Capitolo 3 – Sistemi lineari e stazionari a tempo continuo

- Analisi modale
  - Classificazione dei modi di evoluzione
- Parametri caratteristici dei modi di evoluzione
  - Costante di tempo
  - Pulsazione naturale e smorzamento
- Movimento
  - La risposta dei sistemi LTI
    - Movimento forzato
    - La risposta all'impulso
    - Risposta ad ingressi costanti ed equilibrio

$$x_{l_i}(t) = \sum_{k=1}^{r} r_{k_i} e^{\lambda_k t} + \sum_{\substack{k=r+1 \\ (\text{passo } 2)}}^{n-1} 2\rho_{k_i} e^{\alpha_k t} \cos(\omega_k t + \varphi_{k_i})$$

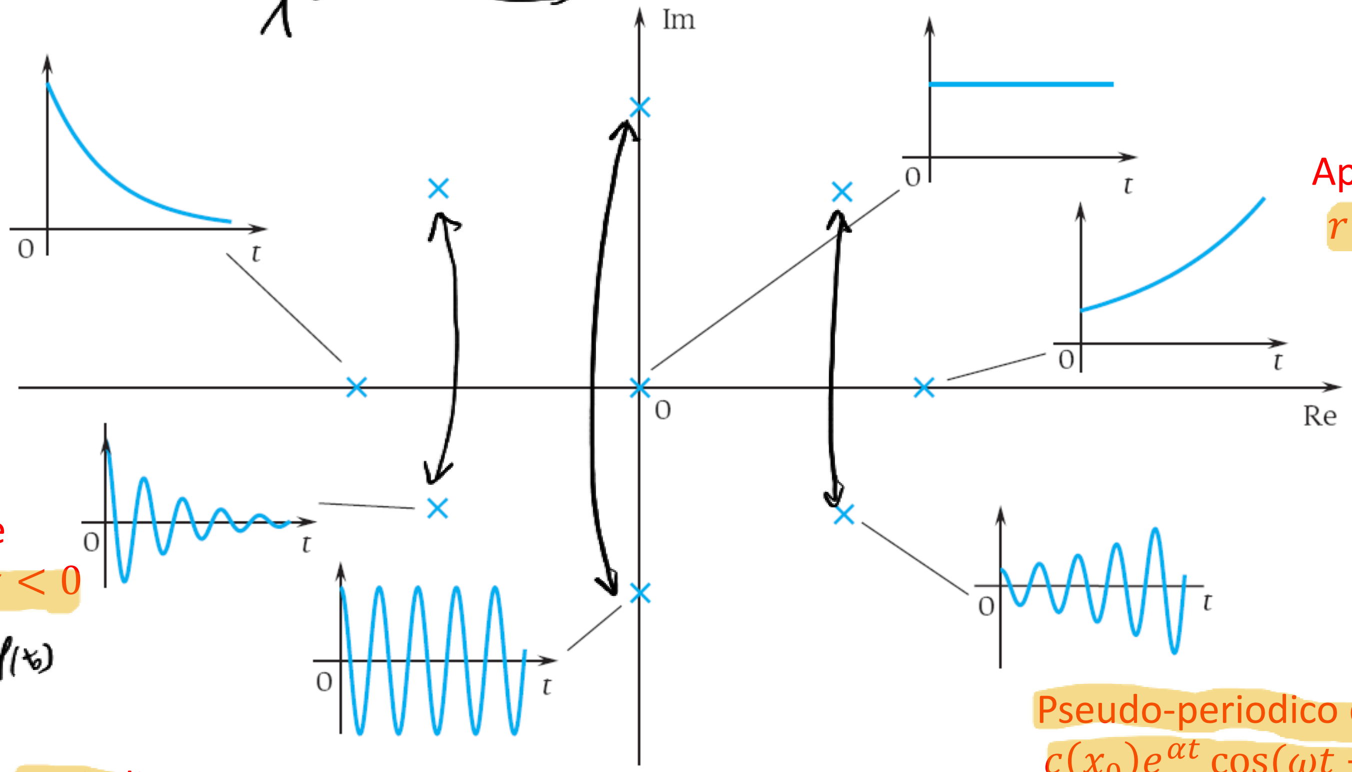
Analisi modale

- Classificazione dei modi di evoluzione (autovalori distinti) !!!

