Resumo Álgebra Linear

Gino Chen Hsiang-Jan

26 de Outubro de 2015

Contents

1 Projeção ortogonal **2**

2 Matrizes **3**

3 Processo de Gram-Schmidt **3**

4 Decomposição QR via Gram-Schmidt **3**

5 Transformação Householder **4**

6 Decomposição de Schur **4**

7 Decomposição em Valores Singulares **5**

1 Projeção ortogonal

Definição 1.1. [Anton,AlgLinApl-pt,2010] *Dizemos que dois vetores não nulos u e v em $\mathbb{R}^n$ são ortogonais (ou perpendiculares) se $u.v = 0$. Também convencionamos que o vetor nulo em $\mathbb{R}^n$ é ortogonal a cada vetor em $\mathbb{R}^n$. Um conjunto não vazio de vetores em $\mathbb{R}^n$ é denominado ortogonal se dois quaisquer de seus vetores forem ortogonais. Um conjunto ortogonal de vetores unitários é dito ortonormal.*

Teorema 1.2. [Anton,AlgLinApl-pt,2010]

(a) Se a e b constantes não ambas nulas, então uma equação da forma:

$$ax + by + c = 0$$

representa uma reta em $\mathbb{R}^2$ de normal $n = (a, b)$.

(b) Se a, b e c constantes não ambas nulas, então uma equação da forma:

$$ax + by + cz + d = 0$$

representa um plano em $\mathbb{R}^3$ de normal $n = (a, b, c)$.

Teorema 1.3. [Anton,AlgLinApl-pt,2010] ***Teorema das projeções*** *Se $u, v \in \mathbb{R}^n$ e se $v \neq 0$, então u pode ser escrito de maneira única na forma $u = w_1 + w_2$, em que w_1 é um múltiplo escalar de v e w_2 é ortogonal a v.*

Definição 1.4. [Anton,AlgLinApl-pt,2010] *No teorema das projeções:*
w_1 é chamado de projeção ortogonal de u ou componente vetorial de u ao longo de v e denotado como $proj_v u$ e pode ser calculado por:

$$w_1 = proj_v u = \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v$$

w_2 é chamado de componente vetorial de u a v e pode ser calculado por:

$$w_2 = u - proj_v u = u - \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v$$

Definição 1.5. [Anton,AlgLinApl-pt,2010] *Dizemos que um conjunto de dois ou mais vetores num espaço com produto interno é **ortogonal** se quaisquer dois vetores distintos do conjunto forem ortogonais.*

Definição 1.6. [Anton,AlgLinApl-pt,2010] *Um conjunto ortogonal no qual cada vetor tem normal 1 é **ortonormal**.*

Teorema 1.7. [Anton,AlgLinApl-pt,2010] *Se $\mathsf{S} = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ for um conjunto ortogonal de vetores não nulos num espaço com produto interno, então S é linearmente independente*

Teorema 1.8. [Anton,AlgLinApl-pt,2010] *Se $\mathsf{S} = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ for uma base ortogonal de espaço com produto interno V e $u \in \mathsf{V}$ então :*

$$u = \frac{\langle u, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle u, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2 + \frac{\langle u, v_3\rangle}{\|v_3\|^2} v_3 + \cdots + \frac{\langle u, v_n\rangle}{\|v_n\|^2} v_n$$

Teorema 1.9. [Anton,AlgLinApl-pt,2010] *Se $\mathsf{S} = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ for uma base ortonormal de espaço com produto interno V e $u \in \mathsf{V}$ então :*

$$u = \langle u, v_1\rangle v_1 + \langle u, v_2\rangle v_2 + \langle u, v_3\rangle v_3 + \cdots + \langle u, v_n\rangle v_n$$

Teorema 1.10. [Anton,AlgLinApl-pt,2010] *Seja W um subespaço de dimensão finita de um espaço vetorial com produto interno V*
(a) Se $\mathsf{S} = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ for uma base ortogonal de W e $u \in \mathsf{V}$ então :

$$u = \frac{\langle u, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle u, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2 + \frac{\langle u, v_3\rangle}{\|v_3\|^2} v_3 + \cdots + \frac{\langle u, v_n\rangle}{\|v_n\|^2} v_n$$

