CHƯƠNG 2

GIẢI GẦN ĐÚNG PHƯƠNG TRÌNH PHI TUYẾN

I. ĐẶT BÀI TOÁN :

Bài toán : tìm nghiệm gần đúng của phương trình

$$f(x) = 0$$

với f(x) là hàm liên tục trên khoảng đóng [a, b] hay khoảng mở (a,b).

1. Khoảng cách ly nghiệm

Khoảng đóng hay mở trên đó tồn tại duy nhất nghiệm của phương trình gọi là khoảng cách ly nghiệm

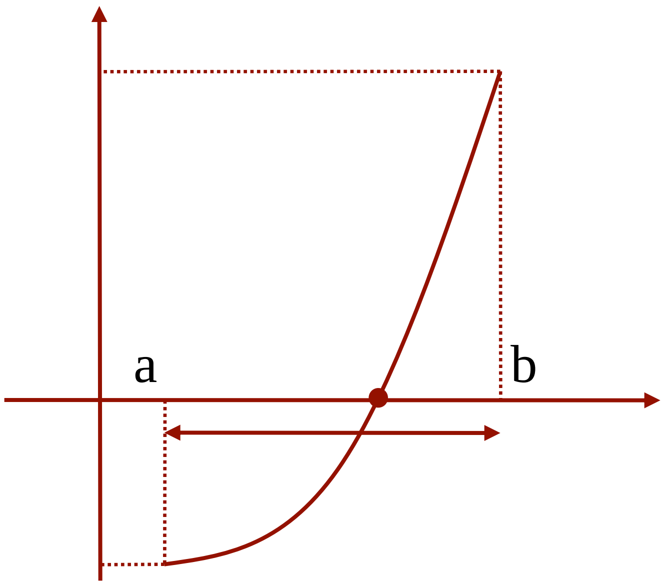
Định lý :

Nếu hàm f liên tục trên đoạn [a,b] thoả điều kiện $f(a)\ f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên [a,b].

Nếu hàm f đơn điệu ngặt thì nghiệm là duy nhất.

[a, b] là KCLN của pt khi

- f(a) f(b) < 0
- Đạo hàm f' không đổi dấu trên đoạn [a,b]



Ví dụ :

Tìm các khoảng cách ly nghiệm của pt

$$f(x) = 3x^2 + \ln x = 0$$

Giải :

$$f'(x) = 6x + 1/x > 0 \quad x>0$$

f hàm tăng ngặt nên pt có tối đa 1 nghiệm

$f(0.3)= -0.93$, $f(0.4)=-0.44$, $f(0.5)=0.057$

Vây khoảng cách ly nghiệm là (0.4,0.5)

Ví dụ :

Tìm các khoảng cách ly nghiệm của pt

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$$

giải :

Ta lập bảng giá trị tại các điểm đặc biệt

x		-3						3	
f(x)	-	-						+	+

Nhìn vào bảng ta thấy pt có nghiệm trong các khoảng (-2, -1) (0, 1) (1,2)

Vì pt bậc 3 có tối đa 3 nghiệm, nên các khoảng cách ly nghiệm là : (-2,-1) (0,1) (1,2)

Bài tập :

1. Tìm các khoảng cách ly nghiệm của pt

$$f(x) = e^x - x^2 + 3x - 2$$

Giải

$$f'(x) = e^x - 2x + 3$$

Ta lập bảng giá trị tại các điểm đặc biệt

x		-3						3	
f(x)	-	-						+	+

Nhận xét : f'(x) > 0, x□[0,1].

