Vediamo ora di analizzare come i valori di una v.a. X si dispongono intorno al valore medio $E[X]$.

Un modo per quantificare questa disposizione potrebbe essere quello di considerare lo scarto tra X e $E[X]$, cioè $|X-E[X]|$ e poi considerarne il valore medio $E[X-E[X]]$. La prima quantità non è facile da gestire, e per questo si preferisce considerare la quantità $(X-E[X])^2$.

<u>Definizione</u> Sia X una v.a. discreta avente valore medio finito. Se $(X-E[X])^2$ ha valore medio finito, chiamiamo <u>varianza</u> di X la quantità

$$\mathrm{Var}\,X := E\left[(X-E[X])^2\right]$$

Chiamiamo inoltre <u>deviazione standard</u> (o <u>scarto quadratico medio</u>) di X la quantità

$$\sigma_X := \sqrt{\mathrm{Var}\,X}$$

La definizione ha senso: essendo $(X-E[X])^2 \geq 0$, anche $\mathrm{Var}\,X \geq 0$.

Osservazione Se X è una v.a. discreta tale che X^2 ha valore medio finito, allora X ha valore medio finito. Infatti X^2 ha valore medio finito (per il teorema della lezione scorsa) se e solo se

$$\sum_{x \in \mathbb{R}} x^2 q(x) < \infty$$

dove q è la densità di X. Poiché $|x| \leq 1 + x^2$,

$$\sum_{x \in \mathbb{R}} |x| q(x) \leq \sum_{x \in \mathbb{R}} (1+x^2) q(x) = 1 + \sum_{x \in \mathbb{R}} x^2 q(x) < \infty$$

Tenuto conto che $(X - E[X])^2 = X^2 - 2X E[X] + E[X]^2$, abbiamo dunque che X ammette varianza se e solo se X^2 ha valore medio finito. In questo caso diremo che X ha <u>momento secondo finito</u>.

Elenchiamo le principali proprietà della varianza

Proposizione Sia X una v.a. avente momento secondo finito. Allora

- $\operatorname{Var} X = E[X^2] - E[X]^2$
- $\operatorname{Var}(cX) = c^2 \operatorname{Var} X \qquad \forall c \in \mathbb{R}$
- $\operatorname{Var}(X + c) = \operatorname{Var} X \qquad \forall c \in \mathbb{R}$

PROOF Per linearità del valore medio

- $E[(X-E[X])^2] = E[X^2 - 2XE[X] + E[X]^2]$

$= E[X^2] - 2E[X]^2 + E[X]^2 = E[X^2] - E[X]^2$

- $E[(cX - E[cX])^2] = E[(cX - cE[X])^2]$

$= E[c^2(X-E[X])^2] = c^2 E[(X-E[X])^2]$

- $E[(X+c-E[X+c])^2] = E[(X+c-E[X]-c)^2]$

$= E[(X-E[X])^2]$ $\blacksquare$

Per il prossimo risultato abbiamo bisogno di un lemma preliminare

<u>LEMMA</u> Sia X una v.a. discreta con valore medio finito. Valgono i seguenti risultati

- Se esiste una $c \in \mathbb{R}$ tale che $P\{X=c\}=1$, cioè $X=c$ a meno di un insieme di probabilità nulla, allora $c = E[X]$
- Se $X \geq 0$ e $E[X]=0$, allora $P\{X=0\}=1$, cioè $X=0$ a meno di un insieme di probabilità nulla.

PROOF Per $x \neq c$ abbiamo che l'evento $\{X = x\}$ è incluso nel complementare di $\{X = c\}$, quindi $P\{X = x\} = 0$. Ne segue che

$$E[X] = \sum_{x \in \mathbb{R}} x P\{X = x\} = c$$

Per il secondo punto, osserviamo che

$$\sum_{x \in \mathbb{R}} x P\{X = x\} = E[X] = 0$$

con i termini della sommatoria tutti non negativi. Se esistesse un $x \neq 0$ tale che $P\{X = x\} \neq 0$, avremmo l'assurdo $\sum_{x \in \mathbb{R}} x P\{X = x\} > 0$. Quindi $P\{X = 0\} = 1 - P\{X \neq 0\} = 1$.

$\blacksquare$

Poiché $\mathrm{Var}\, X$ è una sorta di <u>distanza</u> di X da $E[X]$, è intuitivo che se $\mathrm{Var}\, X = 0$ allora X si concentra sul valore medio.

