確率解析メモ

百合川

2018 年 5 月 3 日

目次

連続関数の空間の位相

$[0,\infty)$ 上の $\mathbb{R}^d$ 値連続関数 の全体を $C[0,\infty)^d$ と表す．$C[0,\infty)^d$ は

$$d(w_1,w_2) \coloneqq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\left\{\sup_{t\le k}|w_1(t)-w_2(t)| \wedge 1\right\}, \quad (w_1,w_2 \in C[0,\infty)^d)$$

により定める距離で完備可分距離空間となる．以下，$C[0,\infty)^d$ には d により広義一様収束位相を導入する．

連続関数の空間の Borel 集合族

$n=1,2,\cdots,\ B \in \mathfrak{B}((\mathbb{R}^d)^n),\ 0 \le t_1 < \cdots < t_n$ により

$$C = \left\{\, w \in C[0,\infty)^d \ ; \quad (w(t_1),\cdots,w(t_n)) \in B \,\right\}$$

と表される $C[0,\infty)^d$ の部分集合 C の全体を $\mathscr{C}$ とおく．このとき，$\mathfrak{B}(C[0,\infty)^d) = \sigma[\mathscr{C}]$ が成り立つ．

証明． $w_0 \in C[0,\infty)^d$ とする．任意に $w \in C[0,\infty)^d$ を取れば，w の連続性により $d(w_0,w)$ の各項について

$$\sup_{t\le n}|w_0(t)-w(t)| = \sup_{r\in[0,n]\cap\mathbb{Q}}|w_0(r)-w(r)| \quad (n=1,2,\cdots)$$

と表現できる．いま，任意に実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ を取れば

$$\left\{\, w \in C[0,\infty)^d \ ; \quad \sup_{r\in[0,n]\cap\mathbb{Q}}|w_0(r)-w(r)| \le \alpha \,\right\} = \bigcap_{r\in[0,n]\cap\mathbb{Q}}\left\{\, w \in C[0,\infty)^d \ ; \quad |w_0(r)-w(r)| \le \alpha \,\right\}$$

が成立し，右辺の各集合は $\mathscr{C}$ に属するから 左辺 $\in \sigma[\mathscr{C}]$ となる．従って

$$\psi_n : C[0,\infty)^d \ni w \longmapsto \sup_{r\in[0,n]\cap\mathbb{Q}}|w_0(r)-w(r)| \in \mathbb{R}, \quad (n=1,2,\cdots)$$

で定める ψ_n は可測 $\sigma[\mathscr{C}]/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ である．$x \longmapsto x \wedge 1$ の連続性より $\psi_n \wedge 1$ も $\sigma[\mathscr{C}]/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$-可測性を持ち，

$$d(w_0,w) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(\psi_n(w) \wedge 1)$$

により $C[0,\infty)^d \ni w \longmapsto d(w_0,w) \in \mathbb{R}$ の $\sigma[\mathscr{C}]/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$-可測性が出るから，任意の $\epsilon > 0$ に対する球について

$$\left\{\, w \in C[0,\infty)^d \ ; \quad d(w_0,w) < \epsilon \,\right\} \in \sigma[\mathscr{C}]$$

が成り立つ．$C[0,\infty)^d$ は第二可算公理を満たし，可算基底は上式の形の球で構成されるから，$\mathfrak{O}(C[0,\infty)^d) \subset \sigma[\mathscr{C}]$ が従い $\mathfrak{B}(C[0,\infty)^d) \subset \sigma[\mathscr{C}]$ を得る．次に逆の包含関係を示す．いま，任意に $n \in \mathbb{Z}_+$ と $t_1 < \cdots < t_n$ を選んで

$$\phi : C[0,\infty)^d \ni w \longmapsto (w(t_1),\cdots,w(t_n)) \in (\mathbb{R}^d)^n$$

