Misure Elettroniche

Università degli Studi della Campania *Luigi Vanvitelli*

Espressione dell'Incertezza di Misura

Prof. Mario Luiso

Dipartimento di Ingegneria

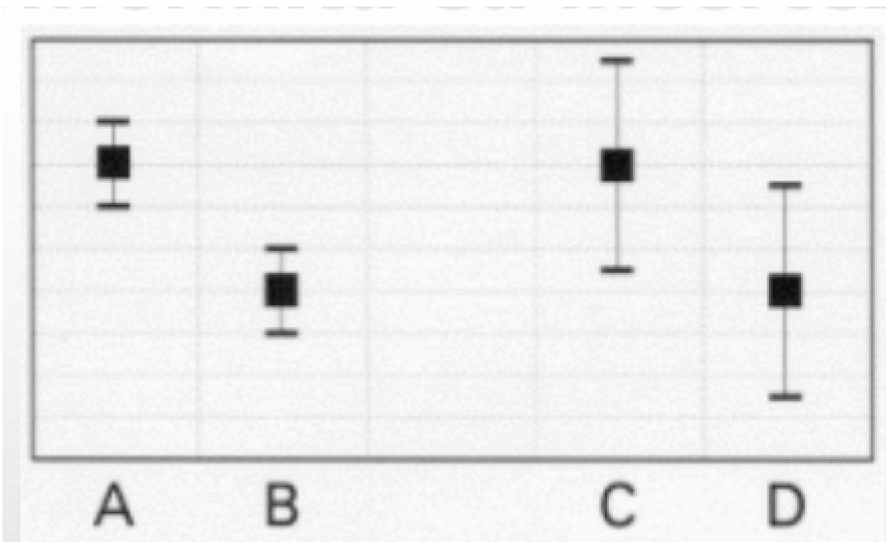
Via Roma, 29 – 81031 Aversa (CE)

mario.luiso@unicampania.it

www.ingegneria.unicampania.it/

Concetti di base

La **misurazione** è il procedimento, empirico ed oggettivo, che permette il **confronto** fra una **proprietà** di un fenomeno e la relativa unità di misura (o un multiplo, sottomultiplo) per ottenere un intervallo di valori, la **misura**, all'interno del quale si colloca il misurando con un certo livello di probabilità.



Concetti di base

- La definizione quantitativa (numerica) del misurando si avviene sempre con un certo grado d'indeterminazione
- Accanto al risultato di misura si deve **<u>sempre</u>** esprimere il grado di indeterminazione con cui la misurazione è stata capace di attribuire un valore al misurando.
- Il risultato della misurazione è un'informazione costituita da un **numero,** una **unità di misura** ed una valutazione del **grado di indeterminazione** della valutazione
- L'incertezza non può **mai essere nulla**

UN RISULTATO DI MISURA SENZA UNA VALUTAZIONE DEL GRADO DI INDETERMINAZIONE AD ESSO ASSOCIATO RISULTA **<u>INUTILIZZABILE</u>**

Valore “vero”, Errore ed Incertezza

Definire oggetto da misurare: noi modelliamo la realtà con modelli, vado con la misurazione a caratterizzare una parte di quel modello.

- Il primo passo di una misurazione la **definizione del misurando**, cioè della grandezza da misurare. Il misurando non può essere specificato da un solo valore ma solamente dalla descrizione di certe condizioni e stati fisici. Es. volume dell'acqua (a temperature diverse?)
- Un misurando non può essere completamente descritto se non da una quantità di informazione infinita.
- **L’incompleta definizione del misurando**, nella misura lascia un margine di interpretazione, che introduce una componente di indeterminazione nel risultato che può essere o no significativa rispetto all’accuratezza richiesta alla misura (**Incertezza intrinseca**).
- Es. La velocità del suono in aria secca di composizione (frazione molare) N_2 =0,7808, O_2 =0,209 5, Ar =0,009 35 e CO_2 =0,000 35, alla temperatura T = 273,15 K ed alla pressione p =101 325 Pa.

Valore “vero”, Errore ed Incertezza

- Ad esempio, sia il misurando lo spessore di una data lamina di metallo ad una temperatura specificata. Lo spessore viene misurato in un punto specifico con un micrometro. La grandezza realizzata è, in questo caso, lo spessore della lamina in quel punto ed a quella temperatura, sotto la pressione esercitata dal micrometro.
- Se il micrometro fosse stato applicato in un punto diverso della lamina, la misura sarebbe stata differente. Tuttavia, quel nuovo valore è compatibile con la definizione del misurando, poiché questa non specifica che lo spessore debba essere determinato in un punto particolare della lamina.

Caso Polifemo: non ho specificato la pressione necessaria.

Valore "vero", Errore ed Incertezza

- Dunque **il valore "vero"** dello spessore della lamina **non esiste**. La quantificazione del misurando, a causa di una definizione incompleta, ha un'incertezza che può essere valutata attraverso misurazioni effettuate in punti differenti della lamina. → Es. avvallamento in un punto: esiste lo spessore in un determinato punto sotto una certa pressione
- Per ogni misurando **Il valore "vero" non esiste**
- Ogni misurando ha **un'incertezza "intrinseca"** di questo tipo che è la più piccola incertezza con cui si può determinare un misurando. → Es: lastra = parallelepipedo perfetto: modello non completamente vero che introduce incertezza intrinseca → Legata al modello che noi costruiamo, mai perfetto
- L'ottenimento di un valore avente incertezza minore richiede una definizione più completa del misurando.
- **Non ha senso parlare di errore** di misura (differenza tra valore misurato e valore vero)

Valore vero non esiste

Non esiste: non quantifichiamo realmente una proprietà di un fenomeno, ma una parte di modello che rappresenta la realtà fisica ⇒ incertezza.

Valore “vero”, Errore ed Incertezza

- In generale valore del misurando dipende dal combinarsi di una serie di grandezze fisiche:

VALORE VERO CHE NON ESISTE (MODELLO PERFETTO)

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$

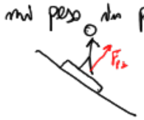
Temperatura, pressione, avvallamento

Combinate danno valore misurando

Possiamo avere tantissime variabili, ne trascuro alcune.
Quelle variabili comportano una variazione, che non noto ⇒ diventano sorgente di incertezza

- La mancata definizione o valutazione dell’effetto di tutte le grandezze che influenzano il misurando comportano l’esistenza dell’incertezza intrinseca
- In aggiunta, però, esistono altre grandezze fisiche che pur senza alterare il misurando alterano il risultato di misura, y_m (**grandezze d’influenza**):

Cambia la quantificazione del misurando.
Es. mio peso in piedi o seduto. Peso non cambia.



$$\underbrace{y_m}_{\text{Quantificazione di } y.} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \underbrace{q_1, q_2, \ldots, q_m}_{\text{grandezze di influenza}})$$

- La mancata definizione o valutazione di queste grandezze ha come effetto l’aumento dell’incertezza

NOTA: X_i influenza direttamente la grandezza fisica. q_i influisce solo sulla quantificaz. di y. Ma trascurare una X_i e una q_i potrei ottenere un effetto identico: es. ho bevuto 10g di acqua, ma ho inclinaz. della bilancia che aggiunge 10g.

Classificazione delle deviazioni

Qui parlo sempre di scostamenti sulla quantificazione del misurando

- Sia le grandezze trascurate che definiscono il misurando sia le grandezze d'influenza producono effetti sul risultato della misura di due tipi:

Scostamenti nella quantificazione sempre costanti in misurazioni nelle stesse condizioni.

- ***Deviazioni (errori) sistematiche:*** *sono praticamente costanti in ampiezza e segno quando la misurazione viene ripetuta nelle stesse condizioni.* +10g
- ***Deviazioni (errori) casuali*** *(stocastiche, aleatorie)****:*** *non si ripetono con la stessa ampiezza e segno in misurazioni ripetute nelle stesse condizioni. Sono presumibilmente originati da variazioni non prevedibili o casuali, nel tempo e nello spazio, delle grandezze di influenza. Gli effetti casuali danno luogo a variazioni in osservazioni ripetute del misurando.*
- I valori esatti dei **contributi di errore** sul risultato di una misurazione sono **ignoti ed inconoscibili, ma se ne parla comunemente**

Non posso stimare perfettamente quelle sopra

Valore "vero", Errore ed Incertezza

- **Sono invece valutabili le incertezze** associate agli effetti casuali e sistematici che originano l'errore.
- Incertezza di misura è pertanto un'espressione del fatto che, per un dato misurando e per un dato risultato della sua misurazione, non vi è un solo valore, ma **un'infinità di valori** dispersi intorno al risultato che sono compatibili con tutte le osservazioni, i dati e la conoscenza del mondo fisico, e che possono essere attribuiti al misurando con vari gradi di plausibilità.
- Fortunatamente in molte situazioni sperimentali pratiche, la maggior parte delle cause d'indeterminazione del misurando producono effetti trascurabili

Posso valutare oscillaz. del peso? No. Ma posso determinare incertezza associata, che ~~mi~~ determina un intervallo ⇒ incertezza nasce da deviazione casuale.

Non so errore preciso, ma so dire "c'è un I/ con una certa prob. so trova il mio misurando".
Questo intervallo esiste perché c'è l'oscillazione.

