

# Alcuni metodi iterativi per la ricerca di radici di funzioni

Gionata Massi

## Indice

1	Il problema	1
2	Esistenza delle radici	2
2.1	Teorema degli zeri . . . . .	2
3	Metodi numerici	3
3.1	Metodi diretti e metodi iterativi . . . . .	3
3.2	Ordine di convergenza . . . . .	3
3.3	Criteri di arresto . . . . .	3
4	Metodo di bisezione	4
4.1	Convergenza . . . . .	4
4.2	Codifica in JavaScript . . . . .	4
4.3	Esempi . . . . .	4
5	Iterazioni di punto fisso	4
5.1	Approssimazioni con rette . . . . .	7
5.2	Metodo delle corde . . . . .	7
5.2.1	Convergenza . . . . .	7
5.2.2	Codifica in JavaScript . . . . .	8
5.2.3	Esempi . . . . .	8
5.3	Metodo delle secanti . . . . .	8
5.3.1	Convergenza . . . . .	10
5.3.2	Codifica in JavaScript . . . . .	10
5.3.3	Esempi . . . . .	10
5.4	Metodo delle tangenti . . . . .	12
5.4.1	Convergenza . . . . .	12
5.4.2	Codifica in JavaScript . . . . .	12
5.4.3	Esempi . . . . .	14
5.4.4	Esempio: algoritmo del reciproco . . . . .	14
5.4.5	Esempio: metodo di Erone per la radice quadrata . . . . .	15
5.5	Altri metodi . . . . .	16
5.5.1	Metodo di Steffensen . . . . .	16
5.5.2	Metodo di Muller . . . . .	17
6	Estensioni per il calcolo degli estremanti relativi	17
6.1	Metodo di Newton per l'ottimizzazione . . . . .	18
6.1.1	Interpretazione geometrica . . . . .	18
6.2	Esempio . . . . .	18

## 1 Il problema

Data una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , determinare un valore reale  $\alpha$  tale che  $f(\alpha) = 0$ .

Usualmente consideriamo funzioni continue in  $\mathbb{R}$  o almeno in un intervallo  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  chiuso e limitato in cui ricercare una radice.

## 2 Esistenza delle radici

Non tutte le funzioni ammettono radici, ad esempio  $x \mapsto k$  e  $x \mapsto (x+k)^2$ , dove  $k \neq 0$  (es: fig. 1).

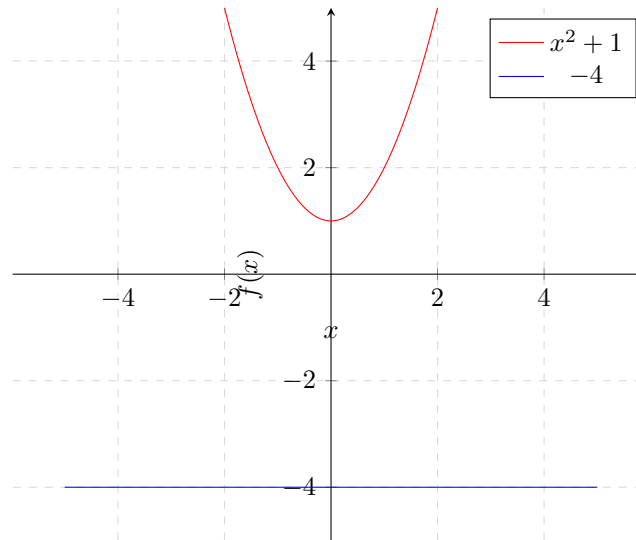


Figura 1: Funzioni che non intersecano l'asse  $y = 0$

Altre funzioni hanno radici nei punti di massimo o di minimo locale (es: fig. 2).

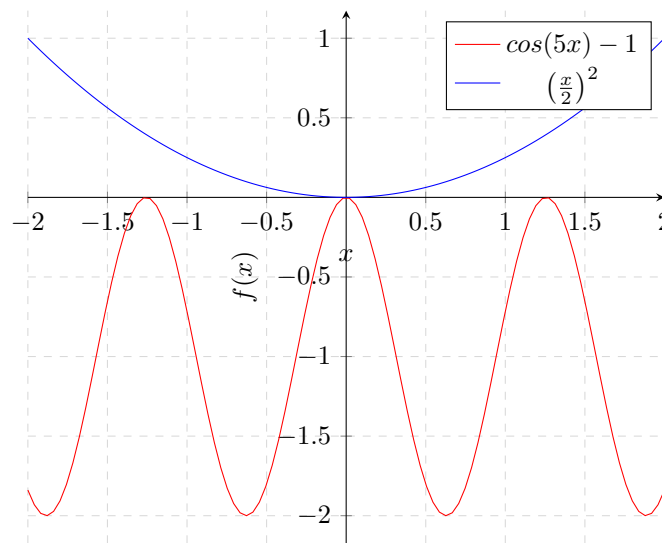


Figura 2: Funzioni che intersecano l'asse  $y = 0$  in un estremo

### 2.1 Teorema degli zeri

Per essere sicuri che una funzione ammetta almeno una radice richiediamo che la funzione assuma valori positivi e negativi in un certo intervallo e che sia continua.

**Teorema 2.1** (Bolzano). *Se  $f(x)$  è una funzione continua sull'intervallo limitato e chiuso  $[a, b]$  e  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , allora esiste almeno una radice di  $f(x)$  nell'intervallo  $(a, b)$ .*

Se le ipotesi del teorema sono vere può esistere una sola radice oppure ce ne possono essere in numero finito o anche infinite (fig. 3).

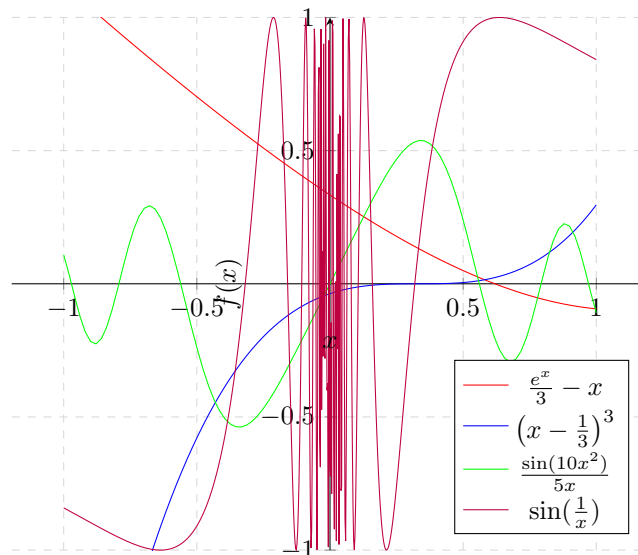


Figura 3: Funzioni che assumono valori opposti agli estremi -1, 1

Un metodo di ricerca delle radici, se convergente, restituirà una sola delle radici. Si intuisce che maggiore è la pendenza della funzione in un intorno della radice, più è facile discriminare la radice. Se invece la pendenza è nulla o quasi, allora il problema si dice mal condizionato.

