

note

基礎工学研究科システム創成専攻修士 1 年  
学籍番号 29C17095  
百合川尚学

2018 年 1 月 2 日

# 目次

第 1 章	空間 $\mathcal{L}^p$ と空間 $L^p$	2
1.1	Hölder の不等式と Minkowski の不等式 . . . . .	2
1.2	空間 $L^p$ . . . . .	6
第 2 章	Lebesgue-Radon-Nikodym の定理	11
2.1	複素測度 . . . . .	11
2.2	Lebesgue-Radon-Nikodym の定理 . . . . .	17

# 第 1 章

## 空間 $\mathcal{L}^p$ と空間 $L^p$

### 1.1 Hölder の不等式と Minkowski の不等式

$\mathbb{K}$  を  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  或は  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  とおく. 測度空間を  $(X, \mathcal{F}, m)$  とし, 可測  $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{K})$  関数  $f$  に対して

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p} := \begin{cases} \inf \{ r \in \mathbb{R}; & |f(x)| \leq r, \text{ a.e. } x \in X \} & (p = \infty) \\ \left( \int_X |f(x)|^p m(dx) \right)^{\frac{1}{p}} & (0 < p < \infty) \end{cases}$$

と定め,

$$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, m) := \{ f : X \rightarrow \mathbb{K}; \quad f : \text{可測 } \mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{K}), \|f\|_{\mathcal{L}^p} < \infty \} \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

として空間  $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$  を定義する. この空間は  $\mathbb{K}$  上の線形空間となるが, そのことを保証するために次の二つの不等式が成り立つことを証明する.

定理 1.1.1 (Hölder の不等式).  $1 \leq p, q \leq \infty$ ,  $p + q = pq$  ( $p = \infty$  なら  $q = 1$ ) とする. このとき任意の可測  $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{K})$  関数  $f, g$  に対して次が成り立つ:

$$\int_X |f(x)g(x)| m(dx) \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p} \|g\|_{\mathcal{L}^q}. \quad (1.1)$$

まず次の補助定理を証明する.

補題 1.1.2.  $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{F}, m)$  ならば

$$|f(x)| \leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty} \quad (\text{a.e. } x \in X).$$

証明 (補題 1.1.2).  $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{F}, m)$  の定義により任意の実数  $\alpha > \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}$  に対して

$$m(\{x \in X; \quad |f(x)| > \alpha\}) = 0$$

が成り立つから,

$$\{x \in X; \quad |f(x)| > \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X; \quad |f(x)| > \|f\|_{\mathcal{L}^\infty} + 1/n\}$$

の右辺は  $m$ -零集合となる.

証明 (定理 1.1.1).  $p = \infty, q = 1$  の場合  $\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} = \infty$  又は  $\|g\|_{\mathcal{L}^1} = \infty$  なら不等式 (1.1) は成り立つから, 以下では  $\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} < \infty$  かつ  $\|g\|_{\mathcal{L}^1} < \infty$  の場合を考える. 補助定理により或る  $m$ -零集合  $A \in \mathcal{F}$  を除いて  $|f(x)| \leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}$  が成り立つから

$$|f(x)g(x)| \leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty} |g(x)| \quad (\forall x \in X \setminus A).$$

とでき, 従って

$$\int_X |f(x)g(x)| m(dx) = \int_{X \setminus A} |f(x)g(x)| m(dx) \leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty} \int_{X \setminus A} |g(x)| m(dx) = \|f\|_{\mathcal{L}^\infty} \|g\|_{\mathcal{L}^1}$$

となり不等式 (1.1) が成り立つ.

$1 < p, q < \infty$  の場合  $\|f\|_{\mathcal{L}^p} = \infty$  又は  $\|g\|_{\mathcal{L}^q} = \infty$  なら不等式 (1.1) は成り立つから, 以下では  $\|f\|_{\mathcal{L}^p} < \infty$  かつ  $\|g\|_{\mathcal{L}^q} < \infty$  の場合を考える.  $\|f\|_{\mathcal{L}^p} = 0$  であるとする

$$B := \{x \in X; |f(x)| > 0\}$$

は  $m$ -零集合となるから,

$$\int_X |f(x)g(x)| m(dx) = \int_B |f(x)g(x)| m(dx) + \int_{X \setminus B} |f(x)g(x)| m(dx) = 0$$

となり不等式 (1.1) が成り立つ.  $\|g\|_{\mathcal{L}^q} = 0$  の場合も同じである.

最後に  $0 < \|f\|_{\mathcal{L}^p}, \|g\|_{\mathcal{L}^q} < \infty$  の場合を示す.  $-\log t$  ( $t > 0$ ) は凸関数であるから,  $1/p + 1/q = 1$  に対して

$$-\log \left( \frac{s}{p} + \frac{t}{q} \right) \leq \frac{1}{p} (-\log s) + \frac{1}{q} (-\log t) \quad (\forall s, t > 0)$$

が成り立ち, 従って

$$s^{1/p} t^{1/q} \leq \frac{s}{p} + \frac{t}{q} \quad (\forall s, t > 0)$$

を得る. この不等式を用いれば

$$F(x) := |f(x)|^p / \|f\|_{\mathcal{L}^p}^p, \quad G(x) := |g(x)|^q / \|g\|_{\mathcal{L}^q}^q \quad (\forall x \in X)$$

とした可積分関数  $F, G$  に対し

$$F(x)^{1/p} G(x)^{1/q} \leq \frac{1}{p} F(x) + \frac{1}{q} G(x) \quad (\forall x \in X)$$

となるから, 両辺を積分して

$$\begin{aligned} \int_X F(x)^{1/p} G(x)^{1/q} m(dx) &\leq \frac{1}{p} \int_X F(x) m(dx) + \frac{1}{q} \int_X G(x) m(dx) \\ &= \frac{1}{p} \frac{1}{\|f\|_{\mathcal{L}^p}^p} \int_X |f(x)|^p m(dx) + \frac{1}{q} \frac{1}{\|g\|_{\mathcal{L}^q}^q} \int_X |g(x)|^q m(dx) \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{aligned}$$

が成り立つ。最左辺と最右辺を比べて

$$\int_X \frac{|f(x)|}{\|f\|_{\mathcal{L}^p}} \frac{|g(x)|}{\|g\|_{\mathcal{L}^q}} m(dx) = \int_X F(x)^{1/p} G(x)^{1/q} m(dx) \leq 1$$

となるから不等式

$$\int_X |f(x)g(x)| m(dx) \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p} \|g\|_{\mathcal{L}^q}$$

が示された。 ■

定理 1.1.3 (Minkowski の不等式).  $1 \leq p \leq \infty$  とする. このとき任意の可測  $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  関数  $f, g$  に対して次が成り立つ:

$$\|f + g\|_{\mathcal{L}^p} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p} + \|g\|_{\mathcal{L}^p}. \quad (1.2)$$

証明.

$p = \infty$  の場合 各点  $x \in X$  で

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$$

となるから,  $\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} = \infty$  又は  $\|g\|_{\mathcal{L}^\infty} = \infty$  なら不等式 (1.2) は成り立つ.  $\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} < \infty$  かつ  $\|g\|_{\mathcal{L}^\infty} < \infty$  の場合は

$$C := \{x \in X; |f(x)| > \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}\} \cup \{x \in X; |g(x)| > \|g\|_{\mathcal{L}^\infty}\}$$

が  $m$ -零集合となり

$$|f(x) + g(x)| \leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty} + \|g\|_{\mathcal{L}^\infty} \quad (\forall x \in X \setminus C)$$

を得て  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^\infty}$  の定義と併せて不等式 (1.2) が成り立つ.

