Immaginiamo di effettuare ripetizioni di uno stesso esperimento. Un esempio tipico è quando effettuiamo set di misurazioni successive di un dato campione (relativamente ad una certa grandezza fisica).

Possiamo descrivere il tutto attraverso una sequenza $X_1, \dots, X_n$ di variabili aleatorie su un certo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

È naturale andare a considerare la media di queste v.a., cioè

$$\bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$$

Tale v.a. è detta <u>media campionaria</u> delle X_k (ricordo che la somma di v.a. è ancora una v.a.).

Empiricamente quello che ci si aspetta è che le $\bar{X}_n$ abbiano meno fluttuazioni rispetto le X_k man mano che n cresce: nel prendere un set di misure potrei fare errori, ma se ripeto il set di misurazioni tendo a bilanciare.

In effetti questo fatto può essere formalizzato.

DEFINIZIONE Sia $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di v.a. su uno stesso spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, tutte con lo stesso valore medio $E[X_k]=\mu$. Diremo che la successione $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ soddisfa la LEGGE (debole) DEI GRANDI NUMERI se

$$\lim_{n\to+\infty} P\{|\bar{X}_n-\mu|>\varepsilon\}=0 \qquad \forall \varepsilon>0$$

In pratica significa che la $\bar{X}_n$ tende a concentrarsi rispetto al valore medio μ (come avviene quando la varianza è piccola, grazie alla disuguaglianza di Chebyshev)

DOMANDA: sotto quali ipotesi su $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ la legge dei grandi numeri è valida?

TEOREMA Sia $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di v.a., con momento secondo finito, scorrelate, con lo stesso valore medio μ e stessa varianza σ^2:

$$E[X_k]=\mu \qquad \mathrm{Var}\, X_k=\sigma^2 \qquad \forall k\in\mathbb{N}$$

$$\mathrm{Cov}(X_k,X_j)=0 \qquad \forall k\neq j$$

Allora $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ soddisfa la legge dei grandi numeri.

PROOF.

COME PRIMA COSA OSSERVIAMO CHE $\bar{X}_n$ HA MOMENTO SECONDO FINITO, ESSENDO SOMMA DI V.A. CON MOMENTO SECONDO FINITO.

RICORDIAMO INOLTRE CHE

$$\mathrm{Var}(cX) = c^2 \,\mathrm{Var}\, X$$

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}\, X + \mathrm{Var}\, Y + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$$

QUINDI $\mathrm{Var}\,\bar{X}_n = \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}\, X_k = \dfrac{\sigma^2}{n}$

INOLTRE $E[\bar{X}_n] = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{E[X_k]}{n} = \mu$

PER LA DISUGUAGLIANZA DI CHEBYSHEV

$$P\{|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon\} \leq \frac{\mathrm{Var}\,\bar{X}_n}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

DA CUI LA TESI ■

NOTE TECNICHE

- SIA σ_k^2 LA VARIANZA DELLE X_k. LA TESI RIMANE VERA SE INVECE DI RICHIEDERE $\sigma_k^2 = \sigma^2$ (CIOÈ STESSA VARIANZA), RICHIEDIAMO $\sup_k \sigma_k^2 < \infty$ (CIOÈ VARIANZE EQUILIMITATE).
- LA TESI RIMANE VERA SE LE X_k HANNO STESSA DISTRIBUZIONE E SONO INDIPENDENTI (CONDIZIONI PIÙ FORTI). PERÒ IN QUESTO CASO È POSSIBILE RICHIEDERE SOLO CHE ABBIANO VALORE MEDIO FINITO.

IL PUNTO NELLA DIMOSTRAZIONE È CHE $\bar{X}_n$ HA STESSO VALORE MEDIO μ DELLE X_k, MA LA SUA VARIANZA σ^2/n È PIÙ PICCOLA DELLA VARIANZA σ^2 DELLE X_k E TENDE A ZERO PER $n \to \infty$.

<u>ESEMPIO</u> SUPPONIAMO DI AVERE UNA SUCCESSIONE DI PROVE RIPETUTE ED INDIPENDENTI CON PROBABILITÀ DI SUCCESSO q.

CONSIDERIAMO LE V.A.

