Resumo Álgebra Linear

Gino Chen Hsiang-Jan

26 de Outubro de 2015

Contents

1 Corpos

Definição 1.1. [Coelho,AlgLin,2013] *Um conjunto não vazio* K *é um corpo se em* K *pudermos definir duas operações, denotadas por* +*(adição) e . (multiplicação). satisfazendo as seguintes propriedades:*

propriedade comutativa *(A1)* $a + b = b + a, \forall a, b \in \mathsf{K}$

propriedade associativa *(A2)* $a + (b + c) = (a + b) + c, \forall a, b, c \in \mathsf{K}$

elemento neutro da soma *(A3) Existe um elemento em* K*, denotado por* 0 *e chamado de elemento neutro da adição, que satisfaz* $0 + a = a + 0 = a, \forall a \in \mathsf{K}$

inserso aditivo *(A4) Para cada* $a \in \mathsf{K}$*, existe um número em* K *, denotado por* $-a$ *e chamado de oposto de* a *(ou inverso aditivo de* a*) tal que* $a + (-a) = 0$

propriedade comutativa *(M1)* $a.b = b.a, \forall a, b \in \mathsf{K}$ *(propriedade comutativa)*

propriedade associativa *(M2)* $a.(b.c) = (a.b).c, \forall a, b, c \in \mathsf{K}$ *(propriedade associativa)*

elemento neutro da multiplicação *(M3) Existe um elemento em* K*, denotado por* 1 *e chamado de elemento neutro da multiplicação, tal que* $1.a = a.1 = a, \forall a \in \mathsf{K}$

inverso multiplicativo *(M4) Para cada elemento não nulo* $a \in \mathsf{K}$*, existe um elemento em* K*, denotado por* a^{-1} *e chamando de inverso multiplicativo de* a*, tal que* $a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$.

2 Espaços e Subespaços Vetoriais

Definição 2.1. [Lima,AlgLin,2014] *Chama-se espaço vetorial* E *a um conjunto de elementos chamados vetores, no qual estão definidas duas operações: adição,* $\forall u, v \in \mathsf{E} \Rightarrow u + v \in \mathsf{E}$*, e multiplicação* $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathsf{E} \Rightarrow \alpha v \in \mathsf{E}$*. Sejam,* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, u, v \in \mathsf{E}$*. As operações de adição e multiplicação também devem satisfazer os seguintes axiomas:*

comutatividade $u + v = v + u$

associatividade $(u + v) + w = v + (u + w)$ *e* $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$

vetor nulo *existe um vetor* $0 \in \mathsf{E}$*, tal que* $v + 0 = 0 + v$ *para todo* $v \in \mathsf{E}$

inverso aditivo *para cada vetor* $v \in \mathsf{E}$ *existe* $-v \in \mathsf{E}$ *tal que* $v + (-v) = 0$

distributividade $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ *e* $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$

multiplicação por 1 $1v = v$

Definição 2.2. [Lima,AlgLin,2014] *Seja* E *um espaço vetorial, Um subespaço vetorial de* E *é um subconjunto* $\mathsf{F} \subset \mathsf{E}$ *com as seguintes propriedades:*

vetor nulo *existe um vetor* $0 \in \mathsf{F}$

fechamento da soma $\forall u, v \in \mathsf{F} \Rightarrow u + v \in \mathsf{F}$

fechamento produto com escalar $\forall v \in \mathsf{E} \Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha v \in \mathsf{F}$

Definição 2.3. [Lima,AlgLin,2014] *Seja* $\mathsf{F}_1, \mathsf{F}_2 \subset \mathsf{E}$*,* $F_1 + F_2 := \{v_1 + v_2 : v_1 \in F_1 \wedge v_2 \in F_2\}$.

