

PROYECTO: Problema de iluminación

Elaborado por Diego Sánchez / Giselt Parra

16 de Marzo de 2020

Puntos extremos de iluminación

- 1) Generar una gráfica con tres curvas: la iluminación que genera cada bombilla sobre la carretera y la curva de la iluminación total. Analice dicha gráfica e identifique aproximaciones para x_{max} , x_{min} y x_{eq} , y denótelas por x_{max}^0 , x_{min}^0 y x_{eq}^0 , respectivamente.
- 2) Describir detalladamente una propuesta numérica, basada en el modelo de la sección anterior, que involucre algún método numérico que le permita encontrar mejores aproximaciones a x_{max} , x_{min} y x_{eq} . En caso de requerir aproximaciones iniciales de dichos valores, use x_{max}^0 , x_{min}^0 y x_{eq}^0 como iterados iniciales.
- 3) Programar la(s) rutina(s) derivada(s) de su propuesta numérica para obtener mejores aproximaciones a x_{max} , x_{min} y x_{eq} .
- 4) Adicionalmente, usted deberá responder justificadamente las siguientes preguntas:
 - 4.1) ¿Qué distancia existe de x_{min} a x_{eq} . Comente lo observado.
 - 4.2) ¿Los puntos de mayor iluminación se encuentran justo debajo de cada bombilla?
 - 4.3) ¿Qué ocurre con x_{min} y x_{eq} si $p1 = p2$ y $h1 = h2$?

Codigos

Códigos pregunta 3

Para toda la parte I: aproximaciones_precisas
Para el item 5.3: whatIf.py

Respuesta a la pregunta 1

Las aproximaciones iniciales se determinan analizando la gráfica de $C(X)$ de forma aproximada, evaluando $n \in \mathbb{N}$ puntos discretos igualmente espaciados, denotemos a esos puntos como el conjunto $P = \{y_i = C(x_i) \mid x_i \in (0, 30], 0 \leq i \leq n\}$. Entonces para aproximar x_{max} se obtiene el mayor número en P , es decir, $\max(P) = x_{max}^0$ análogamente para obtener una aproximación a x_{min} se obtiene el menor número de P , esto es $\min(P) = x_{min}^0$

Para x_{eq} se hace un procedimiento similar para obtener una aproximación, utilizando también n puntos igualmente espaciados. Sea $L_a = \{y_i = L_1(x_i) \mid x_i \in (0, 30], 0 \leq i \leq n\}$ y $L_b = \{y_i = L_2(x_i) \mid x_i \in (0, 30], 0 \leq i \leq n\}$. Luego haciendo la diferencia por cada elemento de L_a con cada elemento de L_b obtenemos L_c , finalmente $\min(L_c) = x_{eq}^0$.

La función min y max encuentran el x_i asociado a al y_i mínimo y máximo respectivamente de P , así como de L_c

