

Capitolo 7 – Risposta in frequenza

Azione filtrante dei sistemi dinamici

- I sistemi dinamici possono essere classificati in base alla «forma» del diagramma di Bode dei moduli

- Definizione di parametri caratteristici che ne quantificano la «forma»

- Modulo di risonanza M_r : è il valore massimo di $|G(j\omega)|$
- Modulo di antirisonanza M_a : il valore minimo di $|G(j\omega)|$
- Pulsazione di risonanza ω_r : è la pulsazione t.c. $|G(j\omega_r)| = M_r$
- Pulsazione di antirisonanza ω_a : è la pulsazione : $|G(j\omega_a)| = M_a$
- Banda passante a $-k$ dB B_k : è l'ampiezza in Hz dell'intervallo contenete ω_r

↳ a quanti decibel? Va sempre specificato

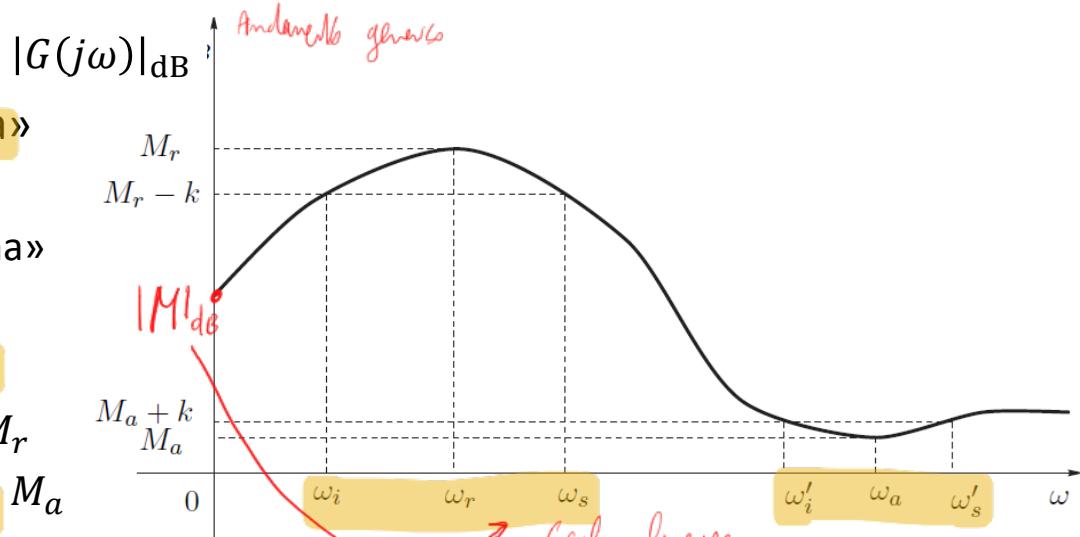
$$[\omega_i, \omega_s] = \{\omega \geq 0 : |G(j\omega)|_{dB} \geq M_{r,dB} - k\}$$

identificato da pulsaz. da taglio inf. e superiore

- Banda arrestante a k dB B'_k : è l'ampiezza in Hz dell'intervallo contenete ω_a

$$[\omega'_i, \omega'_s] = \{\omega \geq 0 : |G(j\omega)|_{dB} \leq M_{a,dB} + k\}$$

- Pulsazione di taglio inferiore ω_i e ω'_i
- Pulsazione di taglio superiore ω_s e ω'_s



Classificazione dei filtri sulla base di k .

- Passa-tutto: se $\omega_i = 0$ e $\omega_s \rightarrow +\infty$
- Arresta-tutto: se $\omega'_i = 0$ e $\omega'_s \rightarrow +\infty$
- Passa-basso: se $\omega_i = 0$ e $\omega_s < +\infty$
- Passa-alto: se $\omega_i > 0$ e $\omega_s \rightarrow +\infty$
- Passa-banda: se $\omega_i > 0$ e $\omega_s < +\infty$
- Arresta-basso: se $\omega'_i = 0$ e $\omega_s < +\infty$
- Arresta-alto: se $\omega'_i > 0$ e $\omega_s \rightarrow +\infty$
- Arresta-banda: se $\omega'_i > 0$ e $\omega'_s < +\infty$

Potrebbe esserci ω_s'

Azione filtrante dei sistemi dinamici

- ♦ Filtri passa-basso *errore rispetto a picco e non rispetto a guadagno statico*
- La banda passante la si riferisce al guadagno statico e non al modulo di risonanza

