

# Operational Research: the Science of Better

a.a. 2024/2025



Fabrizio Marinelli

[fabrizio.marinelli@staff.univpm.it](mailto:fabrizio.marinelli@staff.univpm.it)

tel. 071 - 2204823

# La fabbrica del cioccolato



**[Problema]** La *fabbrica del cioccolato* produce due tipi di creme (che per semplicità chiamiamo **A** e **B**) che vende rispettivamente a **25** e **28** €/Kg. Considerando la composizione delle singole creme e le disponibilità in magazzino degli ingredienti (vedi tabella) qual è il massimo guadagno che si può ottenere producendo **A** e **B**?



	composizione			
	latte	cioccolato	zucchero	burro
crema <b>A</b>	40%	40%	10%	10%
crema <b>B</b>	24%	45%	31%	-
disponibilità (Kg)	312	360	160	70

# Gara 3: l'emulo di Willy Wonka

	composizione				profitto $\times$ kg
	latte	cioccolato	zucchero	burro	
crema A	40%	40%	10%	10%	25 €
crema B	24%	45%	31%	-	28 €
disp. (kg)	312	360	160	70	



# possibili strategie

	composizione				
	latte	cioccolato	zucchero	burro	profitto × kg
crema A	40%	40%	10%	10%	25 €
crema B	24%	45%	31%	-	28 €
disp. (kg)	312	360	160	70	

## Profitto

- La crema B mi fa guadagnare di più: produco B quanto più posso e con gli ingredienti avanzati produco A.
- Il burro è utilizzato solo per A: produco A quanto più posso e con gli ingredienti avanzati produco la crema B.
- Uso metà del magazzino per A e metà del magazzino per B.

14.452 €

21.233 €

15.976 €

# Discussione sulle strategie

- Si può fare meglio ?  
...cioè, il profitto totale ottenuto è massimo?
- La strategia che qui vince è sempre la migliore ?  
...cioè, cosa succede se, per esempio, il profitto della crema B passa da 28 a 50 €/kg ?

# Discussione su una strategia **ottima**

- Si può fare meglio ? **No**
- E' sempre la migliore ? **Sì**

... escogitiamo una strategia ottima

## Approccio procedurale

Il problema sembra più complicato di quello dello zaino.

Lì i tentativi da fare erano tantissimi...

...ma qui sono **infiniti**

## Approccio dichiarativo

Individuiamo **decisioni**, relazioni (**vincoli**) e **obiettivi** e scriviamo un **modello matematico**

# fabbrica del cioccolato: elementi del problema

La fabbrica del cioccolato produce due tipi di creme (che per semplicità chiamiamo **A** e **B**) che vende rispettivamente a **25** e **28** €/Kg.

Considerando la composizione delle singole creme e le disponibilità in magazzino degli ingredienti qual è il massimo guadagno che si può ottenere producendo **A** e **B**?

- Individuiamo **decisioni**, relazioni (**vincoli**) e **obiettivi**



# fabbrica del cioccolato: decisioni

vincoli

La fabbrica del cioccolato produce due tipi di creme (che per semplicità chiamiamo **A** e **B**) che vende rispettivamente a **25** e **28** €/Kg.

Considerando la composizione delle singole creme e le disponibilità in magazzino degli ingredienti qual è il **massimo guadagno** che si può ottenere **producendo A e B?**

decisioni

obiettivo

- Come si «codificano» le decisioni?





	composizione				
	Latte	Cioccolato	Zucchero	Burro	Profitto $\times$ kg
crema A	40%	40%	10%	10%	25 €
crema B	24%	45%	31%	-	28 €
disp. (kg)	312	360	160	70	

Le decisioni riguardano le **quantità** di A e B da produrre e possono essere codificate con due **variabili (decisionali)**:

- $x$  = quantità (in kg) che si decide di produrre della crema A
- $y$  = quantità (in kg) che si decide di produrre della crema B

	composizione				
	Latte	Cioccolato	Zucchero	Burro	Profitto $\times$ kg
crema A	40%	40%	10%	10%	25 €
crema B	24%	45%	31%	-	28 €
disp. (kg)	312	360	160	70	

- $x$  = quantità (in kg) che si decide di produrre della crema A
- $y$  = quantità (in kg) che si decide di produrre della crema B

**Obiettivo** : massimizzare il guadagno  $z$  :

$$\max z = 25x + 28y$$

Se produco  $x$  kg di crema A guadagno  $25x$  Euro

	composizione				
	Latte	Cioccolato	Zucchero	Burro	Profitto × kg
crema A	40%	40%	10%	10%	25 €
crema B	24%	45%	31%	-	28 €
disp. (kg)	312	360	160	70	

- $x$  = quantità (in kg) che si decide di produrre della crema A
- $y$  = quantità (in kg) che si decide di produrre della crema B

**Vincoli** : la quantità totale di latte utilizzata non può essere superiore alla disponibilità di latte in magazzino:

$$0.4x + 0.24y \leq 312$$

kg di latte che uso se  
produco  $x$  kg di A

kg di latte che uso se  
produco  $y$  kg di B

disponibilità  
(in kg) di latte

	composizione				
	Latte	Cioccolato	Zucchero	Burro	Profitto × kg
crema A	40%	40%	10%	10%	25 €
crema B	24%	45%	31%	-	28 €
disp. (kg)	312	360	160	70	

- $x$  = quantità (in kg) che si decide di produrre della crema A
- $y$  = quantità (in kg) che si decide di produrre della crema B

**Vincoli** : la quantità totale di cioccolato utilizzato non può essere superiore alla disponibilità di cioccolato in magazzino:

$$0.4x + 0.45y \leq 360$$

kg di cioccolato che uso  
se produco  $x$  kg di A

kg di cioccolato che uso  
se produco  $y$  kg di B

disponibilità  
(in kg) di cioccolato

	composizione				
	Latte	Cioccolato	Zucchero	Burro	Profitto $\times$ kg
crema A	40%	40%	10%	10%	25 €
crema B	24%	45%	31%	-	28 €
disp. (kg)	312	360	160	70	

- $x$  = quantità (in kg) che si decide di produrre della crema A
- $y$  = quantità (in kg) che si decide di produrre della crema B

**Vincoli:** vincoli analoghi vanno espressi per lo zucchero e il burro:

- $0.1x + 0.31y \leq 160$
- $0.1x \leq 70$

**Vincoli:** le quantità prodotte sono non negative:  $x \geq 0$   $y \geq 0$

# Il modello matematico completo

$$\max z = 25x + 28y$$

$$0.4x + 0.24y \leq 312$$

$$0.4x + 0.45y \leq 360$$

$$0.1x + 0.31y \leq 160$$

$$0.1x \leq 70$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

massimizzare il guadagno  $z$

disponibilità di latte

disponibilità di cioccolato

disponibilità di zucchero

disponibilità di burro

quantità di  $A \geq 0$

quantità di  $B \geq 0$

# Il modello matematico completo

$$\max z = 25x + 28y$$

fascio di rette nel piano

$$0.4x + 0.24y \leq 312$$

$$0.4x + 0.45y \leq 360$$

disuguazione lineare, geometricamente un semipiano

$$0.1x + 0.31y \leq 160$$

$$0.1x \leq 70$$

sistema di disuguazioni lineari, cioè intersezione di semipiani

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

...possiamo rappresentare graficamente il problema nel piano

# Algoritmo (geometrico) del *Simplesso*

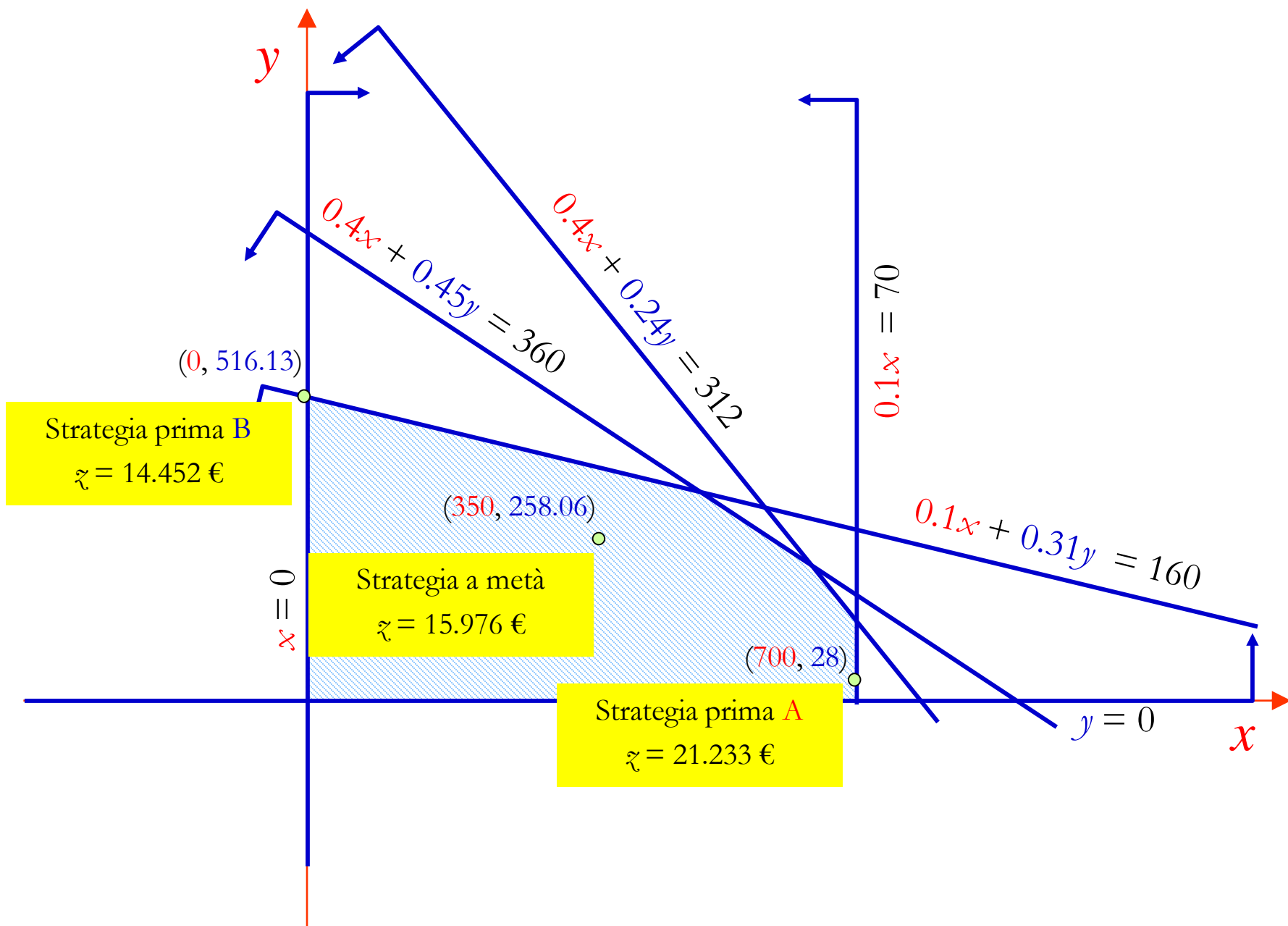
## 1. Rappresentazione della *regione ammissibile*

