TORNIAMO AD ESAMINARE IL LANCIO DI UN DADO. AVEVAMO DESCRITTO LA SITUAZIONE TRAMITE LO SPAZIO DI PROBABILITÀ $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, DOVE $\Omega = \{1,\dots,6\}$, $\mathcal{A} = \{$FAMIGLIA DEI SOTTOINSIEMI DI $\Omega\}$, $P: \mathcal{A} \to [0,1]$ DEFINITA DA $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ O, EQUIVALENTEMENTE ESSENDO $\Omega$ FINITO, $P(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}$ (CIOÈ BASTA DEFINIRE P SUGLI EVENTI ELEMENTARI).

LA NOSTRA SCELTA DI PORRE $P(\{1\}) = \dots = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$ È DETTATA DA CONSIDERAZIONI RELATIVE AL SIMMETRIA DEL DADO.

SE IL DADO FOSSE SBILANCIATO POTREMMO INVECE DECIDERE DI PORRE $P(\{1\}) = \frac{1}{4}$ E $P(\{2\}) = \dots = P(\{6\}) = \frac{3}{20}$

PIÙ IN GENERALE, POSTO $\theta \in [1, \infty)$, POTREMMO PORRE

$$P_\theta(\{1\}) = \frac{1}{\theta} \quad \text{E} \quad P(\{2\}) = \dots = P(\{6\}) = \left(1 - \frac{1}{\theta}\right)\frac{1}{5}$$

QUINDI A SECONDA DELLA SCELTA $\theta$ AVREMO UNA SPECIFICA PROBABILITÀ $P_\theta: \mathcal{A} \to [0,1]$ E UN RELATIVO SPAZIO DI PROBABILITÀ $(\Omega, \mathcal{A}, P_\theta)$.

A SECONDA DI COME È FATTO IL DADO, UNO DEI VALORI DEL PARAMETRO $\theta$ FORNIRÀ UNO SPAZIO CHE DESCRIVE MEGLIO LA SITUAZIONE. TALE VALORE VA TROVATO TRAMITE OSSERVAZIONI.

DEFINIZIONE CHIAMEREMO MODELLO STATISTICO (PARAMETRICO) UNA FAMIGLIA DI SPAZI DI PROBABILITÀ $(\Omega, \mathcal{A}, P_\theta)$ INDICIZZATI DA $\theta \in \Theta$, DOVE $\Theta$ È UNA OPPORTUNA FAMIGLIA DI PARAMETRI. SI NOTI CHE L'INSIEME DEGLI EVENTI ELEMENTARI $\Omega$ E LA $\sigma$-ALGEBRA $\mathcal{A}$ SONO SEMPRE GLI STESSI, È LA PROBABILITÀ $P_\theta$ CHE VARIA CON IL PARAMETRO.

SUPPONIAMO ORA DI AVERE UNA VARIABILE ALEATORIA DISCRETA $X: \Omega \to \mathbb{R}$. SIA $q$ LA SUA DENSITÀ. PER DEFINIZIONE

$$q(x) = P\{X = x\} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

QUINDI SE VARIANO $P$ IN FUNZIONE DI UN PARAMETRO $\theta$, ANDRÀ A VARIARE ANCHE LA DENSITÀ DI $X$:

$$q(x) = P_\theta\{X = x\}$$

SIMILI CONSIDERAZIONI VALGONO NEL CASO ASSOLUTAMENTE CONTINUO. LA DENSITÀ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ È TALE CHE

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = P\{X \le x\} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

QUINDI SE VARIANO $P$ IN FUNZIONE DI $\theta$, CI TROVEREMO UNA DENSITÀ $f = f(t, \theta)$ TALE CHE

$$\int_{-\infty}^{x} f(t, \theta)\,dt = P_\theta\{X \le x\}$$

MOLTO SPESSO CI SIAMO TROVATI AD OPERARE CON UNA V.A. $X$ SENZA CONOSCERE ESPLICITAMENTE LO SPAZIO DI PROBABILITÀ $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ SOTTOSTANTE, MA CONOSCENDO SOLO LA DENSITÀ DI $X$.

