LISTA 1 DE MAC0320/MAC5770 - CONCEITOS BÁSICOS

Giovani Tavares (10788620)
giovanitavares@usp.br

University of Sao Paulo — 2025.1

1 March 23rd, 2025

1.1 Exercício 2: Se G é um grafo simples, é possível que ambos G e G sejam desconexos? Justifique.

Assumamos que todo grafo tenha um número de vértices maior ou igual a 2.

Seja G um grafo simples desconexo com k componentes desconexas e com número total de vértices $n \geq 3$.

Sejam $D_1..., D_i, ..., D_k$ os conjuntos disjuntos de vértices de cada componente desconexa $D_i, i = 1, ..., k$.

Sejam $u_1, u_2 \in G$ dois vértices quaisquer pertencentes à mesma componente D_u.

Seja $v \in G$ um vértice qualquer tal que $v \neq u_1, u_2$ e $v \in D_v \neq D_u$. Ou seja, v, u_1 e u_2 pertencem a componentes distintas.

Como v, u_1 e u_2 pertencem a componentes distintas, por definição os passeios $P_1 = (u_1, ..., v)$ e $P_2 = (u_2, ..., v)$ **não** existem em G,

Seja $\bar{G}$ o grafo complementar de G, pela definição de complementariedade os passeios $P_1 = (u_1, ..., v)$ e $P_2 = (v, ..., u_2)$ **existem** em $\bar{G}$, estando provado **I:** *para quaisquer pares de vértices (u, v) pertencentes a componentes **desconexas** de um grafo G, existe um passeio P entre eles em $\bar{G}$.*

Para quaisquer pares de vértices (u_1, u_2) pertencentes à mesma componente D_u de um grafo G, existe um P_3 entre eles em $\bar{G}$, basta definir $P_3 = Concat(P_1, P2) = (u_1, ..., v, ..., u_2)$, em que $Concat$ representa a operação de concatenação de passeios. Isso prova **II:** *para quaisquer pares de vértices (u_1, u_2) pertencentes à mesma componente D_u de um grafo G, existe um passeio P_3 entre eles em $\bar{G}$.*

Seja H um grafo simples conexo com um número de vértices $n = 2$. Seja $e = (h_1, h_2)$ a única aresta de H formada pelos dois únicos vértices de H. Por definição, a aresta e não existe em $\bar{H}$. Assim, está provado **III**: *não é possível um grafo simples e seu complementar com um número de vértices $n = 2$ serem simultaneamente desconexos.*

I, II e III permitem concluir que não é possível que um grafo desconexo G e seu complementar $\bar{G}$ sejam simultaneamente desconexos. Ao mesmo tempo, é possível afirmar que não é possível que um grafo conexo G' e seu complementar $\bar{G}'$ sejam simultaneamente desconexos, já que ambas afirmações são equivalentes.

1.2 Exercício 4:Caracterize grafos bipartidos. Em outras palavras, complete a afirmação tipo "Um grafo G é bipartido se, e somente se, ..." e a prove.

1.2.1 G e bipartido $\implies$ nao possui ciclos impares

Suponhamos, por contradicao, que G possui ao menos um ciclo $C = (c_1, ..., c_m)$ de comprimento m ímpar.

Seja (X, Y) uma biparticao de G. C e um ciclo com arestas definidas por $E(C) = \{(c_i, c_{(i+1)mod(m)}), i \in [m]\}$.

Pela definicao de biparticao, para toda aresta $e_i = (c_i, c_{(i+1)mod(m)})$ de $E(C)$:

$$c_i \in \begin{cases} X, \text{se } i \text{ e impar,} \\ Y, \text{se } i \text{ e par,} \end{cases} \tag{1}$$

,

pois C e um ciclo e cada par de vertices nele deve pertencer a particoes distintas.

m e impar, entao $m = 2k + 1$ para $k \in \mathbb{Z}$ e $c_m \in X$.

$c_{m+1} = c_{(2k+1+1)mod(2k+1)} = c_1 \implies c_{m+1} = c_1 \in X$. Ou seja, os vertices c_m e c_{m+1} sao vizinhos e pertences a mesma particao X, o que e uma contradicao. Assim, a hipotese de que G possui ao menos um ciclo $C = (c_1, ..., c_m)$ de comprimento m ímpar, sengo G um grafo bipartido, e falsa.

