $AX(EC_\varepsilon)$ から B への証明 π' を構成する. このとき以下が満たされる.
 1. $A(t) \Rightarrow A(e)$ 以外の主要論理式は, π' に残っているし, またそれらが階数不変で生まれ変わったもの (置換定理による) は π' の主要論理式となる. $A(t) \Rightarrow A(e)$ のみ消える. 他に主要論理式は現れない.
 2. 特に, 階数 $rk(\pi)$ の主要 ε 項は増えない.
 3. 特に, e が属する主要論理式は $A(t) \Rightarrow A(e)$ の分だけ消えて, 新しく増えることはない.
- 証明 π の主要 ε 項の階数の最大値を $rk(\pi)$ とする. また主要論理式に属する ε 項の階数を, その主要論理式の階数と呼ぶことにする. 前段の操作を続けていけば, まずは階数 $rk(\pi)$ の主要論理式を全く用いない B への証明 π_1 が得られる. このとき $rk(\pi_1)$ は $rk(\pi)$ よりも小さい. 同様にして階数 $rk(\pi_1)$ の主要論理式を全く用いない B への証明 π_2 が得られる. もちろん $rk(\pi_2)$ は $rk(\pi_1)$ よりも小さい. これを繰り返していけば, いずれは主要論理式を全く用いない B への証明 π^* が得られる. π^* にはトートロジーかモーダスポネンスで導かれる式しかない. あとは, π^* に現れる ε 項を EC の項に置き換えれば, その式の列は EC から B への証明となっている.

π を $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ とし, $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ に現れる e を t に置き換えた式を

$$\tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_n$$

と書く (e は, どれかの項の部分項であるときも置き換える). このとき, 任意の $0 \leq i \leq n$ で

1. φ_i がトートロジーなら $\tilde{\varphi}_i$ もトートロジーである.
2. φ_i が主要論理式で, e が φ_i の主要項であるならば, $\tilde{\varphi}_i$ は $A(u) \Rightarrow A(t)$ なる形の式である³.
3. φ_i が主要論理式で, e が φ_i の主要項ではないならば, $\tilde{\varphi}_i$ も主要論理式である.

φ が $A(t) \Rightarrow A(e)$ でない EC_ε の公理ならば, $\tilde{\varphi}_i$ と $\tilde{\varphi}_{i+1}$ の間に

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_i &\Rightarrow (A(t) \Rightarrow \tilde{\varphi}_i), \\ A(t) &\Rightarrow \tilde{\varphi}_i \end{aligned}$$

を挿入する. φ_i が φ_j と φ_k からモーダスポネンスで得られる場合は, $\tilde{\varphi}_i$ を

$$\begin{aligned} (A(t) \Rightarrow \tilde{\varphi}_j) &\Rightarrow [(A(t) \Rightarrow (\tilde{\varphi}_j \Rightarrow \tilde{\varphi}_i)) \Rightarrow (A(t) \Rightarrow \tilde{\varphi}_i)], \\ (A(t) \Rightarrow (\tilde{\varphi}_j \Rightarrow \tilde{\varphi}_i)) &\Rightarrow (A(t) \Rightarrow \tilde{\varphi}_i), \\ A(t) &\Rightarrow \tilde{\varphi}_i \end{aligned}$$

³ εxA と εyB が記号列として一致すれば, x と y は一致するし, 式 A と式 B も一致するので $A(\varepsilon xA)$ と $B(\varepsilon yB)$ も記号列として一致する.

