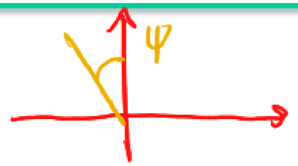
Si tende a tradurre specifiche in posizioni dei poli e zeri nel piano complesso, che provo a controllare. Va sempre prima fatta fase di verifica

Capitolo 13 – Luogo delle radici

Uso del luogo delle radici nella sintesi

$\xi = \sin \psi$, con



- Il luogo delle radici ben si presta a progettare il regolatore laddove le specifiche assegnate sono direttamente esprimibili o facilmente traducibili in posizioni desiderate per i poli del sistema a ciclo chiuso
  - vincoli riguardanti lo smorzamento, del tipo $\xi \geq \bar{\xi}$ si traducono nell'imporre che i poli a ciclo chiuso siano confinati in un settore del piano complesso
  - condizioni sulla banda passante tradotte in vincoli sulla pulsazione naturale dei poli dominanti del tipo $\omega_n \geq \bar{\omega}_n$ si traducono nell'imporre che i poli a ciclo chiuso siano confinati in regioni esterne ad una semicirconferenza

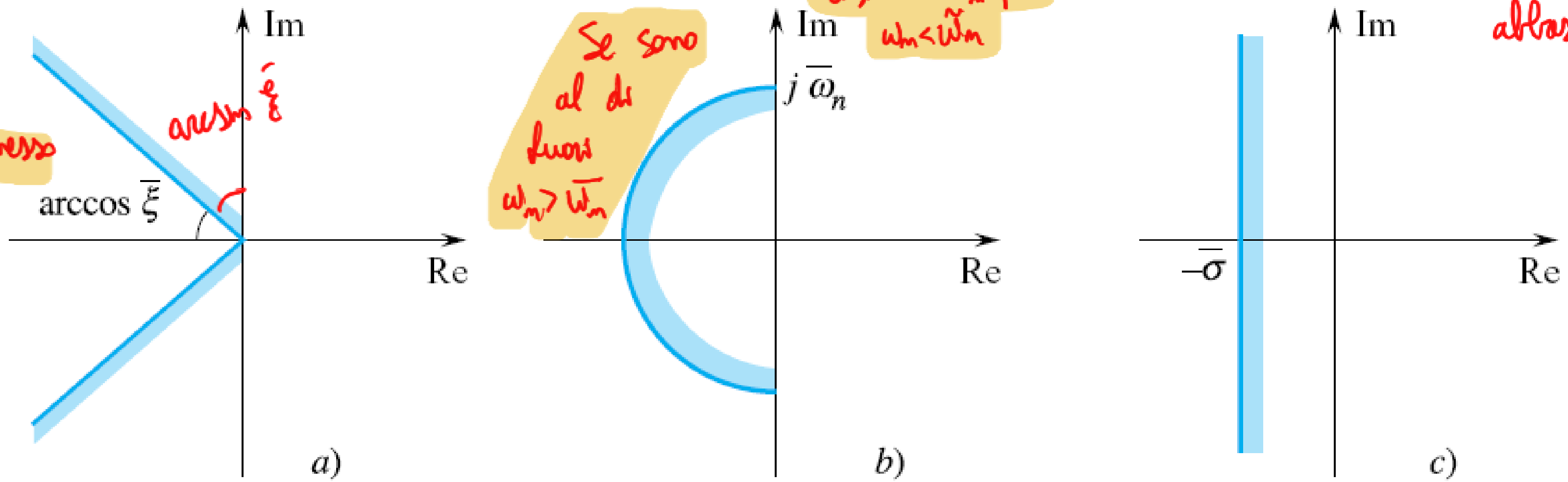
    Buona approx. della banda a ciclo chiuso
  - specifiche di precisione dinamica in termini di vincoli sul tempo di assestamento minimo tradotti in vincoli sulla parte reale dei poli dominanti del tipo $-\sigma \leq -\bar{\sigma}$ si traducono nell'imporre che tali poli siano confinati in un semipiano

    $-\xi \omega_n$

Uso del luogo delle radici nella sintesi

ω_n non può scendere troppo perché rallenterei la dinamica, si impone $\omega_n < \bar{\omega}_n$

Tempo di assestamento abbastanza piccolo



$\xi \geq \bar{\xi}$ $\omega_n \geq \bar{\omega}_n$ $-\sigma \leq -\bar{\sigma}$

- Se vanno soddisfatti più vincoli contemporaneamente, le regioni del piano complesso ammissibili si ottengono dall'intersezione di quelle rappresentate in figura

NOTA: Posso avere dei poli nella regione proibita, basta che non siano dominanti

Esempio 1

- Sia dato un sistema di controllo in retroazione con processo

$$G(s) = \frac{s+3}{s(s+1)(s+10)}$$

NOTA: luogo delle radici va bene se non ho vincoli sul guadagno

e si voglia progettare un regolatore che garantisca

  - errore nullo a regime in risposta ad un riferimento a gradino
  - un tempo di assestamento minore o uguale a $\bar{T}_{a_1} = 2.5$ s

ho già polo nell'origine

- La specifica di precisione statica e il polo nell'origine già presente nell'impianto suggeriscono un regolatore $R(s) = \mu_R$
- La specifica di precisione dinamica si traduce nel vincolo che la parte reale dei poli dominanti debba essere inferiore a

[illegible] ma così ho calcoli più easy

$-\frac{\log 0.01}{\bar{T}_{a_1}} \simeq -\frac{5}{2.5} = -2$ e quindi che i poli debbano appartenere al semipiano sinistro di ascissa -2

$T_{a_\varepsilon} \approx \frac{\ln(0.01\,\varepsilon)}{\xi\omega_n} \leq \bar{T}_{a_1}$ $\quad \xi\omega_n \to Re(P)$ $\quad \Rightarrow -\xi\omega_n \leq \frac{\ln 0.01}{\bar{T}_{a_1}}$

