# Chương 4

# NỘI SUY VÀ XẤP XỈ HÀM

# I. ĐẶT BÀI TOÁN :

Để tính giá trị của một hàm liên tục bất kỳ, ta có thể xấp xỉ hàm bằng một đa thức, tính giá trị của đa thức từ đó tính được giá trị gần đúng của hàm

Xét hàm $y = f(x)$ cho dưới dạng bảng số

| $x$ | $x_o$ | $x_1$ | $x_2$ | . . . | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $y_o$ | $y_1$ | $y_2$ | . . . | $y_n$ |

- Các giá trị $x_k$, $k = 0, 1, .., n$ được sắp theo thứ tự tăng dần gọi là các điểm nút nội suy
- Các giá trị $y_k = f(x_k)$ là các giá trị cho trước của hàm tại $x_k$

**Bài toán** : xây dựng 1 đa thức $p_n(x)$ bậc $\leq n$ thoả điều kiện $p_n(x_k) = y_k$, $k=0,1,..\ n$. Đa thức này gọi là đa thức nội suy của hàm f(x).

# II. ĐA THỨC NỘI SUY LAGRANGE:

y = f(x) và bảng số

| x | $x_o$ | $x_1$ | $x_2$ | . . . | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y | $y_o$ | $y_1$ | $y_2$ | . . . | $y_n$ |

Ta xây dựng đa thức nội suy hàm f(x) trên $[a,b]=[x_0, x_n]$.

Cho hàm

Đặt

$$p_n^{(k)}(x) = \frac{\prod_{i=0, i\neq k}^{n} (x - x_i)}{\prod_{i=0, i\neq k}^{n} (x_k - x_i)}$$

$$= \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}$$

Ta có

$$p_n^{(k)}(x_i) = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

Đa thức

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} p_n^{(k)}(x)\, y_k$$

có bậc ≤ n và thỏa điều kiện $L_n(x_k) = y_k$

gọi là đa thức nội suy Lagrange của hàm f

**Ví dụ :** Cho hàm f và bảng số

| x | 0 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|
| y | 1 | -1 | 2 |

Xây dựng đa thức nội suy Lagrange và tính gần đúng f(2).

## Giải

n = 2

$$p_n^{(0)}(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(0-1)(0-3)} = \frac{1}{3}(x^2 - 4x + 3)$$

$$p_n^{(1)}(x) = \frac{(x-0)(x-3)}{(1-0)(1-3)} = -\frac{1}{2}(x^2 - 3x)$$

$$p_n^{(2)}(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(3-0)(3-1)} = \frac{1}{6}(x^2 - x)$$

Đa thức nội suy Lagrange

$$L_n(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 4x + 3) + \frac{1}{2}(x^2 - 3x) + \frac{1}{3}(x^2 - x) = \frac{7}{6}x^2 - \frac{19}{6}x + 1$$

f(2) H $L_n(2)$ = -2/3

## ❖ Cách biểu diễn khác :

Để tính giá trị của $L_n(x)$, ta lập bảng

| $x$ | $x_0$ | $x_1$ | .... | $x_n$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $x - x_0$ | $x_0 - x_1$ | .... | $x_0 - x_n$ | $D_0$ |
| $x_1$ | $x_1 - x_0$ | $x - x_1$ | .... | $x_1 - x_n$ | $D_1$ |
| … | .... | .... | .... | .... | … |
| $x_n$ | $x_n - x_0$ | $x_n - x_1$ | .... | $x - x_n$ | $D_n$ |
| | | | | | $\omega(x)$ |

tích dòng

tích đường chéo

$$L_n(x) = \omega(x)\sum_{k=0}^{n}\frac{y_k}{D_k}$$

**Ví dụ :** Cho hàm f và bảng số

| x | -9 | -7 | -4 |
|---|---|---|---|
| y | -1 | -4 | -9 |

Tính gần đúng f(-6)

