Università Politecnica delle Marche

FUTURA PNRR | Gestione Progetti

Operational Research: the Science of Better

a.a. 2024/2025

Fabrizio Marinelli
fabrizio.marinelli@staff.univpm.it
tel. 071 - 2204823

Presentazioni

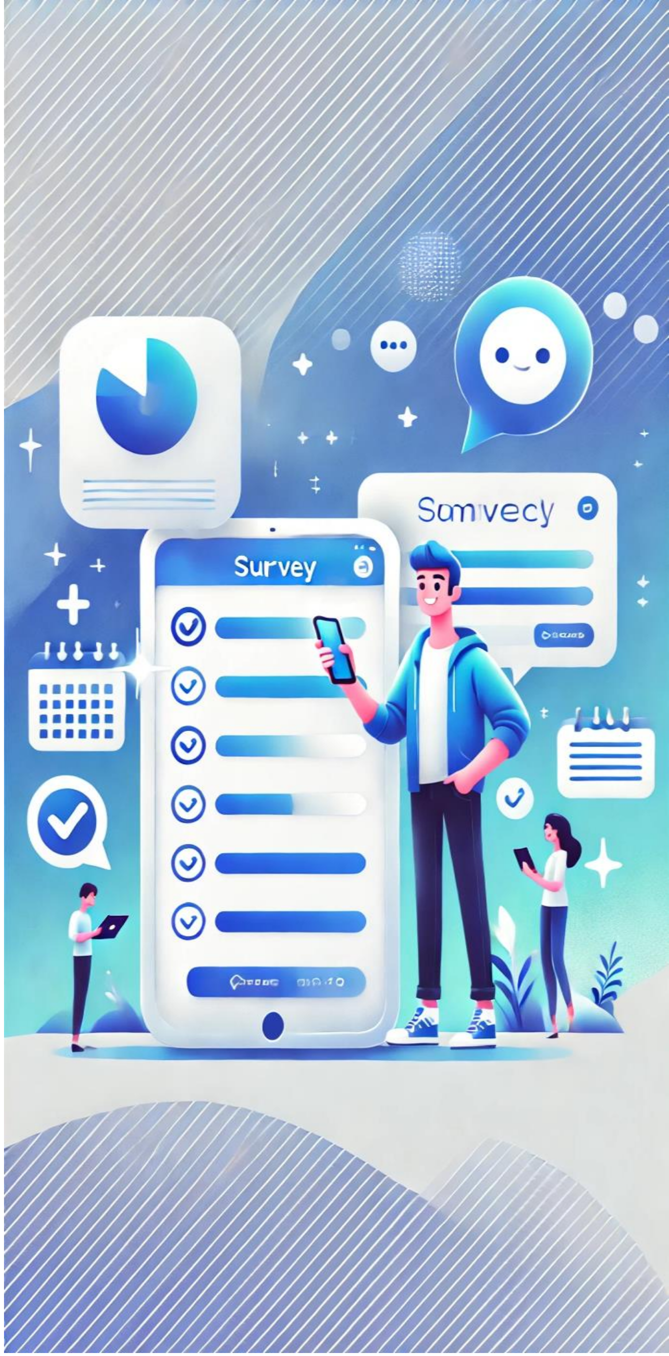
Fabrizio Marinelli

DII, Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione
Università Politecnica delle Marche

Tel. 071-2204823
e-mail: `fabrizio.marinelli@staff.univpm.it`
web: www.dii.univpm.it/fabrizio.marinelli

wooclap

Qual è l’umore di oggi?



Regole del gioco

- Ogni **partecipante** ha in dotazione **1000** dobloni
- I partecipanti sono raggruppati in **squadre**
- Ogni partecipante **guadagna** dobloni rispondendo a **domande**
- Ogni squadra partecipa a **gare scommettendo** da 10 a 200 dobloni

Il problema dello zaino

Il bagaglio pesa troppo e all'aeroporto non voglio pagare la sovrattassa.

… devo togliere qualche oggetto

Se ogni oggetto ha un valore, quali abbandono all'aeroporto e quali invece conservo in valigia ?

… chiaramente voglio conservare in valigia il **<u>massimo</u>** valore complessivo possibile

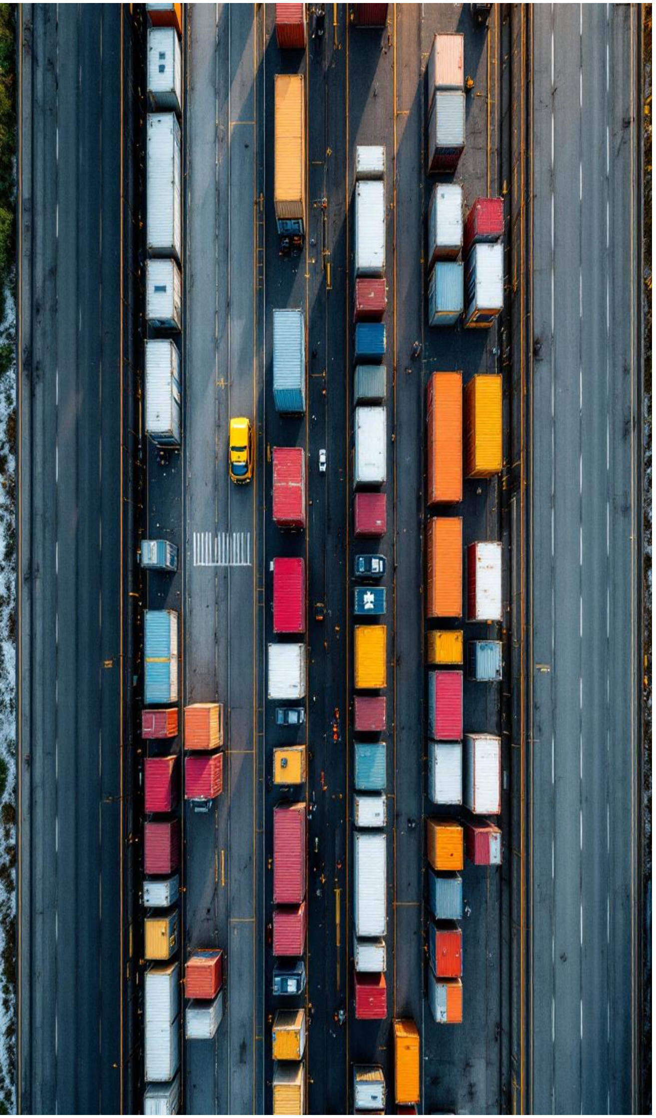
Limite di peso: 6 kg

peso: 5.2 kg
valore: 100

peso: 2.3 kg
valore: 60

peso: 3.5 kg
valore: 70

peso: 1.5 kg
valore: 15



perchè il problema dello zaino è interessante

È una metafora: la valigia potrebbe rappresentare una nave cargo, un container, un furgone, una disponibilità economica…

