

Foglio di esercizi 1

Metodi Matematici per l'IA

25-11-2024

Esercizio 1

Provare che $\forall z, w \in \mathbb{C}$:

- $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ e $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$,
- $z + w = \bar{z} + \bar{w}$, $zw = \overline{z\bar{w}}$,
- se $|z| = \operatorname{Re}(z)$ allora $z \in \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$,
- $\arg(z_1 z_2 z_3) = \arg z_1 + \arg z_2 + \arg z_3$, $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$,
- $\arg(z\bar{w}) = \arg z - \arg w$,
- Provare induttivamente che $\left| \sum_{j=1}^n z_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |z_j|$, $z_j \in \mathbb{C}$.

Esercizio 2

Si determini e rappresenti graficamente l'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ tali che:

- $1 < \left| \frac{z}{z-i} \right| < 2$,
- $|iz + 1| > |2\bar{z} + i|$,
- $z^2 + \bar{z}^2 = 2i|z|^2$,
- $|z + \bar{z}| \geq z\bar{z}$.

Esercizio 3

Si determinino le soluzioni $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ del sistema di equazioni:

$$\begin{cases} z^2 + iw + z = 0, \\ w - iz + 1 = 0. \end{cases}$$

Esercizio 4

Si consideri la funzione $f(z) = \frac{z-\bar{z}}{i(z+\bar{z})^2}$, provare che:

1. $f(z) \in \mathbb{R}$ per ogni $z \in \mathbb{C}$,
2. Determinare l'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ tali che $f(z) > 0$.

Esercizio 5

Dimostrare la formula di De Moivre:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Esercizio 6

Sia $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $T > 0$, $n \in \mathbb{N}$ e $\omega = \frac{2\pi}{T}$, trovare le soluzioni dell'ODE:

$$u'' + (n\omega)^2 u = 0.$$

Esercizio 7

Definiamo il prodotto scalare:

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_{-T/2}^{T/2} f(x)g(x)dx.$$

1. Cosa vuol dire che la famiglia $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ è ortonormale rispetto al prodotto scalare (1)?
2. Dimostrare che le famiglie:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{T}} e^{in\omega x} \right)_{n \in \mathbb{Z}}, \quad \left(\frac{1}{\sqrt{T}}, \frac{\sqrt{2}}{T} \cos(n\omega x), \frac{\sqrt{2}}{T} \sin(n\omega x) \right)_{n \geq 1}$$

sono ortonormali.

Esercizio 8

Si consideri la funzione $f(z) = \frac{|z|-1}{z^2-i}$, si rappresenti nel piano di Gauss:

1. $\text{Dom}(f)$,
2. $f^{-1}(\{0\})$.

Esercizio 9

Calcolare la serie di Fourier dell'estensione 2π -periodica della restrizione in $[-\pi, \pi]$ delle funzioni:

- $f(x) = |x|$,
- $g(x) = x^2$.