Definição 2.4. [Lima,AlgLin,2014] *Seja* $\mathsf{F}_1, \mathsf{F}_2 \subset \mathsf{E} \wedge \mathsf{F}_1 \cap \mathsf{F}_2 = \{0_v\}$, *chama-se de soma direta entre* F_1 *e* F_2, *denotado como* $\mathsf{F}_1 \oplus \mathsf{F}_2$, $\mathsf{F}_1 \oplus \mathsf{F}_2 := \mathsf{F}_1 \cup \mathsf{F}_2$.

Teorema 2.5. [Lima,AlgLin,2014] *Sejam* $\mathsf{F}, \mathsf{F}_1, \mathsf{F}_2$ *subespaços vetoriais de* E *com* $\mathsf{F}_1 \subset \mathsf{F}$ *e* $\mathsf{F}_2 \subset \mathsf{F}$. *São equivalentes:*
- $\mathsf{F} = \mathsf{F}_1 \oplus \mathsf{F}_2$
- $\forall w \in \mathsf{F}$ *se escreve, de modo único, como a soma* $w = v_1 + v_2$, *onde* $v_1 \in \mathsf{F}_1$, *e* $v_2 \in \mathsf{F}_2$

Definição 2.6. [Lima,AlgLin,2014] *Seja* E *um espaço vetorial. Se* $x, y \in \mathsf{E}$ *e* $x \neq y$, *a reta que une os pontos* x, y *é, por definição o conjunto:* $r = \{(1-t)x + ty; t \in \mathbb{R}\}$.

Definição 2.7. [Lima,AlgLin,2014] *Um subconjunto* $\mathsf{V} \in \mathsf{E}$ *chama-se uma variedade afim quando a reta que une dois pontos quaisquer de* V *está contida em* V. *Assim* $\mathsf{V} \in \mathsf{E}$ *é uma variedade afim se, e somente se, cumpre a seguinte condição:*

$$x, y \in \mathsf{V}, t \in \mathbb{R} \Rightarrow (1-t)x + ty \in \mathsf{V}.$$

Teorema 2.8. [Lima,AlgLin,2014] *Se* $\mathsf{V}_1, \mathsf{V}_2, \mathsf{V}_3, \ldots, \mathsf{V}_n \subset \mathsf{E}$ *são variedades afins, estão a interseção* $V = \mathsf{V}_1 \cap \mathsf{V}_2 \cap \mathsf{V}_3 \cap \ldots, \cap \mathsf{V}_n$ *também é uma variedade afim.*

Teorema 2.9. [Lima,AlgLin,2014] *Todo ponto* $p \in \mathsf{E}$ *é uma variedade afim.*

Teorema 2.10. [Lima,AlgLin,2014] *Seja* V *uma variedade afim não-vazia no espaço vetorial* V. *Existe um único subespaço vetorial* $\mathsf{F} \subset \mathsf{E}$ *tal que,* $\forall x \in \mathsf{V}$ *tem-se* $\mathsf{V} = x + \mathsf{F} = \{x + v : v \in \mathsf{F}\}$.

3 Bases

Considere V um espaço vertorial sobre K.

Definição 3.1. [Coelho,AlgLin,2013] *Um vetor* $v \in \mathsf{V}$ *é uma combinação linear dos vetores* $v_1, \ldots, v_n \in \mathsf{V}$ *se existirem escalares* $\alpha_1, \ldots \alpha_n \in \mathsf{K}$ *tais que:*

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i v_i$$

Definição 3.2. [Coelho,AlgLin,2013] *Seja* $\mathcal{B}$ *um subconjunto de* V. *Dizemos que* $\mathcal{B}$ *é um conjunto gerador de* V *se todos os elementos de* V *for uma combinação linear de um número finito de elementos de* $\mathcal{B}$.

Definição 3.3. [Coelho,AlgLin,2013] *O conjunto vazio gera o espaço vetorial* 0.

