確率微分方程式レポート

基礎工学研究科システム創成専攻修士 1 年
学籍番号 29C17095
百合川尚学

2017 年 10 月 17 日

係数体を $\mathbb{K}$，$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 或は $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ と考える．測度空間を $(X,\mathcal{F},m)$ とし，可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ 関数 f に対して

$$\|f\|_{\mathscr{L}^p} := \begin{cases} \inf\{\, r \in \mathbb{R} \mid |f(x)| \leq r,\ \text{a.e.}x \in X \,\} & (p=\infty) \\ \left(\int_X |f(x)|^p\, m(dx)\right)^{\frac{1}{p}} & (0<p<\infty) \end{cases}$$

と定め，

$$\mathscr{L}^p(X,\mathcal{F},m) := \{\, f : X \to \mathbb{K} \mid f:\text{可測}\ \mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{K}),\ \|f\|_{\mathscr{L}^p} < \infty \,\} \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

として空間 $\mathscr{L}^p(X,\mathcal{F},m)$ を定義する．この空間は $\mathbb{K}$ 上の線形空間となるが，そのことを保証するために次の二つの不等式が成り立つことを証明する．

定理 0.1 (Hölder の不等式). $1 \leq p,q \leq \infty$，$p+q=pq$ ($p=\infty$ なら $q=1$) とする．このとき任意の可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ 関数 f,g に対して次が成り立つ:

$$\int_X |f(x)g(x)|\, m(dx) \leq \|f\|_{\mathscr{L}^p} \|g\|_{\mathscr{L}^q}. \tag{1}$$

証明. まず次の補助定理を証明する．

補助定理 0.2. $f \in \mathscr{L}^\infty(X,\mathcal{F},m)$ ならば

$$|f(x)| \leq \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} \quad (\text{a.e.}x \in X).$$

証明. $\mathscr{L}^\infty(X,\mathcal{F},m)$ の定義により，任意の実数 $\alpha > \|f\|_{\mathscr{L}^\infty}$ に対して

$$m(\{\, x \in X \mid |f(x)| > \alpha \,\}) = 0$$

である．これにより

$$\{\, x \in X \mid |f(x)| > \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} \,\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\, x \in X \mid |f(x)| > \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} + 1/n \,\}$$

の右辺は m-零集合となり補題が証明された． ∎

定理の証明に入る．

$p=\infty$, $q=1$ の場合 $\|f\|_{\mathscr{L}^\infty}=\infty$ 又は $\|g\|_{\mathscr{L}^1}=\infty$ の場合は明らかに不等式 (1) が成り立つから，$\|f\|_{\mathscr{L}^\infty}<\infty$ かつ $\|g\|_{\mathscr{L}^1}<\infty$ の場合を考える．補助定理により，或る m-零集合 $A \in \mathcal{F}$ を除いて $|f(x)| \leq \|f\|_{\mathscr{L}^\infty}$ が成り立つから，

$$|f(x)g(x)| \leq \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} |g(x)| \quad (\forall x \in X \backslash A).$$

従って

$$\int_X |f(x)g(x)|\, m(dx) = \int_{X\backslash A} |f(x)g(x)|\, m(dx) \leq \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} \int_{X\backslash A} |g(x)|\, m(dx) = \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} \|g\|_{\mathscr{L}^1}$$

となり不等式 (1) が成り立つ．

$1 < p, q < \infty$ の場合　$\| f \|_{\mathscr{L}^p} = \infty$ 又は $\| g \|_{\mathscr{L}^q} = \infty$ の場合は明らかに不等式 (1) が成り立つから，$\| f \|_{\mathscr{L}^p} < \infty$ かつ $\| g \|_{\mathscr{L}^q} < \infty$ の場合を考える．$\| f \|_{\mathscr{L}^p} = 0$ であるとすると

$$B := \{ x \in X \quad | \quad |f(x)| > 0 \}$$

は m-零集合となるから，

$$\int_X |f(x)g(x)|\, m(dx) = \int_B |f(x)g(x)|\, m(dx) + \int_{X \setminus B} |f(x)g(x)|\, m(dx) = 0$$

