

# MA TRẬN - ĐỊNH THỨC

Đại số tuyến tính

## NHÓM 3

Đại học Bách Khoa Hà Nội

Tháng 2, 2022

# Nội dung

## 1. Định nghĩa ma trận

## 2. Các phép toán trên ma trận

- 2.1. Phép cộng ma trận
- 2.2. Phép nhân ma trận
  - 2.2.1. Nhân một số với ma trận
  - 2.2.2. Nhân hai ma trận
- 2.3. Lũy thừa ma trận
- 2.4. Ma trận chuyển vị

## 3. Định thức ma trận vuông

# Định nghĩa ma trận

Cho  $K$  là trường số thực hoặc trường số phức.

- Một ma trận (trên  $K$ ) cỡ  $m \times n$  là một bảng có  $m$  hàng và  $n$  cột:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

với  $a_{ij}$  ( $\forall i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ ) thuộc trường  $K$ .

- Nếu  $m = n$  thì  $A$  được gọi là ma trận vuông cấp  $n$ . Các phần tử  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  được gọi là phần tử chéo. Chúng lập nên *đường chéo chính* của ma trận  $A$ .
- Ký hiệu ma trận có thể dùng dấu ngoặc vuông như trên, hoặc tròn, và thường được ký hiệu gọn là  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  hoặc  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ .

# Một số loại ma trận

- Ma trận cỡ  $1 \times n$  được gọi là ma trận hàng.
- Ma trận cỡ  $m \times 1$  được gọi là ma trận cột.
- Ma trận  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  mà mọi phần tử  $a_{ij} = 0 (\forall i, j)$  được gọi là ma trận không, thường ký hiệu là  $\mathcal{O}$ , hoặc  $\mathcal{O}_{m \times n}$ .

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

# Một số loại ma trận

- Ma trận vuông  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  được gọi là ma trận tam giác trên nếu  $a_{ij} = 0$ , với mọi  $i > j$ .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Ma trận vuông  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  được gọi là ma trận tam giác dưới nếu  $a_{ij} = 0$ , với mọi  $i < j$ .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

# Tóm tắt một số loại ma trận

Tên gọi	Kích cỡ	Ví dụ với $n = 3$
Ma trận hàng (vector hàng)	$1 \times n$	$[3 \ 7 \ 2]$
Ma trận cột (vector cột)	$n \times 1$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$
Ma trận vuông	$n \times n$	$\begin{bmatrix} 9 & 13 & 5 \\ 1 & 11 & 7 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$

Bảng: Một số loại ma trận

# Tóm tắt một số loại ma trận

Tên gọi	Kích cỡ	Ví dụ với $n = 3$
Ma trận chéo	$n \times n$	$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
Ma trận tam giác dưới	$n \times n$	$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 11 & 7 & 0 \\ 5 & 12 & 10 \end{bmatrix}$
Ma trận tam giác trên	$n \times n$	$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}$

Bảng: Một số loại ma trận (tiếp)

# Nội dung

## 1. Định nghĩa ma trận

## 2. Các phép toán trên ma trận

- 2.1. Phép cộng ma trận
- 2.2. Phép nhân ma trận
  - 2.2.1. Nhân một số với ma trận
  - 2.2.2. Nhân hai ma trận
- 2.3. Lũy thừa ma trận
- 2.4. Ma trận chuyển vị

## 3. Định thức ma trận vuông



# Phép cộng ma trận

**Định nghĩa:** Cho hai ma trận cùng cỡ  $m \times n$ :  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ,  $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ .  
Tổng  $A + B$  là ma trận cỡ  $m \times n$  xác định bởi

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

Như vậy muốn cộng hai ma trận cùng cỡ ta cộng các phần tử cùng vị trí.

# Phép cộng ma trận

**Định nghĩa:** Cho hai ma trận cùng cỡ  $m \times n$ :  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ,  $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ .  
Tổng  $A + B$  là ma trận cỡ  $m \times n$  xác định bởi

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

Như vậy muốn cộng hai ma trận cùng cỡ ta cộng các phần tử cùng vị trí.

*Ví dụ 1:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+5 & 3+7 \\ -1+2 & 4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

# Phép cộng ma trận

**Định nghĩa:** Cho hai ma trận cùng cỡ  $m \times n$ :  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ,  $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ .  
Tổng  $A + B$  là ma trận cỡ  $m \times n$  xác định bởi

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

Như vậy muốn cộng hai ma trận cùng cỡ ta cộng các phần tử cùng vị trí.

