

Appunti di Analisi (prettamente 2)

Luca Tagliavini

Sometime in June 2021

Indice

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Formule | 4 |
| 1.1 | Formule goniometriche | 4 |
| 1.2 | Prodotto scalare | 4 |
| 1.3 | Norma euclidea | 4 |
| 1.3.1 | Vettore di norma unitaria | 4 |
| 1.4 | Gradiente | 4 |
| 1.5 | Derivata direzionale | 5 |
| 1.6 | Matrice Hessiana | 5 |
| 1.7 | Determinante | 5 |
| 1.7.1 | Determinante di matrici 1×1 | 5 |
| 1.7.2 | Determinante di matrici 2×2 | 5 |
| 1.8 | Segno di una matrice Hessiana | 6 |
| 1.9 | Studio di punti critici | 6 |
| 1.10 | Taylor in due variabili (prim'ordine) | 6 |
| 1.11 | Taylor in due variabili (secondo ordine) | 6 |
| 1.12 | OSS: formule di Taylor | 7 |
| 2 | Teoria - I modulo | 8 |
| 2.1 | Teorema: dell'unicità del limite | 8 |
| 2.2 | Teorema: dei due carabinieri | 8 |
| 2.3 | Teorema: degli zeri | 8 |
| 2.4 | Teorema: di Weierstrass | 8 |
| 2.5 | Teorema: di Fermat | 9 |
| 2.6 | Teorema: di Rolle | 9 |
| 2.7 | Teorema: di Lagrange | 9 |
| 2.8 | Teorema: di Cauchy | 9 |
| 2.9 | Teorema: di de l'Hopital | 10 |
| 3 | Teoria - II modulo | 11 |
| 3.1 | Def: Somma di Riemann | 11 |
| 3.2 | Def: Integrale di una funzione | 11 |
| 3.3 | Teorema: media integrale | 12 |

| | | |
|--------|--|----|
| 3.4 | Def: Primitiva | 12 |
| 3.5 | Teorema: caratterizzazione delle primitive di f su un intervallo | 12 |
| 3.6 | Def: Funzione integrale | 13 |
| 3.7 | Teorema: fondamentale del calcolo integrale (I) | 13 |
| 3.8 | Teorema: fondamentale del calcolo integrale (II) o di Toricelli | 14 |
| 3.9 | Def: integrale generalizzato | 15 |
| 3.10 | Def: Spazio \mathbb{R}^n | 15 |
| 3.11 | Def: prodotto scalare | 15 |
| 3.11.1 | Proprieta: prodotto scalare | 15 |
| 3.12 | Def: Norma euclidea | 15 |
| 3.12.1 | Proprieta': norma euclidea | 16 |
| 3.13 | Def: intorni sferici | 16 |
| 3.14 | Def: successioni in \mathbb{R}^n | 16 |
| 3.15 | Def: insieme limitato | 16 |
| 3.16 | Def: insieme aperto | 16 |
| 3.17 | Def: funzione di piu' variabili | 17 |
| 3.18 | Def: insieme di livello | 17 |
| 3.19 | Def: funzione continua | 17 |
| 3.20 | Def: derivata parziale | 17 |
| 3.21 | Def: Gradiente | 17 |
| 3.22 | Dim: Derivabilita' e continuita' | 18 |
| 3.23 | Def: funzione differenziabile | 19 |
| 3.23.1 | Prop: differenziabilita' e continuita' | 19 |
| 3.24 | Extra: polinomio di Taylor e piano tangente | 20 |
| 3.25 | Def: funzioni di classe C^1 | 20 |
| 3.26 | Teorema: differenziabilita' delle funzioni di classe C^1 | 20 |
| 3.27 | Def: Derivata direzionale | 22 |
| 3.28 | Teorema: del gradiente | 23 |
| 3.29 | Def: curva o cammino | 24 |
| 3.30 | Def: velocita' o vettore tangente di un cammino | 24 |
| 3.31 | Def: derivata lungo un cammino | 24 |
| 3.32 | Def: matrice Jacobiana | 25 |
| 3.33 | Teorema: di Fermat | 26 |
| 3.34 | Def: punto di sella | 26 |
| 3.35 | Def: derivata seconda | 26 |
| 3.36 | Def: matrice Hessiana | 27 |
| 3.37 | Def: funzione di classe C^2 | 27 |
| 3.38 | Teorema: di Schwarz | 27 |
| 3.39 | Def: forma quadratica | 28 |
| 3.39.1 | Def: forma quadratica positiva | 29 |
| 3.39.2 | Def: forma quadratica negativa | 29 |
| 3.39.3 | Def: forma quadratica indefinita | 29 |
| 3.39.4 | Def: forme semidefinite | 29 |
| 3.40 | Teorema: classificazione delle forme quadratiche | 29 |
| 3.41 | Def: Formula di Taylor di grado secondo | 30 |
| 3.42 | Teorema: sulle forme quadratiche positive ($\exists m > 0$) | 32 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 3.43 | Teorema: classificazione dei punti critici | 33 |
| 3.44 | Prop: condizione necessaria al secondo ordine | 35 |
| 3.45 | Def: funzione convessa | 35 |
| 3.46 | Teorema: caratterizzazione funzioni convesse-derivabili | 35 |
| 3.47 | Teorema: caratterizzazione di funzioni convesse derivabili due volte | 36 |
| 3.48 | Teorema: Taylor secondo ordine con resto secondo Lagrange in $n = 1$ | 37 |
| 3.49 | Teorema: Taylor secondo ordine con resto secondo Lagrange in $n > 1$ | 38 |
| 3.50 | Def: segmento | 38 |
| 3.51 | Def: insieme convesso | 38 |
| 3.52 | Def: Funzioni convesse in $n > 1$ | 39 |
| 3.53 | Teorema: caratterizzazione della complessita' con la matrice Hes- siana | 39 |
| 3.54 | Def: insiemi x, y -semplici | 40 |
| 3.55 | Prop: formula di riduzione per integrali doppi | 40 |
| 4 | Domande secondo parziale | 41 |

1 Formule

1.1 Formule goniometriche

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$
$$\cos^2 x = \frac{1 + \sin(2x)}{2}$$

1.2 Prodotto scalare

Presi due vettori $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n), \bar{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ si definisce il loro *prodotto scalare* (o prodotto intero) come:

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n = \sum_{k=1}^n u_k v_k$$

NOTA: se il prodotto scalare e' nullo i due vettori sono perpendicolari.

1.3 Norma euclidea

Dato un vettore $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ definiamo la sua norma come:

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n v_k^2} = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

1.3.1 Vettore di norma unitaria

Un *vettore di norma unitaria*, o *versore*, e' un vettore la cui norma ha valore

1. Un qualunque vettore puo' essere reso versore dividendolo per la sua norma.

Preso $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ scriviamo il vettore di norma unitaria come:

$$v_{uni} = \frac{v}{\|v\|} = \left(\frac{v_1}{\|v\|}, \frac{v_2}{\|v\|}, \dots, \frac{v_n}{\|v\|} \right)$$

1.4 Gradiente

Dato $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ possiamo definire il *gradiente di f* per un suo generico punto (x_1, x_2, \dots, x_n) derivabile in tutte le variabili x_1, x_2, \dots, x_n come:

$$\nabla f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n), f_{x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_{x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

NOTA(1): il gradiente in un dato punto calcola il *vettore di direzione di massima crescita* per quella funzione in quel punto.

NOTA(2): un punto in cui vale $\nabla f(\bar{v}) = \bar{0}$ si chiama *punto stazionario* o *punto critico*. Tali punti saranno poi studiati tramite le tecniche elencate di seguito.

1.5 Derivata direzionale

Dati $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = 1$ (v di norma unitaria), tali che si possa calcolare il gradiente di f nel punto (x_1, x_2, \dots, x_n) , la *derivata direzionale* può essere calcolata come:

$$\frac{\delta f}{\delta v}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \langle \nabla f(x_1, x_2, \dots, x_n), v \rangle$$

1.6 Matrice Hessiana

La *Hessiana* di una funzione in più variabili $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è la matrice quadrata $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ tale che:

$$H_f(\bar{v}) = \begin{bmatrix} \frac{\delta^2 f}{\delta v_1^2}(\bar{v}) & \frac{\delta^2 f}{\delta v_1 \delta v_2}(\bar{v}) & \dots & \frac{\delta^2 f}{\delta v_1 \delta v_n}(\bar{v}) \\ \frac{\delta^2 f}{\delta v_2 \delta v_1}(\bar{v}) & \frac{\delta^2 f}{\delta v_2^2}(\bar{v}) & \dots & \frac{\delta^2 f}{\delta v_2 \delta v_n}(\bar{v}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta^2 f}{\delta v_n \delta v_1}(\bar{v}) & \frac{\delta^2 f}{\delta v_n \delta v_2}(\bar{v}) & \dots & \frac{\delta^2 f}{\delta v_n^2}(\bar{v}) \end{bmatrix} \quad \text{con } \bar{v} \in A$$

1.7 Determinante

Il *determinante* di una funzione è un numero univoco associato ad ogni matrice calcolabile tramite varie tecniche. Poiché lavoreremo quasi sempre con matrici quadrate 2×2 impariamo il metodo più semplice:

1.7.1 Determinante di matrici 1×1

Dove $A \in M_1(\mathbb{R})$, ovvero A è una matrice 1×1 contenente un solo numero $(a_{1,1})$, vale $\det(A) = a_{1,1}$.

1.7.2 Determinante di matrici 2×2

Data la matrice $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ il suo determinante è dato dalla seguente formula, simile a quella del delta per le equazioni di secondo grado (non a caso):

$$\det(A) = (a \cdot d) - (b \cdot c)$$

1.8 Segno di una matrice Hessiana

Data una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ di cui si puo' calcolare la matrice Hessiana $H_f(\bar{v}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, si puo' classificare un dato punto \bar{v} in base al valore di $\det(H_f(\bar{v}))$:

1. $\det(H_f(\bar{v})) > 0, a > 0 \rightarrow H_f$ **definita positiva** (minimo)
2. $\det(H_f(\bar{v})) > 0, a < 0 \rightarrow H_f$ **definita negativa** (massimo)
3. $\det(H_f(\bar{v})) < 0 \rightarrow H_f$ **indefinita** (sella)
4. $\det(H_f(\bar{v})) = 0 \rightarrow H_f$ **semidefinita** (non possiamo dire nulla)

1.9 Studio di punti critici

Dato un punto critico (x_1, \dots, x_n) e l'Hessiana della funzione $H_f(x_1, \dots, x_n)$ per determinare il tipo di punto critico possiamo valutare l'Hessiana nel punto dato e studiare il segno della matrice secondo il seguente teorema:

1. H_f definita **positiva** allora (x_1, \dots, x_n) punto di minimo
2. H_f definita **negativa** allora (x_1, \dots, x_n) punto di massimo
3. H_f **indefinita** allora (x_1, \dots, x_n) punto di sella
4. H_f **semidefinita** non possiamo dire nulla

1.10 Taylor in due variabili (prim'ordine)

Data una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 e un punto (x_0, y_0) , l'equazione del polinomio di Taylor al prim'ordine per funzioni in due variabili e' come segue:

$$T_1(x, y) = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle$$

In egual modo, usando la notazione piu' compatta $v = (x, y)$ e $\bar{v} = (x_0, y_0)$:

$$T_1(v) = f(\bar{v}) + \langle \nabla f(\bar{v}), v - \bar{v} \rangle$$

1.11 Taylor in due variabili (secondo ordine)

Data una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 e un punto (x_0, y_0) , l'equazione del polinomio di Taylor al secondo ordine per funzioni in due variabili e' come segue:

$$T_2(x, y) = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle \\ + \frac{1}{2} \langle H_f(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle$$

