1 Corpos

Definição 1.1. [Coelho,AlgLin,2013] *Um conjunto não vazio* K *é um corpo se em* K *pudermos definir duas operações, denotadas por +(adição) e . (multiplicação). satisfazendo as seguintes propriedades:*

propriedade comutativa *(A1)* $a + b = b + a, \forall a, b \in \mathsf{K}$

propriedade associativa *(A2)* $a + (b + c) = (a + b) + c, \forall a, b, c \in \mathsf{K}$

elemento neutro da soma *(A3) Existe um elemento em* K*, denotado por* 0 *e chamado de elemento neutro da adição, que satisfaz* $0 + a = a + 0 = a, \forall a \in \mathsf{K}$

inserso aditivo *(A4) Para cada* $a \in \mathsf{K}$*, existe um número em* K *, denotado por* $-a$ *e chamado de oposto de* a *(ou inverso aditivo de* a*) tal que* $a + (-a) = 0$

propriedade comutativa *(M1)* $a.b = b.a, \forall a, b \in \mathsf{K}$ *(propriedade comutativa)*

propriedade associativa *(M2)* $a.(b.c) = (a.b).c, \forall a, b, c \in \mathsf{K}$ *(propriedade associativa)*

elemento neutro da multiplicação *(M3) Existe um elemento em* K*, denotado por* 1 *e chamado de elemento neutro da multiplicação, tal que* $1.a = a.1 = a, \forall a \in \mathsf{K}$

inverso multiplicativo *(M4) Para cada elemento não nulo* $a \in \mathsf{K}$*, existe um elemento em* K*, denotado por* a^{-1} *e chamando de inverso multiplicativo de* a*, tal que* $a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$*.*

2 Matrizes

Definição 2.1. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Uma matriz anti-simétrica é definida como sendo uma matriz tal que* $A^t = -A$*, ou seja,* $a_{ij} = -a_{ji}$

Lema 2.2. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Uma matriz anti-simétrica é quadrada, e que os elementos da diagonal de uma matriz anti-simétrica são nulos.*

Lema 2.3. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Se* A *é qualquer matriz quadrada, então* $A - A^t$ *é anti-simétrica.*

Definição 2.4. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Uma matriz real é uma cujos elementos são todos reais. Uma matriz complexa tem elementos que podem ser complexos. Uma matriz imaginária tem elementos que são todos imaginários ou nulos. O símbolo* $\overline{A}$ *é usado para represenar a matriz cujo* (i, j)*-ésimo elementos é conjugado complexo* $\overline{a}_{ij}$ *do* (i, j)*-ésimo elemento de* A*.*

Definição 2.5. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Chama-se de matriz transposta hermitiana, denotado por* A^H*,* $A^H = \overline{A}^t$*, que é a complexa cojugada da transposta ordinária.*

Definição 2.6. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Chama-se de matriz hermitiana uma matriz tal que* $A^H = A$*.*

Lema 2.7. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Uma matriz hermitiana é a soma de uma matriz real simétrica e de uma matriz imaginária anti-simétrica.*

Lema 2.8. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *As propriedades de matrizes são válidas:*

- $\overline{AB} = \overline{A}.\overline{B}$
- $(\overline{A})^t = (\overline{A^t})$

Definição 2.9. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Uma matriz* P *tal que* $P^H P = PP^H = I$ *é chamada matriz unitária.*

Definição 2.10. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Uma matriz* P *real tal que* $P^T P = PP^T = I$ *é chamada matriz ortogonal.*

Teorema 2.11. [Noble,AlgLinApl-pt,1986]

(i) Tanto as colunas quanto as linhas de uma matriz unitária (ou ortogonal) formal um cojunto ortonormal.

