# Capitolo 5 – Funzione di trasferimento

## Movimento di un sistema LTI nel dominio di Laplace

- Somma di evoluzione libera e forzata

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) \quad + (sI - A)^{-1}BU(s)$$

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s)$$

- Evoluzione forzata nell'uscita

$$Y(s) = \underbrace{[C(sI - A)^{-1}B + D]}_{\substack{\text{Funzione (matrice) di trasferimento} \\ G(s) \in \mathbb{C}^{m \times p}}}U(s)$$

Non dá info sulle interconnessioni degli elementi costitutivi del sistema.
Dá solo info di come l'uscita dipende (dinamicamente) dall'ingresso.

- La risposta del sistema nell'uscita è dunque

$$\boxed{Y(s) = G(s)U(s)}$$

* Al numeratore della $\Phi(s)$ al più polinomi di grado $n-1$

## Struttura della funzione di trasferimento

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

- Se il sistema è adinamico privo di stato ⇒ c'è solo equaz. di uscita.

$$G(s) = D$$

$\Phi(s)$ MATRICE DI TRANSIZIONE

- Per definizione di $\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$, la $G(s)$ è costituita da tutte funzioni razionali fratte il cui denominatore è il polinomio minimo della matrice dinamica $A$ otterrò una matrice di f. di raz. fratte con al denominatore il pol. minimo di A
- Per sistemi SISO singola → 1×1
  - La $G(s)$ è una funzione razionale fratta con il denominatore di grado al più $n$ stretta e il numeratore ha lo stesso grado se $D \neq 0$ *
  - Se ci sono cancellazioni tra zeri e poli, il grado del denominatore può essere inferiore a $n$ e alcuni autovalori di $A$ non sono poli di $G(s)$

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_\nu s^\nu + b_{\nu-1}s^{\nu-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^\nu + a_{\nu-1}s^{\nu-1} + \cdots + a_1 s + a_0}, \quad \nu \leq n$$

  - Se $b_\nu = 0$ ($D = 0$), il sistema si dice «**strettamente proprio**» e il grado del numeratore è inferiore a quello del denominatore
- Anche la risposta forzata, se l'ingresso ha una trasformata razionale fratta, è una funzione razionale fratta

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{N(s)}{D(s)}\frac{N_U(s)}{D_U(s)} = \underbrace{\frac{r_G(s)}{D(s)} + \frac{r_U(s)}{D_U(s)}}_{\text{Posso sempre scomporre così.}} \overset{D}{\Rightarrow} \boxed{\text{c.li.m.e. del sistema + c.li.m.e. dell'ingresso}}$$

escluso al più semplificazioni

* Poli = radici del polinomio minimo

Δ esclusi impulsi sono sempre proprie

Agg. 2x2: Scambia el. su diag. e cambia segno fuori.

## Funzione di trasferimento e cancellazioni

- Esempio 1

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x(t)$$

- La fdt è

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+3 & 0 \\ -2 & s+4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Pol. minimo = Pol. caratt.

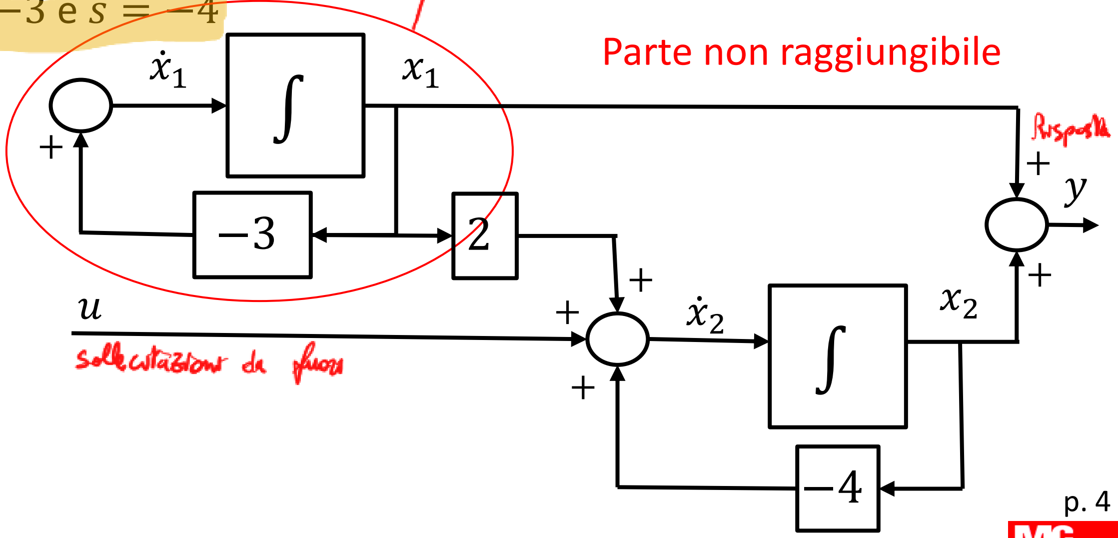
$$= \frac{1}{(s+3)(s+4)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+4 & 0 \\ 2 & s+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\cancel{s+3}}{\cancel{(s+3)}(s+4)} = \frac{1}{s+4}$$

