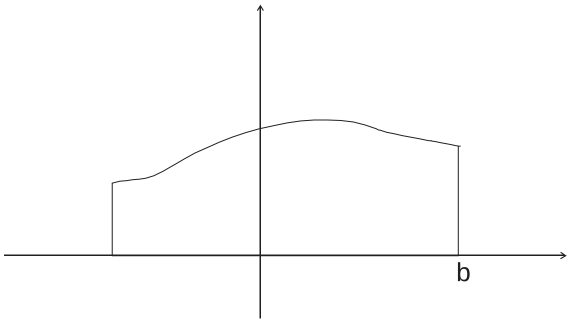
Integración Numérica

Dada $f : [a,b] \to \mathrm{R}$ continua por tramos, queremos calcular el valor de

$$\int_a^b f(x)dx$$



Sea $P = \{x_i \mid a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ una partición del intervalo $[a,b]$ y sea $L(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x)$. Aproximamos el valor de $\int_a^b f(x)dx$ con

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b \left[\sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x) \right] dx = \sum_{i=0}^{n} \int_a^b f(x_i)L_i(x)dx \\ &= \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b L_i(x)dx = \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i) \end{aligned}$$

donde

$$c_i = \int_a^b L_i(x)dx \text{ para } i = 0,1,\ldots,n$$

Tomamos los puntos x_i de la partición P de la manera siguiente:

$$x_i = a + ih \text{ para } i = 0,1,\ldots,n$$

Oservación.

$$b = a + nh \Leftrightarrow h = \frac{b-a}{n} \Leftrightarrow \frac{b-a}{h} = n$$

Con esta condición,

$$\begin{aligned} L_i(x) &= \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} \\ &= \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{h^n \prod_{j\neq i}(i-j)} \end{aligned}$$

de modo que

$$c_i = \frac{1}{h^n \prod_{j \neq i}(i-j)} \int_a^b \prod_{j \neq i}(x - x_j)dx$$

Hacemos ahora el cambio de variable $x = a + th$, entonces $dx = hdt$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
c_i &= \frac{1}{h^n \prod_{j \neq i}(i-j)} \int_0^n \prod_{j \neq i}(a + th - a - jh)hdt \\
&= \frac{h}{h^n \prod_{j \neq i}(i-j)} \int_0^n \prod_{j \neq i} h(t-j)dt \\
&= \frac{h^{n+1}}{h^n \prod_{j \neq i}(i-j)} \int_0^n \left[\prod_{j \neq i}(t-j) \right]dt \\
&= \frac{h}{\prod_{j \neq i}(i-j)} \int_0^n \left[\prod_{j \neq i}(t-j) \right]dt
\end{aligned}$$

Luego

$$I(f) = \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i) \text{ donde } x_i = a + ih \text{ y } e$$

Fórmulas de Newton - Cotes

Si $n = 1$

$$I_1(f) = c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1)$$

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{x_1 - x_0}{0-1} \int_0^1 (t-1)dt = \frac{x_1 - x_0}{-1} \left[\frac{t^2}{2} - t \right]_0^1 = \frac{x_1 - x_0}{-1} \left[-\frac{1}{2} \right] = \frac{x_1 - x_0}{2} \\
c_1 &= \frac{x_1 - x_0}{1-0} \int_0^1 tdt = \frac{x_1 - x_0}{1} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{x_1 - x_0}{2}
\end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
I(f) &= \frac{x_1 - x_0}{2} f(x_0) + \frac{x_1 - x_0}{2} f(x_1) \\
&= \frac{1}{2}(x_1 - x_0)[f(x_0) + f(x_1)]
\end{aligned}$$

Método del Trapecio

Sea $n = 2$, entonces

$$I_2(f) = \sum_{i=0}^{2} c_i f(x_i)$$

donde

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{h}{(0-1)(0-2)}\int_0^2 (t-1)(t-2)dt = \frac{h}{2}\frac{2}{3} = \frac{h}{3} \\ c_1 &= \frac{h}{(1-0)(1-2)}\int_0^2 t(t-2)dt = \frac{h}{-1}\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{4h}{3} \\ c_2 &= \frac{h}{(2-0)(2-1)}\int_0^2 t(t-1)dt = \frac{h}{2}\frac{2}{3} = \frac{h}{3} \end{aligned}$$ #

Luego

$$\begin{aligned} I_2(f) &= \frac{h}{3}f(x_0) + \frac{4h}{3}f(x_1) + \frac{h}{3}f(x_2) \\ &= \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \end{aligned}$$

Método o Regla de Simpson

Ejemplo. Sea $f(x) = \cos(x)$ para $x \in [1,5]$, entonces

$$\int_1^5 \cos(x)dx = [\sin(x)]_1^5 = \sin(5) - \sin(1) = -1.8004$$

y por otro lado

$$I_2(f) = \frac{2}{3}[\cos(1) + 4\cos(3) + \cos(5)] = -2.0907$$

Tomemos ahora el intervalo $[1, 1.4]$, entonces

$$\int_1^{1.4} \cos(x)dx = 0.14398$$

y

$$I_2(f) = \frac{0.2}{3}[\cos(1) + 4\cos(1.2) + \cos(1.4)] = 0.14398$$

Sea $n = 2m$ y consideremos la siguiente partición P del intervalo $[a,b]$

$$P = \{a + jh \mid j = 0, 1, \ldots, 2m\}$$

y aplicamos el método de Simpson tomando de a pares de subintervalos, esto es,

$$\begin{aligned} I_2(f) &= \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h}{3}[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] + \cdots + \frac{h}{3}[f(x_{2m-2}) + 4f(x_{2m-1}) + f(x_{2m})] \\ &= \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\sum_{j=0}^{m-1} f(x_{2j+1}) + 2\sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2j}) + f(x_{2m}) \right] \end{aligned}$$

Regla o Método de Simpson Compuesta (Compuesto)

Observación. Esta fórmula también puede escribirse como

$$I_2(f) = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2j+1}) + 2\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2j}) + f(x_{2m}) \right]$$ con n un entero positivo par

Para $n = 3$

$$I_3(f) = \sum_{i=0}^{3} c_i f(x_i)$$

donde

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{h}{(0-1)(0-2)(0-3)} \int_0^3 (t-1)(t-2)(t-3)dt = \frac{h}{-6}\left(-\frac{9}{4}\right) = \frac{3}{8}h \\
c_1 &= \frac{h}{(1-0)(1-2)(1-3)} \int_0^3 (t-0)(t-2)(t-3)dt = \frac{h}{2}\frac{9}{4} = \frac{9}{8}h \\
c_2 &= \frac{h}{(2-0)(2-1)(2-3)} \int_0^3 (t-0)(t-1)(t-3)dt = \frac{h}{-2}\left(-\frac{9}{4}\right) = \frac{9}{8}h \\
c_3 &= \frac{h}{(3-0)(3-1)(3-2)} \int_0^3 (t-0)(t-1)(t-2)dt = \frac{h}{6}\frac{9}{4} = \frac{3}{8}h
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
I_3(f) &= \frac{3}{8}hf(x_0) + \frac{9}{8}hf(x_1) + \frac{9}{8}hf(x_2) + \frac{3}{8}hf(x_3) \\
&= \frac{3}{8}h[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]
\end{aligned}$$

Regla de Simpson $\frac{3}{8}$

El caso de la fórmula compuesta para $\frac{3}{8}$ queda como ejercicio.