MA TRẬN - ĐỊNH THỨC

Đại số tuyến tính

NHÓM 3

Đại học Bách Khoa Hà Nội

Tháng 1, 2022

Nội dung

1. 1. Định nghĩa ma trận

2. 2. Các phép toán trên ma trận
   - 2.1. Phép cộng ma trận
   - 2.2. Phép nhân ma trận
     - 2.2.1. Nhân một số với ma trận
     - 2.2.2. Nhân hai ma trận
   - 2.3. Lũy thừa ma trận
   - 2.4. Ma trận chuyển vị

3. 3. Định thức ma trận vuông

Định nghĩa ma trận

Cho K là trường số thực hoặc trường số phức.

- Một ma trận (trên K) cỡ $m \times n$ là một bảng có m hàng và n cột:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

  với a_{ij} $(\forall i = 1, ..., m; j = 1, ..., n)$ thuộc trường K.
- Nếu $m = n$ thì A được gọi là ma trận vuông cấp n. Các phần tử $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ được gọi là phần tử chéo. Chúng lập nên *đường chéo chính* của ma trận A.
- Ký hiệu ma trận có thể dùng dấu ngoặc vuông như trên, hoặc tròn, và thường được ký hiệu gọn là $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ hoặc $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

Một số loại ma trận

- Ma trận cỡ $1 \times n$ được gọi là ma trận hàng.
- Ma trận cỡ $m \times 1$ được gọi là ma trận cột.
- Ma trận $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ mà mọi phần tử $a_{ij} = 0 (\forall i, j)$ được gọi là ma trận không, thường ký hiệu là $\mathcal{O}$, hoặc $\mathcal{O}_{m \times n}$.

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Một số loại ma trận

- Ma trận vuông $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ được gọi là ma trận tam giác trên nếu $a_{ij} = 0$, với mọi $i > j$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Ma trận vuông $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ được gọi là ma trận tam giác dưới nếu $a_{ij} = 0$, với mọi $i < j$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Nội dung

1. 1. Định nghĩa ma trận
2. 2. Các phép toán trên ma trận
   - 2.1. Phép cộng ma trận
   - 2.2. Phép nhân ma trận
     - 2.2.1. Nhân một số với ma trận
     - 2.2.2. Nhân hai ma trận
   - 2.3. Lũy thừa ma trận
   - 2.4. Ma trận chuyển vị
3. 3. Định thức ma trận vuông

Phép cộng ma trận

Định nghĩa: Cho hai ma trận cùng cỡ $m \times n$: $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{m\times n}$. Tổng $A + B$ là ma trận cỡ $m \times n$ xác định bởi

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$$

Như vậy muốn cộng hai ma trận cùng cỡ ta cộng các phần tử cùng vị trí.

Phép cộng ma trận

Định nghĩa: Cho hai ma trận cùng cỡ $m \times n$: $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{m\times n}$. Tổng $A + B$ là ma trận cỡ $m \times n$ xác định bởi

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$$

Như vậy muốn cộng hai ma trận cùng cỡ ta cộng các phần tử cùng vị trí.

Ví dụ 1:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+5 & 3+7 \\ -1+2 & 4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Phép cộng ma trận

Định nghĩa: Cho hai ma trận cùng cỡ $m \times n$: $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{m\times n}$.
Tổng $A + B$ là ma trận cỡ $m \times n$ xác định bởi

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$$

Như vậy muốn cộng hai ma trận cùng cỡ ta cộng các phần tử cùng vị trí.

Ví dụ 1:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+5 & 3+7 \\ -1+2 & 4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ví dụ 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Phép cộng ma trận

Định nghĩa: Cho hai ma trận cùng cỡ $m \times n$: $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{m\times n}$. Tổng $A + B$ là ma trận cỡ $m \times n$ xác định bởi

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$$

Như vậy muốn cộng hai ma trận cùng cỡ ta cộng các phần tử cùng vị trí.

Ví dụ 1:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+5 & 3+7 \\ -1+2 & 4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ví dụ 2:

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ không thực hiện được vì hai ma trận không cùng cỡ.

Phép cộng ma trận

Định nghĩa: Cho hai ma trận cùng cỡ $m \times n$: $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{m\times n}$.
Tổng $A + B$ là ma trận cỡ $m \times n$ xác định bởi

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$$

Như vậy muốn cộng hai ma trận cùng cỡ ta cộng các phần tử cùng vị trí.

Ví dụ 1:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+5 & 3+7 \\ -1+2 & 4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ví dụ 2:

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ không thực hiện được vì hai ma trận không cùng cỡ.

Các tính chất

Cho ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, ta định nghĩa *ma trận đối* của A, ký hiệu $-A$ bởi $-A = [-a_{ij}]_{m\times n}$.
Ta cũng định nghĩa $A - B = A + (-B)$.

Các tính chất

Cho ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, ta định nghĩa *ma trận đối* của A, ký hiệu $-A$ bởi $-A = [-a_{ij}]_{m\times n}$.
Ta cũng định nghĩa $A - B = A + (-B)$.

