

## Physique Numérique – Exercice 5 – Solution

à rendre jusqu'au **mardi 14 mai 2024** sur le site <https://moodle.epfl.ch/mod/assign/view.php?id=1174656>

### 5 Équation d'onde dans un milieu inhomogène : propagation d'une vague dans un océan de profondeur non uniforme

#### Introduction

Dans ce travail, nous allons étudier la propagation des vagues en eaux peu profondes, données par l'équation :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( gh_0 \frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad (1)$$

avec  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  l'accélération de la pesanteur. Le schéma utilisé est celui des différences finies, explicite, à trois niveaux. On considèrera, dans un premier temps, une profondeur  $h_0$  constante, afin de pouvoir comparer la solution numérique avec la solution analytique. Les propriétés de stabilité et convergence numériques seront testés. Dans un deuxième temps, on prendra une profondeur  $h_0(x)$  non uniforme. Il n'y a pas de solution exacte pour ce problème, mais nous comparerons avec une solution analytique approximée WKB.

#### 5.1 Calculs analytiques [10pts]

On considère le cas d'une profondeur  $h_0$  constante.

(a) **Solution générale. Vitesse de propagation. [2pts]**

Dans le cas  $h_0$  constante, l'équation devient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = gh_0 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (2)$$

C'est une équation type d'Alembert, où on pose

$$u^2 = gh_0 \quad (3)$$

La solution générale est

$$f(x, t) = F(x - |u|t) + G(x + |u|t) . \quad (4)$$

La vitesse de propagation est  $\pm u = \pm \sqrt{gh_0}$ . Le premier terme représente une onde progressive (vitesse  $+u$ ), le deuxième une onde rétrograde (vitesse  $-u$ ).

(b) **Modes propres, fréquences propres. [3pts]**

Avec l'Ansatz

$$f(x, t) = Ce^{i(kx - \omega t)} , \quad (5)$$

insérant dans l'Eq.(1), on obtient :

$$\omega^2 = k^2 u^2 \Rightarrow k = \pm \frac{\omega}{u} \Rightarrow f(x, t) = e^{-i\omega t} (Ae^{ikx} + Be^{-ikx}) \quad (6)$$

Avec la condition au bord gauche, on a

$$f(0, t) = 0, \forall t \Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow f(x, t) = \hat{A}e^{-i\omega t} \sin(kx) \quad (7)$$

Avec la condition au bord droite, on a

$$\partial f / \partial x(L, 0) = 0, \forall t \Rightarrow \cos(kx) = 0 \Rightarrow k_n = \frac{(n + 1/2)\pi}{L} \quad (8)$$

Les modes et fréquences propres sont donc

$$f_n(x) = \sin\left(\frac{(n + 1/2)\pi}{L}x\right), \quad \omega_n = \frac{(n + 1/2)\pi u}{L} \quad (9)$$

(c) **Analyse WKB. [5pts]**

Soit l'équation :

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} = gh_0(x) \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} \quad (10)$$

En s'inspirant de la dérivation faite dans les Notes de Cours, Section 4.2.4, nous avons

$$f(x, t) = \hat{f}(x)e^{-i\omega t} \quad (11)$$

Introduisant dans l'Eq.(10), en posant  $u(x) = \sqrt{gh_0(x)}$  :

$$-\omega^2 \hat{f}(x) = u^2(x) \frac{d^2 \hat{f}}{dx^2}(x) \quad (12)$$

On note  $\prime = d/dx$ . La solution WKB est de la forme :

$$\hat{f}(x) = A(x)e^{iS(x)} \quad (13)$$

avec  $A(x)$  "lentement variable",  $S(x)$  "rapidement variable". En termes d'ordering, chaque fois qu'une fonction est dérivée par rapport à  $x$ , elle prend un ordre de plus. On a :

$$S \sim \epsilon^{-1}, S' \sim \epsilon^0, S'' \sim \epsilon^1; A \sim \epsilon^0, A' \sim \epsilon^1, A'' \sim \epsilon^2; u^2 \sim \epsilon^0, (u^2)' \sim \epsilon^1, (u^2)'' \sim \epsilon^2 \quad (14)$$

On a

$$\hat{f}' = (A' + iAS')e^{iS} \quad (15)$$

$$\hat{f}'' = (A'' + 2iA'S' + iAS'' - A(S')^2)e^{iS} \quad (16)$$

Introduisant dans l'Eq.(10) et simplifiant par  $e^{iS}$ ,

$$-\omega^2 A = u^2 (A'' + 2iA'S' + iAS'' - A(S')^2) \quad (17)$$

En séparant les termes selon l'ordering donné par l'Eq.(14), on a

$$\text{Ordre } \epsilon^0 : -\omega^2 A = -u^2 A(S')^2 \quad (18)$$

$$\text{Ordre } \epsilon^1 : 0 = iu^2(2A'S' + AS'') \quad (19)$$

$$\text{Ordre } \epsilon^2 : 0 = u^2 A'' \quad (20)$$

La solution à l'ordre  $\epsilon^0$  est

$$\omega^2 = u^2(S')^2, \Rightarrow S' = \frac{\omega}{u}, \Rightarrow S'' = -\frac{\omega u'}{u^2} \quad (21)$$

On injecte cette solution dans l'équation à l'ordre  $\epsilon^1$  :

$$2A' \frac{\omega}{u} - A \frac{\omega u'}{u^2} = 0 \quad (22)$$

Multipliant par  $u/A$ , on a

$$2 \frac{A'}{A} - \frac{u'}{u} = 0 \Leftrightarrow 2(\ln A)' - (\ln u)' = 0 \quad (23)$$

et donc

$$A = A_0 u^{1/2} \quad (24)$$

En se rappelant que  $u(x) = \sqrt{gh_0(x)}$ , on a

$$\boxed{A(x) = A_0(h_0(x))^{1/4}} \quad (25)$$

## 5.2 Implémentation en C++ [5pts]

Télécharger le fichier [Exercice5.2024\\_student.zip](#) du site Moodle.

- (a) Le schéma explicite à 3 niveaux, section 4.2.1, Eq.(4.43) des Notes de Cours, doit être modifié pour inclure un terme supplémentaire,  $g(dh_0/dx)(\partial f/\partial x)$ . On note  $f_{i,n} = f(x_i, t_n)$ . En utilisant les différences finies centrées aux points de maillage :

$$\frac{dh_0}{dx}(x_i) \approx \frac{h_0(x_{i+1}) - h_0(x_{i-1}))}{2\Delta x}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, t_n) \approx \frac{f(x_{i+1,n}) - f(x_{i-1,n}))}{2\Delta x}, \quad (26)$$

il vient, en posant

$$\beta_i^2 = \beta^2(x_i) = u^2(x_i) \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}, \quad (27)$$

$$f_{i,n+1} = 2(1 - \beta_i^2) f_{i,n} - f_{i,n-1} + \beta_i^2 (f_{i+1,n} + f_{i-1,n}) + \frac{1}{4} (\beta_{i+1}^2 - \beta_{i-1}^2) (f_{i+1,n} - f_{i-1,n}) \quad (28)$$

