Tổng ôn các dạng bài trọng tâm thi Giữa kỳ

I TUẦN 1, 2:

I. GIỚI HẠN HÀM SỐ

1.1. Tính giới hạn:

- Các dạng vô định: $\frac{0}{0}, \infty - \infty, 0 * \infty, \frac{\infty}{\infty}, 1^{\infty}, 0^0, \infty^0$
- Các phương pháp:
  - L'Hospital: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ (Các dạng khác chuyển về dạng trên và sử dụng L'Hospital)
    Ví dụ: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}(\frac{0}{0}) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{100x^{99}-2}{50x^{49}-2}(L') = \frac{49}{24}$
  - Sử dụng VCB, VCL tương đương:
    Ví dụ: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x} = \frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{n}$(Khi $x \to 0$: $\sqrt[m]{1+\alpha x} \approx \frac{\alpha x}{m}, \sqrt[n]{1+\beta x} \approx \frac{\beta x}{n}$)
  - Ngắt bỏ VCB bậc cao, VCL bậc thấp
    Ví dụ: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1$
  - Sử dụng Maclaurin:
    Ví dụ: L $= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^2 \sin x}$
    $$L = \lim_{x\to 0} \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - x\left(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)\right)\right)}{x^3}$$
    $$L = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}$$
  - Sử dụng phương pháp kẹp:
    Ví dụ: $\lim\limits_{x\to\infty} (\sin\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$
    Ta có: $0 < |\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}| = |2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$
    $\leq 2|\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})})| < \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{x}} \to 0$(Khi$x \to \infty$)
    $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} (\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}) = 0$
- Dạng $1^\infty, 0^\infty, \infty^0$.Sử dụng công thức Logarit $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = e^{\lim_{x\to x_0} v(x)\ln u(x)}$

  Ví dụ: $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[\alpha]{x^2+2} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x^2+2}{2}} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x^2+2}}(L') = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{2}{2x}}(L') = e^0 = 1$

1.2 So Sánh VCL, VCB:

Ví dụ: $\alpha(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}; \beta(x) = e^{\sin\alpha} - \cos\alpha$

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{e^{\sin x}-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt[4]{x}}{e^{\sin x}-\cos x}=+\infty$

$\Rightarrow \alpha(x)$bậc thấp hơn so với$\beta(x)$

II. Hàm số:

Dạng 1: Xét tính chẵn lẻ f(-x)=$\begin{cases} f(x) : \text{Hàm chẵn} \\ -f(x) : \text{Hàm lẻ} \\ \neq \pm f(x) : \text{Không chẵn không lẻ} \end{cases}$

Ví dụ: $f(x)=a^x+a^{-x}(a>0)$

$f(-x)=a^{-x}+a^x=f(x)\Rightarrow f(x)$là hàm số chẵn

Dạng 2: Dạng tuần hoàn

Ví dụ: Xét tính tuần hoàn của hàm số$f(x)=\sin x+\dfrac{1}{2}\sin 2x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$

Ta có: $\begin{cases} \sin x \text{ tuần hoàn chu kỳ } 2\pi \\ \sin 2x \text{ tuần hoàn chu kỳ } \pi \\ \sin 3x \text{ tuần hoàn chu kỳ } \dfrac{2}{3}\pi \end{cases} \Rightarrow f(x)$ tuần hoàn chu kỳ là bội chung nhỏ nhất của$2\pi,\pi,\dfrac{2}{3}\pi$là2π

Dạng 3: Hàm ngược Ví dụ: Tìm hàm ngược của hàm số $y=\dfrac{1-x}{1+x}$

$D=\mathrm{R}\backslash\{-1\}$

$y=\dfrac{1-x}{1+x}\Leftrightarrow y+yx=1-x\Leftrightarrow x=\dfrac{1-y}{1+y}$

$\Rightarrow$ Hàm ngược của hàm số là hàm $y=\dfrac{1-x}{1+x}$

III. Hàm số liên tục

Dạng 1: Tìm điều kiện để hàm số liên tục

Ví dụ: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2} \text{ nếu } x\neq 0 \\ a \text{ nếu } x=0 \end{cases}$ Tìm a để f(x) liên tục tại x=0

Để f(x) liên tục tại x=0 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}f(x)=a=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow a=\dfrac{1}{2}$

Dạng 2: Phân biệt điểm gián đoạn:

Ví dụ:$y=\dfrac{8}{1-2^{\cot x}}, x=0$ là điểm kì dị loài gì?

