

Resumo Álgebra Linear

Gino Chen Hsiang-Jan

26 de Outubro de 2015

Contents

| | | |
|---|------------------------------------|---|
| 1 | Projeção ortogonal | 2 |
| 2 | Matrizes | 3 |
| 3 | Processo de Gram-Schmidt | 3 |
| 4 | Decomposição QR via Gram-Schmidt | 3 |
| 5 | Transformação Householder | 4 |
| 6 | Decomposição de QR via Householder | 4 |
| 7 | Decomposição de Schur | 5 |
| 8 | Decomposição em Valores Singulares | 6 |

1 Projeção ortogonal

Definição 1.1. [Anton,AlgLinApl-pt,2010] Dizemos que dois vetores não nulos u e v em \mathbb{R}^n são ortogonais (ou perpendiculares) se $u \cdot v = 0$. Também convencionamos que o vetor nulo em \mathbb{R}^n é ortogonal a cada vetor em \mathbb{R}^n . Um conjunto não vazio de vetores em \mathbb{R}^n é denominado ortogonal se dois quaisquer de seus vetores forem ortogonais. Um conjunto ortogonal de vetores unitários é dito ortonormal.

Teorema 1.2. [Anton,AlgLinApl-pt,2010]

(a) Se a e b constantes não ambas nulas, então uma equação da forma:

$$ax + by + c = 0$$

representa uma reta em \mathbb{R}^2 de normal $n = (a, b)$.

(b) Se a , b e c constantes não ambas nulas, então uma equação da forma:

$$ax + by + cz + d = 0$$

representa um plano em \mathbb{R}^3 de normal $n = (a, b, c)$.

Teorema 1.3. [Anton,AlgLinApl-pt,2010] **Teorema das projeções** Se $u, v \in \mathbb{R}^n$ e se $v \neq 0$, então u pode ser escrito de maneira única na forma $u = w_1 + w_2$, em que w_1 é um múltiplo escalar de v e w_2 é ortogonal a v .

Definição 1.4. [Anton,AlgLinApl-pt,2010] No teorema das projeções:

w_1 é chamado de projeção ortogonal de u ou componente vetorial de u ao longo de v e denotado como $\text{proj}_v u$ e pode ser calculado por:

$$w_1 = \text{proj}_v u = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v$$

w_2 é chamado de componente vetorial de u a v e pode ser calculado por:

$$w_2 = u - \text{proj}_v u = u - \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v$$

Definição 1.5. [Anton,AlgLinApl-pt,2010] Dizemos que um conjunto de dois ou mais vetores num espaço com produto interno é **ortogonal** se quaisquer dois vetores distintos do conjunto forem ortogonais.

Definição 1.6. [Anton,AlgLinApl-pt,2010] Um conjunto ortogonal no qual cada vetor tem norma 1 é **ortonormal**.

Teorema 1.7. [Anton,AlgLinApl-pt,2010] Se $S = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ for um conjunto ortogonal de vetores não nulos num espaço com produto interno, então S é linearmente independente

Teorema 1.8. [Anton,AlgLinApl-pt,2010] Se $S = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ for uma base ortogonal de espaço com produto interno V e $u \in V$ então :

$$u = \frac{\langle u, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle u, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 + \frac{\langle u, v_3 \rangle}{\|v_3\|^2} v_3 + \dots + \frac{\langle u, v_n \rangle}{\|v_n\|^2} v_n$$

Teorema 1.9. [Anton,AlgLinApl-pt,2010] Se $S = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ for uma base ortonormal de espaço com produto interno V e $u \in V$ então :

$$u = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2 + \langle u, v_3 \rangle v_3 + \dots + \langle u, v_n \rangle v_n$$

Teorema 1.10. [Anton,AlgLinApl-pt,2010] Seja W um subespaço de dimensão finita de um espaço vetorial com produto interno V

(a) Se $S = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ for uma base ortogonal de W e $u \in V$ então :

$$u = \frac{\langle u, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle u, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 + \frac{\langle u, v_3 \rangle}{\|v_3\|^2} v_3 + \dots + \frac{\langle u, v_n \rangle}{\|v_n\|^2} v_n$$

(b) Se $S = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ for uma base ortonormal de W e $u \in V$ então :

$$u = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2 + \langle u, v_3 \rangle v_3 + \dots + \langle u, v_n \rangle v_n$$

Teorema 1.11. [Anton,AlgLinApl-pt,2010] Cada espaço vetorial não nulo de dimensão finita possui alguma base ortonormal.

