LE VARIABILI ALEATORIE DI TIPO ESPONENZIALE SONO PRINCIPALMENTE USATE PER MODELLIZZARE <u>TEMPI DI ATTESA</u> FINO ALL'ARRIVO DEL PRIMO "SUCCESSO".

PER ESEMPIO, LA QUANTITÀ DI TEMPO CHE PASSA PRIMA CHE UN ELEMENTO DI UN APPARECCHIO SI ROMPA, PRIMA CHE UNA LAMPADINA SI FULMINI, PRIMA CHE ACCADA UN INCIDENTE, ECT.

<u>ESEMPIO</u> LA QUANTITÀ DI TEMPO CHE PASSA PRIMA CHE UN PICCOLO METEORITE PRECIPITI NEL DESERTO DEL SAHARA È MODELLIZZATA ATTRAVERSO UNA V.A. DI TIPO ESPONENZIALE CON MEDIA DI 10 GIORNI. A PARTIRE DALLA MEZZANOTTE DI OGGI, QUAL È LA PROBABILITÀ CHE UN METEORITE PRECIPITI TRA LE ORE 6 E LE ORE 18 DI DOMANI?

SAPPIAMO CHE SE $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ ALLORA $E[X] = 1/\lambda$.

SE USIAMO COME UNITÀ TEMPORALE I GIORNI, ABBIAMO DUNQUE $\lambda = 1/10$. INOLTRE LA FINESTRA TEMPORALE IN ESAME PUÒ ESSERE IDENTIFICATA CON L'INTERVALLO $[1/4, 3/4]$.

LA PROBABILITÀ RICHIESTA È QUINDI

$$P\{1/4 \leq X \leq 3/4\} = \int_{1/4}^{3/4} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = e^{-1/40} - e^{-3/40} = 0{,}0476.$$

POSSIAMO ANCHE DOMANDARCI QUALE SIA LA PROBABILITÀ CHE UN METEORITE PRECIPITI TRA LE ORE 12 E LE ORE 24 DI DOMANI SAPENDO CHE NON È CASCATO PRIMA DELLE 6.

POICHÉ LA V.A. NON HA MEMORIA

$$p\{1/2 \le X \le 1 \mid X \ge 1/4\} = p\{1/4 \le X \le 3/4\}$$

E LA RISPOSTA È LA STESSA DI PRIMA.

NELL'UTILIZZO DELLA DENSITÀ ESPONENZIALE PER DESCRIVERE IL TEMPO CHE PASSA PRIMA CHE UN ELEMENTO DI UN APPARECCHIO SI ROMPA, BISOGNA FARE ATTENZIONE: TALE UTILIZZO È LEGITTIMO SE L'APPARECCHIO <u>NON</u> È <u>SOGGETTO AD USURA</u>. QUESTO SIGNIFICA CHE LO STRUMENTO NON INVECCHIA, E IL PASSARE DEL TEMPO NON RENDE PIÙ O MENO PROBABILE IL SUO GUASTARSI. IN CASO CONTRARIO L'USO DI UNA V.A. ESPONENZIALE NON È LEGITTIMO PERCHÉ IL FENOMENO HA MEMORIA: DUE APPARECCHI, UNO NUOVO E UNO VECCHIO E USURATO, HANNO PROBABILITÀ DIVERSE DI GUASTARSI. DI SOLITO È PIÙ ALTA PER IL SECONDO.

QUESTO SI PUÒ ESPRIMERE FORMALMENTE DICENDO CHE

$$p\{X > T+t \mid X > T\} < p\{X > t\} \qquad (*)$$

IN PAROLE, LA PROBABILITÀ CHE UN APPARECCHIO CHE HA GIÀ VISSUTO UN TEMPO T VIVA ANCORA PER UN TEMPO t È MINORE DELLA PROBABILITÀ CHE UN APPARECCHIO NUOVO VIVA ALMENO PER UN TEMPO t.

NEL DESCRIVERE I TEMPI DI APPARECCHI SOGGETTI AD USURA USEREMO QUINDI V.A. CHE SODDISFANO LA (*). MENTRE PERÒ ESISTE UN SOLO TIPO DI V.A. ASSOLUTAMENTE CONTINUA CHE È PRIVA DI MEMORIA (QUELLE DI TIPO ESPONENZIALE), CE NE SONO INFINITE CHE SODDISFANO (*).