### 3 Metodi numerici

#### 3.1 Metodi diretti e metodi iterativi

I **metodi diretti** sono algoritmi che, in assenza di errori di arrotondamento, forniscono la soluzione in un numero finito di operazioni.

I **metodi iterativi** sono algoritmi nei quali la soluzione è ottenuta come limite di una successione di soluzioni. Nella risposta fornita da un metodo iterativo è, quindi, presente usualmente un errore di troncamento.

#### 3.2 Ordine di convergenza

Sia  $x_k, k = 0, 1, \dots$  una successione convergente al valore  $\alpha$ .

**Definizione 3.1** (Errore all'iterazione  $k$ -esima). L'errore per elemento della successione in posizione  $k$  è il valore non negativo  $\varepsilon_k = |x_k - \alpha|$ .

**Definizione 3.2** (Ordine di convergenza). Se esistono un numero reale  $p \geq 1$  e una costante reale positiva  $C$  tale che  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k^p} = C$  allora la successione  $x_k, k = 0, 1, \dots$  ha ordine di convergenza  $p$  e costante d'errore  $C$ .

Si noti che nella definizione di ordine di convergenza, la costante  $C$  è positiva, ossia strettamente maggiore di zero.

#### 3.3 Criteri di arresto

I metodi iterativi sviluppano una successione di valori che deve essere troncata per produrre un risultato. Si possono usare vari criteri per arrestare un metodo numerico in base a vincoli sull'approssimazione della soluzione cercata e sulle risorse di calcolo (essenzialmente il tempo di calcolo) da impiegare. I criteri di arresto comunemente adottati sono i seguenti:

**Tolleranza sull'approssimazione della funzione**  $|f(x_k)| < \tau_y$ .

**Tolleranza assoluta sull'approssimazione di  $\alpha$**   $|x_{k+1} - x_k| < \tau_x$ .

**Tolleranza relativa sull'approssimazione di  $\alpha$**   $\frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|} < \tau_r$ .

**Numero di iterazioni**  $k < k_M$ .

## 4 Metodo di bisezione

Sia  $f(x)$  una funzione continua sull'intervallo limitato e chiuso  $[a, b]$  con  $f(a) \cdot f(b) < 0$ . L'algoritmo genera una successione di intervalli  $[a_k, b_k]$  con  $f(a_k) \cdot f(b_k) < 0$  e con  $[a_k, b_k] \subset [a_{k-1}, b_{k-1}]$  e  $|b_k - a_k| = \frac{1}{2}|b_{k-1} - a_{k-1}|$ .

Date due tolleranze  $\epsilon_1, \epsilon_2$ , l'algoritmo si arresta o quando  $|b_k - a_k| \leq \epsilon_1$  o quando  $|f(\frac{a_k+b_k}{2})| \leq \epsilon_2$  o infine quando  $k > n_{\max}$ , ove  $n_{\max}$  è un numero massimo di iterazioni fissato.

Per alleggerire la notazione usiamo  $s_{a_k}$  per indicare segno( $f(a_k)$ ),  $s_{b_k}$  per segno( $f(b_k)$ ) e  $s_k$  per segno( $f(\frac{a_k+b_k}{2})$ ), dove

$$\text{segno}(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ +1 & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad (1)$$

Per il calcolo di  $\frac{a_k+b_k}{2}$  in virgola si deve usare la formula:  $a_k + (b_k - a_k)/2$  in modo da ridurre gli errori di troncamento.

### 4.1 Convergenza

Il metodo è sempre convergente e si può calcolare l'ordine considerando l'errore come l'ampiezza dell'intervallo di incertezza:  $\epsilon_k = \frac{|b-a|}{2^k}$ . Il rapporto tra due errori successivi per  $p = 1$  vale

$$\frac{\epsilon_{k+1}}{\epsilon_k^p} = \frac{\frac{|b-a|}{2^{k+1}}}{\frac{|b-a|}{2^k}} = \frac{1}{2}$$

L'ordine di convergenza è uno con costante d'errore vale un mezzo.

### 4.2 Codifica in JavaScript

Si veda il listato 1.

### 4.3 Esempi

Si vedano le tabb. 1, 2 e 3 e la fig. 4.

## 5 Iterazioni di punto fisso

In generale si può costruire un metodo iterativo cercando un punto fisso di una funzione  $\Phi(x)$ , costruita in modo che si annulli in punto desiderato, un valore  $\bar{x}$  tale che  $\Phi(\bar{x}) = \bar{x}$ .

Il punto fisso è calcolato tramite l'applicazione ripetuta della regola di ricorrenza:

$$x_{k+1} = \Phi(x_k)$$

```

1  /**
2  *
3  * @param {Function} f una funzione continua in [a, b]
4  * @param {Number} a l'estremo sinistro dell'intervallo di incertezza
5  * @param {Number} b l'estremo destro dell'intervallo di incertezza
6  * @param {Number} e1 tolleranza su asse delle ascisse
7  * @param {Number} e2 tolleranza su asse delle ordinate
8  * @param {Number} nmax numero massimo di iterazioni
9  */
10 const bisezione = (f, a, b, e1 = 1e-16, e2 = 1e-16, nmax = 10) => {
11   let f_a = f(a);
12   let f_b = f(b);
13   let s_a = Math.sign(f_a);
14   let s_b = Math.sign(f_b);
15   if (s_a === s_b) {
16     throw "Segni concordi nei due estremi.";
17   }
18   let x;
19   for (let iter = 0; iter < nmax && b - a >= e1; iter++) {
20     x = a + (b - a) / 2;
21     let f_x = f(x);
22     if (Math.abs(f_x) < e2) {
23       return x;
24     }
25     let s_x = Math.sign(f_x);
26     if (s_a === s_x) {
27       a = x;
28     } else {
29       b = x;
30     }
31   }
32   return x;
33 };

```

Codice sorgente 1: Descrizione in JavaScript del metodo di Bisezione

$k$	$a_k$	$b_k$	$x_k$	$s_{a_k}$	$s_{b_k}$	$s_k$	$ b_k - a_k $	$f_k$
0	0	6	3	-1	1	1	6	3
1	0	3	1.5	-1	1	-1	3	-3.75
2	1.5	3	2.25	-1	1	-1	1.5	-0.9375
3	2.25	3	2.625	-1	1	1	0.75	0.890625
4	2.25	2.625	2.4375	-1	1	-1	0.375	-0.05859375
5	2.4375	2.625	2.53125	-1	1	1	0.1875	0.4072265625
6	2.4375	2.53125	2.484375	-1	1	1	0.09375	0.1721191406
7	2.4375	2.484375	2.4609375	-1	1	1	0.046875	0.0562133789
8	2.4375	2.4609375	2.44921875	-1	1	-1	0.0234375	-0.0013275146
9	2.44921875	2.4609375	2.455078125	-1	1	1	0.01171875	0.0274085999

Tabella 1: Metodo dicotomico applicato a  $x^2 - 6$  nell'intervallo  $[0, 6]$  con  $n_{\max} = 10$