In egual modo, usando la notazione piu' compatta $v = (x, y)$ e $\bar{v} = (x_0, y_0)$:

$$T_2(v) = f(\bar{v}) + \langle \nabla f(\bar{v}), v - \bar{v} \rangle \\ + \frac{1}{2} \langle H_f(\bar{v})(v - \bar{v}), (v - \bar{v}) \rangle$$

OSS: L'ultimo prodotto scalare, viene spesso riportato in modo esplicito come segue:

$$\frac{1}{2} \langle H_f(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle = \\ \frac{1}{2} [f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2]$$

1.12 OSS: formule di Taylor

Entrambe i polinomi di Taylor sopra riportati potrebbero essere scritti tramite il teorema di Taylor con resto secondo peano e usando variabili d'incremento h, k tali che $h = x - x_0, k = y - y_0$:

$$T_1(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (h, k) \rangle + o(\|(h, k)\|) \\ T_2(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (h, k) \rangle \\ + \frac{1}{2} \langle H_f(x_0, y_0)(h, k), (h, k) \rangle + o(\|(h, k)\|^2)$$

2 Teoria - I modulo

2.1 Teorema: dell'unicità del limite

Presa $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Se:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}} \implies l \text{ è unico}$$

2.2 Teorema: dei due carabinieri

$f, g, h : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ dove \mathbb{I} è un intorno di x_0

- $\forall x \in \mathbb{I} \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x)$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$ con $l \in \mathbb{R}$

Allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$$

2.3 Teorema: degli zeri

Presa $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

- f continua su $[a, b]$
- $f(a) \cdot f(b) < 0$ (estremi con segno opposto)

Allora:

$$\exists c \in]a, b[: \quad f(c) = 0$$

2.4 Teorema: di Weierstrass

Presa $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

- f continua su $[a, b]$

Allora:

$$\exists x_1, x_2 \in [a, b] : \\ f(x_1) = \min_{[a, b]} f, \quad f(x_2) = \max_{[a, b]} f$$

o meglio:

$$f([a, b]) = [\min_{[a, b]} f, \max_{[a, b]} f]$$

2.5 Teorema: di Fermat

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

- $\exists c \in]a, b[$ dove c punto di *max/min* relativo
- f derivabile in c

Allora:

$$f'(c) = 0$$

2.6 Teorema: di Rolle

Presa $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

- f e' *continua* su $[a, b]$
- f e' *derivabile* in $]a, b[$
- $f(a) = f(b)$

Allora:

$$\exists c \in]a, b[: f'(c) = 0$$

2.7 Teorema: di Lagrange

Presa $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

- f e' *continua* su $[a, b]$
- f e' *derivabile* in $]a, b[$

Allora:

$$\exists c \in]a, b[: \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

2.8 Teorema: di Cauchy

Presa $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

- f, g *continue* su $[a, b]$
- f, g *derivabili* in $]a, b[$
- $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$

Allora:

$$\exists c \in]a, b[: \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

2.9 Teorema: di de l'Hopital

Presa $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ dove $a, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

- f, g derivabili su $]a, b[$
- che valga uno:
 1. $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right]$ oppure $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$
 2. $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right]$ oppure $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$
- $g' \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$

Allora:

1. $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$
2. $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

3 Teoria - II modulo

3.1 Def: Somme di Riemann

Presa $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f continua e i punti $a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ con $n \in \mathbb{N}$ tali che $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.

Scelgo poi la famiglia di punti $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ scelti in modo arbitrario, ma tali che

$$\varepsilon_k \in [x_{k-1}, x_k] \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Ora possiamo definire la *somma di Riemann* n -esima relativa alla funzione f come

$$\begin{aligned} S_n &= f(\varepsilon_1)(x_1 - x_0) + f(\varepsilon_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(\varepsilon_n)(x_n - x_{n-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n f(\varepsilon_k)(x_k - x_{k-1}) \end{aligned}$$

Teorema (non dimostrato): la successione creata dalla somma di Riemann facendo tendere la $n \rightarrow \infty$ converge sempre ad un numero $k \in \mathbb{R}$.

3.2 Def: Integrale di una funzione

Prese $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tali che f, g continue, l'integrale negli estremi a, b rispetta le seguenti proprietà:

1. **Linearità**: dati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vale:

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

2. **Additività**: presi $a, b, c \in]a, b[$ tali che $a < c < b$ vale:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

3. **Convenzione**: $a < b$, altrimenti si applica la seguente regola:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Si noti come questa convenzione fa valere la proprietà di additività anche qual'ora i punti non siano nell'ordine $a < c < b$.

4. **Monotonia**: se $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$ allora:

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

3.3 Teorema: media integrale

Enunciato: Presa $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, allora $\exists z \in [a, b]$ tale che

$$f(z) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Per visualizzare, z e' il punto tale che $f(z) \cdot (b-a)$, ovvero l'area di altezza $f(z)$ e base $b-a$ vale esattamente $\int_a^b f(x) dx$.

Dimostrazione: uso weierstrass, trovo min e max e so che $f(x)$ e' compreso tra essi, poi uso la proprieta' della monotonia (cambio m, M con gli integrali), infine per il teorema dei valori intermedi arrivo a quello che volevo.

Da Weierstrass ho che $m = \min_{[a,b]} f, M = \max_{[a,b]} f$, allora $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in \mathcal{D}(f)$. Per la *proprietà di monotonia* degli integrali ne segue che:

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$$

Poiche' $k \in \mathbb{R} \int_a^b k dx = k(b-a)$ ho che:

$$\begin{aligned} m(b-a) &\leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \\ \frac{1}{b-a} \cdot m(b-a) &\leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \cdot \frac{1}{b-a} \\ m &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M \end{aligned}$$

Per il teorema dei valori intermedi ho che

$$\exists z. f(z) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

□

3.4 Def: Primitiva

Preso $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continua e dato $E \subseteq]a, b[$ si dice che $F : E \rightarrow \mathbb{R}$ e' una *primitiva* se vale $F'(x) = f(x) \forall x \in E$

NOTA: Se F e' una primitiva di f su E allora $\forall k \in \mathbb{R}$ la funzione $G(x) = k + F(x)$ e' ancora una primitiva di f su E .

3.5 Teorema: caratterizzazione delle primitive di f su un intervallo

Enunciato: Se $F, G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sono primitive di $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ allora $\exists k \in \mathbb{R}. F(x) - G(x) = k \quad \forall x \in [a, b]$.

Dimostrazione: definisco $H = F - G$ e faccio la derivata nulla.

Siano F, G primitive di f su $[a, b]$. Definisco la funzione $H(x) = F(x) - G(x)$ e noto che e' costante, poiche' $H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$ ha derivata uguale a zero ed e' percio' costante. Dunque $\exists k \in \mathbb{R}. F(x) - G(x) = k \quad \forall x \in [a, b]$. □

3.6 Def: Funzione integrale

Sia $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, dato $c \in]a, b[$ definiamo $I_c :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ come $I_c(x) = \int_c^x f(t) dt$ come *funzione integrale di primo estremo c*.

La funzione descrive come varia l'integrale al cambiare dell'ampiezza dell' intervallo, sempre partendo dal punto c .

Osservazione(1): $I_c(c) = \int_c^c f(t) dt = 0$

Osservazione(2): presi $c_1 \neq c_2 \in]a, b[$ la scrittura $I_{c_1}(x) - I_{c_2}(x) = \int_{c_1}^x f - \int_{c_2}^x f = \int_{c_1}^x f + \int_x^{c_2} f = \int_{c_1}^{c_2} f$ per la proprieta' dell'additivita'. La differenza di due funizioni integrali e' dunque sempre costante.

3.7 Teorema: fondamentale del calcolo integrale (I)

Enunciato: Presa $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continua, $c \in]a, b[$, *implica che* la funzione integrale $F(x) = I_c(x) = \int_c^x f(t) dt$ e' derivabile su $]a, b[$ e vale $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in]a, b[$, ovvero che F e' una primitiva di f .

Dimostrazione: applico le def. di derivata e funzione integrale, poi l'additivita', uso una successione per far tendere h a zero e applico il teorema della media itegrale

Vogliamo mostrare che:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta x} \int_c^x f(t) dt &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_c^{x+h} f - \int_c^x f \right) = ? f(x) \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_c^{x+h} f + \int_x^c f \right) &= ? f(x) \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f &= ? f(x) \end{aligned}$$

Risolvero tramite successioni. Costruisco dunque una successione $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tale che sia una successione di numeri diversi da zero e con $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = 0$. Riscrivo dunque la mia ipotesi come:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{h_n} \int_x^{x+h_n} f = ? f(x)$$

Ora applico il teorema della media integrale su $[x, x + h_n]$ e ottengo:

$$\begin{aligned}\exists \varepsilon_n \in [x, x + h_n] \quad f(\varepsilon_n) &= \frac{1}{x + h_n - x} \int_x^{x+h_n} f \quad \text{ovvero} \\ \exists \varepsilon_n \in [x, x + h_n] \quad f(\varepsilon_n) &= \frac{1}{h_n} \int_x^{x+h_n} f\end{aligned}$$

Dal risultato del teorema noto che $x \leq \varepsilon_n \leq x + h_n$.

Poichè $n \rightarrow \infty$, e per costruzione $h_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ si ha che $x \leq \varepsilon_n \leq x$, ovvero $\varepsilon_n \rightarrow x$. Ma allora, poichè f è continua vale che:

$f(\varepsilon_n) = f(x)$ con $n \rightarrow +\infty$. □

3.8 Teorema: fondamentale del calcolo integrale (II) o di Toricelli

Enunciato: Data $f :]a_0, b_0[\rightarrow \mathbb{R}$ continua, $[a, b] \subseteq]a_0, b_0[$. Sia F una primitiva di f su $[a, b]$ allora vale che:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= F(b) - F(a) \\ &= [F(x)]_a^b \\ &= [F(x)]_{x=a}^{x=b}\end{aligned}$$

Dimostrazione: Definire un punto c in $[a, b]$, trovare I_c che sappiamo essere primitiva per il teorema fondamentale del calcolo, sfruttare il teorema di caratterizzazione per dire che $I_c = F + k$ poi fare $I_c(b) - I_c(a)$ applicando le definizioni (da un lato abbiamo $F(b) - F(a)$ e dall'altro due integrali che possiamo unire per la proprietà di additività

Sia $c \in [a, b]$ e $I_c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Per il teorema fondamentale del calcolo (I) I_c è una primitiva di f su $]a_0, b_0[$.

Per il teorema della caratterizzazione delle primitive $\exists k \in \mathbb{R} \quad \forall x \in]a_0, b_0[\quad I_c(x) = F(x) + k$.

Ho dunque che $I_c(b) - I_c(a) = (F(b) + k) - (F(a) + k) = F(b) - F(a)$. Espandendo la definizione di $I_c(x) = \int_c^x$ nell'equazione soprastante e uso la *proprietà di additività degli integrali*:

$$\begin{aligned}\int_c^b f - \int_c^a f &= F(b) - F(a) \\ \int_c^b f + \int_a^c f &= F(b) - F(a) \\ \int_a^b f &= F(b) - F(a)\end{aligned}$$

□

3.9 Def: integrale generalizzato

Presa $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continua, definiamo:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c dx$$

Analogamente presa $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, definiamo:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b dx$$

NOTA: vale per $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

3.10 Def: Spazio \mathbb{R}^n

Definiamo lo spazio dei punti $\mathbb{R}^n = \{\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$.

3.11 Def: prodotto scalare

Presi due vettori $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ si definisce il loro *prodotto scalare* (o prodotto intero) come:

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n = \sum_{k=1}^n u_k v_k$$

NOTA: se il prodotto scalare e' nullo i due vettori sono perpendicolari.

