

Relatório 5: Dispersão do Prisma

F429 - G.5 2º semestre 2016

Prof. Lázaro Padilha

Giovani Nascimento Pereira - 168609

Seong Eun Kim - 177143

Renan Adriani Sterle - 176536

Carlos Augusto Figueiredo Freire de Carvalho - 165684

*Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação,
Campinas, SP*

5 de dezembro de 2017

Resumo

Nesse experimento, estudamos a aplicação da decomposição da luz através de um prisma de vidro e analisamos seu papel como elemento dispersor de um espectrômetro. Para isso, inicialmente obtivemos o ângulo de abertura do prisma $\alpha = (60.04 \pm 0.01)^\circ$. Em seguida, incidimos raios de luz de diferentes tipos de lâmpadas na face do prisma sobre um goniômetro calibrado, de forma que pudemos obter os valores dos desvios mínimos correspondentes. Desse modo, determinamos o índice de refração do prisma para cada comprimento de onda de luz e a fórmula de Cauchy, dada por $n(\lambda) = (1.5954 \pm 0.0004) + \frac{(0.00946 \pm 0.00009)}{\lambda^2}$, que caracteriza o material do prisma.

Sumário

1	Introdução	3
2	Objetivos	3
3	Metodologia	3
4	Resultados	5
5	Análise de Dados	6
6	Discussão e conclusão	9
7	Instrumentos utilizados	10
8	Propagação de erros	10

1 Introdução

O experimento 5 - Dispersão do prisma - foi feito com o intuito de estudar e compreender a dispersão de luz em um prisma. Para isso, calculamos a abertura do prisma α e medimos o desvio mínimo δ_{min} para diferentes comprimentos de onda λ incidentes. Caracterizamos, também, a reta $n(\lambda^{-2})$ do sistema, de forma que pudemos obter a fórmula de Cauchy que caracteriza o material que compõe o prisma utilizado. Além disso, pudemos, por final, plotar o gráfico $\lambda \times \delta_{min}$ do aparato, que permite determinar um λ desconhecido a partir de seu δ_{min} .

2 Objetivos

O Experimento *Dispersão do Prisma* teve como objetivos estudar a decomposição da luz através de um prisma de vidro, observando linhas de emissão para materiais distintos e estudar a medida de dispersão do material do prisma a partir da fórmula de Cauchy.

3 Metodologia

Para o desenvolvimento do experimento *Dispersão do Prisma*, primeiro foi montado o goniômetro, posicionando o prisma em cima da platina fixado corretamente. Depois ligando uma lâmpada na fenda de entrada do equipamento, o goniômetro foi alinhado de forma a manter o "zero" da escala bem próximo do "zero" do Vernier.

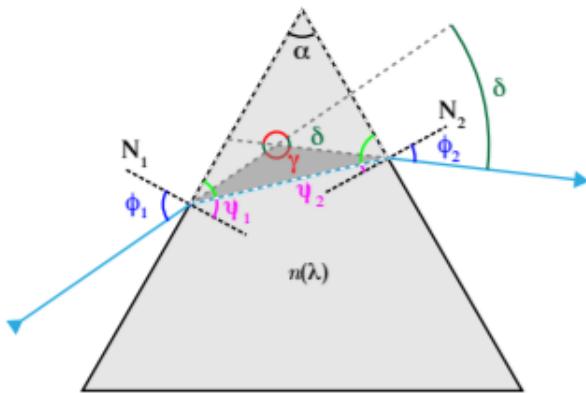


Figura 1: Esquema de um prisma de base triangular, semelhante ao utilizado no experimento, com marcações dos ângulos de entrada e de desvio para luz incidente no prisma.

Uma vez alinhado, passamos para determinação da abertura α do prisma utilizado através dos raios refletidos pela face do prisma. O prisma foi rotacionado de forma que o seu ápice apontasse para a fenda de entrada de luz, e os raios refletidos que se relacionam pela relação:

$$\alpha = \theta/2 \quad (1)$$

Onde α é a abertura do prisma e θ é o ângulo formado pelos raios refletidos pelas faces do prisma.

