

LEZIONI DI TELECOMUNICAZIONI
Elementi di Teoria dei Segnali
Tempo-Continuo

Francesco Palmieri

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione
Seconda Università di Napoli

3 ottobre 2012

Introduzione alla Teoria dei Segnali

In questo capitolo vengono introdotte alcune tra le principali definizioni della Teoria dei Segnali. In particolari vengono definiti i segnali tempo-continuo e tempo-discreto e presentati alcuni segnali di utilizzo comune.

0.1 Introduzione

Un *segnale* è una funzione

$$s(t) : t \in \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{A}. \quad (1)$$

La principale classificazione dei segnali è basata sulla struttura del dominio \mathcal{T} e del codominio \mathcal{A} .

Un segnale *tempo-continuo* è tale che \mathcal{T} è un sottoinsieme di \mathcal{R}^l . Il caso principale si ha per $l = 1$ in cui la funzione è definita su sottoinsiemi dell'asse reale. E' in tal caso che alla variabile indipendente può essere attribuito il significato fisico di *tempo*. Comunque, anche se la variabile indipendente può essere multidimensionale, si preferisce mantenere la denominazione tempo-continuo in quanto lo studio dei segnali con $l > 1$ è spesso una semplice estensione del caso per $l = 1$.¹

Se \mathcal{T} è un intervallo di durata finita, diremo anche che il segnale è *tempo-limitato*.

Un segnale *tempo-discreto* è tale che \mathcal{T} è un sottoinsieme numerabile di \mathcal{R}^l . La situazione più tipica è ancora quella con $l = 1$ per cui la funzione (sequenza) è definita su punti (istanti) discreti (di tempo) dell'asse

¹Lo studio dei segnali non cambia se alla variabile indipendente viene associata una grandezza fisica diversa dal tempo, quale spazio o altro. La associazione al tempo per t resta comunque il principale modello di riferimento e ne caratterizza la nomenclatura.

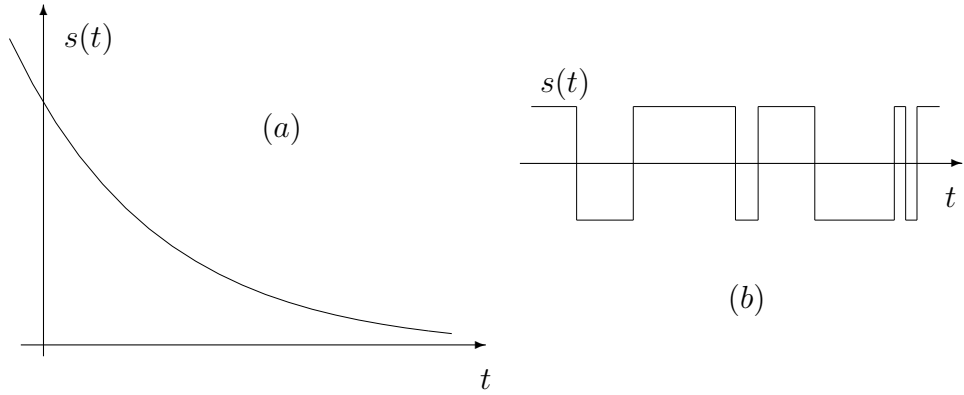


Figura 1: Segnali tempo-continuo: (a) a valori continui; (b) a valori discreti.

reale. Lo scenario principale è comunque quello relativo a istanti di tempo uniformemente spazati.

Ulteriori classificazioni sono basate sulla struttura del codominio \mathcal{A} . Se l'insieme \mathcal{A} è un insieme continuo, parliamo di segnali *a valori continui*. Quando entrambi \mathcal{T} e \mathcal{A} sono continui i segnali sono *analogici*. Se l'insieme \mathcal{A} è un insieme discreto parliamo di segnali *a valori discreti*. Quando entrambi \mathcal{T} e \mathcal{A} sono discreti i segnali sono o *numerici* o *digitali*. Si noti che l'insieme di definizione può anche essere multidimensionale. Esempi tipici sono: 1. $\mathcal{A} = \mathcal{R}$, segnale monodimensionale a valori continui; 2. $\mathcal{A} = \mathcal{R}^2$, segnale bidimensionale a valori continui; 3. $\mathcal{A} = \mathcal{C}$, segnale monodimensionale a valori complessi; 4. $\mathcal{A} = \{\dots\alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots\}$, segnale monodimensionale a valori discreti; ecc.

Figure 1 e 2 mostrano degli esempi di segnali monodimensionali tempo-continuo e tempo-discreto. Nel seguito di queste note faremo riferimento esclusivamente a segnali del tempo monodimensionali, prevalentemente a valori reali, ma con possibili generalizzazioni a segnali a valori complessi.

0.1.1 Segnali deterministici o aleatori

La caratterizzazione di un segnale costituisce un argomento centrale nella teoria e nella pratica ingegneristica delle telecomunicazioni. E' infatti la quantificazione delle caratteristiche dei segnali che ci consente di utilizzarli o analizzarli rispetto al loro contenuto informativo. Ai fini della modellistica è pertanto opportuno adottare una ulteriore classificazione. Diremo che

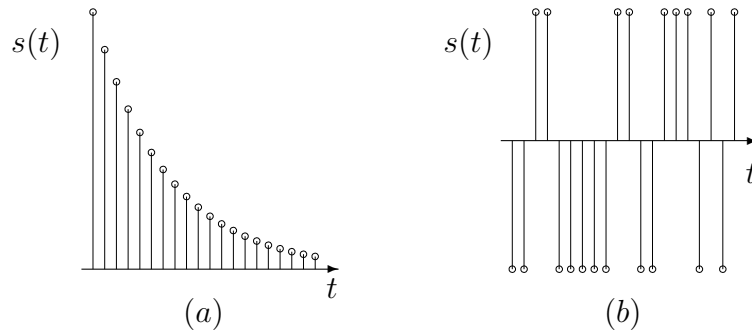


Figura 2: Segnali tempo-discreto: (a) a valori continui; (b) a valori discreti.

un segnale è *deterministico* o *determinato*, se esso costituisce una fissata funzione del tempo, magari dipendente da un insieme di parametri, ma che non presenta alcuna caratteristica di incertezza. Per esempio sono segnali deterministici: un segnale sinusoidale, una sequenza periodica con fase e periodo fissati, un segnale risultante da una sola misura, eccetera. Diremo viceversa che un segnale è *aleatorio*, o *casuale*, o *random*, o *stocastico* se esso non corrisponde ad una sola funzione del tempo, ma ad una collezione (anche infinita) di funzioni associate agli elementi di uno spazio campione su cui è definita una misura di probabilità. In altre parole, quando si osserva un segnale aleatorio, bisogna pensare che ciò che vediamo è solo una delle possibili *realizzazioni* (o *funzioni membro*) del segnale: il meccanismo aleatorio di generazione del segnale ne sceglie una secondo una misura di probabilità. La teoria dei segnali aleatori, detti anche *processi aleatori*, sarà trattata in uno dei capitoli seguenti. Nella parte iniziale di queste note faremo escusivamente riferimento a funzioni del tempo fissate, ovvero a segnali deterministici.

Capitolo 1

Generalità sui segnali tempo-continuo

Riportiamo qui alcune nozioni preliminari relative alla caratterizzazione di segnali tempo-continuo.

1.0.2 La componente continua

Una prima caratterizzazione di un segnale $s(t)$, che può rappresentare la variazione nel tempo di una tensione, di una pressione, di un campo elettrico, o altro, è la sua collocazione approssimativa rispetto all'asse delle ordinate, ovvero il valore approssimativo attorno al quale si manifestano le variazioni. Tale parametro è denominato *media temporale*, o *baseline*, o *componente continua*, o *componente DC*.¹

La media temporale del segnale $s(t)$ sull'intervallo (t_1, t_2) è l'area media, o la *media temporale a breve termine*

$$\mu_s[t_1, t_2] = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} s(t) dt. \quad (1.1)$$

Tale definizione dipende dalla somma algebrica delle aree sottese al di sopra e al di sotto dell'asse delle ascisse. Se si vuole estendere la definizione a tutto l'asse dei tempi, si adotta invece la seguente definizione

$$\mu_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T s(t) dt, \quad (1.2)$$

che è il limite della media temporale a breve termine (*media asintotica*). La figura 1.1 mostra alcuni segnali con i rispettivi valor medi. Si noti come per

¹Dalla nomenclatura dell'elettrotecnica: "Direct Current component."

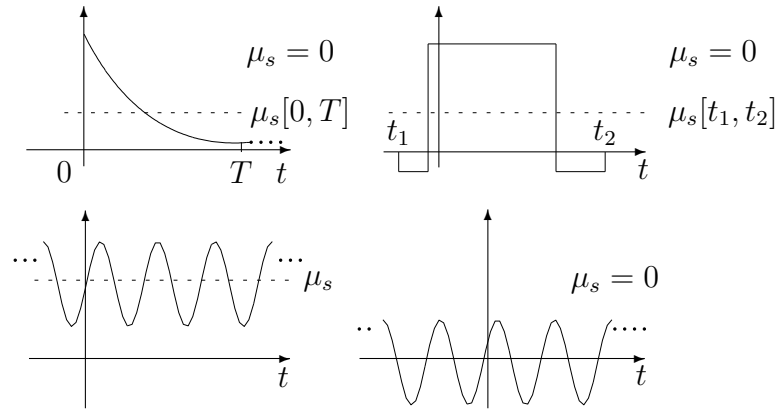


Figura 1.1: Alcuni segnali con le rispettive medie.

i segnali a durata limitata, o ad area finita, la media asintotica sia nulla. Nella analisi e nella elaborazione dei segnali, si cerca in genere di rimuovere la componente continua e lavorare su segnali a media nulla, specialmente quando i segnali hanno estensione illimitata. Vedremo in seguito alcuni esempi.

1.0.3 Energia e potenza

Quando si è in presenza di un segnale, una delle prime cose che può essere utile quantificare è la sua estensione in ampiezza, ovvero quanto “grande” sia in segnale. Ovviamente un segnale ad ogni istante di tempo assume un valore diverso e qualunque misura della sua ampiezza non può che essere di tipo *globale* o *integrale*. Se siamo in presenza di un segnale che si esaurisce nel tempo, l’integrale di $s^2(t)$ su tutto l’asse dei tempi costituisce un buon candidato.² Se invece il segnale si estende su tutto l’asse dei tempi, l’integrale del quadrato potrebbe dare un valore infinito. In tale caso è necessario definire una misura integrale media. Queste considerazioni portano alle seguenti definizioni.

²L’integrale del modulo $|s(t)|$ potrebbe anche essere una misura appropriata. Per ragioni connesse al significato fisico dei segnali e per maggiore agilità analitica, come ad esempio la derivabilità, la teoria è formulata sulla funzione quadrato.

Definizione: Si definisce *energia* \mathcal{E}_s di un segnale $s(t)$ l'integrale

$$\mathcal{E}_s = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt. \quad (1.3)$$

Definizione: Si definisce *potenza* \mathcal{P}_s di un segnale $s(t)$ il limite

$$\mathcal{P}_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |s(t)|^2 dt. \quad (1.4)$$

Quindi la potenza di un segnale è il limite della energia media su un intervallo, al divergere della dimensione dell'intervallo.³ L'operazione di modulo all'interno degli integrali rende le definizioni valide anche per i segnali complessi.

Ovviamente tali espressioni possono anche dare valori degeneri: un segnale che si estende su tutto l'asse dei tempi può avere energia infinita; per un segnale transiente la potenza è nulla. Si adottano pertanto le seguenti definizioni:

Definizione: $s(t)$ è un *segnale di energia* se $\mathcal{E}_s < \infty$.

Definizione: $s(t)$ è un *segnale di potenza* se $0 < \mathcal{P}_s < \infty$.

E' immediato verificare che per un segnale di energia $\mathcal{P}_s = 0$, e che per un segnale di potenza $\mathcal{E}_s = \infty$. Infatti per un segnale di energia

$$\int_{-T}^T |s(t)|^2 dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \mathcal{E}_s. \quad (1.6)$$

Quindi

$$\mathcal{P}_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |s(t)|^2 dt \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \mathcal{E}_s = 0. \quad (1.7)$$

³In alcuni casi per la potenza si adotta una definizione di media temporale un pò più generale, in cui l'intervallo di integrazione non è necessariamente centrato rispetto allo zero

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{t_0-T}^{t_0+T} |s(t)|^2 dt. \quad (1.5)$$

In tale definizione la potenza potrebbe dipendere da t_0 ed è necessario che si operi una successiva media su t_0 . Considerazioni su questo tema vengono tralasciate per brevità vista la natura introduttiva di queste note. Qualche commento ulteriore su questo tema sarà discusso nel capitolo sullo spettro di potenza e sulla autocorrelazione.

Analogamente per un segnale di potenza

$$0 < \mathcal{P}_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |s(t)|^2 dt < \infty, \quad (1.8)$$

implica che

$$\int_{-T}^T |s(t)|^2 dt \quad (1.9)$$

è un infinito di ordine uno al divergere di T . Ovvero

$$\mathcal{E}_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |s(t)|^2 dt = \infty. \quad (1.10)$$

1.0.4 Considerazioni sulle unità di misura

Nelle definizioni di energia e potenza non abbiamo fatto esplicito riferimento al loro significato fisico in termini di unità di misura. Ci si aspetterebbe che, vista la nomenclatura, energia e potenza siano misurate rispettivamente in Joule e Watt. In effetti non è necessariamente così poichè le definizioni che abbiamo dato sono puramente matematiche e le dimensioni relative a energia e potenza dipendono dalle dimensioni di $s(t)$. Ad esempio, se $s(t)$ è un segnale di tensione, la energia di $s(t)$ sarà misurata in $V^2 \text{sec}$ e la potenza in V^2 . Se $s(t)$ è un segnale di corrente, l'energia ha le dimensioni di $A^2 \text{sec}$ e la potenza di A^2 . Solo nel caso in cui $s(t)$ fosse un segnale di potenza con dimensioni in $W^{\frac{1}{2}}$, avremmo che l'energia si misurerebbe in Joule e la potenza in Watt.

1.0.5 Il valore RMS

Nelle definizioni date di energia e potenza, l'energia e la potenza sono legate al quadrato della quantità fisica descritta dal segnale in oggetto. Nella pratica ingegneristica può essere utile fare riferimento alla radice quadrata di tali quantità per manipolare delle grandezze che hanno la stessa dimensionalità del segnale di partenza. Si definisce pertanto *valore RMS (Root Mean Square)* o *valore efficace* della energia e della potenza rispettivamente

$$\mathcal{E}_s^{RMS} = \sqrt{\mathcal{E}_s}; \quad \mathcal{P}_s^{RMS} = \sqrt{\mathcal{P}_s}. \quad (1.11)$$

Quindi se $s(t)$ è un segnale di tensione, la energia efficace di $s(t)$ sarà misurata in $V \cdot \text{sec}^{\frac{1}{2}}$ e la potenza efficace in V . Se $s(t)$ è un segnale di corrente, l'energia efficace ha le dimensioni di $A \cdot \text{sec}^{\frac{1}{2}}$ e la potenza di A .

Esempio 1.1 Si valuti componente continua, energia e potenza del segnale

$$s(t) = \alpha e^{-\beta t} u(t). \quad (1.12)$$

Soluzione: Si tratta di un segnale transiente in cui l'area sottesa sull'intervallo $[-T, T]$ è:

$$\int_{-T}^T s(t) dt = \int_0^T \alpha e^{-\beta t} dt = \alpha \left. \frac{e^{-\beta t}}{-\beta} \right|_0^T = \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta T}). \quad (1.13)$$

Pertanto la media a tempo breve su $[-T, T]$ e la media asintotica sono

$$\mu_s[-T, T] = \frac{\alpha}{2T\beta} (1 - e^{-\beta T}); \quad \mu_s = 0. \quad (1.14)$$

Analogamente l'energia è

$$\mathcal{E}_s = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \int_0^{\infty} \alpha^2 e^{-2\beta t} dt \quad (1.15)$$

$$= \alpha^2 \left. \frac{e^{-2\beta t}}{-2\beta} \right|_0^{\infty} = \frac{\alpha^2}{2\beta}. \quad (1.16)$$

$\mathcal{P}_s = 0$. Trattasi di un segnale di energia.

Esempio 1.2 Si valuti componente continua, energia e potenza del segnale

$$s(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ a & 0 < t < \Delta \\ 0 & t > \Delta. \end{cases} \quad (1.17)$$

Soluzione: La media tempo breve nell'intervallo $[-T, T]$, con $-T < 0 < \Delta < T$, è

$$\mu_s[-T, T] = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T s(t) dt = \frac{1}{2T} \int_0^{\Delta} a dt = \frac{a\Delta}{2T}. \quad (1.18)$$

Il valore asintotico della media è chiaramente $\mu_s = 0$. L'energia è

$$\mathcal{E}_s = \int_0^{\Delta} a^2 dt = a^2 \Delta. \quad (1.19)$$

$\mathcal{P}_s = 0$. Trattasi di un segnale di energia.

Esempio 1.3 Si valuti componente continua, energia e potenza del segnale:

$$s(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta) \quad (1.20)$$

Soluzione: Si tratta di un segnale a estensione illimitata. La media a tempo breve sull'intervallo $[-T, T]$ è

$$\begin{aligned}\mu_s[-T, T] &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A \cos(2\pi f_0 t + \theta) dt = \frac{A}{2T} \left. \frac{\sin(2\pi f_0 t + \theta)}{2\pi f_0} \right|_{-T}^T \\ &= \frac{A}{4T\pi f_0} (\sin(2\pi f_0 T + \theta) + \sin(2\pi f_0 T - \theta)).\end{aligned}\quad (1.21)$$

Andando al limite per $T \rightarrow \infty$ si ha che la componente continua è $\mu_s = 0$ poiché i seni sono delle funzioni limitate. Per il calcolo della potenza si valuti prima l'integrale

$$\begin{aligned}\int_{-T}^T A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \theta) dt &= A^2 \int_{-T}^T \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(4\pi f_0 t + 2\theta) \right) dt \\ &= A^2 \left(T + \frac{1}{2} \left. \frac{\sin(4\pi f_0 t + 2\theta)}{4\pi f_0} \right|_{-T}^T \right) = A^2 T + \frac{1}{8\pi f_0} (\sin(4\pi f_0 T + 2\theta) + \sin(4\pi f_0 T - 2\theta)).\end{aligned}\quad (1.22)$$

Dividendo per $2T$ e andando al limite per $T \rightarrow \infty$ abbiamo che il secondo termine tende a zero e che

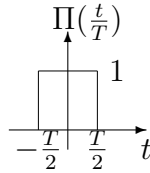
$$\mathcal{P}_s = \frac{A^2}{2}.\quad (1.23)$$

Trattasi di un segnale di potenza. L'energia è infinita.

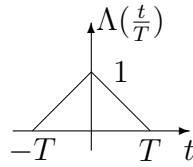
1.0.6 Segnali tempo-continuo di uso comune

Riportiamo qui definizione e notazione per alcuni segnali tipici di uso comune.

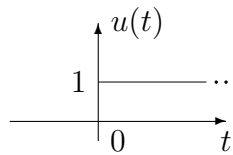
Impulso rettangolare



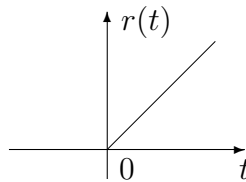
$$\Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & -\frac{T}{2} \leq t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}\quad (1.24)$$

Impulso triangolare

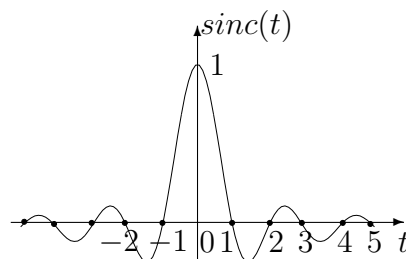
$$\Lambda\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} \frac{t}{T} + 1 & -T \leq t < 0 \\ -\frac{t}{T} + 1 & 0 \leq t < T \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases} \quad (1.25)$$

Funzione a gradino

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases} \quad (1.26)$$

Funzione rampa

$$r(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases} \quad (1.27)$$

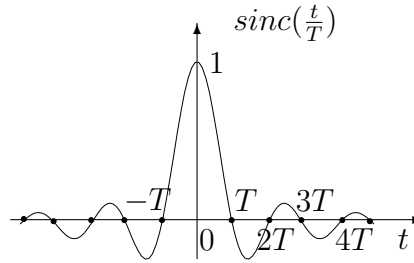
Impulso sinc

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}. \quad (1.28)$$

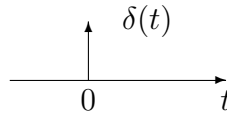
Si noti che la funzione si annulla in corrispondenza degli interi e che in zero vale uno. Quest'ultima proprietà può essere facilmente dimostrata usando la regola dell'Hopital

$$\text{sinc}(t)|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\pi \cos(\pi t)}{\pi} = 1. \quad (1.29)$$

Più in generale, l'impulso $\text{sinc}(\frac{t}{T})$ si annulla in corrispondenza di tutti i multipli di T , eccetto che nello zero in cui vale uno, come mostrato nella figura seguente.



Impulso di Dirac



$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases} \quad (1.30)$$

ed è tale che

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0). \quad (1.31)$$

Maggiori dettagli sulla definizione dell'impulso di Dirac sono forniti in Appendice B.

La funzione esponenziale complessa

Nell'analisi dei segnali e dei sistemi assume grande importanza la funzione complessa

$$f(t) = e^{st}, \quad (1.32)$$

dove s è una costante complessa

$$s = \alpha + j\omega. \quad (1.33)$$

A seconda del valore di s vari segnali tipici possono essere ottenuti. Più esplicitamente, riscrivendo la funzione come

$$f(t) = e^{st} = e^{\alpha t} e^{j\omega t} = e^{\alpha t} (\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)), \quad (1.34)$$

abbiamo che

$$\text{per } \alpha = 0, \omega = 0: \quad f(t) = 1;$$

per $\alpha = 0$:

$$\mathcal{Re}\{f(t)\} = \cos(\omega t); \quad \mathcal{Im}\{f(t)\} = \sin(\omega t); \quad (1.35)$$

per $\omega = 0$:

$$f(t) = e^{\alpha t}; \quad (1.36)$$

per generici valori di α e ω :

$$\mathcal{Re}\{f(t)\} = e^{\alpha t} \cos(\omega t); \quad \mathcal{Im}\{f(t)\} = e^{\alpha t} \sin(\omega t); \quad (1.37)$$

Quindi, la parte reale e la parte immaginaria di $f(t)$ sono in generale rispettivamente un coseno e un seno modulati da una funzione esponenziale. Il segno di $\alpha = \mathcal{Re}\{s\}$ determina se gli esponenziali sono decrescenti (segno negativo) o crescenti. Il valore di $\omega = \mathcal{Im}\{s\}$ determina la frequenza delle oscillazioni. Le figure 1.2 e 1.3 mostrano i vari andamenti. Interessante è anche identificare nel piano complesso della variabile s le regioni corrispondenti ai vari andamenti come mostrato in figura 1.4.

1.1 Operazioni elementari sui segnali

Scala:

Dato un segnale $s(t)$ e una costante reale A , il segnale *scalato* è

$$s_s(t) = As(t). \quad (1.38)$$

Il segnale è *amplificato* se $|A| > 1$ ed è *attenuato* se $|A| < 1$.

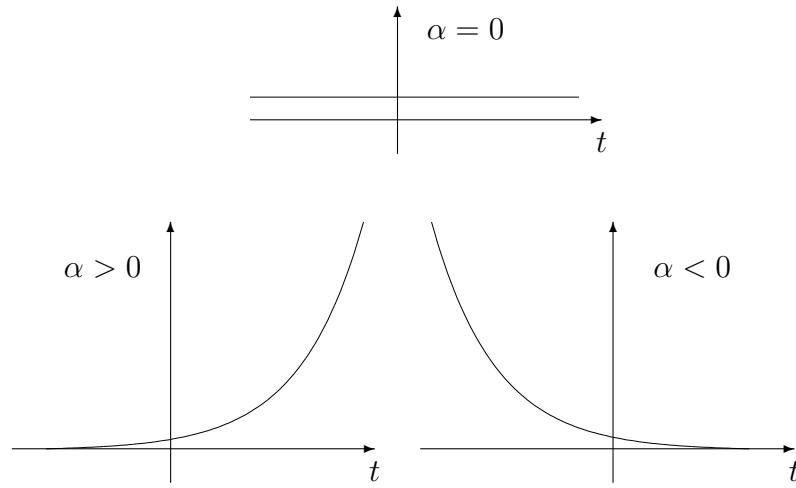


Figura 1.2: La funzione $e^{\alpha t}$ per $\alpha = 0$, $\alpha > 0$ e $\alpha < 0$.

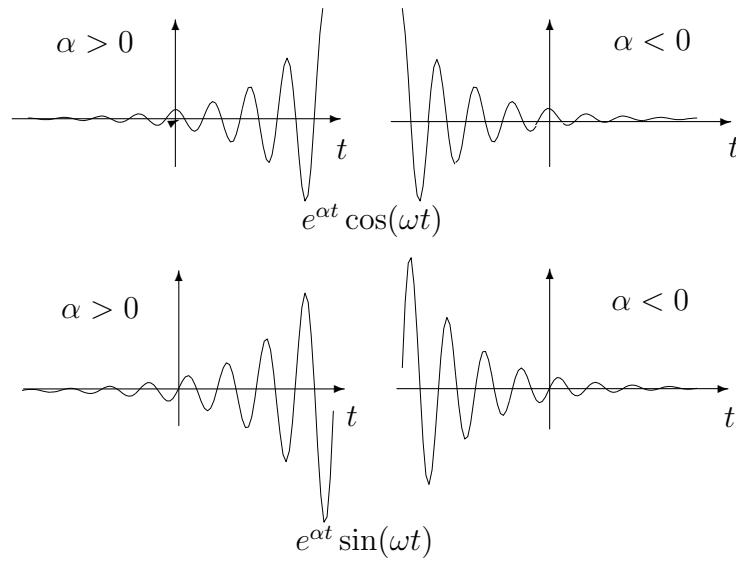
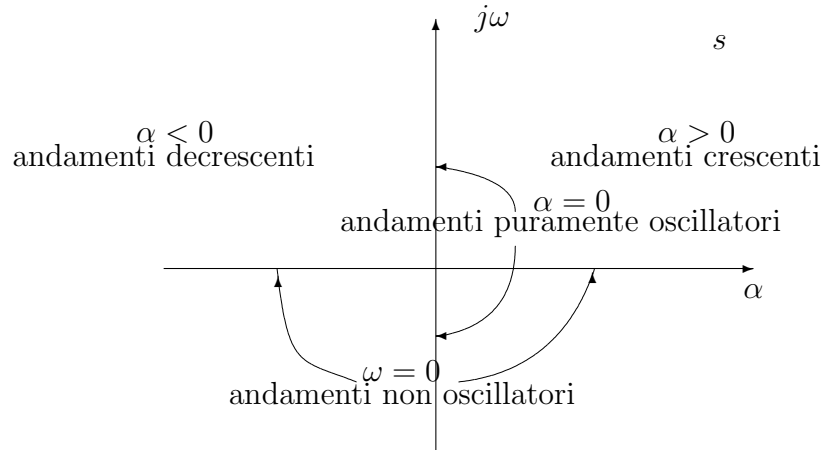


Figura 1.3: Le funzioni $e^{\alpha t} \cos(\omega t)$ e $e^{\alpha t} \sin(\omega t)$ per $\alpha > 0$ e per $\alpha < 0$.

Figura 1.4: Il piano della costante complessa s .**Traslazione temporale:**

Il segnale $s(t)$ *ritardato* di $t_0 > 0$ è

$$s_d(t) = s(t - t_0). \quad (1.39)$$

Il segnale $s(t)$ *anticipato* di $t_0 > 0$ è

$$s_a(t) = s(t + t_0). \quad (1.40)$$

Un esempio è mostrato in figura 1.5.

Inversione temporale:

Il segnale $s(t)$ a cui è stata invertita la scala dei tempi (*flipped*) è

$$s_f(t) = s(-t). \quad (1.41)$$

L'operazione può essere pensata come una rotazione del segnale attorno all'asse delle ordinate. Un esempio è mostrato in figura 1.5.

Cambio della scala dei tempi:

Data una costante $\alpha > 0$, la seguente operazione modifica linearmente l'asse dei tempi

$$x_s(t) = x(\alpha t). \quad (1.42)$$

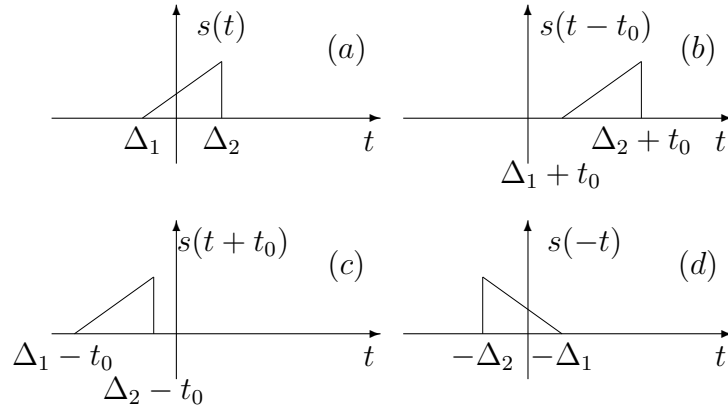


Figura 1.5: (a) Il segnale $s(t)$; (b) il segnale ritardato di t_0 ; (c) il segnale anticipato di t_0 ; (d) il segnale capovolto (*flipped*).

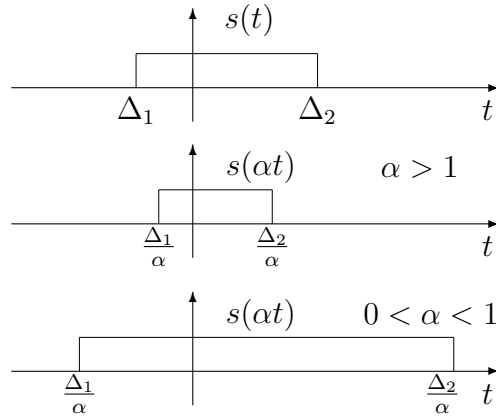


Figura 1.6: Un segnale $s(t)$ la cui scala dei tempi è stata contratta ($\alpha > 1$) ed espansa ($0 < \alpha < 1$).

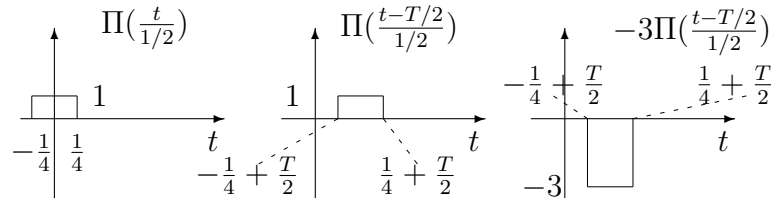


Figura 1.7: Come disegnare il segnale dell'esempio 1.4.

Se $\alpha < 1$ la scala viene *espansa*. Altrimenti per $\alpha > 1$ la scala viene *contratta*. La figura 1.6 mostra un esempio di contrazione e uno di espansione.

Operazioni combinate

Le operazioni su menzionate possono essere combinate anche mediante l'utilizzo delle funzioni canoniche. Vediamo alcuni esempi.

Esempio 1.4 Si schizzi il seguente segnale

$$s(t) = -3\Pi(2t - T). \quad (1.43)$$

Soluzione: Per usare le espressioni canoniche di scala e traslazione temporale, riscriviamo il segnale come

$$s(t) = -3\Pi\left(2\left(t - \frac{T}{2}\right)\right) = -3\Pi\left(\frac{(t - \frac{T}{2})}{\frac{1}{2}}\right). \quad (1.44)$$

Si tratta di un impulso rettangolare di durata $1/2$, ritardato di $T/2$ e scalato in ampiezza dal fattore -3 . Figura 1.7 mostra come disegnare il segnale risultante.

Esempio 1.5 Disegnare il segnale seguente ed esprimerlo come composizione di funzioni elementari

$$s(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2t & 0 \leq t < 2 \\ 2 & 2 \leq t < 5 \\ 0 & t \geq 5. \end{cases} \quad (1.45)$$

Soluzione: Due possibili scomposizioni del segnale sono

$$s(t) = 2r(t) - 2r(t - 2) - 2u(t - 5), \quad (1.46)$$

$$s(t) = \Lambda\left(\frac{t-2}{2}\right)\Pi\left(\frac{t-1}{2}\right) + \Pi\left(\frac{t-3.5}{3}\right). \quad (1.47)$$

La figura 1.8 mostra graficamente le funzioni utilizzate.

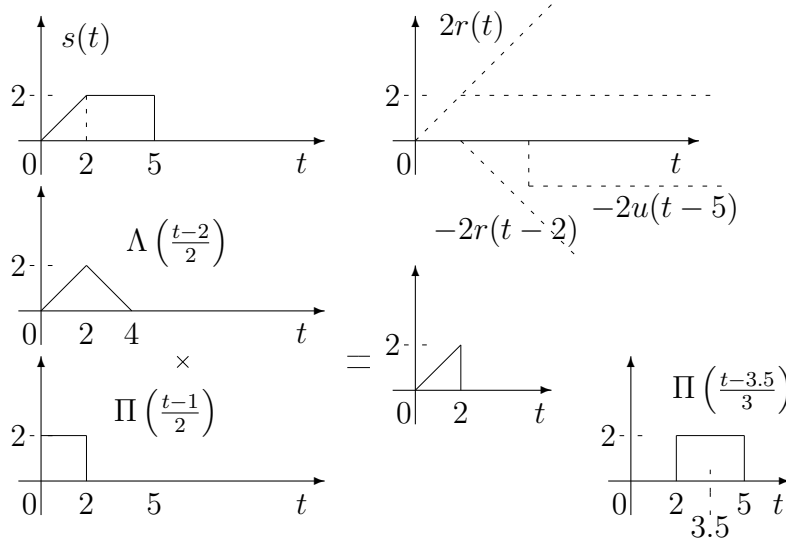


Figura 1.8: Possibili scomposizioni del segnale dell'esempio 1.5.

1.1.1 Segnali periodici

Un segnale $s(t)$ è *periodico* se esiste una costante T_0 tale che

$$s(t) = s(t + kT_0) \quad \text{per ogni } t \text{ e per ogni } k \text{ intero.} \quad (1.48)$$

Il valore più piccolo di T_0 per cui vale la relazione è detto *periodo* del segnale. Un segnale non periodico è detto *aperiodico*. Figura 1.9 mostra due segnali periodici.

Un segnale periodico può essere ottenuto anche come *estensione periodica* di un segnale tempo-limitato. Sia $i(t)$ un segnale diverso da zero in un intervallo $[a, b]$. La sua estensione periodica con periodo $T_0 > (b - a)$, è

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} i(t - kT_0). \quad (1.49)$$

Figura 1.10 mostra un esempio con un impulso rettangolare e la sua estensione periodica.

Tutti i segnali periodici sono chiaramente segnali di potenza. Pertanto per calcolarne la componente continua e la potenza, basta considerare

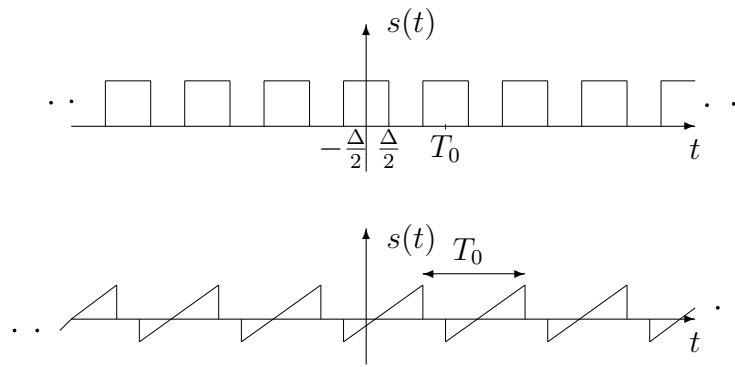
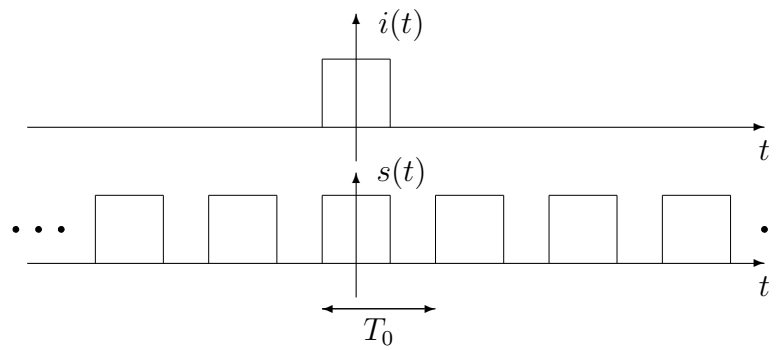


Figura 1.9: Segnali periodici tempo-continuo.

Figura 1.10: Un segnale $i(t)$ e la sua estensione periodica.

rispettivamente il valor medio e l'energia media in un periodo

$$\mu_s = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} s(t) dt, \quad (1.50)$$

$$\mathcal{P}_s = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} |s(t)|^2 dt. \quad (1.51)$$

Il valore di t_0 è arbitrario ed è in genere scelto opportunamente per rendere il calcolo dell'integrale più immediato. Scelte tipiche sono $t_0 = 0$ o $t_0 = -\frac{T_0}{2}$. Si noti inoltre che la potenza può anche essere valutata dall'energia del segnale $i(t)$

$$\mathcal{P}_s = \frac{\mathcal{E}_i}{T_0}. \quad (1.52)$$

1.2 Il decibel

Nella descrizione di fenomeni fisici è spesso necessario dover quantificare grandezze numeriche che variano su intervalli molto estesi, o molto ristretti. Ovvero, è abbastanza comune dover manipolare grandezze che coprono diversi ordini di grandezza, o “zoomare” su intervalli molto piccoli. In tali casi è opportuno normalizzare le quantità in gioco e utilizzare una scale logaritmica per ottenere una rappresentazione più compatta. Il *decibel* (dB), che fu introdotto nei sistemi telefonici⁴ per soddisfare tali esigenze, si basa sulle proprietà della funzione logaritmo che “espande” gli intervalli nel range di valori tra zero e uno, e li “comprime” nel range di valori maggiori di uno.

Definizione: Un valore numerico adimensionale $X > 0$, espresso in decibel è

$$X_{dB} = 10 \log_{10} X. \quad (1.53)$$

La formula inversa è chiaramente

$$X = 10^{\frac{X_{dB}}{10}}. \quad (1.54)$$

La tabella seguente mostra alcuni valori tipici della corrispondenza di un numero con il suo valore in dB.

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|----------|----------|--------|--------|--------|----|---|---|---|---------------|---------------|----------------|-----------------|------------------|------------------|-----------|
| X | ∞ | 10^4 | 10^3 | 10^2 | 10 | 4 | 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{100}$ | $\frac{1}{1000}$ | $\frac{1}{10^4}$ | 0 |
| X_{dB} | ∞ | 40 | 30 | 20 | 10 | 6 | 3 | 0 | -3 | -6 | -10 | -20 | -30 | -40 | $-\infty$ |

⁴La lettera maiuscola della sigla dB è usata in onore di Alexander Graham Bell che per primo utilizzò misure di potenza su scala logaritmica.

Quindi il dB quantifica con una scala lineare valori che variano su diversi ordini di grandezza. Notare che: a $X = 1$ corrispondono zero dB; quando $0 < X < 1$ abbiamo dei dB negativi; $-\infty$ dB corrisponde a $X = 0$. Inoltre la crescita in dB per $X > 1$ è lenta nonostante le variazioni siano di potenze di dieci.

1.2.1 Il dB relativo

Per quantificare una grandezza fisica in decibel è necessario prima di tutto eliminare la dimensionalità e fissare il riferimento mediante una normalizzazione ad un valore di riferimento prestabilito. Si usa pertanto il *dB relativo* definito come

$$\mathcal{X}_{dB} = 10 \log_{10} \frac{\mathcal{X}}{\mathcal{X}_0}, \quad (1.55)$$

dove \mathcal{X}_0 è un valore di riferimento per la grandezza fisica \mathcal{X} . In particolare, per quanto riguarda energia e potenza abbiamo

$$\mathcal{P}_{dB} = 10 \log_{10} \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}, \quad (1.56)$$

$$\mathcal{E}_{dB} = 10 \log_{10} \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0}. \quad (1.57)$$

Questa definizione è coerente con il fatto che, se si fa riferimento ai valori RMS, il valore in dB resta invariato

$$\mathcal{P}_{dB} = 20 \log_{10} \frac{\mathcal{P}^{RMS}}{\mathcal{P}_0^{RMS}}, \quad (1.58)$$

$$\mathcal{E}_{dB} = 20 \log_{10} \frac{\mathcal{E}^{RMS}}{\mathcal{E}_0^{RMS}}, \quad (1.59)$$

se si usa la espressione $20 \log(\cdot)$ al posto di $10 \log(\cdot)$. La misura in dB relativo (se ciò non è evidente dal contesto), va corredata dal valore di riferimento e dalle sue unità di misura. Sono piuttosto comuni varie notazioni per il dB relativo nelle quali si fa implicito riferimento al valore di riferimento e alle unità di misura.

Esempio 1.6 Supponiamo che $s(t)$ sia un segnale di potenza che ha le dimensioni di $W^{1/2}$ e che il valore di riferimento sia la potenza $\mathcal{P}_0 = 1$ mW. Il dB relativo, che denominiamo *dBm* (si tratta di una misura comune nei sistemi telefonici) è

$$\mathcal{P}_{dBm} = 10 \log_{10} \frac{\mathcal{P}_s}{10^{-3}}, \quad (1.60)$$

dove \mathcal{P}_s è la potenza del segnale espressa in Watt. La formula inversa per risalire alla potenza del segnale dato il suo valore in dBm è chiaramente

$$\mathcal{P}_s = 10^{\frac{\mathcal{P}_{dBm}}{10}} \text{ mW}. \quad (1.61)$$

Esempio 1.7 Il dB acustico. Supponiamo che un segnale $p_s(t) = s(t) + A$ misuri l'andamento temporale di una pressione acustica misurata in Pascal (Pa). Le variazioni di pressione $s(t)$ nello spettro udibile sono dell'ordine delle decine di μPa attorno alla pressione atmosferica A (componente continua). Di interesse nei sistemi acustici è il segnale $s(t)$, che è tipicamente un segnale di potenza. Le potenze acustiche vengono misurate in dB SPL (Standard Pressure Level), ovvero con riferimento alla cosiddetta soglia di udibilità. Tale soglia è stata standardizzata come il valore RMS di un tono a 1KHz appena udibile da un ascoltatore medio. Tale valore è di $P_0^{RMS} = 20 \mu\text{Pa}$.⁵

Quindi se \mathcal{P}_s^{RMS} è la potenza RMS del segnale $s(t)$ misurata in Pascal, la normalizzazione ci dà

$$\mathcal{P}_{dB SPL} = 20 \log_{10} \frac{\mathcal{P}_s^{RMS}}{P_0^{RMS}} = 20 \log_{10} \frac{\mathcal{P}_s^{RMS}}{20 \cdot 10^{-6}} = 10 \log_{10} \frac{\mathcal{P}_s}{20^2 \cdot 10^{-12}}, \quad (1.62)$$

dove \mathcal{P}_s è la potenza del segnale misurata in Pa^2 . Quindi a partire da un valore di pressione espresso in dB SPL si può ottenere la pressione efficace come

$$\mathcal{P}_s^{RMS} = 20 \cdot 10^{\frac{\mathcal{P}_{dB SPL}}{20}} \mu\text{Pa}. \quad (1.63)$$

La tabellina che segue riporta i valori tipici per varie sorgenti acustiche e ambienti fino e oltre la cosiddetta *soglia di dolore*.

⁵Si ricordi che un $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$, che $1 \text{ atm} = 101.325 \text{ KPa}$, e che $1 \text{ MPa} = 9.86923 \text{ atm} = 10 \text{ bar} = 10.1972 \text{ Kg/cm}^2$.

| RUMORE AMBIENTALE | Valore tipico dB SPL | SORGENTE |
|-------------------------|-------------------------|---------------------------------|
| Soglia di udibilità | 0 | Parlato sussurrato |
| Camera anecoica | 10 | |
| Studio di registrazione | 25 | |
| | 30 | |
| Auditorium silenzioso | 35 | |
| Area suburbana (notte) | 50 | |
| Cabina di aereo | 60 | Conversazione media (dist. 1m.) |
| | 65 | |
| | 90 | |
| | 110 | |
| | 120 | |
| | 125 | |
| | 140 | Traffico cittadino |
| | | Concerto rock |
| | | Soglia del dolore |
| | | Canna d'organo (dist. 0.5 m) |
| | | Colpo di pistola (dist. 8 m.) |

1.2.2 Il guadagno in dB

Il decibel costituisce una utile unità di misura anche per il guadagno dei sistemi lineari. Supponiamo che un segnale $s(t)$ sia posto all'ingresso di un sistema lineare non distorcente che restituisce una uscita $y(t) = As(t)$. Se il *guadagno* (adimensionale)⁶ Se $|A| > 1$, il sistema *amplifica* il segnale, mentre per $0 < |A| < 1$ il sistema lo *attenua*. Il valore $1/|A|$ è detto *attenuazione* del sistema. Per un segnale di energia, o di potenza, all'ingresso del sistema, l'energia, o la potenza, all'uscita è rispettivamente

$$\mathcal{E}_y = A^2 \mathcal{E}_s; \quad \mathcal{P}_y = A^2 \mathcal{P}_s. \quad (1.64)$$

Il valore $g = A^2$ è detto rispettivamente *guadagno di energia* o *guadagno di potenza*; il valore $L = 1/g$ è detto rispettivamente *perdita di energia* o *perdita di potenza* (*Loss*).

Il guadagno in dB è definito come:

$$A_{dB} = 20 \log_{10} |A| = 10 \log_{10} g = -10 \log_{10} L. \quad (1.65)$$

Il guadagno in dB è positivo se si tratta di un sistema amplificatore ed è negativo se si tratta di un sistema attenuatore. Si noti come il guadagno si

⁶Questo implica che l'unità di misura per $s(t)$ e per $y(t)$ sia la stessa. $s(t)$ e $y(t)$ sono, per esempio, entrambi dei segnali di tensione misurati in Volt o in μ Volt, o entrambi segnali di corrente misurati in Ampere, eccetera.

calcoli mediante la espressione $20 \log_{10}(\cdot)$ se riferito al guadagno scalare $|A|$, e la espressione $10 \log_{10}(\cdot)$ se riferito al guadagno di potenza A^2 . Questo consente di avere un unico valore in dB che rappresenta sia il guadagno lineare che il guadagno di potenza.

Quindi l'energia, o la potenza, dell'uscita del sistema, espresse in dB relativi sono semplicemente ottenute

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}_y)_{dB} &= 10 \log_{10} \frac{\mathcal{E}_y}{\mathcal{E}_0} = 10 \log_{10} A^2 \frac{\mathcal{E}_x}{\mathcal{E}_0} \\ &= 10 \log_{10} A^2 + 10 \log_{10} \frac{\mathcal{E}_x}{\mathcal{E}_0} \\ &= A_{dB} + (\mathcal{E}_x)_{dB}. \end{aligned} \quad (1.66)$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_y)_{dB} &= 10 \log_{10} \frac{\mathcal{P}_y}{\mathcal{P}_0} = 10 \log_{10} A^2 \frac{\mathcal{P}_x}{\mathcal{P}_0} \\ &= 10 \log_{10} A^2 + 10 \log_{10} \frac{\mathcal{P}_x}{\mathcal{P}_0} \\ &= A_{dB} + (\mathcal{P}_x)_{dB}. \end{aligned} \quad (1.67)$$

Tenere conto della amplificazione o della attenuazione del sistema in dB è quindi molto semplice: aggiungi o sottrai ai dB relativi dell'ingresso, il guadagno del sistema espresso in dB.

In un sistema costituito da più sistemi lineari non distorcenti posti in cascata e quindi caratterizzati da un guadagno complessivo pari a

$$A = A_1 A_2 \cdots A_n, \quad (1.68)$$

basta sommare algebricamente i guadagni espressi in dB

$$A_{dB} = \sum_{i=1}^n (A_i)_{dB}. \quad (1.69)$$

Esempio 1.8 Ai morsetti di una antenna è disponibile un segnale di tensione $v(t)$ che ha un valore RMS pari a $2\mu V$. Il pre-amplificatore all'uscita dell'antenna amplifica il segnale di 10 dB. Il cavo tra il preamplificatore e il ricevitore introduce una perdita di 0.5 dB. Valutare la potenza RMS del segnale $y(t)$ al ricevitore.

Soluzione: Il segnale all'uscita dell'antenna ha una potenza RMS espressa in $\text{dB}\mu V$ pari a

$$(\mathcal{P}_v)_{\text{dB}\mu V} = 20 \log_{10} \frac{\mathcal{P}_v^{RMS}}{10^{-6}} = 20 \log_{10} \frac{2}{1} = 6 \text{ dB}\mu V. \quad (1.70)$$

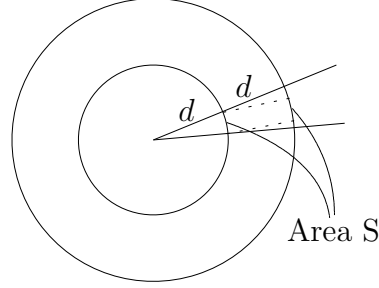


Figura 1.11: La spiegazione della legge dei 6 dB.

All'ingresso del ricevitore la potenza del segnale in $\text{dB}\mu\text{V}$ è

$$(\mathcal{P}_y)_{\text{dB}\mu\text{V}} = (\mathcal{P}_v)_{\text{dB}\mu\text{V}} + 10 - 0.5 = 15.5 \text{ dB}\mu\text{V}. \quad (1.71)$$

La potenza efficace di $y(t)$ è

$$\mathcal{P}_y^{\text{RMS}} = 10^{\frac{(\mathcal{P}_y)_{\text{dB}\mu\text{V}}}{20}} \mu\text{V} = 10^{\frac{15.5}{20}} \mu\text{V} = 5.96 \mu\text{V}. \quad (1.72)$$

Lo stesso risultato lo si poteva ottenere osservando che il guadagno complessivo del preamplificatore e del cavo è di $10 - 0.5 = 9.5$ dB che corrisponde ad un guadagno lineare di

$$|A| = 10^{\frac{9.5}{20}} = 2.98. \quad (1.73)$$

Pertanto $\mathcal{P}_y^{\text{RMS}} = 2.98 \mathcal{P}_v^{\text{RMS}} = 2.98 \cdot 2 = 5.96 \mu\text{V}$.

Esempio 1.9 Un diffusore acustico fornisce un livello SPL di 85 dB SPL alla distanza di 1 m. Valutare la potenza acustica e la capacità di un ascoltatore medio di udire la sorgente a 20 metri dal diffusore. Si ignorino gli effetti di riflessione, rifrazione e di rumore ambientale.

Soluzione: La chiave per risolvere questo problema è ricordare che il suono si attenua con una legge che segue il quadrato della distanza. Infatti, se la potenza acustica che attraversa una data area infinitesima, perpendicolare alla direzione di propagazione è \mathcal{P}_s e a distanza d da tale coordinata la potenza si è ridotta a \mathcal{P}_d , a distanza di $2d$ la potenza sarà ridotta a $\frac{1}{4}\mathcal{P}_d$, ovvero di 6 dB (regola dei 6 dB). La spiegazione di tale effetto è puramente geometrica. Si osservino le due sfere di figura 1.11. Poiché l'area della sfera è $4\pi \text{raggio}^2$, la porzione di potenza che attraversa la stessa area a distanza d dalla prima superficie sferica si è ridotta di un fattore pari a 4. Infatti la prima sfera ha area $4\pi d^2$ e la seconda $4\pi(2d)^2 = 16\pi d^2$: la densità superficiale di potenza si è ridotta a $1/4$ (-6 dB) della precedente.

Tornando al nostro esempio numerico, il segnale sarà attenuato di 6dB a 2 metri, di 12 dB a 4 metri, di 18 dB a 8 metri, di 24 dB a 16 metri. L'equazione per calcolare la attenuazione è quindi:

$$(L)_{dB} = 6 \log_2 \text{dist} = 6 \log_2 20 = 6 \cdot 4.32 \simeq 26. \quad (1.74)$$

Il segnale a 20 metri di distanza avrà un livello in dB SPL di $85-26=59$ dB SPL, ovvero sarà appena udibile.

1.3 Problemi

Problema 1.1 Si schizzino i seguenti segnali e se ne calcoli l'energia.

1. $\sin(2t)\Pi(\frac{t}{2})$;
2. $\cos(t + \frac{\pi}{3})u(t)$;
3. $(\sin(2t - 0.1) + 2\cos(t - \pi))\Pi(\frac{t}{5})$;
4. $\Lambda(\frac{t}{T})$;
5. $r(t) - r(t - 2)$;
6. $r(t - 3) - r(t - 4) - r(t - 5) + r(t - 6)$;
7. $u(t + 2) - u(t - 3)$;
8. $u(t) - 2u(t - 2) + u(t - 3)$;
9. $t^2\Pi(t - 0.5)$
10. $t^3\Pi(\frac{t}{5})$;

Problema 1.2 Si schizzino i seguenti segnali e se ne calcoli la potenza.

1. $5\cos(2\pi t + 0.7)$;
2. $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Pi(\frac{t-2kT_0}{T_0})$;
3. $0.5 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Lambda(\frac{t-kT}{T})$;
4. $A_1 \sin(2\pi f_1 t + \theta_1) + A_2 \cos(2\pi f_2 t + \theta_2)$;
5. $(b_0 + \cos(2\pi f_0 t + \theta_0)) \sin(t)$;
6. $\alpha_1 \sin(2\pi f_1 t) + \alpha_2 \cos(2\pi f_1 t + \theta)$;
7. $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos(t - kT)\Pi(\frac{(t-kT)}{\pi})$, $T > \pi$;
8. $\alpha \cos(2\pi f_1 t) \cos(2\pi f_2 t)$;
9. $\sin(2\pi 0.2t) \cos(2t)$;
10. $\cos^2(2\pi f_0 t)$;

Problema 1.3 Si determini quali di questi segnali è periodico e se ne calcoli il periodo.

1. $\cos(2t)$;
2. $e^{-2t}u(t)$;
3. $\cos(2\pi t) + 2\sin(2\pi^2 t + 0.1)$;
4. $\cos(10\pi t) + 3\sin(32\pi t)$;
5. $\cos(10\pi t) + 3\sin(20\pi t + 0.01)$;
6. $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Lambda(\frac{t-2kT}{T})$;
7. $\cos(2\pi t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\pi)$;

Capitolo 2

Scomposizione dei segnali

In questo capitolo vengono introdotti i principali strumenti analitici relativi alla scomposizione spettrale dei segnali tempo-continuo. La prima parte è dedicata alla scomposizione in funzioni di base generiche e poi in funzioni ortogonali. La seconda parte è dedicata alla introduzione e all'utilizzo della serie di Fourier.

2.1 Introduzione

Nello studio di un fenomeno fisico è molto utile pensare a delle quantità fisiche misurate come il risultato della composizione di più parti elementari. Ricordiamo l'esperimento del prisma che rivela come una radiazione luminosa sia composta da tante linee spettrali, ognuna corrispondente ad un colore elementare. E' proprio questa filosofia nella teoria dei segnali che ci suggerisce di analizzare i segnali cercando delle scomposizioni che ne rivelino la loro struttura intrinseca.

La figura 2.1 mostra schematicamente un segnale scomposto nella somma pesata di altri segnali. Tale decomposizione può prevedere un numero finito o infinito di segnali ed essere approssimata o esatta. Formuliamo ora il problema in maniera analitica.

Si consideri un segnale tempo-continuo di energia $s(t)$ definito su un intervallo $[a, b]$ (l'intervallo può anche essere di estensione infinita). Siano

$$\{\phi_0(t), \phi_1(t), \dots, \phi_{N-1}(t)\} \quad (2.1)$$

N funzioni tempo-continue di energia, anch'esse definite sullo stesso intervallo $[a, b]$. Si cerca una combinazione lineare di tali funzioni che approssimi al meglio la funzione $s(t)$, ovvero

$$\hat{s}(t) = \sum_{i=0}^{N-1} c_i \phi_i(t), \quad (2.2)$$

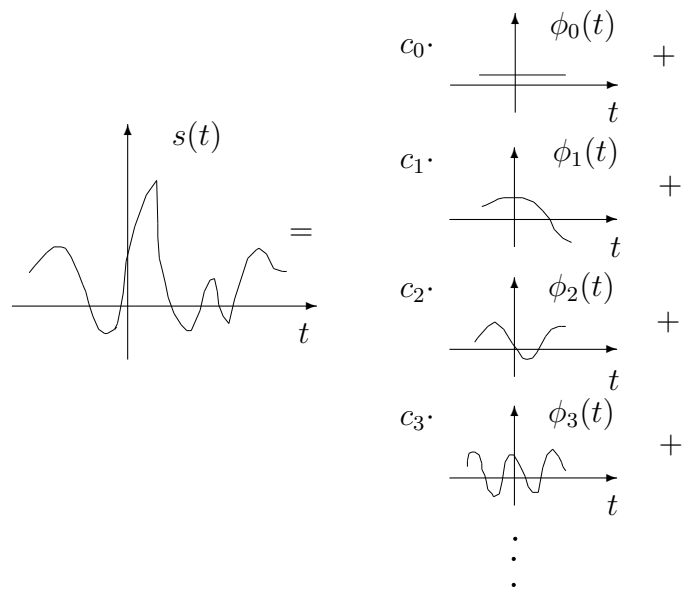


Figura 2.1: La scomposizione di un segnale nella somma pesata di altre funzioni.

tale che la funzione di costo

$$\mathcal{E} = \int_a^b |\hat{s}(t) - s(t)|^2 dt, \quad (2.3)$$

sia minimizzata. La funzione di costo è l'errore quadratico medio tra la funzione $s(t)$ e la funzione approssimante $\hat{s}(t)$.¹ La soluzione al problema può essere ottenuta semplicemente invocando il *principio di ortogonalità* descritto in Appendice C, che ci dice che la migliore approssimazione $\hat{s}_0(t)$ è la combinazione con coefficienti $\{c_{00}, c_{10}, \dots, c_{(N-1)0}\}$ che soddisfano le N equazioni lineari

$$\sum_{i=0}^{N-1} c_{i0} \int_a^b \phi_i(t) \phi_n^*(t) dt = \int_a^b s(t) \phi_n^*(t) dt, \quad n = 0, \dots, N-1. \quad (2.4)$$

Lo stesso risultato può essere ottenuto direttamente calcolando il gradiente di \mathcal{E} rispetto ai coefficienti e uguagliando a zero. Le N condizioni, riscritte in forma matriciale diventano

$$\begin{pmatrix} \int \phi_0 \phi_0^* & \int \phi_1 \phi_0^* & \cdot & \cdot & \cdot & \int \phi_{N-1} \phi_0^* \\ \int \phi_0 \phi_1^* & \int \phi_1 \phi_1^* & \cdot & \cdot & \cdot & \int \phi_{N-1} \phi_1^* \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \int \phi_0 \phi_{N-1}^* & \int \phi_1 \phi_{N-1}^* & \cdot & \cdot & \cdot & \int \phi_{N-1} \phi_{N-1}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{00} \\ c_{10} \\ \cdot \\ c_{(N-1)0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int s \phi_0^* \\ \int s \phi_1^* \\ \cdot \\ \int s \phi_{N-1}^* \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

L'equazione matriciale ottenuta è anche detta *equazione normale*. Il valore N è anche detto *ordine* della approssimazione. L'errore quadratico medio in condizioni di ottimalità si ottiene sostituendo nella espressione di \mathcal{E} la espressione dei coefficienti ottimi ed è

$$\mathcal{E}_0 = \int_a^b |s(t)|^2 dt - \sum_{n=0}^{N-1} c_{n0}^* \int_a^b s(t) \phi_n^*(t) dt. \quad (2.6)$$

Vedi Appendice C per dettagli sulla prova.

Esempio 2.1 Si consideri la funzione

$$s(t) = 2\left(-\frac{t}{T} + 1\right), \quad t \in [0, T], \quad (2.7)$$

e le due funzioni

$$\phi_0(t) = 1 \quad t \in [0, T]; \quad (2.8)$$

¹Per maggiore generalità, e visto che ciò non comporta complessità aggiuntiva al problema, supporremo che $s(t)$ e le funzioni $\{\phi_i(t)\}$ possano essere delle funzioni complesse.

$$\phi_1(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, \frac{T}{2}] \\ 0 & t \in [\frac{T}{2}, T]. \end{cases} \quad (2.9)$$

Si valuti la migliore combinazione di ϕ_0 e ϕ_1 per approssimare $s(t)$ in $[0, T]$.

