Università degli Studi della Campania Luigi Vanvitelli
Dipartimento di Ingegneria

Capitolo 3 – Sistemi lineari e stazionari a tempo continuo

- Richiami di modellistica dei sistemi dinamici
  - Passaggi tra le forme di rappresentazione
    - Rappresentazioni equivalenti
    - Forme canoniche
- Movimento
  - La risposta dei sistemi LTI
    - Decomposizione in movimento libero e forzato
    - Formula di Lagrange
    - Il movimento libero
      - Decomposizione modale

$$\dot{x}(t) = A x(t) + b u(t)$$

$$y(t) = c^T x(t) + d u(t)$$

$$\dot{y}(t) = c^T A x(t) + c^T b u(t) + d \dot{u}(t)$$

$$\ddot{y}(t) = c^T A^2 x(t) + c^T A b u(t) + c^T b \dot{u} + d \ddot{u}$$

$$\dddot{y} = c^T A^3 x(t) + c^T A^2 b u(t) + c^T A b \dot{u} + c^T b \ddot{u} + d \dddot{u}$$

$$y^{(n)} = c^T A^n x(t) + c^T A^{(n-1)} b u(t) + c^T A^{(n-2)} b \dot{u} + \dots c^T A b u^{(n-1)}$$

Passaggio da i-s-u a i-u (sistemi SISO)

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_n u^{(n)}(t) + b_{n-1}u^{(n-1)}(t) + \cdots b_1\dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

- Sia data la i-s-u

colonna

Lo faccio solo per SISO

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= c^{\mathrm{T}}x + du \end{aligned}$$

- Deriviamo l'equazione di uscita n volte

$$\begin{array}{lrcl} a_0 & y &=& c^{\mathrm{T}}x + du \\ a_1 & \dot{y} &=& c^{\mathrm{T}}Ax + c^{\mathrm{T}}bu + d\dot{u} \\ a_2 & \ddot{y} &=& c^{\mathrm{T}}A^2x + c^{\mathrm{T}}Abu + c^{\mathrm{T}}b\dot{u} + d\ddot{u} \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{n-1} & & & \\ 1 & y^{(n)} &=& c^{\mathrm{T}}A^n x + c^{\mathrm{T}}A^{n-1}bu + \cdots + c^{\mathrm{T}}bu^{(n-1)} + du^{(n)} \end{array}$$

Per costrut. sarà 1

$$a_0 c^T x + a_1 c^T A x + a_2 c^T A^2 x + \dots + c^T A^n x$$

$$c^T(\underbrace{a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + A^n}_{})x$$

Polinomio di matrici: Th di Cayley-Hamilton
La matrice A è 0 del suo polinomio caratteristico.
$p(\lambda)$ è polinomio caratt. $\Rightarrow p(A) = \underline{0}$

- Moltiplichiamo ambo i membri per i coefficienti del polinomio caratteristico di A $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ e sommiamo membro a membro

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y$$
$$= c^T \cancel{p(A)} x + \underbrace{d}_{b_n}u^{(n)} + \underbrace{(c^T b + a_{n-1}d)}_{b_{n-1}}u^{(n-1)} + \cdots + \underbrace{(c^T A^{n-1}b + a_{n-1}c^T A^{n-2}b + \cdots + a_0 d)}_{b_0}u$$

0
Per il teorema di Cayley-Hamilton

in questo caso è scalare

Quindi gli a_i sono i coeff. del polinomio caratteristico. Da qualunque essa parta, so sempre trovare la i-u.

modello del controllore

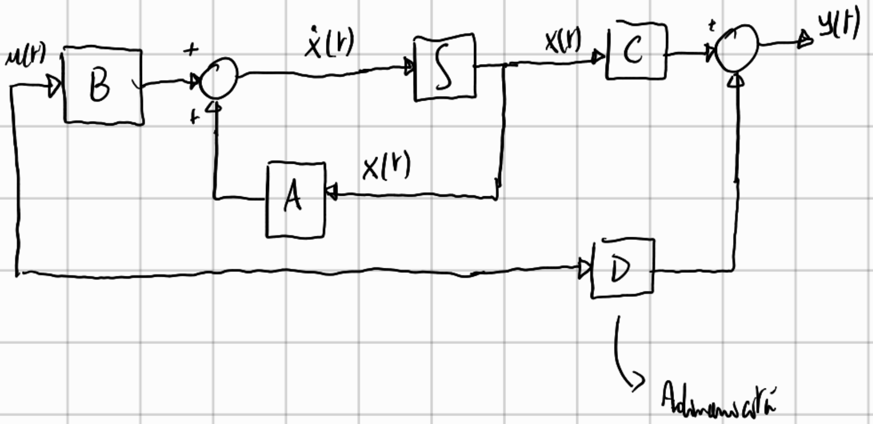
Realizzare un modello i-s-u del tipo $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \dots \\ \dots \end{cases}$

