ES. 1)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + e^{-2x_1} - u \\ \dot{x}_2 = -x_2 + e^{-x_1} \\ y = x_2 \end{cases}$$

$u(t) = 2 + 0.1\,\delta_{-1}(t)$

Linearizzo: $y(t) = \bar{y} + \delta y(t)$

Punti equilibrio:

$0 = \bar{x}_2 + e^{-2\bar{x}_1} - \bar{u}$ con $\bar{u} = 2$

$0 = -\bar{x}_2 + e^{-\bar{x}_1}$

$\Rightarrow \bar{x}_2 = e^{-\bar{x}_1}$

$0 = e^{-\bar{x}_1} + e^{-2\bar{x}_1} - 2$ $\qquad e^{-\bar{x}_1} = z$

$z^2 + z - 2 = 0$

$z_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$ non accettabile, $e^{-\bar{x}_1} \geq 0$

$e^{-\bar{x}_1} = 1 \Rightarrow \bar{x}_1 = 0 \qquad \bar{x}_2 = 1$

$\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$

Calcolo sistema linearizzato.

$$A = \left.\frac{\delta f}{\delta x}\right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \left.\begin{pmatrix} -2e^{-2x_1} & 1 \\ -e^{-x_1} & -1 \end{pmatrix}\right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Per la stabilità:

$$\begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 \\ 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda+1)+1$$ Tutti a parte reale negativa.

Punto di eq. é localmente a.s.

$b = \left.\frac{\delta f}{\delta x}\right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad c^T = (0 \quad 1) \qquad d = 0$

Quindi, devo trovare $\delta y(t)$, perché $\bar{y} = \bar{x}_2 = 1$.

$\delta y(t)$ è la risposta al solo $\delta u(t)$ del sistema linearizzato.

Ergo, trovo $G(s)$.

$$G(s) = \left[C^T (sI-A)^{-1} b\right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+2 & -1 \\ 1 & s+1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{s^2+3s+3}$$

Prende 2ª riga

Prende elemento 1 della riga

Calcolo risposta indiciale:

$$\Delta Y(s) = G(s)\,\Delta U(s) = \frac{1}{s^2+3s+3} \cdot \frac{0.1}{s} = \frac{r_1}{s} + \frac{r_2}{\left(s+\frac{3}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} + \frac{r_2^*}{\left(s+\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$\Delta Y(s)$: $\mathcal{L}[\delta y(t)]$

$$r_1 = s\,\Delta Y(s)\big|_{s=0} = \frac{0.1}{3}$$

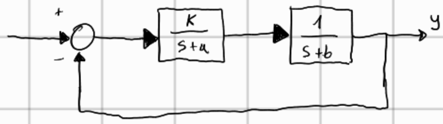
$$r_2 = \frac{0.1}{\left(-\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sqrt{3}\,j\right)} = \begin{cases} |\cdot| \to \frac{0.1}{3} \\ \angle \to -\frac{3}{2}\pi + \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \varphi \end{cases}$$

atan $\to \angle = (\pi - \operatorname{atan})$

$$\mathcal{L}^{-1} \longrightarrow \frac{0.1}{3} + \frac{0.2}{3} e^{-\frac{3}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \varphi\right)$$

RISPOSTA APPROSSIMATA $\longrightarrow$ A regime la risposta sarà $\frac{0.1}{3} + 1$.

ES. 2)



$a, b, c \;/\quad \mu = 0.9$

$\omega_n = 10\,rad/s$

$\xi = 0.5$

No cancellazioni

↓

Sistema è complet. ragg. e osservabile ⇒ stab. BIBO e AS sono eq.

$$G(s) = \frac{\frac{K}{s+a}\cdot\frac{1}{s+b}}{1+\frac{K}{s+a}\cdot\frac{1}{s+b}} = \frac{K}{(s+a)(s+b)+K} = \frac{K}{s^2+(a+b)s+ab+K}$$

