Foglio di Esercizi 3

Metodi Matematici per l'IA

10-10-2021

Esercizio 1

Sia f 2π-periodica tale che

$$c_n = c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx, \quad |c_n| = O\left(2^{-|n|}\right),$$

e definiamo

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}.$$

Dimostrare che:

1. $S_N \xrightarrow{N\to\infty} f$ in norma uniforme su $\mathbb{R}$,
2. $f \in C^\infty(\mathbb{R}) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C^k(\mathbb{R})$.

Esercizio 2

Siano $f, g \in C^\infty$ e T-periodiche. Dimostrare che:

1. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ allora $c_n(f) = c_{-n}(f)$,
2. $c_n(fg) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{n-k}(f)c_k(g)$.

Esercizio 3

Si considerino le seguenti serie trigonometriche:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n i}{1+n^{3/2}} e^{inx},$$

$$\sum_{n\geq 1} \left[2^{-n}\cos\left(n\sqrt{2}x\right) + (-2)^{-n}\sin\left(n\sqrt{2}x\right)\right],$$

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1+i}{n!} e^{in^2 x},$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1-i\sqrt{3}}{\sqrt{n}(1+n^5)} \sin(3nx),$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{2^n}{3^n+4^n} e^{in^2 x},$$

studiare:

1. Convergenza puntuale, uniforme e in energia,
2. Nel caso la serie converga a una funzione target, determinare periodo, frequenza angolare e regolarità della funzione limite.