

W

Capitolo 7 – Risposta in frequenza

Risposta alla sinusoide

è rappresentativa del sistema

↳ rappresentazioni: risposta impulso, f di Bode, risposta in frequenza, ss, ih

Importanza della risposta sinusoidale

- Ampie classi di segnali possono essere scomposti in sovrapposizione di segnali sinusoidali
 - Segnali periodici (serie di Fourier)
 - Segnali trasformabili secondo Fourier
- Lo studio della risposta a segnali sinusoidali ci permette di capire proprietà importanti del comportamento dinamico del sistema
 - Effetto filtrante
 - Banda passante
- La risposta a segnali sinusoidali ci permetterà di introdurre un altro tipo di modello del sistema (**risposta in frequenza**) che ha il vantaggio di essere una funzione di variabile reale (anziché complessa come la fdt), quindi facilmente rappresentabile graficamente in varie forme
 - Diagrammi di Bode, diagrammi polari, diagrammi di Nichols
 - L'uso della rappresentazione grafica è di importanza cruciale sia nell'analisi dei sistemi dinamici (cavarne e prevederne il comportamento) che nella sintesi dei sistemi di controllo (progettazione di un sistema dinamico con comportamento desiderato)

Calcolo della risposta (a regime) alla sinusoidale

- Dato un sistema LTI asintoticamente stabile con fdt $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ e dato l'ingresso

$$u(t) = A_U \sin \omega t, \quad t \geq 0$$

- Calcoliamone la risposta forzata

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s) \frac{A_U \omega}{s^2 + \omega^2}$$

Combinazione dei modi del sistema → dell'ingresso



Esempio

- Assumendo, per semplicità (ma non è necessario), che i poli di $G(s)$ siano distinti p_i , lo sviluppo in fratti semplici è

$$Y(s) = \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{s - p_i} + \frac{r}{s - j\omega} + \frac{r^*}{s + j\omega},$$

- Antitrasformiamo secondo Laplace

$$y(t) = \sum_{i=1}^n r_i e^{p_i t} + 2 \frac{A_U}{2} |G(j\omega)| \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} + \angle G(j\omega) \right) = \sum_{i=1}^n r_i e^{p_i t} + A_U |G(j\omega)| \sin(\omega t + \angle G(j\omega))$$

$$\text{con il residuo complesso } r = (s - j\omega)Y(s) \Big|_{s=j\omega} = G(j\omega) \frac{A_U \omega}{j\omega + j\omega} = \frac{A_U}{j2} G(j\omega)$$

$$1 - \frac{r}{2} + \angle G(j\omega)$$

- Dunque $y(t) = y_t(t) + y_r(t)$, con $y_t(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ e quindi la risposta a regime (indipendente dallo stato iniziale) è ancora un segnale sinusoidale

$$y_r(t) = A_U |G(j\omega)| \sin(\omega t + \angle G(j\omega)) = A_Y \sin(\omega t + \phi_Y)$$

$$A_Y = A_U |G(j\omega)|$$

$$\phi_Y = \phi_U + \angle G(j\omega)$$

$$|G(j\omega)| = A_Y / A_U$$

$$\angle G(j\omega) = \phi_Y - \phi_U$$

Notis a regime il mb segnale avrà la STESSA pulsazione del segn. di ingresso

Se ciò non accade, ha un sistema non lineare.

* ϕ_0 = fase del sdm di ingresso.

Funzione di «risposta armonica» o di «risposta in frequenza»

- Dato un sistema LTI asintoticamente stabile con fdt $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$, si definisce «funzione di risposta in frequenza» la funzione complessa di variabile reale

$$G(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega} = C(j\omega I - A)^{-1}B + D$$

\cancel{X} sistema è A.S.
↑

- È dunque la restrizione all'asse immaginario della fdt, che è certamente ben definita se tutti i poli sono a $Re(\lambda) < 0$
 - Tale funzione può essere formalmente estesa al caso di sistemi instabili, purché si escludano i punti dell'asse immaginario corrispondenti ad eventuali poli; tuttavia la sua interpretazione è meno ampia che per i sistemi stabili (vedremo)
- Essendo le matrici A, B, C, D reali, vale la proprietà

$$G(-j\omega) = G^*(j\omega)$$

→ I pmò appurano solo nro $J\omega I$.