$y_\infty = \mu \bar{u}$ se y_∞ esiste

$$\begin{cases} G(0) = \dfrac{K}{ab+K} = \mu \\ (a+b) = 2\xi\omega_n \\ ab+K = \omega_n^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{K}{ab+K} = 0.9 \\ ab+K = 100 \\ 10 = a+b \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $K = 0.9\cdot 100 = 90$

$$\begin{cases} ab = 10 \\ a+b = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 1.\ b = 5-\sqrt{15} \quad a = 10-b \\ 2.\ b = 5+\sqrt{15} \quad a = 10-b \end{array}$$

n. 4)

$$\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

Trovare prop. di ragg. e T_{ass}.

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} X(t)$$

ISU è in forma canonica di Ragg. ⇒ Sistema è compl. ragg.)

Calcolo $\mathcal{O}$:

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C^T \\ C^T A \\ C^T A^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$\det \mathcal{O} = 0$ ⇒ sistema non complet. osservabile

Nota: ci fermiamo a A^{n-1} perché le potenze successive sono tutte c.l. delle precedenti

NOTA: $C^T A^2 = (C^T A) A$ ⇒ Prendo riga di prima e moltiplico per A.

Calcolo $G(s)$ per 2° punto (ho già i termini nella forma di ragg.)

la $d=0$, quindi i coefficienti sono in ordine

$$G(s) = \frac{s+1}{s^3+2s^2+2s+1}$$

NOTA: Sistema non è OSS., mi devo aspettare semplificazione.

$$G(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$$

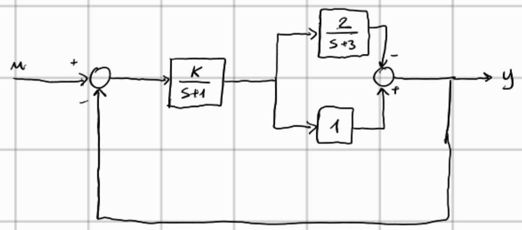
Quindi, ho poli a parte reale negativa ⇒ Stabile BIBO.

$$T_{a1} = \frac{4.6}{\xi \omega_n}$$

dipende da $\xi \omega_n$ cambiato di segno

Con $\omega_n = \sqrt{1} = 1$ e $\xi = 0.5$ ⇒ $T_{a1} = 9.2$ s

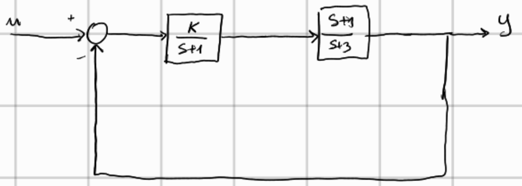
ES.2)



Valuto prima i 2 nel parallelo: non ci sono poli in comune, non posso avere cancellazioni ⇒ Non perdo oss. e ragg.

$$G_2(s) = -\frac{2}{s+3} + 1 = \frac{s+1}{s+3}$$

Posso sostituire tutto senza problemi di ragg. e oss.

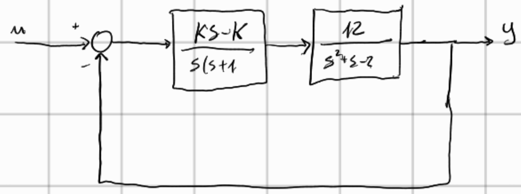


Che ci dice subito che il sistema non é completamente osservabile

$$G(s) = \frac{\frac{K}{s+3}}{1+\frac{K}{s+3}} = \frac{K}{s+3+K}$$

Per il 2 ⇒ $\tau = -\frac{1}{\lambda} = \frac{-1}{-3-K} = \frac{1}{3+K}$

ES. 5)



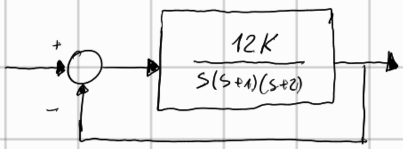
A.S.? BIBO?

NOTA: per semplificazioni perdo la raggiungibilità.

Non ci sono semplificaz. con la catena in ritorno. No problem.

