Capitolo 9 – Analisi in frequenza dei sistemi a tempo discreto

Analisi della risposta indiciale

m al più pari a n

gradino

$$Y(z) = G(z)\frac{z}{z-1} = \frac{b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}\boxed{\frac{z}{z-1}}$$

- Valore iniziale e finale

$$y(0) = \lim_{z\to\infty} Y(z) = \begin{cases} 0, & m < n \\ b_m, & m = n \end{cases}$$

Hp di no semplificazioni?

- Se $G(z)$ non ha poli in 1

$$y_\infty = \lim_{z\to 1}(z-1)Y(z) = G(1)$$

Non ho poli in 1 se $G(z)$ non ha poli in 1.

Hp: tutti gli altri poli di $G(z)$ in modulo < 1.

- Sistemi del I ordine

$$G(z) = \frac{\mu(1-p)}{z-p}$$

lo scrivo in questo modo per avere $G(1) = \mu$

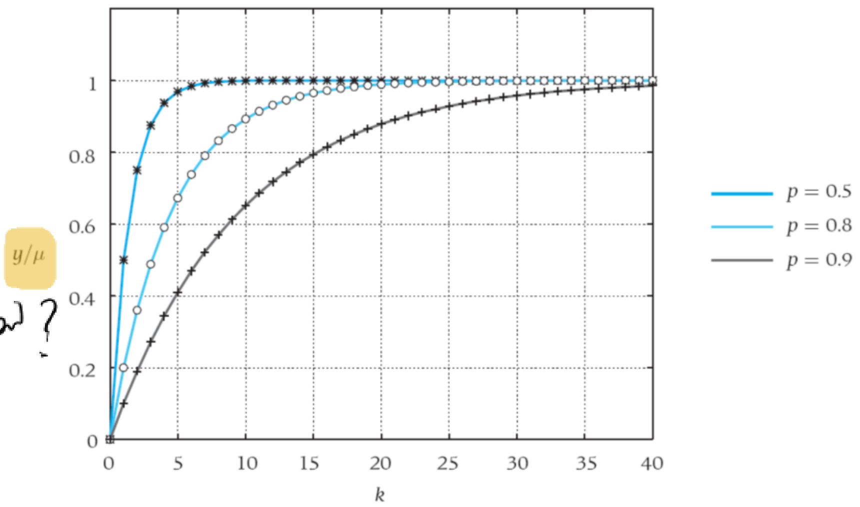
$$Y(z) = G(z)\frac{z}{z-1} = \frac{z\mu(1-p)}{(z-1)(z-p)} = \overbrace{\frac{\mu z}{z-1}}^{\mu} + \overbrace{\frac{-\mu z}{z-p}}^{-\mu p^k}$$