Soluzione: Valutiamo prima le correlazioni necessarie all'equazione normale

$$\int_0^T |\phi_0(t)|^2 dt = T; \int_0^T \phi_1(t)\phi_0(t)dt = \frac{T}{2} = \int_0^T \phi_0(t)\phi_1(t)dt; \int_0^T |\phi_1(t)|^2 dt = \frac{T}{2}; \quad (2.10)$$

$$\int_0^T s(t)\phi_0(t)dt = \int_0^T s(t)dt = T; \int_0^T s(t)\phi_1(t)dt = \int_0^{\frac{T}{2}} s(t)dt = \frac{3}{4}T. \quad (2.11)$$

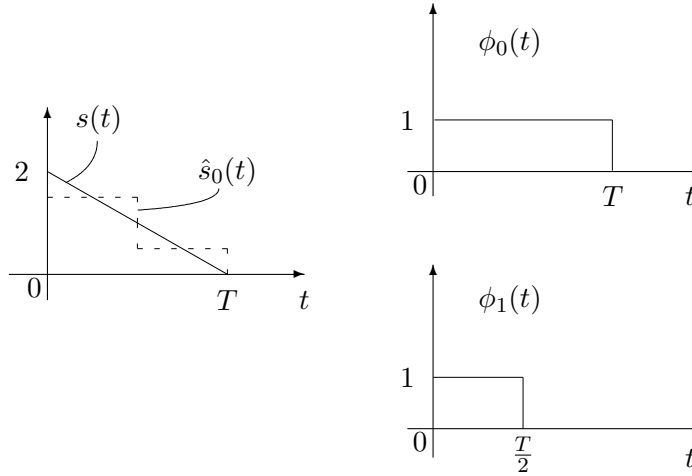
I coefficienti ottimi sono soluzione del sistema lineare

$$\begin{pmatrix} T & \frac{T}{2} \\ \frac{T}{2} & \frac{T}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{00} \\ c_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T \\ \frac{3}{4}T \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

che da: $c_{00} = \frac{1}{2}$ e $c_{10} = 1$. La migliore combinazione di ϕ_0 e ϕ_1 mostrata in figura è quindi

$$\hat{s}_0(t) = \frac{1}{2}\phi_0(t) + \phi_1(t). \quad (2.13)$$

Evidentemente la bontà della approssimazione dipende dalla tipologia delle funzioni approssimanti. In questo caso si tratta di funzioni discontinue la cui combinazione lineare ovviamente è discontinua a differenza della funzione da approssimare che è continua.



2.1.1 Funzioni ortogonali

L'insieme delle funzioni (di base) con cui rappresentare un segnale va scelto in maniera mirata. Infatti, se le caratteristiche del segnale da espandere sono simili a

quelle delle funzioni di base scelte, è pensabile che un numero limitato di funzioni sia sufficiente per ottenere una buona rappresentazione del segnale di partenza. Un'altra esigenza potrebbe essere quella di usare delle funzioni di base che garantiscano la convergenza a zero dell'errore di approssimazione al crescere della dimensionalità della base. Quest'ultima esigenza e la semplicità di soluzione dell'equazione normale, suggeriscono di utilizzare delle funzioni di energia ortogonali. Infatti, se le funzioni di base sono tali che

$$\int_a^b \phi_i(t) \phi_j^*(t) dt = 0 \quad \forall \quad i \neq j, \quad (2.14)$$

l'equazione normale si semplifica e i coefficienti ottimi diventano

$$c_{i0} = \frac{\int_a^b s(t) \phi_i^*(t) dt}{\int_a^b |\phi_i(t)|^2 dt}, \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (2.15)$$

L'errore quadratico medio in condizioni di ottimalità è

$$\mathcal{E}_0 = \int_a^b |s(t)|^2 dt - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\left| \int_a^b s(t) \phi_n^*(t) dt \right|^2}{\int_a^b |\phi_n(t)|^2 dt}. \quad (2.16)$$

Prima di esaminare alcuni esempi, la domanda naturale che emerge è: cosa succede se il numero di funzioni utilizzate per la approssimazione cresce? Ovvero, la approssimazione diventa sempre migliore al crescere del numero delle basi? Inoltre, c'è relazione tra la soluzione ottenuta per un certo ordine della approssimazione e quella relativa agli ordini successivi?

Per rispondere a queste domande, basta guardare l'equazione normale e osservare che quando la approssimazione è basata su funzioni non ortogonali, i coefficienti ottenuti per un insieme di l funzioni sono in generale diversi da quelli ottenuti per $l+1$ funzioni, anche se le prime l funzioni sono le stesse. Si tratta infatti di un sistema lineare diverso che va risolto in generale per ogni ordine. La situazione è molto più semplice quando si usano funzioni di base ortogonali in quanto l'insieme di coefficienti calcolati fino all'ordine l può essere conservato e semplicemente corredato del nuovo coefficiente corrispondente alla funzione $(l+1)$ -esima. Questo ci consente di scrivere la sequenza delle migliori approssimazioni in funzione dell'ordine come

$$\hat{s}_o(t; N) = \sum_{n=0}^{N-1} c_{n0} \phi_n(t), \quad (2.17)$$

dove i coefficienti sono quelli calcolati secondo la formula (2.15) e non dipendono dall'ordine. La convergenza della procedura si studia considerando il limite

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{s}_o(t; N). \quad (2.18)$$

La uguaglianza

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(t), \quad t \in [a, b], \quad (2.19)$$

va verificata a seconda della tipologia di funzione $s(t)$ e delle funzioni di base prescelte. La convergenza quando è verificata, è almeno in media quadratica. Torneremo su questo argomento in seguito.

Se le funzioni di base sono anche normalizzate ad avere energia unitaria

$$\int_a^b |\phi_n(t)|^2 dt = 1, \quad (2.20)$$

l'espressione per i coefficienti ottimi si semplifica ulteriormente

$$c_n = \int_a^b s(t) \phi_n^*(t) dt, \quad n = 0, \dots, N-1. \quad (2.21)$$

In tal caso si dice che la base delle funzioni costituisce una base di funzioni *ortonormali*.

E' utile anche notare che per una qualunque espansione su base ortonormale vale il *Teorema di Parseval*

$$\int_a^b |\hat{s}(t)|^2 dt = \sum_{n=0}^{N-1} |c_n|^2, \quad (2.22)$$

ovvero l'energia di una qualunque combinazione lineare delle funzioni ortonormali è pari alla somma dei valori quadratici dei coefficienti dello sviluppo. La prova è immediata calcolando esplicitamente la energia di $\hat{s}(t)$

$$\begin{aligned} \int_a^b |\hat{s}(t)|^2 dt &= \int_a^b \hat{s}(t) \hat{s}^*(t) dt = \int_a^b \sum_{i=0}^{N-1} c_i \phi_i(t) \sum_{j=0}^{N-1} c_j^* \phi_j^*(t) dt \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} c_i c_j^* \int_a^b \phi_i(t) \phi_j^*(t) dt = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} c_i c_j^* \delta_{ij} \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} c_i c_i^* = \sum_{i=0}^{N-1} |c_i|^2 \end{aligned} \quad (2.23)$$

dove δ_{ij} è la *delta di Kronecker*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases} \quad (2.24)$$

Esempio 2.2 Si consideri il segnale

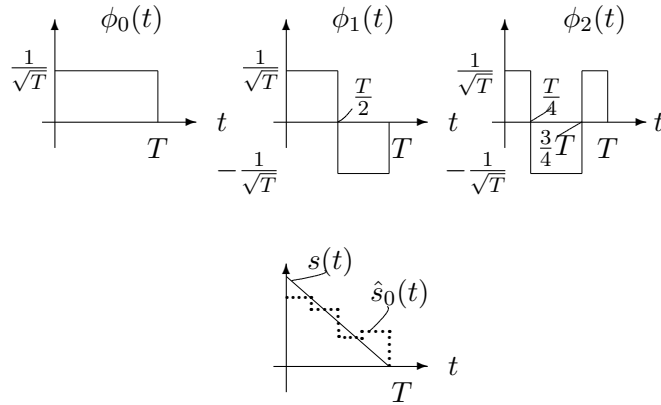
$$s(t) = 2 \left(-\frac{t}{T} + 1 \right), \quad t \in [0, T], \quad (2.25)$$

e le tre funzioni di base ortonormali

$$\phi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}, \quad t \in [0, T]; \quad \phi_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}} & t \in [0, \frac{T}{2}] \\ -\frac{1}{\sqrt{T}} & t \in [\frac{T}{2}, T]; \end{cases} \quad (2.26)$$

$$\phi_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}} & t \in [0, \frac{T}{4}] \\ -\frac{1}{\sqrt{T}} & t \in [\frac{T}{4}, \frac{3}{4}T] \\ \frac{1}{\sqrt{T}} & t \in [\frac{3}{4}T, T]. \end{cases} \quad (2.27)$$

Si valuti la somma pesata di ϕ_0 , ϕ_1 e ϕ_2 che realizza la migliore approssimazione di $s(t)$ per $t \in [0, T]$.



Soluzione:

$$\begin{aligned} c_{00} &= \int_0^T s(t) \phi_0(t) dt = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T s(t) dt = \sqrt{T}; \\ c_{10} &= \int_0^T s(t) \phi_1(t) dt = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^{\frac{T}{2}} s(t) dt - \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{\frac{T}{2}}^T s(t) dt = \frac{\sqrt{T}}{2} \\ c_{20} &= \int_0^T s(t) \phi_2(t) dt = \frac{1}{\sqrt{T}} \left(\int_0^{\frac{T}{4}} s(t) dt - \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3}{4}T} s(t) dt + \int_{\frac{3}{4}T}^T s(t) dt \right) = \frac{\sqrt{T}}{8}. \end{aligned}$$

$$\hat{s}_0(t) = \sqrt{T} \phi_0(t) + \frac{\sqrt{T}}{2} \phi_1(t) + \frac{\sqrt{T}}{8} \phi_2(t). \quad (2.28)$$

Nella letteratura dell'analisi numerica e della elaborazione numerica dei segnali molte sono gli insiemi di basi proposte. Le più famose sono sicuramente quelle basate su funzioni trigonometriche (serie di Fourier). Altre basi notevoli sono: 1. i *polinomi di Legendre*; 2. le *funzioni di Walsh*; 3. le *funzioni di Bessel*; 4. le *funzioni di Laguerre*; 5. i *polinomi di Jacobi*; 6. i *polinomi di Hermite*. La analisi di tali basi è chiaramente al di là degli scopi di queste note. Riamandiamo pertanto il lettore a un qualunque buon testo di analisi numerica per approfondimenti. Esamineremo qui di seguito nel dettaglio solo le basi trigonometriche della serie di Fourier.

2.1.2 La serie di Fourier trigonometrica

Come già menzionato, la scomposizione più classica nella teoria dei segnali è basata su funzioni oscillanti sinusoidali. Tale scelta alla loro introduzione nella storia dell'analisi numerica destò qualche perplessità. E' legittimo che lo studente attento si chieda perché utilizzare delle funzioni approssimanti oscillanti in un intervallo se l'obiettivo è rappresentare delle funzioni continue, che magari presentano qualche discontinuità, ma che non manifestano comportamenti oscillatori? La risposta è nelle proprietà di ortogonalità delle funzioni sinusoidali che garantiscono la convergenza in media quadratica al crescere dell'ordine di approssimazione. L'ortogonalità è ovviamente una caratteristica propria anche di molti altri insiemi funzioni, ma la *frequenza armonica* associata ad ogni componente della base consente di introdurre l'importante concetto di *scomposizione spettrale*, o *scomposizione in frequenza* di un segnale.

Senza alcuna perdita di generalità concentriamoci su funzioni da approssimare in un intervallo di durata T centrato nell'origine. Quindi nell'intervallo $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ scegliamo la seguente base di funzioni trigonometriche

$$\phi_n(t) = \cos(2\pi \frac{n}{T}t), \quad t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.29)$$

Le funzioni sono delle sinusoidi di periodo $\frac{T}{n}$ e quindi a frequenze multiple di $\frac{1}{T}$. La frequenza $f = \frac{1}{T}$ è detta *frequenza fondamentale* e i suoi multipli interi *frequenze armoniche*. Si ricorda al lettore che f si misura in Hertz, T in secondi e $\omega = 2\pi f$ in rad/sec. Le funzioni della base sono mostrate in Figura 2.2. Si noti che la prima funzione per $n = 0$ è una costante.

E' immediato verificare che le funzioni sono ortogonali. Infatti per $n \neq m$:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \phi_n(t) \phi_m^*(t) dt &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) \cos\left(\frac{2\pi m}{T}t\right) dt \\ &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{2\pi(n+m)}{T}t\right) + \cos\left(\frac{2\pi(n-m)}{T}t\right) \right) dt \end{aligned} \quad (2.30)$$

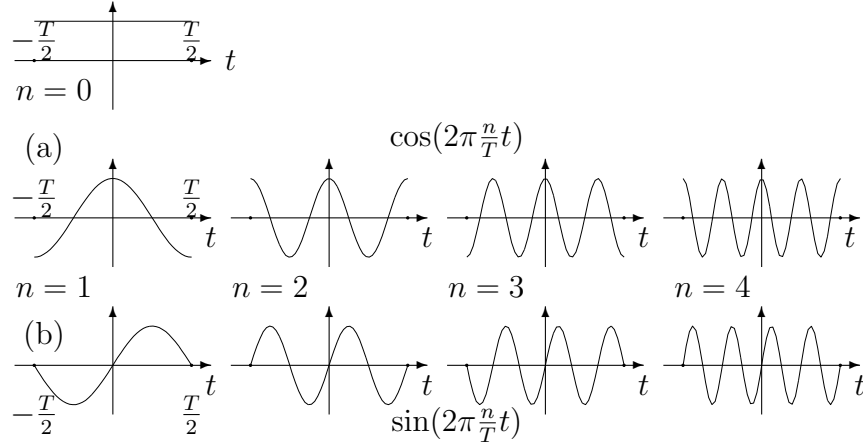


Figura 2.2: Le funzioni trigonometriche di base nell'intervallo $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$: a) coseni; b) seni.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \frac{\sin(\frac{2\pi(n+m)}{T}t)}{\frac{2\pi(n+m)}{T}} \Big|_{-T/2}^{T/2} + \frac{1}{2} \frac{\sin(\frac{2\pi(n-m)}{T}t)}{\frac{2\pi(n-m)}{T}} \Big|_{-T/2}^{T/2} \\
 &= 0,
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

poiché tutti i seni hanno argomento che è un multiplo di π e danno contributo nullo.² Valutiamo anche l'energia di ogni funzione. Per $n \geq 1$ abbiamo che

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |\phi_n(t)|^2 dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos^2\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt \tag{2.32}$$

$$= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi 2n}{T}t\right) \right) dt \tag{2.33}$$

$$= \frac{T}{2}. \tag{2.34}$$

Per $n = 0$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |\phi_0(t)|^2 dt = T. \tag{2.35}$$

Quindi da equazione (2.15)

$$\hat{s}_0(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N-1} a_n \cos\left(2\pi \frac{n}{T}t\right), \tag{2.36}$$

²Si noti che l'area sottesa da una sinusoide su un periodo è sempre nulla. Ricordiamo questa proprietà in seguito per evitare di eseguire esplicitamente questo tipo di integrale.

con

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) dt; \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \cos(2\pi \frac{n}{T} t) dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.37)$$

La equazione (2.36) per $N \rightarrow \infty$ va sotto il nome di *serie di Fourier coseno*.

Analogamente è possibile definire una espansione in termini di seni

$$\phi_n(t) = \sin(2\pi \frac{n}{T} t), \quad t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.38)$$

dove valgono le stesse considerazioni sulla periodicità e sulla ortogonalità. La formula per l'espansione è

$$\hat{s}_0(t) = \sum_{n=1}^{N-1} b_n \sin(2\pi \frac{n}{T} t), \quad (2.39)$$

con

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \sin(2\pi \frac{n}{T} t) dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.40)$$

Quest'ultima equazione per $N \rightarrow \infty$ va sotto il nome di *serie di Fourier seno*. Il lettore verifichi la correttezza della espansione in seni dimostrando la ortogonalità delle funzioni e valutandone l'energia.

Si noti che la approssimazione $\hat{s}(t)$ in termini di funzioni coseno è una funzione pari essendo la sovrapposizione di funzioni pari (coseni). Viceversa la approssimazione in termini di seni è una funzione dispari. Ai fini di una migliore approssimazione, sarà naturale usare espansione in coseni se la funzione $s(t)$ è pari e quella in seni se la funzione è dispari.

Poichè i seni e i coseni delle due basi sono anche mutuamente ortogonali, ovvero

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(2\pi \frac{n}{T} t) \sin(2\pi \frac{m}{T} t) dt = 0, \quad \forall \quad n, m \quad (2.41)$$

(il lettore verifichi questa proprietà per esercizio) è possibile usare una espansione che includa entrambi *seni e coseni*

$$\hat{s}_0(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N-1} \left(a_n \cos(2\pi \frac{n}{T} t) + b_n \sin(2\pi \frac{n}{T} t) \right). \quad (2.42)$$

Le espressioni per i coefficienti sono le stesse (2.37) e (2.40). Tale espressione sarà più efficace in generale, anche se richiede, a parità di N , più coefficienti. Equazione (2.42) per $N \rightarrow \infty$ va sotto il nome di *serie di Fourier trigonometrica completa*.

Le seguenti proprietà dei coefficienti $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono facilmente dimostrabili.

Proprietà 2.1 Se il segnale $s(t)$ è una funzione pari, ovvero $s(t) = s(-t)$, $b_n = 0, \forall n = 1, \dots$

Prova: Immediata dalla espressione di b_n poiché il seno è una funzione dispari.

Proprietà 2.2 Se il segnale $s(t)$ è una funzione dispari, ovvero $s(t) = -s(-t)$, $a_n = 0, \forall n = 0, 1, 2, \dots$

Prova: Immediata dalle espressioni di a_0 e di a_n poiché il coseno è una funzione pari.

E' importante notare che la espansione di un segnale nella sovrapposizione di più funzioni di base sinusoidali corrisponenti a frequenze diverse, ne fornisce una rappresentazione *frequenziale*. Il coefficiente n -esimo, che è il *peso* relativo alla componente a frequenza $\frac{n}{T}$, rappresenta la componente spettrale a quella frequenza. Poiché le frequenze sono tutte multiple della frequenza $1/T$ (*frequenze armoniche*) e $1/T$ è la *frequenza fondamentale*, l'insieme dei coefficienti ($\{a_0, a_n, n = 1, 2, \dots\}$, o $\{b_n, n = 1, 2, \dots\}$, o $\{a_0, (a_n, b_n), n = 1, 2, \dots\}$) costituisce lo *spettro armonico del segnale*.

Esempio 2.3 Si valuti l'espansione trigonometrica completa della funzione $s(t) = \Pi(\frac{t}{2\Delta})$ nell'intervallo $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ con $\Delta < \frac{T}{2}$.

Soluzione: Trattandosi di una funzione pari, $b_n = 0, \forall n$ e basta calcolare i coefficienti a_n

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\Delta}^{\Delta} dt = \frac{2\Delta}{T}. \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(2\pi \frac{n}{T} t) s(t) dt = \frac{2}{T} \int_{-\Delta}^{\Delta} \cos(2\pi \frac{n}{T} t) dt \\ &= \frac{2}{T} \frac{\sin(2\pi \frac{n}{T} t)}{2\pi \frac{n}{T}} \Big|_{-\Delta}^{\Delta} = \frac{2}{T} \left(\frac{\sin(2\pi \frac{n}{T} \Delta) - \sin(-2\pi \frac{n}{T} \Delta)}{2\pi \frac{n}{T}} \right) \\ &= 2 \frac{\sin(2\pi n \frac{\Delta}{T})}{\pi n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.44)$$

La figura 2.3 mostra la funzione per $\Delta = 0.22$ e $T = 1$. La sovrapposizione dei coseni realizza una sempre migliore approssimazione di $s(t)$ al crescere di N . Resta un effetto di sovraelongazione attorno alle discontinuità a $t = \pm\Delta$. Tale comportamento è noto come *effetto di Gibbs* e sarà discusso in seguito. La figura 2.3 (b) mostra l'andamento dei coefficienti $a_n, n = 0, 1, \dots$. Si ricorda al lettore che le *righe* dello spettro ottenuto, sono il contributo a frequenze $f_n = n/T$ Hz, $n = 0, 1, \dots$. Si tratta di un segnale con componenti prevalenti alle basse frequenze (segnale passa-basso).

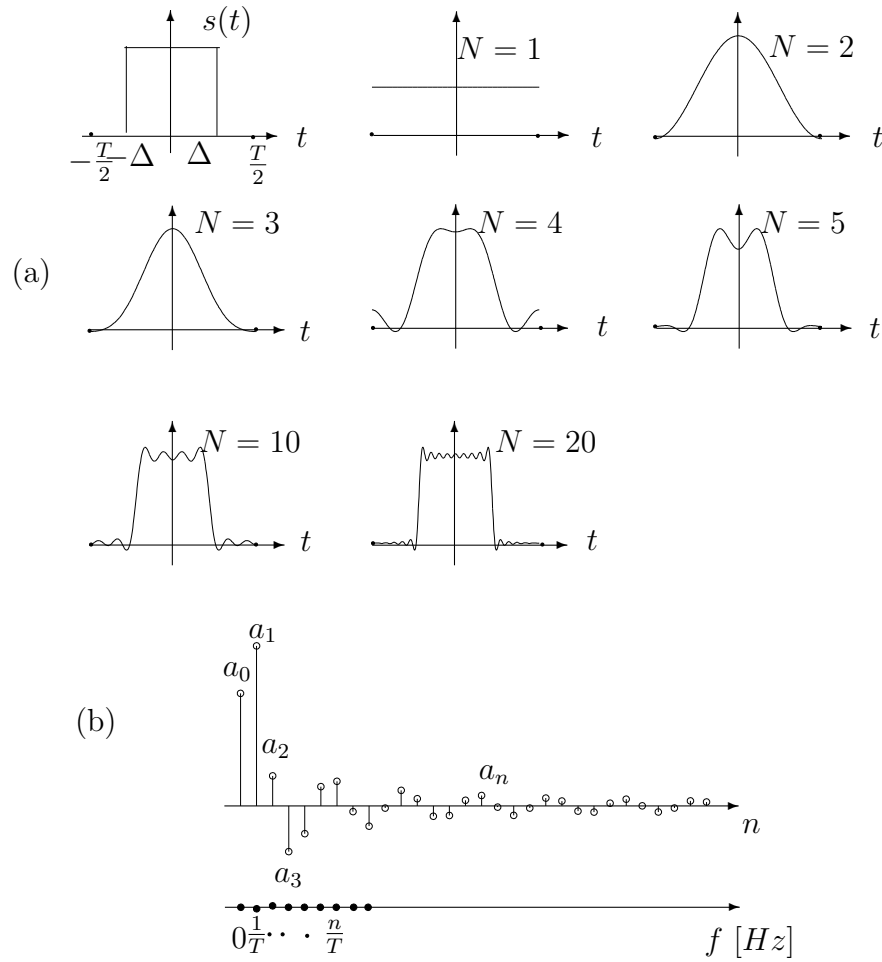


Figura 2.3: (a) La funzione $s(t)$ per $\Delta = 0.22$ e $T = 1$ con le approssimazioni per $N = 1, 2, 3, 4, 5, 10, 20$; (b) i coefficienti dello sviluppo e le frequenze corrispondenti.

Esempio 2.4 Si consideri il segnale

$$s(t) = e^{-\alpha t}, \quad -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}, \quad \alpha > 0. \quad (2.45)$$

Calcolare l'espansione trigonometrica di Fourier.

Soluzione: Calcoliamo prima la componente a frequenza nulla (componente continua)

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{T} \frac{e^{-\alpha t}}{-\alpha} \Big|_{-T/2}^{T/2} = \frac{1}{\alpha T} \left(e^{\frac{\alpha T}{2}} - e^{-\frac{\alpha T}{2}} \right). \quad (2.46)$$

La espressione per i coefficienti a_n per $n = 1, 2, \dots$ è

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-\alpha t} \cos \frac{2\pi}{T} nt dt = \frac{2}{T} \frac{e^{-\alpha t} \left(\frac{2\pi}{T} n \sin \frac{2\pi}{T} nt - \alpha \cos \frac{2\pi}{T} nt \right)}{\alpha^2 + \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 n^2} \Big|_{-T/2}^{T/2} \quad (2.47)$$

$$= \frac{2}{T} \frac{e^{-\frac{\alpha T}{2}} (-\alpha \cos \pi n) - e^{\frac{\alpha T}{2}} (-\alpha \cos \pi n)}{\alpha^2 + \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 n^2} \quad (2.48)$$

$$= \frac{2\alpha}{T} (-1)^n \frac{e^{\frac{\alpha T}{2}} - e^{-\frac{\alpha T}{2}}}{\alpha^2 + \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 n^2}, \quad (2.49)$$

dove abbiamo usato la formula per l'integrale $\int e^a x \cos bx dx$ di Appendice A e le proprietà $\sin \pi n = 0$ e $\cos \pi n = (-1)^n$. Analogamente la espressione per i coefficienti b_n per $n = 1, 2, \dots$ è

$$b_n = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-\alpha t} \sin \frac{2\pi}{T} nt dt = \frac{2}{T} \frac{e^{-\alpha t} \left(-\alpha \sin \frac{2\pi}{T} nt - \frac{2\pi}{T} n \cos \frac{2\pi}{T} nt \right)}{\alpha^2 + \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 n^2} \Big|_{-T/2}^{T/2} \quad (2.50)$$

$$= \frac{2}{T} \frac{e^{-\frac{\alpha T}{2}} \left(-\frac{2\pi}{T} n \cos \pi n \right) - e^{\frac{\alpha T}{2}} \left(-\frac{2\pi}{T} n \cos \pi n \right)}{\alpha^2 + \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 n^2} \quad (2.51)$$

$$= \frac{4\pi}{T^2} (-1)^n n \frac{e^{\frac{\alpha T}{2}} - e^{-\frac{\alpha T}{2}}}{\alpha^2 + \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 n^2}. \quad (2.52)$$

Prima di esaminare altre forme della serie di Fourier, è opportuno far notare al lettore che la scelta dell'intervallo $[-T/2, T/2]$ su cui sono state definite le basi e calcolate le espressioni dei coefficienti è arbitraria. In generale la espansione può essere riferita a qualunque intervallo $[a, b]$, purché esso sia di durata $T = b - a$

pari al periodo della componente fondamentale. Nella letteratura è anche molto comune considerare l'intervallo $[0, T]$. In tali casi è immediato verificare che tutte le proprietà della serie quando la funzione è simmetrica o antisimmetrica, vanno riferite al centro dell'intervallo.

2.1.3 La forma compatta della serie di Fourier

Esiste un'altra espressione per la serie trigonometrica completa in termini di sole funzioni coseno. Il peso delle varie componenti dello sviluppo è tenuto in conto mediante ampiezze e fasi delle varie componenti. Più esplicitamente, la espansione trigonometrica in *forma compatta* è

$$\hat{s}(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{N-1} C_n \cos(2\pi \frac{n}{T}t + \theta_n), \quad (2.53)$$

con

$$C_0 = a_0; \quad C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \theta_n = \tan^{-1} \left(\frac{-b_n}{a_n} \right), n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.54)$$

Si noti che $C_n \geq 0$, $\forall n > 0$ e che i valori di θ_n sono in radianti. Le due sequenze $\{C_0, C_1, \dots\}$ e $\{\theta_1, \theta_2, \dots\}$ sono rispettivamente lo *spettro delle ampiezze* e lo *spettro delle fasi* del segnale.

Prova: La prova della forma compatta discende semplicemente dalle proprietà delle funzioni trigonometriche. Infatti, poichè

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \quad (2.55)$$

abbiamo che

$$C_n \cos(2\pi \frac{n}{T}t + \theta_n) = C_n \cos \theta_n \cos(2\pi \frac{n}{T}t) - C_n \sin \theta_n \sin(2\pi \frac{n}{T}t). \quad (2.56)$$

Per confronto diretto con la espressione trigonometrica completa (2.42), abbiamo

$$C_0 = a_0; \quad \begin{cases} a_n = C_n \cos \theta_n \\ b_n = -C_n \sin \theta_n \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.57)$$

Risolvendo il sistema abbiamo le relazioni (2.54).

Esempio 2.5 Riprendiamo l'esempio 2.3 cercando i coefficienti della rappresentazione compatta.

$$C_0 = a_0 = \frac{2\Delta}{T}. \quad (2.58)$$

Poiché $b_n = 0, \forall n$,

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |a_n| = 2 \left| \frac{\sin(2\pi n \frac{\Delta}{T})}{\pi n} \right|, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.59)$$

La fase non può essere calcolata secondo la formula con l'arcotangente poiché $b_n = 0$. Ricordando che $a_n = C_n \cos \theta_n$, abbiamo che θ_n deve tenere conto del cambio di segno di a_n quando si estrae il valore assoluto. Quindi θ_n è o zero o π . Sinteticamente

$$\theta_n = \pi \cdot u \left[-\frac{\sin(2\pi n \frac{\Delta}{T})}{\pi n} \right], \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.60)$$

dove si è utilizzata la funzione gradino $u(\cdot)$.

Esempio 2.6 Riprendiamo l'esempio 2.4 cercando i coefficienti della rappresentazione compatta.

$$C_0 = a_0 = \frac{1}{\alpha T} \left(e^{\frac{\alpha T}{2}} - e^{-\frac{\alpha T}{2}} \right). \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} C_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{2}{T} \frac{e^{\frac{\alpha T}{2}} - e^{-\frac{\alpha T}{2}}}{\alpha^2 + (\frac{2\pi}{T})^2 n^2} \sqrt{\alpha^2 + (\frac{2\pi}{T})^2 n^2} \\ &= \frac{2}{T} \frac{e^{\frac{\alpha T}{2}} - e^{-\frac{\alpha T}{2}}}{\sqrt{\alpha^2 + (\frac{2\pi}{T})^2 n^2}}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$\theta_n = \arctan \frac{-b_n}{a_n} = -\arctan \frac{2\pi}{\alpha T} n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.63)$$

2.1.4 La serie di Fourier esponenziale

La serie di Fourier trigonometrica è appropriata per funzioni reali e realizza in maniera intuitiva la espansione di una funzione in una sovrapposizione di sinusoidi a frequenze multiple della frequenza fondamentale $1/T$. I coefficienti dello sviluppo, sia quest'ultimo in forma completa o compatta, sono reali. Inoltre la sommatoria dell'espansione è monolatera ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$). Una diversa versione della serie di Fourier che consente una maggiore flessibilità di rappresentazione, e che risulta utile anche per le funzioni complesse, è la serie di Fourier *esponenziale*. Anche se all'inizio tale rappresentazione può sembrare la meno intuitiva, essa presenta notevoli vantaggi rispetto alla serie trigonometrica, anche perché essa è direttamente collegata alla trasformata di Fourier che sarà introdotta nel prossimo capitolo. Vedremo come la serie trigonometrica sia comunque un caso particolare della serie esponenziale e che le trasformazioni mutue per funzioni

reali sono facilmente ottenibili. Le basi della serie di Fourier esponenziale sono le funzioni complesse

$$\phi_n(t) = e^{j2\pi \frac{n}{T}t}, \quad t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right], \quad n = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (2.64)$$

Si tratta di un insieme di funzioni periodiche con periodo T basate anche su indici (frequenze) negativi. Vedremo che la introduzione di frequenze negative facilita le analisi, anche se essa può risultare un pò strana dal punto vista fisico. Le funzioni della base sono mutuamente ortogonali. Infatti

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \phi_n(t) \phi_m^*(t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{j2\pi \frac{n-m}{T}t} dt = \left. \frac{e^{j2\pi \frac{n-m}{T}t}}{j2\pi \frac{n-m}{T}} \right|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \quad (2.65)$$

$$= \frac{e^{j2\pi(n-m)} - e^{-j2\pi(n-m)}}{j2\pi \frac{n-m}{T}} = 0, \quad n \neq m. \quad (2.66)$$

L'energia di ogni funzione è

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |\phi_n(t)|^2 dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt = T. \quad (2.67)$$

La approssimazione $\hat{s}(t)$ di un segnale $s(t)$ nell'intervallo $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ basata sulle $2N+1$ funzioni $\{\phi_{-N}, \dots, \phi_0, \dots, \phi_N\}$ è quindi

$$\hat{s}(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{j2\pi \frac{n}{T}t}, \quad (2.68)$$

con coefficienti

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{-j2\pi \frac{n}{T}t} dt. \quad (2.69)$$

La questione della convergenza di $\hat{s}(t)$ a $s(t)$ al crescere di N dipende dalla tipologia di segnale e sarà discussa in seguito. Si noti che i coefficienti c_n sono in generale complessi

$$c_n = \rho_n e^{j\theta_n}, \quad (2.70)$$

dove ρ_n e θ_n sono rispettivamente modulo e fase dell' n -esimo coefficiente. La sequenza dei coefficienti $\{c_n, n = -\infty, \dots, \infty\}$ costituisce lo *spettro (complesso) di $s(t)$* . La sequenza $\{\rho_n, n = -\infty, \dots, \infty\}$ è lo *spettro di ampiezza* e la sequenza $\{\theta_n, n = -\infty, \dots, \infty\}$ lo *spettro di fase*. Da notare che considerando anche indici interi negativi, abbiamo incluso nella descrizione spettrale anche delle frequenze armoniche negative multiple di $\frac{1}{T}$.

La espressione (2.68) per $N \rightarrow \infty$ è la *serie di Fourier esponenziale*. Espressioni alternative equivalenti della serie di Fourier esponenziale sono:

$$\sum_n c_n e^{j2\pi \frac{n}{T} t} = \sum_n \rho_n e^{j(2\pi \frac{n}{T} t + \theta_n)} \quad (2.71)$$

$$= \sum_n \left[\rho_n \cos(2\pi \frac{n}{T} t + \theta_n) + j \rho_n \sin(2\pi \frac{n}{T} t + \theta_n) \right] \quad (2.72)$$

$$= \sum_n \rho_n (\cos \theta_n + j \sin \theta_n) \left(\cos(2\pi \frac{n}{T} t) + j \sin(2\pi \frac{n}{T} t) \right) \\ = \sum_n \rho_n \left(\cos \theta_n \cos(2\pi \frac{n}{T} t) - \sin \theta_n \sin(2\pi \frac{n}{T} t) \right) \\ + j \sum_n \rho_n \left(\sin \theta_n \cos(2\pi \frac{n}{T} t) + \cos \theta_n \sin(2\pi \frac{n}{T} t) \right) \quad (2.73)$$

Ricaviamo ora alcune proprietà dei coefficienti della serie di Fourier esponenziale.

Proprietà 2.3 Se il segnale $s(t)$ è reale i coefficienti sono tali che

$$c_n = c_{-n}^* \quad \forall \quad n. \quad (2.74)$$

Una sequenza che soddisfa tale proprietà è anche detta sequenza *Hermitiana*.

Prova: La prova della proprietà discende direttamente dalla definizione di c_n . Infatti

$$c_n^* = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{j2\pi \frac{n}{T} t} dt = c_{-n}. \quad (2.75)$$

La Hermitianità della sequenza c_n può essere anche riscritta come

$$|c_n| e^{j\angle c_n} = |c_{-n}| e^{-j\angle c_{-n}}, \quad (2.76)$$

oppure

$$\operatorname{Re}[c_n] + j\operatorname{Im}[c_n] = \operatorname{Re}[c_{-n}] - j\operatorname{Im}[c_{-n}]. \quad (2.77)$$

Quindi, per un segnale reale, la sequenza dei moduli dei coefficienti c_n è pari, mentre le fasi costituiscono una sequenza dispari. Più esplicitamente

$$|c_n| = |c_{-n}|, \quad \angle c_n = -\angle c_{-n}. \quad (2.78)$$

Analogamente, la parte reale della sequenza è pari, mentre la parte immaginaria è dispari

$$\operatorname{Re}[c_n] = \operatorname{Re}[c_{-n}]; \quad \operatorname{Im}[c_n] = -\operatorname{Im}[c_{-n}]. \quad (2.79)$$

La espansione per un segnale reale può quindi essere riscritta come

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N c_n e^{j2\pi \frac{n}{T}t} &= \sum_{n=-N}^{-1} c_n e^{j2\pi \frac{n}{T}t} + c_0 + \sum_{n=1}^N c_n e^{j2\pi \frac{n}{T}t} \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^N \left(c_n e^{j2\pi \frac{n}{T}t} + c_{-n} e^{-j2\pi \frac{n}{T}t} \right) \end{aligned} \quad (2.80)$$

Per la Hermitianità di c_n , abbiamo che

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N c_n e^{j2\pi \frac{n}{T}t} &= c_0 + \sum_{n=1}^N \left(c_n e^{j2\pi \frac{n}{T}t} + c_n^* e^{-j2\pi \frac{n}{T}t} \right) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^N 2\operatorname{Re} \left[c_n e^{j2\pi \frac{n}{T}t} \right] \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^N 2\rho_n \cos \theta_n \cos(2\pi \frac{n}{T}t) \\ &\quad - 2\rho_n \sin \theta_n \sin(2\pi \frac{n}{T}t). \end{aligned} \quad (2.81)$$

Poichè anche c_0 è reale, per confronto diretto le relazioni che legano i coefficienti c_n con i coefficienti a_n e b_n della serie trigonometrica sono

$$a_0 = c_0; \quad a_n = 2\rho_n \cos \theta_n; \quad b_n = -2\rho_n \sin \theta_n, \quad n \geq 1. \quad (2.82)$$

Proprietà 2.4 Se il segnale $s(t)$ è una funzione reale pari ($s(t) = s(-t)$), la sequenza dei coefficienti è reale.

Prova: Dalla definizione di c_n abbiamo che

$$c_n = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \cos(2\pi \frac{n}{T}t) dt + j \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \sin(2\pi \frac{n}{T}t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \cos(2\pi \frac{n}{T}t) dt, \quad (2.83)$$

poiché l'integrando del secondo termine è una funzione dispari e l'integrale si annulla.

Proprietà 2.5 Se il segnale $s(t)$ è una funzione reale dispari ($s(t) = -s(-t)$), la sequenza dei coefficienti è immaginaria.

Prova: Dalla definizione di c_n abbiamo che

$$c_n = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \cos(2\pi \frac{n}{T}t) dt + j \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \sin(2\pi \frac{n}{T}t) dt = j \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \sin(2\pi \frac{n}{T}t) dt, \quad (2.84)$$

poiché l'integrando del primo termine è una funzione dispari e quindi l'integrale si annulla.

Esempio 2.7 Valutiamo i coefficienti della serie di Fourier esponenziale per il segnale

$$s(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, \Delta] \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases} \quad (2.85)$$

con $\Delta < \frac{T}{2}$.

Soluzione: Consideriamo il segnale nell'intervallo $[-T/2, T/2]$ con $\Delta < \frac{T}{2}$.

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_0^\Delta e^{-j2\pi \frac{n}{T}t} dt = \frac{1}{T} \left. \frac{e^{-j2\pi \frac{n}{T}t}}{-j2\pi \frac{n}{T}} \right|_0^\Delta = \frac{1 - e^{-j2\pi \frac{n}{T}\Delta}}{j2\pi n} \\ &= e^{-j\pi \frac{n}{T}\Delta} \left(\frac{e^{j\pi \frac{n}{T}\Delta} - e^{-j\pi \frac{n}{T}\Delta}}{2j\pi n} \right) = e^{-j\pi \frac{n}{T}\Delta} \frac{\sin(\pi \frac{n}{T}\Delta)}{\pi n}. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Lo spettro di ampiezza e lo spettro di fase sono rispettivamente

$$|c_n| = \left| \frac{\sin(\pi \frac{n}{T}\Delta)}{\pi n} \right|; \quad (2.87)$$

$$\angle c_n = -\pi \frac{\Delta}{T} n + \pi \, u \left[-\frac{\sin(\pi \frac{n}{T}\Delta)}{\pi n} \right]. \quad (2.88)$$

Si noti che il secondo termine nella espressione della fase tiene conto del fatto che la funzione $\frac{\sin(\pi \frac{n}{T}\Delta)}{\pi n}$ può essere negativa. In tal caso è necessario aggiungere alla fase $-\pi \frac{\Delta}{T} n \pm \pi$.

2.2 La convergenza della serie

Al crescere del numero dei termini inclusi nella sommatoria, la espansione di Fourier realizza sempre una migliore approssimazione alla funzione $s(t)$ nell'intervallo $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. Una analisi rigorosa della convergenza è al di là dello scopo di queste note, ma va comunque menzionato che le condizioni da imporre su $s(t)$ sono la assoluta sommabilità (condizione di Dirichelet debole) e il possedere solo un numero finito di estremi relativi e discontinuità nell'intervallo (condizione di Dirichelet forte). Praticamente tutti segnali di interesse soddisfano entrambi le condizioni. La convergenza è una question un pò più insidiosa se il segnale presenta delle discontinuità come nell'esempio dell'impulso rettangolare. Infatti, in tali casi la convergenza non è necessariamente uniforme come nelle funzioni continue, ma presenta il tipico comportamento della convergenza in media quadratica, con delle sovraelongazioni in prossimità delle discontinuità. Tale effetto, fu osservato ai tempi in cui fu introdotta la serie di Fourier ed è noto come *effetto di Gibbs*. Agli inizi l'effetto fu attribuito a degli errori strumentali, ma in realtà rappresenta il fatto che la funzione approssimante non converge nei punti di

discontinuità anche se essa converge globalmente in media quadratica (si veda l'esempio 2.3). La sovraelongazione attorno alla discontinuità resta costante a circa il 7 % anche se la sua larghezza diventa progressivamente più piccola. Per ulteriori approfondimenti si rimanda il lettore a qualunque buon testo di analisi matematica.

2.3 La periodicità della serie

Nel derivare la serie di Fourier, ricordiamo come ci siamo concentrati esclusivamente sull'intervallo $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ e come abbiamo usato dei segmenti di funzioni trigonometriche su quell'intervallo. Visto che tutte le funzioni di base sono periodiche, con un periodo che è un sottomultiplo dell'intervallo considerato, esse saranno periodiche anche su tutto l'asse dei tempi. In altre parole la sommatoria

$$\sum_n c_n e^{j2\pi \frac{n}{T}t}, \quad (2.89)$$

è periodica anche su tutto l'asse t . Quindi essa rappresenta una approssimazione (o a convergenza una espansione in serie) della *estensione periodica* $s_T(t)$ della funzione $s(t)$. In formule

$$s_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(t - kT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi \frac{n}{T}t}, \quad \forall t. \quad (2.90)$$

Quindi la serie di Fourier può rappresentare una funzione limitata su un intervallo, o una funzione periodica su tutto l'asse dei tempi. Quest'ultima limitazione sarà rimossa considerando la trasformata di Fourier nel prossimo capitolo.

Un'ultima considerazione è sul calcolo della energia di $s(t)$ e della potenza di $s_T(t)$. Infatti, la ortogonalità delle funzioni di base consente di scrivere³

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_s &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi \frac{n}{T}t} \right) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m^* e^{-j2\pi \frac{m}{T}t} \right) dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_n c_m^* \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{j2\pi \frac{n-m}{T}t} dt = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Analogamente per la potenza di $s_T(t)$

$$\mathcal{P}_{sT} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2. \quad (2.92)$$

³Si tratta di una versione scalata del teorema di Parseval in quanto le funzioni non hanno energia unitaria.

2.4 Problemi

Problema 2.1 Si valuti la migliore approssimazione del segnale $s(t) = \Lambda(\frac{t}{T})$ nell'intervallo $[-T, T]$ mediante le tre funzioni

$$\phi_0(t) = \Pi\left(\frac{t}{2T}\right); \quad \phi_1(t) = \Pi\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right); \quad \phi_2(t) = \Pi\left(\frac{t + \frac{T}{2}}{T}\right). \quad (2.93)$$

Se ne valuti inoltre il minimo errore quadratico.

Problema 2.2 Si valuti la migliore approssimazione del segnale

$$s(t) = \Pi\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right) + \Pi\left(3\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right), \quad (2.94)$$

nell'intervallo $[0, T]$ mediante le due funzioni

$$\phi_0(t) = \Pi\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right); \quad \phi_1(t) = \Lambda\left(2\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right). \quad (2.95)$$

Problema 2.3 L'insieme dei polinomi di Legendre $\{P_n(t), n = 0, 1, 2, \dots\}$ costituisce un insieme completo di funzioni di base ortogonali nell'intervallo $[-1, 1]$. I polinomi sono definiti dalla relazione

$$P_n(t) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.96)$$

I primi polinomi calcolati esplicitamente sono quindi

$$P_0(t) = 1; \quad P_1(t) = t; \quad P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1); \quad P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^2 - 3t); \dots \quad (2.97)$$

I polinomi sono ortogonali e hanno energia

$$\int_{-1}^1 P_n^2(t) dt = \frac{2}{2n+1}. \quad (2.98)$$

Si valutino i primi tre coefficienti dello sviluppo per il segnale

$$s(t) = \begin{cases} -1 & -1 < t < 0 \\ 1 & 0 < t < 1. \end{cases} \quad (2.99)$$

Problema 2.4 Si consideri il seguente segnale

$$s(t) = r(t) \Pi\left(\frac{t - \pi}{2\pi}\right). \quad (2.100)$$

Per $t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ con $T = 4\pi$, valutare e schizzare l'andamento dei

- a) coefficienti della serie di Fourier coseno;
- b) coefficienti della serie di Fourier seno;
- c) coefficienti della serie di Fourier compatta;
- d) coefficienti della serie di Fourier esponenziale.

Problema 2.5 Si valuti la espansione in serie di Fourier esponenziale della funzione sinusoidale rettificata

$$s(t) = |A \sin(\omega_0 t)|. \quad (2.101)$$

Problema 2.6 Si valuti la espansione in serie di Fourier esponenziale della funzione sinusoidale semirettificata

$$s(t) = A \sin(\omega_0 t) \, u[A \sin(\omega_0 t)] \quad (2.102)$$

Problema 2.7 La espansione trigonometrica di un segnale periodico è

$$s(t) = 3 + \sqrt{2} \cos t + 4 \sin 2t + \pi \sin 5t - \frac{1}{5} \cos(5t + \frac{\pi}{3}). \quad (2.103)$$

- a) Schizzare l'andamento dei coefficienti della serie di Fourier trigonometrica;
- b) Schizzare l'andamento dei coefficienti della serie di Fourier trigonometrica compatta;
- c) Schizzare l'andamento dei coefficienti della serie di Fourier esponenziale;

Problema 2.8 L'espansione di un segnale in serie di Fourier esponenziale è data dalla seguente espressione

$$s(t) = (3 + 2j)e^{-j5t} + je^{jt} + 6 - (6 + j4)e^{-j3t}. \quad (2.104)$$

Schizzare l'andamento dello spettro del segnale indicando le frequenze corrispondenti alle varie componenti.

Problema 2.9 L'espansione di un segnale in serie di Fourier esponenziale è data dalla seguente espressione

$$s(t) = (3 + 2j)e^{-j5t} + je^{jt} + 6 + (3 - 2j)e^{j5t} - je^{-jt}. \quad (2.105)$$

- a) Schizzare l'andamento dello spettro del segnale indicando le frequenze corrispondenti alle varie componenti.
- b) Verificare che si tratta di un segnale reale e schizzare le componenti della serie di Fourier trigonometrica.
- c) Si valuti la *banda del segnale*, dove per banda si intende la massima frequenza a cui è presente una componente diversa da zero.

Problema 2.10 Siano $\{c_n\}$ i coefficienti della espansione in serie di Fourier del segnale $s(t)$ di periodo T . Si valuti una espressione per i coefficienti del segnale traslato $s(t - \frac{T}{m})$.

Problema 2.11 Si valutino i coefficienti della serie di Fourier esponenziale del segnale periodico

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT). \quad (2.106)$$

Problema 2.12 Si valutino i coefficienti della serie di Fourier esponenziale del segnale periodico

$$s(t) = r (A \cos 2\pi f_0 t). \quad (2.107)$$

Capitolo 3

La Trasformata di Fourier

In questo capitolo viene introdotta la Trasformata di Fourier per i segnali tempo-continuo. Dopo una introduzione sulle motivazioni che hanno portato ad una tale definizione, viene presentata la trasformata e la anti-trasformata insieme alle loro proprietà. Viene inoltre calcolata discussa la trasformata di Fourier per alcuni segnali notevoli.

3.1 Introduzione

La caratterizzazione spettrale di un segnale mediante la serie di Fourier fornisce una importante scomposizione frequenziale, ma e' purtroppo limitata a segnali tempo-limitato, o a segnali periodici. Abbiamo visto come in tali casi la scomposizione consista in un insieme discreto (finito o infinito) di componenti a frequenze multiple della frequenza fondamentale. La domanda che sorge naturale e se la limitazione sulla classe di segnali così rappresentati possa essere rimossa, magari “riempiendo gli spazi vuoti” dell’asse delle frequenze con una funzione di variabile continua.

Cominciamo ricordando che, data una funzione tempo-continuo $s(t)$, tempo-limitata in $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$, essa è rappresentabile secondo la serie di Fourier esponenziale

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi \frac{n}{T}t}, \quad t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}], \quad (3.1)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{-j2\pi \frac{n}{T}t} dt. \quad (3.2)$$

Supponiamo ora di vedere i coefficienti spettrali $\{c_n\}$ come i campioni una funzione della frequenza $S(f)$, campionata a frequenze $f = \frac{n}{T}$

$$c_n = \frac{1}{T} S\left(\frac{n}{T}\right) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{-j2\pi \frac{n}{T} t} dt. \quad (3.3)$$

Quindi il segnale $s(t)$ può essere riscritto come

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} S\left(\frac{n}{T}\right) e^{j2\pi \frac{n}{T} t}. \quad (3.4)$$

Se facciamo tendere T all'infinito, otteniamo un allargamento dell'intervallo di riferimento nel dominio del tempo e un sempre più piccolo intervallo tra le frequenze in f . Utilizzando una notazione infinitesima per l'intervallo di campionamento nel dominio della frequenza

$$\Delta f = \frac{1}{T}, \quad (3.5)$$

abbiamo

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta f S(n\Delta f) e^{j2\pi n\Delta f t}. \quad (3.6)$$

In quest'ultima equazione $s(t)$ è espresso come somma di rettangoli infinitesimi sottesi dalla funzione

$$S(f) e^{j2\pi f t}. \quad (3.7)$$

Se facciamo tendere $T \rightarrow \infty$, ovvero $\Delta f \rightarrow 0$, otteniamo l'*Integrale di Fourier*

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi f t} df, \quad \forall t. \quad (3.8)$$

Analogamente al tendere di $T \rightarrow \infty$, $S(\frac{n}{T})$ tende alla *Trasformata di Fourier*

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} dt. \quad (3.9)$$

La espressione (3.8) è anche detta *Trasformata inversa di Fourier*. Abbiamo quindi una trasformazione che fa corrispondere alle funzioni della variabile tempo-continuo, detto *dominio del tempo*, delle funzioni di un altro dominio di variabile continua, detto *dominio della frequenza*, come mostrato schematicamente in figura 3.1.

La trasformazione è invertibile, ovvero il segnale e la sua trasformata di Fourier costituiscono due rappresentazioni equivalenti dello stesso segnale¹. Notazioni compatte della trasformata e della anti-trasformata di Fourier sono

$$S(f) = \mathcal{F}[s(t)]; \quad s(t) = \mathcal{F}^{-1}[S(f)]. \quad (3.10)$$

¹Sempre ammesso che la trasformata esista. Esamineremo questo aspetto in seguito.

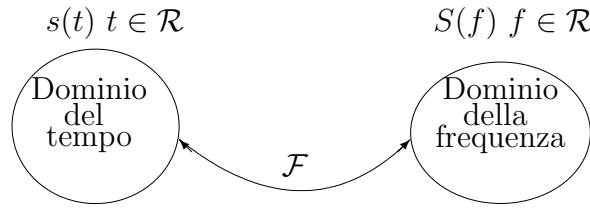


Figura 3.1: Il dominio del tempo e il dominio della frequenza

Si noti che $S(f)$ è in generale una funzione complessa. La formulazione consente anche ad $s(t)$ di essere un segnale complesso anche se maggiore attenzione sarà dedicata a segnali $s(t)$ reali. Mostreremo nelle proprietà in quali casi $S(f)$ è una funzione reale.

La funzione $S(f)$ è denominata *spettro* di $s(t)$ ed è caratterizzata da: una *parte reale dello spettro* $= S_R(f) = \text{Re}[S(f)]$ e da una *parte immaginaria dello spettro* $= S_I(f) = \text{Im}[S(f)]$; oppure da uno *spettro di ampiezza* $= A(f) = |S(f)|$ e uno *spettro di fase* $= \Phi(f) = \angle S(f)$.²

Esempio 3.1 Si valuti la trasformata di Fourier del segnale $s(t) = Ae^{-\alpha t}u(t)$, $\alpha > 0$.

Soluzione: Dalla definizione abbiamo

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-\alpha t}u(t)e^{-j2\pi ft}dt = A \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + j2\pi f)t}dt \\ &= A \left. \frac{e^{-(\alpha + j2\pi f)t}}{-(\alpha + j2\pi f)} \right|_0^{\infty} = \frac{A}{(\alpha + j2\pi f)}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

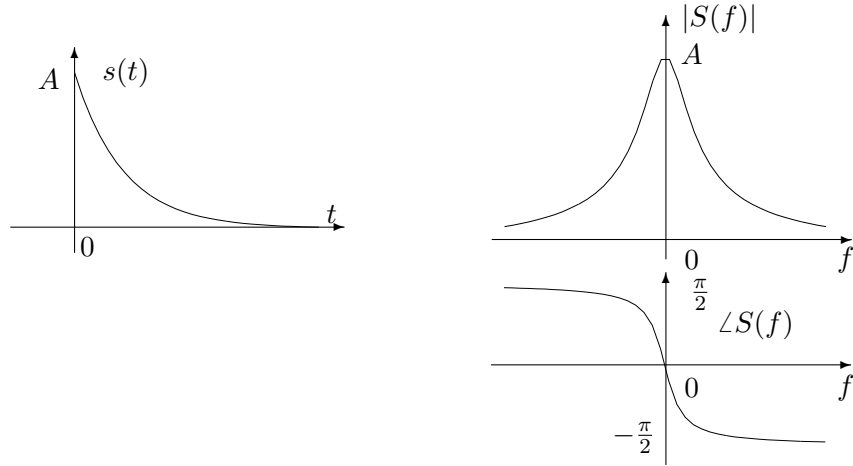
²Nella definizione della trasformata di Fourier qui presentata abbiamo utilizzato la variabile indipendente f (frequenza, espressa in Hz) anche se nella vastissima letteratura si trova spesso la definizione con la variabile indipendente ω (pulsazione, espressa in rad/sec). Trasformata e anti-trasformata si scrivono in tal caso

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t}dt; \quad s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{j\omega t}d\omega. \quad (3.11)$$

Nelle nostre note si è preferito adottare la notazione in f perchè trasformata e anti-trasformata sono più simili, perchè le formule notevoli sono più semplici e perchè nell'ingegneria delle telecomunicazioni è più diretto usare gli Hertz piuttosto che i radianti/sec, che furono introdotti prevalentemente per i sistemi meccanici.

Lo spettro di ampiezza e di fase, mostrati nella figura seguente, sono rispettivamente

$$A(f) = \frac{A}{\sqrt{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}}; \quad \Phi(f) = -\tan^{-1} \frac{2\pi f}{\alpha}. \quad (3.13)$$



Il valore di frequenza a cui lo spettro di ampiezza è ridotto a $\frac{1}{\sqrt{2}}$ del valore in zero è $f_0 = \frac{\alpha}{2\pi}$. Tale valore è anche detto *banda a 3 dB* del segnale (si tratta del valore in cui $|S(f)|^2$ è ridotto alla metà del valore in $f = 0$). Poichè la trasformata può anche essere scritta come

$$S(f) = A \frac{1}{\alpha + j2\pi f} = A \frac{\alpha - j2\pi f}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}, \quad (3.14)$$

la parte reale e la parte immaginaria dello spettro sono esplicitamente

$$S_R(f) = \frac{A\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}; \quad S_I(f) = \frac{-A2\pi f}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}. \quad (3.15)$$

Esempio 3.2 Si valuti la trasformata di Fourier del segnale

$$s(t) = \begin{cases} A & t \in [0, \Delta] \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases} \quad (3.16)$$

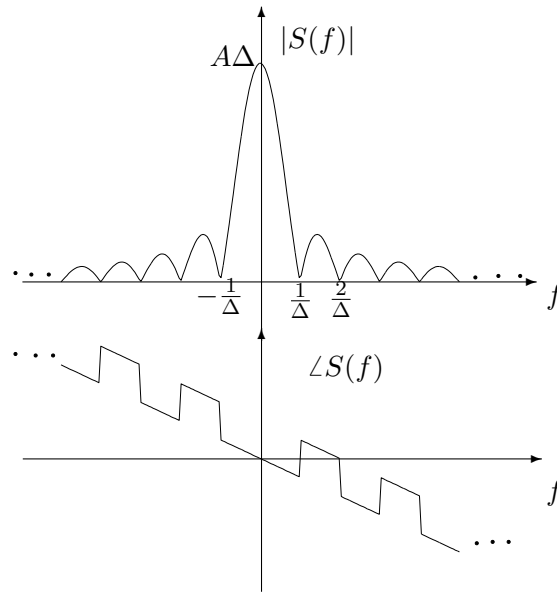
Soluzione:

$$S(f) = \int_0^\Delta A e^{-j2\pi f t} dt = A \left. \frac{e^{-j2\pi f t}}{-j2\pi f} \right|_0^\Delta$$

$$\begin{aligned}
&= A \frac{1 - e^{-j2\pi f\Delta}}{j2\pi f} = Ae^{-j\pi f\Delta} \left(\frac{e^{j\pi f\Delta} - e^{-j\pi f\Delta}}{j2\pi f} \right) \\
&= Ae^{-j\pi f\Delta} \frac{\sin \pi \Delta f}{\pi f} = A\Delta e^{-j\pi f\Delta} \frac{\sin \pi \Delta f}{\pi \Delta f} \\
&= Ae^{-j\pi \Delta f} \Delta \text{sinc}(\Delta f).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Gli spettri di ampiezza e di fase, mostrati in figura, sono rispettivamente

$$|S(f)| = A\Delta |\text{sinc}(\Delta f)|; \quad \angle S(f) = -\pi \Delta f + \pi u[-\text{sinc}(\Delta f)]. \tag{3.18}$$



Si notino i salti di fase di π dovuti ai cambi di segno della funzione *sinc*.

3.2 Proprietà della trasformata di Fourier

La trasformata di Fourier gode di notevoli proprietà che la rendono molto utile nelle applicazioni e che ne facilitano la manipolazione.

Proprietà 3.1 Linearità: Siano $S_1(f)$ e $S_2(f)$ le trasformate di $s_1(t)$ e $s_2(t)$. La trasformata di $z(t) = c_1 s_1(t) + c_2 s_2(t)$ è

$$Z(f) = c_1 S_1(f) + c_2 S_2(f), \tag{3.19}$$

dove c_1 e c_2 sono due costanti reali o complesse arbitrarie.

Prova: Diretta conseguenza della linearità dell'integrale.

Proprietà 3.2 Scala: Sia $S(f)$ la trasformata di $s(t)$. Per ogni costante reale a

$$\mathcal{F}[s(at)] = \frac{1}{|a|} S\left(\frac{f}{a}\right). \quad (3.20)$$

Questa proprietà è molto importante perché mostra una delle caratteristiche peculiari della trasformata di Fourier: un segnale che si contrae nel dominio del tempo, si dilata nel dominio della frequenza, e viceversa. In altre parole la proprietà riflette la nozione intuitiva che segnali “stretti” nel dominio del tempo sono a “banda larga” nel dominio della frequenza.

Prova: Dalla definizione di trasformata

$$\mathcal{F}[s(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} s(at) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(\eta) e^{-j2\pi \frac{f}{a} \eta} \frac{d\eta}{|a|} = \frac{1}{|a|} S\left(\frac{f}{a}\right), \quad (3.21)$$

dove abbiamo operato il cambio di variabili $\eta = at$.

Proprietà 3.3 Traslazione temporale: Sia $S(f)$ la trasformata di $s(t)$. Per ogni t_0

$$\mathcal{F}[s(t - t_0)] = e^{-j2\pi f t_0} S(f). \quad (3.22)$$

Questa proprietà mostra che una traslazione temporale (ritardo per $t_0 > 0$, anticipo per $t_0 < 0$) non modifica lo spettro di ampiezza del segnale, ma aggiunge solo una funzione lineare alla fase pari a: $-2\pi t_0 f$.

Prova: Dalla definizione:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[s(t - t_0)] &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t - t_0) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(\eta) e^{-j2\pi f(\eta + t_0)} d\eta \\ &= e^{-j2\pi f t_0} \int_{-\infty}^{\infty} s(\eta) e^{-j2\pi f \eta} d\eta = e^{-j2\pi f t_0} S(f). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Proprietà 3.4 Traslazione in frequenza: Sia $S(f)$ la trasformata di $s(t)$. Per ogni f_0

$$\mathcal{F}[e^{j2\pi f_0 t} s(t)] = S(f - f_0). \quad (3.24)$$

Prova: Dalla definizione

$$\mathcal{F}[e^{j2\pi f_0 t} s(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi(f - f_0)t} dt = S(f - f_0). \quad (3.25)$$

Proprietà 3.5 Convoluzione: Siano $X(f)$ e $Y(f)$ le trasformate di $x(t)$ e $y(t)$.

$$\mathcal{F}[(x * y)(t)] = X(f) Y(f), \quad (3.26)$$

dove $(x * y)$ denota la convoluzione di $x(t)$ con $y(t)$.

Questa proprietà è certamente la più importante di tutte. Infatti nella manipolazione dei sistemi lineari, se uno dei segnali rappresenta la risposta impulsiva di un sistema e l'altro l'ingresso, la convoluzione ne rappresenta l'uscita. Tale operazione nel dominio della frequenza è un semplice prodotto in cui la trasformata della risposta impulsiva è la *risposta armonica* del sistema. Torneremo con maggiori dettagli su questo argomento in un capitolo successivo.

