1 Derivate parziale

Def: $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}$, $(\overline{x}, \overline{y}) \in A$

Poniamo
$$\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, \overline{y}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\overline{x}+h, \overline{y}) - f(\overline{x}, \overline{y})}{h}$$
e
$$\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}, \overline{y}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\overline{x}, \overline{y}+h) - f(\overline{x}, \overline{y})}{h}$$

Se i due limiti esistono (finiti), diciamo che f è derivabile parziamente in $(\overline{x}, \overline{y})$.

Poniamo
$$\nabla f(\overline{x}, \overline{y}) = (\partial_x f(\overline{x}, \overline{y}), \partial_y f(\overline{x}, \overline{y}))$$
gradiente di f

Più in generale, se $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^n$, $\overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n) \in A$ e $j \in \{1, \ldots, n\}$, $e_1, \ldots, e_n$ basi canoniche in $\mathbb{R}^n$

Poniamo
$$\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\overline{x}+he_j) - f(\overline{x})}{h}$$
(*anche* $\partial_j f(\overline{x})$). Derivate parziali rispetto x_j

2 Derivabilità e continuità

Ci chiediamo se l'esitenza della derivate parziali implichino la continuità. La risposta è negativa grazie al segiente esempio

ES $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad se\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1. $\exists \partial_x f(0,0), \partial_y f(0,0)$
2. f è discontinua in $(0,0)$

verifica di 1
$$\partial_x f(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h*0}{h^2+0^2} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$
Analogamente $\partial_x f(0,0) = 0$

Verifica di 2 Usiamo la definizione "per sucessioni": troviamo, segliendo $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \to (0,0)$
$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n} * \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{2} \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
Dunque f non è continua in $(0,0)$

3 Differenziabilità

Ricordiamo che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è derivabile in $\overline{x}$ con derivata $f'(\overline{x})$ se e solo se

$$f(\overline{x}+h) = f(\overline{x}) + f'(\overline{x})h + o(h)$$

dove il resto $o(h)$ soddisfa

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{o(h)}{h}\right| = 0$$

equivalente

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ t.c \ \left|\frac{o(h)}{h}\right| < \varepsilon \quad \forall h \in]-\delta, \delta[$$

3.1 Definizione di "o piccolo" in $\mathbb{R}^2$

Def Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto contenete $(0,0)$

Sia $g : A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $p \geq 0$.

Si scrive $g(h,k) = o(\|(h,k)\|)$ per $(h,k) \to (0,0)$ se vale

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ t.c \ \left|\frac{o(h)}{h}\right| < \varepsilon \quad \forall (h,k) \in A \cap B((0,0),\delta)$$

Esempi:

$$g(h,k) = hk = o(|(h,k)|) \quad per \ (h,k) \to (0,0)$$

$$g(h,k) = \sqrt{|h|^{1/2}} = o(|(h,k)|) = o(1)$$

$$g(h,k) = h^2k + k^3 = o(|(h,k)|^2) \quad (h,k) \to (0,0)$$

3.2 Def. funzione differenziabile

$A \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}$, $(\overline{x},\overline{y}) \in A$. (A aperto) Si dice che f è differenziabile in $(\overline{x},\overline{y})$ se

1. $\exists \partial_x f(\overline{x},\overline{y}), \partial_y f(\overline{x},\overline{y}) \in \mathbb{R}$
2. $\forall (h,k) \ t.c \ (\overline{x},\overline{y}) + (h,k) \in A$ vale lo sviluppo:

$$f((\overline{x},\overline{y})+(h,k)) = f(\overline{x},\overline{y}) + \langle \nabla f(\overline{x},\overline{y}), (h,k)\rangle + o(|(h,k)|) \quad per \ (h,k) \to (0,0)$$

Osservazione: f differenziabile in $(\overline{x},\overline{y}) \in A \implies f$ continua in $(\overline{x},\overline{y})$. Basta osservare che $\forall (h_n,k_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$ risulta

$f(\overline{x},\overline{y}) + (h_n,k_n)) - f(\overline{x},\overline{y}) = \langle \nabla f(\overline{x},\overline{y}), (h_n,k_n)\rangle + o(|(h_n,k_n)|)$

Nelle coordinate $(\overline{x}+h, \overline{y}+k) = (x,y) \in A$ si scrive:

$$f(x,y) = f(\overline{x},\overline{y}) + \langle \nabla f(\overline{x},\overline{y}), (x-\overline{x}, y-\overline{y})\rangle + o(|(x-\overline{x}, y-\overline{y})|) \quad (x,y) \to (\overline{x},\overline{y})$$

Da questa formula emerge

$$T_1(x,y) = f(\overline{x},\overline{y}) + \langle \nabla f(\overline{x},\overline{y}), (x-\overline{x}, y-\overline{y})\rangle$$

T_1 = Polinomio di Taylor del primo ordine con punto iniziale $(\overline{x},\overline{y})$

Infine $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = T_1(x,y)\}$ è il piano tangente al grafico di f in $(\overline{x},\overline{y},f(\overline{x},\overline{y}))$.

