



**Politecnico
di Torino**

MODELLI MATEMATICI PER LA BIOMEDICINA

**Covid-19 (Italia)
Modelli epidemiologici su Network**

Gioana Teora s267379 Diego Urbani s275324

Anno Accademico 2020-2021

Indice

1	Introduzione	1
2	Metodi	1
2.1	Modello SIR	1
2.2	Modello SEIR	4
2.2.1	Analisi qualitativa di alcune caratteristiche basilari dei modelli matematici SEIR e SEIQRP	5
2.3	Modelli con parametri costanti a tratti	6
2.4	Modelli su Rete	7
3	Risultati	11
3.1	Algoritmo	11
3.1.1	Fase di pre-processing	11
3.2	Condizioni iniziali e termine diffusivo	12
3.2.1	Periodo 1 (22-03-2020/26-04-2020)	12
3.2.2	Periodo 2 (27-04-2020/11-06-2020)	15
3.2.3	Periodi successivi sino al 24-12-2020	15
3.3	Simulazioni numeriche	16
3.3.1	Coupling strength e topologia del network	17
4	Conclusioni	20
Riferimenti bibliografici		24
A	Scenario legislativo	25

1 Introduzione

La **COVID-19** è una malattia infettiva causata dal virus SARS-CoV-2, appartenente al genere *Betacoronavirus*. Essa si manifesta nell'uomo con una molteplicità di sintomi di diversa gravità, spesso di tipo simil-influenzale, e possono riguardare a più livelli il sistema respiratorio comportando un quadro di sindrome respiratoria acuta grave (*Severe Acute Respiratory Syndrome*, da cui l'acronimo *SARS*). I primi casi sospetti nell'uomo sono stati riscontrati dalle autorità sanitarie della città di Wuhan, in Cina, intorno alla metà di dicembre del 2019, mentre la comunicazione ufficiale della diffusione alla OMS è avvenuta il 31 dicembre 2019. Dichiarata come pandemia dalla OMS in data 11 marzo 2020, la rapida diffusione, le modalità che favoriscono il contagio e la mancanza iniziale sia di un protocollo unificato di cure farmacologiche che di un vaccino, hanno portato in breve tempo i sistemi sanitari di gran parte del mondo a dover far fronte ad un numero considerevole di malati, spesso caratterizzati da un quadro clinico severo e necessitante di trattamenti intensivi.

Per evitare il collasso dei sistemi sanitari e contenere il numero di morti (al momento in cui si scrive, quantificati in oltre 1.6 milioni in tutto il mondo su un totale di oltre 72.6 milioni di casi), la maggior parte dei governi del mondo ha deciso di adottare delle strategie di contenimento dell'epidemia basate su specifiche limitazioni (spesso note come *Non Pharmaceutical Interventions* (**NPI**, [2])) all'interazione sociale diretta tra gli individui, nonché alla loro mobilità sia internazionale che nazionale. Tali limitazioni permettono di mitigare la progressione dell'epidemia a livello locale, agevolandone la gestione da parte dei sistemi sanitari, ma hanno notevoli ripercussioni negative sia in termini economici (ad esempio, il calo del PIL [9]), che in termini sociali. In tale contesto, i modelli matematici risultano essere dei validi strumenti di supporto nella valutazione degli effetti di misure più o meno restrittive sull'andamento epidemiologico. In particolare, studi sulla diffusione del virus tra le regioni possono essere validi strumenti di supporto per la determinazione e la validazione di misure restrittive prese in termini di mobilità interregionale.

Al fine di illustrare le potenzialità della modellazione matematica nella previsione della dinamica epidemiologica, vengono presentati i risultati relativi all'implementazione su rete ([2]) di una variazione ([8]) del modello SIR, atta ad analizzare la diffusione del virus tra sei regioni italiane, quali Piemonte, Lombardia, Veneto, Emilia-Romagna, Toscana, Marche, nel periodo che intercorre tra il 22 marzo 2020 e il 23 dicembre 2020. La scelta di tali regioni è legata sia agli assi viari che le attraversano (tra i quali le autostrade A1 e A14), strategici dal punto di vista del commercio e del turismo, sia al fatto che sono state le prime regioni italiane in cui sono stati individuati focolai di *Sars-CoV-2* ampi e non tracciabili, indice di una diffusione incontrollata dell'epidemia.

2 Metodi

2.1 Modello SIR

Il modello **SIR** (*Susceptible-Infected-Recovered*), proposto all'inizio del ventesimo secolo da Kermack-McKendrick ([3],[4]), descrive la trasmissione di una malattia infettiva in

una popolazione di N individui, uniformemente distribuita rispetto ai contatti: ogni individuo, in questo modo, ha uguale probabilità di entrare in contatto con ogni altro membro della popolazione. L'evoluzione viene osservata in una finestra temporale sufficientemente breve da rendere trascurabili le variazioni nel numero di individui dovute a natalità o mortalità per differenti cause, motivo per cui si può assumere N costante.

La popolazione viene suddivisa in tre categorie di individui interagenti:

- S rappresenta la categoria degli individui *suscettibili* all'infezione;
- I rappresenta la categoria degli individui *infetti*, ovvero gli individui che hanno contratto l'agente infettivo; assumendo che il periodo di incubazione sia trascurabile rispetto alla finestra di osservazione dell'evoluzione, un individuo viene classificato come *infetto* nel momento in cui contrae il virus;
- R rappresenta la categoria degli individui che hanno terminato il decorso della malattia (in inglese *recovered*), con esito positivo (guariti) o infausto (morti). Nessuna evidenza scientifica è in grado ancora di confermare o meno l'ipotesi di immunità a seguito di un primo contagio (e che quindi un individuo guarito possa risultare di nuovo suscettibile), sebbene in [12] si conclude abbia una durata fino ad otto mesi; tuttavia, si assume di osservare una finestra temporale dell'evoluzione della dinamica epidemica sufficientemente breve da rendere trascurabile il numero di casi di ri-contagio.

Il modello SIR può essere descritto dal seguente sistema di ODE :

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta \frac{S}{N} I \\ \dot{I} = \beta \frac{S}{N} I - \gamma I \\ \dot{R} = \gamma I \end{cases} \quad (2.1)$$

con condizioni iniziali

$$S(0) = S_0 > 0 \quad I(0) = I_0 > 0 \quad R(0) = 0 \quad (2.2)$$

dove $S(t)$, $I(t)$ e $R(t)$ rappresentano rispettivamente il numero di individui suscettibili, infetti e con decorso terminato, all'istante di tempo $t > 0$ e $\dot{S}, \dot{I}, \dot{R}$ indicano le derivate temporali di S, I, R rispettivamente. Inoltre, assunta come unità di tempo il giorno ([giorni]),

- $\beta > 0$ [giorni^{-1}] è un parametro del modello, assunto costante, che rappresenta il tasso di infezione, ovvero il numero medio di persone che una persona infetta contagia al giorno.
- $\gamma > 0$ [giorni^{-1}] è un parametro del modello che rappresenta il tasso con cui un individuo del gruppo I viene riclassificato come individuo del gruppo R a seguito di guarigione o morte; tale tasso, indicato nel seguito (pur con ambiguità nella terminologia) come *tasso di guarigione*, viene assunto anch'esso costante ed è dato dalla somma del tasso di guarigione con il tasso di morte di un individuo infetto, i.e. $\gamma = \gamma_R + \gamma_D$. Il suo reciproco $1/\gamma$ si può identificare come una misura del tempo in cui l'individuo rimane infetto.

Sommendo membro a membro le tre equazioni del sistema 2.1 e sfruttando le condizioni iniziali 2.2, si può dedurre che il modello conserva il numero totale di individui N . Da ciò consegue che le soluzioni (S, I, R) per il sistema 2.1 devono essere non negative e limitate da N . In particolare, ogni condizione iniziale considerata deve verificare

$$S_0 + I_0 + R_0 = N.$$

Dati i parametri β, γ e le condizioni iniziali 2.2, risulta fondamentale capire se tale infezione tenderà a diffondersi o meno e, in caso affermativo, capire dopo quanto tempo comincerà il suo declino.

Osservando che

$$\left[\frac{dI}{dt} \right]_{|t=0} = I_0 \left(\beta \frac{S_0}{N} - \gamma \right) > 0 \Leftrightarrow \frac{\beta}{\gamma} > \frac{N}{S_0}$$

definiamo

$$R_0 \equiv \frac{\beta}{\gamma}, \quad (2.3)$$

detto *basic reproduction number* dell'infezione, ovvero il numero di infezioni secondarie che possono essere prodotte a partire da un'unica infezione in una popolazione interamente suscettibile. In particolare:

- se $R_0 > \frac{N}{S_0}$, il numero di infetti è crescente e l'epidemia può svilupparsi;
- se $R_0 < \frac{N}{S_0}$, l'epidemia non può svilupparsi.

Per valutare l'impatto della dinamica epidemica, si analizza la fase in cui l'epidemia raggiunge il suo apice, calcolando il massimo di I in funzione di S :

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dI} = \frac{\beta S}{N\gamma - \beta S} \Leftrightarrow \frac{N\gamma - \beta S}{\beta S} dS = dI \\ \Rightarrow I(S) = I_0 + S_0 - S + \frac{N\gamma}{\beta} \log \left(\frac{S}{S_0} \right) \\ \Rightarrow I(S) = I_0 + S_0 - S + \frac{N}{R_0} \log \left(\frac{S}{S_0} \right) \\ \frac{dI}{dS} = 0 \Rightarrow -1 + \frac{N}{R_0} \frac{1}{S} \Leftrightarrow S_{max} = \frac{N}{R_0} \\ \Rightarrow I_{max} = I_0 + S_0 - \frac{N}{R_0} \left(1 + \log \left(\frac{R_0 S_0}{N} \right) \right), \end{aligned} \quad (2.4)$$

Quando S diventa inferiore a S_{max} , un individuo infetto ha più probabilità di guarire o morire piuttosto che infettare altre persone, e così il numero di infetti comincia a decrescere.

Come si evince in [1], il tempo t_{max} corrispondente a S_{max}, I_{max} può essere calcolato nel seguente modo:

$$\frac{dt}{dS} = -\frac{N}{\beta} \frac{1}{SI} = -\frac{N}{\beta} \frac{1}{S \left(I_0 + S_0 - S + \frac{N}{R_0} \log \left(\frac{S}{S_0} \right) \right)},$$

dove si è utilizzata la relazione 2.4. Integrando tale espressione da S_{max} a S_0 si ottiene

$$t_{max} = \frac{1}{\beta} \int_{S_{max}}^{S_0} \frac{1}{S \left(I_0 + S_0 - S + \frac{N}{R_0} \log \left(\frac{S}{S_0} \right) \right)} dS. \quad (2.5)$$

In generale, da quanto è stato possibile osservare grazie a epidemie precedenti, un'epidemia termina prima che tutta la popolazione diventi infetta.

Tale modello mostra pertanto che per ridurre il picco della curva degli infetti sia necessario intervenire tramite delle politiche che abbiano come scopo quello di minimizzare il termine $\frac{\beta S_0}{\gamma}$. In assenza di cure o vaccini, non è possibile aumentare il tasso di guarigione γ . Si potrebbe, invece, minimizzare il tasso di infezione β introducendo norme come utilizzo della mascherina, lavarsi spesso le mani e distanziamento sociale. Politiche come il lockdown potrebbero invece ridurre il numero di individui suscettibili.

2.2 Modello SEIR

Il modello SEIR [6], generalizzazione del modello SIR, introduce una nuova classe, quella degli esposti (E) che permette di modellare il periodo di incubazione, il quale rappresenta *quel periodo finestra tra il momento in cui il nostro corpo viene aggredito dal virus e il momento in cui cominciano a manifestarsi i sintomi della patologia, che coincide generalmente anche con il momento in cui diventiamo a nostra volta infettivi e possiamo accettare la presenza dell'infezione tramite gli opportuni controlli diagnostici, come il tampone.*¹

Nella sua classica forma il modello SEIR descrive l'interazione tra quattro categorie di individui: suscettibili (S), esposti (E), infetti segnalati come tali e infettivi (I) ed individui con decorso della malattia terminato (R), anche qui da intendersi con esito sia positivo che infausto. Tale modello può essere descritto tramite il seguente sistema di ODE:

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta I \frac{S}{N} \\ \dot{E} = \beta I \frac{S}{N} - \lambda E \\ \dot{I} = \lambda E - \gamma I \\ \dot{R} = \gamma I \end{cases}. \quad (2.6)$$

I parametri del sistema 2.6 hanno come unità di misura $giorno^{-1}$. In particolare, il nuovo parametro λ è definito come l'inverso del periodo di incubazione del virus.

