BÁCH KHOA ĐẠI CƯƠNG MÔN PHÁI

GỢI Ý GIẢI BÀI TẬP

GIẢI TÍCH III

HÀ NỘI,....2018

Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội

Viện Toán ứng dụng và Tin học - 2018

BÀI TẬP GIẢI TÍCH III (Phương trình vi phân và chuỗi)
Nhóm học 1: Mã MI1131

Kiểm tra giữa kỳ : Tự luận

Thi cuối kỳ : Tự luận

I. CHUỖI

1) Xét sự hội tụ và tính tổng (nếu có) của các chuỗi sau

a) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\ldots$

b) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots$

c) $\frac{1}{9}+\frac{2}{225}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2}+\ldots$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{4^n}-\frac{5}{n(n+1)(n+2)(n+3)}\right)$

2) Các chuỗi sau hội tụ hay phân kỳ? tại sao?

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n+\frac{3}{5^n}\right]$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

3) Sử dụng các tiêu chuẩn: So sánh; D'Alembert; Cauchy; Tích phân, xét sự hội tụ của các chuỗi sau

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10n^2+1}$	b) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{(n-1)(n+2)}}$	c) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1+n}{n^2-1}\right)^2$
d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n^{3/4}}$	e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{1+n}{n}\right)^n$	f) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$
g) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$	h) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{1+n}{n-1}$	i) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\frac{1+n}{n}\right)$
k) $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\frac{n^2+\sqrt{n}}{n^2-n}\tan\frac{1}{n^2}$	l) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+1)!}{n^2 8^n}$	m) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^{2n}(n-1)!}$

4) Xét sự hội tụ của các chuỗi số

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$	b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n!)^2}{(2n)!}$	c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{2^n}$
d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{(n-1)n}$	e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n (n!)^2}{n^{2n}}$	f) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\left(\frac{n}{4n-3}\right)^{2n}$
g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\frac{1}{n}}{n^2}$	h*) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left[\pi(2+\sqrt{3})^n\right]$	i) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^2}$
k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n \cdot n!}{n^n}$		

5) Xét sự hội tụ của các chuỗi số

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)^2$	b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n+1}{n-\ln n}$
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin(e^{-n})$	d) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}\right), \quad a\in\mathbb{R}$
e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{3^n\cdot n!}$	f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^3}, \quad a\in\mathbb{R}$
g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2}\cdot 2^n}{(n+1)^{n^2}}$	h) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}, \quad \alpha>0,\beta>0$
i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n+2\cos n\alpha}{n(\ln n)^{\frac{3}{2}}}, \quad \alpha\in\mathbb{R}$	k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{na}{(1-a^2)^n}, \quad a\in\mathbb{R}, 0<\|a\|\neq 1$

6) Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm số sau

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$	b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$	c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{xn^x}$
d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{2^{nx}}$	e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{1+n^2x}$	f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n\left(x+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{x-e}}$
g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^{\alpha}}\left(\frac{3x-2}{x}\right)^n, \quad \alpha\in\mathbb{R}$	h) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x^n+\frac{1}{2^n x^n}\right)$	

i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{x^{n^n}}$	k) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+1)^5}(x+2)^{1-2n}$	

7) Dùng tiêu chuẩn Weierstrass, chứng minh các chuỗi sau hội tụ đều trên các tập tương ứng

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x^2)^n}$ trên $\mathbb{R}$	b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^n$ trên [-1,1]
c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}}$ trên $[0,+\infty)$	d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n^2x^2}}{n^2}$ trên $\mathbb{R}$

8) Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm số sau

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^2}{n^2}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(x-1)^n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{2n+5}}{n^2+4}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-1)^{2n}}{n2^n}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^n$ f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n^2+1}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n-1}}{2n\cdot 4^n}$ h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n-1)^{2n}(x-1)^n}{(3n-2)^{2n}}$ i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}(x+3)^n$

9) Tính tổng của các chuỗi sau

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+5}}{3^{2n}(2n+1)},\quad x\in(-3,3)$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\cdot 3^{n-1}}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)},\quad x\in(-1,1)$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+2n}{n^2+n}\right)x^n,\quad x\in(-1,1)$

10. Khai triển thành chuỗi Maclaurin

a) $f(x)=\frac{x^3+x+1}{x^2-4x+3}$ b) $f(x)=\sin 3x+x\cos 3x$

c) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ d) $f(x)=\ln(1+x-2x^2)$

11. a) Khai triển $f(x)=\sqrt{x}$ thành chuỗi lũy thừa của x - 4

b) Khai triển $f(x)=\sin\dfrac{\pi x}{3}$ thành chuỗi lũy thừa của x -1

c) Khai triển $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ thành chuỗi lũy thừa của x + 4

d) Khai triển $f(x)=\ln x$ thành chuỗi lũy thừa của $\dfrac{1-x}{1+x}$

12) a) Khai triển Fourier các hàm số sau

(1) $f(x)=|x|,\quad |x|< 1$, bằng cách kéo dài f thành hàm tuần hoàn với chu kỳ 2.

