金融数理レポート

基礎工学研究科システム創成専攻修士 1 年
学籍番号 29C17095
百合川尚学

2017 年 7 月 29 日

1 CRR

問題の仮定

- 以下 $\mathbb{R}_+ := (0, +\infty)$ として考える．
- 確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$,
- 時点列 $\mathbb{T} := \{0, 1, 2, \cdots, T\}$ $(T \in \mathbb{N})$,
- 安全資産の各期の利率は $r \in \mathbb{R}$ で固定．安全資産過程 $(B_t)_{t \in \mathbb{T}}$ は

$$B_0 = 1, \quad \frac{B_t - B_{t-1}}{B_{t-1}} = r$$

  を満たす.
- 各時点における株価 S_t $(t \in \mathbb{T})$ は確率変数 (可測 $\mathscr{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$)，ただし S_0 は定数関数とする．
- 各時点におけるリターン R_t $(t = 1, 2, \cdots, T)$ は次の式で与えられる:

$$R_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}.$$

  そして $(R_t)_{t=1}^T$ は u または l に値を取る独立同分布に従う確率変数の族であると仮定する:

$$\begin{cases} \mathrm{P}(R_t = u) = p, \\ \mathrm{P}(R_t = l) = 1 - p, \end{cases} \qquad (-\infty < l < u < +\infty, \;\; 0 \leq p \leq 1).$$

株価過程 $(S_t)_{t \in \mathbb{T}}$ について，$S_0(\omega) > 0$ $(\forall \omega \in \Omega)$ として考える．各時点 t の株価 S_t はリターンを用いて

$$S_t = S_0(1 + R_1)(1 + R_2) \cdots (1 + R_t), \quad (\forall t \in \mathbb{T})$$

と表現できる．このことから次の命題が導かれる．

命題 (株価過程とリターンの過程で生成される σ-加法族は同じ). 各時点 $t = 1, 2, \cdots, T$ について

$$\mathscr{F}_t^S := \bigvee_{u \leq t} \left\{ S_u^{-1}(A) \;\middle|\; A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \right\}$$
$$\mathscr{F}_t^R := \bigvee_{u \leq t} \left\{ R_u^{-1}(A) \;\middle|\; A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \right\}$$

と定義すれば，$\mathscr{F}_t^S = \mathscr{F}_t^R$ $(\forall t \in \mathbb{T})$ が成り立つ．特に問題の仮定により，(株価過程については時点 0 の場合も同様に定義しておく)$\mathscr{F}_0^S = \{\emptyset, \Omega\}$ であって，R_t は $\mathscr{F}_{t-1}^S$ と独立である．$(t = 1, 2, 3, \cdots, T)$

証明. 時点 $1 \leq u\ (\leq t)$ のリターン R_u は S_u と S_{u-1} を用いて表せる．写像 $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \ni (x, y) \longmapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ を $f(x, y) = (x - y)/y$ とおく．f は連続であるから可測 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ である．$\mathbb{R}_+$ は第二可算公理を満たすから $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+) = \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ が成り立っていることに注意する．確率ベクトル $\boldsymbol{S}_u := (S_{u-1}, S_u)$ について，これは $\Omega \to \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ の写像であり，任意の $A \times B$ $(A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ なる形の集合に対して，$\mathscr{F}_t^S$ の作り方から

$$\boldsymbol{S}_u^{-1}(A \times B) = S_{u-1}^{-1}(A) \cap S_u^{-1}(B) \in \mathscr{F}_t^S$$

が成り立つから

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \subset \left\{ A \;\middle|\; \boldsymbol{S}^{-1}(A) \in \mathscr{F}_t^S \right\}$$

が成り立ち，$\boldsymbol{S}_u$ は可測 $\mathscr{F}_t^S / \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ であるとわかる．つまり合成写像 $R_u = f(\boldsymbol{S}_u) : \Omega \to \mathbb{R}$ は可測 $\mathscr{F}_t^S / \mathcal{B}(\mathbb{R})$ である．$1 \leq u \leq t$ で任意の u を対象に示したから，

$$\mathscr{F}_t^R \subset \mathscr{F}_t^S$$

がまず示されたことになる．逆の包含関係についても，上に載せたように S_t は $R_1, \cdots, R_t$ を用いて表せるから $\mathscr{F}_t^S \subset \mathscr{F}_t^R$ が成り立つ． ∎

仮定 (フィルトレーション). 今考えている確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ にフィルトレーションとして，株価過程 $(S_t)_{t \in \mathbb{T}}$ から生成される σ-加法族の系 $(\mathscr{F}_t^S)_{t \in \mathbb{T}}$ を採用する．命題に書いたとおり $\mathscr{F}_0^S = \{\emptyset, \Omega\}$ であって，R_t は $\mathscr{F}_{t-1}^S$ と独立 $(t = 1, 2, 3, \cdots, T)$ である．

