Bài tập trắc nghiệm đại số

Bài tập chương 1

Câu 1. Cho $\mathbb{Z}_8 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}\}$ cùng với phép nhân theo modulo 8. Phần tử $\overline{4} \cdot \overline{5}$ là phần tử nào của $\mathbb{Z}_8$?

a) $\overline{4}$ *b)* $\overline{5}$ *c)* $\overline{3}$ *d)* $\overline{6}$

Câu 2. Cho $\mathbb{Z}_8 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}\}$ cùng với phép cộng theo modulo 8. Phần tử $\overline{3} + \overline{7}$ là phần tử nào của $\mathbb{Z}_8$?

a) $\overline{3}$ *b)* $\overline{2}$ *c)* $\overline{7}$ *d)* $\overline{4}$

Câu 3. Xét các tập số: $\mathbb{Q}^-$ (tập các số hữu tỷ nhỏ hơn 0), $\mathbb{Q}^+$ (tập các số hữu tỷ lớn hơn 0), $\mathbb{Q}^*$ (tập các số hữu tỷ khác 0) và $\mathbb{R}^*$ (tập các số thực khác 0), và phép toán chia thông thường giữa các số trong các tập này. Phép chia không là phép toán hai ngôi trên tập nào?

a) $\mathbb{Q}^*$ *b)* $\mathbb{R}^*$ *c)* $\mathbb{Q}^-$ *d)* $\mathbb{Q}^+$

Câu 4. Xét các tập số: $\mathbb{Z}$ (tập số nguyên), $\mathbb{Q}^-$ (tập các số hữu tỷ nhỏ hơn 0), $\mathbb{Q}^+$ (tập các số hữu tỷ lớn hơn 0), $\mathbb{Q}$ (tập số hữu tỷ) và $\mathbb{R}$ (tập số thực), và phép toán trừ thông thường giữa các số trong các tập này. Có chính xác bao nhiêu tập hợp trong các tập hợp đã cho thỏa mãn rằng phép trừ là phép toán hai ngôi trên các tập đó?

a) **5** *b)***4** *c)* **2** *d)* **3**

Câu 5. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

a) Tập hợp $X = \{\frac{1}{3}, 1, 3\}$ cùng với phép nhân thông thường giữa các số thực tạo thành một nhóm giao hoán.

b) Tập hợp $X = \{-1, 0, 1\}$ cùng với phép cộng thông thường giữa các số thực tạo thành một nhóm giao hoán.

c) Tập hợp $X = \{-1, 0, 1\}$ cùng với phép nhân thông thường giữa các số thực tạo thành một nhóm giao hoán.

d) Tập hợp $X = \{0\}$ cùng với phép cộng thông thường giữa các số thực tạo thành một nhóm giao hoán.

Câu 6. Cho $\mathbb{Z}_8 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}\}$ cùng với phép nhân theo modulo 8. Phần tử $\overline{7} \cdot \overline{5}$ là phần tử nào của $\mathbb{Z}_8$?

$a)\,\overline{4}$ $b)\,\overline{5}$ $c)\,\overline{3}$ $d)\,\overline{6}$

Câu 7. Cho $\mathbb{Z}_8 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}\}$ cùng với phép cộng và phép nhân theo modulo 8. Mệnh đề nào dưới đây sai?

$a)\,\overline{7} + \overline{4} = \overline{3}$

$b)\,\overline{6} \cdot \overline{4} = \overline{0}$

c) $\mathbb{Z}_8$ cùng với phép cộng theo modulo 8 tạo thành một nhóm

d) $\mathbb{Z}_8$ cùng với phép nhân theo modulo 8 tạo thành một nhóm giao hoán

Câu 8. Xét các tập số: $\mathbb{Z}^*$ (tập các số hữu tỷ nhỏ hơn 0), $\mathbb{Q}^+$ (tập các số hữu tỷ lớn hơn 0), $\mathbb{Q}^*$ (tập các số hữu tỷ khác 0) và $\mathbb{R}^*$ (tập các số thực khác 0), và phép toán cộng thông thường giữa các số trong các tập này. Phép cộng là phép toán hai ngôi trên tập nào?

a) $\mathbb{Q}^*$ ***b)*** $\mathbb{R}^*$ ***c)*** $\mathbb{Z}^*$ ***d)*** $\mathbb{Q}^+$

Câu 9. Xét các tập số: $\mathbb{Z}$ (tập số nguyên), $\mathbb{Q}^-$ (tập các số hữu tỷ nhỏ hơn 0), $\mathbb{Q}^+$ (tập các số hữu tỷ lớn hơn 0), $\mathbb{Q}$ (tập số hữu tỷ) và $\mathbb{R}$ (tập số thực), và phép toán nhân thông thường giữa các số trong các tập này. Có chính xác bao nhiêu tập hợp trong các tập hợp đã cho thỏa mãn rằng phép nhân là phép toán hai ngôi trên các tập đó?

$a)\,5$ $b)4$ $c)\,2$ $d)\,3$

Câu 10. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

a) Phép nhân thông thường giữa các số thực là một phép toán trên hai ngôi trên tập hợp $X = \{-\frac{1}{3}, -3, 1\}$.

b) Tập hợp $X = \{-1, 0, 1\}$ cùng với phép nhân thông thường giữa các số thực tạo thành một nhóm.

c) Phép nhân thông thường giữa các số thực là một phép toán trên hai ngôi trên tập hợp $X = \{-1, 1\}$.

d) Tập hợp $X = \{-1, 1\}$ cùng với phép cộng thông thường giữa các số thực tạo thành một nhóm giao hoán.

Câu 6. Ma trận chuyển vị của ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ là ma trận?

$a)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad b)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad c)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad d)\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Câu 7. Phần tử ở hàng **2** và cột **3** của ma trận $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ bằng?

$a)\,0$ $\quad b)\,1$ $\quad c)\,3$ $\quad d)\,4$

Câu 8. Tất cả các giá trị thực của m thỏa mãn phương trình $\begin{vmatrix} m-1 & 2 \\ -2 & 1-m \end{vmatrix} = 0$ là

a) Không có giá trị nào b) $m \in \{-1\}$ c) $m \in \{-1, 3\}$ d) $m \in \{3\}$.

Câu 9. Ma trận nghịch đảo của ma trận $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ là

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Câu 10. Hạng của ma trận $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ bằng

$a)\,2$ $\quad b)\,4$ $\quad c)\,3$ $\quad d)\,5$

Câu 11. Một nghiệm của hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ -x + y - z = -1 \\ 3x - 2y - z = 0 \\ -2x - 2y + 5z = 1 \end{cases}$ là?

a) $(x, y, z) = (0, 1, -1)$ *b*) $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ *c*) $(x, y, z) = (2, 0, 0)$ *d*) $(x, y, z) = (-1, -1, -1)$

Câu 12. Tất cả các giá trị của m thỏa mãn $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & m \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} > 0$ là?

a) $m > -2$ b) $m < 2$ c) $m > 2$ d) $m < -2$.

Câu 13. Điều kiện của tham số m để ma trận $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & m-1 & 2 \\ 0 & 0 & m+1 \end{pmatrix}$ khả nghịch là?

a) $m \in \{-1, 1\}$ b) $m \neq 1$ c) $m \neq -1$ d) $m \notin \{-1, 1\}$.

Câu 14. Khi biến đổi ma trận hệ số mở rộng của một hệ phương trình trình tuyến tính nào đó gồm **4** ẩn bằng các phép biến đổi sơ cấp về hàng, ta nhận được ma trận

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & m & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix},$$

với m, n, p là các số thực. Điều kiện cần và đủ để hệ ban đầu có nghiệm là

a) $p \neq 0$ b) $p = 0$ và $m \neq 0$ c) $p = 0$ và $n \neq 0$ d) $p = 0$.

