$\Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ $\Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$ $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2+y^2} \in \mathbb{R}$
$\rho e^{i\theta} = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ $z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$
$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) \in \mathbb{C}^*$
$\cos(z) := \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ $\sin(z) := \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ $\cosh(z) := \frac{e^z+e^{-z}}{2}$ $\sinh(z) := \frac{e^z-e^{-z}}{2}$

F. complessa di variabile reale: $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}, f(x) = u(x) + iv(x),$ con $u, v : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
F. localmente p-integrabile: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, p \in [1, +\infty), \forall K \Subset \mathbb{R}, \int_K |f(x)|^p \, dx < +\infty$
$L^p([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]; \mathbb{X} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}) := L^p_{\mathbb{X}}(T) := L^p$ è l'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ T-periodiche, localmente p-integrabili.
Norma: $\|f\|_{L^p_{\mathbb{X}}(T)} := \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$
Prodotto scalare: $\langle f \mid g \rangle := \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\overline{g(x)} \, dx$
Energia di una funzione: $\|f\|_2^2 := \|f\|_{L^2}^2 := \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)|^2 \, dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (u^2(x) + v^2(x)) \, dx$
$\|f\|_{L^1} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)| \, dx = \langle |f| \mid 1 \rangle \leq \|1\|_{L^2} \|f\|_{L^2} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 \cdot |f(x)| \, dx = \sqrt{T} \|f\|_{L^2}$
Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz: $|\langle f \mid g \rangle| \leq \|f\| \|g\|$
Serie di Fourier: $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)),$ $a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$ $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x},$ $c_n \in \mathbb{C}$
Ridotta N-esima: $S_N(x) := \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\omega x}$
Convergenza puntuale: $\lim_{N \to +\infty} S_N(x) = f(x)$ **Convergenza uniforme**: $\lim_{N \to +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} (S_N(x) - f(x)) = 0$
F. k volte derivabilie: $\mathcal{C}^k(X; Y) := \{f : X \subset \mathbb{R} \to Y = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ k volte derivabili$\}$, $\mathcal{C}^0 = \mathcal{C}$ spazio delle funzioni continue.
M-Test di Weierstrass: $\{f_n\}$ sucessione di funzioni, $\{M_n\}$ successione di numeri reali positivi, $|f_n(x)| \leq M_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente.
Continuità del limite: $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}(E; \mathbb{C})$ converge uniformemente a f allora $f \in \mathcal{C}(E; \mathbb{C})$.
Integrazione termine a termine: $f_n : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, integrabile, $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente a f allora $\int_a^b f(x) \, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(x) \, dx$.
Derivazione termine a termine: $f_n : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, derivabile, $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente a f e $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$ converge uniformemente a g allora $f \in \mathcal{C}^1([a, b]; \mathbb{C})$ e $f'(x) = g(x)$, ossia $\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$.
Convergenza uniforme di serie trigonometriche: $\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n| + |b_n|) < +\infty \Rightarrow f(x)$ converge uniformemente in $\mathbb{R}$.
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty \Rightarrow f(x)$ converge uniformemente in $\mathbb{R}$.
Analisi di Fourier: $c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-in\omega x} \, dx,$ $a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos(n\omega x) \, dx$ $b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin(n\omega x) \, dx$
Associare a una f. la sua serie di Fourier: $f \in L^1_{\mathbb{X} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}}(T) \Rightarrow$ i coefficienti di Fourier sono ben definiti ed è possibile associare canonicaente a f una serie trigonometrica.
Spettro di una f.: $f \in L^1_{\mathbb{X}}$ se $\mathbb{X} = \mathbb{C}$, $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{c_n(f)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ è lo spettro, se $\mathbb{X} = \mathbb{R}$, $\{a_0, (a_n, b_n)_{n \geq 1}\} = \{a_0(f), (a_n(f), b_n(f))_{n \geq 1}\}$ è lo spettro.
Sintesi di Fourier (inverso): $c = \{c_n\}_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x} \overset{?}{\mapsto} f$
Convergenza puntuale della serie di Fourier: $f \in L^1_{\mathbb{C}}(T), \{c_n(f)\}_{n \in \mathbb{Z}},$ $S_N(x) := \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e^{in\omega x}, \lim_N S_N(x_0) = f(x_0)$?
Teorema di Dirichlet-Weiherstrass: $f \in L^1_{\mathbb{C}}(T)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, se esistono finiti $\lim_{x \to x_0^\pm} f(x_0^\pm), \lim_{x \to x_0^\pm} \frac{f(x) - f(x_0^\pm)}{x - x_0}$ allora $\lim_{N \to +\infty} S_N(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$.
Lemma di Riemann-Lebesgue: $f \in L^1_{\mathbb{C}}(T), c_n = c_n(f)$, allora $\lim_{n \to +\infty} c_n(f) = 0$.
Regolarità di una f. e decadimento dei coefficienti di Fourier
Lemma: $f, g \in \mathcal{C}^1([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}); \mathbb{C})$ T-periodiche, $c_n(f) = c_n(g)$ $\forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow f = g \forall x \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$.
Proposizione: $k \in \mathbb{N}, f \in L^1_{\mathbb{C}}(T)$ derivabile k volte e $f^{(j)} \in L^1_{\mathbb{C}}(T)$ $\forall j = 0, \ldots, k$, allora $c_n(f^{(j)}) = (i\omega n)^j c_n(f)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.
Lemma: $T > 0, k \in \mathbb{N}, \sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma_n e^{in\omega x}$ che converge puntualmente a f in $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ e $\exists p > k+1$ tale che $|\gamma_n| = O(|n|^{-p})$ allora $f \in \mathcal{C}^k([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}); \mathbb{C})$.