PHẦN 2: HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ CƯƠNG

Chương I. TẬP HỢP – LOGIC – ÁNH XẠ - CẤU TRÚC ĐẠI SỐ - SỐ PHỨC

Bài 1.

a) Bảng chân trị

A	B	C	$B\vee C$	$A\wedge(B\vee C)$	$(A\wedge(B\vee C))\to C$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1

a) Bảng chân trị

A	B	C	$\overline{A}$	$B\vee C$	$\overline{A}\wedge(B\vee C)$	$\left[\overline{A}\wedge(B\vee C)\right]\wedge B$
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	1	0	0

Bài 2:

p	q	$p\to q$	$(p\to q)\to q$	$p\vee q$
0	0	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

Vậy hai mệnh đề $(p \to q) \to q$ và $p \vee q$ là tương đương logic.

Bài 3:

a) Lập bảng chân trị

A	B	$\overline{A}$	$A \wedge B$	$\overline{A} \wedge \overline{B}$	$A \leftrightarrow B$	$(A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$
0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1	1

Vậy $A \leftrightarrow B$ và $(A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$ là tương đương logic.

b) Giả sử $A = B = C = 0$

Khi đó $A \to B = 1$; $(A \to B) \to C = 0$

$$B \to C = 1;\ A \to (B \to C) = 1$$

Vậy $(A \to B) \to C$ và $A \to (B \to C)$ không tương đương logic.

c)

A	B	$\overline{A}$	$A \leftrightarrow B$	$\overline{A \leftrightarrow B}$	$\overline{A} \leftrightarrow B$
0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1

Vậy $\overline{A \leftrightarrow B}$ và $\overline{A} \leftrightarrow B$ là tương đương logic.

Bài 4.

Ta có: $(A \wedge C) \to (B \wedge C)$ và $(A \vee C) \to (B \vee C)$ là 1 mệnh đề đúng.

Giả sử $A \to B$ sai thì $A = 1$ và $B = 0$

+ $C = 0 \Rightarrow A \vee C = 1$ và $B \vee C = 0 \Rightarrow$ $(A \vee C) \to (B \vee C)$ sai (vô lý)

+ $C = 1 \Rightarrow A \wedge C = 1$ và $B \wedge C = 0 \Rightarrow$ $(A \wedge C) \to (B \wedge C)$ sai (vô lý)

Vậy giả sử là sai nên $A \to B$ là mệnh đề đúng.

Bài 5.

Do 2020 chẵn nên 2020 là số lẻ là mệnh đề sai (=0)

$2020 \not\vdots\, 3$ nên 2020 chia hết cho 3 là mệnh đề sai (=0)

Vậy mệnh đề "Do 2020 là số lẻ nên nó chia hết cho 3" là mệnh đề đúng.

Bài 6.

Mệnh đề ban đầu: "$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2$"

Mệnh đề phủ định: "$\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}, f(x_1) = f(x_2) \wedge x_1 \neq x_2$"

(Chú ý: $\overline{A \to B}$ và $A \wedge \overline{B}$ là 2 mệnh đề tương đương)

Do vậy để chứng minh 1 hàm số không là đơn ánh ta chỉ cần chỉ ra $\exists x_1, x_2$ mà $x_1 \neq x_2$ và $f(x_1) = f(x_2)$.

Bài 7.

a) $f(x).g(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Tập nghiệm $C = A \cup B$.

b) $f^2(x) + g^2(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x) = 0$

$\Rightarrow$ Tập nghiệm $D = A \cap B$.

Bài 8.

$A = [3;6);\ B = (1;5);\ C = [2;4]$

$\Rightarrow A \cap B = [3;5)$

$\Rightarrow (A \cap B) \setminus C = (4;5)$.

Bài 9.

a) Chú ý: $B \setminus C = B \cap \overline{C}$.

- $A \cap (B \setminus C) = A \cap \left(B \cap \overline{C}\right) = A \cap B \cap \overline{C}$

- $(A \cap B) \setminus (A \cap C) = A \cap B \cap \overline{A \cap C} = A \cap B \cap \left(\overline{A} \cup \overline{C}\right)$

$$= \left(A \cap B \cap \overline{A}\right) \cup \left(A \cap B \cap \overline{C}\right)$$

$$= A \cap B \cap \overline{C} \text{ (do } A \cap \overline{A} = \varnothing\text{)}.$$

Vậy $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

b) $A\cup\left(B\setminus A\right)=A\cup\left(B\cap\overline{A}\right)=\left(A\cup B\right)\cap\left(A\cup\overline{A}\right)$

$$=A\cup B.$$

Vậy $A\cup\left(B\setminus A\right)=A\cup B$.

c) • $\left(A\setminus B\right)\cap\left(C\setminus D\right)=A\cap\overline{B}\cap C\cap\overline{D}$

• $\left(A\cap C\right)\setminus\left(B\cup D\right)=A\cap C\cap\overline{B\cup D}$

$$=A\cap C\cap\left(\overline{B}\cap\overline{D}\right)$$

$$=A\cap\overline{B}\cap C\cap\overline{D}.$$

Vậy $\left(A\setminus B\right)\cap\left(C\setminus D\right)=\left(A\cap C\right)\setminus\left(B\cup D\right)$.

Bài 10.

a) + $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)\Leftrightarrow\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{1}{x_2}\Leftrightarrow x_1=x_2\left(\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\right)$

$\Rightarrow f$ là đơn ánh.

Do $\nexists x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ để $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x}=0\in\mathbb{R}\Rightarrow f$ không là toàn ánh.

+ $g\left(x_1\right)=g\left(x_2\right)\Leftrightarrow\dfrac{2x_1}{1+x_1^2}=\dfrac{2x_2}{1+x_2^2}$

Mà $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=g\left(2\right)=\dfrac{4}{5}$ nên $g\left(x\right)$ không là đơn ánh.

$g\left(3\right)\Leftrightarrow 2x=3x^2+3\Leftrightarrow 3x^2-2x+3=0$ (vô nghiệm) nên $g\left(x\right)$ không là toàn ánh.

+ Tìm $g\left(R\right)$

Ta có: $\left|\dfrac{2x}{x^2+1}\right|=\dfrac{|2x|}{x^2+1}\le\dfrac{|2x|}{2|x|}=1$ (Cauchy)

Và $\forall a\in\left[-1;1\right]$: phương trình $2x=a\left(x^2+1\right)$ có nghiệm thực $\left(\Delta=4-4a^2\ge 0\right)$ nên $g\left(R\right)=\left[-1;1\right]$.

b) $g\circ f=g\left(f\left(x\right)\right)=\dfrac{2.\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

Bài 11.

a) + $y \in f\left(A \cup B\right), f\left(x\right) = y$ thì $x \in A \cup B$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y \in f\left(A\right) \\ y \in f\left(B\right) \end{array}\right. \Rightarrow y \in f\left(A\right) \cup f\left(B\right) \Rightarrow f\left(A \cup B\right) \subset f\left(A\right) \cup f\left(B\right) \quad (1)$$

+ $f\left(A\right) \subset f\left(A \cup B\right), f\left(B\right) \subset f\left(A \cup B\right)$

$$\Rightarrow f\left(A\right) \cup f\left(B\right) \subset f\left(A \cup B\right) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow f\left(A\right) \cup f\left(B\right) = f\left(A \cup B\right)\ \forall A, B \subset X$.

b)+ Ta có $A \cap B \subset A \Rightarrow f\left(A \cap B\right) \subset f\left(A\right)$

Tương tự $f\left(A \cap B\right) \subset f\left(B\right)$

Do đó $f\left(A \cap B\right) \subset f\left(A\right) \cap f\left(B\right)$

+ Điều ngược lại là không đúng

Xét $f\left(x\right) = x^2,\ A = \{2\},\ B = \{-2\}$

Khi đó $f\left(A \cap B\right) = \varnothing; f\left(A\right) \cap f\left(B\right) = \{4\}$.

c) $x \in f^{-1}\left(A \cup B\right) \Leftrightarrow f\left(x\right) \in A \cup B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right) \in A \\ f\left(x\right) \in B \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in f^{-1}\left(A\right) \\ x \in f^{-1}\left(B\right) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}\left(A\right) \cup f^{-1}\left(B\right),\ \forall A, B \subset Y$.

d) $x \in f^{-1}\left(A \cap B\right) \Leftrightarrow f\left(x\right) \in A \cap B \Leftrightarrow \begin{cases} f\left(x\right) \in A \\ f\left(x\right) \in B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in f^{-1}\left(A\right) \\ x \in f^{-1}\left(B\right) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}\left(A\right) \cap f^{-1}\left(B\right).$$

e) $x \in f^{-1}\left(A \setminus B\right) \Leftrightarrow f\left(x\right) \in A \setminus B \Leftrightarrow \begin{cases} f\left(x\right) \in A \\ f\left(x\right) \notin B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in f^{-1}\left(A\right) \\ x \notin f^{-1}\left(B\right) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}\left(A\right) \setminus f^{-1}\left(B\right).$$

Bài 12.

$f(x) = x^2 + 4x - 5 \Rightarrow f'(x) = 2x + 4,\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$

x		-3	-2	3	
$f'(x)$	$-$		0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	-8	-9	16	$+\infty$

$\Rightarrow f(A) = [-9;16]$.

- $f(x) = 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \pm 2\sqrt{3}$

- $f(x) = -3 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \pm \sqrt{6}$.

Nhìn vào bảng biến thiên $\Rightarrow f^{-1}(A) = \left[-2-2\sqrt{3};-2-\sqrt{6}\right] \cup \left[-2+\sqrt{6};-2+2\sqrt{3}\right]$.

Bài 13.

Ta xét $(x;y) \in A \Rightarrow f(x;y) = (x+y;x-y)$

Và $(x+y)^2 + (x-y)^2 = 2(x^2+y^2) = 18$

Mặt khác, nếu $u^2 + v^2 = 18$ thì $\left(\dfrac{u+v}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{u-v}{2}\right)^2 = 9$

$\Rightarrow f(A) = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid {}^2 + y^2 = 18\right\}$

Xét $f(u;v) = (u+v;u-v) \in A$

$\Rightarrow (u+v)^2 + (u-v)^2 = 9 \Leftrightarrow u^2 + v^2 = 4{,}5$

Và $u^2 + v^2 = 4{,}5$ thì $f(u;v) \in A$

Do vậy $f^{-1}(A) = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4{,}5\right\}$.

Bài 14.

$f(x;y) = (x^2 - y;x+y)$

+ Xét $f(x_1;y_1) = f(x_2;y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 - y_1 = x_2^2 - y_2 \\ x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_1^2 + x_1 = x_2^2 + x_2 \end{cases}$

Rõ ràng $f(0;-1) = f(-1;0) = (1;-1) \Rightarrow f$ không là đơn ánh.

+ Xét $(u;v)\in \mathbf{R}^2 : \begin{cases} x^2 - y = u \\ x + y = v \end{cases} \Rightarrow x^2 + x = u + v$

Chọn $u=0,\ v=-1 \Rightarrow \nexists x$ để $x^2+x=-1 \Rightarrow \nexists (x;y)$ để $f(x;y)=(0;-1)$

Vậy f không là toàn ánh.

Bài 15.

a) Ta có $\forall a,b\in \mathbf{Z}_4$ thì $(a+b)\bmod 4\in\{1;2;3;0\}=\mathbf{Z}_4$

$\rightarrow *$ là một phép toán đóng trên $\mathbf{Z}_4$.

b) $(\square_4,*)$ là một nhóm vì:

+ Tính kết hợp: $(a*b)*c=\left[(a+b)\bmod 4+c\right]\bmod 4=(a+b+c)\bmod 4$

$$=a*(b*c)$$

+ Tính: có phần tử trung hòa là 0: $a*0=0*a=a\ \forall a\in \mathbf{Z}_4$

+ $\forall a\in \mathbf{Z}_4$ đều có phần tử đối xứng: $1*3=2*4=0$.

Bài 16.

a) $f_1\circ f_2=f_1(f_2(x))=\dfrac{1}{1-x}$

b)

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_3	f_1	f_6	f_4	f_5
f_3	f_3	f_1	f_2	f_5	f_6	f_4
f_4	f_4	f_5	f_6	f_1	f_2	f_3
f_5	f_5	f_6	f_4	f_3	f_1	f_2
f_6	f_6	f_4	f_5	f_2	f_3	f_1

c) Do $(G,\circ)$ là phép toán đóng

+ Phép hợp có tính chất kết hợp

+ Phần tử trung hòa: f_1

+ Phần tử đối xứng:

$f_1\circ f_1=f_2\circ f_3=f_4\circ f_4=f_5\circ f_5$

$=f_6\circ f_1=f_1$

Mà $f_4\circ f_2=f_5\neq f_6=f_2\circ f_4$

$\Rightarrow (G,\circ)$ là một nhóm không Abel.

