LISTA 2 DE MAC5770 - ÁRVORES E GRAFOS EULERIANOS

Giovani Tavares (10788620)
giovanitavares@usp.br

University of Sao Paulo — 2025.1

1 11 de Abril, 2025

1.1 Exercício 1: Prove que se G é uma árvore tal que $\Delta(G) \geq k$, então G tem pelo menos k folhas.

Como $\Delta(G) \geq k$, pode-se afirmar que G tem um vértice u tal que $d_G(u) \geq k$. Seja:

$$F = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$$

O conjunto das n folhas de G. Como $d_G(u) \geq k$, sabemos que há pelo menos k vértices v distintos em G tais que as arestas

$$(u, v_1), (u, v_2), \dots, (u, v_k) \in E(G)$$

Se $v_1, \dots, v_k$ sao folhas, i.e., $n = k$, pode-se afirmar que G tem pelo menos k folhas, pois esses sao vértices distintos. Por outro lado, suponhamos que u tem algum vizinho $v_i \in \{v_1, \dots, v_k\}$ que nao é folha, i.e., $v_i \notin F$.

Suponhamos por absurdo que $n < k$.

Como G é árvore, entao os caminhos:

$$\begin{aligned} A_{f_1} &= (u, v_1, \dots, f_1) \\ A_{f_2} &= (u, v_2, \dots, f_2) \\ &\vdots \\ A_{f_n} &= (u, v_n, \dots, f_n) \end{aligned}$$

Existem em G e sao únicos, pois G é árvore. Se $v_j = f_j$ (se algum vizinho de u é folha) para algum $j \in [k]$, basta definir or caminhos apresentados na forma de aresta $A_{f_j} = (u, v_j) = (u, f_j)$.

Como G é árvore e $n < k$ o caminho entre o vértice v_{n+1} e f_1 existe e é distinto de A_{f_1}:

$$A'_{f_1} = (u, v_{n+1}, \dots, f_1)$$

Encontrou-se dois caminhos distintos, $A_{f_1} \neq A'_{f_1}$ entre u e f_1 numa árvore G, o que é um absurdo, pois em uma árvore o caminho entre dois vértices distintos é único. Assim, $n \geq k$, ou seja, G tem pelo menos k folhas.

1.2 Exercício 2: Prove que todo grafo conexo G simples e nao trivial tem uma árvore geradora T tal que $G - E(T)$ é desconexo.

Seja $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ o conjunto de vértices de G.

Sabe-se que sao condicoes necessárias e suficientes para qualquer árvore T geradora de G:

- Os caminhos entre dois vértices quaisquer sao únicos
- T contém todos o vértices de G de modo que $V(T) = V(G)$

Seja $v_i \in V(G)$ um vértice de G tal que $d_G(v_i) = k$, ou seja, v é um vértice de G com grau k. Assim, as seguintes arestas adjascentes a v existem em G, sao distintas e incluem todos os vizinhos de v:

$$\begin{aligned}&(v_i, v_{i+1})\\&(v_i, v_{i+2})\\&\qquad\vdots\\&(v_i, v_{i+k})\end{aligned}$$

Seja A o conjunto de arestas adjascentes a v_i.

Podemos escrever um algoritmo para encontrar uma árvore T tal que $G - E(T)$ é desconexo.

Comecemos com uma árvore $T = A$. Ou seja, comecemos com T contendo apenas as arestas adjascentes a v_i. Nesse ponto, T evidentemente nao contem ciclos e é conexo, mas nao necessariamente contem todos os vértices de G, ou seja, nao necessariamente é árvore geradora de G. Para que o seja, T precisa também conter todos os vértices de G.

Seja o conjunto R de vértices em G distintos de v e seus vizinhos, ou seja, os vértices de G que nao estao em T nesse ponto:

$$R = V(G) \setminus \{v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{i+k}\} = \{r_1, r_2, \ldots, r_{n-k-1}\}$$

Sabe-se que para todo $r_j \in R$, há um caminho C_{r_j} em G que passa por r_j, v_i e algum vértice $v_p \in \{v_{i+1}, \ldots, v_{i+k}\}$ vizinho de v_i, pois G é conexo, ou seja, para qualquer vértice que nao esteja em T nesse ponto, há um caminho entre ele e v_i passando pela aresta $e = (v_i, v_p)$. Isto é, uma das possibilidades a seguir é verdadeira para G :

