Definizione Una successione di variabili aleatorie $X_0, X_1, X_2, \dots$ che prende valori in $\{1, 2, \dots, M\}$ è detta catena di Markov se per ogni $n \geq 0$

$$P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0\} = P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\} \quad (*)$$

Pensiamo ad n come ad un indice temporale, con X_n che descrive lo stato di un sistema all'istante n. Le $X_0, X_1, X_2, \dots$ non sono in genere indipendenti tra di loro, quindi la conoscenza del valore assunto da X_n influenza quello di X_{n+1}.

La condizione $(*)$ ci dice che conoscere anche la situazione antecedente, cioè $X_n, X_{n-1}, \dots$, non fornisce informazioni aggiuntive.

La quantità

$$p_{ij}(n) := P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\}$$

è detta probabilità di transizione dallo stato i allo stato j. Nel seguito assumeremo che la catena sia omogenea nel tempo, cioè che p_{ij} non dipenda da n.

PER DESCRIVERE COME EVOLVE UNA CATENA DI MARKOV, ABBIAMO BISOGNO DI CONOSCERE LE PROBABILITÀ DI TRANSIZIONE. CON QUESTE POSSIAMO COSTRUIRE LA <u>MATRICE DI TRANSIZIONE</u> $P = (p_{ij})$.

ESPLICITAMENTE, SULLA PRIMA RIGA DI P TROVIAMO LA PROBABILITÀ DI TRANSIZIONE DA $i=1$ A $j=1$, DA $i=1$ A $j=2$, ..., DA $i=1$ A $j=M$.

CHIARAMENTE È UNA MATRICE QUADRATA $M \times M$, CON ELEMENTI ≥ 0. INOLTRE $\sum_{j=1}^{M} p_{ij} = 1$, CIOÈ LA SOMMA DEGLI ELEMENTI DI OGNI RIGA VALE 1. INFATTI

$$\sum_{j=1}^{M} p_{ij} = \sum_{j=1}^{M} P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\}$$ ESSENDO EVENTI DISGIUNTI

$$= P\{\bigcup_{j=1}^{M} \{X_{n+1} = j\} \mid X_n = i\} = P\{\Omega \mid X_n = i\} = 1$$

RICORDANDO CHE LA PROBABILITÀ CONDIZIONALE È ESSA STESSA UNA PROBABILITÀ.

<u>ESEMPIO</u> SUPPONIAMO CHE OGNI GIORNO POSSA AVERE TEMPO O PIOVOSO O SOLEGGIATO. SE OGGI È PIOVOSO, ALLORA DOMANI SARÀ PIOVOSO CON PROBABILITÀ $1/3$ E

SOLEGGIATO CON PROBABILITÀ 2/3. SE OGGI È SOLEGGIATO, DOMANI SARÀ PIOVOSO CON PROBABILITÀ 1/2 E SOLEGGIATO CON PROBABILITÀ 1/2. ETICHETTIAMO LO STATO "PIOVOSO" CON 1 E QUELLO "SOLEGGIATO" CON 2. DETTO X_n LA SITUAZIONE METEO AL GIORNO n, LA SUCCESSIONE $X_0, X_1, X_2, \ldots$ È UNA CATENA DI MARKOV A VALORI IN $\{1,2\}$ (CIOÈ $M=2$). CHE VALGA LA PROPRIETÀ (*) CE LO DICE LA DESCRIZIONE DEL PROCESSO: SOLO LA SITUAZIONE METEO DI OGGI INFLUENZA QUELLA DI DOMANI.

LA MATRICE DI TRANSIZIONE È

$$\begin{array}{c|cc} & P & S \\ \hline P & & \\ S & & \end{array} \quad \begin{matrix} & P & S \\ P & \multicolumn{2}{c}{} \end{matrix}$$

