Nhập môn Kỹ thuật Truyền thông

Bài 4: Lý thuyết ra quyết định (Decision Theory)

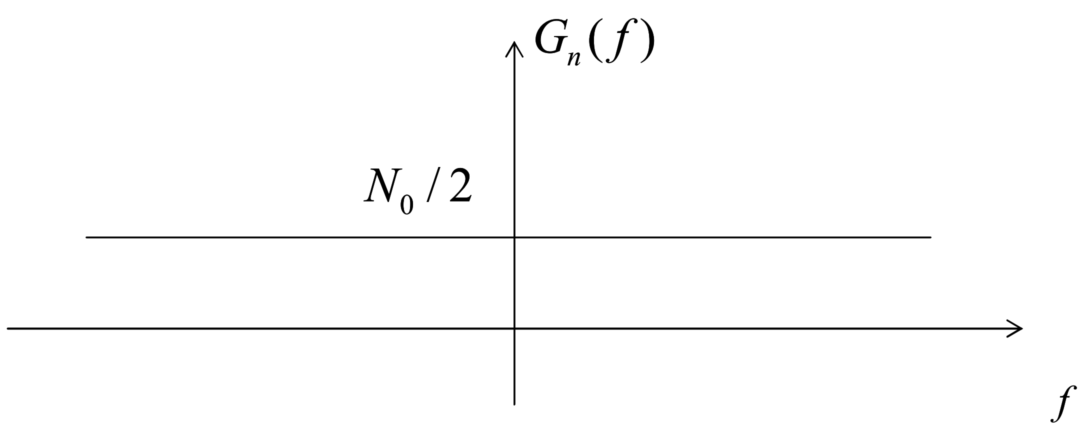
4.2 Các tiêu chuẩn MAP và ML

PGS. Tạ Hải Tùng

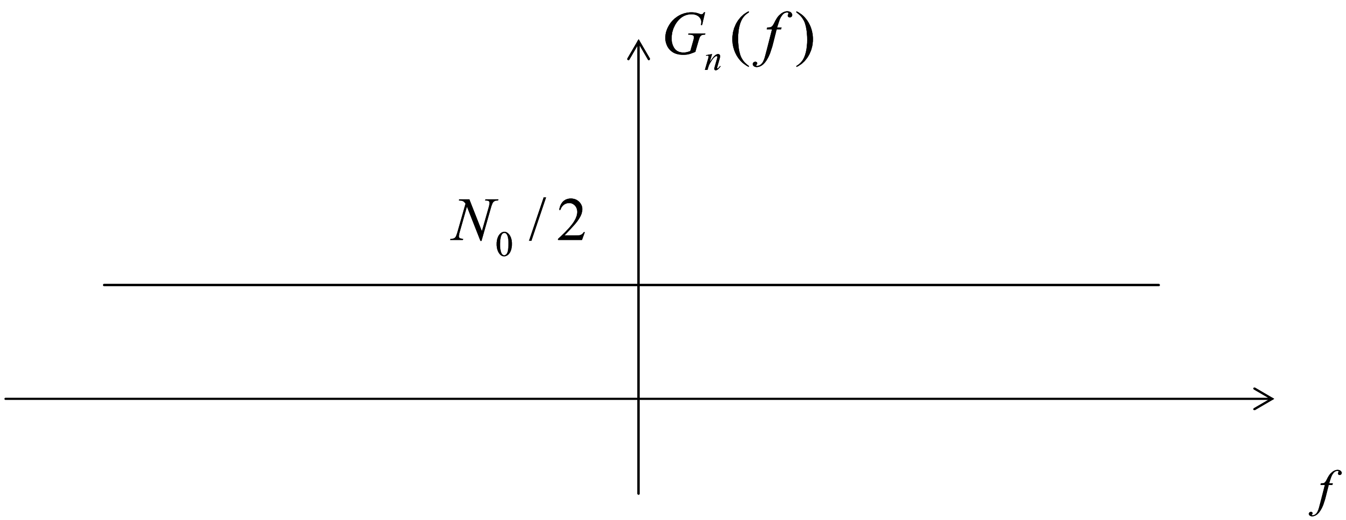
Mô hình kênh truyền

Tạp âm trắng Gauss $n(t)$

- **Tiến trình ngẫu nhiên «ergodic»**
- **Mỗi biến ngẫu nhiên là một biến ngẫu nhiên Gauss với giá trị TB bằng 0**
- **Mật độ phổ là hằng số** $G_n(f)=N_0/2$

