ε計算とは，数論の無矛盾性の証明方針としてHilbertが案出した論理計算です．

εによって，量化表現を使う証明をそれより単純な命題論理の証明に埋め込むことが出来ます．

εは式φに対してεxφというモノを作るオペレーターであり，こうしてできたモノをε項と呼びます．

命題論理の証明に埋め込む際にはこのように変換しますが，この変換は本論文における主要な公理の大元となります．

ただし，今回εを導入したのはε計算を行うためではなく「存在」と「実在」を同義とするためです．つまり，存在文に対して証人を与えることが導入の目的です．

これをHenkin拡大と呼びます．

この式は本論文における主要な公理となります．

この式を翻訳すれば，εxφ(x)とは「φである集合が存在すれば，その一つはεxφ(x)である」となります．

ちなみにDe Morganの法則と組み合わせるとこの式が出てきます．

そもそもなぜ「実在」化が問題になるかというと，ZF集合論では集合というモノが用意されていないからです．ZF集合論では「存在」は「実在」を意味しません．たとえば

「空集合は存在する」というのは定理でありますが，∅を実際に取ってくることは出来ないのです．

ZF集合論では「定義による拡大」という方法で集合論を拡張して∅を導入することが出来ますが，それに対してε項を使えばこの赤字の項が空集合を表すことになります．

ε項を使うメリットとしては，このように「存在」を「実在」で補強できることのほかに，

証明で用いる推論規則が三段論法のみで済んだり，証明が容易になる場合もあります．

Bourbakiや島内先生の集合論でもε項を用いています．

さて，クラスについても話しておきましょう．

「φである集合の全体」のいみの{x|φ(x)}の記法も合法的に取り入れたいわけです．

Bourbakiや島内先生はこのように定めますが，この定め方だと

…が成立しない場合にはこの記法でも{φである集合の全体}の意味を持たなくなります．

ZF集合論でもこのオブジェクトを導入することは出来ますが，これも個の存在式の成立が条件となります．

このように存在式の成立不成立に縛られずにこの種のオブジェクトを導入するには，式から直接このオブジェクトを導入すれば良いのです．

クラスとはこの形のモノのことです．

後で説明しますがクラスであるε項は集合です．

集合でないクラスもあります．例えば集合の全体やRussellのパラドックスを引き起こしたこのクラスは集合ではありません．

集合とはこの式を満たすクラスのことです．この否定が成り立つときクラスは真クラスと呼ばれます．

クラスという新しいモノを取り入れてZF集合論を拡張したなら，

その拡張が良いものであるか(現代数学で受け容れ可能か)検証する必要が出てきます。

妥当性の検証については，ZF集合論の任意の命題ψに対して

ZFで証明可能⇔本論文の集合論で証明可能

を示すことで「良し」とします。

その検証のためには，集合論の言語と証明のルールを明らかにしなくてはなりません．

言語とは「変項」，「述語記号」，「論理記号」などの記号を語彙とし，

文章である「式」を作ります．また名詞の役割をするのが「項」と呼ばれます．

文字は最もよく使われる項であって，「s∊t」と書けば「sはtの要素である」という意味の一つの式が出来上がります．

ZF集合論の言語を本論文ではL\_{∊}と書きます．

Ｌ\_{∊}の語彙メンバーはこれらの記号です．

L\_{∊}の項は変項だけです．式は，見慣れたとおりのものが生成されます．

ε項や「φである集合の全体」といった項を正式に導入するために言語を拡張します．

拡張は二段階に分けて行いますが，はじめの拡張で作る言語はε項を導入するための言語Ｌ\_{ε}です．

Ｌ\_{ε}の語彙にはεが追加されます．

L\_{ε}の項と式は，途中まではＬ\_{∊}の定義と似ていますが，重要な違いは「作られた式から項が作られる」ために項と式の定義が循環している点です． 当然ながらL\_{∊}の項と式はL\_{ε}の項と式です．

L\_{ε}の式と変項で作られるεxφの形の項をε項と呼びます．

続いて言語の第二段階の拡張をします．

「φである集合の全体」の意味のモノを内包項と呼びましょう．

言語Lの語彙にはε項と内包項が追加されます．

Lの項は変項，ε項，内包項に限られます．

Lの式はL\_{∊}の定義の仕方と同じです．

このLこそが本論文の標準言語となります．

本論に入る前に扱う式を制限しておきます．なぜならば

以上で作った項と式の中には意味の通らないものが沢山あるからです．

「εxφ」というε項は，φの中にxのみが自由に現れているとき主要ε項と呼ぶことにします．「{x|φ}」という内包項は，φの中にxが自由に現れているとき正則内包項と呼ぶことにします．そして以下で扱う式に現れるε項は主要ε項のみ，現れる内包項は正則内包項のみとし，またこのような量化式については式の中にxが自由に現れているものとします．

ついでにクラスの定義もしておきます．

主要ε項と同様に，「{x|φ}」という内包項は，φの中にxのみが自由に現れているとき主要内包項と呼ぶことにします．

そしてクラスとは主要ε項と主要内包項のことであると定義します．

ちなみに主要ε項は後でわかる通り集合となります．

本論に入る前にもう一つ準備をしておきます．

そもそもε項を導入したのは，存在文に対して証人を付けるため

「φである集合が存在すれば，その一つはεxφである」

でしたが，φの中に内包項が使われているとεxφという項は使うことが出来ません．

なぜならばε項を作れるのはL\_{ε}の式だけだからです．

この場合は，φを同値なL\_{ε}の式「φハット」に書き換えて

これを公理とします．

書き換えの手順はこの表に従います．実際はもう少し細かい規定と柔軟な書き換えの定義が必要になりますが，ここではこの表のとおりに書き換えていると考えて問題ありません．

