Università degli Studi della Campania Luigi Vanvitelli
Dipartimento di Ingegneria

Capitolo 8 – Sistemi dinamici a tempo discreto

Decomposizione modale

- Caso di matrice dinamica diagonalizzabile
  - Il movimento è sempre a valori reali anche nel caso di autovalori (e autovettori) complessi
    - Assumiamo che ci siano r autovalori reali: $\lambda_1, \dots, \lambda_r$
    - Ci sono quindi $n-r$ autovalori complessi: $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$
      - Questi sono necessariamente in numero pari perché a coppie di complessi e coniugati, riorganizziamoli:

$$\{\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_r}_{\text{reali}}, \underbrace{\lambda_{r+1}, \lambda_{r+1}^*, \lambda_{r+3}, \lambda_{r+3}^*, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_{n-1}^*}_{\text{coppie complesse e coniugate}}\}$$

      - La i-ma variabile di stato è

$$x_{l_i}(k) = \sum_{h=1}^{r} t_{h_i}\mu_h(x_0)\lambda_h^k + \sum_{\substack{h=r+1 \\ (\text{passo } 2)}}^{n-1} t_{h_i}\mu_h(x_0)\lambda_h^k + t_{h_i}^*\mu_h^*(x_0)\lambda_h^{*\,k}$$

      - Posto
        - $\lambda_h = \rho_h e^{j\theta_h}$, $\quad h = r+1, \dots, n-1$ (passo 2)
        - $t_{h_i}\mu_h(x_0) = r_{h_i} e^{j\phi_{h_i}}$

Modi di evoluzione pseudo-periodici

$$\boxed{x_{l_i}(k) = \sum_{h=1}^{r} t_{h_i}\mu_h(x_0)\lambda_h^k + \sum_{\substack{h=r+1 \\ (\text{passo } 2)}}^{n-1} 2r_{h_i}\rho_h^k \cos(\theta_h k + \phi_{h_i})}$$

Modi di evoluzione aperiodici

Quindi ho: $\quad$ i = i-esima variabile di stato. h = numero del modo.

$$r_{hi}\, e^{j\phi_{hi}} \cdot \rho_h^K e^{j\theta_h K} + r_{hi}\, e^{-j\phi_{hi}} \cdot \rho_h^K e^{-j\theta_h K} = r_{hi}\, \rho_h^K \left(e^{j(\theta_h K + \phi_{hi})} + e^{-j(\theta_h K + \phi_{hi})}\right) =$$

$$= 2\, r_{hi}\, \rho_h^K \cos(\theta_h K + \phi_{hi}) \in \mathbb{R}$$

$\hookrightarrow$ Pulsazione è la fase dell'autovalore

Quando ho dei modi convergenti?

Università degli Studi della Campania Luigi Vanvitelli
Dipartimento di Ingegneria

Decomposizione modale

$[e^{At}] = \mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}]$

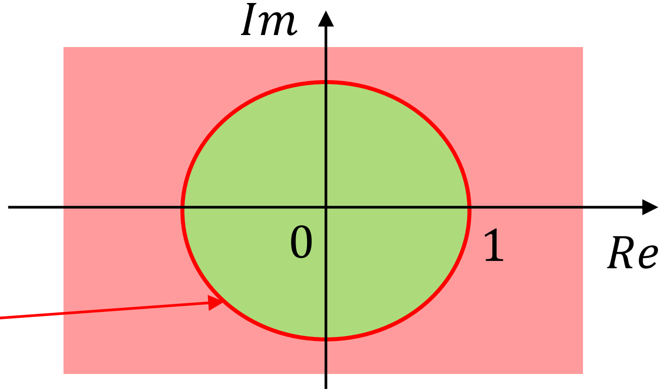
$A^k = \mathcal{Z}^{-1}[z(zI-A)^{-1}]$

- Caso di matrice dinamica non diagonalizzabile
  - Calcoleremo l'espressione dei modi di evoluzione con il metodo della $\mathcal{Z}$ trasformata
  - Anticipiamo che nella combinazione lineare compariranno termini del tipo
    - $k^h \lambda^k$ nel caso di autovalori reali, con $h \geq 1$ che dipende dalla molteplicità dell'autovalore come radice del polinomio minimo di A

      $h =$ molteplicità -1 nel polinomio minimo
    - $k^h \rho^{k-h} \cos\theta(k-h)\,, k \geq h$ nel caso di autovalori complessi, con $h \geq 0$ che dipende dalla molteplicità dell'autovalore come radice del polinomio minimo di A
- La classificazione dei modi di evoluzione è leggermente più articolata che nel caso a tempo continuo
  - Modo convergente se e solo se relativi ad un autovalore in modulo minore di 1 a 0.
  - Modo divergente se e solo se relativi ad un autovalore in modulo maggiore di 1 o uguale a 1 con molteplicità maggiore di 1 come radice del polinomio minimo

ρ^{k-h} con $\rho<1$ mi dà convergenza.

