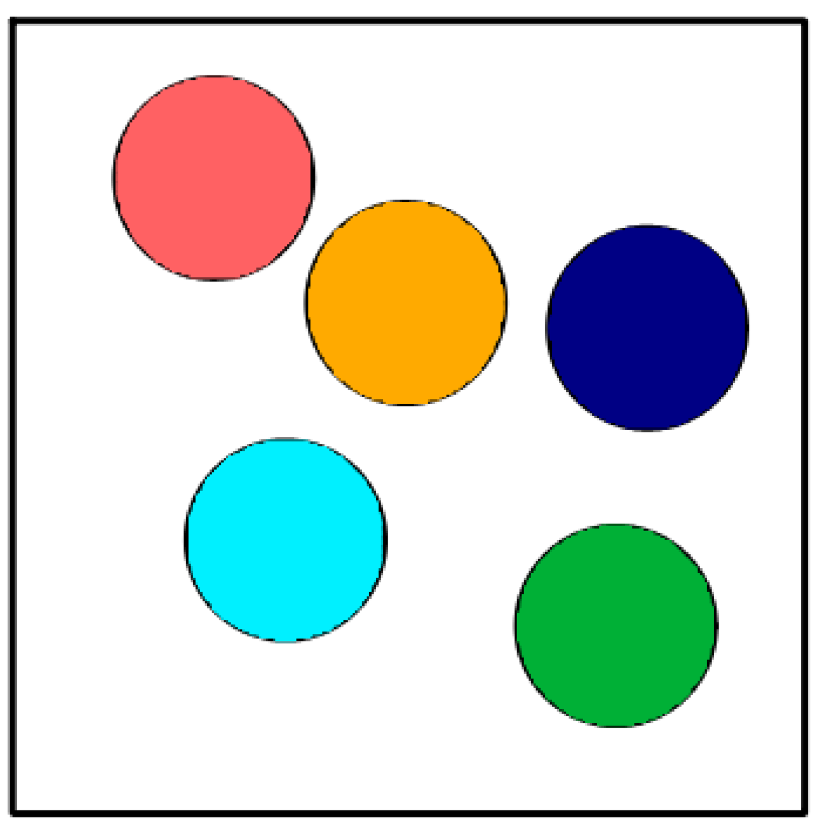
Cominciamo con un breve richiamo di combinatoria.

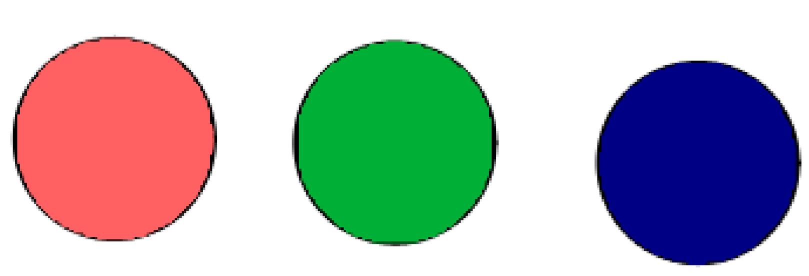
Supponiamo di avere un insieme di n oggetti (visualizziamolo come una scatola). Fissiamo $m \leq n$, scegliamo



$n=5$

m di questi n oggetti e creiamo una m-pla (visualizziamo come estrarli dalla scatola e metterli in fila sul tavolo). L'm-pla è detta <u>disposizione</u> di classe m su n oggetti. Quante ne esistono?

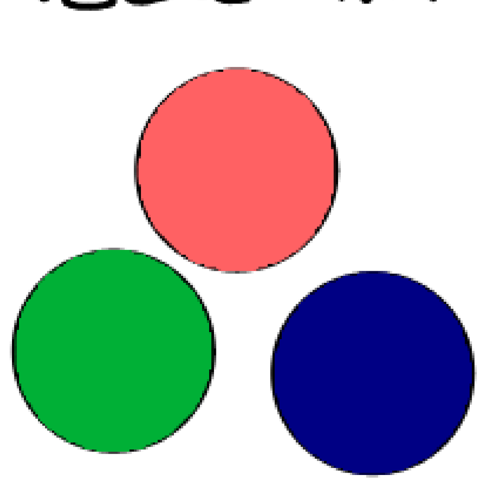
Esempio $m=3$



Nello scegliere il primo elemento della fila ho n opzioni, per il secondo $n-1$ opzioni e così via.

