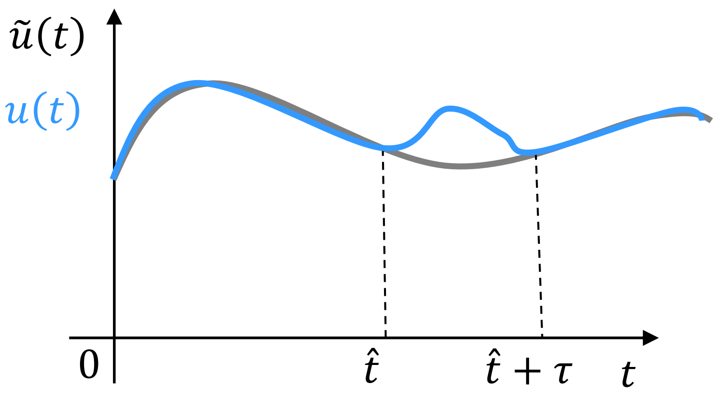
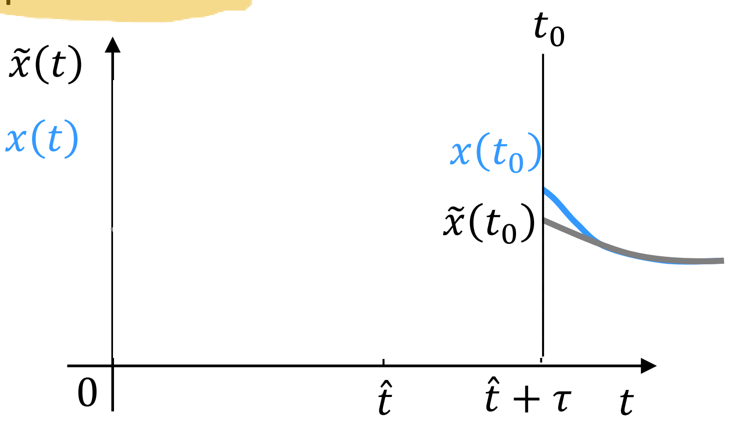
Capitolo 3 – Sistemi lineari e stazionari a tempo continuo

- Stabilità
  - Definizione secondo Lyapunov
  - Stabilità dei sistemi LTI

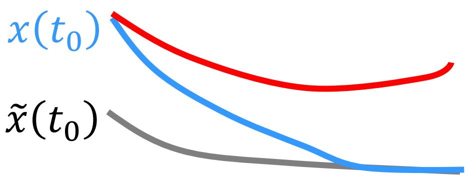
- Stabilità del movimento di un sistema dinamico (in generale non lineare: $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$)
  - La stabilità è la capacità di un sistema di riassorbire le perturbazioni

Inizio a osservare da t_0



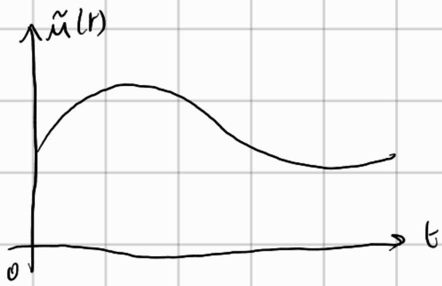


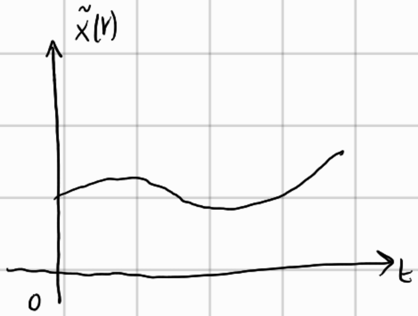
  - Dato un ingresso nominale $\tilde{u}(t)$, sia $\tilde{x}(t)$ il movimento nominale
  - Supponiamo che in un dato istante $\hat{t}$ l'ingresso venga perturbato in $u(t)$, ma dopo τ secondi la perturbazione scompaia
  - Ci chiediamo se il movimento perturbato $x(t)$ torni a seguire l'andamento nominale $\tilde{x}(t)$ oppure no
- In virtù del concetto di stato, tutta la storia passata del sistema è contenuta nel valore che lo stato assume al termine della perturbazione, dunque possiamo iniziare ad osservare il comportamento del sistema a partire da tale istante t_0

