

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Triennale in
Ingegneria Gestionale

Tesi di Laurea Triennale

**Turnazione del personale medico in reparto
ospedaliero: la gestione dei turni di guardia e
reperibilità nel reparto di Cardiologia
dell'ospedale Molinette di Torino.**



Relatore
prof. Federico Della Croce

Candidato
Giovanni Cioffi

Anno Accademico 2018-2019

Indice

| | |
|---|-----------|
| 0. Introduzione..... | 2 |
| 1. Il caso del reparto di cardiologia dell’Ospedale Molinette | 3 |
| 1.1 Il sistema di vincoli..... | 5 |
| 1.1.1 Vincoli inviolabili..... | 5 |
| 1.1.2 Vincoli violabili..... | 7 |
| 2. La Ricerca Operativa come strumento di risoluzione | 9 |
| di problemi di Timetabling | |
| 2.1 Cenni di programmazione lineare e ottimizzazione combinatoria..... | 9 |
| 2.2 Il metodo Branch and Bound..... | 11 |
| 3. Dal problema reale al modello di programmazione lineare | 14 |
| 3.1 Scelta del modello temporale..... | 14 |
| 3.2 Scelta delle variabili principali..... | 15 |
| 3.3 Scelta delle strutture dati e delle costanti..... | 16 |
| 3.4 Variabili violazione e funzione obiettivo..... | 17 |
| 4. Conversione dei vincoli in linguaggio matematico | 19 |
| 4.1 Conversione dei vincoli inviolabili..... | 19 |
| 4.2 Conversione dei vincoli violabili..... | 25 |
| 5. Analisi delle soluzioni e conclusione | 30 |
| 5.1 Analisi delle soluzioni..... | 30 |
| 5.2 Conclusione..... | 31 |
| Bibliografia | 32 |

Introduzione

I turni del personale medico di un reparto ospedaliero, anche se con diverse modalità dipendenti dalle dimensioni dei reparti, dalle unità operative e dalle specifiche esigenze delle diverse strutture, sono organizzati in funzione delle guardie e delle reperibilità. Per quanto riguarda i turni di guardia, tipicamente diurne e notturne, si prevede la presenza del personale nella struttura; mentre per i turni di reperibilità va garantita la disponibilità del medico in relazione alle eventuali richieste di servizio, ma non necessariamente la presenza “fisica” all’interno del reparto.

Nelle diverse strutture, possono chiaramente esistere diversi schemi organizzativi, ma l’elemento comune alla maggior parte dei reparti di medici nella loro organizzazione dei turni sta proprio in questa necessità di coprire prima di tutto le guardie e le reperibilità. A questi servizi “primari” vengono poi associati gli altri servizi che i medici devono fornire nei diversi reparti, quali per esempio: attività ambulatoriali, di sala operatoria, di ricerca, di assistenza.

Nella maggior parte dei casi, i turni vengono gestiti con fogli di Excel^[6] dove, una volta definiti vincoli e limitazioni di risorse, vengono poi inserite manualmente le diverse assegnazioni di copertura dei turni a ciascun medico della struttura. Si parte solitamente dalla necessità di coprire i servizi essenziali che sono rappresentati dalle guardie e dalle reperibilità occupandosi poi degli altri servizi da assegnare. Nella compilazione di questi fogli, il medico responsabile si trova quindi di fronte alla necessità di dover coprire i diversi turni con le risorse disponibili cercando di trovare la sintesi tra esigenze di servizio, esigenze contrattuali, di specializzazione ed infine anche di tipo personale.

Spesso i turni dei medici, a differenza di quelli degli infermieri^[6], tendono ad essere abbastanza “partecipativi”: vengono organizzati in un modo meno gerarchico tenendo conto delle particolari capacità, necessità, disponibilità dei singoli professionisti. Nella pratica il responsabile della gestione e stesura dei turni, parte da un foglio vuoto dove comincia ad inserire le diverse richieste degli operatori legate a ferie, permessi, congressi, ed altre tipologie di limitazioni e prosegue poi nella stesura dei turni cercando di coprire prima le guardie e poi tutti gli altri servizi.

Il responsabile deve tenere presente tutta una serie di aspetti quali: le competenze, le disponibilità, i vincoli di legge, i vincoli organizzativi specifici della struttura, le caratteristiche dei diversi operatori e anche a volte le “incompatibilità” fra gli stessi. Questo lavoro risulta quindi particolarmente oneroso soprattutto se svolto “manualmente”. Inoltre, occorre avere “memoria” del passato e quindi, nella stesura dei fogli, oltre agli aspetti legati alla fine del mese precedente per l’inizio di quello corrente, bisogna tener conto dello storico delle assegnazioni dei turni per evitare disparità di trattamento che spesso possono portare ad un clima poco sereno all’interno del reparto.

Per tutte queste ragioni, le soluzioni software che “aiutano” l’attività di programmazione e gestione dei turni risultano particolarmente utili, se non indispensabili in alcuni casi se utili a supportare l’attività del responsabile della gestione dei turni ottimizzando l’output e garantendo risparmio di tempo.

1. Il caso del reparto di cardiologia dell'ospedale San Giovanni Molinette di Torino

Per lo sviluppo di questa tesi, è stato preso in esame il caso del reparto di Cardiologia dell'ospedale "San Giovanni Molinette" di Torino (TO). Nel reparto, suddiviso su due piani differenti della struttura ospedaliera torinese, piano terra e terzo piano, lavorano 36 medici. La gestione dei turni è affidata ad un medico incaricato, la dottoressa Marcella Jorfida che, in base ad esigenze contrattuali, logistiche, operative e personali, si prende cura di effettuare la stesura degli stessi con un orizzonte quadrimestrale.

Per comprendere a pieno il caso bisogna, innanzitutto, fare una distinzione tra "turno di guardia" e "turno di reperibilità": mentre il primo consiste in 12 ore lavorative effettuate in ospedale in uno dei due piani del reparto, il secondo è uno stato in cui il medico è in allerta per tutto il giorno per far fronte ad eventuali esigenze di servizio e non necessariamente deve essere presente in ospedale.

Esistono tre diversi tipi di reperibilità in base alla specializzazione: emodinamica (EMO), ecografia (ECO), centro traumatologico ortopedico (CTO). Ogni medico dei 36 totali, ha una determinata specializzazione in base alle sue capacità e quindi è in grado di svolgere o meno un determinato tipo di reperibilità.

Ogni giorno, considerando turni di guardia e reperibilità con eccezioni che saranno analizzate in seguito, sono da "riempire" i seguenti 7 turni in totale, di cui 4 turni di guardia e 3 di reperibilità (come mostrato nella tabella 1).

- Guardia del pomeriggio al piano terra coperta dal medico AAA
- Guardia del pomeriggio al terzo piano coperta dal medico BBB
- Guardia della notte al piano terra coperta dal medico CCC
- Guardia della notte al terzo piano coperta dal medico CCC
- Reperibilità ECO coperta dal medico CTO
- Reperibilità EMO coperta dal medico ECO
- Reperibilità CTO coperta dal medico EMO

| Schema generale di un qualsiasi giorno lavorativo | | | | | | | |
|---|-------------|-------------|-------------|-------------|--------------|-----|-----|
| | GIORNO | | NOTTE | | REPERIBILITA | | |
| | piano terra | terzo piano | piano terra | terzo piano | CTO | ECO | EMO |
| lun | AAA | BBB | CCC | DDD | CTO | ECO | EMO |

Tabella 1. Schema generale giorno lavorativo

Ad ogni tipo di reperibilità è stato associato un colore che agevolerà la comprensione dei vincoli più avanti. Si noti, inoltre, che nel corso di tutto l'elaborato si parlerà di "giorno" o "pomeriggio" senza alcuna distinzione, i due termini avranno lo stesso significato in quanto i turni sono di 12h ciascuno.

Un'altra fondamentale distinzione da fare è quella tra “turni infrasettimanali” e “turni effettuati durante il weekend”. Sebbene la gestione dei primi influenzi per alcuni aspetti quella dei secondi e viceversa, essi vengono considerati separatamente, in quanto presentano caratteristiche peculiari e vincoli differenti sia per quanto riguarda le guardie, sia per quanto riguarda le reperibilità. Analizzeremo nel dettaglio queste differenze più avanti, ponendo l'attenzione maggiormente sui vincoli riguardanti i weekend rispetto a quelli riguardanti gli infrasettimanali. La realizzazione dei turni viene svolta dal responsabile tramite l'ausilio di un foglio Excel, utilizzato come una specie di calendario nel quale per ogni giorno della settimana sono presenti sette caselle differenti: quattro per le guardie e tre per le reperibilità (come mostrato nella tabella 1). Per quanto riguarda le guardie, ogni casella corrisponde ad un turno effettuato di giorno o di notte su un determinato piano del reparto da un certo dottore. Per quanto riguarda le reperibilità, una casella equivale a un turno relativo a una certa specializzazione effettuato in quel giorno da un determinato dottore.

Il file Excel viene “riempito” dal dottore incaricato inserendo “manualmente” il cognome di un dottore come suo identificativo nella casella del turno a cui è stato assegnato. Nel riempimento delle caselle viene data precedenza a guardie e reperibilità dei weekend perché la loro stesura risulta più delicata e prioritaria rispetto agli infrasettimanali. I turni festivi vanno spalmati con la massima omogeneità possibile perché nessun medico vorrebbe ritrovarsi a lavorare in più giorni festivi rispetto ad un altro. Una volta completati i turni del weekend si procede ad inserire quelli infrasettimanali, nei quali c'è più flessibilità.

1.1 Il sistema di vincoli

Il modello tiene conto di un sistema di vincoli che può essere suddiviso in due categorie: vincoli contrattuali, ossia quelli inviolabili per contratto o, comunque, per esigenze inderogabili e vincoli operativi, ossia vincoli non stringenti che potrebbero essere violati in alcuni casi. Ciascun vincolo appartenente alle due categorie sarà descritto nei paragrafi seguenti.