3.11.1 Proprieta: prodotto scalare

1. **simmetria:** $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.
2. **bilinearita':** $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vale:

$$\begin{aligned} \langle \alpha x + \beta y, z \rangle &= \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle \text{ e} \\ \langle z, \alpha x + \beta y \rangle &= \alpha \langle z, x \rangle + \beta \langle z, y \rangle \end{aligned}$$

3. **somma quadratica:** $\forall x \in \mathbb{R}^n$ vale $\langle x, x \rangle = 0 \iff x_1, \dots, x_n = 0$
conseguenza: $\forall x \in \mathbb{R}^n$ vale $\langle x, 0 \rangle = 0$.

3.12 Def: Norma euclidea

Dato un vettore $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ definiamo la sua norma come:

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n v_k^2} = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

3.12.1 Proprieta': norma euclidea

Preso $\bar{x} \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti proprieta':

1. **segno:** $\|\bar{x}\| \geq 0$
2. **annullamento:** $\|\bar{x}\| = 0 \iff x = \bar{0}$
3. **omogeneita':** $\|\lambda \bar{x}\| = \|\lambda\| \|\bar{x}\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
4. **somma:** $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$ e anche $\|\bar{x} + \bar{y}\| \geq \|\bar{x}\| - \|\bar{y}\|$

3.13 Def: interni sferici

In \mathbb{R}^n , preso $\bar{x} \in \mathbb{R}^n, r > 0$ si definisce $B(\bar{x}, r) = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\bar{y} - \bar{x}\| < r\}$.

3.14 Def: successioni in \mathbb{R}^n

Presa $(\bar{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tale che $\bar{x}_k = (\bar{x}_k^1, \dots, \bar{x}_k^n)$ e preso un punto $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$ si definisce la successione come:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \bar{x}_k = c \iff \begin{cases} \lim_{k \rightarrow +\infty} \bar{x}_k^1 = c_1 & \text{sse il limite converge} \\ \vdots \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} \bar{x}_k^n = c_n & \text{sse il limite converge} \end{cases}$$

NOTA: la successione si dice *convergente* sse tutti i suoi limiti convergono.

3.15 Def: insieme limitato

Preso un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$, si dice che A e' un *insieme limitato* se $\exists r > 0$ tale che $\forall \bar{x} \in A. \|\bar{x}\| < r$, o in altro modo, se si puo' costruire una palla centrata in un centro \bar{c} e di raggio r tale che $A \subseteq B(\bar{c}, r)$.

OSS: un insieme si dice *illimitato* se non e' limitato.

3.16 Def: insieme aperto

Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice aperto se $\forall \bar{x} \in A \exists \varepsilon > 0. B(\bar{x}, \varepsilon) \subseteq A$.

In modo intuitivo, indipendentemente da quanto vicino al "bordo" dell'insieme scelto prendiamo il nostro punto \bar{x} , esistera' sempre una palla (intorno in $n = 1$) piccola a piacere (grandezza ε).

NOTA: un insieme si dice *chiuso* quando il suo complementare e' aperto, ovvero:

Preso $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A si dice *chiuso* sse $\mathbb{R}^n \setminus A$ e' aperto.

3.17 Def: funzione di piu' variabili

Preso $A \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^q$ $n, q \in \mathbb{N}$, sia $f : A \rightarrow B$ dove $f : x \mapsto f(x) \in B$.

3.18 Def: insieme di livello

Preso $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ si definisce il suo insieme di livello per un dato valore $b \in B$ l'insieme dei punti dato da:

$$I = \{\bar{x} \in A | f(\bar{x}) = b\} = f^{-1}(b)$$

Per visualizzare in $n = 2$ si puo' pensare al disegno di un paraboloide $f(x, y) = x^2 + y^2$ intersecato con un piano del tipo $z = b = 1$. Infatti, l'insieme di tali punti sarebbe del tipo $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$, come ci dice la definizione.

3.19 Def: funzione continua

Enunciato in $n = 2$ per semplicita' di notazione.

Preso $f : A \rightarrow \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^2$, si dice che f e' continua in $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$ se presa

$$(x_k, y_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ tale che } \begin{cases} (x_k, y_k) \in A \\ (x_k, y_k) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \end{cases}$$

risulta $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k, y_k) = f(\bar{x}, \bar{y})$.

Oltretutto, f si dice *continua su tutto* A sse f e' continua $\forall (\bar{x}, \bar{y}) \in A$.

3.20 Def: derivata parziale

Preso $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto, dato un punto $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$, definiamo

- la derivata rispetto a x come $\frac{\delta f}{\delta x}(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}+h, \bar{y}) - f(\bar{x}, \bar{y})}{h}$.
- la derivata rispetto a y come $\frac{\delta f}{\delta y}(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}, \bar{y}+h) - f(\bar{x}, \bar{y})}{h}$.

3.21 Def: Gradiente

Definiamo il *gradiente* di una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ come:

$$\nabla f(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{\delta f}{\delta x_1}(x_1, \dots, x_n), \dots, \frac{\delta f}{\delta x_n}(x_1, \dots, x_n) \right)$$

3.22 Dim: Derivabilita' e continuita'

A differenza del caso unidimensionale, in piu' variabili la *derivabilita* di una funzione, ossia il poter trovare il suo gradiente con le derivate parziali $\frac{\delta f}{\delta x}$, $\frac{\delta f}{\delta y}$ non implica continuita' di f .

Mostriamolo con un controesempio: supponiamo che la derivabilita' implichi la continuita' e cerchiamo una funzione f che sia derivabile ma non continua.

Prendiamo quindi $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Verifichiamo la derivabilita' in $(0, 0)$ calcolando sia la derivata parziale rispetto a x che a y :

$$\begin{aligned} \frac{\delta f}{\delta x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h \cdot 0}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0 \\ \frac{\delta f}{\delta y}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0 \cdot h}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0 \end{aligned}$$

Ne segue che la funzione e' derivabile in $(0, 0)$, quindi $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$.

Mostriamo ora l'assurdo *provando che f non e' continua in $(0, 0)$* . Possiamo fare cio' costruendo $(h_n, k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(u_n, v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ che tendono a $(0, 0)$ ma non assumono mai tale valore $\forall n \in \mathbb{N}$.

Prendiamo:

$$\begin{aligned} (h_n, k_n) &= \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \\ (u_n, v_n) &= \left(\frac{1}{n}, 0\right) \end{aligned}$$

Facendo i limiti per $n \rightarrow \infty$ di $f(h_n, k_n)$ e $f(u_n, v_n)$ notiamo che essi non convergono allo stesso valore.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(h_n, k_n) &\neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n, v_n) \text{ poiche':} \\ f(h_n, k_n) &= \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} =_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \\ f(u_n, v_n) &= \frac{\frac{1}{n} \cdot 0}{\frac{1}{n^2} \cdot 0^2} = 0 =_{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Abbiamo quindi provato l'assurdo e mostrato che f e' derivabile ma non continua in $(0, 0)$.

3.23 Def: funzione differenziabile

Presa $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto, $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$, si dice che f e' *differenziabile* in (\bar{x}, \bar{y}) se:

- $\exists \frac{\delta f}{\delta x}(\bar{x}, \bar{y}), \exists \frac{\delta f}{\delta y}(\bar{x}, \bar{y})$
- Vale la formula di Taylor $f(\bar{x} + h, \bar{y} + k) = f(\bar{x}, \bar{y}) + \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (h, k) \rangle + o(\|(h, k)\|)$

OSS: ponendo $x = \bar{x} + h$, $y = \bar{y} + k$ e levando l'o-piccolo si ottiene il polinomio di Taylor di equazione: $T_1(x, y) = f(\bar{x}, \bar{y}) + \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (x - \bar{x}, y - \bar{y}) \rangle$

3.23.1 Prop: differenziabilita' e continuita'

Enunciato: Presa $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto ed f differenziabile in $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$, si ha che f e' continua in (\bar{x}, \bar{y}) .

OSS: Nel caso $n \geq 2$ e' la differenziabilita' (e non la derivabilita') a implicare la continuita'.

Dimostrazione: **NON RICHIESTA**

Ricordiamo: $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice continua in $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$ se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad |u(x, y) - u(\bar{x}, \bar{y})| < \varepsilon \\ \forall (x, y) \in B((\bar{x}, \bar{y}), \delta_\varepsilon) \cap A$$

Devo mostrare, fissato un $\varepsilon > 0$, che vale:

$$\exists \delta_\varepsilon > 0 \quad |f(\bar{x} + h, \bar{y} + k) - f(\bar{x}, \bar{y})| < \varepsilon \quad \forall (h, k) \in B((0, 0), \delta_\varepsilon)$$

Si noti che $(\bar{x} + h, \bar{y} + k) \in A$ e' sempre soddisfatto poiche' A e' un insieme aperto. Poiche' f e' differenziabile e vale la formula di Taylor, so che $f(\bar{x} + h, \bar{y} + k) - f(\bar{x}, \bar{y}) = \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (h, k) \rangle + o(\|(h, k)\|)$. Sostituisco dunque nella disequazione e ottengo:

$$\exists \delta_\varepsilon > 0 \quad |\langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (h, k) \rangle + o(\|(h, k)\|)| < \varepsilon \\ |\langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (h, k) \rangle| + |o(\|(h, k)\|)| < \varepsilon \\ \forall (h, k) \in B((0, 0), \delta_\varepsilon)$$

Divido poi la somma in due disequazioni, che provo entrambe essere $< \frac{\varepsilon}{2}$:

1. Devo provare:

$$|\langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (h, k) \rangle| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Per Cauchy-Schwartz ($|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$) vale che:

$$\|\nabla f(\bar{x}, \bar{y})\| \|(h, k)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Che può essere verificata prendendo un opportuno $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2\|\nabla f(\bar{x}, \bar{y})\|}$.

2. Devo provare:

$$|o(\|(h, k)\|)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|o(\|(h, k)\|)| = o(\|(h, k)\|) \|(h, k)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Poiché $o(\|(h, k)\|)$ implica che $\|(h, k)\| \rightarrow 0$ si ha che la disuguaglianza è verificata.

□

3.24 Extra: polinomio di Taylor e piano tangente

La formula di Taylor generalizzata al caso $n = 2$ usata per la condizione di differenziabilità, dalla quale si ricavano le variabili (x, y) , ha un altro importante significato geometrico. Infatti, il piano di equazione

$$z = T_1(x, y) = f(\bar{x}, \bar{y}) + \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (x - \bar{x}, y - \bar{y}) \rangle + o(\|(x - \bar{x}, y - \bar{y})\|)$$

rappresenta il *piano tangente* al grafico della funzione f nel punto $(\bar{x}, \bar{y}, f(\bar{x}, \bar{y}))$.

3.25 Def: funzioni di classe C^1

Preso $f : A \rightarrow \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto si dice di *classe C^1* se f è continua in A , se $\frac{\delta f}{\delta x_j}$ esiste ed è continua $\forall j \in \{1, \dots, n\}$.

OSS: tutte le funzioni "elementari" sono di classe C^1 .

3.26 Teorema: differenziabilità delle funzioni di classe C^1

Enunciato: Se ho $f : A \rightarrow \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, f di classe C^1 , allora f è differenziabile $\forall \bar{x} \in A$.

Premessa (Lagrange in $n > 1$ o del valor intermedio): (solo per x) costruire $u(x) = f(x, y)$ con y fissato. espandere la tesi arrivando a dire che $f(b, y) - f(a, y) = \delta_x f(\bar{x}, y)(b - a)$. Calcolare con il limite la derivata di u e usare il teorema di Lagrange

per trovare \bar{x} e giungere esattamente a cio' che si voleva provare.