Valore “vero”, Errore ed Incertezza

- Tuttavia, **l’incompleta conoscenza delle grandezze d’influenza e dei loro effetti può spesso contribuire in misura significativa all’incertezza del risultato di una misurazione**.
- Persino nel caso di incertezze valutate piccole, ancora non vi garanzia che l’errore nel risultato della misurazione sia piccolo infatti, nella determinazione di una correzione, o nella valutazione del livello di incompletezza dell’informazione, **si può aver trascurato un effetto sistematico, in quanto di esso ignari**.
- Pertanto l’incertezza del risultato di una misurazione non è necessariamente un’indicazione della verosimiglianza che il risultato stesso sia vicino al valore del misurando; essa è semplicemente una stima della verosimiglianza della prossimità al miglior valore compatibilmente con il **livello di conoscenza disponibile al momento**.

Correzioni degli effetti sistematici

- Quando si individua l'esistenza di deviazioni sistematiche di qualunque origine poiché sono costanti in ampiezza e segno è possibile pensale di compensarne l'effetto.
- Se una grandezza di influenza produce sul risultato di una misurazione un effetto identificato in un effetto sistematico, tale effetto può essere quantificato e, compensato apportando **una correzione**, così da predire quale sarebbe stato il risultato della misurazione qualora l'effetto non vi fosse stato.
- Così come l'errore casuale, anche l'errore sistematico non può essere eliminato ma sovente può essere **ridotto ad effetto aleatorio** a media nulla. → Bilancia che é inclinata ma ha predivo che oscillano: +[9, 11] g. Tolgo i 10 g di errore sistematico. Ho ridotto l'errore a un errore casuale a media nulla. Eliminato la parte sistematica. Lo posso vedere in ricalibra
- Si ipotizza che, a seguito della correzione, il valore atteso della deviazione generato da un effetto sistematico sia zero.

Correzioni degli effetti sistematici

$$y_m = y - C(y)$$

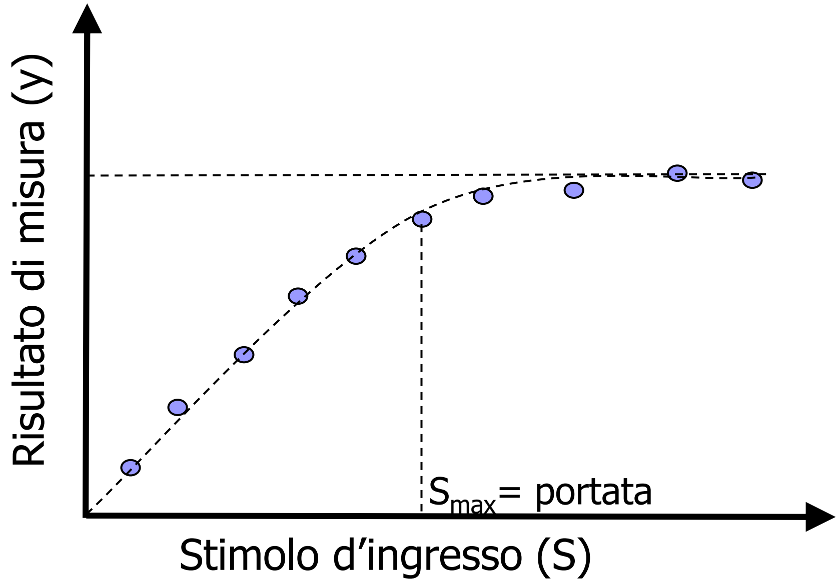
Risultato affetto da deviazione sistematica

$$y_c = y_m + C(y)$$

Risultato corretto dalla deviazione sistematica

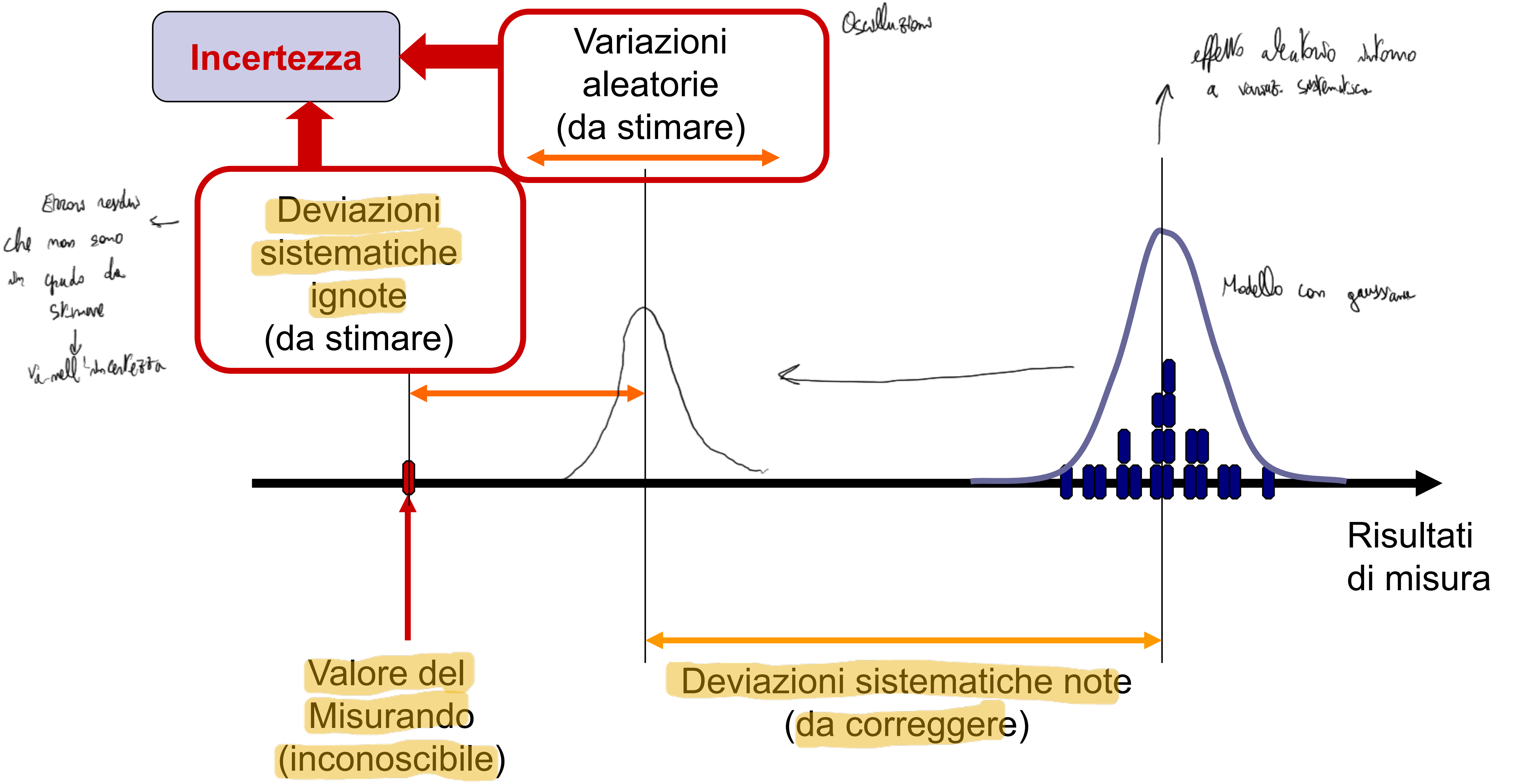
Molte delle deviazioni sistematiche possono essere dedotte dal diagramma di **taratura o calibrazione** (in forma grafica, tabulare, o analitica)

Y	S
0.1	0.11
0.2	0.20
0.3	0.35
0.4	0.44
0.5	0.58



Per le misurazioni la uso al contrario:
leggo 0.3 → ho 0.3 quando dllego 0.35.

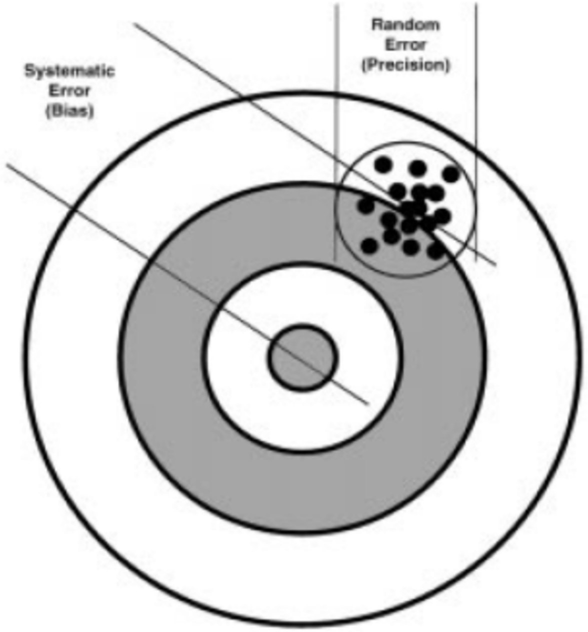
Componenti d'Incertezza



Abbiamo sempre modello fisico che valuta fenomeno che causa deviaz. sistematiche non é perfetto

Componenti d'Incertezza

- Errore di misura: non quantificabile perché non esiste valore vero perché non posso ottenere modello perfettamente aderente alla realtà.
  - Parametro <u>inconoscibile</u> pari alla differenza fra il valore del misurando (inconoscibile) ed il risultato di misura
- Parametri d'influenza con effetti sistematici:
  - devono essere <u>CORRETTI</u> se noti o <u>VALUTATI</u> con metodi probabilistici ed inclusi nel parametro d'incertezza
- Parametri d'influenza con effetti aleatori
  - devono essere <u>VALUTATI</u> con metodi probabilistici ed inclusi nel parametro d'incertezza



Fonti di incertezza

Oltre l'incertezza intrinseca dobbiamo considerare

a) imperfetta realizzazione della definizione del misurando;
b) non rappresentatività della campionatura; lo spessore della lastra in un punto non è rappresentativo dello spessore al centro
c) inadeguata conoscenza degli effetti delle condizioni ambientali sulla misurazione o loro imperfetta misurazione;
d) distorsione personale dell'operatore nella lettura di strumenti analogici;
e) risoluzione o soglia di risoluzione strumentali non infinite;
f) valori non esatti di campioni e materiali di riferimento;
g) valori non esatti di costanti ed altri parametri ottenuti da fonti esterne ed usati nell'algoritmo di elaborazione dei dati;
h) approssimazioni ed ipotesi semplificatrici inerenti al metodo ed al procedimento sperimentali;
i) variazioni nelle osservazioni del misurando ripetute in condizioni apparentemente identiche.
j) …

Esempi di fonti d'incertezza

Ognuna di queste cause ha certamente degli effetti sul risultato della misura.

