Lab 2: Problema dee Rotas com Pesos Cumulativos

.

MC658 - Projeto e Análise de Algoritmos III 2S2019
Professor: Flávio Keidi Miyazawa

Giovani Nascimento Pereira
giovani.x.pereira@gmail.com
168609

I. Definição do problema

Considere um caminhão sai de uma cidade de origem s até uma cidade de destino t, transportando carga ao longo do caminho. Cada cidade possui um produto i que pode ser coletado para transporte, e o produto tem um peso w_i e lucro l_i de ser entregue. Quando um item é coletado, ele aumenta em w_i o peso do caminhão. Cada arco (i, j) tem um valor c_a que indica o custo de transporte de cada unidade de peso naquele arco.

Seja,

- P peso do caminhão
- C capacidade de carga adicional do caminhão
- Conjunto de cidades V
- Conjunto de estradas A onde $(i, j) \in A$ indica que existe estrada entre as cidades i e j
- Cidade de origem s
- Cidade de destino t
- w_i o peso do produto i
- l_i o lucro do produto i
- c_a custo de transporte de 1 unidade de peso no arco a

O problema consiste em encontrar qual a rota que trará o maior lucro ao final. Ou seja, maximizar a relação de lucro obtido com o transporte dos itens menos o gasto com o transporte.

II. Resolução

A maior dificuldade desse problema, é a questão de ordem envolvida para o custo:

Se fizermos um caminho em vértices $a \to b \to c$, onde cada vértice tem um item com valor e peso diferente, e cada aresta também tem um custo de transporte diferente, o valor adquirido ao passar por esse caminho seria o mesmo em qualquer permutação de a, b, c, mas não o custo de transporte.

Então precisamos de alguma forma indicar que ao chegar no vértice i exista, implicitamente, o peso do caminhão com seus itens ao chegar.

Vamos tomar uma variável $X_i \in Z$ que acumula o peso do caminhão até o vértice i (note que X não é binária), e uma variável $Y_{i,j} \in \{0, 1\}$ que indica que uma aresta (i, j) pertence à solução.

Podemos descrever X como sendo:

$$X_j \geq Y_{i,j}(w_j + X_i),\ \forall (i, j) \in A \tag{1}$$

Ou seja, X_j é maior ou igual à w_j (o peso do seu item) somado à X_i, que é o vértice que precede j na solução.

Pelas restrições do problema, sabemos que a solução consistem em um caminho acíclico, então apenas 1 aresta **pode** incidir no vértice j. Para um j fixo, $\Sigma_{i\in V} Y_{i,j} \leq 1$, e que com isso, o valor de X_j é o valor de $X_i + w_j$, se i precede j imediatamente no caminho da solução, e 0 caso contrário.

III. Formulação

Sejam $X_i \in Z$ variável que indica o peso total do caminhão ao chegar no vértice i, e $Y_{i,j} \in \{0, 1\}$ variável indicadora que diz que a aresta (i, j) pertence à solução.

Podemos definir a formulação do problema como otimizar a função:

$$\Sigma_{i\in V}(\Sigma_{j\in V} Y_{i,j})l_i - \Sigma_{(i,j)\in A}(P + X_i)(Y_{i,j})c_{i,j} \tag{2}$$

Onde $(\Sigma_{j\in V} Y_{i,j})l_i$ mostra que se uma aresta incide em i, então o lucro do item i pertence à solução, menos o custo de transporte em todas as arestas que também pertencem à solução.

Sujeita a:

$$\Sigma_{i\in V} Y_{i,a} \leq 1, \forall a \in V - \{s, t\} \tag{3}$$

$$\Sigma_{i\in V} Y_{a,i} \leq 1, \forall a \in V - \{s, t\} \tag{4}$$

$$\Sigma_{i\in V} Y_{i,a} = \Sigma_{i\in V} Y_{a,i}, \forall a \in V - \{s, t\} \tag{5}$$

$$\Sigma_{i\in V} Y_{s,i} = 1 \text{ e, } \Sigma_{i\in V} Y_{i,s} = 0 \tag{6}$$

$$\Sigma_{i\in V} Y_{t,i} = 0 \text{ e, } \Sigma_{i\in V} Y_{i,t} = 1 \tag{7}$$

$$P + \Sigma_{i\in V}(\Sigma_{j\in V} Y_{j,i})w_i \leq C \tag{8}$$

$$X_j \geq Y_{i,j}(w_j + X_i),\ \forall (i, j) \in A \tag{9}$$

$$X_s = P \tag{10}$$

Onde,

- As restrições 3 e 4 impedem a existência de ciclos no caminho ρ da solução, toda aresta tem no máximo um vértice de entrada e um de saída;
- A restrição 5 garante que se entra uma aresta em um vértice que não seja s ou t, também sai uma aresta desse vértice.
- 6 garante que do nó inicial s saia exatamente 1 aresta e que nenhuma aresta atinja s.
- 7 garante que do nó final t não saia nenhuma aresta e que exatamente 1 aresta incida em t.
- 8 impede que se aloque mais itens que a capacidade do caminhão permite.
- e a restrição 9 é a formulação que garante que nosso X trabalhe como um acumulador de pesos, e guarda o valor do peso do caminhão de s até o vértice j.
- e por fim 10 faz com que o peso do caminhão comece no primeiro vértice.

  Note que, como 6 e 7 garantem o começo e fim do caminho, junto com a restrição 5, elas garantem a conectividade do caminho de s a t.