Sono capace di realizzarlo. Perché? Devo costruire un dispositivo fatto da 3 elementi base:

1. Sommare.

2. Qualcosa che tenga memoria del passato (blocco integratore)
3. Una specie di moltiplicatore: un amplificatore (matriciale).

Quindi:



Quindi se so passo dalla i-u alla i-s-u ho fatto.

Passaggio da i-u a i-s-u (sistemi SISO)

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

NSU e faccio cambio di variabili

- Innanzitutto osserviamo che la i-s-u non è unica
  - Scelta una matrice invertibile qualsiasi T, facciamo un cambiamento di base nello spazio di stato

$$x = Tz \Leftrightarrow z = T^{-1}x$$

  - Le equazioni della i-s-u diventano

$$\dot{z} = T^{-1}\dot{x} = T^{-1}(Ax + Bu) = T^{-1}Ax + T^{-1}Bu = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu$$

$$y = CTz + Du$$

variabili x sono c.l. delle variabili di stato z e viceversa.

  - Dunque le matrici della nuova rappresentazione i-s-u sono

$$\dot{z} = \hat{A}z + \hat{B}u$$
$$y = \hat{C}z + \hat{D}u$$

con

Trasformazione di similitudine ($\hat{A}$ e A hanno gli stessi autovalori) = stesso spettro

invarianti autovalori

$$\hat{A} = T^{-1}AT, \hat{B} = T^{-1}B, \hat{C} = CT, \hat{D} = D$$

DIMOSTRA

↪ Non dipende dalla rappresentaz. di stato

Ci sono varie proprietà che rimangono le stesse; il sistema è uguale

Passaggio da i-u a i-s-u (I metodo – forma canonica di osservazione)

$$\dot{x} = Ax + bu$$
$$y = c^{\mathrm{T}}x + du$$

- Integriamo n volte l'equazione differenziale i-u e lasciamo solo y al primo membro nel tempo

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_n u^{(n)}(t) + b_{n-1}u^{(n-1)}(t) + \cdots b_1\dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

devo dire non diverso perché v.reg.-doppio

A
$$y = \underset{0}{b_n}u + \int (b_{n-1}u - a_{n-1}y)d\tau_1 + \iint (b_{n-2}u - a_{n-2}y)d\tau_1 d\tau_2 + \cdots + \int \ldots \int (b_0 u - a_0 y)d\tau_1 \ldots d\tau_n$$