Aperiodico convergente
$r(x_0)e^{\lambda t}$, $\lambda < 0$

$\lambda \longrightarrow$

Costante
$c(x_0)$, $\lambda = 0$



Aperiodico divergente
$r(x_0)e^{\lambda t}$, $\lambda > 0$

Pseudo-periodico convergente
$c(x_0)e^{\alpha t}\cos(\omega t + \varphi(x_0))$, $\alpha < 0$

Parte imm. [illegible] solo da $\varphi(x_0)$

Pseudo-periodico divergente
$c(x_0)e^{\alpha t}\cos(\omega t + \varphi(x_0))$, $\alpha > 0$

Periodico
$c(x_0)\cos(\omega t + \varphi(x_0))$

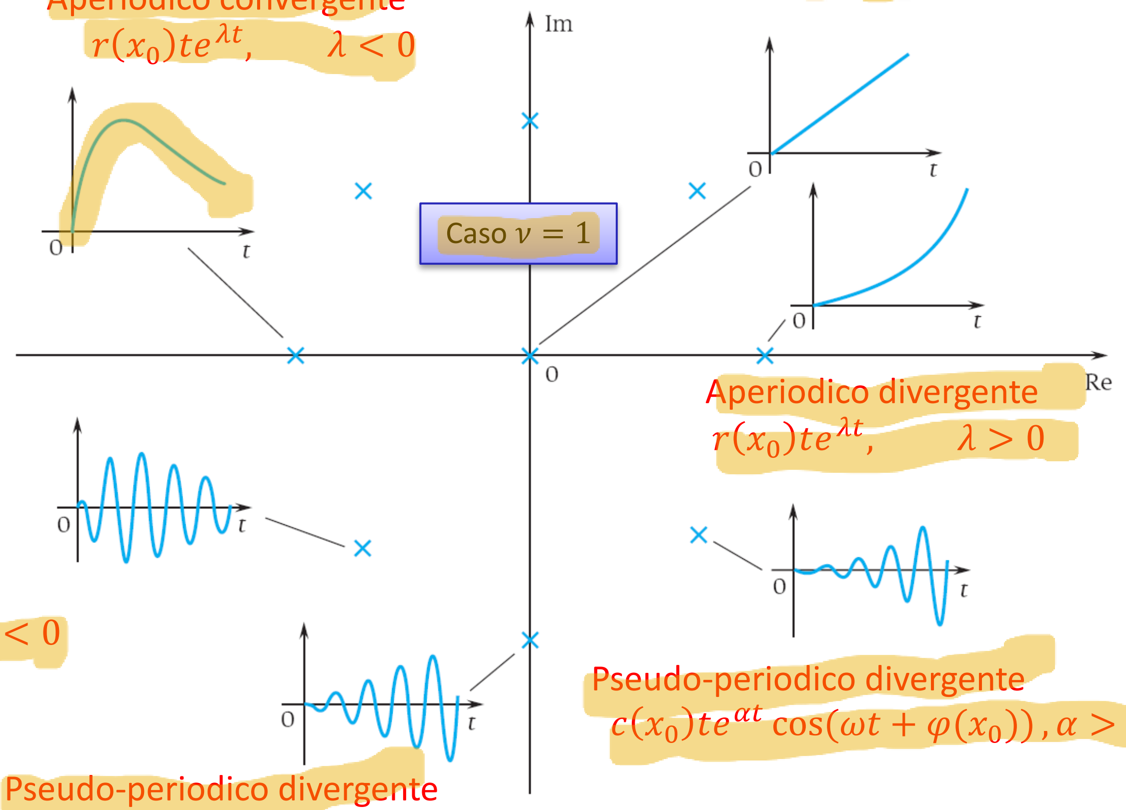
Analisi modale

Come calcolo esponenziale matriciale? $A = T_D D T_D^{-1}$ → diagonale a blocchi → che faccio?

