

# LISTA 1 DE MAC0320/MAC5770 - CONCEITOS BÁSICOS

Giovani Tavares (10788620)

giovanitavares@usp.br

University of Sao Paulo — 2025.1

## 1 March 23rd, 2025

### 1.1 Exercício 2: Se $G$ é um grafo simples, é possível que ambos $G$ e $\bar{G}$ sejam desconexos? Justifique.

Assumamos que todo grafo tenha um número de vértices maior ou igual a 2.

Seja  $G$  um grafo simples desconexo com  $k$  componentes desconexas e com número total de vértices  $n \geq 3$ .

Sejam  $D_1, \dots, D_i, \dots, D_k$  os conjuntos disjuntos de vértices de cada componente desconexa  $D_i, i = 1, \dots, k$ .

Sejam  $u_1, u_2 \in G$  dois vértices quaisquer pertencentes à mesma componente  $D_u$ .

Seja  $v \in G$  um vértice qualquer tal que  $v \neq u_1, u_2$  e  $v \in D_v \neq D_u$ . Ou seja,  $v, u_1$  e  $u_2$  pertencem a componentes distintas.

Como  $v, u_1$  e  $u_2$  pertencem a componentes distintas, por definição os passeios  $P_1 = (u_1, \dots, v)$  e  $P_2 = (u_2, \dots, v)$  **não** existem em  $G$ ,

Seja  $\bar{G}$  o grafo complementar de  $G$ , pela definição de complementariedade os passeios  $P_1 = (u_1, \dots, v)$  e  $P_2 = (v, \dots, u_2)$  **existem** em  $\bar{G}$ , estando provado **I**: *para quaisquer pares de vértices  $(u, v)$  pertencentes a componentes desconexas de um grafo  $G$ , existe um passeio  $P$  entre eles em  $\bar{G}$ .*

Para quaisquer pares de vértices  $(u_1, u_2)$  pertencentes à mesma componente  $D_u$  de um grafo  $G$ , existe um  $P_3$  entre eles em  $\bar{G}$ , basta definir  $P_3 = \text{Concat}(P_1, P_2) = (u_1, \dots, v, \dots, u_2)$ , em que *Concat* representa a operação de concatenação de passeios. Isso prova **II**: *para quaisquer pares de vértices  $(u_1, u_2)$  pertencentes à mesma componente  $D_u$  de um grafo  $G$ , existe um passeio  $P_3$  entre eles em  $\bar{G}$ .*

Seja  $H$  um grafo simples conexo com um número de vértices  $n = 2$ . Seja  $e = (h_1, h_2)$  a única aresta de  $H$  formada pelos dois únicos vértices de  $H$ . Por definição, a aresta  $e$  não existe em  $\bar{H}$ . Assim, está provado **III**: *não é possível um grafo simples e seu complementar com um número de vértices  $n = 2$  serem simultaneamente desconexos.*

**I, II e III** permitem concluir que não é possível que um grafo desconexo  $G$  e seu complementar  $\bar{G}$  sejam simultaneamente desconexos. Ao mesmo tempo, é possível afirmar que não é possível que um grafo conexo  $G'$  e seu complementar  $\bar{G}'$  sejam simultaneamente desconexos, já que ambas afirmações são equivalentes.

## 1.2 Exercício 4: Caracterize grafos bipartidos. Em outras palavras, complete a afirmação tipo “Um grafo $G$ é bipartido se, e somente se, ...” e a prove.

### 1.2.1 $G$ e bipartido $\implies$ não possui ciclos ímpares

Suponhamos, por contradição, que  $G$  possui ao menos um ciclo  $C = (c_1, \dots, c_m)$  de comprimento  $m$  ímpar.

Seja  $(X, Y)$  uma bipartição de  $G$ .  $C$  é um ciclo com arestas definidas por  $E(C) = \{(c_i, c_{(i+1) \bmod(m)}), i \in [m]\}$ .

