Nhập môn Kỹ thuật Truyền thông

Bài 4: Lý thuyết ra quyết định
4.1 Biểu diễn không gian tín hiệu

PGS. Tạ Hải Tùng

4.1 Lý thuyết ra quyết định: biểu diễn không gian tín hiệu

Truyền thông trên kênh (channel transmission)

Chuỗi dữ liệu nhị phân $\underline{u}_T$

⇩

Dạng sóng $s(t)$

⇩

Được truyền qua kênh để đến điểm đích

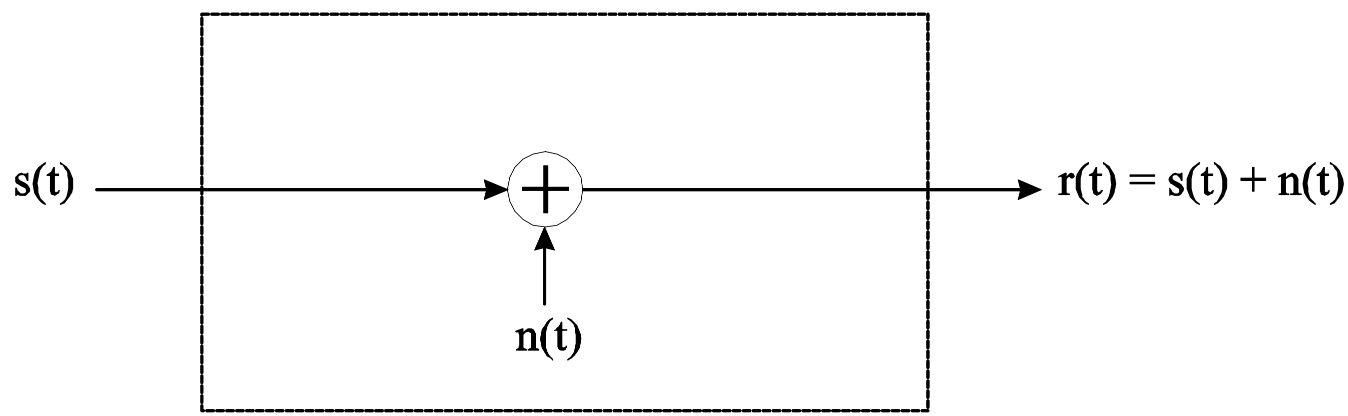
Mô hình kênh:

Kênh Tạp âm Gauss trắng có tính cộng (Additive White Gaussian Noise - AWGN)

Channel transmission

Kênh AWGN có đặc tính

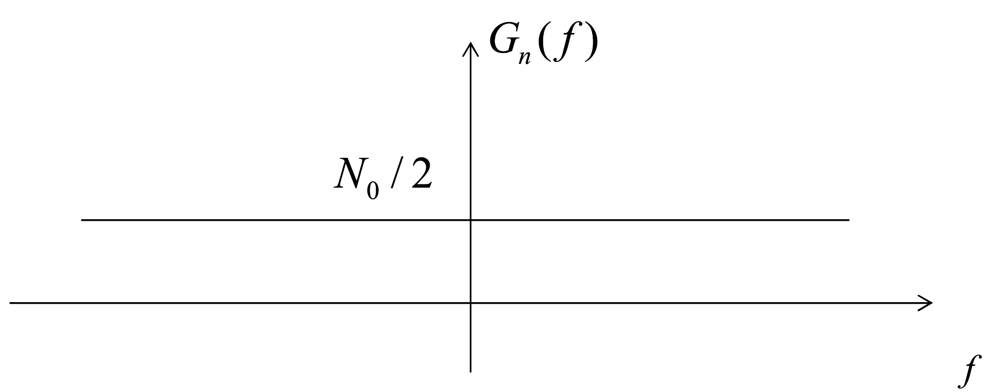
- **Tuyến tính và bất biến theo thời gian**
- **Đáp ứng tần số lý tưởng** $H(f) = 1$
- **Tạp âm Gauss có tính cộng** $n(t)$



