UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

FACOLTÀ DI SCIENZE E TECNOLOGIE

Corso di Laurea in Informatica

Compressione di reti neurali in problemi di classificazione e regressione

Relatore:
Prof. Dario MALCHIODI
Correlatore:
Dr. Marco FRASCA

Tesi di Laurea di:
Giosuè Cataldo Marinò
Matricola: 829404

Anno Accademico 2018/2019

Indice

Introduzione

BLABLA Blablabla said Nobody [4].

Capitolo 1

Reti Neurali

1.1 Reti Neurali Biologiche

I neuroni sono delle celle elettricamente attive e il sistema nervoso centrale ne contiene circa 10^{11}. La maggior parte di essi ha la forma indicata in Figura 1.1. I dendriti rappresentano gli ingressi del neurone mentre l'assone ne rappresenta l'uscita. La comunicazione tra i neuroni avviene alle giunzioni, chiamate sinapsi. Ogni neurone è tipicamente connesso ad un migliaio di altri neuroni e, di conseguenza, il numero di sinapsi nel cervello supera 10^{14}.

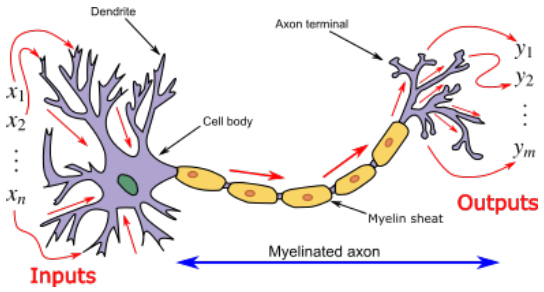


Figura 1.1: Neurone Biologico [11]

Ogni neurone si può trovare principalmente in 2 stati: attivo o a riposo. Quando il neurone si attiva, esso produce un potenziale di azione (impulso elettrico) che viene trasportato lungo l'assone. Una volta che il segnale raggiunge la sinapsi esso provoca il rilascio di sostanze chimiche (neurotrasmettitori) che attraversano la giunzione ed entrano nel corpo di altri neuroni. In base al tipo di sinapsi, che possono essere eccitatori o inibitori, queste sostanze aumentano o diminuiscono rispettivamente la probabilità che il successivo neurone si attivi. Ad ogni sinapsi è associato un peso che ne determina il tipo e l'ampiezza dell'effetto eccitatore o inibitore. Quindi, in poche parole, ogni neurone effettua una somma pesata degli ingressi provenienti dagli altri neuroni e, se questa somma supera una certa soglia, il neurone si attiva.
Ogni neurone, operando ad un ordine temporale del millisecondo, rappresenta un sistema di elaborazione relativamente lento; tuttavia, l'intera rete ha un numero molto elevato di neuroni e sinapsi che possono operare in modo parallelo e simultaneo, rendendo l'effettiva potenza di elaborazione molto elevata. Inoltre la rete neurale biologica ha un'alta tolleranza ad informazioni poco precise (o sbagliate), ha la facoltà di apprendimento e generalizzazione.

1.2 Reti Neurali Artificiali

Ci concentreremo su una classe particolare di modelli di reti neurali: le reti a catena aperta. Queste reti possono essere viste come funzioni matematiche non lineari che trasformano un insieme di variabili indipendenti $x = (x_1, ..., x_d)$, chiamate ingressi della rete, in un insieme di variabili dipendenti $y = (y_1, ..., y_c)$, chiamate uscite della rete. La precisa forma di queste funzioni dipende dalla struttura interna della rete e da un insieme di valori $w = (w_1, ..., w_d)$, chiamati pesi. Possiamo quindi scrivere la funzione della rete nella forma $y = y(x; w)$ che denota il fatto che y sia una funzione di x parametrizzata da w.

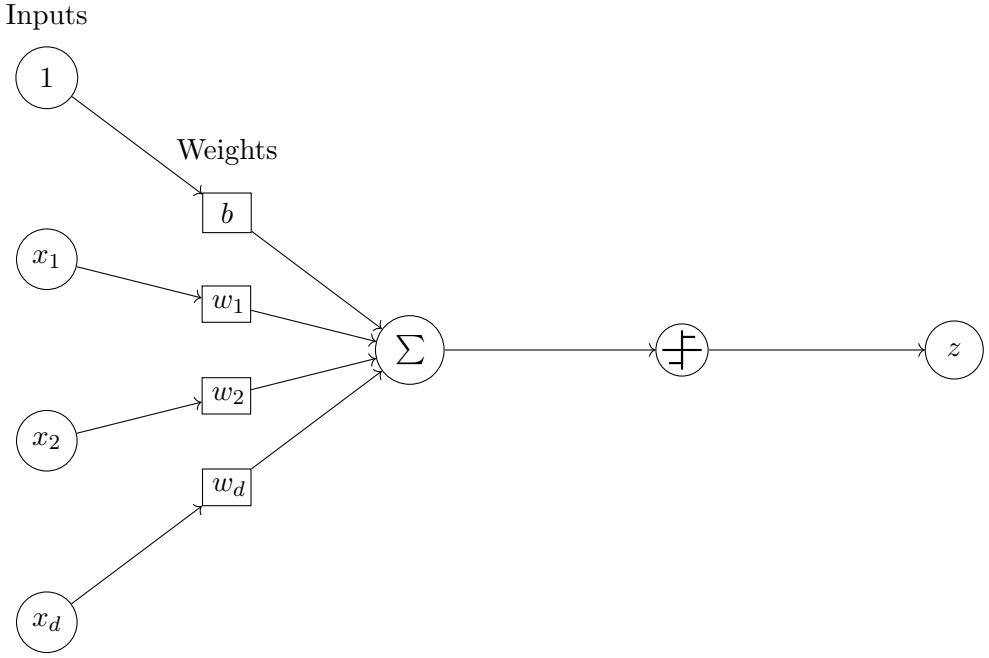


Figura 1.2: Modello di McCulloch-Pitts

Modello di McCulloch-Pitts

Un semplice modello matematico di un singolo neurone è quello rappresentato in Figura 1.2 ed è stato proposto da McCulloch e Pitts [5] alle origini delle reti neurali. Esso può essere visto come una funzione non lineare che trasforma le variabili di ingresso $x_1, ..., x_d$ nella variabile di uscita z. Nell'elaborato ci riferiremo a questo modello come unità di elaborazione, o semplicemente unità. In questo modello, viene effettuata la somma ponderata degli ingressi, usando come pesi i valori $w_1, ..., w_d$ (che sono analoghi alle potenze delle sinapsi nella rete biologica), ottenendo così

$$a = \sum_{i=1}^{d} w_i x_i + b \tag{1.1}$$

dove il parametro b viene chiamato bias (corrisponde alla soglia di attivazione del neurone biologico). Se definiamo un ulteriore ingresso x_0, impostato costantemente a 1, possiamo scrivere (1.1) come

$$a = \sum_{i=0}^{d} w_i x_i \tag{1.2}$$

dove $x_0 = 1$. Precisiamo che i valori dei pesi possono essere di qualsiasi segno, che dipende dal tipo di sinapsi. L'uscita z (che può essere vista come tasso medio di attivazione del neurone biologico) viene ottenuta applicando ad a una trasformazione non lineare g, chiamata funzione di attivazione, ottenendo

$$z = g(a) = g\left(\sum_{i=0}^{d} w_i x_i\right). \tag{1.3}$$

Il modello originale di McCulloch-Pitts usava come attivazione la funzione gradino

$$g(a) = \begin{cases} 1 & \text{se } a \geq 0, \\ -1 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{1.4}$$

1.3 Addestramento della rete

Abbiamo detto che una rete neurale può essere rappresentata dal modello matematico $y = y(x; w)$, che è una funzione di x parametrizzata dai pesi w. Prima di poter utilizzare questa rete, dobbiamo identificare il modello, ovvero dobbiamo determinare tutti i parametri w. Il processo di determinazione di questi parametri è chiamato addestramento e può essere un'azione molto intensa dal punto di vista computazionale. Tuttavia, una volta che sono stati definiti i pesi, nuovi ingressi possono essere elaborati molto rapidamente. Per addestrare una rete abbiamo bisogno di un insieme di esempi, chiamato insieme di addestramento (*training set*), i cui elementi sono coppie (x^q, t^q), $q = 1, ..., n$, dove t^q rappresenta il valore di uscita desiderato, chiamato target, in corrispondenza dell'ingresso x^q. L'addestramento consiste nella ricerca dei valori per i parametri w che minimizzano un'opportuna funzione di errore. Ci sono diverse forme di questa funzione, la più usata risulta essere la somma dei quadrati residui. I residui sono definiti come

$$r_{qk} = y_k\left(x^q; w\right) - t_k^q \tag{1.5}$$

dove k rapppresenta l'indice dei neuroni di output. La funzione di errore E risulta allora essere

$$E = \sum_{q=1}^{n} \sum_{k=1}^{c} r_{qk}^2. \tag{1.6}$$

È facile osservare che E dipende da x^q e da t^q che sono valori noti e da w che è incognito, quindi E è in realtà una funzione dei soli pesi w.

1.4 Funzioni di attivazione

Come già introdotto nel Paragrafo 1.2, le funzioni di attivazione determinano l'output di una rete neurale. Le funzioni utilizzate principalmente negli esperimenti di questo elaborato sono tre: *sigmoid*, *ReLU* (*Rectified Linear Units*) e *LeakyReLU* descritte in (1.7 -1.9). Le funzioni di attivazione sono non-lineari e la loro derivata è calcolabile in modo analitico per velocizzare la computazione.

$$\text{sigmoid}(a) = \frac{1}{1 + e^{-a}}, \qquad \text{sigmoid}'(a) = \text{sigmoid}(a)(1 - \text{sigmoid}(a)). \tag{1.7}$$

$$\text{ReLU}(a) = \max(0, a), \qquad ReLU'(a) = \begin{cases} 1 & \text{se } a \geq 0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{1.8}$$

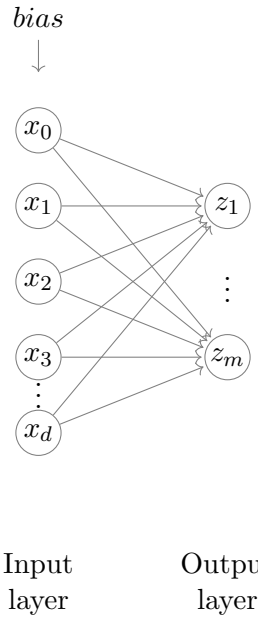


Figura 1.3: MLP a uno strato

$$\text{LeakyReLU}(a) = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0, \\ -\alpha a & \text{altrimenti.} \end{cases} \qquad \text{LeakyReLU}'(a) = \begin{cases} 1 & \text{se } a \geq 0, \\ -\alpha & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{1.9}$$

dove α è un parametro numerico.