Depois, com a abertura do prisma calculada, passamos a medir o desvio sofrido por diferentes frequências de luz. O prisma foi posicionado de forma que a luz fosse refratada por uma de suas faces

e depois na face adjacente. Dessa forma, a luneta de observação poderia ser posicionada de forma a medir o ângulo de desvio sofrido pela luz.

O desvio medido, para cada comprimento de onda (λ) foi o desvio mínimo δ_{min} . Para isso, foi necessário observar através da luneta enquanto movia-se com a mão a platina do prisma até encontrar a posição de menor desvio da luz.

Como a luz utilizada não era monocromática, e sim gerada por um espectro de emissão de um material, ao passar pelo prisma ela sofre decomposição do seu espectro luminoso. O processo de encontrar o desvio mínimo foi repetido para cada frequência luminosa que era observável, pois o desvio tem uma dependência com o comprimento de onda ($\delta(\lambda)$).

Para a região de luz do espectro visível, a fórmula de Cauchy com dois termos eq. (2) descreve bem esse comportamento no caso de vidros transparentes.

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} \quad (2)$$

Se observarmos a fig. 1, podemos extrair as relações que compõe os ângulos destacados na figura. Nas faces de refração, podemos encontrar a relação entre os ângulos de incidência e refração [2] como sendo a eq. (3).

$$n(\lambda) \sin(\psi_1) = \sin(\phi_1) \quad (3a)$$

$$n(\lambda) \sin(\psi_2) = \sin(\phi_2) \quad (3b)$$

Geometricamente, também é possível obter que:

$$\psi_1 + \psi_2 = \alpha \quad (4a)$$

$$\delta + \alpha = \phi_1 + \phi_2 \quad (4b)$$

Com δ sendo o ângulo de desvio total do feixe incidente.

A partir das eq. (3) e eq. (4) é possível obter uma expressão para o ângulo de desvio δ :

$$\delta(n, \alpha, \phi_1) = \phi_1 - \alpha + \arcsin \left[n(\lambda) \sin \left(\alpha - \arcsin \left(\frac{1}{n(\lambda)} \sin(\phi_1) \right) \right) \right] \quad (5)$$

Caso resolvêssemos a eq. (5) para $n(\lambda)$ encontrariamos uma expressão para n em função dos parâmetros medidos experimentalmente de (δ, ϕ_1, α) . Todavia, isso levaria a uma equação transcendental, mas é possível encontrar uma solução para o caso do desvio mínimo, ou seja, quando $d\delta/d\phi_1 = 0$, o que nos leva a [1]:

$$n(\lambda) = \frac{\sin(\frac{\alpha+\delta_{min}}{2})}{\sin(\alpha/2)} \quad (6)$$

O prisma associado ao goniômetro, também pode ser utilizado como um espetrômetro, ou seja, pode ser utilizado para se determinar o comprimento de onda de uma linha espectral observada. Para tanto, é possível obter uma expressão a partir da eq. (6) e relacionando com a fórmula de Cauchy para remover a dependência do $n(\lambda)$, eq. (2), para encontrar o comprimento de onda λ .

$$\lambda = \sqrt{\frac{B}{\frac{\sin(\frac{\alpha+\delta_{min}}{2})}{\sin(\alpha/2)} - A}} \quad (7)$$

Para isso, os coeficientes A e B devem ter sido calculados anteriormente.

4 Resultados

Ângulos medidos dos raios de luz refletidos com o prisma posicionado com seu ápice apontando para a fenda de entrada de luz:

- $(70.07 \pm 0.02)^\circ$
- $(-50.00 \pm 0.02)^\circ$

medidos em relação ao "Zero" do Vernier.

