Capitolo 8 – Sistemi dinamici a tempo discreto

Università degli Studi della Campania Luigi Vanvitelli
Dipartimento di Ingegneria

Caratteristiche dei sistemi dinamici a tempo discreto

- La variabile temporale secondo cui evolve il comportamento del sistema appartiene all'insieme dei numeri interi
- Lo stato e l'uscita evolvono in corrispondenza solo di determinati istanti di tempo che possono essere rappresentati da una variabile intera e non continua (reale)
- Esistono sistemi intrinsecamente a tempo discreto

  Stato, ingresso e uscita sono successioni

  - Economia (ammortamento di un prestito)
  - Sociologia
  - Ecologia
  - Epidemiologia (dati disponibili solo a certi istanti di tempo)
  - Informatica (algoritmi che evolvono in funzioni di contatori, e.g., integrazione numerica)
- Altri si riferiscono a sistemi a tempo continuo interconnessi a sistemi digitali e il cui comportamento è osservato solo in determinati istanti di tempo (sistemi di controllo digitali)
  - Sistemi a dati campionati
- Lo strumento matematico che ne descrive il comportamento è
  - L'equazione alle differenze Non equazione differenziale

Esempi di sistemi dinamici intrinsecamente a tempo discreto

- La catena di Sant'Antonio
  - Ricevo una lettera con 6 nomi

    dopo 6 passi sono in cima alla lista
  - Spedisco 1 € al primo nome
  - Cancello dalla lista il primo nome e metto il mio in coda
  - Spedisco 5 lettere identiche a 5 amici chiedendogli di seguire la stessa procedura
    - Dopo 6 passi il mio nome sarà in cima alla lista di quante lettere?
      - Sia $y(k)$ il numero di lettere al passo k (notate come non ha a che fare col tempo)
      - $y(0) = 1$ è la lettera che ho ricevuto
      - Al passo $k = 1$ avrò prodotto $y(1) = 5$ lettere (1 per ogni amico)
      - Al passo $k = 2$ i miei 5 amici avranno prodotto ciascuno 5 lettere, quindi: $y(2) = 5 \cdot 5 = 5^2$
      - Al passo $k = 3$ i 25 amici degli amici avranno prodotto ciascuno 5 lettere, quindi: $y(3) = 25 \cdot 5 = 5^3$
      - Al generico passo k, il numero di lettere prodotte è $y(k) = 5^k$
    - Al sesto passo, dunque, riceverò

$$y(6) = 5^6 = 15625$$

lettere, ciascuna contenente 1 €!

Esempi di sistemi dinamici intrinsecamente a tempo discreto

- Il piano di accumulo
  - Depositiamo in banca ogni anno k una somma di denaro $u(k)$
  - La banca mi riconosce un tasso di interesse semplice I (se, ad esempio, dell'1%, è $I = 0.01$)
  - Se non prelevo mai denaro, l'anno successivo $k+1$, la somma maturata $y(k+1)$ varrà

$$y(k+1) = y(k) + Iy(k) + u(k) = (1+I)y(k) + u(k)$$
$$y(0) = u(0)$$

↓ eq. alle diff. del 1° ordine: max differenza tra indice la cui compare incognita max − min.

- Ammortamento del mutuo a rata costante
  - Chiediamo un prestito alla banca di D euro
  - La banca ci applica un tasso di interesse annuo I
  - Rimborsiamo la banca annualmente con una rata fissa U
  - Se vogliamo estinguere il debito in n anni, quanto devo pagare ogni anno?
    - Indichiamo con $d(k)$ il debito residuo all'anno k