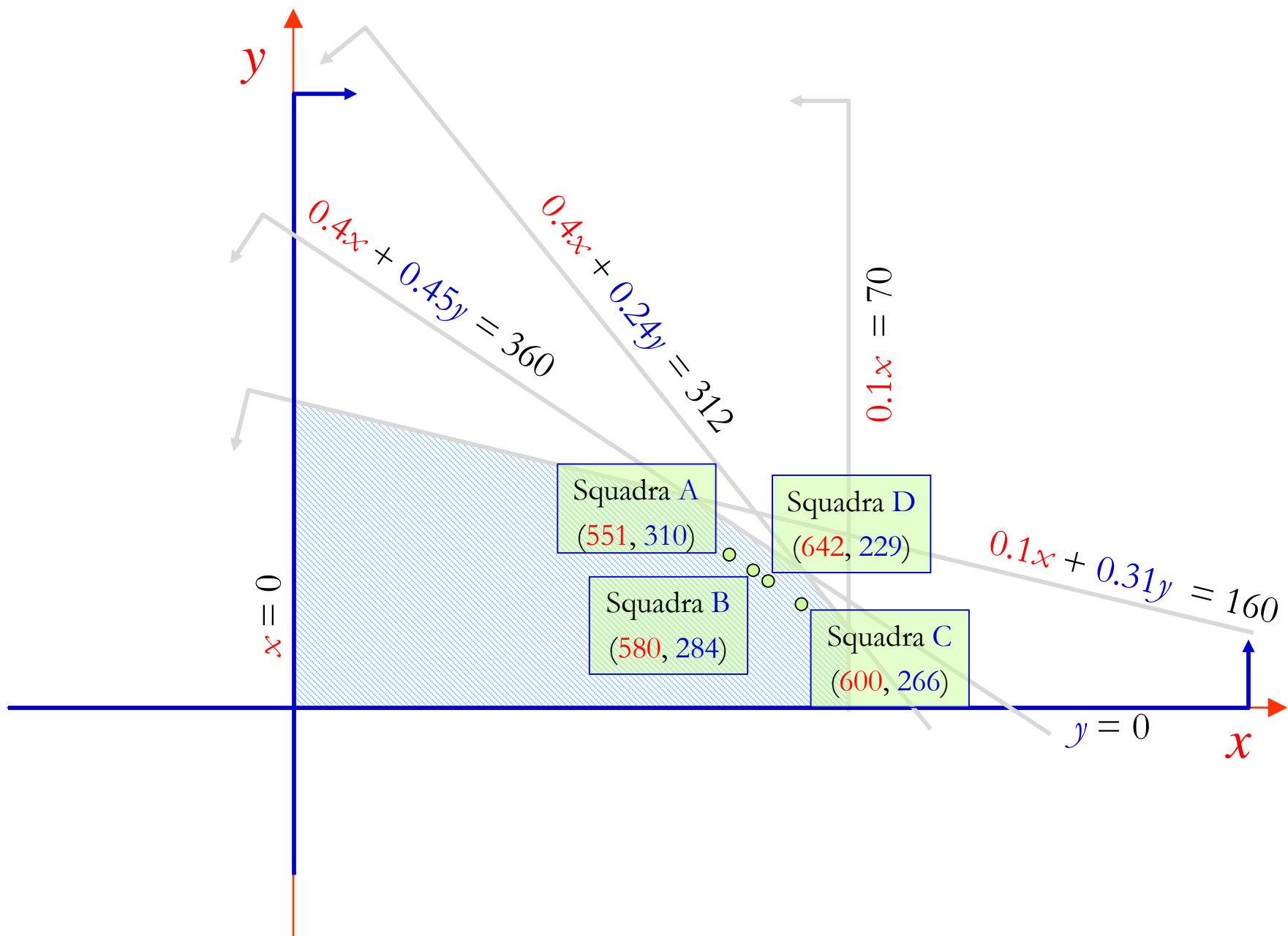
(cioè di tutte le soluzioni che soddisfano il sistema di disequazioni)

- **disegna la retta** associata al vincolo  $0.4x + 0.24y \leq 312$  individuando i punti di intersezione con gli assi, che sono  $(0, 1300)$  e  $(780, 0)$
- Individua il **semipiano** che soddisfa la disequazione - basta fare la prova con il punto  $(0, 0)$
- Ripeti le precedenti operazioni per **tutti** i vincoli del modello

La regione ammissibile è l'**intersezione** di tutti i semipiani ottenuti

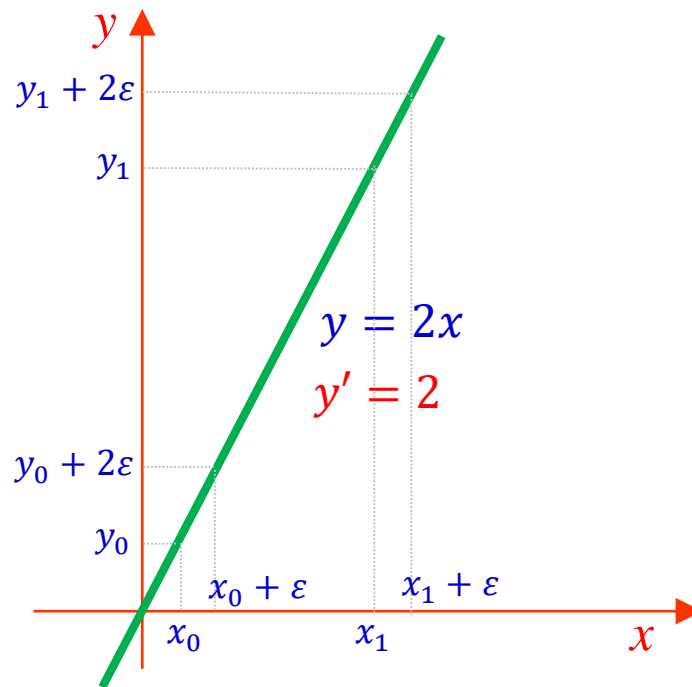






# Richiami di calcolo

- la derivata  $f'(x)$  di una funzione  $y = f(x)$  rappresenta la pendenza della retta tangente a  $f$  in un dato punto. In particolare  $f'(x_0)$  indica il tasso di variazione di  $y$  al variare di  $x_0$
- Se  $f(x)$  è lineare, la derivata prima è una costante a indicare che il tasso di variazione è sempre lo stesso

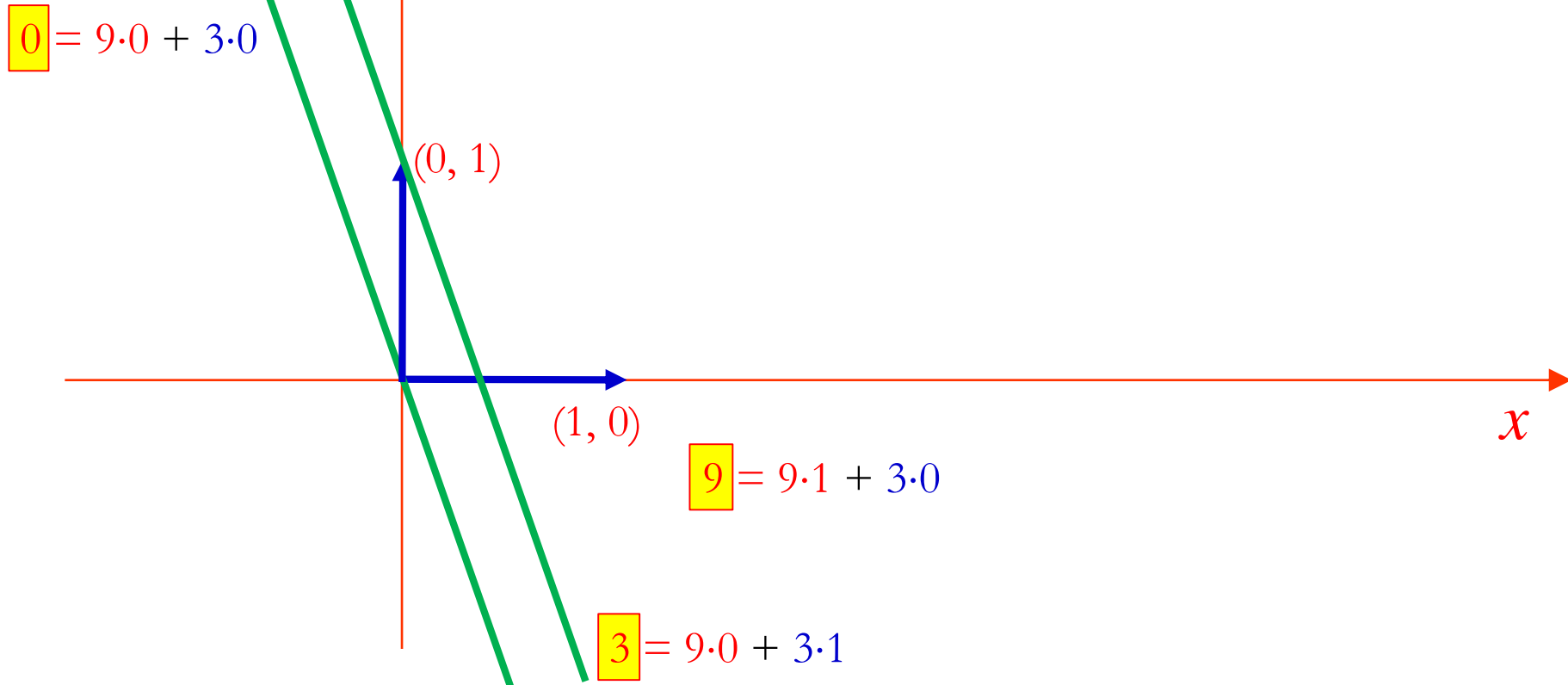


# Richiami di calcolo

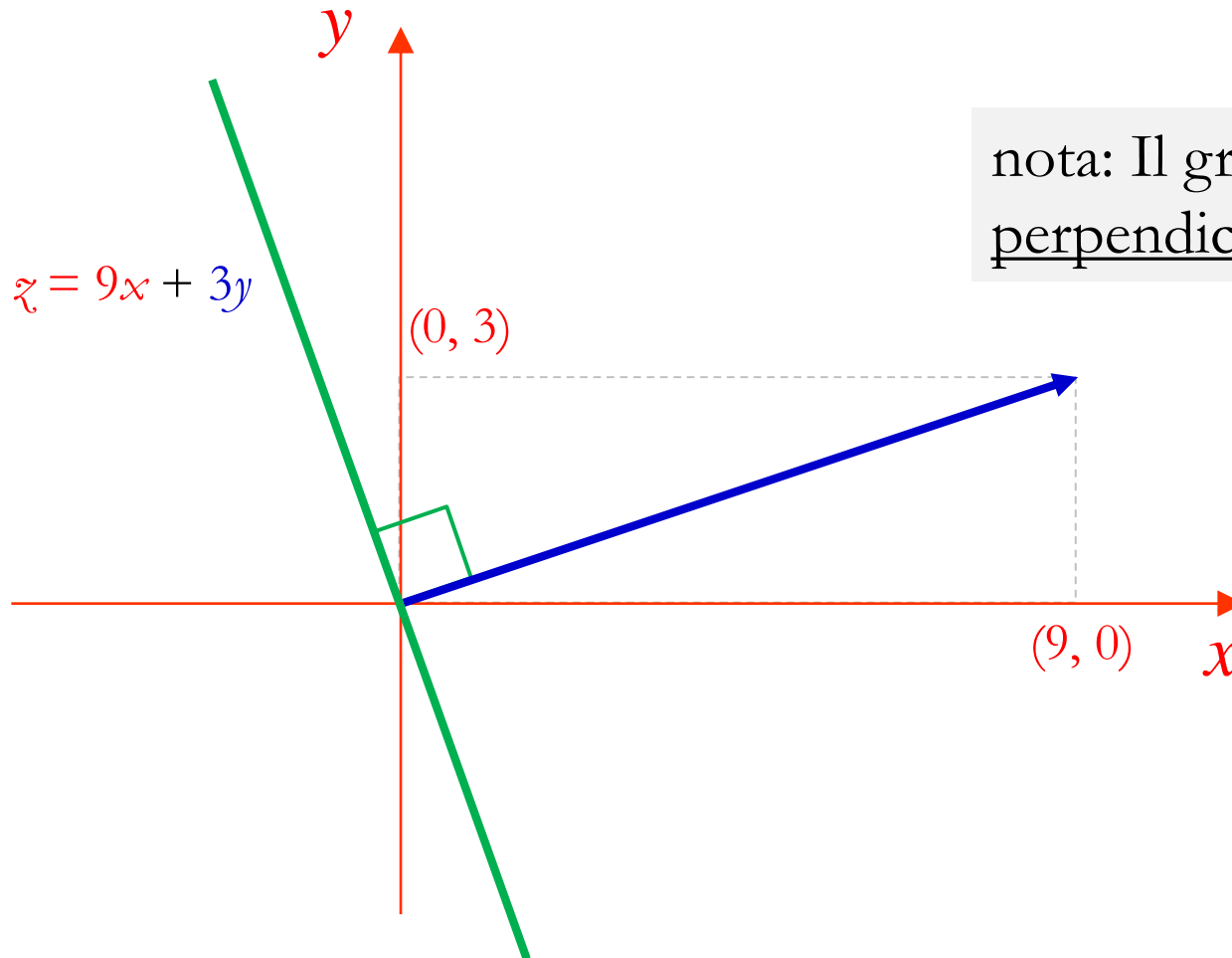
- Una funzione in più variabili, per esempio  $z = f(x, y)$ , può variare in modo diverso a seconda se ci si sposti lungo  $x$  oppure lungo  $y$ .
- La variazione lungo la *direzione*  $x$  è espressa dalla *derivata parziale*  $\frac{\partial z}{\partial x}$
- Il vettore di tutte le derivate parziali è il *gradiente*  $\nabla$ . Se la funzione è lineare il gradiente è un vettore costante.
- Per esempio il gradiente di  $f(x, y) = 9x + 3y$  è  $\nabla = (9, 3)$