Definição 3.4. [Coelho,AlgLin,2013] *Seja* $\mathcal{B}$ *um subconjunto de* V. *Dizemos que* $\mathcal{B}$ *é linearmente independente (ou l.i.) se* $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$, *para* $v_i \in \mathcal{B}$ *e* $\alpha_i \in \mathsf{K}$, $i = 0, \ldots, n$ *implica* $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Definição 3.5. [Lima,AlgLin,2014] *Seja* E *um espaço vetorial. Diz-se que um conjunto* $X \subset \mathsf{E}$ *é linearmente independente (LI) quando nenhum vetor* $v \in X$ *é combinação linear de outros elementos de* X *ou se* X *tem somente um elemento não nulo.*

[Coelho,AlgLin,2013] *Dizemos que um subconjunto* $\mathcal{B}$ *de* V *é uma base de* V *se:*
(i) $\mathcal{B}$ *for um subconjunto gerador de* V
(ii) $\mathcal{B}$ *for linearmente independente.*

Definição 3.6. [Coelho,AlgLin,2013] *O conjunto vazio é uma base do espaço vetorial* 0.

Teorema 3.7. [Lima,AlgLin,2014] *Seja* X *um conjunto LI de um espaço vetorial* E. $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots + \alpha_m v_m$ *com* $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m \in X \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_m = 0$

Corolário 3.8. [Lima,AlgLin,2014] *Se* $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots + \alpha_m v_m = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 + \cdots + \beta_m v_m$ *e os vetores* $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m$ *são LI então* $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \alpha_3 = \beta_3, \ldots, \alpha_m = \beta_m$.

Teorema 3.9. [Lima,AlgLin,2014] *Sejam* $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m$ *vetores não nulos do espaço vetorial* E. *Se nenhum deles é combinação linear dos anteriores então* $X = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m\}$ *é LI.*

Definição 3.10. [Lima,AlgLin,2014] *Um conjunto* $X \in \mathsf{E}$ *é linearmente dependente (LD) quando não é LI. Ou seja,* $X = \{0_v\}$ *ou* $\exists v \in X$ *tal que* v *é combinação linear de outros elementos em* X.

Definição 3.11. [Lima,AlgLin,2014] *Uma base de um espaço vetorial* E *é um conjunto* $\mathcal{B} \subset \mathsf{E}$ *linearmente independente que gera* E. *Ou seja,* $\forall v \in \mathsf{E}$ *se exprime, de modo único como combinação linear* $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots + \alpha_m v_m$, $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m \in \mathcal{B}$. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m$ *são coordenadas do vetor* v *na base* $\mathcal{B}$.

Definição 3.12. [Coelho,AlgLin,2013] *Dizemos que* V *é finitamente gerado se possuir um gerador finito.*

Proposição 3.13. [Coelho,AlgLin,2013] *Seja* V *um* K *espaço vetorial finitamente gerado não nulo e assuma* $\{v_1, \ldots, v_m\}$ *seja um conjunto gerador de* V*. Então todo conjunto linearmente independente de vetores em* V *tem no máximo* m *elementos.*

Corolário 3.14. [Coelho,AlgLin,2013] *Seja* V *um* K *espaço vetorial finitamente gerado não nulo. Então duas bases qualquer de* V *têm o mesmo número de elementos.*

Definição 3.15. [Lima,AlgLin,2014] *Um sistema linear é chamado homogêneo quando o segundo membro de cada equação é igual a zero.*

Teorema 3.16. [Lima,AlgLin,2014] *Todo sistema linear homogêneo cujo número de incógnitas é maior do que o número de equações admite uma solução não trivial.*

Teorema 3.17. [Lima,AlgLin,2014] *Se os vetores* $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m$ *geram o espaço vetorial* E *então qualquer conjunto com mais de* m *vetores em* E *é LD*

Teorema 3.18. [Lima,AlgLin,2014] *Se os vetores* $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m$ *geram o espaço vetorial* E *e os vetores* $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ *são LI, então* $n \leq m$*.*

Teorema 3.19. [Lima,AlgLin,2014] *Se o espaço vetorial* E *admite uma base* $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\}$ *com* n *elementos, qualquer outra base de* E *possui também* n *elementos.*

