

RELAZIONE – Gruppo AF Traccia 3c

A cura di: Giorgio Mocchi, Miro Daniel Rajer, Simone Badiali

Si vuole realizzare un sistema di controllo per ottenere una velocità angolare costante in un rotore che presenta una deformazione su una pala che causa non-linearità.

Le equazioni della dinamica sono:

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \omega \\ (m_i e_i^2 + I_e) \dot{\omega} &= -\beta \omega - \mu_d m_i \omega^2 e_i^2 + \tau\end{aligned}$$

dove ω è la velocità angolare, θ è l'angolo, β è un coefficiente, μ_d è il coefficiente d'attrito dinamico, m_i è la massa concentrata nel punto dell'imperfezione, e_i è la distanza dell'imperfezione dal centro, I_e è il momento d'inerzia e τ è la coppia applicata al motore.

Prima di procedere con la linearizzazione del sistema è opportuno individuare lo stato, l'uscita e l'ingresso del sistema da controllare. Considerando la richiesta del problema si sceglie come output y la velocità angolare ω e come ingresso u la coppia τ . Inizialmente è stato scelto come stato x del sistema la coppia (θ, ω) . Tuttavia, procedendo con la seguente linearizzazione si presenta in un'incongruenza riportata più avanti.

$$\begin{aligned}x &= (x_1, x_2) = (\theta, \omega) \\ \dot{x} &= f(x, u)\end{aligned}$$

dalle equazioni della dinamica ne consegue che:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{-\beta x_2 - \mu_d m_i x_2^2 e_i^2 + u}{m_i e_i^2 + I_e} \end{cases}$$

$$y = x_2 = h(x, u)$$

si procede a individuare il punto di equilibrio imponendo uguale a zero la funzione di stato f .

$$\begin{aligned}0 &= x_{e2} \\ 0 &= \frac{-\beta * 0 - \mu_d m_i * 0 * e_i^2 + u_e}{m_i e_i^2 + I_e}\end{aligned}$$

da cui troviamo come coppia di equilibrio $(x_e, u_e) = ((x_{e1}, 0), 0)$. Quindi si ha che $\omega_e = 0, y_e = 0$ e $\tau_e = 0$.

Questo risultato è coerente con la "fisicità" del sistema. Difatti, il significato del punto di equilibrio è che se il sistema parte in tali condizioni all'istante iniziale t_0 , allora vi permane $\forall t \geq t_0$.

Perciò, quanto riguarda questo sistema specifico, tale risultato ci dice, come intuitivamente si può prevedere, che se il rotore parte da un qualsiasi angolo iniziale $\theta_0 = x_{e1}$, con velocità angolare nulla e coppia nulla allora il sistema resterà in tali condizioni.

Si procede con la linearizzazione. Prendiamo una traiettoria a partire da stato iniziale $x_0 = x_e + \Delta x_0$, si ha che

$$\begin{aligned}x(t) &= x_e + \Delta x(t) \\ u(t) &= u_e + \Delta u(t) \\ y(t) &= y_e + \Delta y(t)\end{aligned}$$

Con $x_e = (x_{e1}, 0), u_e = \tau_e = 0, y_e = x_{e2} = 0$.

Essendo una traiettoria vale

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}(x_e + \Delta x(t)) = \Delta \dot{x}(t) = f(x_e + \Delta x(t), u_e + \Delta u(t))$$

$$\Delta \dot{x}(t) = f(x_e + \Delta x(t), \Delta u(t))$$

$$y_e + \Delta y(t) = h(x_e + \Delta x(t), u_e + \Delta u(t))$$

$$\Delta y(t) = h(x_e + \Delta x(t), \Delta u(t))$$

da cui si ottiene un sistema con stato $\Delta x(t)$ e ingresso $\Delta u(t)$

$$\begin{cases} \Delta \dot{x}(t) = f(x_e + \Delta x(t), \Delta u(t)) \\ \Delta y(t) = h(x_e + \Delta x(t), \Delta u(t)) \end{cases}$$

Si procede con lo sviluppo di Taylor

$$\Delta \dot{x}(t) = \left. \frac{df(x, u)}{dx} \right|_{(x_e, u_e)} * \Delta x(t) + \left. \frac{df(x, u)}{du} \right|_{(x_e, u_e)} * \Delta u(t) + o(t)$$

$$\Delta y(t) = \left. \frac{dh(x, u)}{dx} \right|_{(x_e, u_e)} * \Delta x(t) + \left. \frac{dh(x, u)}{du} \right|_{(x_e, u_e)} * \Delta u(t) + o(t)$$

Ovvero

$$\Delta \dot{x}(t) \approx A \Delta x(t) + B \Delta u(t)$$

$$\Delta y(t) \approx C \Delta x(t) + D \Delta u(t)$$

Dove la matrice A è la seguente

$$A = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2} \\ \frac{df_2}{dx_1} & \frac{df_2}{dx_2} \end{bmatrix} (x_e, u_e) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{-\beta}{m_i e_i^2 + I_e} \end{bmatrix}$$

Procedendo a calcolare gli autovalori di tale matrice si incombe in un problema.

