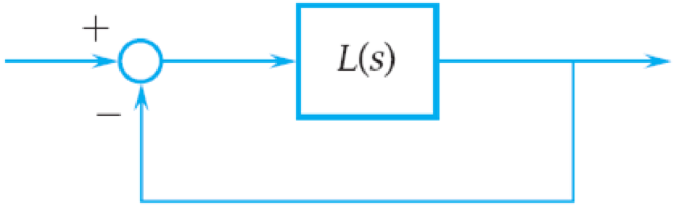
Capitolo 10 – Sistemi di controllo a tempo continuo: stabilità

Copyright © 2015 – The McGraw-Hill Companies srl

Criterio di Nyquist (1932)



- Condizione **necessaria e sufficiente** affinché il sistema a ciclo chiuso $F(s)$ sia asintoticamente stabile è che il **numero di giri** N (contati positivamente se compiuti in senso antiorario e negativamente se compiuti in senso orario) che il diagramma di Nyquist del guadagno d'anello $L(s)$ **attorno al punto -1** sia ben definito e sia pari al **numero dei suoi poli a parte reale positiva** P $(N = P)$
  - si noti la natura grafica del criterio, particolarmente utile in fase di progetto del sistema di controllo
  - per essere ben definito il diagramma non deve passare per il punto -1
  - se ciò dovesse accadere, in realtà vuol dire che cioè non ho poli a parte reale nulla

$$\exists \hat{\omega} \text{ t.c. } L(j\hat{\omega}) = -1 \Rightarrow s = \pm j\hat{\omega} \text{ sono poli del sistema a ciclo chiuso perché } 1 + L(j\hat{\omega}) = 0$$

e quindi il sistema a ciclo chiuso non è asintoticamente stabile

  - se invece ciò non accade e $N \neq P$ allora il sistema è certamente instabile e ha un numero di poli a parte reale positiva pari a $P - N$

Copyright © 2015 – The McGraw-Hill Companies srl

N_L ha grado al Più n.

grado n e grado n

Criterio di Nyquist (Dim.)

- Vogliamo dimostrare la stabilità del sistema a ciclo chiuso $F(s) = \dfrac{L(s)}{1+L(s)}$
- Questa è legata alla funzione d'anello $L(s)$ e alla funzione $K(s)$

Al più n   grado n

$$L(s) = \frac{N_L(s)}{D_L(s)}, \quad K(s) = 1 + L(s) = \frac{N_L(s) + D_L(s)}{D_L(s)} = \frac{\prod_{i=1}^{n}(s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)}$$

poli a ciclo chiuso (zeri di $K(s)$)

poli a ciclo aperto (poli di $L(s)$)

- gli zeri di $K(s)$ a parte reale positiva sono i poli di $F(s)$ **interni a Γ**: ce ne sono Z annullo K, cioè denom. di F
- i poli di $K(s)$ a parte reale positiva sono i poli di $L(s)$ **interni a Γ**: ce ne sono P Poli del sistema al ciclo aperto
- la variazione de fase complessiva di $K(s)$ con $s \in \Gamma$ è pari a

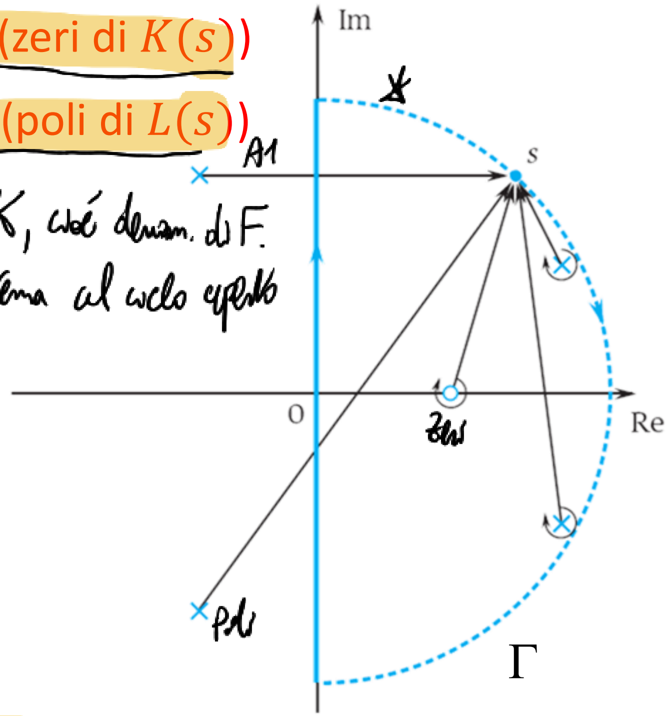
$$\underset{s\in\Gamma}{\Delta\angle K(s)} = 2\pi P - 2\pi Z = 2\pi(P - Z)$$ *

immagine della s che cammina su Γ sopra

- quindi il numero di giri in senso antiorario che il diagramma di Nyquist di $K(s)$ compie attorno all'origine, cioè il numero di giri che il diagramma di Nyquist di $L(s)$ compie attorno al punto -1 vale

$$N = P - Z$$

- osservando che il sistema a ciclo chiuso è asintoticamente stabile se e solo se $Z = 0$ ed N è ben definito, l'asserto risulta dimostrato visto che ciò accade se e solo se $N = P$
- il numero di poli a ciclo chiuso interni a Γ (**a parte reale positiva**) è sempre $P - N$



Ogni singolarità interna (esterna) a Γ ha una variazione di fase di 2π (0)

Copyright © 2015 – The McGraw-Hill Companies srl

* Percorso di Nyquist

Quelli interni al percorso sono quelli a parte reale positiva, perché percorso va a ∞.