Vây khoảng cách ly nghiêm (0,1)

2. Tìm các khoảng cách ly nghiệm của pt

$$f(x) = x\cos x - 2x^2 + 3x + 1$$

$$f'(x) = \cos x - x\sin x - 4x + 3$$

Ta lập bảng giá trị tại các điểm đặc biệt

x		-3						3	
f(x)	-	-						-	-

Nhận xét :

f'(x) < 0   x□[1,2],

f'(x) > 0   x□[-1,0]

Vây các khoảng cách ly nghiệm : (-1. 0), (1,2)

2. Cách giải gần đúng pt f(x) = 0

- B1: tìm tất cả các khoảng cách ly nghiệm

- B2: trong từng khoảng cách ly nghiệm, tìm nghiệm gần đúng của phương trình

Các phương pháp giải gần đúng

- Phương pháp chia đôi
- Phương pháp lặp đơn
- Phương pháp lặp Newton

3. Công thức sai số tổng quát :

Định lý :

Giả sử f(x) liên tục trên [a,b], khả vi trên (a,b)
Nếu x* , x là nghiệm gần đúng và nghiệm chính xác của phương trình và

$$|f'(x)| \geq m > 0, \quad x \in (a,b)$$

thì sai số được đánh giá theo công thức :

$$\boxed{|x^* - x| \leq |f(x^*)| / m}$$

Ví dụ : Xét phương trình

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5x + 1 = 0$$

trên khoảng [2.2, 2.6]

Tính sai số nếu chọn nghiệm $x^* = 2.45$

Giải

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 5$

$g(x)=|f'(x)| = 6x^2 -6x-5$, x□[2.2,2.6]

$g'(x)=12x-6>0$, x□[2.2,2.6],

$g(2.2)=10.84$

® $|f'(x)| \geq 10.84 = m$, x□[2.2,2.6]

Sai số $|x^*-x| \leq |f(x^*)|/m$ H 0.0143

Ghi nhớ : sai số luôn làm tròn lên

Ví dụ : Xét phương trình

$$f(x) = 5x + \sqrt[7]{x} - 24 = 0$$

trên khoảng [4,5]

Tính sai số nếu chọn nghiệm x* = 4.9

Giải

$$f'(x) = 5 + \frac{1}{7\sqrt[7]{x^6}}$$

=> $|f'(x)| \geq 5 + \frac{1}{7\sqrt[7]{5^6}} = m$, x□[4,5]

