DEFINIZIONE Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno spazio di probabilità.

Chiameremo **VARIABILE ALEATORIA** (V.A.) un'applicazione $X: \Omega \to \mathbb{R}$ tale che per ogni $B \in \mathcal{B}$

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$$

In parole povere, una variabile aleatoria ci permette di prendere un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ (che sia almeno decente, cioè in $\mathcal{B}$), e riportarlo su Ω dentro la famiglia $\mathcal{A}$ così da poterlo misurare tramite P (cioè assegnargli una probabilità)

LEMMA Una funzione $X: \Omega \to \mathbb{R}$ è una variabile aleatoria se e solo se una delle seguenti condizioni è soddisfatta

- $X^{-1}((a,b)) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in (a,b)\} \in \mathcal{A} \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$
- $X^{-1}([a,b]) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in [a,b]\} \in \mathcal{A} \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$
- $X^{-1}((-\infty,a)) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in (-\infty,a)\} \in \mathcal{A} \quad \forall a \in \mathbb{R}$
- $X^{-1}((-\infty,a]) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in (-\infty,a]\} \in \mathcal{A} \quad \forall a \in \mathbb{R}$

PROOF (SKETCH)

Sfruttando il fatto che unione\intersezione\passaggio al complementare commutano con X^{-1}, si vede facilmente

CHE LE QUATTRO CONDIZIONI SONO EQUIVALENTI.

PER ESEMPIO

$$X^{-1}((-\infty,a)) = X^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(a-k,a)\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} X^{-1}((a-k,a))$$

UNIONE E X^{-1} COMMUTANO

QUINDI SE $X^{-1}((a-k,a)) \in \mathcal{A}$ PER OGNI $k \in \mathbb{N}$, ALLORA ANCHE $X^{-1}((-\infty,a)) \in \mathcal{A}$. QUESTO PROVA CHE IL PRIMO PUNTO IMPLICA IL SECONDO.

APPURATO CHE LE QUATTRO CONDIZIONI SONO EQUIVALENTI, VA VERIFICATO CHE LA PRIMA IMPLICA CHE X È UNA VARIABILE ALEATORIA (IL VICEVERSA È BANALE).

IL PUNTO È IL SEGUENTE. LA FAMIGLIA

$$X^{-1}(\mathcal{B}) := \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$$

È A SUA VOLTA UNA σ-ALGEBRA SU Ω. DIRE CHE X È UNA VARIABILE ALEATORIA SIGNIFICA, PER DEFINIZIONE, CHE $X^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$. ORA, COSÌ COME $\mathcal{B}$ È LA PIÙ PICCOLA σ-ALGEBRA INCLUDENTE $\{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$, $X^{-1}(\mathcal{B})$ È LA PIÙ PICCOLA σ-ALGEBRA INCLUDENTE $\{X^{-1}((a,b)) : a,b \in \mathbb{R}\}$. QUINDI, SE $\{X^{-1}((a,b)) : a,b \in \mathbb{R}\}$ È INCLUSA IN $\mathcal{A}$, AUTOMATICAMENTE LO È $X^{-1}(\mathcal{B})$ PER MINIMALITÀ. $\blacksquare$

Per tradizione si usano le notazioni

$$\{X \in B\} \quad \text{per} \quad \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$$

$$\{a < X < b\} \quad \text{per} \quad \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in (a,b)\}$$

$$\{X < a\} \quad \text{per} \quad \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in (-\infty, a)\} \quad \text{e così via.}$$

Data una v.a. X, gli eventi $\{X \in B\}$, $B \in \mathcal{B}$, sono detti <u>generati</u> da X.

Notare che $\forall a \in \mathbb{R}$ $\{a\} = (-\infty, a] \cap [a, +\infty) \in \mathcal{B}$, quindi se X è una variabile aleatoria, allora

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) = a\} \in \mathcal{A}$$

Anche qui useremo la notazione semplificata $\{X = a\}$ per indicare questo insieme.

