LISTA 4 DE MAC5770 - EMPARELHAMENTOS EM GRAFOS

Giovani Tavares (10788620)
giovanitavares@usp.br

University of Sao Paulo — 2025.1

1 20 de Maio, 2025

1.1 Exercício 1: Seja G um grafo simples de ordem n, n par. Prove que se $d(v) > n/2$ para todo $v \in V(G)$, então G contém 3 emparelhamentos perfeitos dois a dois disjuntos.

Parte I

Mostrando que todo ciclo hamiltoniano pode ser escrito como a união de dois emparelhamentos perfeitos disjuntos.

Pelo Teorema de Dirac, se $d(v) > n/2$, então G tem um ciclo hamiltoniano.

Seja $H = (v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1)$, um ciclo hamiltoniano de G.

Podemos escrever o ciclo H como um conjunto de arestas:

$$H = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}\}$$

Ou seja, podemos escrever H como a união de dois conjuntos disjuntos de arestas:

$$H = [\{\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}, \{v_5, v_6\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}\}] \cup [\{\{v_2, v_3\}, \{v_4, v_5\}, \{v_6, v_7\}, \ldots, \{v_n, v_1\}\}]$$

Ou seja, podemos escrever H como a união de dois conjuntos disjuntos de arestas:

$$A = \bigcup_{i \text{ ímpar}}^{n-1} \{\{v_i, v_{i+1}\}\}, \quad B = [\bigcup_{j \text{ par}}^{n-1} \{\{v_j, v_{j+1}\}\}] \cup \{\{v_n, v_1\}\}$$

A é emparelhamento perfeito, pois cobre os n vértices de G e não contém arestas adjacentes, o mesmo valendo para B. Além disso, A e B são disjuntos, pois uma aresta $\{v_i, v_{i+1}\}$ não pode ter i par e ímpar simultaneamente (i.e., não pode estar em A e B ao mesmo tempo).

Assim, o ciclo hamiltoniano H pode ser escrito como a união de dois emparelhamentos perfeitos disjuntos. Como H é arbitrário, pode-se concluir que todo ciclo hamiltoniano pode ser escrito como a união de dois emparelhamentos perfeitos disjuntos.

Parte II

Mostrando que, se G é tal que $v(G) = n$, n par, e $d(v) > n/2$ para todo vértice v de G, então G tem 3 emparelhamentos perfeitos dois a dois disjuntos.

Como $\forall v \in V(G)$, $d(v) > n/2$, então, pelo Teorema de Dirac, G tem um ciclo hamiltoniano H.

Como demonstrado anteriormente na **Parte I**, H pode ser escrito como a união de dois emparelhamentos perfeitos. Chamemos-nos de M_1 e M_2:

$$H = M_1 \cup M_2$$

Pode-se afirmar que G tem 2 emparelhamentos perfeitos disjuntos.

Seja $G' = G \setminus M_1$, o grafo formado pela retirada das arestas de M_1 de G.

Como M_1 é emparelhamento perfeito, temos que $\forall v \in V(G), d_{M_1} = 1$, entao:
Portanto:

$$d_{G'}(v) = d_G(v) - d_{M_1} = d_G(v) - 1$$

Com $d_G(v) > n/2$ e n par. Como $d_G(v) \in \mathbb{Z}$, temos:

$$\begin{aligned} d_G(v) &> \frac{n}{2} \\ \implies d_G(v) &\geq \frac{n}{2} + 1 \\ \implies d_G(v) - 1 &\geq (\frac{n}{2} + 1) - 1 \\ \implies d_{G'}(v) &\geq \frac{n}{2} \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema de Dirac, G' também tem um ciclo hamiltoniano H'. Como demonstrado na **Parte I**, H' pode ser escrito como a união de dois emparelhamentos perfeitos disjuntos M_3 e M_4:

$$H' = M_3 \cup M_4$$

Sabemos que M_3 e M_4 também são emparelhamentos perfeitos de G, pois $V(G) = V(G')$ e $E(G') \subset E(G)$.

Além disso, $M_1 \cap M_3 = M_1 \cap M_4 = \varnothing$, pois as arestas de M_1 foram removidas para formar G'.

Assim, M_1, M_3 e M_4 são três emparelhamentos perfeitos dois a dois disjuntos de G e, portanto, G tem 3 emparelhamentos perfeitos dois a dois disjuntos.

1.2 Exercício 2: Prove que toda árvore tem no máximo um emparelhamento perfeito. De um exemplo de uma árvore sem emparelhamento perfeito.

Utilizemos uma prova por inducao.

Caso Base

Seja T uma árvore com dois vértices. O emparelhamento perfeito de T contém a única aresta de T e é único, pois nao existe apenas uma aresta incidente a seus dois únicos vértices.

Hipótese de Inducao

Suponhamos que toda árvore T com $k < n$ vértices seja tal que tenha no máximo um emparelhamento perfeito.

Seja T uma árvore com n vértices, i.e., $v(T) = n$. Seja M um emparelhamento perfeito de T.

T é árvore, entao $V(T)$ tem pelo menos um vértice f que é folha, i.e., um vértice f tal que $d_T(f) = 1$.