Il polinomio caratteristico risulta essere $\lambda^2 + \frac{\beta}{m_i e_i^2 + I_e} \lambda$ da cui si ricavano i seguenti autovalori

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = \frac{-\beta}{m_i e_i^2 + I_e} \approx -0.3831$$

Ne consegue che il sistema linearizzato è stabile ma non attrattivo. Un risultato importante ci dice che se il sistema linearizzato è asintoticamente stabile allora lo è anche il punto di equilibrio per il sistema di partenza. Mancando però in questo caso l'ipotesi di attrattività, non è possibile fare affermazioni sulla stabilità del sistema originario.

Ragionando sulla fisicità del sistema sembrerebbe invece che sia attrattivo. Difatti, se si ipotizzasse di dare una piccola sollecitazione con la mano all'elica (ovvero di conferire un impulso τ modellabile come una delta di Dirac) verosimilmente questa inizierebbe a ruotare con una certa velocità angolare per poi andare a fermarsi per effetto dell'attrito. Perciò la velocità angolare ritornerebbe all'equilibrio 0.

Tuttavia, per l'angolo generalmente la posizione finale sarebbe diversa da $\theta_0 = x_{e1}$. Questo spiega il

risultato ottenuto. Da qui viene intuitivo scegliere come stato semplicemente la velocità angolare. A maggior ragione, le specifiche prevedono una velocità angolare d'equilibrio $\omega_e = 1590$, cosa che sarebbe stata impossibile considerando lo stato appena scartato che imponeva un $\omega_e = x_{e2} = 0$.

Si procede perciò ponendo come stato x la sola velocità angolare e linearizzando il sistema attorno all'equilibrio $\omega_e = 1590$ come da specifiche.

$$\begin{aligned}x &= \omega \\ \dot{x} &= \frac{-\beta x - \mu_d m_i x^2 e_i^2 + u}{m_i e_i^2 + I_e} = f(x, u) \\ y &= x = h(x, u)\end{aligned}$$

Calcolo del punto di equilibrio:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{-\beta \omega_e - \mu_d m_i \omega_e^2 e_i^2 + u_e}{m_i e_i^2 + I_e} = 0 \\ u_e &= \omega_e (\beta + \mu_d m_i \omega_e e_i^2) = 1482.2\end{aligned}$$

da cui $(x_e, u_e) = (\omega_e, \tau_e) = (1590, 1482.2)$ e $y_e = x_e$.

La linearizzazione:

$$\begin{aligned}\Delta \dot{x}(t) &= \left. \frac{df(x, u)}{dx} \right|_{(x_e, u_e)} * \Delta x(t) + \left. \frac{df(x, u)}{du} \right|_{(x_e, u_e)} * \Delta u(t) + o(t) \\ \Delta y(t) &= \left. \frac{dh(x, u)}{dx} \right|_{(x_e, u_e)} * \Delta x(t) + \left. \frac{du(x, u)}{du} \right|_{(x_e, u_e)} * \Delta u(t) + o(t)\end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned}\Delta \dot{x}(t) &\approx A \Delta x(t) + B \Delta u(t) \\ \Delta y(t) &\approx C \Delta x(t) + D \Delta u(t)\end{aligned}$$

con

$$A = \frac{-\beta - 2\mu_d m_i \omega_e e_i^2}{m_i e_i^2 + I_e} \quad B = \frac{1}{m_i e_i^2 + I_e} \quad C = 1 \quad D = 0$$

Il sistema linearizzato è:

$$\begin{cases} \delta \dot{x}(t) = A \delta x(t) + B \delta u(t) \\ \delta y(t) = C \delta x(t) + D \delta u(t) \end{cases}$$