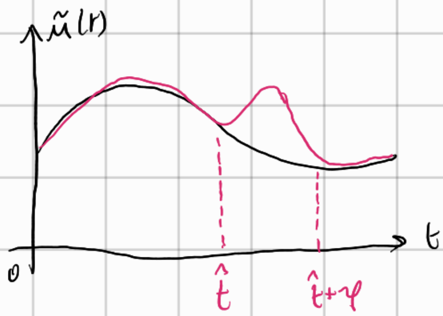


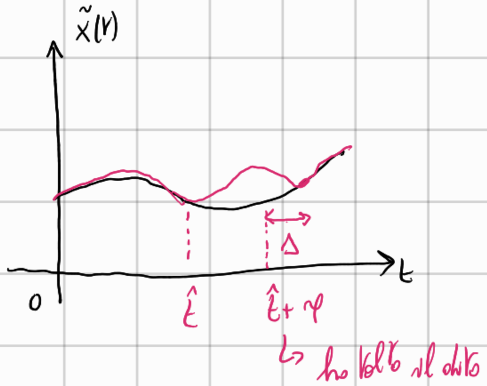
instabilità → 1 mi allontano dalla nominale

stabilità → 2 mi riporto esattamente / o sto in un intorno*

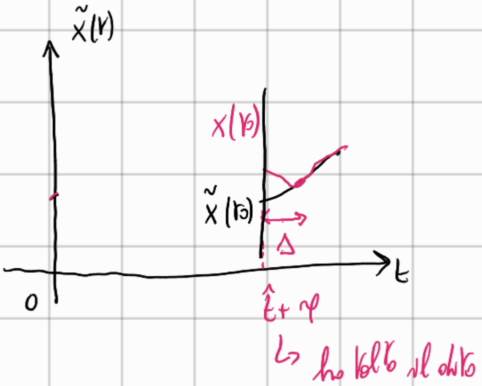








Δ = intervallo in cui la traiettoria perturbata si riporta in condiz. nominale. Comportamento si dice stabile.



Tutte le info sono conservate in $x(t_0)$. Voglio vedere se si adatta a $\tilde{x}(t_0)$.
Voglio vedere se con ingresso nominale ma con condiz. iniz. diversa, riesco a ritornare a stato nominale.
A partire da input ho cond. iniz. differente.

* Senza allontanamento def.

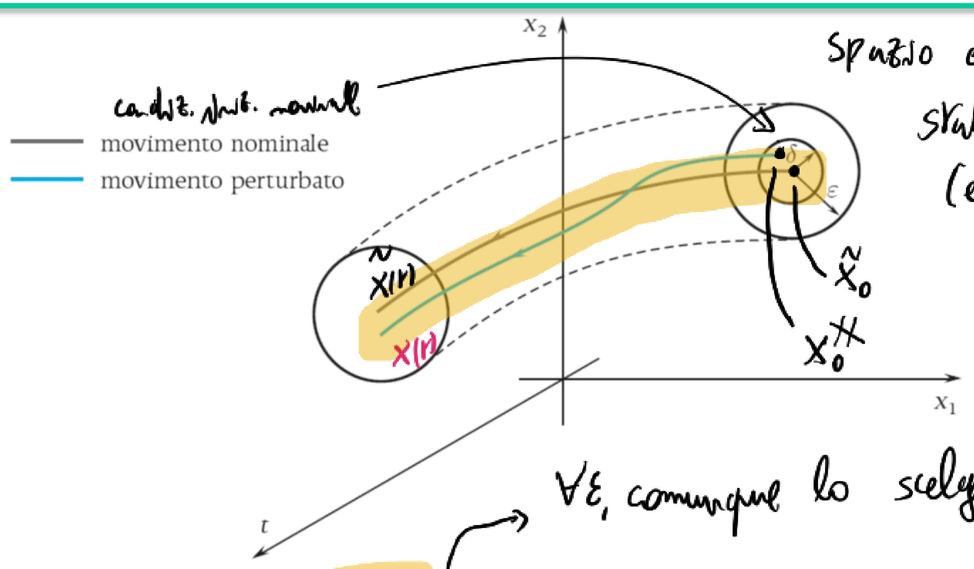
Stabilità del movimento

- **Definizione secondo Lyapunov**
  - Un movimento $\tilde{x}(t)$ si dice **stabile** se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall x_o: \; \|x_0 - \tilde{x}_0\| < \delta$$

risulta

$$\overbrace{\|x(t) - \tilde{x}(t)\|}^{\text{distanza}} < \varepsilon, \forall t \boxed{\geq} 0 \quad \delta < \varepsilon$$



