Chương 3: Không gian véctơ

Giảng viên: PGS. TS. Nguyễn Duy Tân
email: tan.nguyenduy@hust.edu.vn

Viện Toán ƯDTH, HUST

Tháng 10, 2021

Nội dung

3.1.1. Định nghĩa, ví dụ

Cho K là trường số thực $\mathbb{R}$ hoặc trường số phức $\mathbb{C}$.

Định nghĩa

Cho V là một tập khác rỗng, cùng với hai phép toán:

- Phép cộng véctơ:
$$\begin{aligned} +\colon V \times V &\to V \\ (u, v) &\mapsto u + v \end{aligned}$$
- Phép nhân véctơ với vô hướng:
$$\begin{aligned} \cdot\colon K \times V &\to V \\ (a, v) &\mapsto av \end{aligned}$$

Tập V cùng với hai phép toán này được gọi là một *không gian véctơ* trên K, hay *K-không gian véctơ* nếu các điều kiện (tiên đề) sau đây được thỏa mãn.

Với mọi $u, v, w \in V$, với mọi $a, b \in K$:

1. $(u + v) + w = u + (v + w)$,
2. $\exists \mathbf{0} \in V$: $v + \mathbf{0} = \mathbf{0} + v = v$,
3. $\forall v \in V$, $\exists v' \in V$: $v + v' = v' + v = \mathbf{0}$,
4. $u + v = v + u$,
5. $(a + b)v = av + bv$,
6. $a(u + v) = au + av$,
7. $a(bv) = (ab)v$,
8. $1v = v$.

- Phần tử của không gian véctơ V được gọi là véctơ. Phần tử thuộc K được gọi là vô hướng.
- Các điều kiện 1-4 nói rằng V với phép cộng là một nhóm giao hoán.
- Phần tử $\mathbf{0}$ trong đk 2 được gọi là véctơ không. (Giáo trình: ký hiệu θ.)
- Phần tử v' trong đk 3 được gọi là véctơ đối của v, ký hiệu $-v$.

Ví dụ

- Xét $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$.
- Trang bị hai phép toán:

$$\begin{aligned}(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) &= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),\\ a(x_1, \ldots, x_n) &= (ax_1, \ldots, ax_n).\end{aligned}$$

- Tập $\mathbb{R}^n$ cùng với hai phép toán ở trên là một không gian véctơ trên $\mathbb{R}$.
- Véctơ không là $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$.
- Véc tơ đối của $v = (x_1, \ldots, x_n)$ là $-v = (-x_1, \ldots, -x_n)$.

Ví dụ

- Tập hợp $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ gồm tất cả các ma trận thực cỡ 2×2, với phép cộng ma trận và phép nhân với một số thực, là một không gian véctơ thực (trên $\mathbb{R}$).
  - Các tính chất giao hoán, kết hợp, phân phối, ...được thừa hưởng từ phép cộng ma trận và phép nhân với số thực;
  - Véctơ không là ma trận $\mathcal{O}_2$;
  - Véctơ đối của của véctơ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ là $-A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$.
- Tập hợp $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ gồm tất cả các ma trận thực cỡ $m \times n$, với phép cộng ma trận và phép nhân với số thực là một không gian véctơ thực.

Ví dụ

- Tập hợp $P_2[x] = \left\{a_2x^2 + a_1x + a_0 \middle| a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\right\}$ các đa thức hệ số thức với bậc *không quá 2* với hai phép toán:

$$\begin{aligned}(a_2x^2 + a_1x + a_0) + (b_2x^2 + b_1x + b_0) &= (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x \\ &\quad + (a_0 + b_0) \\ c(a_2x^2 + a_1x + a_0) &= ca_2x^2 + ca_1x + ca_0\end{aligned}$$

  là một không gian véctơ trên $\mathbb{R}$.
  - Tính đóng của các phép toán: từ định nghĩa trên.
  - Các tính chất giao hoán, kết hợp, phân phối, . . . : thừa hưởng từ các phép cộng đa thức và phép nhân của đa thức với một số.
  - Véc tơ không là đa thức không $\mathbf{0} = 0 \cdot x^2 + +0 \cdot x + 0$.
  - Véctơ đối của $a_2x^2 + a_1x + a_0$ là $-a_2x^2 - a_1x - a_0$.

- Tập hợp $P_n[x]$ các đa thức thực với bậc *không quá n* cùng với phép cộng đa thức và phép nhân đa thức với số thực được định nghĩa tương tự như trên là một không gian véctơ trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ

- Tập hợp $\mathcal{C}[a, b]$ gồm tất cả các hàm thực liên tục trên đoạn $[a, b]$ là một không gian vectơ trên $\mathbb{R}$ với hai phép toán thông thường

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(cf)(x) = cf(x).$$

.

  - Tính đóng của các phép toán: do tính chất của hàm liên tục.
  - Các tính chất giao hoán, kết hợp, phân phối, ...: thừa hưởng từ các phép cộng và phép nhân trong $\mathbb{R}$.
  - Véctơ không là hàm $f_0 \equiv 0$
  - Véctơ đối hàm f là hàm $-f$ được xác định bởi $(-f)(x) = -f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

- Tương tự, các tập hợp sau cùng với các phép toán thông thường cũng là các không gian vectơ:
  - Tập hợp các hàm liên tục trên một miền $D \subset \mathbb{R}$ (khoảng nửa đóng, khoảng mở, ...).
  - Tập hợp các hàm khả vi trên một miền $D \subset \mathbb{R}$.
  - Tập hợp các hàm khả tích trên một miền $D \subset \mathbb{R}$.

