$$f : [a,b] \to \mathbb{R}$$
$$\{f_k\}_{k=1}^{m}$$
$$g = \sum_{k=1}^{m} c_k f_k$$
$$d(f,g) \text{ sea mínima}$$

$$\sum_{j=1}^{m} (f_k \mid f_j) c_j = (f \mid f_k) \text{ para } k = 1,2,\ldots,m$$

Si $(f_k \mid f_j) = 0$ cuando $j \neq k$ tenemos

$$(f_k \mid f_k) c_k = (f \mid f_k) \text{ para } k = 1,2,\ldots,m$$

de donde

$$c_k = \frac{(f \mid f_k)}{(f_k \mid f_k)} \text{ para } k = 1,2,\ldots,m$$

Polinomios de Tchebyshev

Definición. Para cada $n \in \mathbb{N}$ el polinomio de Tchebyshev T_n está dado por

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)) \text{ para } x \in [-1,1]$$

Para $n = 0$ y $n = 1$ tenemos

$$T_0(x) = 1$$
$$T_1(x) = x$$

Sea $\theta = \arccos(x)$, entonces

$$T_{n+1}(x) = \cos((n+1)\theta) = \cos(n\theta + \theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta)$$
$$T_{n-1}(x) = \cos((n-1)\theta) = \cos(n\theta - \theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) + \sin(n\theta)\sin(\theta)$$

Sumando miembro a miembro

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2\cos(n\theta)\cos(\theta) = 2xT_n(x)$$

de donde

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Ejemplo

$$
\begin{aligned}
T_2(x) &= 2x^2 - 1\\
T_3(x) &= 2x(2x^2-1) - x = 4x^3 - 3x\\
T_4(x) &= 2x(4x^3-3x) - 2x^2 + 1 = 8x^4 - 8x^2 + 1\\
T_5(x) &= 2x(8x^4 - 8x^2 + 1) - 4x^3 + 3x = 16x^5 - 20x^3 + 5x
\end{aligned}
$$

Teorema. La familia $\{T_n\}_{n\geq 0}$ de polinomios de Tchebyshev es una familia ortogonal con el producto interno

$$(f \mid g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\omega(x)dx$$

donde $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Demostración Sean $j,k \in \mathbb{N}$ con $j \neq k$, entonces

$$(T_j \mid T_k) = \int_{-1}^{1} T_j(x)T_k(x)\omega(x)dx = \int_{-1}^{1} \cos(j\arccos(x))\cos(k\arccos(x))\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Hacemos el cambio de variable $\theta = \arccos(x)$, entonces $d\theta = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ y por lo tanto

$$
\begin{aligned}
(T_j \mid T_k) &= -\int_{\pi}^{0} \cos(j\theta)\cos(k\theta)d\theta = \int_{0}^{\pi} \cos(j\theta)\cos(k\theta)d\theta\\
&= \left[\frac{1}{k}\sin(k\theta)\cos(j\theta)\right]_0^{\pi} + \frac{j}{k}\int_0^{\pi}\sin(j\theta)\sin(k\theta)d\theta\\
&= \frac{j}{k}\int_0^{\pi}\sin(j\theta)\sin(k\theta)d\theta\\
&= \left[-\frac{j}{k^2}\sin(j\theta)\cos(k\theta)\right]_0^{\pi} + \frac{j^2}{k^2}\int_0^{\pi}\cos(j\theta)\cos(k\theta)d\theta\\
&= \frac{j^2}{k^2}(T_j \mid T_k)
\end{aligned}
$$

esto es,

$$(T_j \mid T_k) = \frac{j^2}{k^2}(T_j \mid T_k) \iff \left(1 - \frac{j^2}{k^2}\right)(T_j \mid T_k) = 0$$

Como $j \neq k$ tenemos que $1 - \frac{j^2}{k^2} \neq 0$, por lo tanto $(T_j \mid T_k) = 0$.

Por otro lado, si $k \in \mathbb{Z}^+$

$$
\begin{aligned}
\|T_k\|^2 &= \int_{-1}^{1}\cos^2(k\arccos(x))\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\\
&= \int_0^{\pi}\cos^2(k\theta)d\theta\\
&= \int_0^{\pi}\frac{1+\cos(2k\theta)}{2}d\theta\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos(2k\theta)d\theta\\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2k}\sin(2k\theta)\right]_0^{\pi}\\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

y

$$\|T_0\|^2 = \int_0^\pi d\theta = \pi$$

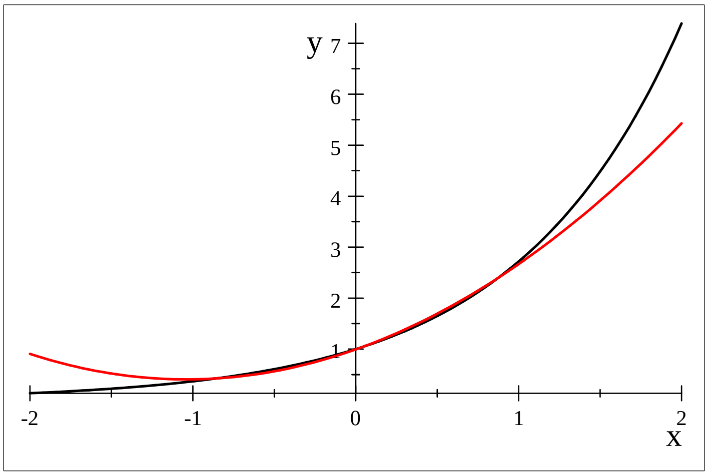
Por otra parte, sea $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ continua, entonces

$$\begin{aligned}(f \mid T_k) &= \int_{-1}^1 f(x)T_k(x)\omega(x)dx \\ &= \int_{-1}^1 f(x)\cos(k\arccos(x))\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ &= \int_0^\pi f(\cos(\theta))\cos(k\theta)d\theta\end{aligned}$$

