
TP3 - MODELO DE COLAS M/M/1

Carlucci, Gino
Universidad Tecnológica Nacional
Rosario, Santa fe
ginocarlucci@hotmail.com

Docampo, Juan Manuel
Universidad Tecnológica Nacional
Rosario, Santa fe
docampojuan@gmail.com

Menegozzi, Milton
Universidad Tecnológica Nacional
Rosario, Santa fe
miltonmenegozzi@gmail.com

12 de julio de 2020

ABSTRACT

El presente trabajo tiene la finalidad de simular un modelo de colas M/M/1 y comparar los resultados obtenidos en Python (Lenguaje de programación), Anylogic (Software de simulación) y el método analítico.

1. Introducción

La teoría de colas es el estudio matemático de las colas o líneas de espera dentro de un sistema. Esta teoría estudia factores como el tiempo de espera medio en las colas o la capacidad de trabajo del sistema sin que llegue a colapsar. Dentro de las matemáticas, la teoría de colas se engloba en la investigación de operaciones y es un complemento muy importante a la teoría de sistemas y la teoría de control. Se trata así de una teoría que encuentra aplicación en una amplia variedad de situaciones como negocios, comercio, industria, ingenierías, transporte y logística o telecomunicaciones.

Para nuestro caso, el sistema bajo estudio es del tipo M/M/1 (Notación Kendall). Las sigla M equivale a "Markoviano" (distribución de Poisson). Por lo que para nuestro caso indica que los tiempos entre llegadas de clientes al sistema y los tiempos de servicio, van a seguir una distribución exponencial. El número 1, representa la cantidad de servidores operando en nuestro sistema.

Las llegadas de clientes y su servicio demandado son completamente aleatorios en el sentido de que la evolución del sistema depende sólo de su estado actual, y no de su pasado.

2. Desarrollo

Para el análisis de nuestra simulación, realizaremos una serie de pruebas en las que haremos variar la tasa de arribos y la tasa de servicios, comparando los resultados obtenidos por nuestro programa en Python con el modelo realizado en el software de simulación AnyLogic, y los valores teóricos esperados.

2.1. Estructuras típicas de sistemas de colas

Existen varias estructuras que puede adoptar un sistema de colas, dependiendo de la cantidad de servidores, cantidad de colas, etc. A continuación se deja una ilustración de casos típicos que estos sistemas pueden adoptar, en los que cada uno será de mejor aplicación según el caso en estudio.

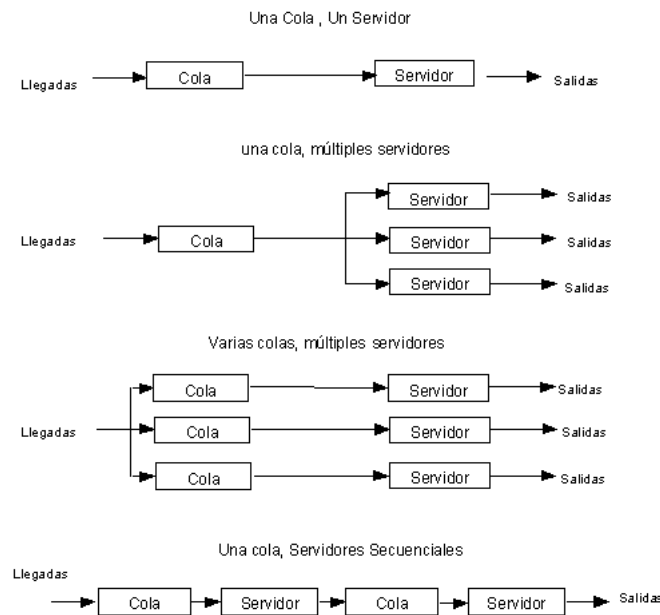


Figura 1: Ilustración estructuras típicas de sistemas de cola

Para el presente estudio, la estructura a utilizar será la de un servidor y una cola, finalizando la simulación cuando un total de 500 clientes hayan completado su demora en cola.

