Nhập môn Kỹ thuật Truyền thông

Bài 1: Tổng quan

PGS. Tạ Hải Tùng

Mục đích khóa học

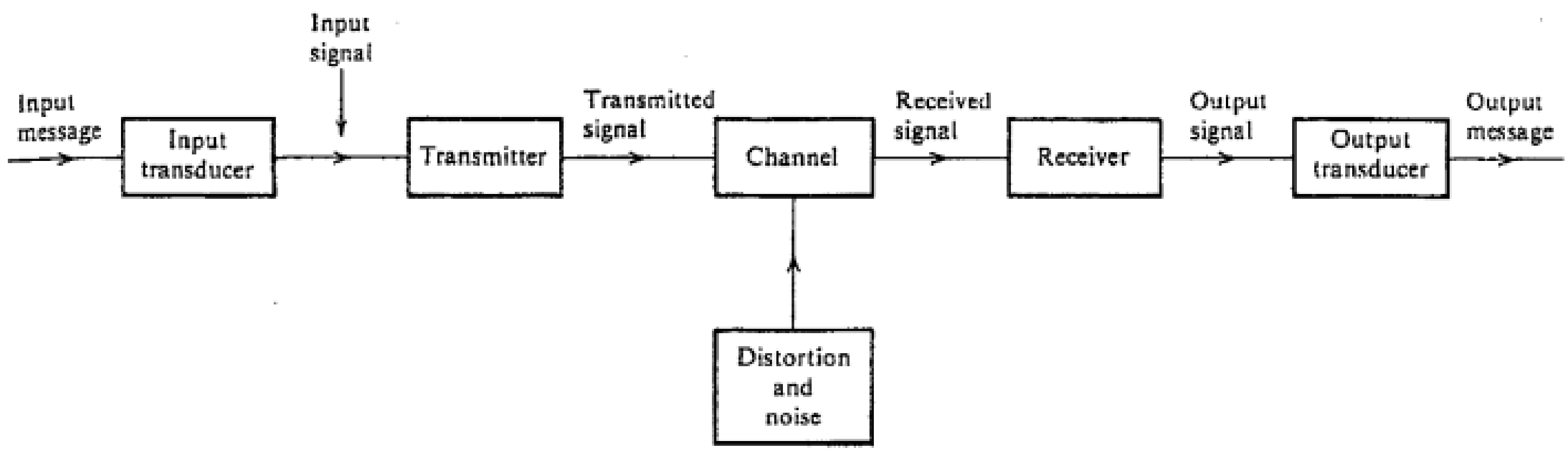
- Giới thiệu các nguyên lý cơ bản của các hệ thống truyền thông, cũng như các phương pháp được sử dụng trong điều chế và giải điều chế tín hiệu để mang thông tin từ một nguồn đến đích.

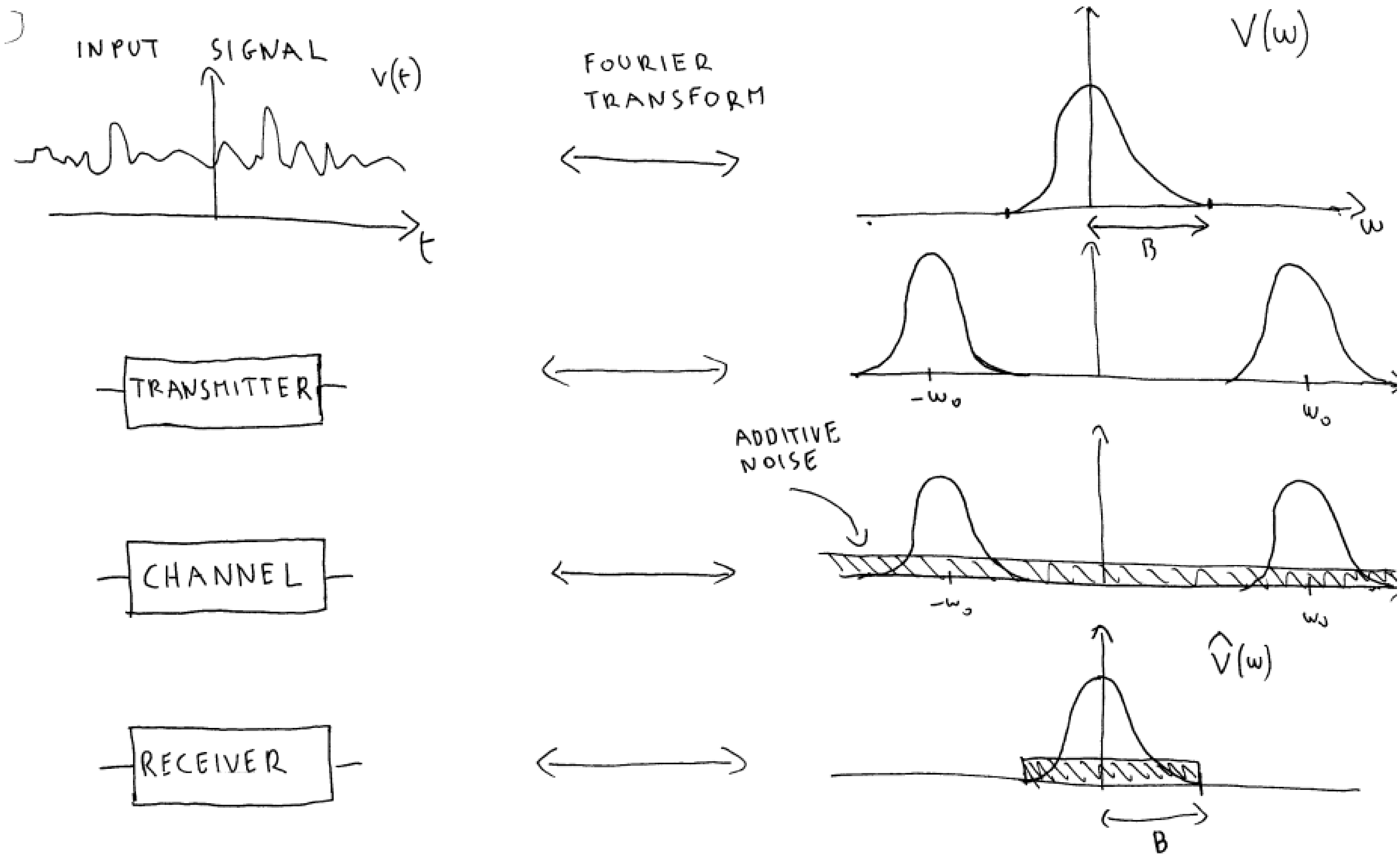
Vd: các hệ thống truyền thông

Các hệ thống truyền thông

- Nguồn tin: nơi khởi tạo một bản tin, ví dụ tiếng nói của con người, một bức ảnh, hoặc một tin nhắn.
- Bản tin được chuyển đổi bởi một bộ chuyển đổi đầu vào (transducer) thành một dạng sóng điện (tín hiệu băng tần cơ sở - baseband)
- Bộ phát: điều chỉnh băng tần cơ sở để truyền thông hiệu quả.
- Kênh truyền là một môi trường để truyền lan tín hiệu, ví dụ cáp đồng trục, cáp quang, đường liên kết vô tuyến.
- Máy thu xử lý tín hiệu nhận được để hoàn tác các sửa đổi được thực hiện tại máy phát và kênh.
- Bộ chuyển đổi đầu ra chuyển tín hiệu thành dạng ban đầu.

Mô hình một hệ thống truyền thông



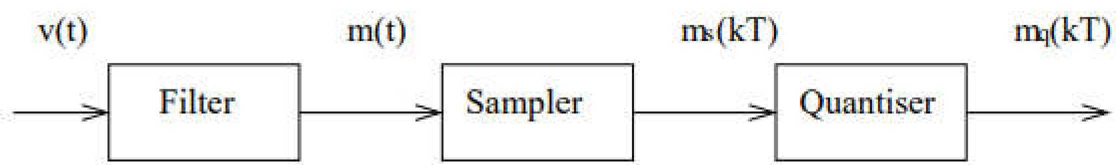

INPUT SIGNAL
v(t)
t
FOURIER TRANSFORM
V(ω)
ω
B
TRANSMITTER
−ω₀
ω₀
ADDITIVE NOISE
CHANNEL
RECEIVER
V̂(ω)

Các bản tin số và bản tin tương tự

- Bản tin có thể ở dạng số hoặc tương tự
- Bản tin số được xây dựng với một số lượng ký hiệu hữu hạn. Ví dụ: thông điệp điện báo mã Morse.
- Bản tin tương tự được đặc trưng bởi dữ liệu có giá trị thay đổi liên tục. Ví dụ, nhiệt độ của một địa điểm nhất định.

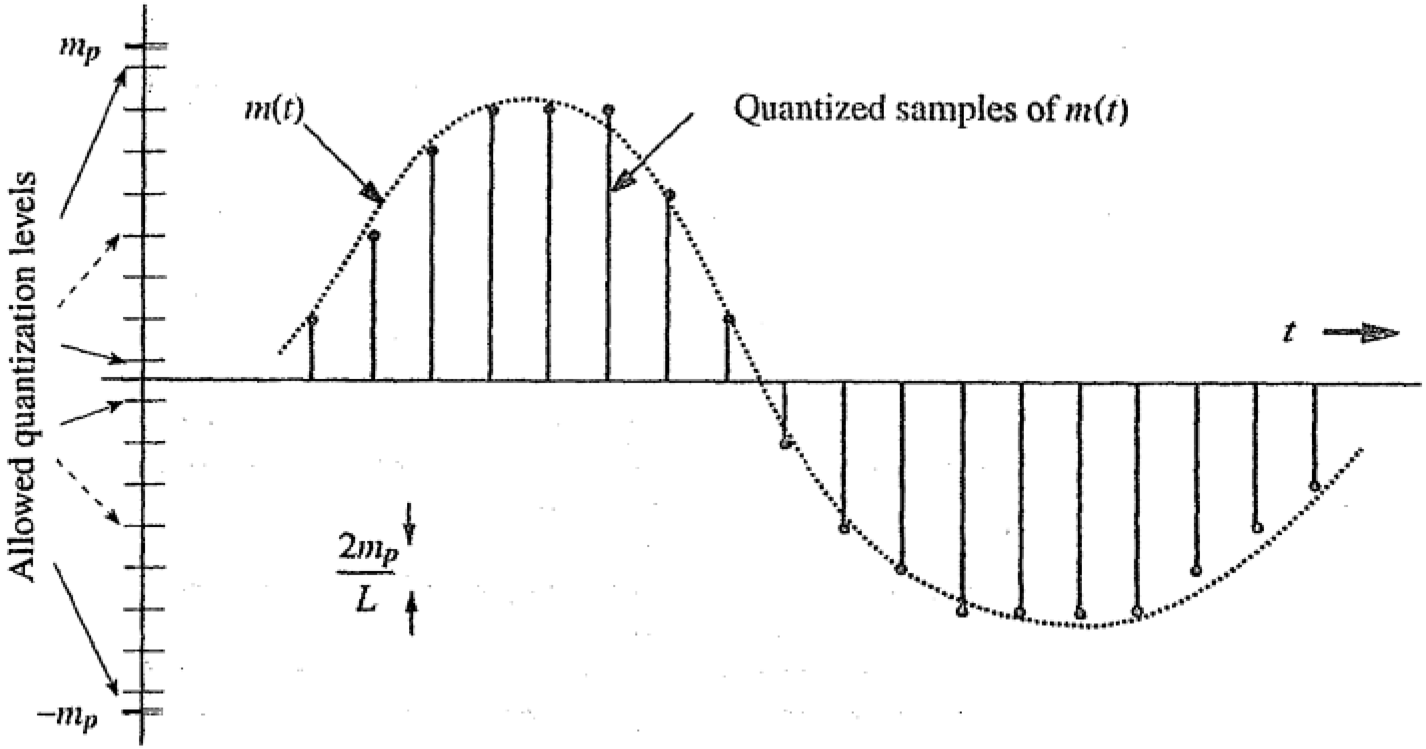
Truyền thông kỹ thuật số

- Tín hiệu kỹ thuật số có khả năng kháng tạp âm tốt hơn tín hiệu tương tự.
- Tín hiệu tương tự được chuyển đổi thành tín hiệu kỹ thuật số thông qua sử dụng các bộ chuyển đổi tương tự sang số (Analog to Digital Converter - ADC).



Chuyển đổi tương tự sang số

- Lấy mẫu tín hiệu



- Đầu tiên, tín hiệu m (t) được lấy mẫu trong miền thời gian.
- Biên độ của các mẫu tín hiệu $m_s(kT)$ được phân chia thành một số hữu hạn các mức (lượng tử hóa).

Định lý lấy mẫu

- Định lý lấy mẫu phát biểu rằng: nếu tần số cao nhất trong phổ tín hiệu là B, tín hiệu có thể được tái tạo lại từ các mẫu của nó được lấy với tần số lấy mẫu không nhỏ hơn 2B.

Nhập môn Kỹ thuật Truyền thông

Bài 2: Tín hiệu

PGS. Tạ Hải Tùng

Nội dung

- Giới thiệu chung về tín hiệu,
- Phân loại tín hiệu,
- Một vài loại tín hiệu đặc biệt.

Tín hiệu

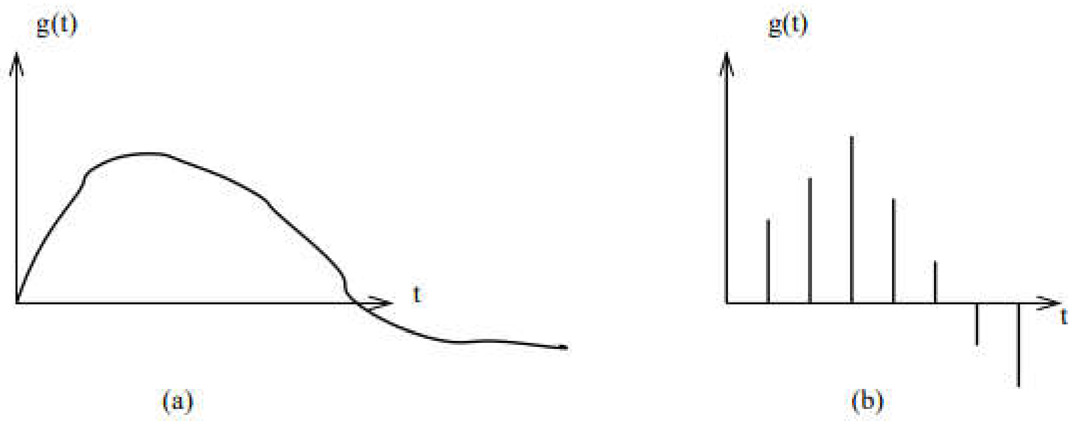
- Tín hiệu là một tập của thông tin hoặc dữ liệu
- Ví dụ:
  - Tín hiệu truyền hình, tín hiệu điện thoại,
  - Doanh số hàng tháng của một tập đoàn,
  - Giá cuối ngày của thị trường chứng khoán.
- Đối tượng quan tâm của môn học là các tín hiệu là hàm của thời gian.
- Các câu hỏi:
  - Làm thế nào để chúng ta đo một tín hiệu?
  - Làm thế nào để phân biệt hai tín hiệu khác nhau?

Phân loại tín hiệu

- Tín hiệu liên tục vs. Tín hiệu rời rạc (theo thời gian)
- Tín hiệu tương tự vs. Tín hiệu số
- Tín hiệu tuần hoàn vs. Tín hiệu không tuần hoàn
- Tín hiệu công suất vs. Tín hiệu năng lượng
- Tín hiệu ngẫu nhiên (xác suất) vs. Tín hiệu xác định

Tín hiệu liên tục vs. Tín hiệu rời rạc (theo thời gian)

- Một tín hiệu có giá trị được xác định ở mọi thời điểm t là một tín hiệu thời gian liên tục.
- Một tín hiệu có giá trị chỉ được xác định ở các giá trị rời rạc của t là tín hiệu rời rạc



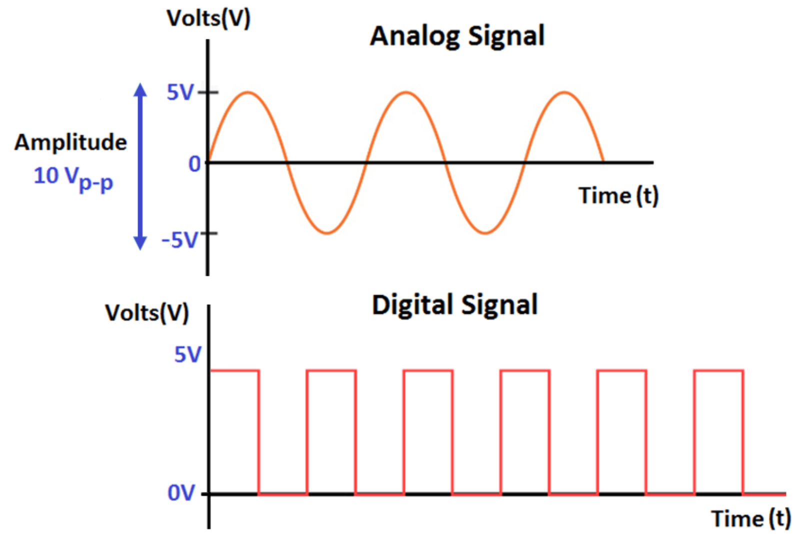
- Có thể thu được tín hiệu thời gian rời rạc bằng cách lấy mẫu tín hiệu thời gian liên tục.
- Trong một số trường hợp, có thể 'hoàn tác' thao tác lấy mẫu. Tức là có thể lấy lại tín hiệu thời gian liên tục từ tín hiệu thời gian rời rạc.

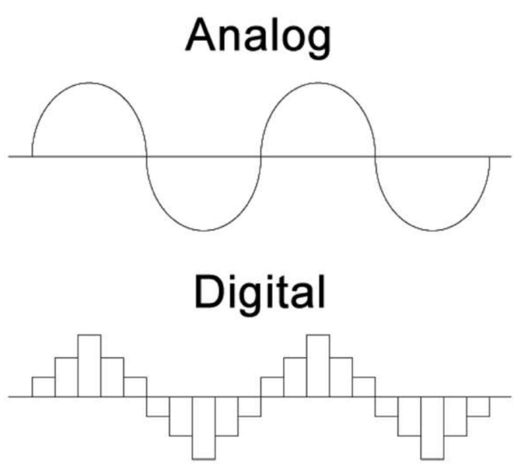
Định lý lấy mẫu:

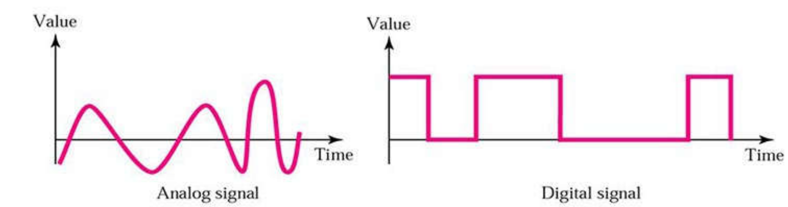
- Định lý lấy mẫu phát biểu rằng nếu tần số cao nhất trong phổ tín hiệu là B, tín hiệu có thể được tái tạo lại từ các mẫu của nó được lấy với tốc độ không nhỏ hơn 2B mẫu mỗi giây.

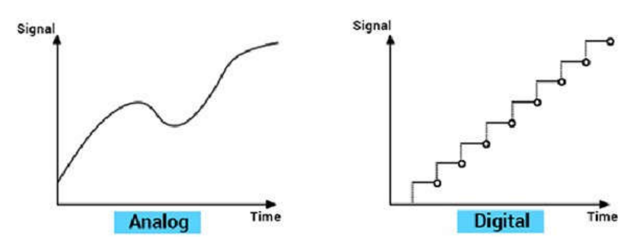
Tín hiệu tương tự và Tín hiệu số

- Tín hiệu có biên độ có thể nhận bất kỳ giá trị nào trong một dải liên tục là tín hiệu tương tự.
- Khái niệm về tín hiệu tương tự và tín hiệu số khác với khái niệm về tín hiệu thời gian liên tục và thời gian rời rạc.









- Người ta có thể thu được tín hiệu kỹ thuật số từ tín hiệu tương tự bằng cách sử dụng bộ lượng tử hóa.
- Biên độ của tín hiệu tương tự được chia thành L khoảng. Mỗi mẫu (giá trị tín hiệu) sẽ được đưa về các mức gần nhất tương ứng.
- Lượng tử hóa là một quá trình gây mất mát thông tin.
- Lưu ý: Người ta có thể thu được tín hiệu số thời gian rời rạc bằng cách lấy mẫu và lượng tử hóa một tín hiệu tương tự thời gian liên tục.

Tín hiệu tuần hoàn và tín hiệu không tuần hoàn

- Một tín hiệu g(t) được goi là tuần hoàn nếu với T_0 là một hằng số dương bất kỳ, ta có:
- $g(t) = g(t+T_0)$ với mọi t
- Một tín hiệu là không tuần hoàn nếu không thỏa mãn tính chất trên.
- Một số hàm tuần hoàn phổ biến:

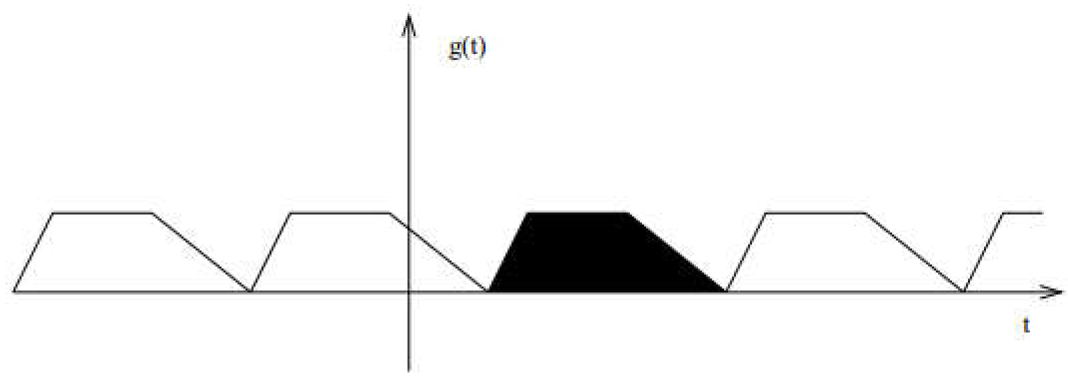
$$\sin(w_0 t), \cos(w_0 t), e^{j\omega_0 t}$$

Với $w_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ và T_0 chu kỳ của hàm tuần hoàn.

Lưu ý: $e^{j\omega_0 t} = \cos(w_0 t) + j\sin(w_0 t)$

Tín hiệu tuần hoàn

- Một tín hiệu tuần hoàn g(t) có thể được tạo ra bằng cách kéo dài tuần hoàn bất kỳ đoạn nào của g (t) trong khoảng thời gian T_0.



Tín hiệu năng lượng và Tín hiệu công suất

Khái niệm năng lượng:

- Năng lượng tín hiệu E_g của g(t) được định nghĩa:

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t)dt.$$

- Trong trường hợp tín hiệu g(t) biểu diễn dạng phức, thì năng lượng được tính như sau:

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} g^*(t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt.$$

- Một tín hiệu g(t) là tín hiệu năng lượng nếu

$$E_g < \infty.$$

Công suất

- Điều kiện cần để năng lượng là hữu hạn nếu biên độ tín hiệu sẽ tiến tới 0 theo thời gian.
- Trong trường hợp năng lượng không hữu hạn (ví dụ: tín hiệu tuần hoàn), công suất sẽ là độ đo phù hợp hơn năng lượng:

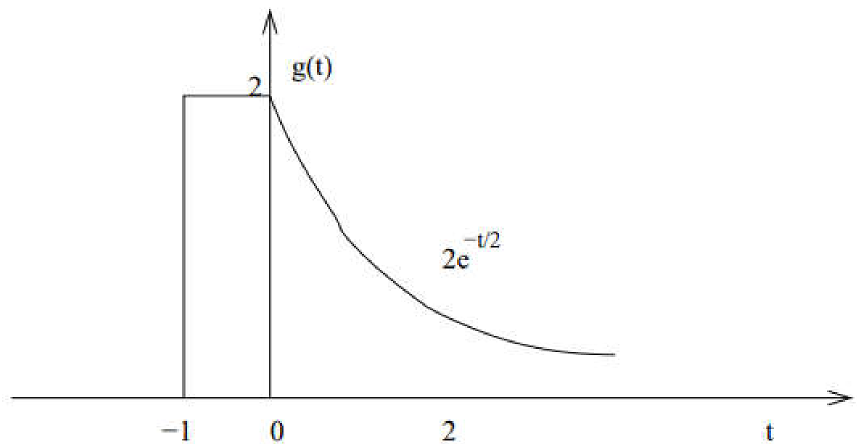
$$P_g = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |g(t)|^2 dt$$

- Một tín hiệu là tín hiệu công suất nếu:

$$0 < \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |g(t)|^2 dt < \infty$$

- Một tín hiệu không thể vừa là tín hiệu công suất vừa là tín hiệu năng lượng.

Ví dụ tín hiệu năng lượng



Năng lượng của tín hiệu:

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t)dt = \int_{-1}^{0} (2)^2 dt + \int_{0}^{\infty} 4e^{-t} dt = 4 + 4 = 8.$$

Ví dụ tín hiệu công suất

Giả sử $g(t) = Acos(\omega_0 t + \theta)$, Công suất của tín hiệu là:

$$\begin{aligned}
P_g &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A^2 cos^2(\omega_0 t + \theta)dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \frac{A^2}{2}[1 + cos(2\omega_0 t + 2\theta)]dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{2T}\int_{-T/2}^{T/2} dt + \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{2T}\int_{-T/2}^{T/2} cos(2\omega_0 t + 2\theta)]dt \\
&= A^2/2
\end{aligned}$$

Công suất của tín hiệu tuần hoàn

- Công suất của tín hiệu tuần hoàn g(t) với chu kỳ T_0 là:

$$P_g = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} |g(t)|^2 dt$$

Tín hiệu ngẫu nhiên và tín hiệu xác định

- Một tín hiệu mà mô tả vật lý được biết đến hoàn toàn là một tín hiệu xác định.
- Một tín hiệu chỉ được biết đến dưới dạng mô tả xác suất là một tín hiệu ngẫu nhiên.

Một vài phép toán với tín hiệu

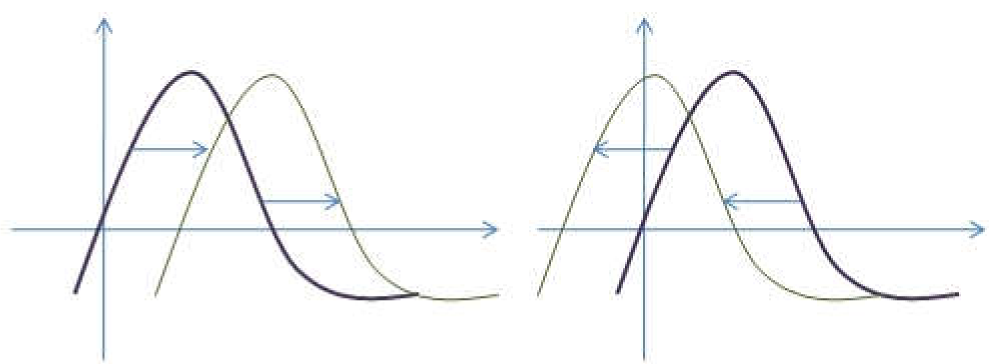
- Dịch tín hiệu theo thời gian

Tín hiệu x(t) và phiên bản của nó nhưng bị làm trễ đi T(s) được gọi là y(t) sẽ được biểu diễn như sau:

$$y(t+T) = x(t), \text{ hoặc } y(t) = x(t-T)$$

Nếu T là số (+) thì dịch sang phải (phiên bản trễ)

Nếu T là số (-) thì dịch sang trái (phiên bản sớm)

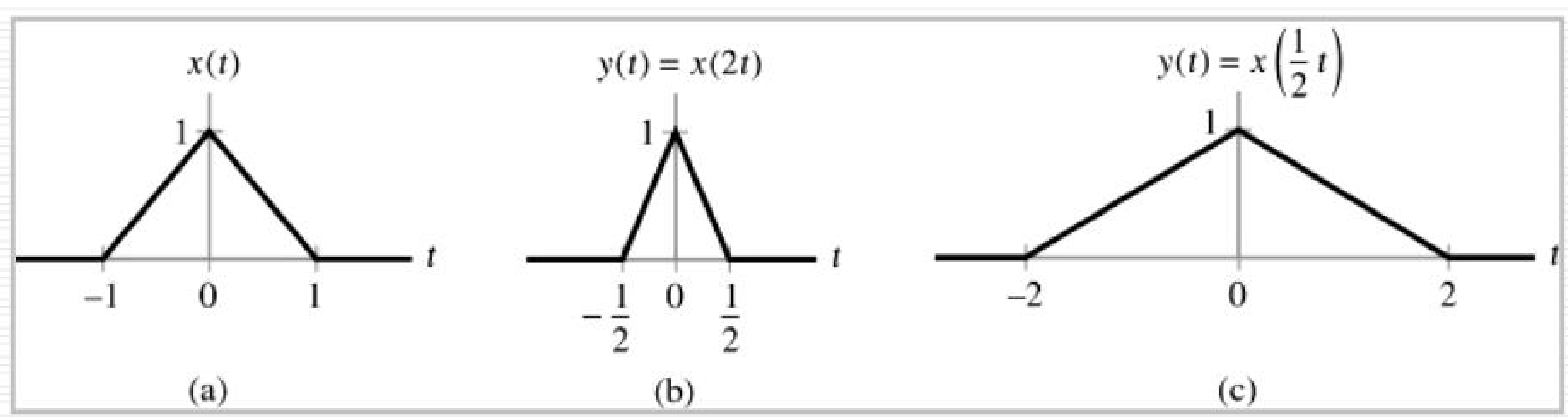


- Mở rộng tín hiệu theo thời gian (time scaling)
  - "Time scaling" là việc mở rộng hoặc thu hẹp tín hiệu theo trục thời gian.
  - Giả thiết đã có tín hiệu x(t), phiên bản tín hiệu thu hẹp theo thời gian k lần được định nghĩa như sau:

$$y(t/k) = x(t) \text{ hoặc } y(t) = x(kt)$$

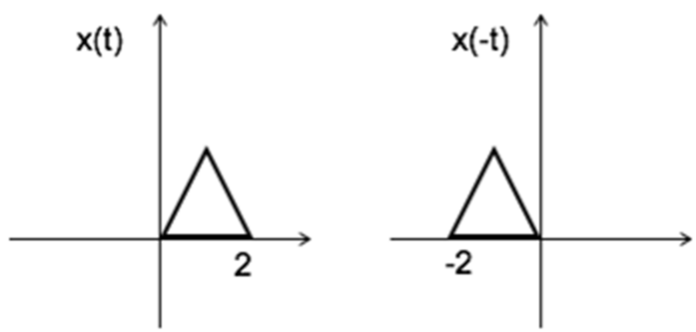
Nếu k>1: y(t) là phiên bản nén của x(t)

Nếu 0<k<1: y(t) là phiên bản mở rộng của x(t)



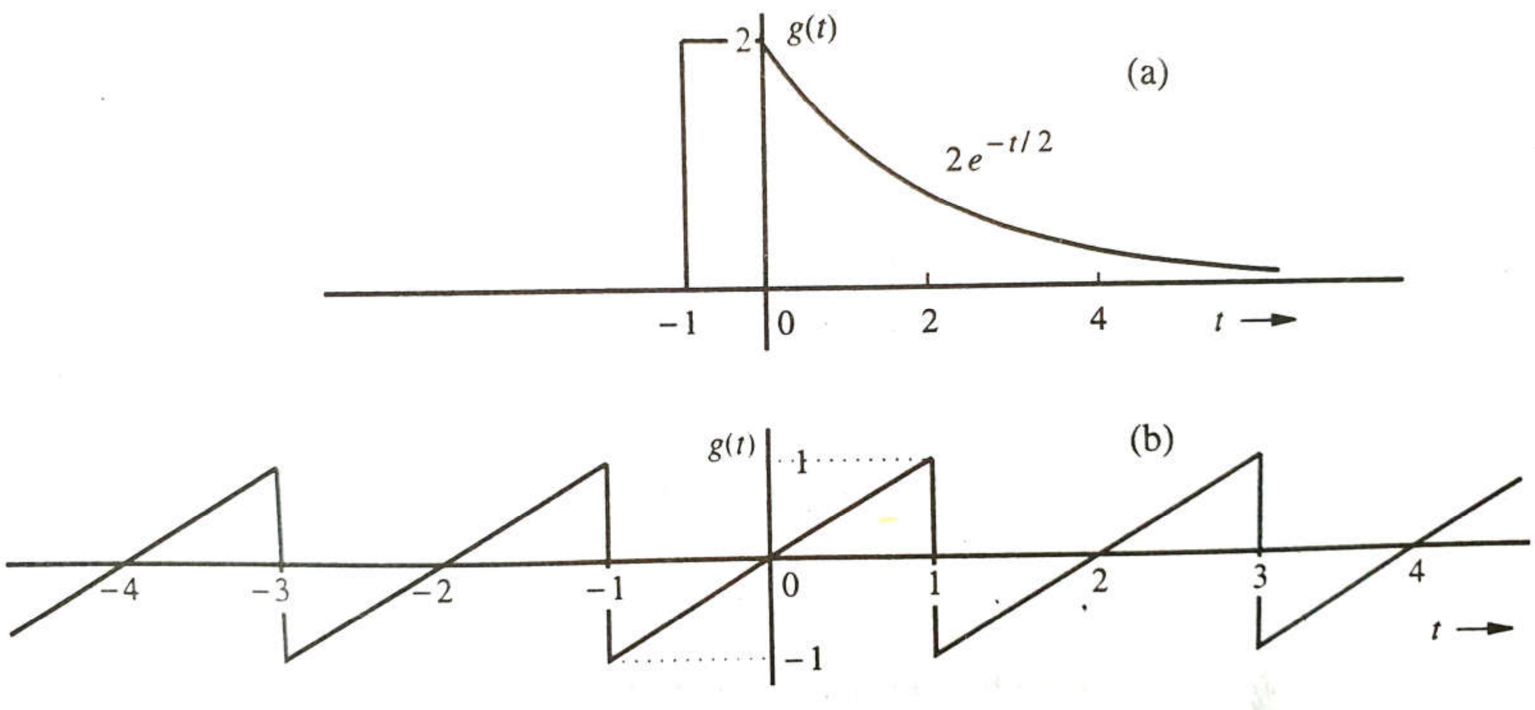
Đảo ngược theo thời gian (Time Inversion)

- Là trường hợp đặc biệt của Time Scaling với k = -1

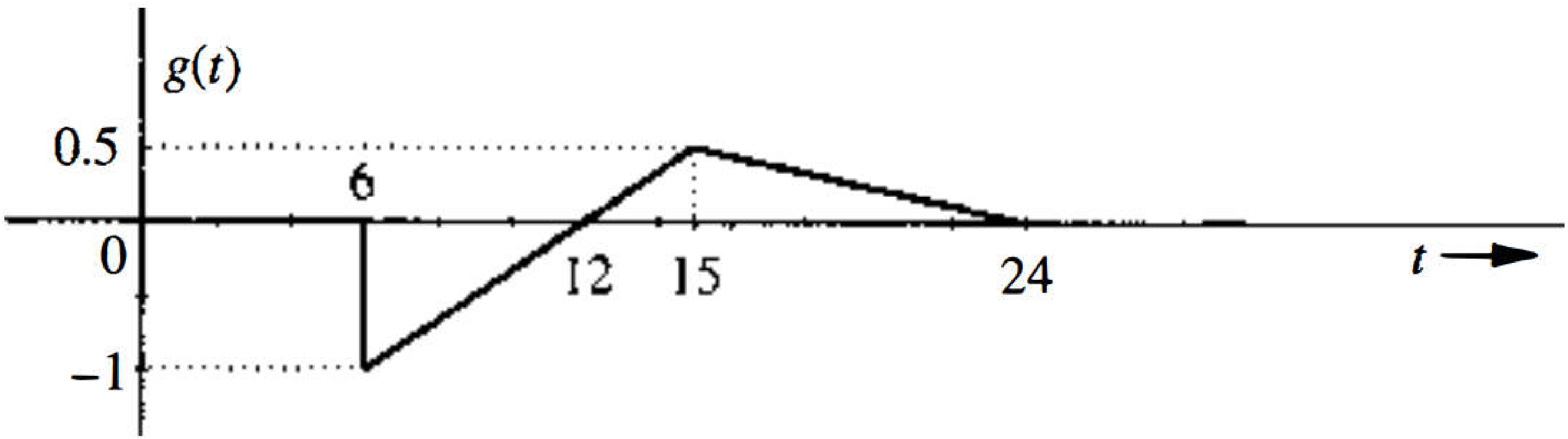


Bài tập

- Xác định độ đo phù hợp cho các tín hiệu sau



Bài tập



- Tín hiệu g(t) như trên hình, vẽ các tín hiệu sau:
  - a) g(t-4)
  - b) g(t+6)
  - c) g(3t)
  - d) g(6-t)

Nhập môn Kỹ thuật Truyền thông

Bài 3: Các hệ thống truyền thông kỹ thuật số

PGS. Tạ Hải Tùng

1. Các khái niệm cơ bản về các hệ thống truyền thông kỹ thuật số

Giới thiệu các hệ thống truyền thông kỹ thuật số

Hệ thống truyền thông kỹ thuật số:

Truyền các chuỗi ký hiệu thuộc về một «bảng chữ cái» rời rạc.

Ví dụ:

- **Chữ viếtHuman writing**
- **Mã điện báo Morse**
- **GSM**
- **CD/DVD**

Introduction to digital transmission systems

Chúng ta sẽ tập trung vào các hệ thống được đặc trung bởi 2 tính chất sau:

1. **Bảng chữ cái rời rạc = Bảng chữ cái nhị phân {0,1}**
   → Các chuỗi dữ liệu nhị phân

2. **Kênh truyền = kênh không dây hoặc có dây**

Introduction to digital transmission systems

Nếu các thông tin tương tự cần truyền
(ví dụ: voice, video)

Lấy mẫu và lượng tử hóa (mã hóa nguồn)

Các chuỗi dữ liệu nhị phân

Introduction to digital transmission systems

Các hệ thống truyền thông kỹ thuật số:

- GSM/UMTS
- Telephone Modem
- Optical Fibers
- Wired and Wireless LAN
- GPS/Galileo
- ...

Một số đại lượng chính đặc trưng các hệ thống truyền thông kỹ thuật số

- **Tốc độ truyền bit (bit-rate)**
- **Băng thông (bandwidth)**
- **Công suất (power)**
- **Xác suất lỗi (error probability)**
- **Độ phức tạp (complexity)**

Tốc độ truyền dòng bit (bit-rate)

Các chuỗi dữ liệu nhị phân được đặc trưng bởi "tốc độ" của nó

BIT-RATE R_b [bps]

= số bit được truyền trong 1 giây

Băng thông (bandwidth)

Các chuỗi dữ liệu nhị phân

Muốn được truyền qua một kênh có dây hay không dây thì đều phải được chuyển sang một dạng sóng $s(t)$

Băng thông

Dạng sóng $s(t)$ **được đặc trưng bởi phổ mật độ công suất của nó** $G_s(f)$

BANDWIDTH B **[Hz] = Khoảng tần số chứa "phần có ý nghĩa quan trọng" của** $G_s(f)$

Công suất

Công suất tín hiệu nhận được S [W] [dBm]

Phụ thuộc vào công suất truyền tín hiệu

Và được đặc trưng bởi tỷ số công suất tín hiệu / công suất tạp âm (signal-to-noise ratio) tại phía bộ thu

Xác suất xảy ra lỗi

Các chuỗi dữ liệu nhị phân $u_T=(u_T[i])$

Dạng sóng truyền $s(t)$

Dạng sóng nhận $r(t) \neq s(t)$ **(trong các kênh thực tế, không lý tưởng)**

Các chuỗi dữ liệu nhị phân nhận được $u_R=(u_R[i])$

Xác suất xảy ra lỗi

Các chuỗi dữ liệu nhị phân truyền $u_T=(u_T[i])$

Các chuỗi dữ liệu nhị phân nhận được $u_R=(u_R[i])$

Xác xuất xảy ra lỗi bit

$$P(u_R[i] \neq u_T[i])$$

Độ phức tạp (complexity)

COMPLEXITY = Độ phức tạp về mặt kỹ thuật của một phương án thực hiện cụ thể

Các đại lượng khác

Độ trễ D [s]

Sự khác nhau giữa các thời điểm truyền và nhận

Vào (bộ phát, transmitter - TX) ⇨ Ra (bộ thu, receiver, RX)

Ví dụ thực tế

Xây dựng một hệ thống truyền thông kỹ thuật số với các điều kiện:

- **tốc độ truyền BIT-RATE R_b=34 Mbps**
- **trên vùng tần số có độ rộng BANDWIDTH B=20 MHz, có tần số trung tâm f_0=18 GHz**
- **đảm bảo tối thiểu BER = 10^{-7} trong điều kiện công suất tín hiệu nhận được POWER S=-40 dBm**
- **với độ trễ tối đa DELAY D=500 ms**
- **với tối thiểu độ phức tạp COMPLEXITY (chi phí)**

2. Chùm tín hiệu, gán nhãn, và dạng sóng truyền

Các chuỗi dữ liệu nhị phân: khái niệm

Bảng chữ cái nhị phân $Z_2 = \{0,1\}$

Các chuỗi dữ liệu nhị phân:

$$\underline{\mathrm{u}}_{\mathrm{T}} = (u_T[0], u_T[1], \ldots, u_T[i], \ldots) \qquad i \in N \qquad u_T[i] \in Z_2$$

Ví dụ: $\underline{\mathrm{u}}_{\mathrm{T}} = (1101001\ldots)$

$$\underline{u}_T = (u_T[0], u_T[1], \ldots, u_T[i], \ldots)$$

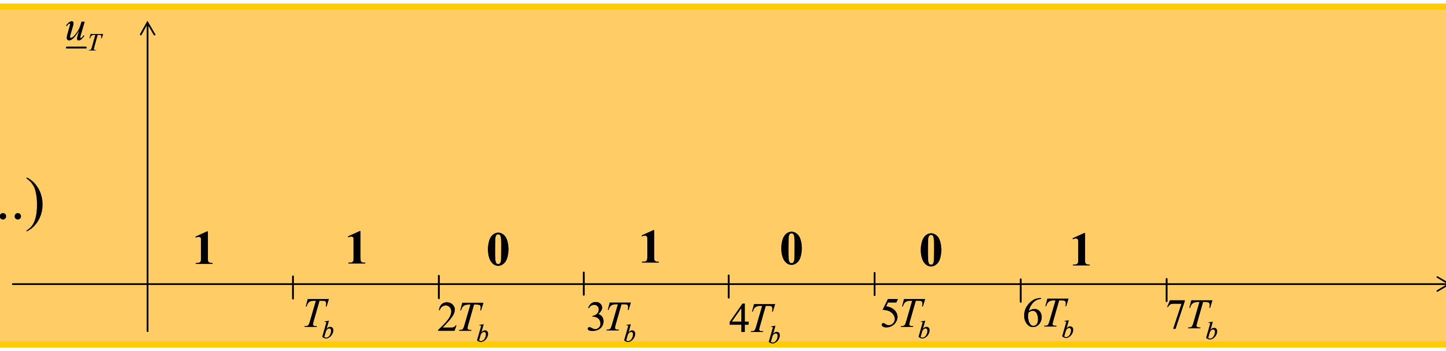
Tốc độ dòng bit R_b [bps]

Mỗi bit $u_T[i]$ sẽ tồn tại trong khoảng $T_b=1/R_b$ giây

$$(iT_b \le t < (i+1)T_b)$$

Ví dụ:

$\underline{u}_T = (1101001\ldots)$

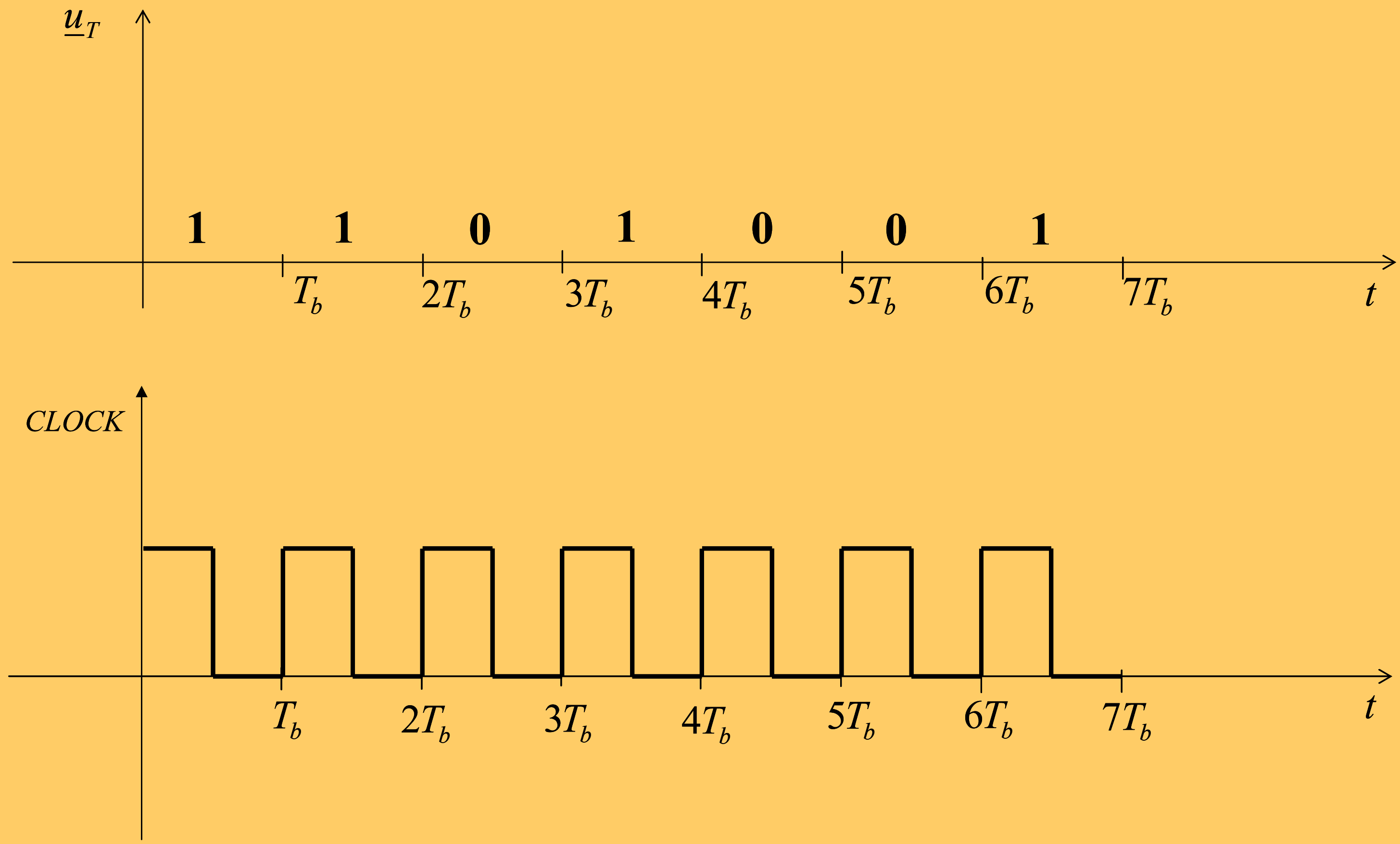


Một chuỗi dữ liệu nhị phân $\underline{u}_T$ được đặc trưng như sau:

- Các bit dữ liệu của nó $u_T[i]$
- Xung đồng hồ truyền, với tần số R_b

Ví dụ

$\underline{u}_T = (1101001...)$



$$\underline{\mathrm{u}}_{\mathrm{T}} = (u_T[0], u_T[1], \ldots, u_T[i], \ldots)$$

Các chuỗi dữ liệu nhị phân ngẫu nhiên lý tưởng

- **Các bit của nó độc lập thống kê với nhau** $\mathbf{P}(u_T[i] \,|(u_T[j]\,) = \mathbf{P}(u_T[i])$
- **Xác suất bit 0 và bit 1 là tương đồng** $\mathbf{P}(u_T[i] = 0) = \mathbf{P}(u_T[i] = 1)\ \forall i$

Các dạng sóng truyền (transmitted waveforms)

Chuỗi dữ liệu nhị phân: $\underline{u}_T$

Dạng sóng truyền thực sự *s(t)*

= hàm thực theo thời gian

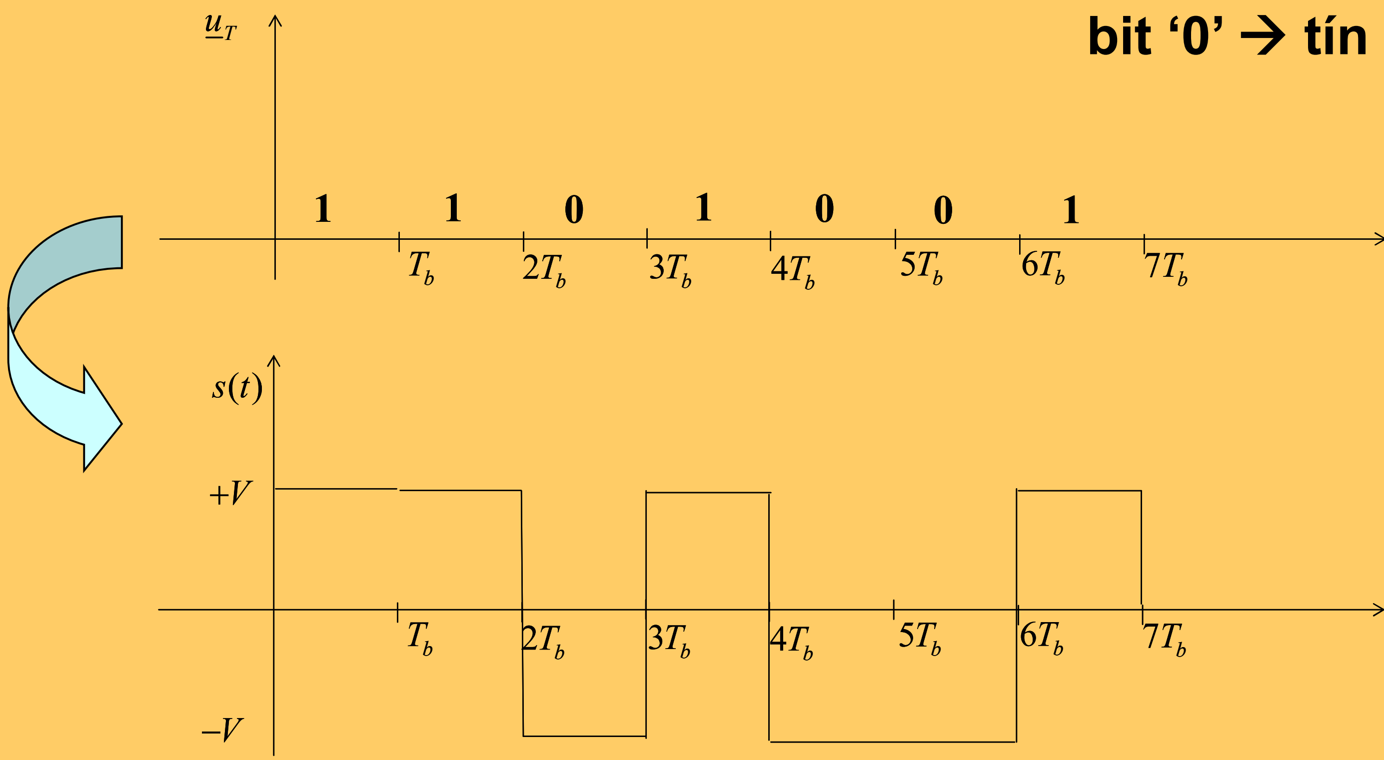
Ví dụ

$\underline{u}_T = (1101001\ldots)$

Biểu diễn NRZ lưỡng cực

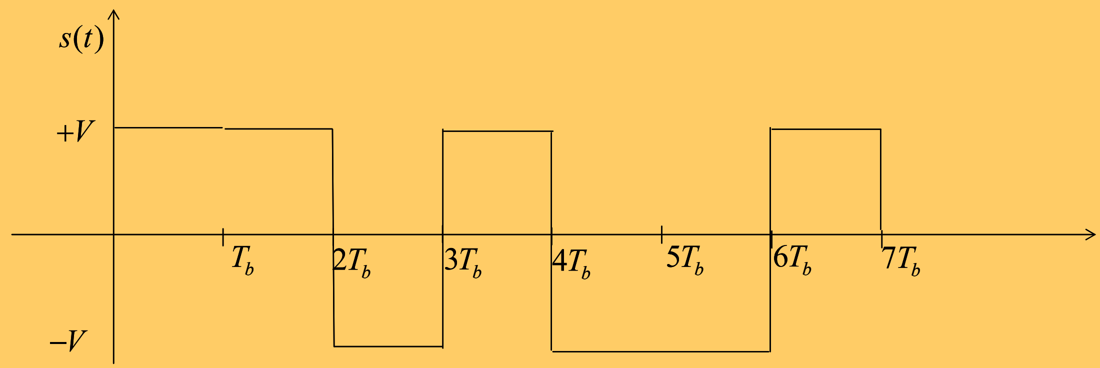
bit '1' → tín hiệu +V

bit '0' → tín hiệu -V

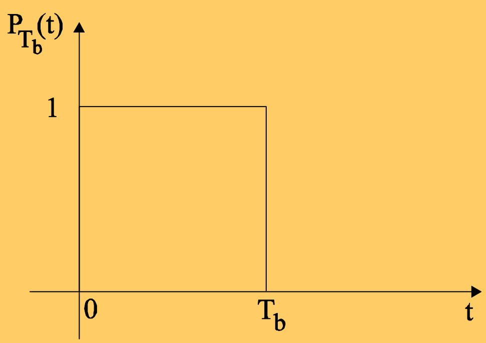


Ví dụ

$\underline{u}_T = (1101001\ldots)$



Hình chữ nhật trong khoảng thời gian T_b



Hai tín hiệu tồn tại

$$u_T[i] = 1 \rightarrow +VP_{T_b}(t - iT_b)$$

$$u_T[i] = 0 \rightarrow -VP_{T_b}(t - iT_b)$$

Chùm tín hiệu

Chùm tín hiệu M

$$M = \{ s_1(t) , \ \dots , \ s_i(t), \ \dots, \ s_m(t) \}$$

Số phần tử: $|M| = m = 2^k$ tín hiệu

$$M = \{ s_1(t) , \ldots , s_i(t), \ldots, s_m(t) \}$$

<u>Giả thiết</u>: tất cả tín hiệu $s_i(t)$ có miền thời gian hữu hạn

$$0 \leq t < T = kT_b$$

Ví dụ

$$M = \{s_1(t) = +VP_T(t), s_2(t) = -VP_T(t)\} \qquad m = 2$$

$$\begin{aligned} M = \{&s_1(t) = VP_T(t)\cos(2\pi f_0 t), s_2(t) = VP_T(t)\sin(2\pi f_0 t), \\ &s_3(t) = -VP_T(t)\cos(2\pi f_0 t), s_4(t) = -VP_T(t)\sin(2\pi f_0 t)\} \end{aligned}$$

$$m = 4$$

Không gian Hamming

Vector nhị phân k-bit

$$\underline{v} = (u_0, \ldots, u_i, \ldots u_{k-1}) \qquad u_i \in Z_2$$

Không gian Hamming

$$H_k = \{\underline{v} = (u_0, \ldots, u_i, \ldots, u_{k-1}) \;\; u_i \in Z_2\}$$

Số phần tử: $|H_k| = 2^k$ vectors

Ví dụ

$$H_1 = \{\ (0)\ (1)\ \} = Z_2$$

$$H_2 = \{\ (00)\ (01)\ (10)\ (11)\ \}$$

$$H_3 = \{\ (000)\ (001)\ (010)\ (011)\ (100)\ (101)\ (110)\ (111)\ \}$$

Gán nhãn nhị phân

Chùm tín hiệu M: số tín hiệu thuộc chùm là: 2^k

Không gian Hamming H_k: số phần tử 2^k

Ánh xạ 1-1

Gán nhãn nhị phân

$$\boxed{\begin{aligned} e: \quad & H_k \leftrightarrow M \\ & \underline{v} \in H_k \leftrightarrow s(t) = e(\underline{v}) \in M \end{aligned}}$$

Ví dụ

$$M = \{s_1(t) = +VP_T(t), s_2(t) = -VP_T(t)\}$$

m=2 → *k=1*

$H_1 = \{ (0) , (1) \}$

$$e : H_1 \leftrightarrow M$$

$$(0) \leftrightarrow s_1(t)$$

$$(1) \leftrightarrow s_2(t)$$

Ví dụ

$$M = \{s_1(t) = VP_T(t)\cos(2\pi f_0 t), s_2(t) = VP_T(t)\sin(2\pi f_0 t),$$
$$s_3(t) = -VP_T(t)\cos(2\pi f_0 t), s_4(t) = -VP_T(t)\sin(2\pi f_0 t)\}$$

m=4 → *k=2*

$$e : H_2 \leftrightarrow M$$

$$(00) \leftrightarrow s_1(t)$$
$$(01) \leftrightarrow s_2(t)$$
$$(10) \leftrightarrow s_3(t)$$
$$(11) \leftrightarrow s_4(t)$$

$$H_2 = \{\ (00)\ ,\ (01)\ ,\ (11)\ ,\ (10)\ \}$$

Dạng sóng truyền

Giả thiết:

- Chuỗi nhị phân $\underline{u}_T$
- Chùm tín hiệu M
- Gán nhãn nhị phân e

Xây dựng dạng sóng truyền $s(t)$
là một nhiệm vụ khá đơn giản

M có số phần tử 2^k ⇨ $e: H_k \leftrightarrow M$

$\boxed{\text{chia } \underline{u}_T \text{ thành các vector } k\text{-bit}}$

$$\underline{\boldsymbol{u}}_T = (u_T[0], u_T[1], \ldots, u_T[i], \ldots)$$

$$\underline{\boldsymbol{u}}_T = \left(\underline{v_T[0]}, \underline{v_T[1]}, \ldots, \underline{v_T[n]}, \ldots\right)$$

Vector [0] ⇨ $\underline{v}_T[0] = (u_T[0], \ldots, u_T[k-1])$

Vector [*n*] ⇨ $\underline{v}_T[n] = (u_T[nk], \ldots, u_T[(n+1)k-1])$

Mỗi bit tồn tại trong T_b giây

Mỗi vector k-bit tồn tại trong $kT_b=T$ giây

$$\underline{\boldsymbol{u}}_T = (\underbrace{\underline{v_T[0]}}_{T}, \underbrace{\underline{v_T[1]}}_{T}, \ldots, \underbrace{\underline{v_T[n]}}_{T}, \ldots)$$

Mỗi tín hiệu $s_i(t) \in M$ tồn tại trong T giây

$$\boxed{0 \leq t < T = kT_b}$$

Transmitted waveform

Gán nhãn nhị phân $\boxed{e : H_k \leftrightarrow M}$

$$\underline{u}_T = \Big(\underbrace{\underline{v_T[0]}}_{T} \;,\; \underbrace{\underline{v_T[1]}}_{T} \;,\; \ldots \;,\; \underbrace{\underline{v_T[n]}}_{T} \;,\; \ldots \Big)$$

$$s(t) = \Big(\overbrace{s[0](t)}^{T} \;,\; \overbrace{s[1](t)}^{T} \;,\; \ldots \;,\; \overbrace{s[n](t)}^{T} \;,\; \ldots \Big)$$

Dóng hàng đúng
(Correct alignment): $s[n](t) = e(\underline{v}_T[n])$???

Vấn đề: chùm tín hiệu

$$M = \{\, s_1(t)\ ,\ \ldots\ ,\ s_i(t),\ \ldots,\ s_m(t)\ \}$$

Được định nghĩa trong

$$0 \le t < T = kT_b$$

Nhưng chỉ có vector nhị phân đầu tiên được biểu diễn

$$\underline{\boldsymbol{u}}_T = (\ \underbrace{\underline{v_T[0]}}_{T}\ ,\ \underbrace{\underline{v_T[1]}}_{T}\ ,\ \ldots\ ,\ \underbrace{\underline{v_T[n]}}_{T}\ ,\ \ldots\ )$$

$$s(t) = (\ s[0](t)\ ,\ s[1](t)\ ,\ \ldots\ ,\ s[n](t)\ ,\ \ldots\ )$$

Dóng hàng chính xác đạt được $s[n](t) = T_n(e(\underline{v}_T[n]))$

Nếu

$$T_n(y(t)) = y(t - nT)$$

Gán nhãn nhị phân $\boxed{e : H_k \leftrightarrow M}$

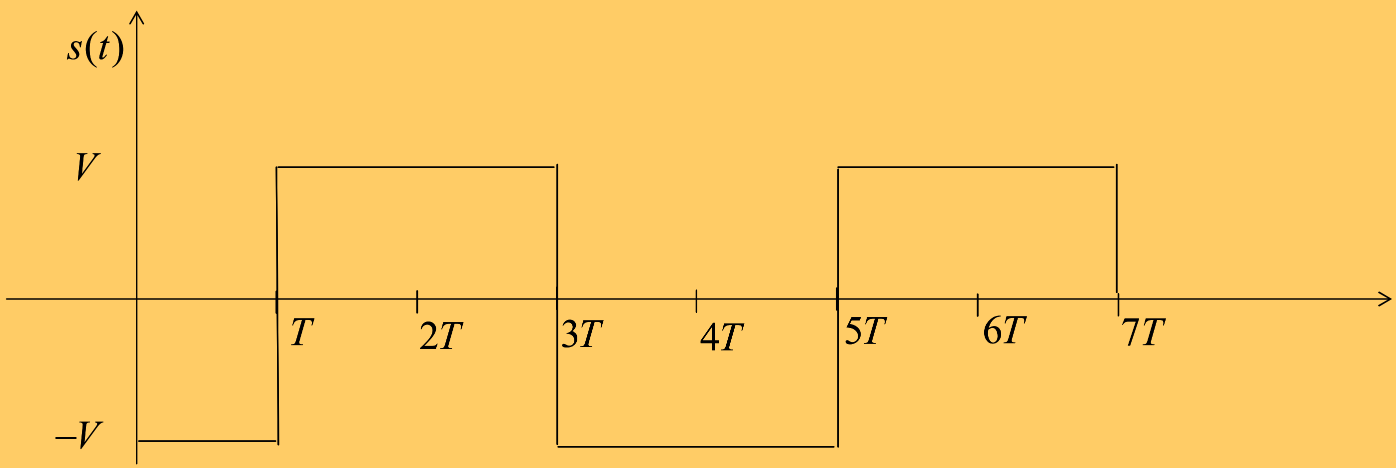
$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\underline{\boldsymbol{u}}_T & = & (& \underbrace{\underline{v_T[0]}}_{T} & , & \underbrace{\underline{v_T[1]}}_{T} & , & \dots & , & \underbrace{\underline{v_T[n]}}_{T} & , & \dots &) \\
 & & & \Big\downarrow e & & \Big\downarrow e & & & & \Big\downarrow e & & & \\
s(t) & = & (& \overbrace{s[0](t)}^{T} & , & \overbrace{s[1](t)}^{T} & , & \dots & , & \overbrace{s[n](t)}^{T} & , & \dots &)
\end{array}$$

Dóng hàng đúng $\quad s[n](t) = T_n(e(\underline{v}_T[n]))$

Ví dụ:

$\underline{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{T}}$=(0110011...) R_b=1 Mbps

$$M = \{s_1(t) = -VP_T(t)\ ,\ s_2(t) = +VP_T(t)\}$$



$$\boxed{T = T_b = 1\,\mu s}$$

Bài tập

$\underline{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{T}}$=(10011100…) R_b=1 Mbps

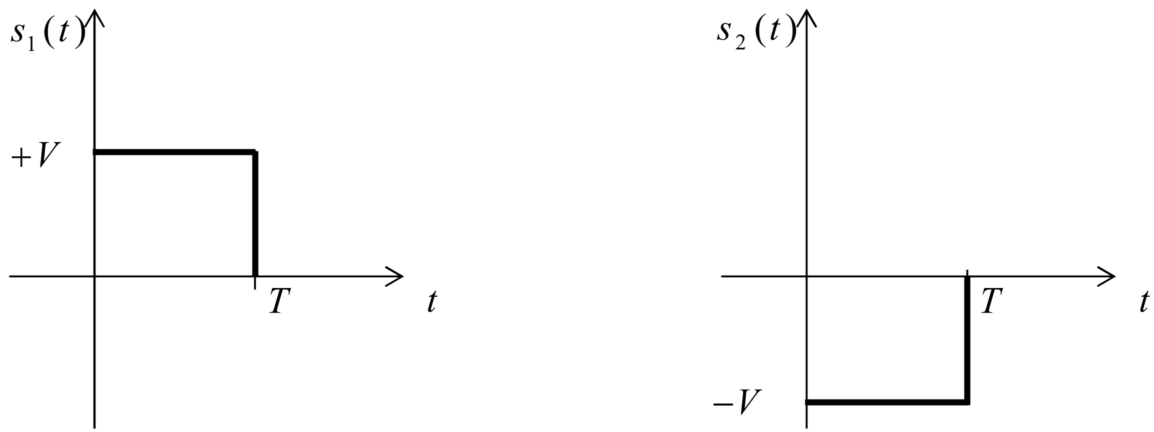
$$M = \{s_1(t) = VP_T(t)\cos(2\pi f_0 t), s_2(t) = VP_T(t)\sin(2\pi f_0 t),$$
$$s_3(t) = -VP_T(t)\cos(2\pi f_0 t), s_4(t) = -VP_T(t)\sin(2\pi f_0 t)\}$$

(f_0=1MHz)

Ví dụ các chùm tín hiệu trong thực tế

NRZ lưỡng cực (Non Return to Zero)

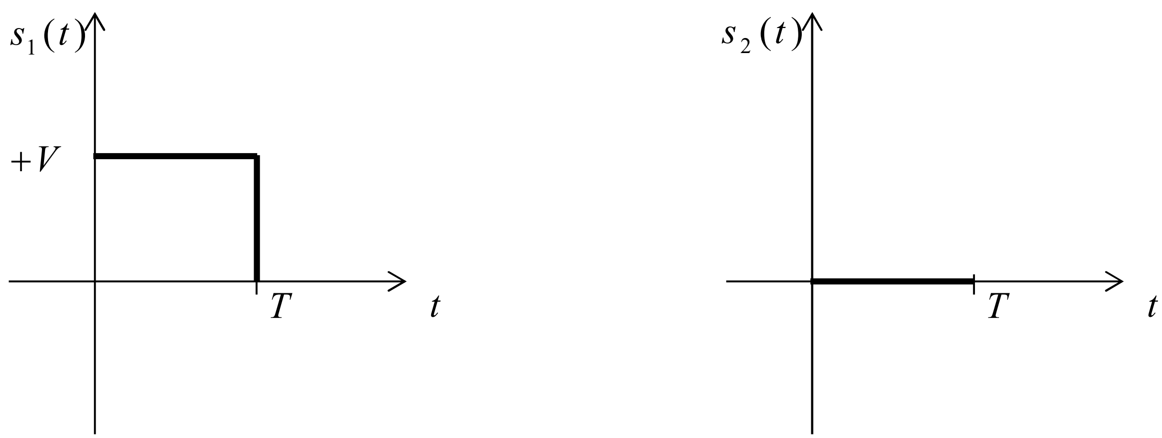
$$M = \{s_1(t) = +VP_T(t), s_2(t) = -VP_T(t)\}$$



$$m = 2 \rightarrow k = 1 \rightarrow T = T_b$$

NRZ đơn cực (Non Return to Zero)

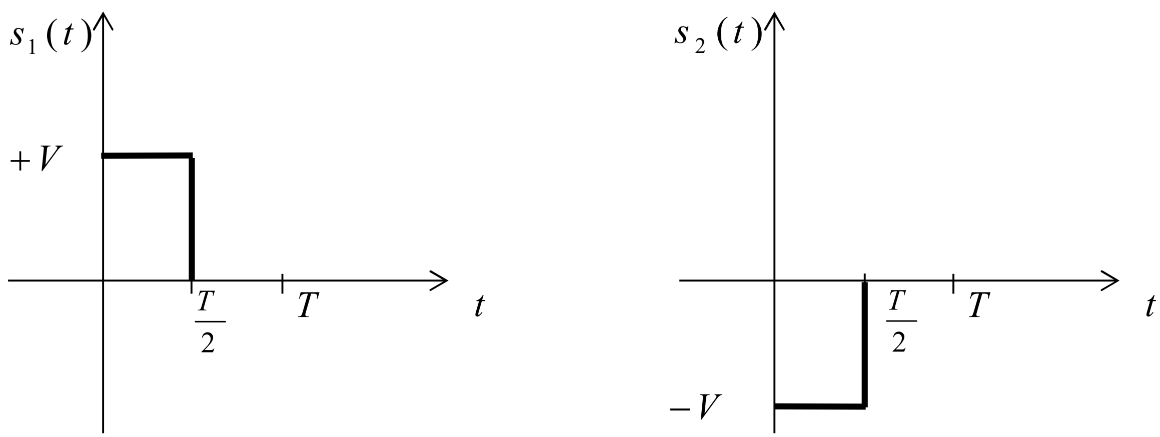
$$M = \{s_1(t) = +VP_T(t), s_2(t) = 0\}$$



$$m = 2 \rightarrow k = 1 \rightarrow T = T_b$$

RZ lưỡng cực (Return to Zero)

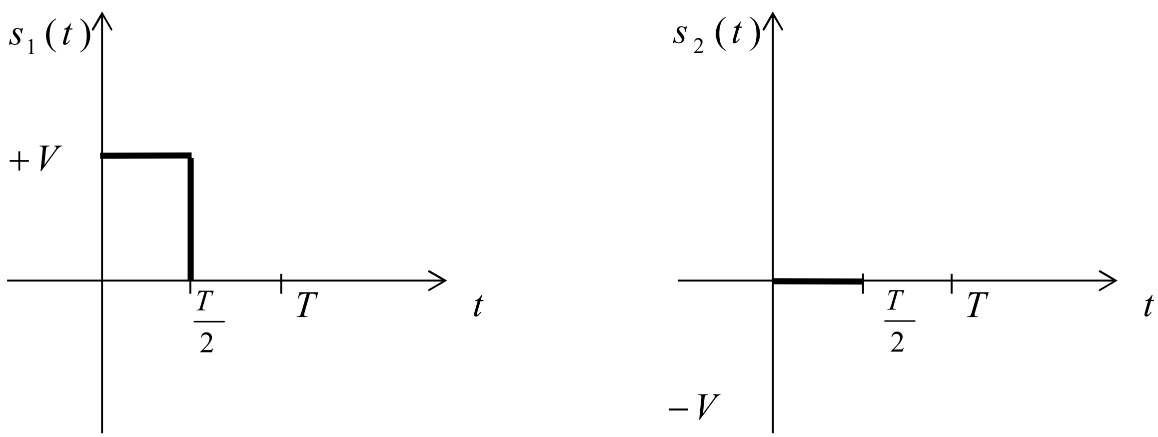
$$M = \{s_1(t) = +VP_{T/2}(t), s_2(t) = -VP_{T/2}(t)\}$$



$$m = 2 \rightarrow k = 1 \rightarrow T = T_b$$

RZ đơn cực (Return to Zero)

$$M = \{s_1(t) = +VP_{T/2}(t), s_2(t) = 0\}$$

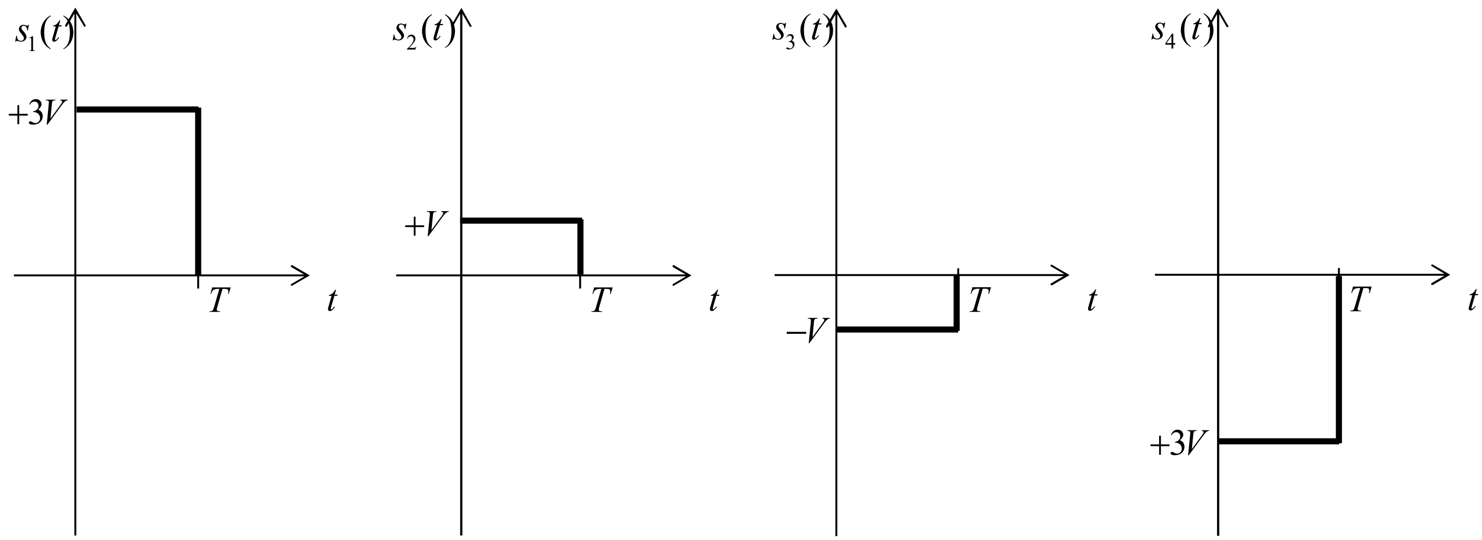


$$m = 2 \rightarrow k = 1 \rightarrow T = T_b$$

m-PAM (Pulse Amplitude Modulation)
điều chế biên độ xung

Ví dụ: 4-PAM

$$M = \{s_1(t) = +3VP_T(t), s_2(t) = +VP_T(t), s_3(t) = -VP_T(t), s_4(t) = -3VP_T(t)\}$$



$$m = 4 \rightarrow k = 2 \rightarrow T = 2T_b$$

m-ASK (Amplitude Shift Keying)

Điều chế dịch biên độ

Ví dụ: 4-ASK

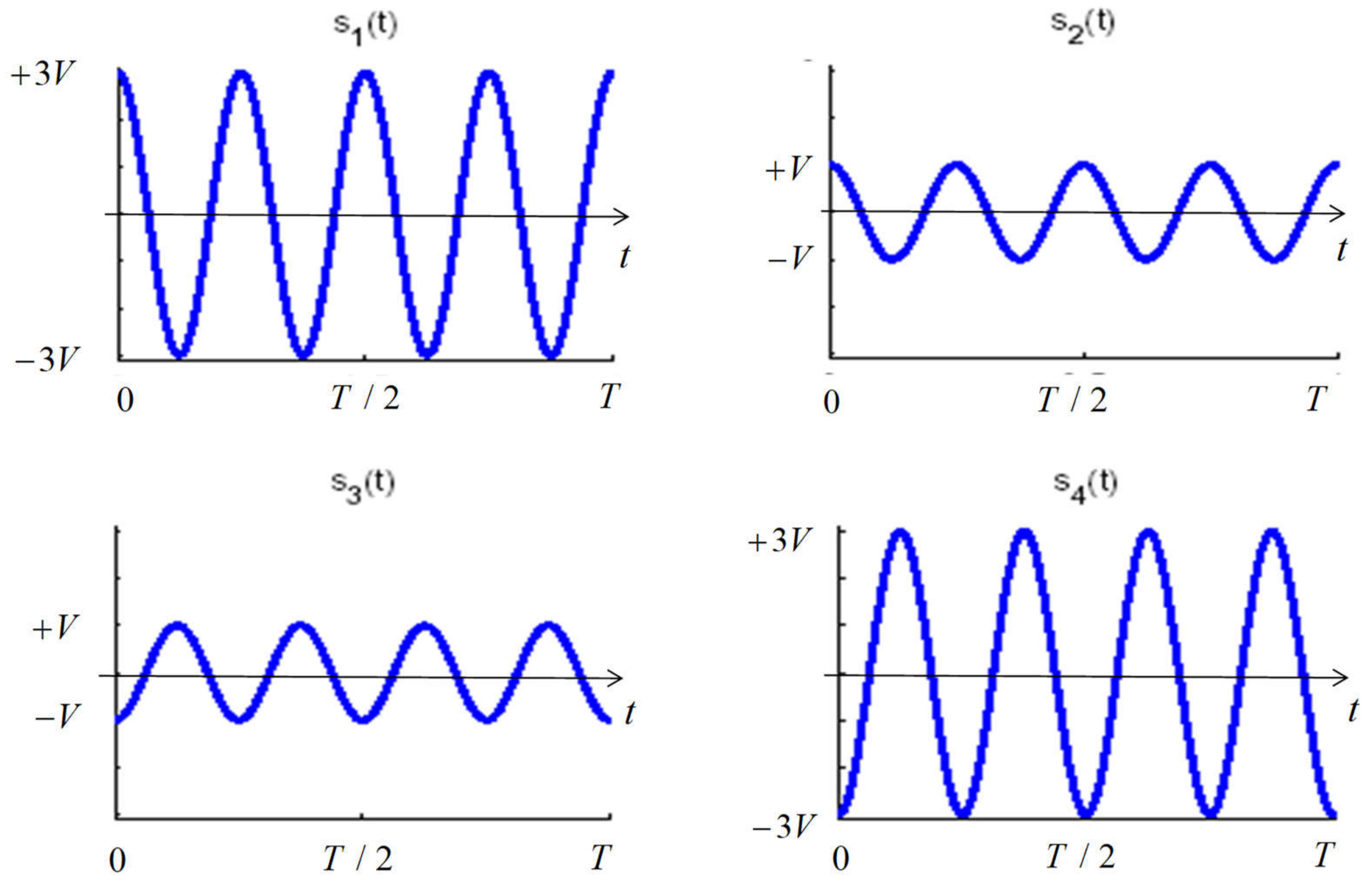
$$M=\{s_1(t)=+3VP_T(t)\cos\left(2\pi f_0t\right),s_2(t)=+VP_T(t)\cos\left(2\pi f_0t\right),$$

$$s_3(t)=-VP_T(t)\cos\left(2\pi f_0t\right),s_4(t)=-3VP_T(t)\cos\left(2\pi f_0t\right)\}$$

$$m=4\rightarrow k=2\rightarrow T=2T_b$$

4-ASK

$$f_0 = 2R_b$$



m-PSK (Phase Shift Keying)

Example: 2-PSK

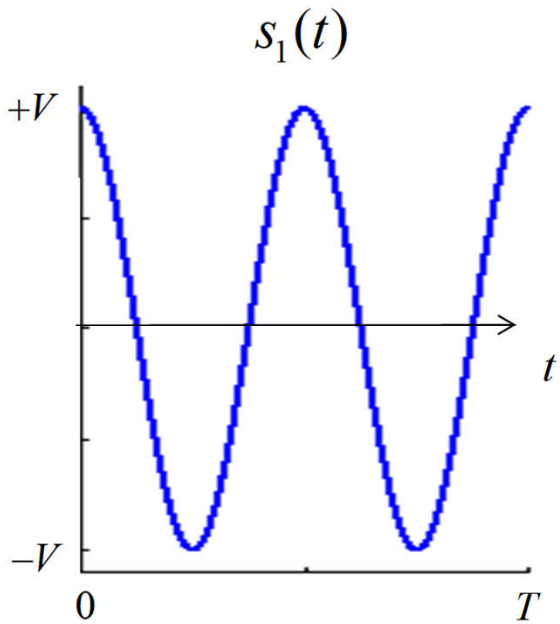
$$M = \{s_1(t) = +VP_T(t)\cos\left(2\pi f_0 t\right), s_2(t) = -VP_T(t)\cos\left(2\pi f_0 t\right)\} =$$

$$= \{s_1(t) = +VP_T(t)\cos\left(2\pi f_0 t\right), s_2(t) = +VP_T(t)\cos\left(2\pi f_0 t - \pi\right)\}$$

$$m = 2 \rightarrow k = 1 \rightarrow T = T_b$$

2-PSK

$$f_0 = 2R_b$$



Example: 4-PSK

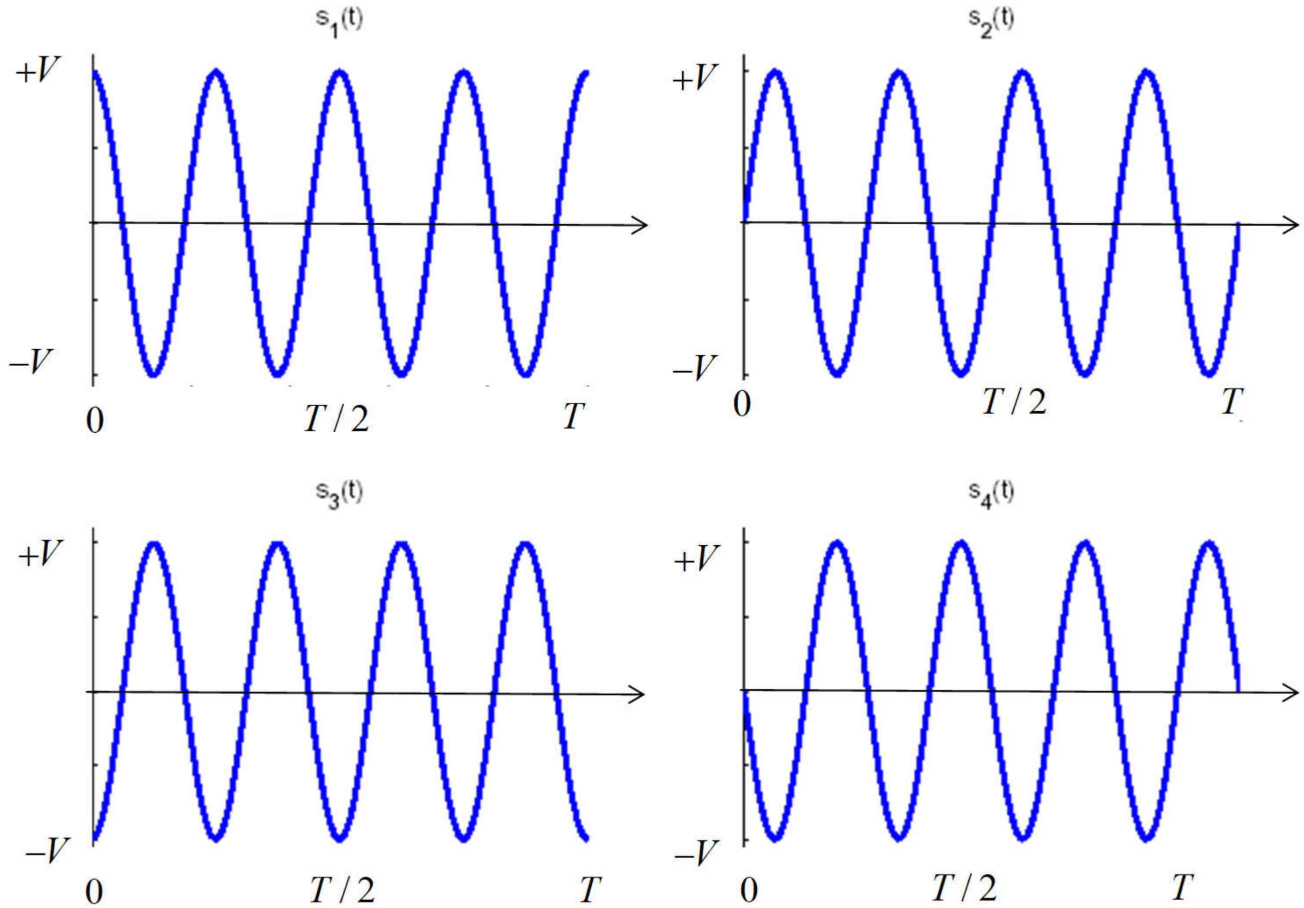
$$M = \left\{ \begin{array}{l} s_1(t) = +VP_T(t)\cos\left(2\pi f_0 t\right), s_2(t) = +VP_T(t)\sin\left(2\pi f_0 t\right), \\ s_3(t) = -VP_T(t)\cos\left(2\pi f_0 t\right), s_4(t) = -VP_T(t)\sin\left(2\pi f_0 t\right) \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} s_1(t) = +VP_T(t)\cos\left(2\pi f_0 t\right), s_2(t) = +VP_T(t)\cos\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right), \\ s_3(t) = +VP_T(t)\cos\left(2\pi f_0 t - \pi\right), s_4(t) = VP_T(t)\cos\left(2\pi f_0 t - \frac{3\pi}{2}\right) \end{array} \right\}$$

$$m = 4 \rightarrow k = 2 \rightarrow T = 2T_b$$

4-PSK

$$f_0 = 2R_b$$



m-FSK (Frequency Shift Keying)

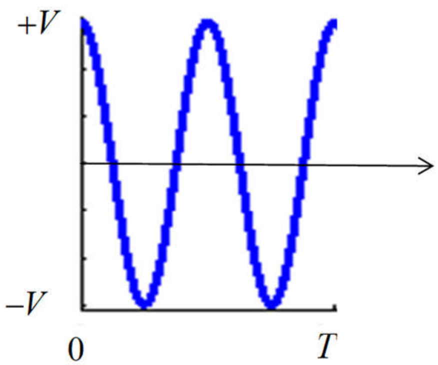
Điều chế dịch tần số

Ví dụ: 2-FSK

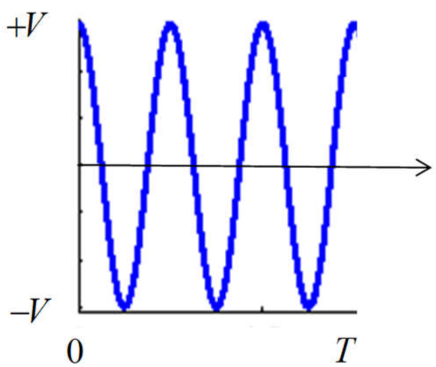
$$M = \{s_1(t) = +VP_T(t)\cos\left(2\pi f_1 t\right), s_2(t) = +VP_T(t)\cos\left(2\pi f_2 t\right)\}$$

$$m = 2 \rightarrow k = 1 \rightarrow T = T_b$$

2-FSK



$$f_1 = 2R_b$$



$$f_2 = 3R_b$$

Bài tập

$\underline{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{T}}$=(10011100...) R_b=1 Mbps

Vẽ dạng sóng của tất cả các chùm tín hiệu đã liệt kê vừa rồi

Nhập môn Kỹ thuật Truyền thông

Bài 4: Lý thuyết ra quyết định
4.1 Biểu diễn không gian tín hiệu

PGS. Tạ Hải Tùng

4.1 Lý thuyết ra quyết định: biểu diễn không gian tín hiệu

Truyền thông trên kênh (channel transmission)

Chuỗi dữ liệu nhị phân $\underline{u}_T$

Dạng sóng $s(t)$

Được truyền qua kênh để đến điểm đích

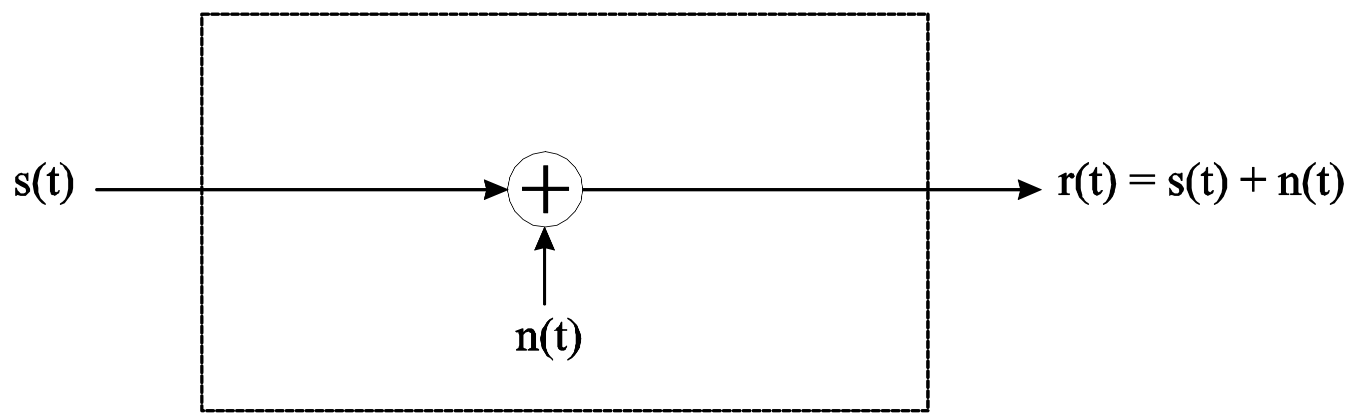
Mô hình kênh:

Kênh Tạp âm Gauss trắng có tính cộng (Additive White Gaussian Noise - AWGN)

Channel transmission

Kênh AWGN có đặc tính

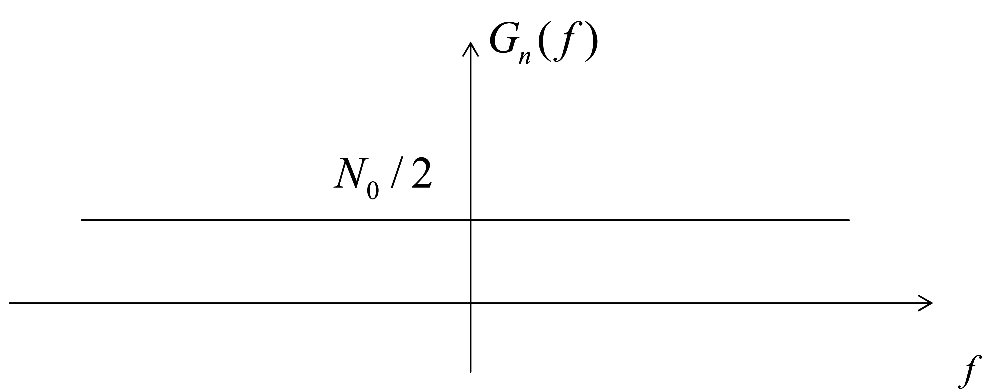
- **Tuyến tính và bất biến theo thời gian**
- **Đáp ứng tần số lý tưởng** $H(f)=1$
- **Tạp âm Gauss có tính cộng** $n(t)$



Channel transmission

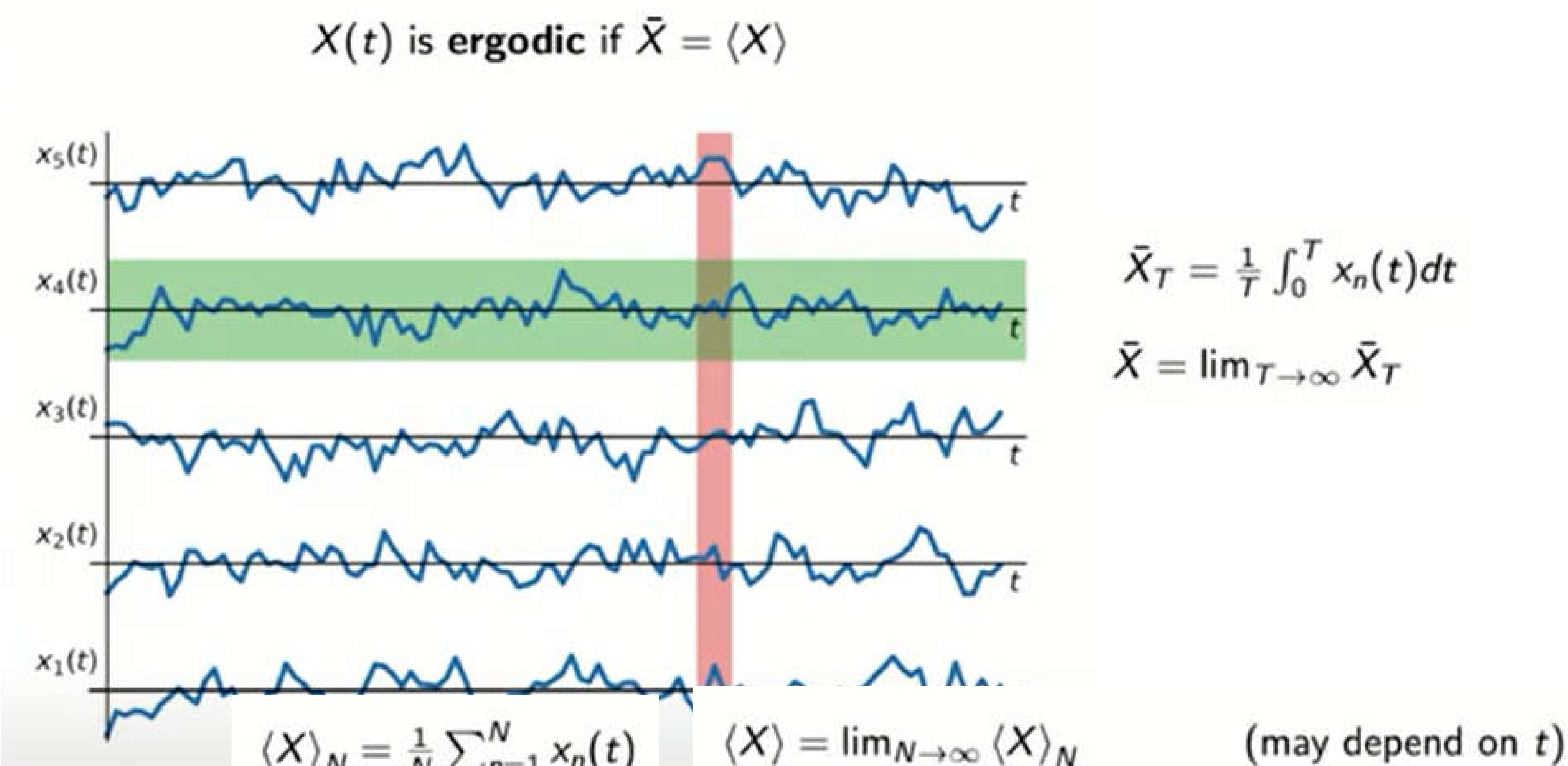
Tạp âm Gauss trắng *n(t)*

- **Tiến trình ngẫu nhiên ergodic**
- **Mỗi biến ngẫu nhiên tuân theo Phân bố chuẩn Gauss với giá trị trung bình bằng 0**
- **Mật độ công suất phổ tín hiệu là hằng số** $G_n(f)=N_0/2$



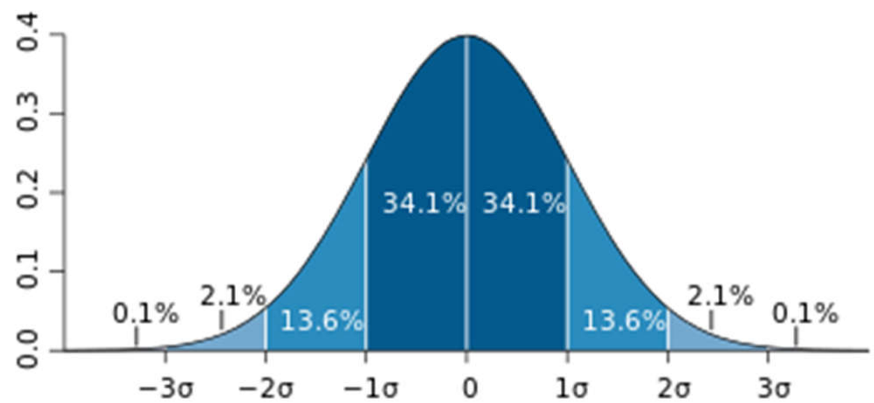
Quá trình ngẫu nhiên có tính chất ergodic

- Quá trình ngẫu nhiên được gọi là ergodic nếu các đặc trưng thống kê của nó có thể suy ra được từ một chuỗi các mẫu đủ dài của nó.