1.2.2 G nao possui ciclos impares $\impliedby$ G e bipartido

Seja $v \in V(G)$ um vertice qualquer de G e os conjuntos de vertices de G cuja distancia ate v e par e ímpar, respectivamente:

$$A = \{a : dist(v, a) \text{ e par}\} \tag{2}$$
$$B = \{a : dist(v, a) \text{ e impar}\} \tag{3}$$
$$\tag{4}$$

$v \in A$, pois $dist(v, v) = 0$ e um numero par. $A \cap B = \emptyset$

Suponhamos a existencia $a_1, a_2 \in A$ dois vertices adjascentes por aburdo. Entao G tem o ciclo com distancia minima $C = (v, ..., a_1, ..., a_2, a_2, ..., v)$, pois G e conexo. O comprimento de C e impar, pois $dist(v, a_1)$ e $dist(v, a_2)$ sao pares e $dist(a1, a2) = 1$ é ímpar, e tal comprimento e igual a soma dessas distancias.

Assim, encontramos um ciclo C em G de comprimento impar, o que é uma contradicao. Logo, a_1 e a_2 nao podem ser adjascentes. Pelo mesmo argumento, B tambem nao pode ter vértices adjascentes.

Assim, como $A \cap B = \emptyset$ e nao possuem vertices adjascentes, (A, B) e uma biparticao de G.

Um grafo G é bipartido se, e somente se, nao possui ciclos impares.

1.3 Exercício 7: Prove que se G é um grafo simples tal que todo vértice tem grau pelo menos 3, então G contém um circuito de comprimento par.

Suponhamos sem perda de generalidade, que G é conexo. Se G nao o fosse, a prova poderia ser extendida analogamente para cada uma de suas componentes conexas.

Suponhamos por absurdo que G nao tem nenhum circuito de comprimento par.

Tomemos dois vértices $u, v \in V(G)$ pertencentes a um circuito C_1. G é conexo e tem pelo menos um circuito, entao existem caminhos $P_1 = (v, ..., u)$ e $P_2 = (u, ..., v)$ distintos em G. Seja $C_1 = (v, ..., u, ..., v)$ o entre v e u em G que seja a concatenacao dos caminhos P_1 e P_2.

Como $\forall x \in V(G), d_G(x) \geq 3$. Entao $\exists w \notin C_1$ tal que v e w sao adjascentes. Como G é conexo, existem os caminhos $P_3 = (u, w)$ e $P_4 = (w, v)$ em G.

Por suposicao, o circuito $C_1 = (v, ..., u, ..., v)$ formado pela concatenacao dos caminhosP_1 e P_2 tem comprimento impar igual a soma dos comprimentos desses caminhos. Da mesma forma, o circuito $C_2 = (v, w, ..., u, ..., v)$ formado pela concatenacao dos caminhos P_2, P_3 e P_4 tem comprimento impar igual a soma dos comprimentos desses caminhos. Por fim, o circuito $C_3 = (v, ..., u, ..., v, w, ..., u)$ formado pela concatenacao dos caminhos P_1, P_2, P_3 e P_4 tem comprimento impar igual a soma dos comprimentos desses caminhos

$$
\begin{aligned}
||C_1|| &= ||P_1|| + ||P_2|| && (5)\\
&= ||P_1|| + ||P_2|| && (6)\\
||C_2|| &= ||P_2|| + ||P_3|| + ||P_4|| && (7)\\
&= ||P_2|| + ||P_3|| + 1 && (8)\\
||C_3|| &= ||P_1|| + ||P_2|| + ||P_3|| + ||P_4|| && (9)\\
&= ||P_1|| + ||P_2|| + ||P_3|| + 1 && (10)\\
& && (11)
\end{aligned}
$$

Se P_1 for ímpar:

$$
\begin{aligned}
||C_1|| &= \text{ímpar} + ||P_2|| && (12)\\
&\implies ||P_2|| \text{ é par} && (13)\\
||C_2|| &= ||P_2|| + ||P_3|| + ||P_4|| && (14)\\
&= par + ||P_3|| + 1 && (15)\\
&\implies ||P_3|| \text{ é par} && (16)\\
||C_3|| &= ||P_1|| + ||P_2|| + ||P_3|| + 1 && (17)\\
&= \text{ímpar} + par + par + 1 && (18)\\
&= \text{ímpar} + \text{ímpar} && (19)\\
&\implies ||C_3|| \text{ é par, o que contradiz a suposicao inicial} && (20)\\
& && (21)
\end{aligned}
$$

