SIA $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ UNO SPAZIO DI PROBABILITÀ. DIREMO CHE UNA APPLICAZIONE $Z: \Omega \to \mathbb{C}$ È UNA <u>VARIABILE ALEATORIA COMPLESSA</u> SE PUÒ ESSERE SCRITTA NELLA FORMA

$$Z = Z_1 + i Z_2$$

DOVE Z_1 E Z_2 SONO DUE V.A. REALI. DIREMO CHE Z HA MEDIA FINITA SE HANNO MEDIA FINITA ENTRAMBE Z_1 E Z_2. IN TAL CASO PONIAMO $E[Z] := E[Z_1] + i E[Z_2]$.

DATO UN VETTORE ALEATORIO REALE X m-DIMENSIONALE E $y \in \mathbb{R}^m$, LA MAPPA $\exp[i\langle y, X\rangle] = \cos\langle y, X\rangle + i \sin\langle y, X\rangle$ È UNA V.A. COMPLESSA CON MEDIA FINITA (SEMPLICE CONSEGUENZA DEL FATTO CHE $\cos\langle y, X\rangle$ E $\sin\langle y, X\rangle$ SONO ENTRAMBE LIMITATE. IN PARTICOLAR MODO RISULTA BEN POSTA LA FUNZIONE $\phi: \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ DEFINITA DA

$$\phi(y) := E\left[\exp[i\langle y, X\rangle]\right] \qquad \forall y \in \mathbb{R}^m$$

ϕ È DETTA <u>FUNZIONE CARATTERISTICA</u> DI X

NOTARE CHE (PER I TEOREMI SUL VALOR MEDIO RELATIVI ALLA COMPOSIZIONE DI UNA V.A. CON UNA TRASFORMAZIONE)

- SE X È DISCRETO CON DENSITÀ q, ALLORA

$$\phi(y) = \sum_{x \in \mathbb{R}^m} \exp[i\langle y, x\rangle]\, q(x)$$

• SE X È ASS. CONTINUO CON DENSITÀ f ALLORA

$$\phi(y) = \int_{\mathbb{R}^m} \exp[i\langle y, x\rangle] f(x)\,dx$$

COME SI VEDE DA QUESTI DUE CASI ϕ DIPENDE SOLO DALLA LEGGE P_X DI X. IN PARTICOLARE, SE X E Y SONO DUE VETTORI ALEATORI AVENTI STESSA LEGGE (O EQUIV. STESSA FUNZIONE DI RIPARTIZIONE) ALLORA HANNO STESSA FUNZIONE CARATTERISTICA. È INTERESSANTE IL FATTO CHE VALE ANCHE IL VICEVERSA (NE OMETTIAMO LA DIMOSTRAZIONE):

<u>TEOREMA</u> SE X E Y HANNO STESSA FUNZIONE CARATTERISTICA ALLORA HANNO ANCHE STESSA LEGGE.

L'IMPORTANZA DI QUESTO RISULTATO RISIEDE NEL FATTO CHE LE VERIFICHE SULLA FUNZIONE CARATTERISTICA SONO DI SOLITO PIÙ FACILI DI QUELLE SULLA FUNZIONE DI RIPARTIZIONE.

LA FUNZIONE CARATTERISTICA CI PERMETTE DI ESPRIMERE FACILMENTE L'INDIPENDENZA TRA VARIABILI ALEATORIE. SUPPONIAMO CHE $X_1, \dots, X_m$ SIANO V.A. ASSOLUT. CONTINUE CON DENSITÀ $f_1, \dots, f_m$. SE C'È INDIPENDENZA ALLORA

$X = (X_1, \dots, X_m)$ È ASS. CONTINUO CON DENSITÀ
$$f(x) = f_1(x_1) \cdots f_m(x_m).$$

ABBIAMO DUNQUE
$$\phi(y) = \int_{\mathbb{R}^m} \exp[i\langle y, x\rangle] f(x)\, dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^m} \prod_{k=1}^{m} \exp[i y_k x_k] f_k(x_k)\, dx \qquad \text{TRAMITE FUBINI}$$
$$= \prod_{k=1}^{m} \int_{\mathbb{R}} \exp[i y_k x_k] f_k(x_k)\, dx_k = \prod_{k=1}^{m} \phi_k(y_k)$$

CON ϕ_k FUNZIONE CARATTERISTICA DI X_k.

