Chương 4: Ánh xạ tuyến tính

Giảng viên: PGS. TS. Nguyễn Duy Tân
email: tan.nguyenduy@hust.edu.vn

Viện Toán ƯDTH, HUST

Tháng 10, 2021

Nội dung

4.1.1. Định nghĩa, ví dụ

Định nghĩa

Cho hai không gian véc tơ V và W trên K. Một ánh xạ $f\colon V \to W$ được gọi là *ánh xạ tuyến tính* nếu nó thỏa mãn hai tính chất:

a) $f(u+v) = f(u) + f(v), \quad , \forall u, v \in V;$

b) $f(cv) = cf(v), \quad \forall c \in K, \forall v \in V.$

Ánh xạ tuyến tính đi từ V vào chính nó được gọi là biến đổi tuyến tính (hoặc toán tử tuyến tính).

Ví dụ: Các ánh xạ sau là ánh xạ tuyến tính:

1. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - 2x_2 + x_3)$.
2. Ánh xạ không $f\colon V \to W$, $f(v) = \mathbf{0}, \quad \forall v \in V$.
3. Ánh xạ đồng nhất $\mathrm{id}_V\colon V \to V$, $\mathrm{id}_V(v) = v$, $\forall v \in V$.
4. Với $a \in K$ cố định $f\colon V \to V$ cho bởi $f(v) = av$.
5. Cho A là ma trận thực cỡ $m \times n$, ánh xạ $f\colon \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$ cho bởi $f(X) = AX$.

Một số tính chất

Cho $f: V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó

- $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$;
- $f(-v) = -f(v), \quad \forall v \in V$;
- $f(c_1 v_1 + \cdots + c_m v_m) = c_1 f(v_1) + \cdots + c_m f(v_m), \quad , \forall c_i \in K, \forall v_i \in V$.

Ví dụ: Giả sử $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ là một ánh xạ tuyến tính mà

$$f(1,0,0) = (1,-1,2), f(0,1,0) = (2,3,1), f(0,0,1) = (-1,2,2).$$

Tính $f(1,-2,3)$.

Giải.

- Đặt $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$, $v = (1,2,3)$. Khi đó $v = e_1 - 2e_2 + 3e_3$.
- $f(v) = f(e_1 - 2e_2 + 3e_3) = f(e_1) - 2f(e_2) + f(e_3) =$ $(1,-1,2) - 2(2,3,1) + 3(-1,2,2) = (-6,-1,6)$.

Định lý

Cho V và W là hai KGVT trên K. Cho $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ là một cơ sở của V, và $\{w_1, \ldots, w_n\}$ là một hệ véctơ (tùy ý) của W. Khi đó tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính $f\colon V \to W$ sao cho

$$f(v_1) = w_1, f(v_2) = w_2, \ldots, f(v_n) = w_n.$$

Ánh xạ tuyến tính được xác định duy nhất bởi ảnh của nó trên một cơ sở của V.

Phép toán

Định nghĩa

Cho f và g là hai ánh xạ tuyến tính từ V vào W.

- Tổng của hai AXTT f và g là ánh xạ $f+g\colon V \to W$ xác định bởi

$$(f+g)(v) = f(v) + g(v), \quad v \in V.$$

- Tích của một số $a \in K$ với AXTT f là ánh xạ $af\colon V \to W$ xác định bởi

$$(af)(v) = af(v), \quad v \in V.$$

Tính chất

Với ký hiệu như trên, $f+g$ và af là các ánh xạ tuyến tính.

Mệnh đề

Cho $f\colon V \to W$ và $g\colon W \to U$ là hai ánh xạ tuyến tính. Khi đó ánh xạ $g \circ f\colon V \to U$ cũng là ánh xạ tuyến tính

4.1.2. Hạt nhân và ảnh

Định nghĩa

Cho $f\colon V \to W$ là một AXTT.

- Tập hợp $\ker(f) = \{v \in V \mid f(v) = \mathbf{0}\}$ được gọi là hạt nhân của f.
- Tập hợp $\mathrm{im}(f) = \{f(v) \mid v \in V\}$ được gọi là ảnh của f.

Như vậy $\ker(f) = f^{-1}(\{\mathbf{0}\})$ và $\mathrm{im}(f) = f(V)$.

Tính chất

- $\ker(f)$ là một không gian véc tơ con của V.
- $\mathrm{im}(f)$ là một không gian véc tơ con của W.

Định lý (về số chiều của hạt nhân và ảnh)

Cho $f\colon V \to W$ là ánh xạ tuyến tính và $\dim V = n$. Khi đó

$$\dim(\mathrm{im} f) + \dim(\ker f) = n.$$

Mệnh đề (Cách tìm ảnh)

Cho $f\colon V \to W$ là một AXTT. Giả sử $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ là một hệ sinh của V. Khi đó $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ là một hệ sinh của $\mathrm{im} f$.

Như vậy, S là một hệ sinh của $V \Rightarrow f(S)$ một hệ sinh của $f(V) = \mathrm{im} f$.
Nói riêng, S là một cơ sở của $V \Rightarrow f(S)$ một hệ sinh của $f(V) = \mathrm{im} f$.

Định nghĩa

Cho $f\colon V \to W$ là AXTT, *hạng* của f, ký hiệu $\mathrm{rank}(f)$ được định nghĩa là số chiều của không gian ảnh của f:

$$\mathrm{rank}(f) = \dim(\mathrm{im}(f)).$$

Ví dụ

Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$,
$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4, 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4, x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4)$.
Tìm một cơ sở của $\ker(f)$ và một cơ sở của $\mathrm{im}(f)$.