- O caminho $W_{r_j} = W_{v_i, v_p, r_j} = (v_i, v_p, \ldots, r_j)$ entre v_i e r_j passando por v_p comecando em v_i existe
- O caminho $W_{r_j} = W_{v_p, v_i, r_j} = (v_p, v_i, \ldots, r_j)$ entre v_p e r_j passando por v_i comecando em v_p existe

Ou seja, para todo r_j, pelo menos uma aresta v_i, v_p pertence ao conjunto de arestas de W_{r_j}. Assim, nesse ponto, pode-se definir os passos para cada vértice de G que nao esteja em $V(A)$, ou seja, para cada $r_j \in R$:

- Adicione as arestas do maior caminho W_{r_j} ao conjunto de arestas de T

Ao final desse processo, T conterá todos os vértices de G, pois todos os vértices $r_j \in R$ serao adicionados a T ao final do passo acima. Além disso, T permanece conexo, pois foram adicionados caminhos entre v_i e todos os outros vértices de G. Assim, para qualquer par de vértices $r_j, r_{j'}$ de T, há um caminho entre eles, basta concatenar os caminhos $r_j, \ldots, v_i$ e $v_i \ldots, r_{j'}$.

Por outro lado, T pode também conter um ciclo C. Para cada um desses ciclos, podemos retirar uma aresta $e \neq v_i, v_p$ de modo a desfaze-lo. Ou seja, podemos desfazer todos os ciclos de T nesse ponto sem retirar nenhuma aresta adjascente de v_i. Isso é possível, pois nenhum ciclo pode ser formado apenas por arestas adjascentes a v_i. Caso um ciclo com apenas arestas adjascentes a v_i fosse possível, tal ciclo conteria repeticao do vértice v_i pelo menos em tres vezes, já que cada ciclo tem pelo menos tres arestas. Como nenhum ciclo pode ter vértices repetidos em mais de duas vezes (apenas o inicial), esse ciclo nao existe. Assi é possível realizar a seguinte operacao para cada ciclo C de T nesse ponto:

- Retire de C uma aresta e que nao seja adjascente a v_i

A retirada de uma aresta e pertencente a um ciclo C de um grafo G nao o torna desconexo.

Suponhamos, por absurdo, que a retirada de $e \neq (v_i, v_p), e \in V(C)$ de um grafo G o torne desconexo.

Suponhamos que a aresta e estava presente em um caminho entre um par de vértices x, y que nao estavam no ciclo C, já que os vértices do ciclo permanecem conectados com a retirada de e. Mas $e \in V(C)$, ou seja, essa aresta também estava presente em algum ciclo de T. Sejam c_x, c_y vértices distintos do ciclo antes da retirada de e. Escrevamos o ciclo como a uniao das arestas de dois caminhos C_1 e C_2 entre c_x e c_y de modo que $e \in E(C_1)$, i.e., $E(C) = E(C_1) \cup E(C_2)$.

Como T era conexo antes da retirada de e, $e \in E(C_1)$ e $c_x, c_y \in V(C)$, entao era possível definir o caminho entre x e y:

$$E(P_{xy}) = E(x, \ldots, c_x) \cup E(C_1) \cup E(c_y, \ldots, y)$$

Mas $C_2 \neq C_1$ é outro caminho entre c_x e c_y. Assim, o caminho:

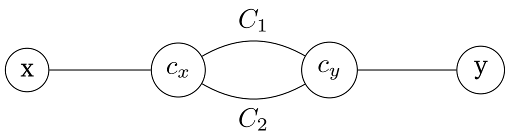
$$E(P'_{xy}) = E(x, \ldots, c_x) \cup E(C_2) \cup E(c_y, \ldots, y) \neq E(P_{xy})$$

também existe e nao contem e, já que $e \in C_1$, $E(C) = E(C_1) \cup E(C_2)$ e um ciclo nao tem aresta repetida. Ou seja, há um caminho que nao contem e que conecta x e y mesmo após a retirada de e de T. Como x e y sao arbitrarios, quaisquer que eles sejam sempre haverá um caminho entre eles mesmo após todos os ciclos de T serem desfeitos. Assim, T permanece conexo após seus ciclos terem sido desfeitos.

Nesse ponto, T nao possui ciclos, é conexo e possui todos os vértices de G sendo, portanto, árvore geradora de G. Além disso, todas as arestas adjascentes a v_i estao em T. Ou seja, a retirada das arestas de T de G deixará v_i sem nenhuma aresta adjascente no resultado, ficando isolado em uma componente.