Così come per i poli.

* Somma delle fase di $(s-z_1)$, $(s-z_2)$, ..., meno la fase di $s-p_1$, ...

Al variare di s sul percorso

Se prendo un p_1 a parte reale negativa, A1

Preso il vettore $s-p_1$, la sua fase se sono dove c'è s ho fase 0. Se la s fosse $-j\infty$ ho fase $-\frac{\pi}{2}$. Quando salgo a $+j\infty$, ho fase $+\frac{\pi}{2}$. Quindi spostandomi, in senso antiorario ho avuto una variazione di fase pari a $+\pi$. Poi mi devo spostare sulla mezza circonferenza. Parto da $\frac{\pi}{2}$ e arrivo a $-\frac{\pi}{2}$. Variaz. di fase $-\pi$. Variaz. totale $=0$. Vale $\forall p_i$ all'esterno del percorso.

$$\Delta\angle K(s) = \sum_{i=1}^{m} \Delta\angle(s-z_i) - \sum_{i=1}^{m} \Delta\angle(s-p_i)$$

ho ruotato in senso orario

- Se mi trovo dentro, invece, parto da fase $-\frac{\pi}{2}$ e arrivo a $-\frac{3}{2}\pi$ in senso ORARIO.

Ho fatto $-\pi$. Continuo a girare di un altro angolo pari a $-\pi$. Variaz. totale di fase è -2π. Sia per poli che per zeri. Funziona per p_i, z_i interni al percorso di Nyquist.

quello è Percorso di Nyquist.

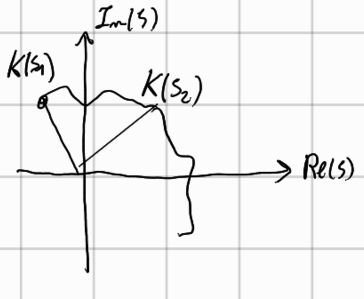
$$\Delta\angle K(s) = \sum_{i=1}^{m} \Delta\angle(s-z_i) - \sum_{i=1}^{m} \Delta\angle(s-p_i) = -2\pi Z - (-2\pi P)$$

Immagine è $(s-z_i)$, perciò valuto la fase col disegno.

$\angle K(s_{\text{finale nel diagramma}}) - \angle K(s_{\text{iniziale nel diagramma}})$

NOTA: $K(s)$ ruota attorno all'origine:

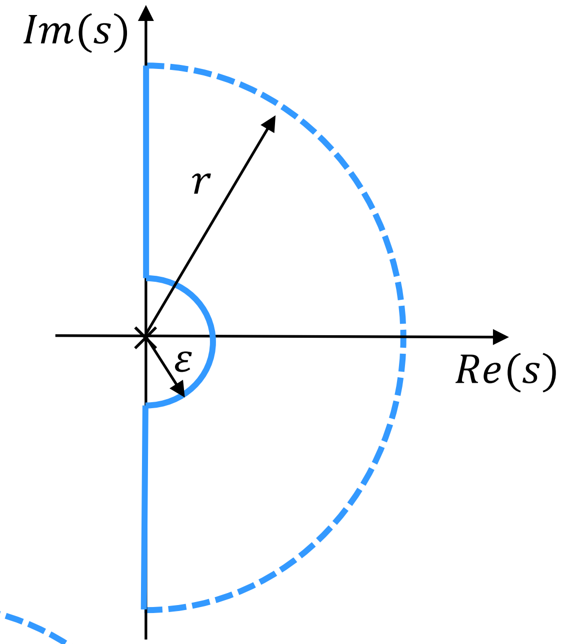
Quindi, $K(s) = 1 + L(s)$, diagramma sarà traslato di 1 su asse reale.



Faccio diagramma di $L(S)$ tracciando quello di prima.

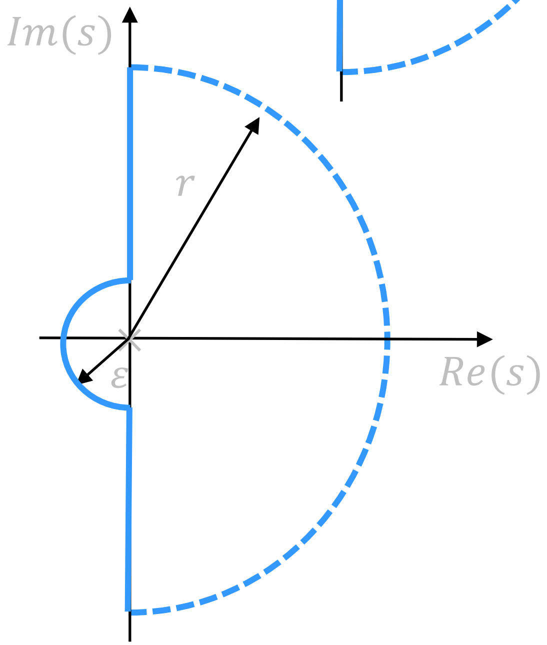
Criterio di Nyquist (Dim. – caso particolare)

