確率微分方程式講義録

基礎工学研究科システム創成専攻修士 1 年
学籍番号 29C17095
百合川尚学

2017 年 12 月 7 日

1　Hölder の不等式と Minkowski の不等式

$\mathbb{K}$ を $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 或は $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ とおく．測度空間を $(X, \mathcal{F}, m)$ とし，可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ 関数 f に対して

$$\|f\|_{\mathscr{L}^p} := \begin{cases} \inf\{\, r \in \mathbb{R}\,; \quad |f(x)| \leq r,\ \text{a.e.}x \in X \,\} & (p = \infty) \\ \left(\int_X |f(x)|^p \, m(dx)\right)^{\frac{1}{p}} & (0 < p < \infty) \end{cases}$$

と定め，

$$\mathscr{L}^p(X, \mathcal{F}, m) := \{\, f : X \to \mathbb{K}\,; \quad f : \text{可測}\ \mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{K}),\ \|f\|_{\mathscr{L}^p} < \infty \,\} \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

として空間 $\mathscr{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$ を定義する．この空間は $\mathbb{K}$ 上の線形空間となるが，そのことを保証するために次の二つの不等式が成り立つことを証明する．

定理 1.1 (Hölder の不等式)**.**　$1 \leq p, q \leq \infty$，$p + q = pq$ ($p = \infty$ なら $q = 1$) とする．このとき任意の可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ 関数 f, g に対して次が成り立つ:

$$\int_X |f(x)g(x)| \, m(dx) \leq \|f\|_{\mathscr{L}^p} \|g\|_{\mathscr{L}^q}. \tag{1}$$

まず次の補助定理を証明する．

補題 1.2.　$f \in \mathscr{L}^\infty(X, \mathcal{F}, m)$ ならば

$$|f(x)| \leq \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} \quad (\text{a.e.}x \in X).$$

証明 (補題**??**)**.**　$\mathscr{L}^\infty(X, \mathcal{F}, m)$ の定義により任意の実数 $\alpha > \|f\|_{\mathscr{L}^\infty}$ に対して

$$m(\{\, x \in X\,; \quad |f(x)| > \alpha \,\}) = 0$$

が成り立つから，

$$\{\, x \in X\,; \quad |f(x)| > \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} \,\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\, x \in X\,; \quad |f(x)| > \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} + 1/n \,\}$$

の右辺は m-零集合となる．■

証明 (定理**??**)**.**　定理の証明に入る．

$p = \infty$, $q = 1$ の場合　$\|f\|_{\mathscr{L}^\infty} = \infty$ 又は $\|g\|_{\mathscr{L}^1} = \infty$ なら不等式 (1) は成り立つから，以下では $\|f\|_{\mathscr{L}^\infty} < \infty$ かつ $\|g\|_{\mathscr{L}^1} < \infty$ の場合を考える．補助定理により或る m-零集合 $A \in \mathcal{F}$ を除いて $|f(x)| \leq \|f\|_{\mathscr{L}^\infty}$ が成り立つから

$$|f(x)g(x)| \leq \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} |g(x)| \quad (\forall x \in X \backslash A).$$

とでき，従って

$$\int_X |f(x)g(x)|\, m(dx) = \int_{X\setminus A} |f(x)g(x)|\, m(dx) \le \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} \int_{X\setminus A} |g(x)|\, m(dx) = \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} \|g\|_{\mathscr{L}^1}$$

となり不等式 (1) が成り立つ．

$1 < p, q < \infty$ の場合 $\|f\|_{\mathscr{L}^p} = \infty$ 又は $\|g\|_{\mathscr{L}^q} = \infty$ なら不等式 (1) は成り立つから，以下では $\|f\|_{\mathscr{L}^p} < \infty$ かつ $\|g\|_{\mathscr{L}^q} < \infty$ の場合を考える．$\|f\|_{\mathscr{L}^p} = 0$ であるとすると

$$B := \{\, x \in X \,;\quad |f(x)| > 0 \,\}$$

は m-零集合となるから，

$$\int_X |f(x)g(x)|\, m(dx) = \int_B |f(x)g(x)|\, m(dx) + \int_{X\setminus B} |f(x)g(x)|\, m(dx) = 0$$

となり不等式 (1) が成り立つ．$\|g\|_{\mathscr{L}^q} = 0$ の場合も同じである．

最後に $0 < \|f\|_{\mathscr{L}^p}, \|g\|_{\mathscr{L}^q} < \infty$ の場合を示す．$-\log t \quad (t > 0)$ は凸関数であるから，$1/p + 1/q = 1$ に対して

$$-\log\left(\frac{s}{p} + \frac{t}{q}\right) \le \frac{1}{p}(-\log s) + \frac{1}{q}(-\log t) \quad (\forall s, t > 0)$$

が成り立ち，従って

$$s^{1/p} t^{1/q} \le \frac{s}{p} + \frac{t}{q} \quad (\forall s, t > 0)$$

を得る．この不等式を用いれば

$$F(x) := |f(x)|^p / \|f\|_{\mathscr{L}^p}^p, \quad G(x) := |g(x)|^q / \|g\|_{\mathscr{L}^q}^q \quad (\forall x \in X)$$

とした可積分関数 F, G に対し

$$F(x)^{1/p} G(x)^{1/q} \le \frac{1}{p} F(x) + \frac{1}{q} G(x) \quad (\forall x \in X)$$

となるから，両辺を積分して

$$\begin{aligned}
\int_X F(x)^{1/p} G(x)^{1/q}\, m(dx) &\le \frac{1}{p} \int_X F(x)\, m(dx) + \frac{1}{q} \int_X G(x)\, m(dx) \\
&= \frac{1}{p} \frac{1}{\|f\|_{\mathscr{L}^p}^p} \int_X |f(x)|^p\, m(dx) + \frac{1}{q} \frac{1}{\|g\|_{\mathscr{L}^q}^q} \int_X |g(x)|^q\, m(dx) \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1
\end{aligned}$$

が成り立つ．最左辺と最右辺を比べて

$$\int_X \frac{|f(x)|}{\|f\|_{\mathscr{L}^p}} \frac{|g(x)|}{\|g\|_{\mathscr{L}^q}}\, m(dx) = \int_X F(x)^{1/p} G(x)^{1/q}\, m(dx) \le 1$$

となるから不等式

$$\int_X |f(x)g(x)|\, m(dx) \le \|f\|_{\mathscr{L}^p} \|g\|_{\mathscr{L}^q}$$

が示された． ∎

定理 1.3 (Minkowski の不等式). $1 \leq p \leq \infty$ とする．このとき任意の可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ 関数 f, g に対して次が成り立つ:

$$\|f+g\|_{\mathscr{L}^p} \leq \|f\|_{\mathscr{L}^p} + \|g\|_{\mathscr{L}^p}. \tag{2}$$

証明.

$p = \infty$ の場合　各点 $x \in X$ で

$$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$$

となるから，$\|f\|_{\mathscr{L}^\infty} = \infty$ 又は $\|g\|_{\mathscr{L}^\infty} = \infty$ なら不等式 (2) は成り立つ．$\|f\|_{\mathscr{L}^\infty} < \infty$ かつ $\|g\|_{\mathscr{L}^\infty} < \infty$ の場合は

$$C \coloneqq \{\, x \in X\,;\quad |f(x)| > \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} \,\} \bigcup \{\, x \in X\,;\quad |g(x)| > \|g\|_{\mathscr{L}^\infty} \,\}$$

が m-零集合となり

$$|f(x)+g(x)| \leq \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} + \|g\|_{\mathscr{L}^\infty} \quad (\forall x \in X \backslash C)$$

を得て $\|\cdot\|_{\mathscr{L}^\infty}$ の定義と併せて不等式 (2) が成り立つ．

$p = 1$ の場合

$$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \quad (\forall x \in X)$$

の両辺を積分することにより不等式 (2) が成り立つ．

$1 < p < \infty$ の場合　$p + q = pq$ が成り立つように $q > 1$ を取る．

$$|f(x)+g(x)|^p = |f(x)+g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1} \leq |f(x)||f(x)+g(x)|^{p-1} + |g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}$$

の両辺を積分すれば，Hölder の不等式により

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{\mathscr{L}^p}^p &= \int_X |f(x)+g(x)|^p \, m(dx) \\
&\leq \int_X |f(x)||f(x)+g(x)|^{p-1} \, m(dx) + \int_X |g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1} \, m(dx) \\
&\leq \left(\int_X |f(x)|^p \, m(dx) \right)^{1/p} \left(\int_X |f(x)+g(x)|^{q(p-1)} \, m(dx) \right)^{1/q} \\
&\qquad + \left(\int_X |g(x)|^p \, m(dx) \right)^{1/p} \left(\int_X |f(x)+g(x)|^{q(p-1)} \, m(dx) \right)^{1/q} \\
&= \left(\int_X |f(x)|^p \, m(dx) \right)^{1/p} \left(\int_X |f(x)+g(x)|^p \, m(dx) \right)^{1/q} \\
&\qquad + \left(\int_X |g(x)|^p \, m(dx) \right)^{1/p} \left(\int_X |f(x)+g(x)|^p \, m(dx) \right)^{1/q} \\
&= \|f\|_{\mathscr{L}^p} \|f+g\|_{\mathscr{L}^p}^{p/q} + \|g\|_{\mathscr{L}^p} \|f+g\|_{\mathscr{L}^p}^{p/q} \\
&= \|f\|_{\mathscr{L}^p} \|f+g\|_{\mathscr{L}^p}^{p-1} + \|g\|_{\mathscr{L}^p} \|f+g\|_{\mathscr{L}^p}^{p-1}
\end{aligned}$$

となる．$\|f+g\|_{\mathscr{L}^p} = 0$ の場合は不等式 (2) が成り立つからそうでない場合を考える．$\|f+g\|_{\mathscr{L}^p} = \infty$ の場合，

$$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq 2 \max\{|f(x)|, |g(x)|\} \quad (\forall x \in X)$$

より

$$|f(x)+g(x)|^p \leq 2^p \max\{|f(x)|, |g(x)|\} \leq 2^p \left(|f(x)|^p + |g(x)|^p\right) \quad (\forall x \in X)$$

の両辺を積分して

$$\| f+g \|_{\mathscr{L}^p}^p \leq 2^p \left(\| f \|_{\mathscr{L}^p}^p + \| g \|_{\mathscr{L}^p}^p \right)$$

という関係が出るから，$\| f \|_{\mathscr{L}^p}$ か $\| g \|_{\mathscr{L}^p}$ の一方は ∞ となり不等式 (2) が成り立つ．$0 < \| f+g \|_{\mathscr{L}^p} < \infty$ の場合，$\| f \|_{\mathscr{L}^p} + \| g \|_{\mathscr{L}^p} = \infty$ なら不等式 (2) は成り立ち，$\| f \|_{\mathscr{L}^p} + \| g \|_{\mathscr{L}^p} < \infty$ の場合でも上式 (**??**) より得る

$$\| f+g \|_{\mathscr{L}^p}^p \leq \| f \|_{\mathscr{L}^p} \| f+g \|_{\mathscr{L}^p}^{p-1} + \| g \|_{\mathscr{L}^p} \| f+g \|_{\mathscr{L}^p}^{p-1}$$

の両辺を $\| f+g \|_{\mathscr{L}^p}^{p-1}$ で割って不等式 (2) が成り立つ． ∎

以上の結果より $\mathscr{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$ は線形空間となる．実際加法とスカラ倍は

$$(f+g)(x) \coloneqq f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) \coloneqq \alpha f(x), \quad (\forall x \in X,\ f, g \in \mathscr{L}^p(X, \mathcal{F}, m),\ \alpha \in \mathbb{C})$$

により定義され，Minkowski の不等式により加法について閉じている．

補題 1.4 ($\mathscr{L}^p$ のセミノルムについて). $\| \cdot \|_{\mathscr{L}^p}$ は線形空間 $\mathscr{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$ においてセミノルムとなる．

証明.

正値性　定義の仕方による．

同次性　$1 \leq p < \infty$ なら

$$\left(\int_X |\alpha f(x)|^p \, m(dx) \right)^{1/p} = \left(|\alpha|^p \int_X |f(x)|^p \, m(dx) \right)^{1/p} = |\alpha| \left(\int_X |f(x)|^p \, m(dx) \right)^{1/p}$$

により，また $p = \infty$ なら

$$\inf\{\, r \in \mathbb{R}; \quad |\alpha f(x)| \leq r,\ \text{a.e.} x \in X \,\} = |\alpha| \inf\{\, r \in \mathbb{R}; \quad |f(x)| \leq r,\ \text{a.e.} x \in X \,\}$$

により，任意の $\alpha \in \mathbb{K}$ と任意の $f \in \mathscr{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ に対して

$$\| \alpha f \|_{\mathscr{L}^p} = |\alpha| \| f \|_{\mathscr{L}^p}$$

が成り立つ．

三角不等式　Minkowski の不等式による．

∎

2　空間 L^p

$\|\cdot\|_{\mathscr{L}^p}$ は $\mathscr{L}^p(X,\mathcal{F},m)$ のノルムとはならない．$\|f\|_{\mathscr{L}^p}=0$ であっても f が零写像であるとは限らず，実際 m-零集合の上で $1\in\mathbb{K}$ を取るような関数 g でも $\|g\|_{\mathscr{L}^p}=0$ を満たすからである．ここで可測関数全体の集合を

$$\mathcal{M}\coloneqq\{\,f:X\to\mathbb{K}\,;\quad f:\text{可測}\ \mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{K})\,\}$$

とおく．

$$f,g\in\mathcal{M},\quad f\sim g\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}f(x)=g(x)\quad\text{a.e.}x\in X$$

と定義した関係 $\sim$ は $\mathcal{M}$ における同値関係となり，この関係で $\mathcal{M}$ を割った商集合を $M\coloneqq\mathcal{M}/\sim$ と表す．M の元を $[f]$ (f は同値類の代表元) と表し，M における加法とスカラ倍を次のように定義すれば M は $\mathbb{K}$ 上の線形空間となる[*1]:

$$\begin{aligned}
&[f]+[g]\coloneqq[f+g] && (\forall[f],[g]\in M),\\
&\alpha[f]\coloneqq[\alpha f] && (\forall[f]\in M,\ \alpha\in\mathbb{K}).
\end{aligned}$$

次に商線型空間 M におけるノルムを定義する．

補題 2.1 (商空間 L^p におけるノルムの定義).

$$\|[f]\|_{\mathrm{L}^p}\coloneqq\|f\|_{\mathscr{L}^p}\quad(1\leq p\leq\infty,\ f\in\mathscr{L}^p(X,\mathcal{F},m))$$

として $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^p}:M\to\mathbb{R}$ を定義すればこれは well-defined である．つまり代表元に依らずに値がただ一つに定まる．更に次で定義する空間

$$\mathrm{L}^p(X,\mathcal{F},m)\coloneqq\{\,[f]\in M\,;\quad\|[f]\|_{\mathrm{L}^p}<\infty\,\}\quad(1\leq p\leq\infty)$$

は $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^p}$ をノルムとしてノルム空間となる．

証明.

well-defined であること　$f\in\mathscr{L}^p(X,\mathcal{F},m)$ に対し，任意に $g\in[f]$ を選ぶ．示すことは $\|f\|_{\mathscr{L}^p}^p=\|g\|_{\mathscr{L}^p}^p$ が成り立つことである．

$$A\coloneqq\{\,x\in X\,;\quad f(x)\neq g(x)\,\}\quad\in\mathcal{F}$$

[*1] この表現は well-defined，つまり代表元に依らずに値がただ一つに定まる．任意の $f'\in[f]$ と $g'\in[g]$ に対して

$$[f+g]=[f'+g'],\quad[\alpha f']=[\alpha f]$$

となるからである．実際

$$\{f\neq g\}\coloneqq\{\,x\in X\,;\quad f(x)\neq g(x)\,\}$$

と簡略した表記を使えば

$$\begin{aligned}
&\{f+g\neq f'+g'\}\subset\{f\neq f'\}\cup\{g\neq g'\},\\
&\{\alpha f\neq\alpha f'\}=\{f\neq f'\}
\end{aligned}$$

と表現でき，どれも右辺は m-零集合であるから $[f+g]=[f'+g']$, $[\alpha f']=[\alpha f]$ が成り立つ．∎

として m-零集合を用意する．

$p=\infty$ の場合　A^c の上で $f(x)=g(x)$ となるから

$$
\begin{aligned}
\{\, x \in X;\quad |g(x)| > \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} \,\} &\subset A + A^c \cap \{\, x \in X;\quad |g(x)| > \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} \,\} \\
&= A + A^c \cap \{\, x \in X;\quad |f(x)| > \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} \,\} \\
&\subset A + \{\, x \in X;\quad |f(x)| > \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} \,\}
\end{aligned}
$$

が成り立ち，最右辺は 2 項とも m-零集合であるから $\|g\|_{\mathscr{L}^\infty} \leq \|f\|_{\mathscr{L}^\infty}$ が従う．逆向きの不等号も同様に示されて $\|g\|_{\mathscr{L}^\infty} = \|f\|_{\mathscr{L}^\infty}$ を得る．

$1 \leq p < \infty$ の場合　$m(A)=0$ により

$$
\|f\|_{\mathscr{L}^p}^p = \int_X f(x)\, m(dx) = \int_{A^c} f(x)\, m(dx) = \int_{A^c} g(x)\, m(dx) = \int_X g(x)\, m(dx) = \|g\|_{\mathscr{L}^p}^p
$$

が成り立つ．

ノルムとなること　任意に $[f],[g] \in \mathrm{L}^p(X,\mathcal{F},m)$ と $\alpha \in \mathbb{K}$ を取る．$\|[f]\|_{\mathrm{L}^p}$ の正値性は $\|\cdot\|_{\mathscr{L}^p}$ の正値性から従う．また $m(f \neq 0) > 0$ なら $\|f\|_{\mathscr{L}^p} > 0$ となるから，対偶により $\|[f]\|_{\mathrm{L}^p} = 0$ なら $[f]$ は零元 $[0]$ [*2]，逆に $[f]=[0]$ なら $\|[f]\|_{\mathrm{L}^p} = \|0\|_{\mathscr{L}^p} = 0$ となる．$\|\cdot\|_{\mathscr{L}^p}$ の同次性と Minkowski の不等式から

$$
\begin{aligned}
&\|\alpha[f]\|_{\mathrm{L}^p} = \|[\alpha f]\|_{\mathrm{L}^p} = \|\alpha f\|_{\mathscr{L}^p} = |\alpha|\,\|f\|_{\mathscr{L}^p} = |\alpha|\,\|[f]\|_{\mathrm{L}^p} \\
&\|[f]+[g]\|_{\mathrm{L}^p} = \|[f+g]\|_{\mathrm{L}^p} = \|f+g\|_{\mathscr{L}^p} \leq \|f\|_{\mathscr{L}^p} + \|g\|_{\mathscr{L}^p} = \|[f]\|_{\mathrm{L}^p} + \|[g]\|_{\mathrm{L}^p}
\end{aligned}
$$

も成り立ち，$\|\cdot\|_{\mathrm{L}^p}$ が $\mathrm{L}^p(X,\mathcal{F},m)$ においてノルムとなると示された．

■

命題 2.2 (L^p の完備性).　上で定義したノルム空間 $\mathrm{L}^p(X,\mathcal{F},m)$ は Banach 空間である．($1 \leq p \leq \infty$)

証明．　任意に $\mathrm{L}^p(X,\mathcal{F},m)$ の Cauchy 列 $[f_n] \in \mathrm{L}^p(X,\mathcal{F},m)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ を取る．Cauchy 列であるから $1/2$ に対して或る $N_1 \in \mathbb{N}$ が取れて，$n > m \geq N_1$ ならば $\|[f_n]-[f_m]\|_{\mathrm{L}^p} = \|[f_n - f_m]\|_{\mathrm{L}^p} < 1/2$ となる．ここで $m = n_1$ と表記することにする．同様に $1/2^2$ に対して或る $N_2 \in \mathbb{N}$ $(N_2 > N_1)$ が取れて，$n' > m' \geq N_2$ ならば $\|[f_{n'} - f_{m'}]\|_{\mathrm{L}^p} < 1/2^2$ となる．先ほどの n について，$n > N_2$ となるように取れるからこれを $n = n_2$ と表記し，更に $m' = n_2$ ともしておく．今のところ

$$
\left\| [f_{n_1} - f_{n_2}] \right\|_{\mathrm{L}^p} < 1/2
$$

と表示できる．再び同様に $1/2^3$ に対して或る $N_3 \in \mathbb{N}$ $(N_3 > N_2)$ が取れて，$n'' > m'' \geq N_2$ ならば $\|[f_{n''} - f_{m''}]\|_{\mathrm{L}^p} < 1/2^3$ となる．先ほどの n' について $n' > N_3$ となるように取れるからこれを $n' = n_3$ と表記し，更に $m'' = n_3$ ともしておく．今までのところで

$$
\begin{aligned}
\left\| [f_{n_1} - f_{n_2}] \right\|_{\mathrm{L}^p} &< 1/2 \\
\left\| [f_{n_2} - f_{n_3}] \right\|_{\mathrm{L}^p} &< 1/2^2
\end{aligned}
$$

