<u>DEFINIZIONE</u> Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno spazio di probabilità e sia $I \subset \mathbb{R}$. Chiameremo <u>processo stocastico reale</u> una famiglia $\{X_t : \Omega \to \mathbb{R}\}_{t \in I}$ di v.a. indicizzata da I.

Ci sono principalmente due casi

- $I = \mathbb{N}$ oppure $I = \mathbb{Z}$. Parleremo allora di processo <u>discreto</u>.
- $I = [a,b]$, $[a,+\infty)$, $\mathbb{R}$. Parleremo allora di processo <u>continuo</u>

Di solito t è un parametro temporale e la v.a X_t descrive la situazione in quel dato istante.

Le leggi dei vettori aleatori della forma $(X_{t_1}, \dots, X_{t_m})$ per qualche $m \in \mathbb{N}$ e $\{t_1, \dots, t_m\} \subset I$ sono chiamate le <u>leggi finito dimensionali</u> del processo $\{X_t\}_{t \in I}$. Non solo ci dicono chi sono le leggi di ogni singola v.a. X_t, ma anche come interaggiscono tra di loro le v.a. che costituiscono il processo. In effetti sono ciò che contraddistingue il processo stesso.

Un processo stocastico $\{X_t\}_{t\in I}$ è detto <u>gaussiano</u> se, per ogni $n\in\mathbb{N}$ e $\{t_1,\dots,t_n\}\subset I$, il vettore aleatorio $(X_{t_1},\dots,X_{t_n})$ è gaussiano.

Un processo stocastico $\{W_t\}_{t\in I}$ è detto <u>white noise</u> (rumore bianco, WN) di intensità σ^2 se

- per ogni $n\in\mathbb{N}$ e $\{t_1,\dots,t_n\}\subset I$ le v.a. $W_{t_1},\dots,W_{t_n}$ sono indipendenti.
- per ogni $t\in I$ $W_t\sim\mathcal{N}(0,\sigma^2)$.

Notare che in particolare un white noise è un processo gaussiano. Fissata l'intensità σ, risulta unico: se due WN hanno stessa intensità, allora le loro leggi finito dimensionali coincidono. La condizione di indipendenza significa che ciò che accade al tempo t non fornisce informazione su quello che accade al tempo $s\neq t$.

<u>Esempio</u> [<u>Passeggiata aleatoria</u>] Consideriamo una particella vincolata a muoversi lungo una retta, e i suoi spostamenti sono puramente casuali. Poniamo l'origine del nostro sistema di riferimento nel punto occupato dalla particella nell'istante

INIZIALE $t=0$. FISSATO UN INTERVALLO DI TEMPO $\Delta>0$, PONIAMO $t_n = n\Delta$. PER DESCRIVE LA POSIZIONE DELLA PARTICELLA AL TEMPO t_n USIAMO UN PROCESSO STOCASTICO $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ FATTO NEL MODO CHE SEGUE. FISSIAMO UN WHITE NOISE $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ CON UN CERTA INTENSITÀ σ^2, E PONIAMO

$$X_0 = 0 \qquad \text{E} \qquad X_{n+1} = X_n + W_n \qquad n\geq 0$$

LA SCELTA DI UN WN COME FATTORE DI INCREMENTO È MOTIVATA DAL FATTO CHE I SINGOLI MOVIMENTI SONO CASUALI (E QUINDI $X_{n-1}-X_n \sim N(0,\sigma^2)$) E CHE CONOSCERE COME LA PARTICELLA SI È MOSSA DA X_0 AD $X_1, \dots,$ DA X_{n-1} AD X_n NULLA CI DICE SU COME SI MUOVERÀ DA X_n AD X_{n+1} (INDIPENDENZA).

LE VARIABILI X_n NON SONO INDIPENDENTI (X_{n+1} DIPENDE OVVIAMENTE DA X_n). USANDO LA RICORRENZA SI HA

$$X_n = \sum_{k=0}^{n-1} W_k \qquad (*)$$

VISTA L'INDIPENDENZA DELLE W_n, DA $(*)$ SEGUE CHE $X_n \sim N(0, n\sigma^2)$. POICHÉ $\text{VAR}\, X_n = n\sigma^2$, LA "MEDIA DELLA DISTANZA" DELLA PARTICELLA DALL'ORIGINE AUMENTA COME $\sqrt{n}\,\sigma$, MA FLUTTUANDO LA POSIZIONE TRA VALORI

POSITIVI E NEGATIVI IL VALORE MEDIO DELLA POSIZIONE SI MANTIENE NULLO.