Risolvendola trovo U per estinguere tutto in n anni

stato futuro

$$d(k+1) = (1+I)d(k) - U$$
$$d(0) = D$$

ingresso

stato presente

condizione iniziale

$$0 = d(n) = f(n, U, D) \quad \Rightarrow U = g(n, D)$$

risposta del sistema

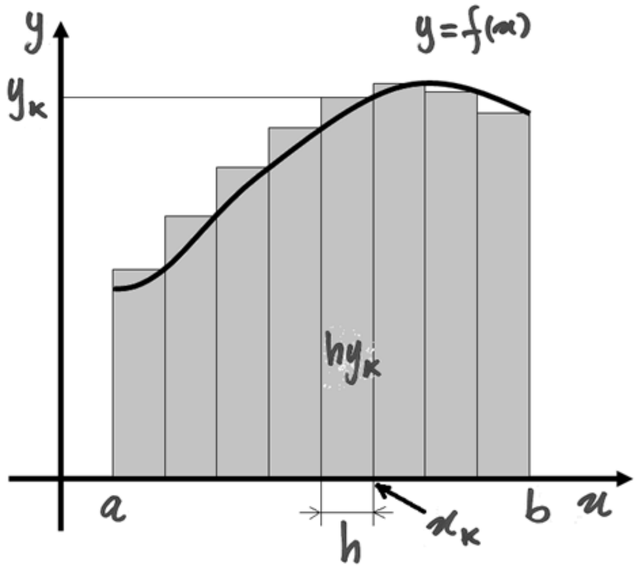
NOTA: Lineare perché ho c.l. tra d e U

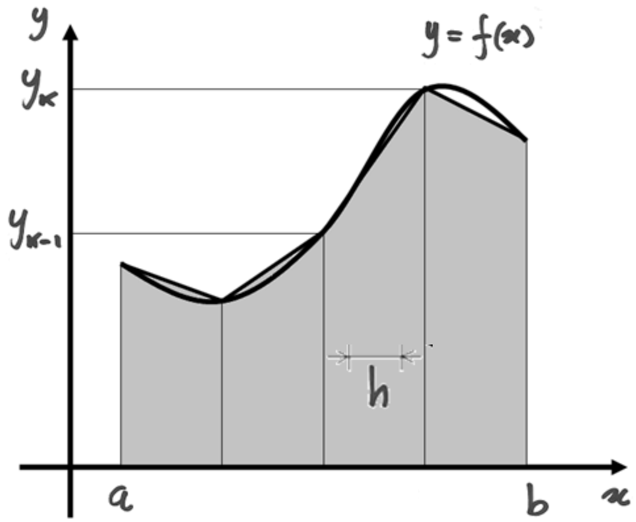
"istante" K

- Esempi di sistemi dinamici intrinsecamente a tempo discreto
  - Algoritmi di integrazione numerica
    - Data una funzione $y = f(x)$ vogliamo approssimare il valore di

$$\int_a^b f(x)dx$$

NOTA: y = ingresso
x = stato
x = uscita





– Suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in N intervallini tutti uguali di ampiezza $h = (b - a)/N$

– Approssimiamo l'area fino al k-mo rettangolino $x(k)$ sottesa dalla curva con la somma di quella dei rettangolini fino al k-mo, al passo successivo varrà

$$x(k + 1) = x(k) + hy(k), \qquad y(k) = f(a + hk)$$
$$x(0) = 0$$

– O meglio, approssimiamo l'area sottesa dalla curva con la somma di quella dei trapezi e quindi l'area al passo $k + 1$ dell'algoritmo varrà

(o aumento N
o faccio così)

