

ĐỀ CƯƠNG BÀI TẬP GIẢI TÍCH 1

Giới hạn dãy số

Tính giới hạn của dãy sau:

$$1. \quad u_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)}$$

$$2. \quad u_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}$$

$$3. \quad x_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} \right)$$

$$4. \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}} \right)$$

$$5. \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

$$6. \quad u_1 = 13; u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n}$$

$$7. \quad u_1 = \frac{1}{2}, u_{n+1} = \frac{4}{3}u_n - u_n^2$$

$$8. \quad u_1 = 1, u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$$

$$9. \quad u_1 = \sqrt[k]{5}, u_{n+1} = \sqrt[k]{5u_n}; k \in \mathbb{N}$$

$$10. \quad u_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$11. \quad x_n = \frac{a^n}{n!}$$

$$12. \quad u_n = \frac{\ln(n^2 + 1 + n)}{\ln(n^{10} + n - 1)}$$

$$13. \quad x_n = 0, \underbrace{11\dots1}_n$$

$$14. \quad x_n = 0, \underbrace{454545\dots45}_{n \text{ 45}}$$

$$15. \quad x_n = \left(\frac{2n-1}{5n+1} \right)^{n^2}$$

$$16. \quad x_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

$$17. \quad x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$$

$$18. \quad x_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$

Chứng minh dãy sau hội tụ

$$19. \quad x_n = \left(1 - \frac{2}{2.3} \right) \cdot \left(1 - \frac{2}{3.4} \right) \dots \left(1 - \frac{2}{(n+1)(n+2)} \right)$$

$$20. x_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$21. x_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$$

$$22. x_n = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \right)$$

$$23. \text{ Cho dãy } x_n \text{ thỏa mãn: } \begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = b \\ x_{n+2} = \frac{x_{n+1} + x_n}{2} \end{cases} . \text{ Tìm } \lim x_n$$

$$24. \text{ Cho dãy } x_n, y_n \text{ thỏa mãn: } \begin{cases} x_1 = a \\ y_1 = b \\ x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \\ y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \end{cases} . \text{ Tìm } \lim x_n, y_n .$$

$$25. \text{ Cho dãy } x_n \text{ thỏa mãn: } \begin{cases} x_1 = a > 0 \\ x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{x_n} \right) \end{cases} . \text{ Tìm } \lim x_n$$

$$26. \text{ Cho dãy } x_n \text{ thỏa mãn: } u_1 = 1, u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} . \text{ Tìm } \lim x_n$$

$$27. \text{ Cho dãy } x_n \text{ thỏa mãn: } u_1 = \frac{1}{2}, u_{n+1} = \frac{4}{3} u_n - u_n^2 . \text{ Tìm } \lim x_n$$

$$28. \text{ Cho dãy } x_n \text{ thỏa mãn: } u_1 = 13; u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n} . \text{ Tìm } \lim x_n$$

$$29. \text{ Cho } \lim x_n = a, \text{ tìm } \lim \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} .$$

$$30. \text{ Cho } \lim x_n = a, x_n > 0, \text{ tìm } \lim \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} .$$

Khái niệm hàm số

Tìm tập xác định

$$31. y = \arcsin \frac{2x}{x+1}$$

$$32. y = \log(1 - 2 \cos x)$$

$$33. y = \arcsin \left(\log \left(\frac{x}{10} \right) \right)$$

34. Cho $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{2-x}$. Tìm TXĐ của $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g$, $f \circ f$.

35. Cho $f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x^2$. Tìm $f(x)$

Hàm nào sau đây là hàm chẵn, hàm lẻ:

36. $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

38. $f(x) = 2^x + 2^{-x}$

37. $f(x) = 3x - x^3$

39. $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$

40. Hàm nào sau đây là hàm tuần hoàn, xác định chu kì cơ sở (nếu có)

41. $f(x) = A \sin kx + B \cos kx$

44. $f(x) = \sin^2 x$

42. $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x$

45. $f(x) = \sin(\sqrt{2}x) + \sin x$

43. $f(x) = \sin x^2$

46. Liệu có hàm tuần hoàn không có chu kì cơ sở hay không?

Giới hạn của hàm số. Hàm liên tục.