- Dunque nota la $G(j\omega)$ per $\omega > 0$, è nota anche quella per $\omega < 0$. Quindi la si rappresenta (quasi) sempre solo per $\omega > 0$
- Si può estendere anche al caso di sistemi con ritardo (a dimensione infinita)

$$y(t) = u(t - \tau) \Rightarrow G(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega} = e^{-j\omega\tau} \Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)| = 1 \\ \angle G(j\omega) = -\omega\tau \end{cases}$$

Se ω_0 fosse sempre negativa

- La risposta al segnale sinusoidale $u(t) = A_U \sin \omega_0 t$ di questo sistema è ovviamente

$$y(t) = u(t - \tau) = A_U \sin \omega_0(t - \tau) = A_U \sin(\omega_0 t - \omega_0 \tau) = A_U |e^{-j\omega_0 \tau}| \sin(\omega_0 t + \angle e^{-j\omega_0 \tau})$$

→ Per le formule derivate
Anche?

- E ciò vale $\forall t$ e non solo asintoticamente

↳ Stessa sinusoidale ma con ritardo

↳ Vale $\forall t$.
Si può parlare di AS.

Risposta a segnali periodici

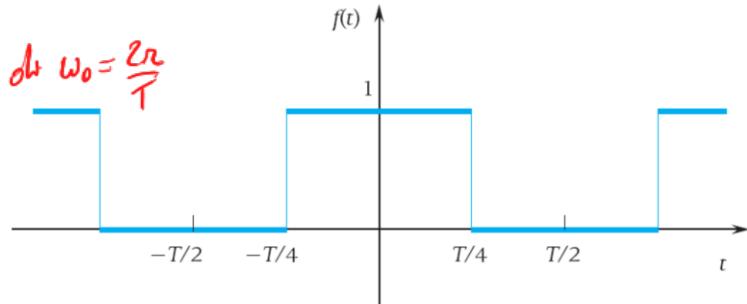
- Un segnale periodico di periodo T , $u(t) = u(t + T)$, è sviluppabile in serie di Fourier (se differenziabile o con discontinuità del I ordine)



$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} U_n e^{jn\omega_0 t}$$

se $u(t) \in \mathbb{R}$ → **valore medio**
 $= U_0 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} |U_n| \cos(n\omega_0 t + \angle U_n)$ → C.L. di segnali sinusoidali con pulsazioni multiple di $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

M(t) limitato, periodico, discontinuo ma senza discontinuità sp.

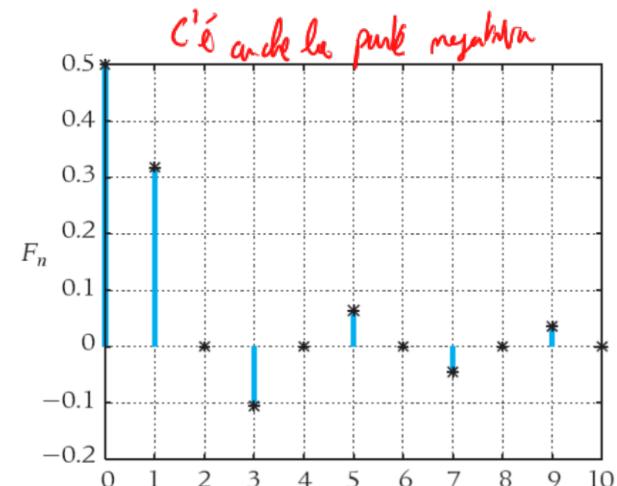


- Dove la successione $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}_0} \in \mathbb{C}$ dei coefficienti di Fourier è detta «spettro» del segnale $u(t)$ ed è definita come

$$U_n = \frac{1}{T} \int_T u(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

→ **multiple di pulsaz. unita**

- Le funzioni $|U_n| \cos(n\omega_0 t + \angle U_n)$ sono dette «armoniche» del segnale di ingresso e, se $U_n = 0$, per $n < n_1$ e $n > n_2$, allora $\omega_0(n_2 - n_1)$ si chiama «larghezza di banda» del segnale $u(t)$ *e nel segnale si dice a banda stretta*
- La successione reale $\{|U_n|\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ è detta «spettro di ampiezza» ed è infinitesima
- La successione reale $\{\angle U_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ è detta «spettro di fase»