Spazio di stato a 2d (es. x, v)

∀ε, comunque lo scelgo si deve verificare*

- La proprietà richiede che il movimento perturbato rimanga sempre «vicino» al movimento nominale
  - La stabilità sussiste se movimento perturbato e nominale sono sempre e arbitrariamente vicini purché la perturbazione iniziale sia sufficientemente piccola (naturalmente più si chiede che ε sia piccolo più δ dovrà essere piccolo)
- Se il movimento $\tilde{x}(t)$ è un punto di equilibrio $\bar{x}$, la definizione è sostanzialmente identica
  - Un punto di equilibrio $\bar{x}$ si dice **stabile** se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall x_o: \; \|x_0 - \bar{x}\| < \delta$$

risulta

$$\|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon, \forall t \geq 0$$

  - Esempio del pendolo semplice

* Pratico: Se ε piccolo, x_0 deve stare sempre più vicino a $\tilde{x}_0$.

* Con il simbolo $\|x\|$ indichiamo la «norma» euclidea del vettore $x \in \mathbb{R}^n$, cioè $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$

Fuori dal δ, ma é detto che sitiamo vicino abbastanza.

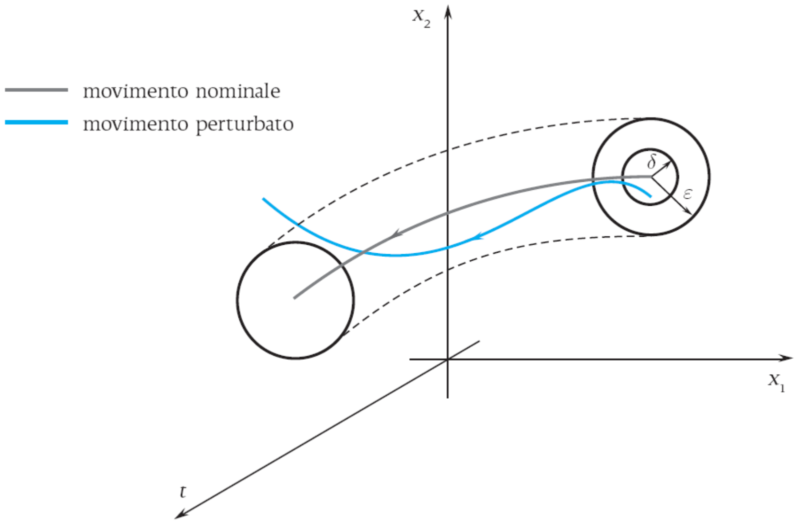
Stabilità del movimento

- Definizione secondo Lyapunov
  - Un movimento $\tilde{x}(t)$ si dice **instabile** se non è stabile, cioè

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \ \exists x_0 : \ \|x_0 - \tilde{x}_0\| < \delta$$

