

微分方程式の基礎

2017 年 9 月 12 日

1 高階方程式の場合

D を \mathbb{R}^n の閉区間として, \mathbb{R} の閉区間 $[a, b]$ 上で定義された微分可能関数 $x_i : [a, b] \ni t \mapsto x_i(t) \in \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, n$) が $(x_1(t), \dots, x_n(t)) \in D$ ($\forall t \in [a, b]$) を満たしていると仮定する. \mathbb{R}^{n+1} 上の閉区間 $\Omega := [a, b] \times D$ 上で定義された \mathbb{R} 値連続関数 f_i ($i = 1, \dots, n$) に対して, 次の連立方程式を解く.

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt}(t) &= f_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) & (i = 1, \dots, n) \\ x_i(t_0) &= x_i^0 & (i = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

\mathbb{R}^n の点を $\mathbf{y} = {}^T(y_1, \dots, y_n)$ と表し, Ω 上の \mathbb{R}^n 値関数として $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) := {}^T(f_1(t, \mathbf{y}), \dots, f_n(t, \mathbf{y}))$ と表すと連立方程式は

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \end{aligned} \quad (1)$$

と簡単に表現できる. この微分方程式についての解の存在と一意性を示す.

命題 1.1. Ω 上で定義した \mathbf{f} が, Ω において (t に関して一様に) \mathbf{y} について Lipschitz 連続であるとする. すなわち或る正数 $K > 0$ が存在して

$$|\mathbf{f}(t, \mathbf{y}_1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}_2)| \leq K|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2| \quad (\forall t \in [a, b], \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in D)$$

が成り立っている. ただし $|\mathbf{y}| = (y_1^2 + \dots + y_n^2)^{1/2}$ ($\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$) とする. このとき Ω の任意の内点 (t_0, \mathbf{x}_0) に対して或る $\delta > 0$ が取れて, 閉区間 $I_\delta := [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ 上で (1) の解がただ一つ存在する.

証明.

存在の証明

$|\mathbf{f}(t, \mathbf{y})| = \sqrt{\sum_{i=1}^n f_i^2(t, \mathbf{y})}$ は Ω 上で連続であるから有界であり, 適当な正数 $M > 0$ により

$$|\mathbf{f}(t, \mathbf{y})| \leq M \quad (\forall (t, \mathbf{y}) \in \Omega)$$

が成り立つ. 正数 $\delta > 0$ を, 閉集合

$$G := \{ (t, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |t - t_0| \leq \delta, \quad |y_i - x_i^0| \leq M|t - t_0| \ (i = 1, \dots, n) \}$$

が Ω に含まれ且つ $\delta \leq 1/2nK$ を満たすように取り, G 上で再帰的に解を構成する. 構成の手続きは以下である: 全ての $i = 1, \dots, n$ と $t \in I_\delta$ に対し

$$\begin{aligned} x_i^0(t) &= x_i^0, \\ x_i^k(t) &= x_i^0 + \int_{t_0}^t f_i(\tau, x_1^{k-1}(\tau), \dots, x_n^{k-1}(\tau)) d\tau \quad (k = 1, 2, \dots), \\ x_i(t) &= \lim_{k \rightarrow \infty} x_i^k(t) \end{aligned}$$

とする。まず示すことは、全ての $k \geq 0$ にわたって $(t, x_1^k(t), \dots, x_n^k(t)) \in G$ ($t \in I_\delta$) が成り立つことである。数学的帰納法によれば、 $k = 0$ の場合は明らかに $(t, x_1^0(t), \dots, x_n^0(t)) = (t, \mathbf{x}_0) \in G$ が成り立っているから、 $k = m \geq 0$ の場合 $(t, x_1^m(t), \dots, x_n^m(t)) \in G$ を仮定して

$$|x_i^{m+1}(t) - x_i^0(t)| = \left| \int_{t_0}^t f_i(\tau, x_1^m(\tau), \dots, x_n^m(\tau)) d\tau \right| \leq \int_{t_0}^t |f_i(\tau, x_1^m(\tau), \dots, x_n^m(\tau))| d\tau \leq M|t - t_0|$$