Prova: Dalla definizione di trasformata e di convoluzione, e dalla proprietà sulla traslazione temporale

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[(x * y)(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau \right] e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t - \tau) e^{-j2\pi ft} dt \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[e^{-j2\pi f\tau} Y(f) \right] d\tau = X(f) Y(f). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Proprietà 3.6 Prodotto: Siano $X(f)$ e $Y(f)$ le trasformate di $x(t)$ e $y(t)$.

$$\mathcal{F}[x(t)y(t)] = (X * Y)(f), \quad (3.28)$$

dove $(X * Y)$ denota la convoluzione di $X(f)$ con $Y(f)$.

Prova: Dalle formule della trasformata e della anti-trasformata

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x(t)y(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} X(\eta)e^{j2\pi\eta t} d\eta \right] y(t)e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(\eta) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi\eta t} y(t)e^{-j2\pi ft} dt \right] d\eta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(\eta)Y(f - \eta)d\eta = (X * Y)(f). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Proprietà 3.7 Dualità: Sia $S(f)$ la trasformata di $s(t)$.

$$\mathcal{F}[S(t)] = s(-f). \quad (3.30)$$

Questa proprietà è diretta conseguenza del fatto che la trasformata e la sua inversa sono identiche, a meno di un segno nell'esponentiale. In altre parole, se è nota la trasformata di Fourier di una funzione del tempo, è nota anche la antitrasformata della stessa funzione dal dominio della frequenza a quello del tempo.

Prova: Dalla definizione di anti-trasformata

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df, \quad (3.31)$$

ovvero:

$$s(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\eta) e^{-j2\pi t\eta} d\eta. \quad (3.32)$$

Per $t = f$ abbiamo il risultato.

Proprietà 3.8 Derivazione: Sia $S(f)$ la trasformata di $s(t)$.

$$\mathcal{F} \left[\frac{d^n}{dt^n} s(t) \right] = (j2\pi f)^n S(f). \quad (3.33)$$

Il lettore osservi che nella proprietà non si è assunto che la funzione $s(t)$ sia derivabile. Infatti, mediante attento l'utilizzo della delta di Dirac, è possibile trattare anche funzioni discontinue non derivabili. Vedremo in seguito degli esempi.

Prova: Dalla formula di anti-trasformata di Fourier

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n} s(t) &= \frac{d^n}{dt^n} \left[\int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df \right] = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \frac{d^n}{dt^n} \left[e^{j2\pi ft} \right] df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S(f) (j2\pi f)^n e^{j2\pi ft} df = \mathcal{F}^{-1} [(j2\pi f)^n S(f)]. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Proprietà 3.9 Integrazione: Sia $S(f)$ la trasformata di $s(t)$.

$$\mathcal{F} \left[\int_{-\infty}^t s(\xi) d\xi \right] = \frac{1}{j2\pi f} S(f) + \frac{1}{2} S(0) \delta(f). \quad (3.35)$$

³ **Prova:** L'integrale può essere riscritto come la convoluzione di $s(t)$ con la funzione gradino

$$(s * u)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\xi) u(t - \xi) d\xi = \int_{-\infty}^t s(\xi) d\xi. \quad (3.36)$$

Dal teorema della convoluzione e dalla trasformata del gradino (discussa in seguito) si ottiene il risultato.

³Tale trasformata esiste se $S(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\xi) d\xi$ ha un valore finito. Nota che $S(0)$ potrebbe non essere finito perchè $s(t)$ ha una componente continua (baseline) su tutto l'asse dei tempi. In tali casi può essere valutabile $\mathcal{F} \left[\int_{-\infty}^t g(\xi) d\xi \right]$, con $g(t) = s(t) - b$, se $G(0)$ è finito. Alcuni esempi sono mostrati negli esercizi.

Proprietà 3.10 Energia (Teorema di Parseval): Siano $x(t)$ e $y(t)$ due segnali di energia con trasformate $X(f)$ e $Y(f)$. L'energia mutua tra $x(t)$ e $y(t)$ gode della seguente proprietà

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f)df. \quad (3.37)$$

Un immediato corollario del teorema è che l'energia di un segnale nel dominio del tempo è pari all'energia calcolata nel dominio della frequenza (proprietà dell'invarianza della norma quadratica)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df. \quad (3.38)$$

Prova:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df \right] y^*(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \left[\int_{-\infty}^{\infty} y^*(t)e^{j2\pi ft}dt \right] df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f)df. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Proprietà 3.11 Spettro di segnali reali: Sia $x(t)$ un segnale reale. La sua trasformata di Fourier è una funzione Hermitiana

$$S(f) = S^*(-f). \quad (3.40)$$

Prova: Dalla definizione:

$$S(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{j2\pi ft}dt = \left(\int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j2\pi ft}dt \right)^* = S^*(f), \quad (3.41)$$

visto che $s(t)$ è reale.

Visto che i segnali reali rappresentano una larga parte dei segnali di interesse, approfondiamo le conseguenze della “Hermitianità” dello spettro dei segnali reali che soddisfano la condizione

$$S(f) = |S(f)|e^{j\angle S(f)} = |S(-f)|e^{-j\angle S(-f)}. \quad (3.42)$$

Quindi lo spettro di ampiezza di un segnale reale è una funzione pari, mentre la fase è un funzione dispari

$$|S(f)| = |S(-f)|; \quad \angle S(f) = -\angle S(-f). \quad (3.43)$$

Ancora, riscrivendo la condizione di Hermitianità come

$$S(f) = S_R(f) + jS_I(f) = S_R(-f) - jS_I(-f), \quad (3.44)$$

concludiamo che la parte reale dello spettro di un segnale reale è una funzione pari mentre la parte immaginaria è una funzione dispari

$$S_R(f) = S_R(-f); \quad S_I(f) = -S_I(-f). \quad (3.45)$$

E' interessante notare che quando abbiamo a che fare con un segnale reale, la rappresentazione della trasformata di Fourier sull'asse delle frequenze da $-\infty$ a ∞ è ridondante. Infatti, la simmetria del modulo e della parte reale, e la antisimmetria della fase e della parte immaginaria, dimostrano come la trasformata sia completamente nota se essa è nota su un solo semiasse delle frequenze ($[0, +\infty]$ o $[-\infty, 0]$). Questa è la ragione per cui spesso la trasformata di segnali reali viene riportata solo per le frequenze positive.

Proprietà 3.12 Simmetria: Un segnale reale e pari, ha una trasformata reale e pari; un segnale reale e dispari, ha una trasformata immaginaria e dispari.

Prova: Si scomponga il segnale $s(t)$ nella somma di una *parte pari* e di una *parte dispari*

$$s(t) = s_p(t) + s_d(t), \quad (3.46)$$

dove la parte pari e la parte dispari sono rispettivamente

$$s_p(t) = \frac{s(t) + s(-t)}{2}; \quad s_d(t) = \frac{s(t) - s(-t)}{2}. \quad (3.47)$$

Quindi per un segnale pari $s_d(t) = 0$, mentre per un segnale dispari $s_p(t) = 0$. La trasformata di Fourier di un segnale reale, grazie alla parità della funzione coseno e alla disparità della funzione seno, può essere scritta come

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} (s_p(t) + s_d(t)) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s_p(t) \cos 2\pi ft \, dt - j \int_{-\infty}^{\infty} s_d(t) \sin 2\pi ft \, dt. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Le proprietà discendono immediatamente guardando alle funzioni integrande.

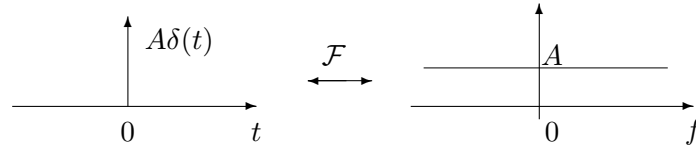
3.3 Trasformate notevoli

Calcoliamo ora esplicitamente alcune trasformate di Fourier per segnali tipici. E' da enfatizzare che una certa capacità di manipolazione delle trasformate di Fourier è facilmente acquisibile mediante una buona conoscenza delle proprietà e delle trasformate notevoli.

3.3.1 Impulso di Dirac

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = 1. \quad (3.49)$$

Questa trasformata mostra il caso limite di un segnale infinitamente stretto nel dominio del tempo e infinitamente largo nel dominio della frequenza.



Prova: Dalla definizione e dalla proprietà del campionamento della funzione di Dirac

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt = 1. \quad (3.50)$$

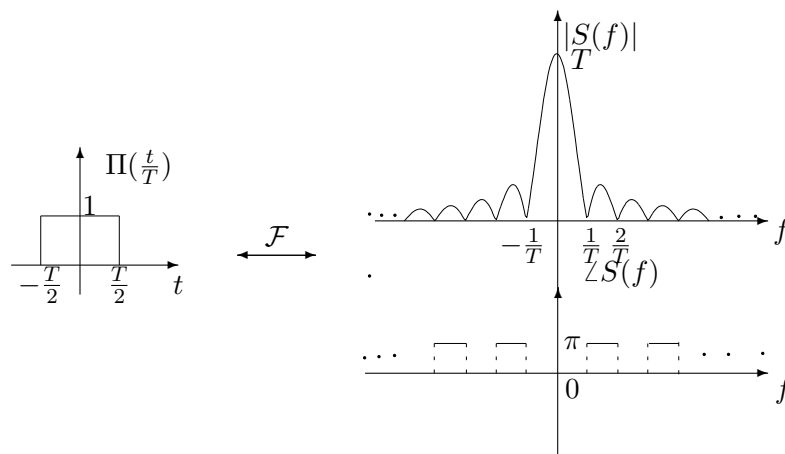
3.3.2 Impulso rettangolare

$$\mathcal{F}\left[\Pi\left(\frac{t}{T}\right)\right] = T \operatorname{sinc} T f. \quad (3.51)$$

Si tratta di una trasformata reale il cui modulo e fase, mostrati in figura, sono rispettivamente

$$|S(f)| = T |\operatorname{sinc} T f| \quad ; \quad \angle S(f) = \pi u(-\operatorname{sinc} T f). \quad (3.52)$$

Si notino i salti di fase di π nella fase dovuti al cambio di segno del sinc e come il lobo principale del sinc si allarghi al restringersi della durata dell'impulso.



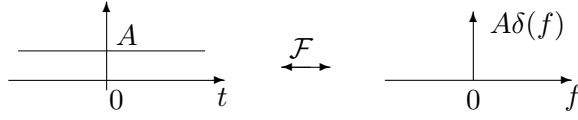
Prova:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F} \left[\Pi \left(\frac{t}{T} \right) \right] &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi ft} dt = \frac{e^{-j2\pi ft}}{-j2\pi f} \Bigg|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}}{j2\pi f} \\
 &= T \frac{e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}}{j2\pi fT} = \frac{T \sin \pi fT}{\pi fT} = T \operatorname{sinc} Tf. \quad (3.53)
 \end{aligned}$$

3.3.3 Costante

$$\mathcal{F}[A] = A\delta(f). \quad (3.54)$$

Questa proprietà, duale alla proprietà sulla trasformata della delta di Dirac, fa vedere come un segnale costante contenga in frequenza solo una componente continua, ovvero una delta a $f = 0$.



Prova: Direttamente dalla proprietà di dualità e dalla trasformata dell'impulso di Dirac.

3.3.4 Fasore

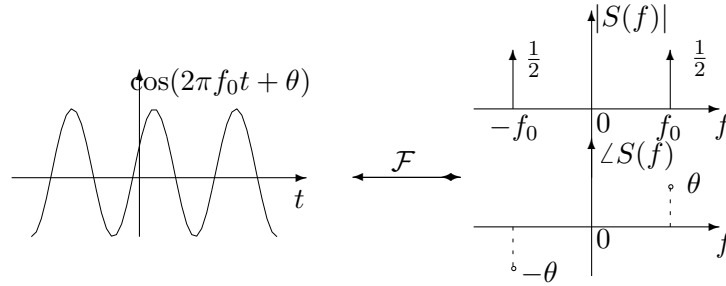
$$\mathcal{F} \left[e^{j2\pi f_0 t} \right] = \delta(f - f_0). \quad (3.55)$$

Prova: Dalla trasformata notevole precedente e dalla proprietà della traslazione in frequenza.

3.3.5 Coseno

$$\mathcal{F} [\cos (2\pi f_0 t + \theta)] = \frac{1}{2} \left(e^{j\theta} \delta(f - f_0) + e^{-j\theta} \delta(f + f_0) \right). \quad (3.56)$$

Quindi, come mostrato in figura, la trasformata del coseno consiste in due linee spettrali a frequenza f_0 e $-f_0$. La fase è diversa da zero solo a quelle frequenze ed è pari a θ e $-\theta$ rispettivamente.



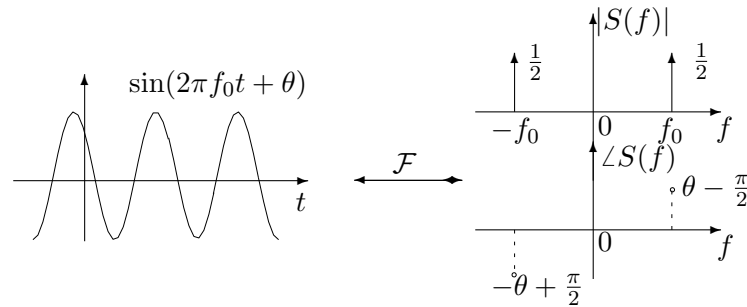
Prova:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[\cos(2\pi f_0 t + \theta)] &= \frac{1}{2} \mathcal{F}[e^{j(2\pi f_0 t + \theta)}] + \frac{1}{2} \mathcal{F}[e^{-j(2\pi f_0 t + \theta)}] \\
 &= \frac{1}{2} e^{j\theta} \mathcal{F}[e^{j2\pi f_0 t}] + \frac{1}{2} e^{-j\theta} \mathcal{F}[e^{-j2\pi f_0 t}] \\
 &= \frac{1}{2} e^{j\theta} \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} e^{-j\theta} \delta(f + f_0). \quad (3.57)
 \end{aligned}$$

3.3.6 Seno

$$\mathcal{F}[\sin(2\pi f_0 t + \theta)] = \frac{1}{2j} (e^{j\theta} \delta(f - f_0) - e^{-j\theta} \delta(f + f_0)). \quad (3.58)$$

Quindi la trasformata del seno, è la stessa della trasformata del coseno a meno della fase. Infatti $\cos(2\pi f_0 t + \theta) = \sin(2\pi f_0 t + \theta + \frac{\pi}{2})$. La figura seguente ne mostra il grafico relativo. Il lettore rammenti che $\frac{1}{j} = e^{-\frac{\pi}{2}}$.



Prova:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[\sin(2\pi f_0 t + \theta)] &= \frac{1}{2j} \mathcal{F}[e^{j(2\pi f_0 t + \theta)}] - \frac{1}{2j} \mathcal{F}[e^{-j(2\pi f_0 t + \theta)}] \\
 &= \frac{1}{2j} e^{j\theta} \mathcal{F}[e^{j2\pi f_0 t}] - \frac{1}{2j} e^{-j\theta} \mathcal{F}[e^{-j2\pi f_0 t}] \\
 &= \frac{1}{2j} e^{j\theta} \delta(f - f_0) - \frac{1}{2j} e^{-j\theta} \delta(f + f_0). \quad (3.59)
 \end{aligned}$$

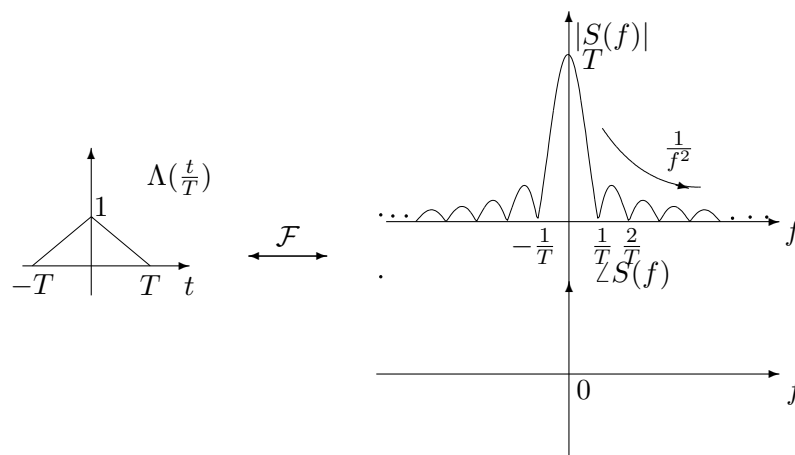
3.3.7 Impulso Triangolare

$$\mathcal{F} \left[\Lambda \left(\frac{t}{T} \right) \right] = T \operatorname{sinc}^2 T f. \quad (3.60)$$

La trasformata dell'impulso triangolare è reale e positiva trattandosi di un segnale reale e simmetrico. Il modulo e la fase sono

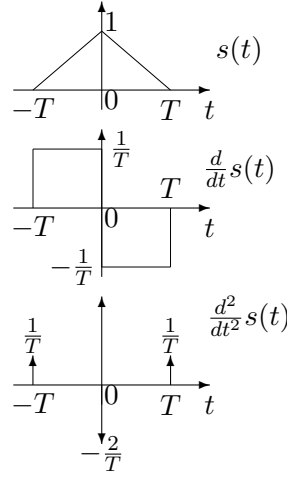
$$|S(f)| = T \operatorname{sinc}^2 T f; \quad \angle S(f) = 0. \quad (3.61)$$

Si noti il comportamento asintotico a zero per $f \rightarrow \infty$ che è del tipo $\frac{1}{f^2}$.



Prova: IL risultato è facilmente ottenuto usando le proprietà. La figura mostra anche graficamente come

$$\frac{d^2}{dt^2} \Lambda \left(\frac{t}{T} \right) = \frac{1}{T} \delta(t+T) - \frac{2}{T} \delta(t) + \frac{1}{T} \delta(t-T). \quad (3.62)$$



Poiché la trasformata della derivata seconda è

$$\mathcal{F} \left[\frac{d^2}{dt^2} \Lambda \left(\frac{t}{T} \right) \right] = \frac{1}{T} e^{j2\pi f T} - \frac{2}{T} + \frac{1}{T} e^{-j2\pi f T} = \frac{1}{T} (e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T})^2, \quad (3.63)$$

ma anche

$$\mathcal{F} \left[\frac{d^2}{dt^2} \Lambda \left(\frac{t}{T} \right) \right] = (j2\pi f)^2 \mathcal{F} \left[\Lambda \left(\frac{t}{T} \right) \right], \quad (3.64)$$

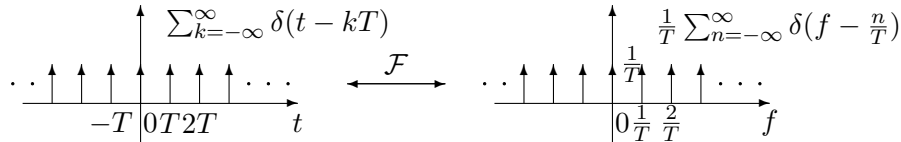
abbiamo che

$$\mathcal{F} \left[\Lambda \left(\frac{t}{T} \right) \right] = \frac{1}{T} \frac{1}{(j2\pi f)^2} (e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T})^2 = T \left(\frac{\sin \pi f T}{\pi f T} \right)^2 = T \text{sinc}^2 T f. \quad (3.65)$$

3.3.8 Treno di impulsi di Dirac

$$\mathcal{F} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \right] = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{n}{T}). \quad (3.66)$$

Quindi un treno di impulsi di Dirac corrisponde nel dominio della frequenza ad un altro treno di impulsi di Dirac con spaziatura reciproca.



Prova: Il segnale è periodico e può pertanto essere espresso come la serie di Fourier esponenziale

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi \frac{n}{T} t}, \quad (3.67)$$

con

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{j2\pi \frac{n}{T} t} dt = \frac{1}{T}. \quad (3.68)$$

Quindi

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi \frac{n}{T} t}. \quad (3.69)$$

Questa espressione è anche nota come *formula di Poisson*. Trasformando termine a termine il secondo membro dell'equazione, otteniamo il risultato.

3.3.9 Funzione signum

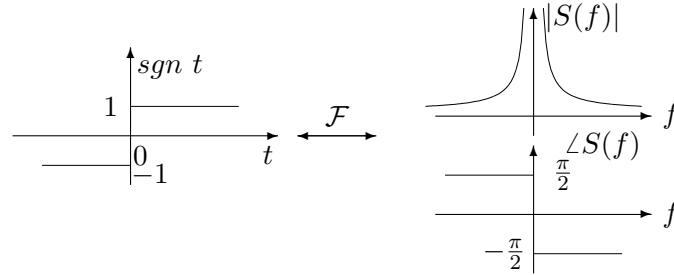
$$\mathcal{F}[\text{sgn}(t)] = \frac{1}{j\pi f}. \quad (3.70)$$

La funzione signum ha una discontinuità per $f = 0$ e un comportamento iperbolico. Poichè

$$\frac{1}{j\pi f} = \begin{cases} e^{-j\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\pi f} & f > 0 \\ e^{-j\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\pi|f|} e^{j\pi} & f < 0, \end{cases} \quad (3.71)$$

il modulo e la fase sono

$$|S(f)| = \frac{1}{\pi|f|}; \quad \angle S(f) = -\frac{\pi}{2} \text{sgn}(f). \quad (3.72)$$



Prova: Basta osservare che la derivata della funzione signum è

$$\frac{d}{dt} \text{sgn}(t) = 2\delta(t). \quad (3.73)$$

Quindi:

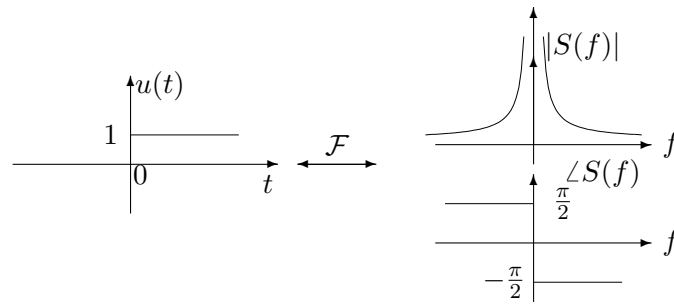
$$\mathcal{F}[\text{sgn}(t)] = \frac{1}{j2\pi f} \mathcal{F}\left[\frac{d}{dt} \text{sgn}(t)\right] = \frac{2}{j2\pi f} = \frac{1}{j\pi f}. \quad (3.74)$$

3.3.10 Funzione a gradino

$$\mathcal{F}[u(t)] = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}. \quad (3.75)$$

La trasformata della funzione a gradino quindi differisce da quella del signum per una scala e la presenza di una componente continua

$$|S(f)| = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{2\pi|f|}; \quad \angle S(f) = -\frac{\pi}{2}\text{sgn}(f). \quad (3.76)$$



Prova: Basta osservare che

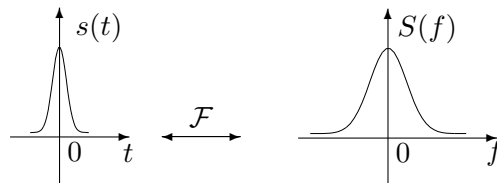
$$u(t) = \frac{1}{2} (1 + \text{sgn}(t)). \quad (3.77)$$

Il risultato si ottiene trasformando termine a termine.

3.3.11 Impulso gaussiano

$$\mathcal{F}[ke^{-\alpha t^2}] = k\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\pi^2}{\alpha}f^2}. \quad (3.78)$$

Quindi la trasformata di un impulso, che ha la forma di una funzione gaussiana nel dominio del tempo, è ancora un funzione gaussiana nel dominio della frequenza. Poiché il segnale è simmetrico e reale ha una trasformata reale. Tale trasformata è anche positiva.



E' interessante andare a valutare la dispersione delle due funzioni nei due domini, utilizzando i momenti del secondo ordine

$$\sigma_t^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 s(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt}; \quad \sigma_f^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f^2 S(f) df}{\int_{-\infty}^{\infty} S(f) df}. \quad (3.79)$$

I parametri σ_t^2 e σ_f^2 caratterizzano la larghezza delle due funzioni in analogia alla varianza definita per le pdf delle variabili aleatorie (è stato necessario normalizzare gli integrali poiché l'area sottesa dalle funzioni $s(t)$ e $S(f)$ non è necessariamente unitaria).

Per eseguire i calcoli in maniera semplice utilizzando le note proprietà della pdf gaussiana, operiamo la sostituzione: $\sigma^2 = 1/2\alpha$. Quindi

$$\sigma_t^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} kt^2 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt}{\int_{-\infty}^{\infty} k e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt} = \sigma^2 = \frac{1}{2\alpha}. \quad (3.80)$$

Analogamente nel dominio della frequenza

$$\sigma_f^2 = \frac{\alpha}{2\pi^2} = \frac{1}{4\pi^2\sigma_t^2}. \quad (3.81)$$

Le espressioni trovate mostrano che le “deviazioni standard” nei due domini sono legate da una relazione di proporzionalità inversa, ovvero:

$$\sigma_t \sigma_f = 2\pi. \quad (3.82)$$

La formula può essere vista come una regola di invarianza tempo-frequenza. In questa proprietà si riflette evidentemente anche la dualità tempo-frequenza in cui un allargamento in un dominio corrisponde ad un restringimento nell'altro.

Prova:

$$\begin{aligned} S(f) &= k \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= k \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha t^2 + j2\pi ft + \frac{1}{\alpha}\pi^2 f^2 - \frac{1}{\alpha}\pi^2 f^2)} dt \\ &= k e^{-\frac{\pi^2}{\alpha} f^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{\alpha}t + \frac{j}{\sqrt{\alpha}}\pi f)^2} dt. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Operando la sostituzione

$$x = \sqrt{2}(\sqrt{\alpha}t + \frac{j}{\sqrt{\alpha}}\pi f); \quad dx = \sqrt{2\alpha} \, dt, \quad (3.84)$$

e usando l'unitarietà dell'area sottesa dalla gaussiana, si ha

$$S(f) = k \frac{e^{-\frac{\pi^2}{\alpha} f^2}}{\sqrt{2\alpha}} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = k \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\pi^2}{\alpha} f^2}. \quad (3.85)$$

3.4 Teoremi del valore iniziale e finale

La trasformata di Fourier è una rappresentazione equivalente del segnale e quindi contiene nel dominio della frequenza tutte le informazioni già presenti nel dominio del tempo. Pertanto è possibile trovare una relazione tra la trasformata di Fourier $S(f)$ e i valori $s(0)$ e $s(+\infty)$.

Proprietà 3.13 Teorema del valore iniziale

$$s(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) df. \quad (3.86)$$

Prova: Immediata dalla definizione di integrale di Fourier

$$s(0) = s(t)|_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df \Big|_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) df. \quad (3.87)$$

Esempio 3.3 Verificare il teorema del valore iniziale per il segnale

$$s(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta). \quad (3.88)$$

Soluzione: La trasformata di Fourier è

$$S(f) = \frac{A}{2} \left(e^{j\theta} \delta(f - f_0) + e^{-j\theta} \delta(f + f_0) \right). \quad (3.89)$$

Pertanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(f) df = \frac{A}{2} \left(e^{j\theta} + e^{-j\theta} \right) = A \cos \theta. \quad (3.90)$$

Proprietà 3.14 Teorema del valore finale

$$s(\infty) = \lim_{f \rightarrow 0} j2\pi f S(f) + s(-\infty). \quad (3.91)$$

Immediato corollario è che $s(-\infty) = \lim_{f \rightarrow 0} j2\pi f S(f) + s(+\infty)$. Bisogna inoltre osservare che il valore finale potrebbe non esistere. Si pensi al segnale $s(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ in cui $s(-\infty)$ non esiste.

Prova: Il segnale $s(t)$ può essere espresso come

$$s(t) = \int_{-\infty}^t s'(\xi) d\xi + s(-\infty) = \lim_{f \rightarrow 0} \int_{-\infty}^t s'(\xi) e^{-j2\pi f \xi} d\xi + s(-\infty). \quad (3.92)$$

Pertanto

$$s(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{f \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} s'(\xi) e^{-j2\pi f \xi} d\xi + s(-\infty) = \lim_{f \rightarrow 0} j2\pi f S(f) + s(-\infty). \quad (3.93)$$

Esempio 3.4 Verificare il teorema del valore finale per i segnali

$$s_1(t) = Ae^{-\alpha t}, \quad \alpha > 0; \quad s_2(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right); \quad s_3(t) = \operatorname{sgn} t. \quad (3.94)$$

Soluzione: Le trasformate di Fourier sono rispettivamente

$$S_1(f) = \frac{A}{\alpha + j2\pi f}; \quad S_2(f) = T \frac{\sin \pi T f}{\pi T f}; \quad S_3(f) = \frac{1}{j\pi f}. \quad (3.95)$$

Pertanto,

$$s_1(\infty) = \lim_{f \rightarrow 0} j2\pi f S_1(f) + s_1(-\infty) = \lim_{f \rightarrow 0} \frac{j2\pi f A}{\alpha + j2\pi f} = 0. \quad (3.96)$$

$$\begin{aligned} s_2(\infty) &= \lim_{f \rightarrow 0} j2\pi f S_2(f) + s_2(-\infty) \\ &= \lim_{f \rightarrow 0} j2\pi f T \frac{\sin \pi T f}{\pi T f} = \lim_{f \rightarrow 0} j2 \sin \pi T f = 0. \end{aligned} \quad (3.97)$$

$$\begin{aligned} s_3(\infty) &= \lim_{f \rightarrow 0} j2\pi f S_3(f) + s_3(-\infty) \\ &= \lim_{f \rightarrow 0} j2\pi f \frac{1}{j\pi f} - 1 = 2 - 1 = 1. \end{aligned} \quad (3.98)$$

3.5 Proprietà asintotiche

Abbiamo visto come la trasformata di tipo dell'impulso rettangolare e della funzione a gradino abbiano un comportamento asintotico per $|f| \rightarrow \infty$ che decresce come $\frac{1}{|f|}$. Tale comportamento diventa $\frac{1}{|f|^2}$ nel caso dell'impulso triangolare. In effetti tale “dispersione” in frequenza è causata dalla presenza di discontinuità nel segnale, o nelle sue derivate. Vedremo come questo fenomeno sia ben descritto dalla seguente proprietà asintotica.

Proprietà 3.15 Sia $s(t)$ un segnale e $S(f)$ la sua trasformata di Fourier. Sia $s(t)$ una funzione continua fino alla derivata $(n-1)$ -esima, ovvero $s(t) \in \mathcal{C}^n$ (con \mathcal{C}^0 si è indicata la classe delle funzioni discontinue; con \mathcal{C}^1 la classe delle funzioni continue ma non derivabili; con \mathcal{C}^2 la classe delle funzioni continue e derivabili fino alla derivata prima; eccetera). Limitandosi alla classe di segnali e trasformate ordinarie, ovvero tali che $\lim_{|t| \rightarrow \infty} |s(t)| = 0$ e $\lim_{|f| \rightarrow \infty} |S(f)| = 0$ (segnale e trasformata assolutamente integrabili), si ha che $|S(f)|$ al tendere di $f \rightarrow \infty$ è un infinitesimo di ordine $n+1$.

Esempi notevoli di questa proprietà, come già menzionato, sono: l'impulso rettangolare e la funzione a gradino, che appartengono alla classe \mathcal{C}^0 ; l'impulso triangolare che appartiene alla classe \mathcal{C}^1 ; eccetera.

Prova: Forniamo qui solo una versione abbozzata della prova. Per maggiori dettagli il lettore faccia riferimento al testo di Papoulis (1962). Poiché $s(t)$ appartiene a \mathcal{C}^n , la sua derivata $(n+1)$ -esima contiene degli impulsi di Dirac ed è del tipo $g(t) + \sum d_i \delta(t - t_i)$, dove $\{t_i\}$ sono i punti di discontinuità e $\{d_i\}$ l'entità dei salti. Nel dominio della frequenza la funzione diventa $G(f) + \sum d_i e^{j2\pi f t_i}$. Il contributo degli impulsi è tale che la funzione resta finita. D'altro canto per la proprietà di derivazione

$$\mathcal{F} \left[\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} s(t) \right] = (j2\pi f)^{n+1} S(f). \quad (3.99)$$

Ciò comporta che $S(f)$ per esistere deve essere un infinitesimo del tipo $\frac{1}{|f|^{n+1}}$. Si pensi all'impulso rettangolare, o a qualunque segnale discontinuo, e agli impulsi presenti nella derivata prima.

3.6 Trasformate di segnali periodici

La trasformata dei segnali periodici mostra come la Trasformata di Fourier sia in effetti una generalizzazione della serie di Fourier. Infatti, così come nella serie di Fourier lo spettro è costituito da linee spettrali discrete, è possibile dimostrare che per i segnali periodici lo spettro è costituito da impulsi di Dirac in corrispondenza delle frequenze armoniche.

Un segnale periodico, scritto come estensione periodica del segnale tempo-limitato $i(t)$, è

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i(t - nT). \quad (3.100)$$

Per le proprietà della funzione di Dirac, la estensione periodica $s(t)$ può essere scritta come la convoluzione

$$s(t) = i(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (3.101)$$

Usando la proprietà della convoluzione e la nota trasformata del treno di impulsi, abbiamo

$$S(f) = I(f) \left(\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta \left(f - \frac{k}{T} \right) \right). \quad (3.102)$$

Pertanto la trasformata è costituita da *linee discrete*, ovvero da impulsi di Dirac con area pari ai campioni di $I(f)$, localizzate sull'asse delle frequenze a multipli di $\frac{1}{T}$

$$S(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} I\left(\frac{k}{T}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T}\right). \quad (3.103)$$

Antitrasformando

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} I\left(\frac{n}{T}\right) e^{j2\pi \frac{n}{T} t}. \quad (3.104)$$

Per confronto diretto si ha che i coefficienti della serie di Fourier (esponenziale) di $s(t)$ sono

$$c_n = \frac{1}{T} I\left(\frac{n}{T}\right), \quad \forall \quad n \quad (3.105)$$

La trasformata di Fourier consente pertanto di trattare segnali periodici nell'ambito della stessa formalizzazione dei segnali non periodici. E' piuttosto comune che segnali per telecomunicazioni presentino delle componenti periodiche in aggiunta a quelle non periodiche. Segnali misti di questo tipo presentano una combinazione di uno spettro continuo e di uno spettro a linee equispaziate.

Esempio 3.5 Si valuti la trasformata di Fourier del treno di impulsi triangolari

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda\left(\frac{t - nT}{\Delta}\right), \quad T > 2\Delta. \quad (3.106)$$

Soluzione: Dalla conoscenza della trasformata di Fourier dell'impulso triangolare, il calcolo della trasformata di $s(t)$ è immediato:

$$I(f) = \Delta \text{sinc}^2 \Delta f; \quad (3.107)$$

$$S(f) = \frac{\Delta}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2 \Delta \frac{k}{T} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right). \quad (3.108)$$

Figura 3.2 mostra il segnale $s(t)$ e la trasformata $S(f)$ per $T = 5.5\Delta$. Si noti come la trasformata sia una funzione reale e positiva ($S(f) = |S(f)|$).

3.7 Esistenza della trasformata

Abbiamo volontariamente posticipato la discussione sulla esistenza della trasformata poiché abbiamo preferito calcolare prima esplicitamente alcune trasformate notevoli. L'utilizzo delle funzioni di Dirac, sia nel dominio del tempo che della

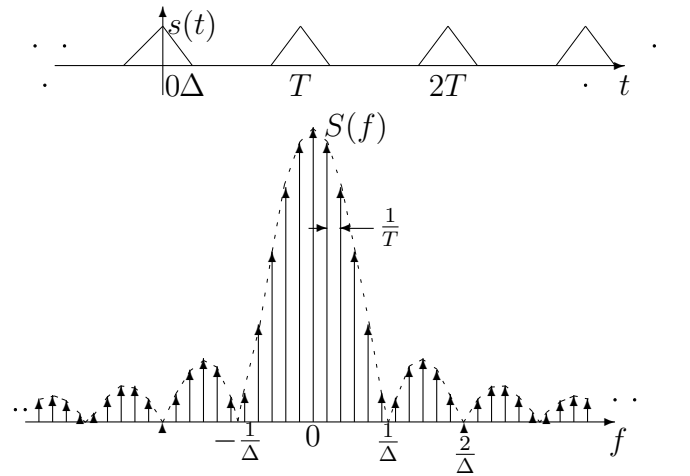


Figura 3.2: Il segnale triangolare periodico e lo spettro a righe nel dominio della frequenza. La figura è stata disegnata per $T = 5.5\Delta$.

frequenza, ci consente di superare praticamente molti dei problemi connessi alla presenza di discontinuità e di convergenza. Infatti, se ci fossimo limitati alla esistenza della trasformata nel senso ordinario, ovvero

$$|S(f)| < \infty \quad \forall \quad f, \quad (3.109)$$

avremmo dovuto escludere parecchie trasformate notevoli, come quella del coseno, del signum, dei segnali periodici. Una condizione sufficiente per la esistenza della trasformata in senso ordinario, è la cosiddetta *condizione di Dirichelet debole*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty, \quad (3.110)$$

che non è altro che la condizione di assoluta integrabilità della funzione. Tale condizione è chiaramente violata da molti dei segnali che abbiamo esaminato, quali il coseno, la costante, il signum, eccetera. Esistono nella letteratura, con principale riferimento alla serie di Fourier, comunque anche delle *condizioni di Dirichelet forti*. Omettiamo la discussione su tale argomento poiché preferiamo dare al lettore un'approccio prevalentemente operativo, visto che per la maggior parte dei segnali di interesse pratico la trasformata di Fourier può essere espressa in forma analitica mediante l'utilizzo delle funzioni generalizzate di Dirac. Rimandiamo il lettore a qualunque testo di analisi matematica per gli approfondimenti sugli aspetti formali.

Per valutare la trasformata di funzioni che non soddisfano le condizioni di assoluta integrabilità, o per verificare i risultati ottenuti mediante l'utilizzo delle

funzioni di Dirac, si può procedere considerando il limite della versione *pesata* del segnale $s(t)$

$$s_w(t) = w(t)s(t), \quad (3.111)$$

con $w(t)$ una funzione opportunamente scelta e tale che il suo limite esista e sia una costante pari a uno. La trasformata si ottiene mediante il limite

$$S(f) = \lim_{w(t) \rightarrow 1} \mathcal{F}[w(t)s(t)]. \quad (3.112)$$

Tipiche scelte per $w(t)$ sono

1. *Impulso rettangolare (funzione finestra rettangolare)*. La trasformata si ottiene come limite della versione troncata di $s(t)$

$$S(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathcal{F}\left[\Pi\left(\frac{t}{T}\right)s(t)\right]. \quad (3.113)$$

2. *Impulso triangolare (funzione finestra di Bartlett)*. La trasformata si ottiene come

$$S(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathcal{F}\left[\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)s(t)\right]. \quad (3.114)$$

3. *Funzione esponenziale bilatera*. La trasformata si ottiene come

$$S(f) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathcal{F}\left[e^{-\alpha|t|}s(t)\right]. \quad (3.115)$$

4. *Funzione gaussiana*. La trasformata si ottiene come

$$S(f) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \mathcal{F}\left[e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}s(t)\right]. \quad (3.116)$$

La scelta della funzione $w(t)$ più opportuna dipende dal caso specifico ed è tipicamente dettata dalle difficoltà analitiche nell'eseguire l'integrale.

Esempio 3.6 Calcoliamo con la tecnica del limite la trasformata di una costante.

$$\mathcal{F}[A] = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathcal{F}\left[\Pi\left(\frac{t}{T}\right)A\right] = \lim_{T \rightarrow \infty} A T \operatorname{sinc} T f = A\delta(t), \quad (3.117)$$

dove abbiamo usato la proprietà asintotica della funzione sinc (vedi Appendice B).

Esempio 3.7 Calcoliamo la trasformata del fasore $s(t) = e^{j2\pi f_0 t}$ con la tecnica del limite.

$$\begin{aligned}
 S(f) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \mathcal{F} \left[\Pi \left(\frac{t}{T} \right) e^{j2\pi f_0 t} \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{-j2\pi(f-f_0)t}}{-j2\pi(f-f_0)} \Big|_{-T/2}^{T/2} \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{j\pi(f-f_0)T} - e^{-j\pi(f-f_0)T}}{j2\pi(f-f_0)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sin \pi(f-f_0)T}{\pi(f-f_0)} \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} T \operatorname{sinc}(f-f_0)T = \delta(f-f_0). \tag{3.118}
 \end{aligned}$$

Il lettore verifichi altre trasformate notevoli usando questa tecnica, con maggiore attenzione a quelle che contengono impulsi di Dirac. Alcuni esempi sono suggeriti nei problemi.

3.8 Segnali a banda definita

Nelle applicazioni si fa spesso riferimento a segnali che hanno una trasformata di Fourier nulla su un sottoinsieme dell'asse delle frequenze. La seguente classificazione dei segnali secondo la loro occupazione in banda è abbastanza intuitiva.

Un segnale è *passa-basso* se

$$S(f) \begin{cases} \neq 0, & f \in [-B, B] \\ = 0, & \text{else} \end{cases}. \tag{3.119}$$

L'intervallo $[-B, B]$ è detto *banda passante*. La frequenza B è detta *banda* del segnale, o *frequenza di taglio* (*cut-off frequency*). Il complemento alla banda $[-B, B]$ è detto *banda oscura*.

Un segnale è *passa-alto* se

$$S(f) \begin{cases} \neq 0, & f \in]-\infty, -B] \cup [B, \infty[\\ 0, & \text{else.} \end{cases} \tag{3.120}$$

La frequenza B è detta *frequenza di taglio* (*cut-off frequency*). La banda $[-B, B]$ è la *banda oscura*.

Un segnale è *passa-banda* se

$$S(f) \begin{cases} \neq 0, & f \in [-B_2, -B_1] \cup [B_1, B_2] \\ 0, & \text{else.} \end{cases} \tag{3.121}$$

L'intervallo $[B_1, B_2]$ è detto banda passante. La frequenza $B_2 - B_1$ è detta *larghezza di banda*. Le frequenze B_1 e B_2 sono rispettivamente le *frequenze di taglio superiore e inferiore*. Il complemento all'intervallo $[-B, B]$ è la banda oscura.

Un segnale è *a banda oscura* o *elimina-banda* se

$$S(f) \begin{cases} = 0, & f \in [-B_2, -B_1] \cup [B_1, B_2] \\ \neq 0 & \text{else.} \end{cases} \quad (3.122)$$

Anche qui le frequenze B_1 e B_2 sono le due frequenze di taglio.

E' utile fare qualche ulteriore considerazione sui segnali a banda limitata. Infatti l'annullarsi della trasformata di Fourier su un sottoinsieme dell'asse delle frequenze, comporta che il segnale nel dominio del tempo non può avere lo stesso comportamento. Più precisamente se $S(f)$ è nulla su un sottoinsieme compatto di \mathcal{R} , ciò non può avvenire nel dominio del tempo. Per dualità questo risultato vale anche tra il dominio del tempo e quello della frequenza.

Cerchiamo di visualizzare questo effetto con l'aiuto di qualche esempio. Consideriamo lo spettro del segnale passa-basso ideale $S(f) = \Pi(f/B)$. Tale spettro è identicamente nullo su tutta la banda esterna a $[-B, B]$. La trasformata inversa è $s(t) = B \text{sinc} Bt$ che è un segnale a estensione illimitata anche se decrescente per $t \rightarrow \infty$. Esso si annulla solo sulla infinità numerabile di punti $t = k/f_0$, k intero. Più in generale tutti i segnali rigorosamente passa-basso con frequenza di taglio B hanno uno spettro che può essere espresso come

$$S(f) = G(f) \Pi\left(\frac{f}{B}\right). \quad (3.123)$$

La trasformata inversa, dalla proprietà della convoluzione, è

$$s(t) = Bg(t) * \text{sinc} Bt. \quad (3.124)$$

Il risultato della convoluzione ha le stesse proprietà di continuità della funzione sinc, ovvero si può annullare solo su una infinità numerabile di punti, anche se $g(t)$ è nulla su degli intervalli compatti.

Analogamente consideriamo anche l'esempio di un segnale limitato nel tempo. Un segnale limitato all'intervallo $[t_1, t_2]$ è sempre esprimibile come

$$s(t) = f(t) \Pi\left(\frac{t - \frac{t_1+t_2}{2}}{t_2 - t_1}\right). \quad (3.125)$$

Nel dominio della frequenza abbiamo

$$S(f) = F(f) * \left(e^{-j f \frac{t_1+t_2}{2}} (t_2 - t_1) \text{sinc}(t_2 - t_1)t \right), \quad (3.126)$$

che non può annullarsi su un insieme compatto a causa della convoluzione con l'impulso sinc.

Il discorso è facilmente estendibile a spettri e segnali nulli su insiemi compatti che non possono annullarsi su domini compatti nell'altro dominio. Per gli approfondimenti rimandiamo il lettore a qualunque buon testo sulla trasformata di Fourier (per esempio (Papoulis, 1962)).

Va comunque menzionato che dal punto di vista delle applicazioni questo effetto è spesso ignorato poiché la funzione sinc tende a zero quando il suo argomento tende all'infinito. Pertanto in via approssimata si parla di segnali di estensione e di banda entrambi limitate. Ad esempio nel caso tipico dell'impulso rettangolare

$$s(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right), \quad S(f) = T \operatorname{sinc} T f, \quad (3.127)$$

che ha un comportamento approssimativamente passa-basso, si assume spesso che la banda sia circa $\frac{1}{T}$. Questa è la frequenza alla quale c'è il primo zero che separa il lobo principale dal primo lobo secondario. Infatti il massimo relativo al secondo lobo è già notevolmente attenuato rispetto al lobo principale. A volte addirittura si attribuisce all'impulso rettangolare di durata T la banda di $\frac{1}{2T}$ che è la frequenza alla quale il primo lobo si è ridotto a $\frac{2}{\pi}$ volte il valore in $f = 0$.

3.9 Problemi

Problema 3.1 Calcolare e disegnare modulo e fase della trasformata di Fourier per i seguenti segnali. Si faccia uso delle proprietà e delle trasformate notevoli.

1. $\Pi\left(\frac{t-5}{3}\right)$; 2. $\Lambda\left(\frac{t-2}{3}\right)$; 3. $e^{-\alpha|t|}$, $\alpha > 0$; 4. $u(t) - u(t-3)$; 5. $x(t)^2$ con $x(t)$ segnale passa-basso ideale con frequenza di taglio pari a B ; 6. $e^{-at}u(-t)$, $a < 0$; 7. $a \operatorname{sinc}(\alpha t - 2)$, $a, \alpha > 0$; 8. $a \operatorname{sinc}^2(\alpha t + 1)$, $a, \alpha > 0$; 9. $A \cos 2\pi f_0 t \Pi\left(\frac{f_0 t}{3}\right)$; 10. $A \sin 2\pi f_0 t \Pi\left(\frac{f_0}{4}\left(t - \frac{2}{f_0}\right)\right)$; 11. $B + A \cos 2\pi f_0 t$; 12. $A_1 \cos 2\pi f_0 t + A_2 \sin 2\pi f_1 t$; 13. $B + A_1 \cos(2\pi f_0 t + \theta) - \sin 2\pi f_0 t$; 14. $(A + \cos 2\pi f_0 t) \cos 2\pi f_1 t$, $f_1 > f_0$; 15. $A_1 \cos^2 2\pi f_0 t + A_2 \cos^2 2\pi f_1 t$, $f_1 > f_0$.

Problema 3.2 Sia $x(t)$ un segnale passa-basso ideale con frequenza massima pari a B Hz. Valutare esattamente e fornire uno schizzo approssimativo della trasformata di Fourier dei seguenti segnali. 1. $x(t) \cos 2\pi f_0 t$; 2. $(A + x(t)) \cos(2\pi f_0 t + \theta)$; 3. $A \sin 2\pi f_0 t - x(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta)$.

Problema 3.3 Siano $x_1(t)$ e $x_2(t)$ due segnali passa-basso ideali con frequenze massime pari a B_1 e B_2 rispettivamente, con $B_2 > B_1$. Valutare esattamente e fornire uno schizzo approssimativo della trasformata di Fourier del segnale

$$s(t) = x_1(t) \cos 2\pi f_0 t + x_2(t) \sin 2\pi f_0 t. \quad (3.128)$$

Problema 3.4 Valutare modulo e fase dello spettro

$$Y(f) = z_1 + z_2 \delta(f - f_0), \quad (3.129)$$

dove $z_1 = \rho_1 e^{j\theta_1}$ e $z_2 = \rho_2 e^{j\theta_2}$ sono due generiche costanti complesse.

Problema 3.5 Valutare la trasformata di Fourier del segnale

$$s(t) = x^2(t) \cos 2\pi f_0 t, \quad (3.130)$$

dove $x(t)$ è un segnale passa-basso ideale con frequenza massima pari a B .

Problema 3.6 Valutare esplicitamente modulo e fase del segnale

$$s(t) = A\delta(t) + \frac{A}{2}\delta(t-1). \quad (3.131)$$

Problema 3.7 Valutare la anti-trasformata di Fourier dei seguenti spettri: **1.** $S(f) = A + e^{-j2\pi f}$; **2.** $S(f) = \frac{1}{2}\Delta(f/5)$; **3.** $S(f) = \Lambda(f-3) + \frac{1}{2}\Lambda(f)$; **4.** $S(f) = \Pi((f-f_0)/2f_0)$; **5.** $S(f) = \Pi((f-f_0)/\alpha) + \Pi((f+f_0)/\alpha)$; **6.** $S(f) = e^{j2\pi t_0 f} - e^{j2\pi t_1 f}$; **7.** $S(f) = \cos(\pi/2B)\Pi(f/2B)$; **8.** $S(f) = A \sin 2\pi \alpha f$; **9.** $S(f) = \begin{cases} 1 & f \in [-B_2, -B_1] \cup [B_1, B_2] \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$; **10.** $S(f) = \begin{cases} 0 & f \in [-B_2, -B_1] \cup [B_1, B_2] \\ 1 & \text{altrove.} \end{cases}$.

Problema 3.8 Si verifichi con la tecnica del limite la trasformata di Fourier del segnale $s(t) = \text{sgnt}$.

Problema 3.9 Si verifichi con la tecnica del limite la trasformata di Fourier del segnale $s(t) = u(t)$ confrontandola a quella della funzione signum.

Problema 3.10 Calcolare la trasformata di Fourier dei seguenti segnali periodici: **1.** $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi(\frac{t-nT}{\Delta})$, $\Delta < T$; **2.** $(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda(\frac{t-nT}{T/2})) - \frac{1}{2}$.

Problema 3.11 Valutare la anti-trasformata di Fourier dei seguenti spettri: **1.** $S(f) = (1 + \cos \frac{\pi}{B} f) \Pi(f/2B)$ (funzione *coseno rialzato*); **2.** $S(f) = \Lambda(\frac{f-B/2}{B/2}) + \Lambda(\frac{f+B/2}{B/2})$.

Problema 3.12 Valutare la trasformata di Fourier per i seguenti segnali: **1.** $s(t) = 1 + \cos 2\pi f_0 t + \cos^2 2\pi f_0 t$; **2.** $s(t) = e^{-at} \cos 2\pi f_0 t u(t)$, $a > 0$; **3.** $s(t) = u(t) - 2u(t-3)$; **4.** $\cos(2\pi f_0 t)u(t)$; **5.** $\sin(2\pi f_0 t)u(t)$.

Capitolo 4

Densità spettrale e autocorrelazione

Vengono qui introdotte le definizioni di spettro di energia e di spettro potenza per i segnali deterministici. Vengono inoltre introdotte le definizioni delle funzioni di auto- e mutua correlazione e il teorema di Wiener-Khintchin.

4.1 Spettro di energia

La proprietà 3.10 della trasformata di Fourier per segnali di energia, sancisce che l'energia di un segnale $s(t)$ può essere calcolata in maniera equivalente sia nel dominio del tempo che nel dominio della frequenza. Ovvero

$$\mathcal{E}_s = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df. \quad (4.1)$$

Quindi la energia del segnale $s(t)$, grazie alla relazione integrale, può essere vista come la sovrapposizione di infiniti contributi a varie frequenze. Ne consegue la naturale definizione di *densità spettrale di energia* (*ESD*, *Energy Spectral Density*), o semplicemente *spettro di energia*

$$\mathcal{E}_s(f) = |S(f)|^2. \quad (4.2)$$

E' evidente che, poichè il contributo all'energia di un segnale proviene soltanto dal modulo della trasformata, lo spettro di fase di $s(t)$ non contribuisce allo spettro di energia. Quindi esso fornisce una rappresentazione in frequenza del segnale che tiene conto del peso relativo delle varie componenti, ma non della fase con la quale esse contribuiscono al segnale. Esistono infatti molti segnali aventi lo stesso spettro di energia e che sono molto diversi nella loro struttura temporale, grazie ad una diversa composizione delle fasi. La densità spettrale

risulta molto utile nelle applicazioni per valutare la presenza e il peso relativo di componenti a frequenze diverse, senza preoccuparsi dei dettagli con i quali esse si sommano.

Esempio 4.1 Si valuti lo spettro di energia del segnale

$$s(t) = \alpha \Pi\left(\frac{t - t_0}{T}\right). \quad (4.3)$$

Soluzione: Valutando la trasformata di Fourier

$$S(f) = \alpha T e^{-j2\pi f t_0} \text{sinc } T f, \quad (4.4)$$

lo spettro di energia è

$$\mathcal{E}_s(f) = \alpha^2 T^2 \text{sinc}^2 T f. \quad (4.5)$$

Si noti come la densità spettrale non dipenda dal ritardo t_0 .

4.2 Spettro di potenza

Anche per i segnali di potenza è possibile *scomporre* in frequenza i contributi alla potenza totale mediante la definizione di uno *spettro di potenza*. La definizione è un pò più articolata, ma risulterà alla fine abbastanza intuitiva.

Definiamo innanzitutto una versione troncata di $s(t)$ all'intervallo $[-T, T]$ e la sua trasformata di Fourier

$$s_T(t) = s(t) \Pi\left(\frac{t}{2T}\right); \quad S_T(f) = \mathcal{F}[s_T(t)]. \quad (4.6)$$

Notiamo che per T finito $s_T(t)$ è un segnale di energia. Ricordando la definizione di potenza, e applicando il teorema di Parseval alla versione troncata $s_T(t)$ del segnale, abbiamo

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_s &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |s(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} |s_T(t)|^2 dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} |S_T(f)|^2 df. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Ora se fosse possibile scambiare il limite con l'integrale avremmo

$$\mathcal{P}_s = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |S_T(f)|^2 df, \quad (4.8)$$

da cui la naturale definizione di *densità spettrale di potenza* (*PSD*, *Power Spectral Density*), o semplicemente *spettro di potenza*, sarebbe

$$\mathcal{P}_s(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |S_T(f)|^2. \quad (4.9)$$

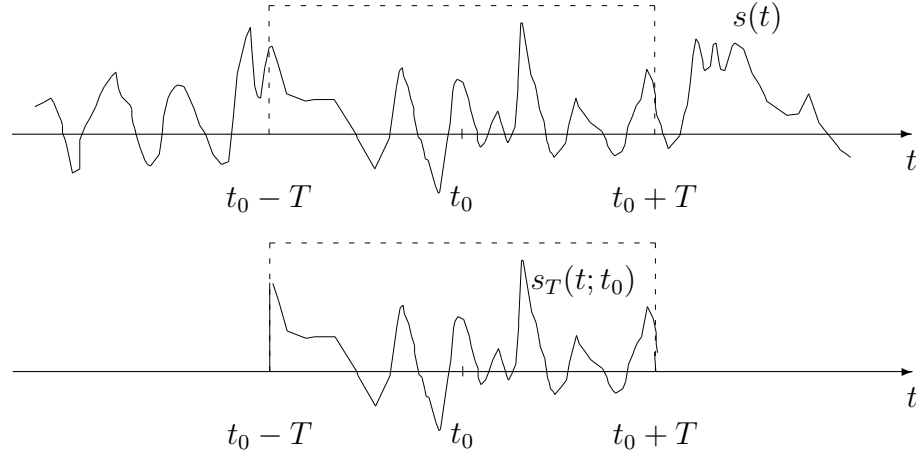


Figura 4.1: Il segnale finestrato per la definizione del periodogramma medio.

Lo spettro $\frac{|S_T(f)|^2}{2T}$ è detto *periodogramma*. Purtroppo questa definizione presenta notevoli problemi formali. Nella definizione data infatti, che vede lo spettro di potenza come limite del periodogramma al tendere di $T \rightarrow \infty$, abbiamo scambiato la operazione di limite con quella di integrale in (4.8). Ciò presuppone che tale limite esista e che lo scambio sia lecito. *Sfortunatamente per molti segnali di interesse applicativo, tale passaggio è illecito perché il limite non esiste!!*. In pratica succede che, al crescere di T , il periodogramma $|S_T(f)|^2$ diventa progressivamente più frastagliato e non fornisce alcuna funzione limite. Nonostante (4.9) venga riportata molto spesso nella letteratura come definizione di spettro di potenza, una definizione diversa è opportuna se si vuole includere la maggior parte dei segnali utili nelle telecomunicazioni. Lo stratagemma che si usa per “far convergere” il limite (4.9) è di far variare il centro della finestra sulla quale si tronca il segnale $x(t)$ (assunta in (4.9) centrata a zero; vedi figura 4.1) ed effettuare una media su tutti i periodogrammi così ottenuti, prima di far tendere $T \rightarrow \infty$.

Più formalmente, definiamo una versione troncata di $x(t)$ all’intervallo $[t_0 - T, t_0 + T]$ e la sua trasformata di Fourier

$$s_T(t; t_0) = s(t) \Pi\left(\frac{t - t_0}{2T}\right); \quad S_T(f; t_0) = \mathcal{F}[s_T(t; t_0)]. \quad (4.10)$$

La funzione $\frac{|S_T(f; t_0)|^2}{2T}$ è detta *periodogramma tempo-variante*. Il periodogramma medio, dove la media è eseguita rispetto a t_0 , è

$$\lim_{U \rightarrow \infty} \frac{1}{2U} \int_{-U}^U \frac{1}{2T} |S_T(f; t_0)|^2 dt_0. \quad (4.11)$$

Lo spettro di potenza è definito infine come limite del periodogramma medio, ovvero

$$\mathcal{P}_s(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{U \rightarrow \infty} \frac{1}{2U} \int_{-U}^U \frac{1}{2T} |S_T(f; t_0)|^2 dt_0. \quad (4.12)$$

In tal modo abbiamo in maniera più generale¹ che

$$\mathcal{P}_s = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_s(f) df. \quad (4.13)$$

Bisogna ammettere che la definizione di spettro di potenza data è un pò complicata. Nonostante ciò, ci è sembrato opportuno riportarla comunque, anche se queste note hanno solo carattere introduttivo. La ragione è dare al lettore un riferimento più specifico su un problema che nella letteratura viene spesso lasciato sul vago. Ci auguriamo che il lettore motivato apprezzi lo sforzo e tragga spunto da queste considerazioni per ulteriori approfondimenti (Gardner, 1988; 1990;). Vedremo come le difficoltà nella definizione di spettro di potenza vengano comunque superate dalla relazione esistente con la funzione di autocorrelazione, che sarà introdotta nella sezione successiva.²

Per i segnali di potenza valgono le stesse considerazioni fatte per i segnali di energia: anche se la rappresentazione in termini di densità spettrale non rappresenta univocamente il segnale, visto che vengono ignorati i contributi di fase, e viene eseguita una media, essa ne costituisce in molti casi applicativi una utile descrizione parziale. Essa può essere pensata come rappresentativa di una *classe* di segnali che condividono il peso relativo dei vari contributi spettrali.

Esempio 4.2 Si valuti lo spettro di potenza del segnale

$$s(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta). \quad (4.14)$$

Soluzione: Calcoliamo la trasformata di Fourier della versione troncata a $[t_0 - T, t_0 + T]$

$$\begin{aligned} S_T(f; t_0) &= \mathcal{F} \left[A \Pi \left(\frac{t - t_0}{2T} \right) \cos(2\pi f_0 t + \theta) \right] \\ &= A \left(2T e^{-j2\pi f t_0} \text{sinc } 2T f \right) * \frac{1}{2} \left(e^{j\theta} \delta(f - f_0) + e^{-j\theta} \delta(f + f_0) \right) \\ &= AT \left(e^{j\theta} e^{-j2\pi(f-f_0)t_0} \text{sinc } 2T(f - f_0) + e^{-j\theta} e^{-j2\pi(f+f_0)t_0} \text{sinc } 2T(f + f_0) \right). \end{aligned}$$

¹La relazione con la potenza sarà dimostrata quando parleremo di autocorrelazione.

²Nello studio dei segnali per telecomunicazioni, un altro modo per evitare le difficoltà formali nella definizione di uno spettro di potenza è adottare la modellistica aleatoria che sarà introdotta nel prossimo capitolo. In tal caso non è necessario mediare nel tempo per stabilizzare il limite, ma sarà sufficiente fare una media sullo spazio campione dei possibili segnali. Va comunque riconosciuto che studiare un segnale come segnale deterministico è un pò più diretto rispetto a certe applicazioni.

