GR Summary

Checco, Nenni, Giopale

November 15, 2020

Remember, remember the 5th of November...

Precessione del perielio

Appunti riguardo al *Problem 3* dell' HW6:

1. Trovare l'equazione che regola il moto di una particella massiva nella metrica di Schwarzschild
2. Trovare lo scostamento angolare del perielio per orbita.

Primo punto: cerchiamo una equazione per il moto della particella nella metrica di Scwarzschild

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi^2\right)$$

Sfruttiamo i due killing vectors per trovare delle quantità conservate:

$$\xi^\mu = (1,0,0,0) \implies e = -\xi^\mu u_\mu = \text{const} = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}$$
$$\xi^\mu = (0,0,0,1) \implies l = \xi^\mu u_\mu = \text{const} = r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}$$

Poi facciamo qualcosa di inaspettato: sfruttiamo la normalizzazione di u^μ :

$$-1 = u^\mu u_\mu = g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta$$

e dopo qualche passaggio troviamo:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = \left[-\frac{GM}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{GMl^2}{r^3}\right] = \frac{e^2-1}{2}. \tag{1}$$

Ci ricordiamo che una traiettoria è una relazione $r \leftrightarrow \varphi$ e quindi troviamo un modo per eliminare la τ dall'equazione; in particolare usiamo la conservazione di l :

$$l = r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau} \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{l}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}$$

Definiamo per comodità anche la variabile $u = r^{-1}$ trasformiamo la derivata rispetto a φ :

$$u = \frac{1}{r} \to \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi} = -\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}.$$

L'equazione del moto dopo un massaggino diventa:

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2} + u = \frac{GM}{l^2} + 3GMu^2 \tag{2}$$

che è quello che ci era chiesto di confermare dal primo punto.

Secondo punto: trovare la precessione del perielio per ogni orbita. Per far questo consideriamo

1. $u_c = \frac{GM}{l^2} + 3GMu_c^2$ orbite circolari

2. $u(\varphi) = u_c[1 + w(\varphi)]$ linearizzazione della soluzione per $u \sim u_c$

Sostituiamo in 2 e otteniamo un oscillatore armonico:

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}\varphi^2} + (1 - 6GMu_c)w = 0 \to \Omega = \sqrt{1 - 6GMu_c}$$

che ci dà un periodo di:

$$\Delta\Phi_{orb} = \frac{2\pi}{\omega} \sim 2\pi + 6GMu_c$$

al quale possiamo sottrarre 2π e sostituire il valore del raggio per l'orbita circolare $r_c = l^2/GM$ per ottenere la differenza di fase per precessione:

$$\delta\varphi_{prec} = 6\pi\left(\frac{GM}{l}\right)^2.$$

... and that's all folks!