INFORMATICA TEORICA

giosumarin

March 2021

1 Lezione 1

1.1 Definizione di funzione

Funzione: una legge/regola che ci dice come associare un elemento di A a uno di B.
Definizione globale: $f : A \to B$: chiamiamo A il dominio della funzione e B il codominio.
Definizione locale: $a \to^f b$ oppure $f(a) = b$ con b immagine di a rispetto a f e a controimmagine di b rispetto a f.
$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ con $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ..\}$ e con $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, 4, ..\}$
Globale: $f(n) = \lfloor\sqrt{n}\rfloor$; Locale: $f(5) = \lfloor\sqrt{n}\rfloor$ In una funzione, per definizione, un valore del dominio può portare a uno solo valore di codominio.

1.2 Funzione iniettiva, suriettiva e biettiva

Funzione Iniettiva

$$f : A \to B \textbf{ è iniettiva sse } \forall a_1, a_2 \in A \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

ovvero non ci sono confluenze verso un punto del codominio.

Funzione Suriettiva

$$f : A \to B \textbf{ è suriettiva sse } \forall b \in B, \exists a \in A : f(a) = b$$

Definiamo con Im_f l'insieme delle immagini. Quindi

$$\{Im_f = b \in B : \exists a t.c. f(a) = b\} = \{f(a), a \in A\}$$

Possiamo quindi dire che in generale $Im_f \subseteq B$ ed è suriettiva sse $Im_f = B$, ovvero quando il grafico della funzione compre tutto l'asse y.

Funzione Biettiva Una funzione si dice biettiva quando è sia iniettiva che suriettiva, ovvero

$$\forall b \in B \exists! a \in A : f(a) = b$$

dove con $\exists!$ indichiamo "esiste unico".

Composizione di funzioni Nota: non è commutativo

$$f : A \to B$$
$$g : B \to C$$
$$f \textbf{ composto } g\textbf{:}\ g \cdot f : A \to C$$
$$\textbf{definita come } g \cdot f(a) = g(f(a))$$

Funzione Inversa

$$f : A \to B \textbf{ biettiva}$$
$$f^{-1} : B \to A \textbf{ t.c. } f^{-1}(b) = a \leftrightarrow f(a) = b$$

Definiamo

$$i_A : A \to A \textbf{ con } i_A(a) = a$$

che ci permette di dare una definizione ulteriore di funzione inversa combinando la funzione identità e la composizione

$$f^{-1} \cdot f = i_A \wedge f \cdot f^{-1} = i_B$$

2 Lezione 2

$$f(a) \downarrow\text{:}\ f \textbf{ definita } \forall a \in A \textbf{ si dice che } f \textbf{ è totale}$$
$$f(a) \uparrow\text{:}\ \textbf{non definita per ogni } a \in A.$$

$f : A \to B$ è parziale se qualche elemento di A associa un elemento di AB, infatti:

$$Dom_f = \{a \in A : f(a) \downarrow\} \subseteq A$$
$$Dom_f \subsetneq A \Rightarrow f \textbf{ parziale (incluso stretto)}$$
$$Dom_f = Af \textbf{ totale}$$

Totalizzare

$$f : A \to B \textbf{ parziale} \Rightarrow \tilde{f} : A \to B \cup \{\perp\} \textbf{ totale,}$$
$$\textbf{Indichiamo } B \cup \{\perp\} \to B_\perp$$
$$\tilde{f} = \begin{cases} f(a) \text{ se } a \in Dom_f \\ \perp \ \textbf{altrimenti} \end{cases}$$

Prodotto Cartesiano

$$A \times b = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$$
$$\textbf{Nota: } \times \textbf{ non commutativa } A \times B \neq B \times A$$
$$\textbf{Proiettore -iesimo}\pi_i : A_1 \times \cdots \times A_n \to A_i$$
$$\pi_i(a_1, \ldots, a_n) = a_i$$
$$\textbf{Indichiamo A per n volte come } A \times \cdots \times A = A^n$$

Insieme di funzioni

$$B^A = \{f : A \to B\} = \textbf{ insieme delle funzioni da } A \textbf{ a } B$$
$$B^A_\perp = \{f : A \to B\} = \textbf{ insieme delle funzioni parziali da } A \textbf{ a } B$$

Funzione di valutazione Dati A, B e $B^A_\perp$ si definisce funzione di valutazione

$$w : B^A_\perp \times A \to B \textbf{ con } w(f, a) = f(a)$$

Fissando a eseguo un benchmark di funzioni, fissando f creo i punti del grafico di f.