Bài 17.

a) Không là vành, trường (vì phép toan + không đóng kín)

b) Là vành, không là trường ($(G,\bullet)$ không là nhóm, chẳng hạn $\frac{1}{2}\notin \mathbf{Z}$)

c) là trường

d) là vành, không là trường ($(G,\bullet)$ không là nhóm, chẳng hạn $\frac{1}{3+\sqrt{2}}=\frac{3}{5}-\frac{\sqrt{2}}{5}\notin X$)

e) là trường $\left(\frac{1}{a+b\sqrt{3}}=\frac{a-b\sqrt{3}}{a^2-3b^2}=\frac{a}{a^2-3b^2}-\frac{b}{a^2-3b^2}\sqrt{3}\in Y,\ \forall(a;b)\neq(0;0)\right)$.

Bài 18.

a) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^9=\left[2.\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^9=-2^9$

b) $\frac{(1+i)^{21}}{(1-i)^{13}}=\frac{\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{21}}{\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4}+i\sin\frac{-\pi}{4}\right)\right]^{13}}=2^4.\frac{\frac{-1}{\sqrt{2}}+i.\frac{-1}{\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}+i.\frac{1}{\sqrt{2}}}=2^4.i$

c) $\left(2+i\sqrt{12}\right)^5\left(\sqrt{3}-i\right)^{11}=\left[4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^5.\left[2\left(\cos\frac{-\pi}{6}+i\sin\frac{-\pi}{6}\right)\right]^{11}$

$$=2^{21}.\left(\frac{1}{2}+i.\frac{-\sqrt{3}}{2}\right).\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i.\frac{1}{2}\right)=2^{19}\left(2\sqrt{3}-2i\right)$$

Bài 19.

$z=1-i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{-\pi}{3}+i\sin\frac{-\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow$ Các căn bậc 8 của z là:

$$\sqrt[8]{2}.\left(\cos\frac{\frac{-\pi}{3}+2k\pi}{8}+i\sin\frac{\frac{-\pi}{3}+2k\pi}{8}\right),\ k\in\overline{0,7}.$$

Bài 20.

a) $z^2+z+1=0\Leftrightarrow\begin{cases}z^3=1\\ z\neq 1\end{cases}\Rightarrow z=\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3};\ k=1;2$

b) $z^2+2iz-5=0\Rightarrow(z+i)^2=4\Rightarrow z=-i\pm 2$.

c) $z^4 - 3iz^2 + 4 = 0$. Đặt $z^2 = u \Rightarrow u^2 + 3iu + 4 = 0$

$$\Rightarrow \left(u - \frac{3}{2}i\right)^2 = \left(\frac{5}{2}i\right)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u = 4i \\ u = -i \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 = 4i \\ z^2 = -i \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z = \pm\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right) \\ z = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i.\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{array}\right.$$

d) $z^6 - 7z^3 - 8 = 0$

Đặt $z^3 = u \Rightarrow u^2 - 7u - 8 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u = 8 \\ u = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z = 2 \\ z = -1 \end{array}\right.$.

e) $\overline{z^7} = \frac{1024}{z^3} \Rightarrow \overline{z^7}.z^3 = 1024 \Rightarrow |z|^{10} = 1024 \Rightarrow |z| = 2$

$$\Rightarrow \bar{z} = \frac{|z|^2}{z} = \frac{4}{z} \Rightarrow \frac{4^7}{z^7} = \frac{1024}{z^3} \Rightarrow z^4 = 2^4$$

$$\Rightarrow z = 2\left(\cos\frac{2k\pi}{4} + i\sin\frac{2k\pi}{4}\right),\ k = \overline{0,3}.$$

f) $z^8\left(\sqrt{3} + i\right) = 1 - i$

$$\Rightarrow z^8 = \frac{1-i}{i+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{-7\pi}{12} + i\sin\frac{-7\pi}{1}\right)$$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{\sqrt[16]{2}}\left(\cos\frac{\frac{-7\pi}{12} + 2k\pi}{8} + i\sin\frac{\frac{-7\pi}{12} + 2k\pi}{8}\right),\ k = \overline{0,7}$$

g) $iz^2 - (1+8i)z + 7 + 17i = 0$

$$\Leftrightarrow z^2 + (i-8)z + (17-7i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{i-8}{2}\right)^2 = 7i - 17 + \frac{63}{4} - 4i = 3i - \frac{5}{4} = \left(1 + \frac{3}{2}i\right)^2$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} z = 5 + i \\ z = 3 - 2i \end{array}\right..$$

Bài 21.

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_{2014}$ là 2014 căn bậc của 2014 của 1. $A = \sum_{k=1}^{2014} \varepsilon_k^2$.

Ta có $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{2014} + i\sin\frac{2k\pi}{2014}$, $k = \overline{0,2013}$ (Quy ước $\varepsilon_{2014} = \varepsilon_0$)

$$\Rightarrow A = \sum_{k=1}^{2014}\left(\cos\frac{2k\pi}{1007} + i\sin\frac{2k\pi}{1007}\right)$$

$$= 2.\sum_{k=1}^{1007}\left(\cos\frac{2k\pi}{1007} + i\sin\frac{2k\pi}{1007}\right) \text{ (do } \frac{2(k+1007)\pi}{1007} = 2\pi + \frac{2k\pi}{1007}\text{)}$$

$$= 2.\sum_{k=1}^{1007}\alpha_k$$

Với α_k, $k = \overline{1,1007}$ là các căn bậc 1007 của 1. Mà $\alpha_k^{1007} = 1$ nên theo Viete: $\sum_{k=1}^{1007}\alpha_k = 0 \Rightarrow A = 0$.

Bài 22.

a) $x_k = -1 + \cos\frac{2k\pi}{9} + i\sin\frac{2k\pi}{9}$, $k = \overline{1,8}$ (Đặt $x + 4 = t$)

b) $|x_k| = \sqrt{\left(1 - \cos\frac{2k\pi}{9}\right)^2 + \left(\sin\frac{2k\pi}{9}\right)^2} = 2\sin\frac{k\pi}{9}$

c) $\prod_{k=1}^{8}\sin\frac{k\pi}{9} = \prod_{k=1}^{8}\frac{|x_k|}{2} = \frac{1}{2^8}\left|\prod_{k=1}^{8}x_k\right|$

Mà x_k, $k = \overline{1,8}$ là nghiệm của $\frac{(x+1)^9 - 1}{x} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{9}C_9^i.x^{i-1} = 0$ nên theo Viete $\prod_{k=1}^{8}x_k = 9$

$\Rightarrow \prod_{k=1}^{8}\sin\frac{k\pi}{9} = \frac{9}{2^8}$.

Bài 23.

Ta có: $iz^2 + (4-i)z - 9i = 7$

$\Leftrightarrow z^2 - (1+4i)z + (7i - 9) = 0$

$\Leftrightarrow \left(z - \frac{1+4i}{2}\right)^2 = 9 - 7i + 2i - \frac{15}{4} = \frac{21}{4} - 5i = \left(i - \frac{5}{2}\right)^2$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} z = -2 + 3i \\ z = 3 + i \end{array}\right. \Rightarrow f^{-1}(\{7\}) = \{-2 + 3i; 3 + i\}$.

Bài 24.

$z^2 - z + ai = 0 \Rightarrow z_1^2 = z_1 - ai;\ z_2^2 = z_2 - ai$

$\Rightarrow \left|z_1^2 - z_2^2\right| = \left|z_1 - z_2\right| = 1$

$\left|z_1^2 - z_2^2\right| = \left|\left(z_1 - z_2\right)\left(z_1 + z_2\right)\right| = \left|z_1 - z_2\right|.\left|z_1 + z_2\right|$

$\Rightarrow \left|z_1 + z_2\right| = 1$

Theo Viete: $\begin{cases} z_1 + z_2 = 1 \\ z_1 z_2 = 1.i \end{cases}$

Đặt $z_1 = u + i.v \Rightarrow z_2 = 1 - u - i.v$

$\Rightarrow \begin{cases} \left(u + i.v\right)\left(1 - i - i.v\right) = ai \\ \left|z_1 - z_2\right| = 1 \Leftrightarrow \left(2u - 1\right)^2 + 4v^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u\left(1 - u\right) + v^2 = 0 \\ \left(2u - 1\right)^2 + 4v^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u = 0, v = 0 \\ u = 1, v = 0 \end{array}\right.$

$\Rightarrow a = v\left(1 - u\right) - v.u = 0$.

Chương II. MA TRẬN – ĐỊNH THỨC – HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài 1.

Các phép toán thực hiện được: $B.C^T$, $(A+3B).C^T$

$$B.C^T=\begin{bmatrix}2&1&1\\-2&3&0\\1&2&4\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}-1&2\\1&4\\2&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&6\\5&8\\9&2\end{bmatrix}$$

$$A+3B=\begin{bmatrix}1&-3&2\\2&1&-1\\0&3&-2\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}2&1&1\\-2&3&0\\1&2&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&0&5\\-4&10&-1\\3&9&10\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow(A+3B).C^T=\begin{bmatrix}7&0&5\\-4&10&-1\\3&9&10\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}-1&2\\1&4\\2&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&4\\12&34\\26&22\end{bmatrix}.$$

Bài 2.

a) $A^2=\begin{bmatrix}1&3\\-1&2\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}-2&9\\-3&1\end{bmatrix}\Rightarrow A^2-3A=\begin{bmatrix}-5&0\\0&-5\end{bmatrix}=-5E$

b) Theo câu a: $A^2-3A+5E=0\Rightarrow A^2+5E=3A,3A-A^2=5E$

$\Rightarrow$ Cần tìm X thỏa mãn: $3AX=B^T.5E\Rightarrow X=\dfrac{5}{3}A^{-1}.B^T$ (do $\det A\neq 0$)

$$X=\frac{5}{3}\begin{bmatrix}1&3\\-1&2\end{bmatrix}^{-1}.\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-2}{3}&\frac{-1}{3}\\\frac{-1}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}.$$

Bài 3.

$$A=\begin{bmatrix}1&-2&3\\2&-4&1\\3&-5&3\end{bmatrix}\Rightarrow A^2=\begin{bmatrix}6&-9&10\\-3&-7&5\\2&-1&13\end{bmatrix}\Rightarrow f(A)=3A^2-2A+5E=\begin{bmatrix}21&-23&24\\-13&34&13\\0&7&38\end{bmatrix}.$$

Bài 4.

a) $A=\begin{bmatrix}\cos ka&-\sin ka\\\sin ka&\cos ka\end{bmatrix}$. Quy nạp $A^n=\begin{bmatrix}\cos na&-\sin na\\\sin na&\cos na\end{bmatrix}$

+ $n=1$. Đúng.

+ Giả sử mệnh đề đúng với $n=k\in\mathbb{N}^*$

$$A^{k+1}=\begin{bmatrix}\cos ka & -\sin ka\\ \sin ka & \cos ka\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\cos a & -\sin a\\ \sin a & \cos a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(k+1)a & -\sin(k+1)a\\ \sin(k+1)a & \cos(k+1)a\end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ Mệnh đề đúng với $k+1$.

Vậy $A^n=\begin{bmatrix}\cos na & -\sin na\\ \sin na & \cos na\end{bmatrix}$.

b) $A=\begin{bmatrix}a & 1 & 0\\ 0 & a & 1\\ 0 & 0 & a\end{bmatrix}=a.I_3+B$, I_3 là ma trận đơn vị cấp 3, $B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

Nhận xét $B^2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$; $B^{-k}=0\ \forall k\geq 3$

$$\Rightarrow A^n=\left(B+a.I_3\right)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i.B^{n-i}.a^i=I.C_n^0.a^n+C_n^1.B.a^{n-1}+C_n^2.B^2.a^{n-2}$$

$$=a^n.I+n.a^{n-1}.B+C_n^2.a^{n-2}.B^2$$

$$=\begin{bmatrix}(n+1)a^n & n.a^{n-1} & C_n^2.a^{n-2}\\ 0 & (n+1)a^n & n.a^{n-1}\\ 0 & 0 & (n+1)a^n\end{bmatrix}.$$

Bài 5.

a) $A=\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix}$, $A^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+bc=0\\ ab+bd=0\\ ac+cd=0\\ bc+d^2=0\end{cases}$

+ $bc=0\Rightarrow a=d=0$

+ $b.c\neq 0\Rightarrow a+d=0$

Vậy các ma trận thỏa mãn là: $\begin{bmatrix}0 & b\\ 0 & 0\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix}0 & 0\\ c & 0\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix}a & b\\ c & -a\end{bmatrix}$ $\left(a^2+bc=0\right)$

b) $A=\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix}$, $A^2=I\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+bc=d^2+bc=1\\ b(a+d)=c(a+d)=0\end{cases}$

+ $(a+d)=0\Rightarrow a^2+bc=1$

+ $(a+d)\neq 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=d=1 \ \& \ b=c=0 \\ a=d=-1 \ \& \ b=c=0 \end{array}\right.$

Vậy các ma trận thỏa mãn là: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$ $\left(a^2+bc=1\right)$.

Bài 6.

a) $A^2=\begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & d^2+bc \end{bmatrix} \Rightarrow A^2-(a+d)A+(ad-bc)I=\begin{bmatrix} a^2+bc-(a+d)a+ad-bc & ab+bd-(a+d)b \\ ac+cd-(a+d)c & d^2+bc-(a+d)d+ad-bc \end{bmatrix}=0$

$\Rightarrow A$ thỏa mãn phương trình $x^2-(a+d)x+ad-bc=0$.

b) Rõ ràng $A^2=0$ thì $A^k=0\ \forall k>2$.