- (b) On implémente les conditions aux bords comme expliqué dans les Notes de Cours. Pour la sortie au bord gauche, on suit une démarche similaire à celle exposée pour le bord droite, Eqs.(4.44)-(4.46). La solution doit être une onde purement rétrograde au voisinage de  $x = x_L$ , donc  $\sim G(\xi)$  avec  $\xi(x, t) = x + |u|t$ . En dérivant  $f$  par rapport à  $t$  en  $x = x_L$ , on a

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x_L, t) = \frac{dG}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = |u| \frac{dG}{d\xi} \quad (29)$$

En dérivant  $f$  par rapport à  $x$  en  $x = x_L$ , on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_L, t) = \frac{dG}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{dG}{d\xi} \quad (30)$$

En comparant ces deux dernières expressions, on a donc :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x_L, t) = |u| \frac{\partial f}{\partial x}(x_L, t) \quad (31)$$

Nous exprimons cette équation au premier point de maillage spatial et pour tous les points de maillage temporels,  $x = x_0, t = t_n$ , en utilisant les différences finies "forward" en  $x$  et en  $t$  :

$$\frac{f_{0,n+1} - f_{0,n}}{\Delta t} = |u| \frac{f_{1,n} - f_{0,n}}{\Delta x} \quad (32)$$

et ainsi :

$$f_{0,n+1} = f_{0,n} + |\beta_1| (f_{1,n} - f_{0,n}) . \quad (33)$$

- (c) Implémenter 2 choix possibles pour la forme initiale de la vague,  $f(x, 0) = f_{\text{init}}(x)$  :
- (1) donnée par

$$f_{\text{init}}(x) = \frac{A}{2} \left( 1 - \cos \left( 2\pi \frac{x - x_1}{x_b - x_2} \right) \right) \quad (34)$$

- (2) donnée par un mode propre tel que calculé dans la partie analytique (5.1(b)). On donnera en input le numéro  $n$  de ce mode propre.
- (d) Implémenter 3 choix possibles pour la direction de propagation initiale de la vague : (1) progressive (vers les  $x$  croissants) ; (2) rétrograde (vers les  $x$  décroissants) ; (3) système initialement au repos.
- On applique les Notes de Cours, Eqs (4.49), (4.50).

### 5.3 Vitesse de propagation constante [12pts]

On considère le cas d'un bassin de 10m de long ( $x_L = 0, x_r = L = 10$ ), de profondeur  $h_0 = 3\text{m}$  constante. La condition au bord gauche est fixe. La condition au bord droite est libre.

- (a) **Direction de propagation et réflexions [4pts]** :

On prend une forme de vague initiale donnée par l'Eq.(34), avec  $A = 1\text{m}$ ,  $x_1 = 2\text{m}$ ,  $x_2 = 6\text{m}$ . Choisir les conditions initiales pour que la vague parte (1) vers la gauche, (2) vers la droite, (3) vague initialement au repos. Simuler jusqu'à un temps  $t_{\text{fin}}$  pour que l'onde ait le temps de faire 2 aller-retours.

La vitesse de propagation est  $u = \sqrt{gh_0} = 5.4249\text{m/s}$ . Le temps pour faire 2 aller-retours est donc  $t_{\text{fin}} = 7.3734\text{s}$ . On montre à la Fig.1 les graphes dans l'espace-temps de la perturbation,  $f(x, t)$ , pour les trois initialisations. On a pris  $n_x = 64$  et un temps  $\Delta t$  tel que  $\beta_{\text{CFL}} = 1$ . La solution obéit bien au comportement désiré, avec une propagation initiale dans la direction voulue. Dans le cas d'un système initialement au repos, la perturbation se scinde en deux moitiés, l'une se propageant vers la gauche, et l'autre vers la droite.

Il est intéressant d'examiner le comportement aux voisinages des extrémités du domaine. Pour une condition au bord fixe, le signe de la perturbation réfléchiée s'inverse par rapport à celui de la perturbation incidente. Au moment de la réflexion, la perturbation est nulle partout. Pour une condition au bord libre, la perturbation réfléchiée a le même signe que la perturbation incidente, produisant ainsi, au moment de la réflexion, une amplitude de 2.

On illustre également, dans le cas du système initialement au repos, le principe de superposition linéaire : après réflexions respectivement aux bords gauche et droite, les deux vagues se croisent en s'ignorant mutuellement : elles reprennent leur forme initiale après croisement.

- (b) **Limite de stabilité : [4pts]**

Prendre un des cas de la partie précédente, avec un nombre d'intervalles  $n_x$  donné. Vérifier et illustrer que la solution devient instable dès que  $|\beta_{\text{CFL}}| > 1$ .

On montre à la Fig.2 quelques instantanés de la vague  $f(x, t_{\text{fixe}})$ , la dépendance temporelle de la vague au milieu du domaine,  $f(x_{\text{fixe}}, t)$ , ainsi que les lignes de niveau dans l'espace-temps, pour  $\beta_{\text{CFL}} = 1.001$ . On observe des oscillations dans l'espace et le temps à la limite de Nyquist (i.e. 2 points de maillage spatial par longueur d'onde et 2 points de maillage spatial par période), dont l'amplitude augmente exponentiellement au cours du temps. c'est bien le signe d'une instabilité. Cette instabilité est liée à la discrétisation, elle est donc bien d'origine numérique, et non physique.

- (c) **Modes propres : [4pts]**

On initialise le mode propre  $n = 3$ , avec une amplitude  $A = 1$ ,  $f(x, t \leq 0) = f_n(x) \forall x$ . On simule une période théorique d'oscillation  $T_n = 2\pi/\omega_n$ , avec  $\omega_n$  la fréquence propre, Eq.(9). :