Il modulo al quadrato è

$$\begin{aligned}
 |S_T(f; t_0)|^2 &= S_T(f; t_0) S_T^*(f; t_0) \\
 &= A^2 T^2 \left(e^{j\theta} e^{-j2\pi(f-f_0)t_0} \text{sinc} 2T(f-f_0) + e^{-j\theta} e^{-j2\pi(f+f_0)t_0} \text{sinc} 2T(f+f_0) \right) \\
 &\quad \cdot \left(e^{-j\theta} e^{j2\pi(f-f_0)t_0} \text{sinc} 2T(f-f_0) + e^{j\theta} e^{j2\pi(f+f_0)t_0} \text{sinc} 2T(f+f_0) \right) \\
 &= A^2 T^2 \left[\text{sinc}^2 2T(f-f_0) + \text{sinc}^2 2T(f+f_0) \right. \\
 &\quad \left. + \left(e^{j(2\theta+4\pi f_0 t_0)} + e^{-j(2\theta+4\pi f_0 t_0)} \right) \text{sinc} 2T(f-f_0) \text{sinc} 2T(f+f_0) \right] \\
 &= \frac{A^2 T}{2} 2T \left[\text{sinc}^2 2T(f-f_0) + \text{sinc}^2 2T(f+f_0) \right. \\
 &\quad \left. + 2 \cos(2\theta + 4\pi f_0 t_0) \text{sinc} 2T(f-f_0) \text{sinc} 2T(f+f_0) \right]. \tag{4.15}
 \end{aligned}$$

Mediando su t_0 , il terzo termine si annulla. Infatti basta osservare che

$$\int_{-U}^U \cos(2\theta + 4\pi f_0 \eta) d\eta = \frac{\sin(2\theta + 4\pi f_0 U) - \sin(2\theta - 4\pi f_0 U)}{4\pi f_0}, \tag{4.16}$$

è una funzione limitata. Dividendo per $2U$ e facendo tendere $U \rightarrow \infty$, essa si annulla. Il periodogramma medio è quindi

$$\lim_{U \rightarrow \infty} \frac{1}{2U} \int_{-U}^U |S_T(f; t_0)|^2 dt_0 = \frac{A^2 T}{2} 2T \left[\text{sinc}^2 2T(f-f_0) + \text{sinc}^2 2T(f+f_0) \right]. \tag{4.17}$$

Poiché³

$$\lim_{\Delta \rightarrow \infty} \Delta \text{sinc}^2 \Delta x = \delta(x), \tag{4.19}$$

in equazione (4.15) dividendo per $2T$ e andando al limite per $T \rightarrow \infty$, abbiamo che i due termini tendono a delle delta di Dirac. Quindi lo spettro di densità di potenza è

$$\mathcal{P}_s(f) = \frac{A^2}{4} \delta(f-f_0) + \frac{A^2}{4} \delta(f+f_0). \tag{4.20}$$

Il risultato dell'ultimo esempio è piuttosto semplice e conferma come una sinusoide abbia uno spettro a due righe centrate in f_0 e $-f_0$. La procedura per

³La funzione $\Delta \text{sinc}^2 \Delta x$ è un impulso positivo ad area unitaria che al tendere di Δ all'infinito diventa infinitamente stretta. Si tratta di una di quelle funzioni tipiche che servono a generare, o a definire, la funzione di Dirac. Che l'area sottesa dalla funzione sia unitaria si vede immediatamente usando il teorema di Parseval e la trasformata dell'impulso rettangolare

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta \text{sinc}^2 \Delta x dx = \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi^2 \left(\frac{t}{\Delta} \right) dt = 1. \tag{4.18}$$

arrivarci è oggettivamente un pò complicata a dispetto del risultato piuttosto intuitivo. In effetti in questo caso avremmo potuto utilizzare anche la definizione con la media del periodogramma e avremmo ottenuto lo stesso risultato. Esso sembrerebbe suggerire che la densità spettrale di un segnale di potenza possa essere ottenuta direttamente dalla sua trasformata di Fourier. Purtroppo ciò non è vero. La questione è formalmente piuttosto insidiosa specialmente quando la trasformata di Fourier contiene degli impulsi di Dirac (il quadrato di un impulso di Dirac non è comunque definito). Pertanto in generale anche se

$$S(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} S_T(f), \quad (4.21)$$

il calcolo diretto dello spettro di potenza va eseguito applicando la definizione, ovvero: troncando la funzione, calcolando la trasformata di Fourier, estraendo il modulo al quadrato, mediando su t_0 , dividendo per $2T$ e andando al limite. Per la importante classe dei segnali di potenza periodici esamineremo il calcolo esplicito in generale in uno dei prossimi paragrafi. Fortunatamente il calcolo esplicito dello spettro di potenza direttamente dalla definizione viene eseguito raramente, in quanto lo stesso risultato può essere ottenuto più semplicemente passando per la funzione di autocorrelazione, come vedremo in seguito.

4.3 Spettri monolateri e RMS

Quando si ha a che fare con segnali reali, la rappresentazione bilatera delle densità è ridondante in quanto vale la seguente proprietà.

Proprietà 4.1 Gli spettri di densità di energia e di potenza di segnali reali, sono delle funzioni pari

$$\mathcal{E}_s(f) = \mathcal{E}_s(-f); \quad \mathcal{P}_s(f) = \mathcal{P}_s(-f) \quad (4.22)$$

Prova: Ricordiamo innanzitutto che la trasformata di Fourier di un segnale reale $s(t)$ è Hermitiana, ovvero $S(f) = S^*(-f)$. Pertanto per lo spettro di energia

$$\mathcal{E}_s(f) = |S(f)|^2 = S(f)S^*(f) = S(f)S(-f) = \mathcal{E}_s(-f). \quad (4.23)$$

Per lo spettro di potenza lo stesso procedimento si applica a $S_T(f, t_0)$

$$|S_T(f, t_0)|^2 = |S_T(-f; t_0)|^2. \quad (4.24)$$

La proprietà si ottiene andando al limite.

Quindi per i segnali reali l'informazione spettrale è già tutta contenuta alle frequenze positive. Può essere utile pertanto considerare soltanto la parte della densità spettrale per $f > 0$ e definire delle densità spettrali *monolateri*

$$\gamma_s(f) = \begin{cases} 2\mathcal{E}_s(f), & f \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}; \quad \eta_s(f) = \begin{cases} 2\mathcal{P}_s(f), & f \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}. \quad (4.25)$$

La energia totale e la potenza si calcolano in maniera equivalente come

$$\mathcal{E}_s = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_s(f) df = \int_0^{\infty} \gamma_s(f) df; \quad \mathcal{P}_s = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_s(f) df = \int_0^{\infty} \eta_s(f) df. \quad (4.26)$$

Per maggiore facilità di impiego è comune definire anche delle versioni RMS delle densità spettrali

$$\mathcal{E}_s^{RMS}(f) = \sqrt{\mathcal{E}_s(f)}; \quad \gamma_s^{RMS}(f) = \sqrt{\gamma_s(f)}; \quad (4.27)$$

$$\mathcal{P}_s^{RMS}(f) = \sqrt{\mathcal{P}_s(f)}; \quad \eta_s^{RMS}(f) = \sqrt{\eta_s(f)}; \quad (4.28)$$

Energia e potenza sono ovviamente valutate come

$$\mathcal{E}_s = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\mathcal{E}_s^{RMS}(f) \right)^2 df = \int_0^{\infty} \left(\gamma_s^{RMS}(f) \right)^2 df; \quad (4.29)$$

$$\mathcal{P}_s = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\mathcal{P}_s^{RMS}(f) \right)^2 df = \int_0^{\infty} \left(\eta_s^{RMS}(f) \right)^2 df; \quad (4.30)$$

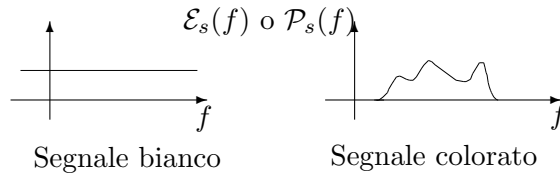
Si noti che per ottenere il valore RMS dell'energia e della potenza totale non si possono integrare le densità RMS, ma

$$\mathcal{E}_s^{RMS} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\mathcal{E}_s^{RMS}(f) \right)^2 df} = \sqrt{\int_0^{\infty} \left(\gamma_s^{RMS}(f) \right)^2 df}; \quad (4.31)$$

$$\mathcal{P}_s^{RMS} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\mathcal{P}_s^{RMS}(f) \right)^2 df} = \sqrt{\int_0^{\infty} \left(\eta_s^{RMS}(f) \right)^2 df}. \quad (4.32)$$

4.4 Segnali bianchi e colorati

Lo spettro di energia o di potenza di un segnale, come già detto sopra, rappresenta una compatta rappresentazione dei contributi alle varie frequenze. Quindi la forma della densità spettrale rappresenta il *colore* del segnale. In particolare, un segnale che ha una densità spettrale (di energia o di potenza) costante è detto *segnale bianco*. Diversamente, un *segnale colorato* ha una densità spettrale non costante. La figura seguente mostra la parte a frequenze positive della densità di un segnale bianco e quella di un segnale colorato.



Il lettore ricordi che la densità spettrale costituisce solo una caratterizzazione parziale del segnale, in quanto tutta la informazione di fase è ignorata. Pertanto, poiché esistono in generale molti segnali aventi la stessa densità spettrale, essa può essere pensata come la caratterizzazione di una *classe* di segnali.

Un segnale bianco è chiaramente solo una idealizzazione matematica che risulta comunque molto utile come caratteristica di riferimento. Infatti un segnale bianco che ha densità spettrale $\mathcal{E}_s(f) = \epsilon_0$ oppure $\mathcal{P}_s(f) = p_0$, ha energia o potenza infinita

$$\mathcal{E}_s = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_s(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon_0 df = \infty; \quad \mathcal{P}_s = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_s(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} p_0 df = \infty. \quad (4.33)$$

Nella pratica ingegneristica si attribuisce comunque spesso il nome di segnale bianco, anche a segnali che sono piatti solo in una banda di interesse.⁴ Ad esempio per un segnale di potenza bianco nella banda $[-f_{max}, f_{max}]$, con densità spettrale pari a $\mathcal{P}_s(f) = \frac{\eta_0}{2}$, dove f_{max} può anche essere molto elevata, la potenza è comunque finita e pari a $P_s = f_{max}\eta_0$.

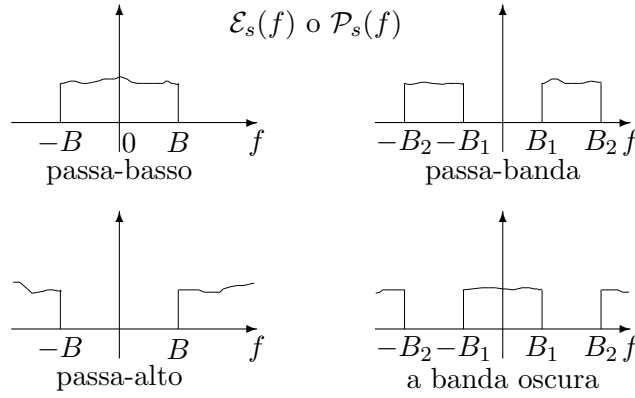
La seguente classificazione dei segnali secondo la loro occupazione in banda è immediata:

- Un segnale è *passa-basso* se $\mathcal{E}_s(f)$ o $\mathcal{P}_s(f) \neq 0$, $f \in [-B, B]$. L'intervallo $[-B, B]$ è detto *banda passante*. La frequenza B è detta *banda* del segnale o *frequenza di taglio*. Il complemento alla banda $[-B, B]$ è detto *banda oscura*.
- Un segnale è *passa-alto* se $\mathcal{E}_s(f)$ o $\mathcal{P}_s(f) \neq 0$, $f \in]-\infty, -B] \cup [B, \infty[$. La frequenza B è detta *frequenza di taglio*.
- Un segnale è *passa-banda* se $\mathcal{E}_s(f)$ o $\mathcal{P}_s(f) \neq 0$, $f \in [-B_2, -B_1] \cup [B_1, B_2]$. L'intervallo $[B_1, B_2]$ è detto banda passante. La frequenza $B_2 - B_1$ è detta *larghezza di banda*.
- Un segnale è *a banda oscura* se $\mathcal{E}_s(f)$ o $\mathcal{P}_s(f) = 0$, $f \in [-B_2, -B_1] \cup [B_1, B_2]$.

La figura seguente mostra graficamente le quattro definizioni.

⁴Si pensi alla radiazione luminosa bianca. In tal caso la radiazione elettromagnetica ha una densità costante nella banda del visibile:

$$[\lambda_{min}, \lambda_{max}] = [350, 780] \text{ nm}; \quad [f_{min}, f_{max}] = [3.8, 8.6] 10^{14} \text{ Hz}. \quad (4.34)$$



Esempio 4.3 Un segnale di potenza di tipo passa-passo ha densità spettrale

$$\mathcal{P}_s = 2.5\Lambda\left(\frac{f}{10\alpha}\right). \quad (4.35)$$

Valutarne la frequenza massima e la potenza.

Soluzione: La frequenza massima del segnale è pari a 10α . La potenza è l'integrale della densità ed è pari a $\mathcal{P}_s = \frac{20\alpha \cdot 2.5}{2} = 25\alpha$.

Esempio 4.4 Un segnale passa-banda ideale nella banda $[-B_2, -B_1] \cup [B_1, B_2]$ ha densità spettrale pari a η_0 . Valutarne la potenza.

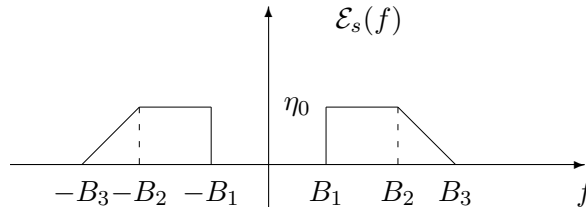
Soluzione: La potenza è semplicemente l'integrale sotteso dalla densità su tutto l'asse delle frequenze: $\mathcal{P}_s = 2(B_2 - B_1)\eta_0$.

Esempio 4.5 Un segnale di energia passa-banda ha il seguente spettro

$$\mathcal{E}_s(f) = \begin{cases} \eta_0 & f \in [-B_2, -B_1] \cup [B_1, B_2] \\ \frac{\eta_0}{B_3 - B_2}(B_3 - f) & f \in [B_2, B_3] \\ \frac{\eta_0}{B_3 - B_2}(B_3 + f) & f \in [-B_3, -B_2] \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases} \quad (4.36)$$

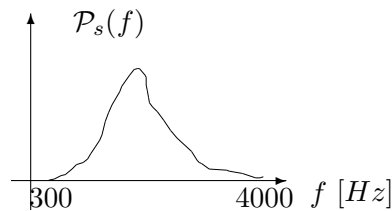
Valutare la energia del segnale.

Soluzione: La densità spettrale è mostrata nella seguente figura



L'energia è l'integrale su tutto l'asse delle frequenze ed è $\mathcal{E}_s = 2(B_2 - B_1)\eta_0 + (B_3 - B_2)\eta_0$.

Esempio 4.6 Segnale vocale. Indichiamo con *segnale vocale* il segnale proporzionale alle variazioni di pressione dell'aria nei pressi della bocca di un parlante. Il segnale vocale è estremamente complesso, in quanto trasporta informazioni di ogni genere, che vanno dal contenuto linguistico allo stato emozionale, all'identità del parlante e molte altre. Una quantificazione spettrale approssimativa fa quindi riferimento ad una media effettuata su molti diversi tipi di parlatori e in molte diverse condizioni di parlato. Lo spettro di potenza è localizzato nella parte dello spettro che va da circa 300 Hz a circa 4000 Hz. Ad esempio, lo standard telefonico prevede una banda da 300 a 3400 Hz. Non tutte le bande sono ugualmente presenti e le densità spettrali vocali presentano caratteristiche del tipo mostrata in figura con una maggiore enfasi alle medie frequenze.



Esempio 4.7 Segnale audio: Per segnale audio si intende un segnale udibile dal nostro sistema di percezione acustica. Il nostro orecchio è sensibile a segnali presenti nella banda che va da circa 20 Hz a 20 KHz. La densità spettrale di un segnale audio si presenta quindi come una funzione definita sulla banda specificata con caratteristiche che dipendono dalla sorgente che ha prodotto il segnale, sia esso uno strumento musicale, una orchestra, un evento naturale, un parlante, ecc.

Esempio 4.8 Segnale RF: Un segnale a radio frequenza (RF) relativo a un sistema di comunicazione, è generalmente un segnale passa-banda, che è una versione modulata del segnale originario in *banda base*. La banda di frequenze in cui il segnale può essere localizzato è limitata dalla esigenza della distribuzione dello spettro ai vari *canali* simultanei (multiplex di frequenza). La densità spettrale di un tale segnale si presenta quindi come una funzione definita sulla banda di interesse e con contenuto spettrale che dipende dalla modalità di modulazione e dal segnale modulante. Segnali modulati su portante sinusoidale saranno studiati nella parte seguente di queste note.

4.5 La funzione di autocorrelazione

La descrizione di un segnale in termini di ESD o PSD nel dominio della frequenza pone una interessante questione: se la informazione sul segnale nel dominio della frequenza è stata limitata alle caratteristiche di ampiezza, ignorando quindi quelle di fase, effettuando una media nel caso dei segnali di potenza, a cosa corrisponde una tale riduzione nel dominio del tempo? La risposta a tale quesito è fornita dalla definizione di funzione di autocorrelazione e dal teorema di Wiener-Khinchin.

4.5.1 La autocorrelazione per i segnali di energia

Definizione: Dato un segnale di energia $s(t)$, si definisce *funzione di autocorrelazione deterministica*⁵ l'espressione

$$r_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s^*(t - \tau)dt. \quad (4.37)$$

La funzione di autocorrelazione consiste nell'integrale del prodotto del segnale con la sua versione traslata (e coniugata) di τ , come mostrato in figura 4.2. La introduzione della funzione di autocorrelazione è giustificata dal seguente teorema fondamentale.

Proprietà 4.2 (T. di Wiener-Khinchin per i segnali di energia) Per un segnale di energia, la densità spettrale di energia è la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione

$$\mathcal{F}[r_s(\tau)] = \mathcal{E}_s(f). \quad (4.38)$$

Prova: Si noti innanzitutto che la autocorrelazione può essere espressa come la convoluzione

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)s^*(t - \tau)dt = s(\tau) * s^*(-\tau). \quad (4.39)$$

Poiché la trasformata di Fourier di $s^*(-\tau)$ è $S^*(f)$, abbiamo che

$$\mathcal{F}[r_s(\tau)] = S(f)S^*(f) = |S(f)|^2 = \mathcal{E}_s(f). \quad (4.40)$$

Quindi la funzione di autocorrelazione è la rappresentazione nel dominio del tempo della informazione contenuta nello spettro di energia del segnale. Essa

⁵Si parla di funzione di autocorrelazione deterministica per distinguerla da quella definita per i segnali aleatori che include anche l'operatore di media.

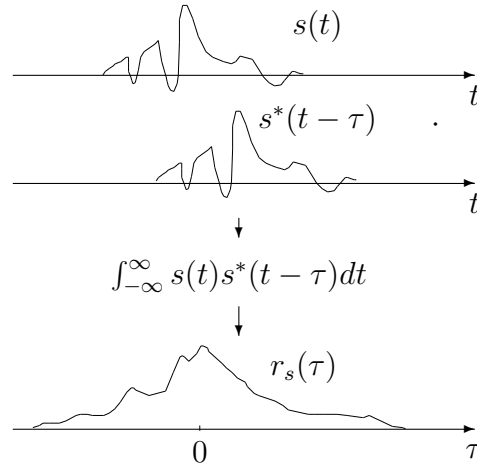


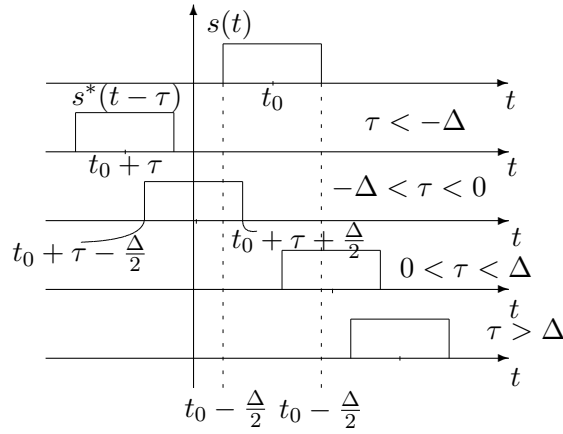
Figura 4.2: Un segnale di energia $s(t)$ e il calcolo della sua autocorrelazione.

contiene tutta la informazione sul segnale che non è collegata alle caratteristiche di fase e può essere calcolata sia come anti-trasformata dello spettro, che applicando direttamente la definizione nel dominio del tempo. Il calcolo dell'integrale nel dominio del tempo è in genere più insidioso, specialmente quando si ha a che fare con segnali discontinui. Pertanto è spesso opportuno utilizzare il metodo grafico in una modalità simile a quella utilizzata per il calcolo della convoluzione lineare. Vediamo alcuni esempi.

Esempio 4.9 Valutare graficamente la funzione di autocorrelazione di

$$s(t) = \Pi\left(\frac{t - t_0}{\Delta}\right). \quad (4.41)$$

Soluzione: La figura mostra le versioni traslate di $s^*(t)$ (qui la funzione è reale e quindi la coniugazione è inutile).



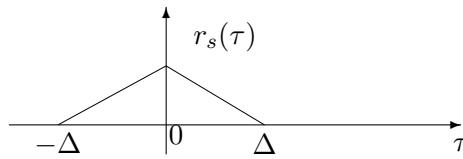
Pertanto

$$\begin{aligned}
 &\text{per } \tau < -\Delta, & r_s(\tau) &= 0; \\
 &\text{per } -\Delta < \tau < 0, & r_s(\tau) &= \int_{t_0 - \frac{\Delta}{2}}^{t_0 + \tau + \frac{\Delta}{2}} dt = \tau + \Delta; \\
 &\text{per } 0 < \tau < \Delta, & r_s(\tau) &= \int_{t_0 + \tau - \frac{\Delta}{2}}^{t_0 + \frac{\Delta}{2}} dt = -\tau + \Delta; \\
 &\text{per } \tau > \Delta, & r_s(\tau) &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

Il risultato è infatti

$$r_s(\tau) = \Delta \Lambda\left(\frac{\tau}{\Delta}\right), \tag{4.43}$$

mostrato in figura.

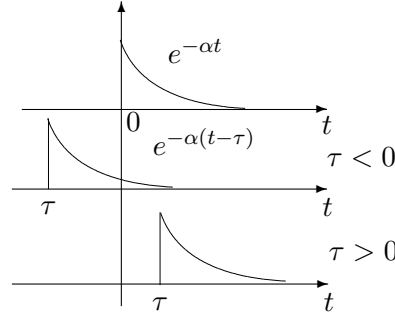


E' ovviamente lo stesso risultato che avremmo ottenuto antitrasformando lo spettro di energia. Si noti che la durata della autocorrelazione 2Δ è doppia rispetto alla durata Δ del segnale.

Esempio 4.10 Valutare graficamente la autocorrelazione del segnale di energia

$$s(t) = e^{-\alpha t} u(t). \tag{4.44}$$

Soluzione: La figura mostra le versioni traslate di $s(t)$ per $\tau < 0$ e per $\tau > 0$.



$$\begin{aligned} \text{per } \tau < 0, \quad r_s(\tau) &= \int_0^{\infty} e^{-\alpha(t-\tau)} e^{-\alpha t} dt = e^{\alpha\tau} \left. \frac{e^{-2\alpha t}}{-2\alpha} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{2\alpha} e^{\alpha\tau}; \\ \text{per } \tau > 0, \quad r_s(\tau) &= \int_{\tau}^{\infty} e^{-\alpha(t-\tau)} e^{-\alpha t} dt = e^{\alpha\tau} \left. \frac{e^{-2\alpha t}}{-2\alpha} \right|_{\tau}^{\infty} = \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha\tau}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

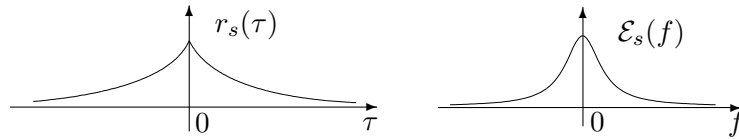
La autocorrelazione, espressa in forma compatta è

$$r_s(\tau) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha|\tau|}. \quad (4.46)$$

Trasformando $r_s(\tau)$, oppure trasformando $s(t)$ e eseguendo il modulo quadro, si ha lo spettro di energia

$$\mathcal{E}_s(f) = \frac{1}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}. \quad (4.47)$$

Autocorrelazione e spettro di energia sono mostrati in figura



4.5.2 La autocorrelazione per i segnali di potenza

I segnali di potenza sono segnali a estensione illimitata. Pertanto la definizione si basa su una media temporale.

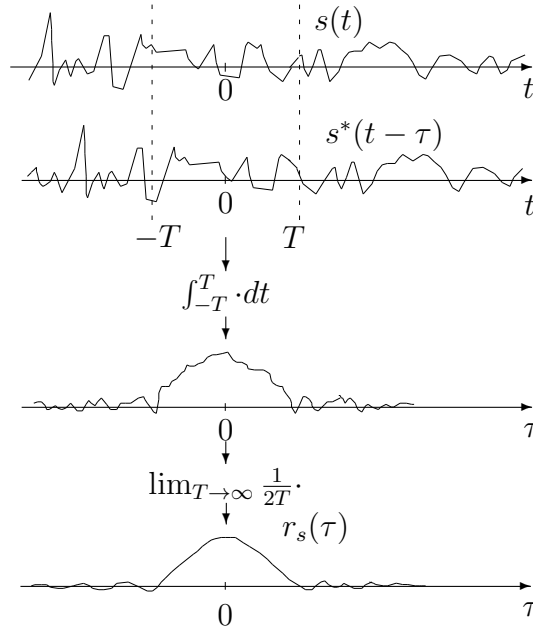


Figura 4.3: Un segnale di potenza $s(t)$ e il calcolo della sua autocorrelazione.

Definizione: Dato un segnale di potenza $s(t)$, si definisce *funzione di autocorrelazione deterministica*⁶ l'espressione

$$r_s(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T s(t)s^*(t-\tau)dt. \quad (4.48)$$

Figura 4.3 mostra graficamente la definizione. Il legame diretto con la densità spettrale di potenza è sancito dal seguente importante teorema.

Proprietà 4.3 (T. di Wiener-Khinchin per i segnali di potenza) Per un segnale di potenza, la densità spettrale di potenza è la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione

$$\mathcal{F}[r_s(\tau)] = \mathcal{P}_s(f). \quad (4.49)$$

⁶Anche qui si parla di funzione di autocorrelazione deterministica per distinguerla da quella che sarà introdotta a proposito dei processi aleatori.

Prima di fornire la prova di questo importante risultato, è opportuno puntualizzare che esso è basato sulla definizione di spettro di potenza più generale (4.12) data per i segnali deterministici. La definizione di autocorrelazione non presenta le difficoltà formali della definizione di spettro di potenza e il teorema di Wiener-Khinchin ci fornisce una relazione semplice tra le due funzioni. Pertanto nella letteratura molto spesso lo spettro di potenza è definito direttamente come trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione. E' opportuno riconoscere che, anche se faremo ancora riferimento a tale risultato come teorema di Wiener-Khinchin, tale risultato riferito alla definizione generale (4.12) è abbastanza recente ed è dovuto prevalentemente ai lavori di Gardner (1987).

Prova: Valutiamo innanzitutto una espressione per il periodogramma tempo-variante

$$\begin{aligned} |S_T(f; t_0)|^2 &= S_T(f; t_0) S_T^*(f; t_0) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s_T(\xi; t_0) e^{-j2\pi f \xi} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} s_T^*(\eta; t_0) e^{j2\pi f \eta} d\eta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s_T(\xi; t_0) s_T^*(\eta; t_0) e^{-j2\pi f(\xi - \eta)} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Operando il cambio di variabili $t = \xi$, $\tau = \xi - \eta$, abbiamo

$$\begin{aligned} |S_T(f; t_0)|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f \tau} \int_{-\infty}^{\infty} s_T(t; t_0) s_T^*(t - \tau; t_0) dt d\tau \\ &= \mathcal{F} \left[\int_{-\infty}^{\infty} s_T(t; t_0) s_T^*(t - \tau; t_0) dt \right] \\ &= \mathcal{F} \left[\int_{t_0 - T}^{t_0 + T} s_T(t; t_0) s_T^*(t - \tau; t_0) dt \right] \end{aligned} \quad (4.51)$$

Bisogna ora calcolare la media temporale rispetto a t_0 dell'argomento della trasformata di Fourier.

$$\begin{aligned} &\lim_{U \rightarrow \infty} \frac{1}{2U} \int_{-U}^U \int_{t_0 - T}^{t_0 + T} s_T(t; t_0) s_T^*(t - \tau; t_0) dt dt_0 \\ &= \lim_{U \rightarrow \infty} \frac{1}{2U} \int_{-U}^U \int_{t_0 - T}^{t_0 + T} s(t) \Pi \left(\frac{t - t_0}{2T} \right) s^*(t - \tau) \Pi \left(\frac{t - t_0 - \tau}{2T} \right) dt dt_0. \end{aligned}$$

Dopo il cambio di variabili $\alpha = t - t_0$,

$$\begin{aligned} &\lim_{U \rightarrow \infty} \frac{1}{2U} \int_{-U}^U \int_{-T}^T s(\alpha + t_0) \Pi \left(\frac{\alpha}{2T} \right) s^*(\alpha + t_0 - \tau) \Pi \left(\frac{\alpha - \tau}{2T} \right) d\alpha dt_0 \\ &= \int_{-T}^T \Pi \left(\frac{\alpha}{2T} \right) \Pi \left(\frac{\alpha - \tau}{2T} \right) \left(\lim_{U \rightarrow \infty} \frac{1}{2U} \int_{-U}^U s(\alpha + t_0) s^*(\alpha + t_0 - \tau) dt_0 \right) d\alpha. \end{aligned}$$

Per ogni α finito, ponendo $\beta = \alpha + t_0$,

$$\begin{aligned} \lim_{U \rightarrow \infty} \frac{1}{2U} \int_{-U}^U s(\alpha + t_0) s^*(\alpha + t_0 - \tau) dt_0 &= \lim_{U \rightarrow \infty} \frac{1}{2U} \int_{\alpha-U}^{\alpha+U} s(\beta) s^*(\beta - \tau) d\beta \\ &= \lim_{U \rightarrow \infty} \frac{1}{2U} \int_{-U}^U s(\beta) s^*(\beta - \tau) d\beta = r_s(\tau). \end{aligned} \quad (4.52)$$

Quindi

$$\begin{aligned} \lim_{U \rightarrow \infty} \frac{1}{2U} \int_{-U}^U \int_{t_0-T}^{t_0+T} s_T(t; t_0) s_T^*(t - \tau; t_0) dt dt_0 &= r_s(\tau) \int_{-T}^T \Pi\left(\frac{\alpha}{2T}\right) \Pi\left(\frac{\alpha - \tau}{2T}\right) d\alpha \\ &= r_s(\tau) 2T \Lambda\left(\frac{\tau}{2T}\right). \end{aligned} \quad (4.53)$$

Dividendo questa ultima espressione per $2T$ e andando al limite per $T \rightarrow \infty$ si ottiene che

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{U \rightarrow \infty} \frac{1}{2U} \int_{-U}^U \frac{|S_T(f; t_0)|^2}{2T} dt_0 = \mathcal{F}[r_s(\tau)]. \quad (4.54)$$

Esempio 4.11 Si valuti la autocorrelazione del segnale bianco.

Soluzione: Un segnale di energia, o di potenza, bianco ha una densità spettrale costante

$$\mathcal{E}_s(f) = \gamma_0, \quad \text{oppure} \quad \mathcal{P}_s(f) = \eta_0. \quad (4.55)$$

Antitrasformando, la funzione di autocorrelazione è un impulso di Dirac

$$r_s(\tau) = \gamma_0 \delta(\tau); \quad r_s(\tau) = \eta_0 \delta(\tau). \quad (4.56)$$

Esempio 4.12 Si valuti la funzione di autocorrelazione del segnale di potenza passa-basso ideale

$$\mathcal{P}_s(f) = \Pi\left(\frac{f}{2B}\right). \quad (4.57)$$

Soluzione: La funzione di autocorrelazione è immediatamente

$$r_s(\tau) = \mathcal{F}^{-1} \left[\Pi\left(\frac{f}{2B}\right) \right] = 2B \operatorname{sinc} 2B\tau. \quad (4.58)$$

Esempio 4.13 Si valuti la funzione di autocorrelazione dell'impulso rettangolare

$$s(t) = \alpha \Pi\left(\frac{t - t_0}{T}\right). \quad (4.59)$$

Soluzione: Trattasi di un segnale di energia la cui densità spettrale è già stata valutata essere

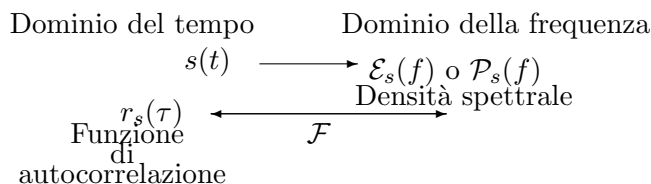
$$\mathcal{E}_s(f) = \alpha^2 T^2 \operatorname{sinc}^2 T f. \quad (4.60)$$

Dal teorema di Wiener-Kintchin la autocorrelazione è

$$r_s(\tau) = \mathcal{F}^{-1} \left[\alpha^2 T^2 \operatorname{sinc}^2 T f \right] = \alpha^2 T \Lambda\left(\frac{\tau}{T}\right). \quad (4.61)$$

$$\mathcal{P}_s(f) = \alpha \Pi\left(\frac{f - f_0}{\Delta f}\right) + \alpha \Pi\left(\frac{f + f_0}{\Delta f}\right). \quad (4.62)$$
$$\begin{aligned} r_s(\tau) &= \alpha \Delta f \operatorname{sinc} \Delta f \tau \left(e^{j2\pi f_0 \tau} + e^{-j2\pi f_0 \tau} \right) \\ &= 2\alpha \Delta f \operatorname{sinc} \Delta f \tau \cos 2\pi f_0 \tau. \end{aligned} \quad (4.63)$$

La figura seguente mostra schematicamente come dalla descrizione di un segnale nel dominio del tempo si ottenga, in maniera non necessariamente reversibile, la densità spettrale di energia o di potenza. Se la densità spettrale viene antitraformata, nel dominio del tempo si ottiene (in maniera reversibile) la funzione di autocorrelazione.



Proprietà 4.4 Per un segnale di energia $s(t)$

$$r_s(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s^*(t)dt = \mathcal{E}_s. \quad (4.64)$$

Prova: Banale conseguenza della definizione.

Proprietà 4.5 Per un segnale di potenza $s(t)$

$$r_s(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T s(t) s^*(t) dt = \mathcal{P}_s. \quad (4.65)$$

Ovvero, il valore nell'origine della funzione di autocorrelazione rappresenta proprio la potenza.

Prova: Banale conseguenza della definizione.

Proprietà 4.6 La autocorrelazione di un segnale di potenza è il limite del *correlogramma*, ovvero

$$r_s(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} r_{s_T}(\tau), \quad (4.66)$$

dove il correlogramma è definito come la autocorrelazione del segnale troncato a $[-T, T]$

$$\frac{1}{2T} r_{s_T}(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T s_T(t) s_T^*(t - \tau) dt. \quad (4.67)$$

Il limite del correlogramma può anche essere usato come definizione della funzione di autocorrelazione per i segnali di potenza.

Prova: Il correlogramma differisce per una quantità finita dall'integrale $\int_{-T}^T s(t) s^*(t - \tau) dt$. Tale quantità diventa un infinitesimo al crescere di T . Infatti il correlogramma può essere scritto come

$$\begin{aligned} \frac{1}{2T} r_{s_T}(\tau) &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T s_T(t) s_T^*(t - \tau) dt \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T s(t) \Pi\left(\frac{t}{2T}\right) s^*(t - \tau) \Pi\left(\frac{t - \tau}{2T}\right) dt \\ &= \frac{1}{2T} \begin{cases} \int_{-T+\tau}^T s(t) s^*(t - \tau) dt & \tau > 0 \\ \int_{-T}^{T+\tau} s(t) s^*(t - \tau) dt & \tau < 0 \end{cases} \\ &= \frac{1}{2T} \begin{cases} \int_{-T}^T s(t) s^*(t - \tau) dt - \int_{-T}^{-T+\tau} s(t) s^*(t - \tau) dt & \tau > 0 \\ \int_{-T}^T s(t) s^*(t - \tau) dt - \int_{T+\tau}^T s(t) s^*(t - \tau) dt & \tau < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.68)$$

Al tendere di $T \rightarrow \infty$ il correlogramma tende alla funzione di autocorrelazione, poichè la differenza diventa un infinitesimo.

Proprietà 4.7 La funzione di autocorrelazione ha il suo massimo in zero

$$|r_s(\tau)| \leq |r_s(0)| \quad \forall \tau. \quad (4.69)$$

La relazione vale per entrambi i segnali di energia e di potenza.

Prova: Per i segnali di energia, basta usare la disuguaglianza di Schwartz⁷

$$\begin{aligned} r_s(\tau) &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s^*(t-\tau)dt \right| \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} |s(t-\tau)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = r_s(0). \end{aligned} \quad (4.71)$$

Nella uguaglianza si è usato il fatto che una traslazione non modifica l'energia di un segnale. Per i segnali di potenza, basta osservare che il correlogramma è la autocorrelazione del segnale di energia $s_T(t)$. Quindi si ha che

$$|r_{s_T}(\tau)| \leq r_{s_T}(0), \quad \forall \tau \neq 0. \quad (4.72)$$

La proprietà segue andando al limite per $T \rightarrow \infty$ ad ambo i membri.

Proprietà 4.8 La autocorrelazione è una funzione Hermitiana

$$r_s(\tau) = r_s^*(-\tau). \quad (4.73)$$

Quindi la autocorrelazione dei segnali reali è una funzione pari $r_s(\tau) = r_s(-\tau)$.

Prova: Per i segnali di energia, dalla definizione

$$\begin{aligned} r_s(-\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s^*(t+\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(\eta-\tau)s^*(\eta)d\eta \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} s(\eta)s^*(\eta-\tau)d\eta \right)^* = r_s^*(\tau). \end{aligned} \quad (4.74)$$

Per i segnali di potenza, basta applicare il risultato al correlogramma di $s(t)$ che sarà appunto hermitiano. Andando al limite la proprietà è dimostrata.

4.7 Densità spettrale dei segnali periodici

I segnali periodici costituiscono una classe importante di segnali di potenza. L'esempio della funzione coseno ci fa pensare che forse è possibile ricavare un risultato semplice che mostri come per un qualunque segnale periodico lo spettro di

⁷**Disuguaglianza di Schwartz:** Date due funzioni a quadrato integrabile $x(t)$ e $y(t)$, vale la seguente relazione

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt. \quad (4.70)$$

Il segno di uguaglianza vale se e solo se $x(t)$ e $y(t)$ sono proporzionali, ovvero se esiste una costante reale k tale che $x(t) = ky(t)$.

potenza sia una funzione a righe. E' inoltre possibile mostrare come sia sufficiente conoscere la trasformata di Fourier del segnale di energia di cui il segnale periodico è estensione, per calcolarne la densità spettrale.

Ricordiamo come un segnale di periodo T_0 sia esprimibile come la estensione periodica di un segnale $i(t)$, tempo-limitato a un periodo

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} i(t - kT_0), \quad (4.75)$$

o mediante la serie di Fourier esponenziale

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi \frac{k}{T_0} t}; \quad c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} i(t) e^{-j2\pi \frac{k}{T_0} t} dt. \quad (4.76)$$

Per ottenere lo spettro di potenza valutiamo la funzione di autocorrelazione

$$\begin{aligned} r_s(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T s(t) s^*(t - \tau) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} c_{k_1} e^{j2\pi \frac{k_1}{T_0} t} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} c_{k_2}^* e^{-j2\pi \frac{k_2}{T_0} (t - \tau)} dt \\ &= \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} c_{k_1} c_{k_2}^* e^{j2\pi \frac{k_2}{T_0} \tau} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{j2\pi \frac{(k_1 - k_2)}{T_0} t} dt. \end{aligned} \quad (4.77)$$

L'ultimo limite nella espressione è per $k_1 \neq k_2$

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{j2\pi \frac{(k_1 - k_2)}{T_0} t} dt &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \frac{e^{j2\pi \frac{(k_1 - k_2)}{T_0} T} - e^{-j2\pi \frac{(k_1 - k_2)}{T_0} T}}{j2\pi \frac{(k_1 - k_2)}{T_0}} \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \frac{\sin(2\pi \frac{(k_1 - k_2)}{T_0} T)}{\pi \frac{(k_1 - k_2)}{T_0}} &= 0. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Per $k_1 = k_2$ invece

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{j2\pi \frac{(k_1 - k_2)}{T_0} t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt = 1. \quad (4.79)$$

La autocorrelazione diventa

$$r_s(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 e^{j2\pi \frac{k}{T_0} \tau}. \quad (4.80)$$

Quindi la autocorrelazione è periodica con periodo pari a T_0 e con coefficienti di Fourier pari a $|c_k|^2$. Ricordiamo dal Capitolo 2 che i coefficienti di Fourier di un segnale periodico sono campioni della trasformata di Fourier di $i(t)$, ovvero

$$c_k = \frac{1}{T_0} I(f)|_{f=k/T_0}. \quad (4.81)$$

Pertanto la autocorrelazione si può scrivere come

$$r_s(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0^2} \left| I\left(\frac{k}{T_0}\right) \right|^2 e^{j2\pi \frac{k}{T_0} \tau}. \quad (4.82)$$

Lo spettro di potenza è

$$\mathcal{P}_s(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0^2} \left| I\left(\frac{k}{T_0}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right) \quad (4.83)$$

$$= \frac{1}{T_0^2} |I(f)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right). \quad (4.84)$$

Si tratta di uno spettro a righe. Le aree sottese dalle delta di Dirac sono campioni della trasformata di $i(t)$. Antitrasformando equazione (4.84) si ottengono altre espressioni equivalenti per la funzione di autocorrelazione

$$\begin{aligned} r_s(\tau) &= \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{T_0} |I(f)|^2 \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right) \right] \\ &= \frac{1}{T_0} r_i(\tau) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - kT_0) \\ &= \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_i(\tau - kT_0), \end{aligned} \quad (4.85)$$

dove $r_i(\tau)$ è la autocorrelazione del segnale di energia $i(t)$. Quindi la autocorrelazione di un segnale periodico è una funzione periodica e si ottiene come estensione periodica della autocorrelazione del segnale base.

Come diretta conseguenza dei risultati trovati, il calcolo della potenza di un segnale periodico può essere eseguito in maniera equivalente come

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_s &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_s(f) df = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0^2} \left| I\left(\frac{k}{T_0}\right) \right|^2 \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} |I(f)|^2 df = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} |i(t)|^2 dt. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Uno spettro di potenza a righe si ottiene anche per segnali che non sono necessariamente periodici, ma che contengono componenti sinusoidali a frequenze non necessariamente multiple di una fondamentale

$$S(f) = \sum_n \beta_n \delta(f - f_n), \quad (4.87)$$

con f_n e β_n rispettivamente frequenze e coefficienti complessi arbitrari. Tali segnali sono detti *quasi periodici*. Il calcolo dello spettro di potenza si esegue

in maniera del tutto analoga al caso dei segnali periodici e fornisce ancora una espressione del tipo

$$\mathcal{P}_s(f) = \sum_n |\beta_n|^2 \delta(f - f_n). \quad (4.88)$$

La autocorrelazione, quindi non necessariamente periodica, è

$$r_s(\tau) = \sum_n |\beta_n|^2 e^{j2\pi f_n \tau}. \quad (4.89)$$

La dimostrazione di tale estensione è suggerita nei problemi.

4.8 Unità di misura

Abbiamo già fatto notare nel primo capitolo come le unità di misura di energia e potenza dipendano dalla quantità fisica che rappresenta il segnale in oggetto (V , A , Pa , $V \cdot m$, VA ,...). Riportiamo qui di seguito un quadro riassuntivo per le funzioni definite in questo capitolo, assumendo che la unità di misura del segnale $s(t)$ sia una U generica. Con il simbolo $[x]$ si è denotata la unità di misura di x .

$$\begin{aligned} [s(t)] &= U; \\ [|S(f)|] &= U/Hz = U \cdot sec; \\ [\angle S(f)] &= rad; \\ [Re[S(f)]] &= U/Hz = U \cdot sec; \\ [Im[S(f)]] &= U/Hz = U \cdot sec; \\ [\mathcal{E}_s] &= U^2 sec; \\ [\mathcal{E}_s(f)] = [\gamma_s(f)] &= U^2 sec/Hz = U^2 sec^2; \\ [\mathcal{E}_s^{RMS}] &= U \cdot sec^{\frac{1}{2}}; \\ [\mathcal{E}_s^{RMS}(f)] = [\gamma_s^{RMS}(f)] &= U \cdot sec; \\ [\mathcal{P}_s] &= U^2; \\ [\mathcal{P}_s(f)] = [\eta_s(f)] &= U^2/Hz = U^2 sec; \\ [\mathcal{P}_s^{RMS}] &= U; \\ [\mathcal{P}_s^{RMS}(f)] = [\eta_s^{RMS}(f)] &= U \cdot sec^{\frac{1}{2}}; \\ [r_s(\tau)] &= U^2 \cdot sec \quad (\text{per segnali di energia}); \\ [r_s(\tau)] &= U^2 \quad (\text{per segnali di potenza}); \end{aligned} \quad (4.90)$$

La notevole variazione che le quantità misurate o calcolate possono manifestare, nella pratica ingegneristica dello studio dei sistemi di telecomunicazioni,

spesso suggerisce di normalizzare e usare delle scale logaritmiche. Pertanto energie, potenze e densità possono essere normalizzate a dei valori di riferimento ed essere riportate in decibel. Per esempio, gli spettri di densità di energia e potenza possono essere riportati come

$$\mathcal{E}_s(f)_{dB} = 10 \log_{10} \frac{\mathcal{E}_s(f)}{\mathcal{E}_0} = 20 \log_{10} \frac{\mathcal{E}_s^{RMS}(f)}{\mathcal{E}_0^{RMS}}. \quad (4.91)$$

$$\mathcal{P}_s(f)_{dB} = 10 \log_{10} \frac{\mathcal{P}_s(f)}{\mathcal{P}_0} = 20 \log_{10} \frac{\mathcal{P}_s^{RMS}(f)}{\mathcal{P}_0^{RMS}}. \quad (4.92)$$

Il valore di riferimento \mathcal{E}_0 o \mathcal{P}_0 può essere scelto essere una frazione dell'unità di misura di $s(t)$, come ad esempio μV , mPa , mW , ecc., in qual caso, se non è implicito dal contesto, la si indica a fianco del dB come $dB\mu V$, $dBmPa$, $dBmW$, ecc. Altre scelte, che dipendono dal segnale, per il valore di normalizzazione possono essere per i segnali di energia: $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_s(0)$, oppure $\mathcal{E}_0 = \max_f \mathcal{E}_s(f)$; per i segnali di potenza: $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_s(0)$, oppure $\mathcal{P}_0 = \max_f \mathcal{P}_s(f)$, o altro.

Esempio 4.15 Si valuti lo spettro di densità di energia in dB del segnale di tensione

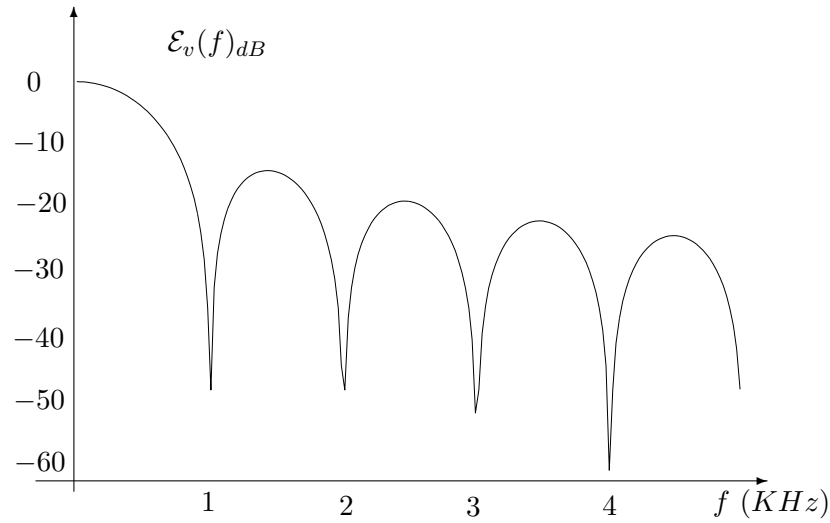
$$v(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \quad V, \quad T = 1 \text{ msec}. \quad (4.93)$$

Soluzione: La trasformata di $v(t)$ è $V(f) = T \operatorname{sinc} Tf$. La densità spettrale è

$$\mathcal{E}_v(f) = T^2 \operatorname{sinc}^2 Tf \quad V^2 \text{ sec}^2. \quad (4.94)$$

Assumendo come valore di riferimento $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_v(0) = T^2$, abbiamo:

$$\mathcal{E}_v(f)_{dB} = 10 \log_{10} \frac{T^2 \operatorname{sinc}^2 Tf}{T^2} = 20 \log_{10} |\operatorname{sinc} Tf|. \quad (4.95)$$



La figura mostra l'andamento della densità spettrale in decibel. Si noti come il comportamento ai lobi laterali sia meglio visibile che nella scala lineare. I valori ottenuti in dB sono tutti negativi poichè riferiti al valore massimo in $f = 0$ (punto a 0 dB). Agli zeri della funzione sinc corrisponderebbero nella scala in dB valori pari a $-\infty$. La risoluzione finita del grafico mostra solo valori finiti nell'intorno di tali zeri.

4.9 Mutua correlazione e spettri mutui

Nella manipolazione dei segnali per le applicazioni, è necessario equipaggiarsi degli strumenti analitici che consentono la analisi e la sintesi di più segnali simultaneamente. Ad esempio, un segnale contaminato da rumore additivo è la somma di un segnale utile e di un segnale di rumore. In tale scenario bisogna saper caratterizzare: il peso relativo di ogni componente in termini di potenza, le proprietà della somma e le proprietà mutue. A tal fine è necessario introdurre i concetti di mutua correlazione e di spettro mutuo. Le definizioni e i teoremi sono gli analoghi (in effetti sono la generalizzazione) di quelli relativi alla autocorrelazione e agli spettri di energia e di potenza.

Definizione: Dati due segnali di energia $x(t)$ e $y(t)$ si definisce *mutua correlazione* deterministica l'espressione

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t - \tau)dt. \quad (4.96)$$

Si tratta dell'integrale del prodotto tra $x(t)$ e la versione coniugata e traslata di $y(t)$. Per ogni valore della traslazione τ si esegue l'integrale. La definizione suggerisce il semplice metodo grafico mostrato nel seguente esempio.

Esempio 4.16 Si valuti la mutua correlazione tra i due segnali di energia

$$x(t) = \Pi\left(\frac{t}{2}\right); \quad y(t) = 2\Pi\left(\frac{t-5}{2}\right). \quad (4.97)$$

Soluzione: Usiamo il metodo grafico. Con l'aiuto di Figura 4.4 abbiamo che:

per $6 + \tau < -1$, ovvero per $\tau < -7$, $r_{xy}(\tau) = 0$;

per $-1 < 6 + \tau < 1$, ovvero per $-7 < \tau < -5$, integrando solo sulla parte che si sovrappone si ottiene $r_{xy}(\tau) = \int_{-1}^{6+\tau} 2dt = 2(7 + \tau)$;

per $-1 < 4 + \tau < 1$, ovvero per $-5 < \tau < -3$, integrando solo sulla parte che si sovrappone si ottiene $r_{xy}(\tau) = \int_{4+\tau}^1 2dt = 2(-3 - \tau)$;

per $4 + \tau > 1$, ovvero per $\tau > -3$, $r_{xy}(\tau) = 0$;

La figura 4.4 mostra la mutua correlazione risultante. Si noti che la massima correlazione si ha quando il secondo segnale è traslato rispetto al primo di $\tau = -5$.

Per i segnali di potenza esistono definizioni e risultati analoghi a quelli presentati per la autocorrelazione.

Definizione: Dati due segnali di potenza $x(t)$ e $y(t)$ si definisce funzione di *mutua correlazione* deterministica l'espressione

$$r_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)y^*(t - \tau)dt. \quad (4.98)$$

Proprietà 4.9 La mutua correlazione per due segnali di potenza è il limite del *correlogramma*

$$r_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} r_{x_T y_T}(\tau), \quad (4.99)$$

dove il correlogramma è definito come la mutua correlazione dei segnali troncati all'intervallo $[-T, T]$

$$\frac{1}{2T} r_{x_T y_T}(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_T(t)y_T^*(t - \tau)dt. \quad (4.100)$$

Prova: Segue la stessa tecnica della prova relativa alla autocorrelazione. Omessa per brevità e suggerita nei problemi.

L'ordine nel pedice della definizione di mutua correlazione è importante in quanto vale la seguente proprietà.

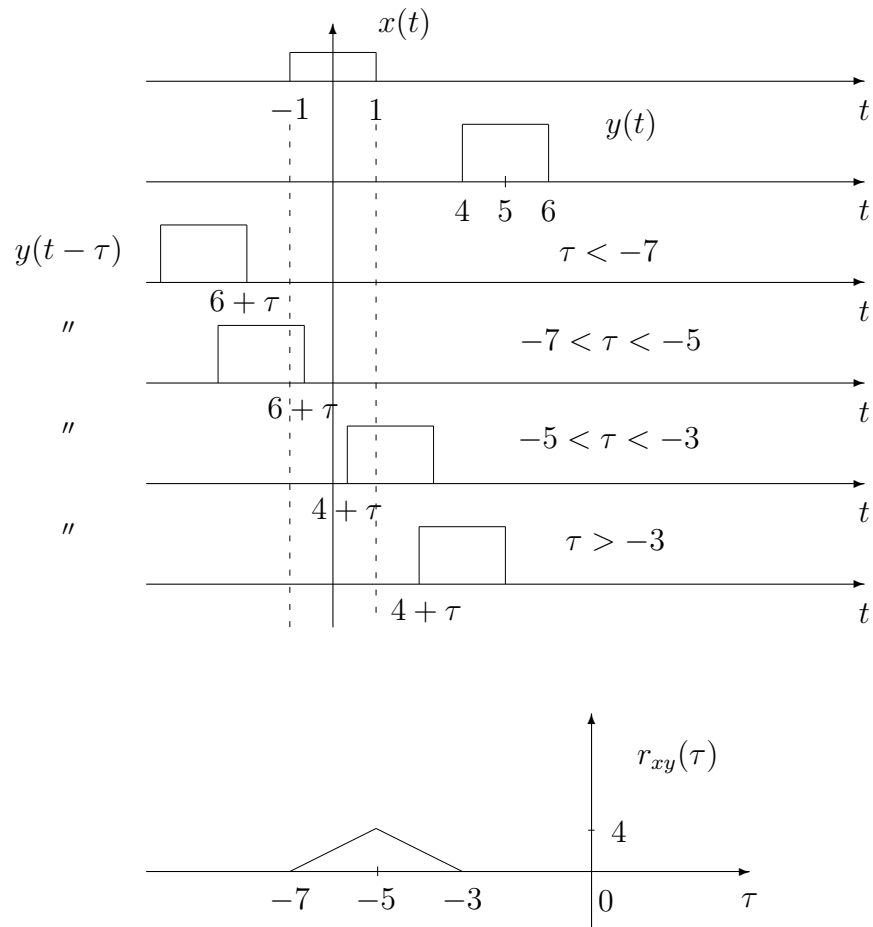


Figura 4.4: Il calcolo grafico della mutua correlazione dell'esempio 4.16

Proprietà 4.10 La mutua correlazione soddisfa la seguente relazione

$$r_{yx}(\tau) = r_{xy}^*(-\tau). \quad (4.101)$$

La stessa relazione vale sia per i segnali di energia che di potenza. Si noti come questa proprietà generalizzi la caratteristica della autocorrelazione di essere hermitiana.

Prova: Per i segnali di energia, dalla definizione abbiamo

$$\begin{aligned} r_{yx}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t)x^*(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\eta)y(\eta+\tau)d\eta \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\eta)y^*(\eta+\tau)d\eta \right)^* = r_{xy}^*(-\tau). \end{aligned} \quad (4.102)$$

Per i segnali di potenza basta osservare che per il correlogramma

$$r_{yTyT}(\tau) = r_{xTyT}^*(-\tau). \quad (4.103)$$

Andando al limite la proprietà è dimostrata.

Analogamente al caso dei segnali di energia, per il calcolo della mutua correlazione tra segnali di potenza è possibile usare un metodo grafico. La strada è determinare prima $\int_{-T}^T x(t)y^*(t-\tau)$ per ottenere $r_{xy}(\tau)$ e poi andare al limite per $T \rightarrow \infty$. Se conveniente, dal punto di vista del calcolo, è equivalente calcolare prima il correlogramma e poi andare al limite. Alcuni esempi sono mostrati negli esercizi.

Definizione: Dati due segnali di energia $x(t)$ e $y(t)$, si definisce *spettro mutuo di energia*, o *densità spettrale mutua di energia*

$$\mathcal{E}_{xy}(f) = X(f)Y^*(f). \quad (4.104)$$

Definizione: Dati due segnali di potenza $x(t)$ e $y(t)$, si definisce *spettro mutuo di potenza*, o *densità spettrale mutua di potenza*

$$\mathcal{P}_{xy}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{U \rightarrow \infty} \frac{1}{2U} \int_{-U}^U \frac{1}{2T} X_T(f; t_0) Y_T^*(f; t_0) dt_0, \quad (4.105)$$

dove $X_T(f; t_0)$ e $Y_T(f; t_0)$ sono le trasformate di Fourier tempo-varianti dei segnali $x(t)$ e $y(t)$ troncati all'intervallo $[t_0 - T, t_0 + T]$.

Anche per la mutua correlazione vale il teorema di Wiener-Khinchin, sia per i segnali di energia che per quelli di potenza.

Proprietà 4.11 (T. di Wiener-Kinchin) Lo spettro mutuo di energia è la trasformata di Fourier della mutua correlazione

$$\mathcal{F}[r_{xy}(\tau)] = \mathcal{E}_{xy}(f). \quad (4.106)$$

Prova: Suggerita nei problemi. Facilmente ottenibile dalla definizione, come per lo stesso teorema applicato alla funzione di autocorrelazione.

Proprietà 4.12 (T. di Wiener-Kinchin) Lo spettro mutuo di potenza è la trasformata di Fourier della mutua correlazione

$$\mathcal{F}[r_{xy}(\tau)] = \mathcal{P}_{xy}(f). \quad (4.107)$$

Prova: Suggerita nei problemi. Ottenibile dalla definizione, come per lo stesso teorema applicato alla funzione di autocorrelazione (nei problemi).

Nota: Anche se è possibile definire una funzione di mutua correlazione tra un segnale di energia e uno di potenza (ci sarebbero vari modi per farlo), tale definizione non sarebbe molto utile dal punto di vista delle applicazioni, almeno per un lettore che si è appena avvicinato alla materia.

4.9.1 Notazione compatta

Le proprietà sulla mutua correlazione generalizzano i risultati relativi alla autocorrelazione. E' utile notare come la correlazione possa essere anche scritta mediante la seguente notazione compatta di media temporale

$$r_{xy}(\tau) = \langle x(t)y^*(t-\tau) \rangle, \quad (4.108)$$

dove con la notazione

$$\langle \cdot \rangle \quad \text{si intende} \quad \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \cdot dt & \text{per i segnali di energia} \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \cdot dt & \text{per i segnali di potenza.} \end{cases} \quad (4.109)$$

Se ad ogni segnale si associa un elemento di uno spazio vettoriale, alla media temporale si può attribuire il significato formale di prodotto scalare. In tal caso la manipolazione dei segnali può seguire un approccio geometrico. Tali generalizzazioni sono rimandate a ulteriori approfondimenti.

4.9.2 Decorrelazione e incoerenza

Definizione: Dati due segnali $x(t)$ e $y(t)$, si dice che essi sono *scorrelati*, o *ortogonali*, se

$$r_{xy}(0) = 0. \quad (4.110)$$

Definizione: Dati due segnali $x(t)$ e $y(t)$, si dice essi sono *incoerenti* se

$$r_{xy}(\tau) = 0, \quad \forall \tau. \quad (4.111)$$

La incoerenza è chiaramente una condizione più forte, che implica l'ortogonalità. L'incoerenza significa che qualunque sia la posizione temporale mutua dei due segnali essi restano ortogonali. Il concetto di decorrelazione e di incoerenza, sono il corrispettivo deterministico delle condizioni di indipendenza statistica (vedi capitolo successivo).

Proprietà 4.13 La autocorrelazione della somma di due segnali è data dalla espressione

$$r_{x+y}(\tau) = r_x(\tau) + r_y(\tau) + r_{xy}(\tau) + r_{yx}(\tau). \quad (4.112)$$

La proprietà vale sia per segnali di energia che di potenza.

Prova: Basta applicare la definizione. Usiamo la notazione compatta per dimostrare la proprietà sia per funzioni di energia che di potenza.

$$\begin{aligned} r_{x+y}(\tau) &= \langle (x(t) + y(t))(x(t-\tau) + y(t-\tau))^* \rangle = \langle x(t)x^*(t-\tau) \rangle \\ &\quad + \langle y(t)y^*(t-\tau) \rangle + \langle x(t)y^*(t-\tau) \rangle + \langle y(t)x^*(t-\tau) \rangle \\ &= r_x(\tau) + r_y(\tau) + r_{xy}(\tau) + r_{yx}(\tau). \end{aligned} \quad (4.113)$$

Un immediato corollario è che se $x(t)$ e $y(t)$ sono ortogonali, $r_{xy}(0) = r_{yx}(0) = 0$ e quindi

$$r_{x+y}(0) = r_x(0) + r_y(0). \quad (4.114)$$

Ovvero, per segnali di energia e di potenza, rispettivamente, la energia e la potenza si sommano quando i segnali sono scorrelati

$$\mathcal{E}_{x+y} = \mathcal{E}_x + \mathcal{E}_y; \quad \mathcal{P}_{x+y} = \mathcal{P}_x + \mathcal{P}_y. \quad (4.115)$$

Nella ipotesi più forte di incoerenza di $x(t)$ e $y(t)$ abbiamo che anche le autocorrelazioni si sommano

$$r_{x+y}(\tau) = r_x(\tau) + r_y(\tau). \quad (4.116)$$

Quindi per gli spettri di energia e di potenza, rispettivamente, nell'ipotesi di segnali incoerenti vale l'additività

$$\mathcal{E}_{x+y}(f) = \mathcal{E}_x(f) + \mathcal{E}_y(f); \quad \mathcal{P}_{x+y}(f) = \mathcal{P}_x(f) + \mathcal{P}_y(f). \quad (4.117)$$

Si noti che la condizione più debole di ortogonalità garantisce la additività di energia e potenza, ma non necessariamente quella degli spettri.

