LISTA 1 DE MAC0320/MAC5770 - CONCEITOS BÁSICOS

FÁBIO BOTLER, HELOISA LAZARI, AND HENRI MICHEL

ENTREGAR OS EXERCÍCIOS 2, 4, 7, 8 E 9 ATÉ O DIA 25/03/2025 ÀS 23:59

Orientações:

(1) Resolva um exercício por página
(2) A lista deve estar legível, caso contrário poderá haver descontos na nota.
(3) Sugestão: use o chatGPT para passar a solução de cada exercício para LaTeX, mas não esqueça de verificar o trabalho feito por ele.
(4) Cada aluno tem um crédito de atraso de 7 dias. Isso é, a soma total dos atrasos de todas as listas não deve ultrapassar 7 dias. Listas entregues após o prazo não serão aceitas caso o aluno já tenha extrapolado os créditos
(5) Qualquer dúvida, entre em contato.

Exercício 1. Seja G um grafo simples com n vértices. Se G tem exatamente $n-1$ vértices de grau ímpar, quantos vértices de grau ímpar (em função de n) há em $\overline{G}$ (complemento de G)?

Exercício 2. Se G é um grafo simples, é possível que ambos G e $\overline{G}$ sejam desconexos? Justifique

Exercício 3. Uma sequência formada pelos graus dos vértices de um grafo G é chamada de *sequência de graus* de G. Seja $S = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ uma sequência de inteiros não-negativos tal que $\sum_{i=1}^{n} s_i$ é par. Mostre que existe um grafo (não necessariamente simples) cuja sequência de graus é exatamente S.

Exercício 4. Caracterize grafos bipartidos. Em outras palavras, complete a afirmação tipo "Um grafo G é bipartido se, e somente se, ..." e a prove.

Exercício 5. Prove que se um grafo G tem exatamente dois vértices de grau impar, então G tem um caminho cuja extremidades são precisamente esses vértices.

Exercício 6. Um grafo G é *auto-complementar* se for isomorfo a $\overline{G}$. É possível que um grafo auto-complementar de ordem 100 tenha exatamente um vértice de grau 50? Justifique.

Exercício 7. Prove que se G é um grafo simples tal que todo vértice tem grau pelo menos 3, então G contém um circuito de comprimento par.

Exercício 8. Prove por indução em k que o conjunto das arestas de um grafo conexo simples com $2k$ arestas, com $k \geq 1$, pode ser particionado em caminhos de comprimento 2. A afirmação continuaria válida sem a hipótese de conexidade? Justifique

Exercício 9. Prove que todo grafo simples G pode ser representado como a união de dois grafos *disjuntos nas arestas* G_1 e G_2, tais que G_1 é acíclico (sem circuitos) e G_2 é um grafo par (todos os graus são par).