Câu 15. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & m \\ 0 & 2 & m & 1 & 3 \end{pmatrix}$ với m là tham số thực. Điều kiện của m để hạng của A bằng **2** là?

a) $m = 3$ b) $m \neq 3$ c) m tùy ý d) Không có giá trị nào của m.

Câu 16. Cho hai ma trận A cỡ $m \times 4$ và B cỡ $5 \times n$. Giả sử $A - B$ thực hiện được. Khi đó $m - n$ bằng?

a) 1 b) -1 c) 0 d) 9.

Câu 17. Cho A là ma trận vuông cấp 3 có $\det A = 1$. Khi đó định thức của ma trận $2A$ bằng

a) 2 b) 8 c) 4 d) 1.

HD: Nếu A là ma trận vuông cấp n thì $\det(kA) = k^n \det A$, với k là số thực bất kỳ.

Câu 18. Cho A là ma trận cỡ $m \times n$. Gọi hạng của A là $Rank(A)$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

a) $Rank(A) > \min(m, n)$ b) $Rank(A) \le \min(m, n)$

c) $\max(m, n) \ge Rank(A) > \min(m, n)$ d) $Rank(A) > \max(m, n)$

Câu 19. Giả sử $\begin{vmatrix} m^2 - 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$. Giá trị của m bằng bao nhiêu?

a) $m \notin \{-1, 1\}$ b) $m = -1$ c) $m = 1$ d) $m \in \{-1, 1\}$

Câu 20. Cho hệ phương trình tuyên tính thuần nhất $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y + z = 0 \\ y + m^2 z = 0 \end{cases}$ (với m là tham số). Nghiệm $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ được gọi là nghiệm tầm thường của hệ tuyến tính thuần nhất. Điều kiện cần và đủ của m để hệ có nghiệm không tầm thường (tức là có ít một nghiệm khác nghiệm tầm thường) là?

a) $m = 1$ b) $m = -1$ c) m tùy ý d) $m = \pm 1$

Câu 21. Cho A, B là hai ma trận vuông cấp n thỏa mãn $\det A \neq 0$. Ma trận X nào dưới đây thỏa mãn $A \cdot X = B$.

a) $X = B \cdot A^{-1}$ b) $X = A^{-1} \cdot B$ c) $X = B \cdot A$ d) $X = A \cdot B$

Đáp số : b)

Câu 22. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ và $p(x) = x^2 + 1$. Khi đó, $p(A)$ bằng?

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

HD: $p(A) = A^2 + I$ *với* I *là ma trận đơn vị cấp 2 (cùng cấp với* A*).*

Câu 23. Cho A là ma trận vuông cấp n thỏa mãn $\det A = 2$. Giá trị của $\det A^T$ bằng?

a) 2 b) $\frac{1}{2}$ c) 2^n d) $\frac{1}{2^n}$

HD: $\det A^T = \det A$,

Câu 24. Cho A là ma trận vuông cấp n thỏa mãn $\det A = 2$. Giá trị của $\det A^{-1}$ bằng?

a) 2 b) $\frac{1}{2}$ c) 2^n d) $\frac{1}{2^n}$

HD: Nếu $\det A \neq 0$ *thì* $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

Câu 25. Cho A là ma trận vuông cấp n thỏa mãn $\det A = 2$. Giá trị của $\det(A^T \cdot A)$ bằng?

a) 2 b) 1 c) 4 d) 2^n

HD: $\det(AB) = \det A \det B$ *và* $\det A^T = \det A$.

Câu 26. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Định thức của A^3 bằng

a) 2 b) -2 c) 8 d) -8

HD: $\det A^m = (\det A)^m$.

Câu 27. Cho $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ có $\det A = 3$. Khi đó định thức của ma trận $B = \begin{pmatrix} -a_{21} & a_{22} & -a_{23} \\ -a_{11} & a_{12} & -a_{13} \\ -a_{31} & a_{32} & -a_{33} \end{pmatrix}$ bằng

a) -3 b) 3 c) 1 d) -1

Hướng dẫn: Ma trận $\mathbf{B}$ *thu được bằng như sau: Đảo chỗ hàng 1 và hàng 2 của* $\mathbf{A}$ *cho nhau thu được ma trận* $\mathbf{D}$*; sau đó nhân cột 1 và cột 3 của* $\mathbf{D}$ *với* -1 *thì nhận được* $\mathbf{B}$*. Chú ý tính chất định thức:*

+) Đổi chỗ hai hàng (hoặc hai cột): Định thức đổi dấu (định thức mới =− định thức cũ).

+) Nhân một số $k \neq 0$ *vào 1 hàng (hoặc 1 cột): Định thức mới =* k*.định thức cũ.*

Đáp số: a)

Câu 28. Cho ma trận A có cỡ 4×3 và ma trận B có cỡ $n \times 5$. Giả sử $A \cdot B$ thực hiện được. Khi đó n bằng bao nhiêu?

a) $n = 5$ b) $n = 3$ c) $n = 4$ d) $n = 2$

Câu 29. Cho ma trận A có cỡ 4×3 và ma trận B có cỡ $n \times 5$. Giả sử $A^T \cdot B$ thực hiện được. Khi đó các giá trị có thể có của n là?

a) $n = 5$ b) $n = 3$ c) $n = 4$ d) $n \neq 4$

Câu 30. Cho ma trận A là ma trận vuông cấp n thỏa mãn A khả nghịch. Khi đó, khẳng định nào dưới đây đúng? Ta ký hiệu hạng của A bởi $Rank(A)$.

a) $Rank(A) = n$ b) $Rank(A) < n$ c) $Rank(A) > n$ d) $Rank(A) \neq n$

Hướng dẫn: Nếu $\mathbf{A}$ *là ma trận vuông cấp* $\mathbf{n}$ *khả nghịch (hoặc* $\det A \neq 0$*) thì hạng của* $\mathbf{A}$ *bằng* $\mathbf{n}$ *(cấp của* $\mathbf{A}$*).*

Câu 31. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Hạng của A bằng?

a) **3** b) **2** c) **1** d)**4**

Câu 32. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & m & m \end{pmatrix}$. Để hạng của A bằng 2 thì m nhận các giá trị nào?

a) $m \neq 4$ b) $m < 4$ c) $m > 4$ d) $m = 4$

Câu 33. Cho hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y + z = 1 \\ y + mz = 1 \end{cases}$ (với m là tham số). Các giá trị của m để hệ có duy nhất nghiệm là?

a) $m = 1$ b) $m \neq 1$ c) m tùy ý d) $m > 1$

Câu 34. Giả sử ma trận X thỏa mãn $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Tổng các phần tử trên đường chéo chính của X bằng?

a) -2 b) **2** c) **0** d) **4**

Hướng dẫn: Nếu A khả nghịch thì $X.A = B \Leftrightarrow X = B \cdot A^{-1}$, ghi nhớ công thức ma trận nghịch đảo của ma trận vuông cấp 2.

Câu 35. Giả sử ma trận X thỏa mãn $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Khi đó, X bằng?

a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Hướng dẫn: Nếu A khả nghịch thì $A \cdot X = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B$, ghi nhớ công thức ma trận nghịch đảo của ma trận vuông cấp 2.

