Giải tích I

TS. Bùi Xuân Diệu

Viện Toán Ứng dụng và Tin học, Đại học Bách Khoa Hà Nội

1. Hàm số
2. Dãy số
3. Giới hạn của hàm số
4. Vô cùng lớn - Vô cùng bé
5. Hàm số liên tục
6. Đạo hàm và vi phân
7. Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng
   - Các công thức khai triển Taylor, Maclaurin
   - Quy tắc L'Hospital
   - Hàm số đơn điệu và các tính chất
   - BĐT hàm lồi
8. Các lược đồ khảo sát hàm số

Chương 1: Hàm số một biến số

1. Hàm số
2. Dãy số
3. Giới hạn của hàm số
4. Vô cùng lớn - Vô cùng bé
5. Hàm số liên tục
6. Đạo hàm và vi phân
7. Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng
   - Các công thức khai triển Taylor, Maclaurin
   - Quy tắc L'Hospital
   - Hàm số đơn điệu và các tính chất
   - BĐT hàm lồi
8. Các lược đồ khảo sát hàm số

Khái niệm hàm số

Định nghĩa

Cho X và Y là các tập hợp. Một hàm số f đi từ tập hợp X vào tập hợp Y, kí hiệu $f : X \to Y$, là một quy tắc cho tương ứng mỗi giá trị $x \in X$ với một giá trị duy nhất $y \in Y$.

Chú ý rằng điều ngược lại không đúng, với một giá trị $y \in Y$ có thể có hai giá trị $x_1 \neq x_2 \in X$ sao cho $f(x_1) = f(x_2) = y$. Chẳng hạn như $f(x) = x^2$.

Tập xác định - Tập giá trị

i) TXĐ $= \{x \in X | f(x)$ được định nghĩa$\}$.

ii) TGT $= \{y \in Y | \exists x \in X, f(x) = y\}$.

Hàm số

Hàm số chẵn, hàm số lẻ

i) Hàm số chẵn: $\begin{cases} \forall x \in \text{ TXĐ}, -x \in \text{ TXĐ}, \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$

ii) Hàm số lẻ: $\begin{cases} \forall x \in \text{ TXĐ}, -x \in \text{ TXĐ}, \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$

Hàm số tuần hoàn

$\exists T > 0 : f(x) = f(x+T) \forall x \in \text{ TXĐ}.$

Hàm hợp

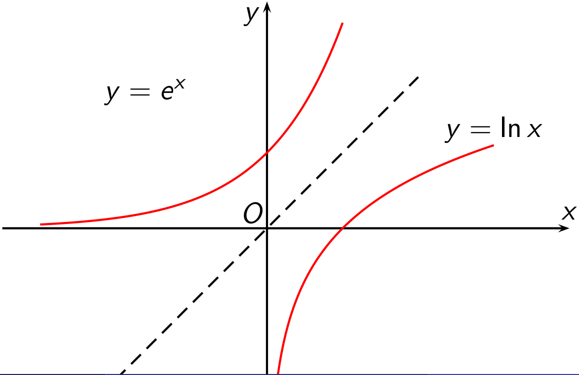
Cho $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$. Khi đó $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$.

Hàm số

Hàm ngược

Cho $f : X \to Y$ là một song ánh. Khi đó

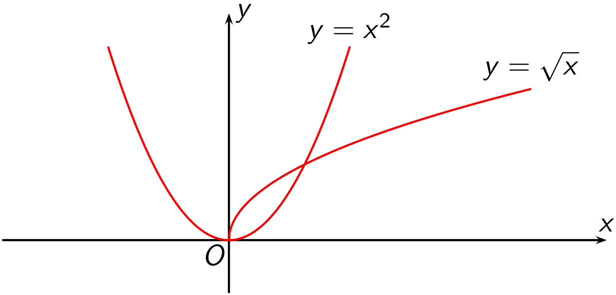
$$f^{-1} : Y \to X,$$
$$y \mapsto x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$$



Các hàm số sơ cấp cơ bản

Các hàm số sơ cấp cơ bản:

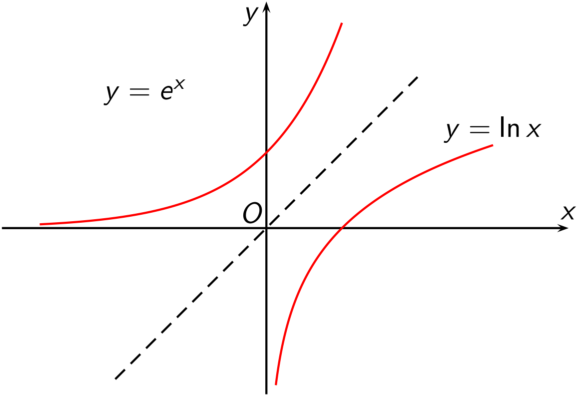
1. Hàm lũy thừa $y = x^\alpha$. TXĐ của hàm số này phụ thuộc vào α.
   a) Nếu α nguyên dương, TXĐ$= \mathbb{R}$,
   b) Nếu α nguyên âm, hàm số $y = \frac{1}{x^{-\alpha}}$, TXĐ $= \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
   c) Nếu $\alpha = \frac{1}{p}$, p nguyên dương chẵn, TXĐ$= \mathbb{R}_{\geq 0}$,
   d) Nếu $\alpha = \frac{1}{p}$, p nguyên dương lẻ, thì TXĐ$= \mathbb{R}$.
   e) Nếu α là số vô tỉ thì quy ước TXĐ$= \mathbb{R}_{>0}$.



Các hàm số sơ cấp cơ bản

Các hàm số sơ cấp cơ bản:

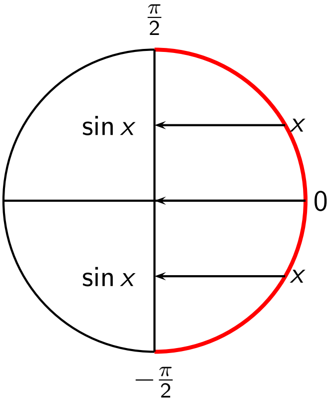
2. Hàm số mũ $y = a^x$ $(0 < a \neq 1)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và luôn dương. Hàm này đồng biến nếu $a > 1$ và nghịch biến nếu $a < 1$.
3. Làm số logarit $y = \log_a(x)$ $(0 < a \neq 1)$ xác định trên $\mathbb{R}^+$. Hàm số này đồng biến nếu $a > 1$ và nghịch biến nếu $a < 1$.



Các hàm số sơ cấp cơ bản

4. Hàm lượng giác

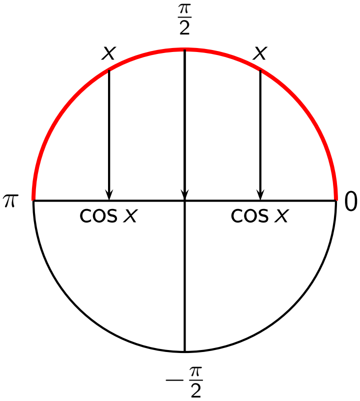
a) Hàm số $y = \sin x$, TXĐ $= \mathbb{R}$, là hàm số lẻ, tuần hoàn CK 2π.



Các hàm số sơ cấp cơ bản

4. Hàm lượng giác

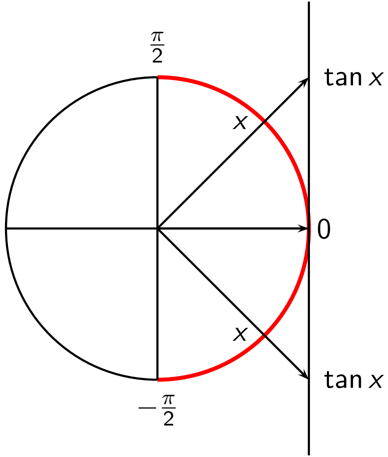
b) Hàm số $y = \cos x$, TXĐ $= \mathbb{R}$, là hàm số chẵn, tuần hoàn CK 2π.



Các hàm số sơ cấp cơ bản

4. Hàm lượng giác

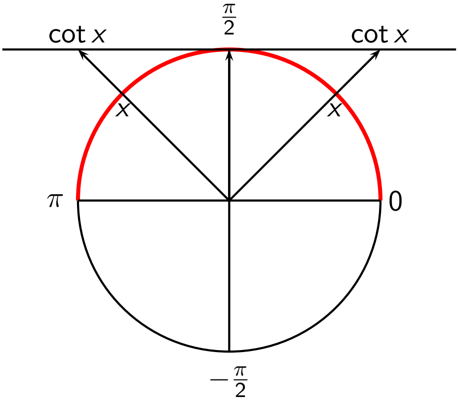
   c) Hàm số $y = \tan x$, TXĐ $= \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, là hàm số lẻ, tuần hoàn chu kì π.



Các hàm số sơ cấp cơ bản

4. Hàm lượng giác

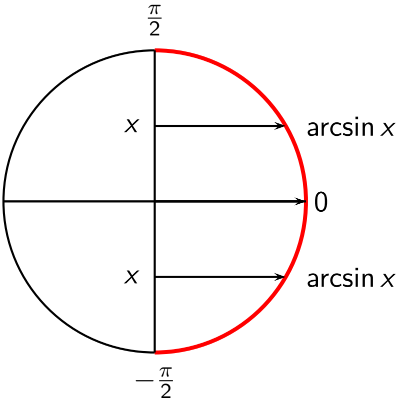
   d) Hàm số $y = \cot x$, TXĐ $= \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, là hàm số lẻ, tuần hoàn chu kì π.



Các hàm số sơ cấp cơ bản

5. Hàm lượng giác ngược.

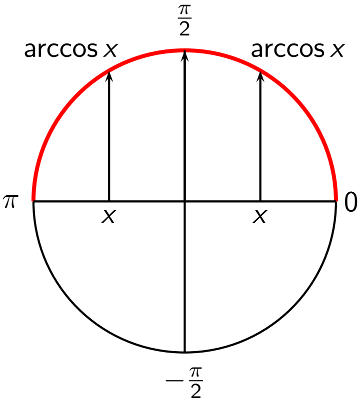
   a) Hàm số $y = \arcsin x$, TXĐ$= [-1, 1]$, TGT$= \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ và là một hàm số đơn điệu tăng.



Các hàm số sơ cấp cơ bản

5. Hàm lượng giác ngược.

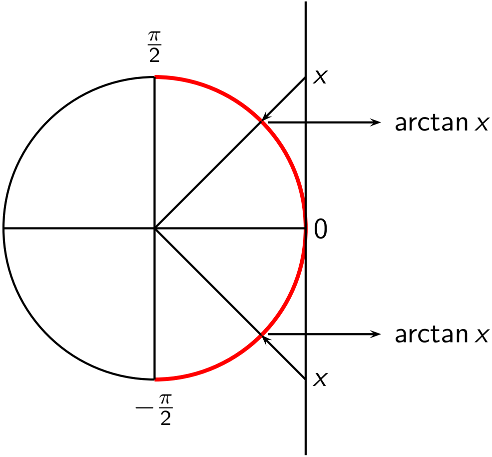
   b) Hàm số $y = \arccos x$, TXĐ$= [-1, 1]$, TGT$= [0, \pi]$ và là một hàm số đơn điệu giảm.



Các hàm số sơ cấp cơ bản

5. Hàm lượng giác ngược.

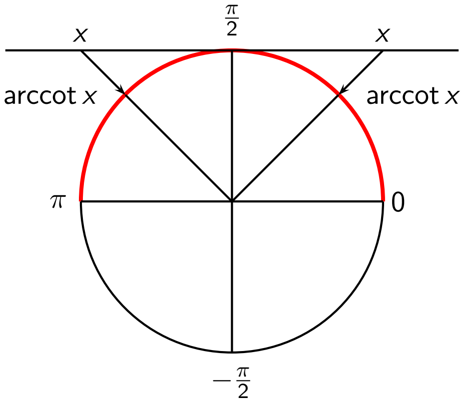
   c) Hàm số $y = \arctan x$, TXĐ=$\mathbb{R}$, TGT= $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ và là một hàm số đơn điệu tăng.



Các hàm số sơ cấp cơ bản

5. Hàm lượng giác ngược.

   d) Hàm số $y = \operatorname{arccot} x$ xác định trên $\mathbb{R}$, nhận giá trị trên $(0, \pi)$ và là một hàm số đơn điệu giảm.