Giả sử $A^k=0$ với $k>2$. Ta chứng minh $A^2=0$

$A^k=0 \Rightarrow \det A=0 \Rightarrow ad-bc=0 \Rightarrow A^2-(a+d)A=0$ (theo câu a)

+ $(a+d)=0 \Rightarrow A^2=0$

+ $(a+d)\neq 0 \Rightarrow A^{k-2}\left[A^2-(a+d)A\right]=0 \Rightarrow A^{k-1}=0$. Tiếp tục quá trình $\Rightarrow A^2=0$.

Bài 7.

a) $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1+b_1x & 2a_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & 2a_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & 2a_3 & c_3 \end{vmatrix}\left(C_2+C_1\to C_2\right)$

$=2\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3 & c_3 \end{vmatrix}=2x\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}\left(C_1-C_2\to C_1\right)$

$=-2x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

b) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a & a(b+c+c)bc \\ 1 & b & b(a+b+c)ac \\ 1 & c & c(a+b+c)ab \end{vmatrix}$ $\left(C_2\times(a+b+c)+C_3\to C_3\right)$

$=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ $\left(-C_1\times(ab+bc+ca)+C_3\to C_3\right)$.

Bài 8.

a) $$A=\begin{vmatrix}1&3&5&-1\\2&-1&-1&4\\5&1&-1&7\\7&7&9&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3&5&-1\\0&-7&-11&6\\0&-14&-26&12\\0&-14&-26&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-7&-11&6\\-14&-26&12\\-14&-26&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-7&-11&6\\-14&-26&12\\0&0&-4\end{vmatrix}$$

$$=-4\begin{vmatrix}-7&-11\\-14&-26\end{vmatrix}=-112$$

b) $$B=\begin{vmatrix}a+b&ab&a^2+b^2\\b+c&bc&b^2+c^2\\c+a&ca&c^2+a^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a-c&b(a-c)&(a-c)(a+c)\\b-a&c(b-a)&(b-a)(b+a)\\c+a&ca&c^2+a^2\end{vmatrix}\ (L_1-L_2\to L_1;L_2-L_3\to L_2)$$

$$=(a-c)(b-a)\begin{vmatrix}1&b&a+c\\1&c&b+a\\c+a&ca&c^2+a^2\end{vmatrix}=(a-c)(b-a)\begin{vmatrix}1&b&a+c\\0&c-b&b-c\\c+a&ca&c^2+a^2\end{vmatrix}(L_2-L_1\to L_2)$$

$$=(a-c)(b-a)\begin{vmatrix}1&a+b+c&a+c\\0&0&b-c\\c+a&a^2+c^2+ac&c^2+a^2\end{vmatrix}=(a-c)(b-a)(c-b)\left[a^2+c^2+ac-(a+c)(a+b+c)\right]$$

$$=(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca).$$

c) $$D=\begin{vmatrix}1&1&2&3\\1&2-x^2&2&3\\2&3&1&5\\2&3&1&9-x^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&2&3\\1&2-x^2&2&3\\2&3&1&5\\0&0&0&4-x^2\end{vmatrix}\ (L_4-L_3\to L_4)$$

$$=(4-x^2).\begin{vmatrix}1&1&2\\1&2-x^2&2\\2&3&1\end{vmatrix}=(4-x^2).\begin{vmatrix}1&1&2\\0&1-x^2&0\\2&3&1\end{vmatrix}\ (L_2-L_1\to L_2)$$

$$=(4-x^2).(1-x^2).\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}=-3(x^2-1)(x^2-4).$$

Bài 9.

a) $\det A=\det A^T=\det(-A)$ (do $A^T=-A$)

Giả sử A cấp n lẻ $\Rightarrow \det(-A)=(-1)^n\det A=-\det A$

Do vậy $\det A=-\det A\Rightarrow \det A=0$.

b) Ta có: $\left(A-A^T\right)^T = A^T - A = -\left(A-A^T\right)$

$\Rightarrow A-A^T$ là ma trận phản xứng cấp lẻ (cấp 2019) $\Rightarrow \det\left(A-A^T\right)=0$.

Bài 10.

a) $A=\begin{bmatrix}1&3&5&-1\\2&-1&-1&4\\5&1&-1&7\\7&7&9&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&5&-1\\0&-7&-11&6\\0&-14&-26&12\\0&-14&-26&8\end{bmatrix}\begin{pmatrix}L_2-2L_1\to L_2\\L_3-5L_1\to L_3\\L_4-7L_1\to L_4\end{pmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&5&-1\\0&-7&-11&6\\0&0&-4&0\\0&0&-4&-4\end{bmatrix}\begin{pmatrix}L_3-2L_2\to L_3\\L_4-2L_2\to L_4\end{pmatrix}$

$\to\begin{bmatrix}1&3&5&-1\\0&-7&-11&6\\0&0&-4&0\\0&0&0&-4\end{bmatrix}$. Vậy $r(A)=4$.

<u>Cách 2:</u> $\det A=-112\neq 0$, A vuông cấp 4 $\Rightarrow rankA=4$.

b) $B=\begin{bmatrix}4&3&-5&2&3\\8&6&-7&4&2\\4&3&-8&2&7\\4&3&1&2&-5\\8&6&-1&4&-6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}4&3&-5&2&3\\0&0&3&0&-4\\0&0&-3&0&4\\0&0&6&0&-8\\0&0&9&0&-12\end{bmatrix}\begin{pmatrix}L_2-2L_1\to L_2\\L_3-L_1\to L_3\\L_4-L_1\to L_4\\L_5-2L_1\to L_5\end{pmatrix}$

$\to\begin{bmatrix}4&3&-5&2&3\\0&0&3&0&-4\\0&0&0&0&0\\0&0&6&0&0\\0&0&9&0&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}L_3+L_2\to L_3\\L_4-2L_2\to L_4\\L_5-3L_2\to L_5\end{pmatrix}$. Vậy $r(B)=2$.

Bài 11.

$A=\begin{bmatrix}1&-1&1&2\\-1&2&2&1\\1&0&4&m\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&1&2\\0&1&3&3\\0&1&3&m-2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}L_2+L_1\to L_2\\L_3-L_1\to L_3\end{pmatrix}$

$\to\begin{bmatrix}1&-1&1&2\\0&1&3&3\\0&0&0&m-5\end{bmatrix}\left(L_3-L_2\to L_3\right)$. Vậy $r(A)=2\Leftrightarrow m=5$.

Bài 12.

a) $A=\begin{bmatrix}3&4\\5&7\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}.\tilde{A}^{T}=\dfrac{1}{1}.\begin{bmatrix}7&-4\\-5&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&-4\\-5&3\end{bmatrix}$

b) $B=\begin{bmatrix}3&-4&5\\2&-3&1\\3&-5&1\end{bmatrix}\Rightarrow B^{-1}=\dfrac{1}{\det B}.\tilde{B}^{T}=\dfrac{1}{-3}\begin{bmatrix}2&-21&11\\1&-12&7\\-1&3&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2/3&7&-11/3\\-1/3&4&-7/3\\1/3&-1&1/3\end{bmatrix}$.

c)

Cách 1: $C=\begin{bmatrix}1&-a&0&0\\0&1&-a&0\\0&0&1&-a\\0&0&0&1\end{bmatrix}$. Ta có: $\det C=1$. Tìm $\tilde{C}^{T}\to C^{-1}=\tilde{C}^{T}$

Cách 2:

Gauss – Jordon $\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&-a&0&0&1&0&0&0\\0&1&-a&0&0&1&0&0\\0&0&1&-a&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&-a&0&0&1&0&0&0\\0&1&-a&0&0&1&0&0\\0&0&1&-a&0&0&1&a\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right]\left(L_3+aL_4\to L_3\right)$

$\xrightarrow{L_2+aL_3\to L_2}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&-a&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&a&a^2\\0&0&1&0&0&0&1&a\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&a&a^2&a^3\\0&1&0&0&0&1&a&a^2\\0&0&1&0&0&0&1&a\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right]$

$\Rightarrow C^{-1}=\begin{bmatrix}1&a&a^2&a^3\\0&1&a&a^2\\0&0&1&a\\0&0&0&1\end{bmatrix}$.

Bài 13.

$|A|=\begin{vmatrix}a+1&-1&a\\3&a+1&3\\a-1&0&a-1\end{vmatrix}=(a-1)\begin{vmatrix}-1&a\\a+1&3\end{vmatrix}+(a-1)\begin{vmatrix}a+1&-1\\3&a+1\end{vmatrix}=(a-1)\left[-3-a^2-a+a^2+2a+4\right]$

$=(a-1)(a+1)$

A khả nghịch $\Leftrightarrow\det A\neq0\Leftrightarrow(a-1)(a+1)\neq0\Leftrightarrow a\neq\pm1$.

Bài 14.

$a_k A^k + a_{k-1}A^{k-1} + ... + a_1 A + a_0 E = 0 \ (a_0 \neq 0)$

$\Rightarrow A\left[\dfrac{a_k}{a_o}A^{k-1} + \dfrac{a_{k-1}}{a_0}A^{k-2} + ... + \dfrac{a_1}{a_o}\right] = -E \Rightarrow A$ khả nghịch và $A^{-1} = -B$.

Bài 15,

$$AX = C^T - B = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 12 & 16 \\ 10 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 12 \\ 10 & 4 \end{bmatrix} = D$$

Mà $\det A = 28 \neq 0 \Rightarrow X = A^{-1}.D = \dfrac{1}{\det A}.\tilde{A}^T.D = \begin{bmatrix} \dfrac{-1}{4} & \dfrac{3}{28} & \dfrac{5}{28} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{-1}{14} & \dfrac{3}{14} \\ \dfrac{-1}{4} & \dfrac{1}{4} & \dfrac{-1}{4} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 12 \\ 10 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Bài 16.

a) $\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 7 & -4 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 23 & -11 & -19 & 1 \\ 0 & 46 & -22 & -38 & -1 \end{array}\right] \begin{pmatrix} 3L_2 - 7L_1 \rightarrow L_2 \\ 3L_3 - 5L_1 \rightarrow L_3 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 23 & -11 & -19 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right] (L_3 - 2L_2 \rightarrow L_3)$$

Do $r(\overline{A}) \neq r(A)$ nên hệ vô nghiệm.

b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 4 & 4 \\ 10 & -5 & -6 & -10 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 15 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & -5 & -6 & -10 \end{array}\right] \begin{pmatrix} 3L_2 + 4L_1 \rightarrow L_2 \\ 3L_3 + 2L_1 \rightarrow L_3 \\ 3L_4 - 10L_1 \rightarrow L_4 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 15 & 13 \\ 0 & 0 & 21 & 15 \\ 0 & 0 & -21 & -15 \end{array}\right] \begin{pmatrix} 2L_3 - L_2 \rightarrow L_3 \\ 2L_4 + 5L_1 \rightarrow L_4 \end{pmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 15 & 13 \\ 0 & 0 & 21 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow r(A) = r(\tilde{A}) = 3$

Hệ có duy nhất 1 nghiệm thỏa: $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_2 + 15x_3 = 13 \\ 21x_3 = 15 \end{cases}$

$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3) = \left(0; \frac{8}{7}; \frac{5}{7}\right).$

c) $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & -4 & -3 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -11 & -10 & 1 \\ 0 & -11 & -10 & 1 \\ 0 & -11 & -10 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -11 & -10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$r(A) = r(\tilde{A}) = 2 < 3 \rightarrow$ Hệ có vô số nghiệm thỏa mãn $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ -11x_2 - 10x_3 = 1 \end{cases}$

Đặt $x_3 = t \Rightarrow x_2 = \dfrac{-10t - 1}{11} \Rightarrow x_1 = \dfrac{-3x_2 - 4x_3}{2} = \dfrac{3 - 14t}{22}$

Vậy $(x_1; x_2; x_3) = \left(\dfrac{3-14t}{22}; \dfrac{-1-10t}{11}; t\right).$

Câu 17.

a) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 12 \\ 2 & 5 & -1 & 11 & 49 \\ 3 & 6 & 4 & 13 & 49 \\ 1 & 2 & -1 & 9 & 33 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 13 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & 21 \end{array}\right] \begin{pmatrix} L_2 - 2L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3 - 3L_1 \rightarrow L_3 \\ L_4 - L_1 \rightarrow L_4 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right] (L_4 - L_3 \rightarrow L_4) \Rightarrow r(A) = \mathrm{r}(\tilde{A}) = 4$

$\Rightarrow$ Hệ có nghiệm duy nhất thỏa mãn $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 12 \\ x_2 + x_3 + 5x_4 = 25 \\ -x_3 + 4x_4 = 13 \\ 2x_4 = 8 \end{cases}$

$\Rightarrow (x_1; x_2; x_3; x_4) = (-1; 2; 3; 4).$

b) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & -4 \\ 3 & 7 & 10 & 11 & -11 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & 7 & -6 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$

$r(A)=r(\tilde{A})=4 \Rightarrow$ Hệ có nghiệm duy nhất thỏa $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=-4 \\ x_2+x_3-x_4=1 \\ x_3-2x_4=1 \\ x_4=-1 \end{cases}$

$\Rightarrow (x_1;x_2;x_3;x_4)=(1;1;-1;-1)$.

