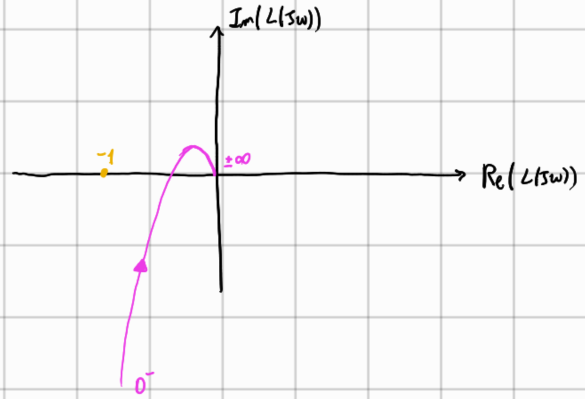
Capitolo 13 – Luogo delle radici

$$L(s) = \frac{\mu}{s(1+s\tau)^2}$$

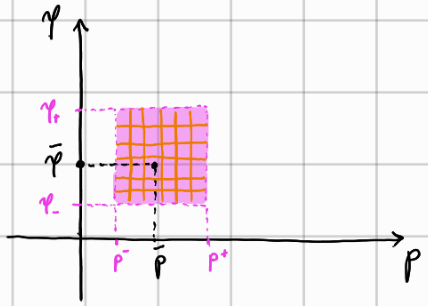
μ guadagno di velocità

Siamo abituati a vedere se sistema é stabile a ciclo chiuso con il criterio di Nyquist (punto critico −1 sulla base del numero di giri).



- Poi possiamo valutare la stabilità robusta.

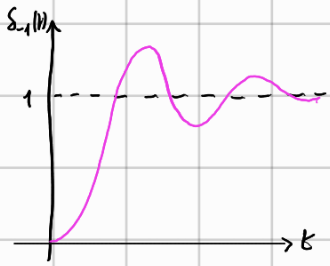
Qui ho 2 parametri: μ, τ. Parametri che calcolo con procedimenti di sollecitazione, e sono parametri nominali.

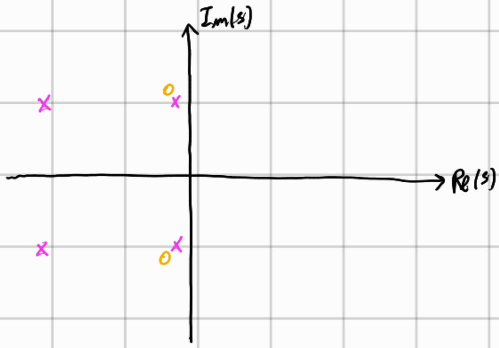


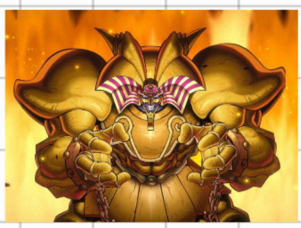
In genere, i parametri possono variare in un rettangolo:
Questi parametri mi danno una fascia in cui può spostarsi la curva.
Si fa facendo il gridding. Per un certo valore di pulsazione mi muovo in uno dei domini e rappresento tutto. Prendo la distanza maggiore e rappresento una circonferenza

Rendo il sistema robusto se $(-1, j0)$ é lontano dalla caratteristica di L e non risulta in nessuna delle circonferenze.

Poli







Struttura dei poli per il sistema longitudinale di un aereo.
Per i due poli vicino all'asse immaginario ho un tempo di assestamento troppo grande.
Posso pensare di aggiungere degli zeri lì vicino in modo da attenuare l'effetto. Residui legati a quel modo sono molto bassi.

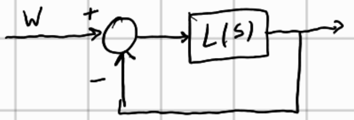
Conviene comunque progettare tutto per avere una leggera sovraelongazione per avere il gradino dell'alto.

Problema: come caratterizzo poli e zeri e dove devo posizionarli? Ho problema relativo alla robustezza

- I poli del sistema a ciclo chiuso sono le soluzioni dell'**equazione caratteristica**

$$1 + L(s) = 0$$

- Il **luogo delle radici** è l'insieme dei punti del piano complesso che corrispondono alle soluzioni dell'equazione caratteristica al variare del parametro $\rho \neq 0$ da $-\infty$ a $+\infty$ ($\rho > 0$ **luogo diretto**, $\rho < 0$ **luogo inverso**)



$$L(s) = \rho \frac{\overbrace{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}^{\text{inclusi anche poli nell'origine e ecc}}}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)} = \rho \frac{N^*(s)}{D(s)}$$

$$F(s) = \frac{\rho \frac{N^*(s)}{D(s)}}{1 + \rho \frac{N^*(s)}{D(s)}}$$

POLI DEL SISTEMA A CICLO CHIUSO:

$$1 + L(s) = 0$$

$$L(s) = -1 \iff \frac{\rho N^*(s)}{D(s)} = -1$$

Relazione complessa: ricavo equazioni del luogo

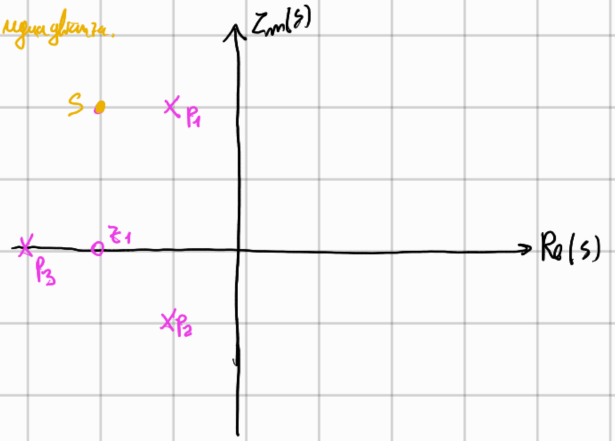
$$|\rho| = \frac{\prod_{i=1}^{n}|s-p_i|}{\prod_{i=1}^{m}|s-z_i|}$$

Se $\rho > 0$ parlo di LUOGO DIRETTO

Se $\rho < 0$ parlo di LUOGO INVERSO

NOTA: PER COME LO HO SCRITTO, ρ NON È GUADAGNO STATICO/DI VELOCITÀ

Assegnati sul piano complesso p_i e z_i, i punti S che appartengono al luogo delle radici per un certo valore del guadagno, sono quelli che soddisfano questa uguaglianza.



NOTA: Questi S rappresentano i poli della F.

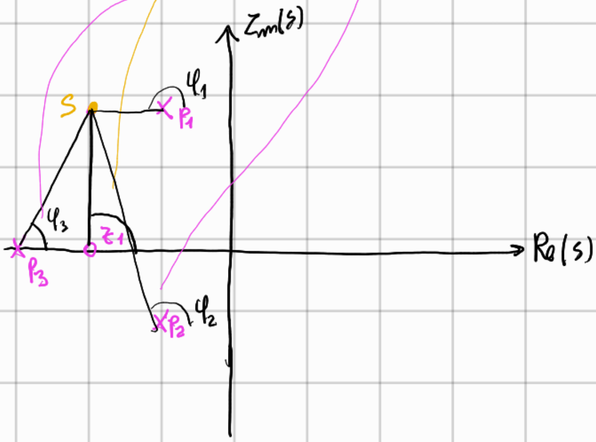
RICAVO RELAZIONE DI FASE

$$\sum_{i=1}^{m} \angle(s-z_i) - \sum_{i=1}^{n} \angle(s-p_i) = \pm(2h+1)\pi$$

Se $\rho > 0$, perché $L(s) = -1$

Numero dispari di π.

LUOGO DIRETTO

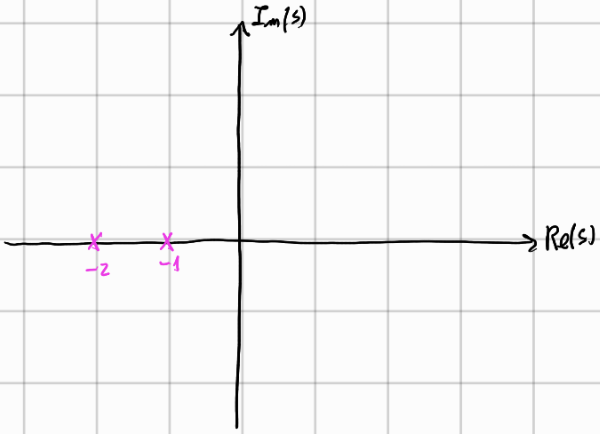


$$\sum_{i=1}^{m} \angle(s-z_i) - \sum_{i=1}^{n} \angle(s-p_i) = \pm 2h\pi$$

$\rho < 0$ LUOGO INVERSO

Questa relazione è più pratica, ma è molto a tentativi.

REGOLE

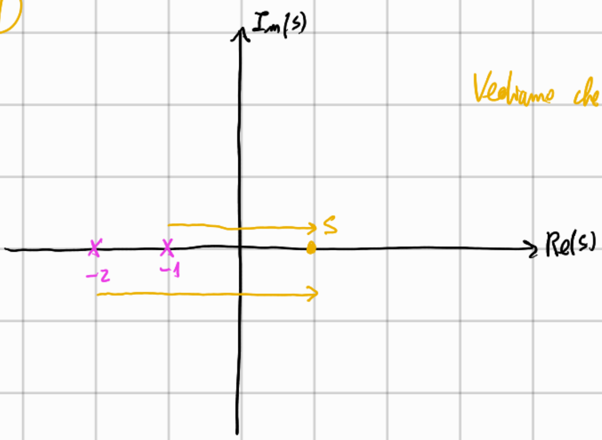


Immagino di avere 2 poli

$L(s) = \frac{P}{(s+1)(s+2)}$

Voglio vedere al variare di P come si posizionano i poli a ciclo chiuso. Uso relazione di fase.

1



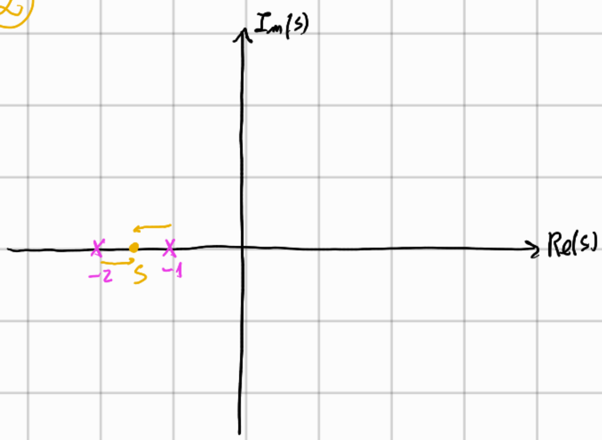
Vediamo che succede se s è qui.

