Resumo Álgebra Linear

Gino Chen Hsiang-Jan

26 de Outubro de 2015

Contents

1 Projeção ortogonal 2

2 Matrizes 3

3 Processo de Gram-Schmidt 3

4 Decomposição QR via Gram-Schmidt 3

5 Transformação Householder 4

6 Decomposição de QR via Householder 4

7 Decomposição de Schur 5

8 Decomposição em Valores Singulares 6

1 Projeção ortogonal

Definição 1.1. [Anton,AlgLinApl-pt,2010] *Dizemos que dois vetores não nulos u e v em $\mathbb{R}^n$ são ortogonais (ou perpendiculares) se $u.v = 0$. Também convencionamos que o vetor nulo em $\mathbb{R}^n$ é ortogonal a cada vetor em $\mathbb{R}^n$. Um conjunto não vazio de vetores em $\mathbb{R}^n$ é denominado ortogonal se dois quaisquer de seus vetores forem ortogonais. Um conjunto ortogonal de vetores unitários é dito ortonormal.*

Teorema 1.2. [Anton,AlgLinApl-pt,2010]

(a) Se a e b constantes não ambas nulas, então uma equação da forma:

$$ax + by + c = 0$$

representa uma reta em $\mathbb{R}^2$ de normal $n = (a, b)$.

(b) Se a, b e c constantes não ambas nulas, então uma equação da forma:

$$ax + by + cz + d = 0$$

representa um plano em $\mathbb{R}^3$ de normal $n = (a, b, c)$.

Teorema 1.3. [Anton,AlgLinApl-pt,2010] ***Teorema das projeções*** *Se $u, v \in \mathbb{R}^n$ e se $v \neq 0$, então u pode ser escrito de maneira única na forma $u = w_1 + w_2$, em que w_1 é um múltiplo escalar de v e w_2 é ortogonal a v.*

Definição 1.4. [Anton,AlgLinApl-pt,2010] *No teorema das projeções:*
w_1 é chamado de projeção ortogonal de u ou componente vetorial de u ao longo de v e denotado como $proj_v u$ e pode ser calculado por:

$$w_1 = proj_v u = \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v$$

w_2 é chamado de componente vetorial de u a v e pode ser calculado por:

$$w_2 = u - proj_v u = u - \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v$$

Definição 1.5. [Anton,AlgLinApl-pt,2010] *Dizemos que um conjunto de dois ou mais vetores num espaço com produto interno é **ortogonal** se quaisquer dois vetores distintos do conjunto forem ortogonais.*

Definição 1.6. [Anton,AlgLinApl-pt,2010] *Um conjunto ortogonal no qual cada vetor tem normal 1 é **ortonormal**.*

Teorema 1.7. [Anton,AlgLinApl-pt,2010] *Se $\mathsf{S} = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ for um conjunto ortogonal de vetores não nulos num espaço com produto interno, então S é linearmente independente*

Teorema 1.8. [Anton,AlgLinApl-pt,2010] *Se $\mathsf{S} = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ for uma base ortogonal de espaço com produto interno V e $u \in \mathsf{V}$ então :*

$$u = \frac{\langle u, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle u, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2 + \frac{\langle u, v_3\rangle}{\|v_3\|^2} v_3 + \cdots + \frac{\langle u, v_n\rangle}{\|v_n\|^2} v_n$$

Teorema 1.9. [Anton,AlgLinApl-pt,2010] *Se $\mathsf{S} = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ for uma base ortonormal de espaço com produto interno V e $u \in \mathsf{V}$ então :*

$$u = \langle u, v_1\rangle v_1 + \langle u, v_2\rangle v_2 + \langle u, v_3\rangle v_3 + \cdots + \langle u, v_n\rangle v_n$$

Teorema 1.10. [Anton,AlgLinApl-pt,2010] *Seja W um subespaço de dimensão finita de um espaço vetorial com produto interno V*
(a) Se $\mathsf{S} = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ for uma base ortogonal de W e $u \in \mathsf{V}$ então :

$$u = \frac{\langle u, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle u, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2 + \frac{\langle u, v_3\rangle}{\|v_3\|^2} v_3 + \cdots + \frac{\langle u, v_n\rangle}{\|v_n\|^2} v_n$$

(b) Se $\mathsf{S} = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ for uma base ortonormal de W e $u \in \mathsf{V}$ então :

$$u = \langle u, v_1\rangle v_1 + \langle u, v_2\rangle v_2 + \langle u, v_3\rangle v_3 + \cdots + \langle u, v_n\rangle v_n$$

Teorema 1.11. [Anton,AlgLinApl-pt,2010] *Cada espaço vetorial não nulo de dimensão finita possui alguma base ortonormal.*

