# Appunti sul complemento a 2 alla n

Devo rappresentare un numero con $n$ bit e conservare la proprietà che la somma di due numeri opposti sia pari a 0. Per ottenere questo posso usare un bit ulteriore, quello in posizione $n$ indicando la posizione più a destra con l'indice 0, e imporre che $m + \tilde{m} = 2^n$ .

$$m + \tilde{m} = \left(1\underbrace{0\ldots0}_{n\text{ zeri}}\right)_2$$

Siccome non l'ennesimo bit non può essere rappresentato, allora

Il valore dei bit di $\tilde{m}$ è quindi: $\tilde{m} = 2^n - m$ e questo è il motivo del nome della codifica.

## Algoritmo di calcolo di $\tilde{m}$

$$m + \tilde{m} = 2^n = \left(1\underbrace{0\ldots0}_{n\text{ zeri}}\right)_2 = (2^n - 1) + 1 = \left(\underbrace{1\ldots1}_{n\text{ uni}}\right)_2 + 1$$

da cui

$$\tilde{m} = \bar{m} + 1$$

dove

$$\bar{m} + m = (2^n - 1) = \left(\underbrace{1\ldots1}_{n\text{ uni}}\right)_2$$

Il calcolo di $\bar{m}$ si basa sul fatto che $1 = 1 + 0$ e $1 = 0 + 1$, ossia sulla somma di cifre diverse, dette *negate*: $\bar{0} = 1$, $\bar{1} = 0$.

**Per calcolare $\tilde{m}$ nego le cifre binarie poi aggiungo 1.**

## Valore del coefficiente di $d_{n-1}$

Per mantenere invariati gli algoritmi, un numero rappresentato in complemento a 2 alla $n$ ha valore:

$$m = \sum_{i=0}^{n-1} d_i \cdot e(i)$$

dove $d_i$ è la cifra binaria in posizione $i$-esima ed $e(i)$ è una valore non rappresentabile con $i$ - 1 cifre.

Per un numero $m_0^+$ con la cifra binaria in posizione $n - 1$ nulla continua a valere:

$$m_0^+ = \sum_{i=0}^{n-2} d_i \cdot 2^i$$

quindi un numero generico è espresso come

$$m = d_{n-1} \cdot e(n-1) + \sum_{i=0}^{n-2} d_i \cdot 2^i$$

Impongo

$$m + \tilde{m} = 0$$

$$\left( \sum_{i=0}^{n-2} d_i \cdot 2^i \right) + e(n-1) + \left( \sum_{i=0}^{n-2} \bar{d}_i \cdot 2^i \right) + 1 = 0$$

$$\left( \sum_{i=0}^{n-2} (d_i + \bar{d}_i) \cdot 2^i \right) + e(n-1) + 1 = 0$$

$$\left( \sum_{i=0}^{n-2} 2^i \right) + e(n-1) + 1 = 0$$

$$2^{n-1} - 1 + e(n-1) + 1 = 0$$

$$2^{n-1} + e(n-1) = 0 \implies e(n-1) = -2^{n-1}$$

In definitiva, un numero in complemento a 2 alla n vale

$$m = -1 \cdot d_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} d_i \cdot 2^i$$