[*2] 零写像を 0 と表している．

が成り立っている．数学的帰納法により

$$\left\| [f_{n_k} - f_{n_{k+1}}] \right\|_{\mathrm{L}^p} < 1/2^k \quad (n_{k+1} > n_k,\ k = 1, 2, 3, \cdots) \tag{3}$$

が成り立つように自然数の部分列 $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ を取ることができる．

$p = \infty$ の場合

$[f_{n_k}]$ の代表元 f_{n_k} について，

$$A_k \coloneqq \left\{ x \in X\,; \quad |f_{n_k}(x)| > \left\| f_{n_k} \right\|_{\mathscr{L}^\infty} \right\},$$
$$A^k \coloneqq \left\{ x \in X\,; \quad |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| > \left\| f_{n_k} - f_{n_{k+1}} \right\|_{\mathscr{L}^\infty} \right\}$$

とおけば Hölder の不等式の証明中の補助定理より $m(A_k) = m(A^k) = 0$ であり，

$$A \coloneqq \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) \bigcup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A^k \right)$$

として m-零集合を定め

$$\hat{f}_{n_k}(x) = \begin{cases} f_{n_k}(x) & (x \notin A) \\ 0 & (x \in A) \end{cases} \quad (\forall x \in X)$$

と定義した $\hat{f}_{n_k}$ もまた $[f_{n_k}]$ の元となる．代表元を f_{n_k} に替えて $\hat{f}_{n_k}$ とすれば，$\hat{f}_{n_k}$ は X 上の有界可測関数であり

$$\left\| \hat{f}_{n_k} - \hat{f}_{n_{k+1}} \right\|_{\mathscr{L}^\infty} = \sup_{x \in X} |\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}_{n_{k+1}}(x)| < 1/2^k \quad (k = 1, 2, 3, \cdots) \tag{4}$$

が成り立っていることになるから，各点 $x \in X$ で $\left(\hat{f}_{n_k}(x) \right)_{k=1}^{\infty}$ は $\mathbb{K}$ の Cauchy 列となる．(これは $\sum_{k>N} 1/2^k = 1/2^N \longrightarrow 0\ (N \longrightarrow \infty)$ による．) 従って各点 $x \in X$ で極限が存在するからこれを $\hat{f}(x)$ として表す．一般に距離空間に値を取る可測関数列の各点収束の極限関数は可測関数であるから $\hat{f}$ もまた可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ である．また $\hat{f}$ は有界である．これは次のように示される．式 (4) から任意の $l > k$ に対し

$$|\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}_{n_l}(x)| \leq \sum_{j=k}^{l-1} |\hat{f}_{n_j}(x) - \hat{f}_{n_{j+1}}(x)| \leq \sum_{j=k}^{l-1} \sup_{x \in X} |\hat{f}_{n_j}(x) - \hat{f}_{n_{j+1}}(x)| < 1/2^{k-1}$$

が成り立つから，極限関数 $\hat{f}(x)$ も

$$\sup_{x \in X} |\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}(x)| \leq 1/2^{k-1} \tag{5}$$

を満たすことになる．なぜなら，もし或る $x \in X$ で $\alpha \coloneqq |\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}(x)| > 1/2^{k-1}$ となる場合，任意の $l > k$ に対し

$$0 < \alpha - 1/2^{k-1} < |\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}(x)| - |\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}_{n_l}(x)| \leq |\hat{f}_{n_l}(x) - \hat{f}(x)|$$

となり各点収束に反するからである．不等式 (5) により任意の $x \in X$ において

$$|\hat{f}(x)| < |\hat{f}_{n_k}(x)| + 1/2^{k-1} \leq \left\| \hat{f}_{n_k} \right\|_{\mathscr{L}^\infty} + 1/2^{k-1}$$

が成り立ち $\hat{f}$ の有界性が判る．以上で極限関数 $\hat{f}$ が有界可測関数であると示された．$\hat{f}$ を代表元とする $[\hat{f}] \in \mathrm{L}^\infty(X, \mathcal{F}, m)$ に対し，不等式 (5) により

$$\left\| [f_{n_k}] - [\hat{f}] \right\|_{\mathrm{L}^\infty} = \left\| \hat{f}_{n_k} - \hat{f} \right\|_{\mathscr{L}^\infty} = \sup_{x \in X} |\hat{f}_{n_k}(x) - \hat{f}(x)| \longrightarrow 0 \ (k \longrightarrow \infty)$$

が成り立つから，Cauchy 列 $([f_n])_{n=1}^\infty$ の部分列 $([f_{n_k}])_{k=1}^\infty$ が $[\hat{f}]$ に収束すると示された．Cauchy 列の部分列が収束すれば，元の Cauchy 列はその部分列と同じ収束先に収束するから $\mathrm{L}^\infty(X, \mathcal{F}, m)$ は Banach 空間である．

$1 \leq p < \infty$ の場合

$[f_{n_k}]$ の代表元 f_{n_k} に対して

$$f_{n_k}(x) := f_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{k} (f_{n_j}(x) - f_{n_{j-1}}(x)) \tag{6}$$

と表現できるから，これに対して

$$g_k(x) := |f_{n_1}(x)| + \sum_{j=1}^{k} |f_{n_j}(x) - f_{n_{j-1}}(x)|$$

として可測関数列 $(g_k)_{k=1}^\infty$ を用意する．Minkowski の不等式と式 (3) より

$$\|g_k\|_{\mathscr{L}^p} \leq \left\| f_{n_1} \right\|_{\mathscr{L}^p} + \sum_{j=1}^{k} \left\| f_{n_j} - f_{n_{j-1}} \right\|_{\mathscr{L}^p} < \left\| f_{n_1} \right\|_{\mathscr{L}^p} + \sum_{j=1}^{k} 1/2^j < \left\| f_{n_1} \right\|_{\mathscr{L}^p} + 1 < \infty$$

が成り立つ．各点 $x \in X$ で $g_k(x)$ は k について単調増大であるから，単調収束定理より

$$\|g\|_{\mathscr{L}^p}^p = \lim_{k \to \infty} \|g_k\|_{\mathscr{L}^p}^p < \left\| f_{n_1} \right\|_{\mathscr{L}^p} + 1 < \infty$$

となるので $g \in \mathrm{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$ である．従って

$$B_n := \{\, x \in X \,;\quad g(x) \leq n \,\} \in \mathcal{F},$$
$$B := \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

とおけば $m(X \backslash B) = 0$ であり，式 (6) の級数は B 上で絶対収束する (各点).

$$f(x) := \begin{cases} \lim_{k \to \infty} f_{n_k}(x) & (x \in B) \\ 0 & (x \in X \backslash B) \end{cases}$$

として可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ 関数 f を定義すれば，$|f(x)| \leq g(x)$ $(\forall x \in X)$ と g^p が可積分であることから f を代表元とする同値類 $[f]$ は $\mathrm{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$ の元となる．関数列 $((f_{n_k})_{k=1}^\infty)$ は f に概収束し，$|f_{n_k}(x) - f(x)|^p \leq 2^p(|f_{n_k}(x)|^p + |f(x)|^p) \leq 2^{p+1} g(x)^p$ $(\forall x \in X)$ となるから Lebesgue の収束定理により

$$\lim_{k \to \infty} \left\| [f_{n_k}] - [f] \right\|_{\mathrm{L}^p}^p = \lim_{k \to \infty} \left\| f_{n_k} - f \right\|_{\mathscr{L}^p}^p = \lim_{k \to \infty} \int_X |f_{n_k}(x) - f(x)|^p \, m(dx) = 0$$

が成り立ち，Cauchy 列 $([f_n])_{n=1}^\infty$ の部分列 $([f_{n_k}])_{k=1}^\infty$ が $[f]$ に収束すると示された．Cauchy 列の部分列が収束すれば，元の Cauchy 列はその部分列と同じ収束先に収束するから $\mathrm{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$ は Banach 空間である．

■

次節への準備として，ノルム空間における線型作用素の拡張定理と Hilbert 空間における射影定理を載せておく．

定理 2.3 (線型作用素の拡張). 係数体を $\mathbb{K}$ とする．X, Y を Banach 空間とし，ノルムをそれぞれ $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$ と表記する．X の部分空間 X_0 が X で稠密なら，X から Y への任意の有界線型作用素 T (T の定義域は X_0) に対し，作用素ノルムを変えない T の拡張 $\tilde{T}$ (定義域 X) で，X から Y への有界線型作用素となるものが一意に存在する．

証明. 作用素ノルムは $\|\cdot\|$ と表記する．X_0 が X で稠密であるということにより，任意の $x \in X$ に対して $x_n \in X_0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ で $\| x_n - x \|_X \longrightarrow 0$ $(k \longrightarrow +\infty)$ となるものを取ることができる．任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\| Tx_m - Tx_n \|_Y \leq \| T \| \| x_m - x_n \|_X$$

が成り立つから，右辺が X_0 の Cauchy 列をなすことにより $(Tx_n)_{n=1}^{+\infty}$ も Y の Cauchy 列となる．Y の完備性から $(Tx_n)_{n=1}^{+\infty}$ は或る $y \in Y$ に収束し，y は $x \in X$ に対して一意に定まる．なぜならば，x への別の収束列 $z_n \in X_0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を取った場合の $(Tz_n)_{n=1}^{+\infty}$ の収束先が $u \in \mathbb{C}$ であるとして，任意の $n, m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} \| y - u \|_Y &= \| y - Tx_n + Tx_n - Tz_m + Tz_m - u \|_Y \\ &\leq \| y - Tx_n \|_Y + \| Tx_n - Tz_m \|_Y + \| Tz_m - u \|_Y \\ &\leq \| y - Tx_n \|_Y + \| T \| \| x_n - z_m \|_X + \| Tz_m - u \|_Y \\ &\leq \| y - Tx_n \|_Y + \| T \| (\| x_n - x \|_X + \| x - z_m \|_X) + \| Tz_m - u \|_Y \end{aligned}$$

となるから $n, m \longrightarrow +\infty$ で右辺は 0 に収束し，$y = u$ が示されるためである．つまり x に y を対応させる関係は $X \longmapsto Y$ の写像となり，この写像を $\tilde{T}$ と表すことにする．T の線型性も次のように示される．任意の $x,\ z \in X,\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{K}$ に対して，x, z への収束列 $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$, $(z_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X_0$ を取れば $(\alpha x_n + \beta z_n)_{n=1}^{+\infty}$ が $\alpha x + \beta z$ への収束列となるから

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{T}(\alpha x + \beta z) - \alpha \tilde{T} x - \beta \tilde{T} z \right\|_Y &= \left\| \tilde{T}(\alpha x + \beta z) - T(\alpha x_n + \beta z_n) + \alpha T x_n + \beta T z_n - \alpha \tilde{T} x - \beta \tilde{T} z \right\|_Y \\ &\leq \left\| \tilde{T}(\alpha x + \beta z) - T(\alpha x_n + \beta z_n) \right\|_Y + \left\| \alpha T x_n - \alpha \tilde{T} x \right\|_Y + \left\| \beta T z_n - \beta \tilde{T} z \right\|_Y \\ &\leq \left\| \tilde{T}(\alpha x + \beta z) - T(\alpha x_n + \beta z_n) \right\|_Y + |\alpha| \left\| T x_n - \tilde{T} x \right\|_Y + |\beta| \left\| T z_n - \tilde{T} z \right\|_Y \\ &\longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow +\infty) \end{aligned}$$

が成り立つ．ゆえに $\tilde{T}(\alpha x + \beta z) = \alpha \tilde{T} x + \beta \tilde{T} z$ $(\forall x,\ z \in X,\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{K})$ である．また $\tilde{T}$ は有界な線型作用素である．なぜなら，任意に $x \in X$ と x への収束列 $x_n \in X_0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を取れば，任意の $\epsilon > 0$ に対し或る $K \in \mathbb{N}$ が存在して全ての $k > K$ について

$$\left\| \tilde{T} x \right\|_Y < \| T x_n \|_Y + \epsilon, \quad \| x \|_X < \| x_n \|_X + \epsilon / \| T \|$$

が成り立つようにできるから，この下で

$$\left\| \tilde{T}x \right\|_Y < \| Tx \|_Y + \epsilon < \| T \| \| x \|_X + 2\epsilon$$

となり $\left\| \tilde{T} \right\| \leq \| T \|$ が判るからである．さらに

$$\left\| \tilde{T} \right\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \| x \|_X = 1}} \left\| \tilde{T}x \right\|_Y \geq \sup_{\substack{x \in X_0 \\ \| x \|_X = 1}} \left\| \tilde{T}x \right\|_Y = \sup_{\substack{x \in X_0 \\ \| x \|_X = 1}} \| Tx \|_Y = \| T \|$$

も成り立つから結局 $\left\| \tilde{T} \right\| = \| T \|$ であると判る．以上より任意の有界線型作用素 T がノルムを変えないまま或る有界線型作用素 $\tilde{T}$ に拡張されることが示された．拡張が一意であることは X_0 が X で稠密であることと T の連続性による． ∎

定理 2.4 (射影定理).

証明.

射影の存在　$f \in H \backslash C$ として

$$\delta := \inf_{h \in C} \| f - h \|$$

とおく．C が閉集合で f が C の外にあるから $\delta > 0$ となる．下限の性質から $h_n \in C$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を取って

$$\delta = \lim_{n \to \infty} \| f - h_n \|$$

となるようにできるから，任意の $\epsilon > 0$ に対して或る $N \in \mathbb{N}$ が存在して $n > N$ ならば $\| f - h_n \|^2 < \delta + \epsilon/4$ が成り立つ．この N に対し $n, m > N$ ならば，内積空間の中線定理と $(h_n + h_m)/2 \in C$ であることにより

$$\begin{aligned} \| h_n - h_m \|^2 &= 2\left(\| f - h_m \|^2 + \| f - h_n \|^2 \right) - \| 2f - (h_n + h_m) \|^2 \\ &= 2\left(\| f - h_m \|^2 + \| f - h_n \|^2 \right) - 4 \left\| f - \frac{h_n + h_m}{2} \right\|^2 \\ &< 2\delta + \epsilon - 4\delta = \epsilon \end{aligned}$$

とできるから $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ は C の Cauchy 列であると判る．H が Hilbert 空間であり C が H で閉だから，$(h_n)_{n=1}^{\infty}$ の極限 $y \in H$ が存在し $y \in C$ である．

$$\left| \delta - \| f - y \| \right| \leq \left| \delta - \| f - h_n \| \right| + \left| \| f - h_n \| - \| f - y \| \right| \leq \left| \delta - \| f - h_n \| \right| + \| h_n - y \| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

によって $\delta = \| f - y \|$ が成り立つこと，すなわち射影の存在が示された．$f \in C$ の場合は f が自身の射影である．

射影の一意性　$z \in C$ もまた $\delta = \| f - z \|$ を満たすとすれば，C の凸性により

$$2\delta \leq 2 \left\| f - \frac{y + z}{2} \right\| \leq \| f - y \| + \| f - z \| = 2\delta$$

が成り立つから，中線定理より

$$\|y-z\|^2 = 2\left(\|f-z\|^2 + \|f-y\|^2\right) - 4\left\|f-\frac{y+z}{2}\right\|^2 = 0$$

となって $y = z$ が判る．すなわち f の射影はただ一つに決まる．

C が閉部分空間の場合　$f \in H \backslash C$ に対して f の C への射影を $y \in C$ (存在は C が凸の場合と全く同様に示される．) とする．($f \in C$ の場合は $y = f$ である．) 或る $h \in C$ に対して

$$\langle f-y,\ h\rangle \neq 0$$

となると仮定すれば ($f \neq y$ より $h \neq 0$)，C の元 $\hat{y} := y + \left(\langle f-g, h\rangle / \|h\|^2\right) h$ に対して

$$\begin{aligned}\|f-\hat{y}\|^2 &= \left\langle f-y-\frac{\langle f-g,h\rangle}{\|h\|^2}h,\ f-y-\frac{\langle f-g,h\rangle}{\|h\|^2}h\right\rangle \\ &= \|f-y\|^2 - \frac{|\langle f-g,h\rangle|^2}{\|h\|^2} \qquad\qquad < \|f-y\|^2\end{aligned}$$

が成り立つから y が射影であることに反する．従って射影 y に対しては

$$\langle f-y,\ h\rangle \neq 0 \quad (\forall h \in C) \tag{7}$$

が成り立つ．逆に $y \in C$ に対して式 (7) が成り立っているとすれば y が f の射影であることも示される．任意の $h \in C$ に対して

$$\begin{aligned}\|f-h\|^2 &= \langle f-y+y-h,\ f-y+y-h\rangle \\ &= \|f-y\|^2 + 2\Re\mathrm{e}\,\langle f-y,\ y-h\rangle + \|y-h\|^2 \\ &= \|f-y\|^2 + \|y-h\|^2 \\ &\geq \|f-y\|^2\end{aligned}$$

となることにより $\|f-y\| = \inf_{h\in C}\|f-h\|$ であることが示された．

次節への準備として，ノルム空間における線型作用素の拡張定理と Hilbert 空間における射影定理を載せておく．

定理 2.5 (線型作用素の拡張). 係数体を $\mathbb{K}$ とする．X, Y を Banach 空間とし，ノルムをそれぞれ $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$ と表記する．X の部分空間 X_0 が X で稠密なら，X から Y への任意の有界線型作用素 T (T の定義域は X_0) に対し，作用素ノルムを変えない T の拡張 $\tilde{T}$ (定義域 X) で，X から Y への有界線型作用素となるものが一意に存在する．

証明. 作用素ノルムは $\|\cdot\|$ と表記する．X_0 が X で稠密であるということにより，任意の $x \in X$ に対して $x_n \in X_0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ で $\|x_n - x\|_X \longrightarrow 0$ $(k \longrightarrow +\infty)$ となるものを取ることができる．任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\|Tx_m - Tx_n\|_Y \leq \|T\| \, \|x_m - x_n\|_X$$

が成り立つから，右辺が X_0 の Cauchy 列をなすことにより $(Tx_n)_{n=1}^{+\infty}$ も Y の Cauchy 列となる．Y の完備性から $(Tx_n)_{n=1}^{+\infty}$ は或る $y \in Y$ に収束し，y は $x \in X$ に対して一意に定まる．なぜならば，x への別の収束列 $z_n \in X_0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を取った場合の $(Tz_n)_{n=1}^{+\infty}$ の収束先が $u \in \mathbb{C}$ であるとして，任意の $n, m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
\|y - u\|_Y &= \|y - Tx_n + Tx_n - Tz_m + Tz_m - u\|_Y \\
&\leq \|y - Tx_n\|_Y + \|Tx_n - Tz_m\|_Y + \|Tz_m - u\|_Y \\
&\leq \|y - Tx_n\|_Y + \|T\| \, \|x_n - z_m\|_X + \|Tz_m - u\|_Y \\
&\leq \|y - Tx_n\|_Y + \|T\| \, (\|x_n - x\|_X + \|x - z_m\|_X) + \|Tz_m - u\|_Y
\end{aligned}$$

となるから $n, m \longrightarrow +\infty$ で右辺は 0 に収束し，$y = u$ が示されるためである．つまり x に y を対応させる関係は $X \longmapsto Y$ の写像となり，この写像を $\tilde{T}$ と表すことにする．T の線型性も次のように示される．任意の $x,\ z \in X,\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{K}$ に対して，x, z への収束列 $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$, $(z_n)_{n=1}^{+\infty} \subset X_0$ を取れば $(\alpha x_n + \beta z_n)_{n=1}^{+\infty}$ が $\alpha x + \beta z$ への収束列となるから

$$\begin{aligned}
\left\|\tilde{T}(\alpha x + \beta z) - \alpha\tilde{T}x - \beta\tilde{T}z\right\|_Y &= \left\|\tilde{T}(\alpha x + \beta z) - T(\alpha x_n + \beta z_n) + \alpha Tx_n + \beta Tz_n - \alpha\tilde{T}x - \beta\tilde{T}z\right\|_Y \\
&\leq \left\|\tilde{T}(\alpha x + \beta z) - T(\alpha x_n + \beta z_n)\right\|_Y + \left\|\alpha Tx_n - \alpha\tilde{T}x\right\|_Y + \left\|\beta Tz_n - \beta\tilde{T}z\right\|_Y \\
&\leq \left\|\tilde{T}(\alpha x + \beta z) - T(\alpha x_n + \beta z_n)\right\|_Y + |\alpha| \left\|Tx_n - \tilde{T}x\right\|_Y + |\beta| \left\|Tz_n - \tilde{T}z\right\|_Y \\
&\longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow +\infty)
\end{aligned}$$

が成り立つ．ゆえに $\tilde{T}(\alpha x + \beta z) = \alpha\tilde{T}x + \beta\tilde{T}z$ $(\forall x,\ z \in X,\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{K})$ である．また $\tilde{T}$ は有界な線型作用素である．なぜなら，任意に $x \in X$ と x への収束列 $x_n \in X_0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を取れば，任意の $\epsilon > 0$ に対し或る $K \in \mathbb{N}$ が存在して全ての $k > K$ について

$$\left\|\tilde{T}x\right\|_Y < \|Tx_n\|_Y + \epsilon, \quad \|x\|_X < \|x_n\|_X + \epsilon / \|T\|$$

が成り立つようにできるから，この下で

$$\left\|\tilde{T}x\right\|_Y < \|Tx\|_Y + \epsilon < \|T\| \, \|x\|_X + 2\epsilon$$

となり $\left\|\tilde{T}\right\| \leq \|T\|$ が判るからである．さらに

$$\left\|\tilde{T}\right\| = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|_X=1}} \left\|\tilde{T}x\right\|_Y \geq \sup_{\substack{x\in X_0\\ \|x\|_X=1}} \left\|\tilde{T}x\right\|_Y = \sup_{\substack{x\in X_0\\ \|x\|_X=1}} \|Tx\|_Y = \|T\|$$

も成り立つから結局 $\left\|\tilde{T}\right\| = \|T\|$ であると判る．以上より任意の有界線型作用素 T がノルムを変えないまま或る有界線型作用素 $\tilde{T}$ に拡張されることが示された．拡張が一意であることは X_0 が X で稠密であることと T の連続性による． ∎

定理 2.6 (射影定理).