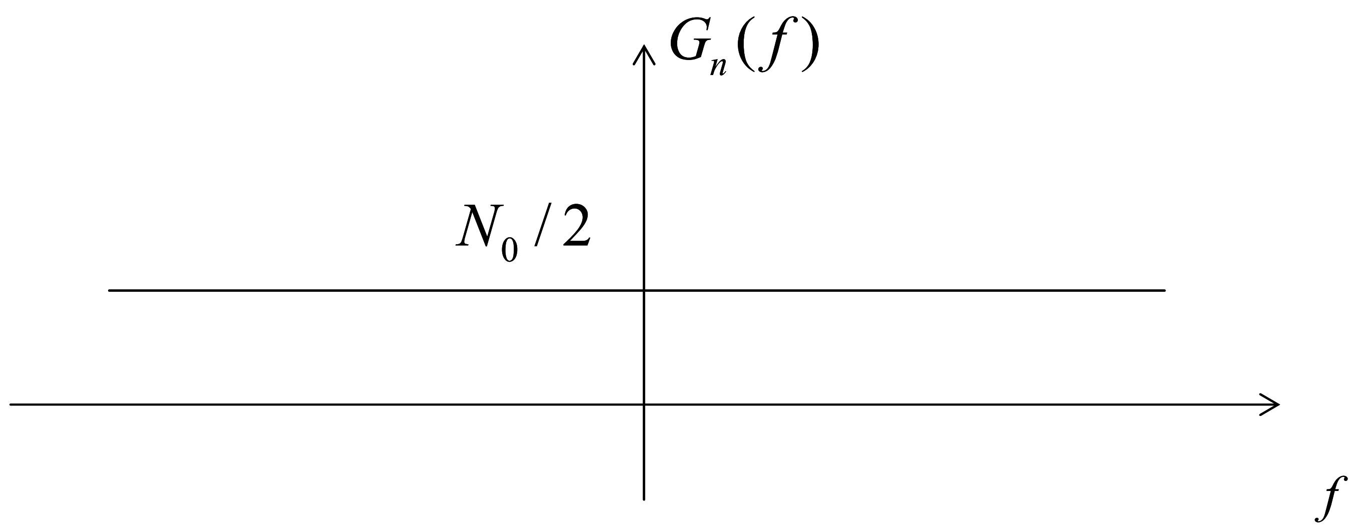


AWGN



$$G_n(f) = N_0/2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad R_n(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

AWGN



$$R_n(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau) \quad \Leftrightarrow \quad E\left[n(t_1)n(t_1+\tau)\right] = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

n(t) là một tiến trình «ergodic»

(thuộc tính thời gian = thuộc tính thống kê)

AWGN

Xem xét hai thời điểm t_1 và t_2
Có tương ứng hai biến ngẫu nhiên

$$t_1 \longrightarrow n(t_1)$$

$$t_2 \longrightarrow n(t_2)$$

Là biến ngẫu nhiên Gauss với tính chất

$$E[n(t_1)n(t_2)] = \frac{N_0}{2}\delta(t_1 - t_2)$$

Độc lập thống kê (Statistically independent)

Vấn đề tại bộ thu

$$\underline{u}_T \longrightarrow s(t) \longrightarrow r(t) = s(t) + n(t)$$

Vấn đề: $\boxed{\text{cho } r(t) \rightarrow \text{khôi phục } s(t)}$

Chia $r(t)$ thành các đoạn tương ứng với khoảng thời gian T:

$$r(t) = (\underbrace{r[0](t)}_{T} \;|\; \underbrace{r[1](t)}_{T} \;|\; \ldots \;|\; \underbrace{r[n](t)}_{T} \;|\; \ldots$$

Câu hỏi: liệu có thể phân tích một cách độc lập tín hiệu nhận được trong một khoảng thời gian bất kỳ?

$$r(t) = (\underbrace{r[0](t)}_{T} \mid \underbrace{r[1](t)}_{T} \mid \ldots \mid \underbrace{r[n](t)}_{T} \mid \ldots$$

$$s(t) = (s[0](t) \mid s[1](t) \mid \ldots \mid s[n](t) \mid \ldots$$

$$\mathrm{n}(t) = (\mathrm{n}[0](t) \mid \mathrm{n}[1](t) \mid \ldots \mid \mathrm{n}[n](t) \mid \ldots$$