Hàm số sơ cấp

Người ta gọi hàm số sơ cấp là hàm số được tạo thành bởi một số hữu hạn các phép toán cộng, trừ, nhân, chia, phép lập hàm số đối với các hàm số sơ cấp cơ bản. Các hàm số sơ cấp được chia thành hai loại.

i) Hàm số đại số: là những hàm số mà khi tính giá trị của nó ta chỉ phải làm một số hữu hạn các phép toán cộng, trừ, nhân, chia và lũy thừa với số mũ hữu tỉ. Ví dụ: các đa thức, phân thức, ...

ii) Hàm số siêu việt: là những hàm số sơ cấp nhưng không phải là hàm số đại số, như $y = \ln x, y = \sin x, \ldots$

Chương 1: Hàm số một biến số

1. Hàm số
2. Dãy số
3. Giới hạn của hàm số
4. Vô cùng lớn - Vô cùng bé
5. Hàm số liên tục
6. Đạo hàm và vi phân
7. Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng
   - Các công thức khai triển Taylor, Maclaurin
   - Quy tắc L'Hospital
   - Hàm số đơn điệu và các tính chất
   - BĐT hàm lồi
8. Các lược đồ khảo sát hàm số

Dãy số

Định nghĩa

Dãy số là một hàm số $\mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto a_n$. *Kí hiệu* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

i) Dãy số đơn điệu: tăng $(a_n < a_{n+1})$, *giảm* $(a_n > a_{n+1})$.

ii) Dãy số bị chặn: chặn trên $a_n \le M\ \forall n$, *chặn dưới:* $a_n \ge K\ \forall n$.

Giới hạn của dãy số

Một dãy số $\{a_n\}$ được gọi là có giới hạn là L và viết

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \text{ hay } a_n \to L \text{ khi } n \to \infty$$

i) (nói một cách nôm na) nếu ta có thể làm cho các số hạng a_n gần L với một giá trị tùy ý bằng cách chọn n đủ lớn.

Dãy số

Định nghĩa

Dãy số là một hàm số $\mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto a_n$. *Kí hiệu* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

i) *Dãy số đơn điệu: tăng* $(a_n < a_{n+1})$, *giảm* $(a_n > a_{n+1})$.

ii) *Dãy số bị chặn: chặn trên* $a_n \leq M\ \forall n$, *chặn dưới:* $a_n \geq K\ \forall n$.

Giới hạn của dãy số

Một dãy số $\{a_n\}$ được gọi là có giới hạn là L và viết

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \text{ hay } a_n \to L \text{ khi } n \to \infty$$

i) (nói một cách nôm na) nếu ta có thể làm cho các số hạng a_n gần L với một giá trị tùy ý bằng cách chọn n đủ lớn.

ii) (nói một cách chính xác) nếu với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại số tự nhiên N sao cho

$$\text{nếu } n > N \text{ thì } |a_n - L| < \epsilon.$$

Các tiêu chuẩn tồn tại giới hạn:

Giới hạn vô cùng

Ta nói $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ nếu với mọi số thực dương M, tồn tại số tự nhiên N sao cho

$$\text{nếu } n > N \text{ thì } a_n > M.$$

Hãy phát biểu cho TH $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

Các tiêu chuẩn tồn tại giới hạn:

Giới hạn vô cùng

Ta nói $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ nếu với mọi số thực dương M, tồn tại số tự nhiên N sao cho

$$\text{nếu } n > N \text{ thì } a_n > M.$$

Hãy phát biểu cho TH $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

Tính duy nhất của giới hạn

Giới hạn của một dãy số, nếu tồn tại, là duy nhất.

Giới hạn của dãy số

Các phép toán về giới hạn của dãy số

Nếu tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = B$ hữu hạn thì

i) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$,

ii) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n . \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$,

iii) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n}$, nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n \neq 0$.

Các tiêu chuẩn tồn tại giới hạn

i) Tiêu chuẩn kẹp:

ii) Tiêu chuẩn đơn điệu bị chặn: $e := \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Tiêu chuẩn Cauchy

Định nghĩa

Dãy số $\{a_n\}$ *được gọi là dãy số Cauchy nếu với mọi* $\epsilon > 0$, *tồn tại số tự nhiên* N *sao cho* $|a_n - a_m| < \epsilon$ *với mọi* $m, n > N$.

Ví dụ

Dãy số $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ là một dãy số Cauchy.

Tiêu chuẩn Cauchy

Định nghĩa

Dãy số $\{a_n\}$ được gọi là dãy số Cauchy nếu với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại số tự nhiên N sao cho $|a_n - a_m| < \epsilon$ với mọi $m, n > N$.

Ví dụ

Dãy số $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ là một dãy số Cauchy.

Định lý

Dãy số $\{a_n\}$ là hội tụ khi và chỉ khi nó là dãy số Cauchy.

Ví dụ

Chứng minh rằng dãy số $\{a_n\}$ với $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ là phân kỳ.

Chương 1: Hàm số một biến số

1. Hàm số
2. Dãy số
3. Giới hạn của hàm số
4. Vô cùng lớn - Vô cùng bé
5. Hàm số liên tục
6. Đạo hàm và vi phân
7. Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng
   - Các công thức khai triển Taylor, Maclaurin
   - Quy tắc L'Hospital
   - Hàm số đơn điệu và các tính chất
   - BĐT hàm lồi
8. Các lược đồ khảo sát hàm số

Giới hạn của hàm số

Định nghĩa

Giả sử rằng hàm số $f(x)$ được xác định tại mọi điểm $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$. Ta nói giới hạn của hàm số $f(x)$ khi x tiến đến x_0 bằng L và viết

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

i) (nói một cách nôm na) nếu ta có thể làm cho giá trị của hàm số $f(x)$ gần L với một giá trị tùy ý bằng cách chọn x đủ gần x_0.

Giới hạn của hàm số

Định nghĩa

Giả sử rằng hàm số $f(x)$ được xác định tại mọi điểm $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$. Ta nói giới hạn của hàm số $f(x)$ khi x tiến đến x_0 bằng L và viết

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

i) *(nói một cách nôm na) nếu ta có thể làm cho giá trị của hàm số $f(x)$ gần L với một giá trị tùy ý bằng cách chọn x đủ gần x_0.*

ii) *(nói một cách chính xác) nếu với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại số tự nhiên $\delta > 0$ sao cho*

$$\text{nếu } |x - x_0| < \delta \text{ thì } |f(x) - L| < \epsilon.$$

Giới hạn của hàm số

Định nghĩa

Giả sử rằng hàm số $f(x)$ được xác định tại mọi điểm $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$. Ta nói giới hạn của hàm số $f(x)$ khi x tiến đến x_0 bằng L và viết

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

i) *(nói một cách nôm na) nếu ta có thể làm cho giá trị của hàm số $f(x)$ gần L với một giá trị tùy ý bằng cách chọn x đủ gần x_0.*

ii) *(nói một cách chính xác) nếu với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại số tự nhiên $\delta > 0$ sao cho*

$$\text{nếu } |x - x_0| < \delta \text{ thì } |f(x) - L| < \epsilon.$$

Tương tự như vậy, hãy nêu các định nghĩa $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x), \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x), \lim\limits_{x \to \infty} f(x).$

Các tính chất của giới hạn

Tính duy nhất của giới hạn

Giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, nếu tồn tại, là duy nhất.

Các phép toán trên giới hạn

1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.
2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.
3) $\lim\limits_{x\to x_0}[cf(x)] = c\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.
4) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.
5) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ nếu $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$.

Chú ý: Ngoại trừ bốn dạng vô định sau $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\times\infty, \infty-\infty$.

Giới hạn của hàm số

Giới hạn của hàm hợp

Nếu có $\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} u(x) = u_0, \\ \lim\limits_{u\to u_0} f(u) = f(u_0) \end{cases}$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(u(x)) = f(u_0)$.

Áp dụng $\lim\limits_{x\to x_0} A(x)^{B(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} B(x)\ln A(x)}$.

Định lý (Tiêu chuẩn kẹp)

Nếu $f(x) \le g(x) \le h(x)$ trong một lân cận nào đó của a, và tồn tại các giới hạn $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x)$. Khi đó tồn tại $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, và

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x).$$

Ví dụ

Chứng minh $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x =$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty,$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty,$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x =$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$,
2) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$,

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0,$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x =$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0,$
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty,$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$,
2) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$,
3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$,
4) $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x =$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$,
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$,
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$,
4) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty,$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0,$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty,$

4) $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty.$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x =$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty,$
2) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0,$
3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty,$
4) $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty.$
5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0,$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty,$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0,$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty,$

4) $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty.$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0,$

6) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x =$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty,$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0,$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty,$

4) $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty.$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0,$

6) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty,$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0,$
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty,$
4) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty.$
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0,$
6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty,$
7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x =$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$,
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$,
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$,
4) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$.
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$,
6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty$,
7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty$,

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$,
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$,
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$,
4) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$.
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$,
6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty$,
7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty$,
8) $\lim\limits_{x\to0^+} \log_{\frac{1}{2}} x =$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty,$
2) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0,$
3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty,$
4) $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty.$
5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0,$
6) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty,$
7) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty,$
8) $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty.$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0,$
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty,$
4) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty.$
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0,$
6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty,$
7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty,$
8) $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty.$
9) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x =$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0,$
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty,$
4) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty.$
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0,$
6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty,$
7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty,$
8) $\lim\limits_{x\to0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty.$
9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty,$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0,$
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty,$
4) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty.$
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0,$
6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty,$
7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty,$
8) $\lim\limits_{x\to0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty.$
9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty,$
10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x =$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0,$
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty,$
4) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty.$
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0,$
6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty,$
7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty,$
8) $\lim\limits_{x\to0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty.$
9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty,$
10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty,$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0,$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty,$

4) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty.$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0,$

6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty,$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty,$

8) $\lim\limits_{x\to0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty.$

9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty,$

10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty,$

11) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan x =$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$,

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$,

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$,

4) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$.

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$,

6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty$,

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty$,

8) $\lim\limits_{x\to0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty$.

9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$,

10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$,

11) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$,

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0,$
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty,$
4) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty.$
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0,$
6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty,$
7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty,$
8) $\lim\limits_{x\to0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty.$
9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty,$
10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty,$
11) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty,$
12) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} \tan x =$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0,$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty,$

4) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty.$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0,$

6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty,$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty,$

8) $\lim\limits_{x\to0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty.$

9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty,$

10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty,$

11) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty,$

12) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty,$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0,$
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty,$
4) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty.$
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0,$
6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty,$
7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty,$
8) $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty.$
9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty,$
10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty,$
11) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty,$
12) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty,$
13) $\lim\limits_{x\to 0^+} \cot x =$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$,

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$,

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$,

4) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$.

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$,

6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty$,

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty$,

8) $\lim\limits_{x\to0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty$.

9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$,

10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$,

11) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$,

12) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$,

13) $\lim\limits_{x\to0^+} \cot x = +\infty$,

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$,
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$,
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$,
4) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$,
6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty$,
7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty$,
8) $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty$.
9) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$,
10) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$,
11) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$,
12) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$,
13) $\lim\limits_{x\to 0^+} \cot x = +\infty$,
14) $\lim\limits_{x\to 0^-} \cot x =$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0,$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty,$

4) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty.$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0,$

6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty,$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty,$

8) $\lim\limits_{x\to0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty.$

9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty,$

10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty,$

11) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty,$

12) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty,$

13) $\lim\limits_{x\to0^+} \cot x = +\infty,$

14) $\lim\limits_{x\to0^-} \cot x = -\infty,$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0,$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty,$

4) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty.$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0,$

6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty,$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty,$

8) $\lim\limits_{x\to0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty.$

9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty,$

10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty,$

11) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty,$

12) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty,$

13) $\lim\limits_{x\to0^+} \cot x = +\infty,$

14) $\lim\limits_{x\to0^-} \cot x = -\infty,$

15) $\lim\limits_{x\to\pi^+} \cot x =$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$,
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$,
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$,
4) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$,
6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty$,
7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty$,
8) $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty$.
9) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$,
10) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$,
11) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$,
12) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$,
13) $\lim\limits_{x\to 0^+} \cot x = +\infty$,
14) $\lim\limits_{x\to 0^-} \cot x = -\infty$,
15) $\lim\limits_{x\to \pi^+} \cot x = +\infty$,

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$,
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$,
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$,
4) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$.
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$,
6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty$,
7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty$,
8) $\lim\limits_{x\to0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty$.
9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$,
10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$,
11) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$,
12) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$,
13) $\lim\limits_{x\to0^+} \cot x = +\infty$,
14) $\lim\limits_{x\to0^-} \cot x = -\infty$,
15) $\lim\limits_{x\to\pi^+} \cot x = +\infty$,
16) $\lim\limits_{x\to\pi^-} \cot x =$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$,
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$,
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$,
4) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$,
6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty$,
7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty$,
8) $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty$.
9) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$,
10) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$,
11) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$,
12) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$,
13) $\lim\limits_{x\to 0^+} \cot x = +\infty$,
14) $\lim\limits_{x\to 0^-} \cot x = -\infty$,
15) $\lim\limits_{x\to \pi^+} \cot x = +\infty$,
16) $\lim\limits_{x\to \pi^-} \cot x = -\infty$,

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0,$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty,$

4) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty.$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0,$

6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty,$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty,$

8) $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty.$

9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty,$

10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty,$

11) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty,$

12) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty,$

13) $\lim\limits_{x\to 0^+} \cot x = +\infty,$

14) $\lim\limits_{x\to 0^-} \cot x = -\infty,$

15) $\lim\limits_{x\to \pi^+} \cot x = +\infty,$

16) $\lim\limits_{x\to \pi^-} \cot x = -\infty,$

17) $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x =$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0,$
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty,$
4) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty.$
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0,$
6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty,$
7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty,$
8) $\lim\limits_{x\to0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty.$
9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty,$
10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty,$
11) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty,$
12) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty,$
13) $\lim\limits_{x\to0^+} \cot x = +\infty,$
14) $\lim\limits_{x\to0^-} \cot x = -\infty,$
15) $\lim\limits_{x\to\pi^+} \cot x = +\infty,$
16) $\lim\limits_{x\to\pi^-} \cot x = -\infty,$
17) $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2},$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0,$
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty,$
4) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty.$
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0,$
6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty,$
7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty,$
8) $\lim\limits_{x\to0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty.$
9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty,$
10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty,$
11) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty,$
12) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty,$
13) $\lim\limits_{x\to0^+} \cot x = +\infty,$
14) $\lim\limits_{x\to0^-} \cot x = -\infty,$
15) $\lim\limits_{x\to\pi^+} \cot x = +\infty,$
16) $\lim\limits_{x\to\pi^-} \cot x = -\infty,$
17) $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2},$
18) $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x =$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$,

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$,

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$,

4) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$.