UN PROCESSO STOCASTICO $\{X_t\}_{t\in I}$, $I=[0,+\infty)$ È DETTO PROCESSO DI LEVY SE

- $X_0 \equiv 0$
- HA INCREMENTI INDIPENDENTI, CIOÈ PER OGNI $n \in \mathbb{N}$ E $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ LE V.A. ALEATORIE
$$X_{t_2}-X_{t_1},\ X_{t_3}-X_{t_2},\ \dots,\ X_{t_n}-X_{t_{n-1}}$$
SONO INDIPENDENTI
- HA INCREMENTI STAZIONARI, CIOÈ PER OGNI SCELTA DI $s<t$ LA V.A. $X_t - X_s$ HA LA STESSA LEGGE DI X_{t-s} ($=X_{t-s}-X_0$. SIGNIFICA CHE IL PROCESSO RIMANE LO STESSO SE LO TRASLIAMO NEL TEMPO)

TRA I PROCESSI DI LEVY CE NE È UNO FAMOSO: IL MOTO BROWNIANO (O PROCESSO DI WIENER). È UN PROCESSO $\{B_t\}_{t\in[0,\infty)}$ CHE OLTRE CHE SODDISFARE LE TRE RICHIESTE SOPRA SODDISFA ANCHE LE SEGUENTI:

- $B_t \sim \mathcal{N}(0,t)$
- FISSATO $\omega \in \Omega$, LA MAPPA $t \to B_t(\omega)$ È CONTINUA.

NOTARE CHE PER LA STAZIONARIETÀ, SE $t \geq s$ ALLORA $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$. È POSSIBILE MOSTRARE CHE $\{B_t\}$ È UN PROCESSO GAUSSIANO ANALIZZANDONE LE LEGGI FINITO DIMENSIONALI. INOLTRE È UNICO: DUE MOTI BROWNIANI HANNO STESSE LEGGI FINITO DIMENSIONALI.

IL MOTO BROWNIANO VIENE USATO PER DESCRIVERE MOLTI FENOMENI. PER ESEMPIO, SE SI VUOLE DESCRIVERE LA POSIZIONE DELLA PARTICELLA DI PRIMA, MA IN MODO CONTINUO (CIOÈ AD OGNI ISTANTE DI TEMPO). INTUITIVAMENTE, CI ASPETTIAMO DI POTER USARE LA PASSAGGIATA ALEATORIA PER $\Delta \to 0$. IN EFFETTI

- $X_n \sim N(0, n\sigma^2)$
- SE $n > m$
  $$X_n - X_m = \sum_{k=m}^{n-1} W_k \sim N(0, (n-m)\sigma^2)$$

- $X_t \sim N(0, t)$
- SE $t > s$
  $$X_t - X_s \sim N(0, t-s)$$

LA MAPPA $t \to B_t(\omega)$ RAPPRESENTA LA TRAIETTORIA DELLA PARTICELLA QUANDO SI REALIZZA L'EVENTO $\omega \in \Omega$ ED È NATURALE RICHIEDERE CHE SIA CONTINUA.

CERCHIAMO ORA DI MODELLIZZARE I TEMPI IN CUI SI VERIFI-CANO EVENTI "IMPREVEDIBILI" (PER ESEMPIO L'ERUZIONE DI UN VULCANO, O UN TERREMOTO).

VOGLIAMO FARLO ATTRAVERSO UN PROCESSO STOCASTICO $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ DOVE T_n RAPPRESENTA L'ISTANTE IN CUI IL FENOMENO IN ESAME AVVIENE PER L'n-ESIMA VOLTA.

SUPPONIAMO DUNQUE $0 < T_1 < \dots < T_n < \dots$

CHE TIPO DI V.A. UTILIZZARE? CHE LEGAME DEVE INTERCORRERE TRA DI ESSE?

- SAPERE I TEMPI INTERCORSI $T_n - T_{n-1}, \dots, T_2 - T_1$ NON CI FORNISCE ALCUNA INFORMAZIONE SU $T_{n+1} - T_n$.

RICHIEDIAMO QUINDI CHE GLI INCREMENTI SIANO INDI-PENDENTI

- SAPERE CHE SI È VERIFICATO L'EVENTO $\{T_{n+1} > T_n + h\}$ (CIOÈ IL FENOMENO NON SI È MANIFESTATO NELL'INTER-VALLO $(T_n, T_n + h)$) NON FORNISCE ALCUNA INFORMAZIONE SU $T_{n+1} - T_n - h$ (CIOÈ SUL TEMPO CHE SI DEVE ATTENDERE PER LA PROSSIMA OCCORRENZA), QUALE CHE SIA $h > 0$.