Devo mostrare il teorema di Lagrange in $n = 1$, e lo faro' per la variabile x in quanto e' analogo per la y . Voglio dunque che $\forall a, b \in A$, preso y fissato $\in \mathbb{R}$, $\exists c \in]a, b[$ (o $]b, a[$) tale che $f(b, y) - f(a, y) = \delta_x f(c, y)(b - a)$. Costruisco la funzione $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x) \mapsto f(x, y)$, e la derivo ottenendo:

$$\begin{aligned} u'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \\ &= \frac{\delta f}{\delta x}(x, y) \end{aligned}$$

Per Lagrange su u in $[a, b]$ (o $]b, a[$) ho che $\exists c \in]a, b[$ (o $]b, a[$) tale che $u(b) - u(a) = u'(c)(b - a)$, ovvero, rimpiazzando u con la sua definizione e derivata:

$$\frac{\delta f}{\delta x}(c, y) = \frac{f(b, y) - f(a, y)}{b - a}$$

Questo e' esattamente cio' che si voleva provare. \square

Dimostrazione: dobbiamo mostrare l'esistenza delle derivate parziali che e' ovvia per ipotesi, e la validita' di Taylor. Per provare Taylor lo esplicitiamo, sottraiamo e sommiamo $f(\bar{x} + h, y)$ notando che si hanno dunque due risultati del lemma di Lagrange. Raccogliamo h e k e proviamo una delle due ugualgiance con l'o-piccolo rifacendoci alla definizione di o-piccolo e limite.

Vogliamo mostrare che f e' differenziabile in $\forall x \in A$, fissiamo dunque un generico $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$ e mostriamolo per esso. Affinche' una funzione sia differenziabile si ha bisogno che:

1. $\exists \frac{\delta f}{\delta x}, \quad \exists \frac{\delta f}{\delta y}$ ovvio per l'ipotesi che f e' C^1 .
2. Vale la formula di Taylor per (\bar{x}, \bar{y}) .

Mostriamo dunque che vale la formula di Taylor $((h, k) \rightarrow 0)$:

$$\begin{aligned} f(\bar{x} + h, \bar{y} + k) &= f(\bar{x}, \bar{y}) + \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (h, k) \rangle + o(\|(h, k)\|) \\ f(\bar{x} + h, \bar{y} + k) - f(\bar{x}, \bar{y}) &= \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (h, k) \rangle + o(\|(h, k)\|) \\ f(\bar{x} + h, \bar{y} + k) - f(\bar{x} + h, \bar{y}) + f(\bar{x} + h, \bar{y}) - f(\bar{x}, \bar{y}) &= \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (h, k) \rangle + o(\|(h, k)\|) \\ [(1) - (2)] + [(3) - (4)] &= \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (h, k) \rangle + o(\|(h, k)\|) \end{aligned}$$

Noto che $(1) - (2)$ e $(3) - (4)$ sono i risultati di una eventuale applicazione del lemma di Lagrange dimostrato in precedenza. Allora applico tale lemma due volte, ottenendo:

$$\begin{aligned} &\exists \Theta_1, \Theta_2 \in]0, 1[\\ \frac{\delta f}{\delta x}(\bar{x} + \Theta_1 h, \bar{y} + k)h + \frac{\delta f}{\delta y}(\bar{x}, \bar{y} + \Theta_2 k)k &= \frac{\delta f}{\delta x}(\bar{x}, \bar{y})h + \frac{\delta f}{\delta y}(\bar{x}, \bar{y})k + o(\|(h, k)\|) \end{aligned}$$

Ora raccolgo:

$$h \left[\frac{\delta f}{\delta x}(\bar{x} + \Theta h, \bar{y} + k) - \frac{\delta f}{\delta x}(\bar{x}, \bar{y}) \right] + k \left[\frac{\delta f}{\delta y}(\bar{x}, \bar{y} + \Theta_2 k) - \frac{\delta f}{\delta y}(\bar{x}, \bar{y}) \right] = o(\|(h, k)\|)$$

Devo dunque mostrare che $h[\dots] = o(\|(h, k)\|) \wedge k[\dots] = o(\|(h, k)\|)$. Svolgo la seconda ma sono analoghe. Espandendo la definizione di o-piccolo devo provare:

$$\lim_{\|(h, k)\| \rightarrow 0} \left| \frac{\frac{\delta f}{\delta y}(\bar{x}, \bar{y} + \Theta_2 k) - \frac{\delta f}{\delta y}(\bar{x}, \bar{y})}{\|(h, k)\|} \right| = 0$$

Espando la definizione di limite:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall (h, k) \neq 0 \wedge \|(h, k)\| < \delta \\ \left| \frac{\frac{\delta f}{\delta y}(\bar{x}, \bar{y} + \Theta_2 k) - \frac{\delta f}{\delta y}(\bar{x}, \bar{y})}{\|(h, k)\|} \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

Poiche' $\frac{|h|}{\|(h, k)\|} \leq 1$ posso affermare che:

$$\left| \frac{\delta f}{\delta y}(\bar{x}, \bar{y} + \Theta_2 k) - \frac{\delta f}{\delta y}(\bar{x}, \bar{y}) \right| \frac{|h|}{\|(h, k)\|} \leq \left| \frac{\delta f}{\delta y}(\bar{x}, \bar{y} + \Theta_2 k) - \frac{\delta f}{\delta y}(\bar{x}, \bar{y}) \right|$$

Allora posso ridurmi a dimostrare:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall (h, k) \neq 0 \wedge \|(h, k)\| < \delta \\ \left| \frac{\delta f}{\delta y}(\bar{x}, \bar{y} + \Theta_2 k) - \frac{\delta f}{\delta y}(\bar{x}, \bar{y}) \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

Ovvero:

$$\lim_{\|(h, k)\| \rightarrow 0} \frac{\delta f}{\delta y}(\bar{x}, \bar{y} + \Theta_2 k) = \frac{\delta f}{\delta y}(\bar{x}, \bar{y})$$

Che e' ovvio per la continuita' di f . □

3.27 Def: Derivata direzionale

Presa $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$ (o A aperto), $v = (v_1, v_2)$ di norma unitaria ($\|(v_1, v_2)\| = 1$), definiamo la *derivata direzionale di f in (\bar{x}, \bar{y}) nella direzione v* come segue:

$$\frac{\delta f}{\delta v}(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + tv_1, \bar{y} + tv_2) - f(\bar{x}, \bar{y})}{t}$$

(quando esiste il limite finito)

OSS: i casi particolari dove $v = e_1$ e $v = e_2$ sono quelli delle derivate parziali $\frac{\delta f}{\delta x}$ e $\frac{\delta f}{\delta y}$.

3.28 Teorema: del gradiente

Enunciato: Pesa $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile in un punto $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$ allora $\forall v \in \mathbb{R}^2, \|v\| = 1$ vale:

$$\begin{aligned}\frac{\delta f}{\delta v}(\bar{x}, \bar{y}) &= \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (v_1, v_2) \rangle \\ &= \frac{\delta f}{\delta x}(\bar{x}, \bar{y})v_1 + \frac{\delta f}{\delta y}(\bar{x}, \bar{y})v_2\end{aligned}$$

Dimostrazione: partiamo dalla formula di taylor con $h = tv$ dove v versore. Semplifichiamo fino ad avere solo il prod. scalare con il gradiente in un membro. Si passa ai limiti e si elimina l'o-piccolo per def

Dobbiamo mostrare che

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + tv_1, \bar{y} + tv_2) - f(\bar{x}, \bar{y})}{t} = \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (v_1, v_2) \rangle$$

Poiche' f e' differenziabile, per Taylor ho che prso un $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ tale che $(\bar{x} + h_1, \bar{y} + h_2) \in A$:

$$\begin{aligned}f(\bar{x} + h_1, \bar{y} + h_2) &= f(\bar{x}, \bar{y}) + \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (h_1, h_2) \rangle + o(\|(h_1, h_2)\|) \\ &\text{per } \|(h_1, h_2)\| \rightarrow 0\end{aligned}$$

Pongo $h = tv$ dove v e' un versore (di norma unitaria) e ottengo:

$$\begin{aligned}f(\bar{x} + tv_1, \bar{y} + tv_2) &= f(\bar{x}, \bar{y}) + \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), t(v_1, v_2) \rangle + o(\|t(v_1, v_2)\|) \\ &\text{per } \|t(v_1, v_2)\| \rightarrow 0\end{aligned}$$

Per la proprieta' di omogeneita' della norma e poiche' v e' un versore ($\|v\| = 1$) ho che

$$\|t(v_1, v_2)\| = \|t\|\|(v_1, v_2)\| = \|t\|$$

Per le proprieta' di omogeneita' del prodotto scalare ho che:

$$\langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), t(v_1, v_2) \rangle = t \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (v_1, v_2) \rangle$$

Riscrivo dunque l'uguaglianza come segue:

$$\begin{aligned}f(\bar{x} + tv_1, \bar{y} + tv_2) &= f(\bar{x}, \bar{y}) + t \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (v_1, v_2) \rangle + o(\|t\|) \\ &\text{per } \|t\| \rightarrow 0\end{aligned}$$

Spostiamo al primo membro $f(\bar{x}, \bar{y})$ e dividiamo entrambi per t :

$$\begin{aligned}\frac{f(\bar{x} + tv_1, \bar{y} + tv_2) - f(\bar{x}, \bar{y})}{t} &= \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (v_1, v_2) \rangle + \frac{o(\|t\|)}{t} \\ &\text{per } \|t\| \rightarrow 0\end{aligned}$$

Passiamo poi al limite:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + tv_1, \bar{y} + tv_2) - f(\bar{x}, \bar{y})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (v_1, v_2) \rangle + \frac{o(\|t\|)}{t}$$

e notiamo che $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(\|t\|)}{t} = 0$ per definizione di o-piccolo.

Ho dunque che:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + tv_1, \bar{y} + tv_2) - f(\bar{x}, \bar{y})}{t} = \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (v_1, v_2) \rangle$$

$$\forall (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2, \|(v_1, v_2)\| = 1$$

Abbiamo mostrato che la derivata nel punto (\bar{x}, \bar{y}) di direzione (v_1, v_2) e' uguale al prodotto scalare tra $\nabla f(\bar{x}, \bar{y})$ e (v_1, v_2) . \square

3.29 Def: curva o cammino

Una *curva o cammino* in \mathbb{R}^n e' una funzione del tipo $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^n$ (in fisica: la variabile si chiama $t \in]a, b[$).

3.30 Def: velocita' o vettore tangente di un cammino

Dato $r : I \rightarrow \mathbb{R}^n, r(t) \mapsto (r_1(t), \dots, r_n(t))$ se le funzioni r_1, \dots, r_n sono derivabili in qualche t allora definiamo *il vettore velocita'* di r come:

$$r'(t) = (r'_1(t), \dots, r'_n(t))$$

3.31 Def: derivata lungo un cammino

Enunciato: Siano $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Sia r derivabile in $t \in \mathbb{R}$ e f differenziabile in $r(t)$. Allora:

$$(f \circ r)'(t) = \langle \nabla f(r(t)), r'(t) \rangle$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(r(t)) r'_j(t)$$

Dimostrazione: riscriviamo df/dt con il limite incrementale, poi applico il teorema della differenziabilita' al numeratore del limite. Ottengo una somma di tre addendi, che analizzo separatamente nel limite

Proviamo il teorema in $n = 2$ per semplicita' di notazione.