により定める写像は連続である．実際，w_0 での連続性を考えると，任意の $\epsilon > 0$ に対して $t_n \le N$ を満たす $N \in \mathbb{N}$ を取れば，$d(w_0,w) < \epsilon/(n2^N)$ ならば $\sum_{i=1}^n |w_0(t_i)-w(t_i)| < \epsilon$ が成り立つ．よって ϕ は w_0 で連続であり (各点連続)

$$\mathfrak{B}((\mathbb{R}^d)^n) \subset \left\{\, A \in \mathfrak{B}((\mathbb{R}^d)^n) \ ; \quad \phi^{-1}(A) \in \mathfrak{B}(C[0,\infty)^d) \,\right\}$$

が出る．任意の $C \in \mathscr{C}$ は，$n \in \mathbb{N}$ と時点 $t_1 < \cdots < t_n$ によって決まる写像 ϕ によって $C = \phi^{-1}(B)$ $(\exists B \in \mathfrak{B}((\mathbb{R}^d)^n))$ と表現できるから，$\mathscr{C} \subset \mathfrak{B}(C[0,\infty)^d)$ が成り立ち $\sigma[\mathscr{C}] \subset \mathfrak{B}(C[0,\infty)^d)$ が得られる． ∎

次の事柄は後の定理の証明で使うからここで証明しておく．

定理 0.0.1 ($\mathscr{C}$ は乗法族である). $\mathscr{C}$ は交演算について閉じている．

証明. 任意に $A_1, A_2 \in \mathscr{C}$ を取れば，A_1, A_2 それぞれに対し $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $C_1 \in \mathfrak{B}((\mathbb{R}^d)^{n_1})$, $C_2 \in \mathfrak{B}((\mathbb{R}^d)^{n_2})$, $t_1 < \cdots < t_{n_1}$ それから $s_1 < \cdots < s_{n_2}$ が決まっていて，

$$A_1 = \left\{ w \in C[0,\infty)^d \quad | \quad (w(t_1), \cdots, w(t_{n_1})) \in C_1 \right\}$$
$$A_2 = \left\{ w \in C[0,\infty)^d \quad | \quad (w(s_1), \cdots, w(s_{n_2})) \in C_2 \right\}$$

と表されている．A_1, A_2 の時点に重複があるかないかで場合分けして示す．

時点に重複がない場合　集合を次のように同値な表記に直す：

$$A_1 = \left\{ w \in C[0,\infty)^d \quad | \quad (w(t_1), \cdots, w(t_{n_1}), w(s_1), \cdots, w(s_{n_2})) \in C_1 \times (\mathbb{R}^d)^{n_2} \right\}$$
$$A_2 = \left\{ w \in C[0,\infty)^d \quad | \quad (w(t_1), \cdots, w(t_{n_1}), w(s_1), \cdots, w(s_{n_2})) \in (\mathbb{R}^d)^{n_1} \times C_2 \right\}$$

表現を変えれば乗法を考えやすくなり，上の場合は

$$A_1 \cap A_2 = \left\{ w \in C[0,\infty)^d \quad | \quad (w(t_1), \cdots, w(t_{n_1}), w(s_1), \cdots, w(s_{n_2})) \in C_1 \times C_2 \right\}$$

と表現できる．$t_1, \cdots, s_{n_2}$ の並びが気になるなら，この時点の並びを昇順に変換する $(dn_1 + dn_2) \times (dn_1 + dn_2)$ 行列 J_1 を用いて (J_1 は連続, 線型, 全単射),

$$A_1 \cap A_2 = \left\{ w \in C[0,\infty)^d \quad | \quad J_1 \boldsymbol{w} \in J_1(C_1 \times C_2) \right\}$$
$$(\boldsymbol{w} = {}^T(w(t_1), \cdots, w(t_{n_1}), w(s_1), \cdots, w(s_{n_2})))$$

とすれば，$J(C_1 \times C_2) \in \mathfrak{B}((\mathbb{R}^d)^{n_1+n_2})$ であるから，$A_1 \cap A_2 \in \mathscr{C}$ であることが明確になる．