- $v = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \ker(f) \Leftrightarrow f(v) = \mathbf{0}$
  $\Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0 \end{cases}.$
- Giải hệ thuần nhất: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to \dots \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$
- Hệ vô số nghiệm: $x_1 = a - 5b$, $x_2 = a$, $x_3 = 2b$, $x_4 = b$. Và $v = (a - 5b, a, 2b, b) = (a, a, 0, 0) + (-5b, 0, 2b, b) = a(1, 1, 0, 0) + b(-5, 0, 2, 1)$.
- $S = \{(1, 1, 0, 0), (-5, 0, 1, 1)\}$ là một hệ sinh của $\ker(f)$.
- Kiểm tra được S là ĐLTT. Do vậy S là một cơ sở của $\ker(f)$.

- Gọi $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^4$.
- $\mathrm{im}(f) = \mathrm{span}\{f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)\} = \mathrm{span}\{(1,2,1), (-1,-2,-1), (2,3,3), (1,4,3)\}$.
- $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \to \cdots \to B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
- Một cơ sở của $\mathrm{im}(f)$ là $\{(1,2,1), (0,-1,-1)\}$.

4.1.3. Đơn cấu, toàn cấu, đẳng cấu

Định nghĩa

Cho $f: V \to W$ là một AXTT.

- f được gọi là một *đơn cấu* nếu f là đơn ánh.
- f được gọi là một *toàn cấu* nếu f là toàn ánh.
- f được gọi là một *đẳng cấu* nếu f là song ánh.

Mệnh đề

Cho $f: V \to W$ là một AXTT.

- f là đơn cấu $\Leftrightarrow \ker(f) = \{\mathbf{0}\}$.
- f là toàn cấu $\Leftrightarrow \mathrm{rank}(f) = \dim(W)$. [Nhắc lại $\mathrm{rank}(f) = \dim(\mathrm{im}(f))$.]
- Nếu f là đẳng cấu thì ánh xạ ngược $f^{-1}: W \to V$ cũng là đẳng cấu.

Định lý

Cho $f: V \to W$ là AXTT. Giả sử $\dim V = \dim W = n$. Khi đó ba khẳng định sau là tương đương.

- f là đơn cấu.
- f là toàn cấu.
- f là đẳng cấu.

Bài tập: (CK20171-Đề3) Cho $P_2[x]$ là tập các đa thức hệ số thức có bậc nhỏ hơn hoặc bằng 2 và ánh xạ $\varphi: P_2[x] \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi
$\varphi(p(x)) = (p(0), p(1), p(-1))$. Hỏi φ có phải là một đẳng cấu không? Giải thích?

Định nghĩa

Ta nói KGVT V *đẳng cấu với* KGVT W nếu tồn tại đẳng cấu $f: V \to W$. Trong trường hợp này ta cũng nói V và W *đẳng cấu với nhau*.

Mệnh đề

Cho V và W là hai KGVT hữu hạn chiều trên K. Khi đó

$$V \text{ và } W \text{ đẳng cấu với nhau} \Leftrightarrow \dim V = \dim W.$$

Hệ quả

Mọi không gian thực số chiều n đều đẳng cấu với $\mathbb{R}^n$.

4.2.1. Ma trận của ánh xạ tuyến tính đối với cặp cơ sở

Bài toán

Cho $f\colon V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính, $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ là một cơ sở của V, $\mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_m\}$ là một cơ sở của W. Ta muốn tìm mối liên hệ giữa $[f(v)]_{\mathcal{B}'}$ và $[v]_{\mathcal{B}}$.

Với mỗi $v_j \in \mathcal{B}$, ta biểu diễn $f(v_j)$ theo cơ sở $\mathcal{B}'$:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= a_{11}w_1 +_{21} w_2 + \cdots + a_{m1}w_m \\ f(v_2) &= a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{m2}w_m \\ &\dots \\ f(v_n) &= a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m. \end{aligned}$$

Tức là

$$[f(v_1)]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, [f(v_2)]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, [f(v_n)]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Định nghĩa

Ma trận $A = [f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = [[f(v_1)]_{\mathcal{B}'}\,[f(v_2)]_{\mathcal{B}'}\cdots[f(v_n)]_{\mathcal{B}'}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$

được gọi là *ma trận của f đối với cặp cở sở $\mathcal{B}$ và $\mathcal{B}'$*.

Định lý (Công thức tọa độ)

$$[f(v)]_{\mathcal{B}'} = A[v]_{\mathcal{B}}, \quad \forall v \in V.$$

Hơn nữa nếu B là ma trận sao cho $[f(v)]_{\mathcal{B}'} = B[v]_{\mathcal{B}}, \forall v \in V$, thì $B = A$.

Mệnh đề

$$\mathrm{rank}(f) = \mathrm{rank}(A).$$

Ví dụ

Cho AXTT $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x, y, z) = (x - y + z, x + 2y - z)$.
Tìm ma trận của f đối với cặp cơ sở chính tắc.

- $f(e_1) = f(1, 0, 0) = (1, 1)$ và $[f(e_1)] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
- $f(e_2) = f(0, 1, 0) = (-1, 2)$ và $[f(e_2)] = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.
- $f(e_3) = f(0, 0, 1) = (1, -1)$ và $[f(e_3)] = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.
- Ma trận của f đối với cặp cơ sở chính tắc là $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Ví dụ

Cho AXTT $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x,y,z) = (x-y+z, x+2y-z)$.
Tìm ma trận của f đối với cặp cơ sở
$\mathcal{B} = \{v_1 = (1,0,0), v_2 = (1,1,0), v_3 = (1,1,1)\}$ và
$\mathcal{B}' = \{w_1 = (1,0), w_2 = (1,1)\}$.