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{SE LA } k\text{-ESIMA PROVA HA SUCCESSO} \\ 0 & \text{SE LA } k\text{-ESIMA PROVA FALLISCE} \end{cases}$$

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k = \text{NUMERO DI SUCCESSI NELLE } n \text{ PROVE}$$

$$\bar{X}_n = \frac{Y_n}{n} = \text{FRAZIONE DI SUCCESSI NELLE } n \text{ PROVE}$$

ABBIAMO $E[X_k] = q$ E $\mathrm{VAR}\, X_k = q(1-q)$ $\forall k$: SEGUE DA CALCOLO DIRETTO, E DEL RESTO $X_k \sim B(1,q)$. ESSENDO LE X_k ANCHE INDIPENDENTI, ABBIAMO CHE $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ SODDISFA LA LEGGE DEI GRANDI NUMERI. QUESTO SIGNIFICA CHE LA FRAZIONE DI SUCCESSI OTTENUTI È, PER n GRANDE, VICINA ALLA PROBABILITÀ q DEL SINGOLO SUCCESSO. DEL RESTO $Y_n \sim B(n,q)$, QUINDI $E[\bar{X}_n] = q$ E $\mathrm{VAR}\, \bar{X}_n = \frac{1}{n^2} \mathrm{VAR}\, Y_n = \frac{q(1-q)}{n}$.

IL TUTTO GIUSTIFICA L'IDEA INTUITIVA CHE LA PROBABILITÀ DI UN EVENTO SIA ASINTOTICAMENTE UGUALE ALLA FRAZIONE DI

SUCCESSI OTTENUTI IN UNA SUCCESSIONE DI PROVE RIPETUTE ED INDIPENDENTI DELLO STESSO.

SE PONIAMO $Z_n = \bar{X}_n - \mu$, POSSIAMO RISCRIVERE LA LEGGE DEI GRANDI NUMERI COME

$$\lim_{n \to +\infty} P\{|Z_n| > \varepsilon\} = 0 \qquad \forall \varepsilon > 0$$

SIGNIFICA CHE IN UN CERTO SENSO LA V.A. Z_n STIA CONVERGENDO ALLA V.A. NULLA.

<u>DOMANDA</u>: CON CHE VELOCITÀ?

IN ANALISI 1, QUANDO $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$, AVETE VISTO UNO SPETTRO DI POSSIBILI "MISURATORI":

$\log_a n \ (a>1)$, $n^\alpha \ (\alpha>1)$, $x^n \ (x>1)$, $n!$, n^n

SONO SUCCESSIONI DIVERGENTI A $+\infty$, CON VELOCITÀ CRESCENTI. SE, PER ESEMPIO, PER UNA OPPORTUNA x

$$\lim_{n \to +\infty} a_n x^n = c$$

CON $c \neq 0$, SIGNIFICA CHE ASINTOTICAMENTE a_n SI COMPORTA COME c/x^n (IN PARTICOLARE VA A ZERO PIÙ LENTAMENTE DI $1/n!$ MA PIÙ VELOCEMENTE DI $1/n^\alpha$).

Formuliamo meglio la nostra domanda: con quale successione b_n divergente a $+\infty$ possiamo moltiplicare Z_n così che converga ad una v.a. non nulla? E il limite come è fatto?

Facciamoci un'idea con un caso specifico. Siano $X_k \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ indipendenti. Allora per la somma abbiamo

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \sim \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$$

per quanto visto sulle v.a. di tipo Gaussiano. Ne segue

$$\bar{X}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{n} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

e

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Quindi se prendiamo $b_n = \sqrt{n/\sigma^2}$ abbiamo in questo caso che $b_n Z_n$ converge ad una v.a. di tipo Gaussiano standard. Per quanto possa sembrare sorprendente, questo è lo stesso comportamento per ogni successione $\{X_n\}$ i.i.d, cioè di v.a. indipendenti con la stessa distribuzione (o equivalentemente con la stessa funzione di ripartizione).

TEOREMA DEL LIMITE CENTRALE

SIA $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ UNA SUCCESSIONE DI V.A. i.i.d CHE AMMETTONO MOMENTO SECONDO FINITO. SIANO μ IL LORO VALORE MEDIO E SIA σ^2 LA LORO VARIANZA. ALLORA, POSTO

$$Z_n := \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}$$

ABBIAMO CHE

$$\lim_{n\to+\infty} P\{Z_n \leq x\} = \phi(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

DOVE $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt$ È LA FUNZIONE DI RIPARTIZIONE DI $\mathcal{N}(0,1)$.