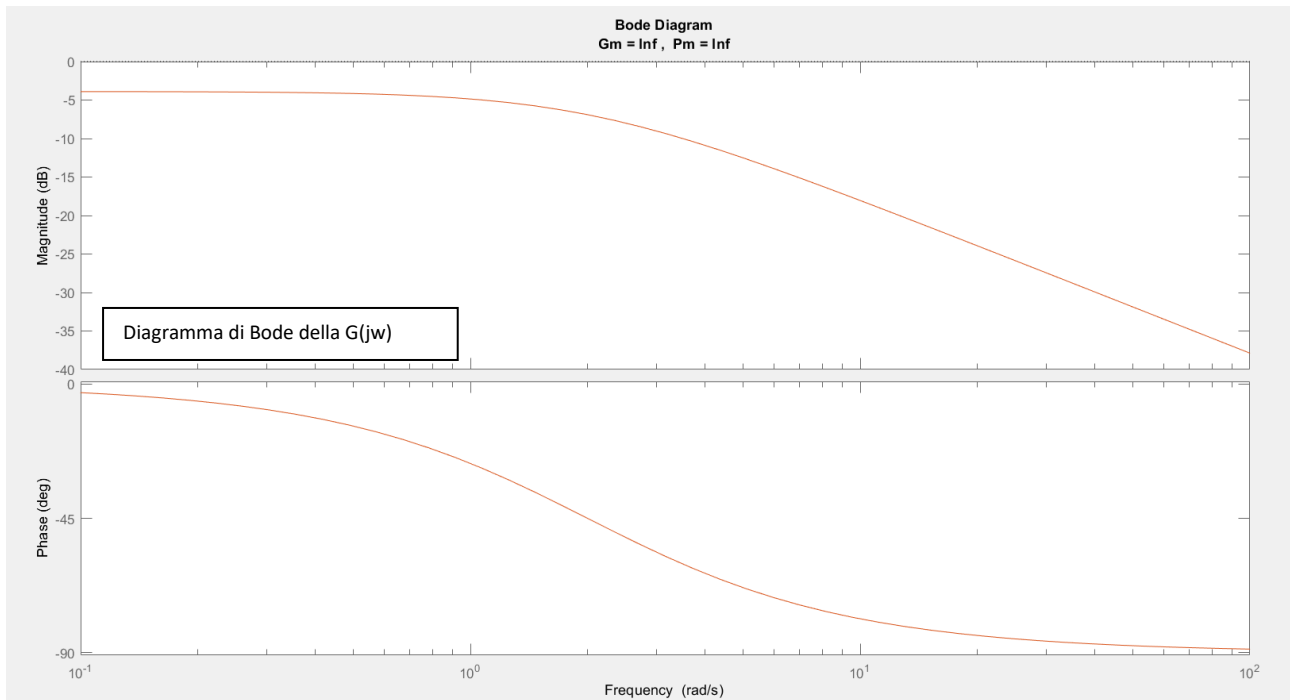
$$\begin{cases} \delta \dot{x}(t) = \frac{(-\beta - 2\mu_d m_i \omega_e e_i^2) \delta x(t) + \delta u(t)}{m_i e_i^2 + I_e} \\ \delta y(t) = \delta x(t) \end{cases}$$

Con $x(t) \approx x_e + \delta x(t)$, $y(t) \approx y_e + \delta y(t)$, $u(t) = u_e + \delta u(t)$ e $x_0 \approx x_e + \delta x(0)$. Essendo $A \approx -1.9977 < 0$ il sistema è asintoticamente stabile.

Trovato il sistema linearizzato si procede al calcolo della funzione di trasferimento.

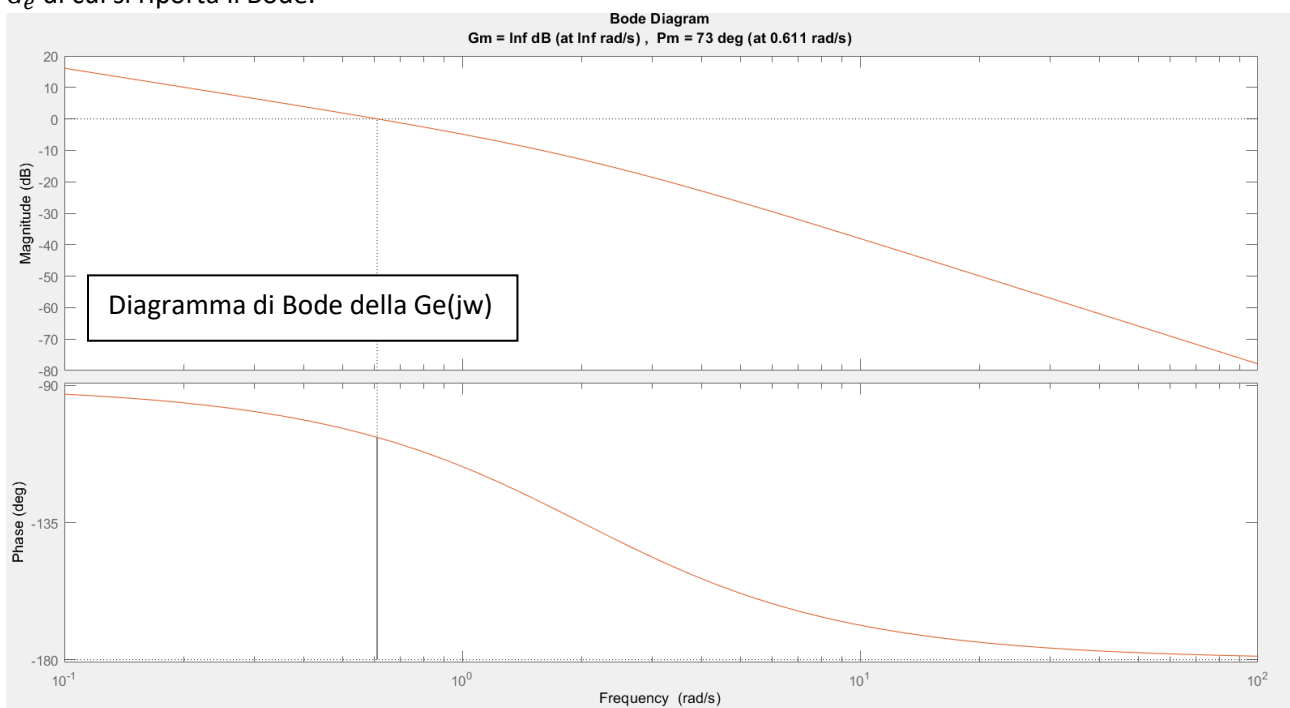
$$G(s) = C(s - A)^{-1}B + D = \frac{B}{s - A}$$