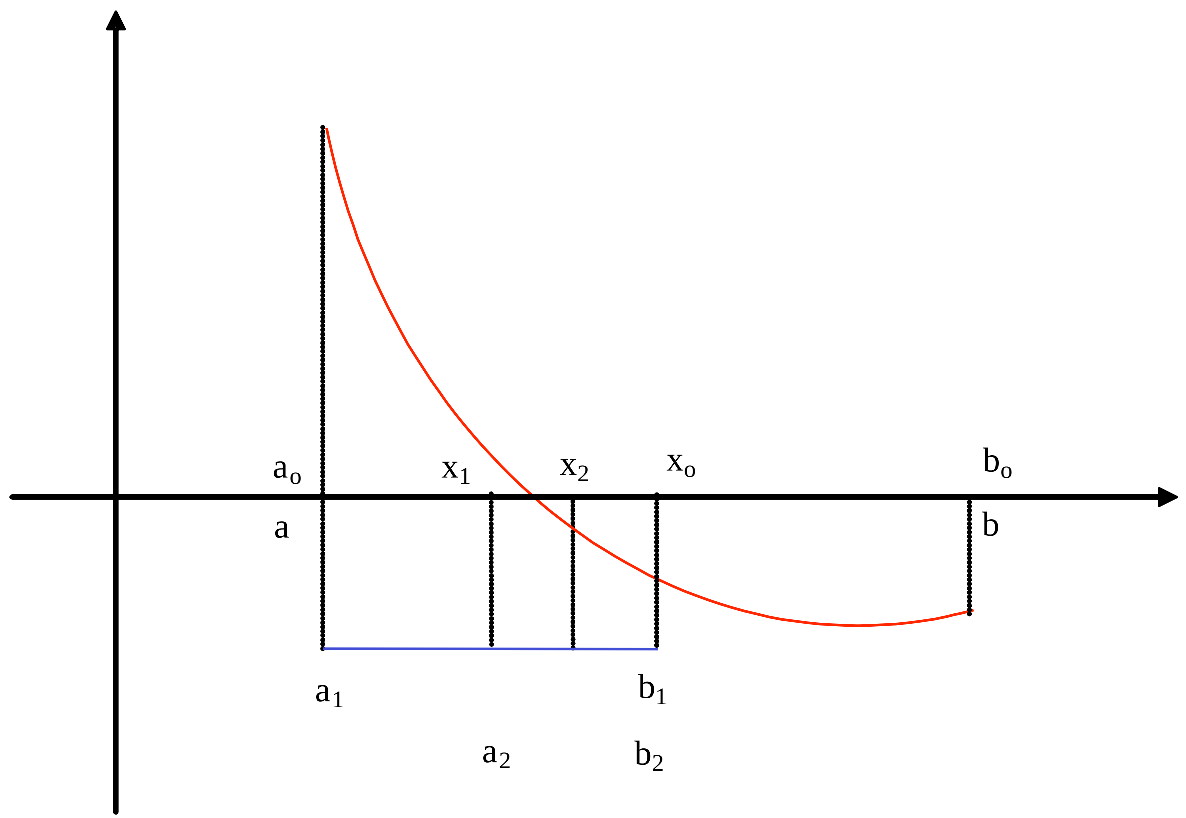
Sai số

$|x^*-x| \leq |f(x^*)|/m$ H 0.3485

II. Phương Pháp Chia Đôi

Xét phương trình f(x) = 0 có nghiệm chính xác x trong khoảng cách ly nghiệm [a,b] và f(a)f(b) < 0.

Ý nghĩa hình học



1.Đặt $[a_o,b_o]=[a, b]$, $d_0=b_0-a_0=b-a$

Chọn x_o là điểm giữa của $[a_0,b_0]$

Ta có $x_o = (a_0+b_0) / 2$

Nếu $f(x_o) = 0$ thì x_o là nghiệm xong

2. Nếu

- $f(a_o)f(x_o) < 0$: đặt $a_1 = a_o$, $b_1 = x_o$
- $f(x_o)f(b_o) < 0$: đặt $a_1 = x_o$, $b_1 = b_o$

Ta thu được $[a_1, b_1]$ $[a_o,b_o]$ chứa nghiệm x

$d_1 = b_1-a_1= (b-a)/2$,

điểm giữa $x_1 = (a_1+b_1) / 2$

3. Tiếp tục quá trình chia đôi như vậy đến n lần ta được

$[a_n, b_n]$ □ $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ chứa nghiệm x

$d_n = b_n - a_n = (b-a)/2^n$, $f(a_n)f(b_n) < 0$

điểm giữa $x_n = (a_n + b_n) / 2$, $a_n \leq x_n \leq b_n$

Ta có $\lim x_n = x$

Vậy x_n là nghiệm gần đúng của pt

Công thức sai số

$$|x_n - x| \leq (b-a) / 2^{n+1}$$

Ví dụ : Tìm nghiệm gần đúng của pt

$$f(x) = 5x^3 - \cos 3x = 0$$

trên khoảng cách ly nghiệm [0,1] với n=3

Giải

Ta lập bảng

n	a_n	$f(a_n)$	b_n	$f(b_n)$	x_n	$f(x_n)$	$\otimes_n$
0	0	-	1	+			0.5
1							0.25
2							0.125
3							0.0625

Nghiệm gần đúng là $x_3 = 0.4375$

Ví dụ : Tìm nghiệm gần đúng của pt

$$f(x) = 2+\cos(e^x-2)-e^x = 0$$

trên khoảng [0.5,1.5] với sai số 0.04

Giải

Ta lập bảng

n	a_n $f(a_n)$	b_n $f(b_n)$	x_n $f(x_n)$	$\otimes_n$
0	0.5 +	1.5 -		0.5
1				0.25
2				0.125
3				0.0625
4				0.03125

Nghiệm gần đúng là $x = 1.03125$

III. Phương Pháp Lặp Đơn

Xét phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm chính xác x trong khoảng cách ly nghiệm $[a,b]$ và $f(a)f(b) < 0$.