Assim, $G - E(T)$ é desconexo.

Demonstrou-se um algoritmo para gerar uma árvore geradora T de um grafo conexo G simples e nao trivial tal que $G - E(T)$ é desconexo. Assim, todo grafo conexo G simples e nao trivial possui árvore geradora T tal que $G - E(T)$ é desconexo.



1.3 Exercício 3: Seja G um grafo conexo, T_1,T_2 árvores geradoras distintas de G, e seja, e_1 uma aresta de T_1. Prove que existe uma aresta e_2 em T_2 tal que $T_1 - e_1 + e_2$ é uma árvore geradora de G.

Considere o seguinte grafo formado pela adicao de uma aresta de T_2 a T_1:

$$T_1' = T_1 + e_2$$

Dessa forma, T_1' certamente possui um ciclo, porque a adicao de qualquer aresta a T_1, que é uma árvore, gera um ciclo.

O ciclo formado em T_1' evidentemente contem a aresta e_2 e mais duas arestas distintas que podemos definir como $e_1, e_1' \in E(T_1)$, porque todo ciclo possui pelo menos tres arestas distintas.

A retirada de e_1 de T_1' desfaz seu único ciclo e mantem o mesmo numero de componentes, porque ciclos nao possuem arestas de corte. Ou seja, $T_1 - e_1 + e_2$ permanence conexo e nao possui ciclos, além de preservar todos os vértices de T_1 e, portanto, de G. Assim, $T_1 - e_1 + e_2$ é árvore geradora de G .

Provou-se que existe uma aresta e_2 em T_2 tal que $T_1 - e_1 + e_2$ é uma árvore geradora de G.

1.4 Exercício 4: Uma k-coloração dos vértices de um grafo é uma atribuição de no máximo k cores distintas aos vértices desse grafo, tal que vértices adjacentes recebem cores distintas. Dizemos que um grafo é equi-bicolorido se tem uma 2-coloração com igual número de vértices de cada cor. Prove que toda árvore equi-bicolorida tem pelo menos uma folha de cada cor.

Sejam C_1 e C_2 os conjuntos disjuntos de vértices de cor 1 e 2, respectivamente, da árvore equi-bilocorida T. Assim:

$$\begin{aligned} v(T) &= v(C_1) + v(C_2) \\ v(C_1) &= v(C_2) \end{aligned}$$

Provemos primeiramente que T tem exatamente $v(T) - 1$ arestas, pois T é árvore. Utilizemos inducao no número de vértices de T.

Caso Base

Quando $v(T) = 1$, T possui $v(T) - 1 = 0$ ciclo. Ou seja, quando T é uma árvore de apenas 1 vértice, T tem um número de arestas igual a um menos o seu número de vértices.

Hipótese de Inducao

Suponhamos que vale a afirmacao para qualquer árvore com estritamente menos do que k vértices, $k > 1$.

Seja f uma folha de uma árvore T com k vértices. Seja T' o grafo:

$$T' = T \setminus \{f\}$$

A remocao de f de T nao resultou num T' desconexo, pois uma folha nao possui nenhuma aresta de corte adjascente a si.

Ademais, T' nao tem nenhum ciclo, pois é impossível criar ciclos apenas retirando-se vértices de uma árvore. Ou seja, T' é conexo e acíclico tal qual T, sendo, portanto, árvore. Além disso, T' tem $k-1$ vértices e, por hipótese, tem $(k-1) - 1 = k - 2$ arestas.

Como f retirado de T é folha, ele possui apenas uma aresta adjascente em T. Portanto, a adicao de f em T' para formar T de volta acrescenta uma única aresta. Portanto, $e(T) = e(T') + 1 = k - 2 + 1 = k - 1$. Portanto, T é uma árvore com k vértices e $k - 1$ arestas.