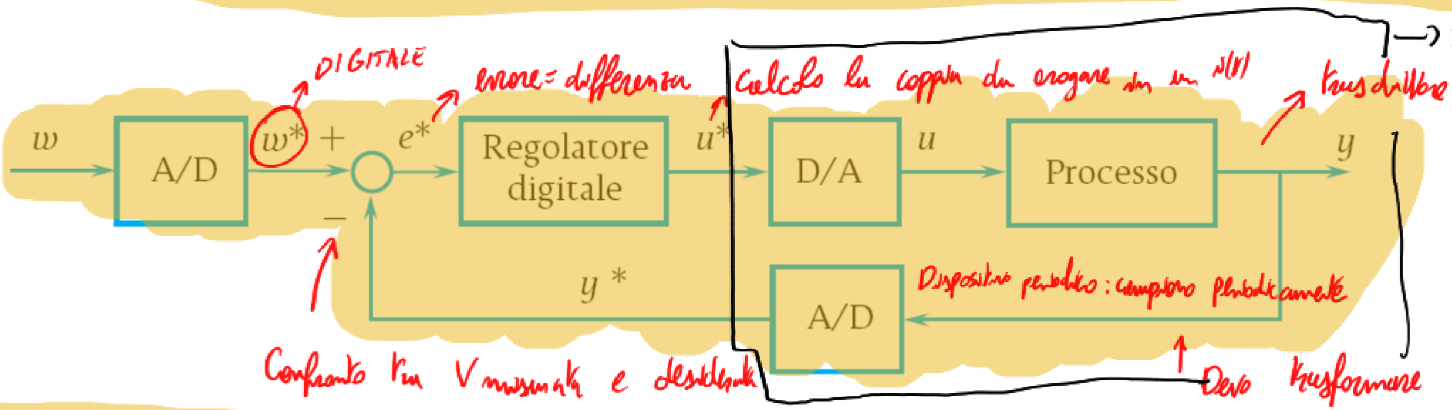
$$x(k + 1) = x(k) + h(y(k + 1) + y(k))/2, \qquad y(k) = f(a + hk)$$
$$x(0) = 0$$

– In ogni caso l'approssimazione cercata sarà
$$\int_a^b f(x)dx \simeq x(N)$$

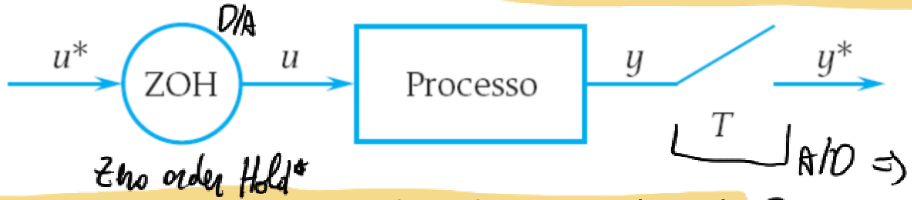
Sistema a dati campionati

Non direttamente a tempo discreto: sottosistema principale è tempo continuo

- I moderni sistemi di controllo sono realizzati con unità di calcolo digitali opportunamente interconnesse a sistemi dinamici a tempo continuo (Processo) da controllare
- Per l'interconnessione occorrono dispositivi specifici di conversione dei segnali da tempo continuo a tempo discreto e viceversa



- Il sistema dinamico con ingresso $u^*(k)$ e uscita $y^*(k)$ è un sistema a tempo discreto ed è costituito dalla serie di 3 sottosistemi

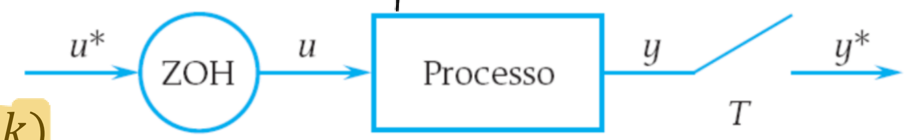


A/D ⇒ Campionatore ideale:
Sistema ideale: input continuo e out discreto

  - Un convertitore D/A realizzato con un mantenitore di ordine zero (ZOH)
  - Un convertitore A/D realizzato con un campionatore ideale

*Mantenitore di ordine 0.

