

Capitolo 15 – Regolatori PID

Metodi di taratura automatica

- Se è disponibile un modello matematico del processo, i regolatori PID, come tutti i regolatori, possono essere tarati con uno dei metodi già visti (luogo delle radici, sintesi in ω) *Caso per assintotica a rete articolata*
- Se tale modello non è disponibile, esistono diverse tecniche di taratura automatica basate su prove sperimentali da eseguire sul processo *Rete articolata simile a regolatore PD*

- metodi in anello chiuso (richiedono la retroazione della variabile controllata)
 - metodo di Ziegler e Nichols
 - assegnamento dei margini di stabilità

Prova con sistema in anello chiuso con azione di controllo proporzionale. Trova 2 parametri e fissa valori.

- metodi in anello aperto (non richiedono la retroazione della variabile controllata)
 - metodo della tangente e delle aree per la determinazione del modello
 - metodo di Ziegler e Nichols
 - metodo di Cohen e Coon e IMC

Trova 3 parametri del sistema e usa metoda tabellare.

Sono adatte a collegare di processi diversi tra loro. Il chiuso è adatto a seguenti con risposta veloce. Chiede diverse prove.

eseguire misure che determinano modello più a meno approssimato

Tecnica a scatola gialla

- sono applicabili solo se il processo è asintoticamente stabile e a guadagno positivo (sistema a stabilità regolare)

Perché misura risposta instabile. Il primo lo siamo stabilizzabile con at. Proporzionale

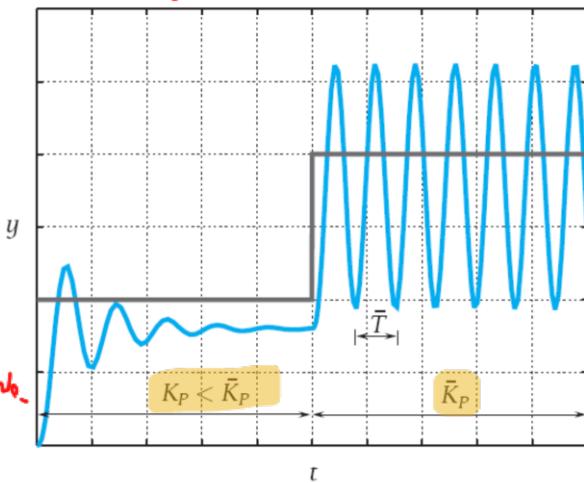
Metodi di taratura automatica in anello chiuso

Metodo in anello chiuso di Ziegler e Nichols

- si applica la sola azione proporzionale
- si aumenta il guadagno fino al valore \bar{K}_P per cui il sistema è al limite della stabilità
- si misura il periodo dell'oscillazione permanente \bar{T}
- in base ai valori così determinati, assumendo $T_I = 4T_D$, i guadagni si settano come

Registrazione della risposta del sistema

Periodo di oscillazione
su alte ammagnature
Eccetto moduli periodici



*Se non mi soddisfa
uso regolatore PID.*

	K_P	T_I	T_D
P	$0.5\bar{K}_P$		
PI	$0.45\bar{K}_P$	$0.8\bar{T}$	
PID	$0.6\bar{K}_P$	$0.5\bar{T}$	$0.125\bar{T}$

$$T_I = 4T_D \Rightarrow \\ 2 \text{ zeri del PID reali} \\ \text{e corretti}$$

- nel caso di sistemi a stabilità intrinseca (margine di guadagno infinito) non è applicabile
- la prova sperimentale così come descritta può essere pericolosa
- esistono procedure sperimentali alternative per la determinazione dei due parametri necessari alla taratura basate sull'uso di sistemi non lineari (PID ad autosintonia)
- è adatto per processi con tempi di risposta brevi

$$T_I = K_P / K_I \quad \text{tempo integrale}$$

Metodi di taratura automatica in anello chiuso

♦ Interpretazione

- con il regolatore $R(s) = \bar{K}_P$ il sistema a ciclo chiuso presenta un modo periodico quindi vuol dire che il diagramma di Nyquist del guadagno d'anello passa per il punto critico alla pulsazione $\omega'_\pi = 2\pi/\bar{T}$ (cioè: $1 + K_P G(j\omega'_\pi) = 0$), dunque il **guadagno critico** è pari al **margine di guadagno** k'_m , infatti risulta

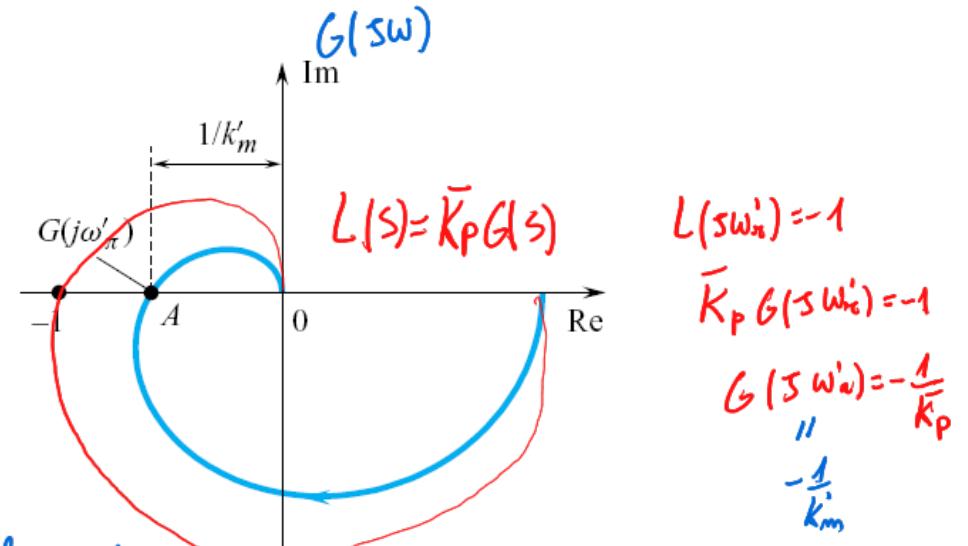
$$k'_m G(j\omega'_\pi) = -1 \Rightarrow G(j\omega'_\pi) = -\frac{1}{k'_m} = -\frac{1}{\bar{K}_P}$$

