

Capitolo 7 – Risposta in frequenza

Metodo per capire come progettare il sistema: Richieste da sovraffare. Disegno prima grafico poi lavoro sullo stesso.

Rappresentazione grafica della funzione di risposta in frequenza

- ◆ L'uso dei diagrammi frequentziali è di largo uso in molte applicazioni, fra cui l'analisi e la sintesi dei sistemi di controllo
- ◆ La $G(j\omega)$ è una funzione complessa di variabile reale e quindi può facilmente essere rappresentata graficamente in un piano cartesiano

- Diagrammi di Bode (coppia di curve)

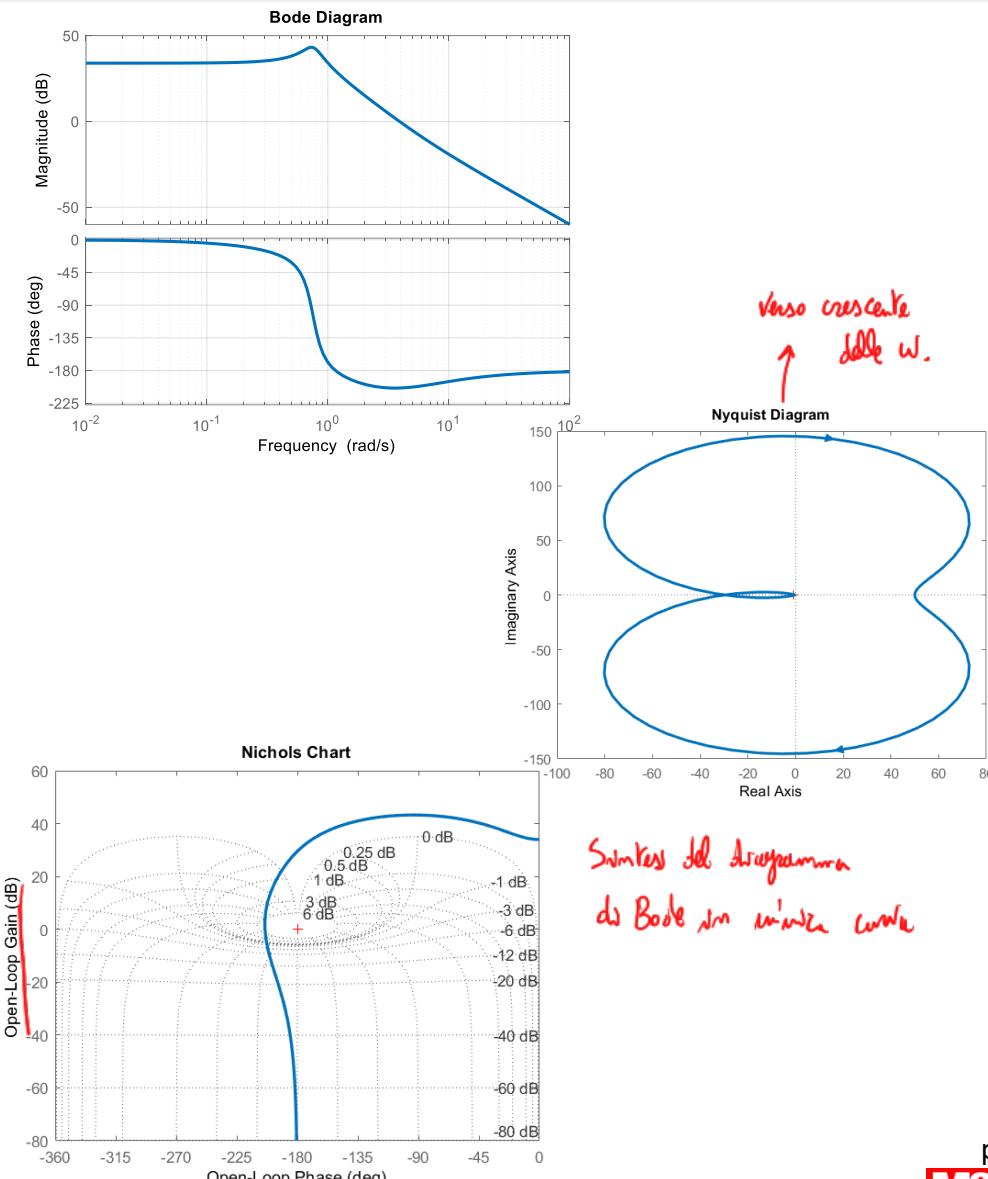
- Diagramma dei moduli: $|G(j\omega)|$ espresso in dB in funzione di ω in scala semilogaritmica (la variabile indipendente sull'asse delle ascisse è $\log \omega$)
- Diagramma delle fasi: $\angle G(j\omega)$ espresso in gradi in funzione di ω in scala semilogaritmica

- Diagrammi polari e di Nyquist

- Polare: Curva tarata in $\omega \in (0, +\infty)$ nel piano $\Re(G(j\omega)) - \Im(G(j\omega))$ parte immaginaria
- Nyquist: Curva tarata in $\omega \in (-\infty, +\infty)$ nel piano $\Re(G(j\omega)) - \Im(G(j\omega))$

- Diagramma di Nichols

- Curva tarata in $\omega \in (0, +\infty)$ nel piano $\angle G(j\omega) - |G(j\omega)|_{dB}$



Diagrammi di Bode

◆ Definizione di decibel

- Dato un numero positivo α , il suo valore in decibel è

– Esempi notevoli

$$G(j\omega) = \frac{\mu}{(j\omega)^g} \frac{\prod_i (1 + j\omega\tau_i) \prod_i (1 + j2\zeta_i\omega/\alpha_{ni} - \omega^2/\alpha_{ni}^2)}{\prod_i (1 + j\omega T_i) \prod_i (1 + j2\zeta_i\omega/\omega_{ni} - \omega^2/\omega_{ni}^2)}$$

$$\alpha_{dB} = 20 \log_{10} \alpha$$

↳ Value RMS

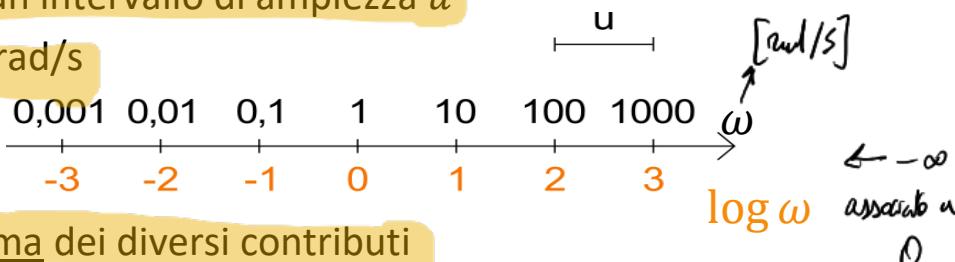
$$\alpha = 10^{\frac{dB}{20}}$$

$$10_{dB} = 20, \quad 0.1_{dB} = -20, \quad 0.707_{dB} = -3, \quad 2_{dB} = 6$$

◆ Diagramma dei moduli

- L'asse delle ascisse è in scala logaritmica perché consente di rappresentare ampi range di pulsazioni in uno spazio limitato
- La variabile indipendente è $\log \omega$, quindi ad ogni unità u sull'asse delle ascisse corrisponde una decade
 - È costante il rapporto (ω_2/ω_1) e non la differenza tra gli estremi di un intervallo di ampiezza u
 - Tuttavia, per comodità di lettura si riportano sempre i valori di ω in rad/s

Scala lineare se diff. fra un valore e il succ. è costante



- L'asse delle ordinate riporta $|G(j\omega)|_{dB}$, che può essere scritto come somma dei diversi contributi

$$|G(j\omega)|_{dB} = \mu_{dB} - 20g \log \omega + \sum_i 20 \log |1 + j\omega\tau_i| + \sum_i 20 \log |1 + j2\zeta_i\omega/\alpha_{ni} - \omega^2/\alpha_{ni}^2| +$$

$$- \sum_i 20 \log |1 + j\omega T_i| - \sum_i 20 \log |1 + j2\zeta_i\omega/\omega_{ni} - \omega^2/\omega_{ni}^2|$$

$M_{dB} = 20 \log |\mu| \approx M$ è neg.

Se so lucidare dxf. da 1 termine monomio, binomio, trinomio ho fatto.