$\rho=1$, modo periodico



Frontiera della regione di convergenza

CONVERGENTI

- Classificazione dei modi di evoluzione
  - Modi di evoluzione relativi ad autovalori distinti con modulo minore di 1
    - sono tutti convergenti

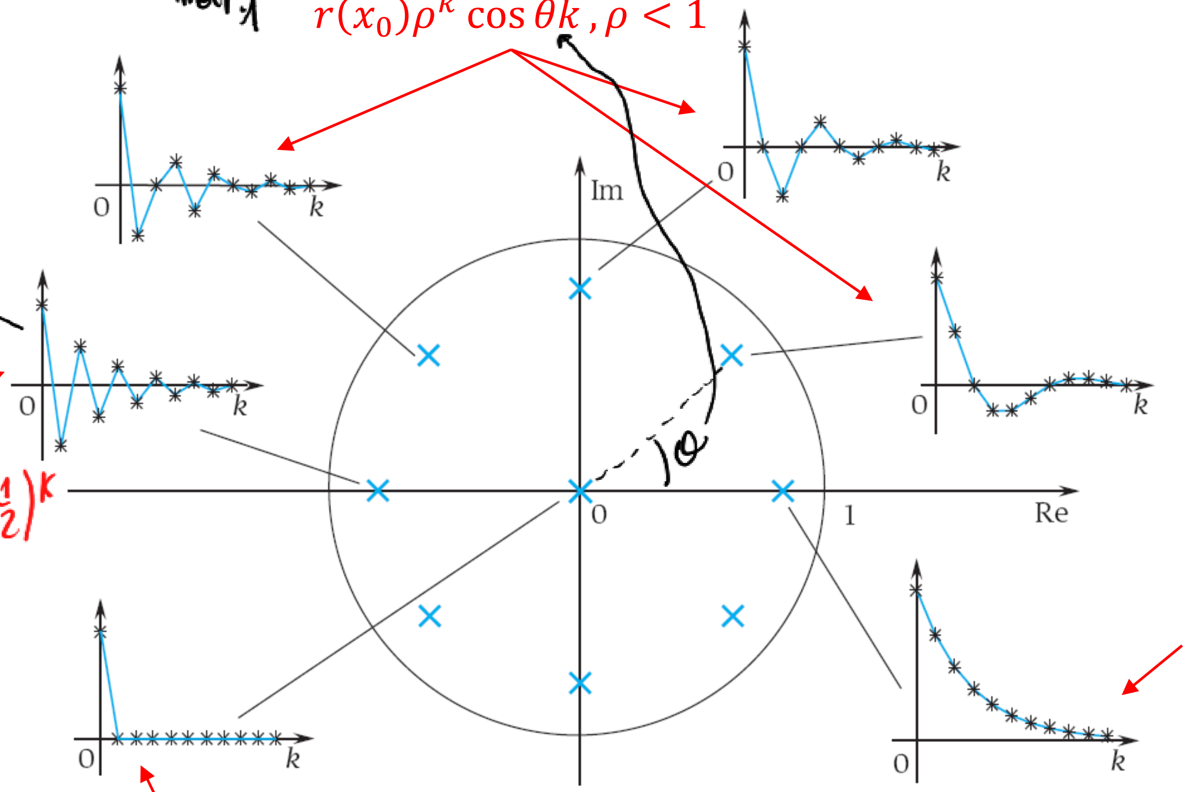
mod. 1

Pseudo-periodico
$r(x_0)\rho^k \cos\theta k\,,\rho < 1$

Comportamento oscillatorio anche con autovalore reale (Tempo cont. No)