$$\bar{T} = \frac{2\pi}{\omega'_\pi} \Leftrightarrow \omega'_\pi = \frac{2\pi}{\bar{T}}$$

$\Rightarrow 1 + L(j\omega'_n) = 0 \Rightarrow F$ ha poli su $\pm j\omega'_n$. \rightarrow Modo di oscillare periodo, dato
punto ammagnante è ω_n = Pulsazione del seno

- il metodo consiste nel tarare il regolatore sulla base della conoscenza del solo punto A del diagramma polare del processo

Risposte andante periodica con periodo $\bar{T} = \frac{2\pi}{\omega_n}$



CON QUESTA PROVA CONOSCO

SOLO INTERSEZIONE CON ASSE
NEGATIVO

Metodi di taratura automatica in anello chiuso

♦ Interpretazione

- la scelta del regolatore proporzionale (**P**) suggerita dalla tabella $R(s) = 0.5\bar{K}_P$ non fa altro che imporre un margine di guadagno pari a 2 (6 dB), infatti

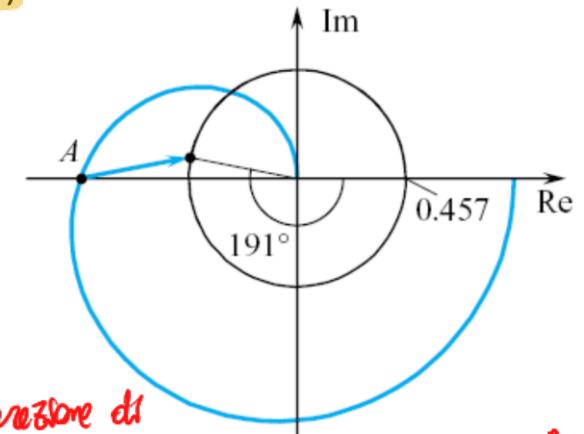
$$L(j\omega'_\pi) = K_P G(j\omega'_\pi) = 0.5\bar{K}_P \frac{-1}{\bar{K}_P} = -0.5 \Rightarrow k_m = \frac{1}{|L(j\omega'_\pi)|} = 2$$

- la scelta del regolatore **PI** suggerita dalla tabella, invece, non fa altro che attenuare di circa 6 dB e ritardare di circa 11° (come una rete ritardatrice), infatti (ricordando che $\bar{T} = 2\pi/\omega'_\pi \Rightarrow \omega'_\pi T_I = \omega'_\pi 0.8 \cdot 2\pi/\omega'_\pi = 1.6\pi$)

$$R_{PI}(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = K_P \left(1 + \frac{1}{sT_I} \right) = K_P \frac{1 + sT_I}{sT_I} \quad \text{Regolatore scelto}$$

$$L(j\omega'_\pi) = R_{PI}(j\omega'_\pi)G(j\omega'_\pi) = 0.45\bar{K}_P \left(1 + \frac{1}{j1.6\pi} \right) \frac{-1}{\bar{K}_P} = 0.457e^{-j(180^\circ + 11^\circ)}$$

- nella pratica, il margine di fase effettivo è spesso insufficiente



correzione di
attenuazione e ritardo \Rightarrow Fase da -180° a -131°

Metodi di taratura automatica in anello chiuso: *migliorare stabilità*

♦ Interpretazione

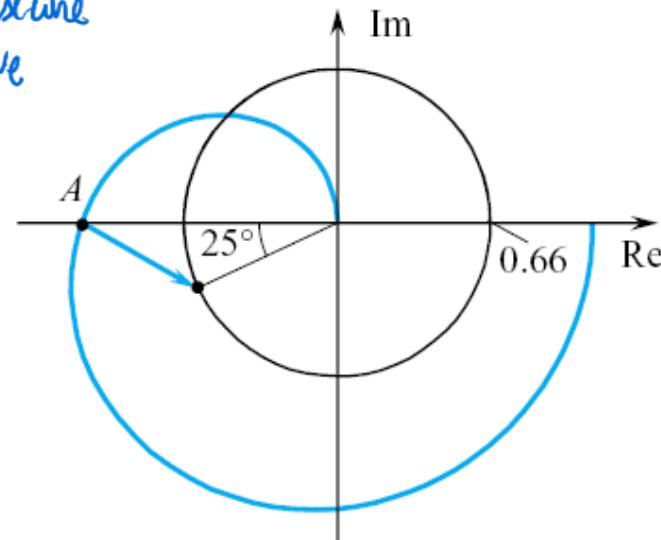
- la scelta del regolatore **PID** invece non fa altro che attenuare di circa 4 dB e anticipare di circa 25° (come una rete a sella), infatti

$$L(j\omega'_\pi) = R_{PID}(j\omega'_\pi) G(j\omega'_\pi) = 0.6 \bar{K}_P \left(1 + \frac{1}{j\pi} + \frac{j\pi}{4} \right) \frac{-1}{\bar{K}_P} = 0.66 e^{-j(180^\circ - 25^\circ)}$$