(2) $f(x)=2x,\quad 0<x< 1$, bằng cách kéo dài f thành hàm chẵn trên (-1,1), tuần hoàn chu kỳ 2. Nếu kéo dài f thành hàm lẻ trên (-1,1), tuần hoàn chu kỳ 2, thì dạng của khai triển Fourier sẽ như thế nào?

(3) $f(x)=10-x,\quad 5<x<15$, bằng cách kéo dài f thành hàm tuần hoàn với chu kỳ 10.

b) Cho $f(x)=x^2$ trên $[-\pi,\pi]$. Hãy khai triển Fourier của hàm $f(x)$, sau đó tính tổng các chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$.

Lời giải – Hướng dẫn được thực hiện bởi Team GT3 nhóm BK-ĐCMP

I Chuỗi

1 Xét sự hội tụ và tính tổng nếu có:

a) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+...+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+...$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}+...\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^n}+...\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}.\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}.\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}\right]=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

Vậy chuỗi đã cho hội tụ và có tổng S = $\frac{3}{2}$

b) $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+...$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{(n-1).n}-\frac{1}{n(n+1)}\right)$$

$$\left(\frac{1}{(n-1)n(n+1)}=\frac{(n+1)-(n-1)}{2(n-1)n(n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right)\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{n(n+1)}\right)=\frac{1}{4}$$

Vậy chuỗi đã cho hội tụ và có tổng bằng S = $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{9}+\frac{2}{225}+...+\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}+...$

Hội tụ và tổng S = $\frac{1}{8}$

Gợi ý: $\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}=\frac{(2n+1)^2-(2n-1)^2}{8.(2n-1)^2(2n+1)^2}=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{1}{(2n+1)^2}\right)$

2 Các chuỗi sau hội tụ hay phân kì? Tại sao?

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n+\frac{3}{5^n}\right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n+\frac{3}{5^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5^n}\right)$$

+) $\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n\right)$ là chuỗi PK +) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5^n}\right)$ là chuỗi HT

Do đó chuỗi đã cho PK

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

Ta có: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ là chuỗi dương và ta lại có:

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{4}e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\left[n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\right]}=\frac{1}{4}e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\left[n.\left(-\frac{1}{n+1}\right)\right]}=\frac{1}{4}e^{-1}\neq 0$$

Nên chuỗi đã cho PK

3 Sử dụng các tiêu chuẩn: So sánh; Cauchy; D'Alambert; Tích phân, xét sự hội tụ:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10n^2+1}$

Ta có: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10n^2+1}$ là chuỗi dương

$\frac{n}{10n^2+1}\sim\frac{1}{10n}$ khi $n\to\infty$.

Mà $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10n}$ phân kì nên theo tiêu chuẩn so sánh chuỗi đã cho phân kì.

b) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{(n-1)(n+2)}}$

Ta có $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{(n-1)(n+2)}}$ là chuỗi dương

Ta lại có: $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{(n-1)(n+2)}}=1\neq 0$ nên chuỗi đã cho PK

c) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1+n}{n^2-1}\right)^2$

Ta có: $\left(\frac{1+n}{n^2-1}\right)^2 = \frac{1}{(n-1)^2}$

Mà $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)^2}$ HT nên chuỗi đã cho HT

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n^{3/4}}$

Ta có: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n^{3/4}}$ là chuỗi dương

aa

Và: $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n^{3/4}} = \frac{2}{n^{3/4}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})} \sim \frac{1}{n^{5/4}}$ khi $n\to\infty$

Hơn nữa: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{5/4}}$ HT nên chuỗi đã cho HT

e) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{1+n}{n}\right)^n$

Ta có $\frac{1}{n^2}\left(\frac{1+n}{n}\right)^n = \frac{1}{n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \sim \frac{1}{n^2}.e$ khi $n\to\infty$ mà $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{e}{n^2}$ HT nên => HT

f) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ Là chuỗi dương

Ta có $\ln n < n$ với mọi $n \geq 2$ nên $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$ Mà $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ PK => Chuỗi đã cho PK

g) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

Ta có: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ là chuỗi dương

Ta lại có: $\frac{\ln n}{\sqrt{n}} \geq \frac{\ln 2}{\sqrt{n}}$ với mọi n ≥2

Mà $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln 2}{\sqrt{n}}$ PK => Chuỗi đã cho PK

h) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(\frac{1+n}{n-1}\right)$

Chuỗi đã cho là dương.

Ta có $\frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(\frac{1+n}{n-1}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}.\frac{2}{n-1} \sim \frac{2}{n^{3/2}}$ khi $n \to \infty$

Mà $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^{3/2}}$ HT => chuỗi đã cho HT

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\frac{1+n}{n}\right)$

(Dùng khai triển Mac)

Chuỗi đã cho là dương.