Ví dụ

- Tập hợp $\mathbb{Z}$ các số nguyên với hai phép toán thông thường không phải một không gian véc tơ trên $\mathbb{R}$.
- Tập hợp $\mathbb{R}^+$ gồm các số thực dương cùng với hai phép toán thông thường không phải một không gian véctơ thực.
- Tập hợp các đa thức hệ số thực với bậc 2 cùng với hai phép toán thông thường không phải một không gian véctơ trên $\mathbb{R}$.
- Tập hợp $\mathbb{R}^2$ với phép cộng thông thường và phép nhân sau:

$$c(x_1, x_2) = (cx_1, 0)$$

không phải một không gian véctơ.

3.1.2. Một số tính chất cơ bản

Tính chất

Cho V là một không gian véctơ trên K. Với mọi $u, v \in V$ và $c \in K$, ta có các khẳng định sau.

1. Véc tơ không $\mathbf{0}$ là duy nhất
2. Véctơ đối $(-v)$ của véctơ v là duy nhất.
3. $(-1)v = -v$.
4. $0v = \mathbf{0}$.
5. $c\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
6. Nếu $cv = \mathbf{0}$ thì $c = 0$ hoặc $v = \mathbf{0}$.

3.2.1. Định nghĩa

Cho V là một không gian véctơ trên K.

Không gian véctơ con

Một tập con khác rỗng W của V được gọi là một *không gian véctơ con* của V nếu W đóng kín (khép kín) với hai phép toán trên V, nghĩa là nếu

$$\begin{cases} u + v \in W, & \forall u, v \in W \\ cv \in W, & \forall c \in K, v \in W, \end{cases}$$

và cùng với hai phép toán này thì W trở thành một không gian véctơ trên K.

Tiêu chuẩn không gian con

Một tập con khác rỗng W của V là một không gian véctơ con của V nếu và chỉ nếu W đóng kín (khép kín) với hai phép toán trên V, nghĩa là

$$\begin{cases} u + v \in W, & \forall u, v \in W \\ cv \in W, & \forall c \in K, v \in W. \end{cases}$$

Ví dụ: Xét V là một không gian véctơ bất kỳ. Khi đó

- $\{\mathbf{0}\}$ (tập con của V chỉ gồm vectơ không) là một không gian con của V.
- Bản thân V là một không gian con của V.

Nhận xét: Nếu W là không gian véc tơ con của V thì $\mathbf{0} \in W$.

Ví dụ

Xét không gian véctơ $V = \mathbb{R}^3$ (với hai phép toán thông thường). Tập hợp con $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$ là một không gian véctơ con của $\mathbb{R}^3$.

- Vì $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ thuộc W nên $W \neq \emptyset$.
- Xét $u = (x_1, y_1, z_1) \in W$ và $v = (x_2, y_2, z_2) \in W$, và $c \in \mathbb{R}$ bất kỳ.
- Khi đó $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in W$ vì

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) + 3(z_1 + z_2) &= (x_1 + 2y_1 + 3z_1) + (x_2 + 2y_2 + 3z_2) \\ &= 0 + 0 = 0.\end{aligned}$$

- Như vậy W đóng kín với phép cộng véctơ.
- Ta có $cv = (cx_2, cy_2, cz_2) \in W$ vì

$$cx_2 + 2cy_2 + 3cz_2 = c(x_2 + 2y_2 + 3z_2) = c \cdot 0 = 0.$$

- Như vậy W đóng kín với phép nhân với số thực.
- Vậy W là không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^3$.

Không gian nghiệm của hệ pttt thuần nhất

Xét không gian véctơ $\mathbb{R}^n$ (với phép toán thông thường). Tập hợp con W của $\mathbb{R}^n$ gồm tất cả các nghiệm của hệ pttt thuần nhất

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = 0 \\ \dots\dots\dots\dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = 0 \end{cases}$$

là một không gian véctơ con của $\mathbb{R}^n$.

Giao của hai không gian con

Tính chất

Nếu U và W là hai không gian véc tơ con của không gian véc tơ V thì $U \cap W$ cũng là một không gian véc tơ con của V.

Chú ý:

- Kết quả trên có thể mở rộng cho giao của một số hữu hạn (hoặc vô hạn) các không gian véc tơ con.
- Hợp của hai không gian véc tơ con nói chung không phải là một không gian véc tơ con.
  (Ví dụ: $V = \mathbb{R}^2$, U là trục hoành, W là trục tung, $U \cup W$ không đóng với phép cộng)

3.2.2. Không gian con sinh bởi hệ véctơ

Cho không gian véc tơ V trên trường K. (Nếu viết $V = \mathbb{R}^n$ thì ta ngầm hiểu phép cộng và phép nhân với vô hướng là hai phép toán thông thường trên $\mathbb{R}^n$.)

Định nghĩa (Tổ hợp tuyến tính)

Cho các véc tơ $v_1, v_2, \ldots, v_n$ thuộc V. Một véctơ $v \in V$ có dạng

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n, \text{ với } c_1, c_2, \ldots, c_n \in K,$$

được gọi là một *tổ hợp tuyến tính* của các véctơ $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Trong trường hợp này ta cũng nói:

- Véctơ v là một tổ hợp tuyến tính của hệ véctơ $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$,
- Véctơ v biểu thị tuyến tính được qua $v_1, \ldots, v_n$ (hoặc qua hệ véctơ $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$).

