



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Analisi Numerica

Laurea Triennale in Intelligenza Artificiale e Data Analytics

A.A. 2024–2025

Ángeles Martínez Calomardo

amartinez@units.it

# Presentazione sintetica del corso

## Definizione

L'Analisi numerica è la disciplina che sviluppa ed analizza metodi per la risoluzione di problemi della Matematica e delle Scienze applicate con l'ausilio del calcolatore.

- Si studiano **algoritmi** per la soluzione **approssimata** di tali problemi.
- Necessario l'uso del **calcolatore** sui cui implementare gli algoritmi.
- Si cercano gli algoritmi che risolvono un problema matematico nel **minimo tempo** con la massima **accuratezza**.
- Nel corso si utilizza **MATLAB** che è allo stesso tempo un ambiente di calcolo e un linguaggio di programmazione.

## Dove l'analisi matematica non arriva

- A risolvere analiticamente “quasi tutte” le equazioni. Esempi

$$x^2 - 3 \sin x = \log x, \quad \exp(x - 2) = \sqrt{x^2 + 1}$$

- A calcolare integrali definiti (richiede il calcolo analitico di una primitiva). Esempi

$$\int_1^2 \sin(x^2) dx, \quad \int_{-3}^0 \exp(-x^2) dx, \quad \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

- A risolvere equazioni differenziali. Esempio: problema di Cauchy lineare del primo ordine

$$\begin{cases} y'(x) + \sin(\sqrt{x})y(x) &= x + 1 \\ y(1) &= 1 \end{cases}$$

L'analisi numerica fornisce soluzioni approssimate a questi e ad altri problemi della Matematica e delle Scienze Applicate.

## Esempio 1: Fluidodinamica

- In fluidodinamica la correlazione di Colebrook è un'equazione che permette di ricavare il coefficiente di attrito di Darcy  $\lambda$  di un generico fluido in tubi lisci o ruvidi.
- Questo legame matematico nasce dalla combinazione di risultati empirici a studi di flusso laminare e turbolento nelle tubature. Fu sviluppata nel 1939 da Colebrook e White.
- L'equazione (detta di Colebrook-White) è la seguente

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left( \frac{e}{3.51d} + \frac{2.52}{N_R \sqrt{\lambda}} \right) \quad (1)$$

- Tale equazione è non lineare e dipende dai parametri:
  - ▶  $e$  scabrezza del tubo (in metri)
  - ▶  $d$  diametro del tubo (in metri)
  - ▶  $N_R$  numero di Reynolds

**Non esiste una soluzione esplicita dell'equazione per nessuna combinazione dei parametri.**

## Esempio 2: Ottica

- Per il progetto di una camera a raggi infrarossi si è interessati a calcolare l'energia emessa da un corpo nero nello spettro (infrarosso) compreso tra le lunghezze d'onda  $3\mu m$  e  $14\mu m$ .
- La risoluzione di questo problema si ottiene calcolando il valore del seguente integrale

$$I = E(T) = 2.39 \cdot 10^{-11} \int_{3 \cdot 10^{-4}}^{14 \cdot 10^{-4}} \frac{1}{x^5 (\exp(\frac{1.432}{T \cdot x}) - 1)} dx$$

- che rappresenta l'equazione di Planck per l'energia, dove  $x$  è la lunghezza d'onda (in cm) e  $T$  la temperatura in gradi Kelvin del corpo nero.
- Si vuole approssimare, per esempio il valore di  $E(T_0)$  con  $T_0 = 215$  (gradi Kelvin).

**Non esiste una primitiva esplicita della funzione integranda per nessun valore di  $T$ .**

## Esempio 3. Fattorizzazioni di matrici in Data Science

Il calcolo matriciale è alla base degli algoritmi di *Data Science* e *Machine Learning*.

I dati sono rappresentati da **vettori, matrici o tensori**.

Le matrici ( $m \times n$ ) sono di grandi dimensioni nelle applicazioni.

I dati consistono di  $m$  *oggetti*, ciascuno descritto da  $n$  *caratteristiche*.

Esempi di coppie (oggetto, caratteristica):

- Documenti e parole in essi contenute;
- Immagini da risonanza magnetica e lesioni tumorali;
- Gruppi nel web e utenti individuali.

In molte applicazioni i dati sono in forma di tensori (array con almeno tre indici)

**Esempi:**

- Collezione di immagini a colori (e.g.  $32 \times 32$  pixel ciascuna) e 3 stati (RGB)
- Collezione di fotografie della stessa persona con espressioni diverse per il riconoscimento facciale.

## Esempio 3. Fattorizzazioni di matrici in Data Science

Tipicamente le applicazioni nell'analisi dei dati trattano matrici molto grandi.

Considerare tutti i valori di queste matrici si rivela computazionalmente troppo costoso (e spesso ridondante).

### Passaggio fondamentale in Data Analysis

Costruire una **rappresentazione compressa** della matrice  $A$  che la rende più maneggevole e che ne rivela le caratteristiche più importanti.

Ciò si ottiene mediante una

### Approssimazione con matrice di basso rango (low-rank)

Data  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , l'approssimazione di rango  $k$  di  $A$  (con  $k \ll n, m$ ) è data da

$$A \approx WH$$

dove  $W \in \mathbb{R}^{m \times k}$  e  $H \in \mathbb{R}^{k \times n}$

Si immagazzinano soltanto  $k(m+n)$  elementi anziché le  $mn$  componenti della matrice originale.

## Esempio. Il sistema di “raccomandazione” di Netflix

È un esempio di filtraggio di informazioni per prevedere che preferenza un utente assegnerà ad un oggetto (pellicola in questo caso).

I dati messi a disposizione da Netflix<sup>1</sup>:

100M valutazioni (da 1 a 5) di 17K film da parte di 500K utenti come terna: (Utente, Film, Voto).