È possibile riscriverla così: $G(s) = \frac{\mu_G}{Ts+1}$ con $\mu_G = \frac{1}{\beta+2\mu_d m_i \omega_e e_i^2}$ e $T = -\frac{1}{A}$. Il polo di questa funzione di trasferimento è $A \approx -0.3831 < 0$. Perciò il sistema linearizzato è BIBO-stabile (oltre che asintoticamente stabile). Di seguito si riporta il diagramma di Bode della $G(j\omega)$.



SINTESI DEL REGOLATORE

Per la sintesi del regolatore si considera prima di tutto la specifica di errore nullo a infinito $e_\infty = 0$. È necessario introdurre un regolatore statico con un polo nell'origine: $R_s(s) = \frac{1}{s}$. Si ottiene il sistema esteso G_e di cui si riporta il Bode.



Ora si procede a mappare gli altri vincoli di progetto in delle restrizioni nei diagrammi di Bode.

Il vincolo sulla sovra-elongazione impone $S\% \leq 1\% = S^*$.

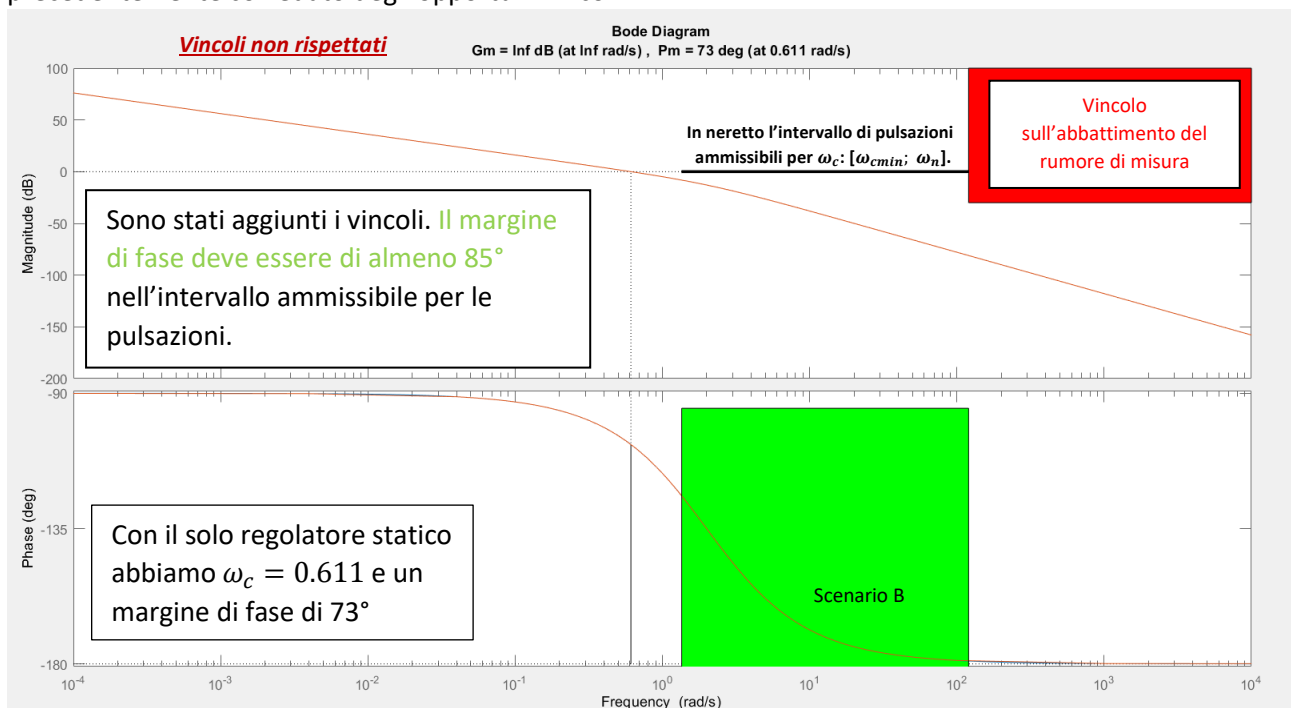
$$S\% = 100e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-(\xi)^2}}}$$

da cui si ha $\xi^* = 0.85$ e perciò un margine di fase minimo $M_f^* = 85^\circ$ (più restrittivo del precedente vincolo di 45°). Dal vincolo sul tempo di assestamento consegue una restrizione su ω_c .