Tại sao tạp âm có phân bố Gaussian?

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



G → Gaussian

- Why Gaussian
- ***Central limit theorem*** → sum of ***independent and identically distributed (i.i.d)*** random variables approaches normal distribution as sample size N → ∞
- pdf of summation to two random variables is the convolution of their pdf's

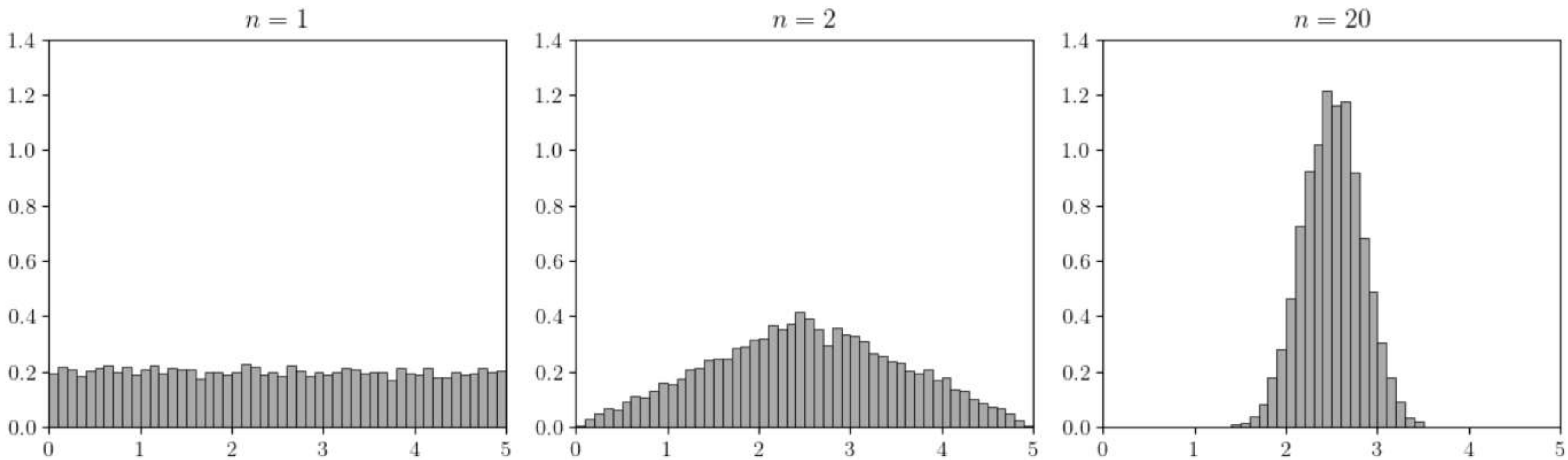


Figure 1. For each n, we draw a uniformly distributed random variable $X_i \sim \mathcal{U}(0, 5)$ and compute the sum $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. We sample a new S_n ten thousand times for each n and then compute the histogram of the variables S_n.

- Noise (tạp âm tổng cộng) là tổng hợp của nhiễu từ nhiều nguồn khác nhau. Ví dụ: Loa Bluetooth nhận tín hiệu từ máy tính xách tay của bạn, có các nhiễu (tạp âm) sau:
  – lò vi sóng có tần số vô tuyến tương tự, lỗi cảm biến do quá nhiệt, nhiễu vật lý khi bạn nhấc loa lên, v.v.
  – Làm thế nào để tạp âm tổng cộng tuân theo Gauss???

Truyền thông trên kênh

Chuỗi dữ liệu nhị phân $\underline{u}_T$

⇩

Dạng sóng được truyền $s(t)$

⇩

Kênh AWGN

⇩

Dạng sóng nhận được $r(t) = s(t) + n(t)$

$$\boxed{\underline{u}_T \longrightarrow \boldsymbol{s}(t) \longrightarrow \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{s}(t) + \boldsymbol{n}(t)}$$

Vấn đề tại phía bộ thu

$$\underline{\mathrm{u}}_{\mathrm{T}} \longrightarrow \boldsymbol{s}(t) \longrightarrow \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{s}(t) + \boldsymbol{n}(t)$$

Vấn đề: $\boxed{\text{nhận được } \boldsymbol{r}(t) \rightarrow \text{khôi phục } \underline{u}_T}$

$$\underline{\mathrm{u}}_{\mathrm{T}} \longrightarrow \boldsymbol{s}(t) \longrightarrow \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{s}(t) + \boldsymbol{n}(t)$$

Vấn đề: $\boxed{\text{nhận được } \boldsymbol{r}(t) \rightarrow \text{khôi phục } \underline{u}_T}$

Chia thành 2 bước:

1. Nhận được *r(t)*, khôi phục *s(t): **(vấn đề khó)***
2. Nhận được *s(t)*, khôi phục $\underline{u}_T$: ***(vấn đề dễ:** gán nhãn là ánh xạ 1-1**)***

$$\underline{\mathrm{u}}_{\mathrm{T}} \longrightarrow s(t) \longrightarrow r(t) = s(t) + n(t)$$

Vấn đề: $\boxed{\text{nhận được } r(t) \rightarrow \text{khôi phục } s(t)}$

Thay vì xử lý trên dạng sóng thật

⇩

Đơn giản hơn nếu xử lý trên **VECTORS**

Cho chùm tín hiệu $M = \{ s_1(t) , \ldots , s_i(t), \ldots, s_m(t) \}$

- Xây dựng cơ sở trực chuẩn B

- Xử lý trên không gian tín hiệu S sinh bởi B

- Mỗi tín hiệu thuộc S có thể được biểu diễn là một phối hợp tuyến tính (linear combination) của các thành phần cơ sở → mỗi tín hiệu của S tương ứng với một vector thực (= các hệ số của phối hợp tuyến tính đó)

Cơ sở B

Cho chùm tín hiệu:

$$M = \{ s_1(t) , \ \dots , s_i(t), \ \dots, s_m(t) \}$$

Chúng ta phải tìm được cơ sở trực chuẩn:

$$B = \{ b_1(t) , \ \dots , b_j(t), \ \dots, b_d(t) \} \qquad (d \le m)$$

B = *tập hợp các tín hiệu*

1. Trực giao lẫn nhau $\Longrightarrow$ $\boxed{\int_0^T b_j(t) b_i(t) dt = 0 \quad \text{when} \quad j \neq i}$

Cho chùm tín hiệu:

$$M = \{ s_1(t), \ldots, s_i(t), \ldots, s_m(t) \}$$

Chúng ta phải tìm được cơ sở trực chuẩn:

$$B = \{ b_1(t), \ldots, b_j(t), \ldots, b_d(t) \} \qquad (d \le m)$$

B = tập hợp các tín hiệu

2. Với năng lượng đơn vị $\Rightarrow$ $\boxed{\int_0^T b^2{}_j(t)dt = 1}$

Cho chùm tín hiệu:

$$M = \{ s_1(t) , \ldots , s_i(t), \ldots, s_m(t) \}$$

Chúng ta phải tìm được cơ sở trực chuẩn:

$$B = \{ b_1(t) , \ldots , b_j(t), \ldots, b_d(t) \} \qquad (d \le m)$$

$B =$ tập hợp các tín hiệu

3. Số phần tử của cơ sở d là nhỏ nhất đủ để biểu diễu mỗi tín hiệu của M là một phối hợp tuyến tính

$$\Rightarrow \quad \boxed{s_i(t) = \sum_{j=1}^{d} s_{ij} b_j(t) \qquad s_{ij} \in R}$$

Cơ sở B

Cho chùm tín hiệu: $M = \{ s_1(t) , \ldots , s_i(t), \ldots, s_m(t) \}$

Chúng ta có thể xây dựng được cơ sở :

$B = \{ b_1(t) , \ldots , b_j(t), \ldots, b_d(t) \} \quad (d \leq m)$

B = tập các tín hiệu

1. Trực giao $\Rightarrow$ $\boxed{\int_0^T b_j(t) b_i(t) dt = 0 \quad \text{when} \quad j \neq i}$

2. Với năng lượng đơn vị: $\Rightarrow$ $\boxed{\int_0^T b^2{}_j(t) dt = 1}$

3. Số phần tử của cơ sở d là nhỏ nhất đủ để biểu diễu mỗi tín hiệu của M là một phối hợp tuyến tính $\Rightarrow$ $\boxed{s_i(t) = \sum_{j=1}^{d} s_{ij} b_j(t) \quad s_{ij} \in R}$

Xây dựng cơ sở B

Cho M, làm thế nào để xây dựng B ?

Với các chùm tín hiệu đơn giản, không khó để xây dựng B một cách trực tiếp

Trong trường hợp chung ta có thể sử dụng thuật toán sau để xây dựng B từ M:

Thuật toán Gram-Schmidt

Thuật toán Gram-Schmidt

$$M = \{\, s_1(t)\ ,\ \ldots\ ,\ s_i(t),\ \ldots,\ s_m(t)\ \}$$

Bước 1

Cho $s_1(t)$ → tính versor thứ nhất

Định nghĩa

$$\boxed{b_1^*(t) = s_1(t)}$$

tính

$$\boxed{b_1(t) = \frac{b_1^*(t)}{\sqrt{E(b_1^*)}}}$$

(Nếu $b_1^*(t) = 0$ → $b_1(t) = 0$)

Bước 2

Cho $s_2(t)$, tìm versor thứ 2.

Tính phép chiếu của lên versor đầu tiên

$$s_{21} = \int_0^T s_2(t) b_1(t) dt$$

Định nghĩa

$$\boxed{b_2^*(t) = s_2(t) - s_{21} b_1(t)}$$

Tính

$$\boxed{b_2(t) = \frac{b_2^*(t)}{\sqrt{E(b_2^*)}}}$$

(Nếu $b_2^*(t) = 0$ → $b_2(t) = 0$)

$$s_{21} = \int_0^T s_2(t) b_1(t)\,dt \qquad\qquad b_2^*(t) = s_2(t) - s_{21} b_1(t)$$

Lưu ý:

- Nếu $b_2^*(t) = 0$ ($s_2(t)$ tỷ lệ với $b_1(t)$)
  → $b_2(t)=0$ và không có versor mới nào
- Nếu $b_2^*(t) \neq 0$ ($s_2(t)$ không tỷ lệ với $b_1(t)$)
  → $b_2(t) \neq 0$ và versor mới được tìm thấy

Given $s_i(t)$ $\quad 3 \le i \le m$

STEP i

Tính phép chiếu lên các versor trước:

$$s_{ij} = \int_o^T s_i(t) b_j(t)\, dt \qquad 1 \le j \le i-1$$

Định nghĩa

$$\boxed{b_i^*(t) = s_i(t) - \sum_{j=1}^{i-1} s_{ij} b_j(t)}$$

Tính

$$\boxed{b_i(t) = \frac{b_i^*(t)}{\sqrt{E(b_i^*)}}}$$

(If $b_1^*(t) = 0$ → $b_i(t) = 0$)

$$s_{ij} = \int_{o}^{T} s_i(t) b_j(t)\, dt \qquad\qquad b_i^*(t) = s_i(t) - \sum_{j=1}^{i-1} s_{ij} b_j(t)$$

Lưu ý:

- Nếu $b_i^*(t) = 0$ ($s_i\,(t)$ là phối hợp tuyến tính của các versor)
  → $b_i(t)=0$ và không có versor mới

- Nếu $b_i^*(t) \neq 0$ ($s_i\,(t)$ không phải là phối hợp tuyến tính)
  → $b_i(t) \neq 0$ và một versor mới tìm được

Bước cuối

- Loại bỏ tất cả $b_i(t) = 0$
- Đánh lại chỉ số *i* cho các versor khác 0 $b_i(t)$
- Ta có cơ sở B:

$$B = \{ b_1(t) , \dots , b_j(t), \dots, b_d(t) \} \quad (d \leq m)$$

Bài tập

Cho chùm tín hiệu:

$$M = \{s_1(t) = +P_T(t), s_2(t) = -P_T(t)\}$$

Xây dựng cơ sở trực chuẩn B?

Xây dựng cơ sở

Như đã đề cập, với các chùm tín hiệu đơn giản, có thể xây dựng trực tiếp *B* mà không cần áp dụng Gram Schmidt.

Chỉ cần tìm ra d tín hiệu thỏa mãn các điều kiện của một cơ sở trực chuẩn:

1. Trực giao
2. Năng lượng đơn vị
3. Số phần d là nhỏ nhất và đủ để biểu diễn mỗi tín hiệu của M là một phối hợp tuyến tính

Bài tập

Cho chùm tín hiệu:

$$M = \{s_1(t) = 0, s_2(t) = +P_T(t)\}$$

Xây dựng cơ sở trực chuẩn B?

Bài tập

Cho chùm tín hiệu:

$$M = \{s_1(t) = +P_T(t)\cos(2\pi f_0 t), s_2(t) = -P_T(t)\cos(2\pi f_0 t)\}$$

Xây dựng cơ sở trực chuẩn B?

Không gian tín hiệu S

Với cơ sở trực chuẩn B

$$B = \{\, b_1(t)\, ,\ \ldots\, ,\ b_j(t),\ \ldots,\ b_d(t)\ \}$$

Không gian S được biểu diễn qua B là:

$$S = \left\{ a(t) = \sum_{j=1}^{d} a_j b_j(t) \quad a_j \in R \right\}$$

(tập tất cả các tín hiệu có thể được biểu diễn như là các phối hợp tuyến tính của các tín hiệu cơ sở)

Bài tập

Cho cơ sở B

$$B = \left\{ b_1(t) = +\frac{1}{\sqrt{T}} P_T(t) \right\}$$

Không gian tín hiệu S là gì?

Bài tập

Cho cơ sở B

$$B = \left\{ b_1(t) = +\sqrt{\frac{2}{T}} P_T(t) \cos\left(2\pi f_0 t\right) \right\}$$

Không gian tín hiệu S là gì?

Biểu diễn vector

Cho trước B, với mỗi tín hiệu $a(t) \in S$ ta có

$$a(t) = \sum_{j=1}^{d} a_j b_j(t)$$

Tín hiệu $a(t)$ tương ứng với một vector thật với d thành phần (các hệ số a_j của phối hợp tuyến tính), và ngược lại:

$$a(t) \equiv \underline{a} = (a_1 \ ,\ldots, a_j ,\ldots, a_d)$$

Biểu diễn vector

1. Từ vector $\underline{a}$ tới tín hiệu $a(t)$

$$\underline{a} = (a_1 \ ,\ldots, a_j, \ldots, a_d) \qquad a(t) = \sum_{j=1}^{d} a_j b_j(t)$$

2. Từ tín hiệu $a(t)$ tương ứng vector $\underline{a}$

Phép chiếu lên versor $b_j(t)$

$$a(t) \Rightarrow a_j = \int_0^T a(t) b_j(t) dt$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{a} = (a_1 \ ,\ldots, a_j, \ldots, a_d)$$

Biểu diễn vector chùm tín hiệu

Ta có $M \subseteq S$

Mỗi tín hiệu $s_i(t) \in S$ tương ứng với một vector thật với d thành phần và ngược lại:

$$s_i(t) \equiv \underline{s}_i = (s_{i1}, \ldots, s_{ij}, \ldots s_{id})$$

Chùm tín hiệu M là một tập tín hiệu $M = \{ s_1(t), \ldots, s_i(t), \ldots, s_m(t) \}$

Chùm tín hiệu M là một tập vector $M = \{ \underline{s}_1, \ldots, \underline{s}_i, \ldots, \underline{s}_m \}$

1. Từ vector $\underline{s_i}$ tới tín hiệu $s_i(t)$

$$\underline{s_i} = (s_{i1}, \ldots, s_{ij}, \ldots, s_{id}) \qquad\qquad s_i(t) = \sum_{j=1}^{d} s_{ij} b_j(t)$$

---

2. Từ tín hiệu $s_i(t)$ tới vector $\underline{s_i}$

Phép chiếu lên versor $b_j(t)$

$$s_i(t) \Rightarrow s_{ij} = \int_0^T s_i(t) b_j(t)\,dt$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{s_i} = (s_{i1}, \ldots, s_{ij}, \ldots, s_{id})$$

Lưu ý: đối với các chùm tín hiệu đơn giản, các thành phần của vector có thể được suy ra trực tiếp thay vì tính phép chiếu.

Ta viết:

$$s_i(t) = s_{i1}b_1(t) + \ldots + s_{ij}b_j(t) + \ldots s_{id}b_d(t)$$

Các tín hiệu cơ sở $b_i(t)$ đã biết.

Ta tìm tập các hệ số s_{ij} có thể thỏa mãn phương trình trên.

Lời giải (nghiệm) là duy nhất.

Không gian tín hiệu S là đẳng cấu (đồng hình) với không gian Euclid R^d

(tập hợp của tất cả các vector với các thành phần thực d)

Ta có thể vẽ trong không gian Đề-các)

If d=1, $S \approx R$ và có thể vẽ như một đường thẳng 1-D

If d=2, $S \approx R^2$ và có thể vẽ như một mặt phẳng 1-D

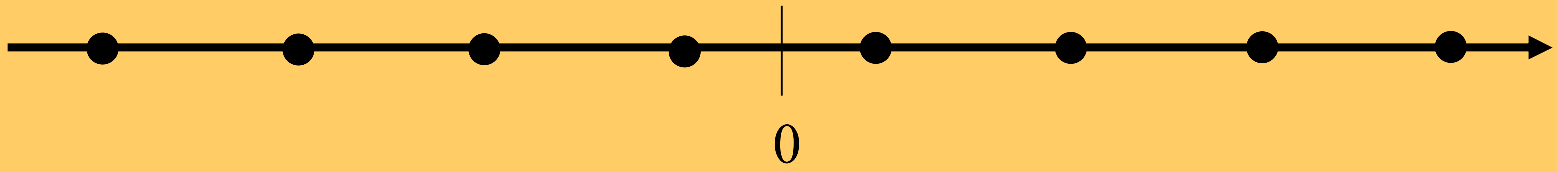
If d=3, $S \approx R^3$ và có thể vẽ như một không gian 1-D

Ta sẽ viết $\boxed{M \subseteq R^d}$

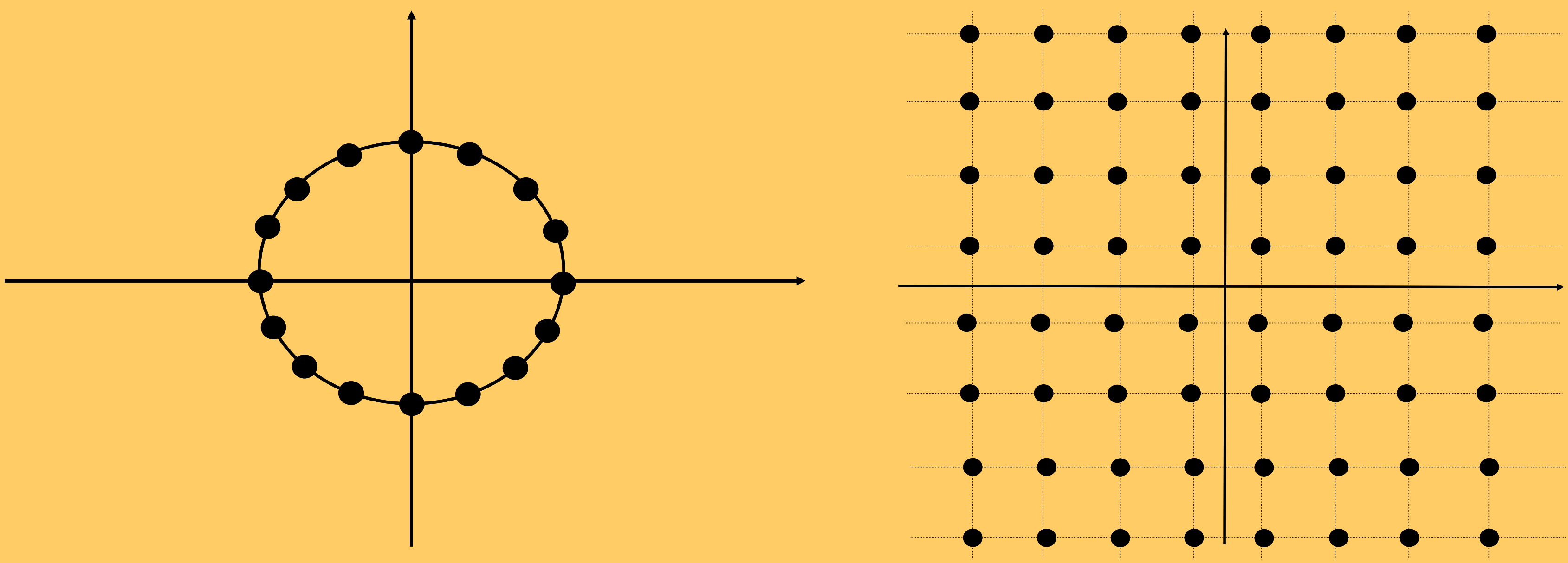
(Một chùm là một tập m điểm trong không gian Euclid R^d)

Ví dụ

Ví dụ không gian 1-D



Ví dụ không gian 2-D



Năng lượng tín hiệu

Với một tín hiệu $a(t) \in S$

Năng lượng của nó là: $$E(a) = \int_0^T a^2(t)dt$$

Nếu biểu diễn vector của nó là:

$$a(t) \equiv (a_1, \ldots, a_j, \ldots a_d)$$

Thì năng lượng được tính như sau: (Parseval identity)

$$E(a) = \sum_{j=1}^{d} a_j^2$$

Trong thực tế, vì $$a(t)=\sum_{j=1}^{d} a_j b_j(t)$$

$$E(a)=\int_0^T a^2(t)\,dt=\int_0^T [\sum_{j=0}^{d-1} a_j b_j(t)]^2\,dt=\sum_{j=0}^{d-1} a_j^2 \int_0^T b_j^2(t)dt=\sum_{j=0}^{d-1} a_j^2$$

Trong đó đã sử dụng tính chất trực giao

$$\int_0^T b_j(t)\,b_i(t)dt=0 \quad se\ \ i\neq j$$

Năng lượng chùm tín hiệu

Cho chùm tín hiệu $$M = \left\{\underline{s}_1, \ldots, \underline{s}_i, \ldots, \underline{s}_d\right\} \subseteq R^d$$

Với $$\underline{s_i} = (s_{i1} \;, \ldots, s_{ij}, \ldots, s_{id})$$

Ta có: $$E(s_i) = \sum_{j=1}^{d} s_{ij}^2$$

Năng lượng chùm (trung bình):

$$E_s = \sum_{i=1}^{m} P(s_i) E(s_i)$$

Với $P(s_i)$ là xác suất truyền s_i

Năng lượng chùm tín hiệu

- Các chuỗi dữ liệu nhị phân: ngẫu nhiên lý tưởng
- Các vector nhị phân $\underline{v} \in H_k$ có xác suất tương đương
- Gán nhãn ánh xạ 1-1 $e : H_k \leftrightarrow M$
- Các tín hiệu trong chùm $\underline{s_i} \in M$ có xác suất tương đương
- $$P(s_i) = \frac{1}{m}$$
- Chùm tín hiệu có năng lượng: $$\boxed{E_s = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} E(s_i)}$$

Năng lượng trên từng bit

Năng lượng cần để truyền một bit qua M

$$\boxed{E_b = \frac{E_S}{k}}$$

Bài tập

Cho một chùm tín hiệu NRZ lưỡng cực:

$$M = \{s_1(t) = +VP_T(t), s_2(t) = -VP_T(t)\}$$

- Xây dựng cơ sở trực chuẩn.
- Biểu diễn dạng vector của chùm tín hiệu.
- Vẽ trên không gian Euclid.
- Xác định không gian tín hiệu S ?
- Tính E_s và E_b.

Bài tập

Cho một chùm tín hiệu NRZ đơn cực:

$$M = \{s_1(t) = +VP_T(t), s_2(t) = 0\}$$

- Xây dựng cơ sở trực chuẩn.
- Biểu diễn dạng vector của chùm tín hiệu.
- Vẽ trên không gian Euclid.
- Xác định không gian tín hiệu S ?
- Tính E_s và E_b.

Bài tập

Cho một chùm tín hiệu 2-PSK:

$$M = \{s_1(t) = +AP_T(t)\cos(2\pi f_0 t), s_2(t) = -AP_T(t)\cos(2\pi f_0 t)\}$$

- Xây dựng cơ sở trực chuẩn.
- Biểu diễn dạng vector của chùm tín hiệu.
- Vẽ trên không gian Euclid.
- Xác định không gian tín hiệu S ?
- Tính E_s và E_b.

Bài tập:

Cho một chùm tín hiệu 4-PSK:

$$M = \{s_1(t) = +AP_T(t)\cos(2\pi f_0 t), s_2(t) = +AP_T(t)\sin(2\pi f_0 t),$$
$$s_3(t) = -AP_T(t)\cos(2\pi f_0 t), s_4(t) = -AP_T(t)\sin(2\pi f_0 t)\}$$

- Xây dựng cơ sở trực chuẩn.
- Biểu diễn dạng vector của chùm tín hiệu.
- Vẽ trên không gian Euclid.
- Xác định không gian tín hiệu S ?
- Tính E_s và E_b.

Gợi ý: $A\cos(2\pi f_0 t - \vartheta) = \left(A\cos\vartheta\right)\cos(2\pi f_0 t) + \left(A\sin\vartheta\right)\sin(2\pi f_0 t)$

Bài tập:

Lặp lại với tất cả các chùm tín hiệu sau:

- NRZ (bipolar and unipolar)
- RZ (bipolar and unipolar)
- 4-PAM
- 4-ASK
- 2-PSK
- 4-PSK
- 2-FSK

Nhập môn Kỹ thuật Truyền thông

Bài 4: Lý thuyết ra quyết định (Decision Theory)

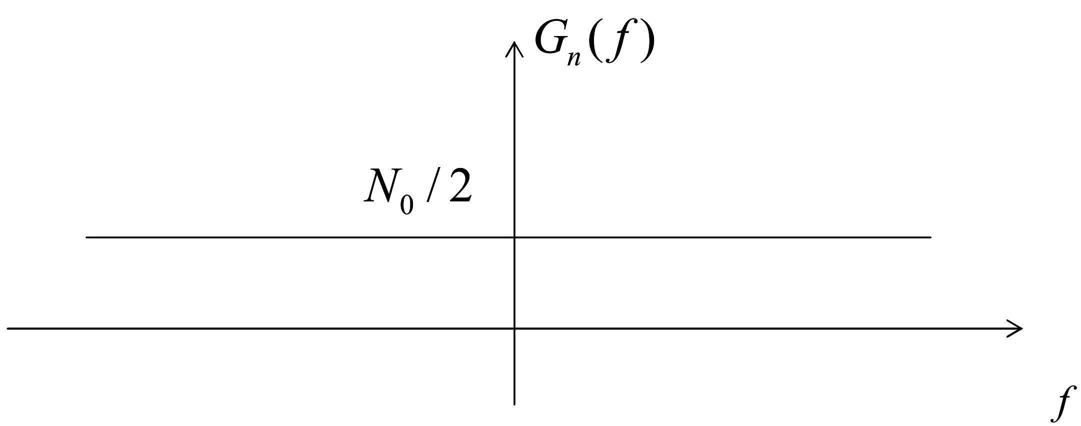
4.2 Các tiêu chuẩn MAP và ML

PGS. Tạ Hải Tùng

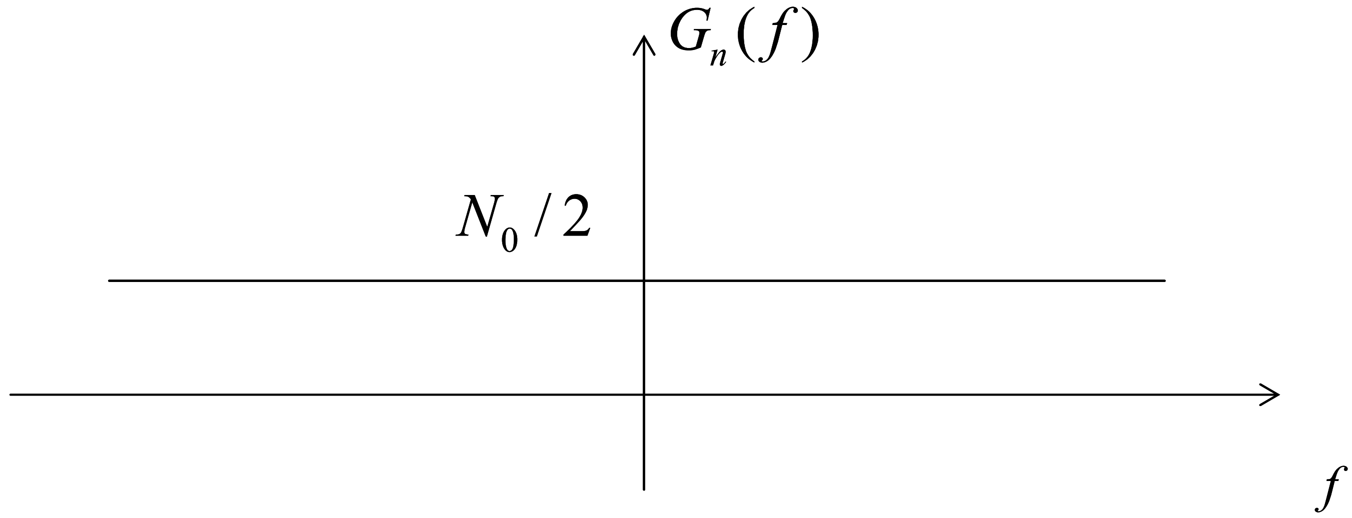
Mô hình kênh truyền

Tạp âm trắng Gauss $n(t)$

- **Tiến trình ngẫu nhiên «ergodic»**
- **Mỗi biến ngẫu nhiên là một biến ngẫu nhiên Gauss với giá trị TB bằng 0**
- **Mật độ phổ là hằng số** $G_n(f)=N_0/2$

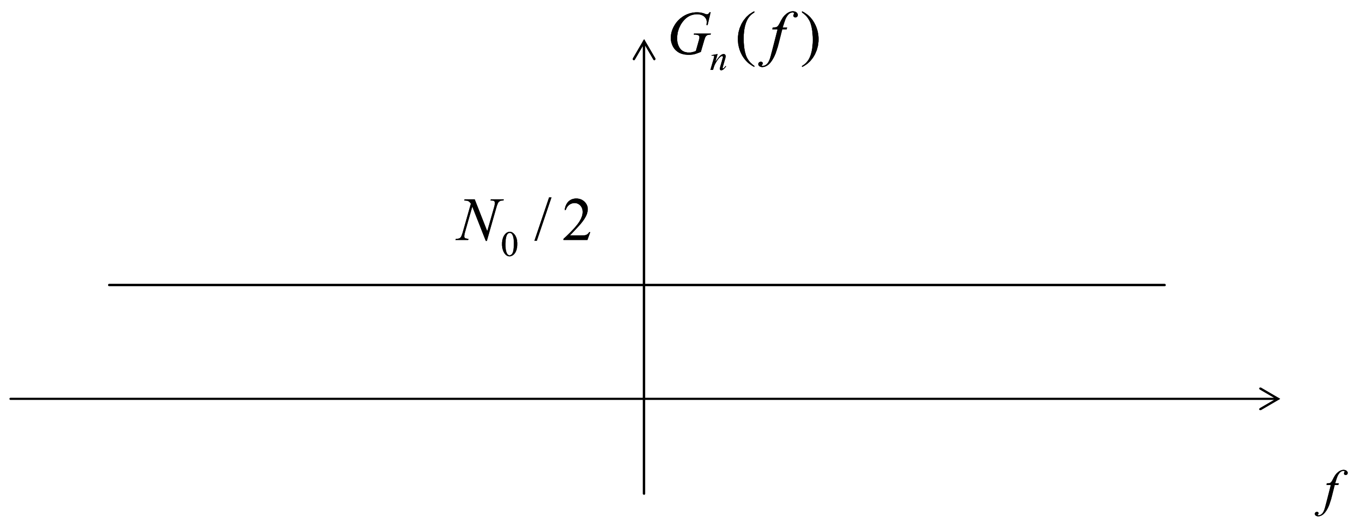


AWGN



$$G_n(f) = N_0/2 \quad \Longleftrightarrow \quad R_n(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

AWGN



$$R_n(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau) \quad \Longleftrightarrow \quad E\left[n(t_1)n(t_1+\tau)\right] = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

n(t) là một tiến trình «ergodic»

(thuộc tính thời gian = thuộc tính thống kê)

AWGN

Xem xét hai thời điểm t_1 và t_2

Có tương ứng hai biến ngẫu nhiên

$$t_1 \longrightarrow n(t_1)$$

$$t_2 \longrightarrow n(t_2)$$

Là biến ngẫu nhiên Gauss với tính chất

$$E[n(t_1)n(t_2)] = \frac{N_0}{2}\delta(t_1 - t_2)$$

Độc lập thống kê (Statistically independent)

Vấn đề tại bộ thu

$$\underline{\mathrm{u}}_{\mathrm{T}} \longrightarrow s(t) \longrightarrow r(t) = s(t) + n(t)$$

Vấn đề: $\boxed{\text{cho } r(t) \rightarrow \text{khôi phục } s(t)}$

Chia *r(t)* thành các đoạn tương ứng với khoảng thời gian T:

$$r(t) = (\underbrace{r[0](t)}_{T} \mid \underbrace{r[1](t)}_{T} \mid \ldots \mid \underbrace{r[n](t)}_{T} \mid \ldots$$

Câu hỏi: liệu có thể phân tích một cách độc lập tín hiệu nhận được trong một khoảng thời gian bất kỳ?

$$r(t) = (\underbrace{r[0](t)}_{T} \mid \underbrace{r[1](t)}_{T} \mid \ldots \mid \underbrace{r[n](t)}_{T} \mid \ldots$$

$$s(t) = (s[0](t) \mid s[1](t) \mid \ldots \mid s[n](t) \mid \ldots$$

$$\mathrm{n}(t) = (\mathrm{n}[0](t) \mid \mathrm{n}[1](t) \mid \ldots \mid \mathrm{n}[n](t) \mid \ldots$$

Ta có:

$$r(t) = s(t) + n(t)$$

Xem xét khoảng thời gian thứ n: $\boxed{nT \leq t < (n+1)T}$

$$r[n](t) = s[n](t) + \mathrm{n}[n](t)$$

Mỗi $r[n](t)$ phụ thuộc hoàn toàn vào:

- Tín hiệu đã được truyền đi: $s[n](t)$
- Tạp âm: $\mathrm{n}[n](t)$
  là các biến ngẫu nhiên tồn tại trong khoảng thời gian:
  $$nT \leq t < (n+1)T$$

$$s(t) = (\underbrace{s[0](t)}_{T} \mid \underbrace{s[1](t)}_{T} \mid \ldots \mid \underbrace{s[m](t)}_{T} \mid \ldots\ldots \mid \underbrace{s[n](t)}_{T} \mid \ldots$$

Mỗi tín hiệu $s[n](t)$

- tồn tại trong khoảng thời gian T

- là độc lập thống kê với các tín hiệu ở các khoảng thời gian khác $s[m](t)$, $m \neq n$

→ $\boxed{r[n](t) \text{ là độc lập với } s[m](t),\ m \neq n}$

$$\mathrm{n}(t) = (\underbrace{\mathrm{n}[0](t)}_{T} \mid \underbrace{\mathrm{n}[1](t)}_{T} \mid \ldots \mid \underbrace{\mathrm{n}[m](t)}_{T} \mid \ldots\ldots \mid \underbrace{\mathrm{n}[n](t)}_{T} \mid \ldots$$

Mỗi tạp âm $\mathrm{n}(t_i)$ cũng độc lập thống kê

→ $\boxed{r[n](t) \text{ độc lập với } n[m](t),\ m \neq n}$

Vấn đề tại bộ thu

Xem xét khoảng thời gian n: $$nT \le t < (n+1)T$$

Tín hiệu nhận được

$$r[n](t) = s[n](t) + \mathrm{n}[n](t)$$

<u>**Chỉ**</u> phụ thuộc vào:

- Tín hiệu đã truyền $s[n](t)$
- Tạp âm $\mathrm{n}[n](t)$ trong khoảng thời gian $nT \le t < (n+1)T$

Mỗi khoảng thời gian có thể được phân tích độc lập

KHÔNG CÓ HIỆN TƯỢNG NHIỄU LIÊN KÝ TỰ
(NO INTERSYMBOL INTERFERENCE (ISI))

$$r(t) = (\underbrace{r[0](t)}_{T} \mid \underbrace{r[1](t)}_{T} \mid \ldots \mid \underbrace{r[n](t)}_{T} \mid \ldots$$

Mỗi khoảng thời gian được phân tích độc lập:

Giả thiết xem xét khoảng thời gian gốc, với $0 \le t < T$

$$r(t) = \underbrace{(r[0](t)}_{T} \mid r[1](t) \mid \ldots \mid r[n](t) \mid \ldots$$

Cùng xem xét khoảng tgian gốc $0 \le t < T$

$$s[0](t) \longrightarrow r[0](t) = s[0](t) + n[0](t)$$

<u>Để đơn giản ta có thể bỏ chỉ số [0]</u>

$$s(t) \longrightarrow r(t) = s(t) + n(t)$$

Vấn đề: cho $r(t)$ → khôi phục $s(t)$

Tín hiệu đã truyền $s(t)$ chắc chắn thuộc không gian tín hiệu S

Vậy tín hiệu nhận được $r(t)$ có thuộc S ?

$$r(t) = s(t) + n(t)$$

Điều này phụ thuộc vào $n(t)$.

Tổng quát, $n(t)$ là một tín hiệu không thuộc S: $\quad n(t) \notin S$

Do vậy, tổng quát $\quad \boxed{r(t) \notin S}$

Các biến ngẫu nhiên n_j

Ta biết rằng $n(t) \notin S$

Chiếu tín hiệu tạp âm này lên cơ sở trực chuẩn.

$$B = \left(b_j(t)\right)_{j=1}^{d}$$

Thành phần chiếu thứ j là:

$$n_j = \int_0^T n(t) b_j(t) dt$$

$$n_j = \int_0^T n(t) b_j(t) dt$$

Ta có thể chứng minh được thành phần n_j này là

các biến ngẫu nhiên Gauss:

- trung bình $E[n_j]=0$
- phương sai $\sigma^2=N_0/2$
- độc lập thống kê

$$n_j = \int_0^T n(t) b_j(t) dt$$

- là các biến ngẫu nhiên Gauss:

Đạt được thông qua biến đổi tuyến tính một tiến trình Gauss

$$n_j = \int_0^T n(t) b_j(t) dt$$

- Trung bình $E[n_j]=0$

$$E\left[n_j\right] = E\left[\int_0^T n(t) b_j(t) dt\right] = \int_0^T E\left[n(t)\right] b_j(t) dt = 0$$

$$n_j = \int_0^T n(t) b_j(t) dt$$

- phương sai $\sigma^2 = N_0/2$
- độc lập tuyến tính

$$E\left[n_j n_i\right] = E\left[\int_0^T n(t) b_j(t) dt \int_0^T n(x) b_i(x) dx\right] = E\left[\int_0^T \int_0^T n(t) n(x) b_j(t) b_i(x) dt dx\right] =$$

$$= \int_0^T \int_0^T E\left[n(t) n(x)\right] b_j(t) b_i(x) dt dx = \int_0^T \int_0^T \frac{N_0}{2} \delta(t-x) b_j(t) b_i(x) dt dx =$$

$$= \frac{N_0}{2} \int_0^T b_j(t) b_i(t) dt = \begin{cases} N_0/2 \ if \ \ j = i \\ 0 \ if \ \ j \neq i \end{cases}$$

Tạp âm ngẫu nhiên trong không gian tín hiệu

cho $n(t)$ ta có các thành phần chiếu lên hệ cơ sở trực chuẩn:

$$n_j = \int_0^T n(t) b_j(t) dt$$

Gọi

$$\boxed{n_S(t) = \sum_j n_j b_j(t)}$$

Rõ ràng, $n_S(t) \in S$: là phần tín hiệu của $n(t)$ thuộc S

Tổng quát thì:

$$n(t) \neq n_S(t)$$

Ta có $\boxed{n(t) = n_S(t) + e(t)}$

$e(t)$ = là phần của $n(t)$ không thuộc S

Chọn thời điểm $t = t^*$

⇓

$n_S(t^*)$ và $e(t^*)$
Là độc lập thống kê

Chứng minh

$$E\left[n_S(t^*)e(t^*)\right] = 0 = E\left[n_S(t^*)\right]E\left[e(t^*)\right]$$

$\Downarrow$

$n_S(t^*)$ và $e(t^*)$
Là độc lập thống kê

$\Downarrow$

Phần tạp âm ngoài không gian S là độc lập thống kê

Tín hiệu nhận được trong không gian tín hiệu

Ta đã chứng minh $r(t) \notin S$

Chiếu $r(t)$ lên hệ trực chuẩn cơ sở:

$$B = \left(b_j(t)\right)_{j=1}^{d}$$

Ta có thành phần j là:

$$r_j = \int_0^T r(t) b_j(t) dt$$

Định nghĩa $\boxed{r_S(t) = \sum_j r_j b_j(t)}$ ta có $r_S(t) \in S$

Tổng quát $r(t) \neq r_S(t)$

Nhưng $r(t) = s(t) + n(t) = \underbrace{s(t) + n_S(t)}_{\in S} + \underbrace{e(t)}_{\notin S}$

Do đó $r(t) = r_S(t) + e(t)$ với $r_S(t) = s(t) + n_S(t)$

Vấn đề ra quyết định trong không gian tín hiệu

$P1$

Vấn đề cơ bản ban đầu:
cho $r(t)=s(t)+n(t)$ → khôi phục $s(t)$

$P2$

Vấn đề tương đương:
cho $r_S(t) = s(t)+n_S(t)$ → khôi phục $s(t)$

Sự khác biệt duy nhất là sự tồn tại của $e(t)$*:*

Thành phần tạp âm không thuộc S*, và nó độc lập thống kê với cả* $s(t)$ và $n_S(t)$

- $r_S(t)$ là thống kê đủ để giải vấn đề
- Đủ để giải quyết vấn đề (xác định tín hiệu truyền đi) trong không gian S
- Các chiều không gian khác không chứa thông tin có ích mà chỉ chứa tạp âm mà thôi

Vấn đề ra quyết định: thiết lập vector

$P2$

Vấn đề

cho $r_S(t) = s(t) + n_S(t)$ → khôi phục $s(t)$

Cả 3 tín hiệu đều thuộc S

Biểu diễn vector

$$\boxed{r_S(t) = s(t) + n_S(t)} \Rightarrow \boxed{\underline{r} = \underline{s}_T + \underline{n}}$$

$$\underline{r} = (r_1, \ldots, r_j, \ldots, r_d) \qquad r_j = \int_0^T r(t) b_j(t) dt$$

$$\underline{s_T} = (s_1, \ldots, s_j, \ldots, s_d) \qquad s_j = \int_0^T s(t) b_j(t) dt$$

$$\underline{n} = (n_1, \ldots, n_j, \ldots, n_d) \qquad n_j = \int_0^T n(t) b_j(t) dt$$

Vector nhận được

Vector nhận được $\underline{r}$ (trong không gian S) có biểu diễn:

$$\underline{r} = \underline{s}_T + \underline{n}$$

Với $\underline{s}_T = (s_1, \ldots, s_j, \ldots, s_d) \in M$ là tín hiệu truyền

và $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_j, \ldots, n_d)$ là vector tạp âm trong không gian S

Với mỗi thành phần của vector ta có: $r_j = s_j + n_j$

$$r_j = s_j + n_j$$

Do đó thành phần r_j là

Các biến ngẫu nhiên Gauss với:

- trung bình $E[r_j]=s_j$
- phương sai $\sigma^2[r_j]=N_0/2$
- độc lập thống kê

$$\left(E[r_i r_j] = s_i s_j = E[r_i]E[r_j] \right)$$

P2

Vấn đề:

cho $r_S(t) = s(t) + n_S(t)$ → khôi phục $s(t)$

P3

Vấn đề:

cho $\underline{r} = \underline{s}_T + \underline{n}$ → khôi phục $\underline{s}_T$

Lưu ý quan trọng:

cho $r(t)$, vector $\underline{r}$ được tính toán dễ dàng (do các tín hiệu cơ sở trực chuẩn đã biết)

Tiêu chuẩn quyết định

$P3$ **Vấn đề:**

cho $\underline{r}=\underline{s}_{\underline{T}}+\underline{n} \rightarrow$ khôi hục $\underline{s}_{\underline{T}}$

Tại phía bộ thu, cho $\underline{r}$

Ta muốn chọn ra tín hiệu nhận được $\boxed{\underline{s}_R \in M}$

Mục tiêu: ra quyết định đúng: $\underline{s}_R = \underline{s}_T$

Tuy nhiên không phải lúc nào cũng làm được, do tồn tại của tạp âm.

cho $\underline{r}$ chúng ta muốn tạo ra các tiêu chuẩn ra quyết định để xác định $\underline{s}_R$

Tối thiểu xác suất xảy ra lỗi xác định ký tự (tín hiệu)

$$\boxed{P_S(e) = P(\underline{s}_R \neq \underline{s}_T)}$$

Decision criterion

$\textcircled{P3}$

Vấn đề:

cho $\underline{r}=\underline{s}_{\underline{T}}+\underline{n} \rightarrow$ khôi phục $\underline{s}_{\underline{T}}$

Giả sử nhận được $\underline{r}=\underline{\rho} \in R^d$

→ we choose $\underline{s}_R \in M$ sao cho $P_S(e)$ là nhỏ nhất

tiêu chuẩn ra quyết định:

$\textcircled{C1}$

$$\boxed{\underline{s}_R = \arg\min_{\underline{s}_i \in M} \left[P(\underline{s}_R \neq \underline{s}_T \mid \underline{r} = \underline{\rho}) \right]}$$

Dò (detection)

Vấn đề quyết định khả năng nào, trong một tập các khả năng, là đúng.

- Một biến ngẫu nhiên X với m giá trị có thể xảy ra với xác suất tiên nghiệm (a priori) $P(X=x)$

- Ta quan sát bnn Y kết nối với X bởi các xác suất $P(Y=y|X=x)$, được gọi là các **likelihoods**

Khi một thí nghiệm được thực hiện, ta thu được 2 mẫu:

$x \in X$ and $y \in Y$.

Người ra quyết định sẽ quan sát giá trị của y chứ không phải x.

Cho y , người quan sát ra quyết định $d(y)=x'$

Quyết định này là đúng nếu $x'=x$

Tiêu chuẩn ra quyết định được chấp nhận để đưa ra quyết định $d(y)$:

Tôi đa quyết định đúng $P(x' = x)$ = Tối thiểu quyết định sai $P(x' \neq x)$

MAP criterion

Điều này tương đương với tiêu chuẩn:
a MAXIMUM A POSTERIORI (MAP)

$$\boxed{d(y) = \arg\max_{x} \left[P(X = x \mid Y = y) \right]}$$

MAP criterion

Chứng minh:

$$P(X' \neq X) = \sum_x \sum_y P(X' \neq X, X = x, Y = y) =$$

$$= \sum_x \sum_y P(X' \neq X \mid X = x, Y = y) P(X = x, Y = y) =$$

$$= \sum_x \sum_y P(X'(y) \neq x \mid X = x, Y = y) P(X = x \mid Y = y) P(Y = y) =$$

$$= \sum_y \left[\sum_x (1 - \delta_{X'(y),x}) P(X = x \mid Y = y) \right] P(Y = y)$$

$$X'(y) = \arg\min_z \sum_x (1 - \delta_{z,x}) P(X = x \mid Y = y) = \arg\max_x P(X = x \mid Y = y)$$

Tiêu chuẩn ML

Định lý Bayes $$P(X=x\,|\,Y=y)=\frac{P(Y=y\,|\,X=x)P(X=x)}{P(Y=y)}$$

$$d(y)=\arg\max_{x}\left[P(X=x\,|\,Y=y)\right]$$

$$d(y)=\arg\max_{x}\left[P(Y=y\,|\,X=x)P(X=x)\right]$$

Với giả thuyết $$P(X=x)=\frac{1}{m}$$

$$d(y)=\arg\max_{x}\left[P(Y=y\,|\,X=x)\right]$$

ML criterion

Tiêu chuẩn MAXIMUM LIKELIHOOD

$$\boxed{d(y) = \arg\max_{x} \left[P(Y = y \mid X = x) \right]}$$

Vấn đề ra quyết định tại bộ thu

BNN X là tín hiệu truyền $\underline{s}_T \in M$

BNN được quan sát Y là tín hiệu nhận $\underline{r} = \underline{s}_T + \underline{n} \in S$

$$\underline{r} = \underline{s}_T + \underline{n}$$

Sự liên kết giữa $\underline{r}$ và $\underline{s}_T$ $f_{\underline{r}}(\underline{\rho} \mid \underline{s}_T = \underline{s}_i)$

Đây là một hàm mật độ phân bố Gauss trung vị $\underline{s}_i$ với Phương sai $N_0/2$ trên mỗi chiều

Hàm mật độ phân bố Gauss

Ví dụ: r là bnn theo phân bố Gauss

- trung bình μ
- phương sai σ^2
- hàm mật độ pbxs:

$$f_r(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(\rho-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Ví dụ: một cặp bnn Gauss r_1 r_2

- TB μ
- phương sai σ^2
- độc lập thống kê
- mật độ xác suất:

$$f_{r_1 r_2}(\rho_1 \ \rho_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(\rho_1 - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \ \square \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(\rho_2 - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$f_{r_1 r_2}(\rho_1 \ \rho_2) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^2} \exp\left(-\frac{(\rho_1 - \mu)^2 + (\rho_2 - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Gaussian density function

$$f_{\underline{r}}(\underline{\rho} \mid \underline{s}_T = \underline{s}_i)$$

$\underline{r}$ = *mảng các bnn Gauss* d

- TB $\mu = s_{ij}$
- Phương sai $\sigma^2 = N_0/2$
- độc lập thống kê
- hàm mật độ pbxs

$$f_{\underline{r}}(\underline{\rho} \mid \underline{s}_T = \underline{s}_i) = \frac{1}{(\sqrt{\pi N_0})^d} \exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^{d} (\rho_j - s_{ij})^2}{N_0}\right)$$

Tiêu chuẩn ML

$$d(y) = \arg\max_{x} \left[P(Y = y \mid X = x) \right]$$

Trở thành:

$$\boxed{\text{given } \underline{r} = \underline{\rho} \quad \text{choose} \quad \underline{s}_R = d\left(\underline{\rho}\right) = \arg\max_{\underline{s}_i \in M} \left[f_{\underline{r}}(\underline{\rho} \mid \underline{s}_T = \underline{s}_i) \right]}$$

$C2$

ML criterion

Biểu diễn $f_{\underline{r}}(\underline{\rho} \mid \underline{s}_T = \underline{s}_i)$

$$\underline{s_R} = \arg\max_{\underline{s}_i \in M} \left[\frac{1}{(\sqrt{\pi N_0})^d} \exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^{d} (\rho_j - s_{ij})^2}{N_0} \right) \right]$$

$$\underline{s_R} = \arg\min_{\underline{s}_i \in M} \sum_{j=1}^{d} (\rho_j - s_{ij})^2$$

Tiêu chuẩn khoảng cách ngắn nhất

$$\underline{s}_R = \arg\min_{\underline{s}_i \in M} \sum_{j=1}^{d} (\rho_j - s_{ij})^2$$

Thông qua cách tính khoảng cách Euclide giữa các vectors trong R^d:

$$d_E^2(\underline{\rho} - \underline{s}_i) = \sum_{j=1}^{d} (\rho_j - s_{ij})^2$$

Ta có:

$$\underline{s}_R = \arg\min_{\underline{s}_i \in M} d_E^2(\underline{\rho} - \underline{s}_i)$$

Tiêu chuẩn ML tương ứng với tiêu chuẩn khoảng cách ngắn nhất
minimum distance criterion

$$C3 \quad \boxed{\text{given } \underline{r} = \underline{\rho} \quad \text{choose} \quad \underline{s}_R = \arg\min_{\underline{s}_i \in M} d_E^2(\underline{\rho} - \underline{s}_i)}$$

Vùng Voronoi

$$\boxed{\text{given } \underline{r} = \underline{\rho} \quad \text{choose} \quad \underline{s}_R = \arg\min_{\underline{s}_i \in M} d_E^2(\underline{\rho} - \underline{s}_i)}$$

Đây là tiêu chuẩn liên kết với bất kỳ vector $\underline{\rho} \in R^d$

đại diện tín hiệu nhận được $\underline{s}_R \in M$

⇩

Ta có Vùng (quyết định)

Voronoi (decision) $V(\underline{s}_i)$

= tập hợp tất cả các vector nhận được để xác định lựa chọn

$$\underline{s}_R = \underline{s}_i$$

$$V(\underline{s}_i) = \left\{ \underline{\rho} \in R^d : \underline{s}_R = \underline{s}_i \right\}$$

Vùng Voronoi

Tập hợp của các vector nhận được được dung để đưa ra lựa chọn $\underline{s}_R = \underline{s}_i$

Khi nào ta có $\underline{s}_R = \underline{s}_i$?

Khi $\underline{\rho} \in R^d$ là gần nhất với $\underline{s}$ hơn tất cả các tín hiệu khác trong không gian tín hiệu

$$\boxed{V(\underline{s}_i) = \{\underline{\rho} \in R^d \ : \ d_E^2(\underline{\rho}, \underline{s}_i) \leq d_E^2(\underline{\rho}, \underline{s}) \quad \forall \underline{s} \in M\}}$$

Lưu ý:

Nếu ta nhận $\underline{\rho} \in V(\underline{s}_i)$ $\Rightarrow$ Ta chọn $\underline{s_R} = \underline{s}_i$

Tiêu chuẩn khoảng cách gần nhất

$$\boxed{\text{given } \underline{r} = \underline{\rho} \quad \text{choose} \quad \underline{s_R} = \arg\min_{\underline{s}_i \in M} d_E^2(\underline{\rho} - \underline{s}_i)}$$

Có thể được biểu diễn bởi tiêu chuẩn Vùng Voronoi

C4 $\boxed{\text{given } \underline{r} = \underline{\rho} \quad \text{if} \quad \underline{\rho} \in V(\underline{s}) \text{ Chọn } \quad \underline{s_R} = \underline{s}}$

Nhập môn Kỹ thuật Truyền thông

Bài 4: Lý thuyết ra quyết định (Decision Theory)

4.3 Bộ thu

PGS. Tạ Hải Tùng

Bộ thu không gian tín hiệu

Giả sử tín hiệu nhận được là $\rho(t)$ với $0 \le t < T$, bộ thu cần phải:

1. Tính *d* phép chiếu: $$\rho_j = \int_0^T \rho(t) b_j(t)\,dt$$

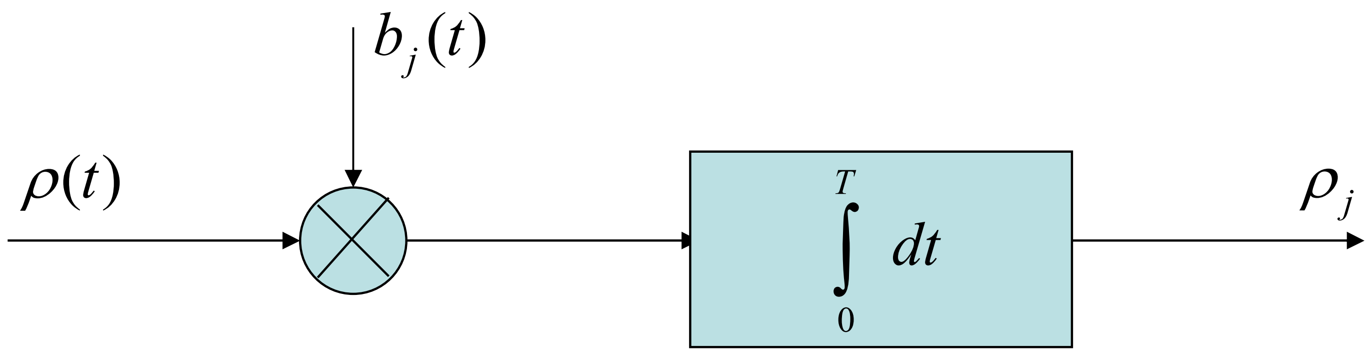
2. Với giả thiết vector nhận được $\underline{\rho} = (\rho_1, \ldots, \rho_j, \ldots, \rho_d)$ chọn $\underline{s_R} \in M$ theo tiêu chí ML (khoảng cách tối thiểu hay Voronoi)

3. Với $\underline{s_R}$, khôi phục lại vector thông tin nhị phân $\underline{u_R}$ thông qua ánh xạ ngược: $\underline{u_R} = e^{-1}(\underline{s_R})$

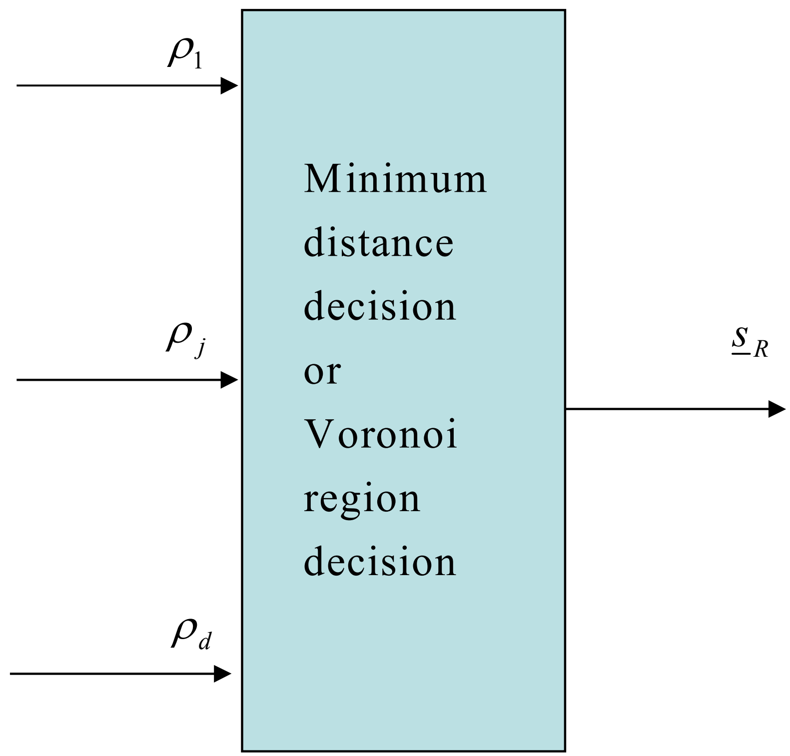
Bộ thu không gian tín hiệu (với bộ tích phân)

1. Cho $\rho(t)$ tính d phép chiếu

$$\rho_j = \int_0^T \rho(t) b_j(t)\, dt$$

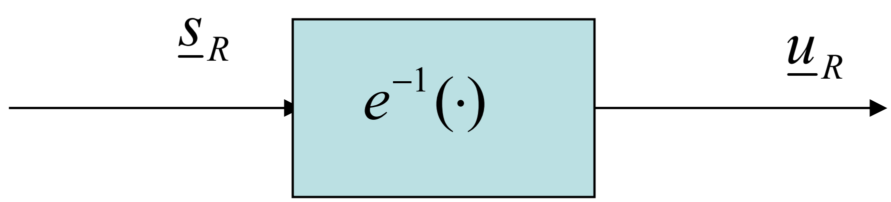


2. Sau khi thu được $\underline{\rho}=(\rho_1,\ldots,\rho_j,\ldots\rho_d)$ áp dụng tiêu chuẩn ML để chọn: $\underline{s}_R \in M$

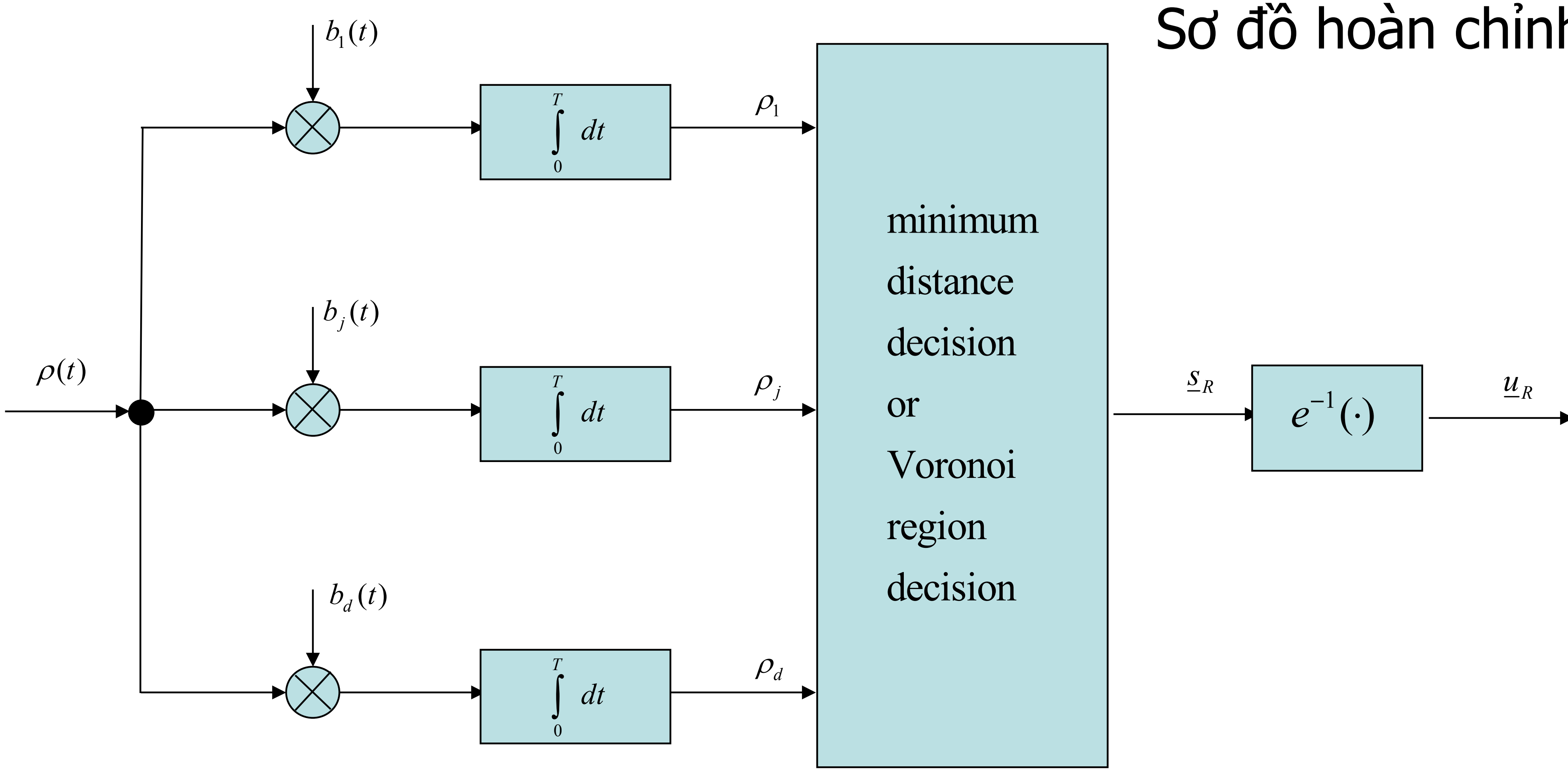


3. Cho $\underline{s}_R$, khôi phục $\underline{u}_R$ thông qua ánh xạ ngược:

$$\underline{u}_R = e^{-1}(\underline{s}_R)$$



Sơ đồ hoàn chỉnh



Bộ lọc phối hợp (matched filter)

Một bộ lọc với đáp ứng xung: $h(t)$

Tín hiệu đầu ra $y(t)$ được xác định bởi tín hiệu đầu vào $x(t)$ như sau:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

Giả sử:

- Tín hiệu đầu vào bộ lọc là tín hiệu nhận được $\rho(t)$
- Đáp ứng xung là: $h(t) = b_j(T - t)$

Bộ lọc phối hợp (Matched Filter)

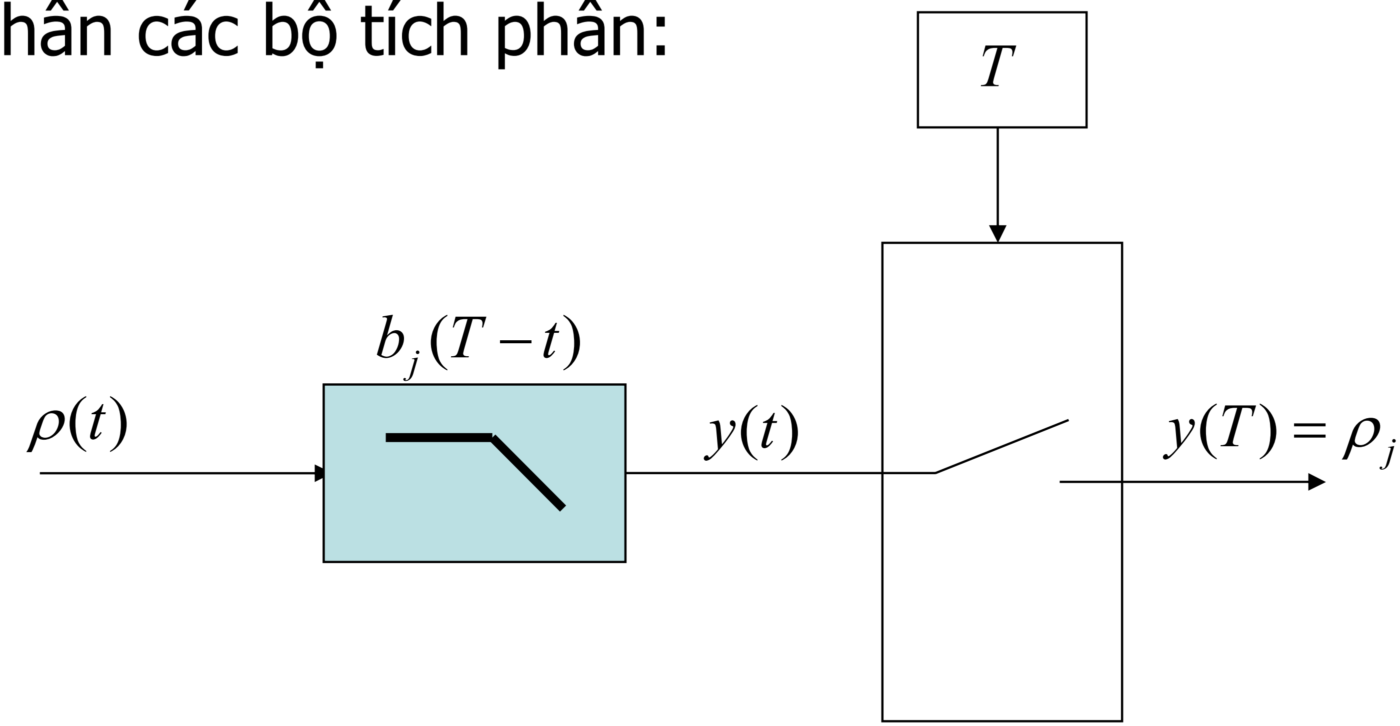
Đầu ra của bộ lọc phối hợp là:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\tau)\, b_j(T-t+\tau)\, d\tau$$

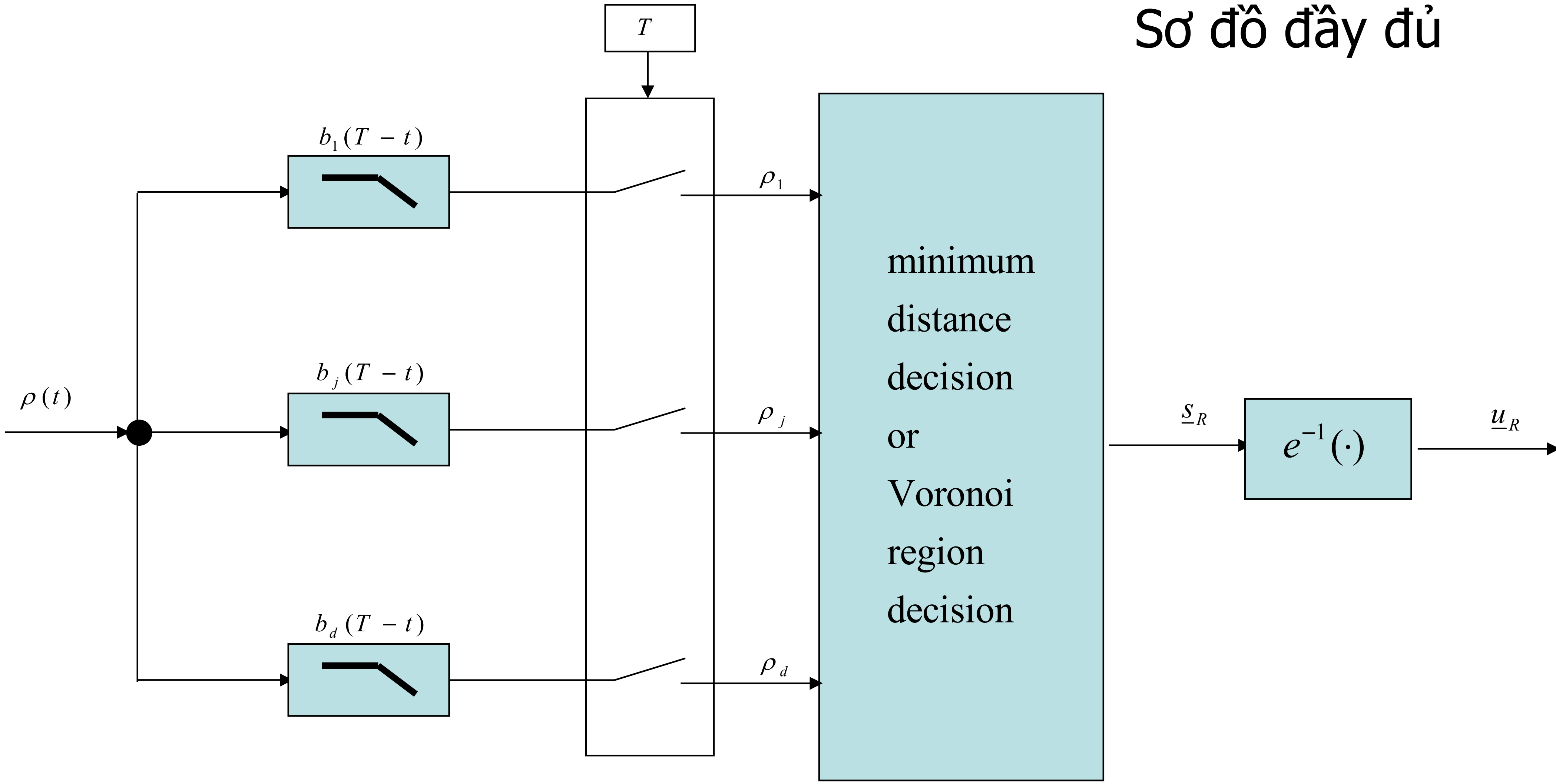
Giả thiết lấy mẫu tín hiệu đầu ra tại thời điểm $t=T$

$$y(t=T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\tau)\, b_j(\tau)\, d\tau = \int_{0}^{T} \rho(\tau)\, b_j(\tau)\, d\tau = \rho_j$$

Sử dụng MF cho ta một phương án thay thế có thể được dung để tính toán các phép chiếu $b_j(t)$ thay vì phải sử dụng các bộ tích phân các bộ tích phân:



Sơ đồ đầy đủ



T
$b_1(T-t)$
$b_j(T-t)$
$b_d(T-t)$
$\rho(t)$
ρ_1
ρ_j
ρ_d
minimum distance decision or Voronoi region decision
$\underline{s}_R$
$e^{-1}(\cdot)$
$\underline{u}_R$

Bộ thu hoàn chỉnh

Từ trước đến giờ, chúng ta tập trung vào chu kỳ đầu tiên [0,T[

- Không gian tín hiệu $M = \{ s_1(t) , \dots , s_i(t), \dots, s_m(t) \}$ được xây dựng bởi các tín hiệu trên miền xác định $[0,T[$

- Cơ sở trực chuẩn $B = \{ b_1(t) , \dots , b_j(t), \dots, b_d(t) \}$ được xây dựng bởi các tín hiệu trên miền xác định $[0,T[$

- Các phép chiếu được xác định: $\rho_j = \rho_j[0] = \int_0^T \rho(t) b_j(t) dt$

Bộ thu hoàn chỉnh

Với các chu kỳ khác thì xử lý thế nào? Ví dụ chu kỳ thứ 2 $[T,2T[$?