I dati sono organizzati mediante una matrice  $A$  il cui generico coefficiente non zero  $A_{ij}$  contiene un voto (1-5) per la pellicola  $i$  da parte dell'utente  $j$ .

**Problema:** Data una terna  $(U, F, ?)$  non in database **si vuole prevedere come l'Utente  $U$  valuterà il Film  $F$ .**

**IDEA:** *Feature extraction* = estrarre pochi fondamentali *aspetti* da ogni film, la sua **qualità**, se è un **film d'azione** o una **commedia**, quali **star** appaiono ...

Analogamente ogni preferenza dell'utente si può definire negli stessi termini: se preferisce un film **d'azione o una commedia quali star preferisce**, ...

---

<sup>1</sup>Netflix challenge [https://en.wikipedia.org/wiki/Netflix\\_Prize](https://en.wikipedia.org/wiki/Netflix_Prize)



## Esempio. Il sistema di “raccomandazione” di Netflix

Approssimazione con matrici di basso rango

Ci si può limitare a  $k = 40$  di questi aspetti. **Che cosa significa in termini di matrici?**

Si definiscono

- La matrice  $W$  ( $17,000 \times 40$ ), con gli aspetti di ciascun film.
- La matrice  $H$  ( $40 \times 500,000$ ) con le preferenze degli utenti.

$W$  e  $H$  ottenute minimizzando una opportuna funzione di errore:  $\|A - WH\|$ .

$R = WH$  si definisce matrice di *rating*  $R$  dove  $R_{ij} = \sum_{k=1}^{40} W_{ik}H_{kj}$

**Esempio.**

- La pellicola *Terminator* ha gli aspetti (azione=1.2, sentimentale=-1, ...)
- Le preferenze dell'utente *Paolo* sono (azione=3, sentimentale=-1, ...),

Combinando le due informazioni si ottiene che a Paolo piace Terminator con peso  $3 \cdot 1.2 + (-1) \cdot (-1) + \dots = 4.6 + \dots$

Un valore relativamente grande di  $R_{ij}$  ci dice che l'utente  $j$  darà un voto alto al film  $i$ .

# Programma del corso

- ① Aritmetica di macchina e analisi degli errori. Instabilità e malcondizionamento.
- ② Metodi iterativi per risolvere equazioni non lineari.
- ③ Interpolazione polinomiale.
- ④ Approssimazione ai minimi quadrati.
- ⑤ Integrazione (quadratura) numerica.
- ⑥ Algebra lineare numerica: Soluzione di sistemi lineari. Fattorizzazioni di matrici.

# Obiettivi di apprendimento

Alla fine del corso occorre sapere:

- descrivere i metodi numerici studiati;
- enunciare e dimostrare le proprietà teoriche dei metodi numerici;
- scegliere un metodo numerico appropriato per risolvere uno specifico problema matematico;
- implementare in **MATLAB** gli algoritmi numerici studiati e saperli applicare per la soluzione di problemi specifici;
- interpretare i risultati in base alla teoria;
- quantificare l'errore presente nelle soluzioni approssimate fornite dai metodi numerici.

## Materiale didattico e Testi suggeriti

Il materiale didattico (dispense e programmi) verrà messo a disposizione dello studente in formato elettronico e sarà reperibile sulla piattaforma Moodle.

Per ulteriori approfondimenti si possono consultare i testi:

- 1** A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri, P. Gervasio  
**Matematica Numerica (4a edizione)**  
Springer Verlag, 2014
- 2** A. Quarteroni, F. Saleri  
**Calcolo Scientifico esercizi e problemi risolti con Matlab e Octave**  
Springer, 2008
- 3** V. Comincioli  
**Analisi Numerica Metodi Modelli Applicazioni**  
McGraw-Hill Libri Italia, 1995.
- 4** D. Bini, M. Capovani, O. Menchi  
**Metodi numerici per l'algebra lineare**  
Zanichelli, Bologna, 1996

# Modalità didattica e prova di accertamento

Il corso è strutturato in:

- lezioni frontali
- esercitazioni in laboratorio (si usa **MATLAB** scaricabile gratuitamente al link:  
<https://it.mathworks.com/academia/tah-portal/universita-degli-studi-di-trieste-40730846.html>)

La frequenza delle lezioni è **fortemente raccomandata** sia per l'apprendimento che per la preparazione all'esame.

Modalità della prova di accertamento:

- Prova scritta con esercizi e domande di teoria
- Orale

## Modalità della prova di accertamento

- **Prova scritta.** Si svolgerà mediante domande aperte relative alla teoria, dimostrazioni svolte a lezione e mediante esercizi.
- **Prova orale.** In caso di superamento della prova scritta ( $\text{Voto} \geq 18/30$ ) è prevista una prova orale che include anche la discussione delle esercitazioni obbligatorie proposte durante il corso.

In caso di superamento della prova orale si sommerà al voto della prova scritta un incremento secondo lo schema

Voto Orale		incremento
18–22	→	max 1 punto
23–26	→	max 3 punti
27–30	→	max 5 punti

Se il voto finale supererà 30/trentesimi verrà assegnata la lode.

## Come contattare il docente

### Indirizzo e-mail

amartinez@units.it

### Orario di ricevimento

Il docente riceve **previo appuntamento per e-mail**

Martedì dalle 11.00 alle 13.00.  
Venerdì dalle 10.30 alle 14.00.

Ufficio: stanza 228, secondo piano dell'edificio H2/bis

## Iscrizione alla pagina MOODLE del corso

- NOME del corso:

269SM - ANALISI NUMERICA 2024

SM32269SM2024

- Parola chiave da inserire dopo essere entrati con le proprie credenziali:

MARTINEZ\_IADA2025