



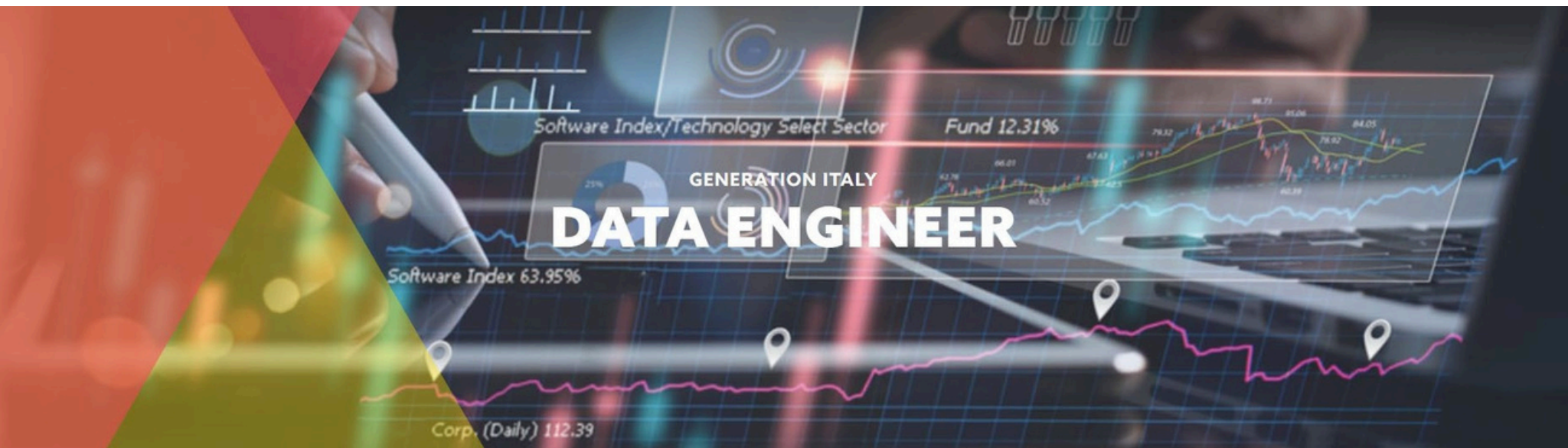
ACCADEMIA
DEL LEVANTE
WWW.ACCADEMIADELLEVANTE.ORG

Generation
ITALY



IASEM
Istituto Alti Studi Euro Mediterranei

Data Engineer



Probabilità e Statistica

Modulo: Probabilità

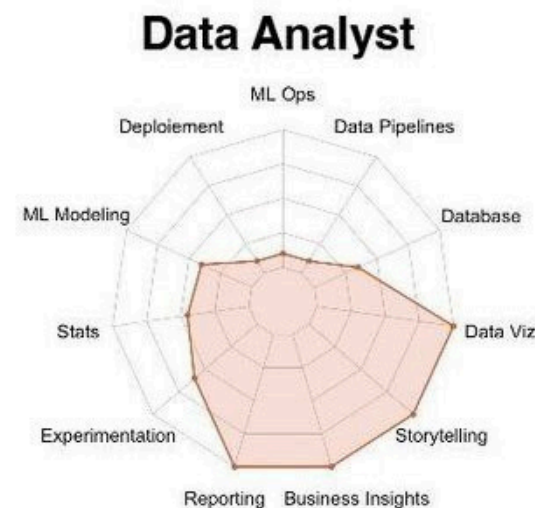
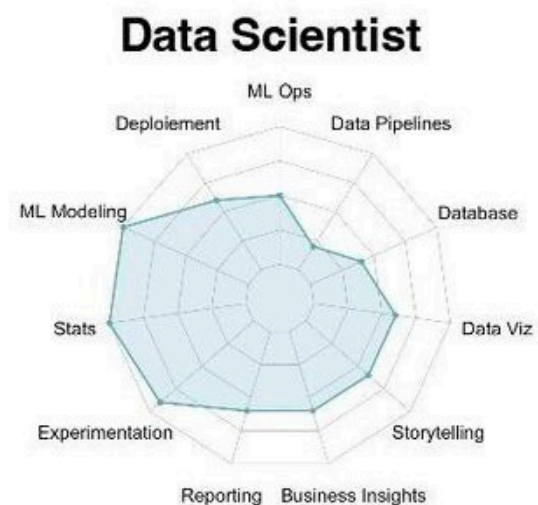
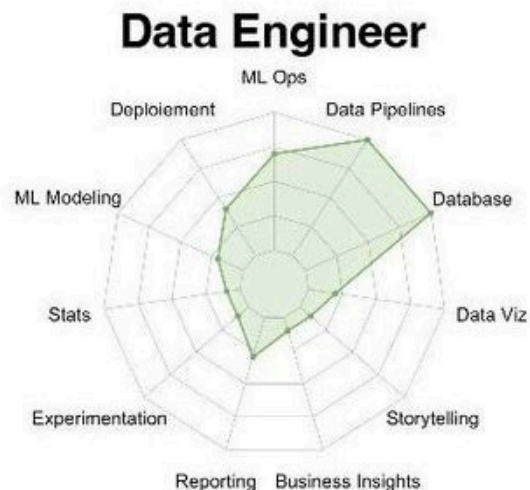
prof. Riccardo Figliozzi