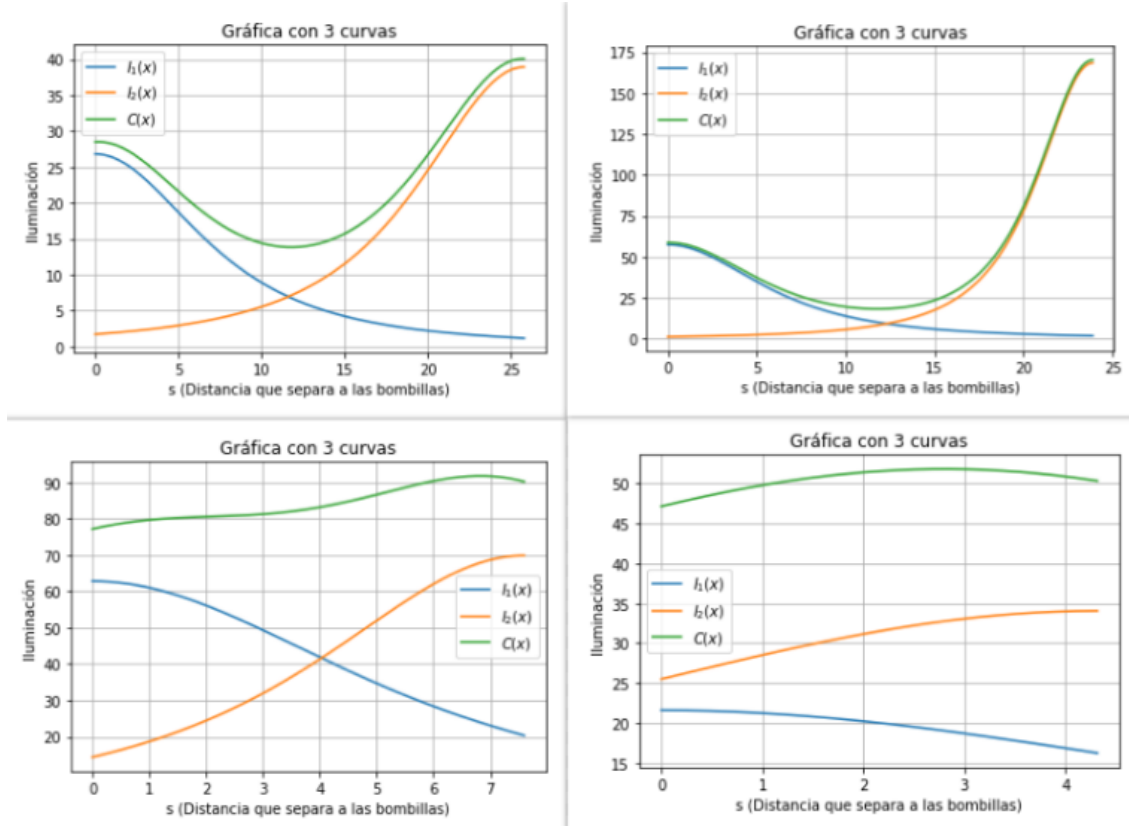


Fig. Gráfica de Iluminaciones

Respuesta a la pregunta 2

Para obtener mejores aproximaciones para x_{max} , x_{min} y x_{eq} que las iniciales se, propone el siguiente método, teniendo como afirmación que $C(x)$ es continua $\forall x \in (0, 30]$.

1. Dado x_{max}^0 , se calcula el punto en donde $\frac{dC}{dx} = 0$ alrededor de x_{max}^0 mediante el algoritmo de ceros de funciones bisección, en donde

$$\frac{dC}{dx} = \frac{3h_2p_2(s-x)}{\left((s-x)^2 + h_2^2\right)^{\frac{5}{2}}} - \frac{3h_1p_1x}{\left(x^2 + h_1^2\right)^{\frac{5}{2}}} \quad (1)$$

2. Dado x_{min}^0 se calcula el punto en donde $\frac{dC}{dx} = 0$ alrededor de x_{min}^0 mediante el algoritmo de ceros de funciones bisección utilizando (1)
3. Dado x_{eq}^0 , si existe, se calcula el punto en donde $L1(x) - L2(x) = 0$ alrededor de x_{eq}^0 mediante el algoritmo de ceros de funciones bisección. En donde:

$$L1(x) - L2(x) = \frac{h_1p_1}{\left(x^2 + h_1^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{h_2p_2}{\left((s-x)^2 + h_2^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Puede existir el caso en donde $L1(x) = L2(X)$, es decir, que las rectas no se intersecten, en este caso no se tendría el punto x_{eq}^0 y no se ejecutaría el paso 3

Respuesta a la pregunta 3

Códigos pregunta 3

aproximaciones_precisas

Respuesta a la pregunta 4

1. La distancia $|x_{eq} - x_{min}| \approx 0$ es aproximadamente 0 para la mayoría de los casos, excepto en los casos en donde $L_1(x)$ y $L_2(x)$ no se intersectan.
2. Sí, en efecto, es lógico pensar eso ya que mientras más nos alejemos de una bombilla su intensidad luminosa disminuye, observándose que el comportamiento de $C(x)$ va decreciendo de izquierda a derecha, alcanza un mínimo, y después posiblemente dependiendo ya de los valores de p_2 y h_2 empiece a crecer.
3. Si $p_1 = p_2$ y $h_1 = h_2$ entonces la distancia $|x_{eq} - x_{min}|$ es 0 y vemos que el mínimo se alcanza alrededor de $s/2$ dado que las curvas $L1(x)$ y $L2(x)$ son espejos uno de las otras con respecto a el eje y .