Lezione 14

■ Diagramma dei moduli

$$G(j\omega) = \frac{\mu}{(j\omega)^g} \frac{\prod_i (1 + j\omega\tau_i) \prod_i (1 + j2\zeta_i\omega/\alpha_{ni} - \omega^2/\alpha_{ni}^2)}{\prod_i (1 + j\omega T_i) \prod_i (1 + j2\xi_i\omega/\omega_{ni} - \omega^2/\omega_{ni}^2)}$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log |G(j\omega)| = |\mu|_{dB} - 20g \log \omega + \sum_i 20 \log |1 + j\omega\tau_i| + \sum_i 20 \log |1 + j2\zeta_i\omega/\alpha_{ni} - \omega^2/\alpha_{ni}^2| + \\ - \sum_i 20 \log |1 + j\omega T_i| - \sum_i 20 \log |1 + j2\xi_i\omega/\omega_{ni} - \omega^2/\omega_{ni}^2|$$

◆ Quindi il diagramma può essere tracciato sommendo i diagrammi dei singoli termini che sono del tipo (dove h è la molteplicità di poli o zeri reali o complessi e coniugati)

- Termine **costante**: $|\mu|$
- Termine **monomio**: $|1/(j\omega)^g|$
- **Termini binomi**: $|1 + j\omega T|^h$ *h può anche essere $\neq \pm 1$*
 - Se $h < 0$ il termine è relativo ad un polo reale di $G(s)$ (negativo se $T_i > 0$)
 - Se $h > 0$ il termine è relativo ad uno zero reale di $G(s)$ (negativo se $\tau_i > 0$)
- **Termini trinomi**: $|1 + j2\xi\omega/\omega_n - \omega^2/\omega_n^2|^h$ *Moltiplicatività del termine binomio*
 - Se $h < 0$ il termine è relativo ad una coppia di poli c.c. di $G(s)$ (a $\text{Re}(.)$ negativa se $\xi > 0$)
 - Se $h > 0$ il termine è relativo ad una coppia di zeri c.c. di $G(s)$ (a $\text{Re}(.)$ negativa se $\zeta > 0$)

$T_s < 0$ e $\xi_s < 0$ non dà situazione
di divergenza. Perché devo saperlo disegnare?
Perché anche se ho una $[G(s)]$ instabile,
è possibile unire comunque con un secondo sistema
per avere sistema complessivo assolutamente stabile.

Diagramma dei moduli

Termine costante

$$\mu_{dB} = 20 \log |\mu|$$

- Il diagramma è una retta orizzontale con
 - Ordinata positiva se $|\mu| > 1$
 - Ordinata negativa se $|\mu| < 1$

Termine monomio

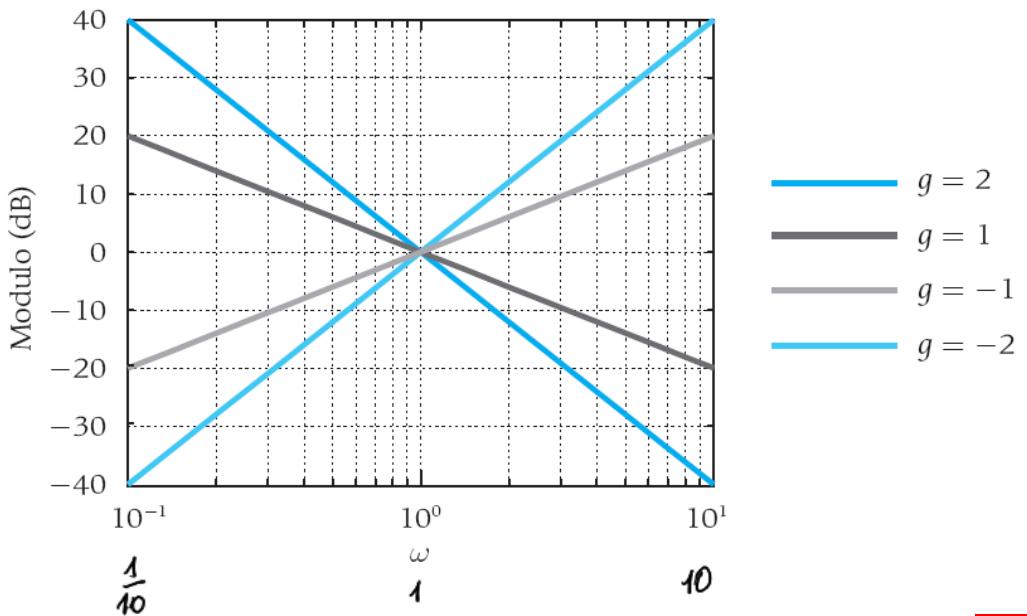
$$|1/(j\omega)^g|_{dB} = -20g \log \omega$$

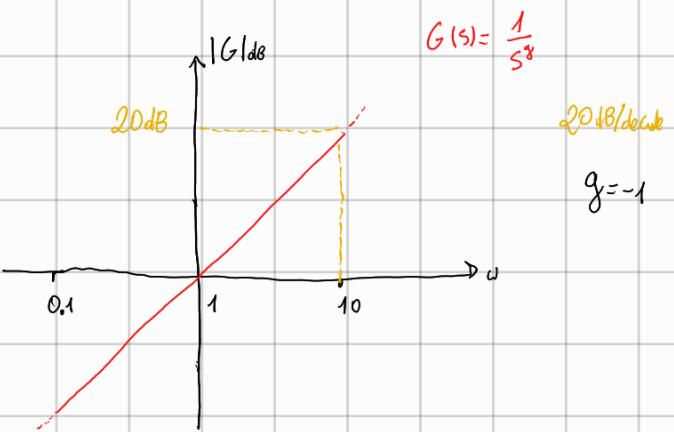
- Il diagramma è una retta inclinata di $-20g$ dB/dec passante per il punto $(\omega = 1, 0 \text{ dB})$
 - La pendenza è negativa se $g > 0$ (poli nell'origine)
 - La pendenza è positiva se $g < 0$ (zeri nell'origine)

Origine nel piano ω -decibeli: $\log_{10} \omega = 0, \omega = 1$

Se $g < 0$ (zeri nell'origine): tende ad amplificare a frequenze alte. Amplifica ∞ a $\omega \rightarrow +\infty$.
 Polo nell'origine: a basse frequenze amplifica. A $\omega=0$ amplifica all'infinito.

$$20 \log \frac{1}{|j\omega|^g} = -20 \log |j\omega|^g = -20g \log \omega = Kx, \text{ con } x = \log \omega$$

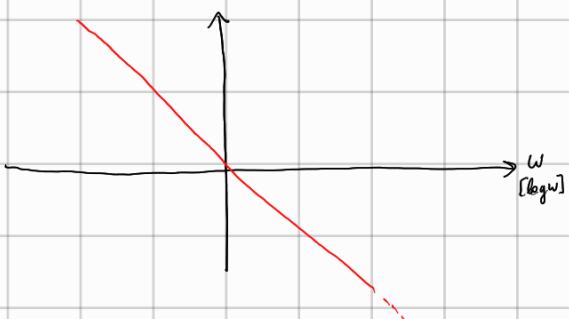




Se metto un ingresso una sinusode (impulso come Riemann), un ingresso ha 1 pulsazione e non posso generare altro e rispondo con la stessa w.

Se mettersi costante, ho $w=0$. Guadagno è un dB $-\infty$. Quindi una costante non mette doveva 0.

Se $g=1$:



Se mettersi costante, solo una risponde con rampa. Perché $G(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow 1 \rightarrow t$. Il rapporto va valutato a regime

■ Diagramma dei moduli

◆ Termine binomio

$\log \frac{1}{|T|}$

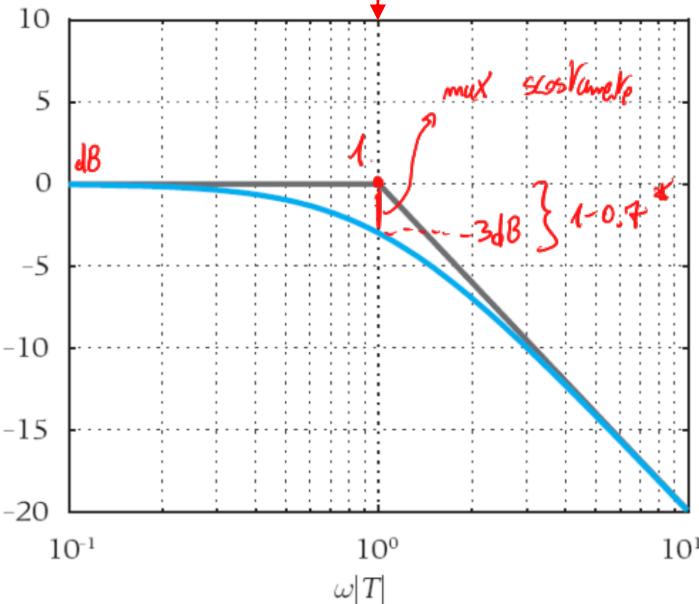
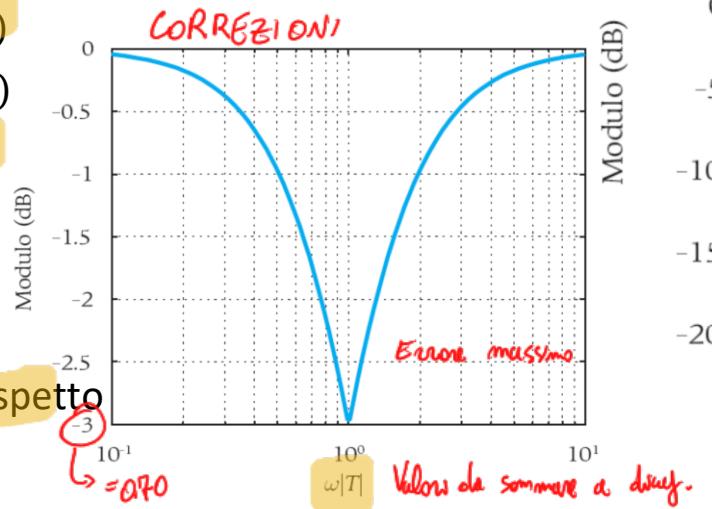
diagramma approssimato