Câu 12. Số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$ bằng?

a) **1** b) **4** c) **3** d) **2.**

HD: Xét hệ thuần nhất $AX = 0$ *(có* n *ẩn). Không gian nghiệm của hệ này có số chiều là* $n - r(A)$*, với* A *là ma trận hệ số của hệ,* n *là số ẩn,* $r(A)$ *là hạng của* A*.*

Câu 13. Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^4$, tập con W nào dưới đây là một không gian con của không gian vectơ này?

a) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 |\ 2x - y - 3z + t = 0\}$ *b)* $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^4 |\ 2x - y - 3z + 2t + 1 = 0\}$

c) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 |\ 2x - y - 3z - t = -2\}$ *d)* $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 |\ 2x - y = 2\}$

Câu 14. Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^3$, cho hệ vectơ $S = \{u = (1, -1, 1), v = (-1, -1, 0), w = (2, 1, 1)\}$. Khẳng định nào dưới đây sai?

a) S là một hệ độc lập tuyến tính b) S là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$

c) S là một hệ phụ thuộc tuyến tính d) S là một hệ sinh của $\mathbb{R}^3$

Câu 15. Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^3$, cho hệ vectơ $S = \{u = (1, 1, 1), v = (1, 2, 0), w = (1, 1, m)\}$. Các giá trị của m để S là một hệ độc lập tuyến tính là?

a) $m = 1$ *b)* $m \neq 1$ *c)* $m > 1$ *d)* $m < 1$

HD: Xét ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ *(mỗi hàng của* A *là tọa độ các vecto* u, v, w*). Ta thấy* A *là ma trận vuông (cụ thể là vuông cấp 3).*

Nhớ kết quả sau: S *là độc lập tuyến tính khi và chỉ khi* $\det A \neq 0$.

S *là phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi* $\det A = 0$.

Câu 16. Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^3$, cho hệ vectơ $S = \{u = (1, -1, 1), v = (-1, -1, 0), w = (m, 1, 1)\}$. Các giá trị của m để S là một hệ phụ thuộc tuyến tính là?

a) $m \neq 3$ b) $m \neq -3$ c) $m = -3$ d) $m = 3$.

Câu 17. Cho $W = \{(x, y, z) |\ 2x - y + z = 0\}$ là một không gian con của $\mathbb{R}^3$. Số chiều của W bằng

a) **1** b) **3** c) **2** d) **0.**

HD: Ta thấy các phần tử của $\boldsymbol{W}$ *là nghiệm của hệ phương trình* $\boldsymbol{2x - y + z = 0}$ *(có 3 ẩn). Suy ra* $\mathbf{dim}\, \boldsymbol{W = 3 - r(A) = 2}$ *với* $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *là ma trận hệ số của hệ này.*

Câu 18. Số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{bằng?}$$

a) **1** b) **4** c) **3** d) **2.**

Câu 19. Trong không gian vecto $\mathbb{R}^2$, cho hai cơ sở $\boldsymbol{S = \{u_1 = (1,1), u_2 = (0,1)\}}$ và $\boldsymbol{S' = \{v_1 = (1,2), v_2 = (1,3)\}}$. Ma trận chuyển cơ sở từ $\boldsymbol{S}$ sang $\boldsymbol{S'}$ là

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

HD: Ghi nhớ: Ma trận chuyển từ $\boldsymbol{A}$ *sang* $\boldsymbol{B}$ *được tìm như sau:*

+) Tìm tọa độ của các vecto trong $\boldsymbol{B}$ *theo* $\boldsymbol{A}$*: Tìm* $\boldsymbol{(v_1)_A, (v_2)_A, \cdots, (v_n)_A}$.

+) Ma trận là $\begin{pmatrix} [v_1]_A & [v_2]_A & \cdots & [v_n]_A \end{pmatrix}$ *(mỗi cột của ma trận là cột tọa độ của các vecto trong* $\boldsymbol{B}$ *theo* $\boldsymbol{A}$*).*

Câu 20. Trong không gian vecto $\mathbb{R}^3$, cho hai cơ sở $\boldsymbol{S = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}}$ (cơ sở chính tắc) và $\boldsymbol{S' = \{v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,3,1), v_3 = (0,1,1)\}}$. Ma trận chuyển cơ sở từ $\boldsymbol{S}$ sang $\boldsymbol{S'}$ là

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Câu 21. tập con $\boldsymbol{W}$ nào dưới đây là một không gian con của không gian vectơ $\mathbb{R}^3$**?**

a) $\boldsymbol{W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y - z + 1 = 0\}}$ *b)* $\boldsymbol{W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y - 3z^2 = 0\}}$

c) $\boldsymbol{W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y = -2\}}$ *d)* $\boldsymbol{W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y - z = 2\}}$

Câu 22. Trong không gian vecto $\mathbb{R}^3$, cho hai cơ sở $\boldsymbol{S = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}}$ và $\boldsymbol{S' = \{v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,3,1), v_3 = (0,1,1)\}}$. Ma trận chuyển cơ sở từ $\boldsymbol{S'}$ sang $\boldsymbol{S}$ là

a) $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Câu 22. Trong không gian vecto $\mathbb{R}^3$, cho $\boldsymbol{S = \{v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,3,1), v_3 = (0,1,1)\}}$. Tọa độ của vecto $\boldsymbol{u} = (2,5,3)$ đối với cơ sở $\boldsymbol{S}$ là

a) $(\boldsymbol{u})_S = (1,1,1)$ b) $(\boldsymbol{u})_S = (1,-1,1)$ c) $(\boldsymbol{u})_S = (-1,1,-1)$ d) $(\boldsymbol{u})_S = (-1,-1,-1)$

HD: Ghi nhớ: Cho cơ sở $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$. Cho vecto $\boldsymbol{u}$. Tìm tọa độ của $\boldsymbol{u}$ đối với $\boldsymbol{A}$ như sau:

+) Giải phương trình $\boldsymbol{u} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n$, tìm ra $c_1, c_2, \cdots, c_n$.

+) Tọa độ $(\boldsymbol{u})_A = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$.

+) Ma trận tọa là $[\boldsymbol{u}]_A = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$.

Câu 23. Trong không gian vecto $\mathbb{R}^2$, cho $\boldsymbol{S} = \{v_1 = (1,1), v_2 = (2,3)\}$. Tọa độ của vecto $\boldsymbol{u} = (4,5)$ đối với cơ sở $\boldsymbol{S}$ là

a) $(\boldsymbol{u})_S = (2,-1)$ b) $(\boldsymbol{u})_S = (-2,1)$ c) $(\boldsymbol{u})_S = (2,1)$ d) $(\boldsymbol{u})_S = (-2,-1)$

Câu 24. Cho $\boldsymbol{W} = \{(x,y) | \, 2x - y = 0\}$ là một không gian con của $\mathbb{R}^2$. Số chiều của $\boldsymbol{W}$ bằng

a) **1** b) **3** c) **2** d) **0.**

Câu 24. Cho ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ có $T(x, y) = (x - y, x + y)$. Ảnh của $u = (1, 1)$ qua T là:

a) $(0, 2)$ b) $(2, 0)$ c) $(1, 1)$ d) $(-1, 1)$.

Câu 25. Cho ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ có $T(x, y, z) = (x - y, x + y + z, z - 2y)$. Ảnh của $u = (1, 1, 0)$ qua T là:

a) $(0, 2, 2)$ b) $(0, 2, -2)$ c) $(2, 2, 2)$ d) $(2, 2, -2)$.

Câu 26. Cho ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ có $T(x, y) = (x - y, x + y, x - y)$. Ảnh của $u = (1, 1)$ qua T là:

a) $(0, 2, 2)$ b) $(2, 0, 2)$ c) $(0, 2, 0)$ d) $(2, 2, 2)$.

Câu 27. Cho ánh xạ tuyến tính $T : P_2(x) \to P_2(x)$ có $T(a + bx + cx^2) = a + (2b - c)x + (a - b + c)x^2$. Ảnh của $p(x) = 1 - x^2$ qua T là:

a) $1 + x + 2x^2$ b) $1 - x$ c) $1 - x + 2x^2$ d) $1 + x$.

Câu 28. Cho ánh xạ tuyến tính $T : P_1(x) \to P_1(x)$ có $T(a + bx) = a + 2b + (a - 2b)x$. Ảnh của $p(x) = 1 + x$ qua T là:

a) $3 - x$ b) 3 c) $-x$ d) $3 + x$.