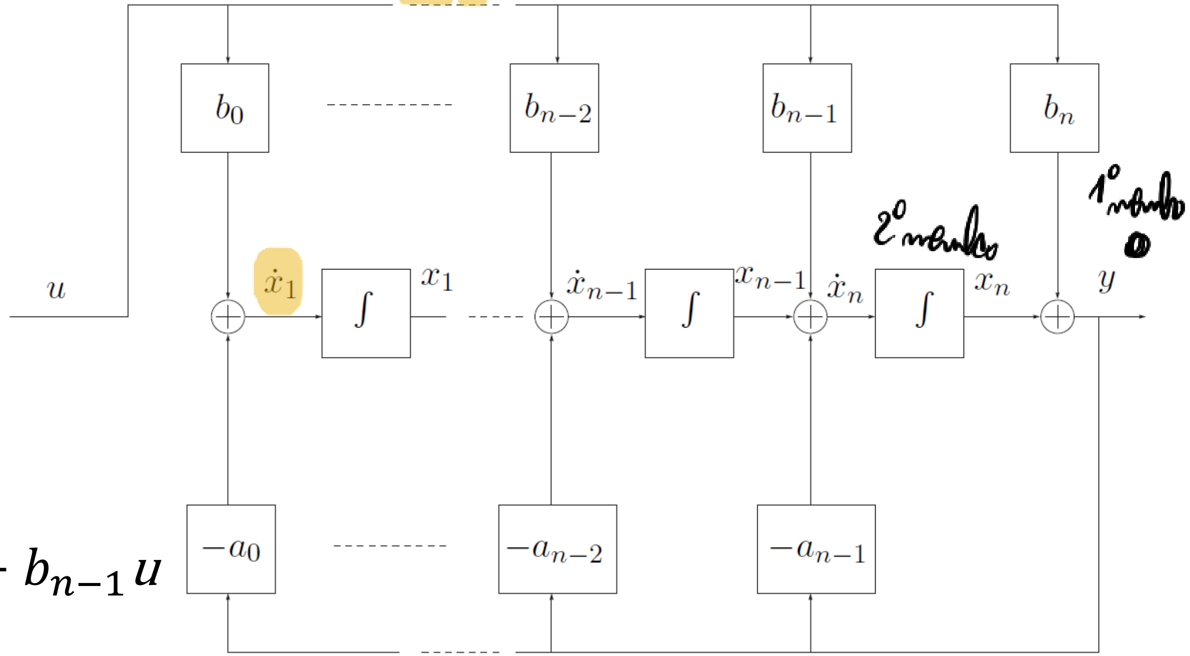
$$y = x_n + b_n u$$

$$\dot{x}_1(t) = -a_0 y + b_0 u = -a_0(x_n + b_n u) + b_0 u$$
$$= -a_0 x_n + (b_0 - a_0 b_n)u$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1 - a_1 y + b_1 u = x_1 - a_1(x_n + b_n u) + b_1 u$$
$$= x_1 - a_1 x_n + (b_1 - a_1 b_n)u$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n(t) = x_{n-1} - a_{n-1}y + b_{n-1}u = x_{n-1} - a_{n-1}(x_n + b_n u) + b_{n-1}u$$
$$= x_{n-1} - a_{n-1}x_n + (b_{n-1} - a_{n-1}b_n)u$$



(A) al passaggio ho finito. Mi servono n integratori

Gli integratori hanno in uscita la variabile di stato. NOTA: Ce ne sono infiniti di modi per gli stati. Cambia la i-s-u ma sticazzi.

$$y = x_n + b_n u$$

$C = e_n$ perció si chiama di osservaz.

D

* Hai lí giá il polinomio caratteristico.

Passaggio da i-u a i-s-u (I metodo – forma canonica di osservazione)

$$\dot{x} = Ax + bu$$
$$y = c^{\mathrm{T}}x + du$$

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_n u^{(n)}(t) + b_{n-1}u^{(n-1)}(t) + \cdots b_1\dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

- Dunque la i-s-u si può scrivere nella forma matriciale

$$\dot{x}_1(t) = -a_0 y + b_0 u = -a_0(x_n + b_n u) + b_0 u = -a_0 x_n + (b_0 - a_0 b_n)u$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1 - a_1 y + b_1 u = x_1 - a_1(x_n + b_n u) + b_1 u = x_1 - a_1 x_n + (b_1 - a_1 b_n)u$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n(t) = x_{n-1} - a_{n-1} y + b_{n-1} u = x_{n-1} - a_{n-1}(x_n + b_n u) + b_{n-1} u = x_{n-1} - a_{n-1} x_n + (b_{n-1} - a_{n-1} b_n)u$$

$$y = x_n + b_n u$$

In ogni riga al più 2 elem. ≠ 0

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_0 - a_0 b_n \\ b_1 - a_1 b_n \\ b_2 - a_2 b_n \\ \vdots \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_n \end{pmatrix}$$

$$c^T = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 1)$$

$$d = b_n$$

Matrice in forma «compagna»:

Il polinomio caratteristico è

$$p_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots a_1\lambda + a_0$$

- Passaggio da i-u a i-s-u (II metodo – forma canonica di raggiungibilità)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + bu \\ y &= c^{\mathrm{T}}x + du\end{aligned}$$

stesso sistema   ingresso

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1\,\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_n u^{(n)}(t) + b_{n-1}u^{(n-1)}(t) + \cdots b_1\dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