時点に重複がある場合　$(r_{k_1}, \cdots, r_{k_l}) \subset (t_1, \cdots, t_{n_1})$ が重複時点であるとき，A_1, A_2 の同値な表記は次のようにすればよい：

$$A_1 = \left\{ w \in C[0,\infty)^d \quad | \quad (w(t_1), ., w(r_{k_1}), ., w(r_{k_l}), ., w(t_{n_1}), (s_1, \cdots, s_{n_2} \text{ から } r_{k_1}, \cdots, r_{k_l} \text{ を抜いたものを並べる})) \in C_1 \times (\mathbb{R}^d)^{n_2 - l} \right\}$$

$$A_2 = \left\{ w \in C[0,\infty)^d \quad | \quad (w(s_1), ., w(r_{k_1}), ., w(r_{k_l}), ., w(s_{n_2}), (t_1, \cdots, t_{n_1} \text{ から } r_{k_1}, \cdots, r_{k_l} \text{ を抜いたものを並べる})) \in C_2 \times (\mathbb{R}^d)^{n_1 - l} \right\}$$

A_2 について，条件中の時点の並びを変換し A_1 の条件の順番に合わせる行列 J_2(連続, 線型, 全単射) を用いて

$$A_2 = \left\{ w \in C[0,\infty)^d \quad | \quad (w(t_1), ., w(r_{k_1}), ., w(r_{k_l}), ., w(t_{n_1}), (s_1, \cdots, s_{n_2} \text{ から } r_{k_1}, \cdots, r_{k_l} \text{ を抜いたものを並べる})) \in J_2(C_2 \times (\mathbb{R}^d)^{n_1 - l}) \right\}$$

と書き直せば，$A_1 \cap A_2$ は前段の様に表現可能であり，前段と同様に最後に時点を昇順に変換する行列を用いることで $A_1 \cap A_2 \in \mathscr{C}$ となることが明確に判る．

∎

連続関数の空間に値を取る確率変数

$\omega \in \Omega$ に $\mathbb{R}^d$ 値連続確率過程 X のパスを対応させる写像

$$X_\bullet : \Omega \ni \omega \longmapsto (t \longmapsto X_t(\omega)), \quad (t \geq 0)$$

は可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(C[0,\infty)^d)$ である．

証明． 任意に $C \in \mathscr{C}$ を取れば $C = \left\{ w \in C[0,\infty)^d \ ; \quad (w(t_1), \cdots, w(t_n)) \in B \right\}$, $(B \in \mathfrak{B}((\mathbb{R}^d)^n))$ と表されるから

$$\{ \omega \in \Omega \ ; \quad X_\bullet(\omega) \in C \} = \{ \omega \in \Omega \ ; \quad (X_{t_1}(\omega), \cdots, X_{t_n}(\omega)) \in B \}$$

が成り立つ．右辺は $\mathcal{F}$ に属するから

$$\mathscr{C} \subset \left\{ C \in \sigma[\mathscr{C}] \ ; \quad (X_\bullet)^{-1}(C) \in \mathcal{F} \right\}$$

が従い，右辺は σ 加法族であるから $X_\bullet$ の $\mathcal{F}/\sigma[\mathscr{C}]$-可測性，つまり $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(C[0,\infty)^d)$-可測性が出る． ∎

定理 0.0.2. Let X be a process with every sample path LCRL, and let A be the event that X is continuous on $[0, x_0]$. Let X be adapted to a right-continuous filtration $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$. Show that $A \in \mathscr{F}_{t_0}$.

証明．

第一段 $\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q} \cap [0, t_0]$ とおく．いま，任意の $n \geq 1$ と $r \in \mathbb{Q}^*$ に対し

$$B_n(r) := \bigcup_{m\geq 1} \bigcap_{k \leq m} \left\{ \omega \in \Omega \ ; \quad \left| X_r(\omega) - X_{r+\frac{1}{k}}(\omega) \right| \leq \frac{1}{n} \right\}$$

と定めるとき，

$$A = \bigcap_{r \in \mathbb{Q}^*} \bigcap_{n \geq 1} B_n(r)$$

が成立することを示す．これが示されれば，

$$\left\{ \omega \in \Omega \ ; \quad \left| X_r(\omega) - X_{r+\frac{1}{k}}(\omega) \right| \leq \frac{1}{n} \right\} \in \mathscr{F}_{r+\frac{1}{k}}, \quad (\forall r \in \mathbb{Q}^*,\ k \geq 1)$$