Una generalizzazione del modello SEIR (cui nel seguito si farà riferimento come *modello SEIR modificato* o, più semplicemente come SEIQR [8],[2]), introdotta allo scopo di valutare anche l'efficienza di politiche quali il lockdown e l'efficienza delle autorità nel segnalare gli individui infetti, è rappresentata dal seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta I \frac{S}{N} - \alpha S + \omega P \\ \dot{E} = \beta I \frac{S}{N} - \lambda E \\ \dot{I} = \lambda E - \delta I \\ \dot{Q} = \delta I - \gamma Q \\ \dot{R} = \gamma Q \\ \dot{P} = \alpha S - \omega P \end{cases} \quad (2.7)$$

¹Citazione presa da [11].

dove

- P numero delle persone *protette*. Come in [2], si suppone infatti che un certo numero di individui suscettibili, grazie all'applicazione di alcune misure preventive, come quelle messe a punto dai governi su contesti locali o nazionali, non risulti essere suscettibile al virus.
- α [*giorni* $^{-1}$] è un parametro denominato *protection rate*.
- I , diversamente dall'interpretazione assunta nel modello SEIR, diventa il numero di individui infetti e infettivi non ancora segnalati dalle autorità.
- Q numero degli individui infetti e infettivi che si trovano in quarantena a seguito della comparsa dei sintomi ed esito positivo al test (tampone molecolare). È importante distinguere tra un individuo appartenente alla categoria I e uno appartenente alla categoria Q , poiché quest'ultimo non dovrebbe più esser messo nelle condizioni di contagiare a sua volta altri individui. Questa differenziazione tra I e Q può mettere in luce una scarsa tempestività da parte delle autorità sanitarie competenti nel segnalare le nuove positività.
- δ [*giorni* $^{-1}$] è il tasso con cui un individuo passa dalla categoria I alla categoria Q , ovvero l'inverso del tempo medio necessario per mettere in quarantena una persona risultata positiva al tampone molecolare. Tale categoria corrisponde alla categoria '*Totale attualmente positivi*' presente nei bollettini nazionali redatti giornalmente in Italia dal Ministero della Salute, con il supporto della Protezione Civile e dell'Istituto superiore di sanità, per raccogliere informazioni tempestive sul numero totale di test positivi, decessi, ricoveri in ospedale e ricoveri in terapia intensiva in ogni regione d'Italia.

Anche in tal caso, tutti i parametri presenti nel modello si assumono strettamente positivi e hanno come dimensione [*giorni* $^{-1}$].

2.2.1 Analisi qualitativa di alcune caratteristiche basilari dei modelli matematici SEIR e SEIQRP

Si noti che nei modelli SEIR e SEIQRP presentati nella sezione precedente si conserva il numero totale di individui della popolazione N oggetto di studio, supposta al momento chiuso. Si suppone quindi che il periodo di osservazione $[0, T]$, $T > 0$ sia sufficientemente breve da rendere trascurabili gli effetti di natalità e mortalità per cause differenti.

Esistenza, positività e limitatezza delle soluzioni Posto $x = (S, E, I, Q, R, P)^T \in (\mathbb{R}^+)^6$ e $\mu = (\beta, \alpha, \omega, \lambda, \delta, \gamma)^T \in (\mathbb{R}^+)^6$, il sistema 2.7 si può riscrivere come

$$\dot{x}(t) = f(x(t); \mu) = \begin{bmatrix} -\beta I \frac{S}{N} - \alpha S + \omega P \\ \beta I \frac{S}{N} - \lambda E \\ \lambda E - \delta I \\ \delta I - \gamma Q \\ \gamma Q \\ \alpha S - \omega P \end{bmatrix}, \quad t > 0$$

Al fine di provare che il problema 2.7 sia ben posto nel senso di Hadamard (esiste unica soluzione che dipende con continuità dai dati), introduciamo l'insieme compatto

$$\Omega = \left\{ x = (S, E, I, Q, R, P)^T \in (\mathbb{R}^+)^6 : S + E + I + Q + R + P = N \right\}. \quad (2.8)$$

Proposizione 1 (A.17 in [14]). *Se f è tale che la soluzione del problema 2.7 con condizione iniziale $x(t_0) = x_0 \geq 0$ è unica e $f_i(t, x) \geq 0 \forall i$ quando $x \geq 0$ è tale che $x_i = 0$. Se $x(t_0) \geq 0$, allora $x(t) \geq 0$ per ogni $t \geq t_0$ in cui è definita.*

Teorema 1. *Per ogni $x_0 = (S_0, E_0, I_0, Q_0, R_0, P_0)^T \in \Omega$, il problema di Cauchy definito da 2.7 e $x(0) = x_0$ ammette unica soluzione, denominata $x(t, x_0)$, definita su $[0, \infty)$, le cui componenti sono non-negative. Inoltre, lo spazio Ω definito in 2.8 è positivamente invariante.*

Dimostrazione. La soluzione del problema di Cauchy definito dall'equazione 2.7 con condizioni iniziali $x(0) = x_0$ esiste ed è unica. Infatti, f è lipschitziana (è continua con derivate parziali limitate) in Ω . Inoltre, dalla Proposizione 1 seguente deriva che la soluzione del problema ha componenti non-negative. Infine, poiché la somma dei numeri totali di individui nel tempo si conserva, possiamo concludere banalmente che Ω è positivamente invariante. \square

L'enunciato e la dimostrazione nel caso del modello SEIR sono analoghe.

Punti di equilibrio I disease-free equilibrium dei modelli 2.6 e 2.7 sono

$$\Sigma_{0,SEIR} = (S_0, E_0, I_0, R_0) = (N, 0, 0, 0)$$

$$\Sigma_{0,SEIQRP} = (S_0, E_0, I_0, Q_0, R_0, P_0) = \left(\frac{\omega N}{\alpha + \omega}, 0, 0, 0, \frac{\alpha N}{\alpha + \omega} \right).$$

2.3 Modelli con parametri costanti a tratti

La variazione del comportamento umano causata sia da una diversa percezione dell'andamento epidemiologico che dalle decisione politiche prese per tutelare la salute dei cittadini comporta una modifica nel tempo dei valori assunti dai parametri che definiscono il modello e, conseguentemente, una variazione nella dinamica del sistema. Ad esempio, il tasso di morte dipende dalla capacità di risposta del sistema sanitario, la cui efficienza, in tali circostanze, tendenzialmente migliora nel tempo.

Al fine di considerare l'impatto di tali cambiamenti, anziché assumere tali parametri costanti sull'intero periodo di analisi, è possibile modellarli come delle funzioni costanti a tratti. Quindi, si consideri una suddivisione dell'intervallo temporale in esame $[0, T]$ in n sotto-intervalli disgiunti

$$[T_0, T_1) \cup [T_1, T_2) \cup \dots \cup [T_{n-1}, T_n]$$

con $T_0 = 0, T_n = T$, e una funzione $\mu(t)$ che risulti costante su ciascun sotto-intervallo

$$\mu(t) = \mu_j \in (\mathbb{R}^+)^6 \quad \forall t \in [T_j, T_{j+1}), \quad j = 0, \dots, n-1.$$

Proposizione (2 in [2]). Per ogni condizione iniziale $x_0 \in \Omega$, la sequenza dei problemi di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), \mu_0) & t \in (T_0, T_1) \quad x(T_0) = x_0 \in \Omega \\ \dot{x}(t) = f(x(t), \mu_j) & t \in (T_j, T_{j+1}) \quad x(T_i) = \lim_{t \rightarrow T_i} x(t) \quad \forall j = 1, \dots, n-1 \end{cases} \quad (2.9)$$

ammette un'unica soluzione globale, le cui componenti sono non negative.

2.4 Modelli su Rete

Poiché la mobilità gioca un ruolo importante nella diffusione di un virus, in questa sezione viene presentato uno studio sulla propagazione del COVID-19 in Italia, modellando tale nazione come un grafo indiretto \mathcal{G} i cui nodi sono costituiti da sei regioni italiane (Piemonte, Lombardia, Veneto, Emilia-Romagna, Marche e Toscana) e i cui lati rappresentano i principali tratti autostradali che collegano tali regioni (A4 Torino-Milano, A4 Brescia-Padova, A1 Milano-Bologna, A1 Bologna-Firenze, A21 Torino-Piacenza, A13 Bologna-Padova e A14 Bologna-Ancona). Nel seguito della trattazione verrà utilizzata l'enumerazione dei nodi definita in Figura 1 che mostra il grafo utilizzato per far riferimento alle regioni oggetto di studio.

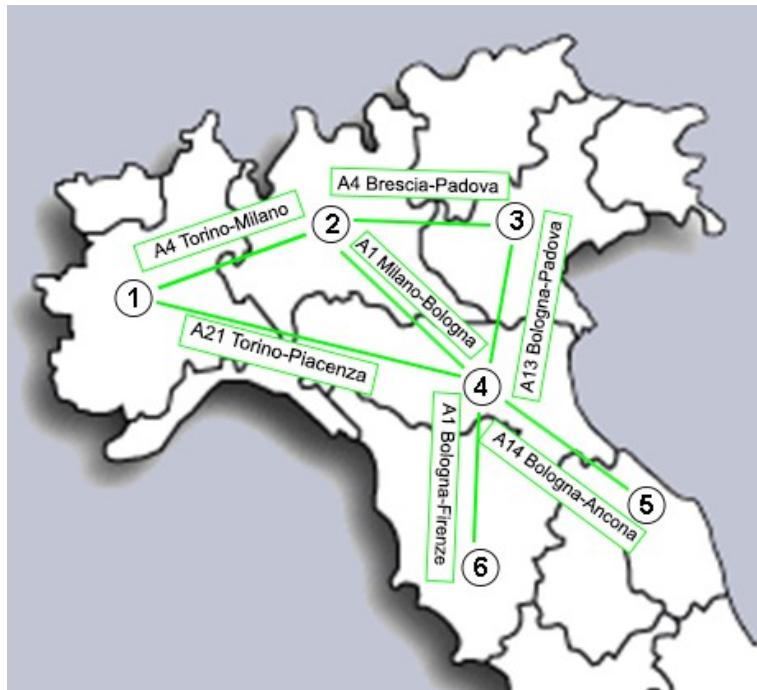


Figura 1: Nella figura viene mostrato il grafo indiretto avente come nodi le regioni considerate, nell'ordine Piemonte, Lombardia, Veneto, Emilia-Romagna, Marche e Toscana, e come lati i principali tratti autostradali che connettono tali regioni, ovvero A4 Torino-Milano, A4 Brescia-Padova, A1 Milano-Bologna, A1 Bologna-Firenze, A21 Torino-Piacenza, A13 Bologna-Padova e A14 Bologna-Ancona.

La modellizzazione prevede un'implementazione su rete dei modelli analizzati in precedenza (2.1, 2.7), in cui viene però effettuata una distinzione tra la categoria dei guariti

(R) e quelli dei deceduti (D) a causa del virus. Inoltre, si precisa che la popolazione I nel modello SIR verrà identificata con la popolazione Q , descritta nella sezione 2.2. Con questa scelta, il fitting di tale modello si basa esclusivamente sui dati resi disponibili dai bollettini nazionali, ovvero attuali positivi confermati come tali (Q), guariti (R) e deceduti (D). I modelli risultanti verranno indicati nel seguito con gli acronimi SEIQRDP e SQRD rispettivamente.