1.1.1 I vincoli inviolabili

- **Vincolo di assegnazione di ciascun turno a un solo dottore.** In un determinato turno di guardia (giorno o notte) su un determinato piano (piano terra o terzo piano del reparto) può lavorare uno ed un solo medico. Ciò vale anche per ciascun turno di reperibilità preso singolarmente per tipo (CTO, ECO, EMO), che, in un qualunque giorno di qualsiasi settimana, è coperto da uno ed un solo dottore.
- **Vincolo del rispetto della “scacchiera” per i weekend.** Per semplicità, la realizzazione dei turni per i weekend (venerdì, sabato e domenica) si basa uno schema a “scacchiera”, mostrato nella tabella 2. Le lettere A, B, C, D, E rappresentano ognuna un turno di guardia da 12 ore effettuato da un singolo dottore. Ogni turno rappresentato da una lettera nella scacchiera verrà ripetuto due volte nel corso del fine settimana, ciò vuol dire che il medico associato a quel turno lavorerà 24 ore nello stesso weekend. CTO, ECO ed EMO si riferiscono chiaramente ai turni di reperibilità. Il medico reperibile per ECO (di colore azzurro nella tabella 2) lavora anche il sabato notte al terzo piano ed effettua il turno di guardia del giorno del venerdì, il quale però sarà valutato come turno infrasettimanale. Nel weekend, una determinata reperibilità viene svolta dallo stesso medico il venerdì, il sabato e la domenica (come evidenziato dalle colonne gialla, azzurra e rossa della tabella 2).

| Schema a scacchiera dei weekend | | | | | | | |
|---------------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|--------------|-----|-----|
| | GIORNO | | NOTTE | | REPERIBILITA | | |
| | piano terra | terzo piano | piano terra | terzo piano | CTO | ECO | EMO |
| ven | E | ECO infra | A | B | CTO | ECO | EMO |
| sab | C | D | E | ECO | CTO | ECO | EMO |
| dom | A | B | C | D | CTO | ECO | EMO |

Tabella 2. Schema a scacchiera dei weekend

- **Vincolo della copertura di ciascun turno nei weekend** deve essere obbligatoriamente garantita la presenza di 7 medici differenti al giorno: 4 medici di guardia in reparto (2 per il pomeriggio, 2 per la notte suddivisi nei due piani della struttura) e 3 medici in reperibilità. Ciascuno dei tre medici reperibili svolge una reperibilità tra CTO, ECO, EMO in base alla sua specializzazione. Nei weekend una determinata reperibilità è svolta dalla stessa persona.

- **Vincolo della copertura di ciascun turno nei giorni infrasettimanali.** In ciascun giorno feriale deve essere obbligatoriamente garantita la presenza di 6 medici differenti, 4 medici di guardia in reparto (2 per il pomeriggio, 2 per la notte suddivisi nei due piani della struttura) e 2 medici in reperibilità di cui uno reperibile sia per CTO sia per ECO e un altro per EMO. Quindi, le reperibilità CTO ed ECO sono svolte dallo stesso medico nei giorni infrasettimanali.
- **Vincolo del riposo di 24 ore dopo ogni turno di lavoro effettuato:** è obbligatorio per contratto che ogni medico riposi almeno 24 ore dopo aver effettuato un turno di guardia di 12 ore. Quindi, non sono possibili, in alcun modo, le seguenti situazioni:
 - 1) Lavorare il giorno dopo aver fatto una notte, sia di pomeriggio che di notte
 - 2) Lavorare la notte di un determinato giorno se si è lavorato il pomeriggio dello stesso
 - 3) Lavorare di pomeriggio per due giorni consecutivi
- **Vincoli di ubicazione sia per weekend sia per infrasettimanali.** Alcuni medici possono lavorare soltanto al piano terra del reparto, altri invece, possono lavorare soltanto al terzo piano. Il resto dei medici può essere impiegabile in entrambi i piani del reparto di cardiologia dell'ospedale.
- **Vincolo del rispetto delle specializzazioni reperibilità e dei ruoli di guardia nei weekend.** Come mostrato nella tabella 3, soltanto alcuni medici possono svolgere determinati tipi di guardia nel weekend (A, B, C, D, E) e determinati tipi di reperibilità. Per ciascuna colonna è indicato il tipo di turno e sono elencati gli unici medici che possono effettuarli.

| Specializzazioni reperibilità e ruoli di guardia nei weekend | | | | | |
|--|------------------------|--------------------|-----------|-----|----------|
| ECO - A B C D E | ECO CTO - A B C D E | EMO - A B C D E | A B C D E | E | Solo CTO |
| GRO | DEL | CON | TOS | MIL | PED |
| ALU | CIA | MON | BUD | USM | RIC |
| GIO | MOT | OME | FER | GIU | CAR |
| FAV | JOR | SCA | ANS | GRI | |
| GIR | BEN | PEN | CAS | | |
| FRE | AND | DAS | GOL | | |
| CHE | IMA | DAM | | | |
| MUS | GAR | | | | |

Tabella 3. Specializzazioni reperibilità e ruoli di guardia nei weekend

- **Vincolo del rispetto delle specializzazioni per reperibilità infrasettimanali.** Nei turni infrasettimanali, le specializzazioni per la reperibilità subiscono leggere variazioni rispetto a quelle dei turni del weekend.
- **Vincolo compresenza di medici dello stesso sottogruppo in una notte.** I 36 medici del reparto sono divisi in tre gruppi: emodinamisti, EF e Reparto. Preso un giorno, i due turni notturni di quel giorno non possono essere entrambi coperti da medici appartenenti a uno stesso gruppo.

- **Vincolo del rispetto delle assenze concordate, ferie e congressi.** In accordo con il responsabile della gestione dei turni del reparto, ogni medico comunica i suoi giorni di assenza precedentemente alla stesura dei turni, cioè dei giorni in cui non sarà disponibile per ferie personali o per partecipazione a congressi. Il rispetto delle ferie concordate è obbligatorio.
- **Vincolo del numero di festivi uguali per tutti.** Ogni medico deve effettuare lo stesso numero di turni festivi. Fare un turno festivo equivale a:
 - lavorare in uno qualsiasi dei weekend come turno A, B, C, D, E
 - essere reperibile in uno qualsiasi dei weekend, escluso il venerdì giorno al terzo piano (che configura come infrasettimanale)
 - lavorare il giorno 24 giugno, festa patronale di Torino
 - lavorare il giorno di Ferragosto e nei giorni di ponte ad esso relativi, cioè il mercoledì precedente (con riferimento all'anno in corso 2019)

Nel caso in cui qualche medico faccia un numero di festivi maggiore, questo verrà annotato e considerato come avanzo da impiegare nel quadrimestre successivo. a determinati dottori, fissandoli nel mese di giugno.

- **Vincolo di assegnazione turni avanzati nel quadrimestre precedente nel mese di giugno.** Ciascun modello quadrimestrale deve tener conto dei turni avanzati nel quadrimestre precedente per rendere omogenea la ripartizione. È stato richiesto di assegnare determinati turni, cioè gli avanzzi sia di guardia sia di reperibilità relativi al precedente modello Gennaio-Maggio 2019.
- **Vincolo dei turni già assegnati (turni in input).** Alcuni turni sia di guardia che di reperibilità sono già stati concordati a priori, quindi è stato forzato il loro inserimento in accordo con il responsabile. Si tratta, in particolare, dei turni relativi ai periodi in prossimità delle festività di San Giovanni e di Ferragosto.

1.1.2 I vincoli operativi

- **Weekend consecutivi.** Presi tre fine settimana consecutivi, ciascun medico non dovrebbe lavorare in più di un weekend sia di guardia sia in reperibilità. In altri termini, se un medico lavora in un turno di guardia o reperibilità di venerdì, sabato o domenica di una certa settimana, non dovrebbe essere di turno nei due weekend successivi e neanche nei due weekend precedenti del modello.
- **Allineamento pomeriggi notte per le guardie.** Ad ogni medico, nel modello finale, dovrebbe essere assegnato un numero totale di turni di guardia notturna da effettuare che non si differenzi molto dal numero di pomeriggi di guardia, cioè ci deve essere equilibrio tra pomeriggi e notti.
- **Reperibilità il giorno dopo aver lavorato di notte.** Se un dottore lavorasse in un turno di notte, il giorno dopo non dovrebbe essere reperibile. Questo vincolo è molto somigliante al vincolo contrattuale

del riposo di 24 ore descritto precedentemente, ma riguarda solo i turni di reperibilità e inoltre potrebbe essere violato.

- **Allineamento alla media per i turni di guardia infrasettimanali.** I medici sono divisi in gruppi che si caratterizzano per l'anzianità d'impiego. Ad ogni gruppo è associata una media di turni di guardia infrasettimanale totali da effettuare nel corso del quadrimestre, concordata con il responsabile dei turni. Il numero totale di guardie effettuate nei turni infrasettimanali non dovrebbe distaccarsi troppo dalla media del gruppo di appartenenza.
- **Allineamento alla media per le reperibilità infrasettimanali.** Ogni dottore dovrebbe effettuare in totale un numero di turni di reperibilità infrasettimanali vicini al valore medio concordato con il responsabile dei turni. I dottori sono divisi in due gruppi aventi una media differente.
- **Limite turni di reperibilità in una settimana per ruolo.** In una qualsiasi settimana un dottore non potrebbe coprire più di tre giorni di reperibilità infrasettimanali di un certo tipo, cioè non può essere reperibile per più di tre giorni diversi.
- **Reperibilità consecutive.** Negli infrasettimanali, un medico non potrebbe essere reperibile per giorni consecutivi. Se un medico fosse reperibile un certo giorno, non dovrebbe essere reperibile né in quello precedente né in quello successivo.
- **Numero di infrasettimanali a settimana.** Un dottore dovrebbe lavorare soltanto in un turno infrasettimanale di guardia a settimana.
- **Rispetto dei desiderata.** Prima della realizzazione del modello quadrimestrale, i medici possono comunicare delle preferenze per il tipo di turno di guardia che non vorrebbero effettuare in un determinato giorno:
 - *p*: “desidero non essere di guardia il pomeriggio”
 - *n*: “desidero non essere di guardia la notte”
 - *g*: “desidero non essere di guardia né il pomeriggio né la notte”

I desideri dei medici dovrebbero essere rispettati, ma rappresentano un vincolo violabile.

2. La Ricerca Operativa come strumento di risoluzione di problemi di Timetabling

Risulta evidente che, realizzare un modello costruito manualmente che rispetti inviolabili vincoli contrattuali e sia in grado di conciliare esigenze operative e preferenze personali, diventa un lavoro oneroso che rischia inevitabilmente di non soddisfare le esigenze personali di tutti i medici del reparto.

Questo lavoro di tesi, quindi, risponde al bisogno trovare una soluzione che ottimizzi e renda il processo di realizzazione dei turni più snello e meno time-consuming, attraverso gli strumenti offerti dalla Ricerca Operativa e da un solver di problemi di programmazione lineare. Verranno descritti: la realizzazione del modello di programmazione lineare intera basato sul caso reale sopra descritto e la successiva ricerca e visualizzazione della soluzione ottima del problema. Quest'ultima è stata ottenuta attraverso l'utilizzo di XPress, un software in grado di trovare la soluzione ottima di problemi di programmazione lineare tradotti in linguaggi di programmazione matematica. Perciò, per ottenere la soluzione migliore per i turni del reparto di Cardiologia dell'Ospedale Molinette, il modello è stato prima ideato concettualmente, poi trascritto su carta e, successivamente, tradotto in linguaggio Mosel per renderlo comprensibile ad XPress.