Ta có: $\frac{1}{n} - \ln\left(\frac{1+n}{n}\right) = \frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})\right) \sim \frac{1}{2n^2}$ khi $n \to \infty$

Do đó chuỗi đã cho HT

j) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+\sqrt{n}}{n^2-n}\right) \tan\frac{1}{n^2}$

Chuỗi đã cho là dương

Ta có:

$$\ln\left(\frac{n^2+\sqrt{n}}{n^2-n}\right)\tan\frac{1}{n^2} = \ln\left(1+\frac{n+\sqrt{n}}{n^2-n}\right)\tan\frac{1}{n^2} \sim \frac{n+\sqrt{n}}{n^2-n}.\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^3} \quad \text{khi } n \to \infty$$

Do đó chuỗi đã cho HT

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+1)!}{n^2.8^n}$

(Sử dụng Tiêu chuẩn D'Alambert với những chuỗi có "!")

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+4)!}{(n+1)^2.8^{n+1}} \cdot \frac{n^2.8^n}{(3n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+2)(3n+3)(3n+4).n^2}{8.(n+1)^2} = \infty > 1$$

Do đó chuỗi đã cho PK

l) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1.3.5...(2n-1)}{2^{2n-1}(n-1)!}$

Chuỗi đã cho là dương.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1.3.5...(2n+1)}{2^{2n+1}.n!} \cdot \frac{2^{2n-1}.(n-1)!}{1.3.5...(2n-1)!}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{4n} = \frac{1}{2} < 1 \text{=>chuỗi đã cho HT}$$

4 Xét sự HT

$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

Chuỗi đã cho dương nên ta áp dụng tiêu chuẩn Cauchy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{5^n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$$

$$= \frac{1}{5} e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)} = \frac{1}{5} e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(n.\left(-\frac{1}{n}\right)\right)} = \frac{1}{5e} < 1$$

Do đó chuỗi đã cho HT

$b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n!)^2}{(2n)!}$

Chuỗi dương nên ta xét:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{3^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{3^n (n!)^2}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{3(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{3}{4} < 1 \text{=>chuỗi đã cho HT}$$

$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{2^n}$

Chuỗi dương nên ta xét:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(n+1)^2+5}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2+5} \right] = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+6}{2(n^2+5)} = \frac{1}{2} < 1$$ nên chuỗi đã cho HT

$d) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{(n-1)n}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{(n-1)n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n-1} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} (n-1)\ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right)}$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty} (n-1)\ln\left(1+\frac{-2}{n+1}\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-2(n-1)}{n+1}} = e^{-2} < 1$$

Nên chuỗi đã cho HT

$e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n (n!)^2}{n^{2n}}$

Chuỗi dương.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{7^{n+1}((n+1)!)^2}{(n+1)^{2n+2}} \cdot \frac{n^{2n}}{7^n (n!)^2} \right] = \lim_{n\to\infty} \frac{7(n+1)^2 . n^{2n}}{(n+1)^2 . (n+1)^{2n}}$$

$$= 7 \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2n}}{(n+1)^{2n}} = 7 \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{2n} = \ldots = \frac{7}{e^2} < 1$$

Do đó chuỗi đã cho HT

$f) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \left(\frac{n}{4n-3} \right)^{2n}$

Chuỗi dương.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{n} \left(\frac{n}{4n-3} \right)^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{4n-3} \right)^2 n^{\frac{1}{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{16} . n^{\frac{1}{2n}}$$

$$=\frac{1}{16}\lim_{n\to\infty}\left(n^{\frac{1}{2n}}\right)=\ldots=\frac{1}{16}e^{0}=\frac{1}{16}<1$$ => Chuỗi đã cho HT

$$g)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\frac{1}{n}}{n^{2}}$$

Ta có $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\frac{1}{n}}{n^{2}}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{2}}=-\sum_{n=1}^{\infty}a_n$

⇨ Chọn $\displaystyle b_n=\frac{1}{n^{3/2}}$ +) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ là chuỗi HT

Ta có: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{3/2}\ln n}{n^{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{1/2}}\overset{(L')}{=}\ldots=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^{1/2}}=0$

=> $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ HT. Suy ra chuỗi đã cho HT

$$h)\ \sum_{n=1}^{\infty}\sin\left[\pi(2+\sqrt{3})^{n}\right]$$

Bạn đọc có thể cập nhật trên nhóm "BK – Đại Cương Môn Phái" trên Facebook.

$$i)\ \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^{2}}$$

Chuỗi đã cho dương và giảm nên ta xét $\displaystyle f(x)=\frac{1}{x\ln x(\ln\ln x)^{2}},\ x\geq 3$

$$\int_{3}^{\infty}f(x)dx=\int_{3}^{\infty}\frac{dx}{x\ln x(\ln\ln x)^{2}}=\int_{3}^{\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln x(\ln\ln x)^{2}}=\int_{3}^{\infty}\frac{d(\ln\ln x)}{(\ln\ln x)^{2}}=-\frac{1}{\ln\ln x}\bigg|_{3}^{\infty}=\ln\ln 3\neq\infty$$

Tích phân này hội tụ nên chuỗi đã cho cũng HT

$$k)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{n}.n!}{n^{n}}$$

Chuỗi PK

Gợi ý: Sử dụng công thức Stirling: $n! \sim \sqrt{2n\pi}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$

5 Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)^2$

$n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)^2 \sim n\left(\dfrac{1}{n}\right)^2 = \dfrac{1}{n}$ khi $n \to \infty$ => Chuỗi đã cho PK

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n+1}{n-\ln n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n+1}{n-\ln n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k}+1}{2k-\ln(2k)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k-1}+1}{2k-1-\ln(2k-1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2k-\ln(2k)}$$

Lại có: $\dfrac{2}{2k-\ln(2k)} > \dfrac{2}{2k} = \dfrac{1}{k}$

Mà $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k}$ PK nên chuỗi đã cho PK

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin(e^{-n})$

Chuỗi dương.

