Capitolo 6 – Schemi a blocchi

Rappresentazione grafica della relazione i-u di un sistema dinamico

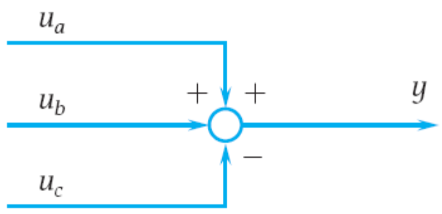
- Se nel blocco del sistema astratto orientato viene indicata la fdt $G(s)$ si assume che di quel blocco si conosca solo la rappresentazione i-u e non la sua struttura interna → Stiamo assumendo che questa descrizione rappresenta un sistema completamente ragg. e osservabile.

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

  - Nella $G(s)$ del singolo blocco non ci sono cancellazioni
    - Se ci fossero non sapremmo nulla sulla parte nascosta del sistema
    - Ogni singolo blocco è assunto completamente raggiungibile e osservabile
- Interconnettendo blocchi di questo tipo (vedremo come) possono nascere parti nascoste
  - Una i-s-u che conservi la struttura interna del sistema complesso DEVE essere determinata «realizzando» (cioè determinando la i-s-u) i singoli blocchi (con una qualsiasi forma canonica) e interconnettendo le i-s-u prima ottenute
- Assumeremo tutte le variabili di ingresso e uscita scalari
  - Nel caso di sistemi MIMO occorrerà un blocco per ciascun elemento della matrice di trasferimento

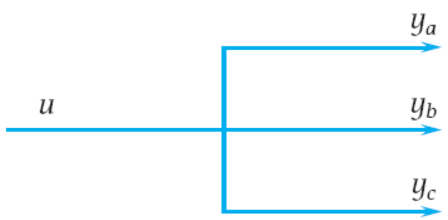
Componenti di uno schema a blocchi

- Nodo sommatore



$$y = u_a + u_b - u_c$$

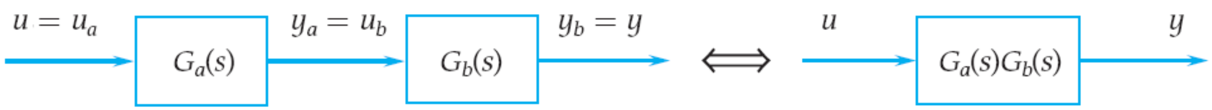
- Punto di diramazione



$$y_a = y_b = y_c = u$$

Regole di elaborazione

- Collegamento in serie



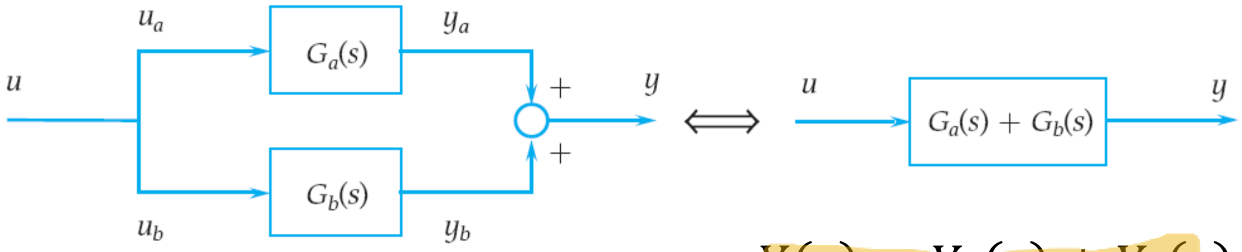
$$Y_a(s) = G_a(s)U_a(s)$$
$$Y_b(s) = G_b(s)U_b(s)$$

$$U(s) = U_a(s)$$
$$U_b(s) = Y_a(s)$$
$$Y(s) = Y_b(s)$$

$$Y(s) = Y_b(s) = G_b(s)U_b(s) = G_b(s)Y_a(s)$$
$$= G_b(s)G_a(s)U_a(s) = G_b(s)G_a(s)U(s)$$