$$|1 + j\omega T|^h_{dB} = 20h \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \approx \begin{cases} 0, & \omega \ll 1/|T| \\ 20h(\log \omega - \log 1/|T|), & \omega \gg 1/|T| \end{cases}$$



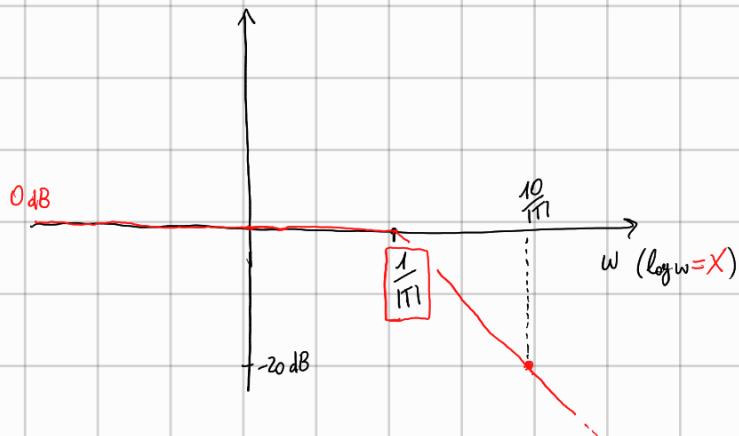
Esempio

- Il diagramma «asintotico» è composto da due rette che si incontrano nel **punto di rottura** $\omega = 1/|T|$
 - Per pulsazioni molto inferiori al punto di rottura la retta è costante e vale 0 dB
 - Per pulsazioni molto superiori al punto di rottura la retta ha una pendenza di 20h dB/dec
 - Negativa se si tratta di un polo ($h < 0$)
 - Positiva se si tratta di uno zero ($h > 0$)
- Il diagramma reale si discosta da quello asintotico di una quantità massima pari a -3 dB nel punto di rottura
- Il diagramma non dipende dal segno di T
- I diagrammi per $h < 0$ e $h > 0$ sono simmetrici rispetto all'asse delle ascisse



Caso $h = -1$ (polo reale)

Andamento a mano



Questo è il diagramma ASINTOTICO (diagramma guizzo).

Diagramma assintotico è un insieme di rette. Diagramma totale è retta.

Se $h > 0$ ho retta con pendenza positiva. Aspetto della retta è stabile indipendentemente dal segno di T .

In generale, errore massimo che commetto è $(1 - 0.70) \cdot 100 = 30\%$ massimo nel punto di rottura.

Metto $10S\ln(wT)$. Ampiezza di cui è $10 \cdot |G(jw)| \approx 10$

$$\uparrow$$
$$\text{con } w = \frac{1}{|T|} \rightarrow 0 \text{ dB} \Rightarrow 1$$

$$\text{reale: } 10 |G(jw)| \approx 10 \cdot 0.7 = 7 \quad \text{Ho sbagliato del } 30\%$$

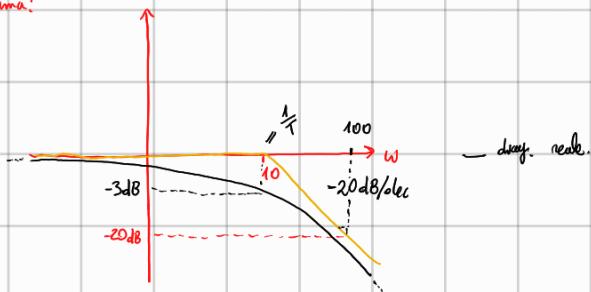
ES.

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega \cdot 0.1}$$

$$M=1 \Rightarrow M_{dB}=0 \text{ dB}$$

$$T=0.1 \text{ s} \Rightarrow \frac{1}{|T|} = 10 \text{ rad/s}$$

Come è fatto al blocco diagramma:



Now: $G(j\omega) = \frac{10}{1+j\omega \cdot 0.1}$ Cambia che al grafico di prima è spostato di 20 verso l'alto.

$$|G|_{dB} = 10 \text{ dB} + \left| \frac{1}{1+j\omega \cdot 0.1} \right|_{dB} = 20 + \left| \frac{1}{1+j\omega \cdot 0.1} \right|_{dB}$$



ES. 3)

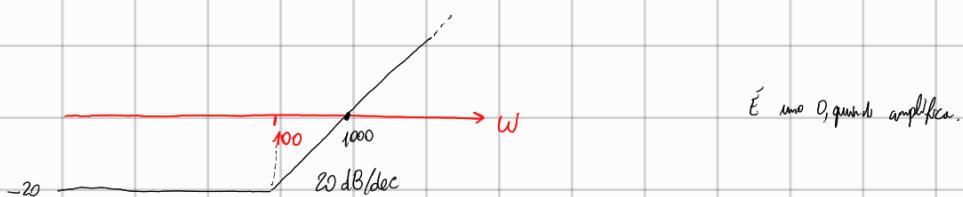
$$G(j\omega) = 0.1(1 - j\omega \cdot 0.01)$$

$$M = 0.1$$

$$\varphi = -0.01$$

Punto di rotolamento $\frac{1}{|T|} = 100 \text{ rad/s}$

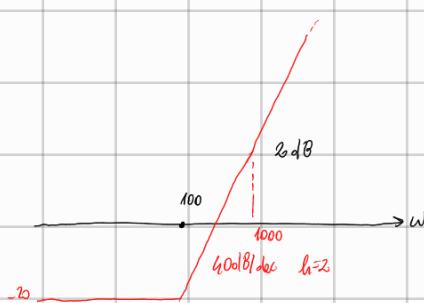
dove, asintotico



È uno O, quindi amplifica.

ES. 4)