Ta lập bảng tại x = -6

| **x = -6** | **-9** | **-7** | **-4** | |
|---|---|---|---|---|
| **-9** | **3** | **-2** | **-5** | **30** |
| **-7** | **2** | **1** | **-3** | **-6** |
| **-4** | **5** | **3** | **-2** | **-30** |
| | | | | **-6** |

Vậy f(-6) H $L_2$(-6) = -6(-1/30+4/6+9/30) = -5.6

**Ví dụ :** Cho hàm f và bảng số

| x | 0 | 1 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| y | 1 | 1 | 2 | -1 |

Tính gần đúng f(2)

Ta lập bảng tại x = 2

| **x = 2** | **0** | **1** | **3** | **4** | |
|---|---|---|---|---|---|
| **0** | **2** | **-1** | **-3** | **-4** | **-24** |
| **1** | **1** | **1** | **-2** | **-3** | **6** |
| **3** | **3** | **2** | **-1** | **-1** | **6** |
| **4** | **4** | **3** | **1** | **-2** | **-24** |
| | | | | | **4** |

Vậy f(2) H $L_n(2) = 4(-1/24 + 1/6 + 1/3 + 1/24) = 2$

□ **TH đặc biệt :** các điểm nút cách đều với bước $h = x_{k+1} - x_k$

Đặt $$q = \frac{(x - x_0)}{h}$$

$$L_n(x) = q(q-1)\ldots(q-n)\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k} y_k}{k!(n-k)!(q-k)}$$

**Ví dụ :** Cho hàm f và bảng số

| x | 1.1 | 1.2 | 1.3 | 1.4 |
|---|---|---|---|---|
| y | 15 | 18 | 19 | 24 |

Tính gần đúng f(1.25)

**giải**

Ta có $n = 3$ $x = 1.25$

$h = 0.1$ $q = (1.25-1.1)/0.1 = 1.5$

$$L_n(1.25) = (1.5)(0.5)(-0.5)(-1.5)[-\frac{15}{3!(1.5)} + \frac{18}{2!(0.5)} - \frac{19}{2!(-0.5)} + \frac{24}{3!(-1.5)}]$$

$$= 18.375$$

Vậy f(1.25) H 18.375

## ❖ Công thức đánh giá sai số :

Giả sử hàm f(x) có đạo hàm đến cấp n+1 liên tục trên [a,b].

Đặt $$M_{n+1} = \max_{x\in[a,b]} | f^{(n+1)}(x) |$$

Ta có công thức sai số

$$\boxed{| f(x) - L_n(x) | \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} | \omega(x) |}$$

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$$

**Ví dụ :** Cho hàm $f(x)=2^x$ trên đoạn [0,1]. Đánh giá sai số khi tính gần đúng giá trị hàm tại điểm x=0.45 sử dụng đa thức nội suy Lagrange khi chọn các điểm nút $x_o=0$, $x_1=0.25$, $x_2=0.5$, $x_3=0.75$, $x_4=1$

Giải

Ta có n = 4, $f^{(5)}(x) = (\ln 2)^5 2^x$

® $M_5 = \max |f^{(5)}(x)| = 2(\ln 2)^5$

công thức sai số

$$| f(x) - L_n(x) | \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} | \omega(x) |$$

$$= \frac{2(\ln 2)^5}{5!} | (0.45)(0.20)(-0.05)(-0.30)(-0.55) | = 0.198 x 10^{-5}$$

# III. ĐA THỨC NỘI SUY NEWTON:

## 1. Tỉ sai phân :

Cho hàm y = f(x) xác định trên $[a,b]=[x_o, x_n]$ và bảng số

| x | $x_o$ | $x_1$ | $x_2$ | . . . | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y | $y_o$ | $y_1$ | $y_2$ | . . . | $y_n$ |

Đại lượng $$f[x_k, x_{k+1}] = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}$$

gọi là tỉ sai phân cấp 1 của hàm f trên $[x_k, x_{k+1}]$

Tỉ sai phân cấp 2

$$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}] - f[x_k, x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k}$$