Các tín hiệu được sử dụng trong tính toán ở chu kỳ này tương tự tín hiệu trong không gian M, nhưng dịch đi T

Tương tự như việc sử dụng không gian tín hiệu

$$M' = \{ s'_1(t) , \ \dots , \ s'_i(t), \ \dots, \ s'_m(t) \}$$

gồm các tín hiệu trong miền xác định $[T,2T[$

được xác định như sau: $s_i^{'}(t) = s_i(t - T)$

Trong chu kỳ thứ 2 $[T,2T[$

- Không gian tín hiệu là $M' = \{ s'_1(t) , \ldots , s'_i(t), \ldots, s'_m(t) \}$ với

$$s_i^{'}(t) = s_i(t-T)$$

- Cơ sở trực chuẩn $B' = \{ b'_1(t) , \ldots , b'_j(t), \ldots, b'_d(t) \}$ với

$$b_i^{'}(t) = b_i(t-T)$$

- Các phép chiếu: $$\rho_j[1] = \int_T^{2T} \rho(t) b_j(t) dt$$

Trong một chu kỳ bất kỳ $[nT,(n+1)T[$

- Không gian tín hiệu là $M' = \{ s'_1(t) , \dots , s'_i(t), \dots, s'_m(t) \}$ với

$$s_i^{'}(t) = s_i(t - nT)$$

- Cơ sở trực chuẩn tương ứng

$$B' = \{ b'_1(t) , \dots , b'_j(t), \dots, b'_d(t) \}$$

với
$$b_i^{'}(t) = b_i(t - nT)$$

- Các phép chiếu được tính như sau:

$$\rho_j[n] = \int_{nT}^{(n+1)T} \rho(t) b_j(t) dt$$

Với các đầu ra của bộ lọc phối hợp

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\tau)\, f(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\tau)\, b_j(T-t+\tau)\, d\tau$$

Lấy giá trị tại thời điểm $t=(n+1)T$

$$y(t=(n+1)T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\tau)\, b_j(\tau-nT)\, d\tau = \int_{nT}^{(n+1)T} \rho(\tau)\, b_j(\tau-nT)\, d\tau = \rho_j[n]$$

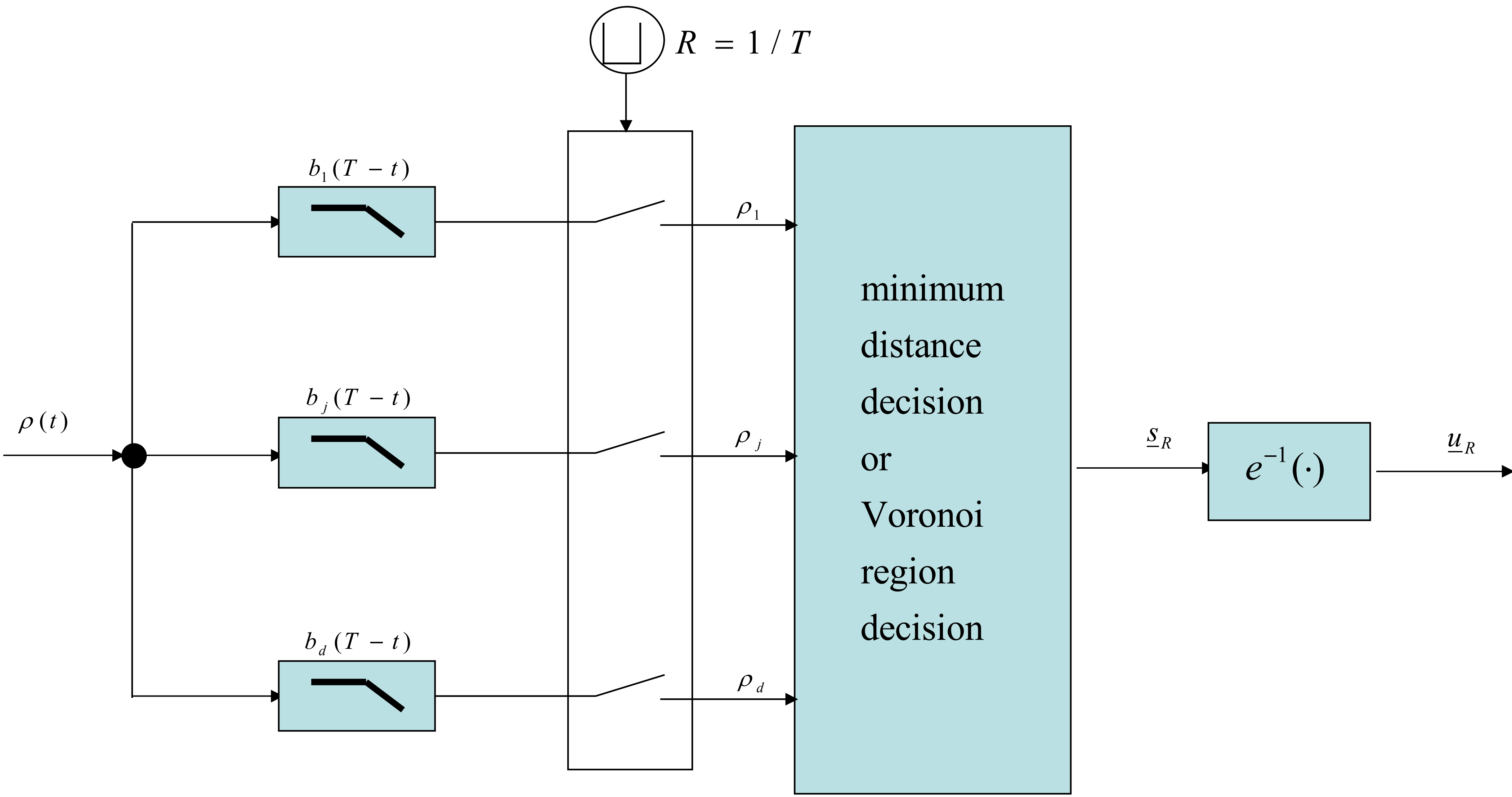
Bộ lọc phối hợp cho phép tính các phép chiếu: $\rho_j[n]$

Không chỉ cho chu kỳ đầu tiên mà còn cho bất kỳ chu kỳ nào $[nT,(n+1)T[$

Việc chúng ta cần làm là lấy giá trị đầu ra của bộ lọc:

- Theo tần số $R=1/T$
- Tại $t=(n+1)T$

Bộ thu hoàn chỉnh với bộ lọc MF



Đồng bộ ký tự - hay thời điểm lấy giá trị từ MF

Một chuỗi dữ liệu nhị phân được đặc trưng bởi tốc độ dòng bit: R_b.

Mỗi tín hiệu thuộc không gian tín hiệu sẽ tương ứng với k bit và tồn tại trong miền thời gian $T=kT_b$.

Các ký tự (ví dụ: A=00, B=01, C=10, D=11, với k=2) nhị phân được truyền với tần suất:

$R=1/T=R_b/k$ (tốc độ truyền ký tự).

Tại bộ thu, đầu ra của của bộ lọc phải được lấy mẫu với tần suất tương tự R.

Lưu ý: giá trị danh nghĩ của R là đã biết, nhưng giá trị thực tế thì không phải chính xác như vậy (do liên quan đến yếu tố vật lý)

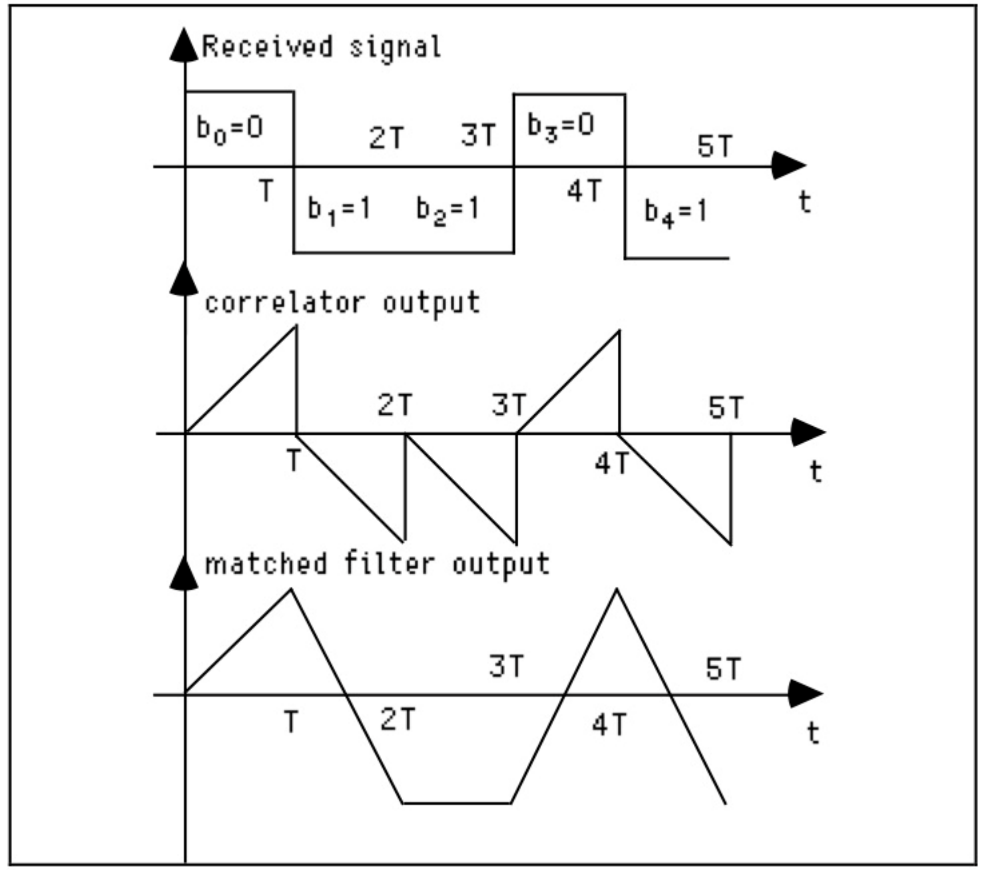
Trong thực tế rất khó để bộ tạo dao động (oscillators) ở máy phát và máy thu cho giá trị giống hệt nhau về tần số R: do vậy ta cần khôi phục lại R từ tín hiệu.

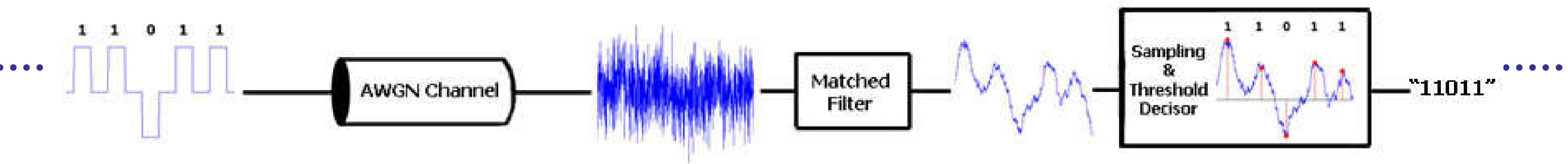
Đầu ra bộ lọc MF phải được lấy mẫu chính xác tại $t=(n+1)T$: thông tin về pha (tham chiếu thời gian) phải được khôi phục

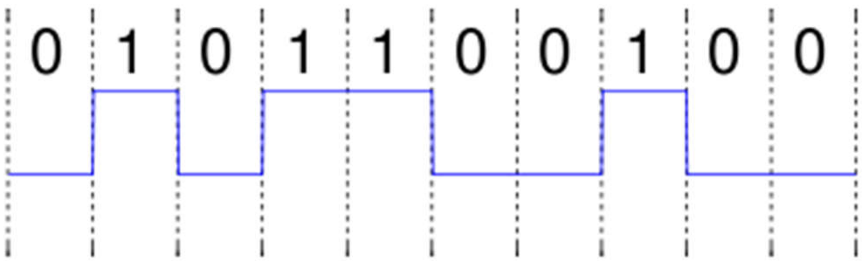
Khái niệm đồng bộ ký tự:

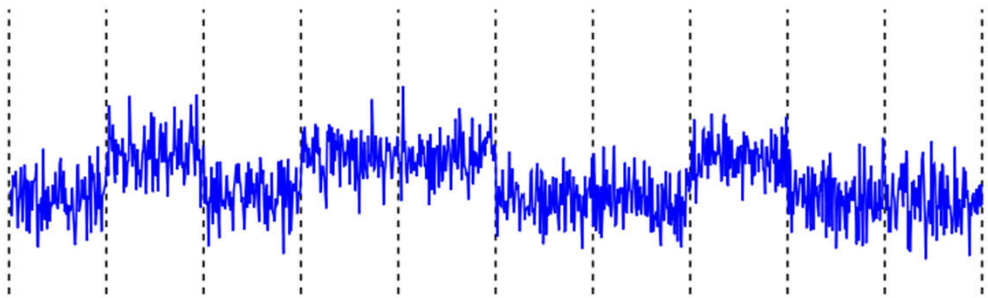
Bắt đầu từ tín hiệu nhận được, tần suất ký tự và pha của nó phải được khôi phục lại chính xác.

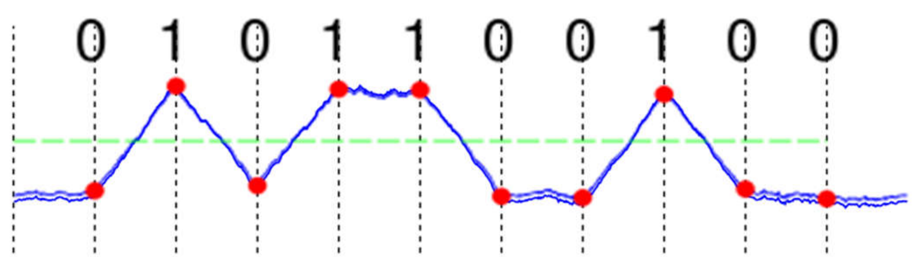
Điều quan trọng để tính chính xác các phép chiếu và phát hiện tín hiệu truyền




1 1 0 1 1
AWGN Channel
Matched Filter
Sampling & Threshold Decisor
1 1 0 1 1
"11011"


0 1 0 1 1 0 0 1 0 0




0 1 0 1 1 0 0 1 0 0

Bộ thu tương quan

Bắt đầu từ tiêu chuẩn khoảng cách Euclid:

$$\underline{s_R} = \arg\min_{\underline{s}_i \in M} d_E^2(\underline{\rho}, \underline{s}_i)$$

Ta có

$$d_E^2(\underline{\rho}, \underline{s}_i) = \sum_{j=1}^{d} (\rho_j - s_{ij})^2 = \sum_{j=1}^{d} \rho_j^{\ 2} + \sum_{j=1}^{d} s_{ij}^{\ 2} - 2\sum_{j=1}^{d} \rho_j s_{ij}$$

Thu được:

$$\underline{s_R} = \arg\min_{\underline{s}_i \in M} d_E^2(\underline{\rho} - \underline{s}_i) = \arg\min_{\underline{s} \in M} \left[\sum_{j=1}^{d} \rho_j^{\ 2} + \sum_{j=1}^{d} s_{ij}^{\ 2} - 2\sum_{j=1}^{d} \rho_j s_{ij} \right]$$

$$\underline{s_R} = \arg\min_{\underline{s}\in M} \left[\sum_{j=1}^{d} s_j^{\ 2} - 2\sum_{j=1}^{d} \rho_j s_{ij} \right] = \arg\max_{\underline{s}\in M} \left[\sum_{j=1}^{d} \rho_j s_{ij} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} s_{ij}^{\ 2} \right]$$

Since:

$$E(s_i) = \sum_{j=1}^{d} s_{ij}^{\ 2}$$

We have:

$$\underline{s_R} = \arg\max_{\underline{s}_i\in M} \left[\sum_{j=1}^{d} \rho_j s_{ij} - \frac{1}{2} E(s_i) \right]$$

$$\underline{s}_R = \arg\max_{\underline{s}_i \in M} \left[\sum_{j=1}^{d} \rho_j s_{ij} - \frac{1}{2} E(s_i) \right]$$

Lưu ý rằng

$$\int_0^T \rho(t)\, s_i(t)\, dt = \int_0^T \rho(t) \left[\sum_{j=1}^{d} s_{ij} b_j(t) \right] dt = \sum_{j=1}^{d} s_{ij} \int_0^T \rho(t)\, b_j(t)\, dt = \sum_{j=1}^{d} s_{ij} \rho_j$$

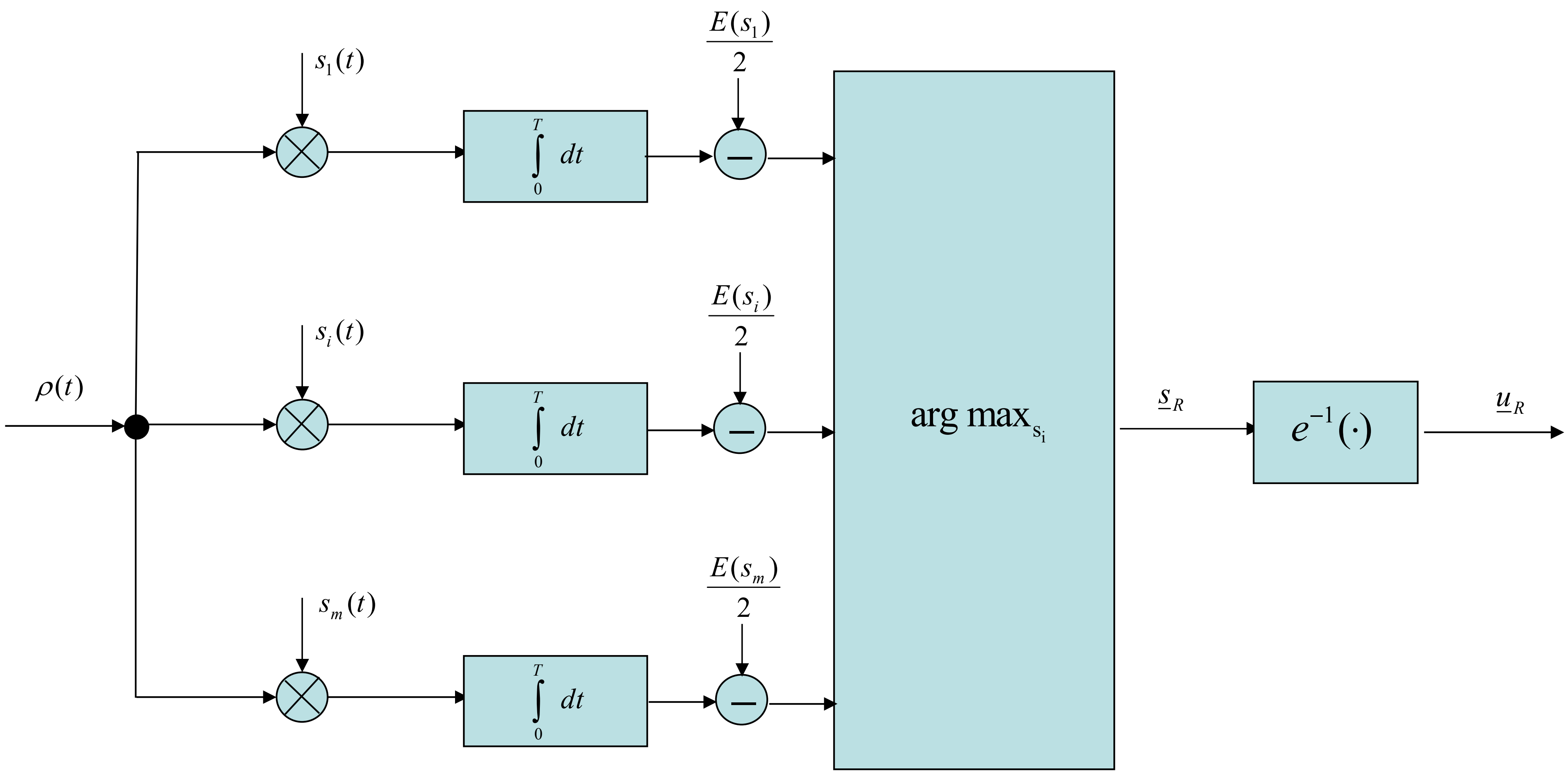
Là gia trị tương quan (**correlation)** giữa tín hiệu nhận được và tín hiệu thuộc không gian M: $s_i(t)$:

$$\int_0^T \rho(t)\, s_i(t)\, dt$$

Do đó tiêu chuẩn ML dựa trên tính giá trị tương quan (correlation) là:

$$\underline{s}_R = \arg\max_{\underline{s}_i \in M} \left[\int_0^T \rho(t)\, s_i(t)\, dt - \frac{1}{2} E(s_i) \right]$$

Correlation receiver



So sánh 2 kiểu bộ thu

Bộ thu sử dụng bộ lọc MF

- d bộ lọc
- một bộ quyết định dựa trên khoảng cách Euclid

Bộ thu tương quan có:

- m bộ tích phân ($m>d$)
- một bộ quyết định dựa trên giá trị lớn nhất (max decisor)

Bài tập

$$M = \{s_1(t) = P_T(t), s_2(t) = -P_T(t)\}$$

1. Vẽ dạng sóng truyền cho chuỗi $\underline{u}_T$=101010....

2. Xác định bộ lọc phối hợp

3. Vẽ đầu ra bộ lọc phối hợp (trong trường hợp không tạp âm)

4. Kiểm chứng giá trị mẫu đầu ra MF (tại $t=(n+1)T$) với các ký tự đã truyền

Nhập môn Kỹ thuật Truyền thông

Bài 5: Hiệu năng bộ thu – Xác suất thu sai

PGS. Tạ Hải Tùng

Truyền thông trên kênh

Chuỗi dữ liệu nhị phân $\underline{u}_T$

↓

Dạng sóng được truyền $s(t)$

↓

Kênh AWGN

↓

Dạng sóng nhận được $r(t) = s(t) + n(t)$

$$\boxed{\underline{u}_T \longrightarrow s(t) \longrightarrow r(t) = s(t) + n(t)}$$

Vấn đề tại phía bộ thu

$$\underline{\mathrm{u}}_{\mathrm{T}} \longrightarrow \mathrm{s}(t) \longrightarrow \mathrm{r}(t) = \mathrm{s}(t) + \mathrm{n}(t)$$

Vấn đề: $\boxed{\text{nhận được } \boldsymbol{r}(t) \rightarrow \text{khôi phục } \underline{u}_T}$

Xây dựng hệ cơ sở trực chuẩn B từ M (không gian bao gồm các $s_i(t)$)

Chiếu *r* nhận được lên B tạo vector $\underline{r}$

Tiêu chuẩn khoảng cách gần nhất

$$\boxed{\text{given } \underline{r} = \underline{\rho} \quad \text{choose} \quad \underline{s}_R = \arg\min_{\underline{s}_i \in M} d_E^2(\underline{\rho} - \underline{s}_i)}$$

Có thể được biểu diễn bởi tiêu chuẩn Vùng Voronoi

$C4$ $$\boxed{\text{given } \underline{r} = \underline{\rho} \quad \text{if} \quad \underline{\rho} \in V(\underline{s}) \text{ Chọn } \quad \underline{s}_R = \underline{s}}$$

Xác suất lỗi – Error probability

Để xác định chất lượng của một đường truyền vô tuyến số: ta cần tính xác suất phát hiện lỗi: có 2 loại

Tỷ lệ lỗi ký hiệu (SYMBOL ERROR RATE) = SER = $P_s(e)$ =

$$P_S(e) = P(\underline{s}_{\underline{R}}[n] \neq \underline{s}_{\underline{T}}[n])$$

Tỷ lệ lỗi bit (BIT ERROR RATE) = BER = $P_b(e)$ =

$$P(u_{\underline{R}}[i] \neq u_{\underline{T}}[i])$$

Một số khái niệm

R_b
Tốc độ truyền dòng bit

$T_b = 1/ R_b$
Thời gian truyền 1 bit

$T = k\ T_b$
Thời gian truyền một ký hiệu, với giả thiết 1 ký hiệu tương ứng k bit

$R = 1/T$
Tốc độ truyền ký hiệu

E_b
Năng lượng để truyền 1 bit

E_S
Năng lượng để truyền 1 ký hiệu

$S = E_b R_b = E_S R$
Công suất tín hiệu

N_0
Mật độ phổ công suất tạp âm

B
Băng thông tín hiệu

$N = N_0 B$
Công suất tạp âm

S/N

Tỷ số Tín trên Tạp (Signal to Noise ratio)

E_b/N_0

Tỷ số S/N liên quan đến 1 bit thông tin, hay nói cách khác tỷ số năng lượng truyền 1 bit / mật độ phổ công suất tạp âm

Mối liên hệ: $$\frac{S}{N} = \frac{E_b}{N_0}\frac{R_b}{B} = \frac{E_b}{N_0}\eta$$

Trong đó $\eta = \dfrac{R_b}{B}$ hiệu quả sử dụng phổ (**spectral efficiency**

Hiệu năng của hệ thống được diễn tả như một hàm của E_b/N_0

Tỷ số này tỷ lệ với công suất tín hiệu nhận được

$$S = \frac{S}{N} N = \frac{E_b}{N_0} \frac{R_b}{B} N_0 B = \frac{E_b}{N_0} R_b N_0$$

Tính SER

Khái niệm: $P_S(e) = P(\underline{s}_R \neq \underline{s}_T)$

Ta có thể biểu diễn:

$$P_S(e) = \sum_{i=1}^{m} P_S(e \mid \underline{s}_T = \underline{s}_i) P(\underline{s}_T = \underline{s}_i) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} P_S(e \mid \underline{s}_T = \underline{s}_i)$$

Do vậy, cần tính:

$$P_S(e \mid \underline{s}_T = \underline{s}_i) = P(\underline{s}_R \neq \underline{s}_T \mid \underline{s}_T = \underline{s}_i)$$

SER computation

Cách diễn đạt thứ nhất:

$$P_S(e \mid \underline{s_T} = \underline{s_i}) = P(\underline{s_R} \neq \underline{s_T} \mid \underline{s_T} = \underline{s_i}) = 1 - P(\underline{s_R} = \underline{s_T} \mid \underline{s_T} = \underline{s_i}) =$$

$$= 1 - P(\underline{\rho} \in V(\underline{s_i}) \mid \underline{s_T} = \underline{s_i})$$

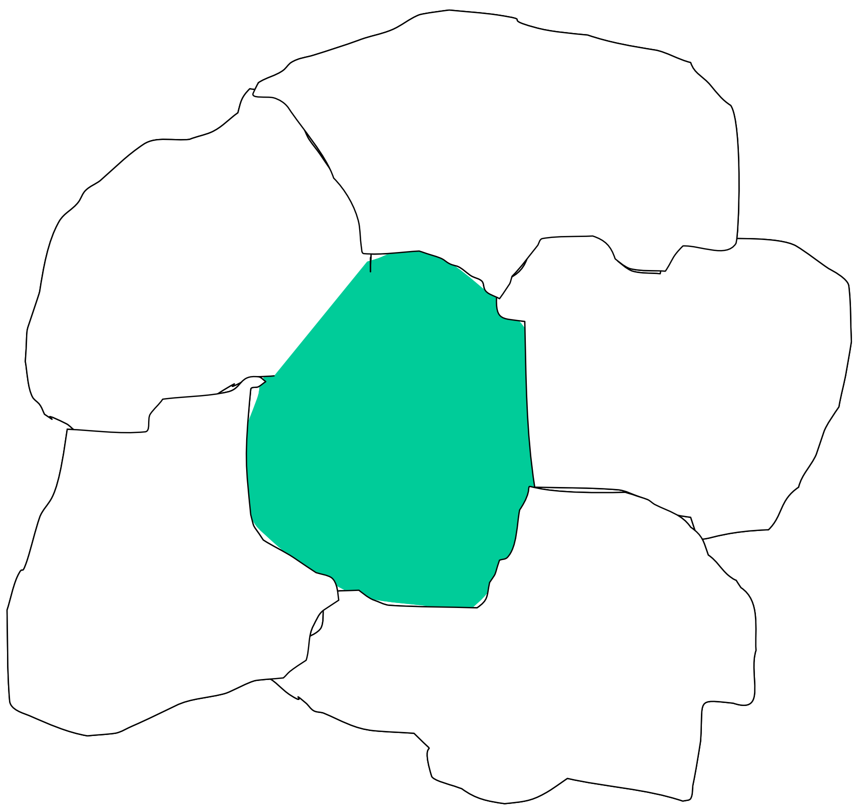
Cách diễn đạt thứ 2:

$$P_S(e \mid \underline{s_T} = \underline{s_i}) = P(\underline{s_R} \neq \underline{s_T} \mid \underline{s_T} = \underline{s_i}) = P(\underline{\rho} \notin V(\underline{s_i}) \mid \underline{s_T} = \underline{s_i}) =$$

$$= \sum_{j \neq i} P(\underline{s_R} = \underline{s_i} \mid \underline{s_T} = \underline{s_i}) = \sum_{j \neq i} P(\underline{\rho} \in V(\underline{s_j}) \mid \underline{s_T} = \underline{s_i})$$

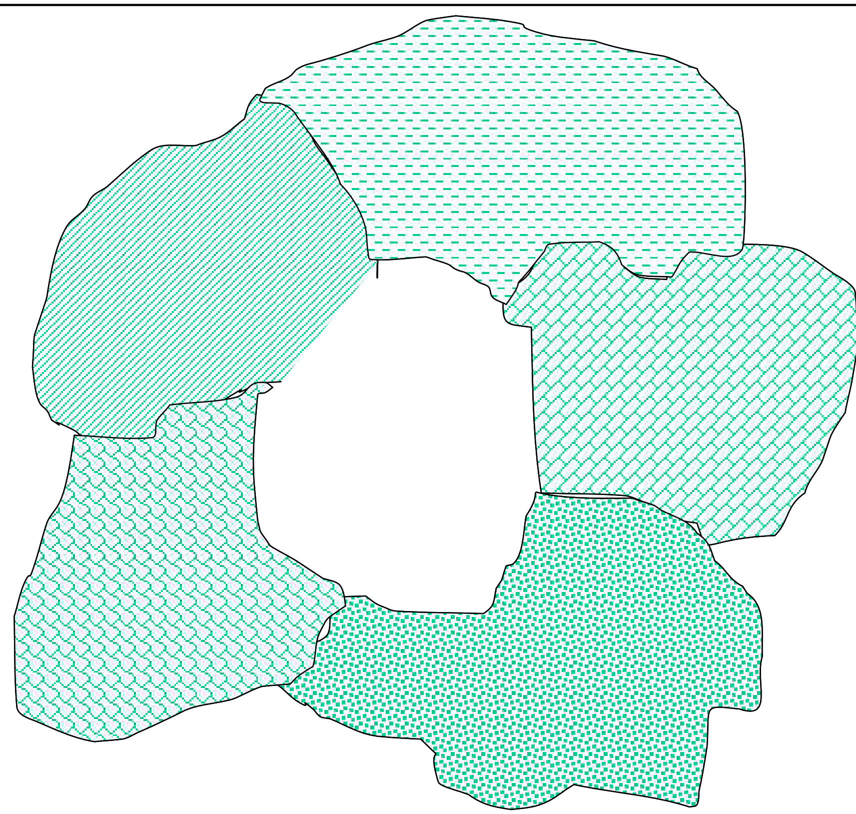
Cách diễn đạt thứ nhất:

$$\boxed{P_S(e \mid \underline{s}_T = \underline{s}_i) = 1 - P(\underline{\rho} \in V(\underline{s}_i) \mid \underline{s}_T = \underline{s}_i)}$$



Cách diễn đạt thứ 2

$$P_S(e \mid \underline{s}_T = \underline{s}_i) = P(\underline{\rho} \notin V(\underline{s}_i) \mid \underline{s}_T = \underline{s}_i) = \sum_{j \neq i} P(\underline{\rho} \in V(\underline{s}_j) \mid \underline{s}_T = \underline{s}_i)$$



Tính toán BER

Khi tín hiệu nhật được là đúng ($\underline{s}_R = \underline{s}_T$), thì chuỗi nhị phân (dữ liệu quan tâm) sẽ đúng ($\underline{v}_R = \underline{v}_T$).

Khi tín hiệu nhận được là sai ($\underline{s}_R \neq \underline{s}_T$), thì chuỗi nhị phân nhận được chắc chắn cũng sẽ bị sai ($\underline{v}_R \neq \underline{v}_T$), nhưng số lượng bit sai sẽ phụ thuộc vào việc gán nhãn Hamming và được đại diện bởi:

$$\frac{d_H(\underline{v}_R, \underline{v}_T)}{k}$$

Với d_H là khoảng cách Hamming giữa v_R và v_T (số bit khác nhau giữa 2 vector / cụm bit này)

Tính toán BER

Ta có

$$P_b(e) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} P_b(e \mid \underline{s_T} = \underline{s_i})$$

Với

$$P_b(e \mid \underline{s_T} = \underline{s_i}) = \sum_{j \neq i} P_b(e, \underline{s_R} = \underline{s_j} \mid \underline{s_T} = \underline{s_i}) =$$

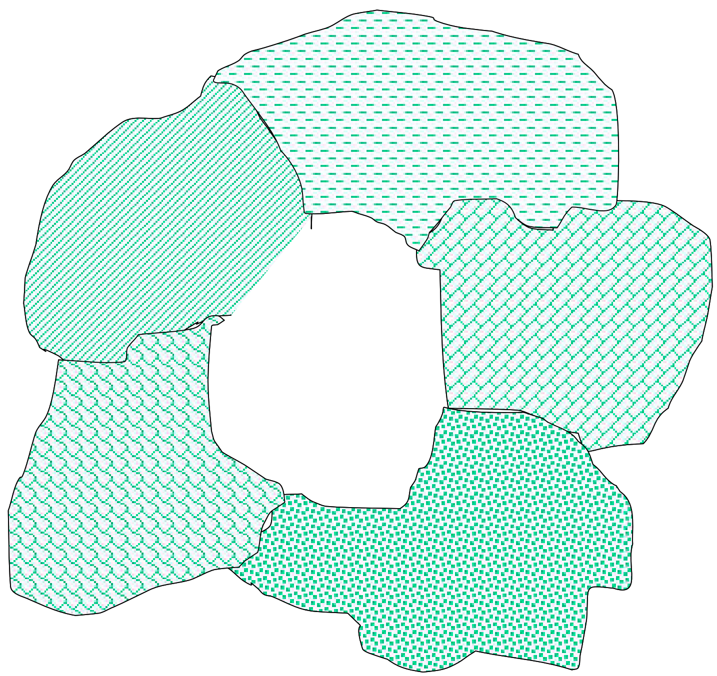
$$= \sum_{j \neq i} \frac{d_H(\underline{v_j}, \underline{v_i})}{k} P(\underline{s_R} = \underline{s_j} \mid \underline{s_T} = \underline{s_i}) =$$

$$= \sum_{j \neq i} \frac{d_H(\underline{v_j}, \underline{v_i})}{k} P(\underline{\rho} \in V(\underline{s_j}) \mid \underline{s_T} = \underline{s_i})$$

$$\left[\text{where } \underline{v_i} = e^{-1}\left(\underline{s_i}\right) \text{ and } \underline{v_j} = e^{-1}\left(\underline{s_j}\right) \right]$$

$$P_b(e) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} P_b(e \mid \underline{s_T} = \underline{s_i})$$

$$P_b(e \mid \underline{s_T} = \underline{s_i}) = \sum_{j \neq i} \frac{d_H(\underline{v_j}, \underline{v_i})}{k} \; P(\underline{\rho} \in V(\underline{s_j}) \mid \underline{s_T} = \underline{s_i})$$



Giới thiệu: Hàm erfc

Cho biến ngẫu nhiên Gauss n với

- Trung bình μ
- Phương sai σ^2
- Hàm mật độ pbxs:

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Ta có

$$P(n > x) = \int_x^{+\infty} f_n(x)\, dx = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

erfc

Với định nghĩa

$$erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$$

Ta có

$$P(n > x) = \int_{x}^{+\infty} f_n(x)\, dx = \int_{x}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{(x-\mu)}{\sqrt{2}\sigma}}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

Trong trường hợp trung bình =0 và phương sai $N_0/2$, ta có:

$$P(n > x) = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right) = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{x}{\sqrt{N_0}}\right)$$

Tính toán SER/BER cho các tín hiệu đối cực nhị phân

Xem xét không gian tín hiệu 1 chiều (d=1) gồm 2 tín hiệu (m=2), đối xứng qua gốc tọa độ:

$$M = \{\underline{s_1} = (+A) \quad \underline{s_2} = (-A) \quad \}$$

Vùng Voronoi của từng tín hiệu được định nghĩa như sau:

$$V(\underline{s_1}) = \{\underline{\rho} = (\rho_1) \ , \ \rho_1 \geq 0 \}$$

$$V(\underline{s_2}) = \{\underline{\rho} = (\rho_1) \ , \ \rho_1 \leq 0 \}$$

Ta có:

$$P_S(e) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} P_S(e \mid \underline{s_T} = \underline{s_i}) = \frac{1}{2}\left[P_S(e \mid \underline{s_T} = \underline{s_1}) + P_S(e \mid \underline{s_T} = \underline{s_2})\right]$$

Do vậy cần tính:

$$P_S(e \mid \underline{s_T} = \underline{s_1})$$

Và:

$$P_S(e \mid \underline{s_T} = \underline{s_2})$$

$$P_S(e \mid \underline{s_T} = \underline{s_1}) = P(\underline{\rho} \in V(\underline{s_2}) \mid \underline{s_T} = \underline{s_1}) = P(\rho_1 < 0 \mid \underline{s_T} = \underline{s_1})$$

Ta có:

$$\boxed{\underline{r} = \underline{s_T} + \underline{n} \qquad \underline{r} = \underline{\rho} \qquad \underline{s_T} = \underline{s_1}}$$

Với $\underline{\rho} = (\rho_1)$ $\quad \underline{s_1} = (s_{11}) = (+A)$ $\quad \underline{n} = (n_1)$

Do vậy:

$$\rho_1 = A + n_1$$

$$P_S(e \mid \underline{s_T} = \underline{s_1}) = P(\rho_1 < 0 \mid \underline{s_T} = \underline{s_1}) = P(A + n_1 < 0) = P(n_1 < -A)$$

n_1 là biến ngẫu nhiên Gaussian, với giá trị TB = 0 và phương sai $N_0/2$

$$P_S(e \mid \underline{s_T} = \underline{s_1}) = P(n_1 < -A) = P(n_1 > A) = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{A}{\sqrt{N_0}}\right)$$

Với $\underline{s}_T = \underline{s}_2$

$$P_S(e \mid \underline{s}_T = \underline{s}_2) = P(\underline{\rho} \in V(\underline{s}_1) \mid \underline{s}_T = \underline{s}_2) = P(\rho_1 > 0 \mid \underline{s}_T = \underline{s}_2)$$

Ta có:

$$\underline{r} = \underline{s}_T + \underline{n} \qquad \underline{r} = \underline{\rho} \qquad \underline{s}_T = \underline{s}_2$$

Do đó:

$$\underline{\rho} = (\rho_1) \qquad \underline{s}_2 = (s_{21}) = (-A) \qquad \underline{n} = (n_1)$$

$$\rho_1 = -A + n_1$$

$$P_S(e \mid \underline{s_T} = \underline{s_2}) = P(-A + n_1 > 0) = P(n_1 > A)$$

$$P_S(e \mid \underline{s_T} = \underline{s_2}) = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{A}{\sqrt{N_0}} \right)$$

Ta có $$P_S(e \mid \underline{s}_T = \underline{s}_1) = P_S(e \mid \underline{s}_T = \underline{s}_2)$$

Vì vậy:

$$P_S(e) = \frac{1}{2}\left[P_S(e \mid \underline{s}_T = \underline{s}_1) + P_S(e \mid \underline{s}_T = \underline{s}_2)\right] = P_S(e \mid \underline{s}_T = \underline{s}_1)$$

Do đó:

$$P_S(e) = P_S(e \mid \underline{s}_T = \underline{s}_1) = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{A}{\sqrt{N_0}}\right)$$

[lưu ý:

$$P_S(e) = P_S(e \mid \underline{s}_T = \underline{s}_1) = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{d}{2\sqrt{N_0}}\right)$$

Ta có:

$$P_S(e) = P_S(e \mid \underline{s}_T = \underline{s}_1) = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{A}{\sqrt{N_0}}\right)$$

Viết thành hàm của E_b/N_0.

$$E(\underline{s}_1) = E(\underline{s}_2) = A^2$$

$$E_S = \frac{E(\underline{s}_1) + E(\underline{s}_2)}{2} = A^2$$

$$E_b = \frac{E_S}{k} = E_S = A^2$$

Ta có:

$$P_S(e) = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Với không gian tín hiệu này ta có thể thiết lập phương án gán nhãn nhị phân:

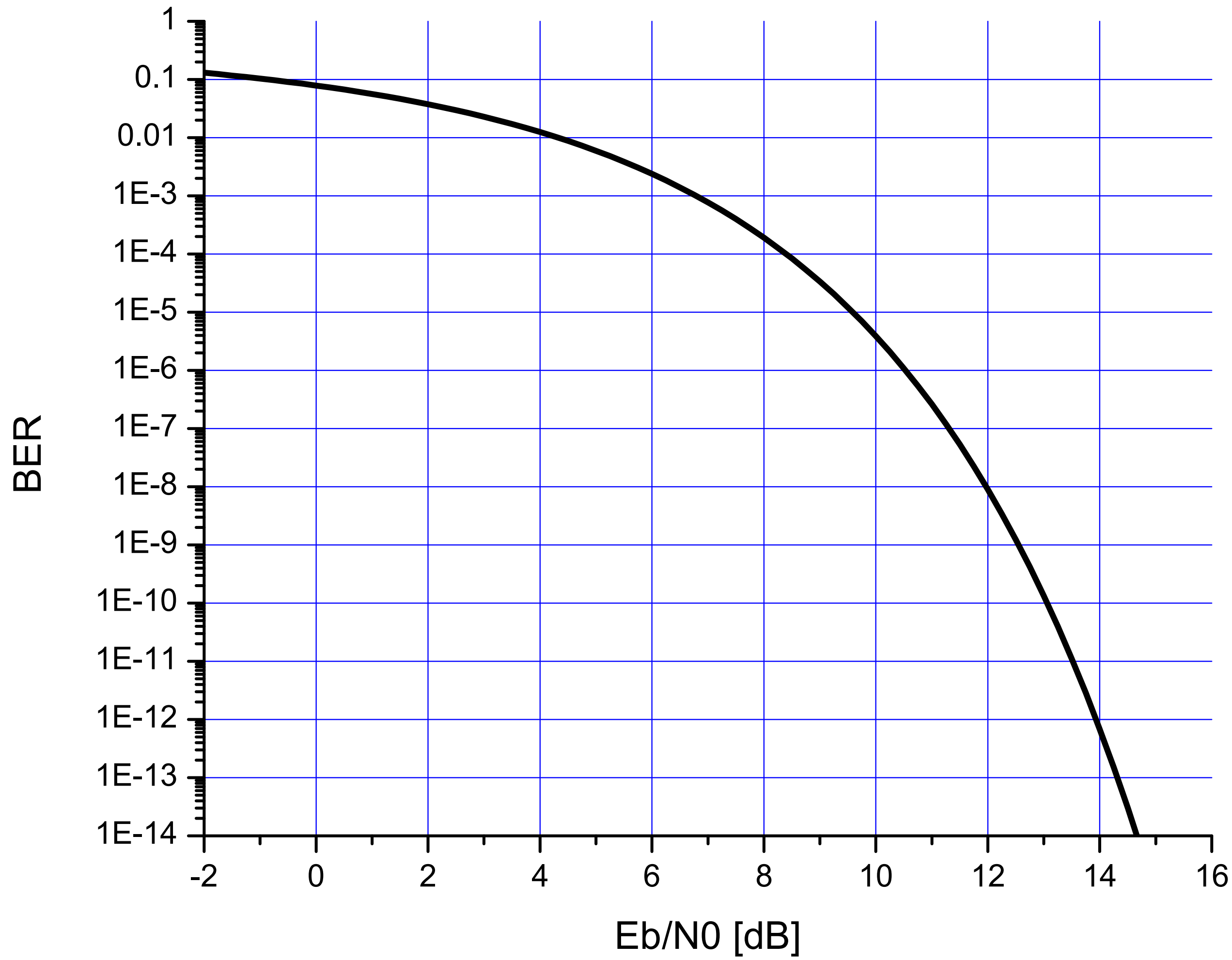
$$e : H_1 \Leftrightarrow M$$

$$\underline{v_1} = (0) \Leftrightarrow \underline{s_1}$$

$$\underline{v_2} = (1) \Leftrightarrow \underline{s_2}$$

Và trong phương án này, nếu tín hiệu sai thì dữ liệu nhị phân cũng chắc chắn sai theo, do đó:

$$P_b(e) = P_S(e) = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$



BER
1
0.1
0.01
1E-3
1E-4
1E-5
1E-6
1E-7
1E-8
1E-9
1E-10
1E-11
1E-12
1E-13
1E-14
-2
0
2
4
6
8
10
12
14
16
Eb/N0 [dB]

Các không gian tín hiệu khác nhau mà có cùng một không gian vetor thì giá trị BER là như nhau!

Như ví dụ: BER không phụ thuộc vào dạng song của vector trực chuẩn:

$$b_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} P_T(t)$$

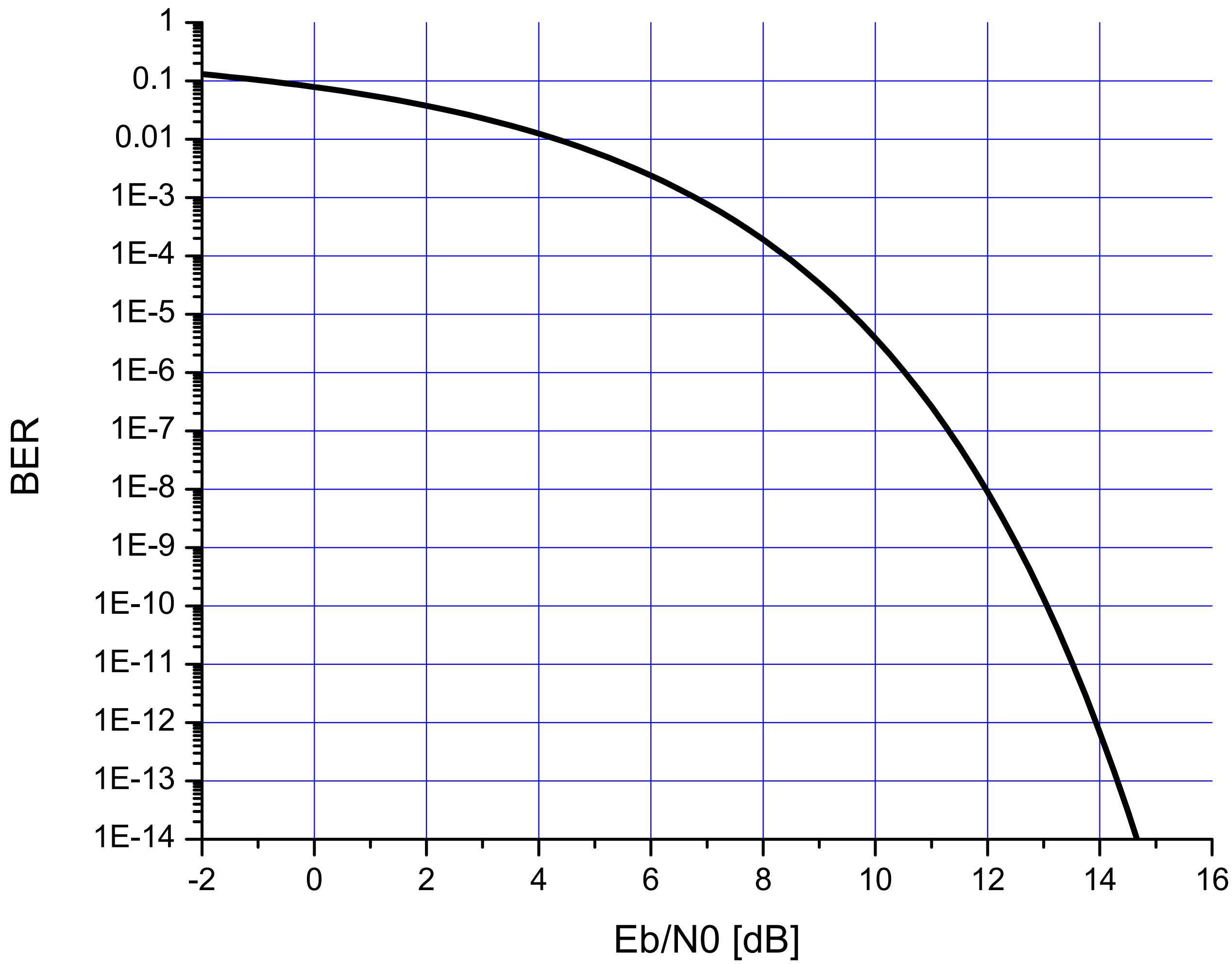
$$b_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} P_T(t) \cos(2\pi f_0 t)$$

Nhập môn Kỹ thuật Truyền thông

Bài 6: Tính toán, đánh giá phổ tín hiệu

PGS. Tạ Hải Tùng

Tính toán SER/BER cho các tín hiệu đối cực nhị phân (binary antipodal signal)



$$P_b(e) = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Các không gian tín hiệu khác nhau (khác dạng sóng truyền) nhưng có cùng không gian vector thì có BER như nhau!

Như ví dụ, BER không phụ thuộc vào tín hiệu trực chuẩn như hai loại tín hiệu trực chuẩn dưới đây.

$$b_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} P_T(t)$$

$$b_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} P_T(t) \cos(2\pi f_0 t)$$

Ví dụ so sánh BER

So sánh giữa không gian tín hiệu đối cực và không gian tín hiệu trực giao:

$$P_b(e)\,|_{antipodal} = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \qquad P_b(e)\Big|_{orthogonal} = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{1}{2}\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

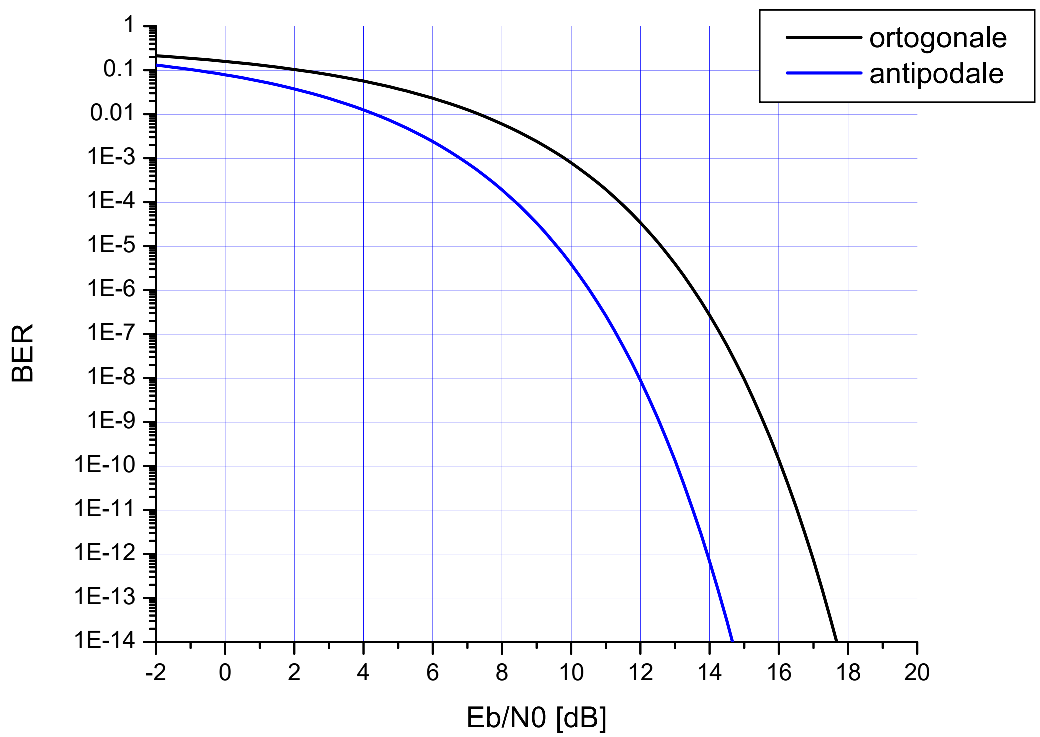
Không gian đối cực có hiệu năng tốt hơn

- Cố định BER, hệ thống với không gian tín hiệu đối cực sẽ yêu cầu E_b/N_0 thấp hơn

- Cố định E_b/N_0, hệ thống sẽ có BER nhỏ hơn

So sánh BER

$$P_b(e)\big|_{antipodal} = \frac{1}{2}\,erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \qquad P_b(e)\big|_{orthogonal} = \frac{1}{2}\,erfc\left(\sqrt{\frac{1}{2}\frac{E_b}{N_0}}\right)$$



So sánh BER

Cố định E_b/N_0 =12 dB:

- Không gian đối cực đạt được hiệu năng $P_b(e)$ =1e-8
- Trong khi không gian trực giao $P_b(e)$ =5e-5 (giá trị cao hơn → hiệu năng kém hơn)

Để đạt được $P_b(e)$=1e-6:

- Không gian đối cực yêu cầu: E_b/N_0 = 10.6 dB;
- Trong khi, không gian trực giao yêu cầu E_b/N_0 =13.6 dB

(Không gian đối cực lợi 3 dB, lưu ý rằng: tỷ số này tương ứng với công suất tín hiệu nhận được)

So sánh BER

Ví dụ: đường truyền thẳng có công suất tín hiệu nhận được như sau:

$$P_R = P_T \frac{G_T G_R}{\left(\frac{4\pi d}{\lambda}\right)^2}$$

Không gian đối cực có $P_b(e)$=1e-6 với công suất tín hiệu nhận được chỉ cần là ½ công suất đó của không gian trực giao.

Cùng công suất truyền, khoảng cách truyền với không gian đối cực sẽ lớn hơn không gian trực giao $\sqrt{2}$

Hay ta có thể trong cùng một khoảng cách truyền, giảm đi ½ công suất truyền nếu sử dụng không gian đối cực (hoặc lợi hơn do sử dụng ăng-ten truyền nhỏ hơn).

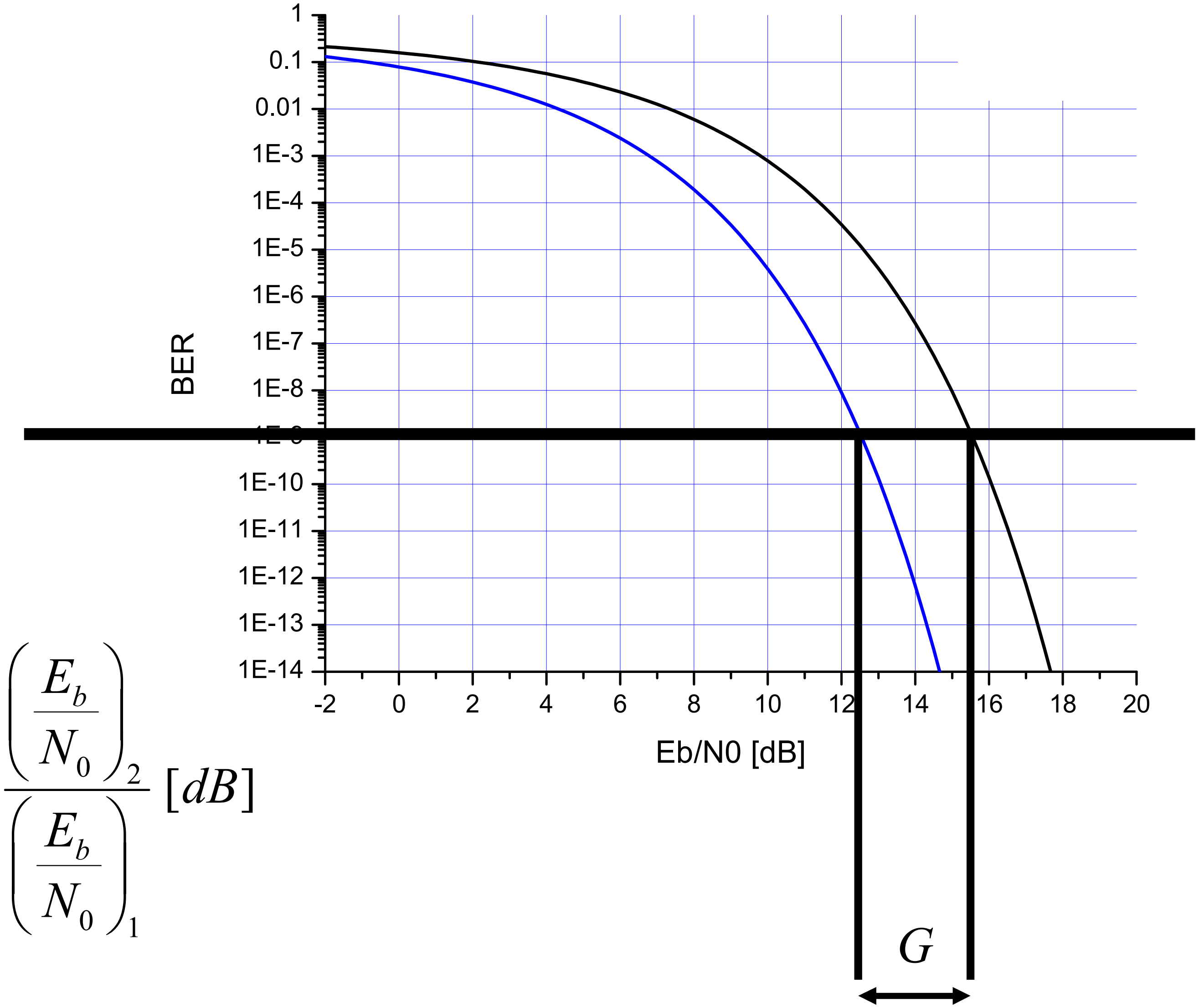
So sánh BER

Tổng quát cho 2 không gian M_1 và M_2 với hiệu năng:

$$P_b(e)\,|_1 \approx erfc\left(\sqrt{y_1 \frac{E_b}{N_0}}\right) \qquad P_b(e)\,|_2 \approx erfc\left(\sqrt{y_2 \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Nếu $y_1 > y_2$ không gian M_1 có hiệu năng tốt hơn (BER thấp hơn)

BER comparison



$$G = 10\log_{10}\frac{\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_2}{\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_1}\ [dB]$$

Hiệu năng tiệm cận (Asymptotic performance)

Giả thiết tiệm cận ($E_b/N_o \to \infty$) với phương sai của tạp âm rất nhỏ.

Khi lỗi xảy ra, gần như chỉ có thể xảy ra ở vùng Voronoi kế bên (của các tín hiệu có khoảng cách nhỏ nhất).

Ta có thể chứng minh rằng xác xuất lỗi ký hiệu trong trường hợp tiệm cận được tính xấp xỉ như sau:

$$\boxed{P_S(e) \approx \frac{1}{2} A_{\min} erfc\left(\sqrt{\frac{d_{\min}^2}{4N_0}}\right)}$$

$$\boxed{d_{\min} = \min_{\underline{s}_1\, \underline{s}_j \in M} d_E(\underline{s}_1, \underline{s}_j)}$$

$$\boxed{A_{\min} = \text{multiplicity=number of signals } \underline{s}_j \text{ with } d_E(\underline{s}_j\ \underline{s}_1) = d_{\min}}$$

Tương tự với BER:

$$P_b(e) \approx \frac{1}{2}\frac{w_{\min}}{k}\, erfc\left(\sqrt{\frac{d_{\min}^2}{4N_0}}\right)$$

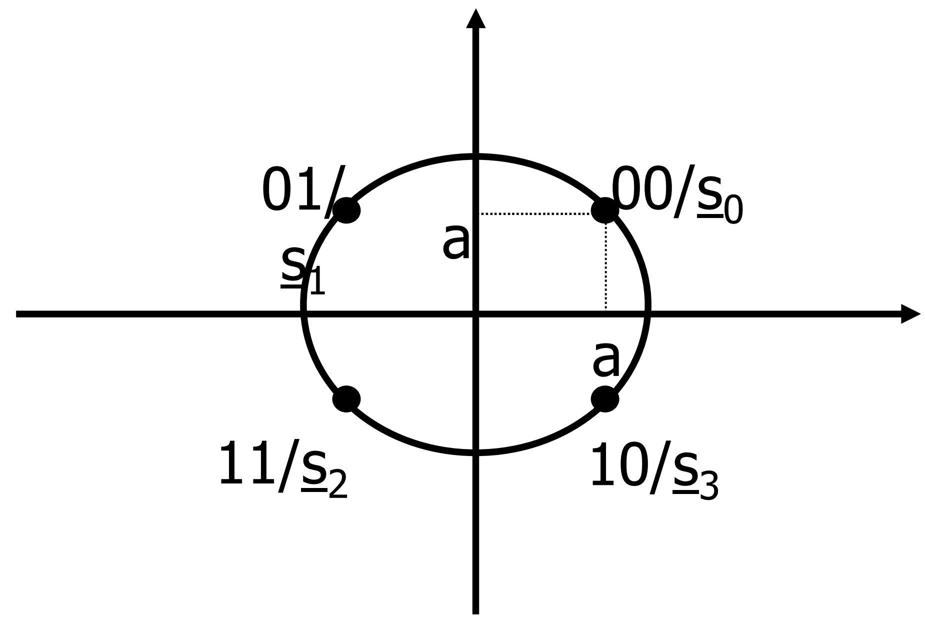
Trong đó:

$$w_{\min} = \text{input multiplicity} = \sum_{\underline{s}_j : d_E(\underline{s}_1, \underline{s}_j) = d_{\min}} d_H(\underline{v}_1, \underline{v}_j)$$

Các công thức này không chỉ là giới hạn trên, mà có thể coi là giá trị xấp xỉ của các xác suất thực, trong trường hợp SNR cao.

Ví dụ

Không gian 4-PSK



$$d_{\min} = 2a \qquad A_{\min} = 2 \qquad w_{\min} = 2$$

$$P_S(e) \approx erfc\left(\sqrt{\frac{d_{\min}^2}{4N_0}}\right) = erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

$$P_b(e) \approx \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{d_{\min}^2}{4N_0}}\right) = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Phương pháp gán nhãn Gray (Gray labelling)

Xét xấp xỉ tiệm cận BER:

$$P_b(e) \approx \frac{1}{2}\frac{w_{\min}}{k}\, erfc\left(\sqrt{\frac{d_{\min}^2}{4N_0}}\right)$$

Ta có $$A_{\min} \le w_{\min}$$

$$\boxed{A_{\min} = \text{multiplicity=number of signals } \underline{s}_j \text{ with } d_{\mathrm{E}}(\underline{s}_j\ \underline{s}_1) = d_{\min}}$$

$$\boxed{w_{\min} = \text{input multiplicity=} \sum_{\underline{s}_j : d_E(\underline{s}_1, \underline{s}_j) = d_{\min}} d_H(\underline{v}_1, \underline{v}_j)}$$

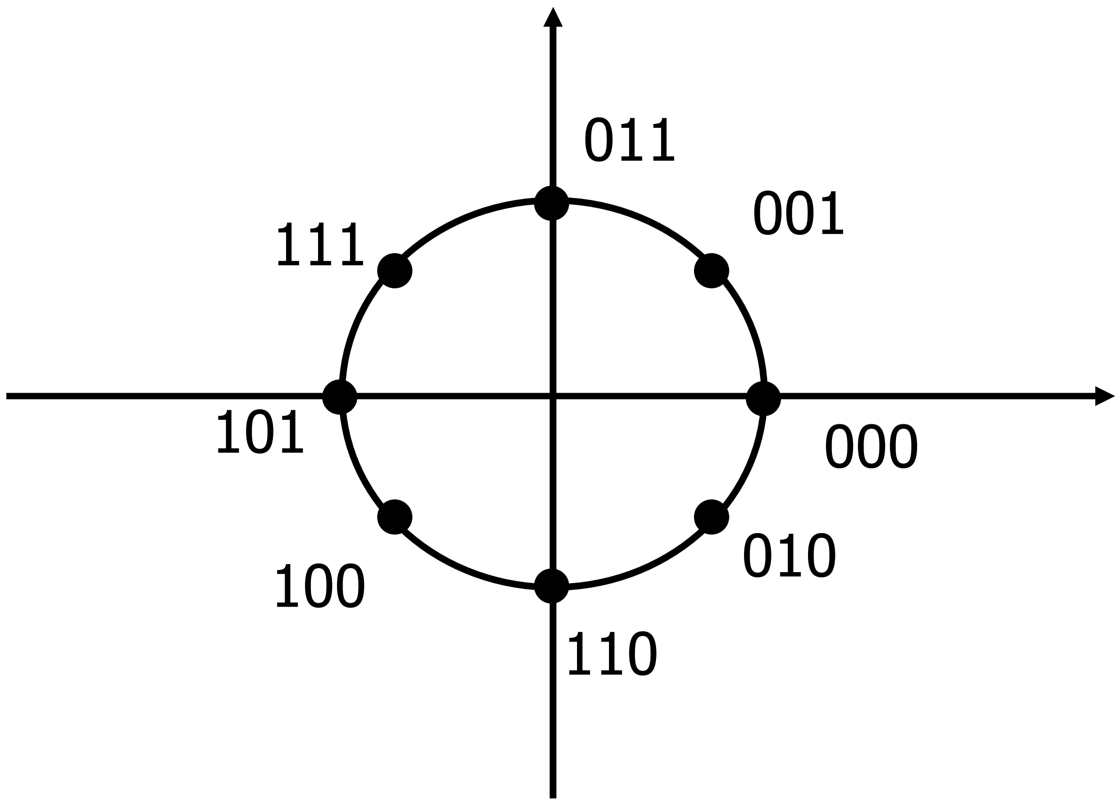
Trong trường hợp tối ưu: $A_{\min} = w_{\min}$

Cho tín hiệu $\underline{s}_i$ liên kết với vector qua ánh xạ $\underline{v}_i = e^{-1}(\underline{s}_i)$.

Tất cả các tín hiệu liền kề "***adjacent***" $\underline{s}_i$ (có d_{min} nhỏ nhất với $\underline{s}_i$) được liên kết với các vector nhị phân có khoảng cách Hamming là 1 so với $\underline{v}_i$ ..

Theo cách này BER tiệm cận được tối thiểu hóa

Ví dụ:



Tính toán, ước lược phổ tín hiệu

PSD = Power Spectral Density

Mật độ phổ công suất (PSD)

Các thuộc tính phổ

Chúng ta muốn tính nghiên cứu các đặc tính tần số của tín hiệu truyền $s(t)$ thông qua tính mật đổ phổ công suất (power spectral density) $G_s(f)$ và định nghĩa băng thông phù hợp của tín hiệu truyên: vùng tần số chứa (một phần lớn giá trị của) $G_s(f)$.

Không gian tín hiệu lưỡng cực một chiều

Xem xét không gian tín hiệu sau:

$$M = \{s_1(t) = +AP_T(t)\,,\, s_2(t) = -AP_T(t)\,\}$$

Đây là không gian tín hiệu một chiều với (d=1) , với cơ sở trực chuẩn:

$$B = \left\{ b_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} P_T(t) \right\}$$

Do vậy, các tín hiệu trong M có biểu diễn dạng vector như sau:

$$M = \{\underline{s_1} = (+\alpha)\,,\, \underline{s_2} = (-\alpha)\} \qquad \alpha = A\sqrt{T}$$

Xem xét tín hiệu được truyền:

Trong chu kỳ đầu tiên $[0,T[$ ta truyền

$$s_1(t) = +\alpha b_1(t) \quad \text{Hoặc} \quad s_2(t) = -\alpha b_1(t)$$

Trong chu kỳ bất kỳ $[nT,(n+1)T[$ ta truyền

$$s_1(t-nT) = +\alpha b_1(t-nT) \quad \text{Hoặc} \quad s_2(t-nT) = -\alpha b_1(t-nT)$$

Ta có thể biểu diễn dạng thức toán học của tín hiệu truyền như sau:

$$\boxed{s(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a[n]p(t - nT)}$$

$$\boxed{a[n] \in \{+\alpha, -\alpha\}}$$

$$\boxed{p(t) = b_1(t)}$$

Đối với mọi không gian tín hiệu một chiều:

$$M = \{\underline{s_1} = (\alpha_1), \underline{s_2} = (\alpha_2), \ldots, \underline{s_m} = (\alpha_m)\} \subseteq R$$

với tín hiệu trực chuẩn: $b_1(t)$

Tín hiệu truyền sẽ có dạng:

$$\boxed{s(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a[n]p(t - nT)}$$

$$\boxed{a[n] \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_m\}} \qquad \boxed{p(t) = b_1(t)}$$

Chuỗi $a[n]$ là một chuỗi có tính chất dừng của các biến ngẫu nhiên, gồm các ký hiệu độc lập thống kê và có phân bố xác xuất đều:

$$P\left(a[n]=\alpha_i\right)=\frac{1}{m}$$

Trung bình $$\mu_a=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\alpha_i$$

Phương sai $$\sigma_a^2=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\alpha_i-\mu_a\right)^2$$

Dạng sóng truyền:

Trong phần tới đây, chúng ta sẽ tính mật độ phổ công suất của tín hiệu truyền đi được tạo ra bởi không gian vector một chiều:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n]p(t - nT)$$

s(t) là một tiến trình ngẫu nhiên, mà ta muốn tính mật độ phổ công suất của nó:

$$G_s(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_s(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

Giá trị này cung cấp thông tin về việc phân bố công suất của tín hiệu trên miền tần số:

$$P(s) = R_s(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_s(f)\, df$$

Lý thuyết về mật độ phổ công suất

Cho một tiến trình ngẫu nhiên $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n]p(t - nT)$

Với

- $a[n]$ là một chuỗi có tính chất dừng của các biến ngẫu nhiên, với

$$M_a(i)=E[a[n]a[n+i]]$$

- $p(t)$ là tín hiệu thực với giá trị sau biến đổi Fourier là $P(f)$

Mật độ phổ công suất được tính: $$\boxed{G_s(f) = S_a(f)\frac{|P(f)|^2}{T}}$$

Với $$S_a(f) = \sum_i M_a(i)e^{-j2\pi fiT}$$

Chứng minh (tự tham khảo)

$$G_s(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_s(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

Tiến trình ngẫu nhiên là một tiến trình dừng vòng. Ta tính:

$$R_s(\tau) = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} M_{SS}(t+\tau, t)\, dt$$

$$M_{SS}(t+\tau,t)=E[S(t+\tau)S(t)]=E\left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty}a[m]p(t+\tau-mT)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a[n]p(t-nT)\right]=$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}E\big[a[m]a[n]\big]p(t+\tau-mT)\ p(t-nT)=$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}M_a(m-n)p(t+\tau-mT)p(t-nT)=$$

Với $i=(m-n)$ $[\ m = n+i\ ]$

$$\boxed{M_{SS}(t+\tau,t)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}M_a(i)p(t+\tau-nT-iT)p(t-nT)}$$

$$M_{SS}(t+\tau,t)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}M_a(i)p(t+\tau-nT-iT)p(t-nT)$$

$$R_s(\tau)=\frac{1}{T}\int_0^T M_{SS}(t+\tau,t)\,dt=\frac{1}{T}\int_0^T\left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}M_a(i)p(t+\tau-nT-iT)p(t-nT)\right]dt=$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}M_a(i)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_0^T\left[p(t+\tau-nT-iT)p(t-nT)\right]dt=$$

Với $t'=(t-nT)$

$$=\frac{1}{T}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}M_a(i)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-nT}^{-(n-1)T}\left[p(t'+\tau-iT)p(t')\right]dt'$$

$$\boxed{R_s(\tau)=\frac{1}{T}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}M_a(i)\int_{-\infty}^{+\infty}\left[p(t'+\tau-iT)p(t')\right]dt'}$$

$$R_s(\tau) = \frac{1}{T}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} M_a(i) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[p(t'+\tau-iT)\,p(t') \right] dt'$$

$$G_s(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_s(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{T}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} M_a(i) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[p(t'+\tau-iT)\,p(t') \right] dt' \right] e^{-j2\pi f\tau} d\tau =$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} M_a(i) \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[p(t'+\tau-iT)\,p(t') e^{-j2\pi f\tau} \right] dt'\, d\tau =$$

$$t'' = t' + \tau - iT \qquad\qquad \tau = t'' - t' + iT$$

$$e^{-j2\pi f\tau} = e^{-j2\pi f t''}\, e^{j2\pi f t'}\, e^{-j2\pi f iT}$$

$$G_s(f) = \frac{1}{T}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} M_a(i) \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[p(t'')\,p(t') e^{-j2\pi f t''}\, e^{j2\pi f t'}\, e^{-j2\pi f iT} \right] dt'\, dt'' =$$

$$G_s(f) = \frac{1}{T}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} M_a(i)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[p(t'')p(t')e^{-j2\pi f t''}\ e^{j2\pi f t'}\ e^{-j2\pi f iT} \right] dt'\,dt'' =$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} M_a(i) e^{-j2\pi f iT}\int_{-\infty}^{+\infty} p(t'')\ e^{-j2\pi f t''} dt'' \int_{-\infty}^{+\infty} p(t')\ \ e^{j2\pi f t'}\ dt' =$$

$$= \frac{1}{T} S_a(f) P(f) P^*(f)$$

$$\boxed{G_v(f) = S_a(f)\,\frac{\left|P(f)\right|^2}{T}}$$

Trường hợp 1: Các ký hiệu động lập thống kê với trị TB bằng 0

Trường hợp điển hình:

Giả thiết chuỗi $a[n]$ có đặc trưng:

- Độc lập thống kê
- Trung bình bằng 0: $\mu_a = 0$

Tương ứng với không gian tín hiệu (vector) 1 chiều đối cực qua gốc tọa độ

Ta có

$$\text{for } i \neq 0 \quad M_a(i) = E(a[n+1]a[n]) = E(a[n+1])E(a[n]) = 0$$

$$\text{for } i = 0 \quad M_a(i) = E\left(a[n]^2\right) = \sigma_a^2$$

Với:

$$S_a(f) = \sum_i M_a(i) e^{-j2\pi f iT} = \sigma_a^2$$

Mật độ phổ công suất:

$$G_s(f) = S_a(f) \frac{|P(f)|^2}{T}$$

Giản lược như sau:

$$\boxed{G_s(f) = \sigma_a^2 \frac{|P(f)|^2}{T}}$$

Đối với không gian tín hiệu một chiều đối cực qua gốc tọa độ centre-of-mass in the origin), mật độ phổ công suất của tín hiệu truyền tỷ lệ với $|P(f)|^2$

Ví dụ: Không gian tín hiệu 1

Giả thiết:

$$M = \{s_1(t) = +AP_T(t)\,,\, s_2(t) = -AP_T(t)\}$$

Đây là không gian một chiều (d=1) , với tín hiệu trực chuẩn

$$B = \left\{ b_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} P_T(t) \right\}$$

Không gian tín hiệu được biểu diễn dưới dạng vector như sau:

$$M = \{\underline{s_1} = (+\alpha)\,,\, \underline{s_2} = (-\alpha)\} \qquad \alpha = A\sqrt{T}$$

Dạng tín hiệu truyền:

$$s(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a[n]p(t - nT)$$

Với $a[n] \in \{+\alpha, -\alpha\}$

$$p(t) = b_1(t)$$

Với chuỗi $a[n]$ có

TB $\mu_a = 0.5\,(-\alpha + \alpha) = 0$

Phương sai $\sigma_a^2 = 0.5\,(\alpha^2 + \alpha^2) = \alpha^2 = A^2 T$

Chuỗi $a[n]$ gồm các ký hiệu độc lập thống ke với TB bằng 0

Mật độ phổ công suất như sau:

$$G_s(f) = \sigma_a^2 \frac{|P(f)|^2}{T}$$

Ta có:

$$p(t) = b_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} P_T(t)$$

Ta định nghĩa hàm: *sinc(x):*

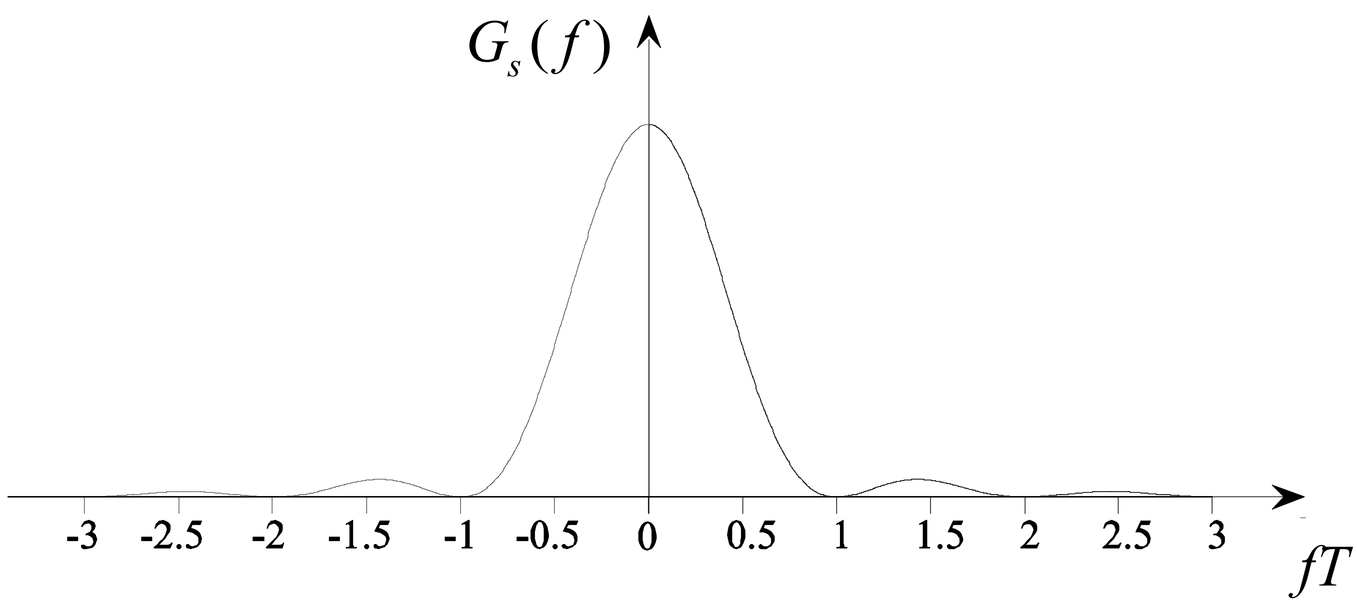
Biến đổi Fourier của *s(t)* là:

$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{(\pi x)}$$

$$P(f) = \sqrt{T}\,\mathrm{sinc}(fT)e^{-j\pi f\mathrm{T}} = \sqrt{T}\,\frac{\sin(\pi fT)}{(\pi fT)}e^{-j\pi f\mathrm{T}}$$

Do vậy PSD của không gian tín hiệu này là:

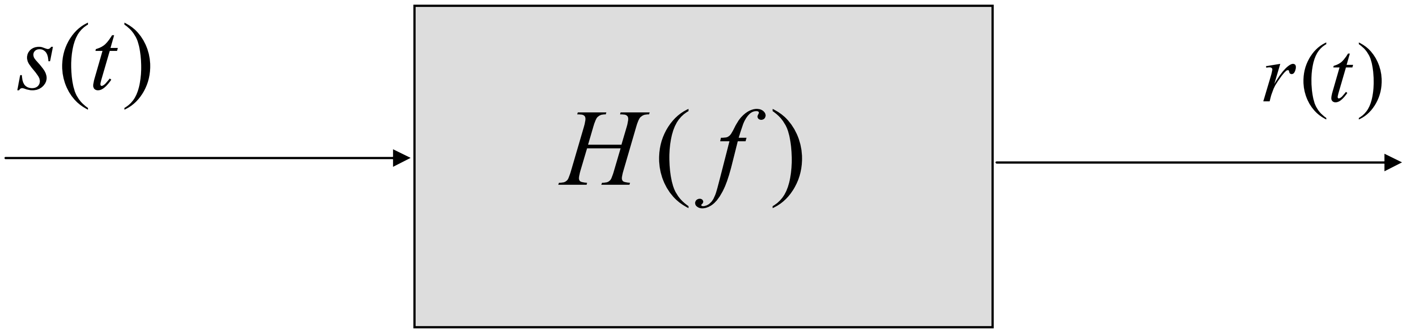
$$\boxed{G_s(f) = A^2 T \left(\frac{\sin(\pi f T)}{(\pi f T)} \right)^2}$$



Kết luận

- Đây là phổ ở băng tần cơ sở (tập trung quanh gốc tọa độ "centred around the origin = DC")
- Phổ bằng 0 khi các tần số là bội của $1/T$
- Búp chính "main lobe" có độ rộng $2/T$, từ $-1/T$ đến $+1/T$
- Tất cả các búp bên có độ rộng $1/T$ với cường độ giảm dần

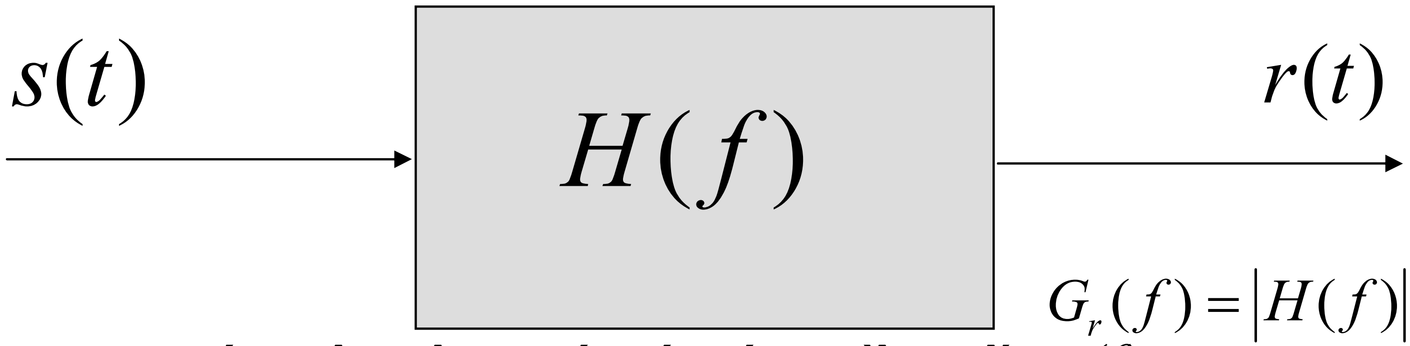
Không gian tín hiệu này phù hợp với kênh có đáp ứng tần số thấp "low-pass response"



Tín hiệu nhận được có phổ (ko tính tạp âm) như sau:

Vì $G_s(f)$ là không giới hạn trong trục tần số, do đó chỉ kênh lý tưởng với đáp ứng tần số $H(f)=1$ mới không tạo ra méo tín hiệu

$$G_r(f) = |H(f)|^2 G_s(f)$$



$$G_r(f) = |H(f)|^2 \, G_s(f)$$

Với một kênh có đáp ứng tần số $H(f)$

Ta phải thiết kế một tín hiệu truyền sao cho phổ $G_s(f)$ tập trung quanh khu vực tần số mà $H(f)$ là “good” .

