Sea $f : [a, b] \to \mathsf{R}$ continua y derivable en (a, b), entonces existe $\xi \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

(Teorema del Valor Medio)

Sea $f : [a, b] \to \mathsf{R}$ derivable, entonces

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx$$

(Regla de Barrow)

Sea $f : [a, b] \to \mathsf{R}$ de clase C^n y sean $x_0, x_1, \ldots, x_n \in (a, b)$ tales que $f(x_i) = 0$ para $i = 0, 1, \ldots, n$, entonces existe $\xi \in (x_0, x_n)$ tal que $f^{(n)}(\xi) = 0$.

(Teorema de Rolle Generalizado)

Sea $f : \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ de clase C^∞ y $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$. Entonces existe $r > 0$ tal que para todo $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x)$$

donde

$$R_n(x) = \begin{cases} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} & \text{con } \xi \text{ entre } x_0 \text{ y } x \text{ (Lagrange)} \\ \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt & \text{(Cauchy)} \end{cases}$$

El polinomio $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ se denomina polinomio de Taylor de grado n de la función f alrededor de x_0

Sea $F = (F_1, \ldots, F_m) : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^m$. La matriz jacobiana de F, que denotamos JF, es la función $JF : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^{m \times n}$ dada por

$$e_{ij}((JF)(x)) = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x)$$

Ejemplo. Sea $F : \mathsf{R}^2 \to \mathsf{R}^3$ dada por $F(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 + y, x^y)$, entonces

$$(JF)(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2x & 1 \\ yx^{y-1} & x^y \ln(x) \end{bmatrix}$$

Ejemplo. Sea $F : \mathsf{R}^3 \to \mathsf{R}^2$ dada por $F(x, y, z) = (x + y + z, xyz)$, entonces

$$(JF)(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ yz & xz & xy \end{bmatrix}$$

Sea $A \in \mathsf{R}^{m\times n}$, la matriz transpuesta de A, que denotamos A^t, está dada por

$$e_{ij}(A^t) = e_{ji}(A)$$

Propiedades

(a) $(A^t)^t = A$
(b) $(A+B)^t = A^t + B^t$
(c) $(\alpha A)^t = \alpha A^t$
(c) $(AB)^t = B^t A^t$

Si $A \in \mathsf{R}^{n\times n}$, diremos que A es una matriz simétrica si $A^t = A$.

Si $A \in \mathsf{R}^{n\times n}$, la traza de A, que denotaremos $\mathrm{Tr}(A)$, está dada por

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} e_{ii}(A)$$

Propiedades

(1) $\mathrm{Tr}(A^t) = \mathrm{Tr}(A)$
(2) $\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$
(3) $\mathrm{Tr}(\alpha A) = \alpha \mathrm{Tr}(A)$
(4) Sean $A \in \mathsf{R}^{m\times n}$ y $B \in \mathsf{R}^{n\times m}$, entonces $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$

Dados dos elementos a y b, su par ordenado es el elemento que denotamos (a,b). Se denomina a a la primera coordenada del par y a b la segunda coordenada del par. Los pares ordenados están sujetos a la siguiente condición:

$$(a,b) = (c,d) \iff a = c \text{ y } b = d$$

Dados ahora dos conjuntos A y B, el producto cartesiano de A y B, que denotamos $A \times B$, es el conjunto

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}$$

Sea V un conjunto no vacío. Diremos que V es un espacio vectorial sobre el cuerpo R de los números reales si existen operaciones $s : V \times V \to V$ y $m : \mathsf{R} \times V \to V$, denominadas suma y multiplicación por escalar respectivamente y que denotaremos

$$s(u,v) = u + v$$
$$m(k,v) = kv$$

tales que .....

Ejemplos.

(1) $\mathbb{R}^n$

(2) $\mathbb{R}^{m\times n}$

(3) $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{$todas las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}\}$

(4) $C(\mathbb{R}) = \{$todas las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}\}$

(5) $C([a,b]) = \{$todas las funciones continuas de $[a,b]$ en $\mathbb{R}\}$

Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales. Un producto interno sobre V es una función $h : V\times V \to \mathbb{R}$ que denotaremos $h(v,v') = (v \mid v')$ y tal que

(1) $(u \mid v) = (v \mid u)$

(2) $(u+v \mid w) = (u \mid w) + (v \mid w)$

(3) $(cu \mid v) = c(u \mid v)$

(4) $(u \mid u) \geq 0$ y $(u \mid u) = 0$ si y sólo si $u = 0$

Ejemplo. Sea $V = C([a,b])$. Definimos un producto interno en V de la manera siguiente:

$$(f \mid g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

En particular, si $f(x) = e^x$, $g(x) = \sin(x)$ y $[a,b] = [-1,1]$, entonces

$$(f \mid g) = \int_{-1}^1 e^x \sin(x)dx = \frac{1}{2}e^{-1}(\cos(1) + \sin(1) - \cos(1)e^2 + e^2\sin(1))$$

Definición. Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales con un producto interno. Un subconjunto $S \subset V$ es un conjunto ortogonal si $(u \mid v) = 0$ para todo $u,v \in S$ con $u \neq v$.

Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales con un producto interno y sea $S = \{v_1,\dots,v_r\} \subset V$ un conjunto ortogonal. Entonces si $v \in \langle S\rangle$ tenemos que

$$v = \sum_{j=1}^r \frac{(v \mid v_j)}{(v_j \mid v_j)}v_j$$

y para cada $u \in V$, el vector $u - \sum_{j=1}^r \frac{(u \mid v_j)}{(v_j \mid v_j)}v_j$ es ortogonal a todo vector de $\langle S\rangle$.

Ejemplo. $V = C([0,1])$ y sean $f(x) = x^2+1$ y $g(x) = ax+3$. ¿Existe algún valor de a para el cual f y g son ortogonales?

$$
\begin{aligned}
(f \mid g) &= \int_0^1 [(x^2+1)(ax+3)]dx \\
&= \int_0^1 (ax^3+3x^2+ax+3)dx \\
&= \left[\frac{ax^4}{4} + x^3 + \frac{ax^2}{2} + 3x \right]_0^1 \\
&= \frac{a}{4} + 1 + \frac{a}{2} + 3 \\
&= \frac{3a}{4} + 4
\end{aligned}
$$

$$
\frac{3a}{4} + 4 = 0 \Rightarrow a = -\frac{16}{3}
$$

de modo que $f(x) = x^2+1$ y $g(x) = -\frac{16}{3}x + 3$ son ortogonales en el intervalo $[0,1]$

$$
\begin{aligned}
d(f,g) &= \|f-g\| = \sqrt{(f-g \mid f-g)} \\
&= \sqrt{\int_0^1 \left(x^2 + 1 + \frac{16}{3}x - 3 \right) dx} \\
&= \sqrt{1} \\
&= 1
\end{aligned}
$$