Capitolo 3 – Sistemi lineari e stazionari a tempo continuo

- Linearizzazione dei sistemi non lineari   Si possono dire poche cose generali
  - Calcolo della risposta → Approssimazione
  - Stabilità

Linearizzazione

- Data la rappresentazione i-s-u di un sistema non lineare stazionario

Si può anche fare col tempo vario

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$
$$y(t) = g(x(t), u(t))$$

- E dato l'ingresso costante $u(t) = \bar{u}$, indichiamo con $\bar{x}$ e $\bar{y}$ il punto di equilibrio nello stato e nell'uscita rispettivamente, i.e.,

$$0 = f(\bar{x}, \bar{u})$$
$$\bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u})$$

- Ci proponiamo di determinare la risposta del sistema «nell'intorno» del punto di equilibrio, cioè la risposta ad un ingresso e una condizione iniziale «poco» diversi* da quelli «nominali» $\bar{x}$ e $\bar{u}$, cioè

$$u(t) = \bar{u} + \delta u(t) \qquad \|\delta u(t)\| \ll \|\bar{u}\|, \forall t \geq 0$$
$$x(0) = \bar{x} + \delta x_0 \qquad \|\delta x_0\| \ll \|\bar{x}\|$$

Se $\|\delta u(t)\|$ é suffic. piccolo

$\|\delta x_0\|$ é suffic. piccolo

- Possiamo sempre scrivere la risposta nello stato e nell'uscita nella forma

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \bar{x} + \delta x(t) \\ y(t) &= \bar{y} + \delta y(t) \end{aligned}}$$

Linearizzazione

$x(t) = \bar{x} + \delta x(t)$

$y(t) = \bar{y} + \delta y(t)$

- Affinché $x(t)$ e $y(t)$ siano un movimento ammissibile del sistema deve risultare

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$
$$y(t) = g(x(t), u(t))$$

  - Considerato che $\bar{x}$ è costante → faccio la verifica

$$\delta\dot{x}(t) = f\big(\bar{x} + \delta x(t), \bar{u} + \delta u(t)\big), \qquad x(0) = \bar{x} + \delta x_0$$
$$\bar{y} + \delta y(t) = g\big(\bar{x} + \delta x(t), \bar{u} + \delta u(t)\big)$$

  - Sviluppiamo in serie di Taylor le funzioni $f(x, u)$ e $g(x, u)$ intorno al punto $(\bar{x}, \bar{u})$ fermandoci al I ordine

punto eq. Jacob. di f rispetto a x Jacob. di f rispetto a u

$$\delta\dot{x}(t) = f\big(\bar{x} + \delta x(t), \bar{u} + \delta u(t)\big) = \underbrace{\cancel{f(\bar{x}, \bar{u})}}_{0} + \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{x=\bar{x},u=\bar{u}} \delta x(t) + \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{x=\bar{x},u=\bar{u}} \delta u(t)$$

$$\cancel{\bar{y}} + \delta y(t) = g\big(\bar{x} + \delta x(t), \bar{u} + \delta u(t)\big) = \underbrace{\cancel{g(\bar{x}, \bar{u})}}_{\bar{y}} + \left.\frac{\partial g(x,u)}{\partial x}\right|_{x=\bar{x},u=\bar{u}} \delta x(t) + \left.\frac{\partial g(x,u)}{\partial u}\right|_{x=\bar{x},u=\bar{u}} \delta u(t)$$

uscita di equilibrio

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots \longrightarrow f(x_0 + \delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\,\delta x$

Al posto di f' ho la Jacobiana

- Dunque il sistema «linearizzato» è descritto dalle equazioni

$$\delta\dot{x}(t) = \underbrace{\boxed{\left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{x=\bar{x},u=\bar{u}}}}_{A}{}^{*}\,\delta x(t) + \underbrace{\boxed{\left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{x=\bar{x},u=\bar{u}}}}_{B}\,\delta u(t)$$

$$\delta y(t) = \underbrace{\boxed{\left.\frac{\partial g(x,u)}{\partial x}\right|_{x=\bar{x},u=\bar{u}}}}_{C}\,\delta x(t) + \underbrace{\boxed{\left.\frac{\partial g(x,u)}{\partial u}\right|_{x=\bar{x},u=\bar{u}}}}_{D}\,\delta u(t)$$

* Valutata in un punto fissato. Quindi è A.

