CHƯƠNG 1
MỘT SỐ CẤU TRÚC ĐẠI SỐ

1.1. TẬP HỢP. ÁNH XẠ

1.1.1. Tập hợp

Khái niệm tập hợp

Tập hợp là một khái niệm nguyên thủy, không được định nghĩa. Có thể hiểu *tập hợp* (*tập*) là một sự tụ tập của một số hữu hạn hay vô hạn các đối tượng nào đó, những đối tượng này được gọi là *các phần tử của tập hợp* và bất kỳ một đối tượng nào cũng đều có thể được đưa vào một tập hợp.

Tập hợp thường được ký hiệu là A, B, C...Các phần tử của tập hợp thường được ký hiệu là a, b, c...

Nếu a là phần tử của tập hợp A, ta ký hiệu $a \in A$, nếu a không là phần tử của tập hợp A, ta ký hiệu $a \notin A$.

Tập hợp không chứa phần tử nào được gọi là tập hợp rỗng, ký hiệu là $\varnothing$.

Các cách biểu diễn tập hợp

***** Mô tả bằng lời

Ví dụ 1.1. A là tập các sinh viên của lớp 21CN1- Đại học Kiến trúc Hà Nội.

***** Liệt kê các phần tử của tập hợp

Ví dụ 1.2. A = {2, 4, 6, 8,... } (Tập các số tự nhiên chẵn).

* Nêu tính chất đặc trưng của các phần tử

Ví dụ 1.3. $B = \left\{ x \middle| x \in \mathbf{N}, \text{ x là bội số của } 3 \right\}$.

Quan hệ giữa các tập hợp

***** Quan hệ bao hàm

Định nghĩa 1.1. Nếu mọi phần tử của tập A đều là phần tử của tập B thì tập A được gọi là tập con của tập B hoặc A bao hàm trong B, ký hiệu là $A \subset B$.

Vậy muốn chứng minh $A \subset B$ ta phải chứng minh

$$x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Theo định nghĩa trên, mọi tập hợp đều là tập con của chính nó, tập rỗng là tập con của mọi tập hợp.

Ví dụ 1.4. $A=\{1,2,3\}$, $A=\{1,2,3,4,5\} \Rightarrow A \subset B$.

***** Quan hệ bằng nhau

Định nghĩa 1.2. Hai tập A và B được gọi là bằng nhau nếu A là tập con của B và B cũng là tập con của A, ký hiệu A = B.

Vậy muốn chứng minh A = B ta phải chứng minh:

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B.$$

Các phép toán về tập hợp

***** Phép hợp

Định nghĩa 1.3. *Hợp của hai tập* A và B là tập hợp gồm tất cả các phần tử thuộc ít nhất một trong hai tập A và B, ký hiệu $A \cup B$

Ta có: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$.

* Phép giao

Định nghĩa 1.4. *Giao của hai tập* A và B là tập hợp gồm tất cả các phần tử thuộc cả hai tập A và B, ký hiệu $A \cap B$.

Ta có: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}$.

* Hiệu

Định nghĩa 1.5. *Hiệu* của tập A với tập B là tập hợp tất cả các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B, ký hiệu $A \setminus B$.

Ta có: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}$.

* Phần bù: Nếu $A \subset B$ thì hiệu B \ A được gọi là phần bù của A trong B, ký hiệu $C^A{}_B$.

Ví dụ 1.5,. $A=\{0,1,2,4\}$, $B=\{1,2,3,4,5,6\}$ thì:

$$A \cup B = \{0,1,2,3,4,5,6\},\ A \cap B = \{1,2,4\},\ A \setminus B = \{0\}.$$

Tích Descartes

Hai bộ $(a_1,a_2,...,a_n)$; $(b_1,b_2,...,b_n)$ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi m = n đồng thời $a_1=b_1, a_2=b_2,...,a_n=b_n$.

Định nghĩa 1.5. *Tích Descartes của hai tập hợp* A và B, ký hiệu $A \times B$, là một tập hợp chứa tất cả các cặp (a, b), với a là một phần tử của A và b là một phần tử của B.

Ta có: $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Tích Descartes $A \times A$ thường được viết gọn là A^2.

Chú ý. Nếu một trong hai tập A, B là tập rỗng thì $A \times B$ cũng là tập rỗng.

Ví dụ 1.6. $A = \{1,2\}$, $B = \{p, q, r\}$ thì:

$A\times B = \{(1, p), (1, q), (1, r), (2, p), (2, q), (2, r)\}$

$B\times A = \{(p, 1), (q, 1), (r, 1), (p, 2), (q, 2), (r, 2)\}$

Dễ thấy $A\times B \neq B\times A$.