Ta chuyển pt $f(x) = 0$ về dạng

$$x = g(x)$$

Bây giờ ta tìm điều kiện để dãy $\{x_n\}$ hội tu

Ta có định nghĩa sau

Định Nghĩa : Hàm g(x) gọi là <u>hàm co</u> trên đoạn [a,b] nếu □q : 0<q<1 sao cho

$$| g(x) - g(y) | \leq q \, | x - y |, \quad x, y \;\square [a,b]$$

q gọi là hệ số co

Để kiểm tra hàm co, ta dùng định lý sau

Định lý : Nếu hàm g(x) liên tục trên [a,b], khả vi trên (a,b) và □q : 0<q<1 sao cho

$$| g'(x) | \leq q, \quad x \;\square (a,b)$$

Thì g(x) là hàm co với hệ số co q

Ví dụ : Xét tính chất co của hàm

$$g(x) = \sqrt[3]{10 - x}$$

trên khoảng [0,1]

Giải

Ta có

$$|g'(x)| = \frac{1}{3\sqrt[3]{(10-x)^2}} \le \frac{1}{3\sqrt[3]{81}} = q, \forall x \in [0,1]$$

q H 0.0771 < 1

Nên g(x) là hàm co

Để tìm nghiệm gần đúng, ta chọn giá trị ban đầu x_o [a,b] tùy ý

Xây dựng dãy lặp theo công thức

$$x_n = g(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Bài toán của ta là khảo sát sự hội tụ của dãy $\{x_n\}$

Tổng quát, dãy $\{x_n\}$ có thể hội tụ hoặc phân kỳ

Nếu dãy $\{x_n\}$ hội tụ thì nó sẽ hội tụ về nghiệm của pt

Ví dụ : Xét tính chất co của hàm

$$g(x) = (x^2-e^x+2)/3$$

trên khoảng [0,1]

Giải

$$g'(x) = (2x-e^x)/3$$

$g''(x) = (2-e^x)/3=0$ ™ $x = \ln 2$

Ta có $g'(0) = -0.33$, $g'(1) = -0.24$

$$g'(\ln 2) = -0.2046$$

® $|g'(x)| \le 0.33 = q < 1$, x□[0,1]

Nên g(x) là hàm co

Định lý (nguyên lý ánh xạ co) :

Giả sử g(x) là hàm co trên [a,b] với hệ số co q, đồng thời g(x) □ [a,b], x□ [a,b]

Khi ấy với mọi giá trị ban đầu x_o□ [a,b] tùy ý, dãy lặp $\{x_n\}$ hội tụ về nghiệm của pt

Ta có công thức đánh giá sai số

(1) $$|x_n - x| \le \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|$$ tiên nghiệm

(2) $$|x_n - x| \le \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|$$ hậu nghiệm

Nhận xét :Công thức (2) cho sai số tốt hơn công thức (1)

Ví dụ : Xét phương trình

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 5 = 0$$

trên khoảng cách ly nghiệm [3,4]

Giả sử chọn giá trị ban đầu $x_o = 3.5$

a. Tính gần đúng nghiệm x_4 và sai số $\otimes_4$

Giải

Ta chuyển pt về dạng $x = g(x)$

Có nhiều cách chuyển :

Cách 1: $$x = \frac{x^2}{3} - \frac{5}{3x} = g(x)$$

$$g'(x) = \frac{2x}{3} + \frac{5}{3x^2}$$ Không phải hàm co

Cách 2: $x = 3 + \dfrac{5}{x^2} = g(x)$

$$g'(x) = -\frac{10}{x^3} \Rightarrow |g'(x)| \le \frac{10}{27} = q, \forall x \in [3,4]$$

q H 0.37037 < 1 nên g hàm co

Hiển nhiên g(x) □ [3,4] nên pp lặp hội tụ

xây dựng dãy lặp

$$\begin{cases} x_0 = 3.5 \\ x_n = 3 + \dfrac{5}{x_{n-1}^2}, \forall n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Ta lập bảng