SIMILMENTE, CI TROVIAMO SPESSO NELLA SITUAZIONE NON DI AVERE UN MODELLO STATISTICO $\{(\Omega, \mathcal{A}, P_\theta) : \theta \in \Theta\}$ E UNA V.A. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ CON DENSITÀ CHE VARIA CON $\theta$, MA DIRETTAMENTE UNA FAMIGLIA DI V.A. (DISCRETE O CONTINUE) CON UNA DENSITÀ CHE VARIA A SECONDA DI UN PARAMETRO $\theta$:

$$\{q(x, \theta) : \theta \in \Theta\}, \quad \{f(x, \theta) : \theta \in \Theta\}$$

PENSEREMO A QUESTA FAMIGLIA DI V.A. COME AD UN'UNICA V.A. DEFINITA SU UNO SPAZIO DI PROBABILITÀ IN CUI LA MISURA DI PROBABILITÀ $P$ VARIA CON $\theta$.

QUESTA È LA SITUAZIONE TIPICA IN CUI SAPPIAMO CHE IL FENOMENO È MODELLATO DA UNA V.A. DI UN DATO TIPO MA NON NE CONOSCIAMO I PARAMETRI. PER ESEMPIO

- $\{\mathcal{E}(\lambda) : \lambda \in (0, +\infty)\}$ È LA FAMIGLIA DELLE V.A. ESPONENZIALI. IL PARAMETRO $\lambda$ GIOCA IL RUOLO DI $\theta$ E $\Theta = (0, +\infty)$
- $\{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) : \mu \in \mathbb{R} \text{ E } \sigma \in (0, +\infty)\}$ È LA FAMIGLIA DELLE V.A GAUSSIANE. QUI $\theta = (\mu, \sigma)$ E $\Theta = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$.

CON LE NOZIONI DI PROBABILITÀ STUDIATE FINORA ABBIAMO POTUTO RISPONDERE AD UNA SERIE (RELATIVAMENTE ESTESA) DI DOMANDE DEL TIPO

- QUAL È LA PROBABILITÀ DELL'EVENTO ...
- QUAL È LA PROBABILITÀ CHE LA V.A. ...
- QUAL È LA MEDIA DELLA V.A. ...

ECC. NEL RISPONDERE A QUESTE DOMANDE ABBIAMO GIOCATO CONOSCENDO UN PUNTO FERMO: LA PROBABILITÀ P.

IN STATISTICA LE DOMANDE SONO SIMILI, MA ABBIAMO $P_\theta$ INVECE DI P. PER STIMARE $P_\theta$ CI SERVIAMO DI OSSERVAZIONI/DATI $x_1, \dots, x_m$ OTTENUTI TRAMITE ESPERIMENTI, E LE RISPOSTE ALLE DOMANDE SOPRA SARANNO DEL TIPO $\psi(\theta)$, CIOÈ DIPENDENTI DA $\theta$. LA COSTRUZIONE DEL MODELLO STATISTICO $(\Omega, \mathcal{F}, P_\theta)$ È DELICATA E NON BANALE. PER ESEMPIO, NEL COSTRUIRE QUELLO CON IL DADO, SIAMO SICURI CHE LA SCELTA DI $P_\theta$ CHE ABBIAMO FATTO SIA VALIDA?

LE OSSERVAZIONI $x_1, \dots, x_m$ VENGONO DI SOLITO PENSATE COME VALORI ASSUNTI DA UNA FAMIGLIA $X_1, \dots, X_m$ DI V.A. LA CUI LEGGE CONGIUNTA DIPENDE DAL PARAMETRO $\theta$

UN CASO FREQUENTE È QUELLO IN CUI $X_1, \dots, X_M$ SONO TRA LORO INDIPENDENTI E CON LA STESSA DISTRIBUZIONE: È LA FORMALIZZAZIONE MATEMATICA DEL CASO IN CUI LO SPERIMENTATORE DECIDE DI RIPETERE M VOLTE L'ESPERIMENTO, IN CONDIZIONI DI INDIPENDENZA.