Quindi abbiamo $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$ disposizioni

Supponiamo ora di essere interessati solo ad un sottoinsieme di m oggetti (cioè non teniamo conto dell'ordine). Il sottoinsieme di m oggetti è detto <u>combinazione</u> di classe m su n oggetti. Quante ne esistono? Posso



ordinare ogni combinazione in $m!$ modi diversi per ottenere una disposizione.

Quindi abbiamo $\frac{n!}{(n-m)!\, m!} = \binom{n}{m}$ combinazioni.

INTRODUCIAMO UN CONCETTO NUOVO: LA PROBABILITÀ CONDIZIONALE. FACCIAMOLO CON UN ESEMPIO

<u>ESEMPIO</u> CONSIDERIAMO UN'URNA CON 10 PALLINE NUMERATE DA 1 A 10. EFFETTUIAMO UN'ESTRAZIONE. QUAL È LA PROBABILITÀ CHE LA PALLINA ESTRATTA ABBIA UN NUMERO ≤ 5? COME SPAZIO DEGLI EVENTI ELEMENTARI PRENDIAMO

$$\Omega := \{1, 2, \dots, 10\}$$

E LO DOTIAMO DELLA PROBABILITÀ UNIFORME

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{10} \quad \forall \omega \in \Omega$$

CHE ESTENDIAMO AD OGNI SOTTOINSIEME $A \subset \Omega$ AL SOLITO MODO: $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{|A|}{10}$

L'EVENTO FAVOREVOLE A CUI SIAMO INTERESSATI È

$$A := \{\omega \in \Omega : \omega \leq 5\}$$

E QUINDI LA PROBABILITÀ CERCATA È $P(A) = 1/2$.

TUTTO BEN NOTO E FACILE. SUPPONIAMO ORA DI SAPERE A PRIORI (TRAMITE UN INSIDER) CHE IL

NUMERO USCITO SARÀ PARI. QUESTO CI PORTA A CAMBIARE IL NOSTRO SPAZIO CAMPIONE IN

$$B := \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

CON UNA PROBABILITÀ UNIFORME

$$\tilde{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{5} \quad \forall \omega \in B$$

POICHÉ $C := \{\omega \in B : \omega \leq 5\} = \{2, 4\}$, ABBIAMO

$$\tilde{P}(C) = \frac{|C|}{|B|} = \frac{2}{5}$$

CIOÈ, SAPENDO CHE IL NUMERO ESTRATTO È PARI (INFORMAZIONE AGGIUNTIVA), LA PROBABILITÀ CHE ESCA UN NUMERO ≤ 5 SCENDE A $2/5$.

NOTARE CHE $C = A \cap B$ E CHE

$$\tilde{P}(C) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

<u>DEFINIZIONE</u> SIANO A E B DUE EVENTI IN UNO SPAZIO DI PROBABILITÀ $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, CON $P(B) > 0$. CHIAMIAMO <u>PROBABILITÀ CONDIZIONALE</u> DI A DATO B (CIOÈ SAPENDO CHE SI È VERIFICATO B) LA QUANTITÀ

$$P(A|B) := \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

N.B. $P(A|B)$ È UN MODO DI SCRIVERE, NON ESISTE ALCUN ELEMENTO $A|B$.

<u>PROPOSIZIONE</u> LA FUNZIONE $P(\cdot|B)$, CIOÈ

$$A \to P(A|B) \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

È UNA PROBABILITÀ SU $\mathcal{A}$.

DIM.

FACILE VERIFICA

<u>ESERCIZIO</u> VENGONO ESTRATTE 5 PALLINE DA UN'URNA CHE NE CONTIENE 90 (NUMERATE DA 1 A 90). CHE PROBABILITÀ C'È CHE ESCANO 1 E 7? E SAPENDO CHE DEI 5 NUMERI ESTRATTI 3 SONO DISPARI? ASSUMIAMO NON CI SIA REIMMISSIONE.