Como $d_T(f) = 1$, existe um vértice $u \neq f$, $u \in V(T)$, tal que u é vizinho de f.

Seja F a floresta formada pela retirada dos vértices u e f de T, i.e.,

$$\begin{aligned}
&E(F) = E(T) \setminus \{\{u, f\}\} \\
&V(F) = V(T) \setminus \{u, f\} \\
&\qquad \implies v(F) = v(T) - 2 = n - 2 < n \\
&\qquad \implies \text{F tem no máximo um emparelhamento perfeito, pela hipótese de inducao.}
\end{aligned}$$

Chamemos M' o emparelhamento perfeito único de F. Como F tem exatamente as mesmas arestas de T com exececao da única incidente a f, chamada $\{u, f\}$, pode-se afirmar que a adicao da aresta $\{\{u, f\}\}$ a M' recupera M, i.e. :

$$M = M' \cup \{\{u, f\}\} \tag{1}$$

Como $\{u, f\}$ é a única aresta incidente a f na árvore T, pois f é folha, $\{u, f\}$ é aresta presente em qualquer emparelhamento perfeito de T. Assim, para gerar emparelhamento perfeito de T distinto de M, é preciso substituir pelo menos uma aresta e' de M' por alguma aresta $e_{sub} \in E(T)$ nao presente entre as arestas de M', formando o conjunto de arestas M''. $e_{sub} \neq \{u, v\}$, pois e_{sub} deve ser incidente a pelo menos um dos vértices aos quais incide e', e os vértices u e f nao estao entre os vértices das arestas de M'.

M' é emparelhamento perfeito único da floresta F por hipótese, o que indica que nao existe nenhum outro conjunto de arestas nao adjascentes que cubram todos os vértices de F, i.e., M'' nao é emparelhamento. Assim,

$$M = M'' \cup \{\{u, f\}\} \tag{2}$$

é uma contradicao, pois M nao pode ser um emparelhamento perfeito com um subconjunto de arestas M'' que nao é um emparelhamento.

Assim, o emparelhamento M é único e tal que

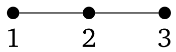
$$M = M' \cup \{\{u, f\}\} \tag{3}$$

Estando demonstrado que vale a afirmacao vale para árvores T tais que $v(T) = n$

Exemplo de árvore sem emparelhamento perfeito

A árvore definida por

$$E(T) = \{\{u_1, u_2\}, \{u_2, u_3\}\}$$
$$V(T) = \{u_1, u_2, u_3\}$$



Nao tem emparelhamento perfeito, pois tem um número ímpar de vértices.

1.3 Exercício 3: Seja G um grafo $(X,Y)-$bipartido simples tal que $|X| = |Y| = n \geq 1$. Prove que se $e(G) > n(n-1)$ então G tem um emparelhamento perfeito.

Suponhamos, por absurdo, que G não tem um emparelhamento perfeito. Então, pelo Teorema de Hall, $\exists S \subseteq X$ tal que $|N(S)| < |S|$. Seja $|S| = s$.

O objetivo é chegar em uma contradição e encontrar um limite superior para $e(G)$ sob a suposição. Pode-se afirmar:

$$1 \leq s \leq n-1,$$

pois $s = |S|$ e $S \subset X$.

$$|N(S)| < s$$

por suposição.

Cada vértice de S está conectado a somente vértices em $N(S)$. Assim, o número máximo de arestas entre S e $N(S)$ é igual ao produto de s com $|N(S)|$, i.e.,

$$\sum_{u \in S} d(u) \leq |S| \cdot |N(S)| = s \cdot |N(S)|$$

que corresponde ao número máximo de arestas adjascentes aos vértices de S, pois $S \subseteq X$ e G é $(X,Y)-$bipartido.

Cada vértice de $X \setminus S$ pode estar conectado a qualquer vértice de Y, exceto aos vértices de Y conectados a S (i.e., exceto aos vértices de $N(S)$).

Assim, o número máximo de arestas de $X \setminus S$ para Y é:

$$\sum_{v \in X \setminus S} d(v) \leq |X \setminus S| \cdot |Y| = (n-s) \cdot n$$

Todas as arestas de G são incidentes a algum vértice de S ou de $X \setminus S$. Assim:

$$\begin{aligned}
&\sum_{u \in S} d(u) + \sum_{v \in X \setminus S} d(v) = e(G) \\
\implies\ & s \cdot |N(S)| + n \cdot (n-s) > n \cdot (n-1), \quad \text{pois } e(G) > n \cdot (n-1) \\
\implies\ & s \cdot |N(S)| + n \cdot (n-s) > n \cdot (n-1)
\end{aligned}$$

Como $s \leq n-1$ e $|N(S)| < s$ por suposicao, temos que $|N(s)| \leq n-2$. Assim:

$$\begin{aligned}
& s \cdot |N(S)| + n \cdot (n-s) > n \cdot (n-1) \\
\implies\ & (n-1) \cdot (n-2) + n \cdot (n-(n-1)) > n \cdot (n-1) \\
\implies\ & (n-1) \cdot (n-2) + n > n \cdot (n-1) \\
\implies\ & (n-1) \cdot (n-2) > n^2 - n - n \\
\implies\ & (n-1) \cdot (n-2) > n \cdot (n-2), \quad \text{o que é um absurdo, pois} \quad n \geq 1
\end{aligned}$$

Assim, a suposicao inicial está incorreta e, portanto, $\forall S \subset X, |N(S)| \geq |S|$.