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[rr, "X"] & & \mathbb{R} \\
\mathcal{A} \arrow[d, "P"'] & & \mathcal{B} \arrow[dll, "P_X"] \\
{[0,1]} & &
\end{tikzcd}$$

Data una variabile aleatoria X, possiamo considerare su $\mathcal{B}$ la probabilità P_X così definita: $P_X(B) = P(\{X \in B\})$

Questa definizione ha senso perché $\{X \in B\} \in \mathcal{A}$.

P_X è detta <u>legge</u> (o <u>distribuzione</u>) di X.

Ci dice qual è la probabilità che X prenda valori in un insieme B.

<u>OSSERVAZIONE</u> QUANDO $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ È UNO SPAZIO DI PROBABILITÀ DISCRETO E LA σ-ALGEBRA $\mathcal{A}$ È LA FAMIGLIA DI TUTTI I SOTTOINSIEMI DI Ω, BANALMENTE OGNI FUNZIONE $X : \Omega \to \mathbb{R}$ È UNA V.A. IN QUANTO BANALMENTE $\{X \in B\} \in \mathcal{A}$ $\forall B \in \mathcal{B}$.

COME PRIMA COSA CI OCCUPEREMO DI <u>VARIABILI ALEATORIE DISCRETE</u>: SONO QUELLE CHE ASSUMONO AL PIÙ UNA QUANTITÀ NUMERABILE DI VALORI, CIOÈ $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$.

DATA UNA V.A. DISCRETA X, CONSIDERIAMO LA FUNZIONE $q : \mathbb{R} \to [0,1]$ DEFINITA DA

$$q(x) = P\{X = x\}$$

ABBIAMO CHE

- $q(x) = 0$ CON ECCEZIONE DEI VALORI $x_1, \dots, x_n, \dots$ ASSUNTI DA X
- $$\sum_{x \in \mathbb{R}} q(x) = \sum_n q(x_n) = \sum_n P\{X = x_n\} = P\left(\bigcup_n \{X = x_n\}\right) = P(\Omega) = 1$$

TENUTO CONTO CHE GLI INSIEMI $\{X = x_n\}$ SONO DISGIUNTI E LA LORO UNIONE COPRE TUTTO Ω.

LA FUNZIONE q È DETTA <u>DENSITÀ</u> ASSOCIATA AD X.

<u>OSSERVAZIONE</u> TRAMITE LA DENSITÀ q POSSIAMO CALCOLARCI P_X. INFATTI, TENUTO CONTO CHE

$$\{X \in B\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$$

$$= \bigcup_{x \in B} \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} = \bigcup_{x \in B} \{X = x\}$$

ABBIAMO

$$P_X(B) = P\{X \in B\} = \sum_{x \in B} P\{X = x\} = \sum_{x \in B} q(x)$$

È UNA SOMMATORIA CONTABILE

IN PRATICA, PER STABILIRE LA PROBABILITÀ "CHE X FACCIA QUALCOSA" NON È NECESSARIO CONOSCERE COMPLETAMENTE X, MA SOLO SAPERE QUAL È LA SUA DENSITÀ q.

<u>LEMMA</u> DATO UNO SPAZIO DI PROBABILITÀ $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ E UNA FUNZIONE $X : \Omega \to \mathbb{R}$ CHE ASSUME UN NUMERO DI VALORI AL PIÙ NUMERABILE, X RISULTA ESSERE UNA V.A. SE E SOLO SE $\{X = x\} \in \mathcal{A} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

PROOF

SE X È UNA V.A. ALLORA $\{X = x\} \in \mathcal{A}$ IN QUANTO $\{x\} \in \mathcal{B}$.

VICEVERSA, DATO $B \in \mathcal{B}$, POSSIAMO SCRIVERE

$$\{X \in B\} = \bigcup_{x \in B \cap X(\Omega)} \{X = x\}$$

CHE APPARTIENE AD $\mathcal{A}$ ESSENDO L'UNIONE AL PIÙ NUMERABILE.

■

<u>OSSERVAZIONE</u> PER LO STESSO MOTIVO, SE $X : \Omega \to \mathbb{R}$ È UNA V.A. DISCRETA, $\{X \in B\} \in \mathcal{A}$ QUALE CHE SIA $B \subset \mathbb{R}$.