で置き換える．すると、 $A(t) \Longrightarrow A(e)$ を使わない EC_e から $A(t) \Longrightarrow B$ への証明が得られる． φ_i が e が属する主要論理式 $A(s) \Longrightarrow A(e)$ であるときは、 $\tilde{\varphi}_i$ とは

$$A(s') \Longrightarrow A(t)$$

なる形の式であるが⁴、 $\tilde{\varphi}_i$ を

$$\begin{aligned} A(t) &\Longrightarrow (A(s') \Longrightarrow A(t)), \\ A(s') &\Longrightarrow A(t) \end{aligned}$$

で置き換える．

同様に $A(t) \Longrightarrow A(e)$ を使わない EC_e から $\neg A(t) \Longrightarrow B$ への証明を構成する．今度は π に現れる e を t に置き換える必要はない． φ_i が $A(t) \Longrightarrow A(e)$ でない EC_e の公理ならば、 φ_i と φ_{i+1} の間に

$$\begin{aligned} \varphi_i &\Longrightarrow (\neg A(t) \Longrightarrow \varphi_i), \\ \neg A(t) &\Longrightarrow \varphi_i \end{aligned}$$

を挿入する． φ_i が φ_j と φ_k からモーダスポンネスで得られる場合は、 φ_i を

$$\begin{aligned} (\neg A(t) \Longrightarrow \varphi_j) &\Longrightarrow [(\neg A(t) \Longrightarrow (\varphi_j \Longrightarrow \varphi_i)) \Longrightarrow (\neg A(t) \Longrightarrow \varphi_i)], \\ (\neg A(t) \Longrightarrow (\varphi_j \Longrightarrow \varphi_i)) &\Longrightarrow (\neg A(t) \Longrightarrow \varphi_i), \\ \neg A(t) &\Longrightarrow \varphi_i \end{aligned}$$

で置き換える． φ_i が $A(t) \Longrightarrow A(e)$ であるときは、 φ_i を

$$\neg A(t) \Longrightarrow (A(t) \Longrightarrow A(e))$$

で置き換える．

以上で $A(t) \Longrightarrow B$ と $\neg A(t) \Longrightarrow B$ に対して $A(t) \Longrightarrow A(e)$ を用いない EC_e からの証明が得られた．後はこれに

$$\begin{aligned} (A(t) \Longrightarrow B) &\Longrightarrow ((\neg A(t) \Longrightarrow B) \Longrightarrow ((A(t) \Longrightarrow B) \wedge (\neg A(t) \Longrightarrow B))), \\ (\neg A(t) \Longrightarrow B) &\Longrightarrow ((A(t) \Longrightarrow B) \wedge (\neg A(t) \Longrightarrow B)), \\ (A(t) \Longrightarrow B) \wedge (\neg A(t) \Longrightarrow B), \\ ((A(t) \Longrightarrow B) \wedge (\neg A(t) \Longrightarrow B)) &\Longrightarrow ((A(t) \vee \neg A(t)) \Longrightarrow B), \\ (A(t) \vee \neg A(t)) &\Longrightarrow B, \\ A(t) \vee \neg A(t), \\ B \end{aligned}$$

を追加すれば、 $A(t) \Longrightarrow A(e)$ を用いない EC_e から B への証明となる．

⁴ x を A に現れている自由な変項とすれば、 e とは εxA のことであるし、 $A(\varepsilon xA)$ とは A に自由に現れる x を εxA に置換した式である． A には εxA は現れていないので、というも εxA が登場するのは A が作られた後であるからだが、 $A(e)$ に現れる e を t に変換した式は $A(t)$ になる．同様に、 $A(s)$ に e が現れるとすれば、その e は y に代入された s の部分項でしかありえない．すなわち、 $A(s)$ に現れる e を t で置換した式は、 s' を s に現れる e を t に変換した項として (s に e が現れなければ s' は s である) $A(s')$ となるわけである．

参考文献

- [1] Moser, G. and Zach, R., “The Epsilon Calculus and Herbrand Complexity”, *Studia Logica* 82, 133-155 (2006)
- [2] 高橋優太, “1 階述語論理に対する ε 計算”,
<http://www2.kobe-u.ac.jp/mkikuchi/ss2018files/takahashi1.pdf>
- [3] キューネン数学基礎論講義
- [4] ブルバキ, 数学原論 集合論 1,
- [5] 竹内外史, 現代集合論入門,
- [6] 島内剛一, 数学の基礎,