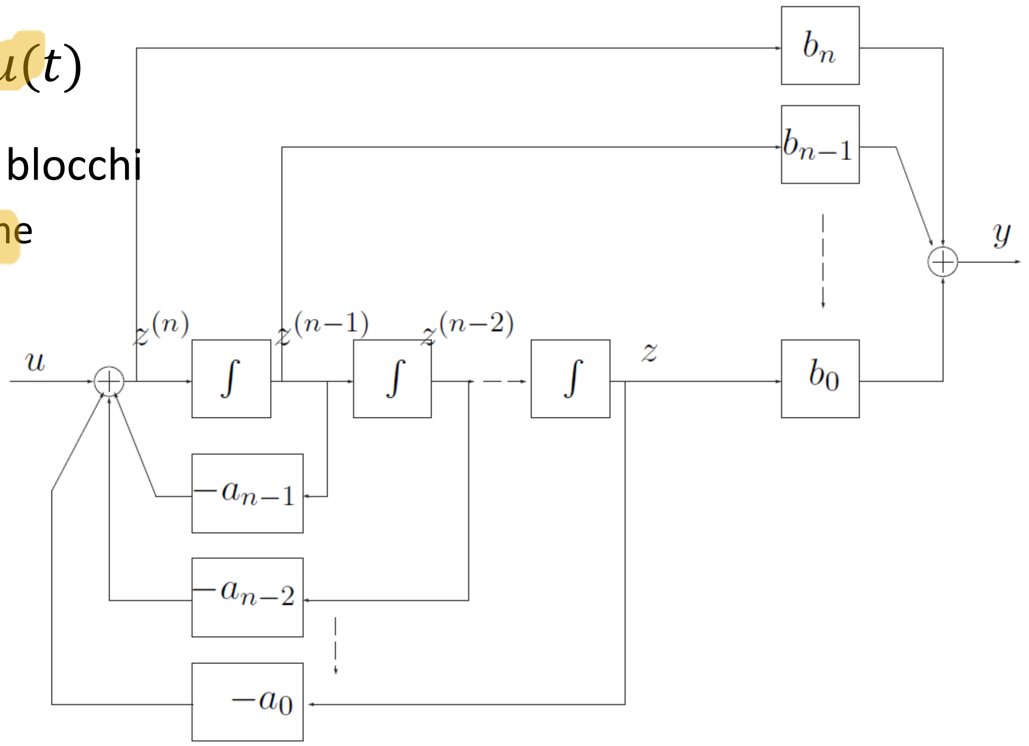
Hp:

- Se l'ingresso fosse solo $u(t)$, l'uscita sarebbe $z(t)$ soluzione di   La soluzione ora non è più y. La chiamo z

$$z^{(n)}(t) = -a_{n-1}z^{(n-1)}(t) - \cdots - a_1\,\dot{z}(t) - a_0 z(t) + u(t)$$

- Che con lo schema di lord Kelvin si realizza come nello schema a blocchi
  - L'uscita effettiva y la si ottiene per sovrapposizione degli effetti come

$$y(t) = b_n z^{(n)}(t) + b_{n-1}z^{(n-1)}(t) + \cdots b_1\dot{z}(t) + b_0 z(t)$$



Se do' $b_0 u$ in pasto, ottengo $b_0 z$. Perché il sistema é lineare.

Quindi la $y(t) = b_m z^{(m)}(t) + \dots + b_1 \dot{z}(t) + b_0 z(t)$

$\downarrow$ La derivata é lineare, perció esce lui.

Passaggio da i-u a i-s-u (II metodo – forma canonica di raggiungibilità)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + bu \\ y &= c^{\mathrm{T}}x + du\end{aligned}$$

- Lo stato è dunque costituito dalle uscite degli integratori

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$ prima a destra = 1   prima a sinistra = n