(ii) Se P *é unitária, então* $|detP| = 1$*.*

(iii) Se P *e* Q *são unitárias, então o mesmo acontece com* PQ*.*

(iv) Se P *é unitária, então, para todos os* x *e* y*, temos* $(Px, Py), \|Px\|_2 = \|x\|_2$ *e* $\|P\|_2 = 1$*.*

(v) Se λ *for um autovalor da matriz unitária* P*, então* $|\lambda| = 1$*.*

Definição 2.12. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Uma matriz quadrada* A *que satisfaz* $A^H A = AA^H$ *é chamada matriz normal.*

Lema 2.13. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] *Seja* A *uma matriz quadrada.*

(i) Matrizes hermitianas são normais, ou seja $A^H A = AA^H = AA$

(ii) Se A *é uma matriz real,* $A^T A = AA^T = AA$*,* A *é simétrico.*

3 Espaços e Subespaços Vetoriais

Definição 3.1. [Lima,AlgLin,2014] *Chama-se espaço vetorial E a um conjunto de elementos chamados vetores, no qual estão definidas duas operações: adição, $\forall u, v \in E \Rightarrow u + v \in E$, e multiplicação $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v \in E \Rightarrow \alpha v \in E$. Sejam, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, u, v \in E$. As operações de adição e multiplicação também devem satisfazer os seguintes axiomas:*

comutatividade $u + v = v + u$
associatividade $(u + v) + w = v + (u + w)$ *e* $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$
vetor nulo *existe um vetor* $0 \in E$*, tal que* $v + 0 = 0 + v$ *para todo* $v \in E$
inverso aditivo *para cada vetor* $v \in E$ *existe* $-v \in E$ *tal que* $v + (-v) = 0$
distributividade $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ *e* $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
multiplicação por 1 $1v = v$

Definição 3.2. [Lima,AlgLin,2014] *Seja E um espaço vetorial, Um subespaço vetorial de E é um subconjunto $F \subset E$ com as seguintes propriedades:*

vetor nulo *existe um vetor* $0 \in F$
fechamento da soma $\forall u, v \in F \Rightarrow u + v \in F$
fechamento produto com escalar $\forall v \in E \Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha v \in F$

Definição 3.3. [Lima,AlgLin,2014] *Seja $F_1, F_2 \subset E$, $F_1 + F_2 := \{v_1 + v_2 : v_1 \in F_1 \wedge v_2 \in F_2\}$.*

Definição 3.4. [Lima,AlgLin,2014] *Seja $F_1, F_2 \subset E \wedge F_1 \cap F_2 = \{0_v\}$, chama-se de soma direta entre F_1 e F_2, denotado como $F_1 \oplus F_2$, $F_1 \oplus F_2 := F_1 \cup F_2$.*

Teorema 3.5. [Lima,AlgLin,2014] *Sejam F, F_1, F_2 subespaços vetoriais de E com $F_1 \subset F$ e $F_2 \subset F$. São equivalentes:*

- $F = F_1 \oplus F_2$
- *$\forall w \in F$ se escreve, de modo único, como a soma $w = v_1 + v_2$, onde $v_1 \in F_1$, e $v_2 \in F_2$*

Definição 3.6. [Lima,AlgLin,2014] *Seja E um espaço vetorial. Se $x, y \in E$ e $x \neq y$, a reta que une os pontos x, y é, por definição o conjunto: $r = \{(1 - t)x + ty; t \in \mathbb{R}\}$.*

Definição 3.7. [Lima,AlgLin,2014] *Um subconjunto $V \in E$ chama-se uma variedade afim quando a reta que une dois pontos quaisquer de V está contida em V. Assim $V \in E$ é uma variedade afim se, e somente se, cumpre a seguinte condição:*

$$x, y \in V, t \in \mathbb{R} \Rightarrow (1 - t)x + ty \in V.$$

Teorema 3.8. [Lima,AlgLin,2014] *Se $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n \subset E$ são variedades afins, estão a interseção $V = V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap \ldots, \cap V_n$ também é uma variedade afim.*

Teorema 3.9. [Lima,AlgLin,2014] *Todo ponto $p \in E$ é uma variedade afim.*

Teorema 3.10. [Lima,AlgLin,2014] *Seja V uma variedade afim não-vazia no espaço vetorial V. Existe um único subespaço vetorial $F \subset E$ tal que, $\forall x \in V$ tem-se $V = x + F = \{x + v : v \in F\}$.*

4 Bases

Considere V um espaço vertorial sobre K.