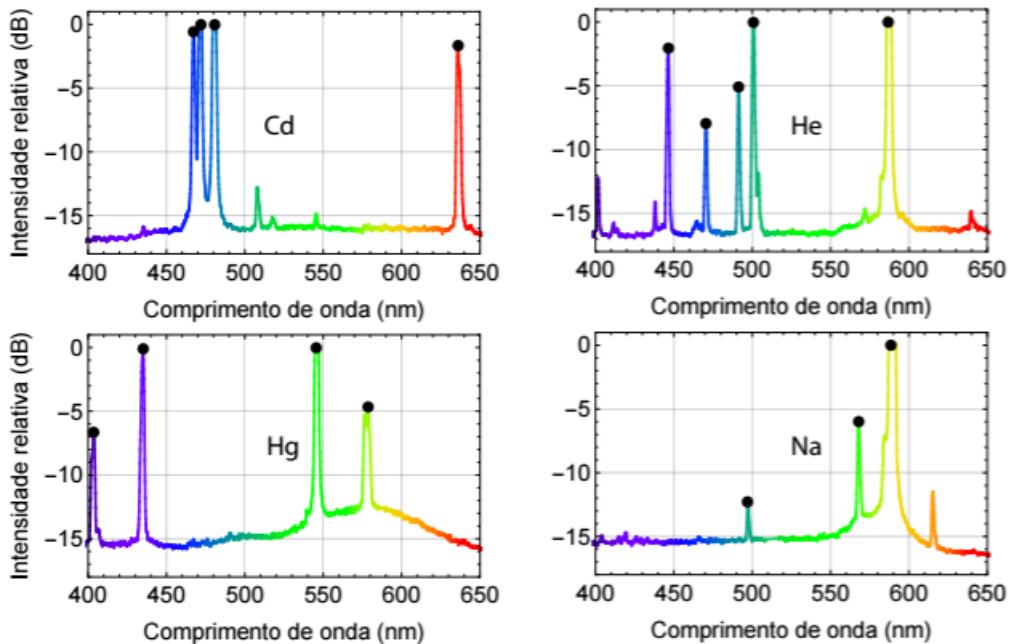


Figura 2: Espectro medido das lâmpadas. Cada gráfico refere-se aos padrões gerados pelas lâmpadas de cada material utilizado.

Obtivemos o valor de δ para cada um dos pontos destacados na figura. Os dados obtidos estão na tabela a seguir:

Tabela 1: Ângulos medidos de desvio no goniômetro (rad) para cada comprimento de onda associado (nm) com seus respectivos erros

Lâmpada	Cor	$\delta[\text{rad}]$	$\Delta\delta[\text{rad}]$	$\lambda[\text{nm}]$	$\Delta\lambda[\text{nm}]$
Hélio (He)	Amarelo	0.8465	0.0003	586.72	0.01
Hélio (He)	Azul	0.8814	0.0003	446.57	0.01
Hélio (He)	Azul	0.8709	0.0003	470.48	0.01
Hélio (He)	Verde	0.8657	0.0003	491.31	0.01
Hélio (He)	Verde	0.8622	0.0003	500.77	0.01
Mercúrio (Hg)	Roxo	0.9006	0.0003	403.48	0.01
Mercúrio (Hg)	Azul	0.8849	0.0003	435.11	0.01
Mercúrio (Hg)	Verde	0.8535	0.0003	545.48	0.01
Mercúrio (Hg)	2° Verde	0.8500	0.0003	577.50	0.01
Sódio (Na)	Amarelo Forte	0.8465	0.0003	497.10	0.01
Sódio (Na)	Verde	0.8482	0.0003	567.95	0.01
Sódio (Na)	Azul	0.8639	0.0003	589.55	0.01

Os valores de desvio foram medidos inicialmente em graus ($^{\circ}$), mas foram convertidos para radianos na tabela. Os itens marcados em vermelho foram desconsiderados na elaboração da fig. 3 pois estavam muito fora do esperado.

Legenda:

δ é o desvio mínimo

$\Delta\delta$ é o erro do desvio mínimo

λ é o comprimento de onda

$\Delta\lambda$ é o erro do comprimento de onda.