$p = 1$  の場合

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \quad (\forall x \in X)$$

の両辺を積分することにより不等式 (1.2) が成り立つ.

$1 < p < \infty$  の場合  $p + q = pq$  が成り立つように  $q > 1$  を取る.

$$|f(x) + g(x)|^p = |f(x) + g(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} \leq |f(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} + |g(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1}$$

の両辺を積分すれば, Hölder の不等式により

$$\begin{aligned}
\|f + g\|_{\mathcal{L}^p}^p &= \int_X |f(x) + g(x)|^p m(dx) \\
&\leq \int_X |f(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} m(dx) + \int_X |g(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} m(dx) \\
&\leq \left( \int_X |f(x)|^p m(dx) \right)^{1/p} \left( \int_X |f(x) + g(x)|^{q(p-1)} m(dx) \right)^{1/q} \\
&\quad + \left( \int_X |g(x)|^p m(dx) \right)^{1/p} \left( \int_X |f(x) + g(x)|^{q(p-1)} m(dx) \right)^{1/q} \\
&= \left( \int_X |f(x)|^p m(dx) \right)^{1/p} \left( \int_X |f(x) + g(x)|^p m(dx) \right)^{1/q} \\
&\quad + \left( \int_X |g(x)|^p m(dx) \right)^{1/p} \left( \int_X |f(x) + g(x)|^p m(dx) \right)^{1/q} \\
&= \|f\|_{\mathcal{L}^p} \|f + g\|_{\mathcal{L}^p}^{p/q} + \|g\|_{\mathcal{L}^p} \|f + g\|_{\mathcal{L}^p}^{p/q} \\
&= \|f\|_{\mathcal{L}^p} \|f + g\|_{\mathcal{L}^p}^{p-1} + \|g\|_{\mathcal{L}^p} \|f + g\|_{\mathcal{L}^p}^{p-1} \tag{1.3}
\end{aligned}$$

となる.  $\|f + g\|_{\mathcal{L}^p} = 0$  の場合は不等式 (1.2) が成り立つからそうでない場合を考える.  
 $\|f + g\|_{\mathcal{L}^p} = \infty$  の場合,

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq 2 \max\{|f(x)|, |g(x)|\} \quad (\forall x \in X)$$

より

$$|f(x) + g(x)|^p \leq 2^p \max\{|f(x)|, |g(x)|\} \leq 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p) \quad (\forall x \in X)$$

の両辺を積分して

$$\|f + g\|_{\mathcal{L}^p}^p \leq 2^p (\|f\|_{\mathcal{L}^p}^p + \|g\|_{\mathcal{L}^p}^p)$$

という関係が出るから,  $\|f\|_{\mathcal{L}^p}$  か  $\|g\|_{\mathcal{L}^p}$  の一方は  $\infty$  となり不等式 (1.2) が成り立つ.  
 $0 < \|f + g\|_{\mathcal{L}^p} < \infty$  の場合,  $\|f\|_{\mathcal{L}^p} + \|g\|_{\mathcal{L}^p} = \infty$  なら不等式 (1.2) は成り立ち,  $\|f\|_{\mathcal{L}^p} + \|g\|_{\mathcal{L}^p} < \infty$  の場合でも上式 (1.3) より得る

$$\|f + g\|_{\mathcal{L}^p}^p \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p} \|f + g\|_{\mathcal{L}^p}^{p-1} + \|g\|_{\mathcal{L}^p} \|f + g\|_{\mathcal{L}^p}^{p-1}$$

の両辺を  $\|f + g\|_{\mathcal{L}^p}^{p-1}$  で割って不等式 (1.2) が成り立つ.

■

以上の結果より  $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$  は線形空間となる. 実際加法とスカラ倍は

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) := \alpha f(x), \quad (\forall x \in X, f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, m), \alpha \in \mathbb{C})$$

により定義され, Minkowski の不等式により加法について閉じている.

**補題 1.1.4** ( $\mathcal{L}^p$  のセミノルム).  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p}$  は線形空間  $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$  においてセミノルムとなる.

証明.

正值性 定義の仕方による.

同次性  $1 \leq p < \infty$  なら

$$\left( \int_X |\alpha f(x)|^p m(dx) \right)^{1/p} = \left( |\alpha|^p \int_X |f(x)|^p m(dx) \right)^{1/p} = |\alpha| \left( \int_X |f(x)|^p m(dx) \right)^{1/p}$$

により, また  $p = \infty$  なら

$$\inf \{ r \in \mathbb{R}; \quad |\alpha f(x)| \leq r, \text{ a.e. } x \in X \} = |\alpha| \inf \{ r \in \mathbb{R}; \quad |f(x)| \leq r, \text{ a.e. } x \in X \}$$

により, 任意の  $\alpha \in \mathbb{K}$  と任意の  $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) に対して

$$\|\alpha f\|_{\mathcal{L}^p} = |\alpha| \|f\|_{\mathcal{L}^p}$$

が成り立つ.

三角不等式 Minkowski の不等式による.

■

## 1.2 空間 $L^p$

可測関数全体の商集合  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p}$  は  $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$  のノルムとはならない.  $\|f\|_{\mathcal{L}^p} = 0$  であっても  $f$  が零写像であるとは限らず, 実際  $m$ -零集合の上で  $1 \in \mathbb{K}$  を取るような関数  $g$  でも  $\|g\|_{\mathcal{L}^p} = 0$  を満たすからである. ここで可測関数全体の集合を

$$\mathcal{L}^0(X, \mathcal{F}, m) := \{ f : X \rightarrow \mathbb{K}; \quad f : \text{可測 } \mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{K}) \}$$

とおく.

$$f, g \in \mathcal{L}^0(X, \mathcal{F}, m), \quad f \sim g \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f(x) = g(x) \quad \text{a.e. } x \in X$$

と定義した関係  $\sim$  は  $\mathcal{L}^0(X, \mathcal{F}, m)$  における同値関係となり, この関係で  $\mathcal{L}^0(X, \mathcal{F}, m)$  を割った商集合を  $L^0(X, \mathcal{F}, m)$  と表す.

商集合における算法  $L^0(X, \mathcal{F}, m)$  の元である関数類 (同値類) を  $[f]$  ( $f$  は関数類の代表元) と表し,  $L^0(X, \mathcal{F}, m)$  における加法とスカラー倍を次のように定義すれば  $L^0(X, \mathcal{F}, m)$  は  $\mathbb{K}$  上の線形空間となる<sup>\*1</sup>:

$$[f] + [g] := [f + g] \quad (\forall [f], [g] \in L^0(X, \mathcal{F}, m)),$$

<sup>\*1</sup> この表現は well-defined, つまり代表元に依らずに値がただ一つに定まる. 任意の  $f' \in [f]$  と  $g' \in [g]$  に対して

$$[f + g] = [f' + g'], \quad [\alpha f'] = [\alpha f]$$

となるからである. 実際

$$\{f \neq g\} := \{x \in X; \quad f(x) \neq g(x)\}$$

と略記して

$$\begin{aligned} \{f + g \neq f' + g'\} &\subset \{f \neq f'\} \cup \{g \neq g'\}, \\ \{\alpha f \neq \alpha f'\} &= \{f \neq f'\} \end{aligned}$$

と表現でき, どれも右辺は  $m$ -零集合であるから  $[f + g] = [f' + g']$ ,  $[\alpha f'] = [\alpha f]$  が成り立つ.

$$\alpha[f] := [\alpha f] \quad (\forall [f] \in L^0(X, \mathcal{F}, m), \alpha \in \mathbb{K}).$$

また乗法も次のように定義できる:

$$[f][g] := [fg] \quad (\forall [f], [g] \in L^0(X, \mathcal{F}, m)).$$

この乗法は可換であり, 加法と併せて  $L^0(X, \mathcal{F}, m)$  は可換環をなす. 従って関数類に対して加減乗算が自由にできるようになった\*2. また  $[f][f] = [f^2]$  を  $[f]^2$  と表記し,  $[f]^n := [f]^{n-1}[f]$  と帰納的に定義すれば  $[f]^n = [f^n]$  となる.