Bằng qui nạp ta định nghĩa tỉ sai phân cấp p

$$f[x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+p}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+p}] - f[x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+p-1}]}{x_{k+p} - x_k}$$

**Ví dụ :** Cho hàm f và bảng số

| x | 1.0 | 1.3 | 1.6 | 2.0 |
|---|---|---|---|---|
| y | 0.76 | 0.62 | 0.46 | 0.28 |

Tính các tỉ sai phân

**Giải :** ta lập bảng các tỉ sai phân

| k | $x_k$ | $f(x_k)$ | $f[x_k,x_{k+1}]$ | $f[x_k,x_{k+1},x_{k+2}]$ | $f[x_k,x_{k+1},x_{k+2},x_{k+3}]$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1.0 | 0.76 | | | |
| 1 | 1.3 | 0.62 | | | |
| 2 | 1.6 | 0.46 | | | |
| 3 | 2.0 | 0.28 | | | |

# 2. Đa thức nội suy Newton :

## ❖ Công thức Newton tiến

$$f(x) = \aleph_n^{(1)}(x) + \Re_n(x)$$

$$\aleph_n^{(1)}(x) = y_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$
$$+ f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

$$\Re_n(x) = f[x, x_0, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$$

## ❖ Công thức Newton lùi

$$\boxed{f(x) = \aleph_n^{(2)}(x) + \Re_n(x)}$$

$$\aleph_n^{(2)}(x) = y_n + f[x_{n-1}, x_n](x - x_n) + f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n](x - x_n)(x - x_{n-1}) + \ldots$$
$$+ f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_n)(x - x_{n-1}) \ldots (x - x_1)$$

$\aleph_n^{(1)}(x)$ : *da thuc noi suy Newton tien*

$\aleph_n^{(2)}(x)$ : *da thuc noi suy Newton lui*

$\Re_n(x)$ : *xac dinh sai so*

*Ta coù* $\aleph_n^{(1)}(x) = \aleph_n^{(2)}(x) = L_n(x)$

Để đánh giá sai số của đa thức nội suy Newton, ta dùng công thức sai số của đa thức nội suy Lagrange

$$|\Re_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega(x)|$$

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$$

**Ví dụ :** Cho hàm f xác định trên [0,1] và bảng số

| x | 0 | 0.3 | 0.7 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| y | 2 | 2.2599 | 2.5238 | 2.7183 |

Tính gần đúng f(0.12) bằng Newton tiến và f(0.9) bằng Newton lùi

**Giải :** ta lập bảng các tỉ sai phân

| $x_k$ | $f(x_k)$ | $f[x_k,x_{k+1}]$ | $f[x_k,x_{k+1},x_{k+2}]$ | $f[x_k,x_{k+1},x_{k+2},x_{k+3}]$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 2 | | | |
| | | 0.8663 | | Newton tiến |
| 0.3 | 2.2599 | | -0.2950 | |
| | | 0.6598 | | 0.2786 |
| 0.7 | 2.5238 | | -0.0164 | |
| | | 0.6483 | | Newton lùi |
| 1 | 2.7183 | | | |

Ta có

$$f(0.12) \approx \aleph_n^{(1)}(0.12)$$
$$= 2 + 0.8663(0.12) - 0.2950(0.12)(-0.18) + 0.2786(0.12)(-0.18)(-0.58)$$
$$= 2.1138$$

$$f(0.9) \approx \aleph_n^{(2)}(0.9)$$
$$= 2.7183 + 0.6483(-0.1) - 0.0164(-0.1)(0.2) + 0.2786(-0.1)(0.2)(0.6)$$
$$= 2.6505$$

