

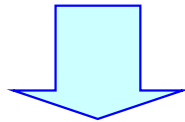
Nhập môn Kỹ thuật Truyền thông
Bài 5: Hiệu năng bộ thu – Xác suất thu sai

PGS. Tạ Hải Tùng

Truyền thông trên kênh

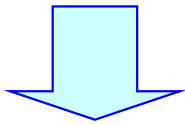
Chuỗi dữ liệu nhị phân

\underline{u}_T

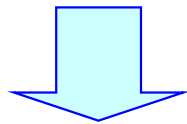


Dạng sóng được truyền

$s(t)$



Kênh AWGN



Dạng sóng nhận được

$r(t) = s(t) + n(t)$

$\underline{u}_T \longrightarrow s(t) \longrightarrow r(t) = s(t) + n(t)$

Vấn đề tại phía bộ thu

$$\underline{u}_T \longrightarrow s(t) \longrightarrow r(t) = s(t) + n(t)$$

Vấn đề:

nhận được $r(t) \rightarrow$ khôi phục \underline{u}_T

Xây dựng hệ cơ sở trực chuẩn B từ M (không gian bao gồm các $s_i(t)$)

Chiếu r nhận được lên B tạo vector \underline{r}

Tiêu chuẩn khoảng cách gần nhất

$$\text{given } \underline{r} = \underline{\rho} \quad \text{choose } \underline{s}_R = \arg \min_{\underline{s}_i \in M} d_E^2(\underline{\rho} - \underline{s}_i)$$

Có thể được biểu diễn bởi tiêu chuẩn Vùng Voronoi

Ⓒ4 $\text{given } \underline{r} = \underline{\rho} \quad \text{if } \underline{\rho} \in V(\underline{s}) \text{ Chọn } \underline{s}_R = \underline{s}$

Xác suất lỗi – Error probability

Để xác định chất lượng của một đường truyền vô tuyến số: ta cần tính xác suất phát hiện lỗi: có 2 loại

Tỷ lệ lỗi ký hiệu (SYMBOL ERROR RATE) = SER = $P_s(e)$ =
$$P_s(e) = P(\underline{s}_R[n] \neq \underline{s}_T[n])$$

Tỷ lệ lỗi bit (BIT ERROR RATE) = BER = $P_b(e)$ =
$$P(u_{\underline{R}}[i] \neq u_{\underline{T}}[i])$$

Một số khái niệm

$$R_b$$

Tốc độ truyền dòng bit

$$T_b = 1/R_b$$

Thời gian truyền 1 bit

$$T = k T_b$$

Thời gian truyền một ký hiệu, với giả thiết 1 ký hiệu tương ứng k bit

$$R = 1/T$$

Tốc độ truyền ký hiệu

E_b
Năng lượng để truyền 1 bit

E_s
Năng lượng để truyền 1 ký hiệu

$S = E_b R_b = E_s R$
Công suất tín hiệu

N_0
Mật độ phổ công suất tạp âm

B
Băng thông tín hiệu

$N = N_0 B$
Công suất tạp âm

$$S/N$$

Tỷ số Tín trên Tạp (Signal to Noise ratio)

$$E_b/N_0$$

Tỷ số S/N liên quan đến 1 bit thông tin, hay nói cách khác tỷ số năng lượng truyền 1 bit / mật độ phổ công suất tạp âm

Mối liên hệ:

$$\frac{S}{N} = \frac{E_b}{N_0} \frac{R_b}{B} = \frac{E_b}{N_0} \eta$$

Trong đó

$$\eta = \frac{R_b}{B} \text{ hiệu quả sử dụng phổ (spectral efficiency)}$$

Hiệu năng của hệ thống được diễn tả như một hàm của E_b/N_0

Tỷ số này tỷ lệ với công suất tín hiệu nhận được

$$S = \frac{S}{N} N = \frac{E_b}{N_0} \frac{R_b}{B} N_0 B = \frac{E_b}{N_0} R_b N_0$$