Câu 29. Cho ánh xạ tuyến tính $T : V \to W$ với V, W là các không gian vecto và $\dim V = n, \dim W = m$. Khẳng định nào dưới đây sai?

a) $T(x - y) = T(x) - T(y)$.

b) $Im(T)$ là một không gian con của W và $Ker(T)$ là một không gian con của V.

c) $\dim Ker(T) + \dim Im(T) = n$.

d) $\dim Ker(T) + \dim Im(T) = m$.

HD: Kết quả về ánh xạ tuyến tính: cho $T : V \to W$ là axtt.

+) $KerT$ là không gian con của V và ImT là không gian con của W.

+) Nếu $u \in KerT$, thì $T(u) = \theta_W$ (vecto không của W).

+) Nếu $y \in ImT$ thì tồn tại $x \in V$ sao cho $T(x) = y$.

+) $T(x - y) = T(x) - T(y)$

+) $T(\theta_V) = \theta_W$.

+) $T(x + y) = T(x) + T(y)$.

+) $T(kx) = kT(x)$, với mọi số thực k.

+) *Nếu* $\dim V = n$ *thì* $\dim KerT + \dim ImT = n$.

+) *Nếu* V, W *là các không gian hữu hạn chiều và* A *là ma trận của* T *đối với cơ sở* S *trong* V *và* S' *trong* W, *thì* $r(A) = \dim ImT$.

Câu 30. Cho ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ có ma trận đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$ và $\mathbb{R}^m$ là A. Khẳng định nào dưới đây sai?

a) $r(A) = \dim Im(T)$.

b) $r(A) + \dim Ker(T) = n$.

c) $\dim Ker(T) + r(A) = m$.

d) $\dim Ker(T) + \dim Im(T) = n$.

Câu 31. Cho ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ có ma trận đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$ là $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Khi đó $T(1, -1)$ bằng

a) $(0, -3)$ b) $(-3, 0)$ c) $(0, 3)$ d) $(3, 0)$.

HD: Tính $B = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. *Suy ra* $T(x_1, x_2, \cdots, x_n) = B^T$.

Câu 32. Cho ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ có ma trận đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$ và $\mathbb{R}^3$ là $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Khi đó $T(1, -1)$ bằng

a) $(0, -3, 2)$ b) $(0, -3, -2)$ c) $(0, 3, 2)$ d) $(0, 3, -2)$.

Câu 33. Cho ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ có ma trận đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Khi đó $T(1, 1, 1)$ bằng

a) $(3, 3, 2)$ b) $(3, -1, 2)$ c) $(3, 1, 2)$ d) $(3, 1, 0)$.

Câu 34. Cho ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ có $T(x, y) = (x - y, x + y)$. Biết $T(x, y) = (1, 1)$. Khi đó $x + y$ bằng?

a) 1 b) 2 c) 0 d) -2.

Câu 35. Cho ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ có $T(x, y) = (x - y, x + y, 2x + y)$. Biết $T(x, y) = (1, 1, 2)$.

Khi đó vecto (x, y) là vecto nào dưới đây

a) $(1, 0)$ b) $(0, 1)$ c) $(1, 1)$ d) $(0, -1)$.

Câu 36. Ánh xạ nào dưới đây không phải ánh xạ tuyến tính

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x - y, x + y)$.

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, T(x, y) = (x - y, x + y, x^2 + y)$.

c) $T : Mat(2) \to \mathbb{R}, T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a + b + c + d$.

d) $T : P_2(x) \to P_2(x), T(a + bx + cx^2) = (a + b) + (a - b - c)x + (2a + b + c)x^2$.

Câu 37. Ánh xạ nào dưới đây không phải ánh xạ tuyến tính

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x - y, x + y)$.

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, T(x, y) = (x - y, x + y, x + y)$.

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (x - y, x + 2y + z, x - y + z + 2)$.

d) $T : P_2(x) \to P_2(x), T(a + bx + cx^2) = (a + b) + (a - c)x + (2a + 3b + c)x^2$.

Câu 38. Cho ánh xạ $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x + y, x + y + m^2)$.

Để T là một ánh xạ tuyến tính thì m nhận giá trị là?

a) $m = 0$ b) $m \neq 0$ c) $m > 0$ d) $m < 0$.

Câu 39. Cho ánh xạ $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, T(x, y, z) = (x + y, x + y + (m - 1)z^2, m^2 + 3m - 4 + x)$.

Để T là một ánh xạ tuyến tính thì m nhận giá trị là?

a) $m \in \{-4, 1\}$ b) $m = 1$ c) $m = -4$ d) $m \notin \{-4, 1\}$.

Câu 40. Cho ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ có $T(x, y) = (x - y, x + y, 2x + y)$. Ma trận của T đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$ và $\mathbb{R}^3$ là?

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Câu 42. Cho ánh xạ tuyến tính $T : P_2(x) \to P_2(x)$ có $T(a + bx + cx^2) = a + (a + b)x + (a + b + c)x^2$.

Ma trận của T đối với cơ sở chính tắc của $P_2(x)$ là?

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

HD: Cơ sở chính tắc của $P_2(x)$ *là* $\{1, x, x^2\}$. *Tính* $T(1), T(x), T(x^2)$. *Suy ra tọa độ của các vecto này theo*

CSCT dạng $(T(p))_{CT} = (a, b, c)$ (hay $T(p) = a.1 + b.x + c.x^2$). Suy ra ma trận của T.

Câu 43. Cho ánh xạ tuyến tính $T : P_2(x) \to P_2(x)$ có $T(a + bx + cx^2) = (a + b)x + (a + b + c)x^2$. Ma trận của T đối với cơ sở chính tắc của $P_2(x)$ là?

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Câu 43. Cho ánh xạ tuyến tính $T : P_2(x) \to P_1(x)$ có $T(a + bx + cx^2) = (a + b + c) + (b + c)x$. Ma trận của T đối với cơ sở chính tắc của $P_2(x)$ và $P_1(x)$ là?

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

HD: Cơ sở chính tắc của $P_2(x)$ là $\{1, x, x^2\}$ và cơ sở chính tắc của $P_1(x)$ là $\{1, x\}$.

Câu 44. Cho ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ có $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2 - 2x_3, x_2 - x_3)$. Cho hệ vecto $S = \{\theta = (0,0,0), u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,1,0), u_3 = (2,2,2)\}$. S có bao nhiêu vecto thuộc không gian $Ker(T)$?

a) 4 b) 1 c) 2 d) 3

HD: Kiểm tra $T(u) = \theta$ (vecto không)

Câu 45. Cho ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ có $T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_1 - 2x_2, x_1 - x_2)$. Cho hệ vecto $S = \{u_1 = (1,1), u_2 = (-1,-1), u_3 = (0,1), u_4 = (1,0)\}$. S có bao nhiêu vecto thuộc không gian $Ker(T)$?

a) 4 b) 1 c) 3 d) 2

Câu 46. Cho toán tử tuyến tính $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ có $T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, -x_1 + x_2)$. Cho hệ vecto $S = \{\theta = (0,0), u_1 = (1,-1), u_2 = (1,1), u_3 = (1,-2)\}$. S có bao nhiêu vecto thuộc không gian $Im(T)$?

a) 4 b) 2 c) 3 d) 1

HD:

Kiểm tra các phương trình $T(x_1, x_2) = u$. Nếu tồn tại x_1, x_2 thỏa mãn thì $u \in Im(T)$. Nếu không tìm được x_1, x_2 nào thỏa mãn thì $u \notin Im(T)$.

Câu 47. Cho ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ có $T(x, y, z) = (x + y + z, 2x + 2y + 2z)$. Cho hệ vecto $S = \{u_1 = (1,1), u_2 = (1,2), u_3 = (3,6), u_4 = (1,0)\}$. S có bao nhiêu vecto thuộc không gian $Im(T)$?

a) 2 b) 3 c) 4 d) 1

HD:

Kiểm tra các phương trình $\boldsymbol{T(x,y,z) = u}$. *Nếu tồn tại* $\boldsymbol{x,y,z}$ *thỏa mãn thì* $\boldsymbol{u \in Im(T)}$. *Nếu không tìm được* $\boldsymbol{x,y,z}$ *nào thỏa mãn thì* $\boldsymbol{u \notin Im(T)}$.

