Teoría de Aproximación

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y sea la familia de funciones $\{f_k\}_{k=1}^n$ definidas y continuas en el intervalo $[a,b]$. Se trata de determinar valores $c_1, c_2, \ldots, c_n$ de forma tal que la función $g = c_1f_1 + c_2f_2 + \cdots + c_nf_n = \sum_{k=1}^{n} c_kf_k$ sea la "mejor" aproximación a la función f en el intervalo $[a,b]$, esto es, la distancia entre f y g es mínima, donde la distancia entre dos funciones de $[a,b]$ en $\mathbb{R}$, está dada por

$$d(f,g) = \|f - g\|$$

y

$$\|f\| = (f \mid f)^{1/2} \Leftrightarrow \|f\|^2 = (f \mid f)$$

con

$$(f \mid g) = \int_a^b f(x)g(x)\omega(x)dx$$

A raíz de este planteamiento, hay que determinar los valores de los números reales $c_1, \ldots, c_n$ tales que $\left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_kf_k \right\|^2$ tome el valor mínimo. La expresión $\left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_kf_k \right\|^2$ depende de $c_1, \ldots, c_n$, esto es, es una función de $c_1, \ldots, c_n$.
Sea

$$G(c_1, \ldots, c_n) = \left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_kf_k \right\|^2$$

de modo que debemos hallar el mínimo de la función G.
Ahora,

$$\begin{aligned} G(c_1, \ldots, c_n) &= \left(f - \sum_{j=1}^{n} c_jf_j \mid f - \sum_{k=1}^{n} c_kf_k \right) \\ &= (f \mid f) - 2\left(f \mid \sum_{k=1}^{n} c_kf_k \right) + \left(\sum_{j=1}^{n} c_jf_j \mid \sum_{k=1}^{n} c_kf_k \right) \\ &= (f \mid f) - 2\sum_{k=1}^{n} c_k(f \mid f_k) + \sum_{j,k=1}^{n} c_jc_k(f_j \mid f_k) \end{aligned}$$

Para minimizar la función G buscamos sus puntos críticos calculando primero las derivadas parciales de la misma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial c_i}(c_1, \ldots, c_n) &= -2(f \mid f_i) + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial c_j}{\partial c_i} \sum_{k=1}^{n} c_k(f_j \mid f_k) + c_j(f_j \mid f_i) \right) \\ &= -2(f \mid f_i) + \sum_{k=1}^{n} c_k(f_i \mid f_k) + \sum_{j=1}^{n} c_j(f_j \mid f_i) \\ &= -2(f \mid f_i) + 2\sum_{k=1}^{n} c_k(f_i \mid f_k) \end{aligned}$$

Luego, el punto crítico de G ocurre cuando los valores $c_1, \ldots, c_n$ son solución del sistema de ecuaciones lineales

$$\sum_{k=1}^{n} (f_i \mid f_k) c_k = (f \mid f_i) \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n$$

Este sistema de ecuaciones recibe el nombre de sistema de ecuaciones normales.

Ejemplo. Sea $f(x) = e^{\sin(1+x^2)}$ para $0 \le x \le 2\pi$ y sea $\mathsf{A} = \{f_k\}_{k=1}^{3}$ tales que $f_1(x) = 1 + x$, $f_2(x) = x^2$ y $f_3(x) = x^3$ y sea el producto interno

$$(f \mid g) = \int_0^{2\pi} f(x) g(x) dx$$

$$\begin{aligned} 128.45c_1 + 472.32c_2 + 2348.2c_3 &= 35.132 \\ 472.32c_1 + 1958.5c_2 + 10254.81806c_3 &= 108.1856703 \\ 2348.2c_1 + 10254.81806c_2 + 55228.21902c_3 &= 515.4652671 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 128.45 & 472.32 & 2348.2 \\ 472.32 & 1958.5 & 10254.81806 \\ 2348.2 & 10254.81806 & 55228.21902 \end{bmatrix}$$

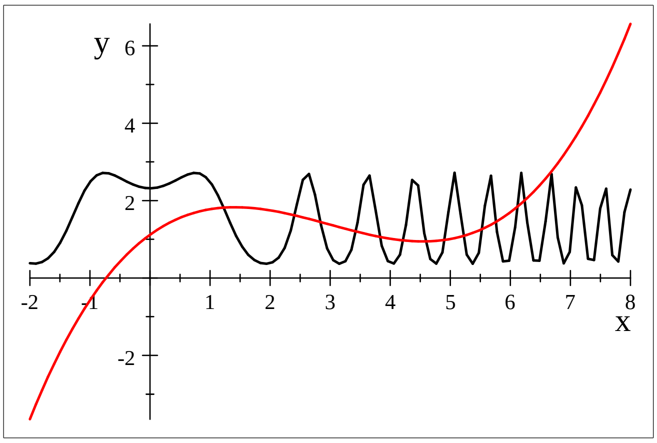
$$Y = \begin{bmatrix} 35.132 \\ 108.1856703 \\ 515.4652671 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}Y = \begin{bmatrix} 1.118218486 \\ -0.5171731578 \\ 5.781792995 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