Tính SER

Khái niệm: $P_S(e) = P(\underline{s}_R \neq \underline{s}_T)$

Ta có thể biểu diễn:

$$P_S(e) = \sum_{i=1}^m P_S(e \mid \underline{s}_T = \underline{s}_i) P(\underline{s}_T = \underline{s}_i) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m P_S(e \mid \underline{s}_T = \underline{s}_i)$$

Do vậy, cần tính:

$$P_S(e \mid \underline{s}_T = \underline{s}_i) = P(\underline{s}_R \neq \underline{s}_T \mid \underline{s}_T = \underline{s}_i)$$

SER computation

Cách diễn đạt thứ nhất:

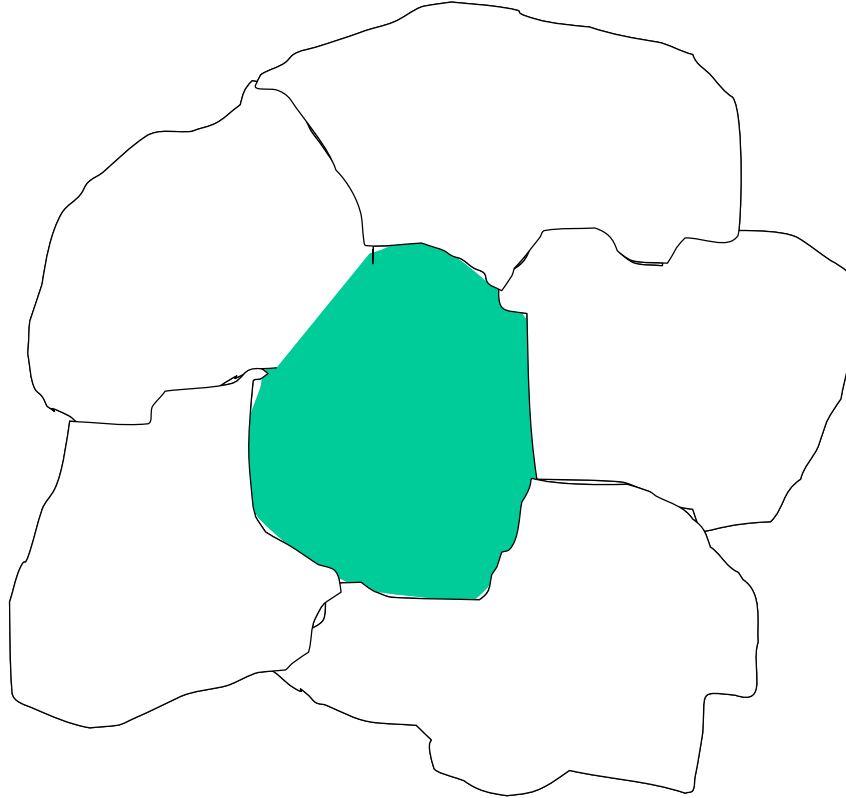
$$\begin{aligned} P_S(e | \underline{s}_T = \underline{s}_i) &= P(\underline{s}_R \neq \underline{s}_T | \underline{s}_T = \underline{s}_i) = 1 - P(\underline{s}_R = \underline{s}_T | \underline{s}_T = \underline{s}_i) = \\ &= 1 - P(\underline{\rho} \in V(\underline{s}_i) | \underline{s}_T = \underline{s}_i) \end{aligned}$$

Cách diễn đạt thứ 2:

$$\begin{aligned} P_S(e | \underline{s}_T = \underline{s}_i) &= P(\underline{s}_R \neq \underline{s}_T | \underline{s}_T = \underline{s}_i) = P(\underline{\rho} \notin V(\underline{s}_i) | \underline{s}_T = \underline{s}_i) = \\ &= \sum_{j \neq i} P(\underline{s}_R = \underline{s}_j | \underline{s}_T = \underline{s}_i) = \sum_{j \neq i} P(\underline{\rho} \in V(\underline{s}_j) | \underline{s}_T = \underline{s}_i) \end{aligned}$$