Chi sono?

prof. Riccardo Figliozzi

- Marketing Data Scientist
- Digital Marketer e Freelance
- Docente di Accademia del Levante
- Staff Member firenze.dev

Perché Probabilità e Statistica?



Probabilità e Statistica

Probabilità

Teoria della Probabilità
Eventi aleatori e operazioni
Probabilità + Statistica

Statistica

Statistica Descrittiva
Statistica Bivariata
Regressione e
Correlazione



Variabili Aleatorie
Distribuzioni di Probabilità
Normalizzazione

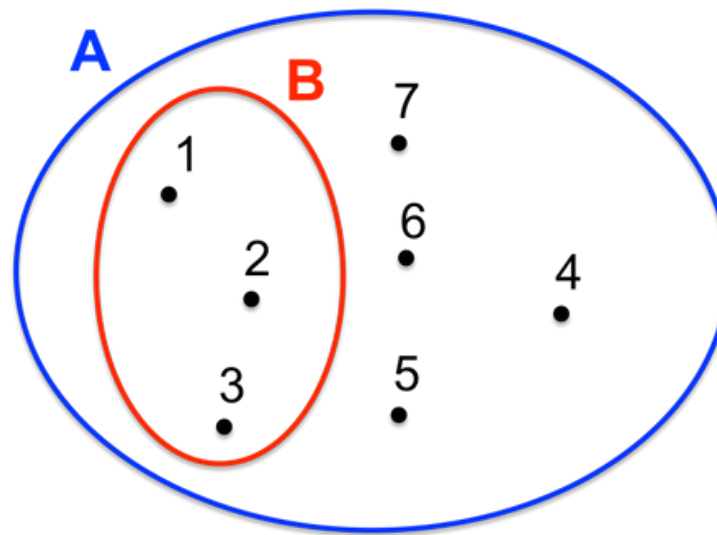
Probabilità

Il Calcolo delle Probabilità si occupa di tutte le situazioni in cui si presenta **il caso**:

- si ricercano, se non leggi, quantomeno delle regolarità
- ricavare informazioni e indicazioni, per orientarsi nel caos degli eventi.

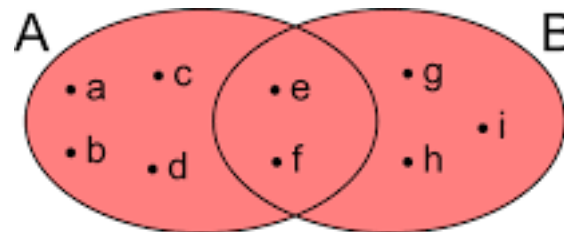
Richiami - Insiemistica

- **Insieme:** raggruppamento di oggetti in base ad un criterio oggettivo
- **Sottoinsieme:** B è un sottoinsieme di A se tutti gli elementi di B sono anche elementi di A

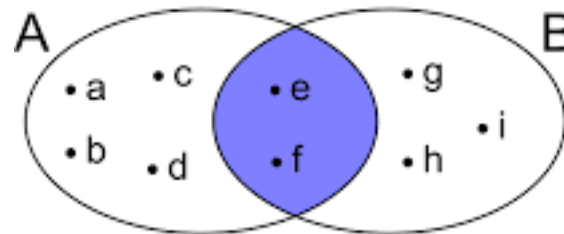


Richiami - Insiemistica

- **Intersezione** ($A \cap B$): insieme degli elementi che appartengono sia ad A che a B
- **Unione** ($A \cup B$): insieme degli elementi che appartengono ad A o a B o a entrambi