- E se la matrice A non è diagonalizzabile?
  - Accade solo se ci sono autovalori multipli
- Vedremo come calcolare l'evoluzione libera con il metodo di Laplace
  - Anticipiamo che i modi di evoluzione sono funzioni del tipo

Si dimostra
    - $t^\nu e^{\lambda t}$ nel caso di autovalori reali
    - $t^\nu e^{\alpha t} \cos \omega t$ nel caso di autovalori complessi
    - con ν che dipende dalla molteplicità dell'autovalore*

Partono tutte da 0 indipendentemente da condiz. iniziali
Meno realistico di quello di prima



*ν è pari alla dimensione del più grande miniblocco di Jordan relativo a λ meno 1
Quindi $\nu = 0$ se i miniblocchi di Jordan sono di ordine 1 (cioè se la matrice è diagonalizzabile)

$$(\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{P(\lambda)} \operatorname{adj}(\lambda I - A)$$

inversa della mat. del polin. caratt.

ciascun elemento di $\lambda I - A$ è una f. affine di λ $(a\lambda + b)$.

Se valuto l'aggiunta saranno tutti polinomi in λ di grado $n-1$, perché calcolo determinanti più piccoli.

Può accadere che quando ho A non diagonalizz., ci sono delle semplificaz. che posso fare con $p(\lambda)$. Ma non posso avere soluz. che scompaiono, al più scende la molteplicità. Le semplificaz. non possono far scendere le molteplicità a meno di 2.

Il polinomio minimo (il denominatore) non può avere molteplicità $=1$ per tutte altrimenti è diagonalizzabile. Basta che una ha molt. pari a 2 e si perde tutto.

$$p(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1}\cdot(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdot\ldots\cdot(\lambda-\lambda_k)^{m_m}$$

$$p_m(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{\nu_1}\cdot(\lambda-\lambda_2)^{\nu_2}\cdot\ldots(\lambda-\lambda_k)^{\nu_m}$$

Polinomio minimo, ottenuto una volta fatte tutte le semplificaz. Compaiono sempre tutte e K. Mai di meno.

$t^{\nu'} e^{\lambda t}$

$t^{\nu'} e^{\alpha t} \cos(\omega t)$ $\qquad \nu' = \nu_i - 1$

CASO ASSE IMMAG:

$\lambda = 0$ oppure $\alpha = 0$

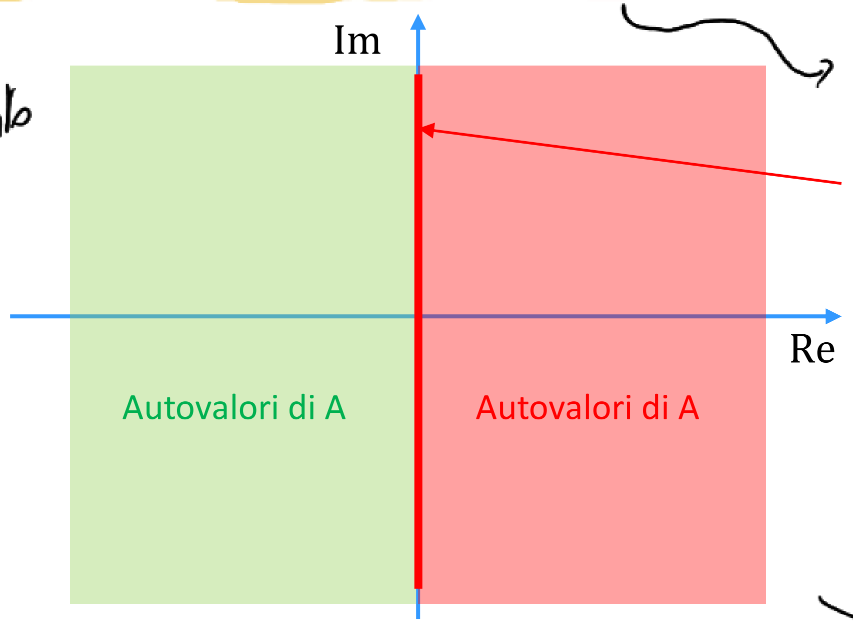
Analisi modale

Riassumendo

- I modi di evoluzione sono TUTTI convergenti se e solo se TUTTI gli autovalori della matrice dinamica A sono a parte reale negativa
- Un modo di evoluzione è divergente se corrisponde ad un
  - Autovalore a parte reale positiva
  - Autovalore a parte reale nulla ma con ν maggiore o uguale a 1 (vedremo come calcolare questa molteplicità ν^*)

