VEDIAMO QUALCHE ULTERIORE SEMPLICE PROPRIETÀ DEI VETTORI GAUSSIANI

LEMMA SE $X=(X_1,\dots,X_m)$ È GAUSSIANO E $\phi:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ È UNA TRASFORMAZIONE LINEARE, ALLORA $Y=\phi\circ X$ È GAUSSIANO.

PROOF SE $\psi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ È LINEARE, ALLORA $\psi\circ\phi:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ È LINEARE. DA $\psi\circ Y=(\psi\circ\phi)\circ X$ SEGUE CHE $\psi\circ Y$ È GAUSSIANO. ■

IN PARTICOLARE È GAUSSIANO OGNI VETTORE OTTENUTO PERMUTANDO LE COMPONENTI DI X, COSÌ COME RISULTA GAUSSIANO OGNI "SOTTOVETTORE" DI X.

LEMMA SE $X=(X_1,\dots,X_m)$ E $Y=(Y_1,\dots,Y_n)$ SONO DUE VETTORI ALEATORI GAUSSIANI INDIPENDENTI, ALLORA $Z=(X_1,\dots,X_m,Y_1,\dots,Y_n)$ È GAUSSIANO

PROOF

OGNI COMBINAZIONE LINEARE $s_1X_1+\dots+s_mX_m+t_1Y_1+\dots+t_nY_n$ È GAUSSIANA: $\sum_{k=1}^{m}s_kX_k$ E $\sum_{k=1}^{n}t_kY_k$ SONO GAUSSIANI ED INDIPENDENTI (ESSENDOLO X ED Y), QUINDI LA LORO SOMMA È GAUSSIANA. ■

SIMILMENTE, SE UN VETTORE ALEATORIO X HA COMPONENTI GAUSSIANE INDIPENDENTI, ALLORA È GAUSSIANO.

ABBIAMO DEFINITO IL CONCETTO DI VETTORE GAUSSIANO MULTIVARIATO IN BASE A QUELLO CHE È IL COMPORTAMENTO RISPETTO A TRASFORMAZIONI LINEARI. VEDIAMO ORA COME È FATTA LA SUA FUNZIONE CARATTERISTICA.

<u>TEOREMA</u> UN VETTORE ALEATORIO X m-DIMENSIONALE È GAUSSIANO MULTIVARIATO SE E SOLO SE LA SUA FUNZIONE CARATTERISTICA HA LA FORMA

$$\boxed{\phi(y) = \exp\left[i\langle a, y\rangle - \frac{1}{2}\langle Qy, y\rangle\right]} \qquad (*)$$

PER QUALCHE $a \in \mathbb{R}^m$ E Q MATRICE $m \times m$ NON NEGATIVA E SIMMETRICA. INOLTRE X È ASS. CONTINUO SE E SOLO SE Q È NON DEGENERE. IN TAL CASO LA SUA DENSITÀ È

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m \det Q}} \exp\left[-\frac{1}{2}\langle Q^{-1}(x-a), x-a\rangle\right]} \qquad (**)$$

PROOF

SUPPONIAMO CHE X ABBIA FUNZIONE CARATTERISTICA DATA DA (*). SIA $l \in \mathbb{R}^m$. NELLA LEZIONE PRECEDENTE ABBIAMO VISTO COME $\phi(tl)$ SIA LA FUNZIONE CARATTERISTICA DI $\langle X, l \rangle$. POICHÉ

$$\phi(tl) = \exp\left[i\langle a, l\rangle t - \frac{1}{2}\langle Ql, l\rangle t^2\right],$$

POSSIAMO AFFERMARE (PER IL RISULTATO DI CARATTERIZZAZIONE DELLE V.A. GAUSSIANE IN TERMINI DI FUNZIONE CARATTERISTICA) CHE $\langle X, l\rangle$ È GAUSSIANA (CON MEDIA $\langle a, l\rangle$ E VARIANZA $\langle Ql, l\rangle$).

PROVIAMO IL VICEVERSA. SIA $a = (E[X_1], \dots, E[X_m])$. DATO $l \in \mathbb{R}^m$, È POSSIBILE PROVARE CHE

$$a_l := E[\langle X, l\rangle] = \langle a, l\rangle$$

(PER APPROSSIMAZIONE, VISTO CHE VALE PER I VETTORI ALEATORI DISCRETI). INOLTRE, DETTA σ_l^2 LA VARIANZA DI $\langle X, l\rangle$, ABBIAMO

$$\sigma_l^2 = E\left[(\langle X, l\rangle - \langle a, l\rangle)^2\right] = E\left[(\langle X - a, l\rangle)^2\right]$$

LA MAPPA $\ell \to \sigma_\ell^2$ É UNA FORMA QUADRATICA NON NEGA=TIVA, QUINDI ESISTE UNA MATRICE $Q = (Q_{ij})$ SIMMETRICA E NON NEGATIVA TALE CHE $\sigma_\ell^2 = \langle Q\ell, \ell \rangle$.