Tính giới hạn:

47. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \tan^2 x)^{1/\sin^2(2x)}$

55. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \tanh\left(\frac{1}{x}\right)$

48. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$

56. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + 2 \arctan 3x + 3x^2}{\ln(1 + 3x + \sin^2 x) + xe^x}$

49. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cosh x)^{1/(1-\cos x)}$

57. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+10x} - \sqrt[3]{1+3x}}{\arcsin(3x+x^2) - \sinh(2x+x^3)}$

50. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2+3}{2x^2-1}\right)^{x^2}$

58. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) - \ln \frac{x}{2} \right)$

51. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - x^2}{x - 2}$

59. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos 4x} - \sqrt[3]{\cos 5x}}{1 - \cos 3x}$

52. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^{1/x} + \frac{1}{x}\right)^x$

60. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{\sin^3 x}$

53. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+14}+x}{\sqrt{x^2-2}+x}$

61. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x - 3 \arcsin 4x}{\sin 5x - 6 \arctan 7x}$

54. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+14}+x}{\sqrt{x^2-2}+x}$

Cho $x \rightarrow +\infty$, chứng minh rằng:

62. $2x^3 - 3x^2 + 1 = O(x^3)$

64. $\ln x = o(x^\varepsilon), \varepsilon > 0$

63. $\frac{\arctan x}{1+x^2} = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$

65. $x^p e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Tìm các điểm gián đoạn của hàm số, xác định loại điểm gián đoạn:

$$66. f(x) = \arctan \frac{1}{x^2}$$

$$67. f(x) = \frac{\arcsin x}{\sin 2x}$$

$$68. f(x) = 3^{x/(1-x^2)}$$

$$69. f(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

$$70. f(x) = \frac{|x|}{\arctan x}$$

$$71. y = \frac{x+1}{\arctan(1/x)}$$

$$72. f(x) = \ln \ln(1+x^2)$$

$$73. f(x) = \frac{3^{1/x} + 2^{1/x}}{3^{1/x} - 2^{1/x}}$$

$$74. y = (\sin x) \sin \frac{1}{x}$$

Tìm a để hàm liên tục:

$$75. f(x) = \begin{cases} \frac{(1+x)^n - 1}{x}, & x \neq 0, n \in \mathbb{N} \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

$$76. y = \begin{cases} \frac{\sinh x}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

Chứng minh phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$77. x \cdot 2^x = 1$$

$$78. x \cdot e^x = 2$$

$$79. x^2 \cdot \arctan x = a; a \neq 0$$

$$80. x = \alpha \sin x + 1, 0 < \alpha < 1$$

81. CMR: hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ liên tục trên $(0, 1)$ nhưng không liên tục đều trên khoảng đó.

82. CMR: hàm số $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ liên tục và bị chặn trên $(0, 1)$ nhưng không liên tục đều trên khoảng đó.

83. CMR: hàm số $f(x) = \sin x^2$ liên tục và bị chặn trên $(-\infty, +\infty)$ nhưng không liên tục đều trên khoảng đó.

84. Kiểm tra tính liên tục đều của hàm số sau trên đoạn cho trước: $f(x) = \frac{x}{4-x^2}, -1 \leq x \leq 1$

85. Kiểm tra tính liên tục đều của hàm số sau trên đoạn cho trước: $f(x) = \ln x, 0 < x < 1$

86. Kiểm tra tính liên tục đều của hàm số sau trên đoạn cho trước: $f(x) = \frac{\sin x}{x}, 0 < x < \pi$

87. Chứng minh phương trình sau có vô số nghiệm: $x \sin x = 1/2$

88. Chứng minh phương trình sau có đúng hai nghiệm: $10^{x-1} = x$

89. Chứng minh phương trình sau có đúng hai nghiệm: $2^x = 4x$

Đạo hàm. Vi phân.

$$90. \text{ Tính } f'(0) \text{ biết } f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}: & x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$$

91. Tính $f'(0^+)$; $f'(0^-)$ biết $f(x) = \begin{cases} e^{1/x} : x \neq 0 \\ 0 : x = 0 \end{cases}$

92. Tính $f'(0)$ biết $f(x) = x^2 + 3|x| + 2$

93. Tính $f'(x)$ biết

$$f(x) = (x + 2 \sin x)^{\cot x + \sin^2 x}$$

94. Tính $f'(x)$ biết $f(x) = \frac{1+x^2}{\sqrt{x^3} \sin^7 x}$

95. Tính $f^{(n)}(x)$ biết: $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$

96. Tính $f^{(100)}(x)$ biết: $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$

97. Tính $f^{(n)}(x)$ biết: $f(x) = \sin^2 x$

98. Tính $f^{(100)}(x)$ biết:

$$f(x) = (x^2 + 1) \ln(x + 1)$$

99. $f^{(100)}(0)$; $f^{(101)}(0)$ biết $f(x) = \arctan x$

100. Tính $f^{(n)}(x)$ biết:

$$f(x) = x \ln \frac{3+x}{3-x}$$

101. Tìm: $\frac{d}{d(x^2)} \left(\frac{\sin x}{x} \right)$

103. Tìm: $\frac{d(\arcsin x)}{d(\arccos x)}$

102. Tìm: $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$

104. Tìm: $\frac{d(\tan x)}{d(\cot x)}$

105. CMR: hàm số $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ có 3 điểm uốn thẳng hàng.

106. CMR: $\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2} \right)^n$, $x \neq y > 0$, $n > 1$

107. CMR: $\frac{e^x + e^y}{2} > e^{(x+y)/2}$, $x \neq y$

108. Tìm trên đường cong $y = x^3$ điểm có tiếp tuyến song song với dây cung nối 2 điểm $A(-1, -1)$, $B(2, 8)$.

109. Kiểm tra tính đúng đắn của định lý Rolle đối với hàm số: $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$

110. Giải thích tại sao định lý Cô-si không đúng với 2 hàm số: $f = x^2$, $g = x^3$ trên $[-1, 1]$.

111. CMR: tất cả các nghiệm thực của đa thức $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \{ (x^2 - 1)^n \}$ đều thuộc $(-1, 1)$.