$$T_n = \frac{2L}{\sqrt{gh_0}(n + 1/2)} \quad (35)$$

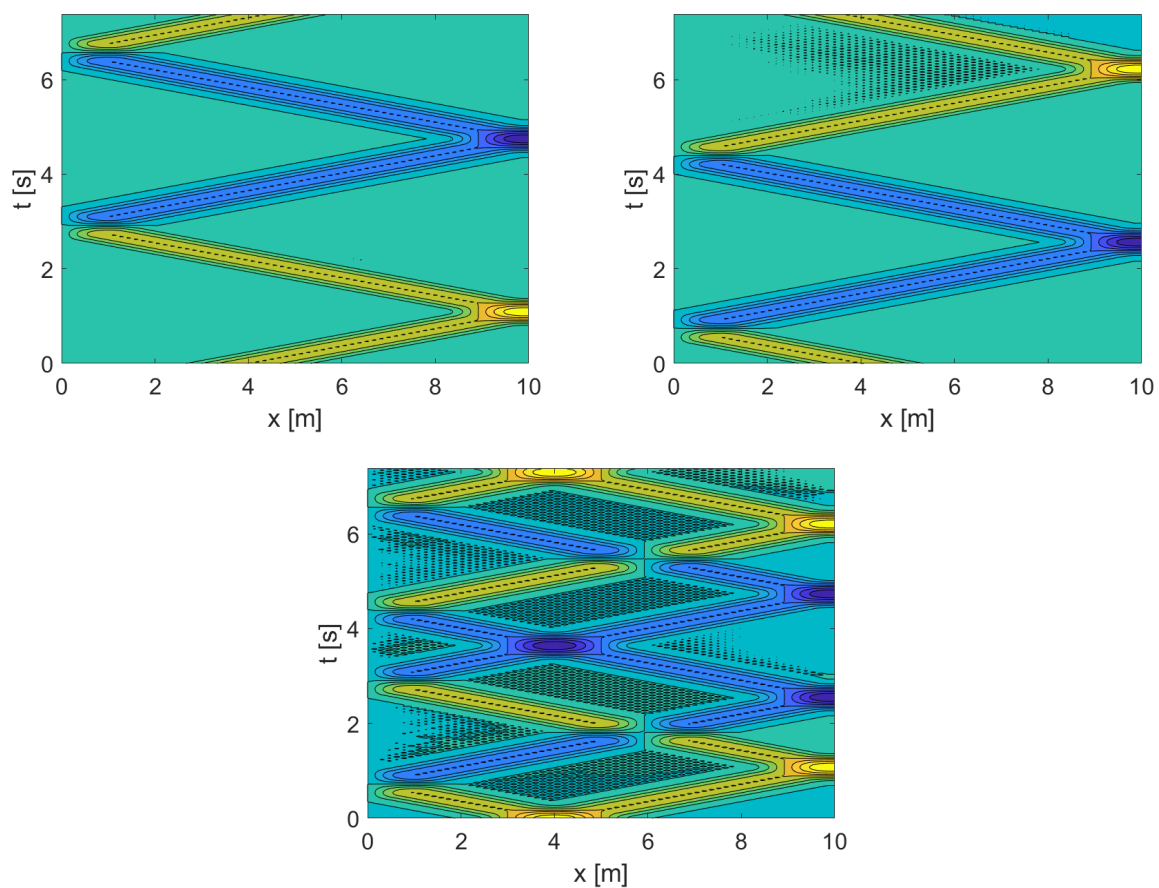


FIGURE 1 – Contours de la hauteur de la perturbation dans l'espace (axe horizontal) - temps (axe vertical), pour une initialisation avec propagation initiale vers la droite droite (en haut à gauche), vers la gauche (en haut à droite), et une perturbation initiale au repos (en bas).

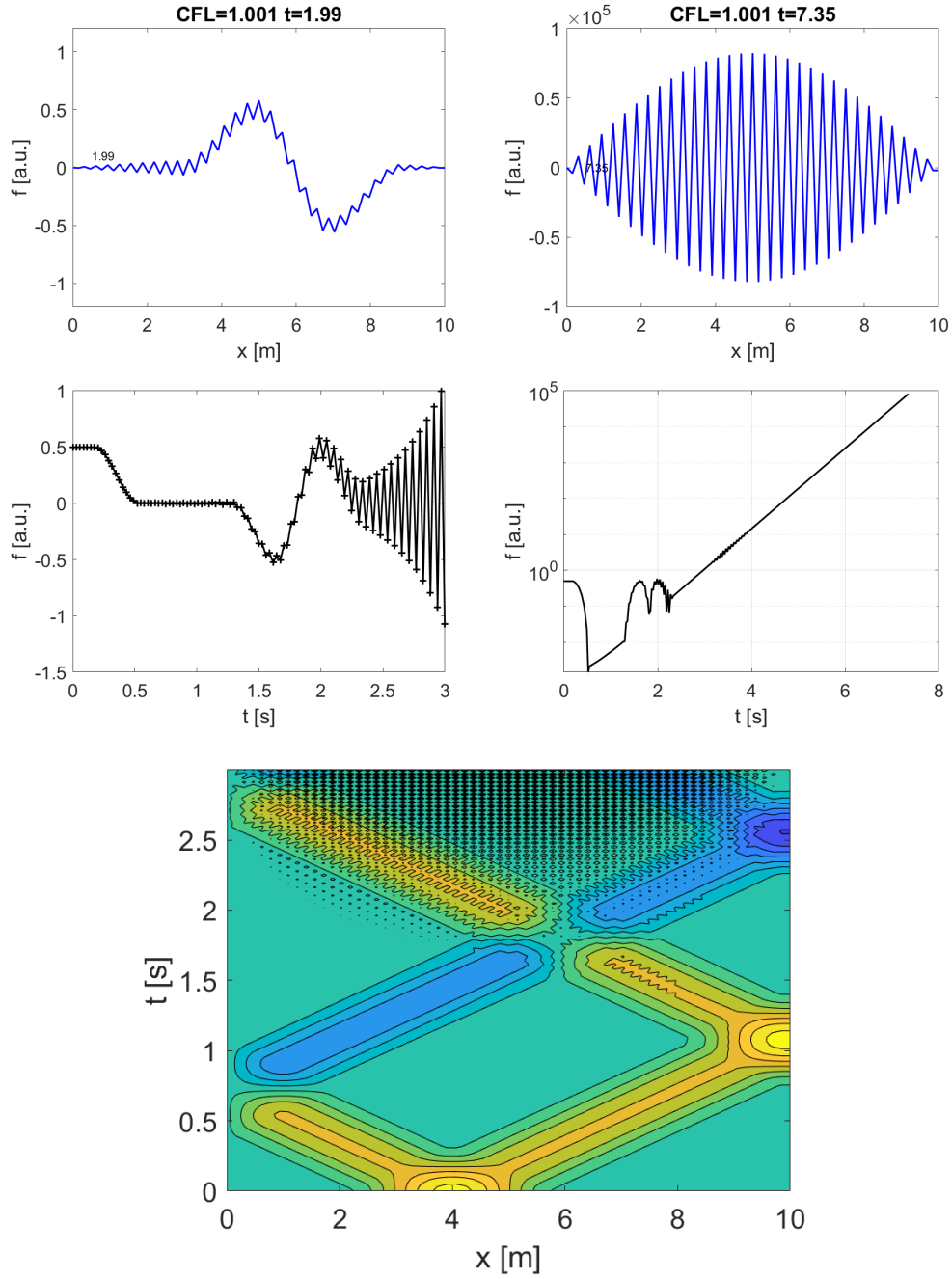


FIGURE 2 – Cas avec  $\beta_{\text{CFL}} = 1.001$ ,  $n_x = 64$ , condition initiale au repos. Instantanés de la vague à  $t = 1.99$ s (en haut à gauche),  $t = 7.35$ s (en haut à droite). Hauteur de la vague en fonction du temps à  $x = 5$ m (au milieu) et lignes de niveau dans l'espace-temps (en bas).

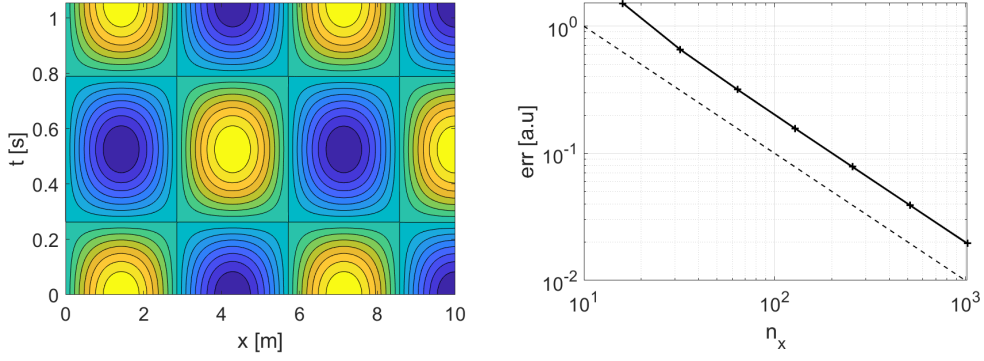


FIGURE 3 – Contours de la perturbation, avec le mode propre  $n = 3$  initialisé à  $t = 0$ . On simule une durée d’une période théorique. Convergence de l’erreur en fonction de  $n_x$ , à  $\beta_{\text{CFL}} = 0.9$ . La ligne traitillée est de pente  $-1$ .