Ta có:

$$r(t) = s(t) + n(t)$$

Xem xét khoảng thời gian thứ *n:* $\boxed{nT \le t < (n+1)T}$

$$r[n](t) = s[n](t) + \mathrm{n}[n](t)$$

Mỗi *r[n](t)* phụ thuộc hoàn toàn vào:

- Tín hiệu đã được truyền đi: *s[n](t)*
- Tạp âm: $\mathrm{n}[n](t)$
  là các biến ngẫu nhiên tồn tại trong khoảng thời gian:
  $$nT \le t < (n+1)T$$

$$s(t) = (\underbrace{s[0](t)}_{T} \mid \underbrace{s[1](t)}_{T} \mid \ldots \mid \underbrace{s[m](t)}_{T} \mid \ldots\ldots \mid \underbrace{s[n](t)}_{T} \mid \ldots$$

Mỗi tín hiệu $s[n](t)$

- tồn tại trong khoảng thời gian T

- là độc lập thống kê với các tín hiệu ở các khoảng thời gian khác $s[m](t)$, $m \neq n$

→ $\boxed{r[n](t) \text{ là độc lập với } s[m](t),\ m \neq n}$

$$\mathrm{n}(t) = (\underbrace{\mathrm{n}[0](t)}_{T} \,|\, \underbrace{\mathrm{n}[1](t)}_{T} \,|\, \ldots \,|\, \underbrace{\mathrm{n}[m](t)}_{T} \,|\, \ldots\ldots \,|\, \underbrace{\mathrm{n}[n](t)}_{T} \,|\, \ldots$$

Mỗi tạp âm $\mathrm{n}(t_i)$ cũng độc lập thống kê

→ $\boxed{r[n](t) \text{ độc lập với } n[m](t),\ m \neq n}$

Vấn đề tại bộ thu

Xem xét khoảng thời gian n: $nT \le t < (n+1)T$

Tín hiệu nhận được

$$r[n](t) = s[n](t) + \mathrm{n}[n](t)$$

<u>Chỉ</u> phụ thuộc vào:

- Tín hiệu đã truyền *s[n](t)*
- Tạp âm $\mathrm{n}[n](t)$ trong khoảng thời gian $nT \le t < (n+1)T$

Mỗi khoảng thời gian có thể được phân tích độc lập

⇓

KHÔNG CÓ HIỆN TƯỢNG NHIỄU LIÊN KÝ TỰ
(NO INTERSYMBOL INTERFERENCE (ISI))

$$r(t) = (\underbrace{r[0](t)}_{T} \mid \underbrace{r[1](t)}_{T} \mid \ldots \mid \underbrace{r[n](t)}_{T} \mid \ldots$$

Mỗi khoảng thời gian được phân tích độc lập:

Giả thiết xem xét khoảng thời gian gốc, với $0 \le t < T$

$$r(t) = (\underbrace{r[0](t)}_{T} \mid r[1](t) \mid \ldots \mid r[n](t) \mid \ldots$$

Cùng xem xét khoảng tgian gốc $0 \le t < T$

$$s[0](t) \longrightarrow r[0](t) = s[0](t) + n[0](t)$$

<u>Để đơn giản ta có thể bỏ chỉ số [0]</u>

$$s(t) \longrightarrow r(t) = s(t) + n(t)$$

Vấn đề: cho $r(t)$ → khôi phục $s(t)$

Tín hiệu đã truyền $s(t)$ chắc chắn thuộc không gian tín hiệu S

Vậy tín hiệu nhận được $r(t)$ có thuộc S ?

$$r(t) = s(t) + n(t)$$

Điều này phụ thuộc vào $n(t)$.