Aperiodico alternante
$r(x_0)\lambda^k, \quad -1 < \lambda < 0$

$\left(-\frac{1}{2}\right)^k$



Aperiodico
$r(x_0)\lambda^k, \quad 0 < \lambda < 1$

es. $\left(\frac{1}{2}\right)^k$

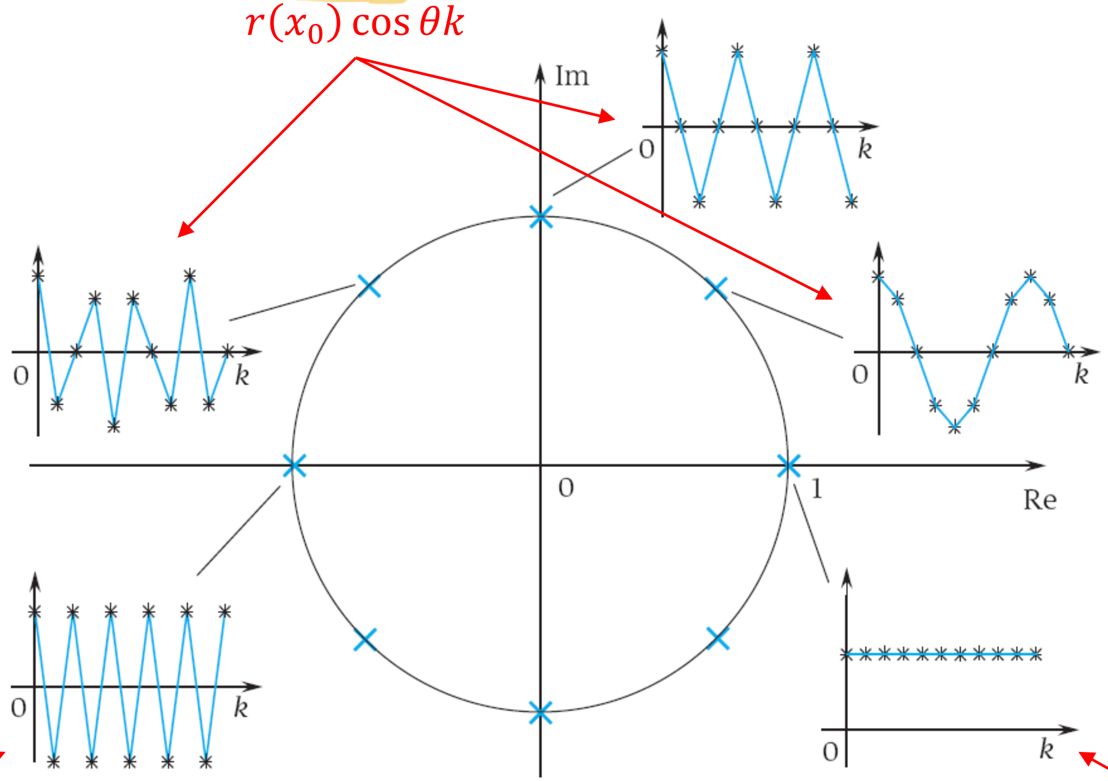
Impulsivo
$r(x_0)0^k$

0^k: $1,0,0,0\ldots \Rightarrow$ impulso a tempo discreto: $\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } k=0 \\ 0 & k \neq 0. \end{cases}$

Classificazione dei modi di evoluzione

- Modi di evoluzione relativi ad autovalori distinti con modulo uguale a 1
  - sono tutti ad ampiezza limitata

Periodico
$r(x_0)\cos\theta k$



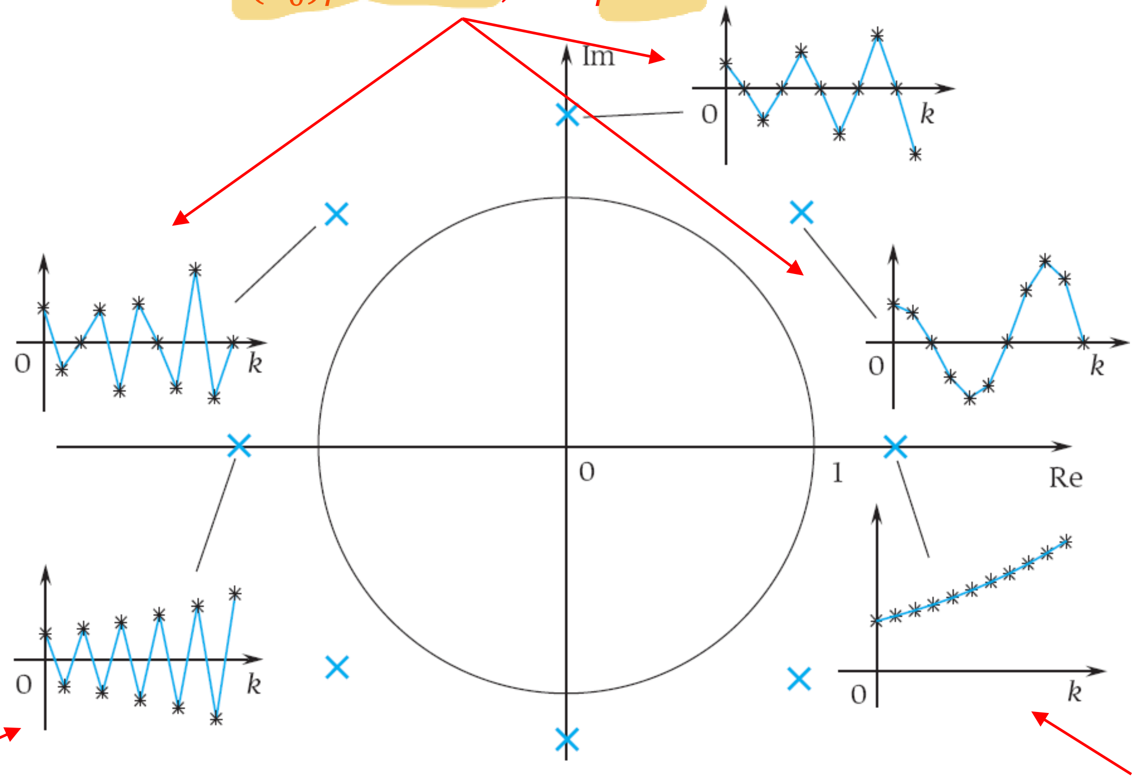
Alternante
$r(x_0)(-1)^k$

Costante
$r(x_0)1^k$

Classificazione dei modi di evoluzione

- Modi di evoluzione relativi ad autovalori distinti con modulo maggiore di 1
  - sono tutti divergenti