- Se $L(s)$ ha poli sull'asse immaginario il percorso di Nyquist è quello che lascia tali poli al suo esterno
- Tali poli danno un contributo di fase nullo a $\Delta\angle_{s\in\Gamma} K(s)$, dunque sono equivalenti a poli nel semipiano sinistro



- E se si scegliesse il percorso di Nyquist in modo che includa al suo interno i poli sull'asse immaginario?
  - Il contributo di fase di ciascuno di tali poli a $\Delta\angle_{s\in\Gamma} K(s)$ è pari a 2π, dunque l'enunciato andrebbe modificato in

> Condizione **necessaria e sufficiente** affinché il sistema a ciclo chiuso $F(s)$ sia asintoticamente stabile è che il **numero di giri** N (contati positivamente se compiuti in senso antiorario e negativamente se compiuti in senso orario) che il diagramma di Nyquist del guadagno d'anello $L(s)$ **attorno al punto -1** sia ben definito e sia pari al **numero dei suoi poli a parte reale positiva o nulla** P $(N = P)$



Fondamenti di controlli automatici 4/ed – P. Bolzern, R. Scattolini, N. Schiavoni Copyright © 2015 – The McGraw-Hill Companies srl

Esempio 1

$R(s) = \mu > 0,\qquad G(s) = \dfrac{1}{(1+s)^3}$

Per $\omega \geq 0$:

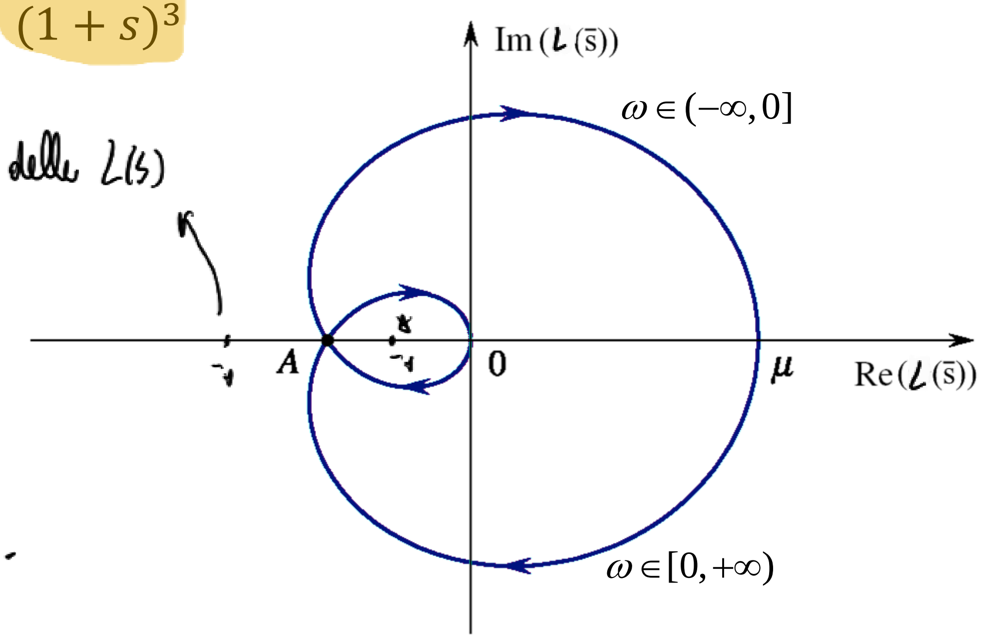
$\varphi_0 = 0,\qquad \varphi_\infty = -3/2\pi$
$m_0 = \mu,\qquad m_\infty = 0$

$L(s) = R(s)G(s)$

$N=0$, poli a parte reale positiva della $L(s)$

$N=-2$, poli a parte reale positiva è 2: $P-N$

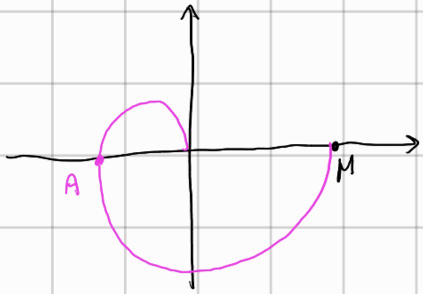
P non cambia. Ma N sì.



- Cerchiamo di capire se e come il guadagno μ del regolatore $R(s)$ influenza la stabilità del sistema a ciclo chiuso

Copyright © 2015 – The McGraw-Hill Companies srl

$$L(s) = \frac{M}{(1+s)^3}$$



Voglio x_A in funzione di M.

Come la trovo? Vedo quando ho fase $-\pi$.

$$\angle L(j\omega_\pi) = -\pi$$

$$\downarrow \quad s = j\omega$$

$$\angle L(j\omega_\pi) = -3\arctan(\omega)$$

$$\omega_\pi = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \text{ rad/s}$$

$$x_A = -|L(j\omega_\pi)| = -\frac{M}{(\sqrt{1+3})^3} = -\frac{M}{8} \Rightarrow$$

Sistema a ciclo chiuso é A.S. sse $-\frac{M}{8} > -1 \Leftrightarrow M < 8$.

Se $M > 8 \Rightarrow$ Sistema ha 2 poli a parte reale positiva.