Tổng quát, $n(t)$ là một tín hiệu không thuộc S: $n(t) \notin S$

Do vậy, tổng quát $\boxed{r(t) \notin S}$

Các biến ngẫu nhiên n_j

Ta biết rằng $n(t) \notin S$

Chiếu tín hiệu tạp âm này lên cơ sở trực chuẩn.

$$B = \left(b_j(t)\right)_{j=1}^{d}$$

Thành phần chiếu thứ j là:

$$n_j = \int_0^T n(t) b_j(t) dt$$

$$n_j = \int_0^T n(t) b_j(t) dt$$

Ta có thể chứng minh được thành phần n_j này là

các biến ngẫu nhiên Gauss:

- trung bình $E[n_j]=0$
- phương sai $\sigma^2=N_0/2$
- độc lập thống kê

$$n_j = \int_0^T n(t) b_j(t) dt$$

- là các biến ngẫu nhiên Gauss:

Đạt được thông qua biến đổi tuyến tính một tiến trình Gauss

$$n_j = \int_0^T n(t) b_j(t) dt$$

- Trung bình $\qquad E[n_j]=0$

$$E\left[n_j\right] = E\left[\int_0^T n(t) b_j(t) dt\right] = \int_0^T E\left[n(t)\right] b_j(t) dt = 0$$

$$n_j = \int_0^T n(t)b_j(t)dt$$

- phương sai $\sigma^2 = N_0/2$
- độc lập tuyến tính

$$E\left[n_j n_i\right] = E\left[\int_0^T n(t)b_j(t)dt \int_0^T n(x)b_i(x)dx\right] = E\left[\int_0^T \int_0^T n(t)n(x)b_j(t)\,b_i(x)dtdx\right] =$$

$$= \int_0^T \int_0^T E\left[n(t)n(x)\right]b_j(t)\,b_i(x)dtdx = \int_0^T \int_0^T \frac{N_0}{2}\delta(t-x)b_j(t)\,b_i(x)dtdx =$$

$$= \frac{N_0}{2}\int_0^T b_j(t)b_i(t)dt = \begin{cases} N_0/2 \; if \;\; j = i \\ 0 \; if \;\; j \neq i \end{cases}$$

Tạp âm ngẫu nhiên trong không gian tín hiệu

cho $n(t)$ ta có các thành phần chiếu lên hệ cơ sở trực chuẩn:

$$n_j = \int_0^T n(t) b_j(t) dt$$

Gọi

$$\boxed{n_S(t) = \sum_j n_j b_j(t)}$$

Rõ ràng, $n_S(t) \in S$: là phần tín hiệu của $n(t)$ thuộc S

Tổng quát thì:

$$n(t) \neq n_S(t)$$

Ta có $\boxed{n(t) = n_S(t) + e(t)}$

$e(t)$ = là phần của $n(t)$ không thuộc S

Chọn thời điểm $t = t^*$

⇩

$n_S(t^*)$ và $e(t^*)$
Là độc lập thống kê

Chứng minh

$$E\left[n_S(t^*)e(t^*)\right] = 0 = E\left[n_S(t^*)\right]E\left[e(t^*)\right]$$

$n_S(t^*)$ và $e(t^*)$
Là độc lập thống kê

Phần tạp âm ngoài không gian S là độc lập thống kê

Tín hiệu nhận được trong không gian tín hiệu

Ta đã chứng minh $r(t) \notin S$

Chiếu $r(t)$ lên hệ trực chuẩn cơ sở:

$$B = \left(b_j(t)\right)_{j=1}^{d}$$

Ta có thành phần j là:

$$r_j = \int_0^T r(t) b_j(t) dt$$

Định nghĩa $\boxed{r_S(t) = \sum_j r_j b_j(t)}$ ta có $r_S(t) \in S$

Tổng quát $r(t) \neq r_S(t)$

Nhưng $r(t) = s(t) + n(t) = \underbrace{s(t) + n_S(t)}_{\in S} + \underbrace{e(t)}_{\notin S}$

Do đó $r(t) = r_S(t) + e(t)$ với $r_S(t) = s(t) + n_S(t)$

Vấn đề ra quyết định trong không gian tín hiệu

$P1$

Vấn đề cơ bản ban đầu:

cho $r(t)=s(t)+n(t) \rightarrow$ khôi phục $s(t)$

$P2$

Vấn đề tương đương:

cho $r_S(t) = s(t)+n_S(t) \rightarrow$ khôi phục $s(t)$

Sự khác biệt duy nhất là sự tồn tại của $e(t)$*:*

Thành phần tạp âm không thuộc S*, và nó độc lập thống kê với cả* $s(t)$ và $n_S(t)$

