BÀI GIẢNG TOÁN CAO CẤP

TRỊ RIÊNG – VÉC TƠ RIÊNG – CHÉO HÓA MA TRẬN

NỘI DUNG

- **Trị riêng, véc-tơ riêng của toán tử tuyến tính**
- **Trị riêng, véc-tơ riêng của ma trận vuông**
- **Chéo hóa ma trận**
- **Chéo hóa trực giao ma trận**

I. TRỊ RIÊNG – VÉC TƠ RIÊNG CỦA TOÁN TỬ TUYẾN TÍNH

Định nghĩa Cho V là một KGVT và toán tử tuyến tính $T : V \to V$. **Số thực λ được gọi giá trị riêng của T nếu tồn tại $x \in V$ (nhưng $x \neq \theta$) sao cho $T(x) = \lambda x$.**

Khi đó x gọi là *véc-tơ riêng* **của T ứng với λ.**

Lưu ý: $T(\theta) = \lambda \cdot \theta$, *với mọi số thực* λ.

Ví dụ: Cho toán tử tuyến tính $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (2x + 2y,\ 4x)$. Ta thấy $T(1, -2) = (-2, 4) = -2 \cdot (1, -2)$. Như vậy $\lambda = -2$ là một giá trị riêng của T và $x = (1, -2)$ là một vectơ riêng của T ứng với $\lambda = -2$.

Mệnh đề: Cho V là một KGVT. Cho $T : V \to V$ là một toán tử tuyến tính có giá trị riêng λ. Khi đó,

- Nếu u_1, u_2 là các vectơ riêng của T ứng với λ thì $u_1 + u_2$ và ku_1 (với mọi số thực $k \neq 0$) cũng là các vectơ riêng của T ứng với λ.

- Gọi P_λ là tập hợp gồm các vectơ riêng của T ứng với λ và vectơ không θ. Ta có P_λ là một không gian con của V.

- Giả sử V có một cơ sở là $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ và gọi A là ma trận của T đối với cơ sở B. Ta có $A[x]_B = \lambda[x]_B$, với $x \in P_\lambda$ bất kỳ.

  Nói một cách khác, để tìm các vectơ riêng x của T ứng với λ, ta giải hệ $(A - \lambda I) \cdot [x]_B = [\theta]$, ở đây I là ma trận đơn vị cùng cấp với A.

II. TRỊ RIÊNG – VÉCTƠ RIÊNG CỦA MA TRẬN VUÔNG

Ta chú ý rằng mỗi phần tử x của $\mathbb{R}^n$ có dạng $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ và vectơ **không của $\mathbb{R}^n$ là $\theta = (0, 0, \cdots, 0)$.**

Định nghĩa: **Cho A là một ma trận vuông cấp $n \geq 1$. Số thực λ được gọi là một giá trị riêng của A nếu tồn tại một** vectơ **$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ (nhưng $x \neq \theta$) thỏa mãn**

$$A[x] = \lambda[x].$$

Khi đó, vectơ **x được gọi là một** vectơ **riêng của A ứng với giá trị riêng λ.**

Ví dụ: **Cho ma trận** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$**. Xét** vectơ $x = (1, -1)$.

Ta thấy $A[x] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot [x]$.

Do đó, $\lambda = 1$ **là một giá trị riêng của** A **và** x **là một** vectơ **riêng của** A **ứng với** $\lambda = 1$.

- **Lưu ý: Nếu λ là một giá trị riêng của $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ thì** vectơ **riêng $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ứng với λ có các tọa độ thành phần thỏa mãn hệ phương trình tuyến tính**

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Phương trình đặc trưng

Từ $A[x] = \lambda[x]$ suy ra

$$(A - \lambda.I)[x] = [\theta],$$

ở đây, I là ma trận đơn vị cùng cấp với A. Muốn có nghiệm x không tầm thường thì

$$\boxed{\det(A - \lambda I) = 0,}$$

phương trình trên được gọi là **phương trình đặc trưng** *của* A

Một số tính chất

★ **Nếu** u **là** vectơ **riêng của** A **ứng với giá trị riêng** λ **thì** ku **(với** $k \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$**) cũng là** vectơ **riêng của** A **ứng với** λ**.**

★ **Nếu** u, v **là các** vectơ **riêng của** A **ứng với giá trị riêng** λ **thì** $u + v$ **cũng là** vectơ **riêng của** A **ứng với** λ**.**

Cách tìm trị riêng và véctơ riêng

Bước 1. **Giải phương trình đặc trưng** $\det(A - \lambda I) = 0$ **được các nghiệm** λ_k.