Gara 1: l’emulo di Jeff Bezos

- capacità del furgone: 153 Kg
- 50 oggetti

oggetto	valore	peso	oggetto	valore	peso
1	1	2	26	45	38
2	2	4	27	47	39
3	3	6	28	48	40
4	7	7	29	49	41
5	10	9	30	50	42
6	15	10	31	51	43
7	16	12	32	52	44
8	17	13	33	53	46
9	19	14	34	54	47
10	21	16	35	55	48
11	22	17	36	56	49
12	23	19	37	58	50
13	25	20	38	59	51
14	27	22	39	60	53
15	28	23	40	62	54
16	30	24	41	63	55
17	31	25	42	64	57
18	33	28	43	66	58
19	34	29	44	67	59
20	36	30	45	68	60
21	38	32	46	69	62
22	39	33	47	70	63
23	41	35	48	72	64
24	42	36	49	73	65
25	43	37	50	75	67

Alcune strategie

limite sul peso: priorità agli oggetti leggeri

obiettivo sul valore: priorità agli oggetti di maggior valore

Osserviamo che:

- tra due oggetti di pari peso conviene scegliere quello che vale di più
- tra due oggetti di pari valore conviene scegliere quello che pesa meno

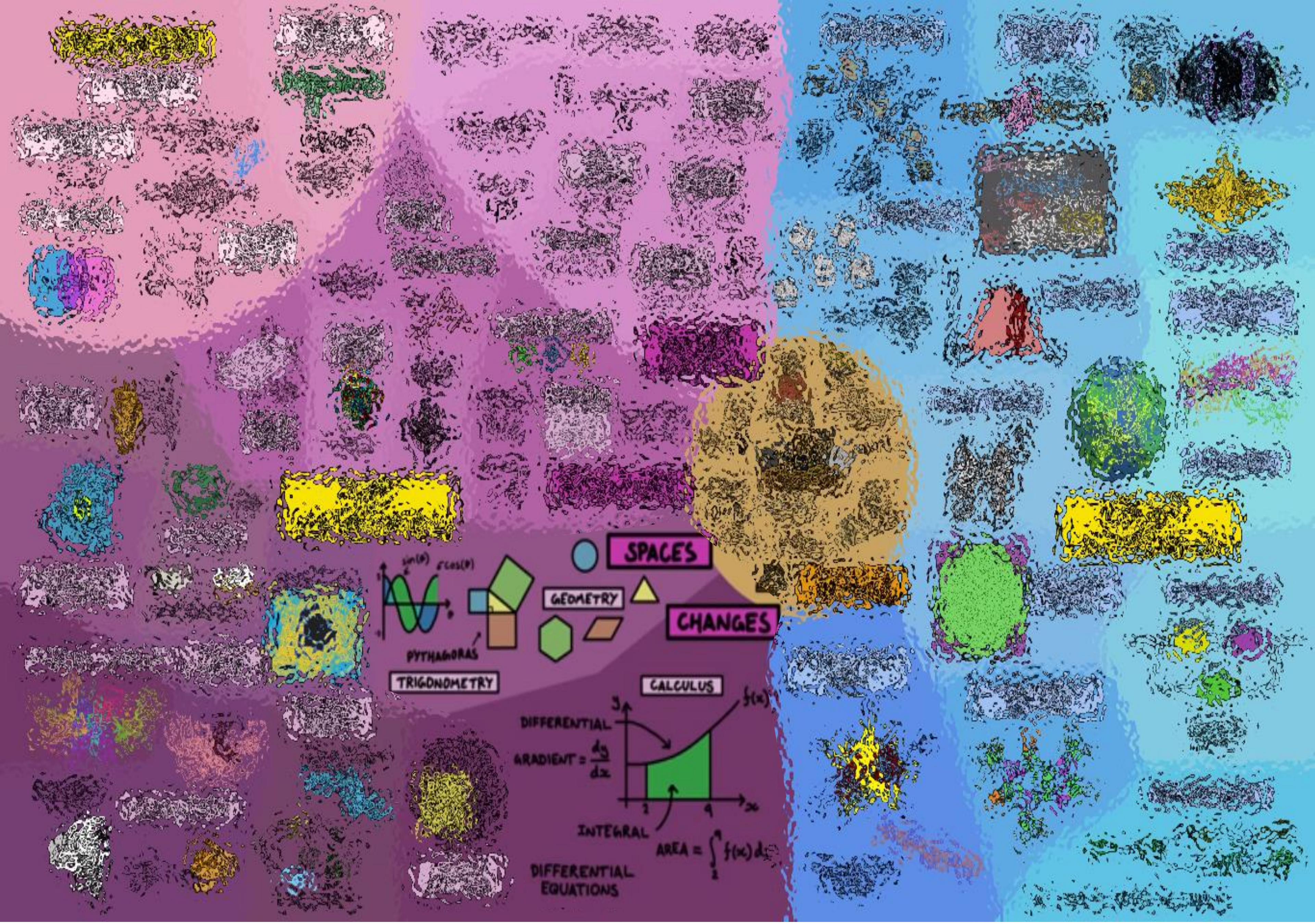
in entrambi i casi, gli oggetti promettenti sono quelli con alto **valore specifico** = $\frac{\textbf{valore}}{\textbf{peso}}$

- **197** è il meglio che si possa fare?

- Se così non è, qual è una stima ragionevole dell’errore che si commette?

Per rispondere a queste domande ci serve un po’ di…

Matematica



[video su youTube…]

Cos'è la matematica?

- La matematica solo marginalmente riguarda il far di conto.
- In generale studia strutture e serve per risolvere problemi

La matematica è uno strumento e non un fine

la matematica come «fine»

Calcolare l'integrale

$$A = \int_{\Omega} \log \frac{x}{y^2} \, dxdy$$

con

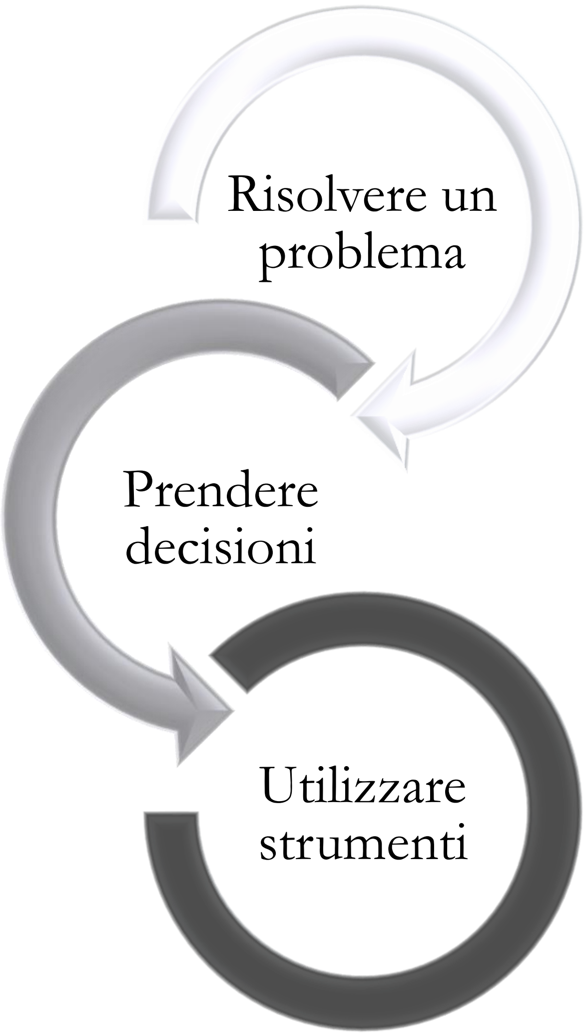
$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4} x < y^2 < x, 1 < xy < 2 \right\}$$

$$A = \frac{1}{6} \log^2 4$$

la matematica come «strumento»

Come definire un orario ferroviario della rete nazionale?

definisco un set di variabili x, y, …, z che indicano gli orari di partenza dei singoli treni, individuo le relazioni di interdipendenza (incompatibilità, precedenze)…



I problemi decisionali codificano il processo di *Problem Solving*

La Ricerca Operativa fornisce strumenti matematici per la loro soluzione ottimale

La Ricerca Operativa

La **Ricerca Operativa** è una disciplina scientifica che utilizza **modelli matematici** e **algoritmi** per supportare i **processi decisionali** in **sistemi complessi**.
La Ricerca Operativa è un settore della Matematica Applicata, come la Statistica e l'Analisi Numerica.