Male: posso trovare x_0 che stimola quel modo. Faccio esplodere tutto

Semipiano sinistro aperto del piano di Gauss = convergenza.



Evoluzione divergente con autovalori «multipli» qui

Se $\lambda=0$ con molteplicità 1 ho costante.

Se $\alpha=0$ con molteplicità 1 ho sinusoide

Evoluzione convergente con tutti gli autovalori qui

Evoluzione divergente con qualunque autovalore qui

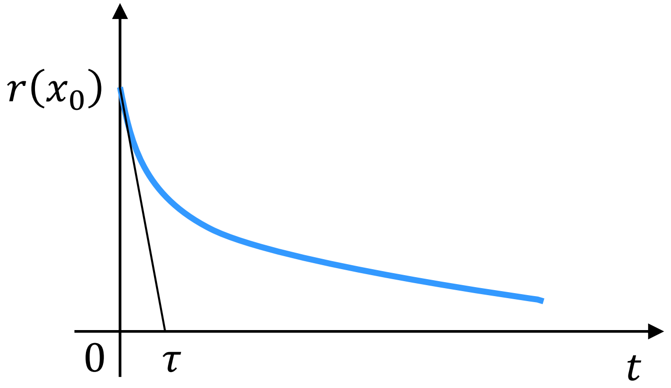
Li posso avere solo con rette ultima,

*dovremo definire il «polinomio minimo»

Parametri caratteristici dei modi di evoluzione convergenti

- Autovalore reale negativo a molteplicità unitaria ($\lambda < 0$)

$$x(t) = r(x_0)e^{\lambda t}$$



  - **Costante di tempo**

$$\boxed{\tau = -1/\lambda}$$

    – quantifica la velocità con cui il modo si estingue: il modo passa dal valore massimo all'1% di tale valore in $\sim 4.6\tau$

- Coppia di autovalori complessi a parte reale negativa a molteplicità unitaria ($\lambda = \alpha \pm j\omega,\ \alpha < 0$)

$$x(t) = c(x_0)e^{\alpha t}\cos(\omega t + \varphi(x_0))$$

  - **Pulsazione naturale**

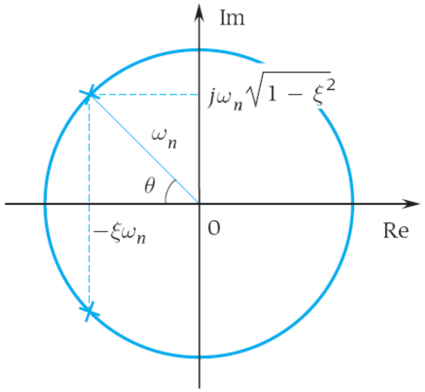
$$\boxed{\omega_n = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$$