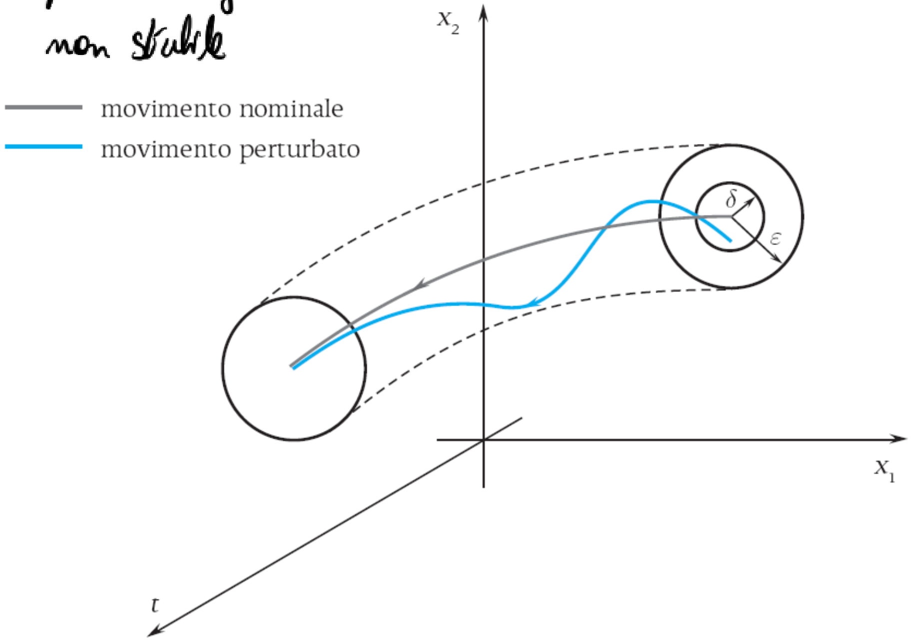
per cui risulta che

$$\exists \bar{t} > 0 : \ \|x(\bar{t}) - \tilde{x}(t)\| > \varepsilon$$



- In altre parole, per quanto la perturbazione iniziale possa essere scelta piccola, a partire da un certo istante di tempo in poi il movimento perturbato si discosta da quello nominale
  - Esempio del pendolo semplice

Ci sono esempi convergenti ma non stabile



Stabilità del movimento

- Definizione secondo Lyapunov
  - Un movimento $\tilde{x}(t)$ si dice **asintoticamente stabile** se è stabile e convergente, cioè

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \ \forall x_0 : \ \|x_0 - \tilde{x}_0\| < \delta$$

risulta

$$\|x(t) - \tilde{x}(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq 0$$

e inoltre

$$\lim_{t \to +\infty} \|x(t) - \tilde{x}(t)\| = 0$$

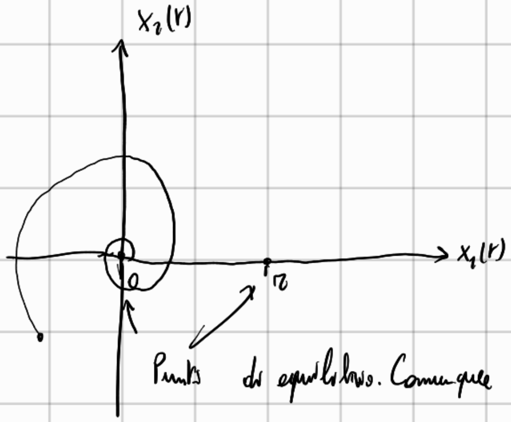
- In altre parole, non solo il movimento perturbato non deve allontanarsi da quello nominale (purché la perturbazione iniziale sia sufficientemente piccola) ma deve asintoticamente tornare ad esso
- Il movimento si dice, infine, Globalmente Asintoticamente Stabile (GAS) se la stabilità asintotica sussiste per una qualunque perturbazione iniziale → Cioè la x_0 ha un $\delta \to +\infty$. Da dove parto arrivo sempre in condiz. nominale.
  - Esempio del pendolo semplice

    ↳ Non lo è.

Eq. pendolo: $x_1 = \vartheta \quad x_2 = \dot{\vartheta}$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -\frac{g}{\ell}\sin x_1(t) - \frac{\beta}{m\ell^2} x_2(t) + \frac{1}{m\ell^2} u(t)$$

$$y(t) = \ell \sin x_1(t)$$



$\bar{u} = 0$

Punti di equilibrio. Comunque io parta, arrivo sempre in $\underline{0}$, a meno che non parto da π.

Movimento stabile: $\bar{x} = (0,0)$ punt. cost. nel tempo

Posso partire da tutto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(\pi,0)\}$.