*Ví dụ 1:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+5 & 3+7 \\ -1+2 & 4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

*Ví dụ 2:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

# Phép cộng ma trận

**Định nghĩa:** Cho hai ma trận cùng cỡ  $m \times n$ :  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ,  $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ .  
Tổng  $A + B$  là ma trận cỡ  $m \times n$  xác định bởi

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

Như vậy muốn cộng hai ma trận cùng cỡ ta cộng các phần tử cùng vị trí.

*Ví dụ 1:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+5 & 3+7 \\ -1+2 & 4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

*Ví dụ 2:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ không thực hiện được vì hai ma trận không cùng cỡ.}$$

# Phép cộng ma trận

**Định nghĩa:** Cho hai ma trận cùng cỡ  $m \times n$ :  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ,  $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ .  
Tổng  $A + B$  là ma trận cỡ  $m \times n$  xác định bởi

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

Như vậy muốn cộng hai ma trận cùng cỡ ta cộng các phần tử cùng vị trí.

*Ví dụ 1:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+5 & 3+7 \\ -1+2 & 4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

*Ví dụ 2:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ không thực hiện được vì hai ma trận không cùng cỡ.}$$

# Các tính chất

Cho ma trận  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ , ta định nghĩa *ma trận đối* của  $A$ , ký hiệu  $-A$  bởi  $-A = [-a_{ij}]_{m \times n}$ .

Ta cũng định nghĩa  $A - B = A + (-B)$ .

# Các tính chất

Cho ma trận  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ , ta định nghĩa *ma trận đối* của  $A$ , ký hiệu  $-A$  bởi  $-A = [-a_{ij}]_{m \times n}$ .

Ta cũng định nghĩa  $A - B = A + (-B)$ .

## Tính chất của phép cộng

Trên tập hợp các ma trận cùng cỡ  $m \times n$  (trên  $K$ ), ta có:

- $(A + B) + C = A + (B + C)$

# Các tính chất

Cho ma trận  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ , ta định nghĩa *ma trận đối* của  $A$ , ký hiệu  $-A$  bởi  $-A = [-a_{ij}]_{m \times n}$ .

Ta cũng định nghĩa  $A - B = A + (-B)$ .

## Tính chất của phép cộng

Trên tập hợp các ma trận cùng cỡ  $m \times n$  (trên  $K$ ), ta có:

- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + \mathcal{O} = \mathcal{O} + A = A$



# Các tính chất

Cho ma trận  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ , ta định nghĩa *ma trận đối* của  $A$ , ký hiệu  $-A$  bởi  $-A = [-a_{ij}]_{m \times n}$ .

Ta cũng định nghĩa  $A - B = A + (-B)$ .

## Tính chất của phép cộng

Trên tập hợp các ma trận cùng cỡ  $m \times n$  (trên  $K$ ), ta có:

- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + \mathcal{O} = \mathcal{O} + A = A$
- $A + (-A) = (-A) + A = \mathcal{O}$

# Các tính chất

Cho ma trận  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ , ta định nghĩa *ma trận đối* của  $A$ , ký hiệu  $-A$  bởi  $-A = [-a_{ij}]_{m \times n}$ .

Ta cũng định nghĩa  $A - B = A + (-B)$ .

## Tính chất của phép cộng

Trên tập hợp các ma trận cùng cỡ  $m \times n$  (trên  $K$ ), ta có:

- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + \mathcal{O} = \mathcal{O} + A = A$
- $A + (-A) = (-A) + A = \mathcal{O}$
- $A + B = B + A$

# Các tính chất

Cho ma trận  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ , ta định nghĩa *ma trận đối* của  $A$ , ký hiệu  $-A$  bởi  $-A = [-a_{ij}]_{m \times n}$ .

Ta cũng định nghĩa  $A - B = A + (-B)$ .

## Tính chất của phép cộng

Trên tập hợp các ma trận cùng cỡ  $m \times n$  (trên  $K$ ), ta có:

- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + \mathcal{O} = \mathcal{O} + A = A$
- $A + (-A) = (-A) + A = \mathcal{O}$
- $A + B = B + A$

Nói cách khác, tập hợp  $\mathcal{M}_{m \times n}(K)$  cùng với phép cộng ma trận lập thành một nhóm giao hoán.