Il lavoro di tesi è stato svolto in collaborazione dal sottoscritto e da un'altra studentessa del corso di Laurea in Ingegneria Gestionale del Politecnico di Torino, Irene Benedetto. Questo ha richiesto un periodico confronto del sottoscritto e della collega sia con la dottoressa Marcella Jorfida, responsabile della realizzazione e gestione dei turni del reparto di Cardiologia dell'Ospedale Molinette per la definizione del problema e la raccolta di tutti i vincoli del problema, sia con il relatore Federico Della Croce per la realizzazione del modello matematico e l'analisi delle soluzioni ottenute.

Prima di descrivere tutte le fasi del lavoro di tesi, verranno presentati brevemente la programmazione lineare, l'ottimizzazione combinatoria e il metodo Branch & Bound.

2.1 Cenni di programmazione lineare e ottimizzazione combinatoria

Il problema di scheduling presentato, nel quale si pone l'obiettivo di ottimizzare la turnazione del personale medico in base a diversi tipi di limitazioni, rientra nella categoria di quelli che sono detti problemi di Nurse Rostering e in quella più ampia dei problemi di Timetabling^[2], anche se in questo caso la turnazione riguarda medici, non infermieri. Questo tipo di problemi ben si prestano ad essere modellati come problemi di programmazione matematica. In particolare, quello sopra presentato può essere modellato come problema di programmazione lineare intera, in cui le variabili assumono, appunto valori interi. Esso consiste principalmente in:

- **Una funzione obiettivo**, ossia un'espressione lineare dipendente da variabili intere, da massimizzare o minimizzare. Questa rappresenta, in termini matematici, lo scopo che si vuole raggiungere formulando

il modello il quale può essere, ad esempio, minimizzare un'espressione che rappresenti i costi o massimizzare un'espressione che rappresenti i profitti.

- **Un sistema di vincoli** a cui deve sottostare il modello, i quali rappresentano geometricamente la regione di ammissibilità del problema. I vincoli sono espressi attraverso equazioni e disequazioni lineari di primo grado che le incognite del problema devono rispettare.

Un qualsiasi modello di programmazione lineare intera (si assuma che vincoli e funzione obiettivo siano lineari) si può rappresentare nel modo seguente: ^[1]

$$\min (\max) f(x_1, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_jx_j + \dots + c_nx_n$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} b_1$$

.....

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} b_i$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} b_m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

- $x_1, \dots, x_j, \dots, x_n$ variabili decisionali, nel caso della programmazione lineare intera booleana, sono variabili binarie, cioè $x_j \in \{0,1\}$.
- $c_1, \dots, c_j, \dots, c_n$ coefficienti di costo (nel caso di *min*) o di profitto (nel caso di *max*) della funzione obiettivo.
- $b_1, \dots, b_j, \dots, b_n$ termini noti del sistema dei vincoli.
- $a_1, \dots, a_j, \dots, a_n$ coefficienti del sistema dei vincoli.

Per studiare problemi di programmazione lineare intera si fa ricorso all'Ottimizzazione Combinatoria (OC), essa si occupa problemi di ottimizzazione la cui caratteristica principale è quella di avere insiemi di ammissibilità discreti. Un'istanza di un problema di ottimizzazione è rappresentata da una coppia ($f : \mathbf{A}$) dove

\mathbf{A} : insieme che rappresenta la regione ammissibile del problema

f : funzione definita su \mathbf{A} che assume valori reali:

$$f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{R}$$

detta funzione obiettivo del problema. Lo scopo di un problema di ottimizzazione è determinare un elemento $x^* \in \mathbf{R}$ tale che, se il problema è di minimo,

$$s(x^*) \leq s(y) \quad \forall y \in A$$

altrimenti, se il problema è di massimo

$$s(x^*) \geq s(y) \quad \forall y \in A$$

Sia che il problema sia di massimo, sia di minimo, x^* è detto ottimo globale del problema. Uno dei metodi più utilizzati per la risoluzione di problemi di ottimizzazione combinatoria e, quindi, dei problemi di programmazione lineare intera è l'algoritmo di Branch and Bound.

2.2 Il metodo Branch and Bound

Introdotta da H.Land e A.G. Doig agli inizi degli anni '60^[1] il Branch and Bound è un metodo per la risoluzione di problemi di ottimizzazione combinatoria. L'algoritmo si basa sull'eliminazione di interi sottoinsiemi di soluzioni ammissibili del problema generale, in modo tale da ottenere sottoproblemi di più semplice risoluzione. Si dice che il Branch and Bound è un algoritmo di *enumerazione implicita*^[1], perché considera tutte le soluzioni possibili del problema fino a trovare quella ottima, scartandone alcune che non potranno mai condurre all'ottimo cercato. Si può immaginare il metodo con una struttura ad albero che tiene traccia della enumerazione e utilizza la *bounding procedure*^[1], ossia scarta alcune soluzioni dimostrando a priori la loro non ottimalità. Ciò semplifica la ricerca dell'ottimo perché evita l'enumerazione esplicita di tutte le soluzioni del problema. Per comprendere meglio il metodo, si consideri il seguente problema P_0 di PLI

$$\begin{aligned} \min \bar{c}^T \bar{x} \\ A\bar{x} &= \bar{b} \\ \bar{x} &\geq \bar{0}, \quad \text{intero} \end{aligned}$$

A questo punto si effettua un rilassamento di P_0 , cioè si ignorano uno o più vincoli del problema. Ad esempio, si può applicare rilassare il vincolo di interezza delle variabili ottenendo il problema lineare a variabili continue PL_0 . Il valore della soluzione di PL_0 sarà sicuramente minore o uguale al valore della funzione obiettivo ottima del problema P_0 , dato che lo spazio delle soluzioni ammissibili di P_0 è un sottoinsieme dello spazio delle soluzioni ammissibili di PL_0 . Risolvendo all'ottimo il problema rilassato PL_0 , sia \bar{x}^* una soluzione ottima di PL_0 . A questo punto,

- **Se \bar{x}^* è intera**, è stata trovata una soluzione ottima del problema P_0 , quindi non è necessario procedere ulteriormente
- **Se \bar{x}^* non è intera**, si sceglie una variabile frazionaria \bar{x}_h^* e si costruiscono due sottoproblemi:

| | |
|--|--|
| $\begin{aligned} \min \bar{c}^T \bar{x} \\ A\bar{x} &= \bar{b} \\ \bar{x} &\geq \bar{0}, \text{ intero e } x_h \leq [x_h^*] \end{aligned}$ | $\begin{aligned} \min \bar{c}^T \bar{x} \\ A\bar{x} &= \bar{b} \\ \bar{x} &\geq \bar{0}, \text{ intero e } x_h \geq [x_h^*] \end{aligned}$ |
|--|--|

Tabella 4. Operazione di branch

Questa operazione è detta branch, il problema P_0 è stato diviso in due sottoproblemi detti “figli” P_1 e P_2 come mostrato nella tabella 4. Ciò vale a dire che l’insieme delle soluzioni ammissibili del problema padre è stato partizionato in due sottoinsiemi associati ai due figli, generati attraverso l’introduzione del vincolo su x_h , la quale è detta variabile di branch.

A questo punto, si procede alla soluzione di ciascuno dei due problemi figli applicando lo stesso procedimento visto per il padre: si risolve il rilassamento continuo e, nel caso fosse necessario, si effettua un nuovo branch. In questo modo si tende ad ottenere una successione gerarchica di sottoproblemi via via più vincolati e quindi più semplici da risolvere perché ogni vincolo introdotto riduce lo spazio delle soluzioni ammissibili. Il processo termina quando non esistono nodi su cui effettuare l’operazione di branch.

Completare semplicemente l’albero dei branch non è sufficiente, perché si limita a enumerare tutte le possibili soluzioni ammissibili del problema. Esistono, infatti, tre criteri, detti di fathoming^[1] (cioè potatura), che permettono, in fase di costruzione dell’albero di ricerca, di stabilire se un nodo corrente debba essere chiuso oppure no. Chiudere un nodo, ovviamente equivale ad impedire che l’ulteriore sviluppo di un sottoalbero avente il nodo corrente come nodo radice. In seguito, sono elencati i tre criteri di fathoming (si ricordi che LB sta per “lower bound” e UB sta per “upper bound”):

1. **Soluzione inammissibile:** il nodo t in questione può essere chiuso perché i vincoli di branch, relativi al percorso che dal nodo radice conduce al nodo t , risultano essere incompatibili con i vincoli iniziali $A\bar{x} = \bar{b}$ e $\bar{x} \geq \bar{0}$. Non c’è quindi soluzione ammissibile per il problema rilassato.
2. **Soluzione intera:** si consideri \bar{x}_t^* soluzione ottima intera del problema P_t al nodo t corrente e sia LB_t il costo di questa soluzione ($LB_t = \bar{c}^T \bar{x}_t^*$). Considerando $UB^* = \bar{c}^T \cdot \bar{x}_{OPT}$, con \bar{x}_{OPT} migliore soluzione intera fin qui trovata, se risulta che $LB_t < UB^*$ (considerando un problema generale di minimo), allora si può aggiornare UB^* con LB_t e \bar{x}_{OPT} con \bar{x}_t^* e il nodo t può essere chiuso.
3. **Assenza di soluzione migliorante:** il problema rilassato al nodo t (detto PR_t) possiede una soluzione ottima \bar{x}_t^* che risulta essere non intera e di costo LB_t . Tuttavia, il valore LB_t risulta essere una stima ottimistica (il lower bound) della miglior soluzione intera che potrà essere trovata a partire dal nodo t . Quindi, qualunque figlio del nodo t sarà caratterizzato da un lower bound maggiore o uguale a LB_t . Se $LB_t \geq UB^*$, questo nodo non potrà generare nessuna soluzione ammissibile di valore inferiore a UB^* e quindi il nodo può essere chiuso.

Esistono diversi criteri per decidere in che modo sviluppare l'albero di ricerca, cioè metodi per scegliere se analizzare un sottoproblema tra quelli ancora non esaminati rispetto ad un altro. I più utilizzati sono:

- **Metodo Depth First:** l'albero di ricerca viene espanso in profondità, quindi viene selezionato il nodo di livello più alto. Supponiamo di essere giunti, all'ultima iterazione effettuata, al generico nodo m : se il nodo in questione non è chiuso verrà considerato il primo dei suoi figli, altrimenti si torna indietro finché non si incontrerà un nodo che abbia un figlio che non sia ancora stato visitato. Ciò permette di avere un minor numero di sottoproblemi aperti e quindi di ridurre lo spazio occupato in memoria;
- **Metodo Best First:** l'albero di ricerca viene espanso in qualità, quindi viene selezionato il nodo più promettente andando a scegliere il nodo con il più basso valore di lower bound (essendo un problema di minimo). In questo modo si tende a minimizzare il numero di nodi da esplorare, anche se viene incrementato il numero dei sottoproblemi aperti, causando un aumento dello spazio in memoria occupato.