Genesi del termine

- **Ricerca Operativa**
- **OR – Operations Research** (Operational Research in UK)
- **Research** on military **operations: Ricerca** del modo *ottimale* di condurre **operazioni** militari (rispetto al rischio, al costo, all'efficacia, ecc.)

Importanza e Applicazioni della Ricerca Operativa

Impatto significativo

La RO ha un impatto economico, sociale e tecnologico significativo.

Applicazioni trasversali

Le sue applicazioni sono trasversali a numerosi settori: ingegneria, gestione aziendale, medicina, finanza, logistica, agricoltura, energia, trasporti, ecc.

Ruolo storico

La RO è stata fondamentale per l'esito della Seconda Guerra Mondiale, insieme alla fisica.

Esempi di successo

Esempi di applicazioni di successo si trovano nei libri divulgativi di Davenport & Harris, Baker e May e su www.scienceofbetter.com

Alcuni fatti sulla Ricerca Operativa

Non è informatica

La RO non è una branca dell'informatica, anche se utilizza strumenti informatici.

Non solo per matematici

Non è solo per matematici, ma è una disciplina applicata con risultati concreti.

Non è una nicchia

Non è una nicchia, ma ha applicazioni in moltissimi settori.

Per tutti i livelli

Non è solo per pochi, ma può essere insegnata a tutti i livelli di istruzione, dalle elementari all'università.

La Ricerca Operativa in pratica

1

Elementi del problem solving

Il processo di problem solving in Ricerca Operativa si basa su tre elementi: decisore, vincoli e funzione obiettivo.

2

Strumenti chiave

La programmazione matematica, in particolare la programmazione lineare, è uno strumento chiave della Ricerca Operativa.

3

Applicazioni pratiche

La Ricerca Operativa viene utilizzata per risolvere problemi complessi in vari settori, come il sequenziamento del DNA, lo scheduling nel manufacturing e la gestione della logistica.

4

Approccio quantitativo

La Ricerca Operativa fornisce strumenti quantitativi e analitici per risolvere problemi in modo ottimale.

Applicazioni della *Ricerca Operativa*

progettazione di reti stradali, e di telecomunicazioni,
turnazione del personale,

instradamento dei veicoli,
pianificazione dei giri di raccolta

pianificazione della produzione e delle scorte,
localizzazione e dimensionamento di impianti

Ricostruzione di immagini,
Struttura delle proteine,
Sequenziamento del DNA

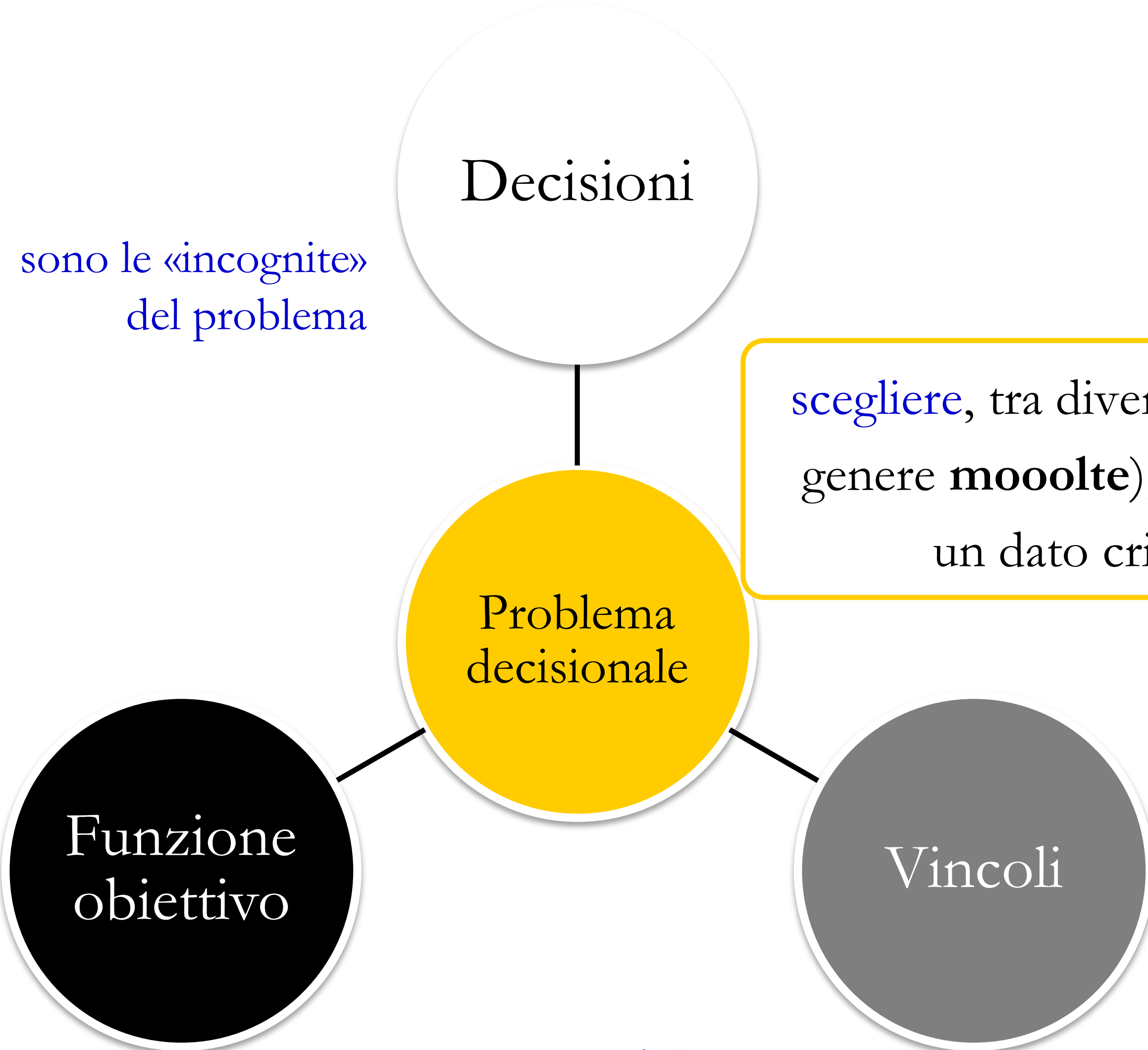
Progettazione delle strutture,

Project scheduling,
VLSI design

Gestione portafoglio titoli,
budget optimization

…altre applicazioni
(ambiente, didattica, salute, sport,…)
su www.scienceofbetter.org

Il protagonista: il problema decisionale



sono le «incognite» del problema

scegliere, tra diverse alternative plausibili (in genere **mooolte**), quella migliore rispetto a un dato criterio di valutazione

definiscono l'insieme delle alternative possibili

misura quantitativa della qualità della soluzione

… ma come risolvere un problema decisionale?