Sistema di calcolo C Abbiamo $P \in$ PROG che è una sequenza di regole che trasforma un dato di input in un dato di output $\Rightarrow P \in \mathit{DATI}_\perp^{\mathit{DATI}}$ è una funzione (in un linguaggio).

$$C : \mathit{DATI}_\perp^{\mathit{DATI}} \to \mathit{DATI}_\perp$$
$$\textbf{dove } C(P, x) \textbf{ è la funzione calcolata da } P$$

P è un oggetto semantico/rappresentazione, se faccio girare ho una funzione.

Potenza computazionale di C

$$F(C) = \{C(P,) : P \in \mathit{PROG}\} \subseteq \mathit{DATI}_\perp^{\mathit{DATI}}$$
$$F(C) = \mathit{DATI}_\perp^{\mathit{DATI}} \Rightarrow \textbf{ informatica può tutto}$$
$$F(C) \subsetneq \mathit{DATI}_\perp^{\mathit{DATI}} \Rightarrow \textbf{ esistono compiti non automatizzabili}$$

Cardinalità Indichiamo con $|A|$ il numero di elementi di A. Ha senso però solo su insiemi infiniti. Infatti $|\mathbb{N}| = \inf = |\mathbb{R}|$ risultano equinumerosi, che me ne faccio? In realtà, l'infinito di $\mathbb{N}|$ è meno fitto di quello di $|\mathbb{R}$.

Relazione Relazione binaria su $A : R \subseteq A^2$. Elementi $a, b \in A$ sono nella relazione R sse $(a, b) \in R$ che si può anche indicare con aRb.
Relazione di equivalenza sse:

- Riflessiva, $\forall a : aRa$
- Simmetrica, $\forall a, b : aRb = bRa$
- Transitiva, $aRb \wedge bRc \to aRc$

Relazioni di equivalenza e partizioni $A : R \subseteq A^2$ induce partizione su $A \Rightarrow A_1, A_2, \cdots \subseteq A$ t.c.

- $A_i \neq \varnothing$;
- $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$;
- $\cup_{i \in I} A_i = A$.

Data $a \in A$ la sua classe di equivalenza è $[a]_R = \{b \in A_i : aRb\}$.
Si dimostra che:

- Non esistono classi di equivalenza vuote (per riflessività ho almeno dentro me stesso);
- dati $a, b \in A \Rightarrow [a]_R \cap [b]_R = \varnothing$ **o** $[a]_R = [b]_R$
- $\cup_{a \in A}[a]_R = A$

L'insieme delle classi di equivalenza spezzetta A. L'insieme A visto come partizioni è detto quoziente di A rispetto a R e si indica con A/R.

Cardinalità di insiemi Sia U la classe di tutti gli insiemi. Definisco $\sim \subseteq U^2$ come $A \sim B$ sse esiste biezione tra A e B (associazione 1 a 1 tra elementi di A e B).
Propietà di $\sim$:

- riflessiva (uso funzione identità di A (i_A));
- simmetrica: se $A \sim B$ allora $B \sim A$ con la funzione inversa (con biezione esiste per forza);
- transitiva: composizione di biettiva è biettiva.

Se $A \sim B$ i due insiemi sono equinumerosi. Un insieme si dice numerabile sse $A \sim \mathbb{N}$.

3 Lezione 3

Definiamo un insieme non numerabile un insieme a cardinalità infinita ma non "listabili esaustivamente" come $\mathbb{N}$, sono più fitti e se provo a listare mi perdo qualche elemento.