$$|G(j\omega_k)|_{dB} = |G(0)|_{dB} - k, \quad \omega_k = 2\pi B_k$$

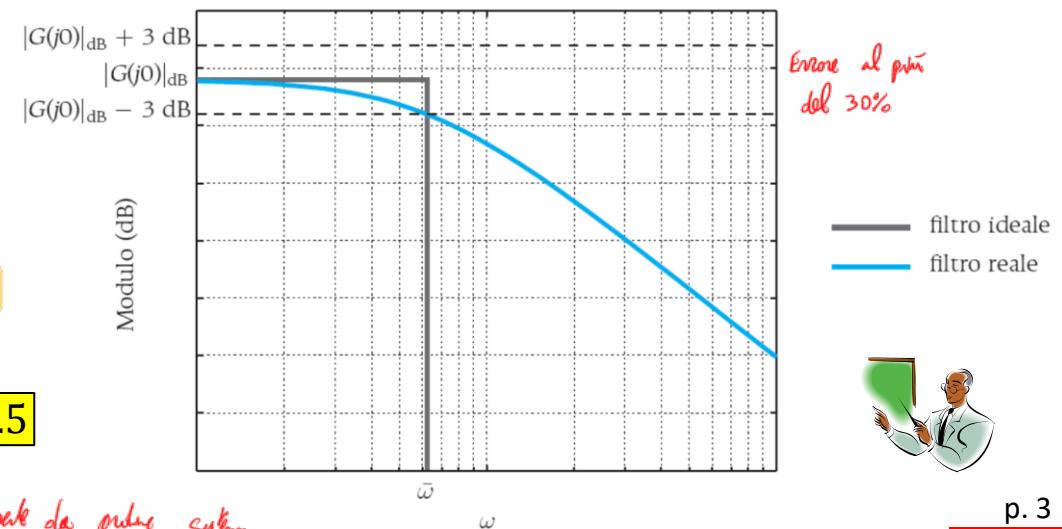
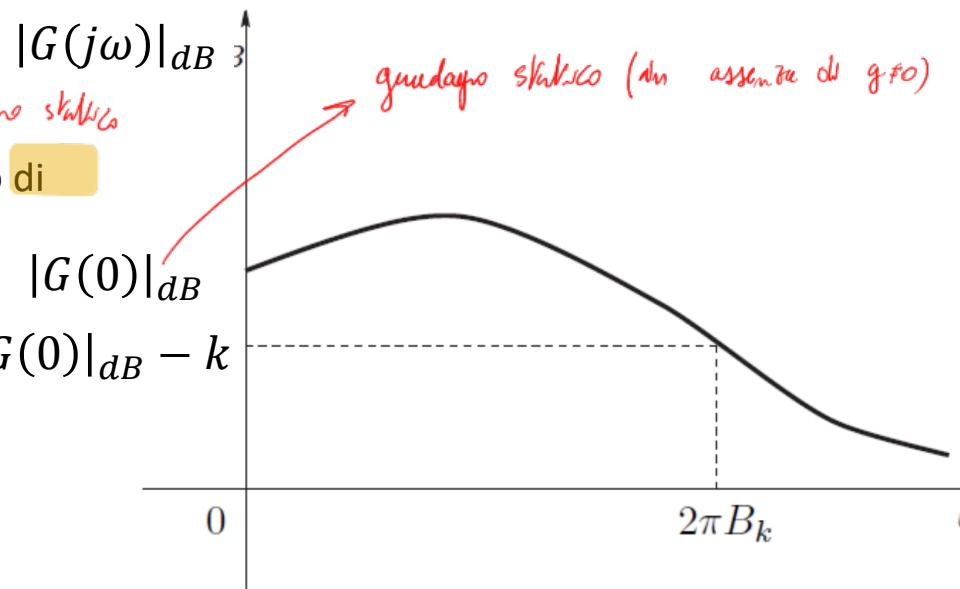
- Se il modulo di risonanza coincide col guadagno statico, questa coincide con la definizione precedente
- Il valore più comune è $k = 3$ e ω_3 indica la pulsazione a cui il filtro attenua l'ingresso del 70% rispetto al guadagno statico

$$|G(j\omega_3)|_{dB} = |G(0)|_{dB} - 3 \Rightarrow |G(j\omega_3)| = 0.707|G(0)|$$

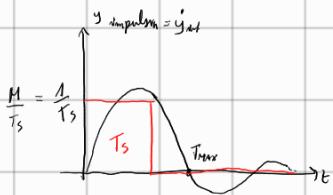
- La banda B_3 può essere facilmente legata al tempo di salita della risposta indiciale
 - Per un filtro passa-basso ideale di guadagno 1 e banda passante B_3 l'uguaglianza di Parseval si scrive

$$\frac{1}{T_s^2} T_s = \int_0^{+\infty} |g_y(t)|^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} |G(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} 2\pi B_3 = 2B_3 \Rightarrow B_3 T_s = 0.5$$

Banda passante e tempo di salita sono inv. proporzionali. Costante di proporz. dipende da altro sistema.



SISTEMA DEL 2° ORDINE CON UN TEMPO DI SALTO.

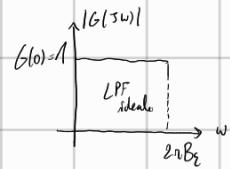


Si approssima questo andamento con una quadra.

$$\text{NOTA: } \int_0^{+\infty} g_{y_s}(t) dt = \int_0^{+\infty} g_{y_s}(t) e^{-\sigma t} dt \Big|_{s=0} = G(0) = M.$$

Per avere che l'integrale della vera risposta sia uguale a quello della tracca, allora $\frac{\mu}{T_s}$

H_p filtro p.b. con gradi di instabilità $2\pi B_3$.



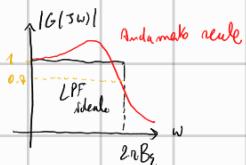
NOTA: Per parlare non so che (Approssimazione):

$$\int_0^{+\infty} g_y^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} |G(jw)|^2 dw$$

$$T_s \frac{1}{T_s^2} = \frac{1}{\pi} 2\pi B_3 \Rightarrow B_3 T_s = \frac{1}{2}$$

All'allargarsi della banda, il sistema è più presto a rispondere.

$$G(jw) = \frac{1}{1 - \frac{w^2}{w_n^2} + j \frac{2\zeta w}{w_n}}$$



filtri passa alto deva valere 500

Azione filtrante dei sistemi dinamici

Filtri passa-alto

- La banda passante la si riferisce al guadagno a frequenza infinita

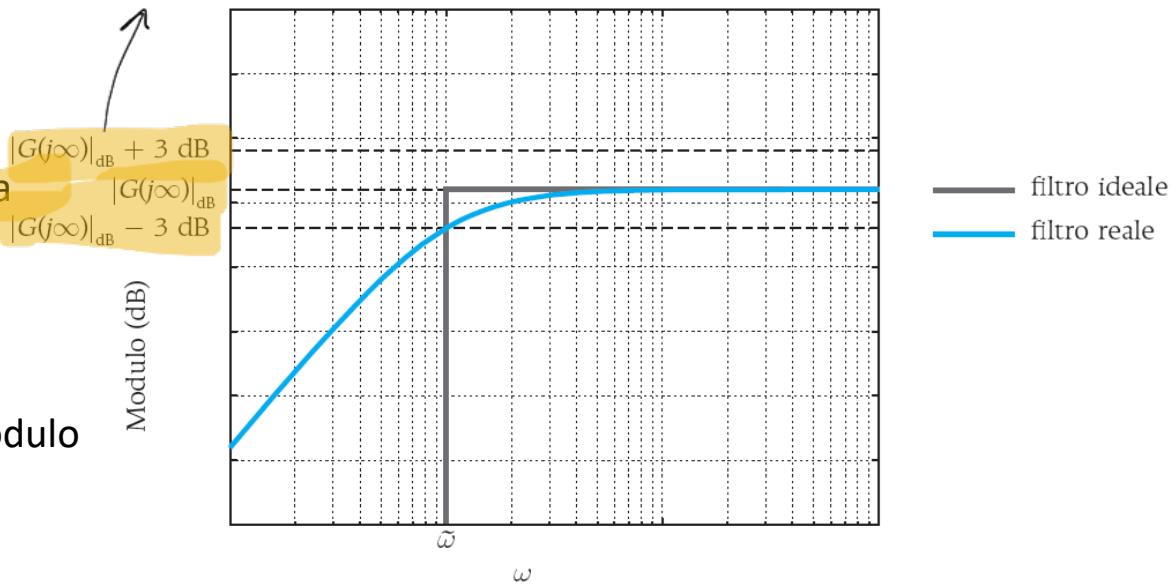
$$|G(j\omega_k)|_{dB} = |G(\infty)|_{dB} - k, \quad \omega_k = 2\pi B_k$$