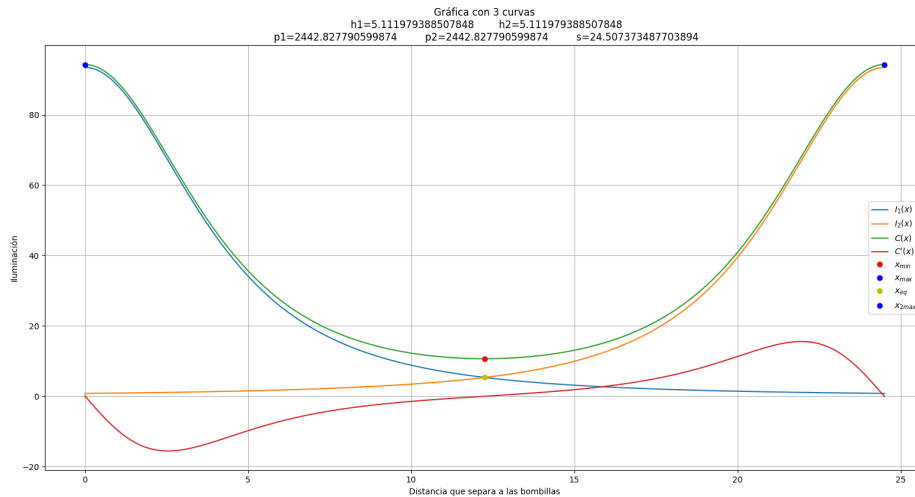


Fig. Fig. $p_1 = p_2$, $h_1 = h_2$

Para la imagen anterior considere el código `p1igualp2.py` y para las posteriores `gráfica.py`

Como soporte, si reemplazamos en $L_1(x)$ - $L_2(x)$ los valores de $p_1 = p_1 = p$, $h_1 = h_2 = h$, mediante un despeje para hallar el valor de x tenemos que la solución está justo en la mitad del intervalo $[0, s]$ siendo $s/2$ el punto $x = x_{\min} = x_{\text{eq}}$. Para ese cálculo se utilizó la herramienta WolframAlpha

