Nhập môn Kỹ thuật Truyền thông

Bài 8: Tiêu chuẩn Nyquist cho No ISI

PGS. Tạ Hải Tùng

Tiêu chuẩn Nyquist

Cho hàm số $x(t) = p(t) * q(t)$

Điều kiện NO ISI:

$$x\left(t_0 + iT\right) = 1 \quad \text{if} \quad i = 0$$

$$x\left(t_0 + iT\right) = 0 \quad \text{if} \quad i \neq 0$$

Để đơn giản ta coi $t_0=0$ (thảo luận sau).

Điều kiện NO ISI trở thành:

$$\boxed{\begin{array}{l} x(iT) = 1 \quad \text{if} \quad i = 0 \\ x(iT) = 0 \quad \text{if} \quad i \neq 0 \end{array}}$$

Ta gọi đây là Tiêu chuẩn Nyquist trong miền thời gian.

Tiêu chuẩn Nyquist

Định lý Nyquist thứ 2

Nếu một hàm $x(t)$ thỏa mãn điều kiện Tiêu chuẩn Nyquist ở miền thời gian:

$$x(iT) = 1 \quad \text{if} \quad i = 0 \qquad\qquad x(iT) = 0 \quad \text{if} \quad i \neq 0$$

Ta có thể biểu diễn:

$$x(t)\sum_i \delta(t - iT) = \delta(t)$$

Theo đó:

$$X(f) * \frac{1}{T}\left[\sum_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)\right] = 1$$

Đây là Tiêu chuẩn Nyquist theo miền tần số:

$$\boxed{\sum_n X\left(f - \frac{n}{T}\right) = T}$$

Cho hàm $x(t)$, để kiểm tra Tiêu chuẩn theo miền tần số, ta thực hiện:

- xem xét tất cả các phiên bản của $X(f)$ tập trung xung quanh các tần số trung tâm là bội của $1/T$
- cộng các phiên bản

Kết quả phải là một hằng số theo trục tần số:

$$\boxed{\sum_n X\left(f-\frac{n}{T}\right)=T}$$

Tiêu chuẩn Nyquist

$$\boxed{\begin{array}{l} x(iT) = 1 \quad \text{if} \quad i = 0 \\ x(iT) = 0 \quad \text{if} \;\; i \neq 0 \end{array}}$$

$$\boxed{\sum_n X\left(f - \frac{n}{T}\right) = T}$$

Những hàm *x(t)* nào thỏa mãn tiêu chuẩn này?

Xem xét:

• Các hàm *x(t)* được đặc trưng bởi phổ *X(f)* (kết quả của biến đổi Fourier) với miền tần số vô hạn.

• Các hàm *x(t)* được đặc trưng bởi phổ *X(f)* (kết quả của biến đổi Fourier) với miền tần số hữu hạn.

Các hàm $x(t)$ được đặc trưng bởi phổ $X(f)$ (kết quả của biến đổi Fourier) với miền tần số vô hạn.

Có thể tìm thấy rất nhiều các hàm x(t) như vậy.

Trong số đó, ta đã biết các dạng hàm $x(t)=p(t)*q(t)$ với:

- $p(t)$ = véc-tơ trực chuẩn với miền thời gian $[0,T[$
- $q(t) =p(T-t)$

chắc chắn thỏa mãn Tiêu chuẩn Nyquist.