$\arcsin(e^{-n}) = \arcsin(\dfrac{1}{e^n}) \sim \dfrac{1}{e^n} (n \to \infty)$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{e^n}$ HT (vì $\dfrac{1}{e}$ <1) nên Chuỗi đã cho HT

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+a^2}), a \in \mathbb{R}$

Bạn đọc có thể cập nhật trên nhóm "BK – Đại Cương Môn Phái" trên Facebook.

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5...(2n-1)}{3^n.n!}$

Chuỗi dương.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1.3.5...(2n+1)}{3^{n+1}.(n+1)!}.\frac{3^n.n!}{1.3.5...(2n-1)}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n}=\frac{2}{3}<1$$

Do đó chuỗi đã cho HT

f) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^3}, a\in\mathbb{R}$

+a = 0 : $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{0}{n}\right)^{n^3}=\sum_{n=1}^{\infty}1$ PK

+a ≠ 0: Chuỗi dương và ta có:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^2}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left[n^2\ln\cos\frac{a}{n}\right]}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left[n^2\ln\left(1+\cos\frac{a}{n}-1\right)\right]}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left[n^2.\left(\cos\frac{a}{n}-1\right)\right]}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left[n^2.\frac{-a^2}{2n^2}\right]}=e^{-\frac{a^2}{2}}<1$$

Nên chuỗi đã cho HT

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n^2}.2^n}{(n+1)^{n^2}}$

Chuỗi dương và ta có:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^{n^2}.2^n}{(n+1)^{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^n}{(n+1)^n}=2\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n$$

$$=2.e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\right]}=2.e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{n}{n+1}\right)}=2.e^{-1}=\frac{2}{e}<1$$ nên chuỗi đã cho HT

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}, (\alpha, \beta > 0)$

Bạn đọc có thể cập nhật trên nhóm "BK – Đại Cương Môn Phái" trên Facebook.

i) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n + 2\cos n\alpha}{n(\ln n)^{\frac{3}{2}}}, a \in \mathbb{R}$

Ta có: $\left|\frac{(-1)^n + 2\cos n\alpha}{n(\ln n)^{3/2}}\right| < \frac{3}{n(\ln n)^{3/2}}, \forall n \geq 3$

Dãy $\left\{\frac{3}{n(\ln n)^{3/2}}\right\}$ dương và giảm về 0 nên ta xét:

$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^{3/2}}, x \geq 3$

$\int_3^{\infty} f(x)dx = \int_3^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{3/2}} = \int_3^{\infty} \frac{d(\ln x)}{(\ln x)^{3/2}} = -2\left(\ln x\right)^{-1/2}\Big|_3^{\infty} = 2\ln 3 \neq \infty \Rightarrow \sum_{n=3}^{\infty} \frac{3}{n(\ln n)^{3/2}}$ HT

Do đó chuỗi đã cho HT

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{na}{(1-a^2)^n}, (a \in \mathbb{R}, 0 < |a| \neq 1)$

Xét $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{na}{(1-a^2)^n}\right|$, $a_n = \left|\frac{na}{(1-a^2)^n}\right|$

+) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)a}{(1-a^2)^{n+1}} \cdot \frac{(1-a^2)^n}{na}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n+1}{n(1-a^2)}\right| = \frac{1}{|1-a^2|}$

$\frac{1}{|1-a^2|} < 1 \Leftrightarrow |a| > \sqrt{2}$ Khi đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{na}{(1-a^2)^n}\right|$ HT nên chuỗi đã cho HT

$\frac{1}{|1-a^2|} > 1 \Leftrightarrow 0 < |a| < \sqrt{2}$ Khi đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{na}{(1-a^2)^n}\right|$ PK nên chuỗi đã cho PK (Theo D'Alambert)

$\frac{1}{|1-a^2|}=1 \Leftrightarrow |a|=\sqrt{2}$ Khi đó chuỗi đã cho có dạng: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n.(\pm\sqrt{2}).n$ PK

Vậy chuỗi đã cho HT với $|a|>\sqrt{2}$ và PK với $0<|a|\le\sqrt{2}$

6 Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm số sau

$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^n}$

Ta có $\frac{1}{1+x^n}\sim\frac{1}{x^n}$ khi $n\to\infty$. Mà $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}$ HT khi $|x|>1$

⇨ MHT: $x\in\mathbb{R}\setminus[-1,1]$

$b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$

$\frac{x^n}{1+x^{2n}}\sim\frac{x^n}{x^{2n}}=\frac{1}{x^n}$ khi $n\to\infty$

Do đó ta có MHT: $x\in\mathbb{R}\setminus[-1,1]$

$c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{xn^x}$

$\frac{n-1}{xn^x}\sim\frac{n}{xn^x}=\frac{1}{xn^{x-1}}=\frac{1}{x}.\frac{1}{n^{x-1}}$ Mà $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x}\frac{1}{n^{x-1}}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{x-1}}$ HT khi $x-1>1\Leftrightarrow x>2$

