1 Corpos

Definição 1.1. [Coelho,AlgLin,2013] *Um conjunto não vazio* K *é um corpo se em* K *pudermos definir duas operações, denotadas por +(adição) e . (multiplicação). satisfazendo as seguintes propriedades:*

propriedade comutativa *(A1)* $a + b = b + a, \forall a, b \in \mathsf{K}$

propriedade associativa *(A2)* $a + (b + c) = (a + b) + c, \forall a, b, c \in \mathsf{K}$

elemento neutro da soma *(A3) Existe um elemento em* K*, denotado por* 0 *e chamado de elemento neutro da adição, que satisfaz* $0 + a = a + 0 = a, \forall a \in \mathsf{K}$

inserso aditivo *(A4) Para cada* $a \in \mathsf{K}$*, existe um número em* K *, denotado por* $-a$ *e chamado de oposto de* a *(ou inverso aditivo de* a*) tal que* $a + (-a) = 0$

propriedade comutativa *(M1)* $a.b = b.a, \forall a, b \in \mathsf{K}$ *(propriedade comutativa)*

propriedade associativa *(M2)* $a.(b.c) = (a.b).c, \forall a, b, c \in \mathsf{K}$ *(propriedade associativa)*

elemento neutro da multiplicação *(M3) Existe um elemento em* K*, denotado por* 1 *e chamado de elemento neutro da multiplicação, tal que* $1.a = a.1 = a, \forall a \in \mathsf{K}$

inverso multiplicativo *(M4) Para cada elemento não nulo* $a \in \mathsf{K}$*, existe um elemento em* K*, denotado por* a^{-1} *e chamando de inverso multiplicativo de* a*, tal que* $a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$*.*

2 Matrizes

Definição 2.1. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Uma matriz anti-simétrica é definida como sendo uma matriz tal que* $A^t = -A$*, ou seja,* $a_{ij} = -a_{ji}$

Lema 2.2. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Uma matriz anti-simétrica é quadrada, e que os elementos da diagonal de uma matriz anti-simétrica são nulos.*

Lema 2.3. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Se* A *é qualquer matriz quadrada, então* $A - A^t$ *é anti-simétrica.*

Definição 2.4. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Uma matriz real é uma cujos elementos são todos reais. Uma matriz complexa tem elementos que podem ser complexos. Uma matriz imaginária tem elementos que são todos imaginários ou nulos. O símbolo* $\overline{A}$ *é usado para represenar a matriz cujo* (i, j)*-ésimo elementos é conjugado complexo* $\overline{a}_{ij}$ *do* (i, j)*-ésimo elemento de* A*.*

Definição 2.5. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Chama-se de matriz transposta hermitiana, denotado por* A^H*,* $A^H = \overline{A}^t$*, que é a complexa cojugada da transposta ordinária.*

Definição 2.6. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Chama-se de matriz hermitiana uma matriz tal que* $A^H = A$*.*

Lema 2.7. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Uma matriz hermitiana é a soma de uma matriz real simétrica e de uma matriz imaginária anti-simétrica.*

Lema 2.8. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *As propriedades de matrizes são válidas:*

- $\overline{AB} = \overline{A}.\overline{B}$
- $(\overline{A})^t = (\overline{A^t})$

Definição 2.9. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Uma matriz* P *tal que* $P^H P = P P^H = I$ *é chamada matriz unitária.*

Definição 2.10. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Uma matriz* P *real tal que* $P^T P = P P^T = I$ *é chamada matriz ortogonal.*

Teorema 2.11. [Noble,AlgLinApl-pt,1986]

- *(i) Tanto as colunas quanto as linhas de uma matriz unitária (ou ortogonal) formal um cojunto ortonormal.*
- *(ii) Se* P *é unitária, então* $|detP| = 1$*.*
- *(iii) Se* P *e* Q *são unitárias, então o mesmo acontece com* PQ*.*
- *(iv) Se* P *é unitária, então, para todos os* x *e* y*, temos* $(Px, Py), \|Px\|_2 = \|x\|_2$ *e* $\|P\|_2 = 1$*.*
- *(v) Se* λ *for um autovalor da matriz unitária* P*, então* $|\lambda| = 1$*.*

