Metodi e Modelli Matematici per l'Intelligenza Artificiale

Giovanni Norbedo

2024-2025

Indice

Numeri complessi **1**
Numeri complessi in forma trigonometrica . . . 1
Numeri complessi in forma esponenziale . . . 2
Potenze e radici di numeri complessi . . . 2
Esponenziale complesso . . . 3
Funzioni trigonometriche complesse . . . 3
Logaritmo complesso . . . 3
Funzioni complesse di variabile reale . . . 3

Funzioni periodiche **3**
Definizione funzione periodica . . . 3
Osservazione . . . 3
Notazione . . . 3
Osservazione . . . 4
Energia di una funzione . . . 4
Lemma . . . 4
Armoniche elementari . . . 4

Numeri complessi

$z^2 = -1$ ha due soluzioni: i e $-i$
$i^2 = -1$
$z := x + iy \quad x, y \in \mathbb{R}$
$\mathbb{C} := \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
$x = \Re(z)$ parte reale di z
$y = \Im(z)$ parte immaginaria di z
$z = x + iy = \Re(z) + i\Im(z)$
$z = x + iy \leftrightarrow (x, y)$ isometria tra $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$
$\overline{z} = x - iy$ coniugato di z (simmetria rispetto all'asse reale)
$\overline{\overline{z}} = z$
$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
$\Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$
$\Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$
$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}$ modulo di z, rappresentabile come la norma euclidea di $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

Numeri complessi in forma trigonometrica

$atan2(y, x)$ restituisce l'angolo compreso nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ tra l'asse reale positivo e il punto (x, y)

$$atan2(y,x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{se } x < 0, y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{se } x < 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0, y < 0 \\ \text{non definito} & \text{se } x = 0, y = 0 \end{cases}$$

$z \simeq (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

Quindi $\exists!(\rho,\theta) \in (0,+\infty) \times [-\pi,\pi)$ tali che $z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$

$$\begin{array}{llll} P: & (0,\infty) \times [-\pi,\pi) & \to & \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ & (\rho,\theta) & \mapsto & \Big(x(\rho,\theta), y(\rho,\theta)\Big) = (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) \end{array}$$

$\rho = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$
$\tan(\theta) = \frac{y}{x}$

$$\begin{array}{llll} P^{-1}: & \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} & \to & (0,\infty) \times [-\pi,\pi) \\ & (x,y) & \mapsto & \Big(\rho(x,y), \theta(x,y)\Big) = \Big(\sqrt{x^2+y^2}, atan2(y,x)\Big) \end{array}$$

$z = x + iy = \rho\cos(\theta) + i\rho\sin(\theta) = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ forma trigonometrica di z

Numeri complessi in forma esponenziale

$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \ldots$

$i^{4k+l} = i^{4k} \cdot i^l = 1 \cdot i^l = i^l \quad \forall k,l \in \mathbb{Z}$

Con l'espanzione in serie di Taylor $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, si ha che

$$e^{i\theta} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^m}{m!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\theta^{2n}}{(2n)!} + i\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

quindi $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

Un cerchio di raggio 1 centrato nell'origine del piano complesso, è una sfera unitaria complessa $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ ha degli elementi che possono essere scritti come $z = e^{i\theta}$ con $\theta \in [-\pi,\pi)$, ossia

$\mathbb{S}^1 = \{e^{i\theta} \mid z = e^{i\theta}, \theta \in [-\pi,\pi)\}$

Notiamo che $\overline{e^{i\theta}} = \overline{\cos(\theta) + i\sin(\theta)} = \cos(\theta) - i\sin(\theta) = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = e^{-i\theta}$

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$
$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Potenze e radici di numeri complessi

$z^n = \rho^n(e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$
$w^n = z$
$z = \rho e^{i\theta}$ e $w = re^{is}$

$$\begin{cases} \rho = r^n \\ e^{i\theta} = e^{ins} \end{cases}$$

$s = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \quad k \in \mathbb{Z}$
$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$

Esponenziale complesso

$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) \in \mathbb{C}^*$

Funzioni trigonometriche complesse

$\cos(z) := \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \sin(z) := \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

$\cosh(z) := \dfrac{e^{z} + e^{-z}}{2} \quad \sinh(z) := \dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2}$

Logaritmo complesso

$z = |z|e^{i\mathrm{Arg}z} = |z|e^{i(\mathrm{Arg}z + 2k\pi)} \quad k \in \mathbb{Z}$

$\log(z) = \log(|z|e^{i(\mathrm{Arg}z+2k\pi)}) = \log(|z|) + i(\mathrm{Arg}z + 2k\pi) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

Pertanto il logaritmo complesso non è univoco (come la radice complessa).