$$G(j\omega) = 0.1(1 - j\omega \cdot 0.01)^2$$



$$40 \text{ dB/dec } b_1=2$$

■ Diagramma dei moduli

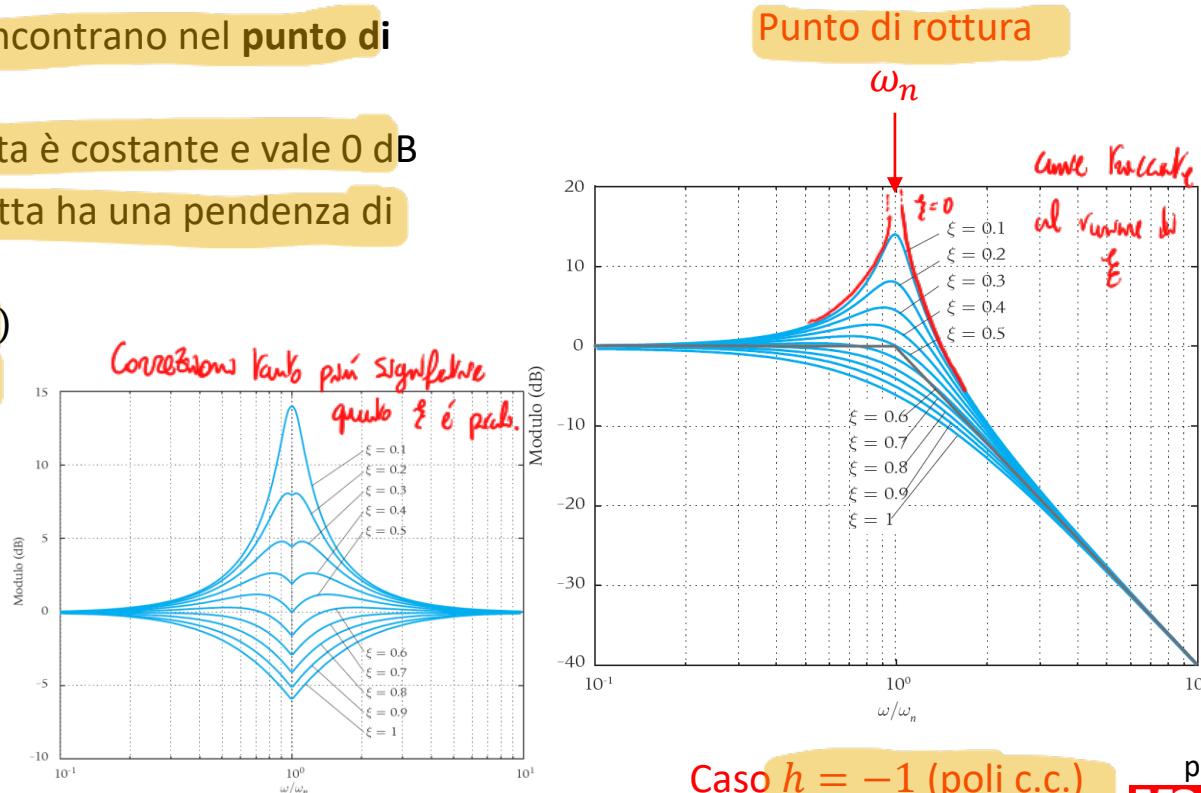
◆ Termine trinomio

$$\left|1 + j2\xi\omega/\omega_n - \omega^2/\omega_n^2\right|^h_{dB} = 20h \log \sqrt{(1 - \omega^2/\omega_n^2)^2 + 4\xi^2\omega^2/\omega_n^2} \approx \begin{cases} 0, & \omega \ll \omega_n \\ 40h(\log \omega - \log \omega_n), & \omega \gg \omega_n \end{cases}$$

- Il diagramma «asintotico» è composto da due rette che si incontrano nel punto di rottura $\omega = \omega_n$
 - Per pulsazioni molto inferiori al punto di rottura la retta è costante e vale 0 dB
 - Per pulsazioni molto superiori al punto di rottura la retta ha una pendenza di 40h dB/dec
 - Negativa se si tratta di una coppia di poli ($h < 0$)
 - Positiva se si tratta di una coppia di zeri ($h > 0$)
- Il diagramma reale si discosta, nell'intorno di ω_n , da quello asintotico di una quantità crescente al diminuire di ξ
- Il diagramma non dipende dal segno di ξ
- I diagrammi per $h < 0$ e $h > 0$ sono simmetrici rispetto all'asse delle ascisse

Nella curva asintotica non c'è dipendenza da $\xi \Rightarrow$ più ξ è piccolo più slargo.

$$\text{Se } \omega \gg \omega_m, \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_m^2}\right)^h \approx \frac{\omega^4}{\omega_m^4} \rightarrow \frac{\omega^2}{\omega_m^2} \left(\frac{\omega^2}{\omega_m^2} + 4\xi^2\right) \approx \frac{\omega^4}{\omega_m^4}$$



Se $\xi = 0$, avremo $2\omega_b \log \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_m^2}}$, se ω si avvicina a ω_m valgono a 100.

Se $\xi < 0.7$ valore stimato è minore di quello vero.

RISONANZA: Modulo nella res. armonica è > 0 e ha picco.

$$\text{ES: } G(j\omega) = \frac{1}{1 + j^2 \xi \frac{\omega}{\omega_m} - \frac{\omega^2}{\omega_m^2}} \quad \left\{ \begin{array}{l} G(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_m} s + \frac{s^2}{\omega_m^2}} \\ 0 < \xi < 1, \text{ caso convetto} \end{array} \right.$$

Risonanza accade per ξ piccolo.

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_m^2}) + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_m^2}}} \quad x = \frac{\omega}{\omega_m} \quad \text{Trovo max rispetto a } x$$

$$= \frac{1}{G(x)}, \quad \text{Vedo il minimo di } G(x). \quad \text{Quello la deriva.}$$

$$G'(x) = \frac{d}{dx} \left[(1-x^2)^2 + 4\xi^2 x^2 \right] = -2(1-x^2) \cdot 2x + 8\xi^2 x = 0 \quad [\text{escluso } x=0]$$

$$\Rightarrow -4x^2 + 8\xi^2 = 0$$

$$x^2 = 1 - 2\xi^2 \quad (\omega > 0) \Rightarrow x = \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad \text{Esiste picco se } 1 - 2\xi^2 > 0$$

$$0 < \xi < \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \text{RISONANZA}$$

Calcolo al picco (cioè al **modulo di risonanza**) col $G(j\omega_R)$

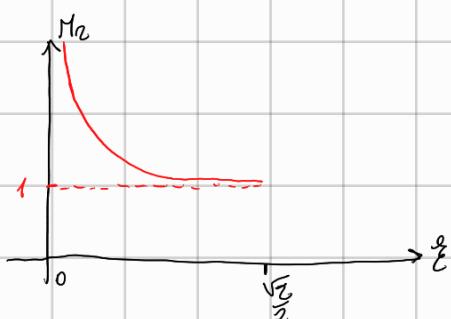
$$\omega_R = \omega_m \sqrt{1 - 2\xi^2}, \quad \text{punto di risonanza.} \quad [\text{caso limite } \xi=0, \omega=\omega_m]$$

$\xi > 0$ perché voglio stabilità

Modulo da risorto:

$$M_R = |G(j\omega_R)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - 2\xi^2)^2 + 4\xi^2 \cdot (1 - 2\xi^2)}} = \frac{1}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}}, \quad \text{per } 0 < \xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Tracciamo la funzione



$$M_R \Big|_{\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2 \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{2}}} = 1$$

Per $\xi > \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\max |G(j\omega)| = |G(j0)| = 1$

(cioè prolunga la funz. a destra del $\max |G(j\omega)|$)

La f. non sarebbe definita fuori.

■ Diagramma dei moduli

◆ Termine trinomio

$$\left|1 + j2\xi\omega/\omega_n - \omega^2/\omega_n^2\right|^h_{dB} = 20h \log \sqrt{(1 - \omega^2/\omega_n^2)^2 + 4\xi^2\omega^2/\omega_n^2} \simeq \begin{cases} 0, & \omega \ll \omega_n \\ 40h(\log \omega - \log \omega_n), & \omega \gg \omega_n \end{cases}$$

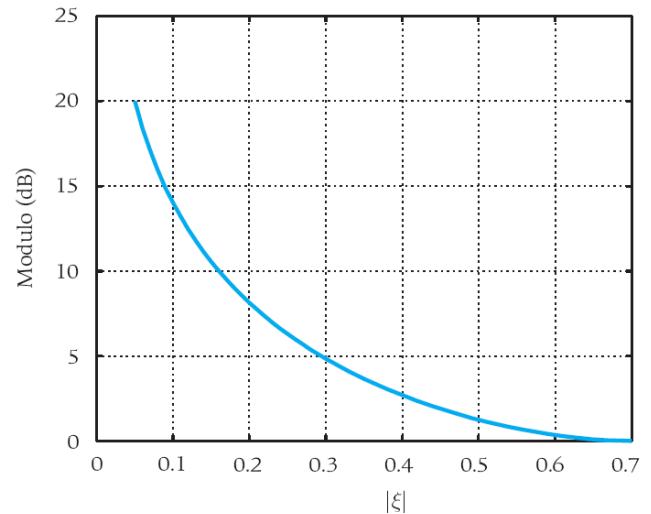
- Parametri caratteristici

- Pulsazione di risonanza

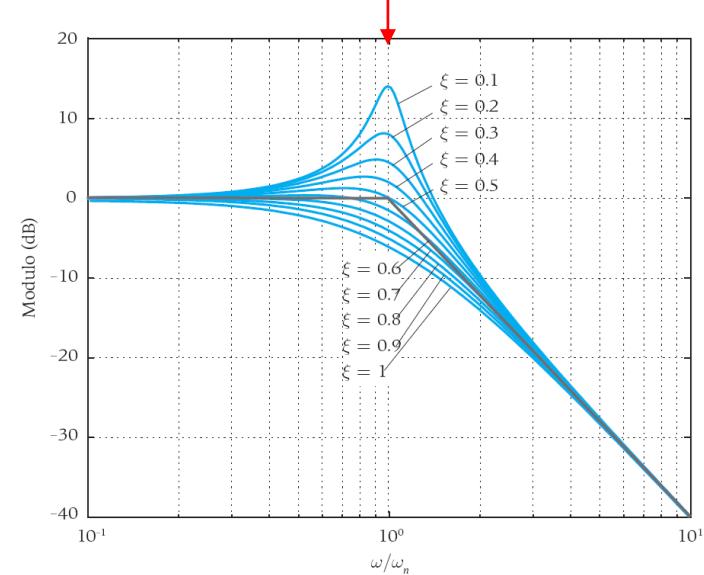
$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}, \quad |\xi| < \sqrt{2}/2$$