商集合における順序 次に  $L^0(X, \mathcal{F}, m)$  における順序を定める.  $[f], [g] \in L^0(X, \mathcal{F}, m)$  に対して

$$[f] \leq [g] \stackrel{\text{def}}{\iff} f \leq g \quad m\text{-a.s.}$$

として関係“ $\leq$ ”(記号は  $\mathcal{L}^0(X, \mathcal{F}, m)$  におけるものと同じであるが) を定義すればこれは  $L^0(X, \mathcal{F}, m)$  において順序となる. この定義が代表元の取り方に依存しないことは

$$\{f' > g'\} \subset \{f \neq f'\} \cup \{f > g\} \cup \{g \neq g'\}$$

の右辺が零集合であることにより, また次に示すように順序の定義を満たしている:

- $f = f$  により  $[f] \leq [f]$ ,
- $[f] \leq [g]$  かつ  $[g] \leq [f]$  なら  $\{f > g\}$  と  $\{g > f\}$  は  $m$ -零集合だから  $[f] = [g]$ ,
- $[f] \leq [g]$  かつ  $[g] \leq [h]$  なら  $\{f > h\} \subset \{f > g\} \cup \{g > h\}$  により  $[f] \leq [h]$ .

補題 1.2.1 (商空間におけるノルムの定義).

$$\|[f]\|_{L^p} := \|f\|_{\mathcal{L}^p} \quad (1 \leq p \leq \infty, f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, m))$$

として  $\|\cdot\|_{L^p} : L^0(X, \mathcal{F}, m) \rightarrow \mathbb{R}$  を定義すればこれは well-defined である. つまり代表元に依らずに値がただ一つに定まる. 更に次で定義する空間

$$L^p(X, \mathcal{F}, m) := \{[f] \in L^0(X, \mathcal{F}, m) ; \|[f]\|_{L^p} < \infty\} \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

は  $\|\cdot\|_{L^p}$  をノルムとしてノルム空間となる.

証明.

well-defined であること  $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$  に対し, 任意に  $g \in [f]$  を選ぶ. 示すことは  $\|f\|_{\mathcal{L}^p}^p = \|g\|_{\mathcal{L}^p}^p$  が成り立つことである.

$$A := \{x \in X ; f(x) \neq g(x)\} \in \mathcal{F}$$

\*2 加法乗法が可換であることと結合則は代表元の関数の空間が加法乗法について可換であることと結合則を満たすことによる. また分配測は

$$\begin{aligned} ([f] + [g])[h] &= [f + g][h] = [(f + g)h] = [fh + gh] = [fh] + [gh] = [f][h] + [g][h], \\ [h]([f] + [g]) &= [h][f + g] = [h(f + g)] = [hf + hg] = [hf] + [hg] = [h][f] + [h][g] \end{aligned}$$

により成り立つ. そして零元は零写像の関数類で  $[0]$  と表し, 単位元は恒等的に 1 を取る関数の関数類で  $[1]$  と表す. また  $-[f] = [-f]$  であるから減法は

$$[f] - [g] := [f] + (-[g]) = [f] + [-g] = [f - g]$$

で定義される.



とおく.  $A$  は  $m(A) = 0$  を満たす.

$p = \infty$  の場合  $A^c$  の上で  $f(x) = g(x)$  となるから

$$\begin{aligned} \{x \in X; |g(x)| > \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}\} &\subset A + A^c \cap \{x \in X; |g(x)| > \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}\} \\ &= A + A^c \cap \{x \in X; |f(x)| > \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}\} \\ &\subset A + \{x \in X; |f(x)| > \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}\} \end{aligned}$$

が成り立ち, 最右辺は 2 項とも  $m$ -零集合であるから  $\|g\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}$  が従う. 逆向きの不等号も同様に示されて  $\|g\|_{\mathcal{L}^\infty} = \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}$  を得る.

$1 \leq p < \infty$  の場合  $m(A) = 0$  により

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p}^p = \int_X f(x) m(dx) = \int_{A^c} f(x) m(dx) = \int_{A^c} g(x) m(dx) = \int_X g(x) m(dx) = \|g\|_{\mathcal{L}^p}^p$$

が成り立つ.

ノルムとなること 任意に  $[f], [g] \in L^p(X, \mathcal{F}, m)$  と  $\alpha \in \mathbb{K}$  を取る.  $\|[f]\|_{L^p}$  の正値性は  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p}$  の正値性から従う. また  $m(f \neq 0) > 0$  なら  $\|f\|_{\mathcal{L}^p} > 0$  となるから, 対偶により  $\|[f]\|_{L^p} = 0$  なら  $[f]$  は零元  $[0]$ , 逆に  $[f] = [0]$  なら  $\|[f]\|_{L^p} = \|0\|_{\mathcal{L}^p} = 0$  となる.  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p}$  の同次性と Minkowski の不等式から

$$\begin{aligned} \|\alpha[f]\|_{L^p} &= \|[\alpha f]\|_{L^p} = \|\alpha f\|_{\mathcal{L}^p} = |\alpha| \|f\|_{\mathcal{L}^p} = |\alpha| \|[f]\|_{L^p} \\ \|[f] + [g]\|_{L^p} &= \|[f + g]\|_{L^p} = \|f + g\|_{\mathcal{L}^p} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p} + \|g\|_{\mathcal{L}^p} = \|[f]\|_{L^p} + \|[g]\|_{L^p} \end{aligned}$$

も成り立ち,  $\|\cdot\|_{L^p}$  が  $L^p(X, \mathcal{F}, m)$  においてノルムとなると示された.

■

**命題 1.2.2 ( $L^p$  の完備性).** 上で定義したノルム空間  $L^p(X, \mathcal{F}, m)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) は Banach 空間である.

**証明.** 任意に  $L^p(X, \mathcal{F}, m)$  の Cauchy 列  $[f_n] \in L^p(X, \mathcal{F}, m)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を取る. Cauchy 列であるから  $1/2$  に対して或る  $N_1 \in \mathbb{N}$  が取れて,  $n > m \geq N_1$  ならば  $\|[f_n] - [f_m]\|_{L^p} = \|f_n - f_m\|_{\mathcal{L}^p} < 1/2$  となる. ここで  $m = n_1$  と表記することにする. 同様に  $1/2^2$  に対して或る  $N_2 \in \mathbb{N}$  ( $N_2 > N_1$ ) が取れて,  $n' > m' \geq N_2$  ならば  $\|[f_{n'}] - [f_{m'}]\|_{L^p} < 1/2^2$  となる. 先ほどの  $n$  について,  $n > N_2$  となるように取れるからこれを  $n = n_2$  と表記し, 更に  $m' = n_2$  としておく. 今のところ

$$\|[f_{n_1}] - [f_{n_2}]\|_{L^p} < 1/2$$

と表示できる. 再び同様に  $1/2^3$  に対して或る  $N_3 \in \mathbb{N}$  ( $N_3 > N_2$ ) が取れて,  $n'' > m'' \geq N_3$  ならば  $\|[f_{n''}] - [f_{m''}]\|_{L^p} < 1/2^3$  となる. 先ほどの  $n'$  について  $n' > N_3$  となるように取れるからこれを  $n' = n_3$  と表記し, 更に  $m'' = n_3$  としておく. 今までのところで

$$\begin{aligned} \|[f_{n_1}] - [f_{n_2}]\|_{L^p} &< 1/2 \\ \|[f_{n_2}] - [f_{n_3}]\|_{L^p} &< 1/2^2 \end{aligned}$$

