

LISTA 2 DE MAC5770 - ÁRVORES E GRAFOS EULERIANOS

Giovani Tavares (10788620)

giovanitavares@usp.br

University of Sao Paulo — 2025.1

1 12 de Maio, 2025

1.1 Exercício 1: Seja G um grafo simples de ordem n , n par. Prove que se $d(v) > n/2$ para todo $v \in V(G)$, então G contém 3 emparelhamentos perfeitos dois a dois disjuntos.

Parte I

Mostrando que todo ciclo hamiltoniano pode ser escrito como a união de dois emparelhamentos perfeitos disjuntos.

Pelo Teorema de Dirac, se $d(v) > n/2$, então G tem um ciclo hamiltoniano.

Seja $H = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$, um ciclo hamiltoniano de G .

Podemos escrever o ciclo H como um conjunto de arestas:

$$H = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}\}$$

Ou seja, podemos escrever H como a união de dois conjuntos disjuntos de arestas:

$$H = [\{\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}, \{v_5, v_6\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}\}] \cup [\{\{v_2, v_3\}, \{v_4, v_5\}, \{v_6, v_7\}, \dots, \{v_n, v_1\}\}]$$

Ou seja, podemos escrever H como a união de dois conjuntos disjuntos de arestas:

$$A = \bigcup_{i \text{ ímpar}}^{n-1} \{\{v_i, v_{i+1}\}\}, \quad B = \left[\bigcup_{j \text{ par}}^{n-1} \{\{v_j, v_{j+1}\}\} \right] \cup \{\{v_n, v_1\}\}$$

A é emparelhamento perfeito, pois cobre os n vértices de G e não contém arestas adjacentes, o mesmo valendo para B . Além disso, A e B são disjuntos, pois uma aresta $\{v_i, v_{i+1}\}$ não pode ter i par e ímpar simultaneamente (i.e., não pode estar em A e B ao mesmo tempo).

Assim, o ciclo hamiltoniano H pode ser escrito como a união de dois emparelhamentos perfeitos disjuntos. Como H é arbitrário, pode-se concluir que todo ciclo hamiltoniano pode ser escrito como a união de dois emparelhamentos perfeitos disjuntos.

Parte II

Mostrando que, se G é tal que $v(G) = n$, n par, e $d(v) > n/2$ para todo vértice v de G , então G tem 3 emparelhamentos perfeitos dois a dois disjuntos.

Como $\forall v \in V(G)$, $d(v) > n/2$, então, pelo Teorema de Dirac, G tem um ciclo hamiltoniano H .

Como demonstrado anteriormente na **Parte I**, H pode ser escrito como a união de dois emparelhamentos perfeitos. Chamemos-nos de M_1 e M_2 :

$$H = M_1 \cup M_2$$

Pode-se afirmar que G tem 2 emparelhamentos perfeitos disjuntos.

Seja $G' = G \setminus M_1$, o grafo formado pela retirada das arestas de M_1 de G .

Como M_1 é emparelhamento perfeito, temos que $\forall v \in V(G), d_{M_1} = 1$, entao:
Portanto:

$$d_{G'}(v) = d_G(v) - d_{M_1} = d_G(v) - 1$$

Com $d_G(v) > n/2$ e n par. Como $d_G(v) \in \mathbb{Z}$, temos:

$$\begin{aligned} d_G(v) &> \frac{n}{2} \\ \implies d_G(v) &\geq \frac{n}{2} + 1 \\ \implies d_G(v) - 1 &\geq \left(\frac{n}{2} + 1\right) - 1 \\ \implies d_{G'}(v) &\geq \frac{n}{2} \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema de Dirac, G' também tem um ciclo hamiltoniano H' . Como demonstrado na **Parte I**, H' pode ser escrito como a união de dois emparelhamentos perfeitos disjuntos M_3 e M_4 :

$$H' = M_3 \cup M_4$$

Sabemos que M_3 e M_4 também são emparelhamentos perfeitos de G , pois $V(G) = V(G')$ e $E(G') \subset E(G)$.

Além disso, $M_1 \cap M_3 = M_1 \cap M_4 = \emptyset$, pois as arestas de M_1 foram removidas para formar G' .

Assim, M_1, M_3 e M_4 são três emparelhamentos perfeitos dois a dois disjuntos de G e, portanto, G tem 3 emparelhamentos perfeitos dois a dois disjuntos.

1.2 Exercício 2: Prove que toda árvore tem no máximo um emparelhamento perfeito. De um exemplo de uma árvore sem emparelhamento perfeito.

Utilizemos uma prova por inducao.

Caso Base

Seja T uma árvore com dois vértices. O emparelhamento perfeito de T contém a única aresta de T e é único, pois não existe apenas uma aresta incidente a seus dois únicos vértices.

Hipótese de Inducao

Suponhamos que toda árvore T com $k < n$ vértices seja tal que tenha no máximo um emparelhamento perfeito.

Seja T uma árvore com n vértices, i.e., $v(T) = n$. Seja M um emparelhamento perfeito de T .

T é árvore, então $V(T)$ tem pelo menos um vértice f que é folha, i.e., um vértice f tal que $d_T(f) = 1$.

Como $d_T(f) = 1$, existe um vértice $u \neq f$, $u \in V(T)$, tal que u é vizinho de f .

