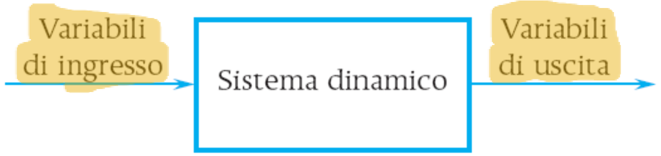
Capitolo 2 – Sistemi dinamici a tempo continuo

- Richiami di modellistica dei sistemi dinamici
  - Sistemi meccanici
    - Il metodo di Lagrange
  - Sistemi elettrici
    - I principi di Kirchoff
  - La rappresentazione i-s-u
    - Concetto di stato di un sistema dinamico
    - Ingressi e uscite
    - La forma normale
      - Caso non lineare
      - Caso lineare
      - Caso lineare tempo invariante
  - La rappresentazione i-u

Prop. di causalità: effetto deve necessariamente seguire la causa temporalmente

Richiami di modellistica dei sistemi dinamici

- Sistema astratto orientato



Segnale di ingresso

- Ingresso: sollecitazione o causa o forzamento
  - Si rappresenta come una funzione vettoriale del tempo $u: t \in \mathbb{R} \rightarrow u(t) \in \mathbb{R}^m$ (Forze sono vettori)
- Uscita: effetto o osservazione o misura
  - Si rappresenta come una funzione vettoriale del tempo $y: t \in \mathbb{R} \rightarrow y(t) \in \mathbb{R}^p$ → anche esso un vettore
- Stato: situazione «interna» del sistema cioè l'insieme delle variabili che tengono «memoria» della storia passata del sistema che ha subito sollecitazioni prima dell'istante in cui si inizia ad osservare l'effetto delle stesse
  - Le variabili di stato sono tutte e sole quelle di cui è necessario e sufficiente conoscere il valore all'istante iniziale per poter prevedere l'evoluzione futura delle stesse e delle variabili di interesse (uscite), note che siano le sollecitazioni (ingressi)
  - La conoscenza dello «stato iniziale» consente di ignorare completamente l'andamento delle sollecitazioni che hanno determinato (ingressi passati) quello stato

Dentro il sistema dinamico c'é lo stato

Sistemi meccanici – Il metodo di Lagrange

- Gradi di libertà
  - Numero minimo di variabili necessarie a descrivere univocamente e compiutamente la «posizione» di TUTTI gli elementi che possono avere una energia cinetica

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

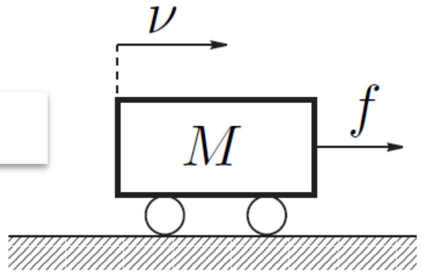
Coordinate generalizzate

↓ n = numero gdl

↳ Scelte per descrivere la posiz. di tutti gli elementi che possono avere K.

- Sistemi meccanici elementari
  - Elementi di inerzia → li individuo nel passo 2

Massa



$$f = m\frac{dv}{dt}$$

Equilibrio

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

$|\vec{v}|$

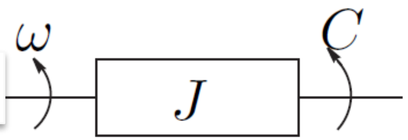
Energia cinetica

$$V = mgh$$

Energia potenziale (gravitazionale)

↳ a meno di una costante

Inerzia



$$C = J\frac{d\omega}{dt}$$

Equilibrio

$$T = \frac{1}{2}J\omega^2$$

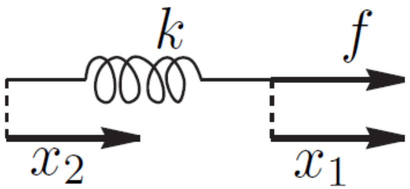
→ Lungo asse di rotazione che non varia nel tempo