$$\dot{x}_2(t) = x_3(t)$$

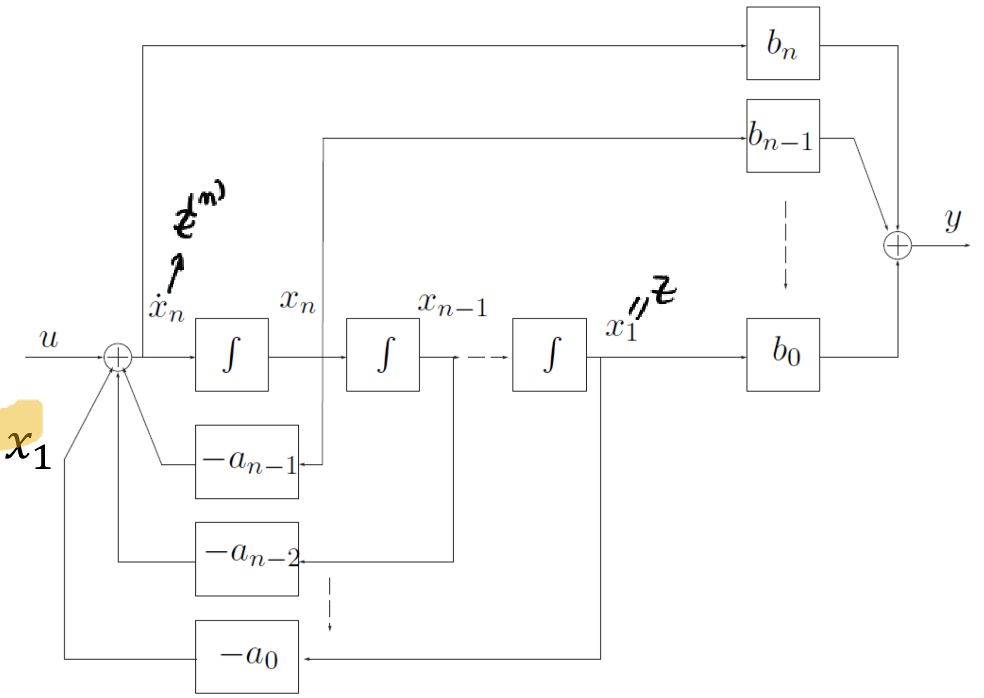
$$\vdots$$

$$\dot{x}_n(t) = u(t) - a_0x_1(t) - \cdots - a_{n-2}x_{n-1}(t) - a_{n-1}x_n(t)$$

- Mentre l'uscita vale

$$y(t) = b_n(u - a_{n-1}x_n - a_{n-2}x_{n-2} - \cdots - a_0x_1) + b_{n-1}x_n + \cdots + b_0x_1$$

$$= b_nu + (b_0 - a_ob_n)x_1 + \cdots + (b_{n-1} - a_{n-1}b_n)x_n$$



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c^T = (b_0 - a_0b_n \quad b_1 - a_1b_n \quad b_2 - a_2b_n \quad \dots \quad b_{n-1} - a_{n-1}\,b_n)$$

$$d = b_n$$

Matrice in forma «compagna»:

Il polinomio caratteristico è

$$p_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots a_1\lambda + a_0$$

Movimento di un sistema LTI

- È la soluzione del problema di Cauchy

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad x(t_0) = x_0$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

  - Sappiamo che è unica perché la funzione $f(x,u)$ è certamente Lipschitziana essendo lineare
- Dal momento che il sistema è lineare soddisfa il principio di sovrapposizione degli effetti per cui la risposta è somma di due termini
  - Evoluzione libera $x_l(t)$ (risposta per $u(t) = 0$) → ingresso nullo
  - Evoluzione forzata $x_f(t)$ (risposta per $x(t_0) = 0$) → Condiz. iniziali nulle
- Dunque
  - $x(t) = x_l(t) + x_f(t)$
- Osserviamo che in virtù della tempo invarianza (le matrici sono costanti) l'istante di tempo iniziale può essere scelto arbitrariamente, dunque d'ora in poi sceglieremo $t_0 = 0$

molteplicità algebrica = molteplicità geometrica (dim. matrice - rango di $A - \lambda I$)

Evoluzione libera nello stato

- È la soluzione del problema di Cauchy

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \qquad x(0) = x_0$$

- Nel caso scalare ($\dot{x}(t) = ax(t)$), la soluzione è ben nota

$$x(t) = e^{at}x_0$$

  - Infatti $x(0) = e^{0t}x_0 = x_0$ e $\dot{x}(t) = ae^{at}x_0 = ax(t)$

diagonalizzabile

$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ miniblocco di Jordan

- Più in generale, ma se la matrice A ha autovalori tutti distinti, utilizziamo un cambio di variabili particolare

$$z = T^{-1}x \Leftrightarrow x = Tz$$

  - dove T è la matrice degli autovettori di A, per cui è

∃ matrice invertibile che mi fa fare cambio di base z e x /

$A = T\Lambda T^{-1}$

$$A = T\Lambda T^{-1} \Leftrightarrow \Lambda = T^{-1}AT, \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

λ_i: autovalori della matrice A

- In questa nuova variabile, l'equazione di stato è

$$\dot{z}(t) = T^{-1}\underbrace{Ax(t)}_{} = T^{-1}ATz(t) = \Lambda z(t), \qquad z(0) = T^{-1}x(0) = T^{-1}x_0 = z_0$$

$\dot{z} = T^{-1}\dot{x}$

T = matrice che ha come colonne gli autovettori.

