Soluciones de Ecuaciones No Lineales

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función no lineal. Queremos ver si la ecuación $f(x) = 0$ tiene solución y en caso positivo hallarlas (numéricamente)

Ejemplo. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x^2 + \ln(1+x) + xe^x$$

Veamos si f tiene puntos críticos:

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{1+x} + e^x + xe^x$$

Luego, debemos resolver la ecuación

$$2x + \frac{1}{1+x} + e^x + xe^x = 0 \text{ para } x > -1$$

Iteración de Punto Fijo

Dada la ecuación no lineal $f(x) = 0$, podemos escribirla en forma equivalente como $g(x) = x$, entonces si existe un valor $p \in \text{dom}(f)$ tal que $f(p) = 0$, equivale a tener $g(p) = p$.

Definición. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Un punto $p \in \text{dom}(g)$ tal que $g(p) = p$ se denomina un punto fijo de g.

Teorema. Sea $g : [a,b] \to [a,b]$ continua. Entonces existe $p \in [a,b]$ tal que $g(p) = p$.
Demostración. Definamos $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ por

$$h(x) = x - g(x)$$

entonces h es continua y

$$h(a) = a - g(a) \leq 0$$

y

$$h(b) = b - g(b) \geq 0$$

Luego, por el teorema de los valores intermedios, existe $p \in [a,b]$ tal que $h(p) = 0$, de donde $p - g(p) = 0$, o equivalentemente $g(p) = p$.

Teorema. Sea $g : [a,b] \to [a,b]$ de clase C^1 y tal que $|g'(x)| \leq r < 1$ para todo $x \in [a,b]$. Entonces g tiene un único punto fijo en el intervalo (a,b).
Demostración. La existencia está demostrada en el teorema anterior. Veamos la unicidad:
Supongamos que p y q son puntos fijos de g, entonces

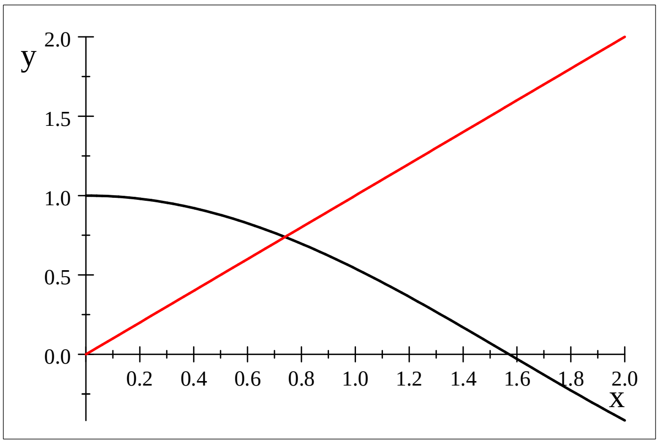
$$|p-q| = |g(p) - g(q)| = |g'(\xi)(p-q)| = |g'(\xi)||p-q|$$

por el teorema del valor medio, donde ξ está entre p y q, pero $|g'(\xi)| \leq r < 1$, de manera que tenemos

$$|p-q| \leq r|p-q|$$

Si $p \neq q$ podemos cancelar $|p-q|$ en la desigualdad anterior, lo que resulta $1 \leq r$ contradiciendo la hipótesi, por consiguiente la suposición $p \neq q$ es falsa. Luego $p = q$ lo que demuestra la unicidad.

Ejemplo. Sea la ecuación no lineal $\cos(x) = x$. Resolver la misma equivale a hallar un punto fijo de la función $g(x) = \cos(x)$



$$
\begin{aligned}
p_0 &= 0.7 \\
p_1 &= \cos(0.7) = 0.76484 \\
p_2 &= \cos(0.76484) = 0.72149 \\
p_3 &= \cos(0.72149) = 0.75082 \\
\cos(0.75082) &= 0.73113 \\
\cos(0.73113) &= 0.74442 \\
\cos(0.74442) &= 0.73548 \\
\cos(0.73548) &= 0.74151 \\
\cos(0.74151) &= 0.73745 \\
\cos(0.73745) &= 0.74019 \\
\cos(0.74019) &= 0.73834 \\
\cos(0.73834) &= 0.73959 \\
\cos(0.73959) &= 0.73874 \\
\cos(0.73874) &= 0.73932
\end{aligned}
$$

Teorema. Sea $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ de clase C^1 y tal que $|g'(x)| \leq r < 1$. Entonces la sucesión $\{p_n\}$ dada por $p_n = g(p_{n-1})$ para $n \geq 1$ y $p_0 \in (a,b)$ converge al único punto fijo de g en (a,b).

