$f(x) = \frac{e^x}{\cos(x)}$ para $x \in [0, 1.5]$

$$\mathsf{A} = \left\{ f_1(x) = 1,\ f_2(x) = x,\ f_3(x) = x^2 \right\}$$
$$\mathsf{B} = \left\{ \widetilde{T}_0, \widetilde{T}_1, \widetilde{T}_2 \right\}$$

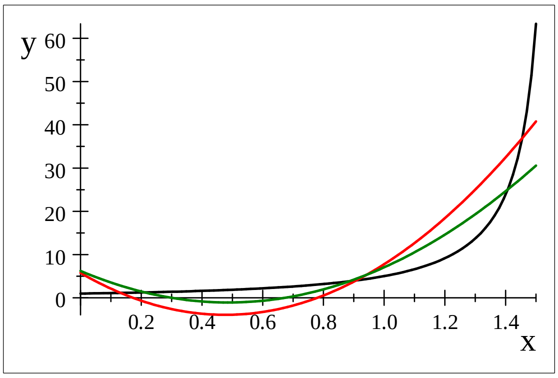
$$g(x) = \frac{1}{1.5}(2x - 1.5)$$

entonces

$$\widetilde{T}_0(x) = 1$$
$$\widetilde{T}_1(x) = \frac{1}{1.5}(2x - 1.5)$$
$$\widetilde{T}_2(x) = 2\left(\frac{1}{1.5}(2x - 1.5)\right)^2 - 1$$

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f\left(\frac{1.5}{2}\cos(\theta) + \frac{1.5}{2}\right)d\theta = 11.28092911$$
$$c_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f\left(\frac{1.5}{2}\cos(\theta) + \frac{1.5}{2}\right)\cos(\theta)d\theta = 17.50736137$$
$$c_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f\left(\frac{1.5}{2}\cos(\theta) + \frac{1.5}{2}\right)\cos(2\theta)d\theta = 12.00064363$$

$$h(x) = 11.28092911 + 17.50736137 * \frac{1}{1.5}(2x - 1.5) + 12.00064363 * \left(2\left(\frac{1}{1.5}(2x - 1.5)\right)^2 - 1\right)$$
$$= 42.66895513x^2 - 40.6602842x + 5.77421137$$



$$1.5a_1 + 1.125a_2 + 1.125a_3 = 10.28388420$$
$$1.125a_1 + 1.125a_2 + 1.265625a_3 = 12.27677337$$
$$1.125a_1 + 1.265625a_2 + 1.51875a_3 = 15.85881248$$

$$A = \begin{bmatrix} 1.5 & 1.125 & 1.125 \\ 1.125 & 1.125 & 1.265625 \\ 1.125 & 1.265625 & 1.51875 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 10.28388420 \\ 12.27677337 \\ 15.85881248 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = 6.242153326$$
$$a_2 = -29.99903927$$
$$a_3 = 30.81739841$$

$$P(x) = 6.242153326 - 29.99903927 * x + 30.81739841 * x^2$$

Teoría de Aproximación (Caso discreto)

Sea el conjunto de puntos en el plano $\mathsf{S} = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{n}$ tales que $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n$ y sea $\mathsf{G} = \{g_k\}_{k=1}^{m}$ una familia de funciones continuas. Sea trata de hallar coeficientes $a_1, \ldots, a_m$ tales que la función $g = \sum_{k=1}^{m} a_k g_k$ aproxime los puntos del conjunto S con la siguiente condición:

Sea

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} y_i c_i(I_n)$$

y sea

$$Z = \begin{bmatrix} g(x_1) \\ g(x_2) \\ \vdots \\ g(x_{n-1}) \\ g(x_n) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} g(x_i) c_i(I_n)$$

Luego, la condición que se impone, es que la distancia entre Y y Z sea mínima. Veamos como hacer esto:

Por un lado

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{i=1}^{n} g(x_i) c_i(I_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{m} a_k g_k(x_i) \right] c_i(I_n) \\ &= \sum_{k=1}^{m} a_k \left[\sum_{i=1}^{n} g_k(x_i) c_i(I_n) \right] \\ &= \sum_{k=1}^{m} a_k c_k(A) \end{aligned}$$

donde

$$c_k(A) = \sum_{i=1}^{n} g_k(x_i) c_i(I_n)$$

entonces

$$\begin{aligned} e_{jk}(A) &= f_j(c_k(A)) = f_j\left(\sum_{i=1}^{n} g_k(x_i) c_i(I_n)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} g_k(x_i) f_j(c_i(I_n)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} g_k(x_i) e_{ji}(I_n) \\ &= g_k(x_j) \end{aligned}$$

