SIA $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ UNO SPAZIO DI PROBABILITÀ. ABBIAMO CONSI= DERATO NELLE LEZIONI PRECEDENTI IL CONCETTO DI <u>VARIA= BILE ALEATORIA</u>, CIOÈ DI UNA MAPPA $X : \Omega \to \mathbb{R}$ PER LA QUALE L'INSIEME

$$\{X \in E\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in E\} = X^{-1}(E)$$

APPARTIENE AD $\mathcal{A}$ (CIOÈ È UN EVENTO) QUANDO $E \subset \mathbb{R}$ È UN INSIEME DI VALORI "DECENTE", CIOÈ APPARTIENE ALLA σ-ALGEBRA DI BOREL $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (PER ESEMPIO E È UN IN= TERVALLO). IN PARTICOLARE HA SENSO

$$P_X(E) := P\{X \in E\}$$

P_X È CHIAMATA LA <u>DISTRIBUZIONE</u> ASSOCIATA AD X.
POSSIAMO VEDERE X COME L'OUTPUT DI UNA OSSERVAZIONE SU Ω (PER ESEMPIO "QUAL È LA PRIMA VOLTA CHE ESCE 4" IN UNA SUCCESSIONE DI LANCI DI UN DADO), MENTRE $P_X(E)$ CI DICE CHE PROBABILITÀ C'È CHE TALE OUTPUT RICADA ALL'INTERNO DI UN RANGE DI VALORI E (PER ESEMPIO SE $E = [2, 7]$, LA PROBABILITÀ CHE LA PRIMA VOLTA CHE ESCE 4 SIA TRA IL SECONDO E SETTIMO LANCIO).

Spesso capita che si effettuino in contemporanea osservazioni su Ω riguardo differenti aspetti, e se ne voglia capire il comportamento congiunto.

<u>Esempio</u> Consideriamo uno schema di n prove indipendenti e le due variabili aleatorie

X_1 = "numero di successi nelle n prove"

X_2 = "quando si verifica il primo successo"

Formalmente $\Omega = \{0,1\}^n$, $X_1(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i$ e

$$X_2(\omega) = \begin{cases} \min\{j \in \{1,\dots,n\} : \omega_j = 1\} & \text{se } \omega \neq (0,\dots,0) \\ +\infty & \text{se } \omega = (0,\dots,0) \end{cases}$$

Potremmo essere interessati a sapere la probabilità che su un totale di almeno 4 successi il primo di essi avvenga prima del terzo tentativo.

L'evento "ci sono almeno 4 successi" è $\{X_1 \geq 4\}$, mentre l'evento "il primo successo avviene prima del terzo tentativo" è $\{X_2 < 3\}$.

La risposta alla nostra domanda è quindi

$$P(\{X_1 \geq 4\} \cap \{X_2 < 3\})$$

RICORDO CHE ESPLICITAMENTE

$$\{X_1 \geq 4\} = \{\omega \in \Omega : X_1(\omega) \geq 4\} = X_1^{-1}([4,\infty))$$

$$\{X_2 < 3\} = \{\omega \in \Omega : X_2(\omega) < 3\} = X_2^{-1}((-\infty,3))$$

SE INTRODUCIAMO LA MAPPA $X : \Omega \to \mathbb{R}^2$ DEFINITA DA

$$X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega))$$

CIOÈ AVENTE COME COMPONENTI X_1 E X_2, E DEFINIAMO L'INSIEME $E = [4,\infty) \times (-\infty, 3)$, ALLORA ABBIAMO L'UGUAGLIANZA

$$\{X_1 \geq 4\} \cap \{X_2 < 3\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in E\} = X^{-1}(E)$$

USANDO LA NOTAZIONE $\{X \in E\} = X^{-1}(E)$, LA RISPOSTA ALLA NOSTRA DOMANDA SI RISCRIVE COME

$$P\{X \in E\}$$

QUESTA MODALITÀ CI PERMETTE UNA MAGGIORE FLESSIBILITÀ. QUI IL RANGE DI VALORI CONSIDERATO È LA PORZIONE DI SPAZIO $E = [4,\infty) \times (-\infty,3)$, MA ORA NULLA CI VIETA DI CONSIDERARE COME RANGE UN QUALSIASI SOTTOINSIEME "DECENTE" DI $\mathbb{R}^2$, CIOÈ APPARTENENTE ALLA σ-ALGEBRA DI BOREL $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