- $f(v_1) = f(1,0,0) = (1,1)$ và $[f(v_1)]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.
- $f(v_2) = f(1,1,0) = (0,3)$ và $[f(v_2)]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}$.
- $f(v_3) = f(1,1,1) = (1,2)$ và $[f(v_3)]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.
- Ma trận của f đối với cặp cơ sở $\mathcal{B}$ và $\mathcal{B}'$ là $\begin{bmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Ví dụ

Cho ánh xạ tuyến tính $f\colon \mathbb{R}^3 \to P_2[x]$ có ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ đối với cặp cơ sở $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$ và $\mathcal{B}' = \{1, 1+x, 1+x^2\}$. Tính $f(2,3,2)$.

- Đặt $v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,1,0), v_3 = (0,1,1)$.
- $[f(v_1)]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow f(v_1) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (1+x) + 2 \cdot (1+x^2) = 4 + x + 2x^2$.
- $[f(v_2)]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow f(v_2) = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (1+x) + 1 \cdot (1+x^2) = 2 - x + x^2$.
- $[f(v_3)]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow f(v_3) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (1+x) + (-1) \cdot (1+x^2) = 2 + 2x - x^2$.
- Ta có $v = v_1 + v_2 + v_3$ và

$$\begin{aligned} f(v) &= f(v_1 + v_2 + v_3) = f(v_1) + f(v_2) + f(v_3) \\ &= (4 + x + 2x^2) + (2 - x + x^2) + (2 + 2x - x^2) = 8 + 2x + 2x^2 \end{aligned}$$

Ví dụ

Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to P_2[x]$ có ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ đối với cặp cơ sở $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$ và $\mathcal{B}' = \{1, 1+x, 1+x^2\}$. Tính $f(2,3,2)$.

- Đặt $v = (2,3,2)$. Ta có $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ và

$$[f(v)]_{\mathcal{B}'} = A[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- $f(v) = 4 \cdot 1 + 2 \cdot (1+x) + 2 \cdot (1+x^2) = 8 + 2x + 2x^2$.

Liên hệ giữa AXTT và ma trận

- Cho $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ là một cơ sở của V, $\dim V = n$.
- Cho $\mathcal{B}' = \{w_1, \ldots, w_m\}$ là một cơ sở của W, $\dim V = m$.

Khi đó

- Với mọi AXTT $f\colon V \to W$, ta có $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ là một ma trận cỡ $m \times n$.
- Ngược lại, cho trước A là ma trận cỡ $m \times n$, khi đó tồn tại và duy nhất AXTT $f\colon V \to W$ sao cho $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = A$.

Như vậy, có một tương ứng 1-1 (song ánh) giữa tập các AXTT từ V vào W và tập các ma trận cỡ $m \times n$.

Phép cộng và phép nhân với một số

- Cho $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ là một cơ sở của V.
- Cho $\mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_m\}$ là một cơ sở của W.
- Giả sử f và g là hai AXTT từ V vào W.
- Gọi A và B lần lượt là ma trận của f và g đối với cặp cơ sở $\mathcal{B}$ và $\mathcal{B}'$.

Khi đó

- $A + B$ là ma trận của $f + g$ là đối với cặp cơ sở $\mathcal{B}$ và $\mathcal{B}'$;
- Với $c \in K$, cA là ma trận của cf là đối với cặp cơ sở $\mathcal{B}$ và $\mathcal{B}'$.

Liên hệ giữa phép hợp thành AXTT và phép nhân ma trận

- Giả sử V, W và U là các KGVT với các cơ sở lần lượt là $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ và $\mathcal{B}''$.
- Cho $f\colon V \to W$ là một AXTT có ma trận A đối với cặp cơ sở $\mathcal{B}$ và $\mathcal{B}'$.
- Cho $g\colon W \to U$ là AXTT có ma trận B đối với cặp cơ sở $\mathcal{B}'$ và $\mathcal{B}''$.
- Khi đó AXTT $g \circ f\colon V \to U$ có ma trận BA đối với cặp cơ sở $\mathcal{B}$ và $\mathcal{B}''$.

Hệ quả

Cho $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Gọi A là ma trận của f đối với cặp cơ sở $\mathcal{B}$ và $\mathcal{B}'$. Hai khẳng định sau là tương đương

- f là đẳng cấu,
- A khả nghịch.

Trong trường hợp này thì A^{-1} là ma trận của f^{-1} đối với cặp cơ sở $\mathcal{B}'$ và $\mathcal{B}$.

4.2.2. Trường hợp riêng: Ma trận của phép biến đối tuyến tính đối với một cơ sở

- Cho $f: V \to V$ là một biến đổi tuyến tính (BĐTT) và $\mathcal{B}$ là một cơ sở của V.
- Khi đó ma trận A của f đối với cặp cơ sở $\mathcal{B}$ và $\mathcal{B}$ được gọi đơn giản là ma trận của f đối với cơ sở $\mathcal{B}$.
- Như vậy nếu $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ thì

$$A = [f]_{\mathcal{B}} = [[f(v_1)]_{\mathcal{B}} \cdots [f(v_n)]_{\mathcal{B}}].$$

Tính chất (công thức tọa độ)

$$[f(v)]_{\mathcal{B}} = A[v]_{\mathcal{B}}, \quad \forall v \in V.$$

Hơn nữa nếu B là ma trận sao cho $[f(v)]_{\mathcal{B}} = B[v]_{\mathcal{B}}, \forall v \in V$, thì $B = A$.