Voglio mangiare un bel piatto di pasta!

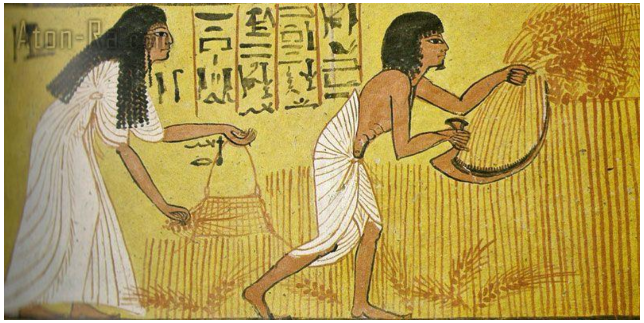
Lo **cucino** oppure lo **ordino al ristorante**?

Approccio procedurale

Approccio dichiarativo

… ovvero, ragiono in termini **procedurali** o **dichiarativi**?

Perimetri e aree



- Si narra che ai contadini dell'antico Egitto non fosse chiaro come misurare le aree.
- Gli emissari del faraone ne **approfittavano** assegnando i terreni in base alla lunghezza del loro perimetro… che farabutti!!

[Problema] dato un rettangolo di perimetro 100, quali sono le lunghezze di base l e altezza h che massimizzano la sua area A ?

[Problema] dato un rettangolo di perimetro 100, quali sono le lunghezze di base l e altezza h che massimizzano la sua area A ?

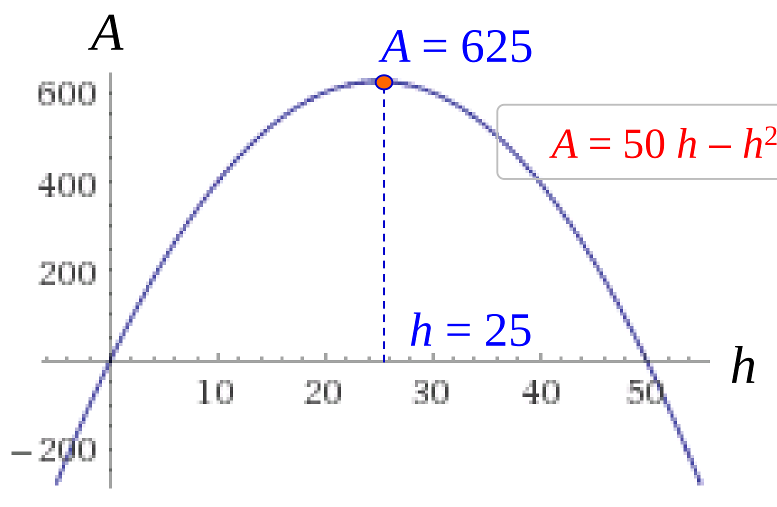
area del rettangolo	$A = l \cdot h$
semiperimetro	$l = 50 - h$
…sostituendo	$A = (50 - h) \cdot h$
ovvero	$A = 50\,h - h^2$

Studio di funzione:

la funzione $A = f(h)$ ha un solo punto stazionario (di massimo) che si ottiene azzerando la derivata prima:

$$A' = 50 - 2h$$
$$50 - 2h = 0$$
$$h = 25$$

da cui $\boxed{l = 25}$



[Problema] dato un rettangolo di perimetro 100, quali sono le lunghezze di base l e altezza h che massimizzano la sua area A ?

Approccio procedurale

Scopo: descrivere ***come*** calcolare una soluzione

Si definisce una **procedura** di calcolo (*algoritmo*) che descrive **come** calcolare il valore massimo di A al variare della lunghezza dei lati

Un algoritmo che **calcola** una soluzione (intera)

- **Per ogni** valore di l compreso tra 1 e 50 (il semi-perimetro)
  - calcola $h = 50 - l$
  - calcola l'area del rettangolo avente per lati l e h
  - conserva i valori l e h del rettangolo con area maggiore

