# LA TEORIA DELLA DUALITÀ (4)

In questa lezione saranno enunciati ulteriori teoremi della teoria della dualità, ossia il teorema degli scari complementari e il suo importante corollario.

Verrà data un’interpretazione economica alla dualità attraverso il concetto di prezzo ombra.

Verrà infine fornita la capacità di leggere la soluzione del problema duale all’ottimo dalla tabella del metodo del simplesso applicato al problema primale.

## Proprietà degli scarti complementari

Si considerino il seguente problema primale e il suo duale corrispondente:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***Primale*** |  | ***Duale*** |
|  |  |  |
| *A* (*m*x*p*) |  | *AT* (*p*x*m)* |

Si noti che le variabili di entrambi i problemi sono non negative.

**Teo (vii)**: Condizione necessaria e sufficiente affinché due soluzioni  e  ammissibili per il primale e per il duale siano anche ottime è che risulti:

* 1. 
  2. 

dove 0 è uno scalare dato dal prodotto di un vettore riga e un vettore colonna.

*Dimostrazione*:

(Necessità) Si consideri la differenza  che può essere riscritta aggiungendo e sottraendo  come Se le due soluzioni ammissibili sono ottime allora il gap di dualità deve essere nullo per il teorema della dualità forte: .

Essendo tutte la variabili non negative devono valere (1) e (2). □

(Sufficienza): Se valgono le (1) e (2) per due soluzioni x\* e y\* allora il gap di dualità è nullo e le soluzioni sono ottime per il teorema della dualità in forma forte. ∎

Se chiamiamo  la variabile ausiliaria del problema primale associata al vincolo *j*-esimo, il teorema degli scarti complementari afferma che condizione necessaria e sufficiente affinché due soluzioni  e  ammissibili per il primale e per il duale siano anche ottime è che risulti

 e , dove  la variabile ausiliaria del problema duale associata al vincolo *i*-esimo.

Si usa il termine scarti per denotare le variabili ausiliarie quando queste assumono all’ottimo valori positivi.

## Corollario degli scarti complementari

**Cor**: Per ogni soluzione ottima di una coppia di problemi di programmazione lineare primale e duale, ogni volta che si verifica uno scarto in una equazione di uno dei due problemi la variabile corrispondente del problema duale si annulla.

Dimostrazione: essendo tutte le variabili non negative ogni singolo prodotto nelle sommatorie deve essere uguale a zero e quindi se una variabile è maggiore di zero all’ottimo deve essere uguale a zero la variabile duale all’ottimo e viceversa.

 

## TEOREMI DELLA DUALITA’ (SCHEMA RIASSUNTIVO)

* Teorema della **DUALITA’ IN FORMA DEBOLE** (tutte le sol. ammissibili)



* Teorema della **DUALITA’ IN FORMA FORTE** (soluzioni ottime)



* Teorema dello **SCARTO COMPLEMENTARE** (solo per variabili )

 

 

* NOTA: la conoscenza delle variabili positive del primale (o del duale) implica la conoscenza delle variabili uguali a zero del duale (o del primale) e quindi risolvendo il primale (o il duale) e utilizzando il corollario degli scarti complementari è possibile risolvere il problema duale (o il primale) risolvendo un sistema di equazioni lineari (*p*x*p*) per il duale o (*m*xm) per il primale.

***CORRISPONDENZE FRA LE SOLUZIONI***



**S.O.**

**S.I.**

**N.S.**

**S.O.**

**S.I.**

**N.S.**



**S.O.:** SOLUZIONE OTTIMA FINITA

**S.I.:** SOLUZIONE ILLIMITATA

**N.S.:** NON ESISTONO SOLUZIONI

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

## Interpretazione economica della dualità 🡪 Prezzo ombra

Ci si chiede di quanto cambia il valore della funzione obiettivo per l’aumento di disponibilità di un’unità di una risorsa.

Per indicare una risorsa useremo il vettore  che ha un 1 in posizione *i*-esima e 0 altrove.

Consideriamo il valore della funzione obiettivo all’ottimo  e consideriamo l’aumento della risorsa .

Andando a sostituire tale incremento nella funzione obiettivo otteniamo:



Sapendo che  e  otteniamo che:



considerando un incremento della risorsa unitario cioè  otteniamo  da cui posto  otteniamo che . Se non avessimo considerato un incremento unitario si avrebbe: .

Da ciò definiamo prezzo ombra  (derivata parziale di  rispetto all’incremento della risorsa ) cioè il *valore della risorsa* *bi*. Se il prezzo ombra è nullo abbiamo che i vincoli non sono attivi e quindi le variabili di slack sono diverse da 0 viceversa se il prezzo ombra è diverso da 0 allora i vincoli sono attivi e di conseguenza le variabili slack sono pari a 0.

Quindi si definisce prezzo ombra i-esimo come il massimo prezzo che conviene pagare per avere un incremento unitario della risorsa i-esima al fine di avere un extra profitto.

## Lettura del duale su tableau primale

Le variabili che nel primale sono in base avranno le corrispondenti variabili del duale fuori base mentre le variabili che nel primale sono fuori base avranno le corrispondenti variabili del duale in base e più precisamente assumeranno come valore quello indicato nella riga zero del tableu del primale all’ottimo. Questo perché la soluzione ottime è l’unica ammissibile per entrambi i problemi.

 

Tableau iniziale:

fuori base

in base

fuori base

in base

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *x1* | *x2* | *x3* | *x4* | *x5* |
| 0 | -120 | -40 | 0 | 0 | 0 |
| 2200 | 40 | 20 | 1 | 0 | 0 |
| 320 | 8 | 2 | 0 | 1 | 0 |
| 100 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
|  | *y4* | *y5* | *y1* | *y2* | *y3* |

Tableau ottimo:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *x1* | *x2* | *x3* | *x4* | *x5* |
| 5400 | 0 | 0 | 1 | 10 | 0 |
| 60 | 0 | 1 | ⅟10 | -½ | 0 |
| 25 | 1 | 0 | -⅟40 | ¼ | 0 |
| 15 | 0 | 0 | -¾0 | ¼ | 1 |
|  | *y4* | *y5* | *y1* | *y2* | *y3* |

All’ottimo le variabile *x2 , x1 , x5* sono in base e le variabili *x4 ex3* sono fuori base; per il duale *y*5, *y*4 e *y*3 sono in base mentre *y*2 e *y*1 sono fuori base.

Ponendo le variabili duali sulla tabella in corrispondenza delle variabili slack è possibile leggere la soluzione ottima del duale dalla riga zero della tabella ottima del primale secondo la seguente regola:  e 