QUESTO FATTO RISULTA NON SOLO ESSERE CONDIZIONE NECESSARIA ALL'INDIPENDENZA, MA ANCHE SUFFICIENTE. INOLTRE VALE IN GENERALE, E NON SOLO PER V.A. ASS. CONTINUE.

<u>PROPOSIZIONE</u> SIANO $X_1, \dots, X_m$ V.A. CON FUNZIONE CARATTERISTICA $\phi_1, \dots, \phi_m$ RISPETTIVAMENTE. ALLORA $X_1, \dots, X_m$ SONO INDIPENDENTI SE E SOLO SE, DENOTATA CON ϕ LA FUNZIONE CARATTERISTICA DEL VETTORE ALEATORIO $X = (X_1, \dots, X_m)$, RISULTA
$$\phi(y) = \prod_{k=1}^{m} \phi_k(y_k) \qquad \forall y \in \mathbb{R}^m$$

PROOF

IL MOTIVO PER CUI LA CONDIZIONE È NECESSARIA ANCHE

NEL CASO GENERALE È QUESTO: SE $X_1, \dots, X_m$ SONO INDIPENDENTI, ALLORA LO SONO ANCHE $\exp[iy_1 X_1], \dots, \exp[iy_m X_m]$ QUALE CHE SIA $y \in \mathbb{R}^m$. QUINDI LA MEDIA DEL PRODOTTO È IL PRODOTTO DELLE MEDIE

$$\phi(y) = E\left[\exp[i\langle y, X\rangle]\right] = E\left[\prod_{k=1}^{m} \exp[iy_k X_k]\right]$$
$$= \prod_{k=1}^{m} E\left[\exp[iy_k X_k]\right] = \prod_{k=1}^{m} \phi_k(y_k)$$

CHE LA CONDIZIONE SIA ANCHE SUFFICIENTE PER L'INDIPENDENZA RICHIEDE QUALCHE STRUMENTO IN PIÙ CHE AL MOMENTO NON ABBIAMO... ■

LA FUNZIONE CARATTERISTICA SI COMPORTA BENE RISPETTO ALLA SOMMA DI V.A. INDIPENDENTI

<u>PROPOSIZIONE</u> SIANO $X_1, \dots, X_m$ V.A. CON FUNZIONE CARATTERISTICA $\phi_1, \dots, \phi_m$ RISPETTIVAMENTE. SE $X_1, \dots, X_m$ SONO INDIPENDENTI ALLORA, POSTO $X = \sum_{k=1}^{m} X_m$ ED INDICATA CON ϕ LA SUA FUNZIONE CARATTERISTICA, ABBIAMO

$$\phi(y) = \prod_{k=1}^{m} \phi_k(y) \qquad \forall y \in \mathbb{R}$$

PROOF

$$\phi(y) = E\left[\exp\left[iy\sum_{k=1}^{m} X_k\right]\right] = E\left[\prod_{k=1}^{m} \exp[iyX_k]\right]$$

$$= \prod_{k=1}^{m} E\left[\exp[iyX_k]\right] = \prod_{k=1}^{m} \phi_k(y) \qquad \blacksquare$$

OSSERVAZIONI

- LE FUNZIONI CARATTERISTICHE DI X E $-X$ SONO CONIUGATE: DETTA ϕ LA FUNZIONE CARATTERISTICA DI X E ϕ_- QUELLA DI $-X$, ABBIAMO

$$\phi_-(y) = E\left[\exp[-i\langle y, X\rangle]\right] = E\left[\overline{\exp[i\langle y, X\rangle]}\right] = \overline{\phi(y)}$$

IN PARTICOLARE SE X È SIMMETRICA (CIOÈ $X = -X$), ALLORA ϕ È UNA FUNZIONE A VALORI REALI

- SIANO X UN VETTORE ALEATORIO m-DIMENSIONALE, A UNA MATRICE $k \times m$, $b \in \mathbb{R}^k$. ALLORA $Y = AX + b$ È UN VETTORE ALEATORIO k-DIMENSIONALE. DETTA ϕ LA FUNZIONE CARATTERISTICA DI X E ψ QUELLA DI Y,

$$\psi(y) = E\left[\exp[i\langle y, Ax+b\rangle]\right] \qquad \text{(CON } A^T \text{ TRASPOSTA DI } A\text{)}$$

$$= E\left[\exp[i\langle A^T y, x\rangle]\right]\exp[i\langle y, b\rangle] = \exp[i\langle y, b\rangle]\,\phi(A^T y)$$