Theo cách này, tín hiệu nhận được sẽ xấp xỉ tín hiệu truyền

Không gian tín hiệu 2

Tín hiệu được truyền có dạng $$s(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a[n]p(t - nT)$$

Với $$a[n] \in \{+\alpha, -\alpha\}$$ $$p(t) = b_1(t)$$

Trong đó chuỗi *a[n]* có

Trung bình: $$\mu_a = 0.5\,(-\alpha + \alpha) = 0$$

Phương sai: $$\sigma_a^2 = 0.5\,(\alpha^2 + \alpha^2) = \alpha^2 = A^2 \frac{T}{2}$$

Không gian tín hiệu 2

Mật độ phổ công suất có dạng:

$$G_s(f) = \sigma_a^2 \frac{|P(f)|^2}{T}$$

Với $$p(t) = b_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} P_T(t) \cos\left(2\pi f_0 t\right)$$

Có biến đổi Fourier là: $$P(f) = \left[\sqrt{2T}\frac{\sin(\pi f T)}{(\pi f T)} e^{-j\pi f \mathrm{T}}\right] * \left[\frac{1}{2}\left(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right)\right] =$$

$$= \sqrt{\frac{T}{2}}\left[\left(\frac{\sin(\pi(f - f_0)T)}{\left(\pi(f - f_0)T\right)}\right) + \left(\frac{\sin(\pi(f + f_0)T)}{\left(\pi(f + f_0)T\right)}\right)\right] e^{-j\pi f \mathrm{T}}$$

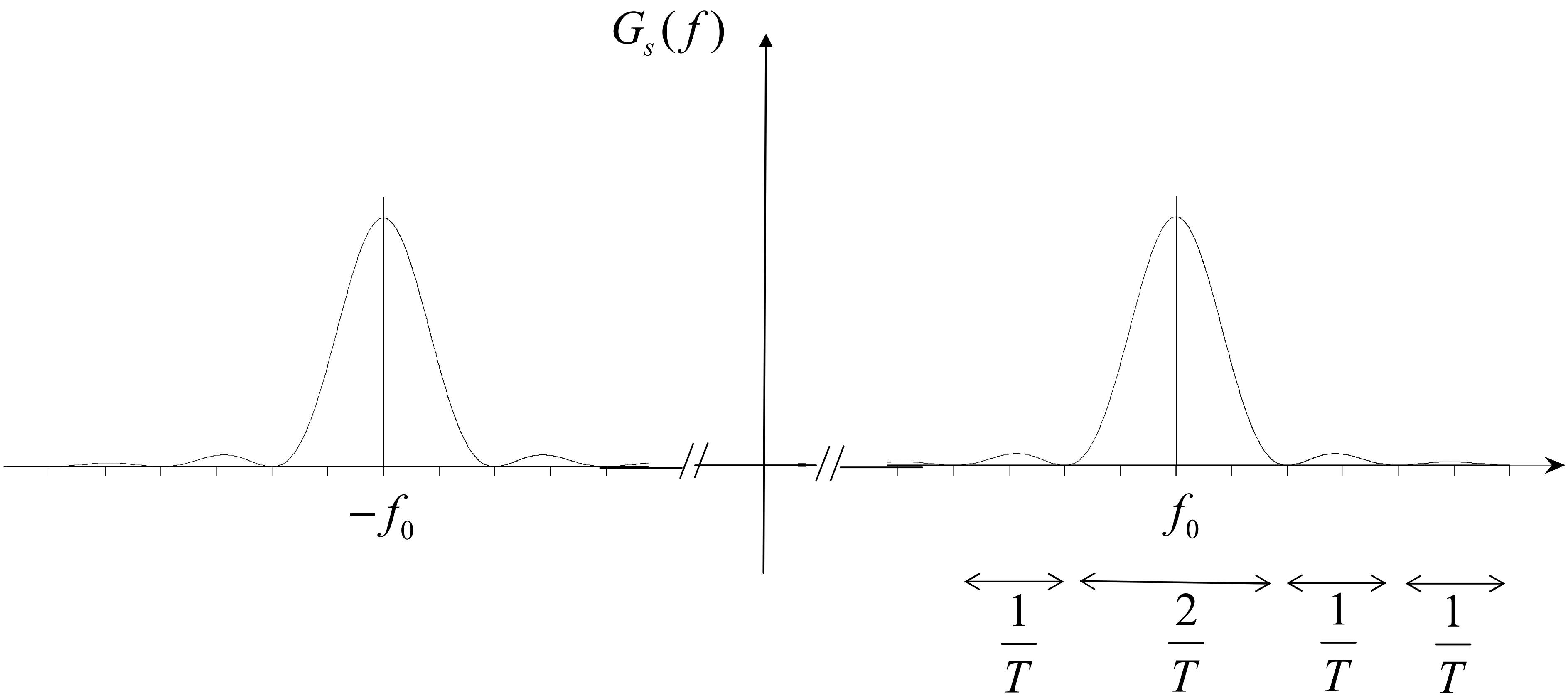
Ta có

$$\left|P(f)\right|^2 = \frac{T}{2}\left[\left(\frac{\sin(\pi(f-f_0)T)}{\left(\pi(f-f_0)T\right)}\right)^2 + \left(\frac{\sin(\pi(f+f_0)T)}{\left(\pi(f+f_0)T\right)}\right)^2\right]$$

Mật độ phổ công suất là

$$G_s(f) = \frac{1}{4}A^2T\left[\left(\frac{\sin(\pi(f-f_0)T)}{\left(\pi(f-f_0)T\right)}\right)^2 + \left(\frac{\sin(\pi(f+f_0)T)}{\left(\pi(f+f_0)T\right)}\right)^2\right]$$

$$G_s(f) = \frac{1}{4}A^2T\left[\left(\frac{\sin(\pi(f-f_0)T)}{\left(\pi(f-f_0)T\right)}\right)^2 + \left(\frac{\sin(\pi(f+f_0)T)}{\left(\pi(f+f_0)T\right)}\right)^2\right]$$



- Đây là phổ thông dải (**bandpass)** (có tần số trung tâm khác f_0 khác 0)
- Phổ tần số bằng 0 với các tần số là bội của $1/T$
- Búp chính có độ rộng $2/T$ với trung tâm là f_0
- Các búp khác có độ rộng $1/T$ và cường độ giảm dần

Điều chế tuyến tính (Linear modulation)

Tổng quát, cho $$s(t) = \sum_n a[n] p(t - nT)$$

Với phổ $$G_s(f) = \sigma_a^2 \frac{|P(f)|^2}{T}$$

Nếu ta xem xét $$s'(t) = \sum_n a_n p'(t - nT)$$

Với $$p'(t) = p(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

Thì phổ tín hiệu: $$G_{s'}(f) = \frac{1}{4}[G_s(f - f_0) + G_s(f + f_0)]$$

Phổ tần số được dịch đi xung quanh f_0

Không gian tín hiệu 3

Xét

$$M = \left\{ s_1(t) = +A\frac{\sin\left(\pi t / T\right)}{\left(\pi t / T\right)},\ s_2(t) = -A\frac{\sin\left(\pi t / T\right)}{\left(\pi t / T\right)} \right\}$$

Đây là không gian tín hiệu 1D với cơ sở trực chuẩn

$$B = \left\{ b_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\frac{\sin\left(\pi t / T\right)}{\left(\pi t / T\right)} \right\}$$

Không gian tín hiệu tương đương với tập vector:

$$M = \{\underline{s}_1 = (+\alpha),\ \underline{s}_2 = (-\alpha)\} \qquad \alpha = A\sqrt{T}$$

Tín hiệu truyền $$s(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a[n] p(t - nT)$$

Với $a[n] \in \{+\alpha, -\alpha\}$ $$p(t) = b_1(t)$$

Chuỗi $a[n]$ có

TB $$\mu_a = 0.5\,(-\alpha + \alpha) = 0$$

phương sai $$\sigma_a^2 = 0.5\,(\alpha^2 + \alpha^2) = \alpha^2 = A^2 T$$

Mật độ phổ công suất:

$$G_s(f) = \sigma_a^2 \frac{\left|P(f)\right|^2}{T}$$

Với $$p(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\sin\left(\pi t / T\right)}{\left(\pi t / T\right)}$$

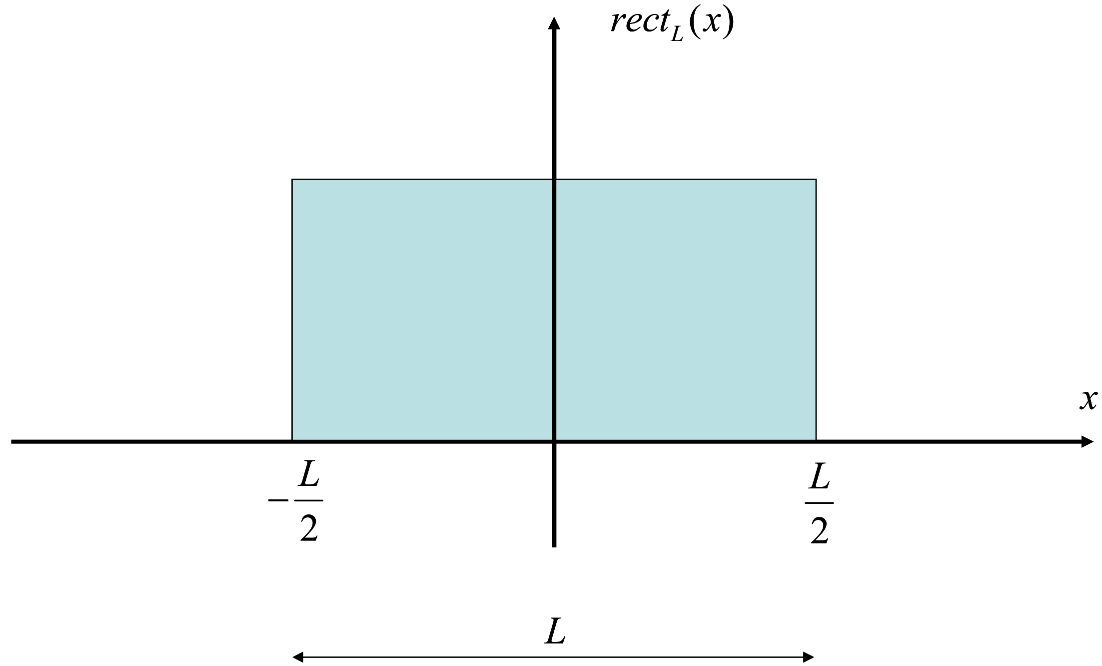
Có biến đổi Fourier $$P(f) = \sqrt{T} rect_{\frac{1}{T}}\left(f\right)$$

p(t): là bộ lọc thông thấp với biến đổi Fourier hằng số giữa *-1/(2T)* và *+1/(2T)*.

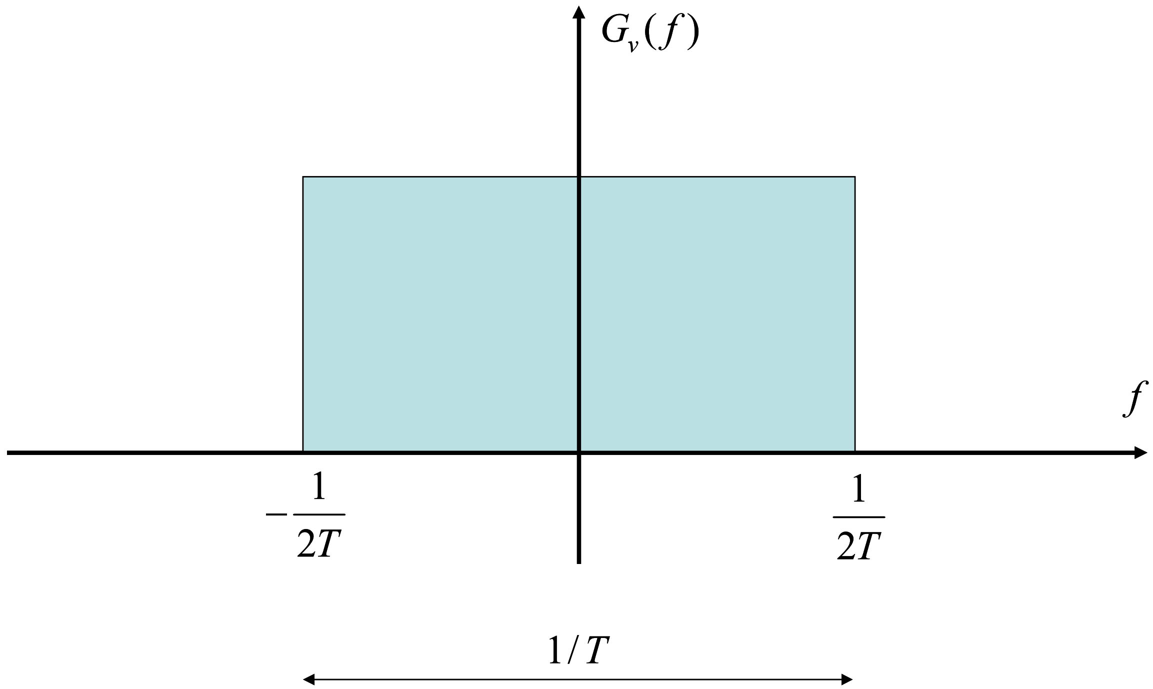
$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\sin\left(\pi t / T\right)}{\left(\pi t / T\right)}$$

$$P(f) = \sqrt{T} rect_{\frac{1}{T}}\left(f\right)$$

$$\left|P(f)\right|^2 = T\, rect_{\frac{1}{T}}\left(f\right)$$



Mật độ phổ công suất là: $G_s(f) = A^2 T rect_{\frac{1}{T}}(f)$



Đây là phổ băng cơ sở

Trường hợp 2: Không gian tín hiệu với giá trị trung bình khác 0

$$\boxed{G_s(f) = S_a(f)\frac{|P(f)|^2}{T}}$$

$$S_a(f) = \sum_i M_a(i)e^{-j2\pi fiT}$$

Xem xét một không gian tín hiệu 1-D với giá trị trung bình khác gốc tọa độ (khác 0):

Chuỗi *a[n]* có tính chất dừng với các ký hiệu

- Độc lập thống kê
- Giá trị trung bình khác 0

$$\mu_a \neq 0$$

Ta có:

$$M_a(i) = E(a[n+1]a[n]) = \mu_a^2 + \delta_i \sigma_a^2$$

$$\delta_i = 1 \text{ for } i=0 \qquad \delta_i = 0 \text{ for } i \neq 0$$

Do đó: $$S_a(f) = \sigma_a^2 + \mu_a^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi fiT} = \sigma_a^2 + \frac{\mu_a^2}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

Vì vậy, PSD có biểu diễn:

$$G_s(f) = \sigma_a^2 \frac{|P(f)|^2}{T} + \frac{\mu_a^2}{T^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|P\left(\frac{n}{T}\right)\right|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

Ta có thể có xung Diract tại các tần số là bội của 1/T

Không gian tín hiệu 4

Xem xét không gian tín hiệu

$$M = \{s_1(t) = 0\ ,\ s_2(t) = AP_T(t)\}$$

Đây là không gian tín hiệu 1D (d=1) , với cơ sở trực chuẩn:

$$B = \left\{ b_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} P_T(t) \right\}$$

Không gian tín hiệu được biến đổi thành không gian vector

$$M = \{\underline{s_1} = (0)\ ,\ \underline{s_2} = (+\alpha)\} \qquad \alpha = A\sqrt{T}$$

Tín hiệu truyền có dạng:

$$s(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a[n]p(t - nT)$$

Với $a[n] \in \{0, +\alpha\}$

$$p(t) = b_1(t)$$

Với chuỗi *a[n]* có dạng:

Trung bình: $\mu_a = \dfrac{\alpha}{2}$

Phương sai: $\sigma_a^2 = \dfrac{\alpha^2}{4}$

Ta có

$$\left|P(f)\right|^2 = T\left(\frac{\sin(\pi fT)}{(\pi fT)}\right)^2$$

PSD là:

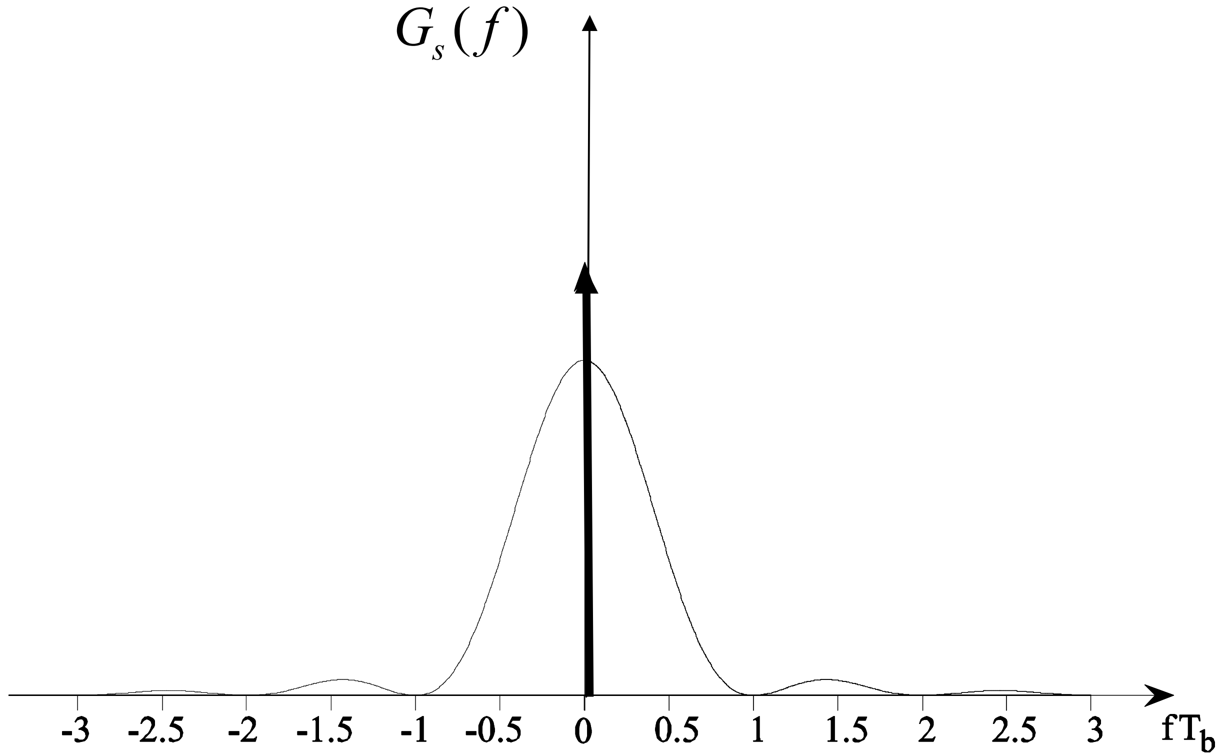
$$G_s(f) = \sigma_a^2 \frac{|P(f)|^2}{T} + \frac{\mu_a^2}{T^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|P\left(\frac{n}{T}\right)\right|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

$$\left|P\left(\frac{n}{T}\right)\right|^2 = T \quad \text{if} \quad i = 0$$

$$\left|P\left(\frac{n}{T}\right)\right|^2 = 0 \quad \text{if} \quad i \neq 0$$

$$G_s(f) = \sigma_a^2 \frac{|P(f)|^2}{T} + \frac{\mu_a^2}{T^2} T\delta\left(f\right)$$

$$G_s(f) = \frac{A^2}{4} T \left(\frac{\sin(\pi f \mathrm{T})}{(\pi f \mathrm{T})} \right)^2 + \frac{A^2}{4} \delta\left(f\right)$$



- Phổ băng cơ sở (**baseband spectrum)** (năng lượng tập trung quanh gốc tọa độ = DC)
- Phổ bằng = 0 với tần số là bội của $1/T$
- Búp chính có độ rộng $2/T$ giữa $-1/T$ và $+1/T$
- Tất cả các búp bên có độ rộng $1/T$ và cường độ giảm dần
- Có một xung Dirac ở gốc tọa độ

Nhập môn Kỹ thuật Truyền thông

Bài 7: Nhiễu liên ký hiệu (InterSymbol Interference)

PGS. Tạ Hải Tùng

Các tín hiệu không giới hạn miền thời gian

Cho không gian tín hiệu 1-D với trung bình bằng 0 tín hiệu truyền được xác định

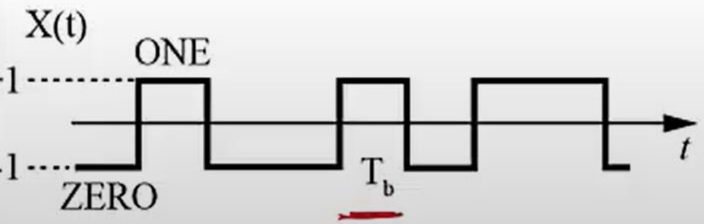
$$s(t) = \sum_n a[n]\, p(t - nT)$$

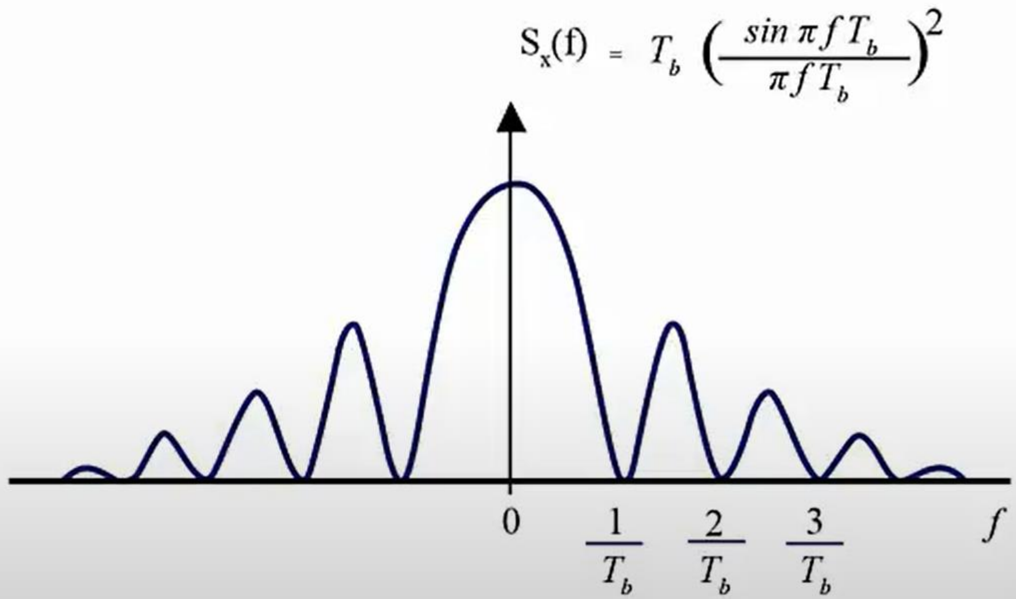
Và mật độ phổ công suất được tính như sau:

$$G_s(f) = \sigma_a^2 \frac{|P(f)|^2}{T}$$

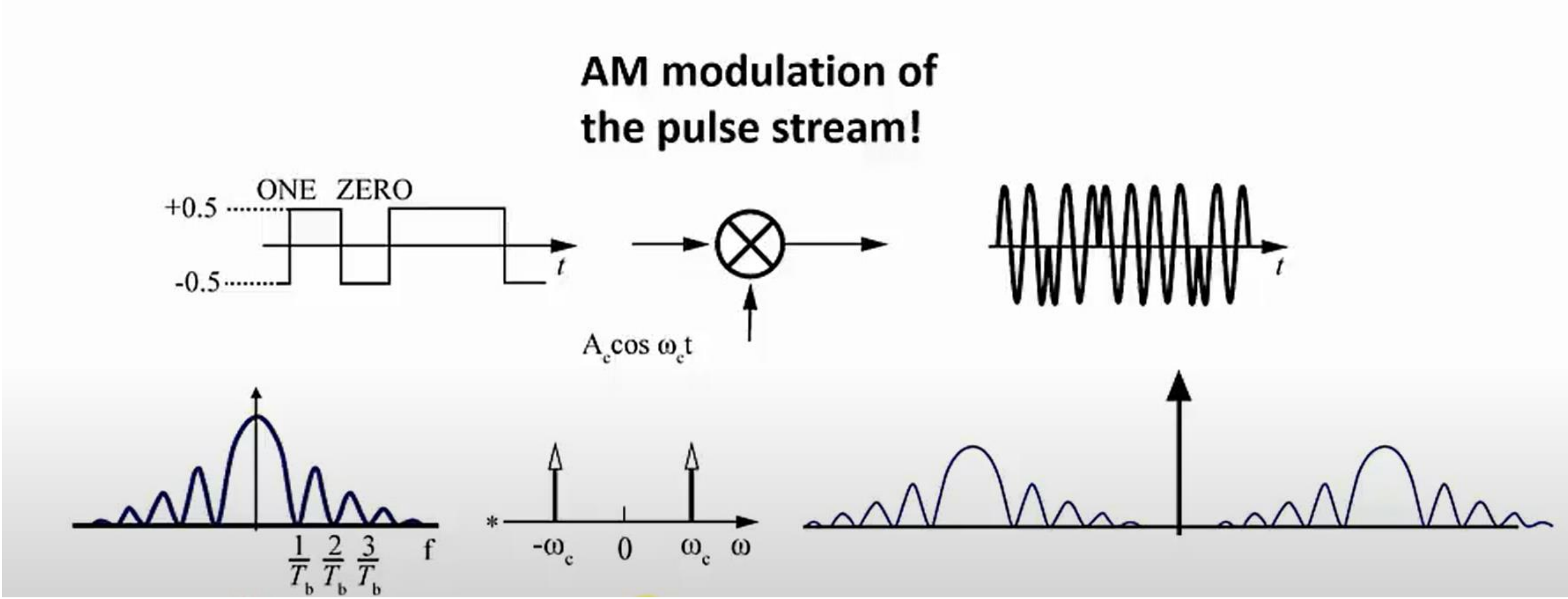
Do đó, nếu $p(t) = b_1(t)$ has có miền thời gian hữu hạn, tín hiệu được truyền $s(t)$ sẽ có miền tần số vô hạn.

- Sử dụng xung vuông truyền ký tự {0,1}

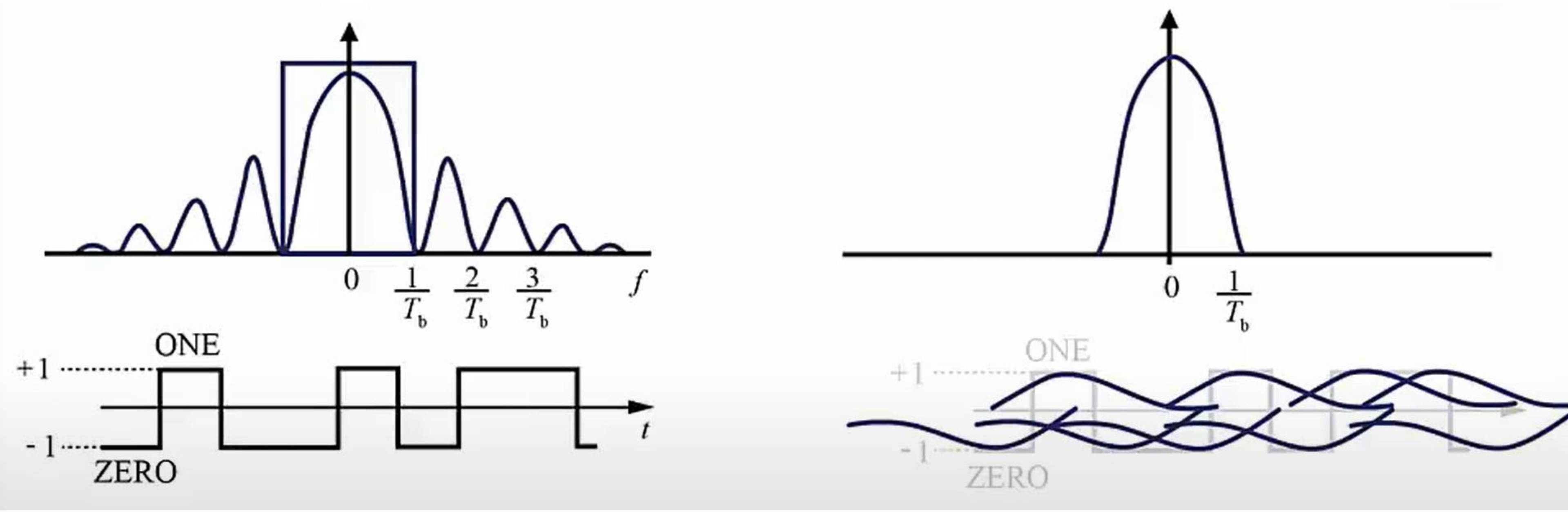




- Nếu được điều chế lên tần số ứng với w_0



- Hiện tượng ISI xảy ra bên miền thời gian sau lọc bên miền tần số:



Các tín hiệu không giới hạn miền thời gian

Để giải quyết vấn đề này, chúng ta có thể dùng các tín hiệu có miền thời gian vô hạn, để có miền tần số hữu hạn.

Xét không gian tín hiệu M gồm các tín hiệu có miền thời gian không giới hạn (nhưng năng lượng giới hạn), và giả thiết M là không gian một chiều với cơ sở trực chuẩn:

$$B = \left\{ b_1(t) \right\}$$

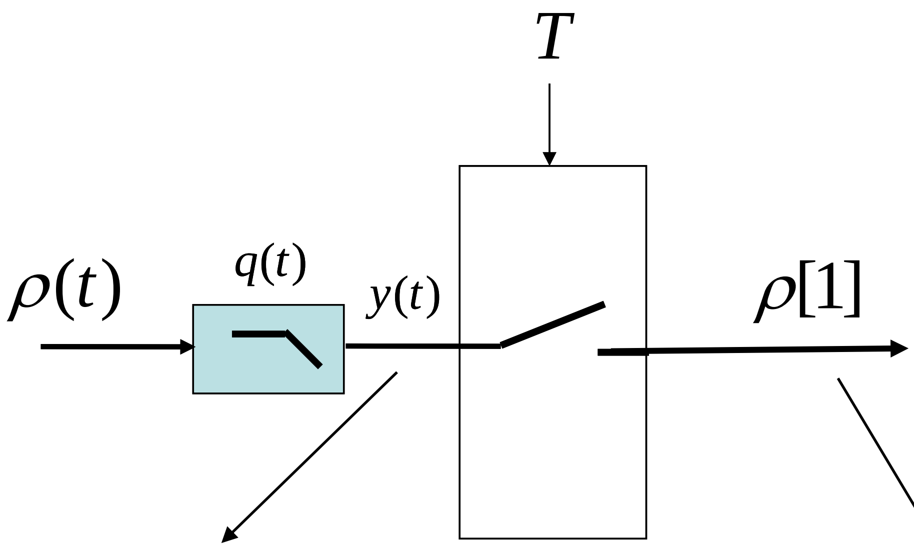
Giả sử truyền chỉ một ký hiệu $a[0]$.

Cho tín hiệu nhận được $r(t)=\rho(t)$, ta tính phép chiếu lên versor trực chuẩn $b_1(t)$:

$$\rho[1] = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(t) b_1(t) dt$$

(lưu ý khoảng lấy tích phân đã không còn chỉ từ 0 đến T)

Như học ở buổi trước, phép chiếu có thể được tính sử dụng bộ lọc MF (matched filter) $q(t) = b_1(T - t)$



$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} r(\tau) q(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} r(\tau) b_1(T - t + \tau) d\tau$$

$$y(t = T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(t) b_1(t) dt = \rho[1]$$

Bây giờ ta xét trường hợp truyền một chuỗi ký hiệu không giới hạn *(a[n])*

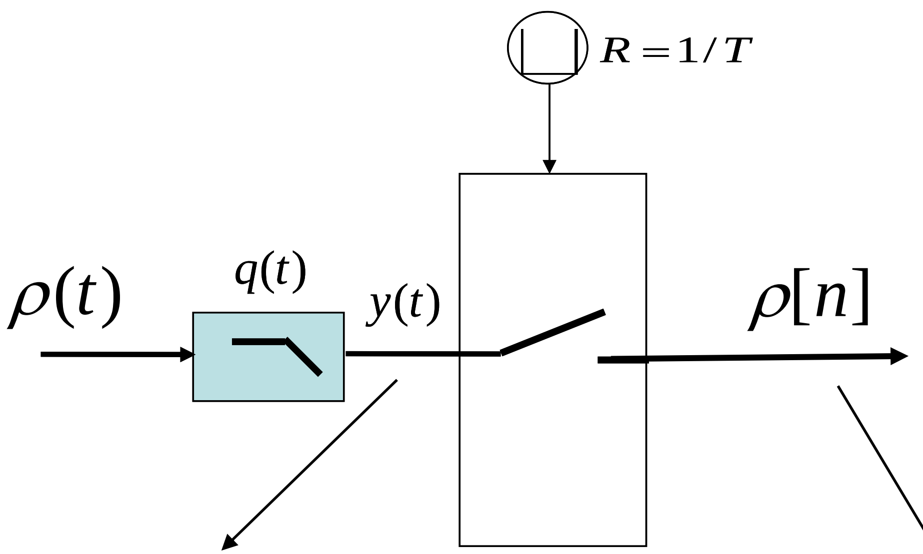
$$\boldsymbol{s(t)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n]p(t-nT)$$

Giả thiết kênh truyền thực sự lý tưởng với tính chất:

- *H(f)=1*
- *n(t)=0*

$$\Rightarrow \quad \rho\boldsymbol{(t) = s(t)}$$

Tại phía bộ thu, các phép chiếu $\rho[n]$ được tính thông qua sử dụng MF và lấy mẫu tại thời điểm phù hợp $(n+1)T$



$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} r(\tau)q(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} r(\tau)b_1(T-t+\tau)d\tau}$$

$$\boxed{y(t = (n+1)T) = \rho[n]}$$

Tại thời điểm lấy mẫu

Trong trường hợp lý tưởng ta có $\rho[n] = y((n+1)T) = y(T + nT)$

Viết gọn lại $\rho[n] = y(t_0 + nT)$

Trong trường hợp lý tưởng $t_0 = T$

Thực tế thì $t_0 = T + D$

Trong đó trễ D có thể bao gồm:

- Trễ truyền lan
- Trễ xử lý
- ...

(tại phía bộ thu, các khối đồng bộ ký hiệu có thể xác định chính xác thời điểm t_0)

Nhiễu xuyên ký hiệu (Intersymbol interference)

Tín hiệu đầu ra của MF:

$$y(t) = \rho(t) * q(t)$$

Vì kênh là lý tưởng nên ta có $\rho(t) = s(t)$ do vậy:

$$y(t) = s(t) * q(t) = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n] p(t - nT) \right) * q(t) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n] x(t - nT)$$

với

$$\boxed{x(t) = p(t) * q(t)}$$

Intersymbol interference

Tín hiệu nhận được:

$$\rho[n] = y(t_0 + nT) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a[m]x(t_0 + nT - mT) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a[n-i]x(t_0 + iT) =$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x[i]a[n-i]$$

với $\qquad x[i] = x(t_0 + iT)$

Ký hiệu nhận được $\rho[n]$ được tính toán qua ký hiệu truyền $a[n]$ theo:

$$\boxed{\rho[n] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x[i]a[n-i]}$$

Ta có thể viết:

$$\rho[n] = x[0]a[n] + \sum_{i=1}^{+\infty} x[i]a[n-i] + \sum_{i=-\infty}^{-1} x[i]a[n-i]$$

đóng góp của các ký hiệu truyền trước đó

ký hiệu nhận được

$$\rho[n] = x[0]a[n] + \sum_{i=1}^{+\infty} x[i]a[n-i] + \sum_{i=-\infty}^{-1} x[i]a[n-i]$$

đóng góp của ký hiệu truyền

đóng góp của các ký hiệu truyền sau đó

Có thể thấy rằng, ký hiệu nhận được $\rho[n]$ không chỉ phụ thuộc vào ký hiệu truyền đi $a[n]$, mà còn phụ thuộc vào các ký hiệu truyền khác

Nghĩa là đã xuất hiện hiện tượng **Intersymbol interference (ISI)** ký hiệu nhận được

$$\rho[n]=\sum_{i=-\infty}^{+\infty} x[i]a[n-i]=$$

$$= x[0]a[n]+$$

Ký hiệu truyền

$$+x[1]a[n-1]+x[2]a[n-2]+\ldots.$$

Các ký hiệu truyền trước đó

$$+x[-1]a[n+1]+x[-2]a[n+2]+\ldots.$$

Các ký hiệu truyền sau đó

Do chúng ta đang coi kênh truyền là lý tưởng, do đó:

$$\rho[n] = a[n]$$

(ký hiệu nhận = ký hiệu truyền)

Chỉ đạt được nếu và chỉ nếu

$$\boxed{\begin{array}{lll} x[i] = 1 & \text{if} & i = 0 \\ x[i] = 0 & \text{if} & i \neq 0 \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} x\left(t_0 + iT\right) = 1 & \text{if} & i = 0 \\ x\left(t_0 + iT\right) = 0 & \text{if} & i \neq 0 \end{array}}$$

Tín hiệu với miền thời gian hữu hạn [0,T[

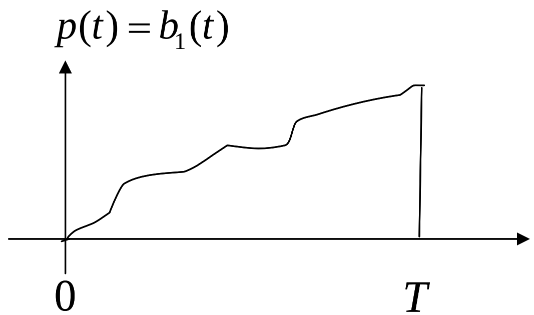
Với các không gian tín hiệu có miền thời gian hữu hạn $[0,T[$ ta có thể chứng minh được hiện tượng ISI không xảy ra: đối với kênh lý tưởng ta có:

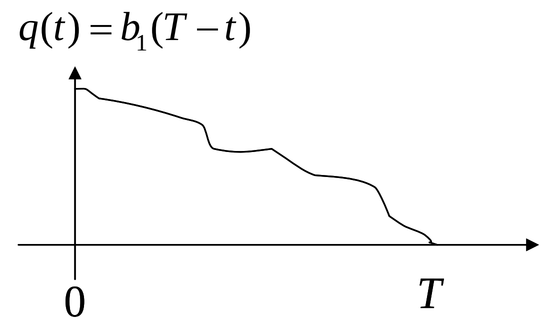
$$\rho[n] = a[n]$$

Nghĩa là trong trường hợp này hàm $x(t)$ tự động thỏa mãn điều kiện NO ISI

Giả thiết

- $b_1(t)$ là versor trực chuẩn hữu hạn miền thời gian $[0,T[$
- $p(t)= b_1(t)$
- $q(t)=p(T-t)$





Xét

$$x(t)=p(t)*q(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} p(\tau)q(t-\tau)d\tau$$

Ta có

1. for $t \le 0 \quad x(t)=0$

2. $x(T)=\int_{-\infty}^{+\infty} p(\tau)q(T-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty} b_1(\tau)b_1(T-T+\tau)d\tau=1$

3. for $t \ge 0 \quad x(t)=0$

Do đó ta có:

$$x\left(t_0 + iT\right) = 1 \quad \text{if} \quad i = 0$$
$$x\left(t_0 + iT\right) = 0 \quad \text{if} \quad i \neq 0$$

$$\text{for} \ \ t_0 = T$$

$$\boxed{\begin{aligned} x[i] &= 1 \quad \text{if} \quad i = 0 \\ x[i] &= 0 \quad \text{if} \quad i \neq 0 \end{aligned}}$$

Hàm x(t) tự động thỏa mãn điều kiện NO ISI trong điều kiện không gian tín hiệu gồm các tín hiệu hữu hạn miền thời gian *[0,T[*.

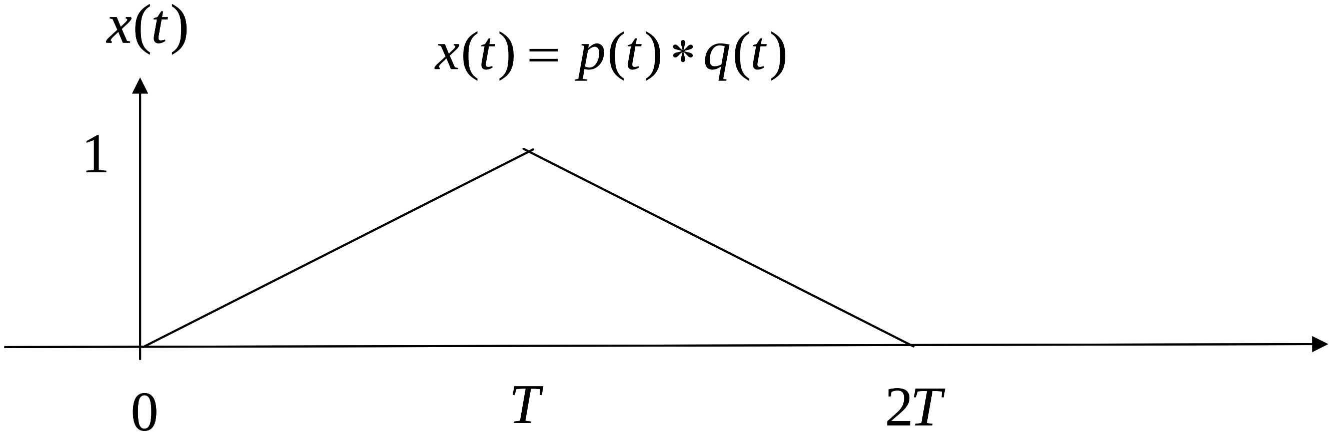
Ví dụ 1

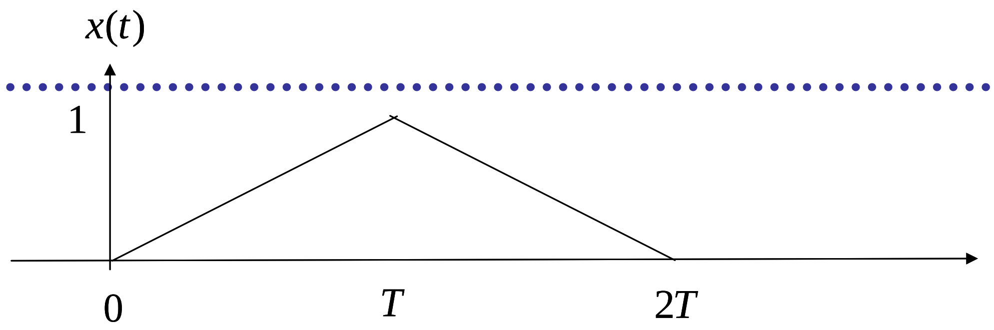
Không gian 1-D với versor $$b_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} P_T(t)$$

$$p(t) = b_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} P_T(t)$$

$$q(t) = p(T-t) = \frac{1}{\sqrt{T}} P_T(t)$$

$$x(t) = p(t) * q(t)$$



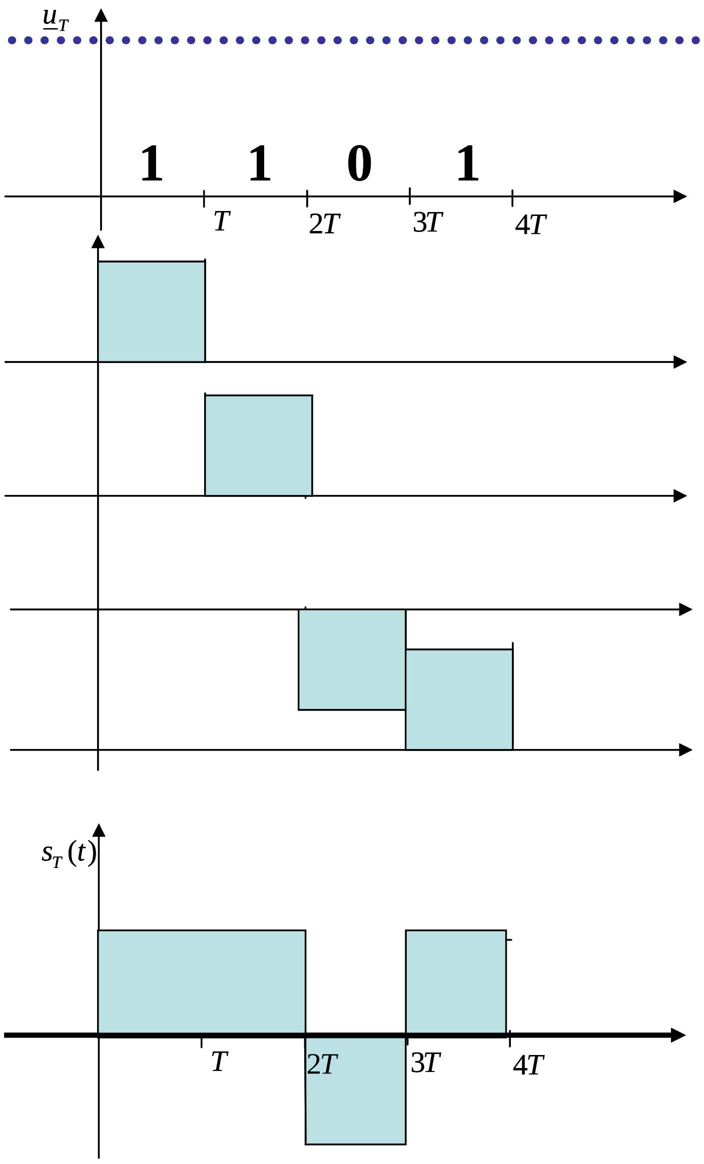


Hàm *x(t)* thỏa mãn điều kiện

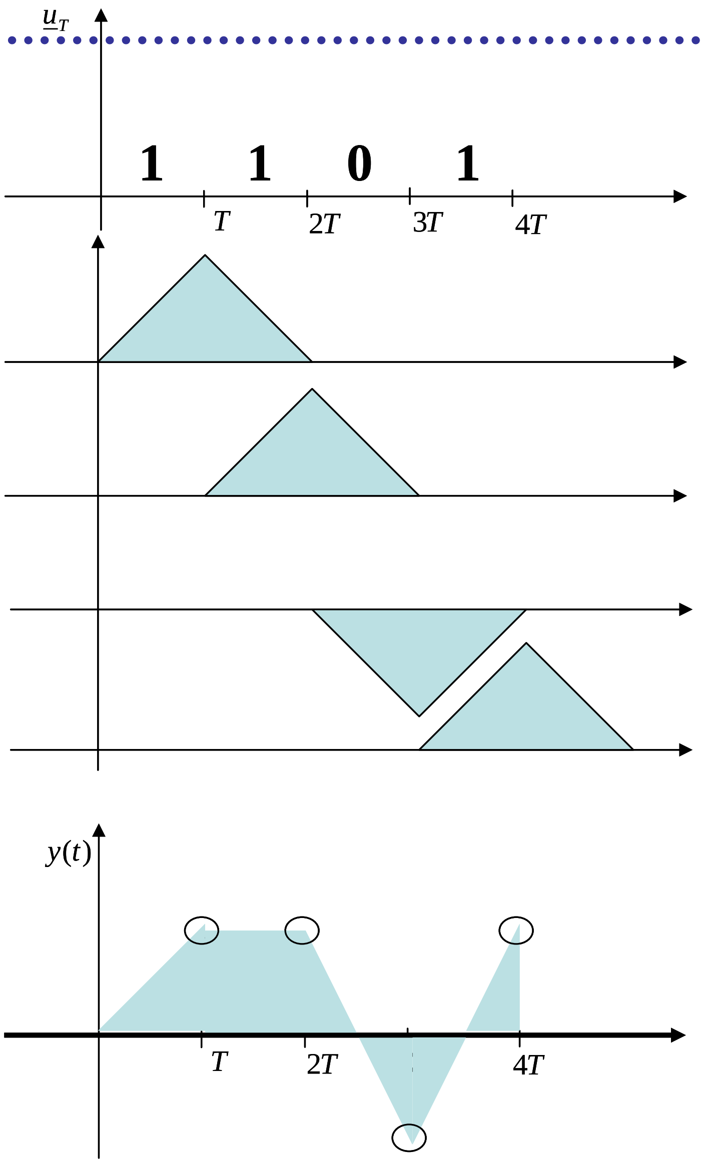
$$\begin{aligned} x\left(t_0 + iT\right) &= 1 \quad \text{if} \quad i = 0 \\ x\left(t_0 + iT\right) &= 0 \quad \text{if} \quad i \neq 0 \end{aligned} \qquad \text{for} \ \ t_0 = T$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} x[i] &= 1 \quad \text{if} \quad i = 0 \\ x[i] &= 0 \quad \text{if} \quad i \neq 0 \end{aligned}}$$

do đó, NO ISI: $\rho[n] = y(T + nT) = a[n]$



$$s(t) = \sum_n a[n]p(t - nT)$$



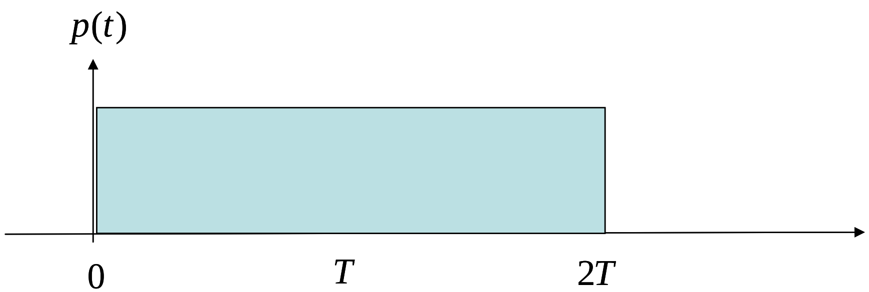
$$y(t)=\sum_n a[n]x(t-nT)$$

$$\rho[n]=y(T+nT)=a[n]$$

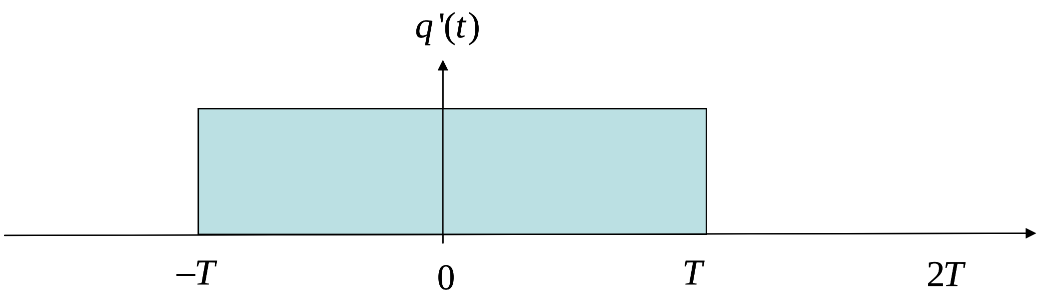
Ví dụ 2: kiểm tra tính NO ISI của không gian tín hiệu

Không gian 1-D có versor $$b_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2T}} P_{2T}(t)$$

$$p(t) = b_1(t)$$



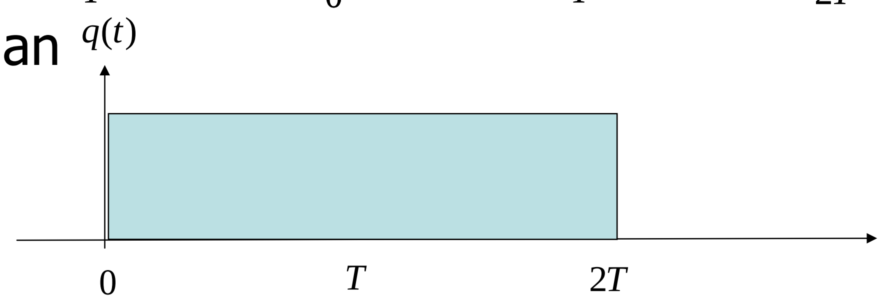
$$q'(t) = p(T - t)$$



Giả thiết làm trễ trên miền thời gian

$D' = T$

$$q(t) = q'(t - T)$$



Nhập môn Kỹ thuật Truyền thông

Bài 8: Tiêu chuẩn Nyquist cho No ISI

PGS. Tạ Hải Tùng

Tiêu chuẩn Nyquist

Cho hàm số $x(t) = p(t) * q(t)$

Điều kiện NO ISI:

$$x(t_0 + iT) = 1 \quad \text{if} \quad i = 0$$
$$x(t_0 + iT) = 0 \quad \text{if} \quad i \neq 0$$

Để đơn giản ta coi $t_0 = 0$ (thảo luận sau).

Điều kiện NO ISI trở thành:

$$\boxed{\begin{array}{l} x(iT) = 1 \quad \text{if} \quad i = 0 \\ x(iT) = 0 \quad \text{if} \quad i \neq 0 \end{array}}$$

Ta gọi đây là Tiêu chuẩn Nyquist trong miền thời gian.

Tiêu chuẩn Nyquist

Định lý Nyquist thứ 2

Nếu một hàm *x(t)* thỏa mãn điều kiện Tiêu chuẩn Nyquist ở miền thời gian:

$$x(iT) = 1 \quad \text{if} \quad i = 0 \qquad\qquad x(iT) = 0 \quad \text{if} \quad i \neq 0$$

Ta có thể biểu diễn:

$$x(t)\sum_i \delta(t - iT) = \delta(t)$$

Theo đó:

$$X(f) * \frac{1}{T}\left[\sum_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)\right] = 1$$

Đây là Tiêu chuẩn Nyquist theo miền tần số:

$$\boxed{\sum_n X\left(f - \frac{n}{T}\right) = T}$$

Cho hàm *x(t)*, để kiểm tra Tiêu chuẩn theo miền tần số, ta thực hiện:

- xem xét tất cả các phiên bản của *X(f)* tập trung xung quanh các tần số trung tâm là bội của *1/T*
- cộng các phiên bản

Kết quả phải là một hằng số theo trục tần số:

$$\boxed{\sum_n X\left(f-\frac{n}{T}\right)=T}$$

Tiêu chuẩn Nyquist

$$\boxed{\begin{array}{l} x(iT) = 1 \quad \text{if} \quad i = 0 \\ x(iT) = 0 \quad \text{if} \quad i \neq 0 \end{array}}$$

$$\boxed{\sum_n X\left(f - \frac{n}{T}\right) = T}$$

Những hàm $x(t)$ nào thỏa mãn tiêu chuẩn này?

Xem xét:

• Các hàm $x(t)$ được đặc trưng bởi phổ $X(f)$ (kết quả của biến đổi Fourier) với miền tần số vô hạn.

• Các hàm $x(t)$ được đặc trưng bởi phổ $X(f)$ (kết quả của biến đổi Fourier) với miền tần số hữu hạn.

Các hàm $x(t)$ được đặc trưng bởi phổ $X(f)$ (kết quả của biến đổi Fourier) với miền tần số vô hạn.

Có thể tìm thấy rất nhiều các hàm x(t) như vậy.

Trong số đó, ta đã biết các dạng hàm $x(t)=p(t)*q(t)$ với:

- $p(t)$ = véc-tơ trực chuẩn với miền thời gian $[0,T[$
- $q(t) =p(T-t)$

chắc chắn thỏa mãn Tiêu chuẩn Nyquist.

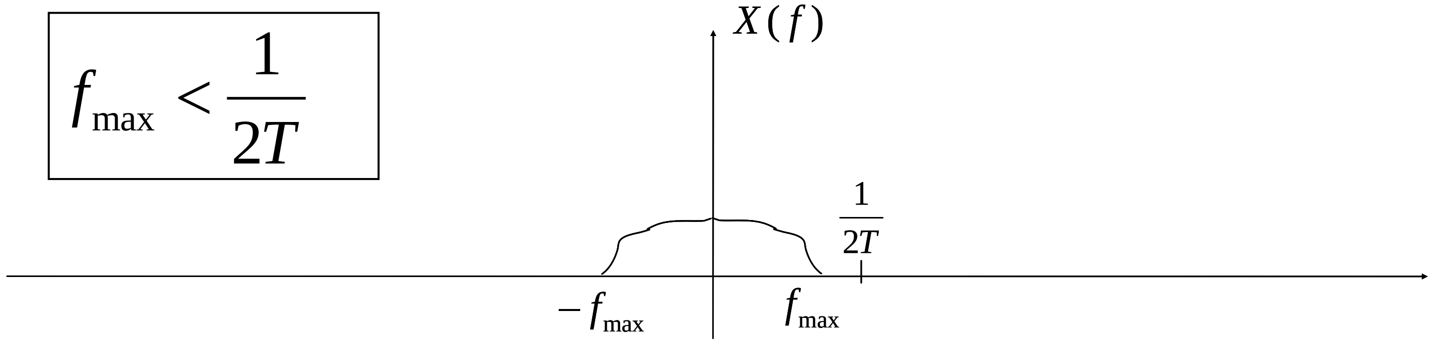
Tiêu chuẩn Nyquist

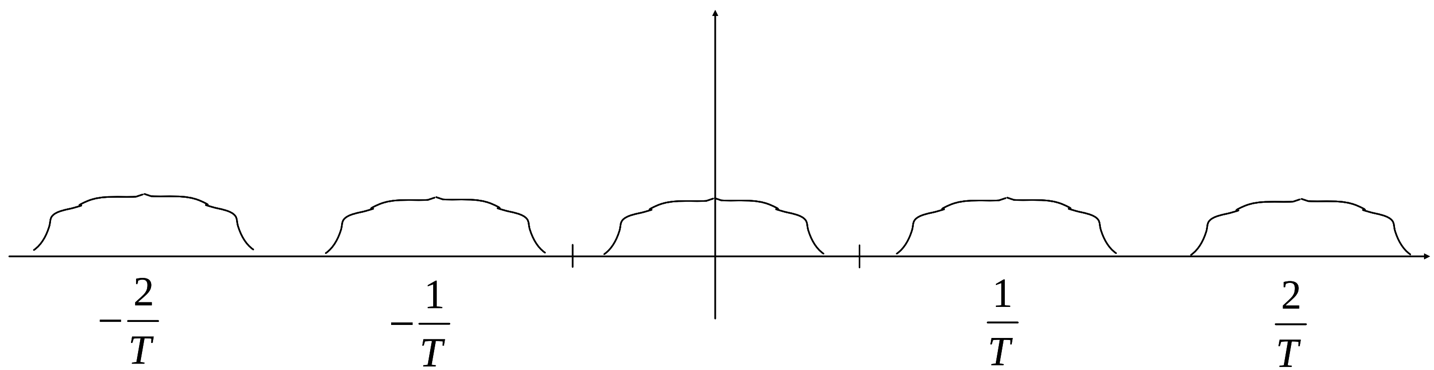
Các hàm $x(t)$ được đặc trưng bởi phổ tín hiệu $X(f)$ (hình thành do biến đổi Fourier) với miền tần số hữu hạn $[-f_{max}, f_{max}]$

Có tồn tại hàm x(t) nào không?

Tiêu chuẩn Nyquist, trường hợp 1

Trường hợp 1: $\boxed{f_{\max} < \dfrac{1}{2T}}$



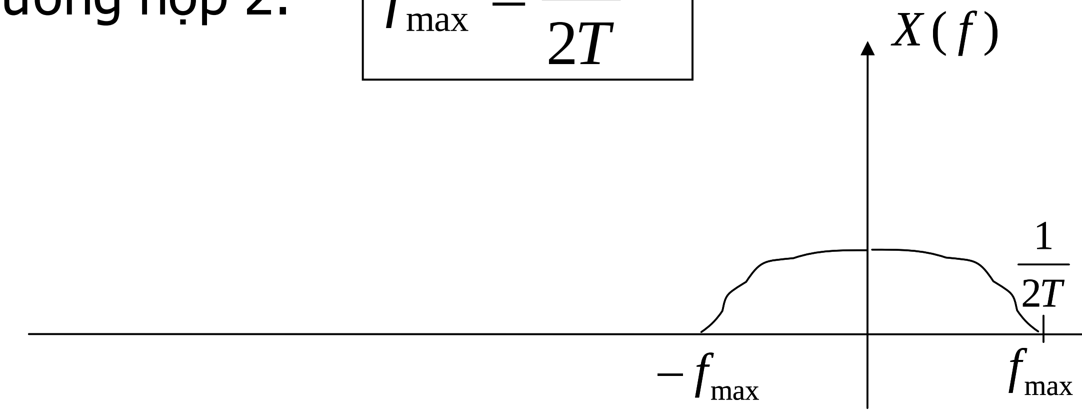


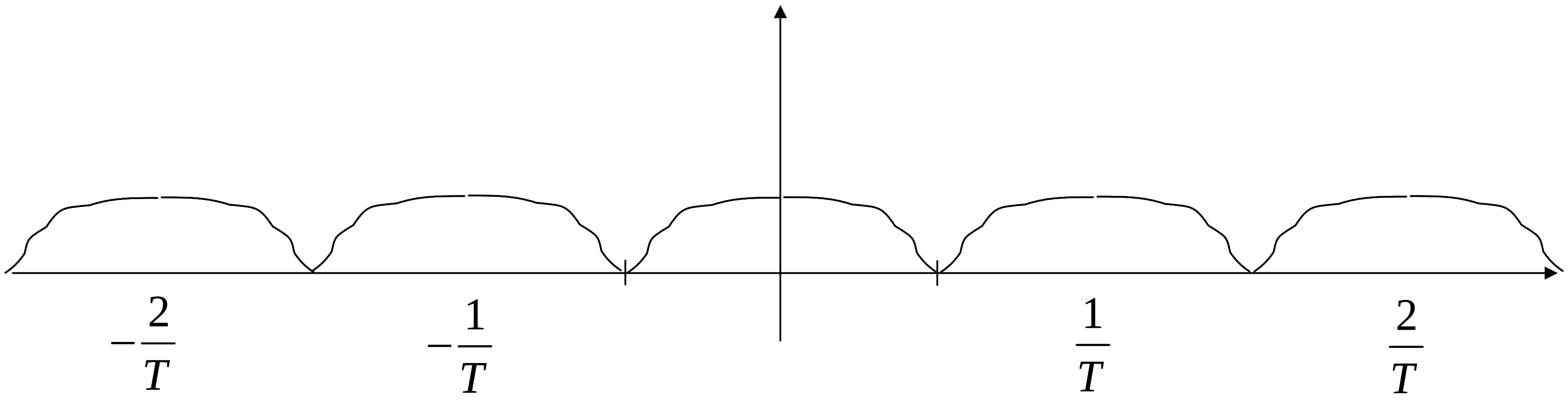
Trong trường hợp này, không thể tìm được hàm x(t) thỏa mãn Tiêu chuẩn Nyquist ở miền tần số, do tồn tại các điểm lõm (holes) tại các tần số là bội của $n/2T$)

$$\sum_n X\left(f - \frac{n}{T}\right) = T$$

Tiêu chuẩn Nyquist, trường hợp 2

Trường hợp 2: $\boxed{f_{\max} = \frac{1}{2T}}$

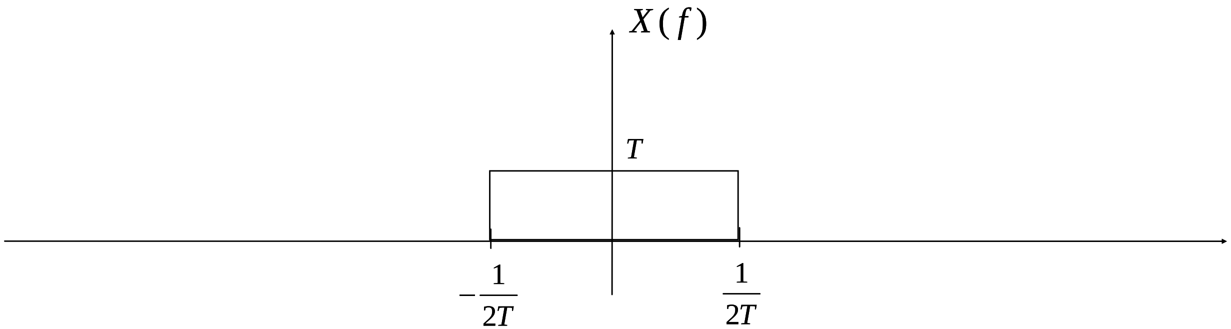


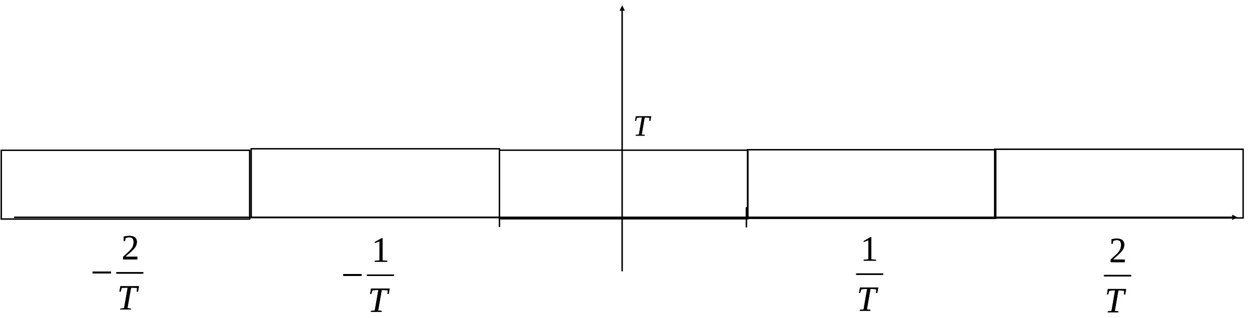


Tiêu chuẩn Nyquist, trường hợp 2

Trường hợp 2: $\boxed{f_{\max} = \frac{1}{2T}}$

Một giải pháp: bộ lọc thông thấp lý tưởng **(ideal low pass filter)**



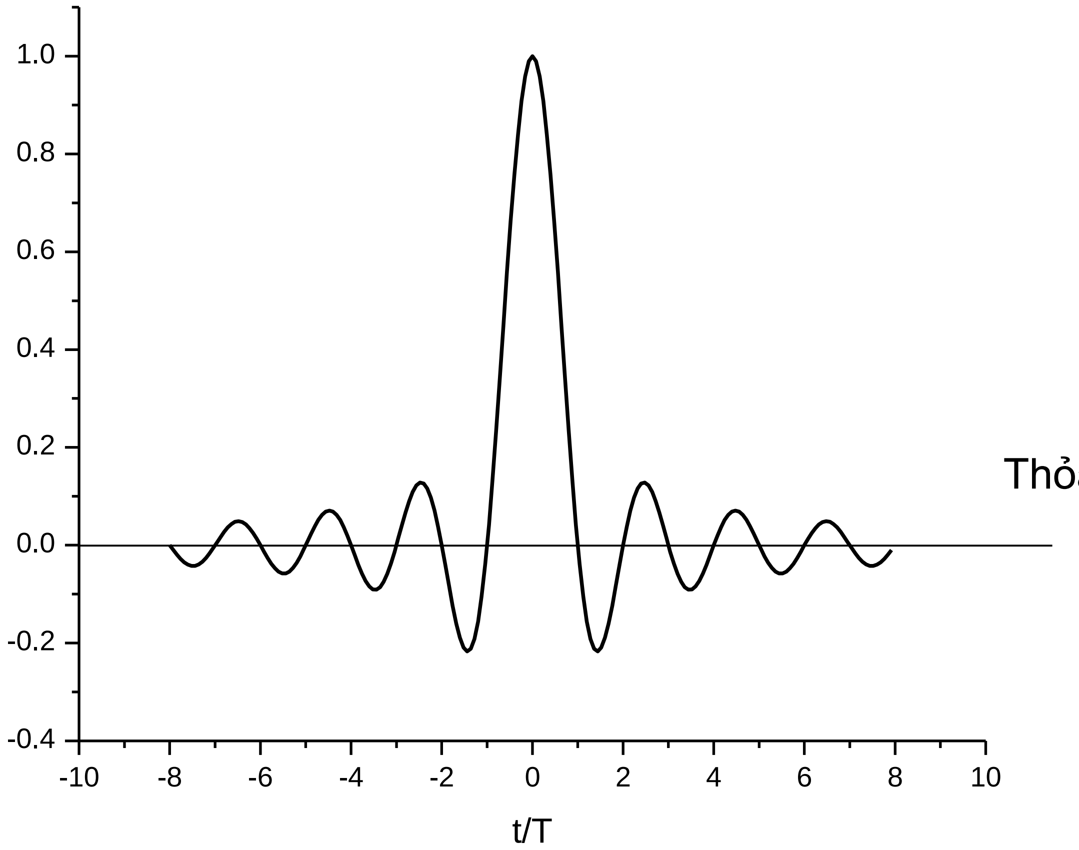


Thỏa mãn Tiêu chuẩn Nyquist miền thời gian:

$$\sum_n X\left(f - \frac{n}{T}\right) = T$$

Bộ lọc thông thấp lý tưởng

Bộ lọc thông thấp lý tưởng: $\boxed{x(t) = \dfrac{\sin(\pi t/T)}{(\pi t/T)}}$

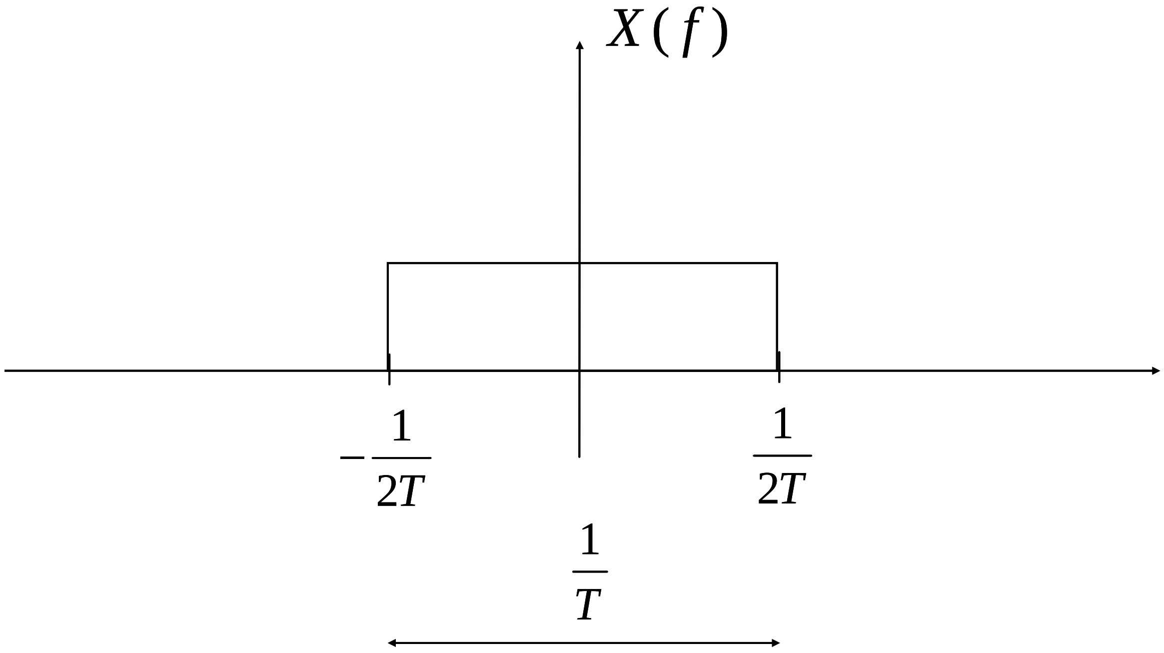


Thỏa mãn điều kiện Tiêu chuẩn Nyquist bên miền thời gian

$$x(iT) = 1 \quad \text{if} \quad i = 0$$

$$x(iT) = 0 \quad \text{if} \quad i \neq 0$$

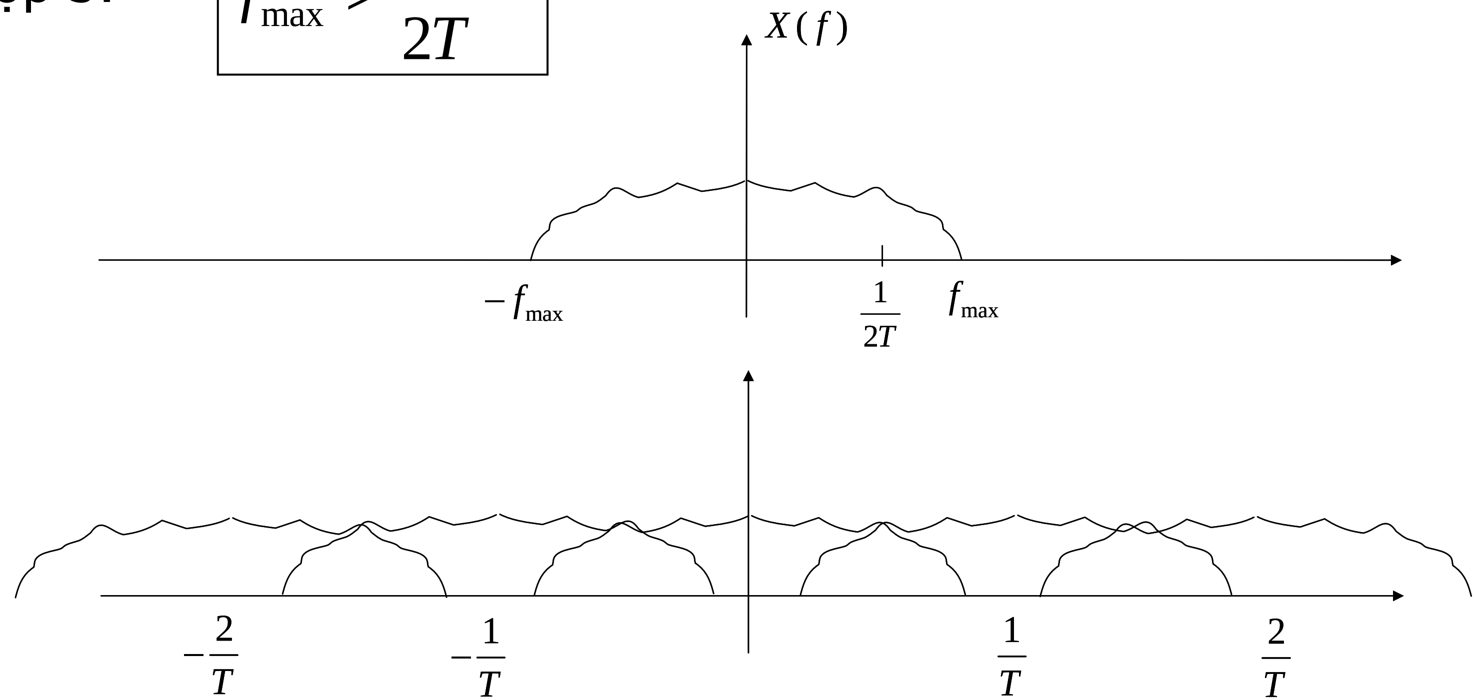
Miền tần số



Đây là dạng song thỏa mãn tiêu chuẩn với băng thông “chiếm dụng” tối ưu

Tiêu chuẩn Nyquist, trường hợp 3

Trường hợp 3: $\boxed{f_{\max} > \dfrac{1}{2T}}$



Tồn tại rất nhiều hàm x(t) thỏa mãn điều kiện Tiêu chuẩn Nyquist trong trường hợp này.

Các bộ lọc Cosine nâng lên (Raised cosine filters)

Ví dụ (rất quan trọng trong ứng dụng)

Các bộ lọc Raised Cosine

$$\boxed{x(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{(\pi t/T)} \frac{\cos(\alpha \pi t/T)}{1-(2\alpha t/T)^2}}$$

Hệ số uốn "roll-off":

$$0 \le \alpha \le 1$$

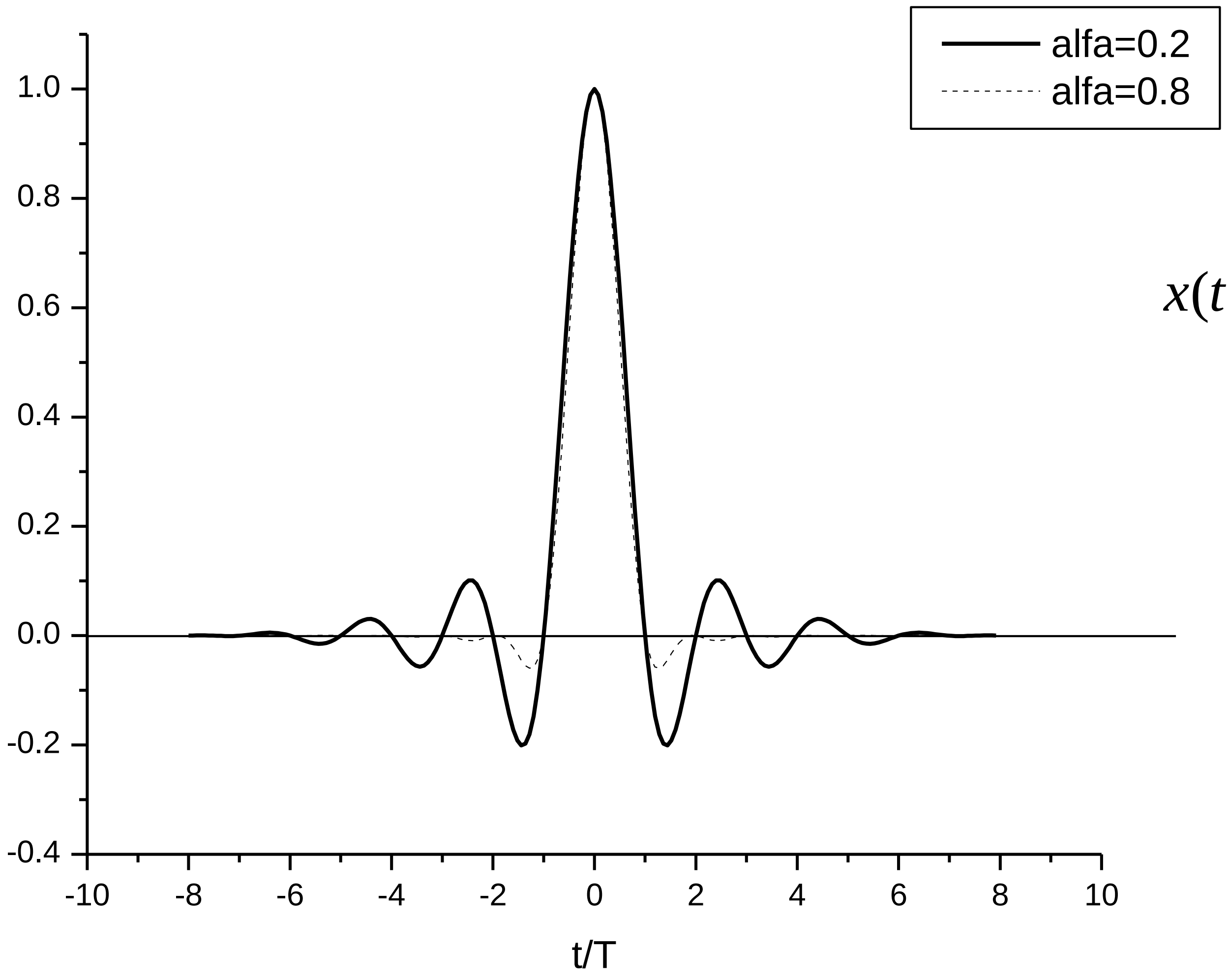
Lưu ý:

1. Chắc chắn thỏa mãn Tiêu chuẩn Nyquist miền t/gian:

$$x(iT) = 1 \quad \text{if} \quad i = 0$$
$$x(iT) = 0 \quad \text{if} \quad i \neq 0$$

2. Với α=0 ta có bộ lọc thông thấp lý tưởng

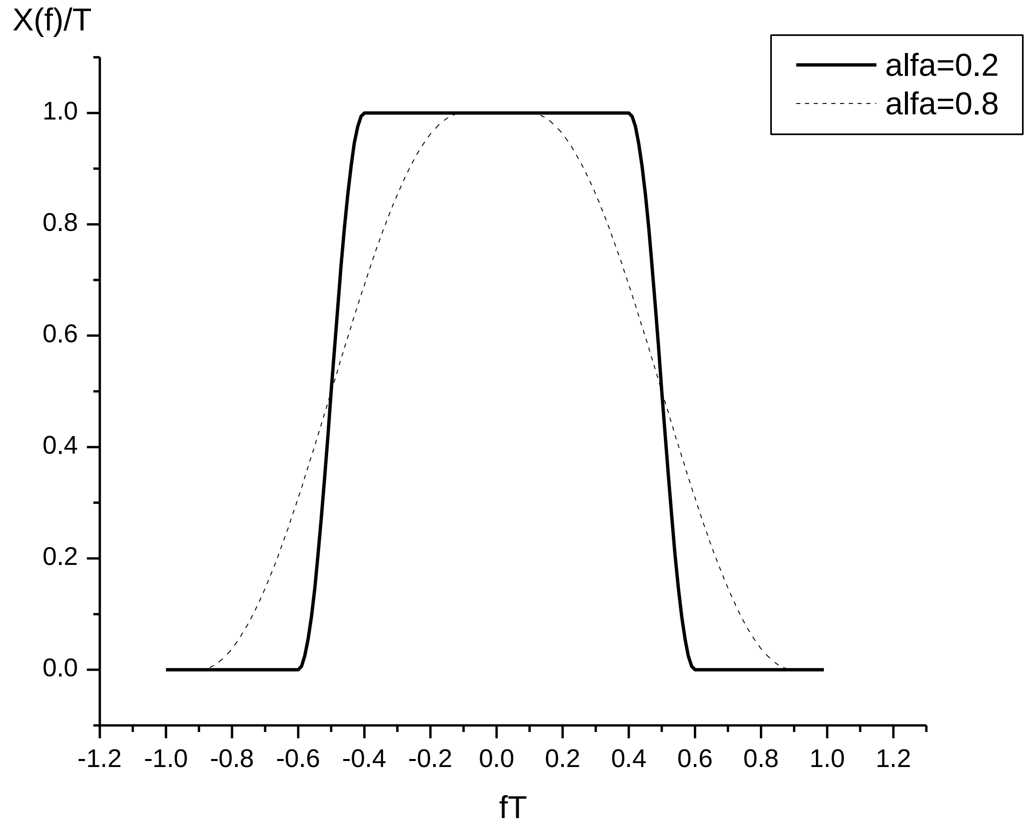
Các bộ lọc Raised cosine



$$x(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{(\pi t/T)} \frac{\cos(\alpha \pi t/T)}{1-(2\alpha t/T)^2}$$

Các bộ lọc Raised cosine

Đáp ứng tần số



$$X(f) = T \quad \text{for} \quad |f| \leq \frac{(1-\alpha)}{2T}$$

$$X(f) = \frac{T}{2}\left[1-\sin\left(\frac{\pi T}{\alpha}\left(|f|-\frac{1}{2T}\right)\right)\right] \quad \text{for} \quad \frac{(1-\alpha)}{2T} \leq |f| \leq \frac{(1+\alpha)}{2T}$$

$$X(f) = 0 \quad \text{for} \quad |f| \leq \frac{(1+\alpha)}{2T}$$

Bộ lọc Raised cosine

Các bộ lọc raised cosine có biểu diễn miền thời gian

$$x(t) = \frac{\sin(\pi t / T)}{(\pi t / T)} \frac{\cos(\alpha \pi t / T)}{1 - (2\alpha t / T)^2}$$

Trong trường hợp có trễ thời gian

Đến tận giwof, chúng ta đang xem xét trường hợp với $t_0=0$

$$\rho[n] = y(t_0 + nT) \quad \text{with} \quad t_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x(iT) = 1 \quad \text{if} \quad i = 0 \\ x(iT) = 0 \quad \text{if} \quad i \neq 0 \end{array}$$

Cho hàm $x(t)$ thỏa mãn tiêu chuẩn với $t_0=0$, hàm số $x'(t) = x(t-t_0)$ thỏa mãn điều kiện với mọi t_0

(lưu ý rằng, tại phía bộ thu, mạch đồng bộ ký hiệu luôn có thể xác định chính xác t_0)

Các bộ lọc truyền (TX) và nhận (RX)

Chúng ta xem xét tính chất của hàm $x(t)$, với

$$x(t)=p(t)*q(t)$$

Bộ lọc phối hợp đặc trưng bởi $q(t)$ được xác định như sau:

$$q(t)=p(T-t)$$

$$Q(f) = P(f)^* e^{-j2\pi fT}$$

Các bộ lọc TX và RX

Nếu $x(t)$=là bộ lọc thông thấp lý tưởng, hoặc bộ lọc $p(t)$ và $q(t)$ có biểu diễn như thế nào?

Nếu $p(t)$ là hàm chẵn $\quad p(t)=p(-t)$

Ta có $\quad q(t) = p(T-t)=p(t-T)$

Chúng ta có thể $\quad q(t) = p(t)$

Độ trễ T được xác định bởi các mạch đồng bộ.