となり不等式 (1) が成り立つ．$\| g \|_{\mathscr{L}^q} = 0$ の場合も同じである．

最後に $0 < \| f \|_{\mathscr{L}^p}, \| g \|_{\mathscr{L}^q} < \infty$ の場合を示す．$-\log t \quad (t > 0)$ は凸関数であるから，$1/p + 1/q = 1$ に対して

$$-\log\left(\frac{s}{p} + \frac{t}{q}\right) \leq \frac{1}{p}(-\log s) + \frac{1}{q}(-\log t) \quad (\forall s, t > 0)$$

が成り立ち，従って

$$s^{1/p} t^{1/q} \leq \frac{s}{p} + \frac{t}{q} \quad (\forall s, t > 0)$$

が成り立つ．この不等式を用いれば

$$F(x) := |f(x)|^p / \| f \|_{\mathscr{L}^p}^p, \quad G(x) := |g(x)|^q / \| g \|_{\mathscr{L}^q}^q \quad (\forall x \in X)$$

とした F, G に対し

$$F(x)^{1/p} G(x)^{1/q} \leq \frac{1}{p} F(x) + \frac{1}{q} G(x) \quad (\forall x \in X)$$

となり，両辺を積分して

$$\begin{aligned}
\int_X F(x)^{1/p} G(x)^{1/q}\, m(dx) &\leq \frac{1}{p} \int_X F(x)\, m(dx) + \frac{1}{q} \int_X G(x)\, m(dx) \\
&= \frac{1}{p} \frac{1}{\| f \|_{\mathscr{L}^p}^p} \int_X |f(x)|^p\, m(dx) + \frac{1}{q} \frac{1}{\| g \|_{\mathscr{L}^q}^q} \int_X |g(x)|^q\, m(dx) \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1
\end{aligned}$$

が成り立つ．最左辺と最右辺を比べて

$$1 \geq \int_X F(x)^{1/p} G(x)^{1/q}\, m(dx) = \int_X \frac{|f(x)|}{\| f \|_{\mathscr{L}^p}} \frac{|g(x)|}{\| g \|_{\mathscr{L}^q}}\, m(dx)$$

から不等式

$$\int_X |f(x)g(x)|\, m(dx) \leq \| f \|_{\mathscr{L}^p} \| g \|_{\mathscr{L}^q}$$

が示された． ∎

定理 0.3 (Minkowski の不等式).　$1 \leq p \leq \infty$ とする．このとき任意の可測 $\mathcal{F}/\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ 関数 f, g に対して次が成り立つ:

$$\| f + g \|_{\mathscr{L}^p} \leq \| f \|_{\mathscr{L}^p} + \| g \|_{\mathscr{L}^p}. \tag{2}$$

証明.

$p = \infty$ の場合

$$|f(x)+g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \quad (\forall x \in X)$$

である．従って $\|f\|_{\mathscr{L}^\infty} = \infty$ 又は $\|g\|_{\mathscr{L}^\infty} = \infty$ の場合に不等式 (2) が成り立つことは明らかである．$\|f\|_{\mathscr{L}^\infty} < \infty$ かつ $\|g\|_{\mathscr{L}^\infty} < \infty$ の場合は

$$C := \{\, x \in X \quad | \quad |f(x)| > \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} \,\} \bigcup \{\, x \in X \quad | \quad |g(x)| > \|g\|_{\mathscr{L}^\infty} \,\}$$

が m-零集合となり，$\|\cdot\|_{\mathscr{L}^\infty}$ の定義と

$$|f(x)+g(x)| \le \|f\|_{\mathscr{L}^\infty} + \|g\|_{\mathscr{L}^\infty} \quad (\forall x \in X \backslash C)$$

の関係により不等式 (2) が成り立つ．

$p = 1$ の場合

$$|f(x)+g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \quad (\forall x \in X)$$