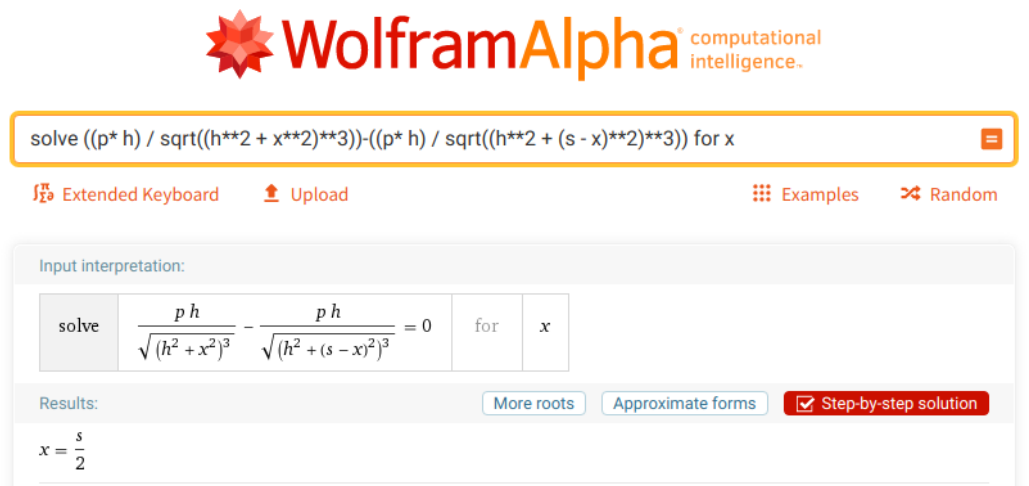


Fig. Despeje de x cuando $p_1 = p_2$, $h_1 = h_2$

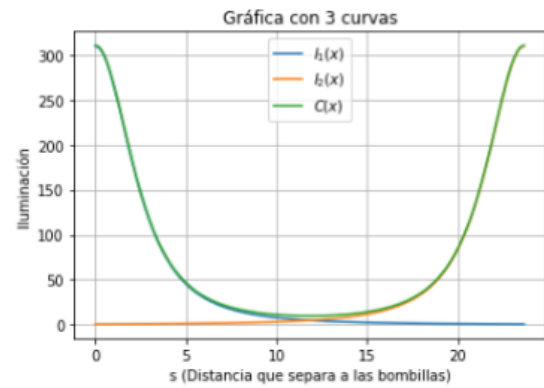


Fig. $p_1 = p_2$, $h_1 = h_2$

Pregunta 2

- 1) Escribir una rutina que sea capaz de generar las gráficas de las Figuras 2, 3 y 4.
- 2) Responder justificadamente las siguientes preguntas:
 - 2.1) ¿El punto (x_0, h_2^0) es un punto mínimo, máximo o de silla?
 - 2.2) Observe que $\nabla C(x, h_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Calcule, muy cuidadosamente el vector $\nabla C(x, h_2)$ y evalúelo en (x_0, h_2^0) . Comente el resultado.
 - 2.3) Observe que $\nabla^2 C(x, h_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Calcule, muy cuidadosamente a la matriz $\nabla^2 C(x, h_2)$ y evalúela en (x_0, h_2^0) . Comente el resultado.
 - 2.4) ¿Los valores de $\nabla C(x_0, h_2^0)$ y $\nabla^2 C(x_0, h_2^0)$ están acorde con la respuesta dada en el item 2.1)?
- 3) Describir detalladamente una propuesta numérica, basada en el modelo de la sección anterior y las nuevas consideraciones sobre la variable h_2 , que involucre algún método numérico que le permita encontrar mejores aproximaciones a (x_{min}^*, h_2^*) .
- 4) Investigar sobre el Método *BFGS*² y describir su propósito. ¿Este método le resulta de utilidad en su propuesta numérica?.
- 5) Programar y ejecutar BFGS usando $C(x, h_2)$, $C(x, h_2)$, $x_0 = (x^0, h_2^0)$. ¿Qué representa el valor x_{k+1} retornado por BFGS en el contexto del problema de iluminación?

Respuesta a la pregunta 1

Códigos

figuras3d.py

Respuesta a la pregunta 2

1. En todos los casos probados, el punto mejor iluminado entre los menos iluminados cuando x y h_2 varían, el punto (x^0, h_2^0) es un punto de silla.