$k$	$a_k$	$b_k$	$x_k$	$s_{a_k}$	$s_{b_k}$	$s_k$	$ b_k - a_k $	$f_k$
0	3	3.2	3.1	1	-1	1	0.2	0.0415806624
1	3.1	3.2	3.15	1	-1	-1	0.1	-0.0084072474
2	3.1	3.15	3.125	1	-1	1	0.05	0.0165918922
3	3.125	3.15	3.1375	1	-1	1	0.025	0.0040926422
4	3.1375	3.15	3.14375	1	-1	-1	0.0125	-0.0021573447
5	3.1375	3.14375	3.140625	1	-1	1	0.00625	0.0009676534
6	3.140625	3.14375	3.1421875	1	-1	-1	0.003125	-0.0005948464
7	3.140625	3.1421875	3.14140625	1	-1	1	0.0015625	0.0001864036
8	3.14140625	3.1421875	3.141796875	1	-1	-1	0.00078125	-0.0002042214
9	3.14140625	3.141796875	3.1416015625	1	-1	-1	0.000390625	$-8.9089102066 \cdot 10^{-6}$

Tabella 2: Metodo dicotomico applicato a  $\sin(x)$  nell'intervallo  $[3, 3.2]$  con  $n_{\max} = 10$

$k$	$a_k$	$b_k$	$x_k$	$s_{a_k}$	$s_{b_k}$	$s_k$	$ b_k - a_k $	$f_k$
0	0	1	0.5	1	-1	1	1	0.0452392119
1	0.5	1	0.75	1	-1	-1	0.5	-0.1264750837
2	0.5	0.75	0.625	1	-1	-1	0.25	-0.0394838005
3	0.5	0.625	0.5625	1	-1	1	0.125	0.0031482702
4	0.5625	0.625	0.59375	1	-1	-1	0.0625	-0.0180982778
5	0.5625	0.59375	0.578125	1	-1	-1	0.03125	-0.0074578482
6	0.5625	0.578125	0.5703125	1	-1	-1	0.015625	-0.0021505284
7	0.5625	0.5703125	0.56640625	1	-1	1	0.0078125	0.0004999324
8	0.56640625	0.5703125	0.568359375	1	-1	-1	0.00390625	-0.0008250321
9	0.56640625	0.568359375	0.5673828125	1	-1	-1	0.001953125	-0.0001624834

Tabella 3: Metodo dicotomico applicato a  $e^{e^{-x}} - x$  nell'intervallo  $[0, 1]$  con  $n_{\max} = 10$

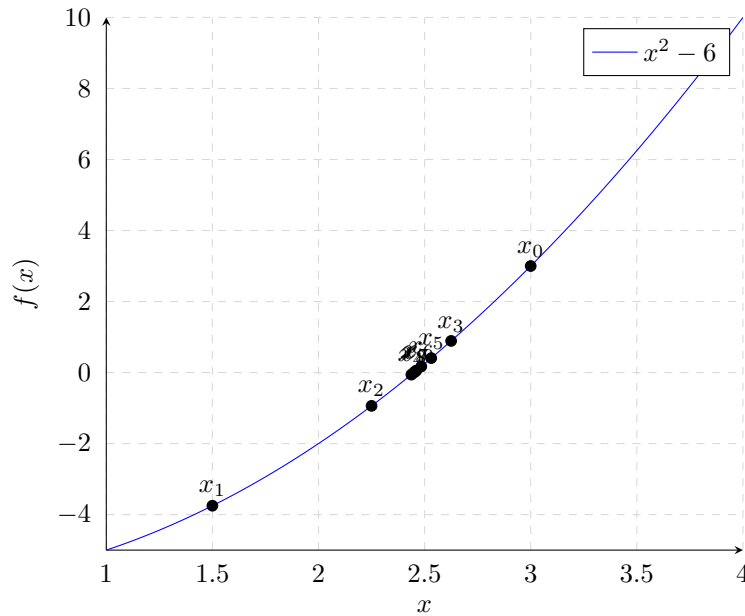


Figura 4: Successione delle soluzioni del metodo dicotomico applicato a  $x^2 - 6$  nell'intervallo  $[0, 6]$

## 5.1 Approssimazioni con rette

Una retta è definita da una funzione del tipo  $r(x) = mx + q$ . Se imponiamo il passaggio per il punto  $(x_k, f(x_k))$  della funzione di cui cerchiamo una radice, il fascio di rette sarà:

$$r(x) - f(x_k) = m(x - x_k)$$

Possiamo generare delle iterazioni andando a fissare il coefficiente angolare ad ogni iterazione e determinando l'intersezione della retta con l'asse delle ascisse.

$$r(x_{k+1}) - f(x_k) = m_k(x_{k+1} - x_k)$$

Risolvendo per

$$r(x_{k+1}) = 0$$

si ha

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{m_k} \quad (2)$$

## 5.2 Metodo delle corde

Si considerino due punti  $a = x_0$  e  $b = x_1$  tali da soddisfare le ipotesi del teorema di Bolzano. È possibile costruire una successione che per ogni  $k \geq 0$  il punto  $x_{k+1}$  sia lo zero della retta passante per il punto  $(x_k, f(x_k))$  e di coefficiente angolare

$$m_k = \frac{f(a) - f(x_k)}{a - x_k}.$$

L'iterata ha equazione:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{a - x_k}{f(a) - f(x_k)}.$$

### 5.2.1 Convergenza

Il metodo non necessariamente converge. Può oscillare (vedi tab. 7) o divergere.

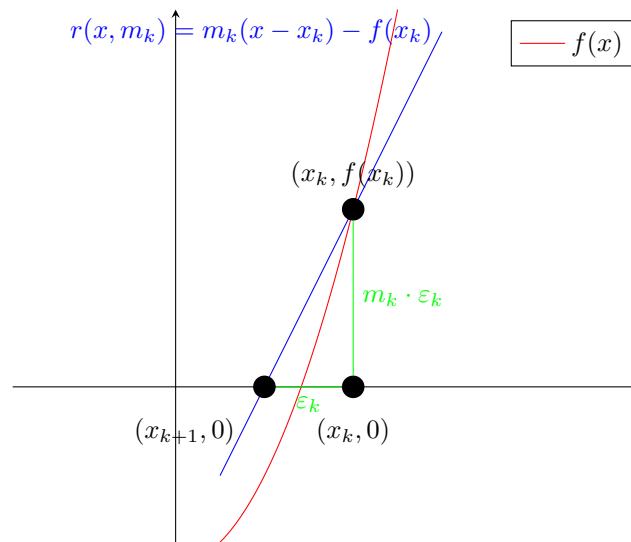


Figura 5: Approssimazione di una funzione con una retta passante per  $(x_k, f(x_k))$

### 5.2.2 Codifica in JavaScript

Si veda il listato 2.

```

1  /**
2   *
3   * @param {Function} f una funzione continua in un intorno di x
4   * @param {Number} a una stima iniziale della radice
5   * @param {Number} x una seconda stima della radice
6   * @param {Number} e1 tolleranza su asse delle ascisse
7   * @param {Number} e2 tolleranza su asse delle ordinate
8   * @param {Number} nmax numero massimo di iterazioni
9   */
10 const corde = (f, a, x, e1 = 1e-16, e2 = 1e-16, nmax = 10) => {
11   const f_a = f(a);
12   let err = e1 + 1; // permette di entrare nel ciclo
13   for (let iter = 0; iter < nmax && err >= e1; iter++) {
14     let f_x = f(x);
15     let inv_m_k = (a - x) / (f_a - f_x);
16     let xp = x;
17     x = xp - f_x * inv_m_k;
18     err = Math.abs(x - xp);
19     if (Math.abs(f_x) < e2) {
20       return x;
21     }
22   }
23   return x;
24 };

```

Codice sorgente 2: Descrizione in JavaScript del metodo delle corde

### 5.2.3 Esempi

Si vedano le tabb. 4, 5 e 6 e la fig. 6.