の両辺を積分することにより不等式 (2) が成り立つ．

$1 < p < \infty$ の場合　$p + q = pq$ が成り立つように $q > 1$ を取る．

$$|f(x)+g(x)|^p = |f(x)+g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1} \le |f(x)||f(x)+g(x)|^{p-1} + |g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}$$

の両辺を積分すれば，Hölder の不等式により

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{\mathscr{L}^p}^p &= \int_X |f(x)+g(x)|^p \, m(dx) \\
&\le \int_X |f(x)||f(x)+g(x)|^{p-1} \, m(dx) + \int_X |g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1} \, m(dx) \\
&\le \left(\int_X |f(x)|^p \, m(dx)\right)^{1/p} \left(\int_X |f(x)+g(x)|^{q(p-1)} \, m(dx)\right)^{1/q} \\
&\qquad + \left(\int_X |g(x)|^p \, m(dx)\right)^{1/p} \left(\int_X |f(x)+g(x)|^{q(p-1)} \, m(dx)\right)^{1/q} \\
&= \left(\int_X |f(x)|^p \, m(dx)\right)^{1/p} \left(\int_X |f(x)+g(x)|^{p} \, m(dx)\right)^{1/q} \\
&\qquad + \left(\int_X |g(x)|^p \, m(dx)\right)^{1/p} \left(\int_X |f(x)+g(x)|^{p} \, m(dx)\right)^{1/q} \\
&= \|f\|_{\mathscr{L}^p} \|f+g\|_{\mathscr{L}^p}^{p/q} + \|g\|_{\mathscr{L}^p} \|f+g\|_{\mathscr{L}^p}^{p/q} \\
&= \|f\|_{\mathscr{L}^p} \|f+g\|_{\mathscr{L}^p}^{p-1} + \|g\|_{\mathscr{L}^p} \|f+g\|_{\mathscr{L}^p}^{p-1}
\end{aligned}$$

が成り立つ．$\|f+g\|_{\mathscr{L}^p} = 0$ の場合は明らかに不等式 (2) が成り立つ．$\|f+g\|_{\mathscr{L}^p} = \infty$ の場合，

$$|f(x)+g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le 2\max(|f(x)|, |g(x)|) \quad (\forall x \in X)$$

より

$$|f(x)+g(x)|^p \le 2^p \max(|f(x)|^p, |g(x)|^p) \le 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p) \quad (\forall x \in X)$$

から両辺を積分して

$$\|f+g\|_{\mathscr{L}^p}^p \leq 2^p\left(\|f\|_{\mathscr{L}^p}^p + \|g\|_{\mathscr{L}^p}^p\right)$$

という関係が出るから，上式右辺も ∞ となり不等式 (2) が成り立つ．$0 < \|f+g\|_{\mathscr{L}^p} < \infty$ の場合，$\|f\|_{\mathscr{L}^p} + \|g\|_{\mathscr{L}^p} = \infty$ なら不等式 (2) は明らかに成り立ち，$\|f\|_{\mathscr{L}^p} + \|g\|_{\mathscr{L}^p} < \infty$ の場合は

$$\|f+g\|_{\mathscr{L}^p}^p \leq \|f\|_{\mathscr{L}^p}\|f+g\|_{\mathscr{L}^p}^{p-1} + \|g\|_{\mathscr{L}^p}\|f+g\|_{\mathscr{L}^p}^{p-1}$$

の両辺を $\|f+g\|_{\mathscr{L}^p}^{p-1}$ で割って不等式 (2) が成り立つと判る． ∎

$\|\cdot\|_{\mathscr{L}^p}$ は線形空間 $\mathscr{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$ においてセミノルムとなる．なぜならば以下のことが言えるからである．

正値性　これは明らかである．

同次性

$$\left(\int_X |\alpha f(x)|^p \, m(dx)\right)^{1/p} = \left(|\alpha|^p \int_X |f(x)|^p \, m(dx)\right)^{1/p} = |\alpha| \left(\int_X |f(x)|^p \, m(dx)\right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty)$$