Esempio: $\log(-1) = \log(1) + i(\mathrm{Arg}(-1) + 2k\pi) = i\pi + i2k\pi = i(2k+1)\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

Funzioni complesse di variabile reale

Una funzione $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è del tipo $f(x) = u(x) + iv(x)$ con $u, v : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Si ha che: - f è continua se u e v sono continue
- f è derivabile se u e v sono derivabili e $f'(x) = u'(x) + iv'(x)$ - f è integrabile in $[a, b]$ se u e v sono integrabili in $[a, b]$ e $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u(x)\,dx + i\int_a^b v(x)\,dx$

Funzioni periodiche

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, p \in [1, +\infty)$ diciamo che f è *localmente p-integrabile* se $\forall K \Subset \mathbb{R}$, cioè K compatto incluso in $\mathbb{R}$, si ha che

$\displaystyle\int_K |f(x)|^p\,dx < +\infty$

- Se $p = 1$ diciamo che f è *localmente integrabile*
- Se $p = 2$ diciamo che f è *localmente quadrato integrabile*

Definizione funzione periodica

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è *periodica di periodo* $T > 0$ se $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha che $f(x + T) = f(x)$.

La quantità $\frac{1}{T}$ è detta *frequenza* della funzione f, mentre $\omega := 2\pi \cdot \frac{1}{T}$ è detta *frequnza angolare*.

Osservazione

Una funzione f periodica di periodo $T > 0$ è univocamente determinata dalla restrizione $f\,|_{[\alpha,\alpha+T]} \quad \forall\alpha \in \mathbb{R}$.
Denoteremo con $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ l'intervallo di lunghezza T centrato nell'origine, detto *periodo fondamentale*.

Notazione

Fissato $p \in [1, +\infty), T > 0$ e $\mathbb{X} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, indicheremo con $L^p([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]; \mathbb{X}) := L^p_{\mathbb{X}}(T)$ l'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ T-periodiche, localmente p-integrabili.
Per semplicità notazionale: $L^p := L^p_{\mathbb{C}}(T)$.

L'insieme $L^p_{\mathbb{X}}(T)$ dotato della norma $\|f\|_{L^p_{\mathbb{X}}(T)} := \left(\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$ è uno *spazio normato*.

Una funzione è detta *localmente integrabile* se è integrabile su ogni intervallo limitato. Mentre una funzione è detta *localmente p-integrabile* se $|f|^p$ è integrabile su ogni intervallo limitato, cioè $\int_{[a,b]} |f(x)|^p \, dx < +\infty, \quad \forall [a,b] \subset \mathbb{R}$.

Uno **spazio normato** è uno spazio vettoriale dotato di una norma, cioè una funzione che associa ad ogni vettore un numero reale non negativo, tale che: - $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in V$ - $\|x\| = 0 \iff x = 0$ - $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ - $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in V$

Osservazione

Notiamo che la norma associata allo spazio $L^2_{\mathbb{C}}(T)$ è canonicamente indotta dal prodotto scalare su $L^2_{\mathbb{C}}(T)$ definito come $\langle f \mid g \rangle := \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\overline{g(x)} \, dx$.

Energia di una funzione

Sia $f = u + iv : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, T-periodica, localmente quadrato integrabile, definiamo come *energia* di f la quantità $\|f\|_2^2 := \|f\|_{L^2}^2 := \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)|^2 \, dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (u^2(x) + v^2(x)) \, dx$.

Lemma

Sia $T > 0$, si ha che $L^2_{\mathbb{C}}(T) \subset L^1_{\mathbb{C}}(T)$.

Si dimostra applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

$\|f\|_{L^1} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)| \, dx = \langle |f| \mid 1 \rangle \leq \|1\|_{L^2} \|f\|_{L^2} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 \cdot |f(x)| \, dx = \sqrt{T} \|f\|_{L^2}$

La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz afferma che $|\langle f \mid g \rangle| \leq \|f\| \|g\|$.

Armoniche elementari

Consideriamo le tre famiglie di funzioni:

$\mathcal{A}_{\mathbb{R}} := \left\{ \frac{a_0}{2}, a_n \cos(n\omega x), b_n \sin(n\omega x) \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R} \right\}$
$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} := \left\{ c_n e^{in\omega x} \mid n \in \mathbb{Z}, c_n \in \mathbb{C} \right\}$
$\overline{\mathcal{A}}_{\mathbb{R}} := \{ A_0, A_n \cos(n\omega x + \varphi_n), A_n \sin(n\omega x + \varphi_n) \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, A_0 \in \mathbb{R}, A_n \geq 0, \varphi_n \in [-\pi, \pi) \}$

esse sono dette *armoniche elementari*.
Le fami