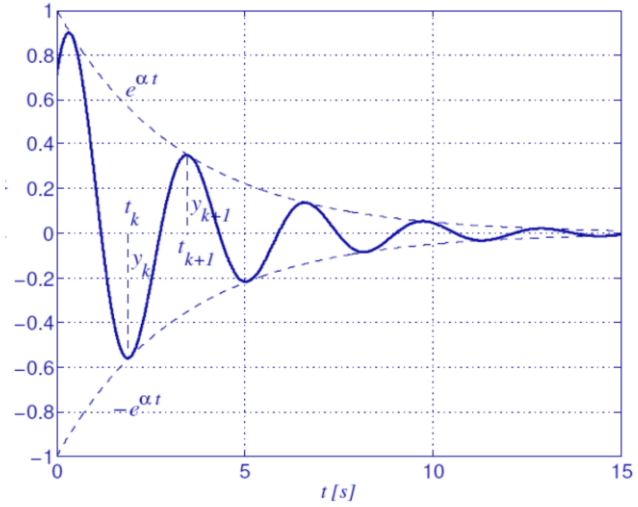
  - **Coeff. di smorzamento**

$$\boxed{\xi = \cos\theta}$$

$$\boxed{\alpha = -\xi\omega_n}$$

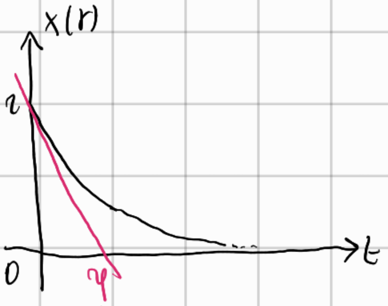
$$\boxed{\omega = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$





Modo aperiodico convergente → non dimenticare le grandezze

$x(t) = r e^{\lambda t}$



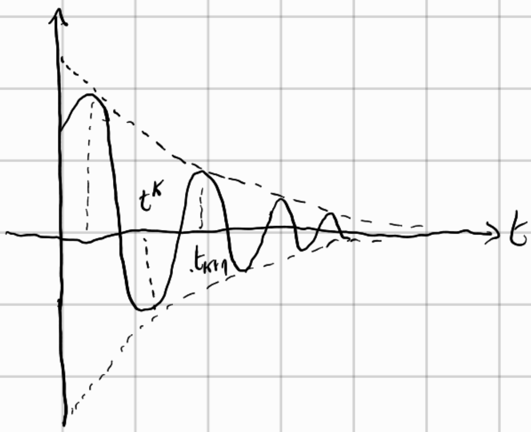
$\dot{x}(t) = r\lambda e^{\lambda t}\big|_{t=0}$
$= r\lambda$

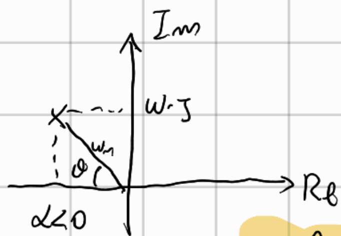
→ intersezione = COSTANTE DI TEMPO = RECIPROCO DI $-\lambda$ PARAMETRO CARATTERISTICO

$\boxed{y = r + r\lambda t}$ $\quad \tau = -\dfrac{1}{\lambda}$ intersezione $\quad$ Indica quanto tempo impiega il modo a estinguersi con un certo margine d'errore. es. 1%.

$x(t) = \underbrace{0.01 r}_{\text{spegnimento}} = r e^{\lambda \bar{t}} \Rightarrow \lambda \bar{t} = \ln\left(\frac{1}{100}\right) = -\frac{1}{\lambda}\ln(100) = \tau \ln(100) \cong 4.60\tau$

Modo





$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ per avere pseudo periodico

$w_n = \sqrt{\alpha^2 + w^2}$

$\xi = \cos\theta$ coeff. di smorzamento

x_d $\quad$ → $\sin\theta$

$\Rightarrow w = w_n\sqrt{1-\xi^2}$

$\alpha = -w_n \xi$

$x(t) = e^{\alpha t}\cos(wt + \varphi)$

$\dot{x}(t) = \alpha e^{\alpha t}\cos(wt+\varphi) - e^{\alpha t} w \sin(wt+\varphi)$

$\dot{x}(t) = -\underbrace{\xi}_{\cos\theta} w_n e^{\alpha t}\cos(wt+\varphi) - w_n \underbrace{\sqrt{1-\xi^2}}_{\sin\theta} e^{\alpha t}\sin(wt+\varphi)$

$= -w_n e^{\alpha t}\cos\left(wt + \underbrace{\varphi - \theta}_{\psi}\right)$

Lo voglio $= 0$.

$\Rightarrow wt_k + \psi = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $\quad$ Voglio calcolare $\left|\dfrac{x(t_{k+1})}{x(t_k)}\right|$ per vedere il tempo per estinguersi.

