Giovanna Santana Pennisi - CTII 350

Lista de Exercícios - Aula 8

Lista de Exercícios

1 - $A = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ é inversa de $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ y & 2 \end{bmatrix} \rightarrow x+y = ?$

$A = B^{-1}$

$A \cdot A^{-1} = I_n$

$B \cdot A = I_n$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ y & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} 3x - 5 = 1 & \text{(I)} \\ xy + 10 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

(I) $3x - 5 = 1$

$3x = 1 + 5$

$x = \frac{6}{3} \rightarrow x = 2$

(II) $xy + 10 = 0$

$2 \cdot y = -10$

$y = \frac{-10}{2} = y = -5$

$x + y$

$2 + (-5)$

-3

Alternativa C

2 - $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 3 \\ 1 & k & 3 \end{bmatrix} \rightarrow$ valores de k para que a matriz não admita inversa ($\det = 0$).

$$\det A = \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 3 \\ 1 & k & 3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 \\ k & 1 \\ 1 & k \end{matrix}$$

$1 + 3k + 0$

$3 + 0 + k^2$

$\rightarrow 3 + k^2 - (1 + 3k)$

$3 + k^2 - 1 - 3k$

$k^2 - 3k + 2$

$k^2 - 3k + 2 = 0$

$a = 1$, $b = -3$, $c = 2$

$\Delta = (-3)^2 - 4(1)(2)$

$\Delta = 9 - 8$

$\Delta = 1$

$k = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} \rightarrow k = \frac{3 \pm 1}{2}$

$k_I = \frac{3+1}{2} \rightarrow \frac{4}{2} \rightarrow k_I = 2$

$k_{II} = \frac{3-1}{2} \rightarrow \frac{2}{2} \rightarrow k_{II} = 1$

Valores de k = 1 e 2 → Alternativa C

3 - $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = A^{-1}$

* Regra das matrizes de ordem 2

$\det A = 12 - 10$

$\det A = 2$

$B = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \div 2$

Alternativa C → $B = \begin{bmatrix} 2 & -5/2 \\ -1 & 3/2 \end{bmatrix}$

4 - $\text{Det} \neq 0$ → matriz inversível

$20 + 2x + 3x \to 20 + 5x$

$\det = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 10 & 1 & x \end{vmatrix} \begin{matrix} x & 1 \\ 3 & 1 \\ 10 & 1 \end{matrix}$

$x^2 + 20 + 6 \to x^2 + 26$

$x^2 + 26 - (20 + 5x)$

$x^2 + 26 - 20 - 5x$

$x^2 + 6 - 5x$

$x^2 - 5x + 6 \neq 0$

$x^2 - 5x + 6 \neq 0$

$a = 1$ | $\Delta = (-5)^2 - 4(1)(6)$

$b = -5$ | $\Delta = 25 - 24$

$c = 6$ | $\Delta = 1$

→ $x \neq \dfrac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1}$

$x \neq \dfrac{5 \pm 1}{2}$

$x_1 \neq \dfrac{5+1}{2} \to \dfrac{6}{2} \to x_1 \neq 3$ | $x_{11} \neq \dfrac{5-1}{2} \to \dfrac{4}{2} \to x_{11} \neq 2$

Alternativa A → $\{x \neq 3$ e $x \neq 2\}$.

$$5 - A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow A + A^{-1} = ?$$

$$2+2+2=6$$

$$\det A = \left| \begin{array}{ccc|cc} -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right| \quad \det A = 7 - (6)$$

$$1+2+4 \rightarrow 7 \qquad \det A = 1$$

$$A = \begin{bmatrix} -1_{11} & -1_{12} & 2_{13} \\ 2_{21} & 1_{22} & -2_{23} \\ 1_{31} & 1_{32} & -1_{33} \end{bmatrix} \rightarrow A' = \begin{bmatrix} (-1-(-2)) & (-2-(-2)) & (2-1) \\ (1-2) & (1-2) & (-1-(-1)) \\ (2-2) & (2-4) & (-1-(-2)) \end{bmatrix}$$

$x+y \rightarrow$ ímpar (sinal muda)

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \bar{A} = (A')^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\bar{A}}{1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A + A^{-1} \rightarrow$ próxima página

$$A + A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Alternativa B}$$

6- $(X \cdot A)^t = B$

$((X \cdot A)^t)^t = B^t$

$X \cdot A = B^t$

$X \cdot A \cdot A^{-1} = B^t \cdot A^{-1}$

A matriz transposta de uma matriz transposta é a matriz normal

$X = B^t \cdot A^{-1}$ ← Alternativa B

7- $B = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 4x + 5y \\ 5x + 6y \end{bmatrix}$ → $A^{-1} = ?$

$AB = C$

$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x + 5y \\ 5x + 6y \end{bmatrix}$ → $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ → $\det A = 24 - 25$

$\det A = -1$

Regra de matriz de ordem 2 } $A^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \div -1$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ → Alternativa D

8- $A = \begin{pmatrix} 2 & k \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ → soma dos valores de $k = ?$

→ $\det A = \det A^{-1}$

$\det A = 2 - (-2k)$

$\det A = 2 + 2k$

$\det A \cdot \det A^{-1} = 1$

$(2+2k) \cdot (2+2k) = 1$

$4 + 4k + 4k + 4k^2 = 1$

$4k^2 + 8k + 4 - 1 = 0$

→ $4k^2 + 8k + 3 = 0$

$4k^2 + 8k + 3 = 0$

$a = 4$ | $\Delta = 8^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3$
$b = 8$ | $\Delta = 64 - 48$
$c = 3$ | $\Delta = 16$

$\rightarrow K = \frac{-(8) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 4}$

$K = \frac{-8 \pm 4}{8}$

$K_I = \frac{-8+4}{8} = \frac{-4 \div 4}{8 \div 4} = K_I = \frac{-1}{2}$ | $K_{II} = \frac{-8-4}{8} = \frac{-12 \div 4}{8 \div 4} = K_{II} = \frac{-3}{2}$

Soma dos valores de $K = \frac{-1}{2} + \frac{-3}{2} \rightarrow \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} \rightarrow -2$

Alternativa B

9- A e B $\rightarrow$ São matrizes de ordem 2 com determinantes não nulos ($\det(A) \neq 0$ e $\det(B) \neq 0$).

a) $(A+B) \cdot (A-B)$.
$\hookrightarrow A^2 - AB + BA - B^2$

$\rightarrow$ Importante: AB e BA, no geral, NÃO são a mesma coisa

b) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
$\hookrightarrow$ Para isso ser possível AB tem que ser igual a BA ($AB = BA$)

c) $\frac{\det A}{\det(-A)} \rightarrow \det(-A) = (-1)^2 \cdot \det A = \det A$

$\frac{\det A}{\det(-A)} = 1$

d) $B = A^{-1}$
$\hookrightarrow \det A \cdot \det B = 1$

$\det B = \frac{1}{\det A}$