Esercizi di Inferenza Statistica
Blocco I
a.a. 2024 – 2025

1. Si consideri la variabile aleatoria X, la cui funzione di densità è data da

$$f(x) = cx\mathbb{1}_{\{0<x<1\}} = \begin{cases} cx & \text{se} \quad \text{x} \in (0,1) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

   a. Si ottenga il valore della costante c tale per cui $f(x)$ è la funzione di densità di X;
   b. Si calcoli il valore atteso e la varianza di X;
   c. Si ottenga $P(0.5 < X < 0.8)$.

2. Si consideri il seguente gioco relativo al lancio di un dado (equilibrato) a 4 facce (i cui possibili esiti sono 1, 2, 3, 4), dove si vince se il numero risultante del lancio è uguale a 4.

   a. Si effettuano $n = 10$ lanci indipendenti del dado. Si calcoli la probabilità di avere 5 vittorie in 10 lanci. Infine, si calcoli la probabilità di vincere almeno 2 volte;
   b. Considerando il lancio ripetuto del dado, qual è la probabilità che la prima vittoria avvenga al terzo lancio. Quale è la probabilità che la terza vittoria avvenga entro e non oltre il 5 lancio?

3. Si supponga di estrarre casualmente 5 viti da una confezione contenente 30 viti, composta per il 40% da viti di lunghezza 18mm e per il 60% da viti di lunghezza 15mm.

   a. Si calcoli la probabilità di aver estratto 3 delle vite più lunghe;
   b. Si ottenga il valore atteso del numero di viti più lunghe estratte.

4. Si supponga che il tempo di attesa in chiamata al servizio clienti di una compagnia sia distribuito secondo un variabile aleatoria Gamma(α, λ), avente media 4 (min) e deviazione standard 2 (min). Si ottengano i valori di α e λ, e si determini la corrispondente funzione generatrice dei momenti.

5. La durata X, in ore, di lampadine prodotte in serie è una variabile aleatoria esponenziale con di media 100.

   a. Qual è la probabilità che una certa lampada duri meno di 300 ore?
   b. Qual è la probabilità che una lampadina duri più di 250 ore sapendo che è rimasta in funzione dopo le prime 200 ore?
   c. Si calcoli il valore mediano di X e il 75-esimo percentile.

6. Siano X e Y due v.a. indipendenti. Si ricavi la distribuzione di $Z = X + Y$ considerando

   a. $X \sim \text{Bin}(n_1, p)$ e $Y \sim \text{Bin}(n_2, p)$;
   b. $X \sim \text{Po}(\lambda_1)$ e $Y \sim \text{Po}(\lambda_2)$.

7. Siano X e Y due variabili aleatorie normali, tali che $\mathbb{E}[X] = 5$, $\mathbb{E}[Y] = 3$, $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Y) = 4$. Sia Z la v.a. definita da $Z = \frac{1}{5}X + 3Y$. Si ottenga la distribuzione di Z nel caso in cui

   a. X e Y siano indipendenti;
   b. X e Y siano dipendenti e la correlazione sia pari a 0.5.
   c. Nelle condizioni (a) e (b) si calcoli la probabilità $P(14 \leq Z \leq 18)$.

8. Siano X e Y due v.a., la cui distribuzione congiunta $p(x, y) = P(X = x, Y = y)$ è espressa mediante la seguente tabella

X/Y	0	1	2
1	0.10	0.25	0.15
2	0.05	0.05	0.40

   a. Si ottengano le distribuzioni marginali di X e Y, il loro valore atteso e la varianza;

   b. Si calcoli $\mathrm{cov}(X, Y)$

9. Si assuma che il numero delle chiamate che arriva ogni 45 secondi ad un numero per emergenze sia una variabile casuale Poisson di media 2.

   a. Qual è la probabilità che in un determinato secondo non arrivi alcuna chiamata?

   b. Qual è la probabilità che la quinta chiamata al centralino arrivi dopo tre minuti?

   c. Qual è in media il tempo (in minuti) che intercorre tra due chiamate al centralino?

10. Una fabbrica possiede due macchinari che fabbricano tondini di ferro ma con una diversa percentuale di difetti. La prima macchina produce il 5% di pezzi difettosi mentre la seconda il 15%. Si dispone di una partita di pezzi prodotti presso tale fabbrica ed è noto che questa è composta del 40% di pezzi prodotti dalla prima macchina.

   a. Qual è la probabilità che un pezzo estratto a caso presenti difetti?

   b. Avendo osservato che tale pezzo è difettoso, con che probabilità è stato prodotto dalla prima macchina?

11. Sia X la variabile aleatoria relativa all'altezza (in cm) in un gruppo di individui, e si assuma che X sia distribuita secondo una normale. Sapendo che $P(170 \leq X \leq 180) = 0.5953$ e che $P(X < 180) = 0.798$,

   a. si determinino media e varianza della distribuzione;

   b. si determinino i quantili di ordine 0.05, 0.9 e 0.95 della distribuzione.

12. Una prova d'esame consiste in 10 quesiti a risposta multipla: ogni quesito prevede 4 risposte, una sola corretta. Per superare l'esame è necessario rispondere correttamente a 7 quesiti. Assumiamo che uno studente conosca la risposta esatta di 4 dei 10 quesiti, mentre tira ad indovinare sui restanti 6 quesiti.

   a. Che probabilità ha di superare l'esame?

   b. Che probabilità ha di prendere il voto massimo?