– Il valore più comune è $k = 3$

- Sono sistemi non strettamente propri (altrimenti avrebbero modulo nullo a frequenza infinita)
- Hanno almeno uno zero nell'origine *WHY?*

Filtri passa-banda

- Hanno almeno uno zero nell'origine e sono strettamente propri così hanno modulo nullo sia per $\omega = 0$ che per $\omega \rightarrow \infty$



Far bode oh $G(s) = \frac{s}{(1+0.02s)(1+s)}$

$$G(s) = \frac{s}{(1+0.02s)(1+s)} = M = 1 \Rightarrow |M|_{dB} = 0$$

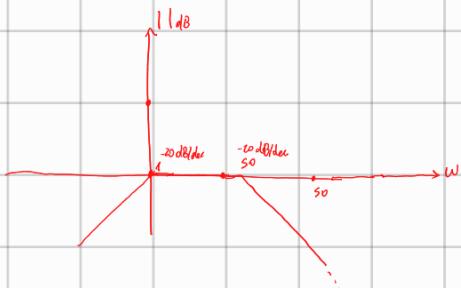
$$G(j\omega) = \frac{j\omega}{(1+0.02j\omega)(1+j\omega)} \quad \left| \frac{1}{j\omega} \right|_{dB} = -20 \log_{10} \omega \text{ con } g=-1 \Rightarrow \text{Polar } 20 \log_{10} \omega$$

Polo 1: $T=0.02 \Rightarrow \frac{1}{1T} = 50$

$$\begin{cases} 0 & \text{se } \omega \ll \frac{1}{m} \\ 20 \log_{10}(\omega - \log_{10} \frac{1}{m}) & \text{se } \omega \gg \frac{1}{m} \end{cases}$$

Polo 2: $T=1 \Rightarrow \frac{1}{1T} = 1$

$$\begin{cases} 0 & \omega \ll \frac{1}{m} \\ 20 \log_{10}(\omega - \log_{10} \frac{1}{m}) & \omega \gg \frac{1}{m} \end{cases}$$



Approssimazione a poli dominanti

- ◆ Nel dominio di Laplace abbia visto che le dinamiche associate a poli (stabili) lontani dall'asse immaginario hanno un peso limitato nella risposta indiciale e quindi spesso possono essere trascurate nella determinazione della stessa

- Tali dinamiche sono relative a poli che generano punti di rottura del diagramma dei moduli in alta frequenza

- ◆ Analogamente, peso limitato lo hanno i poli vicini a zeri

- Tali «quasi» cancellazioni determinano addendi che «quasi» si cancellano sia nel calcolo della fase che nel calcolo del modulo in dB (termini simili ma con segni opposti)

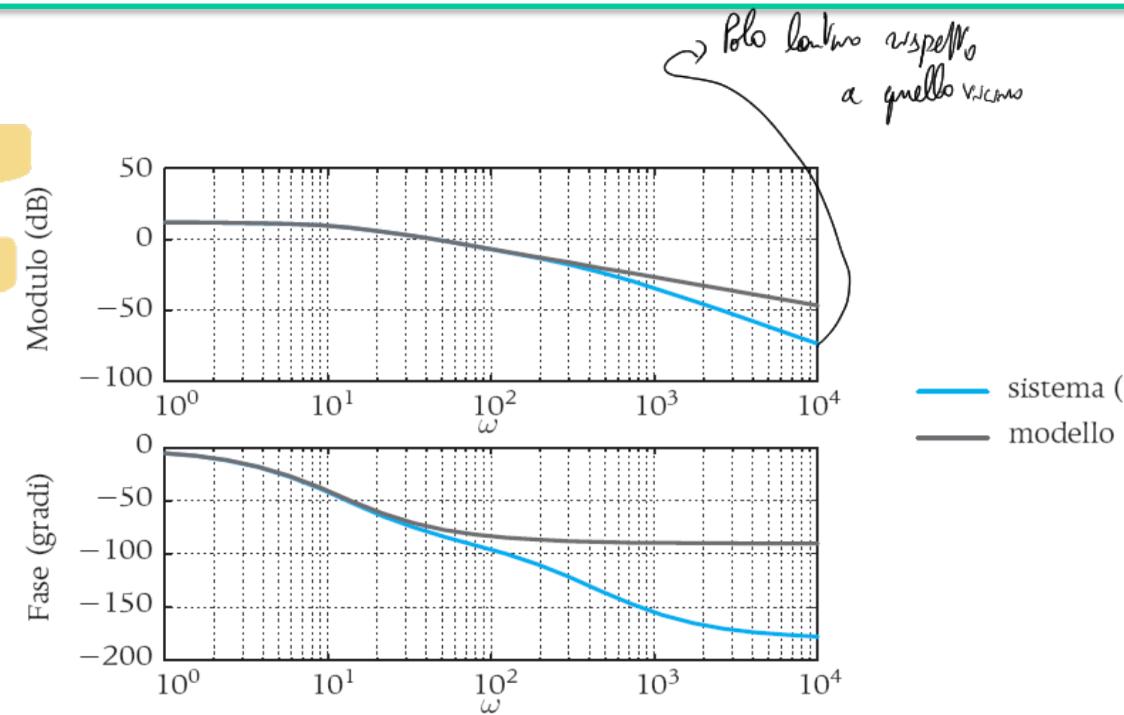
- ◆ Esempio

$$G(s) = \frac{3.98}{(1 + 0.0856s)(1 + 0.0022s)}$$

- Trascurando il polo in alta frequenza (con costante di tempo più piccola)

$$G_a(s) = \frac{3.98}{1 + 0.0856s}$$

- Dal diagramma di Bode si evince che l'approssimazione è valida finché si considerano ingressi con spettri in bassa frequenza (fino a circa 100 rad/s)



Gli errori sulla fase iniziano ad essere significativi più in bassa frequenza degli errori sul modulo!

Mai moduli, gli errori compiono a pulsati, più alte → al punto di rottura nella fase sta debole prima.