## 5.3 Metodo delle secanti

Dati due punti iniziali  $x_0$  e  $x_1$ , si considera la secante passante per i due punti dati.

In generale il coefficiente angolare  $m_k$  è calcolato come:



$k$	$a_k$	$b_k$	$x_k$	$s_{a_k}$	$s_{b_k}$	$s_k$	$ b_k - a_k $	$f_k$
0	0	6	3	-1	1	1	6	3
1	0	3	1.5	-1	1	-1	3	-3.75
2	1.5	3	2.25	-1	1	-1	1.5	-0.9375
3	2.25	3	2.625	-1	1	1	0.75	0.890625
4	2.25	2.625	2.4375	-1	1	-1	0.375	-0.05859375
5	2.4375	2.625	2.53125	-1	1	1	0.1875	0.4072265625
6	2.4375	2.53125	2.484375	-1	1	1	0.09375	0.1721191406
7	2.4375	2.484375	2.4609375	-1	1	1	0.046875	0.0562133789
8	2.4375	2.4609375	2.44921875	-1	1	-1	0.0234375	-0.0013275146
9	2.44921875	2.4609375	2.455078125	-1	1	1	0.01171875	0.0274085999

Tabella 4: Metodo delle corde applicato a  $x^2 - 6$  nell'intervallo  $[0, 6]$  con  $n_{\max} = 10$

$k$	$x_k$	$f_k$	$m_k$	$ x_{k+1} - x_k $
0	3.1	0.0415806624	-0.9995480586	0.041599463
1	3.141599463	$-6.8093626611 \cdot 10^{-6}$	-0.999431461	$6.8132362516 \cdot 10^{-6}$
2	3.1415926497	$3.8735904598 \cdot 10^{-9}$	-0.9994315273	$3.875793908 \cdot 10^{-9}$
3	3.1415926536	$-2.2034481946 \cdot 10^{-12}$	-0.9994315273	$2.2049029269 \cdot 10^{-12}$
4	3.1415926536	$1.4547323095 \cdot 10^{-15}$	-0.9994315273	$1.3322676296 \cdot 10^{-15}$
5	3.1415926536	$1.2246467991 \cdot 10^{-16}$	-0.9994315273	0

Tabella 5: Metodo delle corde applicato a  $\sin(x)$  nell'intervallo  $[3, 3.2]$  con  $n_{\max} = 10$

$k$	$x_k$	$f_k$	$m_k$	$ x_{k+1} - x_k $
0	0.5	0.0452392119	-0.7060771687	0.0640712006
1	0.5640712006	0.0020832911	-0.7108561397	0.0029306789
2	0.5670018795	0.0000959245	-0.7110776753	0.0001349002
3	0.5671367796	$4.4165623789 \cdot 10^{-6}$	-0.7110878784	$6.2109937645 \cdot 10^{-6}$
4	0.5671429906	$2.0334709361 \cdot 10^{-7}$	-0.7110883482	$2.8596600421 \cdot 10^{-7}$
5	0.5671432766	$9.3624932251 \cdot 10^{-9}$	-0.7110883698	$1.3166427171 \cdot 10^{-8}$
6	0.5671432898	$4.3106729297 \cdot 10^{-10}$	-0.7110883708	$6.0620775066 \cdot 10^{-10}$
7	0.5671432904	$1.9847234967 \cdot 10^{-11}$	-0.7110883709	$2.7911117861 \cdot 10^{-11}$
8	0.5671432904	$9.1371354927 \cdot 10^{-13}$	-0.7110883709	$1.2849721287 \cdot 10^{-12}$
9	0.5671432904	$4.2077452633 \cdot 10^{-14}$	-0.7110883709	$5.9174887213 \cdot 10^{-14}$

Tabella 6: Metodo delle corde applicato a  $e^{-x} - x$  nell'intervallo  $[0, 1]$  con  $n_{\max} = 10$

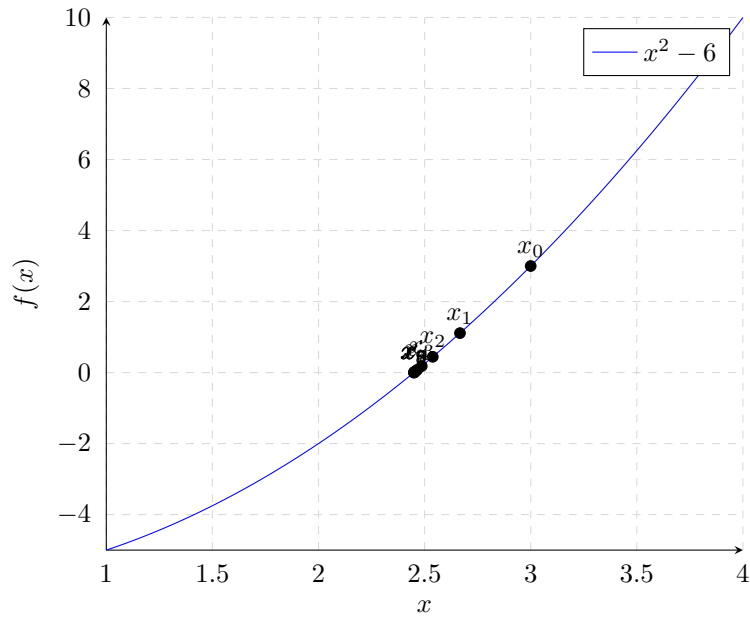


Figura 6: Successione delle soluzioni del metodo delle corde applicato a  $x^2 - 6$  nell'intervallo  $[0, 6]$

$k$	$x_k$	$f_k$	$m_k$	$ x_{k+1} - x_k $
0	2	3	2	1.5
1	0.5	-0.75	0.5	1.5
2	2	3	2	1.5
3	0.5	-0.75	0.5	1.5
4	2	3	2	1.5
5	0.5	-0.75	0.5	1.5
6	2	3	2	1.5
7	0.5	-0.75	0.5	1.5
8	2	3	2	1.5
9	0.5	-0.75	0.5	1.5

Tabella 7: Metodo delle corde applicato a  $x^2 - 1$  nell'intervallo  $[0, 2]$  con  $n_{\max} = 10$

$$m_k = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

L'iterata è

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \cdot \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}.$$

### 5.3.1 Convergenza

Il metodo non necessariamente converge. Può oscillare o divergere.