⇨ MHT: $x\in(2,+\infty)$

$d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{2^{nx}}$

Ta có $\left|\frac{\cos nx}{2^{nx}}\right|<\frac{1}{2^{nx}}=\frac{1}{(2^x)^n}$ Mà $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2^x)^n}$ HT khi $2^x>1\Leftrightarrow x>0$

⇨ MHT: $x\in(0,+\infty)$

$e)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{1+n^2x}$

Ta có: $\left|\frac{(-1)^{n+1}}{1+n^2x}\right|=\frac{1}{\left|1+n^2x\right|}\sim\frac{1}{n^2|x|}$ Mà $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2|x|}$ HT với mọi $x\neq 0$

⇨ MHT: $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$f)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n\left(x+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{x-e}}$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\ln^n\left(x+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{x-e}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(x+\frac{1}{n}\right)}{(x-e)^{1/2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln x}{(x-e)^{1/2n}}=\ln x>1,(x>e)$$

Chuỗi đã cho PK $\forall x\in(e,+\infty)$

$g)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^\alpha}.\left(\frac{3x-2}{x}\right)^n,\alpha\in\mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{n}{(n+1)^\alpha}.\left(\frac{3x-2}{x}\right)^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3x-2}{x}.\left(\frac{n}{(n+1)^\alpha}\right)^{1/n}\right|=\left|\frac{3x-2}{x}\right|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{(n+1)^\alpha}\right)^{1/n}$$

$$=\left|\frac{3x-2}{x}\right|.e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}(\ln n-\alpha\ln(n+1))\right]}=\left|\frac{3x-2}{x}\right|=k$$

+) $k<1\Leftrightarrow\left|\frac{3x-2}{x}\right|<1\Leftrightarrow\frac{1}{2}<x<1$

+) $k<1\Leftrightarrow\left|\frac{3x-2}{x}\right|=1\Leftrightarrow x=1\vee x=\frac{1}{2}$ Chuỗi trở thành $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^\alpha}$ không hội tụ với mọi α

Do đó ta có MHT: $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$

$h)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(x^n+\frac{1}{2^n x^n}\right)$

Bạn đọc có thể cập nhật trên nhóm "BK – Đại Cương Môn Phái" trên Facebook.

$i)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{x^{n^n}}$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{x^{n^n}}\right|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x|^{n-1}}=k$$

$+|x|>1$: k = 0 => Chuỗi HT

$+|x|=1\ \ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{x^{n^n}}=\sum_{n=1}^{\infty}1$: Phân kì

$+|x|<1$: $k=\infty$ Chuỗi PK

⇨ MHT: $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

$k)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+1)^5}.(x+2)^{1-2n}$

$$k=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+3).(x+2)^{-1-2n}}{(n+2)^5}.\frac{(n+1)^5}{(2n+1)(x+2)^{1-2n}}\right|=...=\frac{1}{(x+2)^2}$$

+) $k<1\Leftrightarrow\frac{1}{(x+2)^2}<1\Leftrightarrow x>-1\vee x<-3$

+) $k=1\Leftrightarrow\frac{1}{(x+2)^2}=1\Leftrightarrow x=-1\vee x=-3$ Chuỗi trở thành $\pm\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)}{(n+1)^5}$ là chuỗi HT

Do đó ta có MHT: $x\in(-\infty,-3]\cup[-1,+\infty)$

7 Dùng tiêu chuẩn Weiertrass, chứng minh các chuỗi sau hội tụ đều trên tập tương ứng

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x^2)^n}$ trên R

$1+x^2\ge 2|x|\Rightarrow\frac{|x|}{1+x^2}\le\frac{1}{2}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^n$ trên $[-1;1]$

$\left|\frac{2x+1}{x+2}\right|=\left|1+\frac{x-1}{x+2}\right|\le 1\ \ \forall x\in[-1;1]$

$$\Rightarrow \left|\frac{x^n}{(1+x^2)^n}\right| = \left(\frac{|x|}{1+x^2}\right)^n \le \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$$

Mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ HT nên ta có đpcm.

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{2^{n-1}} \cdot \left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^n\right| \le \frac{1}{2^{n-1}}$$

Mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ HT nên ta có đpcm.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}}$ trên $[0;+\infty)$

Ta có: $\sqrt{1+nx} \ge 1 \ \forall x \ge 0$

⇨ $\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}} \le \frac{1}{2^{n-1}}$

Mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ HT nên ta có đpcm.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2x^2}}{n^2}$ trên R

$$\frac{e^{-n^2x^2}}{n^2} = \frac{1}{n^2.e^{n^2x^2}} \le \frac{1}{n^2}, (e^{n^2x^2} \ge 1)$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ HT nên ta có đpcm

8 Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm số

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$

Đặt y = x – 2

Chuỗi đã cho trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y^n$, $a_n = \frac{1}{n^2}$

Ta có Bán kính hội tụ $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} : \frac{1}{(n+1)^2}\right) = 1$