Ví dụ: $V = \mathbb{R}^2$, $v_1 = (3, 4)$, $v_2 = (1, 1)$ và $v = (1, 2)$. Khi đó

$$v = (1, 2) = (3, 4) - 2(1, 1) = v_1 - 2v_2$$

và v là một tổ hợp tuyến tính của v_1 và v_2.

Ví dụ

$V = \mathbb{R}^3$, $v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (0, 1, 2), v_3 = (-1, 0, 1)$ và $v = (1, 1, 1)$. Hỏi v có phải là một tổ hợp tuyến tính của v_1, v_2, v_3?

- Véc tơ v là một tổ hợp tuyến tính của v_1, v_2, v_3 khi và chỉ khi tồn tại các số thực c_1, c_2, c_3 sao cho $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = v$.
- Việc này tương đương với hệ pttt sau có nghiệm (ẩn c_1, c_2, c_3)

$$\begin{cases} c_1 \quad\quad\quad - c_3 = 1 \\ 2c_1 + \ \ c_2 \quad\quad = 1 \\ 3c_1 + 2c_2 + c_3 = 1 \end{cases}$$

- Hệ có vô số nghiệm: $c_1 = 1 + t, c_2 = -1 - 2t, c_3 = t$ $(t \in \mathbb{R})$. Do vậy v là một tổ hợp tuyến tính của v_1, v_2, v_3.
- Chọn chẳng hạn $t = 1$, ta được một biểu diễn của v dưới dạng tổ hợp tuyến tính của v_1, v_2, v_3:

$$v = 2v_1 - 3v_2 + v_3 .$$

Ví dụ

$V = \mathbb{R}^3$, $v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (0, 1, 2), v_3 = (-1, 0, 1)$ và $v = (1, -2, 2)$. Hỏi v có phải là một tổ hợp tuyến tính của v_1, v_2, v_3?

- Véc tơ v là một tổ hợp tuyến tính của của v_1, v_2, v_3 khi và chỉ khi tồn tại các số thực c_1, c_2, c_3 sao cho $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = v$.
- Việc này tương đương với hệ pttt sau có nghiệm (ẩn c_1, c_2, c_3)

$$\begin{cases} c_1 \quad\quad\quad - c_3 = 1 \\ 2c_1 + \ \ c_2 \quad\quad = -2 \\ 3c_1 + 2c_2 + c_3 = 2 \end{cases}$$

- Hệ này vô nghiệm. Do vậy v không là một tổ hợp tuyến tính của v_1, v_2, v_3.

Cho $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ là một hệ véctơ trong K-kgvt V.

Định nghĩa

Tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính của các véctơ của S được gọi là bao tuyến tính của S và ký hiệu là $\mathrm{span}(S)$ hoặc $\mathrm{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$:

$$\mathrm{span}(S) = \{c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n \mid c_1, c_2, \ldots, c_n \in K\} \subset V.$$

Định lý

Tập con $\mathrm{span}(S)$ là một không gian véc tơ con của V. Nó là không gian véc tơ con nhỏ nhất của V mà chứa S.

Định nghĩa

Không gian véc tơ $\mathrm{span}(S)$ được gọi là không gian véc tơ con *sinh bởi hệ véc tơ S*.

Ví dụ: $V = \mathbb{R}^2$, $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (1,2)$. Khi đó
$\mathrm{span}\{v_1\} = \{c(1,1) \mid c \in \mathbb{R}\} = \{(c,c) \mid c \in \mathbb{R}\}$.
$\mathrm{span}\{v_1, v_2\} = \{a(1,1) + b(1,2) \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \{(a+b, a+2b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$.

Hệ sinh

Cho $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ là một hệ véctơ trong K-kgvt V.

Định nghĩa

Nếu $\mathrm{span}(S) = V$ thì S được gọi một *hệ sinh* của V, hay không gian V *sinh bởi* S.

Như vậy, $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ là một hệ sinh của V nếu và chỉ nếu với mọi $v \in V$ đều tồn tại $c_1, \ldots, c_n \in K$ sao cho

$$v = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n.$$

Ví dụ

- $\{(1,1),(1,2)\}$ là một hệ sinh của $\mathbb{R}^2$.
- $\{(1,1),(1,2),(1,3)\}$ là một hệ sinh của $\mathbb{R}^2$.
- $\{(1,1)\}$ không là một hệ sinh của $\mathbb{R}^2$.
- $\{(1,0),(0,1)\}$ là một hệ sinh của $\mathbb{R}^2$.
- $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ là một hệ sinh của $\mathbb{R}^3$.
- $\{1,x,x^2\}$ là một hệ sinh của $P_2[x]$.
- Hệ véc tơ gồm

  $$e_1=(1,0,0,\ldots,0), e_2=(0,1,0,\ldots,0),\ldots,e_n=(0,0,\ldots,0,1)$$

  là một hệ sinh của $\mathbb{R}^n$.
- Hệ $\{1,x,\ldots,x^n\}$ là một hệ sinh của $P_n[x]$.