155°

$$\omega' \cdot T_D = \omega'_D \cdot \frac{1}{8} \frac{2\pi}{8\omega' - j\zeta}$$

NOTA: importante dare inversione
asse delle ascisse negative



$$\omega' \cdot T_D = \omega'_D \cdot 0.5 \cdot \frac{2\pi}{\omega'} = \zeta$$

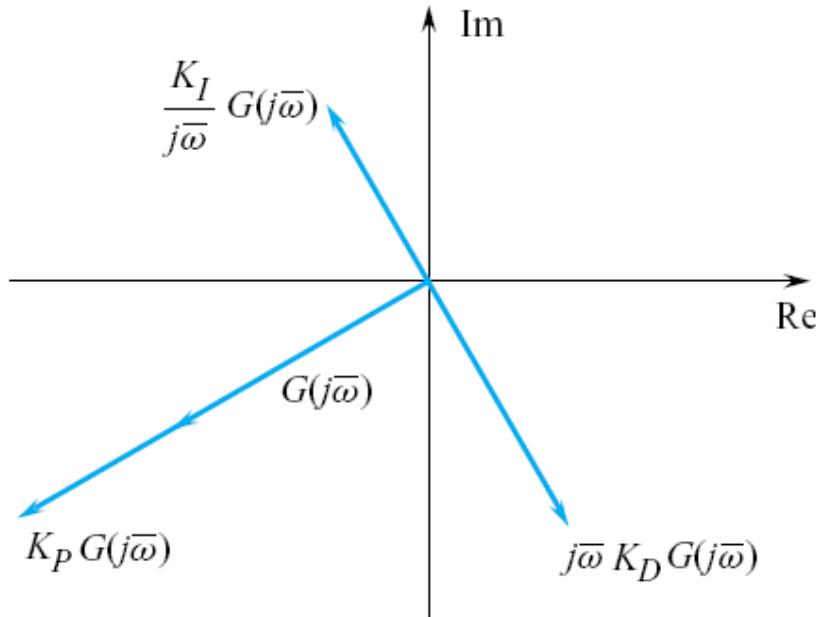
- se il diagramma di $G(j\omega)$ è sufficientemente regolare, il margine di fase ottenibile va da 30° a 40°

Margine di fase non lo posso prendere
Ma aspetto un margine che va così

■ Assegnamento dei margini di stabilità *Usare parametri per progettazione sulla base di un margine di stabilità*

- ◆ Non sempre è sufficiente applicare le regole di taratura tabellate (margini insoddisfacenti)
- ◆ Con un regolatore **PID** si ha un numero di parametri sufficienti a spostare il punto A in un punto qualsiasi del piano complesso, per cui è possibile determinare i guadagni del PID in modo che il sistema di controllo abbia dei margini di stabilità assegnati

$$R_{PID}(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) = K_P \frac{T_I T_D s^2 + T_I s + 1}{T_I s}$$



■ Assegnamento dei margini di stabilità

◆ Assegnamento del margine di guadagno

- per ottenere il margine di guadagno k_m con pulsazione $\omega_\pi = \omega'_\pi$ è sufficiente spostare il punto A nel punto A_1 con un regolatore **P** con guadagno tale che

$$K_P |G(j\omega_\pi)| = K_P / \bar{K}_P = 1/k_m \Rightarrow K_P = \bar{K}_P / k_m$$

\downarrow

Definisci portalo a $-\frac{1}{2}$

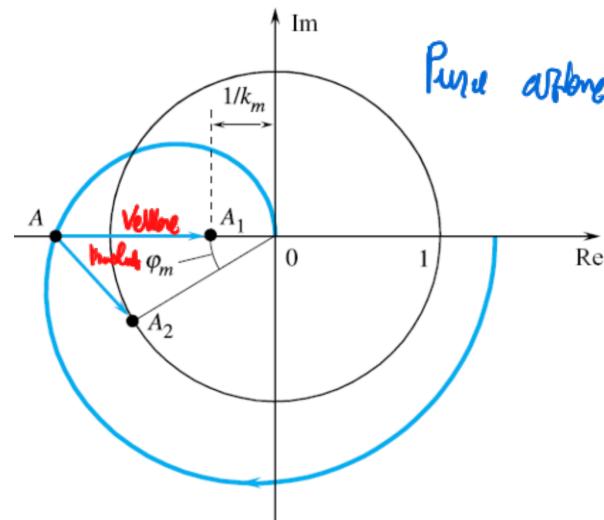
- nel caso in cui sia necessaria anche l'azione integrale occorre usare anche l'azione derivativa in modo che l'azione complessivamente introdotta da **I** e da **D** sia nulla:

$$\frac{1}{j\omega'_\pi T_I} + j\omega'_\pi T_D = 0$$

\Downarrow

$$1 - \omega'^2_\pi T_I T_D = 0$$

e scegliendo $T_I = 4T_D$, si ricava $T_I = 2/\omega'_\pi$ e $T_D = 1/(2\omega'_\pi)$



Pura azione proporzionale



$$R_{PID}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{sT_I} + T_D s \right)$$

$$R_{PID}(j\omega_n') G(j\omega_n') = \frac{1}{K_m}$$

$$R_{PID}(j\omega_n') = K_p \left(1 + \underbrace{\frac{1}{j\omega_n' T_I} + j\omega_n' T_D}_{\text{II}} \right), \text{ con } K_p = \frac{K_p}{K_m}$$

$$\underbrace{\frac{1}{j\omega_n' T_I}}_{\text{I}} + j\omega_n' T_D = \frac{1 - \omega_n'^2 T_I^2 F_0}{j\omega_n' T_I} \Rightarrow T_I T_D = \frac{1}{\omega_n'^2}, \text{ con } T_I = 4 T_D$$

$$\text{allora, } 4 T_D^2 = \frac{1}{\omega_n'^2} \Rightarrow T_D = \frac{1}{2\omega_n'}$$

Quando ho risultato anche la presenza di azione anticipata.