n	x_n
0	3.5
1	3.408163265
2	3.430456452
3	3.424879897
4	3.426264644

Sai số

$$tien\ \ nghiem\ \Delta_4 = \frac{q^4}{1-q}|x_1 - x_0| \approx 0.0028$$

$$hau\ \ nghiem\ \Delta_4 = \frac{q}{1-q}|x_4 - x_3| \approx 0.00082$$

b. Tìm nghiệm gần đúng với sai số 0.001 (dùng công thức tiên nghiệm)

$$|x_n - x| \le \frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_0| \le 0.001$$

$$\Rightarrow \quad n \ge \log\left(\frac{(1-q)\,0.001}{|x_1 - x_0|}\right) / \log q = 5.0164$$

$$\Rightarrow n = 6$$

Nghiệm gần đúng $x_6 = 3.426005817$

c. Tìm nghiệm gần đúng với sai số 0.001 (dùng công thức hậu nghiệm)

$$|x_n - x| \le \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \le 0.001$$

Ta lập bảng

n	x_n	$\otimes_n$
0	3.5	
1		
2		
3		
4		

Nghiệm gần đúng x* = 3.426264644

Ví dụ : Tìm nghiệm gần đúng của pt

$$x = \sqrt[3]{1000 - x}$$

trên khoảng cách ly nghiệm [9,10] với sai số 10^{-8}

chọn giá trị ban đầu $x_0 = 10$

a. Dùng công thức tiên nghiệm

b. Dùng công thức hậu nhiệm

Giải $$x = \sqrt[3]{1000 - x} = g(x)$$

$$|g'(x)| = \frac{1}{3\sqrt[3]{(1000-x)^2}} \le \frac{1}{3\sqrt[3]{990^2}} = q, \forall x \in [9,10]$$

q H 0.0034 < 1, nên g(x) là hàm co

Dễ dàng kiểm tra g(x) □[9,10], x □ [9,10]

$$(9 \le \sqrt[3]{1000 - x} \le 10 \Leftrightarrow 0 \le x \le 271)$$

Theo nguyên lý ánh xạ co thì pp lặp hội tu

xây dựng dãy lặp

$$\begin{cases} x_0 = 10 \\ x_n = \sqrt[3]{1000 - x_{n-1}} \quad \forall n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

a. Sai số (dùng công thức tiên nghiệm)

$$|x_n - x| \le \frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_0| \le 10^{-8}$$

$$\Rightarrow \quad n \ge \log\left(\frac{(1-q)10^{-8}}{|x_1 - x_0|}\right) / \log q = 2.6376$$

$$\Rightarrow n = 3$$

Nghiệm gần đúng $x_3 = 9.966666789$

b. Sai số (dùng công thức hậu nghiệm)

$$|x_n - x| \le \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \le 10^{-8}$$

Ta lập bảng

n	x_n	$\otimes_n$
0	10	
1		
2		
3		

Nghiệm gần đúng $x_3 = 9.966666789$

Ví dụ : Xét phương trình

$$x = \cos x$$

trên khoảng cách ly nghiệm [0,1]

Giả sử chọn giá trị ban đầu $x_o = 1$. Xác định số lần lặp n khi xấp xỉ nghiệm pt với sai số 10^{-8}

(dùng công thức tiên nghiệm)

Giải

a. $g(x)=\cos x$

$g'(x)=-\sin x$

g(x) là hàm co với hệ số co q = sin1H0.8415 < 1

Mặt khác g(x) =cos x □[0,1] nên pp lặp hội tụ xây dựng dãy lặp

$x_o = 1$

$x_n = \cos x_{n-1}$

Xác định số lần lặp bằng công thức tiền nghiệm

$$|x_n - x| \le \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \le 10^{-8}$$

$$\Rightarrow \quad n \ge \log\left(\frac{(1-q)10^{-8}}{|x_1 - x_0|}\right) / \log q = 112.8904$$

Vậy số lần lặp n = 113

Nhận xét :

Tốc độ hội tụ của pp lặp đơn phụ thuộc vào giá trị của hệ số co q

- q càng nhỏ (gần với 0) thì pp lặp hội tụ càng nhanh
- q càng lớn (gần với 1) thì pp lặp hội tụ càng chậm