Definição 3.20. [Lima,AlgLin,2014] *Diz-se que o espaço vetorial* E *tem dimensão finita quando admite uma base* $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ *com um número finito* n *de elementos. Este número, que é igual para todas as bases de* E*, chama-se a dimensão do espaço vetorial* E*. Denotado por* $dim\mathsf{E} := n$*. Diz-se que o espaço vetorial* $\mathsf{E} = \{0_v\}$ *tem dimensão zero*

Teorema 3.21. [Lima,AlgLin,2014] *Se a dimensão de* E *é* n*, um conjunto com* n *vetores, gera* E *se, e somente se, é LI.*

Teorema 3.22. [Lima,AlgLin,2014] *Seja* E *um espaço vetorial de dimensão finita* n*, então:*
- *Todo conjunto* X *de geradores de* E *contém uma base.*
- *Todo conjunto LI* $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\} \subset \mathsf{E}$ *está contido numa base.*
- *Todo subespaço vetorial* $\mathsf{F} \subset \mathsf{E}$ *tem dimensão finita a qual* $\leq n$*.*
- *Se a dimensão do subespaço* $\mathsf{F} \subset \mathsf{E}$ *é igual a* n*, então* $\mathsf{F} = \mathsf{E}$

Definição 3.23. [Lima,AlgLin,2014] *Diz-se que o espaço vetorial* E *tem dimensão infinita quando não tem dimensão finita. Ou seja, quando nenhum subconjunto finito de* E *é uma base.*

Definição 3.24. [Lima,AlgLin,2014] *Diz-se que a variedade afim de* $V \subset \mathsf{E}$ *tem dimensão* r *quando* $V = x + \mathsf{F}$*, onde o subespaço vetorial* $\mathsf{F} \subset \mathsf{E}$*.*

4 Transformações Lineares

Definição 4.1. [Lima,AlgLin,2014] *Sejam* E, F *espaços vetoriais. Uma transformação linear* $A : \mathsf{E} \to \mathsf{F}$ *é uma correspondência que associa a cada vetor* $v \in \mathsf{E}$ *um vetor* $A(v) = Av \in \mathsf{F}$ *de modo que valham, para quaisquer* $u, v \in \mathsf{E}$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$*, as relações:*
- $A(u + v) = Au + Av$
- $A(\alpha v) = \alpha Av$

Definição 4.2. [Lima,AlgLin,2014] *Seja* $\mathcal{L}(\mathsf{E}; \mathsf{F})$*, espaço vetorial dos conjunto das transformações lineares de* E *para* F*.* $\mathcal{L}(\mathsf{E}) := \mathcal{L}(\mathsf{E}; \mathsf{E})$*,* $A : \mathsf{E} \to \mathsf{E}$ *chamado de operador linear em* E*. E* $\mathsf{E}^* := \mathcal{L}(\mathsf{E}; \mathbb{R})$*,* $\varphi : \mathsf{E} \to \mathbb{R}$*, chamados funcionais lineares. O conjunto dos funcionais lineares* E^* *de dual de* E

Teorema 4.3. [Lima,AlgLin,2014] *Sejam* E*,* F *espaços vetoriais e* $\mathcal{B}$ *uma base de* E*. A cada vetor* $u \in \mathcal{B}$*, façamos corresponder (de maneira arbitrária) um vetor* $u' \in \mathsf{F}$*. Então existe uma única transformação linear* $A : \mathsf{E} \to \mathsf{F}$ *tal que* $Au = u', \forall u \in \mathcal{B}$*.*

Definição 4.4. [Lima,AlgLin,2014] *Dadas as transformações lineares* $A : \mathsf{E} \to \mathsf{F}$*,* $B : \mathsf{F} \to \mathsf{G}$*,* $D(B) = CD(A)$*. Define-se o produto* $BA : \mathsf{A} \to \mathsf{G}, \forall v \in \mathsf{E}, (\mathsf{BA})v = \mathsf{B}(\mathsf{A}v)$