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$,

6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty$,

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty$,

8) $\lim\limits_{x\to0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty$.

9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$,

10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$,

11) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$,

12) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$,

13) $\lim\limits_{x\to0^+} \cot x = +\infty$,

14) $\lim\limits_{x\to0^-} \cot x = -\infty$,

15) $\lim\limits_{x\to\pi^+} \cot x = +\infty$,

16) $\lim\limits_{x\to\pi^-} \cot x = -\infty$,

17) $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$,

18) $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$,

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$,

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$,

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$,

4) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$.

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$,

6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty$,

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty$,

8) $\lim\limits_{x\to0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty$.

9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$,

10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$,

11) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$,

12) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$,

13) $\lim\limits_{x\to0^+} \cot x = +\infty$,

14) $\lim\limits_{x\to0^-} \cot x = -\infty$,

15) $\lim\limits_{x\to\pi^+} \cot x = +\infty$,

16) $\lim\limits_{x\to\pi^-} \cot x = -\infty$,

17) $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$,

18) $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$,

19) $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arccot} x =$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$,
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$,
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$,
4) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$,
6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty$,
7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty$,
8) $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty$.
9) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$,
10) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$,
11) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$,
12) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$,
13) $\lim\limits_{x\to 0^+} \cot x = +\infty$,
14) $\lim\limits_{x\to 0^-} \cot x = -\infty$,
15) $\lim\limits_{x\to \pi^+} \cot x = +\infty$,
16) $\lim\limits_{x\to \pi^-} \cot x = -\infty$,
17) $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$,
18) $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$,
19) $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arccot} x = \pi$,

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0,$
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty,$
4) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty.$
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0,$
6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty,$
7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty,$
8) $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty.$
9) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty,$
10) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty,$
11) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty,$
12) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty,$
13) $\lim\limits_{x\to 0^+} \cot x = +\infty,$
14) $\lim\limits_{x\to 0^-} \cot x = -\infty,$
15) $\lim\limits_{x\to \pi^+} \cot x = +\infty,$
16) $\lim\limits_{x\to \pi^-} \cot x = -\infty,$
17) $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2},$
18) $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2},$
19) $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arccot} x = \pi,$
20) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arccot} x =$

Một số giới hạn đặc biệt quan trọng

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$,

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$,

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$,

4) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$.

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$,

6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty$,

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty$,

8) $\lim\limits_{x\to0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty$.

9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$,

10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$,

11) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$,

12) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$,

13) $\lim\limits_{x\to0^+} \cot x = +\infty$,

14) $\lim\limits_{x\to0^-} \cot x = -\infty$,

15) $\lim\limits_{x\to\pi^+} \cot x = +\infty$,

16) $\lim\limits_{x\to\pi^-} \cot x = -\infty$,

17) $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$,

18) $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$,

19) $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arccot} x = \pi$,

20) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arccot} x = 0$.

Chương 1: Hàm số một biến số

1. Hàm số
2. Dãy số
3. Giới hạn của hàm số
4. Vô cùng lớn - Vô cùng bé
5. Hàm số liên tục
6. Đạo hàm và vi phân
7. Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng
   - Các công thức khai triển Taylor, Maclaurin
   - Quy tắc L'Hospital
   - Hàm số đơn điệu và các tính chất
   - BĐT hàm lồi
8. Các lược đồ khảo sát hàm số

Vô cùng lớn - Vô cùng bé

Vô cùng bé

Hàm số $f(x)$ được gọi là một *vô cùng bé* (viết tắt là VCB) khi $x \to a$ nếu

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0.$$

Từ định nghĩa giới hạn của hàm số, nếu $\lim_{x \to a} f(x) = A$ thì $f(x) = A + \alpha(x)$, trong đó $\alpha(x)$ là một VCB khi $x \to a$.

Ví dụ

$f(x) = \sin x, g(x) = \tan x, h(x) = x^{2017}$ là các VCB khi $x \to 0$.

Các tính chất

i) Tổng, hiệu, tích của hai VCB là một VCB.

ii) Tuy nhiên, thương của hai VCB chưa chắc đã là một VCB, vì chúng thuộc dạng vô định $\frac{0}{0}$.

So sánh các VCB

So sánh các VCB

Giả sử $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCB khi $x \to a$.

i) Nếu $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, ta nói rằng $\alpha(x)$ là VCB bậc cao hơn $\beta(x)$ và kí hiệu $\alpha(x) = o(\beta(x))$.

ii) Nếu $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$, ta nói rằng $\alpha(x), \beta(x)$ là các VCB cùng bậc. Đặc biệt, nếu $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ thì ta nói $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCB tương đương và viết

$$\alpha(x) \sim \beta(x).$$

Ví dụ

i) $f(x) = x^a$ $(a > 0)$ là VCB bậc cao hơn $g(x) = x^b$ $(b > 0) \Leftrightarrow a > b$.

ii) $\sin x \sim x$.

Quy tắc thay tương đương

Định lý (Quy tắc thay tương đương)

Nếu $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x), \beta_1(x) \sim \beta_2(x)$ *khi* $x \to a$ *thì*

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}.$$

Các VCB tương đương hay dùng

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x$$

$$\sim e^x - 1 \sim \frac{a^x - 1}{\ln a} \sim \ln(1 + x)$$

$$(1 + x)^a - 1 \sim ax$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}.$$

Quy tắc ngắt bỏ VCB bậc cao

Định lý (Quy tắc ngắt bỏ VCB bậc cao)

Nếu $\alpha_1(x) = o(\alpha_2(x)), \beta_1(x) = o(\beta_2(x))$ *khi* $x \to a$ *thì*

$$\alpha_1(x) + \alpha_2(x) \sim \alpha_2(x) \text{ và } \lim_{x \to a} \frac{\alpha_1(x) + \alpha_2(x)}{\beta_1(x) + \beta_2(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}.$$

Ví dụ

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2 + x^3}$.

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{x + x^2}}$.

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1 + \alpha x} - \sqrt[n]{1 + \beta x}}{x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1 + \alpha x} . \sqrt[n]{1 + \beta x} - 1}{x}$.

Ví dụ

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x + \arcsin^2 x - \arctan^2 x}{3x}$.

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x + 2\sin x - \sin^3 x - x^2 + 3x^4}{\tan^3 x - 6\sin^2 x + x - 5x^3}$.

Vô cùng bé

Ví dụ (Giữa kì, K61)

So sánh cặp vô cùng bé sau đây khi $x \to 0$

a) $\alpha(x) = \sqrt[3]{x^2 + x^3}$, $\quad \beta(x) = e^{\sin x} - 1$.

b) $\alpha(x) = \sqrt[5]{x^4 - x^5}$, $\quad \beta(x) = \ln(1 + \tan x)$.

c) $\alpha(x) = e^{\sqrt{x}} - 1$, $\quad \beta(x) = \sqrt{x + x^2}$.

d) $\alpha(x) = e^{x^2} - 1$, $\quad \beta(x) = x^2 + x^3$.

e) $\alpha(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$, $\quad \beta(x) = e^{\sin x} - \cos x$.

Chú ý

KHÔNG thay tương đương với hiệu hai VCB, $\alpha(x) = \sin x - \tan x + x^3$.

i) Thay tương đương $\alpha(x) \sim x^3$, *ii) Thực tế,* $\alpha(x) \sim \frac{x^3}{2}$.

Vô cùng lớn

Vô cùng lớn

i) Hàm số $f(x)$ được gọi là một *vô cùng lớn* (viết tắt là VCL) khi $x \to a$ nếu
$$\lim_{x \to a} |f(x)| = \infty.$$

ii) $\alpha(x)$ là một VCB khi $x \to a \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha(x)}$ là một VCL khi $x \to a$.

So sánh các VCL

Giả sử $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCL khi $x \to a$.

i) Nếu $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, ta nói rằng $\alpha(x)$ là VCB bậc cao hơn $\beta(x)$ và kí hiệu $\alpha(x) = O(\beta(x))$.

ii) Nếu $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$, ta nói rằng $\alpha(x), \beta(x)$ là các VCL cùng bậc. Đặc biệt, nếu $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ thì ta nói $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCL tương đương và viết $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Vô cùng lớn

Qui tắc thay tương đương và ngắt bỏ VCL bậc thấp

i) Nếu $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x), \beta_1(x) \sim \beta_2(x)$ là các VCL khi $x \to a$ thì

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}.$$

ii) Nếu $\alpha_1(x) = O(\alpha_2(x)), \beta_1(x) = O(\beta_2(x))$ là các VCL khi $x \to a$ thì

$$\alpha_1(x) + \alpha_2(x) \sim \alpha_1(x) \text{ và } \lim_{x\to a} \frac{\alpha_1(x)+\alpha_2(x)}{\beta_1(x)+\beta_2(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Ví dụ

Tính

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x+2^x}{x+3^x}.$$

Chương 1: Hàm số một biến số

1. Hàm số
2. Dãy số
3. Giới hạn của hàm số
4. Vô cùng lớn - Vô cùng bé
5. Hàm số liên tục
6. Đạo hàm và vi phân
7. Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng
   - Các công thức khai triển Taylor, Maclaurin
   - Quy tắc L'Hospital
   - Hàm số đơn điệu và các tính chất
   - BĐT hàm lồi
8. Các lược đồ khảo sát hàm số

Hàm số liên tục

Định nghĩa

Hàm số $f(x)$ được gọi là liên tục tại x_0 nếu nó xác định trong một lân cận nào đó của x_0 và $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Liên tục một phía

i) Liên tục trái:
$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

ii) Liên tục phải
$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Ví dụ (Học kì 20163)

Tìm a để $x = 2$ là điểm liên tục của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} a\cos\sqrt{x-1}, & \text{nếu } x \geq 1, \\ \operatorname{arccot}(1-x), & \text{nếu } x < 1. \end{cases}$$

Các định lý về hàm liên tục

Một số tính chất

Tổng, hiệu, tích, thương của các hàm số liên tục?

Hàm số liên tục trên một khoảng, một đoạn

i) Hàm số $f(x)$ liên tục trên (a, b) nếu nó liên tục tại mọi $x_0 \in (a, b)$,

ii) Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ nếu nó liên tục tại mọi $x_0 \in (a, b)$, đồng thời liên tục phải tại a, liên tục trái tại b. Khi đó, nó

  a) bị chặn trên đoạn đó, tức là $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$.

  b) đạt được GTLN, GTNN trên đó.

Sự liên tục của hàm hợp

Nếu $\begin{cases} u(x) \text{ liên tục tại } x_0, \\ f(u) \text{ liên tục tại } u_0 = u(x_0) \end{cases}$ thì $f(u(x))$ liên tục tại $x = x_0$.

Các định lý về hàm liên tục

Sự liên tục của hàm ngược

Nếu $y = f(x)$ đồng biến và liên tục trên khoảng (a, b) thì hàm ngược $y = g(x)$ cũng đồng biến và liên tục trên $f(a, b)$.

Định lý Cauchy

Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và có $f(a).f(b) < 0$ thì $\exists \alpha \in (a, b)$ để $f(\alpha) = 0$.

Ví dụ

Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$.

a) Biết $a + b + 2c = 0$, chứng minh rằng $f(x)$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $[0, 1]$.

b) Biết $2a + 3b + 6c = 0$, chứng minh rằng $f(x)$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $[0, 1]$.