## 3. TH các điểm nút cách đều :

Sai phân hữu hạn cấp 1 của hàm tại điểm $x_k$

$$\otimes y_k = y_{k+1} - y_k$$

Bằng qui nạp, Sai phân hữu hạn cấp p của hàm tại điểm $x_k$

$$\otimes^p y_k = \otimes(\otimes^{p-1} y_k) = \otimes^{p-1} y_{k+1} - \otimes^{p-1} y_k$$

Ta có công thức

$$f[x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+p}] = \frac{\Delta^p y_k}{p!\, h^p}$$

# Công thức Newton tiến

$$Dat\ \ q = \frac{(x - x_0)}{h}$$

$$\aleph_n^{(1)}(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!}q + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}q(q-1) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!}q(q-1)\ldots(q-n+1)$$

# Công thức Newton lùi

$$Dat\ \ p = \frac{(x - x_n)}{h}$$

$$\aleph_n^{(2)}(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!}p + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!}p(p+1) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!}p(p+1)\ldots(p+n-1)$$

**Ví dụ :** Cho hàm f và bảng số

| x | 30 | 35 | 40 | 45 |
|---|---|---|---|---|
| y | 0.5 | 0.5736 | 0.6428 | 0.7071 |

Tính gần đúng f(32) bằng Newton tiến và f(44) bằng Newton lùi

**Giải :** ta lập bảng các sai phân hữu hạn

| $x_k$ | $f(x_k)$ | $\otimes y_k$ | $\otimes^2 y_k$ | $\otimes^3 y_k$ |
|---|---|---|---|---|
| 30 | 0.5 | | | |
| | | 0.0736 | | Newton tiến |
| 35 | 0.5736 | | -0.0044 | |
| | | 0.0692 | | -0.0005 |
| 40 | 0.6428 | | -0.0049 | |
| | | 0.0643 | | Newton lùi |
| 45 | 0.7071 | | | |

- Tính gần đúng f(32) : dùng công thức Newton tiến

$$n = 3,\ \ x_o = 30,\ \ q=(32-30)/5 = 0.4$$

$$f(32) \approx \aleph_n^{(1)}(32)$$

$$= 0.5 + \frac{0.0736}{1!}(0.4) - \frac{0.0044}{2!}(0.4)(-0.6) - \frac{0.0005}{3!}(0.4)(-0.6)(-1.6)$$

$$= 0.529936$$

- Tính gần đúng f(44) : dùng công thức Newton lùi

$$n = 3,\ \ x_n = 45,\ \ p=(44-45)/5 = -0.2$$

$$f(44) \approx \aleph_n^{(2)}(44)$$

$$= 0.7071 + \frac{0.0643}{1!}(-0.2) - \frac{0.0049}{2!}(-0.2)(0.8) - \frac{0.0005}{3!}(-0.2)(0.8)(1.8)$$

$$= 0.694656$$

# IV. SPLINE bậc 3 :

Với n lớn, đa thức nội suy bậc rất lớn, khó xây dựng và khó ứng dụng.

Một cách khắc phục là thay đa thức nội suy bậc n bằng các đa thức bậc thấp (≤ 3) trên từng đoạn $[x_k, x_{k+1}]$, $k=0,1,\ldots,n-1$

# 1. Định nghĩa :

Cho hàm y=f(x) xác định trên đoạn [a,b] và bảng số

| x | $a=x_o$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_n=b$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y | $y_o$ | $y_1$ | $y_2$ | ... | $y_n$ |

Một Spline bậc 3 nội suy hàm f(x) là hàm g(x) thỏa các điều kiện sau :

(i) g(x) có đạo hàm đến cấp 2 liên tục trên [a,b]

