ORA CHE ABBIAMO QUALCHE BASE IN PIÙ IN PROBABILITÀ, POSSIAMO AGGIUNGERE AL NOSTRO ARMAMENTARIO NUOVI MODELLI PER SPAZI DI PROBABILITÀ DISCRETI.

<u>ESEMPIO</u> FACCIAMO IL SEGUENTE ESPERIMENTO:
LANCIAMO n VOLTE UNA MONETA, PER LA QUALE È $q \in (0,1)$ LA PROBABILITÀ DI OTTENERE TESTA (IL FATTO CHE q SIA DIVERSO DA $1/2$ SIGNIFICA CHE LA MONETA NON È EQUILIBRATA)
DURANTE L'ESPERIMENTO ASSUMIAMO CHE OGNI LANCIO NON INFLUENZI GLI ALTRI, CIOÈ CHE I RISULTATI DEI SINGOLI LANCI SONO INDIPENDENTI TRA LORO.
VORREMMO CAPIRE CON CHE PROBABILITÀ SIA OTTENIBILE UNA CERTA n-PLA DI RISULTATI. PER ESEMPIO, SE $n=7$, VORREMMO SAPERE CON CHE PROBABILITÀ ESCE IL RISULTATO $(1,1,0,0,0,1,0)$, DOVE PER SEMPLICITÀ ABBIAMO ETICHETTATO TESTA CON 1 E CROCE CON 0.
CONSIDERIAMO COME SPAZIO DEGLI EVENTI ELEMENTARI

$$\Omega = \{0,1\}^n$$

CIOÈ L'INSIEME DI TUTTE LE n-PLE COSTITUITE DA 0 E 1.

COME AL SOLITO DOBBIAMO STABILIRE UNA PROBABILITÀ $P: \mathcal{A} \to [0,1]$, DOVE $\mathcal{A}$ È LA σ-ALGEBRA DI TUTTI I SOTTOINSIEMI DI Ω. E COME AL SOLITO CI BASTA DEFINIRE P SUGLI EVENTI ELEMENTARI, CIOÈ QUANTO VALE $P(\{\omega\})$ $\forall \omega \in \Omega$ E POI PORRE $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$ $\forall A \in \mathcal{A}$.

TORNIAMO AL NOSTRO CASO SPECIFICO PER CAPIRE COME FARE: $n = 7$ E $\omega = (1,1,0,0,0,1,0)$. CONSIDERIAMO GLI EVENTI

$$A_i = \text{"ESCE 1 AL LANCIO } i\text{-ESIMO"} \qquad i = 1, \dots, 7$$

ABBIAMO $\{\omega\} = A_1 \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c \cap A_6 \cap A_7^c$

VISTO CHE LA PROBABILITÀ DI OTTENERE 1 (CIOÈ TESTA) IN UN SINGOLO LANCIO È q, PORREMO

$$P(A_i) = q \qquad i = 1, \dots, 7$$

POICHÉ GLI EVENTI $\{A_1, \dots, A_7\}$ SONO INDIPENDENTI, LO SONO ANCHE GLI EVENTI $\{A_1, A_2, A_3^c, A_4^c, A_5^c, A_6, A_7^c\}$ (VEDI PROPOSIZIONE FINE LEZIONE SCORSA), QUINDI

$$P(\{\omega\}) = P(A_1)P(A_2)P(A_3^c)P(A_4^c)P(A_5^c)P(A_6)P(A_7^c)$$
$$= q^3(1-q)^4 \qquad \text{IN QUANTO } P(A_i^c) = 1-q$$

POSSIAMO GENERALIZZARE IL TUTTO. INDICHIAMO CON ω_i LA COMPONENTE i-ESIMA DI UN ELEMENTO $\omega \in \Omega$, CIOÈ

$$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)$$

CONSIDERIAMO IN MODO FORMALE GLI EVENTI

$$A_i = \text{"ESCE 1 AL LANCIO } i\text{-ESIMO"} = \{\omega \in \Omega : \omega_i = 1\}$$

PONIAMO $P(A_i) = q$. NOTARE CHE $P(A_i^c) = 1-q$ E CHE

$$A_i^c = \text{"ESCE 0 AL LANCIO } i\text{-ESIMO"} = \{\omega \in \Omega : \omega_i = 0\}$$

FISSATO $\omega \in \Omega$, DIVIDIAMO L'INSIEME DEGLI INDICI $\{1, \dots, m\}$ IN DUE SOTTOFAMIGLIE

$$I_1 := \{ i \in \{1, \dots, m\} : \omega_i = 1\}$$

$$I_0 := \{ i \in \{1, \dots, m\} : \omega_i = 0\}$$

NEL CASO SPECIFICO VISTO PRIMA, CIOÈ $\omega = (1,1,0,0,0,1,0)$

$$I_1 = \{1, 2, 6\} \quad \text{E} \quad I_0 = \{3, 4, 5, 7\}$$

POSSIAMO SCRIVERE $\{\omega\} = \bigcap_{i \in I_1} A_i \cap \bigcap_{i \in I_0} A_i^c$ E QUINDI, PER INDIPENDENZA

$$P(\{\omega\}) = \prod_{i \in I_1} P(A_i) \cdot \prod_{i \in I_0} P(A_i^c) = q^{|I_1|} (1-q)^{|I_0|}$$