■ Assegnamento dei margini di stabilità

◆ Assegnamento del margine di fase

é l'unica cosa che corrisponde all'importante

- per ottenere il margine di fase φ_m con pulsazione $\omega_c = \omega'_\pi$ è sufficiente spostare il punto A nel punto A_2 con un regolatore PID tale che

$$\angle(R_{PID}(j\omega'_\pi)G(j\omega'_\pi)) = -\pi + \frac{\varphi_m}{180}\pi$$

$$|R_{PID}(j\omega'_\pi)G(j\omega'_\pi)| = 1$$

- e dal momento che $\angle G(j\omega'_\pi) = -\pi$

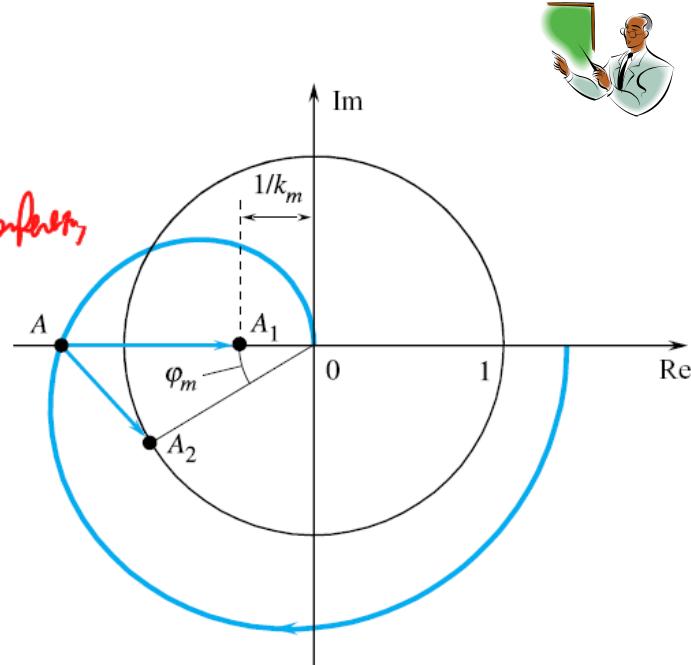
$$\angle\left(1 + \frac{1}{j\omega'_\pi T_I} + j\omega'_\pi T_D\right) = \varphi_m \pi / 180$$

$$\left|K_P \left(1 + \frac{1}{j\omega'_\pi T_I} + j\omega'_\pi T_D\right) \frac{-1}{K_P}\right| = 1$$

↓

$$\omega'_\pi T_D - \frac{1}{\omega'_\pi T_I} = \tan \varphi_m, K_P = \overline{K}_P \cos(\varphi_m)$$

Attenzione Se A è fuori anello, allora amplificazione



$$\left| K_p \left(1 + \frac{1}{\omega_c T_I} + j \omega_c T_0 \right) \right| = \bar{K}_p \quad \text{con } \omega_c = \omega_0$$

$$\angle L(j\omega_n) = -\pi + \varphi_m^{\circ}$$

$$\angle \left(1 + \frac{1}{\omega_c T_I} + j \omega_c T_0 \right) + \angle G(j\omega_0) = -\pi + \varphi_m^{\circ} \quad \varphi_m^{\circ} = \frac{\varphi_m \cdot \pi}{180}$$

$$\angle \left(1 + j \left(\omega_c T_0 - \frac{1}{T_I \omega_c} \right) \right) = \varphi_m^{\circ}$$

||

$$\omega_c T_0 - \frac{1}{\omega_c T_I} = \tan \varphi_m^{\circ} \quad T_I = 4 T_0 \text{ per avere solo reali e contradditt.}$$

$$\omega_c T_0 - \frac{1}{4 \omega_c T_0} = \tan \varphi_m^{\circ}$$

$$\Rightarrow 4 \omega_c^2 T_0^2 - 1 = 4 \omega_c T_0 \tan \varphi_m^{\circ}$$

$$T_0^2 - \frac{\tan \varphi_m^{\circ}}{\omega_c} T_0 - \frac{1}{4 \omega_c^2} = 0$$

Ha sicuramente radici reali, perché ha variazione di segno

e quindi ha soluzione positiva e una negativa.

La $T_0 > 0$ è quella che voglio e va bene.

Mi resta K_p :

$$\left| K_p \left(1 + \frac{1}{\omega_c T_I} + j \omega_c T_0 \right) \right| = \bar{K}_p$$

$$K_p \left| 1 + j \frac{\sin \varphi_m^{\circ}}{\cos \varphi_m^{\circ}} \right| = \bar{K}_p$$

$$K_p \sqrt{1 + \frac{\sin^2 \varphi_m^{\circ}}{\cos^2 \varphi_m^{\circ}}} = \bar{K}_p$$

$$K_p = \frac{\bar{K}_p}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 \varphi_m^{\circ}}}} = \bar{K}_p \cos \varphi_m^{\circ}$$

- L'equazione $\omega_c = \omega_0$ deriva sulla base della prova sperimentale.
 ↓
 Pulsazione di pendolazione

Metodi di taratura in anello aperto

Usati per tarare un sistema chiuso stampante per cui è difficile lavorare a vuoto.