IN PARTICOLARE, SIA $a \in \mathbb{R}^m$ E $b \in \mathbb{R}$. ALLORA $Y = \langle a, X \rangle + b$ È UNA V.A. E

$$\psi(t) = \exp[itb]\,\phi(ta) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

<u>PROPOSIZIONE</u> SIA X UNA V.A. E SIA ϕ LA SUA FUNZIONE CARATTERISTICA. SE X HA MOMENTO SECONDO FINITO ALLORA ϕ POSSIEDE DERIVATA SECONDA. INFATTI (AMMETTENDO CHE L'OPERAZIONE DI MEDIA E DI DERIVAZIONE COMMUTINO) POSSIAMO SCRIVERE

$$\phi'(t) = \frac{d}{dt} E[\exp[itX]]$$

$$= E\left[\frac{d}{dt}\exp[itX]\right] = E[\overbrace{iX \exp[itX]}^{\text{V.A. CON MEDIA FINITA}}]$$

$$\phi''(t) = E\left[\frac{d}{dt}\left(iX \exp[itX]\right)\right] = E[\underbrace{(iX)^2 \exp[itX]}_{\text{V.A. CON MEDIA FINITA}}]$$

IN PARTICOLARE PER $t=0$ ABBIAMO $\phi''(0) = -E[X^2]$. POSSIAMO QUINDI CALCOLARE IL MOMENTO SECONDO DI X SEMPLICEMENTE FACENDO LA DERIVATA SECONDA DI ϕ IN 0.

Esempio

Vogliamo calcolarci esplicitamente la funzione caratteristica di una v.a. di tipo gaussiano.

Sia $X \sim N(0,1)$. Per quanto detto all'inizio

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-x^2/2} \, dx$$

Deriviamo usando le formule precedenti

$$\phi'(t) = E[iX \exp[itX]] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} ix e^{itx} e^{-x^2/2} \, dx =$$

ricordando il teorema sulla media della composizione

integrando per parti

$$= \underbrace{-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} i e^{itx} e^{-x^2/2} \Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} i \cdot it e^{itx} e^{-x^2/2} \, dx = -t\phi(t)$$

Questo prova che ϕ è soluzione dell'equazione differenziale lineare

$$\phi'(t) = -t\phi(t)$$

ed ha quindi la forma $\phi(t) = c e^{-t^2/2}$ per una opportuna $c \in \mathbb{R}$. Sappiamo inoltre che $\phi(0) = 1$, quindi necessariamente

$$\phi(t) = \exp[-t^2/2]$$

SE INVECE $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, VISTO CHE POSSIAMO SCRIVERLA NELLA FORMA $Y = \sigma X + \mu$ CON $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, PER L'OSSERVAZIONE PRECEDENTE LA SUA FUNZIONE CARATTERISTICA ψ VALE

$$\psi(t) = \exp[it\mu]\,\phi(t\sigma) = \exp[it\mu]\exp[-\sigma^2 t^2/2]$$

CIOÈ

$$\boxed{\psi(t) = \exp\left[i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right]} \qquad (*)$$

VICEVERSA, SE UNA V.A. Y HA FUNZIONE CARATTERISTICA DELLA FORMA $(*)$, ALLORA PER IL TEOREMA DI CARATTERIZZAZIONE DATO ALL'INIZIO SI HA $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

NOTARE CHE SE $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ È SIMMETRICA, O EQUIVALENTEMENTE $\mu = 0$, ALLORA $\psi(t) = \exp\left[-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right]$ E QUINDI È UNA FUNZIONE REALE COME OSSERVATO IN GENERALE PRECEDENTEMENTE.

CONSIDERIAMO UNA VARIABILE ALEATORIA X COSTANTE E SIA $a \in \mathbb{R}$ IL VALORE CHE ASSUME. LA SUA DENSITÀ È OVVIAMENTE

$$q(x) = \begin{cases} 1 & \text{SE } x = a \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases},$$

INOLTRE $E[X] = a$ E $\mathrm{Var}\, X = 0$.

VICEVERSA, COME GIÀ OSSERVATO NELLA LEZIONE 15, SE X È UNA V.A. TALE CHE $\mathrm{Var}\, X = 0$, ALLORA X È COSTANTE (A MENO DI UN INSIEME DI MISURA NULLA) E IL VALORE CHE ASSUME È $a = E[X]$.