Điểm gián đoạn của hàm số

Điểm liên tục

$$p = [\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) \text{ hữu hạn}] \wedge [\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) \text{ hữu hạn}]$$
$$\wedge [\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)]$$

Điểm gián đoạn

Nếu hàm số không liên tục tại điểm x_0 thì ta nói nó gián đoạn tại x_0.

Điểm gián đoạn của hàm số

Điểm liên tục

$$p = [\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) \text{ hữu hạn}] \wedge [\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) \text{ hữu hạn}]$$
$$\wedge [\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)]$$

Điểm gián đoạn

Nếu hàm số không liên tục tại điểm x_0 thì ta nói nó gián đoạn tại x_0.

$$\bar{p} = [\nexists \lim_{x \to x_0^-} f(x)] \vee [\nexists \lim_{x \to x_0^+} f(x)]$$
$$\vee [\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty] \vee [\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty]$$
$$\vee [\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)]$$
$$\vee [\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)] \neq f(x_0).$$

Phân loại điểm gián đoạn của hàm số

Giả sử x_0 là một điểm gián đoạn của hàm số $y = f(x)$.

Phân loại điểm gián đoạn

$\bar{p} = [\nexists \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)] \vee [\nexists \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)]$	**Loại II**
$\vee [\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \infty] \vee [\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \infty]$	**Loại II**
$\vee [\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)]$	**Loại I**
$\vee [\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)] \neq f(x_0)$	**Bỏ được**

Nếu x_0 là một điểm gián đoạn loại I thì giá trị $\left|f\left(x_0^+\right) - f\left(x_0^-\right)\right|$ gọi là bước nhảy của hàm số.

Phân loại điểm gián đoạn của hàm số

Ví dụ (Giữa kì, K61)

Tìm và phân loại điểm gián đoạn của các hàm số

a) $y = \frac{1}{1-2^{\tan x}}$. b) $y = e^{\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x}}$. c) $y = \frac{1}{1-2^{\frac{x-1}{x}}}$.

$$\bar{p} = [\nexists \lim_{x\to x_0^-} f(x)] \vee [\nexists \lim_{x\to x_0^+} f(x)] \qquad \textbf{Loại II}$$

$$\vee [\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty] \vee [\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty] \qquad \textbf{Loại II}$$

$$\vee [\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)] \qquad \textbf{Loại I}$$

$$\vee [\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)] \neq f(x_0) \qquad \textbf{Bỏ được}$$

Chú ý: Tất cả các hàm số sơ cấp đều liên tục trên TXĐ của chúng.

Chương 1: Hàm số một biến số

1. Hàm số
2. Dãy số
3. Giới hạn của hàm số
4. Vô cùng lớn - Vô cùng bé
5. Hàm số liên tục
6. Đạo hàm và vi phân
7. Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng
   - Các công thức khai triển Taylor, Maclaurin
   - Quy tắc L'Hospital
   - Hàm số đơn điệu và các tính chất
   - BĐT hàm lồi
8. Các lược đồ khảo sát hàm số

Đạo hàm

Định nghĩa

1) Đạo hàm

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

2) Đạo hàm phải:

$$f'(x_0^+) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

3) Đạo hàm trái:

$$f'(x_0^-) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Ví dụ (Giữa kì, K61). Tính $f'(0)$, biết $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{nếu } x \geq 0, \\ x^2 + x, & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$

Đạo hàm

Các tính chất

1) Mối quan hệ giữa đạo hàm và đạo hàm một phía.

$$\exists f'(x_0) \Leftrightarrow [\exists f'(x_0^+) \text{ hữu hạn}] \wedge [\exists f'(x_0^-) \text{ hữu hạn}] \wedge [f'(x_0^+) = f'(x_0^-)].$$

2) $f(x)$ có đạo hàm tại $x_0 \overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ liên tục tại x_0.

Các phép toán trên đạo hàm

1) $(u+v)' = u' + v'$,
2) $(u-v)' = u' - v'$,
3) $(uv)' = u'v + uv'$,
4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Ví dụ (Giữa kì, K61)

Hãy chỉ ra một hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, liên tục tại các điểm $x_0 = 0, x_1 = 1$ nhưng không có đạo hàm tại các điểm này.

Đạo hàm của hàm hợp và hàm ngược

Đạo hàm của hàm hợp

$$[f(u(x))]' = f'_u . u'_x .$$

Ý tưởng chứng minh

i) $u(x_0 + \Delta x) = u(x_0) + u'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$.

ii) $f[u(x_0+\Delta x)] - f[u(x_0)] = f\left[u_0 + \underbrace{u'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)}_{\delta_y}\right] - f(u(x_0))$

Ví dụ, tính $\left(x^{\sin x}\right)', 0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Đạo hàm của hàm ngược

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x, $f'(x) \neq 0$, và nếu hàm số $y = f(x)$ có hàm số ngược $x = \varphi(y)$ thì hàm số $x = \varphi(y)$ có đạo hàm tại $y = f(x)$ và

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Bảng đạo hàm các hàm số sơ cấp cơ bản

1) $(x^\alpha)' =$

Bảng đạo hàm các hàm số sơ cấp cơ bản

1) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

2) $(a^x)' =$

Bảng đạo hàm các hàm số sơ cấp cơ bản

1) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
2) $(a^x)' = a^x \ln a$
3) $(\log_a x)' =$

Bảng đạo hàm các hàm số sơ cấp cơ bản

1) $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$
2) $(a^x)' = a^x \ln a$
3) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
4) $(\sin x)' =$

Bảng đạo hàm các hàm số sơ cấp cơ bản

1) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
2) $(a^x)' = a^x \ln a$
3) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
4) $(\sin x)' = \cos x$
5) $(\cos x)' =$

Bảng đạo hàm các hàm số sơ cấp cơ bản

1) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
2) $(a^x)' = a^x \ln a$
3) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
4) $(\sin x)' = \cos x$
5) $(\cos x)' = -\sin x$
6) $(\tan x)' =$

Bảng đạo hàm các hàm số sơ cấp cơ bản

1) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
2) $(a^x)' = a^x \ln a$
3) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
4) $(\sin x)' = \cos x$
5) $(\cos x)' = -\sin x$
6) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
7) $(\cot x)' =$

Bảng đạo hàm các hàm số sơ cấp cơ bản

1) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
2) $(a^x)' = a^x \ln a$
3) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
4) $(\sin x)' = \cos x$
5) $(\cos x)' = -\sin x$
6) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
7) $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
8) $(\arcsin x)' =$

Bảng đạo hàm các hàm số sơ cấp cơ bản

1) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
2) $(a^x)' = a^x \ln a$
3) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
4) $(\sin x)' = \cos x$
5) $(\cos x)' = -\sin x$
6) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
7) $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
8) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
9) $(\arccos x)' =$

Bảng đạo hàm các hàm số sơ cấp cơ bản

1) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
2) $(a^x)' = a^x \ln a$
3) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
4) $(\sin x)' = \cos x$
5) $(\cos x)' = -\sin x$
6) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
7) $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
8) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
9) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10) $(\arctan x)' =$

Bảng đạo hàm các hàm số sơ cấp cơ bản

1) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
2) $(a^x)' = a^x \ln a$
3) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
4) $(\sin x)' = \cos x$
5) $(\cos x)' = -\sin x$
6) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
7) $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
8) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
9) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
11) $(\text{arccot}\, x)' =$

Bảng đạo hàm các hàm số sơ cấp cơ bản

1) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
2) $(a^x)' = a^x \ln a$
3) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
4) $(\sin x)' = \cos x$
5) $(\cos x)' = -\sin x$
6) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
7) $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
8) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
9) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
11) $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Vi phân

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0. Theo định nghĩa của đạo hàm,

Vi phân

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0. Theo định nghĩa của đạo hàm,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

$\Rightarrow$

Vi phân

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0. Theo định nghĩa của đạo hàm,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f^{'}(x_0)$$
$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta(x)}{\Delta x} = 0$$

Vi phân

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0. Theo định nghĩa của đạo hàm,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f^{'}(x_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta(x)}{\Delta x} = 0$$

Do vậy

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f^{'}(x_0)\Delta x = o(\Delta x)$$

$$\Rightarrow$$

Vi phân

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0. Theo định nghĩa của đạo hàm,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta(x)}{\Delta x} = 0$$

Do vậy

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x = o(\Delta x)$$

$$\Rightarrow$$

Vi phân

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0. Theo định nghĩa của đạo hàm,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f^{'}(x_0)$$
$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta(x)}{\Delta x} = 0$$

Do vậy

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f^{'}(x_0)\Delta x = o(\Delta x)$$
$$\Rightarrow f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f^{'}(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$
$$\Rightarrow f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \sim f^{'}(x_0)\Delta x \text{ khi } \Delta x \to 0.$$

Vi phân

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0. Theo định nghĩa của đạo hàm,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f^{'}(x_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta(x)}{\Delta x} = 0$$

Do vậy

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f^{'}(x_0)\Delta x = o(\Delta x)$$

$$\Rightarrow f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f^{'}(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

$$\Rightarrow f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \sim f^{'}(x_0)\Delta x \text{ khi } \Delta x \to 0.$$

Định nghĩa

Cho hàm số $f(x)$ xác định trong một lân cận $U_\epsilon(x_0)$. Nếu có $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$, ở đó A chỉ phụ thuộc vào x_0 chứ không phụ thuộc vào Δx thì ta nói hàm số $f(x)$ khả vi tại x_0 và

$$df = A\Delta x.$$

Ý nghĩa & ứng dụng của vi phân

Mối liên hệ giữa đạo hàm và vi phân

i) Đối với hàm số một biến số, hàm số có đạo hàm tại x khi và chỉ khi nó khả vi tại x, và $df(x) = f'(x)\Delta x$.

ii) Nếu $y = x$ thì $dy = dx = 1.\Delta x$. Vì thế với biến số độc lập x ta có $dx = \Delta x$ và do đó,

$$dy = df(x) = f^{'}(x)dx.$$

Các phép toán trên vi phân

$$d(u \pm v) = du \pm dv, \quad d(u.v) = udv + vdu, \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Ví dụ (Giữa kì, K61)

Tìm $f'(x)$ nếu biết

a) $\frac{d}{dx}[f(2016x)] = x^2$.

b) $\frac{d}{dx}[f(2017x)] = x^2$.

Ý nghĩa & ứng dụng của vi phân

Tính bất biến của vi phân cấp một

Cho $y = f(x)$ là một hàm số khả vi.

i) Nếu x là một biến số độc lập thì ta có $dy = f'(x)dx$,

ii) Nếu x không phải là một biến số độc lập, chẳng hạn như $x = x(t)$ là một hàm số phụ thuộc vào t chẳng hạn, thì ta vẫn có

$$dy = f'(x)dx.$$

Do đó, vi phân cấp một có tính bất biến.

Chú ý: Vi phân cấp cao không có tính bất biến này.

Ứng dụng của vi phân vào tính gần đúng

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Ví dụ (Giữa kì, K61): tính gần đúng $\sqrt[3]{7,97}, \sqrt[3]{8,03}$.

Đạo hàm cấp cao

Định nghĩa

Nếu hàm số $y = f(x)$ *có đạo hàm thì* $y' = f'(x)$ *gọi là đạo hàm cấp một của* f.

i) *Đạo hàm, nếu có, của đạo hàm cấp một được gọi là đạo hàm cấp hai, kí hiệu là* $f''(x)$.

ii) *Đạo hàm, nếu có, của đạo hàm cấp* $n-1$ *được gọi là đạo hàm cấp* n, *kí hiệu là* $f^{(n)}(x)$.

Các phép toán

i) $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$,

ii) $(u.v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$ (công thức Leibniz).

Bảng đạo hàm cấp cao

1) $(x^\alpha)^{(n)} =$

Bảng đạo hàm cấp cao

1) $(x^{\alpha})^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$

2) $\left(\frac{1}{x+\alpha}\right)^{(n)} =$

Bảng đạo hàm cấp cao

1) $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$

2) $\left(\frac{1}{x+\alpha}\right)^{(n)} = (-1)^n\frac{n!}{(x+\alpha)^{n+1}}$

3) $(\sin x)^{(n)} =$

Bảng đạo hàm cấp cao

1) $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$

2) $\left(\frac{1}{x+\alpha}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(x+\alpha)^{n+1}}$

3) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

4) $(\cos x)^{(n)} =$

Bảng đạo hàm cấp cao

1) $(x^{\alpha})^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$

2) $\left(\frac{1}{x+\alpha}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(x+\alpha)^{n+1}}$

3) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

4) $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

5) $(a^x)^{(n)} =$

Bảng đạo hàm cấp cao

1) $(x^{\alpha})^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$

2) $\left(\frac{1}{x+\alpha}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(x+\alpha)^{n+1}}$

3) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

4) $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

5) $(a^x)^{(n)} = a^x (\ln a)^n$

6) $(\ln x)^{(n)} =$

Bảng đạo hàm cấp cao

1) $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$

2) $\left(\frac{1}{x+\alpha}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(x+\alpha)^{n+1}}$

3) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

4) $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

5) $(a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n$

6) $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$

Ví dụ (Giữa kì, K61)

Tính các đạo hàm cấp cao

a) $[(x^2+x)e^x]^{(20)}$.

b) $(x^2\sin 2x)^{(50)}$.

c) $(x^2\cos 2x)^{(60)}$.

d) $\left(\frac{1}{x^2-x}\right)^{(60)}$

e) $y^{(10)}(0)$ với $y(x) = e^{x^2}$,

f) $y^{(9)}(0)$ với $y(x) = \arctan x$.

$$(u.v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)} \quad \text{(công thức Leibniz).}$$

Vi phân cấp cao

Định nghĩa

i) *Vi phân của vi phân cấp một* $d(d(f(x)))$ *được gọi là vi phân cấp hai của hàm số* $f(x)$, *và được kí hiệu là* $d^2 f(x)$.

ii) *Tương tự như vậy,* $d^n f(x) = d(d^{n-1} f(x))$.