- Alcuni di questi effetti sono calcolabili (effetti sistematici), e quindi vi si può porre un rimedio;
- Altri sono evitabili (errori grossolani), se necessario, con opportune precauzioni, ma, almeno in linea di principio, i loro effetti sono individuabili, sia pure entro altre incertezze residue con metodi statistici;
- Altri infine possono essere solo valutati statisticamente.

Metodi per determinare l'incertezza

Il metodo ideale per valutare ed esprimere l'incertezza del risultato di una misurazione deve essere:

- **Universale**: il metodo deve essere applicabile a tutti i tipi di misurazione e di dati di ingresso usati nelle misurazioni.

La grandezza usata per esprimere l'incertezza deve essere:

- **Internamente coerente**: deve cioè essere sia derivabile direttamente dalle componenti che vi contribuiscono, sia indipendente dal modo in cui queste componenti vengono raggruppate e dalla scomposizione delle componenti in sottocomponenti;

  Es: tratto umidità e temp. come 2 soggetti diversi o la stessa ⇒ es. valuto incert. singolarmente oppure raggruppata e devo avere lo stesso risultato

- **Trasferibile**: l'incertezza valutata per un risultato deve essere direttamente utilizzabile come componente nella valutazione dell'incertezza di un'altra misurazione nella quale intervenga il primo risultato.

  Es: velocità come $\frac{\Delta s}{\Delta t}$. Incertezza sullo spazio deve poter essere trasferita all'incertezza sulla velocità, senza manipolar.

Faremo riferimento alla norma **UNI CEI ENV 13005**: "Guida all'espressione dell'incertezza di misura"

Guide Uncertainty Measurement

Metodi per determinare l'incertezza

- In molte applicazioni industriali e commerciali, così come nel campo sanitario e della sicurezza, è sovente necessario **fornire un intervallo** intorno al risultato della misurazione entro il quale ci si possa aspettare che cada una gran parte della distribuzione dei valori ragionevolmente ascrivibili alla grandezza oggetto della misurazione. Maggior parte che significa? Probabilità di copertura
- Pertanto, il metodo ideale per valutare ed esprimere l'incertezza nella misurazione deve poter agevolmente fornire un intervallo di tal sorta, ed in particolare un intervallo con una **probabilità di copertura**, o livello di fiducia, che corrisponda realisticamente a quello richiesto (La certezza è impossibile).

Metodi per determinare l'incertezza

- **L'incertezza** è un parametro positivo che caratterizza la dispersione dei valori attribuibili al misurando in base alle informazioni usate cioè in base ai parametri con cui lavoro: con un modello magari ho meno precisione
- L'incertezza del risultato di una misurazione si compone in genere di svariate componenti che possono essere raggruppate in due categorie a seconda del modo in cui se ne stima il valore numerico:

  Fa riferimento SOLO al modo in cui valuto incertezza, non fa riferimento a ciò che causa incertezza

  A. quelle valutate per mezzo di metodi statistici (**TIPO A**)
  B. quelle valutate mediante altri metodi. (**TIPO B**)
- Non sempre esiste una corrispondenza semplice tra la classificazione in categorie A o B e quella, precedentemente usata tra "casuali" e "sistematiche".
- Entrambi i tipi di valutazione sono basati su **distribuzioni di probabilità** e le componenti risultanti da ambedue i metodi sono quantificate mediante varianze o scarti tipo.

Valutazione dell’incertezza di categoria B

- Per una stima dell’incertezza di una grandezza che non è stata oggetto di osservazioni ripetute ci si basa di un giudizio scientifico basato su tutte le informazioni disponibili sulla sua possibile variabilità

- L’insieme di informazioni può comprendere:
  - **<u>dati forniti in certificati di taratura</u>** → es. bilancia tarata: conoscenza pregressa
  - specifiche tecniche del costruttore;
  - incertezze assegnate a valori di riferimento presi da manuali;
  - dati di misurazione precedenti; esperto
  - esperienza o conoscenza generale del comportamento e delle proprietà dei
  - materiali e strumenti di interesse.

Valutazione dell'incertezza di categoria A

- Nella maggioranza dei casi, la migliore stima dei valori attesi μ_q di una grandezza q che varia casualmente e della quale sono state ottenute n **osservazioni indipendenti** q_k nelle stesse condizioni sperimentali, è la media aritmetica o **valore medio** delle n osservazioni:

$$\bar{q} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} q_k$$

Non riesco a descrivere al 100% la realtà.
Modello misurando come variabile aleatoria
Nota: Misurando non conoscibile, così nemmeno var. aleatoria
Parametro lo stimo con misurazioni ripetute
Posso trovare valori che non mi aspetto e che si discostano dal previsto

- Le singole osservazioni q_k differiscono a causa di variazioni casuali delle grandezze d'influenza o da effetti aleatori. La varianza sperimentale delle osservazioni, che stima la varianza σ^2 della distribuzione di probabilità di q, è:

$$s^2(q_k) = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(q_k - \bar{q})^2$$

n-1 perché altrimenti non posso avere varianza

DISPERSIONE VALORI RISPETTO VALORE MEDIO

distanza di oss. dal valore medio.
Elevo al quadrato per evitare che distanze positive si compensino

QUESTI 2 VALORI STIMATI SONO UTILISSIMI

Valutazione dell'incertezza di categoria A

- Questa stima della varianza e la sua radice quadrata positiva $s(q_k)$, denominata scarto tipo sperimentale, caratterizzano la variabilità dei valori osservati q_k, o, più specificatamente, la loro dispersione intorno alla media.
- Lo scarto tipo sperimentale della media, quantificano quanto bene stimi il valore atteso μ_q di q, e può essere adottato come valutazione quantitativa dell'incertezza.

Lo scarto tipo sperimentale mi dice quanto é buona la valutazione. Se voglio stimatore perfetto ($u_A = 0$, media sperimentale = media statistica), $n \to +\infty$

$$u_A = s(\bar{q}) = \frac{s(q_k)}{\sqrt{n}}$$

Scarto tipo sp: distanza media delle osservaz. dal valore medio.

Fatto storico

$\to 0$ se $n \to +\infty$. Ho stimatore perfetto.

- **Esperimenti indipendenti** implica che i risultati di misura devono cambiare per effetti aleatori o variazioni aleatorie di effetti sistematici altrimenti gli esperimenti sono correlati e la valutazione può non essere appropriata

Es. Incertezza di categoria A

Sono state effettuate n=20 misurazioni indipendenti di una temperatura ottenendo:

100.16	99.54	100.35	100.43	100.18	100.26	100.24	99.90	100.15	99.68
100.21	99.53	99.78	99.55	99.60	100.32	100.20	99.82	100.45	99.53

$$\bar{T} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T_k = 99.9040\ K$$

$$s(T) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(T_k - \bar{T}\right)^2} = 0.33\ \mathrm{K}$$

$$u_T = \frac{s(T)}{\sqrt{n}} = \frac{0.33}{\sqrt{20}} = 0.0745\ K$$

$$U = 3 \cdot u_T = 0.22\ K$$

$$T = (99.90 \pm 0.22)\ K$$

Regole di scrittura

se incertezza é pari a 1 milione,
ho 7 cifre significative.
Ma $1 \cdot 10^6$ ne ha 2.
$1.0 \cdot 10^6$ ne ha 3.

I risultato numerico della misurazione va scritto con:

- **L'incertezza espressa con due cifre significative**
- **Il risultato le cui cifre si arrestano per arrotondamento dove finisce l'incertezza** → Mi devo fermare all'incertezza

100 g ± 0.35 mg non va bene

Ad esempio una massa di valore nominale 100 g

Ultima cifra sign. = ultima cifra significativa dell'incertezza

1. m=100,02147 g con incertezza tipo u= 0,35 mg.
2. m= 100,021 47(35) g, dove il numero entro parentesi è il valore numerico dell'incertezza tipo u.
3. m= 100,021 47(0,000 35) g, dove il numero entro parentesi è il valore numerico di incertezza tipo composta (o tolleranza).
4. m= (100,021 47± 0,000 35) g, dove il numero che segue il simbolo ± è il valore numerico dell'incertezza tipo composta (o tolleranza).

Nota: se ne ho di più arrotondo

Categoria A oppure Categoria B?