が成り立っている．数学的帰納法により

$$\| [f_{n_k} - f_{n_{k+1}}] \|_{L^p} < 1/2^k \quad (n_{k+1} > n_k, k = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.4)$$

が成り立つように自然数の部分列  $(n_k)_{k=1}^\infty$  を取ることができる．

$p = \infty$  の場合

$[f_{n_k}]$  の代表元  $f_{n_k}$  について,

$$\begin{aligned} A_k &:= \left\{ x \in X; \quad |f_{n_k}(x)| > \|f_{n_k}\|_{\mathcal{L}^\infty} \right\}, \\ A^k &:= \left\{ x \in X; \quad |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| > \|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_{\mathcal{L}^\infty} \right\} \end{aligned}$$

とおけば Hölder の不等式の証明中の補助定理より  $m(A_k) = m(A^k) = 0$  であり,

$$A := \left( \bigcup_{k=1}^\infty A_k \right) \cup \left( \bigcup_{k=1}^\infty A^k \right)$$

として  $m$ -零集合を定め

$$\hat{f}_{n_k}(x) = \begin{cases} f_{n_k}(x) & (x \notin A) \\ 0 & (x \in A) \end{cases} \quad (\forall x \in X)$$

と定義した  $\hat{f}_{n_k}$  もまた  $[f_{n_k}]$  の元となる． $\hat{f}_{n_k}$  は  $X$  上の有界可測関数であり

$$\| \hat{f}_{n_k} - \hat{f}_{n_{k+1}} \|_{\mathcal{L}^\infty} = \sup_{x \in X} |\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}_{n_{k+1}}(x)| < 1/2^k \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.5)$$

が成り立つから, 各点  $x \in X$  で  $(\hat{f}_{n_k}(x))_{k=1}^\infty$  は  $\mathbb{R}$  の Cauchy 列となり<sup>\*3</sup> 各点  $x \in X$  での極限を  $\hat{f}(x)$  と表す．一般に距離空間に値を取る可測関数列の各点収束の極限関数は可測関数であるから  $\hat{f}$  もまた可測  $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  である．また  $\hat{f}$  は有界である．実際式 (1.5) から任意の  $l > k$  に対し

$$|\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}_{n_l}(x)| \leq \sum_{j=k}^{l-1} |\hat{f}_{n_j}(x) - \hat{f}_{n_{j+1}}(x)| \leq \sum_{j=k}^{l-1} \sup_{x \in X} |\hat{f}_{n_j}(x) - \hat{f}_{n_{j+1}}(x)| < 1/2^{k-1}$$

が成り立つから, 極限関数  $\hat{f}(x)$  も

$$\sup_{x \in X} |\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}(x)| \leq 1/2^{k-1} \quad (1.6)$$

を満たすことになる．なぜなら, もし或る  $x \in X$  で  $\alpha := |\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}(x)| > 1/2^{k-1}$  となる場合, 任意の  $l > k$  に対し

$$0 < \alpha - 1/2^{k-1} < |\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}(x)| - |\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}_{n_l}(x)| \leq |\hat{f}_{n_l}(x) - \hat{f}(x)|$$

となり各点収束に反するからである．不等式 (1.6) により任意の  $x \in X$  において

$$|\hat{f}(x)| < |\hat{f}_{n_k}(x)| + 1/2^{k-1} \leq \| \hat{f}_{n_k} \|_{\mathcal{L}^\infty} + 1/2^{k-1}$$

---

<sup>\*3</sup> 任意の  $\epsilon > 0$  に対し  $1/2^N < \epsilon$  を満たす  $N \in \mathbb{N}$  を取れば, 全ての  $l > k > N$  に対して

$$|\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}_{n_l}(x)| \leq \sum_{j=k}^{l-1} |\hat{f}_{n_j}(x) - \hat{f}_{n_{j+1}}(x)| < \sum_{k>N} 1/2^k = 1/2^N < \epsilon$$

が成り立つ．

が成り立ち  $\hat{f}$  の有界性が判る. 以上で極限関数  $\hat{f}$  が有界可測関数であると示された.  $\hat{f}$  を代表元とする  $[\hat{f}] \in L^\infty(X, \mathcal{F}, m)$  に対し, 不等式 (1.6) により

$$\| [f_{n_k}] - [\hat{f}] \|_{L^\infty} = \| \hat{f}_{n_k} - \hat{f} \|_{\mathcal{L}^\infty} = \sup_{x \in X} |\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}(x)| \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty)$$

となり Cauchy 列  $([f_n])_{n=1}^\infty$  の部分列  $([f_{n_k}])_{k=1}^\infty$  は  $[\hat{f}]$  に収束する. 元の Cauchy 列も  $[\hat{f}]$  に収束するから  $L^\infty(X, \mathcal{F}, m)$  は Banach 空間である.

$1 \leq p < \infty$  の場合

$[f_{n_k}]$  の代表元  $f_{n_k}$  に対して

$$f_{n_k}(x) := f_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^k (f_{n_j}(x) - f_{n_{j-1}}(x)) \quad (1.7)$$

と表現できるから, これに対して

$$g_k(x) := |f_{n_1}(x)| + \sum_{j=1}^k |f_{n_j}(x) - f_{n_{j-1}}(x)|$$

として可測関数列  $(g_k)_{k=1}^\infty$  を定める. Minkowski の不等式と式 (1.4) より

$$\| g_k \|_{\mathcal{L}^p} \leq \| f_{n_1} \|_{\mathcal{L}^p} + \sum_{j=1}^k \| f_{n_j} - f_{n_{j-1}} \|_{\mathcal{L}^p} < \| f_{n_1} \|_{\mathcal{L}^p} + \sum_{j=1}^k 1/2^j < \| f_{n_1} \|_{\mathcal{L}^p} + 1 < \infty$$

が成り立つ. 各点  $x \in X$  で  $g_k(x)$  は  $k$  について単調増大であるから, 単調収束定理より

$$\| g \|_{\mathcal{L}^p}^p = \lim_{k \rightarrow \infty} \| g_k \|_{\mathcal{L}^p}^p < \| f_{n_1} \|_{\mathcal{L}^p}^p + 1 < \infty$$

となるので  $g \in L^p(X, \mathcal{F}, m)$  である. 従って

$$B_n := \{ x \in X ; \quad g(x) \leq n \} \in \mathcal{F},$$

$$B := \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

とおけば  $m(X \setminus B) = 0$  であり, 式 (1.7) の級数は  $B$  上で絶対収束する (各点).

$$f(x) := \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) & (x \in B) \\ 0 & (x \in X \setminus B) \end{cases}$$

として可測  $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  関数  $f$  を定義すれば,  $|f(x)| \leq g(x)$  ( $\forall x \in X$ ) と  $g^p$  の可積分性から  $f$  の関数類  $[f]$  は  $L^p(X, \mathcal{F}, m)$  の元となる. 関数列  $((f_{n_k})_{k=1}^\infty)$  は  $f$  に概収束し, また  $|f_{n_k}(x) - f(x)|^p \leq 2^p(|f_{n_k}(x)|^p + |f(x)|^p) \leq 2^{p+1}g(x)^p$  ( $\forall x \in X$ ) となるから, Lebesgue の収束定理により

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \| [f_{n_k}] - [f] \|_{L^p}^p = \lim_{k \rightarrow \infty} \| f_{n_k} - f \|_{\mathcal{L}^p}^p = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X |f_{n_k}(x) - f(x)|^p m(dx) = 0$$

が成り立ち, Cauchy 列  $([f_n])_{n=1}^\infty$  の部分列  $([f_{n_k}])_{k=1}^\infty$  が  $[f]$  に収束すると示された. 従って元の Cauchy 列も  $[f]$  に収束するから  $L^p(X, \mathcal{F}, m)$  は Banach 空間である.