Cụ thể, nếu $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ **thì ta giải phương trình**

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Bước 2: **Với mỗi λ_k, giải hệ phương trình $(A - \lambda_k I)[x] = [\theta]$ được** vectơ **riêng x (khác θ) ứng với λ_k. Cụ thể, với $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, ta giải hệ**

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

để tìm ra $x_1, \cdots, x_n$. Sau đó, kết luận về x.

VD 1. Tìm tất cả các trị riêng (tắt là TR) và vectơ riêng (tắt là VTR) tương ứng của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Giải. **Xét PTĐT** $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 2;\ \lambda_2 = 5.$

+) Với $\lambda_1 = 2$, xét PT $(A - \lambda_1 I)[x] = [\theta]$ với $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, tức là PT

$$\begin{pmatrix} 3-2 & 1 \\ 2 & 4-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = -x_2.$$

Suy ra tập các VTR ứng với TR λ_1 là $\{x = t(1, -1)\ :\ t \neq 0\}$.

+) Với $\lambda_2 = 5$, xét PT $(A - \lambda_1 I)x = 0$ với $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, tức là PT

$$\begin{pmatrix} 3-5 & 1 \\ 2 & 4-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_2 = 2x_1.$$

Vậy tập các VTR ứng với TR λ_2 là $\{x = t(1, 2)\ :\ t \neq 0\}$.

VD 2. Tìm TR và các VTR tương ứng của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Kết quả.

- **PTĐT:** $\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda-5)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = 5.$

- $\lambda_1 = 1$, **VTR** $x = (x_1, x_2, x_3)$ **có các tọa độ thỏa mãn hệ**

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda_1 & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ, ta tìm được $x = t(1, 1, 0)$ **với** $t \neq 0$.

- $\lambda_2 = 5 \rightarrow x = t(1, -1, 0) + s(0, 0, 1)$ **với** $t^2 + s^2 \neq 0$.

VD 3. Tìm TR, VTR tương ứng của $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -3 & -7 & -7 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

Kết quả.

- **PTĐT** $\Leftrightarrow (\lambda + 1)^2(\lambda - 3) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -1;\ \lambda_2 = 3.$
- $\lambda_1 = -1 \rightarrow x = t(-2, 1, 0), \quad t \neq 0.$
- $\lambda_2 = 3 \rightarrow x = t(1, -1, 1), \quad t \neq 0.$

Lưu ý: **Cho toán tử tuyến tính $T : V \rightarrow V$. Giả sử V có một cơ sở là $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ và A là ma trận của T đối với cơ sở B. Khi đó các giá trị riêng và các** vectơ **riêng tương ứng của A và T là giống nhau.**

★ **Quy trình tìm các giá trị riêng và** vectơ **riêng của T là:**

1) Từ V, chọn một cơ sở dễ tìm nhất nếu cần phải tìm, ký hiệu nó bởi B.

2) Xác định ma trận A của T đối với cơ sở B.

3) Tìm các giá trị riêng và vectơ **riêng tương ứng của A.**

VD 4. Cho toán tử tuyến tính $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ có ma trận đối với cơ sở chính tắc trong $\mathbb{R}^2$ được cho bởi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Xác định các giá trị riêng và các vectơ riêng tương ứng của T.

Giải: Ta chỉ cần các giá trị riêng và vectơ riêng tương ứng của A.

Phương trình đặc trưng $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1, \lambda = 2.$

Với $\lambda = 1$, giải hệ $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -x + y = 0 \Leftrightarrow$ $(x, y) = (t, t)$, với $t \in \mathbb{R}$. Vậy các vectơ riêng có dạng $t(1, 1)$, với $t \neq 0$.