2.2. Disciplina de la cola

La disciplina de la cola se refiere al orden en el que se seleccionan los clientes para recibir el servicio. Hay varios tipos, en los que podemos mencionar:

- **FIFO (first in first out)** Primero en entrar, primero en salir, según la cual se atiende primero al cliente que antes haya llegado.
- **LIFO (last in first out)** También conocida como pila que consiste en atender primero al cliente que ha llegado el último.
- **RSS (random selection of service)** Selecciona los clientes de manera aleatoria, de acuerdo a algún procedimiento de prioridad o a algún otro orden.
- **PS Processor Sharing** Sirve a los clientes igualmente. La capacidad de la red se comparte entre los clientes y todos experimentan con eficacia el mismo retraso.

Para el siguiente estudio, se optó por utilizar una cola FIFO.

2.3. Medidas de Rendimiento

Se describe a continuación las medidas de desempeño a analizar en nuestro sistema:

- Promedio de clientes en el sistema
- Promedio de clientes en cola: representa el tamaño promedio de la cola a lo largo de toda la simulación, esta variable evalúa al sistema desde el punto de vista de la atención al cliente.
- Tiempo promedio en sistema.
- Tiempo promedio en cola: es la sumatoria de las demoras de todos los clientes dividido por la cantidad de clientes, permite ver el comportamiento del sistema desde el punto de vista del cliente.

- Utilización promedio del servidor: se calcula sumando todos los tiempos de servicio dividido por el tiempo final de la simulación, sirve para medir la explotación de los recursos invertidos.
- Probabilidad de n clientes en cola.
- Probabilidad de denegación de servicio (cola finita de tamaño: 0, 2, 5, 10, 50).

2.4. Notación de un sistema de colas:

- Tasa de arribo
$$\lambda \quad (1)$$

- Tasa de servicio
$$\mu \quad (2)$$

- Factor de utilización del servidor:
$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \quad (3)$$

- Probabilidad de que no haya clientes en el sistema:
$$P_o = 1 - \rho \quad (4)$$

- Probabilidad de que haya n clientes en el sistema:
$$P_n = \rho P_o \quad (5)$$

- Número promedio de clientes en cola
$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \quad (6)$$

- Número promedio de clientes en el sistema
$$L_s = L_q + \rho \quad (7)$$

- Tiempo promedio que un cliente se encuentra en la cola
$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \quad (8)$$

- Tiempo promedio que un cliente se encuentra en el sistema
$$W_s = W_q + \rho \quad (9)$$

3. Simulación y resultados

Para el presente estudio se optó por un valor inicial en la tasa de servicios $\mu = 9$. La tasa de arribos varía según la tasa de servicios y se obtendrá su valor respecto al 25 %, 50 %, 75 %, 100 % y 125 % de la misma.

3.1. Tasa arribo al 25 % con respecto a la tasa de servicio

$$\mu = 9 ; \lambda = 2,25$$

Med. de Rendimiento	M.Analítico	Python	AnyLogic
Promedio de clientes en cola	0.083	0.0872	0.086
Utilización del servidor	0.25	0.2908	0.239
Tiempo promedio demora en cola	0.037	0.0386	0.04
Promedio clientes en sistema	0.3333	0.378	0.328
Tiempo promedio clientes en sistema	0.123	0.1275	0.15