### 5.3.2 Codifica in JavaScript

### 5.3.3 Esempi

Si vedano gli esempi nelle tabb. 8, 9 e 10 e la fig. 7.

```

1  /**
2  *
3  * @param {Function} f una funzione continua in un intorno di x
4  * @param {Number} a una stima iniziale della radice
5  * @param {Number} x una seconda stima della radice
6  * @param {Number} e1 tolleranza su asse delle ascisse
7  * @param {Number} e2 tolleranza su asse delle ordinate
8  * @param {Number} nmax numero massimo di iterazioni
9  */
10 const secanti = (f, a, x, e1 = 1e-16, e2 = 1e-16, nmax = 10) => {
11   let f_a = f(a);
12   let err = e1 + 1; // permette di entrare nel ciclo
13   for (let iter = 0; iter < nmax && err >= e1; iter++) {
14     let f_x = f(x);
15     let inv_m_k = (a - x) / (f_a - f_x);
16     let xp = x;
17     a = x;
18     f_a = f_x;
19     x = xp - f_x * inv_m_k;
20     err = Math.abs(x - xp);
21     if (Math.abs(f_x) < e2) {
22       return x;
23     }
24   }
25   return x;
26 };

```

Codice sorgente 3: Descrizione in JavaScript del metodo delle secanti

$k$	$a_k$	$b_k$	$x_k$	$s_{a_k}$	$s_{b_k}$	$s_k$	$ b_k - a_k $	$f_k$
0	0	6	3	-1	1	1	6	3
1	0	3	1.5	-1	1	-1	3	-3.75
2	1.5	3	2.25	-1	1	-1	1.5	-0.9375
3	2.25	3	2.625	-1	1	1	0.75	0.890625
4	2.25	2.625	2.4375	-1	1	-1	0.375	-0.05859375
5	2.4375	2.625	2.53125	-1	1	1	0.1875	0.4072265625
6	2.4375	2.53125	2.484375	-1	1	1	0.09375	0.1721191406
7	2.4375	2.484375	2.4609375	-1	1	1	0.046875	0.0562133789
8	2.4375	2.4609375	2.44921875	-1	1	-1	0.0234375	-0.0013275146
9	2.44921875	2.4609375	2.455078125	-1	1	1	0.01171875	0.0274085999

Tabella 8: Metodo delle secanti applicato a  $x^2 - 6$  nell'intervallo  $[0, 6]$  con  $n_{\max} = 10$

$k$	$x_k$	$f_k$	$m_k$	$ x_{k+1} - x_k $
0	3.1	0.0415806624	-0.9995480586	0.041599463
1	3.141599463	$-6.8093626611 \cdot 10^{-6}$	-0.999431461	$6.8132362516 \cdot 10^{-6}$
2	3.1415926497	$3.8735904598 \cdot 10^{-9}$	-0.9994315273	$3.875793908 \cdot 10^{-9}$
3	3.1415926536	$-2.2034481946 \cdot 10^{-12}$	-0.9994315273	$2.2049029269 \cdot 10^{-12}$
4	3.1415926536	$1.4547323095 \cdot 10^{-15}$	-0.9994315273	$1.3322676296 \cdot 10^{-15}$
5	3.1415926536	$1.2246467991 \cdot 10^{-16}$	-0.9994315273	0

Tabella 9: Metodo delle secanti applicato a  $\sin(x)$  nell'intervallo  $[3, 3.2]$  con  $n_{\max} = 10$

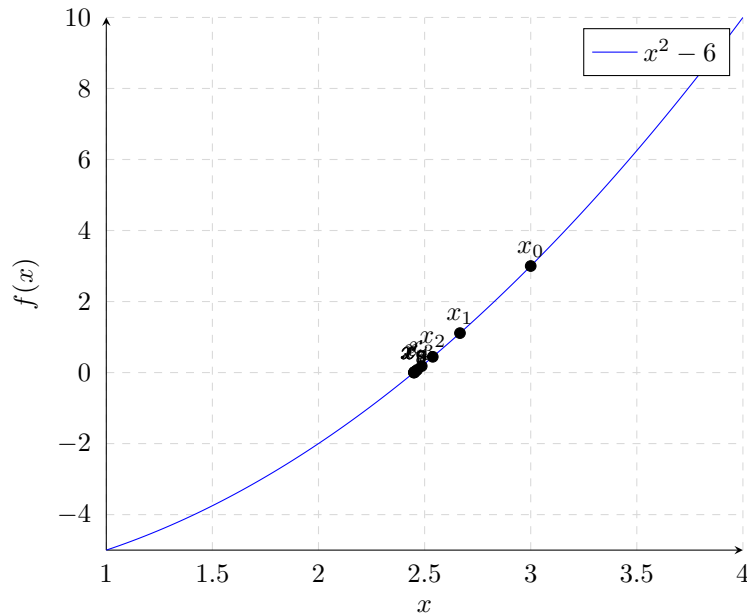


Figura 7: Successione delle soluzioni del metodo delle secanti applicato a  $x^2 - 6$  nell'intervallo  $[0, 6]$

$k$	$x_k$	$f_k$	$m_k$	$ x_{k+1} - x_k $
0	0.5	0.0452392119	-0.7060771687	0.0640712006
1	0.5640712006	0.0020832911	-0.7108561397	0.0029306789
2	0.5670018795	0.0000959245	-0.7110776753	0.0001349002
3	0.5671367796	$4.4165623789 \cdot 10^{-6}$	-0.7110878784	$6.2109937645 \cdot 10^{-6}$
4	0.5671429906	$2.0334709361 \cdot 10^{-7}$	-0.7110883482	$2.8596600421 \cdot 10^{-7}$
5	0.5671432766	$9.3624932251 \cdot 10^{-9}$	-0.7110883698	$1.3166427171 \cdot 10^{-8}$
6	0.5671432898	$4.3106729297 \cdot 10^{-10}$	-0.7110883708	$6.0620775066 \cdot 10^{-10}$
7	0.5671432904	$1.9847234967 \cdot 10^{-11}$	-0.7110883709	$2.7911117861 \cdot 10^{-11}$
8	0.5671432904	$9.1371354927 \cdot 10^{-13}$	-0.7110883709	$1.2849721287 \cdot 10^{-12}$
9	0.5671432904	$4.2077452633 \cdot 10^{-14}$	-0.7110883709	$5.9174887213 \cdot 10^{-14}$

Tabella 10: Metodo delle secanti applicato a  $e^{e^{-x}} - x$  nell'intervallo  $[0, 1]$  con  $n_{\max} = 10$

## 5.4 Metodo delle tangenti

Si approssima la funzione  $f(x)$  con la retta  $r(x) - f(x_k) = f'(x_k)(x - x_k)$  tangente ad essa in  $(x_k, f(x_k))$ .

L'iterata assume la forma:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Si veda la fig. 8

### 5.4.1 Convergenza

Il metodo non necessariamente converge. Può oscillare o divergere.

### 5.4.2 Codifica in JavaScript

Si vedanil listato 4.