Câu 48. Cho ánh xạ tuyến tính $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ có $\boldsymbol{T(x,y,z) = (x+y+z, 2x+2y+2z)}$. Họ vecto nào dưới đây là một cơ sở của $\boldsymbol{Ker(T)}$.

a) $\{(-1,1,0)\}$ b) $\{(-1,0,1)\}$ c) $\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$ d) $\{(-1,1,0),(-1,0,1),(0,0,0)\}$

HD: Các vecto trong một cơ sở nào đó thì luôn phải khác vecto không.

+) Xác định $\boldsymbol{Ker(T)}$. *Giải phương trình* $\boldsymbol{T(x,y,z) = (0,0)}$ *tương đương với* $\boldsymbol{x+y+z=0}$ *tương đương với* $\boldsymbol{x = -y - z}$ *(coi* $\boldsymbol{y,z}$ *là hai tham số).*

Suy ra các vecto thuộc $\boldsymbol{Ker(T)}$ *có dạng* $\boldsymbol{(-y-z,y,z) = y(-1,1,0) + z(-1,0,1)}$. *(biểu diễn là tổ hợp của hai vecto không cùng phương).*

Suy ra $\boldsymbol{\dim Ker(T) = 2}$. *Do đó một cơ sở của* $\boldsymbol{KerT}$ *gồm 2 vecto.*

+) Cách khác để tìm số chiều của $Ker(T)$: Phương trình $T(x,y,z) = (0,0)$ tương đương với một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất gồm 2 phương trình và 3 ẩn. Tìm số chiều của không gian nghiệm của hệ này. dim $Ker(T)$ = số chiều của không gian nghiệm của hệ vừa xét.

Ghi nhớ: không gian nghiệm của hệ thuần nhất $AX = 0$ (có n ẩn) có số chiều là $n - r(A)$, với A là ma trận hệ số của hệ.

+) Từ các đáp án, kiểm tra các đáp án có hai vecto. Đáp án đúng là đáp án thỏa mãn: Các vecto trong đó thuộc $\boldsymbol{KerT}$ *và hệ đó là độc lập tuyến tính (hay không cùng phương).*

Đáp số: c.

Câu 49. Cho ánh xạ tuyến tính $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ có $\boldsymbol{T(x_1,x_2,x_3) = (x_1 - x_2, x_1 - x_2 + x_3, -x_1 + x_2 - x_3)}$. Họ vecto nào dưới đây là một cơ sở của $\boldsymbol{Ker(T)}$.

a) $\{(1,1,0)\}$ b) $\{(1,0,1)\}$ c) $\{(1,1,0),(1,0,1)\}$ d) $\{(1,1,0),(-1,-1,0)\}$

HD:

+) Xác định $\boldsymbol{Ker(T)}$. *Giải phương trình* $\boldsymbol{T(x_1,x_2,x_3) = (0,0,0)}$. *Tìm được* $\boldsymbol{x_1 = x_2}$ *và* $\boldsymbol{x_3 = 0}$.

Suy ra các vecto thuộc $\boldsymbol{Ker(T)}$ *có dạng* $\boldsymbol{(x_2,x_2,0) = x_2(1,1,0)}$. *(biểu diễn qua một vecto)*

Suy ra $\boldsymbol{\dim Ker(T) = 1}$. *Do đó một cơ sở của* $\boldsymbol{KerT}$ *gồm 1 vecto.*

+) Cách khác để tìm số chiều của $Ker(T)$: Phương trình $T(x,y,z) = (0,0,0)$ tương đương với một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất gồm 3 phương trình và 3 ẩn. Tìm số chiều của không gian nghiệm của hệ này. dim $Ker(T)$ = số chiều của không gian nghiệm của hệ vừa xét.

Ghi nhớ: không gian nghiệm của hệ thuần nhất $AX = 0$ (có n ẩn) có số chiều là $n - r(A)$, với A là ma trận hệ số của hệ.

+) Từ các đáp án, kiểm tra các đáp án có một vecto khác vecto không. Đáp án đúng là đáp án thỏa mãn: vecto trong đó thuộc $\boldsymbol{KerT}$.

Câu 50. Cho ánh xạ tuyến tính $\boldsymbol{T : Mat(2) \to \mathbb{R}^2}$ có $\boldsymbol{T\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = (a, d)}$. Không gian $\boldsymbol{Ker(T)}$ có một cơ sở là

a) $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ b) $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ c) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ d) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

HD: $\boldsymbol{Mat(2)}$ *tập các ma trận vuông cấp 2. Các ma trận trong một cơ sở nào đó thì luôn phải khác ma trận không.*

+) Xác định $\boldsymbol{Ker(T)}$.

Xét phương trình $\boldsymbol{T\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = (0, 0)}$, *ta tìm được* $\boldsymbol{a = d = 0}$.

Suy ra các ma trận thuộc $\boldsymbol{Ker(T)}$ *có dạng* $\boldsymbol{\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$. *(biểu diễn qua hai ma trận độc lập tuyến tính)*

Suy ra $\boldsymbol{\dim Ker(T) = 2}$. *Do đó một cơ sở của* $\boldsymbol{KerT}$ *gồm 2 ma trận khác ma trận không.*

+) Từ các đáp án, kiểm tra các đáp án có hai ma trận khác ma trận không. Đáp án đúng là đáp án thỏa mãn: Các ma trận trong đó thuộc $\boldsymbol{KerT}$ *và hệ đó là độc lập tuyến tính.*

Chú ý: Hai ma trận $\boldsymbol{A, B}$ *được gọi là độc lập tuyến tính nếu phương trình* $\boldsymbol{xA + yB = O}$ *(*$\boldsymbol{O}$ *là ma trận không cùng cỡ với* $\boldsymbol{A}$*) chỉ có duy nhất một nghiệm* $\boldsymbol{(x, y) = (0, 0)}$.

Đáp số: b

Câu 51. Cho ánh xạ tuyến tính $\boldsymbol{T : Mat(2) \to \mathbb{R}^2}$ có $\boldsymbol{T\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = (a + b, d + c)}$. Không gian $\boldsymbol{Ker(T)}$ có một cơ sở là

a) $\left\{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$ b) $\left\{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ c) $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$ d) $\left\{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

HD: $\boldsymbol{Mat(2)}$ *tập các ma trận vuông cấp 2.*

+) Xác định $\boldsymbol{Ker(T)}$.

Xét phương trình $\boldsymbol{T\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = (0, 0)}$, *ta tìm được* $\boldsymbol{a = -b}$ *và* $\boldsymbol{d = -c}$

Suy ra các ma trận thuộc $\boldsymbol{Ker(T)}$ *có dạng* $\boldsymbol{\begin{pmatrix} -b & b \\ c & -c \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$. *(biểu diễn qua hai ma trận độc lập tuyến tính)*

Suy ra $\boldsymbol{\dim Ker(T) = 2}$. *Do đó một cơ sở của* $\boldsymbol{KerT}$ *gồm 2 ma trận khác ma trận không.*

+) Từ các đáp án, kiểm tra các đáp án có hai ma trận khác ma trận không. Đáp án đúng là đáp án thỏa mãn: Các ma trận trong đó thuộc $\boldsymbol{KerT}$ và hệ đó là độc lập tuyến tính.

Chú ý: Hai ma trận $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ được gọi là độc lập tuyến tính nếu phương trình $\boldsymbol{xA + yB = O}$ ($\boldsymbol{O}$ là ma trận không cùng cỡ với $\boldsymbol{A}$) chỉ có duy nhất một nghiệm $\boldsymbol{(x, y) = (0, 0)}$.