LO SPAZIO DEGLI EVENTI ELEMENTARI È COSTITUITO DALLE ESTRAZIONI DI CINQUINE DI NUMERI TRA 1 E 90, QUINDI

$\Omega := \{$ COMBINAZIONI DI CLASSE 5 IN $\{1, \dots, 90\}\}$

$= \{ \omega \in \{1, \dots, 90\} : |\omega| = 5 \}$

SAPPIAMO CHE $|\Omega| = \binom{90}{5}$. SU Ω INTRODUCIAMO LA SOLITA PROBABILITÀ UNIFORME. GLI EVENTI A CUI SIAMO INTERESSATI SONO

$A :=$ "I NUMERI ESTRATTI CONTENGONO 1 E 7"

$= \{ \omega \in \Omega : \{1, 7\} \subset \omega \}$

$B :=$ "TRE DEI NUMERI ESTRATTI SONO DISPARI"

$= \{ \omega \in \Omega : |\omega \cap \mathbb{N}_D| = 3 \}$

DOVE CON $\mathbb{N}_D$ HO INDICATO I NUMERI NATURALI DISPARI.

QUANTI ELEMENTI CONTIENE A? LE POSSIBILI CONFIGURAZIONI SI OTTENGONO AGGIUNGENDO A $\{1,7\}$ OGNI POSSIBILE COMBINAZIONE DI CLASSE 3 SUI RESTANTI $\{1, \dots, 90\} \setminus \{1, 7\}$ NUMERI. QUINDI

$$|A| = \binom{88}{3}$$

DA CUI

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{88}{3}}{\binom{90}{5}} = \frac{88!}{3!} \frac{5!}{90!} = \frac{2}{801} \sim 0{,}0025$$

QUANTI ELEMENTI CONTENGONO B E $A \cap B$?

GLI ELEMENTI DI $A \cap B$ SONO CINQUINE CHE CONTENGONO 1 E 7, PIÙ UN ALTRO NUMERO DISPARI DIVERSO DA 1 E 7 (CE NE SONO ALTRI 43 TRA 1 E 90), E DUE NUMERI PARI (CE NE SONO 45 TRA 1 E 90, QUINDI $\binom{45}{2}$ COMBINAZIONI).

PER IL PRINCIPIO FONDAMENTALE

$$|A \cap B| = 43 \binom{45}{2}$$

SIMILMENTE, DATO CHE B È COSTITUITO DA DUE NUMERI PARI E TRE NUMERI DISPARI

$$|B| = \binom{45}{2}\binom{45}{3}$$

ABBIAMO QUINDI

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} \cdot \frac{|\Omega|}{|B|} = \frac{|A \cap B|}{|B|}$$

$$= \frac{43}{\binom{45}{3}} = \frac{43 \cdot 42! \cdot 3!}{45!} = \frac{6}{45 \cdot 44} = \frac{1}{330} \sim 0{,}003$$

IN PRATICA CON MAGGIORI INFORMAZIONI LA PROBABILITÀ AUMENTA, ALMENO IN QUESTO CASO.

Può anche capitare però che l'informazione aggiuntiva "si è verificato B" sia ininfluente.

<u>Esempio</u> Lanciamo due volte una moneta.

Lo spazio degli eventi elementari è

$$\Omega := \{(T,T), (T,C), (C,T), (C,C)\}$$

cioè le disposizioni di classe 2 sull'insieme $\{\text{Testa}, \text{Croce}\}$. Consideriamo gli eventi

$$A := \text{"esce testa al secondo lancio"} = \{(T,T), (C,T)\}$$

$$B := \text{"esce testa al primo lancio"} = \{(T,T), (T,C)\}$$

Abbiamo $|\Omega| = 4$, $|A| = |B| = 2$, $|A \cap B| = 1$

in quanto $A \cap B = \{(T,T)\}$. Dunque, usando la probabilità uniforme

$$P(A) = \frac{1}{2} \qquad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$$

Intuitivamente tutto torna: avere informazioni sul primo lancio nulla ci dice sul secondo.

Questo ci porta alla seguente definizione

DEFINIZIONE DUE EVENTI A E B IN UNO SPAZIO DI PROBABILITÀ SI DICONO INDIPENDENTI SE

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \qquad (*)$$

IN PARTICOLARE, SE $P(B) > 0$, ALLORA A E B SONO INDIPENDENTI QUANDO

$$P(A) = P(A|B) \qquad (**)$$

CIOÈ LA PROBABILITÀ DI A NON CAMBIA CONOSCENDO B.

