Resumo
Um Curso de Álgebra Linear-Edusp-2013
Flávio Ulhoa Coelho
Mary Lilian Lourenço

Gino Chen Hsiang-Jan

11 de Julho de 2016

Contents

Chapter 1

Preliminares

1.1 Números

1.1.1 Números Naturais, Inteiros, Racionais e Reais

Números Naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Números Inteiros $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, 1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Números Racionais $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0\}$, $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

Números Reais Denotado por $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

1.1.2 Números Complexos

$$\mathbb{C} = \{a + b\mathrm{i} : a, b \in \mathbb{R} \text{ e } \mathrm{i}^2 = -1\}$$

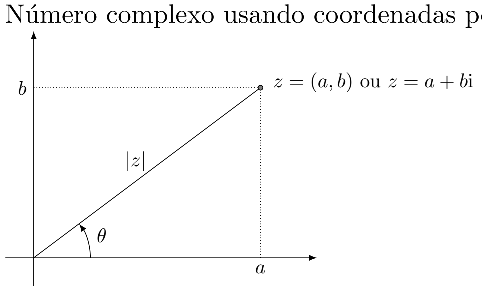
Considere $z = a + b\mathrm{i}, w = c + d\mathrm{i} \in \mathbb{C}$. Definimos a soma como:

$$z + w = (a + c) + (b + d)\mathrm{i}$$

Definimos o produto como:

$$z.w = (ac - bc) + (bc + ad)\mathrm{i}$$

Número complexo usando coordenadas polares, em $\mathbb{R}^2$:



Seja $r = |z|$ temos:

$a = r \cos \theta$
$b = r \operatorname{sen} \theta$
$\overline{z} := a - b\mathrm{i}$
$z = r\, \mathrm{e}^{\theta \mathrm{i}}$
$\overline{z} = r\, \mathrm{e}^{-\theta \mathrm{i}}$

1.1.3 Teorema Fundamental da Álgebra

Teorema 1.1.1. *Todo polinômio com coeficientes em $\mathbb{C}$ possui raízes complexas.*

Definição 1.1.2. *Um conjunto que satisfaz a propriedade do teorema acima é chamado de algebricamente fechado.*

Observação 1.1.3. *O conjunto $\mathbb{C}$ é algebricamente fechado e $\mathbb{Q}$, nR não são. Ou seja, existem polinômio em $\mathbb{Q}$ e nR que não possuem raízes nestes conjuntos.*

1.2 Corpos

Definição 1.2.1. *Um conjunto não vazio* K *é um corpo se em* K *pudermos definir duas operações, denotadas por* $+$*(adição) e . (multiplicação). satisfazendo as seguintes propriedades:*

propriedade comutativa *(A1)* $a+b=b+a, \forall a,b \in \mathsf{K}$

propriedade associativa *(A2)* $a+(b+c)=(a+b)+c, \forall a,b,c \in \mathsf{K}$

elemento neutro da soma *(A3) Existe um elemento em* K*, denotado por* 0 *e chamado de elemento neutro da adição, que satisfaz* $0+a=a+0=a, \forall a \in \mathsf{K}$

inserso aditivo *(A4) Para cada* $a \in \mathsf{K}$*, existe um número em* K *, denotado por* $-a$ *e chamado de oposto de* a *(ou inverso aditivo de* a*) tal que* $a+(-a)=0$

propriedade comutativa *(M1)* $a.b=b.a, \forall a,b \in \mathsf{K}$ *(propriedade comutativa)*

propriedade associativa *(M2)* $a.(b.c)=(a.b).c, \forall a,b,c \in \mathsf{K}$ *(propriedade associativa)*

elemento neutro da multiplicação *(M3) Existe um elemento em* K*, denotado por* 1 *e chamado de elemento neutro da multiplicação, tal que* $1.a=a.1=a, \forall a \in \mathsf{K}$

inverso multiplicativo *(M4) Para cada elemento não nulo* $a \in \mathsf{K}$*, existe um elemento em* K*, denotado por* a^{-1} *e chamando de inverso multiplicativo de* a*, tal que* $a.a^{-1}=a^{-1}.a=1$*.*

1.3 Resolução de Sistemas Lineares

Definição 1.3.1. *Dizemos que dois sistemas de equações a* n *incógnitas são equivalentes se tiverem as menas soluções.*

Definição 1.3.2. *Um Sistema linear*

$$\begin{cases} b_{11}x_1 & +\cdots+ & b_{1n}x_n & =0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{r1}x_1 & +\cdots+ & b_{rn}x_n & =0 \end{cases}$$

será chamado de escalonado se existirem $1 \leq l_1 < l_2 < \cdots < l_r \leq n$ *tais que* $b_{il_i} \neq 0$*, para cada* $i=1,\ldots,r$ *e* $b_{ij}=0$ *se* $1 \leq j < l_i$*.*

Proposição 1.3.3. *Todo sistema linear com* m *equações e com coeficientes em um corpo é equivalente a um sistema escalonado com* $r \leq m$ *equações.*

Proposição 1.3.4. *Se o número de equações em um sistema linear homogêneo com coeficientes em um corpo for menor do que o número de suas incógnitas, então tal sistema terá uma solução não trivial.*

1.4 Matrizes

Definição 1.4.1. *Sejam* m,n *dois inteiros positivos. Uma matriz* m *por* n A *sobre* K *é dada por* $m \times n$ *valores* $a_{ij} \in \mathsf{K}$*, com* $1 \leq i \leq m$*,* $1 \leq j \leq n$ *agrupados em* m *linhas e* n *colunas e será representado como:*

$$A=(a_{ij})_{i,j}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Definição 1.4.2. *O conjunto de todas as matrizes* $m \times n$ *sobre* K *é denotado por:* $\mathscr{M}_{m\times n}(\mathsf{K})$

Definição 1.4.3. *O conjunto de todas as matrizes quadradas* $n \times n$ *sobre* K *é denotado por:* $\mathscr{M}_n(\mathsf{K})$

Definição 1.4.4 (Soma de Matrizes)**.** *Se* $A=(a_{ij})_{i,j}, B=(b_{ij})_{i,j} \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathsf{K})$*, então a soma* $A+B$ *é a matriz* $C=(c_{ij})_{i,j} \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathsf{K})$*, tal que, para cada par* (i,j)*, temos* $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$*, isto é:*

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \ldots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \ldots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix}=$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} & \dots & a_{3n}+b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & a_{m3}+b_{m3} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Definição 1.4.5 (Multiplicação por escalar). *Se $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathsf{K})$ e $\lambda \in \mathsf{K}$, então o produto de λ por A é a matriz $B = (b_{ij})_{i,j} \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathsf{K})$, tal que, para cada par (i,j), temos $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, isto é:*

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} & \dots & \lambda a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \lambda a_{m3} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Definição 1.4.6 (Produto de Matrizes). *Sejam $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathsf{K})$ e $B = (b_{ij})_{i,j} \in \mathscr{M}_{n\times p}(\mathsf{K})$, isto é, o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B. Então o produto de A por B é a matriz $C = (c_{ij})_{i,j} \in \mathscr{M}_{m\times p}(\mathsf{K})$, tal que, para cada par (i,j), temos $c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj}$, $i = 1, 2, 3, \dots, m$ e $j = 1, 2, \dots, p$, ou então:*

$$A.B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^{n} a_{1l}b_{l1} & \sum_{l=1}^{n} a_{1l}b_{l2} & \sum_{l=1}^{n} a_{1l}b_{l3} & \dots & \sum_{l=1}^{n} a_{1l}b_{lp} \\ \sum_{l=1}^{n} a_{2l}b_{l1} & \sum_{l=1}^{n} a_{2l}b_{l2} & \sum_{l=1}^{n} a_{2l}b_{l3} & \dots & \sum_{l=1}^{n} a_{2l}b_{lp} \\ \sum_{l=1}^{n} a_{3l}b_{l1} & \sum_{l=1}^{n} a_{3l}b_{l2} & \sum_{l=1}^{n} a_{3l}b_{l3} & \dots & \sum_{l=1}^{n} a_{3l}b_{lp} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{l=1}^{n} a_{ml}b_{l1} & \sum_{l=1}^{n} a_{ml}b_{l2} & \sum_{l=1}^{n} a_{ml}b_{l3} & \dots & \sum_{l=1}^{n} a_{ml}b_{lp} \end{pmatrix}$$

Definição 1.4.7 (Matriz Identidade). *Chama-se matriz identidade de dimensão n, denotada por Id_n ou I_n definida como:*

$$\mathrm{Id}_n = (a_{ij})_{i,j} = \begin{cases} 1, & se\ i = j \\ 0, & se\ i \neq j \end{cases}$$

isto é:

$$\mathrm{Id}_n = \delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Definição 1.4.8 (Matriz Transposta). *Seja $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathsf{K})$, definimos a sua transposta, denotada por A^t ou A' sendo $A^t = (b_{ij})_{i,j}\mathscr{M}_{n\times m}(\mathsf{K})$ tal que $b_{ij} = a_{ji}$.*

Definição 1.4.9 (Função Traço). *Sejam $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathscr{M}_n(\mathsf{K})$, definimos o traço de A, denotado por $\operatorname{tr} A$ como sendo a soma dos elementos da sua diagonal principal, isto é:*

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Definição 1.4.10 (Posto). *Seja $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathsf{K})$, definimos o seu posto como sendo o número de linhas não nulas em sua forma escalonada.*

Definição 1.4.11 (Matriz Invertível). *Uma matriz* $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathscr{M}_n(\mathsf{K})$ *é invertível se existir uma matriz* $B = (b_{ij})_{i,j} \in \mathscr{M}_n(\mathsf{K})$ *tal que* $A.B = B.A = \mathrm{Id}_n$.

Teorema 1.4.12 (Teorema de Laplace). *Seja uma matriz* $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathscr{M}_n(\mathsf{K})$ *então:*

$$\det A = \begin{cases} a_{11} & , \textit{ se } n = 1 \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} \det A_{1j} & , \textit{ se } n > 1 \end{cases}$$

, onde $A_{ij} \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathsf{K})$ *é a matriz formada a partir de* A *retirando a sua i-ésima linha e a sua j-ésima coluna.*

Teorema 1.4.13 (Teorema de Laplace). *Uma matriz* $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathscr{M}_n(\mathsf{K})$ *é invertível se e somente se* $\det A \neq 0$

Definição 1.4.14 (Matriz Adjunta). *Seja* $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathsf{K})$, *denotado por* $\mathrm{adj}\,(A)$ *ou* $\mathrm{ad}\,(A)$ *a matriz adjunta de* A, $\mathrm{ad}\,(A) = (b_{ij})_{i,j}$ *tal que, para cada par* (i,j), $b_{ij} = (-1)^{i+j+1} \det A_{ij}$, *onde* $A_{ij} \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathsf{K})$ *é a matriz formada a partir de* A *retirando a sua i-ésima linha e a sua j-ésima coluna. Os elementos* b_{ij} *são chamados de cofatores em* (i,j) *de* A.

Lema 1.4.15. *Sejam* $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathsf{K})$, *e* b_{ij} *um cofator em* (i,j) *de* A.

