Sea la ecuación $f(x) = 0$ que resolvemos con la sucesión convergente $\{p_n\}$ donde $p_n = g(p_{n-1})$ con la que obteníamos $g(p) = p$ y p es el valor buscado, esto es, $f(p) = 0$.

Sabemos que para $n, m \in \mathbb{Z}^+$, con $n > m$, se cumple $|p_n - p_m| \leq \frac{r^m - r^n}{1-r}|p_1 - p_0|$ donde $0 < r < 1$ y tomando límite para $n \to \infty$ tenemos

$$|p - p_m| \leq \frac{r^m}{1-r}|p_1 - p_0|$$

Supongamos que queremos calcular el valor de p con un error menor $\varepsilon > 0$, de modo que basta que

$$\frac{r^m}{1-r}|p_1 - p_0| < \varepsilon$$

y de aquí

$$m > \frac{\ln\left[\frac{(1-r)\varepsilon}{|p_1 - p_0|}\right]}{\ln(r)}$$

Ejemplo. $f(x) = x - \cos(x)$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x - \cos(x)}{1 + \sin(x)}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 - \frac{(1+\sin(x))^2 - (x - \cos(x))\cos(x)}{(1+\sin(x))^2} \\ &= 1 - 1 + \frac{(x - \cos(x))\cos(x)}{(1+\sin(x))^2} \\ &= \frac{(x - \cos(x))\cos(x)}{(1+\sin(x))^2} \end{aligned}$$

$$g'(0.7) = -1.8345 \times 10^{-2}$$
$$|g'(0.7)| = 0.018345 < 0.5$$

Tomamos $r = 0.5$ y tenemos $p_0 = 0.7$ y $p_1 = 0.73944$. Si queremos 5 decimales exactos debemos tomar $\varepsilon = 10^{-6}$, entonces

$$m > \frac{\ln\left[\frac{0.5 \times 10^{-6}}{|0.73944 - 0.7|}\right]}{\ln(0.5)} = 16.267$$

por lo tanto $m = 17$ nos asegura que p_{17} tiene 5 decimales de exactitud al aproximar el valor exacto p.

Definición. Dada la sucesión $\{p_n\}$ se dice que la misma converge a p con orden de convergencia igual a α y constante asintótica igual a β si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|p - p_{n+1}|}{|p - p_n|^\alpha} = \beta$$

donde α y β son constantes positivas.

Teorema. Sea la sucesión $\{p_n\}$ dada por $p_n = g(p_{n-1})$ donde g es de clase C^{m+1}. Si $\lim_{n\to\infty} p_n = p$, $g^{(k)}(p) = 0$ para $k = 1,2,\ldots,m-1$ y $g^{(m)}(p) \neq 0$, entonces $\{p_n\}$ converge a p con orden de convergencia igual a m y constante asintótica $\frac{|g^{(m)}(p)|}{m!}$.

Demostración. Por el teorema de Taylor, para x en un entorno de p,

$$g(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{g^{(k)}(p)}{k!} + \frac{g^{(m)}(\xi_x)}{m!}(x-p)^m \text{ donde } \xi_x \text{ está entre } x \text{ y } p$$

esto es

$$g(x) = g(p) + \frac{g^{(m)}(\xi_x)}{m!}(x-p)^m = p + \frac{g^{(m)}(\xi_x)}{m!}(x-p)^m$$

Tomando $x = p_n$ tenemos

$$p_{n+1} = p + \frac{g^{(m)}(\xi_n)}{m!}(p_n - p)^m$$

de donde

$$\frac{p_{n+1}-p}{(p_n-p)^m} = \frac{g^{(m)}(\xi_n)}{m!} \text{ donde } \xi_n \text{ está entre } p_n \text{ y } p$$

Tomando valor absoluto y haciendo tender n a infinito tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|p_{n+1}-p|}{|p_n-p|^m} = \frac{1}{m!}\lim_{n\to\infty}\left|g^{(m)}(\xi_n)\right| = \frac{\left|g^{(m)}(p)\right|}{m!}$$

Corolario. El método de Newton para la función f tiene convergencia cuadrática si p es una raíz simple de la misma y $f''(p) \neq 0$

Demostración. Como $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ y $f(p) = 0$ tenemos que

$$g'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

y es claro que $g'(p) = 0$.

Por otro lado

$$g''(x) = f'(x)\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} + f(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}\right)$$

de donde

$$g''(p) = \frac{f''(p)}{f'(p)} \neq 0$$

Por el teorema entonces, la sucesión obtenida con el método de Newton - Raphson tiene convergencia cuadrática y constante asintótica igual $\frac{|f''(p)|}{2|f'(p)|}$.