Inoltre, poiché nel caso del COVID-19, la contagiosità di un individuo può verificarsi già due giorni prima della manifestazione dei sintomi ([11]), anche gli individui appartenenti alla categoria E risultano infettivi nell'ultima fase del periodo di incubazione. Ciò riduce la differenza tra le popolazioni E e I , proprie del modello SEIQRDP. Pertanto, inglobando le due popolazioni nell'unica popolazione I , è possibile verificare se effettivamente il periodo di incubazione costituisce un parametro utile per prevedere la diffusione del virus. Tale modello, indicato con SIQRDP, viene descritto dal sistema:

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta I \frac{S}{N} - \alpha S + \omega P \\ \dot{I} = \beta I \frac{S}{N} - \delta I \\ \dot{Q} = \delta I - (\gamma_R + \gamma_D) Q \\ \dot{R} = \gamma_R Q \\ \dot{D} = \gamma_D Q \\ \dot{P} = \alpha S - \omega P \end{cases} \quad (2.10)$$

il cui insieme di parametri si riduce a $(\beta, \alpha, \omega, \delta, \gamma_R, \gamma_D)$;

L'implementazione su rete di tali modelli segue quanto fatto in [1],[2]. Indicato con n il numero dei nodi del grafo ($n = 6$), si definisce la matrice $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ associata al grafo mostrato in Figura 1 come segue:

$$L = \begin{bmatrix} -L_{21} & L_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & -(L_{12} + L_{32} + L_{42}) & L_{23} & L_{24} & 0 & 0 \\ 0 & L_{32} & -(L_{23} + L_{43}) & L_{34} & 0 & 0 \\ 0 & L_{42} & L_{43} & -(L_{24} + L_{34} + L_{54} + L_{64}) & L_{45} & L_{46} \\ 0 & 0 & 0 & L_{54} & -L_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_{64} & 0 & -L_{46} \end{bmatrix}$$

dove l'elemento $L_{ij} > 0, i \neq j$ rappresenta il peso del link che connette il nodo j con il nodo i . Tale matrice ha entrate extra-diagonali non negative e il suo elemento diagonale è stato definito in modo tale che la somma sulle colonne sia nulla. Per la definizione dei pesi del network e quindi della matrice L , si è utilizzato il rapporto $\frac{F_{ij}}{N_j} [\text{giorni}^{-1}]$, dove F_{ij} indica il flusso giornaliero diretto da j in i e N_j indica il numero di abitanti della regione j -esima, come fatto in [5]. Tale valore è stato poi adimensionalizzato moltiplicandolo per la lunghezza della finestra temporale del periodo relativo. Notiamo che la scelta di pesare i collegamenti tra regioni basandosi esclusivamente sulle principali reti autostradali deriva principalmente da una questione di reperibilità dei dati e risulta essere un'ipotesi piuttosto restrittiva.

In ogni nodo viene definita un'istanza del modello, le quali vengono accoppiate tramite una matrice diagonale H , che nel caso del modello 2.7 assume la forma

$$H = \begin{bmatrix} \varepsilon_S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_Q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_P \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$$

dove gli ε [giorni $^{-1}$] sono parametri positivi, detti *coupling strength*. Tali parametri misurano l'intensità della diffusione tra i vari compartimenti attraverso il network. Quando $\varepsilon \ll 1$ la diffusione è molto debole e l'evoluzione di ogni nodo può essere disaccoppiata da quella dei propri vicini (Figura 2(a)). Per valori grandi ($\varepsilon \approx 1$), invece, la diffusione e la reazione avvengono contemporaneamente ed è quindi necessario accoppiare le varie istanze (Figura 2(b)). Assumendo che nessun individuo segnalato come infetto dalle auto-

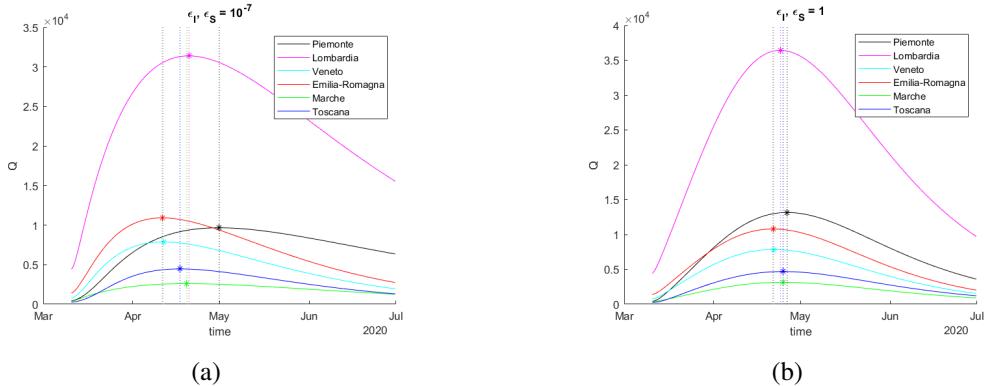


Figura 2: Evoluzione nel tempo di $Q_j(t)$, con $j = 1, \dots, 6$ per diversi valori dei parametri $\varepsilon_S, \varepsilon_I$ relativamente al sistema 2.11.

rità sanitarie trasgredisca l'isolamento contumaciale con sorveglianza attiva previsto dal Decreto Legge 23-02-2020 ([13]), si considera $\varepsilon_Q = 0$; per definizione stessa di individuo protetto, si suppone $\varepsilon_P = 0$; per ovvie ragioni, si assume $\varepsilon_D = 0$; infine, per questione di semplicità, si assumono anche $\varepsilon_E = 0$ e $\varepsilon_R = 0$, in quanto una loro eventuale diffusione non influisce sulla propagazione del virus, poiché i primi non risultano infettivi e i secondi vengono considerati immuni alla malattia.

L'implementazione del modello SEIQRDP su rete nel nodo $j = 1, \dots, n$ viene descritta dal sistema:

$$\begin{cases} \dot{S}_j = -\beta_j I_j \frac{S_j}{N_j} - \alpha_j S_j + \omega_j P_j + \varepsilon_S \sum_{k=1}^n L_{jk} S_k \\ \dot{E}_j = \beta_j I_j \frac{S_j}{N_j} - \lambda_j E_j \\ \dot{I}_j = \lambda_j E_j - \delta_j I_j + \varepsilon_I \sum_{k=1}^n L_{jk} I_k \\ \dot{Q}_j = \delta_j I_j - ((\gamma_R)_j + (\gamma_D)_j) Q_j \\ \dot{R}_j = (\gamma_R)_j Q_j \\ \dot{D}_j = (\gamma_D)_j Q_j \\ \dot{P}_j = \alpha_j S_j - \omega_j P_j \end{cases} \quad (2.11)$$

dove abbiamo assunto che i valori dei vari parametri possano differire da una regione all'altra, poiché ogni regione ha le sue proprie specificità. Indicati con $A_j \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$, Y_j , $F_j(Y_j) \in \mathbb{R}^7 \forall j = 1, \dots, 6$ rispettivamente la matrice e i vettori definiti come segue

$$A_j = \begin{bmatrix} -\alpha_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_j \\ 0 & -\lambda_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_j & -\delta_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_j & -((\gamma_R)_j + (\gamma_D)_j) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\gamma_R)_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\gamma_D)_j & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_j \end{bmatrix}, \quad Y_j = \begin{bmatrix} S_j \\ E_j \\ I_j \\ Q_j \\ R_j \\ D_j \\ P_j \end{bmatrix}, \quad F_j(Y_j) = \begin{bmatrix} -\beta_j \frac{S_j}{N_j} I_j \\ \beta_j \frac{S_j}{N_j} I_j \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e con $Z \in \mathbb{R}^{7 \times n}$ e $Y \in \mathbb{R}^{7 \times n}$ le matrici

$$Z = [A_1 Y_1 + F_1(Y_1) \quad \cdots \quad A_6 Y_6 + F_6(Y_6)] \quad Y = [Y_1 \quad \cdots \quad Y_6]$$

il sistema 2.11 si può riscrivere in forma compatta come

$$\begin{cases} \dot{Y} = Z + HYL^T \\ Y(T_0) = Y_0 \end{cases} \quad (2.12)$$

dove T_0 indica il tempo iniziale, $Y_0 \in \mathbb{R}_+^{7 \times n}$ tale che $\sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^n (Y_0)_{ij} = \sum_{j=1}^n N_j$ rappresenta il valore iniziale e per L^T si intende la trasposta della matrice L . I parametri del modello da stimare risultano essere

$$(\beta_j, \alpha_j, \omega_j, \lambda_j, \delta_j, (\gamma_R)_j, (\gamma_D)_j) \quad \forall j = 1, \dots, n, \quad \varepsilon_S, \varepsilon_I.$$

In modo analogo, i modelli SIQRDP e SQRD su rete nel nodo $j = 1, \dots, n$ si scrivono rispettivamente come

$$\begin{cases} \dot{S}_j = -\beta_j I_j \frac{S_j}{N_j} - \alpha_j S_j + \omega_j P_j + \varepsilon_S \sum_{k=1}^n L_{jk} S_k \\ \dot{I}_j = \beta_j I_j \frac{S_j}{N_j} - \delta_j I_j + \varepsilon_I \sum_{k=1}^n L_{jk} I_k \\ \dot{Q}_j = \delta_j I_j - ((\gamma_R)_j + (\gamma_D)_j) Q_j \\ \dot{R}_j = (\gamma_R)_j Q_j \\ \dot{D}_j = (\gamma_D)_j Q_j \\ \dot{P}_j = \alpha_j S_j - \omega_j P_j \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\begin{cases} \dot{S}_j = -\beta_j Q_j \frac{S_j}{N_j} + \varepsilon_S \sum_{k=1}^n L_{jk} S_k \\ \dot{Q}_j = \beta_j Q_j \frac{S_j}{N_j} - ((\gamma_R)_j + (\gamma_D)_j) Q_j \\ \dot{R}_j = (\gamma_R)_j Q_j \\ \dot{D}_j = (\gamma_D)_j Q_j \end{cases} \quad (2.14)$$

Gli insiemi dei parametri da stimare per i due modelli sono rispettivamente

$$(\beta_j, \alpha_j, \omega_j, \delta_j, (\gamma_R)_j, (\gamma_D)_j) \quad \forall j = 1, \dots, n, \quad \varepsilon_S, \varepsilon_I$$

e

$$(\beta_j, (\gamma_R)_j, (\gamma_D)_j) \quad \forall j = 1, \dots, n, \quad \varepsilon_S.$$

Notiamo che nel modello SQRD su rete l'unica diffusione considerata è quella inherente la popolazione dei suscettibili che pertanto rappresenta semplicemente il fatto che un individuo suscettibile che diffonde può modificare la sua probabilità di incontrare un individuo infetto e quindi di infettarsi a sua volta.

Introducendo il termine di diffusione, la numerosità della popolazione della singola regione cambierà in ogni periodo; a conservarsi sarà la popolazione totale, i.e. $N = \sum_{j=1}^n N_j$.

3 Risultati

3.1 Algoritmo

Il procedimento e l'algoritmo utilizzati per la stima dei parametri del modello seguono la logica descritta in [6] e [7]. L'algoritmo di interpolazione è un algoritmo di tipo iterativo il quale, partendo da un'opportuna stima iniziale per i parametri del modello μ_0 , cerca di individuare il set di parametri ottimo nel senso dei minimi quadrati nel periodo di riferimento $[T_0, T]$, i.e. dati come input i valori $Q_j(t), R_j(t), D_j(t)$ per ogni $j = 1, \dots, n, t = T_0, \dots, T$, l'algoritmo risolve

$$\min_{\mu} \sum_{t=T_0}^T \sum_{j=1}^n ((Q_j(t) - \hat{Q}_j(t))^2 + (R_j(t) - \hat{R}_j(t))^2 + (D_j(t) - \hat{D}_j(t))^2), \quad (3.1)$$

dove le stime indicate con il simbolo $\hat{\cdot}$ sono ottenute risolvendo localmente (ovvero discettizzando ulteriormente l'intervallo di tempo che intercorre tra due giorni successivi) il sistema di equazioni differenziali 2.12 tramite il metodo Runge-Kutta del quarto ordine. L'intervallo di variabilità dei parametri è stato imposto pari a $[0, 1]$, ad eccezione del parametro β il quale è assunto variabile nell'intervallo $[0, 5]$. Gli intervalli di variabilità sono stati definiti seguendo quanto fatto in [6] e [7].