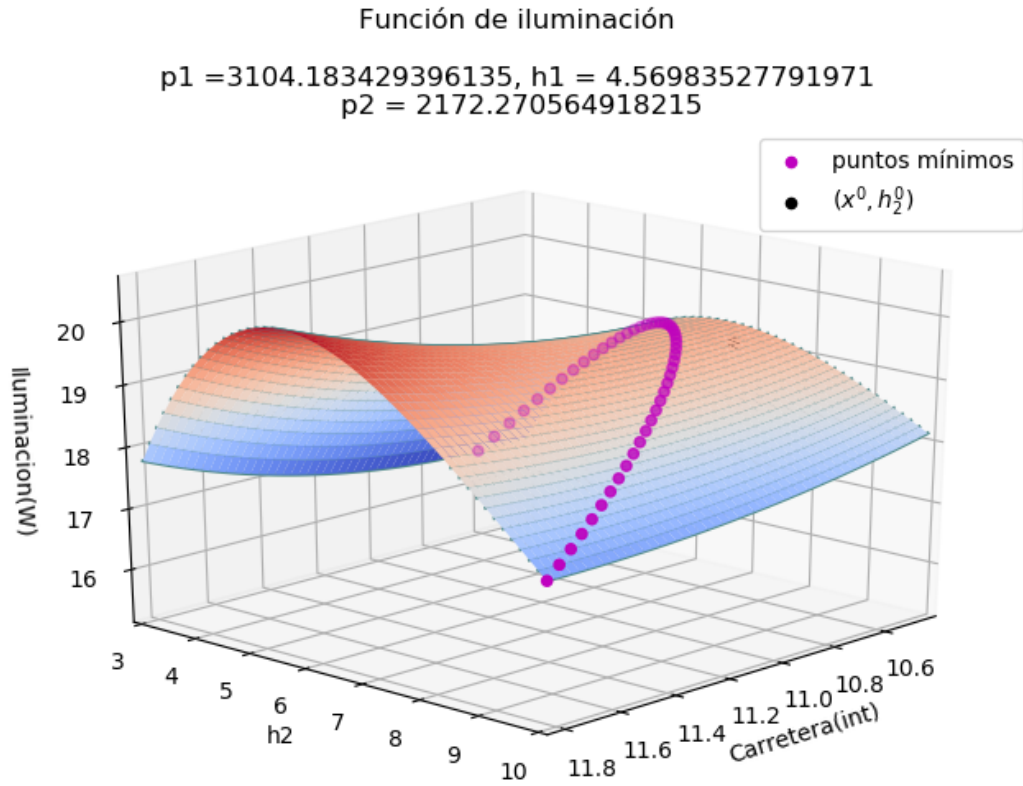


Fig. Acercamiento de los peores puntos iluminados

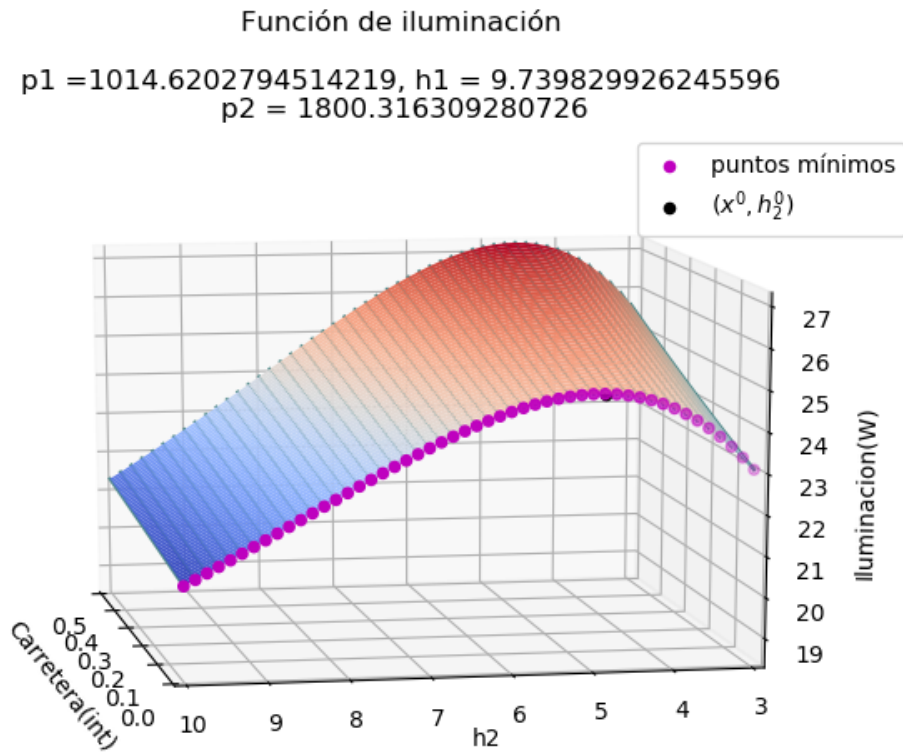


Fig. Acercamiento de los peores puntos iluminados

Códigos pregunta 3

punto_inicial.py

2.

Observacion: En los casos probados, cuando se evalua el vector gradiente en el punto de aproximación inicial, uno de los elementos del vector arroja un valor muy cercano a cero.

Códigos

punto_inicial.py

3.

Observaciones: En la mayoría de los casos la mayoría de los elementos de la matriz Hessiana son negativos exceptuando f_{xx} (el primer elemento de la primera columna y la primera fila). Esto tiene sentido dado que siguiendo el criterio de la matriz Hessiana, si el determinante de la matriz es negativo y este elemento es positivo, entonces el punto evaluado es un mínimo.

4. Los valores calculados al evaluar el punto (x^0, h_2^0) a la rutina teniendo como resultados el vector gradiente y la matriz Hessiana sí están acordes con la respuesta dada en el item 1 dado a que se tomó en cuenta el criterio de la matriz Hessiana para la clasificación. Teniendo un punto critico que denominaremos como (x,y) , éste se clasifica de la siguiente manera:

- Si el determinante es mayor que cero, entonces se procede a verificar si el elemento que corresponde a f_{xx} en la matriz es positivo o negativo. Si es positivo entonces (x,y) es un mínimo. En el caso contrario, (x,y) es un máximo.

