VEDIAMO ORA ALCUNE DENSITÀ NOTEVOLI

- <u>DENSITÀ UNIFORME</u>

DICIAMO CHE UNA V.A. X HA DENSITÀ UNIFORME NELL'INTERVALLO $[a,b]$ SE LA SUA DENSITÀ È

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \chi_{[a,b]}(x)$$

INDICHIAMO CON IL SIMBOLO $U([a,b])$ LA DENSITÀ UNIFORME.

PER OGNI INTERVALLO (t_1, t_2) ABBIAMO CHE

$$P\{t_1 < X < t_2\} = \int_{t_1}^{t_2} f(x)dx = \frac{|[a,b] \cap [t_1,t_2]|}{b-a}$$

QUINDI LA FUNZIONE DI RIPARTIZIONE È

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{SE } t \leq a \\ \frac{t-a}{b-a} & \text{SE } t \in (a,b) \\ 1 & \text{SE } t \geq b \end{cases}$$

INOLTRE

$$E[X] = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{b+a}{2}$$

$$\text{VAR } X = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

- DENSITÀ ESPONENZIALE

DICIAMO CHE UNA V.A. X HA DENSITÀ ESPONENZIALE DI PARAMETRO $\lambda > 0$ SE AMMETTE COME DENSITÀ LA FUNZIONE

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{PER } x \geq 0 \\ 0 & \text{PER } x < 0 \end{cases}$$

LA INDICHIAMO CON IL SIMBOLO $\mathcal{E}(\lambda)$. SI VEDE FACILMENTE CHE f È INTEGRABILE SU $\mathbb{R}$ E CHE $\int_{\mathbb{R}} f\,dx = 1$.

LA FUNZIONE DI RIPARTIZIONE VALE

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{PER } t \geq 0 \\ 0 & \text{PER } t < 0 \end{cases}$$

IN QUANTO $\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = -e^{-\lambda x}\Big|_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$

ABBIAMO INOLTRE INTEGRANDO PER PARTI

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} = -x e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}$$

$$E[X^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} = -x^2 e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2x e^{-\lambda x}\,dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

DA CUI

$$\text{VAR}\, X = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

<u>PROPOSIZIONE</u> LE V.A. DI TIPO ESPONENZIALE "NON HANNO MEMORIA", CIOÈ

$$P\{X > T+t \mid X > T\} = P\{X > t\} \qquad \forall T \in \mathbb{R} \ \forall t \geq 0$$

PROOF

ABBIAMO

$$P\{X > T+t \mid X > T\} = \frac{P\{X > T+t, X > T\}}{P\{X > T\}} = \frac{P\{X > T+t\}}{P\{X > T\}}$$

$$= \frac{e^{-\lambda(T+t)}}{e^{-\lambda T}} = e^{-\lambda t} = P\{X > t\} \qquad \blacksquare$$

NOTARE CHE È LA STESSA PROPRIETÀ DI CUI GODE LA V.A. GEOMETRICA.

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE SE UNA V.A. ASS. CONTINUA GODE DELLA PROPRIETÀ DI ASSENZA DI MEMORIA, ALLORA È DI TIPO ESPONENZIALE.

- <u>DENSITÀ GAMMA</u>

DEFINIAMO INNANZITUTTO LA FUNZIONE <u>GAMMA DI EULERO</u>

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx \qquad \alpha \in (0,+\infty)$$

VEDIAMO ALCUNE DELLE SUE PROPRIETÀ BASE.

- $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$

  BASTA INTEGRARE PER PARTI:

  $$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha} e^{-x}\, dx = -x^{\alpha} e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \alpha \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx = \alpha\Gamma(\alpha)$$

- $\Gamma(n) = (n-1)!$

  INFATTI $\Gamma(1)=1$ E $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ SICCHÉ LA TESI SEGUE PER INDUZIONE.