In questo caso si parla di punto di eq. quasi GAS

Stabilità dei sistemi LTI

→ la linearità lo permette

- Teorema: Un movimento di un sistema LTI è stabile, asintoticamente stabile o instabile se e solo se lo sono tutti i movimenti del sistema
  - Dim.
    - Si considerino due ingressi nominali $\tilde{u}_a(t)$ e $\tilde{u}_b(t)$ e due condizioni iniziali nominali $\tilde{x}_{0_a}$ e $\tilde{x}_{0_b}$

Sollecitaz. + cond. iniziale

$$\tilde{u}_a(t), \qquad \tilde{x}_{0a} \rightarrow \tilde{x}_a(t)$$
$$\tilde{u}_b(t), \qquad \tilde{x}_{0b} \rightarrow \tilde{x}_b(t)$$

    - Applichiamo la stessa perturbazione δx_0 alle due condizioni iniziali, si otterranno i due movimenti perturbati $x_a(t)$ e $x_b(t)$ che potranno sempre scriversi come

$$\tilde{u}_a(t), \qquad x_{0_a} = \tilde{x}_{0a} + \delta x_0 \rightarrow x_a(t) = \tilde{x}_a(t) + \delta x_a(t)$$
$$\tilde{u}_b(t), \qquad x_{0_b} = \tilde{x}_{0b} + \delta x_0 \rightarrow x_b(t) = \tilde{x}_b(t) + \delta x_b(t)$$

    - La tesi sarà dimostrata se dimostriamo che $\delta x_a(t) = \delta x_b(t)$, perché vorrà dire che la perturbazione dipende solo dalla perturbazione della condizione iniziale δx_0 e non dal particolare movimento del sistema
    - Applichiamo i seguenti ingressi e condizioni iniziali al sistema e usiamo il principio di sovrapposizione degli effetti

new input

$$\tilde{u}_a(t) - \tilde{u}_b(t), \qquad \tilde{x}_{0a} - \tilde{x}_{0_b} \rightarrow \tilde{x}_a(t) - \tilde{x}_b(t)$$

ingresso e condiz. iniz. sono combinaz. lineari

$$\tilde{u}_a(t) - \tilde{u}_b(t), \qquad x_{0a} - x_{0_b} \rightarrow x_a(t) - x_b(t) = \tilde{x}_a(t) - \tilde{x}_b(t) + \delta x_a(t) - \delta x_b(t)$$

    - Ma siccome $x_{0a} - x_{0_b} = \tilde{x}_{0a} - \tilde{x}_{0_b}$ e siccome gli ingressi sono uguali e la soluzione è unica, allora

$$\tilde{x}_a(t) - \tilde{x}_b(t) = x_a(t) - x_b(t) \Rightarrow \delta x_a(t) - \delta x_b(t) = 0 \qquad \Delta$$

Se 2 mov. vengono perturbati dalla stessa perturbazione e hanno la stessa risposta ho fatto
* per sovrapp. degli effetti, il movimento risultante é quello: $\tilde{x}_a(t) \to \tilde{u}_a(t), \tilde{x}_{0a}$

$\tilde{x}_b(t) \to \tilde{u}_b(t), \tilde{x}_{0b}$

Δ La condiz in esame é la stessa di prima. Le risposte devono essere uguali
Comunque scelga il movimento e lo perturbo, l'esito della perturb. é lo stesso.
Cioé se 1 é stabile lo sono tutti.

Stabilità dei sistemi LTI

- In virtù del teorema precedente, per il quale la proprietà di stabilità è la stessa per tutti i movimenti del sistema LTI, si può parlare di stabilità del sistema e non solo del movimento (o del punto di equilibrio)
  - Ciò non è vero per i sistemi non lineari, per i quali la stabilità è SEMPRE una caratteristica del particolare movimento o punto di equilibrio → il pendolo é non lineare
- Possiamo dunque scegliere il punto di equilibrio nullo (per ingresso nullo) per studiarne la stabilità
  - Per definizione, tale movimento (punto di equilibrio) è stabile se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall x_o: \ \|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq 0$$