$A \cup B$

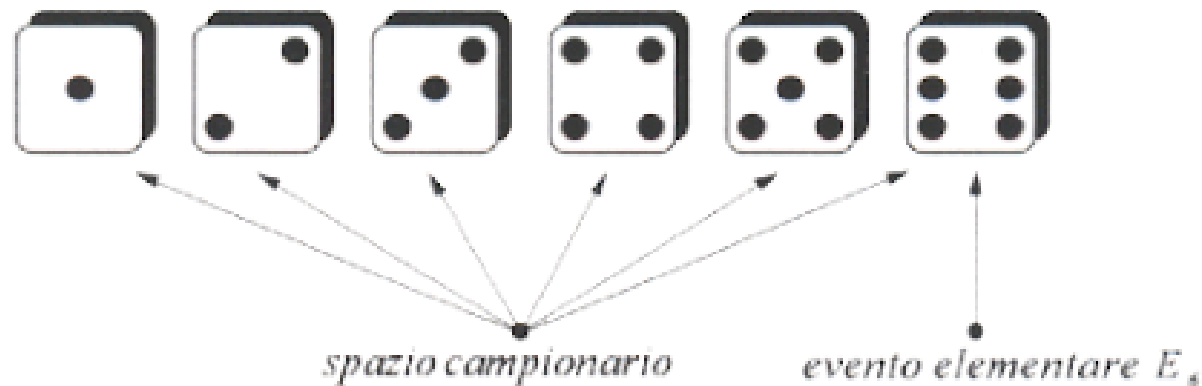


$A \cap B$

7

Prime definizioni

- **Esperimento aleatorio (casuale):** ogni fenomeno il cui esito non può essere previsto in anticipo
- **Spazio campionario:** insieme S di tutti i possibili esiti di un esperimento aleatorio



Prime definizioni

- **Evento elementare:** sottoinsiemi dello spazio campionario costituiti da un solo elemento
 - "testa" e "croce" sono eventi elementari.
- **Evento aleatorio (casuale):** ogni sottoinsieme dello spazio campionario (combinazione di esiti)
 - "ottenere almeno una testa in due lanci"

Tipi di Evento

Certo

Se oggi è martedì, allora domani sarà mercoledì.

Aleatorio

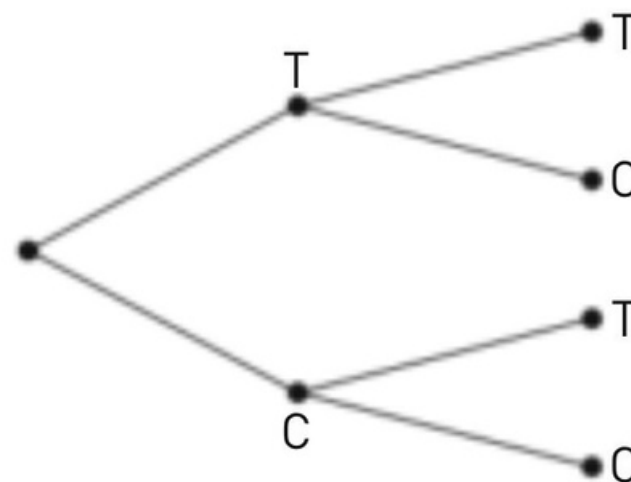
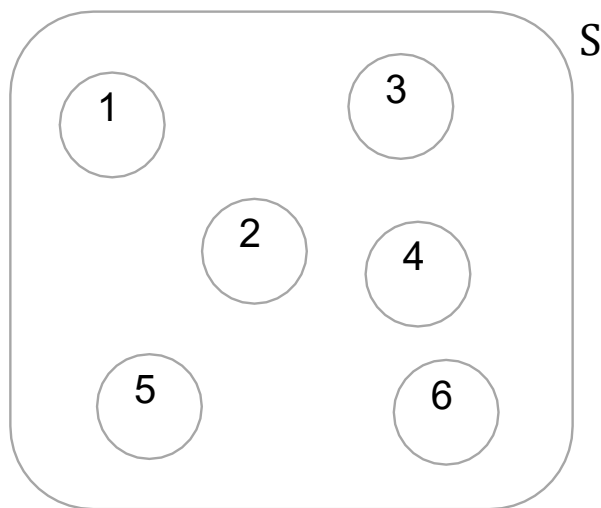
Domani pioverà. Non possiamo esserne sicuri al 100%

Impossibile

Lanciando un dado a 6 facce, uscirà il numero 7.