Definição 4.1. [Coelho,AlgLin,2013] *Um vetor $v \in \mathsf{V}$ é uma combinação linear dos vetores $v_1, \ldots, v_n \in \mathsf{V}$ se existirem escalares $\alpha_1, \ldots \alpha_n \in \mathsf{K}$ tais que:*

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i v_i$$

Definição 4.2. [Coelho,AlgLin,2013] *Seja $\mathcal{B}$ um subconjunto de V. Dizemos que $\mathcal{B}$ é um conjunto gerador de V se todos os elementos de V for uma combinação linear de um número finito de elementos de $\mathcal{B}$.*

Definição 4.3. [Coelho,AlgLin,2013] *O conjunto vazio gera o espaço vetorial 0.*

Definição 4.4. [Coelho,AlgLin,2013] *Seja $\mathcal{B}$ um subconjunto de V. Dizemos que $\mathcal{B}$ é linearmente independente (ou l.i.) se $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$, para $v_i \in \mathcal{B}$ e $\alpha_i \in \mathsf{K}$, $i = 0, \ldots, n$ implica $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.*

Definição 4.5. [Lima,AlgLin,2014] *Seja E um espaço vetorial. Diz-se que um conjunto $X \subset E$ é linearmente independente (LI) quando nenhum vetor $v \in X$ é combinação linear de outros elementos de X ou se X tem somente um elemento não nulo.*

[Coelho,AlgLin,2013] *Dizemos que um subconjunto $\mathcal{B}$ de V é uma base de V se:*
(i) $\mathcal{B}$ for um subconjunto gerador de V
(ii) $\mathcal{B}$ for linearmente independente.

Definição 4.6. [Coelho,AlgLin,2013] *O conjunto vazio é uma base do espaço vetorial* 0.

Teorema 4.7. [Lima,AlgLin,2014] *Seja* X *um conjunto LI de um espaço vetorial* E. $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots + \alpha_m v_m$ *com* $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m \in X \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_m = 0$

Corolário 4.8. [Lima,AlgLin,2014] *Se* $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots + \alpha_m v_m = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 + \cdots + \beta_m v_m$ *e os vetores* $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m$ *são LI então* $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \alpha_3 = \beta_3, \ldots, \alpha_m = \beta_m$.

Teorema 4.9. [Lima,AlgLin,2014] *Sejam* $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m$ *vetores não nulos do espaço vetorial* E. *Se nenhum deles é combinação linear dos anteriores então* $X = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m\}$ *é LI.*

Definição 4.10. [Lima,AlgLin,2014] *Um conjunto* $X \in \mathsf{E}$ *é linearmente dependente (LD) quando não é LI. Ou seja,* $X = \{0_v\}$ *ou* $\exists v \in X$ *tal que* v *é combinação linear de outros elementos em* X.

Definição 4.11. [Lima,AlgLin,2014] *Uma base de um espaço vetorial* E *é um conjunto* $\mathcal{B} \subset \mathsf{E}$ *linearmente independente que gera* E. *Ou seja,* $\forall v \in \mathsf{E}$ *se exprime, de modo único como combinação linear* $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots + \alpha_m v_m$, $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m \in \mathcal{B}$. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m$ *são coordenadas do vetor* v *na base* $\mathcal{B}$.

Definição 4.12. [Coelho,AlgLin,2013] *Dizemos que* V *é finitamente gerado se possuir um gerador finito.*

Proposição 4.13. [Coelho,AlgLin,2013] *Seja* V *um* K *espaço vetorial finitamente gerado não nulo e assuma* $\{v_1, \ldots, v_m\}$ *seja um conjunto gerador de* V. *Então todo conjunto linearmente independente de vetores em* V *tem no máximo* m *elementos.*

Corolário 4.14. [Coelho,AlgLin,2013] *Seja* V *um* K *espaço vetorial finitamente gerado não nulo. Então duas bases qualquer de* V *têm o mesmo número de elementos.*

Definição 4.15. [Lima,AlgLin,2014] *Um sistema linear é chamado homogêneo quando o segundo membro de cada equação é igual a zero.*

Teorema 4.16. [Lima,AlgLin,2014] *Todo sistema linear homogêneo cujo número de incógnitas é maior do que o número de equações admite uma solução não trivial.*

Teorema 4.17. [Lima,AlgLin,2014] *Se os vetores* $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m$ *geram o espaço vetorial* E *então qualquer conjunto com mais de* m *vetores em* E *é LD*

Teorema 4.18. [Lima,AlgLin,2014] *Se os vetores* $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m$ *geram o espaço vetorial* E *e os vetores* $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ *são LI, então* $n \leq m$.