Si usano i metodi in anello aperto perché i sistemi sono automaticamente stabili (non esistono quelli instabili).

- ◆ Si usano laddove i metodi in anello chiuso risultano poco efficienti, ad esempio allorquando il processo ha tempi di risposta molto lunghi (ad es. processi termici) e non è possibile portarlo al limite di stabilità
- ◆ Pur esistendone un buon numero, tutti si basano sulla conoscenza di un modello approssimato della risposta indiciale del processo del tipo

$$G(s) = \frac{\mu}{1 + Ts} e^{-\tau s}$$

Conoscenza di un modello approssimato scelto in questo modo.

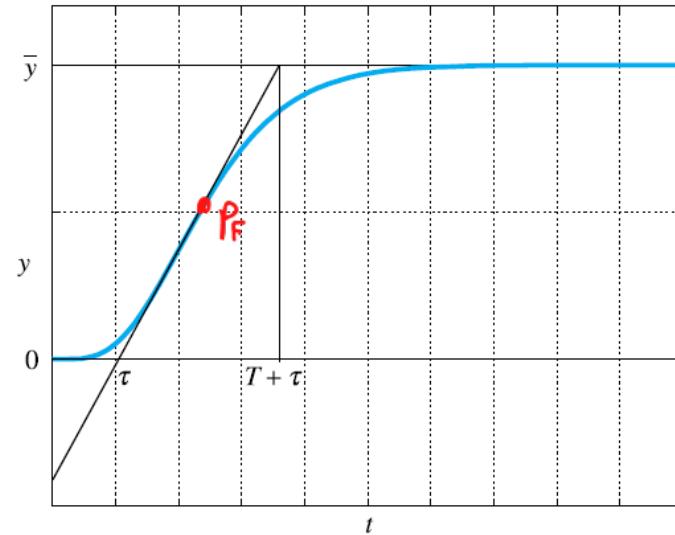
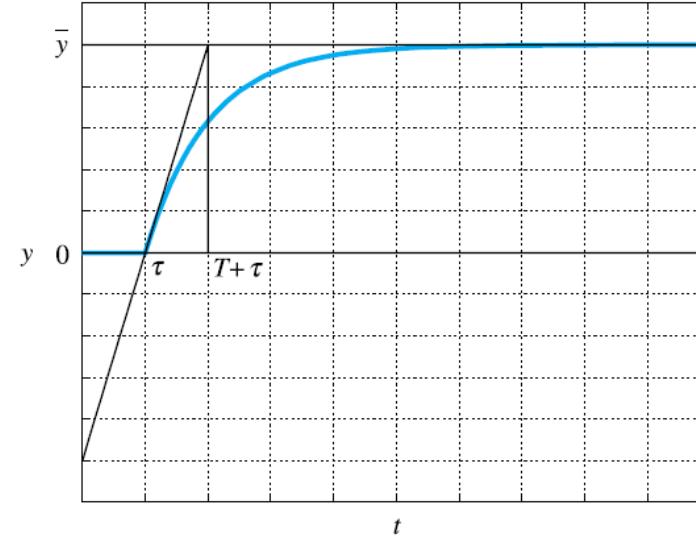
Ritardo finito approssimato per una frequenza che soddisfa la risposta riduttiva 0 nei primi istanti di tempo.

- ◆ Due sono le tecniche più usate per la stima dei tre parametri μ, T, τ entrambe basate sulla misura della risposta indiciale del processo
 - metodo della tangente
 - metodo delle aree

Metodi di taratura in anello aperto

② Come trovi punto di flesso? Traccio numericamente la domanda, avendo a disposizione un picco nel punto di flesso, che mi dà la mia retta

Metodo della tangente



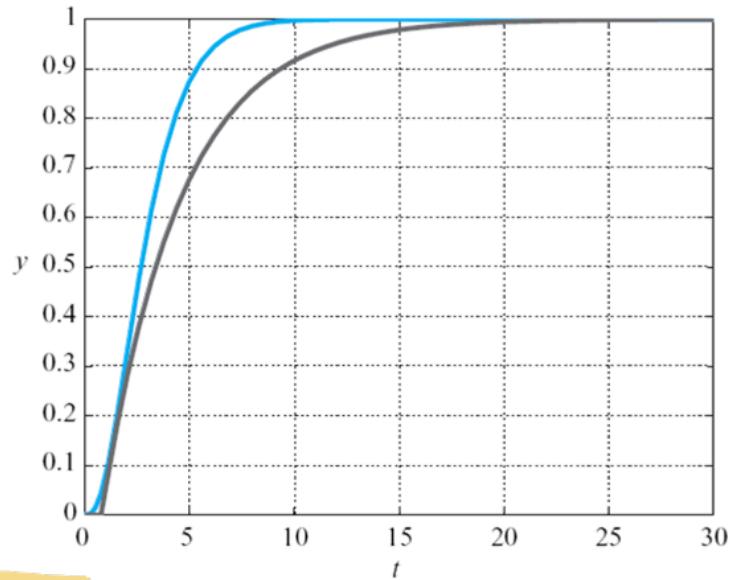
① Traccio la retta tangente nel punto di flesso. Questa interseca l'asse des temps, punto scelto come τ . Si trova allora \bar{y} al tempo $T + \tau$, che qui ho valori del modello. ②

- si misura innanzitutto la risposta al gradino $u(t) = \bar{u}\delta_{-1}(t)$
- il guadagno statico è evidentemente pari a $\mu = \bar{y}/\bar{u}$
- il **tempo di ritardo** τ è l'intersezione della tangente nel punto di flesso con l'asse t
- l'istante di tempo $T + \tau$ è all'intersezione della stessa tangente con l'asintoto orizzontale da cui si ricava la **costante di tempo** T

Tangente alla curva è tale ①
da intersecare la \bar{y} al $T + \tau$.