Processo funziona con una condizione particolare ⇒ sempre costante a tratti



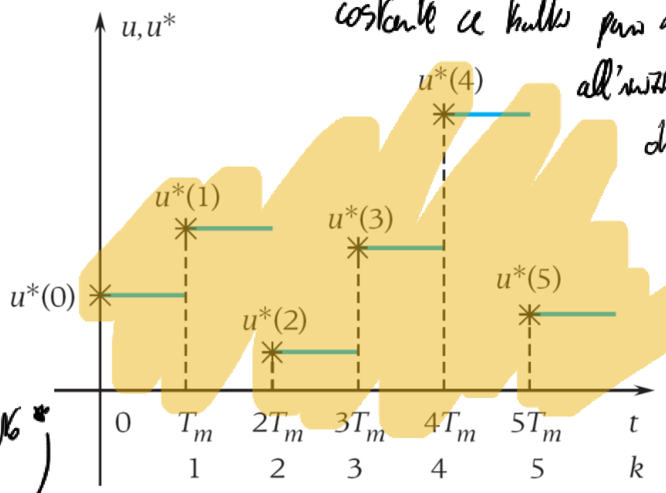
Sistema a dati campionati

→ È segnale tempo continuo

- Il mantenitore di ordine zero (ZOH) mantiene costante il segnale $u^*(k)$ per un periodo di mantenimento T_m

$$u(t) = u^*(k), \qquad \forall t \in [kT_m, (k+1)T_m]$$

costante a tratti pari al valore all'inizio dell'intervallo di tempo.



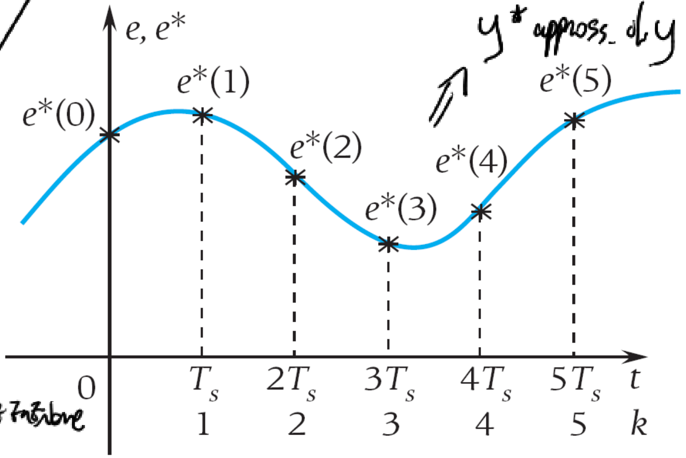
- Il campionatore ideale preleva il segnale $y(t)$ negli istanti di campionamento multipli del periodo di campionamento T_s

$$y^*(k) = y(kT_s)$$

ideale perché campionamento assunto istantaneo e valore non quantizzato

- I due periodi sono assunti identici e i dispositivi sono assunti sincronizzati
- Vogliamo determinare una rappresentazione i-s-u del sistema a tempo discreto con ingresso $u^*(k)$ e uscita $y^*(k)$ a partire da una rappresentazione i-s-u del processo a tempo continuo, assunto LTI
- Indicheremo con il simbolo $f^*(k)$, la generica funzione del tempo $f(t)$ valutata per $t = kT_s$

y^* appross. di y



Il regolatore digitale non ha conoscenza di comportamento della funzione tra kT e $(k+1)T$

$\frac{1}{2^k}$ errore di quantizzazione

Tempo mantenimento = Tempo campionamento

Sistema a dati campionati

- Data la i-s-u a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Isu del processo, voglio info su sistema tempo discreto.

- La risposta nello stato nel dominio del tempo nell'intervallo $[kT_s, (k+1)T_s]$ si scrive

$$x(t) = e^{A(t-kT_s)}x(kT_s) + \int_{kT_s = t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau, \qquad t \geq kT_s$$

t_0 $x(t_0)$

- che, valutata in $t = (k+1)T_s$, è

Per la presenza dello ZOH

$$x^*(k+1) = e^{AT_s}x^*(k) + \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} e^{A(t-\tau)}B\underbrace{u^*(k)}_{\text{costante nell'intervallo a } x^*(k)}d\tau =$$