- Verifico con Routh al numeratore di $1 + L(s)$.

$$1 + L(s) = \frac{1 + 3s + 3s^2 + s^3 + M}{(1+s)^3}$$

3	1	3
2	3	1+M
1	8-M	
0	1+M	

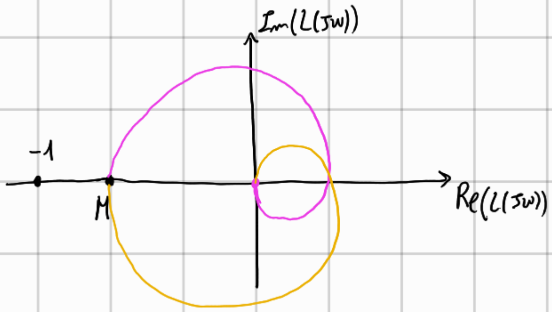
$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} M > -1 \\ M < 8 \end{matrix}} \Rightarrow -1 < M < 8$$

$\rightarrow M > 0$ ipotesi a priori non fatta. Vediamo con Nyquist.

CASO $M < 0$:

$\varphi_0 = -\pi$

$\varphi_F = -\pi - \frac{3}{2}\pi = -\frac{5}{2}\pi$



Vincoli di M affinché ho sistema A.S.
Se é stabile con $M=8$ non posso superarlo per molteplicità.

Banalmente, $M > -1$. Cosí ho concluso.

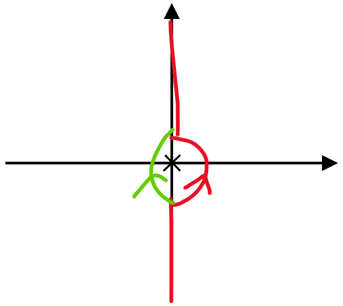
Esempio 2

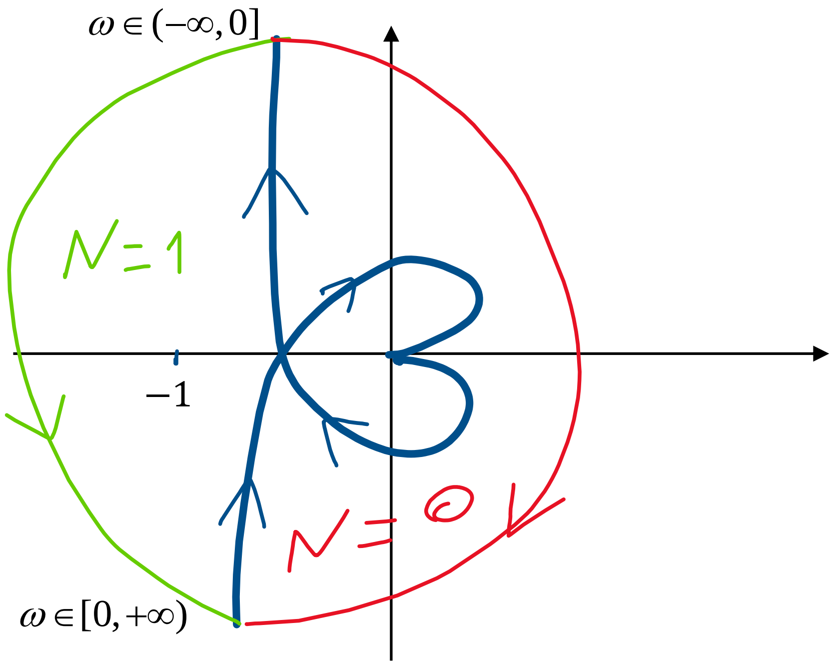
$$R(s) = \frac{\mu}{s}, \mu > 0, \qquad G(s) = \frac{1}{(1+s)^3}$$

Per $\omega \geq 0$:

$\varphi_0 = -\pi/2\,, \qquad \varphi_\infty = -2\pi$

$m_0 = +\infty, \quad m_\infty = 0$





- Cerchiamo di capire se e come il guadagno μ del regolatore $R(s)$ influenza la stabilità del sistema a ciclo chiuso

Copyright © 2015 – The McGraw-Hill Companies srl

ESEMPIO 2:

Voglio $F(0)=1 \Rightarrow y_\infty = W$ uscita a regime = riferimento costante se $w(t)=W=\text{cost}$

$$F(0)=\left.\frac{\frac{M}{(1+s)^3}}{1+\frac{M}{(1+s)^3}}\right|_{s=0} = \frac{M}{1+M} < 1$$

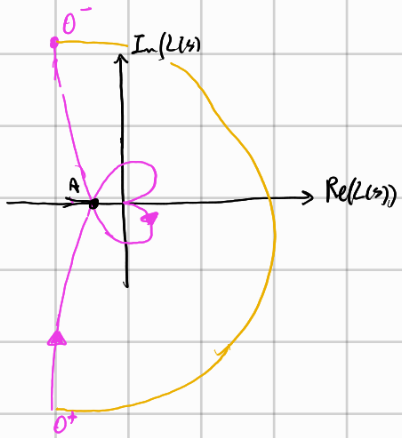
Ma $-1<M<8$, ho precisione che è al più $\frac{8}{9}$.