* Mở rộng: *Tích Descartes của n tập hợp* $A_1, A_2,..., A_n$; ký hiệu $A_1\times A_2\times...\times A_n$, là tập hợp chứa tất cả các bộ có dạng $(a_1, a_2,..., a_n)$ với a_i là một phần tử của A_i ($i = 1, 2,..., n$).

Ta có: $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \left\{ (a_1, a_2, ..., a_n) \middle| a_i \in A_i, \forall i = \overline{1,n} \right\}$.

Tích Descartes A×A×…×A (n lần) thường được viết gọn là A^n.

Chú ý. Nếu một trong các tập $A_1, A_2,..., A_n$ là tập rỗng thì $A_1\times A_2\times...\times A_n$ cũng là tập rỗng.

1.1.2. Ánh xạ

Định nghĩa 1.6. Cho X, Y là hai tập khác rỗng**.** Một *ánh xạ* f từ X đến Y là một quy tắc nào đó cho ứng **mỗi phần tử** x bất kỳ của X với **một và chỉ một** phần tử y của Y. Ta ký hiệu

$$f : X \to Y$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

X gọi là *tập nguồn*, Y gọi là *tập đích*.

Phần tử y gọi là *ảnh* của x, còn x gọi là *nghịch ảnh* hay *tạo ảnh* của y.

Tập ảnh của tất cả các phần tử $x \in X$ gọi là ảnh của X qua f, ký hiệu f(X).

$$f(X) := \left\{ y \in Y \middle| \exists x \in X : y = f(x) \right\}.$$

Ví dụ 1.7. Cho D tập con khác rỗng của R, khi đó mọi hàm số y = f(x) xác định trên tập D đều là một ánh xạ có tập nguồn là D.

Chẳng hạn, hàm số y = lnx là ánh xạ

$$\ln: \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$$
$$x \mapsto y = \ln x .$$

Ở đây $\mathbf{R}_+^*$ là tập các số thực dương.

Ví dụ 1.8. Quy luật

$$\begin{aligned} id_X : X &\to X \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

cũng là một ánh xạ từ X tới X. Ta gọi đó là ánh xạ đồng nhất trên X.

Các phép toán về ánh xạ

* Tổng của hai ánh xạ

Định nghĩa 1.7. *Tổng của hai ánh xạ* f và g từ X đến Y là một ánh xạ, ký hiệu f + g, được xác định bởi:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in X.$$

* Tích của một ánh xạ với một số thực

Định nghĩa 1.8. Cho ánh xạ f từ X đến Y. *Tích của ánh xạ f và một số thực k* là một ánh xạ, ký hiệu là kf, được xác định bởi:

$$(kf)(x) = kf(x), \forall x \in X.$$

* Hợp thành của hai ánh xạ

Định nghĩa 1.9. Cho $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ là hai ánh xạ. Khi đó *hợp thành của hai ánh xạ* f và g là một ánh xạ, ký hiệu $g_o f$ và được xác định như sau:

$$(g_o f)(x) = g(f(x)), \forall x \in X.$$

Dễ thấy $g_o f$ cũng là một ánh xạ từ X đến Z.

Đơn ánh - Toàn ánh - Song ánh

Định nghĩa 1.10 . Ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là *đơn ánh* nếu với mọi $x_1, x_2 \in X$; $x_1 \neq x_2$ thì $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Định nghĩa 1.11. Ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là *toàn ánh* nếu với mỗi phần tử $y \in Y$ đều tồn tại một phần tử $x \in X$ sao cho $y = f(x)$. Vậy f là toàn ánh nếu và chỉ nếu $Y = f(X)$.

Định nghĩa 1.12. Ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là *song ánh* nếu nó vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh.

Nhận xét. Với hàm số $f : X \to Y,\ x \mapsto y = f(x)$, ta có

(i) f là *đơn ánh* $\Leftrightarrow$ phương trình f(x) = y có không quá 1 nghiệm $x \in X$, $\forall y \in Y$.

(ii) f là *toàn ánh* $\Leftrightarrow$ phương trình f(x) = y luôn có nghiệm $x \in X$, $\forall y \in Y$.

(iii) f là *song ánh* $\Leftrightarrow$ phương trình f(x) = y luôn có nghiệm duy nhất $x \in X$, $\forall y \in Y$.