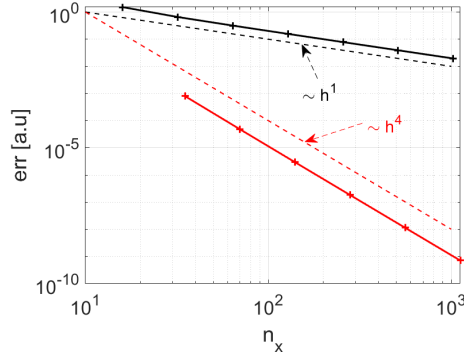


FIGURE 4 – Convergence de l’erreur en fonction de  $n_x$ , avec un domaine artificiellement aggrandi d’un demi-point de maillage pour une meilleure précision de la condition au bord libre, et avec  $\beta_{\text{CFL}}$  tendant vers 1.

Les contours de la perturbation, Fig.3, à gauche, montrent qualitativement qu’après une période, le système est revenu dans son état initial. Une analyse plus quantitative de l’erreur,  $\int_{x_L}^{x_R} |f_{\text{num}}(x, t = T) - f_{\text{ana}}(x, t = T)| dx$ , intégrée numériquement avec la règle des trapèzes, montre que cette erreur n’est pas nulle, mais qu’elle converge vers zéro, avec une loi de convergence linéaire en  $n_x$ , Fig.3, à droite.

Facultatif. En fait, une bonne partie de l’erreur est due à l’utilisation de différences finies non-centrées pour imposer la condition au bord "libre"  $\partial f / \partial x = 0$ . On obtient une meilleure approximation si on étend artificiellement le domaine de calcul de telle sorte que le milieu du dernier intervalle soit en  $x = x_R$ , où  $x_R$  est la "vraie" position du bord droit dans le monde réel. On choisit ainsi un bord droit numérique  $\tilde{x}_R$  tel que

$$\tilde{x}_R - x_R = \frac{1}{2} \frac{\tilde{x}_R - x_L}{n_x} . \quad (36)$$

On obtient

$$\tilde{x}_R = \frac{x_R - x_L / (2n_x)}{1 - 1 / (2n_x)} . \quad (37)$$

L’autre propriété intéressante est que le schéma numérique utilisé, pour  $h_0 = \text{const}$ , est exact si on choisit  $\beta_{\text{CFL}} = 1$ . Pour un temps final exactement égal à la période analytique, Eq.(35), on

a, avec  $\Delta t = t_{\text{fin}}/n_{\text{steps}}$  et  $\Delta x = L/n_x$ ,

$$\beta_{\text{CFL}} = \frac{2n_x}{(n + 1/2)n_{\text{steps}}} \quad (38)$$

Pour obtenir  $\beta_{\text{CFL}} = 1$ , la condition est

$$n_{\text{steps}} = \frac{4n_x}{2n + 1} \quad (39)$$

Il faut donc, puisque  $n_{\text{steps}}$  doit être entier, que  $n_x$  soit un multiple de  $2n + 1$ . En changeant artificiellement la taille du domaine, cependant,  $\beta_{\text{CFL}}$  ne pourra plus être exactement égal à 1. On montre à la Fig.4 la convergence obtenue, pour  $n = 3$ , et  $n_x = 35, 70, 140, 280, 560, 1120$  (et donc  $n_{\text{steps}} = 20, 40, 80, 160, 320, 640$ ). On obtient une "super-convergence" d'ordre 4. Une partie est due au fait qu'au fur et à mesure que  $n_x$  augmente,  $\beta_{\text{CFL}}$  s'approche de 1 :  $\beta_{\text{CFL}} = 0.9857, 0.992857, 0.99642857, 0.9982142857, 0.999107142857, 0.99955357142857$ .

#### 5.4 Vague sur un récif de corail [18pts]

On représente la profondeur de l'océan par le profil suivant :

$$h_0(x) = \begin{cases} h_L & (x_L \leq x \leq x_a), \\ \frac{1}{2}(h_L + h_C) + \frac{1}{2}(h_L - h_C) \cos\left(\pi \frac{x-x_a}{x_b-x_a}\right) & (x_a < x < x_b) \\ h_C & (x_b \leq x_c) \\ \frac{1}{2}(h_R + h_C) - \frac{1}{2}(h_R - h_C) \cos\left(\pi \frac{x-x_c}{x_d-x_c}\right) & (x_c < x < x_d) \\ h_R & (x_d \leq x \leq x_R) \end{cases} \quad (40)$$

On prend  $h_L = 7000\text{m}$ ,  $h_C = 35\text{m}$ ,  $h_R = 200\text{m}$ ,  $x_L = 0$ ,  $x_a = 300\text{km}$ ,  $x_b = 700\text{km}$ ,  $x_c = 720\text{km}$ ,  $x_d = 850\text{km}$ ,  $x_R = 1000\text{km}$ .

**Indications :** Attention de prendre une résolution spatiale suffisante. D'autre part, pour éviter d'obtenir des fichiers de sortie trop volumineux, on peut n'écrire  $f(x, t)$  que tous les  $n_{\text{stride}}$  pas de temps. Simuler un temps  $t_{\text{fin}}$  de l'ordre de 3 heures, soit environ 10000s. Choisir  $\Delta t$  de telle sorte que  $\max(\beta_{\text{CFL}}) = 1$ .

Pour calculer la vitesse de propagation et l'amplitude, on peut par exemple chercher, pour chaque temps  $t_j$ , la position du maximum de  $f$ . Attention, il faut faire une interpolation quadratique en  $x$  de  $f(x, t_j)$ , à  $t = t_j$  fixé, au voisinage du maximum sur la grille spatiale, pour éviter des sauts brusques. On obtient ainsi un ensemble de valeurs  $x_{\text{crete},j}$ . On évalue la vitesse de propagation par différences finies centrées  $v = (x_{\text{crete},i+k} - x_{\text{crete},i-k}) / (t_{i+k} - t_{i-k})$ , avec  $k \geq 1$  un nombre entier, choisi pour minimiser les oscillations de  $v$ .

##### (a) Illustrer la solution obtenue. [2pts]

Le profil du fond de l'océan correspondant est montré à la Fig.5. On simule l'évolution d'une vague se propageant de gauche à droite, dont la forme initiale est donnée par l'Eq.(34) avec  $A = 1\text{m}$ ,  $x_1 = 50\text{km}$ ,  $x_2 = 250\text{km}$ , avec des conditions aux bords droite et gauche "sortie de l'onde".