Chuyển cơ sở

- Cho $f: V \to V$ là một BĐTT.
- Gọi A là ma trận của f đối với cơ sở $\mathcal{B}$ của V
- Gọi B là ma trận của f đối với cơ sở $\mathcal{B}'$ của V.
- Gọi P là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$.

Định lý

$$B = P^{-1}AP.$$

Chứng minh: Với mọi $v \in V$, ta có $[f(v)]_{\mathcal{B}} = A[v]_{\mathcal{B}}$, $[f(v)]_{\mathcal{B}'} = B[v]_{\mathcal{B}'}$, $[v]_{\mathcal{B}} = P[v]_{\mathcal{B}'}$. Do vậy

$$[f(v)]_{\mathcal{B}} = A[v]_{B} = AP[v]_{\mathcal{B}'},$$

$$[f(v)]_{\mathcal{B}} = P[f(v)]_{\mathcal{B}'} = PB[v]_{\mathcal{B}'}.$$

Như vậy $AP[v]_{\mathcal{B}} = PB[v]_{\mathcal{B}'}$, với mọi $v \in V$. Điều này suy ra $AP = PB$. Do đó $B = P^{-1}AP$.

Ví dụ

Cho BĐTT $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (2x - y, x + y)$. Tìm ma trận của f đối với cơ sở $\mathcal{B} = \{(1,0),(1,1)\}$.

Cách 1:

- $f(1,0) = (2,1) \Rightarrow [f(1,0)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
- $f(1,1) = (1,2) \Rightarrow [f(1,1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.
- Ma trận của f đối với cơ sở $\mathcal{B}$ là $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Cách 2:

- Gọi A là ma trận của f đối với cơ sở chính tắc $\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
- Gọi P là ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc sang cơ sở $\mathcal{B} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
- Ma trận của f đối với cơ sở $\mathcal{B}$ là

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ví dụ (CK20181-N2)

Cho AXTT $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ thỏa mãn $f(1,1,0) = (3,3,9)$, $f(2,-1,1) = (-1,3,1)$, $f(0,1,1) = (1,1,3)$.

a) Lập ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$. [b)] Xác định $f(3,4,5)$.

c) Xác định số chiều và một cơ sở của $\ker(f)$.

- Đặt $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$.
  [Muốn tính $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$.]
- $f(1,1,0) = f(e_1 + e_2) = f(e_1) + f(e_2) = (3,3,9) = v_1$.
- $f(2,-1,1) = f(2e_1 - e_2 + e_3) = 2f(e_1) - f(e_2) + f(e_3) = (-1,3,1) = v_2$.
- $f(0,1,1) = f(e_2 + e_3) = f(e_2) + f(e_3) = (1,1,3) = v_3$.
- Được hệ $\begin{cases} f(e_1) + f(e_2) & = v_1 \\ 2f(e_1) - f(e_2) + f(e_3) & = v_2 \\ f(e_2) + f(e_3) & = v_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(e_1) & = (1,2,4) \\ f(e_2) & = (2,1,5) \\ f(e_3) & = (-1,0,-2) \end{cases}$
- Ma trận của f đối với cơ sở chính tắc $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$.

Ví dụ (CK20181-N2)

Cho AXTT $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ thỏa mãn $f(1,1,0) = (3,3,9)$, $f(2,-1,1) = (-1,3,1)$, $f(0,1,1) = (1,1,3)$.

a) Lập ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

Cách 2:

- Gọi A là ma trận của f đối với cơ sở chính tắc. Khi đó, với mọi $v \in \mathbb{R}^3$, ta có

$$[f(v)] = A[v].$$

- $A\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\3\\9\end{bmatrix}, \quad A\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\3\\1\end{bmatrix}, \quad A\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}.$
- $A\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\1 & -1 & 1\\0 & 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\3 & 3 & 1\\9 & 1 & 3\end{bmatrix} \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\2 & 1 & 0\\4 & 5 & -2\end{bmatrix}.$

Một số bài tập

- (CK20183) AXTT $f\colon P_2[x] \to P_2[x]$ có ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ đối với cơ sở $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ với $v_1 = 1,\ v_2 = 1 + x,\ v_3 = 2 - x + x^2$.
    - Xác định ma trận f đối với cơ sở chính tắc $E = \{1, x, x^2\}$. Tính $f(4 + 3x + 2x^2)$.
    - Tìm số chiều và một cơ sở của $\ker(f)$.
- (CK20193) Cho AXTT $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, x_2 + 2x_3, 6x_1 - 2x_2 + 5x_3)$.
    - Tìm ma trận của f trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.
    - Tìm $\dim \mathrm{im}(f)$ và $\dim \ker(f)$.
    - Véctơ $u = (1, 2, 3)$ có thuộc $\mathrm{im} f$ không? Tại sao?
- (CK20193-N2) Cho AXTT $f\colon P_2[x] \to P_3[x]$ xác định bởi $f(p) = xp + 2p$. Xác định ma trận của f theo cặp cơ sở chính tắc của các không gian $P_2[x], P_3[x]$.
- (CK20161) Cho AXTT $f\colon P_2[x] \to P_2[x]$ thỏa mãn $f(1 + x^2) = 2 + 5x + 3x^2$, $f(-1 + 2x + 3x^2) = 7(x + x^2)$, $f(x + x^2) = 3(x + x^2)$.
    - Tìm ma trận của f và $f^2 = f \circ f$ đối với cơ sở chính tắc $\{1, x, x^2\}$ của $P_2[x]$.
    - Xác định m để véc tơ $v = 2 + mx + 5x^2$ thuộc $\mathrm{Im} f$.