COME GIÀ FATTO NEL CASO $n=1,2,3$, DEFINIAMO σ-ALGEBRA DI BOREL SU $\mathbb{R}^n$, E LA INDICHIAMO CON IL SIMBOLO $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, LA PIÙ PICCOLA σ-ALGEBRA CONTENENTE LA FAMIGLIA

$$\left\{ \prod_{k=1}^{n} (a_k, b_k) : a_k, b_k \in \mathbb{R} \quad k=1,\dots,n \right\}$$

È UNA σ-ALGEBRA ABBASTANZA RICCA: CONTIENE AD ESEMPIO I SOTTOGRAFICI DELLE FUNZIONI CONTINUE $\mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$.

<u>LEMMA</u> SIA $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ UNO SPAZIO DI PROBABILITÀ E SIA $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$. LE SEGUENTI CONDIZIONI SONO EQUIVALENTI

i) LE COMPONENTI X_k, $k=1,\dots,n$, DI X SONO V.A.

ii) $\{X \in E\} \in \mathcal{A}$ PER OGNI E DELLA FORMA $\prod_{k=1}^{n} (a_k, b_k)$

iii) $\{X \in E\} \in \mathcal{A}$ PER OGNI $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

SIMILMENTE AI CASI $n=1,2$, ABBIAMO USATO LA NOTAZIONE

$$\{X \in E\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in E\} = X^{-1}(E)$$

PROOF

SE LE X_k SONO V.A. ALLORA $\{X_k \in (a_k, b_k)\} \in \mathcal{A}$ E QUINDI (i) E (ii) SONO EQUIVALENTI. L'EQUIVALENZA TRA (ii) E (iii) È INVECE SIMILE A QUELLA VISTA PER $n=1$. ∎

QUANTO ESPOSTO NELL'ESEMPIO E IL LEMMA CI PORTANO ALLA

<u>DEFINIZIONE</u> SIA $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ UNO SPAZIO DI PROBABILITÀ. CHIAMIAMO <u>VETTORE ALEATORIO</u> m-DIMENSIONALE UNA APPLICAZIONE $X : \Omega \to \mathbb{R}^m$ CHE VERIFICHI UNA DELLE TRE CONDIZIONI DEL LEMMA.

IN PARTICOLARE, DATO $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, POICHÉ DALLA (iii) $\{X \in E\}$ APPARTIENE AD $\mathcal{A}$ (CIOÈ È UN EVENTO), HA SENSO CONSIDERARE

$$P_X(E) := P\{X \in E\}$$

P_X È CHIAMATA <u>DISTRIBUZIONE</u> ASSOCIATA AL VETTORE ALEATORIO X. SI TRATTA DI UNA PROBABILITÀ SU $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$.

BADARE BENE CHE PER VERIFICARE CHE X SIA UN VETTORE ALEATORIO SI USA LA CONDIZIONE (i), O LA (ii), VISTO CHE SONO PIÙ FACILI DA CONTROLLARE.
DAL PUNTO DI VISTA OPERATIVO SI USA INVECE LA (iii) PERCHÉ PIÙ FLESSIBILE.

OCCUPIAMOCI ORA DEI VETTORI ALEATORI <u>DISCRETI</u>, CIOÈ QUELLI CHE ASSUMONO AL PIÙ UNA QUANTITÀ NUMERABILE DI VALORI. EQUIVALENTEMENTE, LE LORO COMPONENTI SONO V.A. DISCRETE.

DATO UN VETTORE ALEATORIO DISCRETO $X : \Omega \to \mathbb{R}^m$, CHIAMIAMO <u>DENSITÀ</u> DI X LA FUNZIONE $q : \mathbb{R}^m \to [0,1]$ DEFINITA DA

$$q(x) = P\{X = x\} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^m$$

DOVE $\{X = x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$.

COME NEL CASO DELLE V.A., LA DENSITÀ q VERIFICA

i) $q(x) = 0$ CON ECCEZIONE DEI VALORI (AL PIÙ NUMERABILI) CHE ASSUME X.

ii) $\sum_{x \in \mathbb{R}^m} q(x) = 1$

iii) $P_X(E) = P\{X \in E\} = \sum_{x \in E} q(x)$, CIOÈ LA DENSITÀ INDIVIDUA COMPLETAMENTE L'AZIONE DELLA DISTRIBUZIONE P_X.