Se P_1 for par:

$$
\begin{align}
||C_1|| &= \text{par} + ||P_2|| \tag{22}\\
&\implies ||P_2|| \text{ é ímpar} \tag{23}\\
||C_2|| &= ||P_2|| + ||P_3|| + ||P_4|| \tag{24}\\
&= \text{ímpar} + ||P_3|| + 1 \tag{25}\\
&\implies ||P_3|| \text{ é ímpar} \tag{26}\\
||C_3|| &= ||P_1|| + ||P_2|| + ||P_3|| + 1 \tag{27}\\
&= \text{par} + \text{ímpar} + \text{ímpar} + 1 \tag{28}\\
&= \text{ímpar} + \text{ímpar} + \text{par} \tag{29}\\
&= \text{par} + \text{par} \tag{30}\\
&\implies ||C_3|| \text{ é par, o que contradiz a suposicao inicial} \tag{31}\\
& \tag{32}
\end{align}
$$

Assim, independentemente da paridade de P_1, chegamos a uma contradicao. Ou seja, a hipótese de que G nao tem nenhum circuito de comprimento par é falsa.

Portanto, se G é um grafo simples tal que todo vértice tem grau pelo menos 3, então G contém um circuito de comprimento par.

1.4 Exercício 8: Prove por indução em k que o conjunto das arestas de um grafo conexo simples com $2k$ arestas, com $k \geq 1$, pode ser particionado em caminhos de comprimento 2. A afirmação continuaria válida sem a hipótese de conexidade? Justifique

1.4.1 Caso Base: $k = 1$

$$k = 1 \implies ||E(G)|| = 2k \tag{33}$$
$$\tag{34}$$

$$G : \begin{cases} V = [3], \\ E = \{(v_i, v_{i+1}) | i \in \mathbb{Z}, i \leq 2\} \end{cases} \tag{35}$$

Uma particao de $E(G)$ que é um caminho de comprimento 2 é:

$$(X, Y) : \begin{cases} X = (v_1, v_2) \\ Y = (v_2, v_3) \end{cases} \tag{36}$$

1.4.2 Suponhamos que afirmacao e verdadeira para um grafo G com $k = n \geq 2$ vértices

Seja G' um grafo conexo tal que $||E(G')|| = 2(n+1) = 2n+2$.

Como G é conexo e tem $||E(G)|| \geq 1$, pelo menos um de seus vértices v é tal que $d_G(v) \geq 2$.

Sejam x e y vértices de G' adjascentes a v. Esses vértices formam um passeio $P = (x, v, y)$ de tamanho 2.

Se removermos as arestam que formam P de G' restam $2n$ arestas em um grafo G''. Assim, $||E(G'')|| = 2n$ e pela hipótese de inducao, G'' pode ser particionado em caminhos de comprimento 2.

Assim, todo grafo simples conexo com número par de arestas pode ser particionado em caminhos de comprimento 2.

Sem a hipótese de conexidade a afirmacao nao continuaria valida, já que é possível definir o seguinte grafo desconexo F que tem um número par de arestas em que nenhum caminho tem comprimento 2.

$$F : \begin{cases} V = [m] \text{ m é par} \\ E = (u_i, u_j) | u_i, u_j \in V, i, j \text{ sao pares} \end{cases} \tag{37}$$

1.5 Exercício 9: Prove que todo grafo simples G pode ser representado como a união de dois grafos disjuntos nas arestas G_1 e G_2, tais que G_1 é acíclico (sem circuitos) e G_2 é um grafo par (todos os graus são par).