- (CK20161) Cho toán tử tuyến tính $f: P_2[x] \to P_2[x]$ thỏa mãn $f(1+x) = 5+5x^2$, $f(1+3x+x^2) = 12+3x+15x^2$, $f(1+2x-x^2) = 7+7x^2$.
  - Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc $\{1, x, x^2\}$. Ánh xạ f có phải là một đơn cấu không? Vì sao?
  - Tìm số chiều và một cơ sở của $\mathrm{Im} f$.
- (CK20151) Cho AXTT $f: P_2[x] \to P_2[x]$ thỏa mãn $f(1-x^2) = -3+3x-6x^2$, $f(3x+2x^2) = 17+x+16x^2$, $f(2+6x+3x^2) = 32+7x+25x^2$.
  - Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $P_2[x]$. Tính $f(1+x^2)$.
  - Xác định m để véc tơ $v = 1+x+mx^2$ thuộc $\mathrm{Im} f$.

4.2.3. Ma trận đồng dạng

Định nghĩa

Cho A và B là hai ma trận vuông cấp n. Ta nói A đồng dạng với B, ký hiệu $A \sim B$, nếu tồn tại ma trận khả nghịch P sao cho $B = P^{-1}AP$.

Nhận xét: Hai ma trận của cùng một biến đổi tuyến tính trong hai cơ sở khác nhau là hai ma trận đồng dạng với nhau.

Ví dụ: Ma trận $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ đồng dạng với $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Bài tập (CK20181-N3) CMR nếu $A \sim B$ thì $A^4 \sim B^4$.

Tính chất

- Ta luôn có $A \sim A$.
- Nếu $A \sim B$ thì $B \sim A$.
- Nếu $A \sim B$ và $B \sim C$ thì $A \sim C$.
- Nếu $A \sim B$ thì $\det(A) = \det(B)$ và $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$.

4.3.1. Trị riêng và véctơ riêng của ma trận

Với mỗi $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$, ta viết x ở dạng (ma trận) cột $[x] = \begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$. Để thuận tiện đôi khi ta đồng nhất $x := [x]$. Chẳng hạn với $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ thì

$$Ax := A[x].$$

Định nghĩa (trị riêng - véc tơ riêng)

Cho A là một ma trận vuông cấp n trên K.

- Một số $\lambda \in K$ được gọi là một *(giá) trị riêng* của A nếu tồn tại $x \in K^n$, $x \neq (0, 0, \ldots, 0)$ sao cho
$$Ax = \lambda x.$$
- Trong trường hợp này, véc tơ $x \neq (0, 0, \ldots, 0)$ thỏa mãn điều kiện $Ax = \lambda x$, được gọi là một *véc tơ riêng của A ứng với trị riêng λ*.

Chú ý: Có vô số véc tơ riêng ứng với một giá trị riêng λ. Chẳng hạn, nếu x là một VTR ứng với λ thì cx, $0 \neq c \in K$, cũng là một VTR ứng với λ.

Ví dụ

Với $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Ta có

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = -x.$$

Vậy $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ là môt véc tơ của A ứng với trị riêng $\lambda = -1$.

Định nghĩa (không gian riêng)

Cho λ là một trị riêng của A. Tập hợp

$$E_\lambda = \{x \in K^n \mid Ax = \lambda x\}$$

là một không gian véc tơ con của K^n và được gọi là *không gian riêng của A ứng với trị riêng λ*.

Nhận xét: E_λ chính bằng tập hợp các véc tơ riêng của A đối với trị riêng λ cùng với véc tơ $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$:

$$E_\lambda = \{\mathbf{0}\} \cup \{x \mid x \text{ véctơ riêng ứng với } \lambda\}.$$

Cách tìm trị riêng và véctơ riêng của ma trận

Cho A là một ma trận cấp n. Gọi I là ma trận đơn vị cấp n. Cho $\lambda \in K$.

Định lý

- Số λ là một trị riêng của A khi và chỉ khi

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

- Giả sử λ là một trị riêng của A. Khi đó các véctơ của A ứng với trị riêng λ là các nghiệm không tầm thường của hệ PTTT thuần nhất $(A - \lambda I)x = 0$.

Định nghĩa (Đa thức đặc trưng)

Đa thức (biến λ) $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ được gọi là *đa thức đặc trưng của A*. Còn phương trình $\det(A - \lambda I) = 0$ (biến λ) được gọi là *phương trình đặc trưng*.

Mệnh đề (Trị riêng của các ma trận đồng dạng)

Cho $A \sim B$. Khi đó $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$. Nói riêng A và B có cùng trị riêng.

Ví dụ: Cho $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$. Tìm các trị riêng của A và các VTR ứng với trị riêng tìm được.

- Phương trình đặc trưng

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 4 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-5-\lambda) + 12 = \lambda^2 + 3\lambda + 2.$$

- Các trị riêng của A là $\lambda = -1$ và $\lambda = -2$.
- VTR của A ứng với trị riêng $\lambda = -1$ là nghiệm không tầm thường của hệ

$$(A-(-1)I)x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

  Các véc tơ riêng của A ứng với trị riêng $\lambda = -1$ là $t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t \neq 0$.

- VTR của A ứng với trị riêng $\lambda = -2$ là nghiệm không tầm thường của hệ

$$(A-(-2)I)x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow 4x_1 - 3x_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

  Các véc tơ riêng của A ứng với trị riêng $\lambda = -2$ là $t \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $t \neq 0$.

Ví dụ

Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -6 & 6 & -3 \end{bmatrix}$. Tìm các trị riêng và cơ sở của không gian riêng ứng với từng trị riêng.