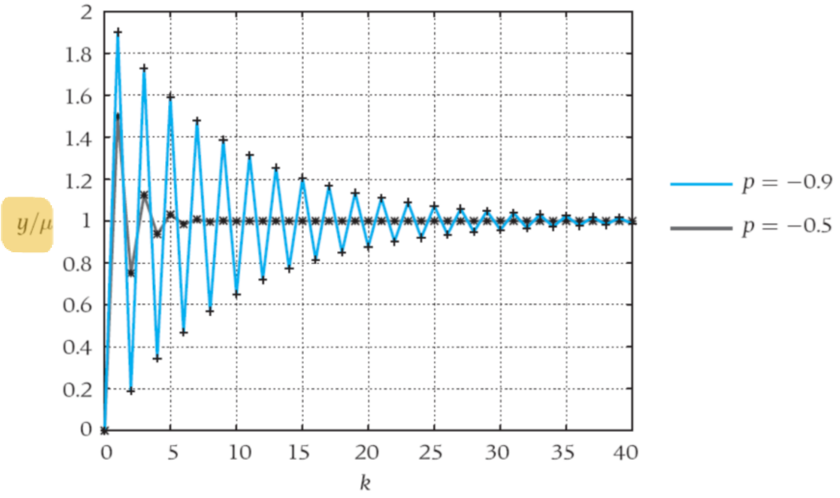
$$\Downarrow$$

$$y(k) = \mu\left(1-p^k\right), \qquad k \geq 0$$

Andamento dipende da p osservando

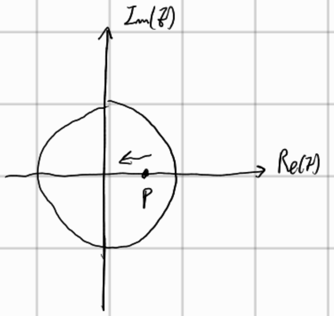
$0 < p < 1$, esponenziale non alt., altrimenti alternato





All'avvicinarsi del polo all'origine, il sistema risponde sempre più velocemente

Se $p \to 0$, allora ho crescita più rapida.



Duale col tempo continuo: se polo si allontana dall'asse immaginario: la frontiera di stabilità è circonf. di $r=1$. Mi allontano dalla frontiera, sistema è più rapido.

Nota: tempo di assestamento rimane invariato, ma nel secondo caso oscilla.