<u>Proposizione</u> Sia X una v.a. avente momento secondo finito. Allora $\mathrm{Var}\, X = 0$ se e solo se $P\{X = c\} = 1$ per una opportuna $c \in \mathbb{R}$ (cioè X è costante a meno di un insieme di probabilità nulla). In tal caso

$$c = E[X]$$

PROOF Se $P\{X=c\}=1$, allora per il lemma $c=E[X]$. Poiché gli eventi $\{X=E[X]\}$ e $\{(X-E[X])^2=0\}$ sono uguali, $P\{(X-E[X])^2=0\}=1$. Ancora per il lemma (applicato a $(X-E[X])^2$), abbiamo

$$\mathrm{Var}\,X = E[(X-E[X])^2]=0$$

Viceversa, se $\mathrm{Var}\,X=0$, per il lemma

$$P\{(X-E[X])^2=0\}=1$$

essendo $(X-E[X])^2 \geq 0$. Ma questo significa $P\{X=E[X]\}=1$ ∎

Quando $\mathrm{Var}\,X$ è non nulla, vorremmo quantificare come i valori di X sono disposti intorno ad $E[X]$.

<u>Proposizione</u> (Disuguaglianza di Chebyshev).
Sia X una v.a. discreta con momento secondo finito. Allora

$$P\{|X-E[X]|>\varepsilon\} \leq \frac{\mathrm{Var}\,X}{\varepsilon^2} \qquad \forall \varepsilon>0$$

cioè la probabilità che X disti da $E[X]$ più di ε è controllata da $\frac{\mathrm{Var}\,X}{\varepsilon^2}$. Più piccola è la varianza, più piccola è la probabilità che X prenda

VALORI DISTANTI DA $E[X]$ (PER $\mathrm{Var}\, X = 0$ RITROVIAMO IL RISULTATO PRECEDENTE).

PROOF

SIA $Y = \varepsilon^2 \chi_{\{|X - E[X]| > \varepsilon\}}$. ABBIAMO

$$Y(\omega) = \varepsilon^2 \leq (X(\omega) - E[X])^2 \quad \text{SE} \quad \omega \in \{|X - E[X]| > \varepsilon\}$$

$$Y(\omega) = 0 \leq (X(\omega) - E[X])^2 \quad \text{SE} \quad \omega \in \{|X - E[X]| \leq \varepsilon\}$$

QUINDI

$$\mathrm{Var}\, X = E\left[(X - E[X])^2\right] \geq E[Y] = \varepsilon^2 P\{|X - E[X]| > \varepsilon\}$$

PER LA MONOTONIA DI E, E IL VALOR MEDIO DELLA FUNZIONE CARATTERISTICA DI UN EVENTO. ■

COME SI COMPORTA LA VARIANZA RISPETTO ALLA SOMMA DI V.A.? PRIMA DI TUTTO VEDIAMO SE LA DOMANDA HA SENSO.

<u>LEMMA</u> SIANO $X_1, \dots, X_m$ V.A. DISCRETE AVENTI MOMENTO SECONDO FINITO. ALLORA ANCHE $Y = \sum_{k=1}^{m} X_k$ HA MOMENTO SECONDO FINITO.

PROOF

PROVIAMO IL CASO $m = 2$ (PER INDUZIONE SI OTTIENE POI IL CASO GENERALE). SIA q LA DENSITÀ CONGIUNTA DI

$X = (X_1, X_2)$. SE $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ È LA FUNZIONE $g(x) = (x_1 + x_2)^2$, POSSIAMO VEDERE Y^2 COME $g \circ X$. CI BASTA ALLORA, PER IL TEOREMA, PROVARE CHE

$$\sum_{x \in \mathbb{R}^2} (x_1 + x_2)^2 q(x) < \infty$$

POICHÉ $(x_1+x_2)^2 \leq 2(x_1^2 + x_2^2)$, ABBIAMO

$$\sum_{x \in \mathbb{R}^2} (x_1+x_2)^2 q(x) \leq 2 \sum_{x \in \mathbb{R}^2} x_1^2 q(x_1, x_2) + 2 \sum_{x \in \mathbb{R}^2} x_2^2 q(x_1, x_2)$$

$$= 2 \sum_{x_1 \in \mathbb{R}} x_1^2 q_1(x_1) + 2 \sum_{x_2 \in \mathbb{R}} x_2^2 q_2(x_2) < \infty$$

CON q_1, q_2 LE DENSITÀ MARGINALI ■

ORA CHE SAPPIAMO CHE $Y = \sum_{k=1}^{m} X_k$ HA MOMENTO SECONDO FINITO, VEDIAMO CHE RELAZIONE C'È TRA $\operatorname{Var} Y$ E $\sum_{k=1}^{m} \operatorname{Var} X_k$. PER SEMPLICITÀ ANALIZZIAMO IL CASO $m=2$. NOTARE CHE $2X_1X_2 = (X_1+X_2)^2 - X_1^2 - X_2^2$ E QUINDI X_1X_2 HA VALORE MEDIO FINITO. GRAZIE ALLA LINEARITÀ DI E

$$(X_1 + X_2 - E[X_1+X_2])^2 = (X_1 - E[X_1] + X_2 - E[X_2])^2$$

$$= (X_1 - E[X_1])^2 + (X_2 - E[X_2])^2$$

$$+ 2(X_1X_2 - X_1 E[X_2] - X_2 E[X_1] + E[X_1] E[X_2])$$

PASSANDO AL VALOR MEDIO OTTENIAMO

$$\mathrm{Var}\, Y = \mathrm{Var}\, X_1 + \mathrm{Var}\, X_2 + 2\boxed{\left(E[X_1X_2] - E[X_1]E[X_2]\right)}$$

