$$f(x) = 3xe^x - 2e^x$$
$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1.05, \quad x_2 = 1.07$$
$$L(x) = 1.93566 - 9.2914x + 10.074x^2$$
$$E(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

El error real es $E = 0.000114168$ y una cota para el mismo es $E' = 0.000119064$

$3xe^x - 2e^x$

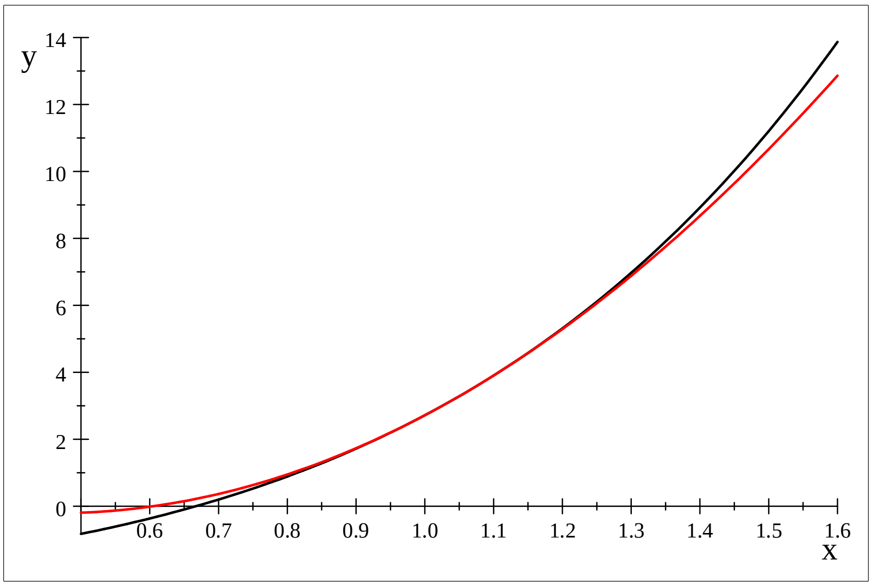

Gráfico de f y L

Definición. Una sucesión en $\mathbb{R}$ es una función $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Si $n \in \mathbb{N}$ con s_n denotaremos el valor de la sucesión φ en n, esto es, $s_n = \varphi(n)$. La manera habitual de denotar una sucesión cuyos valores son s_n es $\{s_n\}$. Los valores s_n se denominan términos de la sucesión.

Ejemplo. $s_n = \frac{1}{2^n}$

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots.\right\}$$

Si $\{s_n\}$ es una sucesión y $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = L$ se dice que la sucesión es convergente o que $\{s_n\}$ converge a L.

Definición. Una sucesión $\{s_n\}$ en $\mathbb{R}$ es una sucesión de Cauchy si $\lim\limits_{n,m\to\infty} |s_n - s_m| = 0$.

Definición. Sea $A \subset \mathbb{R}$. Diremos que A es completo si toda sucesión de Cauchy en A converge en A.

Ejemplo. Sea la sucesión $s_n = \frac{1}{n}$ en $A = (0, 1]$.

$$\lim_{n,m\to\infty} |s_n - s_m| = \lim_{n,m\to\infty} \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| = 0$$

por lo tanto, $\{s_n\}$ es una sucesión de Cauchy en A.
Por otro lado $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \notin A$, por lo tanto, A no es completo.

Teorema. Sea $\{s_n\}$ una sucesión en $\mathbb{R}$. Entonces $\{s_n\}$ es convergente si y sólo si es una sucesión de Cauchy.

Sea la sucesión $\{a_k\}$. Construyamos a partir de ella la sucesión $\{s_n\}$ de la manera siguiente:

$$s_0 = a_0$$
$$s_1 = a_0 + a_1$$
$$s_2 = a_0 + a_1 + a_2$$

y en general

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

La sucesión $\{s_n\}$ de sumas parciales $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ se denomina serie de términos a_k y se la denota $\sum a_k$. Si el límite de la sucesión $\{s_n\}$ existe, se dice que la serie es convergente y al valor de dicho límite se lo denomina suma de la serie.

Observación. Si la serie $\sum a_k$ es convergente, existe $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$ y por simplicidad en la notación lo escribimos

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

Serie Geométrica

Sea la sucesión $\{x^k\}$ para $x \in \mathbb{R}$. La correpondiente serie de términos x^k es $\sum x^k$. Queremos analizar la convergencia de esta serie.

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$
$$x s_n = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + x^{n+1}$$

Restando miembro a miembro tenemos

$$(1-x)s_n = 1-x^{n+1}$$

Si $x = 1$, $s_n = n+1 \to \infty$ cuando $n \to \infty$, por lo tanto $\sum x^k$ no es convergente para $x = 1$.

Si $x \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

y

$$s_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Para estudiar el límite de s_n cuando $n \to \infty$, basta ver el límite de x^{n+1} cuando $n \to \infty$.
Si $|x| < 1$, $\lim_{n\to\infty} x^{n+1} = 0$ y si $|x| \geq 1$ el límte de x^{n+1} no existe.

Concluimos entonces que la serie $\sum x^k$ converge si $|x| < 1$ y no converge si $|x| \geq 1$. Para $|x| < 1$, la suma de la serie es

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

Esta serie recibe el nombre de serie geométrica.

$$0.9999999999\ldots = 1$$

$$\begin{aligned}
0.999999999\ldots\ldots &= 0.9+0.09+0.009+0.0009+\cdots \\
&= \frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\cdots \\
&= 9\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^k \\
&= 9\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^k - 1\right] \\
&= 9\left[\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1\right] = 9\left[\frac{10}{10-1}-1\right] \\
&= 9\left[\frac{10}{9}-1\right] = 10-9 = 1
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \text{ para } x \neq 1$$