Il gradiente di  $f(x, y) = 9x + 3y$  indica che:

- muovendosi lungo  $x$  il tasso di variazione della funzione è di 9
- muovendosi lungo  $y$  il tasso di variazione della funzione è di 3



- Ma qual è la variazione della funzione se mi muovo lungo la direzione del gradiente  $\nabla = (9,3)$ ?

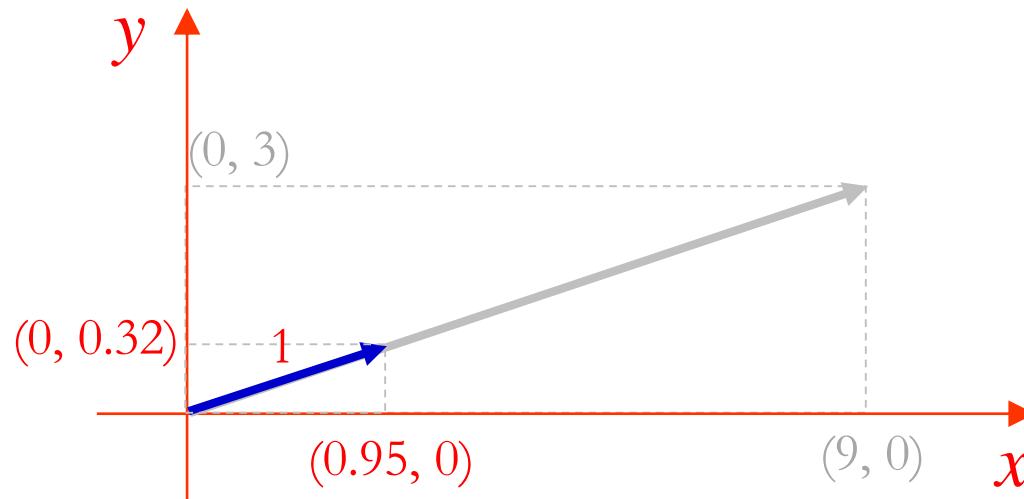


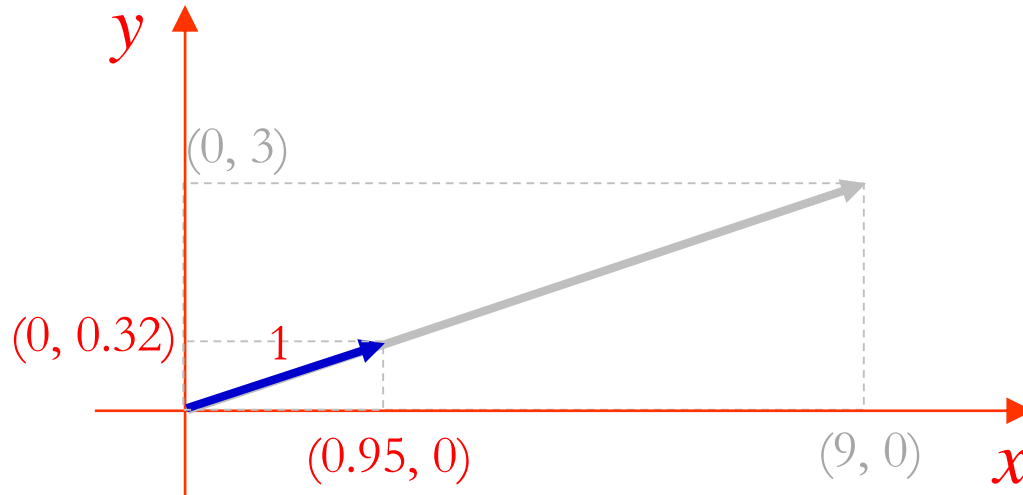
nota: Il gradiente è sempre perpendicolare alla funzione

- Per calcolare lo spostamento lungo  $x$  e  $y$  che corrisponde allo spostamento di una unità lungo la direzione  $\nabla = (9, 3)$  dobbiamo calcolare il gradiente **normalizzato**

$$\hat{\nabla} = \left( \frac{x}{\|\nabla\|}, \frac{y}{\|\nabla\|} \right) \quad \text{con} \quad \|\nabla\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{9^2 + 3^2} = \sqrt{90}$$

$$\hat{\nabla} = \left( \frac{9}{\sqrt{90}}, \frac{3}{\sqrt{90}} \right) = (0.95, 0.32)$$





- quindi, muovendosi lungo la direzione  $\nabla=(25, 28)$ , il tasso di variazione della funzione è  $9 \cdot 0.95 + 3 \cdot 0.32 = 10.47$
- Il tasso di variazione del gradiente è quello massimo



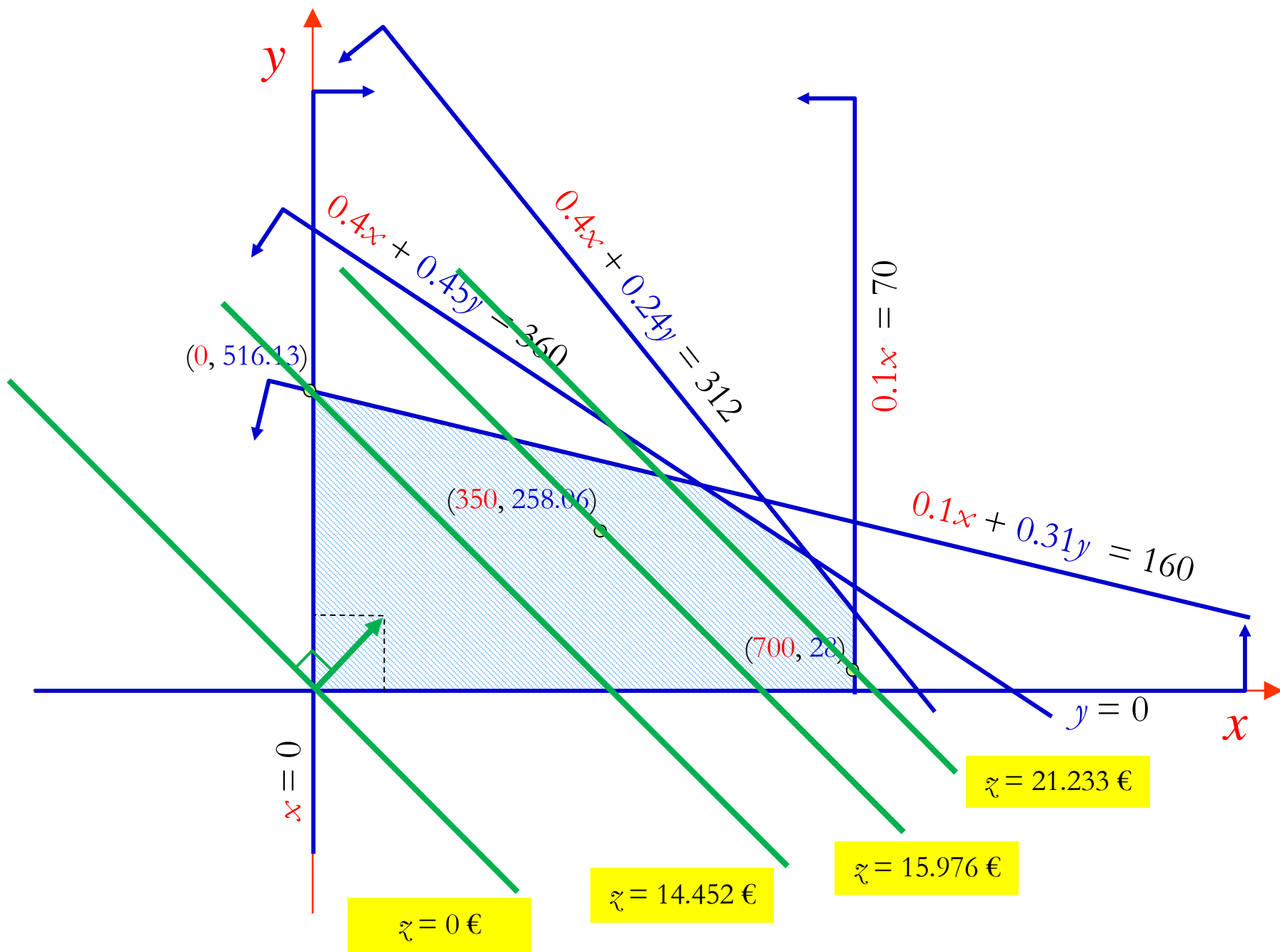
# Algoritmo (geometrico) del *Simplesso*