Công thức tính

i) Nếu x là biến số độc lập thì $d^n f(x) = f^{(n)}(x) dx^n$.

ii) Chú ý rằng vi phân cấp cao không có tính bất biến, chẳng hạn như, nếu x phụ thuộc vào t thì

$$df(x) = f'(x)dx, \quad d^2 f(x) = f'(x)d^2 x + f''(x)dx^2 \neq f''(x)dx^2.$$

Ví dụ (Học kì 20163)

Cho $y = (2x+1)\sin x$. Tính $d^{(10)} y(0)$.

Chương 1: Hàm số một biến số

1. Hàm số
2. Dãy số
3. Giới hạn của hàm số
4. Vô cùng lớn - Vô cùng bé
5. Hàm số liên tục
6. Đạo hàm và vi phân
7. Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng
   - Các công thức khai triển Taylor, Maclaurin
   - Quy tắc L'Hospital
   - Hàm số đơn điệu và các tính chất
   - BĐT hàm lồi
8. Các lược đồ khảo sát hàm số

Các định lý về hàm khả vi

Định lý Fermat

Giả thiết hàm số $f(x)$

i) xác định trên (a, b),

ii) đạt cực trị tại $x_0 \in (a, b)$,

iii) tồn tại $f'(x_0)$.

Khi đó, $f'(x_0) = 0$.

Nếu $f(x)$ đạt CĐ tại x_0 thì

i) $f'(x_0^+) = \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0.$

ii) $f'(x_0^-) = \lim\limits_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0.$

$\exists f'(x_0) \Rightarrow f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$. Điều này chỉ xảy ra khi $f'(x_0^+) = f'(x_0^-) = 0$.

Ví dụ

Ví dụ: Tìm cực trị của hàm số $y = |x|^3$.

Các định lý về hàm khả vi

Định lý Rolle

Nếu hàm số $f(x)$:

i) Liên tục trong khoảng đóng $[a, b]$,

ii) Có đạo hàm trong khoảng mở (a, b),

iii) thỏa mãn điều kiện $f(a) = f(b)$,

thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho $f^{'}(c) = 0$.

Ví dụ (Học kì 20163)

Cho hàm số $f(x) = (x-1)(x^2-2)(x^2-3)$. Phương trình $f'(x) = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực? Giải thích.

Các định lý về hàm khả vi

Định lý Lagrange

Nếu hàm số $f(x)$:

i) Liên tục trong khoảng đóng $[a, b]$,

ii) Có đạo hàm trong khoảng mở (a, b),

thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

i) Ý tưởng chứng minh: $h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.

ii) Các giả thiết của Định lý đều cần thiết, không thể bỏ qua giả thiết nào.

Ví dụ (Giữa kì, K61)

Chứng minh rằng $\frac{a-b}{1+a^2} < \operatorname{arccot} b - \operatorname{arccot} a < \frac{a-b}{1+b^2}$ với mọi $0 < a < b$.

Các định lý về hàm khả vi

Định lý Cauchy

Nếu các hàm số $f(x), g(x)$ thỏa mãn các điều kiện:

i) Liên tục trong khoảng đóng $[a, b]$,

ii) Có đạo hàm trong khoảng mở (a, b),

iii) $g'(x)$ không triệt tiêu trong khoảng mở (a, b). Khi đó,

$$\exists c \in (a, b) \text{ sao cho } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Ý tưởng chứng minh: Xét $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x) - g(a)]$

Ví dụ

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$,

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{x}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

Các công thức khai triển Taylor, Maclaurin

Định lý

Nếu hàm số $f(x)$

i) Có đạo hàm đến cấp n trong khoảng đóng liên tục tại x_0,

ii) Có đạo hàm đến cấp $n+1$ trong lân cận $U_\epsilon(x_0)$,

thì $f(x)$ có thể biểu diễn dưới dạng

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

ở đó c là một số thực nằm giữa x và x_0 nào đó.

Nếu $x_0 = 0$ thì công thức sau còn được gọi là công thức Maclaurin:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Một số khai triển Maclaurin

1) $(1+x)^{\alpha} =$

Một số khai triển Maclaurin

1) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$

2) $\frac{1}{1+x} =$

Một số khai triển Maclaurin

1) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$
2) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
3) $\frac{1}{1-x} =$

Một số khai triển Maclaurin

1) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$
2) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
3) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$
4) $e^x =$

Một số khai triển Maclaurin

1) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$

2) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$

3) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$

4) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

5) $\sin x =$

Một số khai triển Maclaurin

1) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$

2) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$

3) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$

4) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

5) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$

6) $\cos x =$

Một số khai triển Maclaurin

1) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$
2) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
3) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$
4) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
5) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
6) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$
7) $\ln(1+x) =$

Một số khai triển Maclaurin

1) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$
2) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
3) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$
4) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
5) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
6) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$
7) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$

Ứng dụng

i) Tính gần đúng.

ii) Tính giới hạn.

Công thức Maclaurin

Tính gần đúng

Tính gần đúng số e với sai số nhỏ hơn $0,0001$.

Tính giới hạn

Tính
$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}.$$

Ví dụ (Giữa kì, K61)

Tính giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x-\ln(1+x)}{x^2}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\ln(1+x)}{x^2}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\frac{1}{1-x}}{x^2}$.

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-\cos x}{x^2}$.

e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\sin x}{x^2}$.

f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1-\sin 2x}{x^2}$.

Quy tắc L'Hospital

Định lý (Quy tắc L'Hospital)

Giả thiết

i) *Các hàm số $f(x), g(x)$ khả vi trong một lân cận nào đó của điểm a (có thể trừ tại a), $g'(x) \neq 0$ trong lân cận ấy,*

ii) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0.$

Khi đó nếu tồn tại $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ *thì* $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$

Ý tưởng chứng minh:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \overset{(Cauchy)}{=} \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

c nằm giữa x và x_0.

Công thức L'Hospital

Chú ý

Công thức L'Hospital vẫn đúng nếu

1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$,
2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty, \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$,
3) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty, \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$.

Công thức L'Hospital chỉ là điều kiện cần.

Ví dụ (Cuối kì, 20163). Tính

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x+1}.$$

Ứng dụng của công thức L'Hospital

1) Khử dạng vô định $\frac{0}{0}$, Ví dụ, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3}$.
2) Khử dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$, Ví dụ, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$.
3) Khử dạng vô định $0\times\infty$, Ví dụ $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$.
4) Khử dạng vô định $\infty-\infty$, Ví dụ $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$.
5) Các dạng vô định $1^\infty, 0^0, \infty^0$

Về các dạng vô định $1^\infty, 0^0, \infty^0$

Đặt vấn đề

a) Tính $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, ở đó $f(x) = A(x)^{B(x)}$.

Về các dạng vô định $1^\infty, 0^0, \infty^0$

Đặt vấn đề

a) Tính $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, ở đó $f(x) = A(x)^{B(x)}$.

b) Lời giải: $\lim\limits_{x\to x_0} \ln f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} B(x)\ln A(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\ln A(x)}{1/B(x)}$.

Về các dạng vô định $1^\infty, 0^0, \infty^0$

Đặt vấn đề

a) Tính $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, ở đó $f(x) = A(x)^{B(x)}$.

b) Lời giải: $\lim\limits_{x\to x_0} \ln f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} B(x)\ln A(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\ln A(x)}{1/B(x)}$.

i) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\ln A(x)}{1/B(x)}$ có dạng $\frac{0}{0}$, nghĩa là

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} \ln A(x) = 0, \\ \lim\limits_{x\to x_0} 1/B(x) = 0 \end{cases}$$

Về các dạng vô định $1^\infty, 0^0, \infty^0$

Đặt vấn đề

a) Tính $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, ở đó $f(x) = A(x)^{B(x)}$.

b) Lời giải: $\lim\limits_{x\to x_0} \ln f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} B(x)\ln A(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\ln A(x)}{1/B(x)}$.

i) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\ln A(x)}{1/B(x)}$ có dạng $\frac{0}{0}$, nghĩa là

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} \ln A(x) = 0, \\ \lim\limits_{x\to x_0} 1/B(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} A(x) = 1, \\ \lim\limits_{x\to x_0} B(x) = \infty \end{cases} \Rightarrow 1^\infty.$$

Về các dạng vô định $1^\infty, 0^0, \infty^0$

Đặt vấn đề

a) Tính $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, ở đó $f(x) = A(x)^{B(x)}$.

b) Lời giải: $\lim\limits_{x\to x_0} \ln f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} B(x)\ln A(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\ln A(x)}{1/B(x)}$.

i) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\ln A(x)}{1/B(x)}$ có dạng $\frac{0}{0}$, nghĩa là

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} \ln A(x) = 0, \\ \lim\limits_{x\to x_0} 1/B(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} A(x) = 1, \\ \lim\limits_{x\to x_0} B(x) = \infty \end{cases} \Rightarrow 1^\infty.$$

ii) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\ln A(x)}{1/B(x)}$ có dạng $\frac{\infty}{\infty}$, nghĩa là

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} \ln A(x) = \infty, \\ \lim\limits_{x\to x_0} 1/B(x) = \infty \end{cases}$$

Về các dạng vô định $1^\infty, 0^0, \infty^0$

Đặt vấn đề

a) Tính $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, ở đó $f(x) = A(x)^{B(x)}$.

b) Lời giải: $\lim\limits_{x\to x_0} \ln f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} B(x)\ln A(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\ln A(x)}{1/B(x)}$.

i) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\ln A(x)}{1/B(x)}$ có dạng $\frac{0}{0}$, nghĩa là

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} \ln A(x) = 0, \\ \lim\limits_{x\to x_0} 1/B(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} A(x) = 1, \\ \lim\limits_{x\to x_0} B(x) = \infty \end{cases} \Rightarrow 1^\infty.$$

ii) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\ln A(x)}{1/B(x)}$ có dạng $\frac{\infty}{\infty}$, nghĩa là

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} \ln A(x) = \infty, \\ \lim\limits_{x\to x_0} 1/B(x) = \infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} A(x) = 0 \vee \lim\limits_{x\to x_0} A(x) = \infty \\ \lim\limits_{x\to x_0} B(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0^0 \\ \infty^0 \end{cases}$$

Về các dạng vô định $1^\infty, 0^0, \infty^0$

Các trường hợp khác hay bị nhầm lẫn sau đây đều không phải là dạng vô định và có thể tính trực tiếp dựa vào các quy tắc tính giới hạn:

$$0^1 =$$

Về các dạng vô định $1^\infty, 0^0, \infty^0$

Các trường hợp khác hay bị nhầm lẫn sau đây đều không phải là dạng vô định và có thể tính trực tiếp dựa vào các quy tắc tính giới hạn:

$$0^1 = 0, \quad 0^{+\infty} =$$

Về các dạng vô định $1^\infty, 0^0, \infty^0$

Các trường hợp khác hay bị nhầm lẫn sau đây đều không phải là dạng vô định và có thể tính trực tiếp dựa vào các quy tắc tính giới hạn:

$$0^1 = 0, \quad 0^{+\infty} = 0, \quad 0^{-\infty} =$$

Về các dạng vô định $1^\infty, 0^0, \infty^0$

Các trường hợp khác hay bị nhầm lẫn sau đây đều không phải là dạng vô định và có thể tính trực tiếp dựa vào các quy tắc tính giới hạn:

$$0^1 = 0, \quad 0^{+\infty} = 0, \quad 0^{-\infty} = +\infty,$$

$$1^0 =$$

Về các dạng vô định $1^\infty, 0^0, \infty^0$

Các trường hợp khác hay bị nhầm lẫn sau đây đều không phải là dạng vô định và có thể tính trực tiếp dựa vào các quy tắc tính giới hạn:

$$0^1 = 0, \quad 0^{+\infty} = 0, \quad 0^{-\infty} = +\infty,$$

$$1^0 = 1, \quad 1^1 =$$

Về các dạng vô định $1^\infty, 0^0, \infty^0$

Các trường hợp khác hay bị nhầm lẫn sau đây đều không phải là dạng vô định và có thể tính trực tiếp dựa vào các quy tắc tính giới hạn:

$$0^1 = 0, \quad 0^{+\infty} = 0, \quad 0^{-\infty} = +\infty,$$

$$1^0 = 1, \quad 1^1 = 1, \quad \infty^1 =$$

Về các dạng vô định $1^\infty, 0^0, \infty^0$

Các trường hợp khác hay bị nhầm lẫn sau đây đều không phải là dạng vô định và có thể tính trực tiếp dựa vào các quy tắc tính giới hạn:

$$0^1 = 0, \quad 0^{+\infty} = 0, \quad 0^{-\infty} = +\infty,$$

$$1^0 = 1, \quad 1^1 = 1, \quad \infty^1 = \infty, \quad \infty^\infty =$$

Về các dạng vô định $1^\infty, 0^0, \infty^0$

Các trường hợp khác hay bị nhầm lẫn sau đây đều không phải là dạng vô định và có thể tính trực tiếp dựa vào các quy tắc tính giới hạn:

$$0^1 = 0, \quad 0^{+\infty} = 0, \quad 0^{-\infty} = +\infty,$$

$$1^0 = 1, \quad 1^1 = 1, \quad \infty^1 = \infty, \quad \infty^\infty = \infty.$$