NOW: Guardo la slide di sopra:

Lui non è stabile BIBO



Il sistema a ciclo chiuso ha certamente un autovalore in $s=1$. Viene cancellato, ma rimane come polo nel sistema di base.

$\forall K \in \mathbb{R}$ il sistema è sempre instabile.

Why? Nonostante retroazione, se ho zero a monte che cancella polo a valle, all'interno ho sempre autovalore bloccato per la funzione con il polo che si è semplificato.

$$G(s) = \frac{\frac{12K}{s(s+1)(s+2)}}{1 + \frac{12K}{s(s+1)(s+2)}} = \frac{12K}{s^3 + 3s^2 + 2s + 12K}$$

Applico Routh:

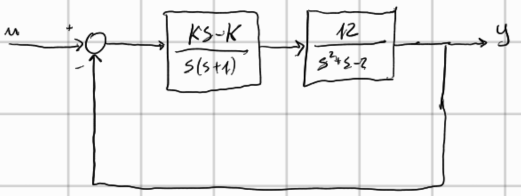
$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 12K \\ 1 & 6-12K & \\ 0 & 12K & \end{array}$$

$$\begin{cases} K > 0 \\ 6 - 12K > 0 \end{cases} \Rightarrow \quad 0 < K < \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Stabile BIBO}$$

NOTA: qui $\frac{y_\infty}{\bar{u}} = 1$ (facciamo finta che è AS)

NOTA: perché da pagine è polo in 0.

Applico il GOLD STANDARD



$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (u - y)$$

$$y_1 = \begin{pmatrix} -K & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} y_1$$

$$y = \begin{pmatrix} 12 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + u - 12x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= 2x_3 - x_4 - Kx_1 + Kx_2 \\ y &= 12x_3 \end{aligned}$$

Calcolo polinomio caratteristico:

$$(sI - A) = \begin{pmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s+1 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ K & -K & -2 & s+1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = s^4 + 2s^3 - s^2 + 2(6K-1)s - 12K$$

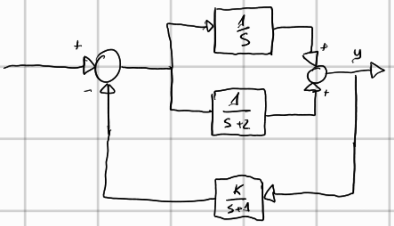
Segni opposti, già so che non posso avere tutti poli negativi.

Ora per la BIBO:

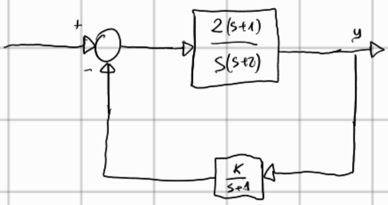
- Calcolo $rk(\mathcal{O})$ e $rk(R)$ e vedo che $rk(R) < n$ e vedo che ho sistema non compl. ragg. e vedo che c'è uno zero sulla sinistra (e solo lì, perché già ho 1 sul blocco).

NOW: Stabile BIBO ⇒ Controllo se sistema non è ragg./oss. e capisco che ho un WARNING.

Es. 6)



Nota: il // non ha poli in comune => sono tutti ragg. e oss.



Sistema del 3° ordine

Oss: ho cancellazione di zero di G_a e polo in G_b. Perdo tutte e due le proprietà.

Ma aspetto semplificazioni.

$$G(s) = \frac{\frac{2(s+1)}{s(s+2)}}{1 + \frac{2\cancel{(s+1)}}{s(s+2)} \frac{K}{\cancel{s+1}}} = \frac{2(s+1)}{s^2+2s+2K}$$

Se $K>0$ ho stab. BIBO

Ma ho A.S.? La parte non ragg. e non osservabile è stabile. Siccome lo è anche quella osservabile, per $K>0$ ho A.S.

Ora: $\xi = 0.5$

$$\omega_n^2 = 2K = 4 \Rightarrow K=2$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \omega_n = 2$$

coeff. della f(s)