Per ipotesi abbiamo $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dove r e' derivabile in t e f e' differenziabile in $r(t)$. Dobbiamo trovare $\frac{\delta f}{\delta t}(r(t))$ e possiamo farlo tramite il limite incrementale:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(r(t+h)) - f(r(t))}{h} =? \langle \nabla f(r(t)), r'(t) \rangle$$

Lavoriamo sul numeratore del limite notando che si può usare il teorema della differenziabilità:

$$f(r(t+h)) - f(r(t)) = \langle \nabla f(r(t)), [r(t+h) - r(t)] \rangle + o(\|r(t+h) - r(t)\|)$$

Usiamo poi la formula di Taylor, poiché r è derivabile. Vale perciò: $r(t+h) - r(t) = r'(t)h + o(h)$. Possiamo dunque riscrivere come:

$$\begin{aligned} f(r(t+h)) - f(r(t)) &= \langle \nabla f(r(t)), [r'(t)h + o(h)] \rangle + o(\|r'(t)h + o(h)\|) \\ &= \langle \nabla f(r(t)), r'(t)h \rangle + \langle \nabla f(r(t)), o(h) \rangle + o(\|r'(t)h + o(h)\|) \\ &= (1) + (2) + (3) \end{aligned}$$

Ora analizzo i limiti $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(n)}{h}$ (il limite originale, separando il numeratore):

1.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \langle \nabla f(r(t)), r'(t) \rangle}{h} = \langle \nabla f(r(t)), r'(t) \rangle$$

2.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\langle \nabla f(r(t)), o(h) \rangle}{h} = (\dots) \cdot \frac{o(h)}{h} = 0$$

3.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(\|r'(t)h + o(h)\|)}{h} = \frac{o(h)}{h} = 0$$

Abbiamo mostrato che il limite restituisce esattamente quello che ci aspettavamo, ovvero $\langle \nabla f(r(t)), r'(t) \rangle$. \square

3.32 Def: matrice Jacobiana

Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ (o $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto), $f : \bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_1(\bar{x}), \dots, f_q(\bar{x}))$. Suppongo che ciascuna delle funzioni (scalari) f_1, \dots, f_q sia differenziabile in \mathbb{R}^n . Definisco allora la *matrice Jacobiana* come:

$$J_f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1}(\bar{x}) & \frac{\delta f_1}{\delta x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\delta f_1}{\delta x_n}(\bar{x}) \\ \frac{\delta f_2}{\delta x_1}(\bar{x}) & \frac{\delta f_2}{\delta x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\delta f_2}{\delta x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta f_q}{\delta x_1}(\bar{x}) & \frac{\delta f_q}{\delta x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\delta f_q}{\delta x_n}(\bar{x}) \end{bmatrix} \in M_{q \times n}(\mathbb{R})$$

OSS(1) le righe corrispondono ai gradienti di f_1, \dots, f_q . OSS(2): le colonne corrispondono alle derivate del vettore $f(x)$ rispetto alle variabili.

3.33 Teorema: di Fermat

Enunciato: Presa $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ dove $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$ punto di massimo o minimo, f differenziabile in (\bar{x}, \bar{y}) , si ha che $\nabla f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{0}$.

Dimostrazione: **definisco** $h(x) = f(x, \bar{y})$, **con** (\bar{x}, \bar{y}) **minimio, derivo con il limite e vedo che e' uguale alla derivata di f tenendo \bar{y} fisso poi sfrutto l'ipotesi che il punto e' di minimo e ho che la derivata di f in $(\bar{x}, \bar{y}) = \mathbf{0}$ qed**

Sia $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$ di minimo locale. Consideriamo $h(x) = f(x, \bar{y})$ definita per x vicino a \bar{x} . Noto che h ha un punto di minimo in \bar{x} poiche' chiama a sua volta f che ha questa proprieta'. Se ora calcoliamo la derivata:

$$h'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, \bar{y}) - f(x, \bar{y})}{h} = \frac{\delta f}{\delta x}(x, \bar{y}) \forall x \in \mathbb{R}$$

e poiche' \bar{x} e' di minimo per h vale $h'(\bar{x}) = 0$ e per quanto provato prima, vale anche $\frac{\delta f}{\delta x}(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ (H_1).

Posso svolgere una dimostrazione analoga per y tenendo fissa la coordinata \bar{x} , dalla quale otterrei $\frac{\delta f}{\delta y}(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ (H_2). Combinando H_1 e H_2 ottengo dunque $(f_x(\bar{x}, \bar{y}), f_y(\bar{x}, \bar{y})) = (0, 0)$. \square

3.34 Def: punto di sella

Preso $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^n$, f differenziabile in (\bar{x}, \bar{y}) e valga $\nabla f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{0}$. Si dice che (\bar{x}, \bar{y}) e' punto di *sella* se $\forall \delta > 0. \exists P_1 = (\bar{x}^+, \bar{y}^+), P_2 = (\bar{x}^-, \bar{y}^-) \in B((\bar{x}, \bar{y}), \delta)$ tali che $f(\bar{x}^-, \bar{y}^-) < f(\bar{x}, \bar{y}) < f(\bar{x}^+, \bar{y}^+)$.

NOTA: intuitivamente e' un punto in cui non si puo' dire se sia di massimo o di minimo poiche' cresce rispetto ad un asse e decresce rispetto ad un altro.

Per questo motivo possiamo individuare due punti in una palla vicina a (\bar{x}, \bar{y}) con questa proprieta'.

3.35 Def: derivata seconda

Preso $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile ovunque, e $\frac{\delta f}{\delta x}, \frac{\delta f}{\delta y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ si considerano le loro derivate seconde:

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y, \delta x} = \frac{\delta^2 f}{\delta x, \delta y}, \quad \frac{\delta^2 f}{\delta x^2}, \quad \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}$$

OSS: Il teorema di Schwarz ci garantisce che le derivate parziali rispetto a x e a y sono identiche indipendentemente dall'ordine in cui esse vengono derivate.

3.36 Def: matrice Hessiana

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$. Preso $\bar{x} \in A$ tale che esistano tutte le derivate parziali per $k, j \in \{1, \dots, n\}$ della forma $\frac{\delta^2 f}{\delta x_k \delta x_j}(\bar{x})$. Introduciamo allora la *matrice Hessiana di f nel punto \bar{x}* $H_f(\bar{x}) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ tale che:

$$(H_f(\bar{x}))_{j,k} = \frac{\delta^2 f}{\delta x_j \delta x_k}$$

3.37 Def: funzione di classe C^2

Si dice che $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e' di classe C^2 su A se tutte le derivate parziali di ordine ≤ 2 sono continue $\forall j, k \in \{1, \dots, n\}$, ovvero se:

$$\frac{\delta f}{\delta x_j} \text{ e } \frac{\delta f}{\delta x_j \delta x_k} \text{ sono continue } \forall j, k \in \{1, \dots, n\}$$

3.38 Teorema: di Schwarz

Enunciato: Preso $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 possiamo dire che $\forall \bar{x} \in A, \forall j, k \in \{1, \dots, n\}$ vale

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x_j \delta x_k} = \frac{\delta^2 f}{\delta x_k \delta x_j}$$

Dimostrazione: **Costruisco le funzioni:** $g(x, y) = \frac{f(x, y) - f(x, \bar{y})}{y - \bar{y}}$, $h(x, y) = \frac{f(x, y) - f(\bar{x}, y)}{x - \bar{x}}$ **e l'uguaglianza:** $\frac{g(x, y) - g(\bar{x}, y)}{x - \bar{x}} = \frac{h(x, y) - h(x, \bar{y})}{y - \bar{y}}$. **Applico due volte su ogni funzione il teorema di Lagrange in intervalli di $]\bar{x}, x[$ e $]\bar{y}, y[$ ottenendo quattro uguaglianze che posso sostituire nella uguaglianza originale. A questo punto vedo che quando $(x, y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y})$ ho la tesi.**
Fissato un generico $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$ si ricorda la tesi da mostrare:

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}(\bar{x}, \bar{y})$$

Prendiamo un $\varepsilon > 0$ e un $(x, y) \in B(\bar{x}, \varepsilon)$ tale che $x \neq \bar{x} \wedge y \neq \bar{y}$. Possiamo allora definire le due funzioni:

$$g(x, y) = \frac{f(x, y) - f(x, \bar{y})}{y - \bar{y}}, \quad h(x, y) = \frac{f(x, y) - f(\bar{x}, y)}{x - \bar{x}}$$

Si nota che vale l'uguaglianza (H_1) :

$$\frac{g(x, y) - g(\bar{x}, y)}{x - \bar{x}} = \frac{h(x, y) - h(x, \bar{y})}{y - \bar{y}}$$

Applichiamo poi il teorema di Lagrange su g in $]\bar{x}, x[$ e abbiamo:

$$\begin{aligned}\exists \varepsilon_1 \in]\bar{x}, x[. \quad \frac{g(x, y) - g(\bar{x}, y)}{x - \bar{x}} &= \frac{\delta g}{\delta x}(\varepsilon_1, y) \\ &= \frac{\delta_x f(\varepsilon_1, y) - \delta_x f(\varepsilon_1, \bar{y})}{y - \bar{y}}\end{aligned}$$

Applichiamo poi il teorema di Lagrange su h in $]\bar{y}, y[$ e abbiamo:

$$\begin{aligned}\exists \varepsilon_2 \in]\bar{y}, y[. \quad \frac{h(x, y) - h(x, \bar{y})}{y - \bar{y}} &= \frac{\delta h}{\delta y}(x, \varepsilon_2) \\ &= \frac{\delta_y f(x, \varepsilon_2) - \delta_y f(\bar{x}, \varepsilon_2)}{x - \bar{x}}\end{aligned}$$

Di nuovo per il teorema di Lagrange su $\frac{\delta g}{\delta x}$ in $]\bar{y}, y[$:

$$\exists \varepsilon_3 \in]\bar{y}, y[. \quad \frac{\delta_x f(\varepsilon_1, y) - \delta_x f(\varepsilon_1, \bar{y})}{y - \bar{y}} = \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$$

Di nuovo per il teorema di Lagrange su $\frac{\delta h}{\delta y}$ in $]\bar{x}, x[$:

$$\exists \varepsilon_4 \in]\bar{x}, x[. \quad \frac{\delta_y f(x, \varepsilon_2) - \delta_y f(\bar{x}, \varepsilon_2)}{x - \bar{x}} = \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}(\varepsilon_4, \varepsilon_2)$$

Sostituendo ora le ugualianze nell'ipotesi iniziale (H_1) si ha che:

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}(\varepsilon_1, \varepsilon_3) = \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}(\varepsilon_4, \varepsilon_2)$$

Facendo tendere $(x, y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y})$ si ha che $(\varepsilon_1, \varepsilon_3) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y})$ e $(\varepsilon_4, \varepsilon_2) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y})$ a causa degli intervalli a cui appartengono, e si ha dunque:

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}(\bar{x}, \bar{y})$$

□

3.39 Def: forma quadratica

Sia $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ simmetrica ($A = A^T$), allora la forma quadratica associata ad A e' data da:

$$\begin{aligned}q_A : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ q_A : (h) &\mapsto \langle Ah, h \rangle \forall h \in \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

Presa $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ simmetrica, q_A forma quadratica associata ad A , si puo' dire che:

3.39.1 Def: forma quadratica positiva

A viene detta *definita positiva* se vale:

$$\langle Ah, h \rangle > 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$$

3.39.2 Def: forma quadratica negativa

A viene detta *definita negativa* se vale:

$$\langle Ah, h \rangle < 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$$

3.39.3 Def: forma quadratica indefinita

A viene detta *definita indefinita* se vale: $\exists h^+, h^- \in \mathbb{R}^n$

$$\langle Ah^-, h^- \rangle < 0 < \langle Ah^+, h^+ \rangle$$

3.39.4 Def: forme semidefinite

A viene detta *semidefinita positiva* se vale:

$$\langle Ah, h \rangle \geq 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

A viene detta *semidefinita negativa* se vale:

$$\langle Ah, h \rangle \leq 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

3.40 Teorema: classificazione delle forme quadratiche

Enunciato: Se $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ e' simmetrica, allora scrivo $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$, allora:

1. q_A e' **positiva** sse $\begin{cases} a > 0 \\ \det(A) > 0 \end{cases}$
2. q_A e' **negativa** sse $\begin{cases} a < 0 \\ \det(A) > 0 \end{cases}$
3. q_A e' **indefinita** sse $\det(A) < 0$
4. q_A e' **semidefinita** sse $\det(A) = 0$

Dimostrazione: caso 1: \Rightarrow espandiamo la forma quadratica e facciamo vedere che poiche' $e' > 0$ ha il $\Delta < 0$ dal quale segue esattamente cio che vogliamo. \Leftarrow espandiamo q_A e distinguiamo tra i casi $h_2 = 0 \vee h_1 \neq 0$, nel primo si conclude semplicemente sostituendo, nell'altro raccoglie h_2^2 e risolve la disequazione in $\frac{h_1}{h_2}$ e si mostra che il $\Delta < 0$ sse $\det(A) > 0$ come da ipotesi

Dimostriamo il caso (1) gli altri sono analoghi:

- \Rightarrow : per ipotesi sappiamo che q_A e' positiva, ovvero:

$$q_A(h) = ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2 > 0 \quad \forall (h_1, h_2) \neq (0, 0)$$

Scelgo $h = (1, 0)$ e ho dunque $a > 0$ (1).

