SIMILMENTE A QUANTO FATTO PER GLI EVENTI IN UNO SPAZIO DI PROBABILITÀ, INTRODUCIAMO ORA IL CONCETTO DI INDIPENDENZA TRA VARIABILI ALEATORIE.

<u>DEFINIZIONE</u> SIANO $X_1, \dots, X_m$ V.A. SU UNO SPAZIO DI PROBABILITÀ $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. DIREMO CHE SONO <u>INDIPENDENTI</u> SE PER OGNI SCELTA DEGLI INSIEMI $E_1, \dots, E_m \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ SI HA

$$P\{X_1 \in E_1, \dots, X_m \in E_m\} = \prod_{k=1}^{m} P\{X_k \in E_k\}$$

CIOÈ GLI EVENTI $\{X_1 \in E_1\}, \dots, \{X_m \in E_m\}$ SONO INDIPENDENTI. PONENDO $X = (X_1, \dots, X_m)$ ED $E = E_1 \times \dots \times E_m$ POSSIAMO ANCHE RISCRIVERE IL LATO SINISTRO COME $P\{X \in E\}$. NOTARE CHE $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$.

INTUITIVAMENTE, GLI OUTPUT DI OSSERVAZIONI SU SINGOLI ASPETTI (LE X_k) CONFLUISCONO IN MODO INDIPENDENTE IN QUELLO GLOBALE (LA X).

<u>PROPOSIZIONE</u> SIANO $X_1, \dots, X_m$ V.A. DISCRETE. ALLORA

$$q(x) = \prod_{k=1}^{m} q_k(x_k) \quad \forall x \in \mathbb{R}^m \qquad (*)$$

(CIOÈ LA DENSITÀ CONGIUNTA SI OTTIENE COME PRODOTTO DELLE DENSITÀ MARGINALI) SE E SOLO SE LE X_k SONO INDIPENDENTI.

PROOF Dato $x \in \mathbb{R}^m$, sia $E = \{x\}$. Abbiamo

$$q(x) = P\{X = x\} = \prod_{k=1}^{m} P\{X_k = x_k\} = \prod_{k=1}^{m} q_k(x_k)$$

Quindi se le X_k, $k = 1, \dots, m$, sono indipendenti la $(*)$ è vera. Viceversa siano $E_1, \dots, E_m \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Abbiamo

$$P\{X \in E\} = \sum_{x \in E} q(x) = \sum_{x \in E} \prod_{k=1}^{m} q_k(x_k)$$

$$= \prod_{k=1}^{m} \sum_{x_k \in E_k} q_k(x_k) = \prod_{k=1}^{m} P\{X_k \in E_k\} \qquad \blacksquare$$

<u>Osservazione</u> Abbiamo visto in precedenza che mentre dalla densità congiunta si possono ottenere le densità marginali, non è in generale vero il viceversa. La proposizione appena vista ci dice che la cosa è possibile nel caso di v.a. indipendenti.

L'indipendenza si comporta bene rispetto alla composizione di funzioni.

<u>Proposizione</u> Siano X_1, X_2 due v.a. indipendenti e $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni. Allora le due v.a. $Y_1 = f_1 \circ X_1$ e $Y_2 = f_2 \circ X_2$ sono indipendenti.

PROOF Siano $E_1, E_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Abbiano

$$P\{Y_1 \in E_1, Y_2 \in E_2\} = P\{f_1 \circ X_1 \in E_1, f_2 \circ X_2 \in E_2\}$$
$$= P\{X_1 \in f_1^{-1}(E_1), X_2 \in f_2^{-1}(E_2)\}$$
$$= P\{X_1 \in f_1^{-1}(E_1)\} \cdot P\{X_2 \in f_2^{-1}(E_2)\}$$
$$= P\{f_1 \circ X_1 \in E_1\} \cdot P\{f_2 \circ X_2 \in E_2\}$$
$$= P\{Y_1 \in E_1\} \cdot P\{Y_2 \in E_2\} \qquad \blacksquare$$

<u>NOTA</u> Componendo una v.a. X con una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ andrebbe verificato che $f \circ X$ è ancora una v.a. Se $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ è uno spazio discreto ovviamente $f \circ X$ è una v.a. Se X è discreta, lo è anche $f \circ X$ e si verifica facilmente che $\{f \circ X = x\} \in \mathcal{A} \ \forall x \in \mathbb{R}$. La cosa è anche vera se f è <u>misurabile</u>, cioè se

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

in quanto $(f \circ X)^{-1}(B) = X^{-1}(f^{-1}(B)) \in \mathcal{A}$.