- Si el determinante es menor que cero entonces se concluye que la función tiene un punto silla en (x,y) .

- Si el determinante es igual a cero el criterio no es concluyente, por lo tanto se debe buscar otra forma de determinar el comportamiento de la función. el item

Algunos casos probados:

```
s = 29.680968568938354
p1 = 3831.5257125263106
h1 = 4.8485383459257285
p2 = 1653.4053877070764

Minimo con mejor iluminacion:
(16.70814527234605, 9.142857142857142)

Vector Gradiente:
[[1.11288756e-11]
 [1.82337714e-03]]

Matriz Hessiana (H):
[[ 0.23171256 -0.04213283]
 [-0.06038068 -0.04213283]]

det(H)= -0.01230671623133363
Clasificacion: punto silla
```

Fig. Los valores de $\nabla C(x_0^0, h_2^0)$ y $\nabla^2 C(x_0^0, h_2^0)$


```

s = 15.730584880831394
p1 = 2397.841261685392
h1 = 5.4896783705957155
p2 = 2781.417727097838

Minimo con mejor iluminacion:
(7.659957024846454, 5.7142857142857135)

Vector Gradiente:
[[ 9.90683091e-11]
 [-5.03236307e-03]]

Matriz Hessiana (H):
[[ 2.39877841 -0.47685244]
 [-0.67084527 -0.47685244]]

det(H)= -1.4637575553125992
Clasificacion: punto silla

```

Fig. Los valores de $\nabla C(x_0^0, h_2^0)$ y $\nabla^2 C(x_0^0, h_2^0)$

Respuesta a la pregunta 3

- Para hallar la mejor aproximación (x^*, h_2^*) en un principio se planteó buscar los puntos críticos de $C'(x, h_2)$ a través de las raíces que podían ser obtenidos hallando el cero de dicha función.