Ta có $$X(f) = P(f)\,Q(f)$$

Nếu $q(t)=p(t)$ theo đó $Q(f)=P(f)$ và

$$X(f) = P(f)^2 \quad \rightarrow \quad P(f) = Q(f) = \sqrt{X(f)}$$

Chúng ta chia hàm $x(t)$ thành hai hàm tương tự nhau, được gọi là bộ lọc truyền $p(t)$ và bộ lọc nhận $q(t)$

Bộ lọc TX thông thấp lý tưởng

Với bộ lọc thông thấp lý tưởng $x(t) = \dfrac{\sin(\pi t / T)}{\left(\pi t / T\right)}$

Ta có:

$$\boxed{p(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\sin(\pi t / T)}{\left(\pi t / T\right)}}$$

Bộ lọc truyền kiểu RRC

Bộ lọc raised cosine:

$$x(t) = \frac{\sin(\pi t / T)}{(\pi t / T)} \frac{\cos(\alpha \pi t / T)}{1 - (2\alpha t / T)^2}$$

Ta có

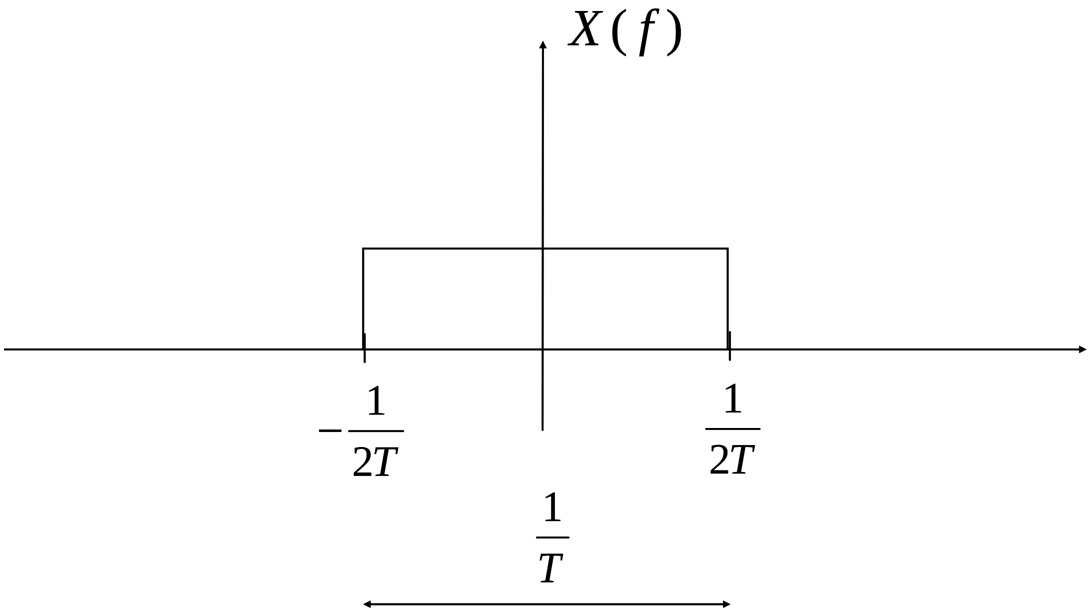
Bộ lọc
Root Raised Cosine (RRC)

$$\boxed{p(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\sin\left(\pi \frac{t}{T}(1-\alpha)\right) + 4\alpha \frac{t}{T}\cos\left(\pi \frac{t}{T}(1+\alpha)\right)}{\pi \frac{t}{T}\left(1 - \left(4\alpha \frac{t}{T}\right)^2\right)}}$$

Bộ lọc TX kiểu thông thấp lý tưởng

Bộ lọc truyền $p(t)$**: bộ lọc thông thấp lý tưởng**

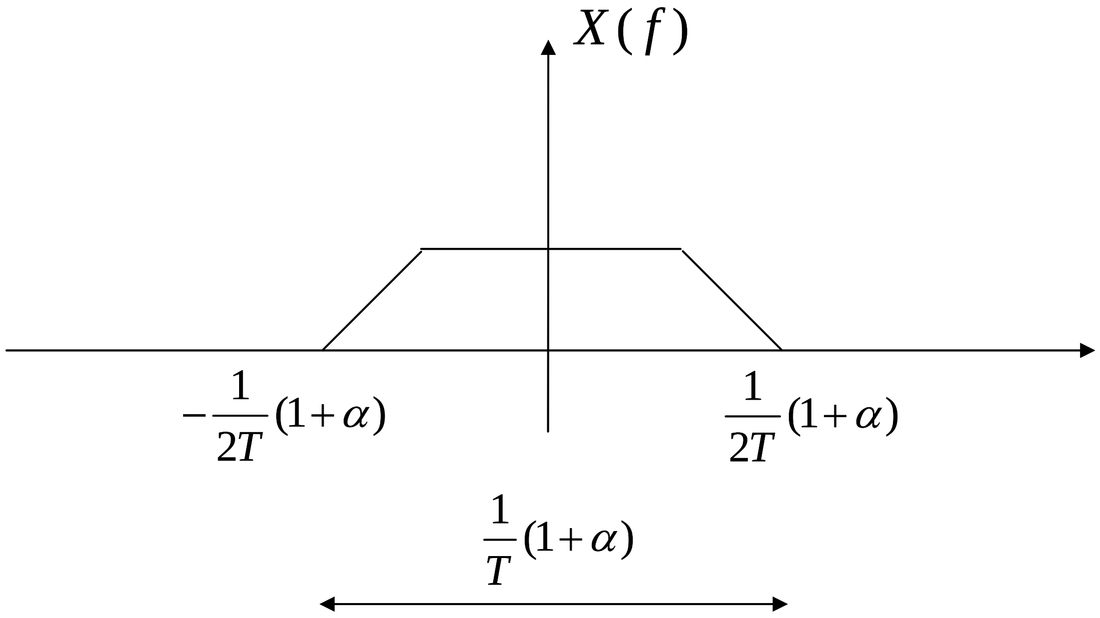
Băng thông chiếm dụng tối thiểu: $\boxed{\frac{1}{2T}}$



Bộ lọc truyền kiểu RRC

Bộ lọc truyền $p(t)$**: bộ lọc root raised cosine**

Băng thông chiếm dụng: $\boxed{\frac{1}{2T}(1+\alpha)}$



Nhập môn Kỹ thuật Truyền thông

Phần 2: Các kỹ thuật điều chế số

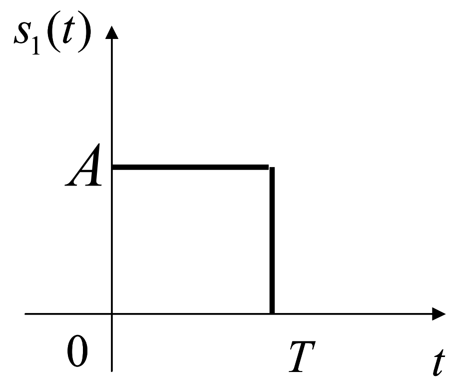
(Digital Modulations)

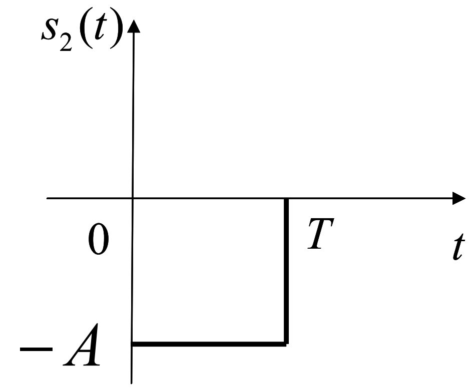
Bài 9: Không gian tín hiệu PAM (tiếp bài trước)

PGS. Tạ Hải Tùng

Bipolar NRZ (Non Return to Zero)

Signal set $$\boxed{M = \{s_1(t) = +AP_T(t)\,,\, s_2(t) = -AP_T(t)\,\}}$$





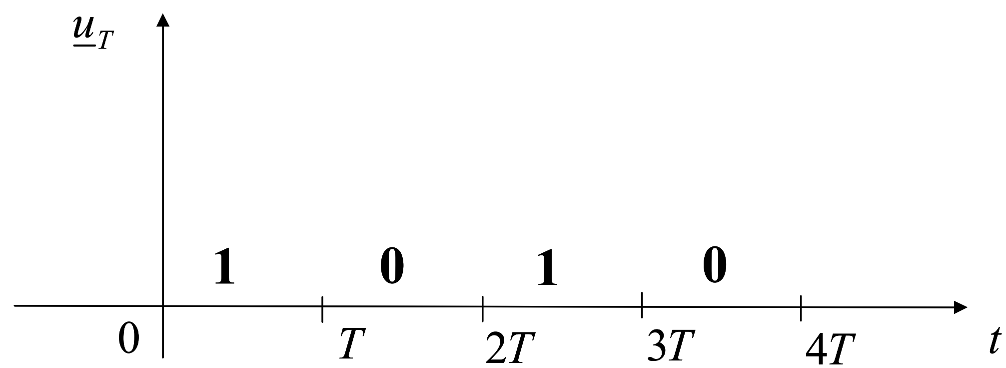
Versor $$b_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} P_T(t)$$

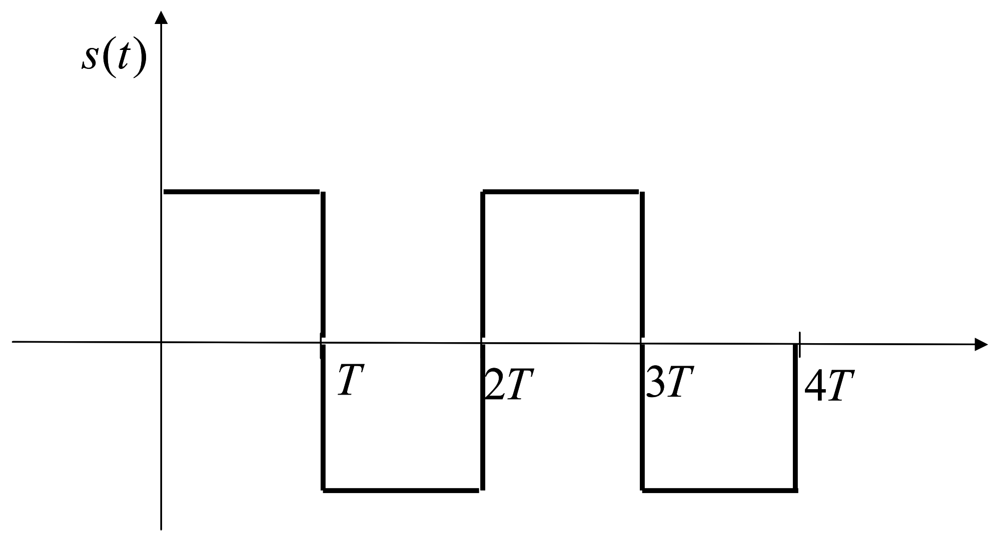
Vector set $$M = \{\underline{s_1} = (+\alpha)\,,\, \underline{s_2} = (-\alpha)\,\}$$

(it coincides with a <u>2-PAM with rectangular pulse)</u>

Bipolar NRZ

Transmitted waveform





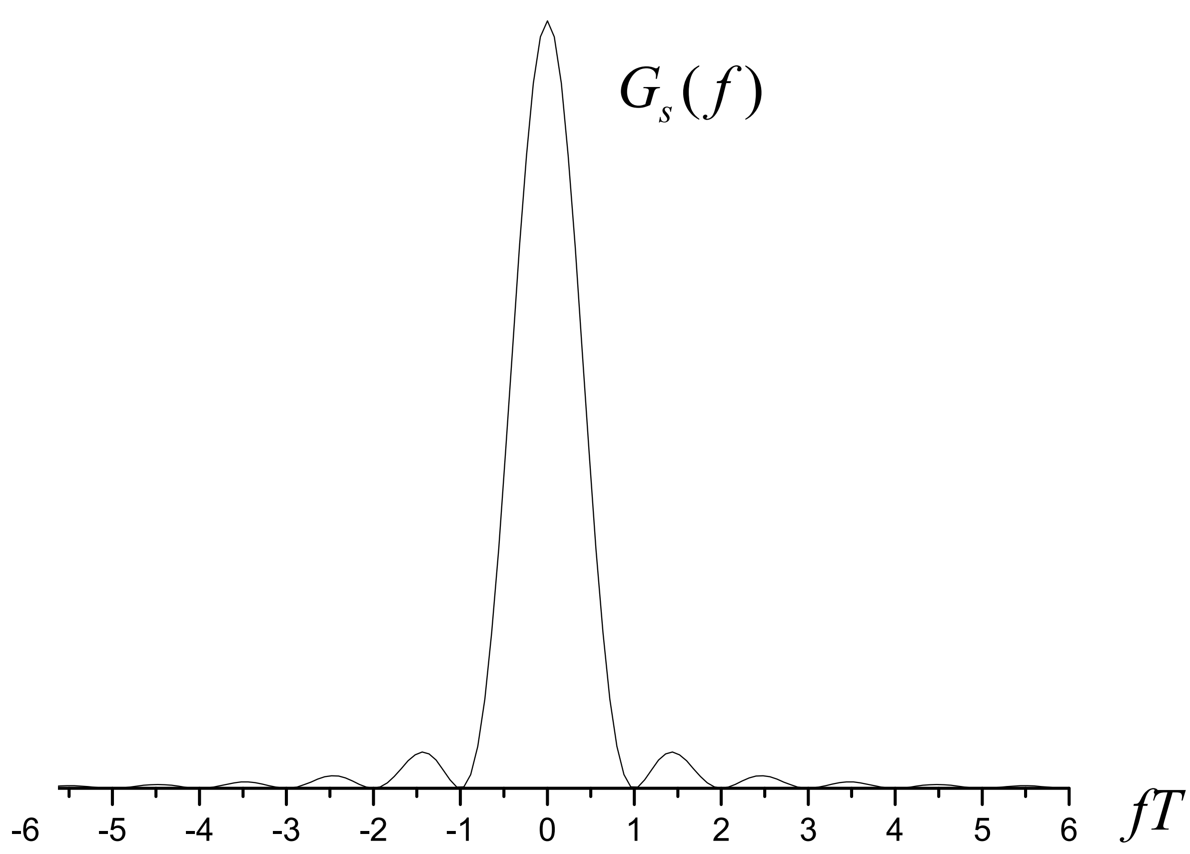
$$s(t) = \sum_n a[n]p(t - nT)$$

$$a[n] \in \{+\alpha, -\alpha\}$$

Bipolar NRZ

Signal spectrum

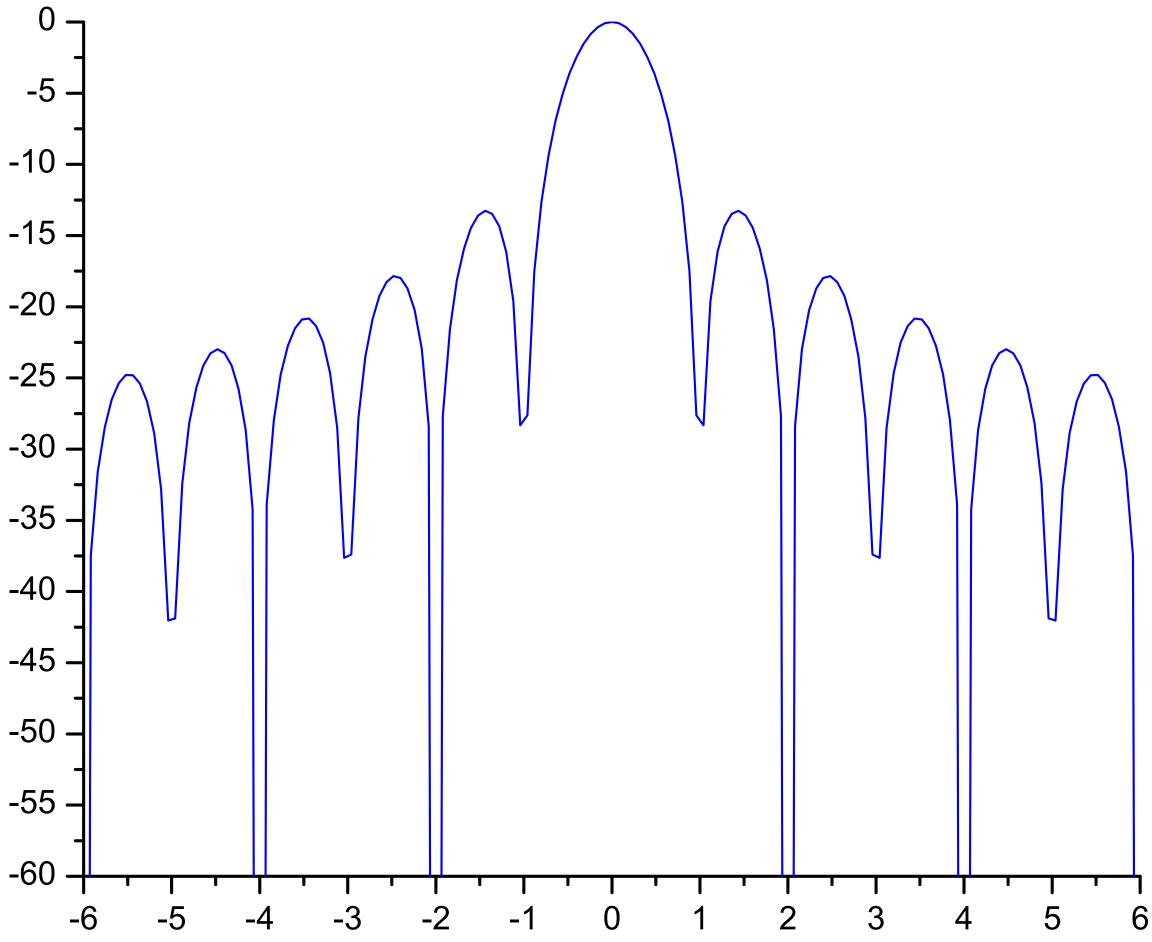
$$G_s(f) = \sigma_a^2 \frac{|P(f)|^2}{T} = A^2 T \mathrm{sinc}^2(fT)$$



Bipolar NRZ

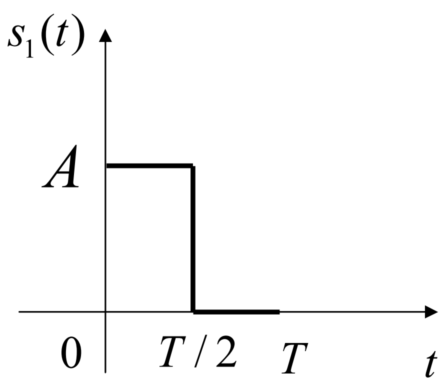
Signal spectrum

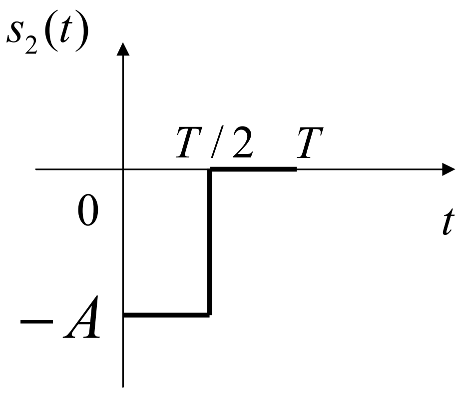
$$G_s(f) = \sigma_a^2 \frac{|P(f)|^2}{T} = A^2 T \mathrm{sinc}^2(fT)$$



Bipolar RZ (Return to Zero)

Signal set $$\boxed{M=\{s_1(t)=+AP_{T/2}(t)\,,\,s_2(t)=-AP_{T/2}(t)\,\}}$$



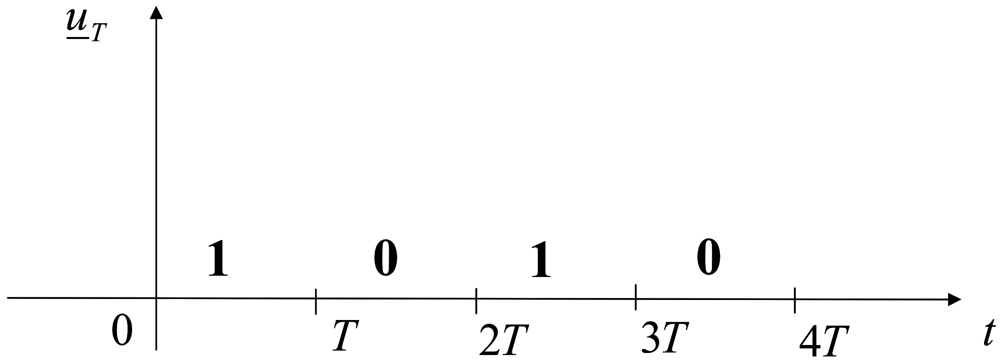


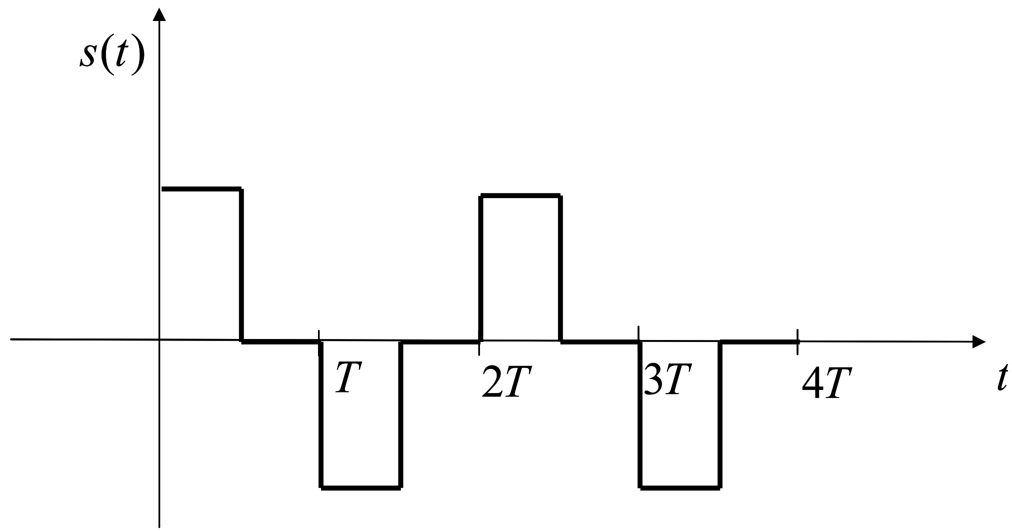
Versor $$b_1(t)=\sqrt{\frac{2}{T}}P_{T/2}(t)$$

Vector set $$M=\{\underline{s_1}=(+\alpha)\,,\,\underline{s_2}=\left(-\alpha\right)\}$$

Bipolar RZ

Transmitted waveform



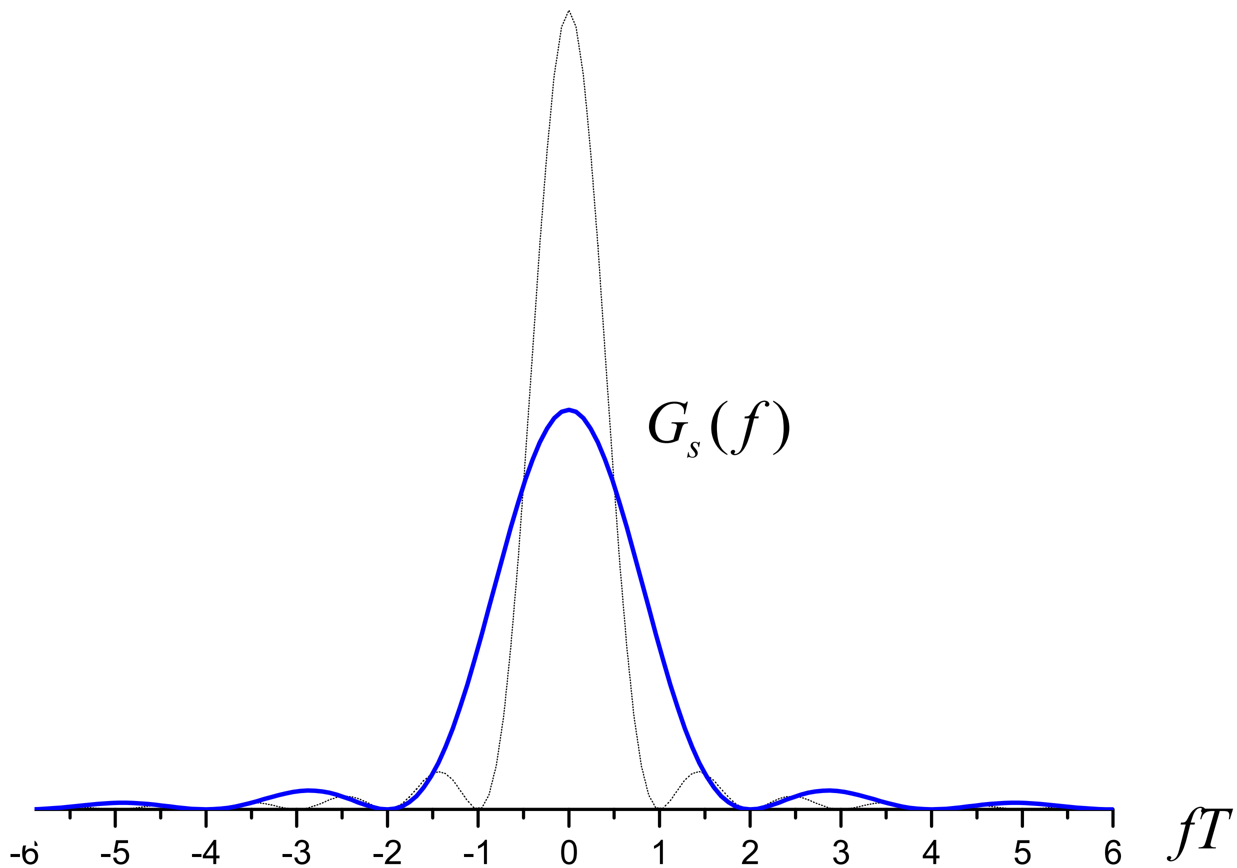


$$s(t) = \sum_n a[n] p(t - nT)$$

$$a[n] \in \{+\alpha, -\alpha\}$$

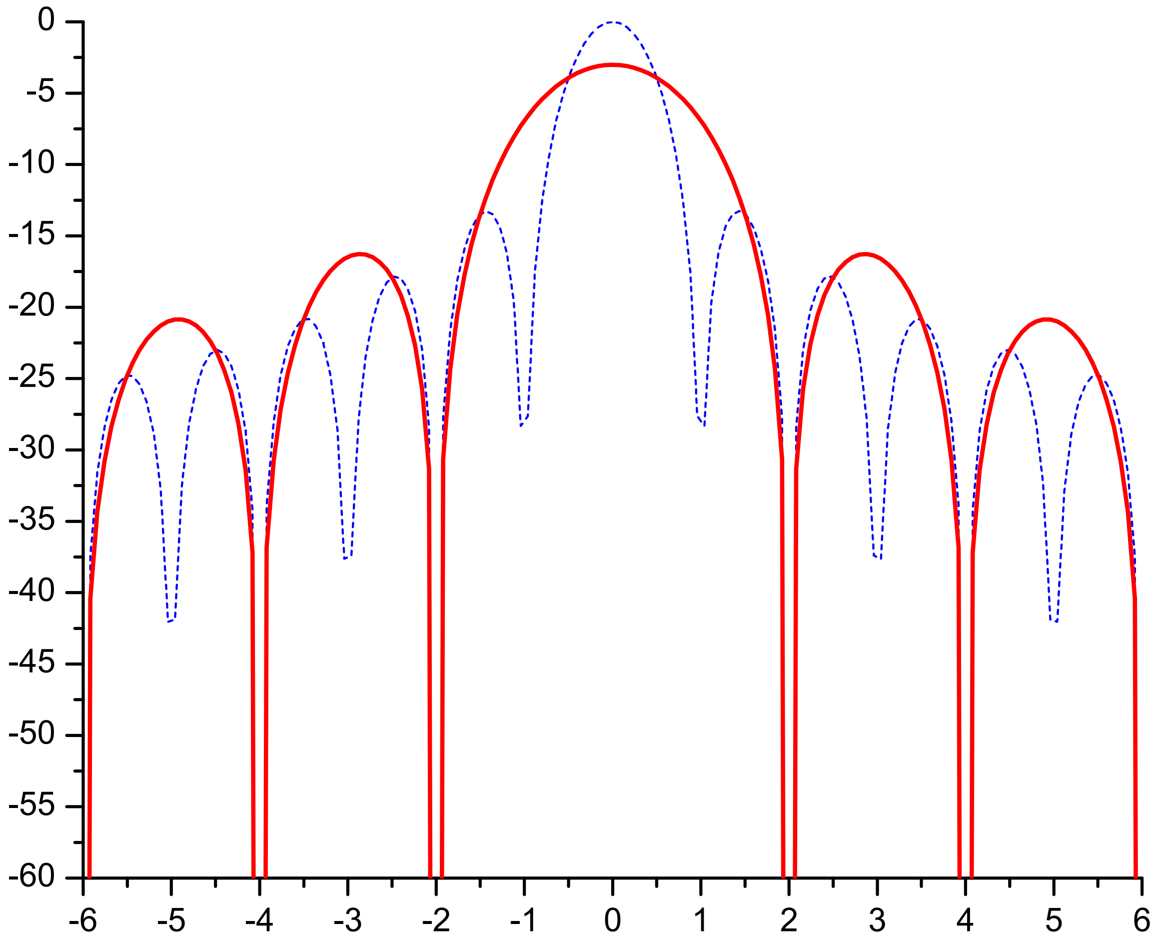
Bipolar RZ

Signal spectrum $$G_s(f) = \sigma_a^2 \frac{|P(f)|^2}{T} = \frac{A^2 T}{4} \operatorname{sinc}^2(fT/2)$$



Bipolar RZ

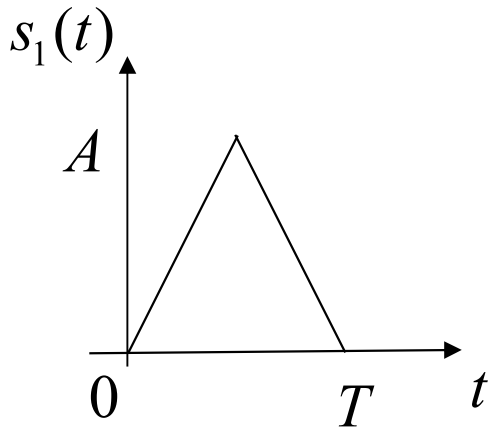
Signal spectrum
$$G_s(f) = \sigma_a^2 \frac{|P(f)|^2}{T} = \frac{A^2 T}{4} \operatorname{sinc}^2(fT/2)$$

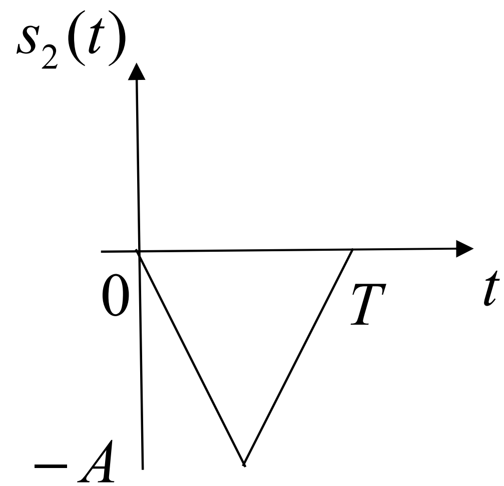


Example: Bipolar triangular

Signal set

$$\boxed{M = \{s_1(t) = +A\Delta_T(t)\,,\, s_2(t) = -A\Delta_T(t)\,\}}$$





Versor

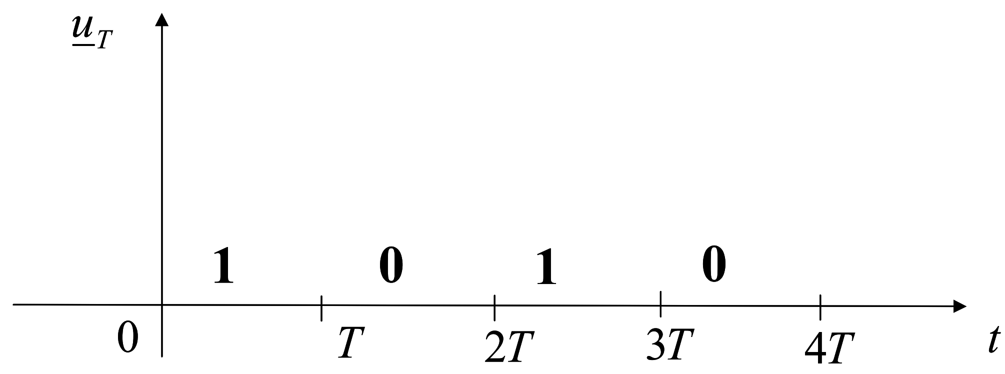
$$b_1(t) = \sqrt{\frac{3}{T}}\Delta_T(t)$$

Vector set

$$M = \{\underline{s_1} = (+\alpha)\,,\, \underline{s_2} = \left(-\alpha\right)\}$$

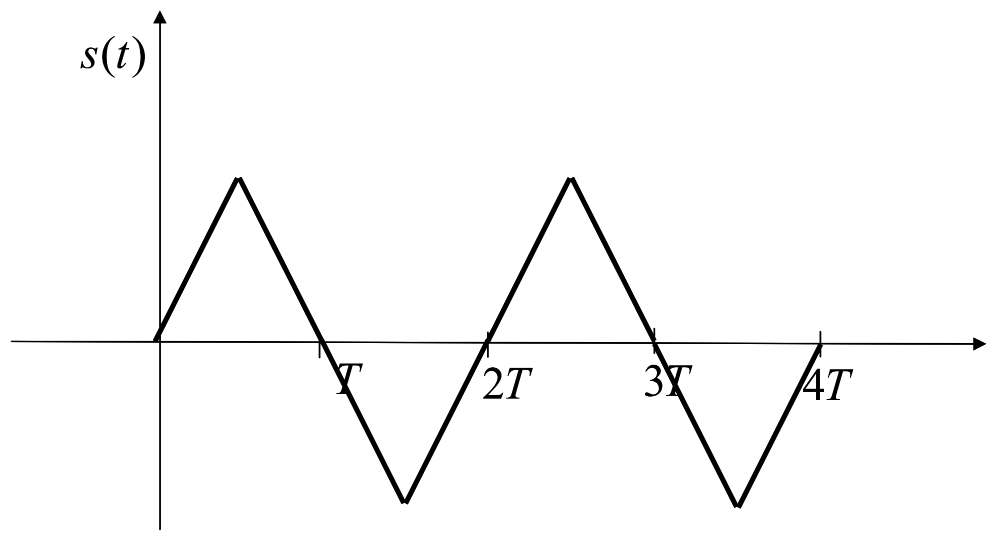
Example: Bipolar triangular

Transmitted waveform



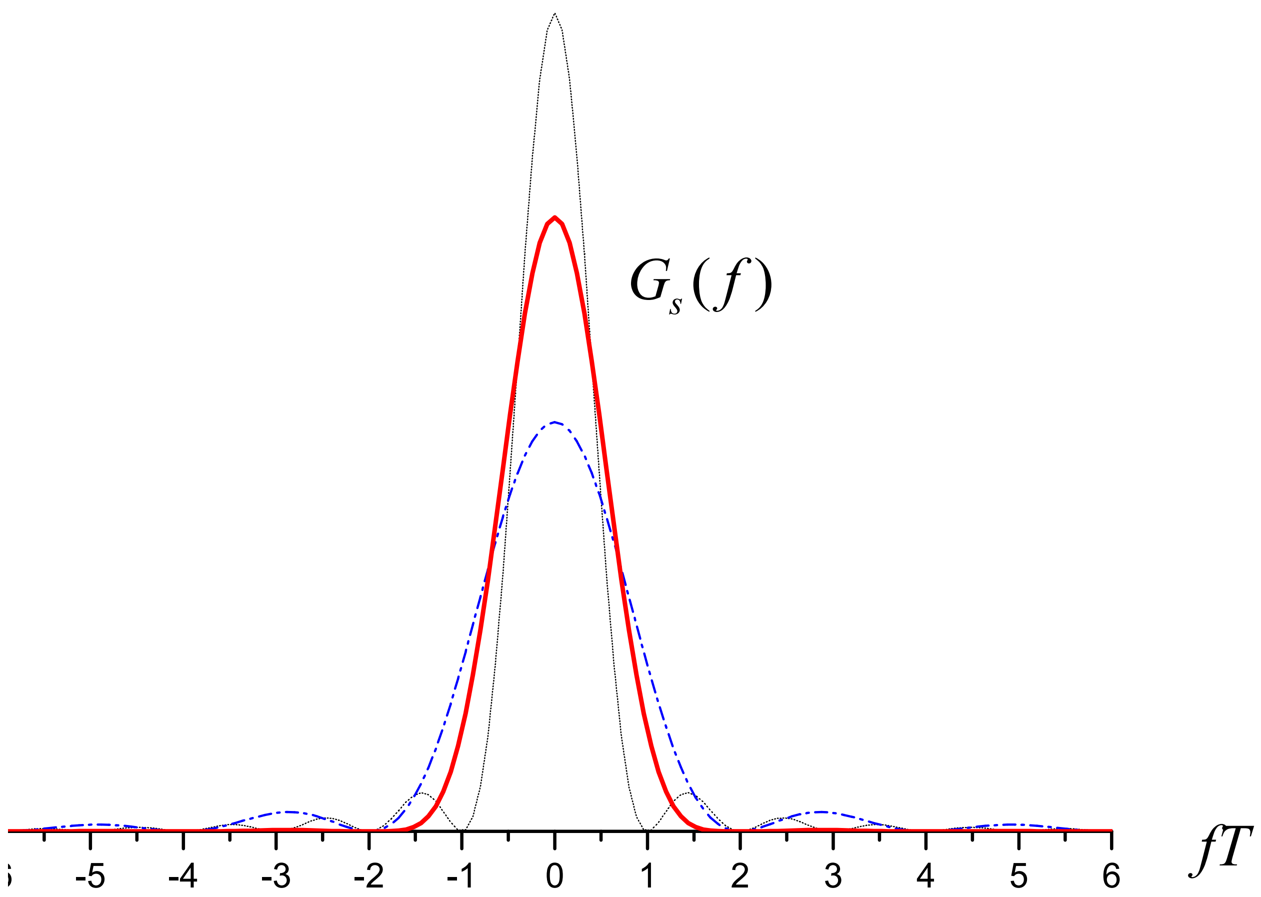
$$s(t) = \sum_n a[n] p(t - nT)$$

$$a[n] \in \{+\alpha, -\alpha\}$$



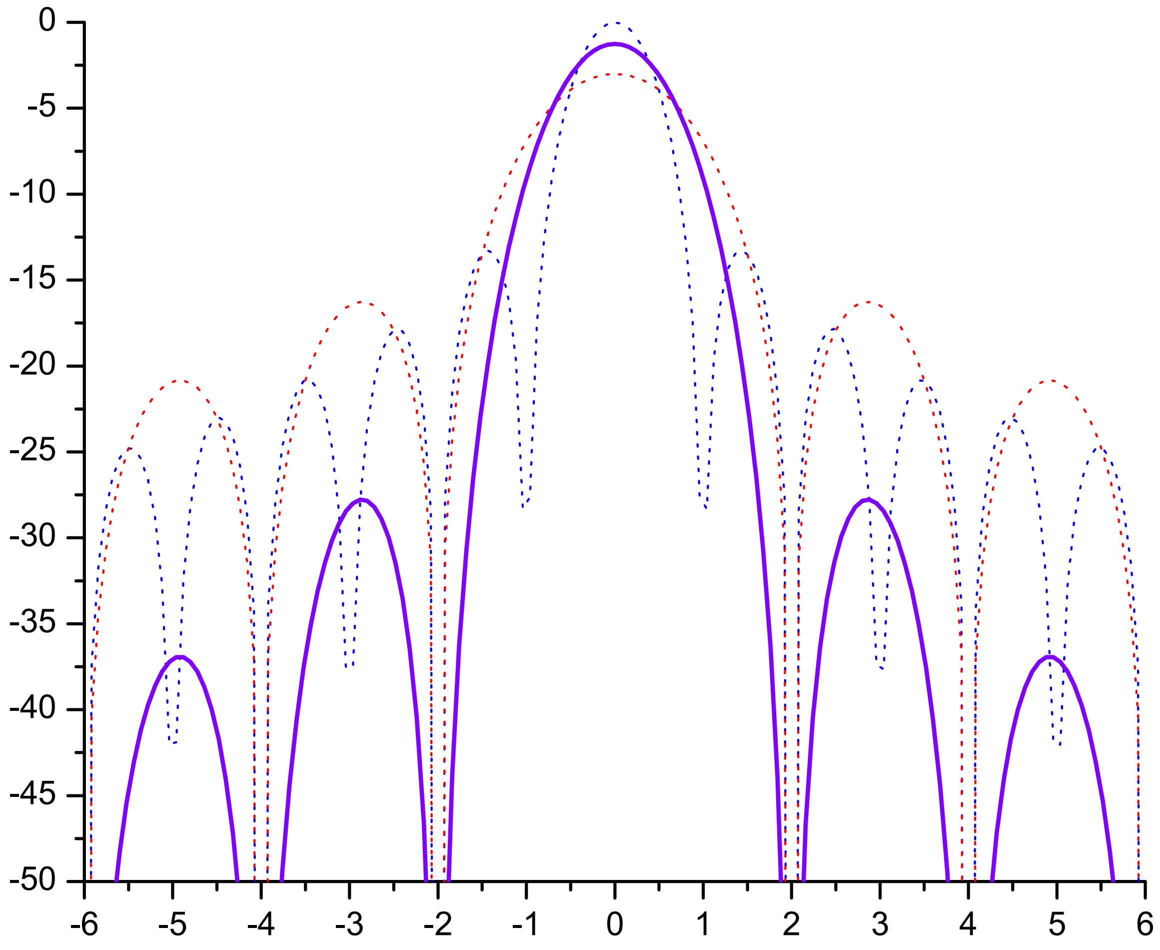
Example: Bipolar triangular

Signal spectrum $$G_s(f) = \sigma_a^2 \frac{|P(f)|^2}{T} = \frac{A^2 T}{4} \operatorname{sinc}^4(fT/2)$$



Example: Bipolar triangular

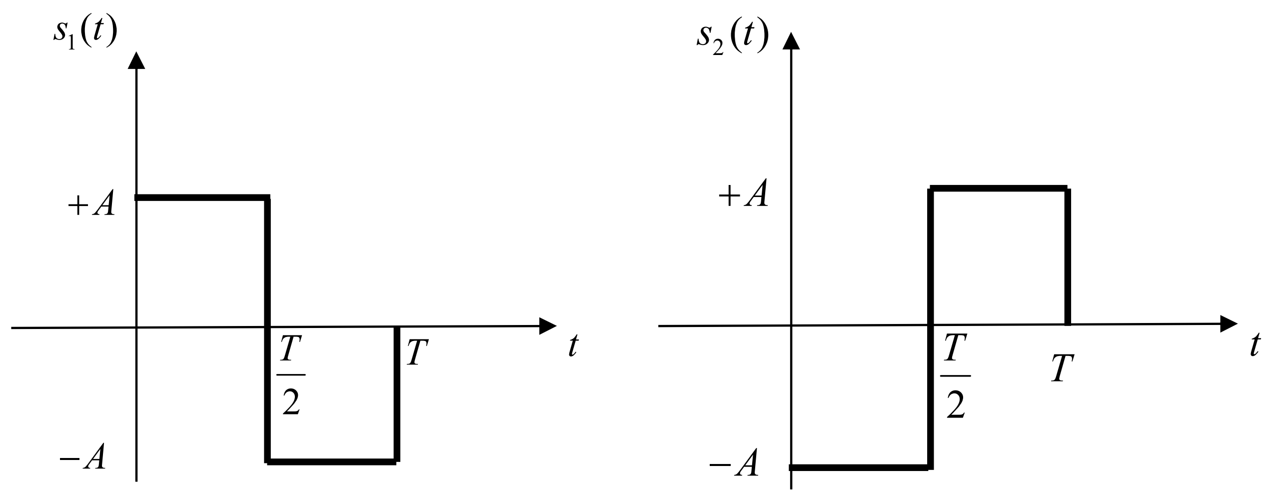
Signal spectrum $$G_s(f) = \sigma_a^2 \frac{|P(f)|^2}{T} = \frac{A^2 T}{4} \operatorname{sinc}^4(fT/2)$$



Manchester (biphase)

Signal set $\boxed{M = \{s_1(t) = +Ax(t)\,,\, s_2(t) = -Ax(t)\,\}}$

$$x(t) = \left[+P_{T/2}(t) - P_{T/2}(t - T/2)\right]$$

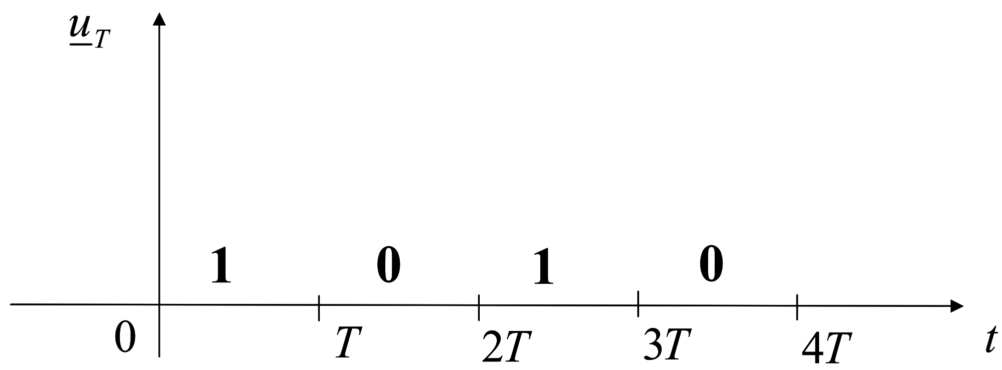


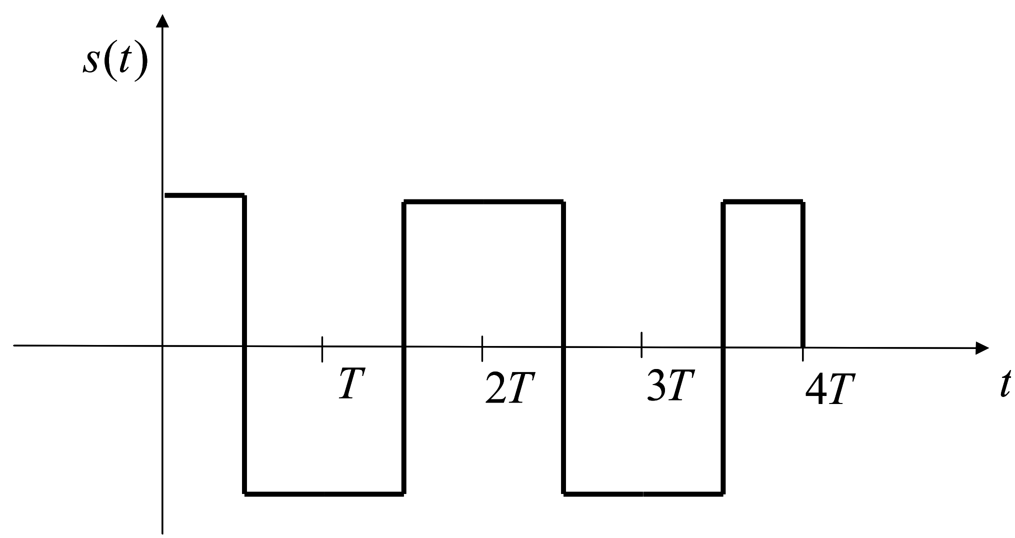
Versor $$b_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\left[+P_{T/2}(t) - P_{T/2}(t - T/2)\right]$$

Vector set $$M = \{\underline{s_1} = (+\alpha)\,,\, \underline{s_2} = (-\alpha)\,\}$$

Manchester (biphase)

Transmitted waveform





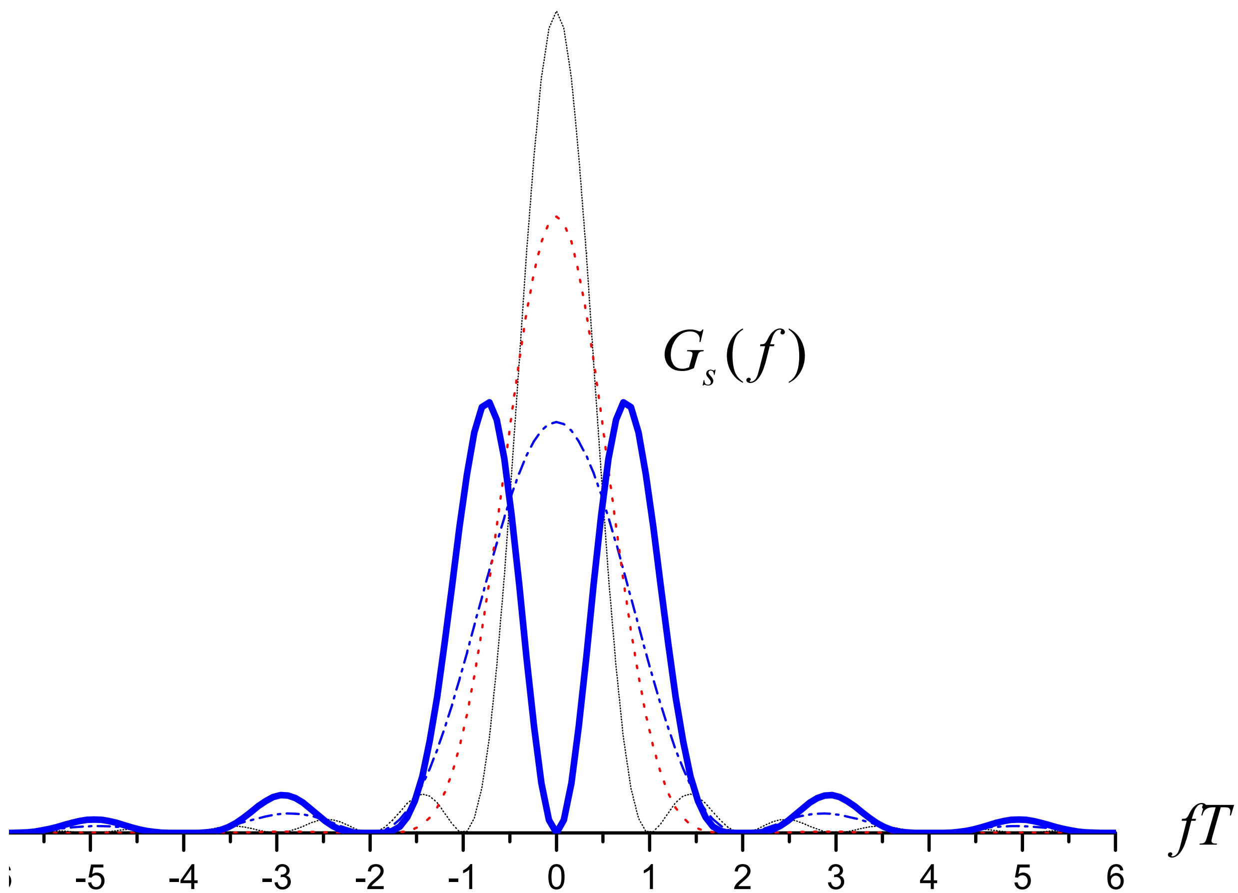
$$s(t) = \sum_n a[n] p(t - nT)$$

$$a[n] \in \{+\alpha, -\alpha\}$$

Manchester (biphase)

Signal spectrum $$G_s(f) = \sigma_a^2 \frac{|P(f)|^2}{T} = A^2 T \frac{\sin^4(\pi f T/2)}{(\pi f T/2)^2}$$

(maximum at $f \approx 0.74/T$)

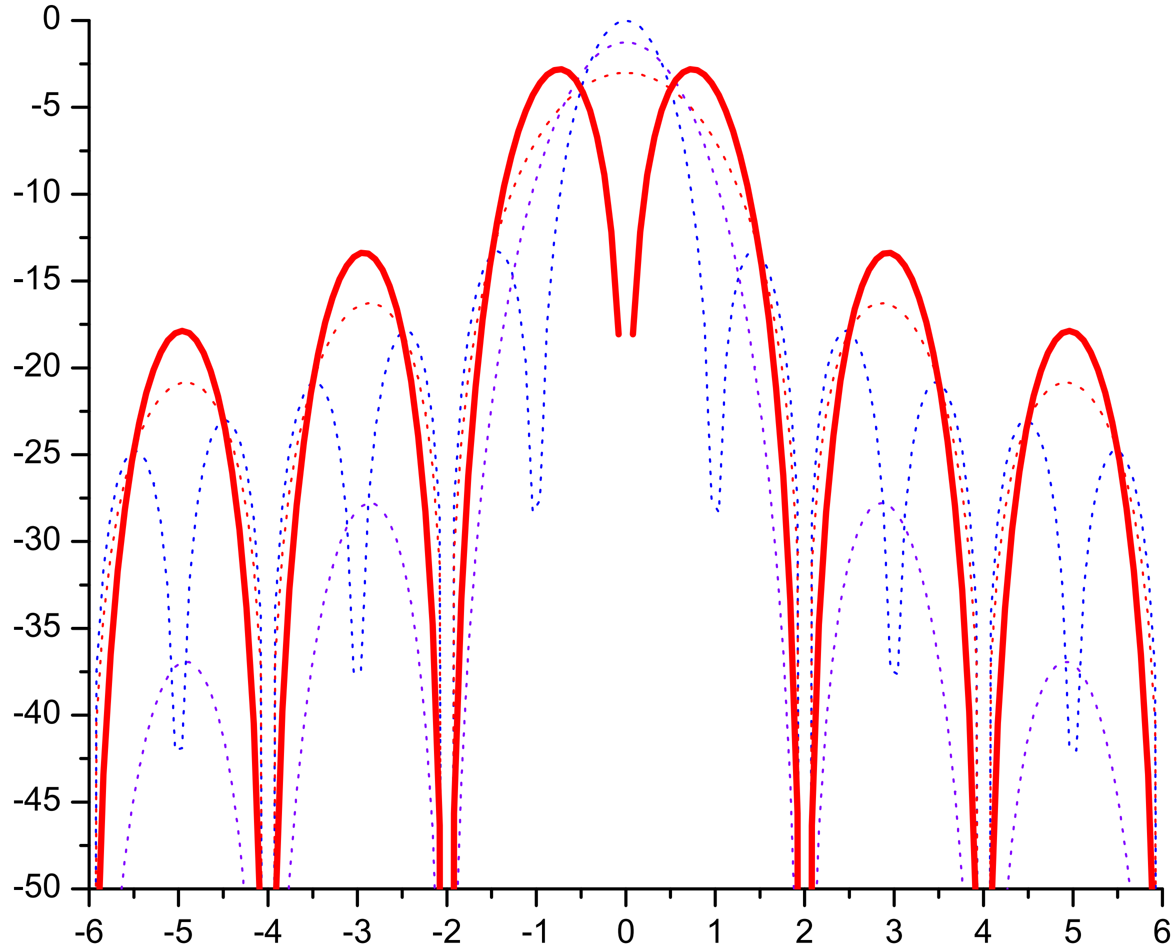


Manchester (biphase)

Signal spectrum

$$G_s(f) = \sigma_a^2 \frac{|P(f)|^2}{T} = A^2 T \frac{\sin^4(\pi f T/2)}{(\pi f T/2)^2}$$

(maximum at $f \approx 0.74/T$)



Manchester (biphase)

$$p(t) = b_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\left[+P_{T/2}(t) - P_{T/2}\left(t - \frac{T}{2}\right)\right]$$

$$P(f) = \frac{1}{\sqrt{T}}\left[+\frac{T}{2}\mathrm{sinc}\left(f\frac{T}{2}\right)\exp\left(-j2\pi f\frac{T}{4}\right) - \frac{T}{2}\mathrm{sinc}\left(f\frac{T}{2}\right)\exp\left(-j2\pi f\frac{3T}{4}\right)\right] =$$

$$= \left[+\frac{\sqrt{T}}{2}\mathrm{sinc}\left(f\frac{T}{2}\right)\exp\left(-j2\pi f\frac{T}{4}\right)\right]\left[1 - \exp\left(-j\pi fT\right)\right]$$

$$\left|P(f)\right|^2 = \frac{T}{4}\mathrm{sinc}^2\left(f\frac{T}{2}\right)\left|1 - \cos\left(-\pi fT\right) - j\sin\left(-\pi fT\right)\right|^2 =$$

$$= \frac{T}{4}\mathrm{sinc}^2\left(f\frac{T}{2}\right)\left|1 - \cos\left(\pi fT\right) + j\sin\left(\pi fT\right)\right|^2 =$$

$$= \frac{T}{4}\mathrm{sinc}^2\left(f\frac{T}{2}\right)\left[1 + \cos^2\left(\pi fT\right) - 2\cos\left(\pi fT\right) + \sin^2\left(\pi fT\right)\right] =$$

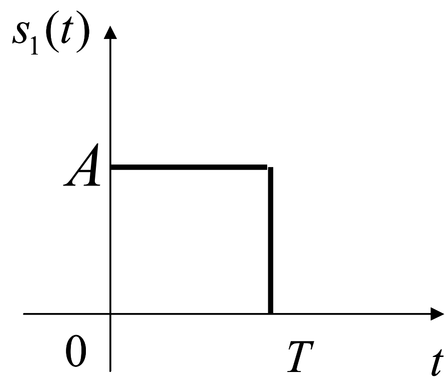
$$= \frac{T}{2}\mathrm{sinc}^2\left(f\frac{T}{2}\right)\left[1 - \cos\left(\pi fT\right)\right] = T\mathrm{sinc}^2\left(f\frac{T}{2}\right)\sin^2\left(\pi f\frac{T}{2}\right)$$

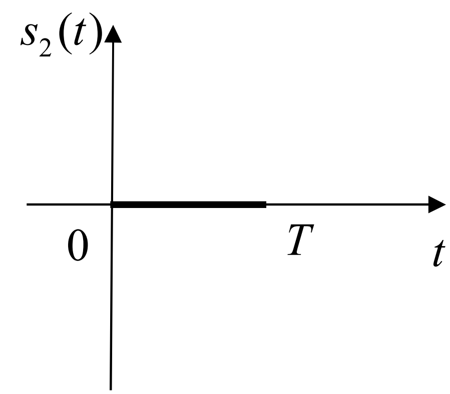
$$\boxed{\sin\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}}$$

Unipolar NRZ

Signal set

$$\boxed{M = \{s_1(t) = +AP_T(t)\ ,\ s_2(t) = 0\ \}}$$





Versor

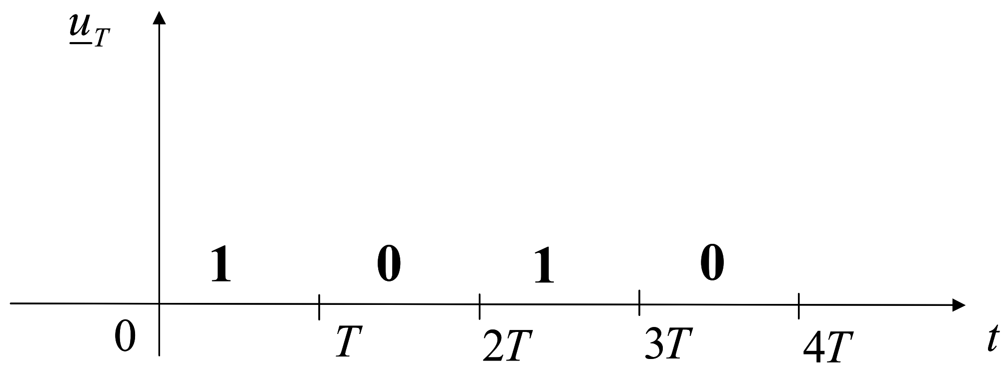
$$b_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} P_T(t)$$

Vector set

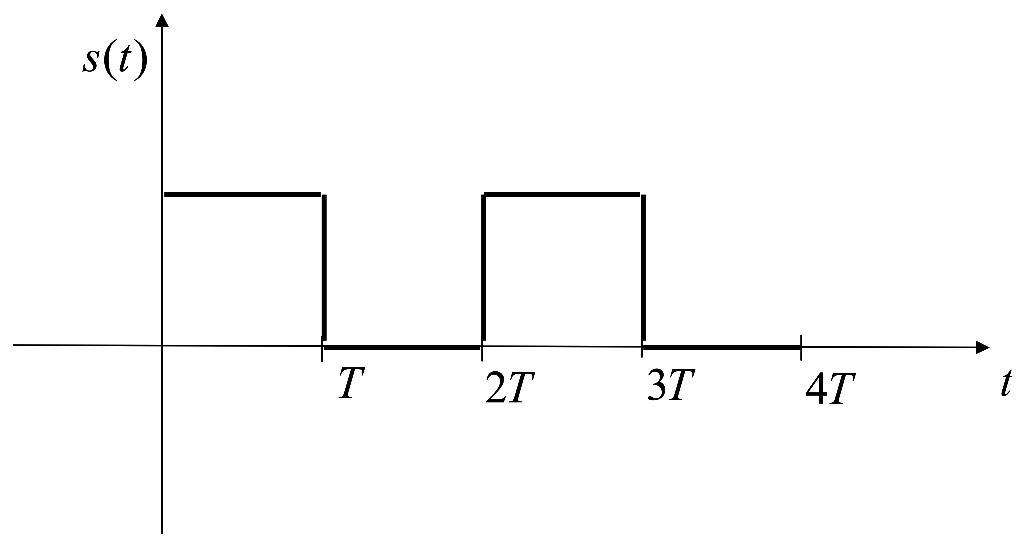
$$M = \{\underline{s_1} = (+\alpha)\ ,\ \underline{s_2} = \left(0\right)\}$$

Unipolar NRZ

Transmitted waveform



$$s(t) = \sum_n a[n]p(t - nT)$$



$$a[n] \in \{+\alpha, 0\}$$

Unipolar NRZ

Signal spectrum

$$G_s(f) = \sigma_a^2 \frac{|P(f)|^2}{T} + \frac{\mu_a^2}{T^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| P\left(\frac{n}{T}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

$$|P(f)|^2 = x \,\mathrm{sinc}^2(\pi f T) \qquad\qquad x \in R$$

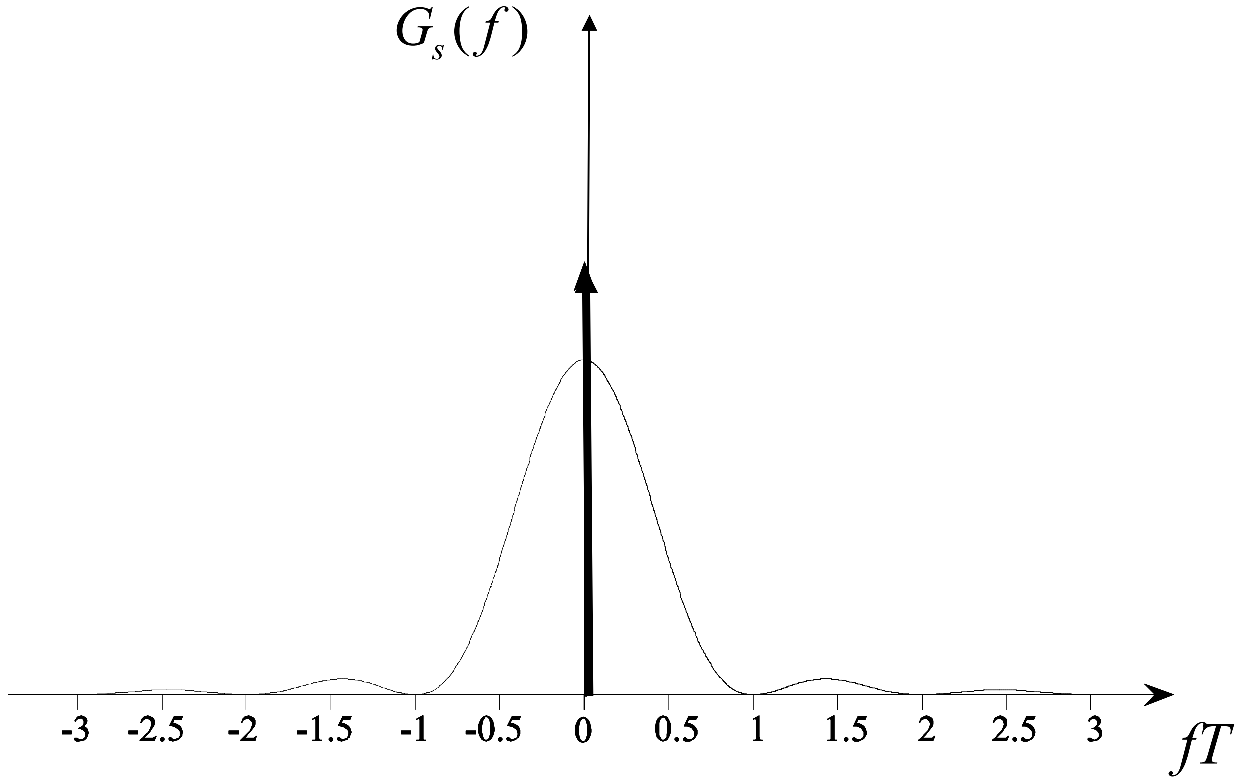
A Dirac delta at zero frequency

$$G_s(f) = \frac{A^2}{4} T \mathrm{sinc}^2(f\mathrm{T}) + \frac{A^2}{4} \delta(f)$$

Unipolar NRZ

Signal spectrum

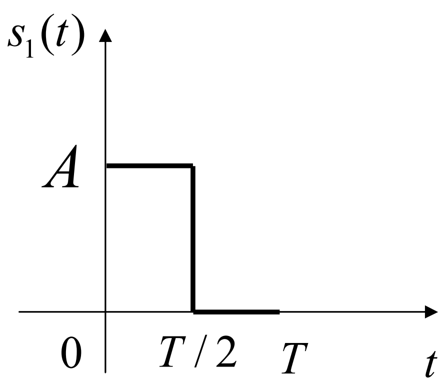
$$G_s(f) = \frac{A^2}{4} T \mathrm{sinc}^2(fT) + \frac{A^2}{4}\delta(f)$$

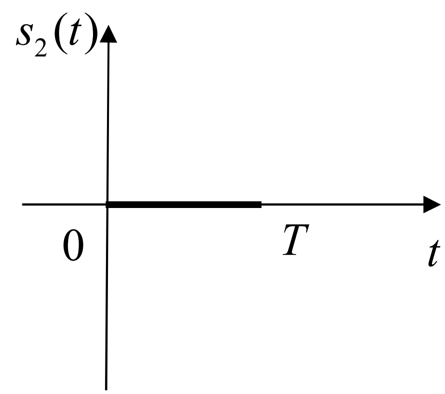


Unipolar RZ

Signal set

$$\boxed{M=\{s_1(t)=+AP_{T/2}(t)\;,\;s_2(t)=0\;\}}$$





Versor

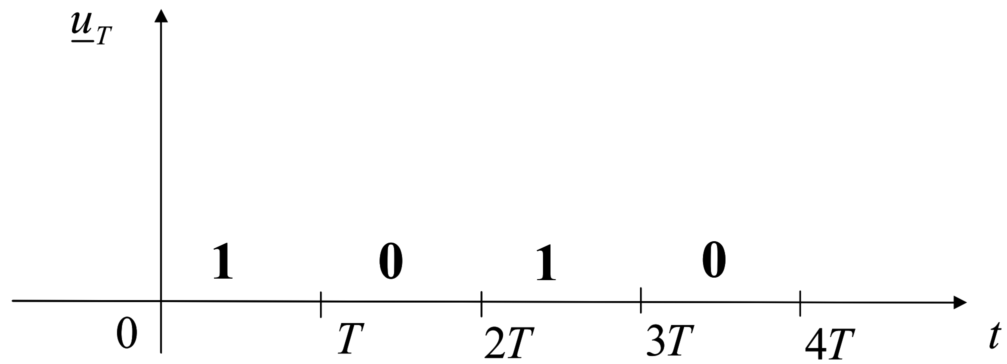
$$b_1(t)=\sqrt{\frac{2}{T}}P_{T/2}(t)$$

Vector set

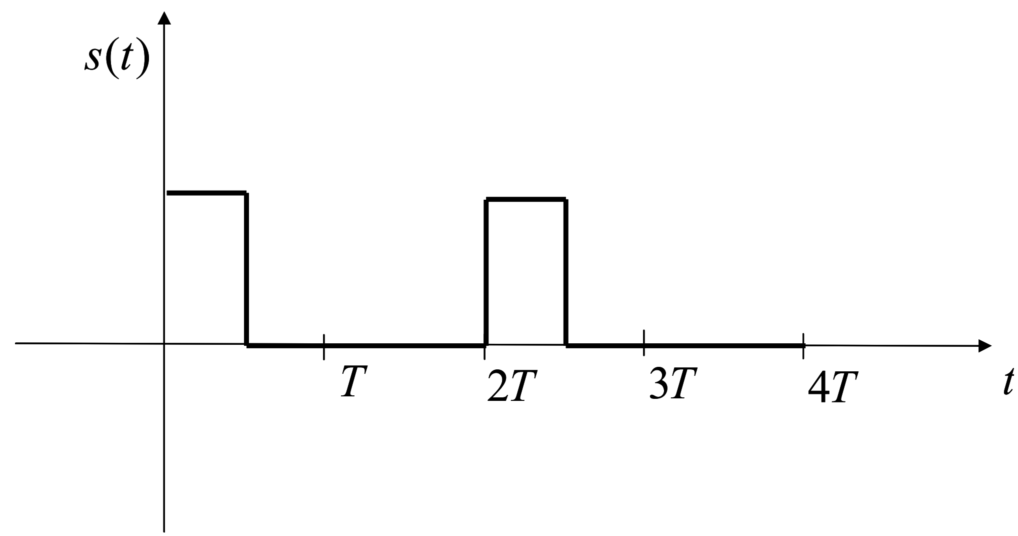
$$M=\{\underline{s}_1=(+\alpha)\;,\;\underline{s}_2=\left(0\right)\;\}$$

Unipolar RZ

Transmitted waveform



$$s(t) = \sum_n a[n]p(t - nT)$$



$$a[n] \in \{+\alpha, 0\}$$

Unipolar RZ

Signal spectrum

$$G(f) = \sigma_a^2 \frac{|P(f)|^2}{T} + \frac{\mu_a^2}{T^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| P\left(\frac{n}{T}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

$$\left|P(f)\right|^2 = z\left[\frac{\sin(\pi f T/2)}{(\pi f T/2)}\right]^2 \qquad \left(z \in R\right)$$

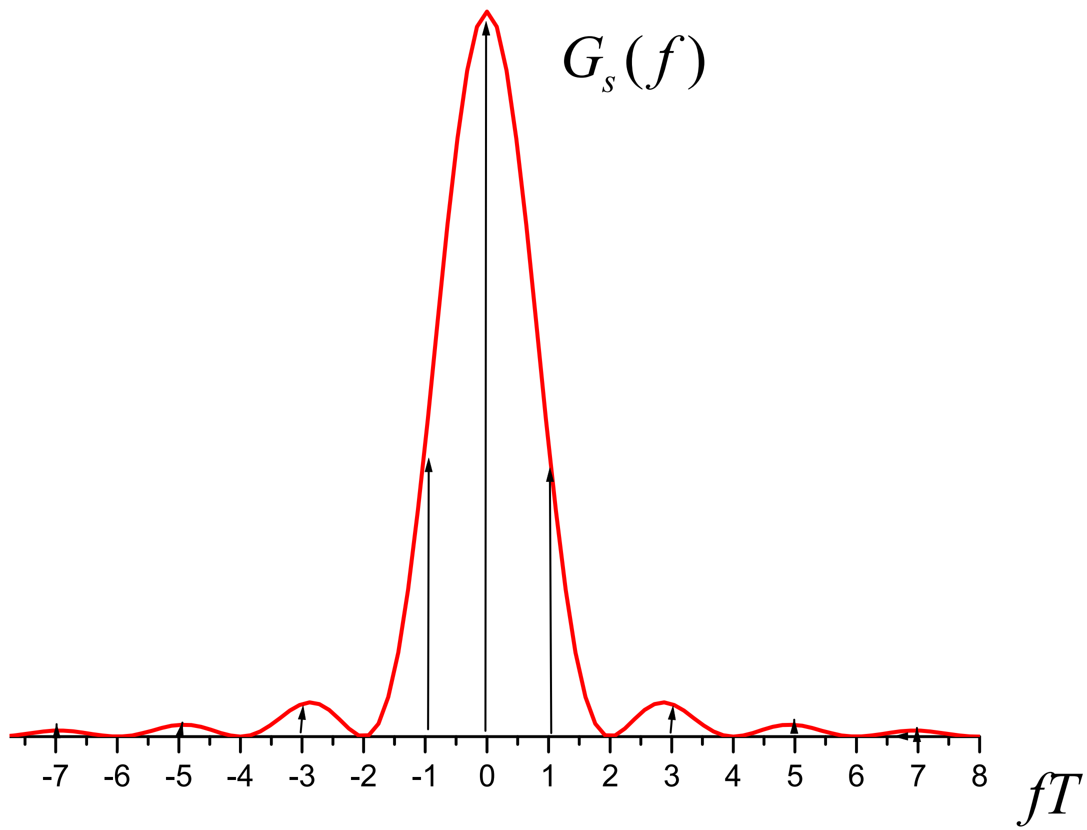
Dirac deltas at zero frequency and at odd multiples of $1/T$

$$G_s(f) = \frac{A^2}{16} T \mathrm{sinc}^2(fT/2) + \frac{A^2}{16} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}^2\left(\frac{(2i+1)}{2}\right) \delta\left(f - \frac{(2i+1)}{T}\right)$$

Unipolar RZ

Signal spectrum

$$G_s(f) = \frac{A^2}{16} T \operatorname{sinc}^2(fT/2) + \frac{A^2}{16} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{(2i+1)}{2}\right) \delta\left(f - \frac{(2i+1)}{T}\right)$$



m-PAM constellation*: characteristics*

1. Base-band modulation
2. One-dimensional signal space
3. m signals, symmetrical with respect to the origin
4. Information associated to the impulse amplitude

   PAM=Pulse Amplitude Modulation

m-PAM constellation: constellation

SIGNAL SET $\boxed{M = \{s_i(t) = \alpha_i p(t)\}_{i=1}^{m}}$

Versor $b_1(t)=p(t) \quad (d=1)$

VECTOR SET

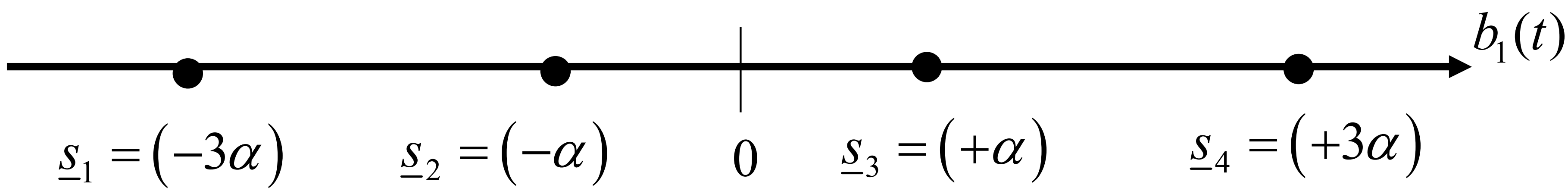
$$\boxed{M = \{\underline{s}_1 = (-(m-1)\alpha)\ ,\ \underline{s}_2 = (-(m-3)\alpha), \ldots, \underline{s}_{m-1} = (+(m-3)\alpha)\ ,\ \underline{s}_m = (+(m-1)\alpha)\} \subseteq R}$$

$$k = \log_2(m) \qquad \boxed{T = kT_b} \qquad \boxed{\boxed{R = \frac{R_b}{k}}}$$

m-PAM constellation: *constellation*

Example: 4-PAM constellation

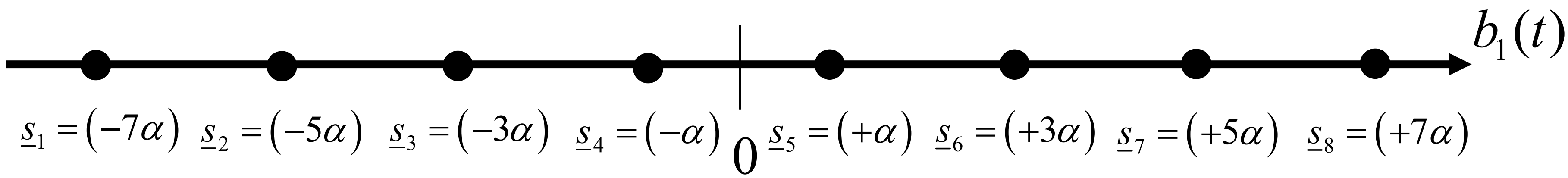
$$M = \{\underline{s}_1 = (\mathbf{-3\alpha}),\ \underline{s}_2 = (\mathbf{-\alpha}), \underline{s}_3 = (+\boldsymbol{\alpha}),\ \underline{s}_4 = (\mathbf{+3\alpha})\} \subseteq R$$



m-PAM constellation*: constellation*

Example: 8-PAM constellation

$$M = \{\underline{s}_1 = (\mathbf{-7\alpha})\,,\ \underline{s}_2 = (\mathbf{-5\alpha}), \underline{s}_3 = (\mathbf{-3\alpha})\,,\ \underline{s}_4 = (\mathbf{-\alpha}), \underline{s}_5 = (+\boldsymbol{\alpha})\,,\ \underline{s}_6 = (\mathbf{+3\alpha}), \underline{s}_7 = (\mathbf{+5\alpha})\,,\ \underline{s}_8 = (\mathbf{+7\alpha})\} \subseteq R$$

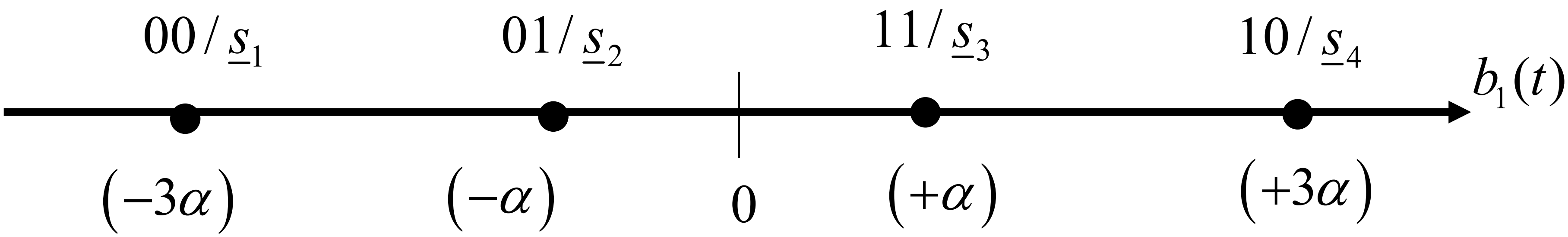


m-PAM constellation*: binary labelling*

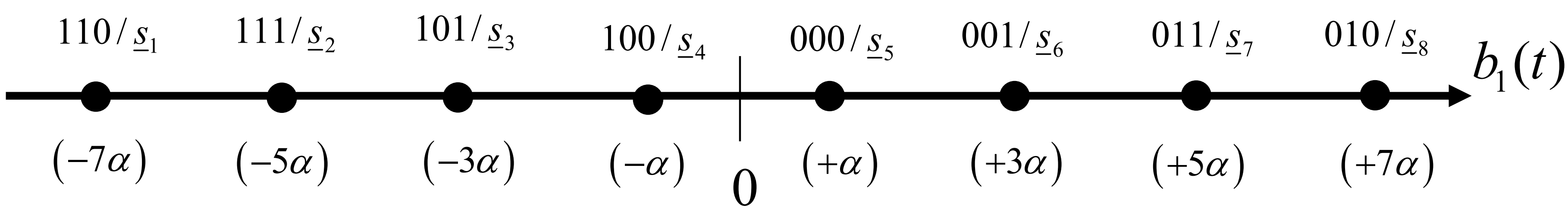
$$e : H_k \leftrightarrow M$$

It is always possible to build a Gray labeling

4-PAM:



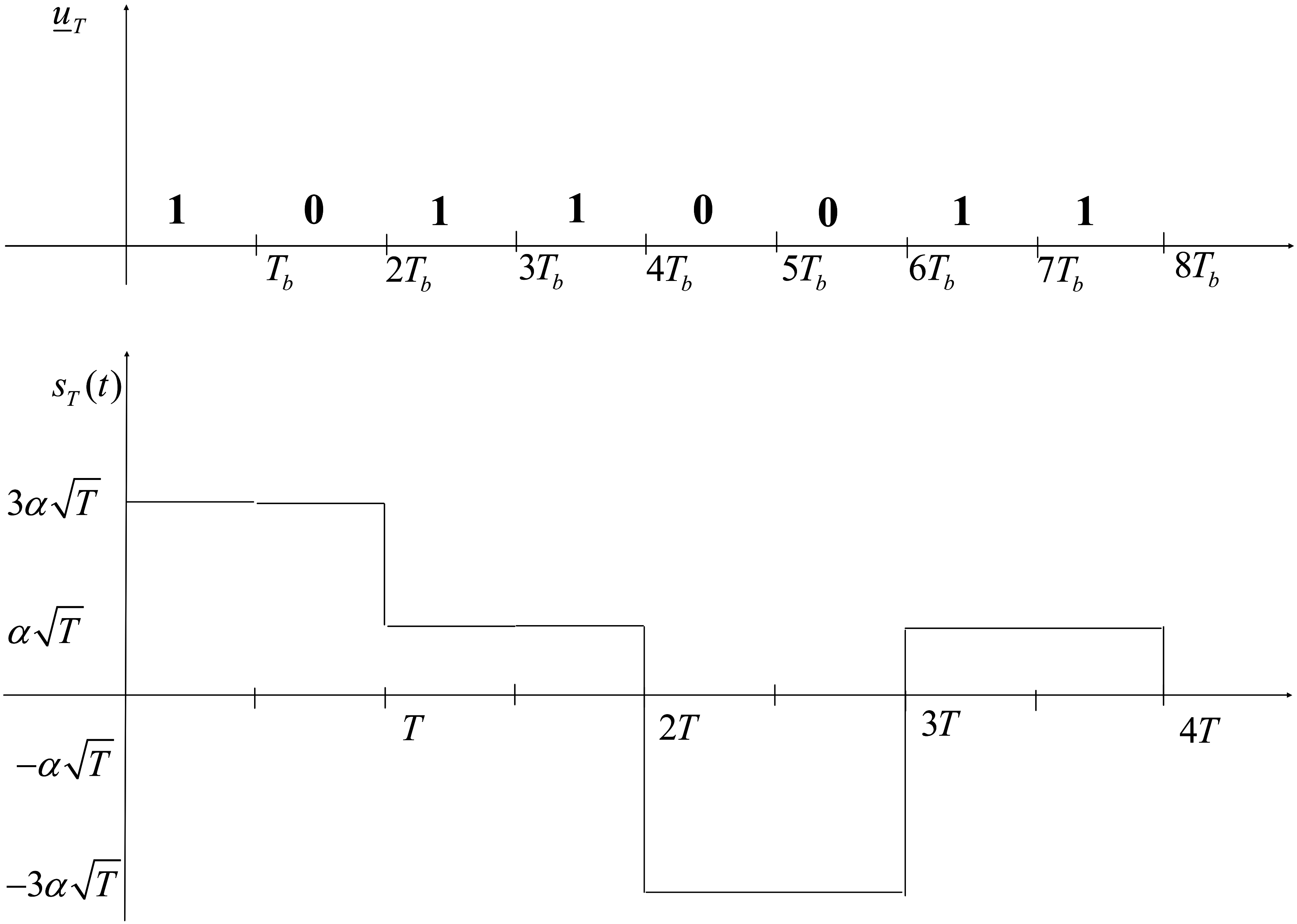
8-PAM:



m-PAM constellation: transmitted waveform

Example: 4-PAM

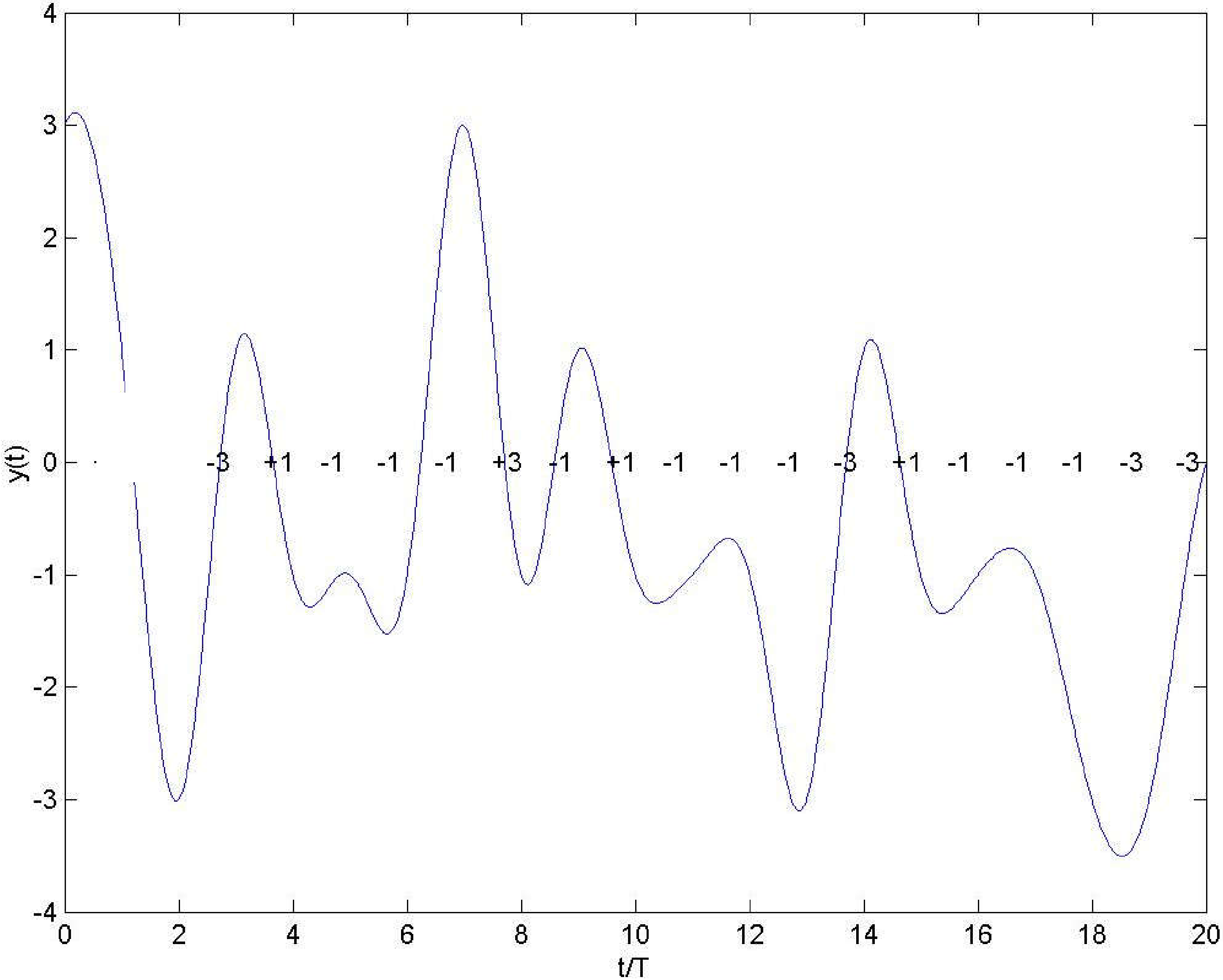
$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} P_T(t)$$



m-PAM constellation*: transmitted waveform*

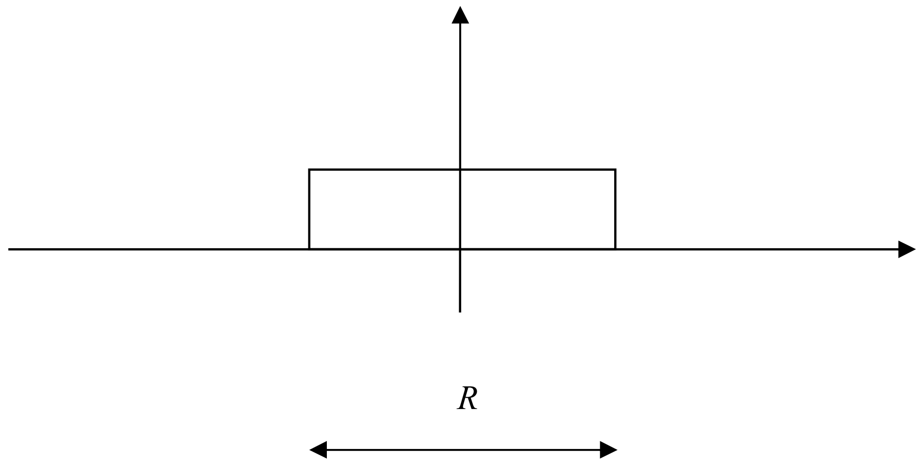
Example: 4-PAM

$p(t) = \ \mathrm{RRC} \ \ \alpha = 0.5$



m-PAM constellation: *bandwidth and spectral efficiency*

Case 1: $p(t)$ = ideal low pass filter



Total bandwidth (ideal case)