$$\omega_c \geq \omega_{cmin} = \frac{460}{M_f^* T^*} \approx 1.35$$

con $T^* = 4$ (tempo di assestamento all'1%).

Per quanto riguarda il vincolo sull'abbattimento del rumore di misura $n(t)$ si ha che il diagramma delle ampiezze deve stare sotto i -30dB per pulsazioni superiori a $\omega_n = 120$. Questi tre vincoli si traducono in zone proibite nel diagramma di Bode. Si riporta di seguito il diagramma del sistema esteso visto precedentemente corredato degli opportuni vincoli.



Attualmente il margine di fase e ω_c sono troppo bassi.

Si procede con il tuning dei parametri della rete anticipatrice imponendo $M^* = 3.68$ $\omega_c^* = 2.91$ e $\varphi^* = 70^\circ$ e un guadagno $\mu_R = 2$.

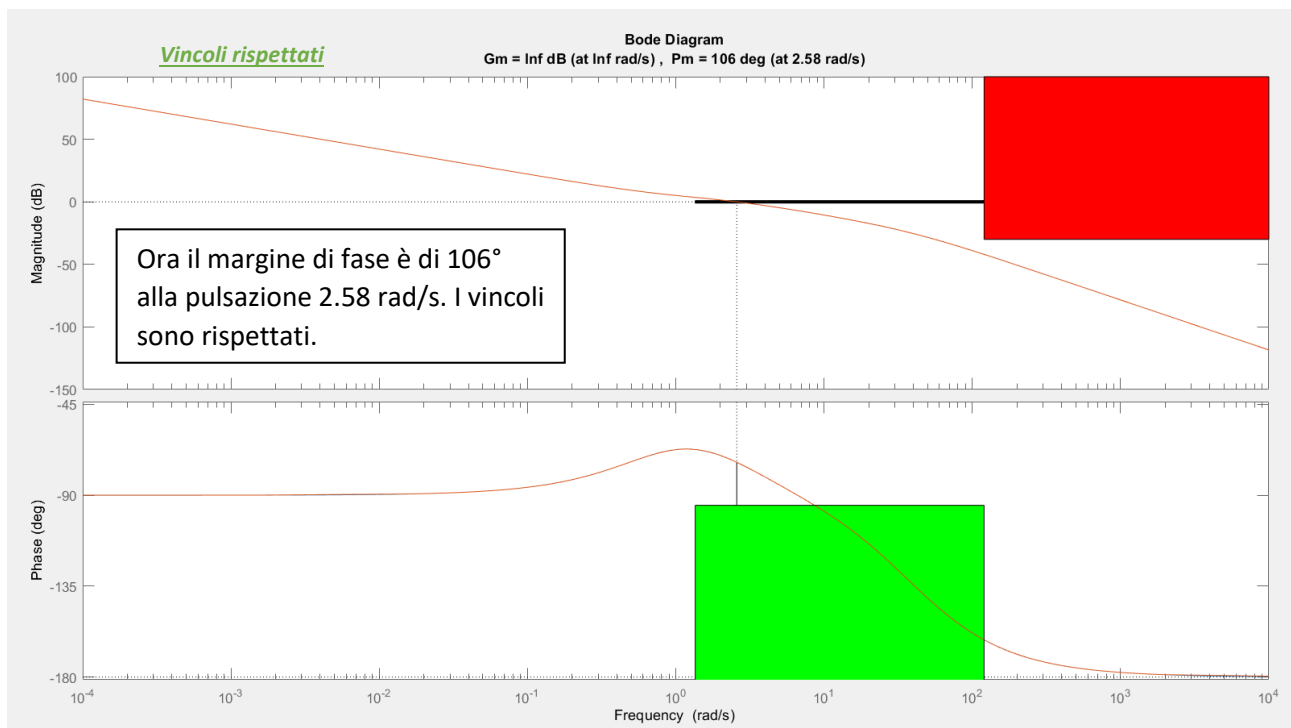
$$\tau_R = \frac{M^* - \cos\varphi^*}{\omega_c^* \sin\varphi^*} \approx 1.22$$

$$\alpha\tau_R = \frac{\cos\varphi^* - \frac{1}{M^*}}{\omega_c^* \sin\varphi^*} \approx 0.0257$$