Ví dụ

Cho $v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (0, 1, 2), v_3 = (-1, 1, 1)$. Hỏi $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ có phải là một hệ sinh của $\mathbb{R}^3$?

- Xét $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tùy ý. Xét hệ thức $v = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$. Hệ thức này tương đương với

$$(a, b, c) = c_1(1, 2, 3) + c_2(0, 1, 2) + c_3(-1, 1, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 - c_3 = a \\ 2c_1 + c_2 + c_3 = b \\ 3c_1 + 2c_2 + c_3 = c \end{cases}$$

- Hệ này (với ẩn c_1, c_2, c_3) có định thức ma trận hệ số $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Do đó hệ này luôn có nghiệm với mọi a, b, c.
- Như vậy với mọi $v \in \mathbb{R}^3$, ta luôn tìm được c_1, c_2, c_3 sao cho $v = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$.
- Vậy $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ là một hệ sinh của $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ

Cho $v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (0, 1, 2), v_3 = (-1, 0, 1)$. Hỏi $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ có phải là một hệ sinh của $\mathbb{R}^3$?

KHÔNG

3.3.1. Độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính

Cho $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ là một hệ véctơ trong K-kgvt V.

Định nghĩa

- Hệ S được gọi là *phụ thuộc tuyến tính* nếu tồn tại các số c_1, c_2, …, c_n không đồng thời bằng 0 sao cho

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n = \mathbf{0}.$$

- Hệ S được gọi là *độc lập tuyến tính* nếu nó không phụ thuộc tuyến tính. Như vậy S là độc lập tuyến tính nếu điều kiện

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n = \mathbf{0} \quad (\text{với } c_1, c_2, \ldots, c_n \in K)$$

xẩy ra khi và chỉ khi $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

- $S = \{(1,1),(2,2)\} \subset \mathbb{R}^2$ là phụ thuộc tuyến tính vì
$$2 \cdot (1,1) + (-1) \cdot (2,2) = \mathbf{0} = (0,0).$$
- $S = \{(1,0),(0,1),(-2,4)\} \subset \mathbb{R}^2$ là phụ thuộc tuyến tính vì
$$2(1,0) - 4(0,1) + (-2,4) = (0,0).$$
- $S = \{(1,1),(1,2)\} \subset \mathbb{R}^2$ là độc lập tuyến tính.
Thật vậy, hệ thức $c_1(1,1) + c_2(1,2) = \mathbf{0}$ xẩy ra khi và chỉ khi
$$(c_1 + c_2, c_1 + 2c_2) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + 2c_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases}$$
- $S = \{(1,1),(1,2),(1,3)\} \subset \mathbb{R}^2$ là phụ thuộc tuyến tính.
Thật vậy, hệ thức $c_1(1,1) + c_2(1,2) + c_3(1,3) = \mathbf{0}$ xẩy ra khi và chỉ khi
$$(c_1 + c_2 + c_3, c_1 + 2c_2 + 3c_3) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_2 + 2c_3 = 0 \end{cases}$$
Hệ này có nghiệm không tầm thường, chẳng hạn $c_1 = 1$, $c_2 = -2$, $c_3 = 1$.
Như vậy S là phụ thuộc tuyến tính.

- Trong $\mathbb{R}^n$, hệ véc tơ gồm

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

  là độc lập tuyến tính.
- Trong $P_n[x]$, hệ $\{1, x, \dots, x^n\}$ là độc lập tuyến tính.

Ví dụ

Trong $\mathbb{R}^3$, xác định sự phụ thuộc tuyến tính và độc lập tuyến tính của hệ sau: $S = \{v_1, v_2, v_3\}$, với $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (1, 1, -2)$, $v_3 = (2, 3, 2)$.

- Hệ thức $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = \mathbf{0}$ xẩy ra khi và chỉ khi

$$c_1(1,2,3) + c_2(1,1,-2) + c_3(2,3,2) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + 2c_3 = 0 \\ 2c_1 + c_2 + 3c_3 = 0 \\ 3c_1 - 2c_2 + 2c_3 = 0 \end{cases}$$

- Hệ thuần nhất này có định thức của ma trận hệ số $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$.
- Do vậy hệ có nghiệm chỉ có tầm thường $(c_1, c_2, c_3) = (0, 0, 0)$.
- Như vậy hệ S là độc lập tuyến tính.

Ví dụ

Trong $\mathbb{R}^3$, xác định sự phụ thuộc tuyến tính và độc lập tuyến tính của hệ sau: $S = \{v_1, v_2, v_3\}$, với $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (1, 1, -2)$, $v_3 = (2, 3, 1)$.

- Hệ thức $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = \mathbf{0}$ xẩy ra khi và chỉ khi

$$c_1(1,2,3) + c_2(1,1,-2) + c_3(2,3,1) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + 2c_3 = 0 \\ 2c_1 + c_2 + 3c_3 = 0 \\ 3c_1 - 2c_2 + 1c_3 = 0 \end{cases}$$

- Hệ thuần nhất này có định thức của ma trận hệ số $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$
- Do vậy hệ có nghiệm không tầm thường $(c_1, c_2, c_3) \neq (0, 0, 0)$. (Ví dụ $c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = -1$.)
- Như vậy hệ S là phụ thuộc tuyến tính.

