GIỚI HẠN HÀM SỐ

Đáp án và lời giải bài tập

Bài 1:

Với $x \neq 0$ ta luôn có :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = \frac{e^{x_0^2} - \cos x_0}{x_0^2} = f(x_0)$$

Do đó $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ Xét với $x = 0$, tại đó $f(0) = a$. Ta có

$$\lim_{x \to 0^\pm} f(x) = \lim_{x \to 0^\pm} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} \left(\text{Dạng } \frac{0}{0} \right)$$

Biến đổi

$$\lim_{x \to 0^\pm} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0^\pm} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} + \lim_{x \to 0^\pm} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0^\pm} \frac{x^2}{x^2} + \lim_{x \to 0^\pm} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Để $f(x)$ liên tục tại $x = 0$ thì $\lim\limits_{x \to 0^\pm} f(x) = f(0)$ hay $a = \dfrac{3}{2}$

Bài 2: a) Cần chú ý đây không là giới hạn vô định nên ta thay luôn x = 0 vào và nhận được kết quả là:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\pi x^2 + 2}{\pi x^2 + 5} \right)^{\pi x^2 + 1} = \left(\frac{\pi .0 + 2}{\pi .0 + 5} \right)^{\pi .0 + 1} = \frac{2}{5}$$

b) Đây là dạng $\infty - \infty$. Ta có: $\sin \ln(x+1) - \sin \ln x = 2\cos \dfrac{\ln(x+1) + \ln x}{2} \sin \dfrac{\ln(x+1) - \ln x}{2}$

$= 2\cos \dfrac{\ln(x^2 + x)}{2} \sin \dfrac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{2}$

Ta có $\left| 2\cos \dfrac{\ln(x^2+x)}{2} \right| \leq 2, \forall x, \sin \dfrac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{2} \sim \sin \dfrac{1}{2x} \sim \dfrac{1}{2x} \xrightarrow{x \to +\infty} 0$

Do đó $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sin \ln(x+1) - \sin \ln x) = 0$

c) Đây là dạng 1^∞. Ta có:

$$\ln \left(\frac{1 + \sin x}{1 + \tan x} \right)^{\frac{1}{\sin x}} = \frac{1}{\sin x} \ln \left(\frac{1 + \sin x}{1 + \tan x} \right)$$

Do đó :

$$\ln \left(\lim_{x \to 0} \left(\frac{1 + \sin x}{1 + \tan x} \right)^{\frac{1}{\sin x}} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sin x} \ln \left(\frac{1 + \sin x}{1 + \tan x} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + \cos x} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \left(\frac{1 + \sin x}{1 + \tan x} \right)^{\frac{1}{\sin x}} = e^0 = 1$$

d) Đây là dạng $\dfrac{0}{0}$. Ta có , khi $x \to 1$ thì :

$$x^x - x = x\left(x^{x-1} - 1\right) = x\left(e^{(x-1)\ln x} - 1\right) \sim x(x-1)\ln x \sim (x-1)\ln x$$
$$\ln x = \ln(1 + (x-1)) \sim x - 1$$

Do đó $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x - x}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)^2}{(x-1)^2} = 1$

Bài 3:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{\sin(\sin x)} - \cos x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \cos x \cos(\sin x) e^{\sin(\sin x)} + \sin x = 1$

$\Rightarrow e^{\sin(\sin x)} - \cos x \sim x$

Mặt khác, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{x} = +\infty$

$\to \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{e^{\sin(\sin x)} - \cos x} = +\infty \to (\alpha(x)) > (\beta(x))$

b) Khi $x \to 0$:

$$a(x) = x + x^2 \sim x^2$$
$$B(x) = \ln(1 + x) \sim x$$

Do đó $a(x)$ là VCB bậc cao hơn $B(x)$

Bài 4:

Đây là dạng $\infty - \infty$. Ý tưởng ban đầu đó sẽ là phân tích thành thừa số tích phân. Tuy nhiên trong bài tập này, số khá lớn nên sẽ gây trở ngại cho người làm bài. Ta có :

$$\sqrt[n]{x(x+1)(x+2)\ldots(x+(n-1))} - x = \frac{x(x+1)(x+2)\ldots(x+(n-1)) - x^n}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}\left(\sqrt[n]{x(x+1)(x+2)\ldots(x+(n-1))}\right)^k}$$
$$= \frac{\dfrac{n(n-1)}{2}x^{n-1} + o\left(x^{n-1}\right)}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}\left(\sqrt[n]{x(x+1)(x+2)\ldots(x+(n-1))}\right)^k}$$

Xét số hạng tổng quát của tổng trong MS. Khi $x \to +\infty$, ta có

$$x^{n-1-k}\left(\sqrt[n]{x(x+1)(x+2)\ldots(x+(n-1))}\right)^k = x^{n-1-k}\left(\sqrt[n]{x^n + o\left(x^n\right)}\right)^k \sim x^{n-1}$$

Do đó
$$\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}\left(\sqrt[n]{x(x+1)(x+2)\ldots(x+(n-1))}\right)^k \sim \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1} = nx^{n-1}$$

Vậy

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[n]{x(x+1)(x+2)\ldots(x+(n-1))} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{n(n-1)}{2}x^{n-1} + o\left(x^{n-1}\right)}{nx^{x-1}} = \frac{n-1}{2}$$

ĐẠO HÀM - VI PHÂN

Lời giải:

Câu 1:

Theo công thức Leibniz $y^{(40)} = \left(\left(x^2+1\right)e^{x-1}\right)^{(40)} = \sum\limits_{k=0}^{40} C_{40}^k \left(x^2+1\right)^{(k)} \left(e^{x-1}\right)^{(40-k)} = \sum\limits_{k=0}^{40} u_k$

Vó $k=0$ thì $u_k = C_{40}^0\left(x^2+1\right)\left(e^{x-1}\right)^{(40)} = \left(x^2+1\right)e^{x-1}$

Vói $k=1$ thì $u_k = C_{40}^1\left(x^2+1\right)'\left(e^{x-1}\right)^{(39)} = 40(2x)e^{x-1} = 80e^{x-1}$

Vó $k=2$ thì $u_k = C_{40}^2\left(x^2+1\right)''\left(e^{x-1}\right)^{(38)} = 1560e^{x-1}$

Vók $k=3$ thì $\left(x^2+1\right)^{(k)} = 0 \Rightarrow u_k = 0$

Do đó :

$$\begin{aligned} y^{(40)} &= \left(x^2+1\right)e^{x-1} + 80xe^{x-1} + 1560e^{x-1} \\ &= \left(x^2+80x+1561\right)e^{x-1} \end{aligned}$$

$\Rightarrow y^{(40)}(1) = (1+80.1+1561)e^{1-1} = 1642$

Câu 2:

+) $f'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln\left(x+e^x\right)}{x}$

+) $f'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1+e^x}{x+e^x} = 2$ (L'Hospital).

Câu 3:

Chọn

$$f(x) = \sqrt[4]{\frac{2}{2+x}}, x_0 = 0, \Delta x = -0,02 \Rightarrow \sqrt[4]{\frac{2}{2-0,02}} \approx f(0) + f'(0)\Delta x$$

$$f(0) = 1, f'(x) = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2}{2+x}\right)^{\frac{-3}{4}}\cdot\frac{-2}{(2+x)^2} \Rightarrow f'(0) = \frac{-1}{8} \Rightarrow \sqrt[4]{\frac{2}{2-0,02}} \approx 1 + \frac{1}{8}.0,02 = 1,0025.$$

Câu 4:

Xét $|x|<1, y = \ln\left(1-x+x^2\right) = \ln\left(1+x^3\right) - \ln(1+x) = x^3 - \dfrac{x^6}{2} + \dfrac{x^9}{9} - \sum\limits_{n=1}^{9} \dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + o\left(x^9\right)$

$\Rightarrow \dfrac{y^{(9)}(0)}{9!} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{9} = \dfrac{2}{9} \Rightarrow y^{(9)}(0) = 2.8! = 80640$