タイトルに直観的とは言っていますが，直観主義のことではなく日常的な直観の意味です．

ε計算とは，数論の無矛盾性の証明方針としてHilbertが案出した論理計算です．

εは式から量化表現を抹消できるもので，つまり量化表現を使う証明をそれより単純な命題論理の証明に埋め込むことが出来ます．

具体的にどういうものかというと，このように式から項を作り，これをε項と呼ぶわけですが，命題論理の証明に埋め込む際にはこのように変換します．

この変換は本論文における主要な公理の大元となります．

ただし，今回εを導入したのは量化子を消し去ることではなく，「存在」と「実在」を同義とするためです．存在文に対して証人を与えることをHenkin拡大と言いますが，

「φである集合が存在すれば，その一つはεxφ(x)である」

これが本論文において主要な公理となります．

ちなみにDe Morganの法則と組み合わせると，この公理と対となるこの式が出てきます．

つまり量化はεでコントロールできるというわけです．

そもそもなぜ「実在」化の問題が出てくるかというと，ZF集合論では集合というモノが用意されていないため，「存在」が「実在」を意味しないからです．たとえば

この式は「空集合は存在する」と読むわけですが，空集合を実際に取ってくることは出来ないのです．

ところが実際には空集合は実在するオブジェクトとして扱われているわけで，

それは何でかというと，それを正当化する一つの方法は「定義による拡大」で，

これを空集合の定義式として空集合をZF集合論の語彙に追加しているわけです．

一方で，ε項を使えば，先ほどの公理と空集合の存在定理の三段論法でこれが成り立ちます．

この赤字のε項が空集合を表すことになります．

「定義による拡大」とεによる拡大は，どちらも存在を実在化できるわけですが，大きく違うのは，

「定義による拡大」はボキャブラリーを一つずつ増やしていく地道な作業であるのに対して，ε項による拡大は存在文の成立不成立に関係なく一気呵成に拡大してしまうという点です．

ε項を使うメリットとしては，

このように「存在」の「実在」による補強が簡潔で，式から直接項を作るという意味で明示的であること，

量化の範囲が具体的になる，つまり「すべての」や「ある」がどこに対しての言及なのかが明確になること，

証明で用いる推論規則が三段論法のみで済むこと，

あとは証明が容易になる場合もあります．

Bourbakiや島内先生の集合論でもε計算を用いています．

さて，クラスについてもお話ししましょう．

クラスとは集合みたいなものですが，集合より広範囲の「モノの集まり」を指します．

代表的なのはこの形です．「φである集合の全体」これも合法的に取り入れたいわけです．

Bourbakiや島内先生はこのようにε項を使って定めますが，この定め方だと

この存在式が成立しない場合にはこの記法でも{φである集合の全体}の意味を持たなくなります．

ZF集合論でもこのオブジェクトを導入することは出来ますが，これもこの存在式の成立が条件となります．

「集合しか扱わない」という立場では集合ではないクラスは本来扱えないわけですが，

それらを合法的に扱いたいのです．

クラスを扱う理論はあります．BGやMKと言われるものは，クラス用の変項を用意して

これが成り立ったら「定義による拡大」でクラスをボキャブラリーに追加します．

でも別のアプローチがあって，クラス用の変項は不要で，しかもあらゆる式に対して一息にクラスを導入する方法があります．

それは，式から直接このオブジェクトを導入すれば良いのです．

クラスの定義を大雑把に言えば，本論文ではε項も取り入れているのでクラスをこの形のモノとします．

まあ本論文の定理でありますがクラスであるε項は集合です．

集合でないクラスもあります．例えば集合の全体やRussellのパラドックスを引き起こしたこのクラスは集合ではありません．

集合の定義は竹内先生に従います．

集合とはこの式を満たすクラスのことです．この否定が成り立つときクラスは真クラスと呼ばれます．定義により集合はクラスです．

本論文ではε項とクラスの導入を組み合わせてZF集合論を拡張したのですが，

その拡張が良いものであるか(現代数学で受け容れ可能か)検証する必要が出てきます。

で実際，ZF集合論の任意の命題ψに対して

ZFで証明可能⇔本論文の集合論で証明可能

が成り立ちます．

より詳しく書くと，本論文の主結果は，

L\_{∊}の任意の文(自由な変更が現れない式)ψに対して，「ΓからψへのHKの証明でL\_{∊}の式の列であるものが取れる」ことと「ΣからψへのHEの証明でLの文の列であるものが取れる」ことが同値ということです．

