Capitolo 5 – Funzione di trasferimento

Richiami sulle trasformate di Laplace

Applicaz. che a un insieme di f associa un insieme di funzioni.

- È un operatore $\mathcal{L}[\cdot]$ che a funzioni reali nel dominio del tempo associa funzioni complesse della variabile complessa s

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Deve esistere il semipiano (destro) di convergenza

- Proprietà
  - Linearità: $\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha F(s) + \beta G(s)$
  - Traslazione nel dominio del tempo: $\mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-s\tau}F(s)$
  - Traslazione nel dominio di s: $\mathcal{L}[e^{\alpha t}f(t)] = F(s-\alpha)$
  - Derivazione nel dominio del tempo: $\boxed{\mathcal{L}[\dot{f}(t)] = sF(s) - f(0)}$
  - Derivazione nel dominio di s: $\mathcal{L}[tf(t)] = -dF(s)/ds$
  - Integrazione nel dominio del tempo: $\boxed{\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = 1/s\,F(s)}$
  - Convoluzione nel dominio del tempo: $\boxed{\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = \mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right] = F(s)G(s)}$
  - Teorema del valore iniziale: se $\exists \lim_{t\to 0^+} f(t) \Rightarrow f(0^+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$
  - Teorema del valore finale: se $\exists \lim_{t\to +\infty} f(t) \Rightarrow \lim_{t\to +\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$

operaz. differenziale ⇒ operaz. algebrica

∫ duale

Queste proprietà consentono di trasformare equazioni integro-differenziali in equazioni algebriche, che quindi possono essere risolte nel dominio di s, poi, anti-trasformando si torna nel dominio del tempo

Tabella di trasformate di Laplace

Poli o singolarità

- Notate che
  - Le trasformate di queste funzioni sono razionali fratte
  - Se la funzione è convergente la trasformata ha poli (radici del denominatore) nel semipiano sinistro
  - Se la funzione è costante la trasformata ha un polo semplice nell'origine
  - Se la funzione è limitata ma periodica la trasformata ha poli semplici immaginari puri
  - Se la funzione è di tipo esponenziale divergente la trasformata ha poli nel semipiano destro
  - Se la funzione è di tipo polinomiale divergente la trasformata ha poli multipli nell'origine
  - Se la funzione è pseudo-periodica divergente ha poli complessi nel semipiano destro o immaginari puri ma con molteplicità > 1

$f(t)$	$f(s) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t) e^{-st} \mathrm{d}t$
impulso di Dirac $\delta(t)$	1
gradino unitario $\delta_{-1}(t)$	$\frac{1}{s}$
$e^{at}\delta_{-1}(t)$	$\frac{1}{s-a}$
$\sin(\omega t)\delta_{-1}(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)\delta_{-1}(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{at}\sin(\omega t)\delta_{-1}(t)$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2} = \frac{\omega}{s^2-2as+a^2+\omega^2}$
$e^{at}\cos(\omega t)\delta_{-1}(t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2} = \frac{s-a}{s^2-2as+a^2+\omega^2}$
$\frac{t^k}{k!}\delta_{-1}(t)$	$\frac{1}{s^{k+1}}$
$t^k\delta_{-1}(t)$	$\frac{k!}{s^{k+1}}$
$\frac{t^k}{k!}e^{at}\delta_{-1}(t)$	$\frac{1}{(s-a)^{k+1}}$
$t^k e^{at}\delta_{-1}(t)$	$\frac{k!}{(s-a)^{k+1}}$

$te^{\sigma t}\sin(\omega t)\,\mathrm{sca}(t)$	$\frac{2\omega(s-\sigma)}{\left((s-\sigma)^2+\omega^2\right)^2}$
$te^{\sigma t}\cos(\omega t)\,\mathrm{sca}(t)$	$\frac{(s-\sigma)^2-\omega^2}{\left((s-\sigma)^2+\omega^2\right)^2}$

Moltepl. >1

$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$	$t\sin\omega t$
$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	$t\cos\omega t$

Moltepl. >1 su asse immag.