Una famiglia notevole di funzioni misurabili è costituita dalle funzioni <u>continue</u>.

Osservazione Se interpretiamo X come un'osservazione sul campione Ω, allora possiamo vedere $f \circ X$ come un'elaborazione di X. Non stupisce dunque che se X_1, X_2 sono indipendenti, allora lo sono anche $f_1 \cdot X_1, f_2 \cdot X_2$.

Il precedente risultato può essere generalizzato

Proposizione Siano $X_1, \dots, X_m$ v.a. indipendenti e $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^{m-k} \to \mathbb{R}$ due applicazioni. Allora le v.a. $f \circ (X_1, \dots, X_k)$, $g \circ (X_{k+1}, \dots, X_m)$ sono indipendenti

Proof

Simile al caso precedente, ci sono solo più indici.

Corollario Se prendiamo come f e g le funzioni $f(x_1, \dots, x_k) = \sum_{j=1}^{k} x_j$ e $g(x_{k+1}, \dots, x_m) = \sum_{j=k+1}^{m} x_j$, otteniamo che

$$Y_1 = f \circ (X_1, \dots, X_k) = \sum_{j=1}^{k} X_j$$

$$Y_2 = g \circ (X_{k+1}, \dots, X_m) = \sum_{j=k+1}^{m} X_j$$

sono v.a. indipendenti.

INTRODUCIAMO IL PROSSIMO CONCETTO CON DUE ESEMPI.

- UN'AUTO PERCORRE IN UN TEMPO T UNA DISTANZA DI 200 KM. PER UN TEMPO $T/2$ PROCEDE A VELOCITÀ $v_1 = 70$ km/h, PER $T/6$ A $v_2 = 90$ km/h E PER $T/3$ A $v_3 = 30$ km/h. LA VELOCITÀ MEDIA $\bar{v}$ È DATA DA $v_m = 200/T$. TENUTO CONTO CHE

$$\frac{T}{2} v_1 + \frac{T}{6} v_2 + \frac{T}{3} v_3 = 200 \text{ km},$$

NE DEDUCIAMO CHE

$$\bar{v} = \sum_{j=1}^{3} \left(\begin{array}{l} \text{FRAZIONE DI TEMPO IN CUI} \\ \text{SI PROCEDE A VELOCITÀ } v_j \end{array} \right) \cdot v_j = 60 \text{ km/h}$$

SIA $v : [0,T] \to \mathbb{R}$ LA VELOCITÀ DELL'AUTO AD OGNI ISTANTE. POSTO $A_j := \{ t \in [0,T] : v(t) = v_j \}$ ED INDICATA CON $|A_j|$ LA SUA LUNGHEZZA, IL RAPPORTO $|A_j|/T$ COINCIDE CON LA FRAZIONE DI TEMPO IN CUI SI PROCEDE A VELOCITÀ v_j.

- UNA SCATOLA CONTIENE N PALLINE DI 4 DISTINTI MATERIALI. SIA p_j IL PESO DI UNA PALLINA FATTA DEL MATERIALE j-ESIMO. IL PESO MEDIO $\bar{p}$ DELLE PALLINE È DATO DA

$$\bar{p} = \sum_{j=1}^{4} \left(\begin{array}{l} \text{FRAZIONE DI PALLINE FATTE} \\ \text{DEL MATERIALE } j\text{-ESIMO} \end{array} \right) \cdot p_j$$

NUMERATE LE PALLINE DA 1 A N, SIA $p : \{1, \dots, N\} \to \mathbb{R}$ IL PESO D'OGNI PALLINA. POSTO $A_j := \{n = 1, \dots, N \text{ t.c. } p(n) = p_j\}$, CIOÈ L'INSIEME DELLE PALLINE DEL MATERIALE J-ESIMO, ED INDICATO CON $|A_j|$ IL NUMERO DEI SUOI ELEMENTI, IL RAPPORTO $|A_j|/N$ COINCIDE CON LA FRAZIONE DI PALLINE FATTE DEL MATERIALE J-ESIMO.