Diagramma polare

Circa blu è il diagramma polare della $G(j\omega)$. Trucco immagine dell'asse immaginario di $G(s)$

- Per un tracciamento preciso è indispensabile tracciare prima i diagrammi di Bode o usare un calcolatore
- Per un tracciamento qualitativo, il diagramma si può costruire a partire da alcune delle informazioni necessarie a tracciare i diagrammi di Bode

$$G(j\omega) = \frac{\mu}{(j\omega)^g} \frac{\prod_{i=1}^q (1 + j\omega\tau_i)}{\prod_{i=1}^k (1 + j\omega T_i)} \frac{\prod_{i=1}^r (1 + 2j\xi_i\omega/\alpha_{ni} - \omega^2/\alpha_{ni}^2)}{\prod_{i=1}^h (1 + 2j\xi_i\omega/\omega_{ni} - \omega^2/\omega_{ni}^2)}$$

fase iniziale

$$\varphi_0 = \lim_{\omega \rightarrow 0} \angle G(j\omega) = \angle \mu - g90^\circ$$

fase finale

$$\varphi_f = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \angle G(j\omega) = \varphi_0 + \sum_i h90^\circ \operatorname{sgn} \tau_i + \sum_i h180^\circ \operatorname{sgn} \xi_i + - \sum_i h90^\circ \operatorname{sgn} T_i + \sum_i h180^\circ \operatorname{sgn} \xi_i$$

modulo iniziale

$$m_0 = \lim_{\omega \rightarrow 0} |G(j\omega)|$$

modulo finale

$$m_f = \lim_{\omega \rightarrow \infty} |G(j\omega)|$$

Se strettamente propria, modulo sarà 0.

per un tracciamento più preciso è opportuno valutare (con Bode)

- la pulsazione di attraversamento o critica

$$\omega_c: |G(j\omega_c)| = 1$$

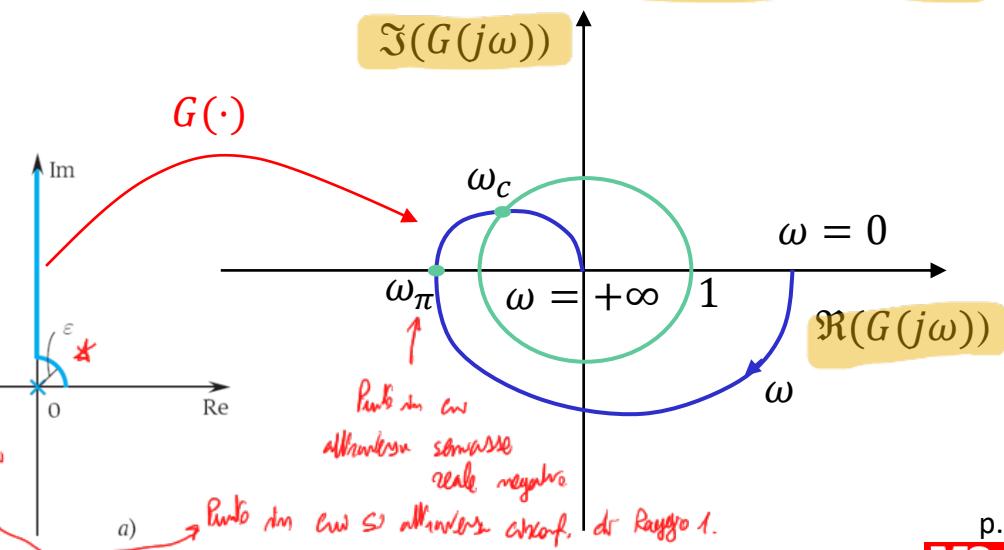
$$\Rightarrow |G(j\omega_c)|_{dB} = 0$$

Passo da dB positivo a negativo.

- la pulsazione a fase $-\pi$

$$\omega_\pi: \angle G(j\omega_\pi) = -180^\circ$$

*Calcolo a livello per $\omega \rightarrow 0$ e $\omega \rightarrow +\infty$
di modulo e fase.*



* $G(j\omega)$ curva chiusa al polo nel caso non sia definito.

Se non arriviamo al polo, la curva sarebbe aperta perché reale all'inf.

Se non c'è solo polo, la curva rimane limitata (rimanere al fondo).

Come tracca la curva blu?

NOTA: Se sistema è risonante c'è forte disconvenienza.

Diagramma polare

Esempio 1

- Fase iniziale e finale

$$\varphi_0 = \begin{cases} 0^\circ & \mu > 0 \\ -180^\circ & \mu < 0 \end{cases}$$

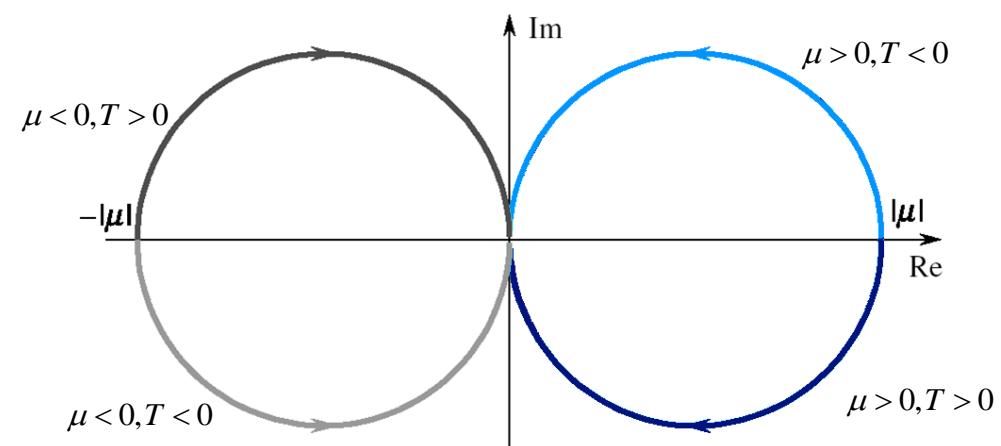
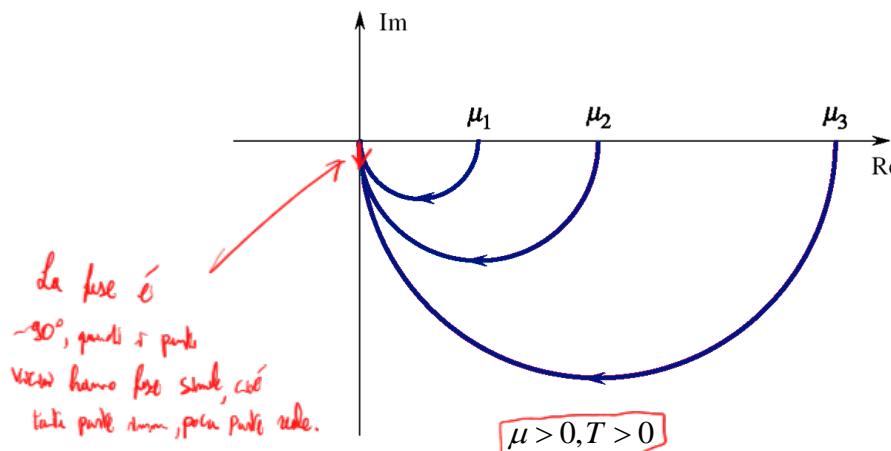
$$G(j\omega) = \frac{\mu}{1 + j\omega T}$$

$$\varphi_f = \begin{cases} -90^\circ & \mu > 0, T > 0 \\ -180^\circ - 90^\circ & \mu < 0, T > 0 \\ 90^\circ & \mu > 0, T < 0 \\ -180^\circ + 90^\circ & \mu < 0, T < 0 \end{cases}$$