3.1 $\mathbb{R}$ non è numerabile

Proviamo a dimostrare che non c'è biezione tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$:

1. dimostro che $\mathbb{R} \sim [0, 1]$, ovvero che $[0, 1]$ è fitto come $\mathbb{R}$;
2. dimostro che $\mathbb{N} \not\sim [0, 1]$
3. $\mathbb{N} \not\sim [0, 1] \Rightarrow \mathbb{N} \not\sim \mathbb{R}$

$\mathbb{R} \sim [0,1]$

- scelgo un punto su $[0,1]$
- proietto sulla semicirconferenza centrata in $\frac{1}{2}$
- traccio linea tra $\frac{1}{2}$ e il punto proiettato

La funzione è iniettiva in quanto ogni punto crea un punto diverso (cambia l'angolo); è anche suriettiva tramite l'operazione inversa. Possiamo quindi dire che $\mathbb{R} \sim [0,1]$.

$\mathbb{N} \not\sim [0,1]$ Dimostrazione per assurdo: $\mathbb{N} \sim [0,1]$, quindi $[0,1]$ è listabile.

$$
\begin{array}{cccccc}
0. & \underline{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots \\
0. & a_{21} & \underline{a_{22}} & a_{23} & a_{24} & \dots \\
0. & a_{31} & a_{32} & \underline{a_{33}} & a_{34} & \dots \\
0. & a_{41} & a_{42} & a_{43} & \underline{a_{44}} & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}
$$

1 posso sciverso come $0.\overline{9}$. Costruiamo ora $0, c_1, c_2, \dots, c_i, \dots$.

$$
c_i = \begin{cases} a_{ii} + 1 \text{ se } a_{ii} < 9 \\ a_{ii} - 1 \text{ se } a_{ii} = 9 \end{cases}
$$

c non è nessuno della lista perchè differisce per la i-esima componente, differisce dal primo perchè $c_1 \neq a_{11}$, dal secondo perchè $c_2 \neq a_2$ e così via. Possiamo quindi dire che $\mathbb{N} \not\sim [0,1]$.
Quindi $\mathbb{N} \not\sim \mathbb{R}$, di conseguenza $\mathbb{R}$ non è numerabile ed è un'insieme continuo: tutti gli insiemi equinumerosi a $\mathbb{R}$ si dicono insiemi continui.

Insieme delle parti di $\mathbb{N}$ $P(\mathbb{N} =$ sottoinsiemi di $\mathbb{N} \not\sim$ dimostrato per diagonalizzazione. Creo elenco di sottoinsiemi e trovo un sottoinsime di $\mathbb{N}$ che non c'è nell'elenco.

$$
\begin{array}{l}
\mathbb{N} \Rightarrow \ \mathbf{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6} \ \dots \\
A \Rightarrow \ \mathbf{1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0} \ \dots \\
\textbf{dove } 1 \Rightarrow \in A \textbf{ e } 0 \Rightarrow \not\in A
\end{array}
$$

Per assurdo $P(\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \Rightarrow$ listo esaustivamente

$$
\begin{array}{ccccc}
\underline{b_{01}} & b_{11} & b_{21} & b_{31} & \dots \\
b_{02} & \underline{b_{12}} & b_{22} & b_{32} & \dots \\
b_{03} & b_{13} & \underline{b_{23}} & b_{33} & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}
$$

Considero ora il sottoinsieme di $\mathbb{N}$ rappresentato dal vettore $\overline{b_{01} b_{12} b_{23}} \dots$ dove overline rappresenta il negato. Questo vettore è un sottoinsimeme di $P(\mathbb{N}$ che non appartiene a $\mathbb{N}$.