# Phép nhân một số với ma trận

## Định nghĩa

Tích của số  $k$  với ma trận  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  là ma trận  $kA$  cỡ  $m \times n$  cho bởi

$$kA = [ka_{ij}]_{m \times n}.$$

Khi nhân một số  $k$  với ma trận, ta nhân mỗi phần tử của ma trận với  $k$ .

**Ví dụ:**

$$2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}$$

**Chú ý:** Ta có  $(-1)A = -A$

# Tính chất

## Tính chất cơ bản

Cho  $A, B$  thuộc  $\mathcal{M}_{m \times n}(K)$  và  $c, d \in K$ . Khi đó

- $(cd)A = c(dA)$ ,

# Tính chất

## Tính chất cơ bản

Cho  $A, B$  thuộc  $\mathcal{M}_{m \times n}(K)$  và  $c, d \in K$ . Khi đó

- $(cd)A = c(dA)$ ,
- $1A = A$ ,

# Tính chất

## Tính chất cơ bản

Cho  $A, B$  thuộc  $\mathcal{M}_{m \times n}(K)$  và  $c, d \in K$ . Khi đó

- $(cd)A = c(dA)$ ,
- $1A = A$ ,
- $c(A + B) = cA + cB$ ,

# Tính chất

## Tính chất cơ bản

Cho  $A, B$  thuộc  $\mathcal{M}_{m \times n}(K)$  và  $c, d \in K$ . Khi đó

- $(cd)A = c(dA)$ ,
- $1A = A$ ,
- $c(A + B) = cA + cB$ ,
- $(c + d)A = cA + dA$ .



# Tính chất

## Tính chất cơ bản

Cho  $A, B$  thuộc  $\mathcal{M}_{m \times n}(K)$  và  $c, d \in K$ . Khi đó

- $(cd)A = c(dA)$ ,
- $1A = A$ ,
- $c(A + B) = cA + cB$ ,
- $(c + d)A = cA + dA$ .

Tính chất bổ sung: Cho  $A$  là ma trận cỡ  $m \times n$ ,  $\mathcal{O}$  là ma trận không cỡ  $m \times n$ :

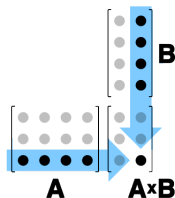
$$cA = \mathcal{O} \Rightarrow \begin{cases} c &= 0 \\ A &= \mathcal{O} \end{cases}$$

# Phép nhân hai ma trận

## Định nghĩa

Cho hai ma trận  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  cỡ  $m \times n$  và  $B = [b_{ij}]_{n \times p}$  cỡ  $n \times p$ . Tích  $AB$  là ma trận  $C = [c_{ij}]_{m \times p}$  cỡ  $m \times p$  cho bởi

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} (\forall i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, p).$$



Hình: Minh họa phép nhân hai ma trận

# Chú ý

- Tích  $AB$  chỉ được định nghĩa khi số cột của  $A$  bằng số hàng của  $B$ .
- Ta có thể tính phần tử  $ij$  của ma trận  $AB$  bằng cách nhân lần lượt  $n$  phần tử của dòng thứ  $i$  của  $A$  (từ trái sang phải) với  $n$  phần tử của cột thứ  $j$  của  $B$  (từ trên xuống dưới) rồi lấy tổng của chúng:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{array} \\
 \text{dòng } i \text{ của } A
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{array} \\
 \text{cột } j \text{ của } B
 \end{array}
 \Rightarrow c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

- Có thể tích  $AB$  tồn tại nhưng tích  $BA$  không tồn tại. Kể cả trong trường hợp  $AB$  và  $BA$  đều tồn tại thì nói chung  $AB \neq BA$ .

# Chú ý

- Nói chung  $AB = \mathcal{O}$  không suy ra được  $A = \mathcal{O}$  hoặc  $B = \mathcal{O}$ .
- Nói chung  $AC = BC$  ( hoặc  $CA = CB$  ) với  $C \neq \mathcal{O}$  không suy ra được  $A = B$

## Ví dụ:

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}: A \neq \mathcal{O}, B \neq \mathcal{O}$  nhưng  $AB = \mathcal{O}$ ,

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}:$

$$AC = BC = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \text{ nhưng } A \neq B$$

## Ví dụ

Cho  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ . Tính  $AB$ .

- $C = AB$  cỡ  $2 \times 2$ ,  $C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$ .

- $C_{11} = 1.1 + (-1).2 + 2.3 = 5$ .

- $C_{12} = 1.2 + (-1).(-1) + 2.1 = 5$ .