■

## 第 2 章

# Lebesgue-Radon-Nikodym の定理

### 2.1 複素測度

$(X, \mathcal{M})$  を可測空間,  $\lambda$  を  $\mathcal{M}$  上の複素測度 (complex measure) とする.  $\lambda$  は複素数値であるから任意の  $E \in \mathcal{M}$  に対して  $|\lambda(E)| < \infty$  が成り立つ. また測度としての性質から, どの互いに素な集合列  $E_i \in \mathcal{M} (i = 1, 2, \dots)$  と

$$E := \sum_{i=1}^{\infty} E_i$$

に対して

$$\lambda(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i)$$

が成り立つが, 左辺が  $\mathbb{C}$  値であるから右辺の級数は収束していなくてはならない.  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  を任意の並び替え<sup>\*1</sup>として,  $(E_i)_{i=1}^{\infty}$  に対して

$$E = \sum_{i=1}^{\infty} E_{\sigma(i)}$$

が成り立つから, 測度の性質を持つ  $\lambda$  は

$$\lambda(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_{\sigma(i)})$$

を満たす. つまり複素数列  $(\lambda(E_i))_{i=1}^{\infty}$  は無条件に  $\lambda(E)$  に収束していることになり, Riemann の級数定理よりこの列は絶対収束する:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(E_i)| < \infty.$$

今,  $\lambda$  を支配するような或る  $\mathcal{M}$  上の測度  $\mu$ , つまり

$$|\lambda(E)| \leq \mu(E) \quad (\forall E \in \mathcal{M}) \tag{2.1}$$

---

<sup>\*1</sup>  $\sigma$  は  $\mathbb{N}$  から  $\mathbb{N}$  への全単射である.

を満たすものを、できるだけ小さいものとして取ろうと考える<sup>\*2</sup>。このような  $\mu$  は次を満たすことになる:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(E_i)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) = \mu(E).$$

ゆえに

$$\mu(E) \geq \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(E_i)| \quad (2.2)$$

でなくてはならず (上限は  $E$  のあらゆる分割  $E = \sum_i E_i$  に対して取るものである), ここで  $\mathcal{M}$  上の関数を

$$|\lambda|(E) := \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(E_i)| \quad (\forall E \in \mathcal{M}) \quad (2.3)$$

として定義してみれば,  $E$  自体が  $E$  の一つの分割であるから (2.3) より  $|\lambda|$  は  $\lambda$  を支配し, 更に, 後述することであるが,  $|\lambda|$  は  $\mathcal{M}$  上の測度でもあり (2.2) と併せて当座の問題の解となる.

**定義 2.1.1 (総変動・総変動測度).** 可測空間  $(X, \mathcal{M})$  上の複素測度  $\lambda$  に対し, 上で定めた測度  $|\lambda| : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty)$  を  $\lambda$  の総変動測度 (total variation measure) といい,  $|\lambda|(X)$  を  $\lambda$  の総変動 (total variation) という. 特に  $\lambda$  が正値有限測度である場合は  $\lambda = |\lambda|$  が成り立つ.<sup>\*3</sup>

以降で  $|\lambda|$  の性質

- (1)  $|\lambda|$  は測度である.
- (2)  $|\lambda|(X) < \infty$  が成り立つ.

を証明する. 特に (2) により任意の  $E \in \mathcal{M}$  に対し

$$|\lambda(E)| \leq |\lambda|(E) \leq |\lambda|(X) < \infty$$

が従うから, 複素測度は有界であると判明する.

**定理 2.1.2 ( $|\lambda|$  は測度となる).** 可測空間  $(X, \mathcal{M})$  上の複素測度  $\lambda$  に対し (2.3) で定義する  $|\lambda|$  は  $(X, \mathcal{M})$  において測度となる.

<sup>\*2</sup> つまり (2.1) を満たす  $\mu$  のうちから, 同様に (2.1) を満たす任意の測度  $\mu'$  に対し

$$\mu(E) \leq \mu'(E) \quad (\forall E \in \mathcal{M})$$

を満たすものを選ぶかどうかを考える.

<sup>\*3</sup> 複素測度の虚部が 0 であるものとして考えれば  $0 \leq \lambda(E) \leq \lambda(X) < \infty$  ( $\forall E \in \mathcal{M}$ ) が成り立つ. また実際任意の  $E \in \mathcal{M}$  とその分割  $(E_i)_{i=1}^{\infty}$  に対して

$$|\lambda|(E) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(E_i)| = \sup \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i) = \sup \lambda(E) = \lambda(E)$$

が成り立つ.

証明. (2.3) により  $|\lambda|$  は正值であるから, ここで示すことは  $|\lambda|$  が完全加法的であるということである. 任意に  $\epsilon > 0$  とどの二つも互いに素な集合列  $E_i \in \mathcal{M}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) を取る. 示すことは  $E := \sum_{i=1}^{\infty} E_i$  に対して

$$|\lambda|(E) = \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda|(E_i)$$

が成り立つことである. (2.3) により  $E_i$  の分割  $(A_{ij})_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$  を

$$|\lambda|(E_i) \geq \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda|(A_{ij}) > |\lambda|(E_i) - \epsilon/2^i$$

となるように取ることができる. また  $E = \sum_{i,j=1}^{\infty} A_{ij}$  でもあるから

$$|\lambda|(E) \geq \sum_{i,j=1}^{\infty} |\lambda|(A_{ij}) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda|(A_{ij}) > \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda|(E_i) - \epsilon$$

が成り立つ.  $\epsilon > 0$  は任意であるから

$$|\lambda|(E) \geq \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda|(E_j)$$

が従う. 逆向きの不等号について,  $E$  の任意の分割  $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$  に対し

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda|(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_j \cap E_i) \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(A_j \cap E_i)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda|(E_i)^{*4}$$

が成り立つから, 左辺の上限を取って

$$|\lambda|(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda|(E_i)$$

を得る. ■

定理 2.1.3 (総変動測度は有界). 可測空間  $(X, \mathcal{M})$  上の複素測度  $\lambda$  の総変動測度  $|\lambda|$  について次が成り立つ:

$$|\lambda|(X) < \infty.$$

先ずは次の補題を示す.

---

\*4 正項級数は和の順序に依らないから

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(A_j \cap E_i)| = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda(A_j \cap E_i)|$$

が成り立つ. これと (2.3) を併せれば最後の不等号が従う.