$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ Insieme non numerabile $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$.
Anche in questo caso procedo per diagonalizzazione per ipotesi assurda. Metto sulle colonne i valori di N e sulle righe le funzioni.

$$\begin{array}{ccccc} \underline{f_0(0)} & f_0(1) & f_0(2) & f_0(3) & \dots \\ f_1(0) & \underline{f_1(1)} & f_1(2) & f_1(3) & \dots \\ f_2(0) & f_2(1) & \underline{f_2(2)} & f_2(3) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Definisco $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ con $\phi(n) = f_n(n) + 1$. $\phi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ e dovrebbe stare nella lista esaustima ma non c'è quindi è un insieme continuo come l'insime delle parti di $\mathbb{N}$.

3.2 Cosa è calcolabile?

Considerazioni ragionevoli:

- $PROG \sim \mathbb{N}$, cosidero la digitalizzazione di un programma, è un numero espresso in binario
- $DATI \sim \mathbb{N}$, come sopra

Quindi $F(C) \sim PROG \sim \mathbb{N} \not\sim \mathbb{N}_{\perp}^{\mathbb{N}} \sim DATI_{\perp}^{DATI}$. Esistono funzioni non calcolabili, pochi programmi e tante funzioni.

4 Lezione 4

4.1 *Dati* $\sim \mathbb{N}$

Forniamo una legge che:

- associ biunivocamente dati a numeri e viceversa;
- consente di operare direttamente per operare sui corrispettivi dati; che ci consenta di dire, senza perdita di generalizzazione, che i nostri programmi lavorano sui numeri.

Per fare ciò, passiamo attraverso un risultato matematico sulla cardinalità di insiemi. $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \simeq \mathbb{N}^+ \Rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$, da cui si può ottenere $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$ consierando che possiamo vedere le frazioni $\in \mathbb{Q}$ come coppie di numeratore e denominatore ovvero $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Funzione coppia di Cantor Definiamo $<,>: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+$ iniettiva e suriettiva. Abbiamo $< x, y >= n$ con $sin : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}$ e $des : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}$. Per il "ritorno" abbiamo quindi che $sin(n) = x$ e $des(n) = y$.

Consideriamo una rappresentazione grafica come in Tabella 4.1, riempita con i numeri $\in \mathbb{N}^+$ seguendo la diagonale. Cantor è iniettiva perchè le coordinate di punti diverse individuano celle diverse che vengono riempite successivamente;

Table 1: Rappresentazione delle coppie di Cantor

		y			
		0	1	2	3
x	0	1	3	6	10
	1	2	5	9	
	2	4	8		
	3	7			

Table 2: Rappresentazione analitica di cantor, la coppia $< x, y >$ si trova sulla diagonale della riga $x + y$

		y			
		$\dots$	$\dots$	y	$\dots$
x	x	$\dots$	$\dots$	$< x, y >$	
	$\dots$		$\dots$		
	$x + y$	$\dots$			
	$\dots$				

suriettiva perchè riempio fino all' n voluto e guardo immmagine $< x, y >$ corrispondente. Per esempio $< 2, 1 >= 8$.

Forma analitica di Cantor Come vediamo nella Tabella 4.1 troviamo il valore della coppia $< x, y >$ sulla diagonale che inizia in $< x + y, 0 >$.

1. $< x, y >=< x + y, 0 > +y$
2. trovo la coppia $< z, 0 >= \sum_{i=1}^{z} \frac{z(z+1)}{2} + 1$

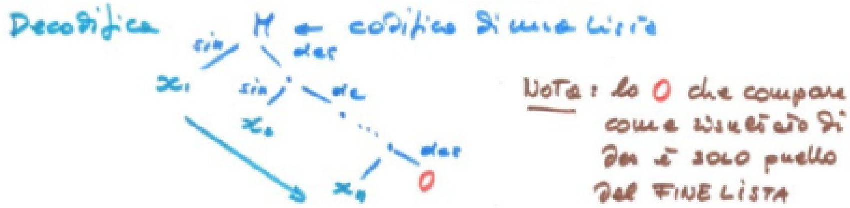
Il punto 2 è dato dal fatto che un generico valore nella colonna 0 è dato dalla somma degli indici fino a quello cercato +1, vediamo per esempio nella Tabella 4.1 che il valore 7 nella riga 3 è calcolabile come $3+2+1+0$ a cui aggiungiamo ancora 1. Unendo i due punti troviamo che

$$< x, y >=< x + y, 0 > +y = \frac{(x + y)(x + y + 1)}{1} + y + 1.$$

Come tornare a $\mathbb{N}^+$ e $\mathbb{N}^+$ Vogliamo capire come trovare sinistra e destra partendo da n.