5 Análise de Dados

Ao rotacionar o prisma de forma que o seu ápice apontasse para a fenda de entrada de luz, os raios refletidos fizeram $(70.07 \pm 0.02)^{\circ}$ e $(-50.00 \pm 0.02)^{\circ}$ com o "zero" de Vernier. Assim, a partir da eq. (1), pôde-se calcular que a abertura do prisma utilizado foi de $\alpha = (60.04 \pm 0.01)^{\circ}$.

A partir dos desvios mínimos para cada comprimento de onda observado através dos equipamentos, que podem ser vistos na tabela 1, é possível calcular através da eq. (6) os índices de refração $n(\lambda)$ associados a cada comprimento de onda, sabendo-se o α .

Tabela 2: Tabela com os desvios e índices de refração calculados através dos dados da tabela 1

$\delta[rad]$	$\Delta\delta[rad]$	$\lambda[nm]$	$\Delta\lambda[nm]$	$\lambda^{-2}[\mu m^{-2}]$	$\Delta(\lambda^{-2})[\mu m^{-2}]$	$n(\lambda)$	Δn
0.8465	0.0003	586.72	0.01	2.9049	0.0001	1.6232	0.0003
0.8814	0.0003	446.57	0.01	5.0144	0.0002	1.6433	0.0003
0.8709	0.0003	470.48	0.01	4.5177	0.0002	1.6373	0.0003
0.8657	0.0003	491.31	0.01	4.1428	0.0002	1.6343	0.0003
0.8622	0.0003	500.77	0.01	3.9877	0.0002	1.6323	0.0003
0.9006	0.0003	403.48	0.01	6.1427	0.0003	1.6542	0.0003
0.8849	0.0003	435.11	0.01	5.2820	0.0002	1.6453	0.0003
0.8535	0.0003	545.48	0.01	3.3608	0.0001	1.6272	0.0003
0.8500	0.0003	577.5	0.01	2.9984	0.0001	1.6252	0.0003
0.8465	0.0003	497.1	0.01	4.0468	0.0002	1.6232	0.0003
0.8482	0.0003	567.95	0.01	3.1001	0.0001	1.6242	0.0003
0.8639	0.0003	589.55	0.01	2.8771	0.0001	1.6333	0.0003

Legenda:

δ o desvio mínimo

$\Delta\delta$ é o erro do desvio mínimo

λ é o comprimento de onda da luz incidente

$\Delta\lambda$ é o erro do comprimento de onda

n é o índice de refração

Δn é o erro do índice de refração.

Através da equação de Cauchy, eq. (2), podemos montar um gráfico que descreva o comportamento de n em função de λ de maneira linear. Da equação de Cauchy, fazendo $y = n(\lambda)$ e $x = 1/\lambda^2$ a figura obtida deve ser uma reta, e permite retirar os valores dos coeficiente A e B.