- Modulo iniziale e finale

$$m_0 = |\mu|$$

$$m_f = 0$$



Punto finale e vettore di fase.

Nota: Come ci vado da $P_{\text{iniz}}.$ a P_{fase} ? Devo guardare la fase di $G(sw)$. Ricordando si disegniamo, partendo da 0° e fermo a -90° . Quindi possiamo trovarci solo nel 4° quadrante: $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ \Rightarrow Numeri complessi hanno parte reale positiva e immag. negativa.

Poiché quell'arco è costituito da?



Se cambia segno, al variare di φ e T un segno, non cambia nulla.

Caso $M > 0, T < 0$: fase da -90° va a $+90^\circ$: $m = 45^\circ/\text{dec}$

$\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, ma trovo nel primo quadrante.

Caso $M < 0, T < 0$.

→ Parte da -180° , poi me guadagno 90° , arrivo a -90° .

$\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, arrivo nell'origine con $\varphi = 90^\circ$.

Diagramma polare

Esempio 2 (polo nell'origine)

- Fase iniziale e finale

$$\varphi_0 = -90^\circ$$

$$\varphi_f = -90^\circ$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

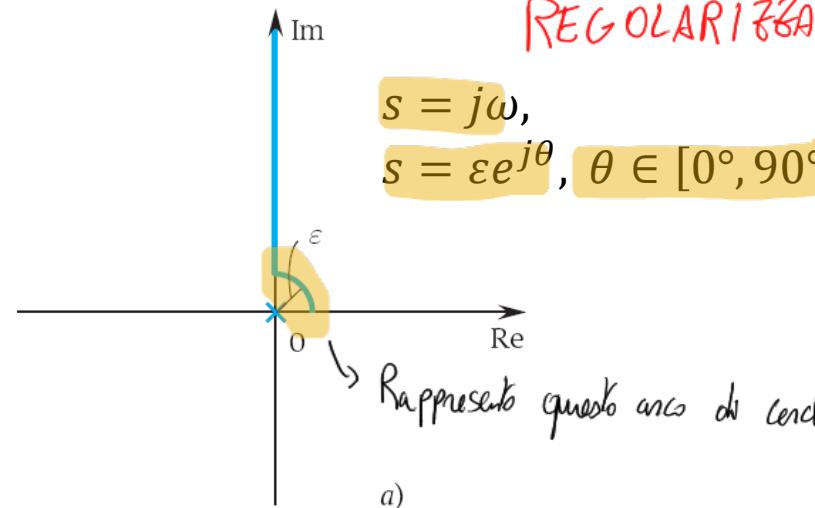
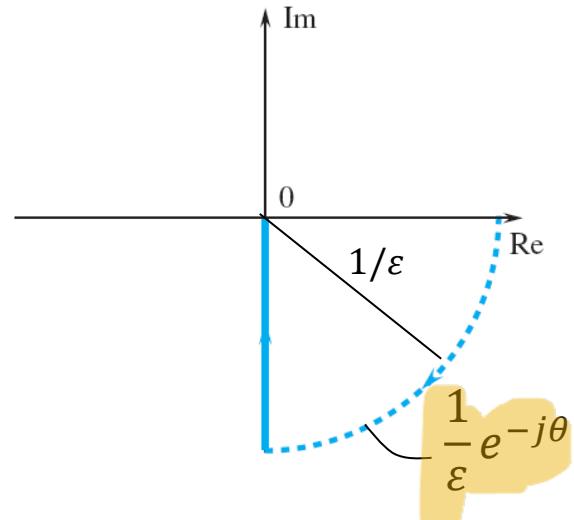
Se $s = \varepsilon e^{j\theta}$, allora $G(s\omega) =$

- Modulo iniziale e finale

$$m_0 = +\infty$$

$$m_f = 0$$

- Nell'intorno dell'origine occorre fare una regolarizzazione per avere un diagramma al finito



REGOLARIZZAZIONE: voglio il grafico in un intorno di 0.

$$s = j\omega,$$

$$s = \varepsilon e^{j\theta}, \theta \in [0^\circ, 90^\circ],$$

$$\omega > \varepsilon$$

$$\omega \leq \varepsilon$$

Per tracciare il grafico, calcolo $G(s)|_{s=jw}$ $w \geq \varepsilon$.

$$G(s) \Big|_{s=\varepsilon e^{j\theta}} w \geq \varepsilon$$

$$\frac{1}{\varepsilon e^{j\theta}} = \frac{1}{\varepsilon} e^{-j\theta}$$

Diagramma polare

Esempio 3

- Fase iniziale e finale

$$\varphi_0 = 0^\circ$$

$$G(j\omega) = \frac{\mu}{1 + j2\xi \frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}, \quad \xi > 0, \quad M > 0$$

$$\varphi_f = -180^\circ \Rightarrow \Psi_G[-\pi, 0]. \quad 3^\circ \text{ e } 4^\circ \text{ quadrante}$$