SE $X_1, \dots, X_m$ SONO V.A. DISCRETE, LA DENSITÀ q DEL VETTORE ALEATORIO $X = (X_1, \dots, X_m)$ SI CHIAMA <u>DENSITÀ CONGIUNTA</u> DELLE V.A. $X_1, \dots, X_m$. VICEVERSA, SE

$X=(X_1,\dots,X_m)$ È UN VETTORE ALEATORIO DISCRETO, LE DENSITÀ $q_1,\dots,q_m$ DELLE V.A. $X_1,\dots,X_m$ SI CHIAMANO <u>DENSITÀ MARGINALI</u>.

<u>OSSERVAZIONE</u> SE CONOSCIAMO LA DENSITÀ q DI UN VETTORE ALEATORIO ALLORA POSSIAMO RISALIRE ALLE DENSITÀ MARGINALI. INFATTI, $\forall t\in\mathbb{R}$ ABBIAMO

$$q_1(t)=P\{X_1=t\}=P\{X_1=t \;\text{E}\; (X_2,\dots,X_m)\in\mathbb{R}^{m-1}\}$$

$$=P\{X\in\{t\}\times\mathbb{R}^{m-1}\}=\sum_{x\in\{t\}\times\mathbb{R}^{m-1}} q(x)$$

SIMILMENTE SI POSSONO RISCRIVERE LE ALTRE DENSITÀ:

$$q_k(t)=\sum_{x\in E} q(x) \quad \text{CON} \quad E=\mathbb{R}^{k-1}\times\{t\}\times\mathbb{R}^{m-k}$$

<u>ESEMPIO</u> CONSIDERIAMO UN'URNA CON n PALLINE, NUMERATE DA 1 A n. ESTRAIAMO DUE PALLINE <u>CON REIMMISSIONE</u> ED INDICHIAMO CON X_1, X_2 IL NUMERO SULLE PALLINE ESTRATTE. DATO CHE OGNI PALLINA HA LA STESSA PROBABILITÀ $1/n$ DI ESSERE ESTRATTA, SIA ALLA PRIMA CHE ALLA SECONDA ESTRAZIONE, ABBIAMO

$$q_1(r) = P\{X_1 = r\} = \begin{cases} 1/m & \text{SE } r = 1, \dots, m \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

$$q_2(r) = P\{X_2 = r\} = \begin{cases} 1/m & \text{SE } r = 1, \dots, m \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

POSSIAMO ANCHE SCRIVERE $q_1 = q_2 = \frac{1}{m} \chi_{\{1,\dots,m\}}$. RICORDO CHE DATO UN INSIEME $E \subset \mathbb{R}$, LA FUNZIONE INDICATRICE DI E É LA FUNZIONE

$$\chi_E(r) = \begin{cases} 1 & \text{SE } r \in E \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

LA DEFINIZIONE SI ESTENDE AD INSIEMI $E \subset \mathbb{R}^m$.

CONSIDERIAMO ORA IL VETTORE ALEATORIO $X = (X_1, X_2)$. QUELLE CHE ABBIAMO APPENA VISTO SONO LE SUE DENSITÁ MARGINALI. VEDIAMO ORA QUAL É LA SUA DENSITÁ, CIOÉ LA DENSITÁ CONGIUNTA DI X_1 ED X_2. FISSATO $x \in \mathbb{R}^2$, DOBBIAMO CAPIRE CHI É

$$q(x) = P\{X = x\}$$

POICHÉ $\{X = x\} = \{X_1 = x_1, X_2 = x_2\}$, AVENDO SCRITTO $x = (x_1, x_2)$, ABBIAMO

$$\begin{aligned} P\{X = x\} &= P(\{X_1 = x_1\} \cap \{X_2 = x_2\}) \\ &= P\{X_1 = x_1\} \cdot P\{X_2 = x_2\} \end{aligned}$$

CON L'ULTIMA UGUAGLIANZA DOVUTA AL FATTO CHE GLI EVENTI $\{X_1 = x_1\}$ E $\{X_2 = x_2\}$ SONO INDIPENDENTI: AVER PESCATO LA PALLINA x_1 ALLA PRIMA ESTRAZIONE NON INFLUENZA LA SECONDA ESTRAZIONE, VISTO CHE LA PALLINA VIENE REINMESSA NELL'URNA. ABBIAMO DUNQUE

$$q(x) = P\{X_1 = x_1\} \cdot P\{X_2 = x_2\} = \begin{cases} (1/m)^2 & \text{SE } x \in \{1, \dots, m\}^2 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