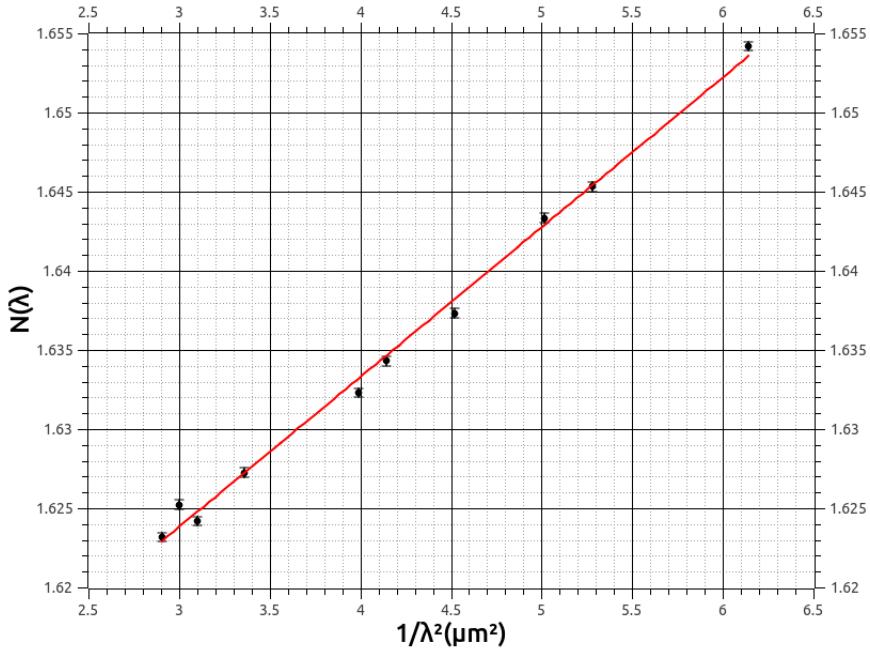


Figura 3: Gráfico do índice de refração n pelo inverso do quadrado do comprimento de onda ($1/\lambda^2 \mu\text{m}^{-2}$) gerado através do ajuste linear dos dados da tabela tabela 2).

Ajuste Linear: $Y = A + Bx$

$$A = (1.5954 \pm 0.0004); B = (0.00946 \pm 0.00009)\mu\text{m}^2$$

$$\frac{\text{Chi}^2}{\text{dof}} = 6.3154571654; R^2 = 0.995304222$$

Legenda:

N é o índice de refração

λ é o comprimento de onda

Tal gráfico (fig. 3) foi plotado e, a partir dele, foi possível escrever a equação de Cauchy para este sistema:

$$n(\lambda) = (1.5954 \pm 0.0004) + (0.00946 \pm 0.00009)/\lambda^2$$

A partir dos coeficientes supracitados e da abertura do prisma, também foi possível obter a eq. (7) do sistema:

$$\lambda = \sqrt{\frac{(0.00946 \pm 0.00009)}{\frac{\sin(\frac{(1.0472 \pm 0.0002) + \delta_{min}}{2})}{\sin(1.0472 \pm 0.0002/2)} - (1.5954 \pm 0.0004)}}$$

E através dessa equação podemos moldar a utilização do prisma na forma de um espectrômetro. A relação entre λ e δ_{min} também pode ser observada na (fig. 4), onde foram representados pontos obtidos experimentalmente. A reta plotada no gráfico é obtida a partir da equação acima, e seu bom encaixe nos dados explica a proximidade entre os dados experimentais e os previstos pela fórmula. Dessa forma, é possível estimar o comprimento de onda para um determinado desvio mínimo δ_{min} .

