

5.2 哈夫曼树与哈夫曼编码

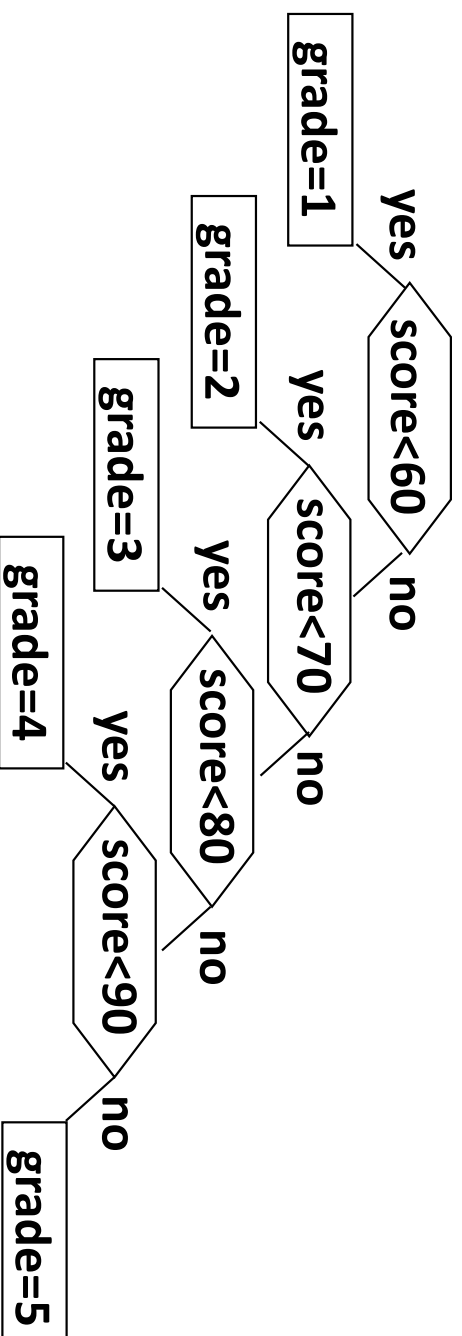


什么是哈夫曼树 (Huffman Tree)

[例] 将百分制的考试成绩转换成五分制的成绩

```
if ( score < 60 ) grade =1;  
else if ( score < 70 ) grade =2;  
else if ( score < 80 ) grade =3;  
else if ( score < 90 ) grade =4;  
else grade =5;
```

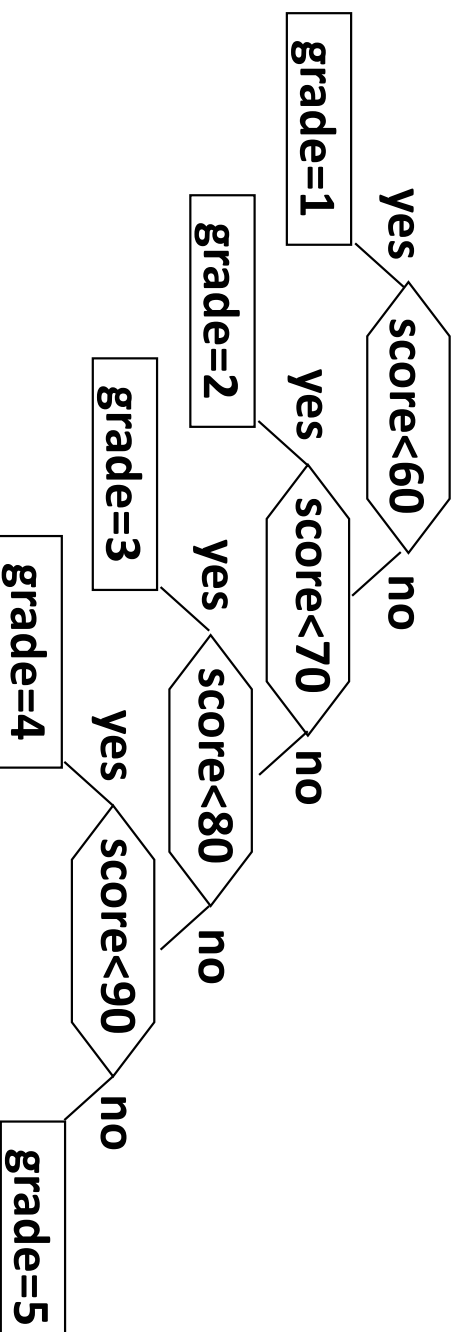
□ 判定树:



□ 如果考虑学生成绩的分布的概率:

分数段	0-59	60-69	70-79	80-89	90-100
比例	0.05	0.15	0.40	0.30	0.10

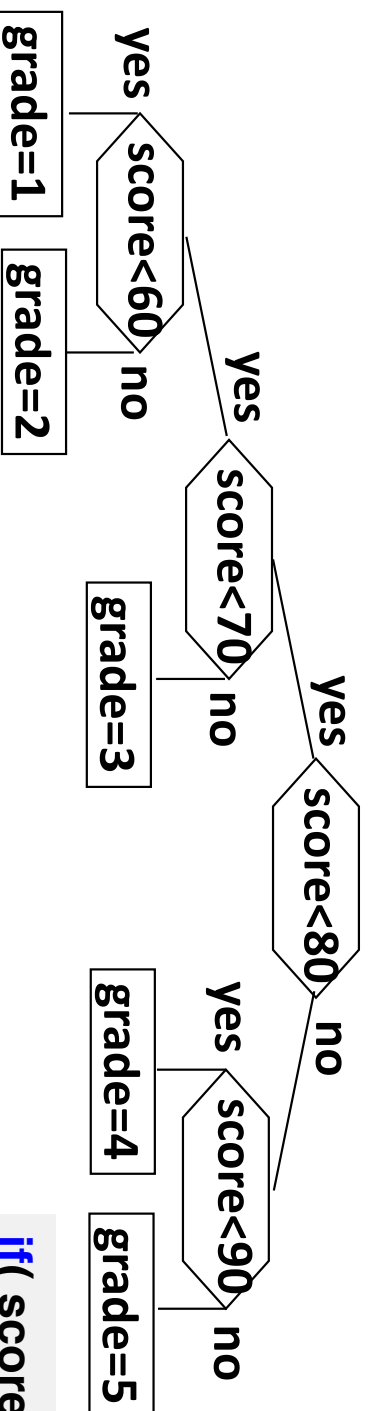
➤ 查找效率: $0.05 \times 1 + 0.15 \times 2 + 0.4 \times 3 + 0.3 \times 4 + 0.1 \times 4 = 3.15$



□ 如果考虑学生成绩的分布的概率：

分数段	0-59	60-69	70-79	80-89	90-100
比例	0.05	0.15	0.40	0.30	0.10

□ 修改判定树：



$$\text{效率: } 0.05 \times 3 + 0.15 \times 3 + 0.4 \times 2 + 0.3 \times 2 + 0.1 \times 2 = 2.2$$

```
if( score < 80 )
{
    if( score < 70 )
        if( score < 60 ) grade = 1;
        else grade = 2;
    }else if( score < 90 ) grade = 4;
    else grade = 5;
```

如何根据结点不同的查找频率构造更有效的搜索树？

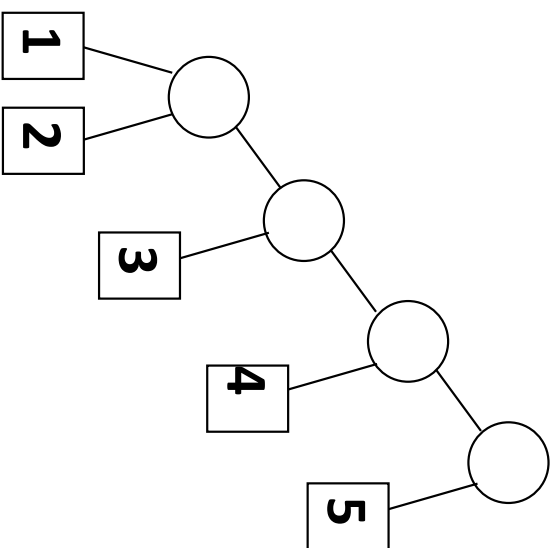
❖ 哈夫曼树的定义

带权路径长度(WPL): 设二叉树有 n 个叶子结点, 每个叶子结点带有权值 w_k , 从根结点到每个叶子结点的长度为 l_k , 则每个叶子结点的带权路径长度之和就是:

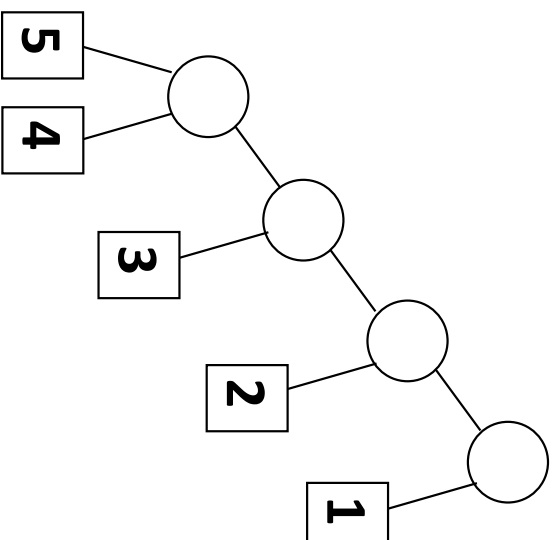
$$WPL = \sum_{k=1}^n w_k l_k$$

最优二叉树或哈夫曼树: WPL最小的二叉树

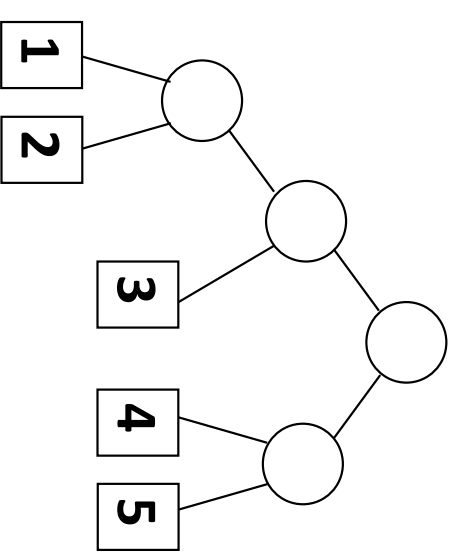
【例】有五个叶子结点，它们的权值为{1,2,3,4,5}，用此权值序列可以构造出形状不同的多个二叉树。



$$WPL = 34$$



$$WPL = 50$$



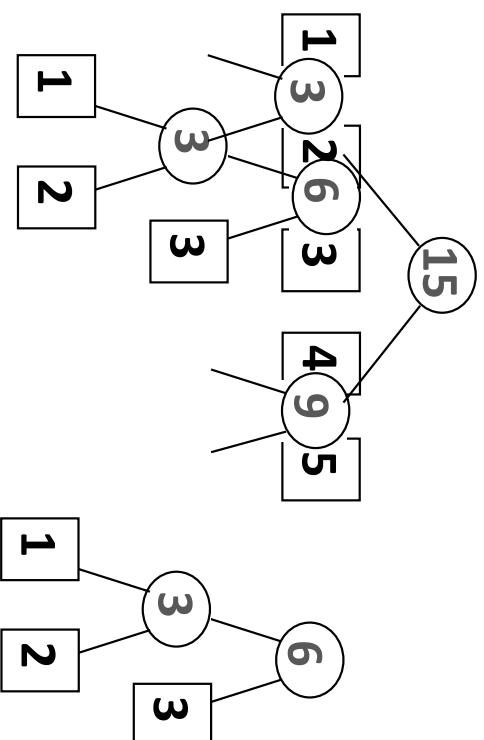
$$WPL = 33$$

$$WPL_{min} = 5 \times 1 + 4 \times 2 + 3 \times 3 + 2 \times 4 + 1 \times 5 = 30$$