Tính chất

1. Hệ con (khác rỗng) của hệ độc lập tuyến tính là độc lập tuyến tính.
2. Hệ chứa hệ phụ thuộc tuyến tính là phụ thuộc tuyến tính.
3. Hệ gồm một véctơ $\{v\}$ là độc lập tuyến tính nếu và chỉ nếu $v \neq \mathbf{0}$.
4. Hệ gồm hai véctơ là phụ thuộc tuyến tính nếu và chỉ nếu một vectơ này là bội của vec tơ kia.

Nhận xét: Một hệ chứa vectơ không luôn phụ thuộc tuyến tính.

Mệnh đề

Hệ véctơ $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$, $k \geq 2$, là phụ thuộc tuyến tính nếu và chỉ nếu một trong các vectơ v_j có thể viết là tổ hợp tuyến tính của các véctơ còn lại.

Định lý

Cho V là một không gian véctơ. Giả sử $\{v_1, \ldots, v_n\}$ là một hệ vec tơ trong V độc lập tuyến tính và $\{w_1, \ldots, w_m\}$ là một hệ sinh của V. Khi đó $n \leq m$.

3.3.2. Cơ sở và số chiều

Định nghĩa (cơ sở)

Một hệ véctơ $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ trong KGVT V được gọi là một *cơ sở* nếu nó thỏa mãn hai điều kiện:

1. $\mathcal{B}$ là độc lập tuyến tính.
2. $\mathcal{B}$ là một hệ sinh của V.

Ví dụ:

- $\{(1,1),(1,2)\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^2$.
- $\{(1,0),(0,1)\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^2$.
- $\{(1,1),(1,2),(1,3)\}$ không là một cơ sở của $\mathbb{R}^2$.

- Hệ $\{e_1, \dots, e_n\}$ trong $\mathbb{R}^n$ gồm các vectơ
$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$$
là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$. Cơ sở này được gọi là cơ sở *chính tắc* (hay chuẩn tắc) của $\mathbb{R}^n$.
- Hệ $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ là một cơ sở của $P_n[x]$. Cơ sở này được gọi là cơ sở *chính tắc* của $P_n[x]$.
- Một cơ sở của $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ là
$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Định lý

Nếu V có một cơ sở gồm n vectơ, thì mọi cơ sở của V cũng có n vectơ

Định nghĩa (số chiều)

Nếu V có một cơ sở gồm n vectơ thì n được gọi là *số chiều của* V, ký hiệu $\dim V = n$, và V là không gian vectơ n chiều.

Chú ý:

- Nếu $V = \{\mathbf{0}\}$, thì ta quy ước $\dim V = 0$, và $\emptyset$ là cơ sở của V.
- Nếu $V \neq \{\mathbf{0}\}$ và V không có một cơ sở gồm hữu hạn véc tơ thì ta nói V là vô hạn chiều, ký hiệu $\dim V = \infty$.

Trường hợp $\dim V = n$ hoặc $\dim V = 0$ thì ta nói V là hữu hạn chiều.

Ví dụ

- $\dim \mathbb{R}^n = n$.
- $\dim P_n[x] = n + 1$.
- Gọi $P[x]$ là không gian véc tơ các đa thức hệ số thực. Khi đó $\dim P[x] = \infty$.
- $\dim \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) = mn$.

Ví dụ

Tìm số chiều của không gian véctơ con sau của $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{(a, a + b, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

- Xét $v = (a, a + b, b) \in W$ bất kỳ. Ta có $(a, a + b, b) = (a, a, 0) + (0, b, b) = a(1, 1, 0) + b(0, 1, 1)$.
- Như vậy W sinh bởi $S = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$.
- Chỉ ra được S là ĐLTT.
- Do vậy S là một cơ sở của W và $\dim W = 2$.

Định lý (Số chiều không gian nghiệm thuần nhất)

Gọi V là không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, với n=số ẩn=số cột của A. Khi đó

$$\dim V = n - \mathrm{rank}(A).$$

Ví dụ (CK20151)

Tìm m để không gian nghiệm của hệ sau có số chiều là 2:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - 2x_5 & = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + mx_4 + x_5 & = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 - x_5 & = 0 \end{cases}.$$

Tính chất

Cho V là một không gian véc tơ chiều n.

- Hệ bất kỳ gồm ít hơn n véc tơ đều không là hệ sinh của V.
- Hệ bất kỳ gồm nhiều hơn n đều phụ thuộc tuyến tính.

Nói riêng, mọi hệ véc tơ V mà có số véc tơ khác n đều không là cơ sở của V.

Định lý

Cho V là một không gian véc tơ chiều n.

- Hệ bất kỳ gồm đúng n véctơ và độc lập tuyến tính đều là một cơ sở của V.
- Hệ bất kỳ gồm đúng n véctơ mà là hệ sinh đều là một cơ sở của V.

Định lý (Bổ sung vào hệ ĐLTT)

Cho V là KGVT chiều n. Cho $S = \{v_1, \ldots, v_k\} \subset V$ là một hệ ĐLTT gồm k véctơ. Khi đó $k \leq n$. Nếu $k < n$ thì ta có thể tìm được $n - k$ véctơ $v_{k+1}, \ldots, v_n$ sao cho hệ $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ là một cơ sở của V.

Định lý (Bỏ bớt từ hệ sinh)

Cho V là KGVT chiều n. Cho $S = \{v_1, \ldots, v_m\} \subset V$ là một hệ sinh gồm m véctơ. Khi đó $m \geq n$. Ta có thể bỏ đi $m - n$ véctơ trong S sao cho hệ n véctơ còn lại là một cơ sở của V.