補題 2.1.4.  $z_1, \dots, z_N$  を複素数とする. これらの添数集合の或る部分  $S \subset \{1, \dots, N\}$  を抜き取れば次が成り立つ:

$$\left| \sum_{k \in S} z_k \right| \geq \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N |z_k|.$$

証明 (補題).  $z_k = |z_k|e^{i\alpha_k}$  ( $-\pi \leq \alpha_k < \pi$ ,  $k = 1, \dots, N$ ) となるように  $\alpha_1, \dots, \alpha_N$  を取る. ここで  $i$  は虚数単位である. また  $-\pi \leq \theta \leq \pi$  に対し

$$S(\theta) := \{ k \in \{1, \dots, N\}; \cos(\alpha_k - \theta) > 0 \}$$

とおく. このとき

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k \in S(\theta)} z_k \right| &= |e^{-i\theta}| \left| \sum_{k \in S(\theta)} z_k \right| = \left| \sum_{k \in S(\theta)} |z_k| e^{i(\alpha_k - \theta)} \right| \\ &\geq \Re \left[ \sum_{k \in S(\theta)} |z_k| e^{i(\alpha_k - \theta)} \right] = \sum_{k \in S(\theta)} |z_k| \cos(\alpha_k - \theta) = \sum_{k=1}^N |z_k| \cos^+(\alpha_k - \theta)^{*5} \end{aligned}$$

が成り立ち, 最右辺は  $\theta$  に関して連続となるから  $[-\pi, \pi]$  上で式を最大にする  $\theta_0$  が存在する.  $S := S(\theta_0)$  とおき,  $\theta_0$  と任意の  $\theta \in [-\pi, \pi]$  に対して

$$\left| \sum_{k \in S} z_k \right| \geq \sum_{k=1}^N |z_k| \cos^+(\alpha_k - \theta_0) \geq \sum_{k=1}^N |z_k| \cos^+(\alpha_k - \theta)$$

が成り立つから, 左辺右辺を積分して

$$\left| \sum_{k \in S} z_k \right| \geq \sum_{k=1}^N |z_k| \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi]} \cos^+(\alpha_k - \theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N |z_k|$$

が成り立つ<sup>\*6</sup>. ■

証明 (定理 2.1.3).

第一段 或る  $E \in \mathcal{M}$  に対し  $|\lambda|(E) = \infty$  が成り立っていると仮定する.  $t := 2\pi(1 + |\lambda|(E))$  とおけば (複素測度であるから  $|\lambda|(E) < \infty$ )  $|\lambda|(E) > t$  となるから, (2.3) より  $E$  の分割  $(E_i)_{i=1}^\infty$  を

$$\sum_{i=1}^\infty |\lambda|(E_i) > t$$

<sup>\*5</sup>  $\cos^+ x = 0 \vee \cos x$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) である.

<sup>\*6</sup> 最後の積分について, 実際三角関数の周期性を使えば任意の  $\alpha \in \mathbb{R}$  に対して

$$\int_{[-\pi, \pi]} \cos^+(\alpha - \theta) d\theta = \int_{[\alpha - \pi, \alpha + \pi]} \cos^+ \theta d\theta = \int_{[-\pi, \pi]} \cos^+ \theta d\theta = 1$$

が成り立つ.

となるように取ることができる．従って或る  $N \in \mathbb{N}$  を取れば

$$\sum_{i=1}^N |\lambda(E_i)| > t$$

が成り立つ． $z_i := \lambda(E_i)$  ( $i = 1, \dots, N$ ) として補題 2.1.4 を使えば，或る  $S \subset \{1, \dots, N\}$  に対し

$$\left| \sum_{k \in S} \lambda(E_k) \right| \geq \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N |\lambda(E_k)| > \frac{t}{2\pi} > 1$$

となる． $A := \sum_{k \in S} E_k$  において  $B := E - A$  とすれば

$$|\lambda(B)| = |\lambda(E) - \lambda(A)| \geq |\lambda(A)| - |\lambda(E)| > \frac{t}{2\pi} - |\lambda(E)| = 1$$

が成り立つから，つまり  $|\lambda|(E) = \infty$  の場合， $E$  の直和分割  $A, B$  で

$$|\lambda(A)| > 1, \quad |\lambda(B)| > 1$$

を満たすものが取れると示された．そして  $|\lambda|$  の加法性から

$$|\lambda|(E) = |\lambda|(A) + |\lambda|(B)$$

も成り立つから，この場合右辺の少なくとも一方は  $\infty$  となる．

**第二段** 背理法により定理の主張することを証明する．今  $|\lambda|(X) = \infty$  と仮定すると，前段の結果より  $X$  の或る直和分割  $A_1, B_1$  で

$$|\lambda|(B_1) = \infty, \quad |\lambda(A_1)| > 1, \quad |\lambda(B_1)| > 1$$

を満たすものが取れる． $B_1$  についてもその直和分割  $A_2, B_2$  で

$$|\lambda|(B_2) = \infty, \quad |\lambda(A_2)| > 1, \quad |\lambda(B_2)| > 1$$

を満たすものが取れる．この操作を繰り返せば，どの二つも互いに素な集合列  $(A_j)_{j=1}^{\infty}$  で  $|\lambda(A_j)| > 1$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) を満たすものを構成できる． $A := \sum_{j=1}^{\infty} A_j$  について， $|\lambda(A)| < \infty$  でなくてはならないから，Riemann の級数定理より

$$\lambda(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(A_j)$$

の右辺は絶対収束する．従って  $0 < \epsilon < 1$  に対し或る  $N \in \mathbb{N}$  が存在して  $n > N$  なら  $|\lambda(A_n)| < \epsilon$  が成り立つはずであるが，これは  $|\lambda(A_n)| > 1$  であることに矛盾する．背理法により  $|\lambda|(X) < \infty$  であることが示された。

■



定義 2.1.5 (複素測度の空間・ノルムの定義). 可測空間  $(X, \mathcal{M})$  上の複素測度の全体を  $CM$  と表す.  $\lambda, \mu \in CM, c \in \mathbb{C}, E \in \mathcal{M}$  に対し

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu)(E) &:= \lambda(E) + \mu(E), \\(c\lambda)(E) &:= c\lambda(E)\end{aligned}\tag{2.4}$$

を線型演算として  $CM$  は線形空間となり, 特に定理 2.1.3 により  $\lambda \in CM$  に対して  $|\lambda| \in CM$  が成り立つ. また  $\|\cdot\| : CM \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$\|\lambda\| := |\lambda|(X) \quad (\lambda \in CM)$$

と定義すればこれは  $CM$  においてノルムとなる.

上で定義した  $\|\cdot\|$  がノルムとなることを証明する. 総変動の正值性からノルムの正值性が従うから, 以下示すのは同次性と三角不等式である.

同次性 総変動測度の定義 (2.3) とスカラ倍の定義 (2.4) より, 任意の  $\lambda \in CM$  と  $c \in \mathbb{C}$  に対し

$$\|c\lambda\| = \sup \sum_i |(c\lambda)(E_i)| = \sup \sum_i |c\lambda(E_i)| = |c| \sup \sum_i |\lambda(E_i)| = |c| \|\lambda\|$$

が成り立つ.

三角不等式 任意の  $\lambda, \mu \in CM$  に対し

$$\|\lambda + \mu\| = |\lambda + \mu|(X) = \sup \sum_i |(\lambda + \mu)(E_i)| = \sup \sum_i |\lambda(E_i) + \mu(E_i)|$$

となるが, ここで

$$\sum_i |\lambda(E_i) + \mu(E_i)| \leq \sum_i |\lambda(E_i)| + \sum_i |\mu(E_i)| \leq \|\lambda\| + \|\mu\|$$

が成り立つから

$$\|\lambda + \mu\| = \sup \sum_i |\lambda(E_i) + \mu(E_i)| \leq \|\lambda\| + \|\mu\|$$

が従う.