$$\begin{bmatrix}\dot{z}_1\\ \dot{z}_2\\ \vdots\\ \dot{z}_n\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & & 0\\ 0 & \lambda_2 & & \\ 0 & & \ddots & \\ \vdots & & & \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1 z_1\\ \vdots\\ \lambda_n z_n\end{pmatrix}$$

Evoluzione libera nello stato

- Essendo Λ diagonale, le equazioni sono tutte disaccoppiate

$$\dot{z}_i(t) = \lambda_i z_i(t), \qquad z_i(0) = z_{i0}$$

- Le cui soluzioni sono

$$z_i(t) = e^{\lambda_i t} z_{i_0}, \qquad i = 1, \dots, n$$ Per $t \geq 0$

- E quindi la soluzione in $z(t)$ è

$$z(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} z_{1_0} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} z_{n_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{1_0} \\ \vdots \\ z_{n_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} z_0$$

- Ricordando la serie di Taylor della funzione esponenziale: $e^{at} = 1 + at + \frac{a^2 t^2}{2!} + \cdots$

$$z(t) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n^2 \end{pmatrix} \frac{t^2}{2!} + \cdots \right] z_0$$

$$= \left[I + \Lambda t + \Lambda^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots \right] z_0 = e^{\Lambda t} z_0$$

Definizione di esponenziale matriciale

Sono uguali se Λ é diagonale.

Evoluzione libera nello stato

- Tornando nella variabile $x(t)$

$(t_1 \ \ldots \ t_m)$ la chiamo per colonne

$\begin{pmatrix} s_1^T \\ \vdots \\ s_m^T \end{pmatrix}$ le chiamo per righe

$$x(t) = Tz(t) = T\left[I + \Lambda t + \Lambda^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots\right] z_0 = T\left[I + \Lambda t + \Lambda^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots\right] T^{-1} x_0$$

$$= \left[I + T\Lambda T^{-1} t + T\Lambda^2 T^{-1} \frac{t^2}{2!} + \cdots\right] x_0 = \left[I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots\right] x_0 = e^{At} x_0$$

- Dunque l'evoluzione libera nello stato si scrive in forma compatta come

$$\boxed{x_l(t) = e^{At} x_0}$$

- La risposta in evoluzione libera dell'uscita è ovviamente

$$\boxed{y_l(t) = Ce^{At} x_0}$$

- La funzione matriciale e^{At} prende anche il nome di «funzione di transizione» nello stato
- Ci sono diversi metodi per calcolarla
  - Analisi modale
  - Trasformata di Laplace

$$X(t) = T e^{\Lambda t} T^{-1} x_0 = (t_1, \dots \; t_n) \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1^T \\ \vdots \\ s_n^T \end{pmatrix} x_0 =$$

$$= (t_1, \dots \; t_n) \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} s_1^T x_0 \\ \vdots \\ s_n^T x_0 \end{pmatrix}}_{\text{prod. scalari}} = \underbrace{(t_1, \dots, t_n)}_{\text{vettori}} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} s_1^T x_0 \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} s_n^T x_0 \end{pmatrix} =$$

[NOTA: $\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} a_1 + t_{12} a_2 \\ t_{21} a_1 + t_{22} a_2 \end{pmatrix} = \left(\underbrace{t_1 a_1 + t_2 a_2}_{\text{COLONNE}} \right)$]

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\overset{\text{VETTORE K-esimo}}{t_k} s_k^T x_0 e^{\lambda_k t}}_{\text{MODI DI EVOLUZIONE}} = \left(t_1 s_1^T x_0 e^{\lambda_1 t} + \dots + t_n s_n^T x_0 e^{\lambda_n t} \right) \in \mathbb{R}^n \quad \text{vettore colonna}$$

MODI DI EVOLUZIONE. Non abbiamo espress. qualsiasi, solo funz. esponenziali.

Comb. lineari di f. esp.

- Ciascun element. di vettore è una C.L. di esponen.

COME LE VEDO?

1) $t_k s_k^T = Z_k$ Matrice componente

2) $t_k s_k^T x_0 = r_k(x_0)$ Vettore dei residui dei modi di evoluzione [VETTORE COLONNA]

$\hookrightarrow$ |+|+|...+|

Quindi: j-esima componente, scriviamola.

$$x_j(t) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} r_{kj}(x_0) e^{\lambda_k t}} \in \mathbb{R}$$

NOTA: in generale, $\in \mathbb{C}$, perché posso avere $\lambda \in \mathbb{C}$. Ma se $\lambda \in \mathbb{C}$ c'è anche complesso coniugato.