- $r_S(t)$ là thống kê đủ để giải vấn đề
- Đủ để giải quyết vấn đề (xác định tín hiệu truyền đi) trong không gian S
- Các chiều không gian khác không chứa thông tin có ích mà chỉ chứa tạp âm mà thôi

Vấn đề ra quyết định: thiết lập vector

$P2$

Vấn đề

cho $r_S(t) = s(t) + n_S(t)$ → khôi phục $s(t)$

Cả 3 tín hiệu đều thuộc S

Biểu diễn vector

$$\boxed{r_S(t) = s(t) + n_S(t)} \Rightarrow \boxed{\underline{r} = \underline{s}_T + \underline{n}}$$

$$\underline{r} = (r_1, \ldots, r_j, \ldots, r_d) \qquad r_j = \int_0^T r(t) b_j(t) dt$$

$$\underline{s_T} = (s_1, \ldots, s_j, \ldots, s_d) \qquad s_j = \int_0^T s(t) b_j(t) dt$$

$$\underline{n} = (n_1, \ldots, n_j, \ldots, n_d) \qquad n_j = \int_0^T n(t) b_j(t) dt$$

Vector nhận được

Vector nhận được $\underline{r}$ (trong không gian S) có biểu diễn:

$$\underline{r} = \underline{s}_T + \underline{n}$$

Với $\underline{s}_T = (s_1, \ldots, s_j, \ldots, s_d) \in M$ là tín hiệu truyền

và $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_j, \ldots, n_d)$ là vector tạp âm trong không gian S

Với mỗi thành phần của vector ta có: $r_j = s_j + n_j$

$$r_j = s_j + n_j$$

Do đó thành phần r_j là

Các biến ngẫu nhiên Gauss với:

- trung bình $E[r_j]=s_j$
- phương sai $\sigma^2[r_j]=N_0/2$
- độc lập thống kê

$$\left(E[r_i r_j] = s_i s_j = E[r_i]E[r_j] \right)$$

$P2$

Vấn đề:

cho $r_S(t) = s(t) + n_S(t) \rightarrow$ khôi phục $s(t)$

⇩

$P3$

Vấn đề:

cho $\underline{r} = \underline{s}_T + \underline{n} \rightarrow$ khôi phục $\underline{s}_T$

Lưu ý quan trọng:

cho $r(t)$, vector $\underline{r}$ được tính toán dễ dàng (do các tín hiệu cơ sở trực chuẩn đã biết)

Tiêu chuẩn quyết định

P3

Vấn đề:

cho $\underline{r}=\underline{s}_{\underline{T}}+\underline{n}$ → khôi hục $\underline{s}_{\underline{T}}$

Tại phía bộ thu, cho $\underline{r}$

Ta muốn chọn ra tín hiệu nhận được $\boxed{\underline{s}_R \in M}$

Mục tiêu: ra quyết định đúng: $\underline{s}_R = \underline{s}_T$

Tuy nhiên không phải lúc nào cũng làm được, do tồn tại của tạp âm.

cho $\underline{r}$ chúng ta muốn tạo ra các tiêu chuẩn ra quyết định để xác định $\underline{s}_R$

Tối thiểu xác suất xảy ra lỗi xác định ký tự (tín hiệu)

$$\boxed{P_S(e) = P(\underline{s}_R \neq \underline{s}_T)}$$

Decision criterion

$\textcircled{P3}$ Vấn đề:

cho $\underline{r}=\underline{s}_T+\underline{n}$ → khôi phục $\underline{s}_T$

Giả sử nhận được $\underline{r}=\underline{\rho} \in R^d$

→ we choose $\underline{s}_R \in M$ sao cho $P_S(e)$ là nhỏ nhất

tiêu chuẩn ra quyết định:

$\textcircled{C1}$

$$\underline{s}_R = \arg\min_{\underline{s}_i \in M} \left[P(\underline{s}_R \neq \underline{s}_T \mid \underline{r} = \underline{\rho}) \right]$$

Dò (detection)

Vấn đề quyết định khả năng nào, trong một tập các khả năng, là đúng.

- Một biến ngẫu nhiên X với m giá trị có thể xảy ra với xác suất tiên nghiệm (a priori) $P(X=x)$
- Ta quan sát bnn Y kết nối với X bởi các xác suất $P(Y=y|X=x)$, được gọi là các **likelihoods**

Khi một thí nghiệm được thực hiện, ta thu được 2 mẫu: $x \in X$ and $y \in Y$.