- Modulo iniziale e finale

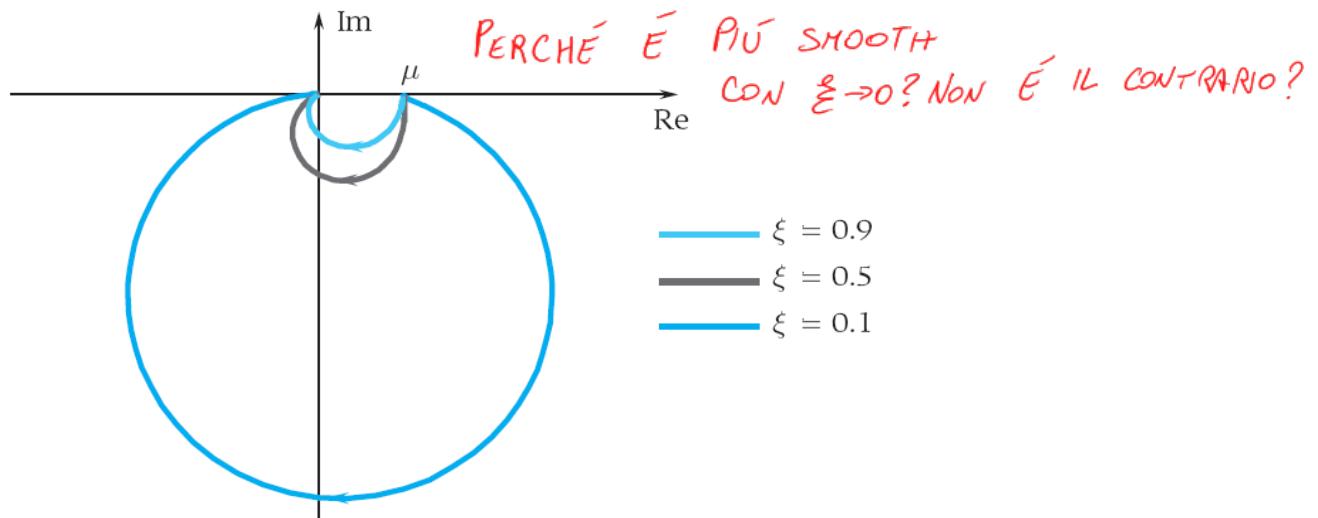
$$m_0 = \mu$$

$$m_f = 0$$

- Al diminuire di ξ il modulo cresce intorno a $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$

Poi nel semipiano sinistro.

Modulo cresce al diminuire di ξ .



■ Diagramma di Nichols (ascisse: $\angle G(j\omega)$ – ordinate: $|G(j\omega)|_{dB}$)

◆ Esempio 1

- Fase iniziale e finale

$$\varphi_0 = \begin{cases} 0 & \mu > 0 \\ -180^\circ & \mu < 0 \end{cases}$$

- Modulo iniziale e finale

$$m_0 = \mu$$

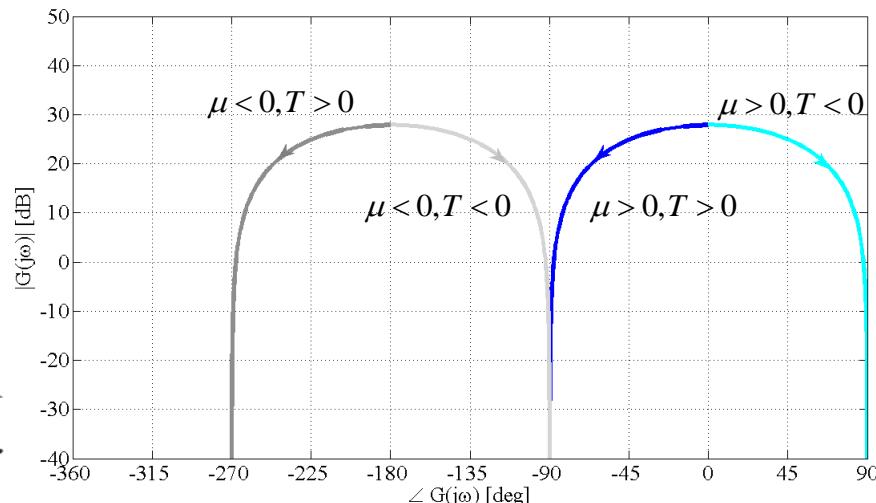
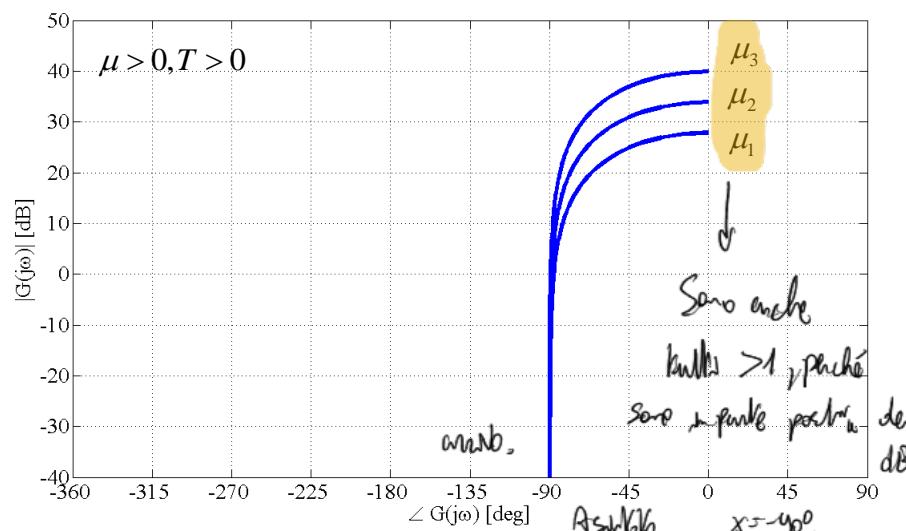
$$G(j\omega) = \frac{\mu}{1 + j\omega T}$$

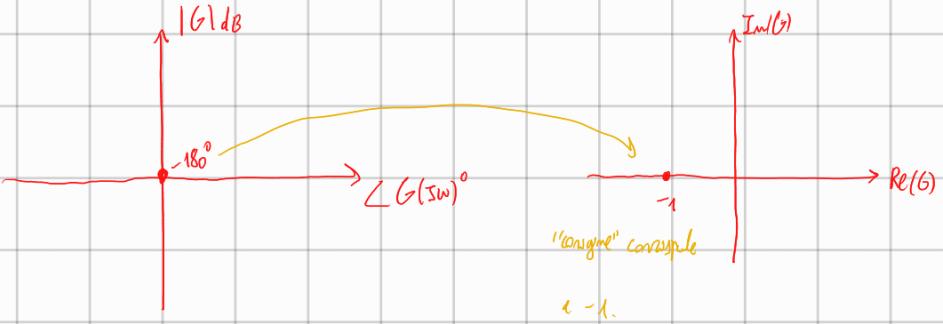
Sul rapp. Stabilità con uscita y_{nm} corrisponde di -180° .