$x\to 0^-\Rightarrow \cot x\to -\infty\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{8}{1-2^{\cot x}}=8(1)$

$x\to 0^+\Rightarrow \cot x\to +\infty\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{8}{1-2^{\cot x}}=0(2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ x=0 là điểm gián đoạn loại 1

Do $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\Rightarrow x=0$ là điểm gián đoạn không bỏ được

II TUẦN 3. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

Dạng 1: Tính đạo hàm tại một điểm. Tính vi phân

***** Hướng tiếp cận:**

- Sử dụng công thức tính đạo hàm
- Sử dụng định nghĩa (tính đạo hàm qua giới hạn)

VD1: Tính $f'(0)$ biết $f(x) = \begin{cases} \tan x, & x \neq 0 \\ -x^2 + x, & x < 0 \end{cases}$

Giải:

+) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\tan x - 0}{x} = 1 \Rightarrow f'(0^+) = 1$

+) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-x^2 + x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} (-2x + 1) = 1 \Rightarrow f'(0^-) = 1$

VD2: Tính $I = \dfrac{d}{d(x^2)}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$

Giải:

$I = \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)'_{x^2} = \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)'_{x}.(x)'_{x^2} = \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)'_{x}.\dfrac{1}{(x^2)'_{x^2}}$

$\Rightarrow I = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}.\dfrac{1}{2x} = \dfrac{x\cos x - \sin x}{2x^3}$

Dạng 2: Tính gần đúng

***** Sử dụng công thức**: $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x).\Delta x$

VD: Ứng dụng vi phân, tính gần đúng $\sqrt[7]{\dfrac{2 - 0,02}{2 + 0,02}}$

Giải:

$I = \sqrt[7]{\dfrac{2 - 0,02}{2 + 0,02}}$, xét $f(x) = \sqrt[7]{\dfrac{2 - x}{2 + x}}; \Omega x_0 = 0,\ \Delta x = 0,02$

$f'(x) = \dfrac{1}{7}\left(\dfrac{2 - x}{2 + x}\right)^{-\frac{6}{7}}.\left(\dfrac{2 - x}{2 + x}\right)' = \dfrac{1}{7}\left(\dfrac{2 - x}{2 + x}\right).\dfrac{-4}{(2 + x)^2}$

$I = f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x).\Delta x = \sqrt[7]{1} + \dfrac{1}{7}.2^{-\frac{6}{7}}.\dfrac{-4}{2^2}.0,02 = 1 - \dfrac{1}{7}.0,02$

III TUẦN 4: ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CẤP CAO

Dạng 1: Tính đạo hàm cấp cao

***** Hướng tiếp cận:**

- Tận dụng công thức tính đoa hàm cấp cao của một số hàm đã biết
- Sử dụng công thức Leibniz

VD1: Cho hàm số $f(x) = x^2 \sinh(x)$. Tính $f^{(2020)}(0)$

Giải:

Theo công thức Leibniz ta có :

$$f^{(2020)}(x) = \sum_{k=0}^{2021} C_{2021}^{k}(x^2)^{(k)}.\Big(\sinh(x)\Big)^{(2021)}$$
$$= C_{2021}^{0}x^2.\Big(\sinh(x)\Big)^{(2021)} + C_{2021}^{1}2x.\Big(\sinh(x)\Big)^{(2020)} + C_{2021}^{2}2.\Big(\sinh(x)\Big)^{(2019)} + 0 + ... + 0$$

$$\Rightarrow f^{(2020)}(0) = C_{2021}^{2}2.\Big(\sinh(x)\Big)^{(2019)}\Bigg|_{x=0}$$

Ta có: $\Big(\sinh(x)\Big)^{(2019)} = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^{(2019)} = \dfrac{e^x - (-1)^{2019}.e^{-x}}{2}$

$$\Rightarrow f^{(2020)}(0) = C_{2021}^{2}2.\frac{e^x - (-1)^{2021}.e^{-x}}{2}\Bigg|_{x=0} = 2.C_{2021}^{2}$$

VD2: Tính đạo hàm cấp cao $y^{(5)}(x)$ với $y = \ln(2x^2 - x)$

Giải:

Ta có: $y = \ln|2x-1| + \ln|x|$

+) $\Big(\ln|x|\Big)^{(5)} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^{(4)} = \dfrac{4!}{x^5}$