  - Il movimento perturbato $x(t)$ a partire da condizione iniziale x_0 è noto in forma chiusa: $x(t) = e^{At}x_0$
  - L'affermazione di sopra è vera se la matrice e^{At} è limitata, cioè $\exists \phi > 0$: $\|e^{At}\| \leq \phi, \forall t \geq 0$, infatti

$$\|x(t)\| = \|e^{At}x_0\| \leq \|e^{At}\|\|x_0\| < \delta\|e^{At}\| \leq \delta\phi = \varepsilon, \forall t \geq 0$$

schwartz norma matriciale

Massimo della somma dei valori assoluti delle righe

  - Quale condizione deve verificare la matrice A affinché $\|e^{At}\| = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |e_{ij}(t)|$ sia limitata?
  - Ricordando che gli elementi $e_{ij}(t)$ di e^{At} sono combinazioni lineari dei modi di evoluzione e che questi sono funzioni del tipo
    - $t^\nu e^{\lambda t}$ nel caso di autovalori reali dipendenti da ν, α $t^\nu e^{\lambda t}$ limitata da 1.
    - $t^\nu e^{\alpha t} \cos \omega t$ nel caso di autovalori complessi

  valgono le seguenti proposizioni

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ $\quad \bar{u} = 0$

$\dot{x}(t) = Ax(t)$ con $\bar{x} = cost$ per trovare punto di stabilità

$0 = A\bar{x}$

$\bar{x} = 0$

$\bar{x} \in N(A)$ sottospazio, può essere $\mathbb{R}^n$ se $A = \underline{\underline{0}}$

spazio nullo della matrice A

Quindi, sistemi dinamici LTI autonomi hanno sempre $\underline{0}$ come punto di equilibrio.

Stabilità dei sistemi LTI

solo la stabilità

- Proposizione 1: Un sistema LTI è stabile se e solo se tutti gli autovalori della matrice dinamica sono a parte reale negativa o nulla e quelli con parte reale nulla a molteplicità algebrica maggiore di 1 hanno miniblocchi di Jordan* di ordine 1
  - In tal caso, infatti, gli autovalori nulli danno luogo a modi propri limitati perché $\nu = 0$ (matrice A diagonalizzabile); quelli a parte reale negativa danno luogo sempre a modi propri convergenti, quindi non possono generare termini $e_{ij}(t)$ illimitati nella e^{At}

- Proposizione 2: Un sistema LTI è asintoticamente stabile se e solo se tutti gli autovalori della matrice dinamica sono a parte reale negativa
  - In tal caso, infatti, oltre alla proprietà di stabilità, sussiste anche quella di convergenza perché $x(t) = e^{At}x_0 \to 0, \text{per } t \to \infty$, dal momento che contiene solo modi convergenti

È anche GAS?

- Proposizione 3: Un sistema LTI è instabile se e solo se esiste almeno un autovalore della matrice dinamica a parte reale positiva o nulla con molteplicità algebrica maggiore di 1 e con miniblocchi di Jordan* di ordine maggiore di 1
  - In tal caso, infatti, esistono modi propri non limitati perché ci sono modi esponenziali divergenti o modi relativi ad autovalori nulli con $\nu = 1$ (matrice A non diagonalizzabile)

* Vedremo che il calcolo delle dimensioni dei miniblocchi di Jordan può essere fatto senza necessariamente calcolare la forma di Jordan di A

Proprietà dei sistemi LTI <u>asintoticamente stabili</u>

- È la PRIMA specifica che viene richiesta per il buon funzionamento di un sistema di controllo automatico
  - Le variabili di stato e uscita dei diversi sottosistemi che compongono il sistema di controllo non devono divergere
  - Le incertezze che caratterizzano il modello di un impianto potrebbero rendere divergenti modi relativi ad autovalori nulli
- Per un sistema a.s., il movimento libero $\xrightarrow{t\to\infty} 0$ indipendentemente dalle condizioni iniziali ($e^{At}x_0 \to 0, \forall x_0$), quindi la risposta tende a coincidere con la sola risposta forzata
  - Nella pratica vuol dire che il funzionamento di un sistema a.s. dipende dai soli ingressi e non dalle sue condizioni iniziali, è quindi «prevedibile» *
- Per un sistema a.s., la risposta impulsiva $\xrightarrow{t\to\infty} 0$ Δ, infatti $g_x(t) = e^{At}b \to 0$
- Per un sistema a.s., la risposta ad un qualunque ingresso di durata limitata $\xrightarrow{t\to\infty} 0$
  - Infatti, per un ingresso a durata limitata $\exists \bar{t} > 0 : u(t) = 0 \ \forall t > \bar{t}$ e quindi a partire da $\bar{t}$ la risposta è solo evoluzione libera a partire dallo stato iniziale $x(\bar{t})$, cioè