- $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{lj} = \delta_{il}$
- $A.\mathrm{ad}\,(A) = \mathrm{ad}\,(A).A = (\det A).\mathrm{Id}_n$

Chapter 2

Espaços Vetoriais

2.1 Espaços Vetoriais

Definição 2.1.1. *Um conjunto não vazio* V *é um espaço vetorial sobre um corpo* K *se em seus elementos, denominados vetores, estiverem definidas as seguintes duas operações:*

(A) *A cada par* u, v *de vetores de* V *corresponde um vetor* $u + v \in \mathsf{V}$*, chamados de soma de* u *e* v *de modo que:*

- **(A1) propriedade comutativa** $u + v = v + u$, $\forall u, v \in \mathsf{V}$.
- **(A2) propriedade associativa** $(u + v) + w = v + (u + w)$, $\forall u, v \in \mathsf{V}$.
- **(A3) vetor nulo** *existe em* V *um vetor, denominado vetor nulo e denotado por* 0*, tal que* $v + 0 = 0 + v = v \, \forall v \in \mathsf{V}$.
- **(A4) inverso aditivo** *a cada vetor* $v \in \mathsf{V}$ *existe em* V*, denotado por* $-v$*, tal que* $v + (-v) = 0$.

(M) *A cada par* $\alpha \in \mathsf{K}$*, corresponde um vetor* $\alpha.v \in \mathsf{V}$*, denominado produto por escalar de* α *por* v *de modo que:*

- **(M1) propriedade comutativa** $(\alpha\beta).v = \alpha(\beta.v), \forall \alpha, \beta \in \mathsf{K}$ *e* $\forall v \in \mathsf{V}$.
- **(M2) elemento identidade de** K $1.v = v$, $\forall v \in \mathsf{V}$.

(D1) distributiva $\alpha.(u + v) = \alpha.u + \alpha.v, \forall \alpha \in \mathsf{K}$ *e* $\forall u, v \in \mathsf{V}$.

(D2) distributiva $(\alpha + \beta)v = \alpha.v + \beta.v, \forall \alpha, \beta \in \mathsf{K}$ *e* $\forall v \in \mathsf{V}$.

Definição 2.1.2 (Espaço de Funções)**.** *Sejam* X *um conjunto qualquer não vazio e* $\mathscr{F}(X, \mathsf{K})$ *o conjunto de todas as funções* $\mathrm{f} : X \to \mathsf{K}$*. Definimos as seguintes operações em* $\mathscr{F}(X, \mathsf{K})$*:*

1. *para* $\mathrm{f}, \mathrm{g} \in \mathscr{F}(X, \mathsf{K})$*, a soma das funções* f *e* g*, denotado por* $\mathrm{f} + \mathrm{g}$ *tal que,* $\mathrm{f} + \mathrm{g} : X \to \mathsf{K}$ *dado por:* $(\mathrm{f} + \mathrm{g})(x) = \mathrm{f}(x) + \mathrm{g}(x)$, $\forall x \in X$.
2. *para* $\mathrm{f} \in \mathscr{F}(X, \mathsf{K})$ *e* $\alpha \in \mathsf{K}$*, o produto de* α *e* f*, denotado por* $\alpha.\mathrm{f}$ *tal que,* $\alpha.\mathrm{f} : X \to \mathsf{K}$ *dado por:* $(\alpha.\mathrm{f})(x) = \alpha.\mathrm{f}(x)$, $\forall x \in X$.

2.2 Base

Definição 2.2.1. *Seja* V *um espaço vetorial sobre* K.

1. *Um vetor* $v \in \mathsf{V}$ *é uma combinação linear dos vetores* $v_1, \ldots, v_n \in \mathsf{V}$ *se existirem escalares* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathsf{K}$ *tais que*
$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i.$$
2. *Seja* $\mathcal{B}$ *um cojunto de* V*. Dizemos que* $\mathcal{B}$ *é um conjunto gerador de* V*, ou* $\mathcal{B}$ *gera* V *se todo elemento de* V *for uma combinação linear de um número finito de elementos de* $\mathcal{B}$.
3. *O conjunto vazio gera o espaço vetorial* $\{0\}$.

Lema 2.2.2. *Todo espaço vetorial possui um conjunto gerador.*

Lema 2.2.3. *Seja* $\mathcal{B}$ *um cojunto gerador de um espaço vetorial* V*. Todo subconjunto de* V *que contenha* $\mathcal{B}$ *é um cojunto gerador.*

Lema 2.2.4. *Seja* V *um* K*-espaço vetorial e* $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq \mathsf{V}$*. O subconjunto de* V *formado por todas as combinações lineares de* $v_1, \ldots, v_n$ *é também um* K*-espaço vetorial.*

Definição 2.2.5. *Sejam* V *um espaço vetorial sobre* K *e* $\mathcal{B}$ *um subconjunto de* V.

1. *Dizemos que* $\mathcal{B}$ *é linearmente independente, ou l.i., ou LI, se* $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$, *para* $v_i \in \mathcal{B}$ *e* $\alpha_i \in \mathsf{K}$, $i = 1, \ldots, n$. *implica que* $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.
2. *O conjunto é chamado* $\mathcal{B}$ *linearmente dependente, ou l.d., ou LD, se não for linearmente independente.*
3. *O conjunto vazio é linearmente independente.*

Lema 2.2.6. *Todo conjunto de contendo o vetor nulo é LD.*

Lema 2.2.7. *Todo espaço vetorial não nulo possui um conjunto LI não vaio.*

Lema 2.2.8. *Todo subconjunto de um conjunto linearmente independente é linearmente independente.*

Definição 2.2.9. *Seja* V *um espaço vetorial sobre* K. *Dizemos que* $\mathcal{B}$ *um subconjunto de* V *é uma base de* V *se.*

1. $\mathcal{B}$ *for um conjunto gerador de* V.
2. $\mathcal{B}$ *for linearmente independente.*

Lema 2.2.10. *O conjunto vazio é uma base do espaço vetorial* $\{0\}$.

Definição 2.2.11. *Dizemos que um espaço vetorial* V *sobre* K *é finitamente gerado se possuir um conjunto gerador finito.*

Proposição 2.2.12. *Seja* V *um* K*-espaço vetorial finitamente gerado não nulo e assuma que* $\{v_1, \ldots, v_m\}$ *seja um conjunto gerador de* V. *Então todo conjunto linearmente independente de vetores em* V *tem no máximo* m *elementos.*

Corolário 2.2.13. *Seja* V *um* K*-espaço vetorial finitamente gerado não nulo. Então duas bases quaisquer de* V *têm o mesmo número de elementos.*

Definição 2.2.14 (Dimensão de uma base)**.** *Sejam* V *um espaço vetorial sobre* K. *Se* V *admite uma base finita, então chamamos de dimensão de* V *o número de elementos de tal base. Caso contrário dizemos que a dimensão de* V *é infinita.*

Corolário 2.2.15. *Seja* V *um espaço vetorial de dimensão* $n \geq 1$ *e seja* $\mathcal{B}$ *um subconjunto de* V *com* n *elementos. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $\mathcal{B}$ *é uma base.*
2. $\mathcal{B}$ *for linearmente independente.*
3. $\mathcal{B}$ *é um conjunto gerador de* V.

Proposição 2.2.16. *Sejam* V *um espaço vetorial sobre* K *e considere* $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ *um conjunto LI em* V. *Se existir um* $v \in \mathsf{V}$ *que não seja combinação linear dos elementos de* $\mathcal{B}$, *então* $\{v_1, \ldots, v_m, v\}$ *é linearmente independente.*

Teorema 2.2.17. *Todo espaço vetorial finitamente gerado não nulo possui uma base.*

Teorema 2.2.18. *Seja* V *um espaço vetorial finitamente gerado e seja* $\mathcal{B}$ *conjunto LI em* V. *Então existe uma base de* V *contendo* $\mathcal{B}$.

Proposição 2.2.19. *Seja* V *um* K*-espaço vetorial de dimensão* $n \geq 1$ *e seja* $\mathcal{B} \subseteq \mathsf{V}$. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $\mathcal{B}$ *é uma base de* V.
2. *Cada elemento de* V *se escreve de maneira única como combinação linear de* $\mathcal{B}$.

Definição 2.2.20. *Seja* V *um espaço vetorial de dimensão* $n \geq 1$ *e seja* $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *uma base de* V. *Uma base ordenada de* V *é uma sequência ordenada dos elementos de* $\mathcal{B}$. *Dado um* $v \in \mathsf{V}$, *existe univocamente valores* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathsf{K}$ *tais que* $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$. *Denotaremos como* $[v]_{\mathcal{B}} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_{\mathcal{B}}$ *e dizemos que* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *são coordenadas da base ordenada* $\mathcal{B}$.

Definição 2.2.21. *Seja* V *um espaço vetorial de dimensão* $n \geq 1$ *e seja* $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *uma base de* V. *Uma base ordenada de* V *é uma sequência ordenada dos elementos de* $\mathcal{B}$.

2.3 Subespaços

Definição 2.3.1 (Subespaços Vetoriais)**.** *Seja* V *um espaço vetorial sobre um corpo* K. *Um subconjunto* W *de* V *é um subespaço vetorial de* V *se a restrição das operações de* V *a* W *torna esse conjunto um* K*-espaço vetorial.*

Proposição 2.3.2. *Sejam* V *um espaço vetorial sobre um corpo* K *um subconjunto e* $\mathsf{W} \subseteq \mathsf{V}$ *um subconjunto. Então* W *é um subespaço de* V *se e somente se satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) $0 \in \mathsf{W}$

(b) se $v_1, v_2 \in \mathsf{W}$ *então* $v_1 + v_2 \in \mathsf{W}$

(c) se $\lambda \in \mathsf{K}$ *e* $v \in \mathsf{W}$ *então* $\lambda v \in \mathsf{W}$

Proposição 2.3.3. *Sejam* V *um espaço vetorial e* W_1 *e* W_2 *dois subespaços vetoriais de* V*, ambos de dimensão finita. Então:*

$$dim_{\mathsf{K}}(\mathsf{W}_1 + \mathsf{W}_2) = dim_{\mathsf{K}}\,\mathsf{W}_1 + dim_{\mathsf{K}}\,\mathsf{W}_2 - dim_{\mathsf{K}}(\mathsf{W}_1 \cap \mathsf{W}_2)$$

Definição 2.3.4 (Soma de subespaços vetoriais)**.** *Sejam* V *um espaço vetorial não nulo sobre* K*,* W_1 *e* W_2 *dois subespaços de* V*. Chama-se de soma de subespaços vetoriais* W_1 *e* W_2*, denotado por,* $\mathsf{W}_1 + \mathsf{W}_2$ *definido por* $\mathsf{W}_1 + \mathsf{W}_2 := \{v_1 + v_2 : v_1 \in \mathsf{W}_1 \wedge v_2 \in \mathsf{W}_2\}$.