$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$

$y(t) = Ce^{At}x_0 + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$

Calcolo del movimento di un sistema LTI

- Ricordiamo che equivale a risolvere il problema di Cauchy

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad x(0) = x_0$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

↳ stato in 0 è continuo, soluz. di eq. differenziale

- Trasformiamo secondo Laplace e applichiamo le proprietà di linearità e derivazione nel dominio del tempo

$$\begin{aligned} sX(s) - x(0) &= AX(s) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s) \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} (sI - A)X(s) &= x(0) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s) \end{aligned}$$

eq. vettoriale

$(sI-A)$ invertibile $\forall s \neq \lambda_1, \dots, \lambda_n$

$$\boxed{\begin{aligned} X(s) &= (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) &= C(sI - A)^{-1}x(0) + [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s) \end{aligned}}$$

Evoluzione libera | Evoluzione forzata

* $X(t)$ é definita ovunque, ma ci interessa solo per $t \geq 0$. Segnale é continuo.

Calcolo del movimento di un sistema LTI

- Evoluzione libera nello stato

$$\boxed{X_l(s) = (sI - A)^{-1}x(0) = \mathcal{L}[x_l(t)] = \mathcal{L}[e^{At}x(0)]} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{L}[e^{At}] = (sI - A)^{-1}}$$

È un modo per calcolare e^{At}

↳ Non ci interessa se A diagonalizz.

- Dunque un modo per calcolare l'evoluzione libera $e^{At}x(0)$ è

$$\boxed{x_l(t) = e^{At}x(0) = \mathcal{L}^{-1}[X_l(s)] = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}x(0)]}$$

- Vediamo come è fatta la matrice $\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$

$$\boxed{\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} = \frac{\mathrm{cof}(sI - A)^T}{\det(sI - A)}}$$

Gli elementi della matrice dei cofattori (per definizione) sono polinomi di grado al più $n - 1$

↳ determinanti di minori di grado $n-1$ di polinomi di grado 1.

  - Gli elementi di $\Phi(s)$ sono tutte funzioni razionali fratte
  - Se ci sono fattori comuni a tutti gli elementi dell'aggiunta e al polinomio caratteristico, allora ci sono delle semplificazioni e il polinomio caratteristico, a valle delle semplificazioni, si riduce di grado
    - Tale nuovo polinomio è detto «**polinomio minimo**»
    - Nelle semplificazioni NON possono sparire delle radici, ma quelle a molteplicità algebrica maggiore di 1 possono avere una molteplicità ridotta come radici del polinomio minimo (se tutti gli autovalori hanno molteplicità 1 come radici del polinomio minimo, allora la matrice è diagonalizzabile)

Calcolo del movimento di un sistema LTI

Basta fare reciproco di el. su diag.

$e^{at}\delta_{-1}(t)$	$\frac{1}{s-a}$

- Esempio 1 (modi aperiodici)

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix} \Rightarrow (sI-A)^{-1}=\begin{pmatrix}s+1 & 0 & 0\\ 0 & s+2 & 0\\ 0 & 0 & s+2\end{pmatrix}^{-1}$$

Fattori comuni

$$=\frac{1}{(s+1)(s+2)^2}\begin{pmatrix}\cancel{(s+2)}^2 & 0 & 0\\ 0 & (s+1)\cancel{(s+2)} & 0\\ 0 & 0 & (s+1)\cancel{(s+2)}\end{pmatrix}$$

Corrisponde alla sua trasposta

$$=\frac{1}{\boxed{(s+1)(s+2)}}\begin{pmatrix}s+2 & 0 & 0\\ 0 & s+1 & 0\\ 0 & 0 & s+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{s+1} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{s+2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{s+2}\end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \begin{pmatrix}e^{-t} & 0 & 0\\ 0 & e^{-2t} & 0\\ 0 & 0 & e^{-2t}\end{pmatrix},\ t\geq 0$$

Polinomio minimo

- L'autovalore $s=-2$ ha molteplicità algebrica 2, ma come radice del polinomio minimo ha molteplicità 1, quindi il modo di evoluzione è semplice, e^{-2t} e NON te^{-2t}!

$\sin(\omega t)\delta_{-1}(t)$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)\delta_{-1}(t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$

Calcolo del movimento di un sistema LTI

- Esempio 2 (modi periodici) Matrice diag. a blocchi ⇒ det = Π det dei blocchi

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\Rightarrow (sI-A)^{-1}=\begin{pmatrix}s&-1&0&0\\1&s&0&0\\0&0&s&-1\\0&0&1&s\end{pmatrix}^{-1}$$