<u>DEFINIZIONE</u> DATE DUE V.A. DISCRETE X_1, X_2 AVENTI MOMENTO SECONDO FINITO, CHIAMEREMO <u>COVARIANZA</u> DI X_1, X_2 LA QUANTITÀ

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = E[X_1X_2] - E[X_1]E[X_2]$$

COME OSSERVATO IN PRECEDENZA, IL PRODOTTO X_1X_2 HA VALORE MEDIO FINITO. SE $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 0$, DIREMO CHE X_1, X_2 SONO <u>NON</u> <u>CORRELATE</u> (O SCORRELATE).

SE X_1, X_2 SONO INDIPENDENTI ALLORA SONO SCORRELATE (PERCHÉ IL PRODOTTO COMMUTA CON LA MEDIA), MA NON VALE IL VICEVERSA.

OVVIAMENTE, SE X_1, X_2 SONO SCORRELATE

$$\mathrm{Var}(X_1 + X_2) = \mathrm{Var}\, X_1 + \mathrm{Var}\, X_2$$

NOTARE CHE $\mathrm{Cov}(X, X) = \mathrm{Var}\, X$.

<u>PROPOSIZIONE</u> SIANO X, Y, Z V.A. DISCRETE AVENTI MOMENTO SECONDO FINITO, E $a, b \in \mathbb{R}$. ALLORA

- $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$
- $\mathrm{Cov}(aX+bY,Z) = a\,\mathrm{Cov}(X,Z) + b\,\mathrm{Cov}(Y,Z)$

CIOÈ LA COVARIANZA GODE DELLE PROPRIETÀ DI SIMMETRIA E BILINEARITÀ. INOLTRE

- SE $\mathrm{Var}\,X=0$ ALLORA $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$

PROOF

LE PRIME DUE PROPRIETÀ SI DIMOSTRANO USANDO DIRETTAMENTE LA DEFINIZIONE. PER LA TERZA, SE $\mathrm{Var}\,X=0$ ALLORA $P\{X=E[X]\}=1$. POICHÉ

$$\{X=E[X]\} \subset \{(X-E[X])(Y-E[Y])=0\},$$

ABBIAMO $P\{(X-E[X])(Y-E[Y])=0\}=1$. ANCORA PER UNO DEI LEMMI, APPLICATO ALLA V.A. $(X-E[X])(Y-E[Y])$, ABBIAMO

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X-E[X])(Y-E[Y])] = 0 \qquad \blacksquare$$

<u>PROPOSIZIONE</u> SIANO X, Y V.A. DISCRETE AVENTI MOMENTO SECONDO FINITO. VALE LA STIMA

$$|\mathrm{Cov}(X,Y)| \leq \sigma_X \sigma_Y$$

QUESTA STIMA, DI CUI OMETTIAMO LA DIMOSTRAZIONE, QUANTIFICA E MIGLIORA IL TERZO PUNTO DELLA PROPOSIZIONE SOPRA.

OSSERVAZIONE ESSENDO LA COVARIANZA BILINEARE, ABBIAMO, DATE TRE VARIABILI ALEATORIE X, Y, Z CON MOMENTO SECONDO FINITO,

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}(X+Y+Z) &= \operatorname{Var}(X+Y) + \operatorname{Var} Z + 2\operatorname{Cov}(X+Y, Z) \\ &= \operatorname{Var} X + \operatorname{Var} Y + \operatorname{Var} Z \\ &\quad + 2\operatorname{Cov}(X,Y) + 2\operatorname{Cov}(X,Z) + 2\operatorname{Cov}(Y,Z) \end{aligned}$$

LA FORMULA SI GENERALIZZA AD m VARIABILI ALEATORIE $X_1, \dots, X_m$:

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{k=1}^{m} X_k\right) = \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Var} X_k + \sum_{\substack{k,j=1 \\ k \neq j}}^{m} \operatorname{Cov}(X_k, X_j)$$

LA COVARIANZA CI FORNISCE UN INDICE DI INDIPENDENZA TRA LE DUE V.A. X, Y IN TERMINI DELLE MEDIE.
COME GIÁ DETTO, ESSERE SCORRELATE È PERÒ UNA CONDIZIONE PIÙ DEBOLE DELL'INDIPENDENZA.