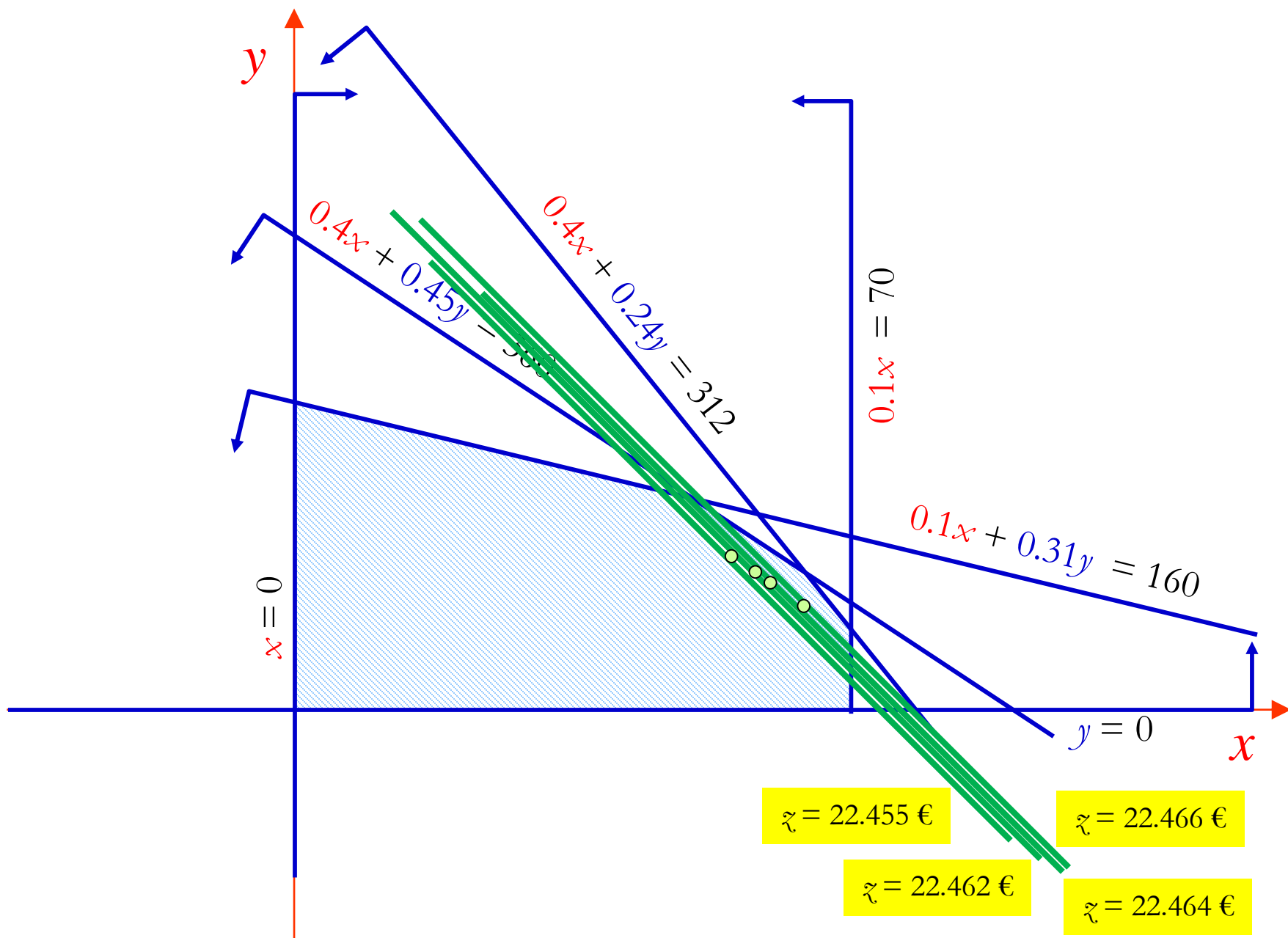
## 1. Rappresentazione della *funzione obiettivo*

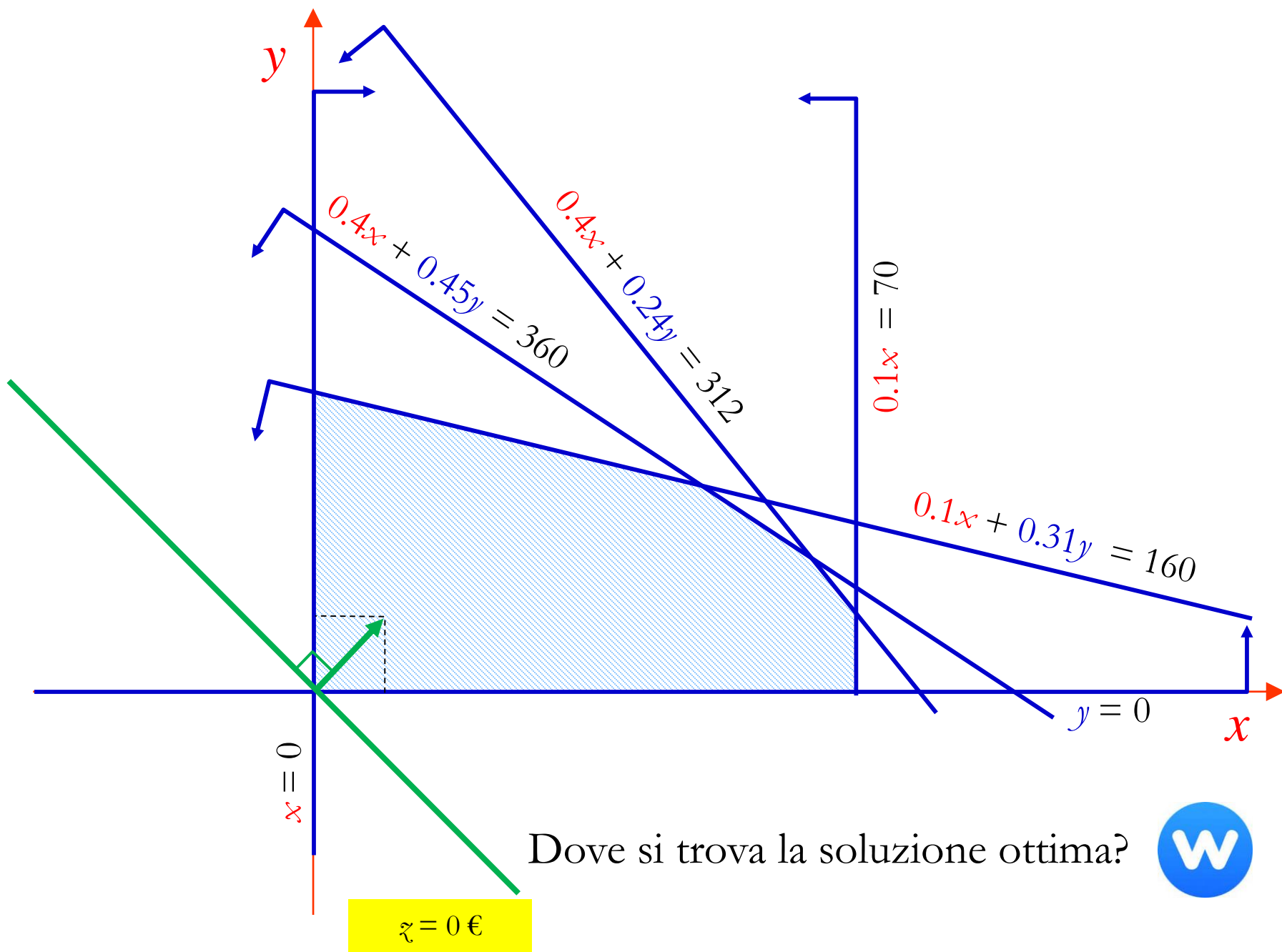
(cioè del fascio di rette  $z = 25x + 28y$ )

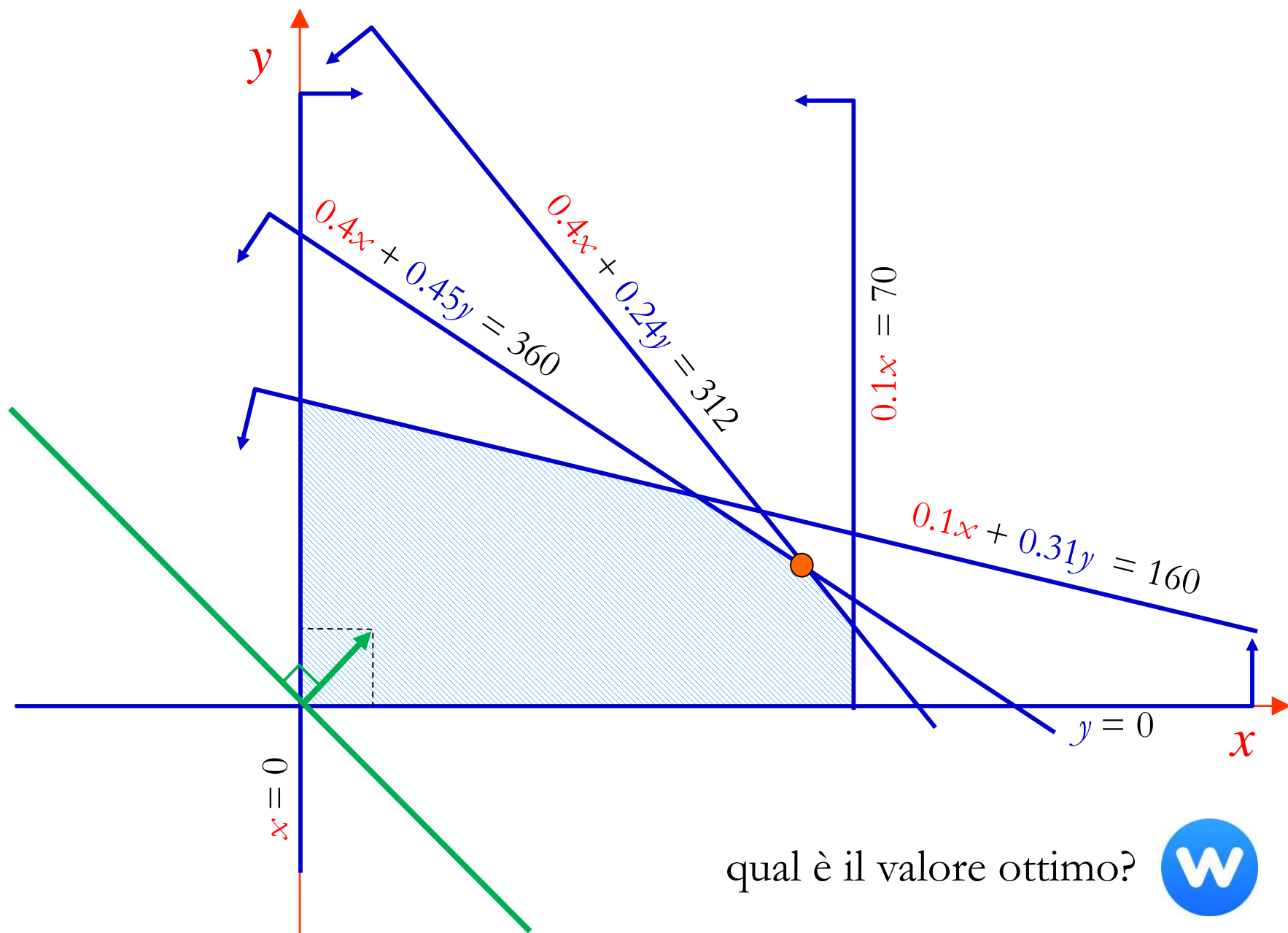
- **disegna il gradiente** della funzione obiettivo, che in questo caso è il vettore  $(25, 28)$ . Le rette del fascio sono tutte **perpendicolari** al gradiente
- disegna una o più rette del fascio di rette (scegliendo a caso il valore del parametro  $z$ )