(ii) $g(x)=g_k(x)$ là 1 đa thức bậc 3 trên $[x_k,x_{k+1}]$, $k=0,1,..,n-1$

(iii) $g(x_k) = y_k$, $k=0,1, \ldots, n$

## 2. Cách xây dựng Spline bậc 3 :

Đặt $h_k = x_{k+1} - x_k$

$g_k(x)$ là đa thức bậc 3 nên có thể viết dưới dạng :

$$g_k(x) = a_k+b_k(x-x_k)+c_k(x-x_k)^2+d_k(x-x_k)^3$$

Các hệ số $a_k$, $b_k$, $d_k$ được xác định theo các công thức :

$$a_k = y_k \qquad (1)$$

$$b_k = \frac{(y_{k+1} - y_k)}{h_k} - \frac{(c_{k+1} + 2c_k)h_k}{3} \qquad (2)$$

$$d_k = \frac{(c_{k+1} - c_k)}{3h_k} \qquad (3)$$

Hệ số $c_k$ được tính theo công thức

$$h_{k-1}c_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)c_k + h_k c_{k+1} = \frac{3(y_{k+1} - y_k)}{h_k} - \frac{3(y_k - y_{k-1})}{h_{k-1}} \quad (4)$$

$\forall k = 1, 2, \ldots, n-1$

Phương trình (4) là hệ pt tuyến tính gồm n-1 pt dùng để xác định các hệ số $c_k$.

Phương trình (4) có số ẩn = n+1 > số pt = n-1 (thiếu 2 pt) nên chưa giải được, để giải được ta cần bổ sung thêm 1 số điều kiện

❖ **Định nghĩa :**

- Spline tự nhiên là spline với điều kiện

  g”(a) = g”(b) = 0

- Spline ràng buộc là spline với điều kiện

  g’(a) = 〈,    g’(b) = ®

## 3. Spline tự nhiên :

Giải thuật xác định spline tự nhiên :

Điều kiện g”(a)=g”(b) = 0 suy ra $c_o = c_n = 0$

B1. Tính $h_k=x_{k+1}- x_k$, $k = 0, n-1$.

$a_k= y_k$, $k = 0, n$

B2. Giải hệ Ac = b tìm $c = (c_o, c_1, \ldots, c_n)^t$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \quad b=\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{3(y_2-y_1)}{h_1}-\dfrac{3(y_1-y_0)}{h_0} \\ \ldots \\ \dfrac{3(y_n-y_{n-1})}{h_{n-1}}-\dfrac{3(y_{n-1}-y_{n-2})}{h_{n-2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

B3. Tính các hệ số $b_k$, $d_k$.

$$b_k = \frac{(y_{k+1} - y_k)}{h_k} - \frac{(c_{k+1} + 2c_k)h_k}{3}, \; k = 0, 1, \ldots, n-1$$

$$d_k = \frac{(c_{k+1} - c_k)}{3h_k}$$

**Ví dụ :** Xây dựng spline tự nhiên nội suy hàm theo bảng số

| x | 0 | 2 | 5 |
|---|---|---|---|
| y | 1 | 1 | 4 |

Giải

$n = 2$

B1. $h_o = 2$, $h_1 = 3$. $a_o = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 4$

B2. Giải hệ $Ac = b$ với $c = (c_0, c_1, c_2)^t$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{3(y_2 - y_1)}{h_1} - \dfrac{3(y_1 - y_0)}{h_0} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

® $c_o = c_2 = 0$, $c_1 = 3/10$

B3. Tính các hệ số $b_k$, $d_k$.

$$b_0 = \frac{(y_1 - y_0)}{h_0} - \frac{(c_1 + 2c_0)h_0}{3} = -\frac{1}{5}$$

$$b_1 = \frac{(y_2 - y_1)}{h_1} - \frac{(c_2 + 2c_1)h_1}{3} = \frac{2}{5}$$

$$d_0 = \frac{(c_1 - c_0)}{3h_0} = \frac{1}{20}, \quad d_1 = \frac{(c_2 - c_1)}{3h_1} = -\frac{1}{30}$$

Kết luận : spline tự nhiên

$$g(x) = \begin{cases} g_0(x) = 1 - \dfrac{1}{5}x + \dfrac{1}{20}x^3 & 0 \le x \le 2 \\ g_1(x) = 1 + \dfrac{2}{5}(x-2) + \dfrac{3}{10}(x-2)^2 - \dfrac{1}{30}(x-2)^3 & 2 \le x \le 5 \end{cases}$$