ここでΓとはL\_{∊}の文で書かれたZF集合論の公理系です．

ΣはLの文で書かれた本論文の集合論の公理系です．

HKとHEとは証明体系を表します．

これらの記号が表すものについては以下で説明いたします．

その検証のためには，集合論の言語と証明のルールを明らかにしなくてはなりません．

言語とは「変項」，「述語記号」，「論理記号」などの記号を語彙とし，

文章である「式」を作ります．また名詞の役割をするのが「項」と呼ばれます．

文字は最もよく使われる項であって，「s∊t」と書けば「sはtの要素である」という意味の一つの式が出来上がります．

ZF集合論の言語を本論文ではL\_{∊}と書きます．

Ｌ\_{∊}の語彙はこれら，論理記号，二項関係，変項です．

次はL\_{∊}の項と式です．項とは名詞に当たるもので，式は文章に当たるものです．

次はクラスを正式に導入するために言語を拡張します．

拡張は二段階に分けて行います．はじめの拡張で作る言語はε項を導入するための言語Ｌ\_{ε}です．

Ｌ\_{ε}の語彙にはεが追加されます．

L\_{ε}の項と式は，途中まではＬ\_{∊}の定義と似ていますが，重要な違いは「作られた式から項が生成される」という点です．つまり項と式の定義が循環している点です． 当然ながらL\_{∊}の項と式はL\_{ε}の項と式です．

L\_{ε}の式と変項で作られる項を「ε項」と呼びます．

続いて言語の拡張のセカンドステップに移ります．

L\_{ε}の式と変項で作られるこの形のモノを内包項と呼びましょう．

Ｌは本論文特有の言語です．内包項を直接導入するというのは竹内先生のやり方を参考にしていますが，そこでＬ\_{ε}の式を使うという点が本論文の特徴です(ε計算の恩恵を受けられる！)．

項が変項，ε項，内包項であるということ以外L\_{∊}と同じ要領です．

このLこそが本論文の標準言語となります．

さて扱う式を制限しましょう．以上で作った項と式の中には意味の通らないものが沢山あるからです．式の部分に自由なxが入ってないと意味が通りません．

この形のε項は，φの中にxのみが自由に現れているとき主要ε項と呼ぶことにします．この形の内包項は，φの中にxが自由に現れているとき正則内包項と呼ぶことにします．そして以降扱う式に現れるε項は主要ε項，現れる内包項は正則内包項とし，またこのような量化式については式の中にxが自由に現れているものとします．

ついでにクラスの定義もしておきます．

主要ε項と同様に，この形の内包項は，φの中にxのみが自由に現れているとき主要内包項と呼ぶことにします．

そしてクラスとは主要ε項と主要内包項のことであると定義します．

で先ほども言った通り主要ε項は集合となります．

首脳部に入る前にもう一つ準備をしておきます．

Lの式をL\_{ε}の式に書き換えるというものです．

そもそもε項を導入したのは，存在文に対して証人を付けるためでしたが，

φの中に内包項が使われているときε項は使うことができないわけです．

L\_{ε}の式でないもに対しては作られていないので．

この場合は，φを同値なL\_{ε}の式「φハット」に書き換えてからε項を作り，

この式を公理とします．

具体的にどう書き換えるかという手順はこの表に従います．実際はもう少し細かい規定と柔軟な書き換えの定義が必要になりますが，ここではこの表のとおりに書き換えていると考えて問題ありません．

書き換え自体は式の意味を考えれば当然の物であります．

この書き換えが同値になるように，後で公理を追加します．

では首脳部に入ります．

先ずはΓの公理，つまりZFの公理について話します．

ZFの公理系は，

「同一の要素を持つ集合同士は等しい」という外延性の公理，

「等しい集合同士の服属関係は一致する」という相等性公理．

「集合を写像で写した像は集合である」という置換公理，

「対集合が存在する」という対の公理，

「合併集合が存在する」という合併の公理，

「冪集合が存在する」という冪の公理，

「空でない集合は自分自身と交わらない要素を持つ」という正則性公理，

「自然数の全体を含む集合が存在する」という無限公理，

の8つの公理及び公理図式から成ります．

次にHKですが，HKとは古典論理の証明体系のことです．

どういうものかというと，HKの公理(論理的公理)はこれらです．

これらは自然なものです．量化の公理は多少複雑になりますが．

HKの証明とはどういうものかというのを，主結果の主張を借りて説明すれば，

「ΓからHKの証明でL\_{∊}の式の列であるもの」とは，L\_{∊}の式の列

φ\_1,…,φ\_nで，各φ\_iが

・HKの公理であるか，

・Γの公理であるか，

・前の式から三段論法で得られるか，

・前の式から汎化で得られるか，(大雑把に言えばφ\_iはφ\_jに全称記号を付けたもの)