Esempio 4.17 Si consideri un segnale di informazione $s(t)$, passa-banda avente uno spettro di potenza

$$\mathcal{P}_s(f) = A \left[\Lambda \left(\frac{f - f_0}{B} \right) + \Lambda \left(\frac{f + f_0}{B} \right) \right], \quad f_0 > B. \quad (4.118)$$

Tale segnale è ricevuto, dopo la trasmissione su un canale, come

$$z(t) = s(t) + n(t), \quad (4.119)$$

dove $n(t)$ è un rumore passa-banda ideale nella banda $[f_0 - B, f_0 + B]$. Il rumore ha uno spettro di potenza con spettro pari a η_0 ed è incoerente con il segnale $s(t)$. Valutare il rapporto tra la potenza del segnale e quella del rumore al ricevitore.

Soluzione: La figura 4.5 mostra lo spettro di potenza di segnale e rumore. Poiché i segnali sono incoerenti, avremo che lo spettro di potenza del segnale ricevuto è

$$\mathcal{P}_z(f) = \mathcal{P}_s(f) + \mathcal{P}_n(f). \quad (4.120)$$

La potenza della componente di segnale è $\mathcal{P}_s = 2BA$ e la potenza della componente di rumore è $\mathcal{P}_n = 4B\eta_0$. Il rapporto segnale-rumore è

$$\frac{\mathcal{P}_s}{\mathcal{P}_n} = \frac{A}{2B\eta_0}. \quad (4.121)$$

4.10 Problemi

Problema 4.1 Si valuti lo spettro di energia per i seguenti segnali:

1. $\delta(t) + \Lambda(2t)$;
2. $\Lambda^2(t - t_0)$;
3. $\Pi\left(\frac{t}{2T}\right) \cos\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{3}\right)$;
4. e^{-t^2} ;
5. $u(t+1) + u(t-2) - 2u(t-3)$;
6. $e^{-\alpha t} \cos 2\pi f_0 t \cdot u(t)$;
7. $\Pi(t f_0) (\cos(2\pi f_0 t) + 2 \sin(4\pi f_0 t))$

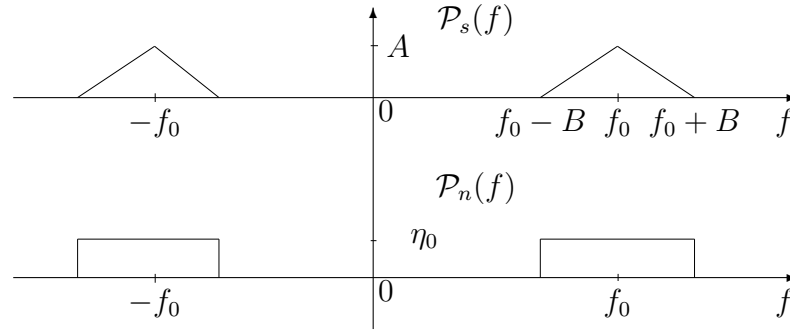


Figura 4.5: Le densità spettrali del segnale e del rumore dell'esempio 4.17

Problema 4.2 Si valuti lo spettro di potenza per i seguenti segnali:

1. $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Lambda\left(\frac{t-kT}{\Delta}\right)$, $T > 2\Delta$.
2. $\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \Lambda\left(\frac{t-kT}{\Delta}\right)$, $T > 2\Delta$.
3. $\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \Pi\left(\frac{t-kT}{\Delta}\right)$, $T > 2\Delta$.
4. $\cos(2\pi f_0 t + \theta) + \sin(\pi f_0 t)$;

Problema 4.3 Si valuti la funzione di autocorrelazione per i seguenti segnali utilizzando il metodo grafico.

1. $r(t) - r(t-1) - u(t-1)$;
2. $\cos(\frac{\pi t}{2T})$, $t \in [-T, T]$;
3. $u(t+1) + u(t-2) - 2u(t-3)$;
4. $e^{-\alpha t} \Pi\left(\frac{t-T}{2T}\right)$

Problema 4.4 Valutare energia e potenza del segnale $s(t) = \alpha \delta(t - t_0)$.

Problema 4.5 Dimostrare per segnali di energia la proprietà

$$\mathcal{F}[r_{xy}(\tau)] = \mathcal{E}_{xy}(f). \quad (4.122)$$

Problema 4.6 Valutare la mutua correlazione dei due segnali di energia

$$x(t) = \Pi\left(\frac{t-1}{2}\right), \quad y(t) = 2e^{-\alpha t}u(t), \quad \alpha > 0. \quad (4.123)$$

Problema 4.7 Valutare lo spettro di potenza mutuo e la mutua correlazione per due segnali di potenza periodici

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} i(t - kT_0); \quad y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(t - kT_0). \quad (4.124)$$

Problema 4.8 Valutare la mutua correlazione dei due segnali di potenza

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta); \quad y(t) = B \cos(2\pi f_1 t + \phi), \quad f_0 \neq f_1. \quad (4.125)$$

Problema 4.9 Valutare la mutua correlazione dei due segnali di potenza

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta); \quad y(t) = B \cos(2\pi f_0 t), \quad f_0 \neq f_1. \quad (4.126)$$

Problema 4.10 Valutare la mutua correlazione dei due segnali di potenza

$$x(t) = A e^{j(2\pi f_0 t + \theta)}; \quad y(t) = B e^{j(2\pi f_1 t + \phi)}, \quad f_0 \neq f_1. \quad (4.127)$$

Problema 4.11 Studiare la coerenza di due segnali periodici aventi periodi T_1 e T_2 , con $T_1 \neq T_2$.

Problema 4.12 Due segnali $s(t)$ e $n(t)$ hanno spettri di potenza passa-banda ideali attorno alla frequenza $f_0 = 40\text{MHz}$ e potenze uguali pari a \mathcal{P}_0 . Le larghezze di banda sono rispettivamente 1MHz e 1.5MHz . I segnali sono incoerenti. Valutare spettro di potenza e autocorrelazione del segnale $z(t) = 10s(t) + \frac{1}{2}n(t)$.

Problema 4.13 Due segnali reali $x(t)$ e $y(t)$ sono tali che

$$\langle g(x(t), x(t - \tau)) f(y(t), y(t - \tau)) \rangle = \langle g(x(t), x(t - \tau)) \rangle \langle f(y(t), y(t - \tau)) \rangle, \quad (4.128)$$

$\forall \tau$, per qualunque coppia di funzioni non lineari g ed f . Valutare la autocorrelazione del segnale

$$z(t) = x^2(t)y(t). \quad (4.129)$$

Problema 4.14 Dimostrare che lo spettro di potenza di segnali pseudoperiodici, che hanno uno spettro a righe del tipo

$$S(f) = \sum_k \beta_k \delta(f - f_k), \quad (4.130)$$

ovvero con frequenze non necessariamente commensurabili, è

$$\mathcal{P}_s(f) = \sum_k |\beta_k|^2 \delta(f - f_k). \quad (4.131)$$

Problema 4.15 Dimostrare che per due segnali di potenza, la mutua correlazione è il limite del correlogramma.

Problema 4.16 Dimostrare che per due segnali di potenza la trasformata di Fourier della funzione di mutua correlazione è lo spettro mutuo di potenza (T. di Wiener-Khinchin) (suggerimento: seguire gli stessi passi della analoga prova per la autocorrelazione).

Capitolo 5

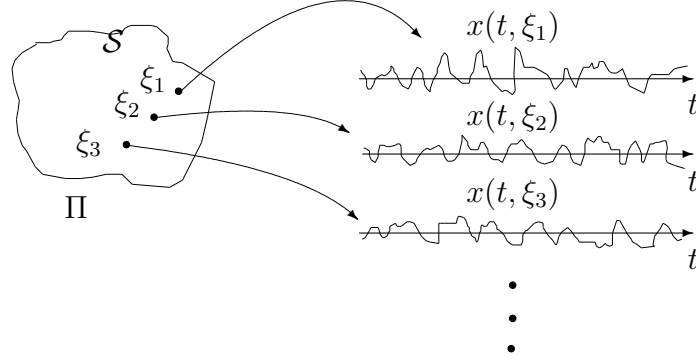
Segnali aleatori

In questo capitolo vengono introdotti i principali concetti relativi alla caratterizzazione dei segnali aleatori tempo-continuo. Dopo la definizione di cosa si intende per segnale aleatorio, viene introdotta la caratterizzazione probabilistica e il concetto di stazionarietà. Vengono introdotte le definizioni di energia e potenza media, il teorema di Wiener-Khinchin e il concetto di ergodicità.

5.1 Introduzione

Nello studio dei fenomeni fisici, e nella manipolazione dei segnali per telecomunicazioni, è spesso necessario fare riferimento a segnali le cui caratteristiche presentano caratteristiche di imprevedibilità. I segnali da manipolare potrebbero presentarsi con caratteristiche tipiche, ma con dettagli di forma non quantificabili in maniera esatta. Si pensi all'esempio tipico del segnale di tensione prelevato ai morsetti di un resistore rumoroso: sappiamo che il segnale si presenterà con un livello di tensione molto basso, che apparirà all'oscilloscopio come una “erbetta di rumore” attorno allo zero, ma la forma esatta del segnale resterà imprevedibile. Come altro esempio si immagini un segnale usato per comunicazioni ricevuto dopo la propagazione nel canale elettromagnetico. Il segnale ricevuto è distorto ed è contaminato dal rumore ambientale. La descrizione del segnale ricevuto contiene troppi dettagli e troppa variabilità per poter essere descritto in maniera determinata. Ecco perchè sono necessari degli strumenti di tipo statistico per quantificarne le caratteristiche medie.

La teoria della probabilità ci fornisce uno strumento matematico molto utile per formalizzare la imprevedibilità mediante delle tecniche di caratterizzazione dei segnali a crescente livello di dettaglio. I concetti di stazionarietà e di ergodicità ci consentono inoltre di quantificare le caratteristiche di variazione temporale e di legarle alla caratterizzazione dei segnali deterministici.

Figura 5.1: Un processo aleatorio $X(t)$

5.2 Definizione di processo aleatorio

Un *segnale aleatorio* $X(t)$, detto anche *processo aleatorio*, è una applicazione tra uno spazio campione \mathcal{S} e una collezione di segnali $\mathcal{C} = \{x(t, \xi_1), x_2(t, \xi_2), \dots\}$. I segnali in \mathcal{C} non sono necessariamente in numero finito o numerabile, e sono detti *funzioni membro* del processo. Ad ogni funzione è associata una probabilità Π . Figura 5.1 raffigura lo schema di principio del processo aleatorio in cui ogni funzione membro viene “pescata” dallo spazio campione secondo un dato meccanismo casuale. Quindi quando si osserva un segnale aleatorio bisogna pensare che si tratta solo una delle possibili funzioni membro estratta da una collezione di possibili funzioni. Più formalmente:

Dato uno spazio campione \mathcal{S} , a cui è associata una misura di probabilità Π , si definisce processo aleatorio la funzione $X(t)$ che associa ad ogni elemento dello spazio campione $\xi \in \mathcal{S}$ una funzione di t

$$X(t) : \xi \in \mathcal{S} \xrightarrow{\Pi} x(t, \xi) \in \mathcal{C}. \quad (5.1)$$

La collezione di segnali $\{x(t, \xi)\}$ può essere costituita da segnali a valori reali, complessi, discreti, tempo-continuo, tempo-discreto, eccetera. Nel seguito di queste note ci soffermeremo in particolare su segnali tempo-continuo rimandando le estensioni al caso tempo-discreto a successivi capitoli.

Esempio 5.1 Si consideri il processo aleatorio

$$X(t) = e^{-\alpha(t-T_0)}u(t-T_0), \quad (5.2)$$

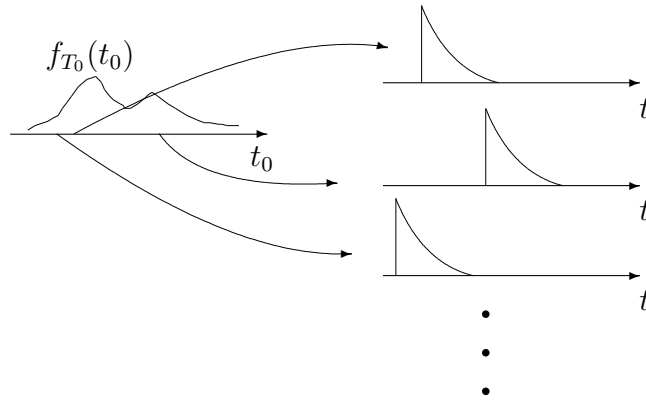


Figura 5.2: Il processo aleatorio dell'esempio 5.1

dove T_0 è una variabile aleatoria reale distribuita secondo la pdf $f_{T_0}(t_0)$. Le funzioni membro del processo sono i segnali esponenziali decrescenti (segnali di energia) traslati di una quantità aleatoria come mostrato in figura 5.2. Questo esempio è un cosiddetto *processo aleatorio parametrico*, in quanto è possibile descriverlo in forma analitica e quantificare la sua variabilità mediante un parametro aleatorio.

Esempio 5.2 Si consideri il seguente processo aleatorio parametrico

$$X(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \Theta), \quad (5.3)$$

dove Θ è una variabile aleatoria uniforme in $[-\pi, \pi]$. Le funzioni membro del processo sono i segnali sinusoidali a fase aleatoria mostrati in figura 5.3.

Esempio 5.3 Si consideri la tensione misurata ai capi di un circuito rumoroso. Le funzioni del processo si mostreranno come dei segnali di rumore a comportamento imprevedibile. La figura 5.4 mostra alcune ipotetiche funzioni membro. In questo caso per caratterizzare il processo bisognerà fare riferimento alla distribuzione delle ampiezze, alla struttura temporale in termini di spettro di potenza, o di autocorrelazione, e altro. La quantificazione delle caratteristiche di un processo aleatorio, non necessariamente parametrico, costituirà l'oggetto del resto del capitolo.

Esempio 5.4 Il segnale PAM antipodale. Si consideri una sequenza aleatoria infinita di simboli binari $\{..., b_{k-1}, b_k, b_{k+1}, ...\}$, $b_k \in \{0, 1\}$, emessi in maniera

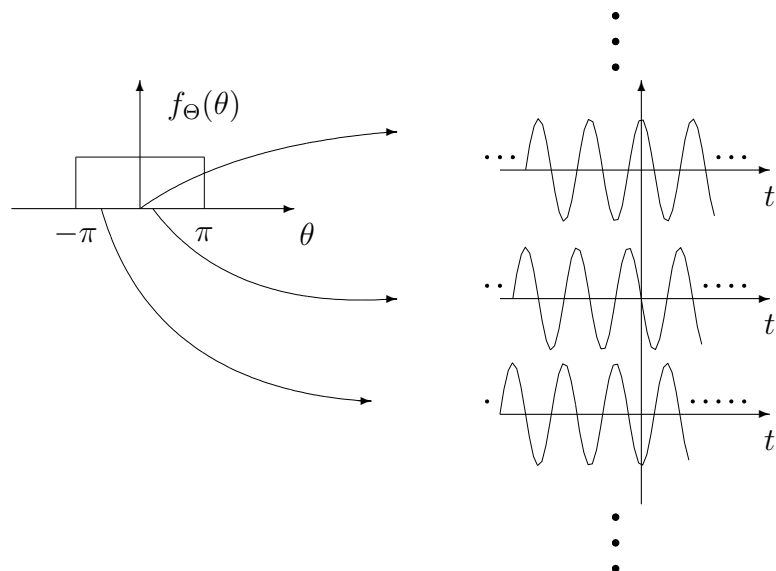


Figura 5.3: Alcune funzioni membro del processo aleatorio parametrico dell'esempio 5.2.

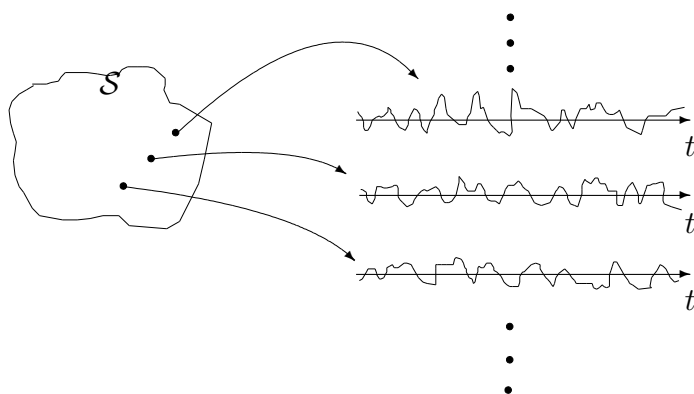


Figura 5.4: Alcune funzioni membro del processo aleatorio parametrico dell'esempio 5.3.

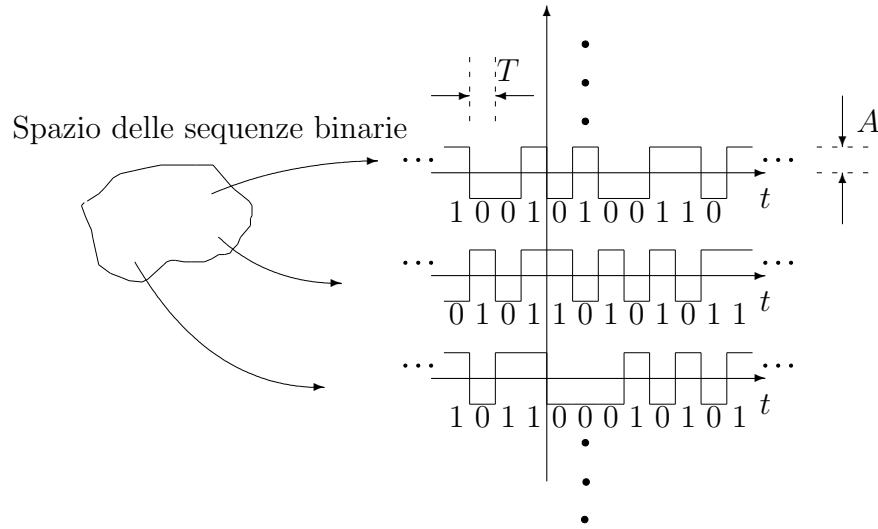


Figura 5.5: Alcune funzioni membro del segnale PAM antipodale dell'esempio 5.4.

indipendente da una sorgente a cadenza di $R = 1/T$ bit/sec. Si associ ad ogni bit un impulso rettangolare di ampiezza $\beta_k \in \{A, -A\}$. Il segnale risultante è

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k \Pi\left(\frac{t - kT - T/2}{T}\right). \quad (5.4)$$

Figura 5.5 mostra alcune funzioni membro del processo. Il meccanismo aleatorio della sorgente preleva una delle sequenze dallo spazio campione e vi associa un segnale tempo-continuo a due valori.

5.3 Caratterizzazione dei segnali aleatori

La struttura del processo aleatorio può essere caratterizzata con i metodi della teoria della probabilità e con i metodi della teoria dei segnali deterministici. Ogni funzione membro è un segnale deterministico e potrebbe essere studiato come tale, ma la sua imprevedibilità va tenuta in conto mediante delle tecniche probabilistiche. E' opportuno che per ogni processo si cerchi di ottenere più informazione possibile ai fini dell'utilizzo nelle analisi e nei progetti dei sistemi. Non sempre si dispone di una caratterizzazione completa del processo e bisogna spesso ricorrere a delle quantificazioni parziali. La teoria dei processi aleatori

fornisce un quadro completo dei possibili livelli di dettaglio ai quali i segnali possono essere manipolati e analizzati.

5.3.1 Caratterizzazione al I ordine

La definizione di processo aleatorio, implica che ad ogni istante di tempo $X(t)$ è una variabile aleatoria. Detto $t = t_1$ un istante di tempo generico, $X(t_1)$ manifesterà la variabilità indotta dal meccanismo aleatorio definito sullo spazio campione. La figura 5.6 mostra schematicamente come la variabilità ad ogni istante di tempo vada letta “in verticale”, ovvero rispetto a tutte le funzioni membro. La variabile aleatoria $X(t_1)$ può pertanto essere completamente caratterizzata da una cdf, o da una pdf

$$f_{X(t_1)}(x_1; t_1). \quad (5.5)$$

Tale funzione dipende in generale da t_1 , ovvero ad ogni istante di tempo la caratterizzazione probabilistica può essere diversa. Anche i momenti possono essere usati come una caratterizzazione parziale del processo. La media, il momento del secondo ordine e la varianza sono anch'essi in generale funzione di t_1

$$\mu_X(t_1) = E[X(t_1)]; \quad m_X^2(t_1) = E[X(t_1)^2]; \quad \sigma_X^2(t_1) = E[(X(t_1) - \mu_X(t_1))^2], \quad (5.6)$$

così come i momenti di ordine superiore

$$m_X^l(t_1) = E[X(t_1)^l]; \quad \sigma_X^l(t_1) = E[(X(t_1) - \mu_X(t_1))^l]. \quad (5.7)$$

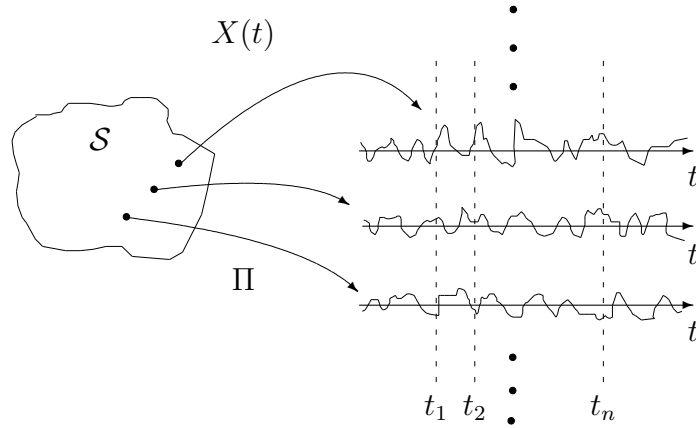
Le proprietà del processo ad un generico istante $t = t_1$ sono dette del *primo ordine*.

Molti dei processi di uso comune sono fortunatamente suscettibili di caratterizzazioni più contenute, in cui la dipendenza temporale non c'è, o è di tipo semplice. In particolare, si danno le seguenti definizioni.

Un processo $X(t)$ è stazionario in senso stretto del I ordine (SSS-I) se la pdf (o equivalentemente la cdf) del primo ordine (detta anche marginale), è invariante per traslazione temporale, ovvero

$$f_{X(t_1)}(x_1; t_1) = f_{X(t_1+\Delta)}(x_1; t_1 + \Delta), \quad \forall \quad t_1, \Delta. \quad (5.8)$$

Pertanto un processo stazionario del I ordine ha una pdf del I ordine che non dipende dal tempo $f_{X(t)}(x)$. Esso può quindi essere associato ad un'unica variabile aleatoria. La stazionarietà in senso stretto è una condizione *forte*, in quanto implica la stazionarietà di tutti i momenti di qualunque ordine. Esistono processi in cui è possibile invocare solo una stazionarietà più *debole* in cui solo alcuni momenti sono indipendenti dal tempo. Ad esempio un processo è *stazionario*

Figura 5.6: La caratterizzazione del processo $X(t)$.

nella media se $\mu_X(t_1) = \mu_X(t_1 + \Delta)$, $\forall t_1, \Delta$, ovvero la media è una costante μ_X . Analogamente un processo è *stazionario nel momento del secondo ordine* se $m_X^2(t_1) = m_X^2(t_1 + \Delta)$, $\forall t_1, \Delta$, ovvero esso è una costante m_X^2 . La stazionarietà della media e del momento del secondo ordine implica ovviamente la stazionarietà della varianza σ_X^2 . Analogamente si può definire una stazionarietà in riferimento a qualunque momento. E' opportuno enfatizzare che la stazionarietà di alcuni momenti non implica necessariamente la stazionarietà in senso stretto.

5.3.2 Caratterizzazione al II ordine

La struttura temporale di un segnale è chiaramente connessa alle relazioni esistenti tra i valori del segnale a diversi istanti di tempo. Per fissare le idee si guardi alla figura 5.6. In un segnale poco variabile ci si aspetta che i valori ad istanti di tempo adiacenti siano molto simili. Viceversa in un segnale molto variabile ci si aspetta che i valori siano in qualche modo diversi, o magari varino in maniera indipendente. Queste considerazioni ci fanno intuire come la caratterizzazione del I ordine non fornisca sufficienti informazioni sulla struttura di dipendenza reciproca tra i campioni del segnale, ma sia necessaria una caratterizzazione *congiunta* di ordine superiore. La caratterizzazione del *II ordine* di un processo aleatorio consiste nel considerare due istanti di tempo generici t_1 e t_2 e la pdf congiunta delle variabili aleatorie $X(t_1)$ e $X(t_2)$

$$f_{X(t_1)X(t_2)}(x_1, x_2; t_1, t_2). \quad (5.9)$$

Tale pdf è in generale dipendente sia da t_1 che da t_2 . La forma della pdf è detta del tipo *tempo-tempo* in quanto sono indicati esplicitamente gli istanti di tempo t_1 e t_2 .

Caratterizzazioni parziali del II ordine sono basate sui momenti del II ordine mediante delle definizioni quali la *autocorrelazione tempo-tempo*¹

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)], \quad (5.10)$$

la *autocovarianza tempo-tempo*

$$C_X(t_1, t_2) = E[(X(t_1) - \mu_X(t_1))(X(t_2) - \mu_X(t_2))]. \quad (5.11)$$

Esistono altre definizioni per i momenti di ordine superiore, ma la autocorrelazione e la autocovarianza rappresentano di gran lunga le più importanti.

Anche per la dipendenza del II ordine si definisce una stazionarietà in senso stretto.

Un processo $X(t)$ è stazionario in senso stretto del II ordine (SSS-II) se la pdf congiunta del secondo ordine, è invariante per traslazione temporale, ovvero

$$f_{X(t_1)X(t_2)}(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_{X(t_1+\Delta)X(t_2+\Delta)}(x_1, x_2; t_1+\Delta, t_2+\Delta), \quad \forall t_1, t_2, \Delta. \quad (5.12)$$

La invarianza per traslazione significa che la pdf dipende solo dal ritardo $t_1 - t_2$. Quindi la pdf può anche essere scritta come

$$f_{X(t+\tau)X(t)}(x_1, x_2; t+\tau, t) = f_{X(t+\tau+\Delta)X(t+\Delta)}(x_1, x_2; t+\tau+\Delta, t+\Delta), \quad \forall t, \Delta, \quad (5.13)$$

dove si è posto $t_1 = t + \tau$ e $t_2 = t$. Pertanto per un processo stazionario in senso stretto al II ordine la *pdf tempo-ritardo*

$$f_{X(t+\tau)X(t)}(x_1, x_2; t+\tau, \tau) = f_{X(t+\tau)X(t)}(x_1, x_2; \tau), \quad \forall t, \quad (5.14)$$

dipende solo dal ritardo $\tau = t_1 - t_2$. Si noti che una notazione tempo-ritardo equivalente è

$$f_{X(t)X(t-\tau)}(x_1, x_2; t, \tau) = f_{X(t)X(t-\tau)}(x_1, x_2; \tau). \quad (5.15)$$

¹Il lettore si domanderà se ci sia qualche legame con la autocorrelazione *deterministica* definita nel capitolo precedente in quanto la definizione in questo caso è di autocorrelazione *statistica*, o *probabilistica* (abbiamo usato le lettere maiuscole R e C per distinguerle). I legami tra la autocorrelazione deterministica e quella statistica sono di importanza centrale e saranno chiariti in seguito.

La stazionarietà in senso stretto al II ordine, implica la stazionarietà al I ordine, semplicemente ponendo $\tau = 0$.

Una stazionarietà *più debole* può essere definita rispetto ai momenti congiunti quali la autocorrelazione, la autocovarianza, eccetera. In particolare, un processo è *stazionario nella autocorrelazione* se

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = E[X(t_1 + \Delta)X(t_2 + \Delta)] = R_X(t_1 + \Delta, t_2 + \Delta), \quad \forall t_1, t_2, \Delta. \quad (5.16)$$

Nella versione tempo-ritardo, un processo $X(t)$ è stazionario nella autocorrelazione se

$$R_X(t; \tau) = E[X(t)X(t - \tau)] = R_X(\tau), \quad \forall t, \quad (5.17)$$

ovvero la autocorrelazione tempo-ritardo non dipende da t , ma solo dal ritardo τ . Analogamente un processo è stazionario nella autocovarianza se

$$\begin{aligned} C_X(t_1, t_2) &= E[(X(t_1) - \mu(t_1))(X(t_2) - \mu(t_2))] \\ &= E[(X(t_1 + \Delta) - \mu(t_1 + \Delta))(X(t_2 + \Delta) - \mu(t_2 + \Delta))] \\ &= C_X(t_1 + \Delta, t_2 + \Delta), \quad \forall t_1, t_2, \Delta. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Nella versione tempo-ritardo, un processo $X(t)$ è stazionario nella autocovarianza se

$$C_X(t; \tau) = E[(X(t) - \mu(t))(X(t - \tau) - \mu(t - \tau))] = C_X(\tau), \quad \forall t. \quad (5.19)$$

Si noti che poichè

$$C_X(t; \tau) = E[X(t)X(t - \tau)] - E[X(t)]E[X(t - \tau)] = R_X(t; \tau) - \mu_X(t)\mu_X(t - \tau), \quad (5.20)$$

la stazionarietà della media e della autocorrelazione implicano la stazionarietà della autocovarianza, che può in tal caso essere scritta semplicemente come

$$C_X(\tau) = R_X(\tau) - \mu_X^2. \quad (5.21)$$

In maniera del tutto simile possono essere definite delle stazionarietà sui momenti congiunti di ordine superiore che omettiamo per brevità. Resta comunque di gran lunga più interessante nelle applicazioni la stazionarietà rispetto ai momenti del primo e del secondo ordine, che viene formalizzata nella seguente importante definizione.

Un processo aleatorio $X(t)$ è detto stazionario in senso lato (SSL) se è stazionario nella media e nella autocorrelazione.

Chiaramente un processo stazionario in senso stretto al II ordine è anche stazionario in senso lato, in quanto la stazionarietà della pdf del II ordine implica quella di tutti i momenti congiunti fino al II ordine. Non vale invece il viceversa in generale, in quanto la stazionarietà dei momenti fino al II ordine non necessariamente implica quella di tutta la densità. Vedremo in seguito come i due tipi di stazionarietà siano equivalenti per la importante classe dei processi gaussiani.

5.3.3 Caratterizzazione all' n -esimo ordine

Abbiamo visto come la struttura di un processo aleatorio sia caratterizzata dalla dipendenza statistica tra i campioni del processo. La formalizzazione più generale può essere fornita considerando, come in figura 5.6, un insieme di n istanti di tempo t_1, t_2, \dots, t_n , e le relative variabili aleatorie $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$. Il processo è caratterizzato all'ordine n dalla densità di probabilità congiunta

$$f_{X(t_1)X(t_2)\dots X(t_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n). \quad (5.22)$$

Si noti che essa dipende in generale dagli n istanti di tempo e che una stazionarietà in *senso stretto di ordine n* (SSS- n) può essere definita imponendo la sua invarianza per traslazione, in maniera del tutto analoga a quelle del I e del II ordine. Ulteriori dettagli si tralasciano per brevità, anche per quello che riguarda i tipi di stazionarietà più deboli basate sui momenti congiunti basati su più di due campioni.

Esempio 5.1 (cont.) Torniamo all'esempio dell'esponenziale traslato. Notiamo che la densità della variabile $X(t_1)$ dipende da t_1 , anche perchè $X(t_1) = 0$ se $t_1 < T_0$. Quindi il processo non è stazionario in senso stretto al I ordine, nè tantomeno nei momenti. Il calcolo esatto di $f_{X(t_1)}(x_1, t_1)$ è suggerito negli esercizi.

Esempio 5.2 (cont.) Torniamo all'esempio della sinusoide e consideriamo la variabile aleatoria

$$X(t_1) = A \cos(2\pi f_0 t_1 + \theta). \quad (5.23)$$

Valutiamone la media.

$$\begin{aligned} \mu_X(t) &= E[X(t_1)] = E[A \cos(2\pi f_0 t_1 + \theta)] = \int_{-\infty}^{\infty} A \cos(2\pi f_0 t_1 + \theta) f_{\Theta}(\theta) d\theta \\ &= A \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \cos(2\pi f_0 t_1 + \theta) d\theta = \frac{A}{2\pi} \sin(2\pi f_0 t_1 + \theta) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Quindi il processo è stazionario nella media. Valutiamone anche la densità. La variabile aleatoria è diversa da zero solo in $(-A, A)$ ed è zero altrove. La trasformazione da studiare è

$$x_1 = g(\theta) = A \cos(2\pi f_0 t_1 + \theta). \quad (5.25)$$

Poiché $-\pi < \theta < \pi$, ci sono due soluzioni per θ alla equazione (5.25), quando $-A < x_1 < A$ e sono

$$\theta_{12} = \pm \left(\cos^{-1} \frac{x_1}{A} - 2\pi f_0 t_1 \right). \quad (5.26)$$

La derivata della trasformazione è

$$g'(\theta) = -A \sin(2\pi f_0 t_1 + \theta), \quad (5.27)$$

il cui modulo può essere scritto come

$$|g'(\theta)| = A \sin(2\pi f_0 t_1 + \theta) = \sqrt{A^2 - A^2 \cos^2(2\pi f_0 t_1 + \theta)} = \sqrt{A^2 - x_1^2}. \quad (5.28)$$

Applicando il teorema fondamentale delle trasformazioni di variabili aleatorie, abbiamo

$$f_{X(t_1)}(x_1; t_1) = \frac{f_\theta(\theta_1)}{|g'(\theta_1)|} + \frac{f_\theta(\theta_2)}{|g'(\theta_2)|}. \quad (5.29)$$

La pdf di θ è uniforme in $(-\pi, \pi)$, quindi uguale a $\frac{1}{2\pi}$. Sostituendo, abbiamo che la pdf di $X(t_1)$ è

$$f_{X(t_1)}(x_1) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{A^2 - x_1^2}}, & -A < x_1 < A \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases} \quad (5.30)$$

Si noti che la pdf è centrata in zero, è simmetrica e non dipende da t_1 . Quindi il processo è stazionario in senso stretto al I ordine. Notiamo inoltre che la pdf ha delle singolarità in $-A$ ed A . Comunque si tratta di singolarità e non di impulsi di Dirac, quindi la probabilità che ha il processo di assumere quei valori è zero. Tralasciamo la pdf del II ordine e valutiamo la autocorrelazione tempo-ritardo

$$\begin{aligned} R_X(t, \tau) &= E[X(t)X(t - \tau)] = E[A \cos(2\pi f_0 t + \theta) A \cos(2\pi f_0 (t - \tau) + \theta)] \\ &= A^2 E \left[\frac{1}{2} \cos(2\pi f_0 (2t - \tau) + \theta) + \frac{1}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) \right] \\ &= \frac{A^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \cos(2\pi f_0 (2t - \tau) + \theta) d\theta + \frac{A^2}{2} \cos 2\pi f_0 \tau \\ &= \frac{A^2}{2} \cos 2\pi f_0 \tau. \end{aligned} \quad (5.31)$$

La autocorrelazione non dipende da t , la media è costante (zero), quindi il processo è stazionario in senso lato.

Esempio 5.3 (cont.) E' opportuno forse fare qualche considerazione sull'esempio del circuito rumoroso. Si tratta di un processo non parametrico, ovvero un segnale le cui caratteristiche non sono fornite in maniera analitica. In questi casi spesso si ipotizza stazionarietà all'ordine necessario, si fa una ipotesi sulla densità e sui momenti congiunti. Una assunzione tipica è quella di pdf gaussiana, e di stazionarietà almeno in senso lato. Approfondimenti su questi tipi di processi saranno forniti in seguito.

Esempio 5.4 (cont.) Il segnale PAM binario, può assumere solo i valori $\pm A$. Se le probabilità sui due simboli binari sono uguali, la pdf del I ordine è chiaramente

$$f_{X(t)}(x) = \frac{1}{2}\delta(x + A) + \frac{1}{2}\delta(x - A). \quad (5.32)$$

Il processo è stazionario in senso stretto al I ordine. Grazie alla simmetria della pdf, la media è nulla. Valutiamo ora la autocorrelazione tempo-ritardo.

$$\begin{aligned} R_X(t, \tau) &= E[X(t)X(t - \tau)] \\ &= E \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k \Pi \left(\frac{t - kT - T/2}{T} \right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \beta_m \Pi \left(\frac{t - \tau - mT - T/2}{T} \right) \right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} E[\beta_k \beta_m] \Pi \left(\frac{t - kT - T/2}{T} \right) \Pi \left(\frac{t - \tau - mT - T/2}{T} \right) \end{aligned}$$

Poichè i simboli sono indipendenti, e $E[\beta_k] = 0$, abbiamo che

$$E[\beta_k \beta_m] = \begin{cases} E[\beta_k]E[\beta_m] = 0 & k \neq m \\ E[\beta_k^2] = A^2 \frac{1}{2} + (-A)^2 \frac{1}{2} = A^2, & k = m. \end{cases} \quad (5.33)$$

La autocorrelazione si semplifica

$$R_X(t, \tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A^2 \Pi \left(\frac{t - kT - T/2}{T} \right) \Pi \left(\frac{t - \tau - kT - T/2}{T} \right) \quad (5.34)$$

Il processo non è stazionario in senso lato (quindi neanche in senso stretto al II ordine), in quanto la autocorrelazione dipende da t . Va osservato però che la dipendenza da t è periodica con periodo T (è facile verificarlo sostituendo a t , $t + nT$ e verificare l'uguaglianza dopo un semplice cambio di variabili). Si tratta pertanto di un processo cosiddetto *ciclostazionario*. Per tali processi, ai fini di una caratterizzazione compatta si definisce una *autocorrelazione media* mediante una operazione di integrazione su un periodo

$$\overline{R_X(\tau)} = \frac{1}{T} \int_0^T R_X(t, \tau) dt. \quad (5.35)$$

Nel nostro caso abbiamo

$$\begin{aligned} \overline{R_X(\tau)} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A^2}{T} \int_0^T \Pi \left(\frac{t - kT - T/2}{T} \right) \Pi \left(\frac{t - \tau - kT - T/2}{T} \right) dt \\ &= \frac{A^2}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{kT-T/2}^{T-kT-T/2} \Pi \left(\frac{\eta}{T} \right) \Pi \left(\frac{\eta - \tau}{T} \right) d\eta \\ &= \frac{A^2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi \left(\frac{\eta}{T} \right) \Pi \left(\frac{\eta - \tau}{T} \right) d\eta, \end{aligned} \quad (5.36)$$

dove nell'integrale si è usata la sostituzione $\eta = t - kT - T/2$. Riconosciamo nell'ultimo integrale la autocorrelazione deterministica di $\Pi(t/T)$. La autocorrelazione media diventa

$$\overline{R_X(\tau)} = \frac{A^2}{T} \Lambda\left(\frac{\tau}{T}\right). \quad (5.37)$$

5.3.4 Più processi

Le tecniche di caratterizzazione del processo aleatorio possono essere applicate anche all'insieme di più processi aleatori. Ad esempio, se abbiamo due processi aleatori $X(t)$ e $Y(t)$, possiamo caratterizzare le relazioni reciproche mediante la pdf congiunta tempo-tempo o tempo-ritardo

$$f_{X(t_1)Y(t_2)}(x, y; t_1, t_2); \quad f_{X(t)Y(t-\tau)}(x, y; t; \tau) \quad (5.38)$$

(nel seguito prediligeremo le notazioni tempo-ritardo). I processi sono *congiuntamente stazionari in senso stretto* se $f_{X(t)Y(t-\tau)}(x, y; t; \tau)$ non dipende da t . I processi sono *congiuntamente stazionari in senso lato* se le medie $\mu_X(t)$ e $\mu_Y(t)$ sono costanti e la *mutua correlazione tempo-ritardo*

$$R_{XY}(t; \tau) = E[X(t)Y(t - \tau)] = R_{XY}(\tau), \quad (5.39)$$

dipende solo da τ . Notiamo che la *mutua covarianza* si scrive anche

$$\begin{aligned} C_{XY}(t; \tau) &= E[(X(t) - \mu_X(t))(Y(t - \tau) - \mu_Y(t - \tau))] \\ &= R_{XY}(t; \tau) - \mu_X(t)\mu_Y(t - \tau), \end{aligned} \quad (5.40)$$

che nel caso di mutua stazionarietà in senso lato si scrive come

$$C_{XY}(\tau) = R_{XY}(\tau) - \mu_X\mu_Y. \quad (5.41)$$

La generalizzazione a n processi aleatori è abbastanza immediata. Ad esempio, un processo aleatorio n - *dimensionale* è l'insieme di n processi

$$\underline{X}(t) = (X_1, X_2(t), \dots, X_n(t)). \quad (5.42)$$

Tralasciamo i dettagli delle relative caratterizzazioni per brevità.

5.3.5 Processi complessi

Nelle definizioni di processo aleatorio e nelle relative caratterizzazioni, abbiamo fatto riferimento a funzioni reali. Un processo complesso è semplicemente un

processo che è composto da due processi reali, uno per rappresentare la parte reale e uno per la parte immaginaria

$$X(t) = X_r(t) + jX_i(t). \quad (5.43)$$

La caratterizzazione al I ordine del processo complesso consiste nella pdf congiunta di parte reale a parte immaginaria

$$f_{X(t)}(x; t) = f_{X_r X_i}(x_r, x_i; t), \quad (5.44)$$

dove $X(t)$ e x sono complessi, e $X_r(t)$, $X_i(t)$ e x_r, x_i sono reali.

La media di un processo complesso è chiaramente la funzione complessa

$$\mu_X(t) = \mu_{X_r}(t) + j\mu_{X_i}(t). \quad (5.45)$$

La autocorrelazione e la autocovarianza (tempo-ritardo) di un processo complesso sono rispettivamente

$$R_X(t; \tau) = E[X(t)X^*(t-\tau)]; \quad C_X(t; \tau) = E[(X(t) - \mu_X(t))(X(t-\tau) - \mu_X(t-\tau))^*]. \quad (5.46)$$

Il lettore verifichi per esercizio la relazione esistente tra la autocorrelazione e la autocovarianza di $X(t)$ e quelle di $X_r(t)$ e di $X_i(t)$.

Analoghe definizioni possono essere date in presenza di due processi aleatori complessi. Si definiscono *mutua correlazione* e *mutua covarianza* (tempo-ritardo)

$$R_{XY}(t; \tau) = E[X(t)Y^*(t-\tau)]; \quad C_{XY}(t; \tau) = E[(X(t) - \mu_X(t))(Y(t-\tau) - \mu_Y(t-\tau))^*] \quad (5.47)$$

La mutua covarianza può essere scritta come

$$\begin{aligned} C_{XY}(t; \tau) &= E[(X(t) - \mu_X(t))(Y(t-\tau) - \mu_Y(t-\tau))^*] \\ &= R_{XY}(t, \tau) - \mu_X(t)\mu_Y^*(t-\tau), \end{aligned} \quad (5.48)$$

che nel caso di mutua stazionarietà in senso lato diventa

$$C_{XY}(\tau) = R_{XY}(\tau) - \mu_X\mu_Y^*. \quad (5.49)$$

5.4 Energia, potenza e spettri

Le varie realizzazioni di un segnale aleatorio possano mostrarsi con caratteristiche puntuali molto diverse. Ogni funzione membro di un segnale aleatorio può essere pensata come un segnale deterministico a se stante e studiata singolarmente con le tecniche già introdotte per i segnali deterministici. Purtroppo nelle applicazioni è molto raro che le funzioni membro possano essere studiate una per una, ad eccezione di alcuni processi parametrici in cui la imprevedibilità è attribuita

ad un piccolo numero di variabili. Pertanto la caratterizzazione spettrale di un processo sarà di tipo *globale* e *medio* anche per riflettere la nostra conoscenza parziale del segnale. Ad esempio, un segnale potrebbe essere noto solo nella sua funzione di autocorrelazione; oppure di un segnale potrebbe interessarci solo una caratterizzazione spettrale media. A questo proposito, vedremo come lo spettro di un processo aleatorio dipenda dalla autocorrelazione e come per i processi gaussiani la conoscenza della autocorrelazione sia sufficiente ad una caratterizzazione statistica completa. Per maggiore chiarezza discuteremo separatamente la classe dei processi che hanno funzioni membro rispettivamente a energia e a potenza finita.

5.4.1 Segnali aleatori di energia

Quando le funzioni membro del processo sono dei segnali di energia, la energia può ovviamente essere calcolata per ogni generica funzione membro $x(t; \xi)$ come

$$\mathcal{E}_X(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t; \xi)|^2 dt. \quad (5.50)$$

Quindi la energia

$$\mathcal{E}_X = \int_{-\infty}^{\infty} |X(t)|^2 dt, \quad (5.51)$$

è una variabile aleatoria. Tale quantità può essere mediata sullo spazio campione ottenendo la seguente definizione.

Definizione: Dato un segnale aleatorio di energia si definisce *energia media*

$$\bar{\mathcal{E}}_X = E[\mathcal{E}_X] = \int_{-\infty}^{\infty} E[|X(t)|^2] dt, \quad (5.52)$$

(abbiamo scambiato l'operazione di media con l'integrale).² E' opportuno puntualizzare che un per segnali di energia aleatori non può sussistere stazionarietà, trattandosi di funzioni transienti, o limitate nel tempo. Quindi nella definizione di energia media, la quantità $E[|X(t)|^2]$ non è una costante, ma una funzione di t che deve tendere a zero per $|t| \rightarrow \infty$ affinché l'integrale esista.

²Per essere precisi, nell'insieme delle funzioni membro, possono esistere *alcune, isolate*, funzioni che non hanno energia finita. Tali funzioni essendo isolate, hanno probabilità nulla, se lo spazio campione è denso e non contiene masse di probabilità isolate. Esse pertanto non contribuiscono alle medie che caratterizzano il processo. E' un pò come quando si ha a che fare con una variabile aleatoria che assume un valore determinato con probabilità nulla, a meno che in quel punto non ci sia una delta (una massa di probabilità). Quindi si dice che l'insieme delle funzioni soddisfa la proprietà di avere energia finita, *eccetto magari per un insieme a probabilità nulla*. Tale osservazione riportata qui per completezza, non confonda il lettore che faccia comunque riferimento ad un insieme omogeneo di funzioni di energia.

Seguendo lo stesso ragionamento fatto per la energia media, la autocorrelazione deterministica della generica funzione membro $x(t; \xi)$ è

$$r_X(\tau; \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t; \xi) x^*(t - \tau; \xi) dt. \quad (5.53)$$

La caratterizzazione spettrale della funzione membro è lo spettro di energia

$$\mathcal{E}_X(f; \xi) = \mathcal{F}[r_X(\tau; \xi)] = |X(f; \xi)|^2, \quad (5.54)$$

che chiaramente dipende dalla specifica realizzazione ξ . Ovvero la quantità

$$r_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) X^*(t - \tau) dt \quad (5.55)$$

è una variabile aleatoria. La definizione di spettro medio di energia si ottiene mediando sullo spazio campione.

Definizione: Dato un segnale aleatorio di energia $X(t)$ si definisce *spettro medio di energia*, o *densità spettrale media di energia*

$$\bar{\mathcal{E}}_X(f) = E[|X(f)|^2]. \quad (5.56)$$

Si tratta semplicemente della media degli spettri di energia delle varie funzioni membro. La domanda che sorge naturale è se c'è un relazione tra la densità spettrale e la funzione di autocorrelazione statistica del processo $R_X(t; \tau) = E[X(t) X^*(t - \tau)]$. Osservando ancora che per processi di energia non può esserci stazionarietà, in quanto la invarianza per traslazione delle caratteristiche statistiche non può sussistere trattandosi di segnali transienti, otteniamo la seguente relazione.

Proprietà 5.1 Per un segnale aleatorio di energia

$$\bar{\mathcal{E}}_X(f) = \mathcal{F}[\bar{R}_X(\tau)], \quad (5.57)$$

dove

$$\bar{R}_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(t; \tau) dt. \quad (5.58)$$

Prova: Dalla definizione

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{E}}_X(f) &= E[|X(f)|^2] = E[X(f) X^*(f)] \\ &= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t_1) e^{-j2\pi f t_1} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t_2) e^{j2\pi f t_2} dt_2\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E[x(t_1) x^*(t_2)] e^{-j2\pi f (t_1 - t_2)} dt_1 dt_2. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Effettuando il cambio di variabili $t = t_1$ e $\tau = t_1 - t_2$, abbiamo

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{E}}_X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(t; \tau) e^{-j2\pi f\tau} dt d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f\tau} \int_{-\infty}^{\infty} R_X(t; \tau) dt d\tau \\ &= \mathcal{F} \left[\int_{-\infty}^{\infty} R_X(t; \tau) dt \right].\end{aligned}\quad (5.60)$$

E' utile anche collegare alla energia media il risultato ottenuto. Infatti vale la seguente relazione.

Proprietà 5.2 La energia media di un processo aleatorio di energia può essere ottenuta come

$$\bar{\mathcal{E}}_X = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\mathcal{E}}_X(f) df = \bar{R}_X(0). \quad (5.61)$$

Prova: La dimostrazione della prima uguaglianza deriva dalla definizione dell'integrale di Fourier, per cui il valore in zero del segnale nel dominio del tempo è pari all'integrale dello spettro nel dominio della frequenza ($s(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) df$). La seconda uguaglianza è diretta conseguenza della definizione di autocorrelazione media

$$\bar{R}_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(t; 0) dt = \int_{-\infty}^{\infty} E[|X(t)|^2] dt. \quad (5.62)$$

5.4.2 Segnali aleatori di potenza

I segnali aleatori di potenza sono più comuni dei segnali di energia nelle applicazioni delle telecomunicazioni. La definizione analitica di potenza media e di spettro medio di potenza presenta però qualche insidia in più rispetto ai segnali di energia, così come è stato più insidioso definire densità spettrale e autocorrelazione nei segnali deterministici di potenza. Cominciamo con la definizione di potenza media. Sia $x(t; \xi)$ una realizzazione generica di un segnale aleatorio di potenza. Trattandosi di un segnale deterministico la potenza è

$$\mathcal{P}_X(\xi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x_T(t; \xi)|^2 dt. \quad (5.63)$$

Quindi la potenza

$$\mathcal{P}_X = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |X_T(t)|^2 dt, \quad (5.64)$$

è una variabile aleatoria. Saremmo tentati quindi di dare, in analogia alla definizione di energia media, una definizione di potenza media come la media delle potenze ottenute nelle varie realizzazioni $E[\mathcal{P}_X]$. Sfortunatamente ciò non

è corretto poiché una tale definizione non darebbe un valore consistente, ovvero la media non avrebbe una varianza necessariamente finita (per maggiori dettagli, si veda Papoulis, 1991). Pertanto bisogna adottare la seguente definizione in cui si effettua prima la media sulla energia della versione troncata delle funzioni membro, si divide per $2T$ e poi si va al limite.

Definizione: Dato un segnale aleatorio di potenza $X(t)$ si definisce *potenza media*

$$P_X = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E[|X_T(t)|^2] dt. \quad (5.65)$$

E' importante notare che la definizione non richiede la stazionarietà di $E[|X_T(t)|^2]$, anche se altre condizioni tecniche, che tralasciamo per brevità, devono essere soddisfatte. Se il segnale è stazionario in $E[|X_T(t)|^2]$, per cui è sufficiente la stazionarietà in senso lato, abbiamo che $E[|X_T(t)|^2] = \text{costante}$, $\forall t$. Quindi la potenza media si scrive semplicemente come

$$P_X = E[|X(t)|^2] = E[|X|^2]. \quad (5.66)$$

Se il processo è reale e a media nulla si ha semplicemente

$$P_X = \sigma_X^2. \quad (5.67)$$

Ai fini di una caratterizzazione spettrale per i segnali aleatori di potenza, cominciamo considerando la singola funzione membro $x(t; \xi)$. Lo spettro di potenza mediante la definizione

$$\mathcal{P}_X(f; \xi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(f; \xi)|^2}{2T}, \quad (5.68)$$

dove $X_T(f; \xi)$ è la trasformata di Fourier della versione troncata di $x(t; \xi)$, non è consistente. Ovvero il limite non esiste per la maggior parte delle funzioni utili, come già osservato nel capitolo sui segnali deterministici. Quindi a maggior ragione per funzioni membro imprevedibili la definizione è inadeguata se applicata alla singola funzione membro. Ricordiamo come per “far convergere il limite sulla singola funzione membro, è stato necessario introdurre una media temporale sulla posizione centrale della finestra di troncamento. Fortunatamente, nel caso dei processi aleatori ciò non è necessario, in quanto, prima di effettuare il limite per $T \rightarrow \infty$, è possibile mediare sulle funzioni membro. Maggiori dettagli sulle ragioni che portano a una tale definizione possono essere trovate nella letteratura specifica (vedi per esempio Papoulis, 1991; Gardner. 1987). Pertanto si adotta la seguente definizione.

Definizione: Per un processo aleatorio $X(t)$ si definisce *spettro medio di potenza*

$$P_X(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[|X_T(f)|^2]}{2T}. \quad (5.69)$$

Quindi lo spettro di energia del segnale troncato, che è ovviamente un segnale di energia viene mediato sullo spazio campione. Lo spettro risultante è diviso per $2T$ e valutato per $T \rightarrow \infty$. Il legame con la funzione di autocorrelazione statistica di $X(t)$ per i processi stazionari è di importanza cruciale ed è descritto dal seguente risultato.

Proprietà 5.3 (T. di Wiener-Khinchin per i processi aleatori) Dato un processo aleatorio stazionario almeno in senso lato, lo spettro medio di potenza è la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione, ovvero

$$P_X(f) = \mathcal{F}[R_X(\tau)]. \quad (5.70)$$

La proprietà descritta da questo teorema viene a volte usata come definizione di spettro medio di potenza. La espressione che abbiamo dato come definizione verrebbe in tal caso derivata come conseguenza nell'ipotesi di stazionarietà in senso lato.

Prova: la prova della proprietà si ottiene semplicemente applicando le definizioni.

$$\begin{aligned} E[|X_T(f)|^2] &= E[X_T(f)X_T^*(f)] \\ &= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} x_T(t_1)e^{-j2\pi ft_1}dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} x_T^*(t_2)e^{j2\pi ft_2}dt_2\right] \\ &= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t_1)\Pi\left(\frac{t_1}{2T}\right)x^*(t_2)\Pi\left(\frac{t_2}{2T}\right)e^{-j2\pi f(t_1-t_2)}dt_1dt_2\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E[x(t_1)x^*(t_2)]\Pi\left(\frac{t_1}{2T}\right)\Pi\left(\frac{t_2}{2T}\right)e^{-j2\pi f(t_1-t_2)}dt_1dt_2. \end{aligned}$$

Effettuando il cambio di variabili $t = t_1$ e $\tau = t_1 - t_2$, abbiamo

$$\begin{aligned} E[|X_T(f)|^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E[x(t)x^*(t-\tau)]\Pi\left(\frac{t}{2T}\right)\Pi\left(\frac{t-\tau}{2T}\right)e^{-j2\pi f\tau}dtd\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(t;\tau)\Pi\left(\frac{t}{2T}\right)\Pi\left(\frac{t-\tau}{2T}\right)e^{-j2\pi f\tau}dtd\tau \quad (5.71) \end{aligned}$$

Assumendo stazionarietà in senso lato abbiamo

$$\begin{aligned} E[|X_T(f)|^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)e^{-j2\pi f\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t}{2T}\right)\Pi\left(\frac{t-\tau}{2T}\right)dtd\tau \\ &= 2T \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)\Lambda\left(\frac{\tau}{2T}\right)e^{-j2\pi f\tau}d\tau, \quad (5.72) \end{aligned}$$

dove la funzione triangolare viene dalla convoluzione delle due funzioni rettangolari. Dividendo per $2T$ e andando al limite abbiamo il risultato, poiché la funzione

triangolare al tendere di $T \rightarrow \infty$, tende alla funzione costante pari a uno.

$$\begin{aligned}
 P_x(f) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[|X_T(f)|^2]}{2T} \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \Lambda\left(\frac{\tau}{2T}\right) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau.
 \end{aligned} \tag{5.73}$$

5.4.3 Segnali a spettro definito

Nei segnali aleatori si usa la stessa classificazione già introdotta a proposito delle trasformate e degli spettri di potenza a riguardo di segnali passa-basso, passa-alto, passa-banda, eccetera. Va enfatizzato che nel caso dei segnali aleatori tutto è riferito a *spettri medi* (nel senso su descritto) di energia e di potenza. Quindi è concepibile che la classe relativa a un segnale aleatorio avente un dato spettro medio sia piuttosto vasta, con funzioni membro che possono avere caratteristiche puntuali anche molto diverse. Questa è forse una delle caratteristiche che rende la formulazione aleatoria molto utile nelle applicazioni in quanto ci consente di limitare la discussione e la analisi di segnali e sistemi a sole caratteristiche medie. La relazione tra le funzioni membro e le caratteristiche statistiche medie sarà discussa nella sezione sulla ergodicità.

Esempio 5.5 Si consideri un segnale aleatorio stazionario in senso lato, a media nulla, e varianza σ_X^2 , passa-basso ideale con frequenza di taglio B Hz. Si valuti la funzione di autocorrelazione.

Soluzione: Lo spettro medio di potenza è

$$P_x(f) = \eta_0 \Pi\left(\frac{f}{2B}\right), \tag{5.74}$$

dove η_0 è tale che

$$P_0 = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} P_x(f) df = 2B\eta_0, \tag{5.75}$$

ovvero $\eta_0 = \sigma_X^2/2B$. La funzione di autocorrelazione è

$$\begin{aligned}
 R_X(\tau) &= \mathcal{F}^{-1}[P_x(f)] = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\sigma_X^2}{2B} \Pi\left(\frac{f}{2B}\right)\right] \\
 &= \sigma_X^2 \text{sinc } 2B\tau.
 \end{aligned} \tag{5.76}$$

Esempio 5.6 Un *segnale aleatorio bianco* è un segnale aleatorio di potenza stazionario in senso lato, con media nulla e spettro medio di potenza costante

$$P_X(f) = \eta_0. \quad (5.77)$$

La autocorrelazione del segnale è impulsiva

$$R_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[P_X(f)] = \eta_0 \delta(\tau). \quad (5.78)$$

Il segnale bianco è un segnale ideale, poichè ha una potenza infinita. Infatti $P_X = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \eta_0 df = \infty$. Un segnale bianco può essere visto come il limite di un processo passa-basso di banda B , quando $B \rightarrow \infty$.

5.4.4 Proprietà della correlazione e della covarianza

Riportiamo qui brevemente alcune proprietà di auto e mutua correlazione e di auto- e mutua-covarianza.

Proprietà 5.4 La potenza media di un segnale $X(t)$ stazionario almeno in senso lato è

$$P_X = R_X(0). \quad (5.79)$$

Prova: Abbiamo già visto come per un processo stazionario in senso lato $P_X = E[|X(t)|^2]$. Ma $R_X(0) = E[X(t)X^*(t)]$, quindi la proprietà è immediata.

Proprietà 5.5 La autocorrelazione di un processo stazionario in senso lato è una funzione Hermitiana

$$R_X(\tau) = R_X^*(-\tau). \quad (5.80)$$

Quindi per un processo reale, la autocorrelazione è una funzione pari: $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$.

Prova: Dalla definizione: $R_X(-\tau) = E[X(t)X^*(t+\tau)] = (E[X(t+\tau)X^*(t)])^* = R_X^*(\tau)$.

Proprietà 5.6 Per ogni processo $X(t)$ stazionario in senso lato

$$|R_X(\tau)| \leq R_X(0), \quad \forall \tau, \quad (5.81)$$

ovvero la funzione di autocorrelazione ha il suo massimo in zero.

Prova: Dimostriamo la proprietà per $X(t)$ reale. La prova generale per $X(t)$ complesso è suggerita negli esercizi. Valutiamo la espressione

$$\begin{aligned} E[(X(t) \pm X(t - \tau))^2] &= E[X^2(t)] + E[X^2(t - \tau)] \pm 2E[X(t)X(t - \tau)] \\ &= 2E[X^2] \pm 2R_X(\tau) = 2R_X(0) \pm 2R_X(\tau). \end{aligned} \quad (5.82)$$

Trattandosi della media di una quantità non negativa, essa è certamente non negativa, quindi

$$R_X(0) \pm R_X(\tau) \geq 0, \quad (5.83)$$

ovvero

$$-R_X(0) \leq R_X(\tau) \leq R_X(0), \quad (5.84)$$

che dimostra l'asserto.