Dadas as transformações lineares $A : \mathsf{E} \to \mathsf{F}$, $B : \mathsf{F} \to \mathsf{G}$, $C : \mathsf{G} \to \mathsf{H}$. Temos as seguintes propriedades:
Associatividade $(\mathsf{CB})\mathsf{A} = \mathsf{C}(\mathsf{BA})$
Distributiva à esquerda $(\mathsf{B} + \mathsf{C})\mathsf{A} = \mathsf{BA} + \mathsf{CA}$
Distributiva à direita $\mathsf{C}(\mathsf{A} + \mathsf{B}) = \mathsf{CA} + \mathsf{CB}$
Homogeneidade $\mathsf{B}(\alpha\mathsf{A}) = \alpha(\mathsf{BA})$

Definição 4.5. [Lima,AlgLin,2014] *Um operador* A *chama-se nilpotente quando, para algum* $n \in \mathbb{N}$*, tem-se* $A^n = 0$*. Um exemplo significativo de um operador nilpotente é a derivação* $D : \mathsf{P}_n \to \mathsf{P}_n$*. Para todo polinômio* p *de grau* $\leq n$ *tem-se* $D^{n+1}p = 0$*, logo* $D^{n+1} = 0$*.*

5 Núcleo e Imagem

Considerando a transformação linear $A : \mathsf{E} \to \mathsf{F}$ sendo, E, F dois espaços vetoriais.

Definição 5.1. [Lima,AlgLin,2014] *A imagem de A é o subconjunto $\mathcal{I}m(A) := \{w \in \mathsf{F} : w = Av, \forall v \in \mathsf{E}\}$.*

Definição 5.2. [Lima,AlgLin,2014] *Se $\mathcal{I}m(A) = \mathsf{F}$, diz que A é sobrejetiva.*

Definição 5.3. [Lima,AlgLin,2014] *Uma transformação linear $B : \mathsf{F} \to \mathsf{E}$ chama-se inversa à direita da transformação A, quando tem $AB = I_F$, ou seja, $A(Bw) = w, \forall w \in \mathsf{F}$.*

Teorema 5.4. [Lima,AlgLin,2014] *Uma transformação linear $A : \mathsf{E} \to \mathsf{F}$ entre espaços vetoriais de dimensões finitas possui uma inversa à direita se, e somente se A é sobrejetiva.*

Definição 5.5. [Lima,AlgLin,2014] *O núcleo de A é o subconjunto $\mathcal{N}(A) := \{v \in \mathsf{E} : Av = 0\}$.*

Definição 5.6. [Lima,AlgLin,2014] *Uma transformação linear $A : \mathsf{E} \to \mathsf{F}$ chama-se injetiva $\Leftrightarrow \forall v, v' \in \mathsf{E}, v \neq v' \Rightarrow Av \neq Av', Av, Av' \in \mathsf{F}$.*

Teorema 5.7. [Lima,AlgLin,2014] *Uma transformação linear $A : \mathsf{E} \to \mathsf{F}$ é injetiva $\Leftrightarrow \mathcal{N}(A) = \{0_v\}$.*

Teorema 5.8. [Lima,AlgLin,2014] *Uma transformação linear $A : \mathsf{E} \to \mathsf{F}$ é injetiva $\Leftrightarrow$ leva vetores LI para vetores LI.*

Teorema 5.9. [Lima,AlgLin,2014] *Seja $A : \mathsf{E} \to \mathsf{F}$ uma transformação linear. $V = \{x \in \mathsf{E} : Ax = b, \forall b \in \mathcal{I}m(A)\}$ é uma variedade afim paralela a $\mathcal{N}(A)$.*

Definição 5.10. [Lima,AlgLin,2014] *Uma transformação linear $B : \mathsf{F} \to \mathsf{E}$ chama-se inversa à esquerda da transformação A, quando tem $BA = I_E$, ou seja, $B(Aw) = w, \forall w \in \mathsf{F}$.*