2 Matrizes

Definição 2.1. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] Chama-se de matriz transposta hermitiana, denotado por A^H , $A^H = \overline{A}^t$, que é a complexa conjugada da transposta ordinária.

Definição 2.2. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] Chama-se de matriz hermitiana uma matriz tal que $A^H = A$.

Lema 2.3. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] Uma matriz hermitiana é a soma de uma matriz real simétrica e de uma matriz imaginária anti-simétrica.

Lema 2.4. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] As propriedades de matrizes são válidas:

- $AB = A\overline{B}$
- $(A)^t = (\overline{A^t})$

Definição 2.5. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] Uma matriz P tal que $P^H P = PP^H = I$ é chamada matriz unitária.

Definição 2.6. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] Uma matriz P real tal que $P^T P = PP^T = I$ é chamada matriz ortogonal.

Teorema 2.7. [Noble,AlgLinApl-pt,1986]

- (i) Tanto as colunas quanto as linhas de uma matriz unitária (ou ortogonal) formam um conjunto ortonormal.
- (ii) Se P é unitária, então $|\det P| = 1$.
- (iii) Se P e Q são unitárias, então o mesmo acontece com PQ .
- (iv) Se P é unitária, então, para todos os x e y , temos $(Px, Py) = (x, y)$ e $\|Px\|_2 = \|x\|_2$ e $\|P\|_2 = 1$.
- (v) Se λ for um autovalor da matriz unitária P , então $|\lambda| = 1$.

Definição 2.8. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] Uma matriz quadrada A que satisfaz $A^H A = AA^H = I$ é chamada matriz normal.

Lema 2.9. [Noble,AlgLinApl-pt,1986] Seja A uma matriz quadrada.

- (i) Matrizes hermitianas são normais, ou seja $A^H A = AA^H = I$.
- (ii) Se A é uma matriz real, $A^T A = AA^T = I$, A é simétrico.

3 Processo de Gram-Schmidt

[Anton,AlgLinApl-pt,2010] Para converter uma base $\{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\}$ numa base ortogonal $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$, efetue as seguintes contas:

$$\begin{aligned}v_1 &= u_1 \\v_2 &= u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 \\v_3 &= u_3 - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 \\&\vdots \\v_n &= u_n - \frac{\langle u_n, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_n, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 - \frac{\langle u_n, v_3 \rangle}{\|v_3\|^2} v_3 + \dots - \frac{\langle u_n, v_n \rangle}{\|v_n\|^2} v_n\end{aligned}$$

Para converter a base ortogonal numa base ortonormal $\{q_1, q_2, q_3, \dots, q_n\}$ normalize os vetores da base ortonormal:

$$q_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}, i = 1, 2, 3, \dots, n$$

4 Decomposição QR via Gram-Schmidt

[Anton,AlgLinApl-pt,2010] Seja A uma matriz $m \times n$ tal que $A = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ \dots \ u_n]$ e $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ são vetores de dimensão m linearmente independentes. Existe uma matriz $Q = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ \dots \ q_n]$, através do processo de

Gram-Schmidt, formado por uma base ortonormal projetados pelos vetores de $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$. Temos então:

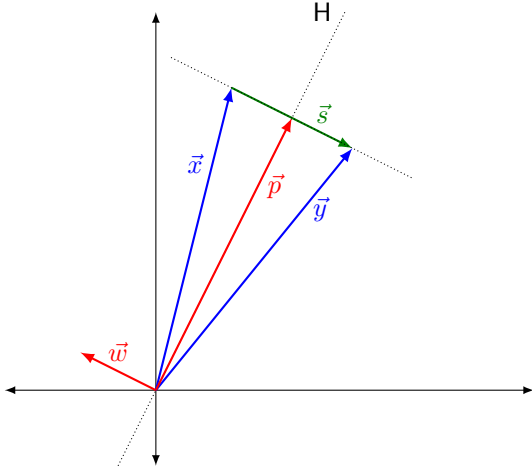
$$\begin{cases} u_1 = \langle u_1, q_1 \rangle q_1 + \langle u_1, q_2 \rangle q_2 + \langle u_1, q_3 \rangle q_3 + \dots \langle u_1, q_n \rangle q_n \\ u_2 = \langle u_2, q_1 \rangle q_1 + \langle u_2, q_2 \rangle q_2 + \langle u_2, q_3 \rangle q_3 + \dots \langle u_2, q_n \rangle q_n \\ u_3 = \langle u_3, q_1 \rangle q_1 + \langle u_3, q_2 \rangle q_2 + \langle u_3, q_3 \rangle q_3 + \dots \langle u_3, q_n \rangle q_n \\ \vdots \\ u_n = \langle u_n, q_1 \rangle q_1 + \langle u_n, q_2 \rangle q_2 + \langle u_n, q_3 \rangle q_3 + \dots \langle u_n, q_n \rangle q_n \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$A = QR = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ \dots \ q_n] \begin{bmatrix} \langle u_1, q_1 \rangle & \langle u_1, q_2 \rangle & \langle u_1, q_3 \rangle & \dots & \langle u_1, q_n \rangle \\ 0 & \langle u_2, q_2 \rangle & \langle u_2, q_3 \rangle & \dots & \langle u_2, q_n \rangle \\ 0 & 0 & \langle u_3, q_3 \rangle & \dots & \langle u_3, q_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \langle u_n, q_n \rangle \end{bmatrix}$$