Metodi di taratura in anello aperto

- Metodo della tangente (esempio)



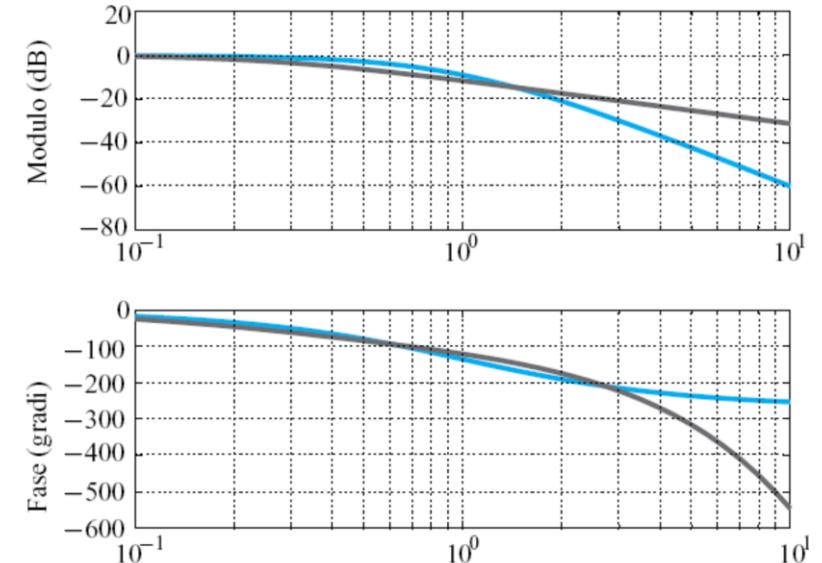
- misurando la risposta indiciale del sistema

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$$

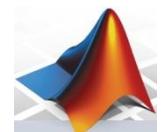
si ottiene la curva blu da cui si ricavano i parametri della funzione approssimante

$$G_a(s) = \frac{1}{1 + 3.7s} e^{-0.8s}$$

la cui risposta indiciale è la curva grigia

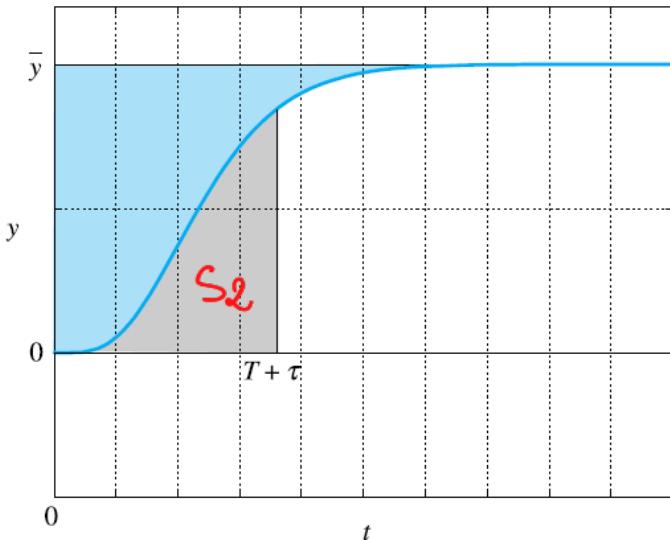
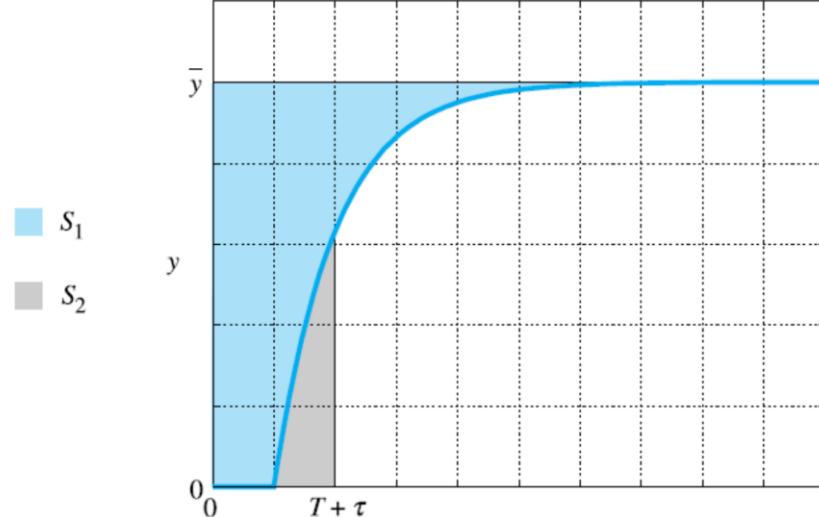


L'inflectione identificazione
del punto di flesso per
il problema del ramo
di misura