Pour estimer la résolution spatiale nécessaire, on peut estimer la longueur d'onde de la vague à son point où elle est la plus courte, c'est-à-dire sur le récif. La vitesse de propagation est  $u(x) = \sqrt{gh_0(x)}$ , et la longueur d'onde est ainsi  $\lambda(x) = \sqrt{gh_0(x)}T$ , avec  $T$  la période. Ainsi,  $\lambda$  est proportionnelle à  $\sqrt{h_0(x)}$ . La vague a initialement une longueur d'onde  $\lambda_L = x_2 - x_1 = 200\text{km}$ , à une profondeur  $h_L = 7000\text{m}$ . La longueur d'onde sur le récif sera donc  $\lambda_C = \lambda_L \sqrt{h_C/h_L} = \sqrt{2} \cdot 10^4\text{m}$ . Ceci correspond à environ 1/70 de la taille du domaine. Le strict minimum (Nyquist, i.e. 2 points de maillage par longueur d'onde) serait d'au moins 140 points de maillage. Il faut en

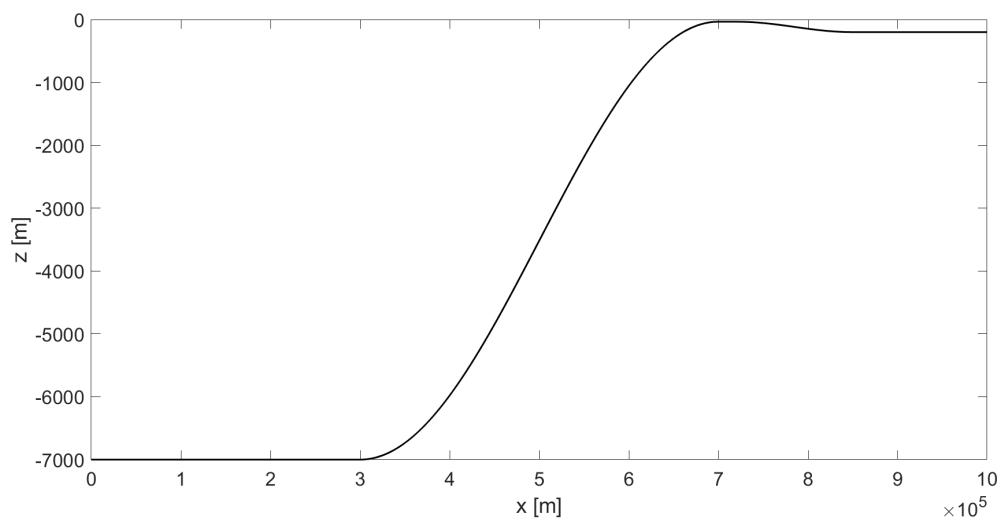


FIGURE 5 – Profil de l'altitude du fond de l'océan

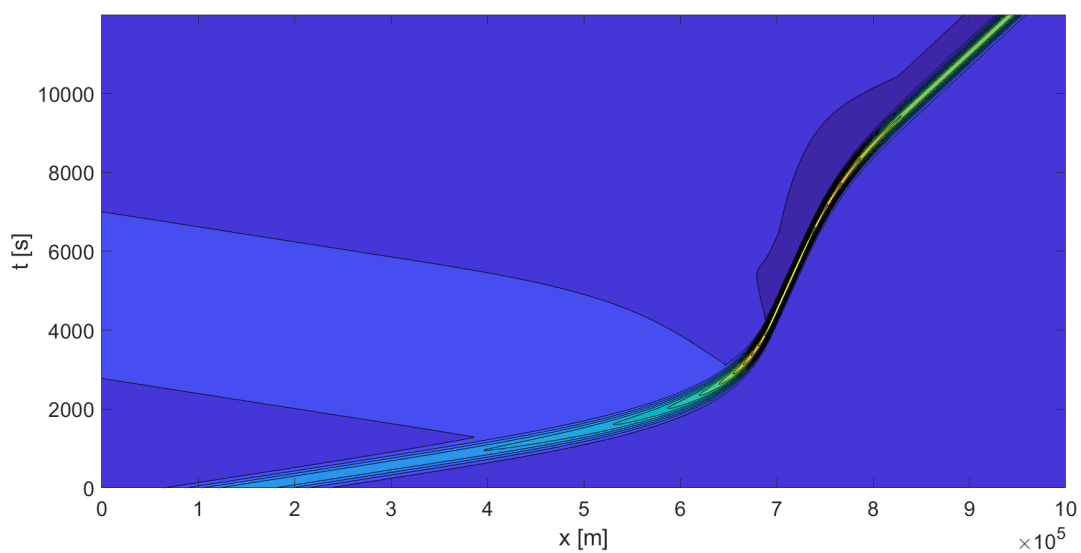


FIGURE 6 – Contours dans l'espace-temps de la hauteur de la vague.

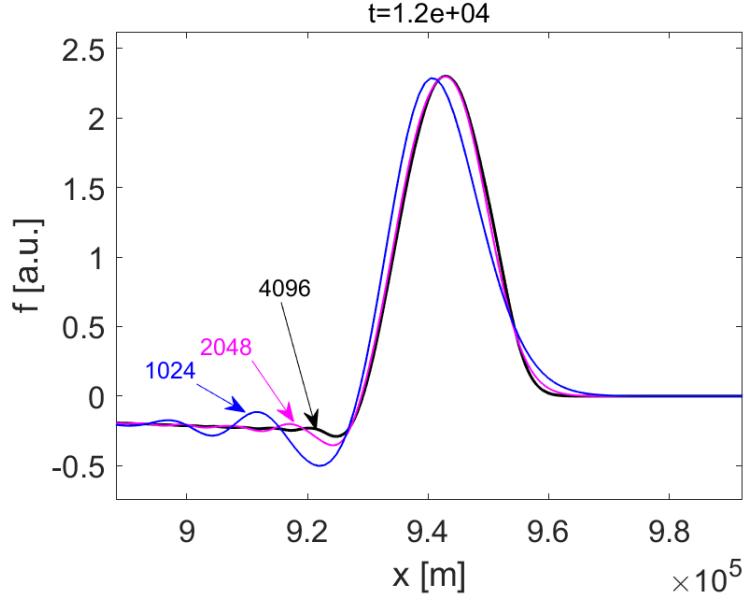


FIGURE 7 – Solution au temps  $t_{\text{fin}} = 12000\text{s}$ , pour des résolutions spatiales  $n_x = 1024, 2048, 4096$ . Les valeurs de  $\Delta t$  sont telles que  $\beta_{\text{CFL},\text{max}} = 1$ .

fait de l'ordre de 10 fois plus. Nous allons donc faire des simulations avec  $n_x = 1024, 2048, 4096$ . On prend à chaque fois  $\Delta t$  correspondant à la condition  $\beta_{\text{CFL},\text{max}} = \sqrt{gh_L}\Delta t/\Delta x = 1$ . C'est en effet au dessus de l'océan profond que la vitesse de propagation  $u$  est maximale, et donc que  $\beta_{\text{CFL}}$  est maximal.

La Fig.6 montre les contours de la hauteur de la vague dans l'espace-temps. On constate un ralentissement de la propagation et une augmentation de l'amplitude lorsque la vague arrive sur le récif. Le phénomène inverse se produit lorsque la vague ressort.

On constate aussi qu'il y a une réflexion partielle de la vague : ceci n'est pas prédit par la théorie WKB.