+) $\Big(\ln|2x-1|\Big)^{(5)} = \left(\dfrac{2}{2x-1}\right)^{(4)} = 2.\dfrac{2^4.4!}{(2x-1)^5} = \dfrac{2^5.4!}{(2x-1)^5}$

$\Rightarrow y^{(5)} = \dfrac{4!}{x^5} + \dfrac{2^5.4!}{(2x-1)^5}$

IV TUẦN 5 + TUẦN 6

Khai triển Taylor - Maclaurin

Ví dụ: Khai triển hàm số $y = xe^x$ theo lũy thừa của x tại $x = 0$, của $x - 4$ tại $x = 4$

Giải: Theo khai triển Maclaurin ta có:

$$y = xe^x = x\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + o\left(x^{n+1}\right)$$

$$y = xe^x = (x-4+4).e^4.e^{x-4} = e^4(x-4+4).\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-4)^k}{k!} + o(x-4)^n\right)$$

$$= e^4.\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-4)^{k+1}}{k!} + 4\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-4)^k}{k!}\right) + o\left((x-4)^n\right)$$

Quy tắc L'Hospital

Ví dụ 1: Tính giới hạn sau: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x) - \sin x}{x^2}$

Giải:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\sin x}{x^2} \quad \left(\frac{0}{0}\right)\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-\cos x}{2x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{(1+x)^2}+\sin x}{2}=\frac{-1}{2}
\end{aligned}$$

Ví dụ 2: Tính giới hạn: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^x}{x}$

Giải:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\\
&=\lim_{x\to\infty}\frac{2^x\cdot\ln 2}{1}=\infty
\end{aligned}$$

Cực trị hàm số + tính đơn điệu

Ví dụ: Tìm các khoảng đơn điệu và cực trị của hàm số:$f(x)=3\sqrt[3]{x^2}-x^2$

Giải

Hàm f xác định và liên tục với mọi x $\in\mathbf{R}$.

Có thể viết $f(x)=3x^{\frac{2}{3}}-x^2$ nên với $x\neq 0$ ta có:

$f'(x)=2x^{-\frac{1}{3}}-2x=2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-x\right)=\frac{1-\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x}}=0\Rightarrow x=\pm 1.$

Dễ dàng vẽ bảng biến thiên, ta suy ra:

f đồng biến trên $(-\infty,-1),(0,1)$

f nghịch biến trên $(-1,0),(1,+\infty)$

f đạt cực đại tại $x=\pm 1$

f đạt cực tiểu tại $x=0$.

Khảo sát đường cong:

Ví dụ 1: Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)^2}$ trên $[-2,3]$

Giải:

Ta có :

$$f'(x)=\frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{(x+1)(x-1)}}$$

Do vậy trên $(-2,3)$ hàm f có các điểm tới hạn $x=\pm 1$ và $x=0$

Ta có: $f(-1)=\sqrt[3]{4}$; $f(1)=\sqrt[3]{4}$; $f(0)=2$ và $f(-2)=\sqrt[3]{9}+1$; $f(3)=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{16}$

Do vậy trên $[-2,3]$, giá trị nhỏ nhất của hàm f là $\sqrt[3]{4}$ và giá trị lớn nhất của f là $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{16}$

Ví dụ 2: (Giữa kì, K59). Tìm các đường tiệm cận của đường cong $y=x^2\sin\frac{1}{x}$.

Giải:

TXĐ = $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

$$0 \leq \left|x^2 \sin\frac{1}{x}\right| \leq x^2 \Rightarrow \lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0 \quad \text{(giới hạn kẹp).}$$

Đường cong không có tiệm cận đứng.

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} x \cdot \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \infty$$

Đường cong không có tiệm cận ngang.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} (y-x) = \lim_{x\to\infty} x\left(x\sin\frac{1}{x} - 1\right) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{\sin t}{t} - 1\right) = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t - t}{t^2} = 0 \quad \left(\text{đặt } t = \frac{1}{x}\right).$$

Đường cong có một tiệm cận xiên là $y = x$.