Cuadro 1: Cuadro comparativo - Resultados obtenidos de cada fuente

Resultados Python

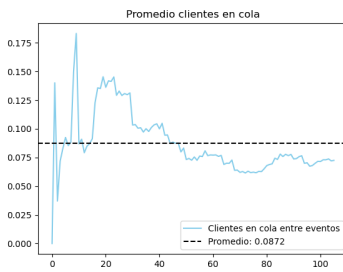


Figura 2: Promedio clientes en cola

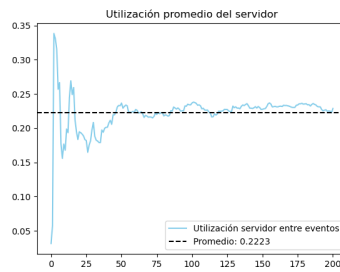


Figura 3: Utilización del servidor

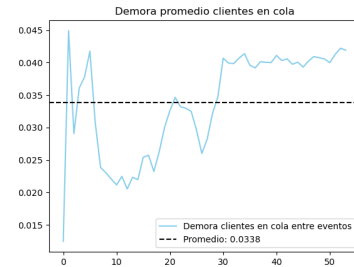


Figura 4: Demora promedio clientes en cola

Resultados AnyLogic

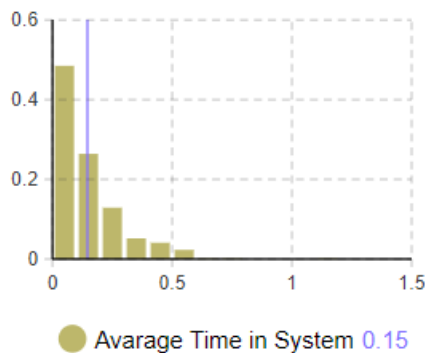


Figura 5: Tiempo promedio en servidor

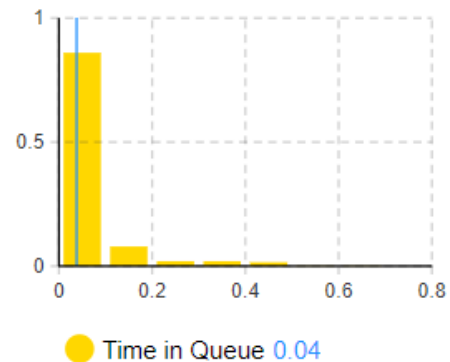


Figura 6: Demora promedio clientes en cola

Comparación

Como podemos observar en los resultados obtenidos, los valores obtenidos en la simulación del modelo M/M/1 tanto en Python como en AnyLogic, son similares a los teóricos. La incertidumbre obtenida se debe al carácter de aleatoriedad en los eventos generados a través de la simulación.

Para una tasa de arribo con un valor pequeño respecto a la tasa de servicio, es de esperarse que haya un pequeño porcentaje de utilización del servidor, como así también un bajo número de clientes en cola y un bajo promedio de demora.

3.2. Tasa arribo al 50 % con respecto a la tasa de servicio

$$\mu = 9 ; \lambda = 4,5$$

Med. de Rendimiento	M.Analítico	Python	AnyLogic
Promedio de clientes en cola	0.5	0.5512	0.524
Utilización del servidor	0.5	0.5066	0.499
Tiempo promedio demora en cola	0.1111	0.1256	0.11
Promedio clientes en sistema	1.0	1.0578	1.023
Tiempo promedio clientes en sistema	0.1825	0.2222	0.22

Cuadro 2: Cuadro comparativo - Resultados obtenidos de cada fuente

Resultados Python

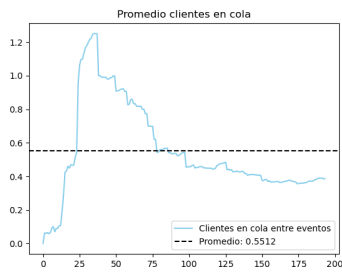


Figura 7: Promedio clientes en cola

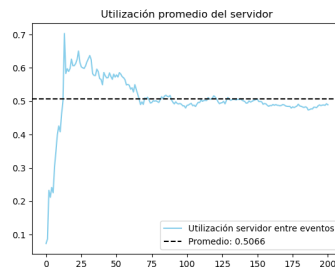


Figura 8: Utilización del servidor



Figura 9: Demora promedio clientes en cola

Resultados AnyLogic

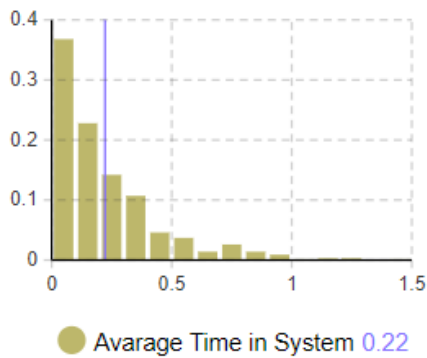


Figura 10: Tiempo promedio en servidor

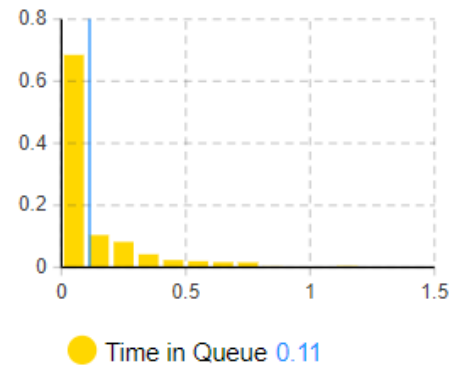


Figura 11: Demora promedio clientes en cola

Comparación

Como podemos observar, el aumento de la tasa de arribos implica un aumento en la utilización del servidor, aumento de clientes en cola y un aumento en la demora. Es de esperarse que mientras más alta sea la tasa de arribos, más se incrementarán las medidas de rendimiento, al haber una mayor cantidad de clientes en el sistema.