- Che è un sistema LTI

$$\delta\dot{x}(t) = A\delta x(t) + B\delta u(t), \qquad \delta x(0) = \delta x_0$$
$$\delta y(t) = C\delta x(t) + D\delta u(t)$$

Why?

↳ Sistema linearizzato intorno a punto di eq. $(\bar{x}, \bar{u})$

↳ Taylor si ferma al primo ordine, gli altri ordini sono $o(\delta x)$, quindi si perdono → Pazienza

- Esempio
  - Pendolo semplice

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{\beta}{ml^2}x_2 + \frac{1}{ml^2}u$$
$$y = l\sin x_1$$

$\bar{u} = 0$ $\quad 0 = \bar{x}_2$ $\quad \bar{x}_2 = 0$

$$0 = -\frac{g}{l}\sin\bar{x}_1 - \frac{\beta}{ml^2}\bar{x}_2 \qquad \bar{x}_{1a} = 0$$

$$\bar{x}_{1b} = \pi$$

Punti di equilibrio:

$$\bar{x}_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \bar{x}_b = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\delta f}{\delta x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos x_1 & -\frac{\beta}{ml^2} \end{pmatrix} \qquad \frac{\delta f}{\delta u} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\delta g}{\delta x} = \begin{pmatrix} l\cos x_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{\delta g}{\delta u} = 0$$

PUNTO DI EQ. A

$$\delta\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{\beta}{ml^2} \end{pmatrix}\delta x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{pmatrix}\delta u(t)$$

$$\delta y(t) = \begin{pmatrix} l & 0 \end{pmatrix}\delta x(t)$$

PUNTO DI EQ. B

$$\delta\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{\beta}{ml^2} \end{pmatrix}\delta x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{pmatrix}\delta u(t)$$

$$\delta y(t) = \begin{pmatrix} -l & 0 \end{pmatrix}\delta x(t)$$

RICORDA CHE $\quad x(t) \simeq \bar{x} + \delta x(t)$

Riprendiamo l'esempio:

$\bar{u} = 0$ intorno in cui linearizzo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{\beta}{lm^2} x_2 + \frac{1}{ml^2} u \\ y = l \sin x_1 \end{cases}$$

$$x_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x_b = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos x_1 & -\frac{\beta}{ml^2} \end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{x = x_a \\ u = \bar{u}}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{\beta}{ml^2} \end{pmatrix} \qquad A_b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{\beta}{ml^2} \end{pmatrix}$$

$$b_a = b_b = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{pmatrix}$$

$$c_a = \begin{pmatrix} l\cos x_1 & 0 \end{pmatrix}\Big|_{\substack{x = x_a \\ u = \bar{u}}} = \begin{pmatrix} l & 0 \end{pmatrix} \qquad c_b = \begin{pmatrix} -l & 0 \end{pmatrix}$$

$$d_a = d_b = 0$$

Domanda: posso usare questo sistema per capire prop. di stabilità dei punti di equilibrio?