On montre la solution au temps  $t_{\text{fin}} = 12000\text{s}$ , pour les 3 résolutions spatiales considérées, à la Fig.7. On observe une vaguelette dans le sillage de l'onde principale. Cette ondelette est probablement due à un effet de la discrétisation : on constate en effet que son amplitude décroît en prenant des maillages plus fins. On observe aussi, empiriquement, que les solutions pour  $n_x = 2048$  et pour  $n_x = 4096$  sont très proches l'une de l'autre : le schéma a l'air de converger numériquement (observation qualitative).

#### (b) Hauteur de la vague [4pts]

La hauteur de la vague mesurée en fonction de la position est représentée à la Fig.8, pour les trois résolutions  $n_x = 1024, 2048, 4096$  (toujours avec  $\beta_{\text{CFL}} = 1$ ). Un zoom sur la partie au voisinage de la barrière de corail montre que la solution semble, qualitativement au moins, proche de la valeur convergée pour  $n_x = 4096$ . Cependant, la valeur de la hauteur de la vague sur le récif,  $\max(f) \approx 3.58\text{m}$ , est plus basse que celle prédite par WKB,  $\max(f) = (h_L/h_C)^{1/4} = 3.7606\text{m}$ .

Une explication possible tient au fait que la méthode WKB est une approximation, basée sur le fait que la longueur d'onde locale varie peu à l'échelle de la longueur d'onde. Or, la longueur d'onde initiale est  $\lambda_L = x_2 - x_1 = 2 \cdot 10^5\text{m}$ . La profondeur de l'océan varie de 7000m à 35m sur une distance de  $x_b - x_a = 4 \cdot 10^5\text{m}$ . Sur cette distance, qui ne vaut que 2 fois la longueur d'onde initiale, la longueur d'onde locale varie de  $2 \cdot 10^5$  à  $\lambda_C = \lambda_L \sqrt{h_C/h_L} \approx 1.4 \cdot 10^4\text{m}$ , soit un facteur 14, ce qui n'est pas négligeable. Ceci nous indique que l'approximation WKB n'est

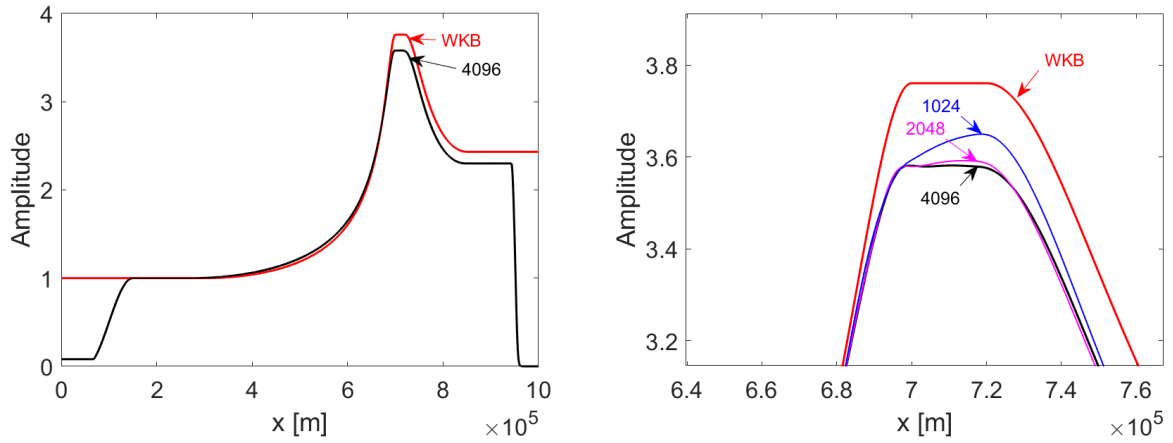


FIGURE 8 – Hauteur de la vague (ligne noire) calculée avec  $n_x = 4096$ ,  $\beta_{CFL,max} = 1$  et comparaison avec la solution WKB (ligne rouge) . A droite, zoom sur la région du récif avec 3 valeurs de  $n_x = 1024, 2048, 4096$  (toujours avec  $\beta_{CFL} = 1$ ).

que marginalement satisfaite.

L'effet de cette variation rapide est de créer une réflexion partielle de la vague, comme nous l'avons noté sur la Fig.6. On observe en effet que l'amplitude en  $x = 0$  n'est pas nulle, elle vaut environ 1.08m : c'est l'amplitude de la vague réfléchie. Etant partiellement réfléchie, la partie transmise de la vague est d'amplitude diminuée, et c'est ce que la simulation numérique indique.

(c) **Vitesse de propagation de la vague [4pts]**

Pour calculer la vitesse de propagation, on prend la méthode indiquée. Pour  $n_x = 4096$ , on montre le résultat à la Fig.9. Un zoom au voisinage du récif montre le résultat obtenu avec  $k = 1$  et  $k = 20$ . Prendre une valeur plus élevée de  $k$  conduit ainsi à réduire les oscillations du résultat. La comparaison avec la solution WKB, en traitillés, montre un assez bon accord, mais il y a des déviations, probablement dues aux phénomènes de réflexions partielles notés précédemment.

(d) **Fonds océaniques de plus en plus raides [4pts].**

On fait cette étude en rapprochant le point  $x_a$  du point  $x_b$  et en comparant la solution numérique avec la solution WKB.

On montre à la Fig.10 deux exemples,  $x_a = 650\text{km}$  et  $x_a = 695\text{km}$ . Avec le rapprochement entre les points  $x_a$  et  $x_b$ , on augmente l'amplitude de l'onde réfléchie et on diminue l'amplitude de l'onde transmise.

On illustre ceci de façon plus quantitative à la Fig. 11. Plus le fond de l'océan est raide, plus l'onde réfléchie est importante, et moins la vague arrive à passer par dessus le récif. On s'écarte donc de plus en plus de la solution WKB, ce qui n'est pas étonnant puisque l'approximation sur laquelle cette méthode est basée est de moins en moins valide.

Pour quantifier comment on tend vers la solution WKB, la Fig.12 montre l'amplitude sur le récif en fonction de l'inverse de la distance entre  $x_a$  et  $x_b$ . On observe bien que la limite WKB est atteinte en extrapolant les résultats pour une distance entre  $x_a$  et  $x_b$  qui tend vers l'infini, limite pour laquelle les hypothèses de WKB sont vérifiées.

N.B. : Toutes les simulations de cette section ont été réalisées avec  $n_x = 4096$ . Attention, lorsque l'on rapproche trop  $x_a$  de  $x_b$ , la pente de l'océan tend vers l'infini, et on a un problème : l'équation devient singulière. Pour  $x_b - x_a$  inférieur à 3km, le code explose.