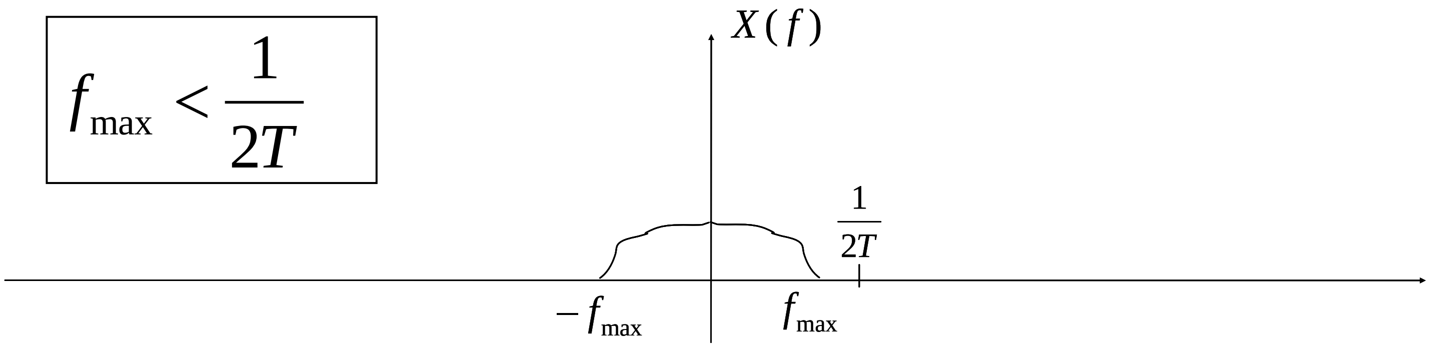
Tiêu chuẩn Nyquist

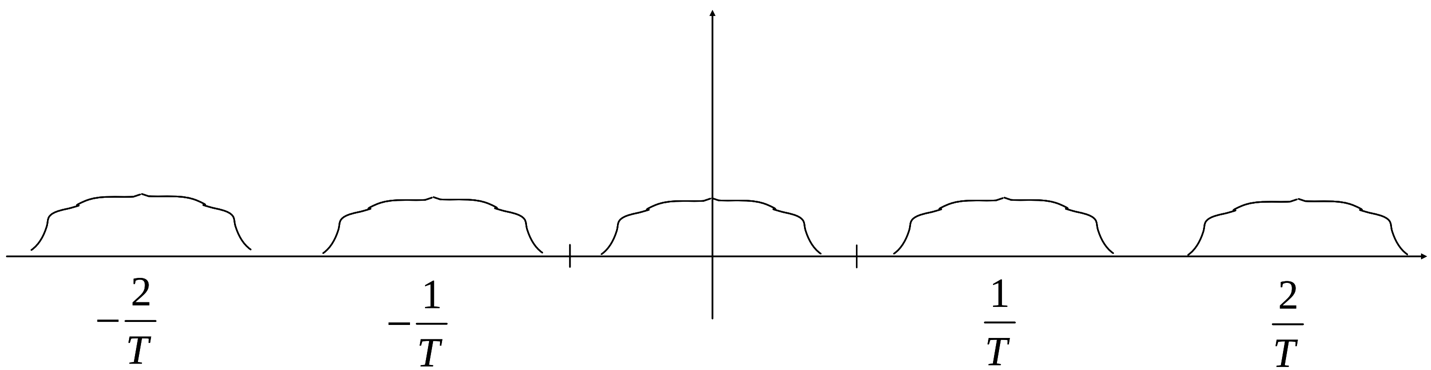
Các hàm $x(t)$ được đặc trưng bởi phổ tín hiệu $X(f)$ (hình thành do biến đổi Fourier) với miền tần số hữu hạn $[-f_{max}, f_{max}]$

Có tồn tại hàm x(t) nào không?