- $C_{21} = 0.1 + 1.2 + (-2).3 = -4$ .

- $C_{22} = 0.2 + 1.(-1) + (-2).1 = -3$ .

- $AB = C = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$ .

# Tính chất

## Tính chất

Cho  $A, B, C$  là các ma trận với cỡ sao cho các phép toán trong các hệ thức sau được định nghĩa. Cho  $c \in K$ . Khi đó:

- $(AB)C = A(BC)$
- $A(B + C) = AB + AC$ ,  $(B + C)A = BA + CA$
- $(cA)B = A(cB) = c(AB)$
- Cho  $A$  cỡ  $m \times n$ :  $AI_n = A$  và  $I_m A = A$ .

**Nhận xét:** Tập  $\mathcal{M}_n(K)$  các ma trận vuông cấp  $n$  cùng với các phép toán cộng và nhân ma trận lập thành một vành (có đơn vị).

# Lũy thừa ma trận

Cho  $A$  là ma trận vuông cấp  $n$ .

- Với  $k \geq 1$  là một số nguyên dương, ta định nghĩa

$$A^k = A.A...A$$

- Tính chất :  $A^{k+l} = A^k A^l$ ,  $A^{kl} = (A^k)^l$ , với mọi  $K, l$  nguyên dương
- Với  $f(x) = a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0$  là một đa thức bậc  $k$ , ta định nghĩa

$$f(A) = a_k A^k + \dots + a_1 A + a_0 I_n$$

# Phép chuyển vị ma trận

## Chuyển vị ma trận

Cho  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  cỡ  $m \times n$ . Ma trận chuyển vị của  $A$ , ký hiệu  $A^T = [b_{ij}]$  là ma trận  $m \times n$  xác định bởi

$$b_{ij} = a_{ji}, \forall i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n.$$

Các cột của  $A^T$  là các hàng của  $A$ . Các hàng của  $A^T$  là các cột của  $A$ .

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ thì } A^T = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$



# Nội dung

## 1. Định nghĩa ma trận

## 2. Các phép toán trên ma trận

- 2.1. Phép cộng ma trận
- 2.2. Phép nhân ma trận
  - 2.2.1. Nhân một số với ma trận
  - 2.2.2. Nhân hai ma trận
- 2.3. Lũy thừa ma trận
- 2.4. Ma trận chuyển vị

## 3. Định thức ma trận vuông

# Định nghĩa định thức

Cho  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  là một ma trận vuông cấp  $n$ . Ta sẽ định nghĩa định thức của  $A$ , ký hiệu  $\det(A)$  hoặc  $|A|$ , truy hồi theo  $n$ .

## Định thức ma trận cấp 1 và 2

- Nếu  $A = [a_{11}]$  là ma trận cấp 1, thì  $\det(A) = a_{11}$ .
- Nếu  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$  thì

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

# Định thức ma trận cấp $n \geq 3$

Giả sử ta đã định nghĩa được định thức của tất cả các ma trận vuông cấp  $n - 1$ .

- Xét ma trận  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  là một ma trận vuông cấp  $n$ .
- Với mỗi  $i, j$ , ta gọi  $M_{ij}$  là ma trận nhận được từ  $A$  bằng cách xóa đi cột  $i$  và  $j$ . Khi đó  $M_{ij}$  là một ma trận vuông cấp  $n - 1$ .
- Đặt  $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$ , và  $A_{ij}$  được gọi là phần phụ đại số của  $a_{ij}$ .

## Định nghĩa

Định thức của  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  là

$$\det(A) = |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

## Ví dụ

Tính định thức của ma trận  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

- $M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow A_{11} = +\det(M_{11}) = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4$
- $M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow A_{12} = -\det(M_{12}) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(-2) = 2$
- $M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow A_{13} = +\det(M_{13}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5$
- $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 1.(-4) + 2.2 + (-1).5 = -5$

Viết gọn:

$$\begin{aligned}
 |A| &= a_{11} \det(M_{11}) - a_{12} \det(M_{12}) + a_{13} \det(M_{13}) \\
 &= 1. \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2. \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1). \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= 1.(-4) + 2.2 + (-1).5 = -5.
 \end{aligned}$$

# Tài liệu tham khảo

- Bài giảng Đại số, PGS. TS. Nguyễn Duy Tân, tháng 10 - 2021
- Bài giảng Đại số tuyến tính, TS. Bùi Xuân Diệu, tháng 9 - 2019
- Ma trận (toán học) - Wikipedia