とフィルトレーションの右連続性から

$$B_n(r) \in \bigcap_{k \geq m} \mathscr{F}_{r+\frac{1}{k}} = \mathscr{F}_{r+} = \mathscr{F}_r$$

が従い $A \in \mathscr{F}_{t_0}$ が出る．

第二段

定理 0.0.3. Dynkin 族の定義 (iii) は，$\mathscr{D}$ が可算直和で閉じていることと同値である．

証明． $\mathscr{D}$ が可算直和について閉じているとする．このとき単調増大列 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ を取り

$$B_1 := A_1, \quad B_n := A_n \backslash A_{n-1}, \quad (n \geq 2)$$

とおけば，Dynkin 族の定義 (ii) より $B_n \in \mathscr{D}$ $(n \geq 1)$ が満たされ

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathscr{D}$$

が成立する．逆に $\mathscr{D}$ が (iii) を満たしているとして，互いに素な集合列 $(B_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{D}$ を取る．$B^c = \Omega \backslash B$ と Dynkin 族の定義 (i)(ii) より，$A, B \in \mathscr{D}$ が $A \cap B = \emptyset$ を満たしていれば $A^c \cap B^c \in \mathscr{D}$ が成り立ち

$$B_1^c \cap B_2^c \cap \cdots \cap B_n^c = \left(\cdots \left(\left(B_1^c \cap B_2^c \right) \cap B_3^c \right) \cap \cdots \cap B_{n-1}^c \right) \cap B_n^c \in \mathscr{D}$$

が得られる．よって

$$D_n := \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega \backslash \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i^c \right), \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

により定める単調増大列 $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ は $\mathscr{D}$ に含まれ

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathscr{D}$$

が成立する． ■

定理 0.0.4. Let $X = \{ X_t \ ; \quad 0 \leq t < \infty \}$ be a stochastic process for which $X_0, X_{t_1} - X_{t_0}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ are independent random variables, for every integer $n \geq 1$ and indices $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty$. Then for any fixed $0 \leq s < t < \infty$, the increment $X_t - X_s$ is independent of $\mathscr{F}_s^X$.

この主張の逆も成立する:

証明． 先ず任意の $s \leq t$ に対し $\sigma(X_t - X_s) \subset \mathscr{F}_t^X$ が成り立つ．実際，

$$\Phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \ni (x, y) \longmapsto x - y$$

の連続性と $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ より，任意の $E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$(X_t - X_s)^{-1}(E) = \left\{ \omega \in \Omega \ ; \quad (X_t(\omega), X_s(\omega)) \in \Phi^{-1}(E) \right\} \in \sigma(X_s, X_t) \subset \mathscr{F}_t^X \tag{1}$$

が満たされる．よって任意に $A_0 \in \sigma(X_0)$, $A_i \in \sigma(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})$ を取れば，$X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ が $\mathscr{F}_{t_{n-1}}^X$ と独立であるから

$$\mathrm{P}(A_0 \cap A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathrm{P}(A_0 \cap A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \mathrm{P}(A_n)$$

が成立する．帰納的に

$$\mathrm{P}(A_0 \cap A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathrm{P}(A_0) \mathrm{P}(A_1) \cdots \mathrm{P}(A_n)$$

が従い $X_0, X_{t_1} - X_{t_0}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ の独立性を得る． ■

証明 (定理 0.0.4).