Metodi di taratura in anello aperto

Metodo delle aree



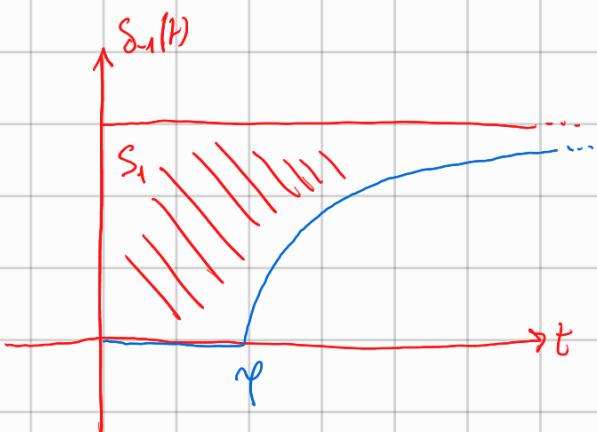
- si misura ancora una volta la risposta al gradino $u(t) = \bar{u}\delta_{-1}(t)$
- il guadagno statico è di nuovo pari a $\mu = \bar{y}/\bar{u}$
- per stimare tempo di ritardo e costante di tempo basta calcolare le aree

$$S_1 = \mu \bar{u} \tau + \int_0^{\infty} \mu \bar{u} e^{-t/T} dt = \bar{y}(\tau + T)$$

$$S_2 = \int_0^T \mu \bar{u} (1 - e^{-t/T}) dt = \bar{y}T/e$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T + \tau = S_1/\bar{y} \\ T = eS_2/\bar{y}, \tau = (S_1 - \bar{y}T)/\bar{y} \end{cases}$$





$$M(t) = \bar{m} S_{-1}(t)$$

$$G(s) = \frac{M}{1+sT} e^{-\gamma s}$$

Calculo resposta sem atando:

$$\begin{aligned} y(t) &= \bar{m} M(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \Big|_{t=t-\gamma} \\ &= \underbrace{\bar{m} M}_{y} (1 - e^{-(t-\gamma)/T}), \quad t \geq \gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{+\infty} (\bar{y} - y(r)) dr = \\ &= \int_0^{\gamma} \bar{y} dr + \int_{\gamma}^{+\infty} (\bar{y} - \bar{y} + \bar{y} e^{-(t-\gamma)/T}) dr = \quad t - \gamma = \sigma \end{aligned}$$

$$= \bar{y} \gamma + \bar{y} \int_0^{+\infty} e^{-\sigma/T} d\sigma = \bar{y} \gamma + \bar{y} \left[-T e^{-\sigma/T} \right]_0^{+\infty} = \bar{y} \gamma + \bar{y} T = \bar{y} (T + \gamma)$$

$$T + \gamma = \frac{S_1}{\bar{y}}$$

• Ora conosco $T + \gamma$:

$$S_2 = \int_{-\gamma}^{T+\gamma} \bar{y} - \bar{y} e^{-(t-\gamma)/T} dt = \bar{y} T - \bar{y} \int_0^T e^{-\sigma/T} d\sigma = \bar{y} T - \bar{y} \left[-T e^{-\sigma/T} \right]_0^T =$$

$$= \bar{y} T - \bar{y} [-T/e + T] \Rightarrow \bar{y} T + \bar{y} T/e - \bar{y} T = \bar{y} T/e$$

$$\textcircled{1} \quad T + \gamma = S_1/\bar{y}$$

$$\frac{\bar{y} T}{e} = S_2 \Rightarrow \gamma = T$$

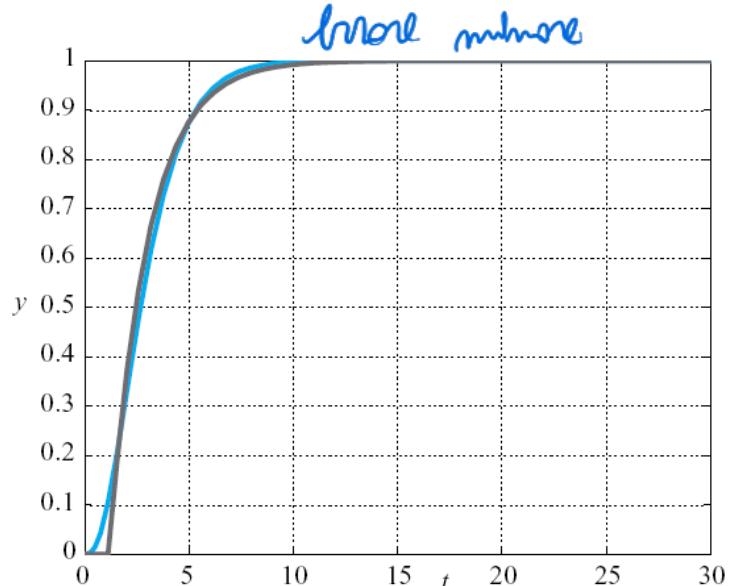
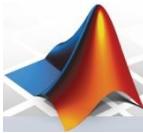
$$T = e S_2 / \bar{y}$$

$$\gamma = \frac{S_1 - e S_2}{\bar{y}}$$

* Modellare systeme vibranti a banda del sistema a etto chiuso, che deve essere
preciso soprattutto se uso modello qui

Metodi di taratura in anello aperto

Metodo delle aree (esempio)