Unica dim col concetto $u^*(k)$

Non dipende da τ

Sostituendo $\sigma = t - \tau$

$$= \underbrace{e^{AT_s}}_{\text{MATRICE}}x^*(k) + \underbrace{\int_0^{T_s} e^{A\sigma}Bd\sigma}_{\text{Matrice}}\, u^*(k) = A^*x^*(k) + B^*u^*(k)$$

a destra perché vettore

- L'equazione di uscita a tempo discreto si determina campionando in kT_s

$$y^*(k) = y(kT_s) = Cx(kT_s) + Du(kT_s) = C^*x^*(k) + D^*u^*(k)$$

Esempio

- Dunque le matrici A^*, B^*, C^*, D^* della i-s-u del sistema a dati campionati sono legate a quelle del processo a tempo continuo da

$$\boxed{A^* = e^{AT_s}, \qquad B^* = \int_0^{T_s} e^{A\sigma}Bd\sigma, \qquad C^* = C, \qquad D^* = D}$$

sempre invertibile

$$X^*(k+1) = A^* x^*(k) + B^* u^*(k)$$ Sist. di eq. alle differenze del 1° ordine

Es:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

$T_s = 0{,}1\,s$ (Periodo del converter)

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x(t)$$

$$A^* = e^{AT_s} = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right]\Big|_{t=T_s}$$

$$(sI-A)^{-1} = \begin{pmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{s(s+3)+2} = \begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{s^2+3s+2} \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{pmatrix}\right]_{t=T_s} = \begin{pmatrix} 2e^{-T_s}-e^{-2T_s} & e^{-T_s}-e^{-2T_s} \\ -2e^{-T_s}+2e^{-2T_s} & -e^{-T_s}+2e^{-2T_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.991 & 0.09 \\ -0.172 & 0.733 \end{pmatrix}$$

Se diminuisci T_s tendono a 1 per e^{-T_s}

Prima entrata:

$$\frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

$$\frac{s}{(s+1)(s+2)} = \frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2}$$

$$B = \int_0^{T_s} e^{A\sigma} \overset{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}{B}\, d\sigma = \int_0^{T_s} \begin{pmatrix} e^{-\sigma}-e^{-2\sigma} \\ -e^{-\sigma}+2e^{-2\sigma} \end{pmatrix} d\sigma = \begin{pmatrix} \int_0^{T_s} (e^{-\sigma}-e^{-2\sigma})\, d\sigma \\ \int_0^{T_s} (e^{-\sigma}+2e^{-2\sigma})\, d\sigma \end{pmatrix}$$

↳ Prendi 2ª colonna

$$= \begin{pmatrix} 0.0045 \\ 0.086 \end{pmatrix}$$

Rappresentazione i-s-u

- Negli esempi precedenti abbiamo visto che anche per i sistemi a tempo discreto esistono i concetti di
  - Stato (memoria del passato -> condizione iniziale necessaria alla predizione del futuro)
  - Uscita (variabile osservata)
  - Ingresso (forzamento)
- Le equazioni a cui siamo pervenuti sono equazioni alle differenze in cui l'incognita ad un certo istante di tempo dipende dall'incognita in istanti passati
- La generica i-s-u non lineare è

$x(k+n)$ si può ricondurre a questa, come nel [illegible]

$$
\boxed{
\begin{aligned}
x(k+1) &= f(x(k),u(k),k), \qquad k \in [k_0,+\infty) \subseteq \mathbb{Z} \\
y(k) &= g(x(k),u(k),k) \\
x(k_0) &= x_0
\end{aligned}
}
$$

Equazione di stato (equazione alle differenze)
Trasformazione di uscita (equazione algebrica)
Condizione iniziale

  - Variabili di stato: $x(k) \in \mathbb{R}^n$
  - Variabili di ingresso: $u(k) \in \mathbb{R}^m$
  - Variabili di uscita: $y(k) \in \mathbb{R}^p$

Non serve lipschitziana

  - Perché la soluzione esista e sia unica è sufficiente che $f(\cdot,\cdot,\cdot)$ sia ben definita, e può essere calcolata per ricorsione a partire dalla condizione iniziale
    - Non è detto che sia esprimibile in forma chiusa (dipende da f; se f è lineare sì!)