- $s = -4$ è l'unico polo di $G(s)$ mentre gli autovalori di $A$ sono $s = -3$ e $s = -4$
- Che vuol dire?
  - Lo schema realizzativo della i-s-u in esame è

NOTA:
$x_1(0) = x_{10}$
$x_1(t) = e^{-3t}x_{10}$

$$\dot{x}_1(t) = -3x_1(t) \;*$$
$$\dot{x}_2(t) = 2x_1(t) - 4x_2(t) + u(t)$$

Sottosistema che evolve per conto suo




- Si vede chiaramente che una parte del sistema non è influenzabile dall'ingresso $u$
- È proprio quella relativa all'autovalore che non è polo!
- Prende il nome di «**parte non raggiungibile**»

*Sistema non é completamente raggiungibile

NOTA: Se in $G(s)$ ci sono cancellaz. non é detto che ci siano parti non ragg.

# Funzione di trasferimento e cancellazioni

- Esempio 2

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x(t)$$

- La fdt è

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+1 & -2 \\ 0 & s+2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

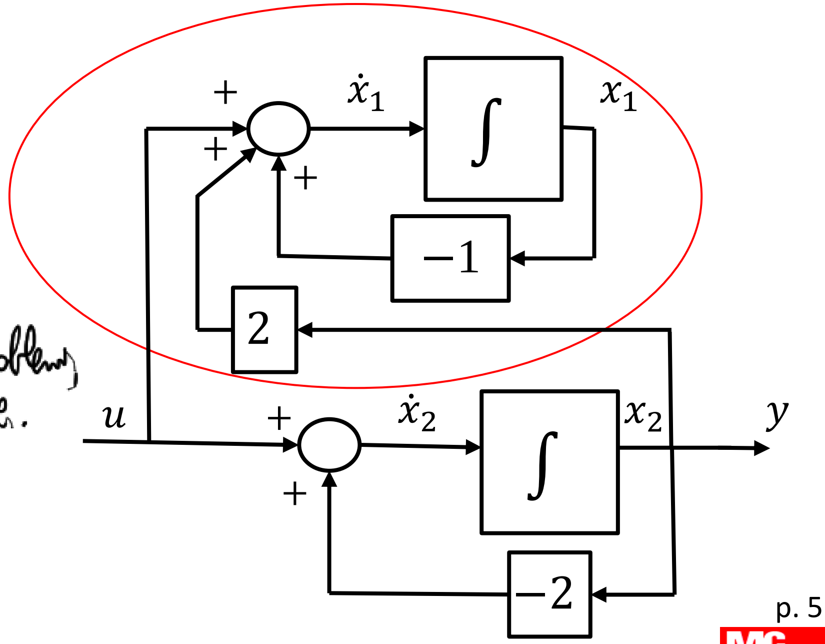
$$= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+2 & 2 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\cancel{s+1}}{\cancel{(s+1)}(s+2)} = \frac{1}{s+2}$$

- $s = -2$ è l'unico polo di $G(s)$ mente gli autovalori di $A$ sono $s = -1$ e $s = -2$
- Che vuol dire?
  - Lo schema realizzativo della i-s-u in esame è

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + 2x_2(t) + u(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -2x_2(t) + u(t)$$
$$y(t) = x_2(t)$$

all'uscita non dà problemi
ma al sistema potrebbe.