CIOÈ $P\{T_{n+1} - T_n > t + h \mid T_{n+1} - T_n > h\} = P\{T_{n+1} - T_n > t\}$

QUESTA È LA PROPRIETÀ DI ASSENZA MEMORIA. RICHIEDIAMO QUINDI CHE GLI INCREMENTI SIANO V.A. DI TIPO ESPONENZIALE. PER OMOGENEITÀ POSSIAMO SUPPORLE TUTTE CON LO STESSO PARAMETRO λ.

FISSIAMO DUNQUE UN PROCESSO STOCASTICO $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ TALE CHE

- PER OGNI $k\in\mathbb{N}$ E $\{n_1,\dots,n_k\}\subset\mathbb{N}$ LE V.A. $E_{n_1},\dots,E_{n_k}$ SONO INDIPENDENTI.
- PER OGNI $n\in\mathbb{N}$ $E_n\sim\mathcal{E}(\lambda)$

PONIAMO $T_n := \sum_{k=1}^{n} E_k$. IN UN CERTO SENSO $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ GIOCA IL RUOLO DEL WHITE NOISE NEL CASO DELLA PASSEGGIATA ALEATORIA.

INFINE PONIAMO PER $t\in[0,+\infty)$

$$N_t := |\{n\in\mathbb{N} : T_n\leq t\}| = \max\{n\in\mathbb{N}:T_n\leq t\}$$

CIOÈ N_t CONTA QUANTE VOLTE IL FENOMENO SI È PRESENTATO NELL'INTERVALLO $[0,t]$. IL PROCESSO $\{N_t\}_{t\in[0,+\infty)}$ È DETTO DI <u>POISSON</u> CON INTENSITÀ λ. È UN PROCESSO CONTINUO PERCHÈ $I=[0,+\infty)$. LE V.A. N_t CHE LO COSTITUISCONO SONO DISCRETE PERCHÈ RESTITUISCONO VALORI INTERI.

LEMMA Sia $\{N_t\}_{t\in[0,+\infty)}$ un processo di Poisson con intensità λ. Allora

$$N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t) \qquad \forall t \in (0,+\infty)$$

PROOF

Ricordo che $\mathcal{E}(\lambda) = \Gamma(1,\lambda)$ e che se $E_1, \dots, E_n \sim \mathcal{E}(\lambda)$ sono indipendenti allora $\sum_{k=1}^{n} E_k \sim \Gamma(n,\lambda)$. Questo fornisce nel nostro caso le leggi delle T_n.

Ora, per $n=0$ abbiamo

$$P\{N_t = 0\} = P\{T_1 > t\} = \int_t^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = e^{-\lambda t} = \mathcal{P}(\lambda t)(0)$$

stessi eventi

Per $n=1,2,\dots$ abbiamo invece, tenendo conto che

$$\{N_t = n\} = \{T_n \le t\} \setminus \{T_{n+1} \le t\} \quad \text{e} \quad \{T_{n+1} \le t\} \subseteq \{T_n \le t\},$$

$$P\{N_t = n\} = P\{T_n \le t\} - P\{T_{n+1} \le t\}$$

poiché $T_n \sim \Gamma(n,\lambda)$

$$= \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^t x^{n-1} e^{-\lambda x}\,dx - \frac{\lambda^{n+1}}{n!}\int_0^t \underbrace{x^n e^{-\lambda x}\,dx}_{*}$$

integrando per parti *

$$= \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^t x^{n-1} e^{-\lambda x}\,dx - \frac{\lambda^{n+1}}{n!}\left[-\frac{t^n}{\lambda} e^{-\lambda t} + \frac{n}{\lambda}\int_0^t x^{n-1} e^{-\lambda x}\,dx\right]$$

$$= e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} = \mathcal{P}(\lambda t)(n)$$

■

TEOREMA Sia $\{N_t\}_{t\in[0,+\infty)}$ un processo di Poisson con intensità λ. Per ogni $m\in\mathbb{N}$ e $0\leq t_1<\ldots<t_m$ le v.a. aleatorie $N_{t_2}-N_{t_1}, N_{t_3}-N_{t_2}, \ldots, N_{t_m}-N_{t_{m-1}}$ sono indipendenti (cioè il processo ha incrementi indipendenti)

Inoltre $N_{t_n}-N_{t_{n-1}} \sim \mathcal{P}(\lambda(t_n-t_{n-1}))$ (quindi il processo ha incrementi stazionari, visto che per il lemma precedente $N_{t_n-t_{n-1}} \sim \mathcal{P}(\lambda(t_n-t_{n-1}))$.

PROOF OMESSA

Assumendo che $N_0=0$, il teorema appena enunciato ci dice che i processi di Poisson fanno parte della famiglia dei processi di Levy.