Esempio 1

$$L(s) = \frac{\mu_R (s+3)}{s(s+1)(s+10)}$$

- 2 asintoti in

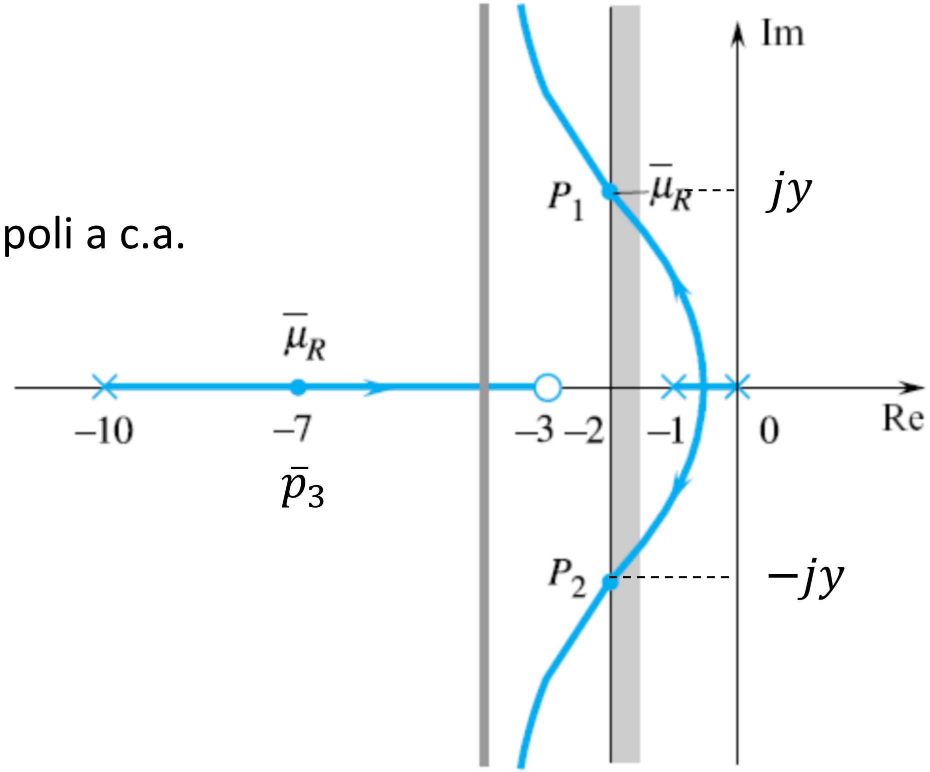
$$x_a = \frac{1}{2}(-1-10+3) = -4$$

- Siccome $\nu = 2$, il baricentro è fisso e la somma dei poli a c.a. è uguale a quella dei poli a c.c.

$$\begin{aligned} &0-1-10 = \bar{p}_1 + \bar{p}_1^* + \bar{p}_3 \\ &= -2 + jy - 2 - jy + \bar{p}_3 = -4 + \bar{p}_3 \\ &\Rightarrow \bar{p}_3 = -7 \end{aligned}$$

  - A cui corrisponde un valore di guadagno $\mu_R = \bar{\mu}_R$

$$\bar{\mu}_R = \frac{\eta_1 \eta_2 \eta_3}{\lambda_1} = \frac{3 \cdot 6 \cdot 7}{4} = 31.5$$



$$L(s) = \frac{M_R\,(s+3)}{s(s+1)(s+10)} \qquad \nu = 2$$

*Se $M_R < 0$ ho sistema L instabile.

1) Traccio poli

2) Luogo diretto, $M_R \geq 0$ *

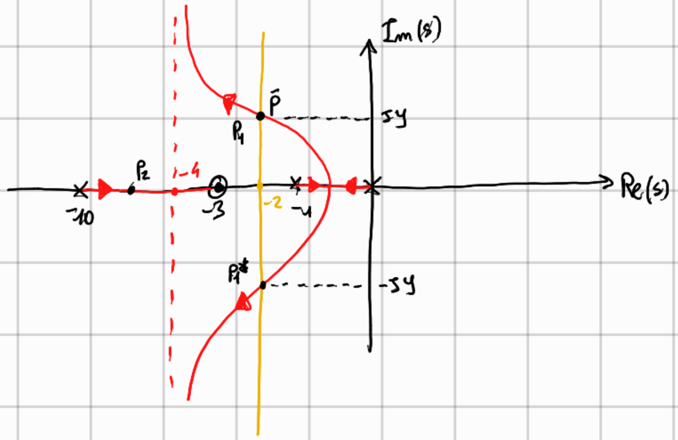
Vedo subito che tra -1 e 0 ho

2 rami che si incontrano. Qui

non serve trovare il punto doppio

Ho 2 asintoti verticali perché formano angoli

di $\frac{(2k+1)\pi}{\nu} = \left\langle \begin{matrix} \frac{\pi}{2} \\ \frac{3}{2}\pi \end{matrix} \right.$, si incontrano in X_a.



3) $X_a = \frac{1}{2}\left(-11+3\right) = -4$

4) Posso fare tracciamento asintotico

5) Ora specifica: Poli a sinistra di retta in -2.

6) Quindi, in corrispondenza di $\bar{p}$ ho il limite per quello che devo far rispettare.

(il numero di poli a ciclo chiuso è sempre = a quello a ciclo aperto)

↳ $\bar{P}$ corrisponde a un polo specifico.

Quindi a $\bar{P}$ sono associati poli P_1, P_1^* e P_2. Ma di P_1 mi interessa la parte reale.

• TROVO $\bar{P}$: METODO 1

[RELAZIONE TRA P e M_R]: $P = M_R$ in questo caso. Altrimenti devo controllarlo. In genere sono sempre proporzionali

- Visto che $\nu = 2$, baricentro del luogo $X_b = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} P_{i\,cc} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} P_{i\,CA}$ e non dipende da P.

$$X_b = \frac{1}{3}\left(-1-10+0\right) = -\frac{11}{3} = \frac{1}{3}\left(P_1 + P_1^* + P_2\right)$$

incognita è P_2 quindi

↳ $-11 = P_1 + P_1^* + P_2$

⇓

$-11 = 2\,\mathrm{Re}(P_1) + P_2$

⇓

$-11 = -4 + P_2 \Rightarrow P_2 = -7$. Ma a P_2 è assegnato $\bar{P}$.