**Ví dụ :** Xây dựng spline tự nhiên nội suy hàm theo bảng số

| x | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| y | 1 | 2 | 4 | 8 |

$n = 3$

B1. $h_o = h_1 = h_2 = 1$. $a_o = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 8$

B2. Giải hệ $Ac = b$ với $c = (c_0, c_1, c_2, c_3)^t$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b=\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{3(y_2-y_1)}{h_1}-\dfrac{3(y_1-y_0)}{h_0} \\ \dfrac{3(y_3-y_2)}{h_2}-\dfrac{3(y_2-y_1)}{h_1} \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_0=c_3=0 \\ 4c_1+c_2=3 \\ c_1+4c_2=6 \end{cases}$$

Giải ta được $c_o = c_3 = 0$, $c_1 = 2/5$, $c_2 = 7/5$

# B3. Tính các hệ số $b_k$, $d_k$.

$$b_0 = \frac{(y_1 - y_0)}{h_0} - \frac{(c_1 + 2c_0)h_0}{3} = \frac{13}{15}, \quad b_1 = \frac{(y_2 - y_1)}{h_1} - \frac{(c_2 + 2c_1)h_1}{3} = \frac{19}{15}$$

$$b_2 = \frac{(y_3 - y_2)}{h_2} - \frac{(c_3 + 2c_2)h_2}{3} = \frac{46}{15}$$

$$d_0 = \frac{(c_1 - c_0)}{3h_0} = \frac{2}{15}, \quad d_1 = \frac{(c_2 - c_1)}{3h_1} = \frac{1}{3}, \quad d_2 = \frac{(c_3 - c_2)}{3h_2} = -\frac{7}{15}$$

Kết luận : spline tự nhiên

$$g(x) = \begin{cases} g_0(x) = 1 + \frac{13}{15}x + \frac{2}{15}x^3 & 0 \le x \le 1 \\ g_1(x) = 2 + \frac{19}{15}(x-1) + \frac{2}{5}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 & 1 \le x \le 2 \\ g_2(x) = 4 + \frac{46}{15}(x-2) + \frac{7}{5}(x-2)^2 - \frac{7}{15}(x-2)^3 & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

# 4. Spline ràng buộc :

Điều kiện g’(a) = 〈, g’(b) = ® xác định 2 pt :

$$\begin{cases} 2h_0c_0 + h_0c_1 = 3\dfrac{y_1 - y_0}{h_0} - 3\alpha \\ h_{n-1}c_{n-1} + 2h_{n-1}c_n = 3\beta - 3\dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} \end{cases}$$

Giải thuật xác định spline ràng buộc :

B1. Tính $h_k = x_{k+1} - x_k$, k = 0, n-1.

$a_k = y_k$, k = 0, n

B2. Giải hệ Ac = b tìm $c = (c_o, c_1, \ldots, c_n)^t$

$$A = \begin{pmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3\frac{y_1 - y_0}{h_0} - 3\alpha \\ \frac{3(y_2 - y_1)}{h_1} - \frac{3(y_1 - y_0)}{h_0} \\ \ldots \\ \frac{3(y_n - y_{n-1})}{h_{n-1}} - \frac{3(y_{n-1} - y_{n-2})}{h_{n-2}} \\ 3\beta - 3\frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} \end{pmatrix}$$

B3. Tính các hệ số $b_k$, $d_k$.

như spline tự nhiên

**Ví dụ :** Xây dựng spline ràng buộc nội suy hàm theo bảng số

| x | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| y | 1 | 2 | 1 |

với điều kiện g'(0)=g'(2) = 0

Giải

n = 2

B1. $h_o = h_1 = 1$. $a_o = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 1$