書き換え自体は式の意味を考えれば当然の物であります．

この書き換えが同値になるように，後で公理を追加します．

では本論に入ります．本論文の主結果は，ZF集合論の任意の命題ψに対して

「ZF集合論でψが証明可能」⇔「本論文の集合論でψが証明可能」

が成り立つということですが，正しく書き直すと

L\_{∊}の任意の文(自由な変更が現れない式)ψに対して，「ΓからψへのHKの証明でL\_{∊}の式の列であるものが取れる」ことと「ΣからψへのHEの証明でLの文の列であるものが取れる」ことが同値ということです．

ここでΓとはL\_{∊}の文で書かれたZF集合論の公理系です．

ΣはLの文で書かれた本論文の集合論の公理系です．

HKとHEとは証明体系を表します．

これらの記号が表すものについては以下で説明いたします．

先ずはΓについて，つまりZFの公理について説明します．

ZFの公理系は，

「同一の要素を持つ集合同士は等しい」という外延性の公理，

「等しい集合同士の服属関係は一致する」という相等性公理．

「集合を写像で写した像は集合である」という置換公理，

「対集合が存在する」という対の公理，

「合併集合が存在する」という合併の公理，

「冪集合が存在する」という冪の公理，

「空でない集合は自分自身と交わらない要素を持つ」という正則性公理，

「自然数の全体を含む集合が存在する」という無限公理，

の8つの公理及び公理図式から成ります．

HKとは古典論理と呼ばれるHilbert流の証明体系のことです．

どういうものかは，以下の論理的公理と証明の定義を見ればわかります．

論理的公理は自然なものです．肯定と否定が導かれるなら矛盾が出るや，

二重に否定したら打ち消されるなど．

HKの証明とはどういうものかについて，主結果の主張を借りて説明すれば，

「ΓからHKの証明でL\_{∊}の式の列であるもの」とは，L\_{∊}の式の列

φ\_1,…,φ\_nで，各φ\_iが

・HKの公理であるか，

・Γの公理であるか，

・前の式から三段論法で得られるか，

・前の式から汎化で得られるか，

のいずれかであるものです．

さて，Σの説明に入りましょう．Σも集合論の公理系ですが，Γとは違いLの文で書かれた公理系となります．「対」「合併」「冪」「正則性」「無限」はΓと共通しますが，

「外延性」「相等性」「置換」が若干変わり，

「内包性」と「要素」の公理が新しく追加されます．

「外延性」と「相等性」はクラスに対する言明に変わります．

「内包性」は，この形の主要内包項に「φであるモノの全体」という意味を与え，

「要素」の公理によって要素となりうるものは集合に限られます．

HEとはHKを模倣した本論文特有の証明体系です．命題論理の公理はHKと同一ですが，量化公理が変わります．HKの物よりは若干見やすくなります．

ここで，

「存在の除去」では先ほどの式の書き換えを利用します．

またτとは主要ε項のことです．

これらの量化公理が示唆しているのは，量化は主要ε項の上を亘るということです(ただしこれを言うにはあと一本足りませんが)．

HEの証明はHKと違い文で行います．

「ΣからのHEの証明でLの文の列であるもの」とは，Lの文の列φ\_1,…,φ\_nで，各φ\_iが

・HEの公理である

・Σの公理である

・前の式から三段論法で得られる

のいずれかであるものです．

「ΣからψへのHEの証明でLの文の列であるもの」が取れることを

改札ゲート記号を使ってこのようΣ⊢ψと表します．

主結果の証明方針は，このように三つのステップに分割します．

いきなりLの文とL\_{∊}の式を比べるよりは，間にL\_{ε}の式を挟んだ方が証明が簡単になります(式の書き換えが厄介なので)．

集合というのを定義しましょう．

クラスaが集合であるとは，∃x(a=x)がΣから導かれるということです．

これの否定が導かれたらaは真クラスとなります．

大切な基本定理として，主要ε項は集合となります．これは外延性公理と量化公理よりすぐに導かれます．

∀xφ(x)なる全称式を，ε項を用いることで導くこともできます．

これは存在記号の量化公理の対となる結果です．

次の結果はBourbakiや島内先生の内包項の定義と関連するものです．

この形の主要内包項は，集合であればε項で表現可能というものです．

これも式の書き換えと量化公理よりすぐに導かれます．

書き換えの同値性は重要でしょう．内包性公理と要素の公理はこの同値性を得るために導入したものです．

最後に，ε項を導入することで証明が簡単になる例を出しておきます．

この式の場合は文字が変わっているだけなので成り立つのは当然だろうと思われますが，形式的に証明すると少し長くかかります．

HEでの証明はすぐに思いつくでしょう．HKの証明は若干遠回りしているように感じられます．さらに顕著に違いが現れる例はこれです．

伊藤清先生の言葉をご存じでしょうか．

厳密な基礎付けを得る際は，「出来る限り本質を把握しやすい形でさかのぼることが望ましい」と仰っているのです．

その点，ZFもBGもMKもNFも無味乾燥とした世界ですが，

本論文の世界は幾分か生々しく集合を取り扱えるでしょう．

引用：伊藤清「数学の基礎としての集合論」