Aggiunta

$$=\frac{1}{(s^2+1)^{\cancel{2}}}\begin{pmatrix}s\cancel{(s^2+1)}&\cancel{s^2+1}&0&0\\-\cancel{(s^2+1)}&s\cancel{(s^2+1)}&0&0\\0&0&s\cancel{(s^2+1)}&\cancel{s^2+1}\\0&0&-\cancel{(s^2+1)}&s\cancel{(s^2+1)}\end{pmatrix}=\frac{1}{\boxed{s^2+1}}\begin{pmatrix}s&1&0&0\\-1&s&0&0\\0&0&s&1\\0&0&-1&s\end{pmatrix}$$

Fattori comuni

Polinomio minimo

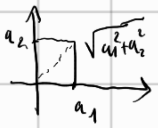
Radici su asse immaginario, quindi modi periodici

- La coppia di autovalori immaginari $s=\pm j$ ha molteplicità algebrica 2, ma come radice del polinomio minimo ha molteplicità 1, quindi il modo di evoluzione è semplice, $\cos t$ e NON $t\cos t$!

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}}_{T}, \quad t \geq 0$$

Se faccio $T \cdot x_0$, posso scrivere tutto come un unico coseno:

$$a_1 \cos(\omega t) + a_2 \sin(\omega t)$$



$\rightsquigarrow \; a_1 = \sqrt{a_1^2+a_2^2}\cos\theta$

Calcolo del movimento di un sistema LTI

- Esempio 3 (modi aperiodici e pseudoperiodici – matrice non diagonale)

forma compagna

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -5 & -9 & -5\end{pmatrix} \Rightarrow (sI-A)^{-1}=\begin{pmatrix}s & -1 & 0\\ 0 & s & -1\\ 5 & 9 & s+5\end{pmatrix}^{-1}$$

Trovo aggiunta

$$=\frac{1}{s^3+5s^2+9s+5}\begin{pmatrix}s^2+5s+9 & -5 & -5s\\ s+5 & s^2+5s & -9s-5\\ 1 & s & s^2\end{pmatrix}^T$$

$$=\frac{1}{d(s)}\begin{pmatrix}s^2+5s+9 & s+5 & 1\\ -5 & s^2+5s & s\\ -5s & -9s-5 & s^2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(s^2+5s+9)/d(s) & (s+5)/d(s) & 1/d(s)\\ -5/d(s) & (s^2+5s)/d(s) & s/d(s)\\ -5s/d(s) & -(9s+5)/d(s) & s^2/d(s)\end{pmatrix}$$

- Ora non ci sono semplificazioni, ma
  - Tutte le funzioni da antitrasformare sono funzioni razionali fratte → Fratti semplici
- Come antitrasformare? Non ho [illegible].

Antitrasformazione di una funzione razionale fratta

$$F(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$$

- Si chiamano «**poli**» della funzione le radici del polinomio a denominatore $d(s)$ (di grado n)
- Si chiamano «**zeri**» della funzione le radici del polinomio a numeratore $n(s)$ (di grado $m \le n$)
- Si assuma, senza perdita di generalità, che $d(s)$ sia monico (coeff. di grado max $=1$)
- Procedura
  - Si calcolano i poli, siano essi p_k, quindi $d(s) = \prod_{k=1}^{n}(s - p_k)$
  - Si scompone la $F(s)$ in fratti semplici (sviluppo di Heavside)
  - <u>Caso di poli distinti (reali o complessi)</u>

$$F(s) = \frac{n(s)}{(s-p_1)\cdots(s-p_n)} = \frac{r_1}{s-p_1} + \cdots + \frac{r_n}{s-p_n}$$

– I «**residui**» r_k si calcolano come

$$\boxed{r_k = [(s-p_k)F(s)]_{s=p_k} = \frac{n(p_k)}{(s-p_1)\cdots(s-p_n)}, \qquad k = 1, \dots, n}$$

si prolunga p_k p_k

Senza il termine $(s - p_k)$

Se p_k è anche zero ($n(p_k) = 0$), allora $r_k = 0$.
Ma questo vuol dire che c'è una cancellazione tra $n(s)$ e $d(s)$

$e^{at}\delta_{-1}(t)$	$\dfrac{1}{s-a}$

Antitrasformazione di una funzione razionale fratta

– Ora è facile antitrasformare:

$$F(s) = \frac{n(s)}{(s-p_1)\cdots(s-p_n)} = \frac{r_1}{s-p_1} + \cdots + \frac{r_n}{s-p_n}$$

$$\downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$f(t) = r_1 e^{p_1 t} + \cdots + r_n e^{p_n t}, \qquad t \geq 0$$