証明.

射影の存在　$f \in H \backslash C$ として

$$\delta := \inf_{h\in C} \|f - h\|$$

とおく．C が閉集合で f が C の外にあるから $\delta > 0$ となる．下限の性質から $h_n \in C$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を取って

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \|f - h_n\|$$

となるようにできるから，任意の $\epsilon > 0$ に対して或る $N \in \mathbb{N}$ が存在して $n > N$ ならば $\|f - h_n\|^2 < \delta + \epsilon/4$ が成り立つ．この N に対し $n, m > N$ ならば，内積空間の中線定理と $(h_n + h_m)/2 \in C$ であることにより

$$\begin{aligned}\|h_n - h_m\|^2 &= 2\left(\|f - h_m\|^2 + \|f - h_n\|^2\right) - \|2f - (h_n + h_m)\|^2 \\ &= 2\left(\|f - h_m\|^2 + \|f - h_n\|^2\right) - 4\left\|f - \frac{h_n + h_m}{2}\right\|^2 \\ &< 2\delta + \epsilon - 4\delta = \epsilon\end{aligned}$$

とできるから $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ は C の Cauchy 列であると判る．H が Hilbert 空間であり C が H で閉だから，$(h_n)_{n=1}^{\infty}$ の極限 $y \in H$ が存在し $y \in C$ である．

$$\left|\delta - \|f - y\|\right| \leq \left|\delta - \|f - h_n\|\right| + \left|\|f - h_n\| - \|f - y\|\right| \leq \left|\delta - \|f - h_n\|\right| + \|h_n - y\| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

によって $\delta = \|f - y\|$ が成り立つこと，すなわち射影の存在が示された．$f \in C$ の場合は f が自身の射影である．

射影の一意性　$z \in C$ もまた $\delta = \|f - z\|$ を満たすとすれば，C の凸性により

$$2\delta \leq 2\left\|f - \frac{y + z}{2}\right\| \leq \|f - y\| + \|f - z\| = 2\delta$$

が成り立つから，中線定理より

$$\|y - z\|^2 = 2\left(\|f - z\|^2 + \|f - y\|^2\right) - 4\left\|f - \frac{y + z}{2}\right\|^2 = 0$$

となって $y = z$ が判る．すなわち f の射影はただ一つに決まる．

C が閉部分空間の場合　$f \in H \backslash C$ に対して f の C への射影を $y \in C$ (存在は C が凸の場合と全く同様に示される．) とする．($f \in C$ の場合は $y = f$ である．) 或る $h \in C$ に対して

$$\langle f - y,\ h \rangle \neq 0$$

となると仮定すれば ($f \neq y$ より $h \neq 0$)，C の元 $\hat{y} \coloneqq y + \left(\langle f - g, h \rangle / \|h\|^2\right) h$ に対して

$$\begin{aligned} \|f - \hat{y}\|^2 &= \left\langle f - y - \frac{\langle f - g, h \rangle}{\|h\|^2} h,\ f - y - \frac{\langle f - g, h \rangle}{\|h\|^2} h \right\rangle \\ &= \|f - y\|^2 - \frac{|\langle f - g, h \rangle|^2}{\|h\|^2} \qquad < \|f - y\|^2 \end{aligned}$$

が成り立つから y が射影であることに反する．従って射影 y に対しては

$$\langle f - y,\ h \rangle \neq 0 \quad (\forall h \in C) \tag{8}$$

が成り立つ．逆に $y \in C$ に対して式 (7) が成り立っているとすれば y が f の射影であることも示される．任意の $h \in C$ に対して

$$\begin{aligned} \|f - h\|^2 &= \langle f - y + y - h,\ f - y + y - h \rangle \\ &= \|f - y\|^2 + 2\mathfrak{Re} \langle f - y,\ y - h \rangle + \|y - h\|^2 \\ &= \|f - y\|^2 + \|y - h\|^2 \\ &\geq \|f - y\|^2 \end{aligned}$$

となることにより $\|f - y\| = \inf_{h \in C} \|f - h\|$ であることが示された．

3　Sobolev 空間について

係数体を $\mathbb{K}$，$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 或は $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ と考える．測度空間を $(X, \mathcal{F}, m)$ とする．

定義 3.1 (絶対連続関数).　$I \coloneqq [a, b]$ を $\mathbb{R}$ の区間とする．I 上の関数 $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ が絶対連続であるとは，任意の $a \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \cdots \leq a_n < b_n \leq b$, $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ と任意の $\epsilon > 0$ に対し，或る $\delta > 0$ が存在して

$$\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon$$

が成り立つことをいう．

定理 3.2 (絶対連続の同値条件).　測度空間を $(X, \mathcal{F}, m)$ とする．

定義 3.3 (Sobolev 空間).

4　10/11

基礎におく確率空間を $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ とする．係数体を $\mathbb{R}$ として考えると，ノルム空間 $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ は

$$\langle [f], [g] \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} \coloneqq \int_\Omega f(x)g(x)\,\mu(dx) \quad \bigl([f],[g] \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)\bigr)$$

を内積として Hilbert 空間となる．これは次のように示される．まず左辺は代表元の選び方に依らない．任意に $f' \in [f]$ と $g' \in [g]$ を取っても，

$$\begin{aligned} E &\coloneqq \{\, x \in \Omega \;\mid\; f(x) \neq f'(x) \,\}, \\ F &\coloneqq \{\, x \in \Omega \;\mid\; g(x) \neq g'(x) \,\} \end{aligned}$$

とした E, F は μ-零集合であって

$$\int_\Omega f(x)g(x)\,\mu(dx) = \int_{\Omega \setminus (E \cup F)} f(x)g(x)\,\mu(dx) = \int_{\Omega \setminus (E \cup F)} f'(x)g'(x)\,\mu(dx) = \int_\Omega f'(x)g'(x)\,\mu(dx)$$

が成り立つからである．二乗可積分な関数を扱っているから上式中の積分は全て有限確定であり，つまり $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}$ が実数値として確定している．また内積の公理を満たすことも次のように示される．

正値性　任意の $[f] \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ に対して，ノルム $\|[f]\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}$ との対応から $\langle [f], [f] \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} \geq 0$ と $\langle [f], [f] \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0 \Leftrightarrow [f] = [0]$ が成り立つ．

対称性　任意の $[f], [g] \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ に対して

$$\langle [f], [g] \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = \int_\Omega f(x)g(x)\,\mu(dx) = \int_\Omega g(x)f(x)\,\mu(dx) = \langle [g], [f] \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}$$

が成り立つ．

双線型性　任意の $[f], [g], [h] \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ と $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} \langle [f], [g] + [h] \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} &= \langle [f], [g + h] \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} \\ &= \int_\Omega f(x)(g(x) + h(x))\,\mu(dx) \\ &= \int_\Omega f(x)g(x)\,\mu(dx) + \int_\Omega f(x)h(x)\,\mu(dx) \qquad (\because fg \text{ も } fh \text{ も可積分である．}) \\ &= \langle [f], [g] \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} + \langle [f], [h] \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}, \\ \langle \alpha [f], [g] \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} &= \langle [\alpha f], [g] \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} \\ &= \int_\Omega \alpha f(x)g(x)\,\mu(dx) \\ &= \alpha \int_\Omega f(x)g(x)\,\mu(dx) \\ &= \alpha \langle [f], [g] \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} \end{aligned}$$

が成り立つことと対称性による．

そしてノルム空間としての完備性から $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ は Hilbert 空間となる．

$\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ を部分 σ-加法族として別の Hilbert 空間 $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ を考えれば，任意の $\langle g \rangle \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ (空間が違うことを意識するために元の表示を変えた) に対し g は可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であるから，対応する $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ の元 $[g]$ が存在する．$\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ より $\langle g \rangle \subset [g]$ であって必ずしも $\langle g \rangle = [g]$ ではないが，単射

$$\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu) \ni \langle g \rangle \longmapsto [g] \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$$

によって $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ は $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ に等長に埋め込まれ，$\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ の完備性から埋め込まれた部分集合は $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ の閉部分空間となる．この部分集合を $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ と同一視し，

$$\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu) \subset \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$$

と考えることにする．以上の準備の下，以降では同値類と関数は表記上で区別することはせず，$f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ と表現することで，この f に同値類 $[f]$ としての意味と，代表元の関数 f としての意味の両方を持たせる．

定義 4.1 (条件付き期待値). $f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ に対して，射影定理により一意に定まる射影 $g \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ (上で断った通り，実際は g は $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ に埋め込まれた部分にある元を表している) を

$$g = \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}]$$

と表現し，これを $\mathcal{G}$ で条件付けた f の条件付き期待値と呼ぶ．$\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ の場合は特別に

$$\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] = \mathrm{E}[f]$$

と書いて f の期待値と呼ぶ．

レポート問題 1.
Hilbert 空間 $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ における内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}$，ノルムを $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}$ と表示する．次の C1 ~ C6 を示せ．

C1 任意の $f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ に対して次が成り立つ:

$$\mathrm{E}[f] = \int_\Omega f(x)\, \mu(dx).$$

C2 任意の $f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ と $h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ に対して次が成り立つ:

$$\int_\Omega f(x)h(x)\, \mu(dx) = \int_\Omega \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x)h(x)\, \mu(dx).$$

C3 任意の $f, f_1, f_2 \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して次が成り立つ:

$$\mathrm{E}[f_1 + f_2 \mid \mathcal{G}] = \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}] + \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}], \quad \mathrm{E}[\alpha f \mid \mathcal{G}] = \alpha \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}].$$

C4 任意の $f_1, f_2 \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ に対して次が成り立つ:

$$f_1 \le f_2 \quad \text{a.s.} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}] \le \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}] \quad \text{a.s.}$$

C5　任意の $f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ と $g \in \mathrm{L}^\infty(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ に対して次が成り立つ:

$$\mathrm{E}[gf \mid \mathcal{G}] = g\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}].$$

C6　$\mathcal{H}$ が $\mathcal{G}$ の部分 σ-加法族ならば，任意の $f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ に対して次が成り立つ:

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \,\middle|\, \mathcal{H}\right] = \mathrm{E}[f \mid \mathcal{H}].$$

証明.　C1　$\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ とすれば，$\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ の元は $\mathcal{G}$-可測でなくてはならないから Ω 上の定数関数である．従って各 $g \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ には定数 $\alpha \in \mathbb{R}$ が対応して $g(x) = \alpha\ (\forall x \in \Omega)$ と表せる．射影定理より任意の $f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ の $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ への射影 $\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] = \mathrm{E}[f]$ はノルム $\|f - g\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}$ を最小にする $g \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ である．$g(x) = \alpha\ (\forall x \in \Omega)$ としてノルムを直接計算すれば，

$$\begin{aligned}
\|f - g\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}^2 &= \int_\Omega |f(x) - \alpha|^2\, \mu(dx) \\
&= \int_\Omega |f(x)|^2 - 2\alpha f(x) + |\alpha|^2\, \mu(dx) \\
&= \int_\Omega |f(x)|^2\, \mu(dx) - 2\alpha \int_\Omega f(x)\, \mu(dx) + |\alpha|^2 \\
&= \left|\alpha - \int_\Omega f(x)\, \mu(dx)\right|^2 - \left|\int_\Omega f(x)\, \mu(dx)\right|^2 + \int_\Omega |f(x)|^2\, \mu(dx) \\
&= \left|\alpha - \int_\Omega f(x)\, \mu(dx)\right|^2 + \int_\Omega |f(x) - \beta|^2\ \mu(dx) \qquad \left(\beta := \int_\Omega f(x)\, \mu(dx)\right)
\end{aligned}$$

と表現できて最終式は $\alpha = \int_\Omega f(x)\, \mu(dx)$ で最小となる．すなわち

$$\mathrm{E}[f] = \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] = \int_\Omega f(x)\, \mu(dx).$$

C2　射影定理により，$f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ の $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ への射影 $\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}]$ は

$$\langle f - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0 \quad (\forall h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu))$$

を満たし，内積の線型性から

$$\langle f, h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = \langle \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} \quad (\forall h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu))$$

が成り立つ．積分の形式で表示することにより

$$\int_\Omega f(x)h(x)\, \mu(dx) = \int_\Omega \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x)h(x)\, \mu(dx) \quad (\forall h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu))$$

が示された．

C3　加法について　射影定理により任意の $h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ に対して

$$\begin{aligned}
&\langle (f_1 + f_2) - \mathrm{E}[f_1 + f_2 \mid \mathcal{G}], h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0, \\
&\langle f_1 - \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}], h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0, \\
&\langle f_2 - \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}], h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0
\end{aligned}$$

が成り立っている．従って任意の $h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ に対して

$$0 = \langle (f_1 + f_2) - \mathrm{E}[f_1 + f_2 \mid \mathcal{G}], h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} - \langle f_1 - \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}], h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} - \langle f_2 - \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}], h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}$$

$$= \langle (f_1 + f_2) - \mathrm{E}[f_1 + f_2 \mid \mathcal{G}], h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} - \langle (f_1 + f_2) - (\mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}] + \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}]), h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}$$
$$= \langle \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}] + \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}] - \mathrm{E}[f_1 + f_2 \mid \mathcal{G}], h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}$$

となり，特に $h = \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}] + \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}] - \mathrm{E}[f_1 + f_2 \mid \mathcal{G}] \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ とすれば

$$\left\| \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}] + \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}] - \mathrm{E}[f_1 + f_2 \mid \mathcal{G}] \right\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}^2 = 0$$

が成り立つことになるから

$$\mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}] + \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}] = \mathrm{E}[f_1 + f_2 \mid \mathcal{G}]$$

が示された．

スカラ倍について　射影定理より

$$\langle f - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0, \quad \langle \alpha f - \mathrm{E}[\alpha f \mid \mathcal{G}], h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0 \quad (\forall h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu))$$

が成り立っているから

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{E}[\alpha f \mid \mathcal{G}] - \alpha \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} &= \langle \mathrm{E}[\alpha f \mid \mathcal{G}] - \alpha f, h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} - \langle \alpha \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] - \alpha f, h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} \\ &= \langle \mathrm{E}[\alpha f \mid \mathcal{G}] - \alpha f, h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} - \alpha \langle f - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} \\ &= 0. \quad (\forall h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu))\end{aligned}$$

特に $h = \mathrm{E}[\alpha f \mid \mathcal{G}] - \alpha \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ として

$$\left\| \mathrm{E}[\alpha f \mid \mathcal{G}] - \alpha \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \right\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}^2 = 0$$

だから $\mathrm{E}[\alpha f \mid \mathcal{G}] = \alpha \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}]$ が成り立つ．

C4　「任意の $f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ に対して，$f \geq 0$ a.s. ならば $\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \geq 0$ a.s.」—(※) を示せばよい．これが示されれば $f_1, f_2 \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ で $f_1 \leq f_2$ a.s. となるものに対し

$$0 \leq f_2 - f_1 \text{ a.s.} \quad \Rightarrow 0 \leq \mathrm{E}[f_2 - f_1 \mid \mathcal{G}] = \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}] - \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}] \text{ a.s.}$$

が成り立つ．

$$\begin{aligned} A &:= \{x \in \Omega \mid \quad f(x) < 0\} && (\in \mathcal{F}), \\ B &:= \{x \in \Omega \mid \quad \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x) < 0\} && (\in \mathcal{G}) \end{aligned}$$

として $\mu(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu(B) = 0$ が成り立つと言えばよく，$\mu(A) = 0$ の下で $\mu(B) > 0$ と仮定しては不合理であることを以下に記述する．

$\mu(A) = 0,\ \mu(B) > 0$ であるとする．$\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ の元を

$$h(x) := \begin{cases} \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x) & (x \in B^c) \\ 0 & (x \in B) \end{cases}$$

として定義すると

$$
\begin{aligned}
\|f-h\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} &= \int_\Omega |f(x)-h(x)|^2\,\mu(dx) \\
&= \int_{A^c\cap B^c} |f(x)-h(x)|^2\,\mu(dx) + \int_{A^c\cap B} |f(x)-h(x)|^2\,\mu(dx) \\
&= \int_{A^c\cap B^c} |f(x)-\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}](x)|^2\,\mu(dx) + \int_{A^c\cap B} |f(x)|^2\,\mu(dx) \\
&< \int_{A^c\cap B^c} |f(x)-\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}](x)|^2\,\mu(dx) + \int_{A^c\cap B} |f(x)-\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}](x)|^2\,\mu(dx) \\
&= \left\| f-\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}]\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．これは $\mu(A)=0$ であること，$\mu(A^c\cap B)=\mu(B)-\mu(A\cap B)=\mu(B)>0$ であること，それから $A^c\cap B$ の上で

$$
\begin{gathered}
|f(x)-\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}](x)|^2-|f(x)|^2 = (f(x)-\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}](x)+f(x))(-\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}](x))>0 \\
(\because f(x)\geq 0,\ \mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}](x)<0,\quad \forall x\in A^c\cap B)
\end{gathered}
$$

が成り立っていることによる．上の結果，すなわち

$$
\|f-h\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} < \left\| f-\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}]\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}
$$

を満たす $h\in\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ が存在することは $\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}]$ が f の射影であることに違反している．以上より $\mu(B)=0$ でなくてはならず，(※) が示された．

C5 $\left\|\mathrm{E}[gf\,|\,\mathcal{G}]-g\,\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}]\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}=0$ が成り立つことを示す．任意の $h\in\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ に対して

$$
\langle \mathrm{E}[gf\,|\,\mathcal{G}]-g\,\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}],h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = \langle \mathrm{E}[gf\,|\,\mathcal{G}]-gf,h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} + \langle gf-g\,\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}],h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}
$$

を考えると，右辺が 0 になることが次のように証明される．先ず右辺第一項について，gf は $\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ に入る．g は或る μ-零集合 $E\in\mathcal{G}$ を除いて有界であるから，或る正数 α によって $|g(x)|\leq\alpha\ (\forall x\in E^c)$ と抑えられ，

$$
\int_\Omega |g(x)f(x)|^2\,\mu(dx) = \int_{E^c} |g(x)|^2|f(x)|^2\,\mu(dx) \leq \alpha^2\int_{E^c}|f(x)|^2\,\mu(dx) = \alpha^2\int_\Omega |f(x)|^2\,\mu(dx) < \infty
$$

が成り立つからである．従って射影定理により

$$
\langle \mathrm{E}[gf\,|\,\mathcal{G}]-gf,h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0 \quad (\forall h\in\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu)).
$$

右辺第二項について，

$$
\langle gf-g\,\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}],h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = \int_\Omega (f(x)-\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}](x))\,g(x)h(x)\,\mu(dx) = \langle f-\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}],gh\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}
$$

であって，先と同様の理由で $gh\in\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ $(\forall h\in\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu))$ が成り立つから射影定理より

$$
\langle gf-g\,\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}],h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0 \quad (\forall h\in\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu))
$$

であると判明した．始めの式に戻れば

$$
\langle \mathrm{E}[gf\,|\,\mathcal{G}]-g\,\mathrm{E}[f\,|\,\mathcal{G}],h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0 \quad (\forall h\in\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu))
$$

が成り立つことになり，特に $h = \mathrm{E}[gf \mid \mathcal{G}] - g\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ に対しては

$$\left\| \mathrm{E}[gf \mid \mathcal{G}] - g\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \right\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0$$

となることから $\mathrm{E}[gf \mid \mathcal{G}] = g\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}]$ が示された．