Channel transmission

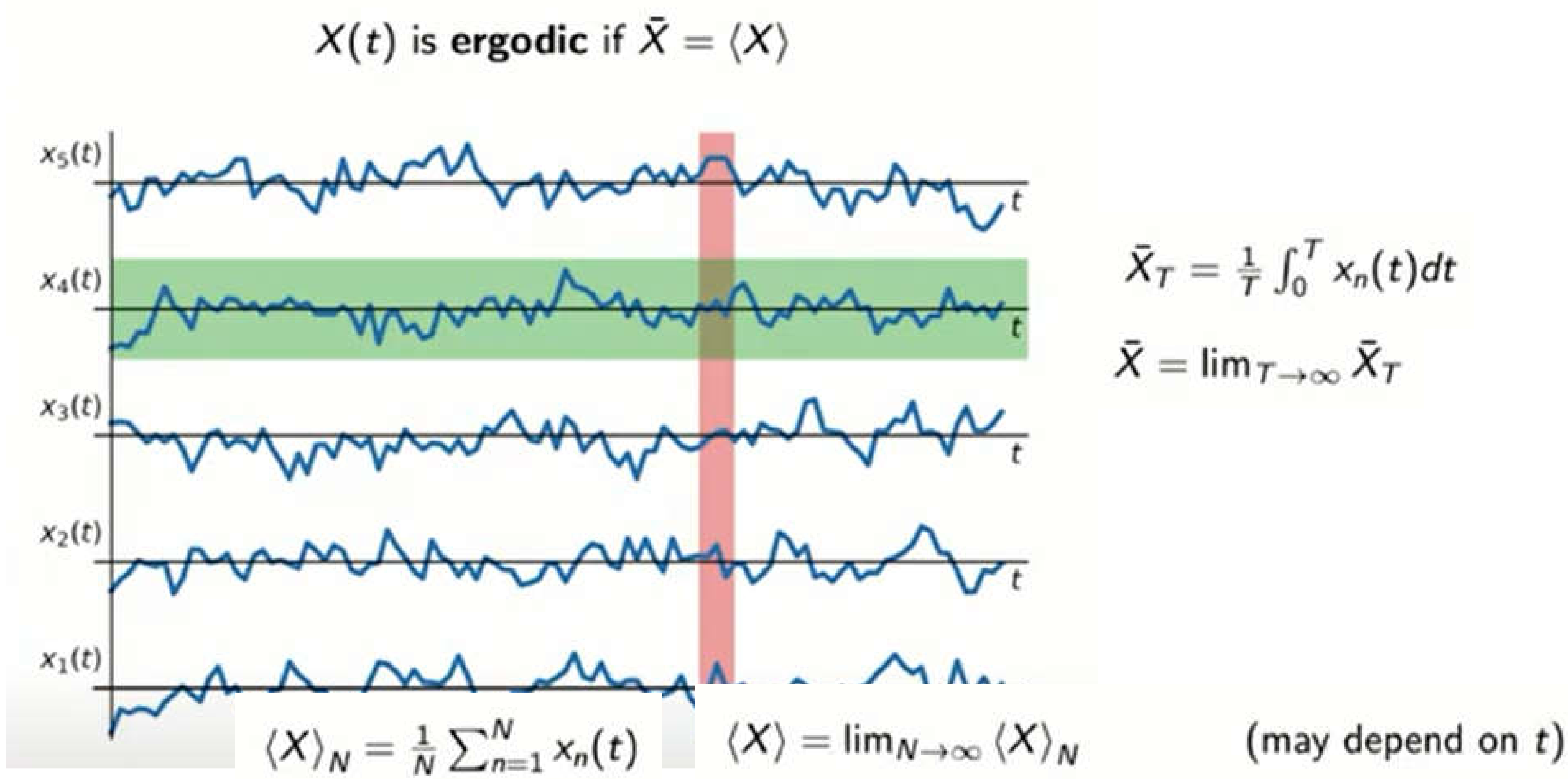
Tạp âm Gauss trắng *n(t)*

- **Tiến trình ngẫu nhiên ergodic**
- **Mỗi biến ngẫu nhiên tuân theo Phân bố chuẩn Gauss với giá trị trung bình bằng 0**
- **Mật độ công suất phổ tín hiệu là hằng số** $G_n(f)=N_0/2$



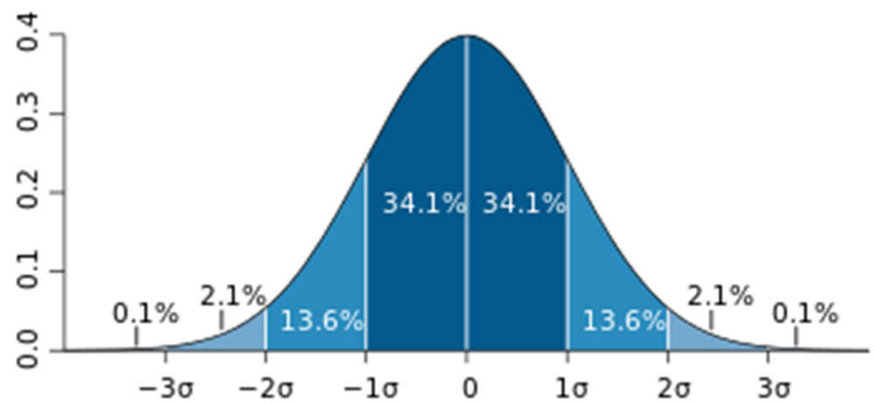
Quá trình ngẫu nhiên có tính chất ergodic

- Quá trình ngẫu nhiên được gọi là ergodic nếu các đặc trưng thống kê của nó có thể suy ra được từ một chuỗi các mẫu đủ dài của nó.