<u>ESEMPIO</u> CALCOLIAMO IL TEMPO DI VITA X DI UN SISTEMA COSTITUITO DA TRE ELEMENTI (MA QUANTO VEDREMO PUÒ ESSERE GENERALIZZATO AD UN NUMERO ARBITRARIO) POSTI IN <u>SERIE</u>. CIASCUNO DI ESSI HA UN TEMPO DI VITA X_k CHE SEGUE UNA LEGGE $\mathcal{E}(\lambda_k)$, $k=1,2,3$, E LE TRE VITE SONO INDIPENDENTI. POICHÉ I TRE COMPONENTI SONO DISPOSTI IN SERIE, APPENA SE NE GUASTA UNO SI GUASTA IL SISTEMA. QUINDI

$$X = \min\{X_1, X_2, X_3\}$$

DA CUI

$$P\{X \geq t\} = P\{X_1 \geq t, X_2 \geq t, X_3 \geq t\}$$

ESSENDO X_1, X_2, X_3 INDIPENDENTI

$$= P\{X_1 \geq t\} \cdot P\{X_2 \geq t\} \cdot P\{X_3 \geq t\}$$

$$= e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} e^{-\lambda_3 t} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t}$$

NE DEDUCIAMO CHE LA FUNZIONE DI RIPARTIZIONE F DI X È

$$F(t) = P\{X \leq t\} = 1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t}$$

DERIVANDO OTTENIAMO CHE LA DENSITÀ È $\mathcal{E}(\lambda)$ CON $\lambda = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k$.

QUESTO SIGNIFICA CHE IL SISTEMA NON È SOGGETTO AD USURA.

IL TEMPO DI VITA MEDIO DEL SISTEMA È

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} = \frac{1}{\frac{1}{E[X_1]}+\frac{1}{E[X_2]}+\frac{1}{E[X_3]}} < E[X_k] \quad \text{PER } k=1,2,3$$

CIOÈ PIÙ BREVE DI QUELLO DI CIASCUNA COMPONENTE. SE, PER ESEMPIO, $E[X_k] = \mu$ PER $k=1,2,3$, ALLORA $E[X] = \mu/3$.

SUPPONIAMO ORA CHE I COMPONENTI SIANO MESSI IN <u>PARALLELO</u>. IN QUESTO CASO IL SISTEMA SI GUASTA QUANDO TUTTE E TRE LE COMPONENTI SI ROMPONO. QUINDI

$$X = \max\{X_1, X_2, X_3\}$$

DA CUI $$P\{X \le t\} = P\{X_1 \le t, X_2 \le t, X_3 \le t\}$$

ESSENDO X_1, X_2, X_3 INDIPENDENTI

$$= P\{X_1 \le t\} \cdot P\{X_2 \le t\} \cdot P\{X_3 \le t\}$$

$$= \left(1 - e^{-\lambda_1 t}\right)\left(1 - e^{-\lambda_2 t}\right)\left(1 - e^{-\lambda_3 t}\right)$$

POSSIAMO TROVARCI LA DENSITÀ SEMPLICEMENTE DERIVANDO QUESTA ESPRESSIONE ($P\{X \le t\}$ FORNISCE LA FUNZIONE DI RIPARTIZIONE). È CHIARO COMUNQUE CHE NON SI TRATTA DI UNA DENSITÀ ESPONENZIALE E CHE QUINDI IL SISTEMA HA MEMORIA. QUESTO FATTO SI INTERPRETA COSÌ: UN SISTEMA VECCHIO PUÒ ANCORA ESSERE FUNZIONANTE ANCHE AVENDO PIÙ COMPONENTI ROTTE. COMUNQUE LA SUA PROBABILITÀ DI GUASTARSI È PIÙ ALTA RISPETTO UNO NUOVO IN CUI TUTTE LE COMPONENTI SONO ANCORA SANE. IN QUESTO CASO L'USURA È COSTITUITA DALLE COMPONENTI CHE MAN MANO SI GUASTANO.

SE PER SEMPLICITÀ SUPPONIAMO $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 =: \lambda$, ALLORA LA DENSITÀ VALE $3\lambda(1 - e^{-\lambda t})^2 e^{-\lambda t}$. POSSIAMO QUINDI CALCOLARCI IL VALORE MEDIO: POSTO $m = 1/\lambda = E[X_k]$, CON UN PO' DI CONTI OTTENIAMO $E[X] = \frac{11}{6} m$. CIOÈ, IL SISTEMA HA POCO MENO DEL DOPPIO DEL TEMPO MEDIO DI VITA DI UN SINGOLO COMPONENTE.

Esempio Consideriamo un sistema costituito da m elementi identici, che vengono fatti funzionare uno alla volta: quando il primo si guasta, viene sostituito dal secondo (che inizia a funzionare in quell'istante), e così via finché si guasta l'm-esimo elemento. A quel punto il sistema cessa di funzionare.
Se ogni elemento ha tempo di vita una v.a. X_k con legge $\mathcal{E}(\lambda)$, e le vite sono indipendenti, allora il tempo di vita X del sistema è $X = \sum_{k=1}^{m} X_k$. La sua legge è di tipo Gamma, e precisamente $\Gamma(m, \lambda)$. Non si tratta di una densità esponenziale e quindi il sistema ha memoria. In questo caso l'usura è rappresentata dal numero di componenti già guastati.