1. $\mathbb{T} := \{0, 1, \cdots, T\}$ ($T \in \mathbb{N}$) を時刻を表す集合とする．安全運用過程

$$(B_t)_{t\in\mathbb{T}}$$

は

$$B_0 = 1, \quad \frac{B_t - B_{t-1}}{B_{t-1}} = r$$

を満たす．ここで r は金利を表す定数である．また株価過程

$$(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$$

は

$$S_0 > 0, \quad \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} = R_t.$$

ただし $(R_t)_{t\in\mathbb{T}\setminus\{0\}}$ は独立同分布な確率変数列であり

$$R_t = \begin{cases} u & \text{with probability } p, \\ l & \text{with probability } 1 - p \end{cases}$$

を満たしている．以下の問いに答えよ．

1) リスク中立確率 $\mathbb{Q}$ が存在するための条件を求め，$\mathbb{Q}$ の下での株価過程の上昇 (下降) 確率を求めよ．

2) 満期 T でのペイオフが $f(S_T)$ の (ヨーロピアン) デリバティブを時刻 0 で

$$C_1 < \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left[B_T^{-1} f(S_T)\right] < C_2$$

を満たす C_1 か C_2 で売買できたとする．このとき，それぞれどのような運用を行えば裁定機会が産まれるか論じなさい．

解答 講義と同じく $l < u$ として考える．

1) リスク中立確率が存在するための条件は
   - $l < r < u$
   - $0 < p < 1$

   が満たされていることであり，

$$q := \frac{r - l}{u - l}$$

と置けばリスク中立確率 $\mathbb{Q}$ は次のように表せる．

$$\text{上昇確率} \quad \mathbb{Q}(R_t = u) = \frac{q}{p},$$
$$\text{下降確率} \quad \mathbb{Q}(R_t = l) = \frac{1 - q}{1 - p}.$$

4. $(w_t)_{t\geq 0}$ をブラウン運動とする．以下の問いに答えよ．

8) $Q_t := w_t^2 - t\ (t \geq 0)$ がマルチンゲールであることを示せ.

9) $L_t := tw_t - \int_0^t w_s\,ds\ (t \geq 0)$ がマルチンゲールであることを示せ.

10) $Z_t := \exp\left\{\sigma w_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right\}\ (t \geq 0,\ \sigma, \mu > 0)$ に対して $Y_t := 1/Z_t$ と定義する．$(Y_t)_{t\geq 0}$ の優/劣マルチンゲールを判定せよ．

証明. 講義中のマルチンゲールの定義に合わせて示す.

8) 時刻 $0 \leq s < t$ を任意に取る．時刻 s までの情報で条件付けた期待値は

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_s[Q_t] &= \mathrm{E}_s\left[w_t^2 - t\right] \\
&= \mathrm{E}_s\left[(w_t - w_s + w_s)^2 - t\right] \\
&= \mathrm{E}_s\left[(w_t - w_s)^2 + 2w_s(w_t - w_s) + w_s^2\right] - t \\
&= \mathrm{E}_s\left[(w_t - w_s)^2\right] + \mathrm{E}_s[2w_s(w_t - w_s)] + \mathrm{E}_s\left[w_s^2\right] - t.
\end{aligned}$$

とまで表せる．ここでブラウン運動の定義より $w_t - w_s$ は時刻 s までの情報と独立，そして平均 0，分散 $t-s$ の正規分布に従っている．この性質と条件付期待値の性質を使ってさらに式変形すれば

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}_s\left[(w_t - w_s)^2\right] + \mathrm{E}_s[2w_s(w_t - w_s)] + \mathrm{E}_s\left[w_s^2\right] - t \\
&= \mathrm{E}\left[(w_t - w_s)^2\right] + 2w_s\,\mathrm{E}[w_t - w_s] + w_s^2 - t \\
&= t - s + w_s^2 - t = Q_s
\end{aligned}$$

が成り立つ．つまり $\mathrm{E}_s[Q_t] = Q_s$ が成り立ち，$(Q_t)_{t\geq 0}$ がマルチンゲールであることが示された．

9) 時刻 $0 \leq s < t$ を任意に取る．時刻 s までの情報で条件付けた期待値は

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_s[L_t] &= \mathrm{E}_s\left[tw_t - \int_0^t w_u\,du\right] \\
&= \mathrm{E}_s\left[t(w_t - w_s + w_s) - \int_0^s w_u\,du - \int_s^t w_u\,du\right] \\
&= \mathrm{E}_s\left[t(w_t - w_s) + tw_s - \int_0^s w_u\,du - \int_s^t w_u - w_s + w_s\,du\right] - t \\
&= t\,\mathrm{E}_s[w_t - w_s] + t\,\mathrm{E}_s[w_s] - \mathrm{E}_s\left[\int_0^s w_u\,du\right] - \mathrm{E}_s\left[\int_s^t w_u - w_s\,du\right] - \mathrm{E}_s\left[\int_s^t w_s\,du\right] \\
&= t\,\mathrm{E}_s[w_t - w_s] + t\,\mathrm{E}_s[w_s] - \mathrm{E}_s\left[\int_0^s w_u\,du\right] - \mathrm{E}_s\left[\int_s^t w_u - w_s\,du\right] - \mathrm{E}_s[(t-s)w_s]
\end{aligned}$$