3. Dal problema reale al modello di programmazione lineare

Il problema di scheduling riguardante la realizzazione dei turni del personale medico dell'Ospedale Molinette può essere modellato come un problema programmazione lineare intera. Il problema è limitato principalmente da tutti i vincoli contrattuali e temporali dei medici (vincoli inviolabili al 100%). L'obiettivo da raggiungere è minimizzare la violazione dei vincoli operativi, ossia quelli che è possibile rilassare per rendere il problema ammissibile limitandone il più possibile la violazione.

Per la conversione dell'obiettivo e dei vincoli, violabili e non, in linguaggio di programmazione matematica, è stato scelto il linguaggio Mosel. Il calcolo della soluzione ottima del modello, invece, è stato affidato ad un solver di programmazione lineare, XPress, la cui licenza è stata resa disponibile dal Politecnico di Torino. Il modello è stato implementato sul software ed è stato possibile ottenere una stampa del calendario quadrimestrale con le assegnazioni a ciascun medico dei turni generati (più simile possibile a quella precedentemente utilizzata attraverso fogli Excel).

Una serie di incontri con il responsabile della gestione dei turni del reparto è stata necessaria per acquisire tutte le informazioni possibili relative alle caratteristiche del modello e dei suoi vincoli, in modo da trasferire una problematica reale in un modello matematico, ossia prima in un problema di PLI scritto su carta e, successivamente in codice Mosel. Dopo aver ottenuto tutti i dati e compreso in base a quali logiche i turni venivano realizzati a mano, è iniziata la realizzazione del modello vero e proprio; le fasi cruciali dell'impostazione del problema sono state:

- Scelta del modello temporale
- La scelta del tipo di variabili per la costruzione dei vincoli
- La scelta del tipo di variabili per la costruzione della funzione obiettivo e definizione dei pesi da assegnare alle diverse violazioni
- Scelta delle strutture dati e delle costanti
- Conversione dei vincoli contrattuali e operativi in linguaggio matematico e poi in codice Mosel
- Analisi dei risultati

3.1 Scelta del modello temporale

Per quanto riguarda il fattore tempo, il modello temporale scelto è stato la suddivisione del quadrimestre in settimane di 7 giorni ciascuna, dalla settimana 0 alla settimana 18. Questa scelta permette di associare facilmente i diversi giorni di una determinata settimana a degli interi (lunedì = giorno 1, martedì = giorno 2 etc.). Dato che il modello riguarda il quadrimestre giugno-settembre 2019, la finestra temporale di interesse parte dal giorno 5 della settimana 0, ossia da sabato 1-giugno-2019 e termina il giorno 1 della settimana 18, cioè il giorno 31-settembre-2019.

E', inoltre, importante sottolineare che, nel corso di tutta lo sviluppo del modello, considereremo infrasettimanali e weekend come mostrato nella tabella 5:

| | |
|---|--|
| INFRASETTIMANALE (GIORNO FERIALE) | Lunedì (giorno 1), Martedì (giorno 2), Mercoledì (giorno 3), Giovedì (giorno 4) |
| WEEKEND (GIORNO FESTIVO) | Venerdì (giorno 5), Sabato (giorno 6), Domenica (giorno 7) |

Tabella 5. Modello di una settimana w

L'unica eccezione sarà fatta per il turno del venerdì pomeriggio al terzo piano, che sarà considerato turno infrasettimanale anziché festivo. Il modello giugno-settembre realizzando tiene conto di due festività extra:

- 1) La festa patronale di Torino di lunedì 24/06 (giorno 1 della settimana 4) per il quale sarà considerato festivo tutto il venerdì precedente (senza l'eccezione del venerdì pomeriggio al terzo piano).
- 2) Ferragosto, ovvero giovedì 15/08 (giorno 4 della settimana 11), per il quale si considera festivo anche il giorno precedente e tutto il venerdì successivo, compreso il turno del venerdì pomeriggio al terzo piano (considerato feriale nel resto dei casi).

3.2 Scelta delle variabili principali

Le variabili che meglio si prestano al caso studiato sono booleane, cioè variabili che possono assumere valore 0 oppure 1. Sono stati scelti due tipi diversi di variabili booleane, in modo tale da considerare separatamente i turni di guardia e i turni di reperibilità:

$$\text{guardia}_{d,t,p,w,g} \in \{0,1\}$$

$$\text{repe}_{d,r,w,g} \in \{0,1\}$$

Le variabili *guardia* dipendono dal dottore, dal momento della giornata in cui si lavora, dal piano nel quale è effettuato il turno, dalla settimana e dal giorno lavorativo. Anche le variabili *repe* dipendono dal dottore, dalla settimana e dal giorno in cui quest'ultimo lavora, però, non sono influenzate dal piano (dato che la reperibilità non richiede la presenza nella struttura ospedaliera). È importante, invece, per i turni in cui un medico è reperibile, specificare quale sia la specializzazione, ovvero il tipo di reperibilità nel quale è impegnato (ossia EMO, ECO o CTO). Riassumendo:

- d rappresenta il dottore, può assumere il valore delle stringhe identificative a tre caratteri di uno dei 36 medici del reparto
- t rappresenta il turno in questione, può assumere il valore notte o pome

- p rappresenta il piano dell'ospedale nel quale lavora il dottore, può assumere il valore piano terra o terzo piano
- w rappresenta la settimana, può assumere valori da 0 a 18
- g rappresenta il giorno della settimana, può assumere valori da 1 a 7
- r rappresenta il ruolo di specializzazione per la reperibilità del medico in questione, può assumere valore EMO, ECO, CTO

Una variabile *guardia* è a 1 se il dottore d è di guardia nel turno t , nel piano p , il giorno g della settimana w .

Una variabile *repe* è a 1 se dottore d è in reperibilità r nel giorno g della settimana w .

Per calcolare il numero totale di variabili guardia e repe si consideri il seguente ragionamento; il modello considera 3 giorni della settimana 0, 7 giorni per ogni settimana dalla 1 alla 17 e un giorno della settimana 18, otteniamo, quindi, 123 giorni totali. Per ogni giorno vengono considerate 4 guardie differenti (distinte per piano e turno) e 3 reperibilità diverse (distinte per ruolo), quindi, ricordando che il modello comprende 36 medici abbiamo:

$$123 \times 4 \times 36 = 17712 \text{ variabili } \textit{guardia} \text{ e } 123 \times 3 \times 36 = 13284 \text{ variabili } \textit{repe}.$$

3.3 Scelta delle strutture dati e delle costanti

Per l'identificazione di ciascuno dei 36 medici del reparto di Cardiologia dell'Ospedale Molinette si è deciso di utilizzare delle stringhe di tre caratteri che si riferiscono al cognome del dottore. Queste stringhe sono state inserite in un *set of string*^[4] chiamato *DOC* attraverso una inizializzazione da file *.dat*. *DOC* quindi contiene gli identificativi tutti i dottori del reparto.

I dottori, poi, sono stati suddivisi in diversi gruppi per far fronte a vincoli specifici che saranno descritti in seguito. Questi gruppi non sono altro che diversi set di stringhe identificative dei medici. Anche per quanto riguarda la differenziazione di turno notturno e turno giornaliero, dei piani del reparto e dei ruoli di reperibilità sono state utilizzate delle semplici stringhe inserite in array:

$$\text{TURN0} = \{\text{'pome'}, \text{'notte'}\}$$

$$\text{PIANO} = \{\text{'piano terra'}, \text{'terzo piano'}\}$$

$$\text{RUOLO} = \{\text{'CTO'}, \text{'ECO'}, \text{'EMO'}\}$$

Sono state poi inizializzate delle costanti numeriche e degli array di interi per identificare i giorni e le settimane del modello:

$$\text{WEEK} \in [0, \text{NWEEKS}] \quad \text{con NWEEKS} = 18$$

$$\text{GIORNO} \in [1, \text{NGIORNI}] \quad \text{con NGIORNI} = 7$$

Infine, in accordo con la dottoressa Jorfida, sono stati definiti i pesi da assegnare ad ogni violazione di vincoli operativi in modo tale da rendere più “grave” la violazione di un vincolo rispetto ad un altro. In termini matematici, ogni variabile violazione sarà moltiplicata per una costante numerica; più è alto il peso, più la soluzione del problema peggiorerà (aumenterà dato che si tratta di un problema di minimo) ed il software cercherà di non violare quel vincolo per migliorare la soluzione. I pesi saranno descritti nel prossimo paragrafo.

3.4 Variabili violazione e funzione obiettivo

Le variabili violazione sono variabili decisionali, in linguaggio Mosel dette *mpvar*^[5] che rappresentano orientativamente, la violazione di un determinato vincolo operativo. Esse saranno costruite attraverso vincoli logici, ossia disequazioni lineari che le forzano ad assumere un determinato valore e coinvolgono le variabili booleane *guardia*_{*d,t,p,w,g*} e *repe*_{*d,r,w,g*}.

Queste variabili, quindi, costituiranno la funzione obiettivo, ossia l'espressione lineare che occorre minimizzare; nel nostro caso, verrà minimizzata la violazione dei vincoli operativi. In seguito, vengono mostrate in tabella le variabili violazione (con nomi semplificati al massimo per esigenze di formattazione) e i rispettivi pesi in funzione obiettivo.

| Tipo di violazione | Variabili utilizzate | Peso in funzione obiettivo |
|--|-------------------------------|------------------------------|
| Violazione weekend consecutivi | $vwc_{d,w}$ | PESO_WEEKEND_CONSECUTIVI = 5 |
| Violazione differenza pomeriggio-notte e viceversa | $dpn_d \quad dnp_d$ | PESO_DIFF_POME_NOTTE = 3 |
| Violazione reperibilità dopo copertura notte | $vrn_{d,w,g}$ | PESO_REPE_NOTTE = 3 |
| Violazione del numero di festivi inferiore e superiore | $vnf_sup_d \quad vnf_inf_d$ | PESO_NUM_FESTIVI = 5 |
| Violazione scostamento dalla media guardie infrasettimanali | $vmg_sup_d \quad vmg_inf_d$ | PESO_MEDIE_GUARDIA = 4 |
| Violazione scostamento dalla media reperibilità infrasettimanali | $vmr_sup_d \quad vmr_inf_d$ | PESO_MEDIE_REPERIBILITA = 4 |
| Violazione numero di reperibilità totali in una settimana | $vrs_{d,r,w}$ | PESO_REPE_MAX3 = 3 |
| Violazione reperibilità consecutive infrasettimanali | $vnc_{d,r,w}$ | PESO_REPE_CONSECUTIVE = 3 |
| Violazione dei desiderata | $vd_{d,w,g,t}$ | PESO_DESIDERATA = 1 |
| Violazione massimo una guardia infrasettimanale a settimana | $vug_{d,w}$ | PESO_INFRA_MAX1 = 3 |

Tabella 6. Violazioni, variabili utilizzate e pesi in fo

Nel nostro caso, l'obiettivo è minimizzare un'equazione che rappresenta la violazione dei vincoli violabili, in termini matematici la somma di variabili che rappresentano violazioni di vincoli operativi. I vincoli che invece non possono essere violati per nessuna ragione, ossia quelli contrattuali sopra descritti, non entrano in funzione obiettivo, ma sono rappresentati da equazioni e disequazioni separate.