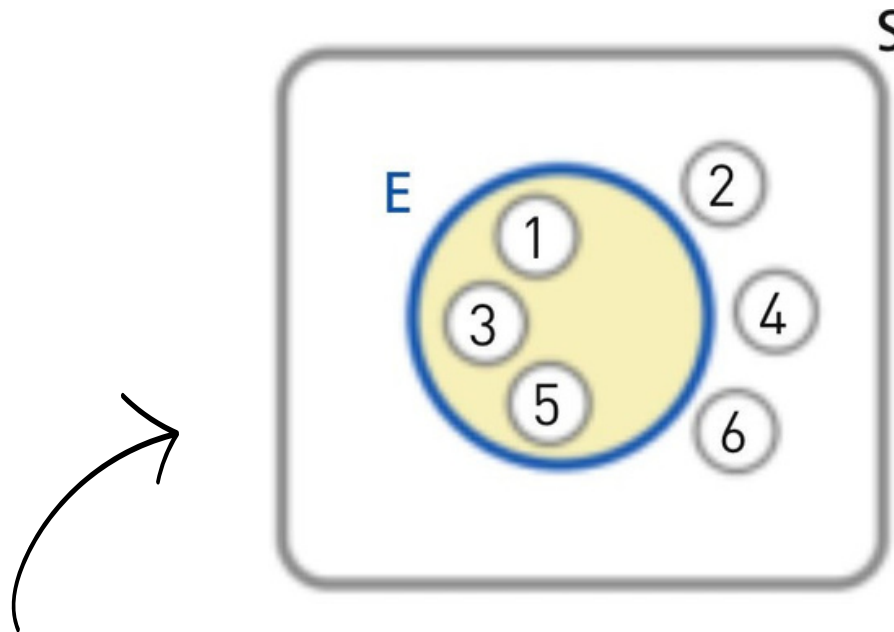
Rappresentazioni dello spazio

Come si può rappresentare graficamente lo spazio campionario?



Prime definizioni

- S è lo spazio campionario
- E è l'evento



Di quale esperimento stiamo parlando? E di quale evento si tratta?

Esercizi

Rappresenta gli eventi:

- a. «Dal lancio di un dado, esce un numero pari»
- b. «Dal lancio di due dadi, escono due numeri il cui prodotto è 25»
- c. «Dal lancio di due dadi, escono due numeri la cui somma è minore di 11»
- d. «Dal lancio di un dado, esce un numero pari o un numero dispari»
- e. «Dal lancio di un dado, esce un numero pari e un numero dispari»
- f. «Lanciando due volte una moneta, non esce mai testa entrambe le volte»

Operazioni con gli eventi

Evento unione (di due o più eventi):

- E_1 : «Dal lancio di un dado, esce un numero dispari»
- E_2 : «Dal lancio di un dado, esce un numero minore di 3»

Cos'è l'evento: «Dal lancio di un dado, esce un numero dispari **o** minore di 3»?

Operazioni con gli eventi

Evento unione (di due o più eventi):

«Dal lancio di un dado, esce un numero dispari o minore di 3»

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$E_1 = \text{«Esce un numero dispari»} = \{1, 3, 5\}$$

$$E_2 = \text{«Esce un numero minore di 3»} = \{1, 2\}$$

$$E = \text{«Esce un numero dispari o minore di 3»} = \{1, 2, 3, 5\}$$

Operazioni con gli eventi

Evento intersezione (di due o più eventi):

- E_1 : «Dal lancio di un dado, esce un numero dispari»
- E_2 : «Dal lancio di un dado, esce un numero minore di 3»

Cos'è l'evento: «Dal lancio di un dado, esce un numero dispari e minore di 3»?