DATO $y \in \mathbb{R}^m$, POSSIAMO ESPRIMERE $\phi(y)$ COME LA FUN=ZIONE CARATTERISTICA DI $\langle X, y \rangle$ CALCOLATA IN $t = 1$, OTTENENDO (VISTO CHE $\langle X, y \rangle$ É GAUSSIANA CON MEDIA a_y E VARIANZA σ_y^2)

$$\begin{aligned} \phi(y) &= \exp\left[i a_y - \frac{1}{2} \sigma_y^2 \right] \\ &= \exp\left[i \langle a, y \rangle - \frac{1}{2} \langle Q y, y \rangle \right] \end{aligned}$$

PROVIAMO ORA LA SECONDA PARTE. ASSUMIAMO X ASS. CONTINUO E SIA f LA SUA DENSITÀ. ABBIAMO

$$\begin{aligned} \langle Q\ell, \ell \rangle = \sigma_\ell^2 &= E\left[\left(\langle X - a, \ell \rangle \right)^2 \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\langle x - a, \ell \rangle \right)^2 f(x)\, dx \end{aligned}$$

NE DEDUCIAMO CHE $\langle Q\ell, \ell \rangle = 0$ SE E SOLO SE $\langle x - a, \ell \rangle = 0$ (ALTRIMENTI L'INTEGRALE SAREBBE POSITIVO) E QUINDI SE E SOLO SE $\ell = 0$. QUESTO PROVA CHE Q É NON DEGENERE.

VICEVERSA, SUPPONIAMO Q NON DEGENERE E SIA $\tilde{X}$ UN VETTORE ALEATORIO AVENTE (**) COME DENSITÀ. PROVIAMO CHE X E $\tilde{X}$ HANNO STESSA FUNZIONE CARATTERISTICA. QUESTO IMPLICA CHE X E $\tilde{X}$ HANNO STESSA DISTRIBUZIONE E QUINDI CHE X È ASS. CONTINUA CON DENSITÀ (**)

SIA $\tilde{\phi}$ LA FUNZIONE CARATTERISTICA DI $\tilde{X}$. ABBIAMO

$$\tilde{\phi}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp[i\langle x,y\rangle] f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det Q}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left[i\langle x,y\rangle - \frac{1}{2}\langle Q^{-1}(x-a),(x-a)\rangle\right] dx$$

CAMBIO DI VARIABILE $z = Q^{-1/2}(x-a)$

$$= \exp[i\langle a,y\rangle] \int_{\mathbb{R}^n} \exp[i\langle Q^{1/2}y, z\rangle] \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}|z|^2\right]}{\sqrt{(2\pi)^n}} dz$$

FUBINI

$$= \exp[i\langle a,y\rangle] \prod_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} \exp\left[i(Q^{1/2}y)_j z_j\right] N(0,1)\,dz_j$$

FORMULA FUNZIONE CARATTERISTICA GAUSSIANA STANDARD

$$= \exp[i\langle a,y\rangle] \prod_{j=1}^{n} \exp\left[-\frac{1}{2}\left((Q^{1/2}y)_j\right)^2\right]$$

$$= \exp\left[i\langle a,y\rangle - \frac{1}{2}\langle Qy,y\rangle\right] = \phi(y) \qquad \blacksquare$$

DATO UN VETTORE ALEATORIO X m-DIMENSIONALE, CHIAMIAMO <u>MEDIA</u> DI X IL VETTORE $E[X]=(E[X_1],\dots,E[X_m])$. CHIAMIAMO INVECE <u>COVARIANZA</u> DI X LA MATRICE I CUI ELEMENTI SONO $Cov(X_i,X_j)$. SI TRATTA DI UNA MATRICE SIMMETRICA, E SULLA SUA DIAGONALE CI SONO LE VARIANZE $Var\, X_i$. INOLTRE È UNA MATRICE DIAGONALE SE E SOLO SE LE COMPONENTI DI X SONO SCORRELATE.