Bài 18.

Hệ có nghiệm không tầm thương $\Leftrightarrow \det A \neq 0$ (do hệ thuần nhất)

Với $A=\begin{bmatrix} a+5 & 3 & 2a+1 \\ a & a-1 & 4 \\ a+5 & a+2 & 5 \end{bmatrix}$

Ta có $\det A=\begin{vmatrix} a+5 & 3 & 2a+1 \\ a & a-1 & 4 \\ a+5 & a+2 & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+5 & 3 & 2a+1 \\ a & a-1 & 4 \\ 0 & a-1 & 4-2a \end{vmatrix}$

$=(a+5)\left[(a-1)(4-2a)-4(a-1)\right]-a.\left[3.(4-2a)-(2a-1)(a-1)\right]$

$=(a+5)(-2a^2+2a)-a(-2a^2-5a+13)$

$=-2a^3-8a^2+10a+2a^3+5a^2-13a$

$=-3a^2-3a=-3a(a+1)$

$\det A \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ a\neq -1 \end{cases}$.

Bài 19.

$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc|c} m & 2 & -1 & 3 \\ 1 & m & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & -m \end{array}\right]$. Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} m & 2 & -1 \\ 1 & m & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$

$\Leftrightarrow m^2+8-3-(2m+6m+2)\neq 0 \Leftrightarrow m^2+5-4m-2\neq 0 \Leftrightarrow m^2-4m+3\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 1 \\ m\neq 3 \end{cases}$.

Bài 20.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & m & 4 \\ -1 & -1 & 3 & 2 & k \\ 2 & -1 & -3 & m-1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2m & 5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & m & 4 \\ 0 & 1 & 2 & m+2 & k+4 \\ 0 & -5 & -1 & -m-1 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & m & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & m & 4 \\ 0 & 1 & 2 & m+2 & k+4 \\ 0 & 0 & 9 & 4m+9 & 5k+15 \\ 0 & 0 & 4 & 2m+2 & k+5 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & m & 4 \\ 0 & 1 & 2 & m+2 & k+4 \\ 0 & 0 & 9 & 4m+9 & 5k+15 \\ 0 & 0 & 0 & 2m-18 & -11k-15 \end{array}\right]$$

a) $m=2,\ k=5$ hệ có nghiệm duy nhất $\left(x_1;x_2;x_3;x_4\right)=\left(-9;-1;-5;5\right)$.

b) Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow 2m-18\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 9$.

c) Hệ có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} 2m-18=0 \\ 11k+15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=9 \\ k=\dfrac{-15}{11} \end{cases}$.

Chương III. KHÔNG GIAN VECTOR

Bài 1.

a) Nhận xét $(k_1+k_2).(x;y;z)=\left(|k_1+k_2|x;|k_1+k_2|y;|k_1+k_2|z\right)$

$$\neq\left(|k_1|x+|k_2|x;|k_1|y+|k_2|y;|k_1|z+|k_2|z\right)=k_1(x;y;z)+k_2(x;y;x)$$

$\Rightarrow V$ không là không gian vector.

b)

+ $(V,+)$ là một nhóm giao hoán

+ $k\left[(x_1,x_2)+(y_1,y_2)\right]=\left(x_1^k y_1^k, x_2^k y_2^k\right)=k(x_1,x_2)+k(y_1,y_2)$

+ $(k_1+k_2)(x_1,x_2)=\left(x_1^{k_1+k_2}, x_2^{k_1+k_2}\right)=k_1(x_1,x_2)+k_2(x_1,x_2)$

+ $k_1\left(k_2(x_1,x_2)\right)=(k_1k_2).(x_1,x_2)$

+ $1.(x_1;x_2)=(x_1;x_2)$

$\Rightarrow V$ là một không gian vector.

Bài 2.

a) Xét $u_1=(x_1,x_2,x_3)\in E, u_2=(y_1,y_2,y_3)\in E$

$\Rightarrow u_1+u_2=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)\in E$

Do $2(x_1+y_1)-5(x_2+y_2)+3(x_3+y_3)=\left[2x_1-5x_2+3x_3\right]+\left[2y_1-5y_2+3y_3\right]=0$

$k\in\mathbf{R}$ thì $ku_1\in E$ do $k(2x_1-5x_2+3x_3)=0$

$\Rightarrow E$ là KGVT con của $\mathbf{R}^3$.

b)

P_1,P_2 có hệ số bậc nhất bằng 0 $\Longrightarrow \begin{cases} P_1+P_2 \text{ có hệ số bậc nhất bằng } 0 \\ kP_1 \text{ có hệ số bậc nhất bằng } 0 \ \forall k\in\mathbf{R}\end{cases}$

$\Rightarrow$ Tập các đa thức có hệ số bậc nhất bằng 0 của $P_n[x]$ là KGVT con của $P_n[x]$.

c, d, e) CMTT giống a, b.

(Cần chỉ ra $\begin{cases} p+q\in W;\ \forall p,q\in W \\ kp\in W;\ \forall k\in\mathbf{R},\ p\in W\end{cases}$ thì W là KGVT con sinh bởi V).

Bài 3.

a) $u,v\in V_1\cap V_2\Rightarrow\begin{cases}u,v\in V_1\\u,v\in V_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u+v\in V_1\\u+v\in V_2\end{cases}\Rightarrow u+v\in V_1\cap V_2$

$u\in V_1,\ k\in\mathbf{R}\Rightarrow ku\in V_1$, tương tự $ku\in V_2\Rightarrow ku\in V_1\cap V_2$

Do đó $V_1\cap V_2$ là KGVT con của V.

b) • $u,v\in V_1+V_2\Rightarrow\begin{cases}u=u_1+u_2\\v=v_1+v_2\end{cases}$ $\left(u_1+v_2\in V_1,\ u_2+v_2\in V_2\right)$

$\Rightarrow u+v=\left(u_1+v_1\right)+\left(u_2+v_2\right)\in V_1+V_2$

• $ku=ku_1+ku_2\in V_1+V_2$ (do $ku_1\in V_1,\ ku_2\in V_2$)

$\Rightarrow V_1+V_2$ là KGVT con của V.

Bài 4.

$\boxed{\Rightarrow}$ $V_1,\ V_2$ bù nhau $\Rightarrow V_1+V_2=V;\ V_1\cap V_2=\{0\}$

$\Rightarrow\forall v\in V$ thì $v=v_1+v_2\ \left(v_1\in V_1,\ v_2\in V_2\right)$

Giả sử biểu diễn này không duy nhất $\Rightarrow v=v_1+v_2=v_1'+v_2'\ \left(v_1'\neq v_1\right)$

$\Rightarrow v_1-v_1'=v_2'-v_2$

Mà $v_1-v_1'\in V_1,\ v_2'-v_2\in V_2\Rightarrow V_1\cap V_2\neq\{0\}$ (mâu thuẫn) $\Rightarrow$ biểu diễn duy nhất.

Do mọi vector $u\in V$ đều biểu diễn được dưới dạng $u=u_1+u_2\ \left(u_1\in V_1,\ u_2\in V_2\right)$

$\Rightarrow V=V_1+V_2$

Giả sử $\underset{(\{x\}\neq\{0\})}{x}\in V_1\cap V_2\Rightarrow x=\underset{\in V_1}{0}+\underset{\in V_2}{x}=\underset{\in V_1}{x}+\underset{\in V_2}{0}$ (mẫu thuẫn tính duy nhất)

$\Rightarrow V_1\cap V_2=\{0\}$

Vậy ta có đpcm.

Bài 5.

$\left(u_1,u_2,...,u_n,u_{n+1}\right)$ phụ thuộc tuyến tính

$\Rightarrow\exists k_i,\ i=\overline{1,n+1}$ không đồng thời bằng 0 thỏa $\sum_{i=1}^{n+1}k_iu_i=0$

Nếu $k_{n+1}=0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} k_i u_i = 0 \Rightarrow \{u_1,u_2,...,u_n\}$ phụ thuộc tuyến tính (mâu thuẫn)

$\Rightarrow k_{n+1} \neq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{-ki}{k_{n+1}} u_i = u_{n+1}$

Tức là u_{n+1} là tổ hợp tuyến tính của $u_1,u_2,...,u_n$.

Bài 6.

Xét $u \in W_1 + W_2 \Rightarrow u = u_1' + u_2'$ $(u_1' \in W_1,\ u_2' \in W_2)$

Mà $\{v_1,v_2,...,v_m\}$ là hệ sinh của $W_1 \Rightarrow \exists k_i : u_1' = \sum_{i=1}^{m} k_i v_i$ $\left(\sum k_i^2 \neq 0\right)$

Tương tự $\exists g_j : u_2' = \sum_{j=1}^{n} g_j u_j$ $\left(\sum g_j^2 \neq 0\right)$

$\Rightarrow u = \sum_{i=1}^{m} k_i v_i + \sum_{j=1}^{n} g_j u_j$ $\left(\sum k_i^2 + \sum g_j^2 \neq 0\right)$

$\Rightarrow \{v_1,v_2,...,v_m,u_1,u_2,...,u_n\}$ là hệ sinh của W_1+W_2.

Bài 7.

a) $v_2 = \frac{-3}{2} v_1 \Rightarrow \{v_1,v_2\}$ phụ thuộc tuyến tính.

b) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -9 \neq 0 \Rightarrow$ hệ $\{v_1,v_2,v_3\}$ độc lập tuyến tính.

c) Do v_1,v_2,v_3,v_4 đều thuộc không gian vector $\mathbf{R}^3$.

Mà $\dim \mathbf{R}^3 = 3$ nên hệ 4 vector bất kỳ luôn phụ thuộc tuyến tính

$\Rightarrow \{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ phụ thuộc tuyến tính.

Bài 8.

Gọi A là ma trận của B đối với cơ sở chính thức $\{1;x;x^2\}$ của $P_x[x]$

$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\det A = -2 \neq 0 \Rightarrow B$ độc lập tuyến tính.

Bài 9.

Ta có $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow$ hệ vector $\{v_1, v_2, v_3\}$ độc lập tuyến tính

Mà $\dim \mathbb{R}^3 = 3 \Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ là cơ sở của $\mathbf{R}^3$.

Ma trận chuyển cơ sở từ chính tắc sang $\{v_1, v_2, v_3\}$ là: $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

* Tìm tọa độ của $x = (6;9;14)$ đối với cơ sơ $\{v_1, v_2, v_3\} = B$

Cách 1: $x = av_1 + bv_2 + cv_3 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=6 \\ a+b+2c=9 \\ a+2b+3c=14 \end{cases} \Leftrightarrow (a,b,c) = (1,2,3)$

$\Rightarrow [x]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Cách 2: $[x]_B = C^{-1}.[x]_E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Bài 10.

a) $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -28 \neq 0 \Rightarrow B$ độc lập tuyến tính $\Rightarrow B$ là cơ sở của $\mathbf{R}^3$

$[v]_B = [B]_E^{-1}.[v]_E$ (E là cơ sở chính tắc, $[B]_E$ là ma trận chuyển cơ sở từ E sang B)

$= \begin{bmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} 15 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5/2 \\ 11/4 \\ 1/2 \end{bmatrix}$.

b) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Rightarrow B$ là cơ sở của $\mathbf{R}^3$.

$$[v]_B = [B]_E^{-1}.[v]_E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Bài 11.

a) Ma trận tọa độ của B đối với cơ sở chính tắc E là $B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

do $\det B_0 = 1 \Rightarrow B$ độc lập tuyến tính $\Rightarrow B$ là cơ sở của $P_3[x]$

b) $[v]_B = B_0^{-1}.[v]_E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$

c) $[v]_B = B_0^{-1}.[v]_E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \\ a_1 - a_2 + a_3 \\ a_2 - a_3 \\ a_3 \end{bmatrix}$

Bài 12.

$u \in span\{u_1, u_2, u_3\} \Leftrightarrow \exists x_1, x_2, x_3$ thỏa mãn $u = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ -2x_1 + x_2 + 0.x_3 = -3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = m \end{cases}$ có nghiệm không tầm thường.

Xét $\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & m \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & -5 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & m-1 \end{array}\right] \begin{pmatrix} L_2 - 3L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3 + 2L_1 \rightarrow L_3 \\ L_4 - L_1 \rightarrow L_4 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 21 & -21 \\ 0 & 0 & 6 & 9m+3 \end{array}\right] \begin{pmatrix} 9L_3 + 3L_2 \rightarrow L_3 \\ 9L_4 - 3L_2 \rightarrow L_4 \end{pmatrix}$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 21 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & 21(9m+3)+216 \end{array}\right] \left(21L_4 - 6L_2 \to L_4\right)$$

Hệ có nghiệm không tầm thường $\Leftrightarrow 21(9m+9)=0 \Leftrightarrow m=-1.$

Bài 13.

a) Ma trận A của hệ $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ đối với cơ sở chính tắc là

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vậy $r(A)=3$ hay hạng của hệ vectơ $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ là 3.

b) Xét ma trận tọa độ hàng:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Một cơ sở của $span\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ là $\left\{(1+x^2+x^3);(x-x^2+2x^3);(-x^2-x^3)\right\}$.