$$\boxed{G(s) = G_b(s)G_a(s)}$$

- Collegamento in parallelo



$$Y_a(s) = G_a(s)U_a(s)$$
$$Y_b(s) = G_b(s)U_b(s)$$

$$U_a(s) = U(s)$$
$$U_b(s) = U(s)$$
$$Y(s) = Y_a(s) + Y_b(s)$$

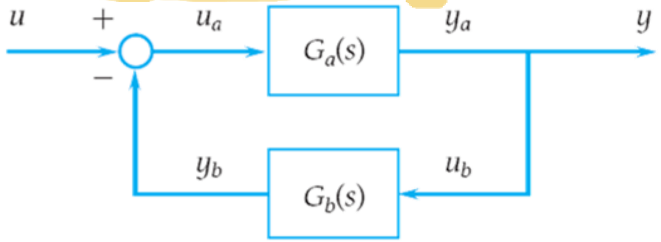
$$Y(s) = Y_a(s) + Y_b(s)$$
$$= G_a(s)U_a(s) + G_b(s)U_b(s)$$
$$= G_a(s)U(s) + G_b(s)U(s)$$
$$= \big(G_a(s) + G_b(s)\big)U(s)$$

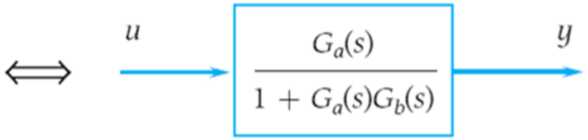
$$\boxed{G(s) = G_a(s) + G_b(s)}$$

Regole di elaborazione

Step: definire tutti gli ingressi e le uscite, e poi la $Y(s)$

- Collegamento in retroazione negativa





$$Y_a(s) = G_a(s)U_a(s)$$
$$Y_b(s) = G_b(s)U_b(s)$$

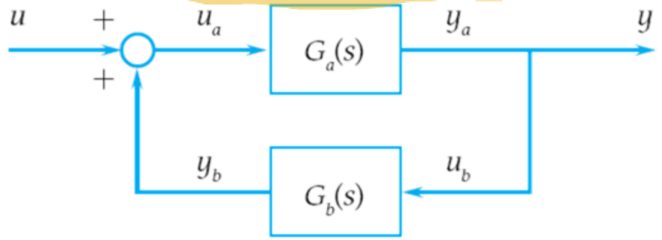
$$Y(s) = Y_a(s)$$
$$U_b(s) = Y_a(s)$$
$$U_a(s) = U(s) - Y_b(s)$$

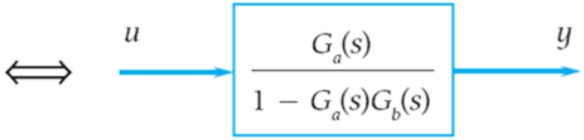
$$Y(s) = G_a(s)U_a(s) = G_a(s)\big(U(s) - Y_b(s)\big)$$
$$= G_a(s)U(s) - G_a(s)G_b(s)Y(s)$$
$$\Downarrow$$
$$Y(s)[1 + G_a(s)G_b(s)] = G_a(s)U(s)$$

