

# Foglio di Esercizi 3 BIS

## Metodi Matematici per l'IA

31-10-2024

### Esercizio 1

Dimostrare che tutte le norme definite su  $\mathbb{R}^n$  sono equivalenti.

### Esercizio 2

Consideriamo lo spazio  $C_0([a, b])$  delle funzioni continue nell'intervallo  $[a, b]$  e definiamo le seguenti norme

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)| dx$$

e

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

per ogni  $f \in C_0([a, b])$ . Provare che  $\|\cdot\|_1$  e  $\|\cdot\|_\infty$  non sono equivalenti.

### Esercizio 3

Consideriamo lo spazio  $C^1([a, b])$  delle funzioni continue e con derivata continua nell'intervallo  $[a, b]$ . Definiamo la seguente norma

$$\|f\|_{C^1} := |f(a)| + \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)| = |f(a)| + \|f'\|_\infty,$$

dove  $\|\cdot\|_\infty$  denota la norma del sup definita su  $C_0([a, b])$ .

- (i) Provare che  $C^1([a, b])$  con la norma appena definita è uno spazio di Banach.
- (ii) Si definisca sullo stesso spazio la norma

$$\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

Provare che  $\|\cdot\|_{C^1}$  e  $\|\cdot\|$  sono equivalenti.