C6 任意の $h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{H}, \mu) \subset \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ に対し，射影定理より

$$\begin{aligned}
&\left\langle \mathrm{E}\left[\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \,\middle|\, \mathcal{H}\right] - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{H}], h \right\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} \\
&\quad = \left\langle \mathrm{E}\left[\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \,\middle|\, \mathcal{H}\right] - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h \right\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} \\
&\qquad + \langle \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] - f, h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} + \langle f - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{H}], h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0
\end{aligned}$$

が成り立つ．特に $h = \mathrm{E}\left[\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \,\middle|\, \mathcal{H}\right] - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{H}] \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{H}, \mu)$ とすれば

$$\left\| \mathrm{E}\left[\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \,\middle|\, \mathcal{H}\right] - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{H}] \right\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0$$

ということになるので $\mathrm{E}\left[\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \,\middle|\, \mathcal{H}\right] = \mathrm{E}[f \mid \mathcal{H}]$ であることが示された．

∎

レポート問題 2[C3] より，条件付き期待値が $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ からその部分空間 ($\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ と同一視) への線型作用素であることが示された．Hölder の不等式の不等式により $f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ は (代表元の関数が) 可積分関数であるから $f \in \mathrm{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ であり，すなわち $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ は $\mathrm{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ の部分空間であると判る．同様に $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ は $\mathrm{L}^1(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ の部分空間であるから，条件付き期待値は $\mathrm{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ から $\mathrm{L}^1(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ (埋め込まれた部分空間と同一視している) への線型作用素と見ることができる．次に考えることは，線型作用素として見た条件付き期待値の拡張である．条件付き期待値が $\mathrm{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ から $\mathrm{L}^1(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ への作用素として有界であり，更に定義域 $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ が $\mathrm{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ において稠密であるならば拡張は可能となる．

補題 4.2 (条件付き期待値の有界性). 条件付き期待値について次が成り立つ:

$$\sup_{\substack{f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu) \\ f \neq 0}} \frac{\left\| \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)}}{\| f \|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)}} \leq 1.$$

証明. f, $\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}]$ を代表元の関数として扱えば次のように計算できる．

$$\begin{aligned}
\left\| \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)} &= \int_\Omega \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](\omega)\, \mu(dx) \\
&= \int_\Omega \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](\omega) \mathbb{1}_{(\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \geq 0)}(\omega) + \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](\omega) \mathbb{1}_{(\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] < 0)}(\omega)\, \mu(dx) \\
&= \int_\Omega f(\omega) \mathbb{1}_{(\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \geq 0)}(\omega) + f(\omega) \mathbb{1}_{(\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] < 0)}(\omega)\, \mu(dx) \qquad (\because \text{レポート問題 2[C2]}) \\
&\leq \int_\Omega |f(\omega)| \mathbb{1}_{(\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \geq 0)}(\omega) + |f(\omega)| \mathbb{1}_{(\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] < 0)}(\omega)\, \mu(dx) \\
&= \| f \|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)}.
\end{aligned}$$

∎

定理 4.3 (条件付き期待値の拡張). 定義域を $\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ としている条件付き期待値を, $\mathrm{L}^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ を定義域とする有界線型作用素に (作用素ノルムを変えずに) 一意に拡張することができる．つまりこの拡張された作用素を $\tilde{\mathrm{E}}[\cdot\,|\,\mathcal{G}]$ と表示すれば

$$\mathrm{L}^1(\Omega,\mathcal{F},\mu) \ni f \longmapsto \tilde{\mathrm{E}}[f\,|\,\mathcal{G}] \in \mathrm{L}^1(\Omega,\mathcal{G},\mu)$$

が有界な線型作用素となり，更にレポート問題 2 の [C1]~[C6] が L^2 を L^1 に置き換えて成り立つ．

$\mathcal{G} = \{\emptyset,\ \Omega\}$ である場合は $\tilde{\mathrm{E}}[f\,|\,\mathcal{G}] = \tilde{\mathrm{E}}[f]$ と表示することにする．

証明. 定理の主張する拡張が可能であることを示すには，$\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ が $\mathrm{L}^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ で稠密なことをいえばよい．任意の $f \in \mathrm{L}^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ に対して，

$$f_n(x) \coloneqq f(x)\mathbb{1}_{|f|\leq n}(x) \quad (\forall x \in \Omega,\ n = 1,2,3,\cdots)$$

とおけば $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ となり，関数列として f に各点収束しているから，Lebesgue の収束定理より

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)} = 0$$

が成り立つ．これで $\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ が $\mathrm{L}^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ で稠密であることが示された．次にレポート問題 2 の [C1]~[C6] が L^2 が L^1 に置き換えても成り立つことを示す．以下に主張を書き直す．

$\tilde{\mathrm{C}}1$ 任意の $f \in \mathrm{L}^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ に対して次が成り立つ:

$$\tilde{\mathrm{E}}[f] = \int_\Omega f(x)\,\mu(dx).$$

$\tilde{\mathrm{C}}2$ 任意の $f \in \mathrm{L}^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ と $h \in \mathrm{L}^\infty(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ に対して次が成り立つ:

$$\int_\Omega f(x)h(x)\,\mu(dx) = \int_\Omega \tilde{\mathrm{E}}[f\,|\,\mathcal{G}](x)h(x)\,\mu(dx).$$

$\tilde{\mathrm{C}}3$ 任意の $f, f_1, f_2 \in \mathrm{L}^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して次が成り立つ:

$$\tilde{\mathrm{E}}[f_1 + f_2\,|\,\mathcal{G}] = \tilde{\mathrm{E}}[f_1\,|\,\mathcal{G}] + \tilde{\mathrm{E}}[f_2\,|\,\mathcal{G}], \quad \tilde{\mathrm{E}}[\alpha f\,|\,\mathcal{G}] = \alpha\tilde{\mathrm{E}}[f\,|\,\mathcal{G}].$$

$\tilde{\mathrm{C}}4$ 任意の $f_1, f_2 \in \mathrm{L}^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ に対して次が成り立つ:

$$f_1 \leq f_2 \quad \text{a.s.} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathrm{E}}[f_1\,|\,\mathcal{G}] \leq \tilde{\mathrm{E}}[f_2\,|\,\mathcal{G}] \quad \text{a.s.}$$

$\tilde{\mathrm{C}}5$ 任意の $f \in \mathrm{L}^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ と $g \in \mathrm{L}^\infty(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ に対して次が成り立つ:

$$\tilde{\mathrm{E}}[gf\,|\,\mathcal{G}] = g\tilde{\mathrm{E}}[f\,|\,\mathcal{G}].$$

$\tilde{\mathrm{C}}6$ $\mathcal{H}$ が $\mathcal{G}$ の部分 σ-加法族ならば，任意の $f \in \mathrm{L}^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ に対して次が成り立つ:

$$\tilde{\mathrm{E}}\Big[\tilde{\mathrm{E}}[f\,|\,\mathcal{G}]\,\Big|\,\mathcal{H}\Big] = \tilde{\mathrm{E}}[f\,|\,\mathcal{H}].$$

一つ一つ証明していく．

$\tilde{\mathrm{C}}1$　f に対して，先の (3) と同じように関数列 $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を作る．C1 により全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\tilde{\mathrm{E}}[f_n] = \int_{\Omega} f_n(x)\,\mu(dx)$$

が成り立っているから，Lebesgue の収束定理と作用素の有界性により

$$\left|\tilde{\mathrm{E}}[f] - \int_{\Omega} f(x)\,\mu(dx)\right| \leq \left|\tilde{\mathrm{E}}[f] - \tilde{\mathrm{E}}[f_n]\right| + \left|\int_{\Omega} f_n(x)\,\mu(dx) - \int_{\Omega} f(x)\,\mu(dx)\right| \longrightarrow 0 \; (n \longrightarrow \infty)$$

が成り立つ．ゆえに

$$\tilde{\mathrm{E}}[f] = \int_{\Omega} f(x)\,\mu(dx)$$

が示された．

$\tilde{\mathrm{C}}2$　f に対して，先の (3) と同じように関数列 $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を作る．$h \in \mathrm{L}^{\infty}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ であることに注意すれば，C2 により全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\int_{\Omega} f_n(x)h(x)\,\mu(dx) = \int_{\Omega} \tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{G}](x)h(x)\,\mu(dx)$$

が成り立つ．

$$A \coloneqq \left\{ x \in \Omega \quad \middle| \quad |h(x)| > \|h\|_{\mathrm{L}^{\infty}(\mathcal{F},\mu)} \right\}$$

とおけば $\mu(A) = 0$ であり，拡張が作用素ノルムを変えないことと補助定理 3.2 の結果より

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\Omega} f(x)h(x)\,\mu(dx) - \int_{\Omega} \tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}](x)h(x)\,\mu(dx)\right| \\
&\quad \leq \left|\int_{\Omega} f(x)h(x)\,\mu(dx) - \int_{\Omega} f_n(x)h(x)\,\mu(dx)\right| \\
&\qquad\quad + \left|\int_{\Omega} \tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{G}](x)h(x)\,\mu(dx) - \int_{\Omega} \tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}](x)h(x)\,\mu(dx)\right| \\
&\quad \leq \|h\|_{\mathrm{L}^{\infty}(\mathcal{F},\mu)} \int_{\Omega\setminus A} |f(x) - f_n(x)|\,\mu(dx) + \|h\|_{\mathrm{L}^{\infty}(\mathcal{F},\mu)} \int_{\Omega\setminus A} \left|\tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{G}](x) - \tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}](x)\right|\,\mu(dx) \\
&\quad = \|h\|_{\mathrm{L}^{\infty}(\mathcal{F},\mu)} \|f - f_n\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)} + \|h\|_{\mathrm{L}^{\infty}(\mathcal{F},\mu)} \left\|\tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}] - \tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{G}]\right\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)} \\
&\quad \leq 2\|h\|_{\mathrm{L}^{\infty}(\mathcal{F},\mu)} \|f - f_n\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)} \quad (\because \text{補助定理 } 3.2)
\end{aligned}$$

が成り立つ．$(f_n)_{n=1}^{\infty}$ の作り方から Lebesgue の収束定理が適用されて

$$\|f - f_n\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)} \longrightarrow 0 \; (n \longrightarrow \infty)$$

となるから

$$\int_{\Omega} f(x)h(x)\,\mu(dx) = \int_{\Omega} \tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}](x)h(x)\,\mu(dx)$$

が示された．

$\tilde{\mathrm{C}}3$　作用素 $\tilde{\mathrm{E}}[\cdot \mid \mathcal{G}]$ の線型性による．

$\tilde{\mathrm{C}}4$ 作用素の線型性から，C4 の証明と同様に「任意の $f \in \mathrm{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ に対して，$f \geq 0$ a.s. ならば $\tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}] \geq 0$ a.s.」を示せばよい．f に対して，先の (3) と同じように関数列 $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を作る．全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\{\, x \in \Omega \quad | \quad f_n(x) < 0 \,\} \quad \subset \quad \{\, x \in \Omega \quad | \quad f(x) < 0 \,\}$$

が成り立っているから，右辺が μ-零集合と仮定すれば C4 により

$$\tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{G}] \geq 0 \text{ a.s.} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

となる．従って

$$\begin{aligned} A_n &:= \left\{\, x \in \Omega \quad | \quad \tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{G}](x) < 0 \,\right\} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots), \\ A &:= \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \end{aligned}$$

とすれば $\mu(A) = 0$ となり，

$$B := \left\{\, x \in \Omega \quad | \quad \tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}](x) < 0 \,\right\}$$

に対して $\mu(B \cap A^c) = \mu(B) - \mu(B \cap A) = \mu(B)$ が成り立つから，示せばよいのは $\mu(B \cap A^c) = 0$ となることである．$B \cap A^c$ の上では全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\left|\tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}](x) - \tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{G}](x)\right| = \tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{G}](x) - \tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}](x) \geq -\tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}](x) > 0$$

が成り立っていることから，

$$C_k := \left\{\, x \in B \cap A^c \quad | \quad \left|\tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}](x)\right| > 1/k \,\right\} \quad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

とおけば

$$B \cap A^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$$

が成り立つ．全ての $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}] - \tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{G}] \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F}, \mu)} &= \int_{\Omega} \left|\tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}](x) - \tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{G}](x)\right| \, \mu(dx) \\ &\geq \int_{C_k} \left|\tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}](x) - \tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{G}](x)\right| \, \mu(dx) \\ &> \mu(C_k)/k \end{aligned}$$

が成り立つことから，C_k が n に無関係なことと左辺が $n \longrightarrow \infty$ で 0 に収束することから $\mu(C_k) = 0$ $(\forall k = 1, 2, 3, \cdots)$ でなくてはならず，

$$\mu(B) = \mu(B \cap A^c) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(C_k) = 0$$

となり $\tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}] \geq 0$ a.s. が示された．

$\tilde{\mathrm{C}}5$　f に対して，先の (3) と同じように関数列 $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を作る．f_n については C5 より

$$\tilde{\mathrm{E}}[gf_n \mid \mathcal{G}] = g\tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{G}] \tag{9}$$

が成り立っている．

$$E := \left\{ x \in \Omega \quad | \quad |g(x)| > \| g \|_{\mathrm{L}^\infty(\mathcal{F},\mu)} \right\}$$

とおけば $\mu(E) = 0$ であって，拡張が作用素ノルムを変えないことと補助定理 3.2，また Lebesgue の収束定理を適用すれば

$$\begin{aligned}\left\| \tilde{\mathrm{E}}[gf \mid \mathcal{G}] - \tilde{\mathrm{E}}[gf_n \mid \mathcal{G}] \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)} &\leq \| gf - gf_n \|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)} \leq \int_\Omega |g(x)||f(x) - f_n(x)| \, \mu(dx) \\ &= \int_{\Omega \setminus E} |g(x)||f(x) - f_n(x)| \, \mu(dx) \leq \| g \|_{\mathrm{L}^\infty(\mathcal{F},\mu)} \| f - f_n \|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)\end{aligned}$$

が成り立つ．同様にして

$$\begin{aligned}\left\| g\tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}] - g\tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{G}] \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)} &= \int_\Omega |g(x)\tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}](x) - g(x)\tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{G}](x)| \, \mu(dx) \\ &\leq \| g \|_{\mathrm{L}^\infty(\mathcal{F},\mu)} \int_{\Omega \setminus E} |\tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}](x) - \tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{G}](x)| \, \mu(dx) \\ &= \| g \|_{\mathrm{L}^\infty(\mathcal{F},\mu)} \int_{\Omega} |\tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}](x) - \tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{G}](x)| \, \mu(dx) \\ &\leq \| g \|_{\mathrm{L}^\infty(\mathcal{F},\mu)} \| f - f_n \|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)} \\ &\longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)\end{aligned}$$

も成り立つから，式 (8) と併せて

$$\begin{aligned}\left\| \tilde{\mathrm{E}}[gf \mid \mathcal{G}] - g\tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}] \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)} &\leq \left\| \tilde{\mathrm{E}}[gf \mid \mathcal{G}] - \tilde{\mathrm{E}}[gf_n \mid \mathcal{G}] \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)} + \left\| g\tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{G}] - g\tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}] \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)} \\ &\longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)\end{aligned}$$

となり $\tilde{\mathrm{E}}[gf \mid \mathcal{G}] = g\tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}]$ が示された．

$\tilde{\mathrm{C}}6$　f に対して，先の (3) と同じように関数列 $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を作る．f_n については C6 より

$$\tilde{\mathrm{E}}\left[\tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{G}] \,\middle|\, \mathcal{H}\right] = \tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{H}]$$

が成り立っている．

$$\begin{gathered}\left\| \tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{H}] - \tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{H}] \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)} \leq \| f - f_n \|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)}, \\ \left\| \tilde{\mathrm{E}}\left[\tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}] \,\middle|\, \mathcal{H}\right] - \tilde{\mathrm{E}}\left[\tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{G}] \,\middle|\, \mathcal{H}\right] \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)} \leq \left\| \tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}] - \tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{G}] \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)} \leq \| f - f_n \|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)}\end{gathered}$$

が成り立つことと Lebesgue の収束定理より

$$\begin{aligned}&\left\| \tilde{\mathrm{E}}\left[\tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{G}] \,\middle|\, \mathcal{H}\right] - \tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{H}] \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)} \\ &\quad \leq \left\| \tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{H}] - \tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{H}] \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)} + \left\| \tilde{\mathrm{E}}\left[\tilde{\mathrm{E}}[f \mid \mathcal{G}] \,\middle|\, \mathcal{H}\right] - \tilde{\mathrm{E}}\left[\tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{G}] \,\middle|\, \mathcal{H}\right] \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)} \\ &\quad \leq 2 \| f - f_n \|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{F},\mu)} \qquad \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)\end{aligned}$$

となり $\tilde{\mathrm{E}}\left[\tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{G}] \,\middle|\, \mathcal{H}\right] = \tilde{\mathrm{E}}[f_n \mid \mathcal{H}]$ が示された．

■

定義 4.4 (条件付き期待値の再定義). 定理 3.3 で定義された $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ から $L^1(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ (実際は $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ に埋め込まれた部分空間の意味) への有界線型作用素 $\tilde{E}[\cdot \mid \mathcal{G}]$ を $E[\cdot \mid \mathcal{G}]$ と表記し直し，$f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ に対して

$$E[f \mid \mathcal{G}]$$

を $\mathcal{G}$ で条件付けた f の条件付き期待値と呼ぶ．$\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ の場合は特別に

$$E[f \mid \mathcal{G}] = E[f]$$

と書いて f の期待値と呼ぶ．

5 10/17

基礎におく確率空間を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ とする．任意の有界実連続関数 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と任意の可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ 関数 X に対して，その合成 $h(X)$ が $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ で可積分であることに注意すればその条件付き期待値を考えることができ，これを用いて独立性を次で定義する．

定義 5.1 (独立性). X を可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ 関数，$\mathcal{G}$ を $\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族とする．この下で X と $\mathcal{G}$ が独立であることを以下で定義する:

任意の有界実連続関数 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対し次が成り立つ．

$$\mathrm{E}\left[h(X) \mid \mathcal{G}\right] = \mathrm{E}\left[h(X)\right] \quad \mathrm{P}-\text{a.s.}$$

上で定義した独立性が，X の生成する σ-加法族と $\mathcal{G}$ との間の σ-加法族としての独立性と同値であることを示す．

命題 5.2 (独立性の同値条件). 任意の有界実連続関数 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対し

$$\mathrm{E}\left[h(X) \mid \mathcal{G}\right] = \mathrm{E}\left[h(X)\right] \quad \mathrm{P}-\text{a.s.}$$

が成立すること (—(1) とする) と，

$$\mathrm{P}\left(X^{-1}(E) \cap A\right) = \mathrm{P}\left(X^{-1}(E)\right)\mathrm{P}(A) \quad (\forall E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}),\ A \in \mathcal{G})$$

が成立すること (—(2) とする) は同値である．

証明.