$$G_b(s)U_b(s) = G_b(s)Y_a(s) = $$
$$= G_b(s)Y(s)$$

$$\boxed{G(s) = \frac{G_a(s)}{1 + G_a(s)G_b(s)}}$$

- Collegamento in retroazione positiva





$$Y_a(s) = G_a(s)U_a(s)$$
$$Y_b(s) = G_b(s)U_b(s)$$

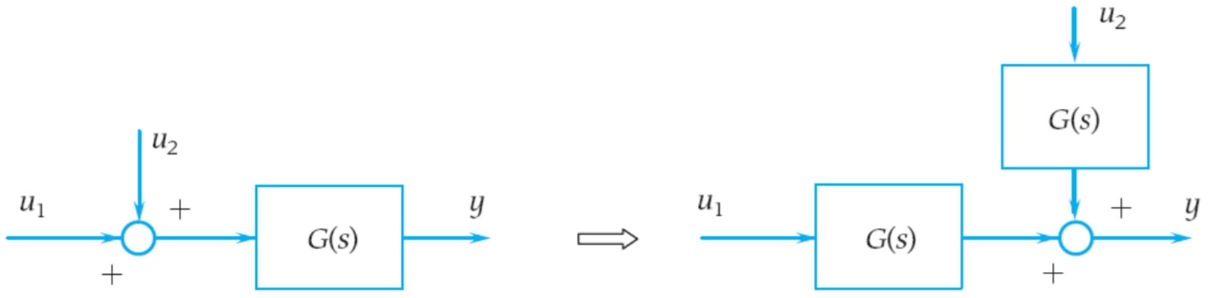
$$Y(s) = Y_a(s)$$
$$U_b(s) = Y_a(s)$$
$$U_a(s) = U(s) + Y_b(s)$$

$$Y(s) = G_a(s)U_a(s) = G_a(s)\big(U(s) + Y_b(s)\big)$$
$$= G_a(s)U(s) + G_a(s)G_b(s)Y(s)$$
$$\Downarrow$$
$$Y(s)[1 - G_a(s)G_b(s)] = G_a(s)U(s)$$

$$\boxed{G(s) = \frac{G_a(s)}{1 - G_a(s)G_b(s)}}$$

Riduzione di schemi a blocchi

- Spostamento di una variabile (o di un sommatore) a valle di un blocco

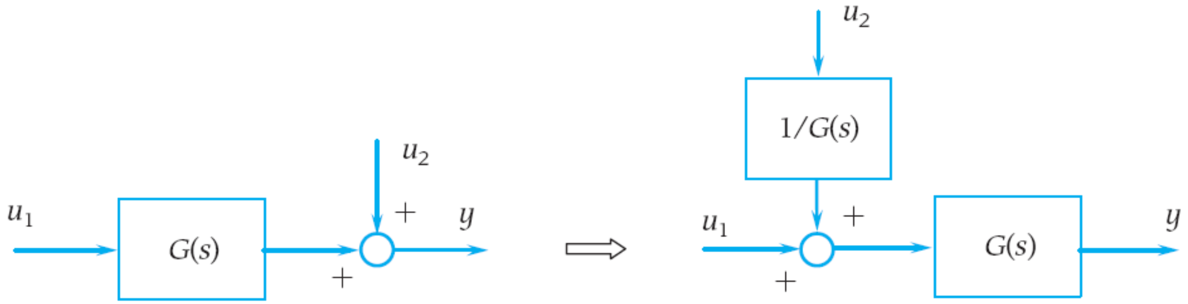


Strutturalmente il sistema cambia con manipolaz. del genere. Le proprietà legate all'I-U non cambiano, ma raggiung. può cambiare

$\longrightarrow$ ES: $G(s)=\frac{1}{s+1}$, con x_1 var. di stato (vedi la forma di ragg.)

- Spostamento di una variabile (o di un sommatore) a monte di un blocco

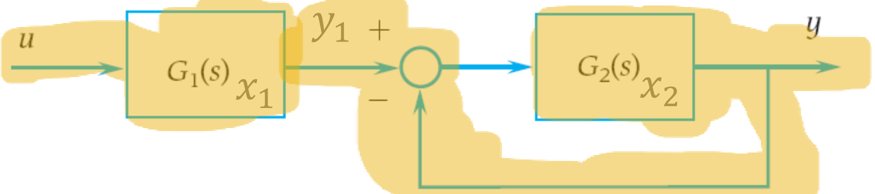
Qui ho 2 variabili di stato, ma sistemi del 1° ordine: ho cancellazioni perché $G(s)$ ha grado 1 al denominatore.