3.1.1 Fase di pre-processing

Prima di procedere con l'interpolazione, è stata effettuata una fase di preprocessing consistente nell'individuare eventuali rumori nei dati. Inizialmente si sono analizzate le variazioni giornaliere nel numero totale di guariti, dei morti e dei positivi in giorni successivi², provvedendo a sostituire il dato in corrispondenza di eventuali variazioni negative: ad esempio, il 13-12-2020 la regione Marche comunicava 21100 guariti, mentre il 14-12-2020 il numero era sceso a 20756 (344 in meno), per poi risalire a 21882 il 15-12-2020: si è dedotto quindi che il numero di guariti corretto al 14-12-2020 potesse essere di 21756.

Si è inoltre osservata la presenza di oscillazioni nel numero di test effettuati, che nel weekend risulta essere generalmente più basso rispetto ai giorni infrasettimanali, potendo quindi alterare negativamente l'analisi dei dati³. Per questo motivo, le analisi sono state

²La variazione di guariti, morti e totali positivi non può essere negativa: un'eventuale decremento giornaliero suggerisce un errore di trasmissione dei dati.

³Ad un numero sensibilmente più basso di test può corrispondere un numero inferiore di nuovi positivi, ma una percentuale più alta del tasso di positività, dovuta al fatto che magari i tamponi effettuati non sono

effettuate su un nuovo data set in cui il valore riportato relativo ai guariti, deceduti, casi totali e, di conseguenza, agli attuali positivi nel giorno t viene sostituito dalla media mobile semplice, uno strumento utilizzato in statistica per l'analisi delle serie storiche: essa viene calcolata utilizzando i dati che partono dai 6 giorni precedenti fino al giorno t compreso.

Per garantire maggiore stabilità nelle analisi numeriche si è individuata una fase di assestamento dei dati, corrispondente al periodo di tempo dal 24-02-2020 (primo giorno in cui si dispone di dati completi) al 22-03-2020. La Figura 3 sintetizza i dati analizzati⁴, che corrispondono ai valori riportati dai bollettini nazionali quotidianamente pubblicati a partire dal 24-02-2020 per riassumere i dati sull'andamento della diffusione del virus sia a livello regionale che nazionale.

3.2 Condizioni iniziali e termine diffusivo

La discretizzazione del periodo di analisi $[T_0, T]$ in sotto-intervalli temporali, in cui i parametri che definiscono il modello possono essere assunti approssimativamente costanti, viene effettuata in modo tale da cogliere opportunamente le variazioni nell'andamento epidemiologico e nella mobilità interregionale conseguenti ai principali decreti emanati dal Governo italiano per fronteggiare l'emergenza sanitaria (un cui sunto è presente nell'appendice A).

3.2.1 Periodo 1 (22-03-2020/26-04-2020)

L'analisi viene condotta a partire dal 22-03-2020, data in cui il DPCM del 22-03-2020 sanisce il lockdown totale dell'Italia⁵, il quale durerà fino al 26-04-2020. Data la politica di lockdown totale imposta e dato che, come si evince dal sito dell'AISCAT⁶ (*Associazione Italiana Società Concessionarie Autostrade e Trasporti*), vi è stata una riduzione mensile di circa l'87.6% rispetto al mese di aprile del 2019, variazione notevolmente superiore rispetto quella degli altri mesi in esame, si assumerà che il flusso di individui tra le regioni sia tale da rendere trascurabile il termine diffusivo.

In tale periodo, si assumeranno come condizioni iniziali per risolvere i sistemi di ODE definiti in 2.11, 2.13 e 2.14 i valori:

$$Q_j(T_0) = (Q_0)_j \quad R_j(T_0) = (R_0)_j \quad D_j(T_0) = (D_0)_j$$

$$E_j(T_0) = (Q_0)_j \quad I_j(T_0) = 0.2(Q_0)_j \quad P_j(T_0) = 0$$

$$(S_0)_j = N_j - (E_0)_j - (I_0)_j - (Q_0)_j - (R_0)_j - (D_0)_j \quad \forall j = 1, \dots, 6,$$

dove T_0 indica il primo giorno del periodo, i.e. 22-03-2020, e $\forall j = 1, \dots, n$:

- $(Q_0)_j, (R_0)_j$ e $(D_0)_j$ sono stati reperiti dai bollettini nazionali;

frutto di attività di screening, bensì richiesti da soggetti sintomatici e quindi con maggior probabilità di risultare positivi.

⁴Il sito di riferimento è <https://github.com/pcm-dpc/COVID-19/tree/master/dati-regioni>. Ad ogni modo, i dati sono stati rielaborati tramite un codice R per trasformarli in un formato che meglio si adattava alle esigenze dell'algoritmo.

⁵Per maggiori dettagli consultare l'appendice A.

⁶Il link di riferimento è https://www.aiscat.it/pubblicazioni/downloads/AISCAT-mensile_04-2020.pdf. Tale link non risulta essere più attualmente disponibile. Ad ogni modo tutti i dati utilizzati sono disponibili nella nostra repository [GitHub](#).

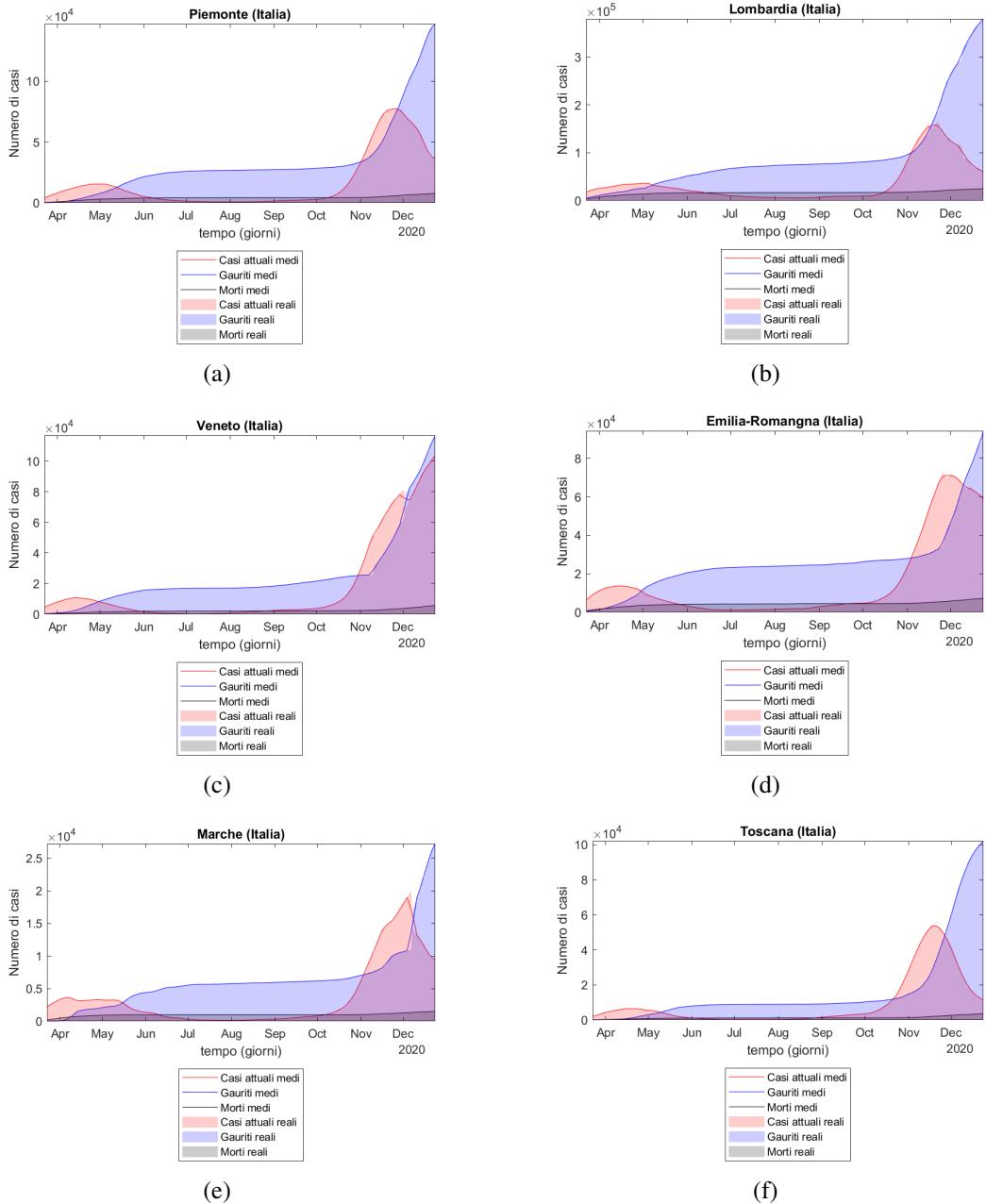


Figura 3: Sintesi dei dati nella regione Piemonte 3(a), Lombardia 3(b), Veneto 3(c), Emilia Romagna 3(d), Marche 3(e) e Toscana 3(f). In ciascuna figura, la curva rossa, la blu e la nera rappresentano rispettivamente l'andamento temporale degli attuali positivi (Q), dei guariti (R) e dei deceduti (D) valutato sul dataset calcolato tramite la media mobile. Invece, le aree colorate in rosso, blu e nero rappresentano rispettivamente le aree sottese dalle curve che rappresentano l'andamento temporale degli attuali positivi (Q), dei guariti (R) e dei deceduti (D) valutato sul dataset relativo ai dati reali.

- la scelta per $E_j(T_0), I_j(T_0)$ ⁷ e $P_j(T_0)$ segue quanto fatto in [8];
- definite le condizioni precedenti, si ottiene naturalmente la condizione iniziale $(S_0)_j = N_j - (E_0)_j - (I_0)_j - (Q_0)_j - (R_0)_j - (D_0)_j - (P_0)_j$, dove N_j indica la numerosità della popolazione j -esima⁸.

Per quanto riguarda la scelta delle stime iniziali per i parametri che intervengono nei tre modelli necessaria all'algoritmo di ottimizzazione, ovvero β_j , α_j , ω_j , λ_j , δ_j , $(\gamma_R)_j$, $(\gamma_D)_j \forall j = 1, \dots, n$ si assume:

- un valore iniziale identico per le 6 regioni per β , λ , δ , che corrisponde a quello utilizzato anche in [8], ovvero $\beta = 1 \text{ giorni}^{-1}$, $\lambda = 1/5 \text{ giorni}^{-1}$ (che corrisponde a un periodo di incubazione medio di 5 giorni [11]), $\delta = 0.5 \text{ giorni}^{-1}$;
- per la scelta dei valori iniziali relativi ai parametri α e ω si è operato un *tuning*⁹; i valori di α e di ω sono assunti variabili da regione a regione. I valori ottenuti sono reperibili nella Tabella 1;
- il valore iniziale del tasso di guarigione viene definito come l'inverso della durata media della fase sintomatica, ovvero viene assunto per ogni regione pari a $\gamma_R = \frac{1}{11} \text{ giorni}^{-1}$, come si evince in [11];
- il valore iniziale del tasso di morte $(\gamma_D)_j$ è stato valutato come rapporto medio giornaliero del numero di deceduti sul numero degli infetti all'interno della j -esima regione. Le stime iniziali per le sei regioni sono riperibili nella Tabella 1.

Maggiori informazioni sulle stime iniziali dei parametri e sulle condizioni iniziali dei modelli sono disponibili su [GitHub](#).