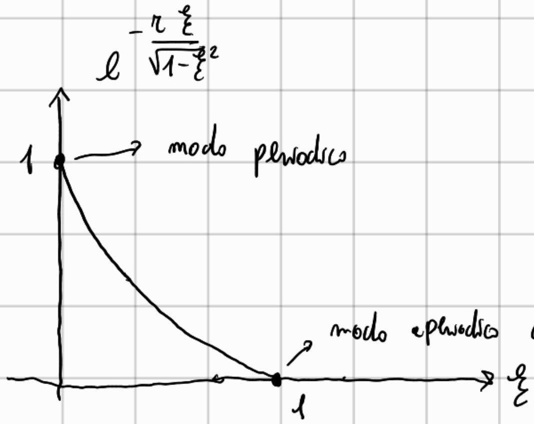
$$\Rightarrow \quad \frac{e^{\alpha t_{k+1}}\,|\cos(\omega t_{k+1}+\varphi)|}{e^{\alpha t_k}\,|\cos(\omega t_k+\varphi)|} = e^{\alpha(t_{k+1}-t_k)} =$$

ma sono uguali!

$$t_k = \frac{\frac{\pi}{2}+k\pi-\psi}{\omega} \qquad t_{k+1} = \frac{\frac{3\pi}{2}+k\pi-\psi}{\omega} \Rightarrow \quad t_{k+1}-t_k = \frac{\pi}{\omega}$$

$$= e^{\alpha\frac{\pi}{\omega}} = e^{-\frac{\xi\omega_n\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}} = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Rientrano sia parte reale, sia parte immag. ma lo scrivo con 1 parametro.



$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \quad 0 < \xi < 1$$

Movimento forzato

- È la soluzione del problema di Cauchy

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad x(0) = 0$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Stato iniziale nullo

Variabili di ingresso → Sistema dinamico → Variabili di uscita

$e^{A(t-\tau)} \in \mathbb{R}^{n \times n} = I$

- Verifichiamo che la soluzione nello stato è

integrale di convoluz. tra f. di transiz. e ingresso

$$\boxed{x_f(t) = \int_0^t \underbrace{e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}_{\Phi(t,\tau)}}$$

$$\frac{d}{dt}e^{At} = \frac{d}{dt}\left[I + At + \frac{A^2t^2}{2!}\dots\right] = \frac{d}{dt}\left[I + \sum_{k=1}^{\infty} A^k \frac{t^k}{k!}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k k\, t^{k-1}}{k(k-1)!} = A\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!} = Ae^{At}$$

  - Per farlo occorre ricordare la formula di Leibniz

integrabile

$$\frac{d}{dt}\int_0^t \phi(t,\tau)\,d\tau = \phi(t,t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\phi(t,\tau)\,d\tau$$

- La risposta forzata nell'uscita è ovviamente (risposta ⇔ movimento)

$$\boxed{y_f(t) = C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)}$$

Forte dipendenza da ingresso ma anche dai modi di evoluz. del sistema → ingresso è capace di eccitare i modi di evoluz.

$$\dot{x}_p(t) = Bu(t) + \int_0^t \underbrace{A}_{\text{Non dipende da } \tau} e^{A(t-\tau)} u(\tau)\, d\tau = Bu(t) + A \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)} u(\tau)\, d\tau}_{x_p(t)}$$

$x_p(0) = \int_0^0 \dots \, d\tau = 0$. Quindi x_p soddisfa le condizioni di soluzione

- Movimento di un sistema LTI
  - È la soluzione del problema di Cauchy

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad x(0) = x_0$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

  - Risposta nello stato

$$\boxed{x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}$$

  - Risposta nell'uscita

$$\boxed{y(t) = Ce^{At}x_0 + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)}$$