Pseudo-periodico
$r(x_0)\rho^k \cos\theta k$, $\rho > 1$



Alternante
$r(x_0)\lambda^k$, $\lambda < -1$

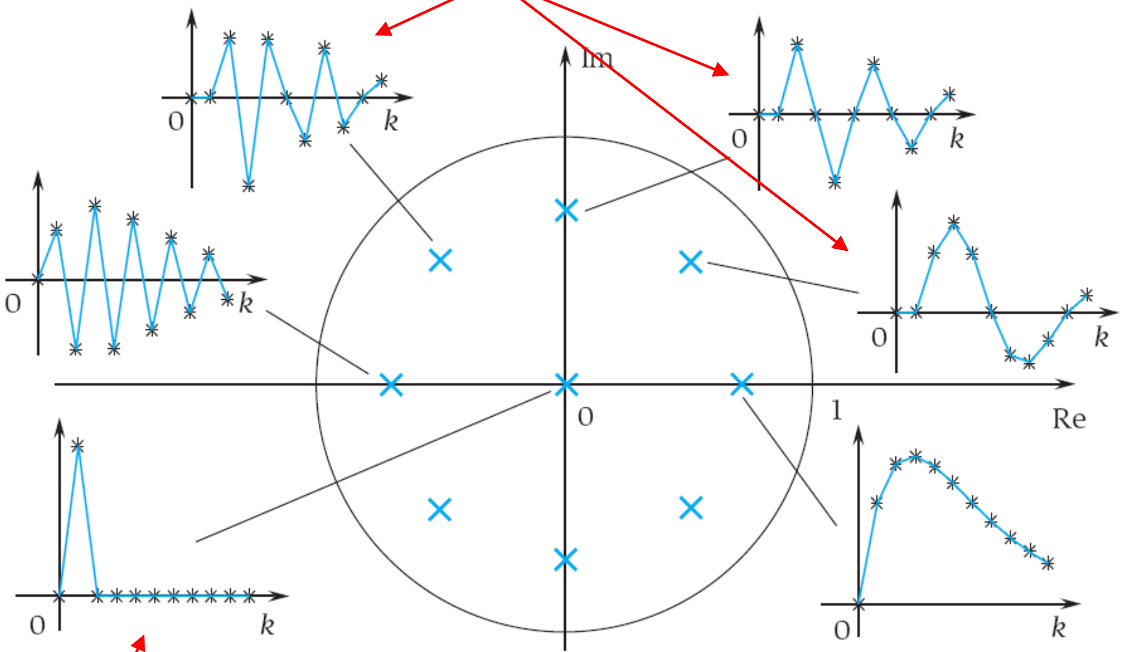
Aperiodico
$r(x_0)\lambda^k$, $\lambda > 1$

Classificazione dei modi di evoluzione

- Modi di evoluzione relativi ad autovalori doppi con modulo minore di 1
  - sono tutti convergenti

Pseudo-periodico
$r(x_0)k\rho^{k-1}\cos\theta k$, $\rho < 1$

Aperiodico alternante
$r(x_0)k\lambda^k$, $-1 < \lambda < 0$



Impulsivo
$r(x_0)k0^{k-1}$ impulso traslato

Aperiodico
$r(x_0)k\lambda^k$, $0 < \lambda < 1$
↳ Partono da 0.

Movimento forzato e risposta impulsiva

- Consideriamo una condizione iniziale nulla $x_0 = 0$ e un ingresso impulsivo $\delta(k) = \begin{cases} 0, & k \neq 0 \\ 1, & k = 0 \end{cases}$ (che è una semplice sequenza – nulla ovunque tranne in 0, senza bisogno di introdurre il concetto di «distribuzione»)
- La risposta impulsiva nello stato (per sistemi con 1 ingresso) è

$$g_x(k) = \sum_{h=0}^{k-1} A^{k-h-1} b u(h) = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ A^{k-1} b, & k > 0 \end{cases}$$

→ Non c'é sommatoria

→ δ nulla $\forall k \neq 0$, si salva solo venendo con $k=0$.

- La risposta impulsiva nell'uscita è

$$g_y(k) = C \sum_{h=0}^{k-1} A^{k-h-1} b u(h) + d\delta(k) = \begin{cases} d, & k = 0 \\ CA^{k-1} b, & k > 0 \end{cases}$$

- In entrambi i casi si tratta di combinazioni lineari dei modi di evoluzione, difatti coincidono con il movimento libero a partire da stato iniziale pari a b ritardato di 1 passo

$A^k x_0|_{x_0=b}$, sarà un vettore di modi di evoluzione

A fronte di una perturbaz. iniziale, il movimento perturbato non si discosta mai più da quello nominale: ci rimane arbitrariamente vicino.

Stabilità dei sistemi LTI

- Come per i sistemi a tempo continuo, la stabilità è una proprietà del sistema, cioè è la stessa per tutti i movimenti del sistema (dimostrazione analoga basata sul principio di sovrapposizione degli effetti)
  - Quindi si studia la stabilità dell'origine dello spazio di stato che è punto di equilibrio per $u = 0$ ($x = Ax$ ha per soluzione $x = 0$)
    - Il movimento perturbato rispetto al punto di equilibrio è il movimento libero a partire dalla condizione iniziale x_0