Analisi della risposta indiciale

- Sistemi del II ordine

$$G(z) = \frac{\mu(1-p_1)(1-p_2)}{1-z_1}\,\frac{z-z_1}{(z-p_1)(z-p_2)}$$

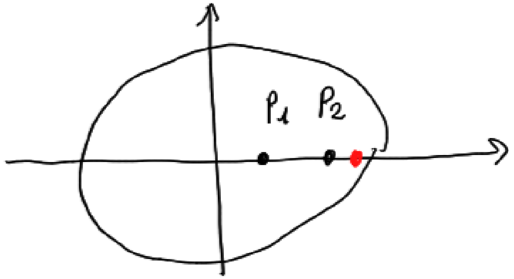
Scelta così per avere G(1)=μ

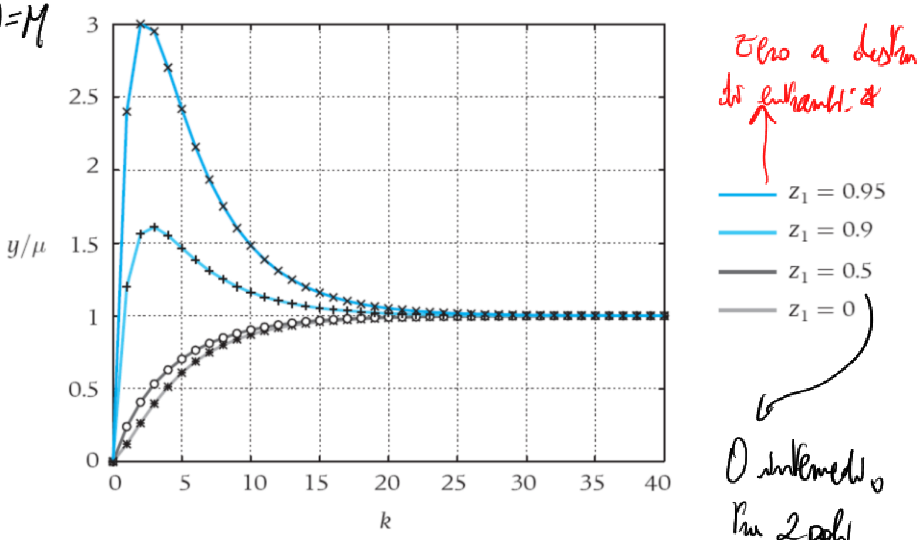
2 poli reali |l|<1 e 1 zero

  - Nel dominio del tempo la risposta è del tipo

$$y(k) = \mu + P_1 p_1^k + P_2 p_2^k\,, \qquad k \geq 0$$

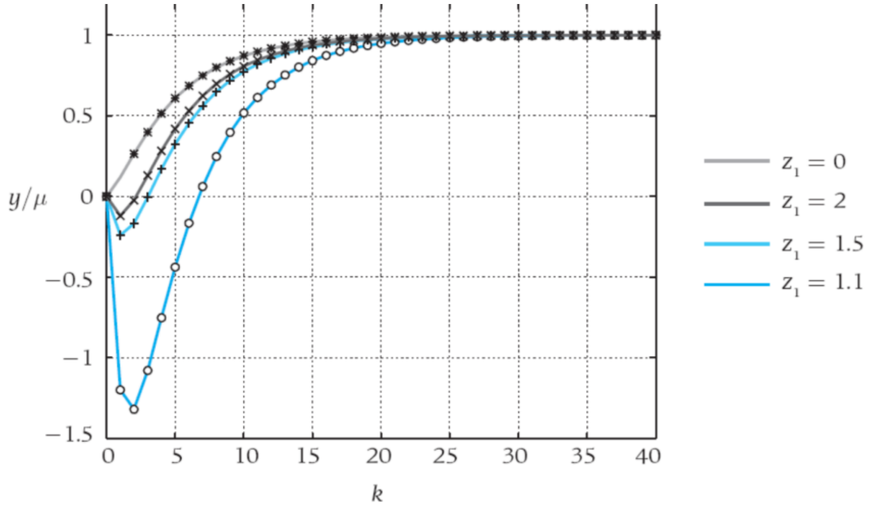
  - L'andamento della risposta dipende dalla posizione dello zero oltre che dei poli
    - Può esserci sovraelongazione anche con modi aperiodici non alternanti (poli reali in | | < 1)
    - La sottoelongazione nasce quando lo zero è fuori dal cerchio unitario (in | | > 1)





Zero a destra di entrambi i poli

0 intermedio tra 2 poli



Poli: $p_1 = 0.4$ e $p_2 = 0.8$

* Poli vicino alla regione di frontiera rispetto che a P_1 e P_2. Causa sovraelongazione.

- Se zero è tra P_1 e P_2 il sistema tende a comportarsi come se lo 0 non ci fosse. A sinistra di P_1 ma z_0 ancora non dominante.
- Se lo 0 si trova fuori dalla circonferenza ho sottoelongazione.
  ↳ DUALITÀ CON TEMPO CONTINUO: Se zero nel semipiano destro, se zero si allontana dalla frontiera ho effetto ridotto.

Analisi della risposta indiciale

Sistemi del II ordine

$$Y(z) = G(z)U(z) = \frac{\mu z^2(1-2\rho\cos\theta+\rho^2)}{(z-\rho e^{j\theta})(z-\rho e^{-j\theta})(z-1)} = \frac{r_1 z}{z-1} + \frac{Qz}{z-\rho e^{j\theta}} + \frac{Q^* z}{z-\rho e^{-j\theta}}$$

$$G(z) = \frac{\mu(1-2\rho\cos\theta+\rho^2)z}{z^2-2\rho\cos\theta z+\rho^2} = \frac{\mu(\dots)}{(z-\rho e^{j\theta})(z-\rho e^{-j\theta})}$$