112. Cho đa thức Tre-bur-sep: $L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$. CMR: tất cả các không điểm của đa thức trên đều dương.

113. CMR: tất cả các nghiệm của đa thức $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$ đều là số thực.

114. CMR: $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$

115. CMR: $|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|$

116. CMR: $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}, 0 < b < a$

117. CMR: $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x, x > 0$

118. CMR: $(x^a + y^a)^{1/a} > (x^b + y^b)^{1/b}, x, y > 0, b > a > 0$

119. CMR: $\frac{2}{\pi}x < \sin x < x, 0 < x < \frac{\pi}{2}$

120. CMR: $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}, x > 0$

121. Xác định giá trị trung gian c khi áp dụng định lý Lagrange vào hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & : x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & : x > 1 \end{cases} \text{ trên đoạn } [0, 2].$$

Khai triển hàm số sau thành chuỗi Maclaurin đến cấp n :

122. $f(x) = \frac{x^2 + 3e^x}{e^{2x}}, n = 3$

129. $f(x) = x \cosh 3x, n = 5$

123. $f(x) = \ln \frac{2-3x}{3+2x}, n = 3$

130. $f(x) = x \cdot \cosh^2 x, n = 5$

124. $f(x) = \frac{x-4}{x^2-5x+6}, n = 3$

131. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{2-x^2}}, n = 8$

125. $f(x) = \frac{x^2+5x-5}{x^2+x-2}, n = 3$

132. $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}, n = 9$

126. $f(x) = \ln(x^2+3x+2), n = 4$

133. $f(x) = e^{x \cos x}, n = 4$

127. $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), n = 5$

134. $f(x) = \frac{1}{1-x+x^2-x^3}, n = 5$

128. $f(x) = \frac{x^4+1}{x^2+1}, n = 4$

135. $f(x) = \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}}, n = 6$

Tìm khai triển Taylor tại x_0 đến cấp n

136. $f(x) = (x^2-1)e^{2x}, x_0 = -1, n = 3$

138. $f(x) = \frac{2x+1}{x-1} \ln x, x_0 = 1, n = 4$

137. $f(x) = \ln(2x+1), x_0 = 1/2, n = 3$

$$139. \quad f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x+1}, x_0 = 1, n = 3$$

$$140. \quad f(x) = e^{x^2 + 2x - 1}, x_0 = -1, n = 4$$

$$141. \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}, x_0 = 1, n = 4$$

Ứng dụng đạo hàm, tính giới hạn:

$$143. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{\tan^2 x}$$

$$144. \quad \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\ln(\tan x)}{\cot 2x}$$

$$145. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arcsin x^2}{x \cos x - \sin x}$$

$$146. \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\arctan(x-1)}{\sqrt{x^2 + x - 2}}$$

$$147. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{\arcsin x - \ln(1+x)}$$

$$148. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(1+x)^{1/x}}{e} \right)^{1/x}$$

$$149. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (\arcsin x)^{\tan x}$$

$$150. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/\ln(\sinh x)}$$

$$151. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^x - 1) \ln x$$

$$152. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 + 3^x)^{1/x}$$

$$153. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - x}$$

$$154. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x^3}$$

$$155. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\arcsin x} \right)$$

$$156. \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x \arctan x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

$$157. \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$$

$$158. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{\ln x - x + 1}$$

$$159. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\tanh x} - \frac{1}{\tan x} \right)$$

$$160. \quad \lim_{x \rightarrow \pi/4} (\tan x)^{\tan 2x}$$

$$142. \quad f(x) = \frac{x-2}{\sqrt[3]{x^2 - 4x + 5}}, x_0 = 2, n = 5$$

$$161. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{1/x}$$

$$162. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{1/x^2}$$

$$163. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}$$

$$164. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \arcsin x}{\tan x - \sin x}$$

$$165. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \cos x - \sqrt{1+2x}}{\ln(1+x) - x}$$

$$166. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^x - 1}{x^2}$$

$$167. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\arctan x} + \ln(1-x) - 1}{2 - \sqrt{4+x^3}}$$

$$168. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} + \ln(1-x) - 1}{\arcsin x - \sin x}$$