2 Matrizes

Definição 2.1. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Chama-se de matriz transposta hermitiana, denotado por A^H, $A^H = \overline{A}^t$, que é a complexa cojugada da transposta ordinária.*

Definição 2.2. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Chama-se de matriz hermitiana uma matriz tal que $A^H = A$.*

Lema 2.3. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Uma matriz hermitiana é a soma de uma matriz real simétrica e de uma matriz imaginária anti-simétrica.*

Lema 2.4. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *As propriedades de matrizes são válidas:*
- $\overline{AB} = \overline{A}.\overline{B}$
- $(\overline{A})^t = (\overline{A^t})$

Definição 2.5. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Uma matriz P tal que $P^H P = PP^H = I$ é chamada matriz unitária.*

Definição 2.6. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Uma matriz P real tal que $P^T P = PP^T = I$ é chamada matriz ortogonal.*

Teorema 2.7. [Noble,AlgLinApl-pt,1986]
(i) Tanto as colunas quanto as linhas de uma matriz unitária (ou ortogonal) formal um cojunto ortonormal.
(ii) Se P é unitária, então $|detP| = 1$.
(iii) Se P e Q são unitárias, então o mesmo acontece com PQ.
(iv) Se P é unitária, então, para todos os x e y, temos $(Px, Py), \|Px\|_2 = \|x\|_2$ e $\|P\|_2 = 1$.
(v) Se λ for um autovalor da matriz unitária P, então $|\lambda| = 1$.

Definição 2.8. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Uma matriz quadrada A que satisfaz $A^H A = AA^H$ é chamada matriz normal.*

Lema 2.9. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Seja A uma matriz quadrada.*
(i) Matrizes hermitianas são normais, ou seja $A^H A = AA^H = AA$
(ii) Se A é uma matriz real, $A^T A = AA^T = AA$, A é simétrico.

3 Processo de Gram-Schmidt

[Anton,AlgLinApl-pt,2010] Para converter uma base $\{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\}$ numa base ortogonal $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$, efetue as seguintes contas:

$$\begin{aligned}
&v_1 = u_1 \\
&v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 \\
&v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2 \\
&\vdots \\
&v_n = u_n - \frac{\langle u_n, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_n, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2 - \frac{\langle u_n, v_3\rangle}{\|v_3\|^2} v_3 + \cdots - \frac{\langle u_n, v_n\rangle}{\|v_n\|^2} v_n
\end{aligned}$$

Para converter a base ortogonal numa base ortonormal $\{q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n\}$ normalize os vetores da base ortonormal:

$$q_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}, i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

4 Decomposição QR via Gram-Schmidt

[Anton,AlgLinApl-pt,2010] Seja A uma matriz $m \times n$ tal que $A = [u_1\, u_2\, u_3 \ldots u_n]$ e $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ são vetores de dimensão m linearmente independentes. Existe uma matriz $Q = [q_1\, q_2\, q_3 \ldots q_n]$, através do processo de

Gram-Schmidt, formado por uma base ortonormal projetados pelos vetores de $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$. Temos então:

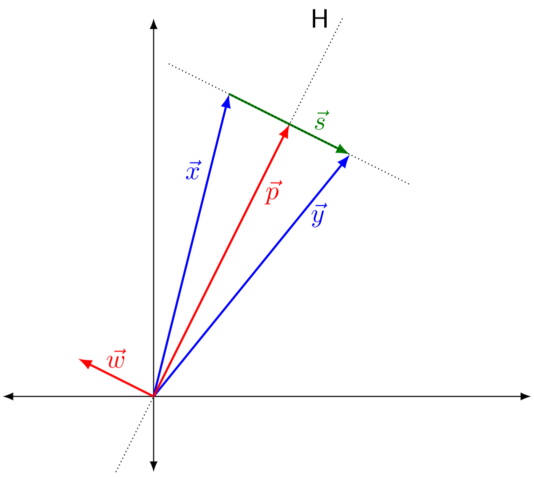
$$\begin{cases} u_1 = \langle u_1, q_1\rangle q_1 + \langle u_1, q_2\rangle q_2 + \langle u_1, q_3\rangle q_3 + \ldots \langle u_1, q_n\rangle q_n \\ u_2 = \langle u_2, q_1\rangle q_1 + \langle u_2, q_2\rangle q_2 + \langle u_2, q_3\rangle q_3 + \ldots \langle u_2, q_n\rangle q_n \\ u_3 = \langle u_3, q_1\rangle q_1 + \langle u_3, q_2\rangle q_2 + \langle u_3, q_3\rangle q_3 + \ldots \langle u_3, q_n\rangle q_n \\ \vdots \\ u_n = \langle u_n, q_1\rangle q_1 + \langle u_n, q_2\rangle q_2 + \langle u_n, q_3\rangle q_3 + \ldots \langle u_n, q_n\rangle q_n \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$A = QR = [q_1\, q_2\, q_3 \ldots q_n] \begin{bmatrix} \langle u_1, q_1\rangle & \langle u_1, q_2\rangle & \langle u_1, q_3\rangle & \ldots & \langle u_1, q_n\rangle \\ 0 & \langle u_2, q_2\rangle & \langle u_2, q_3\rangle & \ldots & \langle u_2, q_n\rangle \\ 0 & 0 & \langle u_3, q_3\rangle & \ldots & \langle u_3, q_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \langle u_n, q_n\rangle \end{bmatrix}$$