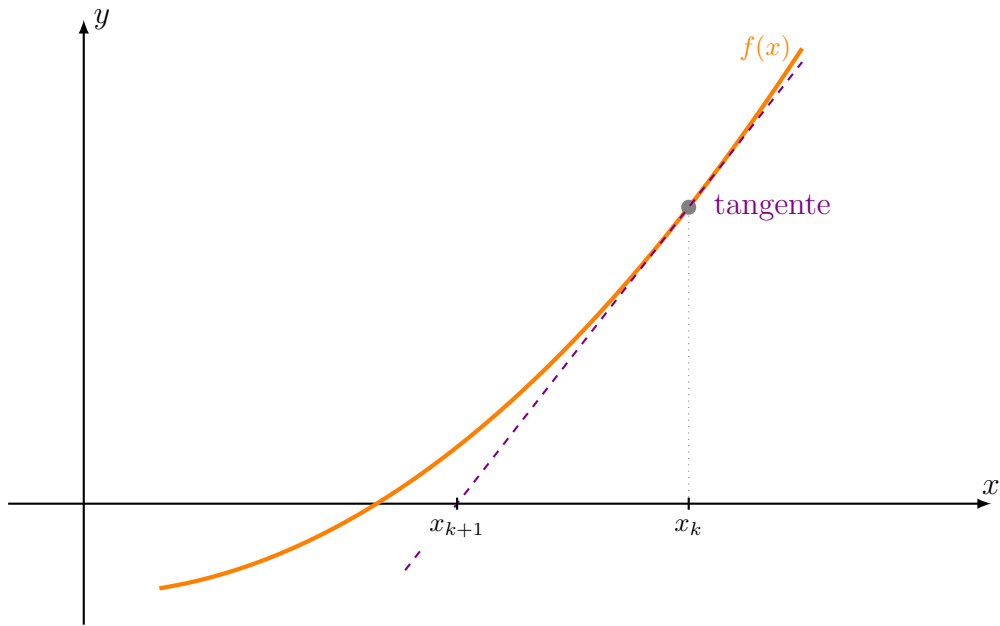


Figura 8: Approssimazione di una funzione con la retta tangente passante in  $(x_k, f(x_k))$

```

1  /**
2   *
3   * @param {Function} f una funzione continua e derivabile in un intorno di x
4   * @param {Number} x il valore x_0
5   * @param {Function} f1 la derivata prima di f
6   * @param {Number} e1 tolleranza su asse delle ascisse
7   * @param {Number} e2 tolleranza su asse delle ordinate
8   * @param {Number} nmax numero massimo di iterazioni
9   */
10 const tangenti = (f, x, f1, e1 = 1e-16, e2 = 1e-16, nmax = 10) => {
11   let err = e1 + 1; // permette di entrare nel ciclo
12   for (let iter = 0; iter < nmax && err >= e1; iter++) {
13     let f_x = f(x);
14     if (Math.abs(f_x) < e2) {
15       return x;
16     }
17     let f1_x = f1(x);
18     let xp = x;
19     x = xp - f_x / f1_x;
20     err = Math.abs(x - xp);
21   }
22   return x;
23 };

```

Codice sorgente 4: Descrizione in JavaScript del metodo delle tangenti

$k$	$x_k$	$f_k$	$f'_k$	$ x_{k+1} - x_k $
0	3	3	6	0.5
1	2.5	0.25	5	0.05
2	2.45	0.0025	4.9	0.0005102041
3	2.4494897959	$2.6030820521 \cdot 10^{-7}$	4.8989795918	$5.3135188693 \cdot 10^{-8}$
4	2.4494897428	$3.5527136788 \cdot 10^{-15}$	4.8989794856	$8.881784197 \cdot 10^{-16}$
5	2.4494897428	$-8.881784197 \cdot 10^{-16}$	4.8989794856	0

Tabella 11: Metodo delle tangenti applicato a  $x^2 - 6$  con stima iniziale 3 e nmax = 10

$k$	$x_k$	$f_k$	$f'_k$	$ x_{k+1} - x_k $
0	3.1	0.0415806624	-0.9991351503	0.0416166546
1	3.1416166546	-0.000024001	-0.9999999997	0.000024001
2	3.1415926536	$4.5633567784 \cdot 10^{-15}$	-1	$4.4408920985 \cdot 10^{-15}$
3	3.1415926536	$1.2246467991 \cdot 10^{-16}$	-1	0

Tabella 12: Metodo delle tangenti applicato a  $\sin(x)$  con stima iniziale 3,1 e nmax = 10

### 5.4.3 Esempi

Si vedano le tabb. ??, ?? e ?? e le fig. 9 e 11.

Una esempio che riassume il metodo è in fig. ??.

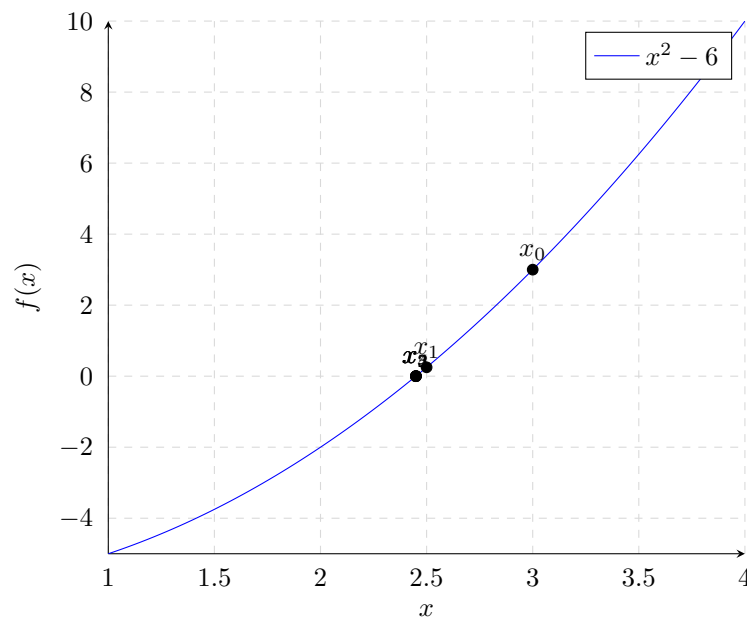


Figura 9: Successione delle soluzioni del metodo delle tangenti applicato a  $x^2 - 6$

### 5.4.4 Esempio: algoritmo del reciproco

Si vuole cercare il reciproco del valore  $\nu$  come  $\alpha = \frac{1}{\nu}$  con il metodo delle tangenti.

Per prima cosa occorre trasformare il problema con una funzione che si annulla in  $\frac{1}{\nu}$ .

Scegliamo

$$f(x) = \nu - \frac{1}{x}$$

che applicata al reciproco di  $\nu$  produce  $f(\frac{1}{\nu}) = \nu - \frac{1}{\frac{1}{\nu}} = \nu - \nu = 0$ .