- $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \dfrac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$ SE $\alpha \notin \mathbb{Z}$ [FORMULA DI RIFLESSIONE]

OMETTIAMO LA DIMOSTRAZIONE. OSSERVIAMO CHE IN PARTICOLARE LA FORMULA FORNISCE $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, E QUINDI DAL PRIMO PUNTO

$$\Gamma\left(n+\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \prod_{k=0}^{n-1} \left(k+\tfrac{1}{2}\right)$$

[FORMULA PER Γ SUI SEMI-INTERI]

DICIAMO CHE UNA V.A. X HA DENSITÀ GAMMA DI PARAMETRI $\alpha>0$, $\lambda>0$ SE AMMETTE COME DENSITÀ LA FUNZIONE

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x} & \text{PER } x>0\\ 0 & \text{PER } x\leq 0\end{cases}$$

LA INDICHIAMO CON IL SIMBOLO $\Gamma(\alpha,\lambda)$. NOTARE CHE PER $\alpha=1$ RITROVIAMO LA DENSITÀ ESPONENZIALE. ABBIAMO, TRAMITE CAMBIO DI VARIABILE $y=\lambda x$,

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\int_{0}^{\infty}\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx=\int_{0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}y^{\alpha-1}e^{-y}dy=1$$

E QUINDI f È EFFETTIVAMENTE UNA DENSITÀ.

<u>LEMMA</u> PER OGNI $k\in\mathbb{N}$ $E[X^k]=\dfrac{(\alpha+k-1)(\alpha+k-2)\cdots\alpha}{\lambda^k}$

PROOF

$$E[X^k]=\int_{-\infty}^{\infty}x^kf(x)dx=\int_{0}^{\infty}\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha+k-1}e^{-\lambda x}dx$$

$$=\frac{(\alpha+k-1)(\alpha+k-2)\cdots\alpha}{\lambda^k}\int_{0}^{\infty}\frac{\lambda^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha+k)}x^{\alpha+k-1}e^{-\lambda x}dx$$

DOVE PER L'ULTIMA UGUAGLIANZA SI È USATO IL FATTO CHE

$$\Gamma(\alpha+k) = (\alpha+k-1)\Gamma(\alpha+k-1) = (\alpha+k-1)(\alpha+k-2)\cdots\alpha\,\Gamma(\alpha).$$

POICHÉ L'INTEGRALE DI DESTRA È UGUALE AD 1, ESSENDO L'INTEGRANDO $\Gamma(\alpha+k,\lambda)$, ABBIAMO FATTO. ∎

IN PARTICOLARE ABBIAMO

$$E[X] = \frac{\alpha}{\lambda}, \quad E[X^2] = \frac{(\alpha+1)\alpha}{\lambda^2}$$

$$\mathrm{Var}\,X = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

FACCIAMO UNA PARENTESI GENERALE.

<u>LEMMA</u> SIANO X_1 ED X_2 DUE V.A. ASS. CONTINUE CON DENSITÀ f_1 ED f_2 RISPETTIVAMENTE. SUPPONIAMO SIANO INDIPENDENTI. ALLORA X_1+X_2 È ASS. CONTINUA CON DENSITÀ

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} f_1(y)\,f_2(x-y)\,dy$$

PROOF OMESSA: SERVONO GLI INTEGRALI DOPPI...

<u>PROPOSIZIONE</u> SIANO $X_1,\dots,X_m$ m VARIABILI ALEATORIE INDIPENDENTI, OGNUNA CON DENSITÀ $\Gamma(\alpha_k,\lambda)$, $k=1,\dots,m$. ALLORA $X = \sum_{k=1}^{m} X_k$ È UNA V.A. DI TIPO GAMMA, CON DENSITÀ

$$\Gamma\left(\sum_{k=1}^{m}\alpha_k,\lambda\right)$$

PROOF Dimostriamo il caso $k=2$, quello generale segue per induzione. Per il lemma, quando $x>0$

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} f_1(y) f_2(x-y)\, dy = \frac{\lambda^{\alpha_1}\lambda^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} e^{-\lambda x} \int_0^x y^{\alpha_1-1}(x-y)^{\alpha_2-1}\, dy$$

CAMBIO VARIABILE $y = xt$

$$= \frac{\lambda^{\alpha_1}\lambda^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} e^{-\lambda x} \int_0^1 (xt)^{\alpha_1-1} x^{\alpha_2-1}(1-t)^{\alpha_2-1} x\, dt$$

$$= x^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-\lambda x} \underbrace{\frac{\lambda^{\alpha_1}\lambda^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_0^1 t^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}\, dt}_{=:c}$$