$$R_d(s) = \frac{1 + s\tau_R}{1 + s\alpha\tau_R}$$

$$R(s) = \mu_R R_s(s) R_d(s) \quad L(s) = R(s) G(s)$$

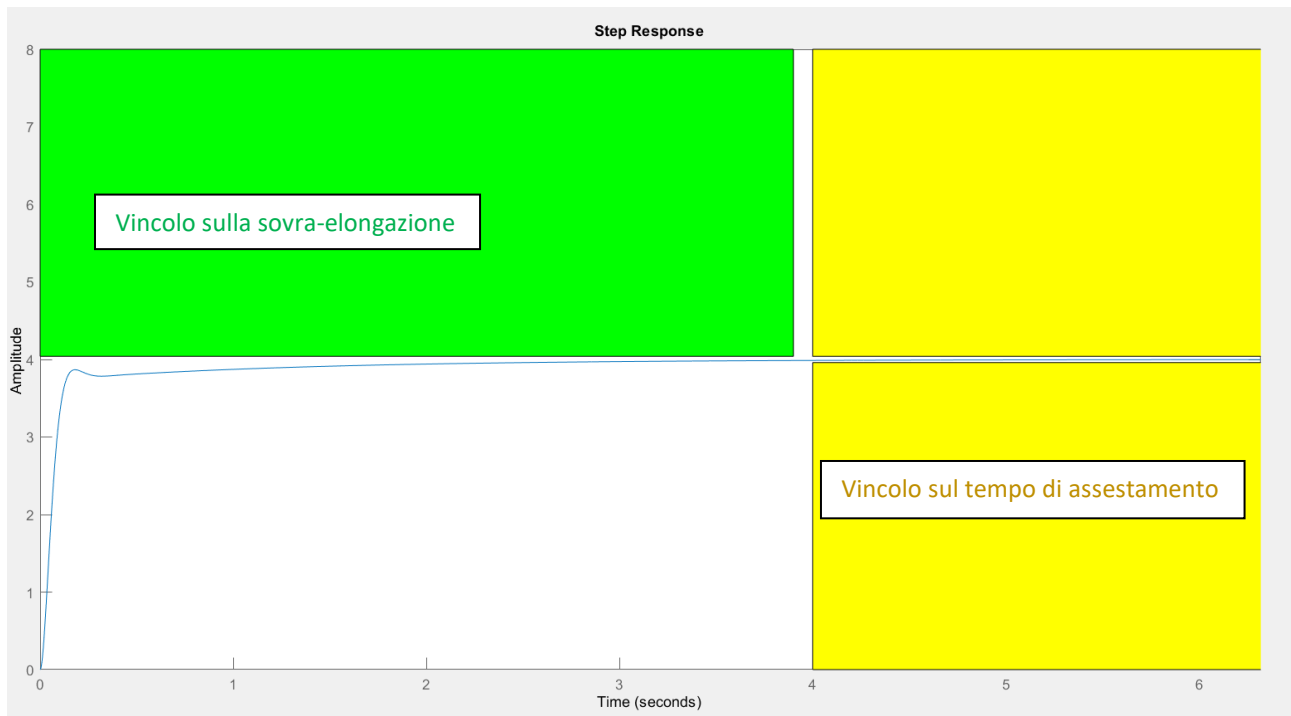
Di seguito il diagramma di Bode della funzione d'anello L.



Si imposta poi un guadagno aggiuntivo $K=5.5$ trovato tramite il tool *Control System Designer* (loop shaping).

$$F(s) = \frac{KL(s)}{1 + KL(s)}$$

Riportiamo di seguito la risposta al gradino della $F(s)$.

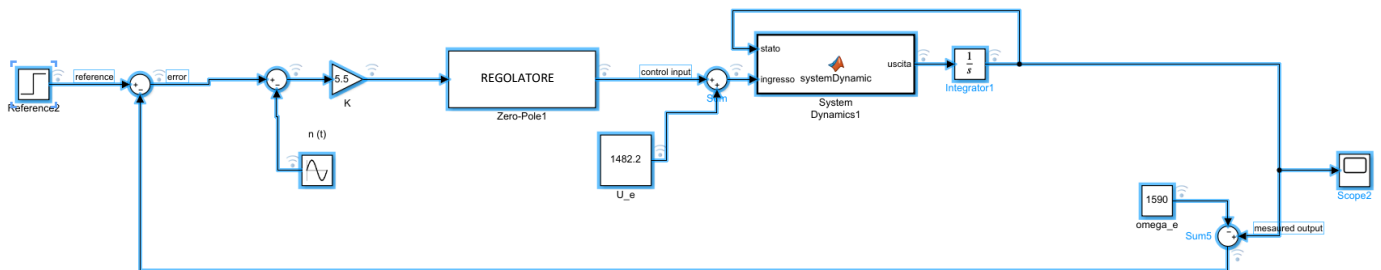


Ora si considera il vincolo sulla variazione del parametro e_i . Nonostante la richiesta fosse in merito alla sola variazione di ± 0.1 , per una maggiore robustezza si è ritenuto interessante esplorare l'intero range di valori possibili per cui la risposta al gradino e la funzione d'anello rispettano i vincoli di progetto.