PREFERIAMO $(*)$ A $(**)$ COME DEFINIZIONE PERCHÉ COPRE ANCHE IL CASO $P(B)=0$. INOLTRE MOSTRA COME TALE PROPRIETÀ SIA SIMMETRICA RISPETTO A E B.

LA PROPRIETÀ CONDIZIONALE CI FORNISCE LA SEGUENTE FORMULA PER L'INTERSEZIONE DI EVENTI

PROPOSIZIONE (REGOLA DELLA CATENA).

DATI n EVENTI $A_1, \dots, A_n$ IN UNO SPAZIO DI PROBABILITÀ $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ TALI CHE $P\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right) > 0$, ABBIAMO

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = P(A_1)\, P(A_2|A_1)\, P(A_3|A_2 \cap A_1) \dots P\left(A_n \middle| \bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right)$$

$$= P(A_1) \cdot \prod_{j=2}^{n} P\left(A_j \middle| \bigcap_{k=1}^{j-1} A_k\right) \qquad (*{*}*)$$

PROOF

OSSERVIAMO INNANZITUTTO CHE $\bigcap_{k=1}^{j} A_k \supset \bigcap_{k=1}^{m-1} A_k$ PER OGNI $j \leq m-1$, QUINDI SE $P\left(\bigcap_{k=1}^{m-1} A_k\right) > 0$, ALLORA $P\left(\bigcap_{k=1}^{j-1} A_k\right) > 0$. QUESTO CI DICE CHE $P\left(A_j \middle| \bigcap_{k=1}^{j-1} A_k\right)$ HA SENSO E IL LATO DESTRO DI $(**)$ È BEN POSTO.

PER LA DIMOSTRAZIONE, PROCEDIAMO PER INDUZIONE.

QUANDO $m=2$ L'UGUAGLIANZA

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\, P(A_2 | A_1)$$

È FORNITA DALLA DEFINIZIONE DI PROBABILITÀ CONDIZIONALE.

AMMESSA VERA PER $m-1$, CIOÈ CHE

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{m-1} A_k\right) = P(A_1) \cdot \prod_{j=2}^{m-1} P\left(A_j \middle| \bigcap_{k=1}^{j-1} A_k\right)$$

ABBIAMO, ANCORA TRAMITE PROBABILITÀ CONDIZIONALE

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{m} A_k\right) = P\left(\left(\bigcap_{k=1}^{m-1} A_k\right) \cap A_m\right) = P\left(\bigcap_{k=1}^{m-1} A_k\right) P\left(A_m \middle| \bigcap_{k=1}^{m-1} A_k\right)$$

$$= P(A_1) \cdot \prod_{j=2}^{m} P\left(A_j \middle| \bigcap_{k=1}^{j-1} A_k\right)$$

■

VEDIAMO ORA CON UN ESEMPIO COME USARE LA PROBABILITÀ CONDIZIONALE PER COSTRUIRE UN MODELLO PROBABILISTICO, CIOÈ DEFINIRE UNA PROBABILITÀ P SU UNA σ-ALGEBRA $\mathcal{A}$ DI EVENTI SU UNO SPAZIO CAMPIONE Ω.

LO SPAZIO Ω SARÀ FINITO, QUINDI PER COSTRUIRE P CI BASTERÀ, COME AL SOLITO, DEFINIRE $P(\{\omega\})$ $\forall \omega \in \Omega$ E PORRE POI

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}) \qquad \forall A \in \mathcal{A}$$

QUELLO CHE FAREMO SARÀ COSTRUIRE P A PARTIRE DA ALCUNE PROBABILITÀ CONDIZIONALI $P(\cdot | B)$. QUESTO È SPESSO UTILE IN CASI REALI, DOVE SI HANNO INFORMAZIONI DEL TIPO "LA PROBABILITÀ CHE ACCADA È QUESTA SE ..."