Questo prova che $f(x) = \begin{cases} c\, x^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-\lambda x} & \text{se } x>0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

Essendo f proporzionale a $\Gamma(\alpha_1+\alpha_2, \lambda)$, necessariamente devono coincidere (visto il vincolo $\int_{\mathbb{R}} f = 1$) ■

<u>Corollario</u> Se $X_1, \dots, X_n$ sono v.a. indipendenti con densità $\mathcal{E}(\lambda)$, allora $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$ ha densità $\Gamma(n, \lambda)$

<u>Nota</u> In generale se due v.a. di tipo Gamma non sono indipendenti, non si può concludere che la loro somma sia una v.a. di tipo Gamma.

- DENSITÀ GAUSSIANA O NORMALE

DICIAMO CHE UNA V.A. X HA DENSITÀ GAUSSIANA STANDARD SE LA SUA DENSITÀ È

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

LA INDICHIAMO CON IL SIMBOLO $\mathcal{N}(0,1)$. SI PUÒ IN EFFETTI DIMOSTRARE CHE f È INTEGRABILE SU $\mathbb{R}$ E CHE $\int_{\mathbb{R}} f \, dx = 1$.

LA FUNZIONE DI RIPARTIZIONE VALE

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-x^2/2} dx$$

ESSENDO UNA FUNZIONE PARI ABBIAMO

$$E[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x e^{-x^2/2} dx = 0$$

INOLTRE, INTEGRANDO PER PARTI

$$E[X^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-x^2/2} dx = \left. -\frac{x e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \right|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = 1$$

DA CUI

$$\mathrm{Var}\, X = E[X^2] - E[X]^2 = 1$$

DICIAMO INVECE CHE UNA V.A. Y HA DENSITÀ GAUSSIANA DI PARAMETRI $\mu \in \mathbb{R}$ E $\sigma > 0$ SE LA SUA DENSITÀ È

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

LA INDICHIAMO CON IL SIMBOLO $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

RICORDO CHE SE X È UNA V.A. ASSOLUTAMENTE CONTINUA CON DENSITÀ f, E $a, b \in \mathbb{R}$ CON $a \neq 0$, ALLORA $aX+b$ È UNA V.A. ASSOLUTAMENTE CONTINUA CON DENSITÀ

$$g(x) = f\left(\frac{x-b}{a}\right)\frac{1}{|a|}$$

QUINDI Y È UNA V.A. GAUSSIANA DI PARAMETRI μ, σ QUANDO PUÒ ESSERE SCRITTA NELLA FORMA

$$Y = \sigma X + \mu \qquad (*)$$

CON X AVENTE DENSITÀ GAUSSIANA STANDARD.