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), k), \qquad k \in [k_0, +\infty) \subseteq \mathbb{Z}$$
$$y(k) = g(x(k), u(k), k)$$
$$x(k_0) = x_0$$

Classificazione

- Sistemi MIMO e SISO
  - I sistemi a singolo ingresso e singola uscita (SISO) sono quelli con $m = 1$ e $p = 1$
  - Gli altri sono detti Multi-ingresso Multi-uscita (MIMO) o multivariabili
- Sistemi propri, strettamente propri, adinamici
  - Strettamente propri o puramente dinamici: la trasformazione d'uscita g non dipende dall'ingresso
  - Propri: g dipende anche dall'ingresso
  - Adinamici: la trasformazione d'uscita g non dipende dallo stato (non è necessaria alcuna variabile di stato)
- Sistemi stazionari o tempo invarianti
  - Sono quelli in cui né la funzione di stato né la trasformazione di uscita dipendono esplicitamente del tempo k
    - In questi sistemi il forzamento e/o una condizione iniziale possono essere applicati a partire da un istante di tempo generico k_1 o da un istante di tempo k_2 producono risposte l'una traslata rispetto all'altra di una quantità pari a $k_2 - k_1$
    - Quindi in tali sistemi si può scegliere arbitrariamente l'istante di tempo iniziale di osservazione, si sceglie quindi $k_0 = 0$
- Sistemi lineari (e sistemi lineari e stazionari – LTI)
  - Sono quelli in cui f e g sono funzioni lineari di u e x

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), \qquad k \in [k_0, +\infty) \subseteq \mathbb{Z}$$
$$y(k) = C(k)x(k) + D(k)u(k) \qquad x(k_0) = x_0$$

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \qquad k \in [0, +\infty) \subseteq \mathbb{Z}$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \qquad x(0) = x_0$$

$$x(k+1) = f\big(x(k), u(k)\big)$$
$$y(k) = g(x(k), u(k))$$
$$x(0) = x_0$$

Equilibrio

- Un punto o stato di equilibrio in corrispondenza di un ingresso costante $\bar{u}$ è il punto fisso di f *

$$x(k+1) = x(k) \Leftrightarrow \bar{x} = f(\bar{x}, \bar{u})$$

Successione costante

perché X é costante a fronte di u cost. se ho punto di equilibrio

- L'uscita di equilibrio sarà

$$\bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u})$$

* $f(x) = x \Rightarrow x$ punto fisso di f.

Stabilità dell'equilibrio (definizione)

- Con le stesse considerazioni sulla capacità di riassorbire le perturbazioni fatte per i sistemi dinamici a tempo continuo
- Uno stato di equilibrio $\bar{x}$ si dice stabile se per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che per tutti stati iniziali x_0 che soddisfano la relazione $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$, risulti $\|x(k) - \bar{x}\| < \varepsilon, \ \forall k \geq 0$
- Uno stato di equilibrio $\bar{x}$ si dice instabile se non è stabile
  - Cioè per quanto parta con lo stato iniziale vicino al punto di equilibrio, prima o poi il movimento perturbato si discosterà definitivamente dal punto di equilibrio
- Uno stato di equilibrio $\bar{x}$ si dice asintoticamente stabile se è stabile e se $\lim_{k \to +\infty} \|x(k) - \bar{x}\| = 0$
- Se lo stato di equilibrio è unico, allora può darsi che la proprietà di asintotica stabilità valga $\forall \delta > 0$, cioè partendo da qualunque stato iniziale, in tal caso si dice che il punto di equilibrio è globalmente asintoticamente stabile (GAS)

Sempre fissato $\bar{u}$

Università degli Studi della Campania Luigi Vanvitelli
Dipartimento di Ingegneria

Cambiando un po' condiz. iniziale rimango def-vicino alla risposta nominale.