	Piemonte	Lombardia	Veneto	Emilia Romagna	Marche	Toscana
SEIQRDP						
α	0.1000	0.4000	0.1000	0.1000	1.0000	0.1000
ω	0.2000	0.4000	0.1000	0.2000	0.4000	0.1000
SIQRDP						
α	0.1000	0.3000	0.1000	0.1000	0.8000	0.5000
ω	0.1000	0.9000	0.1000	0.1000	0.8000	0.3000
γ_D	0.0086	0.0204	0.0049	0.0131	0.0119	0.0073

Tabella 1: Stime iniziali per α , ω relative alle sei regioni per il modello SEIQRDP e SIQRDP (con dati in media mobile). Nell'ultima riga sono riportate le stime iniziali per il parametro γ_D per ciascuna regione. Tutti i parametri sono misurati in giorni^{-1} .

⁷Le assunzioni su $(E_0)_j$ e $(I_0)_j$ sono state fatte al fine di semplificare il problema, ma è bene precisare che, essendo in genere complicato attribuire dei valori iniziali a tali categorie, andrebbero anch'essi trattati come parametri incogniti da stimare.

⁸I valori relativi a $N_j \forall j = 1, \dots, 6$ sono stati presi dal [sito](#) dell'ISTAT.

⁹Si è scelto, tra alcune possibili combinazioni di parametri in $(0, 1] \times (0, 1]$, quella che minimizza 3.1. L'intervallo di variabilità dei parametri, ovvero $(0, 1]$ è stato definito seguendo quanto fatto in [8].

3.2.2 Periodo 2 (27-04-2020/11-06-2020)

In questo periodo, la mobilità regionale e interregionale è stata gradualmente ripristinata (la diminuzione del flusso rispetto l'anno 2019 è passata da circa il 90% a solo il 65%), motivo per cui si è iniziato a considerare nel modello anche il termine diffusivo. Ciò rende necessario attribuire un valore all'entrate (i, j) della matrice L , definite come il flusso pro-capite giornaliero diretto da j a i . Tale flusso è stato stimato utilizzando i dati relativi al tratto autostradale in questione, reperiti sul sito dell'AISCAT¹⁰.

Per quanto riguarda le condizioni iniziali per il sistema di ODE e le stime iniziali per il problema di ottimizzazione relative al periodo in esame:

- per i parametri ε_S ed ε_I è stato fatto del tuning considerando valori compresi tra 0.00001 e 1 per ciascuno dei modelli oggetto dell'analisi. I risultati sono mostrati nella Tabella 2;

	Piemonte	Lombardia	Veneto
ε_S	0.0001	0.0001	0.1000
ε_I	0.0010	0.0001	-

Tabella 2: Stime iniziali per ε_S , ε_I per i modelli SEIQRDP, SIQRDP e SQRD (con dati in media mobile). Tutti i parametri sono misurati in giorni^{-1} .

- per gli altri parametri e per le categorie di individui coinvolte si procede per continuità settando come valori iniziali i valori finali ricavati mediante il fitting e le simulazioni del modello in questione effettuate al periodo precedente, come definito nella sezione 2.3. In tal modo si procederà anche in tutti i periodi successivi.

3.2.3 Periodi successivi sino al 24-12-2020

Periodo 3 (12-06-2020/06-08-2020). In questo periodo la mobilità nazionale ha subito una riduzione di solo il 15%¹¹ rispetto l'anno precedente e il numero di attuali positivi, in ogni regione, si è stabilizzato, raggiungendo il minimo valore assunto nell'intero periodo di analisi.

Periodo 4 (07-08-2020/30-09-2020). La mobilità nazionale ha ripreso i suoi ritmi regolari (circa -6% rispetto al 2019¹²). Inoltre, nel mese di agosto si assistette a un progressivo aumento del numero dei passeggeri dei voli internazionali¹³ e, contemporaneamente, del numero di contagi in paesi esteri come Malta¹⁴, spingendo

¹⁰https://www.aiscat.it/pubblicazioni/downloads/trim_1-2_2019.pdf.

¹¹https://2021.aiscat.it/wp-content/uploads/2021/01/NEW_AISCAT-mensile-LUGLIO-2020.pdf.

¹²<https://www.stradeanas.it/sites/default/files/Edizione%20speciale%20osservatorio%20Dati%20consolidati%20Agosto%202020.pdf> e <https://www.stradeanas.it/sites/default/files/SMI4%20-%20Sintesi%20osservatorio%20Settembre%202020.pdf>.

¹³La variazione rispetto all'anno 2019 è calata dal -97.4% nel mese di giugno a -76.5% nel mese di agosto (https://assaeroporti.com/statistiche_202008/).

¹⁴https://www.google.com/search?q=covid+malta&rlz=1C1VDKB_itIT930IT930&sxsrf=ALeKkO1I2sr1ygldChq8nc9-8Vp9z2SL6Q:1614422604989&source=lnms&sa=X&ved=0ahUKEwijtIzv8InvAhxEyqQKHTJHBBQQ_AUIDigA&biw=1536&bih=754&dpr=1.25.

il Governo a emanare il Comunicato n° 246¹⁵ in cui si richiedeva tampone obbligatorio per chi arrivava da tali paesi. Inoltre, il 16 agosto 2020, un’Ordinanza del Ministero della Salute¹⁶ ha disposto la chiusura delle discoteche e l’obbligo di indossare dispositivi di protezione delle vie aeree tra le 18:00 e le 06:00 sull’intero territorio nazionale.

Periodo 5 (01-10-2020/03-11-2020). Nelle regioni italiane in esame, la numero dei contagi è in forte aumento e la mobilità torna a ridursi¹⁷.

Periodo 6 (04-11-2020/14-11-2020). Il DPCM del 03-11-2020 (vedi Appendice A) stabilisce la suddivisione dell’Italia in zone rosse, arancioni e gialle. Gli spostamenti da e verso zone rosse o arancioni erano possibili rispetto al primo periodo (descritto nella sezione 3.2.1), ma limitati rispetto gli spostamenti da zona gialla a zona gialla. Si stima una differenza di circa il 30% della mobilità a riguardo¹⁸.

Periodo 7 (15-11-2020/05-12-2020). Toscana, Marche e Emilia-Romagna vengono declassate dalla zona gialla.

Periodo 8 (06-12-2020/24-12-2020). Emilia-Romagna e Marche vengono riclassificate zona gialle¹⁹. Inoltre, come si evince dal sito dell’ANAS²⁰, si considera una variazione del +10% rispetto al mese precedente a causa dei rientri dei fuorisede.

3.3 Simulazioni numeriche

Considerando il grafo in Figura 1 e settando all’inizio di ogni periodo in esame le condizioni iniziali definite nella sezione precedente, sono state effettuate simulazioni numeriche per i modelli su rete 2.11, 2.13 e 2.14 utilizzando i dati in media mobile mostrati in Figura 3.

In Figura 4 è riportato l’andamento dell’errore

$$\sum_{t=1}^{T_i} \sum_{j=1}^n ((Q_j(t) - \hat{Q}_j(t))^2 + (R_j(t) - \hat{R}_j(t))^2 + (D_j(t) - \hat{D}_j(t))^2), \quad (3.2)$$

al variare del periodo i . In 3.2, T_i indica l’ampiezza temporale del periodo i e il simbolo $\hat{\cdot}$ indica il valore stimato.

¹⁵ http://www.salute.gov.it/portale/news/p3_2_4_1_1.jsp?lingua=italiano&menu=salastampa&p=null&id=5632.

¹⁶ <https://www.gazzettaufficiale.it/eli/id/2020/08/17/20A04564/sg>.

¹⁷ Si è registrato un calo del 15% della mobilità nazionale rispetto lo stesso mese dell’anno 2019 come si evince dal sito dell’ANAS <https://www.stradeanas.it/sites/default/files/SMI4%20-%20Sintesi%20Osservatorio%20ottobre%202020.pdf>.

¹⁸ Maggiori dettagli possono essere trovati all’interno del codice utilizzato per le simulazioni, disponibile su [GitHub](#).

¹⁹ Osserviamo che, a eccezione della Toscana, tutte le regioni vengono considerate zone gialle, anche se in una fase iniziale di tale periodo il Piemonte e la Lombardia risulterebbero ancora essere in zona arancione, come mostrato in 5. La scelta è stata dettata dal fatto che, data la numerosità dei parametri da stimare, volendo suddividere l’arco temporale in modo da assecondare ogni cambiamento, il rischio di overfitting sarebbe stato molto elevato.

²⁰ <https://www.stradeanas.it/sites/default/files/SMI4%20-%20Sintesi%20Osservatorio%20Dicembre%202020.pdf>.

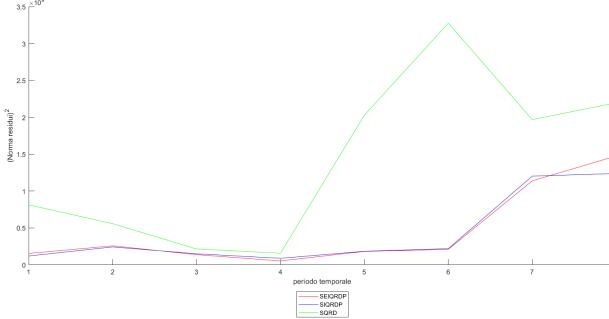


Figura 4: Andamento dell'errore 3.2 al variare del periodo temporale in esame per i modelli 2.11, 2.13 e 2.14 costruiti a partire dai dati reali e in media mobile.

In Figura 4 è possibile osservare che l'errore è maggiore negli ultimi periodi, probabile conseguenza del fatto che, per ragioni di continuità, le condizioni iniziali in ogni periodo corrispondono alla situazione terminale del periodo precedente, e quindi l'errore cumulato fino al periodo $i - 1$ si ripercuote sul fitting del periodo i . Osservando, ad esempio, la Figura 5 che mostra l'andamento temporale degli attuali positivi, guariti e deceduti in Piemonte, si può notare come in corrispondenza dei raccordi effettuati si cumuli molto errore. Per ovviare a tale problema si potrebbe pensare di raffinare la discretizzazione in tempo, ma bisogna tener conto anche del rischio di overfitting.

Le simulazioni relative alle altre regioni sono disponibili nella nostra repository [GitHub](#).

Per quantificare meglio l'errore commesso, si può osservare, ad esempio, che relativamente alla regione Piemonte e al periodo 5 (01-10-2020 / 03-11-2020), considerando i dati in media mobile, i residui medi ottenuti sugli attuali positivi (Q), i.e.

$$\sum_{t=1}^{T_5} |Q_1(t) - \hat{Q}_1(t)|$$

sono ≈ 411 per il metodo SEIQRDP, ≈ 425 per il SIQRDP e ≈ 1718 per il metodo SQRD e che

$$\min_{t=1,\dots,T_5} \{Q(t)\} = 2982 \quad \text{mean}_{t=1,\dots,T_5} \{Q(t)\} \approx 13172 \quad \max_{t=1,\dots,T_5} \{Q(t)\} = 36855.$$

Quello che evince osservando l'andamento degli errori è che modellizzare o meno la categoria E non comporta una grande riduzione dell'errore. Inoltre, dalla Tabella 3 in cui vengono riportati i parametri dei tre modelli oggetto di analisi nel periodo 5 (01-10-2020/03-11-2020), si può osservare che i modelli SEIQRDP e SIQRDP concordino sui tassi di guarigione γ_R e di morte γ_D .