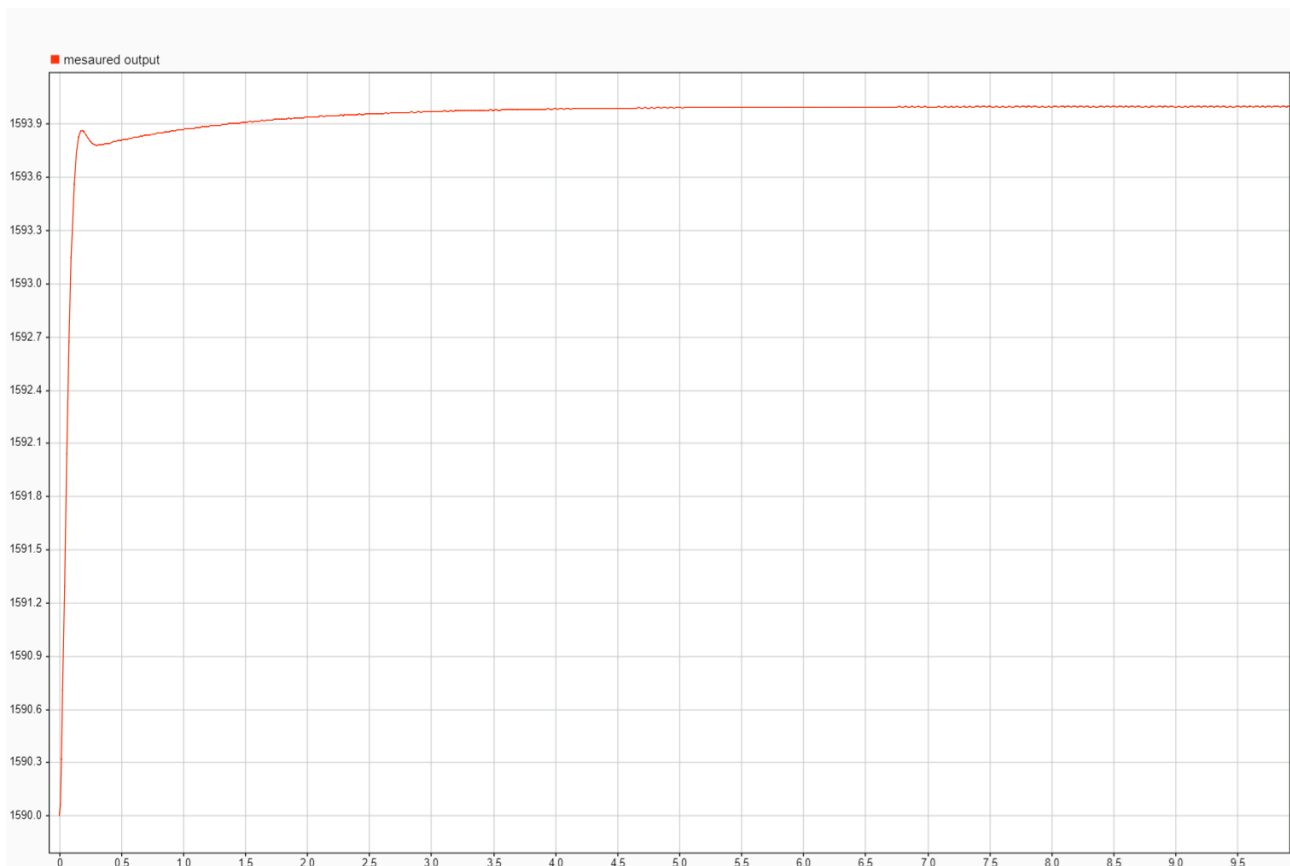
L'upper-bound trovato dai test effettuati corrisponde a 0.60, mentre il lower-bound è di 0.34.