Ejemplo. Para el ejemplo anterior

$$g'(x) = \frac{(x-\cos(x))\cos(x)}{(1+\sin(x))^2} = \frac{x\cos(x) - \cos^2(x)}{[1+\sin(x)]^2}$$

entonces

$$\begin{aligned}
g''(x) &= \frac{(\cos(x) - x\sin(x) + 2\cos(x)\sin(x))[1+\sin(x)]^2 - 2[x\cos(x) - \cos^2(x)][1+\sin(x)]\cos(x)}{[1+\sin(x)]^4} \\
&= \frac{\cos(x) - x\sin(x) + 2\cos(x)\sin(x)}{[1+\sin(x)]^2} - \frac{2x\cos^2(x) - 2\cos^3(x)}{[1+\sin(x)]^3}
\end{aligned}$$

de modo que

$$\beta \simeq 0.4416$$

Raíces Múltiples

Sea $f : \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ de clase C^∞. Un punto p es una raíz de multiplicidad m de f si $f^{(k)}(p) = 0$ para $k = 0, 1, \ldots, m-1$ y $f^{(m)}(p) \neq 0$, por lo tanto, usando el teorema de Taylor, para x en un entorno de p, tenemos

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k + \frac{f^{(m)}(p)}{m!}(x-p)^m + \sum_{k\geq m+1} \frac{f^{(k)}(p)}{k}(x-p)^k \\
&= \frac{f^{(m)}(p)}{m!}(x-p)^m + \sum_{k\geq m+1} \frac{f^{(k)}(p)}{k}(x-p)^k \\
&= (x-p)^m \left[\frac{f^{(m)}(p)}{m!} + \sum_{k\geq m+1} \frac{f^{(k)}(p)}{k}(x-p)^{k-m} \right] \\
&= (x-p)^m h(x)
\end{aligned}$$

donde

$$h(p) = \frac{f^{(m)}(p)}{m!} \neq 0$$

Si p es una raíz de f de multiplicidad m, tenemos que $f(x) = (x-p)^m h(x)$ con $h(p) \neq 0$. Sea entonces

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\mu(x) &= \frac{(x-p)^m h(x)}{m(x-p)^{m-1}h(x) + (x-p)^m h'(x)} \\
&= \frac{(x-p)^m h(x)}{(x-p)^{m-1}[mh(x) + (x-p)h'(x)]} \\
&= \frac{(x-p)h(x)}{mh(x) + (x-p)h'(x)}
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\mu'(x) = \frac{h(x)}{mh(x) + (x-p)h'(x)} + (x-p)\frac{d}{dx}\left[\frac{h(x)}{mh(x) + (x-p)h'(x)} \right]$$

de manera que

$$\mu'(p) = \frac{1}{m} \neq 0$$

por consiguiente, p es una raíz simple de μ, y por lo tanto se puede aplicar el método de Newton - Raphson a la misma.

El Caso de Una Función de R^m en R^m

$$f : \mathsf{R} \to \mathsf{R} \text{ y hay que resolver } f(x) = 0$$

Por el método de Newton - Raphson $f(p) = 0$, donde $p = \lim\limits_{n\to\infty} p_n$ con $p_n = g(p_{n-1})$ y $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - [f'(x)]^{-1} f(x)$

Si $F : \mathsf{R}^m \to \mathsf{R}^m$ la pensamos como $F : \mathsf{R}^m \to \mathsf{R}^{m\times 1}$, sea $G : \mathsf{R}^m \to \mathsf{R}^{m\times 1}$ dada por

$$G(x) = x^t - [(JF)(x)]^{-1} F(x)$$

Si $p \in \mathsf{R}^m$ es un punto fijo de G, tenemos

$$G(p) = p^t \Leftrightarrow p^t - [(JF)(p)]^{-1} F(p) = p^t \Leftrightarrow [(JF)(p)]^{-1} F(p) = 0 \Leftrightarrow F(p) = 0$$

de modo que la sucesión $\{p_n\} \subset \mathsf{R}^m$ converge a una solución de $F(x) = 0$ si $\|(JG)(x)\| \leq r < 1$ para todo x en un entorno de p y este es el método de Newton - Raphson en varias variables.

Ejercicio. Sea $f : \mathsf{R}^2 \to \mathsf{R}$ dada por

$$f(x,y) = \sin(x+y)\cos(1.73y)$$

Hallar los puntos críticos de f en el rectángulo $[-3,3] \times [-3,3]$.