Invece ponendo $h = (h_1, 1)$ ho $ah_1^2 + 2bh_1 + c > 0 \quad \forall h_1 \in \mathbb{R}$. Affinche' cio' valga *for all* h_1 vogliamo che l'equazione di secondo grado associata abbia $\Delta < 0$, ovvero $4b^2 - 4ac < 0$ e dunque $ac - b^2 > 0$ che possiamo vedere anche come $\det(A) > 0$ (2). \square

- \Leftarrow : per ipotesi sappiamo che $\det(A) > 0$ e che $a > 0$, dobbiamo provare che q_A e' positiva, ovvero che:

$$q_A(h) = ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2 > 0 \quad \forall (h_1, h_2) \neq (0, 0)$$

Procedo per casi:

- se $h_2 = 0$ allora ho $ah_1^2 > 0 \quad \forall h_1 \neq 0$ che e' vero per l'ipotesi $a > 0$.
- se $h_2 \neq 0$ allora devo provare $ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2 > 0 \quad \forall h_1 \neq 0$.
Raccolgo h_2 (posso poiche' $h_2 \neq 0$) e mostro:

$$h_2^2(a(\frac{h_1}{h_2})^2 + \frac{2bh_1}{h_2} + c) > 0$$

Dobbiamo dunque mostrare che:

$$a(\frac{h_1}{h_2})^2 + 2b(\frac{h_1}{h_2}) + c > 0 \quad \forall h_1 \neq 0$$

che vale sse $\Delta < 0$, ovvero:

$$\begin{aligned} 4b^2 - 4ac &< 0 \\ -4(ac - b^2) &< 0 \\ -4\det(A) &< 0 \end{aligned}$$

E poiche' $\det(A) > 0$ per ipotesi abbiamo mostrato quanto volevamo. \square

3.41 Def: Formula di Taylor di grado secondo

Sia f di classe C^2 su $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto. Allora per ogni $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in A$ vale la formula:

$$\begin{aligned} T_2(\bar{x} + h) &= f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), h \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(\bar{x})h, h \rangle + o(\|h\|^2) \\ &\quad \forall h. \bar{x} + h \in A, o(\|h\|^2) \text{ con } h \rightarrow \bar{0} \end{aligned}$$

Dimostrazione: scrivo $g(t) = f(\bar{x} + th)$ dove h versore e applico Taylor in una variabile su g . Notero' che i membri di primo e secondo grado

combaciano, in quanto sono entrambi derivate di una funzione lungo una curva

Vogliamo mostrare che avendo f classe C^2 in A , $\bar{x} \in A$, $h \in \mathbb{R}^n$ e $\|h\| = 1$ (riscriviamo il vecchio h come th in modo da avere il versore h che indica la direzione e t il valore del modulo) vale:

$$T_2(\bar{x} + th) = f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), th \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(\bar{x})th, th \rangle + o(\|th\|^2) \\ \forall h. \bar{x} + h \in A, o(\|th\|^2) \text{ con } t \rightarrow 0$$

Scrivo dunque $g(t) = f(\bar{x} + th)$ definita in $t \in I(0, \varepsilon)$.

Poiche' f e' C^2 lo e' anche g nelle variabili $t \approx 0$. Allora dal primo semestre posso scrivere la formulad i Taylor al secondo grado per g in 0:

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{1}{2!}g''(0)t^2 + o(t^2)$$

Analizzo le parti che compongono la formula di Taylor in una variabile per g :

1. Noto che $g(0) = f(\bar{x})$
2. Noto che $g'(t)$ sarebbe una derivata lungo una curva, quindi la scrivo come:

$$g'(t) = \langle \nabla f(\bar{x} + th), \frac{\delta}{\delta t}(\bar{x} + th) \rangle \\ = \langle \nabla f(\bar{x} + th), h \rangle$$

E dunque il secondo membro di Taylor in una variabile $g'(0)t$ diventa:

$$g'(0)t = \langle \nabla f(\bar{x} + 0h), h \rangle t \\ = \langle \nabla f(\bar{x}), th \rangle$$

3. Sviluppo infine il secondo membro $g''(t)$ appoggiandomi sul $g'(t)$ calcolato prima:
(si noti che si puo' derivare ulteriormente in quanto ∇f e' di classe C^1 per le ipotesi)

$$g''(t) = \frac{\delta}{\delta t} \sum_{j=1}^n \delta_{x_j} f(\bar{x} + th) h_j \\ = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\delta}{\delta t} \delta_{x_j} f(\bar{x} + th) \right) h_j$$

In quanto stiamo ancora facendo una derivata lungo una curva possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n (\langle \nabla(\delta_{x_j} f)(\bar{x} + th), h \rangle) h_j \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \delta_{x_k} \delta_{x_j} f(\bar{x} + th) h_k \right) h_j \\
&= \sum_{j=1, k=1}^n \delta_{x_k} \delta_{x_j} f(\bar{x} + th) h_k h_j
\end{aligned}$$

Ora espandiamo il membro $\frac{1}{2}g''(0)t^2$ di Taylor in una variabile:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}g''(0)t^2 &= \frac{1}{2} \sum_{j=1, k=1}^n \delta_{x_k} \delta_{x_j} f(\bar{x} + 0h) h_k h_j t^2 \\
&= \frac{1}{2} \langle H_f(\bar{x})h, h \rangle t^2 \\
&= \frac{1}{2} \langle H_f(\bar{x})th, th \rangle
\end{aligned}$$

4. Notiamo che $o(\|th\|^2) = o(\|t\|^2 \cdot \|h\|^2)$ e poiche' $\|h\| = 1$ per definizione, possiamo riscriverlo come $o(\|t\|^2)$.

Abbiamo dunque provato pezzo per pezzo che le due formule sono equivalenti. \square

3.42 Teorema: sulle forme quadratiche positive ($\exists m > 0$)

Enunciato: Sia $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ simmetrica. Suppongo q_A definita positiva. Allora esiste $m > 0$ tale che: $q_A(h) \geq m\|h\|^2 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione: idea

Dimostro in $n = 2$. Dobbiamo provare che:

$$\exists m > 0. \quad \langle Ah, h \rangle \geq m\|h\|^2 \quad \forall h \in \mathbb{R}^2$$

Ho due casi:

1. se $h = \bar{0}$ devo mostrare che: $\exists m > 0. 0 \geq 0$, ovvio.
2. quando $h \neq \bar{0}$ devo provare che esiste $m > 0$ tale che:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|h\|^2} \langle Ah, h \rangle &\geq m \quad \forall h \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\
\langle A \frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|} \rangle &\geq m
\end{aligned}$$

Osservo che $\frac{h}{\|h\|}$ e' un versore, dunque:

$$\left\{ \frac{h}{\|h\|} \mid h \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \right\} = \{(\cos\Theta, \sin\Theta) \mid \Theta \in [0, 2\pi]\}$$

Devo dunque dimostrare che:

$$\left\langle A \begin{pmatrix} \cos\Theta \\ \sin\Theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\Theta \\ \sin\Theta \end{pmatrix} \right\rangle \geq m \quad \forall \Theta \in [0, 2\pi]$$

Poniamo $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\Theta) = \left\langle A \begin{pmatrix} \cos\Theta \\ \sin\Theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\Theta \\ \sin\Theta \end{pmatrix} \right\rangle$, ovvero $f(\Theta) = a \cos^2 \Theta + 2b \cos \Theta \sin \Theta + c \sin^2 \Theta$.

Poiche' q_A e' definita positiva sappiamo che $f(\Theta) > 0 \quad \forall \Theta \in [0, 2\pi]$.

Essendo f continua e $[0, 2\pi]$ chiuso e limitato per Weierstrass ho che:

$$\exists \bar{\Theta} \in [0, 2\pi]. \quad f(\bar{\Theta}) \leq f(\Theta) \quad \forall \Theta \in [0, 2\pi]$$

$$m = f(\bar{\Theta}) \quad \text{scelgo } m \text{ proprio come quel minimo}$$

Dunque ho che:

$$m \leq \left\langle A \begin{pmatrix} \cos\Theta \\ \sin\Theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\Theta \\ \sin\Theta \end{pmatrix} \right\rangle \quad \forall \Theta \in [0, 2\pi]$$

Sostituisco $x - \bar{x}$ con h per semplicita' di notazione: E so che $m > 0$ poiche' q_A e' positiva per ipotesi. \square

3.43 Teorema: classificazione dei punti critici

Questo teorema offre una **condizione sufficiente** (\Rightarrow) del second'ordine per determinare massimi/minimi/selle.

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, sia $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 . Sia $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$ punto critico di f , allora

1. se $H_f(\bar{x}, \bar{y})$ e' **positiva** allora (\bar{x}, \bar{y}) e' un punto di minimo (locale).
2. se $H_f(\bar{x}, \bar{y})$ e' **negativa** allora (\bar{x}, \bar{y}) e' un punto di massimo (locale).
3. se $H_f(\bar{x}, \bar{y})$ e' **indefinita** allora (\bar{x}, \bar{y}) e' un punto di sella.

OSS: **sono condizioni sufficienti**, quindi (\bar{x}, \bar{y}) minimo $\nRightarrow H_f(\bar{x}, \bar{y})$ positiva

Dimostrazione: idea

Dimostriamo in $n = 2$ solo il caso 1.