Parte non osservabile




  - Si vede chiaramente che una parte del sistema non influenza l'uscita $y$
  - È proprio quella relativa all'autovalore che non è polo!
  - Prende il nome di **«parte non osservabile»**

## Funzione di trasferimento e cancellazioni

- A volte possono esserci sia una parte non osservabile che una parte non raggiungibile
- Se ci sono parti non raggiungibili o non osservabili allora c'è qualche cancellazione nella fdt Sicuramente
  - Alcuni autovalori del sistema non sono poli della fdt
- Se ci sono cancellazioni nella fdt non è possibile stabilire dalla sola fdt se c'è nel sistema una parte non raggiungibile o non osservabile o entrambe
- Per stabilirlo occorre analizzare alcune proprietà strutturali della i-s-u da cui si è derivata la fdt
  - Raggiungibilità
    - Un sistema di ordine $n$ è completamente raggiungibile (non c'è alcuna parte non raggiungibile) se e solo se

$$\mathrm{rk}\underbrace{\begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{pmatrix}}_{\text{Matrice di raggiungibilità}} = n$$

Ingresso riesce a eccitare tutte le variab. di stato?

  - Osservabilità
    - Un sistema di ordine $n$ è completamente osservabile (non c'è alcuna parte non osservabile) se e solo se

$$\mathrm{rk}\underbrace{\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}}_{\text{Matrice di osservabilità}} = n$$

CASO SISO: matrici nxn

Se A nulla non compl raggiungibile

Poi vedremo come è importante verificarlo su una i-s-u che conservi la struttura interna del sistema!



## Funzione di trasferimento e rappresentazione i-u

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1\,\dot{y}(t)+a_0y(t)=b_nu^{(n)}(t)+b_{n-1}u^{(n-1)}(t)+\cdots b_1\dot{u}(t)+b_0u(t)$$

- Assumendo condizioni iniziali nulle e trasformando secondo Laplace (prop. di derivazione in $t$) si ha

$$s^nY(s)+a_{n-1}s^{n-1}Y(s)\ +\cdots+a_1\,sY(s)+a_0Y(s)=b_ns^nU(s)+b_{n-1}s^{n-1}U(s)+\cdots b_1sU(s)+b_0U(s)$$

$$\Downarrow$$

Corrisp. biunivoca dei coefficienti

$$Y(s)=\underbrace{\frac{b_ns^n+b_{n-1}\,s^{n-1}+\cdots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}}_{\text{Funzione di trasferimento } G(s)}U(s) \overset{*}{=} G(s)U(s)\Rightarrow\boxed{G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}}$$

- La fdt può essere quindi calcolata come rapporto tra le trasformate di Laplace di uscita e ingresso!
- Anche calcolata in questo modo possono esserci delle cancellazioni tra zeri e poli, ma non è possibile stabilire se c'è una parte non raggiungibile o una parte non osservabile o entrambe
  - Perché una rappresentazione i-u non ha alcuna informazione sulla struttura interna (interconnessione tra i sottosistemi componenti) del sistema

* Io già so che $Y_f(s)=\{[C(sI-A)^{-1}]B+D\}U(s) \Rightarrow$ ho dimostrato per i SISO

## Funzione di trasferimento e rappresentazione i-u

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1\,\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_n u^{(n)}(t) + b_{n-1}u^{(n-1)}(t) + \cdots b_1\dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

$$G(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1}\,s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

- La rappresentazione i-u e la fdt sono in relazione biunivoca
  - Se da una i-u si può ricavare una i-s-u (forme canoniche) allora lo stesso vale per la fdt
- Forma canonica di raggiungibilità

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \qquad d = b_n$$

$$c^T = \begin{pmatrix} b_0 - a_0 b_n & b_1 - a_1 b_n & b_2 - a_2 b_n & \dots & b_{n-1} - a_{n-1}\, b_n \end{pmatrix}$$

Forma canonica di osservabilità

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_0 - a_0 b_n \\ b_1 - a_1 b_n \\ b_2 - a_2 b_n \\ \vdots \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_n \end{pmatrix}$$

$$c^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \qquad d = b_n$$

- Tali i-s-u hanno una struttura interna prestabilita
  - la prima non ha parti non raggiungibili, la seconda non ha parti non osservabili

Consider $G(s) = \frac{s+1}{(s+1)(s+2)}$ NON RAGG. : non puoi cambiare comp.