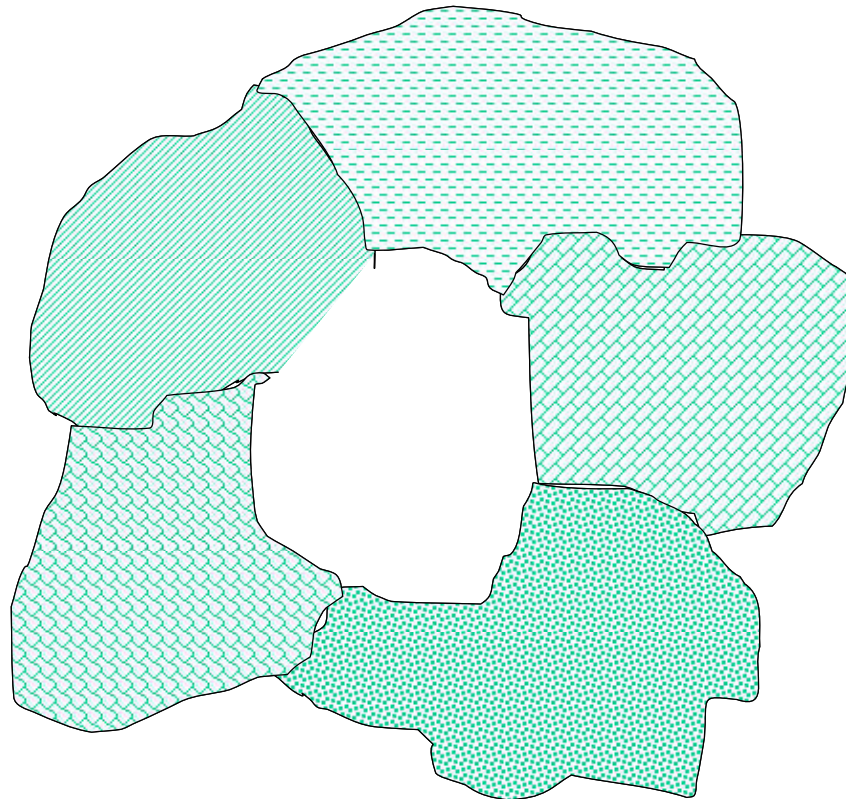
Cách diễn đạt thứ nhất:

$$P_s(e \mid \underline{s}_T = \underline{s}_i) = 1 - P(\underline{\rho} \in V(\underline{s}_i) \mid \underline{s}_T = \underline{s}_i)$$



Cách diễn đạt thứ 2

$$P_S(e | \underline{s}_T = \underline{s}_i) = P(\underline{\rho} \notin V(\underline{s}_i) | \underline{s}_T = \underline{s}_i) = \sum_{j \neq i} P(\underline{\rho} \in V(\underline{s}_j) | \underline{s}_T = \underline{s}_i)$$



Tính toán BER

Khi tín hiệu nhận được là đúng ($\underline{s}_R = \underline{s}_T$), thì chuỗi nhị phân (dữ liệu quan tâm) sẽ đúng ($\underline{v}_R = \underline{v}_T$).

Khi tín hiệu nhận được là sai ($\underline{s}_R \neq \underline{s}_T$), thì chuỗi nhị phân nhận được chắc chắn cũng sẽ bị sai ($\underline{v}_R \neq \underline{v}_T$), nhưng số lượng bit sai sẽ phụ thuộc vào việc gán nhãn Hamming và được đại diện bởi:

$$\frac{d_H(\underline{v}_R, \underline{v}_T)}{k}$$

Với d_H là khoảng cách Hamming giữa \underline{v}_R và \underline{v}_T (số bit khác nhau giữa 2 vector / cụm bit này)

Tính toán BER

Ta có

$$P_b(e) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m P_b(e | \underline{s}_T = \underline{s}_i)$$

Với

$$P_b(e | \underline{s}_T = \underline{s}_i) = \sum_{j \neq i} P_b(e, \underline{s}_R = \underline{s}_j | \underline{s}_T = \underline{s}_i) =$$