Lema 2.3.5. *Sejam* V *um espaço vetorial não nulo sobre* K*,* W_1 *e* W_2 *dois subespaços de* V*.* $\mathsf{W}_1 + \mathsf{W}_2$ *e* $\mathsf{W}_1 \cap \mathsf{W}_2$ *são subespaços de* V*.*

Atenção 2.3.6. *Em geral* $\mathsf{W}_1 \cup \mathsf{W}_2$ *não é subespaço de* V *(veja lema acima)*

2.4 Método Prático de Complemento de Base

2.5 Somas Diretas

Definição 2.5.1 (Soma Direta)**.** *Sejam dois* W_1 *e* W_2 *dois subespaços vetoriais de um espaço vetorial* V*. Diremos que soma* $\mathsf{W}_1 + \mathsf{W}_2$ *é direta se* $\mathsf{W}_1 \cap \mathsf{W}_2 = \{0\}$ *e, neste caso, denotamos como* $\mathsf{W}_1 \oplus \mathsf{W}_2$*.*

Definição 2.5.2. *Sejam* V *um espaço vetorial sobre um corpo* K*e sejam* W_1 *e* W_2 *dois subespaços de* V*. Dizemos que* V *é a soma direta de* W_1 *e* W_2 *se* $\mathsf{V} = \mathsf{W}_1 \oplus \mathsf{W}_2$*.*

Proposição 2.5.3. *Seja* V *um* K*-espaço vetorial e* W_1 *e* W_2 *dois subespaços de* V*. Então,* $\mathsf{V} = \mathsf{W}_1 \oplus \mathsf{W}_2$ *se e só se cada elemento de* $v \in \mathsf{V}$ *se escreve de maneira única como uma soma* $x_1 + x_2$ *com* $x_1 \in \mathsf{W}_1$ *e* $x_2 \in \mathsf{W}_2$*.*

Proposição 2.5.4 (Complemento de um subespaço)**.** *Sejam* V *um espaço vetorial finitamente gerado e não nulo e* W_1 *um subespaço de* V*. Então existe um subespaço* W_2 *de* V *tal que* $\mathsf{V} = \mathsf{W}_1 \oplus \mathsf{W}_2$*.*

2.6 Espaço Quociente

2.7 Apêndice

Chapter 3

Transformações Lineares

3.1 Conceitos Básicos

Definição 3.1.1. *Sejam* U *e* V *espaços vetoriais sobre um corpo* K. *Uma função* $\mathrm{T} : \mathsf{U} \to \mathsf{V}$ *é uma transformação linear se*

1. $\mathrm{T}(u_1 + u_2) = \mathrm{T}(u_1) + \mathrm{T}(u_2)$, $\forall u_1, u_2 \in \mathsf{U}$
2. $\mathrm{T}(\lambda u) = \lambda \mathrm{T}(u)$, $\forall \lambda \in \mathsf{K}$ *e* $\forall u \in \mathsf{U}$

Lema 3.1.2. *Sejam* U *e* V *espaços vetoriais sobre um corpo* K. *Uma função* $\mathrm{T} : \mathsf{U} \to \mathsf{V}$ *é uma transformação linear se e somente se*

$$\mathrm{T}(\lambda u_1 + u_2) = \lambda \mathrm{T}(u_1) + \mathrm{T}(u_2), \ \forall u_1, u_2 \in \mathsf{U}, \ \forall \lambda \in \mathsf{K}$$

Lema 3.1.3. *Sejam* U *e* V *espaços vetoriais sobre um corpo* K. *Uma função* $\mathrm{T} : \mathsf{U} \to \mathsf{V}$ *é uma transformação linear. Então:*

1. $\mathrm{T}(0_{\mathsf{U}}) = 0_{\mathsf{V}}$, *onde* 0_{U} *e* 0_{V} *denotam vetores nulos em* U *e* V, *respectivamente.*
2. $\mathrm{T}(-u) = -\mathrm{T}(u)$, $\forall u \in \mathsf{U}$
3. $\mathrm{T}\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathrm{T}(u_i)$, *onde* $\alpha_i \in \mathsf{K}$ *e* $u_i \in \mathsf{U}$, *para* $i = 1, \ldots, m$.

Teorema 3.1.4. *Sejam* U *e* V *dois espaços vetoriais sobre um corpo* K. *Se* $\{u_1, \ldots, u_n\}$ *for uma base de* U *e se* $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq \mathsf{V}$, *então exite uma única transformação linear* $\mathrm{T} : \mathsf{U} \to \mathsf{V}$ *tal que* $\mathrm{T}(u_i) = v_i$, *para cada* $i = 1, \ldots, n$.

3.2 O Núcleo e a Imagem de uma Transformação Linear

Definição 3.2.1. *Sejam* U *e* V *espaços vetoriais sobre um corpo* K *e* $\mathrm{T} : \mathsf{U} \to \mathsf{V}$ *uma transformação linear.*

1. *O conjunto* $\{u \in \mathsf{U} : \mathrm{T}(u) = 0\}$ *é chamado de núcleo de* T *e denotado por* $\operatorname{Nuc}\mathrm{T}$ *ou* $\operatorname{Ker}\mathrm{T}$
2. *O conjunto* $\{v \in \mathsf{V} : \exists u \in \mathsf{U}$ *com* $\mathrm{T}(u) = 0\}$ *é chamado de imagem de* T *e denotado por* $\operatorname{Im}\mathrm{T}$.

Proposição 3.2.2. *Sejam* U *e* V *espaços vetoriais sobre um corpo* K. *e* $\mathrm{T} : \mathsf{U} \to \mathsf{V}$ *uma transformação linear. Então:*

1. $\operatorname{Nuc}\mathrm{T}$ *é um subespaço vetorial de* U *e* $\operatorname{Im}\mathrm{T}$ *é um subespaço vetorial de* V.
2. T *é injetora se e somente se* $\operatorname{Nuc}\mathrm{T} = \{0\}$.

Definição 3.2.3. *Sejam* U *e* V *espaços vetoriais sobre um corpo* K. *e* $\mathrm{T} : \mathsf{U} \to \mathsf{V}$ *uma transformação linear.*

1. *A* $\dim \operatorname{Nuc}\mathrm{T}$ *é chamado de nulidade de* T.
2. *A* $\dim \operatorname{Im}\mathrm{T}$ *é chamado de posto de* T.

Lema 3.2.4. *Sejam* U *e* V *espaços vetoriais sobre um corpo* K. *Uma função* $\mathrm{T} : \mathsf{U} \to \mathsf{V}$ *é uma transformação linear. Se* $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ *é uma base de* U, *então* $\{\mathrm{T}(u_1), \ldots, \mathrm{T}(u_n)\}$ *gera* $\operatorname{Im}\mathrm{T}$.

3.3 Isomorfismo

Definição 3.3.1. *Sejam* U *e* V *espaços vetoriais sobre um corpo* K.

1. *Seja* $\mathrm{T} : \mathsf{U} \to \mathsf{V}$ *uma transformação linear. Se* T *for bijetora (isto é, injetora e sobrejetora) então dizemos que ela é um isomorfismo.*

2. *Se existir um isomorfismo* $\mathrm{T} : \mathsf{U} \to \mathsf{V}$, *então que* U *e* V *são espaço vetorial isomorfos e indicaremos por* $\mathsf{U} \cong \mathsf{V}$.

Definição 3.3.2. *Sejam* $\mathrm{F} : \mathsf{U} \to \mathsf{V}$ *uma função bijetora. Chama-se função inversa de* F *uma transformação linear* $\mathrm{G} : \mathsf{V} \to \mathsf{U}$ *tal que* $\mathrm{F} \circ \mathrm{G} = \mathrm{Id}_{\mathsf{V}}$ *e* $\mathrm{G} \circ \mathrm{F} = \mathrm{Id}_{\mathsf{U}}$. *Denotamos a inversa de* $\mathrm{F} : \mathsf{U} \to \mathsf{V}$ *como* $\mathrm{F}^{-1} : \mathsf{V} \to \mathsf{U}$.

Proposição 3.3.3. *A inversa de uma transformação linear bijetora é também linear.*

Proposição 3.3.4. *Sejam* U *e* V *espaços vetoriais sobre um corpo* K *de mesma dimensão finita* $n \geq 1$ *e* $\mathrm{T} : \mathsf{U} \to \mathsf{V}$ *uma transformação linear. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. T *é um isomorfismo.*
2. T *é injetora.*
3. T *é sobrejetora.*

Teorema 3.3.5. *Dois espaços vetoriais de mesma dimensão finita são isomorfos.*

Corolário 3.3.6. *Todo* K*-espaço vetorial de dimensão* $n \geq 1$ *é isomorfo a* K^n.

3.4 Matrizes de Transformações

Definição 3.4.1. *Sejam* U *e* V *espaços vetoriais sobre um corpo* K *de dimensões* n *e* m *respectivamente. e* $\mathrm{T} : \mathsf{U} \to \mathsf{V}$ *uma transformação linear. Sejam* $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ *e* $\mathcal{B}' = \{v_1, \ldots, v_m\}$ *uma base de* U *e* V *respectivamente.*
Para cada $\mathrm{T}(u_j)$ *existem* $a_{ij} \in \mathsf{K}$ *tais que:*

$$\begin{cases} \mathrm{T}(u_1) & = & a_{11}v_1 & + & a_{21}v_1 & + & \ldots & + & a_{m1}v_m & = & \sum_{i=1}^{m} a_{i1}v_i \\ \mathrm{T}(u_2) & = & a_{12}v_1 & + & a_{22}v_1 & + & \ldots & + & a_{m2}v_m & = & \sum_{i=1}^{m} a_{i2}v_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{T}(u_n) & = & a_{1n}v_1 & + & a_{2n}v_1 & + & \ldots & + & a_{mn}v_m & = & \sum_{i=1}^{m} a_{in}v_i \end{cases}$$

Dado um $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n \in \mathsf{U}$ *onde* $\alpha_i \in \mathsf{K}$, *para* $i = 1, \ldots, m$. *Temos:*

$$\mathrm{T}(u) = \mathrm{T}\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{T}(\alpha_j u_j) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_j a_{ij} v_i\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_{ij}\right) v_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \beta_i v_i, \text{ onde } \beta_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_{ij}, \text{ para } i = 1, \ldots, m$$

$$\Leftrightarrow$$

$[\mathrm{T}(u)]_{\mathcal{B}'} = (\beta_1, \ldots, \beta_m)_{\mathcal{B}'}$, *para* $i = 1, \ldots, m$

Podemos escrever $[\mathrm{T}(u)]_{\mathcal{B}'}$ *como produto de matrizes,* $v = Au$, *onde:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$$

ou seja:

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}_{\mathcal{B}'} = Au = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$$

1. *A matriz* $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathsf{K})$ *é chamada de matriz de transformação linear* T *com relação às bases* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{B}'$ *e é denotada por* $[\mathrm{T}]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$

2. *Se* $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, *denotamos:* $[\mathrm{T}]_{\mathcal{B}}$

Proposição 3.4.2. *Sejam* V *e* W *dois espaços vetoriais sobre* K *com dimensões* n *e* m*, respectivamente. Dadas bases* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{C}$ *de* V *e* W*, respectivamente e uma matriz em* $\mathscr{M}_{m\times n}(\mathsf{K})$*, então existe uma única transformação linear* $\mathrm{T}:\mathsf{V}\to\mathsf{W}$ *tal que* $[\mathrm{T}]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = M$.