- Si pone il problema di studiare la stabilità del punto di equilibrio $\bar{x}$

localmente

  - Valgono le due proposizioni seguenti (primo metodo di Lyapunov)
    - Proposizione: Lo stato di equilibrio $\bar{x}$ relativo all'ingresso $\bar{u}$ del sistema non lineare $\dot{x} = f(x,u)$ è asintoticamente stabile se tutti gli autovalori del sistema linearizzato hanno parte reale negativa Condiz. solo sufficiente
      - Si noti che la condizione è solo sufficiente!
    - Proposizione: Lo stato di equilibrio $\bar{x}$ relativo all'ingresso $\bar{u}$ del sistema non lineare $\dot{x} = f(x,u)$ è instabile se esiste almeno un autovalore del sistema linearizzato a parte reale positiva
      - Anche in tal caso la condizione è solo sufficiente
  - Nulla si può dire nel caso in cui il sistema linearizzato abbia qualche autovalore a parte reale nulla
  - Esempio
    - Pendolo semplice

Se autovalore ha parte reale nulla non posso dire nulla.

Dobbiamo calcolare polinomio caratt.:

$$P_a(\lambda) = \lambda^2 + \frac{\beta}{m\ell^2}\lambda + \frac{g}{\ell}$$

$\downarrow$ ma ha forma compagna inferiore $\Rightarrow$ coeff. sono quelli della riga inferiore cambiati di segno.

Parametri positivi $\Rightarrow$ Parte reale negativa $\Rightarrow$ X_a é asintoticamente stabile.

Per la 2ª:

$$P_b(\lambda) = \lambda^2 + \frac{\beta}{m\ell^2}\lambda - \frac{g}{\ell}$$

Per cartesio ho 1 parte reale pos. e 1 neg. $\Rightarrow X_b$ é instabile.

NOTA: Caso X_a con $\beta = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{g}{\ell}}$, quindi non posso concludere nulla perché $Re(\lambda_{12}) = 0$.

Università degli Studi della Campania Luigi Vanvitelli
Dipartimento di Ingegneria

Esercitazione sul cap. 3

Esercizi

Esercizio 3.1

Si verifichi che la formula di Lagrange di equazione (3.3) risolve l'equazione di stato (3.1).

Esercizio 3.2

Si consideri un sistema lineare e stazionario con matrice della dinamica

$$A = \begin{bmatrix} -9 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ -17 & 10 & 3 \end{bmatrix}$$

Si determinino i suoi modi e quindi si indichi la forma generale del movimento libero dello stato.

Esercizio 3.3

Si costruisca un sistema, di ordine minimo possibile, dotato almeno dei modi e^{-t}, t, e^{t}. Quindi si valutino le sue proprietà di stabilità.

Esercizio 3.4

Si calcoli la risposta all'impulso dell'uscita del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + 5u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -2x_2(t) + 4u(t) \\ y(t) &= x_1(t) + 3x_2(t) \end{aligned}$$

e si verifichi che è asintoticamente nulla, essendo il sistema asintoticamente stabile. Quindi, in base a essa, si calcoli la risposta dell'uscita del sistema all'ingresso $u(t) = t$.

Infine, si calcoli il guadagno statico del sistema.

MATLAB

Esercizio 3.5

Si individuino i valori di α e β che rendono asintoticamente stabile un sistema con polinomio caratteristico

$$\varphi(s) = s^3 + \alpha s^2 + \beta s + 1$$

e si determini la regione a loro corrispondente nel piano di ascissa α e ordinata β.

MATLAB

Esercizio 3.6

Si consideri il polinomio caratteristico

$$\varphi(s) = \alpha s^3 + \beta s^2 + 6s + \gamma$$

e si dica se è vero che tutte le sue radici hanno parte reale negativa qualunque valore assumano α, β e γ negli intervalli seguenti:

$$\begin{aligned} 3 \le \alpha \le 4 \\ 2 \le \beta \le 3 \\ 1 \le \gamma \le 2 \end{aligned}$$

MATLAB

Esercizio 3.7

Si determinino gli stati e le uscite di equilibrio del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x^2(t) - u(t)x(t) - 2u(t) \\ y(t) &= x^3(t) + u^3(t) \end{aligned}$$

con ingresso $u(t) = \bar{u} = 1$. Quindi, si determinino i sistemi linearizzati attorno a essi e si analizzi la stabilità degli equilibri.