Nel caso ottimale, la soluzione avrebbe costo zero, ciò significherebbe che nessuno dei vincoli violabili sarà stato violato. Nella realtà, però, è difficile pervenire ad una soluzione di costo zero dati i limiti del modello, perciò, in accordo con la dottoressa Jorfida sono stati definiti dei pesi da assegnare alle varie violazioni. A violazioni di vincoli più importanti è stato assegnato un peso più alto, ossia un fattore moltiplicativo maggiore che forzerà il solver a cercare di violare meno possibile quel vincolo, cioè ad abbassare il valore della variabile violazione.

In seguito, sono mostrati solo alcuni dei termini della funzione obiettivo. Per ciascuna variabile violazione si considera la sommatoria su tutti i suoi pedici, i quali possono assumere tutti i valori possibili del loro intervallo (ad esempio se la variabile violazione dipende da d, r, w si effettua la sommatoria con $d \in DOC, r \in ROL, w \in WEEK$). A ciascuna sommatoria è moltiplicato il peso associato alla violazione. È importante sottolineare che gli addendi della funzione obiettivo sono tutti i termini sommatoria relativi a tutte le variabili violazione della tabella 6, ne sono mostrati solo alcuni per esigenze di formattazione:

$$y_1 = \text{PESO_WEEKEND_CONSECUTIVI} * \sum_d^{\text{DOC}} \sum_w^{\text{WEEK}} \text{vwc}_{d,w}$$

$$y_2 = \text{PESO_NUM_FESTIVI} * \sum_d^{\text{DOC}} (\text{vnf_inf}_d + \text{vnf_sup}_d)$$

$$y_3 = \text{PESO_REPE_MAX3} * \sum_d^{\text{DOC}} \sum_r^{\text{ROL}} \sum_w^{\text{WEEK}} \text{vrs}_{d,r,w}$$

...

...

....

$$y_{10} = \text{PESO_REPE_CONSECUTIVE} * \sum_d^{\text{DOC}} \sum_r^{\text{ROL}} \sum_w^{\text{WEEK}} \text{vnc}_{d,r,w}$$

La funzione obiettivo è la seguente:

$$\min\left(\sum_{i=1}^{10} y_i\right)$$

4. Conversione dei vincoli in linguaggio matematico

In seguito, viene analizzata e descritta la conversione di ciascun vincolo, sia inviolabile che violabile, in linguaggio matematico. È fondamentale specificare che, per semplicità, ove non specificato, tutti i valori associati ai pedici delle variabili *guardia*, *repe*, *violazione*, *avanzi* si muovono negli intervalli più ampi possibili, ossia:

$$d \in \text{DOC} \quad t \in \text{TURNO} \quad p \in \text{PIANO} \quad w \in \text{WEEK} \quad g \in \text{GIORNO} \quad r \in \text{ROL}$$

4.1 Conversione dei vincoli inviolabili

- **Vincolo assegnazione di ciascun turno a un solo dottore.** Per ogni giorno g di qualsiasi settimana w , in un determinato turno di guardia (giorno, notte) e su un determinato piano (piano terra o terzo piano), lavora uno e un solo dottore. Questo risultato può essere ottenuto ponendo la sommatoria di tutte le variabili guardia per ogni dottore d con $d \in \text{DOC}$ uguale ad 1. Pertanto, la variabile guardia per il giorno g , della settimana w , del turno t sul piano p sarà ad 1 per un solo dottore e assumerà, invece, valore 0 per tutti gli altri 35 medici.

$$\sum_d^{\text{DOC}} \text{guardia}_{d,t,p,w,g} = 1$$

Lo stesso vale per i turni di reperibilità. Per ogni giorno g di una settimana w , ho bisogno di avere soltanto un medico tra i 36 che svolga un determinato tipo di reperibilità r , vale a dire: ogni giorno di ogni settimana devo avere un solo medico reperibile CTO, un solo medico reperibile ECO, un solo medico reperibile EMO (questo non esclude che un medico possa fare più di una reperibilità in un giorno). Questo vincolo garantisce la copertura di tutte le reperibilità del modello.

$$\sum_d^{\text{DOC}} \text{repe}_{d,r,w,g} = 1$$

- **Vincolo del rispetto della scacchiera per i weekend.** In accordo con la dottoressa Jorfida, è stato scelto, per comodità, di mantenere la scacchiera dei weekend per tutti i weekend del modello. Per convertire la scacchiera del weekend in vincoli matematici, basta eguagliare, per ciascun turno A, B, C, D, E le rispettive variabili *guardia* o *repe* booleane. In questo modo, un medico d , in una settimana qualsiasi, nei giorni considerati potrà:

1. Non essere di turno
2. Effettuare entrambi i turni dell'equazione.

In seguito, sono elencati i vincoli riguardanti i turni A, B, C, D, E.

$$\text{Turno A: } \text{guardia}_{d,pome',piano\ terra',w,5} = \text{guardia}_{d,notte',piano\ terra',w,6}$$

$$\text{Turno B: } \text{guardia}_{d,notte',piano\ terra',w,5} = \text{guardia}_{d,pome',piano\ terra',w,7}$$

Turno C: $\text{guardia}_{d,pome',piano\ terra',w,6} = \text{guardia}_{d,notte',piano\ terra',w,7}$

Turno D: $\text{guardia}_{d,pome',terzo\ piano',w,6} = \text{guardia}_{d,notte',terzo\ piano',w,7}$

Turno E: $\text{guardia}_{d,notte',terzo\ piano',w,6} = \text{repe}_{d,ECO',w,6}$

Come spiegato precedentemente, il turno di guardia del venerdì pomeriggio al terzo piano è considerato un turno infrasettimanale, quindi sarà considerato separatamente.

$$\text{guardia}_{d,pome',terzo\ piano',w,5} = \text{repe}_{d,ECO',w,5}$$

- **Vincolo della copertura di ciascun turno nei giorni infrasettimanali.**

$$\sum_P^{\text{PIANO}} \sum_t^{\text{TURNO}} \text{guardia}_{d,t,p,w,g} + \text{repe}_{d,CTO',w,g} + \text{repe}_{d,EMO',w,g} \leq 1$$

Questa espressione equivale a dire che dato un giorno g qualsiasi di una settimana w , un dottore d può:

1. Non essere né di guardia né in reperibilità, in tal caso il primo membro risulterà uguale a 0.
2. Essere di guardia solo al piano p e soltanto nel turno t , in tal caso il primo termine del primo membro sarà uguale a 1 e gli altri due termini di repe uguali a 0.
3. Essere reperibile soltanto per un ruolo tra CTO ed EMO, in tal caso il primo termine del primo membro sarà uguale a 0 e uno soltanto tra il secondo e il terzo sarà uguale ad 1.

È fondamentale notare che non è stata inclusa nell'espressione la reperibilità ECO. Ciò è dovuto al fatto che negli infrasettimanali, chi è reperibile CTO sarà reperibile anche ECO, quindi basta considerare soltanto uno dei due tipi di reperibilità. Se fosse stato incluso anche il termine $\text{repe}_{d,CTO',w,g}$ il valore del primo membro sarebbe stato uguale a due nel caso $g \in [1,4]$, ossia nel caso di giorno infrasettimanale.

Nei giorni infrasettimanali, il dottore reperibile CTO sarà reperibile anche per ECO, il vincolo i esprime in questo modo:

$$\text{repe}_{d,CTO',w,g} = \text{repe}_{d,ECO',w,g} \quad \text{con } g \in [1,4]$$

- **Vincolo della copertura di ciascun turno nei weekend**

$$\sum_P^{\text{PIANO}} \sum_t^{\text{TURNO}} \text{guardia}_{d,t,p,w,g} + \text{repe}_{d,CTO',w,g} + \text{repe}_{d,EMO',w,g} \leq 1$$

Vale la stessa equazione utilizzata nel precedente vincolo della copertura di ciascun turno degli infrasettimanali. In questo caso, però la variabile booleana $\text{repe}_{d,ECO',w,g}$ non è stata considerata perché chi è reperibile ECO lavora anche il pomeriggio al terzo piano il venerdì e che il sabato chi è reperibile ECO risulta anche essere di guardia di notte al terzo piano (si guardi il vincolo della scacchiera dei

weekend). Anche in questi altri due casi, il primo membro avrebbe assunto il valore 2, ed è quindi sufficiente considerare solo il turno di guardia.

Va inoltre specificato, che il venerdì, il sabato e la domenica, una determinata reperibilità viene svolta dallo stesso dottore. Ciò si ottiene eguagliando la variabile reperibilità relativa ad un dottore d in reperibilità di ruolo r , in una settimana w nel giorno g , con la stessa variabile relativa, però al giorno successivo.

$$\text{repe}_{d,r,w,g} = \text{repe}_{d,r,w,g+1} \quad \text{con } g \in \{5,6\}$$

- **Vincolo del riposo di 24 ore dopo ogni turno di lavoro effettuato.** Essendo le variabili *guardia* e *repe* binarie, questa situazione può essere modellata attraverso un vincolo logico^[2], cioè una disequazione che stabilisce la relazione tra due eventi incompatibili tra loro, cioè che non possono avvenire contemporaneamente. Se consideriamo due eventi incompatibili rappresentati da due variabili booleane A , B e scriviamo

$$A \leq 1 - B$$

Ciò vuol dire che,

- se B è uguale a 1, allora A sarà uguale a 0
- se B è uguale a 0, allora A può assumere valore 0 o 1

Nel nostro caso, prendendo come esempio il vincolo “se un medico è di guardia la notte del giorno $g-1$, allora non potrà essere di guardia nel giorno successivo g su nessun piano”, B equivale all’evento “dottore di guardia di notte nel giorno $g-1$ ”, mentre A equivale a “dottore di guardia nel giorno successivo g di notte o di pomeriggio, al piano terra o al terzo piano”. In questo modo si possono modellare molti dei vincoli descritti nel capitolo 2.