- Phương trình đặc trưng

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ -2 & 5-\lambda & -2 \\ -6 & 6 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 3)^2(\lambda + 3) \Leftrightarrow \lambda = 3, -3.$$

- Các trị riêng $\lambda = -3$ và $\lambda = 3$.
- Không gian riêng $E_{\lambda=-3}$ ứng với trị riêng $\lambda = -3$ là không gian nghiệm của hệ thuần nhất

$$(A - (-3)I)x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -2 & 8 & -2 \\ -6 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \\ x_3 = 3t \end{cases}.$$

- Một cơ sở của $E_{\lambda=-3}$ là $[1 \quad 1 \quad 3]^T$.

- Không gian riêng $E_{\lambda=3}$ ứng với trị riêng $\lambda = -3$ là không gian nghiệm của hệ thuần nhất

$$(A - 3I)x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -6 & 6 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow -x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = a - b \\ x_2 = a \\ x_3 = b \end{cases} \quad (\text{ với } a, b \text{ là hai tham số tùy ý}).$$

- Vậy $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - b \\ a \\ b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.
- Vậy $E_{\lambda=3}$ sinh bởi $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.
- Kiểm tra được S là ĐLTT. Vậy S là một cơ sở của $E_{\lambda=3}$.

4.3.2. Trị riêng và véctơ riêng của phép biến đổi tuyến tính

Cho $f: V \to V$ là một BĐTT.

Định nghĩa

- Một số $\lambda \in K$ được gọi là *một trị riêng của* f nếu có $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}$ sao cho

$$f(v) = \lambda v.$$

- Trong trường hợp này, véc tơ $v \neq \mathbf{0}$ thỏa mãn điều kiện $f(v) = \lambda v$, được gọi là một *véc tơ riêng của* f *ứng với trị riêng* λ.
- Cho λ là một trị riêng của f. Tập hợp

$$V_\lambda = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\} = \{0\} \cup \{v \mid v \text{ VTR ứng với GTR } \lambda\}$$

là một không gian véc tơ con của V và được gọi là *không gian riêng của* f *ứng với trị riêng* λ.

Cách tìm trị riêng và véctơ riêng của BĐTT

$v \rightsquigarrow [v]_{\mathcal{B}}$, $v \in V$, $[v]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^n$

$u = v \Leftrightarrow [u]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{B}}$

Viết tắt: GTR= (giá) trị riêng, VTR = véctơ riêng

Cho $f : V \to V$ là một BĐTT có ma trận A đối với cơ sở $\mathcal{B}$ của V.

$v \neq 0 \Leftrightarrow [v]_{\mathcal{B}} \neq \theta = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

$f(v) = \lambda v \Leftrightarrow [f(v)]_{\mathcal{B}} = [\lambda v]_{\mathcal{B}} \Leftrightarrow A[v]_{\mathcal{B}} = \lambda [v]_{\mathcal{B}}$

Mệnh đề

Cho $\lambda \in K$ và $0 \neq v \in V$. Khi đó

- λ là GTR của $f \Leftrightarrow \lambda$ là GTR của A,
- v là VTR của f ứng với GTR $\lambda \Leftrightarrow [v]_{\mathcal{B}}$ là VTR của A ứng với GTR λ.

Định nghĩa (Đa thức đặc trưng của BĐTT)

Đa thức $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ cũng được gọi là *đa thức đặc trưng của f*

$$P_f(\lambda) := P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Chú ý: Đa thức đặc trưng của f không phụ thuộc vào cách chọn cơ sở $\mathcal{B}$ của V. Điều này suy ra từ việc đa thức đặc trưng của hai ma trận đồng dạng là bằng nhau.

$[f]_B = \left[[f(v_1)]_B \ [f(v_2)]_B \ [f(v_3)]_B \right]$

Ví dụ (CK20181)

Cho BĐTT trên không gian $\mathbb{R}^3$ xác định bởi

$f(v_1) = (2,2,4) = 2v_3 \to [f(v_1)]_B = \begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}$

$f(v_2) = (1,2,-1) = v_1 \to [f(v_2)]_B = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

$f(v_3) = (2,3,1) = v_1 + v_3 \to [f(v_3)]_B = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$

$$f(\underbrace{1,2,-1}_{v_1}) = (2,2,4),\ f(\underbrace{2,1,3}_{v_2}) = (1,2,-1),\ f(\underbrace{1,1,2}_{v_3}) = (2,3,1).$$

a) Xác định $\dim \operatorname{Im} f$

b) Tìm các giá trị riêng của f.

- $\mathcal{B} = \{(1,2,-1),(2,1,3),(1,1,2)\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.
- Ma trận của f đối với cơ sở $\mathcal{B}$ là $A = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\\2 & 0 & 1\end{bmatrix}$.
- Đa thức đặc trưng của f là
$$P_f(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 1\\0 & -\lambda & 0\\2 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - \lambda - 2).$$
- $P_f(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0, -1$ hoặc 2.
- Các giá trị riêng của f là 0,-1, 2.

SAI LẦM:

$A' = \begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\2 & 2 & 3\\4 & -1 & 1\end{bmatrix}$

GTR f = GTR của A'

BT. Tìm VTR của f.

4.3.3. Chéo hóa ma trận và BĐTT

Bài toán 1

Cho BĐTT $f : V \to V$. Liệu tồn tại hay không một cơ sở của V sao cho ma trận của f đối với cơ sở này là ma trận chéo?

Nếu có một cơ sở của V như vậy, thì ta nói f *chéo hóa được*.

- Gọi A là ma trận của f đối với một cơ sở $\mathcal{B}$ nào đó.
- Xét $\mathcal{B}'$ là một cơ sở tùy ý. Gọi P là ma trận chuyển từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$.
- Khi đó P là khả nghịch và ma trận của f đối với cơ sở $\mathcal{B}'$ là $P^{-1}AP$.
- Bài toán 1 đưa về bài toán dạng ma trận sau đây.