Bài 14.

a) Ma trận tọa độ hàng

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} (L_1 \leftrightarrow L_2) \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} L_2 - 2L_1 \to L_2 \\ L_3 + L_1 \to L_3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} (L_3 + L_2 \to L_3)$$

$\Rightarrow \dim V = 3$, cơ sở $\left\{(1;2;0;1);(0.-3;3;2);(0;0;0;3)\right\}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 2 & 9 & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & -6 & 3 & 15 & -9 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2L_2 - L_1 \to L_2 \\ 2L_4 - L_1 \to L_4 \end{pmatrix}$

$\to \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} L_3 + L_2 \to L_3 \\ L_4 + 3L_2 \to L_4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \dim V = 2$, cơ sở $\{(2;0;1;3;-1);(0;2;-1;-5;3)\}$.

Bài 15.

a) $span\{u_1, u_2, u_3, u_4\} = V_1 + V_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \dim span\{u_1, u_2, u_3, u_4\} = \dim V_1 + V_2 = 3$, cơ sở $\{(1;0;1;0);(0;1;-1;1);(0;0;1;1)\}$.

b) Xét $u \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow \exists x_1; x_2; x_3; x_4 : u = x_1u_1 + x_2u_2 = x_3u_3 + x_4u_4$

$\Rightarrow x_1u_1 + x_2u_2 - x_3u_3 - x_4u_4 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = -x_4$

$\Rightarrow u = x_1(u_1 + u_2) = x_1.(1;;1;0;-1)$

$\Rightarrow \dim V_1 + V_2 = 1$, cơ sở $\{(1;1;;0;1)\}$.

Bài 16.

$W_1 = \{p \in P_{2015}[x] \| p(x) = p(-x)\}$

+ Xét $p_1, p_2 \in W_1$, $q = p_1 + p_2$. Ta có $q(-x) = p_1(-x) + p_2(-x) = p_1(x) + p_2(x) = q(x)$

$\Rightarrow p_1 + p_2 \in W_1$

+ $p_1 \in W_1,\ k \in \mathbf{R} \Rightarrow kp_1(-x) = kp_1(x) \Rightarrow kp_1 \in W_1$

Vậy W_1 là KCVT con của $P_{2015}[x]$

Do $p(-x) = p(x) \Rightarrow$ Đa thức $p(x)$ chỉ gồm các hạng tử bậc chẵn của x

Hay $p(x) = \sum_{i=0}^{1007} a_i.x^{2i} \Rightarrow \dim W_1 = 1008$, một cơ sở là $B = \{1; x^2; x^4; ...; x^{2014}\}$.

Bài 17.

a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & -8 & -7 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} L_2 - L_1 \to L_2 \\ L_3 - 2L_1 \to L_3 \\ L_4 - 3L_1 \to L_4 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 23 \\ 0 & 0 & -6 & -13 & 16 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} L_3 + 3L_2 \to L_3 \\ L_4 + 2L_2 \to L_4 \end{pmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & -13 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 23 \end{bmatrix} (L_3 \leftrightarrow L_4)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ -x_2 + x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 0 \\ -6x_3 - 13x_4 + 16x_5 = 0 \\ -12x_4 + 23x_5 = 0 \end{cases}$$. Đặt $x_5 = t \Rightarrow x_4 = \frac{23}{12}t;\ x_3 = \frac{-107}{72}t;\ x_2 = \frac{-89}{12}t;\ x_1 = \frac{-79}{72}t$

$$\Rightarrow X = (x_1; x_2; x_3; x_4; x_5) = \left(\frac{-79}{72}; \frac{-89}{72}; \frac{-107}{72}; \frac{23}{12}; 1\right)t$$

$\Rightarrow$ Không gian nghiệm có $\dim = 1$, cơ sở $\left\{\left(\frac{-79}{72}; \frac{-89}{72}; \frac{-107}{72}; \frac{23}{12}; 1\right)\right\}$.

b) $$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} L_2 - 2L_1 \to L_2 \\ L_3 - L_1 \to L_3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (L_3 - 2L_2 \to L_3)$$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ -x_3 + 5x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$. Đặt $\begin{cases} x_4 = a, x_5 = b \\ x_1 = c \end{cases} \Rightarrow x_3 = 5a - b,\ x_2 = 2c + 8a + b$

$\Rightarrow X = (x_1; x_2; x_3; x_4; x_5) = a(0;8;5;1;0) + b(0;1;-1;0;1) + c(1;2;0;0;0)$

$\Rightarrow$ Không gian nghiệm có $\dim 3$, cơ sở $\{(0;8;5;1;0);(0;1;-1;0;1);(1;2;0;0;0)\}$

Chú ý: V là không gian nghiệm của hệ pt n ẩn thì $\dim V = n - r(A)$ (hệ thuần nhất).

Bài 18.

Cơ sở U,V lần lượt là $\{u_1,u_2,...,u_m\}$; $\{v_1,v_2,...,v_n\}$

+ Nếu $U \cap V = \{0\}$ $\Rightarrow \{u_1;u_2;...,u_m;v_1;v_2;...;v_n\}$ độc lập tuyến tính và là cơ sở của

$(U+V) \Rightarrow \dim(U+V) = m+n = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$

+ Nếu $\dim(U \cap V) = p$, cơ sở $\{r_1, r_2, ..., r_p\} = A$

Bổ sung $m-p$ vector $r_{p+1},...,r_m$ vào A để được cơ sở của U.

Bổ sung $n-p$ vector $r_{m+1};...;r_{n-p+m}$ vào A để được cơ sở của V.

Ta chứng minh $S = \{r_1, r_2, ..., r_p, r_{p+1}, ..., r_m, r_{m+1}, ..., r_{n-p+m}\}$ là cơ sở của $U+V$

• $w \in U+V$ thì $w = w_1 + w_2 = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} k_i r_i}_{w_1} + \underbrace{\left(\sum_{j=m+1}^{n-p+m} k_j r_j + \sum_{j=1}^{p} g_j r_j\right)}_{w_2} = \sum_{j=1}^{p}(k_i + q_i) r_i + \sum_{i=m+1}^{n-p+m} k_i r_i + \sum_{i=r+1}^{m} k_i r_i$

$\Rightarrow \{r_1, r_2, ..., r_p, r_{p+1}, ..., r_m, r_{m+1}, ..., r_{n-p+m}\}$ là hệ sinh của $U+V$

• $\sum_{i=m+1}^{n-p+m} \lambda_i r_i = 0$ thì $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i r_i = \sum_{i=m+1}^{n-p+m} \lambda_i r_i \in U \cap V \Rightarrow \sum_{i=n+1}^{m} \lambda_i r_i \in V \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i = \overline{p+1, m}$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{p} \lambda_i r_i + \sum_{i=m+n}^{n-p+m} \lambda_i r_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0\ \forall i = \overline{1,p},\ i = \overline{m+1, n+p+m} \Rightarrow$ Hệ S ĐLTT $\Rightarrow S$ là cơ sở.

Chương IV. ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Bài 1.

a) Xét $u_1,u_2 \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow f(u_1+u_2)=\left(3(x_1+y_1)\right)+(x_2+y_2)-(x_3+y_3),\ 2(x_1+y_1)+(x_3+y_3)$

$$=(3x_1+x_2-x_3,2x_1+x_3)+(3y_1+y_2-y_3,2y_1+y_3)$$

$$=f(u_1)+f(u_2)$$

Xét $u_1 \in \mathbb{R}^3,\ k\in\mathbb{R} \Rightarrow f(ku_1)=(3kx_1+kx_2-kx_3,2kx_1+kx_3)$

$$=k(3x_1+x_2-x_3,2x_1+x_3)=kf(u_1)$$

Vậy f là ánh xạ tuyến tính.

b) Ta có: $f(1,0,0)=(3,2);f(0;1;0)=(1;0);\ f(0;0;1)=(-1;1)$

$\Rightarrow$ Ma trận của f đối với cặp cơ sở chính tác là $A=\begin{bmatrix}3&1&-1\\2&0&1\end{bmatrix}$

c) $x\in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}3x_1+x_2-x_3=0\\2x_1\quad+\quad x_3=0\end{cases}$

Đặt $x_3=t \Rightarrow x_1=\dfrac{-t}{2},\ x_2=\dfrac{5t}{2} \Rightarrow x=t\left(\dfrac{-1}{2};\dfrac{5}{2};1\right)$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f=1$, cơ sở $\left\{\left(\dfrac{-1}{2};\dfrac{5}{2};1\right)\right\}$.

Bài 2.

a) Dễ thấy $\begin{cases}p_1,p_2\in P_2[x]\\k\in\mathbb{R}\end{cases}$ thì $f(p_1+p_2)=f(p_1)+f(p_2);f(kp_1)=kf(p_1)$

$\Rightarrow f$ là ánh xạ tuyến tính.

b) Ta có $f(1)=1+x^2,\ f(x)=x+x^3,\ f(x^2)=x^2+x^4$

$\Rightarrow$ Ma trận của f đối với cặp cơ sở E_1,E_2 là $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}_{5\times 3}$

c) $f(1+x)=1+x+x^2+x^3,\ f(2x)=2x+2x^3,\ f(1+x^2)=1+2x^2+x^4$

$\Rightarrow$ Ma trận của f đối với cặp cơ sở E_1',E_2 là $B=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&2&0\\1&0&2\\1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

Bài 3.

a) gt $\Rightarrow \left[\left[f(1) \right]_E \quad \left[f(x) \right]_E \quad \left[f\left(x^2\right) \right]_E \right] . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 17 & 32 \\ 3 & 1 & 7 \\ -6 & 16 & 25 \end{bmatrix}$ (E là cơ sở chính tắc của $P_2[x]$)

$\Rightarrow$ Ma trận của f đối với E là $A = \begin{bmatrix} -3 & 17 & 32 \\ 3 & 1 & 7 \\ -6 & 16 & 25 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -8 & 9 & -5 \\ -1 & 3 & -4 \\ -7 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

b) $\left[f\left(1+x^2\right) \right]_E = A. \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 9 & -5 \\ -1 & 3 & -4 \\ -7 & 6 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ -5 \\ -8 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow f\left(1+x^2\right) = -13 - 5x - 8x^2$

c)

$v = 1 + x + mx^2 \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \exists x_1, x_2, x_3 : v = x_1\left(-8 - x - 7x^2\right) + x_2\left(9 + 3x + 6x^2\right) + x_3\left(-5 - 4x - x^2\right) \ \left(\sum x_i^2 > 0\right)$

$\Leftrightarrow$ Xét hệ $\begin{cases} -8x_1 + 9x_2 - 5x_3 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1 \\ -7x_1 + 6x_2 - x_3 = m \end{cases}$ có nghiệm không tầm thường

$\left[\begin{array}{ccc|c} -8 & 9 & -5 & 1 \\ -1 & 3 & -4 & 1 \\ -7 & 6 & -1 & m \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} -8 & 9 & -5 & 1 \\ 0 & -15 & 27 & -7 \\ 0 & 15 & -27 & 7-8m \end{array}\right] \begin{pmatrix} 8L_2 - L_1 \to L_2 \\ 8L_3 - 7L_1 \to L_3 \end{pmatrix}$

$\to \left[\begin{array}{ccc|c} -8 & 9 & -5 & 1 \\ 0 & -15 & 27 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -8m \end{array}\right] \Rightarrow$ Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow m = 0$.

Vậy $m = 0$ thì $v \in \operatorname{Im} f$.

Bài 4.

Ma trận của f đối với cơ sở chính tắc là $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Ma trận chuyển cơ sở từ E sang B là $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ Ma trận của f đối với B là $S^{-1}.A.S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Bài 5. Giống bài 3.

Bài 6.

a) $f(v_1)=v_1+2v_2+6v_3=3x+3x^2+2\left(-1+3x+2x^2\right)+6\left(3+7x+2x^2\right)$

$$=19x^2+51x+16$$

$f(v_2)=3v_1-2v_3=3\left(3x+3x^2\right)-2\left(3+7x+2x^2\right)$

$$=5x^2-5x-6$$

$f(v_3)=-v_1+5v_2+4v_3=-3x-3x^2+5\left(-1+3x+2x^2\right)+4\left(3+7x+2x^2\right)$

$$=15x^2+40x+7$$

b) Gọi B_0 là ma trận của f đối với cơ sở chính tắc E

S là ma trận chuyển cơ sở từ B sang E ($\Rightarrow S^{-1}$ là ma trận chuyển từ E sang B)

$$\Rightarrow B_0=S^{-1}.A.S=\begin{bmatrix}0 & -1 & 3\\ 3 & 3 & 7\\ 3 & 2 & 2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & 0 & 5\\ 6 & -2 & 4\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0 & -1 & 3\\ 3 & 3 & 7\\ 3 & 2 & 2\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}239/24 & -161/24 & 289/24\\ 201/8 & -111/8 & 247/8\\ 61/12 & -31/12 & 107/12\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\left[f\left(x^2+1\right)\right]_E=B_0.\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}22\\56\\14\end{bmatrix}.$$

Bài 7.

a) $\left[f(v_1)\right]_{B'}=\begin{bmatrix}3\\1\\-3\end{bmatrix}$; $\left[f(v_2)\right]_{B'}=\begin{bmatrix}-2\\6\\0\end{bmatrix}$; $\left[f(v_3)\right]_{B'}=\begin{bmatrix}1\\2\\7\end{bmatrix}$; $\left[f(v_4)\right]_{B'}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$

b) $f(v_1)=3u_1+u_2-3u_3=(11;5;22)$

$f(v_2)=-2u_1+6u_2=(-42;32;-10)$

$f(v_3)=u_1+2u_2+7u_3=(-56;87;17)$

$f(v_4)=u_2+u_3=(-13;17;2)$.

c) Giả sử $(2;2;0;0)=x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3+x_4v_4\Rightarrow(x_1;x_2;x_3;x_4)=(1;1;0;0)$

$\Rightarrow f(2;2;0;0) = 1.f(v_1) + 1.f(v_2) + 0.f(v_3) + 0.f(v_4)$

$= (-31;37;12)$.