Ngoài ra,

$$\frac{1}{0} =$$

Về các dạng vô định $1^\infty, 0^0, \infty^0$

Các trường hợp khác hay bị nhầm lẫn sau đây đều không phải là dạng vô định và có thể tính trực tiếp dựa vào các quy tắc tính giới hạn:

$$0^1 = 0, \quad 0^{+\infty} = 0, \quad 0^{-\infty} = +\infty,$$

$$1^0 = 1, \quad 1^1 = 1, \quad \infty^1 = \infty, \quad \infty^\infty = \infty.$$

Ngoài ra,

$$\frac{1}{0} = \infty, \quad \frac{1}{\infty} =$$

Về các dạng vô định $1^\infty, 0^0, \infty^0$

Các trường hợp khác hay bị nhầm lẫn sau đây đều không phải là dạng vô định và có thể tính trực tiếp dựa vào các quy tắc tính giới hạn:

$$0^1 = 0, \quad 0^{+\infty} = 0, \quad 0^{-\infty} = +\infty,$$

$$1^0 = 1, \quad 1^1 = 1, \quad \infty^1 = \infty, \quad \infty^\infty = \infty.$$

Ngoài ra,

$$\frac{1}{0} = \infty, \quad \frac{1}{\infty} = 0, \quad \frac{\infty}{0} =$$

Về các dạng vô định $1^\infty, 0^0, \infty^0$

Các trường hợp khác hay bị nhầm lẫn sau đây đều không phải là dạng vô định và có thể tính trực tiếp dựa vào các quy tắc tính giới hạn:

$$0^1 = 0, \quad 0^{+\infty} = 0, \quad 0^{-\infty} = +\infty,$$

$$1^0 = 1, \quad 1^1 = 1, \quad \infty^1 = \infty, \quad \infty^\infty = \infty.$$

Ngoài ra,

$$\frac{1}{0} = \infty, \quad \frac{1}{\infty} = 0, \quad \frac{\infty}{0} = \infty, \quad \frac{\infty}{1} =$$

Về các dạng vô định $1^\infty, 0^0, \infty^0$

Các trường hợp khác hay bị nhầm lẫn sau đây đều không phải là dạng vô định và có thể tính trực tiếp dựa vào các quy tắc tính giới hạn:

$$0^1 = 0, \quad 0^{+\infty} = 0, \quad 0^{-\infty} = +\infty,$$

$$1^0 = 1, \quad 1^1 = 1, \quad \infty^1 = \infty, \quad \infty^\infty = \infty.$$

Ngoài ra,

$$\frac{1}{0} = \infty, \quad \frac{1}{\infty} = 0, \quad \frac{\infty}{0} = \infty, \quad \frac{\infty}{1} = \infty, \quad \infty \times \infty =$$

Về các dạng vô định $1^\infty, 0^0, \infty^0$

Các trường hợp khác hay bị nhầm lẫn sau đây đều không phải là dạng vô định và có thể tính trực tiếp dựa vào các quy tắc tính giới hạn:

$$0^1 = 0, \quad 0^{+\infty} = 0, \quad 0^{-\infty} = +\infty,$$

$$1^0 = 1, \quad 1^1 = 1, \quad \infty^1 = \infty, \quad \infty^\infty = \infty.$$

Ngoài ra,

$$\frac{1}{0} = \infty, \quad \frac{1}{\infty} = 0, \quad \frac{\infty}{0} = \infty, \quad \frac{\infty}{1} = \infty, \quad \infty \times \infty = \infty$$

Ví dụ

Tính $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$.

Phạm vi áp dụng của quy tắc L'Hospital?

Ví dụ

Tính
$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^4}.$$

Cách 1: Maclaurin

$$\begin{aligned}\text{TS} &= x-\sin x\\ &= \frac{x^3}{6}+o(x^3)\\ &\sim \frac{x^3}{6}.\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^4}=\infty.$$

Cách 2: L'Hospital

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^4} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{4x^3}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{12x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{24x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{24}=0.\end{aligned}$$

Thay tương đương khi có hiệu hai VCB?

Ví dụ (Giữa kì K61)

Tính
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{x^2}.$$

Cách 1: Thay tương đương

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1) - \sin x + (1 - \cos x)}{x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x - x + \frac{x^2}{2}}{x^2}$$
$$= \frac{1}{2}.$$

Cách 2: L'Hospital

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x + \sin x}{2x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + \sin x + \cos x}{2}$$
$$= 1.$$

Hiệu hai VCB

Không thay tương đương được trong biểu thức $\alpha(x) - \beta(x)$ nếu $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCB tương đương. Vậy hiệu của hai VCB tương đương là gì?

Bổ đề

Hiệu của hai VCB tương đương là một VCB bậc cao hơn cả hai VCB đó.

Ví dụ (Một số ví dụ về hiệu hai VCB tương đương)

a) $x - \sin x \sim$

Hiệu hai VCB

Không thay tương đương được trong biểu thức $\alpha(x) - \beta(x)$ nếu $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCB tương đương. Vậy hiệu của hai VCB tương đương là gì?

Bổ đề

Hiệu của hai VCB tương đương là một VCB bậc cao hơn cả hai VCB đó.

Ví dụ (Một số ví dụ về hiệu hai VCB tương đương)

a) $x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}$

b) $x - \tan x \sim$

Hiệu hai VCB

Không thay tương đương được trong biểu thức $\alpha(x) - \beta(x)$ nếu $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCB tương đương. Vậy hiệu của hai VCB tương đương là gì?

Bổ đề

Hiệu của hai VCB tương đương là một VCB bậc cao hơn cả hai VCB đó.

Ví dụ (Một số ví dụ về hiệu hai VCB tương đương)

a) $x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}$

b) $x - \tan x \sim -\frac{x^3}{3}$

c) $x - \arcsin x \sim$

Hiệu hai VCB

Không thay tương đương được trong biểu thức $\alpha(x) - \beta(x)$ nếu $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCB tương đương. Vậy hiệu của hai VCB tương đương là gì?

Bổ đề

Hiệu của hai VCB tương đương là một VCB bậc cao hơn cả hai VCB đó.

Ví dụ (Một số ví dụ về hiệu hai VCB tương đương)

a) $x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}$

b) $x - \tan x \sim -\frac{x^3}{3}$

c) $x - \arcsin x \sim -\frac{x^3}{6}$

d) $x - \arctan x \sim$

Hiệu hai VCB

Không thay tương đương được trong biểu thức $\alpha(x) - \beta(x)$ nếu $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCB tương đương. Vậy hiệu của hai VCB tương đương là gì?

Bổ đề

Hiệu của hai VCB tương đương là một VCB bậc cao hơn cả hai VCB đó.

Ví dụ (Một số ví dụ về hiệu hai VCB tương đương)

a) $x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}$

b) $x - \tan x \sim \; - \frac{x^3}{3}$

c) $x - \arcsin x \sim \; - \frac{x^3}{6}$

d) $x - \arctan x \sim \frac{x^3}{3}$

e) $\sin x - \tan x \sim$

Hiệu hai VCB

Không thay tương đương được trong biểu thức $\alpha(x) - \beta(x)$ nếu $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCB tương đương. Vậy hiệu của hai VCB tương đương là gì?

Bổ đề

Hiệu của hai VCB tương đương là một VCB bậc cao hơn cả hai VCB đó.

Ví dụ (Một số ví dụ về hiệu hai VCB tương đương)

a) $x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}$

b) $x - \tan x \sim -\frac{x^3}{3}$

c) $x - \arcsin x \sim -\frac{x^3}{6}$

d) $x - \arctan x \sim \frac{x^3}{3}$

e) $\sin x - \tan x \sim -\frac{x^3}{2}$

f) $\sin x - \arcsin x \sim$

Hiệu hai VCB

Không thay tương đương được trong biểu thức $\alpha(x) - \beta(x)$ nếu $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCB tương đương. Vậy hiệu của hai VCB tương đương là gì?

Bổ đề

Hiệu của hai VCB tương đương là một VCB bậc cao hơn cả hai VCB đó.

Ví dụ (Một số ví dụ về hiệu hai VCB tương đương)

a) $x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}$

b) $x - \tan x \sim -\frac{x^3}{3}$

c) $x - \arcsin x \sim -\frac{x^3}{6}$

d) $x - \arctan x \sim \frac{x^3}{3}$

e) $\sin x - \tan x \sim -\frac{x^3}{2}$

f) $\sin x - \arcsin x \sim -\frac{x^3}{3}$

g) $\sin x - \arctan x \sim$

Hiệu hai VCB

Không thay tương đương được trong biểu thức $\alpha(x) - \beta(x)$ nếu $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCB tương đương. Vậy hiệu của hai VCB tương đương là gì?

Bổ đề

Hiệu của hai VCB tương đương là một VCB bậc cao hơn cả hai VCB đó.

Ví dụ (Một số ví dụ về hiệu hai VCB tương đương)

a) $x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}$

b) $x - \tan x \sim -\frac{x^3}{3}$

c) $x - \arcsin x \sim -\frac{x^3}{6}$

d) $x - \arctan x \sim \frac{x^3}{3}$

e) $\sin x - \tan x \sim -\frac{x^3}{2}$

f) $\sin x - \arcsin x \sim -\frac{x^3}{3}$

g) $\sin x - \arctan x \sim \frac{x^3}{6}$

h) $\tan x - \arcsin x \sim$

Hiệu hai VCB

Không thay tương đương được trong biểu thức $\alpha(x) - \beta(x)$ nếu $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCB tương đương. Vậy hiệu của hai VCB tương đương là gì?

Bổ đề

Hiệu của hai VCB tương đương là một VCB bậc cao hơn cả hai VCB đó.

Ví dụ (Một số ví dụ về hiệu hai VCB tương đương)

a) $x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}$

b) $x - \tan x \sim -\frac{x^3}{3}$

c) $x - \arcsin x \sim -\frac{x^3}{6}$

d) $x - \arctan x \sim \frac{x^3}{3}$

e) $\sin x - \tan x \sim -\frac{x^3}{2}$

f) $\sin x - \arcsin x \sim -\frac{x^3}{3}$

g) $\sin x - \arctan x \sim \frac{x^3}{6}$

h) $\tan x - \arcsin x \sim \frac{x^3}{6}$

i) $\tan x - \arctan x \sim$

Hiệu hai VCB

Không thay tương đương được trong biểu thức $\alpha(x) - \beta(x)$ nếu $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCB tương đương. Vậy hiệu của hai VCB tương đương là gì?

Bổ đề

Hiệu của hai VCB tương đương là một VCB bậc cao hơn cả hai VCB đó.

Ví dụ (Một số ví dụ về hiệu hai VCB tương đương)

a) $x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}$

b) $x - \tan x \sim -\frac{x^3}{3}$

c) $x - \arcsin x \sim -\frac{x^3}{6}$

d) $x - \arctan x \sim \frac{x^3}{3}$

e) $\sin x - \tan x \sim -\frac{x^3}{2}$

f) $\sin x - \arcsin x \sim -\frac{x^3}{3}$

g) $\sin x - \arctan x \sim \frac{x^3}{6}$

h) $\tan x - \arcsin x \sim \frac{x^3}{6}$

i) $\tan x - \arctan x \sim \frac{2x^3}{3}$

j) $\arcsin x - \arctan x \sim$

Hiệu hai VCB

Không thay tương đương được trong biểu thức $\alpha(x) - \beta(x)$ nếu $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCB tương đương. Vậy hiệu của hai VCB tương đương là gì?

Bổ đề

Hiệu của hai VCB tương đương là một VCB bậc cao hơn cả hai VCB đó.