Forma canonica di raggiung.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ Compl. raggiungibile.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{O} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$ Matrice di osservabilità, rango 1

Nonostante questo, non so del sistema non è raggiungibile.
Modello non dice nulla su sistema
Funziona $U \to Y$ esattamente come sistema, ma le variabili sono fittizie.

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix} = n$$

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n$$

## Funzione di trasferimento e stabilità del sistema

$$G(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$


Non conta per autovalori

- Relazione tra poli di $G(s)$ e autovalori della matrice dinamica $A$
  - Un sistema è asintoticamente stabile (**«internamente»**) se e solo se tutti gli autovalori di $A$ sono a parte reale negativa

$$\Downarrow$$

  - Se un sistema è asintoticamente stabile (**«stabilità interna»**) allora tutti i poli della sua fdt sono a parte reale negativa
  - È chiaro che il viceversa non è vero in generale
    - potrebbero esserci autovalori (della parte non raggiungibile o non osservabile) a parte reale positiva o nulla
  - Definizione: un sistema si dice stabile BIBO se ad un qualsiasi ingresso limitato risponde con uscita limitata *
  - Proposizione: Un sistema è stabile BIBO se e solo se la sua fdt ha tutti i poli a parte reale negativa

    Dim. (cenni) $\Leftarrow$ $\Delta$

    - Cond. suff.: se i poli di $G(s)$ sono tutti a parte reale negativa e se l'ingresso è limitato allora anche la sua trasformata di Laplace $U(s)$ ha poli a parte reale negativa o nulla a molteplicità unitaria, di conseguenza la trasformata di Laplace dell'uscita $Y(s) = G(s)U(s)$ avrà la stessa proprietà e quindi la sua antitrasformata sarà limitata.
    - Cond. necess.: se, per assurdo, ci fosse un qualche polo a parte reale positiva o nulla, potrei sempre scegliere un ingresso limitato che abbia «lo stesso modo» di quel polo e l'uscita risulterebbe illimitata, che è contro l'ipotesi di stabilità BIBO.

Autovalori relativi alle sole parti osservabili e ragg. del sistema
* Bounded input bounded output

Posso ricavare sistema con la forma canonica e vedere se è stabile, ma quegli stati sono fittizi
Non so se qualcosa esplode

Δ• Visto che ho $f$ limitata in $U$, al più possono stare su asse immaginario con molteplicità 1.
Possono anche avere $Re(p) < 0$.

Poli di $Y(s) \Rightarrow$ Poli di $G$ e Poli di $U$. Quindi ho poli o negativi o immag. con molteplicità 1. Quindi questo conclude.

$\Rightarrow$ Se ho poli su asse immag. con molteplicità 1

$$Y(s) = \frac{N_G(s)}{D_G(s)} \cdot \frac{N_u(s)}{D_u(s)}$$

polo semplice su asse imm: $\frac{1}{s}$ $\rightarrow$ scelgo giudizio: $u(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow Y(s)$ ha

polo nell'origine con molteplicità 2. Divergenza.

Parte reale positiva: qualunque ingresso limitato, nella $Y(s)$ ho al denominatore un polo positivo che fa divergere tutto.

ES: $\underbrace{\frac{r_1}{s-p_1} + \dots + \frac{r_n}{s-p_n}}_{\text{Qui divergo.}}$

## Funzione di trasferimento e risposta impulsiva

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

- Se $u(t) = \delta(t) \Rightarrow y(t) = g_y(t)$ e quindi

$$Y(s) = \mathcal{L}[g_y(t)] = G(s)\mathcal{L}[\delta(t)] \Rightarrow G(s) = \mathcal{L}[g_y(t)]/\mathcal{L}[\delta(t)]$$