$$[e_{imin}; e_{iMAX}] = [0.34; 0.60]$$

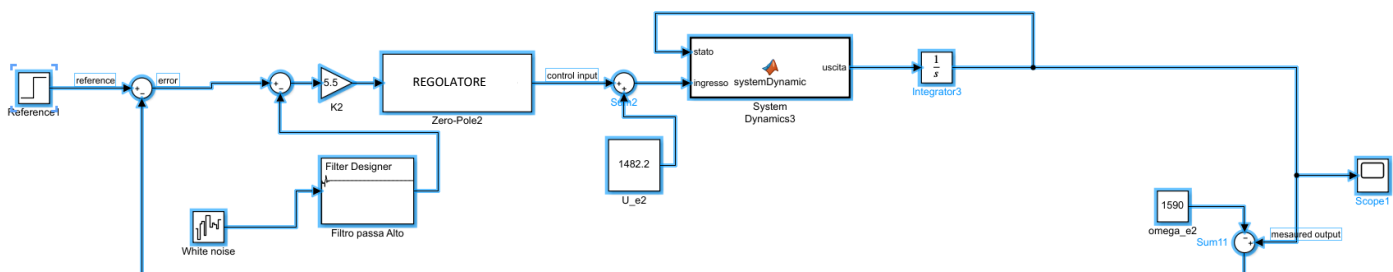
SIMULAZIONE

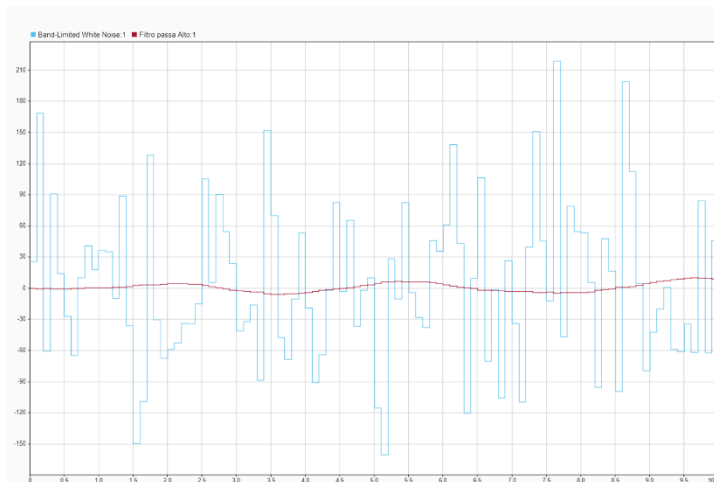


Si procede alla simulazione tramite il tool Simulink con un rumore di misura $n(t)$ di ampiezza $Mn = 0.025$ a frequenza $\omega_n = 120$.



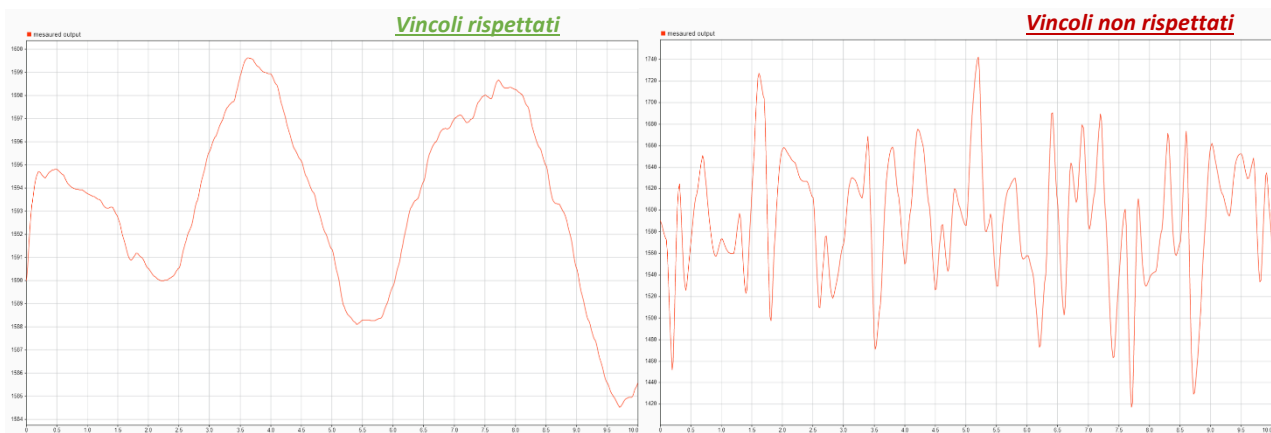
Si prova quindi a considerare come rumore un *white-noise* filtrato da un filtro passa-alto alla frequenza ω_n .





Di lato i grafici del white-noise filtrato e non.

Come si nota dai grafici di sotto l'utilizzo di un filtro passa-alto è essenziale in quanto il white-noise risulterebbe troppo potente andando a distorcere eccessivamente l'uscita che non rispetterebbe più i vincoli di progetto.



È stato inoltre esplorato il range di ampiezze W per il segnale *reference* ($w(t)$) per le quali l'uscita converge comunque all'equilibrio. Dall'esperimento con Simulink si è ottenuto il seguente intervallo:

$$[W_{min}; W_{MAX}] = [-10000; 4250]$$

Si è quindi esplorato il range di condizioni iniziali per le quali l'uscita segue il comportamento desiderato. L'intervallo ottenuto dai test risulta:

$$[x_{0min}; x_{0MAX}] = [-3000; 10000]$$

Infine, è stata sviluppata in *Matlab* una semplice animazione grafica di cui si riporta un estratto.