Funzione paritaria \Rightarrow unione di due successioni reali
 Da continuo a discreto

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} U_m e^{j m \omega_0 t} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |U_m| e^{j(m \omega_0 t + \angle U_m)} =$$

Molla da punto $m=0$

$$= M_0 + \sum_{m=1}^{-1} |U_m| e^{j(m \omega_0 t + \angle U_m)} + \sum_{m=1}^{+\infty} |U_m| e^{j(m \omega_0 t + \angle U_m)} =$$

$$= M_0 + \sum_{m=1}^{+\infty} |U_{-m}| e^{j(-m \omega_0 t + \angle U_m)} + \sum_{m=1}^{+\infty} |U_m| e^{j(m \omega_0 t + \angle U_m)} =$$

$$= M_0 + \sum_{m=1}^{\infty} |U_m| \left(e^{j(m \omega_0 t + \angle U_m)} + e^{-j(m \omega_0 t + \angle U_m)} \right) =$$

$$= M_0 + \sum_{m=1}^{\infty} 2 |U_m| \cos(m \omega_0 t + \angle U_m)$$

Now: Se $s(t)$ reale, $|U_{-m}| = |U_m|$, perché $U_m = \frac{1}{T} \int_T s(t) e^{-j m \omega_0 t} dt$
 $\angle U_{-m} = -\angle U_m$

con $M_0 = \frac{1}{T} \int_T s(t) dt = \text{valor medio del segnale } s(t)$

Risposta a segnali periodici

- In virtù della linearità del sistema, la risposta a regime ad un segnale periodico scomposto in serie di armoniche

$$u(t) = U_0 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} |U_n| \cos(n\omega_0 t + \angle U_n)$$

- È combinazione della risposta ad una costante (U_0) e della risposta alle armoniche sinusoidali, quindi → Risposta a regime

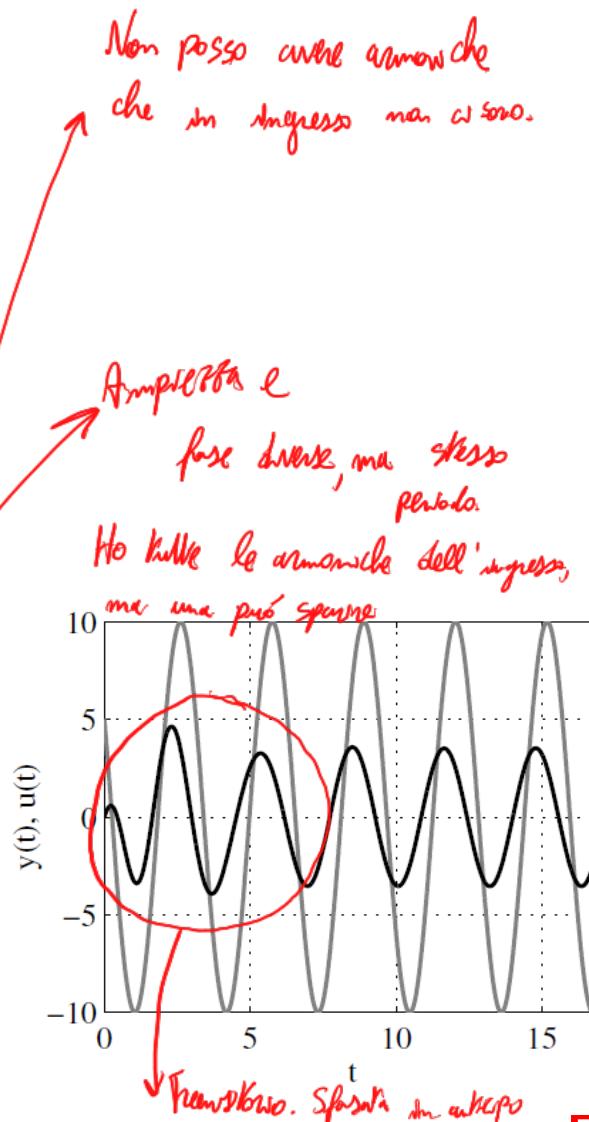
$$y(t) = G(0)U_0 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} |U_n| |G(jn\omega_0)| \cos(n\omega_0 t + \angle U_n + \angle(G(jn\omega_0)))$$

- che è ancora un segnale periodico le cui armoniche sono «pesate» per la risposta armonica valutata in ciascuna frequenza $n\omega_0$

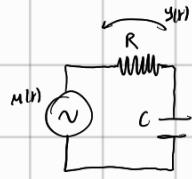
- Esempio
 - Facciamo vedere come, anche se è impossibile applicare segnali di ingresso da $t_0 \rightarrow -\infty$, spesso è possibile approssimare la risposta di un sistema con la risposta a regime

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+s+10}, \quad u(t) = 10 \cos(2t + \pi/3)$$

A.S.



