# LA TEORIA DELLA DUALITÀ (3)

In questa lezione saranno enunciati i principali teoremi della teoria della dualità.

## Il duale del problema duale

**Teo (i)**: Il duale del problema duale è il problema primale.

Dato un problema primale si formuli il suo problema duale. Riconducendo il problema duale alla forma primale e applicando le corrispondenze viste nella lezione precedente si riotterrà una formulazione equivalente del problema primale di partenza.

## Teorema della dualità in forma debole

**Teo (ii)**: Data una coppia di problemi l’uno duale dell’altro ed entrambi dotati di soluzioni ammissibili *x*’ e *y*’, allora si ha che  per ogni soluzione ammissibile del primale e del duale, dove z è la funzione obiettivo del problema primale di massimo e ν la funzione obiettivo del problema duale di minimo.

*Dimostrazione*: Si considerino il problema primale



e il suo problema duale



Ipotizziamo che e  siano soluzioni ammissibili rispettivamente per il primale e per il duale e quindi avremo: .

Moltiplicando il vincolo del problema primale per il numero non negativo  e moltiplicando il vincolo del duale per il numero non negativo  si ottiene:



Le espressioni a desta del simbolo di diseguaglianza, e , sono uguali in quanto prodotto scalari di *Ax*’ e *y*’.

Il valore  è il valore della funzione obiettivo del problema primale in quanto trasposto di  mentre  è il valore della funzione obiettivo del problema duale.

 poiché sappiamo che  si ha che: . Ora essendo:  si ottiene che . Poiché per ipotesi . Visto però che  allora si ha che:

 ∎

## Relazioni fra ottimo primale e ottimo duale

**Teo (iii)**: Se il problema primale di programmazione lineare o il problema duale di programmazione lineare hanno una soluzione ottima illimitata, allora il problema associato (rispettivamente duale o primale) non ha soluzioni ammissibili.

*Dimostazione*: Se il problema primale di massimo tende a +∞, il duale non può tendere ad un numero finito, in quanto deve essere maggiore del primale. Il duale di un problema di massimo è un problema di minimo, che non può tendere a +∞. Ne segue che l’insieme delle soluzioni del problema duale è l’insieme vuoto. ∎

**Teo (iv)**: Se una coppia di problemi primale e duale di programmazione lineare ammettono entrambi soluzioni ammissibili allora ammettono soluzioni ottime finite.

*Dimostrazione*: Per ipotesi esistono soluzioni ammissibili *x*’ e *y*’, rispettivamente per il primale e per il duale, e quindi il teorema della dualità debole assicura che . Allora qualsiasi soluzione ammissibile del problema duale è un limite superiore per il problema primale, che pertanto non può essere illimitata superiormente. Analogamente il duale non può essere illimitato inferiormente in quanto ogni soluzione ammissibile del primale è un limite inferiore per il duale. ∎

**Teo (v)**: Entrambi i problemi primale e duale possono non avere soluzioni ammissibile.

Se un problema non ha soluzioni ammissibili ciò non è sufficiente per affermare che il suo duale sia illimitato. Basta un esempio per affermare la validità di questo teorema.

Esempio:





Regione ammissibile dei problemi (*P*) e (*D*) è l’insieme vuoto.

∎

Dal teorema della dualità in forma debole si ricavano le seguenti relazioni:

PRIMALE OTTIMO FINITO DUALE OTTIMO FINITO

PRIMALE NON LIMITATO DUALE NON AMMISSIBILE

DUALE NON LIMITATO PRIMALE NON AMMISSIBILE

PRIMALE NON AMMISSIBILE DUALE NON LIM. O NON AMM.

DUALE NON AMMISSIBILE PRIMALE NON LIM. O NON AMM.

## Teorema della dualità in forma forte

**Teo (vi)**: Data una coppia di problemi primale e duale, condizione necessaria e sufficiente perché una soluzione ammissibile *x*\* del primale (o *y*\* del duale) sia ottima è che esiste almeno una soluzione ammissibile *y*\* del duale (o *x*\* del primale) tale che *cT x*\* = *bT y*\*. La *y*\* e la *x*\* sono soluzioni ottime del problema duale e primale.



*Dimostrazione*:

(Sufficienza) Si consideri il problema primale di massimo. Nell’ipotesi che si ha, per la dualità in forma debole, che  e quindi *x*\* è soluzione ottima del problema primale . Analogamente  e quindi *y*\* è soluzione ottima del problema duale. □

(Necessità) Nell’ipotesi che *x*\* e *y*\* siano soluzioni ottime del primale e del duale, riportando il primale ad un problema di minimo



il cui duale è



Volendo dimostrare che all’ottimo consideriamo la tabella della forma matriciale del simplesso che si ricava partizionando la matrice *A* dei vincoli in matrice di base *B* (non singolare) e matrice non di base *N*, le variabili in variabili di base e variabili non di base e i coefficienti di costo in coefficienti in corrispondenza delle variabili di base e coefficienti in corrispondenza delle variabili non in base . Quindi partizionando in questo modo, il problema di programmazione lineare può essere riscritto nella seguente forma:

alla quale corrisponde la seguente matrice tableau dopo aver calcolato dai vincoli e sostituito nella funzione obbiettivo:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  | I |  |

Per il criterio di ottimalità sulla tabella primale la soluzione di base è ottima se:

* i coefficienti di costo ridotto delle variabili di base sono nulli:

, essendo

* le variabili fuori base devono avere i coefficienti non negativi:

Mettendo a sistema queste due condizioni si ha:

Considerando elemento per elemento il vettore dei costi ridotti  all’ottimo deve risultare . Da questa espressione si ricava che: posto quindi come vettori riga il vettore: (se il problema di partenza è di minimo) si ottiene .

Facendo il trasposto di tale espressione otteniamo che viene definita relazione dell’ammissibilità duale.

Quindi visto che dalla forma matriciale del simplesso per la relazione dell’ammissibilità duale abbiamo che: e visto che nel duale si può vedere che i due risultati sono uguali e di conseguenza si ha che .

Nota: la tabella ottima del primale è stata ottenuta trasformando il problema di partenza in un problema di minimo e quindi le variabili duali  vanno cambiate di segno se si riferiscono al problema di partenza . ∎

**Cor**: Se una coppia di problemi di programmazione lineare primale e duale ammettono soluzioni ammissibili allora entrambi hanno soluzioni ammissibili ottime ed all’ottimo i valori assunti dalla funzione obiettivo sono uguali.