3 Espaços e Subespaços Vetoriais

Definição 3.1. [Lima,AlgLin,2014] *Chama-se espaço vetorial* E *a um conjunto de elementos chamados vetores, no qual estão definidas duas operações: adição,* $\forall u, v \in \mathsf{E} \Rightarrow u + v \in \mathsf{E}$*, e multiplicação* $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathsf{E} \Rightarrow \alpha v \in \mathsf{E}$*. Sejam,* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, u, v \in \mathsf{E}$*. As operações de adição e multiplicação também devem satisfazer os seguintes axiomas:*

comutatividade $u + v = v + u$

associatividade $(u + v) + w = v + (u + w)$ *e* $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$

vetor nulo *existe um vetor* $0 \in \mathsf{E}$*, tal que* $v + 0 = 0 + v$ *para todo* $v \in \mathsf{E}$

inverso aditivo *para cada vetor* $v \in \mathsf{E}$ *existe* $-v \in \mathsf{E}$ *tal que* $v + (-v) = 0$

distributividade $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ *e* $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$

multiplicação por 1 $1v = v$

Definição 3.2. [Lima,AlgLin,2014] *Seja* E *um espaço vetorial, Um subespaço vetorial de* E *é um subconjunto* $F \subset E$ *com as seguintes propriedades:*

vetor nulo *existe um vetor* $0 \in F$

fechamento da soma $\forall u, v \in F \Rightarrow u + v \in F$

fechamento produto com escalar $\forall v \in E \Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha v \in F$

Definição 3.3. [Lima,AlgLin,2014] *Seja* $F_1, F_2 \subset E$, $F_1 + F_2 := \{v_1 + v_2 : v_1 \in F_1 \wedge v_2 \in F_2\}$.

Definição 3.4. [Lima,AlgLin,2014] *Seja* $F_1, F_2 \subset E \wedge F_1 \cap F_2 = \{0_v\}$, *chama-se de soma direta entre* F_1 *e* F_2, *denotado como* $F_1 \oplus F_2$, $F_1 \oplus F_2 := F_1 \cup F_2$.

Teorema 3.5. [Lima,AlgLin,2014] *Sejam* F, F_1, F_2 *subespaços vetoriais de* E *com* $F_1 \subset F$ *e* $F_2 \subset F$. *São equivalentes:*

- $F = F_1 \oplus F_2$
- $\forall w \in F$ *se escreve, de modo único, como a soma* $w = v_1 + v_2$, *onde* $v_1 \in F_1$, *e* $v_2 \in F_2$

Definição 3.6. [Lima,AlgLin,2014] *Seja* E *um espaço vetorial. Se* $x, y \in E$ *e* $x \neq y$, *a reta que une os pontos* x, y *é, por definição o conjunto:* $r = \{(1-t)x + ty; t \in \mathbb{R}\}$.

Definição 3.7. [Lima,AlgLin,2014] *Um subconjunto* $V \in E$ *chama-se uma variedade afim quando a reta que une dois pontos quaisquer de* V *está contida em* V. *Assim* $V \in E$ *é uma variedade afim se, e somente se, cumpre a seguinte condição:*

$$x, y \in V, t \in \mathbb{R} \Rightarrow (1-t)x + ty \in V.$$

Teorema 3.8. [Lima,AlgLin,2014] *Se* $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n \subset E$ *são variedades afins, estão a interseção* $V = V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap \ldots, \cap V_n$ *também é uma variedade afim.*

Teorema 3.9. [Lima,AlgLin,2014] *Todo ponto* $p \in E$ *é uma variedade afim.*

Teorema 3.10. [Lima,AlgLin,2014] *Seja* V *uma variedade afim não-vazia no espaço vetorial* V. *Existe um único subespaço vetorial* $F \subset E$ *tal que,* $\forall x \in V$ *tem-se* $V = x + F = \{x + v : v \in F\}$.