Bài toán 2

Cho A là môt ma trận vuông, liệu tồn tại ma trận khả nghịch P sao cho $P^{-1}AP = D$ là ma trận chéo?

Nếu có một ma trận khả nghịch P như vậy, thì ta nói A *chéo hóa được*. Ta cũng nói P làm chéo ma trận A. Quá trình tìm P khả nghịch và D ma trận chéo sao cho $P^{-1}AP = D$ được gọi là quá trình chéo hóa ma trận A.

VD: G/s A chéo hóa đc ⇒ ∃ P khả nghịch s/c $P^{-1}AP = D$ chéo

$P^{-1}AP = D \Rightarrow AP = PD \to \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 a & \lambda_2 b \\ \lambda_1 c & \lambda_2 d \end{bmatrix}$

$P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} c = \lambda_1 a \\ 0 = \lambda_1 c \\ d = \lambda_2 b \\ 0 = \lambda_2 d \end{cases}$ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \to c = 0 \\ c = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{c = 0}$, $\Rightarrow d = 0$

$P = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ k° khả nghịch ↯

Mệnh đề

Cho BĐTT $f : V \to V$, gọi A là ma trận của f đối với cơ sở $\mathcal{B}$ của V. Khi đó f chéo hóa được khi và chỉ khi A chéo hóa được.

$\boxed{\lambda = 0}$ $E_{\lambda=0}$ $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

Ví dụ: Ma trận $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ không chéo hóa được.

Ví dụ: Ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$ chéo hóa được. Với $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

$\lambda = -1$: $E_{\lambda=-1}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda = -2$ $E_{\lambda=-2}$ $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

$Q = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

"⇒" G/s A chéo hóa đc ⇒ ∃ P khả nghịch : $P^{-1}AP = D$ chéo

$P^{-1}AP \Rightarrow AP = PD \Leftrightarrow A[p_1 \dots p_n] = [p_1 \dots p_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0\\ \vdots & & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix}$

cột 1

$\Leftrightarrow [Ap_1 \dots Ap_n] = [\lambda_1 p_1 \dots \lambda_n p_n] \Leftrightarrow \begin{cases} Ap_1 = \lambda_1 p_1 \\ \vdots \\ Ap_n = \lambda_n p_n \end{cases} \Rightarrow$ $p_1, \dots p_n$ VTR

cột 1   cột 1

vì P khả nghịch

$\Rightarrow \{p_1 \dots p_n\}$ ĐLTT

Định lý (Điều kiện cần và đủ để ma trận chéo hóa được)

Ma trận vuông A cỡ $n \times n$ chéo hóa được khi và chỉ khi A có n véctơ riêng độc lập tuyến tính.

Các bước chéo hóa ma trận

$(x-1)^2 (x+1)$

Cho A là ma trận cỡ $n \times n$ trên K.

1. Giải phương trình $\det(A - \lambda I) = 0$ (*).
    - Nếu không có đủ nghiệm n kể cả bội trong K thì A không chéo hóa được.
    - Giả sử $(*)$ có đủ nghiệm n nghiệm kể cả bội và gọi các nghiệm phân biệt là $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Ta thực hiện Bước 2.
2. Với mỗi trị riêng λ_i, tìm một cơ sở của không gian riêng E_{λ_i}. [Bằng cách giải hệ thuần nhất $(A - \lambda_i I)x = 0$.]
3. Lấy hợp của tất cả các cơ sở của các không gian riêng tìm được ở Bước 2. Ta được một hệ véc tơ riêng ĐLTT.
    - Nếu hệ véctơ này không có đủ n véc tơ riêng thì A không chéo hóa được. [Trường hợp này $\sum_{i=1}^m \dim E_{\lambda_i} < n$.]
    - Nếu hệ véctơ này có đủ n véc tơ riêng thì A chéo hóa được. [Trường hợp này $\sum_{i=1}^m \dim E_{\lambda_i} = n$.] Ta thực hiện Bước 4.
4. Gọi $p_1, p_2, \ldots, p_n$ là các véctơ riêng ĐLTT này, với giá trị riêng tương ứng là $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (có thể lặp lại).
   Đặt $P = [p_1 p_2 \cdots p_n]$ với các cột $p_1, \ldots, p_n$. Khi đó P làm chéo ma trận A và

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n] = D.$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \alpha_2 & \\ 0 & & \ddots \; \alpha_n \end{bmatrix}$$

Ví dụ

Hãy chéo hóa ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -6 & 6 & -3 \end{bmatrix}$.

- Ma trận A các giá trị riêng $\lambda = -3$ và $\lambda = 3$.
- Một cơ sở của KGR $E_{\lambda=-3}$ là $\left\{ p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$.
- Một cơ sở của KGR $E_{\lambda=3}$ là $\left\{ p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, p_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.
- Đặt $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Khi đó P làm chéo hóa A và

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$R = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

$R^{-1}AR = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

Mệnh đề

Giả sử $v_1, \dots, v_m$ là m véc tơ riêng của BĐTT $f : V \to V$ ứng với m trị riêng phân biệt $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Khi đó hệ véc tơ $\{v_1, \dots, v_m\}$ là ĐLTT.

Hệ quả (Một điều kiện đủ cho ma trận chéo hóa được)

- Nếu BĐTT $f : V \to V$ với $\dim V = n$ có n trị riêng phân biệt, thì f chéo hóa được.
- Nếu ma trân vuông A cấp n có n trị riêng phân biệt thì A chéo hóa được.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 10 & -13 \\ 0 & 2 & 55 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

MT $\leftrightarrow$ BĐTT

vuông

Chéo hóa BĐTT

- Cho BĐTT $f\colon V \to V$, $\dim V = n$.
- Gọi A là ma trận của f đối với cơ sở $\mathcal{B}$ nào đó của V.