定義 2.1.6 (正変動と負変動・Jordan の分解). 可測空間  $(X, \mathcal{M})$  上の複素測度の全体を  $CM$  とし, 実数値の  $\mu \in CM$  を取る (このような  $\mu$  を符号付き測度 (signed measure) という).

$$\mu^+ := \frac{1}{2}(|\mu| + \mu), \quad \mu^- := \frac{1}{2}(|\mu| - \mu)$$

とおけば  $\mu^+, \mu^-$  はどちらも正值有限測度となる<sup>\*7</sup>.  $\mu^+$  を  $\mu$  の正変動 (positive variation) といひ  $\mu^-$  を  $\mu$  の負変動 (negative variation) という. また

$$\mu = \mu^+ - \mu^-, \quad |\mu| = \mu^+ + \mu^-$$

が成り立ち, ここで示した符号付き測度の正変動と負変動による表現を Jordan の分解という.

<sup>\*7</sup>  $\mathcal{M}$  上で  $|\mu|(E) \geq |\mu(E)|$  であることと定理 2.1.3 による.

定義 2.1.7 (絶対連続・特異).  $(X, \mathcal{M})$  を可測空間,  $\mu$  を  $\mathcal{M}$  上の正値測度<sup>\*8</sup>,  $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$  を  $\mathcal{M}$  上の任意の測度 (正値測度或は複素測度) とする.

- $\lambda$  が  $\mu$  に関して絶対連続である (absolutely continuous) ということを

$$\lambda \ll \mu$$

と書き, その意味は, 「 $\mu(E) = 0$  となる全ての  $E \in \mathcal{M}$  について  $\lambda(E) = 0$ 」である.

- 或る  $A \in \mathcal{M}$  があって  $\lambda(E) = \lambda(A \cap E)$  ( $\forall E \in \mathcal{M}$ ) が成り立っているとき,  $\lambda$  は  $A$  に集中している (concentrated on  $A$ ) という.  $\lambda_1, \lambda_2$  に対し或る  $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$  があって,  $\lambda_1$  が  $A_1$  に集中,  $\lambda_2$  が  $A_2$  に集中しかつ  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$  を満たしているとき, これを互いに特異である (mutually singular) とい

$$\lambda_1 \perp \lambda_2$$

と書く.

命題 2.1.8 (絶対連続性と特異性に関する性質).  $(X, \mathcal{M})$  を可測空間,  $\mu$  を  $\mathcal{M}$  上の正値測度,  $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$  を  $\mathcal{M}$  上の複素測度とする. このとき以下に羅列する事柄が成り立つ.

- (1)  $\lambda$  が  $A \in \mathcal{M}$  に集中しているなら  $|\lambda|$  も  $A$  に集中している.
- (2)  $\lambda_1 \perp \lambda_2$  ならば  $|\lambda_1| \perp |\lambda_2|$ .
- (3)  $\lambda_1 \perp \mu$  かつ  $\lambda_2 \perp \mu$  ならば  $\lambda_1 + \lambda_2 \perp \mu$ .
- (4)  $\lambda_1 \ll \mu$  かつ  $\lambda_2 \ll \mu$  ならば  $\lambda_1 + \lambda_2 \ll \mu$ .
- (5)  $\lambda \ll \mu$  ならば  $|\lambda| \ll \mu$ .
- (6)  $\lambda_1 \ll \mu$  かつ  $\lambda_2 \perp \mu$  ならば  $\lambda_1 \perp \lambda_2$ .
- (7)  $\lambda \ll \mu$  かつ  $\lambda \perp \mu$  ならば  $\lambda = 0$ .

## 2.2 Lebesgue-Radon-Nikodym の定理

補題 2.2.1.  $(X, \mathcal{M})$  を可測空間,  $\mu$  を  $\mathcal{M}$  上の  $\sigma$ -有限な正値測度とする. この  $\mu$  に対し次を満たす  $w \in \mathcal{L}^1(\mu)$ <sup>\*9</sup> が存在する:

$$0 < w(x) < 1 \quad (\forall x \in X), \quad \int_X w(x) \mu(dx) < 1.$$

<sup>\*8</sup> 正値測度という場合は  $\infty$  も取りうる. 従って正値測度は複素測度の範疇にはない.  $\mu$  として例えば  $k$  次元 Lebesgue 測度を想定している.

<sup>\*9</sup> 以後測度が定義されている空間は同じだから  $\mathcal{L}^1(\mu) = \mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$  と略記する.  $L^p$  についても同様に略記する.

証明.  $\mu$  は  $(X, \mathcal{M})$  において  $\sigma$ -有限であるから,  $\mu(E_n) < \infty$  かつ  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$  を満たす集合の系  $(E_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$  が存在する.

$$w_n(x) := \begin{cases} 0 & (x \in X - E_n) \\ \frac{1}{2^n(1+\mu(E_n))} & (x \in E_n) \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

として定義した関数  $w_n$  はどれも可測  $\mathcal{M}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  であり, そして

$$w(x) := \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x) \quad (\forall x \in X)$$

として  $w$  を定義すれば, これもまた可測  $\mathcal{M}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  であり  $0 < w < 1$  を満たす. 実際

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n(x) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

となるから級数は各点  $x \in X$  で収束し, 従って  $w$  の可測性が従う. また任意の  $x \in X$  は或る  $E_n$  に属しているから  $w(x) \geq w_n(x) > 0$  となり, ゆえに  $0 < w < 1$  も従う. 最後に  $w$  が  $\mu$  について可積分であることを示す. これは単調収束定理より

$$\int_X w(x) \mu(dx) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X w_n(x) \mu(dx) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(E_n)}{2^n(1+\mu(E_n))} < 1$$

が成り立つことによる. ■

定理 2.2.2 (Lebesgue-Radon-Nikodym).  $(X, \mathcal{M})$  を可測空間,  $\lambda$  を  $\mathcal{M}$  上の複素測度, そして  $\mu$  を  $\mathcal{M}$  上の  $\sigma$ -有限な正值測度とする. このとき次の二つの主張が成り立つ:

(1) Lebesgue の分解  $\lambda$  に対して或る複素測度  $\lambda_a, \lambda_s$  が存在し,

$$\lambda(E) = \lambda_a(E) + \lambda_s(E) \quad (\forall E \in \mathcal{M})$$

かつ  $\lambda_a \ll \mu, \lambda_s \perp \mu$  を満たす. これを Lebesgue の分解といい, 分解は一意である.

(2) 密度関数の存在 (1) の  $\lambda_a$  に対し或る  $[h] \in L^1(\mu)$  がただ一つだけ存在し

$$\lambda_a(E) = \int_E h(x) \mu(dx) \quad (\forall E \in \mathcal{M})$$

を満たす.  $\lambda_a$  に対する上の関数  $h$  を Radon-Nikodym の密度関数という.

証明.