$f(\bar{x}, \bar{u}) = \bar{x}$

$$x_l(k) = A^k x_0$$

$\rightarrow \|A^k\|$ è matrice che ha modi di evol. sistema

    - Tale movimento rimane limitato se tutti gli autovalori di A sono in modulo ≤ 1 e quelli con modulo unitario hanno molteplicità unitaria come radici del polinomio minimo di A
    - Tale movimento converge a zero (torna nel punto di equilibrio) se tutti gli autovalori di A sono in modulo < 1
    - Negli altri casi, tale movimento si allontana definitivamente dall'origine
- Teorema 1: Un sistema LTI a tempo discreto è stabile se e solo se tutti gli autovalori di A sono in modulo ≤ 1 e quelli con modulo unitario hanno molteplicità unitaria come radici del polinomio minimo
- Teorema 2: Un sistema LTI a tempo discreto è asintoticamente stabile se e solo se tutti gli autovalori di A sono in modulo < 1
- Teorema 3: Un sistema LTI a tempo discreto è instabile se e solo se esiste almeno un autovalore di A in modulo > 1 o con modulo $= 1$ con molteplicità > 1 come radice del polinomio minimo

Stabilità dei sistemi LTI

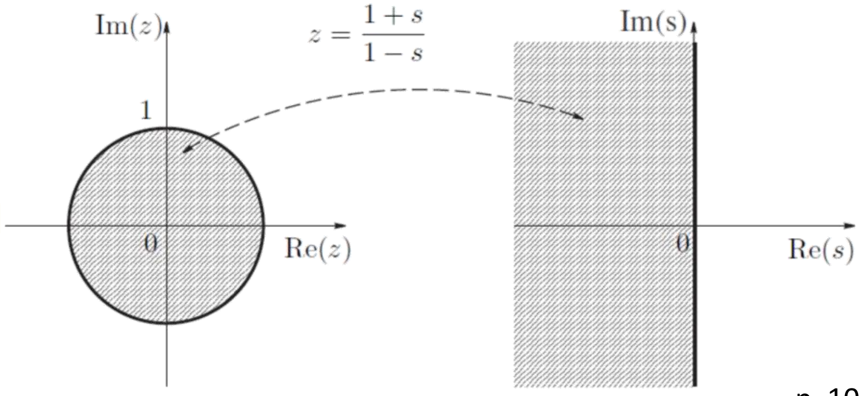
- Occorre un criterio che ci consenta di stabilire se le radici di un polinomio sono in modulo minori di 1 o no, senza calcolarle
- Esistono criteri specifici (*criterio di Jury*), ma è conveniente ricondurre il problema a quello di determinare il segno della parte reale (per usare poi il criterio di Routh)
  - Trasformazione bilineare

$$z = \frac{1+s}{1-s}$$

  - Basta osservare che, posto $s = a + jb$,

$$\boxed{|z| < 1} \Leftrightarrow \left|\frac{1+s}{1-s}\right| < 1 \Leftrightarrow |1+s|^2 < |1-s|^2 \Leftrightarrow (1+a)^2 + b^2 < (1-a)^2 + b^2 \Leftrightarrow 1 + a < 1 - a \Leftrightarrow a < 0 \Leftrightarrow \boxed{\Re(s) < 0}$$

  - La trasformazione mappa il semipiano sinistro in s nel cerchio di raggio 1 in z



- È sufficiente applicare questa trasformazione al polinomio caratteristico $p(z)$ della matrice dinamica A e applicare il criterio di Routh al numeratore della funzione razionale fratta $P(s)$ che si ottiene

$$P(s) = p(z)\Big|_{z=\frac{1+s}{1-s}}$$

Esempio

Trasformaz. Va applicata su polinomio minimo di A. (Per l'A.S. basta p. caratteristico).

ES: $P(z) = z^3 - 0.1z^2 + 0.01z - 0.004$

$$P(s) = \left(\frac{1+s}{1-s}\right)^3 - 0.1\left(\frac{1+s}{1-s}\right)^2 + 0.01\,\frac{1+s}{1-s} - 0.004 = \frac{q(s)}{(1-s)^3}$$

Ho una funzione razionale fratta! Devo guardare le radici, quindi $q(s)$.

$$q(s) = (1+s)^3 - 0.1(1+s)^2(1-s) + 0.01(1+s)(1-s)^2 - 0.004(1-s)^3 =$$

$$= 1 + 3s + 3s^2 + s^3 - 0.1 - 0.1s + 0.2s - 0.2s^2 + 0.2s^2 - s^3 + 0.01 - 0.02s + 0.01s^2 +$$

$$+ 0.01s - 0.02s^2 + 0.01s^3 - 0.004 + 0.012s - 0.012s^2 + 0.004s^3 =$$

$$= 0.014s^3 + 2.978s^2 + 3.102s + 0.906$$

Criterio di Routh:

3	0.014	3.102
2	2.978	0.906
1	~ 9	
0	0.906	

$\Rightarrow$ Tutte radici a parte reale negativa,

quindi ho tutte radici con modulo < 1.