La scelta della funzione è guidata dal tipo di problema che si vuole affrontare, per esempio se vogliamo un output compreso tra 0 e 1 sarà più adeguato utilizzare una funzione *sigmoid* rispetto ad una *ReLU*.

1.5 MultiLayer Perceptron

In questo paragrafo parleremo in dettaglio del modello mulilayer perceptron introducendo il concetto di multistrato e descriveremo il metodo di addestramento utilizzato principalmente nel Capitolo 3. Nell'elaborato ci riferiremo a questo modello come MLP.

1.5.1 Architettura del modello MLP

Modello a uno strato Nel paragrafo precedente abbiamo trattato la singola unità di elaborazione descritta in (1.4). Se consideriamo ora un insieme di m unità, con ingressi comuni, otteniamo una rete neurale a singolo strato come in Figura 1.3. Le uscite di questa rete sono date da

$$z_j = g\left(\sum_{i=0}^{d} w_{ij} x_i\right), \quad j = 1, ..., m \tag{1.10}$$

dove w_{ij} rappresenta il peso che connette l'ingresso i con l'uscita j; g è la funzione di attivazione e $x_0 = 1$ per incorporare il bias, come precedentemente spiegato.

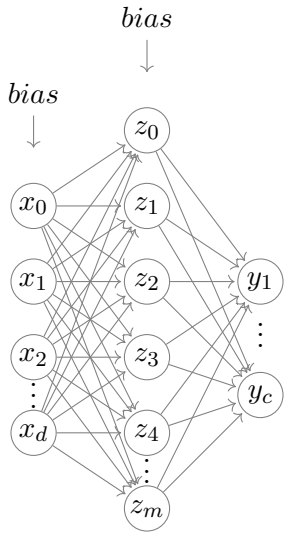


Figura 1.4: MLP a due strati

Modello a due strati Per ottenere reti più potenti[1] è necessario considerare reti aventi più strati chiamate *multilayer perceptron* come in Figura 1.4. Le unità centrali rappresentano lo strato nascosto (*hidden*) perchè il valore di attivazione delle singole unità di questo strato non sono misurabili dall'esterno. L'attivazione di queste unità è data da (1.10). Le uscite della rete vengono ottenute tramite una seconda trasformazione, analoga alla prima, sui valori z_j ottenendo

$$y_k = \tilde{g}\left(\sum_{j=0}^{m} \tilde{w}_{jk} z_i\right), \quad k = 1, \ldots, c, \tag{1.11}$$

dove $\tilde{w}_{jk}$ rappresenta il peso del secondo strato che connette l'unità nascosta j all'unità di uscita k. Sostituendo (1.10) in (1.11) otteniamo

$$y_k = \tilde{g}\left(\sum_{j=0}^{m} \tilde{w}_{jk} g\left(\sum_{i=0}^{d} w_{ij} x_i\right)\right), \quad k = 1, \ldots, c. \tag{1.12}$$

La funzione di attivazione $\tilde{g}$, applicata alle unità di uscita, può essere diversa dalla funzione di attivazione g, applicata alle unità nascoste.

Per ottenere una capacità di rappresentazione universale, la funzione di attivazione g delle unità nascoste deve essere non lineare [1]. Se g e $\tilde{g}$ fossero entrambe lineari, (1.12) diventerebbe un prodotto tra matrici, che è esso stesso una matrice. Inoltre, come vedremo più avanti, le funzioni di attivazione devono essere differenziabili.

[1] un percettrone mono-strato non è in grado di esprimere tutte le funzioni possibili, mentre un percettrone a più strati lo è [1].

1.5.2 Addestramento

L'addestramento consiste nella ricerca dei valori $\mathbf{w} = (w_1, .., w_n)$ [2] che minimizzano la funzione di errore $E(\mathbf{w})$ (vista precedentemente nel Capitolo 1.3). La ricerca del minimo avviene in modo iterativo partendo da un valore iniziale $\mathbf{w}$, scelto in modo casuale o tramite un criterio. Alcuni algoritmi trovano il minimo locale più vicino al punto iniziale, mentre altri riescono a trovare il minimo globale.

Diversi algoritmi di ricerca del punto minimo fanno uso delle derivate parziali della funzione di errore E, ovvero del suo vettore gradiente ∇E. Questo vettore indica la direzione ed il verso di massima crescita di E nel punto $\mathbf{w}$.

Error back-propagation

L'algoritmo di *Error back-propagation* [8] confronta il valore in uscita con il valore desiderato. Sulla base della differenza calcolata, l'algoritmo modifica i pesi della rete neurale, facendo convergere progressivamente il set dei valori di uscita verso quelli desiderati. Consideriamo come funzione errore la somma dei quadrati residui (1.6).

$$E = \sum_{q=1}^{n} E^q, \qquad E^q = \sum_{k=1}^{c} [y_k(x^q; w) - t_k^q]^2. \tag{1.13}$$

Possiamo vedere E come somma di E^q che corrisponde alla coppia (x^q, t^q). Grazie alla linearità della derivazione possiamo calcolare la derivata di E come somma delle derivate dei termini E^q. Nel seguito omettiamo l'indice q: i passaggi indicati si riferiscono ad un singolo caso q ma le operazioni sono fatte per ogni valore di q. Consideriamo un esempio di rete neurale MLP con uno strato hidden.

$$y_k = \tilde{g}(\tilde{a}_k), \qquad a_k = \sum_{j=0}^{m} \tilde{w}_{jk} z_j. \tag{1.14}$$

La derivata di E^q rispetto ad un generico peso w_{jk} dello strato hidden è

$$\frac{\partial E^q}{\partial \tilde{w}_{jk}} = \frac{\partial E^q}{\partial \tilde{a}_k} \frac{\partial \tilde{a}_k}{\partial w_{jk}} \tag{1.15}$$

e tramite (1.14) otteniamo

$$\frac{\partial \tilde{a}_k}{\partial \tilde{w}_{jk}} = z_j. \tag{1.16}$$

Con (1.14) e (1.13) otteniamo

$$\frac{\partial E^q}{\partial \tilde{a}_k} = \tilde{g}'(\tilde{a}_k)[y_k - t_k], \tag{1.17}$$

possiamo ora riscrivere (1.15) come

$$\frac{\partial E^q}{\partial w_{jk}} = \tilde{g}'(\tilde{a}_k)[y_k - t_k] z_j. \tag{1.18}$$

Definiamo

$$\tilde{\delta}_k = \frac{\partial E^q}{\partial \tilde{a}_k} = \tilde{g}'(\tilde{a}_k)[y_k - t_k] \tag{1.19}$$

[2] con $\mathbf{w}$ intendiamo i pesi di ogni strato

ottenendo una semplice espressione per la derivata di E^q rispetto a w_{jk}

$$\frac{\partial E^q}{\partial \tilde{w}_{jk}} = \tilde{\delta}_k z_j. \tag{1.20}$$

Per quanto riguarda le derivate rispetto ai pesi del primo strato riscriviamo

$$z_j = g(a_j), \qquad a_j = \sum_{i=0}^{d} w_{ij} x_i. \tag{1.21}$$

Possiamo quindi scrivere la derivata come

$$\frac{\partial E^q}{\partial w_{ij}} = \frac{\partial E^q}{\partial a_j} \frac{\partial a_j}{\partial w_{ij}}. \tag{1.22}$$

In modo analogo, osservando (1.21), otteniamo

$$\frac{\partial a_j}{\partial w_{ij}} = x_i. \tag{1.23}$$

Per il calcolo della derivata di E^q rispetto ad a_j, usando la *chain-rule* abbiamo

$$\frac{\partial E^q}{\partial a_j} = \sum_{k=1}^{c} \frac{\partial E^q}{\partial \tilde{a}_k} \frac{\partial \tilde{a}_k}{\partial a_j}, \tag{1.24}$$

dove la derivata di E^q rispetto ad $\tilde{a}_k$ è data da (1.18), mentre la derivata di $\tilde{a}_k$ rispetto ad a_j si trova usando (1.14) e (1.21); quindi

$$\frac{\partial \tilde{a}_k}{\partial a_j} = \tilde{w}_{jk} g'(a_j). \tag{1.25}$$

Usando (1.19), (1.24) e (1.25) otteniamo

$$\frac{\partial E^q}{\partial a_j} = g'(a_j) \sum_{k=1}^{c} \tilde{w}_{jk} \tilde{\delta}_k. \tag{1.26}$$

Possiamo quindi riscrivere (1.22) come

$$\frac{\partial E^q}{\partial w_{ij}} = g'(a_j) x_i \sum_{k=1}^{c} w_{jk} \delta_k \tag{1.27}$$

e, come abbiamo fatto in (1.19), poniamo

$$\delta_j = \frac{\partial E^q}{\partial a_j} = g'(a_j) \sum_{k=1}^{c} \tilde{w}_{jk} \tilde{\delta}_k, \tag{1.28}$$

ottenendo infine

$$\frac{\partial E^q}{\partial w_{ij}} = \delta_j x_i \tag{1.29}$$

che ha la stessa semplice forma di (1.20). Elenchiamo quindi i passi da seguire per valutare la derivata della funzione E:

- Per ogni coppia (x^q, t^q) valutare le attivazioni delle unità nascoste e di uscita usando le equazioni (1.21) e (1.14);

- Valutare il valore $\tilde{\delta}_k$ per $k = 1, .., c$ usando equazione (1.19);
- Valutare il valore δ_j per $j = 1, .., m$ usando equazione (1.28);
- Valutare il valore di E^q usando le equazioni (1.29) e (1.20);
- Ripetere i passi precedenti per ogni coppia (x^q, t^q) del *training set* e sommare tutte le derivate per ottenere la derivata della funzione errore E.

