1 Spazio euclideo

$$\mathbb{R}^n := \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n | x_1, x_2, x_n \in \mathbb{R}\}$$

In $\mathbb{R}^n$ vale

Somma tra vettori $x = (x_1, \dots, x_2), y = (y_1, ..., y_n)$

$$x + y = (x_1 + y_1 + \dots + x_n + y_n)$$

Prodotto con scalare dato $x = (x_1, \dots, x_n), \lambda \in \mathbb{R}$, poniamo

$$\lambda x := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

Definizione Prodotto scalare euclideo Dati $x, y \in \mathbb{R}^n$, poniamo:

$$\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

1.1 Proprietà:

1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
2. $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$ e $\langle z, \lambda x + \mu y \rangle = \lambda \langle z, x \rangle + \mu \langle z, y \rangle \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n \wedge \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
3. $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
4. $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = \underline{0} = (0, 0, \dots, 0)$.

1.2 Definizione Vettori ortogonale

$x, y \in \mathbb{R}^n$ si dicono ortogonali se $\langle x, y \rangle = 0$

1.3 Definizione Norma euclidea

Dato $x \in \mathbb{R}^n$, poniamo $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \in [0, +\infty[$
Si dice norma di x (viene usata la notazione $|x|$)

Interpretazione della norma con lunghezza (con il Teorema di Pitagora)

1.3.1 Proprietà della norma

1. $|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$
2. $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ in oltre $|x| = 0 \iff x = 0$
3. $|x + y| \leq |x| + |y| \quad forall x, y \in \mathbb{R}^n$ (disuguanza triangolare, con relativa interpretazione)

1.4 Normalizzato di un vettore

Definizione: dato $x \neq 0, x \in \mathbb{R}^n$, il normalizzato di x è il vettore $\frac{x}{|x|}$, l'unico multiplo positivo di x che ha norma 1

1.5 Scrittura del prodotto scalare in coordinate polati in $\mathbb{R}^n$

Dati $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, scriviamo

$$x = |x| \frac{x}{|x|} = r(\cos\theta, \sin\theta)$$

dove $r = |x|$ e $\theta \in \mathbb{R}$ è opportuno. Presi $x = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ e $y = (\rho\cos\phi, \rho\sin\phi)$, risulta

$$\langle x, y\rangle = r\rho\cos(\phi - \theta) = |x| \cdot |y| \cos(\phi - \theta)$$

la conseguenza è la disuguaglianza di Clauchy-Schwarz

1.6 La disuguaglianza di Clauchy-Schwarz

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ vale

$$|\langle x, y\rangle| \leq |x| \cdot |y|$$

Inoltre vale l'uguaglianza sse x e y sono indipendenti

1.7 Formula del "quadrato di un binomio "

Dati $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale

$$|x + y|^2 = |x|^2 + 2\langle x, y\rangle + |y|^2$$

La dimostazione avviene con le proprietà del prodotto scalare. Dalla formula sopra segue che, se $x \perp y$ in $\mathbb{R}^n$, allora vale

$$|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$$

Teorema dio Pitagora

1.8 Disuguaglianza triangolare

Ancora della formula del "quadrato di un binomio" si può ottenere la dimostazione della disuguaglianza triangolare

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Infatti

$$|x+y|^2 = |x|^2+|y|^2+2\langle x, y\rangle \leq \text{ (per Clauchy-Schwarz) } \leq |x|^2+|y|^2+2|x|\cdot|y| = (|x| + |y|)^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

1.9 Definizione distanza

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ la distanza tra x e y è

$$|x - y|$$

1.10 Intorni sferici o dischi o palle

Dato $x \in \mathbb{R}^n$ (centro) e $r > 0$ (raggio), poniamo

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| < r\} \text{ (palla con centro x e raggio r)}$$

1.11 Definizione insieme limitato

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, si dice limitato se $\exists R > 0$ t.c $A \subseteq B(0,R)$

1.12 Insieme aperto

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice aperto se

$$\forall x \in A \exists r > 0 \text{ t.c } B(x,r) \subseteq A$$

Esempi Gli intervalli $]a,b[$, i rettangoli $A = I \times J \subseteq \mathbb{R}^2$ con I, J aperti in $\mathbb{R}$.

2 Sucessioni in $\mathbb{R}^n$

Sia $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucessione in $\mathbb{R}^n \quad \forall k \in \mathbb{N}$

2.1 Definizione

$(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sucessione in $\mathbb{R}^n$; $x \in \mathbb{R}^n$ Si dice $x_k \to x$ per $k \to +\infty$ se vale

$$\lim_{k \to +\infty} x_k^j = x^j \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Equivalentemente se vale $lim_{k \to +\infty} |x_k - x| = 0$

3 Funzioni di più variabili

$A \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^q$. Data $f : A \to B$, il grafico di f è

$$Graf(G) = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subseteq A \times B$$

3.1 Definizione funzione continua

$f : A \to B$ (con $A \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^q$)

f si dice continua se $\overline{x}$ se vale quanto segue:

$$\forall (x_k)_{k \in \mathbb{N}}, (x_k) \text{ sucessione in A}, x_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} \overline{x} \implies f(x_k) \to f(\overline{x}) \quad k \to +\infty$$

Si dimostra che la definizione di continuà "per sucessioni" opportuna data è equivalente alla seguente:

$$f : A \to B \textit{ continua in } x \in A \textit{ se} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta \textit{ t.c } |f(x) - f(\overline{x})| < \varepsilon \forall x \in A \cap B(x, \delta)$$