- I due metodi **non sono alternativi**
- Il risultato di una misurazione può essere espresso come funzione di una serie di parametri fisici che determinano il misurando o influenzano la lettura del valore

$$y_m = f(x_1, \boxed{x_2, \ldots, x_n, x_{n+1},} \boxed{x_{n+2}, \ldots, x_{n+p}, q_1, q_2, \ldots, q_m})$$

Utilizzate nella definizione del misurando devono restare costanti per avere condizioni di ripetibilità

Grandezze trascurate nella definizione del misurando o grandezze d'influenza. Esse devono variare in maniera scorrelata per avere misurazioni indipendenti

- Se si riescono a fare esperimenti aleatori in cui **tutte** le grandezze che sono state escluse dalla definizione del misurando e tutte le grandezze d'influenza variano in maniera indipendente basta la **sola valutazione di tipo A** per ottenere l'incertezza complessiva

Es. ripeto esperimento 10k volte, l'effetto del primo incluso si manifesta sempre allo stesso modo
Se prendo la bilancia e la sposto, la grandezza varia in maniera indipendente. Sono riuscito a stimare incertezze
Come capisco se commetto errore sistematico? Grandezze che non riesco a controllare, potrei non avere una loro variazione

Se giro per la casa ho superfici diverse con inclinazioni diverse. Ottengo 20 pesi diversi che sono effetti di 20 inclinazioni diverse.
L'ho fatta variare in maniera sufficiente per avere informazioni sull'inclinazione.

Categoria A oppure Categoria B?

ES. Uno ha già valutato l'incertezza sull'inclinazione della bilancia

$$y_m = f\left(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+p}, q_1, q_2, \dots, q_m\right)$$

Si manifestano sempre con la stessa ampiezza

Grandezze trascurate nella definizione del misurando o grandezze d'influenza che devono variare in maniera scorrelata
INCERTEZZA TIPO A

Grandezze correlate
(es. effetti sistematici costanti)
INCERTEZZE TIPO B

- Se **non tutte** le grandezze variano in maniera indipendente **non** basta la **sola valutazione di tipo A**
- L'incertezza dovuta alle grandezze per cui si hanno valori correlati (es. è sistematico costante) deve essere valutato con approccio B e il loro valore deve essere combinato con l'incertezza tipo A per ottenere l'incertezza complessiva (**incertezza composta**)
- Quando si esegue **una sola misura** tutti gli effetti devono essere valutati con l'approccio **tipo B**

Obiettivo: fare in modo che con le misure facessero variare le variabili che conosco, ma scelgo di non valutare nel modello.
In questo modo, so l'effetto di quelle variabili sull'incertezza.

Multiple misure: far variare le grandezze che ho misurato per valutare l'effetto che hanno sul misurando.

Di base è usato il TIPO A in laboratorio, che crea conoscenza per il tipo B.

Valutazione dell'incertezza

- **Incertezza composta**:
  - Incertezza complessiva del risultato di una misurazione, allorquando vengano determinati separatamente i contributi all'incertezza di un certo numero di grandezze, è uguale alla radice quadrata positiva di una somma delle incertezze di quelle grandezze, pesate secondo la variazione del risultato della misurazione al variare di esse (**coefficiente di sensibilità**).
  - La composizione più semplice è quella per cui tutte le incertezze hanno ugual peso

$$u_C = \sqrt{u_A^2 + u_{B1}^2 + u_{B2}^2 + \ldots + u_{Bm}^2}$$

incertezza di tipo A sempre una sola. Devo far variare con un certo numero di osservaz. ripetute tutte le grandezze trascurate. Se ce n'è qualcuna che non riesco a far variare, uso TIPO B.

Valutazione dell'incertezza

- **Incertezza estesa:**
  - Grandezza che definisce, intorno al risultato di una misurazione, un intervallo che ci si aspetta comprendere una frazione rilevante della distribuzione di valori ragionevolmente attribuibili al misurando.

$$U = k \cdot u_C$$

- **Fattore di copertura**

  Cioè ho misurato meglio

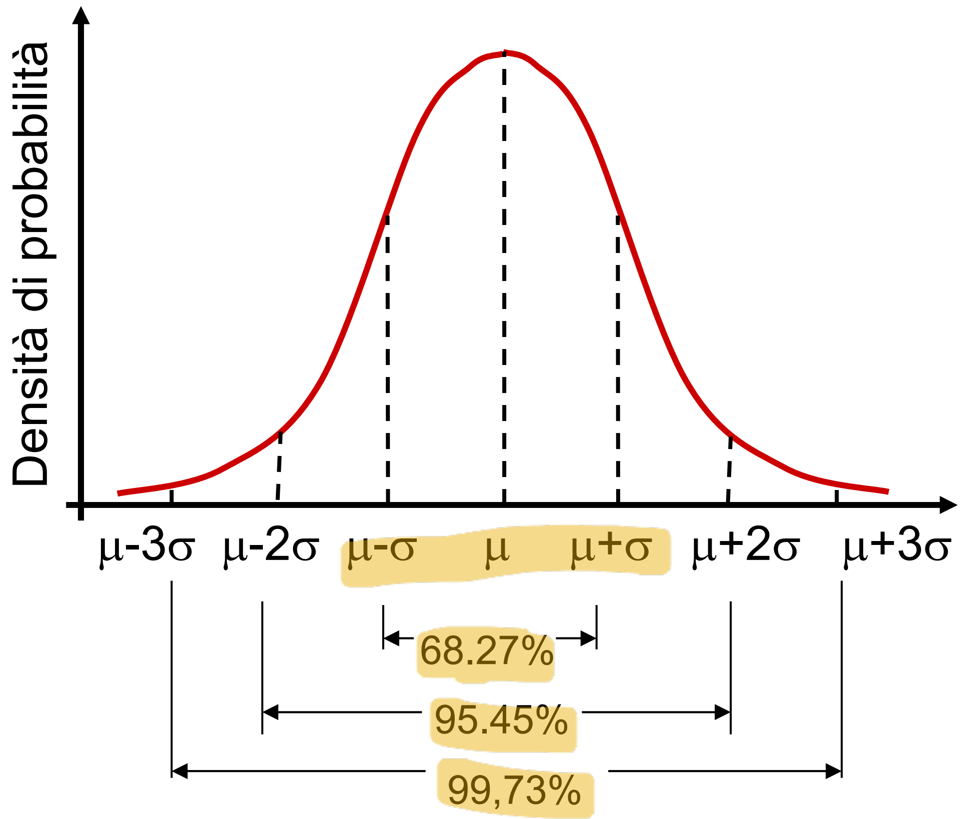
  - Fattore numerico utilizzato come moltiplicatore dell'incertezza composta per ottenere un'incertezza estesa.
  - Ad esso andrebbe associato il livello di confidenza (es. per gaussiana k=2 associa 95% o k=3 associa 99.7%)
  - Con copertura del 100% si ottiene la tolleranza

Valutazione dell’incertezza

- **Tolleranza** ⇒ Non sempre esprimibile, potrebbe dover anche $k = \infty$
  - un intervallo di ampiezza massima intorno al risultato della misurazione che ci si aspetti comprendere **tutti** i valori che possono essere attribuiti al misurando (*approccio deterministico*)
- Molti costruttori di strumenti esprimono l’indeterminazione dei risultati in termini di tolleranza (impropriamente chiamata Accuracy).
- Ipotizzando una distribuzione è possibile calcolarne la varianza e ritornare all’approccio probabilistico considerandola di tipo B ed eventualmente combinarla con le altre valutazioni
- Se non diversamente specificato, per i fenomeni di origine fisica, si può ipotizzare che nel calcolo dell’incertezza dichiarata sia stata adottata una distribuzione normale
- La distribuzione da utilizzare quando tutti i valori sono equiprobabili in un intervallo è quella uniforme

Distribuzione Gaussiana (Normale)

$$X \propto N(\mu, \sigma)$$



Proprietà della distribuzione normale (Gaussiana):

- Ha il massimo nel valore medio μ
- I punti di inflessione sono in $\mu \pm \sigma$
- E' simmetrica rispetto a μ
- La curva è asintotico per l'asse x

Livello di fiducia p (per cento)	Fattore di copertura k_p
68,27	1
90	1,645
95	1,960
95,45	2
99	2,576
99,73	3

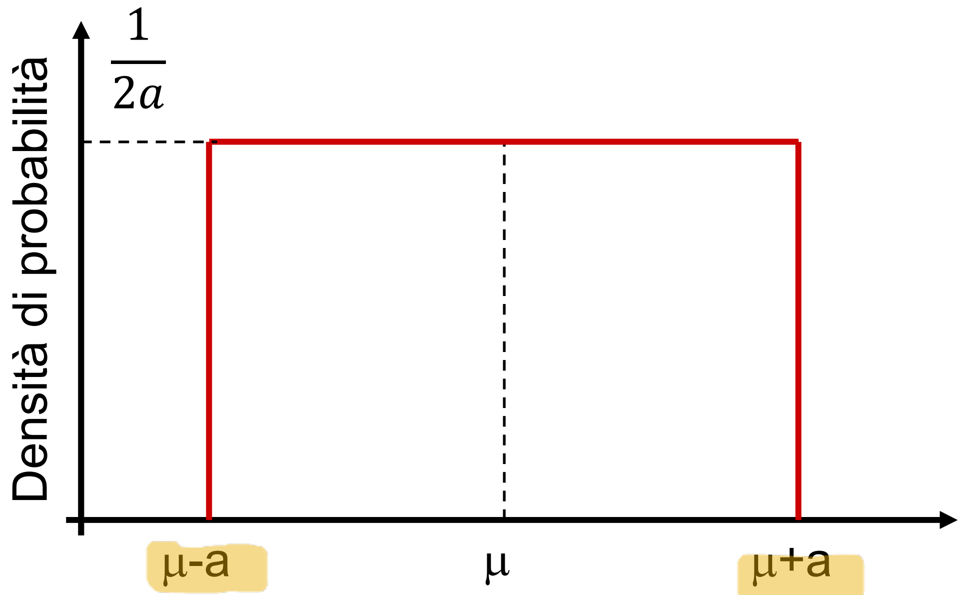
L'intervallo di semiampiezza 3σ può essere assimilato all'evento certo (tolleranza).