• Problema si risolve mettendo s al denominatore:

$$F(0)=\left.\frac{\frac{M}{s(1+s)^3}}{1+\frac{M}{s(1+s)^3}}\right|_{s=0} = 1$$

Vediamo se è stabile.

$$L(s)=\frac{M}{(1+s)^3 s}$$

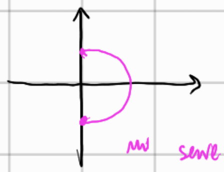


$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$ $\quad \varphi_F = -2\pi$

$M_0 = +\infty$ $\quad M_f = 0$

Fase monotona decrescente

Per chiudere da 0^- a 0^+ sempre in senso orario.



non serve questa immagine

Now: Vediamo ascissa di A:

$$\measuredangle L(j\omega_\pi) = -\pi \Rightarrow -\frac{\pi}{2} - 3\,\text{atan}(\omega_\pi) = -\pi$$

$$3\,\text{atan}(\omega_\pi) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{atan}(\omega_\pi) = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \omega_\pi = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

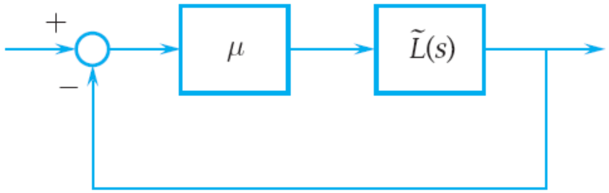
$$x_A = -|L(j\omega_\pi)| = -\frac{M}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{3}}\right)^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = -\frac{\sqrt{3}M}{\frac{8}{3\sqrt{3}}} = -\frac{3\cdot 3M}{8} = -\frac{9}{8}M$$

Quindi per avere A.S., $x_A > -1 \Rightarrow -\frac{9}{8}M > -1 \Rightarrow \underbrace{0 <}_{\text{Hp iniziale}} M < \frac{8}{9}$

Altrimenti sempre 2 poli a parte reale positiva, $N=-2$.

Estensioni del criterio di Nyquist

Porto fuori M.

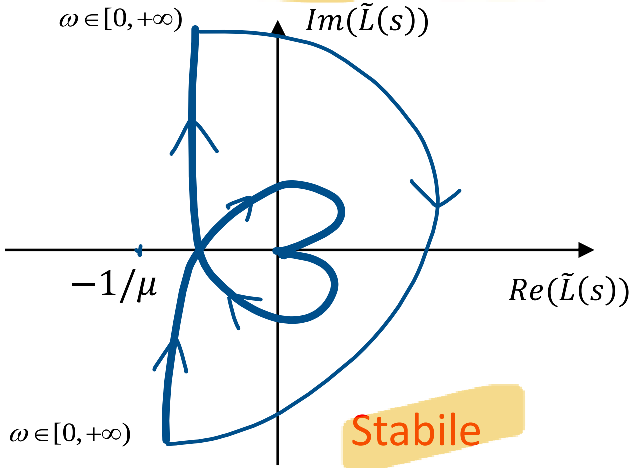


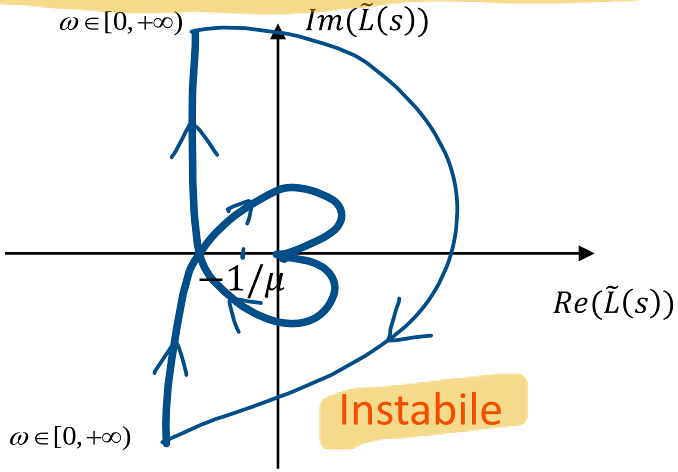
$\rightarrow 1+L(s) = 1+M\tilde{L}(s) = 0 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{M} + \tilde{L}(s) = 0$

Dimostrazione segue

- Condizione **necessaria e sufficiente** affinché il sistema a ciclo chiuso $F(s)$ sia asintoticamente stabile è che il **numero di giri** N (contati positivamente se compiuti in senso antiorario e negativamente se compiuti in senso orario) che il diagramma di Nyquist del guadagno d'anello $\tilde{L}(s)$ **attorno al punto** $-1/\mu$ sia ben definito e sia pari al **numero dei suoi poli a parte reale positiva** P $(N = P)$
  - Questo corollario ci permette di tracciare il diagramma di Nyquist della funzione d'anello $\tilde{L}(s)$ con guadagno unitario e far variare il punto critico al variare del guadagno anziché ridisegnare il diagramma dell'intera funzione d'anello



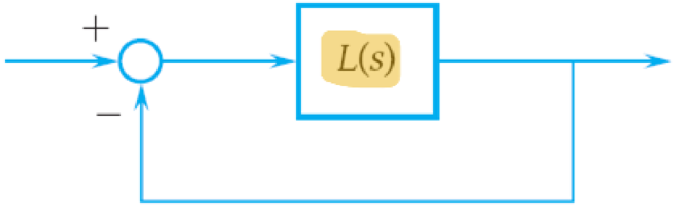


Fondamenti di controlli automatici 4/ed – P. Bolzern, R. Scattolini, N. Schiavoni Copyright © 2015 – The McGraw-Hill Companies srl