Para provar que *todo grafo simples G pode ser representado como a união de dois grafos disjuntos nas arestas G_1 e G_2, tais que G_1 é acíclico (sem circuitos) e G_2 é um grafo par (todos os graus são par)*, basta:

- Mostrar que se uma aresta de G nao pertence ao subgrafo G_1, entao ela pertence as arestas de um subgrafo G_2 cujos graus de todos os vertices d_{G_2} sao números pares
- Mostrar que se uma aresta de G nao pertence ao subgrafo G_2, entao ela pertence ao conjunto das arestas que nao estao em nenhum ciclo de G, isto é, ela pertence a G_1
- Nenhuma aresta pode pertencer simultaneamente a G_1 e G_2

1.5.1 $e \in E(G), e \notin G_1 \implies e \in G_2$

Por definicao, em um circuito cada aresta só pode ser visitada uma única vez. Isso significa que cada vértice u visitado em um circuito a partir de uma aresta $e_i = (u, u_1)$ deve ser adjascente a um vértice u_2 pertencente a uma aresta $e_2 = (u, u_2)$ tal que $u_1 \neq u_2$. Em outras palavras, os vizinhos de um vértice u de um circuito podem ser agrupados em pares. Ou seja, o grau dos vértices de um circuito no circuito deve ser par. Se considerarmos os circuitos de G como pertencentes ao subgrafo G_2, conclui-se que o grau dos vértices pertencentes a G_2 em G_2 é par.

1.5.2 $e \in E(G), e \notin G_2 \implies e \in G_1$

Seja uma aresta $(u, v) \in E(G)$ para a qual nao seja possível definir um subgrafo $H \subset G$ tal que $d_H(v)$ seja par ou $d_H(u)$ seja par.

Mais especificamente, toda e qualquer trilha P que contenha (u, v) em G é tal que $d_P(u)$ ou $d_P(v)$ sao ímpares. Ou seja, $(u, v) \notin G_2$.

Se G nao possui nenhum circuito que contenha (u, v), conclui-se automaticamente que $(u, v) \in G_1$.

Suponhamos por absurdo que G possui algum circuito C que contenha (u, v), entao $d_C(u)$ e $d_C(v)$ sao pares, o que se demonstrou anteriormente em relacao a paridade do grau de qualquer vértice pertencente a um circuito no circuito. Isso é uma contradicao, pois $(u, v) \notin G_2$ e, por isso, o grau de pelo menos um deles em *qualquer* trilha de G é ímpar, inclusive em circuitos. Assim, G **nao** possui nenhum circuito C que contenha (u, v) e, portanto, (u, v) faz parte do conjunto de arestas acíclicas de G, G_1.

Agora, vamos provar que $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. Seja k o numero de arestas de um grafo G.

1.5.3 Caso Base: k = 1

Se G possui apenas uma aresta, $G_2 = \emptyset$ e G_1 contem essa única aresta, pois nao é possível construir circuito com uma única aresta. Assim, vale $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.

1.5.4 Assumamos que vale $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ para $k = n$

Seja G um grafo tal que $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. Seja e uma aresta tal que $e \notin E(G)$. Seja G' o grafo tal que $V(G) \subseteq V(G')$ e $E(G') = E(G) \cup \{e\}$. Ou seja, G' difere de G apenas pela presenca da aresta e.

A adicao de e a G, resulta, entao, em G' com subconjuntos G'_1 e G'_2 construidos analogamente a G_1 e G_2, respectivamente. Tal adicao só pode incorrer em duas consequencias:

i e cria um novo ciclo em G. Nesse caso, para definir G'_1, basta retirar as $p+1$ arestas de G_1 que formam esse novo ciclo e adicioná-las a G_2, definindo $G'_1 = G_1 \setminus \{e_1, ..., e, ..., e_p\}$ e $G'_2 = G_2 \cup \{e_1, ..., e, ..., e_p\}$, usando o que foi demonstrado em 1.5.1. Nesse caso, $G'_1 \cap G'_2 = \emptyset$

ii e nao cria um novo ciclo em G. Nesse caso, $e \notin G'_2$ e $G'_2 = G_2$. Usando o que foi mostrado em 1.5.2, entao, $e \in G'_1$. Isso mantem $G'_1 \cap G'_2 = \emptyset$.

Demonstrou-se que a propriedade $G'_1 \cap G'_2 = \emptyset$ se mantem para $k = n + 1$ e, portanto, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.

Assim, todo grafo simples G pode ser representado como a união de dois grafos disjuntos nas arestas G_1 e G_2, tais que G_1 é acíclico (sem circuitos) e G_2 é um grafo par (todos os graus são par), pois provou-se que $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, $e \in E(G), e \notin G_1 \implies e \in G_2$ e $e \in E(G), e \notin G_2 \implies e \in G_1$