Teorema 4.19. [Lima,AlgLin,2014] *Se o espaço vetorial* E *admite uma base* $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\}$ *com* n *elementos, qualquer outra base de* E *possui também* n *elementos.*

Definição 4.20. [Lima,AlgLin,2014] *Diz-se que o espaço vetorial* E *tem dimensão finita quando admite uma base* $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ *com um número finito* n *de elementos. Este número, que é igual para todas as bases de* E, *chama-se a dimensão do espaço vetorial* E. *Denotado por* $dim\mathsf{E} := n$. *Diz-se que o espaço vetorial* $\mathsf{E} = \{0_v\}$ *tem dimensão zero*

Teorema 4.21. [Lima,AlgLin,2014] *Se a dimensão de* E *é* n, *um conjunto com* n *vetores, gera* E *se, e somente se, é LI.*

Teorema 4.22. [Lima,AlgLin,2014] *Seja* E *um espaço vetorial de dimensão finita* n, *então:*
- *Todo conjunto* X *de geradores de* E *contém uma base.*
- *Todo conjunto LI* $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\} \subset \mathsf{E}$ *está contido numa base.*
- *Todo subespaço vetorial* $\mathsf{F} \subset \mathsf{E}$ *tem dimensão finita a qual* $\leq n$.
- *Se a dimensão do subespaço* $\mathsf{F} \subset \mathsf{E}$ *é igual a* n, *então* $\mathsf{F} = \mathsf{E}$

Definição 4.23. [Lima,AlgLin,2014] *Diz-se que o espaço vetorial* E *tem dimensão infinita quando não tem dimensão finita. Ou seja, quando nenhum subconjunto finito de* E *é uma base.*

Definição 4.24. [Lima,AlgLin,2014] *Diz-se que a variedade afim de* $V \subset \mathsf{E}$ *tem dimensão* r *quando* $V = x + \mathsf{F}$, *onde o subespaço vetorial* $\mathsf{F} \subset \mathsf{E}$.

5 Transformações Lineares

Definição 5.1. [Lima,AlgLin,2014] *Sejam* E, F *espaços vetoriais. Uma transformação linear* $A : \mathsf{E} \to \mathsf{F}$ *é uma correspondência que associa a cada vetor* $v \in \mathsf{E}$ *um vetor* $A(v) = Av \in \mathsf{F}$ *de modo que valham, para quaisquer* $u, v \in \mathsf{E}$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$, *as relações:*
- $A(u + v) = Au + Av$
- $A(\alpha v) = \alpha Av$

Definição 5.2. [Lima,AlgLin,2014] *Seja $\mathcal{L}(E;F)$, espaço vetorial dos conjunto das transformações lineares de E para F. $\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E;E)$, $A : E \to E$ chamado de operador linear em E. E $E^* := \mathcal{L}(E;\mathbb{R})$, $\varphi : E \to \mathbb{R}$, chamados funcionais lineares. O conjunto dos funcionais lineares E^* de dual de E*

Teorema 5.3. [Lima,AlgLin,2014] *Sejam E, F espaços vetoriais e $\mathcal{B}$ uma base de E. A cada vetor $u \in \mathcal{B}$, façamos corresponder (de maneira arbitrária) um vetor $u' \in F$. Então existe uma única transformação linear $A : E \to F$ tal que $Au = u', \forall u \in \mathcal{B}$.*

Definição 5.4. [Lima,AlgLin,2014] *Dadas as transformações lineares $A : E \to F$, $B : F \to G$, $D(B) = CD(A)$. Define-se o produto $BA : A \to G, \forall v \in E, (BA)v = B(Av)$*