Vediamo punto a destra.

Applico relazione di fase con $P>0$. Non ho zeri.

$\angle(s+1) + \angle(s+2) = \pi$? Non lo è. Ciascun argomento è un numero pari di π. Quindi nessuno appartiene al luogo delle radici.

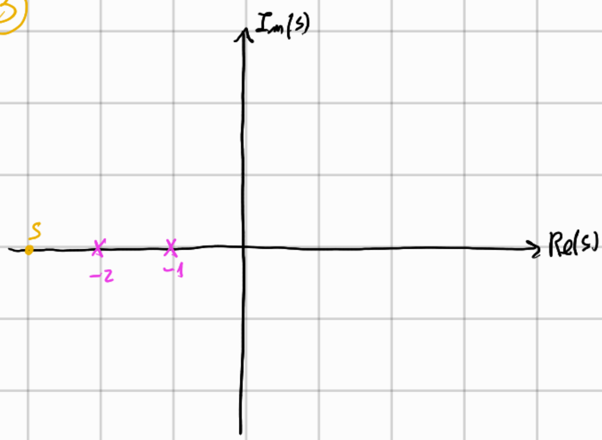
2



$\angle(s+1) = \pi \qquad \angle(s+2) = 0$

Somma é π. Quindi tutti gli s che sono su $[-2, -1] \in$ luogo delle radici

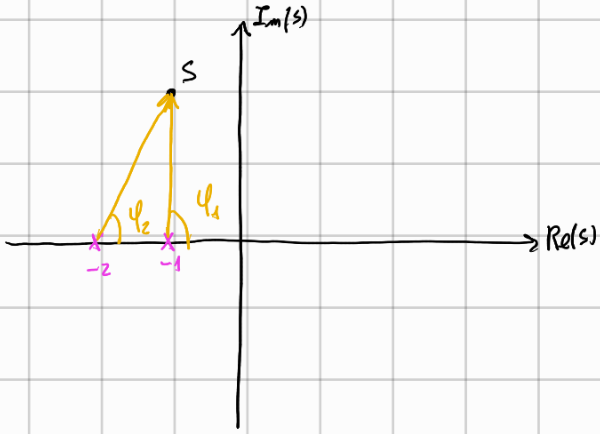
3



$p>0$. La somma dà numero pari di π. Quindi non appartengono al luogo delle radici

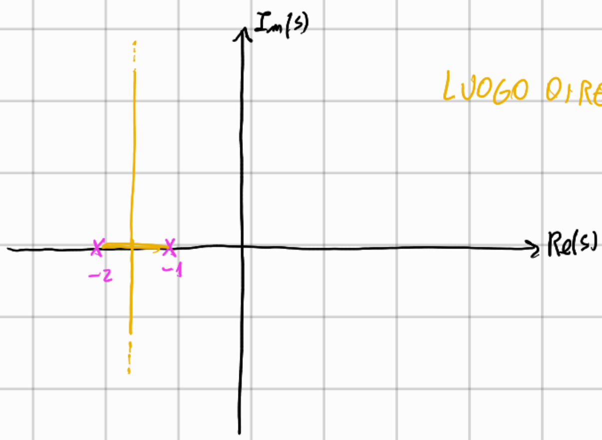
NOW: Se sono fuori dall'asse reale?

4



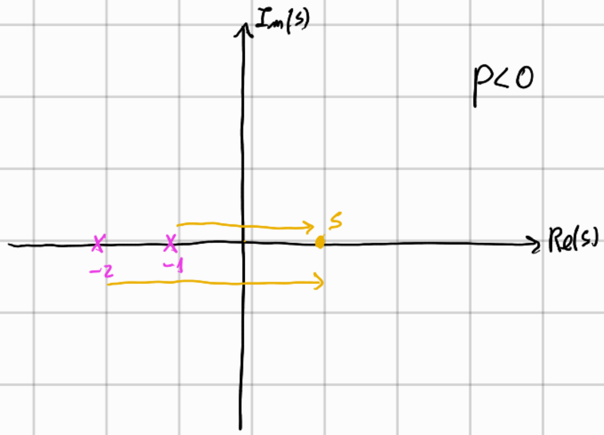
$p>0$. La somma di un angolo esterno con uno interno non adiacente ad esso é π solo se Δ é isoscele. Quindi le s che cerco sono su retta a $-\frac{3}{2}$.

LUOGO DIRETTO

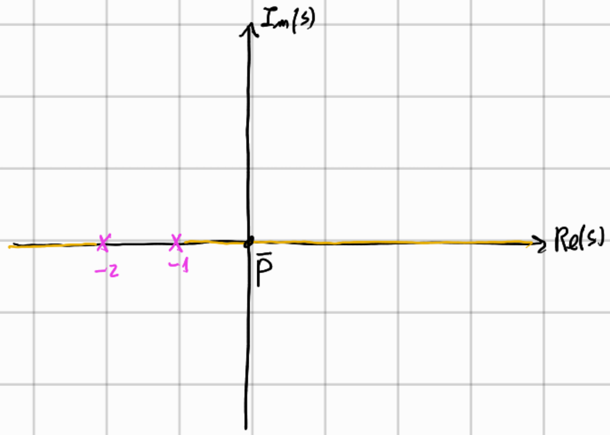


LUOGO INVERSO (somma degli argomenti dei vettori deve essere $2k\pi$).

①



La somma degli argomenti fa 0! Punti reali a destra e sinistra di -1 appartengono al luogo tra [-2,-1] no ovviamente. Non c'è nessun altro punto.



CASO 1: Sistema è intrinsecamente stabile. $!\exists \bar{p} /$ con $|p|>|\bar{p}|$ ho poli a parte reale positiva

CASO 2: $\exists \bar{p} /$ se $|p|>|\bar{p}|$ ho poli a parte reale positiva e sistema diventa instabile, dove $\bar{p}$ lo trovo con $s=0$.

COME DISEGNO LUOGHI DELLE RADICI?

Ricorda bene enunciati.

• Regola 1:

$2n$, n per $p>0$, n per $p<0$

Quanti rami del luogo ci sono? I rami del luogo sono in numero n (numero dei poli).

Perché $F(s) = \dfrac{L(s)}{1+L(s)} = \dfrac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i) + p\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}$ ha n poli

$D(s)$ grado n $\qquad$ $N^*(s)$ grado $m<n$ per causalità

• Regola 2:

Il luogo delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale.

Con polinomi a coeff. reali, se esiste polo complesso, esiste anche coniugato

• Regola 3:

I rami del luogo partono dai poli e terminano sugli zeri al finito e/o al punto improprio del piano complesso. L'orientamento parte dai poli e arriva agli zeri.

NOTA: Se faccio variare p, oriento la curva con p crescente.

Se $p=0$, posizione dei poli a ciclo chiuso coincide con la posizione dei poli a ciclo aperto. Se $p>0$ poli si spostano rispetto al ciclo aperto.

$$\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i) + p\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}$$

$\rightarrow \frac{1}{p}\prod_{i=1}^{n}(s-p_i) + \prod_{i=1}^{m}(s-z_i)$, se $p\to\infty$ il denominatore tende solo agli zeri.

Ma come faccio se $n>m$? Ho n rami che devono convergere su m zeri.

$$L(s) = \frac{\rho \prod_{i=1}^{m} (s-z_i)}{\prod_{i=1}^{n} (s-p_i)} = \frac{\rho \prod_{i=1}^{m} (-z_i)}{\prod_{i=1}^{n} (-p_i)} \, \frac{\prod_{i=1}^{m} (1+s\tau_i')}{\prod_{i=1}^{n} (1+s\tau_i)}$$

$\tau_i = -\frac{1}{p_i}$ costante di tempo.

$\tau_i' = -\frac{1}{z_i}$

Hp: no poli comp. coniugati e nell'origine

no zeri comp. coniugati

IDEA: COMPLETO NUMERATORE PER RENDERLA PROPRIA

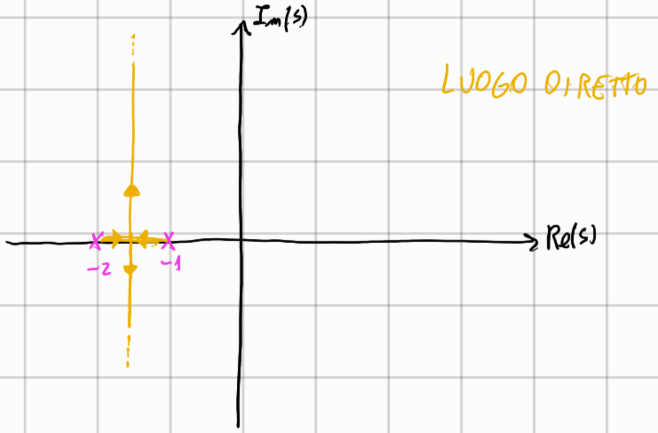
$$L(s) = \frac{\rho \prod_{i=1}^{m} (s-z_i)}{\prod_{i=1}^{n} (s-p_i)} = \frac{\rho \prod_{i=1}^{m} (-z_i)}{\prod_{i=1}^{n} (-p_i)} \, \frac{\prod_{i=1}^{m} (1+s\tau_i')}{\prod_{i=1}^{n} (1+s\tau_i)} = \frac{\rho \prod_{i=1}^{m} (-z_i)}{\prod_{i=1}^{n} (-p_i)} \, \frac{\prod_{i=1}^{m} (1+s\tau_i') \prod_{i=m+1}^{n} (1+\varepsilon\tau_i' s)}{\prod_{i=1}^{n} (1+s\tau_i)}$$

con $\varepsilon \to 0$.

Ho tutti zeri che, se $\varepsilon \to 0$ tendono al punto improprio del piano complesso.

Su uno zero termina sempre un solo ramo.

In che maniera sono orientati i luoghi per ρ crescente?



Orientamento è per ρ crescente.

