Câu 1: Tập xác định của $y = \arcsin(1-x) + \log(\log x)$ là $D = (a;b]$.
Tính $b - a = ?$

Giải:

Hàm số xđịnh $\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le 1 - x \le 1. \\ x > 0. \\ \log x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 2. \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow D = (1;2]$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow b - a = 1.$

Câu 2: Tìm a, b để hàm số sau liên tục trong miền xđịnh của chúng:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & ; x \le 0 \\ ax + b & ; 0 < x < 1 \\ \sqrt{x} & ; x \geq 1 \end{cases}$$

Giải:

f(x) liên tục trên R thì f(x) phải liên tục tại $x = 0$; $x = 1$

+) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x-1)^3 = -1 = f(0)$
$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (ax + b) = b.$
$\Rightarrow b = -1.$

+) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (ax + b) = a + b$
$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt{x} = 1 = f(1)$
$\Rightarrow a + b = 1$
$\Rightarrow a = 2$

$\Rightarrow a = 2; b = -1$

Câu 3: Tìm m để hàm số $f(x) = \dfrac{x^2(x^2-2) + (2m^2-2).x}{\sqrt{x^2+1} - m}$ là hàm chẵn?

Giải: ĐKXĐ: $\sqrt{x^2+1} \neq m$. (*)

Giả sử hàm chẵn $\Rightarrow f(-x) = f(x) \quad \forall x$ thoả mãn (*)

$\Leftrightarrow f(-x) = \dfrac{x^2(x^2-2) - (2m^2-2).x}{\sqrt{x^2+1} - m.} = \dfrac{x^2(x^2-2) + (2m^2-2).x}{\sqrt{x^2+1} - m}$

$\Leftrightarrow 4(m^2-1)x = 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow m = \pm 1.$

+, Với $m = 1 \Rightarrow f(x) = \dfrac{x^2(x^2-2)}{\sqrt{x^2+1}-1}$ có ĐKXĐ: $\sqrt{x^2+1} \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$

Dễ thấy $\forall x \in R\setminus\{0\}$ ta có $-x \in R\setminus\{0\}$ và $f(-x) = f(x)$

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{x^2(x^2-2)}{\sqrt{x^2+1}-1}$ là hàm số chẵn.

+, Với $m = -1 \Rightarrow f(x) = \dfrac{x^2(x^2-2)}{\sqrt{x^2+1}+1}$ có TXĐ: $D = R$.

Dễ thấy $\forall x \in R$ ta có $-x \in R$ và $f(-x) = f(x)$

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{x^2(x^2-2)}{\sqrt{x^2+1}+1}$ là hàm số chẵn.

Vậy $m = \pm 1$ là giá trị cần tìm.

Câu 4. Xét tính chẵn lẻ của hàm số: $f(x) = \sin\left(\dfrac{x^3}{5^x}\right) + x.\ln(11^x)$

Giải:

TXĐ: $D = R$. (Thoả mãn $x \in R$; $-x \in R$)

$f(-x) = \sin\dfrac{-x^3}{5^{-x}} + (-x)\ln(11^{-x}) = \sin(-x^3.5^x) + x.\ln(11^x)$

$\neq f(x)$; $-f(-x)$

$\Rightarrow$ hàm số k^o chẵn k^o lẻ.

Câu 5. Cho giới hạn $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}{x-\sin x} = a$ và $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{x - \sin x} = b$.

Tính $a+b$?

Giải:

+, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}{x-\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6})-1-x-\frac{x^2}{2}+o(x^3)}{x-(x-\frac{x^3}{6})+o(x^3)}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{x^3}{6}}{\frac{x^3}{6}} = 1. \Rightarrow a = 1.$

+, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{x-\sin x} \overset{L'}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x(1-\cos x)}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\cos x}{\cos^2 x} = 2. \Rightarrow b = 2.$

$\Rightarrow a + b = 3.$

Câu 6: Tìm $f^{2020}(0)$ với $f(x) = (x^2+1).\cos x$

giải:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}.x^{2n} + o(x^{2n})$$

$$\Rightarrow f(x) = (x^2+1).\cos x = x^2.\cos x + \cos x$$

$$= \left[x^2.\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}.x^{2n-2}}{(2n-2)!}\right)\right] + \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{(-1)^n.x^{2n}}{(2n)!}\right] + o(x^{2n})$$

$$\Rightarrow \frac{f^{2}(0)}{(2n)!}.x^{2n} = \left[\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!} + \frac{(-1)^n}{(2n)!}\right].x^{2n}$$

$$\Rightarrow f^{2020}(0) = 2020!\left(\frac{1}{2020!} - \frac{1}{2018!}\right) = 1 - \frac{2020!}{2018!}$$

Câu 7: Cho hàm số $y = 2x^2 + 16.\cos x - \cos 2x$. Hoành độ các điểm uốn của đồ thị hàm số này là?

giải:

$$y = 2x^2 + 16.\cos x - \cos 2x$$

$$\Rightarrow y' = 4x - 16.\sin x + 2.\sin 2x$$

$$\Rightarrow y'' = 4 - 16.\cos x + 4.\cos 2x = 4.(1 - 4\cos x + \cos 2x)$$

$$= 4.(2\cos^2 x - 4\cos x) = 8.\cos x.(\cos x - 2)$$

$\Rightarrow$ Điểm uốn: $y'' = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

Câu 8: Trong khai triển đa thức $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2$ thành lũy thừa của $x-2$. Hệ số của $(x-2)^2$ là:

giải:

$$f'(2) = 4.x^3 - 15.x^2 + 10x + 1.$$

$$f''(2) = 12x^2 - 30.x + 10 = -2.$$

$\Rightarrow$ theo khai triển Taylor hệ số của $(x-2)^2$ là:

$$a_2 = \frac{f''(2)}{2!} = \frac{-2}{2!} = -1.$$

Câu 9: Viết công thức khai triển Maclaurin của hàm số $f(x) = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ đến $o(x^7)$.