Teorema 3.4.3. *Sejam* $\mathrm{F}:\mathsf{U}\to\mathsf{V}$ *e* $\mathrm{G}:\mathsf{V}\to\mathsf{W}$ *duas transformações lineares onde* U, V *e* W *são espaços vetoriais sde dimensões* n, m *e* r*, respectivamente. Fixe bases* $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ *e* $\mathcal{B}''$ *para* U, V *e* W*, respectivamente. Então:*

$$[\mathrm{G}\circ\mathrm{F}]_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = [\mathrm{G}]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}[\mathrm{F}]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$$

Corolário 3.4.4. *Sejam* U *e* V *espaços vetoriais sobre um corpo* K *de dimensões* $n \geq 1$ *e considere bases* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{B}'$ *de* U *e* V*, respectivamente. Uma transformação linear* $\mathrm{T}:\mathsf{U}\to\mathsf{V}$ *é um isomorfismo se e somente se a matriz* $[\mathrm{T}]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ *for invertível. Além disso, neste caso,* $[\mathrm{T}^{-1}]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = ([\mathrm{T}]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1}$.

Definição 3.4.5. *Seja* U *espaço vetorial sobre um corpo* K *de dimensões* $n \geq 1$ *e sejam* $\mathcal{B} = \{u_1,\ldots,u_n\}$ *e* $\mathcal{B}' = \{v_1,\ldots,v_m\}$ *duas bases de* U*. Considere a matriz* $M = (a_{ij})_{i,j} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$*, isto é, a matriz dada pelos coeficientes*
Para cada $\mathrm{T}(u_j)$ *existem* $a_{ij}\in\mathsf{K}$ *tais que:*

$$\begin{cases} u_1 &= a_{11}v_1 &+ a_{21}v_1 &+ \ldots &+ a_{n1}v_n &= \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i1}v_i \\ u_2 &= a_{12}v_1 &+ a_{22}v_1 &+ \ldots &+ a_{n2}v_n &= \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i2}v_i \\ \vdots & \quad\vdots & \quad\vdots & \quad\vdots & \quad\vdots & \quad\vdots \\ u_n &= a_{1n}v_1 &+ a_{2n}v_1 &+ \ldots &+ a_{mn}v_n &= \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{in}v_n \end{cases}$$

Com isso, se $u = \in \mathsf{U}$ *e escrevendo* $v = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)_{\mathcal{B}} = (\beta_1,\ldots,\beta_n)_{\mathcal{B}'}$*, teremos:*

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}_{\mathcal{B}'} = Au = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$$

isto é, a multiplicação de M *pelas coordenadas de* v *na base* $\mathcal{B}$ *fornece-nos as coordenadas de* v *na base* $\mathcal{B}'$*.*
A matriz M *é chamada de matriz de mudança de base* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{B}'$*.*

Lema 3.4.6. *A matriz de mudança de base é sempre invertível.*

Lema 3.4.7. *Seja* U *espaço vetorial sobre um corpo* K *de dimensões* $n \geq 1$ *e sejam* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{B}'$ *duas bases de* U*. Se* M *é a matriz de mudança de base de* $\mathcal{B}$ *para* $\mathcal{B}'$*. Então* M^{-1} *é a matriz de mudança de base de* $\mathcal{B}'$ *para* $\mathcal{B}$*.*

Lema 3.4.8. *Seja* U *espaço vetorial sobre um corpo* K *de dimensões* $n \geq 1$*, sejam* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{B}'$ *duas bases de* U *e seja* $\mathrm{T}:\mathsf{U}\to\mathsf{U}$ *uma transformação linear. Se* P *é a matriz de mudança de base de* $\mathcal{B}$ *para* $\mathcal{B}'$*. então:*

$$[T]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}'}P$$

Definição 3.4.9 (Semelhança de matrizes)**.** *Duas matrizes* M *e* N *são ditas semelhantes se existir uma matriz invertível* P *tal que* $M = P^{-1}NP$.

3.5 O Espaço $\mathscr{L}(\mathsf{U},\mathsf{V})$

Definição 3.5.1. *Sejam* U *e* V *dois espaços vetoriais sobre um corpo* K*, denotamos por* $\mathscr{L}(\mathsf{U},\mathsf{V})$ *o conjunto de todas as transformações lineares de* U *a* V*.*

Teorema 3.5.2. *Sejam* U *e* V *dois espaços vetoriais sobre um corpo* K *com dimensões* n *e* m*, respectivamente. Então o espaço* $\mathscr{L}(\mathsf{U},\mathsf{V})$ *tem dimensão* $m\times n$*.*

Corolário 3.5.3. *Sejam* U *e* V *dois espaços vetoriais sobre um corpo* K *com dimensões* n *e* m*, respectivamente. Então* $\mathscr{L}(\mathsf{U},\mathsf{V})$ *é um isomorfismo a* $\mathscr{M}_{m\times n}(\mathsf{K})$*.*

Definição 3.5.4. *Seja* U *um espaço vetorial sobre um corpo* K *um operador linear é uma transformação linear* $\mathrm{T}:\mathsf{U}\to\mathsf{U}$*.*

Definição 3.5.5 (Potência). *Seja* U *um espaço vetorial sobre um corpo* K*. Seja* $\mathrm{T} : \mathsf{U} \to \mathsf{U}$ *um operador linear.*

1. $\mathrm{T}^0 = \mathrm{Id}$
2. $\mathrm{T}^n = \underbrace{\mathrm{T} \circ \cdots \circ \mathrm{T}}_{n}$

Definição 3.5.6 (Projeção). *Seja* V *um espaço vetorial sobre um corpo* K *e* $\mathsf{W} \subseteq \mathsf{V}$ *um subespaço. Um operador linear* $\pi : \mathsf{V} \to \mathsf{V}$ *é chamado de projeção sobre* W *se:*

1. $\mathrm{Im}\,(\pi) = \mathsf{W}$
2. $\pi(w) = w,\ \forall w \in \mathsf{W}$

Proposição 3.5.7. *Seja* $\pi : \mathsf{V} \to \mathsf{V}$ *um operador linear e escreva* $\mathsf{V} = \mathsf{W}_1 + \mathsf{W}_2$ *onde* $\mathsf{W}_1 = \mathrm{Im}\,\pi$ *e* $\mathsf{W}_2 = \mathrm{Im}\,(\mathrm{Id} - \pi)$*. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *π é uma projeção de* W_1*.*
2. $\pi^2 = \pi$
3. *A soma* $\mathsf{W}_1 + \mathsf{W}_2$ *é direta, isto é,* $\mathsf{W}_1 \cap \mathsf{W}_2 = \{0\}$*.*

Corolário 3.5.8. *Seja* $\pi : \mathsf{V} \to \mathsf{V}$ *uma projeção sobre* $\mathrm{Im}\,\pi$ *então o subespaço* $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id} - \pi)$ *é o núcleo de* π*.*

Teorema 3.5.9. *Seja* $\mathsf{V} = \mathsf{W}_1 \oplus \cdots \oplus \mathsf{W}_r$ *espaços vetoriais sobre um corpo* K*. Então existem operadores lineares* $\pi_1, \ldots, \pi_r$ *sobre* V *tais que:*

1. $\pi_i(v) = w_i$*, para cada* $v = w_1 + \cdots + w_r$*, com* $w_i \in \mathsf{W}_i$*, para* $i = 1, \ldots, r$*.*
2. $\pi_i \circ \pi_j = 0$*, se* $i \neq j$ *e* $\pi_i^2 = \pi_i$*, para* $i = 1, \ldots, r$*.*
3. $\mathrm{Id} = \pi_1 + \cdots + \pi_r$
4. $\mathrm{Im}\,\pi_i = \mathsf{W}_i$*, para cada* $i = 1, \ldots, r$*.*

Reciprocamente, se $\pi_1, \ldots, \pi_r$ *são operadores lineares sobre* V *que satisfazem (i), (ii) e (iii) e se* $\mathsf{V}_i = \mathrm{Im}\,\pi_i$*, então* $\mathsf{V} = \mathsf{V}_1 \oplus \cdots \oplus \mathsf{V}_r$*.*

Chapter 4

Funcionais Lineares

4.1 Espaço Dual

Definição 4.1.1 (Funcional Linear)**.** *Seja* V *um* K*-espaço vetorial. Um funcional linear em* V *é um transformação linear* $f : \mathsf{V} \to \mathsf{K}$*.*

Definição 4.1.2 (Espaço Dual)**.** *Seja* V *um* K*-espaço vetorial e* $f : \mathsf{V} \to \mathsf{K}$ *um funcional linear não nulo. O conjunto* $\mathscr{L}(\mathsf{V}, \mathsf{K})$ *dos funcionais lineares é chamado de espaço dual e denotado por* V^**.*

Definição 4.1.3 (Funcional Linear)**.** *Seja* V *um espaço vetorial sobre um corpo* K *de dimensão finita e seja* $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *uma base de* V*. Seja* $\mathrm{f}_i : \mathsf{V} \to \mathsf{K}$*, para cada* $i = 1, \ldots, n$ *um funcional linear, tal que:*

$$\mathrm{f}_i(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & se \quad i \neq j \\ 1, & se \quad i = j \end{cases}$$

Seja $v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$*, com* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathsf{K}$*, temos:*

$$\mathrm{f}_i(v) = \mathrm{f}_i\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathrm{f}_i(v_j) \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \delta_{ij}$$

isto é, $\alpha_i = \mathrm{f}_i(v)$*, Logo:*

$$v = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{f}_j(v) v_j$$

Chama-se de base dual de V^**, denotado por,* $\mathcal{B}^*$*, é base de* V^* *relacionada com* $\mathcal{B}$ *tal que* $\mathcal{B}^* = \{\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_n\}$

Teorema 4.1.4. *Seja* V *um espaço vetorial sobre um corpo* K *de dimensão finita e seja* $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *uma base de* V*. Então existe uma única base* $\mathcal{B}^* = \{\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_n\}$ *de* V^* *tal que* $\mathrm{f}_i(v_j) = \delta_{ij}$*, para* $i, j = 1, \ldots, n$*. Além disso, para cada* $v \in \mathsf{V}$*, temos:*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{f}_i(v) v_i$$

e para cada $f \in \mathsf{V}^*$ *temos*

$$f = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{f}(v_i) \mathrm{f}_i$$

4.2 Espaço Bidual

Definição 4.2.1 (Espaço Bidual)**.** *Seja* V *um espaço vetorial sobre um corpo* K*. Chamamos de o espaço* $(\mathsf{V}^*)^*$ *de espaço bidual de* V *e denotaremos por* V^{**}*. Ou seja* $\mathsf{V}^{**} = \{\phi \in \mathsf{V}^{**} | \phi : \mathsf{V}^* \to \mathsf{K}\}$*.*