<u>OSSERVAZIONI</u> (IMPORTANTI)

- NEL CORSO DELLA DIMOSTRAZIONE ABBIAMO VISTO COME NELLA FORMULA $(*)$ $a=E[X]$. INOLTRE, POICHÉ Q È LA MATRICE ASSOCIATA ALLA FORMA $l \to E[\langle X-a,l\rangle^2]$, RISULTA ANCHE LA MATRICE ASSOCIATA ALL'APPLICAZIONE BILINEARE

$$(l,\tilde{l}) \to E[\langle X-a,l\rangle\langle X-a,\tilde{l}\rangle]$$

IN PARTICOLARE

$$Q_{i,j}=\langle Qe_i,e_j\rangle = E[(X_i-a_i)(X_j-a_j)] = Cov(X_i,X_j)$$

CIOÈ Q È LA COVARIANZA DI X.

INDICHEREMO CON <u>$X \sim N(a,Q)$</u> IL FATTO CHE X È VETTORE GAUSSIANO CON MEDIA a E COVARIANZA Q. USIAMO LO STESSO SIMBOLO PER INDICARNE LA DENSITÀ NEL CASO SIA ASS. CONTINUO.

- SE X HA COMPONENTI NORMALI STANDARD ED INDIPENDENTI, ALLORA X È GAUSSIANO ED IN PARTICOLARE $X \sim \mathcal{N}(0, I)$. QUI I È LA MATRICE IDENTICA.

NOTARE CHE SE VICEVERSA $X \sim \mathcal{N}(0, I)$ ALLORA LE SUE COMPONENTI SONO NORMALI STANDARD ED INDIPENDENTI.

PER QUANTO DETTO SUL COMPORTAMENTO DELLA FUNZIONE CARATTERISTICA QUANDO TRASFORMIAMO LINEARMENTE UN VETTORE ALEATORIO, ABBIAMO CHE $X \sim \mathcal{N}(a, Q)$ SE E SOLO SE SI PUÒ SCRIVERE COME

$$\boxed{\sqrt{Q}\, Z + a \quad \text{con } Z \sim \mathcal{N}(0, I)}$$

NOTARE CHE SE Q È DEGENERE, LA TRASFORMAZIONE $\sqrt{Q}$ ROVINA L'ASSOLUTA CONTINUITÀ.

- SE X È UN VETTORE GAUSSIANO, LE SUE COMPONENTI SONO INDIPENDENTI SE E SOLO SE SCORRELATE. INFATTI SE SONO SCORRELATE ALLORA Q È DIAGONALE E LA FUNZIONE CARATTERISTICA SI SCRIVE COME PRODOTTO DELLE FUNZIONI CARATTERISTICHE DELLE COMPONENTI.

ESAMINIAMO IL CASO IN CUI LA Q SIA DIAGONALE.

SUPPONIAMO Q NON DEGENERE. DALLA FORMULA GENERALE

$$\mathcal{N}(a,Q) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m \det Q}} \operatorname{Exp}\left[-\frac{1}{2}\langle Q^{-1}(x-a), x-a\rangle\right]$$