<u>Ví dụ 1.9.</u> Gọi $\mathbf{R}_+$ là tập các số thực không âm, xét hàm số

$$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$$
$$x \mapsto x^2$$

Ta thấy phương trình $x^2 = y$ luôn có nghiệm với mọi $y \geq 0$ nên f là toàn ánh, tuy nhiên với $y > 0$ thì phương trình trên có hai nghiệm phân biệt $x = \pm\sqrt{y}$ nên f không là đơn ánh và do đó không là song ánh.

Ví dụ 1.10. Xét hàm số

$$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$
$$x \mapsto 2x+3$$

Ta thấy phương trình $2x + 3 = y$ luôn có nghiệm duy nhất $x = \frac{y-3}{2}$ với mọi y nên f song ánh.

Định lý 1.1.

Hợp thành của hai đơn ánh là một đơn ánh.

Hợp thành của hai toàn ánh là một toàn ánh.

Hợp thành của hai song ánh là một song ánh.

Ánh xạ ngược của một song ánh

Định nghĩa 1.13. Cho song ánh $f : X \to Y$

$$x \mapsto y = f(x).$$

Khi đó ta xác định được một ánh xạ

$$f^{-1} : Y \to X$$
$$y = f(x) \mapsto x = f^{-1}(y).$$

Ánh xạ f^{-1} được gọi là ánh xạ ngược của ánh xạ f.

Vậy: $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

Ví dụ 1.11. Trong Ví dụ 1.10 ta đã chứng minh được hàm số $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $x \mapsto 2x+3$ là song ánh. Ta có:

$$2x + 3 = y \Leftrightarrow x = \frac{y-3}{2}$$

Nên ánh xạ ngược của f là

$$f^{-1}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$
$$y \mapsto x = \frac{y-3}{2}.$$

1.2. NHÓM. NHÓM HỮU HẠN

1.2.1. Phép toán hai ngôi (phép toán)

Khái niệm phép toán

Định nghĩa 1.14. Cho tập X khác rỗng. Một *phép toán hai ngôi (phép toán)* trên X là một ánh xạ

$$* : X \times X \to X$$

$$(x, y) \mapsto x * y.$$

Tập X với phép toán * được ký hiệu là (X, *)

Ví dụ 1.12. Trong tập số thực **R** thì phép cộng và phép nhân thông thường là các phép toán trên tập đó.

Ví dụ 1.13. Cho n là số nguyên dương, với a là số nguyên thỏa $0 \le a \le n-1$, ta ký hiệu:

$$\overline{a} = \{x | x \in \mathbf{Z},\ x \text{ chia cho n dư } a\}$$

$$\mathbf{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, ..., \overline{n-1}\}$$

Xét hai quy tắc

$$+ : \mathbf{Z}_n \times \mathbf{Z}_n \to \mathbf{Z}_n \qquad . : \mathbf{Z}_n \times \mathbf{Z}_n \to \mathbf{Z}_n$$

$$(\overline{x}, \overline{y}) \mapsto \overline{x+y} \qquad (\overline{x}, \overline{y}) \mapsto \overline{x.y}$$

Dễ thấy các quy tắc trên là các phép toán trên $\mathbf{Z}_n$ - ta gọi chúng lần lượt là *phép cộng và phép nhân theo modulo n.*

Một số tính chất của phép toán

Cho tập X với phép toán *, ta nói:

i) Phép toán * có tính kết hợp, nếu

$$x * (y * z) = (x * y) * z,\ \forall x, y, z \in X.$$

ii) Phép toán * có tính giao hoán, nếu

$$x * y = y * x,\ \forall x, y \in X.$$

iii) Phép toán * có phần tử trung hòa e nếu e ∈ X và

$$x * e = e * x = x,\ \forall x \in X.$$

iv) Giả sử phép toán * có phần tử trung hòa e. Với x ∈ X thì $x' \in X$ gọi là phần tử đối xứng của x nếu

$$x * x' = x' * x = e.$$

Chú ý. Nếu phép toán được viết theo dấu cộng "+" thì phần tử trung hòa ký hiệu là "0" và đọc là phần tử không, phần tử đối xứng của x viết là – x và đọc là phần tử đối của x.

Nếu phép toán được viết theo dấu nhân "." thì phần tử trung hòa được ký hiệu là "1" và đọc là phần tử đơn vị, phần tử đối xứng của x viết là x^{-1} và đọc là nghịch đảo của x.