(1) ⇒ (2) について 示したいことは

$$\mathfrak{B}(\mathbb{R}) = \left\{ E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \quad \middle| \quad \mathrm{P}\left(X^{-1}(E) \cap A\right) = \mathrm{P}\left(X^{-1}(E)\right)\mathrm{P}(A), \quad \forall A \in \mathcal{G} \right\}$$

である．証明の手順としてまず上式右辺が Dynkin 族となることを示し，次に $\mathbb{R}$ の閉集合系が右辺に含まれることを示せば，Dynkin 族定理より上式が成立することが判る．右辺を

$$\mathscr{D} := \left\{ E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \quad \middle| \quad \mathrm{P}\left(X^{-1}(E) \cap A\right) = \mathrm{P}\left(X^{-1}(E)\right)\mathrm{P}(A), \quad \forall A \in \mathcal{G} \right\}$$

とおいて表示を簡単にしておく．$\mathscr{D}$ が Dynkin 族であることを示すには次の 3 条件を確認すればよい:

(i). $\mathbb{R} \in \mathscr{D}$,

(ii). $D_1, D_2 \in \mathscr{D},\ D_1 \subset D_2 \quad \Rightarrow \quad D_2 - D_1 \in \mathscr{D}$,

(iii). $D_n \in \mathscr{D},\ D_n \cap D_m = \emptyset\ (n \neq m) \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathscr{D}$

(i) について，$\Omega = X^{-1}(\mathbb{R})$ により $\mathrm{P}\left(X^{-1}(\mathbb{R}) \cap A\right) = \mathrm{P}(A) = \mathrm{P}\left(X^{-1}(\mathbb{R})\right)\mathrm{P}(A)$ $(\forall A \in \mathcal{G})$ であるから $\mathbb{R} \in \mathscr{D}$ となる．(ii) について，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(X^{-1}(D_2 - D_1) \cap A\right) &= \mathrm{P}\left(X^{-1}(D_2) \cap A\right) - \mathrm{P}\left(X^{-1}(D_1) \cap A\right) \\ &= \left(\mathrm{P}\left(X^{-1}(D_2)\right) - \mathrm{P}\left(X^{-1}(D_1)\right)\right)\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}\left(X^{-1}(D_2 - D_1)\right)\mathrm{P}(A), \quad (\forall A \in \mathcal{G})\end{aligned}$$

により $D_2 - D_1 \in \mathscr{D}$ となる．(iii) について，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(X^{-1}(\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} D_n) \cap A\right) &= \mathrm{P}\left(\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} X^{-1}(D_n) \cap A\right) = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\left(X^{-1}(D_n) \cap A\right) \\ &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\left(X^{-1}(D_n)\right)\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}\left(X^{-1}(\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} D_n)\right)\mathrm{P}(A), \quad (\forall A \in \mathcal{G})\end{aligned}$$

により $\sum_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathscr{D}$ となる．以上で $\mathscr{D}$ が Dynkin 族であることが判った．次に $\mathbb{R}$ の閉集合系が $\mathscr{D}$ に含まれることを示す．E を $\mathbb{R}$ の任意の閉集合とする．

$$d(\cdot, E) : \mathbb{R} \ni x \longmapsto \inf\{\, |x - y| \quad | \quad y \in E \,\}$$

として集合との距離の関数を表せばこれは $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の実連続関数であり，

$$h_n : \mathbb{R} \ni x \longmapsto \frac{1}{1 + nd(x, E)} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

は有界実連続関数となる．E が閉集合であるから $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = 1\!\!1_E(x)$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ であり，また h_n の有界連続性から $h_n \circ X \in \mathrm{L}^1(\mathcal{F}, \mu)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ であることに注意すれば，任意の $A \in \mathcal{G}$ に対して

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(X^{-1}(E) \cap A\right) &= \int_{\Omega} 1\!\!1_E(X(\omega))1\!\!1_A(\omega)\ \mathrm{P}(d\omega) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} h_n(X(\omega))1\!\!1_A(\omega)\ \mathrm{P}(d\omega) && (\because \text{ Lebesgue の収束定理}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} \mathrm{E}[h_n(X) \mid \mathcal{G}](\omega)1\!\!1_A(\omega)\ \mathrm{P}(d\omega) && (\because \text{ 定理 } 3[\check{\mathrm{C}}2]) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[h_n(X)] \int_{\Omega} 1\!\!1_A(\omega)\ \mathrm{P}(d\omega) && (\because \text{ (1) より．} \mathrm{E}[h_n(X) \mid \mathcal{G}] \neq \mathrm{E}[h_n(X)] \text{ の部分は積分に影響しない．}) \\ &= \mathrm{P}(A) \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} h_n(X(\omega))\ \mathrm{P}(d\omega) && (\because \text{ 定理 } 3[\check{\mathrm{C}}1]) \\ &= \mathrm{P}(A) \int_{\Omega} 1\!\!1_E(X(\omega))\ \mathrm{P}(d\omega) && (\because \text{ Lebesgue の収束定理}) \\ &= \mathrm{P}\left(X^{-1}(E)\right)\mathrm{P}(A)\end{aligned}$$

が成り立ち，$\mathbb{R}$ の閉集合系が $\mathscr{D}$ に含まれることが示された．閉集合系は乗法族であり $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ を生成するから (2) が成り立つと判明する．

(2) ⇒ (1) について　任意の $A \in \mathcal{G}$ に対し

$$\int_{\Omega} 1\!\!1_A(\omega)\mathrm{E}[h(X) \mid \mathcal{G}](\omega)\ \mathrm{P}(d\omega) = \mathrm{P}(A)\mathrm{E}[h(X)] = \int_{\Omega} 1\!\!1_A(\omega)\mathrm{E}[h(X)]\mathrm{P}(d\omega)$$

が成立することをいえばよい．有界実連続関数 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が非負であるとして h の単関数近似を考えると，例えば

$$\begin{aligned}E_n^j &:= \left\{\, x \in \mathbb{R} \quad | \quad \frac{j-1}{3^n} \leq h(x) < \frac{j}{3^n} \,\right\}, \quad (j = 1, 2, \cdots, n3^n - 1,\ n = 1, 2, 3, \cdots) \\ E_n^{n3^n} &:= \{\, x \in \mathbb{R} \quad | \quad n \leq h(x) \,\}\end{aligned}$$

として

$$h_n(x) = \sum_{j=1}^{n3^n} \frac{j}{3^n} \mathbb{1}_{E_n^j}(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R},\ n = 1, 2, 3, \cdots)$$

とおけば，h が可測 $\mathfrak{B}(\mathbb{R})/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であるから E_n^j は全て Borel 集合であり，任意の $A \in \mathcal{G}$ に対して

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \mathbb{1}_A(\omega) \mathrm{E}[h(X) \mid \mathcal{G}](\omega)\ \mathrm{P}(d\omega) &= \int_\Omega \mathbb{1}_A(\omega) h(X(\omega))\ \mathrm{P}(d\omega) && (\because \text{定理 } 3[\check{\mathrm{C}}2]) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \mathbb{1}_A(\omega) h_n(X(\omega))\ \mathrm{P}(d\omega) && (\because \text{積分の定義}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n3^n} \int_\Omega \mathbb{1}_A(\omega) \mathbb{1}_{X^{-1}(E_n^j)}(\omega)\ \mathrm{P}(d\omega) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n3^n} \mathrm{P}\left(X^{-1}(E_n^j) \cap A\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n3^n} \mathrm{P}\left(X^{-1}(E_n^j)\right) \mathrm{P}(A) && (\because (2) \text{ より.}) \\
&= \mathrm{P}(A) \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n3^n} \int_\Omega \mathbb{1}_{X^{-1}(E_n^j)}(\omega)\ \mathrm{P}(d\omega) \\
&= \mathrm{P}(A) \lim_{n\to\infty} \int_\Omega h_n(X(\omega))\ \mathrm{P}(d\omega) \\
&= \mathrm{P}(A) \int_\Omega h(X(\omega))\ \mathrm{P}(d\omega) \\
&= \mathrm{P}(A) \mathrm{E}[h(X)]
\end{aligned}$$

が成り立つ．一般の有界実連続関数 h についても $\{ x \in \mathbb{R} \mid h(x) \geq 0 \}$ の部分と $\{ x \in \mathbb{R} \mid h(x) < 0 \}$ の部分に分解して上と同様に考えれば

$$\int_\Omega \mathbb{1}_A(\omega) \mathrm{E}[h(X) \mid \mathcal{G}](\omega)\ \mathrm{P}(d\omega) = \mathrm{P}(A) \mathrm{E}[h(X)] \quad (\forall A \in \mathcal{G})$$

となる．従って $\mathcal{G}$ の元 $\{ \omega \in \Omega \mid \mathrm{E}[h(X) \mid \mathcal{G}](\omega) > \mathrm{E}[h(X)] \}$ も $\{ \omega \in \Omega \mid \mathrm{E}[h(X) \mid \mathcal{G}](\omega) < \mathrm{E}[h(X)] \}$ も P-零集合でなくてはならず，

$$\mathrm{E}[h(X) \mid \mathcal{G}] = \mathrm{E}[h(X)] \quad \mathrm{P}-\text{a.s.}$$

が示された．

∎

レポート問題 2. $A, B \in \mathcal{F}$ に対し，$X = \mathbb{1}_A$，$\mathcal{G} = \{\emptyset,\ \Omega,\ B,\ B^c\}$ とする．この時

$$X \text{ と } \mathcal{G} \text{ が独立} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B).$$

証明．$\forall E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$X^{-1}(E) = \begin{cases} \emptyset & (0, 1 \notin E) \\ A & (0 \notin E,\ 1 \in E) \\ A^c & (0 \in E,\ 1 \notin E) \\ \Omega & (0, 1 \in E) \end{cases}$$

であることに注意する．$\Rightarrow$ については前命題より成り立ち，$\Leftarrow$ については

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$$

ならば

$$\mathrm{P}(A^c \cap B) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B) = (1 - \mathrm{P}(A))\,\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A^c)\,\mathrm{P}(B)$$

も成り立ち，A を Ω, $\emptyset$ にしても上の等式は成り立つから，前命題により X と $\mathcal{G}$ が独立であると判る． ∎

次に条件付き期待値に対して Jensen の不等式が成り立つことを証明する．その前に凸関数の性質を書いておく.

定理 5.3 (Jensen の不等式). $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を凸関数とし，X, $\psi(X) \in \mathrm{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ とする．$\mathcal{G}$ を $\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族とすれば次の不等式が成り立つ:

$$\mathrm{E}[\psi(X) \mid \mathcal{G}] \geq \psi(\mathrm{E}[X \mid \mathcal{G}])$$

6 10/25

確率空間を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ とし，以下でマルチンゲールを定義する．集合 I によって確率過程の時点を表現し，以降でこれは $[0,\infty)$ や $\{0,,1,\cdots,n\}$ など実数の区間や高々可算集合を指すものと考え，I が高々可算集合の場合は離散位相，$\mathbb{R}$ の区間の場合は相対位相を考える．また扱う確率変数は全て実数値で考える．

定義 6.1 (フィルトレーション). $\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族の部分系 $\{\mathcal{F}_\alpha \mid \alpha \in I\}$ がフィルトレーション (filtration) であるとは，任意の $\alpha, \beta \in I$ に対して $\alpha \leq \beta$ ならば $\mathcal{F}_\alpha \subset \mathcal{F}_\beta$ の関係をもつことで定義する．

マルチンゲールを定義する前に同値類に対して順序を定める．$(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 上の可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ 関数の全体を $\mathcal{M}$，$\mathcal{M}$ を a.s. で等しいものにまとめた商空間を M と表す．$[f],[g] \in M$ に対して

$$f \leq g \text{ P-a.s.} \text{ かつそのときに限り } [f] \leq [g]$$

として関係"$\leq$"(記号は $\mathcal{M}$ におけるものと同じであるが) を定義すればこれは M において順序となる．この定義が well-defined，つまり代表元の取り方に依存しないことは $(f' > g') \subset (f \neq f') \cup (f > g) \cup (g \neq g')$ [*3] かつ右辺が零集合であることにより明確であるが，順序関係としての定義を満たしていることは以下で判る．

- $f = f$ により $[f] \leq [f]$,
- $[f] \leq [g]$ かつ $[g] \leq [f]$ なら $(f > g)$ と $(g > f)$ は P-零集合だから $[f] = [g]$,
- $[f] \leq [g]$ かつ $[g] \leq [h]$ なら $(f > h) \subset (f > g) \cup (g > h)$ により $[f] \leq [h]$.

次にマルチンゲールを定義する．確率変数とその同値類の表記は区別しないが，大体は文脈から判断するべきことであると留意しておく．

定義 6.2 (マルチンゲール). フィルトレーションが付随した確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}, (\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha \in I})$ 上の実確率変数の族 $(M_\alpha)_{\alpha \in I} \subset \mathscr{L}^p(\mathcal{F}, \mathrm{P})$ $(p \geq 1)$ が次の四条件を満たすとき，これを L^p-劣マルチンゲール (L^p-submartingale) という．

(M.1) $\forall \alpha \in I$ に対し M_α は可測 $\mathcal{F}_\alpha/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ である．

(M.2) 任意の $\alpha \leq \beta$ $(\alpha, \beta \in I)$ に対し $\mathrm{E}\left[M_\beta \,\middle|\, \mathcal{F}_\alpha\right] \geq M_\alpha$ (同値類に対する順序関係) が成り立つ．

(M.3) 各 $\omega \in \Omega$ において，任意の $\alpha \in I$ で左極限が存在する：$\exists \lim_{\beta \uparrow \alpha} M_\beta(\omega) \in \mathbb{R}$.

(M.4) 各 $\omega \in \Omega$ において，任意の $\alpha \in I$ で右連続である：$M_\alpha(\omega) = \lim_{\beta \downarrow \alpha} M_\beta(\omega)$.

条件 (M.2) の不等号が逆向き"$\leq$" の場合，$(M_\alpha)_{\alpha \in I}$ を L^p-優マルチンゲール (L^p-supermartingale) といい，劣かつ優マルチンゲールであるものをマルチンゲールという．

[*3] $(f > g) := \{x \in \Omega \mid f(x) > g(x)\}$

定義 6.3 (停止時刻). Ω 上の関数で次を満たすものを $((\mathcal{F}_\alpha)$-$)$ 停止時刻 (stopping time) という:

$$\tau : \Omega \longrightarrow I \quad \text{s.t.} \quad \forall \alpha \in I,\ (\tau \leq \alpha) \in \mathcal{F}_\alpha.$$

注意 6.4 (停止時刻は可測). 上で定義した τ は可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(I)$ である．

証明.

I が $\mathbb{R}$ の区間である場合 任意の $\alpha \in I$ に対して $I_\alpha := (-\infty, \alpha) \cap I$ は I における (相対の) 開集合であり $\tau^{-1}(I_\alpha) = (\tau \leq \alpha) \in \mathcal{F}_\alpha \subset \mathcal{F}$ が成り立つ．つまり

$$\{\, I_\alpha \quad | \quad \alpha \in I \,\} \subset \left\{ A \in \mathfrak{B}(I) \quad | \quad \tau^{-1}(A) \in \mathcal{F} \right\}$$

が成り立ち，左辺の I_α の形の全体は $\mathfrak{B}(I)$ を生成するから τ の可測性が証明された．

I が高々可算集合である場合 先ず $\alpha \in I$ に対して $(\tau < \alpha)$ が $\mathcal{F}_\alpha$ に属することを示す．α に対して直前の元 $\beta \in I$ が存在するか α が I の最小限である場合, 前者なら $(\tau < \alpha) = (\tau \leq \beta)$ となり後者なら $(\tau < \alpha) = \emptyset$ となるからどちらも $\mathcal{F}_\alpha$ に属する．そうでない場合は $\alpha - 1/n < x < \alpha$ を満たす点列 $x_n \in I\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ を取れば, $(\tau < \alpha) = \cap_{n=1}^{\infty} (\tau \leq \alpha - 1/n)$ により $(\tau < \alpha) \in \mathcal{F}_\alpha$ が判る．以上の準備の下で任意の $\alpha \in I$ に対して $\tau^{-1}(\{\alpha\}) = (\tau \leq \alpha) - (\tau < \alpha) \in \mathcal{F}_\alpha$ が成り立ち，更に可算集合 I には離散位相が入っているから任意の $A \in \mathfrak{B}(I)$ は一点集合の可算和で表現できて，$\tau^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ であると証明された．

∎

定義 6.5 (停止時刻の再定義). 今 τ の終集合は I であるが，$I \to \mathbb{R}$ の恒等写像 i を用いて $\tau^* := i \circ \tau$ とすれば,

$$\mathfrak{B}(I) = \{\, A \cap I \quad | \quad A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \,\} = \left\{ i^{-1}(A) \quad | \quad A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \right\}$$

により (i が可測 $\mathfrak{B}(I)/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であるから) 合成写像 τ^* は可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ となる．以降はこの τ^* を停止時刻 τ と表記して扱うことにする．

定数関数は停止時刻となる．τ が Ω 上の定数関数なら $(\tau \leq \alpha)$ は空集合か全体集合にしかならないからである．また σ, τ を I に値を取る停止時刻とすると $\sigma \vee \tau$ と $\sigma \wedge \tau$ も停止時刻となる．

$$\begin{cases} (\sigma \wedge \tau \leq \alpha) = (\sigma \leq \alpha) \cup (\tau \leq \alpha), \\ (\sigma \vee \tau \leq \alpha) = (\sigma \leq \alpha) \cap (\tau \leq \alpha) \end{cases} , (\forall \alpha \in I)$$

が成り立つからである．

定義 6.6 (停止時刻の前に決まっている事象系). τ を I に値を取る停止時刻とする．τ に対し次の集合系を定義する．

$$\mathcal{F}_\tau := \{\, A \in \mathcal{F} \quad | \quad (\tau \leq \alpha) \cap A \in \mathcal{F}_\alpha,\ \forall \alpha \in I \,\}.$$

命題 6.7 (停止時刻の性質). σ, τ を I に値を取る停止時刻であるとする.

(1) $\mathcal{F}_\tau$ は σ-加法族である.

(2) 或る $\alpha \in I$ に対して $\tau(\omega) = \alpha$ $(\forall \omega \in \Omega)$ なら $\mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F}_\tau$.

(3) $\sigma(\omega) \leq \tau(\omega)$ $(\forall \omega \in \Omega)$ ならば $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$.

(4) $\mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau} = \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$.

(5) $\mathcal{F}_{\sigma \vee \tau} = \mathcal{F}_\sigma \vee \mathcal{F}_\tau$.

証明.

(1) 停止時刻の定義より $\Omega \in \mathcal{F}_\tau$ である．また $A \in \mathcal{F}_\tau$ なら $A^c \cap (\tau \leq \alpha) = (\tau \leq \alpha) - A \cap (\tau \leq \alpha) \in \mathcal{F}_\alpha$ より $A^c \in \mathcal{F}_\tau$ となる．可算個の $A_n \in \mathcal{F}_\tau$ については $\cup_{n=1}^\infty A_n \cap (\tau \leq \alpha) = \cup_{n=1}^\infty (A_n \cap (\tau \leq \alpha)) \in \mathcal{F}_\alpha$ により $\cup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{F}_\tau$ が成り立つ.

(2) $A \in \mathcal{F}_\alpha$ なら任意の $\beta \in I$ に対して

$$A \cap (\tau \leq \beta) = \begin{cases} A & \alpha \leq \beta \\ \emptyset & \alpha > \beta \end{cases}$$

が成り立つから，いずれの場合も $A \in \mathcal{F}_\beta$ となり $A \subset \mathcal{F}_\tau$ が成り立つ．逆に $A \in \mathcal{F}_\tau$ のとき，$A = A \cap (\tau \leq \alpha) \in \mathcal{F}_\alpha$ が成り立ち $\mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F}_\tau$ が示された.

(3) $A \in \mathcal{F}_\sigma$ なら任意の $\alpha \in I$ に対して

$$A \cap (\tau \leq \alpha) = A \cap (\sigma \leq \alpha) \cap (\tau \leq \alpha) \in \mathcal{F}_\alpha$$

が成り立つから $A \in \mathcal{F}_\tau$ となる.

(4) $\sigma \wedge \tau$ が停止時刻であることと (3) より $\mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau} \subset \mathcal{F}_\sigma$ と $\mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau} \subset \mathcal{F}_\tau$ が判る．また $A \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$ に対し

$$A \cap (\sigma \wedge \tau \leq \alpha) = [A \cap (\sigma \leq \alpha)] \bigcup [A \cap (\tau \leq \alpha)] \in \mathcal{F}_\alpha \quad (\forall \alpha \in I)$$

より $A \in \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}$ も成り立つ.

(5) 先ず $\sigma \vee \tau$ が停止時刻であることと (3) より $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}$ と $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}$ が判る．逆に $A \in \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}$ に対して

命題 6.8 (停止時刻と条件付き期待値). $X \in \mathrm{L}^1(\mathcal{F}, \mathrm{P})$ と I に値を取る停止時刻 σ, τ に対し以下が成立する.

(1) $\mathrm{E}\left[\mathbb{1}_{(\sigma > \tau)} X \,\middle|\, \mathcal{F}_\tau\right] = \mathrm{E}\left[\mathbb{1}_{(\sigma > \tau)} X \,\middle|\, \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}\right]$.

(2) $\mathrm{E}\left[\mathbb{1}_{(\sigma \geq \tau)} X \,\middle|\, \mathcal{F}_\tau\right] = \mathrm{E}\left[\mathbb{1}_{(\sigma \geq \tau)} X \,\middle|\, \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}\right]$.

(3) $\mathrm{E}[\mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_\tau] \mid \mathcal{F}_\sigma] = \mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}]$.

証明.