5 Transformação Householder

[Noble,AlgLinApl-pt,1986] Seja V um espaço vetorial de corpo K munido de produto interno, $w \in \mathsf{V}$ e $\mathsf{H} \subset \mathsf{V}$ tal que H é um hiperplano normal a w. Deseja-se achar a matriz de transformação H_w, onde dado qualquer $x \in \mathsf{V}$ desejamos encontrar um $y \in \mathsf{V}$ tal que y é reflexão de x em relação a H.

Para tal finalidade, usaremos uma representação em $\mathbb{R}^2$ para melhor visualizar a dedução.



Na figura acima, p como a projeção de x em H e s é combinação linear de w.

Projeção de x em $p - x$:

$$p - x = -\frac{\langle w, x\rangle}{\langle w, w\rangle} w$$

temos também:

$$s = 2(p - x) = -2\frac{\langle w, x\rangle}{\langle w, w\rangle} w$$

A reflexão y é $y = x + s$, então:

$$y = x - 2\frac{\langle w, x\rangle}{\langle w, w\rangle} w = x - 2\frac{\langle w, x\rangle w}{\langle w, w\rangle} = x - 2\frac{w\langle w, x\rangle}{\langle w, w\rangle}$$

$$y = x - \frac{2}{w^t w} w.w^t x \Leftrightarrow y = \left(I - \frac{2}{w^t w} w.w^t\right) x$$

Definimos a transformação linear H_w como:

$$H_w(x) = \left(I - \frac{2}{w^t w} w.w^t\right) x$$

6 Decomposição de QR via Householder

Algorithm: Householder QR Factorization

```
A_0  =  A
for  k  =  1  to  n
```
$x = A_{k:m,k}$

$v_k = x - sign(x_1)\|x\|_2 e_1$

$$H_k = \begin{pmatrix} Id(k-1) & 0 \\ 0 & Id(n-k+1) - 2\frac{v_k v_k^*}{v_k^* v_k} \end{pmatrix}$$

$A_k = H_k A_{k-1}$

$H_k = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$

$Q = H_1 H_2 H_3 \dots H_n$

Como: $A = QR$ temos:

$A = H_n \dots H_3 H_2 H_1 A H_1^* H_2^* H_3^* \dots H_n^* = QR$

7 Decomposição de Schur

Teorema 7.1. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Qualquer matriz quadrada A, $n \times n$ pode ser reduzida, por uma transformação unitária $P^H AP$, a uma matriz T triangular superior com os autovalores de A sobre a diagonal de T. Chamamos T uma forma canônica de Schur para A e a decomposição $A = PTP^H$ é chamada de uma decomposição de Schur de A. Se A e seus autovalores são reais, então podemos também tomar P real.*

Algoritmo:
Dado uma matriz quadrada A, $n \times n$:

1. Achar os n autovalores, $\lambda_1 \dots, \lambda_n$
2. $A_0 \leftarrow A$.
3. Para $i = 1, \dots, n-1$ faça os passos abaixo:
   - 3.1. $Q_i = [\, v_i \, W_i \,]$ e $W_i = [\, w_{i+1} \, \dots \, w_n \,]$ onde v_i é o autovetor **normalizado** associado a λ_i na matriz A_i e $w_{i+1} \dots w_n$ são vetores normais a v_i escolhidos arbitrariamente. (preencha com vetores normais) tal que Q_i seja unitário. Lembrando que $W_i^H v_i = 0$.
   - 3.2. Seja A_i de dimensão $n-i+1 \times n-i+1$ e A_{i+1} de dimensão $n-i \times n-i$, faça: A_i é matriz de bloco tal que $A_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & b_i \\ 0 & A_{i+1} \end{bmatrix}$ e $A_i \leftarrow Q_i^H A_{i-1} Q_i$
4. $A_n \leftarrow \lambda_n$ e $P \leftarrow Q_1 Q_2 Q_3 \dots Q_n$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,7 & 0,3 \\ 0,1 & 0,1 & 0,6 \end{bmatrix} \lambda_1 = 0,6 u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ normalizado: } v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0,5$$