と

$$\inf\{\, r \in \mathbb{R} \quad | \quad |\alpha f(x)| \leq r,\ \text{a.e.} x \in X \,\} = |\alpha| \inf\{\, r \in \mathbb{R} \quad | \quad |f(x)| \leq r,\ \text{a.e.} x \in X \,\}$$

により，任意の $\alpha \in \mathbb{K}$ と任意の $f \in \mathscr{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ に対して

$$\|\alpha f\|_{\mathscr{L}^p} = |\alpha| \|f\|_{\mathscr{L}^p}$$

が成り立つ．

三角不等式　Minkowski の不等式による．

しかし $\|\cdot\|_{\mathscr{L}^p}$ は $\mathscr{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$ のノルムとはならない．$\|f\|_{\mathscr{L}^p} = 0$ であっても $f(x) = 0$ $(\forall x \in X)$ とは限らない．m-零集合の上で $1 \in \mathbb{K}$ を取るような関数 g でも $\|g\|_{\mathscr{L}^p} = 0$ を満たすからである．このように $\mathscr{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$ は a.e. での差異を除いて等しい関数ならば $\|\cdot\|_{\mathscr{L}^p}$ が一致する．当然 $f, g \in \mathscr{L}^p(X, \mathcal{F}, m)$ で $m(\{\, x \in X \quad | \quad |f(x) - g(x)| > 0\}) > 0$ なるものについては

レポート問題 1.

1　10/11

基礎の確率空間を $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ とする．$\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ を部分 σ-加法族とし，Hilbert 空間 $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ とその閉部分空間 $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ を考える．任意の $f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ に対して，射影定理により一意に定まる射影 $g \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ を

$$g = \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}]$$

と表現する．$\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ のときは $\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}]$ を $\mathrm{E}[f]$ と書いて f の期待値と呼ぶ．

レポート問題 2.
Hilbert 空間 $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ における内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}$，ノルムを $\| \cdot \|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}$ と表示する．次の C1 ~ C6 を示せ．扱う関数は全て $\mathbb{R}$ 値と考える．(係数体を実数体として Hilbert 空間を扱う．)

C1　$\forall f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

$$\mathrm{E}[f] = \int_\Omega f(x)\, \mu(dx)$$

C2　$\forall f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, $\forall h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$

$$\int_\Omega f(x)h(x)\, \mu(dx) = \int_\Omega \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x)h(x)\, \mu(dx)$$

C3　$\forall f_1, f_2 \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

$$\mathrm{E}[f_1 + f_2 \mid \mathcal{G}] = \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}] + \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}]$$

C4　$\forall f_1, f_2 \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

$$f_1 \le f_2 \quad \text{a.s.} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}] \le \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}] \quad \text{a.s.}$$

C5　$\forall f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, $\forall g \in \mathrm{L}^\infty(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$

$$\mathrm{E}[gf \mid \mathcal{G}] = g\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}]$$

C6　$\mathcal{H}$ が $\mathcal{G}$ の部分 σ-加法族ならば $\forall f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

$$\mathrm{E}\big[\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \,\big|\, \mathcal{H}\big] = \mathrm{E}[f \mid \mathcal{H}]$$

証明.　C1　$\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ とすれば，$\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ の元は $\mathcal{G}$-可測でなくてはならないから Ω 上の定数関数である．従って各 $g \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ には定数 $\alpha \in \mathbb{R}$ が対応して $g(x) = \alpha$ $(\forall x \in \Omega)$ と表せる．射影定理より任意の $f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ の $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ への射影 $\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] = \mathrm{E}[f]$ はノルム $\| f - g \|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}$ を最小にする $g \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ である．$g(x) = \alpha$ $(\forall x \in \Omega)$ としてノルムを直接