Estensioni del criterio di Nyquist

Corollario

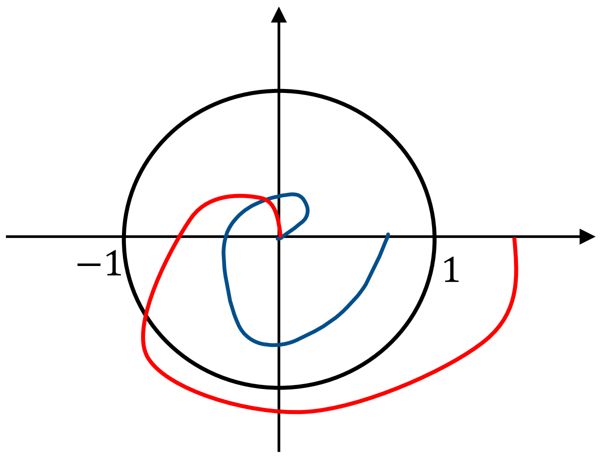
$P=0$



Perché N varrà sempre 0 stanno nel cerchio unitario

- Dato un sistema in retroazione negativa con funzione d'anello $L(s)$ asintoticamente stabile, condizione sufficiente per l'asintotica stabilità del sistema in anello chiuso è che risulti $|L(j\omega)| < 1, \forall\omega$.

  - Che la condizione sia sufficiente è ovvio visto che, se $L(s)$ è asintoticamente stabile, allora $P = 0$ e l'ipotesi sul modulo di $L(j\omega)$ vuol dire che il diagramma di Nyquist è interno al cerchio unitario e di conseguenza $N = 0$.



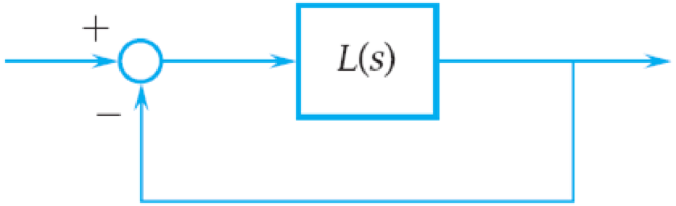
  – Questo vuol dire che un sistema in anello aperto asintoticamente stabile lo è anche in anello chiuso purché si usi un guadagno del regolatore sufficientemente piccolo
    - Purtroppo questa condizione sarà in conflitto con l'esigenza della prestazione di precisione del sistema di controllo e all'aumentare del guadagno il sistema diventa instabile (**stabilità regolare**)

  – Si noti come tale condizione coinvolge solo il modulo della funzione d'anello
    - Il motivo è legato all'ipotesi di stabilità a ciclo aperto

  – Si noti che la condizione non è necessaria, difatti N può essere 0 anche se il diagramma è parzialmente esterno al cerchio unitario e lo interseca

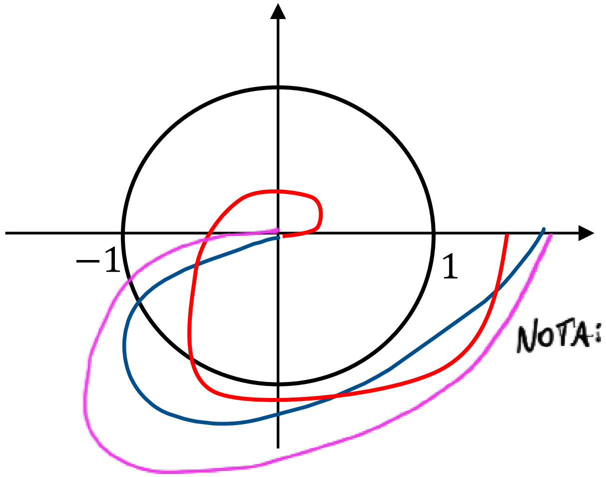
Fondamenti di controlli automatici 4/ed – P. Bolzern, R. Scattolini, N. Schiavoni Copyright © 2015 – The McGraw-Hill Companies srl

Estensioni del criterio di Nyquist



Non interseco mai l'asse reale negativo

- Dato un sistema retroazionato negativamente con funzione d'anello $L(s)$ asintoticamente stabile, condizione sufficiente per l'asintotica stabilità del sistema in anello chiuso è che risulti $|\angle L(j\omega)| < 180°, \forall \omega$.
  - Che la condizione sia sufficiente è ovvio visto che se $L(s)$ è asintoticamente stabile allora $P = 0$ e l'ipotesi sulla fase di $L(j\omega)$ vuol dire che il diagramma di Nyquist non può intersecare l'asse reale negativo e quindi $N = 0$.
    - Il sistema rimane stabile anche se il guadagno aumenta (**stabilità intrinseca**)
    - Tale condizione coinvolge solo la fase della funzione d'anello
      - Il motivo è sempre legato all'ipotesi di stabilità a ciclo aperto
    - Anche questa condizione non è necessaria, difatti N può essere 0 anche se la fase di $L(j\omega)$ va al di sotto dei $-180°$