Energia cinetica

Sistemi meccanici – Il metodo di Lagrange

- Elementi elastici

Molla

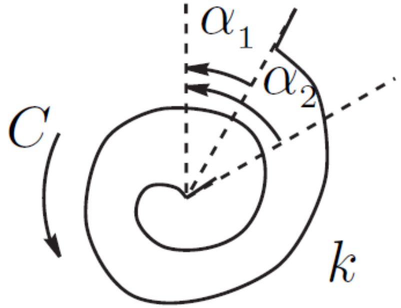


$f = k(x_1 - x_2)$ Equilibrio

DEFORMAZIONE

$V = \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2$ Energia potenziale

Molla torsionale

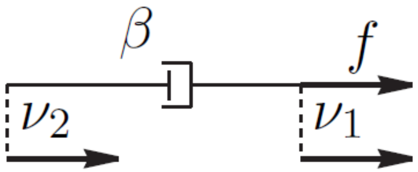


$C = k(\alpha_1 - \alpha_2)$ Equilibrio

$V = \frac{1}{2}k(\alpha_1 - \alpha_2)^2$ Energia potenziale

- Elementi dissipativi

Smorzatore

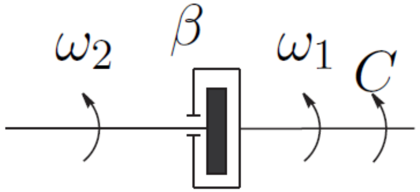


$f = \beta(v_1 - v_2)$ Equilibrio

VELOCITÀ RELATIVA

$D = \frac{1}{2}\beta(v_1 - v_2)^2$ Funzione di dissipazione Potenza

Smorzatore torsionale



$C = \beta(\omega_1 - \omega_2)$ Equilibrio

$D = \frac{1}{2}\beta(\omega_1 - \omega_2)^2$ Funzione di dissipazione

Sistemi meccanici – Il metodo di Lagrange

- Funzione Lagrangiana

$$L(q,\dot{q}) = T(q,\dot{q}) - V(q)$$

energia potenziale

- Equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}L(q,\dot{q}) - \frac{\partial}{\partial q_i}L(q,\dot{q}) + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}D(\dot{q}) = F_i, \forall i = 1,\dots,n$$

- F_i sono le (eventuali) forze non conservative che compiono lavoro sulla i-ma variabile generalizzata
- Il risultato è un sistema di n equazioni differenziali del II ordine → $\ddot{q}$ = accelerazione
- Le variabili di stato sono

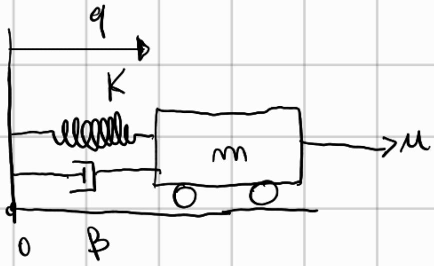
$$x = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}$$

→ Mi serve il valore iniziale

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ \dot{q}_1 \\ \vdots \\ q_n \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

- Esempio
  - Sistema massa-molla-smorzatore
  - Pendolo semplice

Es.



$$u = m\ddot{q} + Kq + \beta\dot{q}$$
$$T(q,\dot{q}) = \frac{1}{2} m\dot{q}^2$$
$$V(q) = \frac{1}{2} Kq^2$$
$$D(\dot{q}) = \frac{1}{2}\beta\dot{q}^2$$

Per i segni c'è il quadrato.

$$L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2} m\dot{q}^2 - \frac{1}{2} Kq^2$$

$$\underbrace{m\ddot{q} + Kq}_{\text{comb. lineare di incognita e delle sue derivate successive} \Rightarrow \text{lineare}} + \beta\dot{q} = u$$

2° ordine $\Rightarrow q(t)$? $[q(0), \dot{q}(0)]$

Lo descrivo come sistema del 1° ordine con concetto di stato

$$X = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$ Bisogna calcolare le derivate di x_i per scrivere il sistema.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{K}{m} x_1 - \frac{\beta}{m} x_2 + \frac{1}{m} u \end{cases} \iff m\ddot{q} + Kq + \beta\dot{q} = u$$