$$z^2 - z(\rho e^{j\theta} + \rho e^{-j\theta}) + \rho^2$$

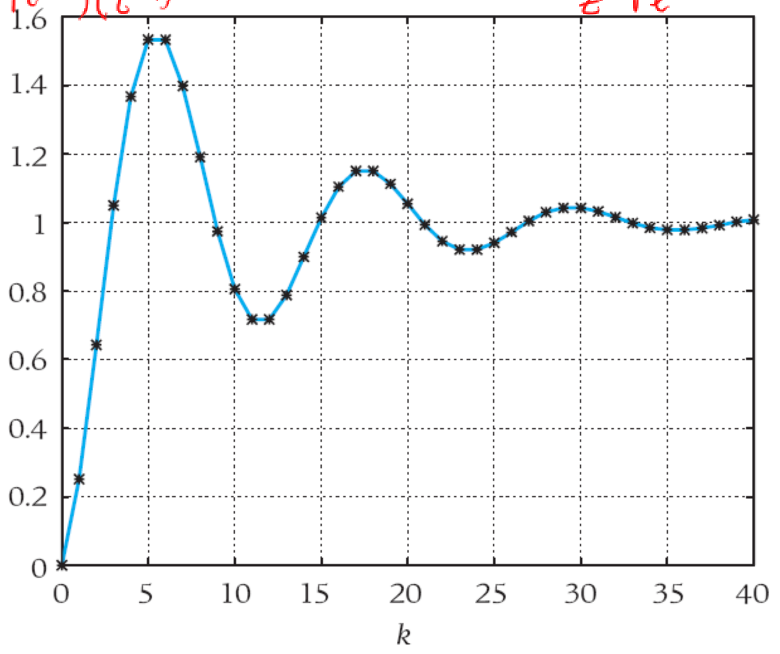
- Ha poli complessi e coniugati in

$$\rho e^{\pm j\theta}$$

- Nel dominio del tempo la risposta è del tipo

$$y(k) = \mu + \underbrace{2|Q|\rho^k\cos(\theta k + \angle Q)}_{\to -\mu \text{ se } k=0}, \qquad k \geq 0$$

- L'andamento della risposta è di tipo pseudo-periodico convergente al valore di regime μ se $\rho < 1$



Poli: $p = 0.9e^{\pm j\pi/6}$

$$r_1 = \left(\frac{(1-2\rho\cos\theta+\rho^2)\mu}{z^2-2\rho\cos\theta z+\rho^2}\right)\Bigg|_{z=1} = \mu$$

$$z\cdot\left(\qquad\right)\Big|_{z=1}$$

$$y(0) = \lim_{z\to\infty} Y(z)$$

Grado rel di $U(z) = 0$

Δ

$Y(z) = G(z)\frac{z}{z-1}$

$y(0) = \lim_{z\to\infty} Y(z) = \lim_{z\to\infty} G(z) = 0$ grado 1 n, grado 2 d

$\mathcal{Z}[y(k+1)] = zY(z) - zy(0)$

$y(1) = y(k+1)|_{k=0} = \lim_{z\to\infty}(zY(z) - zy(0)) = \lim_{z\to\infty} zY(z) = M(1-2\rho\cos\theta+\rho^2)$

Risposta a regime sinusoidale

esiste se sistema è AS.

$$\mathcal{Z}\left[\frac{Ue^{j\theta k}}{2j} - \frac{Ue^{-j\theta k}}{2j}\right] = \frac{U}{2j}\cdot\frac{z}{z-e^{j\theta}} - \frac{U}{2j}\frac{z}{z-e^{-j\theta}}$$

- Dato un sistema asintoticamente stabile con fdt $G(z)$
- Consideriamo un ingresso sinusoidale

$$u(k) = U\sin\theta k\,, \qquad k \geq 0 \Rightarrow U(z) = \frac{zU\sin\theta}{z^2 - 2\cos\theta z + 1} = \frac{zU\sin\theta}{(z-e^{j\theta})(z-e^{-j\theta})}$$

- Assumendo, per semplicità, poli distinti per $G(z)$, la risposta forzata vale

$$Y(z) = G(z)\frac{zU\sin\theta}{(z-e^{j\theta})(z-e^{-j\theta})} = \sum_{i=1}^{n}\frac{zr_i}{z-p_i} + \frac{zQ}{z-e^{j\theta}} + \frac{zQ^*}{z-e^{-j\theta}}, \qquad \text{con } Q = \frac{UG(e^{j\theta})}{2j}$$