– Ciò vale anche se c'è qualche $p_k = \alpha_k + j\omega_k$ complesso; ma se p_k è complesso allora anche $p_k^* = \alpha_k - j\omega_k$ è un polo della funzione e quindi esiste una coppia di fratti semplici del tipo

$$\frac{r_k}{s-p_k} + \frac{r_k^*}{s-p_k^*} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} r_k e^{p_k t} + r_k^* e^{p_k^* t} = |r_k| e^{j\angle r_k} e^{(\alpha_k + j\omega_k)t} + |r_k| e^{-j\angle r_k} e^{(\alpha_k - j\omega_k)t}$$

$$= |r_k| e^{\alpha_k t}\left(e^{j(\omega_k t + \angle r_k)} + e^{-j(\omega_k t + \angle r_k)}\right) = 2|r_k| e^{\alpha_k t}\cos(\omega_k t + \angle r_k), \qquad t \geq 0$$

– Dunque la funzione nel dominio del tempo nel caso di <u>m coppie complesse</u> e coniugate semplici è

$$\boxed{f(t) = \sum_{k=1}^{m} 2|r_k|\, e^{\alpha_k t}\cos(\omega_k t + \angle r_k) + \sum_{k=m+1}^{n-2m} r_k e^{p_k t}, \qquad t \geq 0}$$

Poli distinti

Esempio

ES.

$$F(S) = \frac{S-3}{S(S^2+5s+6)} = \frac{S-3}{S(S+2)(S+3)} = \frac{r_1}{S} + \frac{r_2}{S+2} + \frac{r_3}{S+3}$$

$$r_1 = \left.\frac{S-3}{(S+2)(S+3)}\right|_{S=0} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$r_2 = \left.\frac{S-3}{S(S+3)}\right|_{S=-2} = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2}$$

$$r_3 = \left.\frac{S-3}{S(S+2)}\right|_{S=-3} = \frac{-6}{3} = -2$$

$$F(S) = \underbrace{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{S}}_{\text{gradino per } t\geq 0 = 1} + \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{S+2} - \frac{2}{S+3}$$

$$x(t) = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}e^{-2t} - 2e^{-3t} \quad \forall t\geq 0$$

ES. 2

$$F(S) = \frac{1}{s(s^2-2s+2)} = \frac{1}{s(s-1-j)(s-1+j)} = \frac{r_1}{s} + \frac{r_2}{s-1-j} + \frac{r_2^*}{s-1+j}$$

Parte reale del polo > 0 ⇒ divergenza

$$r_1 = \left.\frac{1}{s^2-2s+2}\right|_{s=0} = \frac{1}{2}$$

$$r_2 = \left.\frac{1}{s(s-1+j)}\right|_{s=1+j} = \frac{1}{2j(1+j)} \longrightarrow$$

Per trovare il modulo: $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

fase: $\varphi_N - \varphi_D$.

$$|r_2| = \frac{1}{2\sqrt{2}} \qquad \angle r_2 = 0 - \left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3}{4}\pi$$

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{1\cdot t}\cos\left(1t - \frac{3}{4}\pi\right)\right.$$

Re (polo) Imm (polo)

Antitrasformazione di una funzione razionale fratta

- Caso di poli multipli (reali o complessi): ciascuno degli l poli p_k ha una molteplicità n_k: $n_1 + \cdots + n_l = n$

$$F(s) = \frac{n(s)}{(s-p_1)^{n_1}\cdots(s-p_l)^{n_l}} =$$

$$= \underbrace{\frac{r_{11}}{s-p_1} + \frac{r_{12}}{(s-p_1)^2} + \cdots + \frac{r_{1n_1}}{(s-p_1)^{n_1}}}_{\text{Fratti semplici relativi a } p_1} + \cdots + \underbrace{\frac{r_{l1}}{s-p_l} + \frac{r_{l2}}{(s-p_l)^2} + \cdots + \frac{r_{ln_l}}{(s-p_l)^{n_l}}}_{\text{Fratti semplici relativi a } p_l}$$

  – I residui r_{kh} si calcolano come

$$\boxed{r_{kh} = \frac{1}{(n_k-h)!}\left[\frac{d^{n_k-h}}{ds^{n_k-h}}(s-p_k)^{n_k}F(s)\right]_{s=p_k}, \quad \begin{cases} k = 1, \dots, l \\ h = 1, \dots, n_k \end{cases}}$$

  – Per antitrasformare, occorre ricordare la trasformata notevole

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{pt}\delta_{-1}(t)\right] = \frac{1}{(s-p)^n}$$