• Regola 4:

I punti dell'asse reale che appartengono al luogo: Caso luogo diretto

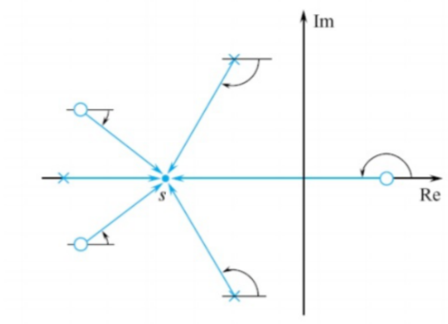
Punti dell'asse reale che appartengono al luogo sono solo quelli che lasciano alla propria destra un numero dispari di poli e zeri contati con la loro molteplicità.

Caso inverso: devono essere un numero pari.

- Regola 6
  - I punti dell'asse reale a sinistra di un numero **dispari** di poli o zeri di $L(s)$ appartengono al luogo **diretto**; quelli a sinistra di un numero **pari** di singolarità di $L(s)$ fanno parte del luogo **inverso**
    - dim. (luogo diretto): ricordando la relazione sulle fasi

$$\sum_{i=1}^{m} \angle(s - z_i) - \sum_{i=1}^{n} \angle(s - p_i) = (2k+1)\pi$$

si vede che le singolarità complesse danno contributo nullo o pari a $\pm 2\pi$ e così pure le singolarità reali a sinistra del punto s sull'asse reale mentre quelle a destra danno contributo pari a $\pm\pi$; dunque affinché s appartenga al luogo deve trovarsi a sinistra di un numero dispari di singolarità (in modo che la fase totale sia pari ad un numero dispari di semigiri)



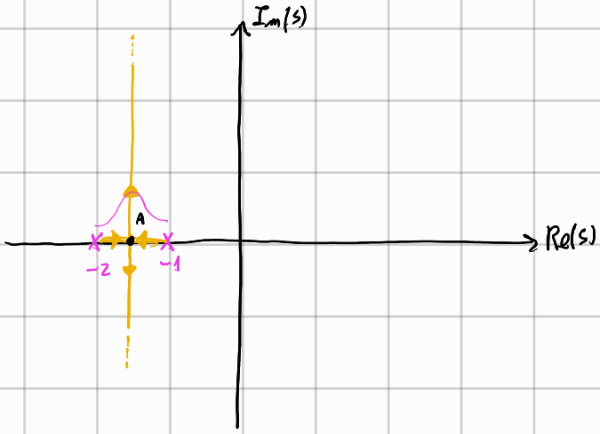
- Regola 5: punti multipli/doppi del luogo.

Sull'asse reale posso avere punti doppi, in cui le radici a ciclo chiuso sono di molteplicità 2. Significa che in quel punto convergono rami del luogo e da quello divergono 2 rami del luogo.

Come si identificano?

$$\frac{N^*(s)}{D(s)} = -\frac{1}{P}$$

Se mi muovo su asse reale con P variabile, ho funzione di p. Se mi sposto tra -2 e -1, nel punto di intersezione ho un massimo.



Percorrendo l'asse reale, $|P(x)| = -\frac{D(x)}{N^*(x)}$ mi rappresenta p al variare di x. Devo quindi trovare un massimo della funzione.

Positivo per luogo diretto, $\forall x$.
Posso fare log e derivata e trovo punti di max (o min se $\rho<0$).

$$\frac{dP(x)}{dx} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s-p_i} - \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{s-z_i} = 0$$

perché $P(x) = -\frac{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}$

Radice doppia di un polinomio, deve essere radice anche della derivata prima. (Se è anche radice per la derivata h-esima, avrò molteplicità h+1).

$\Downarrow$

$$1+\rho L(s) \longrightarrow \frac{d}{ds}(1+\rho L(s)) = 0 \Rightarrow \frac{d}{ds}L(s)=0$$

Regole di tracciamento

Regola 5

$\nu = n - m$

- I rami che tendono all'infinito lo fanno lungo asintoti che si intersecano nell'asse reale nel punto di ascissa

$$x_a = \frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i\right)$$

e formano con l'asse reale angoli pari a

$$\psi_{ak} = \begin{cases} \dfrac{(2k+1)\pi}{\nu} & k = 0,1,\dots,\nu-1 \quad \rho > 0 \\ \dfrac{2k\pi}{\nu} & k = 0,1,\dots,\nu-1 \quad \rho < 0 \end{cases}$$

- dim. (cenni): per ρ e $|s|$ sufficientemente grandi, la funzione d'anello si può approssimare con

$$\tilde{L}(s) = \frac{\rho}{(s-x_a)^{\nu}}$$

il cui luogo delle radici è appunto la stella di semirette con centro in x_a

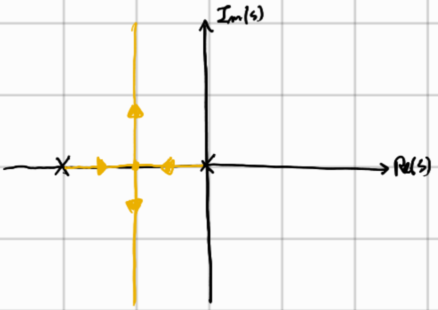
NEW STUFF

① $|P| = \dfrac{\prod_{i=1}^{m}|s-p_i|}{\prod_{i=1}^{m}|s-z_i|}$

② $\sum_{i=1}^{m}\angle s-z_i - \sum_{i=1}^{n}\angle s-p_i = \pm(2h+1)\pi$

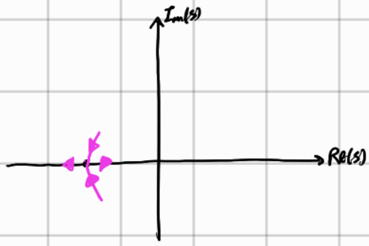
②2 $\sum_{i=1}^{m}\angle s-z_i - \sum_{i=1}^{n}\angle s-p_i = \pm 2h\pi$

Rilevazione dei punti doppi sul luogo delle radici

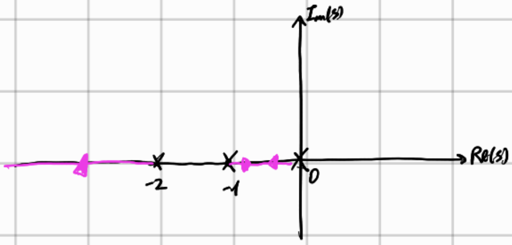


Punti doppi si trovano risolvendo: $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s-p_i} - \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{s-z_i} = 0$ MA é POCO PRATICA

PUNTI DOPPI SULL'ASSE REALE SONO SU UNA SEMIRETTA IN CUI HO RAMI CHE CONVERGONO, DA CUI I RAMI PARTONO SEMPRE CON $\tan\theta = \pm\frac{\pi}{2}$, OPPURE HO RAMI CHE DIVERGONO



ES:



Sull'asse reale sicuramente ho questi punti del luogo. I poli sono come anche negative

Trovo Punti:

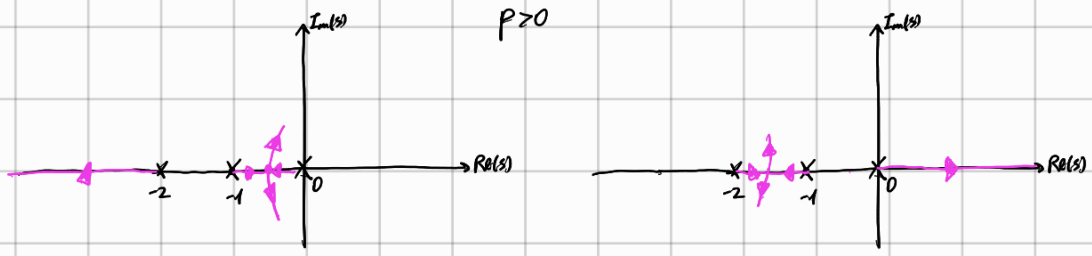
$$\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s} = 0 \iff (s+2)(s+1) + s(s+2) + s(s+1) = 0$$

$$s^2+3s+2 + s^2+2s + s^2+s = 0 \iff 3s^2+6s+2=0$$

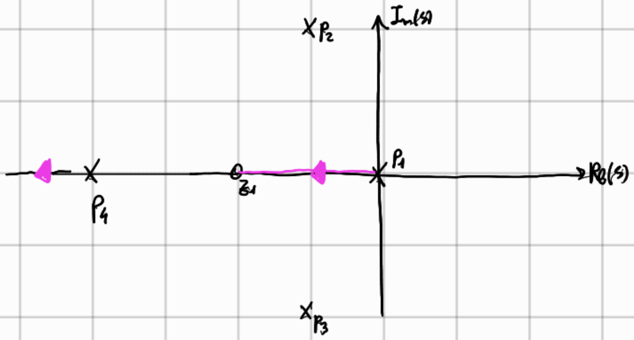
$S_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{3}$ Non é punto medio!

$S_1 = -1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ é per $P<0$

$S_2 = -1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$ é per $P \geq 0$. Non al centro ma più spostato.

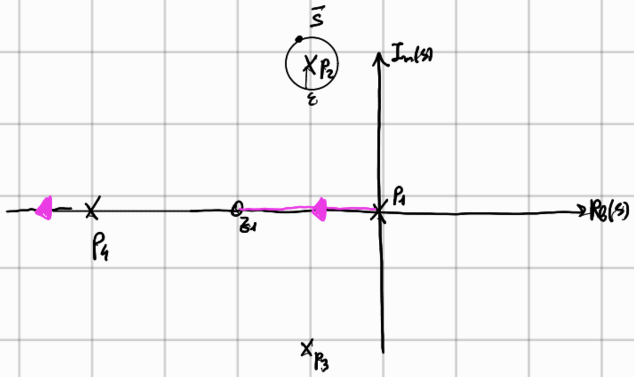


REGOLA 7



Anomalia con cui i rami partono dai poli: Su asse reale é sempre $-\pi$.

Per gli altri? Disegno circonferenza di $r=\varepsilon$.