__ESEMPIO__ SUPPONIAMO DI AVERE DUE URNE, CHE ETICHETTIAMO CON α E β.

$$\alpha \text{ CONTIENE } \begin{cases} 3 \text{ PALLINE NERE} \\ 1 \text{ PALLINA BIANCA} \end{cases}$$

$$\beta \text{ CONTIENE } \begin{cases} 1 \text{ PALLINA NERA} \\ 1 \text{ PALLINA BIANCA} \end{cases}$$

SAPENDO DI SCEGLIERE UNA DELLE DUE URNE CON LA STESSA PROBABILITÀ, E POI ESTRARRE A CASO DALL'URNA SCELTA UNA PALLINA, QUAL È LA PROBABILITÀ DI ESTRARRE UNA PALLINA NERA?

PRENDIAMO COME SPAZIO Ω L'INSIEME DEI POSSIBILI OUTPUT:

$$\Omega = \{\alpha m, \alpha b, \beta m, \beta b\}$$ DOVE

$$\begin{cases} \alpha m & \text{si è scelta urna } \alpha \text{ ed estratto nero} \\ \alpha b & \text{si è scelta urna } \alpha \text{ ed estratto bianco} \\ \beta m & \text{si è scelta urna } \beta \text{ ed estratto nero} \\ \beta b & \text{si è scelta urna } \beta \text{ ed estratto bianco} \end{cases}$$

L'EVENTO $A = \{\alpha m, \alpha b\}$ CORRISPONDE A "L'URNA SCELTA È LA α", L'EVENTO $N = \{\alpha m, \beta m\}$ CORRISPONDE A "LA PALLINA ESTRATTA È NERA".

COME DETTO, ASSUMIAMO CHE LA SCELTA DELL'URNA ABBIA UGUALE PROBABILITÀ DI ESSERE α OPPURE β, QUINDI

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

INOLTRE, SUPPONENDO DI AVER SCELTO L'URNA α, LA PROBABILITÀ DI ESTRARRE UNA PALLINA NERA È $3/4$, QUINDI

$$P(N|A) = \frac{3}{4}$$

SIMILMENTE, TENUTO CONTO CHE ALL'EVENTO $A^c = \{\beta m, \beta b\}$ CORRISPONDE "L'URNA SCELTA È LA β", ABBIAMO

$$P(N|A^c) = \frac{1}{2}$$

OTTENIAMO QUINDI

$$P(\{\alpha m\}) = P(A \cap N) = P(A)P(N|A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

SIMILMENTE

$$P(\{\beta m\}) = P(A^c \cap N) = P(A^c)P(N|A^c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

A QUESTO PUNTO POSSIAMO GIÀ RISPONDERE ALLA DOMANDA

$$P(\{\alpha m, \beta m\}) = P(\{\alpha m\}) + P(\{\beta m\}) = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

RICAPITOLIAMO. SAPENDO CHE

i) NELL'URNA α CI SONO 3 PALLINE NERE ED 1 BIANCA, ASSUNTA PROBABILITÀ UNIFORME NELL'ESTRAZIONE, ABBIAMO DEDOTTO CHE <u>SOTTO</u> LA CONDIZIONE DELLA SCELTA DELL'URNA α LA PROBABILITÀ È $3/4$ PER IL NERO

ii) NELL'URNA β CI SONO 1 PALLINA NERA ED 1 BIANCA, ABBIAMO DEDOTTO CHE <u>SOTTO</u> LA CONDIZIONE DELLA SCELTA DELL'URNA β LA PROBABILITÀ È $1/2$ PER IL NERO

iii) SAPENDO CHE LA SCELTA DELL'URNA α HA UNA PROBABILITÀ $1/2$ COSÌ COME QUELLA DELL'URNA β, DALLE PROBABILITÀ CONDIZIONALI DI CUI SOPRA ABBIAMO RICAVATO LA PROBABILITÀ "SVINCOLATA" DALLA SCELTA DELL'URNA.

FINIAMO DI COSTRUIRE IL NOSTRO SPAZIO DI PROBABILITÀ. TENUTO CONTO CHE ALL'EVENTO $N^c = \{\alpha b, \beta b\}$ CORRISPONDE "LA PALLINA ESTRATTA È BIANCA", ABBIAMO $P(N^c|A) = \frac{1}{4}$ E $P(N^c|A^c) = \frac{1}{2}$, DA CUI

$$P(\{\alpha b\}) = P(A \cap N^c) = P(A)P(N^c|A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

$$P(\{\beta b\}) = P(A^c \cap N^c) = P(A^c)P(N^c|A^c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

IN QUESTO MODO ABBIAMO DETERMINATO LA PROBABILITÀ DI OGNI EVENTO ELEMENTARE IN Ω.