ESEMPIO



$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s}{s + \frac{1}{\sqrt{LC}}}, \quad \gamma^2 = \frac{1}{LC}$$

$$G(s) = \frac{\gamma s}{1 + s^2 \gamma^2}$$

$$u(t) = U_{\text{sin}}(\omega_0 t)$$

$$? y(t)$$

$$y_e(t) = U |G(s_{\text{sub}})| \text{sin}(\omega_0 t + \angle G(s_{\text{sub}})) = \frac{U |s \omega_0 \gamma|}{|1 + s^2 \gamma^2|} \text{sin}\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2} - \text{atan}(\omega_0 \gamma)\right) =$$

$$= U \frac{\omega_0 \gamma}{\sqrt{1 + \omega_0^2 \gamma^2}} \text{sin}\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2} - \text{atan}(\omega_0 \gamma)\right)$$

Caso $\omega_0 \ll \frac{1}{\gamma} \iff \omega_0 \gamma \ll 1$:

$\Leftarrow \Leftarrow$

Già $y_e(t) = \gamma u(t)$ si comporta come derivatore

$$\xrightarrow{\frac{1}{\gamma}}$$

Caso $\omega_0 \gg \frac{1}{\gamma} \iff \omega_0 \gamma \gg 1$

$$y_e(t) \approx U \text{sin}(\omega_0 t) = u(t)$$

Sistema passa allo stato di equilibrio e fissa.

Per freq. basse distorsione ammessa e fissa.

Risposta ad un segnale sinusoidale di un sistema non lineare

- Dato il sistema in forma i-s-u

$$\dot{x}(t) = -2.5x(t)u(t), \quad x(0) = 1$$

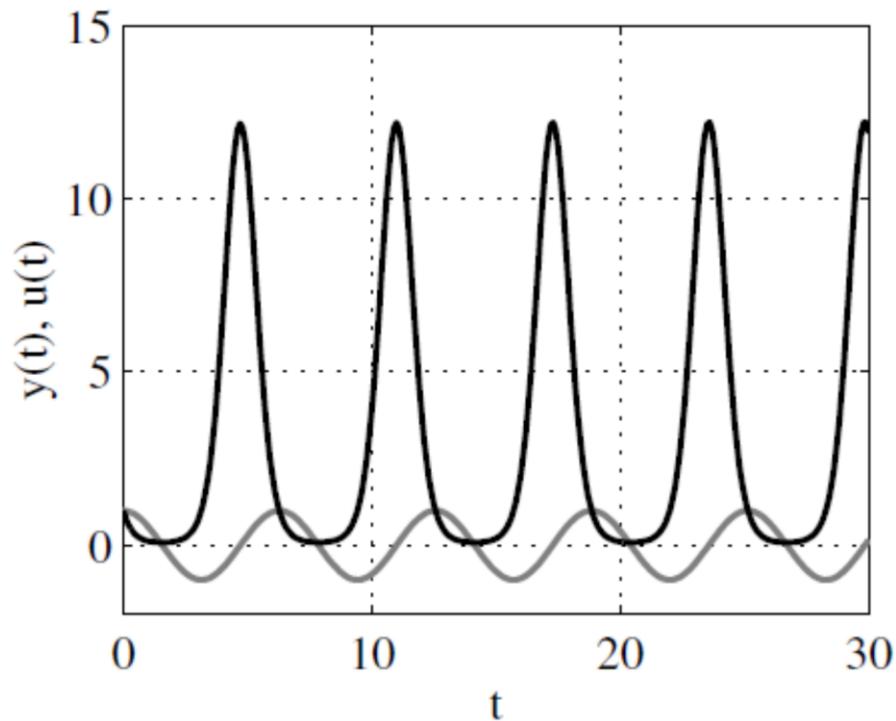
$$y(t) = x(t)$$

- Con ingresso $u(t) = \cos t$
- La risposta va calcolata necessariamente nel dominio del tempo

