Resolución Numérica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

La expresión general de una ecuación diferencial ordinaria de orden n es

$$y^{(n)} = f(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n-1)})$$

donde f es una función de $\mathsf{R} \times \mathsf{R}^n$ en R continua.

Reducción del Orden

Dada la ecuación diferencial ordinaria $y^{(n)} = f(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n-1)})$ de orden n, sean $u_0,u_1,\ldots,u_{n-1}$ las funciones dadas por

$$\begin{aligned} u_0 &= y \\ u_1 &= y' \\ u_2 &= y'' \\ &\vdots \\ u_{n-2} &= y^{(n-2)} \\ u_{n-1} &= y^{(n-1)} \end{aligned}$$

y sea

$$H = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{bmatrix}$$

entonces

$$H' = \begin{bmatrix} u_0' \\ u_1' \\ \vdots \\ u_{n-2}' \\ u_{n-1}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ f(x,u_0,u_1,\ldots,u_{n-1}) \end{bmatrix} = G(x,H)$$

esto es

$$H' = G(x,H)$$

Método de Euler

Dada la ecuación diferencial de primer orden $y' = f(x,y)$ donde $x \in [a,b]$ y $f : \mathsf{R} \times \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ satisface la condición $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1,y_2|$ para todo $x \in [a,b]$ y para todo y_1,y_2 tales que $(x,y_1),(x,y_2) \in \operatorname{dom}(f)$ y además $y(a) = y_0$, la sucesión $\{y_k\}_{k=0}^{n}$ dada por

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$$

donde $x_k = a + kh$ para $k = 0, 1, \ldots, n$ y $h = \frac{b-a}{n}$.

La sucesión $\{y_k\}_{k=0}^{n}$ aproxima los valores de la función y en el intervalo $[a, b]$. Este método para calcular los valores y_k se denomina método de Euler.

Ejemplo. Consideremos la ecuación diferencial siguiente

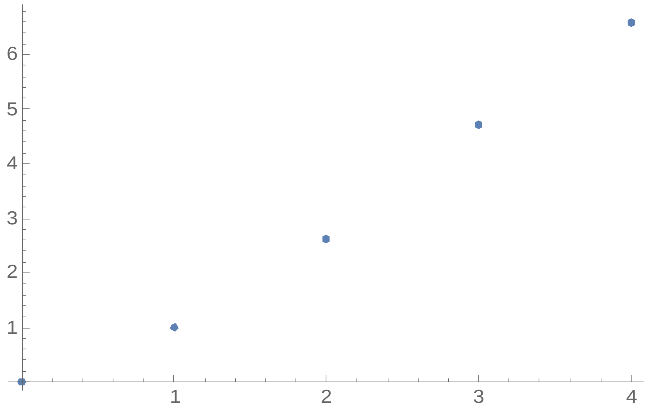
$$y' = 1 + 2(y - \ln(1 + x^2))e^{x-y} \text{ para } 0 \leq x \leq 4 \text{ y } y(0) = 0$$

Entonces

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 1 + 2(y - \ln(1 + x^2))e^{x-y} \\ n &= 4 \\ h &= 1 \\ x_k &= k \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_k & y_k \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2.613705639 \\ 3 & 4.701008497 \\ 4 & 6.576430071 \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{S} = \{(0,0), (1,1), (2, 2.613705639), (3, 4.701008497), (4, 6.576430071)\}$$



Sea $\mathsf{A} = \{f_1(x) = 1, f_2(x) = x\}$, entonces

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2.613705639 \\ 4.701008497 \\ 6.576430071 \end{bmatrix}$$

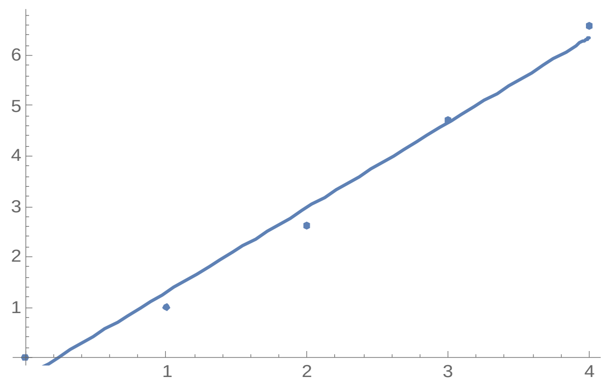
$$A^t A = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix}$$

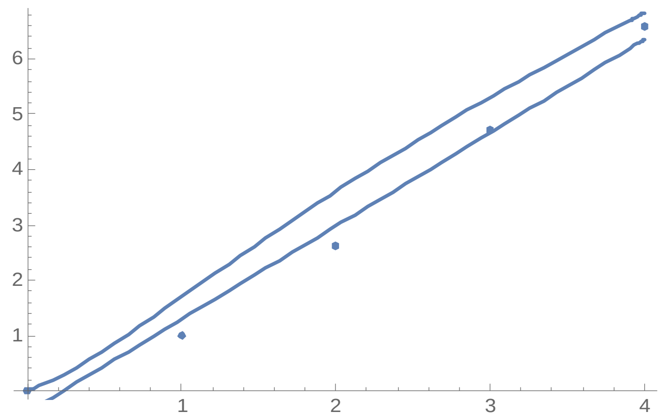
$$(A^t A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

$$A^t Y = \begin{bmatrix} 14.89114421 \\ 46.63615705 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} -0.392544884 \\ 1.685386863 \end{bmatrix}$$

$$g(x) = -0.392544884 + 1.685386863x$$





Método de Runge - Kutta de Cuarto Orden

Dada la ecuación diferencial de primer orden $y' = f(x,y)$ donde $x \in [a,b]$ y $f : \mathrm{R} \times \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ satisface la condición $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1,y_2|$ para todo $x \in [a,b]$ y para todo y_1,y_2 tales que $(x,y_1),(x,y_2) \in \mathrm{dom}(f)$ y además $y(a) = y_0$, la sucesión $\{y_k\}_{k=0}^{n}$ dada por

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}[u_{1,k} + 2u_{2,k} + 2u_{3,k} + u_{4,k}]$$

donde

$$\begin{aligned} u_{1,k} &= hf(x_k,y_k) \\ u_{2,k} &= hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{1}{2}u_{1,k}\right) \\ u_{3,k} &= hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{1}{2}u_{2,k}\right) \\ u_{4,k} &= hf(x_{k+1}, y_k + u_{3,k}) \end{aligned}$$

y los x_k y h como en el método de Euler.

$$\begin{bmatrix} x_k & y_k \\ 0 & 0 \\ 1 & 1.629485224 \\ 2 & 3.55961209 \\ & \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} u_{1,1} &= 1.997885485 \\ u_{2,1} &= 1.93812337 \\ u_{3,1} &= 1.946656499 \\ u_{4,0} &= 1.813315974 \end{aligned}$$

$f(1, 1.629485224) = 1.997885485$
$f\left(\frac{3}{2}, 1.629485224 + \frac{1.997885485}{2}\right) = 1.93812337$
$f\left(\frac{3}{2}, 1.629485224 + \frac{1.93812337}{2}\right) = 1.946656499$
$f(2, 1.629485224 + 1.946656499) = 1.813315974$

$\frac{1}{6}(1 + 2 \times 1.553712897 + 2 \times 1.839609622 + 1.990266304) = 1.629485224$

$1.629485224 + \frac{1}{6}(1.997885485 + 2 \times 1.93812337 + 2 \times 1.946656499 + 1.813315974) =$
3.55961209

$g(x) = x + \ln(1 + x^2)$
$g(1) = 1.693147181$
$g(2) = 3.609437912$