

Foglio di Esercizi 5

Metodi Matematici per l'IA

24-10-2024

Esercizio 1

Sia $f(x) = e^{i2x}$ per $x \in [-\pi, \pi]$, e estendiamo $f(x)$ affinché sia 2π -periodica.

1. Dimostra che $f(x) \in L^2_{\mathbb{C}}(T)$, dove $T = 2\pi$.
2. Mostra che $f(x)$ è localmente 2-integrabile su \mathbb{R} .

Esercizio 2

Determinare la serie di Fourier della funzione periodica di periodo 2π definita da $f(x) = x^2$ per $-\pi \leq x \leq \pi$. Dedurre la somma delle seguenti serie:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4}.$$

Esercizio 3

Per $x \geq 0$ e $n \geq 1$, definiamo $f_n(x) = \frac{n}{1+n(1+x)}$.

1. Dimostrare che la successione di funzioni $(f_n)_{n \geq 1}$ converge puntualmente su $[0, +\infty[$ verso una funzione f , che deve essere specificata.
2. Dimostrare che la convergenza è in realtà uniforme su $[0, +\infty[$.

Esercizio 4

Per $n \geq 1$ e $x \in]0, 1]$, si definisce $f_n(x) = nx^n \ln(x)$ con $f_n(0) = 0$.

1. Dimostrare che la successione (f_n) converge puntualmente su $[0, 1]$ verso una funzione f , che deve essere specificata. Si ponga poi $g = f - f_n$.
2. Studiare le variazioni di g .
3. Dedurre che la convergenza di (f_n) verso f non è uniforme su $[0, 1]$.
4. Sia $a \in [0, 1[$. Notando che esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $e^{-1/n} \geq a$ per ogni $n \geq n_0$, dimostrare che la successione (f_n) converge uniformemente verso f su $[0, a]$.

Esercizio 5

Considera la funzione $f(x)$ definita dalla serie trigonometrica

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(1 + |n|)^p} e^{in\omega x},$$

con $\omega = \frac{2\pi}{T}$ e $p > 2$.

1. Analizza il comportamento dei coefficienti di Fourier $\gamma_n = \frac{1}{(1+|n|)^p}$ per $n \rightarrow \infty$. Cosa ti dice questo sul grado di regolarità della funzione $f(x)$?
2. Basandoti sulla velocità di decadimento dei coefficienti, determina la regolarità di $f(x)$. Trova il massimo intero k tale che $f(x) \in C^k([T/2, T/2]; \mathbb{C})$.
3. Rappresenta graficamente la funzione $f(x)$ per $p = 3$ e $T = 2\pi$.