- 1) Impossibile lavorare il giorno dopo aver fatto una notte, sia di pomeriggio che di notte

$$\sum_p^{\text{PIANO}} \text{guardia}_{d,p,w,g} \leq 1 - \sum_p^{\text{PIANO}} \text{guardia}_{d,\text{notte},p,w,g-1}$$

- 2) Impossibile lavorare di pomeriggio per due giorni consecutivi

$$\sum_p^{\text{PIANO}} \text{guardia}_{d,\text{pome},p,w,g} \leq 1 - \sum_p^{\text{PIANO}} \text{guardia}_{d,\text{pome},p,w,g-1}$$

- 3) Impossibile essere reperibili il giorno dopo aver effettuato una notte

$$\sum_r^{\text{ROL}} \text{repe}_{d,r,w,g} \leq 2 - \sum_p^{\text{PIANO}} \text{guardia}_{d,\text{notte},p,w,g-1}$$

con $g \in [2,7]$

Il giorno g non può ovviamente assumere valore 0, è per questo che non si considera il giorno 1.

Caso domenica-lunedì. Data la struttura temporale del modello, occorre considerare separatamente gli stessi vincoli del riposo che riguardano la domenica (giorno 7) di una generica settimana $w-1$ e il lunedì (giorno 1) della settimana successiva w .

$$\begin{aligned} \sum_p^{\text{PIANO}} \text{guardia}_{d,pome',p,w,1} &\leq 1 - \sum_p^{\text{PIANO}} \text{guardia}_{d,pome',p,w-1,7} \\ \sum_p^{\text{PIANO}} \text{guardia}_{d,t,p,w,1} &\leq 1 - \sum_p^{\text{PIANO}} \text{guardia}_{d,notte',p,w-1,7} \\ \sum_r^{\text{ROL}} \text{repe}_{d,r,w,1} &\leq 2 - \sum_p^{\text{PIANO}} \text{guardia}_{d,notte',p,w-1,7} \end{aligned}$$

con $w \in [1,17]$

- **Vincolo rispetto specializzazioni reperibilità e ruoli di guardia nei weekend.** Ciascun medico è in grado di svolgere, in base al suo ruolo, determinati tipi di reperibilità. Per come è strutturato il modello, l'assegnazione del tipo di reperibilità che un medico può effettuare non può che essere fatta per negazione, ossia vengono vincolate a 0 le variabili *repe* per il medico d in tutti i giorni festivi (giorni 5,6,7) di tutte le settimane; lo stesso vale per il vincolo dei dottori che svolgono soltanto il turno di guardia di tipo E, verranno poste a zero tutte le variabili *repe* di qualsiasi ruolo e le variabili guardia non relative al turno E. Quindi, vanno gestiti i seguenti casi:

- Medici che svolgono soltanto reperibilità EMO, verranno poste a 0 tutte le loro variabili *repe* riguardanti CTO ed ECO (per qualsiasi giorno g di qualunque settimana w).

$$\text{repe}_{d,CTO',w,g} + \text{repe}_{d,ECO',w,g} = 0 \quad \text{con } d \in \text{NO_CTO_ECO}$$

- Medici che svolgono soltanto reperibilità ECO, verranno poste a 0 tutte le loro variabili *repe* riguardanti CTO ed EMO

$$\text{repe}_{d,CTO',w,g} + \text{repe}_{d,EMO',w,g} = 0 \quad \text{con } d \in \text{NO_CTO_EMO}$$

- Medici che possono svolgere sia reperibilità ECO sia CTO, verranno poste a 0 tutte le loro variabili *repe* riguardanti EMO

$$\text{repe}_{d,EMO',w,g} = 0 \quad \text{con } d \in \text{NO_EMO}$$

- Medici che non possono mai essere reperibili, verranno poste a 0 tutte le loro variabili *repe* riguardanti CTO, ECO ed EMO

$$\text{repe}_{d,CTO',w,g} + \text{repe}_{d,ECO',w,g} + \text{repe}_{d,EMO',w,g} = 0 \quad \text{con } d \in \text{NO_REPE}$$

- Medici che possono svolgere soltanto il turno E, verranno poste a 0 le tutte reperibilità con pedice d appartenente a questo gruppo e verranno settate a 0 tutte le variabili guardia relative ai turni di guardia del weekend diversi da E.

- **Vincoli di ubicazione guardie sia per weekend sia per infrasettimanali.** Ogni dottore appartenente al gruppo degli emodinamisti non può essere di guardia di notte al primo piano. La sommatoria di tutte le variabili *guardia* relative al dottore d e ai turni al piano terra sarà uguale a zero. Dato che le variabili *guardia* sono binarie, tutte quelle considerate nel vincolo assumeranno valore 0 e quindi quel dottore non lavorerà mai al piano terra. Anche in questo caso i vincoli sono espressi per negazione. Ciascun vincolo è applicato soltanto ai dottori appartenenti ai diversi gruppi, infatti d può assumere solo quei valori.

- Emodinamisti che lavorano solo al primo piano di notte,

$$guardia_{d,notte',piano\ terra',w,g} = 0 \quad \text{con } d \in \text{EMODINAMISTI}$$

- Dottori che lavorano soltanto al piano terra, non lavoreranno mai al terzo piano,

$$guardia_{d,t,terzo\ piano',w,g} = 0 \quad \text{con } d \in \text{NO_TP}$$

- Dottori che lavorano soltanto al terzo piano, non lavoreranno mai al piano terra,

$$guardia_{d,t,piano\ terra',w,g} = 0 \quad \text{con } d \in \text{NO_PT}$$

- **Vincolo compresenza di medici dello stesso sottogruppo in una notte.** Dato che due turni di guardia notturni dello stesso giorno non possono essere coperti da dottori dello stesso gruppo, la sommatoria sui piani delle variabili *guardia* del turno di notte in un dato giorno deve essere minore o uguale ad 1.

$$\sum_p^{\text{PIANO}} \sum_d^{\text{GRUPPO}} guardia_{d,notte',p,w,g} \leq 1$$

con $w \in \text{WEEK}$ $g \in \text{GIORNO}$ $d \in \text{GRUPPO}$

Per non riscrivere il vincolo per ogni gruppo di dottori, è stato indicato che $d \in \text{GRUPPO}$ dove ‘GRUPPO’ è il gruppo di dottori considerato (in Mosel il gruppo rappresenta un array di stringhe dove ogni stringa è identificativa di un medico). I gruppi sono EF, REPARTO ed EMODINAMISTI.

- **Vincolo del rispetto delle assenze concordate, ferie e congressi.** Essendo concordate con il medico incaricato della gestione dei turni prima della loro realizzazione, le assenze dei medici per congressi o ferie possono essere modellate, semplicemente settando a zero le variabili *guardia* o *repe* relative al giorno g della settimana w in cui il dottore ha comunicato di essere assente. Per quanto riguarda le guardie, si può effettuare la sommatoria sui turni e sui piani dato che, se il medico è assente, non lavorerà in nessun turno e in nessun piano di quel giorno g della settimana w .

$$\sum_t^{\text{TURNI}} \sum_p^{\text{PIANO}} guardia_{d,t,p,w,g} = 0$$

Per quanto concerne le variabili *repe*, posso sommare sui ruoli perché se il medico è assente quel giorno *g* di quella settimana *w*, non sarà reperibile per nessun ruolo.

$$\sum_r^{\text{ROL}} \text{repe}_{d,r,w,g} = 0$$

Conoscendo a priori, per ogni medico, i giorni di indisponibilità, è stato possibile “leggere” in input da un file *.dat* le assenze di tutti e 36 i medici del reparto.

- **Vincolo del numero di festivi uguali per tutti.** Seguendo le indicazioni del responsabile dei turni dell’ospedale Molinette, si è deciso che per qualsiasi medico, “fare un festivo” equivale a:
 - Essere di guardia in un weekend, ossia effettuare uno dei turni A, B, C, D, E
 - Essere reperibile in un weekend
 - Lavorare in un giorno festivo, cioè il 24/06 (festa patronale) o il 15/08 (Ferragosto) o in un qualsiasi giorno di un ponte.

In realtà, risulta impossibile che tutti i medici facciano esattamente lo stesso numero di festivi perché, per il numero di turni festivi da coprire diviso per i medici disponibili non è un numero intero. Per questo, si è deciso di rilassare il vincolo considerando un limite superiore di massimo 5 festivi per medico e un limite inferiore di 4. In questo modo, si ottiene che la maggior parte dei medici effettua 4 festivi, mentre soltanto 4 medici su 36, invece, si ritrovano a dover fare 5 festivi. Questi ultimi sono stati segnalati al responsabile, in modo tale da poterli inserire con priorità più alta nei festivi del quadrimestre successivo a quello giugno-settembre. Il vincolo si può esprimere con due disequazioni che limitano inferiormente e superiormente il numero totale di festivi effettuati da ciascun medico e sarà mostrato nel prossimo capitolo.

- **Vincolo dei turni già assegnati (turni in input).** È stato richiesto di inserire nel modello dei turni prestabiliti, ossia dei turni che erano già stati assegnati a dei medici del reparto. Si tratta, sostanzialmente, delle turnazioni dei giorni in prossimità delle festività di San Giovanni, festa patronale di Torino (24 Giugno) e Ferragosto, che sono state stabilite a priori. Nella trattazione nel modello, questi turni corrispondono a variabili reperibilità o variabili guardia settate a 1 per un dottore *d*, nella settimana *w*, nel giorno *g* etc. Il settaggio di queste variabili è stato fatto tramite input da un semplice file di testo di estensione *.dat*.

4.2 Conversione dei vincoli violabili

- **Weekend consecutivi.** Presi tre fine-settimana consecutivi, ciascun medico non dovrebbe lavorare in più di un weekend sia di guardia sia in reperibilità.