Stabilità del movimento (definizione)

- Un movimento nominale $\tilde{x}(k)$ si dice stabile se per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che per tutti stati iniziali x_0 che soddisfano la relazione $\|x_0 - \tilde{x}_0\| < \delta$, risulti $\|x(k) - \tilde{x}(k)\| < \varepsilon, \ \forall k \geq 0$
- Uno movimento nominale $\tilde{x}(k)$ si dice instabile se non è stabile
- Uno movimento nominale $\tilde{x}(k)$ si dice asintoticamente stabile se è stabile e se $\lim_{k\to+\infty} \|x(k) - \tilde{x}(k)\| = 0$

Equilibrio di un sistema LTI

$$\bar{x} = A\bar{x} + B\bar{u} \Leftrightarrow (I - A)\bar{x} = B\bar{u}$$
$$\bar{y} = C\bar{x} + D\bar{u}$$

- Se $\det(I - A) \neq 0$ (cioè se la matrice dinamica A non ha autovalori in 1), la prima equazione ha un'unica soluzione

$$\bar{x} = (I - A)^{-1}B\bar{u}$$
$$\bar{y} = [C(I - A)^{-1}B + D]\bar{u}$$

Per sistemi Tempo continuo A doveva essere invertibile, $\lambda_i \neq 0$. Qui $\lambda_i \neq 1$

  - Matrice dei guadagni statici: $C(I - A)^{-1}B + D$ $(-CA^{-1}B)$ Tempo continuo

$(sI-A)|_{s=0}$ Tempo continuo
$(sI-A)|_{s=1}$ Tempo discreto.

- Se invece $\det(I - A) = 0$ allora potrebbero esistere infiniti o anche nessun punto di equilibrio (dipende se $B\bar{u} \in \mathcal{R}(I - A)$)

Immagine dell'app. che ha matrice $I-A$

Calcolo del movimento dei sistemi LTI

- Data la i-s-u con condizione iniziale

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \qquad x(0) = x_0$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

- Risolviamo per ricorsione la prima equazione

$$
\begin{aligned}
x(0) &= x_0\\
x(1) &= Ax_0 + Bu(0)\\
x(2) &= Ax(1) + Bu(1) = A^2x_0 + ABu(0) + Bu(1)\\
x(3) &= Ax(2) + Bu(2) = A^3x_0 + A^2Bu(0) + ABu(1) + Bu(2)\\
&\vdots\\
x(k) &= Ax(k-1) + Bu(k-1) = \underbrace{A^k x_0}_{\text{Evoluzione libera}} + \underbrace{A^{k-1}Bu(0) + A^{k-2}Bu(1) + \cdots + ABu(k-2) + Bu(k-1)}_{\text{Evoluzione forzata}}
\end{aligned}
$$

  - Che, in forma compatta, si scrive

$$\boxed{x(k) = A^k x_0 + \sum_{h=0}^{k-1} A^{k-h-1}Bu(h)}$$

Movimento nello stato

- Sostituendo nella seconda si ha

$$\boxed{y(k) = CA^k x_0 + C\sum_{h=0}^{k-1} A^{k-h-1}Bu(h) + Du(k)}$$

Movimento nell'uscita

$$x(k) = A^k x_0 + \sum_{h=0}^{k-1} A^{k-h-1} B u(h) = A^k x_0 + \underbrace{\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{k-1}B \end{bmatrix}}_{\text{Matrice di ragg.}} \underbrace{\begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}}_{\text{vettore scalare}} = A^k x_0 + R_k u_{[k-1,0]}$$

Capacità dell'ingresso a influenzare X dipende da R_k

Esiste una sequenza u capace di portarmi in uno stato qualunque $X \in \mathbb{R}^n$?