Giải: Ta có: $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{7!} + o(x^7)$. $(x \neq 0)$

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \ln(1+\alpha) = \alpha - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3} + o(\alpha^3)$$

Với $\alpha = \frac{-x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{7!} + o(x^7)$

Do đó: $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{7!} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{36} - \frac{x^6}{360}\right) - \frac{x^6}{648} + o(x^7)$

$$= \frac{-x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2835} + o(x^7)$$

Câu 10: Nhận định nào sau đây đúng: $y = \frac{x^2 . \operatorname{arccot} x}{1 + x^2}$? ...

giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$ ⇒ đường cong không có tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x . \operatorname{arccot} x}{1 + x^2} = 0$. ⇒ k° tồn tại TCX.

$\lim\limits_{x \to -\infty} y = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2 . \operatorname{arccot} x}{1 + x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arccot} x = \pi$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arccot} x = 0$.

⇒ đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang: $y = \pi$; $y = 0$.

Câu 11: Chọn biểu thức đúng:

$$\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

vì: $\tan\alpha = x$ ⇒ $\sin\alpha = \tan\alpha . \cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Câu 12: Cho $\int \frac{3.\sin x + 2.\cos x}{2.\sin x + 3.\cos x} . dx = A.\ln|B.\sin x + C.\cos x| + D.x + E$.

Chọn nhận định đúng.

Giải: $\displaystyle\int \frac{3\sin x + 2\cos x}{2\sin x + 3\cos x}\,dx$

$$= \int \frac{\frac{-5}{13}\cdot(2\cos x - 3\sin x) + \frac{12}{13}\cdot(2\sin x + 3\cos x)}{2\sin x + 3\cos x}\,dx$$

$$= \frac{-5}{13}\cdot\int \frac{2\cos x - 3\sin x}{2\sin x + 3\cos x}\,dx + \frac{12}{13}\int dx$$

$$= \frac{-5}{13}\cdot\ln|2\sin x + 3\cdot\cos x| + \frac{12}{13}\cdot x + C$$

$$\Rightarrow A = \frac{-5}{13};\ B = 2;\ C = 3;\ D = \frac{12}{13}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 14 \\ A^2 + B^2 + C^2 + D = \dfrac{2378}{169} \end{cases}$$

Câu 13: Tính đạo hàm cấp n tại $x = 1$ của $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{x}}$.

Giải:

$$y = \frac{1+x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{3}{2}}$$

$$y'' = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot x^{-3/2} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-3}{2}\right)\cdot x^{-5/2} = \frac{(-1)^{2-1}(2.2-3)!!}{2^2}\, x^{-\frac{4-1}{2}} - (-1)^{2-1}\cdot\frac{(2.2-1)!!}{2^2}\cdot x^{-\frac{2.2+1}{2}}$$

TQ ⇒

$$\Rightarrow y^{(n)} = (-1)^{n-1}\cdot\frac{(2n-3)!!}{2^n}\cdot x^{-\frac{2n-1}{2}} - (-1)^{n-1}\cdot\frac{(2n-1)!!}{2^n}\cdot x^{-\frac{2n+1}{2}}$$

$$\Rightarrow y^{(n)}(1) = \frac{(-1)^{n-1}\cdot(2n-3)!!}{2^{n-1}}\left(\frac{1}{2} - \frac{2n-1}{2}\right)$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}\cdot(2n-3)!!}{2^{n-1}}\cdot(1-n).$$

Câu 14: Cho hàm số sau, xác định a và b sao cho y khả vi tại $x = 0$:

$$y = \begin{cases} ax + b & ;\ x < 0 \\ a\cos x + b\sin x & ;\ x \geq 0 \end{cases}$$

giải: Xét tính liên tục:

$$\lim_{x \to 0^+} y = \lim_{x \to 0^+} (a.\cos x + b.\sin x) = a.$$
$$\lim_{x \to 0^-} y = \lim_{x \to 0^-} (ax + b) = b.$$
$\Rightarrow$ y liên tục $\Leftrightarrow$ $a = b$.

với $a = b$; xét khả vi:

$$y'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{a.(\cos x + \sin x) - a}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{a.(x - \frac{x^2}{2})}{x} = a.$$

$$y'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{a.x + a - a}{x} = a.$$

$\Rightarrow$.

$\Rightarrow$ y khả vi tại 0. khi $a = b$

Câu 15: Đồ thị hàm số $y = \frac{x}{2.e^x + 1}$ có n tiệm cận dạng $y = a_k.x + b_k$.
Tìm mệnh đề đúng.

giải:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2e^x + 1} = 0. \to y = 0. \text{ tiệm cận ngang}$$

$$a = \lim_{x \to -\infty} \frac{y}{x} = 1.$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x}{2.e^x + 1} - x\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-2.x.e^x}{2.e^x + 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-2x.}{e^{-x}}$$
$$\stackrel{L}{=} \lim_{x \to -\infty.} \frac{-2}{-e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} 2e^x = 0.$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k = 1 \ ; \ \sum_{k=1}^{n} b_k = 0 \ ; \ \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 1$$

$\ln(1 + x + x^2) + \ln(1 - x + x^2)$