1. trovare le coordinate $< \gamma, 0 >$ del punto inizale della diagonale dove si trova n;
2. $y = n- < \gamma, 0 >$ e $x = \gamma - y$,

Figure 1: Decodifica lista



Per il punto 1 possiamo dire che $\gamma = max\{z \in \mathbb{N} :< z, 0 >\leq n\}$, quindi

$$\begin{aligned}
&< z, 0 >\leq n \Rightarrow \frac{z(z+1)}{2} + 1 \leq n \\
&\Rightarrow z^2 + z + 2 - 2n \leq 0 \Rightarrow^{eq\ 2^{\circ}\ grado} \\
&\Rightarrow z_{1,2} = \frac{-1 \mp \sqrt{8n-7}}{2} \Rightarrow^{solo\ \leq\ 0} \\
&\Rightarrow \frac{-1 - \sqrt{8n-7}}{2} \leq z \leq \frac{-1 + \sqrt{8n-7}}{2} \\
&\Rightarrow^{intero\ più\ grande} \Rightarrow \gamma = \lfloor \frac{-1 + \sqrt{8n-7}}{2} \rfloor;
\end{aligned}$$

troviamo infine che $des(n) = y = n- < \gamma, 0 >$ e $sin(n) = x = \gamma - y$.

Abbiamo quindi dimostrato $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}^+$, per dimostrare $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ basta semplicentente definire una nuova funzione, ovvero

$$[,] : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}\ \textbf{t.c.}\ [x, y] =< x, y > -1$$

e possiamo notare che , mostra che $\mathbb{Q}$ è numerabile.

4.1.1 *DATI*$\simeq\mathbb{N}$

Liste di interi Codifichiamo $x_1, \ldots, x_n$ in $< x_1, \ldots, x_n >$. Ricordiamo che le liste non hanno lunghezza nota, quindi metto uno 0 a fine lista per capire che sono arrivato alla fine.

Codifica: $1, 2, 5 \Rightarrow< 1, 2, 5, 0 >\Rightarrow< 1, < 2, < 5, 0 >>>\Rightarrow< 1, < 2, 16 >\Rightarrow< 1, 188 >\Rightarrow 18144$.

Decodifica: Creo albero a partire da n, a sinistra troverò i vari x ordinati con in cima quello di indice inferiore e a destra o un sottoalbero o uno 0. Quando trovo 0 a destra mi fermo. Un esempio è mostrato in Figura 4.1.1.

Strutture dati derivanti Array(lunghezza nota):

$$x_1, \ldots, x_n \Rightarrow [x_1, \ldots, x_n] = [x_1, \ldots, [x_{n-1}, x_n]] \ldots]$$

Matrici:
$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow [[a_{11}, a_{12}], [a_{11}, a_{12}]]$$

Grafi: utilizzando le liste di adiacenza o le matrici di adiacenza.

5 Lezione 5

Sistema di calcolo *RAM*: macchina *RAM* + linguaggio *RAM* (assembly semplificato). Consente di definire rigorosamente:

- $PROG \sim \mathbb{N}$
- $C(P, \_)RAM(P, \_)$, semantica dei programmi
- $F(RAM)$, potenza computazionale

Forse l'idea di potenza computazionale fornita in prima istanza ($F(RAM)$ è stringente in quando la macchina *RAM* è molto semplice, successivamente introdurremo la macchina *WHILE* (JVM) e comfronteremo le loro potenze computazionali. Se avremo $F(\_)$:

- diverse $\Rightarrow$ ciò che è computabile dipende dallo strumento
- uguale $\Rightarrow$ computabilità (tesi di Church)? posso calcosare stessi insiemi di funzioni?