La violazione di questo vincolo operativo avviene quando, sommando tutte le variabili guardia e repe relative a un dottore d in tre settimane consecutive ($w, w+1, w+2$), si ottiene un valore che supera il numero massimo di turni che un medico può effettuare in un dato weekend. Ogni medico, eccetto gli ECO, se lavora in un fine-settimana, sia di guardia sia in reperibilità, può effettuare un numero di turni singoli (in altri termini “turni della scacchiera”) pari a 2 o al massimo 3. Egli, infatti, dovendo rispettare le limitazioni dei vincoli inviolabili, può ricoprire uno soltanto dei seguenti ruoli:

- **turno A**, che corrisponde a due variabili *guardia* settate al valore 1 (venerdì notte al piano terra e domenica pomeriggio al piano terra)
- **turno B**, che corrisponde a due variabili *guardia* settate al valore 1 (venerdì notte al terzo piano e domenica pomeriggio al terzo piano)
- **turno C**, che corrisponde a due variabili *guardia* settate al valore 1 (sabato pomeriggio al piano terra e domenica notte al piano terra)
- **turno D**, che corrisponde a due variabili *guardia* settate al valore 1 (sabato pomeriggio al terzo piano o domenica notte al terzo piano)
- **turno E**, che corrisponde a due variabili *guardia* settate al valore 1 (venerdì pomeriggio al piano terra sabato e notte al piano terra)
- **reperibilità CTO**, che corrisponde a tre variabili *repe* settate a 1
- **reperibilità EMO**, che corrisponde a tre variabili *repe* settate a 1

Nel momento in cui la sommatoria di queste variabili binarie superasse il valore 3, allora quel medico avrà violato il vincolo perché avrà lavorato anche in un weekend successivo o precedente a quello considerato. In linguaggio matematico il vincolo si esprime nel seguente modo:

$$\sum_{g=5}^7 (\text{repe}_{d,r,w,g} + \text{repe}_{d,r,w+1,g} + \text{repe}_{d,r,w+2,g}) +$$

$$+ \sum_{g=5}^7 \sum_t \sum_p^{\text{TURNI PIANO}} (\text{guardia}_{d,t,p,w,g} + \text{guardia}_{d,t,p,w+1,g} + \text{guardia}_{d,t,p,w+2,g}) \leq 3 + \text{vwc}_{d,w}$$

$$\text{con } d \in \text{DOC} \quad r \in \text{ROL} \quad w \in [0,16]$$

In questo modo, la variabile $vw_{d,w}$ (che sta per violazione weekend consecutivi) del dottore considerato sarà forzata ad assumere un determinato valore.

- Se $vw_{d,w} = 0$, allora non c'è violazione del vincolo operativo
- Se $vw_{d,w} > 0$, c'è violazione del vincolo operativo

Si noti che si è scelto di considerare le settimane dalla 0 alla 16 perché il valore di w (incrementato di uno e due per considerare le settimane successive può essere al massimo 18).

Un'eccezione va fatta, però, per i dottori che nel weekend si ritrovano ad essere in reperibilità ECO e, di conseguenza, come specificato nei vincoli contrattuali, anche di guardia il sabato pomeriggio al terzo piano. Il vincolo si scrive nello stesso modo ma il numero totale di variabili *guardia* e *repe* che possono essere settate ad uno non sarà più 3 ma, bensì, 5:

- reperibilità ECO, che corrisponde a tre variabili *repe* settate a 1
- guardia di sabato notte al terzo piano
- guardia di venerdì pomeriggio al terzo piano. Questo turno, in realtà, non vale come turno di weekend (come specificato sopra) ma sarà considerato tale nella trattazione di questo vincolo per semplicità di scrittura del codice.

Il valore di $vw_{d,w}$ sarà minimizzato in funzione obiettivo.

- **Allineamento pomeriggi notte per le guardie.**

$$\sum_w \sum_p \sum_g \text{guardia}_{d,pome,p,w,g} - \sum_w \sum_p \sum_g \text{guardia}_{d,notte,p,w,g} \leq \text{dpn}_d$$

$$\sum_w \sum_p \sum_g \text{guardia}_{d,notte,p,w,g} - \sum_w \sum_p \sum_g \text{guardia}_{d,pome,p,w,g} \leq \text{dnp}_d$$

Le variabili dpn_d e dnp_d stanno per “differenza pomeriggi notti” e “differenza notti pomeriggi”. La prima assume il valore della differenza tra tutti i turni di guardia pomeridiani e tutti i turni di guardia notturni di un determinato dottore, la seconda il contrario. Queste ultime sono ottenute facendo la differenza tra la sommatoria di tutte le variabili guardia relative ai pomeriggi e alle notti coperte da un determinato dottore e viceversa.

- **Reperibilità dopo aver lavorato di notte.** Se un dottore lavorasse in un turno di notte, il giorno dopo non dovrebbe essere reperibile. Per questo vincolo vanno distinti due casi: caso domenica-lunedì,

$$\sum_r^{\text{ROL}} \text{repe}_{d,r,w,1} \leq 2 - \sum_p^{\text{PIANO}} \text{guardia}_{d,notte,p,w-1,7} + \text{vrn}_{d,w-1,7}$$

con $w \in [1,18]$ $r \in \{\text{'CTO'}, \text{'ECO'}\}$

e caso martedì-mercoledì-giovedì

$$\sum_r^{\text{ROL}} \text{repe}_{d,r,w,g} \leq 2 - \sum_p^{\text{PIANO}} \text{guardia}_{d,\text{notte},p,w,g-1} + \text{vrn}_{d,w,g-1}$$

con $w \in [1,18]$ $g \in [2,4]$ $r \in \{\text{'CTO'}, \text{'ECO'}\}$

Se il medico fosse di guardia notturna il giorno precedente, la sommatoria relativa alla variabile *guardia* assumerebbe valore 1. Il termine di sommatoria riguardante la variabile *repe* potrà essere, invece, uguale a 0 (se il dottore *d* non è reperibile in quel giorno) oppure 2 (se il dottore è reperibile CTO-ECO quel giorno, dato che nei giorni infrasettimanali la reperibilità CTO-ECO è fatta dallo stesso medico). Nel caso in cui il suo valore fosse 0, la disequazione sarebbe rispettata, non ci sarebbe violazione e $\text{vrn}_{d,w,g}$ assumerebbe valore 0. Nel caso in cui fosse 2, ci sarebbe violazione e, quindi, la variabile $\text{vrn}_{d,w,g}$ (che sta per “violazione reperibilità-notte”) sarà forzata ad assumere valore 1. Per quanto riguarda la reperibilità EMO, la logica è la stessa ma al primo membro avremo la sommatoria delle variabili *repe* meno uno anziché due, poiché in un dato giorno la sommatoria delle variabili *repe* per il ruolo EMO può essere al massimo 1. Il vincolo si scriverebbe in questo modo:

$$\sum_r^{\text{ROL}} \text{repe}_{d,\text{EMO},w,1} \leq 1 - \sum_p^{\text{PIANO}} \text{guardia}_{d,\text{notte},p,w-1,7} + \text{vrn}_{d,w-1,7}$$

con $w \in [1,18], r \in \{\text{'CTO'}, \text{'ECO'}\}$

caso martedì-mercoledì-giovedì

$$\sum_r^{\text{ROL}} \text{repe}_{d,\text{EMO},w,g} \leq 1 - \sum_p^{\text{PIANO}} \text{guardia}_{d,\text{notte},p,w,g-1} + \text{vrn}_{d,w,g-1}$$

con $w \in [1,18], g \in [2,4]$

- **Rispetto del numero di festivi.**

$$\text{NUM_FESTIVI}_d \geq 4 - \text{vnf_inf}_d$$

$$\text{NUM_FESTIVI}_d \leq 5 - \text{vnf_sup}_d$$

Per la trattazione di questo vincolo è fondamentale specificare che per un qualsiasi medico il fatto di “fare un festivo” vale a dire ‘lavorare in un weekend oppure lavorare in un giorno festivo o di “ponte”, indipendentemente dal numero di turni singoli effettuati e quindi, del numero di variabili *guardia* o *repe* settate a 1 in quel periodo. In altre parole, è stata considerata la sommatoria di tutte le variabili *repe* e *guardia* settate a 1, ma ne è stata contata solamente una se ricadente in un periodo festivo. Per esempio, se un dottore si ritrova a coprire il turno di lavoro A (in un qualsiasi weekend), la sommatoria delle sue variabili *guardia* sarebbe uguale a 2 nel weekend, ma, per semplicità, ne è stata contata solo una. Di seguito sono elencate le variabili di cui è stata effettuata la sommatoria per contare il numero di festivi fatti da un qualsiasi medico *d*:

- Tutti i tipi di turni di guardia relativi a tutte le domeniche del modello, quindi turno A, B, C, D
- Tutti le variabili *repe* di tutte le domeniche del modello (CTO, ECO, EMO)
- Tutti i turni di guardia E

- Variabili guardia e reperibilità dei giorni festivi

Si noti che questo vincolo, inizialmente categorizzato come inviolabile, è stato necessariamente rilassato, in quanto risultava matematicamente impossibile garantire un numero di festivi precisamente uguali per tutti i 36 medici del reparto. Per questo, si è preso nota dei medici che in questo modello hanno effettuato più festivi degli altri (nel nostro caso i medici che ne hanno fatti cinque anziché quattro), in modo tale da considerarlo nelle specifiche del modello del prossimo quadrimestre.

- **Allineamento alla media per i turni di guardia infrasettimanali.** Le variabili al primo membro rappresentano in forma semplificata il numero di turni di guardia infrasettimanale per un dottore d . A queste è stato posto un limite superiore e un limite inferiore concordato col responsabile dei turni. Se il numero di turni infrasettimanali coperti da ciascun medico supera il limite inferiore o superiore ci sarà violazione.

$$\text{TURNI_GUARDIA_INFRA}_d \leq \text{media_guardie} + \text{vmg_sup}_d + \text{avanzi_guardia}_{d,t}$$

$$\text{TURNI_GUARDIA_INFRA}_d \geq \text{media_guardie} - \text{vmg_inf}_d + \text{avanzi_guardia}_{d,t}$$

con $d \in \text{GRUPPO}$

Al secondo membro compare la variabile avanzi_guardia_d relativa al dottore considerato, questo avviene perché gli avanzi del modello Gennaio-Maggio non devono influenzare le guardie di questo modello. Le variabili avanzi_guardia_d sono state inizializzate in base alle indicazioni della dottoressa Jorfida in base al dottore d e al turno t che non vorrebbe coprire. È importante precisare che il modello ha considerato 4 gruppi di dottori divisi per anzianità di servizio, con 4 medie differenti. Per semplicità è stato scritto una sola coppia di vincoli inferiore e superiore per un generico gruppo di dottori.

- **Allineamento alla media per le reperibilità infrasettimanali.** La logica è la stessa utilizzata nel vincolo di sopra, per ogni dottore sono state conteggiate le reperibilità totali effettuate e gli è stato posto un limite superiore ed inferiore. Sono stati definiti due gruppi con media differente, in particolare il gruppo degli emodinamisti presenta una media più alta dell'altro perché i medici specializzati in emodinamica sono di meno e quindi dovranno essere reperibili più volte rispetto agli altri.

$$\text{TURNI_REPE_INFRA}_d \leq \text{media_repe} + \text{vmr_sup}_d + \text{avanzi_repe}_d$$

$$\text{TURNI_REPE_INFRA}_d \geq \text{media_repe} - \text{vmr_inf}_d + \text{avanzi_repe}_d$$

Anche in questo caso, il conteggio dei turni di reperibilità non deve essere influenzato dagli avanzi del modello Gennaio-Maggio e quindi al secondo membro compare il numero di avanzi di reperibilità per quel dottore. Anche le variabili avanzi_repe_d sono state inizializzate su indicazione della dottoressa Jorfida.