$$e^{A(t-\bar{t})}x(\bar{t}) \xrightarrow{t\to\infty} 0$$

detto primario

- Un sistema a.s. non può avere autovalori nulli, quindi $\det(A) \neq 0$ e quindi A è invertibile, per cui lo stato di equilibrio $\bar{x}$ in corrispondenza di un ingresso costante $\bar{u}$ è unico

$$\bar{x} = -A^{-1}B\bar{u}$$

Se $\bar{u} = 0$ ho un punto di equilibrio → unico fissato input $\bar{u}$
Se $\bar{u}$ lo cambio ne posso avere un altro.

* $e^{At} x_0$ = moto libero. Ha comportamento per cui convergerà sempre a 0.
△ perché è C.L. dei modi di evoluz. nell'uscita per gli stabili

△ ma la proprietà è valida per tutto, anche se u non è costante.

NOTA: divergenza non significa

- Come si stabilisce il segno della parte reale degli autovalori di una matrice?
  - Gli autovalori sono le radici (reali o complesse e coniugate) di un polinomio di grado n
  - Caso $n \leq 2$
    - **Criterio di Cartesio:** condizione necessaria e sufficiente affinché il polinomio $a_0 s^2 + a_1 s + a_2$ abbia tutte radici a parte reale negativa è che i coefficienti a_0, a_1 e a_2 abbiano tutti lo stesso segno (due permanenze di segno)
  - Se $n > 2$ tale condizione è solo necessaria, cioè
    - Se è verificata, «è solo possibile» che il polinomio abbia tutte radici a parte reale negativa ma non è sicuro
    - Se non è verificata (c'è qualche variazione di segno), sicuramente c'è qualche radice a parte reale maggiore o uguale a zero
  - Una condizione necessaria è sufficiente è costituita dal
    - **Criterio di Routh:** condizione necessaria e sufficiente affinché il polinomio di grado n

$$\varphi(s) = \varphi_0 s^n + \varphi_1 s^{n-1} + \varphi_2 s^{n-2} + \cdots + \varphi_{n-1} s + \varphi_n$$

abbia tutte radici a parte reale negativa è che la sua tabella di Routh sia ben definita e gli elementi della sua prima colonna siano tutti dello stesso segno.

  - Per analizzare la stabilità asintotica di un sistema LTI basta applicare tale criterio al polinomio caratteristico della sua matrice dinamica

Costruzione della tabella di Routh relativa al polinomio

$$\varphi(s) = \varphi_0 s^n + \varphi_1 s^{n-1} + \varphi_2 s^{n-2} + \cdots + \varphi_{n-1} s + \varphi_n$$

- Ha una struttura triangolare con $n+1$ righe

$$\begin{array}{c|cccc}
n & \varphi_0 & \varphi_2 & \varphi_4 & \cdot \\
n-1 & \varphi_1 & \varphi_3 & \varphi_5 & \cdot \\
\vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\vdots & h_1 & h_2 & h_3 & \\
\vdots & k_1 & k_2 & k_3 & \\
\vdots & l_1 & l_2 & l_3 & \\
\vdots & \cdot & \cdot & & \\
1 & \cdot & a & & \\
0 & a & & &
\end{array}$$

Le prime due righe contengono i coefficienti del polinomio in esame con l'ordine indicato

- la prima contenente i termini di pedice pari
- la seconda quelli con pedice dispari

Quelle dalla terza in poi sono costruite con l'algoritmo

$$l_i = -\frac{1}{k_1}\begin{vmatrix} h_1 & h_{i+1} \\ k_1 & k_{i+1} \end{vmatrix} = h_{i+1} - \frac{h_1 k_{i+1}}{k_1}$$