Ma io so che: ⟶ $\bar{P} = \frac{\prod_{i=1}^{n} |s - P_i|}{\prod_{i=1}^{m} |s - z_i|}$

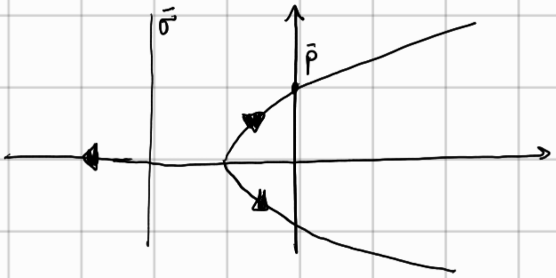
$$\bar{P} = \frac{M_1 M_2 M_3}{l_1} = \frac{3 \cdot 6 \cdot 7}{4} = \frac{63}{2} = 31.5$$

$M_1 M_2 M_3$ → distanza da s scelto e poli

l_1 ← distanza da s scelto e zero

Guadagno M_R che porta poli in queste posizioni scelte.

METODO 2



$Re(s)=0$

Posso trovarlo con Routh:

$D(s) + pN^*(s) = 0$

Trovo valore per p tale per cui ho poli a parte reale nulla.

Allora posso usare questo metodo per trovare intersezione con $\bar{\sigma}$! Traslo gli assi, cioè definisco z che ha asse delle ordinate in corrispondenza di $\bar{\sigma}$.

Se $s = \bar{\sigma} \Rightarrow z = 0$. Quindi, $s = z + \bar{\sigma}$

Applico Routh a $D(s) + pN^*(s)\big|_{s=z+\bar{\sigma}} = d(z)$ su cui applico Routh.

ES:

$$L(s) = \frac{M_R\,(s+3)}{s(s+1)(s+10)}$$

$$D(s) + pN^*(s) = s(s+1)(s+10) + p(s+3)\Big|_{z-2=s} = (z-2)(z-1)(z+8) + p(z+1) = z^3 + 5z^2 + (p-22)z + 16 + p$$

↑ Voglio retta verticale -2

3	1	$p-22$
2	5	$16+p$
1	$-16-p+5p-110 = 4p-126$	
0	$16+p$	

Ammetto radici a parte reale nulla se $a=0 \Rightarrow 4p=126 \Rightarrow p = \frac{126}{4} = 31.5$

$p=-16$ non lo considero perché $p>0$.

Per chiudere il progetto, conviene imporre $p > 31.5$ per avere un minimo di margine.

Non troppo grande però, perché ξ decresce troppo e perdo in sovraelongazione

Esempio 2

- Sia dato un sistema di controllo con processo

$$G(s) = \frac{260(s+1)}{(s-1)(s^2+10s+26)}$$

- Si vuole progettare un regolatore proporzionale μ_R che stabilizzi il sistema a ciclo chiuso

- 2 asintoti che si incontrano in

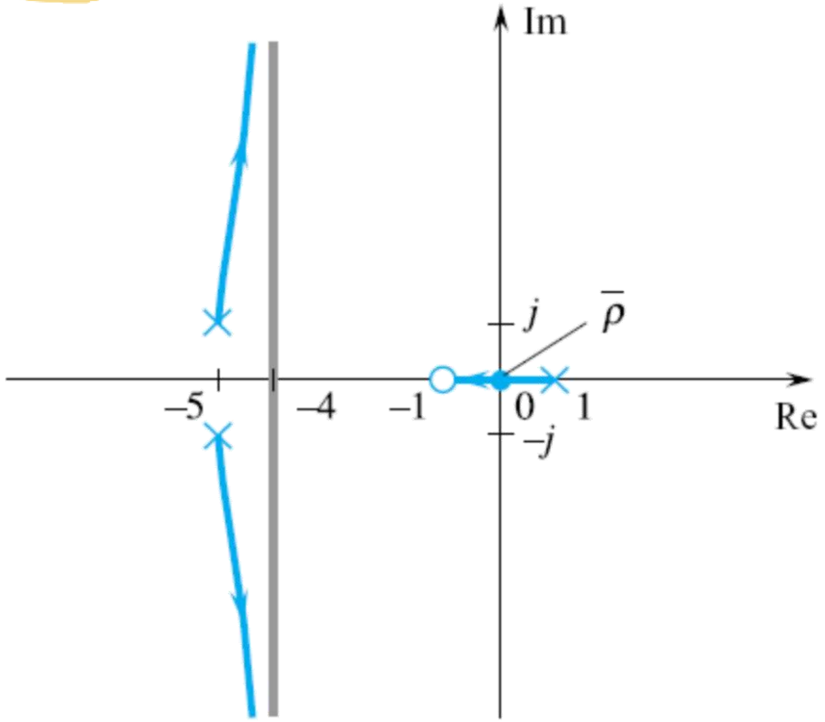
$$x_a = \frac{1}{2}(-5-5+1+1) = -4$$

- Calcolo di $\bar{\rho}$

$$\bar{\rho} = \frac{1 \cdot (5^2+1)}{1} = 26$$

- Calcolo del guadagno minimo del regolatore

$$\bar{\rho} = \bar{\mu}_R 260 = 26 \Rightarrow \bar{\mu}_R = 0.1$$



Polo a ciclo aperto instabile.

$$G(s) = \frac{260(s+1)}{(s-1)(s^2+10s+26)} \qquad R(s) = M_R$$

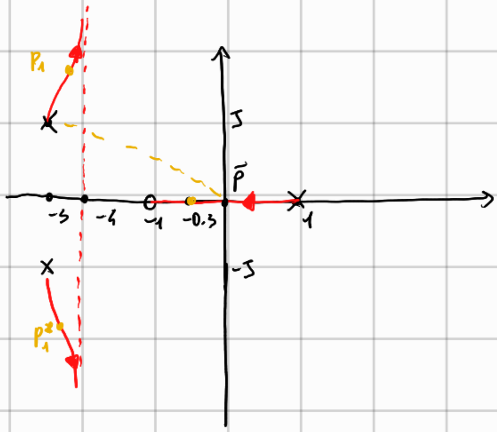
$$L(s) = \frac{260(s+1)M_R}{(s-1)(s^2+10s+26)} \qquad P = M_R \cdot 260$$

1) TRACCIO LUOGO

Considero luogo diretto sempre perché altrimenti instabilizzabile

2 rami vanno agli asintoti verticali.

$$x_a = \frac{1}{2}(1-5-5+1) = -4$$



3) Trovo $\bar{P}$ min che mi porta polo nell'origine. O uso Routh oppure uso regola di punteggiatura del luogo.

$$\bar{P} = \frac{M_1 M_2 M_3}{\lambda_1} = \frac{\prod_{i=1}^{n}|s-p_i|}{\prod_{i=1}^{m}|s-z_i|} = \frac{1 \cdot \overset{\sqrt{26}\cdot\sqrt{26}}{26}}{1} = 26 = 260\bar{M}_R \Rightarrow \bar{M}_R = 0.1$$

M_2 e M_3 sono uguali tra loro. $M_2^2 = 5^2 + 1^2$ per pitagora.