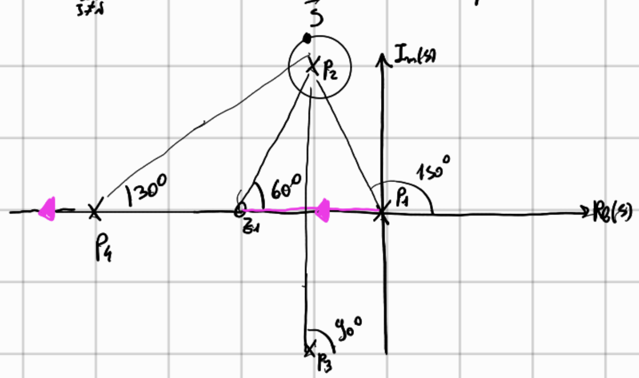
Mi metto su un punto $\bar{s}$. Allora, fase è:

$$\sum_{i=1}^{m} \angle \bar{s} - z_i - \sum_{i=1}^{n} \angle \bar{s} - p_i = (2h+1)\pi$$

$$\sum_{j=1}^{m} \angle \bar{s} - z_j - \angle \bar{s} - p_1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^{n} \angle \bar{s} - p_j = (2h+1)\pi \quad (1)$$

Se $\varepsilon \to 0$, $\bar{s}$ tende a p_1. L'argomento tende all'argomento della tangente del luogo delle radici in p_1.

(1) $\varphi_{P_i} = \pm(2h+1)\pi + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \angle(P_i - P_j) - \sum_{j=1}^{m} \angle(P_i - z_j)$ facendo tendere $\varepsilon \to 0$

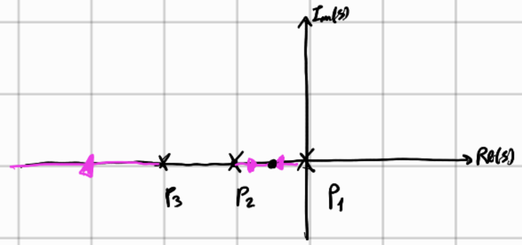


$\varphi_{P_2} = 180° + 180° + 90° - 60° = 30°$

Quindi: parto con circa 30°. Per gli zeri, la procedura é analoga.

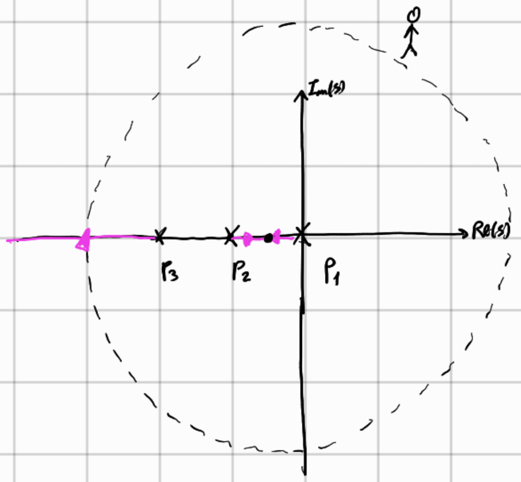
$$\theta_{z_i} = \pm(2h+1)\pi - \sum_{\substack{j\neq i \\ j=1}}^{m} \angle(z_i - z_j) + \sum_{j=1}^{n} \angle(z_i - P_j)$$

NEW STUFF



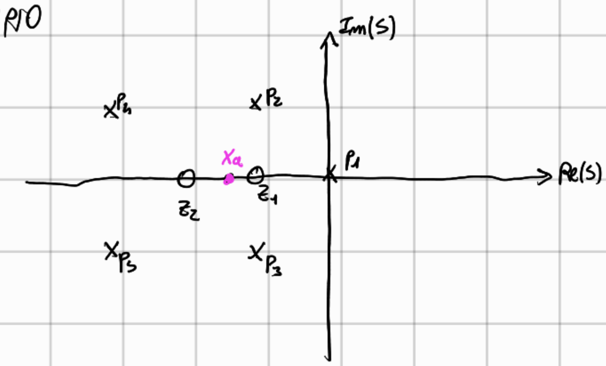
Gli $n-m$ rami del luogo che tendono al punto improprio lo fanno tramite asintoti che intersecano il punto x_a su asse delle ascisse tale per cui $x_a = \frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i\right)$ $\nu = n-m$ TUTTI GLI ASINTOTI PASSANO LÍ.

$$\begin{cases} \varphi_{ak} = \dfrac{(2h+1)\pi}{\nu} & h=1,\dots,\nu-1 \quad \text{se } \rho \geq 0 \\[2ex] \varphi_{ak} = \dfrac{2h\pi}{\nu} & h=1,\dots,\nu-1 \quad \text{se } \rho < 0 \end{cases}$$



Vedo tutti i punti sempre più vicini tra loro. Dove? Nel BARICENTRO dei poli e degli zeri.

ESEMPIO



Gli zeri vanno contati come massa negativa.

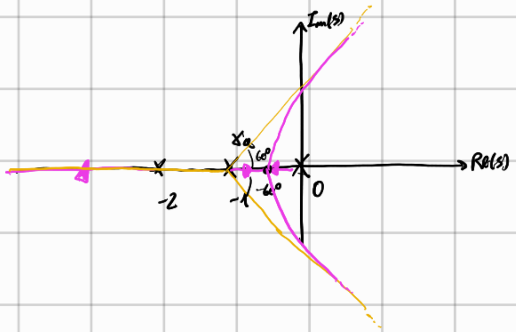
Al punto improprio, la L viene vista come $\tilde{L}(s) = \frac{P}{(s-x_a)^{\nu}}$

Quindi, se valuto la fase: $\nu \angle (s-x_a) = \mp(2h+1)\pi$

Sono ν vettori con argomento φ_a

$\Rightarrow \angle s - x_a = \frac{(2h+1)\pi}{\nu}$ GIUSTIFICAZIONE INTUITIVA DELLA FASE

RIPRENDIAMO ESEMPIO:



Questi sono i luoghi delle radici.

$\chi_a = \frac{1}{3}(-3) = -1$

Troviamo le fasi:

$\varphi_{ak} = \frac{(2h+1)\pi}{\nu} \Rightarrow h=0 \quad \varphi_{a1} = 60°$

$\varphi_{a2} = 180°$

$\varphi_{a3} = -60°$

DIMOSTRIAMO LA PROPRIETÀ

$$L(s) = \rho \frac{N^*(s)}{D(s)} = \rho \frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)} = \rho \frac{s^m - \sum_{i=1}^{m} z_i s^{m-1} + \dots + \prod_{i=1}^{m} z_i}{s^n - \sum_{i=1}^{n} p_i s^{n-1} + \dots + \prod_{i=1}^{n} p_i} =$$

Per il termine s^{m-1} ho somma di z_i così come termine noto.

Sono polinomi monici.

$$= L(s) = \cfrac{\rho}{\underbrace{s^{n-m}}_{\text{Post divisione}} - \left(\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i\right) s^{n-m-1} \underbrace{+ \dots +}_{R_1} \cfrac{R}{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}}$$

- Ora supponiamo $\nu \geq 2$. Perché $\nu = 1$ banale (Vedi 1 polo: asintoti sono $-\pi$ e π).

Per come lo abbiamo scritto, se $\nu \geq 2$, i primi due coefficienti hanno grado ≥ 0. Dominano.

Quindi, quando $s \to \infty$, tutti quelli che vengono dopo, vanno a 0.

Quindi, se $s \to \infty$, $L(s)$ è equivalente a qualsiasi altra funzione per cui accade che:

$L'(s)$ ha $\sum_{i=1}^{n'} p_i - \sum_{i=1}^{m'} z_i = \sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i$ per il comportamento all'infinito.

Una particolare $L'(s)$ è una che ha ν poli concentrati in un punto,

purché valga $\nu p = \sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i$

Dove $\rho = \frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i\right)$

$\square$

ULTIMA PROPRIETÁ:

Se $\nu \geq 2$, il baricentro del luogo x_B é:

$$x_b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i \quad \text{, media sui poli.}$$

NOTA: Il baricentro dei poli a ciclo chiuso é il baricentro dei poli a ciclo aperto

Poli a ciclo chiuso: $D(s) + \rho N^*(s)$

Se $\nu \geq 2$, i primi due termini non dipendono da ρ. Quindi, la somma degli zeri del polinomio corrisponde con quella a ciclo aperto

Poli a ciclo chiuso $x_b = \sum_{i=1}^{n} p_i$, perché la somma dei poli coincide col secondo coefficiente del polinomio. Basta quindi dividere per n per ottenere il baricentro

- Quando il grado relativo è maggiore o uguale a 2, il **baricentro del luogo** (**somma dei poli in anello chiuso**, da non confondere col punto di incontro degli asintoti) non dipende dalla costante di trasferimento e si trova sull'asse reale

$$x_b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i$$

  - dim.: si basa sulla proprietà che in un polinomio monico di grado n il coefficiente del termine di grado $n-1$ è pari alla somma delle radici cambiata di segno. Se il grado relativo del sistema è maggiore o uguale a 2, nel polinomio caratteristico, il secondo coefficiente non dipende da ρ e quindi è pari alla somma delle radici che, per definizione, coincide col baricentro moltiplicato per n. Poiché tale numero non dipende da ρ, esso deve essere pari anche alla somma delle radici per $\rho = 0$ e cioè i poli a ciclo aperto.

$$D(s) + \rho N^*(s) = 0$$

$i=1$ $i=1$

- Regola 11
  - In ogni punto s del luogo il valore della costante di trasferimento vale

$$|\rho| = \frac{\prod_{i=1}^{n}|s - p_i|}{\prod_{i=1}^{m}|s - z_i|} = \frac{\prod_{i=1}^{n}\eta_i}{\prod_{i=1}^{m}\lambda_i}$$

  - dim.: deriva direttamente dalla relazione sui moduli

Esempio:

$$L(s) = \frac{P}{(s+1)^3}$$

Ho 3 asintoti, $60°$, $180°$, $270°$

Luogo si svolge sugli asintoti ed è esatto.

Trovare $P = \bar{P}$ che è il guadagno limite per cui il sistema diventa instabile.