Sistema di calcolo *RAM* La macchina *RAM* è composta da:

- L, program counter, indica indirizzo della prossima istruzione da eseguire;
- P, programmma, formato da istruzioni;
- R, memoria, insieme di registri e ogni cella può contenere un numero $\in \mathbb{N}$, dove R_1 contiene l'inpur e R_0 l'output.

La terminazione è data da $L = 0$.

Output: $\phi_P(x) = contenuto(R_o)$ o $\perp$ in caso di loop, indichiamo con ϕ_P la semantica di P.

Linguaggio *RAM*

- $R_k \leftarrow R_k + 1$
- $R_k \leftarrow R_k \dot{-} 1; x \dot{-} y = x - y \text{ } if \text{ } x \geq y \text{ } else \text{ } 0$
- $if \text{ } R_k = 0 \text{ } then \text{ } goto \text{ } m; m = \{1, |P|\}; |P| = numero \text{ } di \text{ } istruzioni \text{ } di \text{ } P$

Semantica Operazionale Ovvero specificare il significato di ogni istruzione, e quindi dei programmi, specificando l'effetto che quell'istruzione ha sui registri della macchina.

Come descrivo l'effetto di un'istruzione? S=Stato=foto della macchina. Prendo S prima e dopo l'esecuzione di un'istruzione. S_{init}, S_1, S_{fin}, P induce una sequenza di stati.

La semantica di P:

$$\phi_P = \begin{cases} y \ \textit{se finisce} \\ \perp \ \ \textit{altrimenti} \end{cases}$$

5.1 Ingredienti della definizione formale di semantica

Stato

$S : \{L, R\} \to \mathbb{N}$

$Stati = \mathbb{N}^{\{L,R\}}$

$S(R_k)$: *contenuto del registro* R_k *quando la macchina è nello stato* S

stato finale : $S(L) = 0 \Rightarrow$ **HALT**

dato : $\mathbb{N}(infattiDATI \sim \mathbb{N})$

Inizializzazione Dato il dato n prepara la macchina nello stato iniziale:

- $S_{init}(L) = 1$
- $S_{init}(R_1) = n$
- $\forall i \neq 1 : S_{init}(R_i) = 0$

Programmi $PROG = \{\textit{programmi RAM}\}, P \in PROG; |P| = \#\textit{istrizioni}$

Esecuzione Dinamica del programma $\Rightarrow$ funzione stato prossimo.

σ : $stati \times PROG \to stati_\perp$; $\sigma(S, P) = S'$

Lo stato che segue lo stato S dopo l'eesecuzione di un'istruzione di P:

- dipende dall'istruzione che devo eseguire
- l'istruzione dipende da $S(L)$

1. se $S(L) = 0$ allora $S' = \perp$
2. se $S(L) > |P|$ allora $S'(L) = 0$ e $\forall i : S'(R_i) = S(R_i)$
3. se $1 \leq S(L) \leq |P|$: considero l'istruzione $S(L) - esima$:
    - $R_k \leftarrow R_k + /\dot{-}1$:
        - $S'(R_k) = S(R_k) + /\dot{-}1$
        - $S'(L) = S(L) + 1$

  - $\forall i \neq k : S'(R_i) = S(R_i)$
- *if* $R_k = 0$ *then goto* m:
  - $S'(R_i) = S(R_i)$
  - $S'(L) = m$ *if* $S(R_k) == 0$ *else* $S(L) + 1$

Semantica di P

$$\phi_P : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp$$
$$\phi_P(n) = \begin{cases} y \ se \ S_m(L) = 0 \ e \ S_m(R_0) = y \\ \perp \ se \ va \ in \ loop \end{cases}$$

Potenza computazionale di *RAM* $F(RAM = \{f \in \mathbb{N}_\perp^{\mathbb{N}} : \exists P \in PROG, \phi_P = f\} = \{\phi_P : P \in PROG\} \subseteq \mathbb{N}_\perp^{\mathbb{N}}$.

Incluso stretto per intuizione.

6 Lezione 6

S
|
S1