Observação 4.2.2. *Sejam* V *um espaço vetorial sobre um corpo* K *e* $v \in \mathsf{V}$*. Denota-se* ϕ_v*, um elemento* $\phi_v \in \mathsf{V}^{**}$ *tal que:*

$$\begin{array}{rccl} \phi_v : & \mathsf{V}^* & \to & \mathsf{K} \\ & f & \mapsto & \phi_v(f) = \mathrm{f}(v) \end{array}$$

Lema 4.2.3. *A função* $\Phi : \mathsf{V} \to \mathsf{V}^{**}$ *dada por* $\Phi(v) = \phi_v$ *é linear e injetora.*

Corolário 4.2.4. *Seja* V *um espaço vetorial sobre um corpo* K*. Então toda base de* V^* *é a dual de alguma base de* V*.*

4.3 Hiperplanos

Definição 4.3.1 (Hiperplano)**.** *Seja* V *um espaço vetorial não nulo. Um hiperplano em* V *é um subespaço próprio* W *tal que se* W' *for um subespaço de* V *satisfazendo* $\mathsf{W} \subseteq \mathsf{W}' \subseteq \mathsf{V}$*, então* $\mathsf{W} = \mathsf{W}'$ *ou* $\mathsf{W}' = \mathsf{V}$*.*

Proposição 4.3.2. *Seja* V *um espaço vetorial sobre um corpo* K *de dimensão* $n \geq 1$ *e* V *é um subespaço próprio de* V *então* W *é um hiperplano de* V *se e somente se* $\dim_{\mathsf{K}} = n - 1$*.*

Teorema 4.3.3. *Seja* V *um espaço vetorial sobre um corpo* K *não nulo. Se* $f \in \mathsf{V}^*$ *é um funcional linear não nulo, então* $\operatorname{Nuc} f$ *é um hiperplano de* V*. Inversamente, existe um funcional linear não nulo* $f \in \mathsf{V}^*$ *tal que* $H = \operatorname{Nuc} f$*, onde* H *é um hiperplano de* V*.*

Definição 4.3.4 (Hiperplano Afim)**.** *Seja* V *um espaço vetorial sobre um corpo* K *e seja* H *um hiperplano de* V*. Para um vetor* $\vDash_0 \in \mathsf{V}$ *o conjunto*

$$v_0 + \mathsf{H} = \{v_0 + v | v \in \mathsf{H}\}$$

é chamado de Hiperplano Afim de V

4.4 Anuladores

Definição 4.4.1. *Seja* V *um espaço vetorial sobre um corpo* K *e seja* $\mathsf{S} \subseteq \mathsf{V}$ *um subconjunto de* V*. Chamamos de anulador de* S *ao subconjunto* S^0 *dos funcionais lineares de* V^* *que se anulam nos vetores de* S*, isto é,*

$$\mathsf{S}^0 = \{f \in \mathsf{V}^* : \mathrm{f}(u) = 0, \,\forall u \in \mathsf{S}\}.$$

Lema 4.4.2. *Seja* V *um espaço vetorial sobre um corpo* K *e seja* $\mathsf{S} \subseteq \mathsf{V}$ *um subconjunto de* V*. Então* S^0 *é um subespaço de* V^**.*

Lema 4.4.3. *Seja* V *um espaço vetorial sobre um corpo* K *e seja* $\mathsf{S} \subseteq \mathsf{V}$ *um subconjunto de* V*. Se* $\mathsf{S} = \{0\}$*, então* $\mathsf{S}^0 = \{f \in \mathsf{V}^* | \mathrm{f}(u) = 0, \,\forall u \in \mathsf{S}\} = \mathsf{V}^*$*.*

Lema 4.4.4. *Seja* V *um espaço vetorial sobre um corpo* K *e seja* $\mathsf{S} \subseteq \mathsf{V}$ *um subconjunto de* V*. Se* $\mathsf{S} = V$*, então* $\mathsf{S}^0 = \{0\}$*.*

Teorema 4.4.5. *Seja* V *um espaço vetorial sobre um corpo* K *de dimensão finita e seja* $\mathsf{W} \subseteq \mathsf{V}$ *um subespaço de* V*. Então*

$$\dim_{\mathsf{K}} \mathsf{V} = \dim_{\mathsf{K}} \mathsf{W} + \dim_{\mathsf{K}} \mathsf{W}^0$$

Teorema 4.4.6. *Seja* U *um espaço vetorial sobre um corpo* K*. Se* $\mathsf{U} = \mathsf{V} \oplus \mathsf{W}$*, então* $\mathsf{U}^* = \mathsf{V}^0 \oplus \mathsf{W}^0$*,* V^* *é isomorfismo a* W^0 *e* W^* *é isomorfismo a* V^0*.*

4.5 Transpostas de Transformações

Teorema 4.5.1. *Sejam* U *e* V *espaços vetoriais sobre um corpo* K *e* $\mathrm{T} : \mathsf{U} \to \mathsf{V}$ *uma transformação linear* $\mathrm{T}^t : \mathsf{V}^* \to \mathsf{U}^*$ *dada por* $\mathrm{T}^t(g)(u) = \mathrm{g}(\mathrm{T}(u))$ *para todo* $g \in \mathsf{V}^*$ *e para todo* $u \in \mathsf{U}^*$*.*

Definição 4.5.2. *A transformação linear* T^t *definida acima é chamada transposta de* T*.*

Teorema 4.5.3. *Sejam* U *e* V *espaços vetoriais sobre um corpo* K *e* $\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathsf{U}, \mathsf{V})$*. Então:*

1. $\operatorname{Nuc} \mathrm{T}^t = (\operatorname{Im} \mathrm{T})^0$*.*

Se as dimensões de U *e* V *forem finitas*

1. $\dim \operatorname{Im} \mathrm{T}^t = \dim \operatorname{Im} \mathrm{T}$*, ou seja, posto* $\mathrm{T}^t =$ *posto* T
2. $\operatorname{Im} \mathrm{T}^t = (\operatorname{Nuc} \mathrm{T})^0$

Teorema 4.5.4. *Sejam* V *e* W *espaços vetoriais sobre um corpo* K*, ambos de dimensão finita. Sejam* $\mathcal{B}$ *uma base de* V*,* $\mathcal{B}^*$ *a base dual de* $\mathcal{B}$*,* $\mathcal{C}$ *uma base de* W *e* $\mathcal{C}^*$ *uma base de* $\mathcal{C}$*. Se* T *é uma transformação linear de* V *em* W*, então a transposta da matriz* T *com relação às bases* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{C}$ *é igual à matriz da transposta de* T *com relação às bases* $\mathcal{C}^*$ *e* $\mathcal{B}^*$*, isto é:*

$$[\mathrm{T}]^t_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = [\mathrm{T}^t]_{\mathcal{B}^*,\mathcal{C}^*}$$

Corolário 4.5.5. *Seja* $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathsf{K})$*. Então o posto-linha de* A *é igual ao posto-coluna de* A*.*

Chapter 5

Formas Canônicas

5.1 Operadores Diagonalizáveis

Ao longo do resumo, K é um corpo qualquer, V um espaço vetorial sobre um corpo K, $\mathrm{T}:\mathsf{V}\to\mathsf{V}$ um operador linear e $\mathrm{Id}:\mathsf{V}\to\mathsf{V}$ é a transformação identidade em V.

Definição 5.1.1. *Seja $\mathrm{T}:\mathsf{V}\to\mathsf{V}$ um operador linear e suponha que exista uma base $\mathcal{B}=\{v_1,\dots,v_n\}$ de V tal que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ tenha a forma diagonal. isto é, tal que:*

$$[T]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

com $\lambda_i\in\mathsf{K}$ para $i=1,\dots,n$, isto é, a imagem de qualquer vetor da base $\mathcal{B}$ por T é um múltiplo deste vetor.

1. *Um autovalor de T é um elemento $\lambda\in\mathsf{K}$ tal que existe um vetor não nulo $v\in\mathsf{V}$ com $\mathrm{T}(v)=\lambda v$.*
2. *Se λ é um autovalor de T, então todo vetor não nulo de $v\in\mathsf{V}$ tal que $\mathrm{T}(v)=\lambda v$ é chamado de autovetor de T associado a λ. Denotaremos por $Aut_{\mathrm{T}}(\lambda)$ o subespaço de V gerado por todos os vetores associados a λ.*
3. *Suponha que $\dim_{\mathsf{K}}=n<\infty$. Dizemos que T é diagonalizável se existir uma base $\mathcal{B}$ tal que $[\mathrm{T}]_{\mathcal{B}}$ é diagonal por autovalores de T.*

Lema 5.1.2. *Seja $\mathrm{T}:\mathsf{V}\to\mathsf{V}$ um operador linear não injetor. Então 0 é um autovalor de T.*

Lema 5.1.3. *Seja $\mathrm{T}:\mathsf{V}\to\mathsf{V}$ um operador linear. Se $\lambda\in\mathsf{K}$ for um autovalor de T, então existe $v\neq 0$ tal que $\mathrm{T}(v)=\lambda v\Leftrightarrow(\lambda\mathrm{Id}-\mathrm{T})(v)=0$. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. *λ é autovalor de T*
2. $\mathrm{Nuc}\,(\lambda\mathrm{Id}-\mathrm{T})\neq 0$
3. *$(\lambda\mathrm{Id}-\mathrm{T})$ não é invertível*
4. $\det[\lambda\mathrm{Id}-\mathrm{T}]=0$

$$\Leftrightarrow$$

Definição 5.1.4 (Polinômio característico)**.** *Seja $\mathcal{C}$ uma base de V. Chamamos o polinômio $\det[x.\mathrm{Id}-\mathrm{T}]_{\mathcal{C}}$ de polinômio característico de T e denotado por $p_{\mathrm{T}}(x)$.*

Lema 5.1.5. *O polinômio $\det[x.\mathrm{Id}-\mathrm{T}]_{\mathcal{C}}$ é um invariante de T, para qualquer base $\mathcal{C}$ de V.*

Teorema 5.1.6. *Seja $\mathrm{T}:\mathsf{V}\to\mathsf{V}$ um operador linear e sejam $\lambda_1,\dots,\lambda_t$, $t\geq 1$ autovalores T, dois a dois distintos.*

1. *Se $v_1+\dots+v_t=0$ com $v_i\in Aut_{\mathrm{T}}(\lambda_i)$, $i=1,\dots,t$, então $v_i=0$, para cada i.*
2. *Para cada $i=1,\dots,t$, seja $\mathcal{B}_i$ um conjunto linearmente independente contido em $Aut_{\mathrm{T}}(\lambda_i)$. Então $\mathcal{B}_1\cup\dots\cup\mathcal{B}_t$ é linearmente independente.*

Corolário 5.1.7. *Seja $\mathrm{T}:\mathsf{V}\to\mathsf{V}$ um operador linear e sejam $\lambda_1,\dots,\lambda_t$, $t\geq 1$ autovalores T, então T é diagonalizável se e somente se*

$$\dim_{\mathsf{K}}\mathsf{V}=\sum_{i=1}^{t}\dim_{\mathsf{K}}Aut_{\mathrm{T}}(\lambda_i)$$