DIAMO DUNQUE LA SEGUENTE DEFINIZIONE.

<u>DEFINIZIONE</u> SIA $\{(\Omega, \mathcal{A}, P_\theta) : \theta \in \Theta\}$ UN MODELLO STATISTICO. CHIAMEREMO <u>CAMPIONE</u> OGNI SUCCESSIONE $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ DI V.A. SU $\Omega$ CHE PER OGNI PROBABILITÀ $P_\theta$, $\theta \in \Theta$, SONO i.i.d. (INDIPENDENTI ED IDENTICAMENTE DISTRIBUITE).

L'M-PLA $(X_1, \dots, X_M)$ È DETTA CAMPIONE DI AMPIEZZA M.

NEL CASO DISCRETO [RISP. CONTINUO] OGNUNA DELLE $X_n$ AVRÀ DENSITÀ $\{q(x, \theta) : \theta \in \Theta\}$ [RISP. $\{f(x, \theta) : \theta \in \Theta\}$].

LO SPERIMENTATORE USERÀ LE V.A. $X_1, \dots, X_M$ PER STIMARE IL PARAMETRO INCOGNITO $\theta$, O PER DARE DIRETTAMENTE UNA RISPOSTA ALLA DOMANDA $\psi(\theta)$. PER QUESTO USERÀ UNA "<u>ELABORAZIONE</u>" $H = h(X_1, \dots, X_M)$ DI QUESTE V.A.

LA SITUAZIONE IDEALE SAREBBE CHE VALESSE L'UGUAGLIANZA

$$H(\omega) = \psi(\theta) \qquad \forall \omega \in \Omega \ \text{E} \ \forall \theta \in \Theta$$

cioè $h(x_1,\dots,x_m)=\psi(\theta)$ per ogni m-pla di valori osservati $(x_1,\dots,x_m)$. Troppo ottimistico, è più sensato chiedere che valga in media:

$$\mathbb{E}_\theta[H]=\psi(\theta) \qquad \forall \theta\in\Theta$$

Con il simbolo $\mathbb{E}_\theta$ stiamo indicando il valore medio rispetto alla probabilità $P_\theta$.

Diamo dunque le seguenti definizioni

<u>Definizioni</u> Sia $\{(\Omega,\mathcal{A},P_\theta):\theta\in\Theta\}$ un modello statistico e sia $\{X_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ un campione su di esso.

Una successione di variabili aleatorie $\{H_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ della forma

$$H_m=h_m(X_1,\dots,X_m)$$

dove le $h_m:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ sono funzioni regolari, viene detta <u>statistica campionaria</u> (o <u>stimatore</u>).

Per regolari intendo che trasformano v.a. in v.a.

La singola variabile $H_m$ è detta <u>statistica campionaria basata su un campione di taglia m</u>.

Una statistica campionaria $\{H_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ si dice <u>stimatore corretto</u> per una funzione $\psi:\Theta\to\mathbb{R}$ se le $H_m$ hanno valore medio finito rispetto ogni $P_\theta$ e

$$\mathbb{E}_\theta[H_m] = \psi(\theta) \quad \forall \theta \in \Theta \in \forall_{m \in \mathbb{N}}$$

FISSATA LA STATISTICA $H_m = h_m(X_1, \dots, X_m)$, QUANDO PRODUCIAMO UN DETERMINATO CAMPIONE $(x_1, \dots, x_m)$, IL VALORE $h_m(x_1, \dots, x_m)$ È DETTO <u>STIMA</u> PER $\psi(\theta)$.

<u>NOTA</u> NELLE DEFINIZIONI USIAMO SUCCESSIONI: $\{X_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ INVECE CHE M-PLE SOLO PER INDICARE CHE I CAMPIONI POSSONO ESSERE ARBITRARIAMENTE ESTESI.