Sia $\bar{x} \in A$ un punto critico con $H_f(\bar{x}) > 0$. Voglio mostrare che \bar{x} sia un punto di minimo, ovvero:

$$\begin{aligned} \exists \delta > 0. \quad f(x) &\geq f(\bar{x}) \quad \forall x \in B(\bar{x}, \delta) \\ f(x) - f(\bar{x}) &\geq 0 \end{aligned}$$

So che vale Taylor di secondo grado nel punto:

$$T_2(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), h \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(\bar{x})h, h \rangle + o(\|h\|^2)$$

$$h \rightarrow \bar{0}$$

Notiamo che $\langle \nabla f(\bar{x}), h \rangle = 0$ poiche' $\nabla f(\bar{x}) = \bar{0}$ e scriviamo dunque:

$$T_2(\bar{x} + h = x) - f(\bar{x}) = \frac{1}{2} \langle H_f(\bar{x})h, h \rangle + o(\|h\|^2)$$

Lo sostituiamo nella tesi del punto di minimo e dobbiamo dunque mostrare che:

$$\exists \delta > 0. \quad \frac{1}{2} \langle H_f(\bar{x})h, h \rangle + o(\|h\|^2) \geq 0 \quad \forall h \in B(0, \delta)$$

Per concludere mostro che $\exists m > 0$ per cui (dovevmo mostrare ≥ 0 , se mostro per un numero maggiore di zero, a maggior ragione, funziona ugualmente):

$$\frac{1}{2} \langle H_f(\bar{x})h, h \rangle + o(\|h\|^2) \geq \frac{m}{4} \|h\|^2 (1) + (2) \geq \frac{m}{4} \|h\|^2$$

1. Applicando il teorema sulle forme quadratiche positive con $A = H_f(\bar{x})$ ho che ($\exists m > 0. \quad \langle Ah, h \rangle \geq m\|h\|^2$):

$$\langle H_f(\bar{x})h, h \rangle \geq m\|h\|^2 \quad \text{e quindi anche}$$

$$\frac{1}{2} \langle H_f(\bar{x})h, h \rangle \geq \frac{m}{2} \|h\|^2$$

$$(1) \geq \frac{m}{2} \|h\|^2$$

2. Devo infine mostrare che $o(\|h\|^2) > m\|h\|^2$, ovvero espandendo la definizione di di limite:

$$\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \quad \left| \frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|^2} \right| < \varepsilon \quad \forall h \in B(0, \delta)$$

Scelgo $\varepsilon = \frac{m}{4}$, e ho dunque:

$$\exists \delta > 0. \quad \left| \frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|^2} \right| < \frac{m}{4}$$

$$-\frac{m}{4} \|h\|^2 < o(\|h\|^2) < \frac{m}{4} \|h\|^2 \quad \text{se } \|h\| < \delta$$

Dunque se $\|h\| < \delta$ (e' a nostro piacimento quindi lo sara') ho che:

$$(1) + (2) \geq \frac{m}{2} \|h\|^2 - \frac{m}{4} \|h\|^2 = \frac{m}{4} \|h\|^2$$

□

3.44 Prop: condizione necessaria al secondo ordine

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, sia $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 . Sia $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$ punto di minimo(massimo) di f , allora

$$\begin{cases} \nabla f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{0} \\ H_f(\bar{x}, \bar{y}) \text{ e' semidefinita positiva(negativa)} \end{cases}$$

OSS: e' importante specificare che l' H_f e' **semidefinita** in quanto potrebbe avere $\det(H_f) = 0$ ma essere comunque un punto di massimo/minimo.

Dimostrazione: provo con \bar{x} minimo. Costruisco come in Taylor la funzione $g(t) = f(\bar{x} + tv)$ che ha minimo anch'essa in $t = 0$. Ne segue che $g'(0) = 0, g''(0) > 0$ che per come fatto vedere in Taylor equivale a cio' che vogliamo.

Sia \bar{x} punto di minimo per f . Sia $v \in \mathbb{R}^n$ tale che $\|v\| = 1$. Considero $g(t) = f(\bar{x} + tv)$ definita per $t \in I(0, \varepsilon)$.

Poiche' f ha minimo locale in \bar{x} , g avra' minimo locale in $t \approx 0$.

Dunque $g'(0) = 0$ (1) e soprattutto $g''(0) \geq 0$ (2) il che implica (come visto per Taylor):

$$\begin{cases} \langle \nabla f(\bar{x}), v \rangle = 0 & (1) \\ \langle \frac{1}{2} H_f(\bar{x}) v, v \rangle \geq 0 & (2) \end{cases} \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, \|v\| = 1$$

Da cui segue:

$$\begin{cases} \nabla f(\bar{x}) = 0 \\ H_f(\bar{x}) \geq 0 \end{cases}$$

□

3.45 Def: funzione convessa

Presa $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ derivabile. f e' convessa se $\forall \bar{x}, x \in]a, b[$ vale

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x})$$

OSS: si noti che in \bar{x} il polinomio di Taylor in una variabile di grado uno vale esattamente $T_1(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x})$.

La definizioe ci dice dunque che una funzione si dice convessa se maggiore o uguale di ogni sua possibile retta tangente.

3.46 Teorema: caratterizzazione funzioni convesse-derivabili

Enunciato: Sia $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ derivabile, allora f e' convessa sse f' e' crescente in $]a, b[$ ($x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f') \implies x_1 < x_2 \implies f'(x_1) \leq f'(x_2)$).

Dimostrazione: Per \Rightarrow uso l'ipotesi di convessita' mettendo $\bar{x} = x_1, x = x_2$ e poi scambiando per ottenere due ipotesi che (invertendo i segni) mi danno una disequazione che altero rimuovendo un numero > 0 e qed.

Per \Leftarrow separo in casi in base a $\bar{x} > x$ o opposto, e uso lagrange in entrambi con intervallo appropriato.

1. **Caso \Rightarrow :** Per ipotesi so che f e' convessa e derivabile nel suo dominio, dunque devo vedere se e' crescente, ovvero presi $x_1, x_2 \in]a, b[$ tali che $x_1 < x_2$ mostrare $f'(x_1) \leq f'(x_2)$. Per l'ipotesi di convessita' ho che:

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) \quad \forall x, \bar{x} \in]a, b[$$

pongo $\bar{x} = x_1, x = x_2$

$$f(x_2) - f(x_1) \geq f'(x_1)(x_2 - x_1) \quad (H_1)$$

pongo $\bar{x} = x_2, x = x_1$

$$f(x_1) - f(x_2) \geq f'(x_2)(x_1 - x_2) \quad (H_2)$$

cambiando i segni a una e unendo

$$f'(x_1)(x_2 - x_1) \leq f(x_1) - f(x_2) \leq f'(x_2)(x_2 - x_1)$$

Ho dunque che $f'(x_1)(x_2 - x_1) \leq f'(x_2)(x_2 - x_1)$ e poiche' $(x_2 - x_1) > 0$ giungo a $f'(x_1) \leq f'(x_2)$. \square

2. **Caso \Leftarrow :** Per ipotesi f e' derivabile in $]a, b[$ e crescente. Devo mostrare che f e' convessa, ovvero:

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x})$$

Ho due casi: $\bar{x} < x$ o $x < \bar{x}$. Il caso $\bar{x} = x$ e' ovvio.

- ipotesi: $\bar{x} < x$. uso lagrange su $[\bar{x}, x]$ per cui $\exists c \in]\bar{x}, x[$ tale che $f(x) - f(\bar{x}) = f'(c)(x - \bar{x})$.
- ipotesi: $x < \bar{x}$. uso lagrange su $[x, \bar{x}]$ per cui $\exists c \in]x, \bar{x}[$ tale che $f(\bar{x}) - f(x) = f'(c)(\bar{x} - x)$, ovvero (cambio i segni) $f(x) - f(\bar{x}) = f'(c)(x - \bar{x})$.

\square

3.47 Teorema: caratterizzazione di funzioni convesse derivabili due volte

Enunciato: Se $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ e' derivabile due volte, allora

$$f \text{ e' convessa} \iff f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in]a, b[$$

Dimostrazione: usare il teorema per la caratterizzazione su funzioni derivabili, e poi che la derivata e' crescente se la derivata seconda e' ≥ 0 .

Per il teorema di caratterizzazione delle funzioni convesse-derivabili, f e' convessa sse f' e' crescente. Sappiamo poi che f' e' crescente sse $f''(x) \geq 0$ in $]a, b[$, ovvio per ipotesi. \square

3.48 Teorema: Taylor secondo ordine con resto secondo Lagrange in $n = 1$

Enunciato: Presa $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 , allora

$$\forall \bar{x}, h, \bar{x} + h \in [a, b], \exists \Theta \in]0, 1[\\ f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + \frac{1}{2}f''(\bar{x} + \Theta h)h^2$$

OSS: anche Lagrange $f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x} + \Theta h)h$ e' una formula di Taylor senza l'o-piccolo

Dimostrazione: idea

Devo mostrare che $f : C^2$ su $]a_0, b_0[$, preso $[a, b] \subseteq]a_0, b_0[$, $\exists c \in]a, b[$ tale che:

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + f''(c)\frac{(b-a)^2}{2}$$

Cerco $k \in \mathbb{R}$ tale che:

$$f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) - k\frac{(b-a)^2}{2} = 0 \quad (H_1)$$

Voglio mostrare $k = f''(c)$ per un opportuno $c \in]a, b[$.

Definisco $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) \mapsto f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - k\frac{(b-x)^2}{2}$ dove ho sostituito $a = x$ nella formula precedente.

Allora ho che $h(b) = f(b) - f(b) - f'(b)0 - 0 = 0$ e $h(a) = f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) - k\frac{(b-a)^2}{2}$ che sappiamo valere 0 per H_1 . Visto che $h(a) = h(b)$ posso applicare Rolle:

$$\exists c \in]a, b[. \quad h'(c) = 0$$

Derivando h e inserendola in quanto trovato si ottiene:

$$\begin{aligned} \exists c \in]a, b[. \quad -f'(c) - f''(c)(b-c) + f'(c) + k(b-c) &= 0 \\ -f''(c)(b-c) + k(b-c) &= 0 \\ \exists c \in]a, b[. \quad (b-c)(k - f''(c)) &= 0 \end{aligned}$$

Poiche' $c > b$ l'unica possibilita' e' che $-f''(c) - k = 0$ ovvero $f''(c) = k$. Abbiamo dunque trovato il k opportuno. \square

3.49 Teorema: Taylor secondo ordine con resto secondo Lagrange in $n > 1$

Enunciato: Sia $f : A \rightarrow B$ con $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Sia f di classe C^2 (dunque $f, \delta f, \delta^2 f$ continue), allora:

$$\forall \bar{x}, h \in \mathbb{R}^n. \exists \Theta \in]0, 1[\text{ tali che}$$

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), h \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(\bar{x} + \Theta h) h, h \rangle$$

Dimostrazione: idea

Dati $\bar{x}, \bar{x} + h \in \mathbb{R}^n$ considero $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 tale che $h(t) \mapsto f(\bar{x} + th)$. Si ha dunque che:

$$h'(t) = \langle \nabla f(\bar{x} + th), h \rangle = \sum_{j=1}^n \delta_{x_j} f(\bar{x} + h) h_j$$

$$h''(t) = \frac{\delta}{\delta t} \sum_{j=1}^n \delta_{x_j} f(\bar{x} + h) h_j = \langle H_f(\bar{x} + th) h, h \rangle$$

Scrivo poi Taylor "secondo Lagrange" per la funzione h di una variabile, ponendo $\bar{x} = 0, h = 1$:

$$h(1) = h(0) + h'(0)(1 - 0) + h''(\Theta) \frac{(1 - 0)^2}{2} \quad \text{con } \Theta \in]0, 1[$$

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), h \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(\bar{x} + \Theta h) h, h \rangle$$

3.50 Def: segmento

Definiamo un *segmento* tra $x, y \in \mathbb{R}^n$ con la notazione:

$$[x, y] = \{x + t(y - x) | 0 \leq t \leq 1\}$$

Risulta dunque al variare di t :

- $t = 0 \Rightarrow x$.
- $t = 1 \Rightarrow y$.
- $t = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}(x + y)$.

3.51 Def: insieme convesso

Si dice che A e' convesso se $\forall x, y \in A$ risulta che $[x, y] \subseteq A$.

Si puo' pensare ad un insieme convesso, dal quale si prendono due punti e si traccia un segmento che li collega. Se si riesce a trovare un segmento che tale che i suoi punti non appartengono tutti all'insieme scelto, allora esso non e' convesso.

3.52 Def: Funzioni convesse in $n > 1$

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme convesso. Una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice convessa su A se vale per $\forall x, \bar{x} \in A$:

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle \\ f(x) &\geq T_1(x) \text{ nel punto } \bar{x} \end{aligned}$$

Intuitivamente: vogliamo che il $Graf(f)$ sia sopra a $z = T_1$ il piano tangente.