- Modulo di risonanza

$$M_r = \frac{1}{2|\xi|\sqrt{1 - \xi^2}}$$



Punto di rottura
 Se $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$, max 1 ω_n



Caso $h = -1$ (poli c.c.)

$$\text{Se } \xi=1, \quad 1 + \Im 2 \xi \frac{\omega}{\omega_m} - \frac{\omega^2}{\omega_m^2} \Big|_{\xi=1} = 1 + \Im 2 \frac{\omega}{\omega_m} - \frac{\omega^2}{\omega_m^2} = \left(1 + \Im \frac{\omega}{\omega_m}\right)^2 = \left(1 + \Im \omega t\right)^2$$

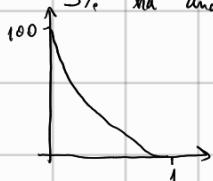
$\uparrow \quad \downarrow$
 $T = \frac{1}{\omega_m}$

qui c'è il quadrato: prima la connessione era 3 dB,
ora ha il quadrato, 6 dB.

Dimostrazione che per $\xi=0.5$, la curva passa per 0 dB al ω_m .

Caso $\xi > 0$ piccolo, $\omega_2 < \omega_m$. Man mano che ξ diminuisce, $\omega_2 \rightarrow \omega_m$.

S% ha andamento costante \Rightarrow Se $\xi \rightarrow 0$, allora something like al 100%.



Modi di escludere valori a distanza arbitraria.

Se solo si siano con simmetria con $\omega=\omega_2$, l'ampliamento della simmetria tende a ∞ .

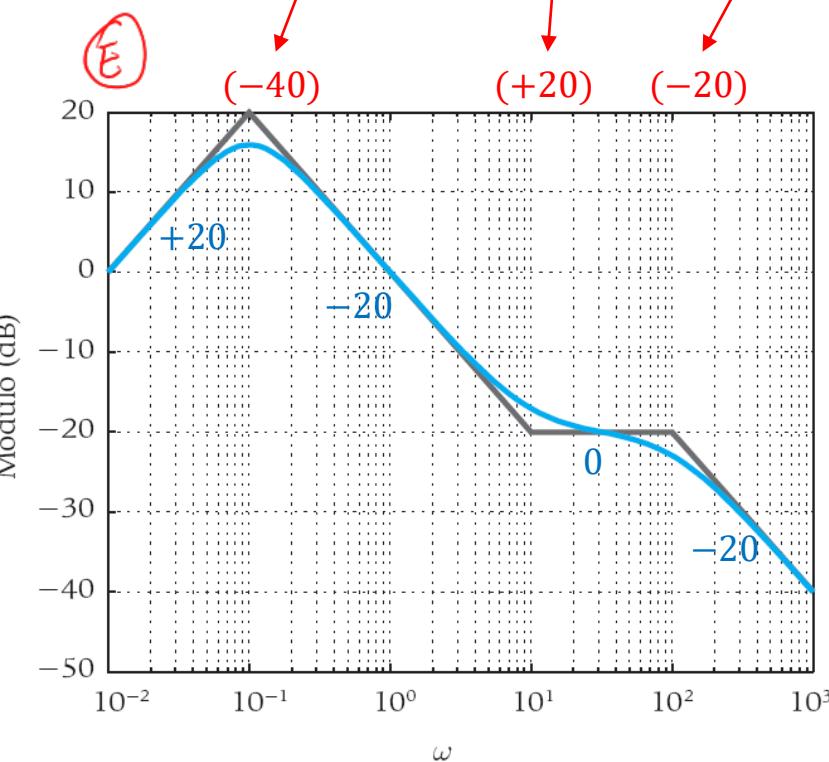
Tracciamento del diagramma asintotico dei moduli

- ◆ Il tratto iniziale è una retta di pendenza $-20g$ dB/dec (il cui prolungamento) passa per i punti $\omega = 1$, $|\mu|_{dB}$ e $\omega = |\mu|, 0_{dB}$ A
 - Pendenza positiva per zeri nell'origine ($g < 0$)
 - Pendenza negativa per poli nell'origine ($g > 0$)
- ◆ Si individuano i punti di rottura $1/|T_i|$, $1/|\tau_i|$, ω_{ni} , α_{ni}
- ◆ In corrispondenza di ciascun punto di rottura si verifica una variazione di pendenza pari a
 - $20h$ dB/dec per ciascun termine binomio
 - Negativa nel caso di termine relativo a polo reale (attenuazione)
 - Positiva nel caso di termine relativo a zero reale (amplificazione)
 - $40h$ dB/dec per ciascun termine trinomio
 - Negativa nel caso di termine relativo a poli c.c. (attenuazione)
 - Positiva nel caso di termine relativo a zeri c.c. (amplificazione)

Poiché se $w \rightarrow 0$, sopravvive solo $(\frac{M}{Jw})^8$, che sarà una retta tralata

$$G(s) = \frac{100s(1 - 0.1s)}{(1 + 16s + 100s^2)(1 + 0.01s)}$$

Punti di rottura: $\frac{1}{\sqrt{100}} = 0.1$, $\frac{1}{|-0.1|} = 10$, $\frac{1}{0.01} = 100$



Segno di poli e zeri non c'è un solo nulla.

Nuova pendenza: pendenza con le variaz. di p. In parentesi le variazioni di pendenza in dB/dec
In blu le pendenze assolute in dB/dec

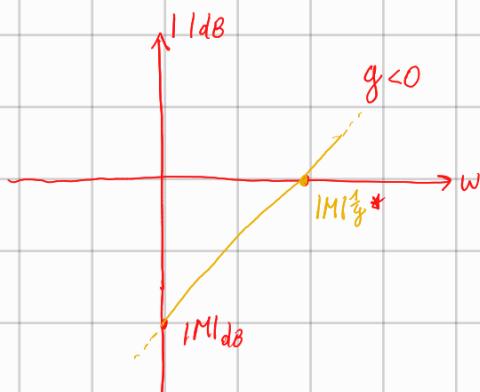
(A)

Se $g=0$, retta orizzontale.

Per dove passa la retta con pendenza $-20g$ dB/dec? DOMANDA ESAME

$$\text{RETTA: } \left| \frac{M}{(Jw)^g} \right|_{dB} = \left| \frac{|M|}{w^g} \right|_{dB}$$

Trovo intersezione



Trovo intersezione con asse x:

$$\left| \frac{|M|}{w^g} \right|_{dB} = 0 \Rightarrow \left| \frac{|M|}{w^g} \right| = 1$$

$$w = |M|^{1/g}$$

Mutando con asse y:

$$\left| \frac{|M|}{w^g} \right|_{w=1} = |M| \Rightarrow \text{sul grafico } |M|_{dB}$$

* Al crescere di $|M|$, $|M|^{1/g}$ si sposta a sinistra

Se $M > 1$, si sposta a sinistra lo zero. La pendenza rimane uguale.

(A) FINE

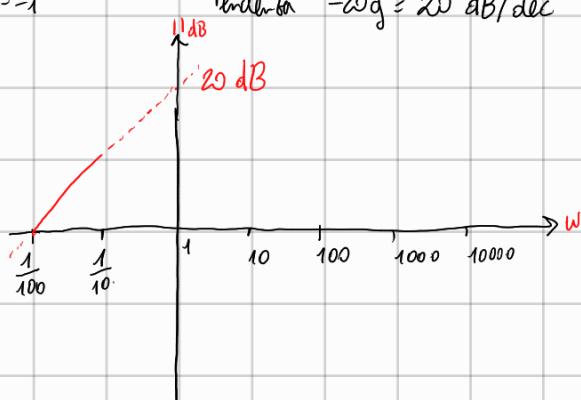
(E)

$$G(s) = \frac{100s(1-0.1s)}{(1+16s+100s^2)(1+0.01s)} \quad M=100$$

$$M_{dB} = 40$$

Mutando con asse orario retta orizzontale: $|M|^{1/g} = \frac{1}{M} = \frac{1}{100} \text{ rad/s}$

$$g = -1 \quad \text{Pendenza } -20g = 20 \text{ dB/dec}$$



NON SO SE C'È UN PUNTO DI ROTTURA

Punto di rottura 1: $T_{unomodo}$. $\frac{1}{W_m^2} = 100$, $W_m = \frac{1}{\sqrt{10}} = 0.1$