4 Bases

Considere V um espaço vertorial sobre K.

Definição 4.1. [Coelho,AlgLin,2013] *Um vetor* $v \in \mathsf{V}$ *é uma combinação linear dos vetores* $v_1, \ldots, v_n \in \mathsf{V}$ *se existirem escalares* $\alpha_1, \ldots \alpha_n \in \mathsf{K}$ *tais que:*

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i v_i$$

Definição 4.2. [Coelho,AlgLin,2013] *Seja* $\mathcal{B}$ *um subconjunto de* V. *Dizemos que* $\mathcal{B}$ *é um conjunto gerador de* V *se todos os elementos de* V *for uma combinação linear de um número finito de elementos de* $\mathcal{B}$.

Definição 4.3. [Coelho,AlgLin,2013] *O conjunto vazio gera o espaço vetorial* 0.

Definição 4.4. [Coelho,AlgLin,2013] *Seja* $\mathcal{B}$ *um subconjunto de* V. *Dizemos que* $\mathcal{B}$ *é linearmente independente (ou l.i.) se* $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$, *para* $v_i \in \mathcal{B}$ *e* $\alpha_i \in \mathsf{K}$, $i = 0, \ldots, n$ *implica* $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Definição 4.5. [Lima,AlgLin,2014] *Seja* E *um espaço vetorial. Diz-se que um conjunto* $X \subset E$ *é linearmente independente (LI) quando nenhum vetor* $v \in X$ *é combinação linear de outros elementos de* X *ou se* X *tem somente um elemento não nulo.*

[Coelho,AlgLin,2013] *Dizemos que um subconjunto* $\mathcal{B}$ *de* V *é uma base de* V *se:*
(i) $\mathcal{B}$ *for um subconjunto gerador de* V
(ii) $\mathcal{B}$ *for linearmente independente.*

Definição 4.6. [Coelho,AlgLin,2013] *O conjunto vazio é uma base do espaço vetorial* 0.

Teorema 4.7. [Lima,AlgLin,2014] *Seja* X *um conjunto LI de um espaço vetorial* E. $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots + \alpha_m v_m$ *com* $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m \in X \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_m = 0$

Corolário 4.8. [Lima,AlgLin,2014] *Se* $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots + \alpha_m v_m = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 + \cdots + \beta_m v_m$ *e os vetores* $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m$ *são LI então* $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \alpha_3 = \beta_3, \ldots, \alpha_m = \beta_m$.

Teorema 4.9. [Lima,AlgLin,2014] *Sejam* $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m$ *vetores não nulos do espaço vetorial* E. *Se nenhum deles é combinação linear dos anteriores então* $X = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m\}$ *é LI.*

Definição 4.10. [Lima,AlgLin,2014] *Um conjunto $X \in E$ é linearmente dependente (LD) quando não é LI. Ou seja, $X = \{0_v\}$ ou $\exists v \in X$ tal que v é combinação linear de outros elementos em X.*

Definição 4.11. [Lima,AlgLin,2014] *Uma base de um espaço vetorial E é um conjunto $\mathcal{B} \subset \mathsf{E}$ linearmente independente que gera E. Ou seja, $\forall v \in \mathsf{E}$ se exprime, de modo único como combinação linear $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots + \alpha_m v_m$, $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m \in \mathcal{B}$. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m$ são coordenadas do vetor v na base $\mathcal{B}$.*

Definição 4.12. [Coelho,AlgLin,2013] *Dizemos que V é finitamente gerado se possuir um gerador finito.*

Proposição 4.13. [Coelho,AlgLin,2013] *Seja V um K espaço vetorial finitamente gerado não nulo e assuma $\{v_1, \ldots, v_m\}$ seja um conjunto gerador de V. Então todo conjunto linearmente independente de vetores em V tem no máximo m elementos.*

Corolário 4.14. [Coelho,AlgLin,2013] *Seja V um K espaço vetorial finitamente gerado não nulo. Então duas bases qualquer de V têm o mesmo número de elementos.*