Capitolo 9 – Analisi in frequenza dei sistemi a tempo discreto

Richiami sulle $\mathcal{Z}$ trasformate

- È un operatore $\mathcal{Z}[\cdot]$ che a sequenze reali nel dominio del tempo associa funzioni complesse della variabile complessa z

$$\mathcal{Z}[f(k)] = F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k)z^{-k}$$

- Proprietà
  - **Linearità**: $\mathcal{Z}[\alpha f(k) + \beta g(k)] = \alpha F(z) + \beta G(z)$
  - **Ritardo**: $\mathcal{Z}[f(k-h)] = z^{-h}F(z),\ h \in \mathbb{N} \rightarrow h>0$
  - **Anticipo**: $\mathcal{Z}[f(k+h)] = z^h F(z) - z^h \sum_{l=0}^{h-1} f(l)z^{-l},\ h \in \mathbb{N}$ $\boxed{\mathcal{Z}[f(k+1)] = zF(z) - zf(0)}$
  - **Scalatura in z**: $\mathcal{Z}[r^{-k}f(k)] = F(rz)$
  - **Derivazione in z**: $\mathcal{Z}[kf(k)] = -zdF(z)/dz$
  - **Convoluzione nel dominio del tempo**: $\mathcal{Z}[f(k) * g(k)] = \mathcal{Z}\left[\sum_{h=0}^{k} f(k-h)g(h)\right] = F(z)G(z)$
  - **Teorema del valore iniziale**: $f(0) = \lim_{z\to\infty} F(z)$
  - **Teorema del valore finale**: se $(z-1)F(z)$ ha poli in $|\,| < 1 \Rightarrow \lim_{k\to+\infty} f(k) = \lim_{z\to 1}(z-1)F(z)$

$\mathcal{Z}$ trasformate notevoli

- Impulso

$$\mathcal{Z}[\delta(k)] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(k) z^{-k} = z^0 = 1$$

Come $\mathcal{L}[\delta(t)]$

- Gradino

Serie geometrica di ragione z^{-1} che converge in $|z^{-1}| < 1 \Leftrightarrow |z| > 1$

$$\mathcal{Z}[\delta_{-1}(k)] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_{-1}(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

Qui ho sempre regioni di convergenza

Sono sempre esterni di un cerchio

  - oppure

$\delta_{-1}(k) = \delta(k) + \delta_{-1}(k-1)$ e quindi

$$\mathcal{Z}[\delta_{-1}(k)] = 1 + z^{-1}\mathcal{Z}[\delta_{-1}(k)] \Rightarrow \mathcal{Z}[\delta_{-1}(k)] = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

- Potenza

$$\mathcal{Z}[a^k] = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} (az^{-1})^k = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

$$\mathcal{Z}[ka^k] = -z\frac{d}{dz}\frac{z}{z-a} = -z\frac{z-a-z}{(z-a)^2} = \frac{az}{(z-a)^2}$$

Proprietà

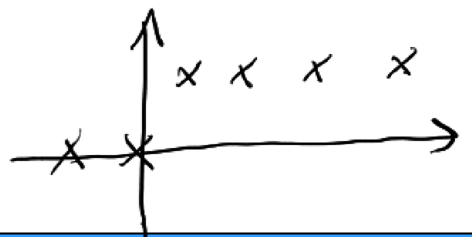
Funzione del tempo ($k \in \mathbb{Z}^+$)	Descrizione	Trasformata Z
$\delta_0(k)$	impulso unitario	1
$\delta_{-1}(k)$	gradino unitario	$\frac{z}{z-1}$
k	rampa unitaria	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$\delta_{-1}(k-h)$	gradino unitario con inizio in $k=h$	$z^{-h}\frac{z}{z-1}$
a^k	potenza	$\frac{z}{z-a}$
$k\,a^k$		$\frac{a\,z}{(z-a)^2}$
$a^k\binom{k}{h}$	potenza-polinomio	$\frac{a^h z}{(z-a)^{h+1}}$
$\sin(k\theta)$	sinusoide	$\frac{z\sin(\theta)}{z^2-2z\cos(\theta)+1}$
$\cos(k\theta)$	cosinusoide	$\frac{z[z-\cos(\theta)]}{z^2-2z\cos(\theta)+1}$

$e^{j\theta k} - e^{-j\theta k}$

$e^{j\theta} = a \Rightarrow a^k$ fatto

Tutte f razionali fratte

Si osservi come a numeratore delle $\mathcal{Z}$ trasformate notevoli c'è sempre un termine monomio z!



$\delta_{-1}(k-1)$

Funzione di trasferimento

Tempo continuo:

$$X(s) = (sI-A)^{-1}x_0 + (sI-A)^{-1}BU(s)$$

- Data la i-s-u

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \qquad x(0) = x_0$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

- Trasformiamo secondo $\mathcal{Z}$ e applichiamo la proprietà dell'anticipo con $h = 1$

$$\begin{aligned} zX(z) - zx_0 &= AX(z) + BU(z) \\ Y(z) &= CX(z) + DU(z) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} (zI-A)X(z) &= zx_0 + BU(z) \\ Y(z) &= CX(z) + DU(z) \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} X(z) &= z(zI-A)^{-1}x_0 + (zI-A)^{-1}BU(z) \\ Y(z) &= \underbrace{Cz(zI-A)^{-1}x_0}_{\text{Evoluzione libera}} + \underbrace{[C(zI-A)^{-1}B + D]U(z)}_{\text{Evoluzione forzata}} \end{aligned}}$$

Quando $(zI-A)$ non invertibile?

Termine monomio è in U

$(zI-A)^{-1}$: f. raz. fratte di grado al più $n-1$ al numeratore, al più n al denominatore. $z\cdot(zI-A)^{-1}$ aggiunge 0 nell'origine.