Definição 5.1.8 (Multiplicidade algébrica e geométrica)**.** *Seja λ um autovalor de um operador linear $\mathrm{T} : \mathsf{V} \to \mathsf{V}$ e suponhamos que $p_{\mathrm{T}} = (x-\lambda)^m q(x)$, com $q(x) \neq 0$, seja o polinômio característico de* T. *O número m é chamado de multiplicidade algébrica de λ e denotamos por $ma(\lambda)$. Chamamos de multiplicidade geométrica de λ à dimensão do subespaço $Aut_{\mathrm{T}}(\lambda)$ e denotamos por $mg(\lambda)$*

Proposição 5.1.9. *Seja λ um autovalor de um operador linear $\mathrm{T} : \mathsf{V} \to \mathsf{V}$ Então $mg(\lambda) \leq ma(\lambda)$.*

Teorema 5.1.10. *Seja $\mathrm{T} : \mathsf{V} \to \mathsf{V}$ um operador linear e sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$, $t \geq 1$ autovalores* T*, dois a dois distintos. As seguintes afirmações são equivalentes.*

1. T *é diagonalizável*
2. $p_{\mathrm{T}} = (x-\lambda_1)^{n_1} \ldots (x-\lambda_t)^{n_t}$, $n_i \geq 1$ *e* $mg(\lambda_i) = ma(\lambda_i)$, *para cada* $i = 1, \ldots, t$.
3. $\dim_{\mathsf{K}} \mathsf{V} = \displaystyle\sum_{i=1}^{t} \dim_{\mathsf{K}} Aut_{\mathrm{T}}(\lambda_i)$

5.2 Subespaços T-Invariantes

Definição 5.2.1 (Subespaço T-Invariante)**.** *Seja $\mathrm{T} : \mathsf{V} \to \mathsf{V}$ um operador linear e seja $\mathsf{W} \subseteq \mathsf{V}$ um subespaço de* V. *Dizemos que W é um subespaço* T*-Invariante de V se $\mathrm{T}(w) \in \mathsf{W}$ para todo $w \in \mathsf{W}$.*

5.3 Polinômios Minimais de Operadores e O Teorema de Cayley-Hamilton

Definição 5.3.1 (Polinômio Minimal)**.** *O polinômio minimal de um operador linear* T *em $\mathscr{L}(\mathsf{V},\mathsf{V})$ é o polinômio mônico $m_{\mathrm{T}}(x)$ de menor grau tal que $m_{\mathrm{T}}(T)(v) = 0$, $\forall v \in \mathsf{V}$.*

Teorema 5.3.2 (Cayley-Hamilton)**.** *Um operador $\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathsf{V},\mathsf{V})$ é um zero de seu polinômio característico $p_{\mathrm{T}}(x)$, isto é, $p_{\mathrm{T}}(T) = 0$.*

Proposição 5.3.3. *Sejam V um K-espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$ e $\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathsf{V},\mathsf{V})$. Então, os polinômios característico e minimal de* T *têm as mesmas raízes a menos de multiplicidade.*

5.4 Espaços Vetoriais T-Cíclicos

Definição 5.4.1. *Sejam V um K-espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$ e $\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathsf{V},\mathsf{V})$.*

1. *Dizemos que $v \in \mathsf{V}$ é um vetor* T*-Cíclico se $\mathsf{V} = C_{\mathrm{T}}(v)$ ou equivalentemente, se $\{v, \mathrm{T}(v), \ldots, \mathrm{T}^{n-1}(v)\}$ for uma base de V.*
2. *Dizemos que V é* T*-Cíclico se V possuir um vetor* T*-Cíclico.*

Definição 5.4.2. *Sejam $\mathsf{V} = C_{\mathrm{T}}(v)$ um espaço* T*-Cíclico de dimensão n, $m_{\mathrm{T},v}(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ e $\mathcal{B} = \{v, \mathrm{T}(v), \ldots, \mathrm{T}^{n-1}(v)\}$ uma base de V. A matriz $[\mathrm{T}]_{\mathcal{B}}$ é definida por:*

$$[\mathrm{T}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & -a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$[\mathrm{T}]_{\mathcal{B}}$ é chamada matriz companheira de $m_{\mathrm{T},v}(x)$.

Lema 5.4.3. *Seja $\mathrm{T} : \mathsf{V} \to \mathsf{V}$ um operador linear onde V é um K-espaço vetorial de dimensão finita. Então existe um vetor $v \in \mathsf{V}$ tal que $m_{\mathrm{T},v}(x) = m_{\mathrm{T}}(x)$.*

Corolário 5.4.4. *Seja $\mathrm{T} : \mathsf{V} \to \mathsf{V}$ um operador linear onde V é um K-espaço vetorial de dimensão finita. Então existe um subespaço* T*-Cíclico de V com dimensão igual ao grau do polinômio m_{T}.*

Teorema 5.4.5. *Seja $\mathrm{T} : \mathsf{V} \to \mathsf{V}$ um operador linear onde V é um K-espaço vetorial de dimensão finita. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. V *é* T*-Cíclico*
2. *o grau de m_{T} é n.*
3. $m_{\mathrm{T}} = p_{\mathrm{T}}$.

5.5 Operadores Nilpotentes

Definição 5.5.1. *Um operador linear* $\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathsf{V}, \mathsf{V})$ *é chamado de nilpotente se existir um* $m > 0$ *tal que* $\mathrm{T}^m = 0$. *O índice de nilpotência de um tal operador será o menor índice com esta propriedade.*

Lema 5.5.2. *Um operador linear* $\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathsf{V}, \mathsf{V})$ *é nilpotente e* $\dim \mathsf{V} \geq 1$, *então* $\operatorname{Nuc} \mathrm{T} \neq \{0\}$.

Teorema 5.5.3. *Seja* $\mathrm{T} : \mathsf{V} \to \mathsf{V}$ *um operador linear, onde* V *é um* K*-espaço vetorial de dimensão finita. Então* T *é a soma direta de um operador nilpotente e um operador invertível. Além disso, tal decomposição é única.*

Proposição 5.5.4. *Seja* $\mathrm{T} : \mathsf{V} \to \mathsf{V}$ *um operador linear nilpotente de índice de nilpotência* $m \geq 1$, *onde* V *é um* K*-espaço vetorial de dimensão finita. Se* $v \in \mathsf{V}$ *é tal que* $\mathrm{T}^{m-1}(v) \neq 0$, *então:*

1. *O conjunto* $\{v, \mathrm{T}(v), \ldots, \mathrm{T}^{m-1}(v)\}$ *é LI.*
2. *Existe um subespaço* T*-invariante* W *de* V *tal que* $\mathsf{V} = \mathsf{U} \oplus \mathsf{W}$, *onde* $\mathsf{U} = [v, \mathrm{T}(v), \ldots, \mathrm{T}^{m-1}(v)]$.

Definição 5.5.5 (Bloco de Jordan)**.** *Um bloco de bloco de Jordan* $r \times r$ *em* λ *é uma matriz* $J_r(\lambda)$ *em* $\mathscr{M}(\mathsf{K})$ *que tem* λ *na diagonal principal e* 1 *na diagonal abaixo da principal, isto é,*

$$J_r(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix}$$

Teorema 5.5.6. *Seja* $\mathrm{T} : \mathsf{V} \to \mathsf{V}$ *um operador nilpotente com índice de nilpotência* $m \geq 1$, *onde* V *é um* K*-espaço vetorial de dimensão finita. Então existem números positivos* $t, m_1, \ldots, m_t$ *e vetores* $v_1, \ldots, v_t \in \mathsf{V}$ *tais que:*

1. $m = m_1 \geq \cdots \geq m_t$.
2. *O conjunto* $\mathcal{B} = \{v_1, \mathrm{T}^1(v_1), \ldots, \mathrm{T}^{m_1-1}(v_1),\ v_2, \mathrm{T}^1(v_2), \ldots, \mathrm{T}^{m_2-1}, \ldots,\ v_t, \mathrm{T}^1(v_t), \ldots, \mathrm{T}^{m_2-1}(v_t)\}$ *é uma base de* V.
3. $\mathrm{T}^{m_i}(v_i) = 0$, *para cada* $i = 1, \ldots, t$.
4. *Se* S *for um operador linear em um* K*-espaço vetorial* W *de dimensão finita, então os inteiros* $t, m_1, \ldots, m_t$ *associados a* S *e a* T *são iguais se e somente se existir um isomorfismo* $\Phi : \mathsf{V} \to \mathsf{W}$ *com* $\Phi \mathrm{T} \Phi^{-1} = \mathsf{S}$.

5.6 Formas de Jordan

Teorema 5.6.1. *Seja* $\mathrm{T} : \mathsf{V} \to \mathsf{V}$ *um operador linear, onde* V *é um* K*-espaço vetorial de dimensão finita tal que* $p_{\mathrm{T}}(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \ldots (x - \lambda_r)^{m_r}, m_r \geq 1$ *e* $\lambda_i \neq \lambda_j$, *se* $i \neq j$. *Então* $\mathsf{V} = \mathsf{U}_1 \oplus \cdots \oplus \mathsf{U}_r$, *onde, para* $i = 1, \ldots, r$, *temos:*

1. $\dim_{\mathsf{K}} \mathsf{U}_i = m_i$.
2. *o subespaço* U_i *é* T*-invariante.*
3. *a restrição do operador* $\lambda_i \mathrm{Id} - \mathrm{T}$ *a* U_i *é nilpotente.*

Definição 5.6.2 (Forma de Jordan)**.** *Seja* $\mathrm{T} : \mathsf{V} \to \mathsf{V}$ *um operador linear, onde* V *é um* K*-espaço vetorial de dimensão finita tal que* $p_{\mathrm{T}}(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \ldots (x - \lambda_r)^{m_r}, m_r \geq 1$ *e* $\lambda_i \neq \lambda_j$, *se* $i \neq j$ *e seja* $\mathsf{V} = \mathsf{U}_1 \oplus \cdots \oplus \mathsf{U}_r$, *onde, para* $i = 1, \ldots, r$, *satisfazendo as propriedades do teorema anterior, sejam* $\mathcal{B}_i$ *a base de* U_i *e números* $t_i, m_{i1}, \ldots, m_{it}$, *tais que*

$$[\mathrm{T}_i]_{\mathcal{B}_i} = \begin{pmatrix} J_{m1}(\lambda_i) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_{m2}(\lambda_i) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & J_{m3}(\lambda_i) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & J_{mt_i}(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

onde, para cada $i = 1, \ldots, r$ *e* $j = 1, \ldots, t_i$,

$$J_{m_{ij}}(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \lambda_i & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_i & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{m_{ij}}(\mathsf{K})$$

A matriz:

$$[\mathrm{T}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [\mathrm{T}_1]_{\mathcal{B}_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & [\mathrm{T}_2]_{\mathcal{B}_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & [\mathrm{T}_3]_{\mathcal{B}_3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & [\mathrm{T}_r]_{\mathcal{B}_r} \end{pmatrix}$$

é chamada de forma de Jordan associada a T.