10) Provo a trovare $\bar{P}$ per avere polo su asse reale a -0.5.

$$\bar{P} = \frac{M_1 M_2 M_3}{\lambda_1} = \frac{1.5 \cdot M_2 \cdot M_3}{0.5} = 3M_2^2 = 3\cdot(4.5^2+1^2) = 63.75 = 260\bar{M}_R$$

• P_1 e P_1^* come li trovo? Sono le radici a ciclo chiuso.

Radici di $D(s) + \bar{P}N^*(s)$ che è di grado 3 (quello del ciclo aperto)

$$D(s) + \bar{P}\underbrace{N^*(s)}_{(s+1)} = (s-1)(s^2+10s+26) + \bar{P}(s+1) =$$
$$= s^3 + 9s^2 + 79.75s + 37.75$$

Le radici del polinomio sono $-0.5, P_1, P_1^*$. Per trovare P_1 e P_1^* faccio la divisione tra polinomi.

Quindi ottengo $(s+0.5)(s^2 + \underbrace{8.5}_{2\xi\omega_n}s + \underbrace{75.5}_{\omega_n^2})$ $\quad \omega_n = \sqrt{75.5} \simeq 8.7 \quad \xi = \frac{8.5}{2\omega_n} \simeq 0.49$

Esempio 3

- Sia dato un sistema di controllo in retroazione con processo

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$

e si voglia progettare un regolatore che consenta di soddisfare i requisiti:

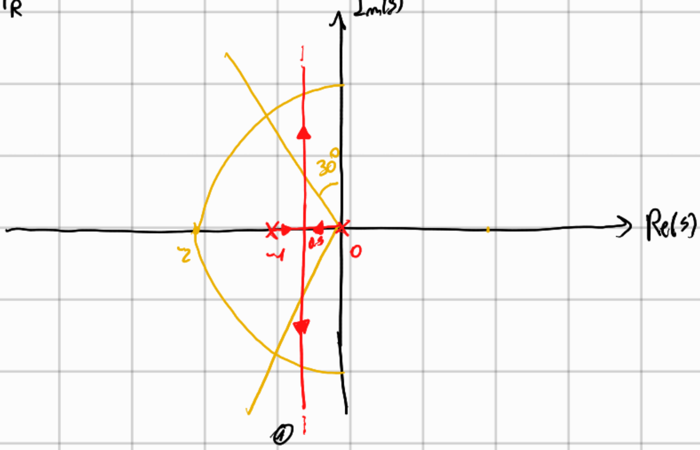
  - errore nullo a regime in risposta a riferimenti a gradino ho già polo che dà tipo 1
  - il sistema retroazionato presenti due poli dominanti con pulsazione naturale 2 rad/s e smorzamento maggiore o uguale a 0.5

- La specifica sulla precisione statica (sistema di tipo 1) ci dice che il regolatore può essere un puro guadagno μ_R
- La 2° specifica richiede che i poli a ciclo chiuso giacciano sulla semicirconferenza (nel semipiano sinistro) di raggio 2 ma all'interno di un settore la cui frontiera forma un angolo pari a $\arccos 0.5 = 60°$ con l'asse reale negativo

$G(s) = \frac{10}{s(s+1)}$ $\qquad \omega_n = 2 \text{ rad/s} \qquad \xi \geq 0.5$

$R(s) = M_R$

Poli devono appartenere a circonferenza per avere $\omega_n = 2$ e trovarsi all'interno del triangolo per garantire $\xi \geq \bar{\xi}$.



① In generale, se ho polo in origine e in p ho sempre punto doppio in $p/2$: devo trovare $\gamma(x) = x(x-p) \Rightarrow \gamma'(x) = (x^2 - px)' = 2x - p = 0 \Rightarrow x = \frac{p}{2}$

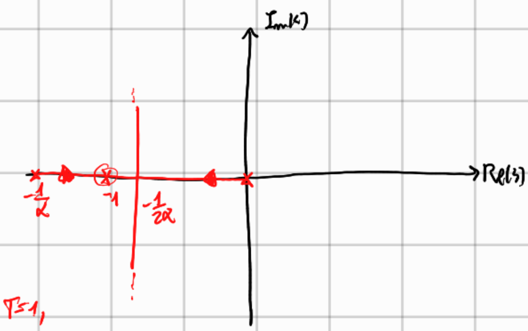
Qui $p = 10 M_R$. Si vede che non interseco circonf. di raggio 2 al di fuori della regione corretta. Non va bene. Quindi devo spostare a sinistra il luogo delle radici. Cioè devo aumentare la banda del sistema a ciclo chiuso.

Devo quindi usare rete anticipatrice.

$R_2(s) = \frac{1+sT}{1+\alpha T} \qquad 0<\alpha<1, \quad T>0$

Quindi, $L(s) = \frac{\overbrace{10 M_R \frac{T}{\alpha}}^{P}(s + 1/T)}{s(s+1)(s+1/\alpha T)}$ $\qquad$ Perché ho fatto questo? Uso la strategia della cancellazione.

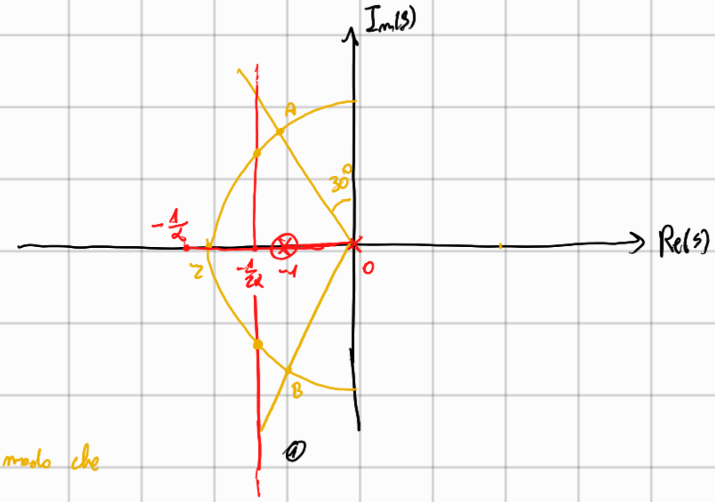
Vediamo perché:



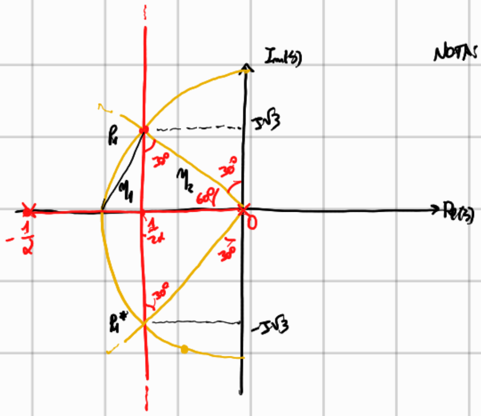
Se scegliessi zero in -1, cioè $T=1$,

ho polo in $-\frac{1}{\alpha}$. Quali punti dell'asse reale appartengono al luogo? Gli stessi di prima, ma ho un segmento più ampio. Ho punto doppio in $-\frac{1}{2\alpha}$.

Devo scegliere α in modo che ramo interseca circonferenza di raggio 2 all'interno della zona corretta.



Provo a fare in modo che
intersezione accada su A e B.



NOTA: ho solo 2 poli quindi

$P_1 = -R \cdot \sin 30° + j\cos 30°$

$= -1 + j\sqrt{3}$

$\Rightarrow -\frac{1}{2\alpha} = -1 \Rightarrow \boxed{\alpha = 0.5}$

Come calcolo $\bar{\rho} = \eta_1 \cdot \eta_2 = 2 \cdot 2 = 4$ PROGETTO COMPLETO. $\xi = 0.5$

$\uparrow$ $\qquad\qquad\qquad \uparrow R$

Non serve la distanza da poli e zeri cancellati perché si semplificano

NOTA: $\eta_1 = 2$ perché ho triangolo equilatero

$\bar{\rho} = \frac{10 \bar{M}_R}{\alpha} T = \frac{10}{0.5} \bar{M}_R = 4 \Rightarrow 20 \bar{M}_R = 4$

$\bar{M}_R = 0.2$

$R(s) = 0.2 \cdot \frac{1+s}{1+s \cdot 0.5}$

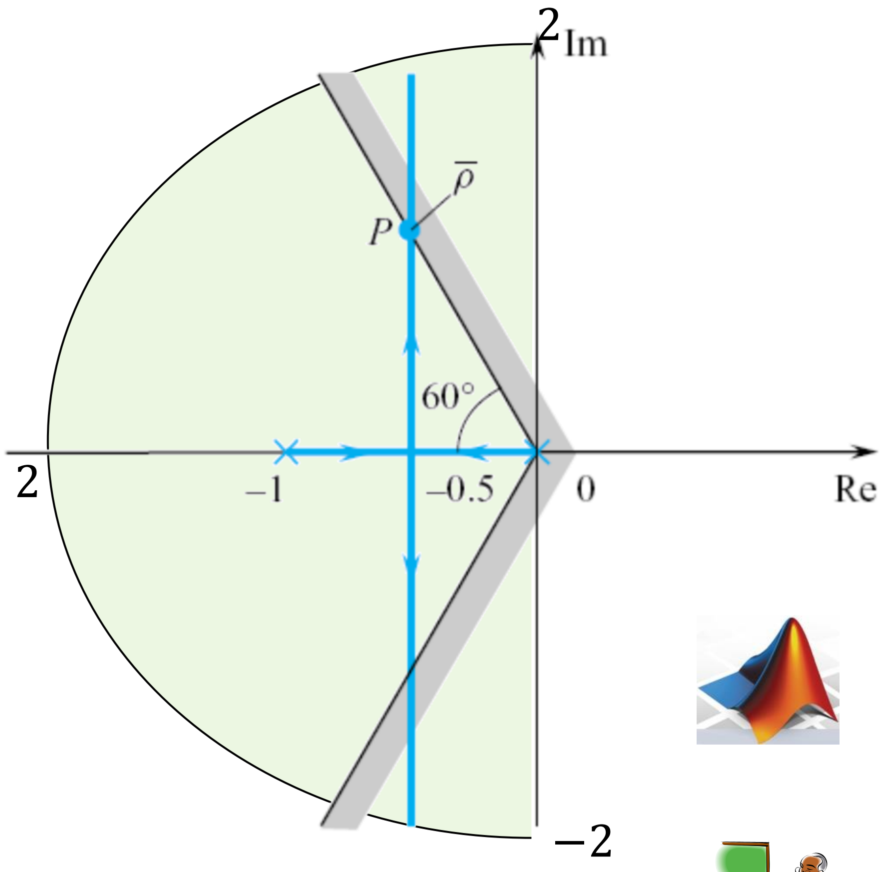
Esempio 3

- Il regolatore può essere puramente proporzionale

$$R(s) = \mu_R$$

- Tracciando il ldr si vede che non c'è nessun valore di $\rho = 10\mu_R$ che consente di rispettare le specifiche dinamiche (dentro al settore e sulla semicirconferenza)
- Occorre allargare la banda del sistema a ciclo chiuso senza peggiorare il margine di fase (smorzamento dei poli a c.c.)
  - Introduciamo una rete anticipatrice (coppia zero-polo)

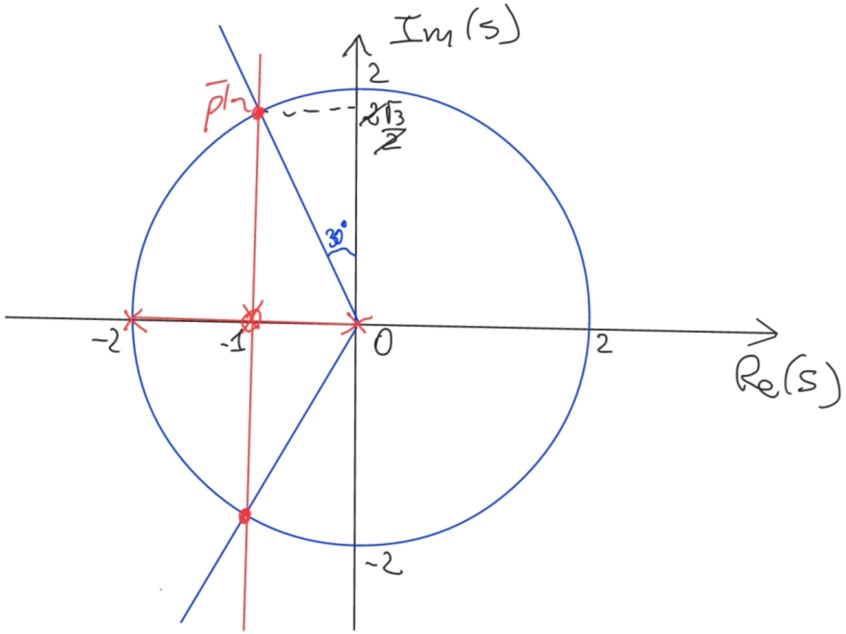
$$R_2(s) = \frac{1+sT}{1+s\alpha T}, \alpha < 1$$