3.3.1 Coupling strength e topologia del network

È interessante comprendere come utilizzare i modelli costruiti per convalidare e creare strategie volte a minimizzare i picchi degli attuali positivi. A tale scopo, nel seguito, verrà mostrato un piccolo esperimento che mostra come utilizzare il modello SEIQRDP

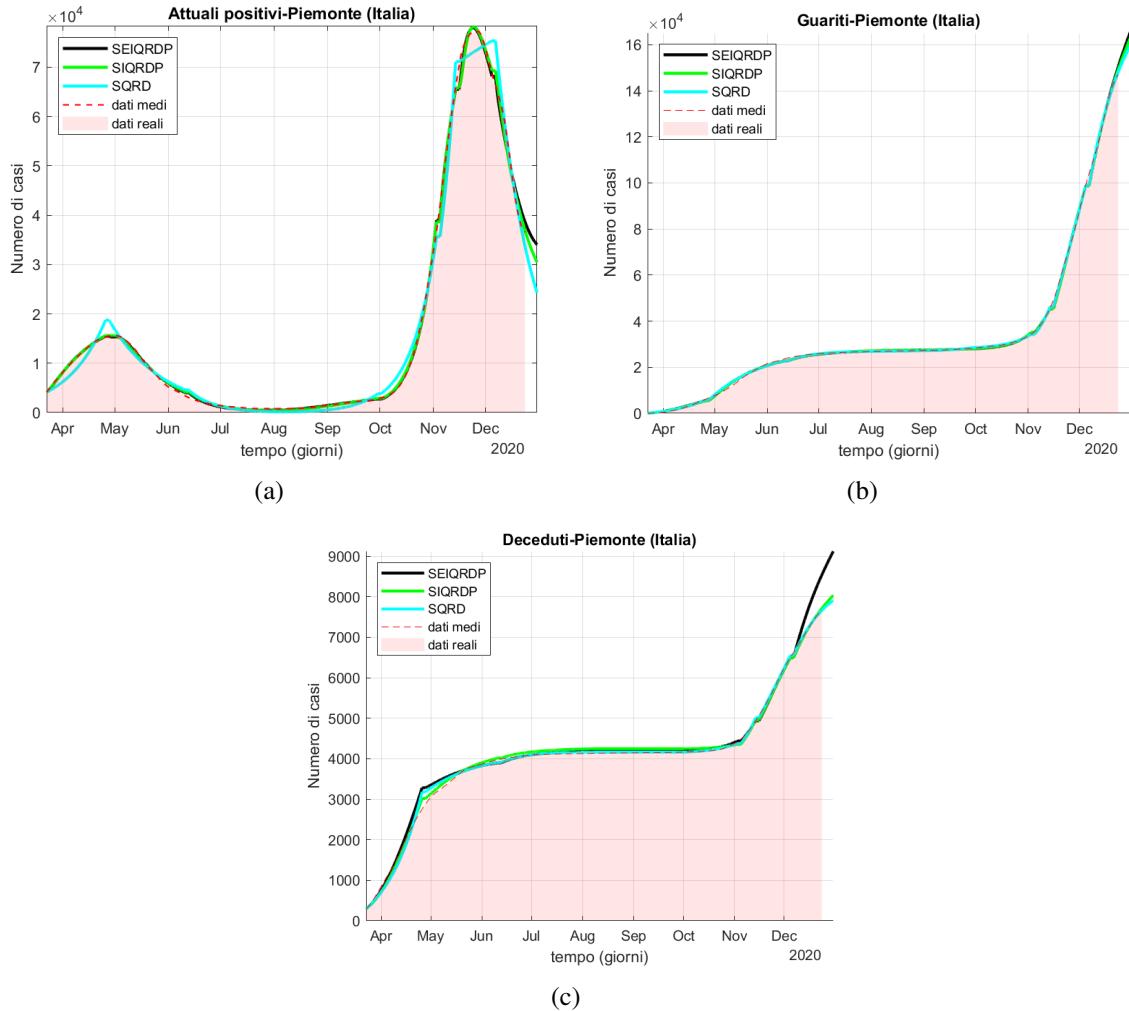


Figura 5: Andamento temporale degli attuali positivi (Q,[5\(a\)](#)), del totale dei guariti (R,[5\(b\)](#)) e del totale deceduti (D,[5\(c\)](#)) in Piemonte. La linea nera rappresenta la curva simulata tramite modello SEIQRDP, quella verde tramite SIQRDP e quella azzurra tramite SQRD. La linea rossa tratteggiata rappresenta l'andamento dei valori in media mobile degli attuali positivi (Q,[5\(a\)](#)), del totale dei guariti (R,[5\(b\)](#)) e del totale deceduti (D,[5\(c\)](#)) e l'area colorata in rosso rappresenta l'area sottesa dalla curva che mostra l'andamento reale degli attuali positivi (Q,[5\(a\)](#)), del totale dei guariti (R,[5\(b\)](#)) e del totale deceduti (D,[5\(c\)](#)). Tutti i modelli citati risultano essere valutati tramite i dati in media mobile.

	Piemonte	Lombardia	Veneto	Emilia Romagna	Marche	Toscana
SEIQRDP						
β	0.5695	0.5446	0.4688	0.4147	0.3669	0.4718
λ	0.7630	0.5324	0.9999	0.3391	0.3323	0.3287
δ	0.4809	0.2309	0.7617	0.0390	0.0433	0.0615
γ_R	0.0171	0.0208	0.0154	0.0087	0.0142	0.0150
γ_D	0.0006	0.0008	0.0009	0.0006	0.0000	0.0005
α	0.2989	0.3406	0.7743	0.2824	0.6433	0.5240
ω	0.6277	0.6529	0.1692	0.9290	0.2546	0.3318
SIQRDP						
β	2.0919	1.1122	1.3173	0.9356	0.3421	4.8987
δ	0.7002	0.6273	0.3799	0.3489	0.6504	0.7529
γ_R	0.0167	0.0212	0.0153	0.0086	0.0140	0.0144
γ_D	0.0003	0.0006	0.0004	0.0004	0.0000	0.0000
α	0.3754	0.3828	0.1638	0.1332	0.2313	0.6360
ω	0.2144	0.7913	0.0933	0.1517	0.7429	0.1319
SQRD						
β	0.0838	0.0828	0.0681	0.0499	0.0626	0.0726
γ_R	0.0124	0.0165	0.0099	0.0069	0.0075	0.0121
γ_D	0.0005	0.0004	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Tabella 3: Parametri relativi ai modelli SEIQRDP, SIQRDP e SQRD (con dati in media mobile) e al periodo 5 (01-10-2020/03-11-2020), per ciascuna regione. Tutti i parametri sono misurati in giorni^{-1} .

(con dati in media mobile), per valutare se e come limitare il traffico sui tratti autostradali considerati.

Pertanto, supponendo di essere al periodo 5, che precede i periodi in cui è stata effettuata la suddivisione in aree gialle, rosse e arancioni, l’obiettivo è valutare l’effetto dell’introduzione di diverse limitazioni sulla mobilità interregionale sull’andamento della pandemia nel periodo successivo, supponendo che tutti gli altri NPI vengano mantenuti e, di conseguenza, restino invariati tutti i parametri caratteristici del modello in esame. A tale scopo, si considera il modello SEIQRDP (con dati in media mobile), i cui parametri sono mostrati nella Tabella 3 e le 2^{14} possibili topologie che si possono creare considerando il set dei 14 lati diretti che descrivono il grafo mostrato in Figura 1, per diversi valori di $\varepsilon = \varepsilon_S = \varepsilon_I$ nell’intervallo $[0.01, 1]$.

Per ogni topologia e per ogni valore di ε considerati, viene simulato l’andamento dell’epidemia nel periodo 6, utilizzando i parametri del periodo precedente. I risultati dell’esperimento sono mostrati nelle Figure 6 e 7. Essi mostrano la presenza di topologie il cui valore medio giornaliero stimato per la categoria Q è inferiore a quello relativo alla topologia vuota, che corrisponde alla topologia in cui nessun individuo può migrare da una regione all’altra. Ciò che si evince dai risultati è che a flussi in ingresso nelle regioni che nel periodo 6 sono state dichiarate aree rosse (Piemonte e Lombardia) a partire da altre regioni, e principalmente, dall’Emilia-Romagna corrispondono situazioni in cui il numero medio giornaliero della categoria Q risulta superiore rispetto quello previsto

	Piemonte	Lombardia	Veneto
ε_S	0.0666	0.1011	1.0000
ε_I	0.0455	0.0829	-

Tabella 4: Valori dei parametri ε_S , ε_I per i modelli SEIQRDP, SICRDP e SQRD (con dati in media mobile) relativi al periodo 5 (01-10-2020/03-11-2020). Tutti i parametri sono misurati in $giorni^{-1}$.

dalla topologia vuota. La politica attuata nel periodo 6 (rappresentata dalla topologia mostrata in Figura 7(d)) prevedeva correttamente, pertanto, una diminuzione dei flussi verso le regioni Piemonte e Lombardia, ma tale diminuzione non risulta sufficiente per minimizzare il numero medio giornaliero per la categoria Q .

4 Conclusioni

L’implementazione su grafo di modelli epidemiologici risulta essere un potente strumento per modellare l’andamento della pandemia nelle diverse regioni e la sua diffusione tra le stesse, ma anche per la gestione e il contenimento della pandemia, soprattutto in termini di decisioni legate all’apertura e chiusura dei confini. I risultati ottenuti hanno dimostrato che le politiche attuate dai governi risultano essere valide in termini di individuazione di aree maggiormente a rischio, ma le politiche di isolamento delle regioni sono state, in alcuni casi, meno severe del necessario. Tuttavia, tali modelli tengono conto soltanto dell’andamento epidemiologico e non di altri fattori importanti all’interno della vita di una nazione, come quello sociale ed economico.

Per rendere i modelli presentati più sofisticati si potrebbe pensare di costruire una struttura a *grafo random* internamente a ciascuna regione, in modo tale da rappresentare in modo più realistico la probabilità di contatto tra individui appartenenti alla stessa, assunta fino ad ora uniforme.

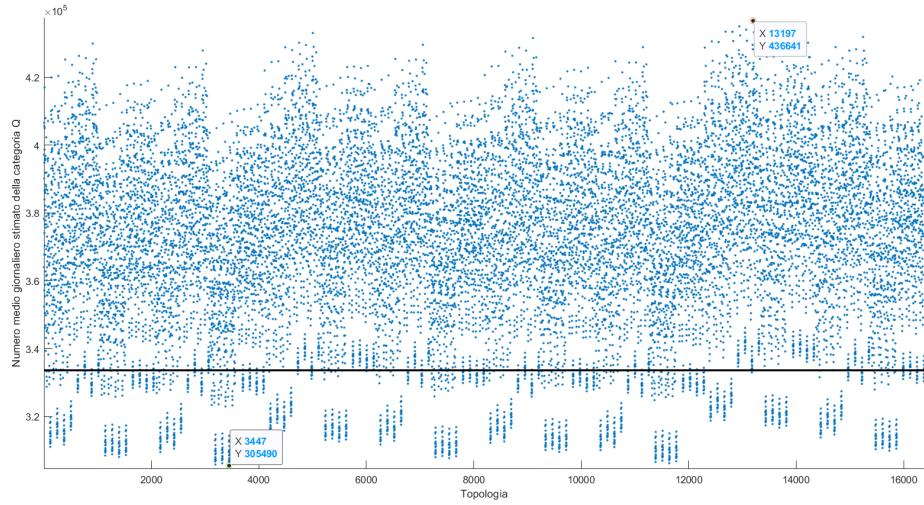


Figura 6: Numero medio giornaliero per la categoria Q relativo alle 2^{14} topologie generate per $\epsilon = 1$. La linea nera rappresenta il livello relativo alla topologia vuota. Il punto rosso e quello verde rappresentano le topologie che minimizzano e massimizzano il numero medio di infetti Q giornaliero rispettivamente.