VEDREMO QUI DI SEGUITO COME SIA POSSIBILE OTTENERE LA PROBABILITÀ DI UN EVENTO DALLE PROBABILITÀ CONDIZIONALI SENZA DOVER COSTRUIRE L'INTERO MODELLO PROBABILISTICO

<u>PROPOSIZIONE</u> SIA $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ UNO SPAZIO DI PROBABILITÀ E SIA $\{B_k\}_{k\in K} \subset \mathcal{A}$ UNA PARTIZIONE FINITA O NUMERABILE (CIOÈ K È COSTITUITO DA UN NUMERO FINITO DI INDICI, TIPO $K = \{1, \dots, m\}$, OPPURE $K = \mathbb{N}$). ALLORA

$$P(A) = \sum_{k\in K} P(A \cap B_k) \qquad \forall A \in \mathcal{A} \qquad \left[\begin{array}{l}\text{FORMULA DI}\\ \text{DISINTEGRAZIONE}\end{array}\right]$$

INOLTRE, SE $P(B_k) > 0 \quad \forall k \in K$, ALLORA

$$P(A) = \sum_{k\in K} P(A|B_k)P(B_k) \quad \forall A \in \mathcal{A} \qquad \left[\begin{array}{l}\text{FORMULA DELLE}\\ \text{PROBABILITÀ}\\ \text{TOTALI}\end{array}\right]$$

PROOF

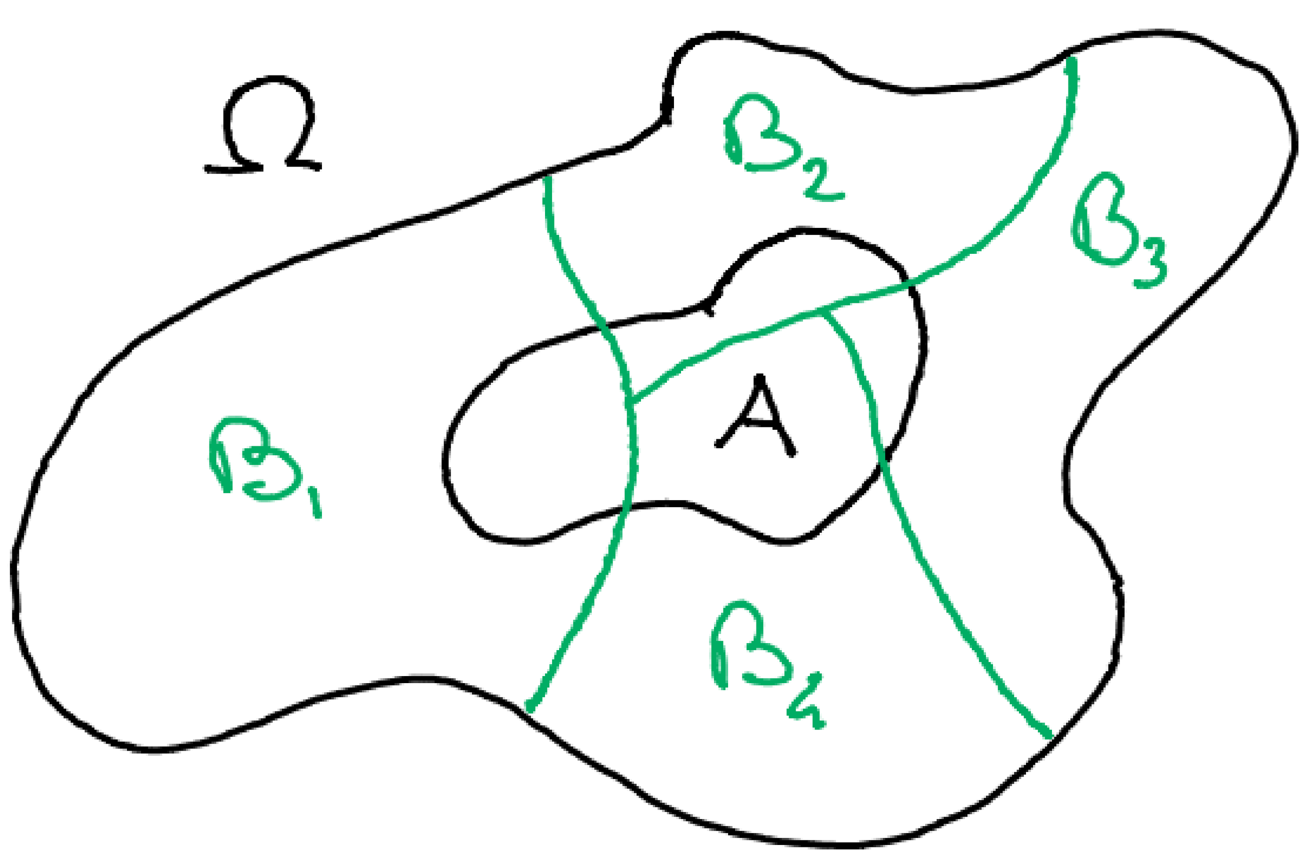
VI RICORDO CHE ESSERE UNA PARTIZIONE SIGNIFICA CHE GLI ELEMENTI DI $\{B_k\}_{k\in K}$ SONO A DUE A DUE DISGIUNTI, CIOÈ