- Si definisce **funzione (matrice) di trasferimento** la matrice complessa $p \times m$

$$\boxed{G(z) = C(zI-A)^{-1}B + D}$$

funz. raz. fratta per il SISO

- E quindi l'evoluzione forzata nell'uscita si può scrivere come

$$\boxed{Y(z) = G(z)U(z)}$$

  – Osserviamo che se $u(k) = \delta(k)$, allora

$$\boxed{\mathcal{Z}[g_y(k)] = G(z) \cdot 1}$$

Denominatore al più grado n, al più n perché ho polinomio minimo che scende di grado.

- Struttura della funzione di trasferimento
  - Per sistemi SISO valgono le stesse considerazioni dei sistemi a tempo continuo
    - Se $D = 0$ (sistema strettamente proprio):

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B = \frac{b_{n-1}z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

      – È una funzione razionale fratta il cui denominatore è il polinomio caratteristico (minimo) di A e il numeratore ha grado al più $n-1$
    - Se $D \neq 0$ (sistema proprio):

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D = \frac{b_n z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

      – È una funzione razionale fratta il cui denominatore è il polinomio caratteristico (minimo) di A e il numeratore ha grado n
    - Se numeratore e denominatore hanno radici in comune (cancellazioni) vuol dire che esiste nel sistema una parte non raggiungibile e/o non osservabile e alcuni degli autovalori di A non sono poli di $G(z)$
      – Tali proprietà possono essere determinate a partire dalla i-s-u analizzando
        - La matrice di raggiungibilità

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{pmatrix}$$

        - La matrice di osservabilità

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C & A^T C & {A^T}^2 C & \cdots & {A^T}^{n-1} C \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

Funzione di trasferimento e rappresentazione i-u

- La fdt è in relazione biunivoca con la rappresentazione i-u

$$\boxed{\begin{aligned} &y(k+\nu)+a_{\nu-1}y(k+\nu-1)+\cdots+a_1y(k+1)+a_0y(k)\\ &=b_\nu u(k+\nu)+b_{\nu-1}u(k+\nu-1)+\cdots+b_1u(k+1)+b_0u(k)\end{aligned}}$$

ν = ordine del sistema.

- Trasformiamo a partire da condizioni iniziali nulle

fino a k+ν-1

NOTA: Trasformata qui dà problemi

$$\begin{aligned} &z^\nu Y(z)+a_{\nu-1}z^{\nu-1}Y(z)+\cdots+a_1zY(z)+a_0Y(z)\\ &=b_\nu z^\nu U(z)+b_{\nu-1}z^{\nu-1}U(z)+\cdots+b_1zU(z)+b_0U(z)\end{aligned}$$

(Moltiplicare per z^n = anticipare di n campioni ⇒ OPERAZ. ANTICAUSALE COME MOLTIPL. PER s.)

$$\begin{aligned} &(z^\nu+a_{\nu-1}z^{\nu-1}+\cdots+a_1z+a_0)Y(z)\\ &=(b_\nu z^\nu+b_{\nu-1}z^{\nu-1}+\cdots+b_1z+b_0)U(z)\end{aligned}$$

$$\boxed{G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{b_\nu z^\nu+b_{\nu-1}z^{\nu-1}+\cdots+b_1z+b_0}{z^\nu+a_{\nu-1}z^{\nu-1}+\cdots+a_1z+a_0}}$$

- Esempio
  - Integrazione numerica per trapezi

$$y(k+1)-y(k)=\frac{h}{2}\big(u(k+1)+u(k)\big)\Rightarrow G(z)=\frac{h/2(z+1)}{z-1}$$

Università degli Studi della Campania *Luigi Vanvitelli*
Dipartimento di Ingegneria

$G'(s)e^{-s\tau}$ dim. infinita

ho infiniti poli: per avere memoria dello stato passato mi serve tutta una funzione (ingresso)

Struttura della funzione di trasferimento

- Sistemi con ritardo di tempo

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k-h), \quad h > 0$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k-h)$$

$$\Rightarrow$$

$$v(k) = u(k-h) \rightarrow V(z) = z^{-h}U(z)$$
$$x(k+1) = Ax(k) + Bv(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Dv(k)$$

$$G'(z) = \frac{Y(z)}{V(z)} = C(zI - A)^{-1}B + D \Rightarrow G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{Y(z)}{V(z)}\frac{V(z)}{U(z)} = G'(z)z^{-h}$$

Differenza T.C.
Lei è ancora razionale fratta.
L'altra è trascendente

- Per i sistemi a tempo discreto un ritardo di tempo di h passi si traduce in h poli nell'origine nella fdt (**sistema a dimensione finita**)

↳ Poli nell'origine: indice di ritardo, non integrazione

- Guadagno
  - Se il sistema non ha poli in 1, è ben definito il valore che la fdt assume in 1: $\mu = G(1)$
    - Applichiamo un ingresso costante $u(k) = \bar{u}$ e supponiamo che il sistema sia asintoticamente stabile, allora l'uscita, combinazione dei modi propri del sistema e dei modi dell'ingresso, a regime sarà costante e varrà

$$\bar{y} = \lim_{k\to+\infty} y(k) = \lim_{z\to1}(z-1)Y(z) = \lim_{z\to1}(z-1)G(z)\frac{z\bar{u}}{z-1} = G(1)\bar{u} = \mu\bar{u}$$

Ritardi generano sistemi a dimensione finita

Non ho poli in 1
Perché AS

Guadagno statico

$$y(k) = CA^k x_0 + \sum A^{k-h-1} B u(h)$$

↳ Modi propri del sistema e dell'ingresso, ma $u = \bar{u}$

CHE SUCCEDE SE A DIAG. MA CON MOLTEPLICITÁ MAGGIORI?