Đáp số: a

Câu 52. Cho ánh xạ tuyến tính $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ có $\boldsymbol{T(x, y, z) = (x + y + z, 2x + 2y + 2z)}$. Họ vecto nào dưới đây là một cơ sở của $\boldsymbol{Im(T)}$.

a) $\boldsymbol{\{(1, 2)\}}$ b) $\boldsymbol{\{(1, 2), (0, 0)\}}$ c) $\boldsymbol{\{(1, 2), (-1, -2)\}}$ d) $\boldsymbol{\{(0, 0)\}}$.

HD: Các vecto trong một cơ sở thì luôn khác vecto không.

+) Xác định nhanh số chiều của $\boldsymbol{Im(T)}$: Tìm ảnh của các vecto trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ qua $\boldsymbol{T}$.

Tính $\boldsymbol{T(1, 0, 0), T(0, 1, 0), T(0, 0, 1)}$. Tìm hạng của hệ $\boldsymbol{S}$ gồm các vecto $\boldsymbol{T(1, 0, 0), T(0, 1, 0), T(0, 0, 1)}$.

Hạng của hệ $\boldsymbol{S}$ bằng 1. Suy ra $\boldsymbol{\dim Im(T)}$ = hạng hệ $\boldsymbol{S}$ = 1.

Do đó, một cơ sở của $\boldsymbol{Im(T)}$ chỉ gồm 1 vecto khác vecto không.

+) Từ các đáp án, chỉ xét các đáp án có 1 vecto khác vecto không. Đáp án đúng là đáp án thỏa mãn: Vecto trong đó thuộc $\boldsymbol{Im(T)}$ và vecto đó khác vecto không.

Đáp số: a

Câu 53. Cho ánh xạ tuyến tính $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ có $\boldsymbol{T(x, y) = (x + y, 2x + 2y)}$. Họ vecto nào dưới đây là một cơ sở của $\boldsymbol{Im(T)}$.

a) $\boldsymbol{\{(0, 0)\}}$ b) $\boldsymbol{\{(1, 2), (1, -1)\}}$ c) $\boldsymbol{\{(1, 2)\}}$ d) $\boldsymbol{\{(1, -1)\}}$.

HD: Các vecto trong một cơ sở thì luôn khác vecto không.

+) Xác định nhanh số chiều của $\boldsymbol{Im(T)}$: Tìm ảnh của các vecto trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$ qua $\boldsymbol{T}$.

Tính $\boldsymbol{T(1, 0), T(0, 1)}$. Tìm hạng của hệ $\boldsymbol{S}$ gồm các vecto $\boldsymbol{T(1, 0), T(0, 1)}$.

Hạng của hệ $\boldsymbol{S}$ bằng 1. Suy ra $\boldsymbol{\dim Im(T)}$ = hạng hệ $\boldsymbol{S}$ = 1.

Do đó, một cơ sở của $\boldsymbol{Im(T)}$ chỉ gồm 1 vecto khác vecto không.

+) Từ các đáp án, chỉ xét các đáp án có 1 vecto khác vecto không. Đáp án đúng là đáp án thỏa mãn: Vecto trong đó thuộc $\boldsymbol{Im(T)}$ và vecto đó khác vecto không.

Đáp số: c

Câu 54. Cho ánh xạ tuyến tính $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ có $\boldsymbol{T(x, y, z) = (x + y + z, x + y, x + y - z)}$. Họ vecto nào dưới đây là một cơ sở của $\boldsymbol{Im(T)}$.

a) $\boldsymbol{\{(1, 1, 1)\}}$ b) $\boldsymbol{\{(2, 2, 2), (1, 0, -1)\}}$ c) $\boldsymbol{\{(1, 0, -1)\}}$ d) $\boldsymbol{\{(1, 1, 1), (0, 0, 0)\}}$.

HD: Các vecto trong một cơ sở thì luôn khác vecto không.

+) Xác định nhanh số chiều của $\boldsymbol{Im(T)}$*: Tìm ảnh của các vecto trong cơ sở chính tắc của* $\mathbb{R}^3$ *qua* $\boldsymbol{T}$*.*

Tính $\boldsymbol{T(1,0,0), T(0,1,0), T(0,0,1)}$*. Tìm hạng của hệ* $\boldsymbol{S}$ *gồm các vecto* $\boldsymbol{T(1,0,0), T(0,1,0), T(0,0,1)}$*.*

Hạng của hệ $\boldsymbol{S}$ *bằng 2. Suy ra* $\mathbf{dim}\, \boldsymbol{Im(T)} =$ *hạng hệ* $\boldsymbol{S}$ *= 2.*

Do đó, một cơ sở của $\boldsymbol{Im(T)}$ *chỉ gồm 2 vecto khác vecto không.*

+) Từ các đáp án, chỉ xét các đáp án có 2 vecto khác vecto không. Đáp án đúng là đáp án thỏa mãn: các vecto trong đó thuộc $\boldsymbol{Im(T)}$ *và hệ đó là độc lập tuyến tính.*

Đáp số: b

Câu 1. Cho ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ có $T(x, y) = (x + y, 2x)$. Vecto u nào bên dưới là một vecto riêng của T?

a) $u = (1, 0)$ b) $u = (0, 1)$ c) $u = (1, -2)$ d) $u = (1, 2)$.

HD: ghi nhớ cho toán tử tuyến tính $T : V \to V$. Vecto u là một vecto riêng của T nếu $T(u) = k \cdot u$, với k là số nào đó.

+) Bài toán này là như sau: Tính $T(u)$.

Kiểm tra tính phụ thuộc tuyến tính của $T(u)$ và u (hoặc kiểm tra tính cùng phương của hai vecto này).

Nếu hệ gồm hai vecto $T(u)$, u phụ thuộc tuyến tính thì u là một vecto riêng.

Nếu hệ gồm hai vecto $T(u)$, u độc lập tuyến tính thì u không là một vecto riêng.

+) Cách kiểm tra nhanh hai vecto có tọa độ phụ thuộc tuyến tính hay không?

Cho $u = (x_1, x_2, \cdots, x_n), v = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$.

Lập các tỷ số $\dfrac{x_i}{y_i}$ với $i = 1, 2, \cdots, n$.

Nếu các tỷ số trên đều bằng nhau với mọi i thì u, v là phụ thuộc tuyến tính.

Câu 2. Cho toán tử tuyến tính $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ có $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 + x_2)$. Vecto u nào bên dưới là một vecto riêng của T?

a) $u = (1, -1)$ b) $u = (0, 1)$ c) $u = (1, 0)$ d) $u = (1, 2)$.

HD: Ghi nhớ nếu $T(u) = \theta$ ($theta$ là vecto không), với u khác vecto không thì u là một vecto riêng của T ứng giá trị riêng $\lambda = 0$, vì $T(u) = \theta = 0 \cdot u$.

Câu 3. Cho ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ có $T(x, y, z) = (x + y + z, y + z, 5z)$. Vecto u nào bên dưới là một vecto riêng của T?

a) $u = (0, 1, 0)$ b) $u = (0, 0, 1)$ c) $u = (1, 0, 0)$ d) $u = (1, 1, 0)$.

HD: Ghi nhớ: nếu $T(u) = u$ thì u là một vecto riêng của T ứng với giá trị riêng $\lambda = 1$.

Câu 4. Cho toán tử tuyến tính $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ có $T(x, y, z) = (x + y + z, y, x + z)$. Vecto u nào bên dưới là một vecto riêng của T?

a) $u = (0, 0, -1)$ b) $u = (0, 0, 1)$ c) $u = (0, 1, 1)$ d) $u = (0, 1, -1)$.