第一段　$\mathbb{1}_{(\sigma>\tau)}$ が可測 $\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であることを示す．$A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ に対し

$$\mathbb{1}_{(\sigma>\tau)}^{-1}(A) = \begin{cases} \Omega & (0 \in A,\ 1 \in A) \\ (\sigma > \tau) & (0 \notin A,\ 1 \in A) \\ (\sigma > \tau)^c & (0 \in A,\ 1 \notin A) \\ \emptyset & (0 \notin A,\ 1 \notin A) \end{cases}$$

と表現できるから，示すことは任意の $\alpha \in I$ に対して

$$(\sigma > \tau) \cap (\sigma \wedge \tau \leq \alpha) \in \mathcal{F}_\alpha$$

が成立することである．これが示されれば

$$(\sigma > \tau)^c \cap (\sigma \wedge \tau \leq \alpha) = (\sigma \wedge \tau \leq \alpha) \setminus [(\sigma > \tau) \cap (\sigma \wedge \tau \leq \alpha)] \in \mathcal{F}_\alpha$$

も成り立ち，更に $(\sigma > \tau)^c = (\sigma \leq \tau)$ であることと σ, τ の対等性により $\mathbb{1}_{(\sigma\geq\tau)}$ もまた可測 $\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であることが判る．目的の式は次が成り立つことにより示される．

$$\begin{aligned} (\sigma > \tau) \cap (\sigma \wedge \tau \leq \alpha) &= (\sigma > \tau) \cap (\sigma \leq \alpha) + (\sigma > \tau) \cap (\sigma > \alpha) \cap (\tau \leq \alpha) \\ &= \left[\bigcup_{\substack{\beta\in\mathbb{Q}\cap I \\ \beta\leq\alpha}} (\sigma > \beta) \cap (\tau \leq \beta) \right] \cap (\sigma \leq \alpha) + (\sigma > \alpha) \cap (\tau \leq \alpha) \qquad (10) \\ &\in \mathcal{F}_\alpha. \end{aligned}$$

第二段　一般の実確率変数 Y と停止時刻 τ に対して

- Y が可測 $\mathcal{F}_\tau/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$　$\Leftrightarrow$　任意の $\alpha \in I$ に対し $Y\mathbb{1}_{\tau\leq\alpha}$ が可測 $\mathcal{F}_\alpha/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$

が成り立つことを示す．

$\Rightarrow$ について　Y の単関数近似列 $(Y_n)_{n=1}^\infty$ の一つ一つは $Y_n = \sum_{j=1}^{N_n} a_{j,n}\mathbb{1}_{A_{j,n}}$ $(A_{j,n} \in \mathcal{F}_\tau)$ の形で表現できる．$\alpha \in I$ と $A \in \mathcal{F}_\tau$ の指示関数 $\mathbb{1}_A$ に対し

$$\left(\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{(\tau\leq\alpha)}\right)^{-1}(E) = \begin{cases} \Omega & (0 \in E,\ 1 \in E) \\ A \cap (\tau \leq \alpha) & (0 \notin E,\ 1 \in E) \\ [A \cap (\tau \leq \alpha)]^c & (0 \in E,\ 1 \notin E) \\ \emptyset & (0 \notin E,\ 1 \notin E) \end{cases} \quad (\forall E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$$

となり，$A \cap (\tau \leq \alpha) \in \mathcal{F}_\alpha$ より $\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{(\tau\leq\alpha)}$ が可測 $\mathcal{F}_\alpha/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であると判る．$(Y_n)_{n=1}^\infty$ は Y に各点収束していくから Y も可測 $\mathcal{F}_\alpha/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ となり，$\alpha \in I$ の任意性から”$\Rightarrow$” が示された．

$\Leftarrow$ について　任意の $E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$\{\, \omega \in \Omega \quad | \quad Y(\omega)\mathbb{1}_{(\tau\leq\alpha)}(\omega) \in E \,\} = \begin{cases} Y^{-1}(E) \cap (\tau \leq \alpha) & (0 \notin E) \\ Y^{-1}(E) \cap (\tau \leq \alpha) + (\tau \leq \alpha)^c & (0 \in E) \end{cases}$$

がいずれも $\mathcal{F}_\alpha$ に属する．特に下段について $(\tau \leq \alpha)^c \in \mathcal{F}_\alpha$ より $Y^{-1}(E) \cap (\tau \leq \alpha) \in \mathcal{F}_\alpha$ となるから，結局 $Y^{-1}(E) \cap (\tau \leq \alpha) \in \mathcal{F}_\alpha$ $(\forall E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ が成り立つ．$\alpha \in I$ の任意性から $Y^{-1}(E) \in \mathcal{F}_\tau$ $(\forall E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ が示された．

第三段　(1) の式を示す．第一段と性質 $\tilde{\mathrm{C}}5$ より

$$\mathrm{E}\left[\mathbb{1}_{(\sigma>\tau)}X \,\middle|\, \mathcal{F}_\tau\right] = \mathbb{1}_{(\sigma>\tau)}\,\mathrm{E}\left[X \mid \mathcal{F}_\tau\right]$$

が成り立つから，あとは右辺が (関数とみて) 可測 $\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であればよく，このためには第二段の結果より任意の $\alpha \in I$ に対して $\mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_\tau]\,\mathbb{1}_{(\sigma>\tau)}\mathbb{1}_{(\sigma\wedge\tau\leq\alpha)}$ が可測 $\mathcal{F}_\alpha/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であることを示せばよい．式 (9) を使えば

$$\mathbb{1}_{(\sigma>\tau)}\mathbb{1}_{(\sigma\wedge\tau\leq\alpha)} = \sup_{\substack{\beta\in\mathbb{Q}\cap I \\ \beta\leq\alpha}} \mathbb{1}_{(\sigma>\beta)}\mathbb{1}_{(\tau\leq\beta)}\mathbb{1}_{(\sigma\leq\alpha)} + \mathbb{1}_{(\sigma>\alpha)}\mathbb{1}_{(\tau\leq\alpha)}$$

が成り立つ．$\beta \leq \alpha$ ならば，$\mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_\tau]$ が可測 $\mathcal{F}_\tau/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であることと第二段の結果より $\mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_\tau]\,\mathbb{1}_{(\tau\leq\beta)}$ が可測 $\mathcal{F}_\beta/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ すなわち可測 $\mathcal{F}_\alpha/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ となるから，これで $\mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_\tau]\,\mathbb{1}_{(\sigma>\tau)}\mathbb{1}_{(\sigma\wedge\tau\leq\alpha)}$ が可測 $\mathcal{F}_\alpha/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であると判り $\mathbb{1}_{(\sigma>\tau)}\,\mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_\tau]$ が可測 $\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であることが示された．以上で

$$\mathrm{E}\Big[\mathrm{E}\big[\mathbb{1}_{(\sigma>\tau)}X \,\big|\, \mathcal{F}_\tau\big] \,\Big|\, \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}\Big] = \mathrm{E}\big[\mathbb{1}_{(\sigma>\tau)}\,\mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_\tau] \,\big|\, \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}\big] = \mathbb{1}_{(\sigma>\tau)}\,\mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_\tau] = \mathrm{E}\big[\mathbb{1}_{(\sigma>\tau)}X \,\big|\, \mathcal{F}_\tau\big]$$

が成り立ち，

$$\mathrm{E}\Big[\mathrm{E}\big[\mathbb{1}_{(\sigma>\tau)}X \,\big|\, \mathcal{F}_\tau\big] \,\Big|\, \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}\Big] = \mathbb{1}_{(\sigma>\tau)}\,\mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}] = \mathrm{E}\big[\mathbb{1}_{(\sigma>\tau)}X \,\big|\, \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}\big]$$

と併せて (1) の式を得る．(2) の式も以上と同じ理由で成り立つ．

第四段　(3) の式を示す．

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_\tau] \mid \mathcal{F}_\sigma] &= \mathrm{E}\big[\mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_\tau]\,\mathbb{1}_{(\sigma>\tau)} \,\big|\, \mathcal{F}_\sigma\big] + \mathrm{E}\big[\mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_\tau]\,\mathbb{1}_{(\sigma\leq\tau)} \,\big|\, \mathcal{F}_\sigma\big] \\
&= \mathrm{E}\big[\mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}]\,\mathbb{1}_{(\sigma>\tau)} \,\big|\, \mathcal{F}_\sigma\big] + \mathrm{E}\big[\mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_\tau]\,\mathbb{1}_{(\sigma\leq\tau)} \,\big|\, \mathcal{F}_\sigma\big] && (\because (1)) \\
&= \mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}]\,\mathbb{1}_{(\sigma>\tau)} + \mathrm{E}\big[\mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_\tau]\,\mathbb{1}_{(\sigma\leq\tau)} \,\big|\, \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}\big] && (\because (2)) \\
&= \mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}]\,\mathbb{1}_{(\sigma>\tau)} + \mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}]\,\mathbb{1}_{(\sigma\leq\tau)} \\
&= \mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}].
\end{aligned}$$

(2) 式を使った箇所では X を $\mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_\tau]$ に置き換え τ と σ を入れ替えて適用した．

∎

τ を停止時刻とし，$\tau(\Omega)$ が高々可算集合である場合，実確率変数の族 $(M_\alpha)_{\alpha\in I}$ に対して

$$M_\tau \coloneqq \sum_{\alpha\in\tau(\Omega)} M_\alpha$$

とおく．全ての $\alpha \in \tau(\Omega)$ について M_α が可測 $\mathcal{F}_\alpha/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であるとき，M_τ は可測 $\mathcal{F}_\tau/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ となる．なぜならば任意の $\alpha \in I$ と $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$(M_\tau \in A) \cap (\tau \leq \alpha) = \bigcup_{\substack{\beta\in\tau(\Omega) \\ \beta\leq\alpha}} (M_\beta \in A) \cap (\tau = \beta) \in \mathcal{F}_\alpha$$

が成り立つからである．M_τ の可測性を確認したところで次の定理を証明する．

定理 6.9 (任意抽出定理 (その 1)).　$I = \{1, 2, \cdots, n\}$ とし，実確率変数の族 $(M_\alpha)_{\alpha\in I}$ が L^p-劣マルチンゲールであるとする．このとき I に値を取る停止時刻 σ と τ について次が成立する:

$$\mathrm{E}[M_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma] \geq M_{\sigma\wedge\tau}.$$

証明.

$\sigma \leq \tau$ の場合　$F_\alpha \coloneqq \mathbb{1}_{\sigma<\alpha\leq\tau}$ $(\alpha \in I)$ とおくと，

$$(\sigma < \alpha \leq \tau) = (\sigma < \alpha) \cap (\alpha \leq \tau) = (\sigma \leq \alpha - 1) \cap (\tau \leq \alpha - 1)^c$$

より F_α は可測 $\mathcal{F}_{\alpha-1}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ となる．F_α を用いて

$$N_\beta \coloneqq \sum_{\alpha=0}^{\beta-1} F_{\alpha+1}(M_{\alpha+1} - M_\alpha) \quad (\beta \in I)$$

として $(N_\beta)_{\beta\in I}$ を定義すれば，これもまた L^p-劣マルチンゲールとなる．今 I は有限集合であるから定義 5.2 の条件 (M.1)(M.2) を満たすことを確認すればよい．

(M.1)　先ず N_β が可測 $\mathcal{F}_\beta/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であることを示す．N_β を構成する級数の項のうち最も可測性が厳しいものは最終項 $F_\beta(M_\beta - M_{\beta-1})$ であり，M_β も F_β も可測 $\mathcal{F}_\beta/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であるから N_β の可測性も判明する．可積分性については，M_α $(\alpha \in I)$ が p 乗可積分であるからその有限個の結合で表現される $(N_\beta)_{\beta\in I}$ もまた p 乗可積分となる．

(M.2)　$\alpha \leq \beta$ $(\alpha, \beta \in I)$ に対して

$$N_\beta - N_\alpha = \sum_{\gamma=\alpha}^{\beta-1} F_{\gamma+1}(M_{\gamma+1} - M_\gamma)$$

と表せるから，(関数の同値類を同様に表記して)$\mathcal{F}_\alpha$ で条件付ければ，性質 $\tilde{\mathrm{C}}5$，$\tilde{\mathrm{C}}6$ と F_α の可測性事情，そして $(M_\alpha)_{\alpha\in I}$ が劣マルチンゲールであることにより

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[N_\beta - N_\alpha \,\middle|\, \mathcal{F}_\alpha\right] &= \sum_{\gamma=\alpha}^{\beta-1} \mathrm{E}\left[F_{\gamma+1}(M_{\gamma+1} - M_\gamma) \,\middle|\, \mathcal{F}_\alpha\right] \\
&= \sum_{\gamma=\alpha}^{\beta-1} \mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left[F_{\gamma+1}(M_{\gamma+1} - M_\gamma) \,\middle|\, \mathcal{F}_\gamma\right] \,\middle|\, \mathcal{F}_\alpha\right] \\
&= \sum_{\gamma=\alpha}^{\beta-1} \mathrm{E}\left[F_{\gamma+1}\,\mathrm{E}\left[M_{\gamma+1} - M_\gamma \,\middle|\, \mathcal{F}_\gamma\right] \,\middle|\, \mathcal{F}_\alpha\right] \geq 0 \quad \text{(P-a.s.)}
\end{aligned}$$

が成り立つ*4．従って $\mathrm{E}\left[N_\beta \,\middle|\, \mathcal{F}_\alpha\right] \geq \mathrm{E}\left[N_\alpha \mid \mathcal{F}_\alpha\right] = N_\alpha$ *5が成り立つ．

---

*4 同値類ではなく代表元の関数と見做している．

*5 こちらは同値類に対する順序記号を使っている．等号は性質 $\tilde{\mathrm{C}}5$ による．

7　11/1

確率空間を $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ とする．

定理 7.1 (Doob の不等式 (1)). $I = \{0, 1, \cdots, n\}$，$(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ をフィルトレーション，$(M_t)_{t \in I}$ を L^1-劣マルチンゲールとし，$M^* := \max_{t \in I} M_t$ とおく．$(M_t)_{t \in I}$ が非負値なら次が成り立つ:

(1)　任意の $\lambda > 0$ に対して

$$\mu(M^* \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\{ M^* \geq \lambda \}} M_n(\omega)\, \mu(d\omega) \leq \frac{1}{\lambda} \| M_n \|_{\mathscr{L}^1} .$$

(2)　任意の $p > 1$ に対して M_t $(\forall t \in I)$ が p 乗可積分なら

$$\| M^* \|_{\mathscr{L}^p} \leq \frac{p}{p-1} \| M_n \|_{\mathscr{L}^p} .$$

証明.

$$\tau(\omega) := \min \{ i \in I \mid \quad M_i(\omega) \geq \lambda \} \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

とおけば τ は I に値を取る停止時刻となる．ただし全ての $i \in I$ で $M_i(\omega) < \lambda$ となるような ω については $\tau(\omega) = n$ とする．実際停止時刻となることは

$$\{ \tau = i \} = \bigcap_{j=0}^{i-1} \left\{ M_j < \lambda \right\} \cap \{ M_i \geq \lambda \} \in \mathcal{F}_i, \quad (i = 0, 1, \cdots, n-1),$$
$$\{ \tau = n \} = \bigcap_{j=0}^{n-1} \left\{ M_j < \lambda \right\} \in \mathcal{F}_n$$

により判る．任意抽出定理より

$$\mathrm{E}[M_n \mid \mathcal{F}_\tau] \geq M_{n \wedge \tau} = M_\tau \quad (\because \tau \leq n)$$

が成り立つから，期待値を取って

$$\begin{aligned}
\int_\Omega M_n(\omega)\, \mu(d\omega) &\geq \int_\Omega M_\tau(\omega)\, \mu(d\omega)^{*6} \\
&= \int_{\{ M^* \geq \lambda \}} M_\tau(\omega)\, \mu(d\omega) + \int_{\{ M^* < \lambda \}} M_\tau(\omega)\, \mu(d\omega) \\
&\geq \lambda \mu(M^* \geq \lambda)^{*7} + \int_{\{ M^* < \lambda \}} M_n(\omega)\, \mu(d\omega) \qquad (\because M^*(\omega) < \lambda \text{ ならば } \tau(\omega) = n \text{ である．})
\end{aligned}$$

---

*7　性質 $\tilde{\mathrm{C}}2$ より

$$\int_\Omega M_n(\omega)\ \mathrm{P}(d\omega) = \int_\Omega \mathrm{E}[M_n \mid \mathcal{F}_\tau](\omega)\, \mu(d\omega) \geq \int_\Omega M_\tau(\omega)\, \mu(d\omega)$$

が成り立つ．

が成り立つ．従って

$$\lambda\mu(M^* \geq \lambda) \leq \int_{\{\ M^*\geq\lambda\ \}} M_n(\omega)\,\mu(d\omega) \leq \|\, M_n \,\|_{\mathscr{L}^1} \tag{11}$$

を得る．これは

$$\mu(M^* > \lambda) \leq \int_{\{\ M^*>\lambda\ \}} M_n(\omega)\,\mu(d\omega) \tag{12}$$

としても成り立つ[*8]．次に (2) を示す．$K \in \mathbb{N}$ とする．

$$\begin{aligned}
\|\, M^* \wedge K \,\|_{\mathscr{L}^p}^p &= \int_\Omega |M^*(\omega) \wedge K|^p \ \mu(d\omega) \\
&= p \int_\Omega \int_0^{M^*(\omega)\wedge K} t^{p-1}\ dt\,\mu(d\omega) \\
&= p \int_\Omega \int_0^K t^{p-1}\,1\!\!1_{\{M^*(\omega)>t\}}\ dt\,\mu(d\omega)^{*9} \\
&= p \int_0^K t^{p-1} \int_\Omega 1\!\!1_{\{M^*(\omega)>t\}}\,\mu(d\omega)\,dt && (\because \text{ Fubini の定理より}) \\
&= p \int_0^K t^{p-1}\mu(M^* > t)\,dt \\
&\leq p \int_0^K t^{p-2} \int_{\{\ M^*>t\ \}} M_n(\omega)\,\mu(d\omega) && (\because \text{ 式 (11) より}) \\
&= p \int_\Omega M_n(\omega) \int_0^K t^{p-2}\,1\!\!1_{\{M^*(\omega)>t\}}\ dt\,\mu(d\omega) \\
&= \frac{p}{p-1} \int_\Omega M_n(\omega)\,|M^*(\omega) \wedge K|^{p-1}\ \mu(d\omega) \\
&\leq \frac{p}{p-1}\,\|\, M_n \,\|_{\mathscr{L}^p}\,\|\, M^*(\omega) \wedge K \,\|_{\mathscr{L}^p}^{p-1}
\end{aligned}$$

となるから，

$$\|\, M^* \wedge K \,\|_{\mathscr{L}^p} \leq \frac{p}{p-1}\,\|\, M_n \,\|_{\mathscr{L}^p}$$

が成り立つ．$K \longrightarrow \infty$ として単調収束定理より

$$\|\, M^* \,\|_{\mathscr{L}^p} \leq \frac{p}{p-1}\,\|\, M_n \,\|_{\mathscr{L}^p}$$

を得る． ∎

[*7] 最後の不等式は次の理由で成り立つ:

$$M_\tau\,1\!\!1_{\{M^*\geq\lambda\}} = \sum_{i=0}^{n-1} M_i\,1\!\!1_{\{\tau=i\}} + M_n\,1\!\!1_{\{\tau=n\}}\,1\!\!1_{\{M^*\geq\lambda\}} \geq \lambda.$$

[*8] 式 (10) により任意の $n \in \mathbb{N}$ で

$$\mu(M^* \geq \lambda + 1/n) \leq \int_{\{\ M^*\geq\lambda+1/n\ \}} M_n(\omega)\,\mu(d\omega)$$

が成り立っているから，$n \longrightarrow \infty$ とすればよい．

[*9] 写像 $[0, K) \times \Omega \ni (t, \omega) \longmapsto 1\!\!1_{\{M^*(\omega)>t\}}$ は可測 $\mathfrak{B}([0, K)) \times \mathcal{F} / \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ である．実際，

$$f(t, \omega) \coloneqq 1\!\!1_{\{M^*(\omega)>t\}}, \quad f_n(t, \omega) \coloneqq 1\!\!1_{\{M^*(\omega)>(j+1)/2^n\}} \quad \left(t \in \left[\tfrac{j}{2^n}, \tfrac{j+1}{2^n}\right),\ j = 0, 1, \cdots, K2^n - 1\right)$$

$I = [0, T] \subset \mathbb{R}$ $(T > 0)$ を考える．$t \longmapsto M_t$ は右連続であるから $\sup_{t \in I} M_t$ は確率変数となる．これは

$$\sup_{t \in I} M_t(\omega) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \max_{j=0,1,\cdots,2^n} M_{\frac{j}{2^n}T}(\omega) \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

が成り立つからである．実際各点 $\omega \in \Omega$ で

$$\alpha = \alpha(\omega) := \sup_{t \in I} M_t(\omega), \quad \beta = \beta(\omega) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \max_{j=0,1,\cdots,2^n} M_{\frac{j}{2^n}T}(\omega)$$

とおけば，α の方が上限を取る範囲が広いから $\alpha \geq \beta$ は成り立つ．だがもし $\alpha > \beta$ とすれば，或る $s \in I$ が存在して

$$M_s(\omega) > \frac{\alpha + \beta}{2}$$

を満たすから，右連続性により s の近傍から $jT/2^n$ の形の点を取ることができて

$$(\beta \geq) \ M_{\frac{j}{2^n}T}(\omega) > \frac{\alpha + \beta}{2}$$

となりこれは矛盾である．

定理 7.2 (Doob の不等式 (2)). $I = [0, T]$，$(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ をフィルトレーション，$(M_t)_{t \in I}$ を L^p-劣マルチンゲールとし，$M^* := \sup_{t \in I} M_t$ とおく．$(M_t)_{t \in I}$ が非負値なら次が成り立つ:

(1) 任意の $\lambda > 0$ に対して

$$\mu(M^* \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^p} \| M_T \|_{\mathscr{L}^p}^p .$$

(2) $p > 1$ なら

$$\| M^* \|_{\mathscr{L}^p} \leq \frac{p}{p-1} \| M_T \|_{\mathscr{L}^p} .$$

証明.