哈夫曼树的构造



每次把**权值最小**的两棵二叉树合并



```

typedef struct TreeNode *HuffmanTree;
struct TreeNode{
    int Weight;
    HuffmanTree Left, Right;
}

HuffmanTree Huffman( MinHeap H )
{
    /* 假设H->Size个权值已经存在H->Elements[]->Weight里 */
    int i; HuffmanTree T;
    BuildMinHeap(H); /*将H->Elements[]按权值调整为最小堆*/
    for (i = 1; i < H->Size; i++) { /*做H->Size-1次合并*/
        T = malloc( sizeof( struct TreeNode ) ); /*建立新结点*/
        T->Left = Deletemin(H);
            /*从最小堆中删除一个结点，作为新T的左子结点*/
        T->Right = Deletemin(H);
            /*从最小堆中删除一个结点，作为新T的右子结点*/
        T->Weight = T->Left->Weight+T->Right->Weight;
            /*计算新权值*/
        Insert( H, T ); /*将新T插入最小堆*/
    }
    T = Deletemin(H);
    return T;
}

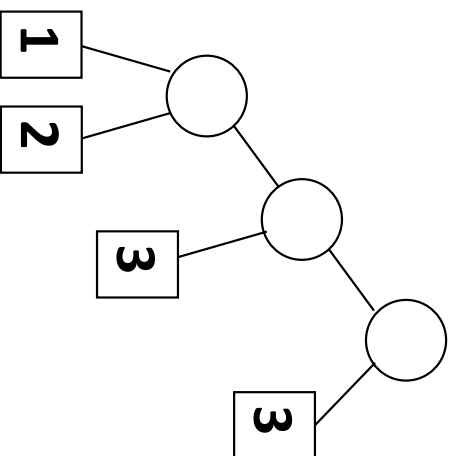
```

整体复杂度为 $O(N \log N)$

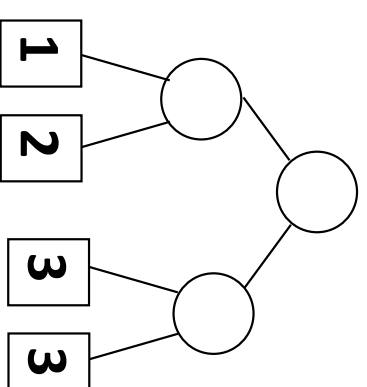
❖ 哈夫曼树的特点:

- 👉 没有度为1的结点;
- 👉 n 个叶子结点的哈夫曼树共有 $2n-1$ 个结点;
- 👉 哈夫曼树的任意非叶节点的左右子树交换后仍是哈夫曼树;
- 👉 对同一组权值 $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, 是否存在不同构的两棵哈夫曼树呢?

对一组权值 $\{1, 2, 3, 3\}$, 不同构的两棵哈夫曼树:



$$WPL = 18$$



$$WPL = 18$$

哈夫曼编码

□ 给定一段字符串，如何对字符进行编码，可以使得该字符串的编码存储空间最少？

【例】假设有一段文本，包含58个字符，并由以下7个字符构：a, e, i, s, t, 空格 (sp)，换行 (nl)；这7个字符出现的次数不同。如何对这7个字符进行编码，使得总编码空间最少？

【分析】

- (1) 用等长ASCII编码： $58 \times 8 = 464$ 位；
- (2) 用等长3位编码： $58 \times 3 = 174$ 位；
- (3) 不等长编码：出现频率高的字符用的编码短些，出现频率低的字符则可以编码长些？

怎么进行不等长编码？

如何避免二义性？

 **前缀码** *prefix code*: 任何字符的编码都不是另一字符编码的前缀

◆ 可以无二义地解码

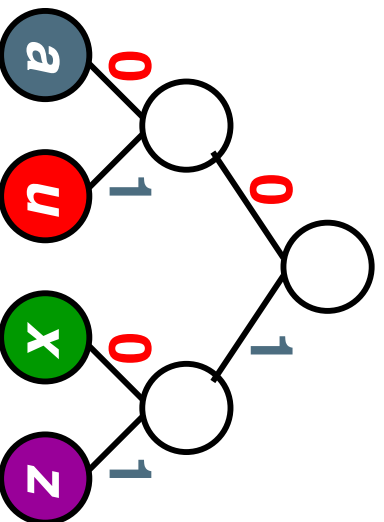
❖ 二叉树用于编码

用二叉树进行编码:

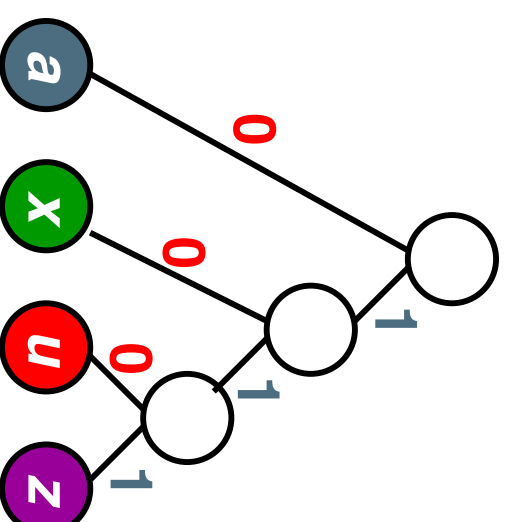
(1) 左右分支: 0、1

(2) 字符只在叶结点上

四个字符的频率: a:4, u:1, x:2, z:1



$$\begin{aligned} \text{Cost} (\text{aaa}\text{x}\text{uaxz} \rightarrow 0000001001001011) \\ = 2 \times 4 + 2 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 1 = 16 \end{aligned}$$