が全ての $i = 1, \dots, n$ について成り立つ。つまり $(t, x_1^{m+1}(t), \dots, x_n^{m+1}(t)) \in G$ ($t \in I_\delta$) が示された。次に示すことは $(x_i^k(t))_{k=0}^\infty$ ($i = 1, \dots, n$) が各 $t \in I_\delta$ で収束することである。適当に $p, q \in \mathbb{N}$ ($p < q$) を取れば、

$$x_i^q(t) - x_i^p(t) = \sum_{j=p+1}^q (x_i^j(t) - x_i^{j-1}(t)) \quad , i = 1, \dots, n, t \in I_\delta \quad (2)$$

と表せるが、 $\delta \leq 1/2nK$ としておいたことにより

$$\begin{aligned} |x_i^j(t) - x_i^{j-1}(t)| &= \left| \int_{t_0}^t f_1(\tau, x_1^{j-1}(\tau), \dots, x_n^{j-1}(\tau)) - f_1(\tau, x_1^{j-2}(\tau), \dots, x_n^{j-2}(\tau)) d\tau \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t K |\mathbf{x}_{j-1}(\tau) - \mathbf{x}_{j-2}(\tau)| d\tau \\ &= K \sup_{|t-t_0| \leq \delta} |\mathbf{x}_{j-1}(t) - \mathbf{x}_{j-2}(t)| |t - t_0| \\ &\leq \frac{1}{2n} \sup_{|t-t_0| \leq \delta} |\mathbf{x}_{j-1}(t) - \mathbf{x}_{j-2}(t)| \end{aligned}$$

が各 $t \in I_\delta$ で成り立つ。 $|\mathbf{x}_{j-1}(t) - \mathbf{x}_{j-2}(t)| \leq \sum_{i=1}^n |x_i^{j-1}(t) - x_i^{j-2}(t)|$ であるから先の不等式は

$$|x_i^j(t) - x_i^{j-1}(t)| \leq \frac{1}{2n} \sup_{|t-t_0| \leq \delta} \sum_{i=1}^n |x_i^{j-1}(t) - x_i^{j-2}(t)|, \quad t \in I_\delta$$

まで発展し、これが全ての $i = 1, \dots, n$ で成り立つから

$$\sum_{i=1}^n |x_i^j(t) - x_i^{j-1}(t)| \leq \frac{1}{2} \sup_{|t-t_0| \leq \delta} \sum_{i=1}^n |x_i^{j-1}(t) - x_i^{j-2}(t)|, \quad t \in I_\delta$$

が成り立つ。帰納的な手順で

$$\sum_{i=1}^n |x_i^j(t) - x_i^{j-1}(t)| \leq \frac{1}{2^{j-1}} \sup_{|t-t_0| \leq \delta} \sum_{i=1}^n |x_i^1(t) - x_i^0(t)|, \quad t \in I_\delta$$

と表され、右辺が $t \in I_\delta$ に依存しないところから

$$\sup_{|t-t_0| \leq \delta} \sum_{i=1}^n |x_i^j(t) - x_i^{j-1}(t)| \leq \frac{1}{2^{j-1}} \sup_{|t-t_0| \leq \delta} \sum_{i=1}^n |x_i^1(t) - x_i^0(t)|$$

が成り立つ。 x_1^1, \dots, x_n^1 が $[a, b]$ 上の連続関数であるから $\sup_{|t-t_0| \leq \delta} \sum_{i=1}^n |x_i^1(t) - x_i^0(t)|$ は有限確定し、これを c と置けば式 (2) の関係は

$$\sup_{|t-t_0| \leq \delta} |x_i^q(t) - x_i^p(t)| \leq \sum_{j=p+1}^q |x_i^j(t) - x_i^{j-1}(t)| \leq c \sum_{j=p+1}^q \frac{1}{2^{j-1}}, \quad i = 1, \dots, n$$

となり，連続関数の列 $(x_i^k(t))_{k=0}^\infty$ ($i = 1, \dots, n$) が I_δ 上で絶対一様収束していることが判る．
従って極限関数 x_i ($i = 1, \dots, n$) は I_δ 上で連続であり，

$$|f_i(t, \mathbf{x}_k(t)) - f_i(t, \mathbf{x}(t))| \leq |f(t, \mathbf{x}_k(t)) - f(t, \mathbf{x}(t))| \leq K |\mathbf{x}_k(t) - \mathbf{x}(t)| \leq K \sup_{|t-t_0| \leq \delta} \sum_{i=1}^n |x_i^k(t) - x_i(t)|$$