$$D_n := \left\{ \tfrac{j}{2^n} T \mid \quad j = 0, 1, \cdots, 2^n \right\}$$

とおく．Jensen の不等式より，任意の $0 \leq s < t \leq T$ に対して

$$\mathrm{E}\left[M_t^p \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right] \geq \mathrm{E}\left[M_t \mid \mathcal{F}_s \right]^p \leq M_s^p$$

とおけば，任意の $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$f_n^{-1}(A) = \begin{cases} \emptyset & (0 \notin A,\ 1 \notin A) \\ \bigcup_{j=0}^{K2^n-1} \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n} \right) \times \left\{ \omega \mid \quad M^*(\omega) > \frac{j+1}{2^n} \right\} & (0 \notin A,\ 1 \in A) \\ \bigcup_{j=0}^{K2^n-1} \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n} \right) \times \left\{ \omega \mid \quad M^*(\omega) \leq \frac{j+1}{2^n} \right\} & (0 \in A,\ 1 \notin A) \\ [0, n] \times \Omega & (0 \in A,\ 1 \in A) \end{cases}$$

が成り立つから f_n は可測 $\mathfrak{B}([0, K)) \times \mathcal{F} / \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ である．また各点 $(t, \omega) \in [0, K) \times \Omega$ において

$$f(t, \omega) - f_n(t, \omega) = \mathbb{1}_{\{t < M^*(\omega) \leq (j+1)/2^n\}} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

となり f_n は f に各点収束するから，可測性は保存され f も可測 $\mathfrak{B}([0, K)) \times \mathcal{F} / \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ となる．t^{p-1} も 2 変数関数として $g(t, \omega) := t^{p-1} \mathbb{1}_{\Omega}(\omega)$ と見做せば可測 $\mathfrak{B}([0, K)) \times \mathcal{F} / \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ で，よって gf に対し Fubini の定理を適用できる．

が成り立つ．従って $(M_t^p)_{t\in I}$ は L^1-劣マルチンゲールであり，前定理の結果を使えば

$$\mu(\max_{r\in D_n} M_r^p \geq \lambda^p) \leq \frac{1}{\lambda^p} \| M_T \|_{\mathscr{L}^p}^p$$

が任意の $n\in\mathbb{N}$ で成り立つ．非負性から $\max_{r\in D_n} M_r^p = (\max_{r\in D_n} M_r)^p$ となり

$$\mu(\max_{r\in D_n} M_r \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^p} \| M_T \|_{\mathscr{L}^p}^p$$

と書き直すことができて，

$$\mu(M^* \geq \lambda) = \mu(\sup_{n\in\mathbb{N}} \max_{r\in D_n} M_r \geq \lambda) = \lim_{n\to\infty} \mu(\max_{r\in D_n} M_r \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^p} \| M_T \|_{\mathscr{L}^p}^p$$

が成り立つ．同じく前定理[*10]を適用し，

$$\left\| \max_{r\in D_n} M_r \right\|_{\mathscr{L}^p} \leq \frac{p}{p-1} \| M_T \|_{\mathscr{L}^p}$$

を保って $n \longrightarrow \infty$ とすれば単調収束定理より (2) を得る． ∎

定理 7.3 (停止時刻との合成写像の可測性). $I = [0,T]$，フィルトレーションを $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$，τ を停止時刻とし，M を $I\times\Omega$ 上の $\mathbb{R}$ 値関数とする．M について，全ての $\omega\in\Omega$ に対し $I \ni t \longmapsto M(t,\omega)$ が右連続でかつ $(\mathcal{F}_t)$-適合ならば，写像 $\omega \longmapsto M(\tau(\omega),\omega)$ は可測 $\mathcal{F}_\tau/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ となる．

証明. 任意に $t\in I$ を取り $t_j^n := jt/2^n$ $(j=0,1,\cdots,2^n,\ n=1,2,\cdots)$ とおくと，右連続性により任意の $s\in[0,t]$ に対して

$$M(s,\omega) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{2^n} M_{t_j^n}(\omega) \mathbb{1}_{(t_{j-1}^n, t_j^n]}(s) \quad (\omega\in\Omega) \tag{13}$$

が成り立つ．右辺は各 n で可測 $\mathfrak{B}([0,t])\times\mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であるから M も可測 $\mathfrak{B}([0,t])\times\mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ となる．(t の任意性から M は $(\mathcal{F}_t)$-発展的可測である．) 一方停止時刻 τ について，$\tau\wedge t$ が可測 $\mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であるから

$$\Omega \ni \omega \longmapsto (\tau(\omega)\wedge t, \omega) \in [0,t]\times\Omega$$

は可測 $\mathcal{F}_t/\mathfrak{B}([0,t])\times\mathcal{F}_t$ である．従って合成写像

$$\Omega \ni \omega \longmapsto M(\tau(\omega)\wedge t, \omega) \in \mathbb{R}$$

は可測 $\mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ となる．任意の $A\in\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$\{\,\omega\in\Omega \mid \ M(\tau(\omega),\omega)\in A\,\} \cap \{\tau\leq t\} = \{\,\omega\in\Omega \mid \ M(\tau(\omega)\wedge t,\omega)\in A\,\} \cap \{\tau\leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

が成り立つから，写像 $\omega \longmapsto M(\tau(\omega),\omega)$ は可測 $\mathcal{F}_\tau/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ である[*11]． ∎

[*10] L^p-劣マルチンゲールなら L^1-劣マルチンゲールであるから前定理の結果を適用できる．

[*11] 写像 $\omega \longmapsto M(\tau(\omega),\omega)$ が可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ となっていないことにはこの結論が従わない．この点を確認すれば，式 (12) より M が可測 $\mathfrak{B}(I)\times\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であることは慥かであるから，$\omega \longmapsto (\tau(\omega),\omega)$ が可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(I)\times\mathcal{F}$ であることと併せて写像 $\omega \longmapsto M(\tau(\omega),\omega)$ が可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であることが判明する．

定理 7.4 (任意抽出定理 (2)). $I = [0, T]$，$p > 1$，$(M_t)_{t\in I}$ を L^p-マルチンゲールとする．このとき I に値を取る任意の停止時刻 τ, σ に対し次が成り立つ:

$$\mathrm{E}\left[M_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma\right] = M_{\tau\wedge\sigma}.$$

証明.

$$\tau_n := \min\left\{ T, \frac{1 + [2^n \tau]}{2^n} \right\}, \quad \sigma_n := \min\left\{ T, \frac{1 + [2^n \sigma]}{2^n} \right\}, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

とおく．このとき τ_n, σ_n は停止時刻で $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_{\sigma_n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が成り立つ．実際任意の $0 \leq t < T$ に対して

$$\{\tau_n \leq t\} = \{1 + [2^n \tau] \leq 2^n t\} = \{\tau_n \leq [2^n t]/2^n\} \in \mathcal{F}_t$$

となり，$t = T$ の時も

$$\{\tau_n \leq T\} = \{1 + [2^n \tau] > 2^n T\} + \{1 + [2^n \tau] \leq 2^n T\} \in \mathcal{F}_T$$

が成り立つから τ_n は停止時刻[*12]で，

$$2^n \sigma_n \leq 1 + [2^n \sigma] \Rightarrow \sigma < \sigma_n$$

により $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_{\sigma_n}$ となる．前定理により任意の $A \in \mathcal{F}_\sigma$ に対して

$$\int_A M_{\tau_n(\omega)}(\omega)\, \mu(d\omega) = \int_A M_{\tau_n(\omega)\wedge\sigma_n(\omega)}(\omega)\, \mu(d\omega)$$

が成り立ち，$(|M_t|)_{t\in I}$ が L^p-劣マルチンゲールであることから Doob の不等式により $\sup_{t\in I} M_t$ は可積分である[*13]．従って $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \tau$ と M の右連続性から，Lebesgue の収束定理より

$$\begin{aligned}\int_A M_{\tau(\omega)}(\omega)\, \mu(d\omega) &= \lim_{n\to\infty} \int_A M_{\tau_n(\omega)}(\omega)\, \mu(d\omega) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_A M_{\tau_n(\omega)\wedge\sigma_n(\omega)}(\omega)\, \mu(d\omega) = \int_A M_{\tau(\omega)\wedge\sigma(\omega)}(\omega)\, \mu(d\omega)\end{aligned}$$

が成り立つ． ∎

定理 7.5 (閉集合と停止時刻). $I = [0, T] \subset \mathbb{R}$，$(X_t)_{t\in I}$ を d 次元確率変数の族とし，全ての $\omega \in \Omega$ に対し $t \longmapsto X_t(\omega)$ が右連続で，かつ $(X_t)_{t\in I}$ が $(\mathcal{F}_t)$-適合であるとする．閉集合 $F \subset \mathbb{R}^d$ に対し

$$\tau(\omega) := \begin{cases} \inf\{\, t \in I \,;\ X_t(\omega) \in F \,\} & (\{\, t \in I \,;\ X_t(\omega) \in F\} \neq \emptyset) \\ T & (\text{otherwise.}) \end{cases}$$

として $\tau : \Omega \to \mathbb{R}$ を定めれば τ は停止時刻となる．

[*12] もとより τ_n は可測関数である．$\mathbb{R} \ni x \longmapsto [x] \in \mathbb{R}$ は可測 $\mathfrak{B}(\mathbb{R})/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であるから $[2^n \tau]$ は可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であり，従って τ_n も可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ となっている．

[*13] $\sup_{t\in I} |M_t|^p = (\sup_{t\in I} |M_t|)^p$ である．

証明． $d : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を Euclid 距離関数とし

$$D_t(\omega) \coloneqq \inf \{ \, d(X_r(\omega), F) \, ; \, r \in [0,t] \cap \mathbb{Q} \, \}$$

とおいて，$\{\tau \leq t\} = \{D_t = 0\}$ が成り立つことを示す．$X(0,\omega) \in F$ なら $\tau(\omega) = 0$ である．$s = \tau(\omega)$ の場合，もし $X(s,\omega) \notin F$ であるなら，右連続性から或る $\delta > 0$ が存在して $\forall 0 < h < \delta$ に対し $X(s+h,\omega) \notin F$ となるから s が下限であることに反する．従って $X(s,\omega) \in F$ である．ゆえに $s \leq t$ ならば $D_t(\omega) = 0$ が成り立つ．もし $b \coloneqq D_t(\omega) > 0$ であるとすれば全ての $r \in [0,t] \cap \mathbb{Q}$ で $d(X_r(\omega), F) \geq b$ となる．右連続性より s のある近傍から有理点 $r \in [0,t] \cap \mathbb{Q}$ を取り

$$|X_s(\omega) - X_r(\omega)| < b/2$$

とできるから，$X_s(\omega) > b/2$ となり矛盾が出るからである．

一方で $D_t(\omega) = 0$ であるなら

$$d(X_{s_n}(\omega), F) < 1/n$$

となるように $s_n \in [0,t] \cap \mathbb{Q}$ を取ることができる．$(s_n)_{n=1}^{\infty}$ は集積点 s を持ち $s \in [0,t]$ (閉区間) となるから $d(X_s(\omega), F) = 0$ となる．従って $\tau(\omega) \leq s$ が成り立つ． ∎

8 二次変分

確率空間を $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ と表す．$I := [0,T]$ $(T > 0)$ とし，$(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ をフィルトレーションとする．このフィルトレーションは次の仮定を満たすものとする．

$$\mathcal{F}_0 \supset \mathcal{N} := \{\, N \in \mathcal{F} \quad | \quad \mu(N) = 0 \,\}$$

以下，いくつか集合を定義する．

(1) $\mathcal{A}^+$　$\mathcal{A}^+$ は以下を満たす $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 上の可測関数族 $A = (A_t)_{t\in I}$ の全体である．

適合性　任意の $t \in I$ に対し，写像 $\Omega \ni \omega \longmapsto A_t(\omega) \in \mathbb{R}$ は可測 $\mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ である．

連続性　A に対し或る μ-零集合 N が存在し，$\omega \in \Omega\backslash N$ については写像 $I \ni t \longmapsto A_t(\omega) \in \mathbb{R}$ が連続である．

単調非減少性　A に対し或る μ-零集合 N' が存在し，$\omega \in \Omega\backslash N'$ については写像 $I \ni t \longmapsto A_t(\omega) \in \mathbb{R}$ が単調非減少である．

(2) $\mathcal{A}$　$\mathcal{A} := \left\{ A^1 - A^2 \quad | \quad A^1, A^2 \in \mathcal{A}^+ \right\}$ と定義する．$A^1 - A^2 \in \mathcal{A}$ に対し或る μ-零集合 N_1, N_2 が存在して，$\omega \in \Omega\backslash(N_1 \cup N_2)$ なら写像 $t \longmapsto A^1_t(\omega)$ と $t \longmapsto A^2_t(\omega)$ が連続かつ単調非減少となる．すなわちこの ω について写像 $t \longmapsto A^1_t(\omega) - A^2_t(\omega)$ は有界連続となっている．

(3) $\mathcal{M}_{p,c}$ $(p \geq 1)$　$\mathcal{M}_{p,c}$ は以下を満たす可測関数族 $M = (M_t)_{t\in I} \subset \mathscr{L}^p(\mathcal{F}, \mu)$ の全体である．

L^p-マルチンゲール　$M = (M_t)_{t\in I}$ は L^p-マルチンゲールである．

連続性　M に対し或る μ-零集合 N が存在し，$\omega \in \Omega\backslash N$ については写像 $I \ni t \longmapsto M_t(\omega) \in \mathbb{R}$ が連続である．

(4) $\mathcal{M}_{b,c}$　$\mathcal{M}_{b,c}$ は a.s. に連続で一様有界な L^1-マルチンゲールの全体とする．つまり

$$\mathcal{M}_{b,c} := \left\{ M = (M_t)_{t\in I} \in \mathcal{M}_{1,c} \quad | \quad \sup_{t\in I} \| M_t \|_{\mathscr{L}^\infty} < \infty \right\}$$

として定義されている．

(5) $\mathcal{T}$　$\mathcal{T}$ は以下を満たすような，I に値を取る停止時刻の列 $(\tau_j)_{j=1}^\infty$ の全体とする．

a)　$(\tau_j)_{j=1}^\infty$ に対し或る μ-零集合 N_0 が存在し，$\tau_0(\omega) = 0$ $(\forall \omega \notin N_0)$ となる．

b)　$(\tau_j)_{j=1}^\infty$ の各 j に対し或る μ-零集合 N_j が存在し，$\tau_j(\omega) \leq \tau_{j+1}(\omega)$ $(\forall \omega \notin N_j)$ となる．

c)　$(\tau_j)_{j=1}^\infty$ に対し或る μ-零集合 N_T が存在し，任意の $\omega \in \Omega\backslash N_T$ に或る $n = n(\omega) \in \mathbb{N}$ が存在して $\tau_n(\omega) = T$ が成り立つ．

例えば $\tau_j = jT/2^n$ なら $(\tau_j)_{j=1}^\infty \in \mathcal{T}$ となる．上の条件において $N := N_0 \cup N_T \cup (\cup_{j=1}^\infty N_j)$ とすればこれも μ-零集合で，$\omega \in \Omega\backslash N$ なら

$$\begin{aligned} &\tau_0(\omega) = 0, \qquad \tau_j(\omega) \leq \tau_{j+1}(\omega)\ (j = 1, 2, \cdots), \\ &\tau_{n_\omega}(\omega) = T\ (\exists n_\omega \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

が成立することになる．

(4) $\mathcal{M}_{c,loc}$　$\mathcal{M}_{c,loc} := \left\{ M = (M_t)_{t\in I} \subset \mathscr{L}^1(\mathcal{F}, \mu) \quad | \quad \exists (\tau_j)_{j=1}^\infty \in \mathcal{T} \text{ s.t. } M^j = (M_{\tau_j \wedge t})_{t\in I} \in \mathcal{M}_{b,c}\ (\forall j \in \mathbb{N}) \right\}$ として定義される．(連続な局所マルチンゲールの全体)

以下で $\mathcal{M}_{2,c}$ に適当な処置を施してこれが Hilbert 空間と見做せるようにする．次の手順に沿う．

(i)　$\mathcal{M}_{p,c}$ に線型演算を定義して線形空間 (係数体は $\mathbb{R}$) となることを示す．

(ii) $\mathcal{M}_{p,c}$ の或る同値関係により商空間を定義する．

(iii) 特に $p=2$ のとき，$\mathcal{M}_{2,c}$ の商空間に内積を導入して Hilbert 空間となることを示す．

(i) について　任意の $M=(M_t)_{t\in I},\ N=(N_t)_{t\in I}\in\mathcal{M}_{p,c}$ と $\alpha\in\mathbb{R}$ に対して，加法とスカラ倍を

$$M+N:=(M_t+N_t)_{t\in I},\qquad \alpha M:=(\alpha M_t)_{t\in I}$$

として定義し，零元を 0[*14]と表す．また二元 M と N が等しいということを

$$M_t(\omega)=N_t(\omega)\quad(\forall t\in I,\ \omega\in\Omega)$$

が成り立っているということで定義する．$\mathcal{M}_{p,c}$ が上の演算について閉じていることが示されれば，線形空間であるための条件を満たすことは $t\longmapsto M_t(\omega)(\forall\omega\in\Omega)$ が全て実数値であることにより判ることである．加法とスカラ倍について閉じていることを示す．

加法について　任意の $0\leq s\leq t\leq T$ に対し，条件付き期待値の線型性 (性質 $\tilde{\mathrm{C}}3$) により

$$\mathrm{E}\left[M_t+N_t\mid\mathcal{F}_s\right]=\mathrm{E}\left[M_t\mid\mathcal{F}_s\right]+\mathrm{E}\left[N_t\mid\mathcal{F}_s\right]=M_s+N_s$$

が成り立つ[*15]．また $M+N$ は各 $t\in I$ について和を取っただけであるから，$(\mathcal{F}_t)$-適合であること，そして任意の $\omega\in\Omega$ について左極限が存在しかつ右連続となっていることが判り，更に Minkowski の不等式から各 $t\in I$ について $M_t+N_t\in\mathscr{L}^p(\mathcal{F},\mu)$ となる．以上で $M+N=(M_t+N_t)_{t\in I}$ もまた L^p-マルチンゲールであることが示された．写像 $I\ni t\longmapsto M_t(\omega)+N_t(\omega)\in\mathbb{R}$ の連続性については，M,N それぞれに対して或る μ-零集合 E_1,E_2 が存在して，$\omega\notin E_1$ なら $t\longmapsto M_t(\omega)$ は連続，$\omega\notin E_2$ なら $t\longmapsto N_t(\omega)$ は連続となるのだから，従って $\omega\notin E_1\cup E_2$ なら $t\longmapsto M_t(\omega)+N_t(\omega)$ が連続 (μ-a.s. に連続) となる．以上で $M+N\in\mathcal{M}_{p,c}$ が示された．

スカラ倍について　任意の $0\leq s\leq t\leq T$ に対し，条件付き期待値の線型性 (性質 $\tilde{\mathrm{C}}3$) により

$$\mathrm{E}\left[\alpha M_t\mid\mathcal{F}_s\right]=\alpha\,\mathrm{E}\left[M_t\mid\mathcal{F}_s\right]=\alpha M_s$$

が成り立つ．定数倍しているだけであるから，$(\alpha M_t)_{t\in I}$ が $(\mathcal{F}_t)$-適合であること，そして任意の $\omega\in\Omega$ について左極限が存在しかつ右連続となっていることが判り，更に各 $t\in I$ について $\alpha M_t\in\mathscr{L}^p(\mathcal{F},\mu)$ となる．以上で $\alpha M=(\alpha M_t)_{t\in I}$ もまた L^p-マルチンゲールであることが示された．連続性については，写像 $t\longmapsto M_t(\omega)$ が連続となる ω ならば写像 $t\longmapsto\alpha M_t(\omega)$ も連続 (μ-a.s. に連続) となる．以上で $\alpha M\in\mathcal{M}_{p,c}$ が示された．

(ii) について　任意の $M=(M_t)_{t\in I},\ N=(N_t)_{t\in I}\in\mathcal{M}_{p,c}$ に対して，関係 R を

$$\begin{aligned}M\,R\,N:=&\left\{\omega\in\Omega\ \middle|\ \sup_{r\in(I\cap\mathbb{Q})\cup\{T\}}|M_r(\omega)-N_r(\omega)|>0\right\}\text{ が }\mu\text{-零集合}\\ \Leftrightarrow&\bigcup_{r\in(I\cap\mathbb{Q})\cup\{T\}}\left\{\,\omega\in\Omega\ \middle|\ |M_r(\omega)-N_r(\omega)|>0\,\right\}\text{ が }\mu\text{-零集合}\end{aligned}$$