Pero $Z = \sum_{k=1}^{m} a_k c_k(A)$ indica que Z pertenece al subespacio $W_c(A)$ generado por las columnas de A y también tenemos que

$$Z = AH$$

donde

$$H = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix}$$

Si Z es el elemento de $W_c(A)$ que mejor aproxima a Y, tenemos que $Y - Z$ es ortogonal a cada columna de la matriz A, esto es,

$$(Y-Z)^t c_k(A) = 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, m$$

pero entonces tenemos lo siguiente

$$(Y-Z)^t c_k(A) = 0 \Leftrightarrow c_k((Y-Z)^t A) = 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, m$$

de donde

$$(Y-Z)^t A = 0 \Leftrightarrow A^t(Y-Z) = 0 \Leftrightarrow A^t Y - A^t Z = 0 \Leftrightarrow A^t Z = A^t Y$$

pero como $Z = AH$, tenemos

$$A^t A H = A^t Y$$

y de aquí

$$H = (A^t A)^{-1} A^t Y$$

Ejemplo. Sea $\mathsf{S} = \{(-1,1), (2,3), (3,-2), (7,0), (8, \frac{1}{2})\}$ y sea $\mathsf{G} = \left\{g_1(x) = x^3,\ g_2(x) = x - 1,\ g_3(x) = \frac{x-1}{x+2}\right\}$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 8 & 1 & \frac{1}{4} \\ 27 & 2 & \frac{2}{5} \\ 343 & 6 & \frac{2}{3} \\ 512 & 7 & \frac{7}{10} \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

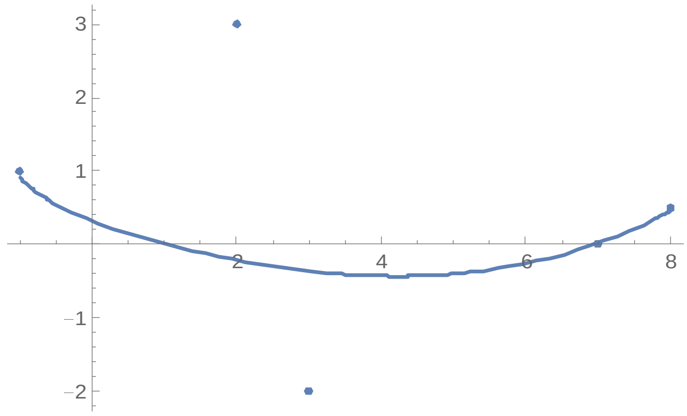
$$A^t A = \begin{bmatrix} 380\,587 & 5706 & \frac{9028}{15} \\ 5706 & 94 & \frac{279}{20} \\ \frac{9028}{15} & \frac{279}{20} & \frac{3713}{720} \end{bmatrix}$$

$$A^t Y = \begin{bmatrix} 225 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{17}{10} \end{bmatrix}$$

$$(A^t A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1044\,541}{15\,444\,356\,619} & -\frac{25\,235\,382}{5148\,118\,873} & \frac{27\,627\,880}{5148\,118\,873} \\ -\frac{25\,235\,382}{5148\,118\,873} & \frac{1920\,507\,037}{5148\,118\,873} & -\frac{2249\,924\,940}{5148\,118\,873} \\ \frac{27\,627\,880}{5148\,118\,873} & -\frac{2249\,924\,940}{5148\,118\,873} & \frac{3860\,090\,400}{5148\,118\,873} \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 3.643\,173\,062 \times 10^{-3} \\ -0.173\,429\,374 \\ -0.285\,704\,970\,4 \end{bmatrix}$$

$$g(x) = 3.643\,173\,062 \times 10^{-3} x^3 - 0.173\,429\,374\,(x-1) - 0.285\,704\,970\,4 \frac{x-1}{x+2}$$



3
2
1
−1
−2
2
4
6
8