Lab 2: Problema dee Rotas com Pesos Cumulativos

.

MC658 - Projeto e Análise de Algoritmos III 2S2019
Professor: Flávio Keidi Miyazawa

Giovani Nascimento Pereira
giovani.x.pereira@gmail.com
168609

I. Definição do problema

Considere um caminhão sai de uma cidade de origem s até uma cidade de destino t, transportando carga ao longo do caminho. Cada cidade possui um produto i que pode ser coletado para transporte, e o produto tem um peso w_i e lucro l_i de ser entregue. Quando um item é coletado, ele aumenta em w_i o peso do caminhão. Cada arco (i, j) tem um valor c_a que indica o custo de transporte de cada unidade de peso naquele arco.

Seja,

- P peso do caminhão
- C capacidade de carga adicional do caminhão
- Conjunto de cidades V
- Conjunto de estradas A onde $(i, j) \in A$ indica que existe estrada entre as cidades i e j
- Cidade de origem s
- Cidade de destino t
- w_i o peso do produto i
- l_i o lucro do produto i
- c_a custo de transporte de 1 unidade de peso no arco a

O problema consiste em encontrar qual a rota que trará o maior lucro ao final. Ou seja, maximizar a relação de lucro obtido com o transporte dos itens menos o gasto com o transporte.

Se tomarmos um arco a, onde o caminhão carrega itens $S_a \in V$, o custo de transporta em a será:

$$\text{Custo de transporte em } a = (P + \Sigma_{i \in S_a} w_i) * c_a \tag{1}$$

Ou seja, o peso total do caminhão (peso base P mais peso dos itens sendo transportados) multiplicado pelo custo c_a.

Então podemos resumir, que dado um caminho ρ de s a t:

$$valor(\rho) = \Sigma_{v \in V(\rho)} - \Sigma_{(u,v) \in A(\rho)} (P + w(\rho, u)) c_{(u,v)} \tag{2}$$

II. Formulação

Sejam $x_i \in \{0, 1\}$ variável indicadora que diz que o item da cidade i pertence à solução, e $y_{i,j} \in \{0, 1\}$ variável indicadora que diz que a aresta (i, j) pertence à solução.

Podemos definir a formulação do problema como otimizar a função:

$$\Sigma_{v \in V(\rho)} - \Sigma_{(u,v) \in A(\rho)} (P + w(\rho, u)) c_{(u,v)} \tag{3}$$

Sujeita a:

$$\Sigma_{i \in V} y_{i,a} \leq 1, \forall a \in V - \{s, t\} \tag{4}$$

$$\Sigma_{i \in V} y_{i,a} \leq 1, \forall a \in V - \{s, t\} \tag{5}$$

$$\Sigma_{i \in V} y_{s,i} = 1 \tag{6}$$

$$\Sigma_{i \in V} y_{i,s} = 0 \tag{7}$$

$$\Sigma_{i \in V} y_{t,i} = 0 \tag{8}$$

$$\Sigma_{i \in V} y_{i,t} = 1 \tag{9}$$

$$\Sigma_{i \in V} y_{i,a} = \Sigma_{i \in V} y_{a,1}, \forall a \in V - \{s, t\} \tag{10}$$

$$x_i = \Sigma_{i \in V} y_{a,i}, \forall a \in V - \{s, t\} \tag{11}$$

$$P + \Sigma_{i \in V} x_i w_i \leq C \tag{12}$$

Onde,

- As restrições 4 e 5 impedem a existência de ciclos no caminho ρ da solução, toda aresta tem no máximo um vértice de entrada e um de saída;
- 6 garante que do nó inicial s saia exatamente 1 aresta, e 7 que nenhuma aresta atinja s.
- 8 garante que do nó final t não saia nenhuma aresta, e 9 que exatamente 1 aresta incida em t.
- 10 garante que a mesma quantidade de arestas incidindo em um vértice esteja saindo dele, e vice-versa. Essa restrição, juntamente com 6 e 9 garantem a conectividade do grafo da solução de s a t, pois G se trata de um grafo direcionado.
- a restrição 11 garante que um item i pode estar na solução apenas se existe uma aresta que incide no vértice i e que também está na solução.
- e 12 impede que se aloque mais itens que a capacidade do caminhão permite.