$$I_n(f) = \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i) \text{ donde } x_i = a + ih$$

$$c_i = \frac{h}{\prod_{j\neq i}(i-j)} \int_0^n \left[\prod_{j\neq i}(t-j) \right] dt$$

Fórmulas de Newton - Cotes

Fórmula compuesta para el método del Trapecio

$$I_1(f) = \frac{1}{2}(x_1 - x_0)[f(x_0) + f(x_1)]$$

$$x_i = x_0 + ih$$

$$\begin{aligned} I_1(f) &= \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + \cdots + \frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)] \\ &= \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(x_n) \right] \end{aligned}$$

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y sea

$$R(f) = I_n(f) - \int_a^b f(x)dx$$

Teorema. Supongamos que $R(P) = 0$ para todo $P \in \mathbb{R}_n[x]$. Entonces, para toda $f \in C^{n+1}([a,b])$

$$R(f) = \int_a^b f^{(n+1)}(t)K(t)dt$$

donde

$$K(t) = \frac{1}{n!}R_x((x-t)_+^n)$$

$$(x-t)_+^n = \begin{cases} (x-t)^n \text{ si } x \geq t \\ 0 \text{ si } x < t \end{cases}$$

y $R_x((x-t)_+^n)$ denota el error al integrar $(x-t)_+^n$ cuando se la considera como función de x.

Demostración. Por el teorema de Taylor

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + r_n(x)$$

donde

$$r_n(x) \overset{\text{Cauchy}}{=} \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(t)(x-t)_+^n dt$$

Aplicando el operador R tenemos

$$R(f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} R\left((x-a)^k\right) + R(r_n) = R(r_n)$$

y veamos en detalle $R(r_n)$:

$$\begin{aligned} R_x(r_n) &= \frac{1}{n!} R_x\left(\int_a^b f^{(n+1)}(t)(x-t)_+^n dt\right) \\ &= \frac{1}{n!}\int_a^b R_x[f^{(n+1)}(t)(x-t)_+^n dt] \\ &= \frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(t) R_x[(x-t)_+^n] dt \end{aligned}$$

Aplicando un resultado sobre funciones continuas de cálculo en una variable tenemos:

$$R_n(f) = \begin{cases} \frac{1}{(n+1)!} R_n(x^{n+1}) f^{(n+1)}(\xi) & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{1}{(n+2)!} R_n(x^{n+2}) f^{(n+2)}(\xi) & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Ejemplo. Si $n = 1$

$$\begin{aligned} R_1(f) &= \frac{1}{2} f''(\xi) R_1(x^2) \\ &= \frac{1}{2} f''(\xi)\left[I_1(x^2) - \int_a^b x^2 dx \right] \\ &= \frac{1}{2} f''(\xi)\left[\frac{b-a}{2}[a^2+b^2] - \frac{1}{3}[b^3-a^3] \right] \\ &= \frac{1}{2} f''(\xi)\left[\frac{b-a}{2}[a^2+b^2] - \frac{1}{3}(b-a)(a^2+ab+b^2) \right] \\ &= \frac{b-a}{2} f''(\xi)\left[\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{3}a^2 - \frac{1}{3}ab - \frac{1}{3}b^2 \right] \\ &= \frac{b-a}{2} f''(\xi)\left[\frac{1}{6}a^2 - \frac{1}{3}ab + \frac{1}{6}b^2 \right] \\ &= \frac{b-a}{12} f''(\xi)[a^2 - 2ab + b^2] \\ &= \frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi) \end{aligned}$$

En el caso de la fórmula compuesta, si tenemos n intervalos, el error es la suma del error en cada uno de ellos, por lo tanto

$$R_1(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{h^3}{12} f''(\xi_i) = \frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) = \frac{nh^3}{12} f''(\xi) = \frac{h^2}{12}(b-a) f''(\xi)$$

Ejemplo.

$$I = \int_1^2 x^x dx$$

$$|R_1(f)| \leq 10^{-5} \iff \frac{h^2}{12}|f''(\xi)| \leq 10^{-5}$$

$$\frac{h^2}{12}|f''(\xi)| \leq \frac{13.467}{12}h^2$$

$$\frac{13.467}{12}h^2 \leq 10^{-5} \iff h^2 \leq 8.9107 \times 10^{-6}$$

de donde

$$h \leq 2.9851 \times 10^{-3} \iff \frac{1}{n} \leq 2.9851 \times 10^{-3} \iff n \geq 335$$

Para el método de Simpson, $\frac{a+b}{2} = a+h$ y $b = a+2h$

$$\begin{aligned}
R_2(f) &= \frac{1}{24}R_2(x^4)f^{(4)}(\xi) \\
&= \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}\left[I_2(x^4) - \int_a^b x^4 dx \right] \\
&= \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}\left[\frac{h}{3}\left(a^4 + 4(a+h)^4 + (a+2h)^4\right) - \frac{1}{5}\left((a+2h)^5 - a^5\right) \right] \\
&= \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}\frac{4}{15}h^5 \\
&= \frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)
\end{aligned}$$