Tiêu chuẩn Nyquist, trường hợp 1

Trường hợp 1: $\boxed{f_{\max} < \frac{1}{2T}}$



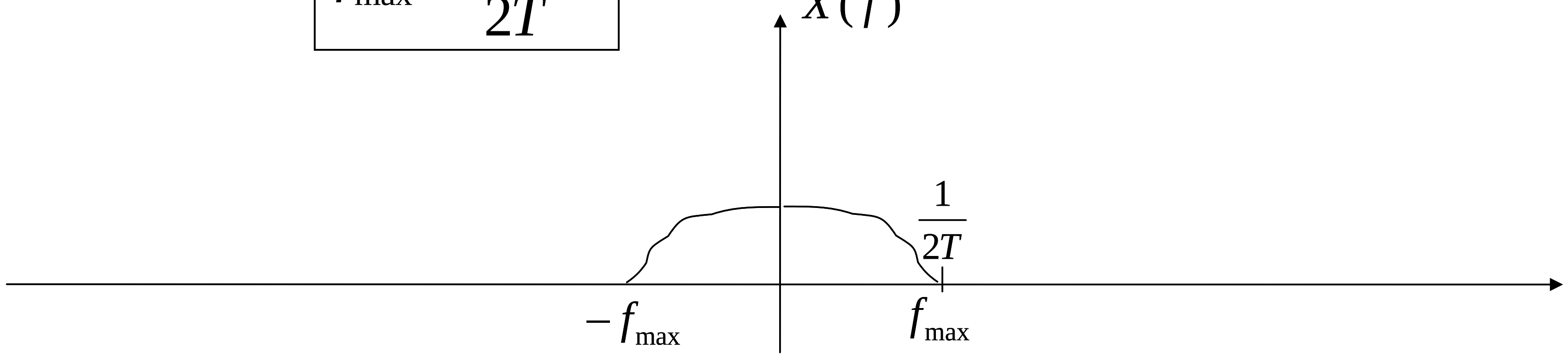


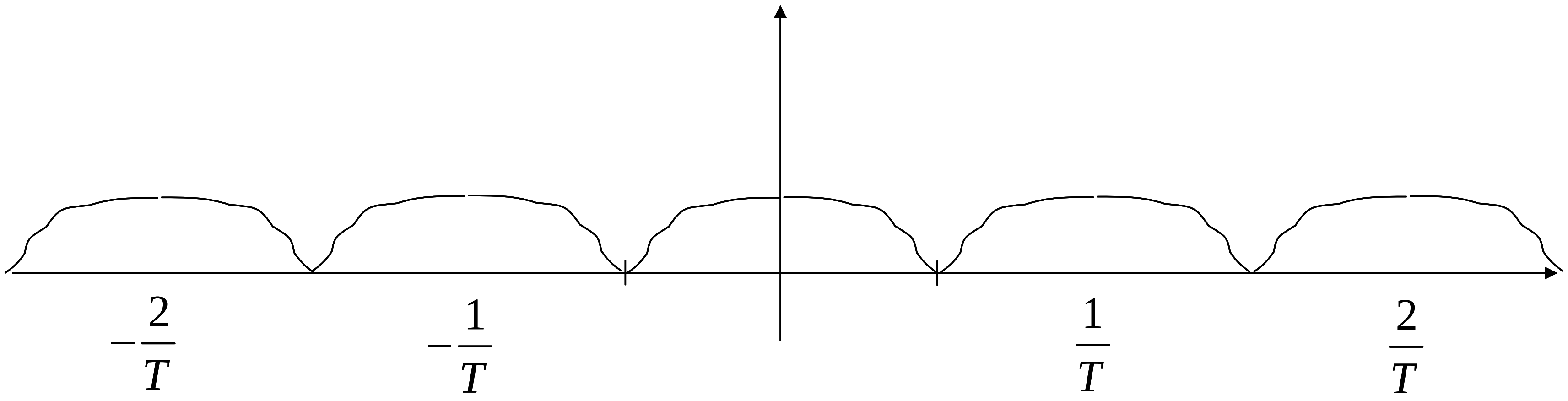
Trong trường hợp này, không thể tìm được hàm x(t) thỏa mãn Tiêu chuẩn Nyquist ở miền tần số, do tồn tại các điểm lõm (holes) tại các tần số là bội của *n/2T*)