Definição 4.15. [Lima,AlgLin,2014] *Um sistema linear é chamado homogêneo quando o segundo membro de cada equação é igual a zero.*

Teorema 4.16. [Lima,AlgLin,2014] *Todo sistema linear homogêneo cujo número de incógnitas é maior do que o número de equações admite uma solução não trivial.*

Teorema 4.17. [Lima,AlgLin,2014] *Se os vetores $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m$ geram o espaço vetorial E então qualquer conjunto com mais de m vetores em E é LD*

Teorema 4.18. [Lima,AlgLin,2014] *Se os vetores $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m$ geram o espaço vetorial E e os vetores $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ são LI, então $n \leq m$.*

Teorema 4.19. [Lima,AlgLin,2014] *Se o espaço vetorial E admite uma base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\}$ com n elementos, qualquer outra base de E possui também n elementos.*

Definição 4.20. [Lima,AlgLin,2014] *Diz-se que o espaço vetorial E tem dimensão finita quando admite uma base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ com um número finito n de elementos. Este número, que é igual para todas as bases de E, chama-se a dimensão do espaço vetorial E. Denotado por $dim\mathsf{E} := n$. Diz-se que o espaço vetorial $\mathsf{E} = \{0_v\}$ tem dimensão zero*

Teorema 4.21. [Lima,AlgLin,2014] *Se a dimensão de E é n, um conjunto com n vetores, gera E se, e somente se, é LI.*

Teorema 4.22. [Lima,AlgLin,2014] *Seja E um espaço vetorial de dimensão finita n, então:*
- *Todo conjunto X de geradores de E contém uma base.*
- *Todo conjunto LI $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\} \subset \mathsf{E}$ está contido numa base.*
- *Todo subespaço vetorial $\mathsf{F} \subset \mathsf{E}$ tem dimensão finita a qual $\leq n$.*
- *Se a dimensão do subespaço $\mathsf{F} \subset \mathsf{E}$ é igual a n, então $\mathsf{F} = \mathsf{E}$*

Definição 4.23. [Lima,AlgLin,2014] *Diz-se que o espaço vetorial E tem dimensão infinita quando não tem dimensão finita. Ou seja, quando nenhum subconjunto finito de E é uma base.*

Definição 4.24. [Lima,AlgLin,2014] *Diz-se que a variedade afim de $V \subset \mathsf{E}$ tem dimensão r quando $V = x + \mathsf{F}$, onde o subespaço vetorial $\mathsf{F} \subset \mathsf{E}$.*

5 Transformações Lineares

Definição 5.1. [Lima,AlgLin,2014] *Sejam E, F espaços vetoriais. Uma transformação linear $A : \mathsf{E} \to \mathsf{F}$ é uma correspondência que associa a cada vetor $v \in \mathsf{E}$ um vetor $A(v) = Av \in \mathsf{F}$ de modo que valham, para quaisquer $u, v \in \mathsf{E}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, as relações:*
- $A(u + v) = Au + Av$
- $A(\alpha v) = \alpha Av$

Definição 5.2. [Lima,AlgLin,2014] *Seja $\mathcal{L}(\mathsf{E}; \mathsf{F})$, espaço vetorial dos conjunto das transformações lineares de E para F. $\mathcal{L}(\mathsf{E}) := \mathcal{L}(\mathsf{E}; \mathsf{E})$, $A : \mathsf{E} \to \mathsf{E}$ chamado de operador linear em E. E $\mathsf{E}^* := \mathcal{L}(\mathsf{E}; \mathbb{R})$, $\varphi : \mathsf{E} \to \mathbb{R}$, chamados funcionais lineares. O conjunto dos funcionais lineares E^* de dual de E*

Teorema 5.3. [Lima,AlgLin,2014] *Sejam E, F espaços vetoriais e $\mathcal{B}$ uma base de E. A cada vetor $u \in \mathcal{B}$, façamos corresponder (de maneira arbitrária) um vetor $u' \in \mathsf{F}$. Então existe uma única transformação linear $A : \mathsf{E} \to \mathsf{F}$ tal que $Au = u', \forall u \in \mathcal{B}$.*