FINORA LA NOSTRA DEFINIZIONE DI V.A. DI TIPO GAUSSIANO È STATA QUELLA DI UNA V.A. X ASSOLUTAMENTE CONTINUA CON DENSITÀ

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

PER OPPORTUNI PARAMETRI $\mu \in \mathbb{R}$ E $\sigma > 0$. PUÒ ESSERE UTILE ESTENDERE QUESTA DEFINIZIONE AL CASO $\sigma = 0$.

SIA $X_\sigma \sim N(\mu, \sigma^2)$. INTUITIVAMENTE QUANDO $\sigma \to 0$ LA X_σ TENDE A CONCENTRARSI SUL SUO VALORE MEDIO μ.

IN EFFETTI, USANDO LA DISUGUAGLIANZA DI CHEBYSHEV,

ABBIAMO
$$P\{|X_\sigma - \mu| > \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \quad \forall \varepsilon > 0$$

E QUINDI X_σ CONVERGE IN PROBABILITÀ PER $\sigma \to 0$ ALLA V.A. COSTANTE $X \equiv \mu$. RIMARCHIAMO CHE X È DISCRETA ANCHE SE LIMITE DELLE V.A. ASS. CONTINUE X_σ.

NEL SEGUITO TRATTEREMO DUNQUE V.A. COSTANTI COME CASI DEGENERI DI V.A. GAUSSIANE CON VARIANZA NULLA.

OSSERVIAMO CHE SE X È V.A. COSTANTE CON VALORE μ, ALLORA LA SUA FUNZIONE CARATTERISTICA È
$$\varphi(t) = \exp[i\mu t]$$
(VISTO COME È FATTA LA SUA DENSITÀ q)

IN PARTICOLARE LA FORMULA (*) VISTA PRIMA PER LA FUNZIONE CARATTERISTICA DI V.A. GAUSSIANE CONTINUA A VALERE ANCHE IN QUESTO CASO LIMITE.

VEDIAMO ORA DI GENERALIZZARE AD AMBITO VETTORIALE LE V.A. DI TIPO GAUSSIANO.

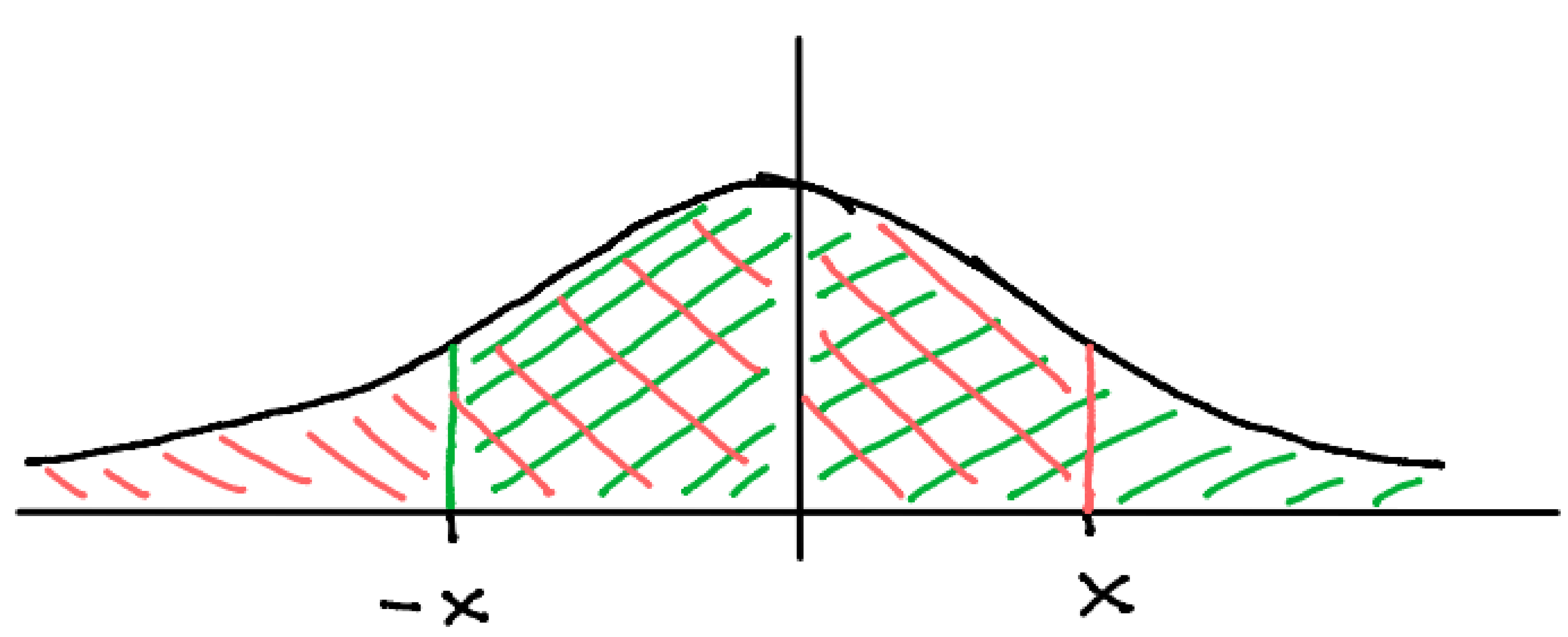
UN VETTORE ALEATORIO X m-DIMENSIONALE È DETTO AVERE LEGGE <u>GAUSSIANA</u> (O NORMALE) <u>MULTIVARIATA</u> SE PER OGNI TRASFORMAZIONE LINEARE $\psi: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ LA V.A. $\psi \cdot X$ È DI TIPO GAUSSIANO. POICHÉ OGNI TRASFORMAZIONE LINEARE SI PUÒ SCRIVERE NELLA FORMA $\psi(x) = \langle x, l \rangle$ PER UN OPPORTUNO $l \in \mathbb{R}^m$, X È GAUSSIANO SE E SOLAMENTE SE LA V.A. $\langle X, l \rangle$ È GAUSSIANA PER OGNI $l \in \mathbb{R}^m$. POICHÉ DATO $x = (x_1, \dots, x_m)$ OGNI COMBINAZIONE LINEARE DI $\{x_1, \dots, x_m\}$ SI PUÒ ESPRIMERE COME $\langle x, l \rangle$ PER UN OPPORTUNO $l \in \mathbb{R}^m$, $X = (X_1, \dots, X_m)$ È GAUSSIANO SE E SOLAMENTE SE OGNI COMBINAZIONE LINEARE DELLE SUE COMPONENTI, CIOÈ $\sum_{k=1}^{m} l_k X_k$ CON $l \in \mathbb{R}^m$, È UNA V.A. DI TIPO GAUSSIANO.

