Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno spazio di probabilità. Ricordo che una mappa $X : \Omega \to \mathbb{R}^m$ è un vettorio aleatorio m-dimensionale se ogni sua componente è una v.a..

Equivalentemente, se $\{X \in B\} \in \mathcal{A} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$.

In particolare ha senso considerare

$$P_X(B) := P\{X \in B\}$$

P_X è chiamata legge o distribuzione di X ed è una probabilità su $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$.

Finora ci siamo occupati solo di vettori aleatori di tipo discreto. Come fatto per le v.a., introduciamo ora una ulteriore classe di vettori aleatori.

<u>Definizione</u> Un vettore aleatorio $X : \Omega \to \mathbb{R}^m$ è detto <u>assolutamente continuo</u> se esiste una funzione $f : \mathbb{R}^m \to [0, +\infty)$ integrabile tale che

$$P\{X \in B\} = \int_B f \, dx \qquad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \quad (*)$$

In tal caso la funzione f è detta <u>densità</u> di X.

Quello che compare in $(*)$ è un integrale multiplo (doppio se $m=2$, triplo se $m=3$).

NOTE TECNICHE

- PER QUANTO GLI INSIEMI BORELIANI SIANO "DECENTI", SONO A VOLTE PIÙ STRAMPALATI DI QUELLO CHE UNO STUDENTE POSSA ASPETTARSI. NESSUN PROBLEMA: LA VERIFICA CHE VALGA LA CONDIZIONE (*) PUÒ ESSERE LIMITATA ALLA SOTTOFAMIGLIA DEI PLURIRETTANGOLI, CIOÈ INSIEMI DELLA FORMA $B = \prod_{k=1}^{m} (a_k, b_k)$. IN QUESTO CASO (*) SI RISCRIVE

$$P\{X \in B\} = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_m}^{b_m} f(x_1, \ldots, x_m)\, dx_1 \ldots dx_m \qquad (**)$$

UNA VOLTA VERIFICATA LA (**), SI È AUTORIZZATI AD UTILIZZARE LA (*) CON OGNI INSIEME $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$. NELLA PRATICA B, VISTO CHE È UN RANGE DI VALORI A CUI SIAMO INTERESSATI, NON SARÀ MAI PARTICOLARMENTE STRANO: TIPICAMENTE I DOMINI CHE AVETE VISTO AD ANALISI 2.

- IL TERMINE "ASSOLUTAMENTE CONTINUO" NON SI RIFERISCE ALLA REGOLARITÀ DI f: LA DENSITÀ, ANCHE SE SPESSO È UNA FUNZIONE CONTINUA, DEVE ESSERE SOLO INTEGRABILE (PER ESEMPIO UNA FUNZIONE A SCALA È INTEGRABILE SENZA ESSERE CONTINUA).

IL TERMINE ASSOLUTAMENTE CONTINUO SI RIFERISCE AD ALTRO. COME DETTO P_X È UNA PROBABILITÀ SU $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$. NEL CASO DI UN VETTORE ASSOLUTAMENTE CONTINUO

$$P_X(B) = \int_B f(x)\,dx$$

CIOÈ P_X SI OTTIENE "DEFORMANDO" LA MISURA EUCLIDEA ATTRAVERSO f. IN PARTICOLARE SE $|B|=0$ ALLORA $P_X(B)=0$, E VICEVERSA SE $P_X(B)\neq 0$ ALLORA $|B|\neq 0$. QUESTO È CIÒ CHE CARATTERIZZA UN VETTORE ALEATORIO COME ASS. CONTINUO. NOTARE CHE UN VETTORE ALEATORIO DISCRETO NON È ASS. CONTINUO, PERCHÉ LA DISTRIBUZIONE È NON NULLA SU INSIEMI COSTITUITI DA SINGOLI PUNTI.