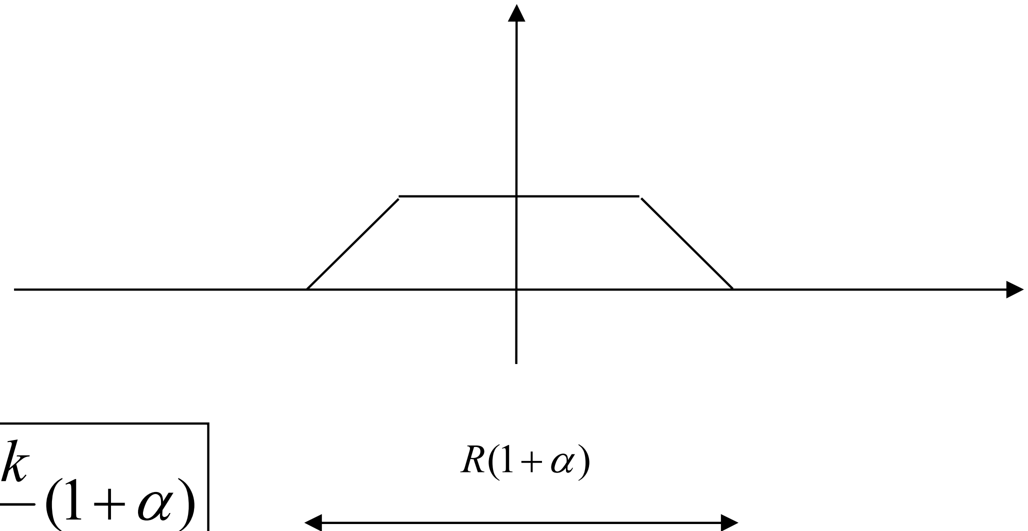
$$\boxed{B_{id} = \frac{R}{2} = \frac{R_b / k}{2}}$$

Spectral efficiency (ideal case)

$$\boxed{\eta_{id} = \frac{R_b}{B_{id}} = 2k \; bps / Hz}$$

***m-PAM constellation**:*
bandwidth and spectral efficiency

Case 2: $p(t)$ = RRC filter roll off α



Total bandwidth

$$\boxed{B = \frac{R}{2}(1+\alpha) = \frac{R_b / k}{2}(1+\alpha)}$$

Spectral efficiency

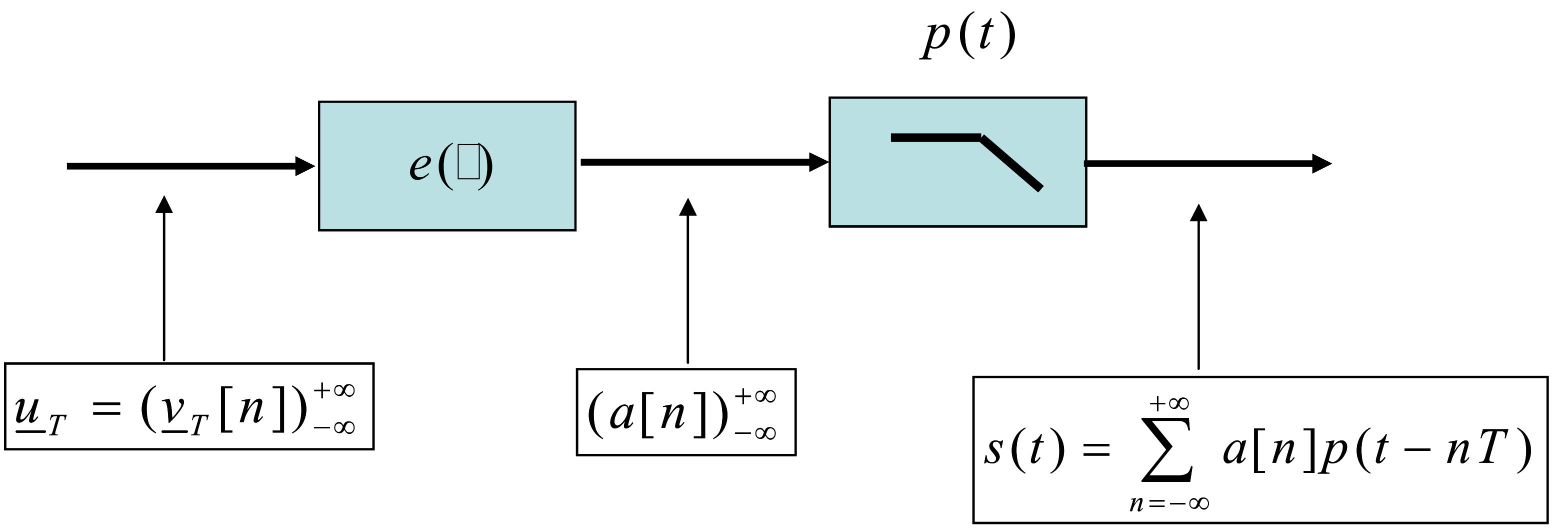
$$\boxed{\eta = \frac{R_b}{B} = \frac{2k}{(1+\alpha)}\, bps / Hz}$$

Exercize

Given a baseband channel with bandwidth B up to 4000 Hz, compute the maximum bit rate R_b we can transmit over it with a 256-PAM constellation in the two cases:

- Ideal low pass filter
- RRC filter with ?=0.25

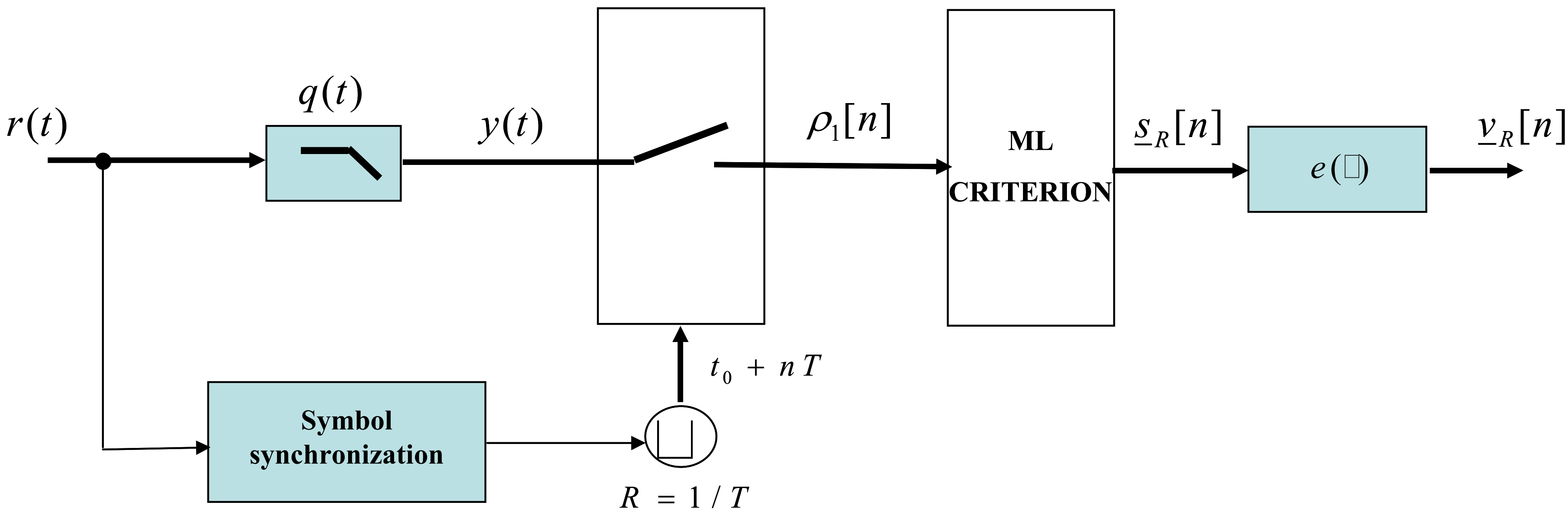
***m-PAM constellation**: modulator*



Equal to 2-PAM, but we have m possible levels:

$$a[n] \in \{-(m-1)\alpha, -(m-3)\alpha, ..., +(m-3)\alpha, +(m-1)\alpha\}$$

***m-PAM constellation**: demodulator*

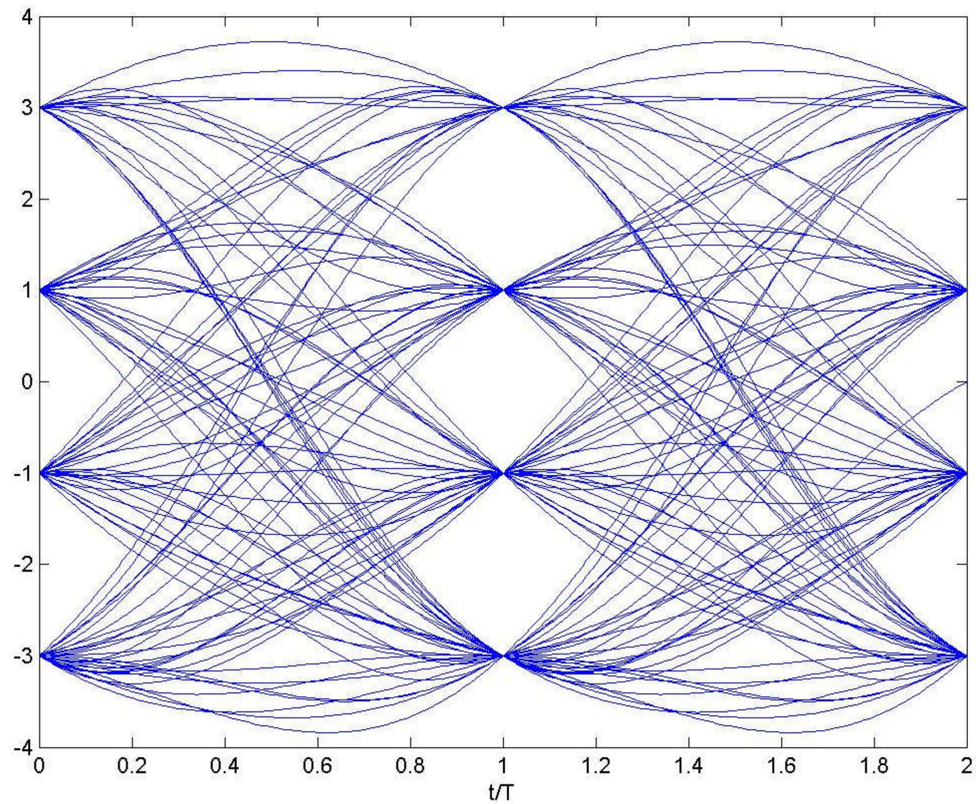


Equal to 2-PAM, but we have m possible levels:

$$a[n] \in \{-(m-1)\alpha, -(m-3)\alpha, \ldots, +(m-3)\alpha, +(m-1)\alpha\}$$

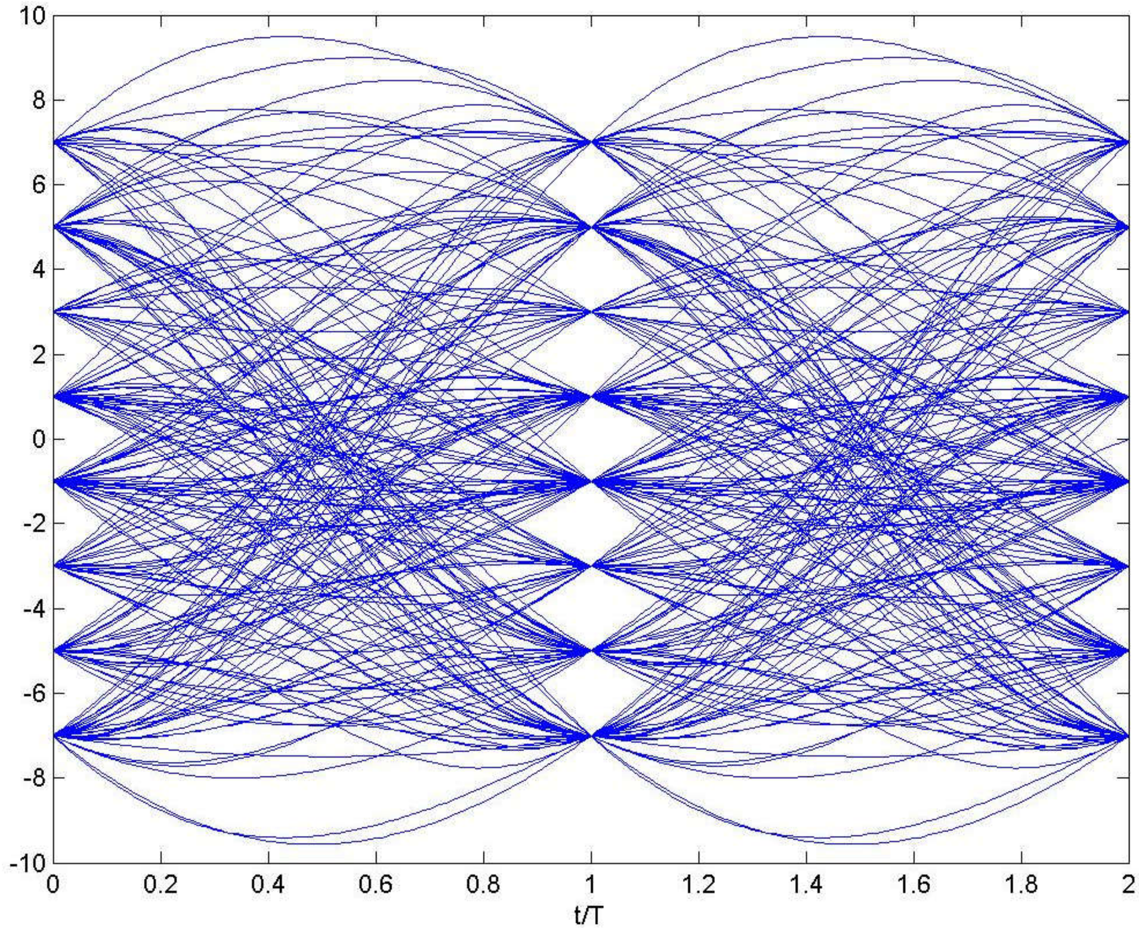
***m-PAM constellation**: eye diagram*

4-PAM, $p(t)$ = RRC with ? =0.5



***m-PAM constellation**: eye diagram*

8-PAM, $p(t)$ = RRC with ⍰ =0.5



m-PAM constellation: *error probability*

By applying the asymptotic approximation we can obtain

$$P_b(e) \approx \frac{m-1}{mk} erfc\left(\sqrt{\frac{3k}{m^2-1}\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

m-PAM constellation*: error probability*

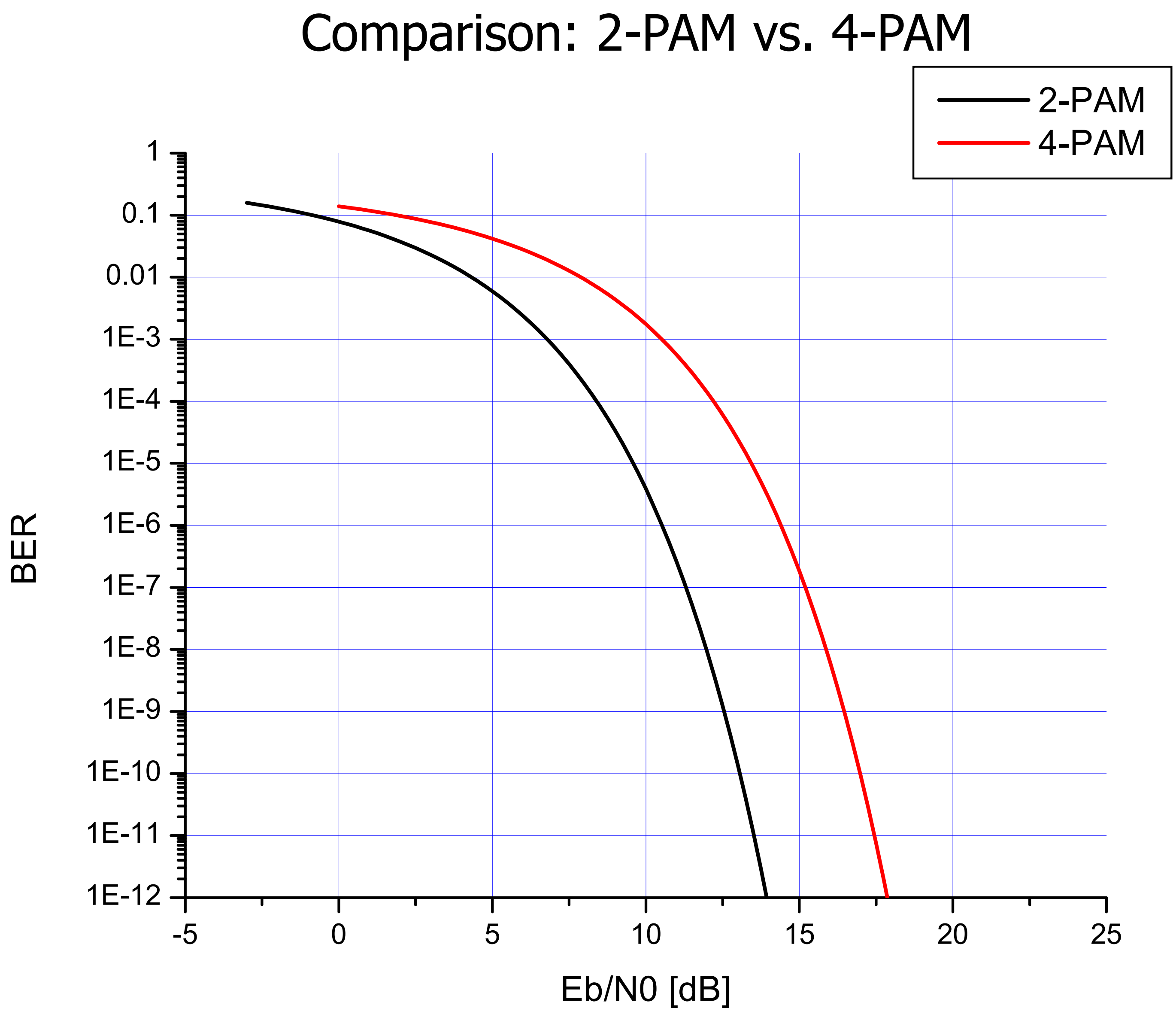
Comparison: 2-PAM vs. 4-PAM

$$2-\text{PAM:} \qquad P_b(e) = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

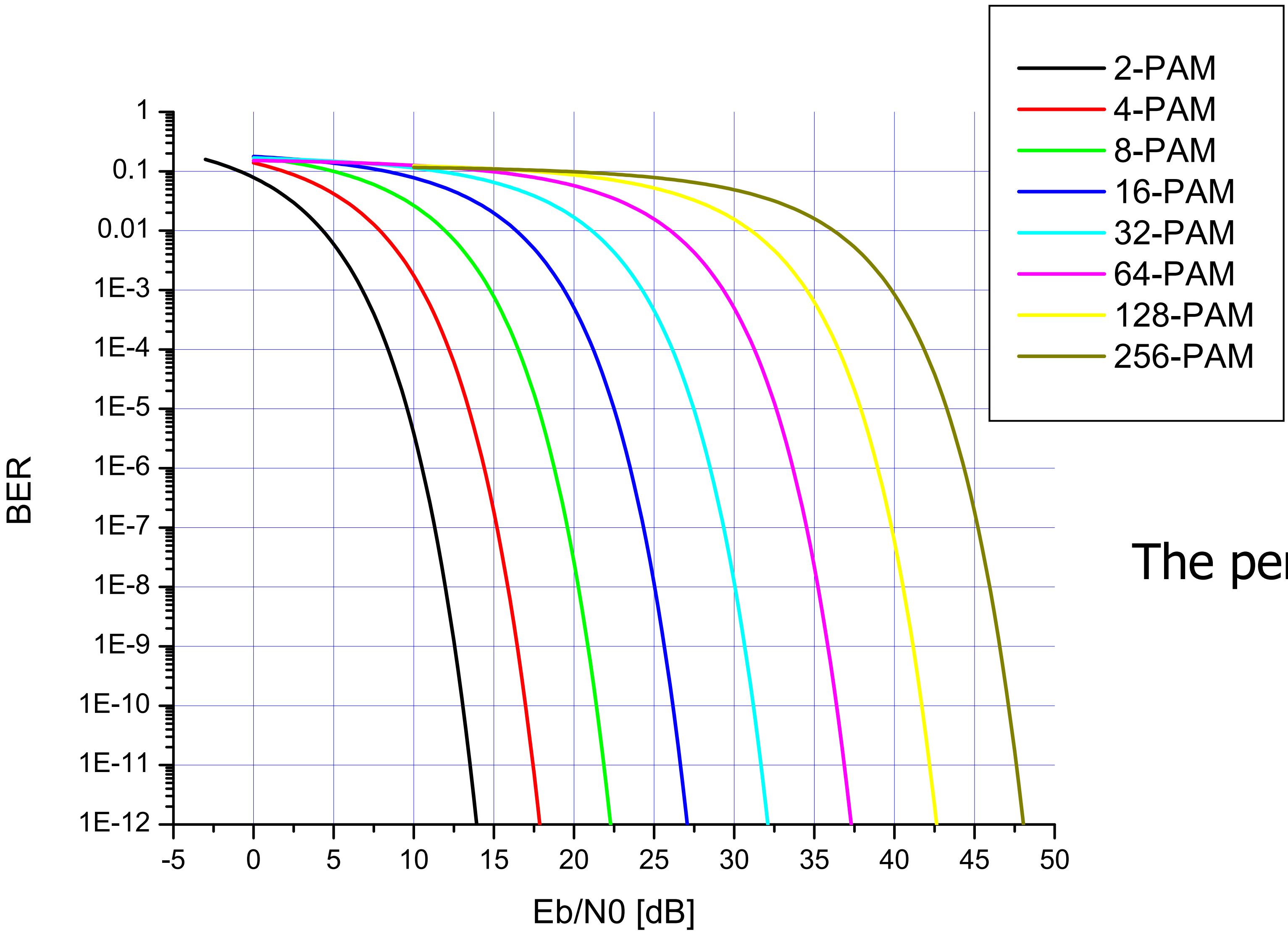
$$4-\text{PAM:} \qquad P_b(e) \approx \frac{3}{8} erfc\left(\sqrt{\frac{2}{5}\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

The 2-PAM constellation has better performance
The constellation gain is in the order of 10 log(5/2) = 4 dB

m-PAM constellation: *error probability*



m-PAM constellation*: error probability*



The performance decrease

for increasing m

m-PAM constellation: performance/spectral efficiency trade-off

Given a baseband channel with bandwidth B and an m-PAM constellation, by increasing the number of signals $m=2^k$ we increase the spectral efficiency

$$\eta_{id} = R_b / B = 2k \quad bps / Hz$$

then we can transmit a higher bit rate R_b.

Unfortunately, the performance decrease:
fixed a BER value, the signal-to-noise ratio E_b/N_0 necessary to achieve it increases with m.

Example

Suppose B=4kHz.

With a (ideal) 2-PAM we transmit R_b = 8 kbps

With a (ideal) 256-PAM we transmit R_b = 64 kbps

However, fixed a target BER (e.g. BER=1e-10), a 256-PAM requires a larger ratio E_b/N_0 (34 dB of difference!).

As an example, at the parity of transmitted power, the link distance is very lower (by a factor of 50!)

Linear modulation

An m-PAM constellation is a base-band modulation characterized by a low pass TX filter $p(t)$.

Let us suppose to change this TX filter from $p(t)$ to $p(t)\cos(2\pi f_0 t)$

- The constellation stays unchanged → **the BER performance are the same**
- **The signal spectrum changes**

Linear modulation

$$s(t) = \sum_n a[n] p(t - nT) \qquad G(f) = \sigma_a^2 \frac{|P(f)|^2}{T}$$

$$\left. \begin{aligned} s'(t) &= \sum_n a[n] p'(t - nT) \\ p'(t) &= p(t)\cos(2\pi f_0 t) \end{aligned} \right\} \qquad G'(f) = \frac{1}{4}[G(f - f_0) + G(f + f_0)]$$

The signal spectrum is translated around frequency f_0

Linear modulation

A linear modulation simply translates the spectrum around frequency f_0

(carrier frequency or Intermediate Frequency IF)

The modulation formats obtained by applying a linear modulation to

m-PAM modulations are called m-ASK (Amplitude Shift Keying).

The only one really important is 2-ASK, which is always called 2-PSK

(Phase Shift Keying).

m-ASK constellation*: characteristics*

1. One-dimensional constellation identical to m-PAM

2. Versor $$b_1(t) = p'(t) = p(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

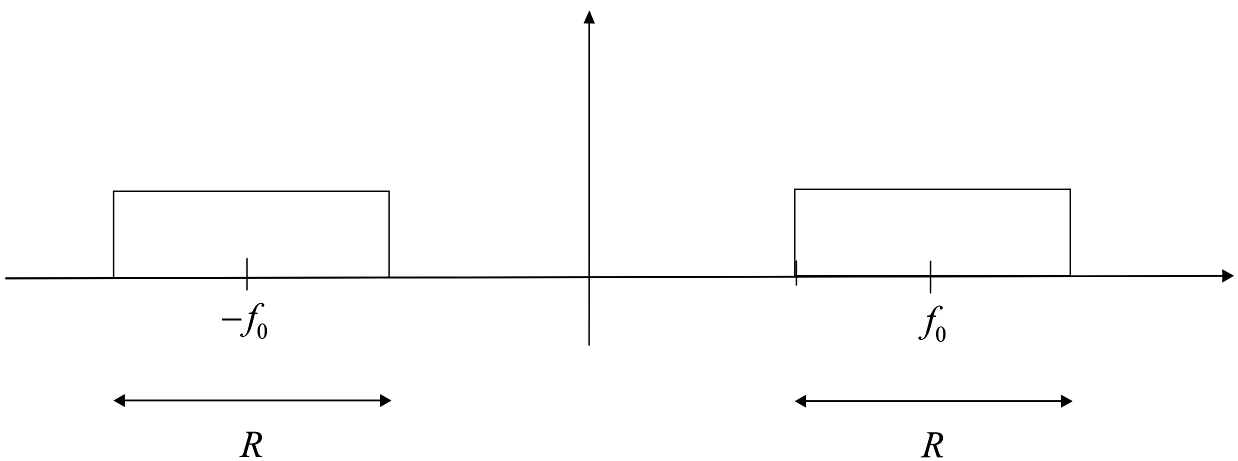
3. Signal spectrum centred around f_0 → bandpass modulations

4. ASK (Amplitude Shift Keying)

m-ASK constellation: *signal spectrum*

$$G_s(f) = x\left[\left|P(f-f_0)\right|^2 + \left|P(f+f_0)\right|^2\right] \qquad x \in R$$

Example: $p(t)$ = ideal low pass filter



$$B_{id} = R = \frac{R_b}{k}$$

$$\boxed{\eta_{id} = \frac{R_b}{B_{id}} = k\ bps/Hz}$$

***m-ASK constellation**: properties*

Properties

- **Spectral efficiency halved with respect to m-PAM**
- BER performance identical to m-PAM
- No practical applications
  (only exception 2-ASK which is always called 2-PSK)

Nhập môn Kỹ thuật Truyền thông

Phần 2: Các kỹ thuật điều chế số (Digital Modulations)

Bài 9: Không gian tín hiệu PAM (Pulse Amplitude Modulation)

PGS. Tạ Hải Tùng

Các kỹ thuật điều chế

Với mỗi kỹ thuật điều chế, chúng ta sẽ xem xét:

- Các tính chất (characteristics)
- Không gian tín hiệu (constellation) (tập tín hiệu/tập vector)
- Gán nhãn nhị phân (binary labelling) (Thuật toán Gray)
- Dạng sóng truyền (transmitted waveform)
- Phổ tín hiệu (signal spectrum)
- Băng thông và hiệu quả sử dụng phổ (bandwidth and spectral efficiency)
- Cấu trúc bộ điều chế (modulator structure) / bộ phát
- Cấu trúc bộ thu (receiver structure)
- Xác suất lỗi (error probability)
- Các ứng dụng thực tế (practical applications)

Điều chế băng tần cơ sở (baseband modulations)
(Mật độ phổ công suất tập trung quanh DC)
ví dụ: PAM

Điều chế băng tần dải qua (bandpass modulations)
(Mật độ phổ công suất tập trung quanh $f_0 \neq 0$)
ví dụ: PSK, QAM, FSK

$p(t)$ là đáp ứng xung của bộ lọc thông thấp

Thông thường, chúng ta sẽ quan tâm 3 bộ lọc thông thấp sau:

- $p(t)$ = ideal low pass filter bộ lọc thông thấp lý tưởng
- $p(t)$ = Bộ lọc RRC (root raised cosine) với hệ số uốn α
- $p(t) = P_T(t)$ = Xung vuông với thời gian T

Các kỹ thuật điều chế số

Không gian tín hiệu PAM

***Không gian tín hiệu 2-PAM**: các tính chất*

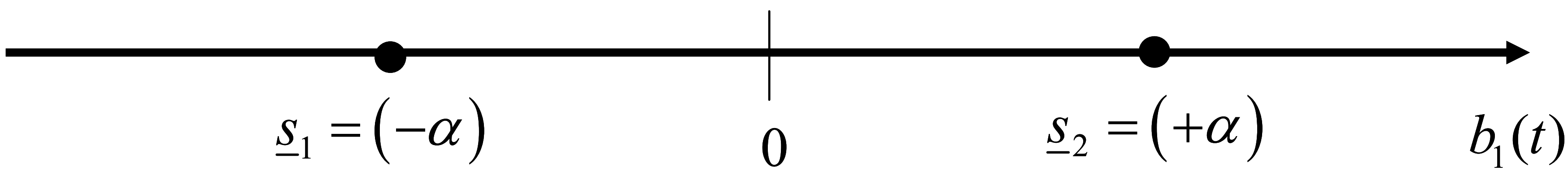
1. Điều chế băng tần cơ sở (Base-band modulation)
2. Không gian tín hiệu 1 chiều
3. Không gian tín hiệu nhị phân đối cực (antipodal binary constellation)
4. Thông tin được "ẩn" trong biên độ của xung PAM (Pulse Amplitude Modulation)

2-PAM: *Không gian tín hiệu*

Tập tín hiệu $M = \{s_1(t) = -\alpha\, p(t)\,,\, s_2(t) = +\alpha\, p(t)\}$

Versor $b_1(t) = p(t) \qquad (d=1)$

Không gian vector $M = \{s_1 = (-\alpha)\,,\, s_2 = (+\alpha)\} \subseteq R$



$k = 1$ $\qquad \boxed{T = T_b}$ $\qquad \boxed{\boxed{R = R_b}}$

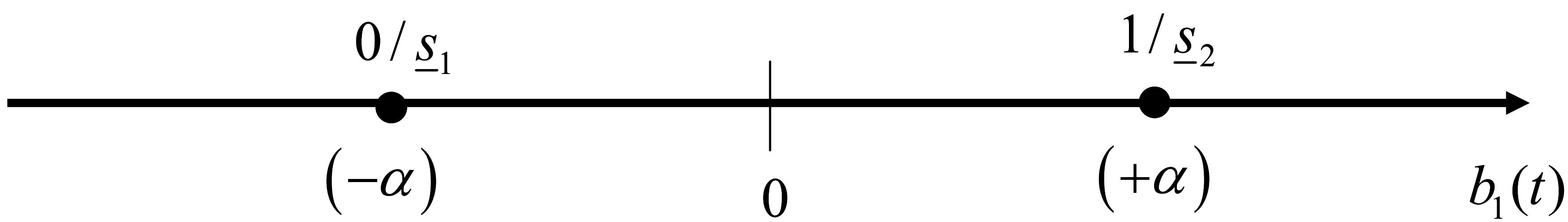
Gán nhãn nhị phân

Ví dụ:

$$e : H_1 \leftrightarrow M$$

$$e(0) = \underline{s}_1$$

$$e(1) = \underline{s}_2$$



Dạng sóng truyền

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n]p(t - nT)$$

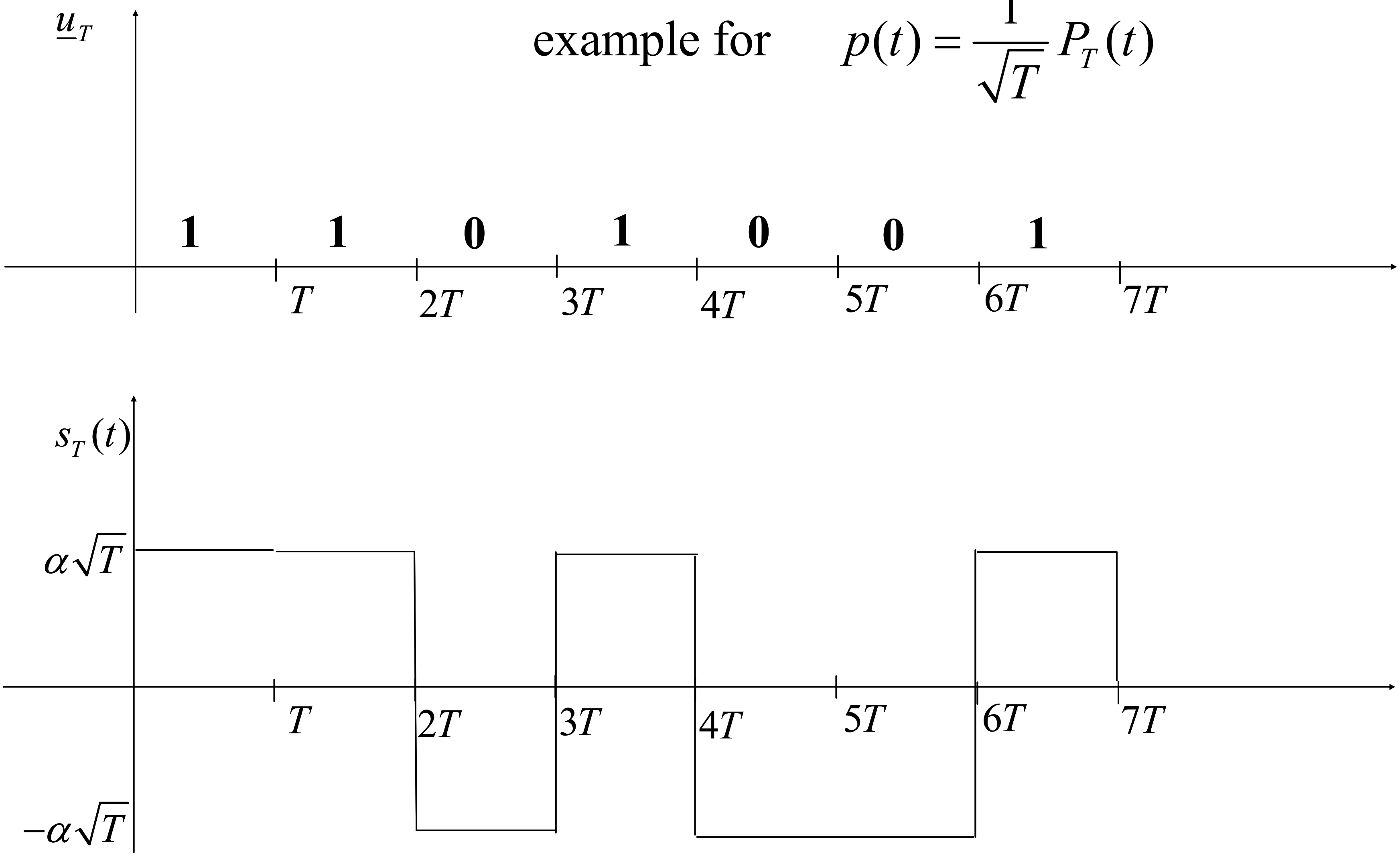
với

$$\boxed{T = T_b}$$

$$a[n] \in \{-\alpha, +\alpha\}$$

Các dạng sóng truyền (*transmitted waveform*)

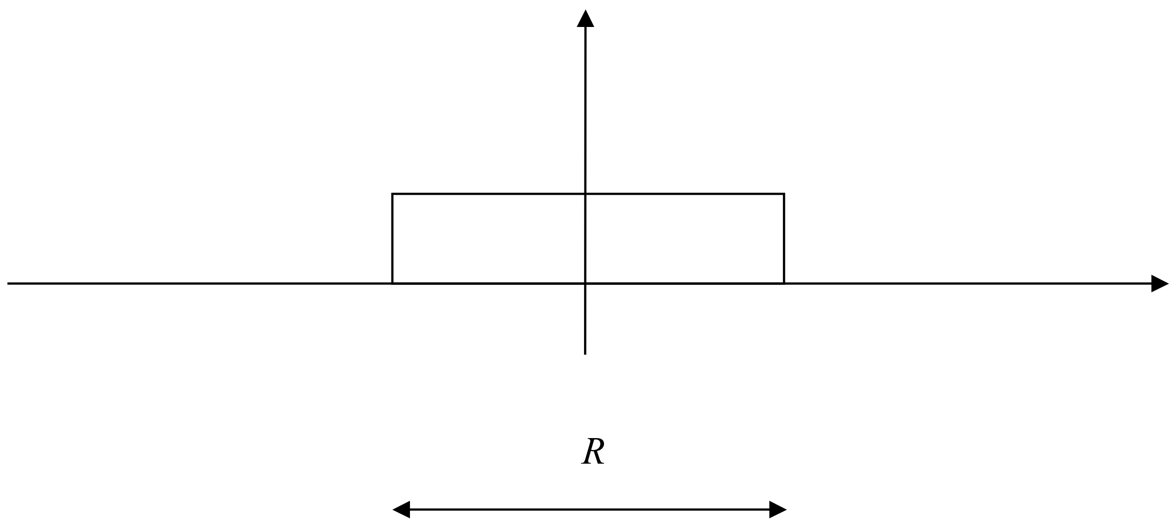
example for $p(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} P_T(t)$



Phổ tín hiệu

$$G_s(f) = \sigma_a^2 \frac{|P(f)|^2}{T} = x|P(f)|^2 \qquad x \in R$$

Trường hợp 1: *p(t)* = bộ lọc thông thấp lý tưởng



Định nghĩa băng thông

Băng thông B [Hz] = vùng tần số chứa phần quan trọng nhất của mật độ phổ công suất $G_s(f)$

Các định nghĩa khác:

1. Băng thông tổng (chứa toàn bộ phổ)
2. Băng thông một nửa công suất (lấy từ -3dB dưới đỉnh của phổ lên)
3. Băng thông tạp âm tương đương (hình vuông (với độ cao bằng giá trị lớn nhất) chứa tất cả công suất tín hiệu)
4. Băng thông "null-to-null" (độ rộng của búp chính)

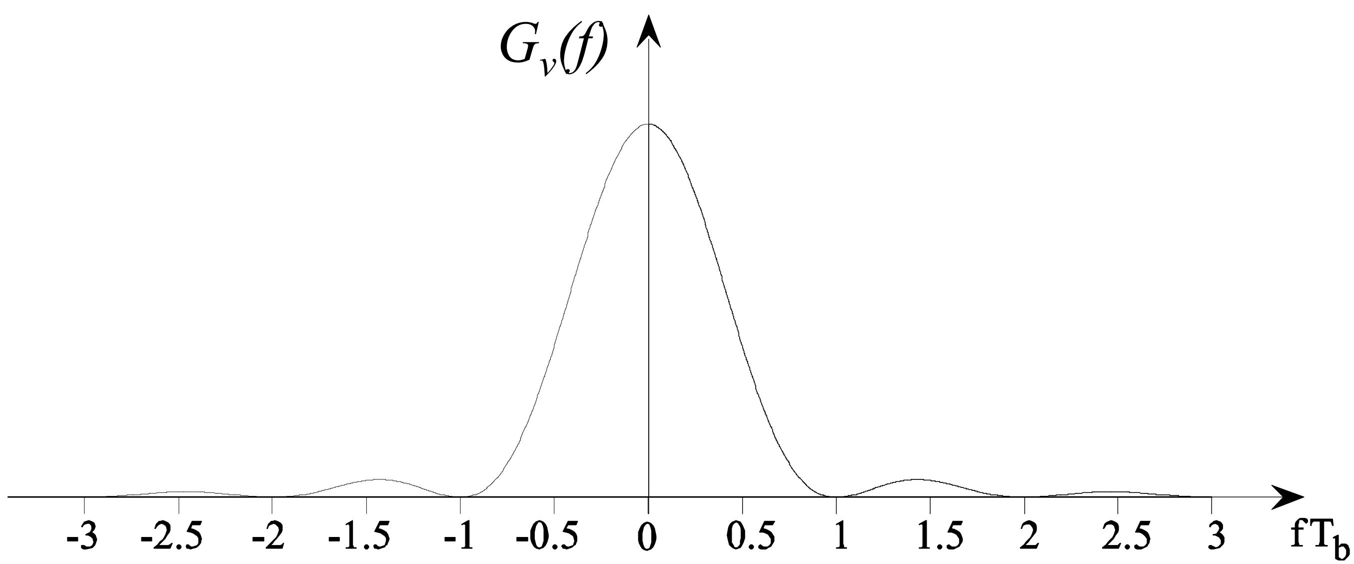
5. Băng thông 99% (99.9% etc.) chứa 99% công suất tín hiệu
6. Băng thông mật độ phổ công suất - 35 dB (-50 dB) (Gs(f) từ -35 dB dưới giá trị phổ lớn nhất)

Ví dụ:

Không gian nhị phân đối cực với xung vuông:

$$p(t) = b_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} P_T(t)$$

$$\boxed{G_s(f) = A^2 T \left(\frac{\sin(\pi f T)}{(\pi f T)} \right)^2}$$



Ví dụ

Các khái niệm băng thông:

1. TOTAL BANDWIDTH = ∞

2. Half power bandwidth $\geq 0.44/T_b$

3. Equivalent noise bandwidth $= 0.5/T_b$

4. Null to null bandwidth $= 1/T_b$

5. 99% bandwidth $\geq 10.29/T_b$

6. -35 dB bandwidth $\geq 17.57/T_b$

6. -50 dB bandwidth $\geq 100.52/T_b$

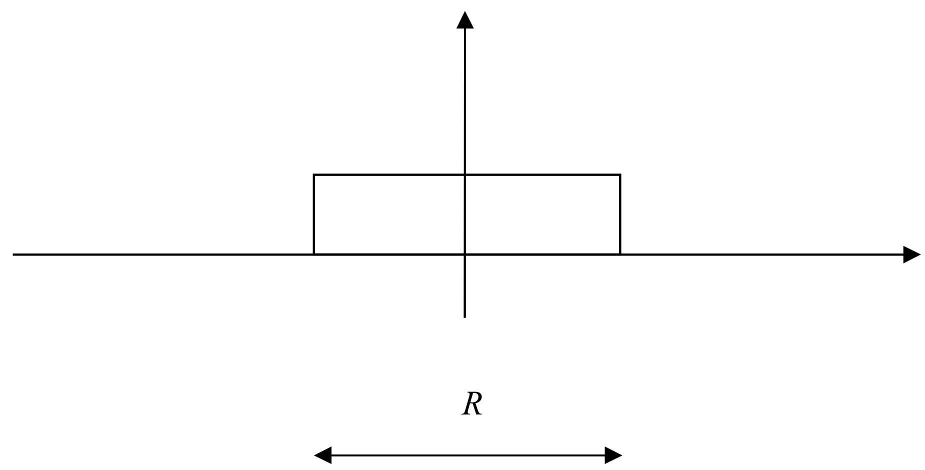
Hiệu quả sử dụng phổ

Hiệu quả sử dụng phổ [bps/Hz]

$$\boxed{\eta = \frac{R_b}{B}}$$

Băng thông và hiệu quả sử dụng phổ

Trường hợp 1: $p(t)$ = bộ lọc thông thấp



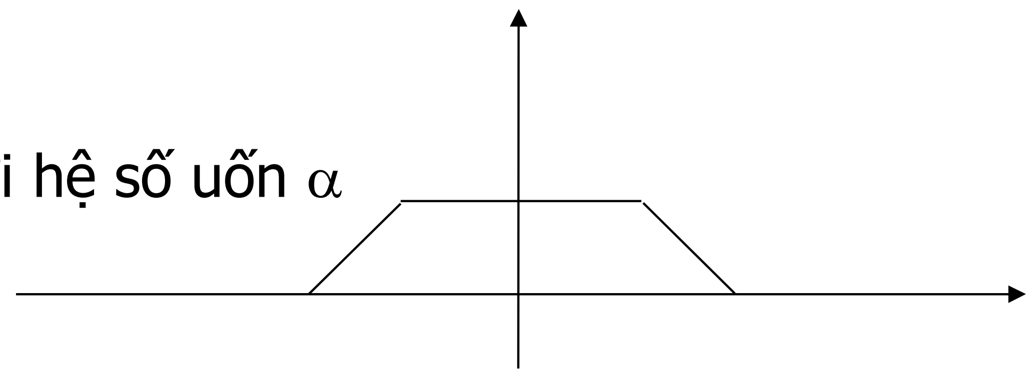
Băng thông tổng
(trường hợp lý tưởng)

$$\boxed{B_{id} = \frac{R}{2} = \frac{R_b}{2}}$$

Hiệu quả sử dụng phổ
(trường hợp lý tưởng)

$$\boxed{\eta_{id} = \frac{R_b}{B_{id}} = 2\ bps/Hz}$$

Trường hợp 2: *p(t)* = Bộ lọc RRC với hệ số uốn α



Tổng băng thông $B = \frac{R}{2}(1+\alpha) = \frac{R_b}{2}(1+\alpha)$

$R(1+\alpha)$

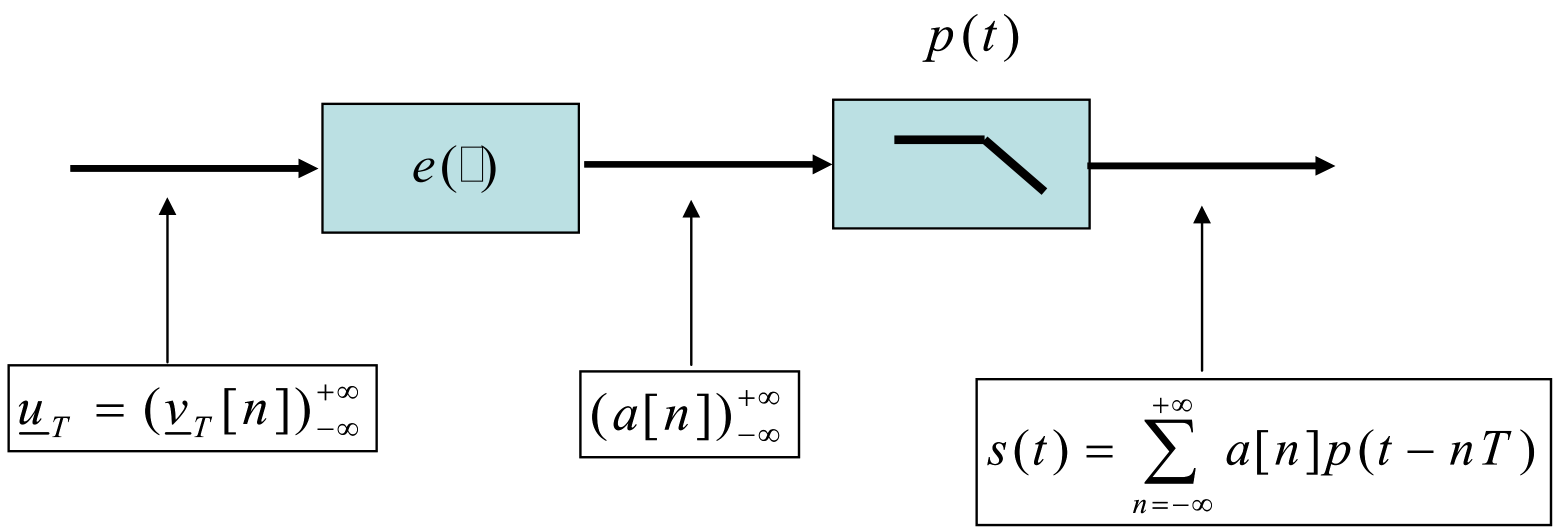
Hiệu suất sử dụng băng thông $$\boxed{\eta = \frac{R_b}{B} = \frac{2}{(1+\alpha)}\, bps/Hz}$$

Bài tập

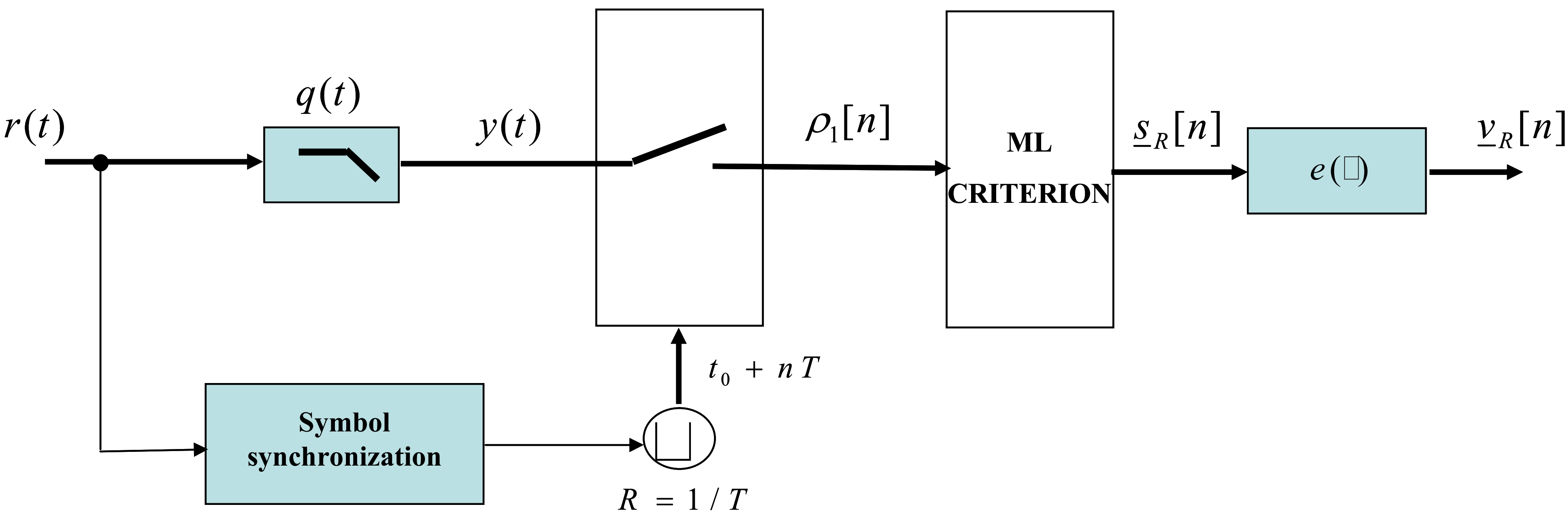
Cho một kênh băng tần cơ sở với băng thông B tới 4000 Hz, hãy tính tốc độ truyền bit lớn nhất R_b chúng ta có thể truyền qua kênh này với không gian 2-PAM trong hai trường hợp:

- Bộ lọc thông thấp lý tưởng
- Bộ lọc RRC filter với alpha=0.25

***2-PAM**: bộ điều chế*



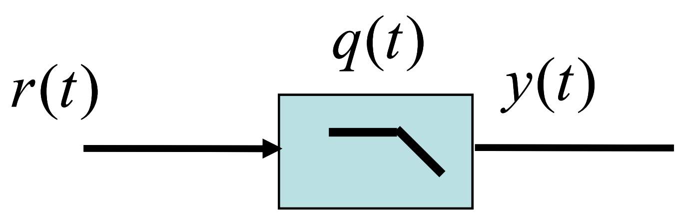
2-PAM: *giải điều chế*



Biểu đồ Eye

Cho đầu ra của bộ lọc phối hợp MF:

- Chia đầu ra thành các phân đoạn có thời lượng $2T$
- Chồng lấp các đoạn (oscilloscope)

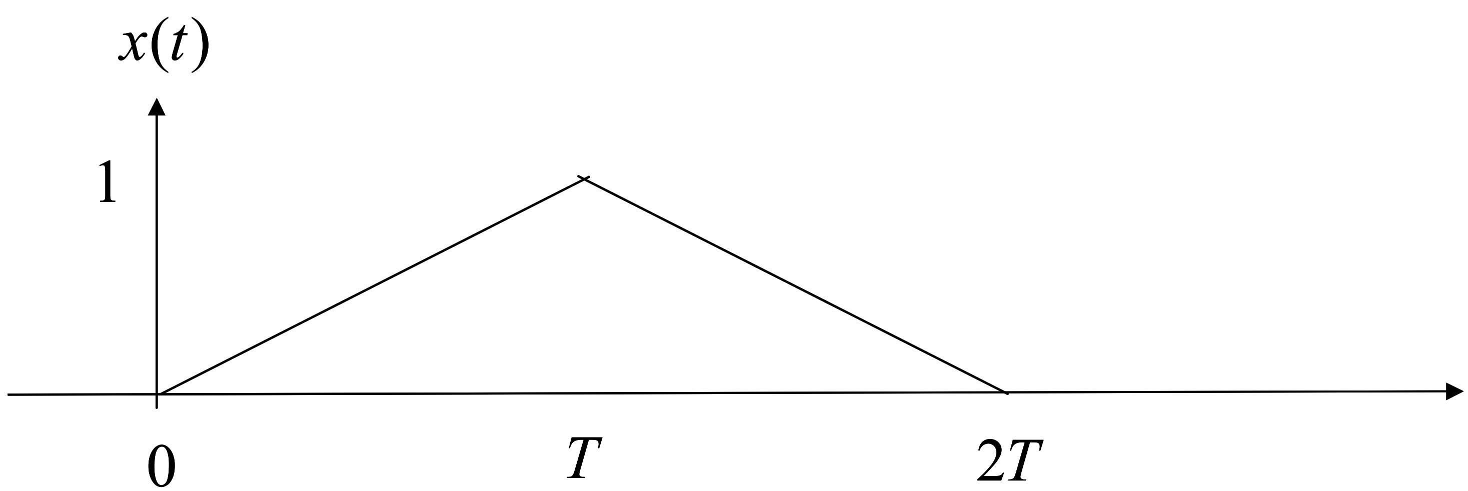


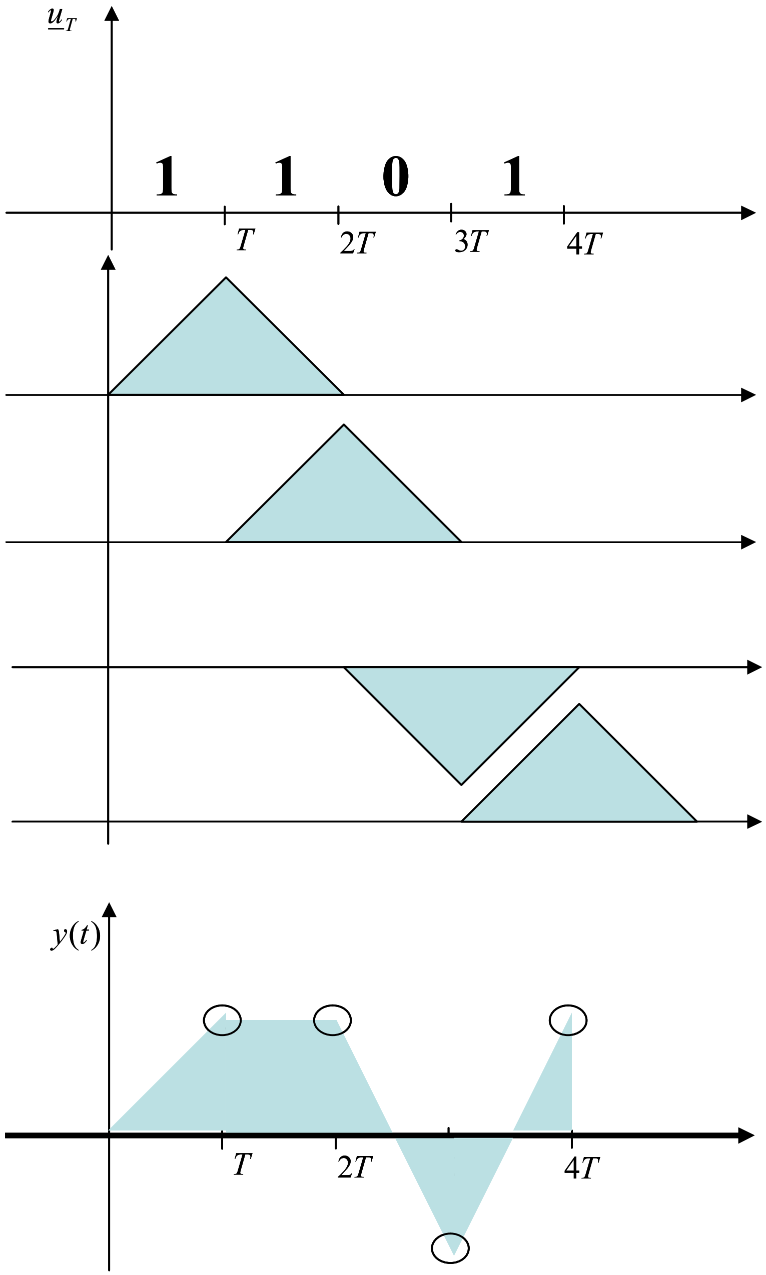
Ví dụ:

$$p(t) = b_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} P_T(t)$$

$$x(t) = p(t) * q(t)$$

$$q(t) = p(T - t) = \frac{1}{\sqrt{T}} P_T(t)$$



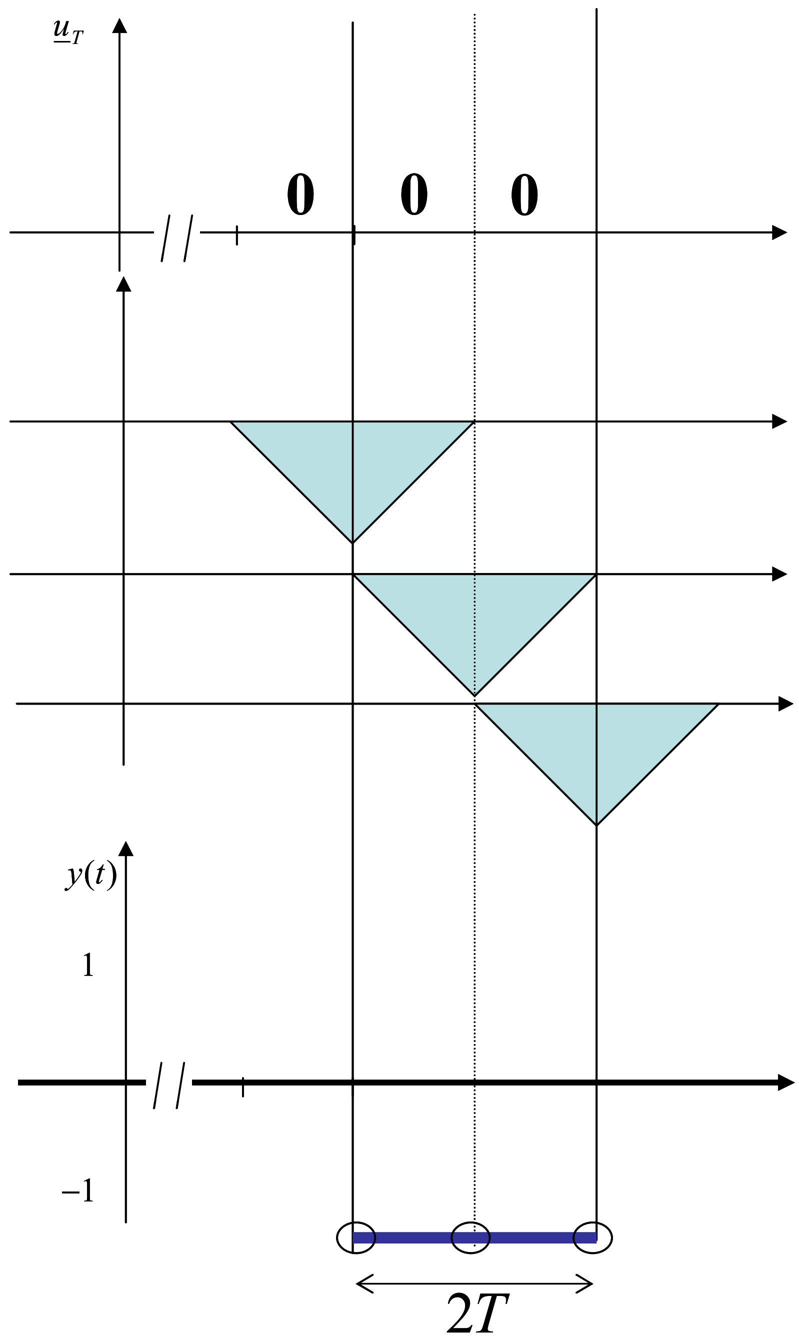


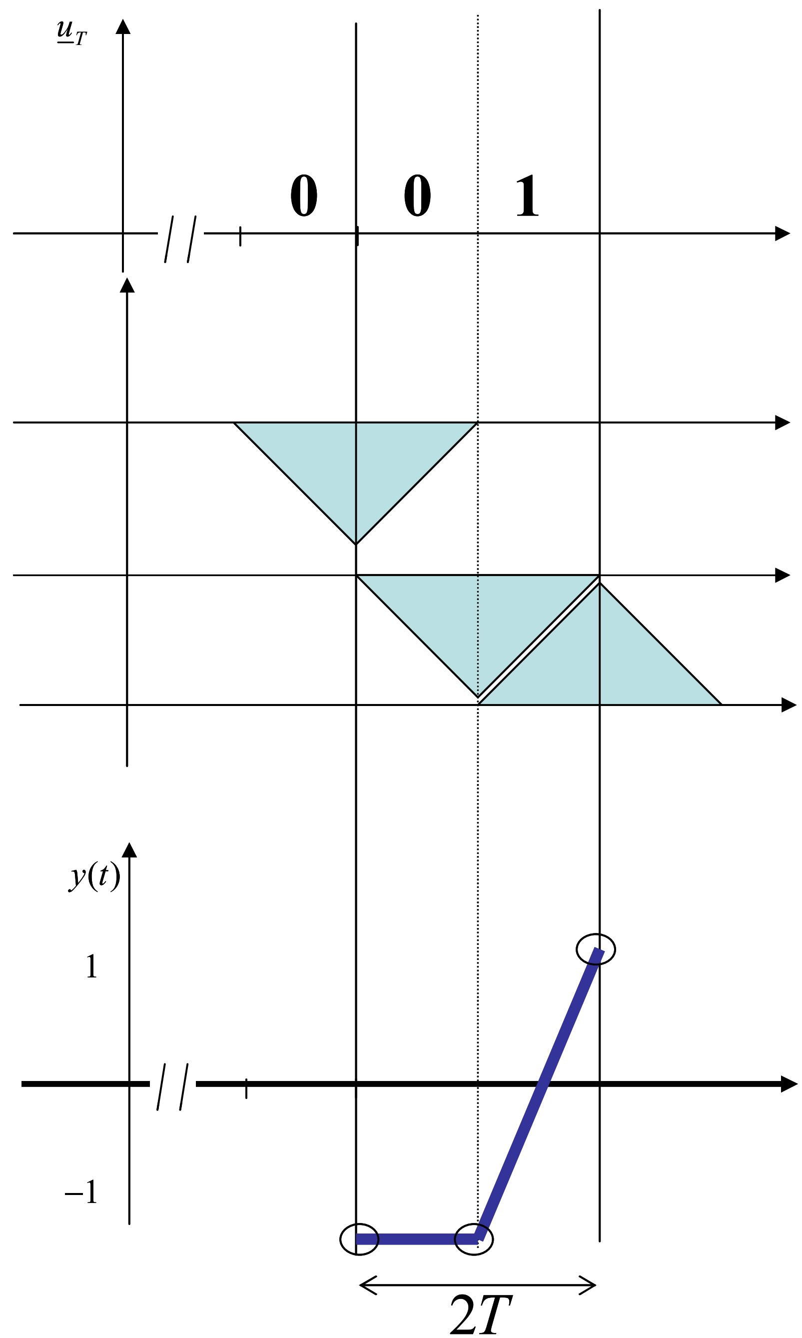
$$y(t) = \sum_n a[n]x(t - nT)$$

$$\rho[n] = y(T + nT) = a[n]$$

Không có ISI

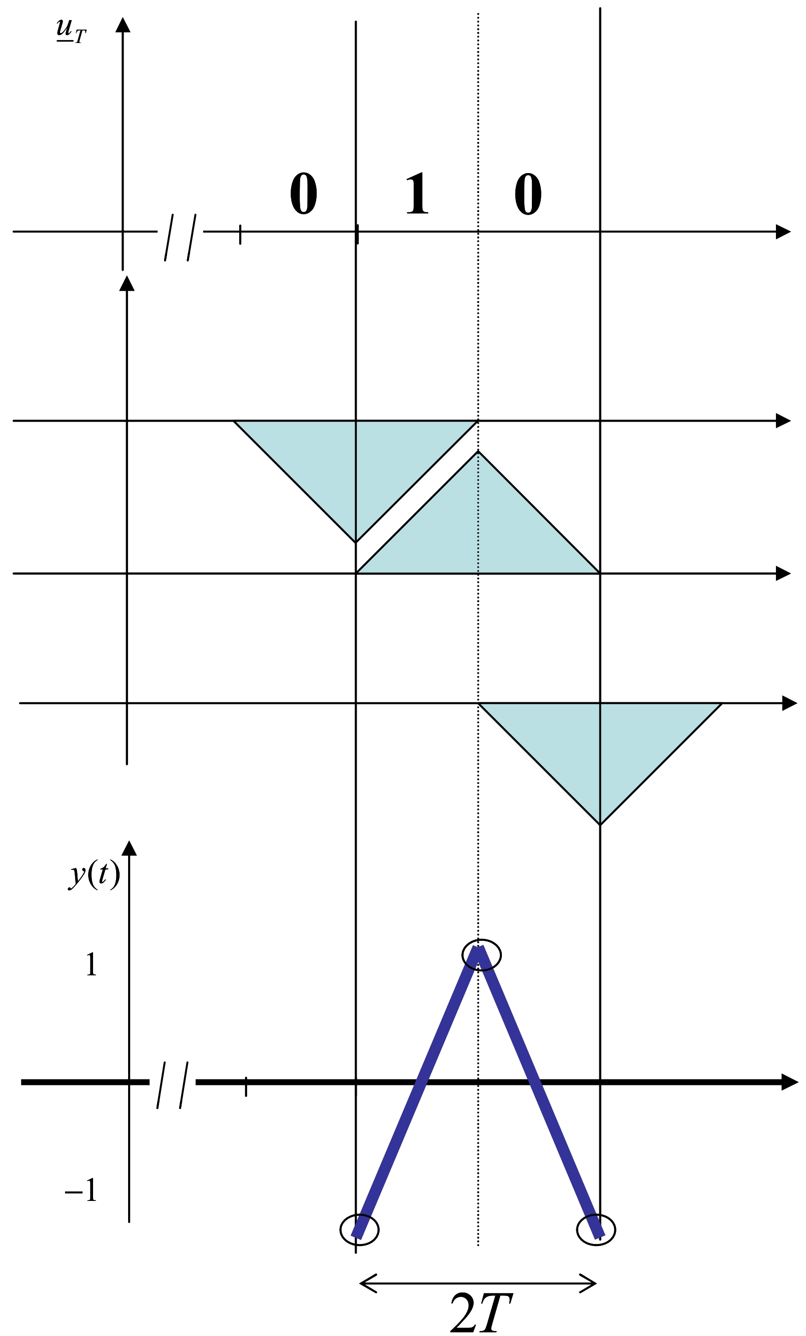
Xem xét tất cả các phân đoạn có thời lượng $2T$

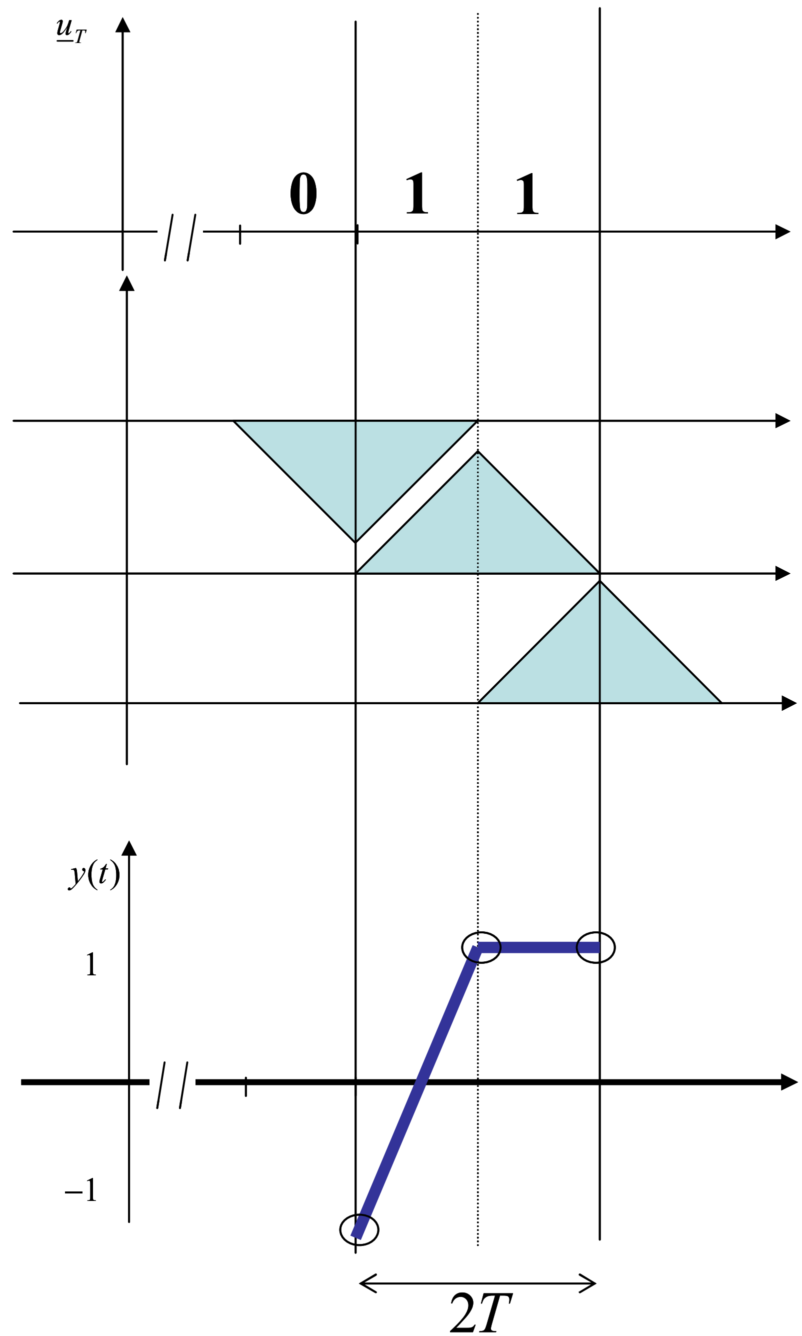




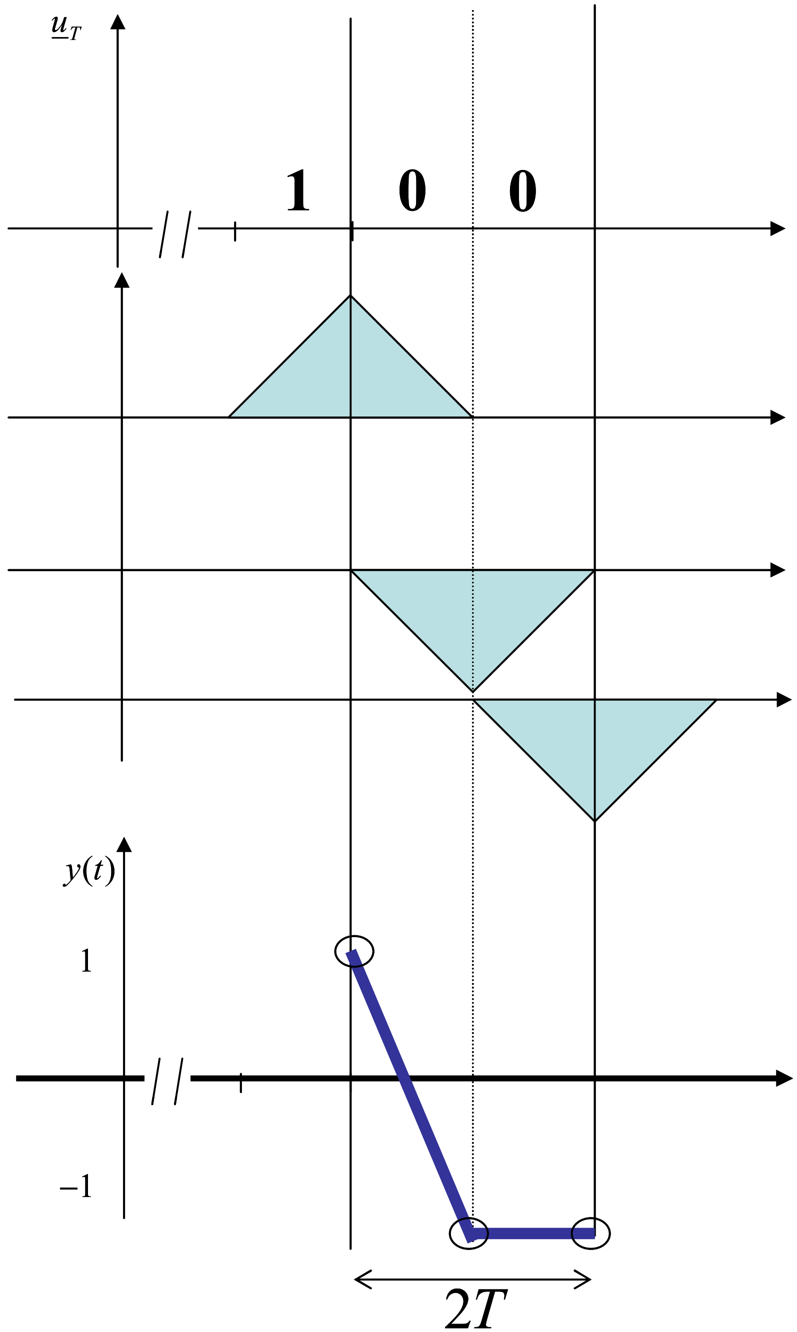
$\underline{u}_T$
0
0
1
$y(t)$
1
-1
$2T$

Example

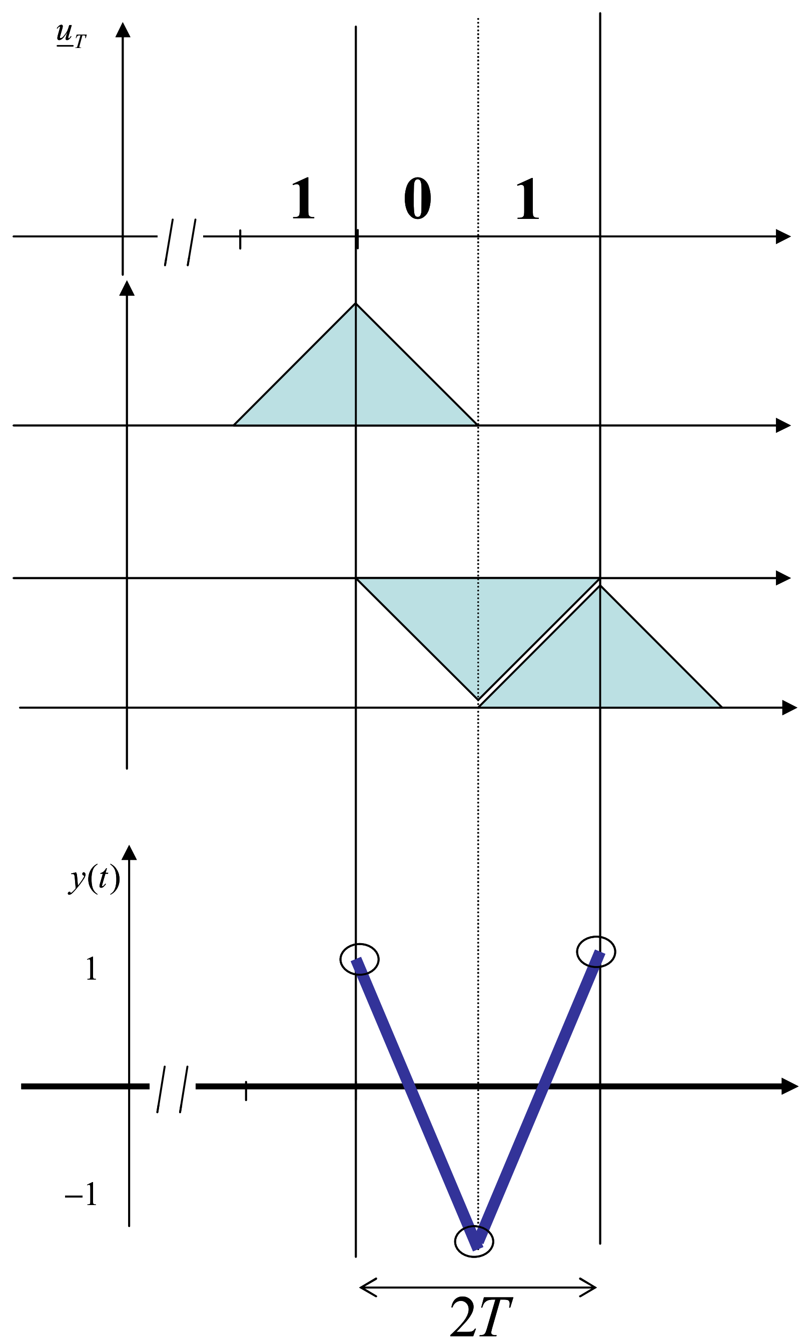




$\underline{u}_T$
0
1
1
$y(t)$
1
−1
$2T$

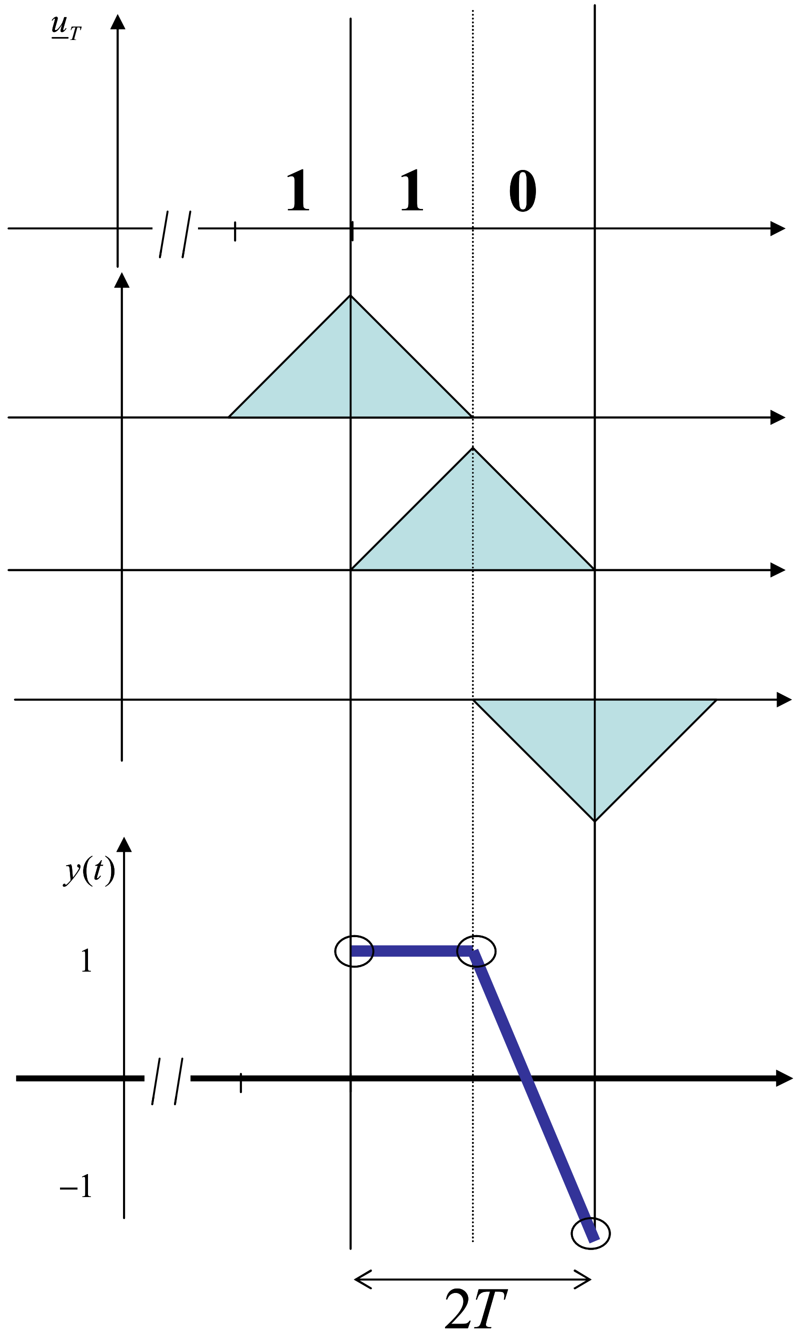


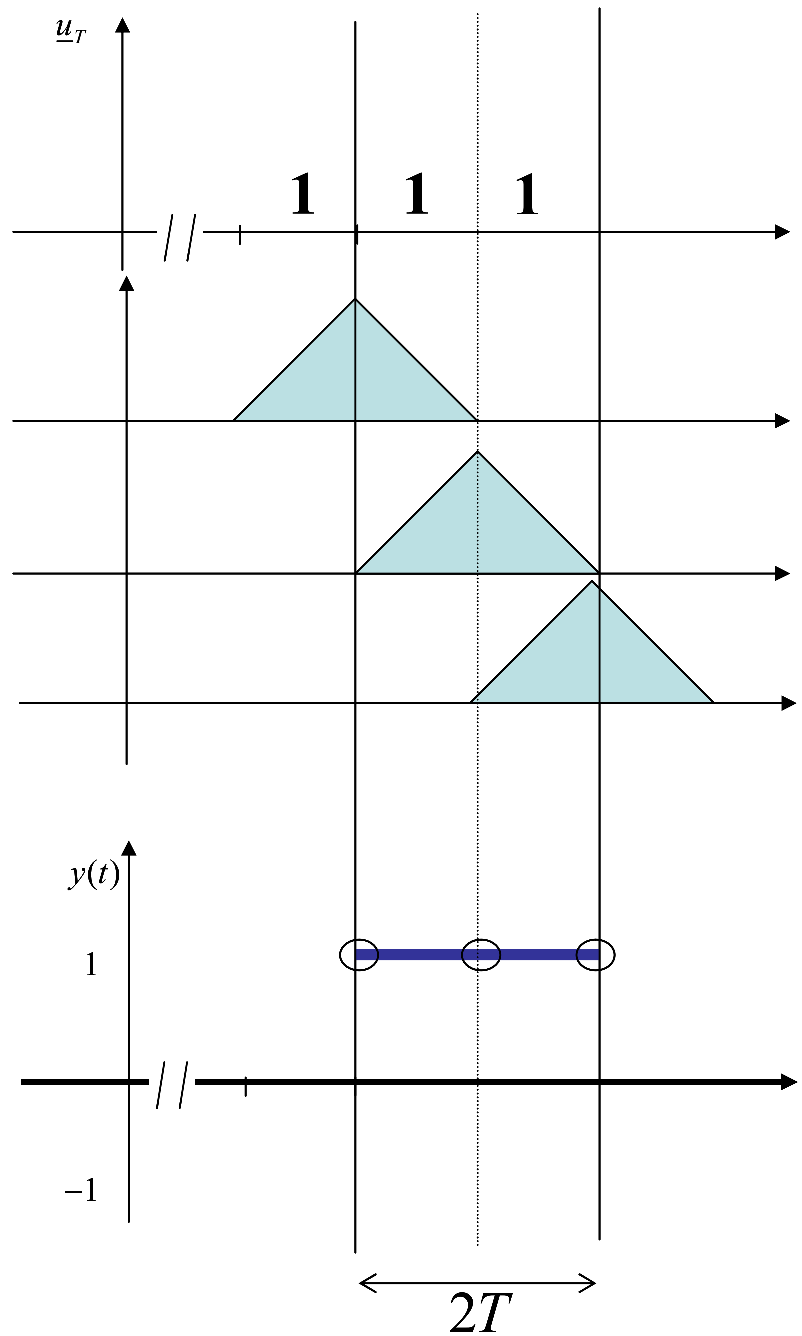
$\underline{u}_T$
1
0
0
$y(t)$
1
-1
$2T$