5 Transformação Householder

[Noble, AlgLinApl-pt, 1986] Seja V um espaço vetorial de corpo K munido de produto interno, $w \in V$ e $H \subset V$ tal que H é um hiperplano normal a w . Deseja-se achar a matriz de transformação H_w , onde dado qualquer $x \in V$ desejamos encontrar um $y \in V$ tal que y é reflexão de x em relação a H .

Para tal finalidade, usaremos uma representação em \mathbb{R}^2 para melhor visualizar a dedução.



Na figura acima, p como a projeção de x em H e s é combinação linear de w .

Projeção de x em $p - x$:

$$p - x = -\frac{\langle w, x \rangle}{\langle w, w \rangle} w$$

temos também:

$$s = 2(p - x) = -2\frac{\langle w, x \rangle}{\langle w, w \rangle} w$$

A reflexão y é $y = x + s$, então:

$$y = x - 2\frac{\langle w, x \rangle}{\langle w, w \rangle} w = x - 2\frac{\langle w, x \rangle w}{\langle w, w \rangle} = x - 2\frac{w \langle w, x \rangle}{\langle w, w \rangle}$$

$$y = x - \frac{2}{w^t w} w \cdot w^t x \Leftrightarrow y = \left(I - \frac{2}{w^t w} w \cdot w^t \right) x$$

Definimos a transformação linear H_w como:

$$H_w(x) = \left(I - \frac{2}{w^t w} w \cdot w^t \right) x$$

6 Decomposição de QR via Householder

Algorithm: Householder QR Factorization

```

A_0 = A
for k = 1 to n
    x = A_{k:m,k}
    v_k = x - sign(x_1) ||x||_2 e_1
    H_k = \begin{pmatrix} Id(k-1) & 0 \\ 0 & Id(n-k+1) - 2 \frac{v_k v_k^*}{v_k^* v_k} \end{pmatrix}
    A_k = H_k A_{k-1}
    H_k = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}
Q = H_1 H_2 H_3 \dots H_n

```

Como: $A = QR$ temos:

$$A = H_n \dots H_3 H_2 H_1 A H_1^* H_2^* H_3^* \dots H_n^* = QR$$

7 Decomposição de Schur

Teorema 7.1. [Noble, AlgLinApl-pt, 1986] Qualquer matriz quadrada A , $n \times n$ pode ser reduzida, por uma transformação unitária $P^H A P$, a uma matriz T triangular superior com os autovalores de A sobre a diagonal de T . Chamamos T uma forma canônica de Schur para A e a decomposição $A = P T P^H$ é chamada de uma decomposição de Schur de A . Se A e seus autovalores são reais, então podemos também tomar P real.

Algoritmo:

Dado uma matriz quadrada A , $n \times n$:

1. Achar os n autovalores, $\lambda_1 \dots, \lambda_n$
2. $A_0 \leftarrow A$.
3. Para $i = 1, \dots, n-1$ faça os passos abaixo:
 - 3.1. $Q_i = [v_i W_i]$ e $W_i = [w_{i+1} \dots w_n]$ onde v_i é o autovetor **normalizado** associado a λ_i na matriz A_i e $w_{i+1} \dots w_n$ são vetores normais a v_i escolhidos arbitrariamente. (preencha com vetores normais) tal que Q_i seja unitário. Lembrando que $W_i^H v_i = 0$.
 - 3.2. Seja A_i de dimensão $n-i+1 \times n-i+1$ e A_{i+1} de dimensão $n-i \times n-i$, faça: A_i é matriz de bloco tal que $A_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & b_i \\ 0 & A_{i+1} \end{bmatrix}$ e $A_i \leftarrow Q_i^H A_{i-1} Q_i$
4. $A_n \leftarrow \lambda_n$ e $P \leftarrow Q_1 Q_2 Q_3 \dots Q_n$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,7 & 0,3 \\ 0,1 & 0,1 & 0,6 \end{bmatrix} \lambda_1 = 0,6 u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ normalizado: } v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0,5$$