Với $\lambda = 2$, giải hệ $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = 0($ với mọi $y) \Leftrightarrow$ $(x, y) = (0, t)$, với $t \in \mathbb{R}$. Vậy các vectơ riêng có dạng $t(0, 1)$, với $t \neq 0$.

VD 5. Tìm TR, VTR của $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (2x + 2y,\ 4x)$.

Giải: Tìm ma trận chính tắc A của T (hay ma trận của T đối với cơ sở chính tắc trong $\mathbb{R}^2$). Ta có $T(1, 0) = (2, 4)$ và $T(0, 1) = (2, 0)$. Suy ra

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

A có các giá trị riêng là $\lambda = -2, \lambda = 4.$

Với $\lambda = -2$, các vectơ riêng có dạng $t(1, -2)$ với $t \neq 0.$

Với $\lambda = 4$, các vectơ riêng có dạng $t(1, 1)$ với $t \neq 0.$

VD 6. Tìm TR và các VTR tương ứng của toán tử tuyến tính

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + x_3,\ x_2,\ x_1 + x_3).$$

Kết quả. **Ma trận chính tắc A của T là** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Tìm được $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2$.

- **Với $\lambda_1 = 1$ tìm được $x = t(0, 1, 0), t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.**
- **Với $\lambda_2 = 0$ tìm được $x = s(-1, 0, 1), s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.**
- **Với $\lambda_3 = 2$ tìm được $x = k(1, 0, 1), k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.**

VD 7. Tìm TR và các VTR tương ứng của toán tử tuyến tính

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \ (x_1, x_2, x_3) \mapsto (5x_1, \ -5x_1 + 3x_2 - 5x_3, \ -3x_1 - 2x_2).$$

Kết quả. **Ma trận chính tắc A của T là** $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & -5 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Tìm được $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 5$ (bội 2).

- **Với $\lambda_1 = -2$ tìm được $x = t(0, 1, 1)$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.**
- **Với $\lambda_2 = 5$ tìm được $x = s(0, -5, 2)$, $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.**

VD 8. Tìm TR và các VTR tương ứng của toán tử tuyến tính

$$T : P_2(x) \to P_2(x)$$

$$a + bx + cx^2 \mapsto (3a - 2b) + (-2a + 3b)x + (5c)x^2.$$

Kết quả. **Ma trận chính tắc A của T là $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.**

Tìm được $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$ (bội 2).

- **Với $\lambda_1 = 1$ tìm được $p = t(1 + x)$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.**
- **Với $\lambda_2 = 5$ tìm được $p = s(-1 + x) + k(x^2)$, $(s, k) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.**

III. CHÉO HÓA MA TRẬN

Đặt vấn đề

Giả sử $\boldsymbol{T} : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ *là một toán tử tuyến tính.*

$\Rightarrow$ *ma trận* $\boldsymbol{A}$ *của* $\boldsymbol{T}$ *phụ thuộc vào cơ sở chọn trong* $\boldsymbol{V}$.

Hỏi : có cơ sở nào của $\boldsymbol{V}$ *sao cho* $\boldsymbol{A}$ *có dạng đơn giản (dạng chéo) không?*

Ta biết rằng:

nếu A *và* A' *là hai ma trận của* T *thì* $A' = P^{-1}AP$

(với P **là ma trận chuyển cơ sở thích hợp)**

Như vậy bài toán trở thành:

Có tồn tại ma trận khả nghịch P *sao cho* $P^{-1}AP$ *có dạng chéo không?*

$\Rightarrow$ cần xem xét hai vấn đề:

1. **A cần thỏa mãn điều kiện gì để có thể đưa được về dạng chéo?**

2. **ma trận P xác định như thế nào?**

MA TRẬN CHÉO HÓA ĐƯỢC

Cho $A \in Mat(n)$, nếu có P sao cho $P^{-1}AP = A'$ là ma trận chéo thì

- ***A*** *chéo hóa được*
- ***P*** *làm chéo hóa* ***A*****.**

Định lý **(Điều kiện chéo hóa ma trận)**

$A \in Mat(n)$ *chéo hóa được* $\Leftrightarrow$ *A có* ***n*** *VTR độc lập tuyến tính.*