が全ての $i = 1, \dots, n$ と $t \in I_\delta$ で成り立つから，右辺が $k \rightarrow \infty$ で 0 に収束することにより $(f_i(t, \mathbf{x}_k(t)))_{k=0}^\infty$ が I_δ 上で $f_i(t, \mathbf{x}(t))$ に一様収束している ($i = 1, \dots, n$)．以上より

$$\begin{aligned} & \left| x_i(t) - x_i^0 - \int_{t_0}^t f_i(\tau, x_1(\tau), \dots, x_n(\tau)) d\tau \right| \\ & \leq |x_i(t) - x_i^k(t)| + \left| x_i^k(t) - x_i^0 - \int_{t_0}^t f_i(\tau, x_1^{k-1}(\tau), \dots, x_n^{k-1}(\tau)) d\tau \right| \\ & \quad + \left| \int_{t_0}^t f_i(\tau, x_1^{k-1}(\tau), \dots, x_n^{k-1}(\tau)) d\tau - \int_{t_0}^t f_i(\tau, x_1(\tau), \dots, x_n(\tau)) d\tau \right| \\ & \leq |x_i(t) - x_i^k(t)| + \int_{t_0}^t |f_i(\tau, x_1^{k-1}(\tau), \dots, x_n^{k-1}(\tau)) - f_i(\tau, x_1(\tau), \dots, x_n(\tau))| d\tau \\ & \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

が全ての $i = 1, \dots, n$ と $t \in I_\delta$ で成り立つ．こうして求められた

$$x_i(t) = x_i^0 + \int_{t_0}^t f_i(\tau, x_1(\tau), \dots, x_n(\tau)) d\tau, \quad i = 1, \dots, n, t \in I_\delta$$

は微分方程式 (1) を満たす解である．解が存在する範囲は I_δ 上だけとは限らない．たとえば，次は初期点を $(t_0 + \delta, \mathbf{x}(t_0 + \delta))$ として範囲を拡張できる．

一意性の証明

$(\phi_i)_{i=1}^n, (\psi_i)_{i=1}^n$ が微分方程式 (1) を満たす解であるとする．つまり

$$\begin{aligned} \phi_i(t) &= x_i^0 + \int_{t_0}^t f_i(\tau, \phi_1(\tau), \dots, \phi_n(\tau)) d\tau, \quad i = 1, \dots, n, t \in I_\delta, \\ \psi_i(t) &= x_i^0 + \int_{t_0}^t f_i(\tau, \psi_1(\tau), \dots, \psi_n(\tau)) d\tau, \quad i = 1, \dots, n, t \in I_\delta \end{aligned}$$

が同時に成り立っているとする．全ての $i = 1, \dots, n$ について

$$\begin{aligned} |\phi_i(t) - \psi_i(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f_i(\tau, \phi_1(\tau), \dots, \phi_n(\tau)) - f_i(\tau, \psi_1(\tau), \dots, \psi_n(\tau))| d\tau \\ &\leq \int_{t_0}^t K \sum_{i=1}^n |\phi_i(\tau) - \psi_i(\tau)| d\tau \\ &\leq \frac{1}{2n} \sup_{|t-t_0| \leq \delta} \sum_{i=1}^n |\phi_i(t) - \psi_i(t)| \end{aligned}$$

が成り立っているから，先と同様にして

$$\sup_{|t-t_0| \leq \delta} \sum_{i=1}^n |\phi_i(t) - \psi_i(t)| \leq \frac{1}{2} \sup_{|t-t_0| \leq \delta} \sum_{i=1}^n |\phi_i(t) - \psi_i(t)|$$

が成り立ち $\phi_i(t) = \psi_i(t)$ ($i = 1, \dots, n, t \in I_\delta$) が示される．これは I_δ 上だけの一意性ではない．解が存在する範囲では初期値が同じであれば解はただ一つである． ■

参考文献

- [1] 笠原, 微分方程式の基礎, 朝倉書店.