$$Q_1 = [v_1 w_2 w_3], w_2, w_3, \text{ abitrários para que } Q_1 \text{ seja unitário } Q_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_1^H A Q_1 = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,1 & -0,1\sqrt{2} \\ 0 & 0,9 & 0,2\sqrt{2} \\ 0 & 0,1\sqrt{2} & 0,6 \end{bmatrix} A_1 = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,2\sqrt{2} \\ 0,1\sqrt{2} & 0,6 \end{bmatrix} \lambda_2 = 1 \text{ normalizado: } v_2 = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$Q_2 = [v_2 w_2], w_2, \text{ abitrários para que } Q_2 \text{ seja unitário } Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix}$$

$$Q_2^H Q_1^H A Q_1 Q_2 = \begin{bmatrix} 0,6 & \frac{0,1\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -0,1\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Teorema 7.2. [Noble, AlgLinApl-pt, 1986] Uma matriz A , $n \times n$ é normal (simétrica real, hermitiana, anti-simétrica, unitária) se e somente se A pode ser reduzida, por uma transformação unitária, a uma forma canônica de Schur diagonal $D = P^H A P$ onde P é unitária e D é diagonal; os autovalores de A estarão sobre a diagonal de D . Se A e seus autovalores são reais, então podemos tomar P real e, portanto ortogonal.

Teorema 7.3. [Noble, AlgLinApl-pt, 1986] Uma matriz A , $n \times n$ é normal (simétrica real, hermitiana, anti-simétrica, unitária) se e somente se A tem um conjunto linearmente independente de n autovetores que podem ser escolhidos de maneira a formar um conjunto ortonormal. Além disso, no caso de uma matriz normal, um autovalor de multiplicidade s tem associado um conjunto ortonormal de s autovetores.

8 Decomposição em Valores Singulares

Definição 8.1. [Noble, AlgLinApl-pt, 1986] *Seja a matriz A , $m \times n$. As raízes quadradas estritamente positivas de σ_i dos autovalores de $A^H A = A^H A$ são chamados de valores singulares de A .*

Teorema 8.2. [Noble, AlgLinApl-pt, 1986] *Suponha a matriz A , $m \times n$ tem posto k . Existem então números $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \dots \sigma_k > 0$, os valores singulares (definição 8.1) de A uma matriz unitária U , $m \times m$, $U = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ \dots \ u_m]$ e uma matriz unitária V , $n \times n$, $V = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ \dots \ v_n]$ tais que:*

$$\Sigma = U^H A V, \text{ onde: } \left\{ \begin{array}{l} A \text{ é } m \times n \\ U \text{ e } V \text{ são } m \times m \text{ e } n \times n \text{ matrizes unitárias} \\ \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \text{ é } m \times n \end{array} \right.$$

Algoritmo:

Dado uma matriz quadrada A , $m \times n$ e $A = U \Sigma V^H$:

1. $A^H A = V \Sigma^H U^H U \Sigma V^H = V (\Sigma^H \Sigma) V^H$, $\sigma_i^2 > 0$ é autovalor de $\Sigma^H \Sigma$ (Teorema 7.2)
2. $A A^H = U \Sigma V^H V \Sigma^H U^H = U (\Sigma \Sigma^H) U^H$, $\sigma_i^2 > 0$ é autovalor de $\Sigma \Sigma^H$ (Teorema 7.2)
3. Calcular $V = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ \dots \ v_n]$, onde v_i é o autovetor associado a cada σ_i^2 normalizado da matriz $A^H A$
4. Calcular $U = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ \dots \ u_m]$, onde u_i é o autovetor associado a cada σ_i^2 normalizado da matriz $A A^H$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad A^H A = \begin{bmatrix} 9 & 9 \\ 9 & 9 \end{bmatrix} \text{ tem autovalores } 18, 0 \text{ Valores singulares } \sigma_1 = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

$$\text{Autovetores de } A^H A \text{ são: } v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ e } V = [v_1 \ v_2]$$

$$A A^H = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 8 \\ 4 & 8 & 8 \end{bmatrix} \text{ tem autovalores } 18, 0, 0$$

$$\text{Autovetores de } A A^H \text{ são: } u_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_3 = \frac{\sqrt{5}}{15} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix} \text{ e } U = [u_1 \ u_2 \ u_3]$$

$$\Sigma = U^H A V = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & -\frac{5\sqrt{5}}{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Não é uma redução válida