Esercizio Sia X il tempo di vita di una lavatrice prodotta da una ditta. Dai dati raccolti è noto che il tempo medio di vita è 2 anni, con uno scarto quadratico medio di 1 anno. Supponendo di poter descrivere X come una v.a. di densità Gamma (per opportuni parametri da determinare), trovare

- IL NUMERO DI MESI CHE LA DITTA PUÒ COPRIRE CON UNA GARANZIA IN MODO TALE CHE PER OGNI LAVATRICE VENDUTA LA DITTA ABBIA IL 95% DI PROBABILITÀ DI NON DOVER INTERVENIRE IN GARANZIA.
- SE LA LAVATRICE NON HA GUASTI FINO ALLO SCADERE DELLA GARANZIA, LA PROBABILITÀ CHE SI GUASTI NEI 4 MESI SUCCESSIVI. SI CONFRONTI QUESTO RISULTATO CON LA PROBABILITÀ CHE UN APPARECCHIO NUOVO SI GUASTI NEI PRIMI 4 MESI.

SE $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, ALLORA $E[X] = \alpha/\lambda$ E $\mathrm{Var}\,X = \alpha/\lambda^2$.

DAL SISTEMA $\begin{cases} \alpha/\lambda = 2 \\ \alpha/\lambda^2 = 1 \end{cases}$ OTTENIAMO $\begin{cases} \alpha = 4 \\ \lambda = 2 \end{cases}$

QUINDI $X \sim \Gamma(4,2)$. DOBBIAMO TROVARE T TALE CHE LA LAVATRICE NON SI ROMPA PRIMA CHE TRASCORRA UN PERIODO DI TEMPO T CON PROBABILITÀ DEL 95%, CIOÈ

$$P\{X \geq T\} = 0{,}95$$

UNA COMPUTAZIONE NUMERICA FORNISCE $T \simeq 0{,}6831$.

ESPRESSO IN MESI, VISTO CHE LA NOSTRA UNITÀ DI TEMPO

È L'ANNO, ABBIAMO $T \simeq 12 \cdot 0{,}6831 \simeq 8{,}19$ MESI. QUINDI LA GARANZIA SARÀ DI 8 MESI.

PER IL SECONDO PUNTO, DOBBIAMO CALCOLARE

$$P\{\underbrace{X \leq 1}_{\substack{1 \text{ ANNO} \\ = 8+4 \text{ MESI}}} \mid X > \underbrace{\tfrac{8}{12}}_{8 \text{ MESI}}\} = \frac{P\{\frac{8}{12} \leq X \leq 1\}}{P\{X \geq 8/12\}} = \frac{P\{X \geq 2/3\} - P\{X \geq 1\}}{P\{X \geq 2/3\}}$$

UNA COMPUTAZIONE NUMERICA FORNISCE IL VALORE $\simeq 0{,}101$ CIOÈ $\simeq 10{,}1\%$. DI CONTRO, LA PROBABILITÀ CHE SI GUASTI NEI PRIMI 4 MESI È

$$P\{X \leq \tfrac{4}{12}\} = 1 - P\{X \geq 1/3\} \simeq 0{,}0048$$

CIOÈ MENO DEL 0,5%

ABBIAMO VISTO COME IN UNO SCHEMA DI PROVE INDIPENDENTI LA VARIABILE ALEATORIA "QUANDO SI PRESENTA IL PRIMO SUCCESSO" HA DENSITÀ GEOMETRICA

$$GEO(q)(x) = \begin{cases} (1-q)^x q & x = 0,1,2,\dots \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

VISTO CHE V.A. SIA CON DENSITÀ GEOMETRICA, SIA CON DENSITÀ ESPONENZIALE GODONO DELLA PROPRIETÀ DI ASSENZA DI MEMORIA, VEDIAMO QUAL È IL LEGAME TRA LE DUE.
AL DI LÀ DELLA GENESI (DI CUI PER ORA NON CI OCCUPIAMO), DAL PUNTO DI VISTA MATEMATICO LA DENSITÀ ESPONENZIALE È UNA VERSIONE CONTINUA DELLA DENSITÀ GEOMETRICA E VICEVERSA UNA DENSITÀ GEOMETRICA È UNA VERSIONE DISCRETA DELLA DENSITÀ ESPONENZIALE.
INFATTI, SIA $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ CON FUNZIONE DI RIPARTIZIONE F.
INDICATO CON $\lfloor x \rfloor$ IL PIÙ GRANDE INTERO PIÙ PICCOLO DI UN NUMERO $x \in \mathbb{R}$ DATO, PONIAMO $Y = \lfloor X \rfloor$. ABBIAMO PER $k \in \mathbb{N}$

$$P\{Y = k\} = P\{k \le X < k+1\} = F(k+1) - F(k)$$

$$= 1 - e^{-\lambda(k+1)} - (1 - e^{-\lambda k}) = e^{-\lambda k}(1 - e^{-\lambda})$$