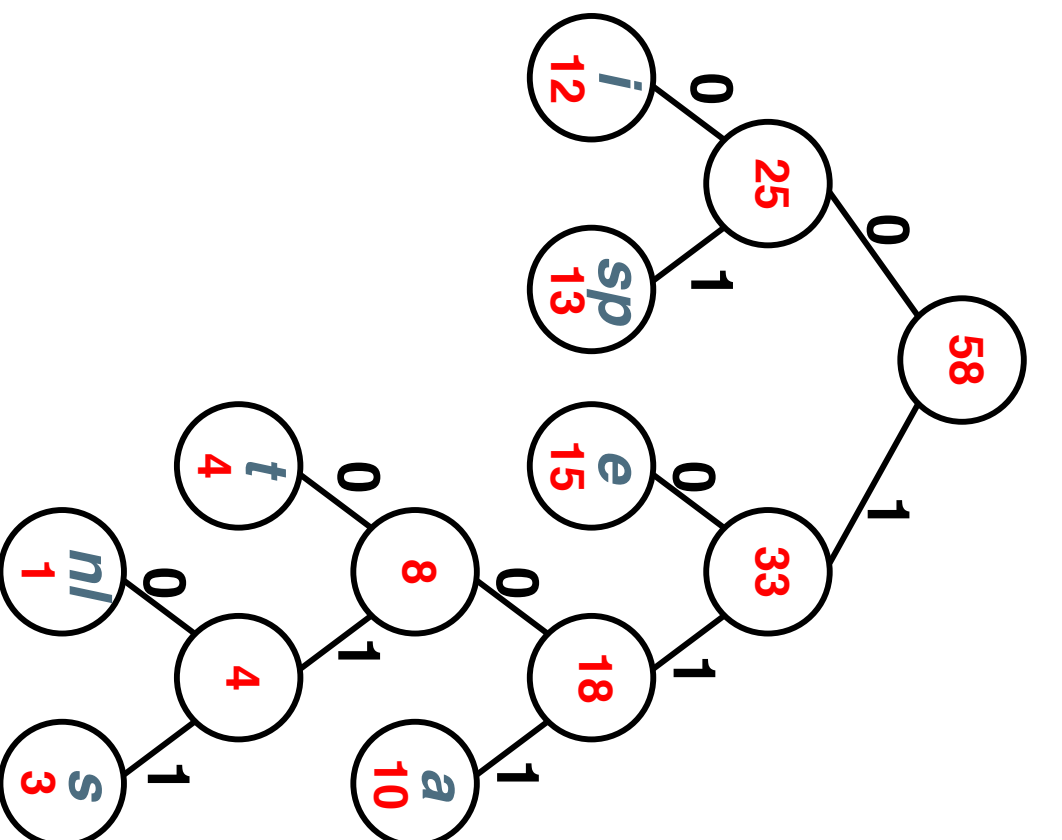


$$\begin{aligned} \text{Cost} (\text{aaa}\text{x}\text{uaxz} \rightarrow 00010110010111) \\ = 1 \times 4 + 3 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 1 = 14 \end{aligned}$$

怎么构造一颗编码代价最小的二叉树?

【例】哈夫曼编码

C_i	a	e	i	s	t	sp	nl
f_i	10	15	12	3	4	13	1



$a : 111$

$e : 10$

$i : 00$

$s : 11011$

$t : 1100$

$sp : 01$

$nl : 11010$

$$\begin{aligned}
 \text{Cost} &= 3 \times 10 + 2 \times 15 \\
 &\quad + 2 \times 12 + 5 \times 3 \\
 &\quad + 4 \times 4 + 2 \times 13 \\
 &\quad + 5 \times 1 \\
 &= 146
 \end{aligned}$$