Pela definição de bipartição, para toda aresta  $e_i = (c_i, c_{(i+1) \bmod(m)})$  de  $E(C)$ :

$$c_i \in \begin{cases} X, & \text{se } i \text{ é ímpar,} \\ Y, & \text{se } i \text{ é par,} \end{cases} \quad (1)$$

,

pois  $C$  é um ciclo e cada par de vértices nele deve pertencer a partições distintas.

$m$  é ímpar, então  $m = 2k + 1$  para  $k \in \mathbb{Z}$  e  $c_m \in X$ .

$c_{m+1} = c_{(2k+1+1) \bmod(2k+1)} = c_1 \implies c_{m+1} = c_1 \in X$ . Ou seja, os vértices  $c_m$  e  $c_{m+1}$  são vizinhos e pertencem à mesma partição  $X$ , o que é uma contradição. Assim, a hipótese de que  $G$  possui ao menos um ciclo  $C = (c_1, \dots, c_m)$  de comprimento  $m$  ímpar, sendo  $G$  um grafo bipartido, é falsa.

### 1.2.2 $G$ não possui ciclos ímpares $\iff G$ e bipartido

Seja  $v \in V(G)$  um vértice qualquer de  $G$  e os conjuntos de vértices de  $G$  cuja distância até  $v$  é par e ímpar, respectivamente:

$$A = \{a : \text{dist}(v, a) \text{ é par}\} \quad (2)$$

$$B = \{a : \text{dist}(v, a) \text{ é ímpar}\} \quad (3)$$

$$(4)$$

$v \in A$ , pois  $\text{dist}(v, v) = 0$  é um número par.  $A \cap B = \emptyset$

Suponhamos a existência  $a_1, a_2 \in A$  dois vértices adjacentes por absurdo. Então  $G$  tem o ciclo com distância mínima  $C = (v, \dots, a_1, \dots, a_2, \dots, v)$ , pois  $G$  é conexo. O comprimento de  $C$  é ímpar, pois  $\text{dist}(v, a_1)$  e  $\text{dist}(v, a_2)$  são pares e  $\text{dist}(a_1, a_2) = 1$  é ímpar, e tal comprimento é igual à soma dessas distâncias.

Assim, encontramos um ciclo  $C$  em  $G$  de comprimento ímpar, o que é uma contradição. Logo,  $a_1$  e  $a_2$  não podem ser adjacentes. Pelo mesmo argumento,  $B$  também não pode ter vértices adjacentes.

Assim, como  $A \cap B = \emptyset$  e não possuem vértices adjacentes,  $(A, B)$  é uma bipartição de  $G$ .

**Um grafo  $G$  é bipartido se, e somente se, não possui ciclos ímpares.**

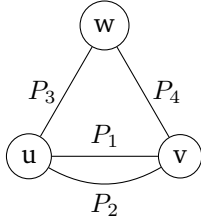
### 1.3 Exercício 7: Prove que se $G$ é um grafo simples tal que todo vértice tem grau pelo menos 3, então $G$ contém um circuito de comprimento par.

Suponhamos sem perda de generalidade, que  $G$  é conexo. Se  $G$  não o fosse, a prova poderia ser estendida analogamente para cada uma de suas componentes conexas.

Suponhamos por absurdo que  $G$  não tem nenhum circuito de comprimento par.

Tomemos dois vértices  $u, v \in V(G)$  pertencentes a um circuito  $C_1$ .  $G$  é conexo e tem pelo menos um circuito, então existem caminhos  $P_1 = (v, \dots, u)$  e  $P_2 = (u, \dots, v)$  distintos em  $G$ . Seja  $C_1 = (v, \dots, u, \dots, v)$  o entre  $v$  e  $u$  em  $G$  que seja a concatenação dos caminhos  $P_1$  e  $P_2$ .