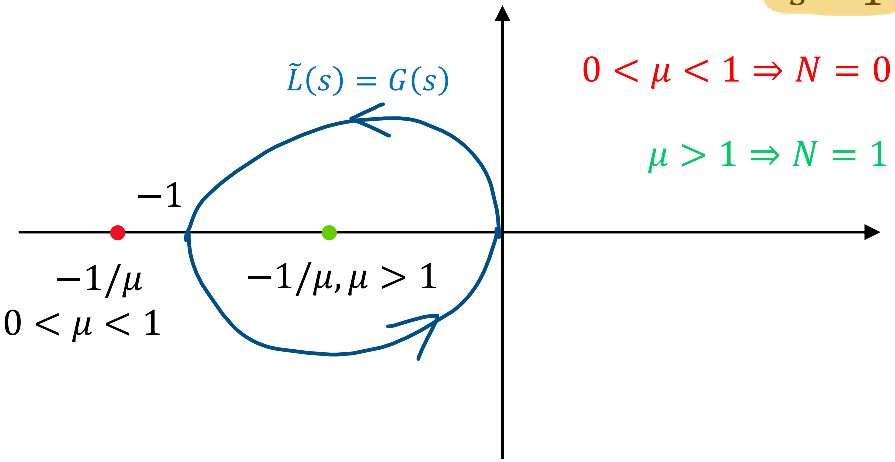
NOTA: Qui non ho dipendenza da M. Si parla di sistemi intrinsecamente stabili. Altrimenti stabilità regolare se prima o poi per valori alti ho instabilità

Fondamenti di controlli automatici 4/ed – P. Bolzern, R. Scattolini, N. Schiavoni Copyright © 2015 – The McGraw-Hill Companies srl

Sistemi a stabilità condizionata

- Negli esempi visti finora il sistema a ciclo chiuso passava da una condizione di stabilità ad una di instabilità al crescere del guadagno (**stabilità regolare**) oppure rimaneva stabile anche in presenza di aumenti del guadagno (**stabilità intrinseca**)
- Possono esserci sistemi in cui nessuna delle due situazioni si verifica ma il sistema passa da una condizione di instabilità a ciclo aperto (o per bassi valori del guadagno) ad una di stabilità a ciclo chiuso, spesso fino a certi valori del guadagno (**stabilità condizionata**) Se aumento μ si guadagna la stabilità. (Valendo fino a un certo punto)
  - Sistemi instabili a ciclo aperto
  - Sistemi con diversi poli nell'origine
    - Esempio 1

$$R(s) = \mu > 0, \qquad G(s) = \frac{1}{s-1} = -\frac{1}{1-s}$$

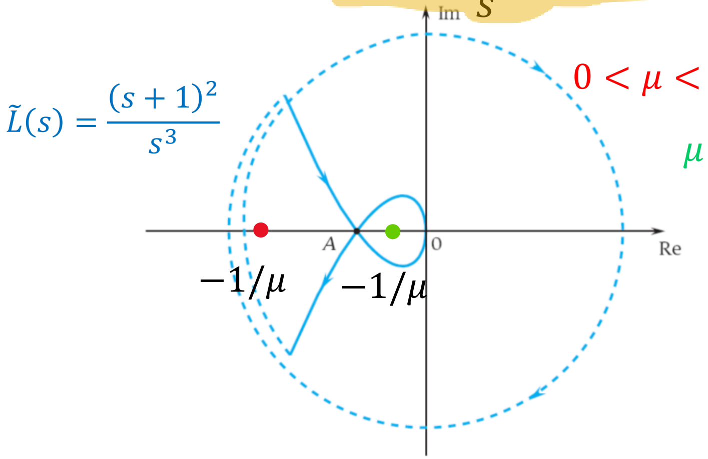


$0 < \mu < 1 \Rightarrow N = 0 \neq 1 = P$

$\mu > 1 \Rightarrow N = 1 = P$

- Esempio 2

$$R(s) = \frac{\mu}{s}, \mu > 0, \qquad G(s) = \frac{(s+1)^2}{s^2}$$



$0 < \mu < \bar{\mu} \Rightarrow N = -2 \neq 0 = P$

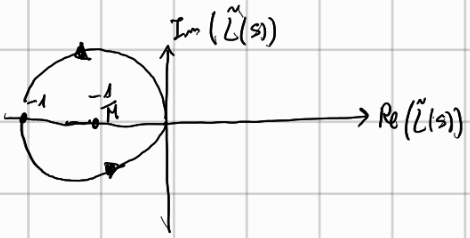
$\mu > \bar{\mu} \Rightarrow N = 0 = P$

$\bar{\mu} = 0.5$

 Copyright © 2015 – The McGraw-Hill Companies srl

$M_0 = -\pi$ $m_0 = 1$

$M_F = -\pi + \frac{\pi}{2}$ $m_F = 0$



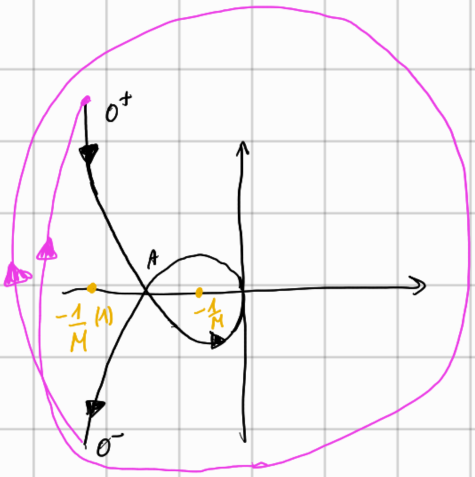
Anticipo = polo a p. reale ≥0.