Dalla tolleranza il calcolo della deviazione standard è $\sigma = \dfrac{Toll.}{3}$

da un punto di vista pratico

Distribuzione Uniforme (Rettangolare)

$X \propto U(\mu, a)$



Proprietà della distribuzione Uniforme:

- Centrata intorno al valore medio μ
- E' simmetrica rispetto a μ
- Media = Moda = Mediana
- Valore costante in [μ-a; μ+a]
- La deviazione standard è a/√3

Tolleranza = a.

Dalla tolleranza il calcolo della deviazione standard è

$$\sigma = \frac{Toll.}{\sqrt{3}}$$

Il valore che si ottiene è maggiore di quello corrispondente alla gaussiana

Es. Incertezza di categoria B

Un certificato di taratura stabilisce che la resistenza Rs di un resistore campione avente valore nominale 10 ohm è 10,000 742 Ω ± 129 μΩ a 23 °C e che "l'incertezza dichiarata di 129 μΩ individua un intervallo avente un livello di fiducia del 99 per cento".

L'incertezza tipo del resistore può essere assunta pari a

$u(Rs) = (129\ \mu\Omega)/2{,}58 = 50\ \mu\Omega$,

che corrisponde ad un'incertezza tipo relativa

$u(Rs)/Rs = 5{,}0 \times 10^{-6}$.

La varianza stimata è $u^2(Rs) = (50\ \mu\Omega)^2 = 2{,}5 \times 10^{-9}\ \Omega^2$.

La risoluzione di un’indicazione digitale

Una delle fonti di incertezza in uno strumento digitale è la risoluzione (minima quantità apprezzabile) del suo dispositivo indicatore. es. numero di cifre mostrate sul display.

Quand’anche le letture ripetute fossero tutte identiche, l’incertezza della misurazione attribuibile alla ripetibilità non sarebbe zero, in quanto vi è un campo di segnali d’ingresso, individuato dalla risoluzione, che produce la stessa indicazione in uscita.

Se la risoluzione del dispositivo indicatore è δx, il valore della sollecitazione che produce una indicazione data X può giacere con uguale probabilità in qualunque punto dell’intervallo compreso tra $X - \delta x/2$ e $X + \delta x/2$. La sollecitazione è allora descritta da una distribuzione di probabilità rettangolare di ampiezza δx con un’incertezza tipo $u = (\delta x/2)/\sqrt{3}$, vale a dire $u = 0{,}29\ \delta x$.

Incertezza, non tolleranza.
Ho tanti valori da tenere a mente

Es. uno strumento per pesare con dispositivo indicatore la cui risoluzione è 10 g ha un’incertezza tipo u= $10/(2\sqrt{3})$ g e dunque u = 2,9 g.

Risoluzione di 10g = posso pesare a intervalli di 10g ⇒ leggo 110g, allora $m \in [105, 114,\bar{9}]$. Qualsiasi strumento di misura digitale che ha risoluzione di tot, ho incertezza associata.

Espressioni per Incertezza di misura o tolleranza

Valore assoluto:

$U(y)$ stessa unità di misura

Valore relativo:

SOLO SE y≠0

$u(y) = U(y)/y$ *adimensionale (p.u.)*

Valore in percento:

SOLO SE y≠0

$u(y) = 100 * U(y)/y$ *adimensionale (%)*

Valore in parti per milione:

SOLO SE y≠0

$u(y) = 10^6 * U(y)/y$ *adimensionale (ppm)*

se molto piccolo

y = valore centrale dell'intervallo

Propagazione dell'incertezza

- Nel caso di misurazioni indirette (il valore del misurando viene dedotto da una relazione analitica che lega altre grandezze che sono oggetto di misurazioni diretta (es. R=V/I)

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

- Un problema interessante è quello di dedurre come le incertezze, u_{X1}, …, u_{Xn}, con cui si determinano le grandezze X_1, …, X_n, si ripercuotano in termini di incertezza, u_Y, sulla valutazione di Y
- In pratica si analizza come le incertezze dei termini si propaghino fino a determinare l'incertezza del risultato
- Esistono due approcci:
  - **deterministico**
  - **aleatorio**

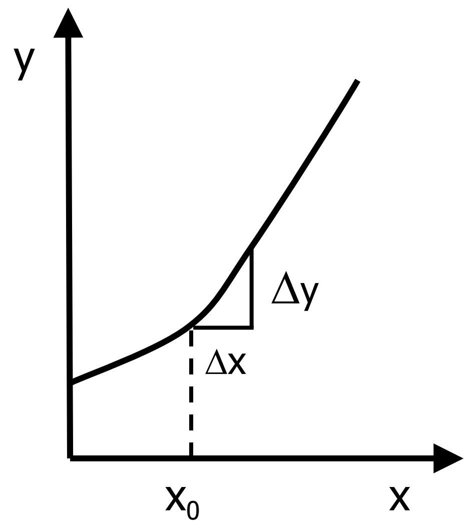
Se abbiamo approcci di tipo B funzioni che
se ho tolleranze devo ipotizzare
una distribuzione

Propagazione dell'incertezza

- Innanzitutto si devono valutare gli "impatti" dei singoli fattori sul risultato. Non è detto che due parametri con la stessa incertezza o tolleranza influenzino il risultato nella stessa maniera: dipende dalla funzione
- A tale scopo risulta utile il concetto di differenziale. Per una funzione di una variabile (y=f(x)) si ha:

Differenziale della y

$$dy = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} \cdot dx \qquad \Delta y \cong \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} \cdot \Delta x$$



- In pratica, la derivata mi dice quanto la y è sensibile nel punto x_0 ad una variazione della x

Propagazione dell'incertezza

- Estendendo ad una funzione a più variabili

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

$$dY = \frac{\partial f}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial f}{\partial X_2} dX_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial X_n} dX_n$$

- con le derivate calcolate nel punto (X_1, X_2, …, X_n)
- Passando agli incrementi finiti

$$\Delta Y = \frac{\partial f}{\partial X_1} \Delta X_1 + \frac{\partial f}{\partial X_2} \Delta X_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial X_n} \Delta X_n$$

- Le derivate parziali mi danno i coefficienti di sensibilità del risultato alle variazioni e, quindi, all'incertezza delle variabili

Propagazione dell’incertezza
Approccio Deterministico

- Stima **pessimistica** del contributo delle varie cause di incertezza derivato dal vecchio concetto di errore massimo o caso peggiore
- L’ampiezza della fascia di valori è tale da **garantire** che (“ragionevolmente”) il valore del misurando sia compreso all’interno della fascia (**tolleranza**)
- Ogni contributo di incertezza è combinato nelle **condizioni peggiori** in modo da dare un contributo massimo
- Sono **sommati i valori assoluti** dei singoli contributi di incertezza pesati con i rispettivi coefficienti di sensibilità

$$|\Delta Y|_{\max} = \left|\frac{\partial f}{\partial X_1}\right| |\Delta X_1| + \left|\frac{\partial f}{\partial X_2}\right| |\Delta X_2| + \dots + \left|\frac{\partial f}{\partial X_n}\right| |\Delta X_n|$$

$\Delta X_i = u_{X_i}$

$$\Delta Y = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial X_i}\right| \Delta X_i$$

Voglio caso peggiore per parlare di tolleranza

Punto di lavoro o valore centrale che ottengo dalla misurazione

Propagazione dell’incertezza
Approccio probabilistico

- La probabilità che tutti gli effetti si combinino per determinare il caso peggiore è bassa.
- Può essere utilizzata una espressione probabilisticamente più coerente che può essere ricordata memonicamente come l’elevazione di entrambi i membri al quadrato:

$$u_Y^2 = \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial X_1} \right)^2 u_{X_1}^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial X_n} \right)^2 u_{X_n}^2 \right\} +$$

$$+2 \left\{ \frac{\partial f}{\partial X_1} \frac{\partial f}{\partial X_2} u(X_1, X_2) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial X_i} \frac{\partial f}{\partial X_j} u(X_i, X_j) + \ldots \right\}$$

I termini incrociati ($u(X_i,X_j)$) rappresentano la covarianza fra le variabili.

Se le variabili aleatorie scorrelate il loro valore è nullo

Spesso, due quantificazioni non sono indipendenti

Propagazione dell'incertezza
Approccio probabilistico

Quindi per variabili correlate

$$u_Y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)^2 u_{X_i}^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\frac{\partial f}{\partial X_i}\frac{\partial f}{\partial X_j}u(X_i, X_j)}$$

E' utile introdurre il coefficiente di correlazione

$$\rho(X_i, X_j) = \frac{u(X_i, X_j)}{u_{X_i}u_{X_j}}$$

Il coefficiente di correlazione assume valori compresi tra -1 e +1
Vale zero se le stime delle due grandezze sono statisticamente indipendenti, se sono perfettamente correlate (anticorrelate) è pari a 1 (-1) e i valori intermedi indicano una parziale correlazione.