Proprietà 5.7 La mutua correlazione di due processi congiuntamente stazionari in senso lato è tale che

$$R_{XY}(\tau) = R_{YX}^*(-\tau), \quad (5.85)$$

ovvero, alla inversione dell'ordine XY , corrisponde la versione Hermitiana della mutua correlazione. Si noti come questa proprietà generalizzi quella della autocorrelazione per $X = Y$. La stessa proprietà vale per la mutua covarianza

$$C_{XY}(\tau) = C_{YX}^*(-\tau). \quad (5.86)$$

Prova: Dalla definizione: $R_{XY}(-\tau) = E[X(t)Y^*(t+\tau)] = (E[Y(t+\tau)X^*(t)])^* = R_{YX}^*(\tau)$. Per la covarianza

$$\begin{aligned} C_{YX}(\tau) &= R_{YX}(\tau) - \mu_Y \mu_X^* = R_{XY}^*(-\tau) - \mu_Y \mu_X^* \\ &= (R_{XY}(-\tau) - \mu_X \mu_Y^*)^* = C_{XY}^*(-\tau). \end{aligned} \quad (5.87)$$

Proprietà 5.8 La somma di due processi singolarmente e mutuamente stazionari in senso lato è stazionaria in senso lato e ha autocorrelazione

$$R_{X+Y}(\tau) = R_X(\tau) + R_Y(\tau) + R_{XY}(\tau) + R_{YX}(\tau). \quad (5.88)$$

Prova: La media della somma è la somma delle medie per la linearità della media

$$\mu_{X+Y}(t) = E[X(t) + Y(t)] = E[X(t)] + E[Y(t)] = \mu_X + \mu_Y. \quad (5.89)$$

La autocorrelazione è immediata dalla definizione e dalla linearità della media

$$\begin{aligned} R_{X+Y}(t; \tau) &= E[(X(t) + Y(t))(X(t - \tau) + Y(t - \tau))^*] = E[X(t)X^*(t - \tau)] \\ &\quad + E[Y(t)Y^*(t - \tau)] + E[X(t)Y^*(t - \tau)] + E[Y(t)X^*(t - \tau)] \\ &= R_X(\tau) + R_Y(\tau) + R_{XY}(\tau) + R_{YX}(\tau). \end{aligned} \quad (5.90)$$

Esempio 5.7 Si consideri un segnale $Z(t)$ ottenuto dalla sovrapposizione di un segnale utile $S(t)$ e un segnale di rumore $N(t)$

$$Z(t) = S(t) + N(t). \quad (5.91)$$

I segnali $S(t)$ e $N(t)$ siano processi aleatori stazionari in senso lato, a media nulla, aventi spettri medi di potenza rispettivamente

$$P_S(f) = \alpha \left(\Lambda \left(\frac{f - f_0}{B} \right) + \Lambda \left(\frac{f + f_0}{B} \right) \right); \quad (5.92)$$

$$P_N(f) = \beta \left(\Pi \left(\frac{f - f_0}{2B} \right) + \Pi \left(\frac{f + f_0}{2B} \right) \right). \quad (5.93)$$

Rumore e segnale siano indipendenti e sia $f_0 \gg B$. Valutare: il rapporto tra potenza media del segnale e la potenza media del rumore; le autocorrelazioni di segnale, rumore e segnale-più-rumore.

Soluzione: Trattandosi di segnali indipendenti (basterebbe comunque anche solo la decorrelazione), gli spettri medi e le autocorrelazioni si sommano

$$P_Z(f) = P_S(f) + P_N(f); \quad R_Z(\tau) = R_S(\tau) + R_N(\tau). \quad (5.94)$$

La autocorrelazione del segnale $S(t)$ è

$$\begin{aligned} R_S(\tau) &= \alpha e^{j2\pi f_0 \tau} B \operatorname{sinc}^2 B\tau + \alpha e^{-j2\pi f_0 \tau} B \operatorname{sinc}^2 B\tau \\ &= 2\alpha B \cos 2\pi f_0 \tau \operatorname{sinc}^2 B\tau. \end{aligned} \quad (5.95)$$

La autocorrelazione del rumore $N(t)$ è

$$\begin{aligned} R_N(\tau) &= \beta e^{j2\pi f_0 \tau} 2B \operatorname{sinc} 2B\tau + \beta e^{-j2\pi f_0 \tau} 2B \operatorname{sinc} 2B\tau \\ &= 4\beta B \cos 2\pi f_0 \tau \operatorname{sinc} 2B\tau. \end{aligned} \quad (5.96)$$

Le potenze del segnale e del rumore sono rispettivamente

$$P_S = R_S(0) = 2\alpha B; \quad P_N = R_N(0) = 4\beta B. \quad (5.97)$$

Le potenze potevano ovviamente essere calcolate anche come $P_S = \int P_S(f)df$ e $P_N = \int P_N(f)df$. Il rapporto segnale-rumore è $S/N = 2\beta/\alpha$.

5.5 Processi gaussiani

I segnali gaussiani costituiscono una importante classe di processi nelle applicazioni dei sistemi di telecomunicazioni. Il teorema centrale del limite fornisce una motivazione forte per la ipotesi gaussiana laddove nello studio dei canali di

telecomunicazione rumorosi effetti indesiderati e incontrollabili si sommano. Il modello gaussiano fornisce un modello insieme realistico e di agevole manipolazione matematica. Genericamente, un processo gaussiano è un processo in cui tutte le densità che lo caratterizzano sono gaussiane. Più precisamente, facendo riferimento a processi reali per semplicità, abbiamo la seguente definizione.

Definizione: Un processo $X(t)$ è gaussiano se la pdf congiunta

$$f_{X(t_1)X(t_2)\dots X(t_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \quad (5.98)$$

è gaussiana $\forall t_1, t_2, \dots, t_n$. Anche se i processi gaussiani non stazionari possono essere definiti e studiati, ci limiteremo qui a considerare solo il caso stazionario. Ricordiamo come un processo stazionario ha una pdf congiunta che è invariante per traslazione temporale, ovvero la densità dipende solo dalle distanze temporali mutue tra t_1, t_2, \dots, t_n . Poiché la pdf è una gaussiana n -dimensionale, essa è completamente caratterizzata dalle medie

$$\mu_X(t_1), \mu_X(t_2), \dots, \mu_X(t_n), \quad (5.99)$$

e da una matrice di correlazione che contiene i momenti congiunti del tipo

$$E[X(t_i)X(t_j)], \quad \forall i, j = 1, \dots, n. \quad (5.100)$$

La stazionarietà implica che le medie sono tutte uguali alla stessa costante μ_X e che le autocorrelazioni sono solo funzione del ritardo, ovvero

$$E[X(t_i)X(t_j)] = R_X(t_i - t_j), \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (5.101)$$

Pertanto il processo è caratterizzato completamente da una media stazionaria μ_X e da una funzione di autocorrelazione $R_X(\tau)$. E' immediato quindi concludere che *per un processo gaussiano la stazionarietà in senso lato, implica la stazionarietà in senso stretto di qualunque ordine*. Questo è diretta conseguenza del fatto che la stazionarietà della funzione di autocorrelazione implica la stazionarietà di tutte le densità congiunte di qualunque ordine.

Nelle applicazioni è anche utile considerare processi mutuamente gaussiani in cui tutte le pdf miste di qualunque ordine sono gaussiane. Ad esempio, nel caso di due processi $X(t)$ e $Y(t)$ mutuamente gaussiani, nella ipotesi di congiunta stazionarietà, le medie μ_X e μ_Y , le funzioni di autocorrelazione $R_X(\tau)$ e $R_Y(\tau)$ e la funzione di mutua correlazione $R_{XY}(\tau)$ caratterizzano completamente qualunque densità congiunta. Pertanto la stazionarietà congiunta in senso lato implica la stazionarietà congiunta in senso stretto.

5.5.1 Processi indipendenti e scorrelati

Nello studio di sistemi e segnali per telecomunicazioni le seguenti definizioni risultano molto utili quando si considerano gli effetti combinati di segnali e rumore.

Definizione: Due processi aleatori $X(t)$ e $Y(t)$, sono indipendenti se

$$f_{X(t)Y(t-\tau)}(x, y; t, t-\tau) = f_{X(t)}(x; t) f_{Y(t-\tau)}(y; t-\tau), \quad \forall t, \tau. \quad (5.102)$$

Definizione: Due processi aleatori $X(t)$ e $Y(t)$, sono scorrelati se

$$R_{XY}(t; \tau) = E[X(t)Y(t-\tau)] = E[X(t)]E[Y(t-\tau)], \quad \forall t, \tau. \quad (5.103)$$

Ovviamente, due processi indipendenti sono anche scorrelati. Non vale il viceversa in generale, a meno che non si tratti di processi mutuamente gaussiani.

Si noti che le definizioni di indipendenza e decorrelazione non richiedono che i processi siano stazionari, anche se i casi di maggiore interesse pratico fanno riferimento a processi stazionari e mutuamente stazionari.

Poiché la mutua covarianza si può scrivere come

$$C_{XY}(t; \tau) = E[X(t)X(t-\tau)] - E[X(t)]E[X(t-\tau)] = R_{XY}(t; \tau) - \mu_X(t)\mu_Y(t-\tau), \quad (5.104)$$

due processi scorrelati sono tali che $C(t; \tau) = 0$, $\forall t, \tau$.

La definizione di decorrelazione è, nel contesto dei processi aleatori, l'equivalente della incoerenza nei segnali deterministici. E' possibile anche fornire una definizione di ortogonalità per i processi aleatori.

Definizione: Due processi aleatori $X(t)$ e $Y(t)$ sono *ortogonali* se

$$E[X(t)Y^*(t)] = 0, \quad \forall t. \quad (5.105)$$

Ovvero la mutua correlazione è zero per $\tau = 0$ ($R_{XY}(0) = 0$).

E' evidente come la ortogonalità di due processi possa discendere dalla decorrelazione e dalla media nula di almeno uno dei due processi. Infatti la correlazione in zero tra due processi scorrelati è

$$E[X(t)Y^*(t)] = E[X(t)]E[Y^*(t)], \quad (5.106)$$

che diventa zero se la media di almeno uno dei due è zero $\forall t$. Per processi a media nulla la ortogonalità è lo stesso che imporre decorrelazione tra due processi traslati di una quantità arbitraria τ .

Esempio 5.8 Si consideri il segnale DSB

$$Z(t) = AX(t) \cos(2\pi f_0 t + \Theta), \quad (5.107)$$

dove $X(t)$ è un processo passa-basso di potenza P_X , frequenza massima pari a B (non necessariamente a spettro piatto), stazionario in senso lato e a media nulla. Sia Θ una variabile aleatoria uniforme in $[-\pi, \pi]$, statisticamente indipendente da $X(t)$. Si tratta di un segnale modulato in ampiezza a *doppia banda laterale* (Double Side-Band), con fase aleatoria. La frequenza f_0 della portante sia molto maggiore di B . Valutare spettro medio di potenza, autocorrelazione e potenza di $Z(t)$.

Soluzione: Valutiamo innanzitutto la media di $Z(t)$.

$$\begin{aligned} E[Z(t)] &= E[AX(t) \cos(2\pi f_0 t + \Theta)] \\ &= AE[X(t)]E[\cos(2\pi f_0 t + \Theta)] = 0. \end{aligned} \quad (5.108)$$

La prima uguaglianza è stata ottenuta per la indipendenza di $X(t)$ e Θ . Valutiamo ora la autocorrelazione di $Z(t)$.

$$\begin{aligned} R_Z(t; \tau) &= E[Z(t)Z(t-\tau)] \\ &= A^2 E[X(t)X(t-\tau) \cos(2\pi f_0 t + \Theta) \cos(2\pi f_0(t-\tau) + \Theta)] \\ &= A^2 E[X(t)X(t-\tau)] E[\cos(2\pi f_0 t + \Theta) \cos(2\pi f_0(t-\tau) + \Theta)] \\ &= A^2 R_X(\tau) E\left[\frac{1}{2} \cos(2\pi f_0(2t-\tau) + 2\Theta) + \frac{1}{2} \cos(2\pi f_0 \tau)\right] \\ &= A^2 R_X(\tau) \left(\frac{1}{2} E[\cos(2\pi f_0(2t-\tau) + 2\Theta)] + \frac{1}{2} \cos(2\pi f_0 \tau)\right), \end{aligned} \quad (5.109)$$

dove abbiamo ancora usato la indipendenza di Θ e $X(t)$ e il fatto che la funzione $\cos 2\pi f_0 \tau$ non è aleatoria. Valutiamo a parte la prima media

$$\begin{aligned} E[\cos(2\pi f_0(2t-\tau) + 2\Theta)] &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \cos(2\pi f_0(2t-\tau) + 2\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \left. \frac{\sin(2\pi f_0(2t-\tau) + 2\theta)}{2} \right|_{-\pi}^{\pi} = 0. \end{aligned}$$

Quindi la autocorrelazione non dipende da t , ma solo da τ . Pertanto il segnale $Z(t)$ è stazionario in senso lato e la autocorrelazione è

$$R_Z(\tau) = \frac{A^2}{2} R_X(\tau) \cos 2\pi f_0 \tau. \quad (5.110)$$

Trasformando otteniamo lo spettro medio di potenza

$$\begin{aligned} P_Z(f) &= \frac{A^2}{2} P_X(f) * \frac{1}{2} (\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)) \\ &= \frac{A^2}{2} (P_X(f-f_0) + P_X(f+f_0)). \end{aligned} \quad (5.111)$$

Si tratta di uno spettro passa-banda centrato sulla frequenza f_0 e avente larghezza di banda pari a $2B$. La potenza del segnale modulato è

$$P_Z = R_Z(0) = \frac{A^2}{2} R_X(0) = \frac{A^2}{2} P_X. \quad (5.112)$$

5.5.2 Spettri mutui

Così come sono state definite le funzioni mutua correlazione e mutua covarianza, è possibile definire degli spettri mutui di energia e di potenza. Per maggiore chiarezza separiamo la discussione nei due casi, così come abbiamo fatto nel caso dei segnali deterministici.

Definizione: Dati due segnali aleatori di energia $X(t)$ e $Y(t)$, si definisce spettro medio mutuo di energia

$$\bar{\mathcal{E}}_{XY}(f) = E[X(f)Y^*(f)]. \quad (5.113)$$

La definizione è intuitiva e costituisce una immediata generalizzazione della definizione di spettro medio per un singolo segnale. Notiamo che, anche a proposito degli spettri mutui per segnali di energia, la stazionarietà congiunta non può sussistere, trattandosi di segnali transienti. La relazione con la funzione di mutua correlazione è sancita dal seguente teorema.

Teorema 5.1 Dati due segnali aleatori di energia $X(t)$ e $Y(t)$, lo spettro medio mutuo è legato alla funzione di mutua correlazione dalla relazione

$$\bar{\mathcal{E}}_{XY}(f) = \mathcal{F} \left[\bar{R}_{XY}(\tau) \right], \quad (5.114)$$

dove

$$\bar{R}_{XY}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(t; \tau) dt. \quad (5.115)$$

Prova: Dalla definizione di energia media mutua abbiamo

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{E}}_{XY} &= E[X(f)Y^*(f)] \\ &= E \left[\int_{-\infty}^{\infty} X(t_1) e^{-j2\pi f t_1} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} Y^*(t_2) e^{j2\pi f t_2} dt_2 \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E[X(t_1)Y^*(t_2)] e^{j2\pi f(t_1 - t_2)} dt_1 dt_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(t_1; t_1 - t_2) e^{j2\pi f(t_1 - t_2)} dt_1 dt_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f \tau} \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(t; \tau) dt \\ &= \mathcal{F} \left[\int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(t; \tau) dt \right]. \end{aligned} \quad (5.116)$$

La definizione di spettro medio mutuo per segnali di potenza aleatori è immediata generalizzazione della definizione di spettro di potenza già data.

Definizione: Dati due segnali di potenza aleatori $X(t)$ e $Y(t)$, si definisce spettro mutuo medio

$$P_{XY}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[X_T(f)Y_T^*(f)]}{2T}, \quad (5.117)$$

dove $X_T(f)$, e $Y_T(f)$ sono le trasformate di Fourier delle versioni troncate di $X(t)$ e $Y(t)$.

La relazione degli spettri mutui per i segnali di potenza e la funzione di mutua correlazione è descritta dal teorema di Wiener-Khinchin.

Teorema 5.2 (Teorema di Wiener-Khinchine) Dati due segnali aleatori di potenza $X(t)$ e $Y(t)$, mutuamente stazionari in senso lato,

$$P_{XY}(f) = \mathcal{F}[R_{XY}(\tau)]. \quad (5.118)$$

La prova segue gli stessi passi di quelle per lo spettro medio di un singolo segnale ed è suggerita negli esercizi.

5.6 Ergodicità

La definizione di segnale aleatorio si basa su uno spazio di probabilità e su un insieme di possibili realizzazioni in cui ognuna delle funzioni membro costituisce una diversa funzione del tempo. Il modello dal punto di vista matematico è abbastanza semplice, ma dal punto di vista delle applicazioni, sorgono diverse perplessità: come si fa a osservare più di una realizzazione se l'asse dei tempi è lo stesso per tutte le funzioni? Si pensi a un segnale di potenza che si estende su tutto l'asse dei tempi. Non sembra possibile pensare di poter mai osservare più di una realizzazione (salvo a pensare a universi paralleli!!). E' possibile conoscere qualcosa sulle altre funzioni membro osservandone una sola? Ovvero, data la struttura generale del segnale imposta dalla formalizzazione matematica, è possibile "imparare qualcosa sul processo se si osserva solo una delle funzioni membro?

La risposta a queste domande sta nella importante questione della *ergodicità*. In sintesi, un processo è ergodico se da misure effettuate su una sola realizzazione è possibile risalire a caratteristiche generali del processo. In altre parole, un processo ergodico è tale che ogni sua funzione membro è sufficientemente tipica rispetto all'insieme di tutte le funzioni membro. Esaminiamo qui la ergodicità per due caratteristiche basilari quali la media e la autocorrelazione, tralasciando le estensioni. I concetti descritti in questa sezione saranno sufficienti a fornire al

lettore una conoscenza basilare del problema. I risultati legati alla ergodicità, detti anche *teoremi ergodici* consentono di legare le definizioni di autocorrelazione e spettro di potenza introdotti per i segnali deterministici con la formalizzazione dei processi aleatori.

5.6.1 Ergodicità nella media

Poniamoci il problema di volere stimare la media di un segnale di potenza $X(t)$. Abbiamo a disposizione una sola funzione membro e decidiamo di calcolare su di essa la media temporale. Se ipotizziamo che il processo sia stazionario nella media, che relazione c'è tra la media calcolata e la media del processo? E' intuitivo che un certo collegamento deve esserci in quanto la media temporale rappresenta la baseline di quella realizzazione (media in orizzontale sulla figura 5.1) così come la media statistica rappresenta il valore mediato ad ogni istante di tempo sullo spazio campione (media in verticale sulla figura 5.1). In che senso le due quantità riflettono lo stesso valore?

Sia $x(t; \xi)$ la realizzazione osservata. La media temporale calcolata su di essa è

$$\mu_x(\xi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t; \xi) dt. \quad (5.119)$$

Si tratta di un valore che è in genere diverso per ogni realizzazione. Più propriamente il valore medio

$$\mu_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt, \quad (5.120)$$

è una variabile aleatoria. In che relazione è essa con la media $\mu_X = E[X(t)]$ che è una costante caratteristica del processo? Per rispondere a questa domanda, bisogna studiare se il calcolo effettuato sulla singola realizzazione $x(t; \xi)$ costituisca una stima, o un'approssimazione, o magari proprio la vera media.

A questo scopo consideriamo la versione troncata di $x(t; \xi)$

$$x_T(t; \xi) = x(t; \xi) \Pi\left(\frac{t}{2T}\right). \quad (5.121)$$

La media temporale di essa su $[-T, T]$ è

$$\mu_{x_T}(\xi) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t; \xi) dt. \quad (5.122)$$

Bisogna ora verificare se al tendere di $T \rightarrow \infty$, la media $\mu_{x_T}(\xi)$, relativa quindi ad una sola realizzazione, tende in qualche modo a μ_X . Valutiamo prima la media statistica (in verticale) di $\mu_{x_T}(\xi)$

$$E[\mu_{x_T}] = E\left[\frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt\right] = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E[X(t)] dt = \mu_X, \quad (5.123)$$

poiché $E[X(t)]$ è una costante vista la stazionarietà. Il risultato mostra come la stima data dalla media temporale *in media* rappresenti (anche per T finito) il valore cercato (si dice in tali casi che lo stimatore è *non polarizzato (unbiased)*). Resta da vedere se essa *stabilmente* fornisce il valore giusto, ovvero valutare le variazioni che naturalmente si verificano attorno al valore medio, e come essere evolvono al crescere della dimensione della finestra $[-T, T]$. Le variazioni sono analizzate calcolando la varianza di μ_{x_T} e studiandone il comportamento asintotico per $T \rightarrow \infty$. Se la varianza dello stimatore tende a zero al crescere di T , vuol dire che μ_{x_T} tende a μ_X in media quadratica, ovvero con probabilità vicino a uno. Si dice in tal caso che il processo $X(t)$ è *ergodico nella media*. Per trovare la condizione di ergodicità valutiamo la varianza di μ_{x_T}

$$\begin{aligned}
 VAR[\mu_{x_T}] &= E \left[\frac{1}{2T} \int_{-T}^T (x(t_1; \xi) - \mu_X) dt_1 \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (x(t_2; \xi) - \mu_X) dt_2 \right] \\
 &= E \left[\frac{1}{4T} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x(t_1; \xi) - \mu_X) \Pi \left(\frac{t_1}{2T} \right) (x(t_2; \xi) - \mu_X) \Pi \left(\frac{t_2}{2T} \right) dt_1 dt_2 \right] \\
 &= \frac{1}{4T} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E[(X(t_1) - \mu_X)(X(t_2) - \mu_X)] \Pi \left(\frac{t_1}{2T} \right) \Pi \left(\frac{t_2}{2T} \right) dt_1 dt_2 \\
 &= \frac{1}{4T} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C_X(t_1 - t_2) \Pi \left(\frac{t_1}{2T} \right) \Pi \left(\frac{t_2}{2T} \right) dt_1 dt_2, \tag{5.124}
 \end{aligned}$$

dove $C_X(\cdot)$ è la autocovarianza di $X(t)$. Dopo il cambio di variabili $\tau = t_1 - t_2$ e $t = t_1$ la varianza diventa

$$\begin{aligned}
 VAR[\mu_{x_T}] &= \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} C_X(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \Pi \left(\frac{t}{2T} \right) \Pi \left(\frac{t - \tau}{2T} \right) dt d\tau \\
 &= \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} C_X(\tau) \Lambda \left(\frac{\tau}{2T} \right) d\tau \tag{5.125}
 \end{aligned}$$

Quindi la condizione affinché ci sia ergodicità nella media, ovvero che $\mu_{x_T} \rightarrow \mu_X$, oppure

$$\lim_{T \rightarrow \infty} VAR[\mu_{x_T}] = 0, \tag{5.126}$$

è che la autocovarianza sia tale che

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} C_X(\tau) \Lambda \left(\frac{\tau}{2T} \right) d\tau = 0, \tag{5.127}$$

o in maniera equivalente che

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} C_X(\tau) \Lambda \left(\frac{\tau}{2T} \right) d\tau = 0, \tag{5.128}$$

La condizione trovata richiede che l'integrale, che tende all'integrale della autocovarianza, visto che la funzione triangolare tende ad una costante, converga o

a zero, o diverga come un infinito avente un ordine al più pari a uno. Molti dei segnali di interesse pratico soddisfano la condizione di ergodicità della media, anche se non è difficile mostrare alcuni esempi in cui la ergodicità non è soddisfatta. Vedremo alcuni esempi in seguito. Si noti che la condizione sulla ergodicità della media dipende da momenti del secondo ordine (la covarianza). Vedremo in seguito come la ergodicità della autocorrelazione dipenda da momenti di ordine superiore al secondo.

5.6.2 Ergodicità nella autocorrelazione

Poiché la autocorrelazione è direttamente legata alla densità spettrale del processo, la sua ergodicità è di importanza centrale ai fini della valutazione dello spettro di un processo da una sola funzione membro. La autocorrelazione calcolata come media temporale sulla singola realizzazione è

$$r_x(\tau; \xi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_T(t; \xi) x_T(t - \tau; \xi) dt. \quad (5.129)$$

Questa va confrontata con la autocorrelazione del processo $R_X(\tau)$. Anche qui si considera il segnale $x_T(t; \xi)$ troncato, la media e la varianza della stima basata su di essa. Ai fini della ergodicità, al tendere di $T \rightarrow \infty$ la stima deve tendere alla autocorrelazione in media quadratica, ovvero esibendo una varianza asintoticamente nulla. La autocorrelazione della versione troncata della generica realizzazione $x(t; \xi)$ è

$$r_{x_T}(\tau; \xi) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_T(t; \xi) x_T(t - \tau; \xi) dt, \quad (5.130)$$

che ha media

$$\begin{aligned} E[r_{x_T}(\tau; \xi)] &= E \left[\frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_T(t; \xi) x_T(t - \tau; \xi) dt \right] \\ &= E \left[\frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t; \xi) \Pi \left(\frac{t}{2T} \right) x(t - \tau; \xi) \Pi \left(\frac{t - \tau}{2T} \right) dt \right] \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} E[x(t; \xi) x(t - \tau; \xi)] \Pi \left(\frac{t}{2T} \right) \Pi \left(\frac{t - \tau}{2T} \right) dt \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) \Pi \left(\frac{t}{2T} \right) \Pi \left(\frac{t - \tau}{2T} \right) dt \\ &= \frac{1}{2T} R_X(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \Pi \left(\frac{t}{2T} \right) \Pi \left(\frac{t - \tau}{2T} \right) dt \\ &= R_X(\tau) \Lambda \left(\frac{\tau}{2T} \right). \end{aligned} \quad (5.131)$$

Pertanto

$$E[r_x(\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} E[r_{x_T}(\tau; \xi)] = R_X(\tau). \quad (5.132)$$

Lo stimatore fornisce in media la vera funzione di autocorrelazione (stimatore non polarizzato), sotto la sola ipotesi di stazionarietà in senso lato del processo. La condizione per la convergenza della varianza è un pò più stringente e può essere ottenuta con uno stratagemma usando la condizione sulla ergodicità della media. Infatti basta osservare che la stima della autocorrelazione è la media del processo $\phi(t) = X(t)X(t - \tau)$, in cui τ è considerato un parametro fissato. Abbiamo già trovato una condizione per la ergodicità della media, pertanto la convergenza a zero della varianza dello stimatore richiede che

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} C_\phi(\Delta; \tau) \Lambda\left(\frac{\Delta}{2T}\right) d\Delta = 0, \quad (5.133)$$

dove $C_\phi(\Delta; \tau)$ è la autocovarianza di $\phi(t)$

$$C_\phi(\Delta; \tau) = E[(\phi(t; \tau) - R_X(\tau))(\phi(t - \Delta; \tau) - R_X(\tau))], \quad (5.134)$$

supposta stazionaria in senso lato, ovvero funzione solo del ritardo Δ . Si noti che la autocovarianza di ϕ dipende dai momenti del quarto ordine, in quanto

$$E[\phi(t; \tau)\phi(t - \Delta; \tau)] = E[X(t)X(t - \tau)X(t - \Delta)X(t - \Delta - \tau)]. \quad (5.135)$$

La stazionarietà in senso lato di ϕ richiede la stazionarietà al quarto ordine di $X(t)$.

5.6.3 Altri tipi di ergodicità

La ergodicità può essere studiata in riferimento ad altre quantità, quali i momenti di ordine superiore, le densità marginale e congiunte, eccetera. Tralasciamo per brevità l'argomento rimandandolo a ulteriori occasioni di approfondimento.

5.7 Problemi

Problema 5.1 Si consideri il processo aleatorio parametrico

$$X(t) = \Pi\left(\frac{t - \Delta}{2}\right), \quad (5.136)$$

in cui Δ è una variabile aleatoria gaussiana a media nulla e varianza σ^2 . Valutare media, varianza, autocorrelazione e spettro di $X(t)$.

Problema 5.2 Si consideri il processo aleatorio parametrico

$$X(t) = \alpha \Pi\left(\frac{t}{\Delta}\right), \quad (5.137)$$

in cui α è una variabile aleatoria esponenziale a media μ . Valutare media, varianza, autocorrelazione e spettro di $X(t)$.

Problema 5.3 Valutare la pdf del I ordine per l'esempio 5.1.

Problema 5.4 Per il processo aleatorio di potenza

$$X(t) = A \sin 2\pi f_0(t - \Delta), \quad (5.138)$$

in cui Δ è una variabile aleatoria uniforme nell'intervallo $[-\frac{1}{2f_0}, \frac{1}{2f_0}]$. Valutare media, varianza, autocorrelazione e spettro di potenza.

Problema 5.5 Valutare la mutua correlazione tra i due processi aleatori

$$X_1(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t + \Theta_1), \quad X_2(t) = A_2 \cos(2\pi f_2 t + \Theta_2) \quad (5.139)$$

dove Θ_1 e Θ_2 sono due variabili aleatorie indipendenti e uniformi in $[-\pi, \pi]$.

Problema 5.6 Dimostrare che anche per un processo complesso stazionario in senso lato

$$|R_X(\tau)| \leq R_X(0). \quad (5.140)$$

Problema 5.7 Dimostrare il teorema di Wiener-Khinchine per lo spettro medio mutuo di potenza per due segnali aleatori mutuamente stazionari in senso lato.

Problema 5.8 Si valuti la autocorrelazione di un segnale reale avente spettro di potenza piatto e pari a $\frac{\eta_0}{2}$ nella banda $[f_1, f_2]$.

Problema 5.9 Si valuti la autocorrelazione e lo spettro di potenza del segnale AM

$$Z(t) = A(1 + kX(t)) \cos(2\pi f_0 t + \Theta), \quad (5.141)$$

dove $X(t)$ è un processo aleatorio SSL a media nulla, passa-basso con frequenza massima pari a B , e Θ è una variabile aleatoria uniforme in $[-\pi, \pi]$ indipendente da $X(t)$.

Problema 5.10 Due segnali aleatori stazionari e incoerenti $X_1(t)$ e $X_2(t)$, entrambi passa-basso con frequenza massima pari a B , modulano in quadratura una portante a frequenza f_0

$$Z(t) = X_1(t) \cos(2\pi f_0 t + \Theta) + X_2(t) \sin(2\pi f_0 t + \Theta), \quad (5.142)$$

dove Θ è una variabile aleatoria uniforme in $[-\pi, \pi]$ indipendente da $X_1(t)$ e $X_2(t)$. Valutare autocorrelazione e spettro di potenza di $Z(t)$.

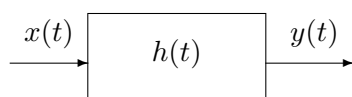
Capitolo 6

Sistemi lineari e segnali

In questo capitolo, dopo aver richiamato le principali definizioni e relazioni notevoli per i sistemi lineari, viene introdotto il concetto di distorsione lineare. Viene inoltre introdotta la definizione di funzione di trasferimento dell'energia e della potenza. Alcuni esempi applicativi motivano la semplice teoria.

6.1 Introduzione

I sistemi lineari sono descritti da sistemi di equazioni differenziali lineari che legano le funzioni del tempo in gioco. La teoria dei sistemi lineari è al di là degli scopi di queste note, ma è opportuno richiamare alcune definizioni fondamentali. Un sistema lineare (condizioni iniziali nulle) tempo-invariante (*LTI*, *Linear Time-Invariant*), di tipo SISO (Single-Input Single-Output), è descritto in forma compatta dalla risposta impulsiva $h(t)$. La figura seguente mostra la rappresentazione schematica di un tale sistema con ingresso $x(t)$ e uscita $y(t)$.



La risposta impulsiva è l'uscita del sistema all'ingresso $x(t) = \delta(t)$. Per semplice sovrapposizione degli effetti, l'uscita del sistema per un qualunque segnale di ingresso $x(t)$ è la convoluzione lineare

$$y(t) = (h * x)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)x(t - \xi)d\xi. \quad (6.1)$$

Un esempio di risposta impulsiva è mostrato in Figura 6.1(a). In Figura 6.1(b) è mostrato un esempio di segnale di potenza posto all'ingresso del sistema e in (c) l'uscita. Si noti il comportamento passa-basso del sistema.

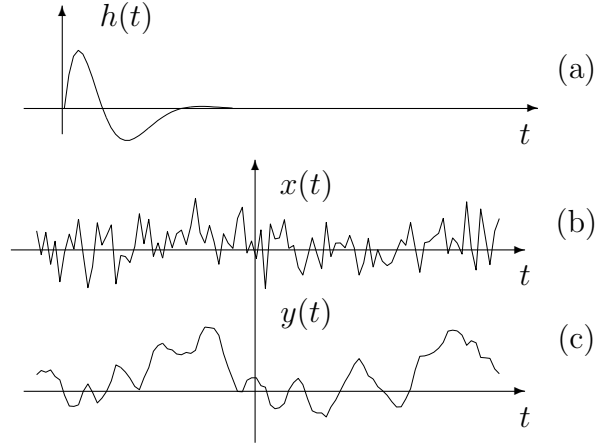


Figura 6.1: (a) Un esempio di risposta impulsiva passa-basso ; (b) un segnale di ingresso; (c) il relativo segnale di uscita risultato della convoluzione di $h(t)$ e $x(t)$.

6.1.1 Proprietà della convoluzione

Proprietà 6.1 La convoluzione soddisfa la proprietà commutativa

$$(h * x)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)x(t - \xi)d\xi = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\xi)h(t - \xi)d\xi. \quad (6.2)$$

Prova: Immediata conseguenza della definizione mediante cambio di variabili.

Proprietà 6.2 In un sistema *causale* (l'effetto segue la causa), la risposta impulsiva è tale che

$$h(t) = 0, \quad t < 0. \quad (6.3)$$

La convoluzione può essere riscritta come

$$(h * x)(t) = \int_0^{\infty} h(\xi)x(t - \xi)d\xi, \quad (6.4)$$

oppure, operando il cambio di variabili $\alpha = t - \xi$, come

$$(h * x)(t) = \int_{-\infty}^t h(t - \alpha)x(\alpha)d\alpha. \quad (6.5)$$

Prova: Immediata.

Proprietà 6.3 Per un sistema *anti-causale* (l'effetto dipende solo dal segnale d'ingresso negli istanti futuri) la risposta impulsiva è tale che

$$h(t) = 0, \quad t > 0. \quad (6.6)$$

In tal caso la convoluzione può essere riscritta come

$$(h * x)(t) = \int_{-\infty}^0 h(\xi)x(t - \xi)d\xi, \quad (6.7)$$

oppure, operando il cambio di variabili $\alpha = t - \xi$, come

$$(h * x)(t) = \int_t^{\infty} h(t - \alpha)x(\alpha)d\alpha. \quad (6.8)$$

Prova: Immediata.

Un sistema anti-causale è chiaramente non fisicamente realizzabile anche se la formalizzazione è duale al caso causale. In generale una risposta impulsiva può essere pensata come una funzione di t che ha valori su tutto l'asse, ovvero che include sia una parte causale che una parte anti-causale. Tali sistemi si dicono *non-causali*. I sistemi di interesse pratico sono sistemi lineari stabili in cui la risposta impulsiva va a zero per $|t| \rightarrow \infty$. Il problema della fisica realizzabilità di un sistema che ha una risposta impulsiva che si estende anche sul semiasse delle t negative, si risolve, in maniera approssimata, realizzando un sistema $h(t - \Delta)$, piuttosto che $h(t)$, con $\Delta > 0$ sufficientemente grande. In tal caso il sistema

$$h(t - \Delta)u(t), \quad (6.9)$$

è causale e realizza una approssimazione di $h(t)$ a meno di un ritardo e di un troncamento trascurabile se $h(t)$ per $t < -\Delta$ è sufficientemente piccolo.

6.1.2 Il metodo grafico

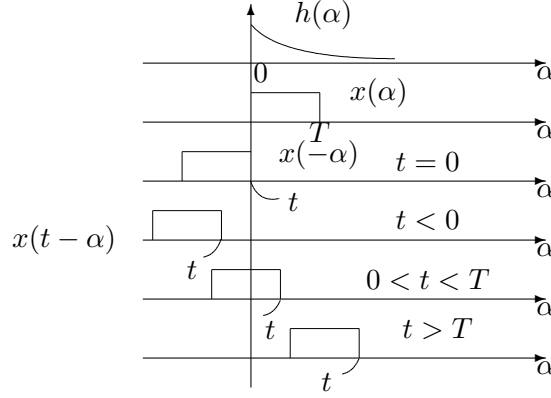
Il calcolo analitico della convoluzione, specialmente quando si ha a che fare con funzioni definite a tratti, può risultare un pò insidioso. Il seguente metodo grafico risulta molto utile e rivela in maniera più esplicita la natura della operazione di convoluzione. Si riscriva l'integrale come

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)x(-(\alpha - t))d\alpha, \quad (6.10)$$

e si riportino su un grafico le funzioni $h(\alpha)$ e $x(-(\alpha - t))$ per vari valori di t . Si noti che la funzione $x(-(\alpha - t))$ è la funzione $x(\alpha)$ capovolta, $x(-\alpha)$ (flipped), e traslata di t (shifted). L'integrale di convoluzione viene valutato sugli intervalli in cui è partizionato l'asse dei tempi. Un esempio chiarirà il semplice metodo.

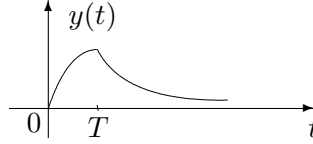
Esempio 6.1 Si valuti la convoluzione dei due segnali

$$h(t) = e^{-\beta t} u(t); \quad x(t) = \Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right). \quad (6.11)$$



$$\begin{aligned} \text{per } t < 0 & \quad y(t) = 0; \\ \text{per } 0 < t < T & \quad y(t) = \int_0^T e^{-\beta\alpha} d\alpha = \frac{e^{-\beta\alpha}}{-\beta} \Big|_0^t = \frac{1}{\beta} (1 - e^{-\beta t}); \\ \text{per } t > T & \quad y(t) = \int_{t-T}^t e^{-\beta\alpha} d\alpha = \frac{e^{-\beta\alpha}}{-\beta} \Big|_{t-T}^t = \frac{e^{\beta T} - 1}{\beta} e^{-\beta t}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

La figura seguente mostra il risultato.



6.2 La risposta armonica

Nel dominio della frequenza un sistema lineare è descritto dalla trasformata di Fourier della risposta impulsiva, detta *risposta armonica*

$$H(f) = \mathcal{F}[h(t)] = |H(f)| e^{j\angle H(f)}. \quad (6.13)$$

Per la proprietà della convoluzione della trasformata di Fourier, l'uscita del sistema nel dominio della frequenza è semplicemente

$$Y(f) = H(f) X(f), \quad (6.14)$$

dove $X(f)$ e $Y(f)$ sono le trasformate di Fourier di $x(t)$ e $y(t)$ rispettivamente. La risposta armonica è in generale una funzione complessa e si definiscono *risposta armonica di ampiezza* e *risposta armonica di fase* rispettivamente

$$A(f) = |H(f)|; \quad \phi(f) = \angle H(f). \quad (6.15)$$

La risposta armonica è anche esprimibile in termini di parte reale e parte immaginaria

$$H(f) = H_R(f) + jH_I(f). \quad (6.16)$$

I legami con modulo e fase della risposta armonica sono ovviamente

$$A(f) = \sqrt{H_R^2(f) + H_I^2(f)}; \quad \phi(f) = \tan^{-1} \frac{H_I(f)}{H_R(f)}; \quad (6.17)$$

$$H_R(f) = A(f) \cos \phi(f); \quad H_I(f) = A(f) \sin \phi(f). \quad (6.18)$$

L'uscita del sistema nel dominio della frequenza è

$$Y(f) = H(f)X(f) = A(f)|X(f)|e^{j(\phi(f) + \angle X(f))}. \quad (6.19)$$

Quindi l'ampiezza e la fase della uscita sono rispettivamente

$$|Y(f)| = A(f)|X(f)|; \quad \angle Y(f) = \phi(f) + \angle X(f). \quad (6.20)$$

Quindi un sistema lineare “pesa” le varie componenti frequenziali dell'ingresso secondo la propria risposta di ampiezza e “aggiunge” alla fase dell'ingresso quella del sistema.

6.2.1 Distorsione lineare

Un segnale processato da un sistema lineare risulta in genere alterato nel contributo relativo delle ampiezze e delle fasi delle sue componenti frequenziali. Tale effetto è detto *distorsione lineare*¹ e corrisponde a un segnale che è generalmente diverso nella sua forma nel dominio del tempo. Si veda ad esempio la figura 6.1. La distorsione può essere desiderata o indesiderata. Per esempio, se si vuole trasmettere un segnale su un canale senza alterarne la forma, la distorsione è un effetto da contenere; viceversa, un sistema lineare può essere usato come “filtro”, alterando in maniera mirata, o selettiva, il segnale di ingresso. Un sistema lineare che non altera la “forma” del segnale è detto *non distortente*. In particolare un segnale è non distorto dal sistema lineare se esso è solo scalato e ritardato, ovvero se

$$y(t) = k x(t - t_0), \quad \forall k, t_0. \quad (6.21)$$

¹La distorsione non lineare non sarà trattata in queste note.

Nel dominio della frequenza la condizione di non distorsione si riscrive come

$$Y(f) = k e^{-j2\pi f t_0} X(f). \quad (6.22)$$

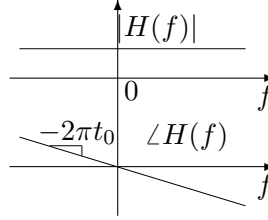
Nel dominio del tempo il sistema ha risposta impulsiva

$$h(t) = k \delta(t - t_0). \quad (6.23)$$

Pertanto:

Un sistema lineare è non distorcente se, la sua risposta armonica ha ampiezza costante e fase lineare, ovvero

$$H(f) = k; \quad \angle H(f) = \beta f. \quad (6.24)$$



La costante β è chiaramente legata al ritardo t_0 introdotto dal sistema

$$t_0 = -\frac{\beta}{2\pi}. \quad (6.25)$$

Se $t_0 > 0$, ovvero la pendenza β è negativa, il sistema ritarda il segnale, altrimenti lo anticipa. Il sistema ideale mostrato in figura, non distorcente a tutte le frequenze dello spettro, è ovviamente una idealizzazione matematica. Infatti, un sistema fisico a banda infinita non può esistere. Nelle applicazioni quindi, la condizione di non distorsione viene applicata, o solo come condizione ideale, oppure come condizione da applicare solo alla porzione dell'asse delle frequenze che interessa il segnale $x(t)$. In particolare, se il segnale d'ingresso ha componenti spettrali solo in alcune bande di frequenza, il comportamento del sistema al di fuori di esse risulta irrilevante ai fini dello studio dell'uscita. Pertanto una definizione più adatta di sistema non distorcente è:

Un sistema lineare è non distorcente per il segnale $x(t)$ se, la sua risposta armonica ha ampiezza costante e fase lineare, alle frequenze di $x(t)$

$$H(f) = k; \quad \angle H(f) = \beta f, \quad \forall f : X(f) \neq 0. \quad (6.26)$$

La distorsione di un sistema può anche essere solo di ampiezza, o solo di fase. In particolare un sistema è non distorcente in ampiezza, se il modulo della

risposta armonica è costante; un sistema è non distorcente in fase se la fase è una funzione lineare di f . Nelle applicazioni esistono situazioni in cui è necessario imporre, o enfatizzare, uno, o entrambi i tipi di distorsione. La distorsione di ampiezza introduce dei cambiamenti sul segnale che dipendono dalle variazioni sul peso relativo delle varie componenti dello spettro. La distorsione di fase, invece, causa un cambiamento della forma del segnale mediante delle variazioni sui ritardi relativi delle varie componenti frequenziali. Un esempio chiarirà il concetto.

Esempio 6.2 Questo esempio ha come scopo mostrare gli effetti della distorsione di ampiezza e/o di fase su un segnale semplice. Si consideri un segnale $x(t)$ costituito dalla sovrapposizione di due sinusoidi a frequenze f_1 e f_2 , con ampiezze e fasi arbitrarie

$$x(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t + \theta_1) + A_2 \cos(2\pi f_2 t + \theta_2). \quad (6.27)$$

La trasformata di Fourier di $x(t)$ è

$$\begin{aligned} X(f) &= \frac{A_1}{2} \left(e^{j\theta_1} \delta(f - f_1) + e^{-j\theta_1} \delta(f + f_1) \right) \\ &\quad + \frac{A_2}{2} \left(e^{j\theta_2} \delta(f - f_2) + e^{-j\theta_2} \delta(f + f_2) \right) \end{aligned} \quad (6.28)$$

La trasformata di Fourier dell'uscita di un sistema non distorcente con caratteristiche $H(f) = k = \text{cost}$ e $\angle H(f) = -\alpha f$, è

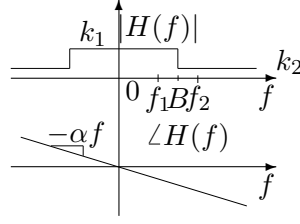
$$\begin{aligned} Y(f) &= \frac{A_1 k}{2} \left(e^{j(\theta_1 - \alpha f_1)} \delta(f - f_1) + e^{-j(\theta_1 - \alpha f_1)} \delta(f + f_1) \right) \\ &\quad + \frac{A_2 k}{2} \left(e^{j(\theta_2 - \alpha f_2)} \delta(f - f_2) + e^{-j(\theta_2 - \alpha f_2)} \delta(f + f_2) \right) \end{aligned} \quad (6.29)$$

Nel dominio del tempo la risposta è

$$\begin{aligned} y(t) &= A_1 k \cos(2\pi f_1 t + \theta_1 - \alpha f_1) + A_2 k \cos(2\pi f_2 t + \theta_2 - \alpha f_2) \\ &= A_1 k \cos\left(2\pi f_1 \left(t - \frac{\alpha}{2\pi}\right) + \theta_1\right) + A_2 k \cos\left(2\pi f_2 \left(t - \frac{\alpha}{2\pi}\right) + \theta_2\right) \\ &= k x\left(t - \frac{\alpha}{2\pi}\right). \end{aligned} \quad (6.30)$$

Quindi la risposta del sistema è semplicemente scalata di k e ritardata di $t_0 = \alpha/2\pi$.

Supponiamo ora che la risposta di fase sia ancora lineare, ma la risposta di ampiezza sia pari a k_1 per $|f| < B$ e k_2 altrove, con $f_1 < B < f_2$ come mostrato in figura.

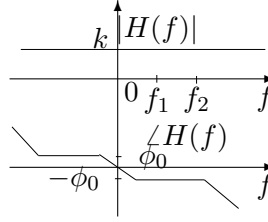


La risposta nel dominio del tempo è ora

$$y(t) = A_1 k_1 \cos\left(2\pi f_1\left(t - \frac{\alpha}{2\pi}\right) + \theta_1\right) + A_2 k_2 \cos\left(2\pi f_2\left(t - \frac{\alpha}{2\pi}\right) + \theta_2\right). \quad (6.31)$$

Il segnale è distorto in ampiezza, ma non in fase. Le due componenti sono diversamente pesate, anche se si sommano con lo stesso ritardo.

La situazione è diversa se il sistema è distorto in fase, come mostrato nella figura seguente.



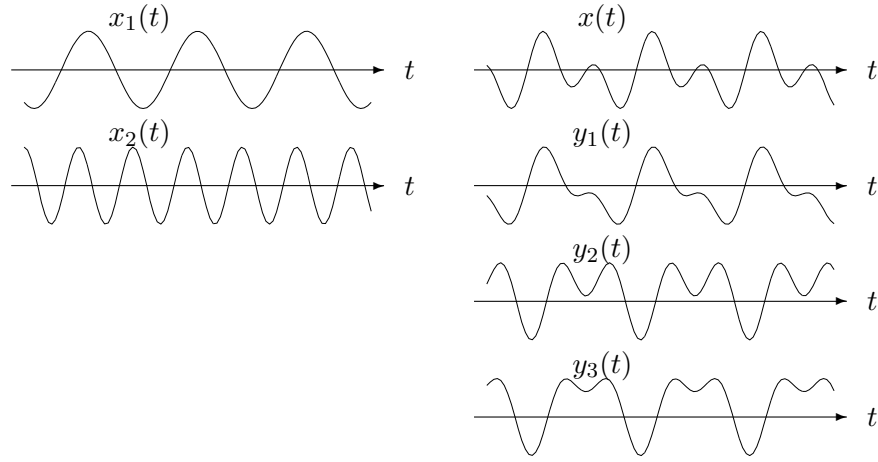
Si è scelta nell'esempio una caratteristica di fase costante (quindi non lineare) e pari a $-\phi_0$ per la banda che interessa le due frequenze f_1 e f_2 . Il segnale risultante all'uscita del sistema è

$$\begin{aligned} y(t) &= A_1 k \cos(2\pi f_1 t + \theta_1 - \phi_0) + A_2 k \cos(2\pi f_2 t + \theta_2 - \phi_0) \\ &= A_1 k \cos\left(2\pi f_1\left(t - \frac{\phi_0}{2\pi f_1}\right) + \theta_1\right) + A_2 k \cos\left(2\pi f_2\left(t - \frac{\phi_0}{2\pi f_2}\right) + \theta_2\right). \end{aligned}$$

Le due componenti, anche se sono scalate della stessa quantità, si sommano con ritardi diversi

$$t_1 = \frac{\phi_0}{2\pi f_1}; \quad t_2 = \frac{\phi_0}{2\pi f_2}. \quad (6.32)$$

La figura che segue mostra un esempio con due sinusoidi $x_1(t) = \cos(t)$ e $x_2(t) = \cos(2t + 1.15)$. Il segnale $x(t)$ è la combinazione lineare: $x(t) = x_1(t) + 1.2x_2(t)$; il segnale $y_1(t)$ è $x(t)$ distorto solo in ampiezza: $y_1(t) = 2x_1(t) + 1.2x_2(t)$; il segnale $y_2(t)$ è invece $x(t)$ distorto solo in fase: $y_2(t) = \cos(t - 2) + 1.2\cos(2t + 1.15 - 2)$. Si noti la diversa forma del segnale causata dal diverso allineamento delle due componenti. Il segnale $y_3(t)$ è $x(t)$ distorto in fase e in ampiezza: $y_3(t) = 2\cos(t - 2) + 1.2\cos(2t + 1.15 - 2)$.



6.2.2 Ritardo di gruppo e di fase

Per tenere conto della distorsione di fase di un sistema lineare, ovvero della deviazione dalla linearità della caratteristica di fase alle varie frequenze, si introducono le seguenti definizioni.

Definizione: Si definisce *ritardo di gruppo* di un sistema lineare avente risposta di fase $\phi(f)$

$$t_g(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{df} \phi(f). \quad (6.33)$$

Quindi se il sistema è non distorcente in fase, ovvero se $\phi(f) = -2\pi t_0 f$, il ritardo di gruppo è costante ed è proprio pari al ritardo introdotto dal sistema

$$t_g(f) = t_0. \quad (6.34)$$

Il ritardo di gruppo, rappresentando la pendenza ad ogni frequenza della risposta di fase, ci fornisce per ogni componente frequenziale una descrizione puntuale della distorsione introdotta dal sistema. A volte nelle applicazioni si usa anche il ritardo di fase così definito.

Definizione: Si definisce *ritardo di fase* di un sistema lineare avente risposta di fase $\phi(f)$

$$t_\phi(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\phi(f)}{f}. \quad (6.35)$$

Anche per il ritardo di fase, se il sistema è non distorcente in fase, ovvero se $\phi(f) = -2\pi t_0 f$, il ritardo di fase è costante ed è proprio pari al ritardo introdotto dal sistema

$$t_\phi(f) = t_0. \quad (6.36)$$

Il ritardo di fase e di gruppo vengono entrambi usati nelle applicazioni per caratterizzare le proprietà distorcenti di un sistema lineare. Si preferisce usare il ritardo di fase o di gruppo a seconda della applicazione e della facilità di calcolo. In effetti il ritardo di gruppo è proprio il ritardo di propagazione per ogni componente frequenziale che attraversa il sistema lineare e tra i due è quello preferibile.

Nel valutare le caratteristiche di distorsione di un sistema lineare si riportano spesso su un grafico parallelamente la risposta di ampiezza e il ritardo di gruppo (o di fase). Esaminiamo un esempio.

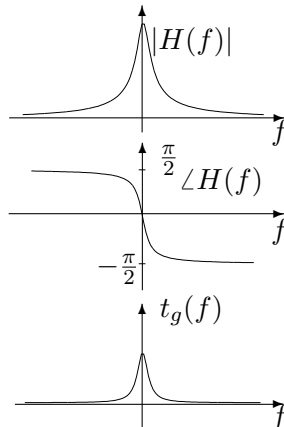
Esempio 6.3 Si consideri il sistema lineare avente risposta impulsiva $h(t) = ke^{-\alpha t}u(t)$. La risposta armonica, già più volte calcolata, è

$$H(f) = \frac{k}{\alpha + j2\pi f}. \quad (6.37)$$

Ampiezza, fase e ritardo di gruppo sono facilmente calcolate e sono rispettivamente

$$|H(f)| = \frac{k}{\sqrt{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}}; \quad \angle H(f) = -\tan^{-1} \frac{2\pi f}{\alpha}; \quad t_g(f) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}. \quad (6.38)$$

La seguente figura mostra le tre funzioni.



6.3 Sistemi LTI e densità spettrali

La risposta armonica, con le sue caratteristiche di ampiezza e di fase, consente una descrizione completa del comportamento del sistema LTI rispetto a qualunque segnale d'ingresso. Nelle applicazioni, è spesso utile enfatizzare solo le caratteristiche di ampiezza del sistema e in particolare la sua capacità di modificare

la densità spettrale (o la autocorrelazione) del segnale di ingresso, sia esso un segnale deterministico o aleatorio. Una tale descrizione parziale del sistema è opportuna quando bisogna solo valutare energie e potenze, o quando si vuole studiare il comportamento filtrante del sistema. In tali casi le caratteristiche di fase della risposta armonica vengono ignorate.

Proprietà 6.4 Si consideri un sistema lineare tempo-invariante, avente risposta impulsiva $h(t)$. Sia l'ingresso $x(t)$ un segnale deterministico. L'uscita $y(t)$ ha autocorrelazione

$$r_y(\tau) = (r_h * r_x)(\tau), \quad (6.39)$$

dove $r_h(\tau)$ e $r_x(\tau)$ sono rispettivamente le autocorrelazioni della risposta impulsiva e del segnale $x(t)$. Il risultato vale entrambi per segnali $x(t)$ di energia e di potenza.

Prova: Sia $x(t)$ un segnale di energia. Se il sistema è stabile, l'uscita sarà anch'essa un segnale di energia. Valutiamone l'autocorrelazione

$$\begin{aligned} r_y(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t)y^*(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\eta_1)x(t-\eta_1)d\eta_1 \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} h^*(\eta_2)x^*(t-\tau-\eta_2)d\eta_2 \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\eta_1)h^*(\eta_2) \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\eta_1)x^*(t-\tau-\eta_2)d\eta_1 d\eta_2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\eta_1)h^*(\eta_2) \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)x^*(\alpha+\eta_1-\tau-\eta_2)d\alpha d\eta_1 d\eta_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\eta_1)h^*(\eta_2)r_x(\tau-\eta_1+\eta_2)d\eta_1 d\eta_2 \end{aligned}$$

Eseguendo il cambio di variabili $\beta = -\eta_2 + \eta_1$, abbiamo

$$\begin{aligned} r_y(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\eta_1)h^*(\eta_1-\beta)r_x(\tau-\beta)d\eta_1 d\beta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\eta_1)h^*(\eta_1-\beta)d\eta_1 \right) r_x(\tau-\beta)d\beta \\ &= (r_h * r_x)(\tau). \end{aligned} \quad (6.40)$$

Sia $x(t)$ un segnale di potenza. Il segnale di uscita sarà anch'esso un segnale di potenza avente autocorrelazione

$$\begin{aligned} r_y(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t)y^*(t-\tau)dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\eta_1)x(t-\eta_1)d\eta_1 \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} h^*(\eta_2)x^*(t-\tau-\eta_2)d\eta_2 \right) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\eta_1) h^*(\eta_2) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t - \eta_1) x^*(t - \tau - \eta_2) dt \, d\eta_1 d\eta_2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\eta_1) h^*(\eta_2) r_x(\tau - \eta_1 + \eta_2) d\eta_1 d\eta_2
\end{aligned}$$

Eseguendo il cambio di variabili $\beta = -\eta_2 + \eta_1$, abbiamo

$$\begin{aligned}
r_y(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\eta_1) h^*(\eta_1 - \beta) r_x(\tau - \beta) d\eta_1 d\beta \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\eta_1) h^*(\eta_1 - \beta) d\eta_1 \right) r_x(\tau - \beta) d\beta \\
&= (r_h * r_x)(\tau).
\end{aligned} \tag{6.41}$$

Si noti che le autocorrelazioni dell'ingresso e dell'uscita sono definite in maniera diversa a seconda che si tratti di segnali di energia o di potenza. Diversamente la autocorrelazione di $h(t)$ è sempre la autocorrelazione di un segnale di energia.

Proprietà 6.5 Dato un sistema lineare tempo-invariante con ingresso $x(t)$, uscita $y(t)$ e risposta impulsiva $h(t)$, la densità spettrale dell'uscita è

$$\mathcal{E}_y(f) = |H(f)|^2 \mathcal{E}_x(f), \quad \text{per segnali di energia;} \tag{6.42}$$

$$\mathcal{P}_y(f) = |H(f)|^2 \mathcal{P}_x(f), \quad \text{per segnali di potenza.} \tag{6.43}$$

Prova: Basta trasformare secondo Fourier il risultato della proprietà 6.4 sulla autocorrelazione dell'uscita di un sistema lineare.

Risultati del tutto analoghi si ottengono quando il segnale di ingresso è un processo aleatorio.

Proprietà 6.6 Sia $X(t)$ un segnale aleatorio di energia posto all'ingresso di un sistema LTI avente risposta impulsiva $h(t)$. Il segnale aleatorio di energia $Y(t)$ in uscita al sistema, ha autocorrelazione media pari a

$$\overline{R}_Y(\tau) = (r_h * \overline{R}_X)(\tau), \tag{6.44}$$

dove $\overline{R}_X(\tau)$ è la autocorrelazione media di $X(t)$.

Prova: Ricordiamo innanzitutto che un segnale aleatorio di energia non può essere stazionario. Nonostante ciò abbiamo introdotto la definizione di autocorrelazione media, che applicata sia all'ingresso che all'uscita ci fornisce facilmente il risultato.

$$\begin{aligned}
\overline{R}_Y(\tau) &= \mathcal{F}^{-1} [\overline{\mathcal{E}}_Y(f)] = \mathcal{F}^{-1} [E[|Y(f)|^2]] = \mathcal{F}^{-1} [E[|H(f)X(f)|^2]] \\
&= \mathcal{F}^{-1} [|H(f)|^2 E[|X(f)|^2]] \\
&= \mathcal{F}^{-1} [|H(f)|^2 \overline{\mathcal{E}}_X(f)] = (r_h * \overline{R}_X)(\tau).
\end{aligned} \tag{6.45}$$

Proprietà 6.7 Sia $X(t)$ un segnale aleatorio di potenza stazionario almeno in senso lato, posto all'ingresso di un sistema LTI avente risposta impulsiva $h(t)$. Il segnale aleatorio di potenza $Y(t)$ in uscita al sistema, è stazionario in senso lato e ha autocorrelazione pari a

$$R_Y(\tau) = (r_h * R_X)(\tau), \quad (6.46)$$

dove $R_X(\tau)$ è la autocorrelazione del segnale $X(t)$.

Prova: Il segnale di uscita $Y(t)$ è un processo aleatorio avente autocorrelazione

$$\begin{aligned} R_Y(t; \tau) &= E[Y(t)Y^*(t - \tau)] \\ &= E \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)X(t - \xi)d\xi \int_{-\infty}^{\infty} h^*(\eta)X^*(t - \tau - \eta)d\eta \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)h^*(\eta)E[X(t - \xi)X^*(t - \tau - \eta)]d\xi d\eta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)h^*(\eta)R_X(\tau - \xi + \eta)d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (6.47)$$

Quindi l'uscita è un segnale stazionario in senso lato in quanto $R_Y(t; \tau)$ non dipende da t . Effettuando il cambio di variabili $\alpha = \xi - \eta$, abbiamo il risultato

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)h^*(\xi - \alpha)d\xi R_X(\tau - \alpha)d\alpha \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} r_h(\alpha)R_X(\tau - \alpha)d\alpha = (r_h * R_X)(\tau). \end{aligned} \quad (6.48)$$

Proprietà 6.8 Dato un sistema lineare tempo-invariante che ha all'ingresso il processo aleatorio $X(t)$, all'uscita il processo $Y(t)$ e risposta impulsiva $h(t)$, si ha che la densità spettrale dell'uscita è

$$\overline{\mathcal{E}}_Y(f) = |H(f)|^2 \overline{\mathcal{E}}_X(f), \quad \text{per segnali aleatori di energia;} \quad (6.49)$$

$$P_Y(f) = |H(f)|^2 P_X(f), \quad \text{per segnali aleatori di potenza.} \quad (6.50)$$

Prova: Basta trasformare secondo Fourier il risultato delle proprietà 6.6 e 6.7 sulla autocorrelazione dell'uscita di un sistema lineare.

Le proprietà appena dimostrate portano alla naturale definizione di *funzione di trasferimento di potenza (o di energia)* per un sistema lineare:

$$g_h(f) = |H(f)|^2. \quad (6.51)$$

Dalla proprietà di simmetria dello spettro, si ha che $g_h(f)$ è simmetrica e quindi può essere studiata esclusivamente per frequenze positive. E' anche possibile

definire una funzione di trasferimento della energia (e della potenza) unilatera. Si tralascia la ovvia estensione per brevità di trattazione. La funzione appena definita, che dipende solo dalle caratteristiche della risposta in ampiezza del sistema, costituisce una utile descrizione del sistema perché mostra, al di là dei dettagli sul comportamento di fase, come le varie componenti dello spettro dell'ingresso vengano *filtrate* dal sistema. La seguente nomenclatura per tipici comportamenti di sistemi lineari, detti *filtri* è immediata.