Định lý:

Nếu ma trận ***A*** *vuông cấp* ***n*** *có* ***n*** *trị riêng khác nhau thì* ***A*** *chéo hóa được.*

QUI TRÌNH CHÉO HÓA MA TRẬN

Bước 1. **Tìm các giá trị riêng của A.**

Bước 2. **Tìm n VTR độc lập tt: $p_1, p_2, \ldots, p_n$ của A.**

Bước 3. **Lập ma trận P có các cột lần lượt là $p_1, p_2, \ldots, p_n$.**

Bước 4. **Ma trận $A' = P^{-1}AP$ chính là ma trận chéo.**

Chú ý

Đường chéo của $\mathbf{A'}$ *là* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *(là các TR tương ứng với các VTR* $p_1, p_2, \ldots, p_n$*).*

VD 9. Chéo hóa ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Giải: **Phương trình đặc trưng** $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2, \lambda = 3.$

Với $\lambda = 2$**, các** vectơ **riêng có dạng** $t(1,-4)$**, với** $t \in \mathbb{R}$**. Cho** $t = 1$**, ta chọn được** $p_1 = (1,-4)$**.**

Với $\lambda = 3$**, các** vectơ **riêng có dạng** $t(0,1)$**, với** $t \in \mathbb{R}$**. Cho** $t = 1$**, ta chọn được** $p_2 = (0,1)$**.**

Ta thấy $\{p_1, p_2\}$ **là ĐLTT, Suy ra** A **chéo hóa được.**

Ma trận P **gây chéo** A **có dạng** $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$**. Khi đó** $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$**.**

VD 10. Chéo hóa ma trận

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{bmatrix}.$$

Giải. **PTĐT:** $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda)-(2-\lambda) = -\lambda(2-\lambda)^2 = 0.$

Tìm được $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 2.$

– Với TR $\lambda = 0$**, các** vectơ **riêng có dạng** $t(1,1,0)$**, với** $t \in \mathbb{R}$**. Cho** $t = 1$**, ta tìm được 1 VTR** $p_1 = (1,1,0).$

– Với TR $\lambda = 2$**, các** vectơ **riêng có dạng** $c_1(1,-1,0) + c_2(0,0,1)$**, với** $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$**. Cho** $c_1 = 1, c_2 = 0$ **và** $c_1 = 0, c_2 = 1$**, ta chọn được 2 VTR ĐLTT:** $p_2 = (1,-1,0),\ p_3 = (0,0,1).$

Hệ $\{p_1,\ p_2,\ p_3\}$ **ĐLTT, vậy** A **chéo hóa được và ma trận gây chéo**

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

VD 11. *(SV tự làm)* Chéo hóa ma trận

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

VD 12. Chéo hóa ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Giải. **Phương trình đặc trưng:**

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda)+1 = (\lambda-3)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3.$$

Do đó, A có trị riêng duy nhất $\lambda = 3$, véc-tơ riêng ứng với trị riêng $\lambda = 3$ là nghiệm của $(A-3I)x = 0$, nghĩa là $\begin{cases} -x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$

Nghiệm của hệ ở dạng $x = m(1,-1)$ $(m \in \mathbb{R})$. Nếu lấy u là một vectơ **riêng của A thì $u = t(1,-1)$. Do đó, ta không thể tìm được hai** vectơ **riêng của A để tạo thành hệ ĐLTT.**

Vậy A KHÔNG chéo hóa được.

IV. CHÉO HÓA TRỰC GIAO MA TRẬN

Đặt vấn đề

Giả sử V là KGVT n chiều có tích vô hướng *(KG Euclid)*

$T : V \to V$ là toán tử tuyến tính.

*Hãy tìm một cơ sở trực giao để trong đó ma trận của **T** có dạng đường chéo?*

Ma trận trực giao

$P \in Mat(n)$ **gọi là** *trực giao* **nếu** $P^T P = I_n$.

VD: $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Nhận xét

- P *trực giao* $\Leftrightarrow$ *các véc-tơ cột (hàng) của nó lập thành hệ trực chuẩn.*
- P *trực giao thì khả nghịch và* $P^{-1} = P^T$.

