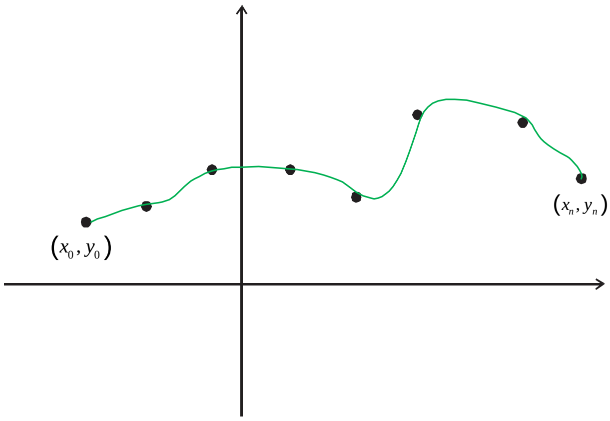
**Interpolación Polinómica**

Sea el conjunto de puntos no alineados $\mathsf{S} = \{(x_0,y_0),\ldots,(x_n,y_n)\} \subset \mathsf{R}^2$. Se trata entonces, de hallar un polinomio $P$ tal que $P(x_i) = y_i$ para $i = 0,1,\ldots,n$.




**Teorema**. Dado el conjunto de puntos no alineados $\mathsf{S} = \{(x_0,y_0),\ldots,(x_n,y_n)\}$, existe un único

polinomio $P$ de grado $n$ tal que $P(x_i) = y_i$ para $i = 0,1,\ldots,n$.

**Demostración**. Veamos primero la unicidad. Sean $P$ y $Q$ polinomios de grado $n$ tales que $P(x_i) = y_i$ y $Q(x_i) = y_i$ para $i = 0,1,\ldots,n$ y sea $H(x) = P(x) - Q(x)$, de modo que $H$ es un polinomio de grado menor o igual a $n$, pero $H(x_i) = 0$ para $i = 0,1,\ldots,n$, esto es $x_0,\ldots,x_n$ son raíces de $H$. Como $H$ tiene grado menor o igual a $n$, no puede tener $n+1$ raíces, a menos que sea el polinomio nulo, por lo tanto $H(x) = 0$ para todo $x$ o equivalentemente $P(x) = Q(x)$ para todo $x$, lo que demuestra la unicidad.

Veamos la existencia: para cada $i = 0,1,\ldots,n$ sea el polinomio $L_i$ dado por

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} = \prod_{0\le j\le n,\, j\ne i} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

de modo que

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ 1 & \text{si} \quad i = j \end{cases}$$

y sea $P$ el polinomio dado por

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$

entonces

$$\begin{aligned} P(x_j) &= \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x_j) \\ &= \sum_{i=0}^{n} y_i \delta_{ij} \\ &= y_j \end{aligned}$$

**Observación 1**. Los polinomios $L_i$ se conocen como polinomios de Lagrange y el polinomio $\sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x_j)$ recibe el nombre de polinomio inetrpolante de Lagrange.

**Observación 2**. El símbolo $\delta_{ij}$ usado en la demostración se conoce como delta de Kronecker.

**Ejemplo**. Sean los puntos $(-2,2)$, $(0,3)$ y $(2,-3)$, entonces

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x-0)(x-2)}{(-2-0)(-2-2)} = \frac{1}{8}x(x-2) \\ L_1(x) &= \frac{(x+2)(x-2)}{(0+2)(0-2)} = -\frac{1}{4}(x+2)(x-2) \\ L_2(x) &= \frac{(x+2)(x-0)}{(2+2)(2-0)} = \frac{1}{8}(x+2)x \end{aligned}$$

Luego, el polinomio interpolante de Lagrange es

$$\begin{aligned} L(x) &= 2L_0(x) + 3L_1(x) - 3L_2(x) \\ &= \frac{1}{4}x(x-2) - \frac{3}{4}(x+2)(x-2) - \frac{3}{8}x(x+2) \\ &= -\frac{7}{8}x^2 - \frac{5}{4}x + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(-2) &= 2 \\ L(0) &= 3 \\ L(2) &= -3 \end{aligned}$$

**Teorema**. Sean $f : [a,b] \to \mathsf{R}$ de clase $C^{n+1}$, $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$ con $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ y $L$ el polinomio interpolante de Lagrange que interpola los puntos del conjunto $\mathsf{S} = \{(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))\}$. Entonces para cada $x \in [x_0, x_n]$ existe un número $\xi_x \in (x_0, x_n)$ tal que

$$f(x) - L(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

**Demostración**. Para $x \in [a,b] - \{x_0, \ldots, x_n\}$ sea $g : [a,b] \to \mathsf{R}$ dada por

$$g(t) = f(t) - L(t) - [f(x) - L(x)] \prod_{i=0}^{n} \frac{(t - x_i)}{(x - x_i)}$$

entonces $g(x_i) = 0$ para $i = 0, 1, \ldots, n$ y $g(x) = 0$, de modo que $g$ se anula en los $n+2$ puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n, x$, luego, por el teorema de Rolle generalizado, existe un punto $\xi_x \in (x_0, x_n)$ tal que $g^{(n+1)}(\xi_x) = 0$.

Por otro lado

$$g(t) = f(t) - L(t) - [f(x) - L(x)] \frac{1}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)} [t^{n+1} + Q(t)]$$

donde $Q$ es un polinomio de grado menor o igual a $n$, entonces

$$g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - [f(x) - L(x)] \frac{1}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)} [(n+1)!]$$

y por la condición $g^{(n+1)}(\xi_x) = 0$ tenemos

$$f^{(n+1)}(\xi_x) - [f(x) - L(x)] \frac{1}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)} [(n+1)!] = 0$$

de donde

$$f(x) - L(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

**Ejemplo**. Sea $f(x) = 3xe^x - 2e^x$. Aproxime $f(1.03)$ usando el polinomio interpolante de grado dos con $x_0 = 1$, $x_1 = 1.05$ y $x_2 = 1.07$. Compare el error real con la cota obtenida usando la fórmula del teorema anterior.

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x-1.05)(x-1.07)}{(1-1.05)(1-1.07)} = 285.71(x-1.05)(x-1.07) \\
L_1(x) &= \frac{(x-1)(x-1.07)}{(1.05-1)(1.05-1.07)} = -1000.0(x-1.07)(x-1) \\
L_2(x) &= \frac{(x-1)(x-1.05)}{(1.07-1)(1.07-1.05)} = 714.29(x-1.05)(x-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L(x) &= f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) \\
&= eL_0(x) + 3.2863L_1(x) + 3.5276L_2(x) \\
&= 10.07x^2 - 9.2905x + 1.9385
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L(1.03) &= 3.0525 \\
f(1.03) &= 3.0532
\end{aligned}$$

El error real es

$$f(1.03) - L(1.03) = 0.0007$$

Una cota para el error está dada de la manera siguiente

$$\begin{aligned}
|f(1.03) - L(1.03)| &= \frac{\left|f'''(\xi_{1.03})\right|}{6}(1.03-1)(1.05-1.03)(1.07-1.03) \\
&\leq 4 \times 10^{-6} \max\{|f'''(x)| \mid 1.03 \leq x \leq 1.07\} \\
&= 4 \times 10^{-6} \times f'''(1.07) \\
&= 1.1906 \times 10^{-4} \\
&= 0.00011906
\end{aligned}$$