- **Limite turni di reperibilità in una settimana.** Per un certo dottore, data una settimana e un ruolo di reperibilità tra CTO, ECO, EMO, se la sommatoria su tutti i giorni della settimana delle variabili repe supera il valore 3, la variabile $\text{vrs}_{d,r,w}$ (che sta per “violazione numero reperibilità nella settimana”) sarà forzata ad assumere un valore maggiore di zero ed avrà un contributo in funzione obiettivo.

$$\sum_g^{\text{GIORNO}} \text{repe}_{d,r,w,g} \leq 3 + \text{vrs}_{d,r,w}$$

- **Negli infrasettimanali, un medico non può essere reperibile per giorni consecutivi.**

Il vincolo è molto simile a quello mostrato sopra, con la differenza che la sommatoria verrà effettuata soltanto sui giorni infrasettimanali ed al secondo membro avremo $1 + \text{vrc}_{d,r,w}$ dove vrc sta per “violazione del numero di reperibilità consecutive infrasettimanali”. Si noti che in questo caso, dato che il modello non comprende i giorni infrasettimanali della settimana 0, l’indice w apparterrà al seguente intervallo $w \in [1,18]$.

- **Rispetto dei desiderata.** Le variabili violazione desiderata (relative a al dottore d , nel turno t , nel giorno g della settimana w) vengono inizializzate da file *.dat*. Se il medico considerato coprirà un turno che, invece, desiderava non coprire, la variabile violazione associata sarà forzata ad assumere esattamente il valore della variabile guardia relativa agli stessi pedici. Per esempio, se un dottore non desiderava coprire la notte nel giorno g della settimana w , la sua variabile violazione si costruisce in questo modo:

$$\sum_p^{\text{PIANO}} \text{guardia}_{d,\text{notte},p,w,g} + \sum_r^{\text{ROL}} \text{repe}_{d,r,w,g} = \text{vd}_{d,t,w,g}$$

Chiaramente, il primo membro assumerà sempre valore 0 oppure 1, perché per i vincoli contrattuali visti sopra, un medico non può lavorare sia di guardia che in reperibilità lo stesso giorno. È presente al secondo membro anche la sommatoria delle variabili *repe*, per considerare anche il caso di desiderio di non lavorare quel giorno né in reperibilità, né di guardia.

- **Massimo un turno di guardia infrasettimanale alla settimana.**

$$\sum_g^{\text{GIORNO}} \sum_t^{\text{TURNO}} \sum_p^{\text{PIANO}} \text{guardia}_{d,t,p,w,g} \leq 1 + \text{vug}_{d,w}$$

con $g \in [1,4]$

Sommando tutte variabili guardia relative ad un dottore in una certa settimana (nei giorni da 1 a 4, per ogni turno e piano), se si ottiene un valore superiore ad 1, cioè se il medico d copre più di una guardia infrasettimanale nella stessa settimana, allora $\text{vug}_{d,w}$ sarà forzata ad assumere un valore maggiore di zero e contribuirà in funzione obiettivo con un certo peso.

5. Analisi delle soluzioni e conclusioni

5.1 Analisi delle soluzioni

Il valore finale delle variabili violazione permette di comprendere quali vincoli operativi siano stati violati e, distinguendo i vari casi (in base ai pedici delle variabili violazione), capire da parte di quale dottore o in che giorno di quale settimana ci sia stata una violazione. La loro sommatoria totale, ossia la funzione obiettivo del problema che è stata minimizzata, fornisce un'informazione globale sulla bontà della soluzione. Chiaramente, più è alto il valore della soluzione, più violazioni ci sono state, essendo il problema di minimo. Prima di analizzare la soluzione ottima del problema, è importante sottolineare che, per garantire la sua ammissibilità sono state effettuati vari accorgimenti diretti al rilassamento di alcuni vincoli inviolabili del problema. Questo accade perché nel momento in cui c'è mancanza di risorse (nel nostro caso di medici), oppure un conflitto tra vincoli del problema o tra vincoli del problema e valori letti in input che restringono lo spazio delle soluzioni, il solver non mostra alcuna soluzione se è stato impostato in modo tale da coprire tutti i turni del modello. Questo è accaduto in particolare in prossimità del periodo di Ferragosto, nel quale la disponibilità di personale medico è minore, date le considerevoli assenze per ferie. Nel momento in cui il solver individua un collo di bottiglia come il periodo di Ferragosto, chiaramente la soluzione tende a peggiorare perché molti dei vincoli violabili vengono violati per rendere la soluzione ammissibile.

Per fare un esempio, un collo di bottiglia importante nello svolgimento del lavoro sono stati gli specialisti in emodinamica. Essi sono in numero minore rispetto agli specialisti in CTO ed ECO, ma il numero di turni EMO che devono coprire è uguale agli altri. Dato che la reperibilità EMO può essere svolta soltanto da loro, ci si è trovati in una situazione di inammissibilità o comunque di soluzione ammissibile ma non buona, dovuta alla non-copertura della reperibilità nella settimana di Ferragosto, nella quale molti degli emodinamisti risultavano in ferie. Per risolvere il problema, è stato necessario modificare le loro ferie in modo tale da garantire la copertura del turno e, quindi, l'ammissibilità della soluzione.

In altri casi, alcuni vincoli inviolabili sono risultati in conflitto con i turni inseriti da input. Per esempio, nel periodo sopracitato, il vincolo della scacchiera dei weekend non risultava compatibile con lo schema di turni deciso a priori dalla dottoressa Jorfida ed inserito in input da file di estensione *.dat*. Per ovviare a questo problema, è stato necessario escludere la settimana 11, ossia quella di Ferragosto, dal vincolo della scacchiera. Un altro esempio di incompatibilità tra vincoli stretti e variabili settate da input, è il vincolo riguardante le reperibilità infrasettimanali CTO ed ECO, che devono essere svolte dalla stessa persona. Anche in questo caso, il conflitto sussisteva con alcuni giorni in prossimità di quelli festivi, come il venerdì di "ponte" prima della festa patronale e nel mercoledì precedente il giorno di Ferragosto, nei quali erano stati inseriti in input due dottori diversi per coprire le reperibilità CTO ed ECO.

Un altro accorgimento che si è reso necessario riguarda il vincolo, inizialmente inviolabile, del numero di turni festivi uguali per tutti. Ci si è resi conto che questo vincolo causava la non ammissibilità del problema, perché considerando il numero di turni festivi da coprire e il numero di medici disponibili a lavorarvi, si poteva facilmente concludere che in nessun modo fosse matematicamente possibile garantire un numero di festivi

uguale per tutti. Perciò, il vincolo è stato reso violabile, anche se comunque il numero di festivi totali è stato “spalmato” nella maniera più omogenea possibile e si è tenuto traccia dei medici che, inevitabilmente, devono svolgere un numero di festivi pari a 5 piuttosto che a 4. Questi ultimi, nel prossimo modello, copriranno un turno festivo in meno.

La soluzione finale risulta essere buona in quanto la maggior parte delle variabili violazione assumono il valore 0, ovvero nella maggior parte dei casi i vincoli operativi non sono violati (come i limiti superiori e inferiori del numero di turni festivi o in vincolo sull'impossibilità di essere reperibile il giorno dopo aver coperto una notte). È accaduto, invece, in uno spazio di soluzioni così limitato specialmente nei periodi in prossimità delle feste, che alcuni vincoli operativi siano stati violati. Ad esempio, il vincolo sul massimo di tre reperibilità a settimana per ruolo viene violato in più situazioni dagli specializzati in emodinamica. A ciò, come accennato sopra, si può dare una spiegazione perché gli emodinamisti rappresentano un collo di bottiglia.

È importante sottolineare che i vincoli relativi a weekend consecutivi e numero di festivi, a cui è stato assegnato il peso maggiore (ossia quelli la cui variabile violazione è stata moltiplicata per il peso 5 in funzione obiettivo) risultano essere inviolati. I vincoli più violati, invece, risultano essere la vicinanza del numero di guardie per dottore alle medie per anzianità, i desiderata e la differenza tra pomeriggi e notti per ciascun dottore, queste ultime due aventi un peso basso in funzione obiettivo. Il vincolo di allineamento alle medie per le guardie risulta violato nella maggior parte dei casi inferiormente, cioè ci sono alcuni dottori che effettuano meno turni di guardia rispetto alla media del loro gruppo. In ogni caso, si tratta di un numero di scostamenti trascurabile che la dottoressa Jorfida ha accettato.

5.2 Conclusione

La realizzazione di un modello di programmazione lineare che gestisca e risolva un problema reale come la gestione dei turni dei medici di un reparto ospedaliero, presenta sicuramente delle criticità, relative soprattutto al passaggio dal mondo reale a quello matematico. Infatti, quando si modella un caso reale, bisogna prestare molta attenzione alla scelta del modello temporale giusto, delle strutture dati necessarie, del tipo di vincoli e della funzione obiettivo migliore. Inoltre, è molto facile commettere l'errore di trascurare alcuni vincoli che possono apparire scontati o non necessari. Tuttavia, questa esperienza di tesi ha dimostrato che, modellando in modo opportuno un caso reale, si possono ottenere grandi vantaggi. In questo caso, i vantaggi più significativi sono sicuramente l'**ottimizzazione del modello** e il **risparmio di tempo**. Si è potuto sperimentare che, realizzando i turni con la programmazione lineare intera e un solver che trovi la soluzione ottima, si impiega molto meno tempo rispetto alla stesura manuale. Inoltre, si può ragionevolmente asserire che, in base a come viene impostato il modello, con tutti i suoi vincoli e la sua funzione obiettivo, la soluzione che si ottiene sarà ottimale.

L'output in forma di calendario con tutte le assegnazioni dei turni di guardia e reperibilità, ottenuto grazie alla stampa del solver XPress sulla base del modello di programmazione lineare, è stato consegnato alla dottoressa Jorfida, che lo ha utilizzato per realizzare i turni per il periodo Giugno-Settembre 2019 del reparto di Cardiologia dell'Ospedale Molinette.

Bibliografia

- [1] R. Tadei, F. Della Croce, 2005. “Elementi di Ricerca Operativa”, Progetto Leonardo
- [2] F. Della Croce, F. Salassa, 2014. “A variable neighborhood search based matheuristic for nurse rostering problems”
- [3] M. Ghirardi, A. Grosso, G. Perboli, 2005. “Esercizi Svolti di ricerca Operativa”, Progetto Leonardo
- [4] DashOptimization, 2007. “X-Press Mosel User Guide”
- [5] DashOptimization, 2006. “X-Press Mosel Reference Manual”
- [6] EBC Consulting, human resources and software, “Gestione dei Turni del Personale Medico Guardie e Reperibilità”, <https://www.ebcconsulting.com/gestione-turni-del-personale-medico-guardie-e-reperibilita.html>