計算すれば，

$$\begin{aligned}
\|f-g\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}^2 &= \int_\Omega |f(x)-\alpha|^2\,\mu(dx) \\
&= \int_\Omega |f(x)|^2 - 2\alpha f(x) + |\alpha|^2\,\mu(dx) \\
&= \int_\Omega |f(x)|^2\,\mu(dx) - 2\alpha\int_\Omega f(x)\,\mu(dx) + |\alpha|^2 \\
&= \left|\alpha - \int_\Omega f(x)\,\mu(dx)\right|^2 - \left|\int_\Omega f(x)\,\mu(dx)\right|^2 + \int_\Omega |f(x)|^2\,\mu(dx) \\
&= \left|\alpha - \int_\Omega f(x)\,\mu(dx)\right|^2 + \int_\Omega |f(x)-\beta|^2\,\mu(dx) \qquad \left(\beta := \int_\Omega f(x)\,\mu(dx)\right)
\end{aligned}$$

と表現できて最終式は $\alpha = \int_\Omega f(x)\,\mu(dx)$ で最小となる．すなわち

$$\mathrm{E}[f] = \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] = \int_\Omega f(x)\,\mu(dx).$$

C2　射影定理により，$f \in \mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ の $\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ への射影 $\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}]$ は

$$\langle f - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0 \quad (\forall h \in \mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu))$$

を満たし，内積の線型性から

$$\langle f, h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = \langle \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} \quad (\forall h \in \mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu))$$

が成り立つ．積分の形式で表示することにより

$$\int_\Omega f(x)h(x)\,\mu(dx) = \int_\Omega \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x)h(x)\,\mu(dx) \quad (\forall h \in \mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu))$$

が示された．

C3　射影定理により任意の $h \in \mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ に対して

$$\begin{aligned}
&\langle (f_1+f_2) - \mathrm{E}[f_1+f_2 \mid \mathcal{G}], h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0, \\
&\langle f_1 - \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}], h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0, \\
&\langle f_2 - \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}], h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0
\end{aligned}$$

が成り立っている．従って任意の $h \in \mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ に対して

$$\begin{aligned}
0 &= \langle (f_1+f_2) - \mathrm{E}[f_1+f_2 \mid \mathcal{G}], h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} - \langle f_1 - \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}], h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} - \langle f_2 - \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}], h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} \\
&= \langle (f_1+f_2) - \mathrm{E}[f_1+f_2 \mid \mathcal{G}], h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} - \langle (f_1+f_2) - (\mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}] + \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}]), h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} \\
&= \langle \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}] + \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}] - \mathrm{E}[f_1+f_2 \mid \mathcal{G}], h\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}
\end{aligned}$$

となり，特に $h = \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}] + \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}] - \mathrm{E}[f_1+f_2 \mid \mathcal{G}] \in \mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ とすれば

$$\left\| \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}] + \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}] - \mathrm{E}[f_1+f_2 \mid \mathcal{G}] \right\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}^2 = 0$$

が成り立つことになるから

$$\mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}] + \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}] = \mathrm{E}[f_1+f_2 \mid \mathcal{G}]$$

が示された．

C4　「任意の $f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ に対して，$f \geq 0$ a.s. ならば $\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \geq 0$ a.s.」—(※) を示せばよい．これが示されれば $f_1, f_2 \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ で $f_1 \leq f_2$ a.s. となるものに対し

$$0 \leq f_2 - f_1 \text{ a.s.} \quad \Rightarrow 0 \leq \mathrm{E}[f_2 - f_1 \mid \mathcal{G}] = \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}] - \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}] \text{ a.s.}$$

が成り立つ．しかし，この場合本題に入る前に次の命題を証明する必要がある．これは等号 $\mathrm{E}[f_2 - f_1 \mid \mathcal{G}] = \mathrm{E}[f_2 \mid \mathcal{G}] - \mathrm{E}[f_1 \mid \mathcal{G}]$ が成り立つことを保証するためである．

命題.　考えている空間は今までと同じ Hilbert 空間 $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$，$\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ である．任意の実数 α と任意の $f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ に対して次が成立する:

$$\mathrm{E}[\alpha f \mid \mathcal{G}] = \alpha \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}].$$