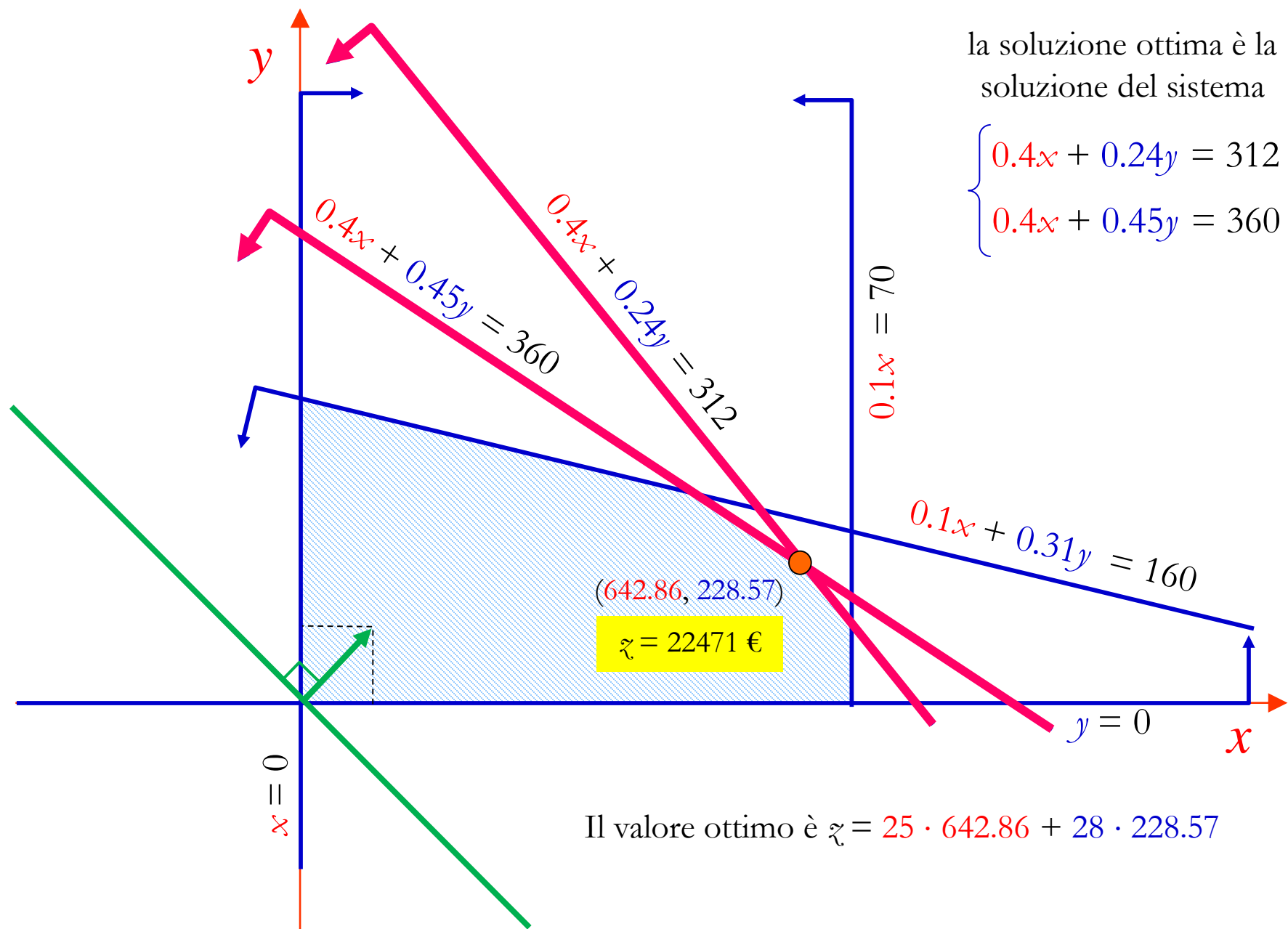
La **soluzione ottima** si ottiene **traslando** la **funzione obiettivo** lungo la direzione di miglioramento fintanto che la sua intersezione con la regione ammissibile risulti non vuota.











# Gara 4: Ottimizziamo!

Calcolare la soluzione ottima di questo modello

$$\begin{aligned}\max \quad & z = x + 3y \\ & 6x + 10y \leq 30 \\ & 3x + 2y \geq 6 \\ & x - 2y \geq -1 \\ & y \geq 1/2\end{aligned}$$

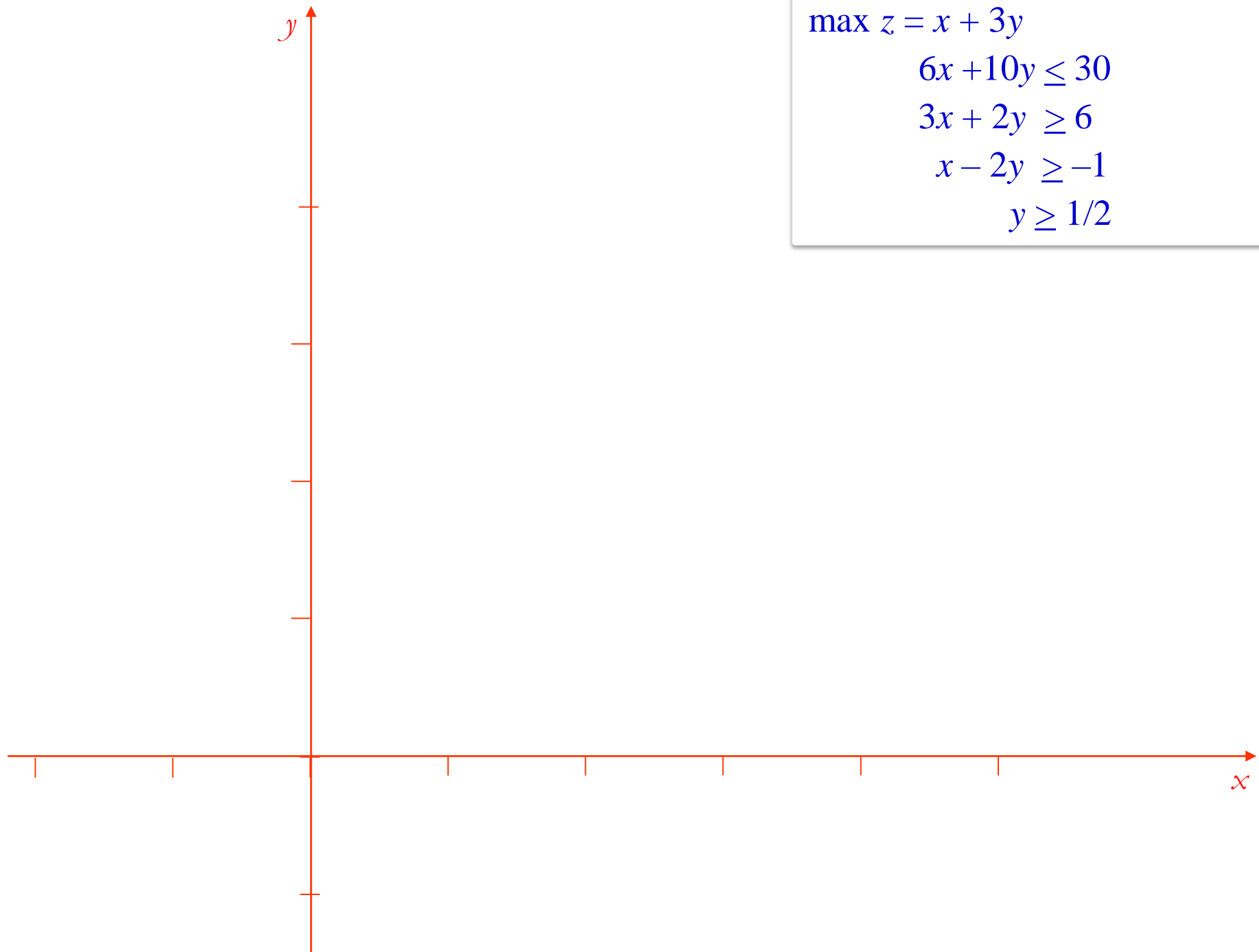
$$\max z = x + 3y$$

$$6x + 10y \leq 30$$

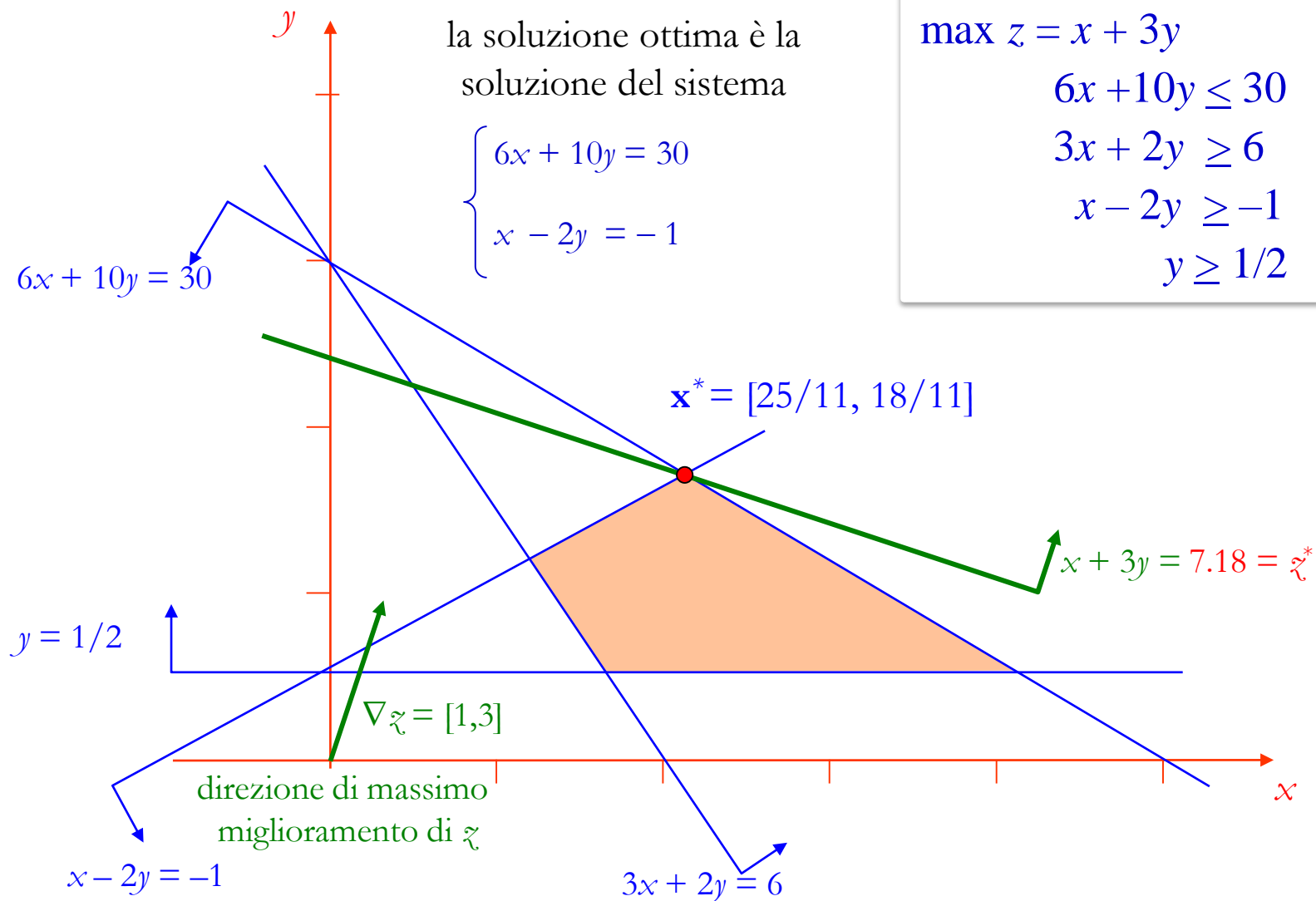
$$3x + 2y \geq 6$$

$$x - 2y \geq -1$$

$$y \geq 1/2$$







$$\begin{aligned} \max z &= x + 3y \\ 6x + 10y &\leq 30 \\ 3x + 2y &\geq 6 \\ x - 2y &\geq -1 \\ y &\geq 1/2 \end{aligned}$$

# Problema della dieta





## Problema della dieta

- Si dispone di un certo numero di **alimenti** e di ognuno si conosce la composizione in termini di **sostanze nutritive** e il numero di **calorie** per porzione
- Di ogni **sostanza nutritiva** sono note **quantità minima e massima** richieste nel **periodo** della dieta

Qual è la dieta che garantisce il fabbisogno nutrizionale e contiene il **minimo numero di calorie** ?