Quando R_k ha rango n, (con stato iniziale nullo).

(Se B colonna, matrice ha rango n se k è almeno pari a n),

Sist. compl. ragg. $\Longleftrightarrow$ esiste seq. di ingresso che ci permette di ottenere qualsiasi vettore di $\mathbb{R}^n$.

$$|\lambda I - T^{-1}AT| = |T^{-1}\lambda I T - T^{-1}AT| =$$

$$|T^{-1}(\lambda I - A)T| =$$

$$|\cancel{T^{-1}}||\lambda I - A||\cancel{T}|$$

Rappresentazioni equivalenti

- Data la i-s-u

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

  - Facciamo un cambiamento di base nello spazio di stato tramite una matrice di rango pieno $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$z = Tx \Leftrightarrow x = T^{-1}z$$

  - La i-s-u nelle nuove variabili di stato è

$$z(k+1) = TAx(k) + TBu(k) = TAT^{-1}z(k) + TBu(k) = \hat{A}z(k) + \hat{B}u(k)$$
$$y(k) = CT^{-1}z(k) + Du(k) = \hat{C}z(k) + \hat{D}u(k)$$

  con

$$\hat{A} = TAT^{-1}, \qquad \hat{B} = TB$$
$$\hat{C} = CT^{-1}, \qquad \hat{D} = D$$

  - Le matrici A e $\hat{A}$ sono simili, cioè hanno gli stessi autovalori (così come abbiamo dimostrato nel caso dei sistemi a tempo continuo)

- Le due i-s-u sono rappresentazioni equivalenti dello stesso sistema perché le risposte nell'uscita sono identiche, i movimenti nello stato sono legati da una relazione algebrica lineare $z(k) = Tx(k)$

Decomposizione modale

- Caso 1: matrice dinamica diagonalizzabile
  - Scegliendo come matrice del cambiamento di base la matrice degli autovettori (reali o complessi, ma comunque distinti), la matrice dinamica diventa diagonale

$$\Lambda = T^{-1}AT \Leftrightarrow A = T\Lambda T^{-1} \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} \qquad T^{-1} = S = \begin{pmatrix} s_1^T \\ \vdots \\ s_n^T \end{pmatrix}$$

  - Quindi il movimento libero nello stato si scrive come

$T^{-1}T = I$ colonne Λ^k righe

$$x_l(k) = A^k x_0 = \underbrace{T\Lambda T^{-1} \cdots T\Lambda T^{-1}}_{k \text{ volte}} x_0 = T\Lambda^k T^{-1} x_0 = \begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1^T \\ \vdots \\ s_n^T \end{pmatrix} x_0$$

  - E quindi

Matrici componenti Vettore colonna → Tempo

x libero

$$x_l(k) = A^k x_0 = \sum_{h=1}^{n} \lambda_h^k Z_h x_0 = \sum_{h=1}^{n} t_h \mu_h(x_0) \lambda_h^k = \begin{pmatrix} \sum_{h=1}^{m} t_{h_1} \mu_h(x_0) \lambda_h^k \\ \vdots \\ \sum t_{h_n} \mu_h(x_0) \lambda_h^k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Tempo continuo: $\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & e^{\lambda t} \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$

- dove $Z_h = t_h s_h^T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e $\mu_h(x_0) = s_h^T x_0 \in \mathbb{C}$

↳ $\lambda_h^k \, t_h s_h^T (x_0)$

Modi di evoluzione

↳ Tutte funzioni potenza

$$t_h = \begin{pmatrix} t_{h1} \\ \vdots \\ t_{hn} \end{pmatrix}$$

Come scrivo vettore colonna?

$$\sum_{h=1}^{n} t_{h_i} u_h(x_0) \lambda_h^k$$

* t_h é colonna h-esima.

Ma se ho λ come complesso?

Caso continuo, $\lambda_k = \alpha_k + j\omega_k$.