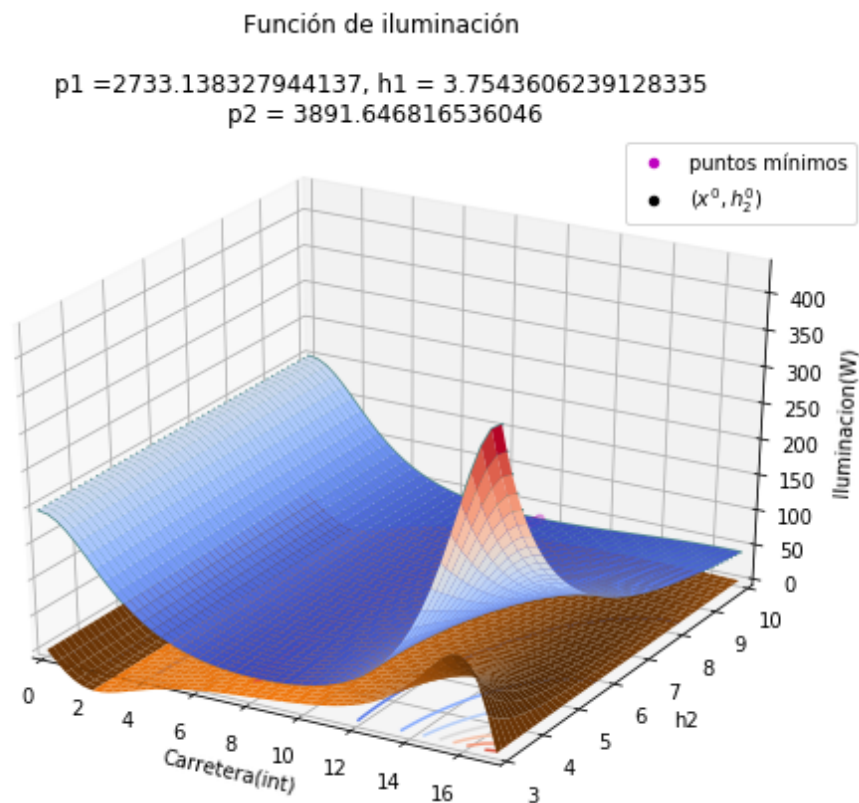


Fig. $C(x, h_2)$ y $C'(x, h_2)$ evaluado con h_2 variante

Función de iluminación

p1 = 3477.95307184014, h1 = 9.02971634744435
p2 = 1797.9117929009542

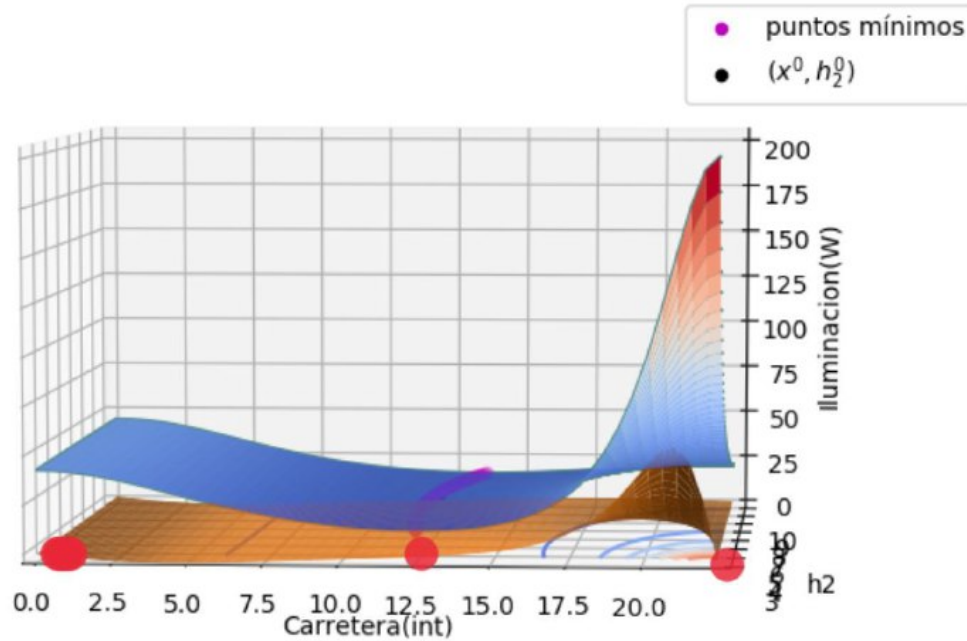


Fig. Puntos críticos de $C(x, h_2)$ evaluado con h_2 variante

Sin embargo, de ésta forma se presenta el problema de clasificar dichos puntos críticos dado a que el punto mejor iluminado entre los menos iluminados puede resultar tanto un mínimo como un punto de silla, por tanto, determinar con certeza que el mayor entre estos mínimos y puntos de silla es el punto (x^*, h_2^*) no resulta viable.

La solución para obtener la mejor aproximación y determinar cuál de los puntos con peor iluminación es el mayor de todos se opta por hacer esta selección entre todos los puntos mínimos de la función por cada valor de h_2 mediante el método cero de función por bisección utilizada en la primera parte del proyecto dado a que hemos transformado un problema de tres dimensiones en la suma de un problema de dos. De esta manera, evitamos el problema de clasificación antes mencionado dado a que no se estudia sobre una figura de tres dimensiones donde puede darse el caso de obtener un punto silla.