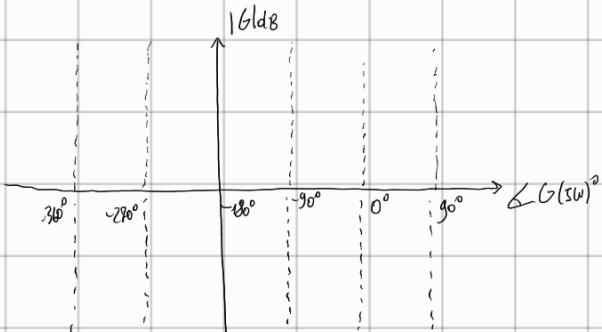
$$\varphi_f = \begin{cases} -90^\circ & \mu > 0, T > 0 \\ -180^\circ - 90^\circ & \mu < 0, T > 0 \\ 90^\circ & \mu > 0, T < 0 \\ -180^\circ + 90^\circ & \mu < 0, T < 0 \end{cases}$$

$$m_f = 0$$





In genere è bene tracciare nelle verticale i multipli di 90° . Sia fase iniziale che finale sono multipli di 90° .



Nota: Sia fase che modulo sono monotoni \rightarrow no cambi di concavità.

■ Diagramma di Nichols

◆ Esempio 2 (integratore)

- fase iniziale e finale

$$\varphi_0 = -90^\circ$$

- modulo iniziale e finale

$$m_0 = +\infty$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

$$\varphi_f = -90^\circ$$

$$m_f = 0$$

In caso con esponenti

Qui non ho bisogno di avere diagramma chiuso.

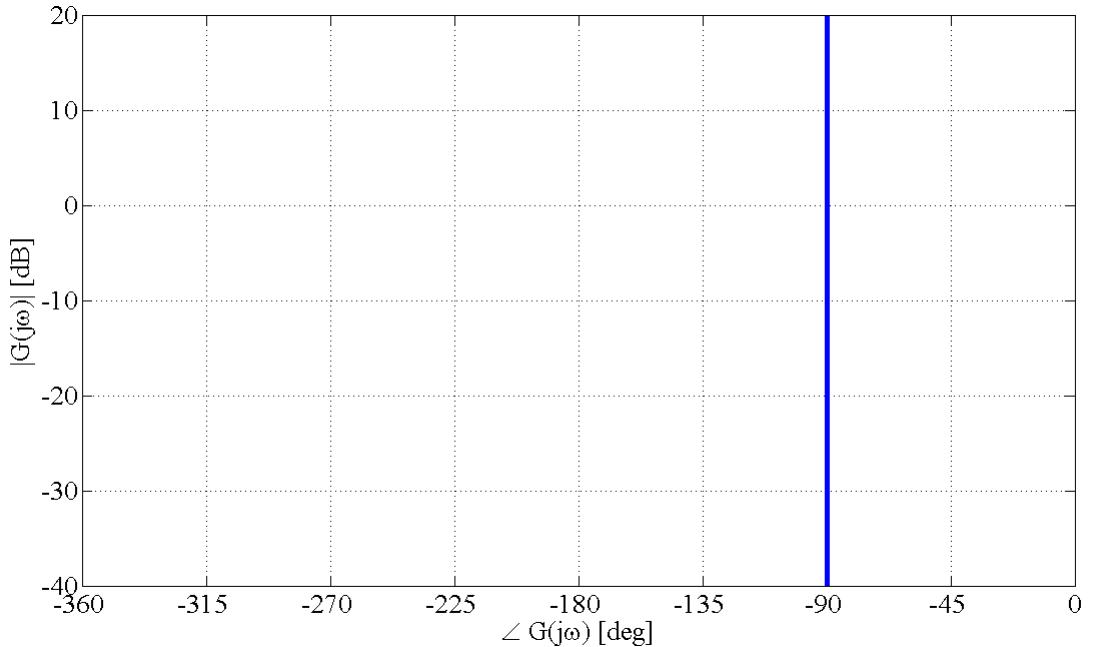


Diagramma di Nichols

Esempio 3

- Fase iniziale e finale

$$\varphi_0 = 0^\circ$$

$$G(j\omega) = \frac{\mu}{1 + j2\xi \frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}, \quad \xi > 0$$

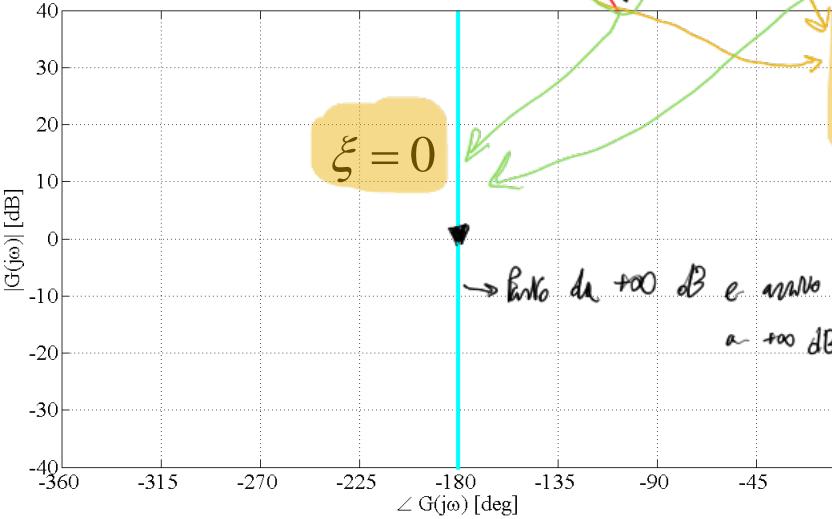
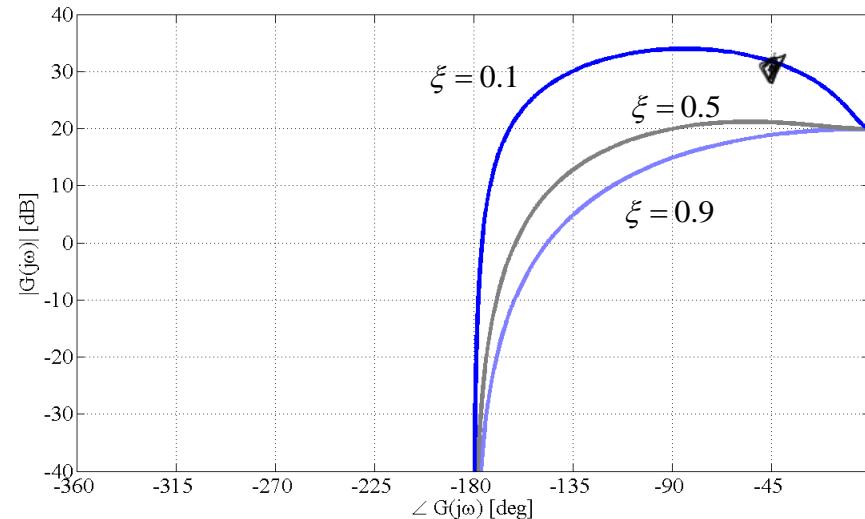
$$\varphi_f = -180^\circ$$