1.2.2. Nhóm

Định nghĩa 1.15. Cho tập G khác rỗng cùng với phép toán *. Ta nói (G,*) là một nhóm nếu nó thỏa mãn các tiên đề sau:

i) * có tính kết hợp

ii) * có phần tử được gọi là phần tử trung hòa e

iii) Mọi phần tử của G đều có phần tử đối xứng.

Ngoài ra nếu * có tính giao hoán thì (G,*) gọi là nhóm giao hoán hay nhóm Abel.

<u>Ví dụ 1.14.</u> Tập số nguyên với phép cộng thông thường là một nhóm giao hoán - gọi là nhóm cộng các số nguyên. Tương tự ta có nhóm cộng các số hữu tỷ, nhóm cộng các số thực.

<u>Ví dụ 1.15.</u> Tập các số hữu tỷ dương với phép nhân thông thường là một nhóm giao hoán - gọi là nhóm nhân các số hữu tỷ dương. Tương tự ta có nhóm nhân các số hữu tỷ khác không, nhóm nhân các số thực dương, nhóm nhân các số thực khác không.

Một số tính chất của nhóm

i) Phần tử trung hòa của một nhóm là duy nhất.

ii) Phần tử đối xứng của mỗi phần tử thuộc nhóm là duy nhất

iii) Trong nhóm có luật giản ước:

$$\text{Nếu } a * x = a * y \text{ thì } x = y$$

$$\text{Nếu } x * a = y * a \text{ thì } x = y.$$

1.2.3. Nhóm hữu hạn

Định nghĩa 1.16. Nhóm (G,*) gọi là nhóm hữu hạn nếu như tập G có số lượng phần tử hữu hạn.

<u>Ví dụ 1.16.</u> Cho n là số nguyên dương và $\mathbf{Z}_n = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, ..., \overline{n-1}\right\}$. Xét phép toán cộng theo modulo n.

Ta thấy phép cộng thông thường trên **Z** có các tính chất kết hợp và giao hoán nên phép cộng theo modulo cũng có các tính chất kết hợp và giao hoán.

Phần tử không của phép cộng này là $\overline{0}$.

Phần tử đối của $\overline{0}$ là $\overline{0}$, phần tử đối của $\overline{x}$ khác $\overline{0}$ là $\overline{n-x}$. Do đó **Z**$_n$ với phép cộng trên là một nhóm Abel hữu hạn.

1.3. VÀNH. MIỀN NGUYÊN

1.3.1. Vành

Định nghĩa 1.17*.* Cho tập X khác rỗng với hai phép toán cộng "+" và nhân ".". Ta nói (X,+, .) là một *vành* nếu nó thỏa mãn các tiên đề sau:

i) (X, +) là một nhóm giao hoán

ii) Phép "." trong X có tính kết hợp

iii) Phép "."có tính phân phối đối với phép " +", nghĩa là:

$$a \,.\, (b + c) = a \,.\, b + a \,.\, c,$$
$$(b + c) \,.\, a = b \,.\, a + c \,.\, a;\ \forall a,\ b, c \in X.$$

Phần tử trung hòa của phép cộng được ký hiệu là 0 và gọi là phần tử không của vành.

Nếu phép nhân có tính giao hoán thì vành gọi là vành giao hoán.

Nếu phép nhân có phần tử đơn vị thì vành gọi là vành có đơn vị.

Ví dụ 1.17. Tập các số nguyên, tập các số hữu tỷ, tập các số thực với phép cộng và nhân thông thường là các vành.

Ví dụ 1.18. Tập các ma trận vuông cùng cấp n với phép cộng và nhân ma trận là một vành.

Ví dụ 1.19. Tập **Z**$_n$ với phép cộng và nhân theo modulo n là một vành.

1.3.2. Miền nguyên

Định nghĩa 1.18*.* Cho tập X khác rỗng với hai phép toán cộng "+" và nhân ".". Ta nói (X,+, .) là một *miền nguyên* nếu:

i) (X,+, .) là một vành giao hoán có đơn vị 1 khác 0

ii) X không có ước của 0, nghĩa là:

$$x.y = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ hoặc } y = 0;\ \forall x, y \in X.$$

Ví dụ 1.20. Tập các số nguyên, tập các số hữu tỷ, tập các số thực với phép cộng và nhân thông thường là các miền nguyên.

1.4. TRƯỜNG. TRƯỜNG HỮU HẠN

1.4.1. Trường

Định nghĩa 1.19. *Trường* là một vành giao hoán có đơn vị 1 khác 0 và mọi phần tử khác 0 đều có phần tử nghịch đảo.

