

# 1 Somma di Reimann

Dato  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ , fissato  $n \in \mathbb{N}$

poniamo  $h = \frac{b-a}{n}$  e

$x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = a + 2h, \dots, x_n = a + nh$

$\forall k \in \{1, \dots, n\}$  fissiamo  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$

Sia  $f$  continua su  $[a, b]$ . Poniamo

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)h = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \frac{b-a}{n}$$

$S_n$  = somma di Riemann  $n$ -esima

**Nota**  $S_n$  dipende dalla scelta di  $\xi_1, \dots, \xi_n$ , che è arbitraria

**Osservazione**  $a = b \Rightarrow S_n = 0 \forall n$

**Osservazione**  $\forall x \in [a, b]. f(x) = c \Rightarrow S_n = c(b-a)$  Dunque  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è costante, in questi casi

## 1.1 Teorema

$f$  continua in  $[a, b]$ . Allora  $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  *finito* t.c limite \*\* dipende dalla  $n \rightarrow +\infty$  sulla retta dei punti  $\xi_1, \dots, \xi_n$  fatta nella costruzione sopra

Si scrive

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f$$

e si dice che  $f$  è integrabile

**Osservazione** dalle precedenti osservazioni si deduce

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \text{ e}$$

$$\int_a^b cdx = c(b-a)$$

**Osservazione** Esistono funzioni discontinue per cui  $\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  oppure dipende dalla scelta dei punti  $\xi_1, \dots, \xi_n$  fatta ad ogni passo

**Osservazione** Se  $f$  ha un numero finito di punti di discontinuità (con salto finito) allora  $f$  è integrabile.

# 2 Proprietà dell'integrale

1. **Linearità:**  $f, g$  continue su  $[a, b]$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Allora  $\lambda f + \mu g$  è integrabile e vale

$$\int_a^b [\lambda f + \mu g] = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$$

2. **Additività:**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile

Allora  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$  vale

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

3. **Monotomia:**  $f, g$  continue su  $[a, b]$

$$\forall x \in [a, b] f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g \quad \text{con } a < b$$

4. **Convenzione:**

$$\forall a, b \int_a^b f = - \int_b^a f$$

### 3 Teorema della media integrale

$f$  continua su  $[a, b]$ , allora  $\exists c \in [a, b]$  t.c

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$$

**Dimostrazione:** Siano  $x_0$  e  $x_1$  punti di minimo e massimo assoluti (Weierstrass). Allora

$$\forall x \in [a, b] \cdot f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) \Rightarrow \underbrace{\int_a^b f(x_0) dx}_{f(x_0)(b-a)} \leq \int_a^b f(x) dx \leq \underbrace{\int_a^b f(x_1) dx}_{f(x_1)(b-a)}$$

Divido per  $b-a$  e trovo

$$f(x_0) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq f(x_1)$$

Per il teorema dei valori intermedi applicato a  $f$ ,

$$\exists c \in [a, b] \text{ t.c } f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq f(x_1)$$

## 4 La primitiva di una funzione

### 4.1 Definizione

$f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ .  $F : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  si dice primitiva di  $f$  su  $]a, b[$  se vale  $F'(x) = f(x) \forall x \in ]a, b[$

**Osservazione:** Se  $F$  è la primitiva di  $f$  su  $]a, b[$ , allora  $H : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $H(x) = F(x) + C$  è primitiva di  $f \forall C \in \mathbb{R}$

**Osservazione personale:** Le primitive di una funzione  $f$  sono infinite, e sono tutte quelle che assumono una forma riconducibile a  $F(x)+C$ , dove ‘ $C$ ’ è un valore scalare

## 4.2 Proposizione:

siano  $F$  e  $G$  primitive di  $f$  su  $]a, b[$ . Allora

$$\exists k \in \mathbb{R} : F(x) - G(x) = k \quad \forall x \in ]a, b[$$

**Dimostrazione:** usiamo  $H : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $H(x) = F(x) - G(x)$ . Vale  $H'(x) = 0 \forall x \in ]a, b[$  e dunque  $H$  è costante su  $]a, b[$

**Osservazione:** La proposizione è valida purché si lavori su un intervallo  $]a, b[$

## 5 Funzioni integrali

### 5.1 Definizione

data  $f : ]a_0, a_0[ \rightarrow \mathbb{R}$  continua e  $c \in \mathbb{R}$  definiamo

$$\underbrace{I_c}_{\text{(Funzione integrale di punto base } c)} : ]a_0, b_0[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad I_c(x) = \int_c^x f(t) dt$$

### 5.2 Proprietà di $I_c$

1.  $I_c(c) = 0$
2. Dati  $c_1, c_2 \in ]a_0, b_0[$ ,

$$I_{c_1}(x) - I_{c_2}(x) = \int_{c_1}^{c_2} f(t) dt \implies I_{c_1} - I_{c_2} \text{ è costante}$$

### 5.3 Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia  $f$  continua su  $]a_0, b_0[$ , sia  $c \in ]a_0, b_0[$   
Allora  $\forall x \in ]a_0, b_0[$  vale  $I'_c(x) = f(x)$

**Dimostrazione:** Bisogna trovare

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{I_c(x+h) - I_c(x)}{h} = f(x)$$

$\forall x \in ]a_0, b_0[$  Guardiamo il limite destro;  
dunque dobbiamo provare che  $\forall h_n \rightarrow 0^+$

$$h_n > 0 \forall n \text{ vale } \frac{I_c(x+h_n) - I_c(x)}{h_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$$

Si scrive

$$I_c(x+h_n) - I_c(x) = \int_c^{x+h_n} f - \int_c^x f = \int_x^{x+h_n} f(t) dt$$

Per teorema della media integrale

$$\exists c_n \in [x, x+h_n] \text{ t.c. } \frac{1}{h_n} \int_x^{x+h_n} f(t) dt = f(c_n).$$

Poiché  $f$  è continua e  $c_n \rightarrow x$ , si ottiene  $f(c_n) \rightarrow f(x)$ . **qed**

## 5.4 Teorema fondamentale del calcolo 2 o Formula di Torricelli

Se  $f$  è continua su  $]a_0, b_0[$  e se  $F$  è primitiva di  $f$  su  $]a_0, b_0[$  allora  $\forall a, b \in ]a_0, b_0[$  vale:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

**Dimostrazione:** Sia  $c \in ]a_0, b_0[$   
 $I_c$  e  $F$  sono le primitive di  $f$  su  $]a_0, b_0[$ .  
Per il teorema di caratterizzazione delle primitive

$$\exists k \in \mathbb{R} \text{ t.c. } F(x) = I_c(x) + k \forall x \in ]a_0, b_0[$$

Dunque

$$F(b) - F(a) = I_c(b) + k - I_c(a) + k = I_c(b) - I_c(a) = \int_c^b f - \int_c^a f = \int_a^b f(x)dx$$

**qed**