NOTATO CHE $|I_1| = \sum_{i=1}^{m} \omega_i$ E $|I_0| = m - \sum_{i=1}^{m} \omega_i$,

POSSIAMO INFINE SCRIVERE

$$\boxed{p(\{\omega\}) = q^{\sum_{i=1}^{m} \omega_i} (1-q)^{m - \sum_{i=1}^{m} \omega_i}}$$

<u>DEFINIZIONE</u> LO SPAZIO DI PROBABILITÀ CHE ABBIAMO APPENA COSTRUITO È DETTO <u>SCHEMA DELLE PROVE INDIPENDENTI</u> (O ANCHE SCHEMA DELLE PROVE RIPETUTE, O SCHEMA DI BERNOULLI).

TALE SPAZIO DI PROBABILITÀ VIENE UTILIZZATO NON SOLO PER IL LANCIO DELLA MONETA, MA IN GENERALE IN ESPERIMENTI COSTITUITI DA m PROVE RIPETUTE ED INDIPENDENTI, CHE POSSONO AVERE SOLO DUE ESITI POSSIBILI, ETICHETTATI CON 1 E 0, E DETTI CONVENZIONALMENTE "SUCCESSO" ED "INSUCCESSO".

<u>ATTENZIONE</u> AFFINCHÉ QUELLO APPENA DEFINITO SIA UNO SPAZIO DI PROBABILITÀ, VA VERIFICATO CHE $p(\Omega)=1$, CIOÈ CHE

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\{\omega\}) = 1.$$

COSÌ È (SI FA PER INDUZIONE), MA TRALASCIAMO.

<u>OSSERVAZIONE</u> L'EVENTO "NESSUNA DELLE n PROVE HA SUCCESSO" SI SCRIVE FORMALMENTE COME

$$A = \{\omega \in \Omega : \omega_i \neq 1 \text{ PER OGNI } i = 1, \dots, n\} = \{(0, \dots, 0)\}$$

ED HA PROBABILITÀ

$$P(A) = (1-q)^n.$$

L'EVENTO COMPLEMENTARE A^c, CIOÈ "ALMENO UNA DELLE n PROVE HA SUCCESSO", HA QUINDI PROBABILITÀ

$$P(A^c) = 1 - (1-q)^n$$

QUALE CHE SIA $q > 0$ FISSATO, $\lim_{n \to \infty} (1-q)^n = 0$. DUNQUE, PER QUANTO SIA PICCOLA LA PROBABILITÀ q RELATIVA ALLA SINGOLA PROVA, CON UN NUMERO ABBASTANZA GRANDE DI PROVE C'È UNA QUASI CERTEZZA DI OTTENERE UN SUCCESSO: FISSATO $\varepsilon > 0$, ESISTE $n_0(\varepsilon)$ T.C. SE $n \geq n_0$ ALLORA $1 - q^n < \varepsilon$ E QUINDI $P(A^c) > 1 - \varepsilon$.

VEDIAMO ORA UN ESEMPIO CLASSICO (LA SCIMMIA DI BOREL)

<u>ESEMPIO</u> SUPPONIAMO DI METTERE UNA SCIMMIA DAVANTI AL VOSTRO LAPTOP (MODERNIZZIAMO L'ESEMPIO). RIUSCIRÀ PIGIANDO I TASTI A CASO A COMPORRE IL PRIMO CAPITOLO DI HARRY POTTER?

Sulla tastiera ci sono 25 tasti e possiamo supporre che ogni tasto abbia la stessa probabilità di essere premuto. Il primo capitolo è costituito grosso modo da 5.000 caratteri (compresi gli spazi). Per scriverla bisogna effettuare una specifica sequenza di battitura dei 25 tasti, possiamo quindi descriverla come una disposizione con ripetizione di classe 5.000 su 25 elementi. Le possibili disposizioni sono

$$25^{5000} \sim 10^{7000}$$

Visto che ogni tasto ha la stessa probabilità di essere premuto, ogni disposizione di tasti ha la stessa probabilità di essere battuta, ed è

$$q = 25^{-5000}$$

Questa è la probabilità che la nostra scimmia ha di scrivere il primo capitolo al primo colpo.