Entonces la función g que mejor aproxima a f en el intervalo $[0, 2\pi]$ es

$$g(x) = 1.118218486(1 + x) - 0.5171731578x^2 + 5.781792995 \times 10^{-2} x^3$$

$e^{\sin(1+x^2)}$



Ejemplo. Sea $f(x) = e^{\sin(1+x^2)}$ para $0 \leq x \leq 2\pi$ y sea $\mathsf{A} = \{f_k\}_{k=1}^{3}$ tales que $f_1(x) = \sin(x)$, $f_2(x) = \sin(2x)$ y $f_3(x) = \sin(3x)$

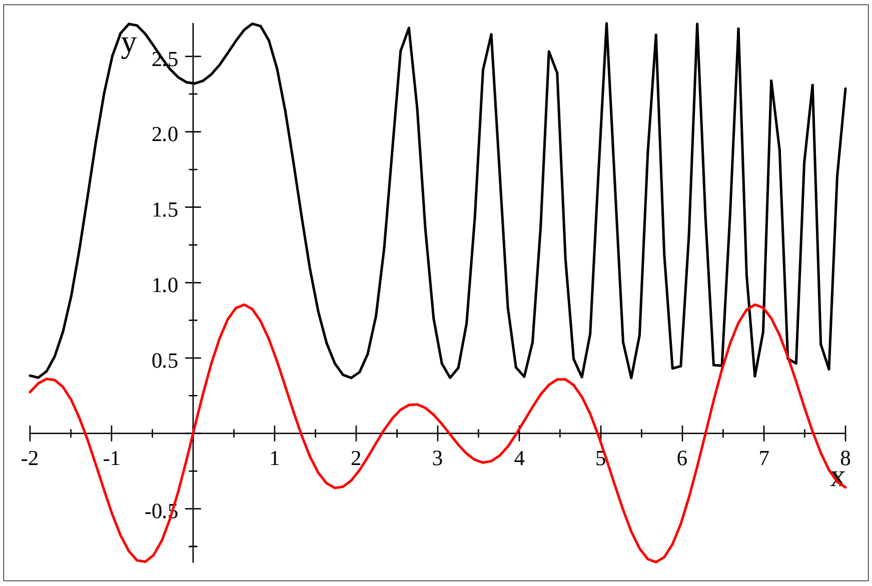
$$3.141592654 c_1 = 0.4530098341$$
$$3.141592654 c_2 = 1.175710500$$
$$3.141592654 c_3 = 1.363745531$$

$$c_1 = 0.1441975087$$
$$c_2 = 0.3742402754$$
$$c_3 = 0.4340936847$$

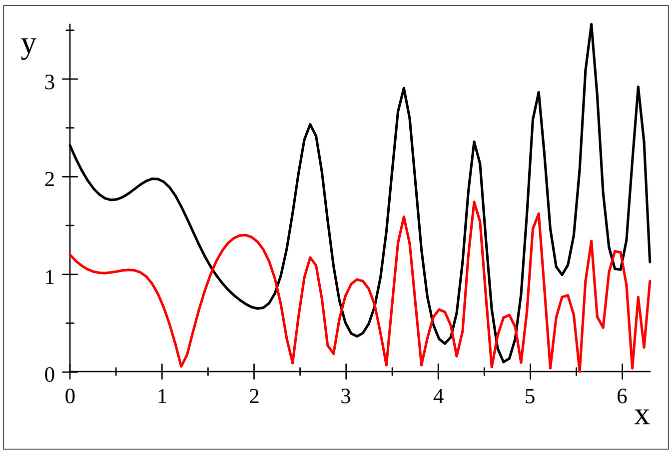
La función que mejor aproxima es

$$h(x) = 0.1441975087\sin(x) + 0.3742402754\sin(2x) + 0.4340936847\sin(3x)$$

$e^{\sin(1+x^2)}$



$\left|h(x) - e^{\sin(1+x^2)}\right|$



Si la familia de funciones $\{f_k\}_{k=1}^{n}$ es una familia ortogonal, esto es, $(f_i \mid f_j) = 0$ si $i \neq j$, entonces los valores c_i están dados por

$$c_i = \frac{(f \mid f_i)}{(f_i \mid f_i)}$$

Proceso de Ortogonalización de Gram - Schmidt

Sea $\{f_k\}_{k=1}^{n}$ una familia de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ linealmente independiente. Entonces la familia de funciones $\{g_k\}_{k=1}^{n}$ dada por

$$\begin{aligned} g_1 &= f_1 \\ g_k &= f_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(f_k \mid g_j)}{(g_j \mid g_j)} \text{ para } k \geq 2 \end{aligned}$$

es una familia ortogonal y el subespacio generado por $\{f_k\}_{k=1}^{n}$ es el mismo que el generado por $\{g_k\}_{k=1}^{n}$