証明.　射影定理より

$$\langle f - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0, \quad \langle \alpha f - \mathrm{E}[\alpha f \mid \mathcal{G}], h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0 \quad (\forall h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu))$$

が成り立っているから

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{E}[\alpha f \mid \mathcal{G}] - \alpha \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} &= \langle \mathrm{E}[\alpha f \mid \mathcal{G}] - \alpha f, h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} - \langle \alpha \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] - \alpha f, h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} \\
&= \langle \mathrm{E}[\alpha f \mid \mathcal{G}] - \alpha f, h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} - \alpha \langle f - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} \\
&= 0. \quad (\forall h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu))
\end{aligned}$$

特に $h = \mathrm{E}[\alpha f \mid \mathcal{G}] - \alpha \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ として

$$\left\| \mathrm{E}[\alpha f \mid \mathcal{G}] - \alpha \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \right\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0$$

だから $\mathrm{E}[\alpha f \mid \mathcal{G}] = \alpha \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}]$ が成り立つ．　■

次に (※) を示す．

$$\begin{aligned}
A &:= \{x \in \Omega \mid \quad f(x) < 0\} && (\in \mathcal{F}), \\
B &:= \{x \in \Omega \mid \quad \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x) < 0\} && (\in \mathcal{G})
\end{aligned}$$

として $\mu(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu(B) = 0$ が成り立つと言えばよく，$\mu(A) = 0$ の下で $\mu(B) > 0$ と仮定しては不合理であることを以下に記述する．
$\mu(A) = 0,\ \mu(B) > 0$ であるとする．$\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ の元を

$$h(x) := \begin{cases} \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}](x) & (x \in B^c) \\ 0 & (x \in B) \end{cases}$$

として定義すると

$$
\begin{aligned}
\| f - h \|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} &= \int_\Omega |f(x) - h(x)|^2 \, \mu(dx) \\
&= \int_{A^c \cap B^c} |f(x) - h(x)|^2 \, \mu(dx) + \int_{A^c \cap B} |f(x) - h(x)|^2 \, \mu(dx) \\
&= \int_{A^c \cap B^c} |f(x) - \mathrm{E}\,[f \mid \mathcal{G}]\,(x)|^2 \, \mu(dx) + \int_{A^c \cap B} |f(x)|^2 \, \mu(dx) \\
&< \int_{A^c \cap B^c} |f(x) - \mathrm{E}\,[f \mid \mathcal{G}]\,(x)|^2 \, \mu(dx) + \int_{A^c \cap B} |f(x) - \mathrm{E}\,[f \mid \mathcal{G}]\,(x)|^2 \, \mu(dx) \\
&= \left\| f - \mathrm{E}\,[f \mid \mathcal{G}] \right\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．これは $\mu(A) = 0$ であること，$\mu(A^c \cap B) = \mu(B) - \mu(A \cap B) = \mu(B) > 0$ であること，それから $A^c \cap B$ の上で

$$
|f(x) - \mathrm{E}\,[f \mid \mathcal{G}]\,(x)|^2 - |f(x)|^2 = (f(x) - \mathrm{E}\,[f \mid \mathcal{G}]\,(x) + f(x))\,(-\,\mathrm{E}\,[f \mid \mathcal{G}]\,(x)) > 0
$$
$$
(\because f(x) \geq 0,\ \mathrm{E}\,[f \mid \mathcal{G}]\,(x) < 0, \quad \forall x \in A^c \cap B)
$$

が成り立っていることによる．上の結果，すなわち

$$
\| f - h \|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} < \left\| f - \mathrm{E}\,[f \mid \mathcal{G}] \right\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}
$$

を満たす $h \in \mathrm{L}^2\,(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ が存在することは $\mathrm{E}\,[f \mid \mathcal{G}]$ が f の射影であることに違反している．以上より $\mu(B) = 0$ でなくてはならず，(※) が示された．