Definição 5.4. [Lima,AlgLin,2014] *Dadas as transformações lineares $A : \mathsf{E} \to \mathsf{F}$, $B : \mathsf{F} \to \mathsf{G}$, $D(B) = CD(A)$. Define-se o produto $BA : \mathsf{A} \to \mathsf{G}, \forall v \in \mathsf{E}, (BA)v = B(Av)$*

Dadas as transformações lineares $A : \mathsf{E} \to \mathsf{F}$, $B : \mathsf{F} \to \mathsf{G}$, $C : \mathsf{G} \to \mathsf{H}$. Temos as seguintes propriedades:
Associatividade $(\mathsf{CB})\mathsf{A} = \mathsf{C}(\mathsf{BA})$
Distributiva à esquerda $(\mathsf{B} + \mathsf{C})\mathsf{A} = \mathsf{BA} + \mathsf{CA}$
Distributiva à direita $\mathsf{C}(\mathsf{A} + \mathsf{B}) = \mathsf{CA} + \mathsf{CB}$
Homogeneidade $\mathsf{B}(\alpha\mathsf{A}) = \alpha(\mathsf{BA})$

Definição 5.5. [Lima,AlgLin,2014] *Um operador A chama-se nilpotente quando, para algum $n \in \mathbb{N}$, tem-se $A^n = 0$. Um exemplo significativo de um operador nilpotente é a derivação $D : P_n \to P_n$. Para todo polinômio p de grau $\leq n$ tem-se $D^{n+1}p = 0$, logo $D^{n+1} = 0$.*

6 Núcleo e Imagem

Considerando a transformação linear $A : \mathsf{E} \to \mathsf{F}$ sendo, E, F dois espaços vetoriais.

Definição 6.1. [Lima,AlgLin,2014] *A imagem de A é o subconjunto $\mathcal{I}m(A) := \{w \in \mathsf{F} : w = Av, \forall v \in \mathsf{E}\}$.*

Definição 6.2. [Lima,AlgLin,2014] *Se $\mathcal{I}m(A) = \mathsf{F}$, diz que A é sobrejetiva.*

Definição 6.3. [Lima,AlgLin,2014] *Uma transformação linear $B : \mathsf{F} \to \mathsf{E}$ chama-se inversa à direita da transformação A, quando tem $AB = I_F$, ou seja, $A(Bw) = w, \forall w \in \mathsf{F}$.*

Teorema 6.4. [Lima,AlgLin,2014] *Uma transformação linear $A : \mathsf{E} \to \mathsf{F}$ entre espaços vetoriais de dimensões finitas possui uma inversa à direita se, e somente se A é sobrejetiva.*

Definição 6.5. [Lima,AlgLin,2014] *O núcleo de A é o subconjunto $\mathcal{N}(A) := \{v \in \mathsf{E} : Av = 0\}$.*

Definição 6.6. [Lima,AlgLin,2014] *Uma transformação linear $A : \mathsf{E} \to \mathsf{F}$ chama-se injetiva $\Leftrightarrow \forall v, v' \in \mathsf{E}, v \neq v' \Rightarrow Av \neq Av', Av, Av' \in \mathsf{F}$.*

Teorema 6.7. [Lima,AlgLin,2014] *Uma transformação linear $A : \mathsf{E} \to \mathsf{F}$ é injetiva $\Leftrightarrow \mathcal{N}(A) = \{0_v\}$.*

Teorema 6.8. [Lima,AlgLin,2014] *Uma transformação linear $A : \mathsf{E} \to \mathsf{F}$ é injetiva $\Leftrightarrow$ leva vetores LI para vetores LI.*

Teorema 6.9. [Lima,AlgLin,2014] *Seja $A : \mathsf{E} \to \mathsf{F}$ uma transformação linear. $V = \{x \in \mathsf{E} : Ax = b, \forall b \in \mathcal{I}m(A)\}$ é uma variedade afim paralela a $\mathcal{N}(A)$.*

