Resumo Álgebra Linear

Gino Chen Hsiang-Jan

26 de Outubro de 2015

Contents

1 Projeção ortogonal **2**

2 Transformação Householder **2**

1 Projeção ortogonal

Definição 1.1. [Anton,AlgLinApl-pt,2010] *Dizemos que dois vetores não nulos u e v em $\mathbb{R}^n$ são ortogonais (ou perpendiculares) se $u.v = 0$. Também convencionamos que o vetor nulo em $\mathbb{R}^n$ é ortogonal a cada vetor em $\mathbb{R}^n$. Um conjunto não vazio de vetores em $\mathbb{R}^n$ é denominado ortogonal se dois quaisquer de seus vetores forem ortogonais. Um conjunto ortogonal de vetores unitários é dito ortonormal.*

Teorema 1.2. [Anton,AlgLinApl-pt,2010]

(a) Se a e b constantes não ambas nulas, então uma equação da forma:

$$ax + by + c = 0$$

representa uma reta em $\mathbb{R}^2$ de normal $n = (a, b)$.

(b) Se a, b e c constantes não ambas nulas, então uma equação da forma:

$$ax + by + cz + d = 0$$

representa um plano em $\mathbb{R}^3$ de normal $n = (a, b, c)$.

Teorema 1.3. [Anton,AlgLinApl-pt,2010] ***Teorema das projeções*** *Se $u, v \in \mathbb{R}^n$ e se $v \neq 0$, então u pode ser escrito de maneira única na forma $u = w_1 + w_2$, em que w_1 é um múltiplo escalar de v e w_2 é ortogonal a v.*

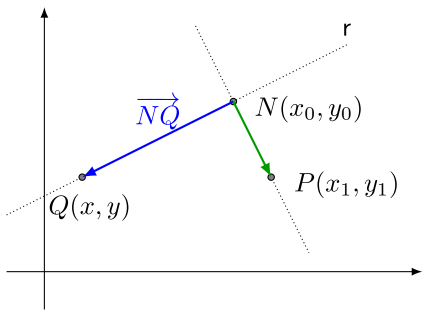
Definição 1.4. [Anton,AlgLinApl-pt,2010] *No teorema das projeções:*
w_1 é chamado de projeção ortogonal de u ou componente vetorial de u ao longo de v e denotado como $proj_v u$ e pode ser calculado por:

$$w_1 = proj_v u = \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v$$

w_2 é chamado de componente vetorial de u a v e póde ser calculado por:

$$w_2 = u - proj_v u = u - \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v$$

Projeção ortogonal de um ponto em uma reta. Seja $\mathsf{V} = \mathbb{R}^2$ um espaço vetorial euclidiano, um plano. Dado uma reta r e um ponto $P = (x_1, y_1)$ Desejamos encontrar um ponto $N = (x_0, y_0)$ que é projeção do ponto P na reta r. Um ponto N em r que tem a menor distância entre a reta r e o ponto P.



Para de terminar a direção de r, vamos escolher um ponto $Q = (x, y)$ em r, tal que $\overrightarrow{NQ} = (x - x_0, y - y_0)$ e $Q \neq N$. Então:

$$\overrightarrow{NQ} \perp \overrightarrow{NP} \Leftrightarrow \langle (x - x_0, y - y_0), (x_1 - x_0, y_1 - y_0)\rangle = 0$$

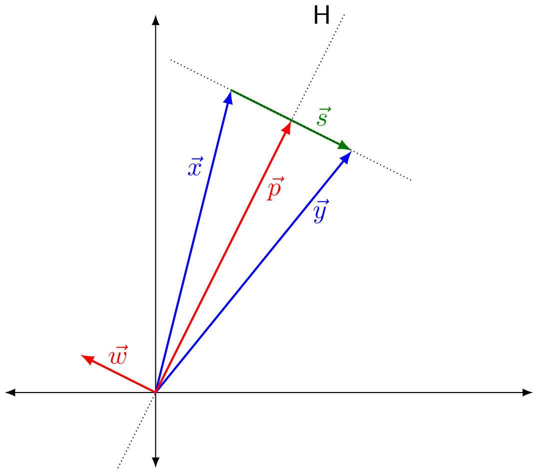
$$x_0^2 - (x + x_1)x_0 + xx_1 + y_0^2 - (y + y_1)y_0 + yy_1 = 0 \Leftrightarrow$$

Seja V um espaço vetorial de corpo K munido de produto interno. $u, v \in \mathsf{V}$, $u \neq 0$ e $v \neq 0$.

2 Transformação Householder

Seja V um espaço vetorial de corpo K munido de produto interno, $w \in \mathsf{V}$ e $\mathsf{H} \subset \mathsf{V}$ tal que H é um hiperplano normal a w. Deseja-se achar a matriz de transformação H_w, onde dado qualquer $x \in \mathsf{V}$ desejamos encontrar um $y \in \mathsf{V}$ tal que y é reflexão de x em relação a H.

Para tal finalidade, usaremos uma representação em $\mathbb{R}^2$ para melhor visualizar a dedução.



Na figura acima, p como a projeção de x em H e s é combinação linear de w.

Projeção de x em $p - x$:

$$p - x = -\frac{\langle w, x\rangle}{\langle w, w\rangle} w$$

temos também:

$$s = 2(p - x) = -2\frac{\langle w, x\rangle}{\langle w, w\rangle} w$$

A reflexão y é $y = x + s$, então:

$$y = x - 2\frac{\langle w, x\rangle}{\langle w, w\rangle} w = x - 2\frac{\langle w, x\rangle w}{\langle w, w\rangle} = x - 2\frac{w\langle w, x\rangle}{\langle w, w\rangle}$$

$$y = x - \frac{2}{w^t w} w.w^t x \Leftrightarrow y = \left(I - \frac{2}{w^t w} w.w^t\right) x$$

Definimos a transformação linear H_w como:

$$H_w(x) = \left(I - \frac{2}{w^t w} w.w^t\right) x$$