$$169. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^{\tan x} - \sin^2 x - x}{x + x^3 - \tan x}$$

$$170. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 e^x - \ln(1+x^2) - \arcsin x^3}{x \sin x - x^2}$$

$$171. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x^3} - \cos x^4}{\tan x - x}$$

$$172. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x/(1-x)} - \sinh x - \cos x}{\sqrt[6]{1+x} + \sqrt[6]{1-x} - 2}$$

$$173. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh 2x - (1+3x)^{-1/3} - x}{x^2 / 2 + \ln(1+\tan x) - \arcsin x}$$

$$174. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - \sqrt{1+x^2} - \arcsin x}{\sinh(x-x^2) - \ln \sqrt{1+2x}}$$

$$175. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \arctan x - \tan x}{e^{\sinh x} - (1+2x)^{1/2} - x^2}$$

$$176. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - xe^x}{x\sqrt{1-x^2} - \tan x}$$

$$177. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sin x - x \cos x}$$

$$178. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt{1+2x+2x^2}}{x + \tan x - \sin 2x}$$

$$179. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x\sqrt{1+x} - 1}{\sin x \cosh x - \sinh x}$$

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số cho bởi tham số sau:

$$183. \quad x = t^3 + 2t^2 + t, y = -2 + 3t - t^3$$

$$184. \quad x = t^3 - 3\pi, y = t^3 - 6 \arctan t$$

$$185. \quad x = \frac{t^3}{1+t^2}, y = \frac{t^3 - 2t^2}{1+t^2}$$

$$186. \quad x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$$

$$187. \quad x = \cos t + \ln \tan(t/2), y = \sin t$$

$$188. \quad x = \frac{t^2 + 1}{t}, y = \frac{t^3 + 1}{t^2}$$

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số cho trong tọa độ cực sau:

$$194. \quad r = 2 + \cos \varphi$$

$$195. \quad r = 1 - 2 \cos \varphi$$

$$196. \quad r = \cos 3\varphi$$

$$197. \quad r = 1 + \tan \varphi$$

$$180. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \ln(1 - \sin x) - 1}{\sqrt[3]{8 - x^4} - 2}$$

$$181. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{1+x^3} - \sin 1}{\sqrt[5]{1-2x \ln \cos x} - 1}$$

$$182. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x} - e^{\sqrt[3]{1-4x^2}}}{(1/x) \arcsin 2x - 2 \cosh x^2}$$

$$189. \quad x = \frac{t^2}{t-1}, y = \frac{t^2 - 1}{t}$$

$$190. \quad x = \frac{t^2}{t^2 - 1}, y = \frac{t^2 + 1}{t + 2}$$

$$191. \quad x = \frac{1}{t - t^2}, y = \frac{1}{t - t^3}$$

$$192. \quad x = e^t - t, y = e^{2t} - 2t$$

$$193. \quad x = \frac{e^t}{t}, y = (t-1)^2 e^t$$

$$198. \quad r = \frac{2}{\cos \varphi} - 1$$

$$199. \quad r = \tan 2\varphi$$

$$200. \quad r = 1 + \tan \varphi$$

$$201. \quad r = 2(1 - \cos \varphi)$$

Tích phân.

Tính nguyên hàm bằng công thức cơ bản:

$$202. \quad \int \frac{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}{x\sqrt{x}} dx$$

$$203. \quad \int \frac{4x^2 - 9x + 10}{2x - 1} dx$$

$$204. \quad \int \frac{2x^3 + 5x^2 - 11x + 4}{(x+1)^{30}} dx$$

$$205. \quad \int \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 9}{(x-2)^{15}} dx$$

$$206. \quad \int \frac{dx}{(2x^2 + 5)(x^2 - 3)}$$

$$207. \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

Tính nguyên hàm bằng phương pháp đổi biến

$$208. \quad \int x^4 \sqrt[9]{(2x^5 + 3)^4} dx$$

$$209. \quad \int \frac{x^2 - 3x + 5}{\sqrt[7]{(2x+1)^4}} dx$$

$$210. \quad \int \frac{x}{x + \sqrt{x^2 - 1}} dx$$

$$211. \quad \int \frac{x^3}{x - \sqrt{x^2 - 1}} dx$$

$$212. \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 4}}$$

$$213. \quad \int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx$$

$$214. \quad \int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$$

Tính nguyên hàm bằng phương pháp tích phân từng phần:

$$217. \quad \int 3^x \cos x dx$$

$$218. \quad \int e^{\sqrt{x}} dx$$

$$219. \quad \int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$$

$$220. \quad \int (\arcsin x)^2 dx$$

$$221. \quad \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2}$$

$$215. \quad \int \sqrt{a^2 + x^2} dx$$

$$216. \quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$222. \quad \int \cos^2(\ln x) dx$$

$$223. \quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$224. \quad \int \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx$$