Cancellazioni nei sistemi interconnessi

Sistema di ordine 2

- Esempio



$$G_1(s) = \frac{s+1}{s+2}, \qquad G_2(s) = \frac{1}{s}$$

$A=(-a_0)$ $b=(1)$ ↑b ↓a

$c^T=(b_0-a_0b_n)$ $d=b_n$

Noi sappiamo ora all'interno come è fatta la struttura interna

$$G(s) = G_1(s)\frac{G_2(s)}{1+G_2(s)} = \frac{s+1}{s+2}\,\frac{1/s}{1+1/s} = \frac{s+1}{s+2}\,\frac{1}{s+1} = \frac{1}{s+2}$$

↳ Moltiplico e divido per denominatore di $G_2(s)$

- C'è una cancellazione tra uno zero e un polo
  - L'ordine della funzione di trasferimento (grado del denominatore = 1) è inferiore all'ordine del sistema (2)
  - È nata una parte nascosta dall'interconnessione → Uso 2 variabili di stato per descrivere il sistema
  - Per capire che tipo di parte nascosta (non raggiungibile e/o non osservabile) occorre determinare una i-s-u del sistema realizzando PRIMA i singoli blocchi (determinare ISU)

$$G_1(s): \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + u(t) \\ y_1(t) = -x_1(t) + u(t) \end{array}$$

$$G_2(s): \begin{array}{l} \dot{x}_2(t) = y_1(t) - y(t)^{*} \\ y(t) = x_2(t) \end{array}$$

Realizzo singoli blocchi

ingresso

$$\dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + u(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t) - x_1(t) + u(t)$$
$$y(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x(t)$$

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} b & Ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

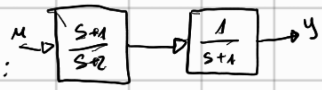
Sistema NON raggiungibile!

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} c^T \\ c^T A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Sistema osservabile!

* Lo scrivo guardando lo schema a blocchi

Devo combinare tutto e rimuovere $y_1(t)$

Nota: 

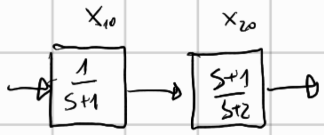
Cancellaz. di uno zero a monte di un polo. Non riesco mai a eccitare $(s+1)$.

Ragg. si vede dalla risposta forzata

Ma se ho $x_0 \neq 0$ nell' $\frac{1}{s+1}$, riesco a vedere e^{-t}.

Osservab. si guarda evoluz. libera $\Rightarrow$ Riesco a vedere in uscita tutti i modi del sistema?

Ragg. = u riesce ad agire su tutte le parti del sistema?

$*_2$ 

↳ genera $e^{-t}x_{10} \rightarrow \frac{x_{10}}{s+1} \rightarrow$ che dà in uscita $\frac{x_{10}}{s+2}$

Comunque scelgo x_{10} il modo e^{-t} non può comparire. (Se ho tutti i modi non posso dire che ho ragg. oppure osservabilità)

$e^{At}b$, se ho tutti i modi è raggiungibile? Se $c^T e^{At} x_0$ ha tutti i modi ho la ragg.

NOTA: $e^{At}b$ ha tutto. Se $c^T e^{At} b$ ha tutto, ho ragg. e oss.

↑ Corrisponde sia a ev. libera che forzata.

Ma se non le ha tutte, non posso dire nulla

↳ Perché con l'impulso non eccito, ma magari con altro sì.

MIA INTERPRETAZIONE

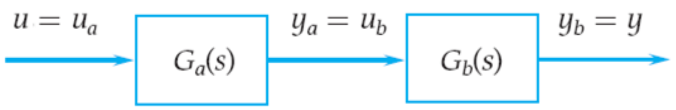
Ragg: riesco a sollecitare con u tutti i modi del sistema? (ev. forzata)

OSS: riesco a vedere in uscita tutti i modi del sistema? (ev. libera)

perché oss. non si valuta anche su evoluz. forzata?