$1 + L(s) \Rightarrow (s+1)^3 + P = s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + P$ Uso Routh:

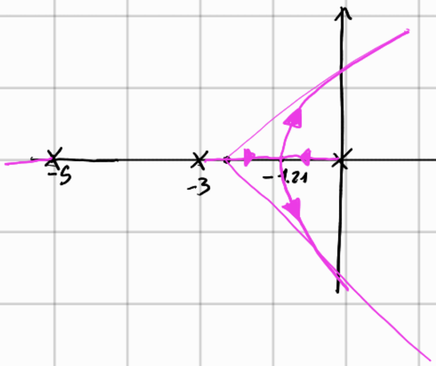
3	1	3
2	3	$1+P$
1	$8-P$	
0	$1+P$	

$\bar{P} = 8$, perché l'altro è $\bar{P} = -1$, che appartiene all'altro luogo

Per trovare chi sono gli s, scrivo il polinomio associato alla riga 2:

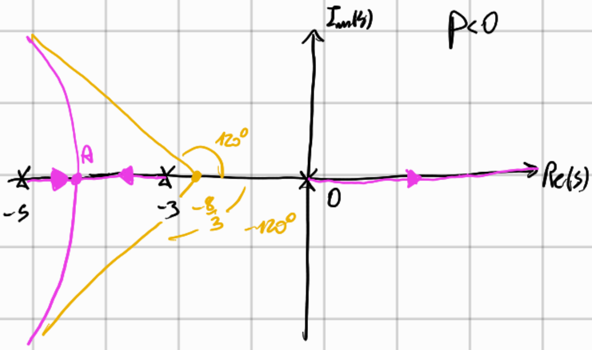
$3s^2 + 9 = 0 \Rightarrow s = \pm j\sqrt{3}$ (1)

Esempio: $-1{,}21$ punto doppio. Centro degli asintoti è $-\frac{8}{3}$.



$P > 0$

stabile per $P < \bar{P}$



$P < 0$

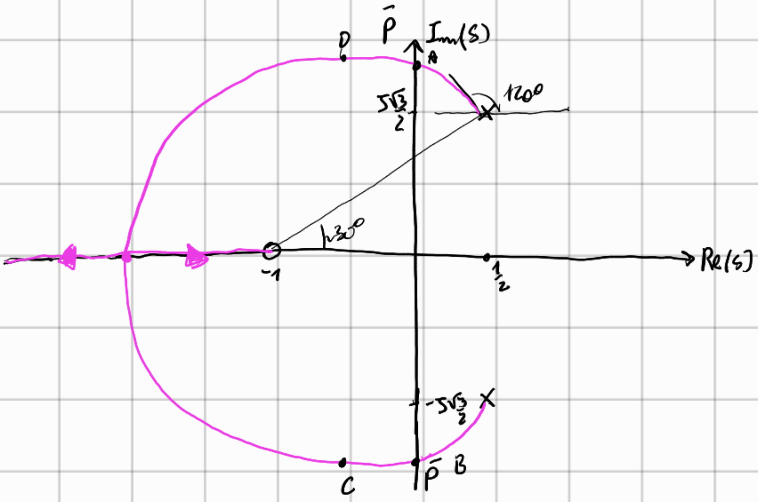
$\frac{2k}{\nu}\pi$ per asintoti

A punto doppio.

Se $P < 0$ sistema è sempre instabile.

ESEMPIO

$$L(s) = P\frac{s+1}{s^2 - s + 1}$$



Poli sono questi due.

Un ramo va allo zero, uno al punto improprio.

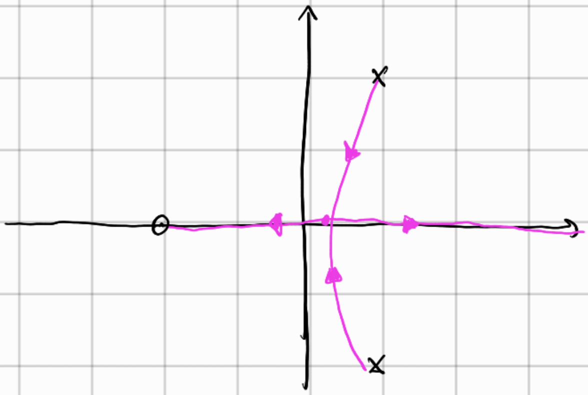
Ora ci torna utile come i rami partono dai poli.

Faccio i conti e partono con pendenza 120°. Qui il disegno è un po' più approssimato.

NOTA: A e B vengono trovati da Routh.

Se voglio C e D con un cambio di variabile $s = z - Re(c)$. Quindi se $s=0$ ho $z=\alpha$.

LUOGO INVERSO



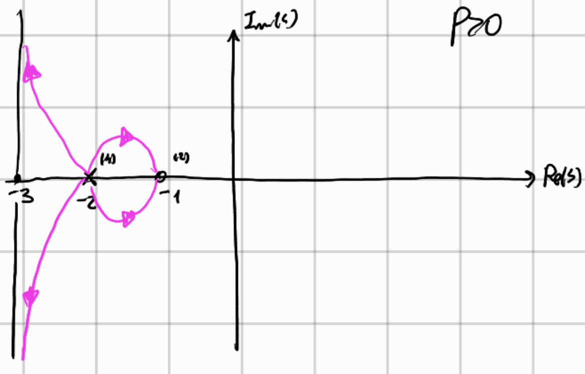
Qui ho sempre uno zero a cui deve arrivare tutto.

C'è un punto doppio.

ESEMPIO

$$L(s) = P\frac{(s+1)^2}{(s+2)^4}$$

$P \geq 0$



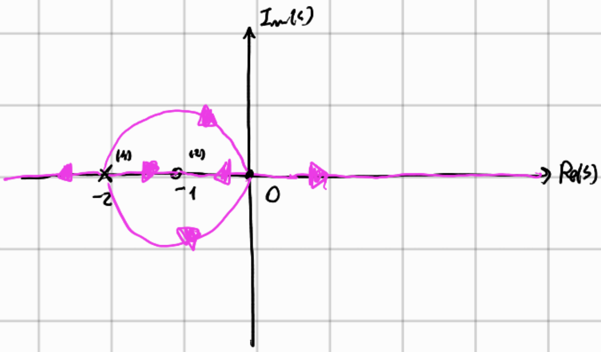
Centro degli asintoti:

$$\frac{-8+2}{2} = -3$$

2 rami vanno sullo zero ma senza passare su asse reale.

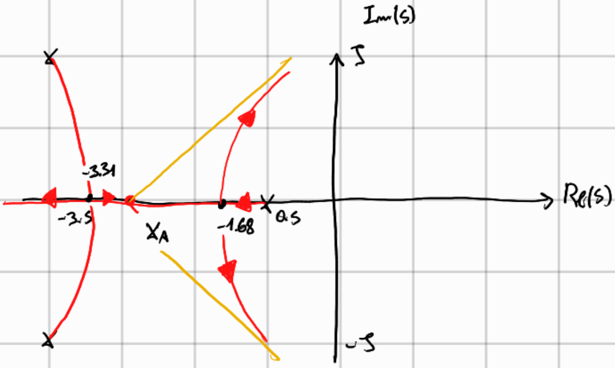
Le fasi degli asintoti sono $\frac{-\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ perché sono 2.

$P<0$



Tutto asse reale appartiene al luogo. Sempre instabile! Da -2 però devono partire allora 2 rami. C'è un punto doppio in 0.

NEW STUFF



Trovo punti doppi

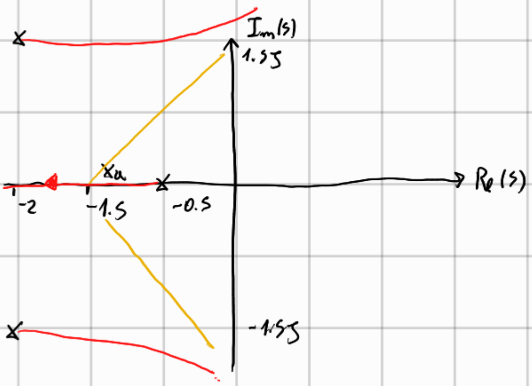
Asintoti sono 3, $X_A = \frac{1}{3}(-7.5) \approx 2.5$

Se non ho punti doppi, equazione non deve ammettere soluzioni. Ma io le trovo.

$$\frac{1}{s+0.5} + \frac{1}{s+3.5-J} + \frac{1}{s+3.5+J} = 0$$

ho -1.68, -3.31

ESEMPIO 2



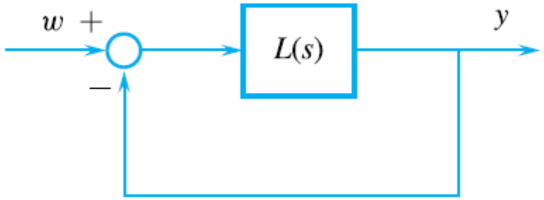
Ora con questo cambio non ci sono punti doppi reali.

Il luogo delle radici

- Si tratta di uno strumento utile sia in fase di analisi che di sintesi dei sistemi di controllo
- Permette di valutare la posizione dei poli del sistema a ciclo chiuso
- Ha ancora una rappresentazione grafica che lo rende attrattivo e di semplice applicazione
- È applicabile anche alla sintesi di sistemi di controllo per impianti instabili
- Non è utilizzabile in maniera diretta per funzioni di trasferimento non razionali fratte (ritardi di tempo)
  - Richiede un'approssimazione della funzione trascendente e^{-sT}
    - Approssimanti di Padé

	I ordine	II ordine	III ordine
e^{-sT}	$\dfrac{1-sT/2}{1+sT/2}$	$\dfrac{1-sT/2+s^2T^2/12}{1+sT/2+s^2T^2/12}$	$\dfrac{1-sT/2+s^2T^2/12-s^3T^3/120}{1+sT/2+s^2T^2/12+s^3T^3/120}$

Definizione



- Si scriva la funzione d'anello come

$$L(s) = \rho \frac{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)} = \rho \frac{N^*(s)}{D(s)}$$

N.B.: il libro scrive la funzione d'anello con i segni +!

