Resumo Álgebra Linear

Gino Chen Hsiang-Jan

26 de Outubro de 2015

Contents

1 Projeção ortogonal

Definição 1.1. [Anton,AlgLinApl-pt,2010] *Dizemos que dois vetores não nulos u e v em $\mathbb{R}^n$ são ortogonais (ou perpendiculares) se $u.v = 0$. Também convencionamos que o vetor nulo em $\mathbb{R}^n$ é ortogonal a cada vetor em $\mathbb{R}^n$. Um conjunto não vazio de vetores em $\mathbb{R}^n$ é denominado ortogonal se dois quaisquer de seus vetores forem ortogonais. Um conjunto ortogonal de vetores unitários é dito ortonormal.*

Teorema 1.2. [Anton,AlgLinApl-pt,2010]

(a) Se a e b constantes não ambas nulas, então uma equação da forma:

$$ax + by + c = 0$$

representa uma reta em $\mathbb{R}^2$ de normal $n = (a, b)$.

(b) Se a, b e c constantes não ambas nulas, então uma equação da forma:

$$ax + by + cz + d = 0$$

representa um plano em $\mathbb{R}^3$ de normal $n = (a, b, c)$.

Teorema 1.3. [Anton,AlgLinApl-pt,2010] ***Teorema das projeções*** *Se $u, v \in \mathbb{R}^n$ e se $v \neq 0$, então u pode ser escrito de maneira única na forma $u = w_1 + w_2$, em que w_1 é um múltiplo escalar de v e w_2 é ortogonal a v.*

Definição 1.4. [Anton,AlgLinApl-pt,2010] *No teorema das projeções:*
w_1 é chamado de projeção ortogonal de u ou componente vetorial de u ao longo de v e denotado como $proj_v u$ e pode ser calculado por:

$$w_1 = proj_v u = \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v$$

w_2 é chamado de componente vetorial de u a v e pode ser calculado por:

$$w_2 = u - proj_v u = u - \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v$$

Definição 1.5. [Anton,AlgLinApl-pt,2010] *Dizemos que um conjunto de dois ou mais vetores num espaço com produto interno é **ortogonal** se quaisquer dois vetores distintos do conjunto forem ortogonais.*

Definição 1.6. [Anton,AlgLinApl-pt,2010] *Um conjunto ortogonal no qual cada vetor tem normal 1 é **ortonormal**.*

Teorema 1.7. [Anton,AlgLinApl-pt,2010] *Se $\mathsf{S} = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ for um conjunto ortogonal de vetores não nulos num espaço com produto interno, então S é linearmente independente*

Teorema 1.8. [Anton,AlgLinApl-pt,2010] *Se $\mathsf{S} = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ for uma base ortogonal de espaço com produto interno V e $u \in \mathsf{V}$ então :*

$$u = \frac{\langle u, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle u, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2 + \frac{\langle u, v_3\rangle}{\|v_3\|^2} v_3 + \cdots + \frac{\langle u, v_n\rangle}{\|v_n\|^2} v_n$$

Teorema 1.9. [Anton,AlgLinApl-pt,2010] *Se $\mathsf{S} = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ for uma base ortonormal de espaço com produto interno V e $u \in \mathsf{V}$ então :*

$$u = \langle u, v_1\rangle v_1 + \langle u, v_2\rangle v_2 + \langle u, v_3\rangle v_3 + \cdots + \langle u, v_n\rangle v_n$$

Teorema 1.10. [Anton,AlgLinApl-pt,2010] *Seja W um subespaço de dimensão finita de um espaço vetorial com produto interno V*
(a) Se $\mathsf{S} = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ for uma base ortogonal de W e $u \in \mathsf{V}$ então :

$$u = \frac{\langle u, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle u, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2 + \frac{\langle u, v_3\rangle}{\|v_3\|^2} v_3 + \cdots + \frac{\langle u, v_n\rangle}{\|v_n\|^2} v_n$$

(b) Se $\mathsf{S} = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ for uma base ortonormal de W e $u \in \mathsf{V}$ então :

$$u = \langle u, v_1\rangle v_1 + \langle u, v_2\rangle v_2 + \langle u, v_3\rangle v_3 + \cdots + \langle u, v_n\rangle v_n$$