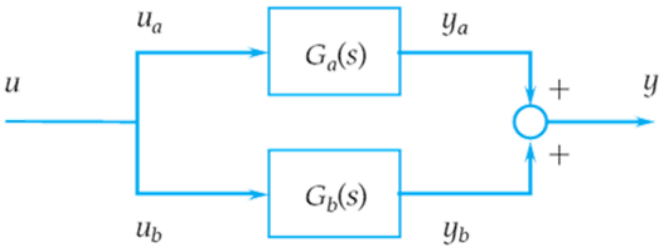
Cancellazioni nei sistemi interconnessi

- Sistemi in serie



  - Quando uno zero di $G_a(s)$ cancella un polo di $G_b(s)$ (come nell'esempio), il sistema serie ha una parte non raggiungibile ma osservabile
    - L'ingresso u non può agire sulla variabile di stato di $G_b(s)$ relativa al polo cancellato
  - Quando uno zero di $G_b(s)$ cancella un polo di $G_a(s)$, il sistema serie ha una parte non osservabile ma raggiungibile
    - Il modo di evoluzione relativo alla variabile di stato di $G_a(s)$ corrispondente al polo cancellato non influenza l'uscita

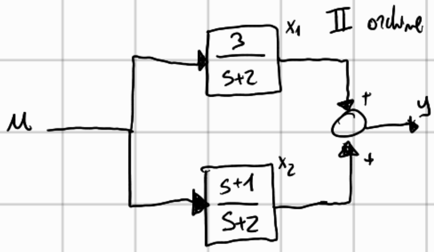
- Sistemi in parallelo



  - Quando $G_a(s)$ e $G_b(s)$ hanno poli in comune, il sistema parallelo ha una parte non raggiungibile e non osservabile

Esempio

Nel caso di sistema ragg. e non oss. posso avere comunque tutti i modi in out?



$$G(s) = \frac{3}{s+2} + \frac{s+1}{s+2} = \frac{3+s+1}{s+2} = \frac{s+4}{s+2} \quad \text{I° ordine}$$

$\dot{x}_1 = -2x_1 + u$

$y_1 = -x_1 + u$

$\dot{x}_2 = -2x_2 + u$

$y_2 = 3x_2$

$$y = y_1 + y_2 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + u \\ y = -x_1 + 3x_2 + u \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$c^T = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix} \quad d = 1$

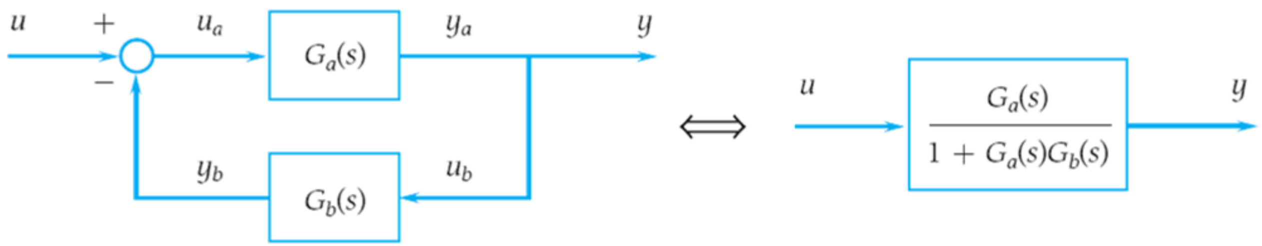
$R = \begin{pmatrix} b & Ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ Non completamente raggiungibile

$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} c^T \\ c^T A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$ Non completamente osservabile

Ho avuto una "cancellazione" perché da 1 polo in -2 ciascuno ho chiuso con un polo semplice in -2 (ho perso la molteplicità)