QUANTO VISTO SOPRA SI GENERALIZZA IN QUESTO MODO. DATO UN INSIEME Ω E UNA FUNZIONE $f : \Omega \to \mathbb{R}$ CHE ASSUME UN NUMERO FINITO DI VALORI $f_1, \dots, f_m$, IL <u>VALORE MEDIO</u> $\bar{f}$ È DEFINITO DA

$$\bar{f} = \sum_{j=1}^{m} \frac{|A_j|}{|\Omega|} f_j$$

DOVE $A_j := \{\omega \in \Omega : f(\omega) = f_j\}$. AFFINCHÉ TALE DEFINIZIONE ABBIA SENSO, SU Ω DEVE ESSERCI UNA MISURA! NEL PRIMO ESEMPIO ERA LA CLASSICA LUNGHEZZA, NEL SECONDO LA "MISURA DEL CONTEGGIO" (CIOÈ IL NUMERO DI ELEMENTI CHE SONO NELL'INSIEME).

SE $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ È UNO SPAZIO DI PROBABILITÀ E $X : \Omega \to \mathbb{R}$ UNA V.A. CHE PRENDE UN NUMERO FINITO DI VALORI $x_1, \dots, x_m$, HA SENSO CONSIDERARE IL <u>VALORE MEDIO</u>

$$\bar{X} = \sum_{j=1}^{m} P\{X = x_j\}\, x_j = \sum_{j=1}^{m} q(x_j)\, x_j = \sum_{x \in \mathbb{R}} q(x)\, x$$

DOVE q È LA DENSITÀ DI X. QUESTO PERCHÉ INTERPRETIAMO P COME UNA MISURA SU Ω. NOTARE CHE NON SERVE RINORMALIZZARE, PERCHÉ $P(\Omega) = 1$.

IL SIMBOLO STANDARD PER INDICARE IL VALORE MEDIO DI UNA V.A. X È $E[X]$. SONO SINONIMI <u>MEDIA</u>, <u>VALORE ATTESO</u>, <u>SPERANZA MATEMATICA</u>.

- CONSIDERIAMO UN DADO NON EQUILIBRATO, CON LA FACCIA "1" PIÙ LEGGERA. COME AL SOLITO USIAMO $\Omega = \{1, \dots, 6\}$ PER INDICARE LE SUE FACCE, E IN QUESTO CASO ASSEGNAMO LE PROBABILITÀ ELEMENTARI

$$P(1) = \frac{3}{8} \qquad P(2) = P(3) = \dots = P(6) = \frac{1}{8}$$

INTUITIVAMENTE, IL RISULTATO MEDIO CHE CI ASPETTIAMO È

$$\frac{3}{8} + \frac{2+3+4+5+6}{8} = \frac{23}{8}$$

IN EFFETTI, SE FORMALIZZIAMO LA V.A. X = "NUMERO USCITO" PONENDO $X(\omega)=\omega$, QUESTA HA DENSITÀ

$$q(x) = P\{X=x\} = \begin{cases} 3/8 & \text{SE } x=1 \\ 1/8 & \text{SE } x=2,\dots,6 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

E LA SOMMATORIA PRECEDENTE SI SCRIVE COME $\sum_{x\in\mathbb{R}} q(x)x$.

POSSIAMO DEFINIRE IL CONCETTO DI VALORE MEDIO ANCHE NEL CASO DI UNA V.A. CHE ASSUMA UNA QUANTITÀ NUMERABILE DI VALORI.