Chapter 6

Espaços com Produto Interno

6.1 Produto Interno

Definição 6.1.1 (Produto Interno)**.** *Seja* V *um* K*-espaço vetorial, onde* $K = \mathbb{R}$ *ou* $K = \mathbb{C}$*. Um produto interno sobre* V *é uma função* $\langle , \rangle : \mathsf{V} \times \mathsf{V} \to \mathsf{K}$ *que satisfaz as seguintes quatro propriedades:*

P1 $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle, \forall u, v, w \in \mathsf{V}$

P2 $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle, \forall \lambda \in \mathsf{K}, \forall u, v \in \mathsf{V}$

P3 $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}, \forall u, v \mathsf{V}$

P4 $\langle u, u \rangle > 0, u \in \mathsf{V}$ *e* $u \neq 0$

Lema 6.1.2. *Outras propriedades:*

$\langle 0, v \rangle = \langle v, 0 \rangle = 0, \forall v \in \mathsf{V}$

$\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$

P5 $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle, \forall u, v, w \in \mathsf{V}$

P6 $\langle u, \lambda v \rangle = \overline{\langle \lambda v, y \rangle} = \overline{\lambda \langle v, u \rangle} = \overline{\lambda} \langle u, v \rangle, \forall \lambda \in \mathsf{K}, \forall u, v \in \mathsf{V}$

Definição 6.1.3. *Seja* V *e* W *dois* K*-espaços vetorial e seja* $\langle , \rangle$ *um produto interno sobre* V*. Se* $\mathrm{T} : \mathsf{W} \to \mathsf{V}$ *for uma transformação linear injetora. Então podemos definir um produto interno em* W *como:*

$$\langle , \rangle_{\mathrm{T}} := \langle \mathrm{T}(u), \mathrm{T}(v) \rangle, \ \forall u, v \in \mathsf{W}$$

Definição 6.1.4 (Norma)**.** *Seja* V *um* K*-espaço vetorial munido de produto interno* $\langle , \rangle$*. Para cada* $v \in \mathsf{V}$*, chamamos de norma de* v *ao número real dado por:*

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

Lema 6.1.5. *Seja* V *e* W *dois* K*-espaços vetorial e seja* $\langle , \rangle$ *um produto interno sobre* V*.*

1. $\|u\| \geq 0, \ \forall u \in \mathsf{V}$
2. $\|u\| = 0, \Leftrightarrow u = 0$
3. $\|\alpha u\| = \alpha \|u\|, \ \forall \alpha \in \mathsf{K}$ *e* $\forall u \in \mathsf{V}$

Proposição 6.1.6 (Identidade de Polarização)**.** *Seja* V *um* K*-espaço vetorial com produto interno* $\langle , \rangle$ *e sejam* $u, v \in \mathsf{V}$*.*
Para $\mathsf{K} = \mathbb{R}$*:*

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}\|u + v\|^2 - \frac{1}{4}\|u - v\|^2$$

Para $\mathsf{K} = \mathbb{C}$*:*

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}\|u + v\|^2 - \frac{1}{4}\|u - v\|^2 + \frac{i}{4}\|u + iv\|^2 - \frac{i}{4}\|u - iv\|^2$$

Teorema 6.1.7 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** *Seja* V *um* K*-espaço vetorial com produto interno* $\langle , \rangle$*. Então*

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|, \forall u, v \in \mathsf{V}.$$

A igualdade $|\langle u, v \rangle| = \|u\| \|v\|$ *é válida se e somente se* $\{u, v\}$ *for linearmente dependente.*

Corolário 6.1.8 (Desigualdade de Triangular)**.** *Seja* V *um* K*-espaço vetorial com produto interno* $\langle , \rangle$*. Então*

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \forall u, v \in \mathsf{V}.$$

6.2 Ortogonalidade

Definição 6.2.1 (Ortogonalidade). *Seja* V *um* K*-espaço vetorial munido de produto interno* $\langle , \rangle$ *e sejam* $u, v \in \mathsf{V}$*. Dizemos que* u *e* v *são ortogonais, denotado por* $u \perp v$*, se* $\langle u, v\rangle = 0$*. Um subconjunto* A *de* V *é chamado de ortogonal se os seus elementos são ortogonais dois a dois e dizemos que* A *é um conjunto ortonormal se for um conjunto ortogonal e se* $\|u\| = 1$, $\forall u \in \mathsf{A}$.

Lema 6.2.2. *Seja* V *um* K*-espaço vetorial munido de produto interno* $\langle , \rangle$*. O vetor nulo é ortogonal a todos os elementos de* V*, pois* $\langle 0, u\rangle = 0$, $\forall u \in \mathsf{V}$.

Proposição 6.2.3. *Seja* V *um* K*-espaço vetorial com produto interno* $\langle , \rangle$ *e seja* A *um subconjunto ortogonal de* V *formado por vetores não nulos.*

(a) Se $v \in [v_1, \ldots, v_n]$*, com* $v_i \in \mathsf{A}$*, então:*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v, v_i\rangle}{\|v_i\|^2} v_i$$

(b) A *é linearmente independente.*

Corolário 6.2.4. *Seja* V *um* K*-espaço vetorial com produto interno* $\langle , \rangle$ *e seja* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *uma base ortonormal de* V*. Então para* $v \in \mathsf{V}$*, temos*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle v_i$$

6.2.1 Processo de Ortogonalização Gram-Schmidt

[Anton,AlgLinApl-pt,2010] Para converter uma base $\{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\}$ numa base ortogonal $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$, efetue as seguintes contas:

$$\begin{aligned}
v_1 &= u_1 \\
v_2 &= u_2 - \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 \\
v_3 &= u_3 - \frac{\langle u_3, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2 \\
&\vdots \\
v_n &= u_n - \frac{\langle u_n, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_n, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2 - \frac{\langle u_n, v_3\rangle}{\|v_3\|^2} v_3 + \cdots - \frac{\langle u_n, v_n\rangle}{\|v_n\|^2} v_n
\end{aligned}$$

Para converter a base ortogonal numa base ortonormal $\{q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n\}$ normalize os vetores da base ortonormal:

$$q_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}, i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

6.2.2 Decomposição QR - Gram-Schmidt

[Anton,AlgLinApl-pt,2010] Seja A uma matriz $m \times n$ tal que $A = [u_1\, u_2\, u_3 \ldots u_n]$ e $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ são vetores de dimensão m linearmente independentes. Existe uma matriz $Q = [q_1\, q_2\, q_3 \ldots q_n]$, através do processo de Gram-Schmidt, formado por uma base ortonormal projetados pelos vetores de $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$. Temos então:

$$\begin{cases}
u_1 = \langle u_1, q_1\rangle q_1 + \langle u_1, q_2\rangle q_2 + \langle u_1, q_3\rangle q_3 + \ldots \langle u_1, q_n\rangle q_n \\
u_2 = \langle u_2, q_1\rangle q_1 + \langle u_2, q_2\rangle q_2 + \langle u_2, q_3\rangle q_3 + \ldots \langle u_2, q_n\rangle q_n \\
u_3 = \langle u_3, q_1\rangle q_1 + \langle u_3, q_2\rangle q_2 + \langle u_3, q_3\rangle q_3 + \ldots \langle u_3, q_n\rangle q_n \\
\vdots \\
u_n = \langle u_n, q_1\rangle q_1 + \langle u_n, q_2\rangle q_2 + \langle u_n, q_3\rangle q_3 + \ldots \langle u_n, q_n\rangle q_n
\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$A = QR = [q_1\, q_2\, q_3 \ldots q_n] \begin{bmatrix}
\langle u_1, q_1\rangle & \langle u_1, q_2\rangle & \langle u_1, q_3\rangle & \ldots & \langle u_1, q_n\rangle \\
0 & \langle u_2, q_2\rangle & \langle u_2, q_3\rangle & \ldots & \langle u_2, q_n\rangle \\
0 & 0 & \langle u_3, q_3\rangle & \ldots & \langle u_3, q_n\rangle \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & \langle u_n, q_n\rangle
\end{bmatrix}$$

Teorema 6.2.5. *Todo espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$ com produto interno possui uma base ortonormal.*

Corolário 6.2.6. *Seja* V *um* K*-espaço vetorial munido de produto interno. Sejam* $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ *e* $\mathcal{B}' = \{v_1, \dots, v_n\}$ *duas bases ortonormais de* V*. Se* M *é a matriz de mudança de base* $\mathcal{B}$ *para* $\mathcal{B}'$*. então* $M\overline{M^T} = \overline{M^T}M = \mathrm{Id}_n$*.*

6.3 Subespaço Ortogonal

Definição 6.3.1. *Seja V um espaço vetorial com produto interno, e seja* $\mathsf{S} \subseteq \mathsf{V}$ *um subconjunto* V*. Chamamos de ortogonal de* S *ao subconjunto* $\mathsf{S}^\perp = \{v \in \mathsf{V} : \langle v, u\rangle = 0, \forall u \in \mathsf{S}\}$*.*

Lema 6.3.2. *Seja* S *um subconjunto de um espaço vetorial* V *com produto interno. O conjunto* $\mathsf{S}^\perp$ *é um subespaço de* V*.*

Lema 6.3.3. *Seja* S *um subconjunto de um espaço vetorial* V *com produto interno. Se* $\mathsf{S} = \{0\}$ *Então* $\mathsf{S}^\perp = \mathsf{V}$*.*

Lema 6.3.4. *Seja* S *um subconjunto de um espaço vetorial* V *com produto interno. Se* S *coniver uma base de* V *então* $\mathsf{S}^\perp = \{0\}$*.*

Lema 6.3.5. *Seja* S *um subconjunto de um espaço vetorial* V *com produto interno.* $\mathsf{S}^\perp = \{v \in \mathsf{V} : \langle u, v\rangle = 0, \forall u \in \mathsf{S}\}$*.*

Proposição 6.3.6. *Seja* V *um* K*-espaço vetorial munido de produto interno. Sejam* $\mathsf{W} \subseteq \mathsf{V}$ *um subespaço e* $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_k\}$ *um gerador para* W*. Então* $v \in \mathsf{W}^\perp$ *se e somente se* $\langle v, w_i\rangle$*, para cada* $i = 1, \dots, k$*.*

Proposição 6.3.7. *Seja* V *um* K*-espaço vetorial de dimensão* $n \geq 1$ *e com produto interno e seja* $\mathsf{W} \subsetneq \mathsf{V}$ *um subespaço próprio de* V*. Então* $\mathsf{V} = \mathsf{W} \oplus \mathsf{W}^\perp$*.*

Corolário 6.3.8. *Seja* V *um* K*-espaço vetorial de dimensão finita com produto interno e seja* $\mathsf{W} \subsetneq \mathsf{V}$ *um subespaço de* V*. Então*

$$dim_K\mathsf{V} = dim_K\mathsf{W} + dim_K\mathsf{W}^\perp$$

6.4 A Melhor Aproximação

Proposição 6.4.1. *Sejam* V *um* K*-espaço vetorial munido de produto interno e* $\mathsf{W} \subseteq \mathsf{V}$ *um subespaço de* V *com dimensão finita. Então, dado* $v \in \mathsf{V}$*, existe um único* $w \in \mathsf{W}$ *tal que* $v - w \in \mathsf{W}^\perp$*.*

