



Università degli Studi di Trento  
Fisica Computazionale

---

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Relazione di laboratorio

## Progetto finale: Equazione di Schrödinger in 1D

January 10, 2025

Candidato:  
Giorgio Micaglio, [giorgio.micaglio@studenti.unitn.it](mailto:giorgio.micaglio@studenti.unitn.it)  
Matricola 227051

Docente:  
Prof. Alessandro Roggero

Anno Accademico 2023-2024

# 1 Introduzione

L'obiettivo di questo progetto è risolvere numericamente l'equazione di Schrödinger in una dimensione:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \left[ -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \psi(x, t). \quad (1)$$

Per semplicità, si sono posti  $\hbar = m = 1$ . Si è interessati alla regione  $x \in [-L, L]$  e si impongono le condizioni al contorno  $\psi(-L, t) = \psi(L, t) = 0$ .

## 1.1 Metodo di Eulero esplicito

Il primo approccio è quello di utilizzare il metodo di Eulero esplicito. Per prima cosa, si usano le differenze finite per stimare le derivate della funzione d'onda che compaiono in (1). Siano  $x = x_0 + \Delta x$  e  $t = t_0 + \Delta t$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} &= \frac{\psi(x_0, t_0 + \Delta t) - \psi(x_0, t_0)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t), \\ \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{\psi(x_0 + \Delta x, t_0) - 2\psi(x_0, t_0) + \psi(x_0 - \Delta x, t_0)}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2). \end{aligned}$$

L'equazione di Schrödinger diventa quindi:

$$i \frac{\psi(x_0, t_0 + \Delta t) - \psi(x_0, t_0)}{\Delta t} = - \frac{\psi(x_0 + \Delta x, t_0) - 2\psi(x_0, t_0) + \psi(x_0 - \Delta x, t_0)}{\Delta x^2} + V(x_0) \psi(x_0, t_0).$$

Prendendo  $\Delta x = 2L/(N+1)$ , si possono definire la funzione d'onda e il potenziale calcolati sui punti della griglia come

$$\begin{aligned} \psi_i^k &= \psi(-L + i\Delta x, t_0 + k\Delta t) & i = 0, 1, \dots, N+1 & \quad k = 0, 1, \dots, M \\ V_i &= V(-L + i\Delta x) & i = 0, 1, \dots, N+1 \end{aligned}$$

e si può scrivere l'equazione in modo più chiaro:

$$i \frac{\psi_i^{k+1} - \psi_i^k}{\Delta t} = - \frac{\psi_{i+1}^k - 2\psi_i^k + \psi_{i-1}^k}{\Delta x^2} + V_i \psi_i^k.$$

Isolando il termine  $\psi_i^{k+1}$  e semplificando, si ottiene

$$\psi_i^{k+1} = \eta \psi_{i+1}^k + (1 - 2\eta + \Delta\tau V_i) \psi_i^k + \eta \psi_{i-1}^k, \quad (2)$$

dove  $\Delta\tau = -i\Delta t$  e  $\eta = -\Delta\tau/\Delta x^2$ . L'equazione (2) rappresenta l'evoluzione temporale della funzione d'onda. Come ultimo passaggio, si può definire il vettore

$$\boldsymbol{\psi}_k = (\psi_1^k, \psi_2^k, \dots, \psi_N^k)^T$$

e l'equazione (2) diventa

$$\boldsymbol{\psi}_{k+1} = A \boldsymbol{\psi}_k$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 1 - 2\eta + \Delta\tau V_1 & \eta & 0 & \dots & 0 \\ \eta & 1 - 2\eta + \Delta\tau V_2 & \eta & \dots & 0 \\ 0 & \eta & 1 - 2\eta + \Delta\tau V_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \eta \\ 0 & 0 & 0 & \eta & 1 - 2\eta + \Delta\tau V_N \end{pmatrix}.$$

La matrice  $A$  è tridiagonale: ciò semplifica molto la computazione della moltiplicazione matrice per vettore. Inoltre, scrivendo  $A = \mathbb{1} + i\Delta t H$ , si ottiene direttamente la matrice Hamiltoniana, che è indipendente dal passo temporale  $\Delta t$ .

## 1.2 Metodo di Crank-Nicolson

Il metodo di Crank-Nicolson combina mezzo passo del metodo di Eulero esplicito con mezzo passo del metodo implicito. Utilizzando la matrice  $H$  appena calcolata, il passo esplicito da fare è <sup>1</sup>

$$\psi_{k+1/2} = \left( \mathbb{1} + i \frac{\Delta t}{2} H \right) \psi_k,$$

seguito dal passo implicito, cioè

$$\left( \mathbb{1} - i \frac{\Delta t}{2} H \right) \psi_{k+1} = \psi_{k+1/2}.$$

Per risolvere il passo implicito, sia  $M = (\mathbb{1} - i \frac{\Delta t}{2} H)$ . Come si è già visto, questa matrice è tridiagonale e può essere fattorizzata nel seguente modo:

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & 0 & \cdots \\ e_2 & a_2 & c_2 & 0 & \cdots \\ 0 & e_3 & a_3 & c_3 & \cdots \\ 0 & 0 & e_4 & a_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \beta_2 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \beta_3 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \beta_4 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \alpha_2 & \gamma_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \gamma_3 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = LU.$$

Nel caso considerato, i coefficienti di  $M$  sono

$$a_i = 1 + \eta - V_i \frac{\Delta \tau}{2}, \quad c_i = e_i = -\frac{\eta}{2}$$

e da questi si possono ricavare quelli di  $L$  e  $U$  partendo da  $\alpha_1 = a_1$ :

$$\beta_i = -\frac{\eta}{2\alpha_{i-1}}, \quad \gamma_i = -\frac{\eta}{2}, \quad \alpha_i = a_i - \frac{\eta}{4\alpha_{i-1}}.$$

Infine, per risolvere  $LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , con  $\mathbf{x} = \psi_{k+1}$  e  $\mathbf{b} = \psi_{k+1/2}$ , si risolve prima ricorsivamente  $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ :

$$y_1 = b_1 \quad y_i = b_i - \beta_i y_{i-1} \quad i = 2, \dots, N$$

e poi ricorsivamente  $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ :

$$x_N = \frac{y_N}{\alpha_N} \quad x_i = \frac{y_i}{\alpha_i} - \frac{x_{i+1}\gamma_i}{\alpha_i} \quad i = N-1, \dots, 0.$$

## 2 Simulazione di particella libera

Il caso in cui  $V(x) = 0$  è quello di particella libera. Si usa come condizione iniziale  $\psi(0,0) = 1$  e  $\psi(x,0) = 0 \forall x \neq 0$ .

---

<sup>1</sup>Mentre la notazione  $\psi_k$  corrisponde a  $\psi(t)$ , la notazione  $\psi_{k+1/2}$  corrisponde a  $\psi(t + \Delta t/2)$