Valori correnti di l e h

$l = 1 \;\; h = 49$

$\dots$

$l = 5 \;\; h = 45$

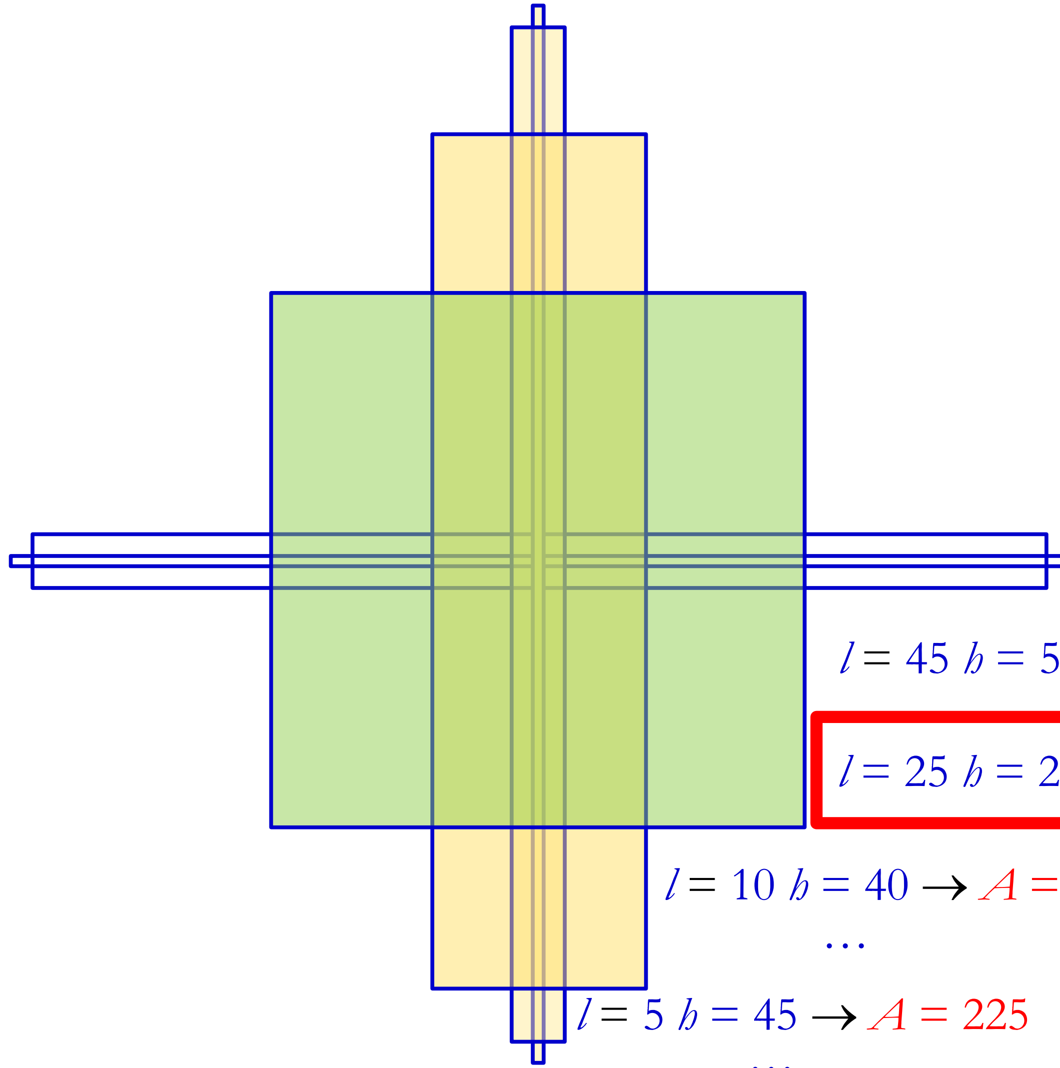
$\dots$

$l = 10 \;\; h = 40$

$\dots$

$l = 25 \;\; h = 25$

$\dots$



$l = 49 \;\; h = 1 \rightarrow A = 49$

$\dots$

$l = 45 \;\; h = 5 \rightarrow A = 225$

$\boxed{l = 25 \;\; h = 25 \rightarrow A = 625}$

$l = 10 \;\; h = 40 \rightarrow A = 400$

$\dots$

$l = 5 \;\; h = 45 \rightarrow A = 225$

$\dots$

$l = 1 \;\; h = 49 \rightarrow A = 49$

[Problema] dato un rettangolo di perimetro 100, quali sono le lunghezze di base l e altezza h che massimizzano la sua area A ?

Approccio dichiarativo

Scopo: descrivere ***cosa*** calcolare

si definisce un **modello** che descrive **cosa** calcolare, ossia le relazioni esistenti tra i dati del problema (perimetro) e quelli della soluzione (lunghezza dei lati e area del rettangolo).

Un modello che **descrive** una soluzione:

variabili

- l = base
- h = altezza
- A = area

$$\max A$$
$$\begin{cases} 2l + 2h = 100 \\ A = l \cdot h \\ l \geq 0,\ h \geq 0 \end{cases}$$

mi interessa il rettangolo di area massima

il perimetro del rettangolo è 100

l'area è data dal prodotto di base e altezza

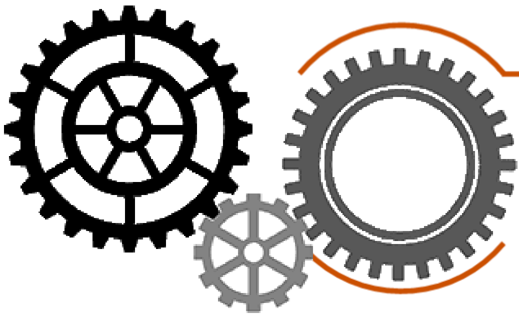
base e altezza sono numeri non negativi

…sì, ma la « **soluzione** » ?

Il vantaggio di «ordinare al ristorante»

AMPL

$$\max A$$
$$2l + 2h = 100$$
$$A = l \cdot h$$
$$l \geq 0,\ h \geq 0$$



Il *modello matematico* separa la rappresentazione del problema (*aspetto concettuale*) dal calcolo di una soluzione (*aspetto operativo*)

IBM CPLEX

GUROBI OPTIMIZATION

FICO Xpress

Gara 2: «hello world!»

Vecchio West

- Al, Bill e Craig sono reduci da una rapina alla National Bank che ha fruttato un bel malloppo: 100.000 verdoni.
- Al è il capo e vuole per sé almeno i due terzi di quanto prenderanno insieme Bill e Craig;
- Craig vuol prendere almeno i due terzi di quello che prenderà Bill;
- Bill vuole prendere più che può.

Qual è una soluzione che accontenta tutti?

… torniamo al problema dello zaino

Limite di peso: 6 kg

peso: 5.2 kg
valore: 100

peso: 2.3 kg
valore: 60

peso: 3.5 kg
valore: 70

peso: 1.5 kg
valore: 15

Come si calcola la soluzione «**ottima**» ?

Approccio procedurale

<u>**Scopo**</u>: descrivere ***come*** calcolare una soluzione

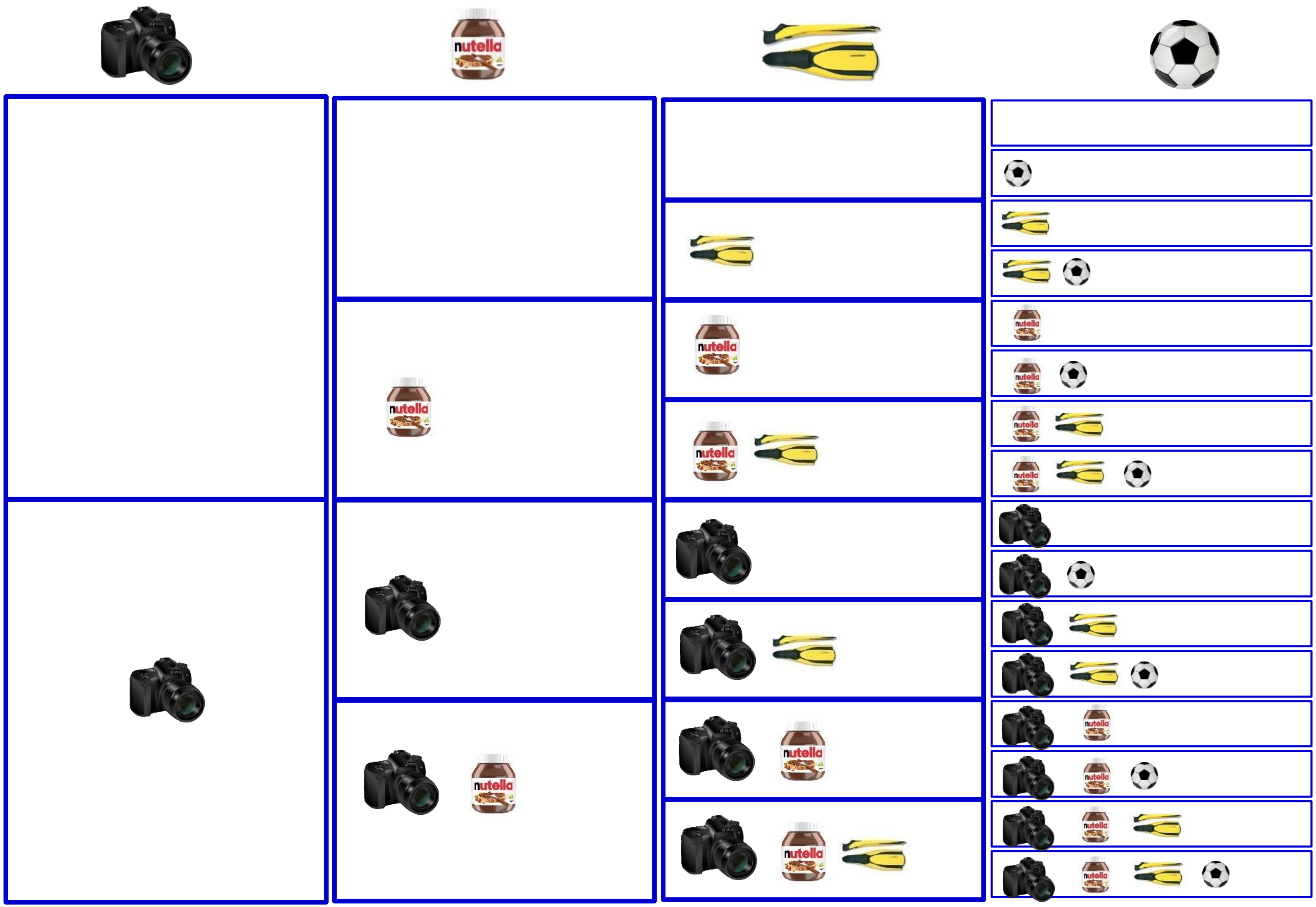
per garantire l'ottimalità è necessaria una procedura che esamina sistematicamente tutte le possibili soluzioni