のいずれかになっているものです．

さて，Σの説明に入りましょう．Σも集合論の公理系ですが，Γとは違いLの文で書かれた公理系となります．「対」「合併」「冪」「正則性」「無限」はΓと共通します．

「外延性」「相等性」「置換」が若干変わり，置換公理はそんなに変わらないですが，

それから「内包性」と「要素」の公理が新しく追加されます．

「外延性」と「相等性」はクラスに対する言明に変わります．

「内包性」は，この形の主要内包項に「φであるモノの全体」という意味を与え，

「要素」の公理によって要素となりうるものは集合に限られます．

要素の公理は，その心はGodelの引用です．式の形はアレンジしてますが．

HEとはHKを模倣した本論文特有の証明体系です．違うのは量化公理です．HKの物よりは若干見やすくなります．

重要なのはφがL\_{ε}の式でないときに書き換えを用いることと，

あとこのτが主要ε項であるということです．

これが何を示唆しているかというと，量化の亘る範囲は主要ε項の上ということです(ただしこれを言うにはあと一本足りませんが)．

HEの証明はHKと違い文で行います．

「ΣからのHEの証明でLの文の列であるもの」とはどういうものかというと，Lの文の列φ\_1,…,φ\_nで，各φ\_iが

・HEの公理である

・Σの公理である

・前の式から三段論法で得られる

のいずれかであるものです．

「ΣからψへのHEの証明でLの文の列であるもの」が取れることを

改札ゲート記号を使ってこのよう表します．

主結果の証明は，次の三つのステップに分割します．

ミソは，いきなりLの文とL\_{∊}の式を比べるのではなく，間にL\_{ε}を挟むというところです．

さて集合の定義ですが，これは冒頭でも話しましたが，しっかり書くと，

クラスaが集合であるとは，∃x(a=x)がΣから導かれるということです．

これの否定が導かれたらaは真クラスとなります．

大切な基本定理として，主要ε項は集合となります．これは外延性公理と量化公理よりすぐに導かれます．

全称式は，ε項を用いることで導くことができるというものです．

これは存在記号の量化公理の対となる結果です．

それから主要内包項は，集合であればε項で表現可能です．

これはBourbakiや島内先生の内包項の定義と関係するものです．

これも式の書き換えと量化公理よりすぐに導かれます．

次は書き換えの同値性ですね．内包性公理と要素の公理はこの同値性を得るためにあるわけです．

最後に，ε項を導入することで証明が簡単になる例を出しておきます．

この式の場合は文字が変わっているだけなので成り立つのは当然だろうと思われますが，形式的に証明すると少し長くかかります．

HEでの証明はすぐに思いつくでしょう．HKの証明は若干遠回りしているように感じられます．さらに顕著に違いが現れる例はこれです．

この式が成り立つのは直観的には明らかです．

この式はHEの公理であって，この式を満たす集合が一つ取れてしまったんですね．

まとめです．

本論文ではε項とクラスの直接的な導入を併せた集合論を構築しました．

また，それが集合に関する言明に対してはZF集合論と同じ証明力であることを示しました．

何が具体的で直観的なのかというのは

量化の範囲が具体的である点

初めから集合とクラスが用意されていて，集合とクラスの範囲が明確である点．

これは定義による拡大とは大きく違う点ですね．

そして，存在するなら「実際に取って来られる」という点です．

伊藤清先生の言葉をご存じでしょうか．

厳密な基礎付けを得る際は，「出来る限り本質を把握しやすい形でさかのぼることが望ましい」と仰っているのです．

その点，ZFもBGもMKもNFも無味乾燥とした世界ですが，

本論文の世界は幾分か生々しく集合を取り扱えるでしょう．

引用：伊藤清「数学の基礎としての集合論」

数学の一つの重要な特徴は，厳密な論理による確実さが得られるということ．

述語論理：式の構造を主語と述語に分解した形式的推論．「すべての」「存在する」といった量化表現を扱える．

命題論理：式の内部構造に立ち入らず，結合形式のみに注目した形式的推論．

簡単で具体的で直接的な集合論の拡張．

×要素になれるものを制限しているからRussellのパラドックスは起きない．

〇{x|x∉x}を集合だと仮定すると，つまり要素になれると仮定すると矛盾が起きる．

結果は目に見えてつまらないと言われたら，「そこがミソです．結果は目に見えているし簡単な拡張であるし，こうしてできた集合論は我々の数学的直観に馴染みやすいにもかかわらず，おそらく誰もやっていない．だから僕がやったのです．それから案外，構文的な議論は複雑でそこを整備しておきました．」

等号理論を分ける必要はない．必要な性質はすべて集合論の中で証明できる．

ε計算自体は定理証明システムHOLおよびIsabelleに使用されている．

例えば複素数上の四則演算も元を辿れば順序数に対する算法です．それらを得るために順序数の全体の上の写像を定めるので，順序数の全体がクラスとして扱える方が論理的にすっきりします．

集合と考えると矛盾を起こす「モノの集まり」を心置きなく扱えるのがクラス理論の利点．

本論文のはモデルではない．シンタクチックな拡大でしかない．