Tại sao tạp âm có phân bố Gaussian?

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



G → Gaussian

- Why Gaussian
- ***Central limit theorem*** → sum of ***independent and identically distributed (i.i.d)*** random variables approaches normal distribution as sample size N → ∞
- pdf of summation to two random variables is the convolution of their pdf’s

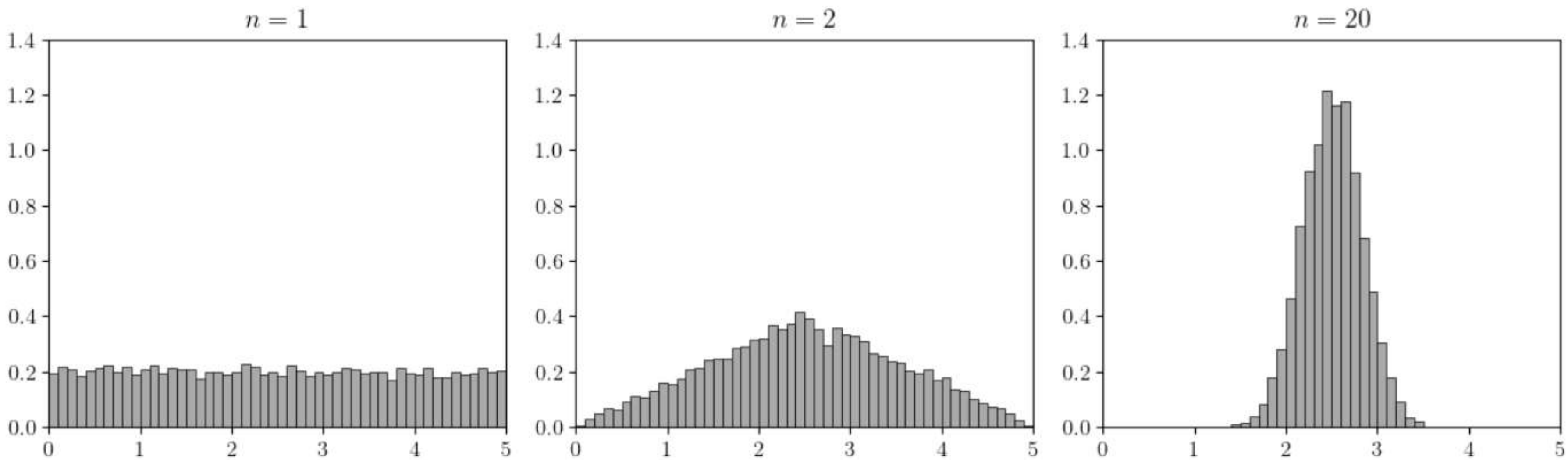


Figure 1. For each n, we draw a uniformly distributed random variable $X_i \sim \mathcal{U}(0,5)$ and compute the sum $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. We sample a new S_n ten thousand times for each n and then compute the histogram of the variables S_n.

- Noise (tạp âm tổng cộng) là tổng hợp của nhiễu từ nhiều nguồn khác nhau. Ví dụ: Loa Bluetooth nhận tín hiệu từ máy tính xách tay của bạn, có các nhiễu (tạp âm) sau:
  - lò vi sóng có tần số vô tuyến tương tự, lỗi cảm biến do quá nhiệt, nhiễu vật lý khi bạn nhấc loa lên, v.v.
  - Làm thế nào để tạp âm tổng cộng tuân theo Gauss???