Risposta all'impulso

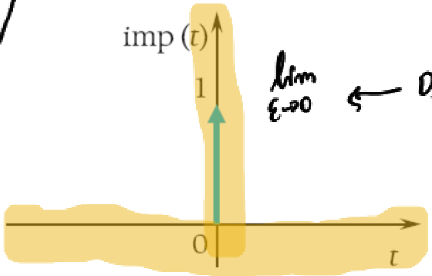
l'integrale enorme

- Calcolare la riposta forzata ad un ingresso qualsiasi non è semplice
  - Useremo una tecnica alternativa basata sulla trasformata di Laplace
- Tuttavia per ingressi particolari può essere fatto in forma chiusa
- Definiamo l'impulso di Dirac

$$u(t) = \delta(t) = \mathrm{imp}(t)$$

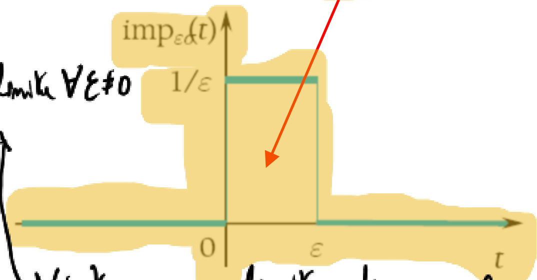
Non è funzione ordinaria
Definita come distribuz. lineare

La descrivo con delle proprietà



$\lim_{\varepsilon \to 0}$ ← Definita $\forall \varepsilon \neq 0$

Area unitaria $\forall\varepsilon$



Visto come limite di una fam. di funzioni ordinarie

  - Il grafico è solo una rappresentazione, perché la $\delta(t)$ non è una funzione ordinaria
    - Vale 0 $\forall t \neq 0$, in 0 non è definita, il suo integrale su tutto $\mathbb{R}$ (e in qualunque intervallo contenente lo 0) vale 1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

    - Può essere «definita» come il limite (per $\varepsilon \to 0$) della famiglia di funzioni ordinare $\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}, t \in [0, \varepsilon) \\ 0, \text{altrove} \end{cases}$
    - Proprietà del «campionamento»

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\delta(t - \bar{t})dt = \varphi(\bar{t})$$

La δ centrata in $\bar{t}$ «preleva» il campione della funzione $\varphi(t)$ per t $= \bar{t}$

→ assumo sempre che condiz. iniziali nulle. Risposta canonica (si misurano a $x_0 = 0$)

- Calcoliamo la risposta forzata all'impulso $u(t) = \delta(t)$ (caso di un ingresso)

b=colonna

  - Nello stato

Risposta impulsiva forzata

Combinazione lineare dei modi di evoluzione: es. calcolo risposta con condiz. iniz. pari alla matrice degli ingressi.

$$g_x(t) = x_f(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} b\delta(\tau)d\tau = e^{At}b, t \geq 0 \quad *$$

↳ $\tau = 0$ per risolvere integrale

Osserviamo che (proprietà di causalità)

- $g_x(t) = 0,\ t < 0$
- $g_y(t) = 0,\ t < 0$

→ $e^{At}x_0$, $t \geq 0$. perché condensano storia passata del sistema nelle condiz. iniziali.

  - Nell'uscita

$$g_y(t) = Cg_x(t) + D\delta(t) = \underbrace{Ce^{\overset{*2}{At}}b + D\delta(t)}_{*}, t \geq 0$$

  - $g_x(t)$ coincide con la risposta in evoluzione libera a partire da uno stato iniziale $x(0) = b$, dunque è **combinazione lineare dei modi di evoluzione**
  - Analogamente, ogni componente di $g_y(t)$ è una **combinazione lineare di modi di evoluzione più un impulso** se $D \neq 0$
- Se il sistema è MIMO (con m ingressi e p uscite)
  - $G_x(t) = e^{At}B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ il cui elemento di posto (i, j) rappresenta la risposta in $x_i(t)$ ad un impulso applicato da $u_j(t)$
  - $G_y(t) = Ce^{At}B + D\delta(t) \in \mathbb{R}^{p \times m}$ il cui elemento di posto (i, j) rappresenta la risposta in $y_i(t)$ ad un impulso applicato da $u_j(t)$ → Risp. impulsiva: impulso solo su un ingresso. ⇒ + impulsi: somma delle colonne

Matrici delle risposte impulsive

* Con risposta impulsiva dello stato, mi accorgo che questa sarebbe uguale alla risposta che otterrei se $x_0 = b$.