## RICAPITOLIAMO

- LO STIMATORE $H_m$ È UNA VARIABILE ALEATORIA
- LA STIMA $h_m(x_1,\dots,x_m)$ È UN NUMERO REALE
- LE V.A. $X_1,\dots,X_m$ SONO I POSSIBILI OUTPUT DEGLI ESPERIMENTI. PRECISAMENTE, $X_n$ RAPPRESENTA IL RISULTATO DEL $n$-ESIMO ESPERIMENTO, O IL $n$-ESIMO ELEMENTO DEL CAMPIONE.

SE LO STATO È $\omega \in \Omega$, ALLORA L'OSSERVAZIONE RESTITUIRÀ $x_1 = X_1(\omega), \dots, x_m = X_m(\omega)$. EQUIVALENTEMENTE, SE OSSERVIAMO $x_1,\dots,x_m$ SIGNIFICA CHE SI È VERIFICATO L'EVENTO

$$\{X_n = x_n \ , \ n = 1,\dots,m\}$$

- SE A POSTERIORI DECIDIAMO DI CALCOLARE $h_n(x_1,\dots,x_m)$ PER STIMARE $\psi(\theta)$, IL MODELLO DI QUESTA STIMA È A PRIORI APPUNTO LA STATISTICA CAMPIONARIA $H_m = h_m(X_1,\dots,X_m)$. TALE STATISTICA HA LA PROPRIETÀ CHE IN MEDIA RESTITUISCE $\psi(\theta)$.

ESEMPIO CONSIDERIAMO UN MODELLO STATISTICO IN CUI $q(x,\lambda)$ È LA DENSITÀ DI TIPO POISSON $\mathcal{P}(\lambda)$. STIAMO PRENDENDO COME PARAMETRO $\Theta = \lambda$ E $\Theta = (0, +\infty)$.

PONIAMO $h_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$, CIOÈ PRENDIAMO COME $h_n$ LA MEDIA CAMPIONARIA SU $n$ DATI. ABBIAMO DUNQUE CHE LA STATISTICA CAMPIONARIA $H_n = h_n(X_1, \dots, X_n)$ COINCIDE CON LA MEDIA CAMPIONARIA $\bar{X}_n$.

PRENDENDO COME $\psi$ LA FUNZIONE IDENTITÀ, CIOÈ $\psi(\lambda) = \lambda$, ABBIAMO

$$\mathbb{E}_\lambda[H_n] = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}_\lambda[X_k] = \lambda = \psi(\lambda)$$

QUINDI $\{H_n\}$ È UNO STIMATORE CORRETTO PER $\psi$, CIOÈ PER IL PARAMETRO $\Theta$ STESSO.

ESEMPIO CONSIDERIAMO UN MODELLO STATISTICO IN CUI $f(x,\Theta)$ È LA DENSITÀ DI TIPO GAUSSIANO $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. STIAMO PRENDENDO COME PARAMETRO $\Theta = (\mu, \sigma^2) \in \Theta = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$.

DATO UN CAMPIONE $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ i.i.d. CON $X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, CONSIDERIAMO LE STATISTICHE CAMPIONARIE

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \quad \text{E} \quad S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \bar{X}_n)^2$$

RICORDO CHE $S_n^2$ È LA V.A. VARIANZA CAMPIONARIA DELLE V.A.

$X_1, \dots, X_m$. IN QUESTO CASO

$$h_m(x_1, \dots, x_m) = \frac{1}{m-1} \sum_{k=1}^{m} \left( x_k - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} x_j \right)^2$$

CIOÈ PRENDIAMO COME $h_m$ QUELLA CHE È CHIAMATA

VARIANZA CAMPIONARIA SU m DATI (NOTARE IL FATTORE $\frac{1}{m-1}$ CHE DIFFERISCE DAL FATTORE $\frac{1}{m}$ USATO NELLA DEFINIZIONE DI VARIANZA). CONSIDERIAMO ORA LE DUE FUNZIONI

$$\psi_1(\mu, \sigma^2) = \mu \quad \text{E} \quad \psi_2(\mu, \sigma^2) = \sigma^2$$