FORMA NORMALE DEL SISTEMA DINAMICO

↓

FORMA MATRICIALE

Minuscole sono i vettori, maiuscole le matrici

$$\dot{x}(t) = \underbrace{A}_{\text{Matrice costante}} \cdot x(t) + b\,u(t) \Longrightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{m} & -\frac{\beta}{m} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + 0 \cdot u(t) \end{cases}$$

SISTEMA DI EQ. DIFF. DEL 1° ORDINE

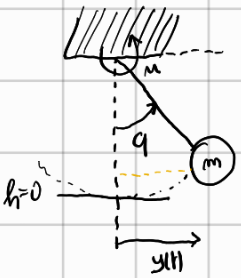
EQUAZ. ALGEBRICA

Per le uscite:

$$y(t) = c^T x(t) + d\,u(t)$$

RAPP. ISU

VWnmM4pd



$$T(q,\dot q)=\frac{1}{2}ml^2\dot q^2$$

$$V(q)=mgl(1-\cos q)$$

$$D(\dot q)=\frac{1}{2}\beta\dot q^2$$

attrito con aria

$$ml^2\ddot q+mgl\sin q+\beta\dot q=u$$

$$x(t)=\begin{bmatrix} q(t)\\ \dot q(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}\dot x_1(t)&=x_2(t)\\ \dot x_2(t)&=-\frac{g}{l}\sin x_1(t)-\frac{\beta}{ml^2}x_2(t)+\frac{1}{ml^2}u(t)\end{aligned}\right]\text{FORMA NORMALE}$$

$$y(t)=l\sin x_1(t)$$

FORMA GENERALE:
$$\begin{aligned}\dot x(t)&=f(x(t),u(t))\\ y(t)&=g(x(t),u(t))\end{aligned}$$

$$f(x,u)=\begin{pmatrix} x_2\\ -\frac{g}{l}\sin x_1-\frac{\beta}{ml^2}x_2+\frac{1}{ml^2}u\end{pmatrix}\implies\frac{\delta f}{\delta x}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\frac{g}{l}\cos x_1 & -\frac{\beta}{ml^2}\end{pmatrix}$$

Jacobiano rispetto a vettore x

Matrice simile a quella del sistema massa-molla-smorz.

$$g(x,u)=l\sin x_1$$

- Esempio di rete elettrica lineare dinamica
  - Secondo principio di Kirchoff alla I maglia