(b) Se $\mathsf{S} = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ for uma base ortonormal de W e $u \in \mathsf{V}$ então :

$$u = \langle u, v_1\rangle v_1 + \langle u, v_2\rangle v_2 + \langle u, v_3\rangle v_3 + \cdots + \langle u, v_n\rangle v_n$$

Teorema 1.11. [Anton,AlgLinApl-pt,2010] *Cada espaço vetorial não nulo de dimensão finita possui alguma base ortonormal.*

2 Matrizes

Definição 2.1. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Chama-se de matriz transposta hermitiana, denotado por* A^H*,* $A^H = \overline{A}^t$*, que é a complexa cojugada da transposta ordinária.*

Definição 2.2. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Chama-se de matriz hermitiana uma matriz tal que* $A^H = A$*.*

Lema 2.3. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Uma matriz hermitiana é a soma de uma matriz real simétrica e de uma matriz imaginária anti-simétrica.*

Lema 2.4. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *As propriedades de matrizes são válidas:*
- $\overline{AB} = \overline{A}.\overline{B}$
- $(\overline{A})^t = (\overline{A^t})$

Definição 2.5. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Uma matriz* P *tal que* $P^H P = PP^H = I$ *é chamada matriz unitária.*

Definição 2.6. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Uma matriz* P *real tal que* $P^T P = PP^T = I$ *é chamada matriz ortogonal.*

Teorema 2.7. [Noble,AlgLinApl-pt,1986]
(i) Tanto as colunas quanto as linhas de uma matriz unitária (ou ortogonal) formal um cojunto ortonormal.
(ii) Se P *é unitária, então* $|detP| = 1$*.*
(iii) Se P *e* Q *são unitárias, então o mesmo acontece com* PQ*.*
(iv) Se P *é unitária, então, para todos os* x *e* y*, temos* $(Px, Py), \|Px\|_2 = \|x\|_2$ *e* $\|P\|_2 = 1$*.*
(v) Se λ *for um autovalor da matriz unitária* P*, então* $|\lambda| = 1$*.*

Definição 2.8. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Uma matriz quadrada* A *que satisfaz* $A^H A = AA^H$ *é chamada matriz normal.*

Lema 2.9. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Seja* A *uma matriz quadrada.*
(i) Matrizes hermitianas são normais, ou seja $A^H A = AA^H = AA$
(ii) Se A *é uma matriz real,* $A^T A = AA^T = AA$*,* A *é simétrico.*

3 Processo de Gram-Schmidt

[Anton,AlgLinApl-pt,2010] Para converter uma base $\{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\}$ numa base ortogonal $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$, efetue as seguintes contas:

$$
\begin{aligned}
&v_1 = u_1 \\
&v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 \\
&v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2 \\
&\vdots \\
&v_n = u_n - \frac{\langle u_n, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_n, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2 - \frac{\langle u_n, v_3\rangle}{\|v_3\|^2} v_3 + \cdots - \frac{\langle u_n, v_n\rangle}{\|v_n\|^2} v_n
\end{aligned}
$$

Para converter a base ortogonal numa base ortonormal $\{q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n\}$ normalize os vetores da base ortonormal:

$$q_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}, i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

4 Decomposição QR via Gram-Schmidt

[Anton,AlgLinApl-pt,2010] Seja A uma matriz $m \times n$ tal que $A = [u_1\, u_2\, u_3 \ldots u_n]$ e $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ são vetores de dimensão m linearmente independentes. Existe uma matriz $Q = [q_1\, q_2\, q_3 \ldots q_n]$, através do processo de

Gram-Schmidt, formado por uma base ortonormal projetados pelos vetores de $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$. Temos então:

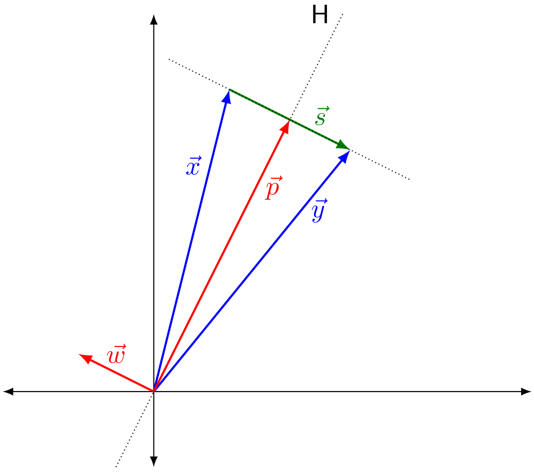
$$\begin{cases} u_1 = \langle u_1, q_1\rangle q_1 + \langle u_1, q_2\rangle q_2 + \langle u_1, q_3\rangle q_3 + \ldots \langle u_1, q_n\rangle q_n \\ u_2 = \langle u_2, q_1\rangle q_1 + \langle u_2, q_2\rangle q_2 + \langle u_2, q_3\rangle q_3 + \ldots \langle u_2, q_n\rangle q_n \\ u_3 = \langle u_3, q_1\rangle q_1 + \langle u_3, q_2\rangle q_2 + \langle u_3, q_3\rangle q_3 + \ldots \langle u_3, q_n\rangle q_n \\ \vdots \\ u_n = \langle u_n, q_1\rangle q_1 + \langle u_n, q_2\rangle q_2 + \langle u_n, q_3\rangle q_3 + \ldots \langle u_n, q_n\rangle q_n \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$A = QR = [q_1\, q_2\, q_3 \ldots q_n] \begin{bmatrix} \langle u_1, q_1\rangle & \langle u_1, q_2\rangle & \langle u_1, q_3\rangle & \ldots & \langle u_1, q_n\rangle \\ 0 & \langle u_2, q_2\rangle & \langle u_2, q_3\rangle & \ldots & \langle u_2, q_n\rangle \\ 0 & 0 & \langle u_3, q_3\rangle & \ldots & \langle u_3, q_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \langle u_n, q_n\rangle \end{bmatrix}$$

5 Transformação Householder

[Noble,AlgLinApl-pt,1986] Seja V um espaço vetorial de corpo K munido de produto interno, $w \in \mathsf{V}$ e $\mathsf{H} \subset \mathsf{V}$ tal que H é um hiperplano normal a w. Deseja-se achar a matriz de transformação H_w, onde dado qualquer $x \in \mathsf{V}$ desejamos encontrar um $y \in \mathsf{V}$ tal que y é reflexão de x em relação a H.

Para tal finalidade, usaremos uma representação em $\mathbb{R}^2$ para melhor visualizar a dedução.



Na figura acima, p como a projeção de x em H e s é combinação linear de w.

Projeção de x em $p - x$:

$$p - x = -\frac{\langle w, x\rangle}{\langle w, w\rangle} w$$

temos também:

$$s = 2(p - x) = -2\frac{\langle w, x\rangle}{\langle w, w\rangle} w$$

A reflexão y é $y = x + s$, então:

$$y = x - 2\frac{\langle w, x\rangle}{\langle w, w\rangle} w = x - 2\frac{\langle w, x\rangle w}{\langle w, w\rangle} = x - 2\frac{w\langle w, x\rangle}{\langle w, w\rangle}$$

$$y = x - \frac{2}{w^t w} w.w^t x \Leftrightarrow y = \left(I - \frac{2}{w^t w} w.w^t\right) x$$

Definimos a transformação linear H_w como:

$$H_w(x) = \left(I - \frac{2}{w^t w} w.w^t\right) x$$

6 Decomposição de Schur

Teorema 6.1. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Qualquer matriz quadrada A, $n \times n$ pode ser reduzida, por uma transformação unitária $P^H AP$, a uma matriz T triangular superior com os autovalores de A sobre a diagonal de T. Chamamos T uma forma canônica de Schur para A e a decomposição $A = PTP^H$ é chamada de uma decomposição de Schur de A. Se A e seus autovalores são reais, então podemos também tomar P real.*