Propagazione dell'incertezza
Approccio probabilistico

Ma come trovo $\rho(X_i, X_j)$?
Facendo ipotesi su cosa devo fare

Quindi per variabili correlate

$$u_Y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)^2 u_{X_i}^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\frac{\partial f}{\partial X_i}\frac{\partial f}{\partial X_j}\rho(X_i, X_j)\cdot u_{X_i}u_{X_j}}$$

Quindi per variabili scorrelate o indipendenti

$$u_Y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)^2 u_{X_i}^2}$$

L'ipotesi di indipendenza può essere fatta nella maggior parte dei casi

Confronto Numerico

Per rendersi conto della differenza di approccio proviamo ad applicare le due formule per combinare 11 componenti d'incertezza indipendenti la prima di valore pari a 10 e le altre unitarie con tutti i coefficienti di sensibilità unitari $\rightarrow \frac{\delta}{\delta x}$

$$u_A = s(\bar{q}) = \frac{s(q_k)}{\sqrt{n}}$$

$$u_Y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)^2 u_{X_i}^2} = \sqrt{10^2 + \sum_{i=1}^{10} 1^2} = \sqrt{110} = 10.48$$

Con la combinazione quadratica anche 10 componenti che si discostano di un ordine di grandezza da quella predominante (tenendo conto dei fattori di sensibilità) sono praticamene ininfluenti: la valutazione risulta semplificata.

$$\Delta Y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial X_i} \right| \Delta X_i$$

$$u_Y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \right)^2 u_{X_i}^2}$$

Somma

(casi notevoli) INDIPENDENTI

esempi di calcolo

$$y = x_1 + x_2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} = 1 \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 1$$

$$\Delta y = \Delta x_1 + \Delta x_2 \qquad \frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{x_1 + x_2}$$

Tolleranze Relative

$$u_y = \sqrt{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2} \qquad \frac{u_y}{y} = \sqrt{\frac{u_{x_1}^2 + u_{x2}^2}{(x_1 + x_2)^2}}$$

Incertezze Relative

I valori assoluti si sommano (quadraticamente)

$$\Delta Y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial X_i} \right| \Delta X_i$$

$$u_Y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \right)^2 u_{X_i}^2}$$

Differenza

$$y = x_1 - x_2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} = 1 \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = -1$$

$$\Delta y = \Delta x_1 + \Delta x_2 \qquad \frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{x_1 - x_2}$$

Tolleranze

$$u_y = \sqrt{u_{x_1}^2 + u_{x2}^2} \qquad \frac{u_y}{y} = \sqrt{\frac{u_{x_1}^2 + u_{x2}^2}{(x_1 - x_2)^2}}$$

Incertezze

$\frac{\delta f}{\delta x_1} = 1 \quad \frac{\delta f}{\delta x_2} = -1$

$y = x_1 - x_2$

$\Delta y = \Delta x_1 + \Delta x_2$

$u_y = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$

I valori assoluti si sommano (quadraticamente)

$$\Delta Y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial X_i} \right| \Delta X_i$$

$$u_Y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \right)^2 u_{X_i}^2}$$

Correzione effetto sistematico

$$y_C = y_m + C \qquad \frac{\partial f}{\partial y_m} = 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial C} = 1$$

$y = x_1 + C$ $\quad \frac{\delta f}{\delta x_1} = 1$ $\quad \frac{\delta f}{\delta C} = 1$

$\Delta y = \Delta x_1 + \Delta C$

$u_y = \sqrt{u_{x_1}^2 + u_C^2}$

$$\Delta y_C = \Delta y_m + \Delta C \qquad \frac{\Delta y_C}{y_C} = \frac{\Delta y_m + \Delta C}{y_m + C} \quad \text{Tolleranze}$$

$$u_{yC} = \sqrt{u_{ym}^2 + u_C^2} \qquad \frac{u_y}{y} = \sqrt{\frac{u_{ym}^2 + u_C^2}{(y_m + C)^2}} \quad \text{Incertezze}$$

I valori assoluti si sommano (quadraticamente)

Vale lo stesso della somma. C è correzione per azione della sistematicità. Non è costante, è quantità affetta da incertezza.
Perché a deviaz. sistematiche è sempre associato effetto aleatorio.

Prodotto per costante

$$\Delta Y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial X_i} \right| \Delta X_i$$

$$u_Y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \right)^2 u_{X_i}^2}$$

$$y = \alpha x \qquad \frac{df}{dx} = \alpha$$

sempre sotto valore assoluto

$$\Delta y = |\alpha| \Delta x \qquad \left|\frac{\Delta y}{y}\right| = \frac{\Delta x}{x} \qquad Tolleranze$$

$$u_y = |\alpha| u_x \qquad \frac{u_y}{y} = \frac{u_x}{x} \qquad \text{Incertezze}$$

$y = \alpha x$ $\quad \frac{df}{dx} = \alpha$

$\Delta y = |\alpha| \Delta x$

$u_y = \sqrt{\alpha^2 u_x^2} = |\alpha| u_x$

Il valore relativo è lo stesso

Prodotto

$$\Delta Y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial X_i} \right| \Delta X_i$$

$$u_Y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \right)^2 u_{X_i}^2}$$

$$y = x_1 \cdot x_2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1$$

Somma delle tolleranze relative

$$\Delta y = |x_2| \Delta x_1 + |x_1| \Delta x_2 \qquad \frac{\Delta y}{|y|} = \frac{\Delta x_1}{|x_1|} + \frac{\Delta x_2}{|x_2|} \quad \text{Tolleranze}$$

$$u_y = \sqrt{x_2{}^2 u_{x_1}^2 + x_1{}^2 u_{x2}^2} \qquad \frac{u_y}{y} = \sqrt{\left(\frac{u_{x_1}}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{u_{x2}}{x_2}\right)^2} \quad \text{Incertezze}$$

$y = x_1 x_2 \qquad \frac{\delta f}{\delta x_1} = x_2 \qquad \frac{\delta f}{\delta x_2} = x_1$

$\Delta y = |x_2| \Delta x_1 + |x_1| \Delta x_2$

$u_y = \sqrt{x_2^2 u_{x_1}^2 + x_1^2 u_{x_2}^2}$

$\sqrt{\left(\frac{u_{x_1}}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{u_{x_2}}{x_2}\right)^2}$

I valori relativi si sommano (quadraticamente)

SOLO SE y≠0

Elevazione a potenza

$$\Delta Y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial X_i} \right| \Delta X_i$$

$$u_Y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \right)^2 u_{X_i}^2}$$

$$y = x^{\alpha} \qquad \frac{df}{dx} = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$\Delta y = \left|\alpha x^{\alpha-1}\right| \Delta x \qquad \frac{\Delta y}{y} = |\alpha| \frac{\Delta x}{x} \quad \mathrm{Tolleranze}$$

$$u_y = \left|\alpha x^{\alpha-1}\right| u_x \qquad \frac{u_y}{y} = |\alpha| \frac{u_x}{x} \quad \mathrm{Incertezze}$$

$\left|-1 x^{-2}\right| \Delta x$

$y = x^{\alpha}$ $\quad \frac{df}{dx} = \alpha x^{\alpha-1}$

$\Delta y = |\alpha x^{\alpha-1}| \cdot \Delta x_1 = |\alpha||x^{\alpha-1}|\Delta x_1$

$u = \sqrt{\alpha^2 x^{2(\alpha-1)} u_x^2} = |\alpha||x^{\alpha-1}| u$

Rapporto

$$\Delta Y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial X_i} \right| \Delta X_i$$

$$u_Y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \right)^2 u_{X_i}^2}$$

$$y = \frac{x_1}{x_2} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{1}{x_2} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = -\frac{x_1}{{x_2}^2}$$

$$\Delta y = \frac{\Delta x_1}{|x_2|} + \frac{|x_1|}{{x_2}^2} \Delta x_2 \qquad \frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta x_1}{|x_1|} + \frac{\Delta x_2}{|x_2|} \quad Tolleranze$$

$$u_y = \sqrt{\left(\frac{u_{x_1}}{x_2} \right)^2 + \left(\frac{x_1}{{x_2}^2} \right)^2 u_{x_2}^2} \qquad \frac{u_y}{y} = \sqrt{\left(\frac{u_{x_1}}{x_1} \right)^2 + \left(\frac{u_{x_2}}{x_2} \right)^2} \quad \text{Incertezze}$$

Incertezza sulla y sarà SEMPRE PIÚ ALTA

I valori relativi si sommano (quadraticamente)

SOLO SE y≠0

Rapporto correlato

$$u_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u_{x_i}^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\rho(x_i, x_j)\cdot u_{x_i} u_{x_i}}$$

$$y = \frac{x_1}{x_2} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{1}{x_2} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = -\frac{x_1}{{x_2}^2}$$

$$u_y = \sqrt{\frac{1}{x_2^2}u_{x_1}^2 + \frac{x_1^2}{x_2^4}u_{x_2}^2 + 2\rho\frac{1}{x_2}\left(-\frac{x_1}{x_2^2}\right)\cdot u_{x_1}u_{x_2}}$$

$$\frac{u_y}{y} = \sqrt{\frac{u_{x_1}^2}{x_1^2} + \frac{u_{x_2}^2}{x_2^2} - 2\frac{u_{x_1}}{x_1}\frac{u_{x_2}}{x_2}} = \sqrt{\left(\frac{u_{x_1}}{x_1} - \frac{u_{x_2}}{x_2}\right)^2} = \left|\frac{u_{x_1}}{x_1} - \frac{u_{x_2}}{x_2}\right|$$

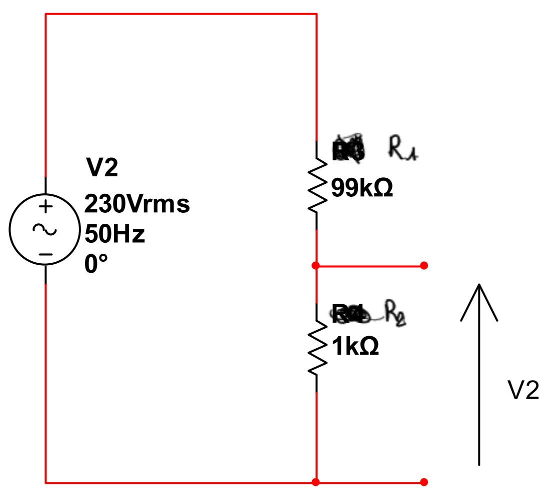
se $\rho(x_i, x_j) = 1$

I valori relativi si sottraggono
SOLO SE y≠0

Incertezza sulla y potrebbe essere minore di quella sulla X_1, X_2.