3.3. Tasa arribo al 75 % con respecto a la tasa de servicio

$$\mu = 9 ; \lambda = 6,75$$

Med. de Rendimiento	M.Analítico	Python	AnyLogic
Promedio de clientes en cola	2.25	2.5885	2.613
Utilización del servidor	0.75	0.7897	0.777
Tiempo promedio demora en cola	0.3333	0.3845	0.376
Promedio clientes en sistema	3.0	3.3782	3.391
Tiempo promedio clientes en sistema	0.4325	0.4444	0.448

Cuadro 3: Cuadro comparativo - Resultados obtenidos de cada fuente

Resultados Python

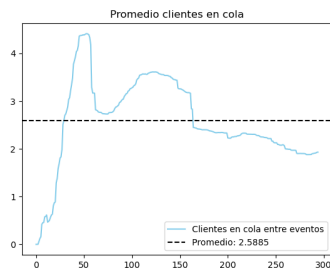


Figura 12: Promedio clientes en cola

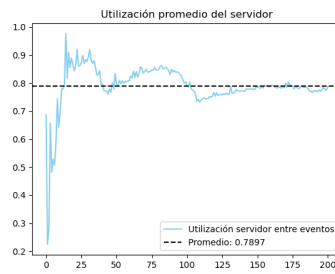


Figura 13: Utilización del servidor

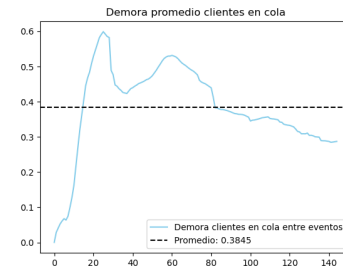


Figura 14: Demora promedio clientes en cola

Resultados AnyLogic

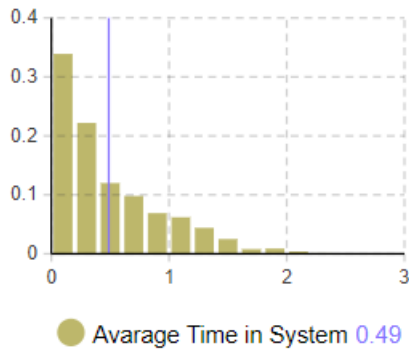


Figura 15: Tiempo promedio en servidor

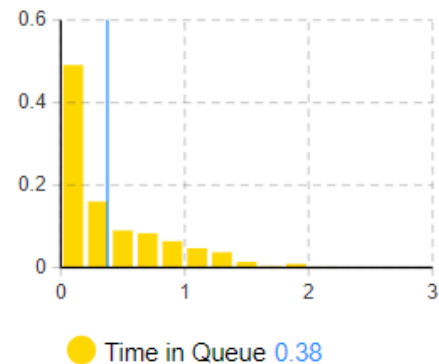


Figura 16: Demora promedio clientes en cola

Comparación

Como mencionamos en los dos casos anteriores, los resultados obtenidos son similares a los esperados. Concluyendo que a medida que siga creciendo la tasa de arribos con respecto a la de servicios, peores medidas de rendimiento tendrá el sistema bajo estudio.

3.4. Tasa arribo al 100 y 125 % con respecto a la tasa de servicio

El criterio de estabilidad para un sistema M/M/1 indica que la tasa de servicios debe ser mayor a la tasa de arribos, caso contrario, aplicando las ecuaciones mencionadas en la sección 2.4, se encontrarán resultados negativos y por lo tanto, no válidos para ser estudiados.

4. Conclusiones

Como puede verse en los cuadros comparativos resultantes de cada simulación, los resultados obtenidos tanto para el programa creado en Python como para la implementación del modelo en el software de simulación AnyLogic, son similares a los que se obtuvieron teóricamente, por lo que concluimos que ambos modelos realizados pueden ser utilizados para representar un sistema de colas M/M/1.

Referencias

[1] Simulation modeling and analysis. In <https://fac.ksu.edu.sa/sites/default/files/index.pdf>.