<u>DEFINIZIONE</u> SIA X UNA V.A. DISCRETA CON DENSITÀ q. SE $\sum_{x\in\mathbb{R}} |x|q(x) < \infty$, CHIAMEREMO <u>VALORE MEDIO</u> DI X LA QUANTITÀ

$$E[X] := \sum_{x\in\mathbb{R}} x\,q(x) = \sum_{x\in\mathbb{R}} x\,P\{X=x\}.$$

LA CONDIZIONE $\sum_{x\in\mathbb{R}} |x|q(x)$ È BANALMENTE SODDISFATTA QUANDO X ASSUME UN NUMERO FINITO DI VALORI.

QUANDO INVECE X ASSUME UNA QUANTITÀ NUMERABILE DI VALORI, GLI OGGETTI

$$\sum_{x\in(-\infty,0)} (-x)\,q(x) \quad \text{E} \quad \sum_{x\in[0,+\infty)} x\,q(x)$$

ESSENDO SERIE A TERMINI POSITIVI POTREBBERO DIVERGERE A $+\infty$, E QUINDI $\sum_{x\in\mathbb{R}} x\,q(x)$ POTREBBE ESSERE INDETERMINATO. LA CONDIZIONE $\sum_{x\in\mathbb{R}} |x|q(x) < \infty$ EVITA CIÒ. QUANDO È VERIFICATA DIREMO CHE X HA VALORE MEDIO <u>FINITO</u>.

<u>DEFINIZIONE</u> UNA V.A. X È DETTA <u>CENTRATA</u> SE $E[X]=0$ CIOÈ SE HA VALORE MEDIO NULLO.

VEDIAMO UNA SERIE DI RISULTATI SUL VALORE MEDIO.

<u>TEOREMA</u> SIA $X=(X_1,\dots,X_m)$ UN VETTORE ALEATORIO DISCRETO m DIMENSIONALE AVENTE DENSITÀ CONGIUNTA $q:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$, E SIA $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ UNA FUNZIONE. CONSIDERIAMO LA V.A. $Y=g\circ X$. LA Y HA VALORE MEDIO FINITO SE E SOLO SE

$$\sum_{x\in\mathbb{R}^m} |g(x)|q(x) < \infty$$

IN TAL CASO

$$E[Y] = \sum_{x\in\mathbb{R}^m} g(x)q(x) = \sum_{x\in\mathbb{R}^m} g(x)P\{X=x\}$$

PROOF OMESSA

QUESTO RISULTATO CI PERMETTE DI CALCOLARE $E[Y]$ SENZA PRIMA DOVERCI CALCOLARE LA DENSITÀ DI Y.

Proposizione Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno spazio di probabilità discreto e X una v.a. su di esso avente media finita. Allora

$$E[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\})$$

PROOF

Sia q la densità di X. Abbiamo

$$E[X] = \sum_{x \in \mathbb{R}} x\, q(x) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x\, P\{X = x\}$$

$$= \sum_{x \in \mathbb{R}} x \sum_{\omega \in \{X=x\}} P(\{\omega\}) = \sum_{x \in \mathbb{R}} \sum_{\omega \in \{X=x\}} x\, P(\{\omega\})$$

$$\overset{(i)}{=} \sum_{x \in \mathbb{R}} \sum_{\omega \in \{X=x\}} X(\omega) P(\{\omega\}) \overset{(ii)}{=} \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\})$$

Tenuto conto che

(i) se $\omega \in \{X = x\}$ allora $X(\omega) = x$

(ii) $\bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{X = x\} = \Omega$ con $\{X = x\} \cap \{X = y\} = \emptyset$ se $x \neq y$.