Como  $\forall x \in V(G), d_G(x) \geq 3$ . Então  $\exists w \notin C_1$  tal que  $v$  e  $w$  são adjacentes. Como  $G$  é conexo, existem os caminhos  $P_3 = (u, w)$  e  $P_4 = (w, v)$  em  $G$ .



Por suposição, o circuito  $C_1 = (v, \dots, u, \dots, v)$  formado pela concatenação dos caminhos  $P_1$  e  $P_2$  tem comprimento ímpar igual a soma dos comprimentos desses caminhos. Da mesma forma, o circuito  $C_2 = (v, w, \dots, u, \dots, v)$  formado pela concatenação dos caminhos  $P_2$ ,  $P_3$  e  $P_4$  tem comprimento ímpar igual a soma dos comprimentos desses caminhos. Por fim, o circuito  $C_3 = (v, \dots, u, \dots, v, w, \dots, u)$  formado pela concatenação dos caminhos  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  e  $P_4$  tem comprimento ímpar igual a soma dos comprimentos desses caminhos

$$\|C_1\| = \|P_1\| + \|P_2\| \quad (5)$$

$$= \|P_1\| + \|P_2\| \quad (6)$$

$$\|C_2\| = \|P_2\| + \|P_3\| + \|P_4\| \quad (7)$$

$$= \|P_2\| + \|P_3\| + 1 \quad (8)$$

$$\|C_3\| = \|P_1\| + \|P_2\| + \|P_3\| + \|P_4\| \quad (9)$$

$$= \|P_1\| + \|P_2\| + \|P_3\| + 1 \quad (10)$$

$$(11)$$

Se  $P_1$  for ímpar:

$$\|C_1\| = \text{ímpar} + \|P_2\| \quad (12)$$

$$\implies \|P_2\| \text{ é par} \quad (13)$$

$$\|C_2\| = \|P_2\| + \|P_3\| + \|P_4\| \quad (14)$$

$$= \text{par} + \|P_3\| + 1 \quad (15)$$

$$\implies \|P_3\| \text{ é par} \quad (16)$$

$$\|C_3\| = \|P_1\| + \|P_2\| + \|P_3\| + 1 \quad (17)$$

$$= \text{ímpar} + \text{par} + \text{par} + 1 \quad (18)$$

$$= \text{ímpar} + \text{ímpar} \quad (19)$$

$$\implies \|C_3\| \text{ é par, o que contradiz a suposição inicial} \quad (20)$$

$$(21)$$

Se  $P_1$  for par:

$$||C_1|| = \text{par} + ||P_2|| \quad (22)$$

$$\implies ||P_2|| \text{ é ímpar} \quad (23)$$

$$||C_2|| = ||P_2|| + ||P_3|| + ||P_4|| \quad (24)$$

$$= \text{ímpar} + ||P_3|| + 1 \quad (25)$$

$$\implies ||P_3|| \text{ é ímpar} \quad (26)$$

$$||C_3|| = ||P_1|| + ||P_2|| + ||P_3|| + 1 \quad (27)$$

$$= \text{par} + \text{ímpar} + \text{ímpar} + 1 \quad (28)$$

$$= \text{ímpar} + \text{ímpar} + \text{par} \quad (29)$$

$$= \text{par} + \text{par} \quad (30)$$

$$\implies ||C_3|| \text{ é par, o que contradiz a suposicao inicial} \quad (31)$$

$$(32)$$

Assim, independentemente da paridade de  $P_1$ , chegamos a uma contradicao. Ou seja, a hipótese de que  $G$  nao tem nenhum circuito de comprimento par é falsa.

Portanto, se  $G$  é um grafo simples tal que todo vértice tem grau pelo menos 3, então  $G$  contém um circuito de comprimento par.