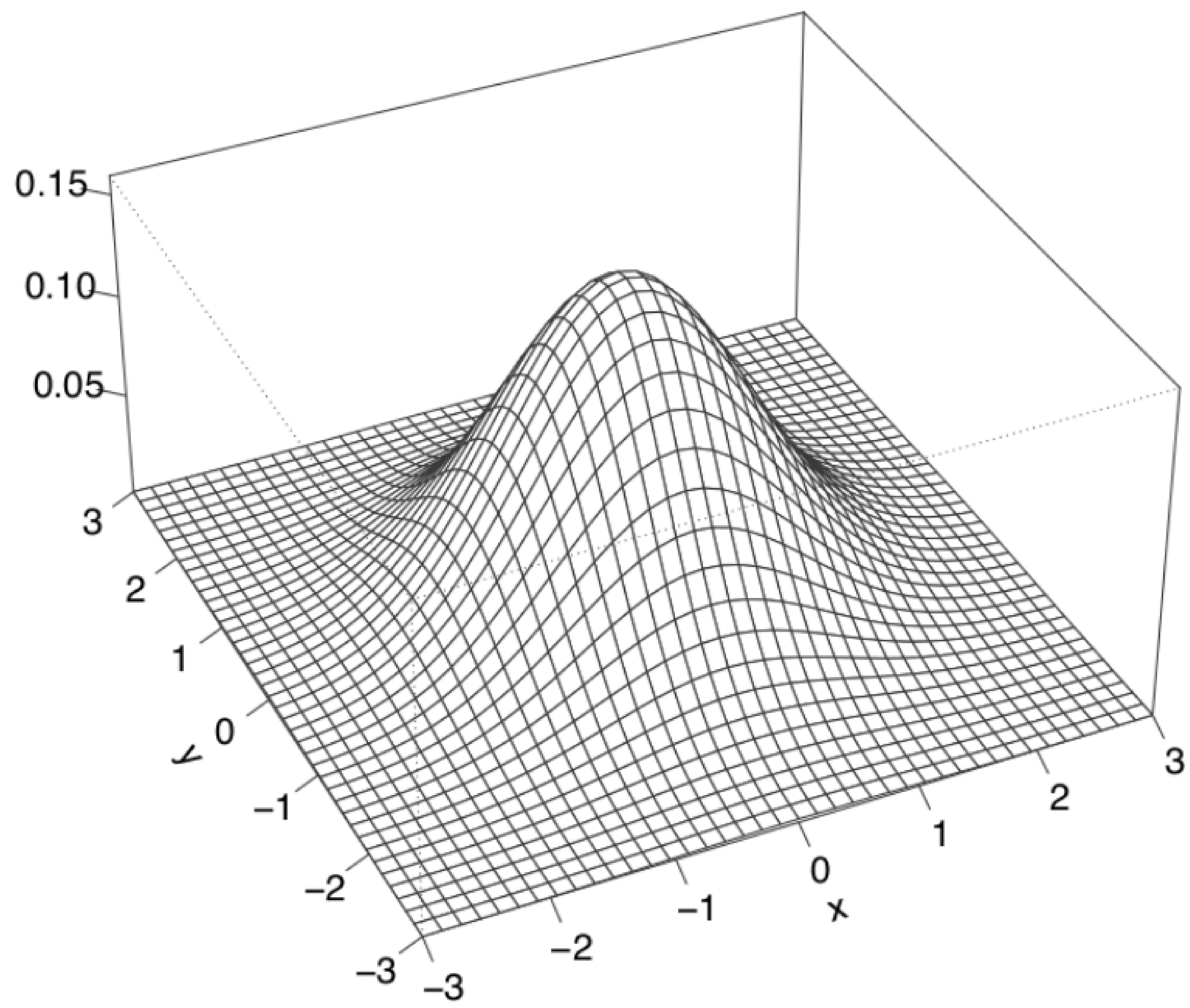
OTTENIAMO ESPLICITAMENTE

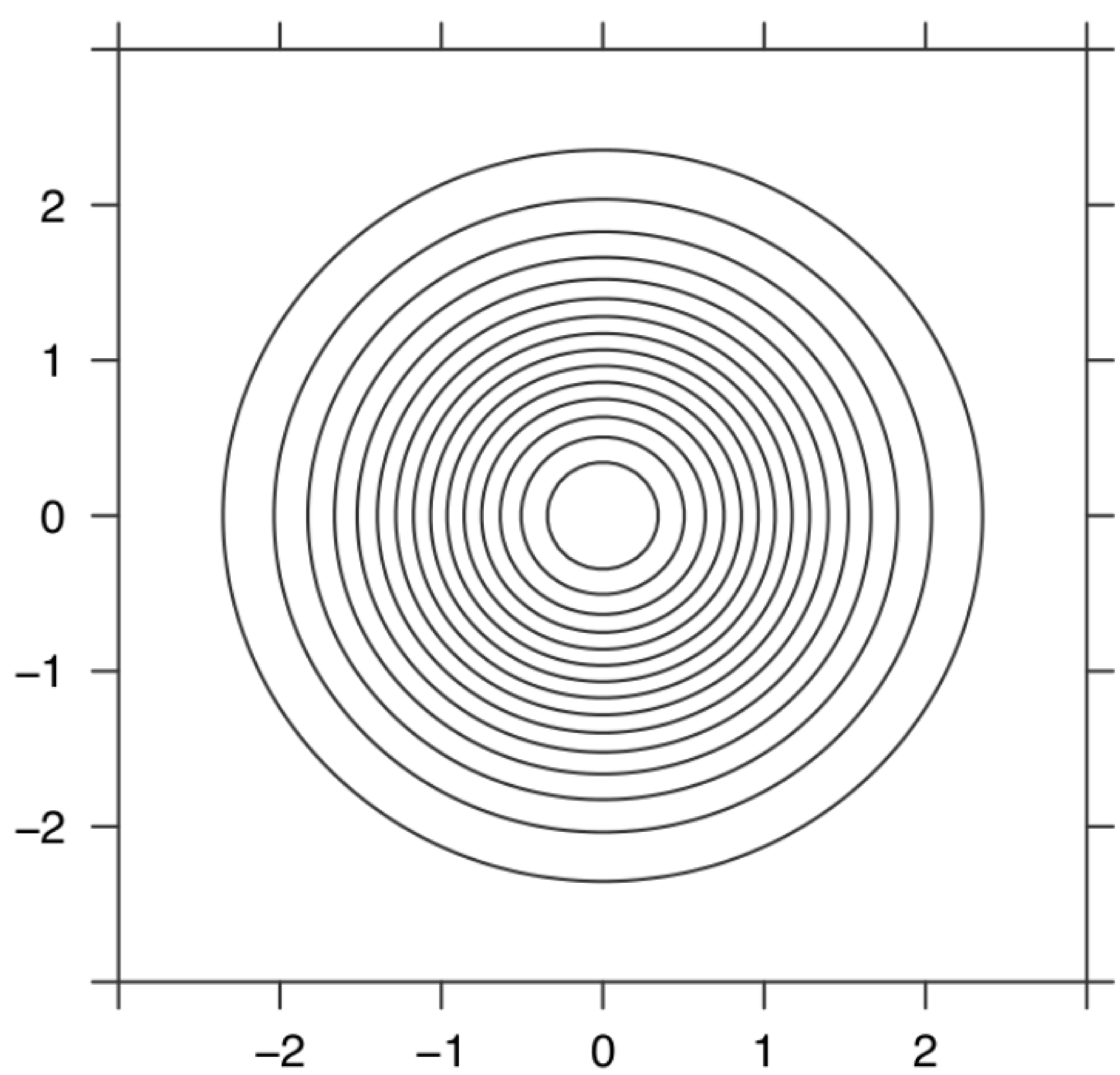
$$\mathcal{N}(a,I) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m}} \operatorname{Exp}\left[-\frac{1}{2}|x-a|^2\right]$$