CIOÈ LE PROIEZIONI SULLA PRIMA E SULLA SECONDA COORDINATA. ABBIAMO $E_\theta[\bar{X}_m] = \mu = \psi_1(\theta)$ E QUINDI $\bar{X}_m$ È UNO STIMATORE CORRETTO PER $\psi_1$. INOLTRE

$$(m-1) E_\theta[S_m^2] = \sum_{k=1}^{m} E_\theta\left[ (X_k - \bar{X}_m)^2 \right]$$

USIAMO RIPETUTAMENTE LA LINEARITÀ DEL VALORE MEDIO

$$= \sum_{k=1}^{m} \left( E_\theta[X_k^2] + E_\theta[\bar{X}_m^2] - 2 E[X_k \bar{X}_m] \right)$$

$$= \left( \sum_{k=1}^{m} E_\theta[X_k^2] \right) + m E_\theta[\bar{X}_m^2] - 2 E\left[ \sum_{k=1}^{m} X_k \bar{X}_m \right]$$

$$= \left( \sum_{k=1}^{m} E_\theta[X_k^2] \right) - m E_\theta[\bar{X}_m^2]$$

$$\overset{*}{=} m(\mu^2 + \sigma^2) - m\left(\mu^2 + \frac{\sigma^2}{m}\right) = (m-1)\sigma^2$$

* RICORDANDO CHE $E[X^2] = \text{VAR}\, X + E[X]^2$ E CHE $\text{VAR}\, \bar{X}_m = \sigma^2/m$

DUNQUE $S_m^2$ È UNO STIMATORE CORRETTO PER $\psi_2$.

OSSERVAZIONE NELL'ESEMPIO IL FATTO DI OPERARE CON LA V.A. GAUSSIANE NON È STATO SFRUTTATO: ABBIAMO SOLO USATO IL FATTO CHE LE $X_m$ HANNO MEDIA $\mu$ E VARIANZA $\sigma^2$. NE SEGUE IL SEGUENTE RISULTATO GENERALE.

LEMMA DATO UN MODELLO STATISTICO $\{(\Omega, \mathcal{A}, P_\theta) : \theta \in \Theta\}$ E UN CAMPIONE $\{X_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ CON $X_m$ AVENTE MOMENTO SECONDO FINITO RISPETTO OGNI $P_\theta$, DEFINIAMO $\mu, \sigma^2 : \Theta \to \mathbb{R}$ TRAMITE

$$\mu(\theta) = E_\theta[X_m] \quad \text{E} \quad \sigma^2(\theta) = \mathrm{VAR}_\theta X_m \qquad \forall \theta \in \Theta$$

NOTARE CHE LE DEFINIZIONI SONO BEN POSTE PERCHÉ IL LATO DESTRO NON DIPENDE DA $m$: LE $X_m$ HANNO TUTTE LA STESSA DISTRIBUZIONE RISPETTO OGNI DATA $P_\theta$.

ALLORA GLI STIMATORI $\bar{X}_m$ E $S_m^2$ SONO CORRETTI PER $\mu = \mu(\theta)$ E $\sigma^2 = \sigma^2(\theta)$ RISPETTIVAMENTE.

IN UN DATO MODELLO STATISTICO PARAMETRICO, VENGONO UTILIZZATI DIFFERENTI STIMATORI CORRETTI PER UNA ASSEGNATA FUNZIONE $\psi = \psi(\theta)$. ABBIAMO VISTO COME LA VARIANZA SIA UN INDICE DI QUANTO UNA V.A. SIA CONCENTRATA INTORNO

AL SUO VALORE MEDIO. QUINDI, SE UNO STIMATORE $H_m$ É CORRETTO PER $\psi$, CIOÈ $E_\theta[H] = \psi(\theta)$, LA $Var_\theta H_m$ MISURERÀ QUANTO I VALORI DI $H_m$ SONO CONCENTRATI INTORNO $\psi$.