Dopo il calcolo delle derivate i pesi di ogni strato verranno aggiornati come

$$w_{ij}^{(t)} = w_{ij}^{(t-1)} + \Delta w_{ij}^{(t)}, \tag{1.30}$$

$$\Delta w_{ij}^{(t)} = -\eta \nabla E(w_{ij}^{(t)}), \tag{1.31}$$

dove $\eta > 0$ è il coefficiente di apprendimento (*learning rate*): più η è grande più imparerà velocemente, valori troppo grandi di η fanno divergere la rete. Questo verrà ripetuto iterativamente ogni epoca, dove con epoca intendiamo la visione dell'intero *training set*. L'aggiornamento dei pesi durante ogni epoca può avvenire dopo ogni elemento (*online*), dopo tutti gli elementi (*batch*) o dopo un numero parametrico di esempi (*mini-batch*). Negli esperimenti di questo elaborato viene utilizzata la modalità *mini-batch* perché permette al modello di convergere più velocemente.

Per migliorare la convergenza della rete abbiamo utilizzato la versione di discesa del gradiente con *momento* [6]. In questa versione l'equazione (1.31) diventa:

$$w_{ij}^{(t)} = -\eta \nabla E(w_{ij}^{(t)}) + \mu \Delta w_{ij}^{(t-1)}, \tag{1.32}$$

dove μ è un parametro aggiuntivo nell'intervallo $[0, 1)$ che valorizza quanto considerare il gradiente dell'epoca precedente. Questo tipo di aggiornamento accelererà la convergenza se il verso del gradiente è lo stesso dell'epoca precedente.

Criteri di arresto

la procedura di addestramento del paragrafo precedente viene iterata fino a che non risulta soddisfatto un prefissato criterio di arresto. Negli esperimenti descritti nel Capitolo 3, sono stati utilizzati diversi criteri, quali:

- Stop dopo un numero prefissato di epoche;
- Stop dopo che l'errore/accuratezza non migliora rispetto all'epoca precedente;
- Stop dopo che l'errore/accuratezza non migliora rispetto all'epoca precedente con *patience*, ovvero attendendo in ogni caso un numero finito di epoche senza miglioramento delle prestazioni prima di interrompersi.

Capitolo 2

Metodi di compressione

In questo capitolo descriveremo nel dettaglio come funzionano gli algoritmi di compressione utilizzati nel Capitolo 3.

2.1 Pruning

Il pruning consiste nel tagliare le connessioni da una rete addestrata per poi riaddestrarla senza le connessioni tagliate. Oltre ad un vantaggio computazionale può portare a una generalizzazione che permette di ridurre l'overfitting (ovvero imparare troppo dagli esempi del training set).

2.1.1 Strutture dati necessarie

Dopo aver tagliato, disattivato le connessioni e riaddestrato, la matrice sarà più o meno sparsa (in base a quante connessioni tagliamo). Per ridurre lo spazio viene utilizzata una rappresentazione matriciale CSC (Compressed Sparse Column)[1]. Questo tipo di matrice è una struttura basata sull'indicizzazione tramite colonne di una matrice sparsa. Viene descritta da tre vettori:

- il primo in cui vengono salvati i valori non nulli dal primo elemento in alto a destra proseguendo verso il basso e successivamente a destra;
- il secondo corrisponde all'indice delle righe dei valori;
- il terzo indica gli indici dei valori in cui ogni colonna inizia.

Questo tipo di struttura dati richiede il salvataggio di $2a + c + 1$ dove a è il numero di valori non zero e c il numero di colonne.

2.1.2 Tecniche implementative

Durante la configurazione della rete viene aggiunta una procedura che esegue il pruning sulle matrici delle connessioni addestrate in precedenza. Identifichiamo con τ la soglia entro cui i pesi verranno eliminati, la nuova matrice sarà definita come:

$$w_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ se } |w_{ij}| < \tau, \\ w_{ij} \text{ altrimenti.} \end{cases} \tag{2.1}$$

Abbiamo scelto τ come il quantile q della distribuzione del valore assoluto dei pesi, dove q assume i valori in [0,1].

[1] `https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.sparse.csc_matrix.html`

2.1.3 Tasso di compressione

Il tasso di compressione r_1 sarà calcolato come

$$r_1 = \frac{s'}{s}, \tag{2.2}$$

dove s' rappresenta lo spazio occupato dalle connessioni della rete compressa utilizzando la rappresentazione matriciale CSC e s lo spazio occupato occupato dalle connessioni della rete senza compressione. Come ci accorgeremo nel Paragrafo 3.2.1 la compressione avviene effettivamente raggiungendo una certa sparsità[2].

2.2 Weight Sharing

La tecnica del weight sharing viene utilizzata per ridurre lo spazio occupato per salvare le matrici dei pesi della rete neurale. Questa procedura consiste nel raggruppamento dei pesi simili, presi da una rete precedentemente addestrata, attraverso un algoritmo di clustering. Dopo per aver definito un centroide per ogni cluster, tutti i pesi vengono sostituiti nella rete con i centroidi più vicini.

2.2.1 Strutture dati necessarie

Per la gestione di questa procedura viene salvato un array che contine i valori dei centroidi e una matrice per salvare la corrispondenza peso-centroide (per ogni strato). Denotiamo con C il vettore dei centroidi e con N la matrice delle corrispondenze, quindi

$$N_{ij} = \arg\min_k |C_k - w_{ij}|. \tag{2.3}$$

2.2.2 Tecniche implementative

Alla rete neurale base vengono aggiunte due procedure:

- una procedura che crea i vettori contenenti i k centroidi, dove k è il numero di cluster scelti (per ogni strato);
- una procedura che crea la matrice N definita in (2.3).

Alla normale fase di training vengono aggiunte due procedure:

- una procedura che costruisce la matrice dei pesi effettiva per il feedforward con i valori dei centroidi invece dei valori originali

$$W'_{ij} = C_{N_{ij}}; \tag{2.4}$$

- una procedura per calcolare il gradiente dei centroidi tramite il *cumulative gradient descent* [2]. Denotato con $\mathcal{L}$ il delta relativo alla funzione di errore, con N la matrice degli indici dei cluster e con C il vettore dei centroidi; il gradiente dei centroidi è calcolato come

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_k} = \sum_{i,j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W_{ij}} 1(N_{ij} = k). \tag{2.5}$$

[2]percentuale di elementi uguali a 0 nelle matrici

2.2.3 Tasso di compressione

Il tasso di compressione di questa tecnica dipende dal numero di cluster e dal numero di bit con cui vengono rappresentati gli elementi delle matrici delle connessioni e i centroidi dei cluster. Denotiamo con b il numero di bit con cui viene rappresentato un peso della rete e con s il numero di connessioni nella rete, il tasso di compressione teorico $r_2 \in [0, 1]$ viene calcolato come

$$r_2 = \frac{s \log_2 k + kb}{sb}. \tag{2.6}$$

r_2 rappresenta la percentuale di spazio occupato dalla rete compressa rispetto a quello originario. Il linguaggio di programmazione utilizzato negli esperimenti permette di rappresentare numeri interi senza segno con 8 o 16 bit, per questo motivo il tasso di compressione effettivo diventa

$$r_2 = \frac{sf(s) + 32k}{32s}, \quad f(s) = \begin{cases} 16 & \text{se } s \geq 255, \\ 8 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{2.7}$$

Capitolo 3

Esperimenti

In questo capitolo spiegheremo gli esperimenti eseguiti su due problemi differenti:

- Cifre di MNIST: problema di classificazione, il dataset è composto da un insieme di immagini che rappresentano cifre scritte a mano,
- Problema del predecessore: problema di regressione, i dataset sono composti da sequenze di numeri rappresentati in 64 bit.

Classificazione e Regressione I classificatori separano i dati in due o più classi, nel caso di questo elaborato negli esperimenti con MNIST abbiamo 10 classi (le cifre tra 0 e 9). I regressori invece si basano sull'interpolazione dei dati per associare tra loro due o più caratteristiche (*feature*). Simile alla classificazione con la differenza che l'output ha un dominio continuo. Entrambe le categorie sono affrontate, in questo elaborato, con apprendimento *supervisionato*: si ha un insieme di input di esempio e il corrispettivo output desiderato con lo scopo di apprendere una regola generale in grado di mappare gli input negli output.

3.1 MNIST

Il dataset è una vasta base di dati di cifre scritte a mano, spesso impiegata nel campo dell'apprendimento automatico (*machine learning*). Il dataset contiene 60000 immagini di training e 10000 immagini di testing, nella Figura 3.1 vengono mostrati alcuni esempi.

Figura 3.1: Esempi MNIST [12]

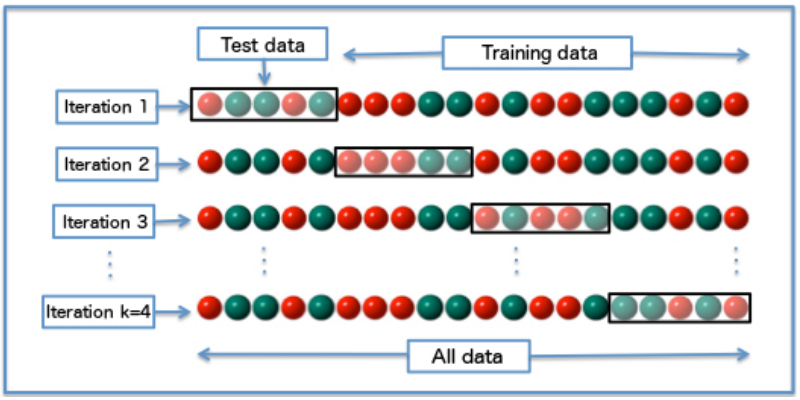


Figura 3.2: k-fold

3.1.1 Addestramento e Tuning Parametri

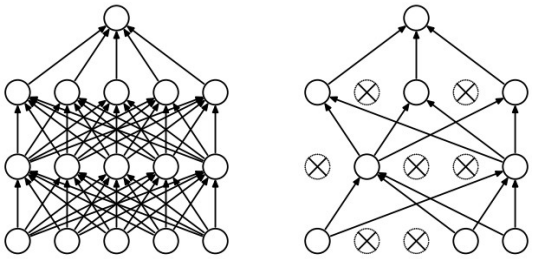
Per trovare una buona configurazione della rete abbiamo svolto una *K-Fold Cross Validation* [7] con $k = 3$.