Bài 8.

Từ gt $\Rightarrow \begin{cases} f(1) + 2f(x) = -19 + 12x^2 + 2x^2 \\ 2f(1) + f(x) = -14 + 9x + x^2 \\ \quad f(x^2) \quad = 4 - 2x - 2x^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(1) = \dfrac{2(x^2+9x-14)-(2x^2+12x-19)}{3} = 2x-3 \\ f(x) = x^2+9x-14-2(2x-3) = x^2+5x-8 \\ f(x^2) = -2x^2-2x+4 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Ma trận của f đối với cơ sở chính tắc là $A = \begin{bmatrix} -3 & -8 & 4 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -3 & -8 & 4 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -3 & -8 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -3 & -8 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \operatorname{rank}(f) = \operatorname{rank} A = 2$.

Bài 9.

Ta chỉ cần chứng minh f đơn ánh $\Leftrightarrow$ f toàn ánh.

+ Giả sử f đơn ánh $\Rightarrow \ker f = \{\theta\}$. Mà $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = -\dim V'$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = \dim V'$

Lại có $\operatorname{Im} f$ là KGVT con của $V' \Rightarrow \operatorname{Im} f \equiv V' \Rightarrow f$ toàn ánh.

+ Giả sử f toàn ánh $\Rightarrow \operatorname{Im} f \equiv V' \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = \dim V'$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f = \dim V' - \dim \operatorname{Im} f = 0 \Rightarrow \operatorname{Ker} f = \{\theta\}$

$\Rightarrow$ f đơn ánh.

Vậy f đơn ánh $\Leftrightarrow$ f toàn ánh hay các mệnh đề sau tương đương:

a) f đơn ánh

b) f toàn ánh

c) f song ánh.

Bài 10.

Ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là A: $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ m & -1 & 1\end{bmatrix}$

f là toàn ánh $\Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3 = 3 \Leftrightarrow \operatorname{rank} A = 3$

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ m & -1 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 3 & -2\\ 0 & 2m-1 & 1-m\end{bmatrix}\begin{pmatrix}L_2-L_1\to L_2\\ L_3-mL_1\to L_3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 3(1-m)+2(2m-1)\end{bmatrix}\left(3L_3-(2m-1)L_2\to L_3\right)$$

Vậy $r(A)=3\Leftrightarrow 3(1-m)+2(2m-1)\neq 0$

$\Leftrightarrow 1+m\neq 0\Leftrightarrow m\neq -1.$

Bài 11.

a) $\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}3-\lambda & 0\\ 8 & -1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda+1)\Rightarrow \det(A-\lambda I)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\lambda=3\\ \lambda=-1\end{array}\right.$

+ $\lambda=3$. $v_A(3)$ là KG riêng của A, là KG nghiệm của $(A-3I)x=0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}0x_1+0x_2=0\\ 8x_1-4x_2=0\end{cases}\Leftrightarrow x_2=2x_1\Rightarrow v_A(3)=\operatorname{span}(\{1;2\})$.

+ $\lambda=-1$. $v_A(-1)$ là KG nghiệm của $(A+I)x=0\Leftrightarrow\begin{cases}4x_1+0x_2=0\\ 8x_1+0x_2=0\end{cases}\Leftrightarrow(x_1;x_2)=(0;0)$

$\Rightarrow v_A(-1)=\{\theta\}$.

b) Tương tự câu a: $\lambda=4,\ v_B(4)=\operatorname{span}\left(\left\{\frac{3}{2};1\right\}\right)$

c) $\det(C-\lambda I)=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1 & 0\\ 5 & -3-\lambda & 3\\ -1 & 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1).(\lambda^2+4\lambda+5)$

$\Rightarrow \det(C-\lambda I)=0\Leftrightarrow\lambda=1$

Với trị riêng $\lambda=1,\ v_C(1)$ là KG nghiệm của hệ $\begin{cases}x_1-x_2=0\\ 5x_1-4x_2+3x_3=0\\ -x_1-3x_3=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow(x_1;x_2;x_3)=t(-3;-3;1)\Rightarrow v_C(1)=\operatorname{span}\{(-3;-3;1)\}$.

d) $\det(D-I\lambda)=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ -4 & 4-\lambda & 0\\ -2 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-2)^3$

$\Rightarrow \det(C-\lambda I)=0 \Leftrightarrow \lambda=2$

Với $\lambda=2,\ v_D(2)$ là nghiệm hệ $\begin{cases}-2x_1+x_2=0\\-4x_1+2x_2=0\\-2x_1+x_2=0\end{cases}$

$\Rightarrow v_D(2)=\text{span}\left\{\left(\frac{1}{2};1;0\right);(0;0;0)\right\}$.

e) $\det(E-\lambda I)=\begin{vmatrix}4-\lambda & -5 & 2\\5 & -7-\lambda & 3\\6 & -9 & 4-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^2(\lambda-1)$

$\Rightarrow$ Giá trị riêng $\lambda=0,\ \lambda=1$.

+ $\lambda=0,\ v_E(0)$ là KG nghiệm hệ $\begin{cases}4x_1-5x_2+2x_3=0\\5x_1-7x_2+3x_3=0\\6x_1-9x_2+4x_3=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow (x_1;x_2;x_3)=t.\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};1\right)\Rightarrow v_E(0)=\text{span}\left\{\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};1\right)\right\}$

+ $\lambda=1,\ v_E(1)$ là KG nghiệm hệ $\begin{cases}3x_1-5x_2+2x_3=0\\5x_1-8x_2+3x_3=0\\6x_1-9x_2+3x_3=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow (x_1;x_2;x_3)=t(1;1;1)\Rightarrow v_E(1)=\text{span}\{(1;1;1)\}$.

Bài 12.

Ma trận của f đối với cơ sở chính tắc là $A=\begin{bmatrix}5 & 6 & 2\\0 & -1 & -8\\1 & 0 & -2\end{bmatrix}$

$\Rightarrow |A-\lambda I|=\begin{vmatrix}5-\lambda & 6 & 2\\0 & -1-\lambda & -8\\1 & 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-3)(\lambda+4)(\lambda-3)=-(\lambda-3)^2(\lambda+4)$

$\Rightarrow$ Các trị riêng $\lambda=3,\ \lambda=-4$

+ Với $\lambda=3,\ v_A(3)$ là KG nghiệm hệ $\begin{cases}2x_1+6x_2+2x_3=0\\ \quad -4x_2-9x_3=0\\x_1 \quad + \quad 5x_3=0\end{cases}\Rightarrow (x_1;x_2;x_3)=t.(5;-2;1)$

$\Rightarrow v_A(3)=\text{span}\{(5;-2;1)\}$.

+ Với $\lambda=-4,\ v_A(-4)$ là KG nghiệm hệ $\begin{cases}9x_1+6x_2+2x_3=0\\ \quad 3x_2-8x_3=0\\x_1 \quad + \quad 2x_3=0\end{cases}\Rightarrow (x_1;x_2;x_3)=t.\left(-2;\frac{8}{3};1\right)$

$\Rightarrow v_A(-4) = \text{span}\left\{\left(-2;\frac{8}{3};1\right)\right\}$.

Bài 13.

a) $\begin{vmatrix} -14-\lambda & 12 \\ -20 & 17-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2) \Rightarrow$ Trị riêng $\lambda = 1,\ \lambda = 2$.

+ $\lambda = 1 \Rightarrow v_f(1)$ là KG nghiệm hệ $\begin{cases} -15x_2 + 12x_2 = 0 \\ -20x_1 + 16x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x_1;x_2) = t\left(\frac{4}{5};1\right) \Rightarrow v_f(1) = \text{span}\left\{\left(\frac{4}{5};1\right)\right\}$.

+ $\lambda = 2 \Rightarrow v_f(2) = \text{span}\left\{\left(\frac{3}{4};1\right)\right\}$

$\Rightarrow D = \begin{bmatrix} 5/4 & 3/4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ thì $D^{-1}.A.D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

b) $D = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ thì $D^{-1}.B.D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |C - \lambda I| = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$

$\Rightarrow$ Các trị riêng $\lambda = 0,\ \lambda = 1,\ \lambda = 2$

+ $\lambda = 1,\ v_C(1) = \text{span}\{(1;0;0)\}$

+ $\lambda = 0,\ v_C(0) = \text{span}\{(0;-1;1)\}$

+ $\lambda = 2,\ v_C(2) = \text{span}\{(0;1;1)\}$

$\Rightarrow D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ thì $D^{-1}.C.D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

d) $|D - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -\lambda \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-3)^2(\lambda-2)$

+ $\lambda = 3,\ v_D(3) = \text{span}\{(1;1;0)\}$

+ $\lambda = 2,\ v_D(2) = \text{span}\{(1;0;0)\}$

Do D chỉ có tối đa 2 vector riêng ĐLTT nên D không chéo hóa được.

(Chú ý: $D^{-1}AD = S$ có dạng chéo hóa

$\Rightarrow A = D.S.D^{-1} \Rightarrow A^n = D.S^n.D^{-1}$, S^n dạng chéo).

Bài 14.

a) $|A-\lambda I|=-(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$

+ $\lambda=1\Rightarrow v_A(1)=\text{span}\{(1;1;1)\}$

+ $\lambda=2\Rightarrow v_A(2)=\text{span}\left\{\left(\frac{2}{3};1;1\right)\right\}$

+ $\lambda=3\Rightarrow v_A(3)=\text{span}\left\{\left(\frac{1}{4};\frac{3}{4};1\right)\right\}$

$\Rightarrow A$ chéo hóa được, ma trận chéo $D=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$.

b) $|B-\lambda I|=-(\lambda-5)^3$

với $\Rightarrow \lambda=5,\ v_B(5)=\text{span}\{(0;0;1)\}$

$\Rightarrow B$ không chéo hóa được, tức không tồn tại ma trận chéo đồng dạng với B.

c) $|C-\lambda I|=-\lambda^2(\lambda-1)$

+ $\lambda=0,\ v_C(0)=\text{span}\left\{(0;1;0);\left(\frac{-1}{3};0;1\right)\right\}$

+ $\lambda=1,\ v_C(1)=\text{span}\{(0;0;1)\}$

$\Rightarrow C$ chéo hóa được, ma trận chéo $D=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

Bài 15.

a) Ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$

Chéo hóa A: $D^{-1}.A.D=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{bmatrix}$ với $D=\begin{bmatrix}-1&-1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ Cơ sở cần tìm $\{(-1;1;0);(-1;0;1);(1;1;1)\}$.

b) Ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là $B=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\1&-1&0\\-1&1&2\end{bmatrix}$

Chéo hóa B: $D^{-1}.B.D=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1-\sqrt{3}&0\\0&0&1+\sqrt{3}\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\1&-2-\sqrt{3}&-2+\sqrt{3}\\1&1&1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ Cơ sở cần tìm $\left\{(2;1;1);\left(-2;-2-\sqrt{3};1\right);\left(-1;-2+\sqrt{3};1\right)\right\}$.

Bài 16.

a) $u \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow u \in \operatorname{span}\left\{(4;-2;-6);(5;5;0);(1;2;1)\right\}$

$\Leftrightarrow$ Hệ $\begin{cases} 4x_1+5x_2+x_3=6 \\ -2x_1+5x_2+2x_3=-3 \\ -6x_1+x_3=m \end{cases}$ có nghiệm

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 1 & 6 \\ -2 & 5 & 2 & -3 \\ -6 & 0 & 1 & m \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 1 & 6 \\ 0 & 30 & 10 & 0 \\ 0 & 30 & 10 & 4m+36 \end{array}\right] \begin{pmatrix} 4L_2+2L_1 \to L_2 \\ 4L_3+6L_1 \to L_3 \end{pmatrix}$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 1 & 6 \\ 0 & 30 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4m+36 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow 4m+36=0 \Leftrightarrow m=-9$ hay $u \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow m=-9$.

b) Ta có $\left[\left[f(e_1)\right]_E \quad \left[f(e_2)\right]_E \quad \left[f(e_3)_E\right]\right].\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ -2 & 5 & 2 \\ -6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

trong đó E là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$, $E=\{e_1;e_2;e_3\}$.