3.3.3. Tọa độ của véc tơ đối với một cơ sở

Cho $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ là một cơ sở của K-không gian véc tơ V.

Định lý - Định nghĩa

Cho $v \in V$. Khi đó tồn tại duy nhất bộ số $(c_1, c_2, \dots, c_n) \in K^n$, sao cho

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n.$$

Các số $c_1, c_2, \dots, c_n$ được gọi là các tọa độ của v đối với cơ sở $\mathcal{B}$.
Bộ số $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ được gọi là vectơ tọa độ của v đối với cơ sở $\mathcal{B}$, ký hiệu

$$(v)_{\mathcal{B}} = (c_1, c_2, \dots, c_n).$$

Ta cũng dùng ký hiệu $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$, gọi là ma trận (cột) tọa độ của v đối với cơ sở $\mathcal{B}$.

Chú ý: Tọa độ của v phụ thuộc vào thứ tự các véc tơ trong cơ sở.

Ví dụ

Trong $\mathbb{R}^2$ tìm tọa độ của $v = (1,4)$ đối với cơ sở $\mathcal{B} = \{v_1 = (1,1,), v_2 = (-1,2)\}$.

- $(v)_{\mathcal{B}} = (c_1, c_2) \Leftrightarrow v = c_1 v_1 + c_2 v_2 \Leftrightarrow (1,4) = c_1(1,1) + c_2(-1,2) \Leftrightarrow$
$$\begin{cases} c_1 - c_2 = 1 \\ c_1 + 2c_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$
- $(v)_{\mathcal{B}} = (2,1)$, hoặc $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Đổi cơ sở

Bài toán

Cho V là một K-KGVT. Giả sử có hai cơ sở $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ và $\mathcal{B}' = \{v_1', v_2', \dots, v_n'\}$. Ta muốn tìm mối liên hệ giữa $[v]_{\mathcal{B}}$ và $[v]_{\mathcal{B}'}$.

Với mỗi j, ta biểu diễn v_j' theo cơ sở $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} v_1' &= p_{11}v_1 + p_{21}v_2 + \cdots + p_{n1}v_n \\ v_2' &= p_{12}v_1 + p_{22}v_2 + \cdots + p_{n2}v_n \\ \cdots & \\ v_n' &= p_{1n}v_1 + p_{2n}v_2 + \cdots + p_{nn}v_n. \end{aligned}$$

Tức là

$$[v_1']_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{n1} \end{bmatrix}, [v_2']_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ \vdots \\ p_{n2} \end{bmatrix}, \dots, [v_n']_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} p_{1n} \\ p_{2n} \\ \vdots \\ p_{nn} \end{bmatrix}.$$

Định nghĩa (Ma trận chuyển cơ sở)

Ma trận $P = [[v_1']_{\mathcal{B}}\,[v_2']_{\mathcal{B}} \cdots [v_n']_{\mathcal{B}}] = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}$ được gọi là *ma trận chuyển từ cơ sở $\mathcal{B}$ sang cơ sở $\mathcal{B}'$*.

Định lý (công thức đổi tọa độ)

Ta có

$$[v]_{\mathcal{B}} = P[v]_{\mathcal{B}'}, \quad \forall v \in V.$$

Hơn nữa nếu Q là ma trận sao cho $[v]_{\mathcal{B}} = Q[v]_{\mathcal{B}'}, \forall v \in V$, thì $Q = P$.

Tính chất

Nếu P là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$ thì P khả nghịch và P^{-1} là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathcal{B}'$ sang $\mathcal{B}$, và

$$[v]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[v]_{\mathcal{B}}, \quad \forall v \in V.$$

Ví dụ

Cho $\mathcal{B} = \{(1,1), (-1,2)\}$ và $\mathcal{B}' = \{(1,4), (-2,1)\}$ là hai cơ sở của $\mathbb{R}^2$. Tìm ma trận chuyển P từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$.
Với $v = (-1,5)$, so sánh $[v]_{\mathcal{B}}$ và $P[v]_{\mathcal{B}'}$.

- $v_1' = (1,4)$, $[v_1']_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.
- $v_2' = (-2,1)$, $[v_2']_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
- Ma trận chuyển từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $[v]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ và

$$P[v]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = [v]_{\mathcal{B}}.$$

3.3.4. Hạng của hệ véctơ

BT1. Tìm cơ sở và số chiều của KG nghiệm của hệ thuần nhất.

Cho hệ véc tơ $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ trong KGVT V.

BT2. Tìm cơ sở và số chiều của KG sinh hệ vectơ span(S).

Định nghĩa

Một tập con T của hệ véc tơ S được gọi là *độc lập tuyến tính tối đại* (hay *cực đại*) (trong S) nếu T là độc lập tuyến tính và nếu bổ sung bất kỳ véc tơ nào của S vào hệ T thì ta được hệ phụ thuộc tuyến tính.

[Giáo trình dùng thuật ngữ: Bộ phận độc lập tuyến tính tối đại.]