<u>PROPOSIZIONE</u> SIA $q : \mathbb{R} \to [0,1]$ UNA FUNZIONE TALE CHE

i) $q = 0$ TRANNE CHE SU UNA QUANTITÀ AL PIÙ NUMERABILE DI PUNTI

ii) $\sum_{x \in \mathbb{R}} q(x) = 1$ (SI TRATTA DI UNA SOMMA FINITA O DI UNA SERIE VISTO IL PUNTO PRECEDENTE)

ALLORA ESISTE UNO SPAZIO DI PROBABILITÀ $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ E UNA V.A. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ AVENTE q COME DENSITÀ.

PROOF

SIA $\Omega := \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$. PER IL PUNTO (i) Ω È FINITO O NUMERABILE. SU Ω CONSIDERIAMO LA σ-ALGEBRA $\mathcal{A}$ COSTITUITA DA TUTTI I SOTTOINSIEMI DI Ω. DEFINIAMO

INOLTRE UNA PROBABILITÀ $P: \mathcal{A} \to [0,1]$ PONENDO

$$P(\{x\}) = q(x) \quad \forall x \in \Omega$$

E POI ESTENDENDO COME AL SOLITO

$$P(A) = \sum_{x \in A} P(\{x\}) \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

PER L'IPOTESI AL PUNTO (ii) QUESTA È EFFETTIVAMENTE UNA PROBABILITÀ.

INFINE, DEFINIAMO UNA MAPPA $X: \Omega \to \mathbb{R}$ PONENDO

$$X(\omega) = \omega \quad \forall \omega \in \Omega$$

VISTO CHE $\mathcal{A}$ COMPRENDE TUTTI I SOTTOINSIEMI DI Ω, X È BANALMENTE UNA VARIABILE ALEATORIA.

PER COSTRUZIONE

$$P\{X = x\} = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}) = P(\{x\}) = q(x)$$

$\blacksquare$

COME VEDETE UNA DENSITÀ NON SOLO INDIVIDUA LA DISTRIBUZIONE DI UNA VARIABILE ALEATORIA, MA È SOSTANZIALMENTE L'ATTORE PRINCIPALE.

DENSITÀ BINOMIALE

SIANO $m \in \mathbb{N}$ E $q \in (0,1)$ DUE NUMERI FISSATI. CHIAMIAMO DENSITÀ BINOMIALE DI PARAMETRI m E q LA FUNZIONE COSÌ DEFINITA

$$q(x) = \begin{cases} \binom{m}{x} q^x (1-q)^{m-x} & x = 0,1,\dots,m \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

LA INDICHIAMO CON IL SIMBOLO $\mathcal{B}(m,q)$. È POSSIBILE VERIFICARE CHE IN EFFETTI $\sum_{x \in \mathbb{R}} q(x) = 1$.

VEDIAMO UN CASO TIPICO DOVE COMPARE QUESTA DENSITÀ. RIPRENDIAMO LO SCHEMA DELLE PROVE INDIPENDENTI, PER UN NUMERO m DI RIPETIZIONI OGNUNA CON PROBABILITÀ q DI SUCCESSO. LO SPAZIO DI PROBABILITÀ DISCRETO IN QUESTO CASO È

$$\Omega = \{0,1\}^m \qquad \begin{bmatrix} 0 = \text{INSUCCESSO} \\ 1 = \text{SUCCESSO} \end{bmatrix}$$

CON PROBABILITÀ P DETERMINATA DA

$$P(\{\omega\}) = q^{\sum_{i=1}^{m} \omega_i} (1-q)^{m - \sum_{i=1}^{m} \omega_i} \qquad \forall \omega \in \Omega$$

CON ω_i COMPONENTE i-ESIMA DI ω.

DEFINIAMO ORA LA MAPPA $X : \Omega \to \mathbb{R}$ TRAMITE

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{m} \omega_i = \left\{ \text{QUANTE VOLTE 1 COMPARE NELL'} m\text{-PLA } \omega \right\}$$

CIOÈ X CONTA I SUCCESSI IN UN EVENTO ELEMENTARE ω.