B2. Giải hệ Ac = b với c = $(c_0, c_1, c_2)^t$

$$A = \begin{pmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 \\ 0 & h_1 & 2h_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 3\dfrac{y_1 - y_0}{h_0} - 3\alpha \\ \dfrac{3(y_2 - y_1)}{h_1} - \dfrac{3(y_1 - y_0)}{h_0} \\ 3\beta - 3\dfrac{y_2 - y_1}{h_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow c_0 = 3, c_1 = -3, c_2 = 3$$

B3. Tính các hệ số $b_k$, $d_k$.

$$b_0 = \frac{(y_1 - y_0)}{h_0} - \frac{(c_1 + 2c_0)h_0}{3} = 0$$

$$b_1 = \frac{(y_2 - y_1)}{h_1} - \frac{(c_2 + 2c_1)h_1}{3} = 0$$

$$d_0 = \frac{(c_1 - c_0)}{3h_0} = -2, \quad d_1 = \frac{(c_2 - c_1)}{3h_1} = 2$$

Kết luận : spline ràng buộc

$$g(x) = \begin{cases} g_0(x) = 1 + 3x^2 - 2x^3 & 0 \le x \le 1 \\ g_1(x) = 2 - 3(x-1)^2 + 2(x-1)^3 & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

# V. BÀI TOÁN XẤP XỈ THỰC NGHIỆM :

Trong thực tế, các giá trị $y_k$ được xác định thông qua thực nghiệm hay đo đạc nên thường thiếu chính xác. Khi đó việc xây dựng một đa thức nội suy đi qua tất cả các điểm $M_k(x_k, y_k)$ cũng không còn chính xác

Bài toán xấp xỉ thực nghiệm : là tìm hàm f(x) xấp xỉ bảng $\{(x_k,y_k)\}$ theo phương pháp bình phương cực tiểu :

$$\boxed{g(f) = \sum (f(x_k) - y_k)^2 \ dat \min}$$

Hàm f tổng quát rất đa dạng. Để đơn giản, ta tìm hàm f theo dạng :

$$f(x) = A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x) + \ldots$$

Các hàm $f_1(x)$, $f_2(x)$ … có thể là hàm lượng giác, lũy thừa, mũ hay loga …

# 1. Trường hợp $f(x) = Af_1(x) + Bf_2(x)$ :

Phương trình bình phương cực tiểu có dạng

$$g(A,B) = \sum (Af_1(x_k) + Bf_2(x_k) - y_k)^2$$

Bài toán qui về tìm cực tiểu của hàm 2 biến g(A,B)

Điểm dừng

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial A} = 2\sum (Af_1(x_k) + Bf_2(x_k) - y_k)\, f_1(x_k) = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial B} = 2\sum (Af_1(x_k) + Bf_2(x_k) - y_k)\, f_2(x_k) = 0 \end{cases}$$

Suy ra

$$\boxed{\begin{cases} (\sum f_1^2(x_k))A + (\sum f_1(x_k)\, f_2(x_k))B = \sum y_k\, f_1(x_k) \\ (\sum f_1(x_k)\, f_2(x_k))A + (\sum f_2^2(x_k))B = \sum y_k\, f_2(x_k) \end{cases}}$$

**Ví dụ :** Tìm hàm f(x) = A + Bx xấp xỉ bảng số

| x | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 |

Theo pp BPCT

Giải hệ pt

$$\begin{cases} 10A + \left(\sum x_k\right)B = \sum y_k \\ \left(\sum x_k\right)A + \left(\sum x_k^2\right)B = \sum x_k y_k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10A + 29B = 39 \\ 29A + 109B = 140 \end{cases}$$

Nghiệm A = 0.7671, B=1.0803

Vậy f(x) = 0.7671+1.0803x

**Ví dụ :** Tìm hàm f(x)=Acosx+Bsinx xấp xỉ bảng số

| x | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | 1.45 | 1.12 | 0.83 | 1.26 | 1.14 |