- I poli del sistema a ciclo chiuso sono le soluzioni dell'**equazione caratteristica**

$$1 + L(s) = 0$$

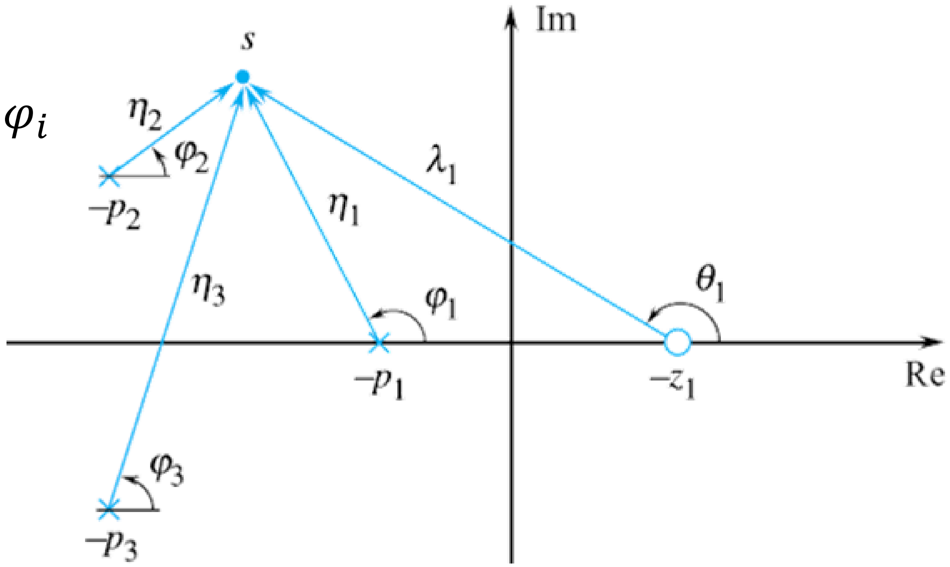
- Il **luogo delle radici** è l'insieme dei punti del piano complesso che corrispondono alle soluzioni dell'equazione caratteristica al variare del parametro $\rho \neq 0$ da $-\infty$ a $+\infty$ ($\rho > 0$ **luogo diretto**, $\rho < 0$ **luogo inverso**)

Caratterizzazione del luogo

$$0 = 1 + L(s) \Rightarrow \frac{N^*(s)}{D(s)} = -\frac{1}{\rho} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|N^*(s)|}{|D(s)|} = \dfrac{1}{|\rho|} \\ \angle N^*(s) - \angle D(s) = \begin{cases} (2k+1)\pi & \rho > 0 \text{ (luogo diretto)} \\ 2k\pi & \rho < 0 \text{ (luogo inverso)} \end{cases} \end{cases}$$

- La relazione sulle fasi serve a caratterizzare l'**aspetto geometrico** del luogo

$$\angle N^*(s) = \sum_{i=1}^{m} \angle(s - z_i) = \sum_{i=1}^{m} \theta_i, \quad \angle D(s) = \sum_{i=1}^{n} \angle(s - p_i) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i$$



- un punto s del piano appartiene al **luogo diretto** se

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} \theta_i - \sum_{i=1}^{n} \varphi_i = (2k+1)\pi}$$

- un punto s del piano appartiene al **luogo inverso** se

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} \theta_i - \sum_{i=1}^{n} \varphi_i = 2k\pi}$$

N.B.: nelle figure, i segni $-$ davanti ai i poli p_i e agli zeri z_i vanno tolti (il libro usa la convenzione opposta!)

Caratterizzazione del luogo

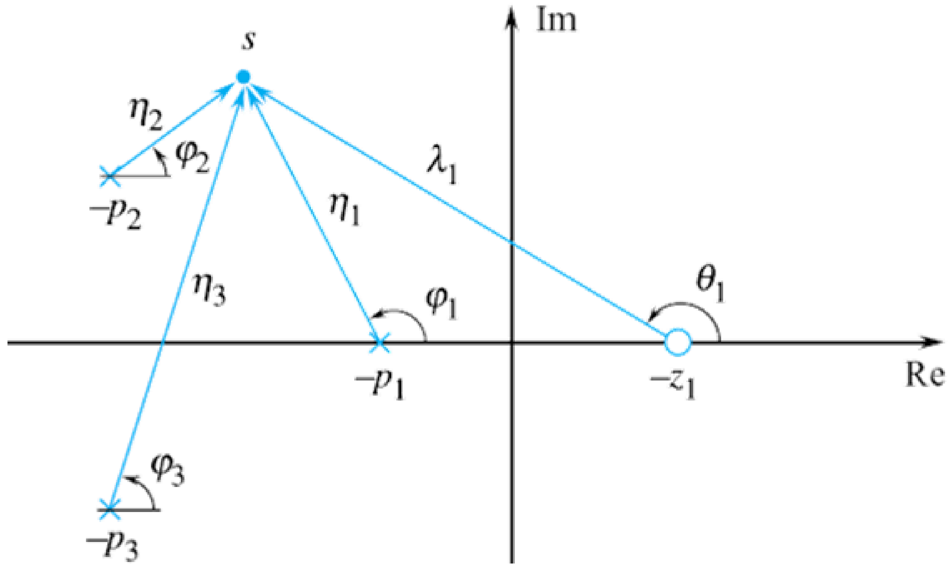
$$0 = 1 + L(s) \Rightarrow \frac{N^*(s)}{D(s)} = -\frac{1}{\rho} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|N^*(s)|}{|D(s)|} = \dfrac{1}{|\rho|} \\ \angle N^*(s) - \angle D(s) = \begin{cases} (2k+1)\pi & \rho > 0 \\ 2k\pi & \rho < 0 \end{cases} \end{cases}$$

- La relazione sui moduli serve a caratterizzare la **punteggiatura** del luogo rispetto a ρ

$$|N^*(s)| = \prod_{i=1}^{m} |s - z_i| = \prod_{i=1}^{m} \lambda_i \quad |D(s)| = \prod_{i=1}^{n} |s - p_i| = \prod_{i=1}^{n} \eta_i$$

- Per ogni punto s del luogo, il corrispondente valore di ρ vale

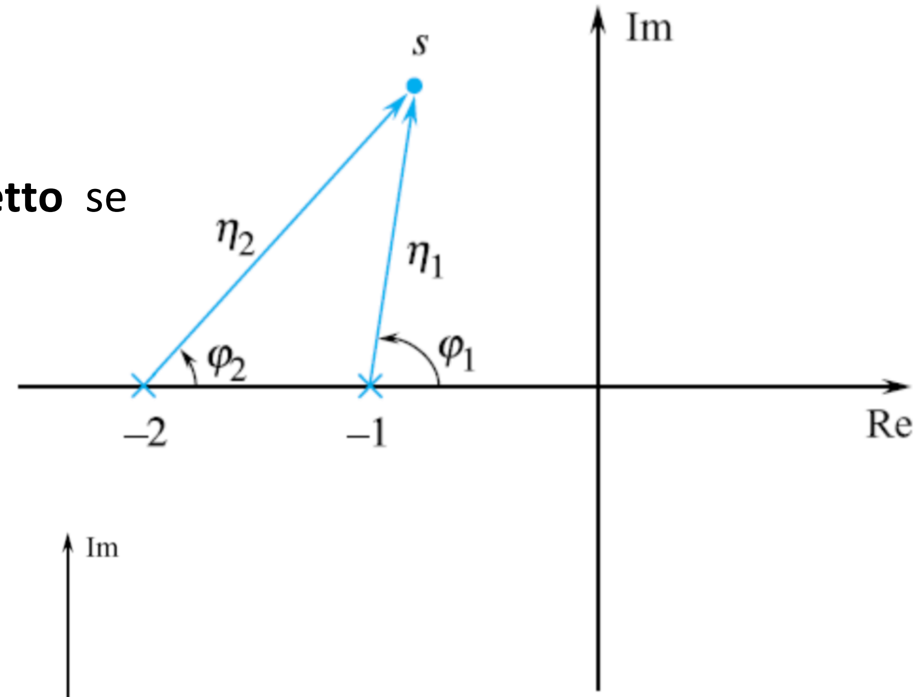
$$\boxed{|\rho| = \frac{\prod_{i=1}^{n} |s - p_i|}{\prod_{i=1}^{m} |s - z_i|} = \frac{\prod_{i=1}^{n} \eta_i}{\prod_{i=1}^{m} \lambda_i}}$$



N.B.: nelle figure, i segni − davanti ai i poli p_i e agli zeri z_i vanno tolti (il libro usa la convenzione opposta!)

Esempio

$$L(s) = \frac{\rho}{(s+1)(s+2)}$$

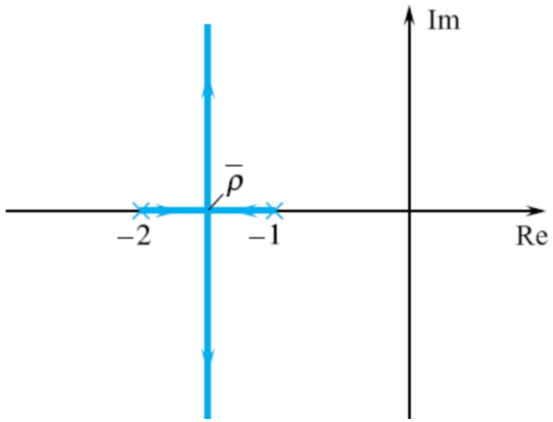


- Applicando la relazione sulle fasi, un punto s appartiene al **luogo diretto** se

$$-\varphi_1 - \varphi_2 = (2k+1)\pi$$

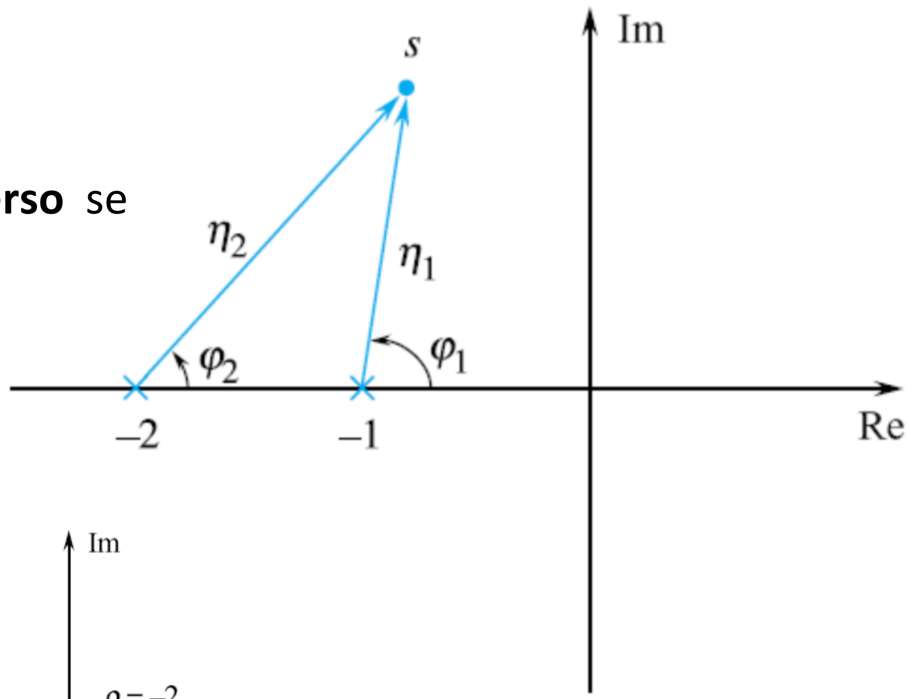
- Dunque appartengono al luogo diretto
  - tutti i punti del segmento $(-2, -1)$
  - tutti i punti dell'asse di tale segmento