$$\sum_n X\left(f - \frac{n}{T}\right) = T$$

Tiêu chuẩn Nyquist, trường hợp 2

Trường hợp 2: $\boxed{f_{\max} = \dfrac{1}{2T}}$

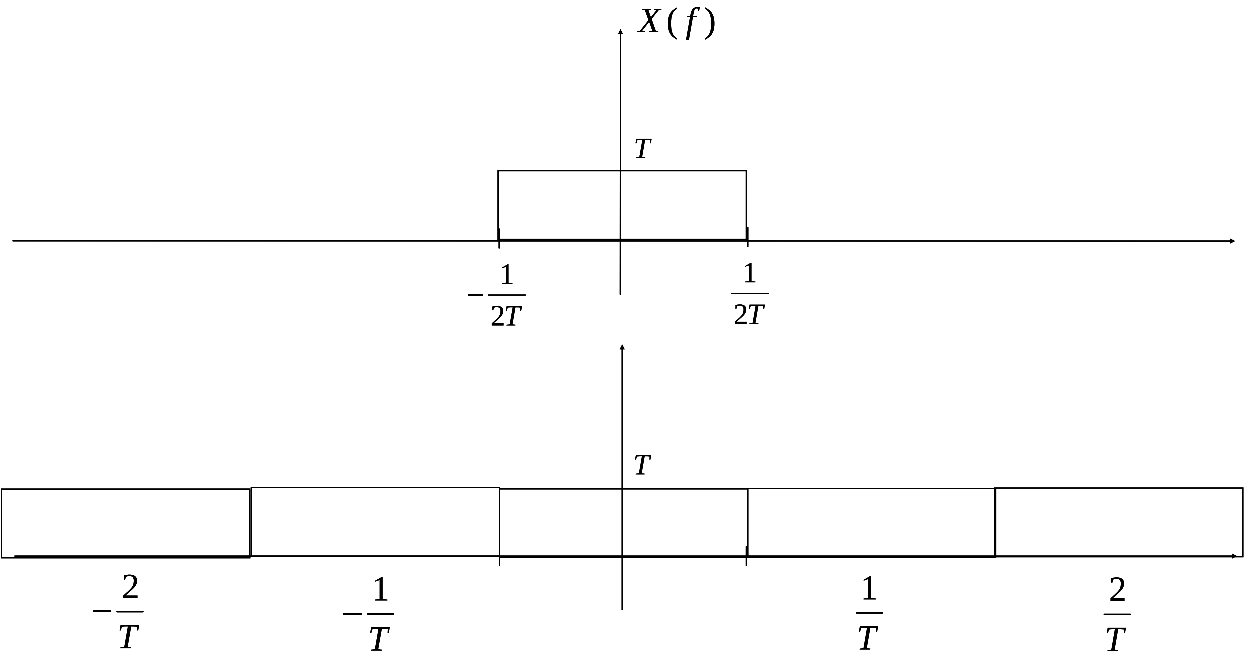




Tiêu chuẩn Nyquist, trường hợp 2

Trường hợp 2: $$\boxed{f_{\max} = \frac{1}{2T}}$$

Một giải pháp: bộ lọc thông thấp lý tưởng **(ideal low pass filter)**

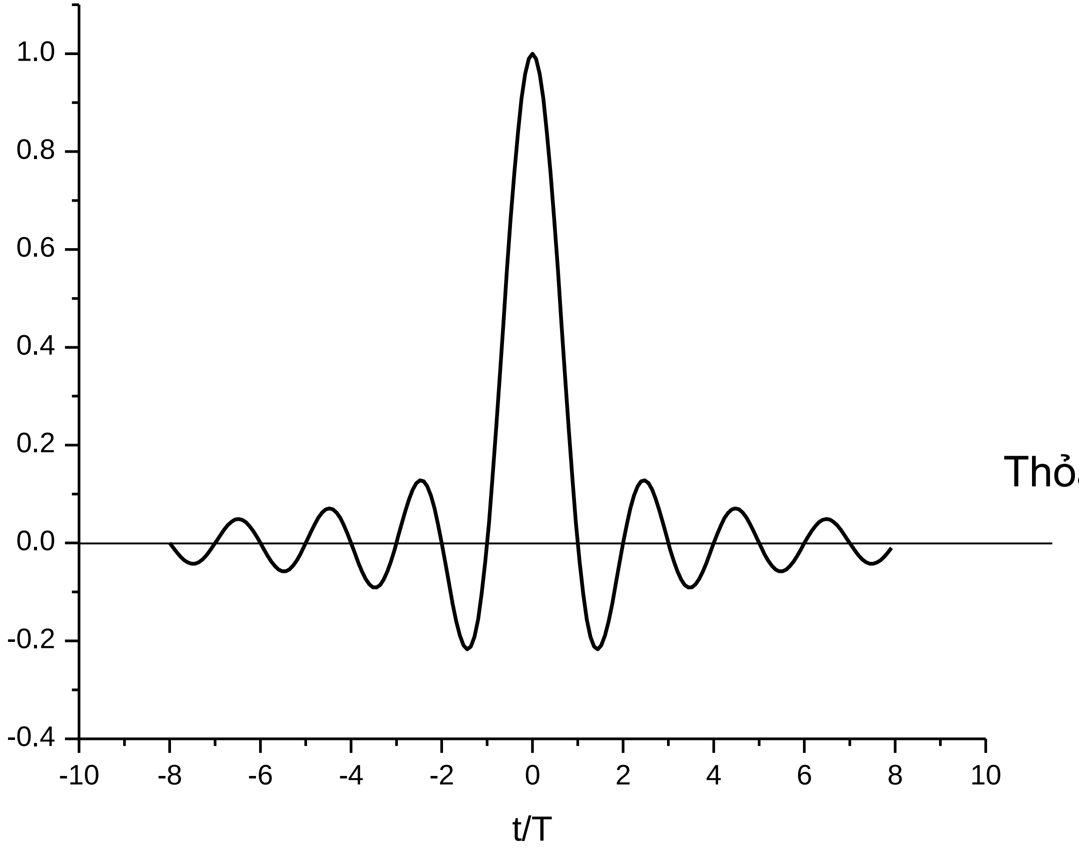


Thỏa mãn Tiêu chuẩn Nyquist miền thời gian:

$$\sum_n X\left(f - \frac{n}{T}\right) = T$$

Bộ lọc thông thấp lý tưởng

Bộ lọc thông thấp lý tưởng: $\boxed{x(t) = \dfrac{\sin(\pi t / T)}{(\pi t / T)}}$