# Gara 5: l'emulo di Cannavacciuolo

	Latte intero	Mela	Pasta all'uovo	Gamberetti	Lattuga	Petto di Pollo	Pomodori	Tiramisù	Fabbisogno
Proteine (g)	3,3	0,2	11,8	13	1,8	22,2	1,2	13,2	$\geq 450$
Zuccheri (g)	4,9	11	63,2	0	2,2	0	2,8	33,5	$\geq 750$
Grassi (g)	3,4	0,3	2,8	1	0,4	0,9	0,2	25,8	$\leq 300$
Colesterolo (mg)	14	0	91	178	0	67	0	197	$\leq 250$
calorie	61	54	250	93	29	99	35	300	



# Il problema della dieta: elementi del problema

Qual è la dieta che garantisce il fabbisogno nutrizionale e contiene il minimo numero di calorie ?

- Individuiamo decisioni, relazioni (vincoli) e obiettivi



# dieta economica: decisioni

Qual è la dieta che garantisce il fabbisogno nutrizionale e  
contiene il minimo numero di calorie ?

decisioni

funzione obiettivo

vincoli

- Come si «codificano» le decisioni?



# Problema della dieta: *variabili decisionali*

Una variabile decisionale per ogni coppia alimento/sostanza:

- $x_{ij} \in \mathbf{R}$ : qtà della sostanza  $j$  dell'alimento  $i$  che fa parte della dieta

Una variabile decisionale per ogni alimento:

- $x_i \in \mathbf{R}$ : numero di porzioni dell'alimento  $i$  che fanno parte della dieta
- $x_i \in \{0,1\}$ : = 1 se l'alimento  $i$  fa parte della dieta, 0 altrimenti

Una variabile decisionale per ogni sostanza:

- $x_j \in \mathbf{R}$ : qtà di sostanza  $j$  presente nella dieta
- $x_j \in \{0,1\}$ : = 1 se la sostanza  $j$  è presente nella dieta, 0 altrimenti

# Il problema della dieta

	Latte intero	Mela	Pasta all'uovo	Gamberetti	Lattuga	Petto di Pollo	Pomodori	Tiramisù	Fabbisogno
Proteine (g)	3,3	0,2	11,8	13	1,8	22,2	1,2	13,2	$\geq 450$
Zuccheri (g)	4,9	11	63,2	0	2,2	0	2,8	33,5	$\geq 750$
Grassi (g)	3,4	0,3	2,8	1	0,4	0,9	0,2	25,8	$\leq 300$
Colesterolo (mg)	14	0	91	178	0	67	0	197	$\leq 250$
calorie	61	54	250	93	29	99	35	300	

Le decisioni riguardano il **numero di porzioni** di ogni alimento e possono essere codificate con otto variabili decisionali:

- $x_1$  = numero di porzioni di latte intero
- $x_2$  = numero di porzioni di mela
- ...
- $x_8$  = numero di porzioni di tiramisù



# Il problema della dieta

	Latte intero	Mela	Pasta all'uovo	Gamberetti	Lattuga	Petto di Pollo	Pomodori	Tiramisù	Fabbisogno
Proteine (g)	3,3	0,2	11,8	13	1,8	22,2	1,2	13,2	$\geq 450$
Zuccheri (g)	4,9	11	63,2	0	2,2	0	2,8	33,5	$\geq 750$
Grassi (g)	3,4	0,3	2,8	1	0,4	0,9	0,2	25,8	$\leq 300$
Colesterolo (mg)	14	0	91	178	0	67	0	197	$\leq 250$
calorie	61	54	250	93	29	99	35	300	

**Obiettivo** : minimizzare il numero totale di calorie:

$$\min z = 61 x_1 + 54 x_2 + \dots + 300 x_8$$

Se inserisco  $x_1$  porzioni di Latte intero assimilerò  $61 x_1$  calorie

# Il problema della dieta

	Latte intero	Mela	Pasta all'uovo	Gamberetti	Lattuga	Petto di Pollo	Pomodori	Tiramisù	Fabbisogno
Proteine (g)	3,3	0,2	11,8	13	1,8	22,2	1,2	13,2	$\geq 450$
Zuccheri (g)	4,9	11	63,2	0	2,2	0	2,8	33,5	$\geq 750$
Grassi (g)	3,4	0,3	2,8	1	0,4	0,9	0,2	25,8	$\leq 300$
Colesterolo (mg)	14	0	91	178	0	67	0	197	$\leq 250$
calorie	61	54	250	93	29	99	35	300	

**Vincoli** : la quantità totale di proteine deve essere almeno pari al fabbisogno:

$$3.3 x_1 + 0.2x_2 + \dots + 13.2 x_8 \geq 450$$

proteine assimilate con  $x_1$   
porzioni di Latte intero

proteine assimilate con  
 $x_2$  porzioni di Mela

fabbisogno minimo  
di proteine

# Il problema della dieta

	Latte intero	Mela	Pasta all'uovo	Gamberetti	Lattuga	Petto di Pollo	Pomodori	Tiramisù	Fabbisogno
Proteine (g)	3,3	0,2	11,8	13	1,8	22,2	1,2	13,2	$\geq 450$
Zuccheri (g)	4,9	11	63,2	0	2,2	0	2,8	33,5	$\geq 750$
Grassi (g)	3,4	0,3	2,8	1	0,4	0,9	0,2	25,8	$\leq 300$
Colesterolo (mg)	14	0	91	178	0	67	0	197	$\leq 250$
calorie	61	54	250	93	29	99	35	300	

**Vincoli** : un vincolo analogo va espresso per gli zuccheri:

$$4.9 x_1 + 11 x_2 + \dots + 33.5 x_8 \geq 750$$

# Il problema della dieta

	Latte intero	Mela	Pasta all'uovo	Gamberetti	Lattuga	Petto di Pollo	Pomodori	Tiramisù	Fabbisogno
Proteine (g)	3,3	0,2	11,8	13	1,8	22,2	1,2	13,2	$\geq 450$
Zuccheri (g)	4,9	11	63,2	0	2,2	0	2,8	33,5	$\geq 750$
Grassi (g)	3,4	0,3	2,8	1	0,4	0,9	0,2	25,8	$\leq 300$
Colesterolo (mg)	14	0	91	178	0	67	0	197	$\leq 250$
calorie	61	54	250	93	29	99	35	300	

**Vincoli** : la quantità totale di grassi non può eccedere la soglia di 300 g:

$$3.4 x_1 + 0.3 x_2 + \dots + 25.8 x_8 \leq 300$$

grassi assimilati con  $x_1$   
porzioni di Latte intero

grassi assimilati con  $x_2$   
porzioni di Mela

Soglia massima  
di grassi

# Il problema della dieta

	Latte intero	Mela	Pasta all'uovo	Gamberetti	Lattuga	Petto di Pollo	Pomodori	Tiramisù	Fabbisogno
Proteine (g)	3,3	0,2	11,8	13	1,8	22,2	1,2	13,2	$\geq 450$
Zuccheri (g)	4,9	11	63,2	0	2,2	0	2,8	33,5	$\geq 750$
Grassi (g)	3,4	0,3	2,8	1	0,4	0,9	0,2	25,8	$\leq 300$
Colesterolo (mg)	14	0	91	178	0	67	0	197	$\leq 250$
calorie	61	54	250	93	29	99	35	300	

**Vincoli** : un vincolo analogo va espresso per il colesterolo:

$$14 x_1 + 0 x_2 + \dots + 197 x_8 \leq 250$$

# Problema della dieta: il modello completo

	Latte intero	Mela	Pasta all'uovo	Gamberetti	Lattuga	Petto di Pollo	Pomodori	Tiramisù	Fabbisogno
Proteine (g)	3,3	0,2	11,8	13	1,8	22,2	1,2	13,2	$\geq 450$
Zuccheri (g)	4,9	11	63,2	0	2,2	0	2,8	33,5	$\geq 750$
Grassi (g)	3,4	0,3	2,8	1	0,4	0,9	0,2	25,8	$\leq 300$
Colesterolo (mg)	14	0	91	178	0	67	0	197	$\leq 250$
calorie	61	54	250	93	29	99	35	300	

$$\min z = 61x_1 + 54x_2 + 250x_3 + 93x_4 + 29x_5 + 99x_6 + 35x_7 + 300x_8$$

Calorie

$$3.3x_1 + 0.2x_2 + 11.8x_3 + 13x_4 + 1.8x_5 + 22.2x_6 + 1.2x_7 + 13.2x_8 \geq 450$$

Proteine

$$4.9x_1 + 11x_2 + 63.2x_3 + 2.2x_5 + 2.8x_7 + 33.5x_8 \geq 750$$

Zuccheri

$$3.4x_1 + 0.3x_2 + 2.8x_3 + x_4 + 0.4x_5 + 0.9x_6 + 0.2x_7 + 25.8x_8 \leq 300$$

Grassi

$$14x_1 + 91x_3 + 178x_4 + 67x_6 + 197x_8 \leq 250$$

Colesterolo

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0$$

# Modelli nell'iperspazio (cioè con più di 3 variabili)

$$\min z = 61x_1 + 54x_2 + 250x_3 + 93x_4 + 29x_5 + 99x_6 + 35x_7 + 300x_8$$

$$3.3x_1 + 0.2x_2 + 11.8x_3 + 13x_4 + 1.8x_5 + 22.2x_6 + 1.2x_7 + 13.2x_8 \geq 450$$