$\blacksquare$

Proposizione (Linearità del valore medio)

Siano X_1, X_2 due v.a. discrete su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ aventi valore medio finito. Allora

i) per ogni $c \in \mathbb{R}$ la v.a. cX_1 ha valore medio finito e

$$E[cX_1] = c\,E[X_1]$$

ii) LA V.A. $X_1 + X_2$ HA VALORE MEDIO FINITO E

$$E[X_1+X_2] = E[X_1] + E[X_2]$$

PROOF

DIMOSTRIAMO IL PUNTO (ii), IL PUNTO (i) SI DIMOSTRA SIMILMENTE. SIANO $X = (X_1, X_2)$ E $Y = X_1 + X_2$. POSSIAMO VEDERE Y COME $g \circ X$ CON $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ DEFINITA DA

$$g(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

PER IL TEOREMA ENUNCIATO ALL'INIZIO, Y HA MEDIA FINITA SE E SOLO SE

$$\sum_{x \in \mathbb{R}^2} |x_1 + x_2| \, q(x) < \infty$$

DOVE q È LA DENSITÀ CONGIUNTA DI X. IN EFFETTI ABBIAMO, DENOTATE CON q_1 E q_2 LE DENSITÀ MARGINALI

$$\sum_{x \in \mathbb{R}^2} |x_1 + x_2| \, q(x) \leq \sum_{x \in \mathbb{R}^2} (|x_1| + |x_2|) \, q(x)$$

$$= \sum_{x \in \mathbb{R}^2} |x_1| \, q(x) + \sum_{x \in \mathbb{R}^2} |x_2| \, q(x)$$

$$= \sum_{x_1 \in \mathbb{R}} |x_1| \sum_{x_2 \in \mathbb{R}} q(x_1, x_2) + \sum_{x_2 \in \mathbb{R}} |x_2| \sum_{x_1 \in \mathbb{R}} q(x_1, x_2)$$

$$= \sum_{x_1 \in \mathbb{R}} |x_1| \, q_1(x_1) + \sum_{x_2 \in \mathbb{R}} |x_2| \, q_2(x_2) < \infty$$

RIPETENDO GLI STESSI PASSAGGI, MA SENZA MODULO E QUINDI SENZA LA PRIMA DISUGUAGLIANZA, ABBIAMO ANCHE

$$E[Y] = \sum_{x \in \mathbb{R}^2} (x_1 + x_2) q(x) = \sum_{x_1 \in \mathbb{R}} x_1 q_1(x_1) + \sum_{x_2 \in \mathbb{R}} x_2 q_2(x_2)$$

SEMPRE PER IL TEOREMA

$$= E[X_1] + E[X_2]$$

■

<u>ESEMPIO</u> SIA $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ UNO SPAZIO DI PROBABILITÀ ED $A \in \mathcal{A}$ UN EVENTO. CONSIDERIAMO ORA LA V.A. $X = \chi_A$ CIOÈ

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{SE } \omega \in A \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

POICHÉ $\{X=1\} = A$ E $\{X=0\} = A^c$, LA DENSITÀ DI X È

$$q(x) = P\{X = x\} = \begin{cases} P(A) & \text{SE } x = 1 \\ 1 - P(A) & \text{SE } x = 0 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

DUNQUE $E[X] = \sum_{x \in \mathbb{R}} x q(x) = P(A)$.

SUPPONIAMO ORA DI AVERE $A_1, \dots, A_m$ EVENTI, E SIA

$$Y = \text{"A QUANTI EVENTI PARTECIPI"} = \sum_{j=1}^{m} \chi_{A_j}$$

MENTRE LA DENSITÀ DI Y DIPENDE DALLE RELAZIONI TRA GLI EVENTI $A_1, \dots, A_m$ (E QUINDI PUÒ ESSERE COMPLICATO ESPLICITARLA), LA PROPOSIZIONE PRECEDENTE CI FORNISCE UN MODO FACILE PER CALCOLARE IL VALORE MEDIO:

$$E[Y] = \sum_{j=1}^{m} E[X_{A_j}] = \sum_{j=1}^{m} P(A_j)$$

Vediamo ora come il valore medio si comporta rispetto all'ordinamento.