Truyền thông trên kênh

Chuỗi dữ liệu nhị phân $\underline{\mathrm{u}}_{\mathrm{T}}$

$\Downarrow$

Dạng sóng được truyền $s(t)$

$\Downarrow$

Kênh AWGN

$\Downarrow$

Dạng sóng nhận được $r(t) = s(t) + n(t)$

$$\boxed{\underline{\mathrm{u}}_{\mathrm{T}} \longrightarrow \boldsymbol{s}(t) \longrightarrow \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{s}(t) + \boldsymbol{n}(t)}$$

Vấn đề tại phía bộ thu

$$\underline{\mathrm{u}}_{\mathrm{T}} \longrightarrow \boldsymbol{s}(t) \longrightarrow \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{s}(t) + \boldsymbol{n}(t)$$

Vấn đề: $\boxed{\text{nhận được } \boldsymbol{r}(t) \rightarrow \text{khôi phục } \underline{u}_T}$

$$\underline{\mathrm{u}}_{\mathrm{T}} \longrightarrow \boldsymbol{s}(t) \longrightarrow \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{s}(t) + \boldsymbol{n}(t)$$

Vấn đề: $\boxed{\text{nhận được } \boldsymbol{r}(t) \rightarrow \text{khôi phục } \underline{u}_T}$

Chia thành 2 bước:

1. Nhận được $r(t)$, khôi phục $s(t)$: ***(vấn đề khó)***
2. Nhận được $s(t)$, khôi phục $\underline{u}_T$: ***(vấn đề dễ:*** *gán nhãn là ánh xạ 1-1****)***

$$\underline{\mathrm{u}}_{\mathrm{T}} \longrightarrow s(t) \longrightarrow r(t) = s(t) + n(t)$$

Vấn đề: $\boxed{\text{nhận được } r(t) \rightarrow \text{khôi phục } s(t)}$

Thay vì xử lý trên dạng sóng thật

⇩

Đơn giản hơn nếu xử lý trên **VECTORS**

Cho chùm tín hiệu $M = \{ s_1(t) , \dots , s_i(t), \dots, s_m(t) \}$

- Xây dựng cơ sở trực chuẩn B
- Xử lý trên không gian tín hiệu S sinh bởi B
- Mỗi tín hiệu thuộc S có thể được biểu diễn là một phối hợp tuyến tính (linear combination) của các thành phần cơ sở → mỗi tín hiệu của S tương ứng với một vector thực (= các hệ số của phối hợp tuyến tính đó)

Cơ sở B

Cho chùm tín hiệu:

$$M = \{ s_1(t), \ \ldots, \ s_i(t), \ \ldots, \ s_m(t) \}$$

Chúng ta phải tìm được cơ sở trực chuẩn:

$$B = \{ b_1(t), \ \ldots, \ b_j(t), \ \ldots, \ b_d(t) \} \qquad (d \le m)$$

B = *tập hợp các tín hiệu*

1. Trực giao lẫn nhau $\Rightarrow$ $\boxed{\int_0^T b_j(t) b_i(t) dt = 0 \quad \text{when} \quad j \neq i}$

Cho chùm tín hiệu:

$$M = \{ s_1(t) , \ldots , s_i(t), \ldots, s_m(t) \}$$

Chúng ta phải tìm được cơ sở trực chuẩn:

$$B = \{ b_1(t) , \ldots , b_j(t), \ldots, b_d(t) \} \qquad (d \leq m)$$

B = tập hợp các tín hiệu

2. Với năng lượng đơn vị $\Rightarrow$ $\boxed{\int_0^T b^2{}_j(t)dt = 1}$

Cho chùm tín hiệu:

$$M = \{ s_1(t) , \ \dots , \ s_i(t), \ \dots, \ s_m(t) \}$$

Chúng ta phải tìm được cơ sở trực chuẩn:

$$B = \{ b_1(t) , \ \dots , \ b_j(t), \ \dots, \ b_d(t) \} \qquad (d \leq m)$$

$B =$ tập hợp các tín hiệu

3. Số phần tử của cơ sở d là nhỏ nhất đủ để biểu diễu mỗi tín hiệ
   của M là một phối hợp tuyến tính

$$\boxed{s_i(t) = \sum_{j=1}^{d} s_{ij} b_j(t) \qquad s_{ij} \in R}$$

Cơ sở B

Cho chùm tín hiệu: $M = \{ s_1(t) , \ldots , s_i(t), \ldots, s_m(t) \}$

Chúng ta có thể xây dựng được cơ sở :

$B = \{ b_1(t) , \ldots , b_j(t), \ldots, b_d(t) \} \quad (d \leq m)$

B = tập các tín hiệu

1. Trực giao $\Rightarrow$ $\boxed{\int_0^T b_j(t) b_i(t) dt = 0 \quad \text{when} \quad j \neq i}$

2. Với năng lượng đơn vị: $\Rightarrow$ $\boxed{\int_0^T b^2{}_j(t) dt = 1}$

3. Số phần tử của cơ sở d là nhỏ nhất đủ để biểu diễu mỗi tín hiệu của M là một phối hợp tuyến tính $\Rightarrow$ $\boxed{s_i(t) = \sum_{j=1}^{d} s_{ij} b_j(t) \quad s_{ij} \in R}$

Xây dựng cơ sở B

Cho M, làm thế nào để xây dựng B ?