CIOÈ $\quad q = \frac{1}{m^2} \chi_{\{1, \dots, m\}^2}$ $\quad$ [CON $\{1, \dots, m\}^2$ INTENDO L'INSIEME DELLE COPPIE $\{(k,j) : k,j = 1, \dots, m\}$]

<u>ESEMPIO</u> SIMILE AL PRECEDENTE, PERÒ QUESTA VOLTA <u>SENZA</u> REINMISSIONE. È CHIARO CHE LA DENSITÀ q_1 DI X_1 È LA STESSA. OSSERVIAMO CHE, DATO $x \in \{1, \dots, m\}^2$, ABBIAMO

$$P\{X_2 = x_2 \mid X_1 = x_1\} = 0 \quad \text{SE } x_1 = x_2$$

VISTO CHE LA PALLINA ESTRATTA NON È RIMESSA NELL'URNA

D'ALTRA PARTE

$$P\{X_2 = x_2 \mid X_1 = x_1\} = \frac{1}{m-1} \quad \text{SE } x_1 \neq x_2$$

VISTO CHE DOPO LA PRIMA ESTRAZIONE $m-1$ PALLINE RESTANO NELL'URNA.

ABBIAMO DUNQUE

$$q(x) = P\{X=x\} = P(\{X_1=x_1\}\cap\{X_2=x_2\})$$

$$= P\{X_1=x_1\}\cdot P\{X_2=x_2 \mid X_1=x_1\}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{m(m-1)} & \text{SE } x\in\{1,\dots,m\}^2 \text{ E } x_1\neq x_2 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

CIOÈ $\quad q = \dfrac{1}{m(m-1)}\chi_E \quad$ DOVE $E=\{(k,j) : k,j=1,\dots,m \text{ E } k\neq j\}$

DALLA DENSITÀ DI X POSSIAMO RICAVARCI LA DENSITÀ MARGINALE q_2 DI X_2. DALL'OSSERVAZIONE

$$q_2(t) = \sum_{x\in\mathbb{R}\times\{t\}} q(t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{x_1\in\{1,\dots,m\}\\ x_1\neq t}} \frac{1}{m(m-1)} & \text{SE } t=1,\dots,m \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1/m & \text{SE } t=1,\dots,m \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

IN QUANTO $\displaystyle\sum_{\substack{x_1\in\{1,\dots,m\}\\ x_1\neq t}} \frac{1}{m(m-1)} = \frac{1}{m(m-1)}\left|\{x_1\in\{1,\dots,m\} : x_1\neq t\}\right| = 1/m$

QUINDI ANCHE LA DENSITÀ q_2 DI X_2 È LA STESSA DELL'ESEMPIO PRECEDENTE.

OSSERVAZIONE I DUE ESEMPI PRECEDENTI FORNISCONO DUE VETTORI ALEATORI AVENTI STESSE DENSITÀ MARGINALI MA DENSITÀ DIVERSE. NON È QUINDI POSSIBILE, IN GENERALE, CONOSCENDO LE DENSITÀ MARGINALI, RICOSTRUIRE LA DENSITÀ CONGIUNTA.

ESEMPIO CONSIDERIAMO UNA SEQUENZA DI n PROVE RIPETUTE ED INDIPENDENTI, CON m POSSIBILI OUTPUT. ETICHETTIAMO TALI OUTPUT CON $1, \dots, m$. SI ASSUME CHE OGNUNO DI ESSI HA PROBABILITÀ DI ESSERE OTTENUTO NELLA SINGOLA PROVA PARI A

$$q_1, \dots, q_m \qquad \text{con } \sum_{k=1}^{m} q_k = 1$$

LO SPAZIO DEGLI EVENTI ELEMENTARI CHE CONSIDERIAMO PER DESCRIVERE QUESTA SITUAZIONE È

$$\Omega = \{1, \dots, m\}^n$$

SI TRATTA DI UNA GENERALIZZAZIONE DEL CASO CON DUE SOLI OUTPUT (SUCCESSO/INSUCCESSO) CHE AVEVAMO ETICHETTATO CON 0, 1. CONSIDERIAMO LE SEGUENTI V.A.