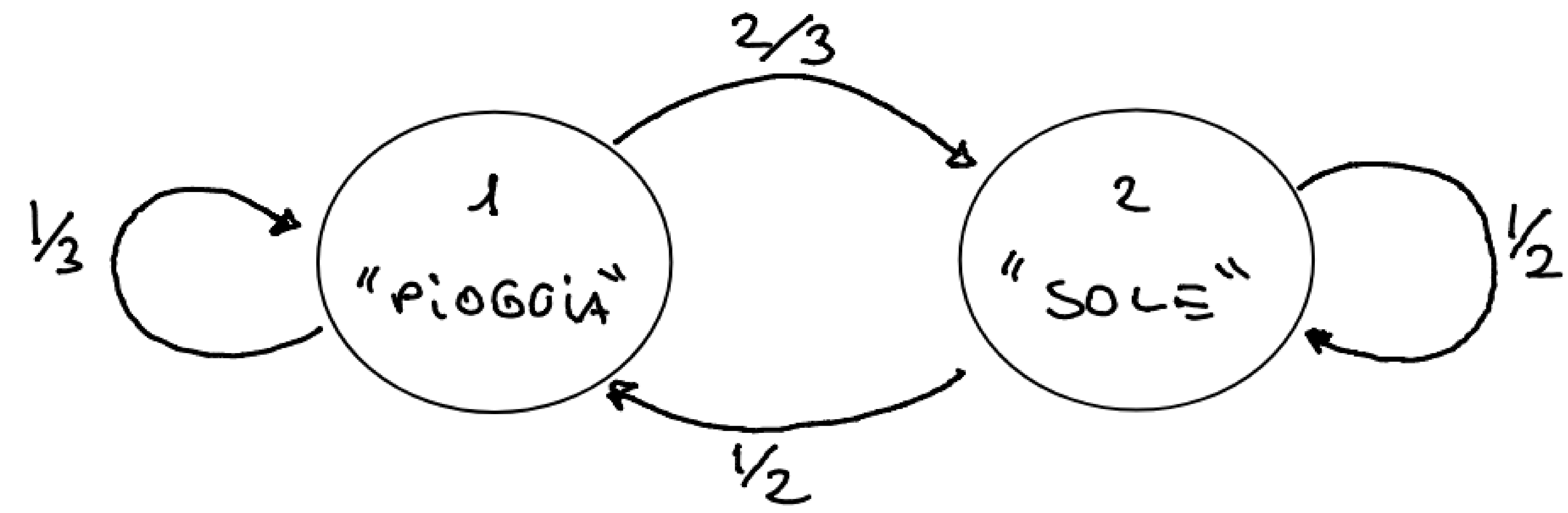
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} P & S \end{array} \\ \begin{array}{c} P \\ S \end{array} & \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

P = PIOGGIA
S = SOLE

VOLENDO, AVREMMO POTUTO ETICHETTARE "SOLEGGIATO" CON 1 E "PIOVOSO" CON 2. LA MATRICE SAREBBE STATA ALLORA $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$. LA SCELTA DELL'ORDINE DI SOLITO È ARBITRARIA.

POSSIAMO RAPPRESENTARE UNA CATENA DI MARKOV CON UN <u>DIAGRAMMA</u>: UN CERCHIO PER OGNI STATO E FRECCE TRA I CERCHI PER INDICARNE LE TRANSIZIONI.

NEL CASO APPENA VISTO



SE INVECE IL TEMPO DOMANI DIPENDE DA OGGI E DA IERI? PER ESEMPIO, ALLE CONDIZIONI PRECEDENTI POTREMMO AGGIUNGERE DUE ECCEZIONI: SE CI SONO DUE GIORNI CONSECUTIVI DI PIOGGIA, ALLORA DOMANI SARÀ SOLEGGIATO, MENTRE SE CI SONO DUE GIORNI CONSECUTIVI DI SOLE, ALLORA DOMANI SARÀ PIOVOSO.

ABBIAMO

$$P\{X_{n+1}=2 \mid X_n=1,\ X_{n-1}=1\} = 1 \neq 2/3$$

$$P\{X_{n+1}=1 \mid X_n=2,\ X_{n-1}=2\} = 1 \neq 1/2$$

E QUINDI IN QUESTO CASO $X_0, X_1, X_2, \dots$ NON È UNA CATENA DI MARKOV.

POTREMMO PERÒ INGRANDIRE LO SPAZIO DEGLI STATI, CREANDO UNA NUOVA CATENA DI MARKOV. BASTA

PORRE $Y_n := (X_{n-1}, X_n)$ PER $n \geq 1$. ALLORA $Y_1, Y_2, \dots$

È UNA CATENA DI MARKOV IN $\{1, 2, 3, 4\}$, AVENDO

ETICHETTATO CON $1 = $ (PIOGGIA, PIOGGIA), $2 = $ (PIOGGIA, SOLE),

$3 = $ (SOLE, PIOGGIA), $4 = $ (SOLE, SOLE).

È UNA CATENA DI MARKOV PERCHÉ LA SITUAZIONE METEO

DI DOMANI E DOPODOMANI È INFLUENZATA SOLO A PARTIRE DA QUELLA DI IERI.

