<u>Представление функций в виде рядов</u>

Сначала немного теории.

Числовым рядом называется сумма бесконечной последовательность чисел:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \qquad (1)$$

Числа a1, a2, a3 и т.д. называются ***членами ряда.*** Обычно для члены ряда являются функциями натурального аргумента – номера члена ряда. Это позволяет получить значение любого члена ряда по его номеру. Сумма первых n слагаемых называется n-й ***частичной суммой*** ряда:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Числовой ряд называется ***сходящимся,*** если существует предел

$$S = lim_{n\to\infty} S_n ,$$

называемый ***суммой ряда.*** Хорошо известным примером сходящегося числового ряда является бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Необходимым условием сходимости ряда является $|a_n| \to 0$ при $n \to \infty$.

Если каждый член ряда является функцией некоторой переменной x, то такой ряд называется ***функциональным.***

$$a_1(x) + a_2(x) + a_3(x) + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\ (x)$$

Функциональный ряд называется сходящимся в точке $x = x_0$, если соответствующий числовой ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i\ (x_0)$$

является сходящимся. Множество значений переменной, при которых функциональный ряд сходится, называется ***областью сходимости*** ряда. В частном случае, когда областью сходимости является интервал [-R, R] значение R называется ***радиусом сходимости.***
Функционадьный ряд называется ***степенным***, если его члены являются степенными функциями своего аргумента. Степенные ряды специального вида – ряды Тейлора-Маклорена используются для представления обширного класса так называемых ***аналитических*** функций, к которому относятся и элементарные трансцендентные функции. Формула

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} * (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} * (x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} * (x-a)^n + \ldots$$

называется разложением функции $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = a$. При $a = 0$ данный ряд называют рядом Маклорена.
Ряды Тейлора-Маклорена используют для приближенного вычисления функций.

Для указанной преподавателем функции выполнить два задания.

<u>Задание 1</u>. При значениях *x* и *N*, определяемых вводом, вычислить частичную сумму ряда $S_N(x)$. Найти абсолютную погрешность полученного результата (абсолютную величину разности между значением соответствующей функции и $S_N(x)$). Сравнить полученную погрешность с абсолютной величиной последнего (N-го) слагаемого, включенного в частичную сумму.

Задание 2. При значениях *x* и *E*, определяемых вводом, вычислить сумму тех слагаемых заданного вида, которые по абсолютной величине больше *E*. Подсчитать количество таких слагаемых N. Выполнить суммирование для двух значений *E*, отличающихся на порядок (в 10 раз).

Вычисление частичных сумм необходимо оформить в виде отдельных функций с соответствующими наборами параметров.

1. $\frac{sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots$ ($R=\infty$).

2. $e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \ldots + (-1)^N * \frac{x^{2*N}}{N!}$ ($R=\infty$).

3. $ln(x + \sqrt{x^2+1}) = x - \frac{1}{2} * \frac{x^3}{3} + \frac{1*3}{2*4} * \frac{x^5}{5} - \frac{1*3*5}{2*4*6} * \frac{x^7}{7} + \ldots$ ($R=1$).

4. $arctg(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \ldots$ ($R=1$).

5. $arcsin(x) = x + \frac{1}{2} * \frac{x^3}{3} + \frac{1*3}{2*4} * \frac{x^5}{5} + \frac{1*3*5}{2*4*6} * \frac{x^7}{7} + \ldots$ ($R=1$).

6. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2} * x^2 + \frac{1*3}{2*4} * x^4 + \frac{1*3*5}{2*4*6} * x^6 + \ldots$ ($R=1$).

7. $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2} * x + \frac{1*3}{2*4} * x^2 - \frac{1*3*5}{2*4*6} * x^3 + \ldots$ ($R=1$).

8. $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2} * x - \frac{1}{8} * x^2 + \frac{1}{16} * x^3 - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{(2n-1)(n!)^2 4^n} x^n + \ldots$ ($R=1$).

9. $\frac{1}{(1+x)^3} = 1 - \frac{2*3}{2} * x + \frac{3*4}{2} * x^2 - \frac{4*5}{2} * x^3 + \ldots$ ($R=1$).

10. $\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2*x + 3*x^2 - 4*x^3 + 5*x^4 - \ldots$ ($R=1$).

11. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots$ ($R=1$).

12. $ln\frac{1+x}{1-x} = 2*(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots)$ ($R=1$).

13. $\ln(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots$ ($R=1$).

14. $ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$ $(R=1)$.

15. $ch(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots$ $(R=\infty)$.

16. $sh(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\ldots$ $(R=\infty)$.

17. $\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ $|x|<\infty$

18. $\operatorname{arctg}(x)=-\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{7x^7}-\frac{1}{9x^9}+\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n-1)x^{2n-1}}$ $x<-1$

19. $\operatorname{arctg}(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{7x^7}-\frac{1}{9x^9}+\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n-1)x^{2n-1}}$ $x>1$

20. $\operatorname{arcctg}(x)=\frac{\pi}{2}-x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}-\frac{x^9}{9}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{2n-1}$ $|x|\le 1$

21. $\arccos(x)=\frac{\pi}{2}-\left(x+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}+\ldots+\frac{(2n-1)!!\cdot x^{2n+1}}{(2n)!!\cdot(2n+1)}\right)$ $|x|<1$

22. $\ln(x)=2\left(\frac{x-1}{x+1}+\frac{(x-1)^3}{3(x+1)^3}+\frac{(x-1)^5}{5(x+1)^5}+\ldots+\frac{(x-1)^{2n-1}}{(2n-1)(x+1)^{2n-1}}\right)$ $x>0$

23. $\ln(x)=\frac{x-1}{1}-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n}$ $0<x\le 2$

24. $\ln(x)=\frac{x-1}{x}+\frac{(x-1)^2}{2x^2}+\frac{(x-1)^3}{3x^3}+\ldots+\frac{(x-1)^n}{nx^n}$ $x>\frac{1}{2}$

25. $\ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{7x^7}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}}\right)$ $|x|>1$