IV. Phương Pháp Lặp Newton

Một phương pháp lặp khác là pp lặp Newton, nếu hội tụ sẽ cho tốc độ hội tụ nhanh hơn

Giả sử hàm f khả vi trên khoảng cách ly nghiệm [a,b] với f(a)f(b) < 0 và f’(x)   0,   x□[a,b]

Phương trình f(x) = 0 tương đương với pt

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = g(x)$$

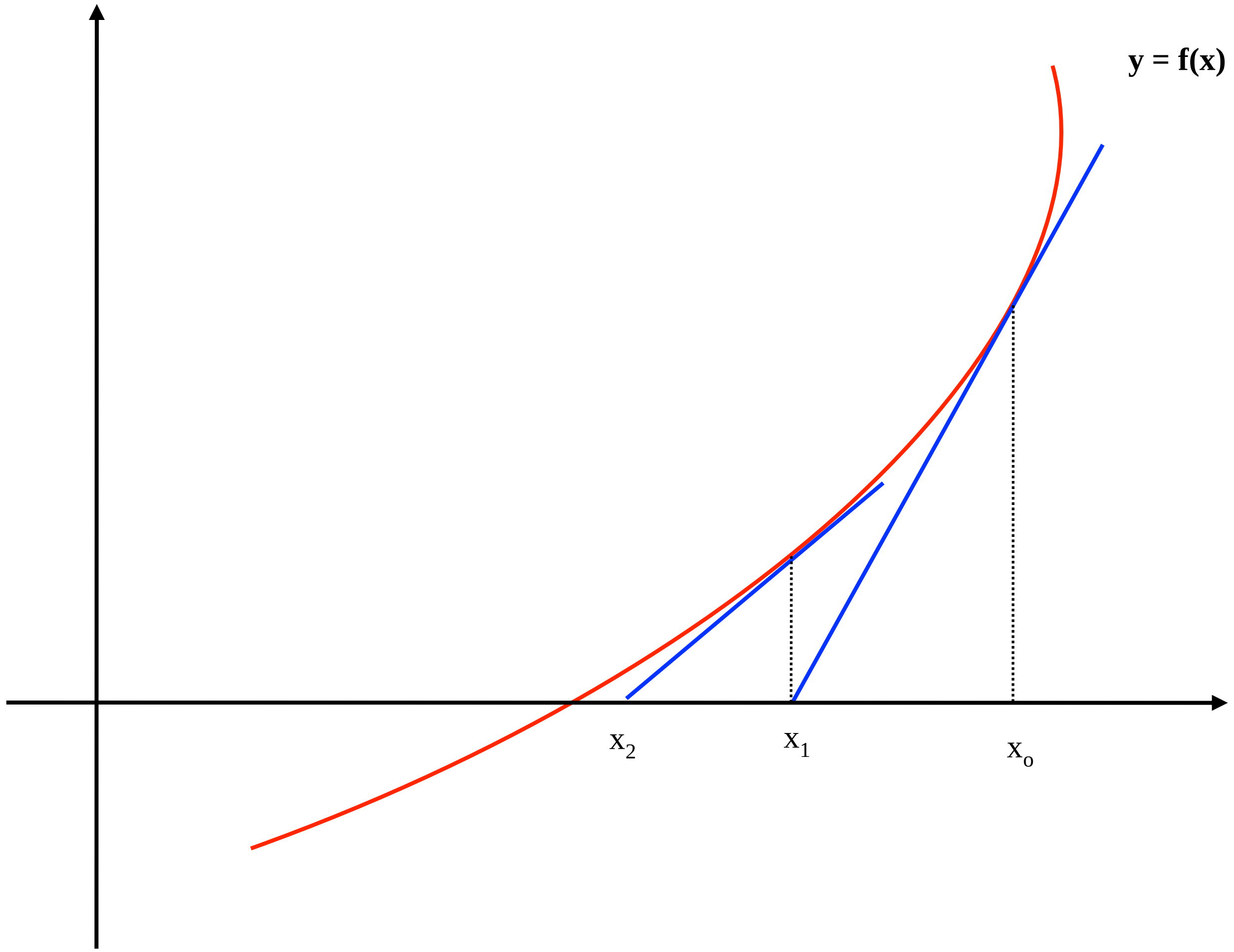
Để tìm nghiệm gần đúng ta chọn 1 giá trị ban đầu x_o□[a,b] tùy ý. Xây dựng dãy lặp $\{x_n\}$ theo công thức