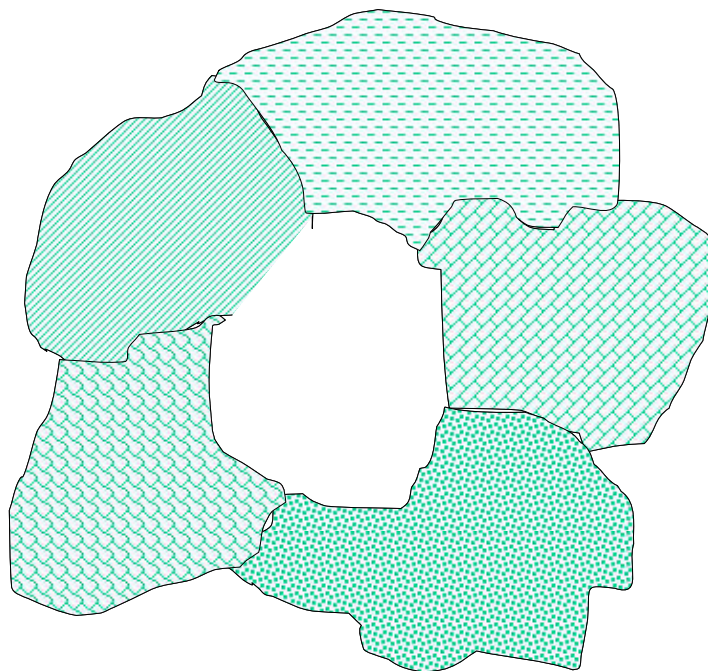
$$= \sum_{j \neq i} \frac{d_H(\underline{v}_j, \underline{v}_i)}{k} P(\underline{s}_R = \underline{s}_j | \underline{s}_T = \underline{s}_i) =$$

$$= \sum_{j \neq i} \frac{d_H(\underline{v}_j, \underline{v}_i)}{k} P(\underline{\rho} \in V(\underline{s}_j) | \underline{s}_T = \underline{s}_i)$$

$$\left[\text{where } \underline{v}_i = e^{-1}(\underline{s}_i) \text{ and } \underline{v}_j = e^{-1}(\underline{s}_j) \right]$$

$$P_b(e) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m P_b(e \mid \underline{s}_T = \underline{s}_i)$$

$$P_b(e \mid \underline{s}_T = \underline{s}_i) = \sum_{j \neq i} \frac{d_H(\underline{v}_j, \underline{v}_i)}{k} P(\underline{\rho} \in V(\underline{s}_j) \mid \underline{s}_T = \underline{s}_i)$$



Giới thiệu: Hàm erfc

Cho biến ngẫu nhiên Gauss n với

- Trung bình μ
- Phương sai σ^2
- Hàm mật độ pbxs:
$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Ta có

$$P(n > x) = \int_x^{+\infty} f_n(x) dx = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

erfc

Với định nghĩa

$$erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

Ta có

$$P(n > x) = \int_x^{+\infty} f_n(x) dx = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx =$$
$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{(x-\mu)}{\sqrt{2}\sigma}}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

Trong trường hợp trung bình =0 và phương sai $N_0/2$, ta có:

$$P(n > x) = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right) = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{x}{\sqrt{N_0}}\right)$$

Tính toán SER/BER cho các tín hiệu đối cực nhị phân

Xem xét không gian tín hiệu 1 chiều ($d=1$) gồm 2 tín hiệu ($m=2$), đối xứng qua gốc tọa độ:

$$M = \{ \underline{s}_1 = (+A) \quad \underline{s}_2 = (-A) \}$$

Vùng Voronoi của từng tín hiệu được định nghĩa như sau:

$$V(\underline{s}_1) = \{ \underline{\rho} = (\rho_1) \text{ , } \rho_1 \geq 0 \}$$

$$V(\underline{s}_2) = \{ \underline{\rho} = (\rho_1) \text{ , } \rho_1 \leq 0 \}$$

Ta có:

$$P_S(e) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m P_S(e | \underline{s_T} = \underline{s_i}) = \frac{1}{2} \left[P_S(e | \underline{s_T} = \underline{s_1}) + P_S(e | \underline{s_T} = \underline{s_2}) \right]$$