$$\bar{\rho} = \eta_1 \eta_2 = 0.25$$



Esempio

$$L(s) = \frac{\rho}{(s+1)(s+2)}$$

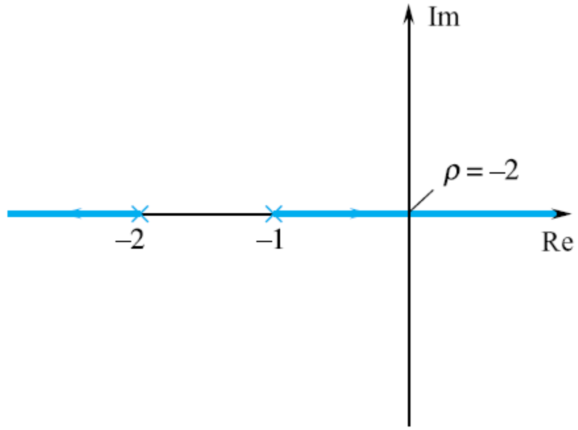


- Applicando la relazione sulle fasi, un punto s appartiene al **luogo inverso** se

$$-\varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi$$

- Dunque appartengono al luogo inverso
  - tutti i punti del segmento $(-\infty, -2)$
  - tutti i punti del segmento $(-1, +\infty)$

$$\rho = -\eta_1 \eta_2 = -2$$



Regole di tracciamento

- Nonostante il luogo delle radici sia tracciabile facilmente in MATLAB, è importante saperlo tracciare (almeno qualitativamente) manualmente in quanto dalla procedura di tracciamento si possono ricavare informazioni importanti sulle eventuali modifiche da apportare alla funzione d'anello per soddisfare le specifiche assegnate per il sistema di controllo
- Il tracciamento manuale si esegue applicando le cosiddette **regole di tracciamento**
  - si assuma che $L(s)$ sia strettamente propria con grado relativo

$$\nu = n - m > 0$$

  - si definisce **baricentro del luogo** la somma dei poli in anello chiuso divisa per n

Regole di tracciamento

Regola 1

- Il luogo delle radici è costituito da $2n$ rami: n fanno parte del luogo diretto e n del luogo inverso
  - dim.: ciò deriva dal fatto che i punti del luogo sono le soluzioni dell'equazione polinomiale di grado n che quindi ne ha sempre n

$$D(s) + \rho N^*(s) = 0$$

Regola 2

- Il luogo delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale
  - dim.: ciò deriva dal fatto che i coefficienti dell'equazione caratteristica sono reali e quindi le sue soluzioni sono reali o a coppie complesse coniugate

Regole di tracciamento

Regola 3

- I rami "partono" dai poli di $L(s)$
  - dim.: per $\rho = 0$ ("partono") le radici dell'equazione caratteristica sono quelle di $D(s)$

$$D(s) + \rho N^*(s) = 0 \Rightarrow D(s) = 0$$

Regola 4

- Sia nel luogo diretto che in quello inverso m rami "arrivano" negli zeri di $L(s)$ e $n - m$ tendono al punto improprio del piano complesso
  - dim.: ciò si giustifica osservando che per $\rho \to \infty$ ("arrivano") l'equazione caratteristica degenera nell'equazione di grado inferiore pari a m

$$D(s) + \rho N^*(s) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\rho} D(s) + N^*(s) = 0 \overset{\rho \to \infty}{\Rightarrow} N^*(s) = 0$$

le altre $n - m$ radici non possono che tendere all'infinito

Regole di tracciamento

$\nu = n - m$

Regola 5

- I rami che tendono all'infinito lo fanno lungo asintoti che si intersecano nell'asse reale nel punto di ascissa

$$x_a = \frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i\right)$$

e formano con l'asse reale angoli pari a

$$\psi_{ak} = \begin{cases} \dfrac{(2k+1)\pi}{\nu} & k = 0,1,\dots,\nu-1 \quad \rho > 0 \\ \dfrac{2k\pi}{\nu} & k = 0,1,\dots,\nu-1 \quad \rho < 0 \end{cases}$$

– dim. (cenni): per ρ e $|s|$ sufficientemente grandi, la funzione d'anello si può approssimare con

$$\tilde{L}(s) = \frac{\rho}{(s - x_a)^{\nu}}$$

il cui luogo delle radici è appunto la stella di semirette con centro in x_a

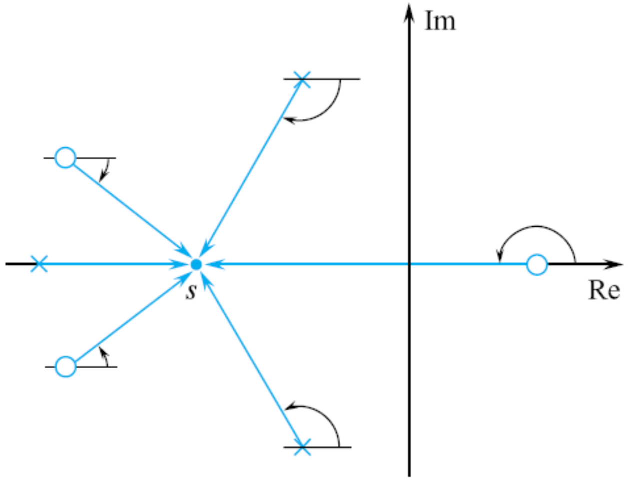
Regole di tracciamento

Regola 6

- I punti dell'asse reale a sinistra di un numero **dispari** di poli o zeri di $L(s)$ appartengono al luogo **diretto**; quelli a sinistra di un numero **pari** di singolarità di $L(s)$ fanno parte del luogo **inverso**
  - dim. (luogo diretto): ricordando la relazione sulle fasi

$$\sum_{i=1}^{m} \angle(s - z_i) - \sum_{i=1}^{n} \angle(s - p_i) = (2k+1)\pi$$

si vede che le singolarità complesse danno contributo nullo o pari a $\pm 2\pi$ e così pure le singolarità reali a sinistra del punto s sull'asse reale mentre quelle a destra danno contributo pari a $\pm\pi$; dunque affinché s appartenga al luogo deve trovarsi a sinistra di un numero dispari di singolarità (in modo che la fase totale sia pari ad un numero dispari di semigiri)



Regole di tracciamento

Regola 7

- Quando il grado relativo è maggiore o uguale a 2, il **baricentro del luogo** (**somma dei poli in anello chiuso**, da non confondere col punto di incontro degli asintoti) non dipende dalla costante di trasferimento e si trova sull'asse reale

$$x_b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i$$

  – dim.: si basa sulla proprietà che in un polinomio monico di grado n il coefficiente del termine di grado $n-1$ è pari alla somma delle radici cambiata di segno. Se il grado relativo del sistema è maggiore o uguale a 2, nel polinomio caratteristico, il secondo coefficiente non dipende da ρ e quindi è pari alla somma delle radici che, per definizione, coincide col baricentro moltiplicato per n. Poiché tale numero non dipende da ρ, esso deve essere pari anche alla somma delle radici per $\rho = 0$ e cioè i poli a ciclo aperto.

$$D(s) + \rho N^*(s) = 0$$

Università degli Studi della Campania Luigi Vanvitelli
Dipartimento di Ingegneria

Regole di tracciamento

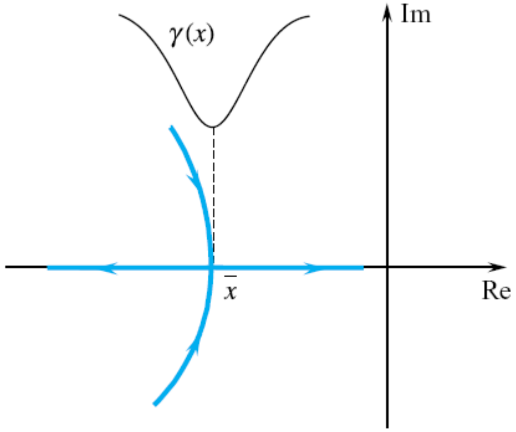
Regola 10

- Eventuali punti di incrocio di rami sull'asse reale si possono determinare trovando i massimi e minimi relativi della funzione (con x reale)

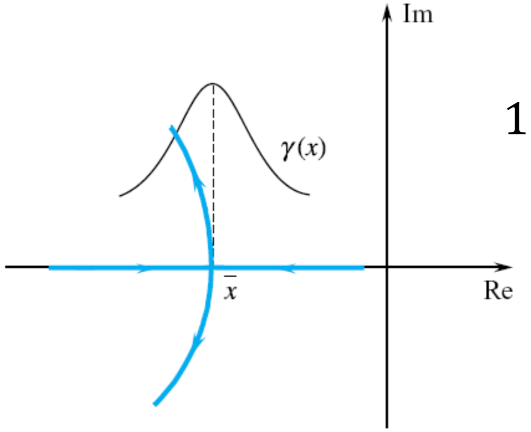
$$\gamma(x) = -\frac{D(x)}{N^*(x)}$$

  - dim. (intuitiva): dalla relazione sui moduli si vede che la funzione $\gamma(x)$ coincide con $\rho(x)$, per cui quando x varia sull'asse reale **concordemente alla punteggiatura del luogo**, $\gamma(x)$ **aumenta**, altrimenti diminuisce

Le frecce indicano il verso crescente di ρ (e quindi di γ)