Proposizione (Monotonia del valore medio)

Siano X_1, X_2 due v.a. discrete su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ aventi valore medio finito. Allora,

$$X_1 \leq X_2 \quad \text{implica} \quad E[X_1] \leq E[X_2]$$

PROOF

Poniamo $Y = X_2 - X_1$. Per linearità Y ha valore medio finito. Inoltre $Y \geq 0$ e quindi se $y < 0$ abbiamo $P\{Y = y\} = 0$. Dunque

$$E[X_2] - E[X_1] = E[Y] = \sum_{y \in \mathbb{R}} y\, P\{Y = y\} = \sum_{y \geq 0} y\, P\{Y = y\} \geq 0$$

essendo i termini nella sommatoria positivi. ■

Corollario Sia X una v.a. discreta avente valore medio finito. Allora $|X|$ ha valore medio finito e

$$|E[X]| \leq E[|X|]$$

PROOF

Applicando il teorema con $g = |\cdot|$ abbiamo che $|X|$ ha valore medio finito. Inoltre da $-|X| \leq X \leq |X|$ segue

$$-E[|X|] \leq E[X] \leq E[|X|]$$ ■

SE LAVORIAMO CON DUE V.A. POSITIVE, BASTA AVERE CHE LA PIÙ GRANDE HA VALORE MEDIO FINITO.

<u>LEMMA</u> SE X, Y SONO DUE V.A. DISCRETE TALI CHE $0 \leq X \leq Y$ E Y HA VALORE MEDIO FINITO, ALLORA ANCHE X HA VALORE MEDIO FINITO.

PROOF

SIANO $\{x_1, x_2, \dots\}$ I VALORI ASSUNTI DA X. DEFINIAMO LA V.A. X_m TRAMITE

$$X_m(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{SE } X(\omega) \in \{x_1, \dots, x_m\} \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

ASSUMENDO SOLO UN NUMERO FINITO DI VALORI, X_m HA VALORE MEDIO FINITO. ABBIAMO $X_m \leq Y$, QUINDI

$$\sum_{x \in \{x_1, \dots, x_m\}} x P\{X = x\} = \sum_{x \in \{x_1, \dots, x_m\}} x P\{X_m = x\} = \sum_{x \in \mathbb{R}} x P\{X_m = x\}$$

$$= E[X_m] \leq E[Y]$$

NE CONSEGUE CHE LA SUCCESSIONE DELLE SOMME PARZIALI DI $\sum_{x \in X} x P\{X = x\}$ SONO LIMITATE E QUINDI LA SERIE CONVERGE. ∎

ABBIAMO VISTO COME IL VALORE MEDIO SI COMPORTA RISPETTO ALLA SOMMA. DOMANDIAMOCI COME VA RISPETTO AL PRODOTTO.

<u>PROPOSIZIONE</u> SIA $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ UNO SPAZIO DI PROBABILITÀ E SIANO $X_1, \dots, X_n$ V.A. DISCRETE SU DI ESSO AVENTI VALORE MEDIO FINITO. SE LE $X_1, \dots, X_n$ SONO INDIPENDENTI, ALLORA LA V.A. $Y = \prod_{j=1}^{n} X_j$ HA VALORE MEDIO FINITO E

$$E[Y] = \prod_{j=1}^{n} E[X_j] \qquad (*)$$

PROOF

SIA $X = (X_1, \dots, X_n)$ E SIA $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ DEFINITA DA $g(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} x_j$. POSSIAMO VEDERE Y COME $g \circ X$, COSÌ DA POTER APPLICARE IL TEOREMA ENUNCIATO ALL'INIZIO.

DETTA q LA DENSITÀ CONGIUNTA DI X, ABBIAMO VISTA L'INDIPENDENZA

$$\sum_{x \in \mathbb{R}^n} |g(x)| \, q(x) = \sum_{x \in \mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{n} |x_j| \, q_j(x_j)$$

$$= \sum_{x_1 \in \mathbb{R}} \cdots \sum_{x_n \in \mathbb{R}} \prod_{j=1}^{n} |x_j| \, q_j(x_j) = \prod_{j=1}^{n} \sum_{x_j \in \mathbb{R}} |x_j| \, q_j(x_j) < \infty$$

DOVE LE q_j SONO LE DENSITÀ MARGINALI. QUESTO PROVA CHE Y HA VALORE MEDIO FINITO. RIPETENDO GLI STESSI PASSAGGI SENZA MODULO OTTENIAMO INVECE $(*)$ ■