(e) **Vague donnée par l'Eq.(10) [4pts]**

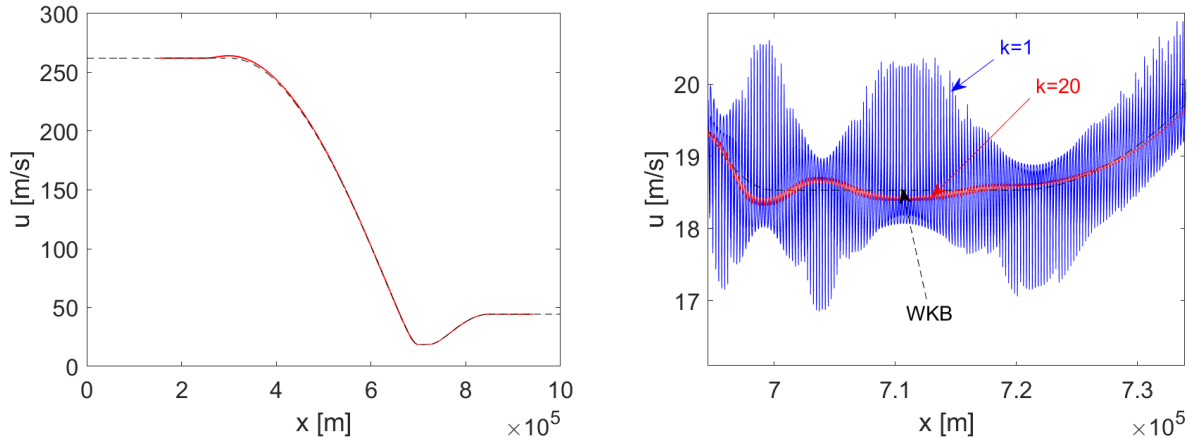


FIGURE 9 – Vitesse de propagation de la crête de la vague (ligne continue rouge) et comparaison avec la solution WKB (traitillé noir).  $n_x = 4096$ ,  $\beta_{\text{CFL,max}} = 1$ . A droite, zoom sur la région du récif avec deux valeurs de  $k$  pour les différences finies.

Supposer maintenant que l'équation de la vague est donnée par l'Eq.(10). Recalculer la vague obtenue, illustrer le résultat. Analyser la hauteur de la vague et la vitesse de propagation. Comparer avec la solution WKB.

Pour effectuer les simulations, il suffit de supprimer le dernier terme dans l'Eq.(28). Les résultats sont montrés à la Fig.13. L'amplitude, contrairement au cas physique, décroît lorsque la vague passe sur le récif, conformément à la solution WKB. Elle est un peu plus petite que la prédiction WKB. On constate aussi une réflexion partielle de la vague, avec une amplitude réfléchie, en  $x = 0$ , d'environ 0.03m. La vitesse de propagation, elle, n'est pas affectée par ce changement.

## 5.5 Conclusions

Nous avons examiné en détail les propriétés numériques de convergence et de stabilité du schéma de différences finies explicite à 3 niveaux. Les vérifications ont porté sur le comportement de réflexions aux bords du domaine, lorsque les conditions aux bords sont fixes ou libres, ainsi que sur la comparaison avec un des modes propres d système.

Nous avons ensuite appliqué ce schéma à l'étude d'une vague se propageant dans un océan de profondeur non uniforme. On a constaté le ralentissement de la vitesse de propagation et l'augmentation de l'amplitude de la vague lorsqu'elle est sur des hauts-fonds. La vérification a été de nature qualitative, puisqu'elle s'est faite en comparant avec la solution analytique WKB, qui n'est pas exacte. Nous avons mis en évidence les limites de cette approche WKB lorsque la profondeur de l'océan varie fortement sur de courtes distances (en d'autres termes lorsque le fond marin est pentu).

On constate une augmentation de la réflexion partielle lorsque le fond de l'océan est de plus en plus raide : cela pourrait-il protéger les côtes des effets dévastateurs des tsunamis ?

En plus des points énoncés ci-dessus, on attribue **[5pts]** pour la participation en classe et la qualité générale du rapport.

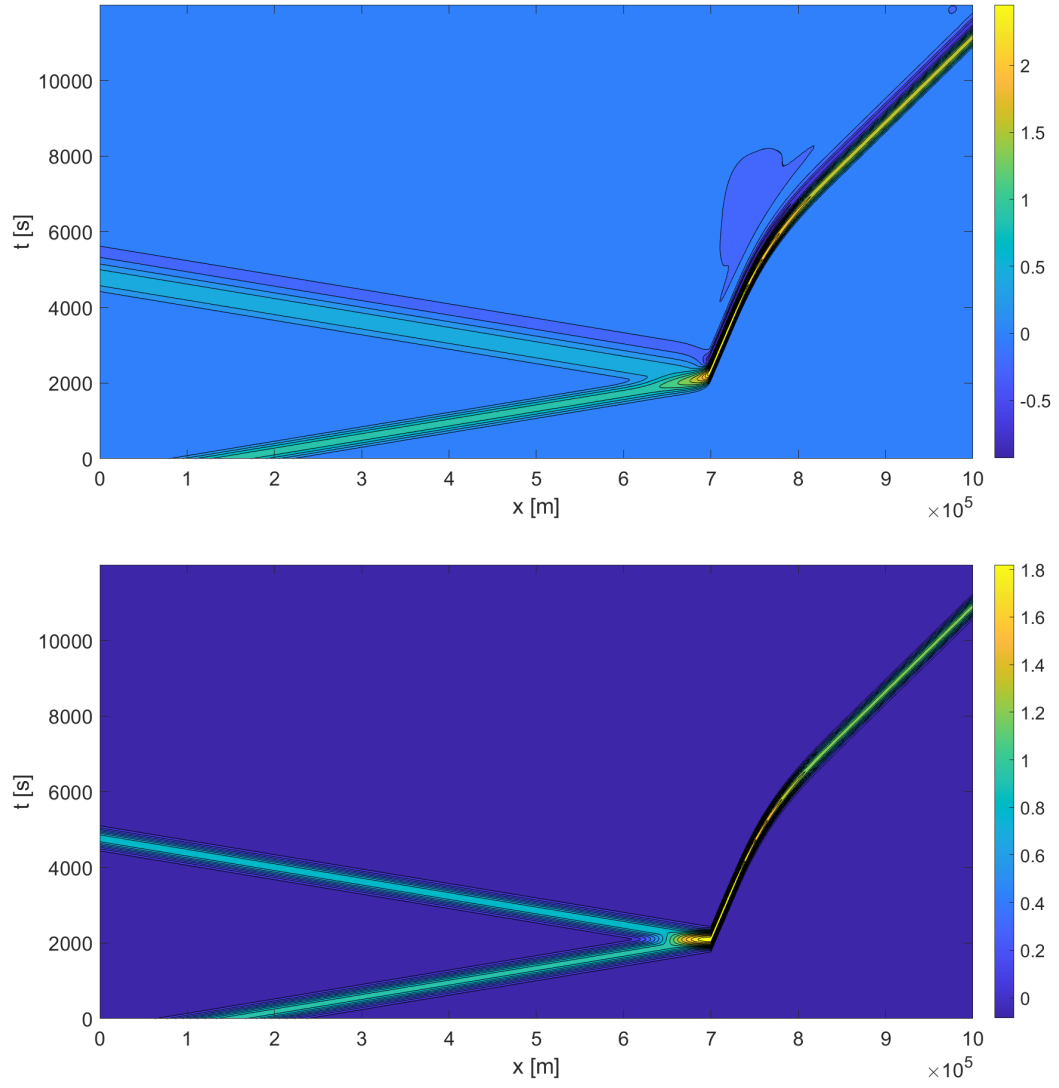


FIGURE 10 – Contours de la hauteur de la vague pour  $x_a = 650$  km (en haut) et  $x_a = 695$  km (en bas). Plus le fond de l’océan est raide, plus il la vague est réfléchiée.  $n_x = 4096$ ,  $\beta_{\text{CFL,max}} = 1$ .