Definição 6.10. [Lima,AlgLin,2014] *Uma transformação linear $B : \mathsf{F} \to \mathsf{E}$ chama-se inversa à esquerda da transformação A, quando tem $BA = I_E$, ou seja, $B(Aw) = w, \forall w \in \mathsf{F}$.*

Teorema 6.11. [Lima,AlgLin,2014] *Uma transformação linear $A : \mathsf{E} \to \mathsf{F}$ entre espaços vetoriais de dimensões finitas possui uma inversa à esquerda se, e somente se A é injetiva.*

Definição 6.12. [Lima,AlgLin,2014] *Uma transformação linear $A : \mathsf{E} \to \mathsf{F}$ chama-se inversível quando existe $B : \mathsf{F} \to \mathsf{E}$ linear tal que $BA = I_E$ e $AB = I_F$, quando B é ao mesmo tempo inversa pela esquerda e à direta de A. B é inversa de A e denota-se $B = A^{-1}$.*

Teorema 6.13. [Lima,AlgLin,2014] *Se uma transformação linear A é inversível é equivalente dizer:*
- *A é injetiva e sobrejetiva ou seja, A é uma bijeção linear entre E e F.*
- *$A : \mathsf{E} \to \mathsf{F}$ é um isomorfismo e os espaços vetoriais E e F são isomorfos.*
- *A tem uma inversa à esquerda $B : \mathsf{F} \to \mathsf{E}$ e uma inversa à direita $C : \mathsf{F} \to \mathsf{E}$ então $B = C$ e A é um isomorfismo, com $A^{-1} = B = C$.*

Teorema 6.14. [Lima,AlgLin,2014] *Uma transformação linear $A : \mathsf{E} \to \mathsf{F}$ e $B : \mathsf{F} \to \mathsf{G}$ temos:*
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$, $\alpha \neq 0$

Teorema 6.15. [Lima,AlgLin,2014] *[Teorema do Núcleo e da Imagem] Sejam E, F espaços vetoriais de dimensão finita. Para toda transformação linear $A : \mathsf{E} \to \mathsf{F}$ tem-se dim $\mathsf{E} =$ dim $\mathcal{N}(A) +$ dim $\mathcal{I}m(A)$*

Corolário 6.16. [Lima,AlgLin,2014] *Sejam E, F espaços vetoriais de **mesma dimensão finita**. Uma transformação linear $A : \mathsf{E} \to \mathsf{F}$ é injetiva se, e somente se, é sobrejetiva, portantdo é um isomorfismo.*

7 Produto Interno

Definição 7.1. [Lima,AlgLin,2014] *Um produto interno num espaço vetorial* E *é um funcional bilinear simétrico e positivo em* E. *É uma função* $\mathsf{E} \times \mathsf{E} \to \mathbb{R}$, *que associa cada par de vetores* $u, v \in \mathsf{E}$ *a um número real* $\langle u, v \rangle$ *de modo que sejam válidas as seguintes propriedades:*

Bilinearidade

$$\langle u + u', v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u', v \rangle$$
$$\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$$
$$\langle u, v + v' \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, v' \rangle$$
$$\langle u, \alpha v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$$

Comutatividade (simetria)

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$$

Positividade

$$\langle u, u \rangle > 0, u \neq 0$$

Definição 7.2. [Lima,AlgLin,2014] *Seja* E *um espaço vetorial com produto interno,* $u, v \in \mathsf{E}$. u *e* v *são ortogonais* $\Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0$. *Denotado como* $u \perp v$.

Definição 7.3. [Lima,AlgLin,2014] *Seja* E *um espaço vetorial com produto interno, Um conjunto* $X \subset \mathsf{E}$. $\forall u, v \in X$ *tal que* $u \neq v \wedge u \perp v$ *diz que* X *é ortogonal. Se todos os vetores em* X *são unitários* X *é um conjunto ortonormal.*

Teorema 7.4. [Lima,AlgLin,2014] *Num espaço vetorial* E *com produto interno, todo conjunto ortogonal* X *de vetores não nulos é LI.*