Dadas as transformações lineares $A : \mathsf{E} \to \mathsf{F}$, $B : \mathsf{F} \to \mathsf{G}$, $C : \mathsf{G} \to \mathsf{H}$. Temos as seguintes propriedades:
Associatividade $(CB)A = C(BA)$
Distributiva à esquerda $(B + C)A = BA + CA$
Distributiva à direita $C(A + B) = CA + CB$
Homogeneidade $B(\alpha A) = \alpha(BA)$

Definição 5.5. [Lima,AlgLin,2014] *Um operador A chama-se nilpotente quando, para algum $n \in \mathbb{N}$, tem-se $A^n = 0$. Um exemplo significativo de um operador nilpotente é a derivação $D : P_n \to P_n$. Para todo polinômio p de grau $\leq n$ tem-se $D^{n+1}p = 0$, logo $D^{n+1} = 0$.*

6 Núcleo e Imagem

Considerando a transformação linear $A : \mathsf{E} \to \mathsf{F}$ sendo, E, F dois espaços vetoriais.

Definição 6.1. [Lima,AlgLin,2014] *A imagem de A é o subconjunto $\mathcal{I}m(A) := \{w \in F : w = Av, \forall v \in E\}$.*

Definição 6.2. [Lima,AlgLin,2014] *Se $\mathcal{I}m(A) = F$, diz que A é sobrejetiva.*

Definição 6.3. [Lima,AlgLin,2014] *Uma transformação linear $B : F \to E$ chama-se inversa à direita da transformação A, quando tem $AB = I_F$, ou seja, $A(Bw) = w, \forall w \in F$.*

Teorema 6.4. [Lima,AlgLin,2014] *Uma transformação linear $A : E \to F$ entre espaços vetoriais de dimensões finitas possui uma inversa à direita se, e somente se A é sobrejetiva.*

Definição 6.5. [Lima,AlgLin,2014] *O núcleo de A é o subconjunto $\mathcal{N}(A) := \{v \in E : Av = 0\}$.*

Definição 6.6. [Lima,AlgLin,2014] *Uma transformação linear $A : E \to F$ chama-se injetiva $\Leftrightarrow \forall v, v' \in E, v \neq v' \Rightarrow Av \neq Av', Av, Av' \in F$.*

Teorema 6.7. [Lima,AlgLin,2014] *Uma transformação linear $A : E \to F$ é injetiva $\Leftrightarrow \mathcal{N}(A) = \{0_v\}$.*

Teorema 6.8. [Lima,AlgLin,2014] *Uma transformação linear $A : E \to F$ é injetiva $\Leftrightarrow$ leva vetores LI para vetores LI.*

Teorema 6.9. [Lima,AlgLin,2014] *Seja $A : E \to F$ uma transformação linear. $V = \{x \in E : Ax = b, \forall b \in \mathcal{I}m(A)\}$ é uma variedade afim paralela a $\mathcal{N}(A)$.*

Definição 6.10. [Lima,AlgLin,2014] *Uma transformação linear $B : F \to E$ chama-se inversa à esquerda da transformação A, quando tem $BA = I_E$, ou seja, $B(Aw) = w, \forall w \in F$.*

Teorema 6.11. [Lima,AlgLin,2014] *Uma transformação linear $A : E \to F$ entre espaços vetoriais de dimensões finitas possui uma inversa à esquerda se, e somente se A é injetiva.*

Definição 6.12. [Lima,AlgLin,2014] *Uma transformação linear $A : E \to F$ chama-se inversível quando existe $B : F \to E$ linear tal que $BA = I_E$ e $AB = I_F$, quando B é ao mesmo tempo inversa pela esquerda e à direta de A. B é inversa de A e denota-se $B = A^{-1}$.*

Teorema 6.13. [Lima,AlgLin,2014] *Se uma transformação linear A é inversível é equivalente dizer:*
- *A é injetiva e sobrejetiva ou seja, A é uma bijeção linear entre E e F.*
- *$A : E \to F$ é um isomorfismo e os espaços vetoriais E e F são isomorfos.*
- *A tem uma inversa à esquerda $B : F \to E$ e uma inversa à direita $C : F \to E$ então $B = C$ e A é um isomorfismo, com $A^{-1} = B = C$.*