K-Fold Cross Validation Il *training set* viene diviso in k subset, a rotazione vengono usati come *training set* $k - 1$ subset, il rimanente subset viene usato come *validation set* (un *test set* fittizio). In questa procedura il *test set* non viene utilizzato perchè comprometterebbe la scelta del modello. Nella Figura 3.2 possiamo vedere un esempio di splitting del *training set* con $k = 4$.
Negli esperimenti abbiamo fissato i seguenti parametri:

- $\eta = 3 \times 10^{-3}$;
- funzione errore = errore quadratico medio;
- metodo di apprendimento = discesa del gradiente con momentum ($\mu = 0.99$);
- funzione di attivazione degli strati *hidden* = $ReLU$;
- funzione di attivazione dello strato di output = $softmax$[1];
- dimensione dei minibatch = 100 elementi;
- criterio di arresto = 100 epoche;
- inizializzazione pesi = $\mathbf{W^l} = \mathbf{randn}\sqrt{\frac{2}{size^{l-1}}}$ (He et al initialization [3]) dove **randn** è una matrice di numeri casuali estratti da una distribuzione normale standard, l rappresenta lo strato e $size^{l-1}$ il numero di neuroni dello strato precedente.

I parametri di cui vogliamo trovare la configurazione migliore sono invece:

- architettura della rete (ovvero quanti strati hidden e quanti neuroni per ogni strato hidden);
- dropout (percentuale di neuroni negli strati hidden non utilizzati nella fase di training).



(a) Standard Neural Net (b) After applying dropout.

Figura 3.3: dropout [9]

Tabella 3.1: MLP con uno strato hidden

$p = 0.75$		$p = 1$	
`neuroni`	`accuratezza`	`neuroni`	`accuratezza`
100	97.64	100	97.38
125	97.63	125	97.57
150	97.72	150	94.41
175	97.75	175	97.81
200	97.83	200	94.29
225	97.82	225	94.75
250	97.82	250	94.88
275	97.84	275	95.25
300	97.86	**300**	**98.08**

Dropout Il *dropout* [9] è una tecnica utilizzata per evitare l'overfitting (ovvero imparare troppo dagli esempi del *training set* senza imparare a generalizzare) mediante l'eliminazione di alcuni neuroni casuali in ogni strato ad eccezione dello strato di output. I neuroni da eliminare cambiano ad ogni epoca, durante la fase di predizione invece sono tutti attivi. Nella Figura 3.3 possiamo vedere un esempio di questa tecnica. Nell'elaborato è stata utilizzata la versione chiamata *inverted dropout*

$$\mathbf{drop_l} = (\mathbf{rand} < p)/p, \qquad \mathbf{output_l} = \mathbf{output_l} * \mathbf{drop_l}, \tag{3.1}$$

dove $\mathbf{output_l}$ rappresenta l'output di un generico strato l, mentre **rand** rappresenta una matrice di numeri casuali estratti da una distribuzione uniforme nell'intervallo $[0, 1)$ della stessa dimensione di $\mathbf{output_l}$. p invece è un parametro che rappresenta la probabilità di tenere attivo un neurone.

Nella Tabella 3.1 e nella Tabella 3.2 la colonna accuratezza rappresenta la media delle accuratezze sui tre *validation set*. Negli esperimenti effettuati abbiamo trovato come configurazione ottimale una rete MLP con uno strato hidden da 300 neuroni senza dropout (indicato nell'intestazione della tabella come $p = 1$).

[1] $\text{Softmax}(a_i) = \frac{\exp^{a_i}}{\sum_j \exp^{a_j}}$

Tabella 3.2: MLP con due strati hidden

$p = 0.75$		$p = 1$	
neuroni	accuratezza	neuroni	accuratezza
50 - 25	97.14	50 - 25	97.08
50 - 50	97.26	50 - 50	96.82
75 - 25	97.43	75 - 25	97.43
75 - 50	97.52	75 - 50	97.51
75 - 75	97.51	75 - 75	97.49
100 - 25	97.53	100 - 25	97.54
100 - 50	97.66	100 - 50	97.62
100 - 75	97.62	100 - 75	97.63
100 - 100	97.67	100 - 100	97.67
125 - 25	97.68	125 - 25	97.62
125 - 50	97.77	125 - 50	97.7
125 - 75	97.72	125 - 75	97.68
125 - 100	97.73	125 - 100	97.74
125 - 125	97.74	125 - 125	97.77
150 - 25	97.76	150 - 25	97.59
150 - 50	97.71	150 - 50	97.8
150 - 75	97.76	150 - 75	97.76
150 - 100	97.75	150 - 100	97.85
150 - 125	97.78	150 - 125	97.74
150 - 150	97.75	150 - 150	97.8
175 - 50	97.85	175 - 50	97.8
175 - 75	97.8	175 - 75	97.8
175 - 100	97.83	175 - 100	97.8
175 - 125	97.85	175 - 125	97.8
175 - 150	97.82	175 - 150	97.86
175 - 175	97.85	175 - 175	97.84
200 - 50	97.83	200 - 50	97.83
200 - 75	97.83	200 - 75	97.9
200 - 100	97.88	200 - 100	97.89
200 - 125	97.91	200 - 125	97.85
200 - 150	97.84	200 - 150	97.85
200 - 175	97.84	200 - 175	97.89
200 - 200	97.86	200 - 200	97.83
225 - 75	97.92	225 - 75	97.9
225 - 100	97.86	225 - 100	97.79
225 - 125	97.85	225 - 125	97.85
225 - 150	97.94	225 - 150	97.94
225 - 175	97.88	225 - 175	97.89
225 - 200	97.91	225 - 200	97.9
250 - 75	97.86	250 - 75	97.88
250 - 100	97.91	250 - 100	97.91
250 - 125	97.93	250 - 125	97.94
250 - 150	97.93	250 - 150	97.9
250 - 175	97.86	250 - 175	97.9
250 - 200	97.89	250 - 200	97.92

Tabella 3.3: Pruning su MNIST

%Pruning	accuratezza
ALL	98.34
10%	98.34
15%	98.34
20%	98.34
25%	98.35
30%	98.36
35%	98.35
40%	98.36
45%	98.36
50%	98.36
55%	98.32
60%	98.3
65%	98.33
70%	98.34
75%	98.34
80%	98.38
85%	98.31
90%	98.27
95%	98.28

3.1.2 Pruning

In questo paragrafo abbiamo applicato il pruning sulla rete scelta nella model selection, nella Tabella 3.3 sono riportati i risultati. Abbiamo applicato un pruning dal 10% al 95% a passi di 5%. Nella prima riga della Tabella 3.3 abbiamo riportato l'accuratezza sul *test set* del modello scelto nel paragrafo precedente senza compressioni. L'accuratezza non varia di molto nei vari tagli, questi risultati sono dovuti al fatto che abbiamo usato un grande numero di neuroni nello strato hidden.

3.1.3 Weight Sharing

In questo paragrafo abbiamo applicato il Weight Sharing sulla rete scelta nella model selection, nella Tabella 3.4 sono riportati i risultati. La prima colonna rappresenta il numero di centroidi utilizzati per la compressione, prendendo per esempio 16 - 8: 16 rappresenta il numero di centroidi nella matrice dei pesi tra lo strato di input e lo strato hidden; 8 rappresenta il numero di centroidi nella matrice dei pesi tra lo strato hidden lo strato di output. Nella prima riga della Tabella 3.4 abbiamo riportato l'accuratezza sul *test set* del modello scelto senza compressioni. Come con il pruning possiamo notare che l'accuratezza, anche con un numero di centroidi abbastanza piccoli, (per esempio 16 - 8) rimane sopra il 98%.

Tabella 3.4: Weight Sharing su MNIST

Centroidi	accuratezza
ALL	98.34
4 - 2	94.0
16 - 8	98.14
32 - 8	98.32
32 - 16	98.25
64 - 16	98.29
64 - 32	98.34
128 - 32	98.38
192 - 32	98.38
192 - 64	98.36
256 - 32	98.31
256 - 64	98.36
512 - 32	98.38
512 - 64	98.35
1024 - 32	98.37
1024 - 64	98.37
2048 - 32	98.36
2048 - 64	98.36
4096 - 32	98.35
4096 - 64	98.37
8192 - 32	98.43
8192 - 64	98.34

3.2 Problema del predecessore

Sia X un sottoinsieme delle parti di un universo U, ordinato in base all'ordine $\leq$ definito su U. Partiamo dal presupposto che ogni elemento di U può essere rappresentato da d bit. Supponiamo anche che l'ordinamento lessicografico della rappresentazione binaria di ogni elemento in U mantiene la relazione d'ordine $\leq$. Il problema di ricerca del predecessore consiste nel trovare la posizione della chiave più grande in X non maggiore di una data in input x, indichiamo con $pos(x)$ la posizione di x appartenente a X nella sequenza ordinata, il problema è determinare $pred(x) = pos(z)$ con $z = \max y \in X$ dove $y \leq x$.

$$x = \{2, 3, 4, 5, 12, 15, 18\} \qquad \text{(Esempio)}$$

Assumiamo che 7 è la chiave da cercare. La ricerca del predecessore dovrebbe restituire la posizione 4. Dato $|X| = n$, sia F_X la distribuzione cumulativa empirica degli elementi di U rispetto a X, per ogni $x \in U$, $F_X(x) = \frac{|y \in X | y \leq z|}{n}$. Per semplificare la notazione denotiamo F_X con F. Nell'esempio sopra, $F(2) = \frac{1}{7}$, $F(5) = \frac{4}{7}$, $F(6) = \frac{4}{7}$, $F(18) = 1$. La conoscenza di F ci dà una soluzione al nostro problema, dato un elemento di x appartenente a U, una sola valutazione di F fornisce $pred(x) = \lceil (F(z) * n) \rceil$. Il nostro obiettivo è trovare una buona approssimazione $\tilde{F}$ di F. La risoluzione di questo problema potrebbe consentire di trovare un elemento all'interno di una lista ordinata in tempo $O(1)$ invece che $O(\log n)$ degli alberi binari di ricerca. La rete neurale però può compiere un errore nel dare la posizione di un elemento, per questo motivo teniamo traccia dell'errore massimo, indicato con ϵ, che la rete compie. Questo perchè durante la ricerca, dopo che il modello ci ha dato la posizione, dobbiamo effettuare una ricerca di ϵ a destra e sinistra della posizione restituita dal modello. Per questo motivo negli esperimenti abbiamo provato a minimizzare una funzione convessa che approssima il massimo, ovvero la *Log Sum Exp*, nel Paragrafo 3.2.4.