… occorre <u>**selezionare**</u> gli oggetti da mettere in valigia…

… una potenziale soluzione quindi è un generico <u>**sottoinsieme di oggetti**</u> …

Ma quanti sono i possibili sottoinsiemi?

Elenco i sottoinsiemi considerando, in sequenza, la possibile scelta di ogni oggetto



2 4 8 16

In generale, il numero di sottoinsiemi di un insieme con n elementi è

$$2^n$$

funzione esponenziale

Con 50 oggetti, occorre elencare 2^{50} sottoinsiemi, cioè

1.125.899.906.842.624 possibili soluzioni

I super-computer attualmente più potenti sono in grado di effettuare circa 10^{15} operazioni al secondo.

con un tale computer, ce la caviamo con poco più di un secondo 😅

… e se invece gli oggetti sono 100?

…le possibili "soluzioni" sono $2^{100} = 2^{10\cdot 10} \approx 1000^{10} = 10^{30}$

ovvero, esattamente

1.267.650.600.228.229.401.496.703.205.376

con il super-computer di prima, ci servirebbero circa 10^{15} secondi,
cioè circa 32.000.000 anni

Crescita esponenziale e truffe finanziarie: **Il broker di Baltimora**

- Ricevi via email una proposta di investimento da un broker di Baltimora

- Passa una settimana e, proprio come aveva previsto il broker di Baltimora, il valore di quell'azione sale.

- Passano quindici settimane, e in ognuna il broker propone un investimento. E ogni volta la previsione si rivela esatta.

- La sedicesima settimana ricevi una sollecitazione a investire una forte somma di denaro

Che fai?

Crescita esponenziale e truffe finanziarie: **Il broker di Baltimora**

- Di sicuro il broker di Baltimora sembra non essere uno sprovveduto.

- Ma tu sei prudente e conosci la matematica. Se il broker ci sta truffando e ogni volta propone un investimento a caso, qual è la probabilità che faccia un filotto di 15 previsioni giuste?
- Se è un pataccaro e ha il 50% di possibilità di indovinare ciascuna previsione, allora la possibilità di indovinare 15 previsioni di fila è

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\dots\cdot\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{15}=0.00003$$

- cioè lo 0.003%... un evento molto raro.
- Ma allora… quindi… il broker conosce qualche trucco! … vuoi vedere che la fortuna mi ha baciato?

La prospettiva del **broker di Baltimora**

- Tu non lo sapevi, ma la prima settimana il broker ha mandato la email che hai ricevuto a altre 159.999 persone.

A 80.000 suggerisce di scommettere su un particolare titolo.

Alle altre 80.000, suggerisce di «shortare» sullo stesso titolo (cioè suggerisce di scommettere sul ribasso del prezzo di quel titolo)

- Se, dopo una settimana, il titolo guadagna, il broker elimina dalla sua lista le 80.000 persone «sfortunate» del gruppo di destra
- Se invece il titolo perde, il broker elimina dalla sua lista le 80.000 persone «sfortunate» del gruppo di sinistra

- <u>**indipendentemente**</u> da ciò che è successo nel mercato azionario, le 80.000 persone «fortunate» che restano in lista avrebbero guadagnato se avessero investito.

La prospettiva del **broker di Baltimora**

- … e tu eri nel gruppo delle persone «fortunate». Ecco perché ricevi la mail la seconda settimana…
- Ora il broker divide nuovamente il gruppo in 2 gruppi di 40.000 persone:


A 40.000 suggerisce di scommettere su un particolare titolo.


Alle altre 40.000, suggerisce di «shortare» sullo stesso titolo (cioè suggerisce di scommettere sul ribasso del prezzo di quel titolo)

- … e il gioco si ripete…
- … e tu di nuovo sei tra quelli «fortunati» che stanno nel gruppo della previsione giusta.

La prospettiva del **broker di Baltimora**

- Dopo la settimana 1… ci sono 80.000 «fortunati», compreso te
- Dopo la settimana 2… ci sono 40.000 «fortunati», compreso te
- Dopo la settimana 3… ci sono 20.000 «fortunati», compreso te

…

- Dopo la settimana 15… ci sono 4 «fortunati», compreso te

A queste quattro persone il broker sembrerà un genio che conosce i meccanismi segreti del mercato!

Quattro persone dalle quali potrà legittimamente aspettarsi di ricevere compensi sostanziosi.

Quattro persone per le quali però le performance precedenti **non danno alcuna garanzia** sugli esiti futuri dei loro investimenti.

Approccio dichiarativo

Scopo: descrivere ***cosa*** calcolare

- La soluzione del problema è un sottoinsieme di oggetti.
- Un sottoinsieme è il risultato di una serie di decisioni (inserisco o non inserisco ognuno degli oggetti)
- …quindi le decisioni prese descrivono la soluzione.
- Come rappresento matematicamente le decisioni da prendere?

Quali sono le variabili *decisionali* ?

variabili decisionali

x_i = valore che si ottiene se si seleziona l'i-esimo oggetto

$\boxed{x_i = 1 \text{ se l'oggetto } i\text{-esimo è selezionato, } 0 \text{ altrimenti}}$

x = numero di oggetti selezionati

x_i = 1 se selezionando l'oggetto i-esimo si supera il limite, 0 altrimenti

peso: 5.2 kg
valore: 100

$x_1 \in \{0,1\}$

peso: 2.3 kg
valore: 60

$x_2 \in \{0,1\}$

peso: 3.5 kg
valore: 70

$x_3 \in \{0,1\}$

peso: 1.5 kg
valore: 15

$x_4 \in \{0,1\}$

$x_2 = 0$

$x_3 = 0$

$x_1 = 1$

$x_4 = 1$

quanto pesa questo insieme?

$$\begin{aligned} 6.7 &= 5.2 + 1.5 \\ &= 5.2x_1 + 2.3x_2 + 3.5x_3 + 1.5x_4 \end{aligned}$$

quanto vale questo insieme?