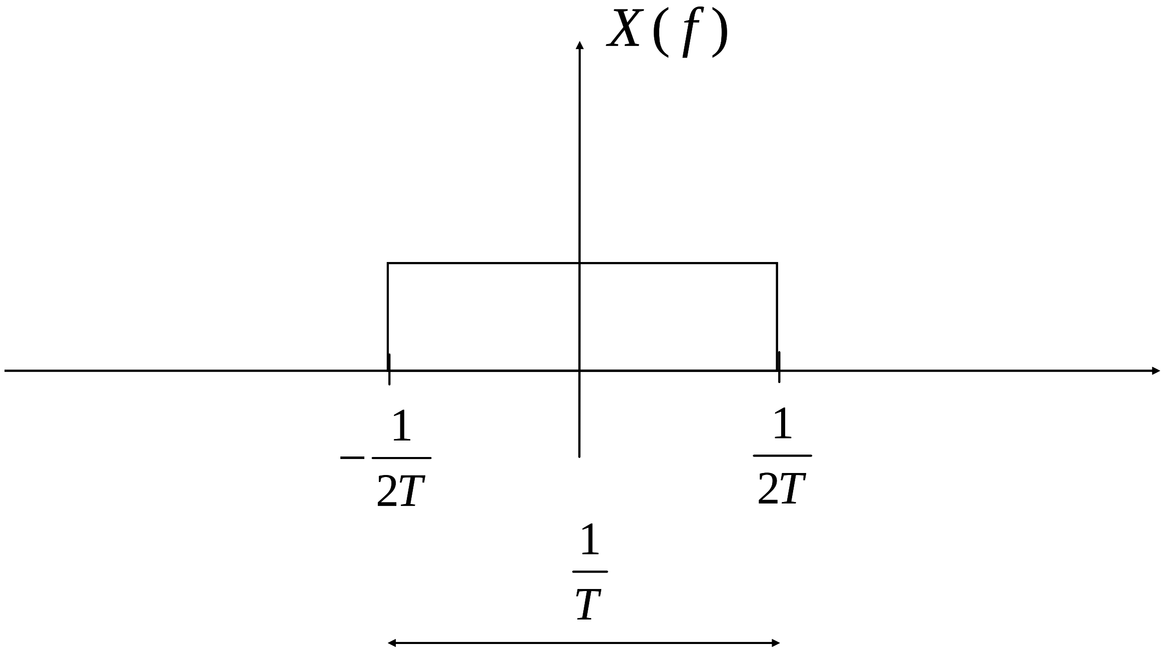


Thỏa mãn điều kiện Tiêu chuẩn Nyquist bên miền thời gian

$$x(iT) = 1 \quad \text{if} \quad i = 0$$

$$x(iT) = 0 \quad \text{if} \quad i \neq 0$$

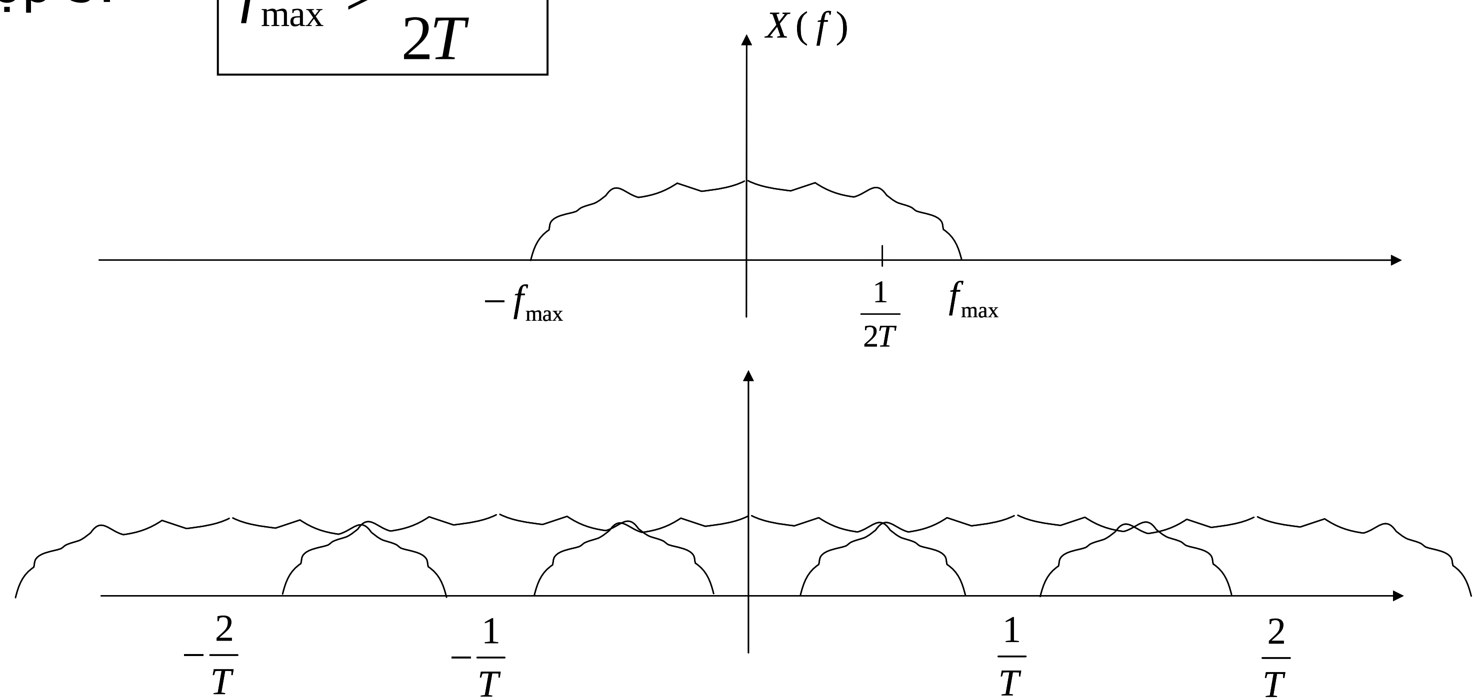
Miền tần số



Đây là dạng song thỏa mãn tiêu chuẩn với băng thông "chiếm dụng" tối ưu

Tiêu chuẩn Nyquist, trường hợp 3

Trường hợp 3: $\boxed{f_{\max} > \dfrac{1}{2T}}$



Tồn tại rất nhiều hàm x(t) thỏa mãn điều kiện Tiêu chuẩn Nyquist trong trường hợp này.