Infine, per i sistemi linearizzati, si calcolino le risposte $\delta y(t)$ all'ingresso $\delta u(t) = 0.1\cos(2t)$ applicato in $t = 0$.

MATLAB

ES. Trovare modi, risposte impulsive

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

FORMA CANONICA DI RAGGIUNGIBILITÀ: Matrice compagna + vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ bassa

Sicuro raggiungibile.

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x(t)$$

A è una matrice compagna:

$p(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+2)(\lambda+1)$ $\quad \lambda_1 = -1$ Modi aperiodici convergenti

$\lambda_2 = -2$

1) e^{-t} 2) e^{-2t}

$\downarrow$

cost di tempo $= 1$ s

(Autovalori lontani da asse immag. a sinistra $\rightarrow$ si estinguono più velocemente)

$$3) \; g_x(t) = e^{At} b = T e^{\Lambda t} T^{-1} b = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1^T \\ s_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

comb. lineare di esponenziali

e^{At} so calcolarla se A diag.

• Calcolo $At_1 = \overset{-1=\lambda_1}{-} t_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$ $\quad$ Ho infinite a 1 soluz. perché $\lambda = -1$ e quindi $\det = 0$.*

$$\begin{cases} b = -a \\ -2a - 3b = -b \end{cases} \qquad a = 1, \; b = -1$$

* Scelgo arbitrar. una componente $\neq 0$

• Calcolo $At_2 = -2t_2$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a \\ -2b \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} b = -2a \\ \dots \end{cases} \qquad a = 1 \quad b = -2$$

scambio 1 e -2 e cambio segno fuori diagonale.

Quindi, $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ $\qquad T^{-1} = -\frac{1}{1} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$g_x(t) = T e^{\Lambda t} T^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} - e^{-2t} \\ -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Sistema A.S. $\Rightarrow g_x \to \underline{0}$

$$g_y(t) = C^T e^{At} b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} - e^{-2t} \\ -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{pmatrix} = e^{-2t} \quad \forall t \geq 0$$

NOTA: e^{-t} non é osservabile

Nota: Sistema puramente dinamici / strettamente propri : $\underline{D = 0}$

NOTA: $y_f(t) = \int_0^t g_y(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau$

$\downarrow$

$\forall u$ non vedrò mai la dinamica lenta in uscita.

$\varphi(s) = s^3 + \alpha s^2 + \beta s + 1$

$\underset{a_0}{\uparrow} \quad \underset{a_1}{\uparrow} \quad \underset{a_2}{\uparrow} \quad \underset{a_3}{\uparrow}$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & \beta \\ 2 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha\beta - 1 & 0 \\ 0 & 1 & \end{array}$$

$-\frac{1}{\alpha}\begin{vmatrix} 1 & \beta \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\alpha}(1-\alpha\beta)$

Caso $\alpha \neq 0$

Caso $\alpha\beta \neq 1$

$$\begin{cases} \alpha > 0 \\ \alpha\beta - 1 > 0 \end{cases}$$

Se $\alpha\beta = 1 \qquad \alpha \neq 0$

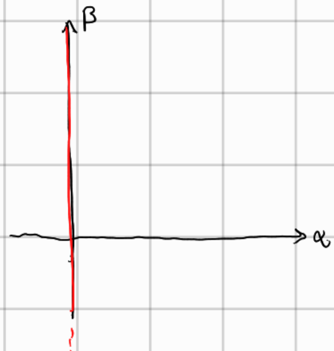
$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & \beta \\ 2 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \end{array}$$

$\rightarrow \alpha > 0$

Se $\alpha = 0$:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & \beta \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 & \end{array}$$

$\forall \beta \in \mathbb{R}$



SOLUZIONI:

Esercitazione sul cap. 3

Esercizi

Esercizio 3.1

Si verifichi che la formula di Lagrange di equazione (3.3) risolve l'equazione di stato (3.1).