Do đó chuỗi HT với $|y| < 1$ và PK với $|y| > 1$

+ Tại y = 1, Chuỗi trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ HT

+ Tại y = -1, Chuỗi trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ HT

MHT: $|y| \le 1 \Leftrightarrow |x-2| \le 1 \Leftrightarrow 1 \le x \le 3$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(x-1)^n}$

Đặt $y = \frac{1}{x-1}$ khi đó chuỗi trở thành chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n^2}$

MHT: $|y| \le 1 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x-1}\right| \le 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty;0] \cup [2;+\infty)$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n+5}}{n^2+4}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(\mathrm{x}-3)^{2n+7}}{(n+1)^2+4}\cdot\frac{n^2+4}{(x-3)^{2n+5}}\right| = (x-3)^2$$

Do đó chuỗi đã cho HT khi: $(x-3)^2 < 1 \Leftrightarrow 2 < x < 4$

Dễ thấy tại x=2; x=4 chuỗi cũng HT

MHT: $x \in [2;4]$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^{2n}}{n.2^n}$

Đặt $y = (2x-1)^2$ => Chuỗi trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n.2^n}$

Bán kính hội tụ R = $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n.2^n} : \frac{1}{(n+1).2^{n+1}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{n} = 2$

+ Tại y = 2 Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n.2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ PK

+ Tại y = - 2 Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n.2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ HT

Do đó chuỗi đã cho HT với $-2 \le y < 2$ => MHT: $x \in \left[\frac{1-\sqrt{2}}{2}; \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} \left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^n$

Đặt $y = \frac{2x-1}{x+1}$. Chuỗi đã cho trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} y^n$

Bán kính hội tụ R = $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2^{n-1}} : \frac{n+1}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2$

Tại y = 2 Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} 2n$ PK

Tại y = - 2 Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} (-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2n$ PK

Do đó chuỗi đã cho HT với $|y| < 2$ => MHT: $x \in (-1; +\infty)$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n+1}$

Đặt y = x+1

Chuỗi HT với $|y| < 1$ => MHT: $x \in (-2; 0)$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{2n.4^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(x+5)^{2n+1}}{(2n+2).4^{n+1}} : \frac{(x+5)^{2n-1}}{2n.4^n}\right] = \frac{(x+5)^2}{4}$$

Do đó chuỗi đã cho HT khi: $\frac{(x+5)^2}{4} < 1 \Leftrightarrow -7 < x < -3$

Tại x= - 3 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}}{2n.4^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n}$ là chuỗi PK

Tại x = - 7 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{2n-1}}{2n.4^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{4n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{4n}$ PK

MHT: $x \in (-7;-3)$

h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}.(2n-1)^{2n}.(x-1)^n}{(3n-2)^{2n}}$

Đặt y = x – 1

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n-1)^{2n}}{(3n-2)^{2n}} : \frac{(2n+1)^{2n+2}}{(3n+1)^{2n+2}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{(3n+1)^2}{(2n+1)^2} = \frac{9}{4}$$

+) $y = \frac{9}{4}$ Chuỗi trở thành $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}.(2n-1)^{2n}.\left(\frac{9}{4}\right)^n}{(3n-2)^{2n}}$ PK

$$\left(\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}.(2n-1)^{2n}}{(3n-2)^{2n}}.\left(\frac{9}{4}\right)^n\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{9}{4}.\frac{(2n-1)^2}{(3n-2)^2}\right)^n \overset{(L)}{=} ... = e^{1/3} \neq 0\right)$$

+) $y = -\frac{9}{4}$ tương tự, chuỗi PK

Do đó chuỗi chuỗi đã cho HT với $|y| < \frac{9}{4}$ => MHT: $x \in \left(\frac{-5}{4};\frac{13}{4}\right)$

i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}(x+3)^n$

Đặt y = x + 3

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!}{n^n}:\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

$y=e$ Chuỗi trở thành: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}e^n$ PK

$y=-e$ Tương tự, chuỗi PK

9 Tính tổng các chuỗi sau

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+5}}{3^{2n}(2n+1)}, x\in(-3;3)$

$$f(x)=x^4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{3^{2n}(2n+1)}$$

Xét hàm:

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{3^{2n}(2n+1)}\Rightarrow g'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{3^{2n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{9}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{x^2}{9}}=\frac{9}{9-x^2}$$

$$\Rightarrow g(x)=\int\frac{9}{9-x^2}dx=\frac{3}{2}\ln\left|\frac{3+x}{3-x}\right|\Rightarrow f(x)=\frac{3}{2}x^4\ln\left|\frac{3+x}{3-x}\right|$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1).3^{n-1}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1).3^{n-1}}=\sqrt{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1).(\sqrt{3})^{2n-1}}$$

Đặt $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$ và xét $f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}.t^{2n-1}}{(2n-1)}$

⇨ $f'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}.t^{2n-2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-t^2)^{n-1}=\frac{1}{1+t^2}$

⇨ $f(t)=\int\frac{dt}{1+t^2}=\arctan t$

⇨ $f(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$

⇨ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1).3^{n-1}} = \sqrt{3}f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}\pi}{6}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}, x\in(-1;1)$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}, x\in(-1;1)$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(2n+2)\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$$