Cancellazioni nei sistemi interconnessi

- Sistemi in retroazione



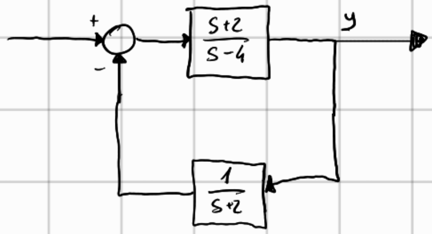
- Quando uno zero di $G_a(s)$ cancella un polo di $G_b(s)$, il sistema in retroazione ha una parte non raggiungibile e non osservabile
  - Infatti, il denominatore di $G(s)$ scende di grado
- Se invece uno zero di $G_b(s)$ cancella un polo di $G_a(s)$, il sistema in retroazione non ha parti non raggiungibili o non osservabili
  - Infatti, il denominatore di $G(s)$ non scende di grado
- Se $G_a(s)$ o $G_b(s)$ dovessero essere il risultato di altre interconnessioni che generano parti nascoste, queste rimangono tali anche a valle della retroazione

Se $G(a)$ ha parte non ragg, rimane tale anche nel sistema complessivo

Esempio

ES.

II° ordine



$$G(s) = \frac{\frac{s+2}{s-4}}{1+\frac{\cancel{s+2}}{s-4}\,\frac{1}{\cancel{s+2}}} = \frac{s+2}{s-4+1} = \frac{s+2}{s-3} \quad \text{I ordine}$$

$$\dot{x}_1 = 4x_1 + \underbrace{(u - y_2)}_{\to u_1}$$

$$y = 6x_1 + (u - y_2) \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{x}_1 = 4x_1 - x_2 + u \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\dot{x}_2 = -2x_2 + \underbrace{y}_{\to u_2} \qquad \dot{x}_2 = -2x_2 + 6x_1 + u - x_2$$

$$y_2 = x_2 \qquad y = 6x_1 + u - x_2 \qquad c^T = \begin{pmatrix} 6 & -1 \end{pmatrix} \qquad d = 1$$

$$R = (b \quad Ab) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad rk = 1$$

Né compl. ragg. né compl. osservabile

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} c^T \\ c^T A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 18 & -3 \end{pmatrix} \quad rk = 1$$

Effetti delle interconnessioni sui poli del sistema

- I poli del sistema serie sono l'unione dei poli dei singoli sistemi **meno quelli eventualmente cancellati**

$$G(s) = G_a(s)G_b(s) = \frac{N_a(s)N_b(s)}{D_a(s)D_b(s)}$$

- I poli del sistema parallelo sono l'unione dei poli dei singoli sistemi

$$\frac{s}{s+1} + \frac{1}{s+1} \, ?$$

$$G(s) = G_a(s) + G_b(s) = \frac{N_a(s)D_b(s) + N_b(s)D_a(s)}{D_a(s)D_b(s)}$$

  - Eventuali cancellazioni possono avvenire solo di poli in comune a $G_a(s)$ e $G_b(s)$, ma questi non possono scomparire, cioè rimangono sempre poli del sistema parallelo
    - Ad es., se c'è un solo polo p in comune, allora $\exists D_a'(s)$ e $D_b'(s)$ coprimi t.c. $D_a(s) = (s-p)D_a'(s), D_b(s) = (s-p)D_b'(s)$

$D'_a(s)$ e $D'(b)$ sono coprimi

$$G(s) = \frac{N_a(s)}{(s-p)D_a'(s)} + \frac{N_b(s)}{(s-p)D_b'(s)} = \frac{N_a(s)D'_b(s) + N_b(s)D'_a(s)}{(s-p)D'_a(s)D'_b(s)}$$

grado $1+m_a$ $\quad 1+m_b$

$1+m_a+m_b$, non $2+m_a+m_b$

- Il sistema in retroazione ha poli diversi da quelli dei singoli sistemi interconnessi
  - La retroazione (positiva o negativa) sposta i poli dei sistemi interconnessi

Le radici di questo denominatore sono diverse da quelle di $D_a(s)$ e di $D_b(s)$

$$G(s) = \frac{G_a(s)}{1 \pm G_a(s)G_b(s)} = \frac{N_a(s)/D_a(s)}{1 \pm N_a(s)/D_a(s) \cdot N_b(s)/D_b(s)} = \frac{N_a(s)D_b(s)}{D_a(s)D_b(s) \pm N_a(s)N_b(s)}$$