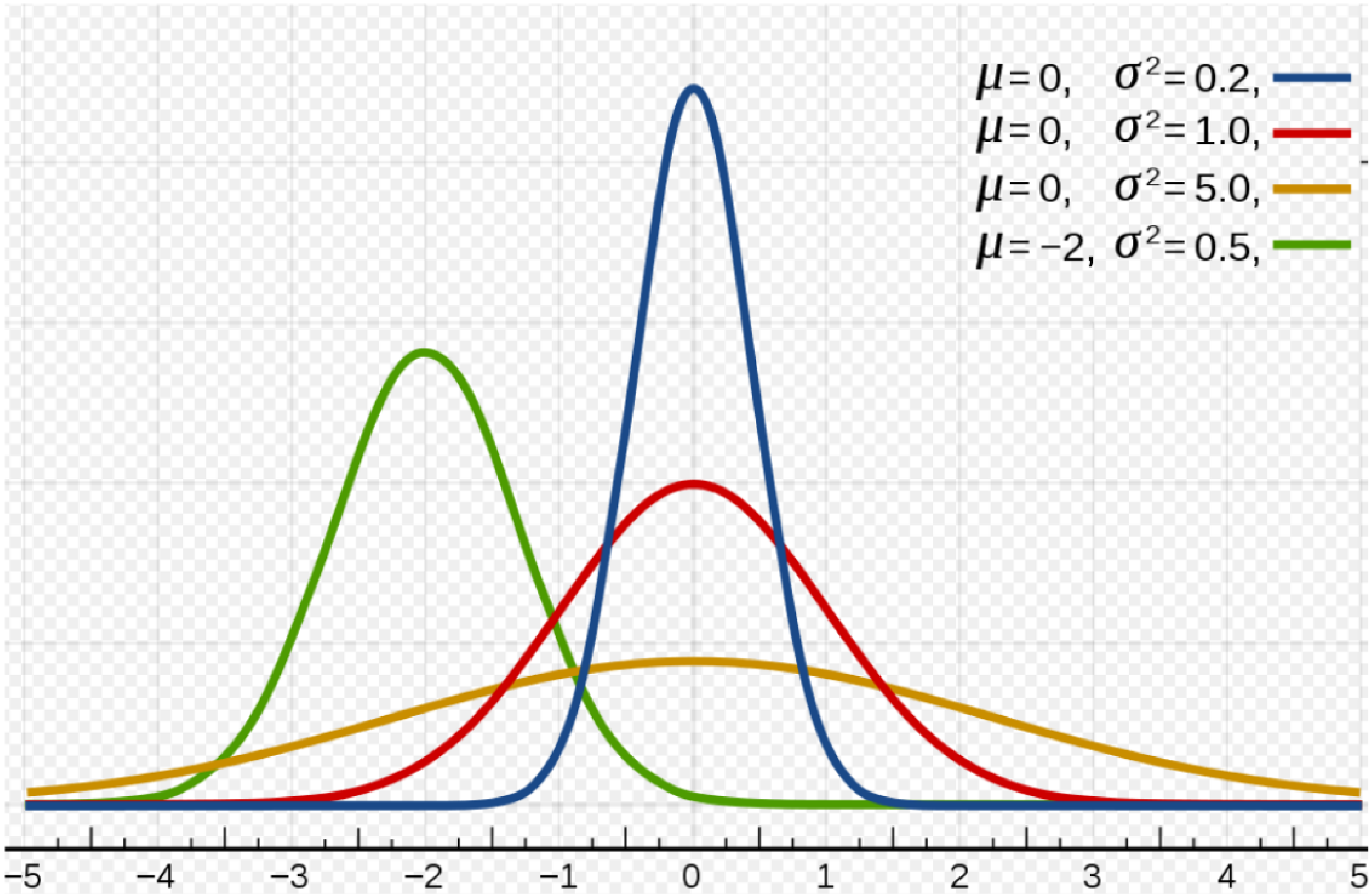
LA SUA FUNZIONE DI RIPARTIZIONE VALE

$$G(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = F\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$$

CON F FUNZIONE DI RIPARTIZIONE RELATIVA ALLA GAUS= SIANA STANDARD. DA $(*)$ ABBIAMO ANCHE

$$E[Y] = \sigma E[X] + \mu = \mu \qquad \mathrm{Var}\, Y = \sigma^2 \mathrm{Var}\, X = \sigma^2$$

QUINDI NEL SIMBOLO $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ SONO INDICATE LA MEDIA E LA VARIANZA DELLA V.A. IN ESAME.



ESEMPI DI DENSITÀ GAUSSIANA PER ALCUNI VALORI DI μ E σ. NOTARE CHE PIÙ $\sigma^2 = \text{Var}\, X$ È PICCOLO, PIÙ LA CURVA SI CONCENTRA INTORNO AL VALORE MEDIO μ.

Proposizione Siano $X_1, \dots, X_n$ n variabili aleatorie indipendenti, ognuna con densità gaussiana $N(\mu_k, \sigma_k^2)$ $k=1,\dots,n$. Allora $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$ è una v.a. gaussiana con densità

$$N\left(\sum_{k=1}^{n} \mu_k, \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2\right)$$

proof

Segue dal calcolo diretto della densità, che esiste per il lemma generale visto prima.