Quindi:

$$x_j(t) = \sum_{k=1}^{\overset{\text{num. di radici reali}}{l}} r_{kj}(x_0) e^{\lambda_k t} + \sum_{\substack{k=l+1 \\ P=2}}^{n} \underbrace{r_{kj}(x_0) e^{\lambda_k t} + \overset{\text{coniugato}}{r_{kj}^*}(x_0) e^{\lambda_k^* t}}$$

Passo 2, cioè $j = j+2$

$\to$ anche gli autovettori ereditano la coniugatezza: t_k diventa coniugato $\Rightarrow$ diventa coniugato tutto r_{kj}

Devo dimostrare che quella somma é reale.

Per $K \geq l+1$: $\lambda_k = \alpha_K + J\omega_K$ $\qquad r_{K1}(x_0) = \rho_{K1}(x_0)\, e^{J\varphi_1(x_0)}$

FORMA ALGEBRICA $\qquad$ FORMA ESPONENZ.

Quindi: argomento della sommatoria =

$$P_{K1}(x_0)\, e^{J\varphi_{K1}(x_0)}\, e^{(\alpha_K + J\omega_k)t} + P_{K1}(x_0)\, e^{-J\varphi_{K1}(x_0)}\, e^{(\alpha_K - J\omega_k)t} =$$

$$= P_{K1}(x_0)\, e^{\alpha_K t}\left[e^{J(\omega_K t + \varphi_{K1}(x_0))} + e^{-J(\omega_K t + \varphi_{K1}(x_0))}\right]\cdot\frac{2}{2}$$

cos

Quindi:

$$x_1(t) = \underbrace{\sum_{K=1}^{l} r_{K1}(x_0)\, e^{\lambda_K t}}_{\text{Modi di ev. aperiodici}} + \underbrace{\sum_{\substack{K=l+1\\ p.2}}^{n} 2P_{K1}(x_0)\, e^{\alpha_K t}\cos(\omega_K t + \varphi_{K1}(x_0))}_{\text{Modi di ev. pseudoperiodici}}$$

Avanzo a 2 a 2 con le coniugate

SNAP BACK:

$$x(t) = T e^{\Lambda t} T^{-1} x_0 = T\left(I + \Lambda t + \frac{\Lambda^2}{2!}t^2 + \dots\right)T^{-1}x_0 = \left[TIT^{-1} + T\Lambda T^{-1}t + \overbrace{T\Lambda\Lambda T^{-1}}^{T\Lambda T^{-1}T\Lambda T^{-1}}\frac{t^2}{2!} + \dots\right]x_0$$

$$= \left[I + At + A^2 t + \dots\right]x_0 = \underbrace{e^{At}}_{\text{FUNZIONE DI TRANSIZIONE}} x_0$$

VETTORE DI F. DEL TEMPO, che é una comb. lineare dei modi di evoluzione

Quindi, il modo per calcolare e^{At} si trova con la comb. lineare vista prima.

NOTA: é sempre possibile trovare una x_0 in modo da far comparire TUTTI i modi di ev. del sistema $(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t})$. RIESCO A ECCITARE TUTTE LE DINAMICHE DEL SISTEMA

Cioé i modi di evoluzione

$y(t) = C e^{At} x_0$ $\quad$ Può esistere una coppia C, A per cui quello detto prima non succede.

Se ciò accade, si dice che il SISTEMA NON É COMPLETAMENTE OSSERVABILE

Analisi modale

- Questo metodo è di semplice applicazione nel caso in cui la matrice A è diagonalizzabile
  - Una matrice quadrata A di dimensioni n è diagonalizzabile nel campo complesso $\mathbb{C}$ se e solo se la molteplicità algebrica m_a di ciascun autovalore λ di A coincide con la sua molteplicità geometrica m_g
    - $m_a(\lambda)$ è la molteplicità di λ come radice del polinomio caratteristico di A: $\det(\lambda \mathrm{I} - A)$
    - $m_g(\lambda)$ è la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore λ, cioè lo spazio delle soluzioni del sistema lineare $(A - \lambda I\,)x = 0$, e quindi, per il teorema di Rouché-Capelli, è pari a $n - \mathrm{rk}(A - \lambda I)$
- Casi particolari
  - Se la matrice A ha autovalori distinti allora è diagonalizzabile
    - Ovvio perché in tal caso è chiaramente $m_a(\lambda) = m_g(\lambda) = 1, \forall \lambda$
  - Se la matrice A è simmetrica allora è diagonalizzabile (teorema spettrale reale)
    - $\exists T$ ortogonale (cioè $TT^T = T^T T = I$) t.c. $A = T \Lambda T^T$
- Supponiamo A diagonalizzabile, allora $\exists T$ invertibile tale che $A = T \Lambda T^{-1}$, dove
  - Λ è la matrice diagonale degli autovalori
  - T è la matrice le cui colonne $t_i, i = 1, \ldots, n$ sono gli autovettori associati agli autovalori $\lambda_i, i = 1, \ldots, n$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} t_1 & \cdots & t_n \end{pmatrix} \qquad T^{-1} = S = \begin{pmatrix} s_1^T \\ \vdots \\ s_n^T \end{pmatrix}$$