- Modulo iniziale e finale

$$m_0 = \mu$$

$$m_f = 0$$

- Per valori piccoli di ξ il modulo cresce intorno a $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$



Modulo è monotono decrescente per $\xi > \frac{\sqrt{2}}{2}$

All'interno tende ad avere picco-

■ Diagramma polare e di Nichols

◆ Sistema con ritardo

- Fase iniziale e finale

$$\varphi_0 = 0^\circ$$

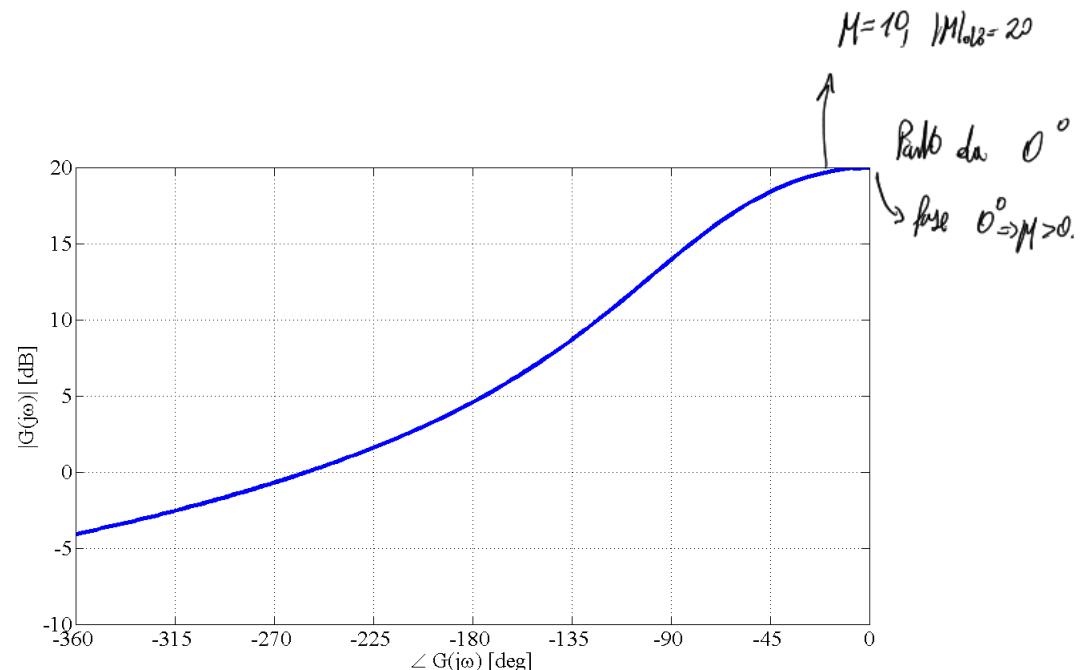
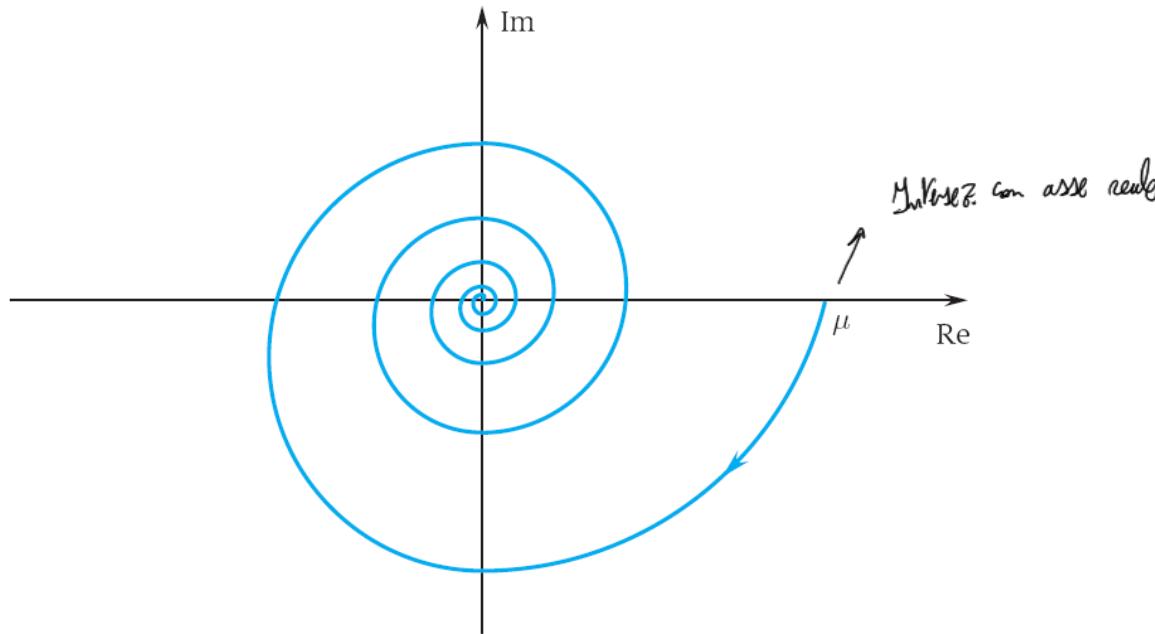
$$G(j\omega) = \frac{\mu}{1 + j\omega T} e^{-j\omega\tau}, \quad \mu, T, \tau > 0$$

$$\varphi_f = -\infty \Rightarrow -90^\circ - \omega\tau$$

- Modulo iniziale e finale

$$m_0 = \mu$$

$$m_f = 0$$



$$G(s) = \frac{M}{1 + j\omega T}$$

$$G(s) = \frac{1}{j\omega}$$

$$G(s) = \frac{M}{1 + j\omega \frac{\zeta}{\omega_m} S - \frac{\omega^2}{\omega_m^2}}$$

$$G(j\omega) = \frac{M}{1 + j\omega T} e^{-j\omega\gamma} \quad \gamma > 0$$