第一段　Dynkin 族を次で定める:

$$\mathscr{D} := \{\, A \in \mathscr{F} \;;\quad \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B),\ \forall B \in \sigma(X_t - X_s) \,\}.$$

いま，任意に $0 = s_0 < \cdots < s_n = s$ を取り固定し

$$\mathscr{A}_{s_0,\cdots,s_n} := \left\{ \bigcap_{i=0}^{n} A_i \;;\quad A_0 \in \sigma(X_0),\ A_i \in \sigma(X_{s_i} - X_{s_j}),\ i = 1,\cdots,n \right\}$$

により乗法族を定めれば，仮定より $\sigma(X_{s_i} - X_{s_{i-1}})$ と $\sigma(X_t - X_s)$ が独立であるから

$$\mathscr{A}_{s_0,\cdots,s_n} \subset \mathscr{D}$$

が成立し，Dynkin 族定理により

$$\sigma(X_{s_0}, X_{s_1} - X_{s_0}, \cdots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}}) = \sigma\left[\mathscr{A}_{s_0,\cdots,s_n}\right] \subset \mathscr{D} \tag{2}$$

が従う．

第二段　$\sigma(X_{s_0}, X_{s_1} - X_{s_0}, \cdots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}})$ の全体が $\mathscr{F}_s^X$ を生成することを示す．先ず，(1) より

$$\bigcup_{\substack{n \geq 1 \\ s_0 < \cdots < s_n}} \sigma(X_{s_0}, X_{s_1} - X_{s_0}, \cdots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}}) \subset \mathscr{F}_s^X \tag{3}$$

が成立する．一方で，任意の $X_r^{-1}(E)$ $(\forall E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d),\ 0 < r \leq s)$ について，

$$\Psi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \ni (x, y) \longmapsto x + y$$

で定める連続写像を用いれば

$$X_r^{-1}(E) = (X_r - X_0 + X_0)^{-1}(E) = \left\{ \omega \in \Omega \;;\quad (X_r(\omega) - X_0(\omega), X_0(\omega)) \in \Psi^{-1}(E) \right\}$$

となり，$X_r^{-1}(E) \in \sigma(X_0, X_r - X_0)$ が満たされ

$$\sigma(X_r) \subset \sigma(X_0, X_r - X_0) \subset \sigma(X_0, X_r - X_0, X_s - X_r) \tag{4}$$

が出る．$\sigma(X_0) \subset \sigma(X_0, X_s - X_0)$ も成り立ち

$$\bigcup_{0 \leq r \leq s} \sigma(X_r) \subset \bigcup_{\substack{n \geq 1 \\ s_0 < \cdots < s_n}} \sigma(X_{s_0}, X_{s_1} - X_{s_0}, \cdots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}})$$

が従うから，(3) と併せて

$$\mathscr{F}_s^X = \sigma\left[\bigcup_{\substack{n \geq 1 \\ s_0 < \cdots < s_n}} \sigma(X_{s_0}, X_{s_1} - X_{s_0}, \cdots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}})\right] \tag{5}$$

が得られる．

第三段　任意の $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = s$ に対し，(1) と (4) より

$$\sigma(X_{s_0}, X_{s_1} - X_{s_0}, \cdots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}}) = \sigma(X_{s_0}, X_{s_1}, \cdots, X_{s_n}) \tag{6}$$

が成り立つ．

第四段　二つの節点 $0 = s_0 < \cdots < s_n = s$ と $0 = r_0 < \cdots < r_m = s$ の合併を $0 = u_0 < \cdots < u_k = s$ と書けば

$$\sigma(X_{s_0}, \cdots, X_{s_n}) \cup \sigma(X_{r_0}, \cdots, X_{r_m}) \subset \sigma(X_{u_0}, \cdots, X_{u_k})$$

が成り立つから

$$\bigcup_{\substack{n \geq 1 \\ s_0 < \cdots < s_n}} \sigma(X_{s_0}, X_{s_1}, \cdots, X_{s_n})$$

は交演算で閉じている．従って (2)，(5)，(6) 及び Dynkin 族定理により

$$\mathscr{F}_s^X = \sigma\left[\bigcup_{\substack{n \geq 1 \\ s_0 < \cdots < s_n}} \sigma(X_{s_0}, X_{s_1} - X_{s_0}, \cdots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}}) \right] = \sigma\left[\bigcup_{\substack{n \geq 1 \\ s_0 < \cdots < s_n}} \sigma(X_{s_0}, X_{s_1}, \cdots, X_{s_n}) \right] \subset \mathscr{D}$$

が従い定理の主張を得る． ■

0.1　Kolmogorov の拡張定理