Với các chùm tín hiệu đơn giản, không khó để xây dựng B một cách trực tiếp

Trong trường hợp chung ta có thể sử dụng thuật toán sau để xây dựng B từ M:

Thuật toán Gram-Schmidt

Thuật toán Gram-Schmidt

$$M = \{ s_1(t) \, , \, \ldots \, , s_i(t), \, \ldots, \, s_m(t) \, \}$$

Bước 1

Cho $s_1(t)$ → tính versor thứ nhất

Định nghĩa

$$\boxed{b_1^*(t) = s_1(t)}$$

tính

$$\boxed{b_1(t) = \frac{b_1^*(t)}{\sqrt{E(b_1^*)}}}$$

(Nếu $b_1^*(t) = 0$ → $b_1(t) = 0$)

Cho $s_2(t)$, tìm versor thứ 2.

Bước 2

Tính phép chiếu của lên versor đầu tiên

$$s_{21} = \int_0^T s_2(t) b_1(t) dt$$

Định nghĩa

$$\boxed{b_2^*(t) = s_2(t) - s_{21} b_1(t)}$$

Tính

$$\boxed{b_2(t) = \frac{b_2^*(t)}{\sqrt{E(b_2^*)}}}$$

(Nếu $b_2^*(t) = 0$ → $b_2(t) = 0$)

$$s_{21} = \int_0^T s_2(t) b_1(t) dt \qquad b_2^*(t) = s_2(t) - s_{21} b_1(t)$$

Lưu ý:

- Nếu $b_2^*(t) = 0$ ($s_2(t)$ tỷ lệ với $b_1(t)$)
  → $b_2(t)=0$ và không có versor mới nào
- Nếu $b_2^*(t) \neq 0$ ($s_2(t)$ không tỷ lệ với $b_1(t)$)
  → $b_2(t) \neq 0$ và versor mới được tìm thấy

Given $s_i(t)$ $3 \le i \le m$

STEP i

Tính phép chiếu lên các versor trước:

$$s_{ij} = \int_o^T s_i(t) b_j(t)\, dt \qquad 1 \le j \le i-1$$

Định nghĩa

$$\boxed{b_i^*(t) = s_i(t) - \sum_{j=1}^{i-1} s_{ij} b_j(t)}$$

Tính

$$\boxed{b_i(t) = \frac{b_i^*(t)}{\sqrt{E(b_i^*)}}}$$

(If $b_1^*(t) = 0$ → $b_i(t) = 0$)

$$s_{ij} = \int_{o}^{T} s_i(t) b_j(t)\, dt \qquad\qquad b_i^*(t) = s_i(t) - \sum_{j=1}^{i-1} s_{ij} b_j(t)$$

Lưu ý:

- Nếu $b_i^*(t) = 0$ ($s_i(t)$ là phối hợp tuyến tính của các versor)
  → $b_i(t)=0$ và không có versor mới

- Nếu $b_i^*(t) \neq 0$ ($s_i(t)$ không phải là phối hợp tuyến tính)
  → $b_i(t) \neq 0$ và một versor mới tìm được

Bước cuối

- Loại bỏ tất cả $b_i(t)$ = 0
- Đánh lại chỉ số *i* cho các versor khác 0 $b_i(t)$
- Ta có cơ sở B:

$$B = \{ b_1(t) , \dots , b_j(t), \dots, b_d(t) \} \quad (d \le m)$$

Bài tập

Cho chùm tín hiệu:

$$M = \{s_1(t) = +P_T(t), s_2(t) = -P_T(t)\}$$

Xây dựng cơ sở trực chuẩn B?

Xây dựng cơ sở

Như đã đề cập, với các chùm tín hiệu đơn giản, có thể xây dựng trực tiếp *B* mà không cần áp dụng Gram Schmidt.

Chỉ cần tìm ra d tín hiệu thỏa mãn các điều kiện của một cơ sở trực chuẩn:

1. Trực giao
2. Năng lượng đơn vị
3. Số phần d là nhỏ nhất và đủ để biểu diễn mỗi tín hiệu của M là một phối hợp tuyến tính

Bài tập

Cho chùm tín hiệu:

$$M = \{s_1(t) = 0, s_2(t) = +P_T(t)\}$$

Xây dựng cơ sở trực chuẩn B?