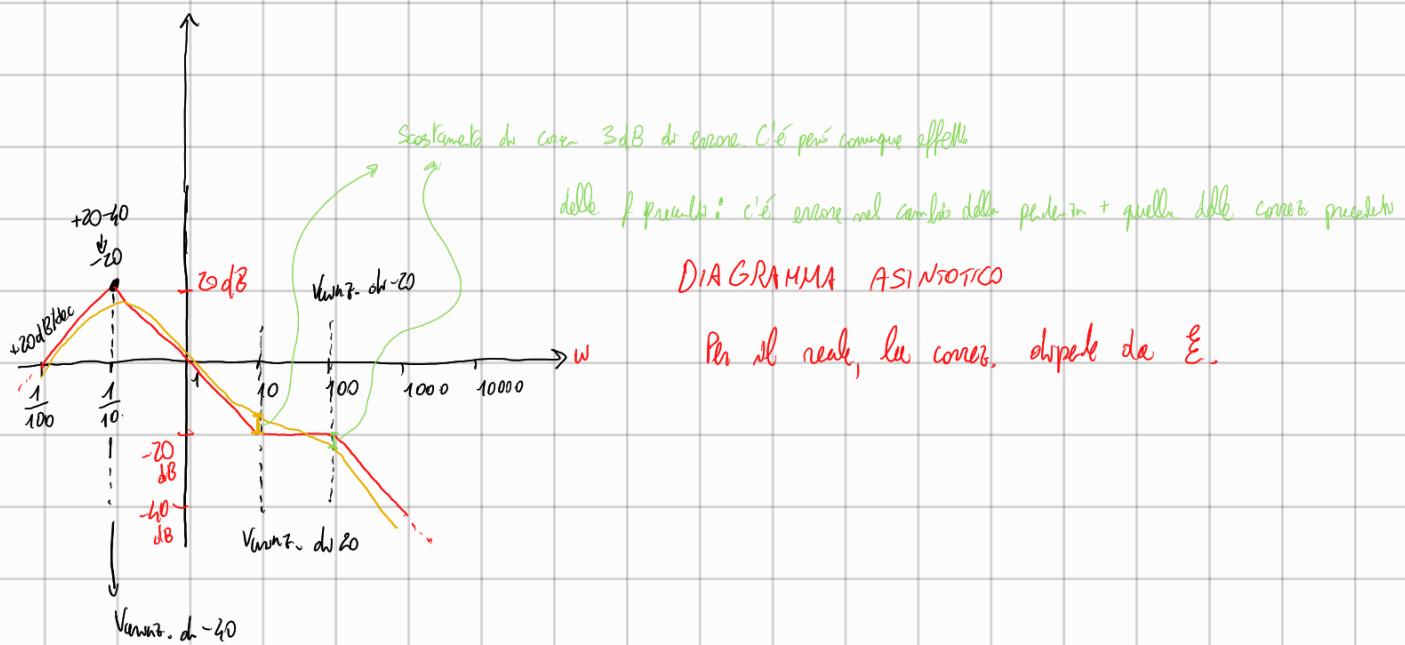
Pendenza della retta $40h$, con $h=1$, perché $T_{unomodo}$ $m = -40$

Quindi sul grafico da prima avremo a $\frac{1}{10}$.

Punto di rottura 2: $\frac{1}{|T_1|} = 10 \rightarrow$ Pendenza $= 20h = 20 \text{ dB/dec}$

Punto di rottura 3: $\frac{1}{|T_1|} = 100 \rightarrow -20 \text{ dB/dec}$

Tracce:



■ Diagramma delle fasi

$$G(j\omega) = \frac{\mu}{(j\omega)^g} \frac{\prod_i (1 + j\omega\tau_i) \prod_i (1 + j2\zeta_i\omega/\alpha_{ni} - \omega^2/\alpha_{ni}^2)}{\prod_i (1 + j\omega T_i) \prod_i (1 + j2\xi_i\omega/\omega_{ni} - \omega^2/\omega_{ni}^2)}$$

$$\angle G(j\omega) = \angle \mu - g \angle(j\omega) + \sum_i \angle(1 + j\omega\tau_i) + \sum_i \angle(1 + j2\zeta_i\omega/\alpha_{ni} - \omega^2/\alpha_{ni}^2) + \\ - \sum_i \angle(1 + j\omega T_i) - \sum_i \angle(1 + j2\xi_i\omega/\omega_{ni} - \omega^2/\omega_{ni}^2)$$

- Quindi il diagramma può essere tracciato sommendo i diagrammi dei singoli termini che sono del tipo (dove h è la molteplicità di poli o zeri reali o complessi e coniugati)

- Termine costante: μ

$$\angle \mu = \begin{cases} 0^\circ, & \mu > 0 \\ -180^\circ, & \mu < 0 \end{cases}$$

- Il diagramma è una retta orizzontale di ordinata 0° o -180° a seconda del segno di μ

- Termine monomio: $1/(j\omega)^g$

$$\angle\left(\frac{1}{(j\omega)^g}\right) = -g90^\circ$$

- Il diagramma è una retta orizzontale di ordinata $-g90^\circ$

- **ritardo** se $g > 0$ (poli nell'origine)
- **anticipo** se $g < 0$ (zeri nell'origine)

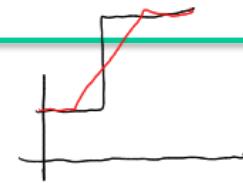
Diagramma delle fasi

- Termine binomio: $(1 + j\omega T)^h$

$$\angle(1 + j\omega T)^h = h \operatorname{atan} \omega T \simeq \begin{cases} 0^\circ, & \omega \ll 1/|T| \\ h90^\circ \operatorname{sgn} T, & \omega \gg 1/|T| \end{cases}$$

\rightarrow per $\omega \gg 1/|T|$

Caso $h = -1$
Polo instabile
ritardo ed anticipazione



Esempio

Curva azzurra è la reale.

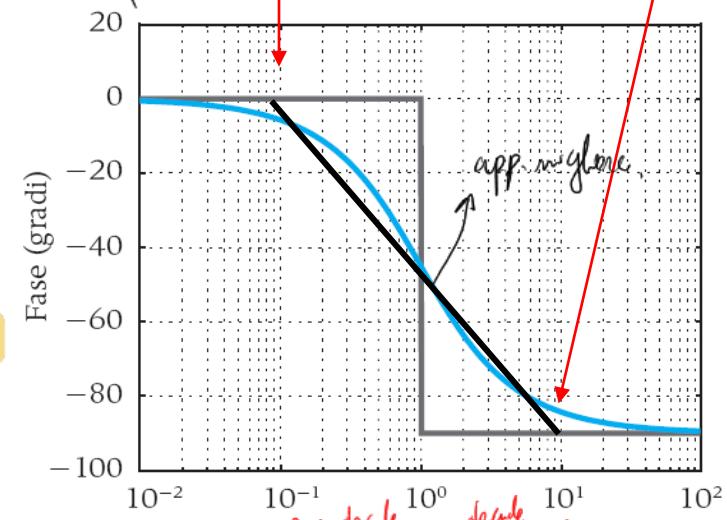
Approssimazione siffatta

Punto di rottura

$0.1/|T|$

Punto di rottura

$10/|T|$



Caso $h = -1, T > 0$ (polo reale negativo) p. 11



- Nascono allora due punti di rottura
 - $0.1/|T|$ e $10/|T|$
- La pendenza sarà negativa (**ritardo**) nel caso di polo negativo ($h < 0, T > 0$) o di zero positivo ($h > 0, T < 0$)
- La pendenza sarà positiva (**anticipo**) nel caso di zero negativo ($h > 0, T > 0$) o di polo positivo ($h < 0, T < 0$)

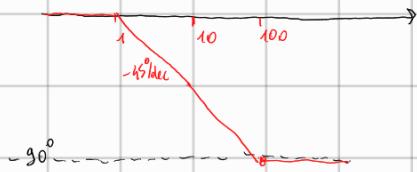
Ovvio che dipende da h e T in segno.

$$ES. \quad G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega(0.1)}$$

Punto da 0° perché $\omega \rightarrow 0$ beta a 1.