Per questo problema sono stati utilizzati tre dataset, rispettivamente con 512, 8192 e 1048576 esempi. Diversamente da MNIST il modello MLP cercherà di risolvere un problema di regressione. La rete neurale dovrà imparare a restituire, data una chiave, $\tilde{F}$. Sono state usate tre reti differenti:

- rete 1 con 0 strati hidden;
- rete 2 con 1 strato hidden di 256 neuroni;
- rete 3 con 2 strati hidden di 256 neuroni.

Per tutte e tre le reti, dove non indicato esplicitamente, i parametri utilizzati sono:

- funzione errore = errore quadratico medio;
- metodo di apprendimento = discesa del gradiente con momentum ($\mu = 0.9$);
- funzione di attivazione dei neuroni = $LeakyReLU$ ($\alpha = 0.05$);
- $\lambda = 10^{-5}$ [2];
- dimensione dei minibatch = 64;
- epoche = 20000;
- criterio di arresto = l'apprendimento termina se non si hanno miglioramenti di performance con *patience* = 4 come spiegato nel Paragrafo 1.5.2;
- inizializzazione dei pesi = numeri casuali estratti da una distribuzione normale standard con $\mu = 0$ e $\sigma = 0.05$.

Ci riferiremo a queste reti con **NNX**, dove X indica il numero di strati. Per NN1 è stato usato $\eta = 5 \times 10^{-4}$, per NN2 e NN3 invece $\eta = 3 \times 10^{-3}$; questi valori sono stati trovati eseguendo un tuning su η.

Le colonne delle tabelle dei paragrafi successivi sono:

- pruning % = percentuale di connessioni eliminate, calcolate con il quantile come viene spiegato nel Paragrafo 2.1.2, 0 indica la rete non compressa;
- r_2 = proporzione dello spazio originario occupato da quella compressa, 1 indica la rete non compressa;
- cluster: indica, per ogni matrice dei pesi della rete, il numero di cluster utilizzati;
- Space Overhead (KB) = spazio del modello in KB rispetto al dataset;
- training time = tempo in secondi impiegato dalla rete per il training, compreso il tempo iniziale di applicazione della compressione;
- ϵ = errore massimo sugli esempi di training;
- error % = errore massimo rispetto alla dimensione del dataset considerato;
- mean error = errore medio.

[2] usato per nella regolarizzazione l2, valore aggiunto alla funzione di errore che penalizza i pesi più grandi, riducendo così il problema di overfitting [10].

Tabella 3.5: NN1 dataset 3

Pruning %	Space Overhead (KB)	Training Time (s)	ϵ	Error %	Mean Error
0	8.93×10^{-2}	-	9	1.76	4.74×10^{-3}
10	8.56×10^{-2}	7.0×10^{-3}	8	1.56	4.58×10^{-3}
20	8.01×10^{-2}	7.6×10^{-3}	8	1.56	4.58×10^{-3}
30	7.10×10^{-2}	7.5×10^{-3}	8	1.56	4.59×10^{-3}
40	6.03×10^{-2}	7.2×10^{-3}	9	1.76	4.82×10^{-3}
50	5.11×10^{-2}	8.9×10^{-3}	14	2.73	8.91×10^{-3}
60	4.20×10^{-2}	8.9×10^{-3}	21	4.1	1.60×10^{-2}
70	3.13×10^{-2}	1.2×10^{-2}	36	7.03	3.13×10^{-2}
80	2.21×10^{-2}	1.1×10^{-2}	66	1.28×10	6.25×10^{-2}
90	1.30×10^{-2}	1.1×10^{-2}	65	1.27×10	6.25×10^{-2}

Tabella 3.6: NN1 dataset 7

Pruning %	Space Overhead (KB)	Training Time (s)	ϵ	Error %	Mean Error
0	3.09×10^{-3}	-	53	6.4×10^{-1}	1.62×10^{-3}
10	5.58×10^{-3}	8.1×10^{-2}	46	5.6×10^{-1}	1.55×10^{-3}
20	5.01×10^{-3}	8.1×10^{-2}	43	5.2×10^{-1}	1.52×10^{-3}
30	4.43×10^{-3}	8.9×10^{-2}	44	5.4×10^{-1}	1.53×10^{-3}
40	3.77×10^{-3}	9.3×10^{-2}	55	6.7×10^{-1}	1.77×10^{-3}
50	3.19×10^{-3}	1.2×10^{-1}	73	8.9×10^{-1}	2.41×10^{-3}
60	2.62×10^{-3}	1.2×10^{-1}	107	1.31	4.17×10^{-3}
70	1.96×10^{-3}	1.7×10^{-1}	107	1.31	4.17×10^{-3}
80	1.38×10^{-3}	2.4×10^{-1}	165	2.01	7.97×10^{-3}
90	8.11×10^{-4}	2.2×10^{-1}	165	2.01	7.97×10^{-3}

3.2.1 Pruning

In questo paragrafo abbiamo applicato il pruning e i risultati sono nelle Tabelle 3.5 - 3.13. Come dicevamo in precedenza nel Paragrafo 2.1.3 prima di raggiungere una certa sparsità il modello compresso occupa più spazio del modello originario. I modelli compressi occupano meno spazio a partire da una percentuale di pruning compresa tra il 50% e il 60%. Nei risultati di questi esperimenti possiamo notare una scarsa efficacia del pruning in reti con pochi neuroni (NN1), mentre (come già visto con MNIST nel Paragrafo 3.1.2) con molti neuroni (NN2 e NN3) il pruning a percentuali molto elevate mantiene errori medi ed errori massimi equivalenti alla rete non compressa se non migliori.

Tabella 3.7: NN1 dataset 10

Pruning %	Space Overhead (KB)	Training Time (s)	ϵ	Error %	Mean Error
0	2.42×10^{-5}	-	905	8.6×10^{-2}	1.85×10^{-4}
10	4.35×10^{-5}	1.1×10	770	7×10^{-2}	1.52×10^{-4}
20	3.91×10^{-5}	1.6×10	770	7×10^{-2}	1.52×10^{-4}
30	3.46×10^{-5}	1.1×10	770	7×10^{-2}	1.52×10^{-4}
40	2.94×10^{-5}	1.1×10	770	7×10^{-2}	1.52×10^{-4}
50	2.49×10^{-5}	1.4×10	770	7×10^{-2}	1.52×10^{-4}
60	2.05×10^{-5}	1.2×10	734	7×10^{-2}	1.50×10^{-4}
70	1.53×10^{-5}	1.1×10	736	7×10^{-2}	1.51×10^{-4}
80	1.08×10^{-5}	1.1×10	748	7×10^{-2}	1.51×10^{-4}
90	6.32×10^{-6}	1.1×10	5235	4.9×10^{-1}	1.97×10^{-4}

Tabella 3.8: NN2 dataset 3

Pruning %	Space Overhead (KB)	Training Time (s)	ϵ	Error %	Mean Error
0	1.289×10	-	4	7.8×10^{-1}	1.60×10^{-3}
10	2.324×10	2.1×10	2	3.9×10^{-1}	6.12×10^{-4}
20	2.070×10	2.3×10	2	3.9×10^{-1}	6.21×10^{-4}
30	1.817×10	2.1×10	3	5.8×10^{-1}	6.93×10^{-4}
40	1.563×10	2.0×10	3	5.8×10^{-1}	7.93×10^{-4}
50	1.309×10	2.1×10	3	5.8×10^{-1}	8.62×10^{-4}
60	1.055×10	2.3×10	3	5.8×10^{-1}	9.85×10^{-4}
70	8.01	2.1×10	4	7.8×10^{-1}	1.32×10^{-3}
80	5.47	1.7×10	5	9.7×10^{-1}	1.95×10^{-3}
90	2.93	1.2×10	6	1.17	2.78×10^{-3}

Tabella 3.9: NN2 dataset 7

Pruning %	Space Overhead (KB)	Training Time (s)	ϵ	Error %	Mean Error
0	8.06×10^{-1}	-	33	4.0×10^{-1}	1.12×10^{-3}
10	1.45	1.31×10^{2}	35	4.3×10^{-1}	5.94×10^{-4}
20	1.29	1.23×10^{2}	35	4.3×10^{-1}	5.98×10^{-4}
30	1.13	1.18×10^{2}	35	4.3×10^{-1}	6.04×10^{-4}
40	9.76×10^{-1}	1.18×10^{2}	35	4.3×10^{-1}	5.97×10^{-4}
50	8.18×10^{-1}	1.15×10^{2}	34	4.2×10^{-1}	5.99×10^{-4}
60	6.59×10^{-1}	1.11×10^{2}	35	4.3×10^{-1}	6.11×10^{-4}
70	5.00×10^{-1}	1.24×10^{2}	35	4.3×10^{-1}	6.12×10^{-4}
80	3.42×10^{-1}	2.2×10	33	4.0×10^{-1}	8.56×10^{-4}
90	1.83×10^{-1}	5	34	4.1×10^{-1}	1.19×10^{-3}