$$\frac{dy}{dt} = -2.5y(t)u(t) \Rightarrow \frac{dy}{y} = -2.5u(t) \Rightarrow \int_{y(0)}^{y(t)} \frac{1}{y} dy = \int_0^t -2.5 \cos t dt \Rightarrow$$

$$\ln y(t) - \ln y(0) = 2.5[-\sin t]_0^t = -2.5 \sin t \Rightarrow y(t) = e^{-2.5 \sin t}, t \geq 0$$

- La risposta è periodica ma NON sinusoidale
 - Ha infinite armoniche che in ingresso non ci sono
- I sistemi non lineari dunque «distorcono» i segnali di ingresso nel senso che l'uscita è non sinusoidale pur in risposta ad un ingresso sinusoidale
- I sistemi LTI, invece, non sono in grado di generare armoniche diverse da quelle in ingresso



DISTORSIONE:

generazione di armoniche non presenti nel ingresso.

Più a calcolare la funzione di risposta a regime di segnali. SEMPRE A REGIME

Richiami sulla trasformata di Fourier

- Data una funzione $f: t \in \mathbb{R} \rightarrow f(t) \in \mathbb{C}$, la sua trasformata di Fourier è la funzione $F: \omega \in \mathbb{R} \rightarrow F(\omega) \in \mathbb{C}$

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

- La trasformazione è invertibile (se $f(t)$ è sufficientemente regolare)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

- Se la funzione $f(t)$ è a valori reali, allora è chiaro che $F(-\omega) = F^*(\omega)$ e si ha

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 F(\omega)e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} F(-\omega)e^{-j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} |F(\omega)|e^{j\angle F(\omega)}e^{j\omega t} + |F^*(\omega)|e^{-j\angle F(\omega)}e^{-j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} |F(\omega)|(e^{j\angle F(\omega)}e^{j\omega t} + e^{-j\angle F(\omega)}e^{-j\omega t}) d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} |F(\omega)| \cos(\omega t + \angle F(\omega)) d\omega \end{aligned}$$

- Una funzione reale $f(t)$ (non periodica) è scomponibile in sovrapposizione di funzioni sinusoidali
 - Ma queste non sono un insieme numerabile, ma continuo $\omega \in [0, +\infty)$

Ma continuo a chiamare armature.

Somma. Catena di sinusoidi

Richiami sulla trasformata di Fourier

Proprietà della trasformata di Fourier

- Linearità:
- Dualità:
- Funzioni pari:
- Funzioni dispari:
- Modulazione:

- Convoluzione nel dominio del tempo:

- Uguaglianza di Parseval:

Relazione con la trasformata di Laplace

- Se $f(t) = 0, \forall t < 0$

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}[f(t)e^{-\sigma t}]$$

- Se $f(t) = 0, \forall t < 0$ e la sua trasformata di Laplace ha tutti poli a parte reale negativa (ascissa di convergenza negativa, dunque converge sull'asse immaginario) allora

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \mathcal{L}[f(t)]_{s=j\omega}$$

- Se $f(t)$ è la risposta impulsiva $g_y(t)$ di un sistema asintoticamente stabile (per cui $G(s) = \mathcal{L}[g_y(t)]$ ha tutti poli a $\text{Re}(.) < 0$) si ha

$$G_y(\omega) = \mathcal{F}[g_y(t)] = G(s) \Big|_{s=j\omega} = G(j\omega)$$

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$\mathcal{F}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha F(\omega) + \beta G(\omega)$$

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) \Rightarrow f(-\omega) = 1/2\pi \mathcal{F}[F(t)]$$

$$f(t) \text{ pari} \Rightarrow F(\omega) \in \mathbb{R}, \omega \geq 0$$

$$f(t) \text{ dispari} \Rightarrow jF(\omega) \in \mathbb{R}, \omega \geq 0$$

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t} f(t)] = F(\omega - \omega_0)$$

$$\mathcal{F}[f(t) * g(t)] = \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right] = F(\omega)G(\omega)$$

se $f(t)$ è a quadrato sommabile, allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

alle dom. appuntate
al semestre di convergenza

Funz. di risposta armica è un comp.
con le funz. di resp. impulsiva → rappresentata
del segnale p. 9