Punto di rottura dell'asincronismo $\omega_{rp} = \frac{1}{m} = 10$, una decade prima c'è un doppio punto

$b_1 = -1$, quindi la 90° si ha per $\omega = 1$



ES. 2)

$$G(j\omega) = 0.1(1 - j\omega 0.01)$$

$M = 0.1$, ma ω non ha segno. $\angle M = 0$

$\gamma = -0.01 < 0$. Fase finale = -90° , perché $\gamma < 0$ e $b_1 > 0$
cioè $\text{sign}\gamma < 0$



Diagramma delle fasi

- Termine **trinomio**: $(1 + j2\xi\omega/\omega_n - \omega^2/\omega_n^2)^h$

$$\angle(1 + j2\xi\omega/\omega_n - \omega^2/\omega_n^2)^h = h \angle(1 - \omega^2/\omega_n^2 + j2\xi\omega/\omega_n) \approx \begin{cases} 0^\circ, & \omega \ll \omega_n \\ h180^\circ \operatorname{sgn} \xi, & \omega \gg \omega_n \end{cases}$$



- Il diagramma asintotico sarebbe costituito da due rette orizzontali
- Il diagramma asintotico siffatto, però, si discosta molto da quello vero nelle due decadi intorno al punto ω_n , per cui si preferisce adoperare come approssimazione in tale intervallo una retta con pendenza $h90^\circ \operatorname{sgn} \xi$
 - Nascono allora due punti di rottura
 - $0.1\omega_n$ e $10\omega_n$
 - La pendenza sarà negativa (**ritardo**) nel caso di poli c.c. a $\operatorname{Re}(.)$ negativa ($h < 0, \xi > 0$) o di zeri c.c. a $\operatorname{Re}(.)$ positiva ($h > 0, \xi < 0$)
 - La pendenza sarà positiva (**anticipo**) nel caso di zeri c.c. a $\operatorname{Re}(.)$ negativa ($h > 0, \xi > 0$) o di poli c.c. a $\operatorname{Re}(.)$ positiva ($h < 0, \xi < 0$)
 - Gli scostamenti sono tanto maggiori quanto minore è ξ
 - Ma per $\xi = 0$ il diagramma asintotico è esatto; il termine trinomio è reale
 - Positivo per $\omega < \omega_n \Rightarrow \angle = 0^\circ$
 - Negativo per $\omega > \omega_n \Rightarrow \angle = -180^\circ$

Parte reale tende a 1, parte imm. tende a 0

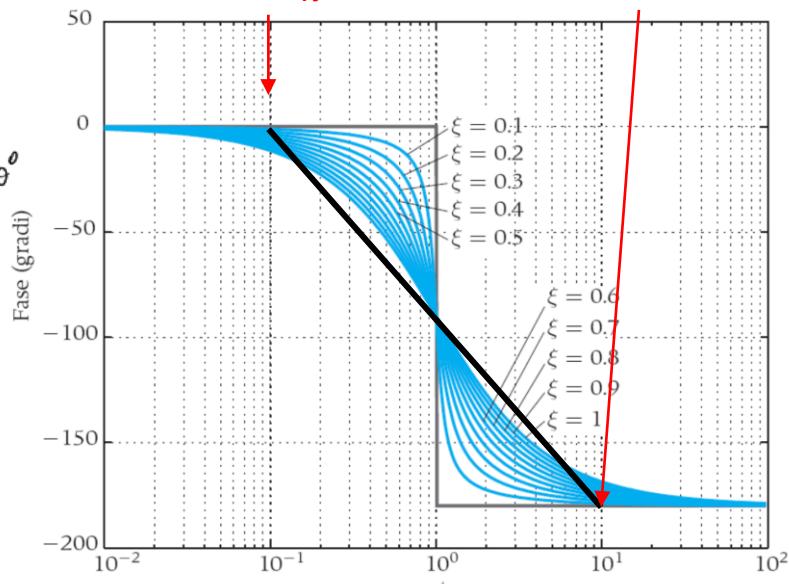
Parte reale tende a $-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}$, la imm. a $2\frac{\omega}{\omega_n}$

Punto di rottura

$0.1\omega_n$

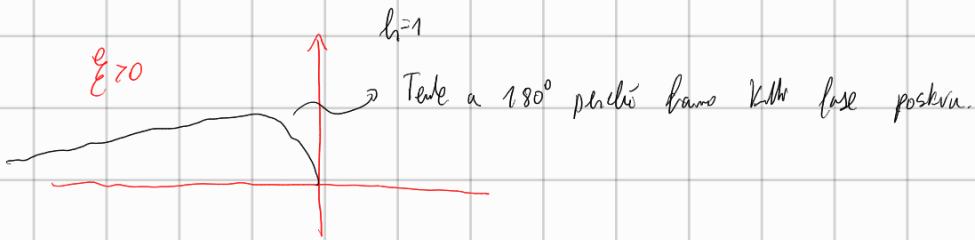
Punto di rottura

$10\omega_n$



Caso $h = -1, \xi > 0$ (poli c.c. a $\operatorname{Re}(.) < 0$) p. 12

Δ ma parte reale cresce più rapidamente dell'immaginaria:



Tende a 180° perché hanno la stessa fase positiva.

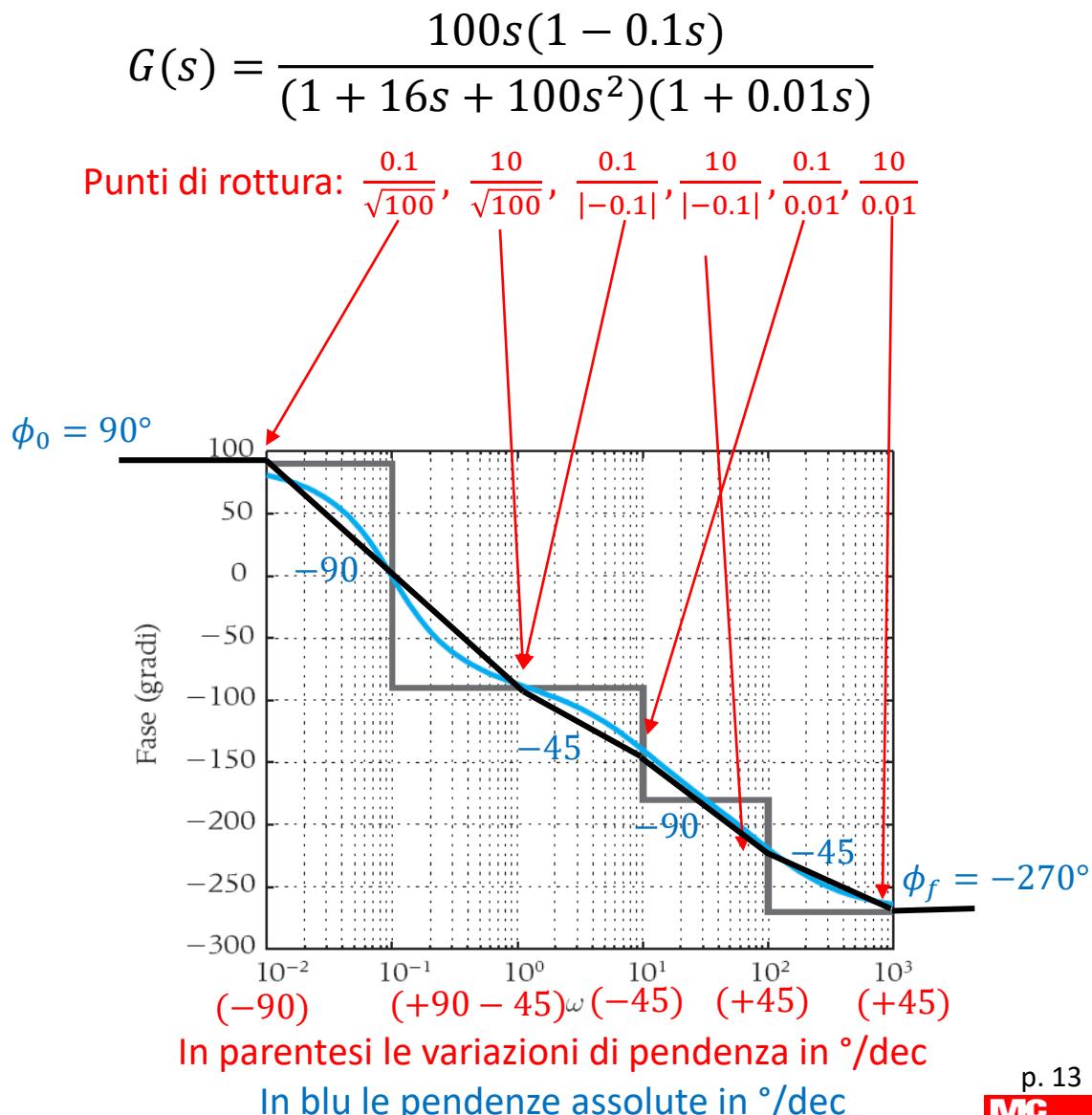


$$\arctan\left(-\frac{2\xi w_{in}}{w^2 - w_{in}^2}\right) = \arctan\left(\frac{2\xi w_{in}}{w^2 - w_{in}^2}\right) \rightarrow 180^\circ \text{ se } \xi > 0$$

\wedge è corretto se ξ dovesse essere > 0 , fu un po' meno è corretto. Non conta nel buono ma
ha sbagliato come l'hanno fatto con $\xi = 0$.