Se $k_1 \neq 0$ — sempre la prima — Caso particolare se $k_1 = 0$

- L'ultima riga è costituita dal secondo coefficiente della riga precedente (della seconda riga precedente)
- Non è necessario dividere per il coefficiente k_1 (si può decidere di farlo o no riga per riga) → Ma sempre $\neq 0$
- Il numero di variazioni di segno nella prima colonna corrisponde al numero di radici a parte reale positiva del polinomio ⇒ se sono tutti dello stesso segno ⇒ tutti autovalori nel semipiano sinistro ⇒ sistema a.s.

ultimo elemento viene sempre a_n

ES:

$$\overset{a_0}{s^4} + \overset{a_1}{2s^3} + \overset{a_2}{3s^2} + \overset{a_3}{4s} + \overset{a_4}{5}$$

variazioni di segno

4	1	3	5
3	2	4	0
2	1	$\boxed{5}$	0
1	-6		
0	$\boxed{5}$		

Segni tra le righe: $-$, $-$, $+$, $+$

0 → avrei dovuto mettere 0

Caso 2_1: $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$

Caso 2_2: $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 5$

Caso 1_1: $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{1}\right) = -6$

Caso $0_1 = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = 5$

Contiamo le permanenze di segno

Casi particolari:

$s^3 + 3s^2 - s - 3$

Già so che non posso avere tutti a parte reale negativa. I coeff. hanno segni diversi.

3	1	-1
2	3	-3
1	0*	
0		

* e mo? Non possiamo fare nulla? No. Metto un $\varepsilon > 0$.

3	1	-1
2	3	$\boxed{-3}$
1	$\varepsilon > 0$	
0	$\boxed{-3}$	

Segni tra le righe: $-$, $-$, $+$

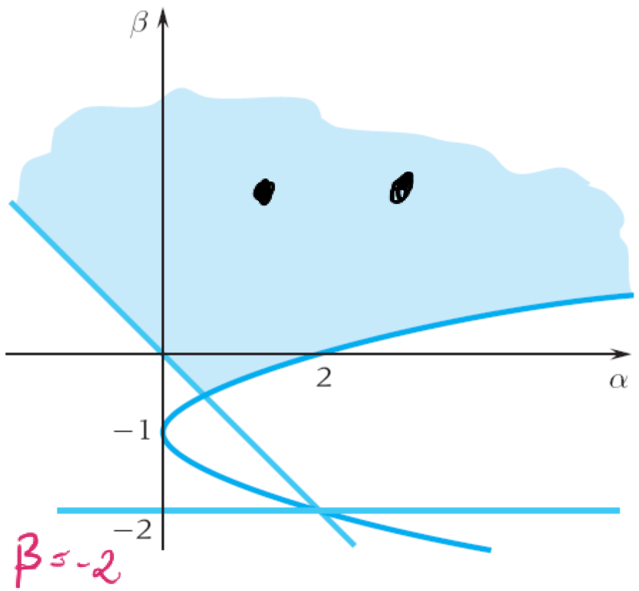
Quindi lo 0 lo considero come positivo.

- Il criterio di Routh è particolarmente utile quando si vuole studiare la stabilità di un sistema in funzione di un parametro
  - Il parametro può essere un parametro del regolatore
    - il criterio ci fornisce dei vincoli a cui deve soddisfare affinché il sistema sia stabile
  - Il parametro (o i parametri) può essere un parametro del sistema da controllare
    - Il criterio ci fornisce delle condizioni di «stabilità robusta», cioè la proprietà si conserva pur in presenza di incertezze

$$\varphi(s) = s^3 + (2+\beta)s^2 + (1+2\beta)s + \alpha + \beta$$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 1+2\beta \\ 2 & 2+\beta & \alpha+\beta \\ 1 & (1+2\beta)(2+\beta)-\alpha-\beta & \\ 0 & \alpha+\beta & \end{array}$$

$$\begin{cases} \beta > -2 \\ 2(\beta+1)^2 > \alpha \\ \beta > -\alpha \end{cases}$$



$s^3 + 2s^2 + s + K$

$$\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & 1 \\
2 & 2 & K \\
1 & 2-K & \\
0 & K &
\end{array}$$

non divido per 2

Per avere radici negative: $\begin{cases} 2-K>0 \\ K>0 \end{cases}$ $\quad 0<K<2$