$\Rightarrow$ Ma trận của f đối với E là $A=\begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ -2 & 5 & 2 \\ -6 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

Ta có $|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & -1-\lambda & 2 \\ 1 & -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2(\lambda-1)$

$\Rightarrow$ Trị riêng $\lambda=0,\ \lambda=1$

+ $\lambda=0,\ v_A(0)=\operatorname{span}\left\{(-1;0;1)\right\}$

+ $\lambda=1,\ v_A(1)=\operatorname{span}\left\{\left(\frac{-3}{2};\frac{-1}{2};1\right)\right\}$.

Bài 17.

Đưa bài toán về: Ma trận A biết A^2 có trị riêng là λ^2.

Cần chứng minh A có trị riêng λ hoặc $-\lambda$.

Ta có: $\det\left(A^2-\lambda^2 I\right)=0$

$\Leftrightarrow |A-\lambda I|.|A+\lambda I|=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|A-\lambda I|=0\\|A+\lambda I|=0\end{array}\right. \Leftrightarrow A \text{ có trị riêng } \lambda \text{ hoặc } -\lambda. \text{ (đpcm)}$$

Bài 18.

a) $\left[f\left(1+x+x^2\right)\right]_E = A.\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3 & 1 & 2\\6 & 0 & -3\\-10 & 2 & 6\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\3\\-2\end{bmatrix}$

$\Rightarrow f\left(1+x+x^2\right) = 3x-2x^2$

$v = 1-x+mx^2 \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f\left(1-x+mx^2\right) = \theta$

$$\Leftrightarrow A.\begin{bmatrix}1\\-1\\m\end{bmatrix} = \theta \Leftrightarrow \begin{cases}2m-4=0\\-3m+6=0\\6m-12=0\end{cases} \Leftrightarrow m=-2.$$

b) Chéo hóa A: $D^{-1}.A.D = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}$ với $D = \begin{bmatrix}1/2 & 1/2 & 1/4\\-1/2 & 0 & -3/4\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ Cơ sở cần tìm là $\left\{\left(\frac{1}{2};\frac{-1}{2};1\right);\left(\frac{1}{2};0;1\right);\left(\frac{1}{4};\frac{-3}{4};1\right)\right\}$.

Bài 19. (Định lý Sylvester)

$U \xrightarrow{g} V \xrightarrow{f} W$; A, B là ma trận của f, g đối với cặp cơ sở tương ứng

+ $\operatorname{Im}(f\circ g) \subset \operatorname{Im} f \Rightarrow r(AB) = \dim\operatorname{Im}(f\bullet g) \le \dim\operatorname{Im} f = r(A)$.

+ $\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker}(f\circ g) \Rightarrow \dim\operatorname{Im}(f\circ g) \le \dim\operatorname{Im} g$

(do $\dim U = \dim\operatorname{Im} g + \dim\operatorname{Ker} g = \dim\operatorname{Im}(f\circ g) + \dim\operatorname{Ker}(f\bullet g)$)

$\Rightarrow r(AB) \le r(B)$.

Chương V: DẠNG SONG TUYẾN TÍNH – DẠNG TAM PHƯƠNG KHÔNG GIAN EUCLID – ĐƯỜNG VÀ MẶT BẬC HAI

Bài 1.

a) $f(u_1,u_3)=0$

$$f(u_1-u_2+u_3,\ 2u_1+3u_2-u_3)=2f(u_1,u_1)+3f(u_1,u_2)-f(u_1,u_3)-2f(u_2,u_1)-3f(u_2,u_3)$$
$$+f(u_2,u_3)+2f(u_3,u_1)+3f(u_3,u_2)-f(u_3,u_3)$$
$$=14$$

b) Kiểm chứng $g(\alpha u_1+\beta u_2, av_1+bv_2)=\alpha a g(u_1,v_1)+\alpha\beta g(u_1,v_2)+\beta a g(u_2,v_1)+\beta b g(u_2,v_2)$

$$g(u,v)=f(u,h(v))=h[u]_\beta^T.A.[h(v)]_\beta$$
$$=[u]_\beta^T.A.B.|v|_\beta\, g\beta AB$$

$\Rightarrow$ Ma trận của g đối với cơ sở β là AB.

Bài 2.

$f(1,1)=1; f(1,x)=2; f(1,x^2)=4$

$f(x,1)=1; f(x,x)=2; f(x,x^2)=4$

$f(x^2,1)=1; f(x^2,x)=2; f(x^2,x^2)=4$

$\Rightarrow$ Ma trận của f đối với cơ sở chính tắc là $\begin{bmatrix}1&2&4\\1&2&4\\1&2&4\end{bmatrix}$

$f(a_1x^2+b_1x+c_1,a_2x^2+b_2x+c_2)=4a_1a_2+2a_1b_2+a_1c_2+4b_1a_2+2b_1b_2+b_1c_2+4c_1a_2+2c_1b_2+c_1c_2$.

Bài 3.

$$w_1=x_1^2+5x_2^2-4x_3^2 0+2x_1x_2-4x_1x_3$$
$$=\left[x_1^2+2x_1(x_2-2x_3)+(x_2-2x_3)^2\right]+\left[5x_2^2-4x_3^2-(x_2-2x_3)^2\right]$$
$$=(x_1+x_2-2x_3)^2+(4x_2^2-8_3^2+4x_2x_3)$$
$$=(x_1+x_2-2x_3)^2+(2x_2+x_3)^2-9x_3^2=y_1^2+y_2^2-y_3^2$$

$y_1=x_1+x_2-2x_3,\ y_2=2x_2+x_3,\ y_3=3x_3$

$\rightarrow w_1$ không xác định dương, không xác định âm.

$w_2=x_1x_2+4x_1x_3+x_2x_3$

Đặt $x_1=y_1-y_2,\ x_2=y_1+y_2,\ x_3=y_3$

$\Rightarrow w_2=y_1^2-y_2^2+4(y_1-y_2)y_3+(y_1+y_2).y_3$

$= y_1^2 + y_1(4y_3 + y_3) - y_2^2 - 4y_2y_3 + y_2y_3$

$= y_1^2 + 5y_1y_3 - y_2^2 - 3y_2y_3$

$= \left(y_1 + \frac{5}{2}y_3\right)^2 - \left(y_2 + \frac{3}{2}y_3\right)^2 - 4y_3^2$

$= u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 \ \left(u_1 = y_1 + \frac{5}{3}y_3;\ u_2 = y_2 + \frac{3}{2}y_3;\ u_3 = 4y_3\right)$

$\rightarrow w_2$ không có dấu xác định.

Bài 4.

a) Ma trận của f đối với cơ sở chính tắc là $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & a \end{bmatrix}$

$\Delta_1 = 5,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1,\ \Delta_3 = |A| = a - 2$

$\Rightarrow w$ xác định dương $\Leftrightarrow a > 2$

b) Ma trận của f đối với cơ sở chính tắc là $B = \begin{bmatrix} 2 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$\Delta_1 = 2;\ \Delta_2 = 2 - a^2;\ \Delta_3 = 3.(2 - a^2) - 1 = 5 - 3a^2$

$\Rightarrow w$ xác định dương $\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - a^2 > 0 \\ 5 - 3a^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a^2 < \frac{5}{3} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{15}}{3} < a < \frac{\sqrt{15}}{3}$.

c) Ma trận của f đối với cơ sở chính tắc là $C = \begin{bmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

$\Delta_1 = 1;\ \Delta_2 = 1 - a^2;\ \Delta_3 = -5a^2 - 4a$

$\Rightarrow w$ xác định dương $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - a^2 > 0 \\ -5a^2 - 4a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < a < 1 \\ -\frac{4}{3} < a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{4}{5} < a < 0$.

Bài 5.

Ma trận của dạng song tuyến tính đã cho đối với cơ sở chính tắc $\mathbb{R}^3$ là $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & a & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

Dạng song tuyến tính trên là tích vô hướng nếu nó xác định dương

$(\Delta_1 = 2;\ \Delta_2 = 2a - 1;\ \Delta_3 = 6a - 11)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a-1>0 \\ 6a-11>0 \end{cases} \Leftrightarrow a>\frac{11}{6}.$$

Bài 6.

$f(x;y)$ là 1 tích vô hướng trên $\mathbb{R}^3$ $\Leftrightarrow \begin{cases} A \text{ laø ma traän ñoái xöùng} \\ f \text{ xaùc ñònh döông} \end{cases}$ (1)

Mà $\Delta_1=4;\ \Delta_2=8;\ \Delta_3=-18a^2+16a-11$

Nên $(1)\Leftrightarrow \begin{cases} a^2=4 \\ -18a^2+16a-11=0 \end{cases} \Leftrightarrow a\in\varnothing$

Vậy không tồn tại a thỏa mãn.

Bài 7.

a) Kiểm chứng: • $\langle u,v\rangle=\langle v,u\rangle$

• $\langle \alpha u_1+\beta u_2,v\rangle=\alpha\langle u_1,v\rangle+\beta\langle u_2,v\rangle$

• $\langle u,u\rangle\ge 0\ \forall u$ và $\langle u,u\rangle=0\Leftrightarrow u=\theta$.

b) $B_0=\{(1;0;1);(1;1;-1);(0;1;1)\}$ là 1 cơ sở là $\mathbb{R}^3$

$[u]_{B_0}=B_0^1.[u]_E$ (B_0^1 là ma trận chuyển cơ sở từ E sang B_0)

$$=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}\Rightarrow (a_1;a_2;a_3)=(1;-3;1)$$

Tương tự $(b_1;b_2;b_3)=(2;5;7)\Rightarrow \langle u,v\rangle=-6$

c) $[u]_B=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix};\ [v]_B=\begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}\Rightarrow \langle u,v\rangle=2.6+0.(-3)+3.(-3)=3$

d) $[u]_B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix},\ [v]_B=\begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}\Rightarrow \langle u,v\rangle=2.6+5.(-3)+(-3)^2=6$.

Bài 8.

a) $\langle p,p\rangle=p^2(0)+p^2(1)+p^2(2)\ge 0$

$\langle p,p\rangle=0\Leftrightarrow p(0)=p(1)=p(2)=0$

Chọn $p=x(x-1)(x-2)\in P_3[x]$ thì $p\ne 0$ và $\langle p,p\rangle=0$

$\Rightarrow \langle p,q\rangle$ không là tích vô hướng

b) Có là tích vô hướng (• $\langle p,q\rangle=\langle q,p\rangle$

- $\langle \alpha p_1 + \beta p_2, q\rangle = \alpha\langle p_1, q\rangle + \beta\langle p_2, q\rangle$
- $\langle p, p\rangle \geq 0$; Dấu "=" $\Leftrightarrow p = 0$)

c) Có là tích vô hướng

(Chú ý: $\int_{-1}^{1} p^2(x)dx = 0 \Leftrightarrow p(x) = 0$)

Với $p = 2 - 3x + 5x^2 - x^3$; $q = 4 + x - 3x^2 + 2x^3$

b) $\langle p, q\rangle = 8 + 12 + 80 + 374 = 474$

c) $\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1}(2 - 3x + 5x^2 - x^3)(4 + x - 3x^2 + 2x^3)dx = \frac{1466}{105}$.

Bài 9.

a) $\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle + 2\langle u,v\rangle$

$$= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u,v\rangle$$

$$\|u-v\|^2 = \langle u-v, u-v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle - 2\langle u,v\rangle$$

$$= \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u,v\rangle$$

$\Rightarrow \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(= \|u\|^2 + \|v\|^2\right)$

b) $\|u+v\| = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u,v\rangle$

$u \perp v \Leftrightarrow \langle u,v\rangle = 0 \Leftrightarrow \|u+v\| = \|u\|^2 + \|v\|^2$: đpcm

Bài 10.

$v_1 = (1;1;-2)$; $v_2 = (2;0;1)$; $v_3 = (1;2;3)$

$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$

$\overline{u_2} = v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1 = (2;0;1) - 0.u_1 = (2;0;1) \Rightarrow u_2 = \frac{\overline{u_2}}{\|u_2\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}; 0; \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

$\overline{u_3} = v_3 - \langle v_3, u_1\rangle u_1 - \langle v_3, u_2\rangle u_2 = (1;2;3) - \frac{-3}{\sqrt{6}}.\left(\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{-2}{\sqrt{6}}\right) - \frac{5}{\sqrt{5}}.\left(\frac{2}{\sqrt{5}}; 0; \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

$$= \left(\frac{-1}{2}; \frac{5}{2}; 3\right) \Rightarrow u_3 = \frac{\overline{u_3}}{\|u_3\|} = \left(\frac{-1}{\sqrt{62}}; \frac{5}{\sqrt{62}}; \frac{6}{\sqrt{62}}\right)$$

$\Rightarrow B' = \{u_1, u_2, u_3\}$

$$[u]_{B'} = \left(\langle u,u_1\rangle \quad \langle u,u_2\rangle \quad \langle u,u_3\rangle\right)^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{16}{\sqrt{5}} & \frac{71}{\sqrt{62}} \end{pmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 16/\sqrt{5} \\ 71/\sqrt{62} \end{bmatrix}$$

Bài 11.