Ví dụ (Một số ví dụ về hiệu hai VCB tương đương)

a) $x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}$

b) $x - \tan x \sim -\frac{x^3}{3}$

c) $x - \arcsin x \sim -\frac{x^3}{6}$

d) $x - \arctan x \sim \frac{x^3}{3}$

e) $\sin x - \tan x \sim -\frac{x^3}{2}$

f) $\sin x - \arcsin x \sim -\frac{x^3}{3}$

g) $\sin x - \arctan x \sim \frac{x^3}{6}$

h) $\tan x - \arcsin x \sim \frac{x^3}{6}$

i) $\tan x - \arctan x \sim \frac{2x^3}{3}$

j) $\arcsin x - \arctan x \sim \frac{x^3}{2}$

k) $x - (e^x - 1) \sim$

Hiệu hai VCB

Không thay tương đương được trong biểu thức $\alpha(x) - \beta(x)$ nếu $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCB tương đương. Vậy hiệu của hai VCB tương đương là gì?

Bổ đề

Hiệu của hai VCB tương đương là một VCB bậc cao hơn cả hai VCB đó.

Ví dụ (Một số ví dụ về hiệu hai VCB tương đương)

a) $x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}$

b) $x - \tan x \sim -\frac{x^3}{3}$

c) $x - \arcsin x \sim -\frac{x^3}{6}$

d) $x - \arctan x \sim \frac{x^3}{3}$

e) $\sin x - \tan x \sim -\frac{x^3}{2}$

f) $\sin x - \arcsin x \sim -\frac{x^3}{3}$

g) $\sin x - \arctan x \sim \frac{x^3}{6}$

h) $\tan x - \arcsin x \sim \frac{x^3}{6}$

i) $\tan x - \arctan x \sim \frac{2x^3}{3}$

j) $\arcsin x - \arctan x \sim \frac{x^3}{2}$

k) $x - (e^x - 1) \sim -\frac{x^2}{2}$

l) $x - \ln(1 + x) \sim$

Hiệu hai VCB

Không thay tương đương được trong biểu thức $\alpha(x) - \beta(x)$ nếu $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCB tương đương. Vậy hiệu của hai VCB tương đương là gì?

Bổ đề

Hiệu của hai VCB tương đương là một VCB bậc cao hơn cả hai VCB đó.

Ví dụ (Một số ví dụ về hiệu hai VCB tương đương)

a) $x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}$

b) $x - \tan x \sim -\frac{x^3}{3}$

c) $x - \arcsin x \sim -\frac{x^3}{6}$

d) $x - \arctan x \sim \frac{x^3}{3}$

e) $\sin x - \tan x \sim -\frac{x^3}{2}$

f) $\sin x - \arcsin x \sim -\frac{x^3}{3}$

g) $\sin x - \arctan x \sim \frac{x^3}{6}$

h) $\tan x - \arcsin x \sim \frac{x^3}{6}$

i) $\tan x - \arctan x \sim \frac{2x^3}{3}$

j) $\arcsin x - \arctan x \sim \frac{x^3}{2}$

k) $x - (e^x - 1) \sim -\frac{x^2}{2}$

l) $x - \ln(1 + x) \sim \frac{x^2}{2}$

m) $(1 - \cos x) - \frac{x^2}{2} \sim$

Hiệu hai VCB

Không thay tương đương được trong biểu thức $\alpha(x) - \beta(x)$ nếu $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCB tương đương. Vậy hiệu của hai VCB tương đương là gì?

Bổ đề

Hiệu của hai VCB tương đương là một VCB bậc cao hơn cả hai VCB đó.

Ví dụ (Một số ví dụ về hiệu hai VCB tương đương)

a) $x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}$

b) $x - \tan x \sim -\frac{x^3}{3}$

c) $x - \arcsin x \sim -\frac{x^3}{6}$

d) $x - \arctan x \sim \frac{x^3}{3}$

e) $\sin x - \tan x \sim -\frac{x^3}{2}$

f) $\sin x - \arcsin x \sim -\frac{x^3}{3}$

g) $\sin x - \arctan x \sim \frac{x^3}{6}$

h) $\tan x - \arcsin x \sim \frac{x^3}{6}$

i) $\tan x - \arctan x \sim \frac{2x^3}{3}$

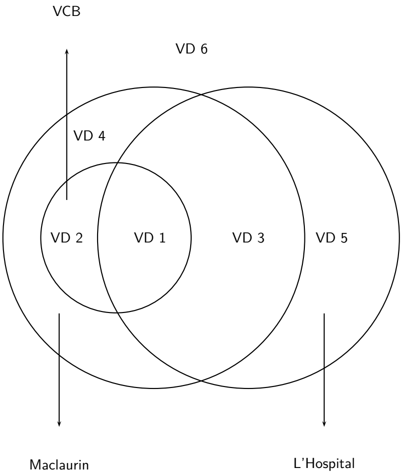
j) $\arcsin x - \arctan x \sim \frac{x^3}{2}$

k) $x - (e^x - 1) \sim -\frac{x^2}{2}$

l) $x - \ln(1 + x) \sim \frac{x^2}{2}$

m) $(1 - \cos x) - \frac{x^2}{2} \sim -\frac{x^4}{24}$

Ba phương pháp mới để tính giới hạn



1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\ln(1+x^2)}$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x+x^2-\sin x}{x+\sin^2 x+\arcsin^3 x+\arctan^4 x}$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x+x^3}{x^3}$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x-x^3}{\arcsin(\arctan^3 x)}$

5) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x}$, hoặc $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

6) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x-\sin x}{x+\cos x}$.

Comparison

Học phổ thông:

i) Ít học định nghĩa

ii) Học theo dạng bài

Học đại học:

i) Nắm chắc định nghĩa,

a) (Giữa kì K61). Tính $f'(0)$, biết
$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{nếu } x \geq 0, \\ x^2 + x, & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

b) (Giữa kì K59) Cho $f(x)$ khả vi tại 1 và $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(1+7x)-f(1+2x)}{x} = 2.$
Tính $f'(1)$.

ii) GV cung cấp công cụ, SV lựa chọn cách làm

a) (Giữa kì K61)
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-\sin x-\cos x}{x^2}$,

b) (Học kì 20163)
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x+1}$.

Về các VCL tiêu biểu

Ba VCL tiêu biểu (khi $x \to +\infty$), đó là

1) Các hàm số mũ với cơ số lớn hơn 1, ví dụ a^x $(a > 1)$,
2) Các hàm số đa thức, các hàm số là lũy thừa của x, chẳng hạn x^n, x^α, $(\alpha > 0)$,
3) Các hàm số logarit với cơ số lớn hơn 1, như $\ln x, \log_a x$ $(a > 1)$.

Ba hàm số này tiến ra vô cùng khi $x \to +\infty$ với tốc độ khác nhau.

$$\boxed{\textbf{Hàm số mũ}} \succ \boxed{\textbf{Hàm số đa thức}} \succ \boxed{\textbf{Hàm số logarit}}$$

Cụ thể,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = \infty, \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\log_a x} = \infty, \ \forall a > 1, \alpha > 0.$$

Ví dụ

Tính

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x + x^{2016} + e^x}{\log_2 x + x^{2017} + 2e^x}.$$

Một số bài tập bổ sung

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \cot x\right)$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x^2}} - \dfrac{e^x}{x}\right]$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x - x}{x - \sin x}\right)$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{\sin x - x}$

10) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{1 + 2\ln(\sin x)}$

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{x^3}$

12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1 + x\sin x} - \sqrt{\cos x}}$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}, a \neq 0, b \neq 0$

14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$

15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{a^{1/x}+b^{1/x}}{2}\right)^x, a, b > 0$

16) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x^2}\cos x}{x(\tan x - \sinh x)}$

Hàm số đơn điệu và các tính chất

Định nghĩa

Hàm số $f(x)$ *xác định trên* (a, b) *được gọi là*

i) *đơn điệu tăng nếu*

Hàm số đơn điệu và các tính chất

Định nghĩa

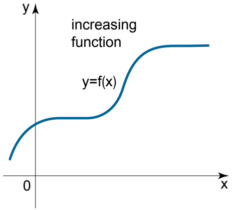
Hàm số $f(x)$ xác định trên (a, b) được gọi là

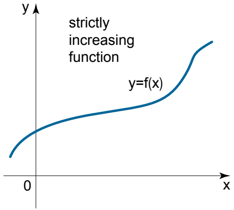
i) *đơn điệu tăng nếu với mọi $x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$ thì $f(x_1) \leq f(x_2)$,*

ii) *đơn điệu giảm nếu với mọi $x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$ thì $f(x_1) \geq f(x_2)$,*

iii) *tăng ngặt nếu với mọi $x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$,*

iv) *giảm ngặt nếu với mọi $x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$.*





Ví dụ, chứng minh hàm số $f(x) = x^3$ đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$ bằng định nghĩa.

Hàm số đơn điệu và các tính chất

Định lý

Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm trong khoảng (a, b). Khi đó, nếu $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (a, b)$ thì $f(x)$ đơn điệu tăng trên (a, b).

Hàm số đơn điệu và các tính chất

Định lý

Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm trong khoảng (a, b). Khi đó, nếu $f'(x) \geq 0\ \forall x \in (a, b)$ thì $f(x)$ đơn điệu tăng trên (a, b).

Chú ý

i) Trong Định lý trên ta đã giả thiết $f(x)$ là hàm số có đạo hàm trong khoảng (a, b). Tuy nhiên, trong thực tế, một hàm số đơn điệu không nhất thiết phải có đạo hàm. Thậm chí, nó có thể còn không liên tục.

Hàm số đơn điệu và các tính chất

Định lý

Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm trong khoảng (a, b). Khi đó, nếu $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in (a, b)$ thì $f(x)$ đơn điệu tăng trên (a, b).

Chú ý

i) *Trong Định lý trên ta đã giả thiết $f(x)$ là hàm số có đạo hàm trong khoảng (a, b). Tuy nhiên, trong thực tế, một hàm số đơn điệu không nhất thiết phải có đạo hàm. Thậm chí, nó có thể còn không liên tục.*

ii) *Xét tính đơn điệu của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$.*

Hàm số đơn điệu và các tính chất

Định lý

Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm trong khoảng (a, b). Khi đó, nếu $f'(x) \geq 0\ \forall x \in (a, b)$ thì $f(x)$ đơn điệu tăng trên (a, b).

Chú ý

i) *Trong Định lý trên ta đã giả thiết $f(x)$ là hàm số có đạo hàm trong khoảng (a, b). Tuy nhiên, trong thực tế, một hàm số đơn điệu không nhất thiết phải có đạo hàm. Thậm chí, nó có thể còn không liên tục.*

ii) *Xét tính đơn điệu của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$.Khi xét tính đơn điệu của hàm số, người ta chỉ xét tại những khoảng (đoạn) mà hàm số đó được xác định.*

Hàm số đơn điệu và các tính chất

Định lý

Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm trong khoảng (a, b). Khi đó, nếu $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in (a, b)$ thì $f(x)$ đơn điệu tăng trên (a, b).

Chú ý

i) *Trong Định lý trên ta đã giả thiết $f(x)$ là hàm số có đạo hàm trong khoảng (a, b). Tuy nhiên, trong thực tế, một hàm số đơn điệu không nhất thiết phải có đạo hàm. Thậm chí, nó có thể còn không liên tục.*

ii) *Xét tính đơn điệu của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$.Khi xét tính đơn điệu của hàm số, người ta chỉ xét tại những khoảng (đoạn) mà hàm số đó được xác định.*

iii) *Hàm số đơn điệu chỉ có thể có các điểm gián đoạn loại I.*

iv) *Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu tăng trên (a, b) thì hàm ngược của nó đơn điệu giảm trên $(f(a), f(b))$.*

Hàm lồi

Định nghĩa

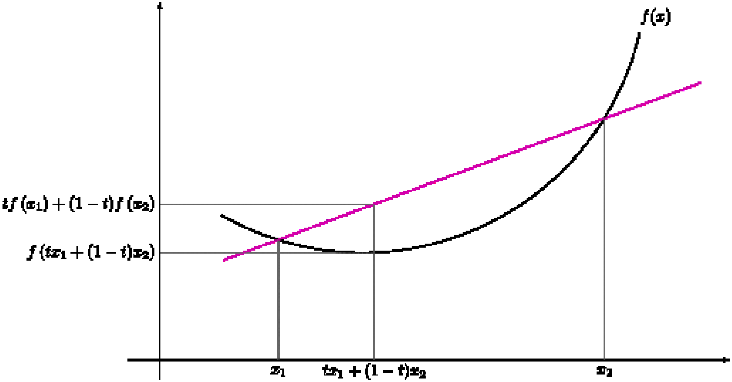
Hàm số $f(x)$ xác định trong khoảng I được gọi là lồi nếu

Hàm lồi

Định nghĩa

Hàm số $f(x)$ xác định trong khoảng I được gọi là lồi nếu

$$f(tx_1+(1-t)x_2)\le tf(x_1)+(1-t)f(x_2),\quad \forall x_1,x_2\in I \text{ và } \forall t\in[0,1].$$



Hàm số lồi

Định lý

Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trong khoảng I và có đạo hàm đến cấp hai trong I. Khi đó, nếu $f''(x) > 0$ trong I thì f là hàm số lồi trong I.