Es. incertezza singola molto alta ma con incertezze uguali e misure uguali = incertezza 0.

Esempio: Divisore di Tensione



- Voglio misurare la tensione della rete elettrica
- Ho un voltmetro con range di ingresso ±10V
- Utilizzo un divisore di tensione
- Quanto vale il rapporto del divisore di tensione?

$$V_2 = \frac{R_2}{R_1+R_2} V_1 = ?\, V_1$$

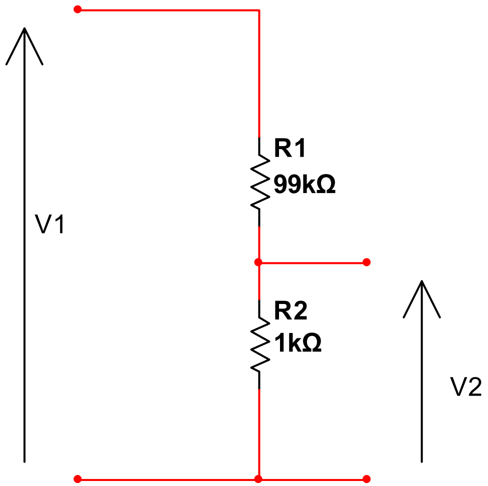
devo adattare la tensione V_2 a quella che può misurare il voltmetro.

Esempio: Divisore di Tensione

Misuro V_1 e V_2 con lo stesso voltmetro

valuto incertezza su V_1 e V_2, le incertezze sono identiche

Posso hp.



- Applico una tensione V_1
- Misuro con lo stesso voltmetro prima V_1 e poi V_2

$$V_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_1 \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \Rightarrow u\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = u\left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right)$$

- L'incertezza sul rapporto del divisore è uguale all'incertezza sul rapporto delle tensioni

rapporto del partitore

- Se utilizzo lo stesso voltmetro, sono in presenza di un rapporto correlato.

- Quindi, se $u(V_2) \approx u(V_1) \Rightarrow u\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \approx 0$

La natura del fenomeno fisico le correla.

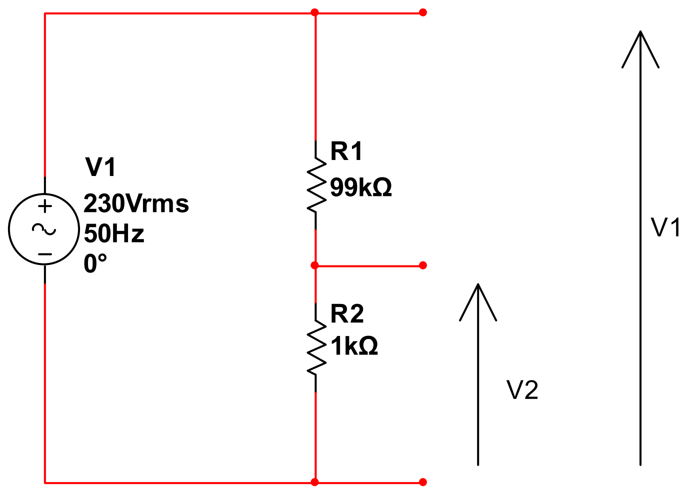
Tutte le grandezze di influenza della prima misurazione è la stessa della seconda.

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{R_2}{R_1+R_2} \approx 1$$

$$\frac{\mu\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}{\frac{V_2}{V_1}} = \left| \frac{\mu_{V_1}}{V_1} - \frac{\mu_{V_2}}{V_2} \right| \approx 0$$

Se comunque sono grandi, va bene

Esempio: Divisore di Tensione



$$V_2 = \frac{R_2}{R_1+R_2} V_1 = \frac{1}{100} V_1$$

Funzione $y=f(x_1,x_2,..,x_n)$	Valore assoluto Δy	Valore relativo **SOLO SE y≠0** $\Delta y/y$
$x_1+x_2+x_3+....$	$\Delta x_1+\Delta x_2+\Delta x_3+....$	$\dfrac{\Delta x_1+\Delta x_2+\Delta x_3+....}{x_1+x_2+x_3+....}$
$x_1-x_2-x_3-....$	$\Delta x_1+\Delta x_2+\Delta x_3+....$	$\dfrac{\Delta x_1+\Delta x_2+\Delta x_3+....}{x_1-x_2-x_3-....}$
$x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot ....$	$\Delta x_1 x_2 x_3....+x_1\Delta x_2 x_3+x_1 x_2\Delta x_3+....$	$\dfrac{\Delta x_1}{x_1}+\dfrac{\Delta x_2}{x_2}+\dfrac{\Delta x_3}{x_3}+...$
$\dfrac{x_1 x_2 x_3....}{x_a x_b x_c....}$	$\dfrac{x_2 x_3....}{x_a x_b x_c....}\Delta x_1+\dfrac{x_1 x_3....}{x_a x_b x_c....}\Delta x_2+...$ $+\dfrac{x_1 x_2 x_3....}{x_a^2 x_b x_c....}\Delta x_a+\dfrac{x_1 x_2 x_3....}{x_a x_b^2 x_c....}\Delta x_b$	$\dfrac{\Delta x_1}{x_1}+\dfrac{\Delta x_2}{x_2}+\dfrac{\Delta x_3}{x_3}+...$ $+\dfrac{\Delta x_a}{x_a}+\dfrac{\Delta x_b}{x_b}+\dfrac{\Delta x_c}{x_c}....$

Funzione	Valore assoluto	Valore relativo **SOLO SE y≠0**
ax	$a\Delta x$	$\Delta x/x$
x^n	$nx^{n-1}\Delta x$	$n\ \Delta x/x$
sin(x)	$\cos(x)\ \Delta x$	$\cot(x)\ \Delta x$
cos(x)	$\sin(x)\ \Delta x$	$tg(x)\ \Delta x$
tg(x)	$\frac{1}{\cos^2 x}\Delta x$	$\frac{2}{\sin 2x}\Delta x$
cot(x)	$\frac{1}{\sin^2 x}\Delta x$	$\frac{2}{\sin 2x}\Delta x$

Esempi di calcolo d’incertezza

Esempio 1: Serie

In un circuito elettrico, sono posti in serie i resistori R_1 ed R_2 il cui valore nominale e tolleranza, sono:

$$R_1 = 10\ k\Omega, \qquad \Delta R_1\,\% = 1\ \%$$

$$R_2 = 20\ k\Omega, \qquad \Delta R_2\,\% = 0.5\ \%$$

Calcolare il valore della resistenza equivalente della serie e dell’incertezza espressa in valore assoluto, relativo e relativo percentuale.

Si assuma che le tolleranze esprimono, in valore percentuale, i valori entro cui può essere contenuto il valore di ciascuna resistenza con distribuzione di probabilità di tipo uniforme.

Es. 1: Soluzione con il metodo probabilistico

La resistenza equivalente R_{EQ} di due resistori posti in serie è:

$$R_{EQ} = R_1 + R_2 = 30 \text{ k}\Omega$$

Per calcolare l'incertezza composta u_y bisogna innanzitutto , a partire dalle tolleranze percentuali $\Delta R_1\%$ e $\Delta R_2\%$ dei due resistori, valutare le tolleranze assolute R_1 e R_2 e gli scarti tipo u_{R1} ed u_{R2} :

$$\Delta R_1 = R_1 \frac{\Delta R_1\%}{100} = 100\ \Omega \qquad u_{R1} = \frac{\Delta R_1}{\sqrt{3}} = 57.73\ \Omega$$

$$\Delta R_2 = R_2 \frac{\Delta R_2\%}{100} = 100\ \Omega \qquad u_{R2} = \frac{\Delta R_2}{\sqrt{3}} = 57.73\ \Omega$$

Essendo la funzione una somma, adottando l'approccio probabilistico, le incertezze assolute si sommano quadraticamente (coefficienti di sensibilità unitari)

Es. 1: Soluzione con il metodo probabilistico

$$u_y = \sqrt{u_{R1}^2 + u_{R2}^2} = \sqrt{(57.73)^2 + (57.73)^2} = 81.65\ \Omega$$

Il valore assoluto dell'incertezza quindi

$$u_y = 82\ \Omega$$

2 cifre significative!

Il valore relativo

$$u_{yr} = \frac{u_y}{R_{EQ}} = \frac{81.65}{30000} = 0.0027$$

Il valore percentuale

$$u_{y\%} = u_{yr} \cdot 100 = 0.27\%$$

2 cifre significative!

Il risultato della misura è quindi scrivibile ad esempio

$R_{eq} = 30.000\ k\Omega$ con incertezza tipo $u_y = 0.082\ \mathrm{k}\Omega$

2 cifre Sign. !

Misura e incertezza con le cifre decimali allineate!

Esempio 2: Parallelo

In un circuito elettrico, sono posti in parallelo i resistori R_1 ed R_2 il cui valore nominale e tolleranza, sono:

$$R_1 = 10\ \text{k}\Omega, \qquad \Delta R_1\% = 1\ \%$$

$$R_2 = 20\ \text{k}\Omega, \qquad \Delta R_2\% = 0.5\ \%$$

Calcolare il valore della resistenza equivalente della serie e dell'incertezza espressa in valore assoluto, relativo e relativo percentuale.