Demostración.

$$
\begin{aligned}
|p_2 - p_1| = |g(p_1) - g(p_0)| = |g'(\xi_1)||p_1 - p_0| \leq r|p_1 - p_0| \\
|p_3 - p_2| = |g(p_2) - g(p_1)| = |g'(\xi_2)||p_2 - p_1| \leq r^2|p_1 - p_0|
\end{aligned}
$$

y en general

$$|p_n - p_{n-1}| \leq r^{n-1}|p_1 - p_0|$$

Sean ahora $m, n \in \mathbb{N}$ con $n > m$, entonces

$$\begin{aligned}
|p_n - p_m| &= |p_n - p_{n-1} + p_{n-1} - p_{n-2} + p_{n-2} - \cdots + p_{m+1} - p_m| \\
&\leq \sum_{k=m+1}^{n} |p_k - p_{k-1}| \leq \sum_{k=m+1}^{n} r^{k-1}|p_1 - p_0| = |p_1 - p_0| \sum_{k=m}^{n-1} r^k \\
&= |p_1 - p_0| \left[\sum_{k=0}^{n-1} r^k - \sum_{k=0}^{m-1} r^k \right] = |p_1 - p_0| \left[\frac{1 - r^n}{1 - r} - \frac{1 - r^m}{1 - r} \right] \\
&= |p_1 - p_0| \frac{r^m - r^n}{1 - r}
\end{aligned}$$

Como $\frac{r^m - r^n}{1-r} \to 0$ cuando $n, m \to \infty$ tenemos que $|p_n - p_m| \to 0$ cuando $n, m \to \infty$, por lo tanto $\{p_n\}$ es una sucesión de Cauchy y por consiguiente es convergente, esto es, existe $p \in \mathbb{R}$ tal que $p = \lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} g(p_{n-1}) = g\left(\lim_{n\to\infty} p_{n-1}\right) = g(p)$, esto es, p es punto fijo (único) de g.

Método de Newton - Raphson

Queremos resolver la ecuación $f(x) = 0$

Sea $p_0 \in \operatorname{dom}(f)$, entonces la ecuación de la recta tangente al gráfico de f que pasa por el punto $(p_0, f(p_0))$ es

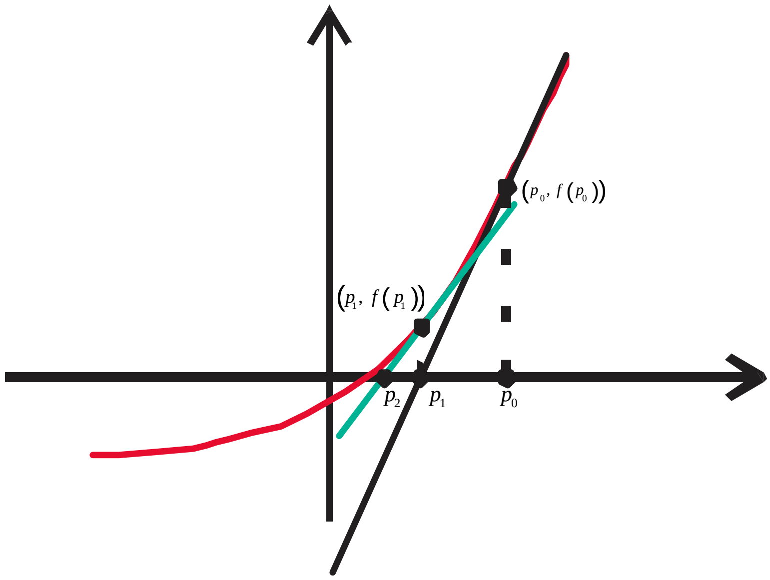
$$y = f'(p_0)(x - p_0) + f(p_0)$$

El valor p_1 de la abscisa donde esta recta corta al eje horizontal es

$$p_1 = p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}$$

Reiterando el procedimiento, el punto p_2 está dado por

$$p_2 = p_1 - \frac{f(p_1)}{f'(p_1)}$$



En general entonces, tenemos la sucesión $\{p_n\}$ dada por $p_n = g(p_{n-1})$, donde $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

Ejemplo. Sea $f(x) = x - \cos(x)$, entonces

$$g(x) = x - \frac{x - \cos(x)}{1 + \sin(x)} = \frac{x\sin(x) + \cos(x)}{1 + \sin(x)}$$

$$\begin{aligned}
p_0 &= 0.7 \\
p_1 &= g(p_0) = 0.73944 \\
p_2 &= g(p_1) = 0.73909 \\
p_3 &= g(p_2) = 0.73909 \\
f(0.73909) &= 8.1451 \times 10^{-6}
\end{aligned}$$