Métodos Numéricos

Examen Final - 27/07/2021

1. Defina los polinomios de Tchebyshev y demuestre la fórmula recursiva para calcularlos. Demuestre además que son ortogonales con el producto interno dado por

$$\left(f \mid g\right) = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

2. Defina los polinomios de Lagrange L_k para los puntos $x_1, \ldots, x_n$ tales que $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. Si $c_k = L_k(0)$, demuestre que

$$\sum_{k=0}^{n} c_k x_k^j = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j = 0 \\ 0 & \text{si} \quad j = 1, 2, \ldots, n \\ (-1)^n x_0 x_1 \cdots x_n & \text{si} \quad j = n+1 \end{cases}$$

3. Obtenga el método de Simpson para inegración numérica.

4. Desarrolle la teoría de aproximación de mínimos cuadrados para aproximar una función $f : [a, b] \to \mathrm{R}$ usando la familia de funciones $\left\{ f_k \right\}_{k=1}^{m}$. Obtenga el sistema de ecuaciones normales.

5. Sea $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ de clase C^∞ y sea ξ una raiz simple de f tal que $f''(\xi) \neq 0$. Si

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

muestre que la iteración

$$x_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)}$$

converge cúbicamente a ξ.