Tính tích phân:

$$225. \quad \int \frac{3x-2}{x^2-4x+5} dx$$

$$226. \quad \int \frac{dx}{x^3+1}$$

$$227. \quad \int \sqrt{x^2+2x+5} dx$$

$$228. \quad \int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$229. \quad \int \frac{3x+5}{(x^2+4x+5)^2} dx$$

$$230. \quad \int \frac{dx}{x(x^7+1)}$$

$$231. \quad \int \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} dx$$

$$232. \quad \int \frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}} dx$$

$$233. \quad \int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}$$

$$234. \quad \int x\sqrt{x^2+x+1} dx$$

$$235. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^2 x}}$$

$$236. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{\tan x}}$$

$$237. \quad \int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$$

$$238. \quad \int \frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x+\cos x} dx$$

$$239. \quad \int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

$$240. \quad \int x \arccos(5x+1) dx$$

$$241. \quad \int \frac{dx}{\cos^n x}$$

$$242. \quad \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$$

Tính giới hạn của các dãy sau:

$$243. \quad \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right)$$

$$244. \quad \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{n}{n}} \right)$$

$$245. \quad \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{2n-1}{n^2}$$

$$246. \quad \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}$$

$$247. \quad \sum_{k=1}^n \frac{2^{k/n}}{n+1/k}$$

$$248. \quad \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$$

Tính các đạo hàm sau:

$$249. \quad \frac{d}{dx} \left(\int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt \right)$$

$$250. \quad \frac{d}{dx} \left(\int_{\sqrt{x}}^1 e^{t^2} dt \right)$$

$$251. \quad \frac{d}{dx} \left(\int_{\sin x}^{\cos x} \cos \pi t^3 dt \right)$$

$$252. \quad \frac{d}{dx} \left(\int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \right)$$

Tính giới hạn:

$$253. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}$$

$$255. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctan t)^2 dt}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$254. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_{\tan x}^{\sin x} \sqrt{\tan t} dt}{\int_0^{\tan x} \sqrt{\sin t} dt}$$

Tính các tích phân sau:

$$256. \quad \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{7}\sqrt{x^2+9}}$$

$$259. \quad \int_0^1 x^{15} \sqrt{1+3x^8} dx$$

$$257. \quad \int_1^e \frac{\cos(\ln x) dx}{x}$$

$$260. \quad \int_0^{\pi/4} \frac{\cos 2x}{(\sin x + \cos x + 2)^3} dx$$

$$258. \quad \int_{-1}^1 |e^x - 1| dx$$

$$261. \quad \int_0^{\pi/6} \frac{\cos x}{6 - 5 \sin x + \sin^2 x} dx$$

$$262. \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{7 + \cos 2x}} dx$$

$$263. \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^6 x}{\sin^6 x + \cos^6 x} dx$$

$$264. \quad \int_0^{\pi/4} \tan^6 x dx$$

$$265. \quad \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^3 x}$$

$$266. \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 1}}$$

$$267. \quad \int_0^{1/3} \cosh^2 3x dx$$

$$268. \quad \int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx$$

$$274. \quad \text{Xác định dấu của tích phân sau: } \int_0^{2\pi} x \sin x dx$$

$$275. \quad \text{Xác định dấu của tích phân sau: } \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

$$276. \quad \text{Xác định dấu của tích phân sau: } \int_{1/2}^1 x^2 \ln x dx$$

$$277. \quad \text{So sánh } \int_0^1 e^{-x} dx, \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

$$278. \quad \text{CMR: } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0$$

$$279. \quad \text{CMR: } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = 0$$

$$269. \quad \int_0^{\pi/2} \cos 2x (\sin^4 x + \cos^4 x) dx$$

$$270. \quad \int_0^1 \frac{\ln(1+x) dx}{(1+x^2)}$$

$$271. \quad \int_{1/2}^2 (1+x-1/x) e^{x+1/x} dx$$

$$272. \quad \int_0^1 \arcsin \sqrt{x} dx$$

$$273. \quad \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$$

Ứng dụng tích phân xác định:

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

$$\begin{array}{ll}
280. & \begin{cases} y = 2 - x^2 \\ y^3 = x^2 \end{cases} & 282. & x^4 + y^4 = x^2 + y^2 \\
281. & \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ x^2 = 12(y - 1) \end{cases} & 283. & r = 2 + \cos \varphi \\
\text{Tính độ dài cung:} & & & \\
284. & \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi & 286. & r = a(1 + \cos \varphi) \\
285. & r = a \sin^3 \frac{\varphi}{3} & 287. & \begin{cases} y = \arcsin(e^{-x}) \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}
\end{array}$$