- antitrasformando

$$y(k) = \sum_{i=1}^{n} r_i p_i^k + 2\left|\frac{UG(e^{j\theta})}{2j}\right|\cos\left(\theta k + \angle G(e^{j\theta}) - \pi/2\right) = \sum_{i=1}^{n} r_i p_i^k + U\left|G(e^{j\theta})\right|\sin\left(\theta k + \angle G(e^{j\theta})\right), \qquad k \geq 0$$

- A regime «sopravvive» solo il modo proprio dell'ingresso (sinusoidale) e quindi la risposta a regime è ancora sinusoidale con la stessa frequenza dell'ingresso ma ampiezza e fase modificate dalla fdt valutata in $e^{j\theta}$

$$\boxed{y_r(k) = U\left|G(e^{j\theta})\right|\sin\left(\theta k + \angle G(e^{j\theta})\right)}$$

Risposta a regime: 1) $\lim_{t_0 \to -\infty} X(t)$, oppure è quella $y_r(k)$: $\lim_{k \to +\infty} \| y(k) - y_r(k) \| = 0$ $\forall$ condizione iniziale.

Poli con $|k|<1$ Hp: poli distinti

$$Y(z) = \frac{G(z) \cdot U z \sin\theta}{(z-e^{j\theta})(z-e^{-j\theta})} = z\left(\frac{Q}{z-e^{j\theta}} + \frac{Q^*}{z-e^{-j\theta}} + \sum_{i=1}^{m} \frac{r_i}{z-p_i} \right)$$

$$Q = \frac{G(e^{j\theta})\, U \sin\theta}{e^{j\theta}-e^{-j\theta}} = \frac{G(e^{j\theta})\, U \cancel{\sin\theta}/2j}{\cancel{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}/2j} = \frac{U\, G(e^{j\theta})}{2j}$$

Antitrasformo:

$$y(k) = 2 \overbrace{\frac{U}{2} |G(e^{j\theta})|}^{|Q|} \overbrace{1^k}^{|polo|^k} \cos(\overbrace{\theta}^{\text{Fase polo}} k + \angle G(e^{j\theta}) - \frac{\pi}{2}) + \sum_{i=1}^{m} r_i p_i^k \qquad k \geq 0$$

$$U |G(e^{j\theta})| \sin(\theta k + \angle G(e^{j\theta})) + \sum_{i=1}^{m} r_i p_i^k \qquad k \geq 0$$

Devo trovare $y_r(k)$: $\lim_{k \to +\infty} \| y(k) - y_r(k) \| = 0$ con $|p_i|<1$ $\forall i = 1, \dots, m$

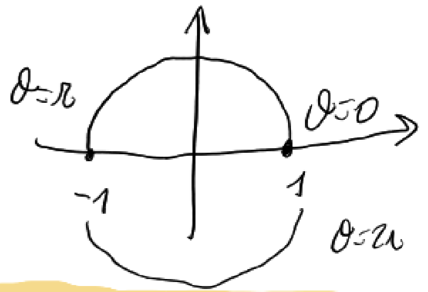
$$y_r(k) = U |G(e^{j\theta})| \sin(\theta k + \angle G(e^{j\theta}))$$

Università degli Studi della Campania *Luigi Vanvitelli*
Dipartimento di Ingegneria

Funzione di risposta in frequenza (risposta armonica)

- È la funzione complessa di variabile reale $\theta \in [0, \pi]$

$$G(e^{j\theta}) = G(z)\Big|_{z=e^{j\theta}}$$



  - cioè la restrizione della fdt alla semicirconferenza di raggio unitario eventualmente privata dei poli di $G(z)$ su di essa
- È una funzione periodica di periodo 2π e siccome $G(z)$ è una funzione razionale fratta con coefficienti tutti reali, vale

$$G(e^{-j\theta}) = G^*(e^{j\theta})$$

la J compare solo all'esponente di z => coniugato è fare -J.