Punto di confluenza



Punto di diramazione

$$1 + \rho\frac{N^*(x)}{D(x)} = 0 \Rightarrow \rho = -\frac{D(x)}{N^*(x)}$$

Regole di tracciamento

- Essendo la funzione logaritmo crescente, gli estremali di $\gamma(x)$ coincidono con gli estremali di $\ln\gamma(x)$

$$\ln\frac{\prod_{i=1}^{n}(x-p_i)}{\prod_{i=1}^{m}(x-z_i)}=\sum_{i=1}^{n}\ln(x-p_i)-\sum_{i=1}^{m}\ln(x-z_i)$$

- La cui derivata si annulla per x soluzione dell'equazione (sono i punti di diramazione sia del luogo diretto che di quello inverso)

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-p_i}-\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{x-z_i}=0$$

Conviene quando ci sono poli e zeri reali

Regola 11

- In ogni punto s del luogo il valore della costante di trasferimento vale

$$|\rho|=\frac{\prod_{i=1}^{n}|s-p_i|}{\prod_{i=1}^{m}|s-z_i|}=\frac{\prod_{i=1}^{n}\eta_i}{\prod_{i=1}^{m}\lambda_i}$$

  – dim.: deriva direttamente dalla relazione sui moduli

Esempio 1

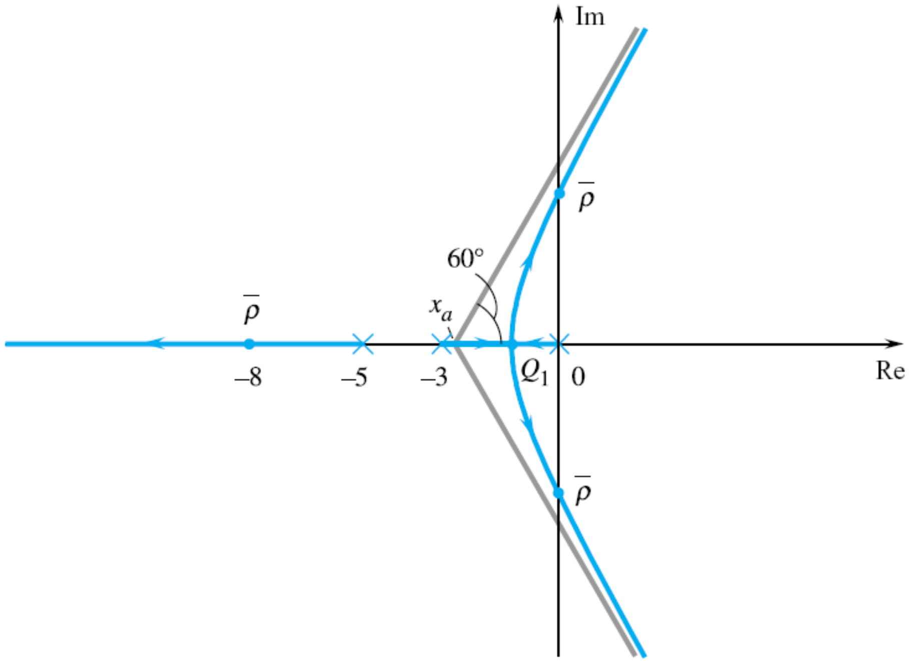
$$L(s) = \frac{\rho}{s(s+3)(s+5)}, \quad n = 3,\ m = 0$$

- Il luogo diretto ha 3 rami che partono dai 3 poli e vanno tutti all'infinito
- I segmenti dell'asse reale che appartengono al luogo sono quelli che si trovano a sinistra di un numero dispari di singolarità
- I 3 asintoti si incontrano nel punto di ascissa

$$x_a = \frac{1}{3}(0-3-5) = -\frac{8}{3}$$

- Che formano i seguenti angoli con il semiasse reale positivo

$$\psi_{ak} = \begin{cases} \dfrac{(2\cdot 0+1)\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} \\ \dfrac{(2\cdot 1+1)\pi}{3} = \pi \\ \dfrac{(2\cdot 2+1)\pi}{3} = \dfrac{5}{3}\pi \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2$$



Esempio 1

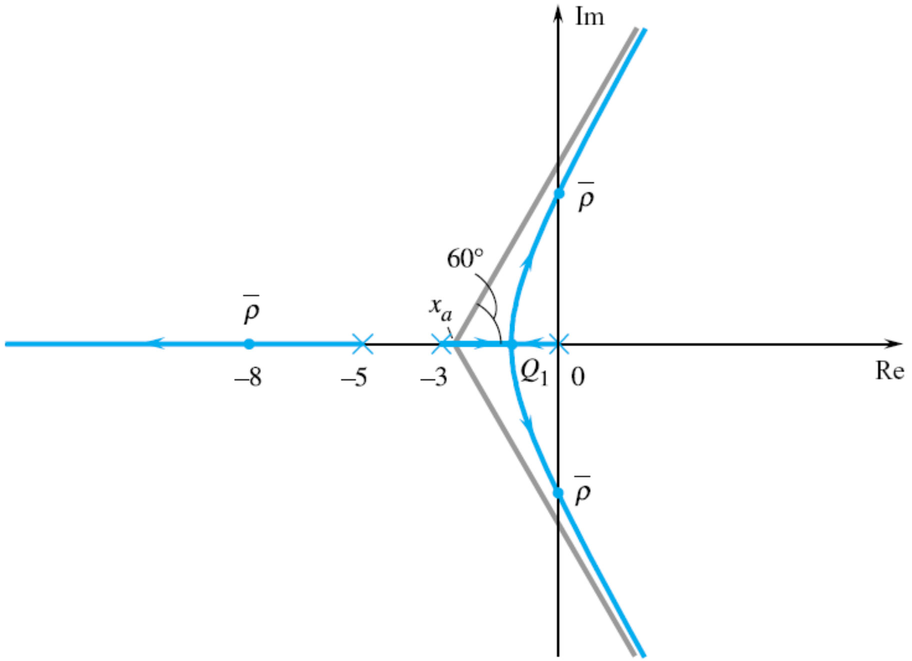
$$L(s) = \frac{\rho}{s(s+3)(s+5)}, \quad n = 3,\ m = 0$$

- il punto doppio si determina calcolando gli estremali della funzione

$$\gamma(x) = -\frac{D(x)}{N^*(x)} = -x(x+3)(x+5)$$

che ha un massimo in $x = -1.21$

- si osservi che per $\rho > \bar{\rho}$ i poli a ciclo chiuso si spostano nel semipiano destro e il sistema diventa instabile (**stabilità regolare**)
- il valore esatto di $\bar{\rho}$ può essere determinato sempre applicando il criterio di Routh, a volte anche qualche proprietà del luogo delle radici (*quando corrisponde a punti del piano in posizioni note rispetto a poli e zeri*)

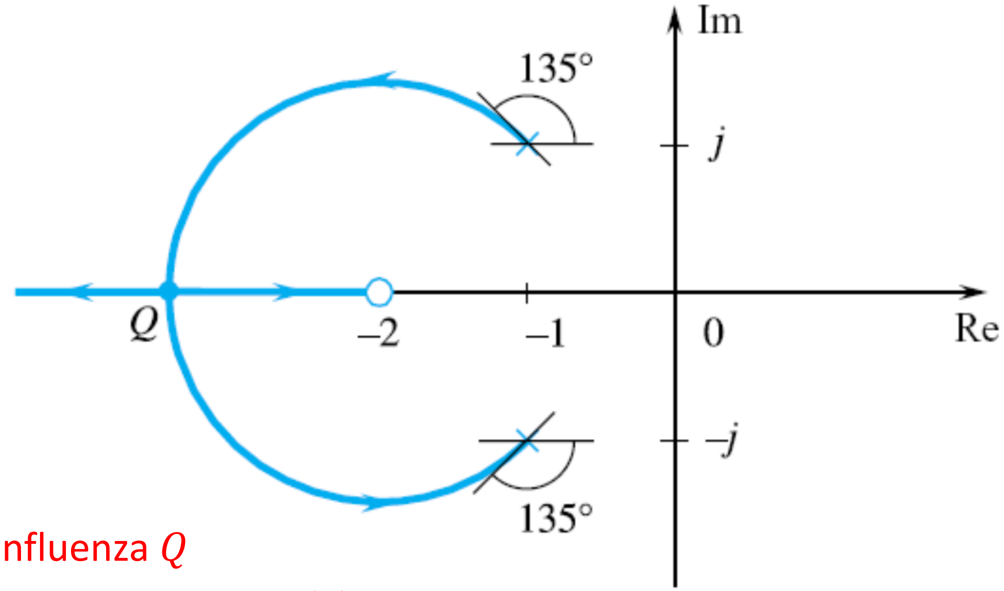


Esempio 2

$$L(s) = \rho \frac{s+2}{s^2+2s+2}, \quad n=2,\ m=1$$

- del luogo diretto un solo ramo va all'infinito e quindi non può che essere l'asse reale (negativo perché ci sono uno zero negativo e due poli complessi)

- si osservi che il sistema a ciclo chiuso è sempre stabile (**intrinsecamente stabile**)
- al crescere del guadagno i poli complessi hanno smorzamento sempre maggiore e a partire dal punto Q diventano reali
- per valori elevati del guadagno rimane un polo dominante (l'altro è "cancellato" dallo zero)



Punto di confluenza Q

- Si annulla la derivata di $\gamma(x)$:

$$0 = \frac{d}{dx}\frac{x^2+2x+2}{x+2} \Leftrightarrow 0 = (2x+2)(x+2) - x^2 - 2x - 2$$

$$0 = x^2 + 4x + 2 \Rightarrow x = -2 \pm \sqrt{2} \Rightarrow x = -3.41 \text{ (LD)}$$

È possibile calcolare il guadagno $\bar{\rho}$ che porta i poli in Q:

$$\bar{\rho} = \frac{\eta^2}{\lambda} = \frac{|-1+j+3.41|^2}{3.41-2} = \frac{2.41^2+1}{1.41} = 4.83 \qquad \leftarrow$$

Esempio 3

$$L(s) = \rho \frac{(s+1)^2}{(s+2)^4}, \quad n = 4,\ m = 2$$

- Baricentro degli asintoti (luogo diretto)

$$x_a = \frac{1}{2}(-2-2-2-2+1+1) = -3$$

- Che formano angoli con l'asse reale

$$\psi_{ak} = \begin{cases} \dfrac{(2\cdot 0+1)\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{(2\cdot 1+1)\pi}{2} = \dfrac{3}{2}\pi \end{cases} \qquad k = 0, 1$$