Câu 5. Cho ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ có $T(x, y, z) = (x + y + z, y + z, 5z)$. Biết rằng T có một giá trị riêng là 1. Các vecto của T ứng với 1 thuộc tập nào dưới đây?

a) $Span\{(1, 0, 0)\} \setminus \{(0, 0, 0)\}$ b) $Span\{(0, 1, 0)\} \setminus \{(0, 0, 0)\}$

c) $Span\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\} \setminus \{(0, 0, 0)\}$ d) $Span\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\} \setminus \{(0, 0, 0)\}$

HD:

★ *Ghi nhớ* $\boldsymbol{Span\{S\}}$ *là không gian con sinh bởi họ* $\boldsymbol{S}$ *(hay bao tuyến tính của* $\boldsymbol{S}$*). Vecto không* $\boldsymbol{\theta}$ *luôn thuộc* $\boldsymbol{Span(S)}$.

- *Nếu* $\boldsymbol{S = \{u\}}$ *thì* $\boldsymbol{Span\{S\} = \{k.u|}$ $\boldsymbol{k}$ *là số thực bất kỳ*$\boldsymbol{\}}$.

- *Nếu* $\boldsymbol{S = \{u, v\}}$ *thì* $\boldsymbol{Span\{S\} = \{c_1.u + c_2.v| \, c_1, c_2}$ *là hai số thực bất kỳ*$\boldsymbol{\}}$.

★ *Biết giá trị riêng của* $\boldsymbol{T}$ *là* $\boldsymbol{k}$*. Tìm vecto riêng tương ứng?*

+) *Ta đi giải phương trình* $\boldsymbol{T(u) = ku}$*. Tìm được* $\boldsymbol{u}$.

- **Trường hợp 1:** $u = t.p_1$ *với* t *là tham số. Ta có kết luận sau:*

Các vecto riêng của T ứng với k sẽ thuộc tập $Span\{u\} \setminus \{\theta\}$ với u là một vecto riêng khác vecto không của T ứng với k.

● *Áp dụng kết quả này vào giải bài tập như sau:*

- *Ta chỉ xem xét các đáp án có bao tuyến tính của một vecto hay* $\boldsymbol{Span\{u_1\} \setminus \{\theta\}}$.

- *Kiểm tra* $\boldsymbol{u_1}$ *có là một vecto riêng của* $\boldsymbol{T}$ *ứng với* $\boldsymbol{k}$ *hay không? Nếu đúng thì đó là đáp án cần tìm.*

- **Trường hợp 2:** $u = c_1.p_1 + c_2.p_2$ *với* c_1, c_2 *là hai tham số bất kỳ. Ta có kết luận sau:*

Các vecto riêng của T ứng với k sẽ thuộc tập $Span\{u, v\} \setminus \{\theta\}$ ở đây u, v là hai vecto riêng độc lập tuyến tính của T ứng với k.

● *Áp dụng kết quả này vào giải bài tập như sau:*

- *Ta chỉ xem xét các đáp án có bao tuyến tính của hai vecto hay* $\boldsymbol{Span\{u_1, u_2\} \setminus \{\theta\}}$.

- *Kiểm tra* $\boldsymbol{u_1, u_2}$ *có là hai vecto riêng độc lập tuyến tính của* $\boldsymbol{T}$ *ứng với* $\boldsymbol{k}$ *hay không? Nếu đúng thì đó là đáp án cần tìm.*

★ *Giải câu hỏi như sau:*

+) *Tìm* (x, y, z) *sao cho* $\boldsymbol{T(x, y, z) = 1.(x, y, z)}$*. Suy ra* $\boldsymbol{x = t, \ y = z = 0}$*. Suy ra* $\boldsymbol{(x, y, z) = (t, 0, 0) = t(1, 0, 0)}$.

+) *Ta kiểm tra các đáp án A và B có là đáp án đúng. Ta chỉ cần chỉ ra vecto sinh nào của hai không gian trong đáp án* $\boldsymbol{A, B}$ *là vecto riêng của* $\boldsymbol{T}$ *ứng với* $\boldsymbol{1}$.

Ta thấy $\boldsymbol{T(1, 0, 0) = (1, 0, 0) = 1.(1, 0, 0)}$*. Suy ra* $\boldsymbol{(1, 0, 0)}$ *là một vecto riêng của* $\boldsymbol{T}$ *ứng với* $\boldsymbol{1}$*. Vậy đáp án* $\boldsymbol{A}$ *là đúng.*

Câu 6. Cho toán tử tuyến tính $\boldsymbol{T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3}$ có $\boldsymbol{T(x, y, z) = (x + y + z, y, x + z)}$. Biết $\boldsymbol{T}$ có một giá trị riêng là $\boldsymbol{0}$. Các vecto riêng của $\boldsymbol{T}$ ứng với giá trị riêng $\boldsymbol{0}$ thuộc tập nào dưới đây?

a) $\boldsymbol{Span\{(1, 1, -1)\} \setminus \{(0, 0, 0)\}}$ b) $\boldsymbol{Span\{(1, 0, -1)\} \setminus \{(0, 0, 0)\}}$

c) $\boldsymbol{\{(0, 0, 0)\}}$ d) $\boldsymbol{Span\{(1, 0, -1), (1, 1, -1)\} \setminus \{(0, 0, 0)\}}$

Đáp số: b.

Câu 7. Cho toán tử tuyến tính $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ có $T(x, y, z) = (2x + y, x + 2y, z)$. Biết T có một giá trị riêng là 1. Các vecto riêng của T ứng với giá trị riêng 1 thuộc tập nào dưới đây?

a) $Span\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\} \setminus \{(0, 0, 0)\}$ b) $Span\{(-1, 1, 0)\} \setminus \{(0, 0, 0)\}$

c) $Span\{(0, 0, 1), (-1, 1, 0)\} \setminus \{(0, 0, 0)\}$ d) $Span\{(0, 0, 1)\} \setminus \{(0, 0, 0)\}$

HD:

+) Tìm (x, y, z) sao cho $T(x, y, z) = 1.(x, y, z)$. Suy ra $x = -y$ với y, z là bất kỳ.

Suy ra $(x, y, z) = (-y, y, z) = (-y, y, 0) + (0, 0, z) = y(-1, 1, 0) + z(0, 0, 1)$.

+) Ta chỉ cần kiểm tra các đáp án có bao tuyến tính của hai vecto hay $Span\{u_1, u_2\} \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

Nếu u_1, u_2 được kiểm tra là hai vecto riêng của T ứng với 1 và đó là hai vecto độc lập tuyến tính thì đáp án chứa hai vecto này là đáp án đúng.

Đáp số: c.

Câu 8. Cho toán tử tuyến tính $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ có $T(x, y, z) = (3x + y + z, 2y, x + y + 3z)$. Biết T có một giá trị riêng là 2. Các vecto riêng của T ứng với giá trị riêng 2 thuộc tập nào dưới đây?

a) $Span\{(-1, 0, 1), (-1, 1, 0)\} \setminus \{(0, 0, 0)\}$ b) $Span\{(-1, 1, 0)\} \setminus \{(0, 0, 0)\}$

c) $Span\{(-1, 0, 1), (-1, 1, 1)\} \setminus \{(0, 0, 0)\}$ d) $Span\{(-1, 1, 1)\} \setminus \{(0, 0, 0)\}$

Câu 9. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Giá trị λ nào bên dưới là một giá trị riêng của A?

a) $\lambda = 2$ b) $\lambda = -2$ c) $\lambda = 1$ d) $\lambda = -1$

HD: Chúng ta có thể kiểm tra λ thỏa mãn điều kiện $\det(A - \lambda I) = 0$ với I là ma trận đơn vị cùng cấp A.