  - Ecco perché i valori di $G(e^{j\theta})$ per $\theta \in [-\pi, 0]$ si possono ricavare da quelli per $\theta \in [0, \pi]$ Considereremo solo quelli*.
- Può essere utilizzata non solo per calcolare la risposta a segnali sinusoidali ma anche a segnali periodici sviluppabili in serie di Fourier e segnali non periodici trasformabili secondo Fourier (Discrete Fourier Transform – DFT)

$$\mathcal{F}[f(k)] = F(e^{j\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) e^{-j\theta k}$$

TRASFORMATA DI FOURIER DISCRETA

↳ cioè $F(z)|_{z=e^{-j\omega}}$

  - Che è invertibile sotto ipotesi poco stringenti

$$f(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\theta}) e^{j\theta k} d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left|F(e^{j\theta})\right| \cos\left(\theta k + \angle F(e^{j\theta})\right) d\theta$$

Δ

↳ Circonferenza.

Per segnali reali

Δ_2

É quello che abbiamo fatto nei sistemi a tempo continuo quando abbiamo detto $G(j\omega) = G(s)\big|_{s=j\omega}$, $\omega \in [0, +\infty)$

Δ é lo spettro della successione $f(k)$. Spettro delle ampiezze e delle fasi

Δ_2 Nota: ϑ varia con continuità, quindi ho infinite armoniche.

Funzione di risposta in frequenza (risposta armonica)

- Considerato un ingresso generico $u(k)$ trasformabile secondo Fourier

$$u(k) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left|U(e^{j\theta})\right| \cos\left(\theta k + \angle U(e^{j\theta})\right) d\theta$$

  - Nell'ipotesi di sistema asintoticamente stabile, per linearità, la risposta è la sovrapposizione (continua) delle risposte agli infiniti segnali sinusoidali

$$y(k) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{\left|G(e^{j\theta})\right|\left|U(e^{j\theta})\right|} \cos(\theta k + \underbrace{\angle U(e^{j\theta}) + \angle G(e^{j\theta})})d\theta$$

    - Ma $y(k)$ è a sua volta trasformabile secondo Fourier e quindi

$$y(k) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{\left|Y(e^{j\theta})\right|} \cos\left(\theta k + \underbrace{\angle Y(e^{j\theta})}\right) d\theta$$

    - In conclusione

$$\boxed{Y(e^{j\theta}) = G(e^{j\theta})U(e^{j\theta})} \Longleftrightarrow Y(\omega) = G(j\omega)U(\omega)$$

Trasf. di Fourier continua

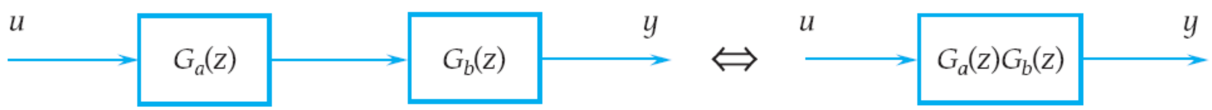
- In uscita ci sono solo armoniche già presenti in ingresso, ciascuna scalata e sfasata per la funzione di risposta armonica

↳ Modulazione

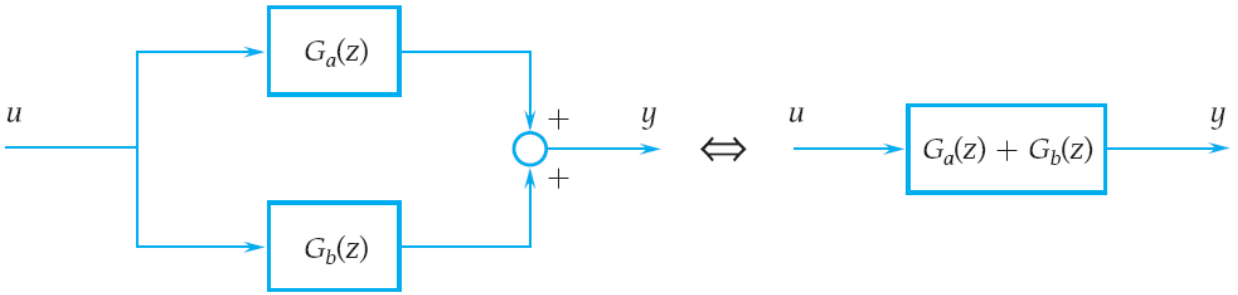
- Come per i sistemi a tempo continuo la risposta in frequenza si può rappresentare graficamente tramite
  - Diagrammi di Bode, polari e di Nichols