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\frac{x^{2n}}{(2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$$

$$f'(x) - f'(0) = \int_0^x f''(t)dt == \int_0^x\frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\left[\ln(1-\text{t}) - \ln(1+t)\right]$$

$$=> f'(x) = \frac{1}{2}\left[\ln(1-x) - \ln(1+x)\right] \text{ (vì } f'(0)=0\text{)}$$

$$\Rightarrow f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^x\left[\ln(1-\text{t}) - \ln(1+t)\right]dt = (x-1)\ln(1-x) - (x+1)\ln(1+x)$$

$$\Rightarrow f(x) = (x-1)\ln(1-x) - (x+1)\ln(1+x) \quad \text{(vì } f(0)=0\text{)}$$

Cách khác: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{2n+1} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{2n+2}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+2n}{n^2+n}\right)x^n, x\in(-1;1)$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+2n}{n^2+n}\right)x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$$

+) Xét hàm: $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} \Rightarrow g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1} = \frac{1}{1-x} \Rightarrow g(x) = \int\frac{dx}{1-x} = -\ln(1-x)$

+) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$ Xét tiếp: $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} \Rightarrow h'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}x^n = \frac{x}{1-x}$

$$\Rightarrow h(x) = \int \frac{xdx}{1-x} = -\ln(1-x) - x$$

$$\Rightarrow f(x) = -\ln(1-x) + \frac{1}{x}(-\ln(1-x) - x) = -\frac{x+1}{x}\ln(1-x) - 1$$

10 Khai triển thành chuỗi Maclaurin

a) $f(x) = \dfrac{x^3 + x + 1}{x^2 - 4x + 3}$

$$f(x) = \frac{x^3 + x + 1}{x^2 - 4x + 3} = x + 4 + \frac{3}{2}\frac{1}{1-x} - \frac{31}{6}\frac{1}{1-\frac{x}{3}}$$

$$\Rightarrow f(x) = 4 + x + \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty} x^n - \frac{31}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n} \quad (-1 < x < 1)$$

b) $f(x) = \sin 3x + x\cos 3x$

Ta có:

+) $\sin 3x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$ +) $\cos 3x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(3x)^{2n}}{2n!}$

$$\Rightarrow f(x) = \sin 3x + x\cos 3x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!} + x\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(3x)^{2n}}{2n!}$$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{2}(1 - \frac{x^2}{4})^{-1/2} = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{16} - \frac{3x^4}{128.2!} + ... + (-1)^{n-1}\frac{1.3.5...(2n-1).x^{2n}}{n!.2^{3n+1}}$$

d) $f(x) = \ln(1 + x - 2x^2)$

$$\ln(1 + x - 2x^2) = \ln(1 - x) + \ln(1 + 2x)$$

Ta lại có: $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$

Do đó: $\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-x)^n}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$

$\ln(1+2x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2x)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n x^n}{n}$

$\Rightarrow f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$

11

a) Khai triển $f(x)=\sqrt{x}$ thành chuỗi lũy thừa của x – 4

Ta có $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(4)}{n!}(x-4)^n=f(4)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(4)}{n!}(x-4)^n$

$f(4)=2$

$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-1/2}$ => $f'(4)=\frac{1}{4}$

$f''(x)=\frac{1}{2}.\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-3/2}=-\frac{1}{4}x^{-3/2}$ => $f''(4)=-\frac{1}{32}$

$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n+1}.1.3.5...(2n-3)}{2^n}x^{\frac{1-2n}{2}}\Rightarrow f^{(n)}(4)=\frac{(-1)^{n+1}.(2n-3)!!}{2^{3n-1}}$

⇨ $f(x)=2+\frac{1}{2^2}(x-4)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n-3)!!}{2^{3n-1}.n!}(x-4)^n$

b) Khai triển $f(x)=\sin\frac{\pi x}{3}$ thành chuỗi lũy thừa của x – 1

$f(1)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$f^{(n)}(x)=\left(\frac{\pi}{3}\right)^n\sin\left(\frac{\pi x}{3}+n\frac{\pi}{2}\right)$

⇨ $f^{(n)}(1)=\left(\frac{\pi}{3}\right)^n\sin\left(\frac{\pi}{3}+n\frac{\pi}{2}\right)$

⇨ $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\left(\frac{\pi}{3}\right)^n\sin\left(\frac{\pi}{3}+n\frac{\pi}{2}\right)x^{2n-1}$

c) Khai triển $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ thành chuỗi lũy thừa của x + 4

Ta có $f(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$

$f(-4)=\dfrac{1}{6}$

$f^{(n)}(x)=(-1)^n.n!.\left[\dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}-\dfrac{1}{(x+2)^{n+1}}\right]$

⇨ $f^{(n)}(-4)=(-1)^n.n!.\left[\dfrac{1}{(-3)^{n+1}}-\dfrac{1}{(-2)^{n+1}}\right]=(-1)^n n!\left(\dfrac{1}{3^{n+1}}-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$

⇨ $f(x)=\dfrac{1}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{1}{3^{n+1}}-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)(x+4)^n$

d) Khai triển $f(x)=\ln x$ thành chuỗi lũy thừa của $\dfrac{1-x}{1+x}$

Đặt: $t=\dfrac{1-x}{1+x}\quad \Rightarrow x=\dfrac{1-t}{t+1}\quad \Rightarrow f(t)=\ln\dfrac{1-t}{1+t}=\ln(1-t)-\ln(1+t)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{t^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n t^n}{n}$

⇨ $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$

12

a) Khai triển Fourier các hàm số sau

1/ $f(x)=|x|,|x|<1$ chu kì 2.