Teorema 6.14. [Lima,AlgLin,2014] *Uma transformação linear $A : E \to F$ e $B : F \to G$ temos:*
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$, $\alpha \neq 0$

Teorema 6.15. [Lima,AlgLin,2014] *[Teorema do Núcleo e da Imagem] Sejam E, F espaços vetoriais de dimensão finita. Para toda transformação linear $A : E \to F$ tem-se $\dim E = \dim \mathcal{N}(A) + \dim \mathcal{I}m(A)$*

Corolário 6.16. [Lima,AlgLin,2014] *Sejam E, F espaços vetoriais de **mesma dimensão finita**. Uma transformação linear $A : E \to F$ é injetiva se, e somente se, é sobrejetiva, portantdo é um isomorfismo.*

7 Produto Interno

Definição 7.1. [Lima,AlgLin,2014] *Um produto interno num espaço vetorial* E *é um funcional bilinear simétrico e positivo em* E*. É uma função* $\mathsf{E} \times \mathsf{E} \to \mathbb{R}$*, que associa cada par de vetores* $u, v \in \mathsf{E}$ *a um número real* $\langle u, v \rangle$ *de modo que sejam válidas as seguintes propriedades:*

Bilinearidade

$$\langle u + u', v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u', v \rangle$$
$$\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$$
$$\langle u, v + v' \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, v' \rangle$$
$$\langle u, \alpha v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$$

Comutatividade (simetria)

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$$

Positividade

$$\langle u, u \rangle > 0, u \neq 0$$

[Coelho,AlgLin,2013] *Seja* V *um* K*-espaço vetorial, onde* $K = \mathbb{R}$ *ou* $K = \mathbb{C}$*. Um produto interno sobre* V *é uma função* $\langle , \rangle : \mathsf{V} \times \mathsf{V} \to \mathsf{K}$ *que satisfaz as seguintes quatro propriedades:*

P1 $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle, \forall u, v, w \in \mathsf{V}$
P2 $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle, \forall \lambda \in \mathsf{K}, \forall u, v \in \mathsf{V}$
P3 $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}, \forall u, v \mathsf{V}$
P4 $\langle u, u \rangle > 0, u \in \mathsf{V}$ *e* $u \neq 0$

[Coelho,AlgLin,2013] É possível deduzir:

$\langle 0, v \rangle = \langle v, 0 \rangle = 0, \forall v \in \mathsf{V}$
$\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$
P5 $\langle u, v + w \rangle = \overline{\langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle}, \forall u, v, w \in \mathsf{V}$
P6 $\langle u, \lambda v \rangle = \overline{\langle \lambda v, y \rangle} = \overline{\lambda \langle v, u \rangle} = \overline{\lambda} \langle u, v \rangle, \forall \lambda \in \mathsf{K}, \forall u, v \in \mathsf{V}$

Proposição 7.2 (Identidade de Polarização)**.** [Coelho,AlgLin,2013] *Seja* V *um* K*-espaço vetorial com produto interno* $\langle , \rangle$ *e sejam* $u, v \in \mathsf{V}$*.*
Para $\mathsf{K} = \mathbb{R}$*:*

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}\|u + v\|^2 - \frac{1}{4}\|u - v\|^2$$

Para $\mathsf{K} = \mathbb{C}$*:*

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}\|u + v\|^2 - \frac{1}{4}\|u - v\|^2 + \frac{i}{4}\|u + iv\|^2 - \frac{i}{4}\|u - iv\|^2$$

Teorema 7.3 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** [Coelho,AlgLin,2013] *Seja* V *um* K*-espaço vetorial com produto interno* $\langle , \rangle$*. Então*

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|\|v\|, \forall u, v \in \mathsf{V}.$$

A igualdade $|\langle u, v \rangle| = \|u\|\|v\|$ *é válida se e somente se* $\{u, v\}$ *for linearmente dependente.*

Corolário 7.4 (Desigualdade de Triangular)**.** [Coelho,AlgLin,2013] *Seja* V *um* K*-espaço vetorial com produto interno* $\langle , \rangle$*. Então*

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \forall u, v \in \mathsf{V}.$$