$$\begin{aligned} 115 &= 100 + 15 \\ &= 100x_1 + 60x_2 + 70x_3 + 15x_4 \end{aligned}$$

peso: 5.2 kg
valore: 100

$x_1 \in \{0,1\}$

peso: 2.3 kg
valore: 60

$x_2 \in \{0,1\}$

peso: 3.5 kg
valore: 70

$x_3 \in \{0,1\}$

peso: 1.5 kg
valore: 15

$x_4 \in \{0,1\}$

Vincolo:

il peso complessivo non può superare 6 kg

$$5.2x_1 + 2.3x_2 + 3.5x_3 + 1.5x_4 \leq 6$$

Obiettivo:

massimizzare il valore degli oggetti in valigia

$$\max(100x_1 + 60x_2 + 70x_3 + 15x_4)$$

peso: 5.2 kg
valore: 100

$x_1 \in \{0,1\}$

peso: 2.3 kg
valore: 60

$x_2 \in \{0,1\}$

peso: 3.5 kg
valore: 70

$x_3 \in \{0,1\}$

peso: 1.5 kg
valore: 15

$x_4 \in \{0,1\}$

modello di programmazione matematica

$$\max(100x_1 + 60x_2 + 70x_3 + 15x_4)$$

$$5.2x_1 + 2.3x_2 + 3.5x_3 + 1.5x_4 \leq 6$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\}$$

… in generale

- n oggetti, ognuno descritto da un valore v_i e da un peso p_i
- una valigia con limite di peso pari a b

$$\max(v_1x_1 + \cdots + v_nx_n)$$
$$p_1x_1 + \cdots + p_nx_n \leq b$$
$$x_1, \ldots, x_n \in \{0,1\}$$

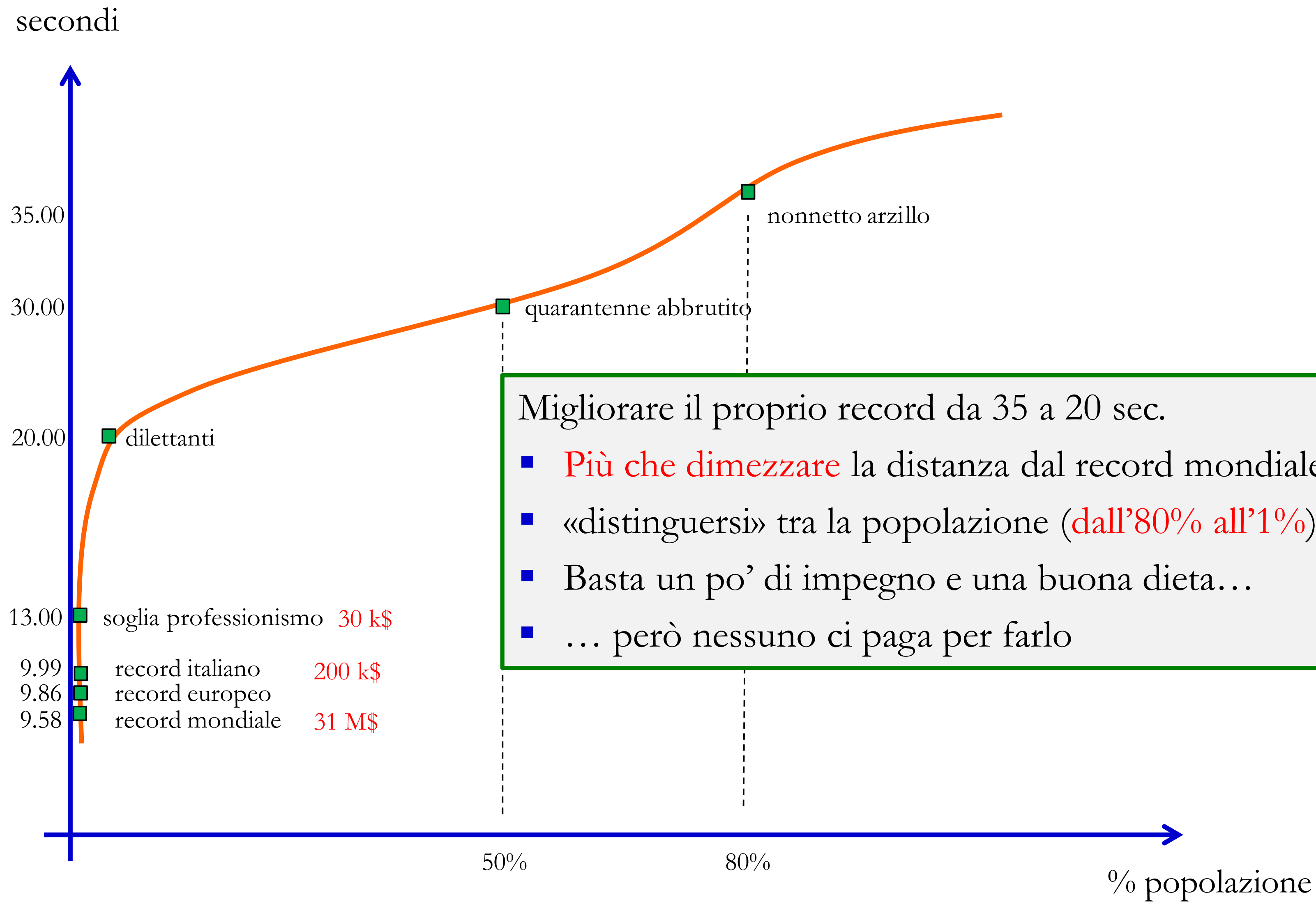
$$\max \sum_{i=1}^{n} v_ix_i$$
$$\sum_{i=1}^{n} p_ix_i \leq b$$
$$x_1, \ldots, x_n \in \{0,1\}$$

- la soluzione ottima (**certificata**) vale **198**
- la nostra miglior soluzione vale **197**

… ne vale davvero la pena ?

Sì, se si considera il «margine competitivo»