Teorema 1.11. [Anton,AlgLinApl-pt,2010] *Cada espaço vetorial não nulo de dimensão finita possui alguma base ortonormal.*

2 Matrizes

Definição 2.1. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Chama-se de matriz transposta hermitiana, denotado por A^H, $A^H = \overline{A}^t$, que é a complexa cojugada da transposta ordinária.*

Definição 2.2. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Chama-se de matriz hermitiana uma matriz tal que $A^H = A$.*

Lema 2.3. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Uma matriz hermitiana é a soma de uma matriz real simétrica e de uma matriz imaginária anti-simétrica.*

Lema 2.4. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *As propriedades de matrizes são válidas:*
- $\overline{AB} = \overline{A}.\overline{B}$
- $(\overline{A})^t = (\overline{A^t})$

Definição 2.5. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Uma matriz P tal que $P^H P = PP^H = I$ é chamada matriz unitária.*

Definição 2.6. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Uma matriz P real tal que $P^T P = PP^T = I$ é chamada matriz ortogonal.*

Teorema 2.7. [Noble,AlgLinApl-pt,1986]
(i) Tanto as colunas quanto as linhas de uma matriz unitária (ou ortogonal) formal um cojunto ortonormal.
(ii) Se P é unitária, então $|detP| = 1$.
(iii) Se P e Q são unitárias, então o mesmo acontece com PQ.
(iv) Se P é unitária, então, para todos os x e y, temos $(Px, Py), \|Px\|_2 = \|x\|_2$ e $\|P\|_2 = 1$.
(v) Se λ for um autovalor da matriz unitária P, então $|\lambda| = 1$.

3 Processo de Gram-Schmidt

[Anton,AlgLinApl-pt,2010] Para converter uma base $\{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\}$ numa base ortogonal $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$, efetue as seguintes contas:

$$\begin{aligned}
&v_1 = u_1 \\
&v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 \\
&v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2 \\
&\vdots \\
&v_n = u_n - \frac{\langle u_n, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_n, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2 - \frac{\langle u_n, v_3\rangle}{\|v_3\|^2} v_3 + \cdots - \frac{\langle u_n, v_n\rangle}{\|v_n\|^2} v_n
\end{aligned}$$

Para converter a base ortogonal numa base ortonormal $\{q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n\}$ normalize os vetores da base ortonormal:

$$q_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}, i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

4 Decomposição QR via Gram-Schmidt

[Anton,AlgLinApl-pt,2010] Seja A uma matriz $m \times n$ tal que $A = [u_1\, u_2\, u_3 \ldots u_n]$ e $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ são vetores de dimensão m linearmente independentes. Existe uma matriz $Q = [q_1\, q_2\, q_3 \ldots q_n]$, através do processo de Gram-Schmidt, formado por uma base ortonormal projetados pelos vetores de $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$. Temos então:

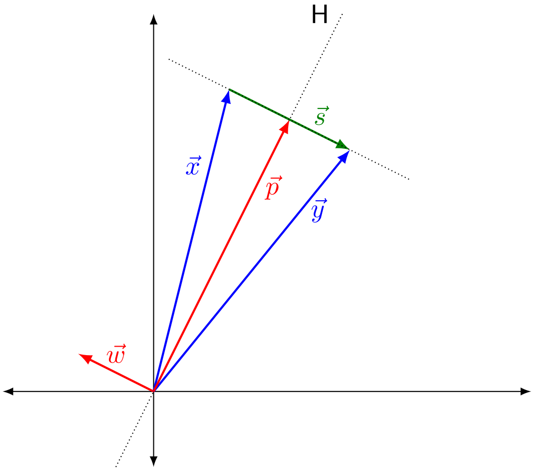
$$\left\{\begin{array}{l}
u_1 = \langle u_1, q_1\rangle q_1 + \langle u_1, q_2\rangle q_2 + \langle u_1, q_3\rangle q_3 + \ldots \langle u_1, q_n\rangle q_n \\
u_2 = \langle u_2, q_1\rangle q_1 + \langle u_2, q_2\rangle q_2 + \langle u_2, q_3\rangle q_3 + \ldots \langle u_2, q_n\rangle q_n \\
u_3 = \langle u_3, q_1\rangle q_1 + \langle u_3, q_2\rangle q_2 + \langle u_3, q_3\rangle q_3 + \ldots \langle u_3, q_n\rangle q_n \\
\vdots \\
u_n = \langle u_n, q_1\rangle q_1 + \langle u_n, q_2\rangle q_2 + \langle u_n, q_3\rangle q_3 + \ldots \langle u_n, q_n\rangle q_n
\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$A = QR = [q_1\, q_2\, q_3 \ldots q_n] \begin{bmatrix}
\langle u_1, q_1\rangle & \langle u_1, q_2\rangle & \langle u_1, q_3\rangle & \ldots & \langle u_1, q_n\rangle \\
0 & \langle u_2, q_2\rangle & \langle u_2, q_3\rangle & \ldots & \langle u_2, q_n\rangle \\
0 & 0 & \langle u_3, q_3\rangle & \ldots & \langle u_3, q_n\rangle \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & \langle u_n, q_n\rangle
\end{bmatrix}$$