P=1 qui, Quindi N=1 per forza. Se $-\frac{1}{M}$ si trova dentro, faccio 1 giro antiorario, N=1.

$-\frac{1}{M} > -1$ (cioè a destra di -1) $\Rightarrow$ $M>1$. Ho A.S.

ESEMPIO 2:

$\tilde L(s) = \frac{(s+1)^2}{s^3}$



$\varphi_0 = -\frac{3}{2}\pi$ $m_0 = +\infty$

$\varphi_F = -\frac{3}{2}\pi + \pi$ $m_F = 0$

Zero a parte reale neg. anticipa

Da 0^- a 0^+ in senso orario. Ho 3 poli nell'origine $\Rightarrow$

da $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$ per ogni polo $\Rightarrow$ 3π.

$\Downarrow$

$-\Delta\angle(s-p_i)$ solo sulla semicirconferenza:

$\Downarrow$

0

Numero di giri: $N=-2$ (1)

(2) Numero di giri: $N = 1-1 = 0$, quello esterno è in verso opposto

↳ Stabile, $P=0$.

Quindi, $-\frac{1}{M} > x_A$.

Calcolo x_A:

$$\angle \tilde L(j\omega_\pi) = -\pi \Rightarrow \overset{Num.}{2\,\mathrm{atan}(\omega_\pi)} - \frac{3}{2}\pi = -\pi$$

$$\mathrm{atan}(\omega_\pi) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \omega_\pi = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

Quindi, $X_A = -|\tilde{L}(j\omega_\pi)| = -\frac{1^2+1^2}{1^3} = -2$

Dunque, $-\frac{1}{M} > -2 \Rightarrow M > \frac{1}{2}$ M sufficientemente grande

Sistemi con ritardi di tempo

- Il criterio di Nyquist è applicabile anche al caso in cui nella funzione d'anello sia presente un ritardo di tempo finito $e^{-s\tau}, \tau > 0$, pur essendo il sistema a ciclo chiuso a dimensione infinita
- In tal caso il numero P di poli a parte reale positiva della funzione d'anello si riferisce alla parte $L'(s)$ senza ritardo

$$L(s) = L'(s)e^{-s\tau}, \qquad \tau > 0$$

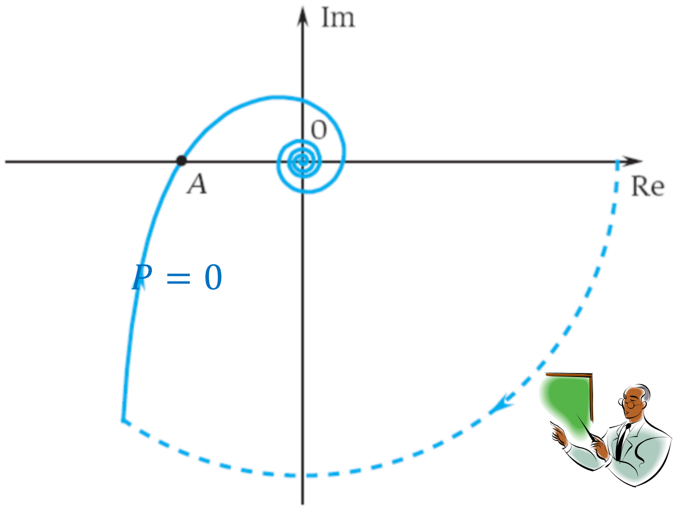
Non dimostrabile come prima.

- Il perché tale criterio risulti applicabile anche a funzioni di trasferimento non razionali fratte esula dai limiti di questo corso perché si basa su alcuni risultati di analisi funzionale (spazi di Banach)
  - In pratica, non potendo utilizzare il concetto di poli, per la stabilità si usa la condizione di assoluta integrabilità della risposta impulsiva
  - Esempio

$$L(s) = \frac{\mu}{s}e^{-s\tau}, \qquad \mu, \tau > 0$$

– Il sistema in anello chiuso è stabile se e solo se

$$\mu\tau < \frac{\pi}{2} \rightarrow \begin{cases} \mu < \pi/(2\tau), & \text{fissato il ritardo} \\ \tau < \pi/(2\mu), & \text{fissato il guadagno} \end{cases} \longrightarrow \text{Limiti alle prestazioni}$$



Fondamenti di controlli automatici 4/ed – P. Bolzern, R. Scattolini, N. Schiavoni Copyright © 2015 – The McGraw-Hill Companies srl

$\measuredangle L(j\omega_\pi) = -\pi$

$\Downarrow$

$-\frac{\pi}{2} - \omega_\pi \tau = -\pi \implies \omega_\pi \tau = \frac{\pi}{2}$

$\omega_\pi = \frac{\pi}{2\tau}$ $\qquad X_\pi = -|L(j\omega_\pi)| = -\frac{M}{\omega_\pi}$

$|e^{-s\tau}| = 0$ se $s = j\omega_\pi$

Quindi $\quad -\frac{M2\tau}{\pi} > -1 \implies \frac{M2\tau}{\pi} < 1 \qquad M < \frac{\pi}{2\tau}$, con $M > 0$.

Se ritardo cresce, il guadagno M per avere sistema stabile è sempre più piccolo

Limite alle prestazioni.