

Bài tập tuần 3-4

Tính toán ma trận

1. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ và E là ma trận đơn vị cấp 2

a) Tính $F = A^2 - 3A$

b) Tìm ma trận X thỏa mãn $(A^2 + 5E)X = B^T(3A - 3A^2)$

2. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ và hàm số $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$. Tính $f(A)$

3. Tìm tất cả các ma trận vuông cấp 3 giao hoán với ma trận

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

4.

a) Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Tính A^{10}

b) Cho $A = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$. Tính A^n

c) Cho $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Tính A^{2020}

5. Tìm ma trận X thỏa mãn:

$$X \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^2$$

6. Tìm ma trận X thỏa mãn:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^2$

b) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 2X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

c) $\frac{1}{2}X - \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 6 \\ -2 & 9 & 2 \\ -4 & -8 & 6 \end{pmatrix}$

7. Cho $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ Tìm X thỏa mãn $A^T X^T = B + X^T$

8. Không khai triển định thức mà dùng các tính chất của định thức, chứng minh rằng

a) $\begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1 - b_1x & c1 \\ a_2 + b_2x & a_2 - b_2x & c2 \\ a_3 + b_3x & a_3 - b_3x & c3 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

Hạng của ma trận

1. Tìm hạng của ma trận

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 4 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

2. Tìm hạng của ma trận theo tham số a

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & a & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 7 & 2 \\ 1 & 10 & 17 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ a & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

4. Tìm tất cả các giá trị m để các ma trận sau khả nghịch

a) $A = \begin{pmatrix} m & -3 & 1 \\ 2 & 4 & m \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} m & 2 & 2 \\ 2 & m & 2 \\ 2 & 2 & m \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} m+1 & -1 & m \\ 3 & m+1 & 3 \\ m-1 & 0 & m-1 \end{pmatrix}$

5. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & 3-m \\ m & -3 & -3 \end{pmatrix}$. Tìm m để hạng của ma trận A lớn nhất.

6. Tìm m để các ma trận sau có hạng nhỏ nhất:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & m+4 & -2 & -1 \\ 3 & m+6 & -3 & m-3 \end{pmatrix} \quad \text{b) } B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 \\ m & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Định thức

1. Tính các định thức sau

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{vmatrix} -6 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ -8 & 9 & -2 \end{vmatrix} & \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 & 3 \\ -5 & 9 & -12 & 7 \\ 12 & -5 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 4 & -5 \end{vmatrix} \\ \text{c) } \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & b & 0 \end{vmatrix} & \text{d) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2x^2 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} \end{array}$$

2. Tìm x

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0 & \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & x & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ x & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 & \text{c) } \begin{vmatrix} 2 & x & 2 \\ 2 & 2x-1 & x+1 \\ 3 & -1 & x^2 \end{vmatrix} = 0 \end{array}$$

3. Chứng minh rằng

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} & \\ \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(a-c)(c-b) & \\ \text{c) } \begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{vmatrix} = 1+a^2+b^2+c^2 & \end{array}$$

4. Tính định thức của ma trận $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & a \\ 2 & 4-a & 6 \end{pmatrix}$. Sau đó chứng minh rằng không tồn tại ma

trận D vuông cấp 3 hệ số thực thỏa mãn $D^2 = A$

5. Cho A là ma trận vuông cấp n thỏa mãn $A^2 + 2020E = 0$. Chứng minh rằng $\det A > 0$

6. A, B là hai ma trận cấp n thỏa mãn $AB = BA$. Chứng minh rằng $\det(A^2 + B^2) \geq 0$

7. Cho ma trận $A = [a_{ij}]_{2020 \times 2020}$ với $a_{ij} = \sin(i + j)$. Tính $\det A$

Hệ phương trình tuyến tính

1. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm không tầm thường

$$\begin{cases} (m+5)x + 2y + (2m+1)z = 0 \\ mx + (m-1)y + 4z = 0 \\ (m+5)x + (m+2)y + 5z = 0 \end{cases}$$

2. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} mx_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + mx_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = m \end{cases}$$

3. Tìm m để hệ phương trình sau có vô số nghiệm

$$\begin{cases} x_1 - mx_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 2m \end{cases}$$

4. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 1 \\ 5x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 6x_4 = 5 \end{cases}$$

5. Biện luận theo a, b số nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + ax_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 + (a+1)x_3 = b \end{cases}$$

6. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2-m & m+1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & m+1 \end{pmatrix}$ Tìm m để $r(A) = 2$

7. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss

a)
$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = -4 \\ 3x + 7y + 10z + 11t = -11 \\ x + 2y + 4z + 2t = -3 \\ x + 2y + 2z + 7t = -6 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + 2y - z + 3t = 12 \\ 2x + 5y - z + 11t = 49 \\ 3x + 6y - 4z + 13t = 49 \\ x + 2y - 2z + 9t = 33 \end{cases}$$

8. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

Phương pháp Cramer có áp dụng cho hệ phương trình trên được hay không? Giải hệ bằng phương pháp Gauss

9. Tìm m để hệ phương trình sau có vô số nghiệm

$$\begin{cases} (m+1)x_1 + (m+3)x_2 + (m-2)x_3 = 5 \\ (m+2)x_1 + (m-1)x_2 - (m-4)x_3 = 2 \\ (m-1)x_1 + (m+2)x_2 + (m+1)x_3 = -3 \end{cases}$$