Tính thể tích vật thể tròn xoay thu được

$$\begin{array}{ll}
288. & \text{Khi quay } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ quanh Ox hoặc Oy.} \\
289. & \text{Khi quay } \begin{cases} y = e^x \\ x = 0, y = 0 \end{cases} \text{ quanh Ox hoặc Oy.} \\
290. & \text{Khi quay } \begin{cases} y = \sin^2 x \\ x = 0, x = \pi \end{cases} \text{ quanh Ox.} \\
291. & \text{Khi quay } r = a \cos^2 \varphi \text{ quanh trục gốc.}
\end{array}$$

Tính diện tích xung quanh của vật thể tròn xoay thu được:

$$\begin{array}{ll}
292. & \text{Khi quay } \begin{cases} y = \tan x \\ x = 0, x = \pi / 4 \end{cases} \text{ quanh Ox.} \\
293. & \text{Khi quay } x^{2/3} + y^{2/3} = 1 \text{ quanh Ox.} \\
294. & \text{Khi quay } x^2 + (y - 2)^2 = 1 \text{ quanh Ox.}
\end{array}$$

Tích phân suy rộng:

Tính tích phân suy rộng:

$$\begin{array}{ll}
295. & \int_4^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} & 299. & \int_2^{+\infty} \frac{(x^2 + 1)}{x(x - 1)^3} dx \\
296. & \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1 + x^5 + x^{10}}} & 300. & \int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x - 1)^2 (x + 1)^3} \\
297. & \int_0^{+\infty} e^{-2x} \cos x dx & 301. & \int_1^{+\infty} \frac{x + 3}{x(x^2 + x + 1)} dx \\
298. & \int_3^{+\infty} \frac{1}{(x + 1)(x - 2)} dx & 302. & \int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}
\end{array}$$

$$303. \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{\cosh^2(x)} dx$$

$$304. \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x^6 + 3)}$$

$$305. \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x + \sqrt{e^x}} dx$$

$$306. \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(\ln^2 x + 1)} dx$$

$$307. \quad \int_0^{+\infty} \frac{2^x}{4^x + 1} dx$$

$$308. \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$$

$$309. \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sinh x}$$

$$310. \quad \int_0^{+\infty} \frac{xdx}{2^x}$$

$$311. \quad \int_2^{+\infty} \frac{xdx}{x^3 - 1}$$

$$312. \quad \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$$

$$313. \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right)^2}$$

$$314. \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^3}$$

Xét sự hội tụ:

$$326. \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{5x + \ln x}}$$

$$327. \quad \int_1^{+\infty} \frac{3xdx}{2x^3 + \sin 3x}$$

$$315. \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(4x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$316. \quad \int_1^{+\infty} \frac{x^2 + 12}{(x^2 + 1)^2} dx$$

$$317. \quad \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1 + x^2)^{3/2}} dx$$

$$318. \quad \int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{x - 2}}$$

$$319. \quad \int_0^1 \frac{dx}{(2 - x)\sqrt{1 - x}}$$

$$320. \quad \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$321. \quad \int_0^1 \frac{(2 - \sqrt[3]{x} - x^3) dx}{\sqrt[5]{x^3}}$$

$$322. \quad \int_{-1}^1 \frac{dx}{(4 - x)\sqrt{1 - x^2}}$$

$$323. \quad \int_{-2}^2 \frac{x^4 dx}{(1 + x^2)\sqrt{4 - x^2}}$$

$$324. \quad \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x - 1}}$$

$$325. \quad \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$328. \quad \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x dx}{2x^2 + 2 \ln x}$$

$$329. \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(3x + 1)\sqrt{x + 1}}$$

$$330. \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(3x+1)\sqrt{x+1}}$$

$$331. \quad \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

$$332. \quad \int_1^{+\infty} \left(e^{1/x^2} - \cos \frac{1}{x} \right) dx$$

$$333. \quad \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$$

$$334. \quad \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3} + \sqrt{x^2+1}}{x^3+3x+1} dx$$

$$335. \quad \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{2+e^x} dx$$

$$336. \quad \int_1^{+\infty} \frac{\pi - 2 \arctan x^3}{e^{3/x} - 1} dx$$

Tìm α để tích phân hội tụ:

$$343. \quad \int_1^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{e^{3/x} - 1}{\alpha} \right) dx$$

$$344. \quad \int_0^{+\infty} \frac{\arctan 3x}{(2+x)^\alpha} dx$$

$$345. \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 2x^\alpha} dx$$

$$346. \quad \int_1^{+\infty} \frac{x}{e^x + x^\alpha} dx$$

$$347. \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x + 2x^\alpha} dx$$

$$353. \quad \text{Tìm } \lim_{x \rightarrow 0} x \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt$$

$$337. \quad \int_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^2 + \ln 2x}$$