Bài tập

Cho chùm tín hiệu:

$$M = \{s_1(t) = +P_T(t)\cos(2\pi f_0 t), s_2(t) = -P_T(t)\cos(2\pi f_0 t)\}$$

Xây dựng cơ sở trực chuẩn B?

Không gian tín hiệu S

Với cơ sở trực chuẩn B

$$B = \{ b_1(t) , \dots , b_j(t), \dots, b_d(t) \}$$

Không gian S được biểu diễn qua B là:

$$S = \left\{ a(t) = \sum_{j=1}^{d} a_j b_j(t) \quad a_j \in R \right\}$$

(tập tất cả các tín hiệu có thể được biểu diễn như là các phối hợp tuyến tính của các tín hiệu cơ sở)

Bài tập

Cho cơ sở B

$$B = \left\{ b_1(t) = +\frac{1}{\sqrt{T}} P_T(t) \right\}$$

Không gian tín hiệu S là gì?

Bài tập

Cho cơ sở B

$$B = \left\{ b_1(t) = +\sqrt{\frac{2}{T}} P_T(t) \cos\left(2\pi f_0 t\right) \right\}$$

Không gian tín hiệu S là gì?

Biểu diễn vector

Cho trước B, với mỗi tín hiệu $a(t) \in S$ ta có

$$a(t) = \sum_{j=1}^{d} a_j b_j(t)$$

Tín hiệu $a(t)$ tương ứng với một vector thật với d thành phần (các hệ số a_j của phối hợp tuyến tính), và ngược lại:

$$a(t) \equiv \underline{a} = (a_1 \ ,\ldots, a_j ,\ldots, a_d)$$

Biểu diễn vector

1. Từ vector $\underline{a}$ tới tín hiệu $a(t)$

$$\underline{a} = (a_1 \ ,\ldots, a_j, \ldots, a_d)$$

$$a(t) = \sum_{j=1}^{d} a_j b_j(t)$$

---

2. Từ tín hiệu $a(t)$ tương ứng vector $\underline{a}$

Phép chiếu lên versor $b_j(t)$

$$a(t) \Rightarrow a_j = \int_0^T a(t) b_j(t)\, dt$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{a} = (a_1 \ ,\ldots, a_j, \ldots, a_d)$$

Biểu diễn vector chùm tín hiệu

Ta có $M \subseteq S$

Mỗi tín hiệu $s_i(t) \in S$ tương ứng với một vector thật với d thành phần và ngược lại:

$$s_i(t) \equiv \underline{s}_i = (s_{i1}, \ldots, s_{ij}, \ldots s_{id})$$

Chùm tín hiệu M là một tập tín hiệu $M = \{ s_1(t), \ldots, s_i(t), \ldots, s_m(t) \}$

Chùm tín hiệu M là một tập vector $M = \{ \underline{s}_1, \ldots, \underline{s}_i, \ldots, \underline{s}_m \}$

1. Từ vector $\underline{s_i}$ tới tín hiệu $s_i(t)$

$$\underline{s_i} = (s_{i1} \;, \ldots, s_{ij}, \ldots, s_{id})$$

$$s_i(t) = \sum_{j=1}^{d} s_{ij} b_j(t)$$

---

2. Từ tín hiệu $s_i(t)$ tới vector $\underline{s_i}$

Phép chiếu lên versor $b_j(t)$

$$s_i(t) \Rightarrow s_{ij} = \int_0^T s_i(t) b_j(t)\, dt$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{s_i} = (s_{i1} \;, \ldots, s_{ij}, \ldots, s_{id})$$

Lưu ý: đối với các chùm tín hiệu đơn giản, các thành phần của vector có thể được suy ra trực tiếp thay vì tính phép chiếu.

Ta viết:

$$s_i(t) = s_{i1}b_1(t) + \ldots + s_{ij}b_j(t) + \ldots s_{id}b_d(t)$$

Các tín hiệu cơ sở $b_i(t)$ đã biết.

Ta tìm tập các hệ số s_{ij} có thể thỏa mãn phương trình trên.

Lời giải (nghiệm) là duy nhất.

