

## 1 Integrazione per parti

Viene usata nei casi come  $\int x^k \sin x$

### 1.1 Variante del teorema fondamentale del calcolo

**Proposizione:** Sia  $h : I \rightarrow J$  derivabile e  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  continua ( $I, J \subseteq \mathbb{R}$  intervalli aperti). Definiamo  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_c^{h(x)} f(t) dt$$

Allora  $F$  è derivabile in ogni  $x \in I$  e vale  $F'(x) = f(h(x))h'(x)$ .

**Dimostrazione:** scrivo

$$I_c(z) = \int_c^z f(t) dt \quad \forall z \in J$$

Allora si scrive  $F = I_c \circ h$ .

Dalla formula per la derivata di funzioni composte otteniamo

$$F'(x) = I'_c(h(x))h'(x) = f(h(x))h'(x)$$

## 2 Formula per il cambio variabile

**Teorema:**  $I, J$  intervalli aperti,  $h : I \rightarrow J$  con derivata  $h'$  continua su  $I$   $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Allora  $\forall \alpha, \beta \in I$  vale

$$\int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(h(t))h'(t) dt$$

**Dimostrazione:** siano  $F : I \rightarrow \mathbb{R}, G : I \rightarrow \mathbb{R}, F(z) = \int_{h(\alpha)}^{h(z)} f(x) dx, G(z) = \int_{\alpha}^z f(h(t))h'(t) dt$

Le funzioni integrande sono continue,  $h'$  è continua. Dunque  $F$  e  $G$  sono derivabili in  $I$ .

Vale  $F'(z) = f(h(z))h'(z)$  e  $G'(z) = f(h(z))h'(z) \quad \forall z \in I$

Dunque  $F - G$  è costante su  $I$ .

Poiché  $F(\alpha) = 0, G(\alpha) = 0$ , si conclude che  $F(z) = G(z) \quad z \in I$

## 3 Integrali generalizzati

**Definizione**  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  continua.

Si dice che  $f$  è integrabile in senso generalizzato su  $[a, +\infty[$  se

$$\exists \lim_{z \rightarrow +\infty} \int_a^z f(x) dx =: \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

La definizione per  $f : ]-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è omessa perché analoga

**Definizione:**  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ , continua. Si dice che  $f$  è integrabile in senso generalizzato su  $]a, b[$  se

$$\exists \lim_{z \rightarrow a^+} \int_z^b f(x) dx =: \int_a^b f(x) dx$$