**1.4 Exercício 8: Prove por indução em  $k$  que o conjunto das arestas de um grafo conexo simples com  $2k$  arestas, com  $k \geq 1$ , pode ser particionado em caminhos de comprimento 2. A afirmação continuaria válida sem a hipótese de conexidade? Justifique**

**1.4.1 Caso Base:  $k = 1$**

$$k = 1 \implies ||E(G)|| = 2k \quad (33)$$

$$(34)$$

$$G : \begin{cases} V = [3], \\ E = \{(v_i, v_{i+1}) | i \in \mathbb{Z}, i \leq 2\} \end{cases} \quad (35)$$

Uma particao de  $E(G)$  que é um caminho de comprimento 2 é:

$$(X, Y) : \begin{cases} X = (v_1, v_2) \\ Y = (v_2, v_3) \end{cases} \quad (36)$$

**1.4.2 Suponhamos que afirmacao e verdadeira para um grafo  $G$  com  $k = n \geq 2$  vértices**

Seja  $G'$  um grafo conexo tal que  $||E(G')|| = 2(n+1) = 2n+2$ .

Como  $G'$  é conexo e tem  $||E(G')|| \geq 1$ , pelo menos um de seus vértices  $v$  é tal que  $d_{G'}(v) \geq 2$ .

Sejam  $x$  e  $y$  vértices de  $G'$  adjacentes a  $v$ . Esses vértices formam um passeio  $P = (x, v, y)$  de tamanho 2.

Se removermos as arestas que formam  $P$  de  $G'$  restam  $2n$  arestas em um grafo  $G''$ . Assim,  $||E(G'')|| = 2n$  e pela hipótese de inducao,  $G''$  pode ser particionado em caminhos de comprimento 2.

Assim, todo grafo simples conexo com número par de arestas pode ser particionado em caminhos de comprimento 2.

Sem a hipótese de conexidade a afirmacao nao continuaria valida, já que é possível definir o seguinte grafo desconexo  $F$  que tem um número par de arestas em que nenhum caminho tem comprimento 2.

$$F : \begin{cases} V = [m] \text{ m é par} \\ E = (u_i, u_j) | u_i, u_j \in V, i, j \text{ são pares} \end{cases} \quad (37)$$

### 1.5 Exercício 9: Prove que todo grafo simples $G$ pode ser representado como a união de dois grafos disjuntos nas arestas $G_1$ e $G_2$ , tais que $G_1$ é acíclico (sem circuitos) e $G_2$ é um grafo par (todos os graus são par).

Para provar que *todo grafo simples  $G$  pode ser representado como a união de dois grafos disjuntos nas arestas  $G_1$  e  $G_2$ , tais que  $G_1$  é acíclico (sem circuitos) e  $G_2$  é um grafo par (todos os graus são par)*, basta:

- Mostrar que se uma aresta de  $G$  não pertence ao subgrafo  $G_1$ , então ela pertence as arestas de um subgrafo  $G_2$  cujos graus de todos os vértices  $d_{G_2}$  são números pares
- Mostrar que se uma aresta de  $G$  não pertence ao subgrafo  $G_2$ , então ela pertence ao conjunto das arestas que não estão em nenhum ciclo de  $G$ , isto é, ela pertence a  $G_1$
- Nenhuma aresta pode pertencer simultaneamente a  $G_1$  e  $G_2$

#### 1.5.1 $e \in E(G), e \notin G_1 \implies e \in G_2$

Por definição, em um circuito cada aresta só pode ser visitada uma única vez. Isso significa que cada vértice  $u$  visitado em um circuito a partir de uma aresta  $e_i = (u, u_1)$  deve ser adjacente a um vértice  $u_2$  pertencente a uma aresta  $e_2 = (u, u_2)$  tal que  $u_1 \neq u_2$ . Em outras palavras, os vizinhos de um vértice  $u$  de um circuito podem ser agrupados em pares. Ou seja, o grau dos vértices de um circuito no circuito deve ser par. Se considerarmos os circuitos de  $G$  como pertencentes ao subgrafo  $G_2$ , conclui-se que o grau dos vértices pertencentes a  $G_2$  em  $G_2$  é par.