Attenzione: autovalori e autovettori, per quanto distinti, possono essere complessi!

Analisi modale

Matrici componenti

- Dunque l'evoluzione libera è una **combinazione lineare di modi di evoluzione**

$$x_l(t) = e^{At}x_0 = \sum_{k=1}^{n} e^{\lambda_k t} Z_k\, x_0 = \sum_{k=1}^{n} t_k \mu_k(x_0) e^{\lambda_k t} = \begin{pmatrix} \sum t_{k_1}\mu_k(x_0)e^{\lambda_k t} \\ \vdots \\ \sum t_{k_n}\mu_k(x_0)e^{\lambda_k t} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

dove $Z_k = t_k s_k^T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e $\mu_k(x_0) = s_k^T x_0 \in \mathbb{C}$

Modi di evoluzione

- Attenzione!
  - Il modo di evoluzione $\mu_k(x_0)e_k^{\lambda_k t}$ è in generale complesso, mente lo stato è un vettore di $\mathbb{R}^n$, come è possibile?
- Basta ricordare che gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico (a coefficienti reali) per cui queste sono reali o a coppie complesse e coniugate, e questo vale anche per gli autovettori t_k
  - Assumiamo che ci siano r autovalori reali: $\lambda_1, \dots, \lambda_r$
  - Ci sono quindi $n-r$ autovalori complessi: $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$
    - Questi sono necessariamente in numero pari perché a coppie di complessi e coniugati, riorganizziamoli:

$$\{\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_r}_{\text{reali}}, \underbrace{\lambda_{r+1}, \lambda_{r+1}^*, \lambda_{r+3}, \lambda_{r+3}^*, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_{n-1}^*}_{\text{coppie complesse e coniugate}}\}$$

Università degli Studi della Campania Luigi Vanvitelli
Dipartimento di Ingegneria

Analisi modale

- Riscriviamo l'evoluzione libera

$$\{\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_r}_{\text{reali}}, \underbrace{\lambda_{r+1}, \lambda_{r+1}^*, \lambda_{r+3}, \lambda_{r+3}^*, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_{n-1}^*}_{\text{coppie complesse e coniugate}}\}$$

$$x_l(t) = e^{At}x_0 = \sum_{k=1}^{r} Z_k x_0 e^{\lambda_k t} + \sum_{\substack{k=r+1 \\ (\text{passo } 2)}}^{n-1} \left(Z_k e^{\lambda_k t} + Z_k^* e^{\lambda_k^* t}\right) x_0$$

- Posto
  - $\lambda_k = \alpha_k + j\omega_k, \quad k = r+1, \dots, n-1 \text{ (passo 2)}$
  - $Z_k = M_k + jN_k$

$$x_l(t) = \sum_{k=1}^{r} Z_k x_0 e^{\lambda_k t} + \sum_{\substack{k=r+1 \\ (\text{passo } 2)}}^{n-1} 2e^{\alpha_k t}\left(M_k \cos \omega_k t - N_k \sin \omega_k t\right) x_0$$

- E posto
  - r_{k_i} la i–ma componente del vettore $Z_k x_0$
  - $q_{k_i} = c_{k_i} \cos \varphi_{k_i}$ la i–ma componente del vettore $M_k x_0$
  - $l_{k_i} = c_{k_i} \sin \varphi_{k_i}$ la i–ma componente del vettore $N_k x_0$

$$\boxed{x_{l_i}(t) = \sum_{k=1}^{r} r_{k_i} e^{\lambda_k t} + \sum_{\substack{k=r+1 \\ (\text{passo } 2)}}^{n-1} 2c_{k_i} e^{\alpha_k t} \cos(\omega_k t + \varphi_{k_i})}$$