Seja F a floresta formada pela retirada dos vértices u e f de T , i.e.,

$$E(F) = E(T) \setminus \{\{u, f\}\}$$

$$V(F) = V(T) \setminus \{u, f\}$$

$$\implies v(F) = v(T) - 2 = n - 2 < n$$

$$\implies F \text{ tem no máximo um emparelhamento perfeito, pela hipótese de inducao.}$$

Chamemos M' o emparelhamento perfeito único de F . Como F tem exatamente as mesmas arestas de T com exceção da única incidente a f , chamada $\{u, f\}$, pode-se afirmar que a adição da aresta $\{u, f\}$ a M' recupera M , i.e. :

$$M = M' \cup \{\{u, f\}\} \quad (1)$$

Como $\{u, f\}$ é a única aresta incidente a f na árvore T , pois f é folha, $\{u, f\}$ é aresta presente em qualquer emparelhamento perfeito de T . Assim, para gerar emparelhamento perfeito de T distinto de M , é preciso substituir pelo menos uma aresta e' de M' por alguma aresta $e_{sub} \in E(T)$ não presente entre as arestas de M' , formando o conjunto de arestas M'' . $e_{sub} \neq \{u, v\}$, pois e_{sub} deve ser incidente a pelo menos um dos vértices aos quais incide e' , e os vértices u e f não estão entre os vértices das arestas de M' .

M' é emparelhamento perfeito único da floresta F por hipótese, o que indica que não existe nenhum outro conjunto de arestas não adjacentes que cubram todos os vértices de F , i.e., M'' não é emparelhamento. Assim,

$$M = M'' \cup \{\{u, f\}\} \quad (2)$$

é uma contradição, pois M não pode ser um emparelhamento perfeito com um subconjunto de arestas M'' que não é um emparelhamento.

Assim, o emparelhamento M é único e tal que

$$M = M' \cup \{\{u, f\}\} \quad (3)$$

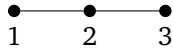
Estando demonstrado que vale a afirmação vale para árvores T tais que $v(T) = n$

Exemplo de árvore sem emparelhamento perfeito

A árvore definida por

$$E(T) = \{\{u_1, u_2\}, \{u_2, u_3\}\}$$

$$V(T) = \{u_1, u_2, u_3\}$$



Não tem emparelhamento perfeito, pois tem um número ímpar de vértices.

1.3 Exercício 3: Seja G um grafo (X, Y) – bipartido simples tal que $|X| = |Y| = n \geq 1$. Prove que se $e(G) > n(n-1)$ então G tem um emparelhamento perfeito.

Suponhamos, por absurdo, que G não tem um emparelhamento perfeito. Então, pelo Teorema de Hall, $\exists S \subseteq X$ tal que $|N(S)| < |S|$. Seja $|S| = s$.

O objetivo é chegar em uma contradição e encontrar um limite superior para $e(G)$ sob a suposição. Pode-se afirmar:

$$1 \leq s \leq n-1,$$

pois $s = |S|$ e $S \subset X$.

$$|N(S)| < s$$

por suposição.

Cada vértice de S está conectado a somente vértices em $N(S)$. Assim, o número máximo de arestas entre S e $N(S)$ é igual ao produto de s com $|N(S)|$, i.e.,

$$\sum_{u \in S} d(u) \leq |S| \cdot |N(S)| = s \cdot |N(S)|$$

que corresponde ao número máximo de arestas adjacentes aos vértices de S , pois $S \subseteq X$ e G é (X, Y) – bipartido.

Cada vértice de $X \setminus S$ pode estar conectado a qualquer vértice de Y , exceto aos vértices de Y conectados a S (i.e., exceto aos vértices de $N(S)$).

Assim, o número máximo de arestas de $X \setminus S$ para Y é:

$$\sum_{v \in X \setminus S} d(v) \leq |X \setminus S| \cdot |Y| = (n-s) \cdot n$$

Todas as arestas de G são incidentes a algum vértice de S ou de $X \setminus S$. Assim:

$$\begin{aligned} \sum_{u \in S} d(u) + \sum_{v \in X \setminus S} d(v) &= e(G) \\ \implies s \cdot |N(S)| + n \cdot (n-s) &> n \cdot (n-1), \quad \text{pois } e(G) > n \cdot (n-1) \\ \implies s \cdot |N(S)| + n \cdot (n-s) &> n \cdot (n-1) \end{aligned}$$

Como $s \leq n-1$ e $|N(S)| < s$ por suposicao, temos que $|N(s)| \leq n-2$. Assim:

$$\begin{aligned} s \cdot |N(S)| + n \cdot (n-s) &> n \cdot (n-1) \\ \implies (n-1) \cdot (n-2) + n \cdot (n-(n-1)) &> n \cdot (n-1) \\ \implies (n-1) \cdot (n-2) + n &> n \cdot (n-1) \\ \implies (n-1) \cdot (n-2) &> n^2 - n - n \\ \implies (n-1) \cdot (n-2) &> n \cdot (n-2), \quad \text{o que é um absurdo, pois } n \geq 1 \end{aligned}$$

Assim, a suposicao inicial está incorreta e, portanto, $\forall S \subset X, |N(S)| \geq |S|$.

Pelo Teorema de Hall, existe um emparelhamento que cobre X . Como (X, Y) é uma bipartição de G , qualquer emparelhamento M que cubra X deve ser formado exclusivamente por arestas incidentes a um vértice de X e a outro vértice de Y .

Além disso, M é emparelhamento perfeito de X , então M não possui pares de arestas adjacentes, i.e., cada vértice de X coberto por M está exclusivamente ligado a um vértice de Y . Como $|X| = n$, há n vértices distintos de Y ligados aqueles de X em M . Como $|Y| = n$, conclui-se que M também cobre Y . Portanto, M é emparelhamento perfeito de G .