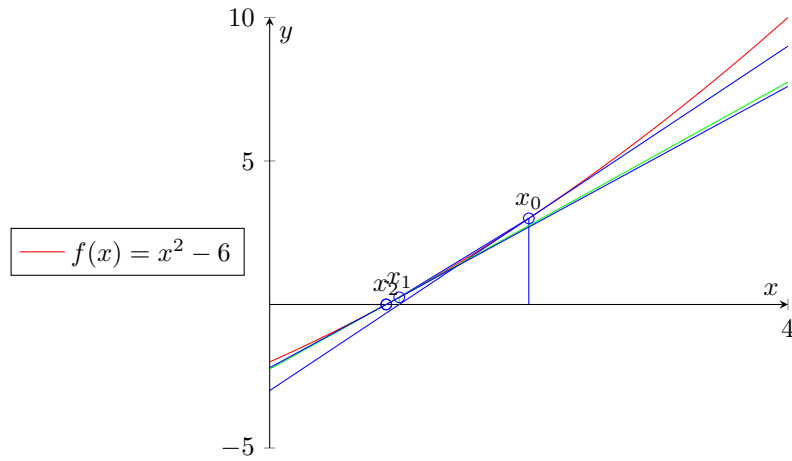


Figura 10: Successione delle soluzioni del metodo delle tangenti applicato a  $x^2 - 6$

$k$	$x_k$	$f_k$	$f'_k$	$ x_{k+1} - x_k $
0	0.5	0.0452392119	-0.6692957011	0.0675922643
1	0.5675922643	-0.0003045748	-0.6784110106	0.0004489532
2	0.5671433111	$-1.4035108742 \cdot 10^{-8}$	-0.678348491	$2.0690115621 \cdot 10^{-8}$
3	0.5671432904	$-1.1102230246 \cdot 10^{-16}$	-0.6783484881	$1.1102230246 \cdot 10^{-16}$
4	0.5671432904	0	-0.6783484881	0

Tabella 13: Metodo delle tangenti applicato a  $e^{e^{-x}} - x$  con stima iniziale 0,5 e nmax = 10

La derivata prima assume la forma  $f'(x) = \frac{1}{x^2}$  e

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{\nu - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \nu x^2 - x.$$

L'iterata del metodo delle tangenti è:

$$x_{k+1} = x_k - (\nu x_k^2 - x_k) = 2x_k - \nu x_k^2 = x_k \cdot (2 - \nu \cdot x_k).$$

Si noti che per calcolare il reciproco di un numero sono sufficienti le operazioni di moltiplicazione e sottrazione. Per la moltiplicazione occorrono le operazioni primitive di scorrimento e addizione e per la sottrazione quelle di negazione bit a bit e di addizione (basterebbe il solo incremento unitario).

Nota: queste proprietà permettono di realizzare le CPU senza l'operazione di divisione.

#### 5.4.5 Esempio: metodo di Erone per la radice quadrata

Si consideri il problema di determinare la radice quadrata di un numero reale  $r$ .

Se dal punto di vista algebrico possiamo vedere il problema come determinare uno zero della funzione  $f(x) = x^2 - r$ , da un punto di vista geometrico possiamo porci il problema di trovare il lato di un quadrato di area  $r$ .

L'idea di Erone di Alessandria è quella fornire una stima della radice quadrata, che chiamiamo  $x_k$  e che rappresentiamo geometricamente come la base di un rettangolo. Chiamiamo  $h_k = \frac{r}{x_k}$  l'altezza del rettangolo di area  $r$  e base  $x_k$ . Se  $x_k$  e  $h_k$  fossero molto vicini tra di loro, allora abbiamo trovato una buona stima per  $\sqrt{r}$ , altrimenti occorre migliorare la stima. Per fare ciò consideriamo il valor medio tra  $x_k$  e  $h_k$ .

L'iterata del metodo, ossia la stima migliore, ha equazione:

$$x_{k+1} = \frac{x_k + \frac{r}{x_k}}{2}$$

$$f(x) = e^{0.9x} - x^2$$

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad \Delta x = 0.01$$

$$t_k(x) = f'(x_k) \cdot (x - x_k) + f(x_k)$$

$$x_0 = 2.6, \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$n$	$x_k$	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$x_{k+1}$
0	2.60000	3.62064	4.18396	1.73465
1	1.73465	1.75519	0.82550	-0.39150
2	-0.39150	0.54991	1.41144	-0.78110
3	-0.78110	-0.11490	2.00195	-0.72370
4	-0.72370	-0.00230	1.90735	-0.72249

$$\Rightarrow x \approx -0.72249$$

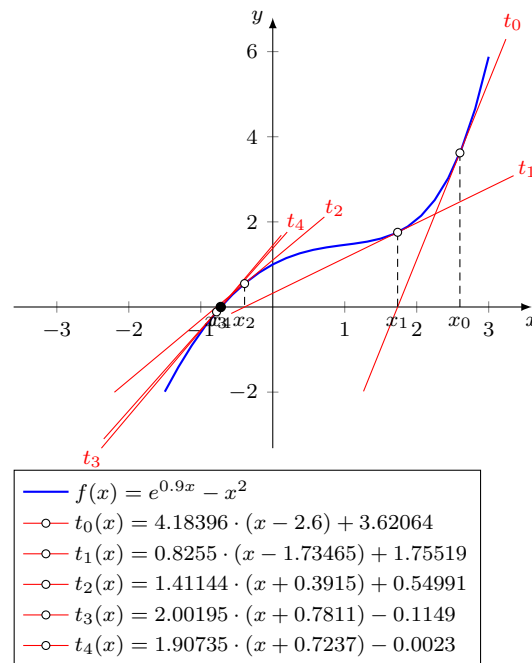


Figura 11: Riepilogo sul metodo delle tangenti applicato a  $e^{0.9x-x^2}$

che può essere riscritta come:

$$x_{k+1} = \frac{x_k + \frac{r}{x_k}}{2} = \frac{x_k^2 + r}{2x_k}$$

Vogliamo dimostrare che la traccia di esecuzione del metodo di Erone di Alessandria è la stessa del metodo di Newton applicato alla funzione  $f(x) = x^2 - r$  calcolando l'iterata:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - r}{2x_k} = \frac{2x_k^2 - (x_k^2 - r)}{2x_k} = \frac{x_k^2 + r}{2x_k}$$

Le iterate assumono lo stesso valore, come volevasi dimostrare!

Si vedano

## 5.5 Altri metodi

### 5.5.1 Metodo di Steffensen

Le derivate sono complesse da calcolare quando non sono note in forma esplicita ma è possibile ottenere un metodo di ordine di convergenza due applicando più valutazioni della funzione senza ricorrere alla derivazione.