SLIDE 7

Calcolo della risposta

- Risposta in evoluzione libera

$$Y_l(z) = zC(zI - A)^{-1}x_0$$

  - Si tratta di una funzione razionale fratta che a denominatore presenta il polinomio minimo di A e a numeratore sempre un termine monomio z (eventualmente moltiplicato per un polinomio di grado al più $n-1$)

- Risposta in evoluzione forzata

$$Y_f(z) = [C(zI - A)^{-1}B + D]U(z) = G(z)U(z)$$

Quando ho modi del sistema e dell'ingresso che coincidono nascono modi di evoluzione doppi

  - Anche in tal caso si tratta di una funzione razionale fratta con al numeratore un termine monomio z che viene dalla trasformata $\mathcal{Z}$ dell'ingresso

- Per antitrasformare una funzione razionale fratta, questa va prima divisa per z e poi scomposta in fratti semplici, in modo che nell'antitrasformare, ciascun fratto semplice abbia a numeratore sempre un termine monomio z

$$\mathcal{Z}^{-1}[Y(z)] = \mathcal{Z}^{-1}\left[z\frac{Y(z)}{z}\right] = \mathcal{Z}^{-1}\left[z\left(\frac{r_1}{z-p_1} + \cdots \frac{r_n}{z-p_n}\right)\right] = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{r_1 z}{z-p_1} + \cdots \frac{r_n z}{z-p_n}\right]$$

$\mathcal{Z}[a^k] = \frac{z}{(z-a)}$

Esempi

$\mathcal{Z}[ka^k] = \frac{z}{(z-a)^2}$

$a \in \mathbb{C}$

(h=2) alg. trapezio → Modo di evoluz: 1^K, costante.

$$G(z) = \frac{z+1}{z-1}$$

$$y(k) = \mathcal{Z}^{-1}[Y(z)]$$

$$u(k) = 0.5^K \delta_{-1}(k)$$

$$Y(z) = G(z)\cdot\frac{z}{z-0.5} = \frac{z(z+1)}{(z-0.5)(z-1)} = z\left(\frac{r_1}{z-1} + \frac{r_2}{z-0.5}\right) =$$

$$r_1 = \left.\frac{z+1}{z-0.5}\right|_{z=1} = \frac{2}{0.5} = 4$$

$$r_2 = \left.\frac{z+1}{z-1}\right|_{z=0.5} = \frac{1.5}{-0.5} = -3$$

$$Y(z) = \frac{4z}{z-1} - \frac{3z}{z-0.5} \Rightarrow y(k) = 4 - 3\cdot(0.5)^K, \quad K \geq 0$$

Modo del sistema — Modo dell'ingresso

2)

$$G(z) = \frac{z}{z-1} \qquad u(k) = \delta_{-1}(k)$$

Stiamo eccitando con l'ingresso il modo di evoluz. del sistema:

$$Y(z) = G(z)U(z) = \frac{z}{z-1}\cdot\frac{z}{z-1} = \frac{z^2}{(z-1)^2} = z\left(\frac{r_{11}}{z-1} + \frac{r_{12}}{(z-1)^2}\right)$$

$$r_{12} = z\big|_{z=1} = 1 \qquad Y(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{z}{(z-1)^2} \Rightarrow y(k) = 1 + K, \quad K \geq 0$$

$$r_{11} = \left.\frac{d}{dz}z\right|_{z=1} = 1$$

Quando ho modi del sistema e dell'ingresso

che coincidono nascono modi di evoluzione doppi

3)

$$G(z) = \frac{z+1}{z^2+0.5z+0.5}$$

$p = 0.71\,e^{j1.93}$ Modi del tipo: $(0.71)^K \cos(1.93K)$

$u(k) = \delta_{-1}(k)$. Modo dell'ingresso è costante.

$$Y(z) = G(z)\,U(z) = \frac{z+1}{(z-p)(z-p^*)} \cdot \frac{z}{z-1} = z\left(\frac{r_1}{z-p} + \frac{r_1^*}{z-p^*} + \frac{r_2}{z-1}\right) = \frac{r_1 z}{z-p} + \frac{r_1^* z}{z-p^*} + \frac{r_2 z}{z-1}$$

$$r_1 = \left.\frac{z+1}{(z-p^*)(z-1)}\right|_{z=p} = \frac{p+1}{(p-p^*)(p-1)}$$

MODULO 0.53

FASE 2.78

$$r_2 = \left.\frac{z+1}{(z-p)(z-p^*)}\right|_{z=1} = \frac{2}{(1-p)(1-p^*)} = \frac{2}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1$$

$G(z)$

$z^2+0.5z+0.5$

$$y(k) = 2\cdot 0.53\cdot(0.71)^k \cos(1.93k + 2.78) + 1 \qquad k \geq 0$$