Không gian tín hiệu S là đẳng cấu (đồng hình) với không gian Euclid R^d

(tập hợp của tất cả các vector với các thành phần thực d)

Ta có thể vẽ trong không gian Đề-các)

If d=1, $S \approx R$ và có thể vẽ như một đường thẳng 1-D

If d=2, $S \approx R^2$ và có thể vẽ như một mặt phẳng 1-D

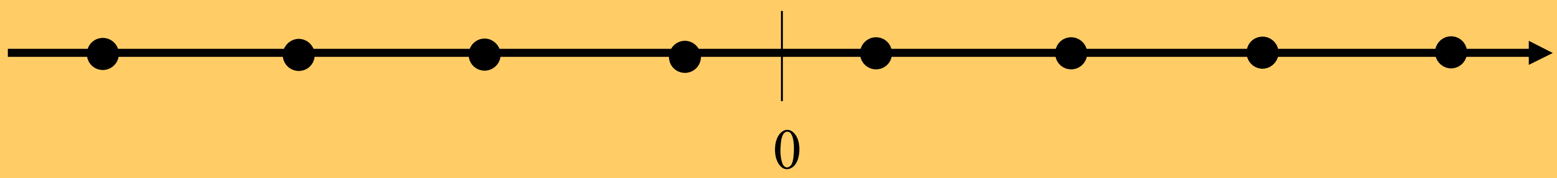
If d=3, $S \approx R^3$ và có thể vẽ như một không gian 1-D

Ta sẽ viết $\boxed{M \subseteq R^d}$

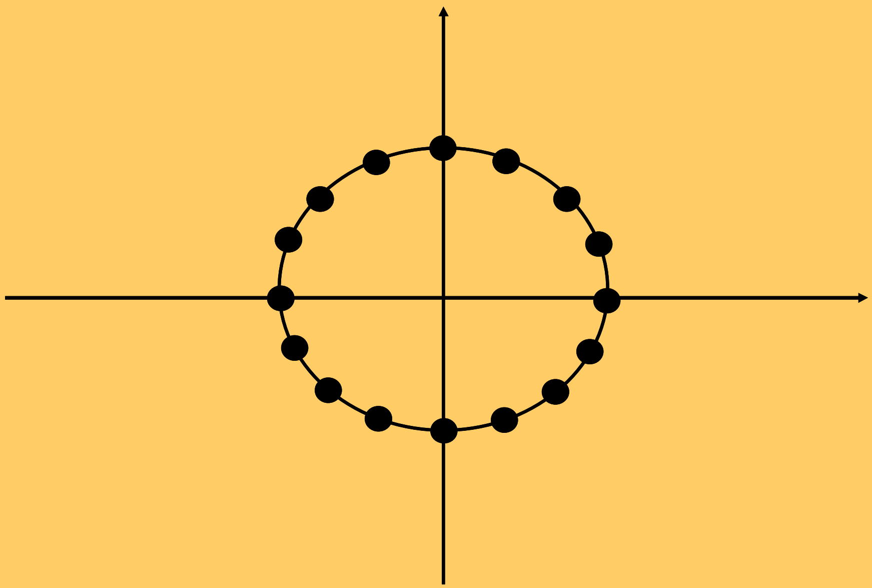
(Một chùm là một tập m điểm trong không gian Euclid R^d)

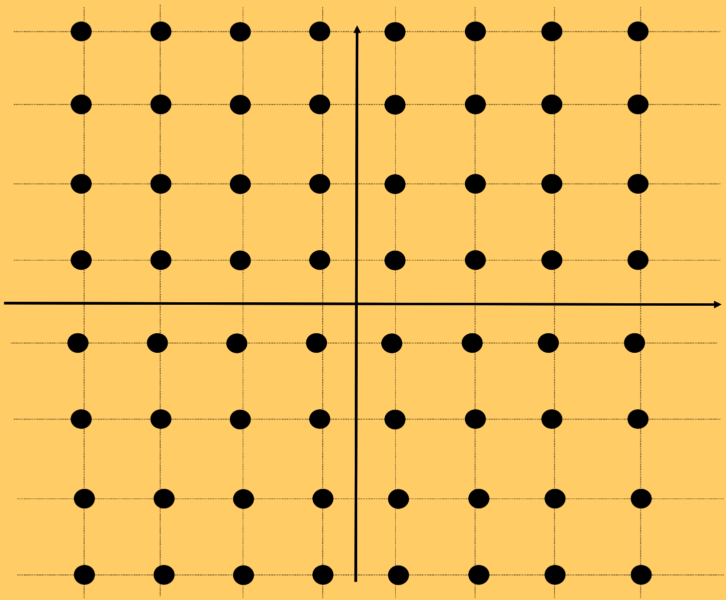
Ví dụ

Ví dụ không gian 1-D



Ví dụ không gian 2-D





Năng lượng tín hiệu

Với một tín hiệu $a(t) \in S$

Năng lượng của nó là: $$E(a) = \int_0^T a^2(t)dt$$

Nếu biểu diễn vector của nó là:

$$a(t) \equiv (a_1, \ldots, a_j, \ldots a_d)$$

Thì năng lượng được tính như sau: (Parseval identity)

$$E(a) = \sum_{j=1}^{d} a_j^2$$

Trong thực tế, vì $$a(t) = \sum_{j=1}^{d} a_j b_j(t)$$

$$E(a) = \int_0^T a^2(t)\, dt = \int_0^T [\sum_{j=0}^{d-1} a_j b_j(t)]^2\, dt = \sum_{j=0}^{d-1} a_j^2 \int_0^T b_j^2(t) dt = \sum_{j=0}^{d-1} a_j^2$$