Ý tưởng chứng minh: Đặt $c = tx_1 + (1-t)x_2$, ta có

$$\begin{aligned}
& tf(x_1) + (1-t)f(x_2) - f(c) \\
=& (1-t)[f(x_2) - f(c)] - t[f(c) - f(x_1)] \\
=& (1-t)(x_2 - c)f'(c_1) - t(c - x_1)f'(c_2) \\
=& t(1-t)(x_2 - x_1)[f'(c_1) - f'(c_2)] \\
=& t(1-t)(x_2 - x_1)f''(c_3), \quad x_1 < c_3 < x_2
\end{aligned}$$

Chú ý

Hàm số f được gọi là lõm trên khoảng I nếu $-f$ là hàm số lồi trên khoảng đó.

BĐT hàm lồi

Định lý (Bất đẳng thức Jensen)

Cho f là hàm lồi trên (a, b), $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a, b)$ và $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Khi đó $f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.

Hệ quả (BĐT Cauchy (BĐT trung bình))

Áp dụng BĐT Jensen với $f(x) = -\ln x$ ta được:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n} \qquad \forall a_1, a_2, \ldots, a_n > 0.$$

Ví dụ

Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sqrt{1^2+1} + \sqrt{2^2+1} + \sqrt{3^2+1} + \cdots + \sqrt{n^2+1} \geq \frac{n}{2}\sqrt{n^2+2n+5}.$$

Cực trị của hàm số

Định nghĩa

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên (a, b), ta nói hàm số đạt cực trị tại điểm $x_0 \in (a, b)$ nếu

Cực trị của hàm số

Định nghĩa

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên (a, b), ta nói hàm số đạt cực trị tại điểm $x_0 \in (a, b)$ nếu $\exists U(x_0) \subset (a, b)$ sao cho $f(x) - f(x_0)$ không đổi dấu $\forall x \in U(x_0) \setminus \{x_0\}$.

- *i) Nếu $f(x) - f(x_0) > 0$ thì ta nói hàm số đạt cực tiểu tại x_0.*
- *ii) Nếu $f(x) - f(x_0) < 0$ thì ta nói hàm số đạt cực đại tại x_0.*

Định lý (Định lý Fermat)

Cho $f(x)$ liên tục trên khoảng (a, b), nếu hàm số đạt cực trị tại điểm $x_0 \in (a, b)$ và có đạo hàm tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

Cực trị của hàm số một biến số

Định lý (Điều kiện đủ của cực trị)

Giả thiết hàm số $f(x)$ khả vi trong khoảng $(a, b) \setminus \{x_0\}$, ở đó $x_0 \in (a, b)$ là một điểm tới hạn (đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định).

i) *Nếu khi đi qua x_0 mà $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm thì $f(x)$ đạt cực đại tại x_0.*

ii) *Nếu khi đi qua x_0 mà $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương thì $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0.*

Ví dụ (Giữa kì, K61)

Tìm các cực trị của hàm số sau

a) $y = \frac{2x}{x^2+2}$.

b) $y = \frac{2x}{x^2+1}$.

Cực trị của hàm số một biến số

Định lý

Giả thiết hàm số $f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai liên tục ở lân cận của điểm x_0 và $f'(x_0) = 0$. Khi đó

i) *Nếu $f''(x_0) > 0$ thì $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0.*

ii) *Nếu $f''(x_0) < 0$ thì $f(x)$ đạt cực đại tại x_0.*

Ví dụ (Giữa kì, K61)

Tìm các cực trị của hàm số $y = \frac{\sin x}{2+\cos x}$ trong khoảng $(0, 2\pi)$.

Cực trị của hàm số một biến số

Định lý

Giả thiết hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục đến cấp n tại lân cận của điểm x_0 và

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Khi đó

i) *Nếu n chẵn thì $f(x_0)$ đạt cực trị tại x_0 và đạt cực tiểu nếu $f^{(n)}(x_0) > 0$, đạt cực đại nếu $f^{(n)}(x_0) < 0$.*

ii) *Nếu n lẻ thì $f(x)$ không đạt cực trị tại x_0.*

Ví dụ

Tìm cực trị của hàm số $y = \sin^3 x, \quad y = \sin^4 x$.

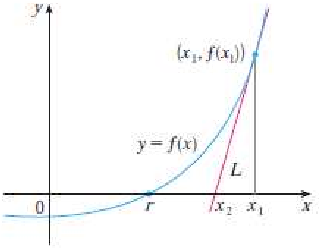
Phương pháp Newton

Đặt vấn đề

i) Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow$ có công thức giải.

ii) Phương trình bậc ba, bốn $\Rightarrow$ có công thức giải, nhưng phức tạp,

iii) Phương trình bậc lớn hơn hoặc bằng năm $\Rightarrow$ không có công thức giải.



1) Chọn một xấp xỉ x_1,
2) Viết PTTT tại điểm $(x_1, f(x_1))$,
3) Tìm giao điểm của TT với Ox.
4) $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$
5) $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Ví dụ: Bắt đầu với $x_1 = 2$, tìm xấp xỉ thứ ba, x_3, của nghiệm của phương trình $x^3 - 2x - 5 = 0$.

Phương pháp Newton

Một ví dụ về phương trình bậc lớn hơn năm

i) Một người bán hàng (dealer) mời bạn mua một chiếc xe ô tô trị giá \$18.000 với gói tài chính trả trong vòng 5 năm, mỗi tháng trả \$375.

ii) Hỏi: lãi suất hàng tháng thực tế bạn phải trả là bao nhiêu?

iii) Trả lời: giải phương trình:

$$A = \frac{R}{x}[1-(1+x)^{-n}],$$

ở đó A là giá trị hiện tại của chiếc ô tô, R là lượng tiền phải trả hàng tháng, n là số tháng, và x là lãi suất hàng tháng. Trong trường hợp này,

$$48x(1+x)^{60}-(1+x)^{60}+1=0.$$

Nghiệm xấp xỉ $x=0,0076$, tức $0,76\%/$ tháng hay là 9,12%/năm.

Phương pháp Newton

Ví dụ

Tôi muốn mua một chiếc máy tính giá 10,5 triệu và được tư vấn 3 gói:

i) gói chi phí thấp, trả trước 70%, 6 tháng sau, mỗi tháng trả 580.000 đồng $\Rightarrow$ số tiền chênh thêm sau 6 tháng là 308.000 đồng.

ii) gói vay nhanh, trả trước 50%, còn lại trả trong vòng 9 tháng với số tiền chênh lệch sau 9 tháng là 900.000 đồng so với giá gốc sản phẩm.

iii) gói lãi suất 0%, trả trước 30%. "Tuy nhiên, mỗi tháng phải trả thêm tiền phí thu hộ 11.000 đồng/tháng và tiền phí bảo hiểm. Tính ra, cuối kỳ tôi sẽ phải trả thêm 300.000 đồng cho khoản vay hơn 7 triệu đồng"

iv) tôi quyết định chọn mua chiếc máy tính với gói trả góp 0%.

v) Sau khi mua tôi tham khảo giá trên thị trường và biết chiếc laptop mua tại đây có giá cao hơn những cửa hàng nhỏ khác khoảng 1 triệu đồng.

Phương pháp Newton

Ví dụ

Giả sử một khách hàng được chào mời gói 0% để mua một thiết bị điện tử với giá \$1000, trả trong vòng 6 tháng, với chi phí xử lý \$50 và trả trước một tháng. Với gói này khách hàng thực chất phải trả lãi suất lên đến 12.48%.

Mua hàng trả góp lãi suất 0%?

i) So sánh giá với các cửa hàng khác xem giá có bị "tăng" lên không?

ii) Kiểm tra kĩ các khoản đặt cọc, khoản phụ phí,...

iii) Kiểm tra kĩ các thông tin về lệ phí/lãi suất phải trả nếu chẳng may thanh toán không đúng hạn.

iv) Luôn luôn ghi nhớ công thức sau để so sánh khi cần thiết

$$A = \frac{R}{x}[1-(1+x)^{-n}],$$

Chương 1: Hàm số một biến số

1. Hàm số
2. Dãy số
3. Giới hạn của hàm số
4. Vô cùng lớn - Vô cùng bé
5. Hàm số liên tục
6. Đạo hàm và vi phân
7. Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng
   - Các công thức khai triển Taylor, Maclaurin
   - Quy tắc L'Hospital
   - Hàm số đơn điệu và các tính chất
   - BĐT hàm lồi
8. Các lược đồ khảo sát hàm số

Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x)$

1) Tìm TXĐ của hàm số, nhận xét tính chẵn, lẻ, tuần hoàn của hàm số (nếu có).
2) Xác định chiều biến thiên: tìm các khoảng tăng, giảm của hàm số.
3) Tìm cực trị (nếu có).
4) Xét tính lồi, lõm (nếu cần thiết), điểm uốn (nếu có).
5) Tìm các tiệm cận của hàm số (nếu có).
6) Lập bảng biến thiên.
7) Tìm một số điểm đặc biệt mà hàm số đi qua (ví dụ như giao điểm với các trục toạ độ, ...) và vẽ đồ thị của hàm số.

Ví dụ (Cuối kì, K59)

Tìm tiệm cận của đồ thị hàm số $y = xe^{\frac{1}{x}} + 1$.

Ví dụ (Giữa kì, K61)

Tìm các cực trị của hàm số $y = \frac{\cos x}{2+\sin x}$ trong khoảng $(0, 2\pi)$.

Vẽ đường cong cho dưới dạng tham số

Khảo sát và vẽ đường cong cho dưới dạng tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

Chiều biến thiên - Tính lồi lõm

i) Khảo sát sự biến thiên của x, y theo t bằng cách xét dấu $x'(t), y'(t)$.

ii) Khảo sát sự biến thiên của y theo x:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Đây cũng chính là hệ số góc của tiếp tuyến.

iii) Tính lồi lõm và điểm uốn (nếu cần thiết):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)}{dx} = \frac{y_{tt}''x'_t - y'_t x_t''}{x'^3_t}.$$

Đường cong cho dưới dạng tham số

Tiệm cận

i) TCĐ: Nếu $\begin{cases} \lim\limits_{t\to t_0(\infty)} x(t) = x_0 \\ \lim\limits_{t\to t_0(\infty)} y(t) = \infty \end{cases}$ thì $x = x_0$ là một TCĐ.

ii) TCN: Nếu $\begin{cases} \lim\limits_{t\to t_0(\infty)} x(t) = \infty \\ \lim\limits_{t\to t_0(\infty)} y(t) = y_0 \end{cases}$ thì $y = y_0$ là một TCN.

iii) TCX: Nếu $\begin{cases} \lim\limits_{t\to t_0(\infty)} y(t) = \infty \\ \lim\limits_{t\to t_0(\infty)} x(t) = \infty \end{cases}$ và $\begin{cases} a = \lim\limits_{t\to t_0(\infty)} \dfrac{y(t)}{x(t)}, \\ b = \lim\limits_{t\to t_0(\infty)} [y(t) - ax(t)] \end{cases}$

thì $y = ax + b$ là một TCX.

Ví dụ (Giữa kì, K61)

Tìm các tiệm cận của đường cong cho bởi $x = \frac{2016t}{1-t^3}, y = \frac{2016t^2}{1-t^3}$.

Vẽ đường cong trong hệ tọa độ cực

1) Tìm miền xác định của hàm số
2) Xét tính đối xứng, tính tuần hoàn của hàm số.
   i) Nếu hàm số $r = r(\varphi)$ tuần hoàn với chu kì ω thì chỉ cần khảo sát và vẽ đường cong trong một khoảng có độ dài ω. Ta nhận được toàn bộ đường cong bằng những phép quay liên tiếp tâm O và các góc quay $\omega, 2\omega, \ldots,$
   ii) Nếu $r = r(\varphi)$ là hàm số chẵn thì đường cong nhận trục cực (Ox) làm trục đối xứng,
   iii) Nếu $r = r(\varphi)$ là hàm số lẻ thì đường cong nhận Oy làm trục đối xứng,
3) Tìm đạo hàm $r' = r'(\varphi)$ và xét dấu của r' để xác định các khoảng tăng, giảm của r theo φ.
4) Gọi V là góc giữa bán kính cực của điểm M và tiếp tuyến với đường cong tại M, ta có $\tan V = \frac{r}{r'}$. Đặc biệt, $\tan V = 0$, tiếp tuyến trùng với bán kính cực, $\tan V = \infty$, tiếp tuyến vuông góc với bán kính cực.
5) Vẽ đường cong.

Vẽ đường cong trong hệ tọa độ cực

Ví dụ

Khảo sát và vẽ đường cong $r = a(1 + \cos\varphi)$ $(a > 0)$, (đường Cardioid hay đường hình tim)