$$Q_1 = [\, v_1 \, w_2 \, w_3], w_2, w_3, \text{abritrários para que } Q_1 \text{ seja unitário } Q_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_1^H A Q_1 = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,1 & -0,1\sqrt{2} \\ 0 & 0,9 & 0,2\sqrt{2} \\ 0 & 0,1\sqrt{2} & 0,6 \end{bmatrix} A_1 = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,2\sqrt{2} \\ 0,1\sqrt{2} & 0,6 \end{bmatrix} \lambda_2 = 1 \text{ normalizado: } v_2 = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$Q_2 = [\, v_2 \, w_2], w_2, \text{abritrários para que } Q_2 \text{ seja unitário } Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix}$$

$$Q_2^H Q_1^H A Q_1 Q_2 = \begin{bmatrix} 0,6 & \frac{0,1\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -0,1\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Teorema 7.2. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Uma matriz A, $n \times n$ é normal (simétrica real, hermitiana, anti-simétrica, unitária) se e somente se A pode ser reduzida, por uma transformação unitária, a uma forma canônica de Schur diagonal $D = P^H AP$ onde P é unitária e D é diagonal; os autovalores de A estarão sobre a diagonal de D. Se A e seus autovalores são reais, então podemos tomar P real e, portanto ortogonal.*

Teorema 7.3. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Uma matriz A, $n \times n$ é normal (simétrica real, hermitiana, anti-simétrica, unitária) se e somente se A tem um conjunto linearmente independente de n autovetores que podem ser escolhidos de maneira a formar um conjunto ortonormal. Além disso, no caso de uma matriz normal, um autovalor de multiplicidade s tem associado um conjunto ortonormal de s autovetores.*

8 Decomposição em Valores Singulares

Definição 8.1. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Seja a matriz A, $m \times n$. As raízes quadradas estritamente positivas de σ_i dos autovalores de $A^H A = A^H A$ são chamados de valores singulares de A.*

Teorema 8.2. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Suponha a matriz A, $m \times n$ tem posto k. Existem então números $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \ldots \sigma_k > 0$, os valores singulares (definição 8.1) de A uma matriz unitária U, $m \times m$, $U = [\, u_1\, u_2\, u_3\, \ldots u_m\,]$ e uma matriz unitária V, $n \times n$, $V = [\, v_1\, v_2\, v_3\, \ldots v_n\,]$ tais que:*

$$\Sigma = U^H A V, \ \textit{onde:} \begin{cases} A \textit{ é } m \times n \\ U \textit{ e } V \textit{ são } m \times m \textit{ e } n \times n \textit{ matrizes unitárias} \\ \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \sigma_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \textit{ é } m \times n \end{cases}$$

Algoritmo:
Dado uma matriz quadrada A, $m \times n$ e $A = U \Sigma V^H$:

1. $A^H A = V \Sigma^H U^H U \Sigma V^H = V(\Sigma^H \Sigma) V^H$, $\sigma_i^2 > 0$ é autovalor de $\Sigma^H \Sigma$ (Teorema 7.2)
2. $AA^H = U \Sigma V^H V \Sigma^H U^H = U(\Sigma \Sigma^H) U^H$, $\sigma_i^2 > 0$ é autovalor de $\Sigma \Sigma^H$ (Teorema 7.2)
3. Calcular $V = [\, v_1\, v_2\, v_3\, \ldots v_n\,]$, onde v_i é o autovetor associado a cada σ_i^2 normalizado da matriz $A^H A$
4. Calcular $U = [\, u_1\, u_2\, u_3\, \ldots u_m\,]$, onde u_i é o autovetor associado a cada σ_i^2 normalizado da matriz AA^H

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} A^H A = \begin{bmatrix} 9 & 9 \\ 9 & 9 \end{bmatrix} \text{tem autovalores } 18, 0 \text{ Valores singulares } \sigma_1 = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Autovetores de $A^H A$ são: $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $V = [v_1\, v_2]$

$$AA^H = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 8 \\ 4 & 8 & 8 \end{bmatrix} \text{tem autovalores } 18, 0, 0$$

Autovetores de AA^Hsão: $u_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_3 = \frac{\sqrt{5}}{15} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$ e $U = [u_1\, u_2\, u_3]$

$$\Sigma = U^H A V = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & -\frac{5\sqrt{5}}{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Não é uma redução válida