- misurando la risposta indiciale del sistema

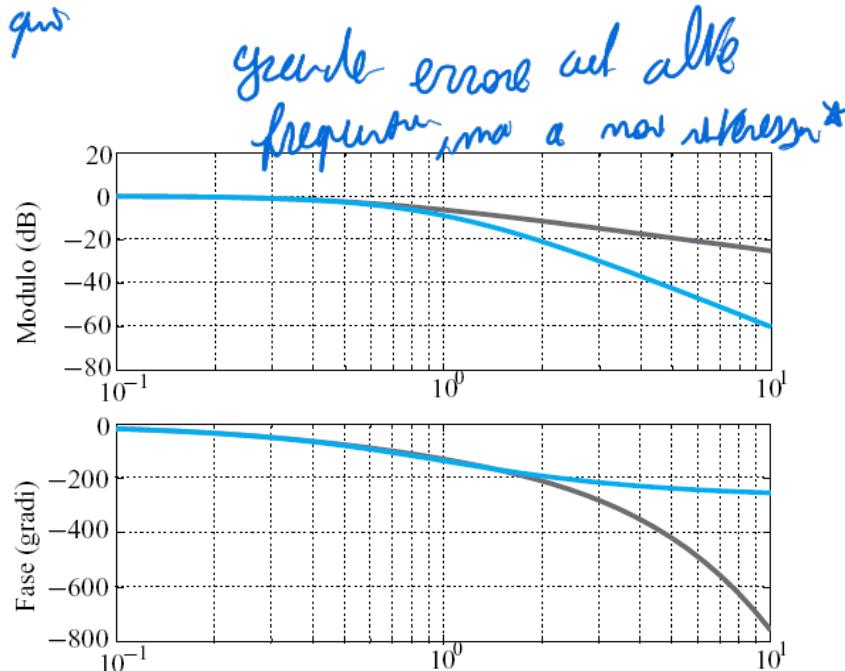
$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$$

si ottiene la **curva blu** da cui si ricavano i parametri della funzione approssimante

$$G_a(s) = \frac{1}{1 + 1.83s} e^{-1.17s}$$

la cui risposta indiciale è la **curva grigia**

*Abbastanza diversi
da quelli di prima*



- di nuovo l'errore di modello è più grande alle alte frequenze
- questo metodo è meno sensibile al rumore di misura in quanto usa operatori integrali e non differenziali sulla misura ("amplificazione alle basse e non alle alte frequenze")

Metodi di taratura in anello aperto

- ◆ Metodo di taratura di **Ziegler e Nichols** in anello aperto

	K_P	T_I	T_D
P	$\frac{T}{\mu\tau}$		
PI	$\frac{0.9T}{\mu\tau}$	3τ	
PID	$\frac{1.2T}{\mu\tau}$	2τ	0.5τ

- sulla base dei parametri stimati del modello approssimato, i guadagni del regolatore si settano come in tabella
- qualitativamente si osserva che il guadagno proporzionale è fissato in maniera inversamente proporzionale al tempo di ritardo in modo da garantire un buon margine di fase
- si osserva poi che i due zeri del PID sono scelti coincidenti in $-1/\tau$ ($T_I = 4T_D$)

Metodi di taratura in anello aperto

◆ Metodo di taratura di Cohen e Coon in anello aperto

	K_P	T_I	T_D
P	$\frac{3T + \tau}{3\mu\tau}$		
PI	$\frac{10.8T + \tau}{12\mu\tau}$	$\tau \frac{30T + 3\tau}{9T + 20\tau}$	
PID	$\frac{16T + 3\tau}{12\mu\tau}$	$\tau \frac{32T + 6\tau}{12\tau}$	$\frac{4T\tau}{11T + 2\tau}$

- le formule sono ricavate imponendo uno smorzamento pari a 0.25 tra due picchi successivi della risposta a un disturbo a gradino sulla variabile di controllo *Sulla su def modello*
- in genere, il metodo fornisce una taratura simile a quella della tecnica di Ziegler e Nichols

Metodi di taratura in anello aperto

- ◆ **Metodo di taratura IMC in anello aperto**

	K_P	T_I	T_D
PI	$\frac{T}{\mu(\tau + T_f)}$	T	
PID	$\frac{T + 0.5\tau}{\mu(\tau + T_f)}$	$T + 0.5\tau$	$\frac{0.5\tau T}{0.5\tau + T}$

- questa tecnica di taratura mette a disposizione il parametro aggiuntivo T_f , al cui aumento corrisponde una riduzione della banda passante a ciclo chiuso e un aumento dei margini di fase e di guadagno, dunque va aumentato laddove il modello approssimato ha un'accuratezza limitata nel riprodurre la risposta effettiva del sistema (*elevata incertezza di modello*)

T_f non si denota da misura, ma deve regolare per banda passante a ciclo chiuso. T_f è sommato a τ, lo sto sovrastimando

Metodi di taratura in anello aperto

◆ Metodo di ottimizzazione ITAE

	K_P	T_I	T_D
PI_{ITAE}	$\frac{0.586}{\mu} \left(\frac{T}{\tau}\right)^{0.916}$	$\frac{T^2}{1.03T - 0.165\tau}$	
PID_{ITAE}	$\frac{0.965}{\mu} \left(\frac{T}{\tau}\right)^{0.855}$	$\frac{T^2}{0.796T - 0.147\tau}$	$0.308T \left(\frac{\tau}{T}\right)^{0.929}$

- questa tecnica di taratura prevede di assegnare ai guadagni valori che ottimizzano il funzionale di costo dipendente dall'andamento dell'errore

Andare verso zero del massimo degli moduli del costo
modulo dell'errore è penalizzato per i primi istanti di tempo (nel momento)
- il prodotto per t nell'integrale serve a non penalizzare errori elevati nei primi istanti di tempo
- le formule in tabella sono ottenute interpolando i risultati di specifiche prove di ottimizzazione generalmente condotte con metodi evolutivi

ITAE = $\int_0^\infty t|e(t)|dt$

Doveva dare abbattimento degli moduli del costo
modulo dell'errore è penalizzato per i primi istanti di tempo (nel momento)