ABBIAMO

$$P\{Y_{n+1} = 1 \mid Y_n = 1\} = P\{X_n = 1, X_{n+1} = 1 \mid X_{n-1} = 1, X_n = 1\} = 0$$

PERCHÉ $P\{X_{n+1} = 1 \mid X_{n-1} = 1, X_n = 1\} = 0$

$$P\{Y_{n+1} = 2 \mid Y_n = 1\} = P\{X_n = 1, X_{n+1} = 2 \mid X_{n-1} = 1, X_n = 1\} = 1$$

$$P\{Y_{n+1} = 3 \mid Y_n = 1\} = P\{X_n = 2, X_{n+1} = 1 \mid X_{n-1} = 1, X_n = 1\} = 0$$

$$P\{Y_{n+1} = 4 \mid Y_n = 1\} = P\{X_n = 2, X_{n+2} = 2 \mid X_{n-1} = 1, X_n = 1\} = 0$$

$\vdots$

$$P\{Y_{n+1} = 3 \mid Y_n = 2\} = P\{X_n = 2, X_{n+1} = 1 \mid X_{n-1} = 1, X_n = 2\}$$

$$= \frac{P\{X_{n-1} = 1, X_n = 2, X_{n+1} = 1\}}{P\{X_{n-1} = 1, X_n = 2\}} = P\{X_{n+1} = 1 \mid X_{n-1} = 1, X_n = 2\}$$

$$= P\{X_{n+1} = 1 \mid X_n = 2\} = 1/2$$

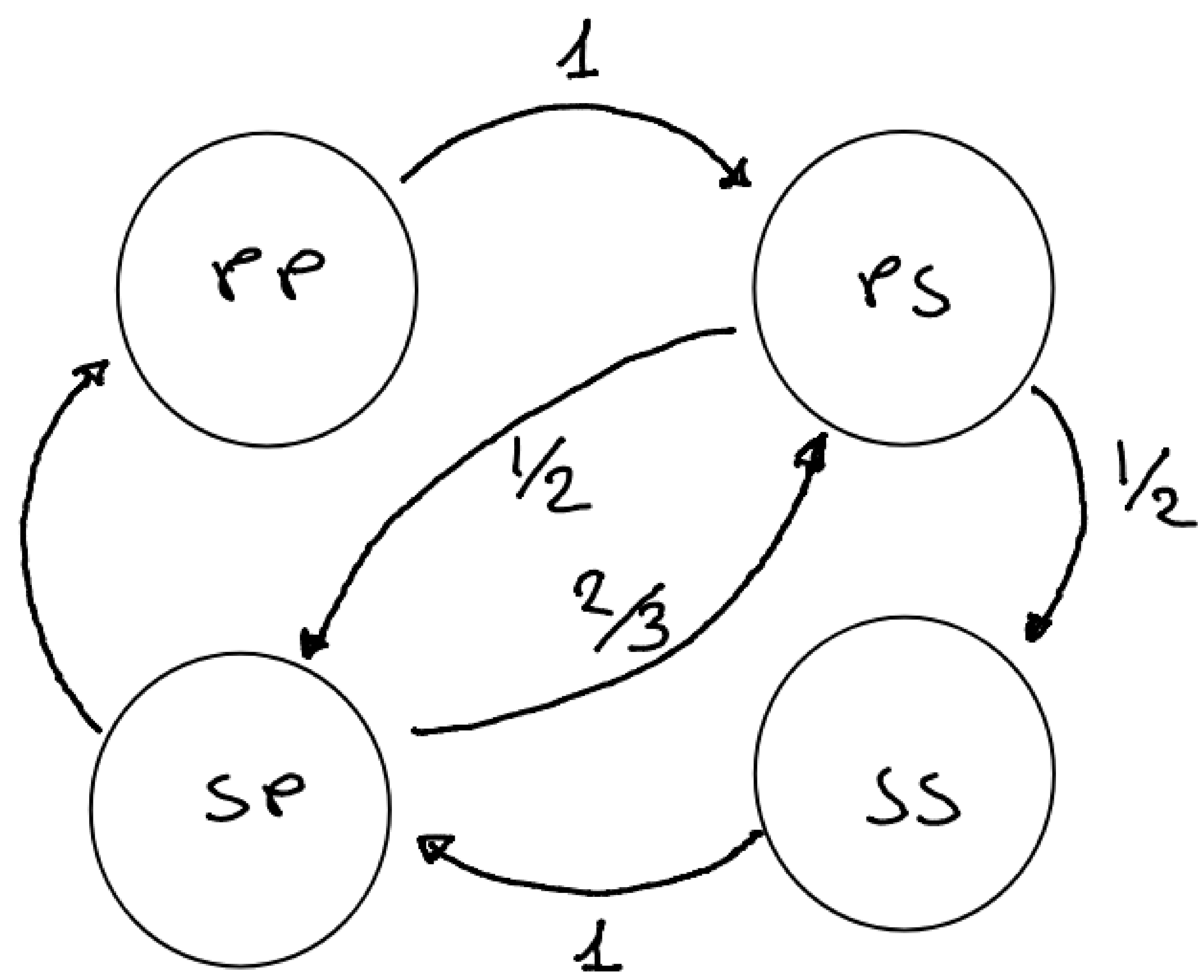
E COSÌ VIA.