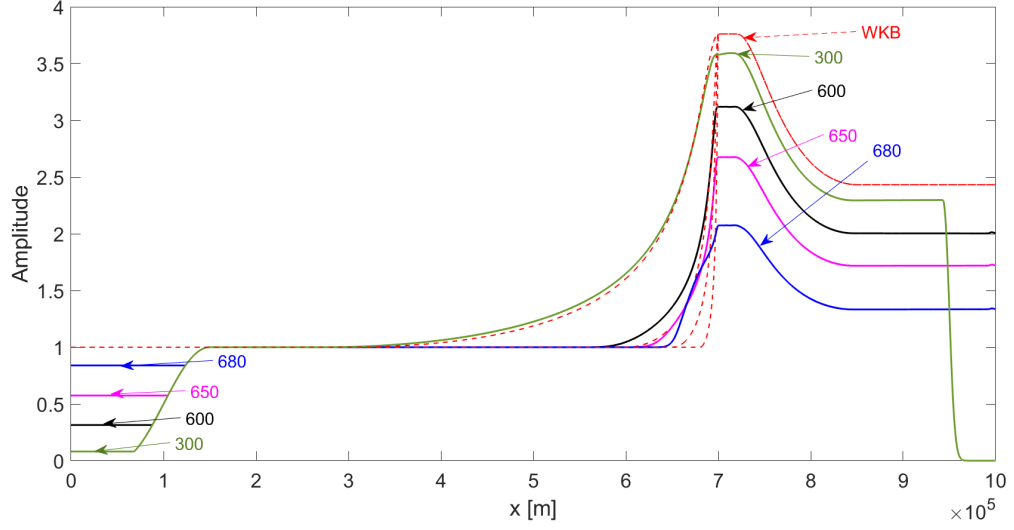


FIGURE 11 – Hauteur de la vague pour différentes valeurs de  $x_a$  et comparaison avec la solution WKB.  $n_x = 4096$ ,  $\beta_{\text{CFL,max}} = 1$ .

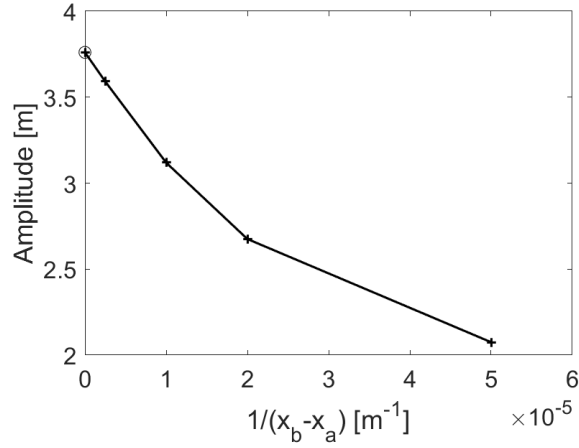


FIGURE 12 – Hauteur de la vague sur le récif en fonction de  $1/(x_b - x_a)$ . La solution WKB est indiquée par le cercle.  $n_x = 4096$ ,  $\beta_{\text{CFL,max}} = 1$ .

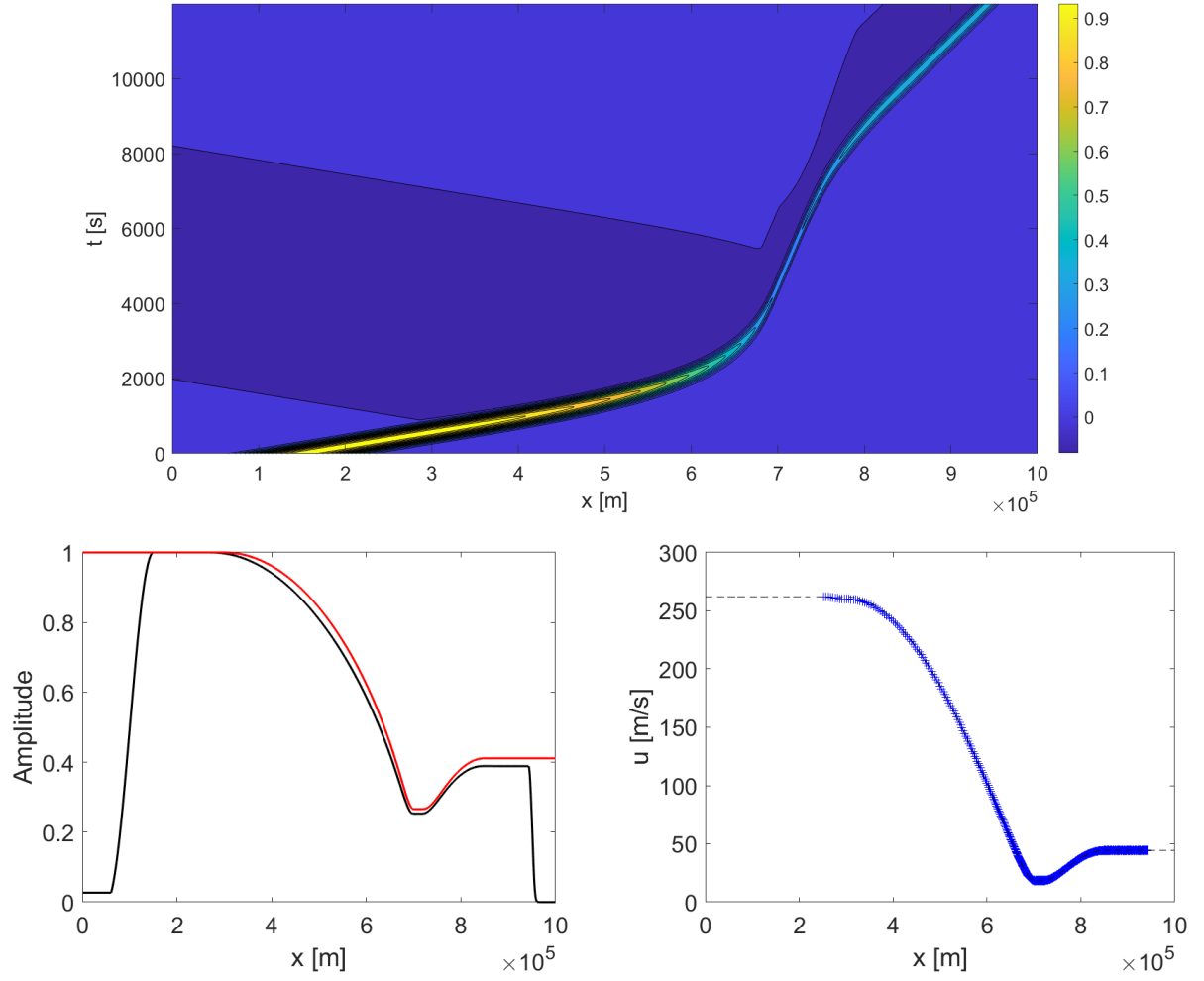


FIGURE 13 – Cas de l'Eq.(10). Contours de la hauteur de la vague (en haut). Hauteur de la vague en fonction de  $x$  (en bas à gauche), vitesse de propagation de la vague (en bas à droite) et comparaison avec la solution WKB.  $n_x = 4096$ ,  $\beta_{\text{CFL,max}} = 1$ .