Definição 7.5. [Lima,AlgLin,2014] *Seja* E *um espaço vetorial com produto interno,* $u, v \in \mathsf{E}$*.* u *e* v *são ortogonais* $\Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0$*. Denotado como* $u \perp v$*.*

[Coelho,AlgLin,2013] *Seja* V *um* K*-espaço vetorial com produto interno* $\langle , \rangle$ *e sejam* $u, v \in \mathsf{V}$*. Dizemos que* u *e* v *são ortogonais se* $\langle u, v \rangle = 0$*. Um subconjunto* A *de* V *é chamado de ortogonal se os seus elementos são ortogonais dois a dois e dizemos que* A *é um conjunto ortonormal se for um ortogonal e se* $\|u\| = 1, \forall u \in \mathsf{A}$*.*

Definição 7.6. [Lima,AlgLin,2014] *Seja* E *um espaço vetorial com produto interno. Um conjunto* $X \subset \mathsf{E}$*.* $\forall u, v \in X$ *tal que* $u \neq v \wedge u \perp v$ *diz que* X *é ortogonal. Se todos os vetores em* X *são unitários* X *é um conjunto ortonormal.*

Teorema 7.7. [Lima,AlgLin,2014] *Num espaço vetorial* E *com produto interno, todo conjunto ortogonal* X *de vetores não nulos é LI.*

Proposição 7.8. [Coelho,AlgLin,2013] *Seja* V *um* K*-espaço vetorial com produto interno* $\langle , \rangle$ *e seja* A *um subconjunto ortogonal de* V *formado por vetores não nulos.*

(a) Se $v \in [v_1, \dots, v_n]$*, com* $v_i \in \mathsf{A}$*, então:*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i$$

(b) A *é linearmente independente.*

Corolário 7.9. [Coelho,AlgLin,2013] *Seja* V *um* K*-espaço vetorial com produto interno* $\langle , \rangle$ *e seja* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *uma base ortonormal de* V*. Então para* $v \in \mathsf{V}$*, temos*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i$$

Teorema 7.10. [Coelho,AlgLin,2013] *Todo espaço vetorial de dimensão finita* $n \geq 1$ *com produto interno possui uma base ortonormal.*

Corolário 7.11. [Coelho,AlgLin,2013] *Seja* V *um* K*-espaço vetorial munido de produto interno. Sejam* $\mathsf{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ *e* $\mathsf{B}' = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *duas bases ortonormais de* V*. Se* M *é a matriz de mudança de base* B *para* B'*. então* $M\overline{M^T} = \overline{M^T}M = Id_n$*.*

Definição 7.12. [Coelho,AlgLin,2013] *Seja V um espaço vetorial com produto interno, e seja* $\mathsf{S} \subseteq \mathsf{V}$ *um subconjunto* V*. Chamamos de ortogonal de* S *ao subconjunto* $\mathsf{S}^{\perp} = \{v \in \mathsf{V} | \langle v, u \rangle = 0, \forall u \in \mathsf{S}\}$*.*

Proposição 7.13. [Coelho,AlgLin,2013] *Seja* V *um* K*-espaço vetorial munido de produto interno. Sejam* $\mathsf{W} \subseteq \mathsf{V}$ *um subespaço e* $\mathsf{B} = \{w_1, \ldots, w_k\}$ *um gerador para* W*. Então* $v \in \mathsf{W}^{\perp}$ *se e somente se* $\langle v, w_i \rangle$*, para cada* $i = 1, \ldots, k$*.*

Proposição 7.14. [Coelho,AlgLin,2013] *Seja* V *um* K*-espaço vetorial de dimensão* $n \geq 1$ *e com produto interno e seja* $\mathsf{W} \subsetneq \mathsf{V}$ *um subespaço próprio de* V*. Então* $\mathsf{V} = \mathsf{W} \oplus \mathsf{W}^{\perp}$*.*

Corolário 7.15. [Coelho,AlgLin,2013] *Seja* V *um* K*-espaço vetorial de dimensão finita com produto interno e seja* $\mathsf{W} \subsetneq \mathsf{V}$ *um subespaço de* V*. Então*

$$dim_K \mathsf{V} = dim_K \mathsf{W} + dim_K \mathsf{W}^{\perp}$$