Đường cong tham số (tiếp tuyến):

Ví dụ: (GK 20181) Viết phương trinh tiếp tuyến của đường cong cycloid $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ tại điểm ứng với $t = \dfrac{\pi}{2}$

Giải:

Điểm đang xét $t = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow M\left(\dfrac{\pi}{2} - 1; 1\right)$. Hệ số góc tiếp tuyến $k = \dfrac{y'}{x'} = \left.\dfrac{\sin t}{1 - \cos t}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = 1$ Phương trình tiếp tuyến: $y - 1 = x - \left(\dfrac{\pi}{2} - 1\right) \Leftrightarrow y = x + 2 - \dfrac{\pi}{2}$

Chương 1

Tuần 7-8

I Bài Tập

1 Phương pháp khai triển

- $\int (2\sin x + x^3 - \frac{1}{x})dx = 2\int \sin x dx + \int x^3 dx - \int \frac{dx}{x} = -2\cos x + \frac{x^4}{4} - \ln|x| + C$
- $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)} = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \frac{-1}{x} + \arctan x + C$

2 Phương pháp biến đổi biểu thức vi phân

$$I = \int \frac{\arccos x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int (\frac{\pi}{2} - \arcsin x)\arcsin x d(\arcsin x) = \frac{\pi}{4}\arcsin^2 x - \frac{1}{3}\arcsin^3 x + C$$

3 Phương pháp đổi biến

Tính tích phân $I_1 = \int \sqrt{\frac{x}{x-2}}dx$

Đặt $x = 2\sin^2 t,\ t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, ta tính được

$$dx = 4\sin t\cos t,\ \sqrt{\frac{x}{2-x}} = \tan t$$

Suy ra

$$I_1 = \sqrt{\frac{x}{2-x}}dx = 4\int \sin^2 t dt = 2t - \sin 2t + C$$

Đổi lại biến x, với $t = \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{2}}$, ta thu được

$$I_1 = 2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2}} - \sqrt{2x - x^2} + C$$

Tính tích phân $I_2 = \displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^x + 1}dx$

Đặt $e^x = t \longrightarrow e^x dx = dt$, ta có

$$I_2 = \int \frac{t}{t+1}dt = \int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)dt = t - \ln|t+1| + C$$

Đổi lại biến x, ta được $I_2 = e^x - \ln(e^x + 1) + C$

4 Tích phân hàm phân thức hữu tỉ

Tính $I_1 = \displaystyle\int \frac{x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x + 1}{(x^2+1)(x-1)}dx$

Ta có
$$\frac{x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x + 1}{(x^2+1)(x-1)} = x + \frac{1}{(x^2+1)(x-1)} = x + \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2}$$

Đồng nhất 2 vế ta có

$$1 = (A+B)x^2 + (C - B + 2)x - C \Longrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = -1 \end{cases}$$

Khi đó

$$I_1 = \int \frac{x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x + 1}{(x^2+1)(x-1)}dx = \int \left(x + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+2} - \frac{1}{x^2+2}\right)dx$$

5 Tích phân hàm lượng giác

Phương pháp chung

Tính $\displaystyle\int \frac{\sin x - \cos x + 2}{1 + \sin x + \cos x}dx$ Ta viết

$$\int \frac{\sin x - \cos x + 2}{1 + \cos x + \sin x}dx = -\int \frac{d(1 + \sin x + \cos x)}{1 + \sin x + \cos x} + 2\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$$

Đặt $t = \tan\dfrac{x}{2}$, suy ra
$$\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|t+1| + C$$

Thay lại biến cũ, ta được

$$\int \frac{\sin x - \cos x + 2}{1 + \sin x + \cos x} dx = -\ln|1 + \sin x + \cos x| + \ln|1 + \tan\frac{x}{2}| + C$$

Tính tích phân bên trong có dạng $\sin^m x \cdot \cos^m x$

Tính $I_1 = \displaystyle\int \sin^3 x \cos^2 x dx$
Đặt $\cos x = t \longrightarrow -\sin x dx = dt$ ta có

$$\int \sin^3 \cos^2 x dx = \int (1-t^2)t^2(-dt) = \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + C = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

6 Tích phân các biểu thức vô tỉ

Phép thế lượng giác

Tính $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

Đặt $x = a\sin t,\ \dfrac{-\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$ ta có $\begin{cases} t = \arcsin\dfrac{x}{a} \\ dx = a\cos t dt \\ \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \dfrac{1}{a\cos t} \end{cases}$

$$I = \int dt = t + C = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

Phép thế Euler

Tính $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \ln(ax + \frac{b}{2} + \sqrt{ax^2 + bx + c})$
Tính $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + a}$
Đặt $t = x + \sqrt{x^2 + a}$, khi đó $\dfrac{dt}{t} = \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}$ và

$$I = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C$$

Tính $\displaystyle\int \sqrt{x^2 + a} dx$