として定義すれば，関係 R は同値関係となる．反射律と対称律は R の定義式より判然しているから推移律について確認する．M,N とは別に $U=(U_t)_{t\in I}\in\mathcal{M}_{p,c}$ を取って $M\,R\,N$ かつ $N\,R\,U$ となっているとすれば，各 $r\in(I\cap\mathbb{Q})\cup\{T\}$ にて

$$\left(\,|M_r-U_r|>0\,\right)\subset\left(\,|M_r-N_r|>0\,\right)\cup\left(\,|N_r-U_r|>0\,\right)$$

[*14] 全ての t,ω に対し $0\in\mathbb{R}$ を取るもの．

[*15] 式の M_t などは代表元を M_t とする関数類の意味で使っている．

の関係が成り立っているから $M\,R\,U$ が従う．[*16] また $M,N \in \mathcal{M}_{p,c}$ に対し，$M\,R\,N$ となることと μ-a.s. にパスが一致することは同じである．[*17]

$M \in \mathcal{M}_{p,c}$ の関係 R による同値類を $\overline{M}$ と表記し，商空間を $\mathfrak{M}_{p,c} := \mathcal{M}_{p,c}/R$ と表記すれば $\mathfrak{M}_{p,c}$ において

$$\overline{M} + \overline{N} := \overline{M+N}, \quad \alpha\overline{M} := \overline{\alpha M} \tag{14}$$

として演算を定義すれば，これは代表元の選び方に依らない (well-defined)．つまり $M' \in \overline{M}$, $N' \in \overline{N}$ に対して

$$\overline{M+N} = \overline{M'+N'}, \quad \overline{\alpha M} = \overline{\alpha M'}$$

が成り立つ．これは

$$\left(\left|M_r + N_r - M'_r - N'_r\right| > 0 \right) \subset \left(\left|M_r - M'_r\right| > 0 \right) \cup \left(\left|N_r - N'_r\right| > 0 \right)$$
$$\left(\left|\alpha M_r - \alpha M'_r\right| > 0 \right) = \left(\left|M_r - M'_r\right| > 0 \right)$$

により $(M+N)\,R\,(M'+N')$, $(\alpha M)\,R\,(\alpha M')$ が成り立つからである．以上の事柄に注意すれば，(13) で定義した算法を加法とスカラ倍として $\mathfrak{M}_{p,c}$ は $\mathbb{R}$ 上の線形空間となる．

(iii) について　先ずは $\mathfrak{M}_{2,c}$ において内積を定義し，それから $\mathfrak{M}_{2,c}$ がその内積によって Hilbert 空間となることを示す．

内積の定義

$\mathfrak{M}_{2,c} \times \mathfrak{M}_{2,c}$ 上の実数値写像 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を次で定義すれば，これは $\mathfrak{M}_{2,c}$ において内積となる．

$$\left\langle \overline{M}, \overline{N} \right\rangle := \int_\Omega M_T(\omega) N_T(\omega)\, \mu(d\omega), \quad (\overline{M}, \overline{N} \in \mathfrak{M}_{2,c}).$$

(※右辺が実数値であることは，M_T, N_T が共に二乗可積分であることと Hölder の不等式による．)

証明.

well-defined であること　先ずは上の $\langle \cdot, \cdot \rangle$ の定義が代表元の取り方に依らないことを確認する．$M' = (M'_t)_{t\in I} \in \overline{M}$ と $N' = (N'_t)_{t\in I} \in \overline{N}$ に対して，同値関係の定義から μ-a.s. の ω で $M'_T(\omega) = M_T(\omega)$, $N'_T(\omega) = N_T(\omega)$ が成り立つ．従って

$$\int_\Omega M_T(\omega) N_T(\omega)\, \mu(d\omega) = \int_\Omega M'_T(\omega) N'_T(\omega)\, \mu(d\omega)$$

が成り立つから，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ は同じ元の組に対してはその元の表示に依らない一つの値が確定していることが示された．次に $\langle \cdot, \cdot \rangle$ が内積であることを証明する．

[*16] $(\,|M_r - N_r| > 0\,) = \{\, \omega \in \Omega \;\mid\; |M_r(\omega) - N_r(\omega)| > 0 \,\}$.

[*17] これを証明する．M,N に対し或る零集合 E が存在して，E^c 上で M と N のパスは連続となっている．$M\,R\,N$ とする．

$$F := \bigcup_{r \in (I\cap\mathbb{Q})\cup\{T\}} \{\, \omega \in \Omega \;\mid\; |M_r(\omega) - N_r(\omega)| > 0 \,\}$$

に対して $F^c \cap E^c$ 上で M と N のパスは一致する．$F \cup E$ が零集合であるから μ-a.s. にパスが一致しているということになる．逆に μ-a.s. にパスが一致しているとする．或る零集合 G が存在して G^c 上でパスが一致している．

$$G^c \subset F^c$$

の関係から $F \subset G$ となり F が零集合である，つまり $M\,R\,N$ となっている．

正値性　任意の $\overline{M} \in \mathfrak{M}_{2,c}$ に対して $\left\langle \overline{M}, \overline{M} \right\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{M} = \overline{0}$ が成り立つことを示す．$\langle \cdot, \cdot \rangle$ の定義により $\Leftarrow$ は判然しているから，$\Rightarrow$ について示す．$M = (M_t)_{t \in I}$ は L^2-マルチンゲールであるから，Jensen の不等式より $(|M_t|)_{t \in I}$ が L^2-劣マルチンゲールとなる．Doob の不等式を適用すれば

$$0 \leq \int_\Omega [\sup_{t \in I} |M_t(\omega)|]^2 \, \mu(d\omega) \leq 4 \int_\Omega M_T(\omega)^2 \, \mu(d\omega) = 0$$

が成り立ち，$\{ \sup_{t \in I} |M_t| > 0 \} = \left\{ \sup_{t \in I} |M_t|^2 > 0 \right\} = \left\{ [\sup_{t \in I} |M_t(\omega)|]^2 > 0 \right\}$ [*18] の関係から

$$\mu(\sup_{t \in I} |M_t| > 0) = 0$$

が従う．よって $\overline{M} = \overline{0}$ となる．

双線型性　双線型性は積分の線型性による．

∎

Hilbert 空間になること

$\mathfrak{M}_{2,c}$ は $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を内積として Hilbert 空間となる．

証明．　内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ により導入されるノルムを $\| \cdot \|$ と表記する．$\overline{M^{(n)}} \in \mathfrak{M}_{2,c}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を Cauchy 列として取れば，各代表元 $M^{(n)}$ に対し或る μ-零集合 E_n が存在して，$\omega \in \Omega \backslash E_n$ なら写像 $I \ni t \longmapsto M_t^{(n)}(\omega) \in \mathbb{R}$ が連続となる．後で連続関数列の一様収束を扱うから次の処理を行う．

$$E \coloneqq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

として，$M^{(n)} = (M_t^{(n)})_{t \in I}$ を零集合 E 上で修正した過程 $(N_t^{(n)})_{t \in I}$ を

$$N_t^{(n)}(\omega) \coloneqq \begin{cases} M_t^{(n)}(\omega) & (\omega \in \Omega \backslash E) \\ 0 & (\omega \in E) \end{cases}, \quad (\forall n = 1, 2, \cdots, \ t \in I)$$

として定義すれば，$(N_t^{(n)})_{t \in I}$ は Ω 全体でパスが連続，かつ L^2-マルチンゲールであるから[*19] $\mathcal{M}_{2,c}$ の元となる．加えて，零集合 E を除いて $(M_t^{(n)})_{t \in I}$ とパスが一致するから

[*18] $\{ \sup_{t \in I} |M_t| > 0 \}$ は $\{ \omega \in \Omega \mid \sup_{t \in I} |M_t(\omega)| > 0 \}$ の略記 (他も同様) であるが，ここの等号は次の関係が成立することにより正当化される:

$$[\sup_{t \in I} |M_t(\omega)|]^2 = \sup_{t \in I} [M_t(\omega)]^2, \ (\forall \omega \in \Omega).$$

もし $[\sup_{t \in I} |M_t(\omega)|]^2 > \sup_{t \in I} [M_t(\omega)]^2 =: \beta$ とすると，$\sup_{t \in I} |M_t(\omega)| > \beta^{1/2}$ より或る $s \in I$ について $|M_s(\omega)| > \beta^{1/2}$ が成り立つから，$[M_s(\omega)]^2 > \beta$ となり $\beta = \sup_{t \in I} [M_t(\omega)]^2$ に矛盾する．逆の場合，つまり $\alpha \coloneqq [\sup_{t \in I} |M_t(\omega)|]^2 < \sup_{t \in I} [M_t(\omega)]^2$ が成り立っているとしても，或る $z \in I$ が存在して $\alpha^{1/2} < |M_z(\omega)| \leq \sup_{t \in I} |M_t(\omega)|$ が成り立ち，$\alpha < [\sup_{t \in I} |M_t(\omega)|]^2 = \alpha$ となり矛盾ができた．

[*19] L^2-マルチンゲールとなることについて仔細を書いておく．パスの右連続性と左極限の存在は連続性により成り立つことである．適合性については，フィルトレーションの仮定より $E \in \mathcal{F}_0$ であることに注意すれば，$N_t^{(n)} = M_t^{(n)} \mathbb{1}_{\Omega \backslash E}$

$\overline{N^{(n)}} = \overline{M^{(n)}}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が成立し，従って

$$\left\| \overline{M^{(n)}} - \overline{M^{(m)}} \right\|^2 = \left\| \overline{N^{(n)}} - \overline{N^{(m)}} \right\|^2 = \left\| \overline{N^{(n)} - N^{(m)}} \right\|^2 = \int_\Omega \left| N_T^{(n)}(\omega) - N_T^{(m)}(\omega) \right|^2 \mu(d\omega)$$

と表現できる．任意に $n, m \in N$ の組を取っても，$(|N_t^{(n)} - N_t^{(m)}|)_{t\in T}$ は連続な L^2-劣マルチンゲールとなるから Doob の不等式を適用して

$$\lambda^2 \mu(\sup_{t\in I} |N_t^{(n)} - N_t^{(m)}| > \lambda) \leq \int_\Omega \left| N_T^{(n)}(\omega) - N_T^{(m)}(\omega) \right|^2 \mu(d\omega) = \left\| \overline{M^{(n)}} - \overline{M^{(m)}} \right\|^2 \quad (\forall \lambda > 0)$$

が成り立つ．この不等式と $(\overline{M^{(n)}})_{n=1}^\infty$ が Cauchy 列であることを併せれば，

$$\left\| \overline{M^{(n_k)}} - \overline{M^{(n_{k+1})}} \right\| < 1/4^k, \quad (k = 1, 2, \cdots) \tag{15}$$

となるように添数の部分列 $(n_k)_{k=1}^\infty$ を抜き出して

$$\mu(\sup_{t\in I} |N_t^{(n_k)} - N_t^{(n_{k+1})}| > 1/2^k) < 1/2^k, \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

が成り立つようにできる．

$$F := \bigcup_{N=1}^\infty \bigcap_{k\geq N} \left\{ \omega \in \Omega \quad | \quad \sup_{t\in I} |N_t^{(n_k)}(\omega) - N_t^{(n_{k+1})}(\omega)| \leq 1/2^k \right\}$$

とおけば，Borel-Cantelli の補題により F^c は μ-零集合であって，$\omega \in F$ なら全ての $t \in I$ について数列 $(N_t^{(n_k)}(\omega))_{k=1}^\infty$ は Cauchy 列となる．実数の完備性から数列 $(N_t^{(n_k)}(\omega))_{k=1}^\infty$ $(\omega \in F)$ に極限 $N_t^*(\omega)$ が存在し，この収束は t に関して一様である[*20]から写像 $t \longmapsto N_t^*(\omega)$ は連続で，

$$N_t(\omega) := \begin{cases} N_t^*(\omega) & (\omega \in F) \\ 0 & (\omega \in \Omega \backslash F) \end{cases}$$

として $N = (N_t)_{t\in I}$ を定義すればこれは $\mathcal{M}_{2,c}$ の元たる資格を持つ．つまり (1)μ-a.s. にパスが連続で (2)L^2-マルチンゲールとなっている．(1) は既に示されているから (実際は全てのパスが連続)，(2) を示す．全ての $\omega \in \Omega$ についてパス $t \longmapsto N_t(\omega)$ 上の各点で右連続かつ左極限が存在することはパスの連続性により従うことであるから，後はマルチンゲールの定義の条件 (M.1)(M.2) を証明すればよい．

(M.1) 適合性について ω の関数として，N_t^* は関数列 $(N_t^{(n_k)})_{k=1}^\infty$ の F 上での各点収束先の関数として定義されている．N_t^* の定義域は F であるから，これに合わせて $N_t^{n_k}$ の定義域を F に制限した写像を $N_t^{F(k)}$ と表記し，

$$\mathcal{F}_t^F := \{ F \cap B \quad | \quad B \in \mathcal{F}_t \}$$

の表現と $M_t^{(n)}$ が適合過程であることから $N_t^{(n)}$ もまた可測 $\mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であると判る．任意の $0 \leq s \leq t \leq T$ に対し

$$\mathrm{E}\left[N_t^{(n)} \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right] = N_s^{(n)}$$

となることは，関数として $N_s^{(n)}$ と $M_s^{(n)}$ は同値 (a.s. で等しいとき同値であるとして関数類を作ったのであった) であることと条件付き期待値を関数類に対して定義したことと併せれば

$$\mathrm{E}\left[N_t^{(n)} \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right] = \mathrm{E}\left[M_t^{(n)} \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right] = M_s^{(n)} = N_s^{(n)}$$

により成り立つ．

[*20] $\left| N_t^{(n_k)}(\omega) - N_t^*(\omega) \right| \leq \sum_{j=k}^\infty \left| N_t^{(n_j)}(\omega) - N_t^{(n_{j+1})}(\omega) \right| \leq \sum_{j=k}^\infty \sup_{t\in I} \left| N_t^{(n_j)}(\omega) - N_t^{(n_{j+1})}(\omega) \right| < 1/2^k, \quad (\forall t \in T)$ による．

として $N_t^{F(k)}$ は可測 $\mathcal{F}_t^F/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ ということになる．従って各点極限の関数 N_t^* もまた可測 $\mathcal{F}_t^F/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ と判る ($\forall t \in I$)．フィルトレーションの仮定から $F \in \mathcal{F}_0$ であり，全ての $t \in I$ について $\mathcal{F}_t^F$ は $\mathcal{F}_t$ の部分 σ-加法族となっていることに注意しておく．任意の $C \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$N_t^{-1}(C) = \begin{cases} (\Omega \backslash F) \cup {N^*}_t^{-1}(C) & (0 \in C) \\ {N^*}_t^{-1}(C) & (0 \notin C) \end{cases}$$

が成り立ち，先ほどの注意と併せれば，任意の $t \in I$ に対し N_t が可測 $\mathcal{F}_t/\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ であると判明する．

(M.1) 二乗可積分性について　各 $t \in I$ について，$N_t^{(n_k)}$ $(k = 1, 2, \cdots)$ は二乗可積分関数 $M_t^{(n_k)}$ と零集合 E を除いて一致するよう構成され，そして N_t に概収束する関数列であった．また添数列 $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ の抜き出し方 (式 (14)) と Doob の不等式[*21]より

$$\mathrm{E}\left[\sup_{t\in I} |N_t^{(n_k)} - N_t^{(n_{k+1})}|^2\right] \leq 4\,\mathrm{E}\left[|N_T^{(n_k)} - N_T^{(n_{k+1})}|^2\right] < 4/8^k$$

が成り立つから，全ての $t \in I$ に対して $\left\| N_t^{(n_k)} - N_t^{(n_{k+1})} \right\|_{\mathscr{L}^2} < 2/4^k \leq 1/2^k$ $(k = 1, 2, \cdots)$ となる．特に全ての $k = 1, 2, \cdots$ に対して $\left\| N_t^{(n_k)} - N_t^{(n_1)} \right\|_{\mathscr{L}^2} < 1/2$ となるから

$$\left\| N_t^{(n_k)} \right\|_{\mathscr{L}^2} < \left\| N_t^{(n_1)} \right\|_{\mathscr{L}^2} + 1/2 \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

とできる．つまり μ-a.s. に $|N_t^{(n_k)}|^2 < \left\| N_t^{(n_1)} \right\|_{\mathscr{L}^2} + 1/2$ となり，以上により各 $t \in I$ について関数列 $(N_t^{(n_k)})_{k=1}^{\infty}$ に対し Lebesgue の収束定理を適用できる根拠を得た．Minkowski の不等式から

$$\| N_t \|_{\mathscr{L}^2} \leq \left\| N_t - N_t^{F(k)} \right\|_{\mathscr{L}^2} + \left\| N_t^{F(k)} \right\|_{\mathscr{L}^2}$$

が成り立ち，Lebesgue の収束定理より $\left\| N_t - N_t^{F(k)} \right\|_{\mathscr{L}^2}$ $(k = 1, 2, \cdots)$ が有界列で第二項も有限確定するから右辺全体が $< \infty$ となることが従う．

(M.2) について　各 $t \in I,\ k \in \mathbb{N}$ について $N_t^{(n_k)}$ と $M_t^{(n_k)}$ が同じ関数類に属するから，$(M_t^{(n_k)})_{t\in I}$ が L^2-マルチンゲールであるということを利用すればよい．任意の $0 \leq s \leq t \leq T$ と $A \in \mathcal{F}_s$ に対し，条件付き期待値の性質 $\tilde{\mathrm{C}}2$ から

$$\begin{aligned}\int_A \mathrm{E}\left[N_t^{(n_k)} \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right](\omega)\,\mu(d\omega) &= \int_A \mathrm{E}\left[M_t^{(n_k)} \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right](\omega)\,\mu(d\omega) \\ &= \int_A M_s^{(n_k)}(\omega)\,\mu(d\omega) = \int_A N_s^{(n_k)}(\omega)\,\mu(d\omega)\end{aligned}$$

が全ての $k = 1, 2, \cdots$ で成り立つ．後述の補助定理と Lebesgue の収束定理より

$$\begin{aligned}\int_A \mathrm{E}\left[N_t \,|\, \mathcal{F}_s\right](\omega)\,\mu(d\omega) &= \lim_{k\to\infty} \int_A \mathrm{E}\left[N_t^{(n_k)} \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right](\omega)\,\mu(d\omega) \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_A N_s^{(n_k)}(\omega)\,\mu(d\omega) = \int_A N_s(\omega)\,\mu(d\omega)\end{aligned}$$

が成り立ち，従って関数として見て $\mathrm{E}[N_t \,|\, \mathcal{F}_s]$ と N_s は同じ関数類に属するから $\mathrm{L}^2(\mathcal{F}, \mu)$ の元として一致する．

[*21] 各 $k \in \mathbb{N}$ において $(N_t^{(n_k)})_{t\in I}$ は $(M_t^{(n_k)})_{t\in I}$ と μ-a.s. にパスが一致するからこれも L^2-マルチンゲールである．

最後に，$N = (N_t)_{t \in I}$ の $\mathfrak{M}_{2,c}$ における同値類 $\overline{N}$ が Cauchy 列 $(\overline{M^{(n)}})_{n=1}^{\infty}$ の極限であるということを明示して証明を完全に終える．部分列 $(\overline{M^{(n_k)}})_{k=1}^{\infty}$ に対して，Lebesgue の収束定理より

$$\left\| \overline{N} - \overline{M^{(n_k)}} \right\|^2 = \int_{\Omega} \left| N_T(\omega) - M_T^{(n_k)}(\omega) \right|^2 \mu(d\omega) \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty)$$

が成り立ち，部分列が収束することは Cauchy 列が収束することになるから，以上で $\mathfrak{M}_{2,c}$ が Hilbert 空間であることが証明された． ∎

補題 8.1 (条件付き期待値の収束定理).
$X, X_n \in \mathrm{L}^1(\mathcal{F}, \mu)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ と部分 σ-加法族 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ に対し，代表元の関数が $X_n \longrightarrow X$ $(n \longrightarrow \infty)$ μ-a.s. を満たし，かつ n に無関係な可積分関数 Y が存在して $X_n \leq Y$ μ-a.s. となっているとき次が成り立つ:

$$\int_A \mathrm{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right](\omega)\, \mu(d\omega) = \lim_{n \to \infty} \int_A \mathrm{E}\left[X^n \mid \mathcal{G}\right](\omega)\, \mu(d\omega), \quad (\forall A \in \mathcal{G}).$$

証明.　条件付き期待値の性質 C̃2 と Lebesgue の収束定理より，任意の $A \in \mathcal{G}$ に対して

$$\int_A \mathrm{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right](\omega)\, \mu(d\omega) = \int_A X(\omega)\, \mu(d\omega) = \lim_{n \to \infty} \int_A X_n(\omega)\, \mu(d\omega) = \lim_{n \to \infty} \int_A \mathrm{E}\left[X^n \mid \mathcal{G}\right](\omega)\, \mu(d\omega)$$

が成り立つ． ∎

命題 8.2.　任意の $p > 1$ に対し $\mathcal{M}_{p,c} \subset \mathcal{M}_{c,loc}$ が成り立つ．

証明.