Suponhamos, por absurdo, que C_1 nao possui nenhuma folha. Assim, o grau de qualquer vértice de C_1 é de pelo menos 2 e, portanto, G tem pelo menos $2v(C_1)$, já que C_1 nao possui nenhum par de vértices vizinhos.

$$e(G) \geq 2||C_1|| = 2v(C_1)$$

G é árvore e, como demonstrado, tem exatamente $v(G) - 1$ arestas.

$$\begin{aligned} e(G) &= v(G) - 1 \\ &= v(C_1) + v(C_2) - 1 \\ &\geq 2v(C_1) \\ &\implies v(C_2) \geq v(C_1) + 1 \\ &\implies v(C_2) > v(C_1) \end{aligned}$$

O que é uma contradicao, pois $v(C_1) = v(C_2)$, já que G é bicolorida. Portanto, a suposicao inicial de que C_1 nao possui nenhuma folha é falsa e ambos conjuntos disjuntos C_1 e C_2 possuem pelo menos uma folha cada um.

1.5 Exercício 7: Prove que um grafo conexo G é euleriano se, e só se, G contém ciclos $C_1, C_2, \ldots, C_k$ dois a dois disjuntos nas arestas tais que $E(G) = E(C_1) \cup E(C_2) \cup \cdots \cup E(C_k)$.

1.5.1 Prova de que dado um grafo conexo e euleriano G implica que existem ciclos $C_1, \ldots, C_k$ disjuntos nas arestas tais que a união de todos eles resulta em $E(G)$ — as arestas de G.

Seja $N = V(G)$ o número total de vértices distintos em um grafo conexo euleriano G minimal no número de arestas. Como uma condicao necessaria e suficiente para G ser euleriano é que todos os seus vértices tenham grau par e G tem o menor número de arestas possível por suposicao, $d_G(u) = 2$ para todo vértice u em G.

Caso Base

$N = 3$
Quando G possui apenas 3 vértices, é euleriano e conexo, pode-se definir o ciclo $C_1 = E(G)$ e $C_2 = \emptyset$. Evidentemente, $E(C_1) \cap E(C_2) = \emptyset$ e $E(C_1) \cup E(C_2) = E(C_1) \cup \emptyset = E(C_1) = E(G)$.

Hipótese de Indução

Seja G tal que $N = V(G) = a > 3$. Seja G um grafo minimal em arestas, ou seja, é um grafo que tem o número mínimo de arestas para manter-se conexo e euleriano. Suponhamos que a afirmação a ser provada é verdadeira para G, ou seja, existem k ciclos $C_1, \ldots, C_k$ em G disjuntos nas arestas tais que:

$$E(G) = E(C_1) \cup E(C_2) \cup \cdots \cup E(C_k)$$

.

Seja $u \in V(C_i)$ um vértice de G. Seja o subgrafo $G' \subset G$, tal que $V(G) = V(G') \cup \{u\}$. Ou seja, G' é o grafo resultante da retirada do vértice u de G e a adicao de uma aresta descrita a seguir. Assim, $V(G') = V(G) - 1 = a - 1$.

Sabemos que u está contido em pelo menos um ciclo C_i de G. Isto é:

$$C_i = (x_1, \ldots, x_{u-1}, u, x_{u+1}, \ldots, x_1)$$

Por hipótese, $d(x_{u-1}) = d(x_{u-1}) = 2$. Ou seja, esses vértices sao vizinhos a u em G e a apenas outro vértice também pertencente a C_i, sendo eles x_{u-2} e x_{u+2}. Assim, a minimalidade no número de arestas de G permite afirmar que $(x_{u-1}, x_{u+1}) \notin E(G)$. Podemos, entao, definir G' como:

$$G' = \begin{cases} E(G') = E(G) \cup \{(x_{u-1}, x_{u+1})\}, \\ V(G') = V(G) \setminus \{u\},\ u \in V(G) \end{cases} \tag{1}$$

,

Na formacao de G', os graus de x_{u-1} e x_{u+1} diminuem em 1 unidade e G e ficam iguais a 1, mas logo voltam a ser iguais a 2 com a adicao da aresta (x_{u-1}, x_{u+1}) a $E(G')$. O ciclo C_i deixa de existir, porque u é retirado dele, mas surge o ciclo $C_i' \subset G'$:

$$C_i' = (x_1, \ldots, x_{u-1}, x_{u+1}, \ldots, x_1)$$

Como $d(u) = 2$ e u é adjascente a dois vértices distintos em C_i, é possível afirmar $\forall j \neq i, u \notin V(C_j)$. Ou seja, é possível afirmar que o vértice u retirado de G para formar G' é pertencente a apenas um dos ciclos C_i dos ciclos disjuntos nas arestas de G. Assim, é possível afirmar:

$$E(G') = E(C_i') \cup \bigcup_{j \neq i} C_j$$

$$C_j \in \{C_1, \ldots, C_k\}$$

Ou seja, os ciclos C_j disjuntos nas arestas cuja uniao resulta em G contem todas as arestas de G' com excecao da aresta (x_{u-1}, x_{u+1}) contida em C_i'.