Ta đã biết rằng f chéo hóa được $\Leftrightarrow$ A chéo hóa được. Trong trường hợp này, ta có thể tìm một cơ sở $\mathcal{B}'$ của V sao cho ma trận của f là ma trận chéo như sau.

- Bằng quy trình chéo hóa ma trận A, ta tìm được n véctơ riêng ĐLTT $p_1, \ldots, p_n$ của ma trận A, với trị riêng tương ứng là $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (có thể lặp lại). [Như vậy $Ap_i = \lambda_i p_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$.]
- Gọi $v_1, \ldots, v_n$ là các véctơ của V sao cho, $[v_1]_{\mathcal{B}} = p_1$, $\ldots$, $[v_n]_{\mathcal{B}} = p_n$. [Như vậy $f(v_i) = \lambda_i v_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$].
- Đặt $\mathcal{B}' = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Khi đó $\mathcal{B}'$ là một cơ sở của V. Ma trận của f đối với cơ sở $\mathcal{B}'$ là ma trận đường chéo

$f(v_1) = \lambda_1 v_1$

$\to [f(v_1)]_{B'} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$f(v_2) = \lambda_2 v_2$

$\to [f(v_2)]_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$D = P^{-1}AP =$

$$[f]_{\mathcal{B}'} = \mathrm{diag}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n].$$

$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$

Ví dụ

v VTR của $f \Leftrightarrow [v]_B$ là VTR của A

$f(1) = 1 + (-2)x + (-6)x^2$

$[f(1)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$

Cho AXTT $f : P_2[x] \to P_2[x]$ xác định bởi

$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + 2a_1 - 2a_2) + (-2a_0 + 5a_1 - 2a_2)x + (-6a_0 + 6a_1 - 3a_2)x^2.$$

Tìm một cơ sở của $P_2[x]$ để ma trận của f đối với cơ sở này có dạng chéo.

- Ma trận của f đối với cở chính tắc $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ là $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -6 & 6 & -3 \end{bmatrix}$.

  $\lambda_1 = -3$ $\quad \lambda = 3 \quad \lambda = 3$
- Ta tìm được 3 VTR ĐLTT $p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $p_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. của A
- Gọi $v_1, v_2, v_3 \in P_2[x]$ sao cho $[v_1]_\mathcal{B} = p_1$, $[v_2]_\mathcal{B} = p_2$, $[v_3]_\mathcal{B} = p_3$.
- Khi đó $v_1 = 1 + x + 3x^2$, $v_2 = 1 + x$, $v_1 = -1 + x^2$. v_3
- Hệ $\{v_1, v_2, v_3\}$ là một cơ sở của $P_2[x]$ và $f(v_1) = -3v_1$, $f(v_2) = 3v_2$, $f(v_3) = 3v_3$.
- Ma trận của f đối với cơ sở $\{v_1, v_2, v_3\}$ là ma trận chéo $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Áp dụng chéo hóa để tính lũy thừa ma trận

- Cho A là ma trận chéo hóa được. Giả sử P là ma trận làm chéo hóa A và $P^{-1}AP = D = \mathrm{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$.
- Khi đó $A = PDP^{-1}$ và
$$A^k = PD^kP^{-1},$$
với $D^k = \mathrm{diag}[\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k]$.

$A^2 = AA = PD\cancel{P^{-1}P}DP^{-1}$

$= PD^2P^{-1}$

Ví dụ: Tính $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}^n$.

$n=1$ V

$n=2$ V

- Ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$ chéo hóa được. Với $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, thì
$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = D.$$
- Ta có
$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 4(-1)^n - 3(-2)^n & -3(-1)^n + 3(-2)^n \\ 4(-1)^n - 4(-2)^n & -3(-1)^n + 4(-2)^n \end{bmatrix}.$$

Ghi chú

Ta cũng có thể sử dụng định lý sau để tính lũy thừa ma trận (khi A có đủ giá trị riêng).

Định lý Caley-Hamilton (đọc thêm)

Cho ma trận vuông A với đa thức đặc trưng $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Khi đó

$$P_A(A) = \mathcal{O}.$$

Một số bài tập

- (CK2015) Cho AXTT $f\colon P_2[x] \to P_2[x]$ có ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -3 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ đối với cơ sở chính tắc của $P_2[x]$.
  a) Xác định $f^2(1 + x + x^2)$ với $f^2 = f \circ f$.
  b) Tìm một cơ sở của $P_2[x]$ để ma trận của f đối với cơ sở đó có dạng chéo.
- (CK2015-Đề5) Cho BĐTT $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi $f(1, 2, -1) = (3, 7, -1)$, $f(1, 3, 1) = (3, 8, 1)$, $f(1, 2, 0) = (0, 0, 0)$.
  - Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.
  - Chứng minh tồn tại cơ sở của $\mathbb{R}^3$ để f có dạng chéo.
- (CK2015-Đề7) Cho BĐTT $f\colon P_2[x] \to P_2[x]$ xác định bởi $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + a_1) + (2a_0 - a_1 + 2a_2)x + (3a_1 - 2a_2)x^2$.
  - Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $P_2[x]$ và tính $r(f)$.
  - Tìm các trị riêng và véc tơ riêng của f.
- (CK2017-N2) Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} -6 & -4 & 4 \\ 4 & 4 & -2 \\ -14 & -7 & 9 \end{bmatrix}$. Hãy tính các GTR của A, sau đó chéo hóa ma trận A.