Câu 10. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Giá trị λ nào bên dưới là một giá trị riêng của A?

a) $\lambda = -3$ b) $\lambda = -2$ c) $\lambda = 1$ d) $\lambda = 0$

Câu 11. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Giá trị λ nào bên dưới là một giá trị riêng của A?

a) $\lambda = -3$ b) $\lambda = -1$ c) $\lambda = 1$ d) $\lambda = 3$

Câu 12. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Tập các giá trị của A?

a) $\{2\}$ b) $\{-2\}$ c) $\{0, 2\}$ d) $\{-2, 0\}$

Câu 13. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Tập các giá trị của A?

a) $\{1\}$ b) $\{-1, 1\}$ c) $\{-1, 1, 3\}$ d) $\{1, 3\}$

Câu 14. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Tập các giá trị của A?

a) $\{0, 3\}$ b) $\{2, 3\}$ c) $\{3\}$ d) $\{0, 2, 3\}$

Câu 15. Cho A là ma trận vuông cấp hai thỏa mãn rằng $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, với $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Kết luận nào dưới đây không đúng?

a) A chéo hóa được.

b) Tập các giá trị riêng của A là $\{0, 4\}$.

c) $\lambda = 4$ là một giá trị riêng của A và các vecto riêng của A tương ứng với $\lambda = 4$ có dạng $t \cdot (1, 2)$ với mọi $t \neq 0$.

d) $\lambda = 0$ là một giá trị riêng của A và các vecto riêng của A tương ứng với $\lambda = 0$ có dạng $t \cdot (2, 1)$ với mọi $t \neq 0$.

HD:

Ghi nhớ các kết quả sau: Nếu $\mathbf{A}$ *là ma trận vuông cấp 2 thỏa mãn* $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, *với* $P = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ *thì ta có các kết quả sau:*

+) $\mathbf{A}$ chéo hóa được, $\mathbf{P}$ là ma trận gây chéo hóa $\mathbf{A}$.

+) Các giá trị riêng của $\mathbf{A}$ là λ_1, λ_2.

+) Nếu $\lambda_1 \neq \lambda_2$ thì

- Các vecto riêng của $\mathbf{A}$ ứng với λ_1 có dạng $t \cdot (a_1, b_1)$, với $t \neq 0$. (Chú ý (a_1, b_1) là cột thứ nhất của $\mathbf{P}$).

- Các vecto riêng của $\mathbf{A}$ ứng với λ_2 có dạng $t \cdot (a_2, b_2)$, với $t \neq 0$. (Chú ý (a_2, b_2) là cột thứ hai của $\mathbf{P}$).

+) Nếu $\lambda_1 = \lambda_2$ thì các vecto riêng của $\mathbf{A}$ ứng với λ_1 có dạng $t_1 \cdot (a_1, b_1) + t_2 \cdot (a_2, b_2)$, với t_1, t_2 không

đồng thời bằng không. (Chú ý (a_1, b_1) là cột thứ nhất của P và (a_2, b_2) là cột thứ hai của P).

Câu 15. Cho A là ma trận vuông cấp hai thỏa mãn rằng $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, với $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Kết luận nào dưới đây không đúng?

a) A chéo hóa được.

b) Tập các giá trị riêng của A là $\{0, 4\}$.

c) $\lambda = 3$ là một giá trị riêng của A và các vecto riêng của A tương ứng với $\lambda = 3$ có dạng $t \cdot (0, 1)$ với mọi $t \neq 0$.

d) $\lambda = 3$ là một giá trị riêng của A và các vecto riêng của A tương ứng với $\lambda = 3$ có dạng $t \cdot (1, 2)$ với mọi $t \neq 0$.

Câu 16. Cho A là ma trận vuông cấp ba thỏa mãn rằng $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, với $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Kết luận nào dưới đây không đúng?

a) A chéo hóa được.

b) Tập các giá trị riêng của A là $\{1, 2, 4\}$.

c) $\lambda = 4$ là một giá trị riêng của A và các vecto riêng của A tương ứng với $\lambda = 4$ có dạng $t \cdot (1, 0, 1)$ với mọi $t \neq 0$.

d) $\lambda = 2$ là một giá trị riêng của A và các vecto riêng của A tương ứng với $\lambda = 2$ có dạng $t \cdot (1, 0, 1)$ với mọi $t \neq 0$.

HD:

Ghi nhớ các kết quả sau: Nếu A là ma trận vuông cấp 3 thỏa mãn $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, với $P = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ thì ta có các kết quả sau:

+) A chéo hóa được, P là ma trận gây chéo hóa A.

+) Các giá trị riêng của A là $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

+) Nếu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ đôi một khác nhau thì

- Các vecto riêng của A ứng với λ_1 có dạng $t \cdot (a_1, b_1, c_1)$, với $t \neq 0$. (Chú ý (a_1, b_1) là cột thứ nhất của P).

- Các vecto riêng của A ứng với λ_2 có dạng $t \cdot (a_2, b_2, c_2)$ với $t \neq 0$. (Chú ý (a_2, b_2, c_2) là cột thứ hai của

P).

- Các vecto riêng của $\boldsymbol{A}$ *ứng với* λ_3 *có dạng* $\boldsymbol{t \cdot (a_3, b_3, c_3)}$*, với* $\boldsymbol{t \neq 0}$*. (Chú ý* $\boldsymbol{(a_3, b_3, c_3)}$ *là cột thứ ba của* ***P***).

Câu 17. Cho A là ma trận vuông cấp hai thỏa mãn rằng $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, với P là ma trận vuông cấp hai khả nghịch. Nếu I là ma trận đơn vị cấp 2 thì ma trận nào dưới đây là ma trận nghịch đảo của A?

a) $-\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I$

b) $\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I$

c) $\frac{1}{2}A - \frac{3}{2}I$

d) $-\frac{1}{2}A - \frac{3}{2}I$

HD: **Để làm bài này, ta cần chú ý sau:**

+) Nếu $\boldsymbol{A}$ *là ma trận vuông cấp 2 khả nghịch thì ma trận nghịch đảo của* $\boldsymbol{A}$ *có dạng* $\boldsymbol{A^{-1} = xA + yI}$*, với* $\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *là ma trận đơn vị cấp 2. Ta cần tìm* $\boldsymbol{x, y}$.

+) Nếu $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$*, với* $\boldsymbol{a}$ *và* $\boldsymbol{b}$ *là các số khác không (*$\boldsymbol{D}$ *là ma trận chéo cấp 2) thì* $\boldsymbol{D^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}$.

+) **Bài toán: Cho A là ma trận vuông cấp 2 thỏa mãn $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, với a và b là các số khác không. Ta cần tìm dạng ma trận nghịch đảo của A theo A.**

- Ma trận nghịch đảo của A có dạng $A^{-1} = xA + yI$. Tìm x, y.

- Đặt $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, thì $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}$.

Khi đó x, y thỏa mãn đẳng thức $xD + yI = D^{-1}$. Từ đẳng thức này, ta tìm được x, y và suy ra đáp án.

Đáp số: a.

★ Ta mở rộng lý luận này sang ma trận vuông cấp 3 như sau:

Bài toán: Cho A là ma trận vuông cấp 3 thỏa mãn $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, với a, b và c là các số khác không. Ta cần tìm dạng ma trận nghịch đảo của A theo A.

- Ma trận nghịch đảo của A có dạng $A^{-1} = xA^2 + yA + zI$, ở đây $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ là ma trận đơn vị

cấp 3. Tìm x, y, z.

- Đặt $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$**, thì**

$$D^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix},$$

và

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}.$$

Khi đó x, y, z thỏa mãn đẳng thức $xD^2 + yD + zI = D^{-1}$. Từ đẳng thức này, ta tìm được x, y, z và suy ra đáp án.

Câu 18. Cho A là ma trận vuông cấp hai thỏa mãn rằng $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, với P là ma trận vuông cấp hai khả nghịch. Nếu I là ma trận đơn vị cấp 2 thì ma trận nào dưới đây là ma trận nghịch đảo của A?

a) $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}I$

b) $\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I$

c) $-\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I$

d) $-\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}I$