OTTENIAMO COSÌ LA MATRICE DI TRANSIZIONE

$$
\begin{array}{c} \\ PP \\ PS \\ SP \\ SS \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} PP & PS & SP & SS \end{array} \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

P = PIOGGIA
S = SOLE

QUESTO IL RELATIVO DIAGRAMMA



<u>ESEMPIO</u> DUE GIOCATORI A E B HANNO UN CAPITALE INIZIALE PARI AD a E b UNITÀ, E GIOCANO UNA SERIE DI PARTITE IN CIASCUNA DELLE QUALI A CEDE A B UNA UNITÀ CON PROBABILITÀ q E NE RICEVE UNA CON PROBABILITÀ $p = 1 - q$. IL GIOCO FINISCE QUANDO UNO DEI GIOCATORI VA A ZERO.

INDICHIAMO CON X_n IL CAPITALE DEL GIOCATORE A ALLA n-ESIMA PARTITA. NOTARE CHE X_n PRENDE VALORI IN $\{0,1,\dots,a+b\}$ PERCHÉ $a+b$ È IL MASSIMO CAPITALE CHE IL GIOCATORE A PUÒ ACCUMULARE. INOLTRE IL VALORE X_{n+1} DIPENDE DA QUELLO DI X_n E PER PREDIRNE IL VALORE NON HA IMPORTANZA CONOSCERE L'EVOLUZIONE DEL CAPITALE DI A PRIMA DELLA PARTITA n-ESIMA. POSSIAMO MODELLIZZARE IL TUTTO ATTRAVERSO UNA CATENA DI MARKOV (CON $M=a+b+1$).

ABBIAMO SE $i\neq 0$ OPPURE $i\neq a+b$

$$P\{X_{n+1}=s \mid X_n=i\} = \begin{cases} p & \text{SE } s=i+1 \\ q & \text{SE } s=i-1 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

INOLTRE

$$P\{X_{n+1}=s \mid X_n=0\} = \begin{cases} 1 & \text{SE } s=0 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

$$P\{X_{n+1}=s \mid X_n=a+b\} = \begin{cases} 1 & \text{SE } s=a+b \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

POICHÉ QUANDO UNO DEI DUE GIOCATORI VA A ZERO IL GIOCO SI FERMA. LA MATRICE DI TRANSIZIONE È

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
q & 0 & p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & q & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p & 0 \\
0 & 0 & 0 & & q & 0 & p \\
0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

VEDIAMO ORA COME SONO FATTE LE LEGGI CONGIUNTE DI UN VETTORE ALEATORIO DEL TIPO $(X_{n_1}, \dots, X_{n_k})$, DOVE $X_0, X_1, X_2, \dots$ È UNA CATENA DI MARKOV.

DEFINIAMO <u>MATRICE DI TRANSIZIONE IN m PASSI</u> $P^{(m)}$ QUELLA DI COEFFICIENTI

$$p_{ij}^{(m)} = P\{X_{n+m} = j \mid X_n = i\}$$

POSSIAMO SCRIVERE

$$p_{ij}^{(m)} = \frac{P\{X_{n+m} = j, X_n = i\}}{P\{X_n = i\}}$$

$\{X_{n+m-1} = h : h = 1, \dots, N\}$ È UNA PARTIZIONE DI Ω

$$= \sum_{h=1}^{N} \frac{P\{X_{n+m} = j, X_{n+m-1} = h, X_n = i\}}{P\{X_n = i\}}$$

$$= \sum_{h=1}^{N} \frac{P\{X_{n+m} = j, X_{n+m-1} = h, X_n = i\}}{P\{X_{n+m-1} = h, X_n = i\}} \cdot \frac{P\{X_{n+m-1} = h, X_n = i\}}{P\{X_n = i\}}$$

$$= \sum_{h=1}^{M} P\{X_{n+m}=j \mid X_{n+m-1}=h, X_n=i\} \cdot P\{X_{n+m-1}=h \mid X_n=i\}$$

$$= \sum_{h=1}^{M} P\{X_{n+m}=j \mid X_{n+m-1}=h\} \cdot P\{X_{n+m-1}=h \mid X_n=i\}$$

$$= \sum_{h=1}^{M} p_{hj}\, p_{ih}^{(m-1)}$$

QUESTO SIGNIFICA CHE $P^{(m)} = P\,P^{(m-1)}$. REITERANDO OTTENIAMO $P^{(m)} = \underbrace{P \cdots P}_{m \text{ VOLTE}} = P^m$

SIA q LA DENSITÀ DI X_0. SCRIVIAMO q_k IN LUOGO DI $q(k) := P\{X_0 = k\}$.