Theo pp BPCT

Giải hệ pt

$$\begin{cases} (\sum \cos^2 x_k)A + (\sum \sin x_k \cos x_k)B = \sum y_k \cos x_k \\ (\sum \sin x_k \cos x_k)A + (\sum \sin^2 x_k)B = \sum y_k \sin x_k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2.2703A - 0.0735B = -0.3719 \\ -0.0735A + 2.7297B = 0.0533 \end{cases}$$

Nghiệm A = -0.1633, B=0.0151

Vậy f(x) = -0.1633cosx+0.0151sinx

**Ví dụ :** Tìm hàm $f(x)=Ax^2+B\sin x$ xấp xỉ bảng số

| x | 1.3 | 1.5 | 1.8 | 2.0 | 2.4 | 2.6 | 2.7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 2.7 | 1.8 | 3.51 | 3.1 | 3.78 | 3.9 | 4.32 |

Theo pp BPCT

Giải hệ pt

$$\begin{cases}(\sum x_k^4)A+(\sum x_k^2\sin x_k)B=\sum y_k x_k^2\\(\sum x_k^2\sin x_k)A+(\sum \sin^2 x_k)B=\sum y_k\sin x_k\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}166.4355A+21.1563B=112.015\\21.1563A+\ \ 4.6033B=17.0441\end{cases}$$

Nghiệm A = 0.4867, B=1.4657

Vậy $f(x) = 0.4867x^2 + 1.4657\sin x$

## 2. Trường hợp

## $f(x) = Af_1(x) + Bf_2(x) + Cf_3(x)$:

Phương trình bình phương cực tiểu có dạng

$$g(A,B,C) = \sum (Af_1(x_k) + Bf_2(x_k) + Cf_3(x_k) - y_k)^2$$

Bài toán qui về tìm cực tiểu của hàm 3 biến g(A,B,C)

Điểm dừng

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial A} = 2\sum (Af_1(x_k) + Bf_2(x_k) + Cf_3(x_k) - y_k)\, f_1(x_k) = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial B} = 2\sum (Af_1(x_k) + Bf_2(x_k) + Cf_3(x_k) - y_k)\, f_2(x_k) = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial C} = 2\sum (Af_1(x_k) + Bf_2(x_k) + Cf_3(x_k) - y_k)\, f_3(x_k) = 0 \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{cases} (\sum f_1^2(x_k))A + (\sum f_1(x_k)\, f_2(x_k))B + (\sum f_1(x_k)\, f_3(x_k))C = \sum y_k f_1(x_k) \\ (\sum f_1(x_k)\, f_2(x_k))A + (\sum f_2^2(x_k))B + (\sum f_2(x_k)\, f_3(x_k))C = \sum y_k f_2(x_k) \\ (\sum f_1(x_k)\, f_3(x_k))A + (\sum f_2(x_k)\, f_3(x_k))B + (\sum f_3^2(x_k))C = \sum y_k f_3(x_k) \end{cases}$$

**Ví dụ :** Tìm hàm $f(x) = A + Bx+Cx^2$ xấp xỉ bảng số

| x | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 4.12 | 4.18 | 6.23 | 8.34 | 8.38 | 12.13 | 18.32 |

Theo pp BPCT

Ta có số điểm n= 7

Giải hệ pt

$$\begin{cases} nA+(\sum x_k)B+(\sum x_k^2)C=\sum y_k \\ (\sum x_k)A+(\sum x_k^2)B+(\sum x_k^3)C=\sum x_k y_k \\ (\sum x_k^2)A+(\sum x_k^3)B+(\sum x_k^4)C=\sum x_k^2 y_k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7A+19B+65C=61.70 \\ 19A+65B+253C=211.04 \\ 65A+253B+1061C=835.78 \end{cases}$$

Nghiệm A = 4.3, B=-0.71, C=0.69

Vậy $f(x) = 4.3-0.71x+0.69x^2$