$$4.9x_1 + 11x_2 + 63.2x_3 + 2.2x_5 + 2.8x_7 + 33.5x_8 \geq 750$$

$$3.4x_1 + 0.3x_2 + 2.8x_3 + x_4 + 0.4x_5 + 0.9x_6 + 0.2x_7 + 25.8x_8 \leq 300$$

$$14x_1 + 91x_3 + 178x_4 + 67x_6 + 197x_8 \leq 250$$

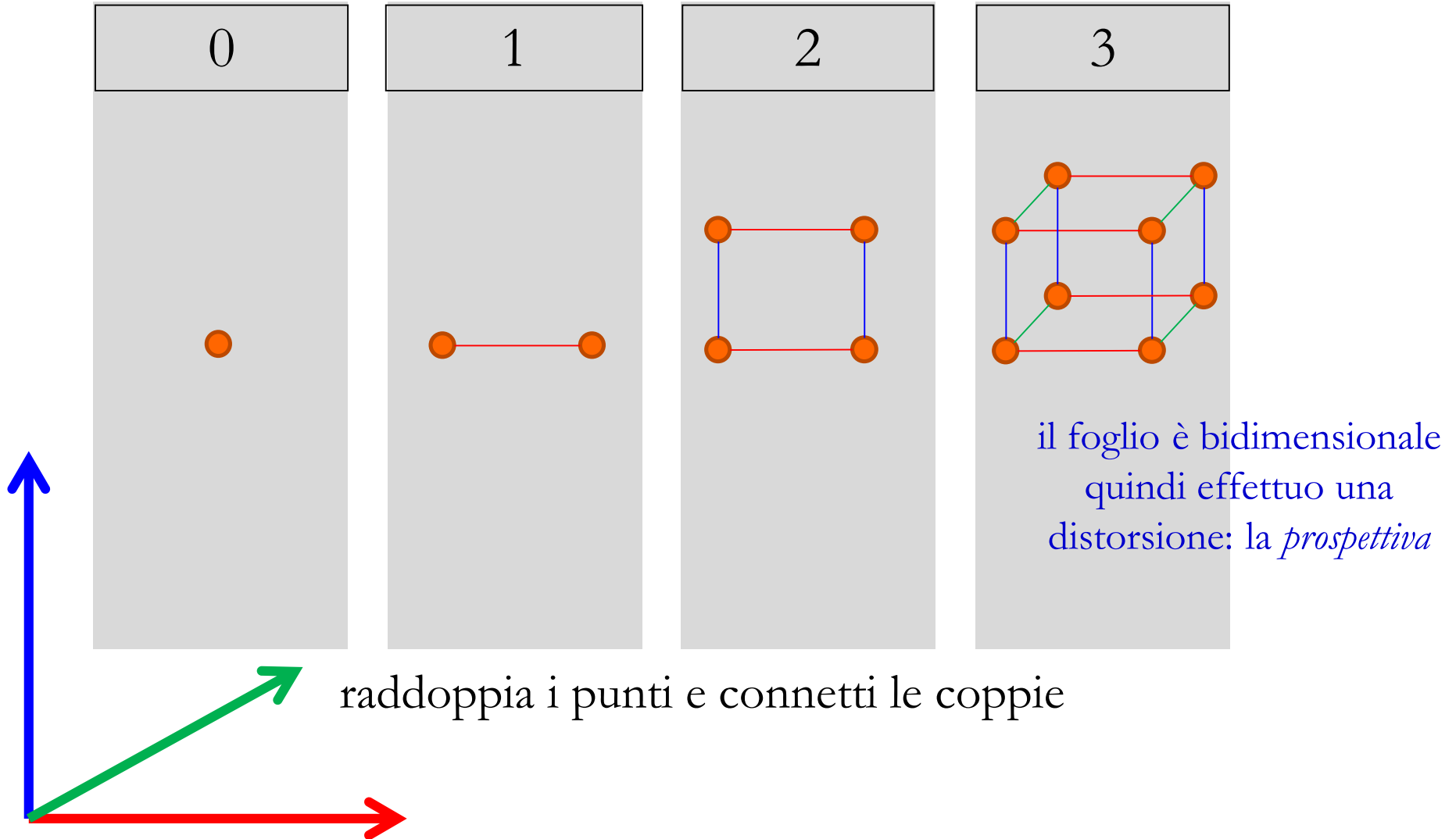
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0$$

Se ogni variabile individua una dimensione, questo modello esiste nell'iperspazio a 8 dimensioni 🧐

Una disequazione lineare con 2 variabili individua un semipiano.

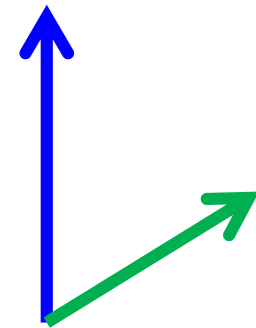
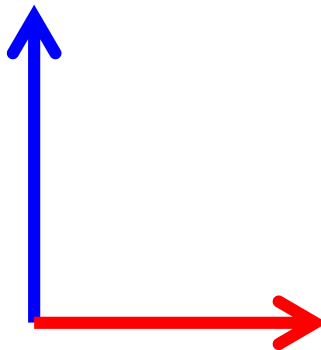
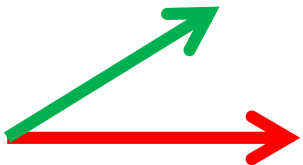
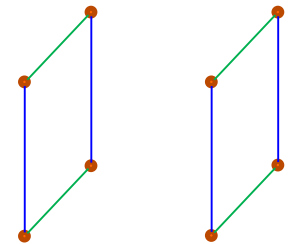
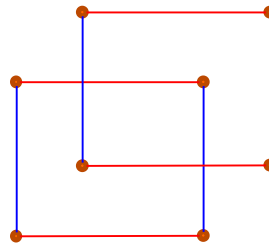
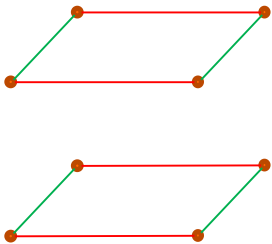
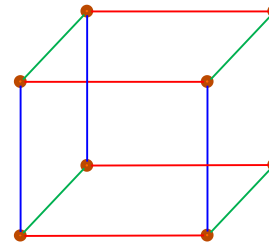
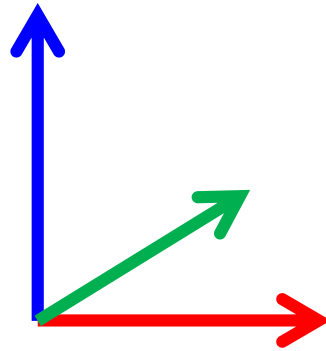
Ma cosa descrive geometricamente una disequazione con 8 variabili?