Operazioni con gli eventi

Evento intersezione (di due o più eventi):
«Dal lancio di un dado, esce un numero dispari e minore di 3»

$$\begin{aligned} S &= 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ E_1 &= \text{«Esce un numero dispari»} = \{1, 3, 5\} \\ E_2 &= \text{«Esce un numero minore di 3»} = \{1, 2\} \\ E &= \text{«Esce un numero dispari e minore di 3»} = \{1\} \end{aligned}$$

Operazioni con gli eventi

Evento contrario (di un evento):

- E_1 : «Dal lancio di un dado, esce un numero dispari»
- Cos'è l'evento: «Dal lancio di un dado, non esce un numero dispari»?

Operazioni con gli eventi

Evento contrario (di un evento):

«Dal lancio di un dado, non esce un numero dispari»

$S = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$E_1 = \text{«Esce un numero dispari»} = \{1, 3, 5\}$

$E = \text{«Non esce un numero dispari»} = \{2, 4, 6\}$

Ricapitolando

EVENTO	DEFINIZIONE	CONGIUNZIONE
EVENTO UNIONE	Evento che si verifica al verificarsi di almeno uno degli eventi studiati	O
EVENTO INTERSEZIONE	Evento che si verifica al verificarsi contemporaneamente degli eventi studiati	E
EVENTO CONTRARIO	Evento che si verifica solo se non si verifica l'evento studiato	NON

Esempi fatti da voi

Elaborate almeno 6 esempi di eventi, 2 per ogni tipo di evento e rappresentateli graficamente.

Probabilità – definizione classica

«Dal lancio di un dado, esce un numero pari»

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$E = \{2, 4, 6\}$$

$$p(E) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{3}{6} = 50\%$$

Probabilità – definizione classica

«Dal lancio di un dado, esce un numero pari o un numero dispari»

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$E_1 = \{2, 4, 6\}$$

$$p(E) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{6}{6} = 100\%$$

Probabilità – definizione classica

«Dal lancio di un dado, esce un numero pari e un numero dispari»

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$E_1 = \{2, 4, 6\}$$

$$p(E) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{0}{6} = 0\%$$

Eventi compatibili e incompatibili

Questi eventi sono compatibili perché **possono verificarsi contemporaneamente**: se esce il numero 4 o 6, entrambi gli eventi A e B si verificano.

Esempio: Estrazione di una carta da un mazzo

- **Evento A:** Estrarre una carta di cuori.
- **Evento B:** Estrarre una figura (Jack, Regina, Re).

Eventi compatibili e incompatibili

Due eventi sono incompatibili **se non possono verificarsi contemporaneamente**, ovvero se non hanno alcun risultato in comune.

Il verificarsi di uno esclude il verificarsi dell'altro.

Esempio: Lancio di un dado

- **Evento A:** Ottenere un numero pari (2, 4, 6).
- **Evento B:** Ottenere un numero dispari (1, 3, 5).

Probabilità condizionata

Consideriamo un mazzo di carte napoletane e i seguenti due eventi:

E_1 = «Si pesca una figura»

E_2 = «Si pesca un valore pari»

Peschiamo una carta e supponiamo che l'evento E_2 si sia verificato. Qual è la probabilità che si sia verificato anche E_1 ?

NON dobbiamo calcolare $p(E_1)$ ma la probabilità dell'evento E_1 condizionato dal fatto che si sia verificato prima l'evento E_2 : $p(E_1|E_2)$

Probabilità condizionata

Se si è verificato $E_2 =$ «Si pesca un valore pari», il nostro spazio campionario è

$$S = \{2, 4, 6, 8, 10, 2, 4, 6, 8, 10, 2, 4, 6, 8, 10, 2, 4, 6, 8, 10\}$$

Questo vuol dire che abbiamo pescato una di queste carte.

Qual è la probabilità condizionata di $E_1 =$ «Si pesca una figura»?

In S , i casi favorevoli sono $E = \{8, 10, 8, 10, 8, 10, 8, 10\}$

$$p(E_1|E_2) = \frac{c.f.}{c.p.} = \frac{8}{20}$$

Probabilità condizionata

Consideriamo un dado a 12 facce e i seguenti due eventi:

E_1 = «Esce un numero pari»

E_2 = «Esce un numero minore di 8»

Calcoliamo $p(E_1|E_2)$.