$$u_1 = Ri_1 + x_1$$

  - Primo principio di Kirchoff al nodo B

$$u_2 = x_2 + i_2$$

  - Primo principio di Kirkhoff al nodo A

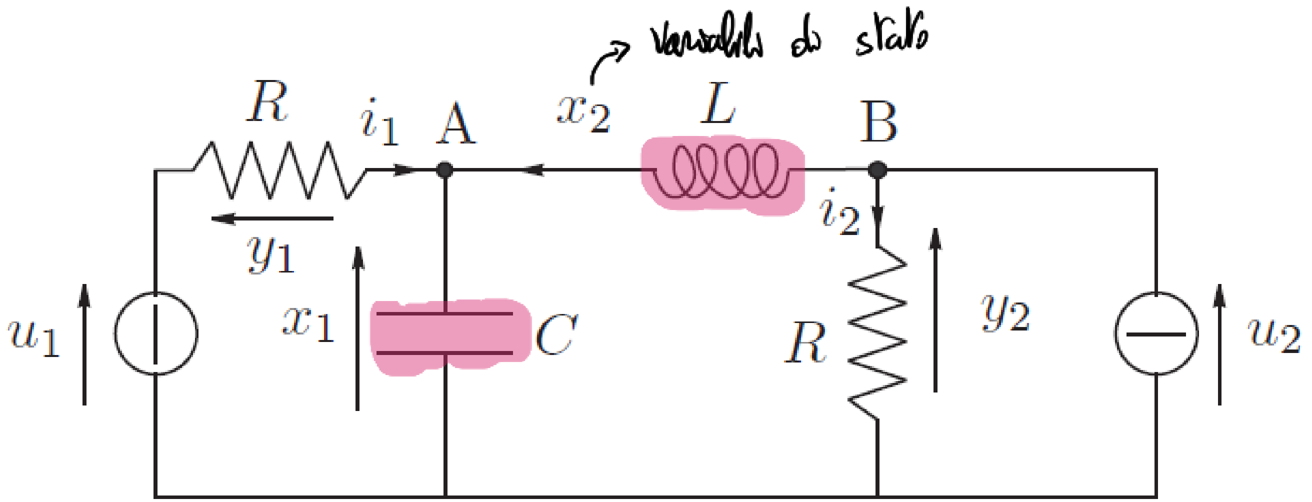
$$i_1 = C\dot{x}_1 - x_2$$

  - Secondo principio di Kirchoff alla seconda maglia

$$Ri_2 = x_1 + L\dot{x}_2$$

  - Eliminiamo le variabili i_1 e i_2 e definiamo i vettori

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$



$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{RC} & \dfrac{1}{C} \\ -\dfrac{1}{L} & -\dfrac{R}{L} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \dfrac{1}{RC} & 0 \\ 0 & \dfrac{R}{L} \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -R \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} u$$

$$u_1 = RC\dot{x}_1 - Rx_2 + x_1$$

$$Ru_2 - Rx_2 = x_1 + L\dot{x}_2$$

$$y_1 = u_1 - x_1$$

$$y_2 = Ru_2 - Rx_2$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x}_1 = -\frac{1}{RC}x_1 + \frac{1}{C}x_2 + \frac{1}{RC}u_1$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2 + \frac{R}{L}u_2$$

$$y_1 = -x_1 + u_1$$

$$y_2 = -Rx_2 + Ru_2$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} \frac{1}{RC} & 0 \\ 0 & \frac{R}{L} \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -R \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} u(t)$$

- La rappresentazione i-s-u
  - Caso generale non lineare → Più generale possibile

tempo variante

il sistema dipende dal tempo: razzo che consuma carburante ⇒ $m(t)$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

$$y(t) = g(x(t), u(t), t)$$

a dimensione finita: vettore delle var. di stato appartiene a uno spazio a dimensione finita.

  - Caso lineare tempo variante (LTV)

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

  - Caso lineare tempo invariante (LTI)

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}}$$

Non c'è dipendenza dal tempo nei parametri

ingresso

vettore di funzioni del tempo in $\mathbb{R}^r$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{pmatrix} \in R^r$$

stato

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in R^n$$

uscita

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in R^m$$

funzione di stato → tempo invariante

$$f = \begin{pmatrix} f_1(x, u) \\ \vdots \\ f_n(x, u) \end{pmatrix}$$

funzione di uscita

$$g = \begin{pmatrix} g_1(x, u) \\ \vdots \\ g_m(x, u) \end{pmatrix}$$

matrice dinamica

$$A \in R^{n \times n}$$

matrice degli ingressi

$$B \in R^{n \times r}$$

matrice delle uscite

$$C \in R^{m \times n}$$

matrice di accoppiamento diretto i-u

$$D \in R^{m \times r}$$

Classificazione dei sistemi dinamici

- Sistemi MIMO multi input e multi output

$$r > 1$$ n ingressi

$$m > 1$$ uscite

- Sistemi SISO

$$r = 1$$

$$m = 1$$

- Sistemi adinamici o algebrici → es:

$$y(t) = g(u(t), \cancel{t})$$

Lo stato non serve. Sistemi senza memoria.

Sistemi stazionari se si toglie il tempo.