$$338. \quad \int_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x}$$

$$339. \quad \int_0^1 \frac{\ln(1 + \sqrt[5]{x^3})}{e^x - 1} dx$$

$$340. \quad \int_0^3 \frac{2x^3 dx}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$341. \quad \int_0^1 \frac{5x^3 + \sqrt{x}}{\tan x - x} dx$$

$$342. \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x dx}{x^2}$$

$$348. \quad \int_0^1 \frac{\ln(1 + \sqrt{x})}{e^{x^\alpha} - 1} dx$$

$$349. \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^4 + \ln(1+x^2))x^{5\alpha}}$$

$$350. \quad \int_1^{+\infty} \frac{(x^3-1)^\alpha}{\sqrt{x^7-x^5+1}} dx$$

$$351. \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x^3 + \sin x)x^\alpha}$$

$$352. \quad \int_0^1 \frac{e^{\alpha x} - \sqrt{1+x}}{\cosh x - \cos x} dx$$

354. Tìm $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4} dt}{x^3}$
355. Nếu tích phân $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ hội tụ, liệu có thể suy ra $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$?
356. Xét tính hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$
357. Xét tính hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ: $\int_0^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$
358. Xét tính hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ: $\int_0^{+\infty} x^2 \cos(e^x) dx$

Không gian Metric.

359. Cho không gian metric (X, d) . Ta định nghĩa: $d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$
- CMR: d_1 là một metric
 - CMR: $x_n \rightarrow x$ theo d_1 khi và chỉ khi $x_n \rightarrow x$ theo d
 - CMR: (X, d) đầy đủ khi và chỉ khi (X, d_1) đầy đủ
2. Cho 2 không gian metric (X_1, d_1) và (X_2, d_2) . Trên $X = X_1 \times X_2$ ta định nghĩa:
- $$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$$
- CMR (X, d) là không gian metric
 - Cho (X_1, d_1) và (X_2, d_2) đầy đủ, cmr (X, d) là không gian metric đầy đủ.
3. Cho $X = C_{[0,1]}$, xét 2 metric $d(x, y) = \sup_{[0,1]} |x(t) - y(t)|$; $d_1(x, y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)| dt$.
- CMR: $x_n \xrightarrow{d} x$ suy ra $x_n \xrightarrow{d_1} x$
 - Điều ngược lại có đúng không?
 - CMR (X, d_1) không đầy đủ.
4. CMR trong không gian metric ta có: $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$
5. CMR trong không gian metric ta có: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
6. Cho $X = C_{[0,1]}$, xét metric $d(x, y) = \sup_{[0,1]} |x(t) - y(t)|$. Giả sử: $x_0 \in C_{[a,b]}$. Xét các tập sau:
- $$M_1 = \{x \in C_{[a,b]} : x(t) > x_0(t), t \in [a, b]\}.$$
- $$M_2 = \{x \in C_{[a,b]} : x(t) \geq x_0(t), t \in [a, b]\}$$

$$M_3 = \{x \in C_{[a,b]} : \exists t \in [a,b] : x(t) \geq x_0(t)\}$$

CMR: M_1 mở, M_2, M_3 đóng M_2, M_3 .

7. Trong $C^1_{[a,b]}$ định nghĩa: $p_1(x) = |x(a)| + \sup_{[a,b]} |x'(t)|$, $p_2(x) = \sup_{[a,b]} |x(t)|$,
 $p_3(x) = \sup_{[a,b]} \{|x(t)| + |x'(t)|\}$.
- a. CMR: p_1, p_2, p_3 là các chuẩn trên $C^1_{[a,b]}$
- b. CMR: p_2, p_3 không tương đương nhau
- c. CMR: p_1, p_3 không tương đương nhau

Hàm nhiều biến

Tìm miền xác định:

8. $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

9. $f(x, y) = e^{\frac{-1}{x^2 + y^2}}$

10. $f(x, y) = \ln(y^2 - 4x + 8)$

11. $f(x, y) = \arcsin \frac{y}{x}$

12. Tìm giới hạn hoặc chứng minh giới hạn không tồn tại:

13. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(x + y \sin \frac{1}{x} \right)$

14. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2}$

15. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2}$

16. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

17. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^6}$

18. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x - y)^2}$

19. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{1 - \sqrt[3]{1 + xy}}$

20. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y}{\sqrt{x^2 + y} + 9 - 3}$

29.

21. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^4}{(x^2 + y^2)^2}$

22. $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 6} + \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt[6]{x^4 + y^4 + 2(1 + x^2y^2)} - \sqrt{x^2 + y^2}}$

23. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy}$

24. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 \ln(x^2 + y^2)$

25. $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{x^2 - 4y^2}{x^2 + 2x - 2xy - 4y}$

26. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 \ln(x^2 + y^2)$

27. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1 + xy)^{1/(x^2 + y^2)}$

28. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\cos \sqrt{x^2 + y^2} \right)^{-1/(x^2 + y^2)}$

Hàm liên tục:

Khảo sát tính liên tục của hàm sau:

$$30. f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$31. f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ a, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$32. z = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x + y}, & x + y \neq 0 \\ 3, & x + y = 0 \end{cases}$$

$$33. u = \begin{cases} \frac{\sin(xyz)}{z}, & z \neq 0 \\ x^2, & z = 0 \end{cases}$$

$$34. z = \begin{cases} \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ m, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Đạo hàm - vi phân:

35. Cho hàm $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^3}$, tính $f'_x(1, 1)$, $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$.