5 Transformação Householder

[Noble,AlgLinApl-pt,1986] Seja V um espaço vetorial de corpo K munido de produto interno, $w \in \mathsf{V}$ e $\mathsf{H} \subset \mathsf{V}$ tal que H é um hiperplano normal a w. Deseja-se achar a matriz de transformação H_w, onde dado qualquer $x \in \mathsf{V}$ desejamos encontrar um $y \in \mathsf{V}$ tal que y é reflexão de x em relação a H.

Para tal finalidade, usaremos uma representação em $\mathbb{R}^2$ para melhor visualizar a dedução.



Na figura acima, p como a projeção de x em H e s é combinação linear de w.

Projeção de x em $p - x$:

$$p - x = -\frac{\langle w, x\rangle}{\langle w, w\rangle} w$$

temos também:

$$s = 2(p - x) = -2\frac{\langle w, x\rangle}{\langle w, w\rangle} w$$

A reflexão y é $y = x + s$, então:

$$y = x - 2\frac{\langle w, x\rangle}{\langle w, w\rangle} w = x - 2\frac{\langle w, x\rangle w}{\langle w, w\rangle} = x - 2\frac{w\langle w, x\rangle}{\langle w, w\rangle}$$

$$y = x - \frac{2}{w^t w} w.w^t x \Leftrightarrow y = \left(I - \frac{2}{w^t w} w.w^t\right) x$$

Definimos a transformação linear H_w como:

$$H_w(x) = \left(I - \frac{2}{w^t w} w.w^t\right) x$$

6 Decomposição de Schur

Teorema 6.1. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Qualquer matriz quadrada A, $n \times n$ pode ser reduzida, por uma transformação unitária $P^H AP$, a uma matriz T triangular superior com os autovalores de A sobre a diagonal de T. Chamamos T uma forma canônica de Schur para A e a decomposição $A = PTP^H$ é chamada de uma decomposição de Schur de A. Se A e seus autovalores são reais, então podemos também tomar P real.*

Algoritmo: Dado uma matriz quadrada A, $n \times n$:

1. Achar os n autovalores, $\lambda_1 \ldots, \lambda_n$
2. $A_0 \leftarrow A$.
3. Para $i = 1, \ldots, n-1$ faça os passos abaixo:
   - 3.1. $Q_i = [\, v_i\, W_i \,]$ e $W_i = [\, w_{i+1} \ldots w_n \,]$ onde v_i é o autovetor **normalizado** associado a λ_i na matriz A_i e $w_{i+1} \ldots w_n$ são vetores normais a v_i escolhidos arbitrariamente. (preencha com vetores normais) tal que Q_i seja unitário. Lembrando que $W_i^H v_i = 0$.
   - 3.2. Seja A_i de dimensão $n - i + 1 \times n - i + 1$ e A_{i+1} de dimensão $n - i \times n - i$, faça: A_i é matriz de bloco tal que $A_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & b_i \\ 0 & A_{i+1} \end{bmatrix}$ e $A_i \leftarrow Q_i^H A_{i-1} Q_i$
4. $A_n \leftarrow \lambda_n$ e $P \leftarrow Q_1 Q_2 Q_3 \ldots Q_n$