Người ra quyết định sẽ quan sát giá trị của y chứ không phải x.

Cho y , người quan sát ra quyết định $d(y)=x'$

Quyết định này là đúng nếu $x'=x$

Tiêu chuẩn ra quyết định được chấp nhận để đưa ra quyết định $d(y)$:

Tôi đa quyết định đúng $P(x' = x)$

=

Tối thiểu quyết định sai $P(x' \neq x)$

MAP criterion

Điều này tương đương với tiêu chuẩn:
a MAXIMUM A POSTERIORI (MAP)

$$\boxed{d(y) = \arg\max_{x}\left[P(X = x \mid Y = y)\right]}$$

MAP criterion

Chứng minh:

$$P(X' \neq X) = \sum_x \sum_y P(X' \neq X, X = x, Y = y) =$$

$$= \sum_x \sum_y P(X' \neq X \mid X = x, Y = y) P(X = x, Y = y) =$$

$$= \sum_x \sum_y P(X'(y) \neq x \mid X = x, Y = y) P(X = x \mid Y = y) P(Y = y) =$$

$$= \sum_y \left[\sum_x (1 - \delta_{X'(y),x}) P(X = x \mid Y = y) \right] P(Y = y)$$

$$X'(y) = \arg\min_z \sum_x (1 - \delta_{z,x}) P(X = x \mid Y = y) = \arg\max_x P(X = x \mid Y = y)$$

Tiêu chuẩn ML

Định lý Bayes $$P(X = x \mid Y = y) = \frac{P(Y = y \mid X = x)P(X = x)}{P(Y = y)}$$

$$d(y) = \arg\max_x \left[P(X = x \mid Y = y) \right]$$

$$d(y) = \arg\max_x \left[P(Y = y \mid X = x)P(X = x) \right]$$

Với giả thuyết $$P(X = x) = \frac{1}{m}$$

$$d(y) = \arg\max_x \left[P(Y = y \mid X = x) \right]$$

ML criterion

Tiêu chuẩn MAXIMUM LIKELIHOOD

$$\boxed{d(y) = \arg\max_{x} \left[P(Y = y \mid X = x) \right]}$$

Vấn đề ra quyết định tại bộ thu

BNN X là tín hiệu truyền $\underline{s}_T \in M$

BNN được quan sát Y là tín hiệu nhận $\underline{r} = \underline{s}_T + \underline{n} \in S$

$$\underline{r} = \underline{s}_T + \underline{n}$$

Sự liên kết giữa $\underline{r}$ và $\underline{s}_T$ $\qquad f_{\underline{r}}(\underline{\rho} \mid \underline{s}_T = \underline{s}_i)$

Đây là một hàm mật độ phân bố Gauss trung vị $\underline{s}_i$ với Phương sai $N_0/2$ trên mỗi chiều

Hàm mật độ phân bố Gauss

Ví dụ: *r* là bnn theo phân bố Gauss

- trung bình μ
- phương sai σ^2
- hàm mật độ pbxs:

$$f_r(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(\rho-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Ví dụ: một cặp bnn Gauss r_1 r_2

- TB μ
- phương sai σ^2
- độc lập thống kê
- mật độ xác suất:

$$f_{r_1 r_2}(\rho_1 \ \rho_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-\frac{(\rho_1 - \mu)^2}{2\sigma^2}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-\frac{(\rho_2 - \mu)^2}{2\sigma^2})$$

$$f_{r_1 r_2}(\rho_1 \ \rho_2) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^2} \exp(-\frac{(\rho_1 - \mu)^2 + (\rho_2 - \mu)^2}{2\sigma^2})$$

Gaussian density function

$$f_{\underline{r}}(\underline{\rho} \mid \underline{s}_T = \underline{s}_i)$$

$\underline{r}$ = *mảng các bnn Gauss* d

- TB $\mu = s_{ij}$
- Phương sai $\sigma^2 = N_0/2$
- độc lập thống kê
- hàm mật độ pbxs

$$f_{\underline{r}}(\underline{\rho} \mid \underline{s}_T = \underline{s}_i) = \frac{1}{(\sqrt{\pi N_0})^d} \exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^{d} (\rho_j - s_{ij})^2}{N_0}\right)$$