- SE $X=(X_1,\dots,X_m)$ È UN VETTORE ALEATORIO ASS. CONTINUO CON DENSITÀ f, ALLORA OGNI SUA COMPONENTE X_k È UNA V.A. ASS. CONTINUA CON DENSITÀ f_k DEFINITA DA

$$f_k(t) = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} f(x_1,\dots,t,\dots,x_m)\,dx_1\,dx_{k-1}\,dx_{k+1}\dots dx_m$$

CIOÈ f_k È OTTENUTA INTEGRANDO f RISPETTO TUTTE LE ALTRE $m-1$ VARIABILI. NOTARE LA SIMILITUDINE CON

QUANTO FATTO NEL CASO DISCRETO

$$q_k(t) = \sum_{x \in E} q(x) \quad \text{CON} \quad E = \mathbb{R}^{k-1} \times \{t\} \times \mathbb{R}^{m-k}$$

<u>ATTENZIONE</u>: IL FATTO CHE UN VETTORE ALEATORIO ABBIA COMPONENTI ASS. CONTINUE NON ASSICURA CHE IL VETTORE SIA ASS. CONTINUO! PER ESEMPIO, SE $m=2$ ED X È UNA V.A. ASS. CONTINUA, ALLORA (X,X) NON È UN VETTORE ALEATORIO ASS. CONTINUO. SIA INFATTI (a,b) UN INTERVALLO T.C. $P\{X \in (a,b)\} \neq 0$. POSTO $B = \{(x,y) : x=y \text{ E } x \in (a,b)\}$, ABBIAMO $|B| = 0$ MA $P_{(X,X)}(B) = P\{(X,X) \in B\} = P\{X \in (a,b)\} \neq 0$.

VEDIAMO ORA QUALCHE RISULTATO. IL PRIMO È LA CONTROPARTE DI QUANTO VISTO NEL CASO DISCRETO (LEZIONE 14).

<u>PROPOSIZIONE</u> SIA $X = (X_1, \dots, X_m)$ UN VETTORE ALEATORIO ASS. CONTINUO CON DENSITÀ DEL TIPO

$$f(x) = \prod_{k=1}^{m} f_k(x_k) \qquad (1)$$

PER OPPORTUNE FUNZIONI $f_k : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$. ALLORA LE COMPONENTI SONO INDIPENDENTI.

VICEVERSA, SIANO $X_1, \dots, X_m$ V.A. ASS. CONTINUE CON DENSITÀ

$f_1, \dots, f_m$ RISPETTIVAMENTE. SE SONO INDIPENDENTI ALLORA $X = (X_1, \dots, X_m)$ È UN VETTORE ALEATORIO ASS. CONTINUO CON DENSITÀ DATA DA (1).

OMETTIAMO LA DIMOSTRAZIONE, ANALOGA AL CASO DISCRETO.

I SEGUENTI RISULTATI GENERALIZZANO INVECE QUANTO VISTO NEL CASO DI V.A. ASSOLUTAMENTE CONTINUE (LEZIONE 16).

RICORDO CHE DATI DUE APERTI $U, V \subset \mathbb{R}^m$ (EVENTUALMENTE UGUALI A TUTTO $\mathbb{R}^m$), UN' APPLICAZIONE $\phi : U \to V$ SI DICE <u>DIFFEOMORFISMO</u> SE È BIUNIVOCA, DI CLASSE C^1 E CON INVERSA C^1. INDICHIAMO CON $D\phi$ IL SUO GRADIENTE.

<u>PROPOSIZIONE</u> SIA X UN VETTORE ALEATORIO ASS. CONTINUO CON DENSITÀ f, E SIA $\phi : U \to V$ UN DIFFEOMORFISMO. SUPPONIAMO CHE $P\{X \in U\} = 1$. ALLORA $Y = \phi \circ X$ È UN VETTORE ALEATORIO ASS. CONTINUO CON DENSITÀ g DATA DA

$$g(y) = \begin{cases} f(\phi^{-1}(y))\,|\det D\phi^{-1}(y)| & \text{SE } y \in V \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

PROOF CONSEGUENZA DELLA FORMULA DI CAMBIO DI VARIABILE.

NOTA In generale, se $\phi : U \to V$ é solo continua, allora $\phi \circ X$ é vettore aleatorio ma non necessariamente ass. cont. Affinché lo sia serve che ϕ trasformi insiemi di misura non nulla in insiemi di misura non nulla. Se ϕ é un diffeomorfismo allora é vero, e in più abbiamo una formula per la densità.

COROLLARIO Sia A una matrice invertibile $m \times m$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Considerando la trasformazione affine $\phi(x) = Ax + b$, otteniamo che $Y = AX + b$ é un vettore aleatorio ass. continuo con densità

$$g(y) = \frac{1}{|\det A|} f(A^{-1}(y-b))$$

Dato un vettore aleatorio X ass. continuo e una mappa continua $\psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $Y = \psi \circ X$ é una v.a., ma non é necessariamente ass. continua. Possiamo comunque sfruttare la densità di X per il calcolo di $E[Y]$.