Tabella 3.10: NN2 dataset 10

Pruning %	Space Overhead (KB)	Training Time (s)	ϵ	Error %	Mean Error
0	6.29×10^{-3}	-	1031	9.0×10^{-2}	2.33×10^{-4}
10	1.13×10^{-2}	1.74×10^{2}	713	6.8×10^{-2}	1.46×10^{-4}
20	1.01×10^{-2}	1.25×10^{2}	713	6.8×10^{-2}	1.46×10^{-4}
30	8.87×10^{-3}	1.25×10^{2}	713	6.8×10^{-2}	1.46×10^{-4}
40	7.63×10^{-3}	1.24×10^{2}	713	6.8×10^{-2}	1.46×10^{-4}
50	6.39×10^{-3}	1.22×10^{2}	713	6.8×10^{-2}	1.46×10^{-4}
60	5.15×10^{-3}	1.22×10^{2}	713	6.8×10^{-2}	1.46×10^{-4}
70	3.91×10^{-3}	1.22×10^{2}	713	6.8×10^{-2}	1.46×10^{-4}
80	2.67×10^{-3}	1.22×10^{2}	715	6.8×10^{-2}	1.46×10^{-4}
90	1.43×10^{-3}	1.23×10^{2}	699	6.7×10^{-2}	1.45×10^{-4}

Tabella 3.11: NN3 dataset 3

Pruning %	Space Overhead (KB)	Training Time (s)	ϵ	Error %	Mean Error
0	6.308×10	-	4	7.8	1.83×10^{-3}
10	1.13×10^{2}	6.1×10	2	3.9×10^{-1}	6.63×10^{-4}
20	1.01×10^{2}	6.3×10	2	3.9×10^{-1}	6.86×10^{-4}
30	8.855×10	5.6×10	2	3.9×10^{-1}	7.66×10^{-4}
40	7.601×10	5.6×10	3	5.8×10^{-1}	8.79×10^{-4}
50	6.348×10	6.6×10	3	5.8×10^{-1}	8.82×10^{-4}
60	5.094×10	6.6×10	3	5.8×10^{-1}	1.02×10^{-3}
70	3.840×10	7.1×10	3	5.8×10^{-1}	1.15×10^{-3}
80	2.586×10	6.9×10	3	5.8×10^{-1}	1.50×10^{-3}
90	1.332×10	8.1×10	4	7.8×10^{-1}	2.03×10^{-3}

Tabella 3.12: NN3 dataset 7

Pruning %	Space Overhead (KB)	Training Time (s)	ϵ	Error %	Mean Error
0	3.94	–	40	4.8×10^{-1}	1.14×10^{-3}
10	7.10	1.97×10^{2}	36	4.3×10^{-1}	7.80×10^{-4}
20	6.31	2.27×10^{2}	36	4.3×10^{-1}	7.58×10^{-4}
30	5.53	9.5×10	32	3.9×10^{-1}	8.18×10^{-4}
40	4.75	1.04×10^{2}	33	4.0×10^{-1}	8.18×10^{-4}
50	3.97	9.6×10	33	4.0×10^{-1}	8.23×10^{-4}
60	3.18	1.25×10^{2}	34	4.1×10^{-1}	8.12×10^{-4}
70	2.40	9.9×10	34	4.1×10^{-1}	8.29×10^{-4}
80	1.61	9.3×10	34	4.1×10^{-1}	8.20×10^{-4}
90	8.32×10^{-1}	2.9×10	32	3.9×10^{-1}	1.24×10^{-3}

Tabella 3.13: NN3 dataset 10

Pruning %	Space Overhead (KB)	Training Time (s)	ϵ	Error %	Mean Error
0	3.08×10^{-2}	-	1270	1.2×10^{-1}	2.40×10^{-4}
10	5.54×10^{-2}	3.02×10^{2}	708	6.8×10^{-2}	1.47×10^{-4}
20	4.93×10^{-2}	3.03×10^{2}	708	6.8×10^{-2}	1.47×10^{-4}
30	4.32×10^{-2}	3.04×10^{2}	708	6.8×10^{-2}	1.47×10^{-4}
40	3.71×10^{-2}	3.05×10^{2}	707	6.8×10^{-2}	1.47×10^{-4}
50	3.09×10^{-2}	3.04×10^{2}	707	6.7×10^{-2}	1.47×10^{-4}
60	2.49×10^{-2}	3.00×10^{2}	707	6.7×10^{-2}	1.47×10^{-4}
70	1.87×10^{-2}	3.00×10^{2}	706	6.7×10^{-2}	1.47×10^{-4}
80	1.26×10^{-2}	3.02×10^{2}	700	6.7×10^{-2}	1.46×10^{-4}
90	6.50×10^{-3}	3.00×10^{2}	660	6.3×10^{-2}	1.45×10^{-4}

Tabella 3.14: NN1 dataset 3

r_2	Clusters	Space Overhead (KB)	Training Time (s)	Eplison	Error %	Mean Error
1	-	4.95×10^{-2}	-	9	1.75	4.74×10^{-3}
30	3	1.60×10^{-2}	8.07×10^{-2}	2427	4.74×10^{2}	3.15
40	9	2.06×10^{-2}	8.69×10^{-2}	14373	2.80×10^{3}	1.78×10
50	16	2.59×10^{-2}	9.27×10^{-2}	5714	1.11×10^{3}	7.32
60	22	3.05×10^{-2}	1.93×10^{-1}	5296	1.03×10^{3}	6.80
70	28	3.51×10^{-2}	1.93×10^{-1}	8159	1.59×10^{3}	1.03×10
80	35	4.04×10^{-2}	2.08×10^{-1}	542	1.05×10^{2}	5.83×10^{-1}
90	41	4.50×10^{-2}	2.44×10^{-1}	8	1.56	4.60×10^{-3}

Tabella 3.15: NN1 dataset 7

r_2	Clusters	Space Overhead (KB)	Training Time (s)	ϵ	Error %	Mean Error
1	-	3.09×10^{-3}	-	53	6.47×10^{-1}	1.62×10^{-3}
30	3	1.00×10^{-3}	2.71×10^{-1}	57×10^{7}	69.62×10^{5}	4.27×10^{3}
40	9	1.29×10^{-3}	2.71×10^{-1}	37×10^{4}	46.34×10^{2}	2.71×10
50	16	1.62×10^{-3}	3.02×10^{-1}	10×10^{4}	12.54×10^{2}	7.20
60	22	1.91×10^{-3}	3.55×10^{-1}	21×10^{4}	25.76×10^{2}	1.46×10
70	28	2.19×10^{-3}	3.55×10^{-1}	5528	6.74×10	2.44×10^{-1}
80	35	2.52×10^{-3}	3.98×10^{-1}	63	7.7×10^{-1}	2.26×10^{-3}
90	41	2.81×10^{-3}	4.71×10^{-1}	56	6.8×10	1.82×10^{-3}

3.2.2 Weight Sharing

In questo paragrafo abbiamo applicato il weight sharing e i risultati sono nelle Tabelle 3.14 - 3.21. Il numero di centroidi è calcolato come

$$\text{cluster} = \left(\frac{r_2 \times 32s - sb}{32} \right) \tag{3.2}$$

dove r_2 è il tasso di compressione (Paragrafo 2.2.3), s è il numero di connessioni e b è il numero di byte utilizzati per rappresentare i centroidi. Per (3.2) e (2.7) non possiamo raggiungere valori di r_2 inferiori a quelli mostrati nelle tabelle. Come ci si aspetta, al crescere del numero di centroidi le reti hanno una performance crescente ed in alcuni casi migliore della rete non compressa.

Tabella 3.16: NN1 dataset 3

r_2	Clusters	Space Overhead (KB)	Training Time (s)	ϵ	Error %	Mean Error
1	-	2.42×10^{-5}	-	905	8.6×10^{-2}	1.85×10^{-4}
30	3	7.82×10^{-6}	3.8×10	2.22×10^{5}	2.12×10^{2}	1.11
40	9	1.00×10^{-5}	1.8×10	1.51×10^{4}	1.44×10	4.75×10^{-2}
50	16	1.26×10^{-5}	1.9×10	2.29×10^{4}	2.19×10	7.54×10^{-2}
60	22	1.49×10^{-5}	1.8×10	717	6.8×10^{-2}	1.49×10^{-4}
70	28	1.71×10^{-5}	1.9×10	715	6.8×10^{-2}	1.48×10^{-4}
80	35	1.97×10^{-5}	1.9×10	706	6.7×10^{-2}	1.48×10^{-4}
90	41	2.20×10^{-5}	1.9×10	706	6.7×10^{-2}	1.48×10^{-4}

Tabella 3.17: NN2 dataset 3

r_2	Clusters	Space Overhead (KB)	Training Time (s)	ϵ	Error %	Mean Error
1	-	1.28×10^{1}	-	4	7.8×10^{-1}	1.6×10^{-3}
60	$1638, 89$	8.01	2.8×10	5	9.7×10^{-1}	2.21×10^{-3}
70	$3276, 115$	9.28	3.4×10	2	3.9×10^{-1}	5.70×10^{-4}
80	$4915, 140$	1.05×10	4.3×10	2	3.9×10^{-1}	5.43×10^{-4}
90	$6553, 166$	1.18×10	4.8×10	2	3.9×10^{-1}	5.48×10^{-4}

Tabella 3.18: NN2 dataset 7

r_2	Clusters	Space Overhead (KB)	Training Time (s)	ϵ	Error %	Mean Error
1	-	8.05×10^{-1}	-	33	4.0×10^{-1}	1.12×10^{-3}
60	$1638, 89$	5.00×10^{-1}	1.71×10^{2}	33	4.0×10^{-1}	6.13×10^{-4}
70	$3276, 115$	5.80×10^{-1}	2.34×10^{2}	33	4.0×10^{-1}	5.95×10^{-4}
80	$4915, 140$	6.59×10^{-1}	2.80×10^{2}	33	4.0×10^{-1}	5.82×10^{-4}
90	$6553, 166$	7.38×10^{-1}	3.17×10^{2}	34	4.1×10^{-1}	5.90×10^{-4}

Tabella 3.19: NN2 dataset 10

r_2	Clusters	Space Overhead (KB)	Training Time (s)	ϵ	Error %	Mean Error
1	-	6.29×10^{-3}	-	1031	9.8×10^{-2}	2.33×10^{-4}
60	$1638, 89$	3.91×10^{-3}	2.64×10^{2}	292	2.8×10^{-2}	5.11×10^{-5}
70	$3276, 115$	4.53×10^{-3}	2.44×10^{2}	753	7.2×10^{-2}	1.49×10^{-4}
80	$4915, 140$	5.15×10^{-3}	2.82×10^{2}	714	6.8×10^{-2}	1.45×10^{-4}
90	$6553, 166$	5.77×10^{-3}	3.17×10^{2}	684	6.5×10^{-2}	1.45×10^{-4}