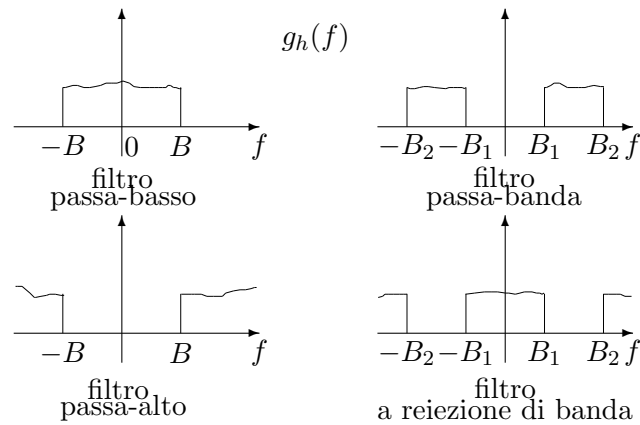
Un sistema lineare è un *filtro passa-basso* (LPF, Low-Pass Filter) se $g_h(f) \neq 0$, $f \in [-B, B]$. L'intervallo $[-B, B]$ è detto *banda passante*. La frequenza B è detta *banda* del segnale. Il complemento alla banda $[-B, B]$ è detto *banda oscura*.

Un sistema lineare è un *filtro passa-alto* (HPF, High-Pass Filter) se $g_h(f) \neq 0$, $f \in]-\infty, -B] \cup [B, \infty[$.

Un sistema lineare è un *filtro passa-banda* (BPF, Band-Pass Filter) se $g_h(f) \neq 0$, $f \in [-B_2, -B_1] \cup [B_1, B_2]$. L'intervallo $[B_1, B_2]$ è detto banda passante. La frequenza $B_2 - B_1$ è detta *larghezza di banda*.

Un sistema lineare è un *filtro elimina-banda*, o *filtro a banda oscura*, o *filtro a reiezione di banda* (SBF, Stop-Band Filter), se $g_h(f) = 0$, $f \in [-B_2, -B_1] \cup [B_1, B_2]$.

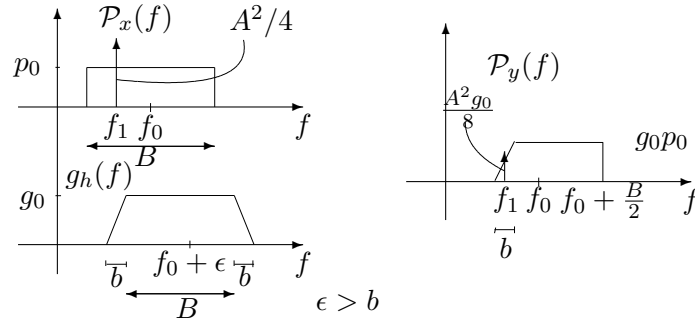
La figura seguente mostra graficamente le quattro definizioni in analogia alle definizioni date per i segnali.



E' opportuno enfatizzare che la similarità formale dei quattro casi, segnali deterministici di energia e potenza, segnali aleatori di energia e potenza, consente di trattare i sistemi filtranti senza necessariamente specificare a quale tipologia di segnali stiamo facendo riferimento. Infatti le proprietà presentate si applicano

a tutti e quattro i tipi di segnali, dove è diversa solo la definizione di autocorrelazione e di densità spettrale. E' evidente che la interpretazioni dei risultati va focalizzata sul modello in oggetto.

Esempio 6.4 Un segnale deterministico $x(t)$ caratterizzato dallo spettro di potenza $\mathcal{P}_x(f)$ è posto all'ingresso di un sistema lineare avente densità spettrale $g_h(f)$. Le densità spettrali di ingresso e sistema sono mostrate in figura (per $f > 0$).



Si valuti la densità spettrale dell'uscita e la potenza dell'uscita e dell'ingresso.

Soluzione: La densità spettrale di potenza dell'uscita si calcola come

$$\mathcal{P}_y(f) = g_h(f)\mathcal{P}_x(f), \quad (6.52)$$

ed è mostrata nella figura a fianco delle densità di ingresso del sistema. La sinusoide di ampiezza A e frequenza f_1 cade esattamente a metà della banda di transizione del filtro. La potenza del segnale di ingresso è la somma dell'area del rettangolo (due volte) e della potenza della sinusoide

$$\mathcal{P}_x = 2Bp_0 + \frac{A^2}{2}. \quad (6.53)$$

La potenza in uscita è la somma dell'area del trapezio risultante (due volte) e della potenza della sinusoide attenuata

$$\mathcal{P}_y = bg_0p_0 + 2(f_0 + \frac{B}{2} - f_1 - \frac{b}{2})g_0p_0 + \frac{A^2g_0}{4}. \quad (6.54)$$

Esempio 6.5 Un segnale bianco con densità spettrale di potenza

$$\mathcal{P}_s(f) = \frac{\eta_0}{2}, \quad (6.55)$$

è posto all'ingresso di un filtro passa-banda ideale a spettro piatto attorno alla frequenza f_0 e banda B . Il valore della funzione di trasferimento di potenza

in quella banda è g_0 . Si valuti lo spettro di potenza dell'uscita, e la potenza dell'ingresso e dell'uscita.

Soluzione: Il segnale all'ingresso del filtro è a potenza infinita e autocorrelazione impulsiva

$$r_s(\tau) = \frac{\eta_0}{2} \delta(\tau). \quad (6.56)$$

Il sistema ha una funzione di trasferimento della potenza pari a

$$g_h(f) = |H(f)|^2 = g_0 \left(\Pi \left(\frac{f - f_0}{B} \right) + \Pi \left(\frac{f + f_0}{B} \right) \right). \quad (6.57)$$

L'uscita sarà un segnale “colorato” passa-banda con densità spettrale di potenza pari a

$$\mathcal{P}_y(f) = |H(f)|^2 g_h(f) = g_0 \frac{\eta_0}{2} \left(\Pi \left(\frac{f - f_0}{B} \right) + \Pi \left(\frac{f + f_0}{B} \right) \right). \quad (6.58)$$

La potenza dell'uscita è

$$\mathcal{P}_y = g_0 \eta_0 B. \quad (6.59)$$

La funzione di trasferimento di potenza (o di energia) $g_h(f)$ può anche essere riportata in decibel, per maggiore facilità di impiego.

$$\begin{aligned} [g_h(f)]_{dB} &= 10 \log_{10} \frac{g_h(f)}{g_0} = 10 \log_{10} \frac{|H(f)|^2}{g_0} \\ &= 20 \log_{10} \frac{|H(f)|}{\sqrt{g_0}}, \end{aligned} \quad (6.60)$$

dove g_0 è un valore di riferimento scelto ad esempio come

$$g_0 = \max_f g_h(f); \quad \text{oppure} \quad g_0 = g_h(0); \quad \text{o altro.} \quad (6.61)$$

Come già menzionato nel primo capitolo, l'utilità della rappresentazione in decibel consiste anche nella facilità di impiego quando si ha a che fare con un sistema a cascata. Si consideri il sistema di figura 6.2.

Il segnale di uscita è

$$y(t) = (h_1 * h_2 * \dots * h_N)(t), \quad (6.62)$$

dove $h_1(t), h_2(t), \dots, h_N(t)$ sono le risposte impulsive dei sistemi in cascata. Nel dominio della frequenza si ha

$$Y(f) = H_1(f) H_2(f) \dots H_N(f) X(f), \quad (6.63)$$

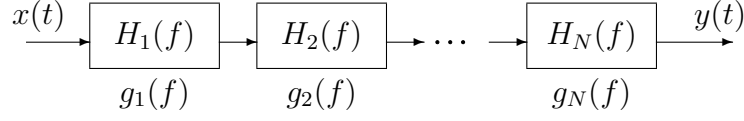


Figura 6.2: Una cascata di N sistemi lineari: $\{H_1(f), \dots, H_N(f)\}$ sono le risposte armoniche e $\{g_1(f), \dots, g_N(f)\}$ sono le funzioni di trasferimento di potenza (o di energia).

dove $H_1(f), H_2(f), \dots, H_N(f)$ sono le risposte armoniche. Se la attenzione è rivolta agli spettri di potenza (o di energia), la funzione di trasferimento della potenza o della energia complessiva è

$$g_t(f) = g_1(f)g_2(f) \cdots g_N(f), \quad (6.64)$$

dove $g_i(f) = |H_i(f)|^2, i = 1, \dots, N$. Esprimendo in decibel le funzioni di trasferimento della potenza, i contributi dei vari blocchi possono essere semplicemente sommati

$$[g_t(f)]_{dB} = [g_1(f)]_{dB} + [g_2(f)]_{dB} + \dots + [g_N(f)]_{dB}. \quad (6.65)$$

Il lettore noti come tale espressione generalizzi quella ottenuta in riferimento ai semplici guadagni.

6.4 Altre relazioni notevoli

Riportiamo qui alcune relazioni notevoli per auto e mutua correlazione per più segnali che sono ingressi o uscite di più sistemi lineari. Figura 6.3 mostra due sistemi lineari aventi risposte impulsive rispettivamente $h_1(t)$ e $h_2(t)$, e ingressi $x_1(t)$ e $x_2(t)$. Nelle applicazioni è utile considerare le autocorrelazioni di ingressi e di uscite (già considerate), ma anche le mutue correlazioni, per esempio, tra l'ingresso del primo sistema e l'uscita del secondo, la mutua correlazione tra le due uscite, la mutua correlazione tra l'uscita e l'ingresso di ogni sistema, eccetera. La seguente relazione notevole consente il calcolo esplicito di tutte le quantità menzionate.

Proprietà 6.9 Si considerino due sistemi lineari aventi risposte impulsive $h_1(t)$ e $h_2(t)$, e agli ingressi i due segnali deterministici $x_1(t)$ e $x_2(t)$. La mutua correlazione tra le due uscite è data dalla espressione

$$r_{y_1 y_2}(\tau) = (r_{h_1 h_2} * r_{x_1 x_2})(\tau), \quad (6.66)$$

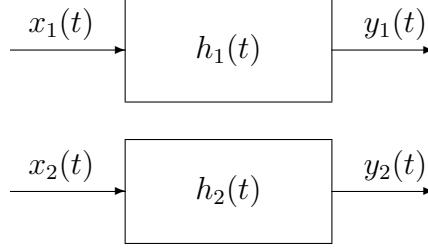


Figura 6.3: Due sistemi lineari generici con ingressi $x_1(t)$ e $x_2(t)$.

dove $r_{h_1 h_2}(\tau)$ è la mutua correlazione tra le risposte impulsive e $r_{x_1 x_2}(\tau)$ è la mutua correlazione tra i due segnali di ingresso. La relazione vale sia per segnali di energia che per segnali di potenza.

Prova: Suggesta negli esercizi.

Proprietà 6.10 Si considerino due sistemi lineari aventi risposte impulsive $h_1(t)$ e $h_2(t)$, e agli ingressi i due segnali aleatori di potenza $X_1(t)$ e $X_2(t)$. I due segnali siano singolarmente e mutuamente stazionari almeno in senso lato. La mutua correlazione tra le due uscite è data dalla espressione

$$R_{y_1 y_2}(\tau) = (r_{h_1 h_2} * R_{x_1 x_2})(\tau), \quad (6.67)$$

dove $r_{h_1 h_2}(\tau)$ è la mutua correlazione (deterministica) tra le risposte impulsive e $R_{x_1 x_2}(\tau)$ è la mutua correlazione (statistica) tra i due segnali di ingresso.

Prova: Suggesta negli esercizi.

Proprietà 6.11 Si considerino due sistemi lineari aventi risposte impulsive $h_1(t)$ e $h_2(t)$, e agli ingressi i due segnali aleatori di energia $X_1(t)$ e $X_2(t)$. La mutua correlazione media tra le due uscite è data dalla espressione

$$\overline{R}_{y_1 y_2}(\tau) = (r_{h_1 h_2} * \overline{R}_{x_1 x_2})(\tau), \quad (6.68)$$

dove abbiamo usato le mutue correlazioni medie per ingressi e uscite.

Prova: Suggesta negli esercizi.

Le relazioni trovate nelle proprietà precedenti, sono tutte riconducibili alla stessa proprietà per diverse definizioni delle mutue correlazioni. Da questa unica relazione è possibile ricavare alcuni corollari. Figura 6.4 mostra alcuni esempi

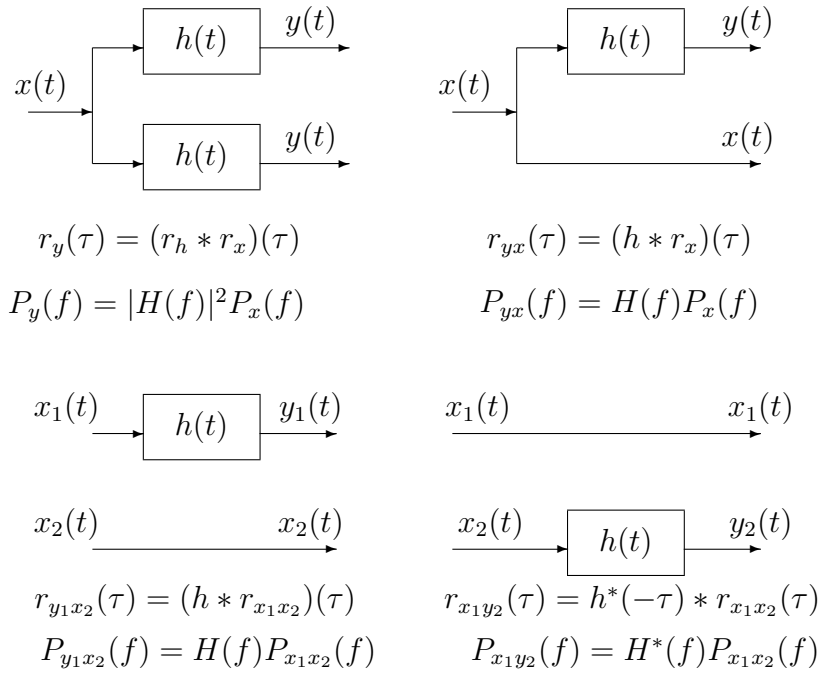


Figura 6.4: Alcuni risultati notevoli ottenibili come casi particolari sui due sistemi lineari.

con i relativi risultati. I risultati sono immediati se si ricordi che: un sistema “trasparente” ha risposta impulsiva $h(t) = \delta(t)$; la mutua correlazione tra $h_1(t)$ e $h_2(t)$ è

$$r_{h_1 h_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(t) h_2^*(t - \tau) dt; \quad (6.69)$$

la mutua correlazione tra $h(t)$ e $\delta(t)$ è $h(t)$; la mutua correlazione tra $\delta(t)$ e $h(t)$ è

$$r_{\delta h}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) h^*(t - \tau) dt = h^*(-\tau). \quad (6.70)$$

Nel dominio della frequenza, la proprietà sui due sistemi lineari è riscritta

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{y_1 y_2}(f) &= H_1(f) H_2^*(f) \mathcal{E}_{x_1 x_2}(f), & \text{per segnali di energia deterministici;} \\ \mathcal{P}_{y_1 y_2}(f) &= H_1(f) H_2^*(f) \mathcal{P}_{x_1 x_2}(f), & \text{per segnali di potenza deterministici;} \\ \mathcal{P}_{y_1 y_2}(f) &= H_1(f) H_2^*(f) \mathcal{P}_{x_1 x_2}(f), & \text{per segnali di potenza aleatori;} \\ \bar{\mathcal{E}}_{y_1 y_2}(f) &= H_1(f) H_2^*(f) \bar{\mathcal{E}}_{x_1 x_2}(f), & \text{per segnali di energia aleatori.} \end{aligned}$$

6.5 Problemi

Problema 6.1 Schizzare le seguenti risposte impulsive e stabilire per ognuna di esse se corrisponde ad un sistema: causale, anti-causale o non-causale; stabile o instabile.

$$\begin{aligned} h(t) = & \alpha e^{-\beta|t|}; \Lambda\left(\frac{t}{T}\right); e^{\beta t}u(t); -tu(t); e^{\alpha t}; \Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right); A e^{-\alpha t} \cos(2\pi f_0 t); \\ & A e^{-\alpha t} \sin(2\pi f_0 t) u(t); -u(-t); e^{-(t-t_0)}u(t - t_0). \end{aligned} \quad (6.71)$$

Tutti i parametri nelle formule sono positivi.

Problema 6.2 Calcolare e schizzare con il metodo grafico la convoluzione $z(t) = (x * y)(t)$ per

- (a) $x(t) = A\Pi\left(\frac{t}{T}\right); y(t) = e^{-\alpha t}u(t);$
- (b) $x(t) = A e^{-\alpha t}u(t); y(t) = \frac{A}{2}e^{-\alpha t}u(t);$
- (c) $x(t) = A e^{\alpha t}u(-t); y(t) = u(t);$
- (d) $x(t) = A_1\Pi\left(\frac{t}{T}\right); y(t) = A_2\Pi\left(\frac{t}{2T}\right);$
- (e) $x(t) = A_1\Pi\left(\frac{t+T/2}{T}\right); y(t) = A_2\Pi\left(\frac{t+5T}{T}\right);$

Problema 6.3 Valutare la risposta armonica per i sistemi aventi le seguenti risposte impulsive. Per ognuna di esse si valuti e si schizzi la risposta di ampiezza, la risposta di fase e il ritardo di gruppo.

- (a) $h(t) = Ate^{-\alpha t}u(t);$ (b) $h(t) = Ae^{-\alpha|t|};$ (c) $h(t) = Ae^{-\alpha t} \cos 2\pi f_0 t;$ (d) $h(t) = \Lambda\left(\frac{t-T}{T}\right).$

Problema 6.4 Un processo aleatorio di potenza $X(t)$ e densità spettrale pari a $P_X(f) = \Lambda\left(\frac{f}{\Delta}\right)$ è posto all'ingresso di una cascata di due sistemi passa-basso con freq di taglio $4/\Delta$ e $2/\Delta$, e guadagno α e β rispettivamente. Calcolare lo spettro di potenza e la potenza all'uscita del primo e del secondo blocco.

Problema 6.5 Si consideri un segnale aleatorio passa-basso $X(t)$ di potenza P_X e frequenza massima f_{max} . Il segnale è propagato in un mezzo dispersivo avente risposta impulsiva $h(t) = At e^{-\alpha t}u(t)$. Il segnale ricevuto $Y(t)$ è la sovrapposizione del segnale distorto da $h(t)$ e di una sua replica distorta da $h(t)$, ritardata di Δ e attenuata di un fattore α con $0 < \alpha < 1$. Valutare lo spettro di potenza del segnale ricevuto.

Problema 6.6 Dimostrare le Proprietà 6.9, 6.10 e 6.11

Capitolo 7

Canali e filtri

La teoria dei segnali deterministici e aleatori viene applicata al modello di canale lineare analogico. Viene inoltre affrontato il problema del filtraggio dei segnali in uscita al canale. La valutazione delle prestazioni dei filtri lineari rispetto agli effetti distorcenti e del rumore viene affrontato e discusso ai fini del progetto efficace del filtro ricevente. Nel sistema classico di comunicazione in banda base viene anche introdotta la soluzione mediante filtri di pre-enfasi e di de-enfasi e del filtro a minima distorsione.

7.1 Introduzione

Nei sistemi di telecomunicazione la protezione dell'informazione dagli inevitabili disturbi e dalle distorsioni che vengono introdotti sui canali di trasmissione, costituisce una delle problematiche fondamentali. Ad esempio, sul canale elettromagnetico, a seconda delle bande di frequenza impiegate, il *rumore* può assumere caratteristiche molto diverse. Analogamente il canale può comportarsi in maniera selettiva, e quindi distorcere, a volte in maniera irreversibile, il segnale di informazione. Altri esempi di canale fisico sono: un cavo coassiale, un doppino telefonico, un canale di propagazione acustica guidata o libera, una guida d'onda, ecc. In tutti questi casi la teoria dei segnali ci fornisce lo stesso schema formale di riferimento: il segnale di informazione è distorto, tipicamente in maniera lineare, ed è contaminato da componenti indesiderate tutte raggruppate formalmente in un segnale di *rumore*.

La figura 7.1 mostra tale schema di principio in cui il segnale di informazione $s(t)$ è distorto dal sistema lineare $h_c(t)$ ed è contaminato dal rumore $n(t)$.

Il segnale risultante è $x(t) = (s * h_c)(t) + n(t)$. Il disturbo $n(t)$ è un segnale indesiderato, tipicamente totalmente indipendente da $s(t)$, di cui non si conosce molto, eccetto che per alcune caratterizzazioni medie come lo spettro di potenza

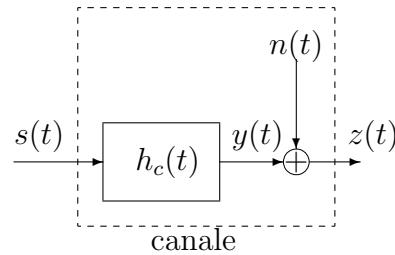
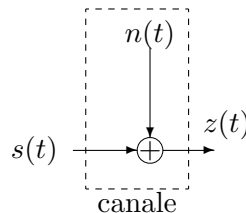


Figura 7.1: Lo schema di distorsione e contaminazione del segnale $s(t)$.

(o di energia) e magari la pdf marginale nel caso aleatorio. Il segnale di informazione $s(t)$ è anch'esso tipicamente un segnale di cui si conoscono solo le caratteristiche medie quali lo spettro di potenza, o magari una forma parametrica con qualche parametro variabile (come nei segnali usati nella modulazione). Il sistema lineare con risposta impulsiva $h_c(t)$ modella la dispersione temporale subita dal segnale e potrebbe essere totalmente noto, o magari conosciuto sono nella sua funzione di trasferimento dell'energia $g_c(f) = |H_c(f)|^2$. Il sistema nel suo complesso rappresenta il nostro modello equivalente di *canale*. Nella analisi di quanto il canale abbia *guastato* il segnale $s(t)$ è necessario scegliere uno schema formale di riferimento, ovvero scegliere se i segnali in gioco sono deterministici o aleatori. In effetti la trattazione nei due casi è molto simile e pertanto, per economicità di esposizione, supporremo che i segnali $s(t)$ e $n(t)$ siano dei segnali deterministici. La estensione al caso di segnali aleatori è immediata e sarà chiarita negli esempi.

7.1.1 Canale senza distorsione

Esaminiamo prima il caso di un canale che presenta solo il rumore additivo. In tal caso $h_c(t) = \delta(t)$ e $y(t) = s(t)$. Il modello di canale è mostrato in figura.



Dalla teoria esposta nel capitolo precedenti abbiamo che la autocorrelazione di $z(t)$ è

$$\begin{aligned} r_z(\tau) &= r_s(\tau) + r_n(\tau) + r_{sn}(\tau) + r_{ns}(\tau) \\ &= r_s(\tau) + r_n(\tau) + r_{sn}(\tau) + r_{sn}^*(-\tau), \end{aligned} \quad (7.1)$$

sia per segnali di potenza che di energia. Nel dominio della frequenza, la densità spettrale di $z(t)$ è

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_z(f) &= \mathcal{E}_s(f) + \mathcal{E}_n(f) + \mathcal{E}_{sn}(f) + \mathcal{E}_{sn}^*(f) \\ &= \mathcal{E}_s(f) + \mathcal{E}_n(f) + 2\operatorname{Re}[\mathcal{E}_{sn}(f)], \end{aligned} \quad (7.2)$$

se si tratta di segnali di energia;

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_z(f) &= \mathcal{P}_s(f) + \mathcal{P}_n(f) + \mathcal{P}_{sn}(f) + \mathcal{P}_{sn}^*(f) \\ &= \mathcal{P}_s(f) + \mathcal{P}_n(f) + 2\operatorname{Re}[\mathcal{P}_{sn}(f)], \end{aligned} \quad (7.3)$$

se si tratta di segnali di potenza. Quindi il calcolo della densità spettrale del segnale contaminato richiede in generale anche la conoscenza della mutua correlazione, o dello spettro mutuo, tra i segnali che si sommano. Nel caso tipico di rumore indipendente dal segnale, si assume che il segnale di informazione e il rumore siano incoerenti, ovvero che

$$r_{sn}(\tau) = 0, \quad \forall \tau. \quad (7.4)$$

La assunzione di incoerenza è ragionevole quando nel sistema fisico il rumore è il risultato di cause che non hanno nulla a che fare con il segnale di informazione $s(t)$ e quindi è esclusa qualunque relazione reciproca. Sotto queste ipotesi la autocorrelazione di $z(t)$ diventa semplicemente

$$r_z(\tau) = r_s(\tau) + r_n(\tau). \quad (7.5)$$

In tal caso gli effetti di segnale rumore sono separati nella somma e abbiamo che

$$\mathcal{E}_z(f) = \mathcal{E}_s(f) + \mathcal{E}_n(f), \quad (7.6)$$

per segnali di energia, e

$$\mathcal{P}_z(f) = \mathcal{P}_s(f) + \mathcal{P}_n(f), \quad (7.7)$$

per segnali di potenza. Per misurare l'entità della contaminazione di $s(t)$, si definisce *rapporto segnale-rumore* (SNR, Signal-to-Noise Ratio), il rapporto tra la energia (o la potenza) del segnale e la energia (o la potenza) del rumore

$$\begin{aligned} SNR &= \frac{\mathcal{E}_s}{\mathcal{E}_n}, & \text{per segnali di energia;} \\ SNR &= \frac{\mathcal{P}_s}{\mathcal{P}_n}, & \text{per segnali di potenza} \end{aligned} \quad (7.8)$$

I rapporti segnale-rumore sono adimensionali e vengono spesso convenientemente misurati in dB

$$SNR_{dB} = 10 \log_{10} SNR. \quad (7.9)$$

Se invece si usa il rapporto tra le energie, o le potenze efficaci, la formula è

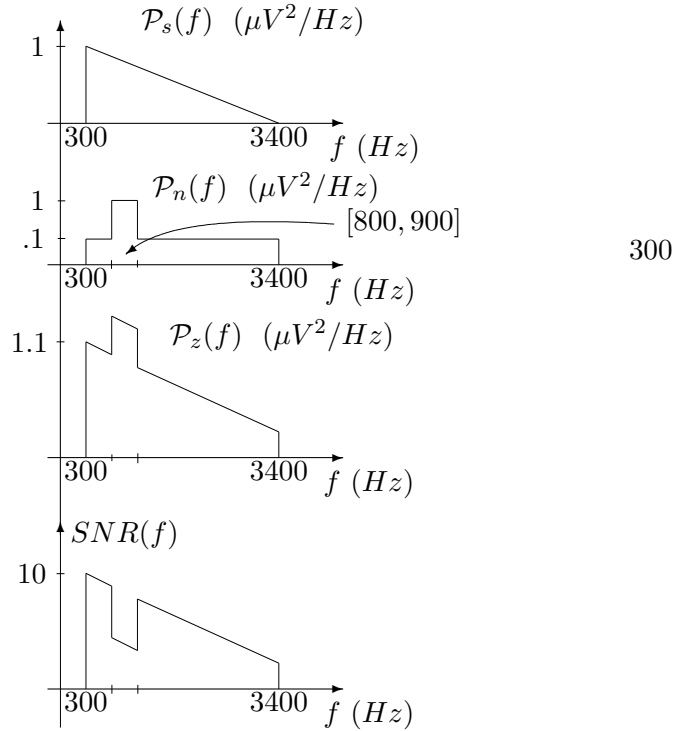
$$\begin{aligned} SNR_{dB} &= 20 \log_{10} \frac{\sqrt{\mathcal{E}_s}}{\sqrt{\mathcal{E}_n}}, & \text{per segnali di energia;} \\ SNR_{dB} &= 20 \log_{10} \frac{\sqrt{\mathcal{P}_s}}{\sqrt{\mathcal{P}_n}}, & \text{per segnali di potenza} \end{aligned} \quad (7.10)$$

Quando invece interessa valutare il rapporto di potenza alle varie frequenze, si definisce *rapporto segnale-rumore spot*, il rapporto tra la densità del segnale e quella del rumore

$$\begin{aligned} SNR(f) &= \frac{\mathcal{E}_s(f)}{\mathcal{E}_n(f)}, & \text{per segnali di energia;} \\ SNR(f) &= \frac{\mathcal{P}_s(f)}{\mathcal{P}_n(f)}, & \text{per segnali di potenza.} \end{aligned} \quad (7.11)$$

Ovviamente le definizioni valgono alla frequenze per cui $\mathcal{E}_n(f) \neq 0$, o $\mathcal{P}_n(f) \neq 0$, rispettivamente. Anche il rapporto segnale-rumore spot può essere espresso in dB trattandosi di una funzione adimensionale. Il lettore noti che per ottenere il rapporto segnale-rumore non è possibile integrare il rapporto segnale-rumore spot, ma bisogna necessariamente integrare separatamente le funzioni al numeratore e al denominatore.

Esempio 7.1 Si consideri un segnale vocale $s(t)$ di qualità telefonica, ottenuto all'uscita di un microfono. Il segnale è un segnale di tensione e ha lo spettro di potenza $\mathcal{P}_s(f)$ rappresentato in figura nella banda $[300, 3400]$ Hz (il comportamento spettrale è ipotetico; gli spettri di segnali vocali sono più complicati e tempo-varianti). A tale segnale, nella stessa banda, si somma un disturbo $n(t)$, incoerente con $s(t)$ e descritto dallo spettro di potenza $\mathcal{P}_n(f)$ di figura. Il disturbo è piatto nella banda, eccetto che per una ulteriore componente passa-banda nell'intervallo $[800, 900]$ Hz, assunta anch'essa piatta. Si valuti lo spettro di potenza della somma, il rapporto segnale-rumore e il rapporto segnale-rumore spot.



Soluzione: La figura mostra lo spettro di potenza $\mathcal{P}_x(f) = \mathcal{P}_s(f) + \mathcal{P}_n(f)$. E' evidente la presenza del picco nella banda $[800, 900]$ Hz dovuto al rumore passa-banda. La potenza del segnale è $\mathcal{P}_s = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_s(f) df = 2 \left(\frac{3400-300}{2} \right) = 3100 \mu V^2$. La potenza del rumore è $\mathcal{P}_n = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_n(f) df = 2(3400 - 300)0.1 + 2 \cdot 100 \cdot 0.9 = 800 \mu V^2$. Il rapporto segnale-rumore è

$$SNR = \frac{\mathcal{P}_s}{\mathcal{P}_n} = 3100/800 = 3.875. \quad (7.12)$$

In decibel abbiamo invece

$$SNR_{dB} = 10 \log_{10} \frac{\mathcal{P}_s}{\mathcal{P}_n} = 10 \log_{10} 3.875 = 5.88 \text{ dB}. \quad (7.13)$$

La figura è mostrata anche il rapporto segnale-rumore spot $SNR(f)$ che evidenzia come la banda $[800, 900]$ Hz sia la più contaminata. Si noti che $SNR(f)$ è definito solo nella banda $[300, 3400]$.

Esempio 7.2 Si consideri un segnale $S(t)$ aleatorio, reale, stazionario, passa-basso ideale e avente frequenza massima pari a 20 KHz. Al segnale si aggiunge un disturbo $N(t)$ aleatorio, stazionario, passa-banda, indipendente da $S(t)$ e dalla

caratteristica spettrale piatta nella banda $1 - 1.05$ KHz. Il rapporto segnale-rumore sia di 10 dB. Studiare il sistema determinando la relazione tra i parametri degli spettri di potenza di segnale, rumore e segnale rumoroso. **Soluzione:** Il segnale rumoroso $Z(t) = S(t) + N(t)$ ha autocorrelazione

$$\begin{aligned}
 R_Z(t, \tau) &= E[Z(t)Z(t - \tau)] = E[(S(t) + N(t))(S(t - \tau) + N(t - \tau))] \\
 &= E[S(t)S(t - \tau)] + E[N(t)N(t - \tau)] \\
 &\quad + E[N(t)S(t - \tau)] + E[S(t)N(t - \tau)] \\
 &= R_S(\tau) + R_N(\tau) + R_{NS}(\tau) + R_{SN}(\tau).
 \end{aligned} \tag{7.14}$$

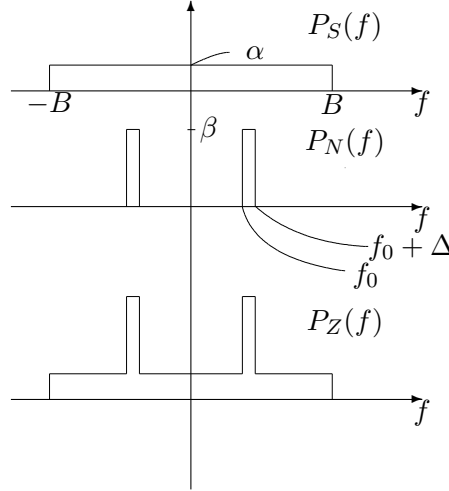
La ipotesi di indipendenza implica che la autocorrelazione di $Z(t)$ diventi

$$R_Z(\tau) = R_S(\tau) + R_N(\tau), \tag{7.15}$$

e che anche gli spettri di potenza si sommino

$$P_Z(f) = P_S(f) + P_N(f). \tag{7.16}$$

La figura eguente mostra i tre spettri di potenza, dove $B = 20$ KHz, $f_0 = 1$ KHz e $\Delta = 50$ Hz



Il rapporto segnale-rumore, supposto di 10 dB, corrisponde ad un rapporto tra le potenze pari a $10^{\frac{10}{10}} = 10$. La potenza di $S(t)$ è $P_S = 2B\alpha$; la potenza di $N(t)$ è $P_N = 2\Delta\beta$, pertanto $SNR = \frac{2B\alpha}{2\Delta\beta} = 10$ e la relazione tra α e β è

$$\beta = 10 \frac{B}{\Delta} \alpha = 10 \frac{20000}{50} \alpha = 4000\alpha. \tag{7.17}$$

7.1.2 Canale con distorsione

Consideriamo ora il sistema più generale di figura 7.1. Il segnale all'uscita del sistema distorcente $y(t) = (s * h_c)(t)$ ha autocorrelazione

$$r_y(\tau) = (r_{h_c} * r_s)(\tau), \quad (7.18)$$

ovvero densità spettrale

$$\mathcal{E}_y(f) = |H_c(f)|^2 \mathcal{E}_s(f); \quad (7.19)$$

$$\mathcal{P}_y(f) = |H_c(f)|^2 \mathcal{P}_s(f), \quad (7.20)$$

a seconda che $s(t)$ sia un segnale di energia o di potenza. Dopo l'aggiunta del rumore il segnale risultante $z(t) = y(t) + n(t)$, ha autocorrelazione

$$r_z(\tau) = r_y(\tau) + r_n(\tau) + r_{ny}(\tau) + r_{yn}(\tau). \quad (7.21)$$

La mutua correlazione tra $y(t)$ e $n(t)$, utilizzando le relazioni ricavate nel capitolo precedente si scrive

$$r_{ny}(\tau) = (h_c * r_{ns})(\tau), \quad (7.22)$$

ed è nulla poichè il segnale $s(t)$ e il rumore $n(t)$ sono incoerenti. Pertanto

$$r_z(\tau) = r_y(\tau) + r_n(\tau). \quad (7.23)$$

Le densità spettrali sono

$$\mathcal{E}_z(f) = \mathcal{E}_y(f) + \mathcal{E}_n(f), \quad (7.24)$$

$$\mathcal{P}_z(f) = \mathcal{P}_y(f) + \mathcal{P}_n(f), \quad (7.25)$$

rispettivamente per $s(t)$ segnale di energia o di potenza. Si ricordi che $y(t)$ è un segnale di energia o di potenza se $s(t)$ è un segnale di energia o di potenza rispettivamente. Ciò è una immediata conseguenza della stabilità di $h_c(t)$.

Analogamente al caso senza distorsione, l'entità della contaminazione del segnale distorto da parte del rumore può essere valutata mediante il rapporto segnale-rumore

$$SNR = \frac{\mathcal{E}_y}{\mathcal{E}_n} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |H_c(f)|^2 \mathcal{E}_s(f) df}{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_n(f) df}, \quad (7.26)$$

per segnali di energia e

$$SNR = \frac{\mathcal{P}_y}{\mathcal{P}_n} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |H_c(f)|^2 \mathcal{P}_s(f) df}{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_n(f) df}, \quad (7.27)$$

per segnali di potenza.

Il rapporto calcolato fornisce una indicazione sulla presenza del rumore sulla componente di segnale, ma piuttosto impropriamente caratterizza la diversità tra il segnale originario e il segnale ricevuto $z(t)$, in quanto non si è tenuto conto della distorsione. Una misura più appropriata può essere calcolata considerando il segnale differenza

$$e(t) = z(t) - s(t). \quad (7.28)$$

Esso rappresenta lo scostamento (segnale di errore) del segnale ricevuto da quello trasmesso e include chiaramente sia distorsione che rumore. In effetti, poiché il sistema lineare potrebbe introdurre una attenuazione (o una amplificazione) e un ritardo, senza compromettere la qualità del segnale, una qualche scala K e un ritardo t_0 sono accettabili. Il segnale differenza (errore) si può più propriamente definire come

$$e(t) = z(t) - Ks(t - t_0), \quad (7.29)$$

Nell'analisi che seguirà, manterremo esplicita la dipendenza da un possibile ritardo t_0 e da una possibile scala K che in ogni problema specifico possono essere determinati a priori, come vedremo in seguito. Si tratta della scala e del ritardo a cui la componente di segnale in uscita è da considerarsi perfettamente riprodotta. Riscrivendo il segnale ricevuto come

$$z(t) = Ks(t - t_0) + e(t), \quad (7.30)$$

il segnale $e(t)$ assume il significato di *rumore* (o errore) che contamina $Ks(t - t_0)$ all'uscita della catena. Si noti che, poiché il segnale $e(t)$ include anche la distorsione, esso è correlato con $s(t)$. Ai fini della caratterizzazione completa di $e(t)$, studiamo la sua autocorrelazione e la sua correlazione con $z(t)$ e $s(t)$ (usiamo la notazione compatta per semplicità di notazione).

$$\begin{aligned} r_e(\tau) &= \langle e(t)e^*(t - \tau) \rangle \\ &= \langle (z(t) - Ks(t - t_0))(z(t - \tau) - Ks(t - t_0 - \tau))^* \rangle \\ &= r_z(\tau) + K^2 r_s(\tau) - Kr_{sz}(\tau - t_0) - Kr_{zs}(\tau + t_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{sz}(\tau) &= \langle s(t)z^*(t - \tau) \rangle \\ &= \langle s(t)(y(t - \tau) + n(t - \tau))^* \rangle \\ &= r_{sy}(\tau), \end{aligned} \quad (7.31)$$

dove è stata usata la incoerenza tra $s(t)$ e $n(t)$. Analogamente $r_{zs}(\tau) = r_{ys}(\tau)$. Dalle relazioni notevoli si ha

$$r_{sy}(\tau) = (h_c^*(-) * r_s)(\tau); \quad r_{ys}(\tau) = (h_c * r_s)(\tau). \quad (7.32)$$

Pertanto la autocorrelazione del segnale errore è

$$\begin{aligned}
 r_e(\tau) &= r_y(\tau) + r_n(\tau) + K^2 r_s(\tau) - K r_{sy}(\tau - t_0) - K r_{ys}(\tau + t_0) \\
 &= (r_{h_c} * r_s)(\tau) + r_n(\tau) + K^2 r_s(\tau) \\
 &\quad - K(h_c^*(-) * r_s)(\tau - t_0) - K(h_c * r_s)(\tau + t_0)
 \end{aligned} \tag{7.33}$$

Nel dominio della frequenza per i segnali di energia, la densità spettrale è

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_e(f) &= |H_c(f)|^2 \mathcal{E}_s(f) + \mathcal{E}_n(f) + K^2 \mathcal{E}_s(f) \\
 &\quad - K e^{-j2\pi f t_0} H_c^*(f) \mathcal{E}_s(f) - K e^{j2\pi f t_0} H_c(f) \mathcal{E}_s(f) \\
 &= \left(|H_c(f)|^2 + K^2 - 2K \operatorname{Re}[H_c(f) e^{j2\pi f t_0}] \right) \mathcal{E}_s(f) + \mathcal{E}_n(f) \\
 &= \left(|H_c(f)|^2 + K^2 - 2K |H_c(f)| \cos(2\pi f t_0 + \phi_c(f)) \right) \mathcal{E}_s(f) + \mathcal{E}_n(f) \\
 &= \mathcal{G}_c(f) \mathcal{E}_s(f) + \mathcal{E}_n(f),
 \end{aligned} \tag{7.34}$$

dove $\phi_c(f)$ è la risposta di fase del canale e

$$\mathcal{G}_c(f) = |H_c(f)|^2 + K^2 - 2K \operatorname{Re}[H_c(f) e^{j2\pi f t_0}] \tag{7.35}$$

$$= |H_c(f)|^2 + K^2 - 2K |H_c(f)| \cos(2\pi f t_0 + \phi_c(f)). \tag{7.36}$$

Il lettore ricordi che $\mathcal{F}[s^*(-t)] = S^*(f)$, che $x + x^* = 2 \operatorname{Re}[x]$ e che le densità spettrali sono reali. Per i segnali di potenza si ha analogamente

$$\mathcal{P}_e(f) = \mathcal{G}_c(f) \mathcal{P}_s(f) + \mathcal{P}_n(f), \tag{7.37}$$

Le espressioni ricavate consentono di ricavare energia o potenza del segnale di errore. Ricordiamo che il segnale in uscita è $Ks(t-t_0)$ e il rumore $e(t)$. La qualità del segnale ricevuto può essere caratterizzata dal rapporto segnale-rumore

$$\begin{aligned}
 SNR_e &= \frac{K^2 \mathcal{E}_s}{\mathcal{E}_e} = \frac{K^2 r_s(0)}{r_e(0)} = \frac{K^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_s(f) df}{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_e(f) df} = \frac{K^2 \mathcal{E}_s}{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_c(f) \mathcal{E}_s(f) df + \mathcal{E}_n}, \\
 SNR_e &= \frac{K^2 \mathcal{P}_s}{\mathcal{P}_e} = \frac{K^2 r_s(0)}{r_e(0)} = \frac{K^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_s(f) df}{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_e(f) df} = \frac{K^2 \mathcal{P}_s}{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_c(f) \mathcal{P}_s(f) df + \mathcal{P}_n},
 \end{aligned}$$

rispettivamente per segnali di energia e di potenza. Si noti che il rapporto segnale-rumore è funzione del ritardo t_0 e del parametro di scala K . Essi vanno determinati in partenza. Il altro serve che si valuti il ritardo e la scala alla quale il segnale in uscita è considerato non distorto. Come vedremo negli esempi, ciò può essere facilmente determinato rispetto ad una frequenza di riferimento. Le potenze o le energie vengono calcolate dalle autocorrelazioni o dalle densità spettrali a seconda della facilità di calcolo e dei dati a disposizione nel caso specifico.

Esempio 7.3 Un segnale deterministico di potenza ha una densità spettrale pari a $\eta_0 \mu V^2/Hz$ nella banda $[f_1 \ f_2]$ Hz. Esso è distorto da un sistema avente risposta impulsiva $h_c(t) = Ae^{-\alpha t}u(t)$ (tipo filtro RC), ed è contaminato da un rumore indipendente a spettro piatto nella stessa banda che ha densità spettrale pari a $\xi_0 \mu V^2/Hz$. Valutare il rapporto segnale-rumore all'uscita del sistema e l'effetto della distorsione. **Soluzione:** L'esempio ricalca esattamente lo schema appena discusso. Ricordiamo che la trasformata di Fourier di $h_c(t)$ è $H_c(f) = A/(\alpha + j2\pi f)$. Poiché segnale e rumore sono incoerenti, $\mathcal{P}_z(f) = \mathcal{P}_y(f) + \mathcal{P}_n(f)$. La potenza della componente di segnale $y(t)$ è

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_y &= \int_{-\infty}^{\infty} |H_c(f)|^2 \mathcal{P}_s(f) df = 2 \int_{f_1}^{f_2} \frac{A^2 \eta_0}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2} df \\ &= \frac{2A^2 \eta_0}{\alpha^2} \int_{f_1}^{f_2} \frac{1}{1 + \frac{4\pi^2 f^2}{\alpha^2}} df = \frac{2A^2 \eta_0}{\alpha^2} \left[\frac{\alpha}{2\pi} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{2\pi f}{\alpha} \right) \right]_{f_1}^{f_2} \\ &= \frac{A^2 \eta_0}{\pi \alpha} \left(\operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{2\pi f_2}{\alpha} \right) - \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{2\pi f_1}{\alpha} \right) \right).\end{aligned}\quad (7.38)$$

La potenza del rumore è $\mathcal{P}_n = 2(f_2 - f_1)\xi_0$. Il rapporto segnale-rumore è $SNR = \mathcal{P}_y/\mathcal{P}_n$.

Per valutare la distorsione è necessario identificare la scala K e il ritardo t_0 di riferimento. Prendiamo come riferimento la frequenza di centro banda $f_0 = (f_1 + f_2)/2$ Hz. Il guadagno di ampiezza e il ritardo di gruppo a quella frequenza vengono scelti come valori di riferimento, ovvero

$$|H_c(f)|_{f=f_0} = \frac{A}{\sqrt{\alpha^2 + 4\pi^2 f_0^2}} = K; \quad (7.39)$$

$$t_{gc}(f)|_{f=f_0} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f_0^2} = t_0. \quad (7.40)$$

Questa scelta significa che la componente a frequenza f_0 del segnale non subisce né distorsione di fase né di ampiezza. Con questa assunzione

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_c(f) &= \frac{A^2}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2} + K^2 - 2K \operatorname{Re} \left[\frac{Ae^{j2\pi f t_0}}{\alpha + j2\pi f} \right] \\ &= \frac{A^2 + K^2 \alpha^2 + 4\pi^2 K^2 f^2 - 2KA(\alpha \cos 2\pi f t_0 + 2\pi f \sin 2\pi f t_0)}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}\end{aligned}\quad (7.41)$$

La densità spettrale del segnale errore $e(t)$ è

$$\mathcal{P}_e(f) = \mathcal{G}_c(f) \mathcal{P}_s(f) + \mathcal{P}_n(f). \quad (7.42)$$

Le potenze sono $\mathcal{P}_s = 2 \int_{f_1}^{f_2} \eta_0 df = 2(f_2 - f_1)\eta_0$,

$$\mathcal{P}_e = 2 \int_{f_1}^{f_2} \mathcal{G}_c(f) \eta_0 df + \mathcal{P}_n. \quad (7.43)$$

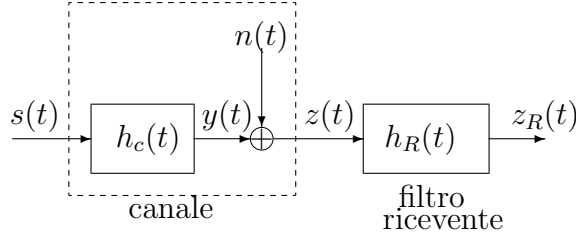


Figura 7.2: Lo schema di canale equivalente seguito dal filtro ricevente $h_R(t)$.

Il rapporto segnale-rumore si scrive

$$SNR_e = \frac{K^2 \mathcal{P}_s}{\mathcal{P}_e} = \frac{2K^2(f_2 - f_1)\eta_0}{2 \int_{f_1}^{f_2} \mathcal{G}_c(f) \eta_0 df + 2(f_2 - f_1)\xi_0}. \quad (7.44)$$

Definiti i parametri specifici, l'integrale può essere facilmente valutato numericamente usando, ad esempio, la funzione Matlab **quadl()**. Un esempio numerico specifico è suggerito negli esercizi.

7.1.3 Filtraggio

Il modello di canale esposto fa sorgere la naturale domanda se sia possibile ridurre o compensare gli effetti negativi del canale indotti sul segnale mediante una operazione di *filtraggio* sul segnale ricevuto. Si intuisce già dall'inizio che una elaborazione sul segnale ricevuto non potrà ripristinare perfettamente il segnale $s(t)$, ma tenderà a realizzarne una stima. Figura 7.2 mostra uno schema a blocchi in cui il segnale $z(t)$ all'uscita del canale è posto all'ingresso di un sistema lineare avente risposta impulsiva $h_R(t)$ (*filtro ricevente*). La funzione del filtro è compensare al meglio la distorsione introdotta dal canale e ridurre gli effetti del rumore. Prima di affrontare il problema del progetto del filtro ricevente, analizziamo il sistema e riportiamo qualche considerazione generale.

Canale con solo rumore

Consideriamo prima il caso di canale non distorcente, ovvero una schema di canale con il segnale $s(t)$ contaminato solo dal rumore $n(t)$. E' immediato osservare che una semplice amplificazione del segnale $z(t)$ non sortirebbe alcun effetto, poiché amplificherebbe sia il segnale che il rumore nella stessa proporzione

lasciando il rapporto segnale-rumore inalterato. Ai fini di una riduzione del rumore è necessario pertanto agire sullo spettro in maniera selettiva: se il rumore è maggiormente concentrato su alcune bande, mediante un opportuna risposta armonica del filtro ricevente si cerca di ridurne gli effetti. Ciò inevitabilmente viene realizzato a spese di una distorsione sul segnale $s(t)$. Il filtro ha il compito di ridurre l'effetto del rumore e fornire un segnale $z_R(t)$ più simile possibile ad una versione indistorta di $s(t)$ agendo sulle diversità in frequenza di $s(t)$ e $n(t)$. Intuitivamente, il filtro va progettato in modo da attenuare il segnale $z(t)$ nelle bande dove c'è più rumore, e amplificarlo nelle bande in cui c'è più segnale. Poiché in generale segnale e rumore si sovrappongono in frequenza, la riduzione degli effetti del rumore non potrà che realizzare un compromesso tra distorsione introdotta e riduzione del rumore. Esistono varie strategie per la ottimizzazione del filtro $h_R(t)$. Alcune saranno illustrate nel seguito di queste note.

Canale con sola distorsione

E' utile analizzare anche il caso in cui il canale introduce solo distorsione, ovvero il segnale all'ingresso del filtro ricevente è solo $y(t) = (h_c * s)(t)$. Una tale modello (comunque piuttosto irrealistico anche per alcune delle considerazioni che seguiranno) si presenta se il rumore è di entità trascurabile rispetto alla distorsione. In tal caso il filtro ricevente deve realizzare la *inversione* di $h_c(t)$, ovvero essere tale che la cascata di canale e filtro ricevente realizzi un sistema non distorcente, ovvero

$$(h_c * h_R)(t) = K\delta(t - t_0), \quad (7.45)$$

per un qualche guadagno complessivo K e ritardo t_0 . Più realisticamente la condizione di non distorsione applicata solo alle frequenze del segnale $s(t)$ si scrive come

$$|H_C(f)| \cdot |H_R(f)| = K; \quad \phi_c(f) + \phi_R(f) = -2\pi t_0 f, \quad \forall f \in \mathcal{I}_s, \quad (7.46)$$

dove \mathcal{I}_s è il sottoinsieme dell'asse delle frequenze in cui il segnale $s(t)$ ha spettro non nullo. La risposta desiderata per il filtro ricevente è quindi

$$|H_R(f)| = \frac{K}{|H_C(f)|}; \quad \phi_R(f) = \phi_c(f) - 2\pi t_0 f, \quad \forall f \in \mathcal{I}_s. \quad (7.47)$$

La soluzione per il filtro ricevente merita qualche considerazione:

- La risposta di ampiezza diverge alle frequenze in cui $|H_C(f)| = 0$. Questo è evidentemente la conseguenza del fatto che il contributo di $s(t)$ a quelle frequenze è stato cancellato dal canale. Nel progetto pertanto bisognerà limitare la risposta a quelle frequenze.

- Spesso la risposta in frequenza di $H_R(f)$ non è esattamente realizzabile ed è necessario accettarne una approssimazione.
- In alcune applicazioni la distorsione di fase non è cruciale (come nei segnali audio) e le specifiche sul filtro ricevente possono essere più lasche e limitate alle sole caratteristiche di ampiezza.
- Del rumore non previsto nel progetto potrebbe essere presente all'ingresso del filtro ed essere amplificato all'uscita del filtro riducendo, o addirittura eliminando, gli effetti benefici del filtro.

Sarà (come sempre) la sensibilità del progettista a determinare quali sono le approssimazioni più opportune. Proporremo a tale scopo alcuni esempi di progetto che dovrebbero guidare il lettore ad una analisi dettagliata dei vari problemi.

Caso generale

Analizziamo ora il sistema in presenza dell'effetto combinato della distorsione temporale, del rumore e del filtro ricevente.

L'uscita del filtro ricevente di figura 7.2 è

$$z_R(t) = (h_R * h_c * s)(t) + (h_R * n)(t) = s_R(t) + n_R(t). \quad (7.48)$$

All'uscita sono quindi presenti due componenti: una prima $s_R(t)$, dovuta solo al segnale (*componente di segnale a destinazione*) ed una seconda $n_R(t)$, dovuta solo al rumore (*componente di rumore a destinazione*). Nel dominio della frequenza abbiamo

$$Z_R(f) = H_R(f)H_c(f)S(f) + H_R(f)N(f) = S_R(f) + N_R(f). \quad (7.49)$$

L'obiettivo del filtro ricevente è quindi quello di ottenere una componente di rumore in uscita $n_R(t)$ più ridotta possibile e una componente di segnale $s_R(t)$ più simile possibile ad una versione indistorta di $s(t)$.

Assumendo per economicità di trattazione di considerare solo segnali di potenza e aver supposto incoerenza tra segnale e rumore, abbiamo

$$\mathcal{P}_{z_R}(f) = |H_R(f)|^2 |H_c(f)|^2 \mathcal{P}_s(f) + |H_R(f)|^2 \mathcal{P}_n(f). \quad (7.50)$$

Il rapporto segnale-rumore all'uscita è il rapporto tra la potenza della componente di segnale a destinazione e quella di rumore

$$SNR_R = \frac{\mathcal{P}_{s_R}}{\mathcal{P}_{n_R}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 |H_c(f)|^2 \mathcal{P}_s(f) df}{\int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 \mathcal{P}_n(f) df}. \quad (7.51)$$

Altro parametro utile nella valutazione delle prestazioni del sistema è il rapporto segnale-rumore all'ingresso del filtro ricevente

$$SNR_{in} = \frac{\mathcal{P}_s}{\mathcal{P}_n} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |H_c(f)|^2 \mathcal{P}_s(f) df}{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_n(f) df}. \quad (7.52)$$

Il confronto tra SNR_{in} e SNR_R ci fornisce una utile indicazione sulla efficacia del filtro sulla riduzione del rumore in uscita.

Si noti come il rapporto segnale-rumore spot a destinazione resti invariato rispetto a quello presente all'ingresso del filtro ricevente

$$\frac{\mathcal{P}_{s_R}(f)}{\mathcal{P}_{n_R}(f)} = \frac{|H_R(f)|^2 |H_c(f)|^2 \mathcal{P}_s(f)}{|H_R(f)|^2 \mathcal{P}_n(f)} = \frac{|H_c(f)|^2 \mathcal{P}_s(f)}{\mathcal{P}_n(f)}. \quad (7.53)$$

Infatti il filtro ricevente non fa altro che amplificare, o attenuare, ad ogni frequenza sia segnale che rumore. L'eventuale miglioramento è ottenibile solo sul rapporto segnale-rumore complessivo. E' importante notare che un rapporto segnale-rumore elevato, potrebbe non rispondere alle esigenze del problema in quanto il segnale $s_R(t)$ potrebbe essere una versione troppo distorta del segnale $s(t)$. Una valutazione più completa delle prestazioni, che tenga conto anche delle distorsioni, va condotta con riferimento al segnale di errore

$$e(t) = z_R(t) - Ks(t - t_0). \quad (7.54)$$

che rappresenta il reale scostamento tra il segnale ricevuto e una versione non distorta del segnale trasmesso. Consentendo al segnale ricevuto di subire un qualche ritardo arbitrario t_0 e una variazione di scala K , $e(t)$ assume il significato di *rumore complessivo a destinazione*, includendo anche gli effetti della distorsione. L'analisi di questo caso è molto simile a quella discussa a proposito dello schema senza filtro ricevente. Infatti il filtro ricevente costituisce solo un blocco lineare in più nella catena di trasmissione. Il segnale $e(t)$ è correlato a $s(t)$ e l'estensione è immediata e fornisce una densità spettrale per $e(t)$

$$\mathcal{P}_e(f) = \mathcal{G}_{Rc}(f) \mathcal{P}_s(f) + |H_R(f)|^2 \mathcal{P}_n(f), \quad (7.55)$$

dove

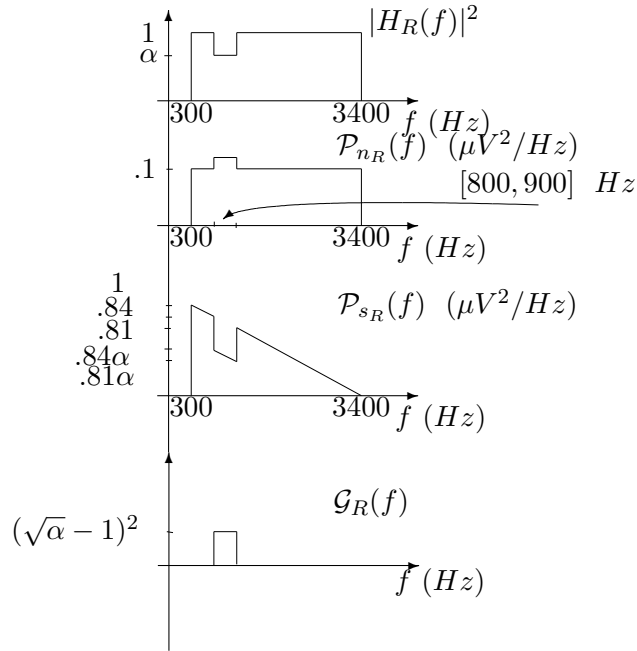
$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{Rc}(f) &= |H_R(f)|^2 |H_c(f)|^2 + K^2 - 2KR e \left[H_R(f) H_c(f) e^{j2\pi f t_0} \right] \\ &= |H_R(f)|^2 |H_c(f)|^2 + K^2 \\ &\quad - 2K |H_R(f)| |H_c(f)| \cos(2\pi f t_0 + \phi_R(f) + \phi_c(f)). \end{aligned} \quad (7.56)$$

Il primo termine nell'espressione di $\mathcal{P}_e(f)$ rappresenta la distorsione su $s(t)$, ovvero lo spettro del segnale differenza rispetto a $Ks(t - t_0)$, mentre l'altro la componente di rumore a destinazione. Il rapporto segnale-rumore è quindi

$$SNR_e = \frac{K^2 \mathcal{P}_s}{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_{Rc}(f) \mathcal{P}_s(f) df + \int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 \mathcal{P}_n(f) df}. \quad (7.57)$$

I tre parametri SNR_{in} , SNR_R e SNR_e (magari espressi in dB) sono usati dal progettista per ottenere i compromessi necessari tra riduzione del rumore e distorsione residua.

Esempio 7.4 Riprendiamo l'esempio 7.1 in cui c'è rumore additivo e nessuna distorsione introdotta dal canale. Il rumore esibisce una caratteristica non completamente piatta in frequenza. Decidiamo, seguendo il nostro intuito, di filtrare il segnale $z(t)$ con un filtro lineare avente la funzione di trasferimento della potenza $|H_R(f)|^2$ mostrata in figura.