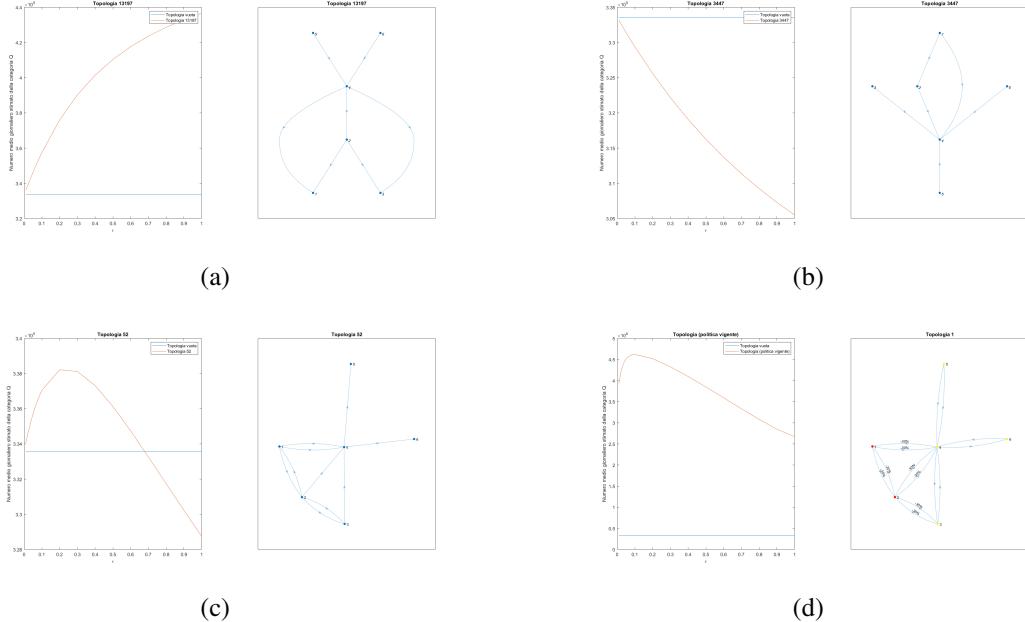


Figura 7: Numero medio giornaliero per la categoria Q al variare di ϵ relativamente alla topologia che massimizza tale valore per $\epsilon = 1$ (7(a)) e che lo minimizza (7(b)). Nella Figura 7(c) viene mostrato un esempio di topologia il cui livello di infezione supera quello relativo alla topologia vuota solo per valori bassi di coupling strength. Nella Figura 7(d) viene mostrato l'andamento del numero medio giornaliero per la categoria Q al variare di ϵ relativo alla topologia che corrisponde alla realizzazione della politica vigente nel periodo 6.

Elenco delle tabelle

1	Stime iniziali per α , ω relative alle sei regioni per il modello SEIQRDP e SIQRDP (con dati in media mobile). Nell'ultima riga sono riportate le stime iniziali per il parametro γ_D per ciascuna regione. Tutti i parametri sono misurati in $giorni^{-1}$	14
2	Stime iniziali per ε_S , ε_I per i modelli SEIQRDP, SIQRDP e SQRD (con dati in media mobile). Tutti i parametri sono misurati in $giorni^{-1}$	15
3	Parametri relativi ai modelli SEIQRDP, SIQRDP e SQRD (con dati in media mobile) e al periodo 5 (01-10-2020/03-11-2020), per ciascuna regione. Tutti i parametri sono misurati in $giorni^{-1}$	19
4	Valori dei parametri ε_S , ε_I per i modelli SEIQRDP, SIQRDP e SQRD (con dati in media mobile) relativi al periodo 5 (01-10-2020/03-11-2020). Tutti i parametri sono misurati in $giorni^{-1}$	20
5	Assegnazione del livello di gravità alle 6 regioni di interesse con le varie ordinanze relative al periodo compreso tra il 04-11-2020 e il 23-12-2020.	28

Elenco delle figure

1	Nella figura viene mostrato il grafo indiretto avente come nodi le regioni considerate, nell'ordine Piemonte, Lombardia, Veneto, Emilia-Romagna, Marche e Toscana, e come lati i principali tratti autostradali che connettono tali regioni, ovvero A4 Torino-Milano, A4 Brescia-Padova, A1 Milano-Bologna, A1 Bologna-Firenze, A21 Torino-Piacenza, A13 Bologna-Padova e A14 Bologna-Ancona.	7
2	Evoluzione nel tempo di $Q_j(t)$, con $j = 1, \dots, 6$ per diversi valori dei parametri $\varepsilon_S, \varepsilon_I$ relativamente al sistema 2.11.	9
3	Sintesi dei dati nella regione Piemonte 3(a), Lombardia 3(b), Veneto 3(c), Emilia Romagna 3(d), Marche 3(e) e Toscana 3(f). In ciascuna figura, la curva rossa, la blu e la nera rappresentano rispettivamente l'andamento temporale degli attuali positivi (Q), dei guariti (R) e dei deceduti (D) valutato sul dataset calcolato tramite la media mobile. Invece, le aree colorate in rosso, blu e nero rappresentano rispettivamente le aree sottese dalle curve che rappresentano l'andamento temporale degli attuali positivi (Q), dei guariti (R) e dei deceduti (D) valutato sul dataset relativo ai dati reali.	13
4	Andamento dell'errore 3.2 al variare del periodo temporale in esame per i modelli 2.11, 2.13 e 2.14 costruiti a partire dai dati reali e in media mobile.	17
5	Andamento temporale degli attuali positivi (Q,5(a)), del totale dei guariti (R,5(b)) e del totale deceduti (D,5(c)) in Piemonte. La linea nera rappresenta la curva simulata tramite modello SEIQRDP, quella verde tramite SIQRDP e quella azzurra tramite SQRD. La linea rossa tratteggiata rappresenta l'andamento dei valori in media mobile degli attuali positivi (Q,5(a)), del totale dei guariti (R,5(b)) e del totale deceduti (D,5(c)) e l'area colorata in rosso rappresenta l'area sottesa dalla curva che mostra l'andamento reale degli attuali positivi (Q,5(a)), del totale dei guariti (R,5(b)) e del totale deceduti (D,5(c)). Tutti i modelli citati risultano essere valutati tramite i dati in media mobile.	18

6	Numero medio giornaliero per la categoria Q relativo alle 2^{14} topologie generate per $\varepsilon = 1$. La linea nera rappresenta il livello relativo alla topologie vuota. Il punto rosso e quello verde rappresentano le topologie che minimizzano e massimizzano il numero medio di infetti Q giornaliero rispettivamente.	21
7	Numero medio giornaliero per la categoria Q al variare di ε relativamente alla topologia che massimizza tale valore per $\varepsilon = 1$ (7(a)) e che lo minimizza (7(b)). Nella Figura 7(c) viene mostrato un esempio di topologia il cui livello di infezione supera quello relativo alla topologia vuota solo per valori bassi di coupling strength. Nella Figura 7(d) viene mostrato l'andamento del numero medio giornaliero per la categoria Q al variare di ε relativo alla topologia che corrisponde alla realizzazione della politica vigente nel periodo 6.	21
8	Sintesi delle principali misure adottate nelle varie aree a seconda della gravità. L'iconografica è disponibile al seguente link.	27

Riferimenti bibliografici

- [1] F. Bustamante-Casta, J. G. Caputo, G. Cruz-Pacheco, A. Knippel and F. Mouatamide, *Epidemic model on a network: analysis and applications to COVID-19*, 1-20, (2020).
- [2] C.J.Silva^a, G. Cantin^b, C. Cruz^a, R. Fonseca-Pinto^c, R. Passadouro da Fonseca^{c,d}, E. Soares dos Santos^d, D.F.M. Torres^a *Complex network model for COVID-19: human behaviour, pseudo-periodic solutions and multiple epidemic waves*, ^a Center for Research and Development in Mathematics and Applications (CIDMA), Department of Mathematics, University of Aveiro, 3810-193 Aveiro, Portugal; ^bLaboratoire de Mathématiques Appliquées, FR-CNRS-3395, 25, Rue Philippe Lebon, Le Havre Normandie 76063, France; ^cCenter for Innovative Care and Health Technology (ci-TechCare), Polytechnic of Leiria, Portugal; ^dACES Pinhal Litoral - Central Regional Health Administration (ARS Centro), Portugal.
- [3] W. O. Kermack and A. G. McKendrick, *A contribution to the mathematical theory of epidemics*, Proc. Royal Soc. London, 115, 700-721, (1927).
- [4] J.D.Murray, *Mathematical Biology I: An Introduction*, Third Edition, Springer, (2002).
- [5] D. Brockmann and D. Heilbling, *The Hidden geometry of complex, Network-driven contagion Phenomena*, Science 13 Dec 2013, DOI: 10.1126/science.1245200.
- [6] A. Godio, F. Pace and A. Vergnano, *SEIR modeling of the Italian Epidemic of SARS-CoV-2 Using Computational Swarm Intelligence*, International Journal of Environmental Research and Public Health, 18 may 2020.
- [7] L. Peng, W. Yang, D. Zhang and C. Zhuge *Epidemic analysis of COVID-19 in China by dynamical modeling* <https://arxiv.org/abs/2002.06563>
- [8] E. Cheynet, *Generalized SEIR Epidemic Model (Fitting and Computation)*. Available online: <https://it.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/74545-generalized-seir-epidemic-modelfitting-and-computation> (accessed on 29 April 2020).
- [9] <https://www.ilsole24ore.com/art/pil-ecco-come-si-chiude-l-anno-covid-italia-francia-germania-e-spagna-ora-sfida-e-tasso-crescita-2021-AD9LVvAB>
- [10] <https://www.epicentro.iss.it/infettive/>
- [11] <https://www.humanitas.it/news/27211-covid-19-quali-sono-i-tempi-di-incubazione>
- [12] J. M. Dan, J. Mateus, Y. Kato, K. M. Hastie, E. D. Yu, C. E. Faliti, A. Grifoni, S. I. Ramirez, S. Haupt, A. Frazier, C. Nakao, V. Rayaprolu, S. A. Rawlings, B. Peters, F. Krammer, V. Simon, E. Ollmann Saphire, D. M. Smith, D. Weiskopf, A. Sette, S. Crotty, *Immunological memory to SARS-CoV-2 assessed for up to eight months after infection*, <https://www.biorxiv.org/content/10.1101/2020.1.15.383323v2>

- [13] <https://www.gazzettaufficiale.it/eli/gu/2020/02/23/45/sg/pdf>
- [14] Hal L. Smith and Horst R. Thieme. *Dynamical systems and population persistence*, volume 118. American Mathematical Soc., 2011.

A Scenario legislativo

Di seguito è presente un sunto dei decreti più importanti emanati per contrastare la diffusione del Covid 19, il cui testo integrale è reperibile al [link](#).

1. DECRETO LEGGE 23-02-2020 n° 6: sospensione delle manifestazioni o iniziative di qualsiasi natura; chiusura delle scuole di ogni ordine e grado, nonché della frequenza delle attività scolastiche, compresa quella universitaria, salvo le attività formative svolte a distanza; chiusura di ogni istituto e luogo culturale; chiusura di tutte le attività commerciali, esclusi gli esercizi commerciali per l'acquisto dei beni di prima necessità;

25-02-2020: In tutti i comuni delle Regioni Emilia Romagna, Friuli Venezia Giulia, Lombardia, Veneto, Liguria e Piemonte sono sospesi gli eventi e le competizioni sportive di ogni ordine e disciplina, in luoghi pubblici o privati. Resta consentito lo svolgimento dei predetti eventi e competizioni, nonché delle sedute di allenamento, all'interno di impianti sportivi utilizzati a porte chiuse;

08-03-2020 Allo scopo di contrastare e contenere il diffondersi del virus COVID-19 nella regione Lombardia e nelle province di Modena, Parma, Piacenza, Reggio nell'Emilia, Rimini, Pesaro e Urbino, Alessandria, Asti, Novara, Verbano-Cusio-Ossola, Vercelli, Padova, Treviso e Venezia viene adottata l'ulteriore misura: evitare ogni spostamento delle persone fisiche in entrata e in uscita dai territori di cui al presente articolo, nonché all'interno dei medesimi territori, salvo che per gli spostamenti motivati da comprovate esigenze lavorative o situazioni di necessita' ovvero spostamenti per motivi di salute. E' consentito il rientro presso il proprio domicilio, abitazione o residenza;

11-03-2020 Sono sospese le attività dei servizi di ristorazione (fra cui bar, pub, ristoranti, gelaterie, pasticcerie), ad esclusione delle mense e del catering continuativo su base contrattuale, che garantiscono la distanza di sicurezza interpersonale di un metro. Sono sospese le attività inerenti i servizi alla persona (fra cui parrucchieri, barbieri, estetisti);

2. DECRETO DEL PRESIDENTE DEL CONSIGLIO DEI MINISTRI 22-03-2020 - Ulteriori disposizioni attuative del decreto-legge 23-02-2020, n. 6: È fatto divieto a tutte le persone fisiche di trasferirsi o spostarsi, con mezzi di trasporto pubblici o privati, in un comune diverso rispetto a quello in cui attualmente si trovano, salvo che per comprovate esigenze lavorative, di assoluta urgenza ovvero per motivi di salute; conseguentemente all'articolo 1, comma 1, lettera a), del decreto del Presidente del Consiglio dei ministri 8 marzo 2020 le parole «*È consentito il rientro presso il proprio domicilio, abitazione o residenza*» sono sopprese;