NN3 dataset 3						
r_2	Clusters	Space Overhead (KB)	Training Time (s)	ϵ	Error %	Mean Error
1	-	6.31×10	-	4	7.8×10^{-1}	1.83×10^{-3}
60	$1638, 6553, 89$	3.84×10	2.00×10	3	5.8×10^{-1}	1.25×10^{-3}
70	$3276, 13107, 115$	4.46×10	1.43×10^2	2	3.9×10^{-1}	6.28×10^{-4}
80	$4915, 19660, 140$	5.09×10	1.87×10^2	4	7.8×10^{-1}	1.80×10^{-3}
90	$6553, 26214, 166$	5.72×10	2.03×10^2	2	3.9×10^{-1}	6.73×10^{-4}

Tabella 3.20: NN3 dataset 7

r_2	Clusters	Space Overhead (KB)	Training Time (s)	ϵ	Error %	Mean Error
1	-	3.94	-	40	4.9×10^{-1}	1.14×10^{-3}
60	$1638, 6553, 89$	2.40	2.43×10^2	34	4.1×10^{-1}	6.01×10^{-4}
70	$3276, 13107, 115$	2.79	2.15×10^2	39	4.7×10^{-1}	9.25×10^{-4}
80	$4915, 19660, 140$	3.18	7.46×10^2	36	4.4×10^{-1}	7.40×10^{-4}
90	$6553, 26214, 166$	3.57	1.26×10^3	35	4.3×10^{-1}	6.88×10^{-4}

3.2.3 MSE vs MAE

In questo paragrafo abbiamo provato a trovare una configurazione migliore per la rete NN1 confrontanto i risultati tra le funzioni errore Mean Squared Error (MSE) e Mean Absolute Error (MAE) descritte in (3.3).

$$\text{MSE} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(t_i - y_i)^2, \qquad \text{MAE} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|t_i - y_i|. \tag{3.3}$$

I risultati sono riportati nelle Tabelle 3.22 - 3.24. Dai risultati ottenuti si può vedere come tra le due diverse funzioni di errore non ci sia molta differenza di performance.

Tabella 3.21: NN3 dataset 10

r_2	Clusters	Space Overhead (KB)	Training Time (s)	ϵ	Error %	Mean Error
1	-	3.08×10^{-2}	-	1270	1.2×10^{-1}	2.40×10^{-4}
60	$1638, 6553, 89$	1.87×10^{-2}	6.16×10^2	771	7.4×10^{-2}	1.66×10^{-4}
70	$3276, 13107, 115$	2.18×10^{-2}	8.28×10^2	678	6.5×10^{-2}	1.47×10^{-4}
80	$4915, 19660, 140$	2.49×10^{-2}	1.03×10^3	709	6.8×10^{-2}	1.47×10^{-4}
90	$6553, 26214, 166$	2.79×10^{-2}	2.00×10^3	675	6.4×10^{-2}	1.45×10^{-4}

Tabella 3.22: File3

MSE			**MAE**		
$\eta = 1.0 \times 10^{-4}$					
`mb`	ϵ	`Loss`	`mb`	ϵ	`Loss`
16	8	3.16×10^{-5}	16	9	4.45×10^{-3}
32	8	3.15×10^{-5}	32	9	4.48×10^{-3}
64	8	3.15×10^{-5}	64	9	4.37×10^{-3}
$\eta = 1.0 \times 10^{-3}$					
16	8	3.15×10^{-5}	16	14	7.63×10^{-3}
32	8	3.15×10^{-5}	32	11	4.94×10^{-3}
64	8	3.15×10^{-5}	64	11	6.5×10^{-3}
$\eta = 5.0 \times 10^{-3}$					
16	8	3.16×10^{-5}	16	60	2.34×10^{-2}
32	8	3.16×10^{-5}	32	33	1.71×10^{-2}
64	8	3.15×10^{-5}	64	20	9.64×10^{-3}
$\eta = 1.0 \times 10^{-2}$					
16	8	3.22×10^{-5}	16	57	2.96×10^{-2}
32	8	3.34×10^{-5}	32	83	3.91×10^{-2}
64	8	3.15×10^{-5}	64	65	6.11×10^{-2}
$\eta = 5.0 \times 10^{-2}$					
16	11	6.54×10^{-5}	16	434	2.05×10^{-1}
32	8	3.22×10^{-5}	32	181	9.2×10^{-2}
64	8	3.25×10^{-5}	64	194	9.93×10^{-2}
$\eta = 1.0 \times 10^{-1}$					
16	44	9.45×10^{-4}	16	533	2.88×10^{-1}
32	8	3.24×10^{-5}	32	917	4.37×10^{-1}
64	8	3.49×10^{-5}	64	383	2.68×10^{-1}

Tabella 3.23: File7

MSE			**MAE**		
$\eta = 1.0 \times 10^{-4}$					
`mb`	ϵ	`Loss`	`mb`	ϵ	`Loss`
16	43	3.48×10^{-6}	16	74	2.47×10^{-3}
32	42	3.48×10^{-6}	32	49	1.55×10^{-3}
64	43	3.48×10^{-6}	64	47	1.56×10^{-3}
$\eta = 1.0 \times 10^{-3}$					
16	42	3.49×10^{-6}	16	135	4.86×10^{-3}
32	43	3.49×10^{-6}	32	131	4.03×10^{-3}
64	43	3.48×10^{-6}	64	102	3.59×10^{-3}
$\eta = 5.0 \times 10^{-3}$					
16	45	3.51×10^{-6}	16	740	2.09×10^{-2}
32	42	3.48×10^{-6}	32	640	2.31×10^{-2}
64	42	3.49×10^{-6}	64	605	3.35×10^{-2}
$\eta = 1.0 \times 10^{-2}$					
16	46	3.57×10^{-6}	16	1080	3.29×10^{-2}
32	44	3.52×10^{-6}	32	1493	3.69×10^{-2}
64	42	3.49×10^{-6}	64	839	3.94×10^{-2}
$\eta = 5.0 \times 10^{-2}$					
16	54	4.15×10^{-6}	16	7958	2.83×10^{-1}
32	47	3.67×10^{-6}	32	4365	1.33×10^{-1}
64	56	3.85×10^{-6}	64	3848	1.51×10^{-1}
$\eta = 1.0 \times 10^{-1}$					
16	203	4.73×10^{-5}	16	11421	3.74×10^{-1}
32	75	1.01×10^{-5}	32	7154	2.28×10^{-1}
64	56	5.84×10^{-6}	64	8192	6.01×10^{-1}

Tabella 3.24: File10

MSE			**MAE**		
$\eta = 1.0 \times 10^{-4}$					
`mb`	ϵ	`Loss`	`mb`	ϵ	`Loss`
16	613	3.36×10^{-8}	16	3120	6.22×10^{-4}
32	616	3.36×10^{-8}	32	1805	3.1×10^{-4}
64	620	3.36×10^{-8}	64	1242	2.24×10^{-4}
$\eta = 1.0 \times 10^{-3}$					
16	610	3.45×10^{-8}	16	1.55×10^{4}	2.88×10^{-3}
32	616	3.36×10^{-8}	32	1.640×10^{4}	3.39×10^{-3}
64	626	3.36×10^{-8}	64	1.175×10^{4}	2.39×10^{-3}
$\eta = 5.0 \times 10^{-3}$					
16	629	3.52×10^{-8}	16	9.410×10^{4}	1.75×10^{-2}
32	617	3.46×10^{-8}	32	1.048×10^{5}	3.31×10^{-2}
64	610	3.52×10^{-8}	64	5.29×10^{4}	1.33×10^{-2}
$\eta = 1.0 \times 10^{-2}$					
16	691	3.49×10^{-8}	16	2.129×10^{5}	3.88×10^{-2}
32	622	3.51×10^{-8}	32	1.620×10^{5}	2.9×10^{-2}
64	635	3.46×10^{-8}	64	1.245×10^{5}	2.41×10^{-2}
$\eta = 5.0 \times 10^{-2}$					
16	847	5.23×10^{-8}	16	1.153×10^{6}	1.91×10^{-1}
32	788	3.85×10^{-8}	32	6.299×10^{5}	1.1×10^{-1}
64	647	4.22×10^{-8}	64	3.650×10^{5}	7.41×10^{-2}
$\eta = 1.0 \times 10^{-1}$					
16	2884	4.09×10^{-7}	16	1.048×10^{6}	6.79×10^{-1}
32	909	4.45×10^{-8}	32	1.183×10^{6}	2.29×10^{-1}
64	984	7.45×10^{-8}	64	1.049×10^{6}	5.66×10^{-1}

Tabella 3.25: File3

MSE		**LSE**	
$\eta = 1.0 \times 10^{-5}$			
`mb`	ϵ	`mb`	ϵ
64	149	64	23
128	97	128	16
256	79	256	13
512	72	512	11
$\eta = 1.0 \times 10^{-4}$			
64	12	64	8
128	9	128	8
256	8	256	8
512	8	512	8
$\eta = 1.0 \times 10^{-3}$			
64	8	64	8
128	8	128	8
256	8	256	8
512	8	512	8
$\eta = 1.0 \times 10^{-2}$			
64	8	64	8
128	8	128	8
256	8	256	8
512	8	512	8
$\eta = 1.0 \times 10^{-1}$			
64	8	64	8
128	8	128	8
256	8	256	8
512	8	512	8

3.2.4 MSE vs LSE

In questo paragrafo abbiamo provato a trovare una configurazione migliore per la rete NN1 confrontanto i risultati tra le funzioni errore Mean Squared Error (MSE, vista nel Paragrafo (3.3)) e LogSumExp (LSE, descritta in (3.4)). I risultati sono riportati nelle Tabelle 3.25 - 3.27. Anche in questo confronto non abbiamo trovato molta differenza di performance.