$\underline{u}_T$
1
0
1
$y(t)$
1
-1
$2T$

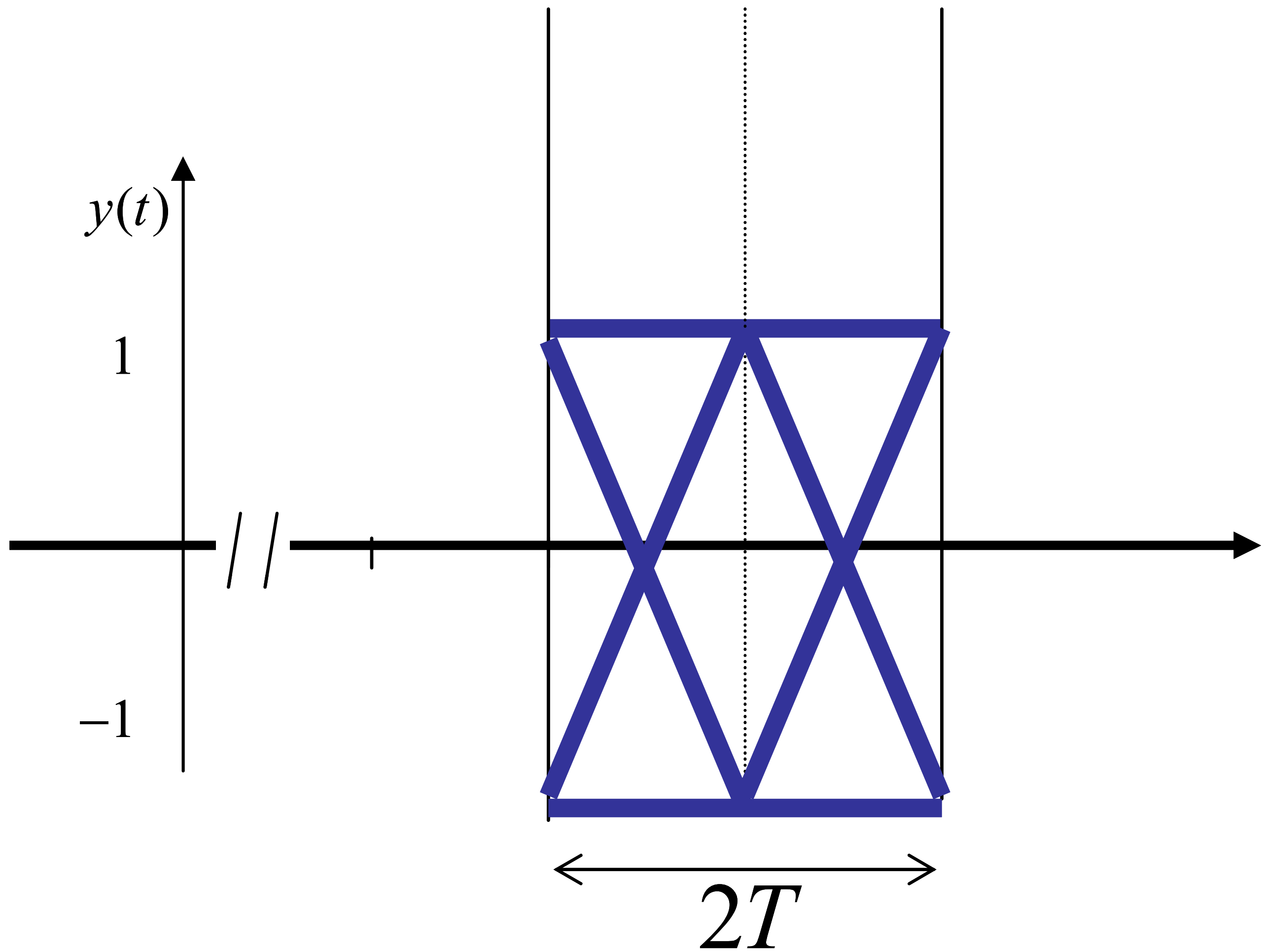
Example





$\underline{u}_T$
1
1
1
$y(t)$
1
−1
$2T$

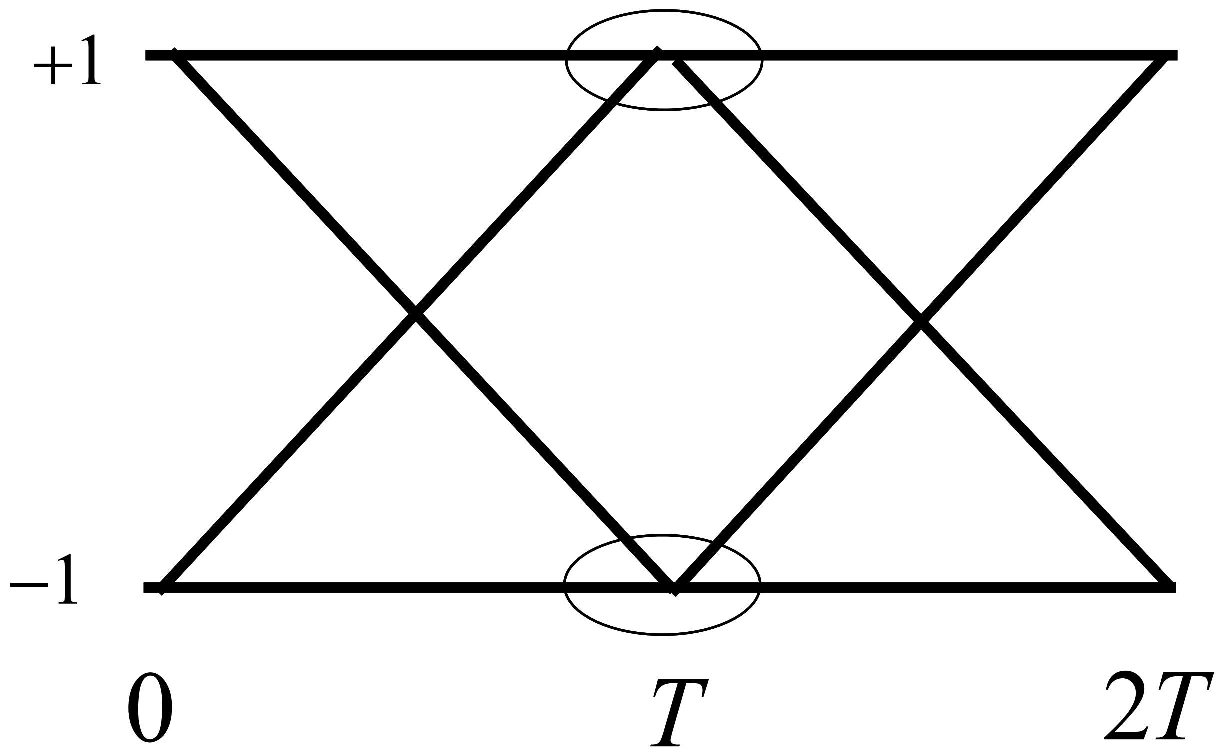
Chồng các phân đoạn



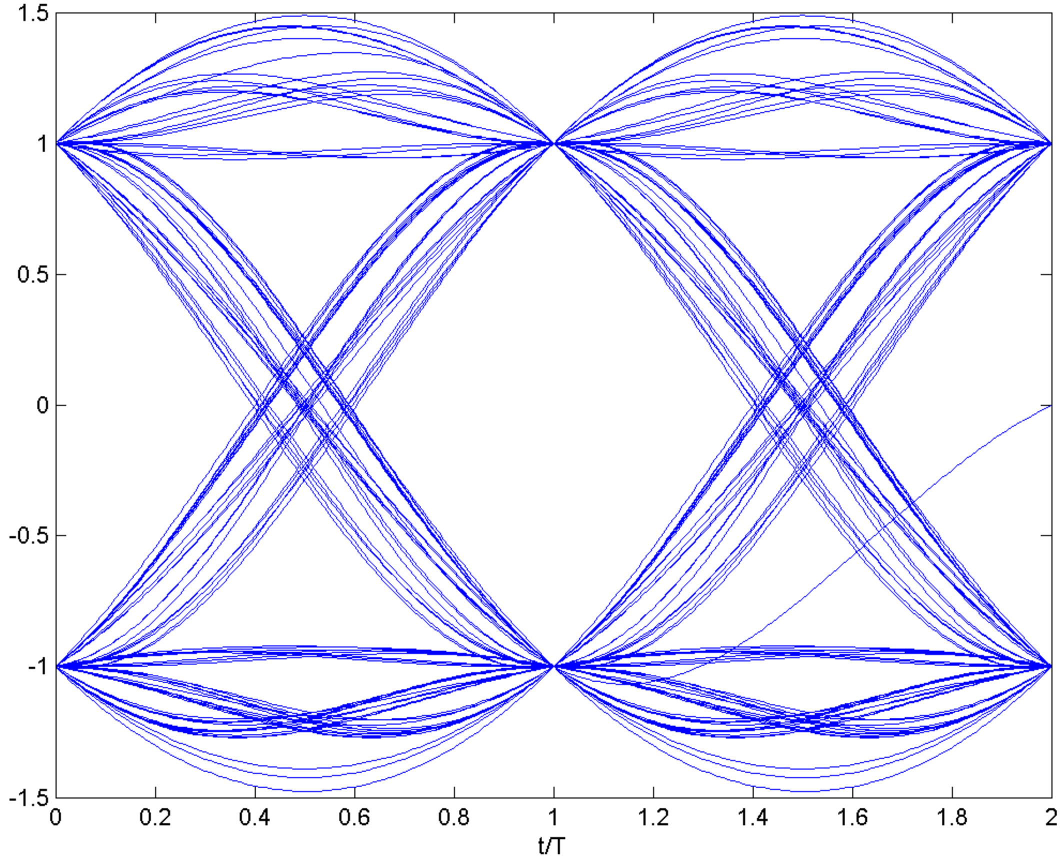
Biểu đồ Eye

Không gian 2-PAM với cửa sổ chữ nhật

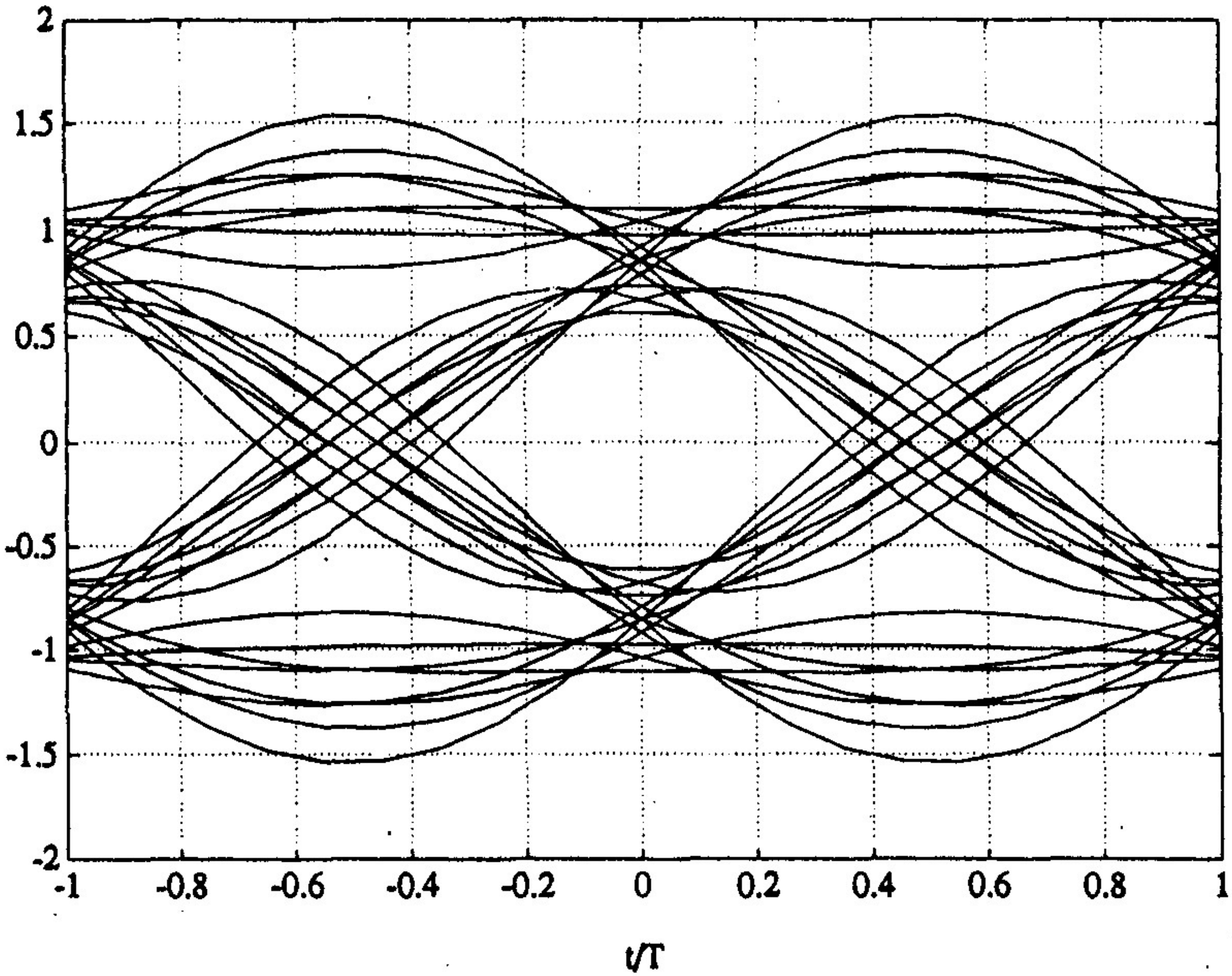
$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} P_T(t)$$



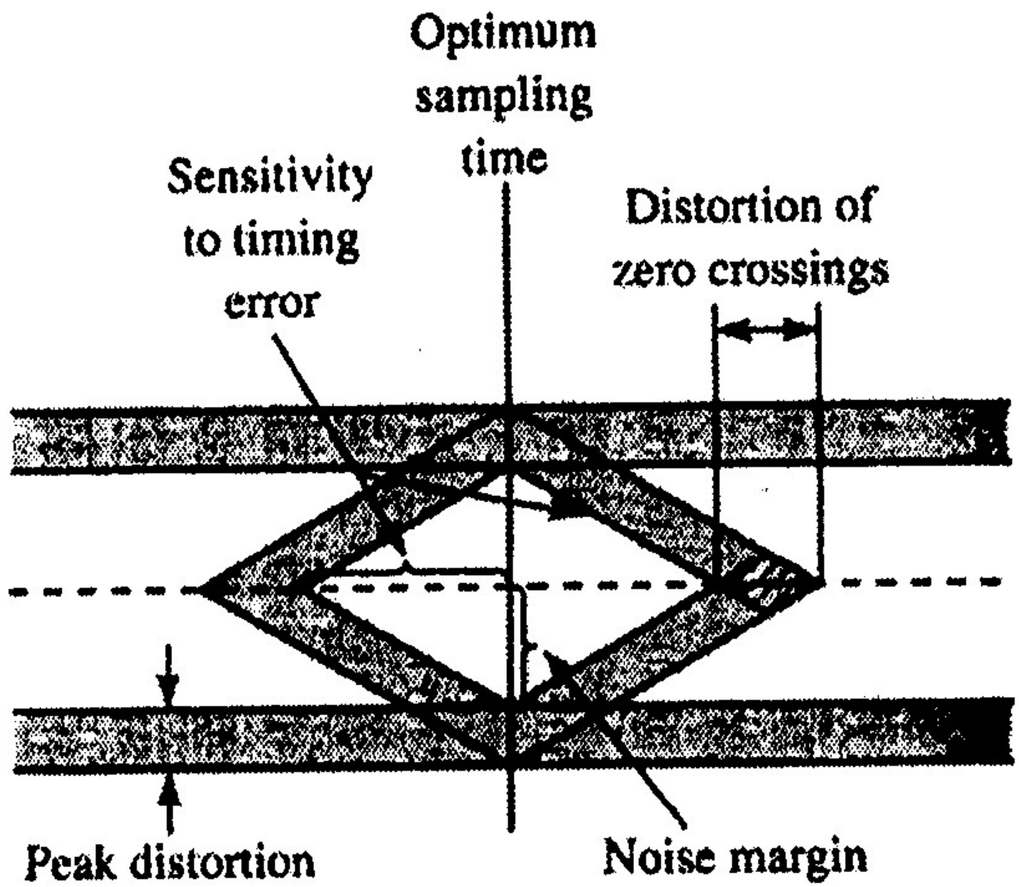
Trong trường hợp sử dụng bộ lọc RRC ($alpha$=0.5)



2-PAM trong thực tế

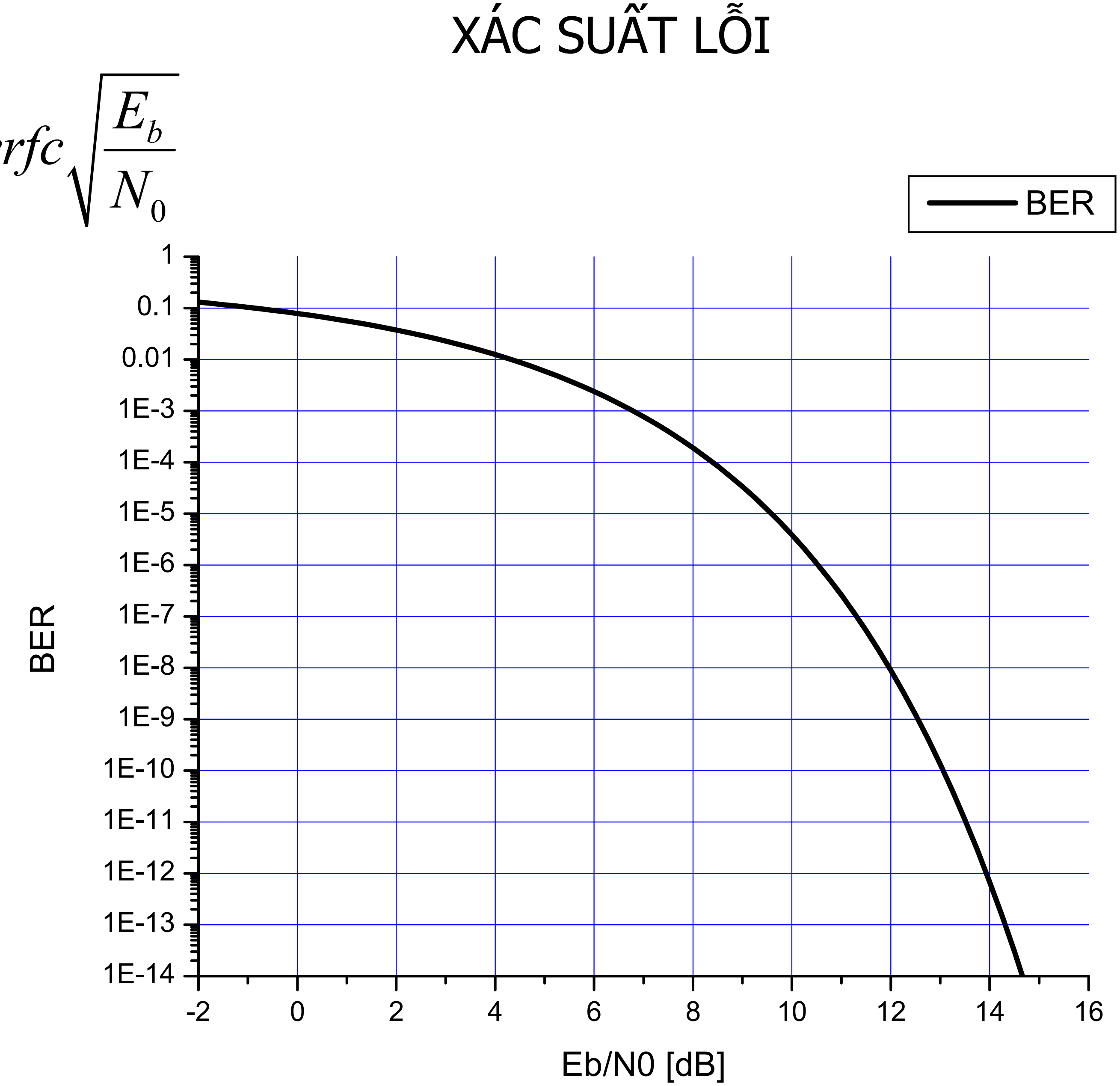


Các định lượng cơ bản



2-PAM: *Xác suất lỗi*

$$BER = \frac{1}{2} erfc \sqrt{\frac{E_b}{N_0}}$$



Nhập môn Kỹ thuật Truyền thông

Phần 2: Các kỹ thuật điều chế số (Digital Modulations)

Bài 10: Không gian tín hiệu PSK (Phase Shift Keying)

PGS. Tạ Hải Tùng

***2-PSK**: characteristics*

1. Bandpass modulation
2. One-dimensional signal space and antipodal binary constellation (equal to 2-PAM)
3. TX filter $p(t)cos(2\pi f_0 t)$
4. Information associated to the carrier phase = Phase Shift Keying

***2-PSK**: constellation*

SIGNAL SET $$M = \{s_1(t) = +\alpha\, p(t)\cos(2\pi f_0 t)\ ,\ s_2(t) = -\alpha\, p(t)\cos(2\pi f_0 t)\ \}$$

Information associated to the impulse amplitude

BUT

we can also write

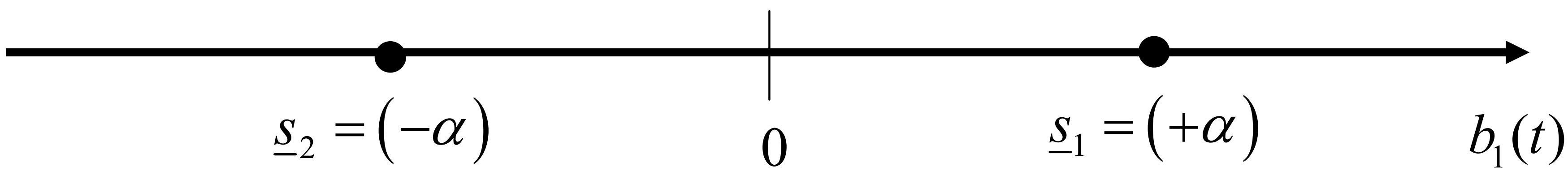
SIGNAL SET $$\boxed{M = \{s_1(t) = +\alpha\, p(t)\cos(2\pi f_0 t)\ ,\ s_2(t) = +\alpha\, p(t)\cos(2\pi f_0 t - \pi)\ \}}$$

Information associated to the carrier phase

***2-PSK**: constellation*

Versor $b_1(t)=p(t)\cos(2\pi f_0 t)$ $(d=1)$

VECTOR SET $M=\{s_1=(+\alpha)\,,\,s_2=(-\alpha)\}\subseteq R$



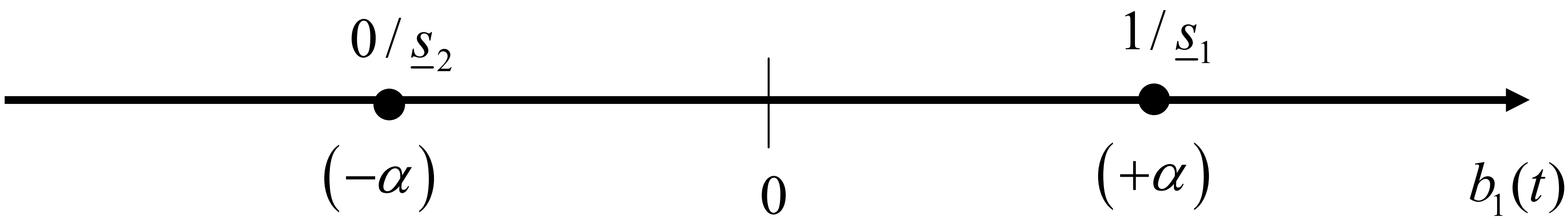
***2-PSK**: binary labeling*

(example)

$$e : H_1 \leftrightarrow M$$

$$e(1) = \underline{s}_1$$

$$e(0) = \underline{s}_2$$



***2-PSK**: transmitted waveform*

$m = 2 \rightarrow k = 1$ $\boxed{R = R_b}$ $\boxed{T = T_b}$

Transmitted waveform $$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n] b_1(t - nT)$$

where $$a[n] \in \{+\alpha, -\alpha\}$$

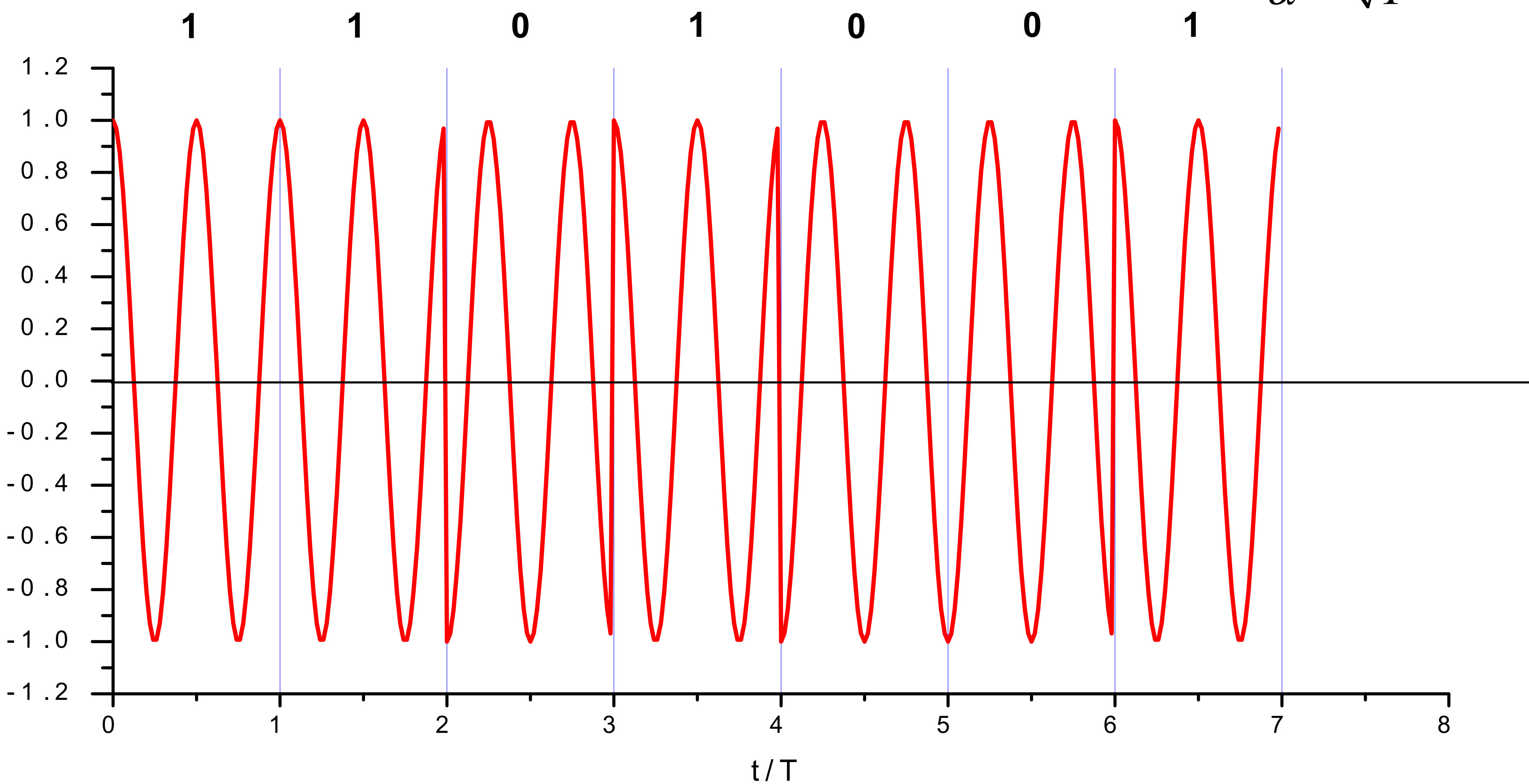
$$b_1(t) = p(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

***2-PSK**: transmitted waveform*

example for $p(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} P_T(t)$

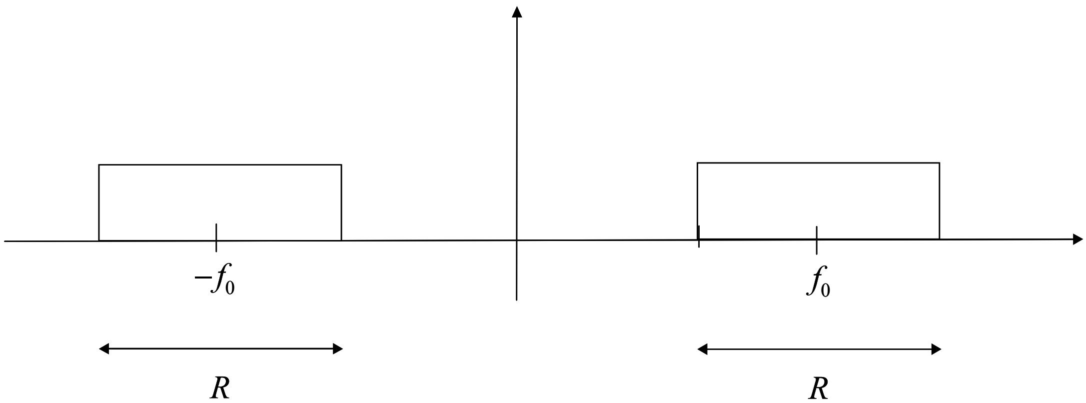
$f_0 = 2R_b$

$\alpha = \sqrt{T}$



2-PSK: *bandwidth and spectral efficiency*

Case 1: $p(t)$ = ideal low pass filter



Total bandwidth (ideal case)

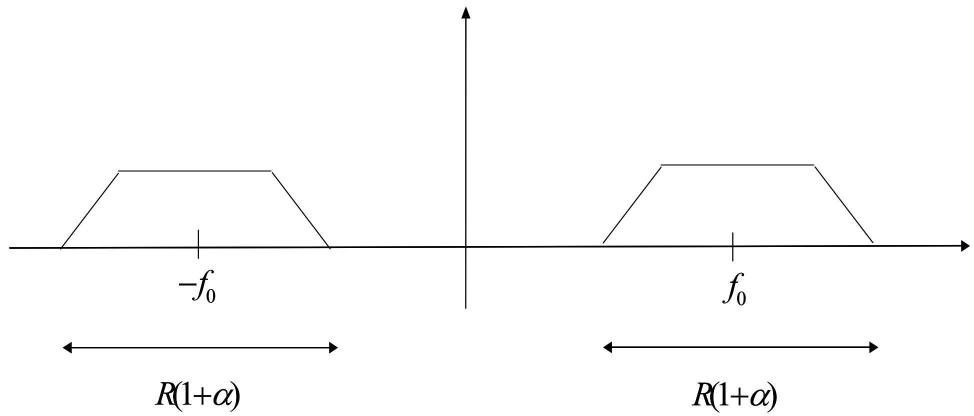
$$\boxed{B_{id} = R = R_b}$$

Spectral efficiency (ideal case)

$$\boxed{\eta_{id} = \frac{R_b}{B_{id}} = 1\ bps/Hz}$$

2-PSK: bandwidth and spectral efficiency

Case 2: $p(t)$ = RRC filter with roll off α



Total bandwidth $$B = R(1+\alpha) = R_b(1+\alpha)$$

Spectral efficiency $$\boxed{\eta = \frac{R_b}{B} = \frac{1}{(1+\alpha)}\, bps/Hz}$$

Exercize

Given a bandpass channel with bandwidth B = 4000 Hz, centred around f_0=2 GHz, compute the maximum bit rate R_b we can transmit over it with a 2-PSK constellation in the two cases:

- Ideal low pass filter
- RRC filter with ⍰=0.25

2-PSK: *modulator*

The transmitted waveform is given by $$s(t) = \sum_n a[n] b_1(t - nT)$$

Where $$b_1(t) = p(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

Then we must generate $$s(t) = \sum_n a[n] p(t - nT)\cos(2\pi f_0 (t - nT))$$

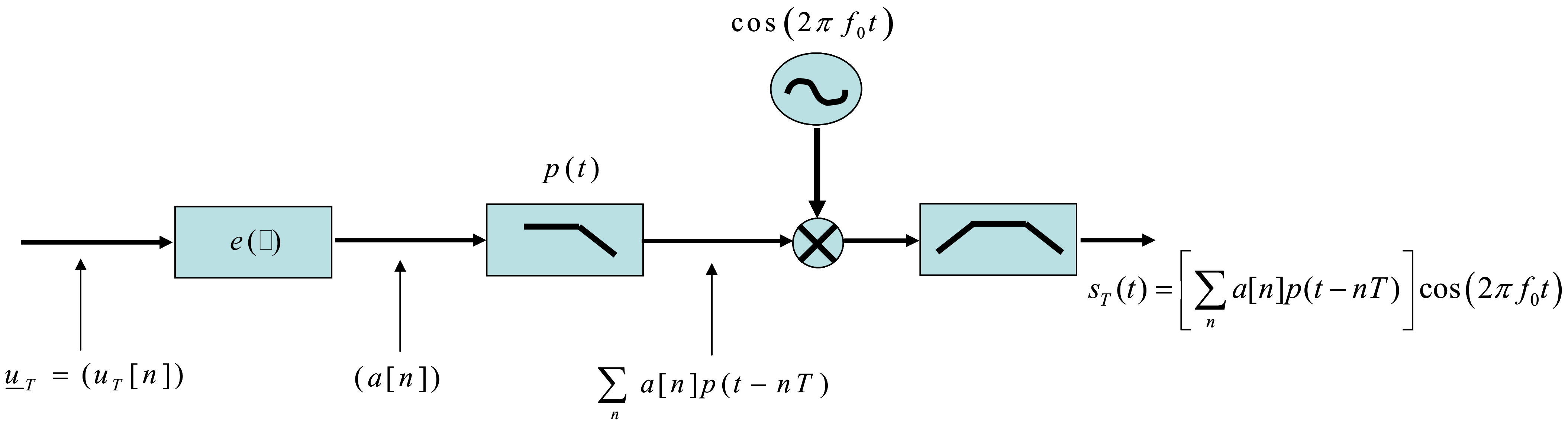
We choose f_0 multiple of $R=1/T$

It follows $$\cos(2\pi f_0 (t - nT)) = \cos(2\pi f_0 t - 2\pi f_0 nT) = \cos(2\pi f_0 t)$$

Then we can generate

$$\boxed{s(t) = \left[\sum_n a[n] p(t - nT)\right]\cos(2\pi f_0 t)}$$

***2-PSK**: modulator*



2-PSK: demodulator

Given the received signal $\rho(t)$

the received symbol is obtained by projecting it on the versor $b_1(t) = p(t)\cos(2\pi f_0 t)$

$$\rho[0] = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(t) b_1(t) dt = \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(t) p(t) \cos(2\pi f_0 t) dt}$$

This projection could be computed by using a matched filter

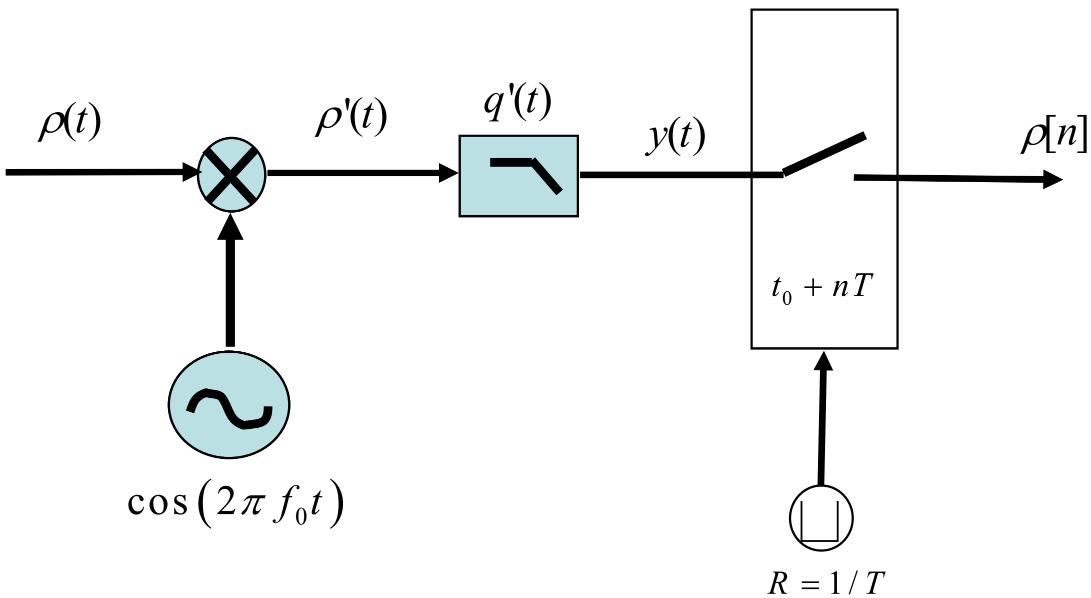
$$q(t) = b_1(T-t) = p(T-t)\cos(2\pi f_0 (T-t))$$

2-PSK: demodulator

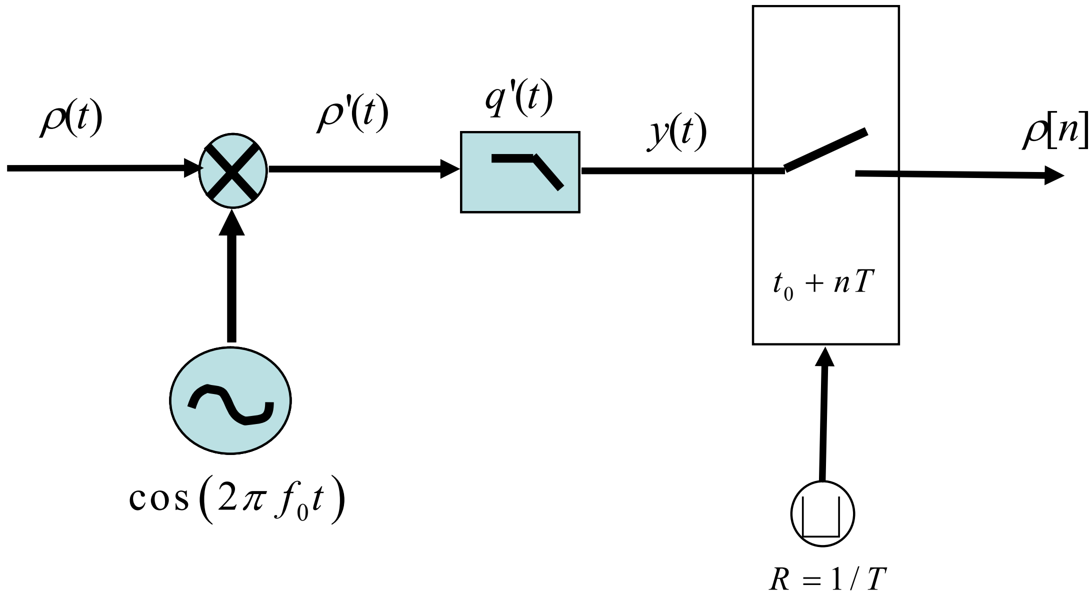
As an alternative, we can work as follows:

1. Given the received signal $\rho(t)$ multiply it by $\cos(2\pi f_0 t)$

2. Use a filter matched to $p(t)$: $q'(t) = p(T-t)$



2-PSK: *demodulator*

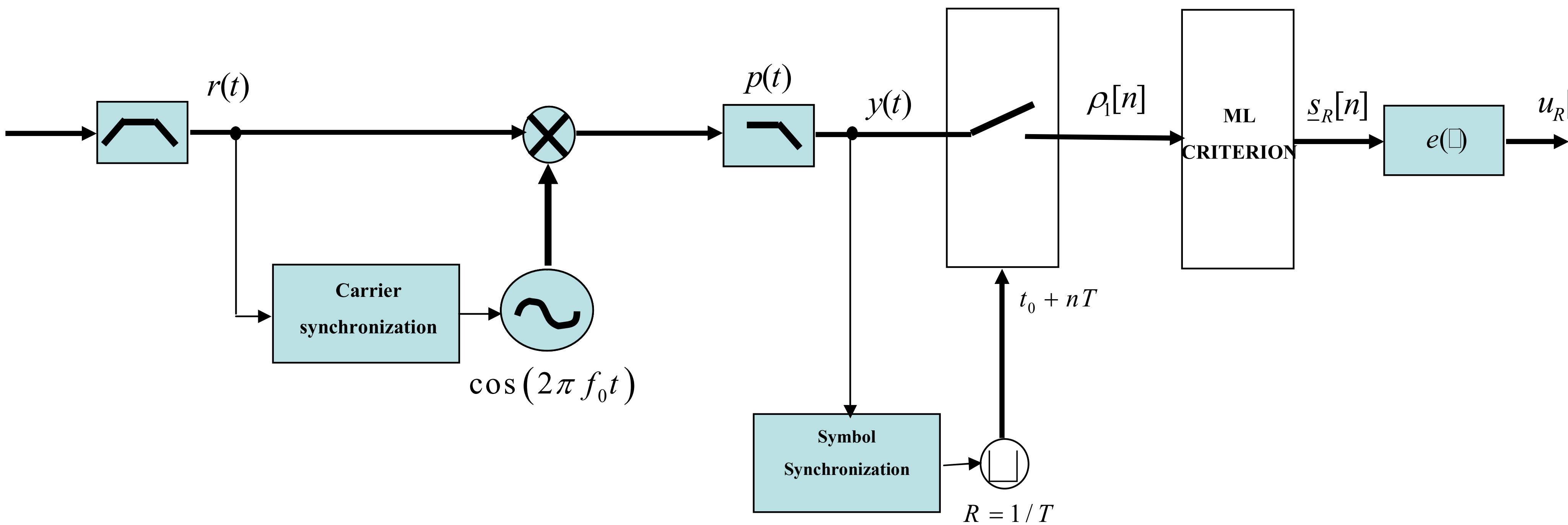


By sampling the matched filter output waveform we obtain

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho'(\tau) q'(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\tau) \cos(2\pi f_0 \tau) p(T - t + \tau) d\tau$$

$$y(t = T) = \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\tau) \cos(2\pi f_0 \tau) p(\tau) d\tau} = \rho[0]$$

2-PSK: demodulator



2-PSK: *interpretation*

We generate a baseband signal

$$v(t) = \sum_n a[n] p(t - nT)$$

Multiplication by cosine shifts the spectrum around f_0

$$s(t) = v(t) \cos(2\pi f_0 t)$$

2-PSK: interpretation

At the receiver side, multiplication by cosine generates

$$s(t)\cos(2\pi f_0 t) = v(t)\cos(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0 t) = v(t)\cos^2(2\pi f_0 t) = v(t)\left[\frac{1+\cos(2\pi\left(2f_0\right)t)}{2}\right]$$

This signal enters the matched filter $q(t)=p(T-t)$.

It is a low pass filter: the high frequency component around $2f_0$ is eliminated

Only the baseband component $v(t) = \sum_n a[n]p(t-nT)$ survives

The matched filter output is then equal to $a[n]$ when sampled at $t_0 + nT$

***2-PSK**: analytic signal*

The 2-PSK transmitted waveform

$$s(t) = \left[\sum_n a[n] p(t - nT) \right] \cos(2\pi f_0 t)$$

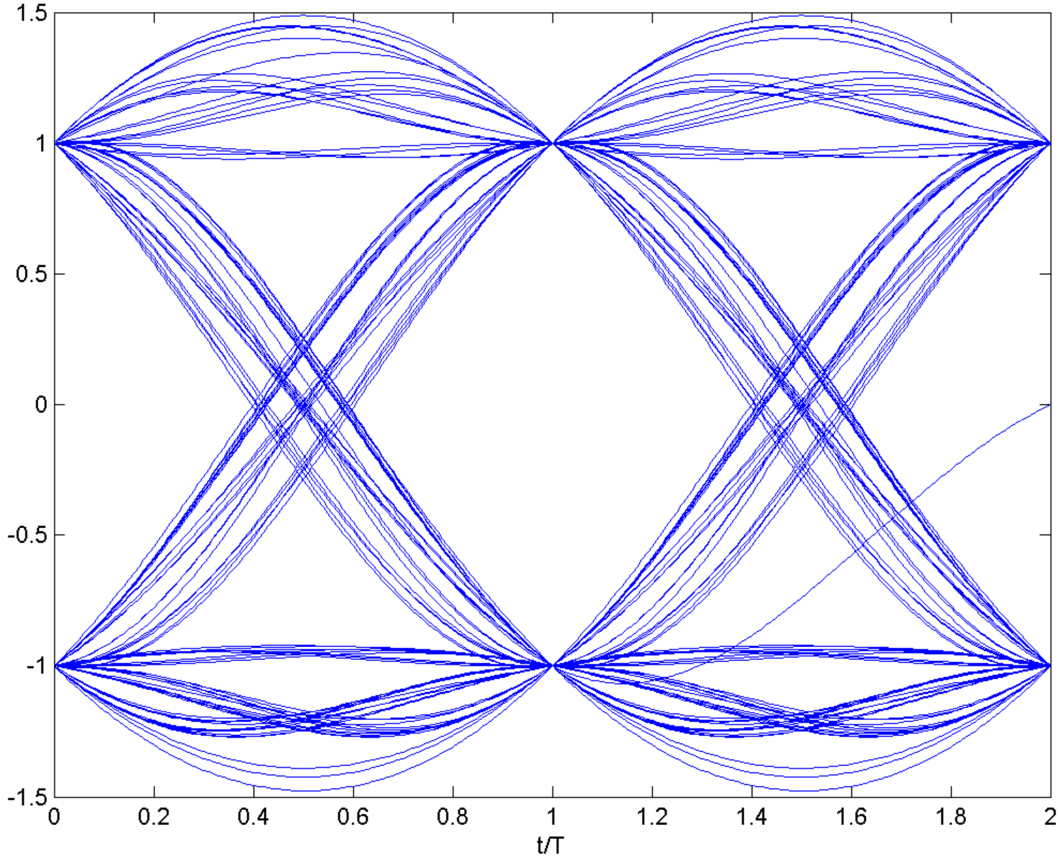
can be written as

$$s(t) = \mathrm{Re}\left[\dot{s}(t) \right] = \mathrm{Re}\left[\sum_n a[n] p(t - nT)\, \mathrm{e}^{j 2\pi f_0 t} \right]$$

Where $\dot{s}(t)$ is called the **analytic signal** associated with $s(t)$

***2-PSK**: Eye diagram*

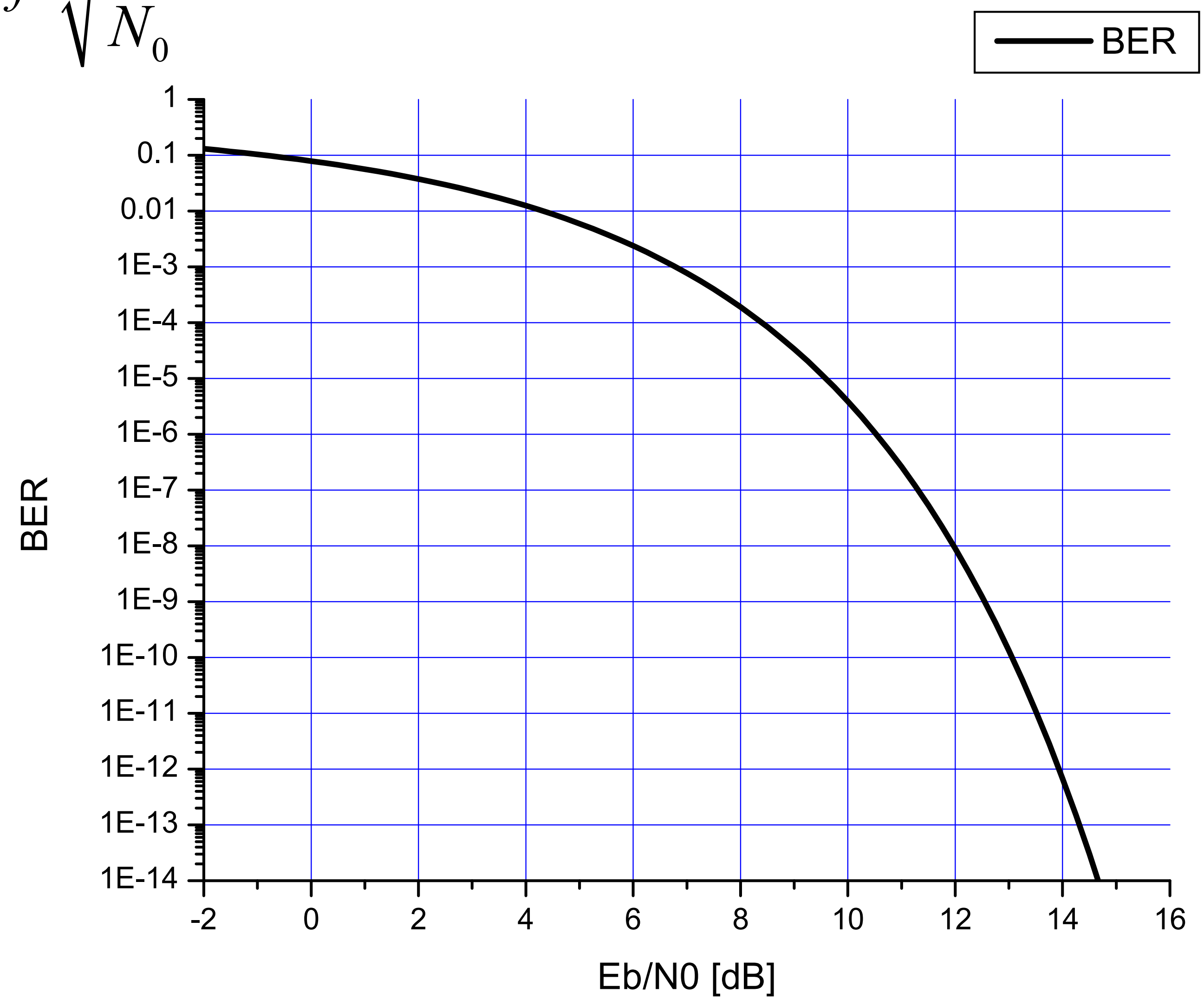
2-PSK constellation with RRC filter (?=0.5)



2-PSK: error probability

ERROR PROBABILITY

$$BER = \frac{1}{2} erfc \sqrt{\frac{E_b}{N_0}}$$



Nhập môn Kỹ thuật Truyền thông

Phần 2: Các kỹ thuật điều chế số (Digital Modulations)

Bài 11: Không gian tín hiệu 4-PSK và m-PSK

Quadrature modulation

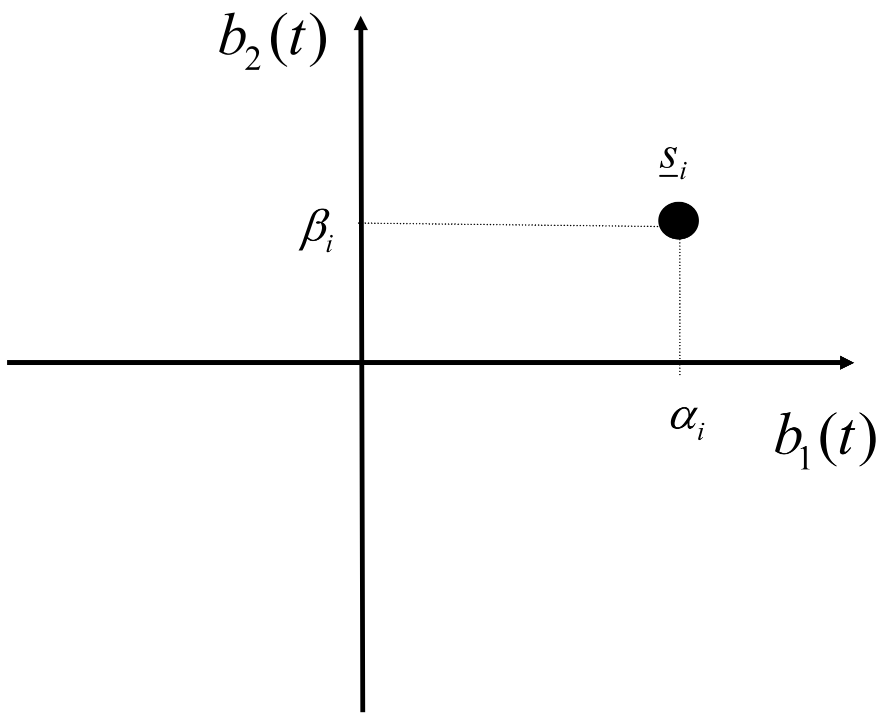
Consider a 2-D constellation, suppose that basis signals =cosine and sine

$$b_1(t) = p(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

$$b_2(t) = p(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

Each constellation symbol corresponds to a vector with two real components

$$M = \{\underline{s_i} = (\alpha_i, \beta_i)\}$$



Quadrature modulation

DURATION T

Binary information sequence $\underline{v}_T[n] \in H_k$

DURATION T

Symbol sequence $\underline{s}_T[n] \in M \subseteq R^2$

$\boxed{\alpha[n] \in R}$ $\boxed{\beta[n] \in R}$

DURATION T

Transmitted signal

$$s(t) = \sum_n \alpha[n] b_1(t - nT) + \sum_n \beta[n] b_2(t - nT) = a(t) + b(t)$$

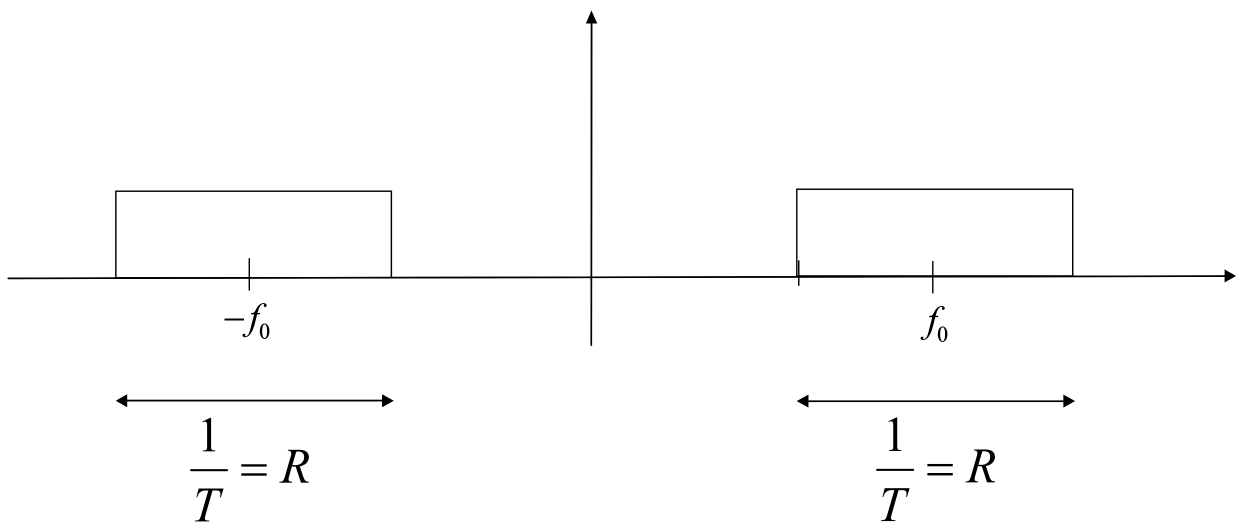
Quadrature modulation

Spectrum of $a(t)$:

$$a(t) = \sum_n \alpha[n] b_1(t - nT) = \left[\sum_n \alpha[n] p(t - nT) \right] \cos\left(2\pi f_0 t\right)$$

$$G_a = x\left[\left| P(f - f_0) \right|^2 + \left| P(f - f_0) \right|^2 \right] \qquad x \in R$$

when $p(t)$ = ideal low pass filter



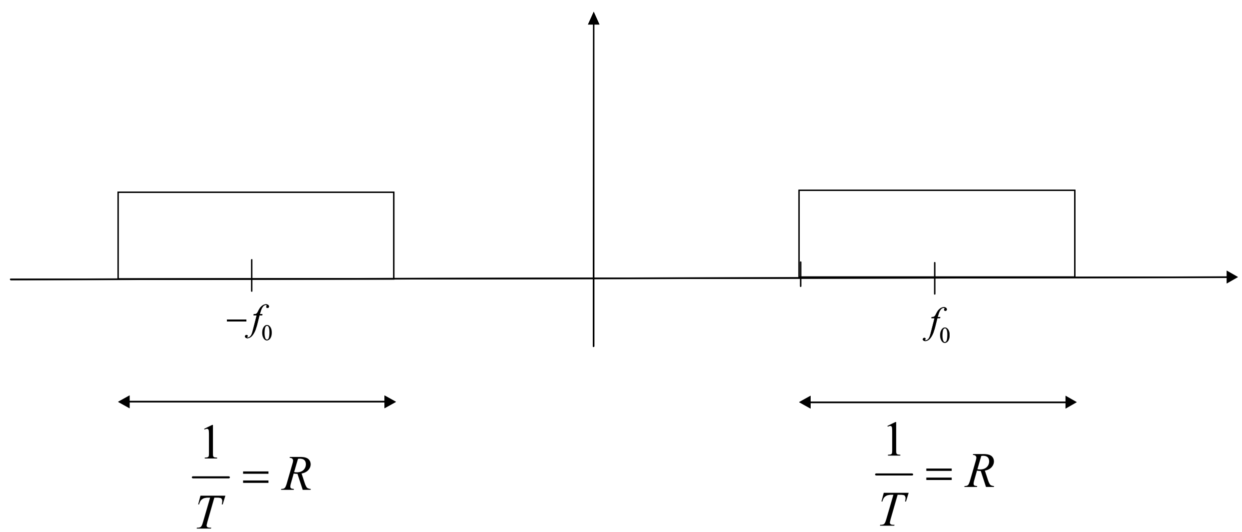
Quadrature modulation

Spectrum of $b(t)$:

$$b(t) = \sum_n \beta[n] b_1(t - nT) = \left[\sum_n \beta[n] p(t - nT) \right] \sin\left(2\pi f_0 t\right)$$

$$G_b = y\left[\left|P(f - f_0)\right|^2 + \left|P(f - f_0)\right|^2 \right] \qquad y \in R$$

when $p(t)$ = ideal low pass filter



Quadrature modulation

$$s(t) = a(t) + b(t)$$

It can be proved that

$$G_s(f) = G_a(f) + G_b(f)$$

Quadrature modulation

$$s(t) = a(t) + b(t)$$

$$G_s = G_a + G_b$$

$$G_a = x\left[\left|P(f - f_0)\right|^2 + \left|P(f - f_0)\right|^2\right] \qquad x \in R$$

$$G_b = y\left[\left|P(f - f_0)\right|^2 + \left|P(f - f_0)\right|^2\right] \qquad y \in R$$

$$G_s = z\left[\left|P(f - f_0)\right|^2 + \left|P(f - f_0)\right|^2\right] \qquad z \in R$$

G_a and G_b have the same shape and live on the same frequencies

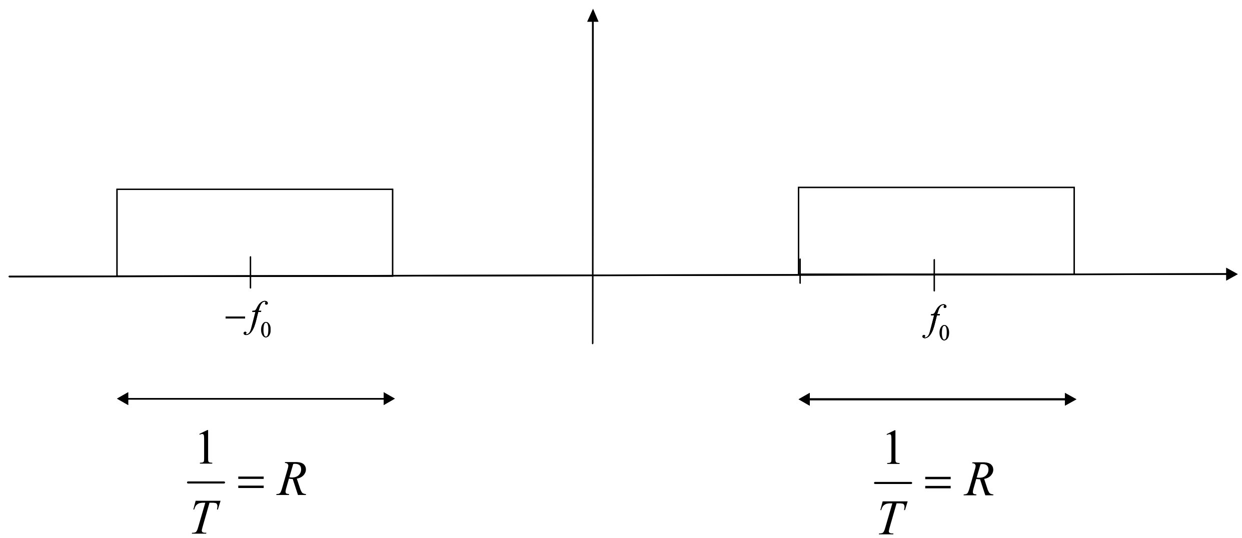
This is also the case for G_s

The spectrum of $s(t)$ only depends on $|P(f)|^2$

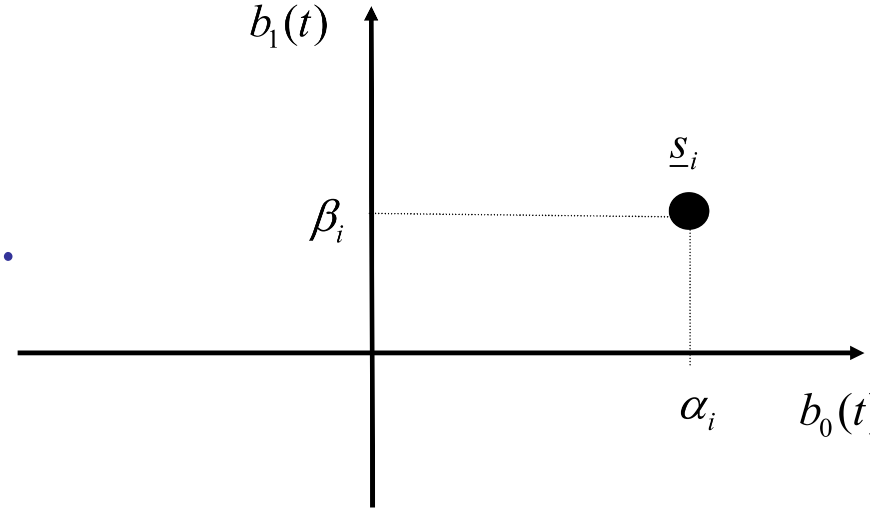
Quadrature modulation

Example when $p(t)$ = ideal low pass filter

$$G_s = z\left[\left|P(f-f_0)\right|^2 + \left|P(f-f_0)\right|^2\right] \qquad z \in R$$



I/Q component



Given a quadrature modulation,
let us consider its transmitted waveform

$$s(t) = a(t) + b(t) =$$

$$= \underbrace{\left[\sum_n \alpha[n]p(t-nT)\right]}_{i(t)}\cos\left(2\pi f_0 t\right) + \underbrace{\left[\sum_n \beta[n]p(t-nT)\right]}_{q(t)}\sin\left(2\pi f_0 t\right)$$

I component (in phase)

Q component (in quadrature)

Complex envelope

$$s(t) = [i(t)]\cos(2\pi f_0 t) + [q(t)]\sin(2\pi f_0 t)$$

Complex envelope $\boxed{\tilde{s}(t) = i(t) - jq(t)}$

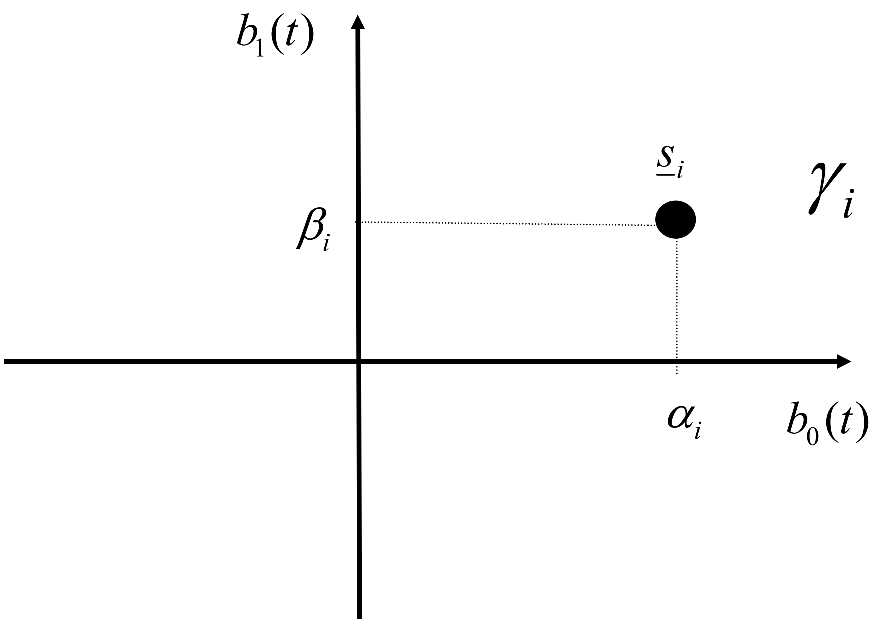
$$i(t) = \sum_n \alpha[n] p(t - nT) \qquad q(t) = \sum_n \beta[n] p(t - nT)$$

Complex symbol $\boxed{\gamma[n] = \alpha[n] - j\beta[n]}$

$$\tilde{s}(t) = \sum_n \gamma[n] p(t - nT)$$

Complex envelope

$$\tilde{s}(t) = \sum_n \gamma[n] p(t - nT) \qquad \gamma[n] = \alpha[n] - j\beta[n]$$



$$\gamma_i = \alpha_i - j\beta_i$$

Quadrature constellation as a set of complex numbers

$$M = \left\{ \gamma_i = \alpha_i - j\beta_i \right\}_{i=1}^{m}$$

Analytic signal

$$s(t) = \left[i(t)\right]\cos\left(2\pi f_0 t\right) + \left[q(t)\right]\sin\left(2\pi f_0 t\right)$$

$$\tilde{s}(t) = i(t) - jq(t)$$

$$s(t) = \mathrm{Re}\left[\tilde{s}(t)e^{j2\pi f_0 t}\right] = \mathrm{Re}\left[\dot{s}(t)\right]$$

Analytic signal

$$\boxed{\dot{s}(t) = \tilde{s}(t)e^{j2\pi f_0 t}}$$

$$\dot{s}(t) = \tilde{s}(t)e^{j2\pi f_0 t} = \left[\sum_n \gamma[n]p(t - nT)\right]e^{j2\pi f_0 t}$$

4-PSK: characteristics

1. Band-pass modulation
2. 2D signal set
3. Basis signals $p(t)\cos(2\pi f_0 t)$ and $p(t)\sin(2\pi f_0 t)$
4. Costellation = 4 signals, equidistant on a circle
5. Information associated to the carrier phase

***4-PSK**: constellation*

SIGNAL SET

$$\boxed{\begin{aligned} M = \{ & s_1(t) = Ap(t)\cos(2\pi f_0 t)\,, s_2(t) = Ap(t)\sin(2\pi f_0 t) \\ & s_3(t) = -Ap(t)\cos(2\pi f_0 t)\,, s_4(t) = -Ap(t)\sin(2\pi f_0 t)\,\} \end{aligned}}$$

If we write

$$M = \left\{ \begin{aligned} & s_1(t) = Ap(t)\cos(2\pi f_0 t)\,, \\ & s_2(t) = Ap(t)\sin(2\pi f_0 t) = Ap(t)\cos\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right), \\ & s_3(t) = -Ap(t)\cos(2\pi f_0 t) = Ap(t)\cos\left(2\pi f_0 t - \pi\right), \\ & s_4(t) = -Ap(t)\sin(2\pi f_0 t) = Ap(t)\cos\left(2\pi f_0 t - \frac{3\pi}{2}\right) \end{aligned} \right\}$$

Information associated to the carrier phase

4-PSK: *constellation*

SIGNAL SET

$$\boxed{\begin{array}{l} M = \{s_i(t) = Ap(t)\cos(2\pi f_0 t - \varphi_i)\}_{i=1}^{4} \\ \varphi_i = (i-1)\dfrac{\pi}{2} \end{array}}$$

Versors

$$b_1(t) = p(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

$$b_2(t) = p(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

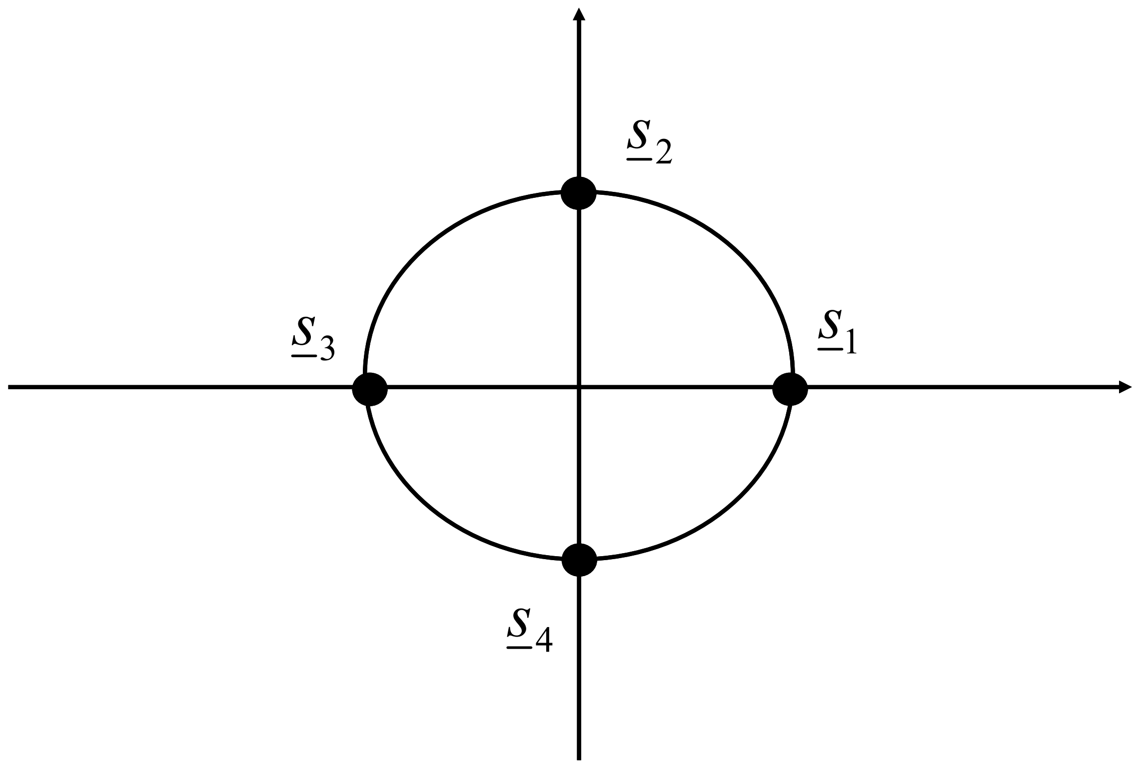
VECTOR SET

$$\boxed{M = \{\underline{s}_1 = (A,0), \underline{s}_2 = (0,A), \underline{s}_3 = (-A,0), \underline{s}_4 = (0,-A)\} \subseteq R^2}$$

***4-PSK**: constellation*

VECTOR SET

$$\boxed{M = \{\underline{s}_1 = (A,0), \underline{s}_2 = (0,A), \underline{s}_3 = (-A,0), \underline{s}_4 = (0,-A)\} \subseteq R^2}$$



4-PSK: constellation

SIGNAL SET (with arbitary starting phase)

$$M = \{ s_i(t) = Ap(t)\cos(2\pi f_0 t - \varphi_i) \}_{i=1}^{4}$$

$$\varphi_i = \Phi + (i-1)\frac{\pi}{2}$$

$$s_i(t) = (A\cos\varphi_i)\,p(t)\cos(2\pi f_0 t) + (A\sin\varphi_i)\,p(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

Versors

$$b_1(t) = p(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

$$b_2(t) = p(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

Vector set

$$M = \{ \underline{s}_i = (\alpha_i, \beta_i) \}_{i=1}^{4} \subseteq R^2$$

$$\alpha_i = A\cos\varphi_i$$

$$\beta_i = A\sin\varphi_i$$

$$\varphi_i = \Phi + (i-1)\frac{\pi}{2}$$

4-PSK: *constellation*

Example: $\Phi = 0$

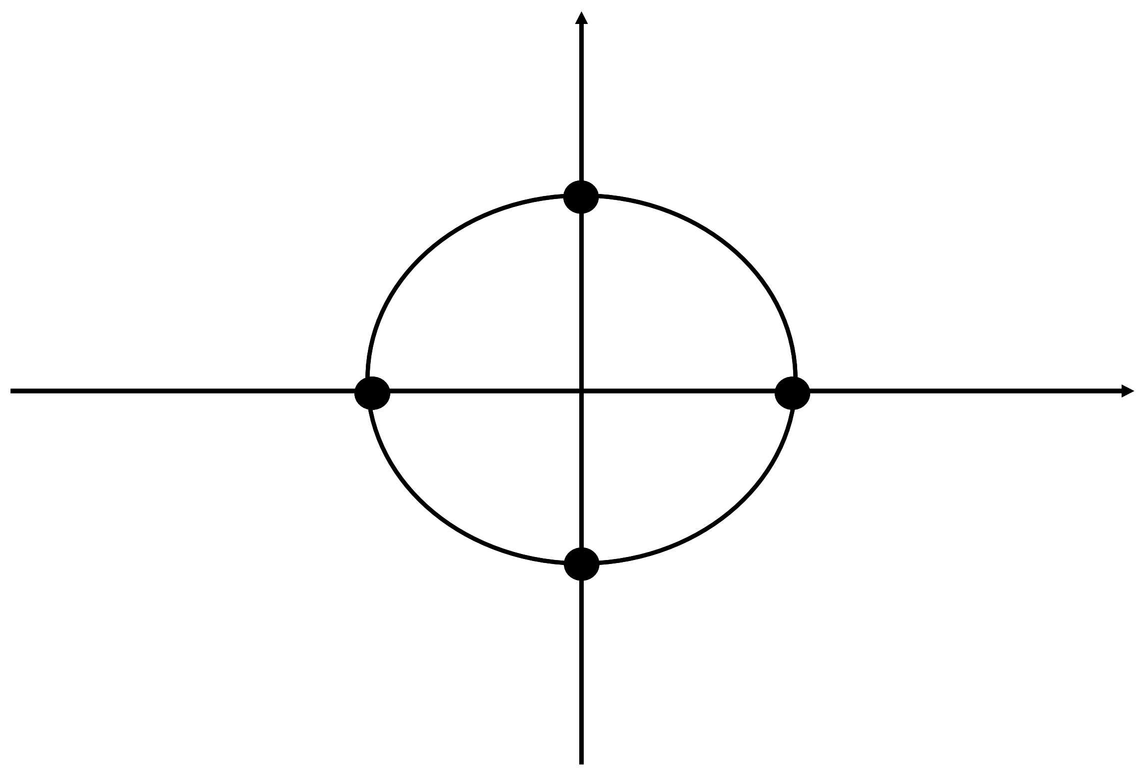
$$M = \{\underline{s}_1 = (A,0)\,,\, \underline{s}_2 = (0,A)\,,\, \underline{s}_3 = (-A,0)\,,\, \underline{s}_4 = (0,-A)\} \subseteq R^2$$

$$M = \{\underline{s}_i = (\alpha_i, \beta_i)\}_{i=1}^{4} \subseteq R^2$$

$$\alpha_i = A\cos\varphi_i$$

$$\beta_i = A\sin\varphi_i$$

$$\varphi_i = (i-1)\frac{\pi}{2} \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$$



4-PSK: constellation

Example: $\Phi = \frac{\pi}{4}$

$$\boxed{M = \{\underline{s}_1 = (-\alpha, -\alpha)\,,\, \underline{s}_2 = (+\alpha, -\alpha)\,,\, \underline{s}_3 = (+\alpha, +\alpha)\,,\, \underline{s}_4 = (-\alpha, +\alpha)\} \subseteq R^2}$$

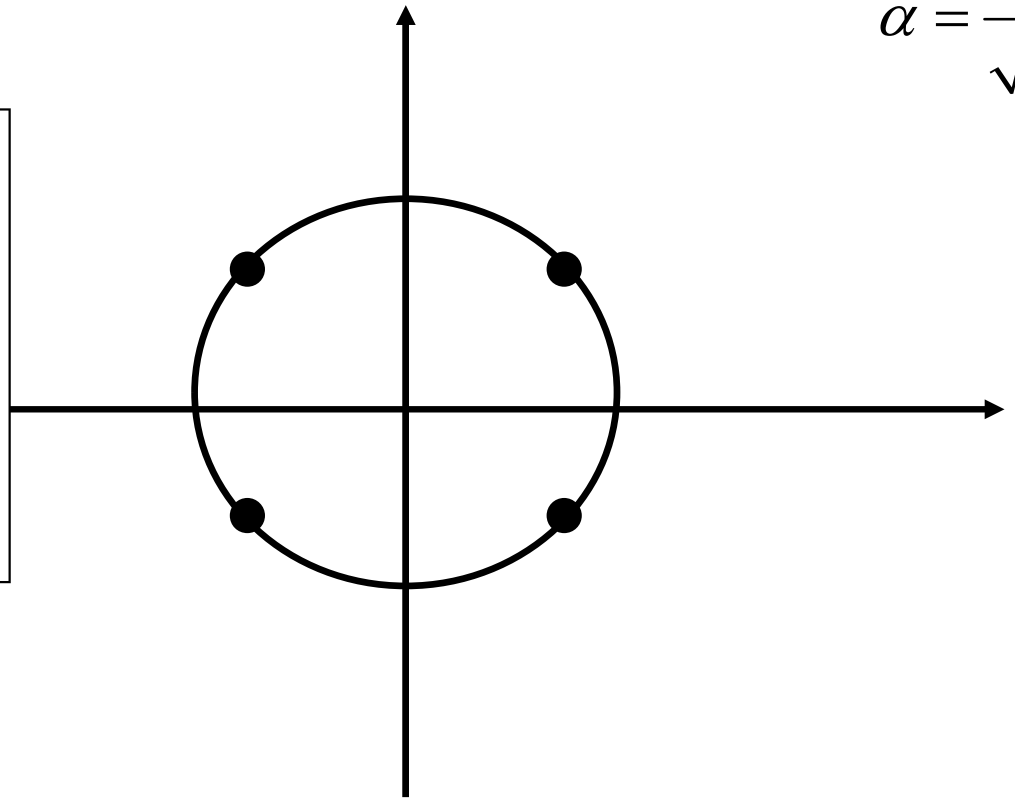
$$\alpha = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

$$M = \{\underline{s}_i = (\alpha_i, \beta_i)\}_{i=1}^{4} \subseteq R^2$$

$$\alpha_i = A\cos\varphi_i$$

$$\beta_i = A\sin\varphi_i$$

$$\varphi_i = \frac{\pi}{4} + (i-1)\frac{\pi}{2} \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$$

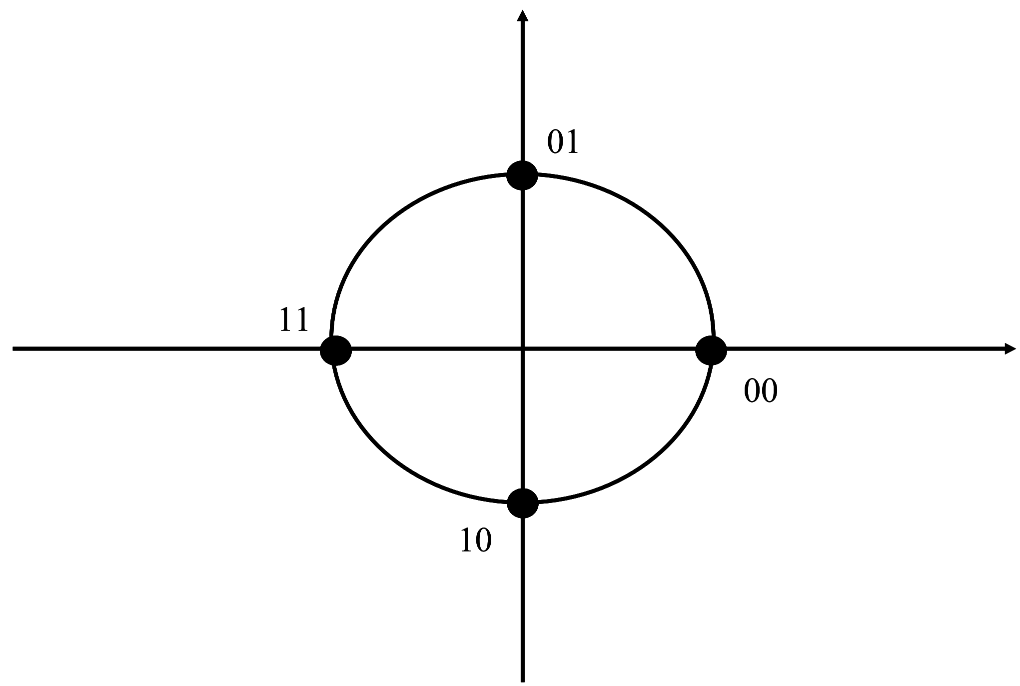


4-PSK: binary labeling

Example of Gray labeling

$$e : H_2 \leftrightarrow M$$

$$e(00) = \underline{s}_0$$
$$e(01) = \underline{s}_1$$
$$e(11) = \underline{s}_2$$
$$e(10) = \underline{s}_3$$



4-PSK: *transmitted waveform*

$m = 2 \rightarrow k = 2$

$\boxed{T = 2T_b}$

$\boxed{R = \frac{R_b}{2}}$

Each symbol has duration T
Each symbol component (α and β) lasts for T second

Transmitted waveform

$$s(t) = \underbrace{\left[\sum_n \alpha[n] p(t - nT)\right]}_{i(t)} \cos(2\pi f_0 t) + \underbrace{\left[\sum_n \beta[n] p(t - nT)\right]}_{q(t)} \sin(2\pi f_0 t)$$

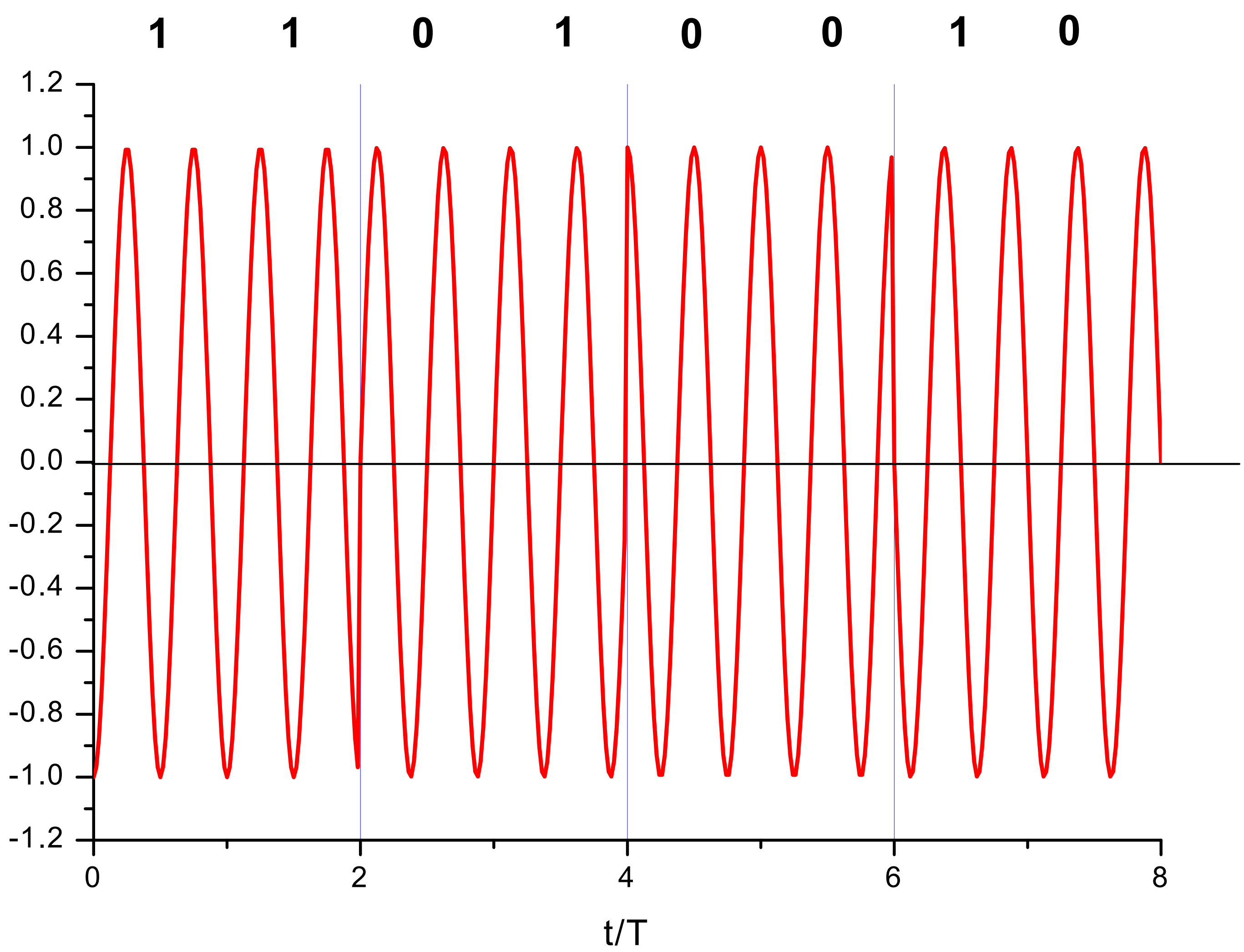
I component (in phase)