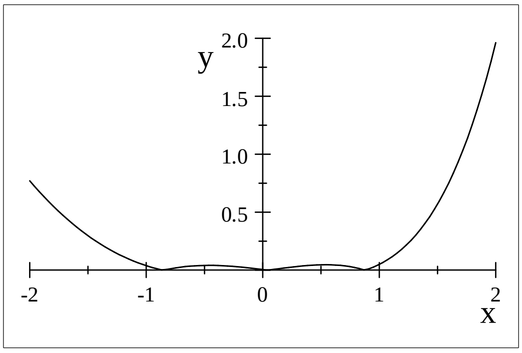
Ejemplo. Sea $f(x) = e^x$ y aproximamos f en $[-1,1]$ con la familia $\{T_0, T_1, T_2\}$

$$\begin{aligned}c_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{\cos(\theta)}d\theta = 1.266065878 \\ c_1 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi e^{\cos(\theta)}\cos(\theta)d\theta = 1.130318208 \\ c_2 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi e^{\cos(\theta)}\cos(2\theta)d\theta = 0.2714953395\end{aligned}$$

$$g(x) = 1.266065878 + 1.130318208x + 0.2714953395(2x^2-1)$$



f (negro)
g (rojo)



$|f(x) - g(x)|$

Extensión a un intervalo arbitrario $[a,b]$

Tenemos una función $f : [a,b] \to \mathrm{R}$ continua que queremos aproximar polinómicamente. Sea la función afín $g : [a,b] \to [-1,1]$ dada por

$$g(x) = \frac{2}{b-a}x - \frac{a+b}{b-a} = \frac{1}{b-a}(2x-a-b)$$

Luego se tiene lo siguiente

$$[a,b] \xrightarrow{g} [-1,1] \xrightarrow{T_k} \mathrm{R}$$

de modo que la composición de T_k con g es un polinomio definido en el intervalo $[a,b]$, que denotaremos $\widetilde{T}_k$, esto es,

$$\widetilde{T}_k = T_k \circ g$$

Veamos ahora que la familia de polinomios $\left\{\widetilde{T}_k\right\}_{k \geq 0}$ es una familia ortogonal con el producto interno

$$(f \mid h) = \int_a^b f(x)h(x)\omega(g(x))dx$$

$$\left(\widetilde{T}_k \mid \widetilde{T}_j\right) = \int_a^b \widetilde{T}_k(x)\widetilde{T}_j(x)\omega(g(x))dx$$
$$= \int_a^b T_k(g(x))T_j(g(x))\omega(g(x))dx$$

Hacemos ahora el cambio de variable $g(x) = z$, entonces $dz = \frac{2}{b-a}dx$ o equivalentemente $dx = \frac{b-a}{2}dz$, por lo tanto

$$\left(\widetilde{T}_k \mid \widetilde{T}_j\right) = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} T_k(z)T_j(z)\omega(z)dz = 0, \text{ para } j \neq k$$

Además

$$\left\|\widetilde{T}_k\right\|^2 = \frac{b-a}{2}\|T_k\|^2 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi(b-a)}{2} \text{ si } k = 0 \\ \frac{\pi(b-a)}{4} \text{ si } k \neq 0 \end{array} \right\}$$

Por último

$$\begin{aligned}\left(f \mid \widetilde{T}_k\right) &= \int_a^b f(x)T_k(g(x))\omega(g(x))dx \\ &= \int_a^b f(x)\cos(k\arccos(g(x)))\frac{1}{\sqrt{1-g^2(x)}}dx\end{aligned}$$

y sea $\theta = \arccos(g(x))$, entonces $d\theta = -\frac{2}{b-a}\frac{1}{\sqrt{1-g^2(x)}}dx$, por lo tanto tenemos

$$\left(f \mid \widetilde{T}_k\right) = \frac{b-a}{2}\int_0^\pi f\left(\frac{1}{2}(b-a)\cos(\theta)+\frac{a+b}{2}\right)\cos(k\theta)d\theta$$

Luego

$$c_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f\left(\frac{1}{2}(b-a)\cos(\theta)+\frac{a+b}{2}\right)\cos(k\theta)d\theta \text{ si } k \neq 0$$

y

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f\left(\frac{1}{2}(b-a)\cos(\theta)+\frac{a+b}{2}\right)d\theta$$

Ejemplo. $f(x) = e^x$ para $x \in [0,2]$, entonces $g(x) = x-1$

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{\cos(\theta)+1}d\theta = 3.441523869 \\ c_1 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi e^{\cos(\theta)+1}\cos(\theta)d\theta = 3.072523445 \\ c_2 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi e^{\cos(\theta)+1}\cos(2\theta)d\theta = 0.7380008480\end{aligned}$$

Luego

$$h(x) = 3.441523869 + 3.072523445(x-1) + 0.7380008480\left(2(x-1)^2-1\right)$$

e^x