C5 $\left\| \mathrm{E}\,[gf \mid \mathcal{G}] - g\,\mathrm{E}\,[f \mid \mathcal{G}] \right\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0$ が成り立つことを示す．任意の $h \in \mathrm{L}^2\,(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ に対して

$$
\langle \mathrm{E}\,[gf \mid \mathcal{G}] - g\,\mathrm{E}\,[f \mid \mathcal{G}]\,, h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = \langle \mathrm{E}\,[gf \mid \mathcal{G}] - gf, h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} + \langle gf - g\,\mathrm{E}\,[f \mid \mathcal{G}]\,, h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}
$$

を考えると，右辺が 0 になることが次のように証明される．先ず右辺第一項について，gf は $\mathrm{L}^2\,(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ に入る．g は或る μ-零集合 $E \in \mathcal{G}$ を除いて有界であるから，或る正数 α によって $|g(x)| \leq \alpha\ (\forall x \in E^c)$ と抑えられ，

$$
\int_\Omega |g(x) f(x)|^2 \, \mu(dx) = \int_{E^c} |g(x)|^2 |f(x)|^2 \, \mu(dx) \leq \alpha^2 \int_{E^c} |f(x)|^2 \, \mu(dx) = \alpha^2 \int_\Omega |f(x)|^2 \, \mu(dx) < \infty
$$

が成り立つからである．従って射影定理により

$$
\langle \mathrm{E}\,[gf \mid \mathcal{G}] - gf, h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0 \quad (\forall h \in \mathrm{L}^2\,(\Omega, \mathcal{G}, \mu)).
$$

右辺第二項について，

$$
\langle gf - g\,\mathrm{E}\,[f \mid \mathcal{G}]\,, h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = \int_\Omega (f(x) - \mathrm{E}\,[f \mid \mathcal{G}]\,(x))\, g(x) h(x) \, \mu(dx) = \langle f - \mathrm{E}\,[f \mid \mathcal{G}]\,, gh \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}
$$

であって，先と同様の理由で $gh \in \mathrm{L}^2\,(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ $(\forall h \in \mathrm{L}^2\,(\Omega, \mathcal{G}, \mu))$ が成り立つから射影定理より

$$
\langle gf - g\,\mathrm{E}\,[f \mid \mathcal{G}]\,, h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0 \quad (\forall h \in \mathrm{L}^2\,(\Omega, \mathcal{G}, \mu))
$$

であると判明した．始めの式に戻れば

$$
\langle \mathrm{E}\,[gf \mid \mathcal{G}] - g\,\mathrm{E}\,[f \mid \mathcal{G}]\,, h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0 \quad (\forall h \in \mathrm{L}^2\,(\Omega, \mathcal{G}, \mu))
$$

が成り立つことになり，特に $h = \mathrm{E}[gf \mid \mathcal{G}] - g\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ に対しては

$$\left\| \mathrm{E}[gf \mid \mathcal{G}] - g\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \right\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}^2 = 0$$

となることから $\mathrm{E}[gf \mid \mathcal{G}] = g\,\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}]$ が示された．

C6　任意の $h \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{H}, \mu) \subset \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ に対し，射影定理より

$$\begin{aligned}
&\left\langle \mathrm{E}\left[\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \,\middle|\, \mathcal{H}\right] - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{H}], h \right\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} \\
&= \left\langle \mathrm{E}\left[\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \,\middle|\, \mathcal{H}\right] - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}], h \right\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} \\
&\qquad + \langle \mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] - f, h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} + \langle f - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{H}], h \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)} = 0
\end{aligned}$$

が成り立つ．特に $h = \mathrm{E}\left[\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \,\middle|\, \mathcal{H}\right] - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{H}] \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{H}, \mu)$ とすれば

$$\left\| \mathrm{E}\left[\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \,\middle|\, \mathcal{H}\right] - \mathrm{E}[f \mid \mathcal{H}] \right\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{F},\mu)}^2 = 0$$

ということになるので $\mathrm{E}\left[\mathrm{E}[f \mid \mathcal{G}] \,\middle|\, \mathcal{H}\right] = \mathrm{E}[f \mid \mathcal{H}]$ であることが示された．

∎