PROOF OMESSA. OSSERVIAMO COMUNQUE CHE, POICHÉ

$$E[\bar{X}_n]=\mu \quad E \quad \mathrm{VAR}\ \bar{X}_n = \frac{\sigma^2}{n}$$

ABBIAMO

$$E[Z_n]=0 \quad E \quad \mathrm{VAR}\ Z_n = 1$$

OSSERVAZIONE IL TEOREMA CI DICE CHE LE SPECIFICHE DISTRIBUZIONI DELLE X_k, AL CRESCERE DI n, DIVENTANO IRRILEVANTI E CONTANO SOLTANTO IL VALORE MEDIO μ E LA VARIANZA σ^2. SPIEGA ANCHE PERCHÉ LE V.A. DI TIPO GAUSSIANO ABBIANO UN RUOLO CENTRALE IN PROBABILITÀ.

APPROFONDIMENTO TECNICO DATA UNA SUCCESSIONE DI V.A. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ DIREMO CHE CONVERGE IN LEGGE ALLA V.A. X SE

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x) \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

DOVE F_n, RISPETTIVAMENTE F, È LA FUNZIONE DI RIPARTIZIONE DI X_n, RISPETTIVAMENTE DI X.

SE LE X_n ED X SONO DEFINITE SU UNO STESSO SPAZIO DI PROBABILITÀ $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, DIREMO CHE CON $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ CONVERGE IN PROBABILITÀ AD X SE

$$\lim_{n\to+\infty} P\{|X_n - X| > \varepsilon\} = 0 \qquad \forall \varepsilon > 0$$

NOTARE CHE LA CONVERGENZA IN PROBABILITÀ RICHIEDE CHE LE V.A. X_n ED X SIANO DEFINITE SULLO STESSO SPAZIO $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ALTRIMENTI NON HA SENSO.

È POSSIBILE DIMOSTRARE CHE SE UNA SUCCESSIONE CONVERGE IN PROBABILITÀ ALLORA CONVERGE ANCHE IN LEGGE.

- LA LEGGE DEI GRANDI NUMERI DICE CHE LA MEDIA CAMPIONARIA $\bar{X}_n$ CONVERGE IN PROBABILITÀ ALLA MEDIA μ (INTESA COME V.A. COSTANTE)
- IL TEOREMA DEL LIMITE CENTRALE DICE CHE LA RINORMALIZZAZIONE Z_n CONVERGE IN LEGGE AD UNA V.A. DI TIPO GAUSSIANO STANDARD.

Il teorema del limite centrale può essere usato per approssimare le probabilità di eventi date dalla media campionaria $\bar{X}_n$. Vediamo come.

Siano $X_1, \dots, X_n$ v.a. i.i.d aventi valore medio μ e varianza σ^2. Posto $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, per il teorema del limite centrale quando n è grande

$$Z_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} = \frac{Y_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \simeq Z \quad \text{con } Z \sim N(0,1)$$

da cui

$$Y_n \simeq Y \qquad \text{con } Y \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

$$\bar{X}_n \simeq X \qquad \text{con } X \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

[Il simbolo $\simeq$ sta per "approssimazione"
Il simbolo $\sim$ sta per "ha densità"]

Comunque, dal sapere che

$$\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = F(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

non abbiamo una stima effettiva di quanto disti F_n da F in termini di n. Vi sono però alcune regole empiriche, cioè prendere n maggiore di una soglia in base all'esperienza d'uso.

APPROSSIMAZIONE NORMALE DI UNA BINOMIALE

SIANO $X_k \sim B(1,q)$. ALLORA $\mu = q$ E $\sigma^2 = q(1-q)$.

POICHÉ $Y_n \sim B(n,q)$, IL TEOREMA DEL LIMITE CENTRALE

CI FORNISCE UNA APPROSSIMAZIONE PER LE V.A. BINOMIALI:

PER n GRANDE

$$Y_n \simeq Y \quad \text{CON} \quad Y \sim N(nq, nq(1-q))$$

$$\bar{X}_n \simeq X \quad \text{CON} \quad X \sim N(q, q(1-q)/n)$$

$$P\{Y_n \leq x\} \simeq \Phi\left(\frac{x-nq}{\sqrt{nq(1-q)}}\right) \qquad x \in \mathbb{R}$$

RICORDO CHE LA FUNZIONE DI RIPARTIZIONE PER UNA V.A.

CON DENSITÀ $N(\mu, \sigma^2)$ È $\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$.

SE Y_n È UNA V.A. ASSOLUTAMENTE CONTINUA, ALLORA

$$P\{Y_n \leq x\} = P\{Y_n < x\} \qquad x \in \mathbb{R}$$

IN QUANTO $P\{Y_n = x\} = 0$.