Esempio 3

- Operando per cancellazione, si sceglie lo zero coincidente col polo del processo ($T = 1$), così la nuova $L(s)$ è

$$L(s) = \mu_R \frac{10}{s(s+1)} \frac{1+s}{1+s\alpha} = \rho \frac{1}{s(1+s\alpha)} = \frac{\rho'}{s(s+1/\alpha)}, \qquad \rho' = \frac{\rho}{\alpha} = \frac{10\mu_R}{\alpha}$$



- Il nuovo punto doppio è sempre a metà tra i due poli reali in $-1/2\alpha$ e quindi scegliendo di avere i poli a ciclo chiuso con modulo 2 e smorzamento pari a $\operatorname{asin} 30° = 0.5$, essi si troveranno in $-1 \pm j\sqrt{3}$ e quindi il polo in $-1/\alpha$ deve stare in $-2 \Rightarrow \alpha = 0.5$
- Il valore di ρ' corrispondente ai poli in tale posizione è

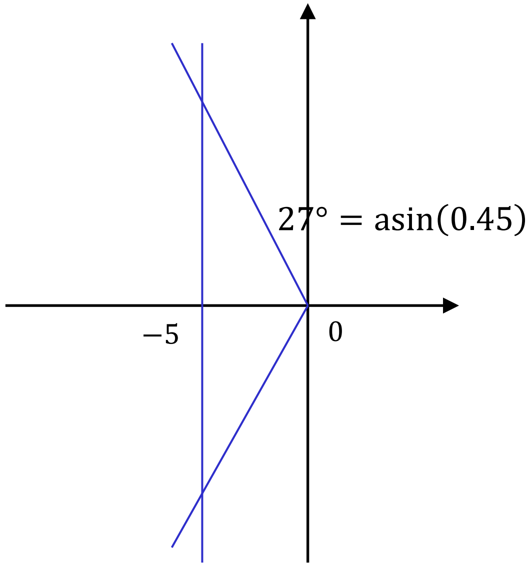
$$\bar{\rho}' = 2 \cdot 2 = 4 = \frac{10\mu_R}{\alpha} \Rightarrow \mu_R = \frac{4\alpha}{10} = 0.2$$

- Regolatore finale: $R(s) = 0.2\frac{s+1}{1+s0.5} = 0.4\frac{s+1}{s+2}$

Esempio 4

- Sia dato un sistema di controllo in retroazione con processo

$$G(s) = \frac{10}{s-1}$$



e si voglia progettare un regolatore che consenta di soddisfare i requisiti:

  - astatismo a disturbi costanti
  - sovraelongazione inferiore al 20% $\Rightarrow$ legato a ξ
  - tempo di assestamento inferiore a 1 s
  - attenuazione di almeno 20 dB di un disturbo di misura sinusoidale alla pulsazione di 100 rad/s

- La prima specifica implica un sistema di tipo 1, quindi: $R(s) = \mu_R/s$

- Le specifiche dinamiche richiedono l'appartenenza ad un settore angolare corrispondente all'angolo $\mathrm{asin}(0.45) \simeq 27°$

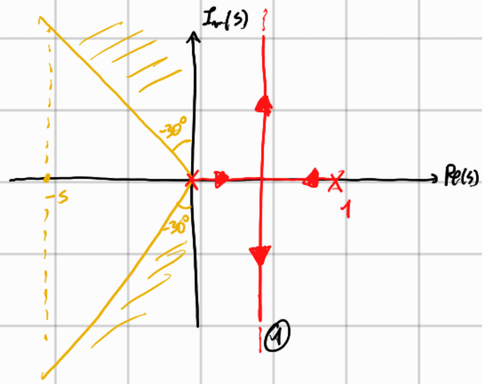
e al semipiano a sinistra della retta ad ascissa circa $-\frac{5}{1} = -5$

$G(s) = \frac{10}{s-1}$ Astatismo, $S\% \le 20\%$, $T_a \le 1s$

Attenuaz. di disturbo in misura di 100 rad/s di 20 dB

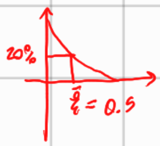
$L(s) = \frac{10\,\mu_R}{s(s-1)}$ NOTA: $P = 10\mu_R$

Serve polo per astatismo



- $T_a \le 1 \Rightarrow \frac{\ln(0.01)}{T_a} = -\frac{5}{1} = \bar{\sigma}$

$S\% \le 20\%$



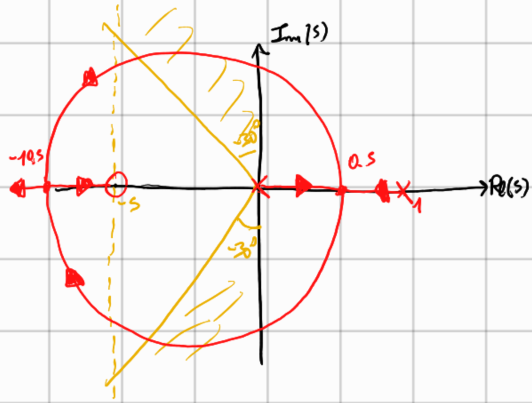
Quindi, $\xi > 0.5 \Rightarrow$ Angolo é 30° verticale

(1) Un regolatore puramente integrale non ci consente di rispettare nemmeno la stabilità.

Posso usare uno zero che attira tutto del luogo. Piazzo zero nel semipiano sinistro, che attira i rami del luogo

Metto polo in -5

Ho 1 solo asintoto, in $-\infty$



Quali rami sono nel luogo ora?