$u_1 = (6;3;-3;6);\ u_2 = (5;1;-3;1)$

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{10}};\frac{1}{\sqrt{10}};\frac{-1}{\sqrt{10}};\frac{2}{\sqrt{10}}\right)$$

$$\overline{v_2} = v_2 - \langle u_2, v_1\rangle v_1 = (5,1,-3,1) - \frac{16}{\sqrt{10}}.\left(\frac{2}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{-1}{\sqrt{10}},\frac{2}{\sqrt{10}}\right)$$

$$= \left(\frac{9}{5},\frac{-3}{5},\frac{-7}{5},\frac{-11}{5}\right) \Rightarrow v_2 = \frac{\overline{v_2}}{\|v_2\|} = \left(\frac{9}{2\sqrt{65}},\frac{-3}{2\sqrt{65}},\frac{-7}{2\sqrt{65}},\frac{-11}{2\sqrt{65}}\right)$$

$$\Rightarrow B = \left\{\left(\frac{2}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{-1}{\sqrt{10}},\frac{2}{\sqrt{10}}\right);\left(\frac{9}{2\sqrt{65}},\frac{-3}{2\sqrt{65}},\frac{-7}{2\sqrt{65}},\frac{-11}{2\sqrt{65}}\right)\right\}$$

Thì $\operatorname{span} B = \operatorname{span}\{u_1, u_2\}$.

Bài 12.

a) Đặt $v_1 = 1,\ v_2 = x,\ v_3 = x^2$

- $u_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
- $\overline{u_2} = v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1 = x = 0.\dfrac{1}{\sqrt{2}} = x \Rightarrow u_2 = \dfrac{\overline{u_2}}{\|\overline{u_2}\|} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x$
- $\overline{u_3} = v_3 - \langle v_3, u_1\rangle u_1 - \langle v_3, u_2\rangle u_2 = x^2 - \dfrac{1}{3} \Rightarrow u_3 = \dfrac{\overline{u_3}}{\|\overline{u_3}\|} = \dfrac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(x^2 - \dfrac{1}{3}\right)$

b) $[r]_A = \left[\langle r,u_1\rangle \quad \langle r,u_2\rangle \quad \langle r,u_3\rangle\right]^T \left(A = \{u_1,u_2,u_3\}\right)$

$$= \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} \\ -\sqrt{6} \\ 2\sqrt{10}/5 \end{bmatrix}.$$

Bài 13.

a) $w_1 = \dfrac{\langle u,v\rangle .v}{\langle v,v\rangle} = \dfrac{8}{49}(2,-2,4,5) = \left(\dfrac{16}{49},\dfrac{-16}{49},\dfrac{32}{49},\dfrac{40}{49}\right)$

b) $w_2 = \dfrac{\langle u,v\rangle .v}{\langle v,v\rangle} = \dfrac{-5}{47}(-1,-2,5,1,4) = \left(\dfrac{5}{47},\dfrac{10}{47},\dfrac{-25}{47},\dfrac{-5}{47},\dfrac{-20}{47}\right)$.

Bài 14.

+ Trực chuẩn hóa $\{v_1, v_2\}$

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\overline{u_2} = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1 = (2,5,4) - 6.\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = (-2,1,2) \Rightarrow u_2 = \left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

+ Gọi w là hình chiếu của u lên $W = \text{span}\{v_1, v_2\}$

$$\Rightarrow w = \langle u, u_1 \rangle u_1 + \langle u, u_2 \rangle u_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) + (-2).\left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$= (2,0,-1).$$

Bài 15.

a) $w \in H \Leftrightarrow w_1 + 2w_2 - w_3 = 0 \ \left(\langle w, u \rangle = 0\right)$

$$\Leftrightarrow w = a(1,0,1) + b(-2,1,0) \Rightarrow H = \text{span}\{(1,0,1);(-2,1,0)\}$$

$$v_1 = \frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\overline{v_2} = (-2,1,0) - \sqrt{2}(-1).\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (-2,1,0) + (1,0,1) = (-1,1,1)$$

$$\Rightarrow v_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$\Rightarrow B = \{v_1, v_2\}$ là 1 cơ sở trực chuẩn của H

b) u là hình chiếu trực giao của v lên H $\left(v = (3,6,3)\right)$

$$u = \langle v, v_1 \rangle v_1 + \langle v, v_2 \rangle v_2 = 3\sqrt{2}.\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2\sqrt{3}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = (1,2,5).$$

Bài 16.

Ta có: $x \in V \Leftrightarrow \langle x, v_i \rangle = 0, i = \overline{1,3} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \ \ (\text{thay } x_1 = -x_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = (-x_2, x_2, x_3, x_4, -x_2 + x_3 - 2x_4)$$

$$= x_2(-1,1,0,0,-1) + x_3(0,0,1,0,1) + x_4(0,0,0,1,-2)$$

$\Rightarrow \dim V = 3$.

(Gọi V là KGVT con của $\mathbb{R}^5$: $\begin{cases} v_1', v_2' \in V \Rightarrow \langle v_1', v_i \rangle = \langle v_2', v_i \rangle = 0 \Rightarrow \langle v_1' + v_2', v_i \rangle = 0 \\ \qquad \Rightarrow v_1' + v_2' \in V \\ kv_1' \in V,\ k \in \mathbb{R} \end{cases}$).

Bài 17.

a) Chứng minh: • $a, b \in V_2 \Rightarrow \langle a, V \rangle = \langle b, V \rangle = 0\ \forall v \in V_1$

$$\Rightarrow \langle a + b, v \rangle = 0 \Rightarrow a + b \in V_2$$

• $a \in V_2,\ k \in \mathbb{R} \Rightarrow \langle ka, V \rangle = k \langle a, V \rangle = 0\ \forall v \in V_1$

$$\Rightarrow ka \in V_2$$

$\Rightarrow V_2$ là KGVT con của V

b) Xét $B_1 = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ là cơ sở trực chuẩn của V_1

Bổ sung $n - m$ vector để được cơ sở trực chuẩn của V là $\{x_1, x_2, ..., x_m, x_{m+1}, ..., x_n\}$

Đặt $W = \text{span}\{x_{m+1}, ..., x_n\}$

• $w \in W \Rightarrow w = \sum_{i=m+n}^{n} \lambda_i x_i \Rightarrow \langle w, x_i \rangle = 0\ \forall i = \overline{1, m} \Rightarrow w \in V_2 \Rightarrow W \subset V_2$

• $v \in V_2 \Rightarrow v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i . x_i$. Mà $\langle v, x_i \rangle = 0\ \forall i = \overline{1, m} \Rightarrow \alpha_i = 0\ \forall i = \overline{1, m}$

$$\Rightarrow v = \sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i . x_i \Rightarrow v \in W \Rightarrow V_2 \subset W$$

Do vậy $W = V_2$, nên V_1, V_2 bù nhau

Khi đó dễ thấy $\dim V_2 = n - m$.

Bài 18.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A - \lambda I| = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)$

• $\lambda = 0 \Rightarrow v_A(0) = \text{span}\{(0; -1; 1)\} \Rightarrow$ vector riêng: $\left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

• $\lambda = 1 \Rightarrow v_A(1) = \text{span}\{(1; 0; 0)\} \Rightarrow$ vector riêng: $(1; 0; 0)$

• $\lambda = 2 \Rightarrow v_A(2) = \text{span}\{(0, 1, 1)\} \Rightarrow$ vector riêng: $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Ta có 3 vector riêng trực chuẩn $\left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $(1; 0; 0)$; $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ứng với các trị riêng 0, 1, 2

$$\Rightarrow P^T AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ với } P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

b) $B = \begin{bmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow [B - \lambda I] = (\lambda - 25)(\lambda + 25)$

- $\lambda = 25$ ta có vector riêng trực chuẩn: $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.
- $\lambda = -25$ ta có vector riêng trực chuẩn $\left(\frac{-4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

$$\Rightarrow P^T BP = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -25 \end{bmatrix} \text{ với } P = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

c) $P^T CP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ với $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

d) $P^T DP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ với $P = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$

Bài 19.

a) Đặt $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2$

Ma trận của f đối với cơ sở chính tắc $\mathbb{R}^3$ là $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ta có $|A - \lambda I| = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)$

+ $\lambda = 0 \Rightarrow v_A(0) = \text{span}\{(-1,1,0)\}$, trực chuẩn hóa được $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

+ $\lambda = 1 \Rightarrow v_A(1) = \text{span}\{0,0,1\}$, trực chuẩn hóa được $(0,0,1)$

+ $\lambda = 2 \Rightarrow v_A(2) = \text{span}\{1,1,0\}$, trực chuẩn hóa được $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

Do vậy $P^T AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ với $P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Hay $f(x) = y_2^2 + 2y_3^2 [x]_B = [y_1 \quad y_2 \quad y_3]^T$, $B = \left\{ \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right); (0,0,1); \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \right\}$

b) Tương tự câu a

$f(x) = 3y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2 [x]_B = [y_1, y_2, y_3]^T$, $B = \left\{ \left(\frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{2}{3} \right); \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right); \left(\frac{-2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) \right\}$.

Bài 20.

a) Dạng toàn phương $w = 2x^2 - 4xy - y^2$ có ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

Chéo hóa trực giao A được: $P^T AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$

Đặt $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ Phương trình đường cong là: $-2x'^2 + 3y'^2 = 8 \Rightarrow$ hyperbol

b) Dạng toàn phương $w = x^2 + 2xy + y^2$ có ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Chéo hóa trực giao A được: $P^T AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

Đặt $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow$ Phương trình đường cong là: $x'^2 + \frac{9}{2}x' - \frac{7}{2}y' = 0 \Rightarrow$ parabol

c) $A = \begin{bmatrix} 11 & 12 \\ 12 & 4 \end{bmatrix}$ có 2 tụ riêng 20, -5

$\Rightarrow$ có thể đưa dạng toàn phương $11x^2 + 24xy + 4y^2$ về $20x'^2 - 5y'^2$

$\Rightarrow$ Phương trình đường cong là: $20x'^2 - 5y'^2 - 15 = 0 \Rightarrow$ hyperbol

d) $\left(31\sqrt{8}\right)x'^2 + \left(3 - \sqrt{8}\right)y'^2 = 24 \Rightarrow$ elipse.

Bài 21.

a) Ma trận của dạng toàn phương đối với cơ sở chính tắc là $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

Chéo hóa trực giao A được: $P^TAP=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$, $P=\begin{bmatrix}-1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\\0&1&0\end{bmatrix}$

$\Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2=x_2'^2+2x_3'^2$

$\Rightarrow$ Phương trình mặt cong: $x_2'^2+2x_3'^2=4\Rightarrow$ ellipsoid.

b) Ma trận của dạng toàn phương $w=5x^2+y^2+z^2-6xy+2xz-2yz=1$ là $A=\begin{bmatrix}5&-3&1\\-3&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}$.

Có 2 trị riêng $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ là nghiệm của $-\lambda^3+7\lambda^2-4=0$

Chéo hóa trực giao A đưa dạng toàn phương về dạng $w=\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\lambda_3z'^2$

$\Rightarrow$ Phương trình mặt cong $\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\lambda_3z'^2=1\Rightarrow$ Hyperboloid 1 tầng $(\lambda_1,\lambda_2>0,\ \lambda_3<0)$.

c) $A=\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&3\end{bmatrix}$ có 3 trị riêng $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3>0$ là nghiệm $-\lambda^3+7\lambda^2-14\lambda+7=0$

$\Rightarrow$ Phương trình mặt cong $\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\lambda_3z'^2=16\Rightarrow$ ellipsoid.

Bài 22.

$A=\begin{bmatrix}9&-4&4\\-4&7&0\\4&0&11\end{bmatrix}$ là ma trận của Q đối với cơ sở chính tắc

Chéo hóa trực giao A: $P^TAP=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&9&0\\0&0&15\end{bmatrix}$, $P=\begin{bmatrix}2/3&1/3&2/3\\2/3&-2/3&-1/3\\-1/3&-2/3&2/3\end{bmatrix}$

$\Rightarrow Q=3y_1^2+9y_2^2+15y_3^2$ với $\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=P^{-1}.\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$

Mà P trực giao $\langle x,x\rangle=\langle Py,Py\rangle=(Py)^T.Py=y^T.P^T.P.y=y^T.y=\langle y,y\rangle\Rightarrow\sum x_i^2=\sum y_i^2=16$

$\Rightarrow 3.16\le Q\le 15.16$

$\min Q = 3.16 \Leftrightarrow x = P.\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\max Q = 15.16 \Leftrightarrow x = P.\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Bài 23.

A, B vuông, đối xứng cấp n có tất cả trị riêng dương

Chứng minh $A + B$ cũng có tất cả trị riêng dương.

Giải

Xét $f; g$ là 2 dạng toàn phương ứng với ma trận $A \& B$ (đối với cơ sở chính tắc)

Do A có tất cả trị riêng dương $\Rightarrow f$ xác định dương.

Tương tự, g xác định dương.

$\Rightarrow f + g$ xác định dương. Mà $A + B$ là ma trận của $f + g$ đối với cơ sở chính tắc

$\Rightarrow A + B$ có tất cả trị riêng dương (đpcm).

<u>Chú ý:</u> Ma trận A vuông, đối xứng có tất cả các trị riêng dương

$\Leftrightarrow$ Dạng toàn phương f tương ứng xác định dương.