Tính chất của phép cộng

Trên tập hợp các ma trận cùng cỡ $m \times n$ (trên K), ta có:

- $(A + B) + C = A + (B + C)$

Các tính chất

Cho ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, ta định nghĩa *ma trận đối* của A, ký hiệu $-A$ bởi $-A = [-a_{ij}]_{m\times n}$.
Ta cũng định nghĩa $A - B = A + (-B)$.

Tính chất của phép cộng

Trên tập hợp các ma trận cùng cỡ $m \times n$ (trên K), ta có:

- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + \mathcal{O} = \mathcal{O} + A = A$

Các tính chất

Cho ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, ta định nghĩa *ma trận đối* của A, ký hiệu $-A$ bởi $-A = [-a_{ij}]_{m\times n}$.
Ta cũng định nghĩa $A - B = A + (-B)$.

Tính chất của phép cộng

Trên tập hợp các ma trận cùng cỡ $m \times n$ (trên K), ta có:

- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + \mathcal{O} = \mathcal{O} + A = A$
- $A + (-A) = (-A) + A = \mathcal{O}$

Các tính chất

Cho ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, ta định nghĩa *ma trận đối* của A, ký hiệu $-A$ bởi $-A = [-a_{ij}]_{m\times n}$.
Ta cũng định nghĩa $A - B = A + (-B)$.

Tính chất của phép cộng

Trên tập hợp các ma trận cùng cỡ $m \times n$ (trên K), ta có:

- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + \mathcal{O} = \mathcal{O} + A = A$
- $A + (-A) = (-A) + A = \mathcal{O}$
- $A + B = B + A$

Các tính chất

Cho ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, ta định nghĩa *ma trận đối* của A, ký hiệu $-A$ bởi $-A = [-a_{ij}]_{m\times n}$.
Ta cũng định nghĩa $A - B = A + (-B)$.

Tính chất của phép cộng

Trên tập hợp các ma trận cùng cỡ $m \times n$ (trên K), ta có:

- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + \mathcal{O} = \mathcal{O} + A = A$
- $A + (-A) = (-A) + A = \mathcal{O}$
- $A + B = B + A$

Nói cách khác, tập hợp $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ cùng với phép cộng ma trận lập thành một nhóm giao hoán.

Phép nhân một số với ma trận

Định nghĩa

Tích của số k với ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ là ma trận kA cỡ $m \times n$ cho bởi

$$kA = [ka_{ij}]_{m\times n}.$$

Khi nhân một số k với ma trận, ta nhân mỗi phần tử của ma trận với k.

Ví dụ:

$$2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}$$

Chú ý: Ta có $(-1)A = -A$

Tính chất

Tính chất cơ bản

Cho A, B thuộc $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ và $c, d \in K$. Khi đó

- $(cd)A = c(dA)$,

Tính chất

Tính chất cơ bản

Cho A, B thuộc $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ và $c, d \in K$. Khi đó

- $(cd)A = c(dA)$,
- $1A = A$,

Tính chất

Tính chất cơ bản

Cho A, B thuộc $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ và $c, d \in K$. Khi đó

- $(cd)A = c(dA)$,
- $1A = A$,
- $c(A + B) = cA + cB$,

Tính chất

Tính chất cơ bản

Cho A, B thuộc $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ và $c, d \in K$. Khi đó

- $(cd)A = c(dA)$,
- $1A = A$,
- $c(A + B) = cA + cB$,
- $(c + d)A = cA + dA$.

Tính chất

Tính chất cơ bản

Cho A, B thuộc $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ và $c, d \in K$. Khi đó

- $(cd)A = c(dA)$,
- $1A = A$,
- $c(A+B) = cA + cB$,
- $(c+d)A = cA + dA$.

Tính chất bổ sung: Cho A là ma trận cỡ $m \times n$, $\mathcal{O}$ là ma trận không cỡ $m \times n$:

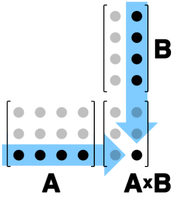
$$cA = \mathcal{O} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc} c & = & 0 \\ A & = & \mathcal{O} \end{array} \right.$$

Phép nhân hai ma trận

Định nghĩa

Cho hai ma trận $A = [aij]_{m\times n}$ cỡ $m \times n$ và $B = [bij]_{n\times p}$ cỡ $n \times p$. Tích AB là ma trận $C = [cij]_{m\times p}$ cỡ $m \times p$ cho bởi

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} (\forall i = 1, ..., m; j = 1, ..., p).$$



Hình: Minh họa phép nhân hai ma trận

Chú ý

- Tích AB chỉ được định nghĩa khi số cột của A bằng số hàng của B.
- Ta có thể tính phần tử ij của ma trận AB bằng cách nhân lần lượt n phần tử của dòng thứ i của A (từ trái sang phải) với n phần tử của cột thứ j của B (từ trên xuống dưới) rồi lấy tổng của chúng:

$$\begin{array}{ccc} & & b_{1j} \\ & & b_{2j} \\ a_{i1}\ a_{i2}\ \ldots\ a_{in} & & \vdots \\ \text{dòng } i \text{ của } A & & b_{nj} \\ & & \text{cột } j \text{ của } B \end{array} \implies c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

- Có thể tích AB tồn tại nhưng tích BA không tồn tại. Kể cả trong trường hợp AB và BA đều tồn tại thì nói chung $AB \neq BA$.