Tiêu chuẩn ML

$$d(y) = \arg\max_{x} \left[P(Y = y \mid X = x) \right]$$

Trở thành:

$$\boxed{\text{given } \underline{r} = \underline{\rho} \quad \text{choose} \quad \underline{s}_R = d\left(\underline{\rho}\right) = \arg\max_{\underline{s}_i \in M} \left[f_{\underline{r}}(\underline{\rho} \mid \underline{s}_T = \underline{s}_i) \right]}$$

C2

ML criterion

Biểu diễn $f_{\underline{r}}(\underline{\rho} \mid \underline{s}_T = \underline{s}_i)$

$$\underline{s_R} = \arg\max_{\underline{s}_i \in M} \left[\frac{1}{(\sqrt{\pi N_0})^d} \exp\left(- \frac{\sum_{j=1}^{d} (\rho_j - s_{ij})^2}{N_0} \right) \right]$$

$$\underline{s_R} = \arg\min_{\underline{s}_i \in M} \sum_{j=1}^{d} (\rho_j - s_{ij})^2$$

Tiêu chuẩn khoảng cách ngắn nhất

$$\underline{s}_R = \arg\min_{\underline{s}_i \in M} \sum_{j=1}^{d} (\rho_j - s_{ij})^2$$

Thông qua cách tính khoảng cách Euclide giữa các vectors trong R^d:

$$d_E^2(\underline{\rho} - \underline{s}_i) = \sum_{j=1}^{d} (\rho_j - s_{ij})^2$$

Ta có:

$$\underline{s}_R = \arg\min_{\underline{s}_i \in M} d_E^2(\underline{\rho} - \underline{s}_i)$$

Tiêu chuẩn ML tương ứng với tiêu chuẩn khoảng cách ngắn nhất

minimum distance criterion

$$\boxed{\text{given } \underline{r} = \underline{\rho} \quad \text{choose} \quad \underline{s}_R = \arg\min_{\underline{s}_i \in M} d_E^2(\underline{\rho} - \underline{s}_i)} \quad (C3)$$

Vùng Voronoi

$$\boxed{\text{given } \underline{r} = \underline{\rho} \quad \text{choose} \quad \underline{s}_R = \arg\min_{\underline{s}_i \in M} d_E^2(\underline{\rho} - \underline{s}_i)}$$

Đây là tiêu chuẩn liên kết với bất kỳ vector $\underline{\rho} \in R^d$
đại diện tín hiệu nhận được $\underline{s}_R \in M$

⇩

Ta có Vùng (quyết định)
Voronoi (decision) $V(\underline{s}_i)$
= tập hợp tất cả các vector nhận được để xác định lựa chọn

$$\underline{s}_R = \underline{s}_i$$

$$V(\underline{s}_i) = \left\{ \underline{\rho} \in R^d : \underline{s}_R = \underline{s}_i \right\}$$

Vùng Voronoi

Tập hợp của các vector nhận được được dung để đưa ra lựa chọn $\underline{s}_R = \underline{s}_i$

Khi nào ta có $\underline{s}_R = \underline{s}_i$?

Khi $\underline{\rho} \in R^d$ là gần nhất với $\underline{s}$ hơn tất cả các tín hiệu khác trong không gian tín hiệu

$$\boxed{V(\underline{s}_i) = \{\underline{\rho} \in R^d : d_E^2(\underline{\rho}, \underline{s}_i) \leq d_E^2(\underline{\rho}, \underline{s}) \quad \forall \underline{s} \in M\}}$$

Lưu ý:

Nếu ta nhận $\underline{\rho} \in V(\underline{s}_i)$ $\Rightarrow$ Ta chọn $\underline{s_R} = \underline{s}_i$

Tiêu chuẩn khoảng cách gần nhất

$$\boxed{\text{given } \underline{r} = \underline{\rho} \quad \text{choose} \quad \underline{s_R} = \arg\min_{\underline{s}_i \in M} d_E^2(\underline{\rho} - \underline{s}_i)}$$

Có thể được biểu diễn bởi tiêu chuẩn Vùng Voronoi

C4 $\boxed{\text{given } \underline{r} = \underline{\rho} \quad \text{if} \quad \underline{\rho} \in V(\underline{s}) \text{ Chọn } \quad \underline{s_R} = \underline{s}}$