DEFINIZIONE CHIAMEREMO RISCHIO QUADRATICO MEDIO DELLO STIMATORE $H_m$ LA FUNZIONE

$$R_{H_m}(\theta) = E_\theta\left[(H_m - \psi(\theta))^2\right]$$

SE $H_m$ È CORRETTO OVVIAMENTE $R_{H_m}(\theta) = Var_\theta H_m$

LA CORRETTEZZA DI UN ESTIMATORE È DATA SU UN NUMERO FINITO $m$ DI OSSERVAZIONI. PUÒ ESSERE UTILE PERÒ ANCHE CONOSCERNE IL COMPORTAMENTO ASINTOTICO PER $m \to +\infty$. DAL PUNTO DI VISTA PRATICO, POTREBBE SUGGERIRCI DI AUMENTARE IL NUMERO DI OSSERVAZIONI PER AVERE STIME MIGLIORI.

DEFINIZIONE UNA SUCCESSIONE $\{H_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ DI STIMATORI DI $\psi = \psi(\theta)$ È DETTA CONSISTENTE SE CONVERGE IN PROBABILITÀ RISPETTO OGNI $P_\theta$ A $\psi(\theta)$, CIOÈ

$$\lim_{m \to +\infty} P_\theta\{|H_m - \psi(\theta)| > \varepsilon\} = 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \ \forall \theta \in \Theta$$

DAL PUNTO DI VISTA INTUITIVO, $\{H_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ È CONSISTENTE PER $\psi(\theta)$ SE, PER $m$ GRANDE, $H_m$ È UNA FUNZIONE DELLE OSSERVAZIONI CHE ASSUME VALORI PROSSIMI A $\psi(\theta)$ CON GRANDE PROBABILITÀ RISPETTO $P_\theta$.

PER LA LEGGE DEI GRANDI NUMERI, LA MEDIA CAMPIONARIA RISULTA ESSERE UNO STIMATORE CONSISTENTE DEL VALORE MEDIO. SE INOLTRE $E_\theta[H_m^4]$ È FINITO $\forall m\in\mathbb{N}$ E $\forall \theta\in\Theta$, ALLORA ANCHE LA VARIANZA CAMPIONARIA RISULTA CONSI=

STENTE.

## RICAPITOLIAMO II

LA MEDIA CAMPIONARIA $\bar{X}_m$ E LA VARIANZA CAMPIONARIA $S^2_m$ SONO STIMATORI CORRETTI E CONSISTENTI PER LA MEDIA $\mu$ E LA VARIANZA $\sigma^2$ RISPETTIVAMENTE. MENTRE LA MEDIA CAMPIONARIA ERA LARGAMENTE ATTESA, PER LA VARIANZA CAMPIONARIA IL RISULTATO ERA MENO ASPETTATO. NOTARE CHE ORA È NOTIVATA LA DEFINIZIONE

$$S^2_m = \frac{1}{m-1} \sum_{n=1}^{m} (X_n - \bar{X}_m)^2 \quad \text{INVECE DI} \quad \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} (X_n - \bar{X}_m)^2$$

ALTRIMENTI NON AVREMMO UNO STIMATORE CORRETTO!

NOTARE CHE $S^2_m$ PERMETTE DI STIMARE $\sigma^2$ <u>SENZA</u> CONOSCERE $\mu$. A TAL PROPOSITO SI RIVEDA L'ESEMPIO SUI KIWI, RILEGGENDOLO IN QUEST'OTTICA.

DI CONTRO, SE <u>$\mu$ È NOTA</u>, ALLORA COME STIMATORE POSSIAMO USARE

$$H_m = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} (X_n - \mu)^2$$

INFATTI

$$m\, \mathbb{E}_\theta[H_m] = \sum_{n=1}^{m} \mathbb{E}_\theta[(X_n - \mu)^2] = \sum_{n=1}^{m} \left( \mathbb{E}_\theta[X_n^2] + \mu^2 - 2\mu\, \mathbb{E}_\theta[X_n] \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{m} \left( \mathbb{E}_\theta[X_n^2] - \mu^2 \right) = \sum_{n=1}^{m} \sigma^2 = m\sigma^2$$