Schemi a blocchi

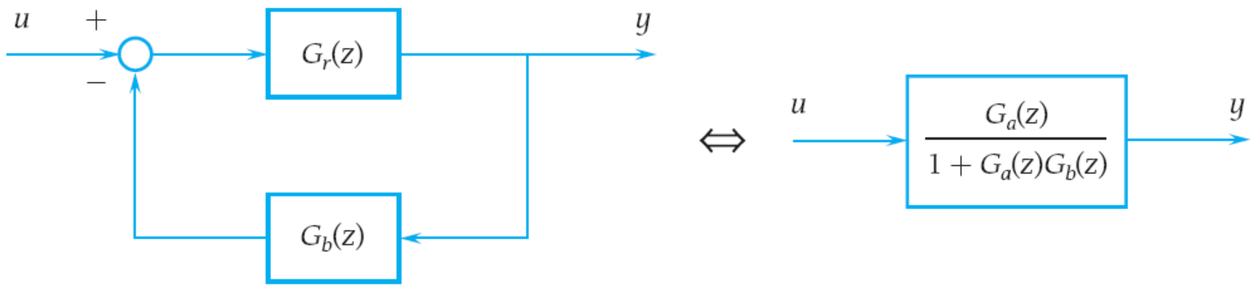
- Le interconnessioni elementari sono le stesse di quelle dei sistemi a tempo continuo
  - Serie



  - Parallelo



  - Retroazione



Schemi a blocchi

- Vista l'analogia formale degli schemi a blocchi e della formula per il calcolo della fdt data la i-s-u, valgono le stesse considerazioni sullw proprietà strutturali e la stabilità interna e quella BIBO
  - Sistemi in serie
    - Se uno zero di $G_a(z)$ cancella un polo di $G_b(z)$, il sistema serie ha una parte non raggiungibile ma osservabile
    - Se un polo di $G_a(z)$ è cancellato da uno zero di $G_b(z)$, il sistema serie ha una parte non osservabile ma raggiungibile
    - Il sistema serie è asintoticamente stabile se e solo se entrambi i sistemi connessi in serie lo sono
    - La stabilità BIBO di entrambi i sistemi componenti implica la stabilità BIBO del sistema serie, ma non è vero il viceversa
  - Sistemi in parallelo
    - Se $G_a(z)$ e $G_b(z)$ hanno poli in comune, il sistema parallelo ha una parte non raggiungibile e non osservabile
    - Il sistema parallelo è asintoticamente stabile se e solo se entrambi i sistemi connessi in parallelo lo sono
    - La stabilità BIBO di entrambi i sistemi componenti è equivalente alla stabilità BIBO del sistema parallelo
  - Sistemi in retroazione
    - Se uno zero di $G_a(z)$ cancella un polo di $G_b(z)$, il sistema in retroazione ha una parte non raggiungibile e non osservabile
    - La stabilità dei sistema in retroazione non ha una relazione diretta con la stabilità dei singoli sottosistemi
    - Se ci sono cancellazioni tra zeri di $G_a(z)$ e poli di $G_b(z)$ non asintoticamente stabili, il sistema in retroazione non è asintoticamente stabile

↳ Non posso rimuovere poli ⇒ Per stabilizzare sistemi instabili, non posso avere zero che lo cancella. (Al contrario si sposta polo).

NOTA: in queste slide c'è un errore sulla stabilità BIBO di sistemi in parallelo. L'errore è corretto in slide più recenti.