Trong đó đã sử dụng tính chất trực giao

$$\int_0^T b_j(t)\, b_i(t) dt = 0 \quad se \;\; i \neq j$$

Năng lượng chùm tín hiệu

Cho chùm tín hiệu $M = \{\underline{s}_1, \ldots, \underline{s}_i, \ldots, \underline{s}_d\} \subseteq R^d$

Với $\underline{s_i} = (s_{i1}, \ldots, s_{ij}, \ldots, s_{id})$

Ta có: $$E(s_i) = \sum_{j=1}^{d} s_{ij}^2$$

Năng lượng chùm (trung bình):

$$E_s = \sum_{i=1}^{m} P(s_i) E(s_i)$$

Với $P(s_i)$ là xác suất truyền s_i

Năng lượng chùm tín hiệu

- Các chuỗi dữ liệu nhị phân: ngẫu nhiên lý tưởng
- Các vector nhị phân $\underline{v} \in H_k$ có xác suất tương đương
- Gán nhãn ánh xạ 1-1 $e : H_k \leftrightarrow M$
- Các tín hiệu trong chùm $\underline{s_i} \in M$ có xác suất tương đương
- $P(s_i) = \dfrac{1}{m}$
- Chùm tín hiệu có năng lượng: $\boxed{E_s = \dfrac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} E(s_i)}$

Năng lượng trên từng bit

Năng lượng cần để truyền một bit qua M

$$\boxed{E_b = \frac{E_S}{k}}$$

Bài tập

Cho một chùm tín hiệu NRZ lưỡng cực:

$$M = \{s_1(t) = +VP_T(t), s_2(t) = -VP_T(t)\}$$

- Xây dựng cơ sở trực chuẩn.
- Biểu diễn dạng vector của chùm tín hiệu.
- Vẽ trên không gian Euclid.
- Xác định không gian tín hiệu S ?
- Tính E_s và E_b.

Bài tập

Cho một chùm tín hiệu NRZ đơn cực:

$$M = \{s_1(t) = +VP_T(t), s_2(t) = 0\}$$

- Xây dựng cơ sở trực chuẩn.
- Biểu diễn dạng vector của chùm tín hiệu.
- Vẽ trên không gian Euclid.
- Xác định không gian tín hiệu S ?
- Tính E_s và E_b.

Bài tập

Cho một chùm tín hiệu 2-PSK:

$$M = \{s_1(t) = +AP_T(t)\cos(2\pi f_0 t), s_2(t) = -AP_T(t)\cos(2\pi f_0 t)\}$$

- Xây dựng cơ sở trực chuẩn.
- Biểu diễn dạng vector của chùm tín hiệu.
- Vẽ trên không gian Euclid.
- Xác định không gian tín hiệu S ?
- Tính E_s và E_b.

Bài tập:

Cho một chùm tín hiệu 4-PSK:

$$M = \{s_1(t) = +AP_T(t)\cos(2\pi f_0 t), s_2(t) = +AP_T(t)\sin(2\pi f_0 t),$$
$$s_3(t) = -AP_T(t)\cos(2\pi f_0 t), s_4(t) = -AP_T(t)\sin(2\pi f_0 t)\}$$

- Xây dựng cơ sở trực chuẩn.
- Biểu diễn dạng vector của chùm tín hiệu.
- Vẽ trên không gian Euclid.
- Xác định không gian tín hiệu S ?
- Tính E_s và E_b.

Gợi ý: $A\cos(2\pi f_0 t - \vartheta) = \left(A\cos\vartheta\right)\cos(2\pi f_0 t) + \left(A\sin\vartheta\right)\sin(2\pi f_0 t)$

Bài tập:

Lặp lại với tất cả các chùm tín hiệu sau:

- NRZ (bipolar and unipolar)
- RZ (bipolar and unipolar)
- 4-PAM
- 4-ASK
- 2-PSK
- 4-PSK
- 2-FSK