Risposta (a regime) di un sistema LTI a segnali trasformabili secondo Fourier

- Consideriamo un ingresso $u(t)$ sufficientemente regolare perché esista la sua trasformata di Fourier $U(\omega)$, è

$$u(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} |U(\omega)| \cos(\omega t + \angle U(\omega)) d\omega$$

- Per linearità, la risposta del sistema asintoticamente stabile con risposta armonica $G(j\omega)$ si può scrivere nella forma

$$y(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} |U(\omega)| |G(j\omega)| \cos(\omega t + \angle U(\omega) + \angle G(j\omega)) d\omega$$

- Ma $y(t)$ è a sua volta trasformabile secondo Fourier e se $Y(\omega)$ è la sua trasformata, allora è

$$y(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} |Y(\omega)| \cos(\omega t + \angle Y(\omega)) d\omega$$

- Quindi deve risultare

$$\begin{aligned} |Y(\omega)| &= |U(\omega)| |G(j\omega)| \\ \angle Y(\omega) &= \angle U(\omega) + \angle G(j\omega) \end{aligned} \Rightarrow Y(\omega) = G(j\omega)U(\omega)$$

- Cioè

- La trasformata di Fourier dell'uscita è il prodotto della funzione di risposta in frequenza per la trasformata di Fourier dell'ingresso

Somma alle risposte forzate

Uscita è regolare come
ingresso essendo stab.
di un'equiv. differenziale

$\mapsto f$

■ Interpretazione e filtraggio

- ◆ La relazione

$$Y(\omega) = G(j\omega)U(\omega) \Leftrightarrow |Y(\omega)| = |G(j\omega)||U(\omega)| \quad \angle Y(\omega) = \angle U(\omega) + \angle G(j\omega)$$

- ◆ Consente di interpretare la funzione di risposta armonica $G(j\omega)$ come il fattore che «filtrà» le «armoniche» del segnale di ingresso $U(\omega)$ in ampiezza e fase ($Y(\omega) = 0 \forall \omega: G(j\omega) = 0$)

- Se $U(\omega_0) = 0 \Rightarrow Y(\omega_0) = 0$, cioè un sistema LTI non può presentare componenti armoniche non presenti in ingresso
- L'ampiezza dello spettro $U(\omega)$ viene scalata per il modulo della funzione di risposta in frequenza $G(j\omega)$

- Se $|G(j\omega_0)| > 1 \Rightarrow |Y(\omega_0)| > |U(\omega_0)|$
- Se $|G(j\omega_0)| < 1 \Rightarrow |Y(\omega_0)| < |U(\omega_0)|$

amplificazione
attenuazione

Sistema amplifica segnali d'ingresso]
attenua]
Varia con la frequenza

- La fase dello spettro $Y(\omega)$ viene traslato, frequenza per frequenza, di una quantità pari alla fase di $G(j\omega)$
- Se $\angle G(j\omega_0) > 0 \Rightarrow \angle Y(\omega_0) > \angle U(\omega_0)$
- Se $\angle G(j\omega_0) < 0 \Rightarrow \angle Y(\omega_0) < \angle U(\omega_0)$

anticipo
ritardo

- Se la fdt $G(s)$ ha una coppia di zeri sull'asse immaginario in $s = \pm j\omega_0$, allora $G(j\omega_0) = 0$ e $Y(\omega_0) = 0$ indipendentemente dal valore dello spettro dell'ingresso in ω_0

↳ può essere solo coppia

- ◆ Tali effetti variano con la frequenza

- In alcuni intervalli di frequenze ci possono essere attenuazioni, in altri amplificazioni
- In alcuni intervalli di frequenze ci possono essere ritardi di fase, in altri anticipi di fase
- A volte queste variazioni possono essere anche molto significative! *Caso risonanza*

Esempio

- ## ◆ Sistema massa-molla-smorzatore

Rappresentazione i-u

$$m\ddot{y}(t) + \beta\dot{y}(t) + ky(t) = u(t) \Rightarrow G(s) = \frac{1}{ms^2 + \beta s + k} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{-m\omega^2 + j\beta\omega + k}$$

- Ingresso a impulso rettangolare

$$u(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < L \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