3.53 Teorema: caratterizzazione della convessita' con la matrice Hessiana

Enunciato: Presa $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 , si puo' dire che f e' convessa sse $H_f(x)$ e' semidefinita positiva $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione: idea

- caso \Rightarrow : ipotesi: f convessa, dobbiamo dimostrare che $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n. H_f(\bar{x}) \geq 0$ (semidefinita positiva). Fisso \bar{x} e uso Taylor "secondo Lagrange" in \bar{x} . Ho dunque che $\forall h \in \mathbb{R}^n. \exists \Theta \in]0, 1]$ tale che

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), h \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(\bar{x} + \Theta h) h, h \rangle \quad (H_1)$$

Dalla definizione di f convessa ho $f(\bar{x} + h) \geq f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), h \rangle$ (H_2).

Unendo H_1 e H_2 ho che $\langle H_f(\bar{x} + \Theta h) h, h \rangle \geq 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$.

Fisso $v \in \mathbb{R}^n \neq 0$ e mostriamo che $\langle H_f(\bar{x} + \Theta v) v, v \rangle \geq 0$. Faccio cio' costruendo la successione $h_k = \frac{1}{k} v. k \in \mathbb{N}$.

Noto che $h_k \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$. Sostituisco h_k a v e proviamo:

$$\begin{aligned} \langle H_f(\bar{x} + \Theta h_k) \frac{1}{k} v, \frac{1}{k} v \rangle &\geq 0 \\ \left(\frac{1}{k}\right)^2 \langle H_f(\bar{x} + \Theta h_k) v, v \rangle &\geq 0 \quad \text{noto } h_k \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0 \\ \langle H_f(\bar{x}) v, v \rangle &\geq 0 \end{aligned}$$

□

- caso \Leftarrow : ipotesi: $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n. H_f(\bar{x}) \geq 0$, devo mostrare che f e' convessa, ovvero

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle.$$

Poiche' f di classe C^2 posso scrivere Taylor di secondo ordine con resto secondo Lagrange:

$$\exists \Theta \in]0, 1[\quad f(x) = f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(x)(x - \bar{x}), (x - \bar{x}) \rangle$$

Poiche' H_f e' semidefinita positiva si ha che

$$\frac{1}{2} \langle H_f(x)(x - \bar{x}), (x - \bar{x}) \rangle \geq 0$$

per cui la funzione riscritta secondo Taylor e' sempre maggiore o uguale di

$$f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle$$

□

3.54 Def: insiemi x, y -semplici

Sia $[a, b]$ un intervallo e siano h_1, h_2 due funzioni $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ con la proprieta' $h_1(x) \leq h_2(x) \quad \forall x \in [a, b]$.

L'insieme individuato viene detto y -semplice e scritto come segue:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [a, b] \wedge h_1(x) \leq y \leq h_2(x)\}$$

Sia $[c, d]$ un intervallo e siano g_1, g_2 due funzioni $[c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ con la proprieta' $g_1(y) \leq g_2(y) \quad \forall y \in [c, d]$.

L'insieme individuato viene detto x -semplice e scritto come segue:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \in [c, d] \wedge g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}$$

3.55 Prop: formula di riduzione per integrali doppi

Preso un insieme A del tipo y -semplice e una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua, si ha che:

$$\int_A f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{h_1}^{h_2} f(x, y) dy dx$$

Preso un insieme B del tipo x -semplice e una funzione $u : B \rightarrow \mathbb{R}$ continua, si ha che:

$$\int_B u(x, y) dx dy = \int_c^d \int_{g_1}^{g_2} u(x, y) dx dy$$

4 Domande secondo parziale

1. Enunciare il **teorema fondamentale del calcolo integrale**.
2. Cosa significa che la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e' differenziabile nel punto $(1, 2)$?
 - Esistono le derivate parziali $\frac{\delta f}{\delta x}, \frac{\delta f}{\delta y}$.
 - Vale la formula di Taylor: $f(x, y) = f(1, 2) + \langle \nabla f(1, 2), (x - 1, y - 2) \rangle + o(\|(x - 1, y - 2)\|)$ con $(x, y) \rightarrow (1, 2)$.
3. Data $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ scrivere cosa significa che $f = f(x_1, x_2)$ e' derivabile nel punto $\bar{x} = (1, 2)$ rispetto alla direzione $v = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.
Il seguente limite converge:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + tv) - f(\bar{x})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1 + \frac{t\sqrt{2}}{2}, 2 + \frac{t\sqrt{2}}{2}) - f(1, 2)}{t}$$

4. Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale per la funzione $g : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$.
Ipotesi: $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, sia $G : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x) = \int_0^x g(t) dt$.
Teorema: G e' derivabile, $G'(x) = g(x) \forall x \in [0, 1]$.
5. Enunciare il teorema della media integrale per la funzione $f : [2, 8] \rightarrow \mathbb{R}$.
Ipotesi: $f : [2, 8] \rightarrow \mathbb{R}$ continua nel dominio.
Teorema: $\exists c \in [2, 8] \quad f(c) = \frac{1}{8-2} \int_2^8 f(x) dx$
6. Data la funzione $f(x, y) = \ln(1 + \sqrt{x + y^2})$ scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(9, -4, f(9, -4))$ (a). Individuare poi la direzione di massima crescita nel sottostante punto $(9, -4)$ (b). Stabilire poi il valore della derivata parziale in tale direzione (c).

- (a) Il piano tangente e' dato dal polinomio di Taylor ponendo (\bar{x}, \bar{y}) uguali al punto dato. Si ha dunque:

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{1}{1 + \sqrt{x + y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x + y^2}}, \frac{1}{1 + \sqrt{x + y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x + y^2}} \cdot 2y \right)$$

$$z = T_1(x, y) = f(\bar{x}, \bar{y}) - \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (x - \bar{x}, y - \bar{y}) \rangle$$

$$z = T_1(x, y) = \ln(6) - \left\langle \left(\frac{1}{60}, \frac{-2}{15} \right), (x - 9, y + 4) \right\rangle$$

$$z = T_1(x, y) = \ln(6) - \frac{1}{60}(x - 9) - \frac{2}{15}(y + 4)$$

- (b) La direzione massima (che deve essere un versore, e va dunque reso di norma unitaria) e' data dal calcolo del gradiente nel punto dato:

$$\begin{aligned}v_{max} &= \nabla f(9, -4) = \frac{1}{60}(1, -8) \\ \|v_{max}\| &= \sqrt{1^2 + (-8)^2} = \sqrt{65} \\ \hat{v}_{max} &= \frac{v_{max}}{\|v_{max}\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{65}}, \frac{-8}{\sqrt{65}}\right)\end{aligned}$$

- (c) La derivata parziale in tale direzione puo' essere calcolata tramite il prodotto scalare tra il gradiente nel punto e il versore direzione:

$$\begin{aligned}\frac{\delta f}{\delta \hat{v}_{max}}(9, -4) &= \left\langle \frac{1}{60}(1, -8), \frac{1}{\sqrt{65}}(1, -8) \right\rangle \\ \frac{\delta f}{\delta \hat{v}_{max}}(9, -4) &= \frac{1}{60\sqrt{65}}(1^2 + (-8)^2) \\ \frac{\delta f}{\delta \hat{v}_{max}}(9, -4) &= \frac{65}{60\sqrt{65}} = \frac{13}{12\sqrt{65}}\end{aligned}$$

7. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione in due variabili che soddisfa $f(x, y) = f(y, x) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Usando le definizioni pertinenti verificare che vale $\frac{\delta f}{\delta x}(a, b) = \frac{\delta f}{\delta y}(b, a) \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Applico la definizione di derivata parziale a entrambi i membri dell'equazione:

$$\begin{aligned}\frac{\delta f}{\delta x}(a, b) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t, b) - f(a, b)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(b, a+t) - f(b, a)}{t} = \frac{\delta f}{\delta y}(b, a) \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(b, a+t) - f(b, a)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(b, a+t) - f(b, a)}{t}\end{aligned}$$

□

8. Calcolare la derivata della funzione $f(x, y) = x + 3y$ lungo la curva $r(t) = (\cos t, \sin t)$ in due modi: scrivendo la funzione composta e derivandola direttamente (a), poi usando il teorema visto in classe (b).

(a)

$$\begin{aligned}(f \circ r)(t) &= f(r(t)) = \cos t + 3 \sin t \\ (f \circ r)'(t) &= -\sin t + 3 \cos t\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}(f \circ r)'(t) &= \langle \nabla f(r(t)), r'(t) \rangle \\ r'(t) &= (r'_1(t), r'_2(t)) = (-\sin t, \cos t) \\ \nabla f(t) &= (1, 3) \\ (f \circ r)'(t) &= \langle (1, 3), (-\sin t, \cos t) \rangle \\ &= -\sin t + 3 \cos t\end{aligned}$$

9. Data $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, f : (x, y) \mapsto x^2 - xy^2 + y^2 - 3$ trovare i/vettrici/e $v \in \mathbb{R}^2$ di norma unitaria per cui $\frac{\delta f}{\delta v}(2, -2) = -3$:

Ho due condizioni: (1) v di norma unitaria, deve dunque valere $\|v\| = 1$,
 (2) $\frac{\delta f}{\delta v}(2, -2) = -3$. Le metto a sistema, scrivendo $v = (x, y)$:

$$\nabla f(x, y) = (2x - y^2, -2xy + 2y)$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ \langle \nabla f(2, -2), (x, y) \rangle = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ \langle (0, 4), (x, y) \rangle = -3 \Rightarrow y = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{4} \\ x^2 + \frac{9}{16} = 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 = \frac{7}{16} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{7}}{4}$$

Abbiamo trovato i vettori $(\pm \frac{\sqrt{7}}{4}, -\frac{3}{4})$, ora bisogna renderli versori (di norma unitaria):

$$\|(\pm \frac{\sqrt{7}}{4}, -\frac{3}{4})\| = \sqrt{\frac{7}{16} + \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{16}{16}} = 1$$

Notiamo che sono già di norma unitaria, e abbiamo dunque già trovato i versori di nostro interesse.

10. Data $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, f : (x, y) \mapsto x^2 - xy^2 + y^2 - 3$ scrivere il polinomio di Taylor del secondo ordine con punto iniziale in $(2, -2)$.

Calcolo le parti necessarie per comporre ∇f e H_f che servono per calcolare il polinomio di Taylor di secondo ordine.

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2x - y^2 & f_y(x, y) &= -2xy + 2y \\ f_{xx}(x, y) &= 2 & f_{yy}(x, y) &= -2x + 2 \end{aligned}$$

Applico poi la formula del polinomio di Taylor di secondo grado sostituendo $(\bar{x}, \bar{y}) = (2, -2)$:

$$\begin{aligned} T_2(x, y) &= f(2, -2) + \langle \nabla f(2, -2), (x - 2, y + 2) \rangle + \\ &\quad \frac{1}{2} \langle H_f(2, -2)(x - 2, y + 2), (x - 2, y + 2) \rangle \\ T_2(x, y) &= -3 + \langle (0, 4), (x - 2, y + 2) \rangle + \\ &\quad \frac{1}{2} \left\langle \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x - 2 \\ y + 2 \end{pmatrix}, (x - 2, y + 2) \right\rangle \\ T_2(x, y) &= -3 + 4(y + 2) + \frac{1}{2} \langle (2(x - 2) + 4(y + 2), 4(x - 2) + 2(y + 2)), (x - 2, y + 2) \rangle \\ T_2(x, y) &= -3 + 4(y + 2) + \frac{1}{2} \langle (2x + 4y + 4, 4x + 2y - 4), (x - 2, y + 2) \rangle \\ &\dots \end{aligned}$$