Deve quindi nascere un punto doppio nel semipiano sinistro, quindi i rami devono deviare. Uno dei rami va allo zero e uno all'infinito.

Punto doppio dipende dalla posizione dello zero.

Calcoliamo punto doppio.

[Si dimostra che con queste configuraz. ottengo una circonferenza]

$L(s) = \frac{P(s+5)}{s(s-1)}$

$\gamma(x) = \frac{x(x-1)}{x+5}$ $\quad 0 = \frac{d}{dx}\gamma(x) = \frac{(2x-1)(x+5) - x^2 + x}{(x+5)^2}$

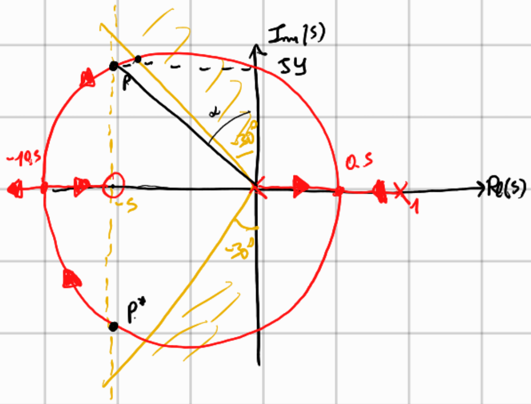
$\Rightarrow x^2 + 10x - 5 = 0$ $\quad x = -5 \pm \sqrt{25+5} = -5 \pm \sqrt{30} \begin{cases} \sim 0.5 \\ \sim -10.5 \end{cases}$

SONO I DUE PUNTI DOPPI DEL LUOGO DIRETTO.

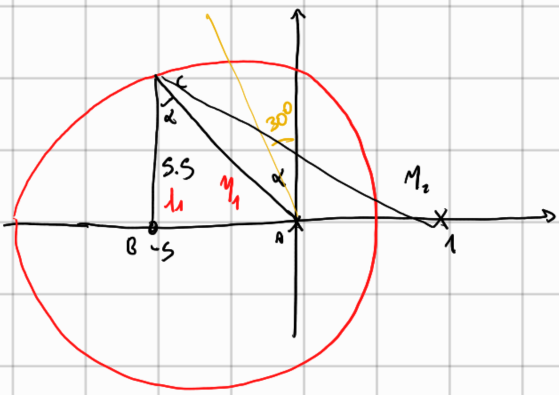
Il raggio della circonferenza è uguale a circa 5.5.

• Che succede se scelgo i poli propri con parte reale −5? Il punto dovrebbe essere ammissibile.

Verifichiamo che l'angolo formato dal polo è > 30°.



$R = 5.5$



$$\underset{AB}{5} = \underset{BC}{5.5}\tan\alpha$$

$$\alpha = \arctan\frac{5}{5.5} = 42^\circ$$

$\alpha > 30°$ di specifica.

Calcolo $\bar{p}$: distanze da poli e zeri:

$$\bar{p} = \frac{\overbrace{\sqrt{5.5^2+5^2}}^{M_2}\cdot\sqrt{6^2+5.5^2}}{5.5} = 11 = 10\mu_R \Rightarrow \mu_R = 1.1$$

Esempio 4

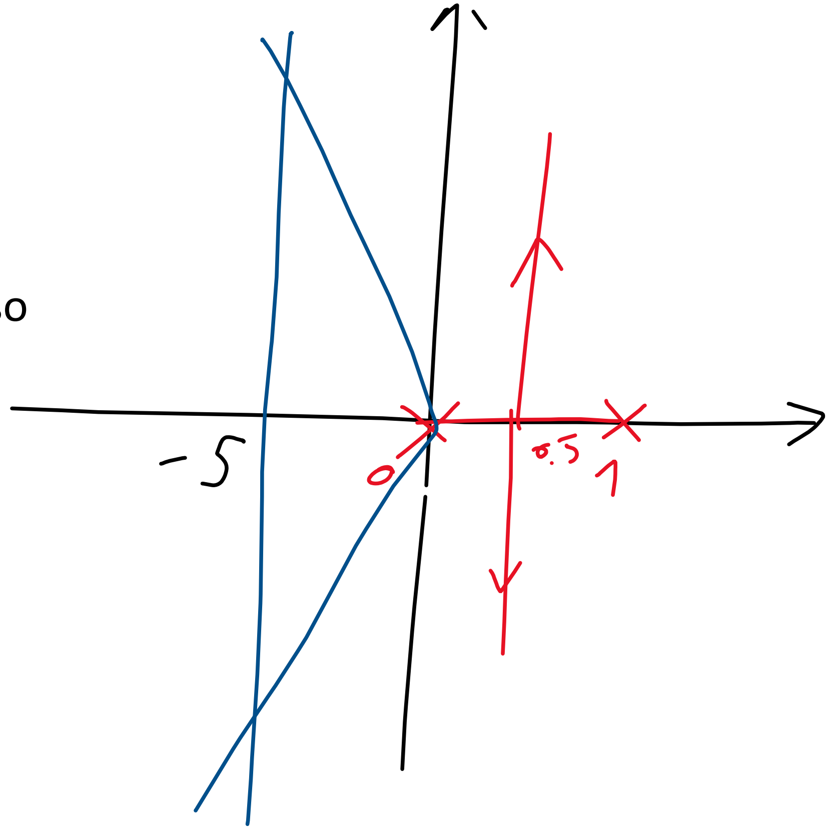
- Il regolatore per ora è

$$R(s) = \frac{\mu_R}{s}$$

a cui corrisponde il ldr in figura, che genera un sistema a ciclo chiuso instabile