$$B_k \cap B_i = \emptyset \quad \text{SE } i \neq k, \ \forall i, k \in K$$

E CHE $\{B_k\}_{k\in K}$ È UN RICOPRIMENTO DI Ω, CIOÈ

$$\bigcup_{k\in K} B_k = \Omega$$

PER AVERE UN'IDEA GEOMETRICA DELLA FORMULA DI DISINTEGRAZIONE, IMMAGINATE P COME LA MISURA (RINORMALIZZATA) DELL'AREA DELL'EVENTO A. PER SAPERE



QUANTO VALE L'AREA DI A VI BASTA SAPERE QUANTO VALGONO LE AREE DI $A\cap B_1$, $A\cap B_2$, $A\cap B_3$, $A\cap B_4$ E METTERE INSIEME TUTTO.

FORMALMENTE INVECE

$$A = A\cap\Omega = A\cap\left(\bigcup_{k\in K} B_k\right) = \bigcup_{k\in K}(A\cap B_k)$$

ESSENDO GLI EVENTI $\{B_k\}_{k\in K}$ DISGIUNTI, SONO DISGIUNTI ANCHE GLI EVENTI $\{A\cap B_k\}_{k\in K}$, QUINDI PER LA σ-ADDITIVITÀ

$$P(A) = P\left(\bigcup_{k\in K}(A\cap B_k)\right) = \sum_{k\in K} P(A\cap B_k)$$

INOLTRE, SE $P(B_k)>0$, ALLORA POSSIAMO SCRIVERE

$$P(A\cap B_k) = P(B_k)\,P(A|B_k)$$

■

IL RISULTATO CHE CI SERVE È QUESTO

<u>COROLLARIO</u> PER OGNI COPPIA DI EVENTI A E B CON $P(B) \in (0,1)$, SI HA CHE

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)$$
$$= P(A|B)P(B) + P(A|B^c)[1-P(B)]$$

TENUTO CONTO CHE $\{B, B^c\}$ È UNA PARTIZIONE DI Ω E CHE $P(B^c) = 1 - P(B) > 0$.

<u>ESEMPIO</u> TORNIAMO ALLE NOSTRE URNE. RICORDO CHE N È L'EVENTO "LA PALLINA ESTRATTA È NERA" E CHE A È L'EVENTO "L'URNA SCELTA È LA α".

AVEVAMO VISTO CHE

$$P(A) = \frac{1}{2} \qquad P(N|A) = \frac{3}{4} \qquad P(N|A^c) = \frac{1}{2}$$

QUINDI, PER IL COROLLARIO

$$P(N) = P(N|A)P(A) + P(N|A^c)[1-P(A)]$$
$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2}\right] = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

COME GIÀ TROVATO IN PRECEDENZA.