

HD GIẢI ĐỀ THI THỬ GIỮA KÌ ĐẠI SỐ 20211

Câu 1: Mệnh đề nào tương đương logic với mệnh đề sau: $p \rightarrow q$

- A. $\bar{q} \rightarrow \bar{p}$ B. $q \rightarrow \bar{p}$ C. $\bar{p} \rightarrow \bar{q}$
D. $\bar{p} \rightarrow q$ E. $q \rightarrow p$

Gợi ý: **Đáp án A**

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \bar{p} \vee q \Leftrightarrow q \vee \bar{p} \Leftrightarrow \bar{q} \rightarrow \bar{p}$$

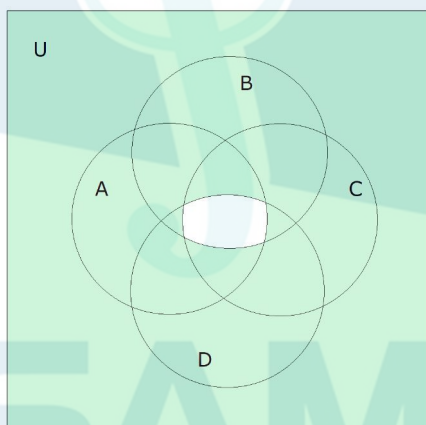
Câu 2: Tập hợp $\{(e, m), (e, n), (f, m), (f, n)\}$ là tích Đề-Các của:

- A. $\{e, m\} \times \{f, n\}$ B. $\{e, f, m, n\} \times \{1\}$ C. $\{m, n\} \times \{e, f\}$
D. $\{e, f\} \times \{m, n\}$ E. $\{m, f\} \times \{e, n\}$ F. Không có đáp án nào thỏa mãn

Gợi ý: **Đáp án D**

$$\{e, f\} \times \{m, n\} = \{(e, m), (e, n), (f, m), (f, n)\}$$

Câu 3: Cho các tập hợp A, B, C, D . Phần màu xanh thuộc sơ đồ Venn sau là biểu diễn của:



- A. $A \cap B \cap C \cap D$ B. $A \cup \bar{B} \cup \bar{C} \cup \bar{D}$ C. $\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C} \cup \bar{D}$
D. $\bar{A} \cap \bar{B} \cap C \cap D$ E. $A \cup B \cup C \cap D$ F. Không có đáp án nào thỏa mãn

Gợi ý: **Đáp án C**

$$\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C} \cup \bar{D} = A \cap B \cap C \cap D \Rightarrow U \setminus (\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C} \cup \bar{D}) = A \cap B \cap C \cap D$$

Câu 4: Trong các ánh xạ sau, có bao nhiêu song ánh?

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2 - 3x + 3$
- $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{3x-1}{x-2}$
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^5 + x^3 - 1$
- $f: [1; +\infty) \rightarrow [-5; +\infty)$
 $x \mapsto x^2 - 2x - 4$

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

E. 0

Gợi ý: Đáp án B

1. Phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm $\Rightarrow f$ không phải toàn ánh $\Rightarrow f$ không phải song ánh.
2. Dễ thấy: $f(x) = x^5 + x^3 - 1$ đồng biến trên \mathbb{R}
 \Rightarrow Phương trình $f(x) = y$ có nghiệm suy nhất $\forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ là song ánh.
3. Phương trình $f(x) = 3$ không có nghiệm $\Rightarrow f$ không phải toàn ánh $\Rightarrow f$ không là song ánh.
4. Tương tự 2: f là song ánh.

Câu 5: Cho $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ với $x \mapsto (1 - 2x^2; 5x + 2)$ Xác định $f^{-1}(B)$ với $B = [-3; 0) \times [-3; 0) \subset \mathbb{R}^2$.

A. $\left(-2; \frac{-1}{\sqrt{2}}\right]$

B. $\left[-1; \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

C. $\left[-1; \frac{-1}{\sqrt{2}}\right]$

D. $\left[-2; \frac{-1}{\sqrt{2}}\right]$

E. $\left(-2; \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

F. Không có đáp án nào thỏa mãn

Gợi ý: Đáp án B

$$f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in B\}$$

$$\begin{cases} -3 \leq 1 - 2x^2 < 0 \\ -3 \leq 5x + 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < x^2 \leq 2 \\ -1 \leq x < \frac{-2}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq x < \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

Câu 6: Đáp án A

Nếu $\alpha \in \mathbb{R}$ và $z + \frac{1}{z} = 2 \cdot \sin(\alpha)$ ($z \in \mathbb{C}$) thì $z^{4k} + \frac{1}{z^{4k}} = A$ ($\forall k \in \mathbb{Z}$). A có dạng?