- Sistemi puramente dinamici o strettamente propri

$$y(t) = g(x(t), \cancel{t})$$

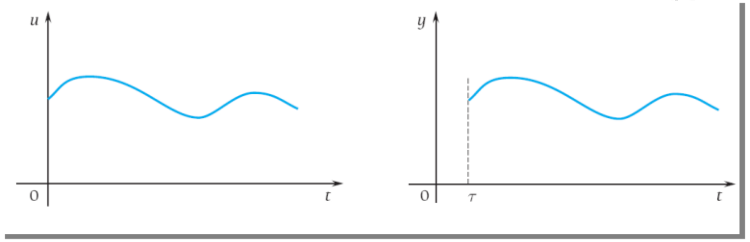
Ciò che osservo nel sistema dipende solo dallo stato.

- Sistemi a dimensione finita
  - Le variabili stato sono in numero finito (lo spazio di stato è uno spazio vettoriale a dimensione finita)
- Sistemi a dimensione infinita o a parametri distribuiti
  - In ciascun istante di tempo lo stato è descritto da una intera funzione (usualmente dello spazio) e le equazioni che ne governano il funzionamento sono equazioni differenziali alle derivate parziali
  - Ritardi di tempo

Uscita corrispondente del sistema.

$$y(t) = u(t - \tau)$$

Per determinare uscita devo conoscere tra 0 e τ l'antico valore della funzione

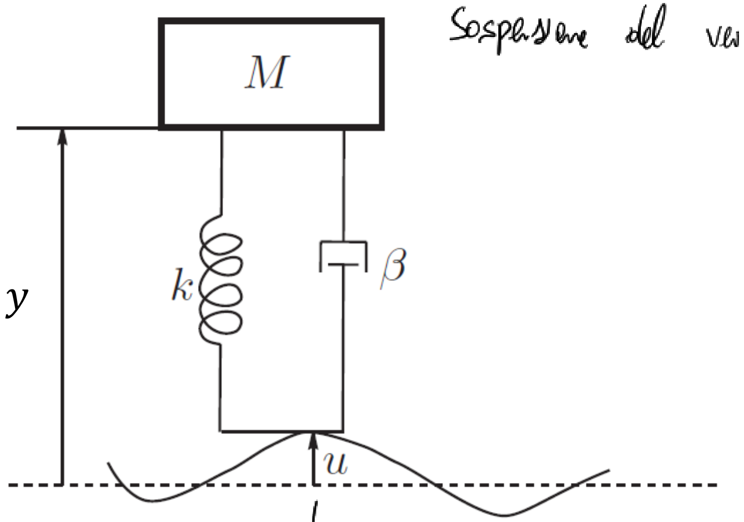


- Sistemi stocastici
  - Alcune o tutte tra le variabili di stato, ingresso o uscita sono dei processi aleatori (es., in presenza di rumore di misura modellato come un processo stocastico le uscite diventano processi aleatori)

Università degli Studi della Campania Luigi Vanvitelli
Dipartimento di Ingegneria

- La rappresentazione i-u
  - Facciamo un esempio
    - Applicando il secondo principio della dinamica

Sospensione del veicolo



Spostamento del terreno.

$$m\ddot{y}(t) + \overbrace{\beta\big(\dot{y}(t) - \dot{u}(t)\big)}^{\text{ATTRITO}} + \overbrace{k\big(y(t) - u(t)\big)}^{\text{FORZA ELASTICA}} = 0$$

$$m\ddot{y}(t) + \beta\dot{y}(t) + ky(t) = \beta\dot{u}(t) + ku(t)$$

$$\Downarrow$$

- Chi è lo stato e come si scrive in forma normale?
- Caso lineare tempo invariante (SISO)

Rappresentazione ingresso-uscita più generale possibile di ordine n

$$\boxed{y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_nu^{(n)}(t) + b_{n-1}u^{(n-1)}(t) + \cdots b_1\dot{u}(t) + b_0u(t)}$$

- Il passaggio da i-s-u a i-u è sempre possibile ed è unico (lo stato non è visibile. Non c'è dipendenza dallo stato).
- Il passaggio inverso non è unico