25-03-2020 Limitazione della circolazione delle persone, anche prevedendo limitazioni alla possibilità di allontanarsi dalla propria residenza, domicilio o dimora se non per spostamenti individuali limitati nel tempo e nello spazio o motivati da

esigenze lavorative, da situazioni di necessità o urgenza, da motivi di salute o da altre specifiche ragioni; limitazioni o divieto di allontanamento e di ingresso in territori comunali, provinciali o regionali, nonché rispetto al territorio nazionale;

01-04-2020 Obbligo di accedere ai servizi pubblici essenziali, nonché agli esercizi commerciali per l'acquisto di beni di prima necessita' indossando dispositivi di protezione individuale o adottando particolari misure di cautela individuate dal dipartimento di prevenzione dell'azienda sanitaria competente per territorio;

26-04-2020 Sono consentiti solo gli spostamenti motivati da comprovate esigenze lavorative o situazioni di necessita' ovvero per motivi di salute e si considerano necessari gli spostamenti per incontrare congiunti purché venga rispettato il divieto di assembramento e il distanziamento interpersonale di almeno un metro e vengano utilizzate protezioni delle vie respiratorie; in ogni caso, e' fatto divieto a tutte le persone fisiche di trasferirsi o spostarsi, con mezzi di trasporto pubblici o privati, in una regione diversa rispetto a quella in cui attualmente si trovano, salvo che per comprovate esigenze lavorative, di assoluta urgenza ovvero per motivi di salute; e' in ogni caso consentito il rientro presso il proprio domicilio, abitazione o residenza;

3. **DECRETO-LEGGE 16-05-2020, n. 33:** A decorrere dal 18 maggio 2020, cessano di avere effetto tutte le misure limitative della circolazione all'interno del territorio regionale, solo con riferimento a specifiche aree del territorio medesimo interessate da particolare aggravamento della situazione epidemiologica. Fino al 2 giugno 2020 sono vietati gli spostamenti, con mezzi di trasporto pubblici e privati, in una regione diversa rispetto a quella in cui attualmente ci si trova, salvo che per comprovate esigenze lavorative, di assoluta urgenza ovvero per motivi di salute; resta in ogni caso consentito il rientro presso il proprio domicilio, abitazione o residenza. A decorrere dal 3 giugno 2020, gli spostamenti interregionali possono essere limitati solo con provvedimenti adottati ai sensi dell'articolo 2 del decreto-legge n. 19 del 2020, in relazione a specifiche aree del territorio nazionale, secondo principi di adeguatezza e proporzionalità al rischio epidemiologico effettivamente presente in dette aree. Fino al 2 giugno 2020, sono vietati gli spostamenti da e per l'estero, con mezzi di trasporto pubblici e privati, salvo che per comprovate esigenze lavorative, di assoluta urgenza ovvero per motivi di salute o negli ulteriori casi individuati con provvedimenti adottati ai sensi dell'articolo 2 del decreto-legge n. 19 del 2020; A partire dal 11-06-2020 furono poi riaperte, nel rispetto del distanziamento sociale, tutte le principali attività.

4. **DECRETO DEL PRESIDENTE DEL CONSIGLIO DEI MINISTRI 24-10-2020** Ai fini del contenimento della diffusione del virus COVID-19, é fatto obbligo sull'intero territorio nazionale di avere sempre con sè dispositivi di protezione delle vie respiratorie, nonché obbligo di indossarli nei luoghi al chiuso diversi dalle abitazioni private e in tutti i luoghi all'aperto a eccezione dei casi in cui, per le caratteristiche dei luoghi o per le circostanze di fatto, sia garantita in modo continuativo la condizione di isolamento rispetto a persone non conviventi, e comunque con salvaguardia dei protocolli e delle linee guida anti-contagio previsti per le attività economiche, produttive, amministrative e sociali, nonché delle linee guida per il consumo di cibi e bevande, e con esclusione dei predetti obblighi: a) per i soggetti che stanno svolgendo attività sportiva; b) per i bambini di eta' inferiore ai sei anni; c) per i

soggetti con patologie o disabilità incompatibili con l'uso della mascherina, nonché per coloro che per interagire con i predetti versino nella stessa incompatibilità. È fortemente raccomandato l'uso dei dispositivi di protezione delle vie respiratorie anche all'interno delle abitazioni private in presenza di persone non conviventi. È fortemente raccomandato a tutte le persone fisiche di non spostarsi, con mezzi di trasporto pubblici o privati, salvo che per esigenze lavorative, di studio, per motivi di salute, per situazioni di necessità' o per svolgere attività o usufruire di servizi non sospesi. sono sospese le attività dei parchi tematici e di divertimento; sono sospesi gli eventi e le competizioni sportive degli sport individuali e di squadra, svolti in ogni luogo, sia pubblico sia privato; restano consentiti soltanto gli eventi e le competizioni sportive, riconosciuti di interesse nazionale, nei settori professionalistici e dilettantistici; sono sospese le attività di palestre, piscine, centri natatori, centri benessere, centri termali; sono sospese le attività di sale giochi, sale scommesse, sale bingo e casinò; sono sospesi gli spettacoli aperti al pubblico in sale teatrali, sale da concerto, sale cinematografiche e in altri spazi anche all'aperto.

5. DECRETO DEL PRESIDENTE DEL CONSIGLIO DEI MINISTRI 03-11-2020

Suddivisione dell'Italia in 3 zone (rosse, gialle e arancioni) caratterizzate da diversi livelli di gravità le cui misure, all'interno di ogni zona, sono riassunte nella figura 8. L'assegnazione di un livello di gravità piuttosto che un altro a una regione

AREA GIALLA	AREA ARANCIONE	AREA ROSSA
<p>Vietato circolare dalle ore 22 alle ore 5 del mattino, salvo compresi motivi di lavoro, necessità e salute. Raccomandazione di non spostarsi se non per motivi di salute, lavoro, studio, situazioni di necessità.</p> <p>Chiusura dei centri commerciali nei giorni festivi e prefestivi ad eccezione delle farmacie, parafarmacie, punti vendita di generi alimentari, tabaccherie ed edicole al loro interno.</p> <p>Chiusura di musei e mostre.</p> <p>Didattica a distanza per le scuole superiori, fatta eccezione per gli studenti con disabili e in caso di assenza di docenti per le classi di terza media, le scuole elementari e le scuole medie. Chiusure didattiche in presenza per scuole dell'infanzia, scuole elementari e scuole medie. Chiusura didattica, salvo alcuna attività per le matricole e per i laboratori.</p> <p>Riduzione fino al 50% per il trasporto pubblico, ad eccezione dei mezzi di trasporto scolastico.</p> <p>Sospensione di attività di sale giochi, sale scommesse, bingo e slot machine anche nei bar e tabaccherie.</p> <p>Chiusura di bar e ristoranti alle ore 18. L'aperto è consentito fino alle ore 22. Per la consegna a domicilio non ci sono restrizioni.</p> <p>Restano chiuse piscine, palestre, teatri, cinema. Restano aperti i centri sportivi.</p>	<p>Vietato circolare dalle ore 22 alle ore 5 del mattino, salvo compresi motivi di lavoro, necessità e salute. Vietati gli spostamenti in entrata e in uscita da una Regione all'altra e da un Comune all'altro, salvo compresi motivi di lavoro, studio, salute, necessità. Documenti di soggiorno e di permanenza sono validi nel corso della giornata all'interno del proprio Comune.</p> <p>Chiusura di bar e ristoranti, 7 giorni su 7. L'aperto è consentito fino alle ore 22. Per la consegna a domicilio non ci sono restrizioni.</p> <p>Chiusura dei centri commerciali nei giorni festivi e prefestivi ad eccezione delle farmacie, parafarmacie, punti vendita di generi alimentari, tabaccherie ed edicole al loro interno.</p> <p>Chiusura di musei e mostre.</p> <p>Didattica a distanza per le scuole superiori, fatta eccezione per gli studenti con disabili e in caso di assenza di docenti per le classi di terza media, le scuole elementari e le scuole medie. Chiusure didattiche in presenza per scuole dell'infanzia, scuole elementari e scuole medie. Chiusura didattica, salvo alcuna attività per le matricole e per i laboratori.</p> <p>Riduzione fino al 50% per il trasporto pubblico, ad eccezione dei mezzi di trasporto scolastico.</p> <p>Sospensione di attività di sale giochi, sale scommesse, bingo e slot machine anche nei bar e tabaccherie.</p> <p>Restano chiuse piscine, palestre, teatri, cinema. Restano aperti i centri sportivi.</p>	<p>È vietato ogni spostamento, anche all'interno del proprio Comune, in qualsiasi orario, salvo che per motivi di lavoro, necessità e salute: vietati gli spostamenti da una Regione all'altra e da un Comune all'altro.</p> <p>Chiusura di bar e ristoranti, 7 giorni su 7. L'aperto è consentito fino alle ore 22. Per la consegna a domicilio non ci sono restrizioni.</p> <p>Chiusura dei negozi, fatta eccezione per supermercati, beni alimentari e di necessità.</p> <p>Restano aperte edicole, tabaccherie, farmacie e parafarmacie, banche, poste, parrocchie e barbiere. Chiusi i centri estetici.</p> <p>Didattica a distanza per la scuola secondaria di secondo grado, per le classi di terza media, le scuole elementari e la scuola media. Chiusa le università, salvo specifiche eccezioni.</p> <p>Sono sospese tutte le competizioni sportive salvo quelle riconosciute di interesse nazionale dal CONI e CIP. Sono consentite le attività sportive che consentono svolgere attività motoria nel presso della propria abitazione e attività sportiva solo all'aperto in formazione di gruppo.</p> <p>Sono chiusi musei e mostre, chiusi anche teatri, cinema, palestre, attività di sale giochi, sale scommesse, bingo, anche nei bar e nelle tabaccherie. Per i teatri, cinema, palestre e sale giochi è consentito il funzionamento solo fino al 50%, fatta eccezione per i mezzi di trasporto scolastico.</p>

Figura 8: Sintesi delle principali misure adottate nelle varie aree a seconda della gravità. L'iconografica è disponibile al seguente [link](#).

piuttosto viene effettuata sulla base di 21 indicatori da leggere insieme al documento Iss di *Prevenzione e risposta a COVID-19* e stabilita da ordinanze successive reperibili al [link](#), riassunte nella tabella 5.

6. DECRETO LEGGE 18-12-2020

Nei giorni festivi e prefestivi compresi tra il 24 dicembre 2020 e il 6 gennaio 2021 sull'intero territorio nazionale si applicano le misure di cui all'articolo 3 del decreto del Presidente del Consiglio dei ministri 3 dicembre 2020 (ovvero zona rossa); nei giorni 28, 29, 30 dicembre 2020 e 4 gennaio 2021 si applicano le misure di cui all'articolo 2 del medesimo decreto del Presidente del Consiglio dei ministri 3 dicembre 2020 (ovvero zona gialla).

Data ordinanza / Inizio ordinanza	Piemonte	Lombardia	Veneto	Emilia-Romagna	Marche	Toscana
04-11-2020 / 06-11-2020	Red	Red	Yellow	Yellow	Yellow	Yellow
10-11-2020 / 11-11-2020	Red	Red	Yellow	Yellow	Yellow	Orange
13-11-2020 / 15-11-2020	Red	Red	Yellow	Orange	Orange	Red
27-11-2020 / 29-11-2020	Orange	Orange	Yellow	Orange	Orange	Red
05-12-2020 / 06-12-2020	Orange	Orange	Yellow	Yellow	Yellow	Orange
11-12-2020 / 13-12-2020	Yellow	Yellow	Yellow	Yellow	Yellow	Orange

Tabella 5: Assegnazione del livello di gravità alle 6 regioni di interesse con le varie ordinanze relative al periodo compreso tra il 04-11-2020 e il 23-12-2020.