SE INVECE Y_n È UNA V.A. DISCRETA ALLORA LA COSA NON

È IN GENERE VERA, POICHÉ $P\{Y_n = x\}$ POTREBBE ESSERE

STRETTAMENTE POSITIVA.

NEL CASO DI $Y_n \sim B(n,q)$ ABBIAMO

$$P\{Y_n \leq k\} = P\{Y_n \leq k+\delta\} \qquad k \in \mathbb{N} \quad \delta \in [0,1)$$

E QUINDI POTREMMO APPROSSIMARE SIA CON

$$\phi\left(\frac{k-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) \quad \text{CHE CON} \quad \phi\left(\frac{k+\delta-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)$$

SCEGLIAMO UNA VIA DI MEZZO:

$$P\{Y_n \leq k\} \simeq \phi\left(\frac{k+\frac{1}{2}-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) = \phi\left(\frac{k+\frac{1}{2}-nq}{\sqrt{nq(1-q)}}\right)$$

QUESTA PROCEDURA È CHIAMATA <u>CORREZIONE DI CONTINUITÀ</u>

<u>USO</u> DI SOLITO SI USA L'APPROSSIMAZIONE NORMALE DELLA BINOMIALE QUANDO $nq > 5$ E $n(1-q) > 5$ (*)

QUANDO $n > 50$ E $q < 10/n$, ALLORA POSSIAMO APPROSSIMARE ATTRAVERSO DISTRIBUZIONI DI POISSON $\mathcal{P}(nq)$. SE q NON È PROSSIMO A ZERO, ALLORA POSSIAMO CONTARE IL NUMERO DI INSUCCESSI E LAVORARE CON $\tilde{q} = 1-q$.

SE NÉ q NÉ $1-q$ SONO PROSSIMI A ZERO, ALLORA IN GENERE LA (*) È VERIFICATA.

APPROSSIMAZIONE NORMALE DI UNA POISSON

SIANO $X_k \sim \mathcal{P}(1)$. ALLORA $Y_n \sim \mathcal{P}(n)$ (COME ACCENNATO NEGLI ESERCIZI, LA SOMMA DI V.A. INDIPENDENTI DI TIPO POISSON È ANCORA DI TIPO POISSON).

ABBIAMO $\mu = \sigma^2 = 1$ E QUINDI PER n GRANDE

$$Y_n \simeq Y \qquad \text{con } Y \sim \mathcal{N}(n, n)$$

$$\overline{X}_n \simeq X \qquad \text{con } X \sim \mathcal{N}(1, 1/n)$$

$$P\{Y_n \leq x\} \simeq \phi\left(\frac{x-n}{\sqrt{n}}\right) \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$P\{Y_n \leq k\} \simeq \phi\left(\frac{k+\frac{1}{2}-n}{\sqrt{n}}\right) \qquad k \in \mathbb{N}$$

CON CORREZIONE DI CONTINUITÀ

<u>USO</u> DI SOLITO SI USA L'APPROSSIMAZIONE NORMALE DELLA POISSON QUANDO $n \geq 5$. PUÒ ESSERE USATA ANCHE PER $\mathcal{P}(\lambda)$ QUANDO λ NON È UN INTERO.

Approssimazione normale di una Gamma

Siano $X_k \sim \Gamma(1, \lambda)$. Poiché la somma di v.a. indipendenti di tipo Γ è ancora di tipo Γ, abbiamo $Y_n \sim \Gamma(n, \lambda)$. Per le X_k abbiamo $\mu = 1/\lambda$ e $\sigma^2 = 1/\lambda^2$, quindi per n grande

$$Y_n \simeq Y \quad \text{con} \quad Y \sim \mathcal{N}(n/\lambda, n/\lambda^2)$$

$$\bar{X}_n \simeq X \quad \text{con} \quad X \sim \mathcal{N}(1/\lambda, 1/n\lambda^2)$$

$$P\{Y_n \leq x\} \simeq \phi\left(\frac{x - n/\lambda}{\sqrt{n/\lambda^2}}\right) = \phi\left(\frac{\lambda x - n}{\sqrt{n}}\right)$$

Notare che essendo Y_n assolutamente continua non facciamo correzione di continuità.

<u>Uso</u> Di solito si usa l'approssimazione normale della Gamma quando $n \geq 30$. Può essere usata anche per $\Gamma(\alpha, \lambda)$ quando α non è un intero.