  - Gli zeri di $G(s)$ sono gli zeri di $G_a(s)$ e il poli di $G_b(s)$

$$1 + \frac{N_A(s)\,N_b(s)}{D_A(s)\,D_b(s)} \longrightarrow \quad D_a(s)\,D_b(s) + N_A(s)\,N_b(s)$$

Stabilità dei sistemi interconnessi

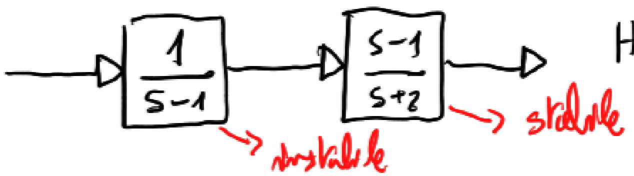
- Sistemi in serie

$$G(s) = G_a(s)G_b(s) = \frac{N_a(s)N_b(s)}{D_a(s)D_b(s)}$$

→ Si conserva stabilità senza cancellazioni

- Se non si verificano cancellazioni (il sistema rimane completamente raggiungibile e osservabile), siccome i poli di $G(s)$ sono l'unione dei poli di $G_a(s)$ e di $G_b(s)$, allora
  - il sistema serie è asintoticamente stabile se e solo se entrambi i sistemi connessi in serie lo sono
- Se ci sono fattori comuni tra i numeratori e i denominatori allora la proprietà di asintotica stabilità si perde solo se ci sono cancellazioni tra poli e zeri a parte reale positiva («**cancellazioni critiche**»). Infatti: * (what about parte reale nulla?)
  - Se si cancellano poli stabili, nella $G(s)$ rimarranno altri poli ancora stabili se i due sottosistemi sono asintoticamente stabili
  - Se si cancellano poli instabili, è vero che questi non compaiono in $G(s)$, ma nel sistema ci sono ancora quelle dinamiche instabili anche se non controllabili o non osservabili
- La stabilità BIBO di entrambi i sistemi componenti, invece, implica la stabilità BIBO del sistema serie, ma non è vero il viceversa
  - Se avviene la cancellazione di un polo instabile, il sistema serie risulta stabile BIBO se non ci sono altri poli instabili

* Posso avere stabilità BIBO anche se prima non era così. Nascondo instabilità.



Ho perso osservab.

Ma il sistema complessivo è stabile BIBO, ma ha comunque un modo divergente che diverge.

Esempio

Qualunque input metto riesco a sollecitare poli:

Stabilità dei sistemi interconnessi

- Sistemi in parallelo

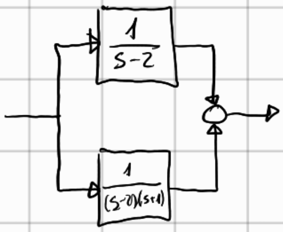
Esempio

$$G(s) = G_a(s) + G_b(s) = \frac{N_a(s)D_b(s) + N_b(s)D_a(s)}{D_a(s)D_b(s)}$$

- Se non si verificano cancellazioni (il sistema rimane completamente raggiungibile e osservabile), siccome i poli di $G(s)$ sono l'unione dei poli di $G_a(s)$ e di $G_b(s)$, allora
  - il sistema parallelo è asintoticamente stabile se e solo se entrambi i sistemi connessi in parallelo lo sono
- Se $D_a(s)$ e $D_b(s)$ hanno fattori comuni nascono parti nascoste (si verificano cancellazioni nella $G(s)$) ma non possono scomparire poli Al più tolgo molteplicità → quindi è AS?
  - Se si cancellano poli stabili, la $G(s)$ conterrà poli ancora stabili se i due sottosistemi sono asintoticamente stabili
  - Se si cancellano poli instabili, come visto, questi rimangono comunque nel sistema parallelo (con molteplicità almeno unitaria), che quindi continua a essere instabile Non riesco a stabilizzarlo neanche esternamente
- La stabilità BIBO di entrambi i sistemi componenti è equivalente alla stabilità BIBO del sistema parallelo
  - $G_a(s)$ e $G_b(s)$ stabili BIBO $\Rightarrow$ $G(s)$ stabile BIBO: ovvio perché i poli di $G(s)$ sono l'unione dei poli $G_a(s)$ e $G_b(s)$ a meno di cancellazioni, che però possono essere solo NON critiche (nel semipiano sinistro)
  - $G(s)$ stabile BIBO $\Rightarrow$ $G_a(s)$ e $G_b(s)$ stabili BIBO: se $G_a(s)$ e $G_b(s)$ non hanno poli in comune è ovvio perché i poli si $G(s)$ sono l'unione dei poli $G_a(s)$ e $G_b(s)$; se c'è un polo in comune e questo è stabile è ancora ovvio perché la cancellazione è non critica; se ci fosse un polo in comune $p > 0$ allora questo rimane ma con molteplicità unitaria e quindi $G(s)$ non sarebbe stabile BIBO

NOTA: in queste slide c'è un errore sulla stabilità BIBO di sistemi in parallelo. L'errore è corretto in slide più recenti.

ES.



$$\frac{1}{s-2} + \frac{1}{(s-2)(s+1)} = \frac{s+1+1}{(s-2)(s+1)} = \frac{s+2}{(s-2)(s+1)}$$

Ancora instabile

Stabilità dei sistemi interconnessi

- Sistemi in retroazione

$$G(s) = \frac{G_a(s)}{1 + G_a(s)G_b(s)} = \frac{N_a(s)D_b(s)}{D_a(s)D_b(s) + N_a(s)N_b(s)}$$

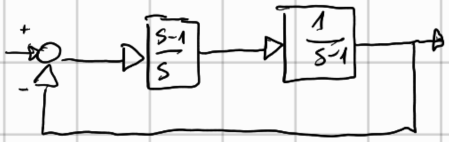
  - La stabilità dei sistema in retroazione non ha una relazione diretta con la stabilità dei singoli sottosistemi
    - Può verificarsi che il sistema in retroazione sia instabile anche se i singoli sottosistemi sono stabili
    - Ma può verificarsi anche che il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile pur in presenza di dinamiche instabili nei singoli sottosistemi
  - L'effetto della retroazione sulla stabilità può essere, dunque, sia positivo (stabilizzante) quanto negativo (destabilizzante)
  - Lo studio e la sintesi dei sistemi in retroazione sarà argomento della seconda parte del corso e verterà sullo studio dell'equazione caratteristica

$$\boxed{1 + G_a(s)G_b(s) = 0}$$

Esempio

  - Se ci sono cancellazioni tra zeri di $G_a(s)$ e poli di $G_b(s)$ allora nascono delle parti nascoste e se tali cancellazioni riguardano poli non asintoticamente stabili, il sistema in retroazione non è asintoticamente stabile

- Se da uno schema a blocchi se ne deriva uno equivalente (spostamento di sommatori o segnali) con relazioni i-u (usando appunto le fdt) non è possibile dedurre la proprietà di stabilità del sistema originario dal sistema equivalente che ha una struttura interna diversa



$$G(s) = \frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{1}{s}} = \frac{1}{s+1}$$

Stabile BIBO

INSTABILE BIBO

$\dot{x}_1 = u - y$

$u_1 = -x_1 + u - y$

$\dot{x}_2 = x_2 + u_1$

$y = x_2$

$\dot{x}_1 = -x_2 + u$

$\dot{x}_2 = \cancel{x_2} - x_1 + u - \cancel{x_2}$

$y = x_2$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \rightarrow \lambda^2 - 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

Uno dei 2 autovalori si è perso.

Non internamente stabile