Trị riêng và véc-tơ riêng của ma trận đối xứng A

Cho $A \in Mat(n)$. Nếu $A = A^T$ thì ta nói rằng A là ma trận đối xứng.

Ví dụ: **Các ma trận** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ **là các ma trận đối xứng.**

Chú ý rằng không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ *có tích vô hướng thông thường là* $< u, v >= x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$, *với* $u = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *và* $v = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$.

Chúng ta ta công nhận các kết quả sau:

- *Hai VTR ứng với 2 TR khác nhau của ma trận đối xứng **A** luôn trực giao nhau.*
- *Ma trận đối xứng $\boldsymbol{A \in Mat(n)}$ sẽ có **n** TR thực (đơn hoặc bội) và **n** VTR trực chuẩn tương ứng.*

Định nghĩa

Cho $A \in Mat(n)$. Nếu có P trực giao sao cho $P^{-1}AP = A'$ (chéo) thì

- *A chéo hóa trực giao được*
- *P làm chéo hóa trực giao A*

Ta cần giải quyết 2 vấn đề:

- **tìm điều kiện để ma trận vuông A chéo hóa trực giao được**
- **xác định ma trận P làm chéo hóa trực giao ma trận A.**

Định lý

*Ma trận vuông **A** cấp **n** chéo hóa trực giao được khi và chỉ khi **A** đối xứng.*

Quy trình chéo hóa trực giao các ma trận đối xứng

Bước 1. **Giải PTĐT, tìm 1 cơ sở cho mỗi không gian riêng của A.**

Bước 2. **Áp dụng Gram-Smidt vào mỗi cơ sở đó → cơ sở trực chuẩn.**

Bước 3. **Lập ma trận P có các cột là các véc-tơ cơ sở trực chuẩn ở trên.**

Khi đó $A' = P^{-1}AP$ là ma trận đường chéo.

VD 13. Chéo hóa trực giao các ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Giải: **Ta thấy A là ma trận đối xứng nên A chéo hóa trực giao được.**

A có các giá trị riêng là $\lambda = 0, \lambda = 5$.

Với $\lambda = 0$, ta nhận được $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + 2y = 0$. Do đó các vectơ riêng có dạng $t(-2, 1)$ với $t \in \mathbb{R}$. Chọn $p_1 = (-2, 1)$.

Suy ra $u_1 = \dfrac{p_1}{||p_1||} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Với $\lambda = 5$, ta nhận được $-4x + 2y = 0, 2x - y = 0$, và giải hệ này thì thu được dạng của các vectơ **riêng là $t(1, 2)$ với $t \in \mathbb{R}$. Chọn $p_2 = (1, 2)$.**

Suy ra $u_2 = \dfrac{p_2}{||p_2||} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. Khi đó $P = ([u_1]\ [u_2])$ và $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

VD 14. Chéo hóa trực giao ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Hướng dẫn. **$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 4$ (bội 2).**

– Với $\lambda_1 = -2$ giải được $x_1 + 2x_2 = 0, x_2 - x_3 = 0$ hay $x = t(-2, 1, 1)$. Cho $t = 1$, ta chọn được $p_1 = (-2, 1, 1)$. Suy ra $u_1 = \frac{p_1}{||p_1||} = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

– Với $\lambda_2 = 4$ giải được $2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x = m\,(1, 0, 2) + n\,(0, 1, -1)$.

$\Rightarrow$ cơ sở của KGR là $S = \{p_2 = (1, 0, 2),\ p_3 = (0, 1, -1)\}$.

Trực chuẩn hóa $S \rightarrow S' = \left\{u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), u_3 = \left(\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}, -\frac{1}{\sqrt{30}}\right)\right\}$.

Khi đó $P = \left([u_1]\ \ [u_2]\ \ [u_3]\right)$ và $A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ là MT chéo.

VD 15. Chéo hóa trực giao ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Kết quả. $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3.$

– Với $\lambda_1 = 0$ giải được $x_1 = x_2 = x_3$.

– Với $\lambda_2 = 3$ giải được $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

*Từ đó SV tự tìm được ma trận trực giao **P**.*