Se si verifica E_2 , lo spazio campionario è

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Quindi:

$$p(E_1|E_2) = \frac{c.f.}{c.p.} = \frac{3}{7}$$

Eventi dipendenti e indipendenti

Due eventi si dicono **dipendenti** se il verificarsi di uno *influenza* il verificarsi dell'altro

Si pesca una carta e, senza reinserirla nel mazzo, se ne estrae una seconda

Due eventi si dicono **indipendenti** se il verificarsi di uno *non influenza* il verificarsi dell'altro

Si pesca una carta e, reinserendola nel mazzo, se ne estrae una seconda

Prodotto logico di eventi indipendenti (1)

«Un sacchetto contiene 2 biglie rosse, 1 blu e 2 verdi. Si pesca una biglia, la si reinserisce nel sacchetto e successivamente se ne estrae una seconda.

Calcolare la probabilità di aver estratto, nell'ordine,
... ..

Eventi **indipendenti**

Particolarità:

1. evento intersezione
2. ordinamento

Prodotto logico di eventi indipendenti (1)

«Un sacchetto contiene 2 biglie rosse, 1 blu e 2 verdi. Si pesca una biglia, la si reinserisce nel sacchetto e successivamente se ne estrae una seconda.

Calcolare la probabilità di aver estratto, nell'ordine, una biglia rossa e una biglia blu»

Lo spazio campionario è costituito da 25 elementi.

È richiesta una prima biglia rossa e una seconda blu, quindi, abbiamo solo 2 casi

Prodotto logico di eventi indipendenti (2)

«Un sacchetto contiene 2 biglie rosse, 1 blu e 2 verdi. Si pesca una biglia, la si reinserisce nel sacchetto e successivamente se ne estrae una seconda.

Calcolare la probabilità di aver estratto una biglia
... ..

Eventi **indipendenti**

Particolarità: 1. evento intersezione
2. senza ordinamento

Prodotto logico di eventi indipendenti (2)

«Un sacchetto contiene 2 biglie rosse, 1 blu e 2 verdi. Si pesca una biglia, la si reinserisce nel sacchetto e successivamente se ne estrae una seconda.

Calcolare la probabilità di aver estratto una biglia rossa e una biglia blu»

Lo spazio campionario è costituito da 25 elementi. È richiesta una biglia rossa e una blu oppure una blu e una rossa. Quindi, abbiamo 4 casi favorevoli:

$$p(E) = \frac{4}{25} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5}$$

$$p(E) = p(E_1) \cdot p(E_2) + p(E_2) \cdot p(E_1)$$

Prodotto logico di eventi dipendenti (1)

«Un sacchetto contiene 2 biglie rosse, 1 blu e 2 verdi. Si pesca una biglia e, senza reinserirla nel sacchetto, se ne estrae una seconda.

Calcolare la probabilità di aver estratto, nell'ordine, una biglia rossa e una biglia blu»

Eventi **dipendenti**

Particolarità: 1. evento intersezione
2. ordinamento

Prodotto logico di eventi dipendenti (1)

«Un sacchetto contiene 2 biglie rosse, 1 blu e 2 verdi. Si pesca una biglia e, senza reinserirla nel sacchetto, se ne estrae una seconda.

Calcolare la probabilità di aver estratto, nell'ordine, una biglia rossa e una biglia blu»

Lo spazio campionario è costituito da 20 elementi, perché non c'è reinserimento.

È richiesta una prima biglia rossa e una seconda blu. Quindi, abbiamo 2 casi favorevoli:

$$p(E) = \frac{2}{20} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = p(E_2) \cdot p(E_1|E_2)$$

Prodotto logico di eventi dipendenti (2)

«Un sacchetto contiene 2 biglie rosse, 1 blu e 2 verdi. Si pesca una biglia e, senza reinserirla nel sacchetto, se ne estrae una seconda.

Calcolare la probabilità di aver estratto una biglia rossa e una biglia blu»

Eventi **dipendenti**

Particolarità: 1. evento intersezione
2. senza ordinamento

Prodotto logico di eventi dipendenti (2)

«Un sacchetto contiene 2 biglie rosse, 1 blu e 2 verdi. Si pesca una biglia e, senza reinserirla nel sacchetto, se ne estrae una seconda.

Calcolare la probabilità di aver estratto una biglia rossa e una biglia blu»

Come prima, lo spazio campionario è costituito da 20 elementi, perché non c'è reinserimento.

È richiesta una biglia rossa e una blu oppure una blu e una rossa. Quindi, abbiamo:

$$p(E) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{4}{20}$$

$$p(E) = p(E_2) \cdot p(E_1|E_2) + p(E_1) \cdot p(E_2|E_1)$$