SE PRENDIAMO COME TRASFORMAZIONE LINEARE ψ LA PROIEZIONE k-ESIMA π_k, O EQUIVALENTEMENTE SCEGLIAMO $l = e_k$ (CON e_k ELEMENTO k-ESIMO DELLA BASE STANDARD) OTTENIAMO CHE $X_k = \pi_k \cdot X = \langle X, e_k \rangle$ È UNA V.A. DI TIPO GAUSSIANO.

<u>ATTENZIONE</u> NON È VERO IL VICEVERSA: UN VETTORE ALEATORIO PUÒ AVERE COMPONENTI GAUSSIANE SENZA ESSERE GAUSSIANO.

<u>ESEMPIO</u> SIA $X \sim N(0,1)$ E SIA S UNA V.A. A VALORI IN $\{1,-1\}$ TALE CHE $P\{S=1\} = P\{S=-1\} = \frac{1}{2}$. PROVIAMO CHE $Y = SX \sim N(0,1)$. ABBIAMO, PER LA FORMULA DELLE PROBABILITÀ TOTALI,

$$P\{Y \leq x\} = \frac{1}{2} P\{Y \leq x \mid S=1\} + \frac{1}{2} P\{Y \leq x \mid S=-1\}$$
$$= \frac{1}{2} P\{X \leq x\} + \frac{1}{2} P\{-X \leq x\}$$



TENUTO CONTO CHE PER SIMMETRIA DELLA GAUSSIANA

$$P\{X \geq -x\} = P\{X \leq x\}$$

$$= \frac{1}{2} P\{X \leq x\} + \frac{1}{2} P\{X \leq x\} = P\{X \leq x\}$$

AVENDO X E Y STESSA FUNZIONE DI RIPARTIZIONE, $Y \sim N(0,1)$

CONSIDERIAMO ORA IL VETTORE (X,Y). POICHÉ

$$P\{X+Y=0\} = P\{S=-1\} = \frac{1}{2}$$

ABBIAMO CHE $X+Y$ NON PUÒ ESSERE GAUSSIANA: NON È ASSOLUTAMENTE CONTINUA ($\sigma>0$) NÉ COSTANTE ($\sigma=0$).