36. Cho $f(x, y) = \int_1^{\sqrt{x^2 + y^2}} e^{t^2} dt$, tính $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$.

37. Cho $f(x, y) = \begin{cases} e^{-1/(x^2 + y^2)}, & \text{neu } x^2 + y^2 > 0 \\ 0, & \text{neu } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$. Tính $f'_x(0, 0)$.

38. CMR hàm $f(x, y) = e^x \sin y$ thỏa mãn $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

39. CMR hàm $u(x, t) = \sin(x - at)$ thỏa mãn $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

40. CMR hàm $u(t, x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/(4a^2 t)}$ thỏa mãn $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

41. Cho $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{neu } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{neu } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$. Tìm $f''_{xx}(0, 0)$.

42. Cho $u(x, y) = (2x + 3y) \ln(x + 2y)$. Tìm $\frac{\partial^{100} f}{\partial x^{100}}(1, 2)$.

43. Cho $f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$. Tìm $f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$. Tìm $df(x, y)$.

44. Cho $f(x, y) = e^{xy}$. Tìm $d^2 f(1, 1)$.

45. Cho $f(x, y) = \frac{y}{x}$. Tìm $d^2 f(1, 1)$.

46. Dùng vi phân cấp 1, tính gần đúng $A = \sqrt{(1.03)^2 + (1.98)^3}$.

47. Tìm f''_{xy} của hàm hợp $f(u, v) = u^2 + 2v$, $u(x, y) = xy^2$, $v(x, y) = x + 3y$.

48. Tìm f''_{xy} của hàm hợp $f(u, v) = e^{uv}$, $u(x, y) = xy + y^2$, $v(x, y) = 2x + y$.
49. Tìm df của hàm $f(x^2 + 2y, e^{xy})$.
50. Tìm d^2f của hàm hợp $f = f(u, v) = 2u + v^2$; $u(x, y) = xy + 2x$; $v(x, y) = x^2 + y^2$.
51. Tìm $y'(x)$ biết $y(x)$ xác định bởi $xy + x^2 + y^2 = e^{xy}$.
52. Tìm $dz(1, 1)$ biết $z = z(x, y)$ xác định bởi $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz + 2y - 3 = 0$, $z(1, 1) = -2$.
53. Tìm z''_{xy} biết $z = z(x, y)$ xác định bởi $x^2 + y^2 + z^2 = e^{x+y+z}$.
54. Tìm $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ biết $z = z(x, y)$ xác định bởi $xyz + x^2 + y^2 = 2z - 3$.
55. Tìm đạo hàm của $f(x, y) = xy^2 - 3x^4y^5$ tại điểm $M(1, 1)$ theo hướng $\vec{u} = (1, -2)$.
56. Tìm đạo hàm của $f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$ tại $M(1, 2)$ theo hướng của vectơ tạo với chiều dương Ox một góc 30° .
57. Tìm đạo hàm của hàm $f(x, y, z) = x^3 + 2xy^2 + 3yz^2$ tại $M(3, 3, 1)$ theo hướng của vectơ $(2, 1, 2)$.
58. Tìm đạo hàm của hàm $f(x, y, z) = x^2 - 3yz + 4$ tại $M(1, 2, -1)$ theo hướng của vectơ tạo với các trục tọa độ những góc bằng nhau.
59. Cho $f(x, y) = \ln(xyz)$ và điểm $M(1, -2, -3)$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của đạo hàm theo hướng của hàm số tại M.

Công thức Taylor, Maclaurint:

60. Cho hàm $f(x, y) = x^2 + 2xy$ và một điểm $M(1, 2)$. Tìm công thức Taylor của f tại M đến cấp 2.
61. Tìm khai triển Taylor của $f(x, y) = \frac{1}{2x + 3y}$ đến cấp 2 tại $M(1, 2)$.
62. Tìm khai triển Taylor cấp 3 của hàm số $f(x, y) = \ln(x + y)$ tại $M(1, 1)$.
63. Tìm khai triển Maclaurint của hàm số $f(x, y) = e^x \sin y$ đến cấp 3.

Cực trị.

Tìm cực trị của hàm

64. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$
65. $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$
66. $f(x, y) = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$
67. $f(x, y) = 1 - \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$
68. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 32 \ln(xy)$
69. $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$