Algoritmo:
Dado uma matriz quadrada A, $n \times n$:
1. Achar os n autovalores, $\lambda_1 \ldots, \lambda_n$
2. $A_0 \leftarrow A$.
3. Para $i = 1, \ldots, n-1$ faça os passos abaixo:
   3.1. $Q_i = [\, v_i \, W_i \,]$ e $W_i = [\, w_{i+1} \, \ldots \, w_n \,]$ onde v_i é o autovetor **normalizado** associado a λ_i na matriz A_i e $w_{i+1} \ldots w_n$ são vetores normais a v_i escolhidos arbitrariamente. (preencha com vetores normais) tal que Q_i seja unitário. Lembrando que $W_i^H v_i = 0$.
   3.2. Seja A_i de dimensão $n - i + 1 \times n - i + 1$ e A_{i+1} de dimensão $n - i \times n - i$, faça: A_i é matriz de bloco tal que $A_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & b_i \\ 0 & A_{i+1} \end{bmatrix}$ e $A_i \leftarrow Q_i^H A_{i-1} Q_i$
4. $A_n \leftarrow \lambda_n$ e $P \leftarrow Q_1 Q_2 Q_3 \ldots Q_n$

Teorema 6.2. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Uma matriz A, $n \times n$ é normal (simétrica real, hermitiana, anti-simétrica, unitária) se e somente se A pode ser reduzida, por uma transformação unitária, a uma forma canônica de Schur diagonal $D = P^H AP$ onde P é unitária e D é diagonal; os autovalores de A estarão sobre a diagonal de D. Se A e seus autovalores são reais, então podemos tomar P real e, portanto ortogonal.*

Teorema 6.3. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Uma matriz A, $n \times n$ é normal (simétrica real, hermitiana, anti-simétrica, unitária) se e somente se A pode ser reduzida, por uma transformação unitária, a uma forma canônica de Schur diagonal $D = P^H AP$ onde P é unitária e D é diagonal; os autovalores de A estarão sobre a diagonal de D. Se A e seus autovalores são reais, então podemos tomar P real e, portanto ortogonal.*

Teorema 6.4. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Uma matriz A, $n \times n$ é normal (simétrica real, hermitiana, anti-simétrica, unitária) se e somente se A tem um conjunto linearmente independente de n autovetores que podem ser escolhidos de maneira a formar um conjunto ortonormal. Além disso, no caso de uma matriz normal, um autovalor de multiplicidade s tem associado um conjunto ortonormal de s autovetores.*

7 Decomposição em Valores Singulares

Definição 7.1. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Seja a matriz A, $m \times n$. As raízes quadradas estritamente positivas de σ_i dos autovalores de $A^H A = A^H A$ são chamados de valores singulares de A.*

Teorema 7.2. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Suponha a matriz A, $m \times n$ tem posto k. Existem então números $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \ldots \sigma_k > 0$, os valores singulares (definição 7.1) de A uma matriz unitária U, $m \times m$, $U = [\, u_1 \, u_2 \, u_3 \, \ldots u_m \,]$ e uma matriz unitária V, $n \times n$, $V = [\, v_1 \, v_2 \, v_3 \, \ldots v_n \,]$ tais que:*

$$\Sigma = U^H AV, \ \textit{onde:} \begin{cases} A \ \textit{é} \ m \times n \\ U \ \textit{e} \ V \ \textit{são} \ m \times m \ \textit{e} \ n \times n \ \textit{matrizes unitárias} \\ \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \sigma_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \ \textit{é} \ m \times n \end{cases}$$

Algoritmo:
Dado uma matriz quadrada A, $m \times n$ e $A = U \Sigma V^H$:
1. $A^H A = V \Sigma^H U^H U \Sigma V^H = V(\Sigma^H \Sigma) V^H$, σ_i^2 é autovalor de $\Sigma^H \Sigma$ (Teorema 6.3)
2. $AA^H = U \Sigma V^H V \Sigma^H U^H = U(\Sigma \Sigma^H) U^H$, σ_i^2 é autovalor de $\Sigma \Sigma^H$ (Teorema 6.3)
3. Calcular $V = [\, v_1 \, v_2 \, v_3 \, \ldots v_n \,]$, onde v_i é o autovetor associado a cada σ_i^2 normalizado da matriz $A^H A$
4. Calcular $U = [\, u_1 \, u_2 \, u_3 \, \ldots u_m \,]$, onde u_i é o autovetor associado a cada σ_i^2 normalizado da matriz AA^H