$$X_j = \text{"NUMERO DI VOLTE CHE L'OUTPUT } j \text{ SI PRESENTA NELLE } n \text{ PROVE"} \qquad j = 1, \dots, m$$

PER ESEMPIO, SE $n=8$, $m=7$ E $\omega = (2, 4, 4, 3, 7, 6, 6, 6)$

ABBIAMO $X_1(\omega)=0$, $X_2(\omega)=1$, $X_3(\omega)=1$

$X_4(\omega)=2$, $X_5(\omega)=0$, $X_6(\omega)=3$, $X_7(\omega)=1$

PER $k=1,\dots,n$ E $j=1,\dots,m$ CONSIDERIAMO L'EVENTO

$$A_{k,j} = \text{“ALLA K-ESIMA PROVA È VENUTO IL RISULTATO J-ESIMO”} = \{\omega\in\Omega : \omega_k = j\}$$

SAPPIAMO CHE $P(A_{k,j}) = q_j$. DATO UN ELEMENTO $\omega\in\Omega$

POSSIAMO SCRIVERLO COME

$$\{\omega\} = A_{1,\omega_1} \cap A_{2,\omega_2} \cap \dots \cap A_{n,\omega_n}$$

ESSENDO GLI EVENTI $A_{k,j}$ INDIPENDENTI, ABBIAMO

$$P(\omega) = P(A_{1,\omega_1}) \cdot P(A_{2,\omega_2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{n,\omega_n})$$

$$= q_{\omega_1} \cdot q_{\omega_2} \cdot \ldots \cdot q_{\omega_n} = q_1^{X_1(\omega)} \cdots q_m^{X_m(\omega)}$$

(SE L'OUTPUT "2" È PRESENTE 3 VOLTE NELL'N-PLA ω, ALLORA $X_2(\omega)=3$, E TRA GLI $\omega_1,\dots,\omega_n$ CE NE SONO TRE CHE SONO UGUALI A 2. QUINDI IN $P(\omega)$ TROVEREMO IL TERMINE q_2 CON ESPONENTE 3).

IN QUESTO MODO ABBIAMO DEFINITO UNA PROBABILITÀ P SU Ω (IN MODO DEL TUTTO ANALOGO A QUELLO VISTO NEL CASO SUCCESSO/INSUCCESSO).

Consideriamo ora il vettore aleatorio $X = (X_1, \dots, X_m)$.
Dato $x \in \mathbb{R}^m$, $\{X = x\}$ è non vuoto solo se

$$x \in \{0, 1, \dots, n\}^m \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{m} x_j = n$$

In questo caso $\{X = x\}$ è costituito da n-ple in cui è presente x_j volte il risultato j, $j = 1, \dots, m$.
Per esempio, se $x = (0, 1, 1, 2, 0, 3, 1)$, allora
$\omega = (2, 4, 4, 3, 7, 6, 6, 6) \in \{X = x\}$
Quindi se $\omega \in \{X = x\}$, allora $P(\{\omega\}) = q_1^{x_1} \cdots q_m^{x_m}$.
Quanti sono gli elementi di $\{X = x\}$?
Dobbiamo contare quante configurazioni sono possibili per una n-pla. Fossero n numeri distinti, la risposta sarebbe $n!$ Però x_1 tra loro sono uguali ad 1, quindi indistinguibili. Dobbiamo dunque dividere $n!$ per $x_1!$ (numero di modi in cui posso permutare tra loro questi x_1 elementi). Similmente x_2 sono uguali a 2... e così via. In questo modo otteniamo

$$|\{X = x\}| = \frac{n!}{x_1! \cdots x_m!}$$

Notare che questo modo di contare è lo stesso usato per le permutazioni con ripetizione.

ABBIAMO COSÌ PROVATO CHE LA DENSITÀ DI X VALE

$$q(x) = P\{X = x\} = \begin{cases} \dfrac{n!}{x_1! \cdots x_m!}\, q_1^{x_1} \cdots q_m^{x_m} & \text{SE } x \in \{0, 1, \dots, n\}^m \text{ E } \sum_{j=1}^{m} x_j = n \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

QUESTA DENSITÀ È DETTA <u>MULTINOMIALE</u> E GENERALIZZA QUELLA BINOMIALE.