$$\text{LSE}(t_1 - y_1, \ldots, t_n - y_n) = \log\left(\exp(t_1 - y_1) + \cdots + \exp(t_n - y_n)\right) \tag{3.4}$$

Tabella 3.26: File7

MSE		**LSE**	
$\eta = 1.0 \times 10^{-5}$			
`mb`	ϵ	`mb`	ϵ
64	44	64	42
128	43	128	42
256	43	256	42
512	43	512	42
1024	43	1024	42
8192	43	8192	42
$\eta = 1.0 \times 10^{-4}$			
64	42	64	42
128	42	128	42
256	42	256	42
512	42	512	42
1024	42	1024	42
8192	42	8192	42
$\eta = 1.0 \times 10^{-3}$			
64	42	64	42
128	42	128	42
256	42	256	42
512	42	512	42
1024	42	1024	42
8192	42	8192	42
$\eta = 1.0 \times 10^{-2}$			
64	42	64	42
128	42	128	43
256	42	256	42
512	43	512	43
1024	42	1024	42
8192	42	8192	42
$\eta = 1.0 \times 10^{-1}$			
64	56	64	55
128	49	128	48
256	45	256	43
512	41	512	41
1024	41	1024	41
8192	42	8192	43

Tabella 3.27: File10

MSE		**LSE**	
$\eta = 1.0 \times 10^{-5}$			
`mb`	ϵ	`mb`	ϵ
64	788	64	766
128	788	128	766
256	787	256	766
512	787	512	765
1024	787	1024	765
1048576	787	1048576	765
$\eta = 1.0 \times 10^{-4}$			
64	624	64	623
128	626	128	625
256	628	256	627
512	629	512	628
1024	629	1024	628
1048576	629	1048576	628
$\eta = 1.0 \times 10^{-3}$			
64	626	64	627
128	619	128	619
256	616	256	615
512	620	512	620
1024	619	1024	619
1048576	622	1048576	622
$\eta = 1.0 \times 10^{-2}$			
64	635	64	636
128	636	128	594
256	660	256	659
512	617	512	615
1024	616	1024	614
1048576	620	1048576	621
$\eta = 1.0 \times 10^{-1}$			
64	984	64	979
128	717	128	696
256	661	256	667
512	603	512	**573**
1024	671	1024	716
1048576	636	1048576	633

Tabella 3.28: File 3

Split	ϵ	μ	Space Overhead (KB)
1	8	8.0	4.96×10^{-2}
2	8	6.5	9.92×10^{-2}
3	7	5.0	1.49×10^{-1}
4	9	6.0	1.98×10^{-1}
5	6	4.4	2.48×10^{-1}
6	5	3.5	2.98×10^{-1}
7	5	3.14	3.47×10^{-1}
8	5	3.25	3.97×10^{-1}
9	3	2.33	4.46×10^{-1}
10	4	2.8	4.96×10^{-1}
11	4	2.45	5.45×10^{-1}
12	3	1.92	5.95×10^{-1}
13	3	1.85	6.45×10^{-1}
14	2	1.57	6.94×10^{-1}
15	4	1.67	7.44×10^{-1}
16	2	1.19	7.93×10^{-1}
17	2	1.12	8.43×10^{-1}
18	2	1.17	8.93×10^{-1}
19	4	1.16	9.42×10^{-1}
20	1	1.0	9.92×10^{-1}
21	2	1.1	1.04
22	2	1.05	1.09
26	1	1.0	1.29
30	2	1.07	1.49

3.2.5 Splitting in N modelli

L'idea applicata in questo paragrafo è quella di dividere il dataset ordinato in sottosequenze ordinate e usare una rete neurale senza strati hidden (**NN1**) per ogni sottosequenza con l'obiettivo di ridurre l'errore massimo ϵ che sarà quindi il massimo degli errori massimi di ogni modello. I risultati sono riportati nelle Tabelle 3.28 - 3.30, le intestazioni delle colonne sono:

- Split = numero di split sul dataset (e di conseguenza numero di modelli NN1 usati);
- ϵ = massimo degli errori massimi di ogni NN1;
- μ = media degli errori massimi di ogni NN1;
- Space Overhead (KB) = somma dello spazio di ogni NN1 in KB rispetto al dataset.

Come ci si aspetta, ad eccezione di alcuni casi, al crescere del numero di Split le performance migliorano occupando meno delle reti compresse precedenti.

Tabella 3.29: File 7

Split	ϵ	μ	Space Overhead (KB)
1	41	41.0	3.1×10^{-3}
2	36	29.0	6.2×10^{-3}
3	33	27.67	9.3×10^{-3}
4	43	30.5	1.24×10^{-2}
5	27	20.2	1.55×10^{-2}
6	31	22.17	1.86×10^{-2}
7	32	19.86	2.17×10^{-2}
8	29	21.5	2.48×10^{-2}
9	33	19.0	2.79×10^{-2}
10	24	15.6	3.1×10^{-2}
11	25	15.09	3.41×10^{-2}
12	28	14.92	3.72×10^{-2}
13	24	14.46	4.03×10^{-2}
14	26	13.64	4.34×10^{-2}
15	24	12.4	4.65×10^{-2}
16	21	13.25	4.96×10^{-2}
17	23	12.65	5.27×10^{-2}
18	21	12.44	5.58×10^{-2}
19	19	10.79	5.89×10^{-2}
20	27	11.55	6.2×10^{-2}
21	20	11.05	6.51×10^{-2}
22	20	10.77	6.82×10^{-2}
26	13	9.35	8.06×10^{-2}
30	17	9.3	9.3×10^{-2}
34	16	8.53	1.05×10^{-1}
38	13	7.39	1.18×10^{-1}
42	11	7.14	1.3×10^{-1}
46	13	7.13	1.43×10^{-1}
50	12	6.8	1.55×10^{-1}
54	13	6.57	1.67×10^{-1}
58	12	6.24	1.8×10^{-1}
62	11	6.02	1.92×10^{-1}
64	21	6.0	1.98×10^{-1}
72	9	5.24	2.23×10^{-1}
80	9	4.92	2.48×10^{-1}
88	10	4.65	2.73×10^{-1}
96	9	4.38	2.98×10^{-1}
104	8	4.13	3.22×10^{-1}
112	7	3.83	3.47×10^{-1}
120	10	3.75	3.72×10^{-1}
128	6	3.52	3.97×10^{-1}

Tabella 3.30: File 10

Split	ϵ	μ	Space Overhead (KB)
1	714	714.0	2.42×10^{-5}
2	593	557.5	4.84×10^{-5}
3	494	420.33	7.26×10^{-5}
4	515	428.75	9.69×10^{-5}
5	545	360.0	1.21×10^{-4}
6	561	319.17	1.45×10^{-4}
7	538	292.57	1.69×10^{-4}
8	465	298.5	1.94×10^{-4}
9	453	240.33	2.18×10^{-4}
10	425	228.6	2.42×10^{-4}
11	338	222.64	2.66×10^{-4}
12	311	200.08	2.91×10^{-4}
13	207	183.85	3.15×10^{-4}
14	238	175.07	3.39×10^{-4}
15	254	176.53	3.63×10^{-4}
16	305	196.75	3.87×10^{-4}
17	266	169.53	4.12×10^{-4}
18	246	154.06	4.36×10^{-4}
19	193	147.79	4.6×10^{-4}
20	233	144.3	4.84×10^{-4}
21	277	150.67	5.08×10^{-4}
22	357	143.0	5.33×10^{-4}
26	209	131.85	6.3×10^{-4}
30	233	116.7	7.26×10^{-4}
34	196	106.15	8.23×10^{-4}
38	177	104.55	9.2×10^{-4}
42	214	101.38	1.02×10^{-3}
46	153	88.57	1.11×10^{-3}
50	143	84.88	1.21×10^{-3}
54	145	85.07	1.31×10^{-3}
58	133	82.4	1.4×10^{-3}
62	143	80.34	1.5×10^{-3}
64	142	79.77	1.55×10^{-3}
72	121	69.71	1.74×10^{-3}
80	134	66.75	1.94×10^{-3}
88	153	65.88	2.13×10^{-3}
96	109	60.6	2.32×10^{-3}
104	107	59.13	2.52×10^{-3}
112	99	56.11	2.71×10^{-3}
120	118	54.53	2.91×10^{-3}
128	302	56.22	3.1×10^{-3}

Bibliografia

[1] G. Cybenko. Approximation by superpositions of a sigmoidal function. *Mathematics of Control, Signals, and Systems (MCSS)*, 2(4):303–314, December 1989.

[2] Song Han, Huizi Mao, and William J. Dally. Deep compression: Compressing deep neural networks with pruning, trained quantization and huffman coding. 2015. cite arxiv:1510.00149Comment: Published as a conference paper at ICLR 2016 (oral).

[3] Kaiming He, Xiangyu Zhang, Shaoqing Ren, and Jian Sun. Delving deep into rectifiers: Surpassing human-level performance on imagenet classification, 2015. cite arxiv:1502.01852.

[4] Nobody Jr. My article, 2006.

[5] Warren McCulloch and Walter Pitts. A logical calculus of ideas immanent in nervous activity. *Bulletin of Mathematical Biophysics*, 5:115–133, 1943.

[6] Ning Qian. On the momentum term in gradient descent learning algorithms. *Neural Networks*, 12(1):145–151, 1999.

[7] Payam Refaeilzadeh, Lei Tang, and Huan Liu. *Cross-Validation*, pages 532–538. Springer US, Boston, MA, 2009.

[8] David E. Rumelhart, Richard Durbin, Richard Golden, and Yves Chauvin. 1 backpropagation : The basic theory. 2008.

[9] Nitish Srivastava, Geoffrey Hinton, Alex Krizhevsky, Ilya Sutskever, and Ruslan Salakhutdinov. Dropout: A simple way to prevent neural networks from overfitting. *J. Mach. Learn. Res.*, 15(1):1929–1958, January 2014.

[10] Twan van Laarhoven. L2 regularization versus batch and weight normalization. *ArXiv*, abs/1706.05350, 2017.

[11] Egm4313.s12 (Prof. Loc Vu-Quoc) Wikiedia Commons.

[12] Josef Steppan Wikiedia Commons.