Ta có $l=1$ và f(x) là hàm chẵn.

Do đó:

$a_0=\dfrac{2}{l}\int_0^l f(x)dx=2\int_0^1|x|\,dx=2\int_0^1 xdx=1$

$a_n=\dfrac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos n\dfrac{\pi}{l}\mathrm{x}\,dx=2\int_0^1 x\cos(\mathrm{n}\,\pi\,\mathrm{x})dx=2\left(\dfrac{x\sin(\mathrm{n}\,\pi\,\mathrm{x})}{\mathrm{n}\,\pi}+\dfrac{\cos(\mathrm{n}\,\pi\,\mathrm{x})}{\mathrm{n}^2\,\pi^2}\right)\Bigg|_0^1$ (TPTP)

$$=\frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)=\left[\begin{array}{l}\frac{-4}{n^2\pi^2},n=2k-1\\0,n=2k\end{array}\right.,k=N^*$$

$$b_n=0$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\frac{\pi}{l}x+b_n\sin n\frac{\pi}{l}x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}$$

2^0/ $f(x)=2x, 0<x<1$ Kéo dài f(x) thành các hàm chu kì 2 và khai triển.

+) Xét $g(x)=|2x|,-1<x<1$ tuần hoàn chu kì 2.

Ta đi khai triển Fourier hàm g(x)

Ta có g(x) chẵn và $l=1$

$$a_0=2\int_0^1 g(x)dx=2\int_0^1 2xdx=2$$

$$a_n=2\int_0^1 g(x)\cos n\pi x\,dx=2\int_0^1 2x\cos n\pi x\,dx=...=\frac{4}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n-1\right]\ \text{(TPTP)}$$

$$b_n=0$$

$$\Rightarrow g(x)=1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}=f(x),(0<x<1)$$

+) Nếu kéo dài f thành hàm lẻ:

Ta xét $h(x)=2x,-1<x<1$

Ta có:

$$a_0=\int_{-1}^1 h(x)dx=\int_{-1}^1 2xdx=0$$

$$b_n=2\int_0^1 h(x)\sin n\pi x\,dx=2\int_0^1 2x\sin n\pi x\,dx=...=\frac{4.(-1)^{n+1}}{n\pi}\ \text{(TPTP)}$$

$$a_n=0$$

$$\Rightarrow h(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\pi x=f(x),(0<x<1)$$

$3^0/$ $f(x) = 10 - x, 5 < x < 15$ chu kì 10

Đặt $t = 10 - x$ khi đó ta có: $f(t) = t$ với $-5 < t < 5$

Ta đi khai triển hàm f(t) với chu kì 10 ,

Lại có l = 5 và f(t) là hàm lẻ.

Do đó : $a_0 = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(t)dt = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} tdt = 0$

$a_n = 0$

$b_n = \frac{2}{5}\int_0^5 f(t)\sin(\text{n}\frac{\pi}{5}t)dt = \frac{2}{5}\int_0^5 t.\sin(\text{n}\frac{\pi}{5}t)dt$ (TPTP)

$$= \frac{2}{5}\left(\frac{-5t}{n\pi}\cos(n\frac{\pi}{5}t) + \frac{25}{n^2\pi^2}\sin(n\frac{\pi}{5}t)\right)\Bigg|_0^5 = \frac{-10\cos n\pi}{n\pi} = \frac{10}{n\pi}.(-1)^{n+1}$$

⇨ $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\frac{\pi}{5}t = \frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\frac{\pi}{5}t$

⇨ $f(x) = \frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\frac{\pi}{5}(10 - x)$

b) $f(x) = x^2$ trên $[-\pi;\pi]$. Hãy khai triển Fourier của hàm f(x) sau đó tính tổng các chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

+) Khai triển

Ta có f(x) là hàm chẵn.

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2dx = \frac{2\pi^2}{3}$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\, dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\sin nx\, dx\right)$$

$$= \frac{-4}{n\pi}\left(\frac{-x}{n}\cos nx\Big|_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos nx dx \right) = \frac{-4}{n\pi}\left(\frac{-\pi}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^\pi \right) = \frac{4}{n^2}(-1)^n$$

$b_n = 0$

⇨ $f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} . \frac{(-1)^n}{n^2} cosnx$

+) Tính giá trị của chuỗi:

Ta có $0 = f(0) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} . \frac{(-1)^n}{n^2}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} . \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$

Lại có: $\pi^2 = f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} . \frac{(-1)^n}{n^2} cosn\pi = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} . \frac{1}{n^2}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$