CALCOLIAMOCI LA DENSITÀ DI X. DATO $x \in \mathbb{R}$

$$\{X=x\} = \{\omega \in \Omega : \sum_{i=1}^{m} \omega_i = x\}$$

CIOÈ L'EVENTO COSTITUITO DALLE M-PLE AVENTI COME SOMMA DELLE COMPONENTI x.

VISTO CHE ω HA COMPONENTI CHE SONO 0 OPPURE 1, $\{X=x\}$ SARÀ NON VUOTO SOLO QUANDO x È UN INTERO k COMPRESO TRA 0 ED m.

OGNUNA DELLE $\omega \in \{X=k\}$ HA PROBABILITÀ

$$P(\{\omega\}) = q^{\sum_{i=1}^{m}\omega_i} (1-q)^{m-\sum_{i=1}^{m}\omega_i} = q^k (1-q)^{m-k}$$

IL NUMERO TOTALE DEGLI ELEMENTI IN $\{X=k\}$ È PARI ALLE COMBINAZIONI SEMPLICI DI CLASSE k SU m OGGETTI: DOBBIAMO INFATTI DECIDERE ALL'INTERNO DELLA M-PLA DOVE PIAZZARE k "1" (ED $m-k$ "0"). ABBIAMO COSÌ

$$|\{X=k\}| = \binom{m}{k} \quad \text{E} \quad P\{X=k\} = \binom{m}{k} q^k (1-q)^{m-k}$$

AVEVAMO GIÀ TROVATO QUESTA SOLUZIONE NELL'ULTIMO DEI QUESITI SULLO SCHEMA DELLE PROVE INDIPENDENTI.

ABBIAMO DUNQUE PROVATO CHE $P\{X=x\} = q(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$.

QUAL È IL SIGNIFICATO DELLA DISTRIBUZIONE P_X ASSOCIATA AD X? DATO UN RANGE DI VALORI $B \subset \mathbb{R}$, $P_X(B) = P\{X \in B\}$ È LA PROBABILITÀ DI OTTENERE ESPERIMENTI CON UN NUMERO DI SUCCESSI NEL RANGE B.

<u>ESEMPIO</u> I BULLONI PRODOTTI DA UNA DITTA RISULTANO DIFETTOSI CON PROBABILITÀ DEL 20% E VENGONO MESSI IN COMMERCIO IN CONFEZIONI DA 3 PEZZI CIASCUNA. QUAL È LA PROBABILITÀ CHE IN UNA CONFEZIONE VI SIA AL PIÙ UN BULLONE DIFETTOSO?

SUPPONENDO CHE L'ESSERE UNO DEI BULLONI DIFETTOSO SIA INDIPENDENTE DAL FATTO CHE LO SIANO GLI ALTRI, POSSIAMO INQUADRARE IL NOSTRO PROBLEMA NELLO SCHEMA DELLE PROVE RIPETUTE. PRECISAMENTE TRE PROVE IN CUI IL SUCCESSO SIGNIFICA BULLONE A NORMA ED INSUCCESSO BULLONE DIFETTOSO. LA V.A. DI CUI FACCIAMO USO È QUELLA INTRODOTTA PRIMA, CIOÈ $X: \Omega \to \mathbb{R}$ DEFINITA DA

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{3} \omega_i$$

VISTO CHE RICHIEDIAMO CHE CI SIANO ALMENO DUE BULLONI A NORMA NELLA CONFEZIONE, STIAMO CONSIDERANDO IL RANGE $B = [2, \infty)$. LA PROBABILITÀ CHE IL SINGOLO BULLONE SIA A NORMA È $q = 8/10 = 4/5$. QUINDI

$$P\{X \in B\} = \sum_{x \in B} q(x) = q(2) + q(3)$$

$$= \underbrace{\binom{3}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^2\left(1-\frac{4}{5}\right)}_{\text{QUI } k=2} + \underbrace{\binom{3}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^3\left(1-\frac{4}{5}\right)^0}_{\text{QUI } k=3} = 0,896$$

IN QUANTO LA DENSITÀ $q(x)$ DI X È LA DENSITÀ BINOMIALE $B(3, 4/5)$.