A. $2 \cos(4k\alpha)$

B. $4 \cos(4k\alpha)$

C. $\cos(4k\alpha)$

D. $4 \cos(2k\alpha)$

E. $\left(4^k + \frac{1}{4^k}\right) \cos(4k\alpha)$

F. Không có đáp án nào thỏa mãn

Gợi ý: Ta có: $z + \frac{1}{z} = 2 \sin \alpha$

$$\Rightarrow z = \sin \alpha \pm i \cos \alpha$$

$$\Rightarrow z^{4k} + \frac{1}{z^{4k}} = (\sin \alpha + i \cos \alpha)^{4k} + (\sin \alpha - i \cos \alpha)^{4k}$$

$$= \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right)^{4k} + \left(\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right)^{4k}$$

$$= \cos(4k\alpha) + i \cdot \sin(-4k\alpha) + \cos(4k\alpha) + i \sin(4k\alpha) = 2 \cos(4k\alpha)$$

Câu 7: Có bao nhiêu mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

1. Trên tập $\mathbb{R}' = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ trang bị phép toán $(*)$ như sau: $x * y = x + y - x.y$. Khi đó $(\mathbb{R}', *)$ là một nhóm giao hoán.
2. Tập \mathbb{Z} các số nguyên, cùng với phép toán $(*)$ được định nghĩa như sau: $x * y = x + y + x.y$. Khi đó $(\mathbb{Z}, *)$ lập thành một nhóm.

3. Với phép cộng và phép nhân các số thực thông thường thì tập $X := \{2m \mid m \in \mathbb{Z}\}$ lập thành một trường.

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Gợi ý: **Đáp án B**

Mệnh đề 1 Đúng *Mệnh đề 2* Sai Dễ thấy $x * 0 = x$ và $0 * x = x$. Vậy 0 là phần tử trung hòa của phép toán $*$. Với mỗi $x \in \mathbb{Z}$ ta cần tìm $x' \in \mathbb{Z}$ sao cho $x * x' = 0$.

Ta có: $x * x' = 0 \Leftrightarrow x + x' + x.x' = 0 \Leftrightarrow x'(1 + x) = -x$.

Phương trình trên vô nghiệm với $x = -1 \in \mathbb{Z}$

\Rightarrow Phần tử $-1 \in \mathbb{Z}$ không có phần tử đối xứng với phép toán $*$.

$\Rightarrow (\mathbb{Z}, *)$ không là một nhóm.

Mệnh đề 3 Giả sử $(X, +, \cdot)$ là một trường

\Rightarrow Mọi phần tử $x \in X$ đều tồn tại phần tử nghịch đảo x^{-1}

$\Rightarrow x.x^{-1} = 1 \Rightarrow 2m.x^{-1} = 1 \Rightarrow x^{-1} = \frac{1}{2m} \notin X, (\text{với } m \in \mathbb{Z})$ (vô lý)

$\Rightarrow (X, +, \cdot)$ không là một trường.

Câu 8: Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

A. $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -1 & -7 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

B. $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 10 & -3 \\ -1 & -7 & 6 \\ 1 & -2 & 9 \end{bmatrix}$

C. $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 & 10 & -3 \\ -6 & -7 & 6 \\ 10 & -2 & 9 \end{bmatrix}$

D. $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 10 & -3 \\ -1 & -7 & 1 \\ 0 & -2 & 29 \end{bmatrix}$

E. $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -1 & -7 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

F. Không có đáp án nào thỏa mãn

Gợi ý: **Đáp án A**

Sử dụng phương pháp Gauss-Jordan hoặc phương pháp phần phụ đại số ta được:

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -1 & -7 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Câu 9: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $P = A^3 - 3A$. Tìm ma trận B , biết $P = B - 8I$:

A. $B = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 4 & 16 \end{bmatrix}$

B. $B = \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ 4 & 16 \end{bmatrix}$

C. $B = \begin{bmatrix} -8 & 10 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$

D. $B = \begin{bmatrix} -8 & 12 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$

E. $B = \begin{bmatrix} -8 & 10 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

F. Không có đáp án nào thỏa mãn

Gợi ý: **Đáp án B**

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 21 \\ 7 & 14 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow P = A^3 - 3A = \begin{bmatrix} -14 & 21 \\ 7 & 14 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 12 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Câu 10: Giải phương trình $X^2 - 2X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ trong đó X là ma trận vuông cấp 2. Hỏi có bao nhiêu X thỏa mãn điều kiện.