QUINDI $Y \sim GEO(q)$ CON $q = 1 - e^{-\lambda}$, IN QUANTO

$$q(1-q)^k = (1-e^{-\lambda})e^{-\lambda k}$$

VICEVERSA, DATA UNA SUCCESSIONE DI V.A. $Y_n \sim GEO(q_n)$ CON $q_n \to 0$, SIA $s_n \to 0$ TALE CHE $q_n/s_n \to \lambda \in (0,\infty)$. POSTO $X_n := s_n Y_n$ ABBIAMO CHE X_n CONVERGE IN LEGGE AD UNA $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$. INFATTI

$$P\{X_n \le x\} = P\left\{Y_n \le \frac{x}{s_n}\right\} = P\left\{Y_n \le \left\lfloor \frac{x}{s_n} \right\rfloor\right\}$$

$$= 1 - P\left\{Y_n > \left\lfloor \frac{x}{s_n}\right\rfloor\right\} = 1 - (1-q_n)^{\left\lfloor \frac{x}{s_n}\right\rfloor} \simeq 1 - (1-\lambda s_n)^{\frac{x}{s_n}} \to 1 - e^{-\lambda x}$$

(RICORDANDO QUANTO VISTO PER LE V.A. DI TIPO GEOMETRICO)

ESERCIZIO

IN UN PUNTO FISSATO DI UNA STRADA VENGONO DISTRIBUITI DEI VOLANTINI. SIA X LA DISTANZA PERCORSA DA UNA PERSONA PRESA A CASO MENTRE LEGGE IL VOLANTINO. ASSUMIAMO CHE $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$. SUPPONIAMO CHE AD OGNI UNITÀ DI DISTANZA VI SIA UN CESTINO E CHE OGNI PERSONA BUTTI IL VOLANTINO NEL PRIMO CESTINO CHE INCONTRA DOPO AVER FINITO DI LEGGERLO.

- Qual è la probabilità di gettare il volantino nel k-esimo cestino?
- Qual è la probabilità che N persone indipendenti gettino i loro volantini tra il primo e il k-esimo cestino (compreso)?
- Qual è il cestino più probabile?
- Sia Y il cestino più distante raggiunto da N persone indipendenti. Qual è la funzione di ripartizione di Y?

Il cestino in cui si butta il volantino è $Z = \lceil X \rceil$, dove $\lceil X \rceil$ è il più piccolo intero più grande di X. La risposta alla prima domanda è fornita dal calcolo di $P\{Z = k\}$. Sia F la funzione di ripartizione di X. Poiché $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 1$

$$P\{Z = k\} = P\{k-1 < X \leq k\} = F(k) - F(k-1)$$

$$= 1 - e^{-\lambda k} - \left(1 - e^{-\lambda(k-1)}\right) = -e^{-\lambda k} + e^{-\lambda k} e^{\lambda} = e^{-\lambda k}(e^{\lambda} - 1),$$

abbiamo $Z \sim \text{Geo}(q)$ con $q = 1 - e^{-\lambda}$.

La probabilità di gettare il volantino tra il primo ed il k-esimo cestino è

$$P\{Z \le k\} = 1 - P\{Z > k\} = 1 - (1-q)^k = 1 - e^{-k\lambda}$$

Essendo le N persone indipendenti, il loro comportamento è descritto da N variabili geometriche Z_j, $j = 1, \dots, N$, indipendenti. La risposta alla seconda domanda è quindi

$$P\{Z_j \le k,\ j = 1, \dots, N\} = \prod_{j=1}^{N} P\{Z_j \le k\} = (1 - e^{-k\lambda})^N$$

Per la terza domanda, basta trovare il k che massimizza $P\{Z = k\}$, ed è chiaramente $k = 1$ per quanto detto alla prima risposta.

Infine, $Y = \max\{Z_j,\ j = 1, \dots, N\}$. Detta G la sua funzione di ripartizione, abbiamo per $x \ge 1$

$$G(x) = P\{Y \le x\} = P\{Z_j \le x,\ j = 1, \dots, N\}$$

$$= P\{Z_j \le \lfloor x \rfloor,\ j = 1, \dots, N\} = (1 - e^{-\lfloor x \rfloor \lambda})^N.$$