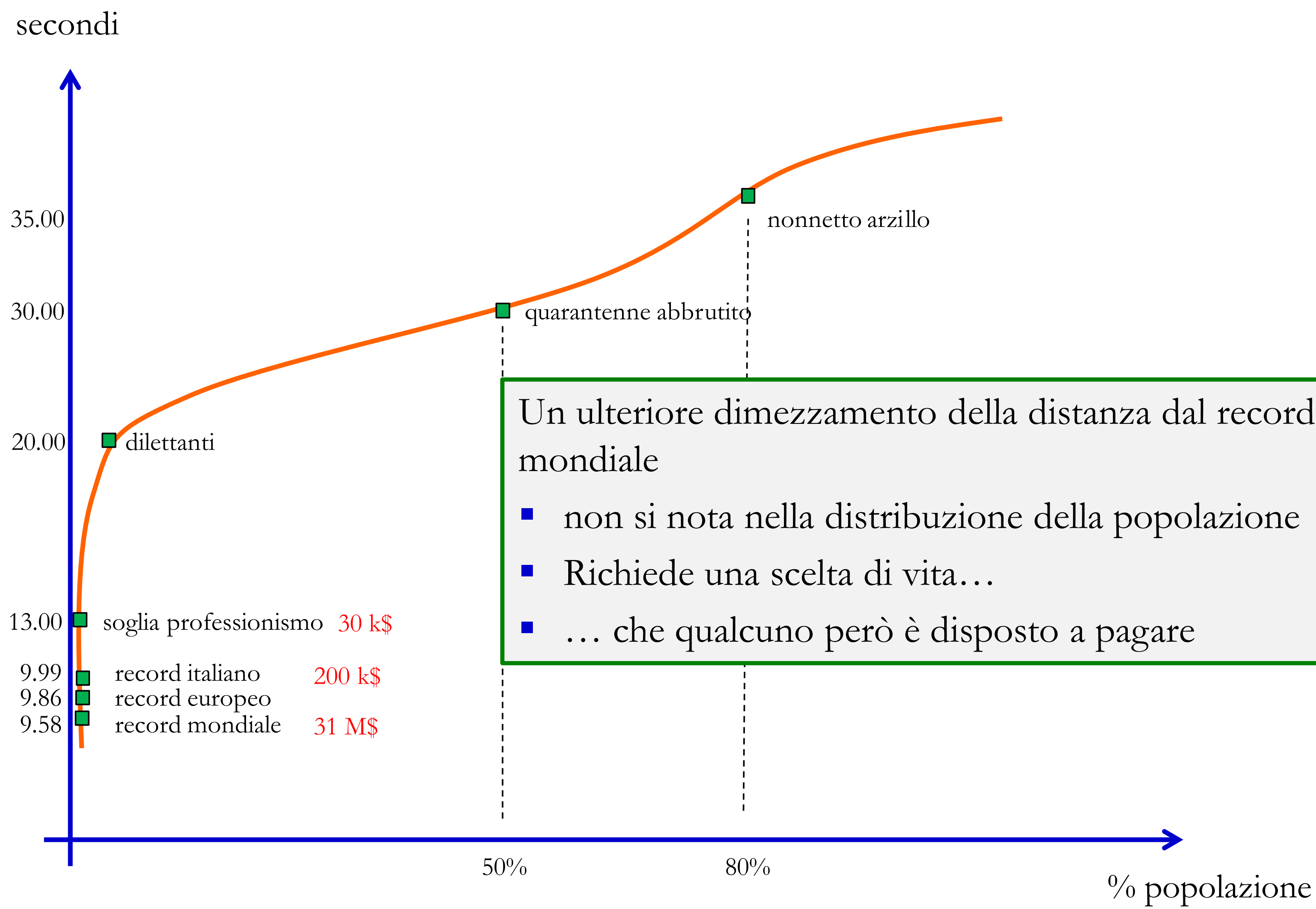
Una metafora sportiva: i 100 metri piani



Migliorare il proprio record da 35 a 20 sec.

- Più che dimezzare la distanza dal record mondiale
- «distinguersi» tra la popolazione (dall'80% all'1%)
- Basta un po' di impegno e una buona dieta…
- … però nessuno ci paga per farlo

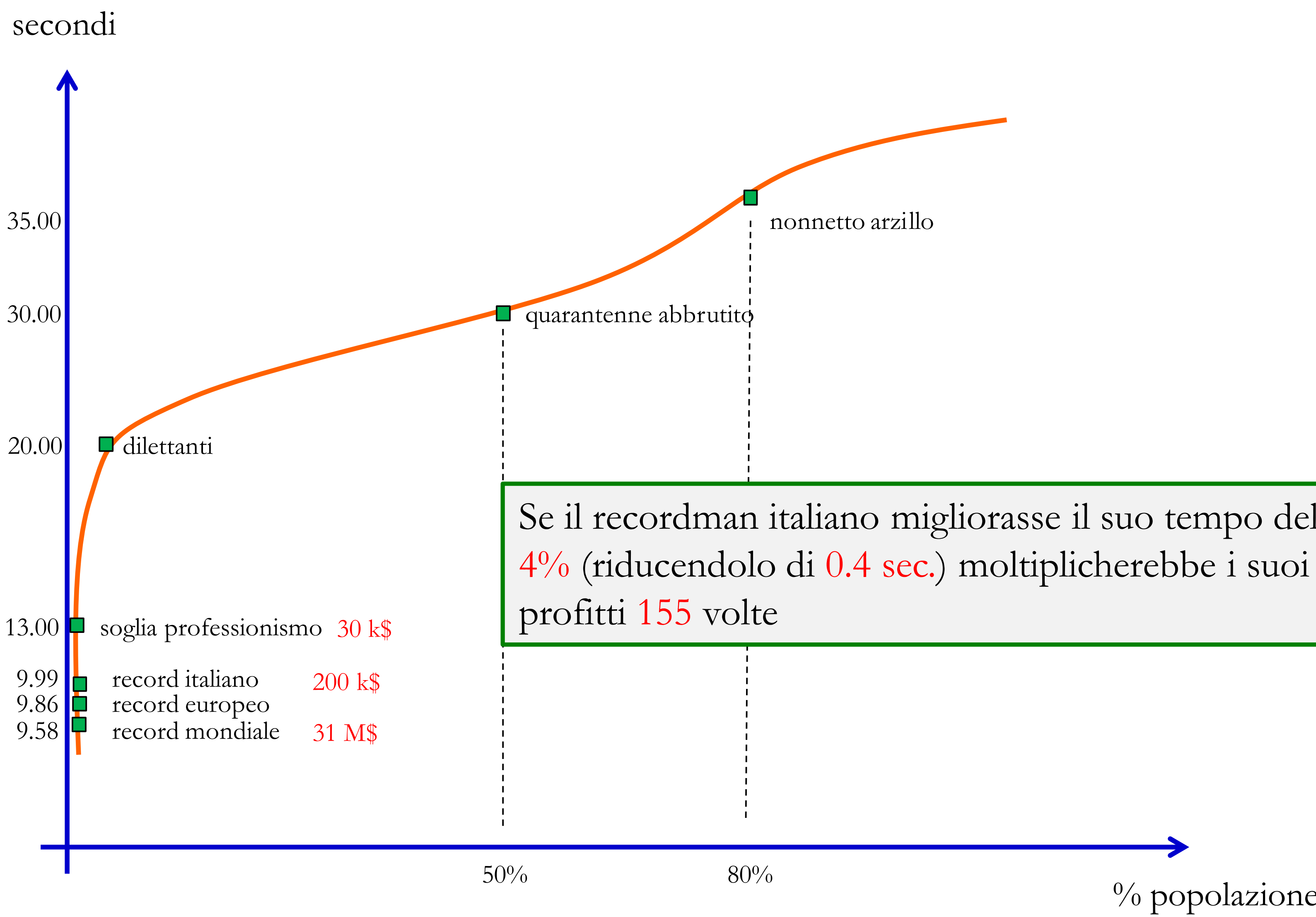
Una metafora sportiva: i 100 metri piani



Un ulteriore dimezzamento della distanza dal record mondiale

- non si nota nella distribuzione della popolazione
- Richiede una scelta di vita…
- … che qualcuno però è disposto a pagare

Una metafora sportiva: i 100 metri piani



Se il recordman italiano migliorasse il suo tempo del 4% (riducendolo di 0.4 sec.) moltiplicherebbe i suoi profitti 155 volte