Foglio di Esercizi 4

Metodi Matematici per l'IA

17-10-2024

Esercizio 1

Consideriamo la funzione periodica $f(x)$ definita su $[-\pi, \pi]$ come:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x < 0, \\ -1, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

1. Calcolo della Serie di Fourier

Calcola la serie di Fourier di $f(x)$.

2. Analisi della Convergenza Puntuale

Utilizzando il teorema di Dirichlet-Weierstrass, analizza se la serie di Fourier converge puntualmente a $f(x)$ per tutti gli $x \in [-\pi, \pi]$.
A quale valore converge la serie in $x = 0$?

3. Esempio di Non-Convergenza

Discuti un esempio in cui una serie di Fourier non converge puntualmente. Basandoti sul teorema di Du Bois-Reymond, mostra che esistono funzioni continue la cui serie di Fourier diverge in alcuni punti. Spiega come questo risultato si relaziona alle proprietà di convergenza delle serie di Fourier e perché alcune funzioni non rispettano la convergenza puntuale nonostante siano continue.

Esercizio 2

Consideriamo una funzione $f(x)$ definita e periodica su $[-\pi, \pi]$.

1. Relazione tra regolarità e decadimento dei coefficienti di Fourier

Supponiamo che $f(x) \in C^k([-\pi, \pi])$ sia una funzione k-volte continuamente derivabile. Mostra che i coefficienti di Fourier $c_n(f)$ della funzione soddisfano la seguente relazione asintotica:

$$c_n(f) = O\left(\frac{1}{|n|^k}\right), \quad \text{quando } |n| \to \infty.$$

Spiega come la regolarità della funzione influenza il decadimento dei coefficienti di Fourier e dimostra il risultato.

2. Decadimento dei coefficienti di Fourier per una funzione specifica

Considera la funzione $f(x) = x^2$ definita su $[-\pi, \pi]$ e periodizzata su $\mathbb{R}$. Calcola esplicitamente la serie di Fourier di $f(x)$ e verifica il decadimento dei coefficienti di Fourier $c_n(f)$. Qual è la velocità di decadimento dei coefficienti in questo caso? Confronta questo risultato con la regolarità della funzione.

3. Effetto della regolarità sulla convergenza della serie

Considera la serie di Fourier:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n!}.$$

Determina se questa serie converge. Analizza la regolarità della funzione risultante e discuti come il rapido decadimento dei coefficienti di Fourier influisce sulla convergenza e sulla regolarità della funzione.

Esercizio 3

Consideriamo una funzione periodica $f(x)$ definita su $[-T/2, T/2]$ e appartenente allo spazio $L^2(T)$, lo spazio delle funzioni quadrato-integrabili su T.

1. Dimostrazione del Teorema di Parseval

Dimostra che una serie di Fourier $S_N(f)$ converge a f nello spazio $L^2(T)$ se e solo se è soddisfatta la seguente uguaglianza:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 \, dx.$$

Questo è noto come il **Teorema di Parseval**. Spiega il significato di questa uguaglianza in termini di conservazione dell'energia e della norma L^2.

2. Convergenza in energia per funzioni discontinue

Sia $f(x)$ una funzione a tratti continua su $[-T/2, T/2]$, ovvero una funzione che ha un numero finito di discontinuità. Mostra che, nonostante le discontinuità, la serie di Fourier converge a f nello spazio $L^2(T)$, anche se non converge necessariamente puntualmente. Spiega come la convergenza in L^2 sia legata alla nozione di *convergenza in energia*.

3. Convergenza in L^2 per una funzione specifica

Considera la funzione $f(x) = \sin(x)$ su $[-\pi, \pi]$. Calcola la norma L^2 della differenza tra $f(x)$ e la sua ridotta N-esima della serie di Fourier, $S_N(f)$, e mostra che questa norma tende a zero al tendere di N all'infinito:

$$\|f - S_N(f)\|_{L^2} \to 0 \quad \text{quando} \quad N \to \infty.$$

Spiega come questo risultato conferma la convergenza della serie di Fourier in L^2 per $f(x) = \sin(x)$.