Teorema 5.11. [Lima,AlgLin,2014] *Uma transformação linear $A : \mathsf{E} \to \mathsf{F}$ entre espaços vetoriais de dimensões finitas possui uma inversa à esquerda se, e somente se A é injetiva.*

Definição 5.12. [Lima,AlgLin,2014] *Uma transformação linear $A : \mathsf{E} \to \mathsf{F}$ chama-se inversível quando existe $B : \mathsf{F} \to \mathsf{E}$ linear tal que $BA = I_E$ e $AB = I_F$, quando B é ao mesmo tempo inversa pela esquerda e à direta de A. B é inversa de A e denota-se $B = A^{-1}$.*

Teorema 5.13. [Lima,AlgLin,2014] *Se uma transformação linear A é inversível é equivalente dizer:*
- *A é injetiva e sobrejetiva ou seja, A é uma bijeção linear entre E e F.*
- *$A : \mathsf{E} \to \mathsf{F}$ é um isomorfismo e os espaços vetoriais E e F são isomorfos.*
- *A tem uma inversa à esquerda $B : \mathsf{F} \to \mathsf{E}$ e uma inversa à direita $C : \mathsf{F} \to \mathsf{E}$ então $B = C$ e A é um isomorfismo, com $A^{-1} = B = C$.*

Teorema 5.14. [Lima,AlgLin,2014] *Uma transformação linear $A : \mathsf{E} \to \mathsf{F}$ e $B : \mathsf{F} \to \mathsf{G}$ temos:*
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$, $\alpha \neq 0$

Teorema 5.15. [Lima,AlgLin,2014] *[Teorema do Núcleo e da Imagem] Sejam E, F espaços vetoriais de dimensão finita. Para toda transformação linear $A : \mathsf{E} \to \mathsf{F}$ tem-se $\dim \mathsf{E} = \dim \mathcal{N}(A) + \dim \mathcal{I}m(A)$*

Corolário 5.16. [Lima,AlgLin,2014] *Sejam E, F espaços vetoriais de* ***mesma dimensão finita****. Uma transformação linear $A : \mathsf{E} \to \mathsf{F}$ é injetiva se, e somente se, é sobrejetiva, portantdo é um isomorfismo.*

6 Produto Interno

Definição 6.1. [Lima,AlgLin,2014] *Um produto interno num espaço vetorial E é um funcional bilinear simétrico e positivo em E. É uma função $\mathsf{E} \times \mathsf{E} \to \mathbb{R}$, que associa cada par de vetores $u, v \in \mathsf{E}$ a um número real $\langle u, v\rangle$ de modo que sejam válidas as seguintes propriedades:*

Bilinearidade

$$\langle u + u', v\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u', v\rangle$$
$$\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle$$
$$\langle u, v + v'\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, v'\rangle$$
$$\langle u, \alpha v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle$$

Comutatividade (simetria)

$$\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$$

Positividade

$$\langle u, u\rangle > 0, u \neq 0$$

Definição 6.2. [Lima,AlgLin,2014] *Seja* E *um espaço vetorial com produto interno,* $u, v \in \mathsf{E}$*.* u *e* v *são ortogonais* $\Leftrightarrow \langle u, v\rangle = 0$*. Denotado como* $u \perp v$*.*

Definição 6.3. [Lima,AlgLin,2014] *Seja* E *um espaço vetorial com produto interno, Um conjunto* $X \subset \mathsf{E}$*.* $\forall u, v \in X$ *tal que* $u \neq v \wedge u \perp v$ *diz que* X *é ortogonal. Se todos os vetores em* X *são unitários* X *é um conjunto ortonormal.*

Teorema 6.4. [Lima,AlgLin,2014] *Num espaço vetorial* E *com produto interno, todo conjunto ortogonal* X *de vetores não nulos é LI.*