Definição 6.4.2. *Sejam* V *um* K*-espaço vetorial munido de produto interno e* $\mathsf{W} \subseteq \mathsf{V}$ *um subespaço de* V*. Se dado* $v \in \mathsf{V}$*, existir* $w \in \mathsf{W}$ *tal que* $v - w \in \mathsf{W}^\perp$*, chamamos o vetor* w *de projeção ortogonal de* v *sobre* W *e denotado por* $w = proj_W v$*.*

Proposição 6.4.3 (Melhor Aproximação)**.** *Sejam* V *um* K*-espaço vetorial munido de produto interno e* W *um subespaço de* V*. As seguintes afirmações são equivalentes para um vetor* $w_0 \in \mathsf{W}$*:*

1. $v - w_0 \in \mathsf{W}^\perp$*.*
2. $\|v - w_0\| < \|v - w_0\|, \forall w \in \mathsf{W}$ *e* $w \neq w_0$*.*

6.5 Transformações que Preservam o Produto Interno

Definição 6.5.1. *Sejam* V *e* W *dois* K*-espaços vetoriais munido de produto interno. Dizemos que uma transformação* $\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathsf{V}, \mathsf{W})$ *é uma transformação que preserva o produto interno se* $\langle \mathrm{T}(u), \mathrm{T}(v)\rangle = \langle u, v\rangle$*, para todo* $u, v \in \mathsf{V}$*. Um isomorfismo entre espaços com produto interno é um isomorfismo que preserva o produto interno.*

Observação 6.5.2. *Uma transformação linear que preserva o produto interno é necessariamente injetora.*

Teorema 6.5.3. *Sejam* V *e* W *dois* K*-espaços vetoriais de dimensão finita com produto interno, tal que* $\dim_{\mathsf{K}} \mathsf{V} = \dim_{\mathsf{K}} \mathsf{W}$ *e seja* $\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathsf{V}, \mathsf{W})$*. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. T *preserva o produto interno.*
2. T *é um isomorfismo de espaços com produto interno.*
3. T *leva toda base ortonormal de* V *em base ortonormal de* W*.*
4. T *leva alguma base ortonormal de* V *em uma base ortonormal de* W*.*

Teorema 6.5.4. *Sejam* V *e* W *dois* K*-espaços vetoriais munido de produto interno. e* $\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathsf{V}, \mathsf{W})$*. Então* T *preserva o produto interno se e somente se* $\|\mathrm{T}(v)\| = \|v\|, \forall v \in \mathsf{V}$

Chapter 7

Adjuntos

7.1 Funcionais Lineares e Adjuntos

Proposição 7.1.1. *Seja* V *um* K*-espaço vetorial de dimensão finita com produto interno. Se* $\mathrm{f} \in \mathsf{V}^*$*, então existe um único* $w \in \mathsf{V}$ *tal que* $\mathrm{f}(u) = \langle u, w \rangle$ *para todo* $u \in \mathsf{V}$*.*

Teorema 7.1.2. *Seja* V *um* K*-espaço vetorial de dimensão finita com produto interno. Se* $\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathsf{V}, \mathsf{V})$*, então existe um único operador* $\mathrm{T}^* \in \mathsf{V}$ *tal que* $\langle \mathrm{T}(u), v \rangle = \langle u, \mathrm{T}^*(v) \rangle$ *para todo* $u, v \in \mathsf{V}$*.*

Definição 7.1.3. *Seja* $\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathsf{V}, \mathsf{V})$*, onde* V *é um* K*-espaço vetorial de dimensão finita com produto interno. Dizemos que* T *possui um adjunto se existir um operador* $\mathrm{T}^* \in \mathscr{L}(\mathsf{V}, \mathsf{V})$ *tal que* $\langle \mathrm{T}(u), v \rangle = \langle u, \mathrm{T}^*(v) \rangle$ *para todo* $u, v \in \mathsf{V}$*. Diremos, neste caso, que* T^* *é adjunto de* T*.*

Proposição 7.1.4. *Seja* V *um* K*-espaço vetorial com produto interno. Sejam* $\mathrm{T}, \mathrm{S} \in \mathscr{L}(\mathsf{V}, \mathsf{V})$ *operadores lineares que admitem adjuntos* T^* *e* S^**, respectivamente e* $\lambda \in \mathsf{K}$*. Então:*

1. $\mathrm{T} + \mathrm{S}$ *admite adjunto e* $(\mathrm{T} + \mathrm{S})^* = \mathrm{T}^* + \mathrm{S}^*$
2. $\lambda \mathrm{T}$ *admite adjunto e* $(\lambda \mathrm{T})^* = \overline{\lambda} \mathrm{T}^*$
3. $\mathrm{T} \circ \mathrm{S}$ *admite adjunto e* $(\mathrm{T} \circ \mathrm{S})^* = \mathrm{S}^* \circ \mathrm{T}^*$
4. T^* *admite adjunto e* $(\mathrm{T}^*)^* = \mathrm{T}$

Proposição 7.1.5. *Seja* V *um* K*-espaço vetorial com produto interno e de dimensão finita. Seja* $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *uma base ortonormal de* V *e* $\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathsf{V}, \mathsf{V})$*. Se* $[\mathrm{T}]_{\mathcal{B}} = (a_{ij})_{i,j}$ *então* $a_{ij} = \langle \mathrm{T}(v_j), v_i \rangle$*,* $\forall i, j = 1, \ldots, n$*.*

Teorema 7.1.6. *Seja* V *um* K*-espaço vetorial com produto interno e de dimensão finita, e seja* $\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathsf{V}, \mathsf{V})$*. Em relação a qualquer base ortonormal de* V *a matriz* T^* *é igual à transposta conjugada da matriz* T*.*

7.2 Autoadjuntos

Definição 7.2.1. *Seja* $\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathsf{V}, \mathsf{V})$*, onde* V *é um* K*-espaço vetorial de dimensão finita com produto interno. Dizemos que* T *possui um autoadjunto se* T *admite um adjunto* T^* *e* $\mathrm{T}^* = \mathrm{T}$*. No caso em que* $\mathsf{K} = \mathbb{C}$*, usamos também o termo hermitiano e no caso em que* $\mathsf{K} = \mathbb{R}$*, usamos também o termo simétrico.*

Teorema 7.2.2. *Seja* V *um* K*-espaço vetorial com produto interno e de dimensão finita, e* $\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathsf{V}, \mathsf{V})$*. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. T *é autoadjunto.*
2. $\overline{[\mathrm{T}]}_{\mathcal{B}}^{t} = [\mathrm{T}]_{\mathcal{B}}$ *para toda base ortonormal de* $\mathcal{B}$ *de* V*.*
3. *Existe uma base ortonormal de* $\mathcal{B}$ *de* V *tal que* $\overline{[\mathrm{T}]}_{\mathcal{B}}^{t} = [\mathrm{T}]_{\mathcal{B}}$*.*

Lema 7.2.3. *Seja* V *um* $\mathbb{C}$*-espaço vetorial com produto interno e de dimensão finita, e* $\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathsf{V}, \mathsf{V})$*. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $\mathrm{T} = 0$*.*
2. $\langle \mathrm{T}(u), u \rangle = 0$*,* $\forall u \in \mathsf{V}$ V*.*
3. $\langle \mathrm{T}(u), v \rangle = 0$*,* $\forall u, v \in \mathsf{V}$ V*.*

Proposição 7.2.4. *Seja* V *um* $\mathbb{C}$*-espaço vetorial com produto interno, e* $\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathsf{V}, \mathsf{V})$*. Então* T *é um operador hermitiano se e somente se* $\langle \mathrm{T}(v), v \rangle \in \mathbb{R}$*.*

Observação 7.2.5. *A proposição acima não vale se* $\mathsf{K} = \mathbb{R}$*.*

7.3 Operadores Unitários

Definição 7.3.1 (Operador Unitário). *Seja $\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathsf{V}, \mathsf{V})$, onde V é um K-espaço vetorial com produto interno. Dizemos que T é unitário se for um isomorfismo de espaços com produto interno.*

Lema 7.3.2. *Seja $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2 \in \mathscr{L}(\mathsf{V}, \mathsf{V})$, onde V é um K-espaço vetorial com produto interno.*

1. *Se $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2$ são unitários então $\mathrm{T}_1 \circ \mathrm{T}_2$ é unitário.*
2. *Se T_1 é unitário então T_1^{-1} é unitário.*

Proposição 7.3.3. *Seja $\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathsf{V}, \mathsf{V})$, onde V é um K-espaço vetorial com produto interno. Então T é unitário se e somente se o adjunto T^* existir e $\mathrm{T} \circ \mathrm{T}^* = \mathrm{T}^* \circ \mathrm{T} = \mathrm{Id}$.*

7.4 Operadores Normais

Definição 7.4.1 (Operador Normal). *Seja V um espaço vetorial com produto interno, e $\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathsf{V}, \mathsf{V})$. Dizemos que T é normal se existir T^* e $\mathrm{T} \circ \mathrm{T}^* = \mathrm{T}^* \circ \mathrm{T}$.*

Lema 7.4.2. *Todo operador autoadjunto é normal.*

Lema 7.4.3. *Todo múltiplo escalar de um operador normal é normal.*

Observação 7.4.4. *A soma de operadores normais não é necessariamente normal.*

Proposição 7.4.5. *Seja V um espaço vetorial com produto interno e $\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathsf{V}, \mathsf{V})$. Então:*

1. $\|\mathrm{T}(v)\| = \|\mathrm{T}^*(v)\|, \forall v \in \mathsf{V}$
2. *Se $\mathrm{T}(v) = \alpha v$, para $\alpha \in \mathsf{K}$, então $\mathrm{T}^*(v) = \overline{\alpha} v$*
3. *Se $\mathrm{T}_1(v_1) = \alpha_1 \mathrm{T}(v_1)$ e $\mathrm{T}_2(v_2) = \alpha_2 \mathrm{T}(v_2)$, para $v_1, v_2 \in \mathsf{V}$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathsf{K}$, com $\alpha_1 \neq \alpha_2$ então $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$*

Teorema 7.4.6. *Seja V um espaço vetorial com produto interno. Se $\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathsf{V}, \mathsf{V})$ é autoadjunto, então T possui um autovetor.*

Lema 7.4.7. *Seja V um espaço vetorial com produto interno e de dimensão finita e $\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathsf{V}, \mathsf{V})$. Se W é um subespaço de T-invariante de V, então $\mathsf{W}^{\perp}$ é T^*-invariante.*

Proposição 7.4.8. *Seja V um espaço vetorial com produto interno e de dimensão finita. Se $\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathsf{V}, \mathsf{V})$ é autoadjunto, então existe uma base ortonormal de V cujos vetores são autovetores de T.*

Corolário 7.4.9. *Seja $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ uma matriz de simétrica. Então existem uma matriz invertível $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $M^t A M$ é diagonal.*

Teorema 7.4.10. *Seja V um $\mathbb{C}$-espaço vetorial com produto interno e de dimensão finita e $\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathsf{V}, \mathsf{V})$. Então T é um operador normal se e somente se existir uma base ortonormal de V cujos vetores sejam autovetores de T.*

Chapter 8

Formas Bilineares