Chú ý

- Nói chung $AB = \mathcal{O}$ không suy ra được $A = \mathcal{O}$ hoặc $B = \mathcal{O}$.
- Nói chung $AC = BC$ (hoặc $CA = CB$) với $C \neq \mathcal{O}$ không suy ra được $A = B$

Ví dụ:

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$: $A \neq \mathcal{O}$, $B \neq \mathcal{O}$ nhưng $AB = \mathcal{O}$,
- $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$:

  $AC = BC = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ nhưng $A \neq B$

Ví dụ

Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. Tính AB.

- $C = AB$ cỡ 2×2, $C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$.
- $C_{11} = 1.1 + (-1).2 + 2.3 = 5$.
- $C_{12} = 1.2 + (-1).(-1) + 2.1 = 5$.
- $C_{21} = 0.1 + 1.2 + (-2).3 = -4$.
- $C_{22} = 0.2 + 1.(-1) + (-2).1 = -3$.
- $AB = C = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$.

Tính chất

Tính chất

Cho A, B, C là các ma trận với cỡ sao cho các phép toán trong các hệ thức sau được định nghĩa. Cho $c \in K$. Khi đó:

- $(AB)C = A(BC)$
- $A(B + C) = AB + AC$, $(B + C)A = BA + CA$
- $(cA)B = A(cB) = c(AB)$
- Cho A cỡ $m \times n$: $AI_n = A$ và $I_mA = A$.

.

Nhận xét: Tập $\mathcal{M}_n(K)$ các ma trận vuông cấp n cùng với các phép toán cộng và nhân ma trận lập thành một vành (có đơn vị).

Lũy thừa ma trận

Cho A là ma trận vuông cấp n.

- Với $k \geq 1$ là một số nguyên dương, ta định nghĩa

$$A^k = A.A...A$$

- Tính chất : $A^{k+l} = A^k A^l, A^{Kl} = (A^K)^l$, với mọi K, l nguyên dương
- Với $f(x) = a_k x^k + ... + a_1 x + a_0$ là một đa thức bậc k, ta định nghĩa

$$f(A) = a_k A^k + ... + a_1 A + a_0 I_n$$

Phép chuyển vị ma trận

Chuyển vị ma trận

Cho $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ cỡ $m \times n$. Ma trận chuyển vị của A, ký hiệu $A^T = [b_{ij}]$ là ma trận $m \times n$ xác định bởi

$$b_{ij} = a_{ij}, \forall i = 1, ...n; j = 1, ..., m.$$

Các cột của A^T là các hàng của A. Các hàng của A^T là các cột của A.

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ thì } A^T = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Nội dung

1. Định nghĩa ma trận

2. Các phép toán trên ma trận
- 2.1. Phép cộng ma trận
- 2.2. Phép nhân ma trận
  - 2.2.1. Nhân một số với ma trận
  - 2.2.2. Nhân hai ma trận
- 2.3. Lũy thừa ma trận
- 2.4. Ma trận chuyển vị

3. Định thức ma trận vuông

Định nghĩa định thức

Cho $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ là một ma trận vuông cấp n. Ta sẽ định nghĩa định thức của A, ký hiệu $\det(A)$ hoặc $|A|$, truy hồi theo n.

Định thức ma trận cấp 1 và 2

- Nếu $A = [a_{11}]$ là ma trận cấp 1, thì $\det(A) = a_{11}$.
- Nếu $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ thì

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Định thức ma trận cấp $n \geq 3$

Giả sử ta đã định nghĩa được định thức của tất cả các ma trận vuông cấp $n-1$.

- Xét ma trận $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ là một ma trận vuông cấp n.
- Với mỗi i, j, ta gọi M_{ij} là ma trận nhận được từ A bằng cách xóa đi cột i và j. Khi đó M_{ij} là một ma trận vuông cấp $n-1$.
- Đặt $A_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ij})$, và A_{ij} được gọi là phần phụ đại số của a_{ij}.

Định nghĩa

Định thức của $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ là

$$\det(A) = |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

Ví dụ

Tính định thức của ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

- $M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow A_{11} = +\det(M_{11}) = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4$
- $M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow A_{12} = -\det(M_{12}) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(-2) = 2$
- $M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow A_{13} = +\det(M_{13}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5$
- $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 1.(-4) + 2.2 + (-1).5 = -5$

Viết gọn:

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}\det(M_{11}) - a_{12}\det(M_{12}) + a_{13}\det(M_{13}) \\ &= 1.\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2.\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1).\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1.(-4) + 2.2 + (-1).5 = -5. \end{aligned}$$