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ví dụ

$\mathrm{rank}(S) = 2$

B = cơ sở chính tắc $= \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$

Xét $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ với $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 2, 3)$, $v_3 = (2, 3, 4)$, $v_4 = (0, 1, 2)$. Khi đó $T = \{v_1, v_2\}$ là một tập con ĐLTT cực đại trong S. Vì

- $\{v_1, v_2\}$ ĐLTT, và
- nếu bổ sung v_3 vào T thì tập $\{v_1, v_2, v_3\}$ không ĐLTT, và
- nếu bổ sung v_4 vào T thì tập $\{v_1, v_2, v_4\}$ không ĐLTT.

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$v_1' = (1,1,1)$ $\quad \{v_1', v_2'\}$

$v_2' = (0,1,2)$ $\quad$ cơ sở

Tương tự $\{v_1, v_3\}$ cũng là một tập con ĐLTT cực đại.

Mệnh đề

$\{v_1, v_2\}$ cơ sở của span(S)

Nếu T là một tập con ĐLTT tối đại trong S thì T là một cơ sở của $\operatorname{span}(S)$.

Hệ quả

Hai tập con độc lập tuyến tính tối đại của S đều có số véc tơ bằng nhau.

Định nghĩa (Hạng của hệ véctơ)

Số véc tơ trong một tập con độc lập tuyến tính tối đại của $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ được gọi là hạng của S, ký hiệu

$$\operatorname{rank}(S) = \operatorname{rank}\{v_1, \ldots, v_m\}.$$

Nhận xét:

- $\operatorname{rank}\{v_1, \ldots, v_m\} = r$ có nghĩa là trong hệ có r véc tơ độc lập tuyến tính, và mọi tập con của hệ gồm $r+1$ véc tơ đều phụ thuộc tuyến tính.
- $\operatorname{rank}\{v_1, \ldots, v_m\} = m \Leftrightarrow$ hệ $\{v_1, \ldots, v_m\}$ độc lập tuyến tính.
- Số chiều của không gian sinh bởi hệ véctơ

$$\underline{\dim \operatorname{span}}(S) = \underline{\operatorname{rank}}(S).$$

Ma trận tọa độ hàng (cột) của hệ véctơ

- $\mathcal{B}$ là một cơ sở của V, $\dim V = n$, $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ là một hệ véctơ trong V.
- Giả sử

$$\begin{aligned}(v_1)_{\mathcal{B}} &= (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})\\ (v_2)_{\mathcal{B}} &= (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n})\\ &\ldots\\ (v_m)_{\mathcal{B}} &= (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn})\end{aligned}$$

- $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}\end{bmatrix}$ = *ma trận tọa độ hàng* của hệ S đối với cơ sở $\mathcal{B}$.
- $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn}\end{bmatrix}$: ma trận tọa độ cột của hệ S đối với cơ sở $\mathcal{B}$.

= chuyển vị của ma trận tọa độ hàng

Mệnh đề (Tính hạng của hệ véctơ)

Cho V là kgvt n chiều, $\mathcal{B}$ là một cơ sở của V, và $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ là một hệ véctơ trong V. Gọi A là ma trận tọa độ hàng của hệ S đối với cơ sở $\mathcal{B}$. Khi đó

$$\mathrm{rank}(S) = \mathrm{rank}(A).$$

$A' = \begin{bmatrix} a'_{11} \cdots a'_{1n} \\ \cdots \end{bmatrix}$ bậc thang

Chú ý (Tìm một cơ sở của $\mathrm{span}(S)$):

- Viết ma trận tọa độ hàng A của hệ S đối với cơ sở $\mathcal{B}$ nào đó.
- Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên **hàng** đưa A về ma trận bậc thang A'. Ma trận A' có r hàng khác 0.
- Gọi $v'_1, \ldots, v'_r$ là các véctơ trong V mà nhận r hàng khác 0 này của A' làm các hàng tọa độ (đối với cơ sở $\mathcal{B}$).
- Khi đó $\{v'_1, \ldots, v'_r\}$ lập thành một cơ sở của $\mathrm{span}(S)$.

$(v'_1)_{\mathcal{B}} = (a'_{11}, \ldots, a'_{1n})$

$(v'_2)_{\mathcal{B}} = \ldots$

Thường áp dụng cho $V = \mathbb{R}^n$, $P_n[x]$ $\mathcal{B}$ = cơ sở chính tắc

Hệ quả (Một tiêu chuẩn kiểm tra cơ sở)

Cho V là kgvt n chiều, $\mathcal{B}$ là một cơ sở của V, và $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ là một hệ gồm n véctơ trong V. Gọi A là ma trận tọa độ hàng của hệ S đối với cơ sở $\mathcal{B}$. Khi đó

$$S \text{ là cơ sở của } V \Leftrightarrow \det(A) \neq 0.$$

S cơ sở $\Leftrightarrow$ S ĐLTT $\Leftrightarrow$ $\text{rank}(S) = n$ $\Leftrightarrow$ $\text{rank}(A) = n$
$(n = \dim V)$ $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$.

B PTTT $\Leftrightarrow$ $\text{rank}(B) < 3$ $\Leftrightarrow$ $\text{rank}(A) < 3$ $\Leftrightarrow$ $\det(A) = 0$.