- Ma siccome $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$, allora l'espressione funzionale di $G(s)$ coincide con quella di $\mathcal{L}[g_y(t)]$
  - Tuttavia, va precisato che non è corretto affermare che la fdt «è» la trasformata di Laplace della risposta impulsiva, ma che questa è solo un modo di calcolarla
    ↳ dimensionalmente è diversa
    - Ad esempio, se il sistema in esame è un circuito elettrico con ingresso in corrente e uscita in tensione, la funzione di trasferimento svolge il ruolo di una impedenza, mentre la risposta impulsiva è una tensione, con dimensioni fisiche totalmente diverse!
  - Considerato che la fdt contiene solo le dinamiche relative alla parte raggiungibile e osservabile, dunque anche la risposta impulsiva è combinazione lineare dei modi di evoluzione relativi alla sola parte raggiungibile e osservabile
  - La sommabilità di $g_y(t)$ è legata alla stabilità BIBO, infatti si può dimostrare che
    - condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema sia stabile BIBO è che la risposta impulsiva sia sommabile, cioè

$$\exists M > 0: \int_0^{+\infty} |g_y(t)| dt \leq M < +\infty$$

Come si stima la risposta impulsiva sperimentalmente?


derivo in senso generalizzato $\longrightarrow$ $\dot{\delta}_{-1}(t) = \delta(t)$

NOTA: $\mathcal{L}[\dot{\delta}_{-1}(t)] = s\mathcal{L}[\delta_{-1}(t)] = \cancel{s}\cdot\frac{1}{\cancel{s}} = 1$

In generale però so che $Y(s) = G(s)U(s)$.

$\underbrace{Y_{-1}(s)}_{\text{gradino}} = \frac{1}{s}\cdot G(s) \Rightarrow G(s) = sY_{-1}(s)$ $\quad \mathcal{L}^{-1} \Rightarrow y_{-1}(t)$

$= \mathcal{L}[g_y(t)]/1$ → trasf. di impulso

Quindi: $g_y(t) = \dot{y}_{-1}(t)$

↑ risposta al gradino ⇒ ecco come trovo risposta impulsiva

Sia la risposta al gradino, sia la risp. impulsiva mi dà una rappresentaz. del sistema in I-U.

Th caratterizza una proprietà che ha la $g_y$ per stabilità BIBO

Università degli Studi della Campania Luigi Vanvitelli
Dipartimento di Ingegneria

- Dim. FREQUENTLY ASKED
  - Condizione sufficiente
    - Hp.: risposta impulsiva sommabile — Th.: sistema stabile BIBO

$$\exists M > 0 \colon \int_0^t |g_y(\tau)| d\tau \leq M < +\infty, \forall t \geq 0$$

    - Dato un qualsiasi ingresso limitato $u(t)$, cioè tale che

$$\exists \bar{U} > 0 \colon |u(t)| \leq \bar{U} < +\infty, \forall t \geq 0$$

    - La risposta nell'uscita è limitata, infatti

$$|y(t)| = \left| \int_0^t g_y(t-\tau) u(\tau) d\tau \right| \leq \int_0^t |g_y(t-\tau)||u(\tau)| d\tau$$

$$\leq \bar{U} \int_0^t |g_y(\tau)| d\tau \leq \bar{U} M, \forall t \geq 0$$

1 input 1 output percò a sinistra

$t - \tau = \tau'$  $d\tau = -d\tau'$

Se $\tau = 0$, $\tau' = t$

Se $\tau = t$, $\tau' = 0$



## Dim.

- Condizione necessaria
  - Hp.: sistema stabile BIBO

    Th.: risposta impulsiva limitata

$$\exists M > 0: \int_0^t |g_y(\tau)| d\tau \le M < +\infty, \forall t \ge 0$$

  - Ragionando per assurdo, neghiamo la tesi:

$$\forall M > 0, \exists \bar{t} > 0: \int_0^{\bar{t}} |g_y(\tau)| d\tau > M$$

u(t) ma poi diventa τ nella convoluzione

  - Scelto il particolare ingresso limitato

$$u(\tau) = \operatorname{sgn}\left(g_y(\bar{t} - \tau)\right)$$

certamente limitata

  - La risposta nell'uscita in $\bar{t}$ vale

$$y(\bar{t}) = \int_0^{\bar{t}} g_y(\bar{t} - \tau) u(\tau) d\tau = \int_0^{\bar{t}} g_y(\bar{t} - \tau) \operatorname{sgn}\left(g_y(\bar{t} - \tau)\right) d\tau$$

$$= \int_0^{\bar{t}} |g_y(\bar{t} - \tau)| d\tau = \int_0^{\bar{t}} |g_y(\tau)| d\tau > M$$

illimitato

  - il che significa che è illimitata, il che contraddice l'ipotesi di stabilità BIBO, per cui la tesi deve essere vera.