Antitrasformazione di una funzione razionale fratta

- Caso di poli multipli (reali o complessi): ciascuno degli s poli p_k ha una molteplicità n_k: $n_1 + \cdots + n_l = n$

$$F(s) = \frac{r_{11}}{s-p_1} + \frac{r_{12}}{(s-p_1)^2} + \cdots + \frac{r_{1n_1}}{(s-p_1)^{n_1}} + \cdots + \frac{r_{l1}}{s-p_l} + \frac{r_{l2}}{(s-p_l)^2} + \cdots + \frac{r_{ln_l}}{(s-p_l)^{n_l}}$$

$$\downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$\boxed{f(t) = \underbrace{r_{11}e^{p_1 t} + r_{12}te^{p_1 t} + \cdots + \frac{r_{1n_1}t^{n_1-1}}{(n_1-1)!}e^{p_1 t}}_{\text{Modi di evoluzione relativi a } p_1} + \cdots + \underbrace{r_{l1}e^{p_l t} + r_{l2}te^{p_l t} + \cdots + \frac{r_{ln_l}t^{n_l-1}}{(n_l-1)!}e^{p_l t}}_{\text{Modi di evoluzione relativi a } p_l}, \qquad t \geq 0}$$

– Dunque, ad ogni polo reale p di molteplicità m corrispondono m termini del tipo

$$\boxed{t^k e^{pt}, \qquad k = 0, \dots, m-1}$$

Esempio

– Mentre, ad ogni coppia di poli complessi e coniugati $\alpha \pm j\omega$ di molteplicità m corrispondono m termini del tipo

$$\boxed{|r|e^{j\angle r}t^k e^{(\alpha t + j\omega)} + |r|e^{-j\angle r_k}t^k e^{(\alpha t - j\omega)} = 2|r|t^k e^{\alpha t}\cos(\omega t + \angle r), \qquad k = 0, \dots, m-1}$$

Es. 1)

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{r_{11}}{s+1} + \frac{r_{12}}{(s+1)^2} + \frac{r_2}{s+2}$$

$$r_{12} = \left.\frac{1}{s+2}\right|_{s=-1} = 1$$

Ora devo derivare lei.

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1} \rightarrow -1 \cdot e^{-t} + 1 \cdot t e^{-t} + 1 e^{-2t} \quad t \geq 0$$

$$r_{11} = \left.-\frac{1}{(s+2)^2}\right|_{s=-1} = -1$$

$$r_2 = \left.\frac{1}{(s+1)^2}\right|_{s=-2} = 1$$

POLI COMPLESSI

$$F(s) = \frac{1}{s(\underbrace{s^2+4s+5}_{-2 \pm j})^2} = \frac{r_1}{s} + \underbrace{\frac{r_{21}}{(s+2-j)} + \frac{r_{21}^*}{(s+2+j)}} + \underbrace{\frac{r_{22}}{(s+2-j)^2} + \frac{r_{22}^*}{(s+2+j)^2}}$$

$$r_1 = \frac{1}{25}$$

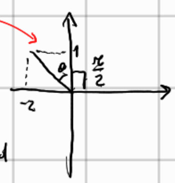
$$r_{22} = \left.\frac{1}{s(s+2+j)^2}\right|_{s=-2+j} = \frac{-1}{4(2+j)}$$

$\Rightarrow$ CI INTERESSA MODULO E FASE

$$|\,| = \frac{1}{4\sqrt{5}}$$

$$\angle = -\pi - \frac{\pi}{2} - \text{atan}\left(\frac{2}{1}\right) \cong -5.82 \text{ rad}$$

Per comodità -1 ha fase $-\pi$



Devo derivare lei

$$r_{21} = \left.\frac{-(s+2+j)^2 - 2(s+2+j)s}{s^2(s+2+j)^4}\right|_{s=-2+j} = \frac{8+8j}{16(-2+j)^2} = \frac{1+j}{2(-2+j)^2}$$

$$|\,| = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

$$\angle = -4.57 \text{ rad}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \Rightarrow \frac{1}{25} + \underbrace{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{10} e^{-2t} \cos(t - 4.57)} + \underbrace{2 \cdot \frac{1}{4\sqrt{5}} t e^{-2t} \cos(t - 5.82)}$$

Nota, la fase sempre di r_{ab}

$s^2 + as + b$

Modulo degli zeri compl. e coniugati
-2 · Parte reale degli zeri. } caso poli complessi e coniugati

prodotto degli zeri
- Somma degli zeri } caso poli reali