Ví dụ 1.21. Tập các số hữu tỷ với phép cộng và nhân thông thường là một trường, gọi là trường số hữu tỷ.

Ví dụ 1.22. Tập các số thực với phép cộng và nhân thông thường cũng là một trường, gọi là trường số thực.

1.4.2. Trường hữu hạn

Định nghĩa 1.20. Một trường có số lượng phần tử hữu hạn được gọi là *trường hữu hạn*.

Ví dụ 1.23. Với n là số nguyên tố thì tập $\mathbf{Z}_n$ cùng với các phép cộng và nhân theo modulo n là một trường hữu hạn.

Sinh viên hãy tự kiểm tra ví dụ trên.

BÀI TẬP CHƯƠNG 1

1. Đặt $A = \{2x \mid x \in \mathbf{Z}\}$. Hãy viết các phần tử của phần bù của A trong **Z**.

2. Chứng minh:

a) $A \cup B = A$ khi và chỉ khi $B \subset A$;

b) $A \cap B = A$ khi và chỉ khi $A \subset B$.

3. Chứng minh định luật De Morgan:

a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

4. Cho ánh xạ f: $X \to Y$ và A, B là hai tập con của X. Chứng minh:

a) $A \subset B \Leftrightarrow f(A) \subset f(B)$

b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ và nếu f là đơn ánh thì $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

c) $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

5. Cho ánh xạ f: $[4,7) \to [3,18)$, $f(x) = x^2 - 6x + 11$. Chứng minh f là song ánh và tìm ánh xạ ngược của f.

6. Cho song ánh f: $X \to Y$. Chứng minh:

a) $f^{-1} \circ f = id_X$

b) $f \circ f^{-1} = id_Y$.

7. Chứng minh rằng:

a) Hợp thành của hai đơn ánh là một đơn ánh

b) Hợp thành của hai toàn ánh là một toàn ánh

c) Hợp thành của hai song ánh là một song ánh.

8. Cho tập X = {a, b, c}. Hãy trang bị trên X các phép toán thỏa mãn các yêu cầu sau:

a) Có tính kết hợp mà không có tính giao hoán

b) Có tính giao hoán mà không có tính kết hợp

c) Có phần tử trung hòa

d) Mọi phần tử đều có phần tử đối xứng.

9. Các cấu trúc sau có phải là nhóm hay không?

a) $A = \left\{ \frac{2+2m}{1+2n} \middle| m, n \in \mathbf{N} \right\}$ với phép nhân thông thường

b) B ={-1, 1} với phép nhân thông thường.

10. Xét tập hợp $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$ cùng với phép toán * xác định bởi:

$$(a, b)*(c, d) = (ac, bc + d).$$

Chứng minh rằng $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$ cùng với phép toán trên là một nhóm.

11. Chứng minh tập **R**[x]các đa thức hệ số thực với hai phép toán cộng và nhân đa thức thông thường là một vành.

12. Chứng minh tập $\mathbf{Q}[\sqrt{2}] = \left\{ a + b\sqrt{2} \middle| a, b \in \mathbf{Q} \right\}$ với hai phép toán cộng và nhân các số thực thông thường là một trường.

13. Lập bảng cộng và bảng nhân modulo 4 trong $\mathbf{Z}_4$ để chứng tỏ $\mathbf{Z}_4$ là một vành.

14. Lập bảng cộng và bảng nhân modulo 5 trong $\mathbf{Z}_5$ để chứng tỏ $\mathbf{Z}_5$ là một trường.

15. Chứng minh rằng $\mathbf{Z}_n$ với hai phép toán cộng và nhân modulo n là một trường khi và chỉ khi n là số nguyên tố.

HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ BÀI TẬP CHƯƠNG 1

1. $C^A{}_Z = \left\{ 2x+1 \middle| x \in \mathbf{Z} \right\}$.

3. a) $x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A$ và $x \notin B \Leftrightarrow x \in \overline{A}$ và $x \in \overline{B} \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.

b) Làm tương tự a)

6. Hướng dẫn: chứng minh

a) $(f^{-1} \circ f)(x) = x,\ \forall x \in X$

b) $(f \circ f^{-1})(y) = y,\ \forall y \in Y$.

9. a) Không là nhóm

b) Là nhóm.

13. Bảng cộng modulo 4 trên Z_4:

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$

Bảng nhân modulo 4 trên Z_4:

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

14. Làm tương tự bài 13