分解と密度関数の一意性 まずは Lebesgue 分解について証明する.  $\lambda$  の分解が  $\lambda_a, \lambda_s$  の組と  $\tilde{\lambda}_a, \tilde{\lambda}_s$  の組の二つあるとして  $(\lambda_a, \tilde{\lambda}_a \ll \mu, \lambda_s, \tilde{\lambda}_s \perp \mu)$ ,

$$\lambda_a - \tilde{\lambda}_a = \tilde{\lambda}_s - \lambda_s$$

とできるから, 命題 2.1.8 により両辺とも  $\ll \mu$  かつ  $\perp \mu$  を満たす. 命題 2.1.8 により絶対連続性と特異性を両方持つ場合は零写像となるのだから

$$\lambda_a = \tilde{\lambda}_a, \quad \lambda_s = \tilde{\lambda}_s$$

となる。密度関数の一意性についても、 $\lambda_a$  に対し  $[h], [\tilde{h}] \in L^1(\mu)$  が存在して

$$\int_E h \, d\mu = \int_E \tilde{h} \, d\mu \quad (\forall E \in \mathcal{M})$$

が成り立つなら、 $\mathcal{M}$  の元  $\{h > \tilde{h}\}, \{h < \tilde{h}\}$  はいずれも  $\mu$  測度 0 であるから  $h = \tilde{h}$   $\mu$ -a.e. が従い  $[h] = [\tilde{h}]$  となる。

**分解と密度関数の存在** 正值有限測度に対して示せば十分である<sup>\*10</sup>。  $\lambda$  を正值有限測度とする。  $\mu$  に対し補題 (2.2.1) の通り関数  $w$  を構成し、

$$\varphi(E) := \lambda(E) + \int_E w(x) \, \mu(dx) \quad (\forall E \in \mathcal{M})$$

として  $(X, \mathcal{M})$  上の正值有限測度  $\varphi$  を作る。このとき任意の可測  $\mathcal{M}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  関数  $f \geq 0$  に対し

$$\int f(x) \, \varphi(dx) = \int f(x) \, \lambda(dx) + \int f(x) w(x) \, \mu(dx) \quad (2.5)$$

が成り立つから、特に  $[f] \in L^2(\varphi)$  に対しては Hölder の不等式より

$$\left| \int_X f(x) \, \lambda(dx) \right| \leq \int_X |f(x)| \, \lambda(dx) \leq \| [f] \|_{L^2(\varphi)}^{\frac{1}{2}} \varphi(X)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

となり、写像

$$F : L^2(\varphi) \ni [f] \mapsto \int_X f(x) \, \lambda(dx)$$

は連続線型である。従って Reisz の表現定理より  $[f]$  に対し唯一つの  $[g] \in L^2(\varphi)$  が存在して

$$F([f]) = \int_X f(x) \, \lambda(dx) = \int_X f(x) g(x) \, \varphi(dx) \quad (\forall [f] \in L^2(\varphi)) \quad (2.6)$$

を満たす。(2.6) より  $f = \mathbb{1}_E$  ( $E \in \mathcal{M}$ ) とおけば

$$\lambda(E) = \int_E g(x) \, \varphi(dx)$$

<sup>\*10</sup> Lebesgue の分解と密度関数の存在の一意性を利用すれば、正值測度の場合に示すので十分である：

$$\lambda_1(E) := \Re [\lambda(E)], \quad \lambda_2(E) := \Im [\lambda(E)] \quad (\forall E \in \mathcal{M})$$

として  $\lambda$  の実部と虚部を表し、 $\lambda_1, \lambda_2$  をそれぞれ正変動  $\lambda_1^+, \lambda_2^+$  と負変動  $\lambda_1^-, \lambda_2^-$  に Jordan 分解する。 $\lambda_1^+, \lambda_2^+, \lambda_1^-, \lambda_2^-$  のそれぞれに対し Lebesgue 分解と密度関数が存在するとして、分解を  $\lambda_{1,a}^+, \lambda_{1,s}^+, \lambda_{2,a}^+, \lambda_{2,s}^+, \lambda_{1,a}^-, \lambda_{1,s}^-, \lambda_{2,a}^-, \lambda_{2,s}^-$ 、密度関数を  $h_1^+, h_2^+, h_1^-, h_2^-$  と表す。 $\lambda$  の分解について、

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_1^+ - \lambda_1^- + i(\lambda_2^+ - \lambda_2^-) \\ &= \lambda_{1,a}^+ - \lambda_{1,a}^- + \lambda_{1,s}^+ - \lambda_{1,s}^- + i(\lambda_{2,a}^+ - \lambda_{2,a}^- + \lambda_{2,s}^+ - \lambda_{2,s}^-) \\ &= \{\lambda_{1,a}^+ - \lambda_{1,a}^- + i(\lambda_{2,a}^+ - \lambda_{2,a}^-)\} + \{\lambda_{1,s}^+ - \lambda_{1,s}^- + i(\lambda_{2,s}^+ - \lambda_{2,s}^-)\} \end{aligned}$$

と表現できて、命題 2.1.8 により  $\lambda_{1,a}^+ - \lambda_{1,a}^- + i(\lambda_{2,a}^+ - \lambda_{2,a}^-) \ll \mu$  かつ  $\lambda_{1,s}^+ - \lambda_{1,s}^- + i(\lambda_{2,s}^+ - \lambda_{2,s}^-) \perp \mu$  が成り立つからこれは  $\lambda$  の Lebesgue 分解である。また密度関数に対しても

$$h = h_1^+ - h_1^- + i(h_2^+ - h_2^-)$$

とおけば  $[h] \in L^1(\mu)$  であり、

$$\int h \, d\mu = \int h_1^+ - h_1^- + i(h_2^+ - h_2^-) \, d\mu = \lambda_{1,a}^+ - \lambda_{1,a}^- + i(\lambda_{2,a}^+ - \lambda_{2,a}^-) = \lambda_a$$

が成り立つ。

となるから、 $\varphi(E) > 0$  となる  $E \in \mathcal{M}$  に対し

$$0 \leq \frac{1}{\varphi(E)} \int_E g \, d\varphi = \frac{\lambda(E)}{\varphi(E)} \leq 1$$

が成り立つ。書き直せば

$$0 \leq \int_E g \, d\varphi \leq \varphi(E) \quad (\forall E \in \mathcal{M})$$

が成り立つ<sup>\*11</sup>。これより  $0 \leq g \leq 1$   $\varphi$ -1.a.e. が成り立つから、 $g$  を零集合上で修正して  $0 \leq g(x) \leq 1$  ( $\forall x \in X$ ) とする。

ここで式 (2.6) を式 (2.5) に適用すれば

$$\begin{aligned} \int f(x) \varphi(dx) &= \int f(x)g(x) \varphi(dx) + \int f(x)w(x) \mu(dx) \\ \Rightarrow \int f(x)(1 - g(x)) \varphi(dx) &= \int f(x)w(x) \mu(dx) \end{aligned}$$

が成り立ち、 $f = \mathbf{1}_E$  ( $E \in \mathcal{M}$ ) として

$$\int_E 1 - g(x) \varphi(dx) = \int_E w(x) \mu(dx)$$

と表せる。

$$A := \{0 \leq g < 1\}, \quad B := \{g = 1\}$$

に対して

$$\lambda_a(E) := \lambda(E \cap A), \quad \lambda_s(E) := \lambda(E \cap B), \quad (\forall E \in \mathcal{M})$$

として  $\lambda_a, \lambda_s$  を定義すると、 $\lambda_a$  は  $A$  に、 $\lambda_s$  は  $B$  に集中し、また  $A + B = X$  より  $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$  となる。

$$0 = \int_B 1 - g(x) \varphi(dx) = \int_B w(x) \mu(dx)$$

であることと  $w > 0$  により  $\mu(B) = 0$  となり  $\lambda_s \perp \mu$  が従う。また

$$h(x) := \begin{cases} w(x)/(1 - g(x)) & (x \in A) \\ 0 & (x \in B) \end{cases}$$

とおけば、Lebesgue の収束定理より任意の  $E \in \mathcal{M}$  に対して

$$\lambda_a(E) = \lambda(E \cap A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E \cap A} (1 - g^{n+1}) \, d\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E \cap A} (1 + g + \cdots + g^n)w \, d\mu = \int_E h \, d\mu$$

が成り立つ。 $\lambda_a(X) < \infty$  であるから  $h$  の可積分性が従い、さらに  $\lambda_a \ll \mu$  であることも判る。

■

<sup>\*11</sup>  $g$  の  $\varphi$  に関する可積分性より、この関係は  $\varphi(E) > 0$  の場合に限らず成り立つ。