Các bộ lọc Cosine nâng lên (Raised cosine filters)

Ví dụ (rất quan trọng trong ứng dụng)

Các bộ lọc Raised Cosine

$$\boxed{x(t)=\frac{\sin(\pi t/T)}{(\pi t/T)}\frac{\cos(\alpha\pi t/T)}{1-(2\alpha t/T)^2}}$$

Hệ số uốn "roll-off":

$$0\le\alpha\le 1$$

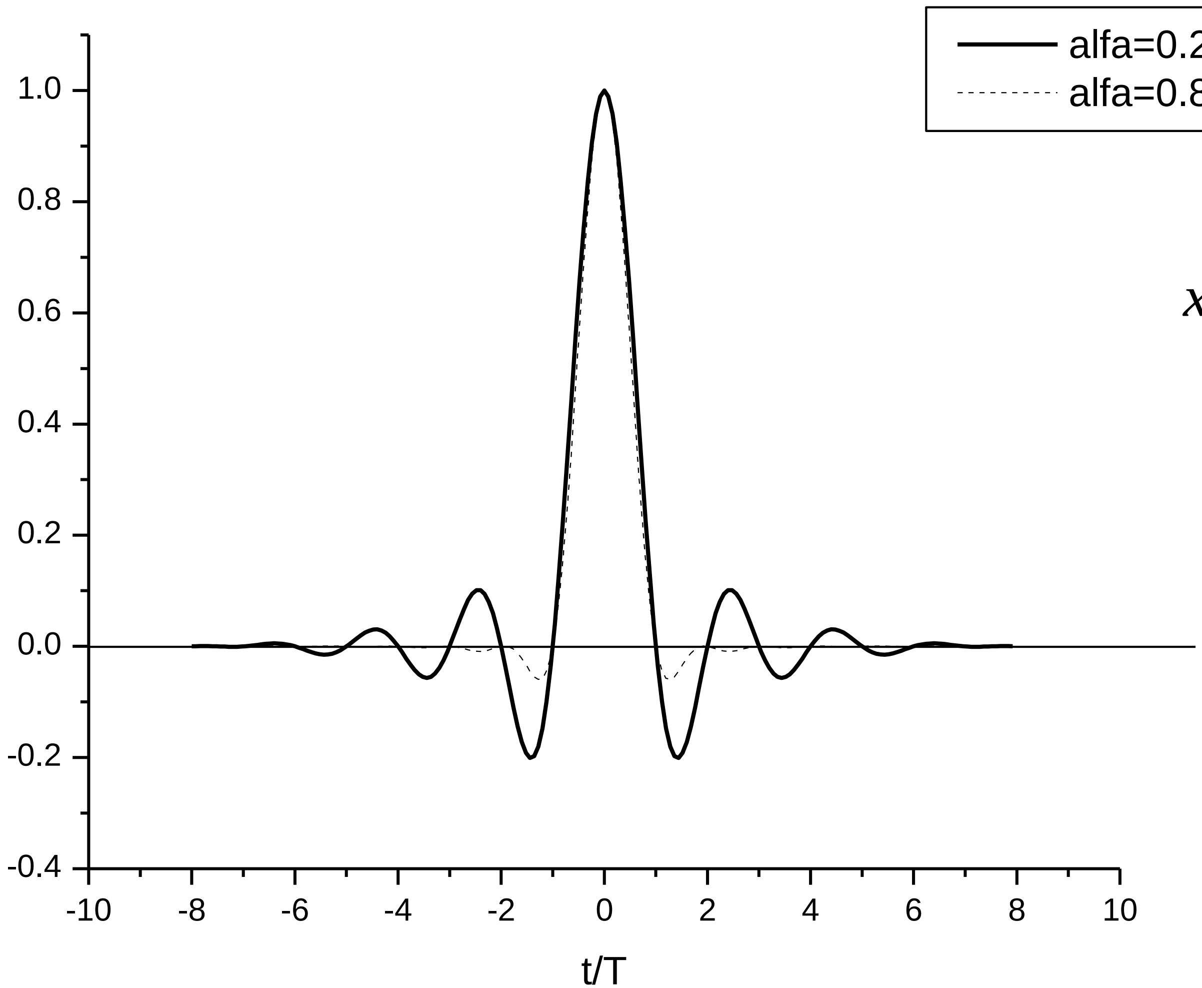
Lưu ý:

1. Chắc chắn thỏa mãn Tiêu chuẩn Nyquist miền t/gian:

$$x(iT)=1 \quad \text{if} \quad i=0$$
$$x(iT)=0 \quad \text{if} \quad i\neq 0$$

2. Với α=0 ta có bộ lọc thông thấp lý tưởng

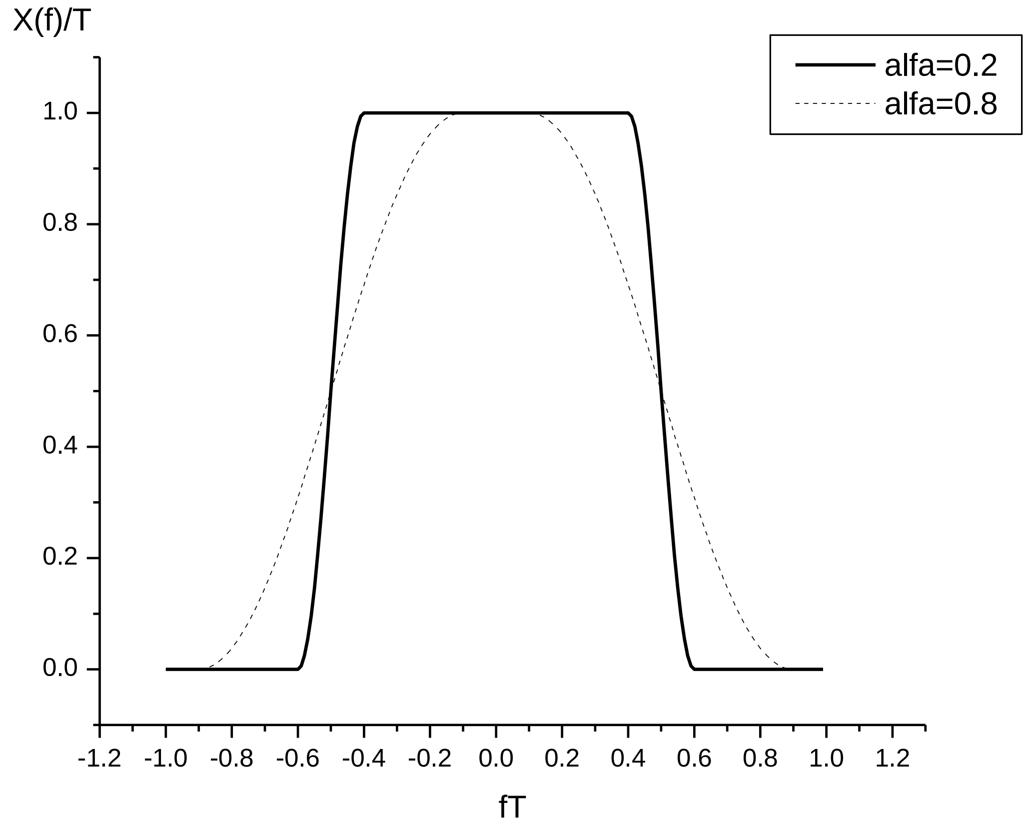
Các bộ lọc Raised cosine



$$x(t) = \frac{\sin(\pi t / T)}{(\pi t / T)} \frac{\cos(\alpha \pi t / T)}{1 - (2\alpha t / T)^2}$$

Các bộ lọc Raised cosine

Đáp ứng tần số



$$X(f) = T \quad \text{for} \quad |f| \le \frac{(1-\alpha)}{2T}$$

$$X(f) = \frac{T}{2}\left[1 - \sin\left(\frac{\pi T}{\alpha}\left(|f| - \frac{1}{2T}\right)\right)\right] \quad \text{for} \quad \frac{(1-\alpha)}{2T} \le |f| \le \frac{(1+\alpha)}{2T}$$

$$X(f) = 0 \quad \text{for} \quad |f| \le \frac{(1+\alpha)}{2T}$$

Bộ lọc Raised cosine

Các bộ lọc raised cosine có biểu diễn miền thời gian

$$x(t) = \frac{\sin(\pi t / T)}{(\pi t / T)} \frac{\cos(\alpha \pi t / T)}{1 - (2\alpha t / T)^2}$$

Trong trường hợp có trễ thời gian

Đến tận giwof, chúng ta đang xem xét trường hợp với $t_0=0$

$$\rho[n] = y(t_0 + nT) \;\; \text{with} \;\; t_0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} x(iT) = 1 \;\; \text{if} \;\; i = 0 \\ x(iT) = 0 \;\; \text{if} \;\; i \neq 0 \end{array}$$

Cho hàm $x(t)$ thỏa mãn tiêu chuẩn với $t_0=0$, hàm số $x'(t) = x(t-t_0)$ thỏa mãn điều kiện với mọi t_0

(lưu ý rằng, tại phía bộ thu, mạch đồng bộ ký hiệu luôn có thể xác định chính xác t_0)

Các bộ lọc truyền (TX) và nhận (RX)

Chúng ta xem xét tính chất của hàm $x(t)$, với

$$x(t)=p(t)*q(t)$$

Bộ lọc phối hợp đặc trưng bởi $q(t)$ được xác định như sau:

$$q(t)=p(T-t)$$

$$Q(f) = P(f)^* e^{-j2\pi fT}$$

Các bộ lọc TX và RX

Nếu $x(t)$=là bộ lọc thông thấp lý tưởng, hoặc bộ lọc $p(t)$ và $q(t)$ có biểu diễn như thế nào?