Comunque, se X è di tipo gaussiano, necessariamente i parametri della densità sono $\mu = \sum_{k=1}^{n} \mu_k$ e $\sigma = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2}$ in quanto

$$E[X] = \sum_{k=1}^{n} E[X_k] \quad \text{e} \quad \operatorname{Var} X = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Var} X_k$$

(per l'indipendenza) ∎

Nota In generale se due v.a. gaussiane non sono indipendenti, non si può concludere che la loro somma sia una v.a. gaussiana.

RIEPILOGO DELLE PRINCIPALI DENSITÀ

	SIMBOLO	DENSITÀ
DISCRETE	$B(n,q)$	BINOMIALE
	$Iper(n,a,b)$	IPERGEOMETRICA
	$Geo(q)$	GEOMETRICA
	$\mathcal{P}(\lambda)$	POISSON
CONTINUE	$U([a,b])$	UNIFORME
	$\mathcal{E}(\lambda)$	ESPONENZIALE
	$\Gamma(\alpha,\lambda)$	GAMMA
	$\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$	GAUSSIANA

QUANDO UNA V.A. X HA DENSITÀ UNA DI QUELLE SCRITTE SOPRA, DICIAMO "D", LO INDICHEREMO CON

$$X \sim D$$

VEDIAMO ORA UNA TECNICA PRATICA PER RICAVARE LA DENSITÀ DI UNA V.A. DEL TIPO $Y = \psi \circ X$, DOVE X È UNA V.A. ASSOLUTAMENTE CONTINUA E $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ È UNA TRASFORMAZIONE DATA.

ABBIAMO VISTO COME FARE SE ψ È REGOLARE E STRETTAMENTE MONOTONA, MA IN GENERALE?

PONENDO $A_t = \{x \in \mathbb{R} : \psi(x) \leq t\}$ ABBIAMO

$$G(t) := P\{Y \leq t\} = P\{X \in A_t\} = \int_{A_t} f(x)\,dx$$

AVENDO INDICATO CON f LA DENSITÀ DI X. <u>AMMESSO</u> CHE Y SIA ASSOLUTAMENTE CONTINUA, E DETTA g LA SUA DENSITÀ, DEVE RISULTARE

$$G(t) = \int_{-\infty}^{t} g(y)\,dy \quad (*)$$

SAPENDO A PRIORI CHE g È CONTINUA, AVREMMO PER IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO CHE G È DERIVABILE E $G' = g$.

SPESSO PERÒ LE DENSITÀ NON SONO CONTINUE! PAZIENZA, DERIVIAMO G DOVE POSSIBILE. SE LO È SU TUTTO $\mathbb{R}$, AD ECCEZIONE DI UN NUMERO FINITO DI PUNTI, POSSIAMO

DEFINIRE $$g(x) = \begin{cases} G'(x) & \text{SE } G' \text{ ESISTE} \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

E PRENDERE QUESTA COME CANDIDATA PER LA DENSITÀ DI Y.

ANDREBBE POI VERIFICATA LA $(*)$, MA IN GENERALE SI TRALASCIA: LE COSE VANNO MALE IN CASI CHE NELLE APPLICAZIONI RARA= MENTE SI INCONTRANO.

<u>ESEMPIO</u> SIA $X \sim N(0,1)$. ALLORA $Y = X^2 \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

ESSENDO $Y \geq 0$ RISULTA $P\{Y \leq t\} = 0$ PER OGNI $t < 0$.

PER $t \geq 0$ INVECE $A_t = [-\sqrt{t}, \sqrt{t}]$ E

$$P\{Y \leq t\} = P\{-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} e^{-x^2/2} dx \underset{\substack{\text{PER} \\ \text{SIMMETRIA}}}{=} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2/2} dx$$

QUINDI

$$G(t) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2/2} dx & \text{PER } t \geq 0 \\ 0 & \text{PER } t < 0 \end{cases}$$

NE SEGUE CHE $$G'(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-t/2} & \text{PER } t > 0 \\ 0 & \text{PER } t < 0 \end{cases}$$

NOTARE CHE NON È DEFINITA IN $t = 0$

POSSIAMO QUINDI PRENDERE $$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-t/2} & \text{PER } t > 0 \\ 0 & \text{PER } t \leq 0 \end{cases}$$