Pelo Teorema de Hall, existe um emparelhamento que cobre X. Como (X,Y) é uma bipartição de G, qualquer emparelhamento M que cubra X deve ser formado exclusivamente por arestas incidentes a um vértice de X e a outro vértice de Y.

Além disso, M é emparelhamento perfeito de X, entao M nao possui pares de arestas adjascentes, i.e., cada vértice de X coberto por M está exclusivamente ligado a um vértice de Y. Como $|X| = n$, há n vértices distintos de Y ligados aqueles de X em M. Como $|Y| = n$, conclui-se que M também cobre Y. Portanto, M é emparelhamento perfeito de G.

1.4 Exercício 4: Seja k um inteiro positivo e suponha que G é um grafo (X, Y)-bipartido tal que $d(x) \geq k \geq d(y)$ para todo $x \in X$ e $y \in Y$. Use o Teorema de Hall para mostrar que G possui um emparelhamento que cobre X.

Seja $S \subset X$ um subconjunto de vértices de X. Devemos mostrar que $|N(S)| \geq |S|$ para concluir, invocando o Teorema de Hall, que G possui um emparelhamento que cobre todos os vértices de X.

Sabe-se que $\forall x \in S, d(x) \geq k$, pois $S \subset X$. Assim, a soma dos graus dos vértices de S é tal que:

$$\sum_{x \in S} d(x) \geq |S|k \tag{I}$$

Consideramos as arestas entre os vértices de S e seus vizinhos, $N(S)$. Como G é (X, Y)-bipartido, pode-se afirmar que $N(S) \subset Y$ e, assim, o grau de todo vértice em $N(S)$ é menor ou igual a k. Assim, a soma dos graus dos vértices em $N(S)$ é tal que:

$$\sum_{y \in N(S)} d(y) \leq |N(S)|k \tag{II}$$

A soma dos graus dos vértices de S é igual ao número de arestas entre S e $N(S)$, assim como é igual a soma dos graus dos vértices em $N(S)$. Assim, pode-se afirmar:

$$\begin{aligned} \sum_{x \in S} d(x) &= \sum_{y \in N(S)} d(y) && (4) \\ &\implies |S|k \leq |N(S)|k, \quad \text{usando I e II} && (5) \\ &\implies |S| \leq |N(S)| \quad \text{pois} \quad k > 0 && (6) \end{aligned}$$

Portanto, a condição de Hall é satisfeita, e existe um emparelhamento que cobre todos os vértices de X.

1.5 Exercício 5: Se $m < n$, então todo retângulo latino $m \times n$ sobre n símbolos pode ser estendido a um quadrado latino de ordem n.

Vamos construir um grafo G com bipartição (X, Y), tal que:

- X é o conjunto de colunas do retângulo latino $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$
- Y é o conjunto de n símbolos distintos $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$

As arestas de $E(G)$ são formadas por todos os pares $\{x_i, y_j\}$, com $x_i \in X$, $y_j \in Y$, tal que o símbolo y_j não aparece na coluna x_i em nenhuma das m linhas do retângulo latino.

Seja $x_i \in X$. Verifiquemos o grau de x_i.

x_i está conectado a $n - m$ símbolos, pois cada coluna x_i tem m linhas preenchidas e as arestas são definidas por pares de colunas e símbolos não conectados no retângulo. Ou seja, $d(x_i) = n - m$, para todo $x_i \in X$.

Seja $y_j \in Y$ um símbolo. y_j está conectado a toda coluna em que não aparece em nenhuma das m linhas preenchidas do retangulo latino $n \times m$. Como cada linha não possui pares de símbolos iguais e há n colunas, cada linha tem n símbolos distintos. Ou seja, todo símbolo aparece uma única vez em cada linha e, portanto, y_j não está conectado a pelo menos m colunas e, está, entao, conectado a $n - m$ colunas. Portanto $d(y_j) = n - m$.

Assim, $d(x_i) = n - m = d(y_j)$, e, portanto:

$$d(x_i) \leq k \leq d(y_j), \quad x_i \in X,\ y_j \in Y, \quad \text{e } k = n - m$$

Do exercício 4, pode-se afirmar que G tem um emparelhamento que cobre X.

Isso significa que se pode atribuir a cada coluna $x_i \in X$ um símbolo $y_j \in Y$ tal que:

1. O símbolo y_j não aparece na coluna x_i nas linhas preenchidas.
2. Cada símbolo é usado em apenas uma coluna na nova linha, o que é possível, pois há n colunas.

Executando $2.$ para todos os n símbolos, chega-se num triangulo latino $(m+1) \times n$, no qual $2.$ pode ser aplicado novamente. Assim, pode-se aplicar $2.$ recursivamente até formar um quadrado latino de ordem $n \times n$.