Si assuma che le tolleranze esprimono, in valore percentuale, i valori entro cui può essere contenuto il valore di ciascuna resistenza con distribuzione di probabilità di tipo uniforme.

Es. 2: Soluzione con il metodo probabilistico

La resistenza equivalente R_{EQ} di due resistori posti in parallelo è:

$$R_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{10 \cdot 20}{10 + 20} = 6.6667 \text{ k}\Omega$$

NON 20/3 !

Il calcolo degli scarti tipo u_{R1} ed u_{R2} dei due resistori, a partire dalle tolleranze percentuali ΔR_1 % e ΔR_2 % è identico all'esempio precedente

$$\Delta R_1 = \Delta R_2 = 100\ \Omega \qquad u_{R1} = u_{R2} = 57.73\ \Omega$$

I coefficienti di sensibilità sono

$$\frac{\partial R_{eq}}{\partial R_1} = \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{20^2}{(10 + 20)^2} = 0.4444$$

$$\frac{\partial R_{eq}}{\partial R_2} = \frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{10^2}{(10 + 20)^2} = 0.1111$$

Es. 2: Soluzione con il metodo deterministico

La tolleranza sul parallelo risulta, ΔR_{eq}:

$$\Delta(Y) = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial X_i} \right| \Delta(X_i)$$

$$\Delta R_{eq} = \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2} \Delta R_1 + \frac{R_1^2}{(R_2 + R_2)^2} \Delta R_2 = 55.56\ \Omega$$

Il valore assoluto della tolleranza quindi

$$\Delta R_{eq} = 56\ \Omega$$

Il risultato del parallelo è quindi scrivibile ad esempio

$$R_{eq} = (6667\ \pm 56)\ \Omega$$

Es. 2: Soluzione con il metodo probabilistico

$$U(Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)^2 (U(X_i))^2}$$

L'incertezza sul parallelo risulta, u_{Req}:

$$u_{\mathrm{Re}\,q} = \sqrt{\frac{R_2^4}{(R_1+R_2)^4}u_{R1}^2 + \frac{R_1^4}{(R_2+R_2)^4}u_{R2}^2} = 26.45\ \Omega$$

Il valore assoluto dell'incertezza quindi

$$u_{\mathrm{Re}\,q} = 26\ \Omega$$

Il risultato della misura è quindi scrivibile ad esempio

$$R_{eq} = 6667\ \Omega \text{ con incertezza tipo } u_y = 26\ \Omega$$

Es. 3: Misura con strumento tarato

Se una stima d’ingresso è stata ottenuta da una singola osservazione con un particolare strumento che è stato tarato rispetto ad un campione avente piccola incertezza, l’incertezza della stima è dovuta prevalentemente alla ripetibilità.

Il certificato di taratura consente di correggere gli effetti sistematici e dichiara l’incertezza del risultato

Es. 4: Misura con strumento verificato

Non tutti gli strumenti di misura sono accompagnati da un certificato o da una curva di taratura.

La maggior parte di essi, tuttavia, sono costruiti in ottemperanza ad una norma ed il costruttore o una autorità indipendente ne verifica la conformità alla norma stessa sotto forma di “**errore massimo ammesso**” (impropriamente **accuracy** talora indicata anche come **classe di precisione**)

Questa informazione può essere utilizzata per dedurne l’incertezza di **tipo B** che caratterizzi l’effetto dello strumento sull’incertezza di misura.

Se non si sa nulla circa la curva caratteristica dell’errore dello strumento verificato, si deve fare l’ipotesi che l’errore possa avere qualsiasi valore entro i limiti specificati, si deve cioè ipotizzare una **distribuzione rettangolare**.

Es. 4: Misura con strumento verificato

Esistono diversi modi di esprimere l'accuracy includendo uno o più parametri che la influenzano

I principali parametri sono **valore letto, fondoscala (massimo valore misurabile), risoluzione (digit)**, **tempo trascorso dalla taratura, temperatura ambiente, umidità, velocità di esecuzione della misura (numero medie)…**

I costruttori forniscono **formule o tabelle** per dedurre l'accuracy nelle **specifiche condizioni di utilizzo**:

- Percentuale del fondoscala
- Percentuale del valore letto
- Percentuale del fondoscala + N volte la risoluzione
- Percentuale del valore letto + N volte la risoluzione
- Percentuale del valore letto + coefficiente correttivo per tempo trascorso dalla taratura
- …

Es. 4a: Misura con strumento verificato

La specifica di un costruttore per un voltmetro digitale dichiara che “l’accuratezza dello strumento nel campo 1 V, tra uno e due anni dopo la sua taratura, è 14×10^{-6} volte la lettura più 2×10^{-6} volte il campo di misura (fondoscala)”.

Si supponga che lo strumento sia usato, 20 mesi dopo la taratura, per misurare, sulla sua scala 1 V, una differenza di potenziale V, e che la media di un certo numero di osservazioni ripetute ed indipendenti di V sia μ_V= 0,928 571 V con un’incertezza tipo (di categoria A) u = 12 μV.

Si può ottenere l’incertezza tipo associata alla specifica del costruttore mediante una valutazione di categoria B, assumendo che l’accuratezza dichiarata rappresenti i limiti simmetrici di una correzione additiva a V, ΔV, avente valore atteso nullo e probabilità di giacere indifferentemente in qualunque punto interno ai limiti.

Es. 4a: Misura con strumento verificato

La semiampiezza a della distribuzione simmetrica rettangolare dei valori possibili di ΔV è allora

$$a = (14 \times 10^{-6}) \times (0{,}928\ 571\ \text{V}) + (2 \times 10^{-6}) \times (1\ \text{V}) = 15\ \mu\text{V}$$

$$u(\Delta V) = a/\sqrt{3} = 8{,}7\ \mu\text{V}.$$

La stima del valore del misurando, V_c, è data da

$$Vc = V + \Delta V = 0{,}928\ 571\ \text{V}.$$

Si ottiene l'incertezza tipo composta di questa stima combinando l'incertezza tipo di categoria A di μV,12 μV, con l'incertezza tipo di categoria B di ΔV, 8,7 μV.

I fattori di sensibilità sono unitari, per cui l'incertezza composta risulta

$$u_C = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} = \sqrt{12^2 + 8.7^2} = 15\ \mu\text{V}$$

V = 0,928 571 V con incertezza tipo 0,000 015 V.

Es. 4b: Misura con strumento verificato

Si voglia valutare l'incertezza intrinseca introdotta da un multimetro nella misurazione di una tensione alternativa di 5 V_{RMS}, frequenza 30 kHz, alla temperatura di 25 °C, con un multimetro HP 34401A la cui calibrazione è stata eseguita da meno di 90 giorni utilizzato con 10 V come valore di fondoscala o range (massimo valore misurabile).

Accuracy Specifications: ±(% of reading + % of range)

Function	Range	Frequency	24 Hour 23°C ± 5°C	90 day 23°C ± 5°C	1 Year 23°C ± 5°C	Temperature Coefficient/°C 0°C – 18°C 28°C – 55°C
True RMS AC Voltage	100.0000 mV	3 Hz 5 Hz	1.00 + 0.03	1.00 + 0.04	1.00 + 0.04	0.100 + 0.004
		5 Hz 10 Hz	0.35 + 0.03	0.35 + 0.04	0.35 + 0.04	0.035 + 0.004
		10 Hz 20 kHz	0.04 + 0.03	0.05 + 0.04	0.06 + 0.04	0.005 + 0.004
		20 kHz 50 kHz	0.10 + 0.05	0.11 + 0.05	0.12 + 0.05	0.011 + 0.005
		50 kHz 100 kHz	0.55 + 0.08	0.60 + 0.08	0.60 + 0.08	0.060 + 0.008
		100 kHz 300 kHz	4.00 + 0.50	4.00 + 0.50	4.00 + 0.50	0.200 + 0.020
	1.000000 V to 750.000 V	3 Hz 5 Hz	1.00 + 0.02	1.00 + 0.03	1.00 + 0.03	0.100 + 0.003
		5 Hz 10 Hz	0.35 + 0.02	0.35 + 0.03	0.35 + 0.03	0.035 + 0.003
		10 Hz 20 kHz	0.04 + 0.02	0.05 + 0.03	0.06 + 0.03	0.005 + 0.003
		20 kHz 50 kHz	0.10 + 0.04	0.11 + 0.05	0.12 + 0.05	0.011 + 0.005
		50 kHz 100 kHz	0.55 + 0.08	0.60 + 0.08	0.60 + 0.08	0.060 + 0.008
		100 kHz 300 kHz	4.00 + 0.50	4.00 + 0.50	4.00 + 0.50	0.200 + 0.020

Es. 4b: Misura con strumento verificato

I coefficienti ricavati dalla tabella sono

- 0.11 (componente dell'accuracy dato come percentuale sulla lettura)
- 0.05 (componente dell'accuracy dato come percentuale sul fondoscala)

Pertanto l'accuracy *ΔV,* risulta essere:

$$\Delta V = 5 \cdot \frac{0.11}{100} + 10 \cdot \frac{0.05}{100} = 0.011$$

$$u_V = \frac{\Delta V}{\sqrt{3}} = 0.0063$$

Da cui il risultato di misura può essere scritto

$$V = (5.000 \pm 0.011)\ V_{RMS}$$

oppure

$V = 5.000\ V_{RMS}$ con incertezza tipo $u_V = 0.0063\ V_{RMS}$