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

E. 4

F. Không có đáp án nào thỏa mãn

Gợi ý: **Đáp án C**

Ta có $X^2 - 2X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$, đặt $X - I = Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Khi đó phương trình tương đương $(X - I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow Y^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + bc = 0 \\ b(a + d) = 0 \\ c(a + d) = 6 \\ bc + d^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ cd = 6 \\ d^2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 3 \\ d = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = -3 \\ d = -2 \end{cases}$$

Vậy có 2 ma trận thỏa mãn điều kiện đề bài

Câu 11: Cho phương trình với ma trận $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$ thỏa mãn: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$.

Tính giá trị của $P = -a + 3b + c + f$

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

E. 4

F. Không có đáp án nào thỏa mãn

Gợi ý: **Đáp án C**

Đặt $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$

Thay vào phương trình ban đầu, ta có

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 10 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + c + e = 9 \\ 2b + d + f = 3 \\ 3a + e = 10 \\ 3b + f = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - c = 1 \\ 2a + c + e = 9 \\ b - d = 0 \\ 3b + f = 3 \end{cases} \quad \text{Dễ thấy đáp án} = 2.$$

Câu 12: Cho $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$. Tính A^{-1} và A^{2022} .

A. $\begin{cases} A^{-1} = I \\ A^{2022} = I \end{cases}$

B. $\begin{cases} A^{-1} = 2A \\ A^{2022} = \frac{1}{2^{1011}} \cdot I \end{cases}$

C. $\begin{cases} A^{-1} = A \\ A^{2022} = I \end{cases}$

D. $\begin{cases} A^{-1} = A \\ A^{2022} = A \end{cases}$

E. $\begin{cases} A^{-1} = -A \\ A^{2022} = I \end{cases}$

F. Không có đáp án nào thỏa mãn

Gợi ý: Đáp án C

$$\begin{aligned} [A | I] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{h_2 - h_3 \rightarrow h_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{h_1 \leftrightarrow h_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{h_3 - 3h_1 \rightarrow h_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 0 & -3 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{h_3 + 3h_2 \rightarrow h_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{h_2 + h_3 \rightarrow h_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 & 4 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = A \Rightarrow A^2 = I$$

$$\Rightarrow A^{2022} = (A^2)^{1011} = I$$

Câu 13: Cho A, B là các ma trận vuông thực cấp n thỏa mãn: $A^{2021} = 0$; $2020AB = 2021A - 2022B$. Tính $\det(B)$.

A. 0

B. 1

C. 2020

D. 2021

E. -2021

F. Không có đáp án nào thỏa mãn

Gợi ý: Đáp án A

Có $A^{2021} = 0 \Rightarrow \det A = 0$ Mặt khác, từ đề bài:

$$2020AB = 2021A - 2022B$$

$$\Rightarrow 2022B = A(2021I - 2022B)$$

$$\Rightarrow 2022^n \det B = \det A \det(2021I - 2022B) = 0$$

$$\Rightarrow \det B = 0$$

Câu 14: Tìm m để hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 = m \\ x_1 + x_2 + mx_3 = 2m^2 - 1 \end{cases}$

A. $m \neq -1$

B. $m \neq -2, m \neq 1$

C. $m \neq 1$

D. $m \neq -2$

E. $m \neq 2$

F. Không có đáp án nào thỏa mãn

Gợi ý: Đáp án D

Xét ma trận: $A = \begin{bmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = m^3 + 2 - 3m$

Với $\det A \neq 0 \Rightarrow m^3 - 3m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow (m - 1)^2(m + 2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -2 \end{cases}$

Với $\det A = 0$

1) Nếu $m = 1$. Hệ phương trình: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$ Hiển nhiên hệ này có vô số nghiệm.

2) Nếu $m = -2$. Xét ma trận bổ sung:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 7 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1.5 & 1.5 & -1.5 \\ 0 & 1.5 & -1.5 & 7.5 \end{array} \right) \\ \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1.5 & 1.5 & -1.5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow \text{rank } \bar{A} = 3; \text{rank } A < 3$ do $\det A = 0$

$\Rightarrow \text{rank } \bar{A} \neq \text{rank } A \Rightarrow$ Hệ phương trình vô nghiệm. $\Rightarrow m \neq -2$.

Câu 15: Cặp mệnh đề nào sau đây tương đương logic:

A. $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ và $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

B. $(p \wedge q) \rightarrow r$ và $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$

C. $(p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow s)$ và $(p \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow s)$

D. $\bar{p} \rightarrow (q \rightarrow r)$ và $q \rightarrow (p \vee r)$

E. Không có cặp mệnh đề nào thỏa mãn.

Gợi ý: Đáp án D

D đúng còn các cặp mệnh đề còn lại không tương đương.