A = MT hàng của B đv cơ sở $\mathcal{B}$ nào đó.
chọn $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ cơ sở chính tắc.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & m & -1 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$(v_1)_B = (1, 1, 1)$

C1. Tìm m s/c
$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0$
có no ko tầm thg

Ví dụ (CK20181-N2)

Trong không gian $P_2[x]$ cho các véctơ $v_1 = 1 + x + x^2$, $v_2 = 2 + mx - x^2$, $v_3 = 4 + 5x + x^2$, $v = 10 + 11x - 5x^2$.

a) Xác định m để hệ $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ phụ thuộc tuyến tính.

b) Với $m = 2$, chứng minh B lập thành cơ sở của không gian $P_2[x]$. Tìm tọa độ của véctơ v đối với cơ sở B.

- Ma trận tọa độ hàng của B đối với cơ sở chính tắc $\{1, x, x^2\}$ là
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & m & -1 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$
- B phụ thuộc tuyến tính $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(B) < 3 \Leftrightarrow \operatorname{rank}(A) < 3 \Leftrightarrow \det(A) = 0$.
- $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & m & -1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 9 - 3m.$
- B phụ thuộc tuyến tính $\Leftrightarrow 9 - 3m = 0 \Leftrightarrow m = 3$.

- Với $m = 2$, $\det(A) \neq 0$, do đó B là một cơ sở của $P_2[x]$.
- Gọi $(v)_B = (c_1, c_2, c_3)$ là tọa độ của v đối với cơ sở B.
- Khi đó $v = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + 2c_2 + 4c_3 & = 10 \\ c_1 + 2c_2 + 5c_3 & = 11 \\ c_1 - c_2 + c_3 & = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -2 \\ c_2 = 4 \\ c_3 = 1 \end{cases}$.
- $(v)_B = (-2, 4, 1)$.

$[v]_B = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

Tìm $[v]_B$.

. $\mathcal{B}$ cơ chính tắc $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ -5 \end{bmatrix}$ $\{v_1, v_2, v_3\}$ = B

. P = MT chuyển từ cs ch.tắc $\mathcal{B}$ sang c.s B

$P = [\,[v_1]_{\mathcal{B}}\ [v_2]_{\mathcal{B}}\ [v_3]_{\mathcal{B}}\,] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\boxed{[v]_{\mathcal{B}} = P\,[v]_B}$

Tổng và giao của các không gian con

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

Cho V_1 và V_2 là hai không con của kgvt V.
Tập hợp $V_1 + V_2 = \{v = v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$ là một không con của V, được gọi là *tổng* của V_1 và V_2.

Định lý

Nếu V_1 và V_2 có số chiều hữu hạn thì $V_1 + V_2$ cũng hữ hạn chiều và

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2).$$

$V_1 = \text{span}\{v_1, \dots, v_k\}$

$V_2 = \text{span}\{u_1, \dots, u_\ell\}$

$V_1 + V_2 = \text{span}\{\underline{v_1, \dots v_k, u_1, \dots u_\ell}\}$

Ví dụ (CK20181)

Trong không gian $P_3[x]$, cho hệ véctơ $u_1 = 1 + 2x - x^3$, $u_2 = 2 - x + x^2 + 2x^3$, $u_3 = -1 + x - x^2 + x^3$, $u_4 = 4 + 2x^2$ và các không gian véctơ con $V_1 = \mathrm{span}\{u_1, u_2\}$, $V_2 = \mathrm{span}\{u_3, u_4\}$. Tìm số chiều và cơ sở của các không gian con $V_1 + V_2$ và $V_1 \cap V_2$.

Một số bài tập

- (CK20151) Trong $\mathbb{R}^4$ cho các véctơ $u_1 = (1, 3, -2, 1)$, $u_2 = (-2, 3, 1, 1)$, $u_3 = (2, 1, 0, 1)$, $u = (1, -1, -3, m)$. Tìm m để $u \in \operatorname{span}\{u_1, u_2, u_3\}$.
- (CK20151-Đề 7) Trong $\mathbb{R}^4$ cho các véctơ $u_1 = (1, 0, 1, 1)$, $u_2 = (-3, 2, 1, -1)$, $u_3 = (2, 1, 0, 2)$, $u = (1, 2, 1, m)$. Tìm m để $S = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ phụ thuộc tuyến tính.
- (CK20151) Trong không gian $P_3[x]$ - các đa thức bậc không quá 3, cho các véc tơ $v_1 = 1 + x + x^2$, $v_2 = x - x^2 + x^3$, $v_3 = 1 + 2x + x^2 + x^3$, $v_4 = 2 + 2x + 4x^2$, $V_1 = \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$, $V_2 = \operatorname{span}\{v_3, v_4\}$. Tìm số chiều và một cơ sở của $V_1 + V_2$.
- (CK20181-N3) Cho các véc tơ $v_1 = (2, 1, 5, 8), v_2 = (1, -1, 3, 5), v_3 = (0, 2, 1, 6), v_4 = (-3, 5, 2, 1)$
  - a) Chứng minh v_1, v_2, v_3, v_4 lập thành một cơ sở của không gian $\mathbb{R}^4$.
  - b) Tìm tọa độ của véc tơ $v = (-5, 15, 15, 13)$ đối với cơ sở trên.
- (CK20193-N2) Cho các véc tơ $u_1 = (2, -1, 3, 0, 2)$, $u_2 = (1, -4, 2, 5, -1)$, $u_3 = (3, 2, 4, 6, 0)$, $u_4 = (7, 0, 10, 6, 4)$ trong không gian $\mathbb{R}^5$. Tìm số chiều và một cơ sở của không gian sinh bởi các véctơ này.