- Occorre attirare i rami del luogo nel semipiano sinistro, occorre almeno uno zero negativo

$$R(s) = \frac{\mu_R(s - z)}{s}$$



Esempio 4

- Scegliendolo in $z = -5$, il luogo si modifica come in figura

$$L(s) = \frac{10\mu_R(s+5)}{s(s-1)}$$

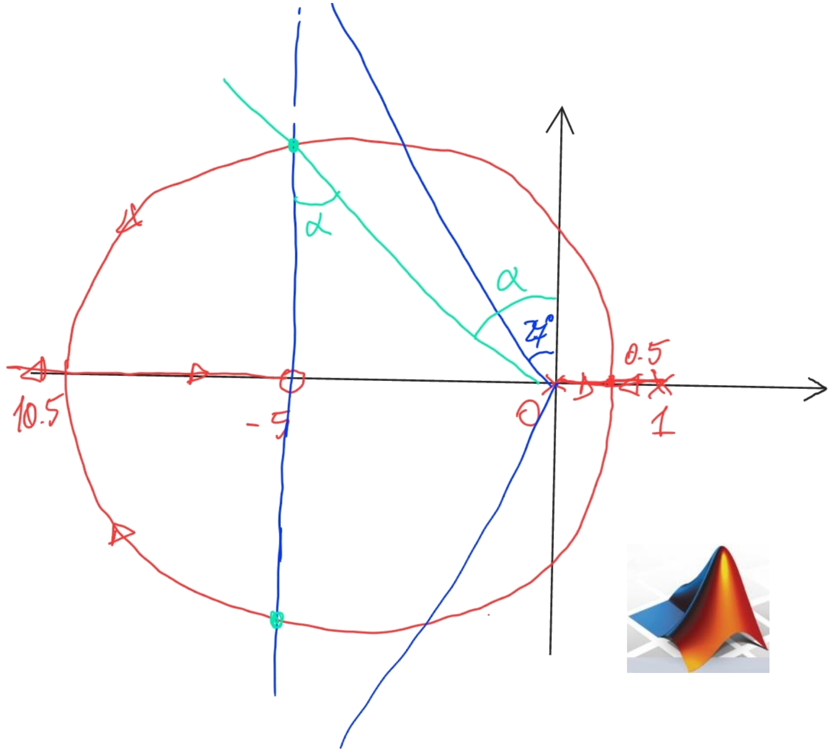
  - Nasce un cerchio con centro nello zero e raggio pari alla distanza dal punto doppio tra 0 e 1

$$\frac{d}{dx}\frac{x(x-1)}{x+5} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 10x - 5 = 0 \rightarrow x \simeq \begin{cases} -10.5 \\ 0.5 \end{cases}$$

  - Si può decidere di fissare i poli a ciclo chiuso all'intersezione della retta a -5 con la circonferenza di centro in -5 e raggio $\simeq 5.5$, quindi in$-5 \pm j5.5$
  - Il guadagno ad essi corrispondenti è

$$\rho = \frac{\sqrt{5^2 + 5.5^2}\sqrt{6^2 + 5.5^2}}{5.5} \simeq 11 = 10\mu_R \Rightarrow \mu_R = 1.1$$

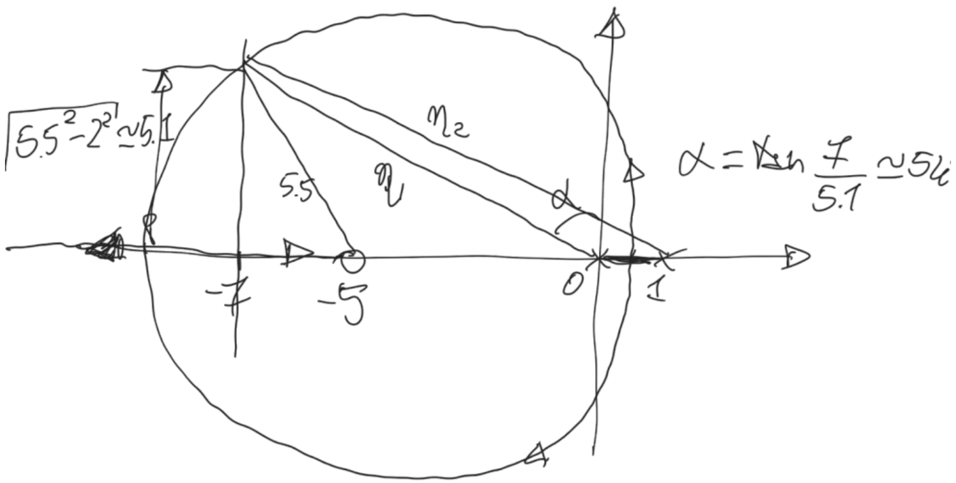
  - La verifica sulla risposta indiciale mostrerà un $T_{a_1} \simeq 1$ s e una $s\% \simeq 26\%$

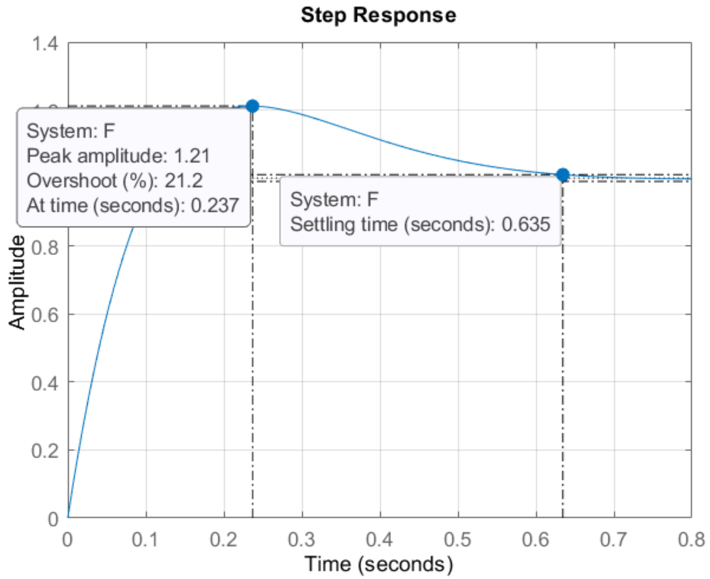


Esempio 4

- Per ridurre la sovraelongazione, sarà sufficiente aumentare un po' il guadagno per spostare i poli a sinistra di -5 con uno smorzamento maggiore, ad esempio con parte reale -7 e quindi si troveranno sempre sulla circonferenza in

$$-7 \pm j\sqrt{5.5^2 - 2^2} \simeq -7 \pm j5.1$$





- Il nuovo guadagno del regolatore è

$$\rho = \frac{\eta_1 \eta_2}{5.5} = \frac{\sqrt{7^2 + 5.1^2}\sqrt{8^2 + 5.1^2}}{5.5} \simeq 15 = 10\mu_R \Rightarrow \mu_R = 1.5$$

- La fase di verifica mostra un tempo di assestamento di circa 0.65 s e una sovraelongazione percentuale del 21% (accettabili)