Si noti che la specifica è per ora imposta solo sulla risposta di ampiezza e non sulla fase. Sappiamo comunque che per i segnali acustici le distorsioni di fase sono relativamente trascurabili. La funzione di trasferimento dell'energia scelta, opera un'attenuazione pari ad $0 < \alpha < 1$ nella banda $[800, 900]$ Hz, mentre nelle altre ha una caratteristica costante e guadagno unitario. Abbiamo già valutato il rapporto segnale-rumore all'ingresso del filtro $SNR_{in} = 3.875$ (5.88 dB). Valutiamo il rapporto segnale-rumore SNR_R a valle del filtro in funzione del parametro α . Nella figura sono tracciati gli spettri di potenza a valle del filtro, per il segnale $s_R(t)$ e per il rumore $n_R(t)$. L'effetto del filtro è quello di ridurre l'entità del rumore nella banda $[800, 900]$, ma di distorcere anche il segnale. Da semplici considerazioni geometriche abbiamo che la potenza del segnale in uscita è

$$\mathcal{P}_{s_R} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_{s_R}(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 \mathcal{P}_s(f) df$$

$$\begin{aligned}
&= (1 + 0.84)500 + (0.84\alpha + 0.81\alpha)100 + (3400 - 900)0.81 \\
&= 2945 + 165\alpha.
\end{aligned} \tag{7.58}$$

Analogamente la potenza del rumore in uscita è

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{n_R} &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_{n_R}(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 \mathcal{P}_n(f)df \\
&= (800 - 300)0.1 \cdot 2 + 100 \alpha 0.1 \cdot 2 + (3400 - 900) 0.1 \cdot 2 \\
&= 60 + 20\alpha.
\end{aligned} \tag{7.59}$$

Il rapporto segnale-rumore in uscita è

$$SNR_R = \frac{\mathcal{P}_{s_R}}{\mathcal{P}_{n_R}} = \frac{2945 + 165\alpha}{60 + 20\alpha}. \tag{7.60}$$

Ad esempio, se scegliamo $\alpha = 0.1$, ovvero introduciamo una attenuazione nella banda $[800 \ 900]$ pari a $\sqrt{\alpha} = 0.32$, abbiamo

$$SNR_R = \frac{\mathcal{P}_{s_R}}{\mathcal{P}_{n_R}} = 47.77, \tag{7.61}$$

che corrisponde a $SNR_R \text{ dB} = 16.79 \text{ dB}$. Si è ottenuto un miglioramento di quasi 11 dB a spese di una distorsione del segnale $s(t)$ nella banda $[800, 900]$ Hz. Ai fini della valutazione della distorsione è necessario imporre una caratteristica di fase al filtro ricevente. Supponiamo che tale caratteristica sia lineare (ritardo di gruppo costante) nella banda del segnale, ovvero $\phi_R(f) = -2\pi f t_R$, $\forall f \in \mathcal{I}_s$. Pertanto il ritardo di riferimento è $t_0 = t_R$. La scala di riferimento può essere scelta come il guadagno del filtro alle frequenza di centro-banda $f_0 = (300 + 3400)/2 = 1850$ Hz, ovvero $K = |H_R(f_0)| = 1$. Pertanto la funzione $\mathcal{G}_R(f)$ diventa

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_R(f) &= |H_R(f)|^2 + 1 - 2|H_R(f)| \\
&= |H_R(f)|^2 + 1 - 2|H_R(f)| = (|H_R(f)| - 1)^2, \quad \forall f \in \mathcal{I}_s.
\end{aligned} \tag{7.62}$$

L'ultimo grafico nella figura mostra la funzione $\mathcal{G}_R(f)$. Poiché si è scelto guadagno unitario per il filtro ricevente al di fuori della banda $[800 \ 900]$, la distorsione è limitata solo alla banda $[800 \ 900]$. La potenza della distorsione è

$$\begin{aligned}
2 \int_{\mathcal{I}_s} \mathcal{G}_R(f) \mathcal{P}_s(f) df &= 2 \int_{800}^{900} (|H_R(f)| - 1)^2 \mathcal{P}_s(f) df = 2 \int_{800}^{900} (\sqrt{\alpha} - 1)^2 \mathcal{P}_s(f) df \\
&= (900 - 800)(0.84 + 0.81)((\sqrt{\alpha} - 1)^2 = 165(\sqrt{\alpha} - 1)^2.
\end{aligned} \tag{7.63}$$

Il rapporto segnale-rumore è quindi

$$SNR_e = \frac{K^2 \mathcal{P}_s}{\int_{\mathcal{I}_s} \mathcal{G}_R(f) \mathcal{P}_s(f) df + \mathcal{P}_{n_R}} = \frac{3100}{165(\sqrt{\alpha} - 1)^2 + (60 + 20\alpha)}. \tag{7.64}$$

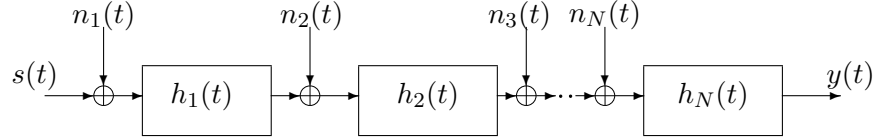
Per $\alpha = 0.1$, abbiamo

$$SNR_e = 22.28 \quad (13.48 \text{ dB}), \quad (7.65)$$

che è comunque un miglioramento di quasi 8 dB rispetto alla situazione senza filtro ($SNR_{in} = 3.875$ (5.88 dB)). Ricordiamo che in questo esempio il segnale all'ingresso del filtro ricevente non è distorto.

7.2 Canali in cascata

In un sistema di comunicazione il segnale di informazione è tipicamente ricevuto a valle di una catena di dispositivi dove distorsione e rumore si combinano. La figura seguente mostra una cascata di dispositivi lineari inframmezzati con nodi sommatori dove sorgenti di rumore si aggiungono al segnale.



Un tale sistema può modellare una catena di ripetitori, di stadi attenuatori, quali amplificatori, tratte passive (cavi, canale elettromagnetico, ecc.). Avendo assunto che tutti gli stadi del sistema sono lineari, lo studio del sistema si esegue mediante semplice sovrapposizione degli effetti. Il segnale in uscita è

$$\begin{aligned} y(t) = & (h_N * \dots * h_2 * h_1 * s)(t) \\ & + (h_N * \dots * h_2 * h_1 * n_1)(t) + (h_N * \dots * h_2 * n_2)(t) \\ & + (h_N * \dots * h_3 * n_3)(t) + \dots + (h_N * n_N)(t). \end{aligned} \quad (7.66)$$

Il primo termine è la componente di segnale in uscita. Gli altri termini sono il risultato della propagazione della varie sorgenti di rumore nel sistema. Nel dominio della frequenza abbiamo

$$\begin{aligned} Y(f) = & H_N(f) \cdot \dots \cdot H_1(f) S(f) \\ & + H_N(f) \cdot \dots \cdot H_2(f) H_1(f) N_1(f) + H_N(f) \cdot \dots \cdot H_2(f) N_2(f) \\ & + H_N(f) \cdot \dots \cdot H_3(f) N_3(f) + \dots + H_N(f) N_N(f) \\ = & H_c(f) S(f) + N(f), \end{aligned} \quad (7.67)$$

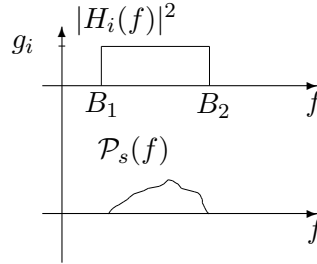
dove

$$\begin{aligned} H_c(f) = & H_N(f) \cdot \dots \cdot H_1(f); \\ N(f) = & + H_N(f) \cdot \dots \cdot H_2(f) H_1(f) N_1(f) + H_N(f) \cdot \dots \cdot H_2(f) N_2(f) \\ & + H_N(f) \cdot \dots \cdot H_3(f) N_3(f) + \dots + H_N(f) N_N(f), \end{aligned} \quad (7.68)$$

sono rispettivamente la risposta equivalente del canale, e il rumore complessivo in uscita al sistema. Lo schema di riferimento resta quindi quello discusso nella sezione precedente. Si noti il contributo delle varie sorgenti rumore sia “colorato” dai contributi dei vari stadi della catena.

7.2.1 Cascata di ripetitori

In sistema di comunicazione, la situazione tipica è una cascata di tratte attenuatrici e ripetitori intermedi (amplificatori). Analizzare il ruolo che assumono i ripetitori intermedi è cruciale, in quanto lungo la tratta di trasmissione, non solo i segnali vengono attenuati, ma accumulano ulteriore rumore dovuto alla esposizione delle tratte passive e ad amplificatori non ideali. Assumendo che le tratte, amplificatrici e attenuatrici siano non distorcenti, vogliamo analizzare un pò più in dettaglio l’effetto del guadagno nei vari stadi intermedi. Si consideri pertanto una catena costituita da stadi lineari passa-banda nella banda $[B_1, B_2]$ e un segnale $s(t)$, anch’esso passa-banda nella stessa banda, all’ingresso della catena. Si assuma che le caratteristiche di risposta armonica di ampiezza dei vari stadi siano ideali, ovvero che tutti gli stadi abbiano un risposta in frequenza piatta nella banda di interesse, come mostrato in figura (quindi almeno non distorcenti in ampiezza). In figura è mostrato anche un ipotetico spettro di potenza del segnale $s(t)$.



I valori g_i dei vari stadi sono i guadagni di potenza. Chiaramente se uno stadio ha guadagno $g_i > 1$, esso è un amplificatore, altrimenti per $g_i < 1$ lo stadio è un attenuatore. In queste ipotesi la cascata è non distorcente in ampiezza. Se anche il rumore che si aggiunge nei vari stadi della catena è limitato alla banda $[B_1, B_2]$, abbiamo

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \sqrt{g_N} \cdots \sqrt{g_2} \sqrt{g_1} s(t) \\
 &+ \sqrt{g_N} \cdots \sqrt{g_2} \sqrt{g_1} n_1(t) \\
 &+ \sqrt{g_N} \cdots \sqrt{g_2} n_2(t) \\
 &+ \cdots \\
 &+ \sqrt{g_N} n_N(t).
 \end{aligned} \tag{7.69}$$

Poiché le sorgenti di rumore sono assunte incoerenti, lo spettro di potenza dell'uscita è

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_y(f) &= g_N \cdots g_2 g_1 \mathcal{P}_s(f) \\ &\quad + g_N \cdots g_2 g_1 \mathcal{P}_{n_1}(f) \\ &\quad + g_N \cdots g_2 \mathcal{P}_{n_2}(f) \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + g_N \mathcal{P}_{n_N}(f).\end{aligned}\tag{7.70}$$

La potenza della componente di segnale in uscita è

$$\mathcal{P}_{s_0} = g_N \cdots g_2 g_1 \mathcal{P}_s.\tag{7.71}$$

Assumendo per semplicità che le sorgenti di rumore abbiano una densità spettrale piatta nella banda $[B_1, B_2]$ ($B = B_2 - B_1$) con valore

$$\mathcal{P}_{n_i}(f) = \frac{\eta_i}{2}, \quad i = 1, \dots, N,\tag{7.72}$$

la potenza di rumore in uscita alla catena è

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{n_0} &= g_N \cdots g_2 g_1 \eta_1 B \\ &\quad + g_N \cdots g_2 \eta_2 B \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + g_N \eta_N B.\end{aligned}\tag{7.73}$$

Il rapporto segnale-rumore in uscita può essere pertanto scritto come

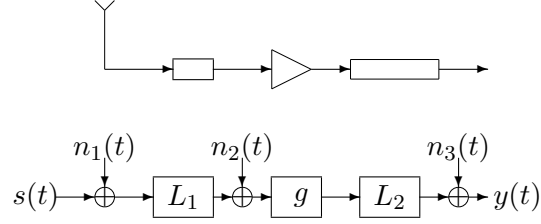
$$SNR_0 = \frac{g_N \cdots g_2 g_1 \mathcal{P}_s}{g_N \cdots g_2 g_1 \eta_1 B + g_N \cdots g_2 \eta_2 B + \dots + g_N \eta_N B},\tag{7.74}$$

oppure come

$$SNR_0 = \frac{\mathcal{P}_s}{\eta_1 B + \frac{\eta_2 B}{g_1} + \dots + \frac{\eta_N B}{g_N \cdots g_1}}.\tag{7.75}$$

Nel rapporto segnale-rumore, la sorgente di rumore che ha il maggiore peso, è $n_1(t)$ poiché non è ridotta da alcun guadagno al denominatore. Infatti in una cascata di sistemi rumorosi, lo stadio più critico è sempre il primo, in quanto il rumore in esso generato, anche se il segnale viene amplificato, non è più rimovibile. Inoltre il primo stadio conviene che sia un amplificatore, ovvero abbia un guadagno $g_1 > 1$, poiché le componenti di rumore degli stadi successivi vengono attenuate proprio di g_1 . Nelle catene di comunicazione, o di misura, molta attenzione viene dedicata al primo stadio della catena, che in genere è un amplificatore volto a fornire un segnale di potenza sufficiente alla catena rumorosa.

Esempio 7.5 Esaminiamo ora un esempio un pò più specifico. La catena mostrata in figura è costituita da una antenna ricevente seguita da un cavo, da un amplificatore e da un altro cavo. Potrebbe trattarsi dello schema tipico di un impianto ricevente televisivo terrestre.



Il segnale all'uscita dell'antenna ha una potenza efficace di $1\mu V$ ed è un segnale passa-banda ideale nella banda $[B_1, B_2] = [800, 807]$ MHz. All'uscita dell'antenna il segnale è contaminato da rumore piatto nella banda di riferimento avente potenza efficace pari a $0.01\mu V$. Il primo stadio è un attenuatore (cavi e morsetti dell'antenna) che attenua il segnale di 1 dB e vi aggiunge del rumore ulteriore, bianco nella banda di riferimento, avente potenza efficace di $0.009\mu V$. Il secondo stadio è un pre-amplificatore ideale di guadagno di potenza g e lo stadio successivo è un cavo lungo 30 m, attenuatore ideale che introduce una attenuazione di 0.5 dB / 100 m e un ulteriore rumore avente potenza efficace pari a $0.02\mu V$. Vogliamo calcolare il guadagno necessario al pre-amplificatore, affinché il rapporto segnale-rumore in uscita sia pari a $30dB$.

Soluzione: La figura mostra lo schema equivalente del sistema. Il segnale utile all'ingresso è $s(t)$ e ha uno spettro di potenza piatto $\mathcal{P}_s(f) = \eta_s$ nella banda del segnale, che corrisponde ad una potenza pari a $\mathcal{P}_s = 2(B_2 - B_1)\eta_s = 1\mu V^2$. Le sorgenti di rumore $n_1(t)$, $n_2(t)$ e $n_3(t)$ hanno tutte uno spettro piatto nella banda del segnale e sono $\mathcal{P}_1(f) = \eta_1$, $\mathcal{P}_2(f) = \eta_2$ e $\mathcal{P}_3(f) = \eta_3$. Esse corrispondono alle potenze $\mathcal{P}_1 = 2(B_2 - B_1)\eta_1 = (0.01)^2\mu V^2$, $\mathcal{P}_2 = 2(B_2 - B_1)\eta_2 = (0.009)^2\mu V^2$ e $\mathcal{P}_3 = 2(B_2 - B_1)\eta_3 = (0.02)^2\mu V^2$. Il primo stadio attenua di 1dB, ovvero introduce una attenuazione $L_1 = 10^{1/20} = 1.1220$, ovvero un guadagno $\alpha_1 = \frac{1}{L_1} = 0.8913$ (notare che si tratta di attenuazione sul segnale e non sulla potenza). Il terzo stadio corrisponde ad un attenuazione di $0.5 \times 30/100 = 0.15$ dB, ovvero ad una attenuazione pari a $L_2 = 10^{0.15/20} = 1.0174$ ovvero ad un guadagno pari a $\alpha_2 = 1/L_2 = 0.9829$. In definitiva, la componente di segnale non subisce distorsioni di ampiezza e un guadagno di potenza complessivo pari a $g_t = \frac{g}{L_1^2 L_2^2} = 0.7674g$. La potenza di rumore in uscita è

$$\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_3 + \frac{g}{L_2^2} \mathcal{P}_2 + \frac{g}{L_1^2 L_2^2} \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_3 + g \left(\frac{\mathcal{P}_2}{L_2^2} + \frac{\mathcal{P}_1}{L_1^2 L_2^2} \right). \quad (7.76)$$

Il rapporto segnale-rumore in uscita è

$$SNR = \frac{\frac{g}{L_1^2 L_2^2} \mathcal{P}_s}{\mathcal{P}_3 + g \left(\frac{\mathcal{P}_2}{L_2^2} + \frac{\mathcal{P}_1}{L_1^2 L_2^2} \right)}. \quad (7.77)$$

Si noti che aumentando g , ovvero facendo tendere $g \rightarrow \infty$,

$$SNR \rightarrow \frac{\frac{1}{L_1^2 L_2^2} \mathcal{P}_s}{\frac{\mathcal{P}_2}{L_2^2} + \frac{\mathcal{P}_1}{L_1^2 L_2^2}} = \frac{\mathcal{P}_s}{\mathcal{P}_2 L_1^2 + \mathcal{P}_1} = 4534. \quad (7.78)$$

Il rapporto segnale-rumore desiderato è $SNR = 10^{30/10} = 1000$. Esso è quindi raggiungibile. Ricavando g si ha

$$g = \frac{SNR \mathcal{P}_3}{\frac{\mathcal{P}_s}{L_1^2 L_2^2} - SNR \left(\frac{\mathcal{P}_2}{L_2^2} + \frac{\mathcal{P}_1}{L_1^2 L_2^2} \right)} = 0.6531. \quad (7.79)$$

L'amplificazione non serve, ma è necessaria un guadagno di potenza $g=0.6531$, pari a -1.85 dB.

7.3 Enfasi e de-enfasi

Nel progetto di una catena di comunicazione, spesso è possibile modellare anche la risposta armonica dello stadio trasmettente. Tipicamente un trasmettitore realizza una amplificazione (molto importante) del segnale di informazione prima di inviarlo sul canale, ma può anche essere progettato per realizzare un opportuno pre-condizionamento che tenga conto della conoscenza che si ha sulle caratteristiche distorcenti del canale e sulle proprietà spettrali del rumore. Intuitivamente se si sa che il segnale sarà contaminato maggiormente su alcune bande di frequenza, il filtro trasmettente può essere progettato per “enfaticizzare” opportunamente il segnale proprio su quelle bande (*enfasi*). Ciò ai fini di realizzare una maggiore protezione contro il rumore che si aggiungerà sul canale. E' evidente che bisognerà tenere conto anche della distorsione che ciò comporta; il filtro ricevente dovrà agire in maniera duale compensandola opportunamente (*de-enfasi*).

Lo schema di figura 7.3 rappresenta una catena trasmissiva in cui è stato incluso il blocco lineare al trasmettitore (*filtro trasmettente*) avente risposta impulsiva pari a $h_T(t)$. Esso amplifica e condiziona opportunamente il segnale $s(t)$ prima di inviarlo sul canale. Il segnale ricevuto a destinazione è

$$z_R(t) = (h_R * h_c * h_T * s)(t) + (h_R * n)(t) = s_R(t) + n_R(t), \quad (7.80)$$

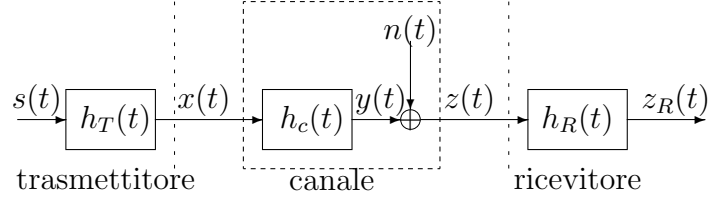


Figura 7.3: Lo schema di catena trasmissiva con filtro trasmittente e filtro ricevente

dove abbiamo evidenziato a destinazione la componente di segnale $s_R(t)$ e la componente $n_R(t)$ di rumore. Analogamente nel dominio della frequenza

$$Z_R(f) = H_R(f)H_c(f)H_T(f)S(f) + H_R(f)N(f) = S_R(f) + N_R(f). \quad (7.81)$$

Supponiamo che il progettista abbia totale libertà di scelta su $H_T(f)$ e su $H_R(f)$ e che conosca esattamente la risposta del canale $H_c(f)$ e le caratteristiche spettrali di potenza del rumore $\mathcal{P}_n(f)$. Il problema è quindi cercare di consegnare a destinazione una versione indistorta di $s(t)$ e di ridurre la potenza della componente di rumore $n_R(t)$. Pertanto affinché $s_R(t) = Ks(t - t_0)$, la catena dei tre sistemi deve soddisfare la condizione

$$H_R(f)H_c(f)H_T(f) = Ke^{-j2\pi ft_0}, \quad \forall f \in \mathcal{I}_s. \quad (7.82)$$

Più in particolare

$$|H_R(f)||H_c(f)||H_T(f)| = K; \quad \phi_R(f) + \phi_c(f) + \phi_T(f) = -2\pi t_0 f, \quad \forall f \in \mathcal{I}_s. \quad (7.83)$$

Il rapporto segnale-rumore a destinazione in condizioni di non distorsione (almeno in ampiezza) è

$$SNR_R = \frac{\mathcal{P}_{s_R}}{\mathcal{P}_{n_R}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 |H_c(f)|^2 |H_T(f)|^2 \mathcal{P}_s(f) df}{\int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 \mathcal{P}_n(f) df} = \frac{K^2 \mathcal{P}_s}{\int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 \mathcal{P}_n(f) df}. \quad (7.84)$$

Pertanto un aumento del guadagno al trasmettitore può farci ottenere un qualunque rapporto-segnale rumore: la massimizzazione di SNR_R si ottiene massimizzando K . Ciò purtroppo non ci fornisce alcuna indicazione sul comportamento spettrale dei filtri.

Si noti che nello scenario in cui il trasmettitore è solo un amplificatore ideale nella banda del segnale, il filtro ricevente, ai fini del soddisfacimento della condizione di non distorsione, deve compensare la distorsione introdotta dal

canale. Tale soluzione potrebbe non essere soddisfacente poichè l'effetto del filtro ricevente potrebbe essere quello di esaltare il rumore in alcune bande.

Una soluzione al problema che genera una specifica sul comportamento in frequenza di entrambi i filtri trasmettente e ricevente, si ottiene impostando il problema della riduzione del rumore in uscita come minimizzazione del rapporto

$$\mathcal{P}_x \frac{\mathcal{P}_{n_R}}{\mathcal{P}_{s_R}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |H_T(f)|^2 \mathcal{P}_s(f) df \int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 \mathcal{P}_n(f) df}{\int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 |H_c(f)|^2 |H_T(f)|^2 \mathcal{P}_s(f) df}. \quad (7.85)$$

Tale funzionale, rappresenta il reciproco del rapporto segnale-rumore a destinazione moltiplicato per la potenza del segnale trasmesso $x(t)$. Ciò consente rendere il problema indipendente dal guadagno scalare del trasmettitore. Imponendo la condizione di non distorsione (sull'ampiezza) abbiamo che la espressione da minimizzare è

$$\mathcal{P}_x \frac{\mathcal{P}_{n_R}}{\mathcal{P}_{s_R}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |H_T(f)|^2 \mathcal{P}_s(f) df \int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 \mathcal{P}_n(f) df}{K^2 \mathcal{P}_s}. \quad (7.86)$$

La soluzione al problema è immediata ricordando la disuguaglianza di Schwartz: $|\int VW^*|^2 \leq \int |V|^2 \int |W|^2$ con l'uguaglianza se e solo se V e W sono proporzionali. Quindi associando il secondo membro della disuguaglianza al numeratore del funzionale da minimizzare, abbiamo che la condizione di minimo è

$$|H_{T0}(f)| \mathcal{P}_s^{1/2}(f) = \alpha |H_{R0}(f)| \mathcal{P}_n^{1/2}(f), \quad \forall f \in \mathcal{I}_s, \quad (7.87)$$

dove α è una costante di scala arbitraria e $H_{R0}(f)$ e $H_{T0}(f)$ sono le risposte armoniche dei filtri ottimi. Ricordiamo che poichè deve essere garantita la condizione di non distorsione

$$|H_{R0}(f)| |H_c(f)| |H_{T0}(f)| = K, \quad \forall f \in \mathcal{I}_s. \quad (7.88)$$

Ricavando $|H_{R0}(f)|$, la espressione per la risposta di energia del filtro trasmettente ottimo è

$$|H_{T0}(f)|^2 = \frac{\alpha K}{|H_c(f)|} \frac{\mathcal{P}_n^{1/2}(f)}{\mathcal{P}_s^{1/2}(f)}, \quad \forall f \in \mathcal{I}_s. \quad (7.89)$$

Analogamente

$$|H_{R0}(f)|^2 = \frac{K}{\alpha |H_c(f)|} \frac{\mathcal{P}_s^{1/2}(f)}{\mathcal{P}_n^{1/2}(f)}, \quad \forall f \in \mathcal{I}_s. \quad (7.90)$$

La interpretazione del risultato è illuminante. Supponendo di considerare un canale non distorcente, si vede come la soluzione richiede che il filtro trasmettente “enfattizzi” il segnale proporzionalmente al rapporto rumore-segnale

$$\left(\frac{\mathcal{P}_n(f)}{\mathcal{P}_s(f)} \right)^{1/2}. \quad (7.91)$$

Ovvero il segnale nelle bande di frequenza dove c'è più rumore va protetto maggiormente. Analogamente in ricezione si opera l'operazione duale: ripristina la condizione di non distorsione “de-enfatizzando” proporzionalmente al rapporto segnale-rumore

$$\left(\frac{\mathcal{P}_s(f)}{\mathcal{P}_n(f)} \right)^{1/2}. \quad (7.92)$$

Il rapporto-segnale rumore in condizioni di ottimalità diventa

$$SNR_0 = \frac{K^2 \mathcal{P}_s}{\int_{-\infty}^{\infty} |H_{R0}(f)|^2 \mathcal{P}_n(f) df} = \frac{K^2 \mathcal{P}_s}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{P}_s^{1/2}(f) \mathcal{P}_n^{1/2}(f)}{|H_c(f)|} df}. \quad (7.93)$$

Si noti che la specifica ottenuta è solo sulle caratteristiche di ampiezza dei filtri. Ovviamente il progettista dovrà anche controllare le caratteristiche di fase e gestire i gradi di libertà residui per ottenere specifiche realizzabili e adatte alla applicazione specifica.

Esempio 7.6 Consideriamo un segnale $s(t)$ avente lo spettro di potenza $\mathcal{P}_s(f)$ rappresentato in figura 7.4. Il canale sia non distorcente a guadagno unitario e il rumore abbia uno spettro di potenza piatto nella banda del segnale, eccetto che per nella banda $[b_1 \ b_2]$ in cui c'è una ulteriore interferenza. Vogliamo progettare entrambi i filtri di enfasi e de-enfasi.

La soluzione per la risposta del filtro trasmettente è

$$|H_T(f)|^2 = \alpha K \frac{\mathcal{P}_n^{1/2}(f)}{\mathcal{P}_s^{1/2}(f)} = \alpha K \frac{\mathcal{P}_n^{1/2}(f)}{\sqrt{-\frac{\beta}{B_2 - B_1}(|f| - B_2)}}, \quad \forall f \in \mathcal{I}_s. \quad (7.94)$$

Escludiamo dalla banda la frequenza B_2 in cui la risposta del filtro diverge. Si ricordi comunque che le specifiche che vengono fuori dalla ottimizzazione vengono realizzate in maniera approssimata e che quindi la risposta dei filtri viene opportunamente limitata. Si noti nella figura come il filtro trasmettente, enfatizzi il segnale alle alte frequenze poichè lì il rapporto segnale-rumore è sfavorevole. Inoltre nella banda $[b_1 \ b_2]$ c'è una ulteriore enfasi dovuta alla presenza dell'ulteriore rumore passa-banda. Il filtro ricevente compie la operazione duale dovendo compensare la distorsione introdotta. La espressione è

$$|H_R(f)|^2 = \frac{K \mathcal{P}_s^{1/2}(f)}{\alpha \mathcal{P}_n^{1/2}(f)} = \frac{\alpha}{K} \frac{\sqrt{-\frac{\beta}{B_2 - B_1}(|f| - B_2)}}{\mathcal{P}_n^{1/2}(f)}, \quad \forall f \in \mathcal{I}_s. \quad (7.95)$$

Il rapporto segnale-rumore a destinazione è

$$SNR_0 = \frac{K^2 \mathcal{P}_s}{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_s^{1/2}(f) \mathcal{P}_n^{1/2}(f) df}, \quad (7.96)$$

e può essere calcolato per via numerica una volta definiti i parametri specifici.

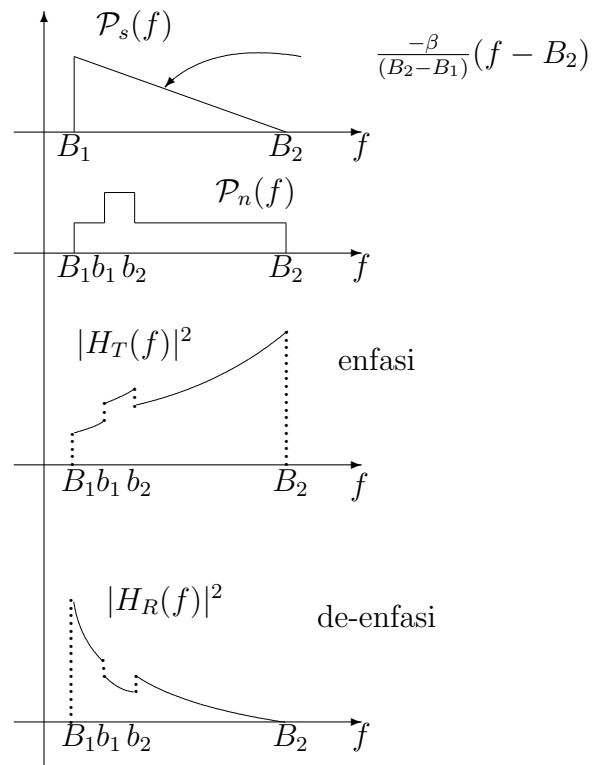


Figura 7.4: Gli spettri e le risposte dei filtri dell'esempio 7.6

Appendice A

Formule utili

A.1 Identità trigonometriche

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha \quad (\text{A.1})$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha \quad (\text{A.2})$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (\text{A.3})$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (\text{A.4})$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \quad (\text{A.5})$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \quad (\text{A.6})$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \quad (\text{A.7})$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin\left[\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\right] \cos\left[\frac{1}{2}(\alpha - \beta)\right] \quad (\text{A.8})$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left[\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\right] \cos\left[\frac{1}{2}(\alpha - \beta)\right] \quad (\text{A.9})$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (\text{A.10})$$

$$\cos(2\alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1 \quad (\text{A.11})$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos \alpha)} \quad (\text{A.12})$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos \alpha)} \quad (\text{A.13})$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(\cos(2\alpha) + 1) \quad (\text{A.14})$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \quad (\text{A.15})$$

$$\sin \alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j} \quad (\text{A.16})$$

$$\cos \alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2} \quad (\text{A.17})$$

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha \quad (\text{A.18})$$

A.2 La serie geometrica

Proprietà A.1 La somma finita dei primi N termini è l'espressione:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{N-1} = \sum_{n=0}^{N-1} x^n \quad (\text{A.19})$$

$$= \frac{1 - x^N}{1 - x}. \quad (\text{A.20})$$

Prova: Si riscriva la espressione $1 - x^N$ come:

$$\begin{aligned} 1 - x^N &= 1 - x + x - x^2 + x^2 - x^3 + x^3 - \dots - x^{N-1} + x^{N-1} - x^N \\ &= (1 - x) + x(1 - x) + x^2(1 - x) + x^3(1 - x) + \dots + x^{N-1}(1 - x), \end{aligned}$$

da cui discende la formula.

Proprietà A.2 Se $|x| < 1$, la serie infinita converge al limite:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x}. \quad (\text{A.21})$$

Prova: Il risultato discende direttamente dall'espressione sulla somma finita per $N \rightarrow \infty$.

A.3 Alcuni utili integrali

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} \quad (\text{A.22})$$

$$\int \cos ax \, dx = \frac{\sin ax}{a} \quad (\text{A.23})$$

$$\int \sin ax \, dx = -\frac{\cos ax}{a} \quad (\text{A.24})$$

$$\int e^{ax} \sin bx = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} \quad (\text{A.25})$$

$$\int e^{ax} \cos bx = \frac{e^{ax}(b \sin bx + a \cos bx)}{a^2 + b^2} \quad (\text{A.26})$$

La prova di tutte le formule è immediata per derivazione diretta del secondo membro.

A.4 Integrazione per parti

Siano $f(x)$ una funzione e $F(x)$ la sua primitiva. Sia $g(x)$ un'altra funzione e $g'(x)$ la sua derivata. L'integrale di $f(x)g(x)$ può essere riscritto con la formula di *integrazione per parti*

$$\int f(x)g(x) \, dx = F(x)g(x) - \int g'(x)F(x) \, dx. \quad (\text{A.27})$$

La verifica della formula è immediata derivando ambo i membri dell'equazione

$$f(x)g(x) = F'(x)g(x) + F(x)g'(x) - g'(x)F(x). \quad (\text{A.28})$$

Appendice B

La funzione di Dirac

La funzione di *Dirac*, o funzione *delta*, o funzione *impulso ideale*, denotata con il simbolo $\delta(x)$, è una di quelle funzioni speciali che vengono dette *funzioni generalizzate*. Si tratta infatti di una funzione che è definita solo in un punto, nel quale assume valore infinito, ma area unitaria. Tale funzione, che può essere inserita nel contesto della teoria matematica delle distribuzioni (Lighthill, 1959), è un comodo artificio matematico che ci consente di manipolare e derivare funzioni discontinue e non differenziabili e a superare alcuni problemi formali quando bisogna considerare valori puntuali di funzioni continue.

La funzione *delta*, o *delta di Dirac*, o *impulso di Dirac* è tale che per ogni funzione $f(x)$ continua in $x = 0$:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\delta(x)dx = \begin{cases} f(0) & \text{se } x_1 \leq 0 \leq x_2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Dalla definizione discendono immediatamente le seguenti proprietà:

Proprietà B.1

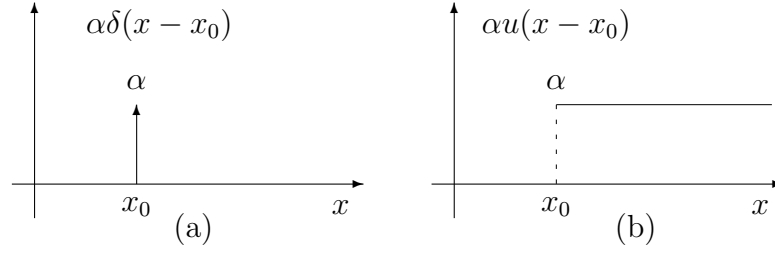
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1. \quad (\text{B.2})$$

Questa proprietà mostra come l'area sottesa dalla delta sia unitaria. La prova è immediata conseguenza della definizione per $f(x) = 1$.

Proprietà B.2 (Proprietà' del Campionamento) Per ogni funzione $f(x)$ continua in x_0 ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0). \quad (\text{B.3})$$

La prova è immediata conseguenza della definizione semplicemente operando un cambio di variabili nell'integrale.

Figura B.1: (a) $\alpha\delta(x - x_0)$; (b) $\alpha u(x - x_0)$

Proprietà B.3 (Proprietà del cambiamento di scala) Per ogni $f(x)$ continua in $x = 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(\alpha x)dx = \frac{1}{|\alpha|}f(0). \quad (\text{B.4})$$

La prova di questa proprietà, è immediata se si osserva che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(\alpha x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{x}{\alpha}\right)\delta(\xi)\frac{d\xi}{|\alpha|}. \quad (\text{B.5})$$

Applicando la proprietà del campionamento si ottiene il risultato.

Proprietà B.4

$$\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(x). \quad (\text{B.6})$$

Questa è una immediata conseguenza della proprietà del cambiamento di scala per $f(x) = 1$.

Proprietà B.5

$$\int_{-\infty}^x \alpha\delta(\xi - x_0)d\xi = \alpha u(x - x_0), \quad (\text{B.7})$$

dove la funzione discontinua $u(x)$ è la cosiddetta funzione gradino o scalino, definita come:

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

(si veda figura B.1).

La prova è diretta conseguenza della proprietà B.1.

Proprietà B.6

$$\frac{d}{dx}u(x - x_0) = \delta(x - x_0). \quad (\text{B.9})$$

La prova è immediata conseguenza della definizione di funzione a gradino, in quanto:

$$\int_{-\infty}^x \delta(\xi - x_0) d\xi = \begin{cases} 0 & x < x_0 \\ 1 & x \geq x_0 \end{cases} = u(x - x_0). \quad (\text{B.10})$$

Si noti come quest'ultima proprietà, consenta di esprimere analiticamente la derivata di funzioni discontinue e in particolare con discontinuità di prima specie. Infatti, come nell'esempio del gradino, per funzioni che presentano un salto di discontinuità, la derivata è una delta di Dirac centrata in quel punto e avente area pari alla altezza del salto.

Com già discusso, la delta ha area finita, ma valore infinito nel punto di applicazione, ovvero la funzione delta è un impulso:

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty & x = 0 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

La figura B.1(a), mostra la funzione delta disegnata come un impulso con la freccia rivolta verso l'alto. La notazione serve a ricordare che il valore in quel punto è infinito, anche se la sua area è finita. Tipicamente, per comodità di lettura, disegneremo una freccia di lunghezza proporzionale alla sua area. Figura B.1(a) mostra la funzione $f(x) = \alpha\delta(x - x_0)$ e figura B.1(b) il suo integrale.

B.0.1 La funzione di Dirac come limite

La funzione di Dirac può anche essere ottenuta come limite di funzioni ad area unitaria. Ovvero come limite di funzioni che diventano infinitamente strette mantenendo area unitaria. L'esempio più semplice si ottiene usando la funzione rettangolare:

$$\Pi\left(\frac{x}{\tau}\right) = \begin{cases} 1 & -\frac{\tau}{2} \leq x < \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

Normalizzando l'area a uno e andando al limite abbiamo:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \Pi\left(\frac{x}{\tau}\right) = \delta(x). \quad (\text{B.13})$$

Altro esempio notevole è l'impulso gaussiano:

$$g(x; \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad (\text{B.14})$$

che ha area unitaria e il parametro σ che ne controlla la larghezza. Al limite abbiamo:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} g(x; \sigma) = \delta(x). \quad (\text{B.15})$$

L' impulso triangolare definito come:

$$\Lambda\left(\frac{x}{\tau}\right) = \begin{cases} \frac{x}{\tau} & -\tau < x < 0 \\ -\frac{x}{\tau} & 0 < x < \tau \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}, \quad (\text{B.16})$$

normalizzato ad area unitaria ci dà anch'esso al limite la funzione di Dirac:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \Lambda\left(\frac{x}{\tau}\right) = \delta(x). \quad (\text{B.17})$$

Anche l'impulso *sinc*, definito come:

$$\text{sinc}(\tau x) = \frac{\sin \pi \tau x}{\pi \tau x}, \quad (\text{B.18})$$

può essere usato per ottenere la delta di Dirac. Infatti l'area da esso sottesa è pari a $\frac{1}{\tau}$, la larghezza del lobo principale $\frac{2}{\tau}$ e la larghezza dei lobi laterali $\frac{1}{\tau}$. Pertanto normalizzando l'area e restringendo il lobo principale abbiamo che:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau \text{sinc}(\tau x) = \delta(x). \quad (\text{B.19})$$

Si noti che nel caso della funzione sinc, le funzioni intermedie prima del limite sono ad area unitaria, ma hanno anche valori negativi. Maggiori dettagli sulle funzioni gaussiana, triangolare, sinc possono essere reperite su qualunque testo di teoria dei segnali. Per le prove dei risultati asintotici si veda (Lighthill, 1959).

B.0.2 Derivate dell'impulso di Dirac

E' anche possibile definire le *derivate dell'impulso di Dirac* $\delta^{(n)}(x)$, $n = 1, 2, \dots$, tramite una proprietà analoga a quella usata per definire δ .

La funzione *derivata n-esima della delta di Dirac* $\delta^{(n)}(x)$, è tale che per ogni funzione $f(x)$ derivabile in $x = 0$ fino all'ordine n -esimo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta^{(n)}(x) dx = (-1)^n \frac{d^n f(x)}{dx^n} \Big|_{x=0}. \quad (\text{B.20})$$

Quindi formalmente la derivata della delta di Dirac applicata in un punto ci consente di ottenere tramite una operazione di prodotto e integrazione il valore della derivata n -esima della funzione in quel punto. La ragione del segno $(-1)^n$ ha a che fare con la utilizzabilità della $\delta^{(n)}(x)$ nel contesto della trasformata di Laplace. Per maggiori dettagli sulla delta di Dirac si veda (Lighthill, 1959).

Appendice C

Il principio di ortogonalità

In molti problemi della elaborazione dei segnali e dell'algebra lineare, è utile associare alle quantità in gioco dei vettori e quindi utilizzare il principio di ortogonalità per trovare la soluzione ottima a problemi in cui l'incognita è un operatore lineare. Studiare un problema nell'ambito di uno spazio vettoriale può essere molto utile anche per la facile interpretazione grafica che si riesce a dare alle grandezze in gioco. In particolare, gli elementi dello spazio in oggetto possono essere dei vettori di \mathcal{R}^n , dei segnali di potenza, dei segnali di energia, dei processi aleatori, delle variabili aleatorie, ecc. La interpretazione grafica di tali quantità è indipendente dalla tipologia specifica degli oggetti in gioco. La applicazione del principio di ortogonalità è piuttosto semplice e richiede che per ogni tipo di problema vengano definiti opportunamente il prodotto scalare e l'operatore lineare da ottimizzare.

In questa breve nota dimostreremo il principio di ortogonalità con riferimento ad un generico spazio vettoriale e mostreremo come esso sia applicabile a numerosi casi di pratico interesse.

C.1 Richiami sugli spazi vettoriali

Si ricordi che se x , y e z sono elementi di uno spazio vettoriale \mathcal{V} , devono essere definiti il prodotto scalare $\langle x, y \rangle$ e la norma $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Il prodotto scalare deve soddisfare le proprietà commutativa e distributiva, $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$; $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$. Ricordiamo al lettore le seguenti relazioni notevoli:

1. $\|x\| \geq 0$;
2. $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$, dove "0" è l'elemento nullo dello spazio;
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, dove α è una qualunque costante reale;

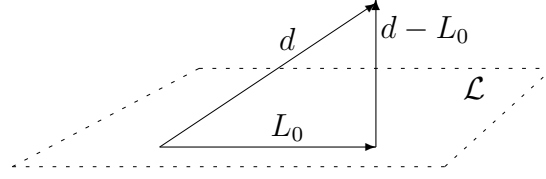


Figura C.1: Illustrazione grafica del principio di ortogonalità.

$$4. \langle x, y \rangle^2 \leq \|x\| \cdot \|y\|;$$

$$5. \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|;$$

C.2 Il principio di ortogonalità.

Teorema C.1 Sia \mathcal{V} uno spazio vettoriale e \mathcal{L} un suo sottospazio. Siano d un elemento qualunque di \mathcal{V} e L un elemento qualunque di \mathcal{L} :

$$d \in \mathcal{V}; \quad L \in \mathcal{L} \subseteq \mathcal{V}. \quad (\text{C.1})$$

L l'elemento $L_0 \in \mathcal{L}$ che minimizza la distanza:

$$\mathcal{E} = \|d - L\|, \quad (\text{C.2})$$

soddisfa la condizione di ortogonalità:

$$\langle d - L_0, L \rangle = 0, \quad \forall L \in \mathcal{L}. \quad (\text{C.3})$$

La distanza in tali condizioni vale:

$$\mathcal{E}_0 = \|d\| - \langle d, L_0 \rangle. \quad (\text{C.4})$$

Prova: Si riscriva la distanza \mathcal{E} nella seguente forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \|d - L\| = \|d - L_0 + L_0 - L\| \\ &= \|(d - L_0) + (L_0 - L)\| \\ &= \|d - L_0\| + \|L_0 - L\| + 2\langle d - L_0, L_0 - L \rangle \\ &= \|d - L_0\| + \|L_0 - L\| + 2(\langle d - L_0, L_0 \rangle - \langle d - L_0, L \rangle). \end{aligned}$$

Quando gli ultimi due termini sono nulli abbiamo la condizione di minimo:

$$\|d - L\| = \|d - L_0\| + \|L_0 - L\|. \quad (\text{C.5})$$

Infatti in tali condizioni:

$$\|d - L_0\| \leq \|d - L\|, \quad \forall L, \quad (\text{C.6})$$

con il minimo attinto per $L = L_0$. La condizione di minimo richiede che:

$$\langle d - L_0, L_0 \rangle = \langle d - L_0, L \rangle = 0, \quad \forall L. \quad (\text{C.7})$$

La norma \mathcal{E} in condizioni di ottimalità diventa:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 = \|d - L_0\| &= \langle (d - L_0), (d - L_0) \rangle \\ &= \|d\|^2 - \langle d, L_0 \rangle - \langle L_0, (d - L_0) \rangle \\ &= \|d\|^2 - \langle d, L_0 \rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Figura C.1 mostra graficamente il principio di ortogonalità. E' immediato vedere come il vettore differenza più vicino a \mathcal{L} in distanza euclidea sia quello ad esso ortogonale. Si noti come l'espressione della distanza quadratica minima di d da L_0 non esprima altro che il teorema di Pitagora.

Il principio di ortogonalità risulta molto utile in numerose applicazioni e in tutti i quei casi in cui è possibile legare il sottospazio \mathcal{L} ad una funzione incognita. In particolare, se supponiamo che lo spazio \mathcal{L} venga generato dalla applicazione di una famiglia di operatori lineari L ad un elemento x di un altro spazio vettoriale \mathcal{X} , la condizione di ortogonalità:

$$\langle d - L_0(x), L(x) \rangle = 0, \quad \forall L(x), \quad (\text{C.9})$$

per la linearità del prodotto scalare e delle funzioni L , può essere riscritta come:

$$\langle d - L_0(x), x \rangle = 0. \quad (\text{C.10})$$

Una certa attenzione va comunque riservata a quest'ultima espressione poichè la struttura dello spazio vettoriale \mathcal{X} può essere molto diversa da quella di \mathcal{V} , in cui il problema è stato formulato. Esamineremo vari scenari applicativi in cui sarà chiaro come la condizione di ortogonalità formulata in \mathcal{V} possa essere tradotta in una o più condizioni tra \mathcal{V} e x .

C.2.1 Vettori numerici

Lo scenario più diretto di applicazione del principio di ortogonalità è lo spazio dei vettori numerici. Operiamo pertanto le seguenti associazioni:

1. $d \leftrightarrow \underline{d} = (d_1, \dots, d_m)^T$ sia un vettore m -dimensionale dello spazio \mathcal{R}^m ;

2. $L \leftrightarrow \underline{L} = (l_1, l_2, \dots, l_m)^T$ sia un generico vettore m -dimensionale di \mathcal{R}^m appartenente al sottospazio \mathcal{L} .
3. il prodotto scalare tra due elementi $\underline{\alpha}, \underline{\beta} \in \mathcal{R}^m$ sia il prodotto interno:

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \underline{\alpha}^T \underline{\beta} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i. \quad (\text{C.11})$$

Alcuni esempi mostreranno vari modi di generare lo spazio lineare \mathcal{L} a partire dal un vettore n -dimensionale \underline{x} e come il principio di ortogonalità si traduca in una condizione tra $(d - L_0)$ e x .

Esempio C.1 Sia \mathcal{L} lo spazio lineare generato dalla espressione:

$$\underline{L}(\underline{x}) = \underline{\underline{C}}^T \underline{x}, \quad (\text{C.12})$$

al variare di tutte le $n \times m$ possibili matrici $\underline{\underline{C}}$ applicate al vettore n -dimensionale \underline{x} . Se non ci sono condizioni su $\underline{\underline{C}}$, il problema non è molto interessante in quanto lo spazio \mathcal{L} coincide con tutto lo spazio vettoriale \mathcal{V} e quindi qualunque vettore \underline{d} è incluso in \mathcal{L} e la distanza \mathcal{E}_0 è nulla.

Esempio C.2 Sia $n < m$ e sia \mathcal{L} lo spazio lineare formato da tutti i vettori ottenuti da \underline{x} secondo la trasformazione:

$$\underline{L}(\underline{x}) = \text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_n, 0, \dots, 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.13})$$

dove \underline{x} è un vettore numerico n -dimensionale. La condizione di ortogonalità si scrive:

$$(\text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_n, 0, \dots, 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \underline{d})^T \begin{pmatrix} c_1 x_1 \\ c_2 x_2 \\ \vdots \\ c_n x_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \quad \forall \{c_1, c_2, \dots, c_n\}. \quad (\text{C.14})$$

Ovvero:

$$(c_{01}x_1 - d_1, c_{02}x_2 - d_2, \dots, c_{0n}x_n - d_n, -d_{n+1}, \dots, -d_m) \begin{pmatrix} c_1x_1 \\ c_2x_2 \\ \vdots \\ c_nx_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \quad \forall \{c_1, c_2, \dots, c_n\}. \quad (\text{C.15})$$

Eseguendo il prodotto la condizione diventa:

$$\sum_{i=1}^n (c_{0i}x_i - d_i)c_ix_i = 0, \quad \forall \{c_1, c_2, \dots, c_n\}. \quad (\text{C.16})$$

Poichè l'equazione deve valere $\forall \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, devono essere soddisfatte le n condizioni:

$$(c_{0i}x_i - d_i)x_i = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (\text{C.17})$$

La soluzione è:

$$c_{0i} = \frac{d_i}{x_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (\text{C.18})$$

La distanza minima è:

$$\|\underline{d} - \underline{L}_0(\underline{x})\| = \sum_{i=1}^m d_i^2 - (d_1, \dots, d_n, d_{n+1}, \dots, d_m) \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{i=n+1}^m d_i^2. \quad (\text{C.19})$$

Esempio C.3 Esaminiamo un altro caso con $n < m$. Lo spazio \mathcal{L} sia lo spazio dei vettori:

$$\underline{L}(\underline{x}) = (cx_1, cx_2, \dots, cx_n, 0, \dots, 0)^T, \quad (\text{C.20})$$

generati al variare di c . La condizione di ortogonalità è:

$$((c_0x_1, c_0x_2, \dots, c_0x_n, 0, \dots, 0) - (d_1, \dots, d_n, d_{n+1}, \dots, d_m)) \begin{pmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ \vdots \\ cx_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \quad \forall c, \quad (\text{C.21})$$

che può essere riscritta come:

$$\sum_{i=1}^n (c_0 x_i - d_i) c x_i = 0, \quad \forall \quad c. \quad (\text{C.22})$$

Poichè c è qualunque, la soluzione è:

$$c_0 = \frac{\sum_{i=1}^n d_i x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \frac{\underline{d}^T \underline{x}}{\|\underline{x}\|^2}. \quad (\text{C.23})$$

La norma dell'errore è pertanto:

$$\begin{aligned} \|\underline{d}\|^2 - \underline{d}^T \underline{L}_0(\underline{x}) &= \underline{d}^T \underline{d} - \underline{d}^T c_0 \underline{x} \\ &= \underline{d}^T \underline{d} - \underline{d}^T \frac{\underline{d}^T \underline{x}}{\|\underline{x}\|^2} \underline{x} \\ &= \sum_{i=1}^n d_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n d_i x_i)^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}. \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

C.3 Variabili aleatorie

La applicazione del principio di ortogonalità alle variabili aleatorie è particolarmente interessante. Il prodotto scalare tra due variabili è definito come la mutua correlazione. Trattando con trasformazioni lineari non sarà necessario utilizzare informazioni sulle cdf o pdf delle variabili in gioco in quanto la ortogonalità riguarderà solo i momenti del secondo ordine. Esaminiamo prima il caso di variabili aleatorie scalari:

1. $d \leftrightarrow D$ sia una variabile aleatoria scalare;
2. $L \leftrightarrow \mathcal{L}$ sia la famiglia delle variabili aleatorie appartenenti al sottospazio \mathcal{L} .
3. il prodotto scalare tra le due variabili Y e Z sia la correlazione:

$$\langle y, z \rangle = E[YZ]. \quad (\text{C.25})$$

Il problema di minimizzare la distanza:

$$\mathcal{E} = \|\underline{d} - \underline{L}\|^2 = E[(d - L)^2], \quad (\text{C.26})$$

può essere visto come il problema di minimizzare l'errore quadratico medio nello stimare la variabile aleatoria desiderata D mediante un elemento di \mathcal{L} . La condizione di ortogonalità si scrive come:

$$E[(D - L_0)L] = 0, \quad \forall \quad L \in \mathcal{L}, \quad (\text{C.27})$$

che corrisponde all'errore quadratico medio minimo:

$$\mathcal{E}_0 = E[D^2] - E[DL_0]. \quad (\text{C.28})$$

Vediamo ora che forma può assumere il sottospazio \mathcal{L} se esso è generato dalla applicazione di una famiglia di operatori lineari su un'altra variabile aleatoria X .
 X scalare: il sottospazio \mathcal{L} è generato dalla trasformazione lineare:

$$L = cX. \quad (\text{C.29})$$

Il principio di ortogonalità si scrive come:

$$E[(D - c_0X)cX] = 0, \quad \forall \ c, \quad (\text{C.30})$$

oppure:

$$E[(D - c_0X)X] = 0. \quad (\text{C.31})$$

Quest'ultima equazione esprime il principio di ortogonalità come condizione di ortogonalità tra l'errore nello "stimare D e il "dato X . La soluzione si ottiene usando la linearità della media:

$$c_0 = \frac{E[DX]}{E[X^2]}. \quad (\text{C.32})$$

La distanza tra D e L_0 in media quadratica è:

$$\begin{aligned} ||d - L_0|| &= ||d|| - \langle d, L_0 \rangle \\ &= E[D^2] - E[Dc_0X] \\ &= E[D^2] - c_0E[DX] = E[D^2] - \frac{E[DX]^2}{E[X^2]}. \end{aligned} \quad (\text{C.33})$$

\underline{X} vettoriale: sia \underline{x} una variabile aleatoria n -dimensionale:

$$\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T. \quad (\text{C.34})$$

Il sottospazio \mathcal{L} è generato dalla trasformazione lineare:

$$L = \underline{C}^T \underline{X}, \quad (\text{C.35})$$

dove \underline{C} è un vettore n -dimensionale di numeri reali. La condizione di ortogonalità si scrive come:

$$E[(D - \underline{C}_0^T \underline{X})\underline{C}^T \underline{X}] = 0, \quad \forall \ \underline{C}. \quad (\text{C.36})$$

La condizione equivale pertanto alle n condizioni di ortogonalità:

$$E[(D - \underline{C}_0^T \underline{X})X_i] = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (\text{C.37})$$

Il principio di ortogonalità sancisce che in condizioni di ottimalità l'errore nello stimare D deve essere ortogonale ai dati X_1, X_2, \dots, X_n . Le condizioni di ortogonalità riscritte in forma matriciale sono:

$$E[\underline{X} \underline{X}^T] \underline{C}_0 = E[D \underline{X}]. \quad (\text{C.38})$$

Ovvero:

$$\underline{L}_0 = \underline{C}_0^T \underline{X}, \quad (\text{C.39})$$

con:

$$\underline{C}_0 = E[\underline{X} \underline{X}^T]^{-1} E[D \underline{X}]. \quad (\text{C.40})$$

L'errore minimo è pertanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 &= E[(d - \underline{C}_0^T \underline{X})^2] \\ &= E[D^2] - E[D \underline{C}_0^T \underline{X}] \\ &= E[D^2] - \underline{C}_0^T E[D \underline{X}] \\ &= E[D^2] - E[D \underline{X}^T] E[\underline{X} \underline{X}^T]^{-1} E[D \underline{X}]. \end{aligned} \quad (\text{C.41})$$

Esaminiamo ora il caso più generale in cui d è una variabile aleatoria multidimensionale:

1. $d \leftrightarrow \underline{D}$ è una variabile aleatoria m -dimensionale;
2. $L \leftrightarrow \underline{L}$ è lo spazio lineare delle variabili aleatorie m -dimensionali ottenute dalla applicazione di un operatore lineare ad un'altra variabile aleatoria n -dimensionale \underline{X} .
3. il prodotto scalare tra due variabili aleatorie m -dimensionali \underline{Y} e \underline{Z} è la media del prodotto interno:

$$\langle y, z \rangle = E[\underline{Y}^T \underline{Z}]. \quad (\text{C.42})$$

La condizione di ortogonalità si scrive:

$$E[(\underline{D} - \underline{L}_0)^T \underline{L}] = 0, \quad \forall \underline{L}. \quad (\text{C.43})$$

Il caso multidimensionale può facilmente essere ricondotto a quello monodimensionale. Infatti, poiché L è arbitrario, la condizione di ortogonalità deve valere anche quando \underline{L} è tale che una componente alla volta è diversa da zero.

Pertanto la condizione di ortogonalità equivale alle condizioni:

$$E[(D_i - L_{0i}) L_i] = 0, \quad \forall L_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (\text{C.44})$$

Ora se lo spazio \mathcal{L} è generato dalla applicazione di funzioni lineari ad una variabile aleatoria n -dimensionale \underline{X} , abbiamo che:

$$L_i = \underline{C}_i^T \underline{X}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (\text{C.45})$$

dove i vettori \underline{C}_i sono vettori n -dimensionali reali. In maniera compatta:

$$\underline{L} = \underline{\underline{C}}^T \underline{X}, \quad (\text{C.46})$$

con:

$$\underline{\underline{C}} = (\underline{C}_1 \underline{C}_2 \dots \underline{C}_m). \quad (\text{C.47})$$

Quindi ogni colonna della matrice $\underline{\underline{C}}$ è ottenuta come soluzione di un problema analogo al caso monodimensionale. Quindi:

$$\underline{C}_{io} = E[\underline{X} \underline{X}^T]^{-1} E[D_i \underline{X}], \quad i = 1, \dots, m, \quad (\text{C.48})$$

o in forma compatta:

$$\underline{\underline{C}}_0 = E[\underline{X} \underline{X}^T]^{-1} E[\underline{X} \underline{D}^T]. \quad (\text{C.49})$$

La distanza quadratica tra \underline{D} e \underline{L}_0 in condizioni di ortogonalità è:

$$||d|| - \langle d, L_0 \rangle = E[\underline{D}^T \underline{D}] - E[\underline{D}^T \underline{L}_0]. \quad (\text{C.50})$$

C.4 Segnali di energia

Un'altra applicazione molto utile del principio di ortogonalità si ottiene nella risoluzione del problema della scomposizione ottima di una funzione di energia nella somma di altre funzioni di energia prefissate.

1. $d \leftrightarrow d(t)$ sia un segnale di energia (in generale complesso);
2. $L \leftrightarrow L(t)$ sia la famiglia delle combinazioni lineari di N funzioni di energia $\{\phi_0(t), \phi_1(t), \dots, \phi_{N-1}(t)\}$, (anch'esse in generale complesse):

$$L(t) = \sum_{i=0}^{N-1} c_i \phi_i(t). \quad (\text{C.51})$$

3. il prodotto scalare tra le due funzioni di energia $y(t)$ e $z(t)$ sia la correlazione deterministica:

$$\langle y, z \rangle = \int y(t) z^*(t) dt. \quad (\text{C.52})$$

Il problema è minimizzare la distanza:

$$\mathcal{E} = \|d - L\| = \int |d(t) - L(t)|^2 dt, \quad (\text{C.53})$$

La condizione di ortogonalità si scrive come:

$$\int (d(t) - L_0(t))L^*(t) = 0, \quad \forall L(t) \in \mathcal{L}, \quad (\text{C.54})$$

che corrisponde all'errore quadratico medio minimo:

$$\mathcal{E}_0 = \int |d(t)|^2 dt - \int d(t)L_0^*(t)dt. \quad (\text{C.55})$$

Si noti che i limiti dell'integrale non sono stati espressi. Può trattarsi infatti di un dominio di integrazione finito o infinito, purchè le funzioni siano a quadrato integrabile (funzioni di energia). Più esplicitamente il principio di ortogonalità si scrive:

$$\int \left(d(t) - \sum_{i=0}^{N-1} c_{i0} \phi_i(t) \right) \sum_{n=0}^{N-1} c_i^* \phi_n^*(t) dt = 0, \quad \forall \{c_0, c_1, \dots, c_{N-1}\}, \quad (\text{C.56})$$

dove $\{c_{00}, c_{10}, \dots, c_{(N-1)0}\}$ sono i coefficienti della combinazione lineare ottima. La condizione diventa:

$$\int \left(d(t) - \sum_{i=0}^{N-1} c_{i0} \phi_i(t) \right) \phi_n^*(t) dt = 0, \quad n = 0, \dots, N-1. \quad (\text{C.57})$$

Quindi i coefficienti ottimi sono soluzione delle N equazioni lineari:

$$\sum_{i=0}^{N-1} c_{i0} \int \phi_i(t) \phi_n^*(t) dt = \int d(t) \phi_n^*(t) dt, \quad n = 0, \dots, N-1. \quad (\text{C.58})$$

La condizione riscritta in forma matriciale diventa:

$$\begin{pmatrix} \int \phi_0 \phi_0^* & \int \phi_1 \phi_0^* & \cdot & \cdot & \cdot & \int \phi_{N-1} \phi_0^* \\ \int \phi_0 \phi_1^* & \int \phi_1 \phi_1^* & \cdot & \cdot & \cdot & \int \phi_{N-1} \phi_1^* \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \int \phi_0 \phi_{N-1}^* & \int \phi_1 \phi_{N-1}^* & \cdot & \cdot & \cdot & \int \phi_{N-1} \phi_{N-1}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{00} \\ c_{10} \\ \cdot \\ c_{(N-1)0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int d \phi_0^* \\ \int d \phi_1^* \\ \cdot \\ \int d \phi_{N-1}^* \end{pmatrix} \quad (\text{C.59})$$

L'errore quadratico medio in condizioni di ottimalità è:

$$\mathcal{E}_0 = \int |d(t)|^2 dt - \int d(t) \hat{d}_0^*(t) dt \quad (\text{C.60})$$

$$= \int |d|^2 - \sum_{n=0}^{N-1} c_{n0}^* \int d \phi_n^*. \quad (\text{C.61})$$

Bibliografia

- L.W. Couch II, 2001** *Fondamenti di Telecomunicazioni*, (Edizione Italiana a cura di Marco Luise), Prentice Hall e Apogeo.
- W. A. Gardner, 1987** *Statistical spectral analysis: a nonprobabilistic theory*, Prentice Hall.
- W. A. Gardner, 1989** *Introduction to random processes: with applications to signals and systems*, 2nd edition, McGraw Hill.
- C. W. Helstrom, 1984** *Probability and Stochastic Processes for Engineers*, Macmillan.
- B. P. Lathi, 1998** *Signal Processing and Linear Systems*, Berkeley Cambridge Press.
- M.J. Lighthill, 1959** *An Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions*, Cambridge University Press.
- M. Luise G. M. Vitetta, 1999** *Teoria dei Segnali*, McGraw-Hill.
- A. Papoulis, 1962.** *The Fourier Integral and Its Applications*, McGraw-Hill.
- A. Papoulis, 1965.** *Probability, Random Variables, and Sochastic Processes*, McGraw-Hill.
- A. Papoulis, 1973.** *Probabilità, Variabili Aleatorie e Processi Stocastici*, traduzione italiana dal (Papoulis, 1965), Boringhieri.
- A. Papoulis, 1984.** *Probability, Random Variables, and Sochastic Processes*, McGraw-Hill, IIa edizione.
- A. Papoulis, 1991.** *Probability, Random Variables, and Sochastic Processes*, McGraw-Hill, IIIa edizione.