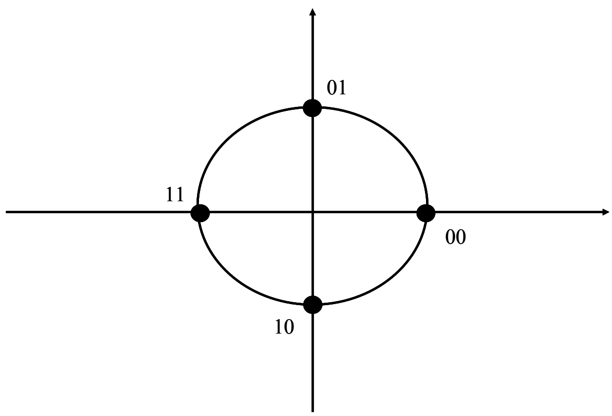
Q component (in quadrature)

4-PSK: transmitted waveform

example for $p(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} P_T(t)$

$$f_0 = 2R_b$$
$$\alpha = \sqrt{T}$$





4-PSK: *analytic signal*

$$s(t) = \underbrace{\left[\sum_n \alpha[n] p(t - nT) \right]}_{i(t)} \cos(2\pi f_0 t) + \underbrace{\left[\sum_n \beta[n] p(t - nT) \right]}_{q(t)} \sin(2\pi f_0 t)$$

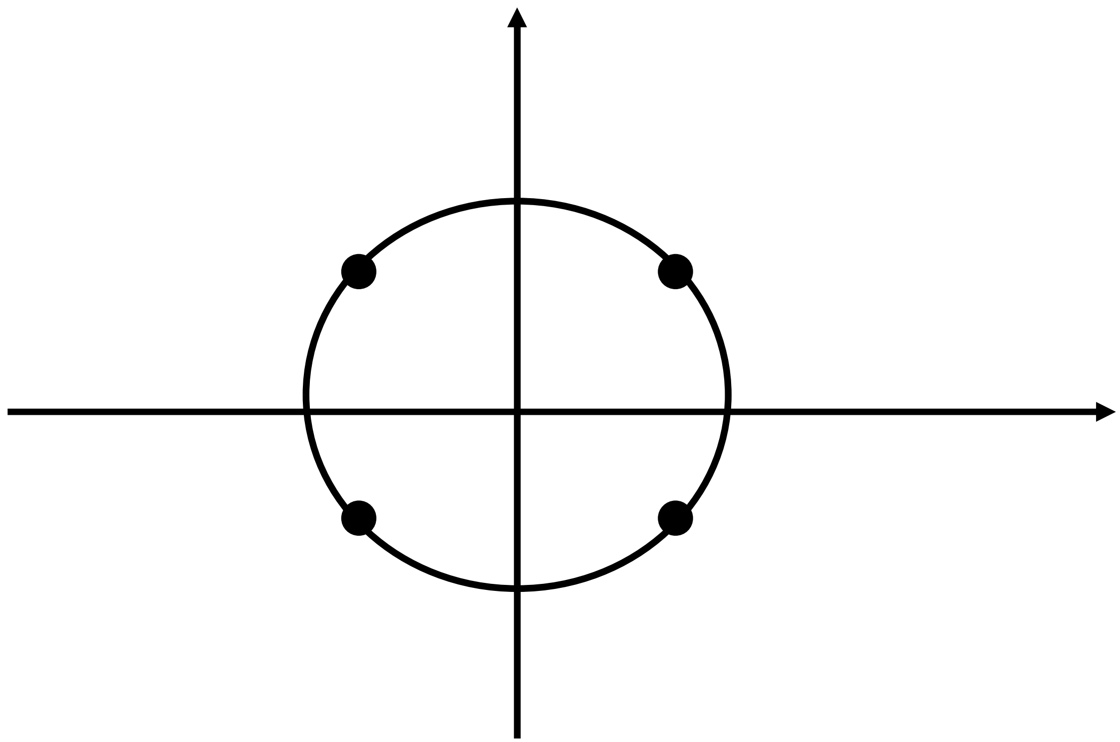
$$s(t) = \mathrm{Re}\left[\dot{s}(t) \right] = \mathrm{Re}\left[\tilde{s}(t) e^{j2\pi f_0 t} \right]$$

$$\tilde{s}(t) = i(t) - jq(t) = \sum_n \gamma[n] p(t - nT) \qquad \gamma[n] = \alpha[n] - j\beta[n]$$

4-PSK: analytic signal

$$\tilde{s}(t) = \sum_n \gamma[n] p(t - nT)$$

$$\gamma[n] = \alpha[n] - j\beta[n]$$



$$M = \{s_1 = (a - ja), s_2 = (-a - ja), s_3 = (-a + ja), s_4 = (a + ja),\}$$

***4-PSK**: bandwidth and spectral efficiency*

Transmitted waveform

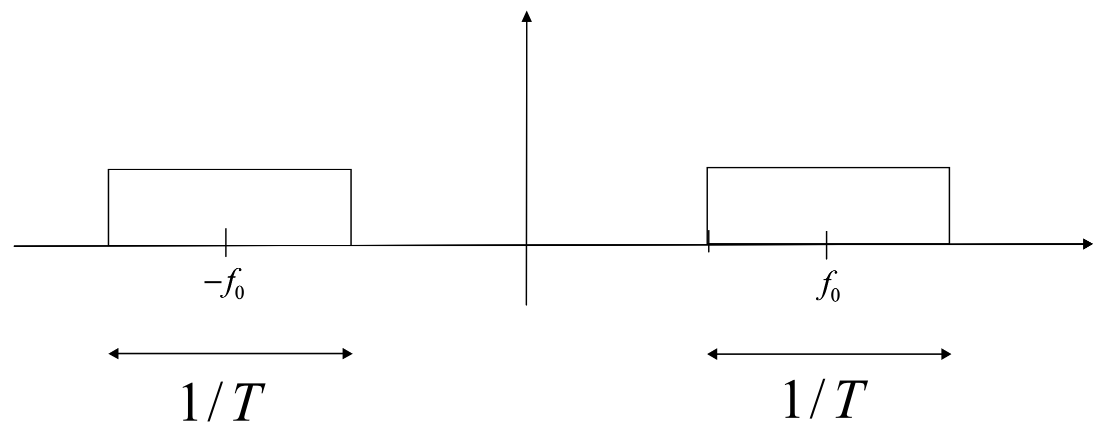
$$s(t) = \left[\sum_n \alpha[n] p(t - nT) \right] \cos(2\pi f_0 t) + \left[\sum_n \beta[n] p(t - nT) \right] \sin(2\pi f_0 t)$$

$$G_s(f) = z\left[\left|P(f - f_0)\right|^2 + \left|P(f + f_0)\right|^2 \right] \qquad z \in R$$

Each symbol $\alpha[n]$ and $\beta[n]$ has time duration $T = 2T_b$

***4-PSK**: bandwidth and spectral efficiency*

Case 1: $p(t)$ = ideal low pass filter



Total bandwidth
(ideal case)

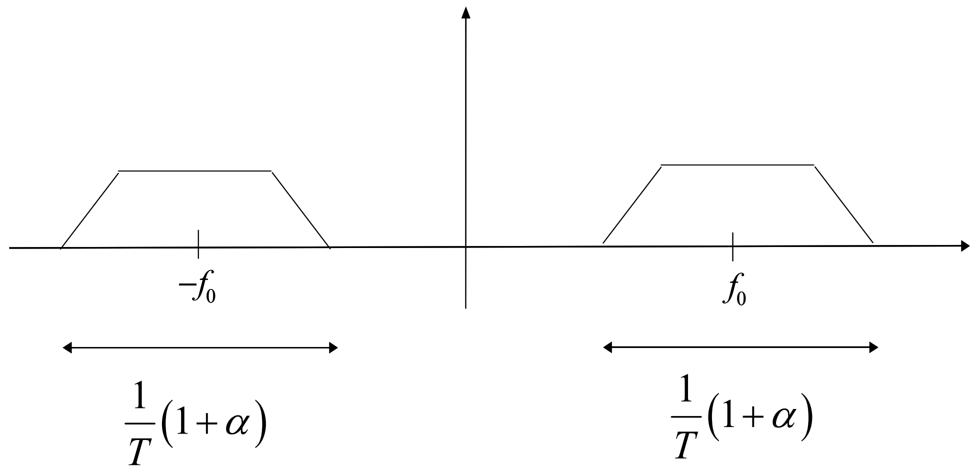
$$\boxed{B_{id} = R = \frac{R_b}{2}}$$

Spectral efficiency
(ideal case)

$$\boxed{\eta_{id} = \frac{R_b}{B_{id}} = 2\ bps/Hz}$$

***4-PSK**: bandwidth and spectral efficiency*

Case 2: $p(t)$ = RRC filter with roll off α



Total bandwidth $$B = R(1+\alpha) = \frac{R_b}{2}(1+\alpha)$$

$$\Downarrow$$

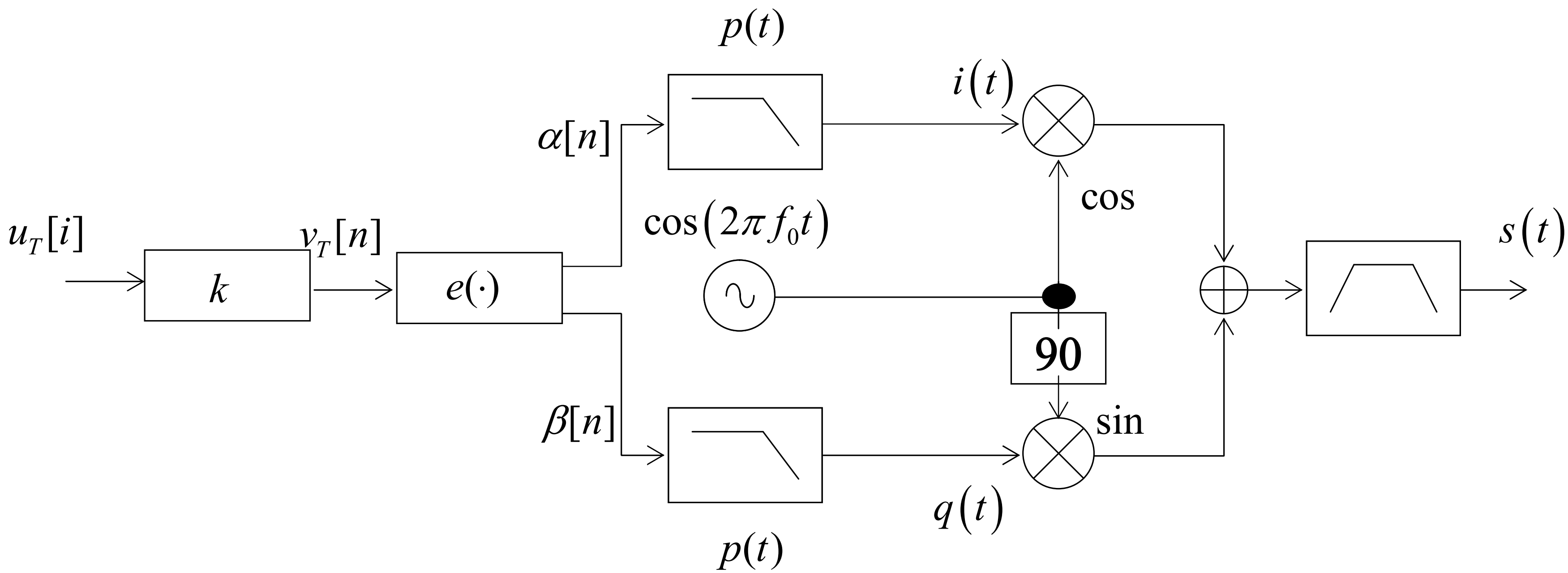
Spectral efficiency $$\boxed{\eta = \frac{R_b}{B} = \frac{2}{(1+\alpha)} \; bps / Hz}$$

Exercize

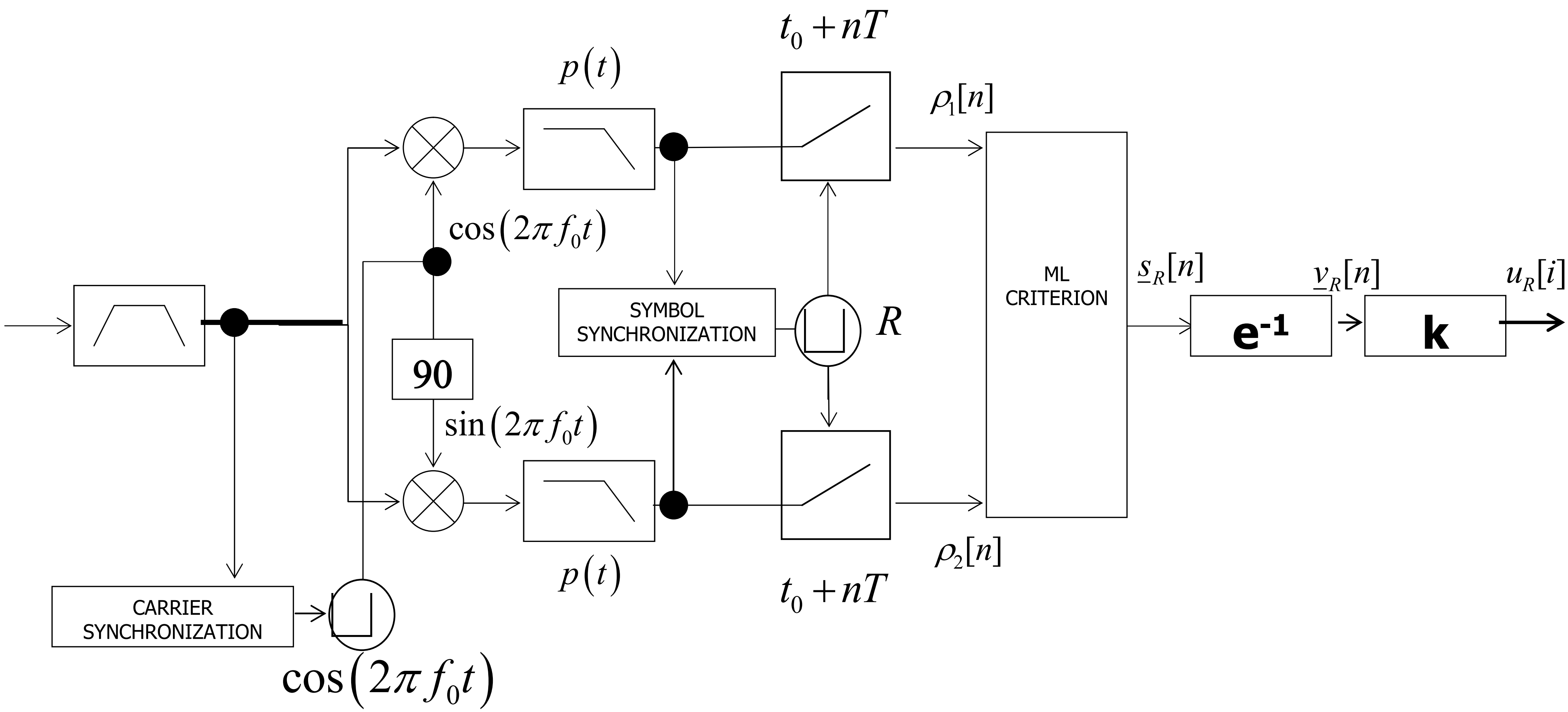
Given a bandpass channel with bandwidth B = 4000 Hz, centred around f_0=2 GHz, compute the maximum bit rate R_b we can transmit over it with a 4-PSK constellation in the two cases:

- Ideal low pass filter
- RRC filter with α=0.25

4-PSK: *modulator*

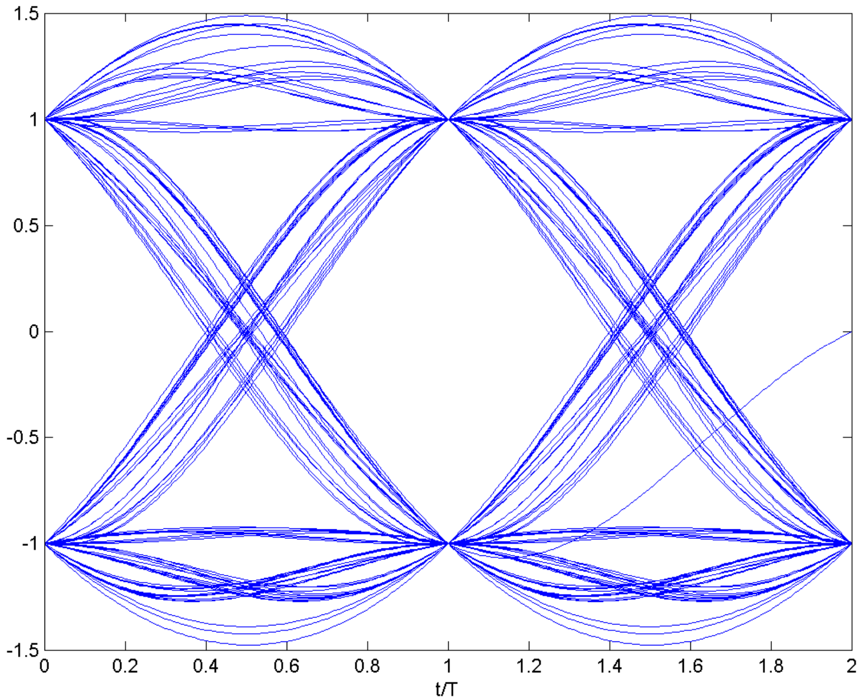


4-PSK: demodulator

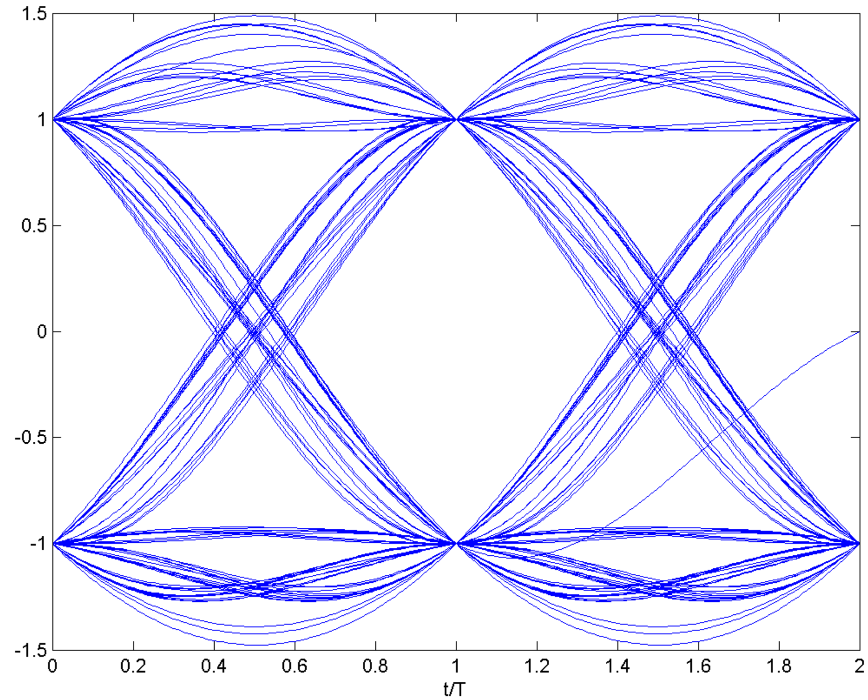


4-PSK: *Eye diagram*

4-PSK constellation with RRC filter (⍰=0.5)



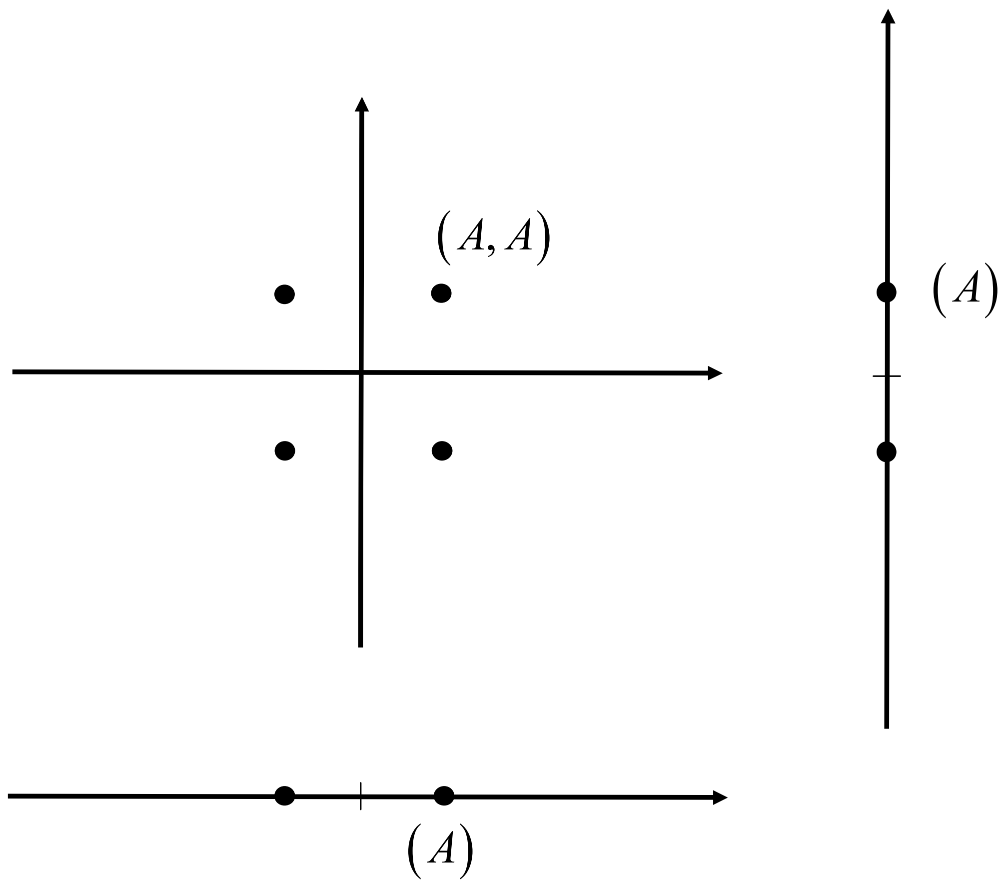
Canale I



Canale Q

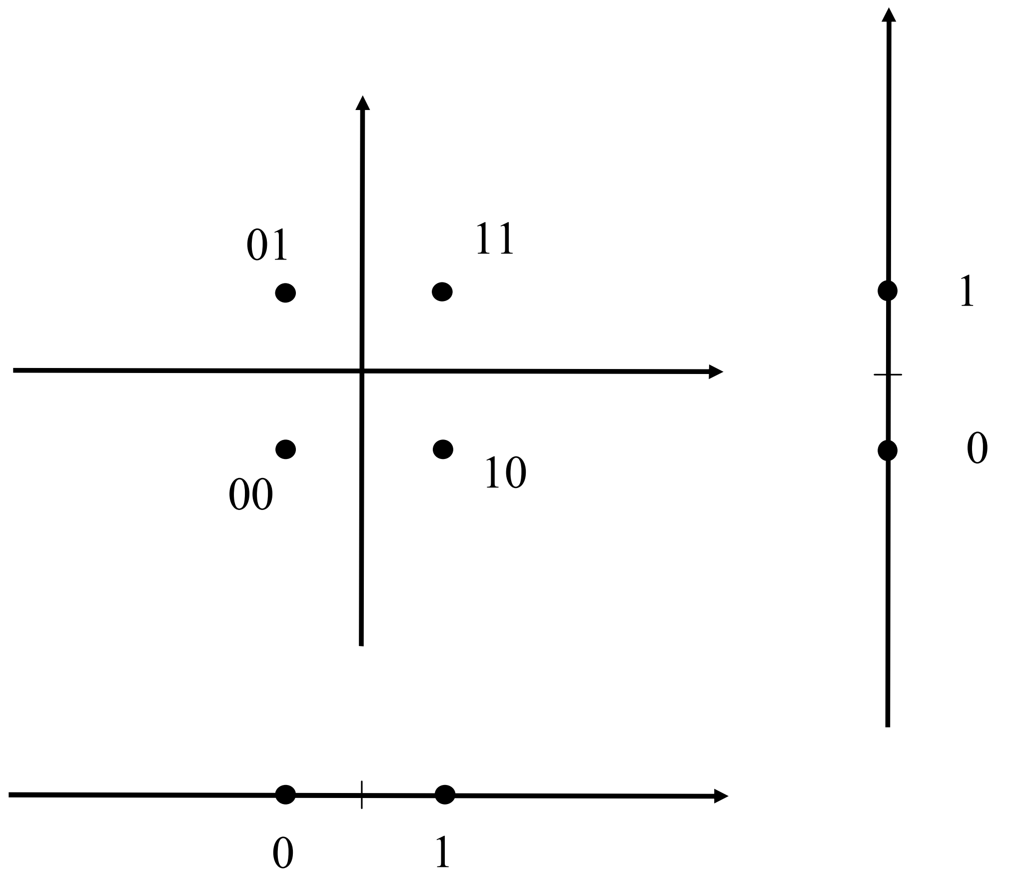
***4-PSK**: intepretation*

The 4-PSK vector set can be viewed as
the Cartesian product of two 2-PSK constellations



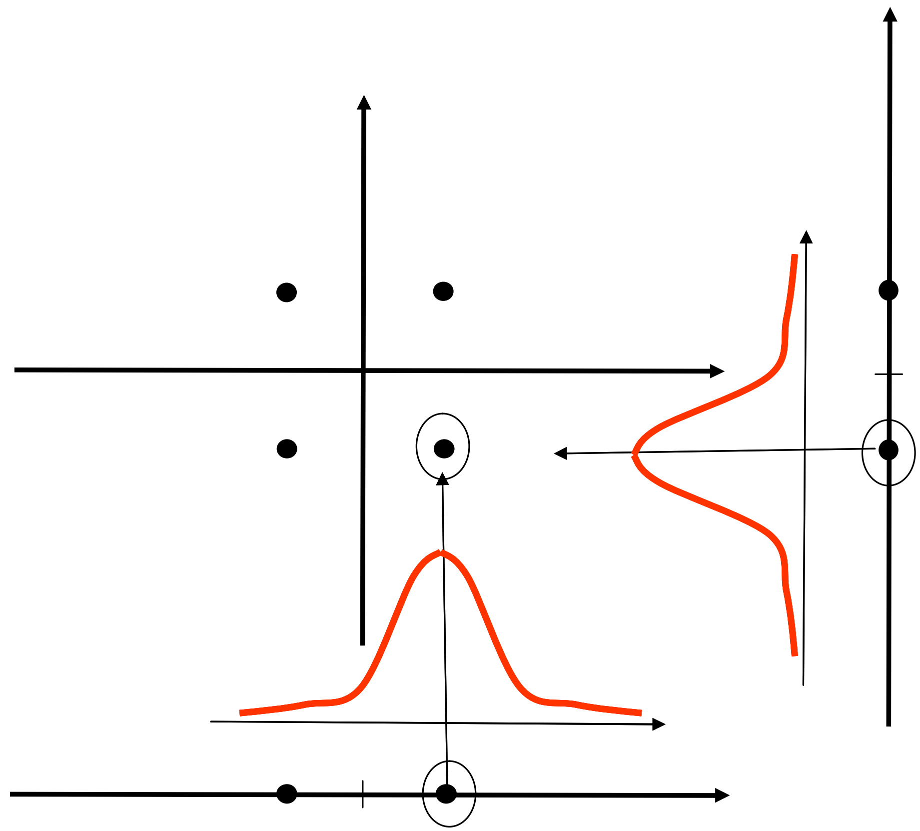
***4-PSK**: intepretation*

This is also true for the binary Gray labeling
(first bit = I component, second bit = Q component)



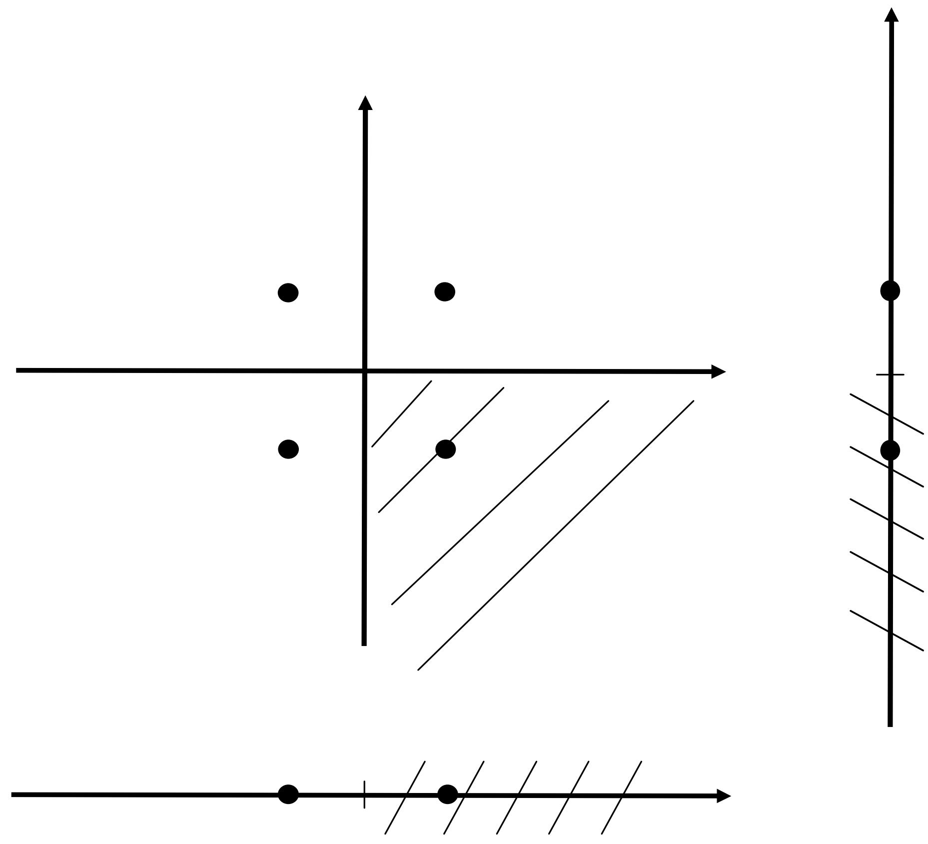
4-PSK: *intepretation*

The AWGN channel adds two Gaussian components which are statistically independent



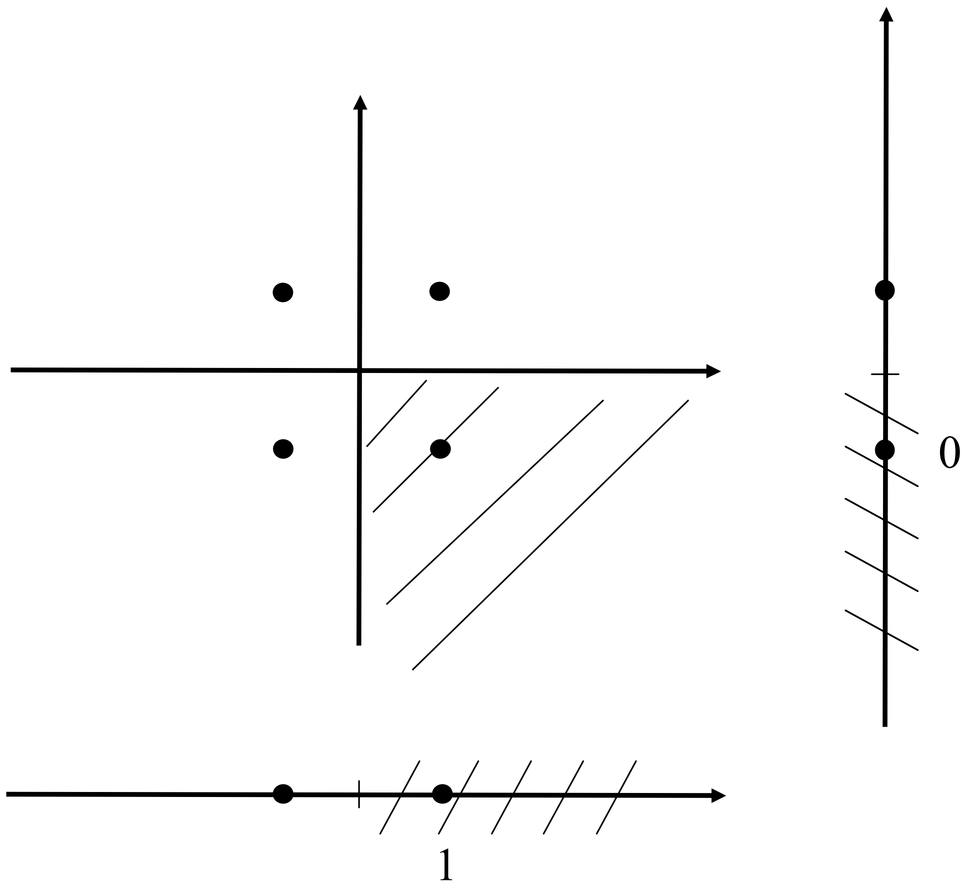
4-PSK: *intepretation*

The Voronoi regions of 4-PSK signals are the Cartesian product of the Voronoi regions of the constituent 2-PSK constellations



***4-PSK**: intepretation*

The Voronoi regions of 4-PSK signals are the Cartesian product of the Voronoi regions of the constituent 2-PSK constellations



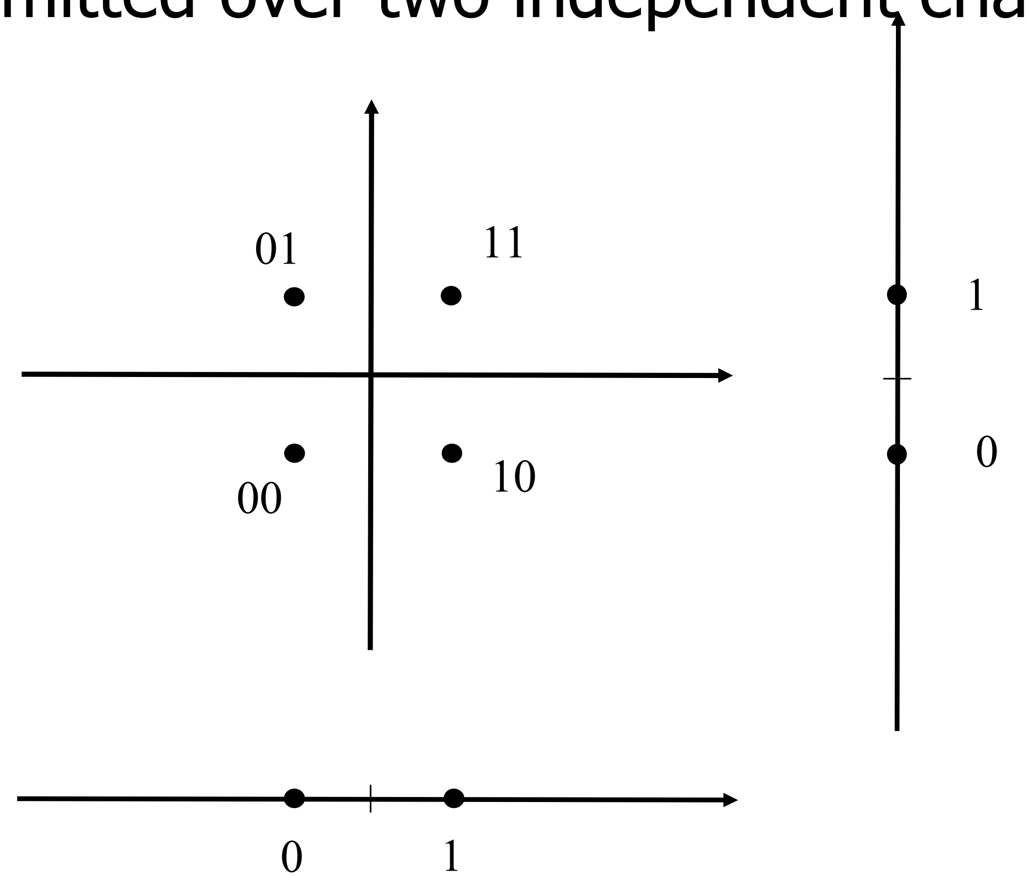
Given the received vector $(\rho_1[n]\ ,\ \rho_2[n])$

The sign of the first component $\rho_1[n]$ determines the first received bit

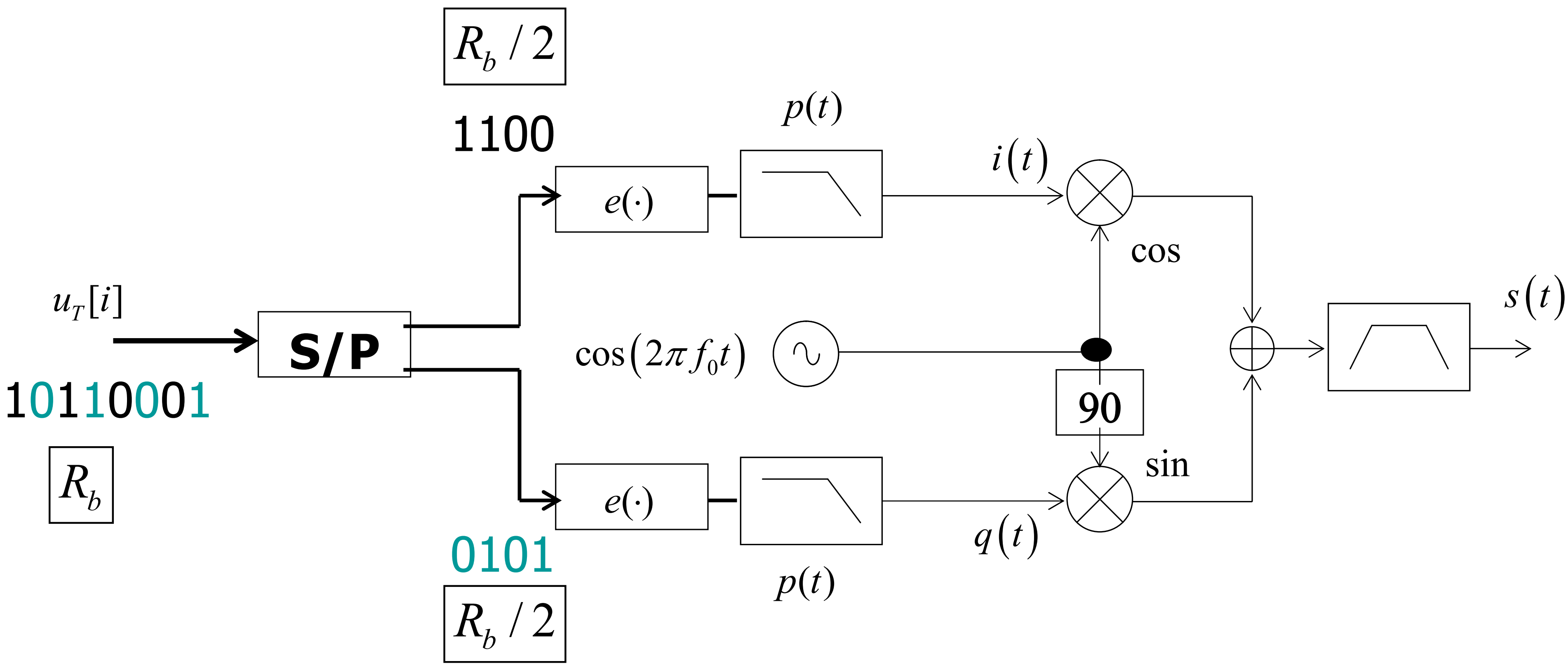
The sign of the second component $\rho_2[n]$ determines the second received bit

4-PSK: intepretation

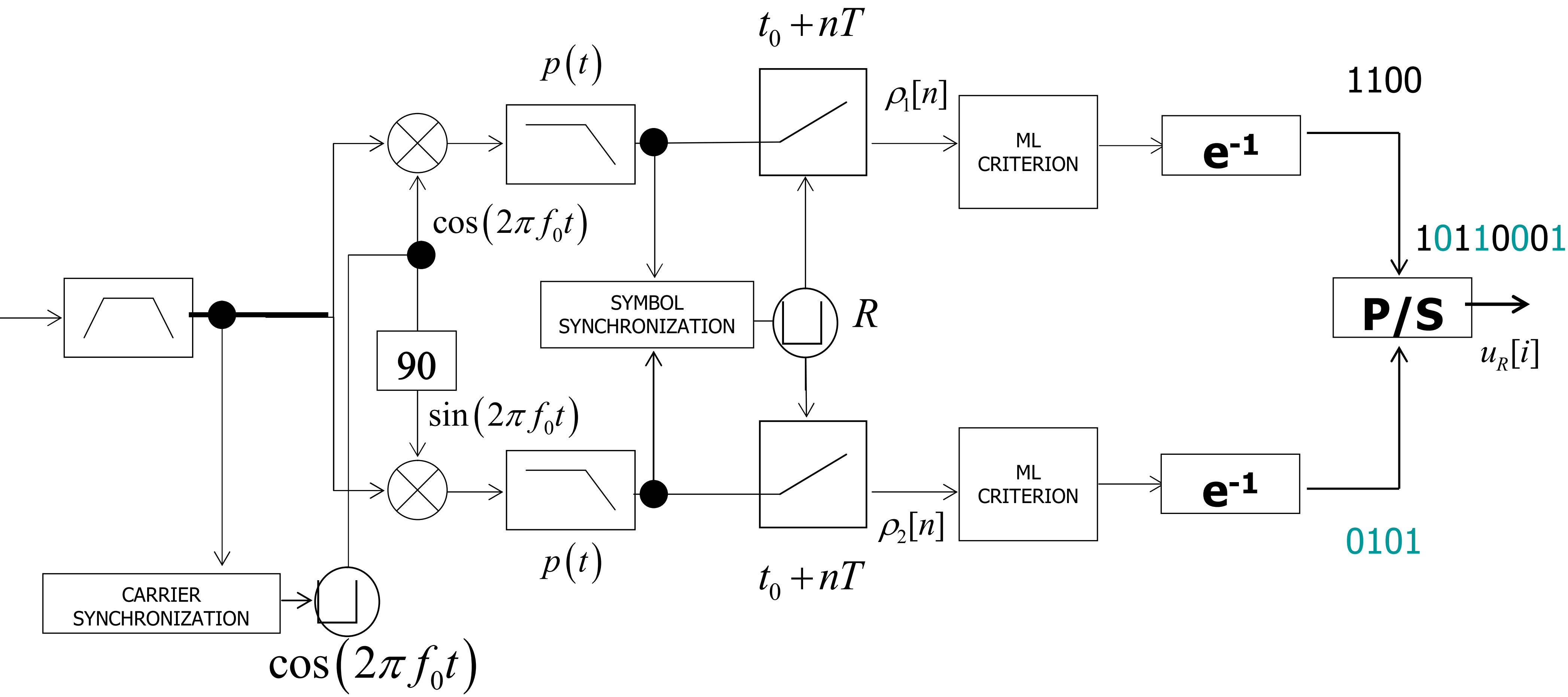
The 4-PSK modulation can be viewed as
the Cartesian product of two 2-PSK constellations
transmitted over two independent channels



4-PSK: modulator



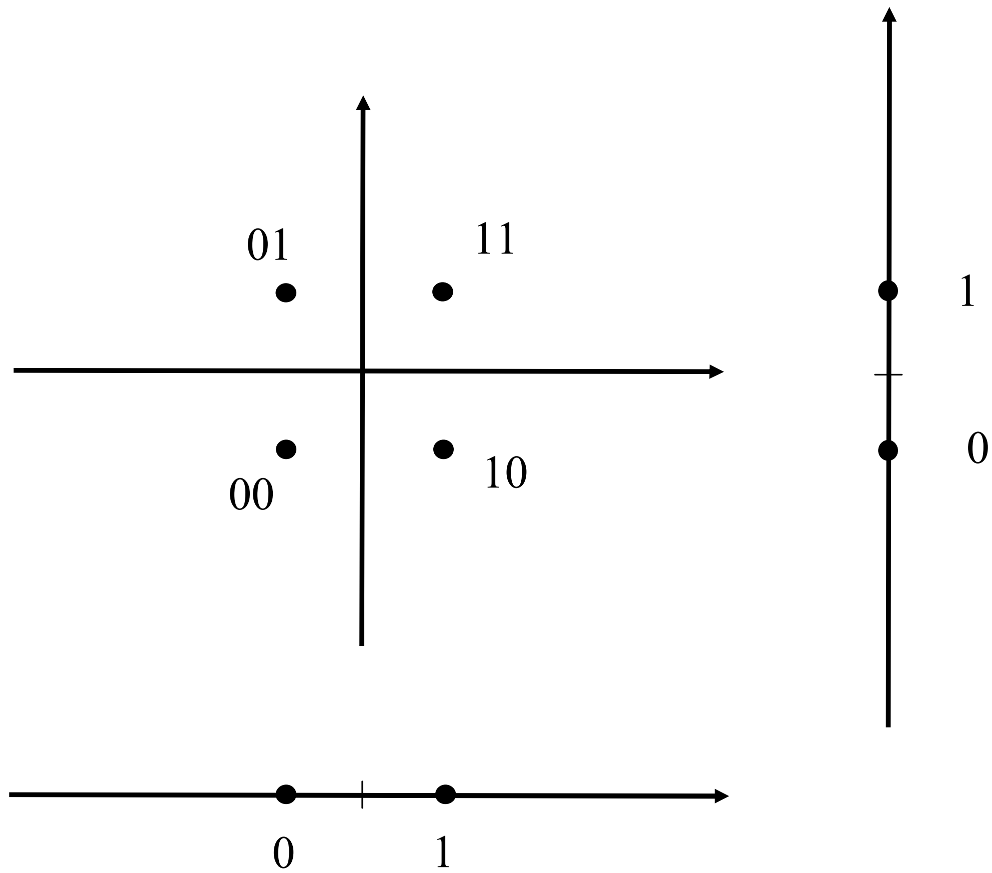
4-PSK: *demodulator*



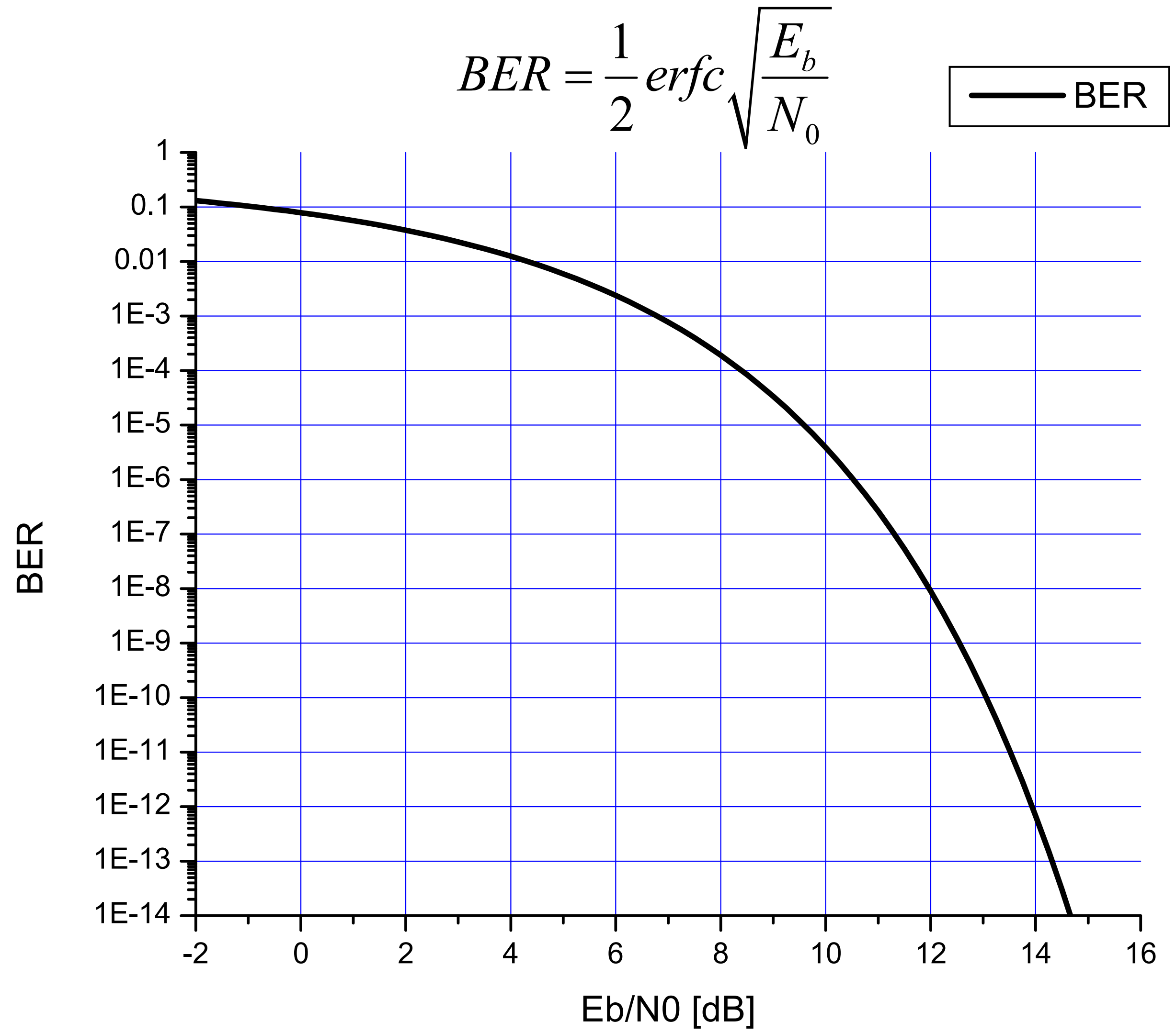
4-PSK: *intepretation*

The Cartesian product interpretation clarifies why a 4-PSK constellation

1. **Has the same BER performance of a 2-PSK**
2. **Has double spectral efficiency** (two sequences with half bit-rate transmitted on the same frequencies)



***4-PSK**: error probability*



***4-PSK**: applications*

Probably the most used digital modulation

- Satellite links
- Terrestrial radio links (with low spectral efficiency)
- GPS/Galileo
- UMTS
- ...

m-PSK: *characteristics*

1. Band-pass modulation

2. 2D signal set

3. Basis signals $p(t)cos(2\pi f_0 t)$ e $p(t)sin(2\pi f_0 t)$

4. Costellation = m signals, equidistant on a circle

5. Information associated to the carrier phase

m-PSK: *constellation*

SIGNAL SET

$$M = \{s_i(t) = Ap(t)\cos(2\pi f_0 t - \varphi_i)\}_{i=1}^{m}$$

$$\varphi_i = \Phi + (i-1)\frac{2\pi}{m}$$

Information associated to the carrier phase

m-PSK: constellation

$$\boxed{s_i(t) = Ap(t)\cos(2\pi f_0 t - \varphi_i)}$$

$$\varphi_i = \Phi + (i-1)\frac{2\pi}{m}$$

We can write

$$\boxed{s_i(t) = (A\cos\varphi_i)\,p(t)\cos(2\pi f_0 t) + (A\sin\varphi_i)\,p(t)\sin(2\pi f_0 t)}$$

Clearly, we have two versors

$$\boxed{b_1(t) = p(t)\cos(2\pi f_0 t)}$$

$$\boxed{b_2(t) = p(t)\sin(2\pi f_0 t)}$$

m-PSK: constellation

SIGNAL SET

$$\boxed{M = \{s_i(t) = Ap(t)\cos(2\pi f_0 t - \varphi_i)\}_{i=1}^{m} \qquad \varphi_i = \Phi + (i-1)\frac{2\pi}{m}}$$

VERSORS

$$\boxed{b_1(t) = p(t)\cos(2\pi f_0 t)}$$

$$\boxed{b_2(t) = p(t)\sin(2\pi f_0 t)}$$

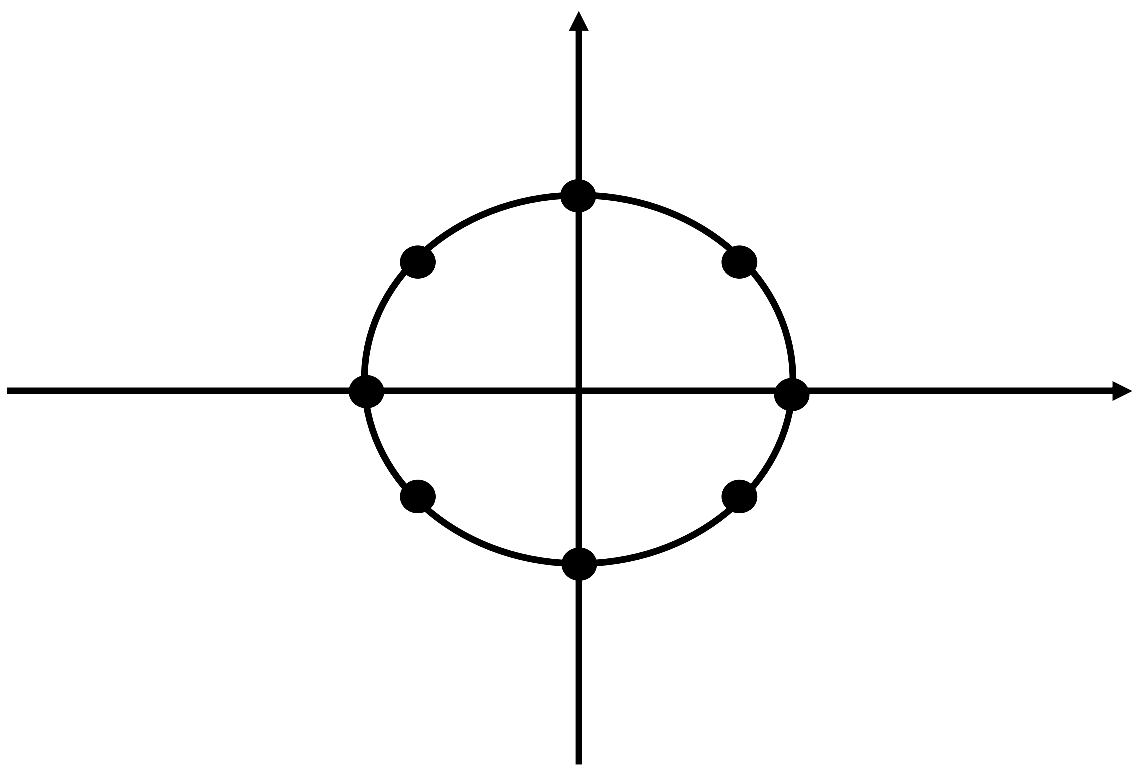
VECTOR SET

$$\boxed{\begin{aligned} &M = \{\underline{s}_i = (\alpha_i, \beta_i)\}_{i=1}^{m} \subseteq R^2 \\ &\alpha_i = A\cos\varphi_i \\ &\beta_i = A\sin\varphi_i \\ &\varphi_i = \Phi + (i-1)\frac{2\pi}{m} \end{aligned}}$$

Example

8-PSK $\Phi = 0$

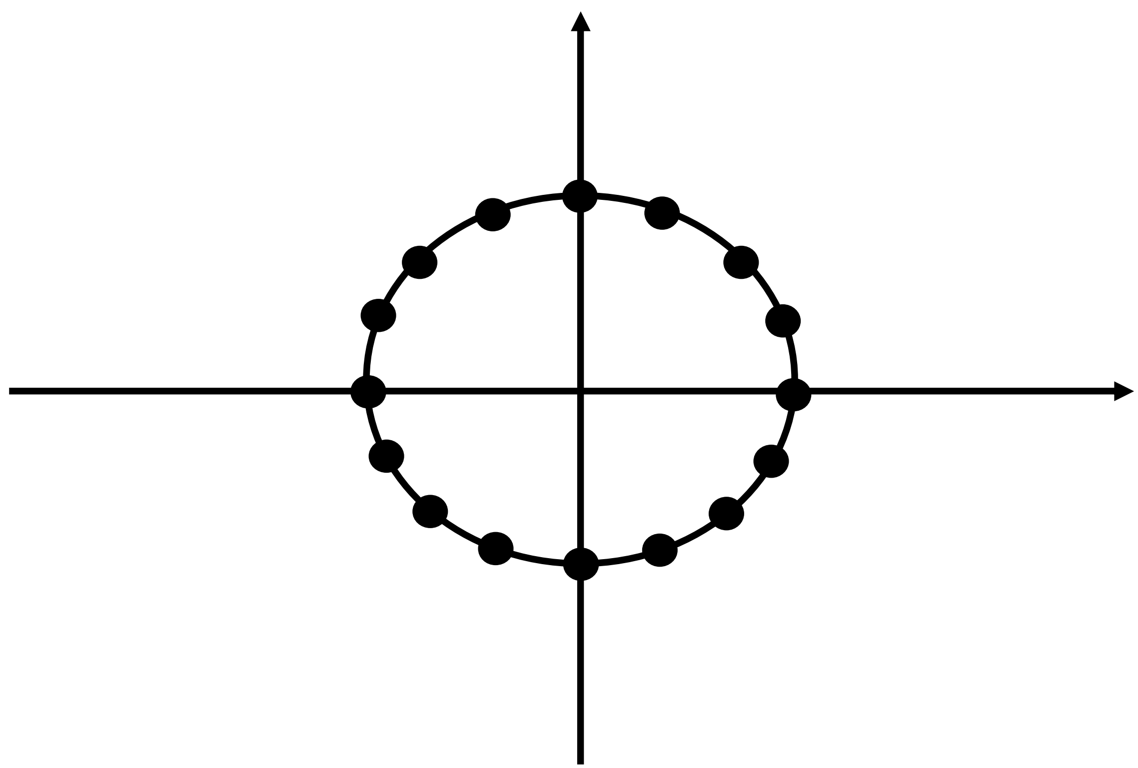
$$M = \{\underline{s}_1 = (A,0)\,,\ \underline{s}_2 = (A/\sqrt{2}, A/\sqrt{2})\,,\ \underline{s}_3 = (0, A)\,,\ \underline{s}_4 = (-A/\sqrt{2}, A/\sqrt{2}),$$
$$\underline{s}_5 = (-A,0)\,,\ \underline{s}_6 = (-A/\sqrt{2}, -A/\sqrt{2})\,,\ \underline{s}_7 = (0,-A)\,,\ \underline{s}_8 = (A/\sqrt{2}, -A/\sqrt{2})\} \subseteq R^2$$



Example

16-PSK $\Phi = 0$

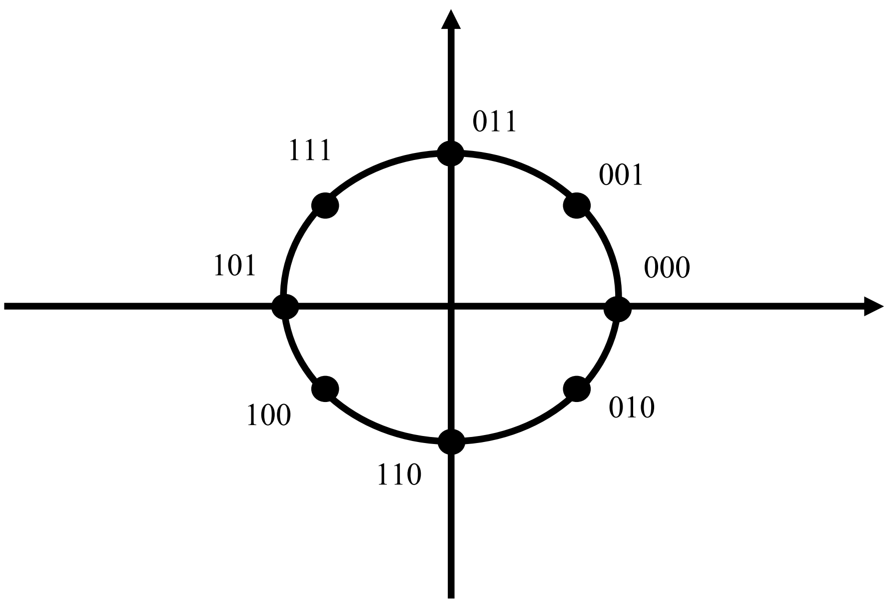
$$M = \{\underline{s}_1 = (A,0)\,,\, \underline{s}_2 = (0.924A, 0.383A)\,,\, \underline{s}_3 = (A/\sqrt{2}, A/\sqrt{2})\,,\, \underline{s}_4 = (0.383A, 0.924A),$$
$$\underline{s}_5 = (0, A)\,,\, \underline{s}_6 = (-0.383A, 0.924A,)\,,\, \underline{s}_7 = (-A/\sqrt{2}, A/\sqrt{2})\,,\, \underline{s}_8 = (-0.924A, 0.383A),$$
$$\underline{s}_9 = (-A,0)\,,\, \underline{s}_{10} = (-0.924A, -0.383A)\,,\, \underline{s}_{11} = (-A/\sqrt{2}, -A/\sqrt{2})\,,\, \underline{s}_{12} = (-0.383A, -0.924A),$$
$$\underline{s}_{13} = (0, -A)\,,\, \underline{s}_{14} = (0.383A, -0.924A,)\,,\, \underline{s}_{15} = (A/\sqrt{2}, -A/\sqrt{2})\,,\, \underline{s}_{16} = (0.924A, -0.383A)\} \subseteq R^2$$

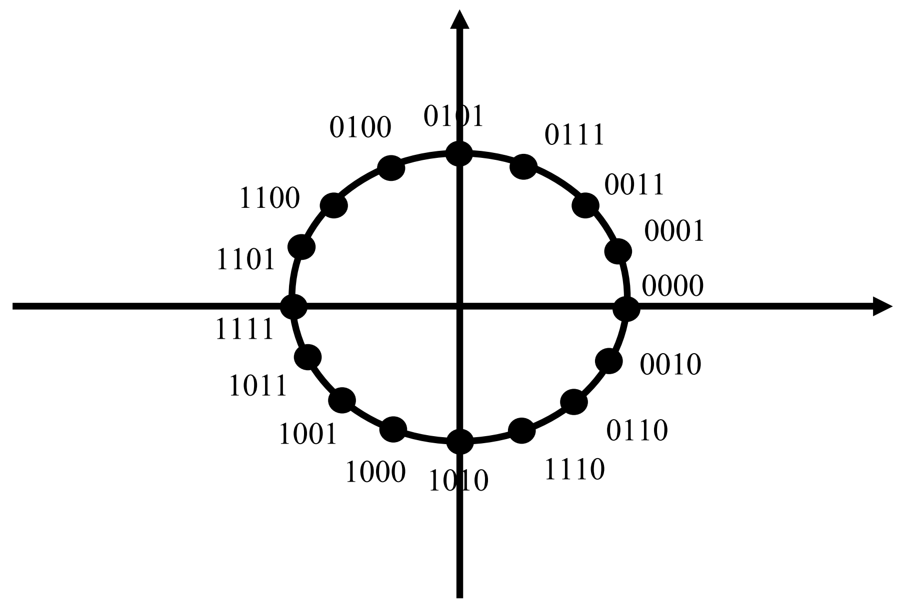


m-PSK: *binary labeling*

$$e : H_k \leftrightarrow M$$

It is always possible to build Gray labelings





m-PSK: transmitted waveform

$k = \log_2 m$ $\boxed{T = kT_b}$ $\boxed{R = \frac{R_b}{k}}$

Each symbol has duration T
Each symbol component (α and β) lasts for T second

Transmitted waveform

$$s(t) = \underbrace{\left[\sum_n \alpha[n] p(t - nT) \right]}_{i(t)} \cos(2\pi f_0 t) + \underbrace{\left[\sum_n \beta[n] p(t - nT) \right]}_{q(t)} \sin(2\pi f_0 t)$$

I component (in phase) Q component (in quadrature)

m-PSK: analytic signal

$$s(t) = \underbrace{\left[\sum_n \alpha[n] p(t - nT)\right]}_{i(t)} \cos(2\pi f_0 t) + \underbrace{\left[\sum_n \beta[n] p(t - nT)\right]}_{q(t)} \sin(2\pi f_0 t)$$

$$s(t) = \mathrm{Re}\left[\dot{s}(t)\right] = \mathrm{Re}\left[\tilde{s}(t) e^{j2\pi f_0 t}\right]$$

$$\tilde{s}(t) = i(t) - jq(t) = \sum_n \gamma[n] p(t - nT) \qquad \gamma[n] = \alpha[n] - j\beta[n]$$

m-PSK: *bandwidth and spectral efficiency*

Transmitted waveform

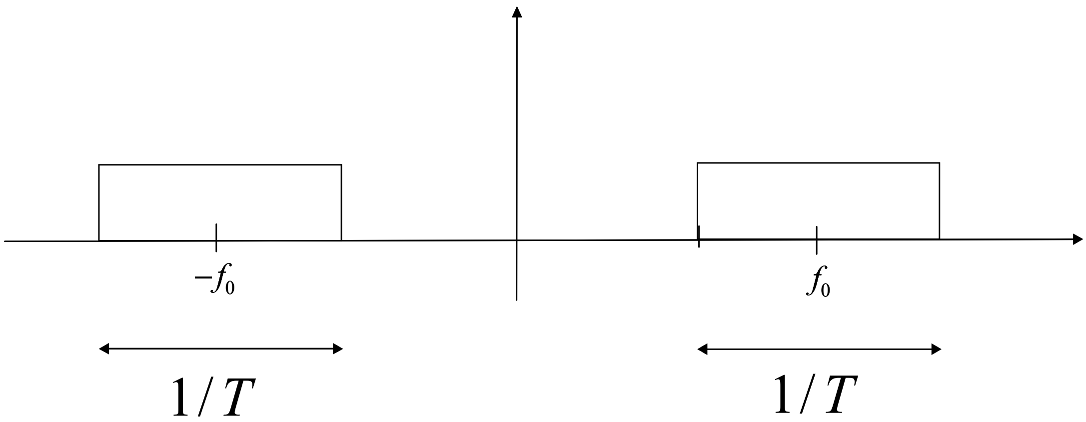
$$s(t) = \left[\sum_n \alpha[n] p(t - nT) \right] \cos(2\pi f_0 t) + \left[\sum_n \beta[n] p(t - nT) \right] \sin(2\pi f_0 t)$$

$$G_s(f) = z\left[\left|P(f - f_0)\right|^2 + \left|P(f + f_0)\right|^2 \right] \qquad z \in R$$

Each symbol $\alpha[n]$ and $\beta[n]$ has time duration $T = kT_b$

m-PSK: *bandwidth and spectral efficiency*

Case 1: $p(t)$ = ideal low pass filter



Total bandwidth (ideal case)

$$\boxed{B_{id} = R = \frac{R_b}{k}}$$

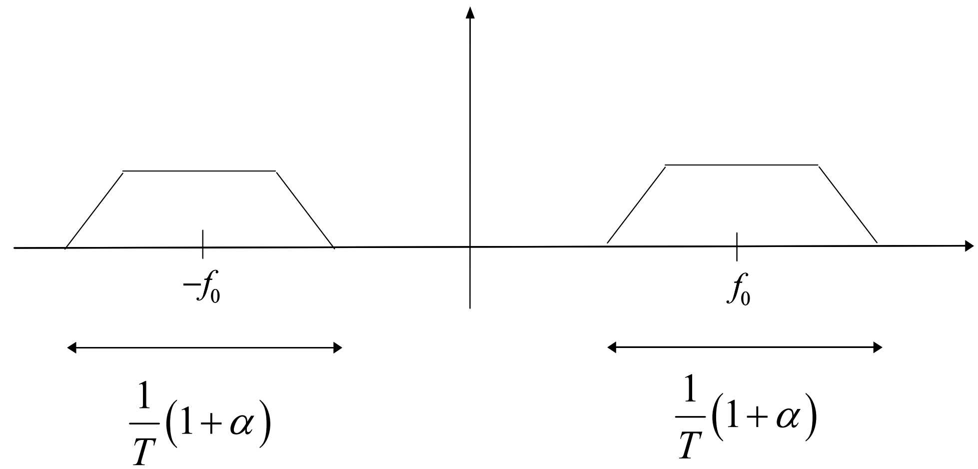
$\Downarrow$

Spectral efficiency (ideal case)

$$\boxed{\eta_{id} = \frac{R_b}{B_{id}} = k \ bps/Hz}$$

***m-PSK**: bandwidth and spectral efficiency*

Case 2: $p(t)$ = RRC filter with roll off α



Total bandwidth $$B = R(1+\alpha) = \frac{R_b}{k}(1+\alpha)$$

$$\Downarrow$$

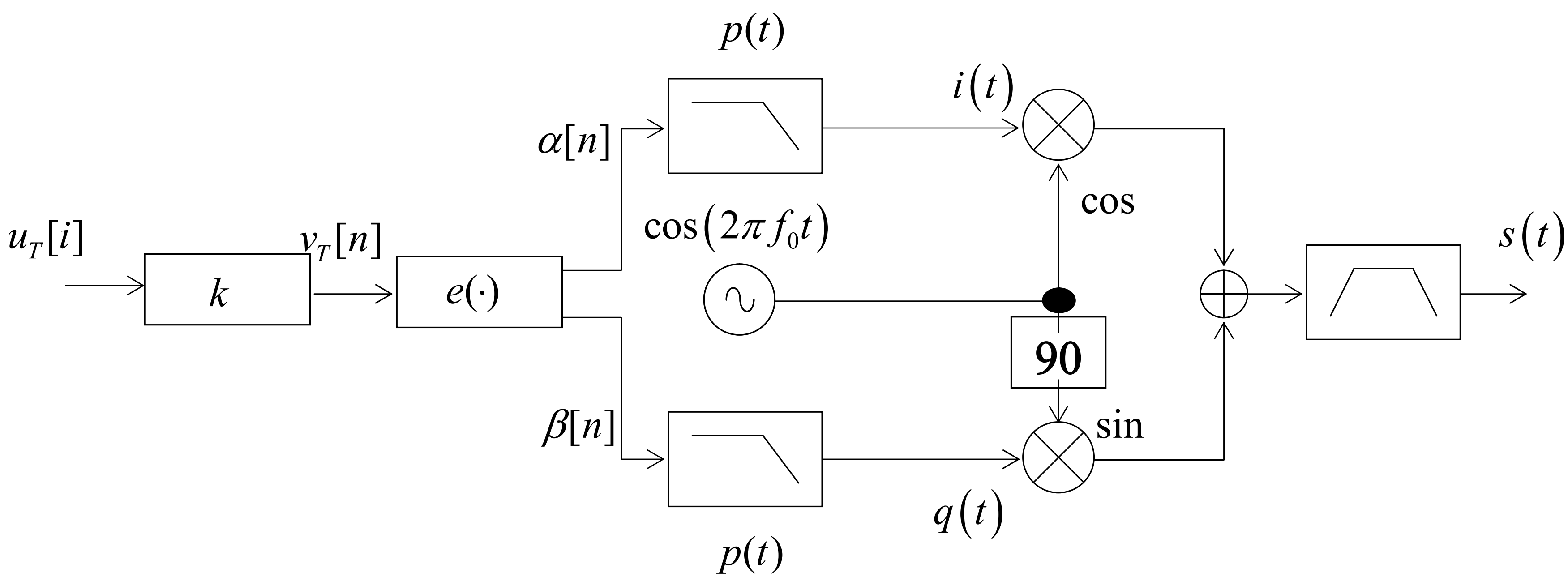
Spectral efficiency $$\boxed{\eta = \frac{R_b}{B} = \frac{k}{(1+\alpha)}\, bps / Hz}$$

Exercize

Given a bandpass channel with bandwidth B = 4000 Hz, centred around f_0=2 GHz, compute the maximum bit rate R_b we can transmit over it with an 8-PSK constellation or a 16-PSK constellation in the two cases:

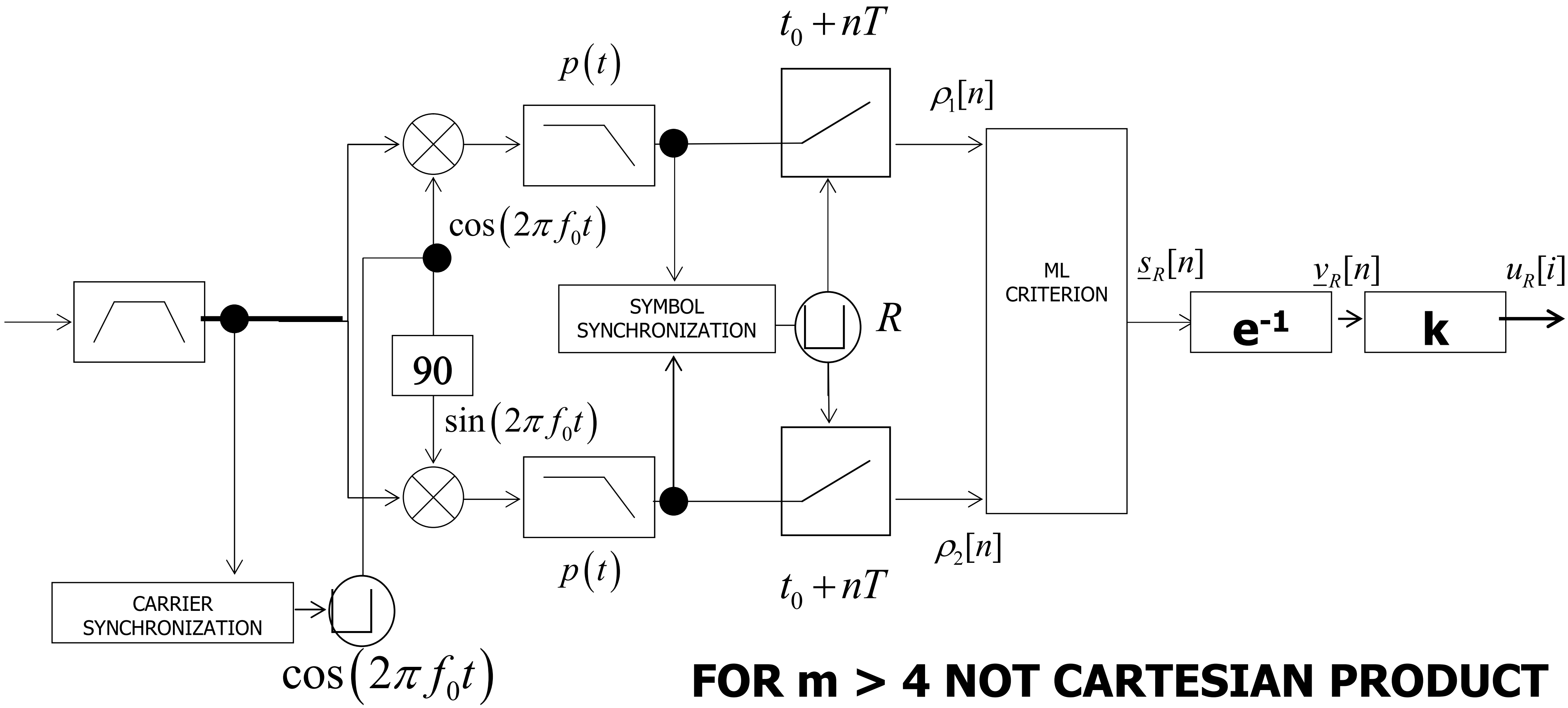
- Ideal low pass filter
- RRC filter with α=0.25

m-PSK: modulator



FOR m > 4 NOT CARTESIAN PRODUCT

m-PSK: *demodulator*



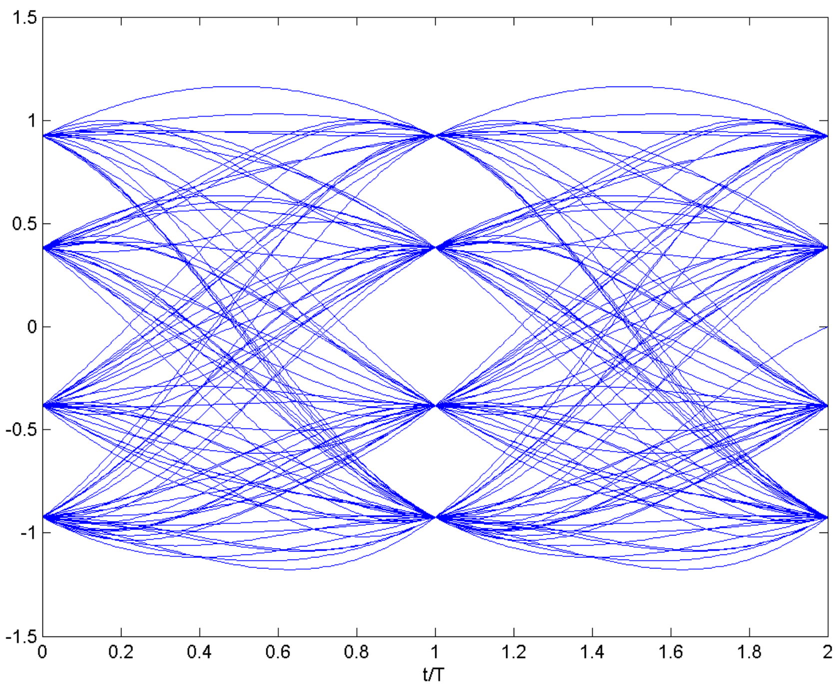
FOR m > 4 NOT CARTESIAN PRODUCT

Voronoi regions = plane sectors

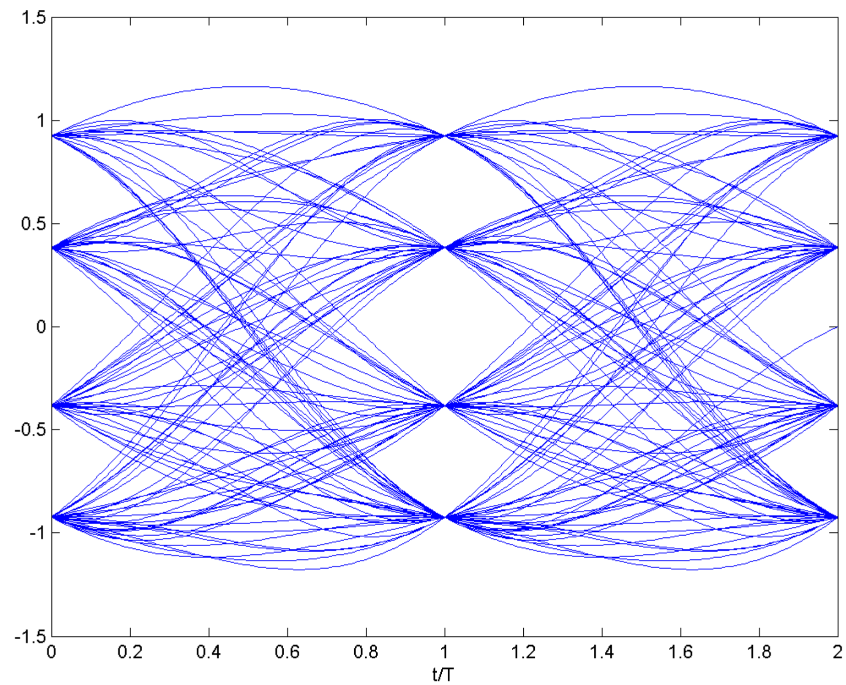
m-PSK: *eye diagram*

8-PSK constellation with RRC filter (□=0.5)

[α and β components = 0.924,0.383,-0.383,-0.924]



Channel I

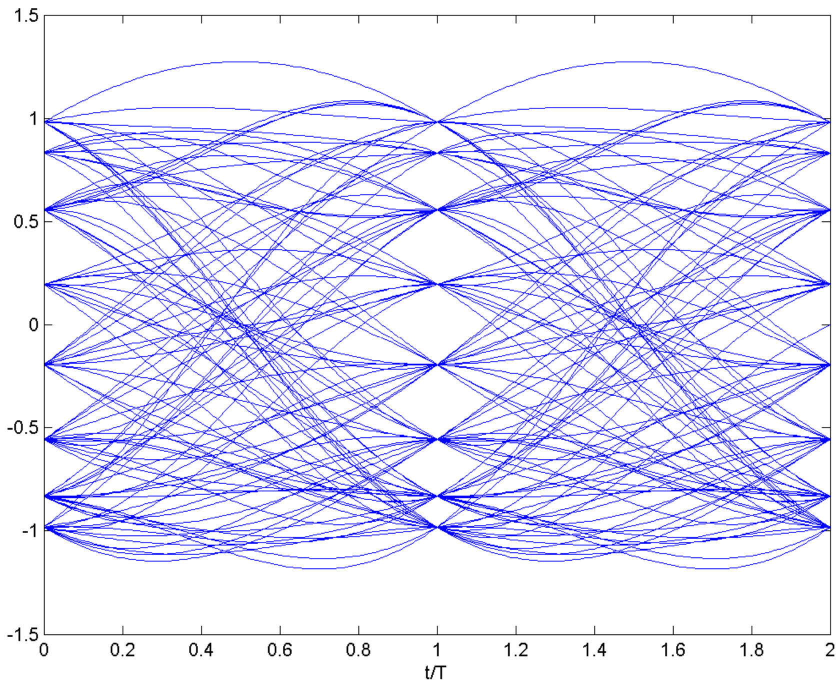


Channel Q

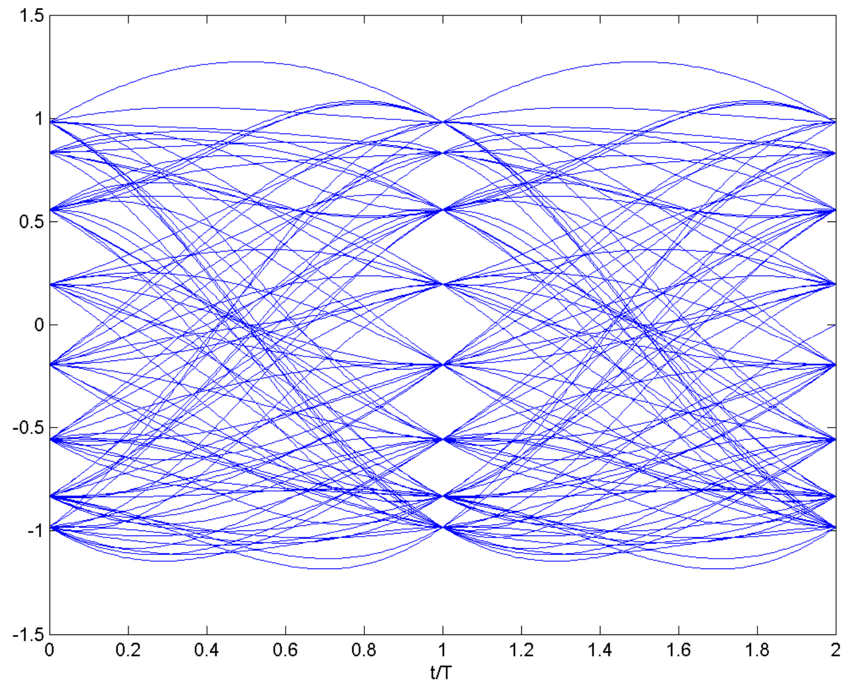
***m-PSK**: eye diagram*

16-PSK constellation with RRC filter (α=0.5)

[α and β components = 0.981,0.832,0.556,0.195,-0.195,-0.556,-0.832,-0.981]



Channel I



Channel Q

m-PSK constellation: *error probability*

By applying the asymptotic approximation we can obtain

$$\boxed{P_b(e) \approx \frac{1}{k} erfc\left(\sqrt{k \frac{E_b}{N_0} \sin^2\left(\frac{\pi}{m}\right)}\right)}$$

The performance decrease for increasing *m*

(minimum distance decreases)

m-PSK constellation: error probability

4-PSK: $P_b(e) \approx \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$

8-PSK: $P_b(e) \approx \frac{1}{3} erfc\left(\sqrt{0.439\frac{E_b}{N_0}}\right)$ - 3.6 dB with respect to 4-PSK

16-PSK: $P_b(e) \approx \frac{1}{4} erfc\left(\sqrt{0.152\frac{E_b}{N_0}}\right)$ - 4.6 dB with respect to 8-PSK

No one uses m-PSK for m > 16: very poor BER performance

***m-PSK constellation**: error probability*