TEOREMA Y ha valore medio finito se e solo se

$$\int_{\mathbb{R}^m} |\psi(x)| f(x) dx < \infty$$

In tal caso

$$E[Y] = \int_{\mathbb{R}^m} \psi(x) f(x) dx$$

PROOF OMESSA

<u>NOTA</u> IL FATTO CHE $\psi \circ X$ SIA ASSOLUTAMENTE CONTINUO QUANDO X LO È DIPENDE DAL COMPORTAMENTO DI ψ: SERVE CHE ψ TRASFORMI INSIEMI DI MISURA NON NULLA (IN $\mathbb{R}^m$) IN INSIEMI DI MISURA NON NULLA (IN $\mathbb{R}$). È UN COMPORTAMENTO NON LEGATO ALLA REGOLARITÀ DI ψ (POTREBBE ESSERE C^∞ E NON ANDARE BENE, SI PENSI AL CASO ψ COSTANTE).

C'È UN CASO IMPORTANTE: $m=2$ E ψ OPERATORE DI SOMMA.

<u>PROPOSIZIONE</u> SIA (X,Y) UN VETTORE ALEATORIO BIDIMENSIONALE ($m=2$) ASS. CONTINUO CON DENSITÀ f. ALLORA $X+Y$ È UNA V.A. ASS. CONTINUA CON DENSITÀ

$$g(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x, t-x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(t-x, x)\,dx$$

A PATTO CHE LE FUNZIONI $x \to f(x, t-x)$ E $x \to f(t-x, x)$ SIANO INTEGRABILI.

PROOF DOBBIAMO FAR VEDERE CHE

$$P\{X+Y \leq z\} = \int_{-\infty}^{z} g(t)\,dt.$$

SIA $B_z := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \leq z\}$

Possiamo scrivere

$$P\{X+Y\le 2\} = P\{(X,Y)\in B_2\} = \int_{B_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

TRAMITE FUBINI
$$= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\chi_{B_2}(x,y)\,dy\right)dx = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{-\infty}^{2-x} f(x,y)\,dy\right)dx$$

CAMBIO VARIAB.
$$= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{-\infty}^{2} f(x,t-x)\,dt\right)dx \underset{\text{ANCORA FUBINI}}{=} \int_{-\infty}^{2}\left(\underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(x,t-x)\,dx}_{g(t)}\right)dt \qquad \blacksquare$$

Abbiamo il seguente corollario (che avevamo già enunciato nella lezione 17).

<u>Corollario</u> Siano X, Y due v.a. ass. continue con densità f_1 ed f_2 rispettivamente. Supponiamole indipendenti. Allora $X+Y$ è ass. continua con densità

$$g(t) = \int_{\mathbb{R}} f_1(x)\,f_2(t-x)\,dx$$

Basta infatti tener conto che (X,Y) è un vettore aleatorio ass. continuo con densità $f(x,y) = f_1(x)\,f_2(y)$.

SIMILMENTE A QUANTO FATTO PER LE V.A., INTRODUCIAMO PER I VETTORI ALEATORI LA FUNZIONE DI RIPARTIZIONE

<u>DEFINIZIONE</u> SIA X UN VETTORE ALEATORIO m-DIMENSIONALE. CHIAMIAMO <u>FUNZIONE DI RIPARTIZIONE</u> DI X LA FUNZIONE $F: \mathbb{R}^m \to [0,1]$ DEFINITA DA

$$F(x) = P\left\{ X \in \prod_{k=1}^{m} (-\infty, x_k] \right\} = P_X\left(\prod_{k=1}^{m} (-\infty, x_k] \right)$$

NOTARE CHE SE DUE VETTORI ALEATORI HANNO STESSA DISTRIBUZIONE ALLORA HANNO ANCHE STESSA FUNZIONE DI RIPARTIZIONE E VICEVERSA: DAI PLURIRETTANGOLI DELLA FORMA $\prod_{k=1}^{m} (-\infty, x_k]$ OTTENIAMO TUTTI I BORELIANI TRAMITE UNIONE\INTERSEZIONE\PASSAGGIO AL COMPLEMENTARE.

SE X È ASS. CONTINUO CON DENSITÀ f ALLORA F SI SCRIVE COME

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_m} f(x)\, dx_1 \ldots dx_m$$

E VICEVERSA.