Dopo questa prima prova, potrebbe provare una seconda volta, e così via. Per quanto detto precedentemente, prendendo $\varepsilon = 1/10^{4}$, abbiamo che esiste un M_0 tale che se la scimmia fa $M \geq M_0$ tentativi, allora

$(1-q)^m < 1/10^4$ E QUINDI $P(A^c) > 1 - 1/10^4$, CIOÈ LA PROBABILITÀ DI SCRIVERE IL PRIMO CAPITOLO È MAGGIORE DI 99,99%. SEMBRA STRANO, MA LA VERITÀ È CHE LA SOGLIA m_0 È TERRIBILMENTE ALTA: $(1-q)^{m_0} < 1/10^4$ SIGNIFICA $m_0 \ln(1-q) < \ln 1/10^4$. STIMANDO DALL'ALTO $\ln 1/10^4$ CON -8 E DAL BASSO $\ln(1-q)$ CON $-2q$ OTTENIAMO CHE DEVE ESSERE <u>ALMENO</u>

$$m_0 > \frac{4}{q} = 4 \cdot 25^{5000}$$

<u>QUESITO</u>: RELATIVAMENTE AD UNO SCHEMA DI m PROVE INDIPENDENTI E RIPETUTE, CON PROBABILITÀ DI SUCCESSO q, QUAL È LA PROBABILITÀ CHE IL PRIMO SUCCESSO AVVENGA ALLA j-ESIMA PROVA, $j \in \{1, \dots, m\}$ FISSATO?

L'EVENTO CHE STIAMO CONSIDERANDO È

$$C_j = \text{"IL PRIMO SUCCESSO SI VERIFICA ALLA } j\text{-ESIMA PROVA"}$$

$$= \{\omega \in \Omega : \omega_1 = \dots = \omega_{j-1} = 0 \quad \text{E} \quad \omega_j = 1\}$$

$$= A_1^c \cap \dots \cap A_{j-1}^c \cap A_j$$

E LA SUA PROBABILITÀ VALE

$$P(C_j) = P(A_1^c) \dots P(A_{j-1}^c) P(A_j) = (1-q)^{j-1} q$$

NOTARE LA <u>NON</u> DIPENDENZA DA m. NOTARE ANCHE CHE AVEVAMO GIÀ OTTENUTO LO STESSO RISULTATO NEL CASO $q = 1/2$ ESAMINATO NELLA TERZA LEZIONE.

<u>QUESITO</u>: RELATIVAMENTE AD UNO SCHEMA DI m PROVE INDIPENDENTI E RIPETUTE, CON PROBABILITÀ DI SUCCESSO q, QUAL È LA PROBABILITÀ CHE k PROVE ABBIANO SUCCESSO, $k \in \{1, \dots, m\}$ FISSATO?

L'EVENTO CHE STIAMO CONSIDERANDO È

$$C_k = \text{"}k \text{ PROVE HANNO SUCCESSO"}$$
$$= \left\{ \omega \in \Omega : \begin{array}{l} k \text{ COMPONENTI DI } \omega \text{ VALGONO } 1 \\ m-k \text{ " " " " } 0 \end{array} \right\}$$

POSSIAMO ASSOCIARE AD UN DATO $\omega \in C_k$ LA FAMIGLIA DI INDICI

$$H := \{ h \in \{1, \dots, m\} : \omega_h = 1 \}$$

CHIARAMENTE $|H| = k$. VICEVERSA, DATO $H \subset \{1, \dots, m\}$ CON $|H| = k$, POSSIAMO ASSOCIARE AD H L'EVENTO $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)$ CON $\omega_h = 1$ SE $h \in H$ E $\omega_h = 0$ SE $h \notin H$. CHIARAMENTE $\omega \in C_k$. IN QUESTO MODO ABBIAMO CREATO UNA CORRISPONDENZA BIUNIVOCA TRA GLI

ELEMENTI DI C_k E LE COMBINAZIONI DI CLASSE k SU $\{1, \dots, m\}$. ABBIAMO QUINDI PROVATO CHE

$$|C_k| = \binom{m}{k}$$

OSSERVIAMO ANCHE CHE SE $\omega \in C_k$, AVENDO PRECISA= MENTE k COMPONENTI NON NULLE,

$$P(\{\omega\}) = q^k (1-q)^{m-k}$$

METTENDO LE DUE INFORMAZIONI INSIEME OTTENIAMO

$$P(C_k) = \sum_{\omega \in C_k} P(\{\omega\}) = \binom{m}{k} q^k (1-q)^{m-k} \qquad (*)$$

QUESTO CI PERMETTE DI RISPONDERE AD UN CLASSICO QUESITO: QUAL È LA PROBABILITÀ CHE EFFETTUANDO m ESTRA= ZIONI CON REIMMISSIONE DA UN'URNA CONTENENTE M PALLINE BIANCHE ED $N-M$ PALLINE NERE (QUINDI N IN TOTALE) k DI ESSE SIANO BIANCHE?

LA RISPOSTA È

$$\binom{m}{k} s^k (1-s)^{m-k} \qquad \text{DOVE} \qquad s = \frac{M}{N}$$

IN EFFETTI QUESTO TIPO DI ESTRAZIONE PUÒ ESSERE VISTO COME UNO SCHEMA DI n PROVE INDIPENDENTI.
LA PROBABILITÀ DI SUCCESSO, CIOÈ DI ESTRARRE UNA PALLINA BIANCA, È $s = \frac{M}{N}$ PER OGNI SINGOLA ESTRAZIONE.