$$\mathcal{N}(a,Q) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m \prod_{k=1} \sigma_k^2}} \operatorname{Exp}\left[-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{x_k-a_k}{\sigma_k}\right)^2\right]$$

QUANDO Q È LA MATRICE DIAGONALE CON $Q_{kk} = \sigma_k^2$, CHE CORRISPONDE AL CASO IN CUI IL VETTORE GAUSSIANO ABBIA COMPONENTI INDIPENDENTI CON VARIANZE σ_k^2.

QUANDO Q È DEGENERE MAPPA $\mathbb{R}^m$ SU SOTTOSPAZI DI DIMENSIONE PIÙ BASSA. IN QUESTI CASI SE $X \sim \mathcal{N}(a,Q)$ ALLORA NON È ASS. CONTINUO. PER ESEMPIO SE $Q=0$, CIOÈ LA MATRICE NULLA, ALLORA $X \equiv a$. SE $Q_{kk} = \sigma_k^2 > 0$ PER $k=1,\dots,J$ E $Q_{k,k}=0$ PER $k=J+1,\dots,m$, ALLORA LE COMPONENTI DI X SONO $X_k \sim \mathcal{N}(a_k,\sigma_k^2)$ PER $k=1,\dots,J$ E $X_k \equiv a_k$ PER $k=J+1,\dots,m$.





IN DIMENSIONE $m=2$, LE LINEE DI LIVELLO DI $\mathcal{N}(0,I)$ SONO DELLE CIRCONFERENZE, MENTRE SONO ELLISSI LE LINEE DI LIVELLO DI $\mathcal{N}(0,Q)$, CASO Q NON DEGENERE DIAGONALE.

RIASSUMENDO, CI SONO TRE MODI EQUIVALENTI DI DEFINIRE UN VETTORE GAUSSIANO MULTIVARIATO X.

- $\langle X, l \rangle$ È V.A. GAUSSIANO PER OGNI $l \in \mathbb{R}^m$.

- X HA FUNZIONE CARATTERISTICA

$$\phi(y) = \exp\left[i\langle a, y\rangle - \frac{1}{2}\langle Qy, y\rangle\right]$$

PER QUALCHE $a \in \mathbb{R}^m$ E Q MATRICE $m \times m$ NON NEGATIVA E SIMMETRICA.

- X SI PUÒ SCRIVERE NELLA FORMA

$$\sqrt{Q}\, Z + a$$

PER QUALCHE $a \in \mathbb{R}^m$, Q MATRICE $m \times m$ NON NEGATIVA E SIMMETRICA, E Z VETTORE ALEATORIO ASS. CONTINUO CON DENSITÀ

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m}} \exp\left[-\frac{1}{2}|x|^2\right]$$