# Dal punto all'ipercubo

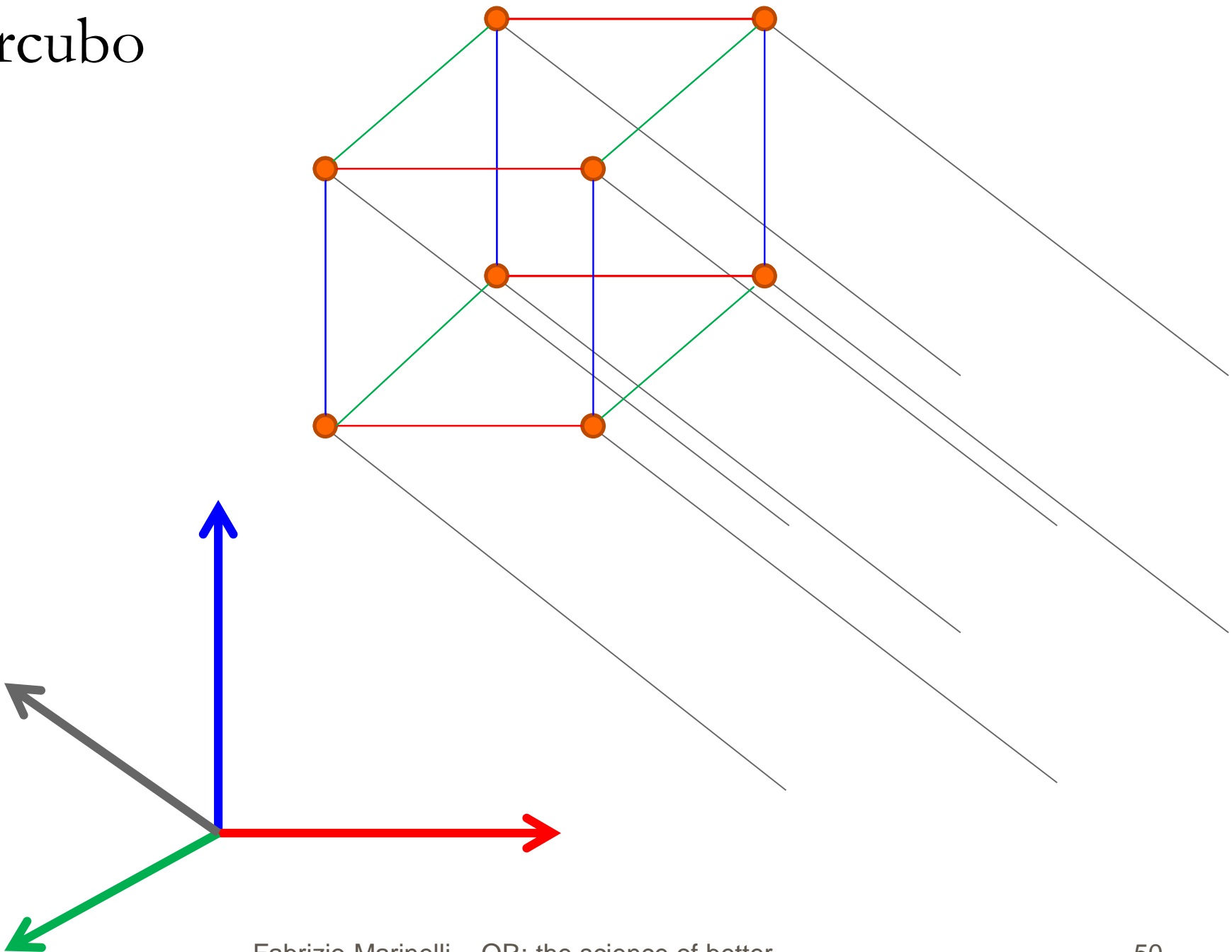




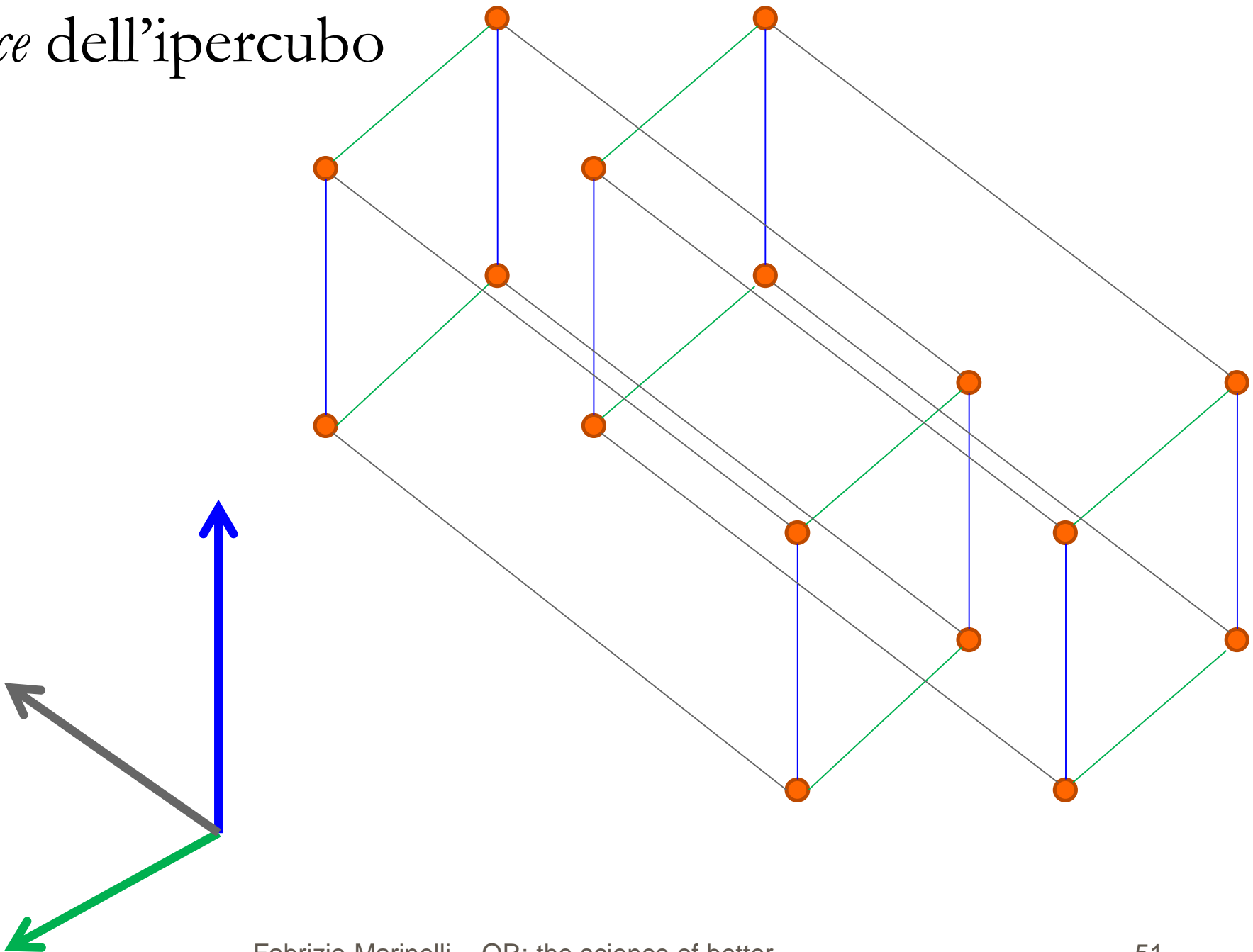
# *Facce del cubo*



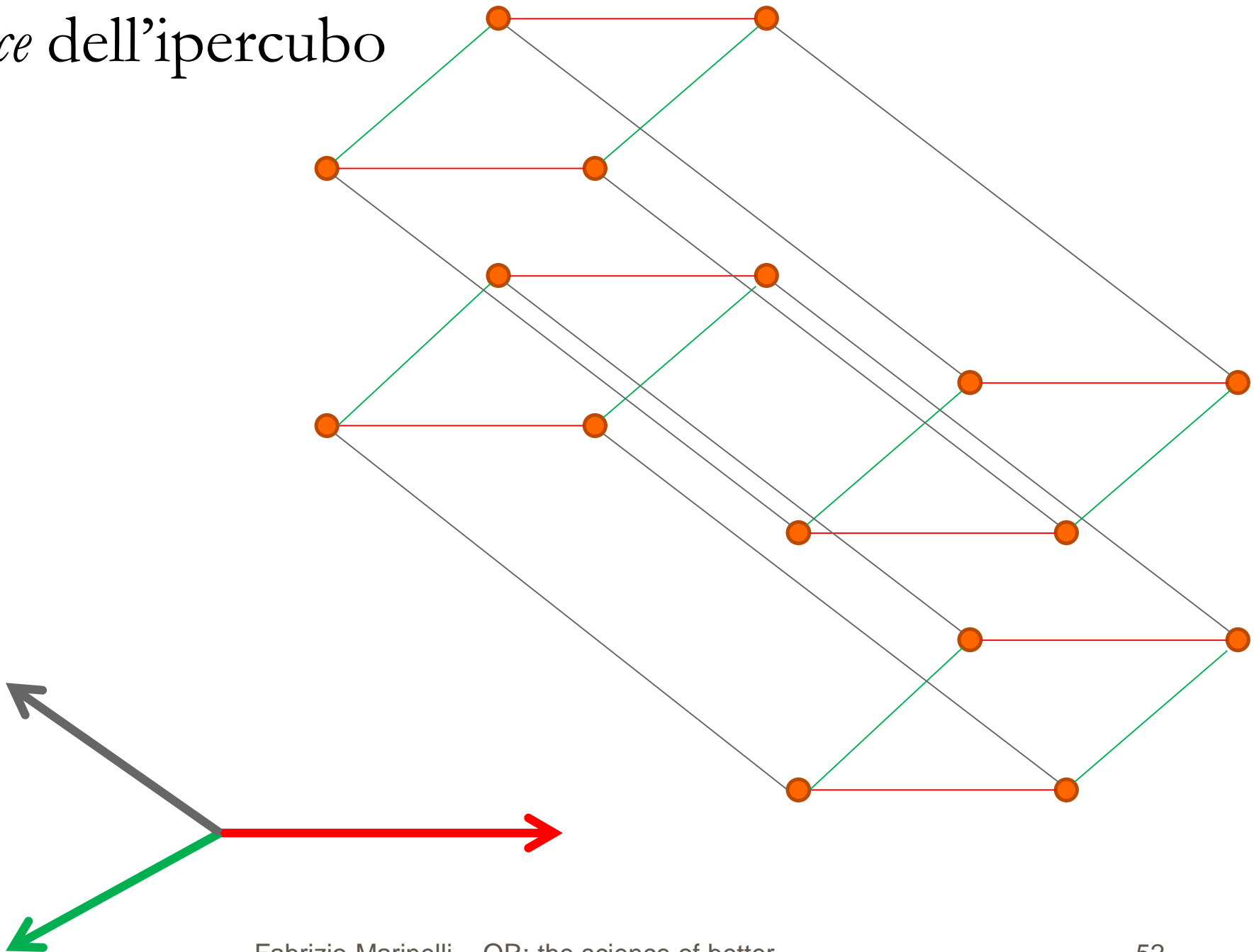
# Ipercubo



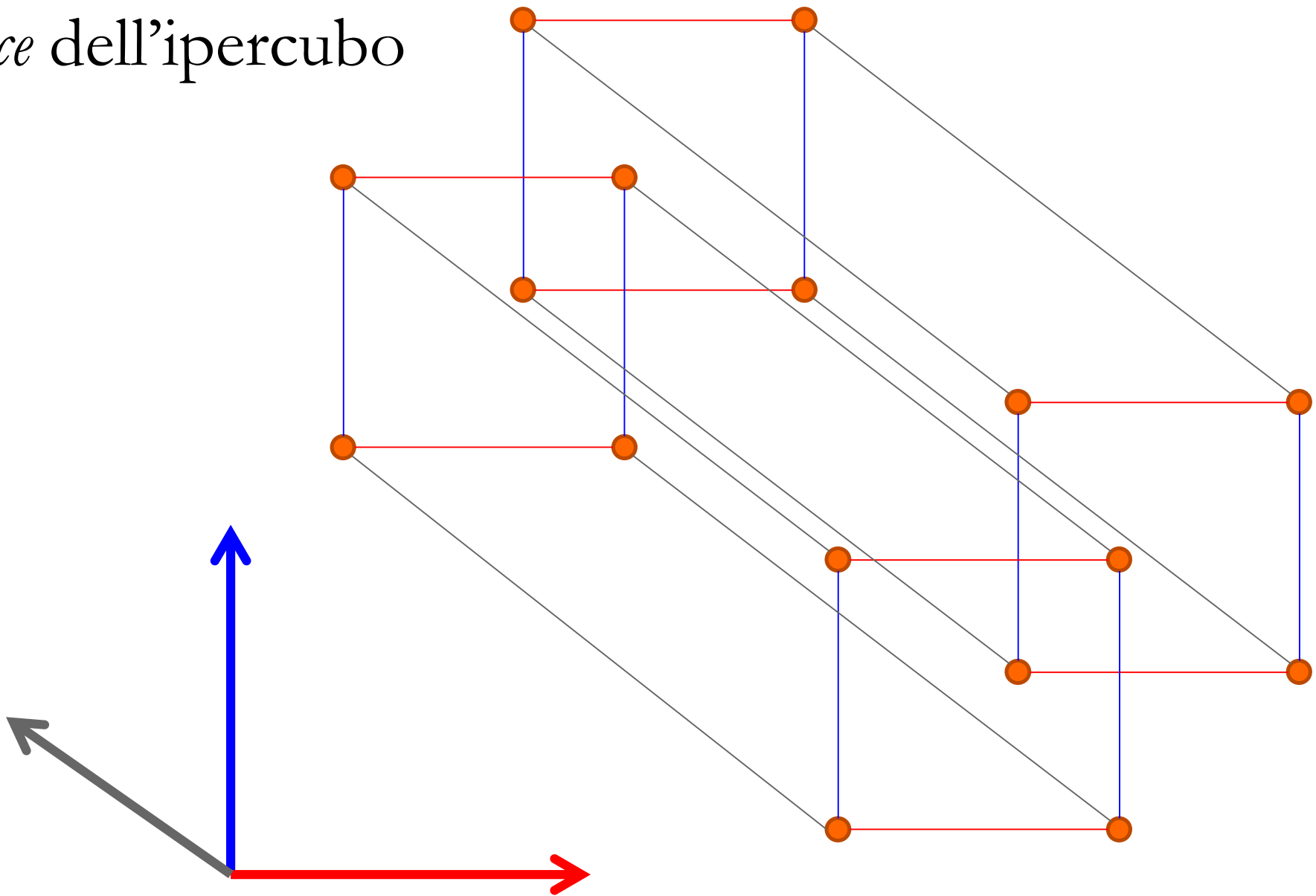
# *Facce* dell'ipercubo



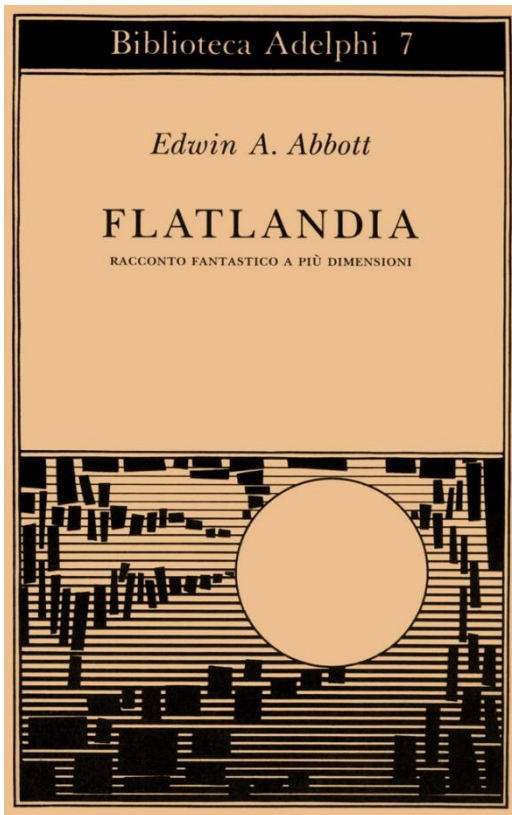
# *Facce dell'ipercubo*



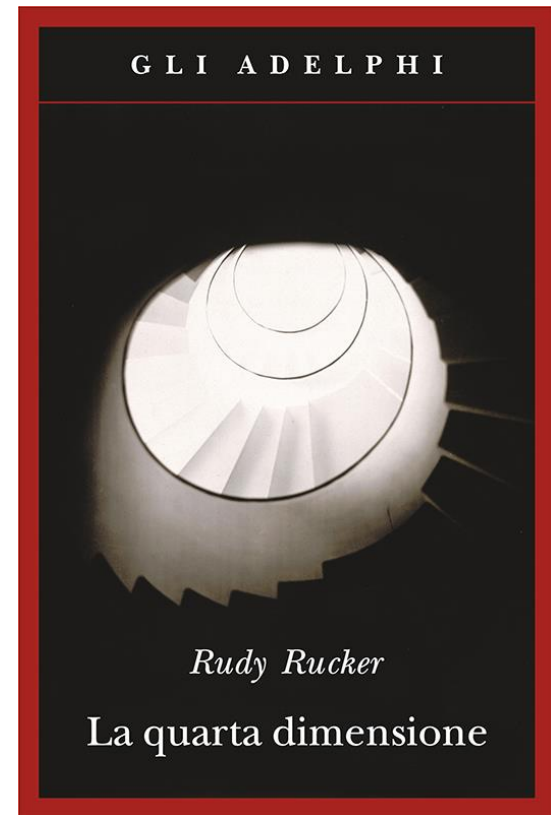
# *Facce* dell'ipercubo



# I paradossi dell'iperspazio



Un mondo bidimensionale  
dove si muovono oggetti  
tridimensionali.



La quarta dimensione, i  
fantasmi e lo spazio-tempo

# Problema della dieta: discussione

- non si considerano effetti combinati dovuti alla presenza di diversi alimenti.
- Le porzioni sono considerate frazionabili ma potrebbero non esserlo.
- Non si conosce la composizione dei singoli pasti
- Potrebbero esserci alimenti incompatibili nel singolo pasto (es. uova e carne)
- Alcuni alimenti andrebbero abbinati (es. carne e verdura)
- gusti personali...