#### 1.5.2 $e \in E(G), e \notin G_2 \implies e \in G_1$

Seja uma aresta  $(u, v) \in E(G)$  para a qual não seja possível definir um subgrafo  $H \subset G$  tal que  $d_H(v)$  seja par ou  $d_H(u)$  seja par.

Mais especificamente, toda e qualquer trilha  $P$  que contenha  $(u, v)$  em  $G$  é tal que  $d_P(u)$  ou  $d_P(v)$  são ímpares. Ou seja,  $(u, v) \notin G_2$ .

Se  $G$  não possui nenhum circuito que contenha  $(u, v)$ , conclui-se automaticamente que  $(u, v) \in G_1$ .

Suponhamos por absurdo que  $G$  possui algum circuito  $C$  que contenha  $(u, v)$ , então  $d_C(u)$  e  $d_C(v)$  são pares, o que se demonstrou anteriormente em relação a paridade do grau de qualquer vértice pertencente a um circuito no circuito. Isso é uma contradição, pois  $(u, v) \notin G_2$  e, por isso, o grau de pelo menos um deles em *qualquer* trilha de  $G$  é ímpar, inclusive em circuitos. Assim,  $G$  **não** possui nenhum circuito  $C$  que contenha  $(u, v)$  e, portanto,  $(u, v)$  faz parte do conjunto de arestas acíclicas de  $G$ ,  $G_1$ .

Agora, vamos provar que  $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ . Seja  $k$  o número de arestas de um grafo  $G$ .

#### 1.5.3 Caso Base: $k = 1$

Se  $G$  possui apenas uma aresta,  $G_2 = \emptyset$  e  $G_1$  contém essa única aresta, pois não é possível construir circuito com uma única aresta. Assim, vale  $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ .

#### 1.5.4 Assumamos que vale $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ para $k = n$

Seja  $G$  um grafo tal que  $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ . Seja  $e$  uma aresta tal que  $e \notin E(G)$ . Seja  $G'$  o grafo tal que  $V(G) \subseteq V(G')$  e  $E(G') = E(G) \cup \{e\}$ . Ou seja,  $G'$  difere de  $G$  apenas pela presença da aresta  $e$ .

A adição de  $e$  a  $G$ , resulta, então, em  $G'$  com subconjuntos  $G'_1$  e  $G'_2$  construídos analogamente a  $G_1$  e  $G_2$ , respectivamente. Tal adição só pode incorrer em duas consequências:

- $e$  cria um novo ciclo em  $G$ . Nesse caso, para definir  $G'_1$ , basta retirar as  $p+1$  arestas de  $G_1$  que formam esse novo ciclo e adicioná-las a  $G_2$ , definindo  $G'_1 = G_1 \setminus \{e_1, \dots, e, \dots, e_p\}$  e  $G'_2 = G_2 \cup \{e_1, \dots, e, \dots, e_p\}$ , usando o que foi demonstrado em 1.5.1. Nesse caso,  $G'_1 \cap G'_2 = \emptyset$
- $e$  não cria um novo ciclo em  $G$ . Nesse caso,  $e \notin G'_2$  e  $G'_2 = G_2$ . Usando o que foi mostrado em 1.5.2, então,  $e \in G'_1$ . Isso mantém  $G'_1 \cap G'_2 = \emptyset$ .

Demonstrou-se que a propriedade  $G'_1 \cap G'_2 = \emptyset$  se mantém para  $k = n + 1$  e, portanto,  $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ .

Assim, todo grafo simples  $G$  pode ser representado como a união de dois grafos disjuntos nas arestas  $G_1$  e  $G_2$ , tais que  $G_1$  é acíclico (sem circuitos) e  $G_2$  é um grafo par (todos os graus são par), pois provou-se que  $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ ,  $e \in E(G), e \notin G_1 \implies e \in G_2$  e  $e \in E(G), e \notin G_2 \implies e \in G_1$ .