DATO UN QUALSIASI $n \geq 0$, SFRUTTANDO LA FORMULA DELLE PROBABILITÀ TOTALI ($\{X_0=h,\ h=1,\dots,M\}$ È UNA PARTIZIONE DI Ω), ABBIAMO

$$P\{X_n=k\} = \sum_{h=1}^{M} P\{X_n=k \mid X_0=h\} P\{X_0=h\} = \sum_{h=1}^{M} p_{hk}^{(n)}\, q_h$$

SE $0 < n_1 < n_2 < \dots < n_k$, POSSIAMO ORA CALCOLARE LA LEGGE CONGIUNTA DI $(X_{n_1}, X_{n_2}, \dots, X_{n_k})$

$$P\{X_{n_1}=i_1, X_{n_2}=i_2, \dots, X_{n_k}=i_k\} =$$

$$= P\{X_{n_1}=i_1, X_{n_2}=i_2, \dots, X_{n_{k-1}}=i_{k-1}\}\, P\{X_{n_k}=i_k \mid X_{n_1}=i_1, \dots, X_{n_{k-1}}=i_{k-1}\}$$

$$= P\{X_{n_1}=i_1, X_{n_2}=i_2, \dots, X_{n_{k-1}}=i_{k-1}\}\, p_{i_{k-1} i_k}^{(n_k-n_{k-1})}$$

NELL'ULTIMO PASSAGGIO SI È USATO IL FATTO CHE

$$P\{X_{m_n}=i_n \mid X_{m_1}=i_1,\dots,X_{m_{n-1}}=i_{n-1}\} = P\{X_{m_n}=i_n \mid X_{m_{n-1}}=i_{n-1}\}$$

IN QUANTO $X_{m_1},\dots,X_{m_{n-2}}$ VENGONO PRIMA DI $X_{m_{n-1}}$ E X_{m_n} DIPENDE SOLO DA QUEST'ULTIMO.

REITERANDO LA PROCEDURA

$$P\{X_{m_1}=i_1,\ X_{m_2}=i_2,\dots,X_{m_n}=i_n\} = P\{X_{m_1}=i_1\}\, P^{(m_2-m_1)}_{i_1 i_2}\cdots P^{(m_n-m_{n-1})}_{i_{n-1}i_n}$$

$$= \sum_{h=1}^{M} q_h\, P^{(m_1)}_{h i_1}\, P^{(m_2-m_1)}_{i_1 i_2}\cdots P^{(m_n-m_{n-1})}_{i_{n-1}i_n}$$

QUESTO PROVA CHE LE LEGGI CONGIUNTE SONO DETERMINATE UNICAMENTE DALLA MATRICE DI TRANSIZIONE P E DALLA DENSITÀ q DELLA V.A. INIZIALE X_0.

QUESTO IMPLICA CHE DUE CATENE DI MARKOV (ANCHE SE DEFINITE SU SPAZI DI PROBABILITÀ DIVERSI), AVENTI STESSA DENSITÀ INIZIALE E STESSA MATRICE DI TRANSIZIONE, HANNO STESSE LEGGI CONGIUNTE.

<u>OSSERVAZIONE</u> ABBIAMO VISTO COME

$$P\{X_m = k\} = \sum_{h=1}^{M} p_{hk}^{(m)} q_h$$

SE INDICHIAMO CON V_0 IL VETTORE DI COMPONENTI

$q_k = P\{X_0 = k\}$ E CON V_m IL VETTORE DI COMPONENTI

$P\{X_m = k\}$, POSSIAMO SCRIVERE

$$V_m = V_0 P^m$$

PER ESEMPIO, SE LA MATRICE DI TRANSIZIONE È

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

E $V_0 = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$, CIOÈ X_0 HA DENSITÀ UNIFORME.

ALLORA $V_1 = V_0 P = (5/24, 1/3, 5/24, 1/4)$. SIMILMENTE,

$V_5 = V_0 P^5 = (3379/15552, 2267/7776, 101/486, 1469/5184)$.

IL LETTORE NON SI SPAVENTI: SONO CALCOLI NUMERICI CON SEMPLICI PROGRAMMI APPOSITI.