■ Tracciamento del diagramma asintotico delle fasi

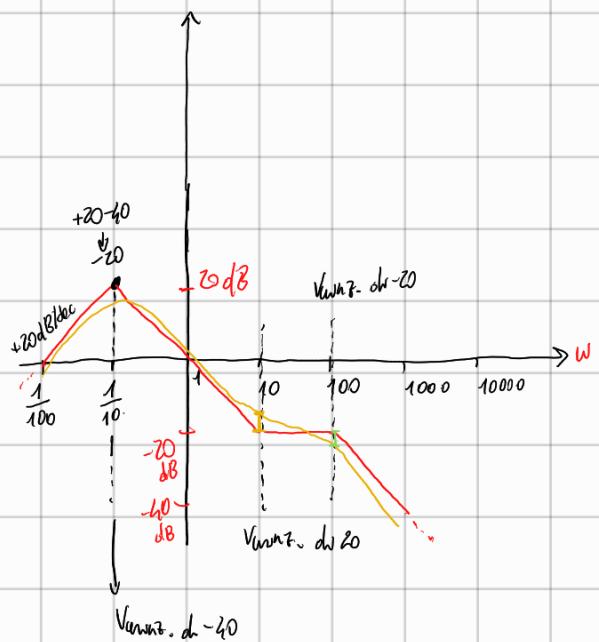
- ◆ Il tratto iniziale è una retta orizzontale di ordinata
 - $\phi_0 = \angle\mu - g90^\circ$
- ◆ Il tratto finale è una retta orizzontale di ordinata
 - $\phi_f = \phi_0 + \sum_i h90^\circ \operatorname{sgn} \tau_i + \sum_i h180^\circ \operatorname{sgn} \zeta_i + \sum_i h90^\circ \operatorname{sgn} T_i - \sum_i h180^\circ \operatorname{sgn} \xi_i$
- ◆ Si individuano i punti di rottura $0.1/|T_i|, 0.1/|\tau_i|, 0.1\omega_{ni}, 0.1\alpha_{ni}, 10/|T_i|, 10/|\tau_i|, 10\omega_{ni}, 10\alpha_{ni}$
- ◆ In corrispondenza di ciascun punto di rottura si verifica una variazione di pendenza pari a
 - $45h^\circ/\text{dec}$ per ciascun termine binomio
 - Negativa nel caso di termine relativo a polo negativo o zero positivo (**ritardo**)
 - Positiva nel caso di termine relativo a zero negativo o polo positivo (**anticipo**)
 - $90h^\circ/\text{dec}$ per ciascun termine trinomio
 - Negativa nel caso di termine relativo a poli c.c. a $\operatorname{Re}(.) < 0$ o zeri c.c. a $\operatorname{Re}(.) > 0$ (**ritardo**)
 - Positiva nel caso di termine relativo a zeri c.c. a $\operatorname{Re}(.) < 0$ o poli c.c. a $\operatorname{Re}(.) > 0$ (**anticipo**)



Riprendo esempio da prima

NOTA: obbligatoriamente farsi è SEMPRE LIMITATO,

anch'esso è limitato. In quali casi obblig. matrice è limitato?



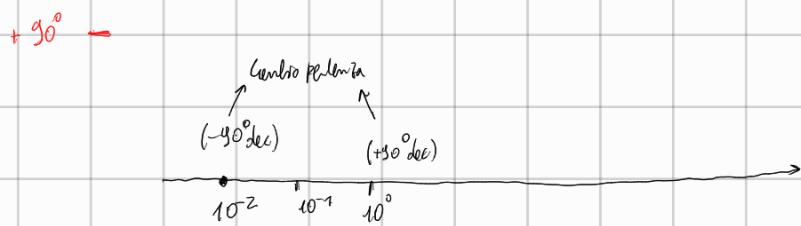
1° roll-off = $\frac{1}{10}$. Punto da decalcare prima.

$\frac{1}{10}$ corrisponde a tenere l'intero al denominatore.

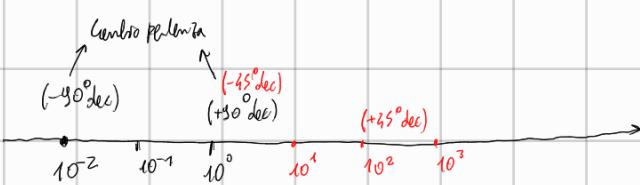
$(1 + 16s + 100s^2) \Rightarrow \xi > 0$, polo stabile all'infinito

Sì partire da 90° per M che è positivo e c'è 1 polo nell'origine, 100s. Le fasi degli altri vengono portate

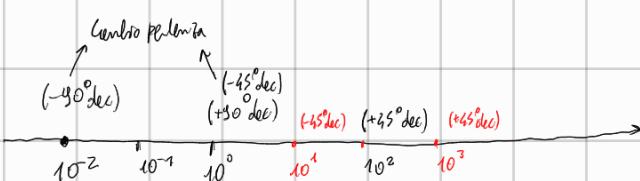
Sempre a 0.



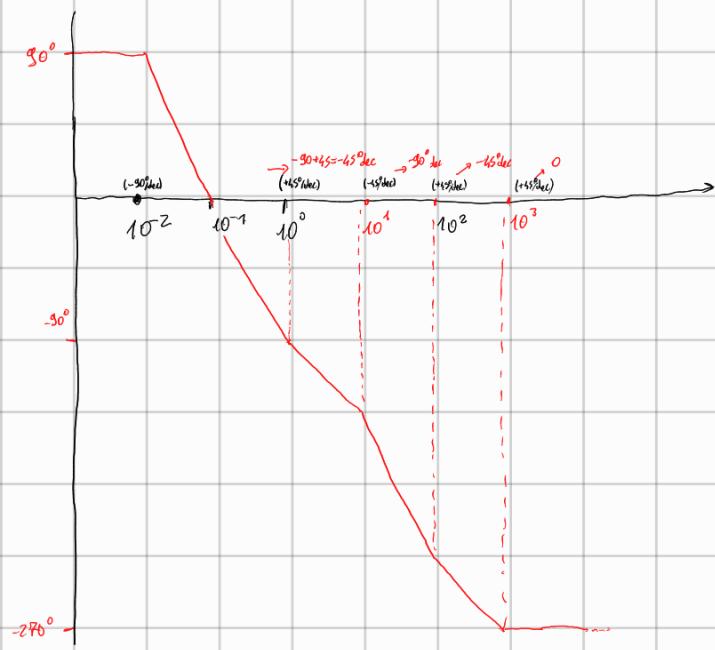
Nota: da 10^1 ho un altro punto di roll-off corrispondente a zero reale positivo. Sfara da notando anche a partire da 10^0 (decade prima).



Su 10^2 ho polo reale neg. con moltiplicità 1 \Rightarrow sfara da ritirato prima e dopo il $\pm 45^\circ \text{ dec}$



DISEGNO DIAGRAMMA:



Traccio sra frutto maturo che finale.

Devo sommare le fasi fra le kanti i punti.

$$0^\circ + 90^\circ - 90^\circ - 180^\circ - 90^\circ = -270^\circ$$

(M) (S) (4-0.15) (1+1.65+100s) (1+0.01s)

} Se h e T sono concordi, anticipo.
 } Se h e T discordi, ritardo.

Norma: Asse y deve visual. dm $|G(j\omega)|$ conviene mettere su $10^\circ = 1 - w$. Perché così moltiplicare dà direz. di dB per $\left| \frac{w}{w_0} \right|_{dB}$.

Diagramma di Bode del termine di ritardo

$$G(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega} = e^{-s\tau} \Big|_{s=j\omega} = e^{-j\omega\tau}, \quad \tau > 0$$

System non anti-causal

Diagramma del modulo

$$|G(j\omega)| = |e^{-j\omega\tau}| = 1 \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 0 \text{ dB}, \quad \forall \omega$$

- È una retta orizzontale a 0 dB

Diagramma della fase

$$\angle G(j\omega) = \angle e^{-j\omega\tau} = -\omega\tau 180^\circ/\pi = -10^{\log \omega\tau} 180^\circ/\pi$$

- In scala lineare è una retta, ma in scala logaritmica è una curva esponenziale che diverge a $-\infty$ per $\omega \rightarrow +\infty$