Do vậy cần tính:

$$P_S(e | \underline{s_T} = \underline{s_1})$$

Và:

$$P_S(e | \underline{s_T} = \underline{s_2})$$

$$P_S(e \mid \underline{s}_T = \underline{s}_1) = P(\underline{\rho} \in V(\underline{s}_2) \mid \underline{s}_T = \underline{s}_1) = P(\rho_1 < 0 \mid \underline{s}_T = \underline{s}_1)$$

Ta có:

$$\boxed{\underline{r} = \underline{s}_T + \underline{n} \quad \underline{r} = \underline{\rho} \quad \underline{s}_T = \underline{s}_1}$$

Với

$$\underline{\rho} = (\rho_1) \quad \underline{s}_1 = (s_{11}) = (+A) \quad \underline{n} = (n_1)$$

Do vậy:

$$\rho_1 = A + n_1$$

$$P_S(e | \underline{s_T} = \underline{s_1}) = P(\rho_1 < 0 | \underline{s_T} = \underline{s_1}) = P(A + n_1 < 0) = P(n_1 < -A)$$

n_1 là biến ngẫu nhiên Gaussian, với giá trị TB = 0 và phương sai $N_0/2$

$$P_S(e | \underline{s_T} = \underline{s_1}) = P(n_1 < -A) = P(n_1 > A) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{A}{\sqrt{N_0}} \right)$$

Với $\underline{s}_T = \underline{s}_2$

$$P_S(e \mid \underline{s}_T = \underline{s}_2) = P(\underline{\rho} \in V(\underline{s}_1) \mid \underline{s}_T = \underline{s}_2) = P(\rho_1 > 0 \mid \underline{s}_T = \underline{s}_2)$$

Ta có:

$$\underline{r} = \underline{s}_T + \underline{n} \quad \underline{r} = \underline{\rho} \quad \underline{s}_T = \underline{s}_2$$

Do đó:

$$\underline{\rho} = (\rho_1) \quad \underline{s}_2 = (s_{21}) = (-A) \quad \underline{n} = (n_1)$$

$$\rho_1 = -A + n_1$$

$$P_S(e \mid \underline{s_T} = \underline{s_2}) = P(-A + n_1 > 0) = P(n_1 > A)$$

$$P_S(e \mid \underline{s_T} = \underline{s_2}) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{A}{\sqrt{N_0}} \right)$$

Ta có

$$P_S(e | \underline{s_T} = \underline{s_1}) = P_S(e | \underline{s_T} = \underline{s_2})$$

Vì vậy:

$$P_S(e) = \frac{1}{2} \left[P_S(e | \underline{s_T} = \underline{s_1}) + P_S(e | \underline{s_T} = \underline{s_2}) \right] = P_S(e | \underline{s_T} = \underline{s_1})$$

Do đó:

$$P_S(e) = P_S(e | \underline{s_T} = \underline{s_1}) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{A}{\sqrt{N_0}} \right)$$

[Lưu ý:

$$P_S(e) = P_S(e | \underline{s_T} = \underline{s_1}) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{d}{2\sqrt{N_0}} \right)$$

Ta có:

$$P_S(e) = P_S(e \mid \underline{s}_T = \underline{s}_1) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{A}{\sqrt{N_0}} \right)$$

Viết thành hàm của E_b/N_0 .

$$E(\underline{s}_1) = E(\underline{s}_2) = A^2$$

$$E_S = \frac{E(\underline{s}_1) + E(\underline{s}_2)}{2} = A^2$$

$$E_b = \frac{E_S}{k} = E_S = A^2$$

Ta có:

$$P_s(e) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$$

Với không gian tín hiệu này ta có thể thiết lập phương án gán nhãn nhị phân:

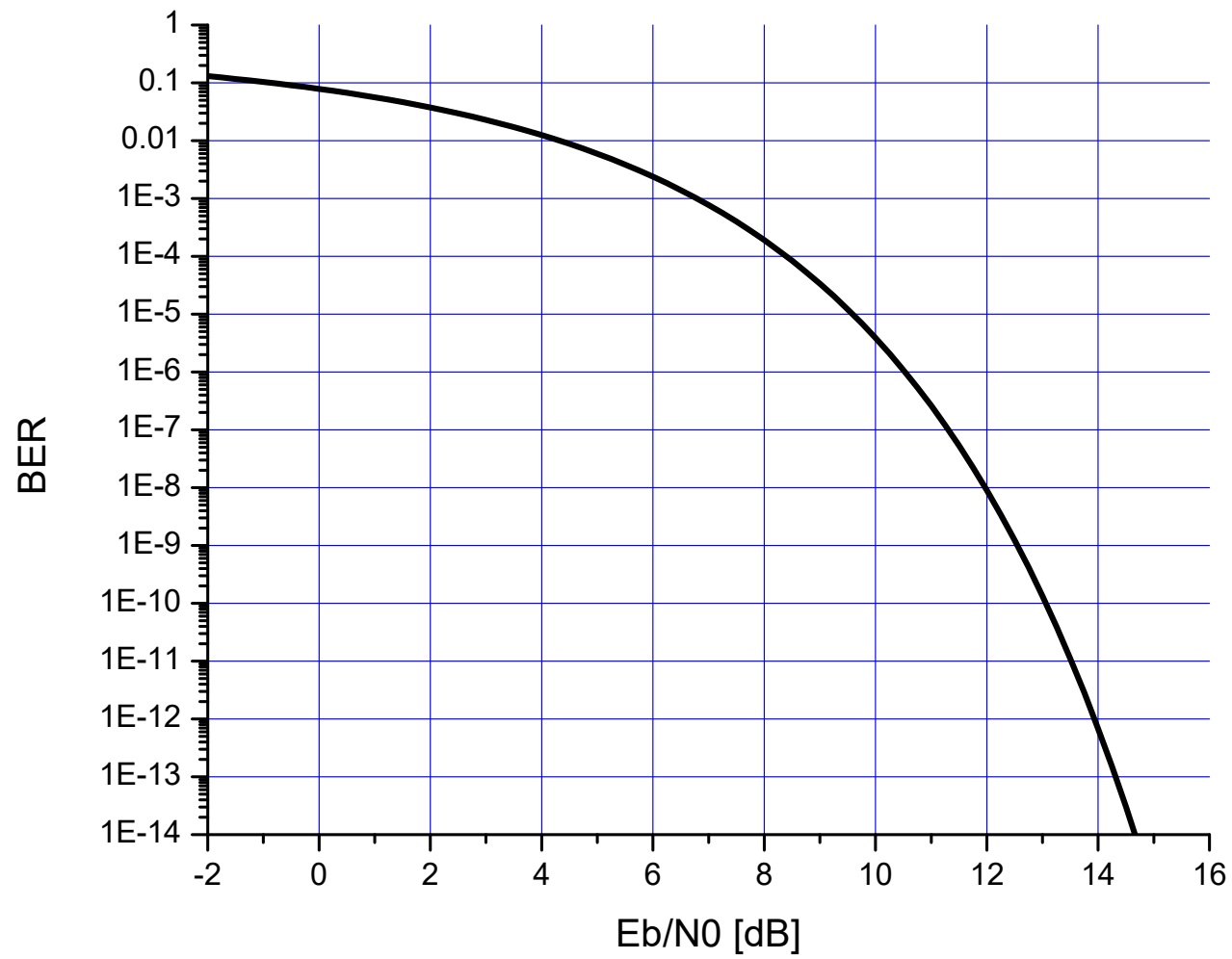
$$e : H_1 \Leftrightarrow M$$

$$\underline{v_1} = (0) \Leftrightarrow \underline{s_1}$$

$$\underline{v_2} = (1) \Leftrightarrow \underline{s_2}$$

Và trong phương án này, nếu tín hiệu sai thì dữ liệu nhị phân cũng chắc chắn sai theo, do đó:

$$P_b(e) = P_s(e) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$$



Các không gian tín hiệu khác nhau mà có cùng một không gian vector thì giá trị BER là như nhau!

Như ví dụ: BER không phụ thuộc vào dạng sóng của vector trực chuẩn:

$$b_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} P_T(t)$$

$$b_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} P_T(t) \cos(2\pi f_0 t)$$