<u>ESEMPIO</u> CONSIDERIAMO UNA V.A. X TALE CHE

$$P\{X=-1\} = P\{X=0\} = P\{X=1\} = \frac{1}{3}$$

PONIAMO POI $Y = X^2$. ABBIAMO

$$P\{Y=0\} = \frac{1}{3} \quad \text{E} \quad P\{Y=1\} = \frac{2}{3}$$

DATO CHE $E[X]=0$ E CHE $X^3 = X$, ABBIAMO

$$E[XY] = E[X^3] = E[X] = 0$$

E QUINDI $E[XY] = E[X]E[Y]$: X E Y SONO SCORRELATE.
D'ALTRA PARTE $P\{X=1, Y=0\} = P\{X=1, X^2=0\} = 0$ ESSENDO L'EVENTO VUOTO, MENTRE $P\{X=1\}P\{Y=0\} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.
QUINDI X E Y NON SONO INDIPENDENTI.

<u>ESERCIZIO</u> UN'URNA CONTIENE k PALLINE NERE E $m-k$ PALLINE BIANCHE. SE NE ESTRAGGONO DUE SENZA REIMMISSIONE. DEFINIAMO LE V.A. X_1 E X_2 TRAMITE

$$X_1 = \begin{cases} 1 & \text{SE LA PRIMA PALLINA ESTRATTA È NERA} \\ 0 & \text{SE " " " " " BIANCA} \end{cases}$$

$$X_2 = \begin{cases} 1 & \text{SE LA SECONDA PALLINA ESTRATTA È NERA} \\ 0 & \text{SE " " " " " BIANCA} \end{cases}$$

CALCOLARE LE RISPETTIVE VARIANZE E LA COVARIANZA.

CONSIDERIAMO GLI EVENTI

$A_1 =$ "LA PRIMA PALLINA ESTRATTA È NERA"

$A_2 =$ "LA SECONDA PALLINA ESTRATTA È NERA"

ABBIAMO $X_1 = \chi_{A_1}$ E $X_2 = \chi_{A_2}$, QUINDI

$$E[X_1] = P(A_1) = \frac{K}{M} \qquad E[X_2] = P(A_2) = \frac{K}{M}$$

POICHÉ $X_1^2 = X_1$ E $X_2^2 = X_2$ ABBIAMO SUBITO

$$\mathrm{VAR}\, X_1 = E[X_1^2] - E[X_1]^2 = \frac{K}{M} - \left(\frac{K}{M}\right)^2 = \frac{K(M-K)}{M^2}$$

$$\mathrm{VAR}\, X_2 = \frac{K(M-K)}{M^2}$$

POICHÉ $X_1 X_2 = \chi_{A_1 \cap A_2}$, CON $A_1 \cap A_2$ L'EVENTO "ENTRAMBE LE PALLINE ESTRATTE SONO NERE", ABBIAMO

$$E[X_1 X_2] = P(A_1 \cap A_2) = \frac{K}{M} \cdot \frac{K-1}{M-1}$$

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \frac{K}{M} \cdot \frac{K-1}{M-1} - \frac{K}{M}\frac{K}{M} = \frac{K}{M} \cdot \frac{K-M}{M(M-1)}$$

CONCLUDIAMO RIPORTANDO VALORE MEDIO E VARIANZA DI V.A. AVENTI LE DENSITÀ NOTEVOLI VISTE IN PRECEDENZA.

	DENSITÀ	VALORE MEDIO VARIANZA
BINOMIALE $B(m,q)$	$m \in \mathbb{N},\ q \in (0,1)$ $q(x) = \begin{cases} \binom{m}{x} q^x (1-q)^{m-x} & x = 0,\dots,m \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$	$E[X] = mq$ $\mathrm{Var}\,X = mq(1-q)$
GEOMETRICA $\mathrm{Geo}(q)$	$q \in (0,1)$ $q(x) = \begin{cases} q(1-q)^{x-1} & x = 1,2,3,\dots \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$	$E[X] = \frac{1}{q}$ $\mathrm{Var}\,X = \frac{1-q}{q^2}$
IPERGEOMETRICA $\mathrm{Iper}(m,a,b)$	$a,b,m \in \mathbb{N}^+$, con $m \leq a+b$ $k_1 = \max\{m-b,0\}$ $k_2 = \min\{a,m\}$ $q(x) = \begin{cases} \frac{\binom{a}{x}\binom{b}{m-x}}{\binom{a+b}{m}} & x = k_1,\dots,k_2 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$	$E[X] = \frac{ma}{a+b}$ $\mathrm{Var}\,X = \frac{m(a+b-m)ab}{(a+b)^2(a+b-1)}$
POISSON $\mathcal{P}(\lambda)$	$\lambda > 0$ $q(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} & x = 0,1,2,\dots \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$	$E[X] = \lambda$ $\mathrm{Var}\,X = \lambda$