となる．ここで 8) と同様にブラウン運動の性質と条件付期待値の性質により

$$\begin{aligned}
&t\,\mathrm{E}_s[w_t - w_s] + t\,\mathrm{E}_s[w_s] - \mathrm{E}_s\left[\int_0^s w_u\,du\right] - \mathrm{E}_s\left[\int_s^t w_u - w_s\,du\right] - \mathrm{E}_s[(t-s)w_s] \\
&= tw_s - \int_0^s w_u\,du - \mathrm{E}_s\left[\int_s^t w_u - w_s\,du\right] - (t-s)w_s
\end{aligned}$$

まで表せる．$\mathrm{E}_s\left[\int_s^t w_u - w_s\,du\right]$ の項について，Fubini の定理を適用すれば

$$\mathrm{E}_s\left[\int_s^t w_u - w_s\,du\right] = \mathrm{E}\left[\int_s^t w_u - w_s\,du\right] = \int_s^t \mathrm{E}\left[w_u - w_s\right]\,du = 0$$

が成り立つから，結局

$$\mathrm{E}_s\left[L_t\right] = tw_s - \int_0^s w_u\,du - (t-s)w_s = sw_s - \int_0^s w_u\,du = L_s$$

が成り立ち，$(L_t)_{t\geq 0}$ がマルチンゲールであることが示された．

10) $Y_t = e^{-\sigma w_t - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}$ である．時刻 $0 \leq s < t$ を任意に取り，時刻 s までの情報で条件付けた期待値を計算する．

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_s\left[Y_t\right] &= \mathrm{E}_s\left[e^{-\sigma w_t - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}\right] \\
&= e^{-\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}\,\mathrm{E}_s\left[e^{-\sigma(w_t - w_s + w_s)}\right] \\
&= e^{-\sigma w_s - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}\,\mathrm{E}_s\left[e^{-\sigma(w_t - w_s)}\right] \\
&= Y_s\,\mathrm{E}\left[e^{-\sigma(w_t - w_s)}\right]
\end{aligned}$$

と表せる．ここで表記を簡単にするために確率変数 X を $X \sim N(0, t-s)$ として $\mathrm{E}\left[e^{-\sigma X}\right]$ を計算する．

$$\mathrm{E}\left[e^{-\sigma X}\right] = \mathrm{E}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-\sigma X)^n}{n!}\right] = \mathrm{E}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-\sigma X)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-\sigma X)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]$$

となるが，ここで

$$\mathrm{E}\left[X^{2n}\right] = (t-s)^n(2n-1)!!, \quad \mathrm{E}\left[X^{2n+1}\right] = 0, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

が成り立つから

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sigma^{2n}}{(2n)!}\,\mathrm{E}\left[X^{2n}\right] &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sigma^{2n}}{(2n)!}(t-s)^n(2n-1)!! \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\sigma^2(t-s)}{2}\right)^n\frac{1}{n!} \\
&= e^{\frac{\sigma^2}{2}(t-s)},
\end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sigma^{2n+1}}{(2n+1)!}\,\mathrm{E}\left[X^{2n+1}\right] = 0$$

となり，Fubini の定理より

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-\sigma X)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-\sigma X)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right] &= \mathrm{E}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-\sigma X)^{2n}}{(2n)!}\right] + \mathrm{E}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-\sigma X)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sigma^{2n}}{(2n)!}\,\mathrm{E}\left[X^{2n}\right] + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sigma^{2n+1}}{(2n+1)!}\,\mathrm{E}\left[X^{2n+1}\right] \\
&= e^{\frac{\sigma^2}{2}(t-s)}
\end{aligned}$$

が成り立つ．$s < t$ としているから $e^{\frac{\sigma^2}{2}(t-s)} > 1$ であり

$$\mathrm{E}_s\left[Y_t\right] = Y_s\,\mathrm{E}\left[e^{-\sigma(w_t - w_s)}\right] = Y_s e^{\frac{\sigma^2}{2}(t-s)} \geq Y_s$$

が成り立つから $(Y_t)_{t\geq 0}$ は劣マルチンゲールである． ∎