3.3 Teorema della differenziabilità

Se f è C^1 su $A \in \mathbb{R}^2$, A aperto, allora $\forall(\overline{x}, \overline{y}) \in A$ f è differenziabile.

3.3.1 Lemma preliminare

Se $f : A \to \mathbb{R}$ è C^1 sull'aperto $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $\forall(\overline{x}, \overline{y}) \in A$, $\forall h, k \in \mathbb{R}$
Tali che $(\overline{x} + h, \overline{y})$, $(\overline{x}, \overline{y} + k) \in A$, esistono $\theta_1, \theta_2 \in]0, 1[$ tali che

$$f(\overline{x} + h, \overline{y}) - f(\overline{x}, \overline{y}) = \partial_x f(\overline{x} + \theta_1 h, \overline{y}) \quad e$$
$$f(\overline{x}, \overline{y} + h) - f(\overline{x}, \overline{y}) = \partial_y f(\overline{x}, \overline{y} + \theta_2 k)$$

Dim di 1 Per semplicità $A = \mathbb{R}^2$.
Considero la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(t) = f(t, \overline{y})$
Si verifica che g è derivabile e vale

$$g(t) = \partial_x f(t, h) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Ora uso Lagrange sull'intervallo di estemi $\overline{x}$ e $\overline{x} + h$ per la funzione g. $\implies$ $\exists\theta_1 \in]0, 1[$ tale che $g(\overline{x} + h) - g(\overline{x}) = g'(\overline{x} + \theta_1, h)h$ Trascrivendo in termini di f, si trova

$$f(\overline{x} + h, \overline{y}) - g(\overline{x}, \overline{y}) = \partial_x f(\overline{x} + \theta_1 h, \overline{y})h$$

Dim 2 è analoga

3.3.2 Dimostrazione del teorema sulla differenziabilità

Per semplicità $A = \mathbb{R}^2$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ classe C^1 e $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{R}^2$. Per $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ vale

$f(\overline{x}+h, \overline{y}+k) - f(\overline{x}, \overline{y}) = [f(\overline{x}+h, \overline{y}+k) - f(\overline{x}+h, \overline{y}] + [f(\overline{x}+h, \overline{y}) - f(\overline{x}, \overline{y})] := (1)+(2)$

Grazie al lemma precendente $\exists\theta_1, \theta_2 \in]0, 1[$ tali che

1. $= \partial_y f(\overline{x} + h, \overline{y} + \theta_1 k)k$
2. $= \partial_x f(\overline{x} + \theta_2 h, \overline{y})h$

Per concludere, basta mostrare che per $(h, k) \to (0, 0)$

1. $= \partial_y f(\overline{x}, \overline{y})k + o(|(h, k)|)$
2. $= \partial_x f(\overline{x}, \overline{y})k + o(|(h, k)|)$

In altri termini basta vedere che (qualizziamo (2), ad esempio) $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0$ tali che

$$\frac{|\partial_x f(u, v) - \partial_x f(\overline{x}, \overline{y})| < \varepsilon}{|(h, k)|} \quad \forall(h, k) \neq (0, 0) \ \ |(h, k) < \delta$$

Siccome $\partial_x f$ è continua, $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0$ tali che

$$|\partial_x f(u, v) - \partial_x f(\overline{x}, \overline{y})| < \varepsilon \quad \forall(u, v) \in B((\overline{x}, \overline{y}), \delta)$$

Con questa scelta di δ , usando $\left|\frac{h}{|(h,k)|}\right| \leq 1$, abbiamo

$$|\partial_x f(\overline{x} + \theta_2 h, \overline{y}) - \partial_x f(\overline{x}, \overline{y})| < \varepsilon$$

perchè $(\overline{x} + \theta_2 h, \overline{y}) \in B((\overline{x}, \overline{y}), f)$ $\forall\theta_2 \in]0, 1[,\ \forall(h, k) \in B((0, 0), \delta)$
L'analisi del termine (1) si svolge in modo analogo