- Trasformiamo secondo Fourier e consideriamo lo spettro di ampiezza

$$|U(\omega)| = L \frac{|\sin(\omega L/2)|}{\omega L/2} = L \frac{|\sin(2\pi f \frac{L}{2})|}{2\pi f \frac{L}{2}} = L \sin(fL)$$

$\downarrow \omega > 0, \text{ phys}$

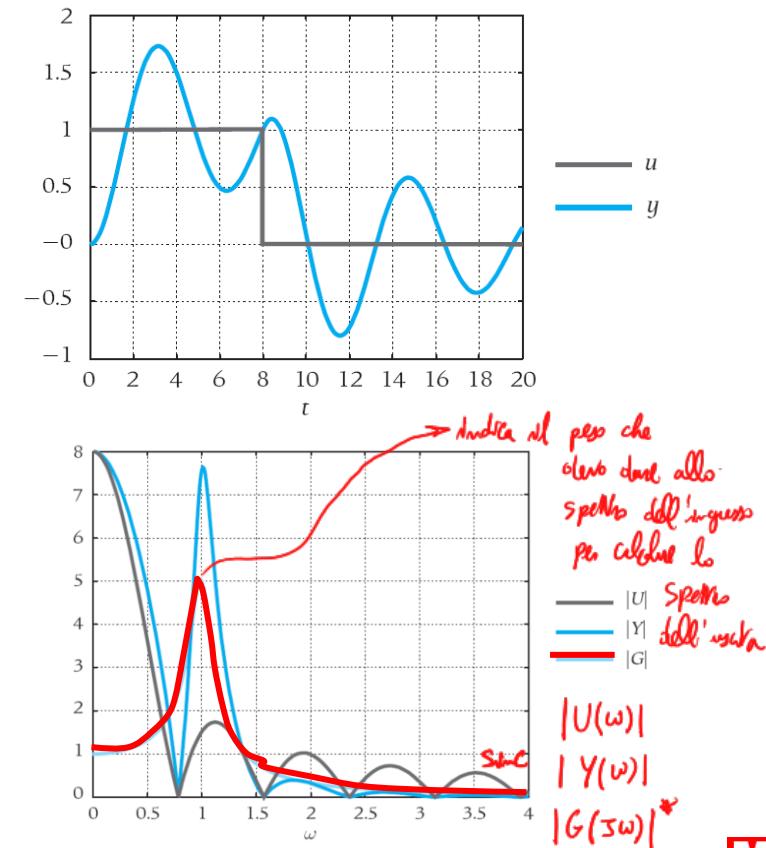


- Quindi lo spettro di ampiezza dell'uscita è

$$|Y(\omega)| = |G(j\omega)||U(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \beta^2\omega^2}} L \frac{|\sin(\omega L/2)|}{\omega L/2}$$

- ### • Fenomeno della risonanza

– Vedi esempio seguente



Servo $G(s)$ perché sottolineo che questa è la f. di trasf. reale. Quanto più alto il sistema ha $G(s)$.

MI RATI COMANDO: IMPORTANTE.

Esempio

Bilanciamento di un rotore

- Un disco di massa m che ruota, con velocità angolare costante ω , attorno ad un asse non passante per il baricentro è soggetto ad una forza di inerzia sinusoidale $u(t)$ a frequenza proporzionale alla velocità angolare. Infatti:
- Se l'asse di rotazione è elastico con costante k ed esiste un attrito con costante β , le equazioni del moto del centro dell'asse di rotazione C nel piano sono

$$m\ddot{x}_G(t) = -\beta\dot{x}_C(t) - kx_C(t)$$

$$m\ddot{x}_C(t) - m\omega^2 \cos \omega t = -\beta\dot{x}_C(t) - kx_C(t)$$

$$m\ddot{x}_C(t) + \beta\dot{x}_C(t) + kx_C(t) = m\omega^2 \cos \omega t$$

$$m\ddot{y}_G(t) = -\beta\dot{y}_C(t) - ky_C(t)$$

$$m\ddot{y}_C(t) - m\omega^2 \sin \omega t = -\beta\dot{y}_C(t) - ky_C(t)$$

$$m\ddot{y}_C(t) + \beta\dot{y}_C(t) + ky_C(t) = m\omega^2 \sin \omega t$$