Nếu $p(t)$ là hàm chẵn $p(t)=p(-t)$

Ta có $q(t) = p(T-t)=p(t-T)$

Chúng ta có thể $q(t) = p(t)$

Đỗ trễ T được xác định bởi các mạch đồng bộ.

Ta có $$X(f) = P(f)\ Q(f)$$

Nếu $q(t)=p(t)$ theo đó $Q(f)=P(f)$ và

$$X(f) = P(f)^2 \quad \rightarrow \quad P(f) = Q(f) = \sqrt{X(f)}$$

Chúng ta chia hàm $x(t)$ thành hai hàm tương tự nhau, được gọi là bộ lọc truyền $p(t)$ và bộ lọc nhận $q(t)$

Bộ lọc TX thông thấp lý tưởng

Với bộ lọc thông thấp lý tưởng $x(t) = \frac{\sin(\pi t / T)}{(\pi t / T)}$

Ta có:

$$\boxed{p(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\sin(\pi t / T)}{(\pi t / T)}}$$

Bộ lọc truyền kiểu RRC

Bộ lọc raised cosine:

$$x(t) = \frac{\sin(\pi t / T)}{(\pi t / T)} \frac{\cos(\alpha \pi t / T)}{1 - (2\alpha t / T)^2}$$

Ta có

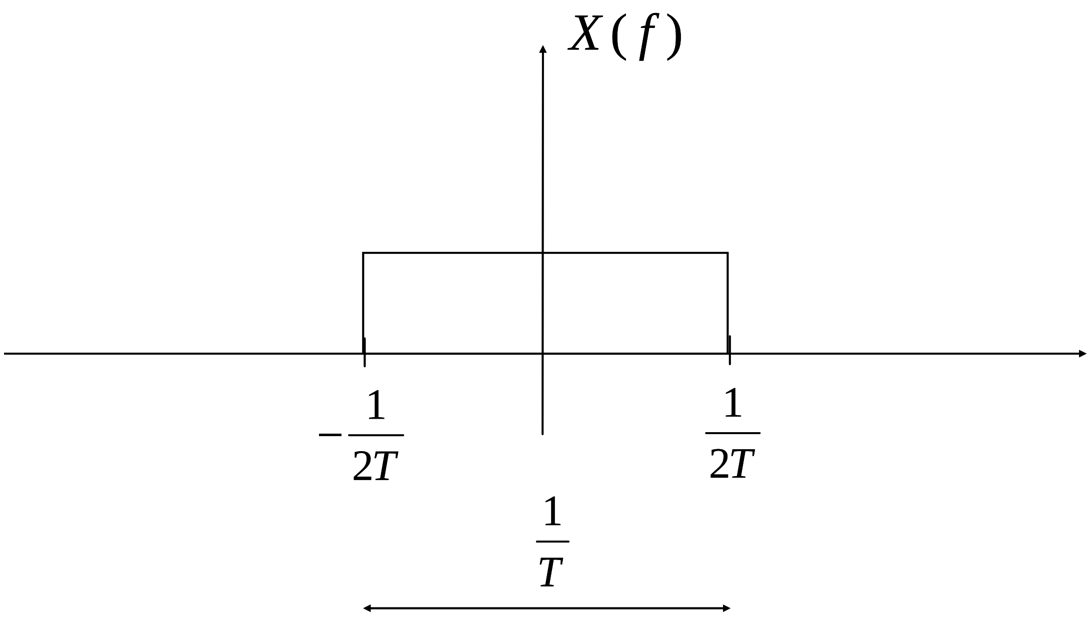
Bộ lọc
Root Raised Cosine (RRC)

$$\boxed{p(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\sin(\pi \frac{t}{T}(1-\alpha)) + 4\alpha \frac{t}{T} \cos(\pi \frac{t}{T}(1+\alpha))}{\pi \frac{t}{T}(1-(4\alpha \frac{t}{T})^2)}}$$

Bộ lọc TX kiểu thông thấp lý tưởng

Bộ lọc truyền $p(t)$: bộ lọc thông thấp lý tưởng

Băng thông chiếm dụng tối thiểu: $\boxed{\dfrac{1}{2T}}$



Bộ lọc truyền kiểu RRC

Bộ lọc truyền $p(t)$**: bộ lọc root raised cosine**

Băng thông chiếm dụng: $$\boxed{\frac{1}{2T}(1+\alpha)}$$