$k$	$x_k$	$r/x_k$	$ x_{k+1} - x_k $
0	3	2	0.5
1	2.5	2.4	0.05
2	2.45	2.4489795918	0.0005102041
3	2.4494897959	2.4494896896	$5.3135188693 \cdot 10^{-8}$
4	2.4494897428	2.4494897428	$8.881784197 \cdot 10^{-16}$
5	2.4494897428	2.4494897428	0

Tabella 14: Metodo di Erone di Alessandria per il calcolo di  $\sqrt{6}$  con stima iniziale 3 e nmax = 10

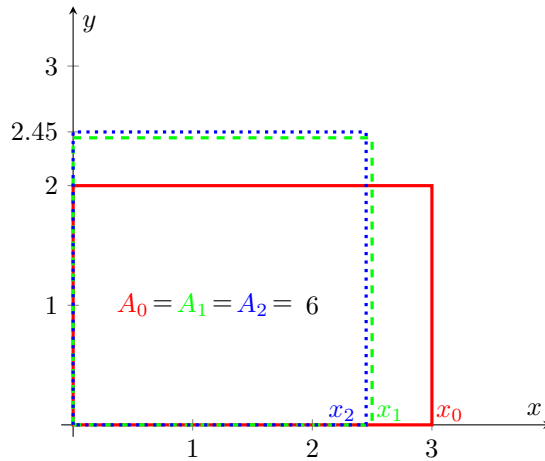


Figura 12: Successione delle soluzioni del metodo di Erone per il calcolo di  $\sqrt{6}$  con stima iniziale 3

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{g(x_k)}; \quad g(x_k) = \frac{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)}{f(x_k)}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)^2}{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)}$$

Si noti che la valutazione della funzione  $f$  in  $x_k$  è molto vicina a zero. Per apprezzare quanto la funzione  $g$  approssimi  $f'$  riscriviamo  $g(x_k)$  con  $h = f(x_k)$ :

$$g(x_k) = \frac{f(x_k + h(x_k)) - f(x_k)}{f(x_k)}$$

### 5.5.2 Metodo di Muller

Un altro modo di approssimare la funzione  $f$  è quella di usare una parabola. Nel metodo di Muller si stimano tre punti iniziali e si determina la parabola passante per essi. Dalla soluzione dell'equazione di secondo grado si ottengono due punti che si usano come nuove stime. Risolvere le equazioni secondo grado, però, può portare a soluzioni inesistenti.

## 6 Estensioni per il calcolo degli estremanti relativi

L'analisi matematica fornisce delle condizioni che mettono in relazione i punti di massimo e minimo relativo con quelli *stazionari*.

**Teorema 6.1** (Teorema di Fermat sui punti stazionari). *Sia  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione e si supponga che  $x_0 \in (a, b)$  sia un punto di estremo locale di  $f$ . Se  $f$  è derivabile nel punto  $x_0$ , allora  $f'(x_0) = 0$ .*

Trovare un estremante di una funzione, se è derivabile con condizioni che dipendono dal metodo scelto e la derivata è nota in forma simbolica o numerica, si riconduce al problema di determinare una radice della derivata prima.

Tra i metodi più interessanti si trova quello di Newton.

## 6.1 Metodo di Newton per l'ottimizzazione

Possiamo applicare il metodo di Newton per la ricerca delle radici ad una funzione  $g(x) = f'(x)$  per trovare un punto stazionario. Si richiede che  $f$  sia continua e derivabile almeno due volte in un intorno di  $x_0$ , stima iniziale del punto estremante.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{g(x_k)}{g'(x_k)} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

### 6.1.1 Interpretazione geometrica del metodo di Newton per l'ottimizzazione

Possiamo sviluppare il metodo in modo geometrico, approssimando  $f(x_k)$  con una parabola  $p(x) = ax^2 + bx + c$  passante per il punto  $(x_k, f(x_k))$ , con la stessa tangente nel punto  $x_k$  e stessa derivata seconda. Trovati i coefficienti  $a, b$  e  $c$  della parabola, possiamo approssimare il vertice della funzione  $f$  con il vertice della parabola, che sappiamo avere proiezione sull'asse delle ascisse  $x_{k+1} = \frac{-b}{2a}$ .

Per calcolare  $a$  e  $b$ , gli unici due parametri usati per determinare il vertice, imponiamo le condizioni sulle derivate prime e seconda.

$$\begin{cases} f'(x_k) = 2ax_k + b \\ f''(x_k) = 2a \end{cases}$$

Dal sistema abbiamo esplicitato  $2a = f''(x_k)$  e dobbiamo ricavare  $b$  dalla prima equazione.

$$b = f'(x_k) - 2ax_k = f'(x_k) - f''(x_k)x_k.$$

L'iterata del metodo geometrico che a partire dal punto  $x_k$  approssima l'estremante di  $f$  con il vertice di  $p$  ha equazione:

$$x_{k+1} = \frac{-b}{2a} = \frac{f''(x_k)x_k - f'(x_k)}{f''(x_k)} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

Per completezza, possiamo determinare tutti i coefficienti di  $p$ :

$$\begin{cases} f(x_k) = ax_k^2 + bx_k + c \\ f'(x_k) = 2ax_k + b \\ f''(x_k) = 2a \end{cases}$$

Sostituendo nella prima equazione  $a$  e  $b$  si ha:

$$c = -\frac{1}{2}f''(x_k) - f'(x_k)x_k + f''(x_k)x_k^2 + f(x_k) = f(x_k) - f'(x_k)x_k + \frac{1}{2}f''(x_k)x_k^2$$

Questa è l'interpretazione geometrica del metodo di Newton applicato alla derivata prima.

## 6.2 Esempio

Consideriamo la funzione  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + x + 6$ , di cui è agevole calcolare le derivate prima,  $f'(x) = x^2 + 4x + 1$ , e seconda,  $f''(x) = 2x + 4$ .

Analiticamente è facile trovare gli estremanti in  $x_M = -2 \pm \sqrt{3}$ .

Numericamente potremmo valutare la funzione in più punti e magari potremmo osservare che gli estremanti si trovano nell'intervallo  $[-5, 2]$  e consideriamo una volta il punto -3 e l'altra -1 come stime iniziali.

$k$	$x_k$	$f_k$	$f'_k$	$f''_k$	$ x_{k+1} - x_k $
0	-3	12	-2	-2	1
1	-4	12.6666666667	1	-4	0.25
2	-3.75	12.796875	0.0625	-3.5	0.0178571429
3	-3.7321428571	12.7974349338	0.0003188776	-3.4642857143	0.0000920471
4	-3.73205081	12.7974349485	$8.472675006 \cdot 10^{-9}$	-3.46410162	$2.4458506331 \cdot 10^{-9}$
5	-3.7320508076	12.7974349485	0	-3.4641016151	0

Tabella 15: Metodo delle parabole con  $n_{\max} = 5$ .  $x_0 = -3$

$k$	$x_k$	$f_k$	$f'_k$	$f''_k$	$ x_{k+1} - x_k $
0	-1	6.6666666667	-2	2	1
1	0	6	1	4	0.25
2	-0.25	5.8697916667	0.0625	3.5	0.0178571429
3	-0.2678571429	5.8692317329	0.0003188776	3.4642857143	0.0000920471
4	-0.26794919	5.8692317182	$8.4726737848 \cdot 10^{-9}$	3.46410162	$2.4458502446 \cdot 10^{-9}$
5	-0.2679491924	5.8692317182	0	3.4641016151	0

Tabella 16: Metodo delle parabole con  $n_{\max} = 5$ .  $x_0 = -1$

Possiamo riscrivere l'iterata come:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x^2 + 4x + 1}{2x + 4}$$

I parametri della parabola sono:

$$\begin{cases} f(x_k) = ax_k^2 + bx_k + c \\ f'(x_k) = 2ax_k + b \\ f''(x_k) = 2a \end{cases} \quad \begin{cases} c = \frac{1}{3}x_k^3 + 6 \\ b = 1 - x_k^2 \\ a = x_k + 2 \end{cases}$$