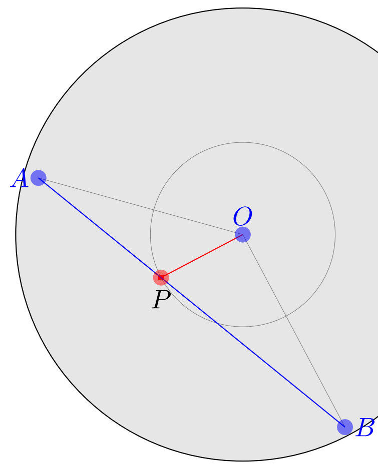
Dimostrare che $C := x^2 + y^2 \leq 1$ è un insieme convesso.



Il problema di

terzo libro dei Elementi di Euclide

Si prendano due punti A e B appartenenti all'insieme C ed un generico punto P sul segmento $\overline{AB}$.

$A : x_A^2 + y_A^2 \leq 1$

$B : x_B^2 + y_B^2 \leq 1$

$P = \lambda A + (1-\lambda)B, 0 \leq \lambda \leq 1$

Vogliamo verificare che per P vale $x_P^2 + y_P^2 \leq 1$.

Sia $||\cdot||$ la norma euclidea.

$x_P^2 + y_P^2 = (\lambda x_A + (1-\lambda)x_B)^2 + (\lambda y_A + (1-\lambda)y_B)^2 = ||\lambda A + (1-\lambda)B||^2 \leq$

$\leq (||\lambda A|| + ||(1-\lambda)B||)^2 = (\lambda||A|| + (1-\lambda)||B||)^2$

L'ultimo passaggio è vero per la disuguaglianza triangolare. Per definizione di A e B le loro norme euclidee sono minori o uguali a 1, quindi $x_P^2 + y_P^2$ risulta, a maggior ragione, essere minore o uguale a

$(\lambda \cdot 1 + (1-\lambda) \cdot 1)^2 = 1^2 = 1$

È quindi dimostrato che per ogni coppia di punti A e B appartenti a C i punti del segmento $\overline{AB}$ appartengono ancora all'insieme C, ossia è dimostrata la convessità dell'insieme $x^2 + y^2 \leq 1$.

Senza ricorrere alla norma.

$x_P^2 + y_P^2 = (\lambda x_A + (1-\lambda)x_B)^2 + (\lambda y_A + (1-\lambda)y_B)^2 =$
$= \lambda^2(x_A^2 + x_B^2) + (1-\lambda)^2(x_B^2 + y_B^2) + 2\lambda(1-\lambda)(x_A x_B + y_A y_B) \leq$
$\leq \lambda^2 + (1-\lambda)^2 + 2\lambda(1-\lambda) = 1$
In quanto
$|x_A x_B + y_A y_B| = A \cdot B = |A||B| \cos\theta \leq \cos\theta \leq 1.$