Esercizio 3.2

Si consideri un sistema lineare e stazionario con matrice della dinamica

$$A = \begin{bmatrix} -9 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ -17 & 10 & 3 \end{bmatrix}$$

Si determinino i suoi modi e quindi si indichi la forma generale del movimento libero dello stato.

Esercizio 3.3

Si costruisca un sistema, di ordine minimo possibile, dotato almeno dei modi e^{-t}, t, e^{t}. Quindi si valutino le sue proprietà di stabilità.

Esercizio 3.4

MATLAB

Si calcoli la risposta all'impulso dell'uscita del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + 5u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -2x_2(t) + 4u(t) \\ y(t) &= x_1(t) + 3x_2(t) \end{aligned}$$

e si verifichi che è asintoticamente nulla, essendo il sistema asintoticamente stabile. Quindi, in base a essa, si calcoli la risposta dell'uscita del sistema all'ingresso $u(t) = t$.

Infine, si calcoli il guadagno statico del sistema.

Esercizio 3.5

MATLAB

Si individuino i valori di α e β che rendono asintoticamente stabile un sistema con polinomio caratteristico

$$\varphi(s) = s^3 + \alpha s^2 + \beta s + 1$$

e si determini la regione a loro corrispondente nel piano di ascissa α e ordinata β.

Esercizio 3.6

MATLAB

Si consideri il polinomio caratteristico

$$\varphi(s) = \alpha s^3 + \beta s^2 + 6s + \gamma$$

e si dica se è vero che tutte le sue radici hanno parte reale negativa qualunque valore assumano α, β e γ negli intervalli seguenti:

$$\begin{aligned} 3 \le \alpha \le 4 \\ 2 \le \beta \le 3 \\ 1 \le \gamma \le 2 \end{aligned}$$

Esercizio 3.7

MATLAB

Si determinino gli stati e le uscite di equilibrio del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x^2(t) - u(t)x(t) - 2u(t) \\ y(t) &= x^3(t) + u^3(t) \end{aligned}$$

con ingresso $u(t) = \bar{u} = 1$. Quindi, si determinino i sistemi linearizzati attorno a essi e si analizzi la stabilità degli equilibri.

Infine, per i sistemi linearizzati, si calcolino le risposte $\delta y(t)$ all'ingresso $\delta u(t) = 0.1\cos(2t)$ applicato in $t = 0$.

A)

$$A = \begin{bmatrix} -9 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ -17 & 10 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda+9 & 4 & 2 \\ -1 & \lambda+1 & 0 \\ -17 & 10 & \lambda-3 \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda) = (\lambda+9)(\lambda+1)(\lambda-3) - 20 + 34(\lambda+1) + 4(\lambda-3)$$

$$= (\lambda^2 + 10\lambda + 9)(\lambda-3) - 20 + 34\lambda + 34 + 4\lambda - 12 =$$

$$= \lambda^3 + 10\lambda^2 + 9\lambda - 3\lambda^2 - 30\lambda - 27 - 20 + 34\lambda + 34 + 4\lambda - 12 =$$

$$= \lambda^3 + 7\lambda^2 + 17\lambda - 25$$

	1	7	17	-25
1		1	8	25
	1	8	25	0

$$P(\lambda) = (\lambda^2 + 8\lambda + 25)(\lambda - 1)$$

$$\lambda_{1_2} = -4 \pm \sqrt{16-25} = -4 \pm 3j$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -4+3j \quad \lambda_3 = -4-3j$$

A diag. ⇒ moltep. geom $(-1) = 1$.

Calcolo autovettori:

$$At = -\lambda t \Rightarrow \begin{bmatrix} -9 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ -17 & 10 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -10a + 4b + 2c = 0 \\ a + 2b = 0 \\ -17a + 10b + 2c = 0 \end{cases}$$

$a = 2$
$b = -1$
$c = 12$