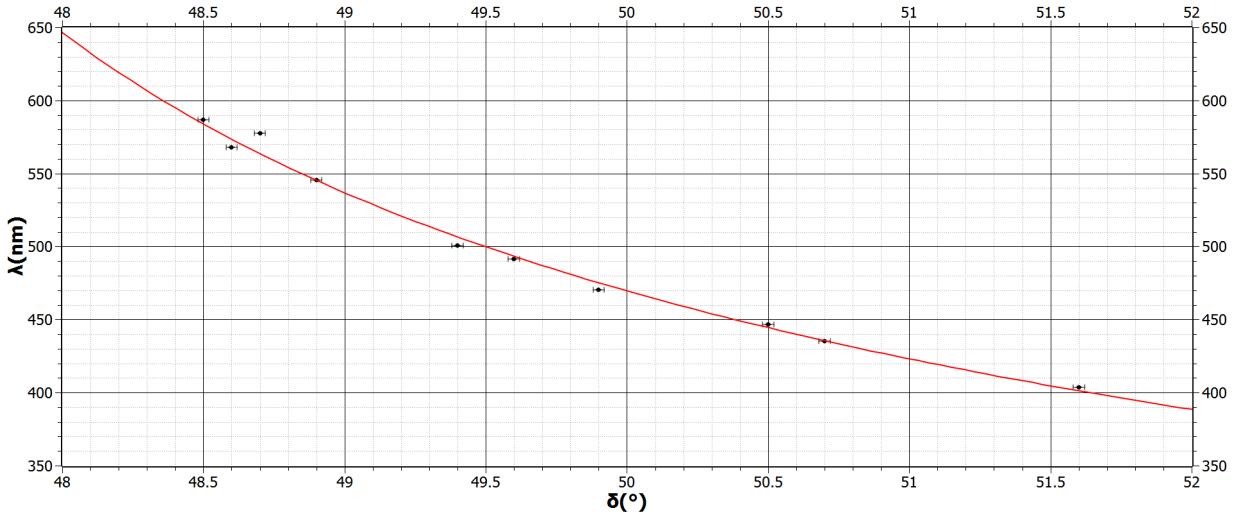


Figura 4: Gráfico do comprimento de onda λ [nm] em função do desvio mínimo δ_{min} [$^\circ$] observado

6 Discussão e conclusão

Durante a coleta de dados do experimento, foi possível observar a decomposição da luz incidente proveniente das fontes luminosas nos seus espectros, assim como descrito ou esperado na literatura [2]. As linhas espectrais observadas foram condizentes com as esperadas para cada material das lâmpadas, estiveram em acordo com a fig. 2, o que permitiu associar corretamente o comprimento de onda, com uma boa precisão aos desvios observados no goniômetro.

Na primeira parte do experimento, onde encontramos a equação de Cauchy para o sistema em questão, o comportamento gráfico de n por $1/\lambda^2$ foi dentro do esperado [1], tendo um comportamento linear, de forma que o desvio crescia com o aumento da frequência da luz incidente (ou com a diminuição do comprimento de onda).

O valor encontrado de A foi de $A = (1.5954 \pm 0.0004)$ e o valor de $B = (0.00946 \pm 0.00009)\mu m^2$. A referência que dispusemos estava descrita no guia do experimento [1], onde o valor dos coeficientes estava marcado como: $A = 1.6070 \pm 0.0003$ e $B = (0.00825 \pm 0.00007)\mu m^2$. Assim podemos notar que os valores estavam bem próximos.

Com uma curva bem calibrada de λ em função do desvio δ_{min} , é possível utilizar o sistema do prisma como um espectrômetro que tem uma boa aproximação para os espectros de luz visíveis. Isso em decorrência da equação de Cauchy, eq. (2), ter sido uma boa aproximação, desde que os coeficientes A e B tenham sido calculados corretamente.

O gráfico obtido na fig. 4 teve a curva modelada bem próxima dos pontos obtidos, dessa forma, espera-se que o comportamento esteja dentro do aceitável para que o prisma seja utilizado como um espectrômetro.

De maneira geral, o experimento da forma com que foi realizado estava muito suscetível a erros, principalmente pela falta de experiência dos operadores com os instrumentos que pode ter acarretado em erros adicionais, tanto na visualização quanto na montagem do experimento.

7 Instrumentos utilizados

- Goniômetro
- Lâmpada de sódio (Na)
- Lâmpada de Mercúrio (Hg)
- Lâmpada de Hélio (He)
- Lupa
- Prisma de base triangular

8 Propagação de erros

- Erro do índice de refração n:

$$\Delta n = \frac{1}{2} \sqrt{\Delta\alpha^2 \csc^4\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\delta_{min}}{2}\right) - \frac{\Delta\delta_{min}^2 (\cos(\alpha - \delta_{min}) + 1)}{\cos(\alpha) - 1}}$$

- Erro do ângulo medido ϕ :

$$\Delta\phi = 0.02^\circ$$

- Erro do desvio mínimo δ :

$$\Delta\delta = \frac{\Pi\Delta\phi}{180} = 0.003\text{rad}$$

- Erro dos comprimentos de onda λ :

$$\Delta\lambda = 0.01\text{nm}$$

- Erro de λ^{-2} :

$$\Delta(\lambda^{-2}) = \frac{2\Delta\lambda}{\lambda^3}$$

Referências

- [1] Gustavo Wiederhecker e colaboradores, *Roteiros de F429 - Corrente alternada e óptica*. Compilado em 29 de agosto de 2016.
- [2] Halliday, *Fundamentos da Física, Volume II*
- [3] <http://www.tablesgenerator.com>