Além disso, $C_i' \cap C_j = \emptyset$, pois C_i' contém arestas de C_i e uma aresta (x_{u-1}, x_{u+1}) nao pertencente a G e nao pertencente a nenhum de seus ciclos por consequencia.

Os graus dos vértices de G' sao todos pares, portanto G' é euleriano. G' é conexo, pois a aresta (x_{u-1}, x_{u+1}) substitui qualquer trilha que passe por x_{u-1}, u, x_{u+1} em G.

Conclui-se que G', é um grafo conexo e euleriano tal que $V(G') = a - 1$ e para o qual foi possível encontrar um conjunto de ciclos disjuntos nas arestas cuja uniao das arestas resulta em todas as arestas de G'. Assim, fica provado por inducao a validade da afirmacao para qualquer grafo conexo e euleriano G.

1.5.2 Prova de que se um grafo G é tal que existem ciclos $C_1, \ldots, C_k$ disjuntos nas arestas cuja união resulta em $E(G)$ — as arestas de G, entao G é conexo e euleriano.

Seja k_{max} o tamanho do maior conjunto de ciclos de G disjuntos nas arestas cuja uniao resulta em G.

Caso Base

$k_{max} = 0$
O grafo representado por um único vértice é tal que pode-se definir um ciclo vazio que contem todas as arestas do grafo, que é outro conjunto vazio. Evidentente, esse ciclo é disjunto nas arestas com outros ciclos do grafo, já que e;e nao tem aresta nenhuma. Esse grafo é conexo, pois possui apenas um vértice, e é euleriano, pois o grau de seu único vértice é par igual a 0.

Hipótese de Inducao

Suponhamos que existe um grafo G para o qual vale a afirmacao. Selecionemos o maior $k_{max} = k_{max_G}$ tal que a afirmacao permaneca válida, i.e., selecionemos o maior conjunto de ciclos de G disjuntos nas arestas cuja uniao resulta em G. k_{max_G} sempre existe, porque se o conjunto de ciclos é único entao seu tamanho é o máximo e se nao for, há algum conjunto de ciclos maior ou igual a todos os outros.

Seja $E' = E(G) \setminus E(C_i), i \in [k]$, i.e., G' é o grafo resultante da retirada das arestas de C_i de G. Por hipótese, $E(C_i) \cap E(C_j) = \emptyset, i \neq j$ Podemos afirmar que as arestas dos ciclos $C_j \neq C_i$ também pertencem as arestas de G' e permanecem pertencentes a ciclos disjuntos dois a dois. Ou seja:

$$E(G') = E(C_1) \cup \ldots \cup E(C_i) \cup E(C_{i+1}) \cup \ldots E(C_k)$$
$$E(C_i) \cap E(C_j) = \emptyset, i \neq j$$

Resta mostrar que G' é conexo e euleriano.

G' contem as mesmas arestas de G menos aquelas de C_i. A retirada das arestas de C_i para formar G' nao altera em nada os caminhos entre os vértices dos ciclos $C_j \neq C_i$, pois eles sao disjuntos nas arestas por hipótese. Assim, tais vértices permanecem conectados e G' é conexo.

Agora, resta mostrar que G' é euleriano.

Seja $v \in V(C_i)$ e $v \in V(C_j), C_j \neq C_i$, i.e., v é um vértice de C_i que também está em algum outro ciclo C_j.

Sabe-se que o grau de v em G é par, pois G é euleriano por hipótese. O grau de v em C_i também é par, pois C_i é um ciclo. Assim, podemos afirmar:

$$d_{G'}(v) = d_G(v) - d_{C_i}(v)$$

O grau de v em G' é a subtracao de dois números pares, entao $d_{G'}(v)$ é par também para qualquer v.

Como os vértices v sao os únicos remanescentes em G' cujas adjascencias foram afetadas pela retirada de C_i, pode-se concluir que os outros mantem seu grau par. Ou seja, G' possui apenas vértices de grau par e é portanto, euleriano. Mostrou-se que a afirmacao também vale para G', um grafo tal que:

$$k_{max_{G'}} = k_{max_G} - 1$$