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad \forall n = 1, 2, \ldots$$

Công thức này gọi là <u>công thức lặp Newton</u>

Tổng quát, dãy $\{x_n\}$ có thể hội tụ hoặc phân kỳ

Ý nghĩa hình học



Định lý :

Giả sử hàm f(x) có đạo hàm đến cấp 2 liên tục và các đạo hàm f'(x) và f"(x) không đổi dấu trên đoạn [a,b].

Khi ấy nếu chọn giá trị ban đầu x_o thỏa điều kiện Fourier

$$\boxed{f(x_o)f''(x_o) > 0}$$

Thì dãy lặp $\{x_n\}$ xác định theo công thức Newton sẽ hội tụ về nghiệm của pt

Chú ý :

- Điều kiện Fourier chỉ là điều kiện đủ không phải là điều kiện cần
- Qui tắc đơn giản chọn x_0 thỏa điều kiện Fourier :

nếu đạo hàm cấp 1 và 2 cùng dấu, chọn $x_o = b$. Ngược lại trái dấu chọn $x_o = a$

- Để đánh giá sai số của pp Newton ta dùng công thức sai số tổng quát

$$|x_n - x| \le |f(x_n)| / m$$

$$m = \min_{x \in [a,b]} |f'(x)|$$

Bai tap : Cho phương trình

$$f(x) = x^3 - 9x^2 - 4x + 12 - \cos(3x/4) = 0$$

trên khoảng cách ly nghiệm [0,2]. Dùng pp Newton tính nghiệm x_3 và đánh giá sai số $\otimes_3$ theo công thức sai số tổng quát

Giải

1.Kiểm tra điều kiện hội tu

$f'(x)=3x^2-18x-4+3\sin(3x/4)/4<0$

$f''(x)=6x-18+9\cos(3x/4)/16<0, \quad x\square[0,2]$

Đạo hàm f', f'' cùng dấu, chọn $x_0=2$

2. Xây dựng dãy lặp Newton

$$x_0 = 2$$

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^3 - 9x_{n-1}^2 - 4x_{n-1} + 12 - \cos(3x_{n-1}/4)}{3x_{n-1}^2 - 18x_{n-1} - 4 + 3\sin(3x_{n-1}/4)/4}$$

Công thức sai số

$$m = \min_{0 \le x \le 2} |3x^2 - 18x - 4 + 3\sin(3x/4)/4| = 4$$

$$\Delta_n = \frac{|f(x_n)|}{m} = \frac{|x_n^3 - 9x_n^2 - 4x_n + 12 - \cos(3x_n/4)|}{4}$$

n	x_n	$\otimes_n$
0	2	
1		
2		
3		

Ví dụ : Tìm nghiệm gần đúng của pt

$$f(x) = x - \cos x = 0$$

Trên khoảng cách ly nghiệm [0,1] với sai số 10^{-8}

Giải

1.Kiểm tra điều kiện hội tu

$f'(x) = 1+\sin x > 0, \quad x\square[0,1]$

$f''(x) = \cos x > 0$

$f'(x)$ và $f''(x)$ cùng dấu, chọn $x_o = 1$ ta có pp lặp Newton hội tụ

2. Xây dựng dãy lặp Newton

$$x_0 = 1$$

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1} - \cos x_{n-1}}{1 + \sin x_{n-1}} \quad \forall n = 1, 2, \ldots$$

Công thức sai số

$$m = \min_{0 \le X \le 1} | f'(x) | = 1$$

$$\Delta_n = \frac{| f(x_n) |}{m} = | x_n - \cos x_n | \le 10^{-8}$$

n	x_n	$\otimes_n$
0	1	
1		
2		
3		

Nghiệm gần đúng $x_3 = 0.739085133$