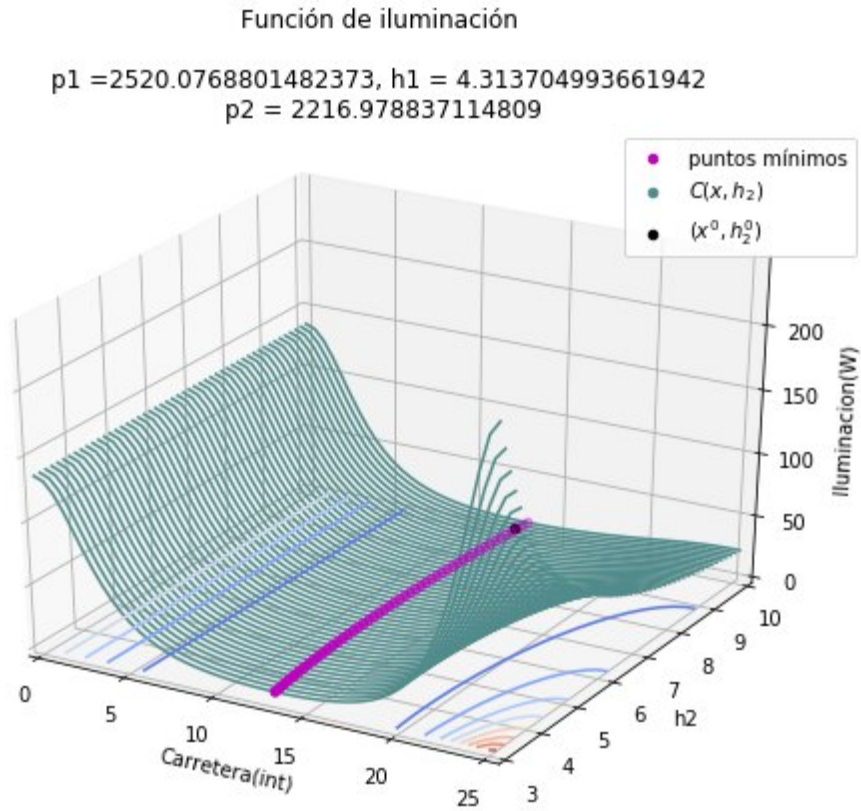


Fig. $C(x, h_2)$ evaluado con h_2 variante

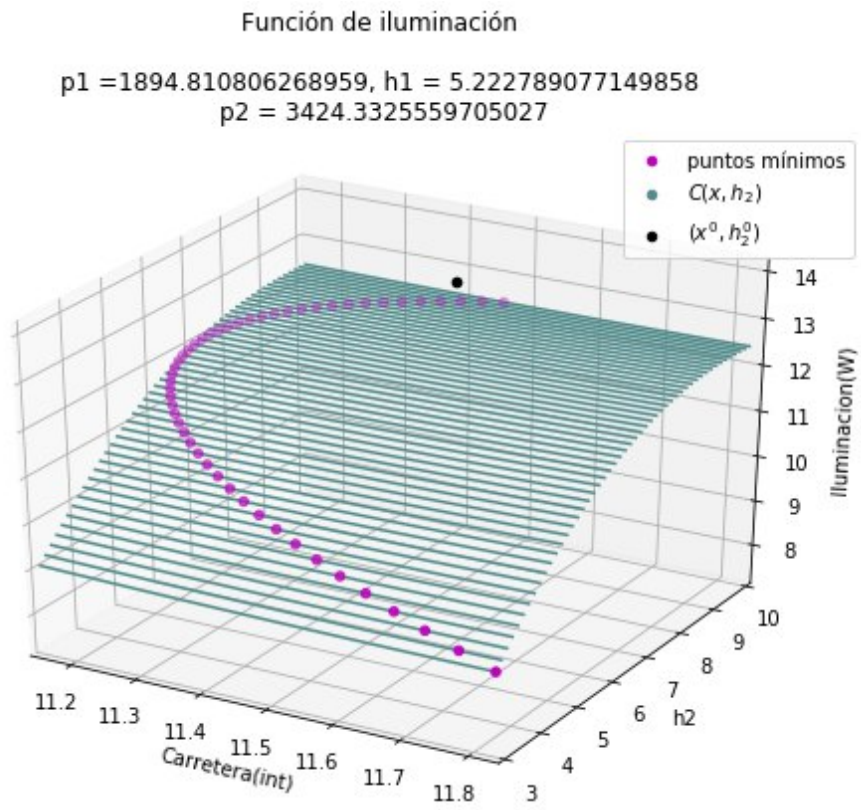


Fig. $C(x, h_2)$ evaluado con h_2 variante

Respuesta a la pregunta 4

El método BFGS es un algoritmo de optimización utilizado para encontrar ceros de funciones o puntos críticos de una función, generalmente se utilizan si la matriz Jacobiana es costosa de calcular o no se tiene disponible.

Una de las ventajas principales de BFGS es que la matriz Hessiana no necesita ser invertida si no que se aproxima por cada iteración.

Dicho esto si resulta de utilidad aplicar aplicar BFGS a nuestra propuesta numérica.

Respuesta a la pregunta 5

Códigos

BFGS.py

El vector X_{k+1} representa el cero de la función $C'(x, h_2)$ es decir la mejor aproximación a x^* que determina el punto de mayor luminosidad entre los mínimos.