* $e^{At}b$: b non posso sceglierla come dico io. Dipende dal sistema. Posso scegliere solo x_0.

Data una certa b, non necessariamente compariranno tutti i modi di evoluzione.

In questi casi, il sistema si dice NON COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE / CONTROLLABILE

↳ cioè negli stati non ci sono dei modi indip. dagli ingressi.

Es:

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t) + u(t)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \underbrace{-1}_{\text{autovalori}} \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Qui x_1 non dipende dall'ingresso.

$\underbrace{x_1(t) = e^{t} x_{10}}$ espressione scollegata completamente dall'ingresso.

$$e^{At}b = \begin{pmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$ Manca un modo di evoluzione

Al variare degli ingressi non posso far mostrare la e^{t}. Se ho condiz. iniziale $\neq 0$, posso avere divergenze che non riesco a controllare.

*² Stesso discorso per l'uscita: non è detto che in $Ce^{At}b$ ci siano tutti.

Questi sono i sistemi NON OSSERVABILI (anche in evoluz. libera l'uscita non ha dipendenza garantita)

↳ cioè per i quali non compare un modo nell'uscita

Quindi, nell'uscita compaiono solo modi della parte RAGGIUNGIBILE ($e^{At}b$) e OSSERVABILE

Nota: nello stato non compare mai impulso. Se $D \neq 0$, posso averlo in uscita.

- Se di un sistema conosciamo la risposta impulsiva ($g_x(t)$ e $g_y(t)$) è possibile calcolare la risposta forzata ad un qualunque ingresso $u(t)$: $u(t) = 0\ \forall t < 0$

Senta usm

Perché $g_x(t) = 0$ e $u(t) = 0$ per $t < 0$

Prop. di causalità – Hp

$(t, +\infty) \to g_x = 0$
$u(\tau) = 0$ se $\tau \geq 0$
$(-\infty, 0]$.

$$x_f(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} bu(\tau)d\tau = \int_0^t g_x(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} g_x(t-\tau)u(\tau)d\tau = g_x(t) * u(t)$$

Convoluz. tra risp. impulsiva e input

$$y_f(t) = C\int_0^t e^{A(t-\tau)} bu(\tau)d\tau + Du(t) = \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} bu(\tau)d\tau + \int_0^t D\delta(t-\tau)u(\tau)d\tau =$$

Per la proprietà del campionamento

$$= \int_0^t \left[Ce^{A(t-\tau)}b + D\delta(t-\tau)\right]u(\tau)d\tau = \int_0^t g_y(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} g_y(t-\tau)u(\tau)d\tau = g_y(t) * u(t)$$

$g_y = 0$ se $t < 0$

- Operativamente, vedremo come calcolare questi integrali di convoluzione è più semplice nel dominio di Laplace

La risp. impulsiva é rappresentativa della parte ragg. e oss. del sistema.
↳ la uso per capire come si comporta sistema.

- Sia dato un ingresso costante $u(t) = \bar{u}$

  $<0 \int >0$

  - La risposta forzata nello stato è

    ponendo $\sigma = t - \tau$

    $$x_f(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B d\tau\, \bar{u} = \int_0^t e^{A\sigma} B d\sigma\, \bar{u}$$

    det $A \neq$ ...

    - E se assumiamo che A sia invertibile (non ha autovalori nulli)

      Se A non è invertibile non riesco

      $$x_f(t) = [A^{-1} e^{A\sigma} B]_0^t \bar{u} = A^{-1}(e^{At} - I)B\bar{u}$$

      ↳ trasformata

      ASK ↳ $[I + At + \ldots]$

      $A^{-1} e^{At} B \bar{u}$ comb. lineare di modi

      ↓ A^{-1} è invertibile, non può far scomparire comb. lineari

      A invertibile $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ non fa non scomparire v_i

  - La risposta forzata nell'uscita è

    $$y_f(t) = C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B d\tau\, \bar{u} + D\bar{u} = C \int_0^t e^{A\sigma} B d\sigma\, \bar{u} + D\bar{u}$$

    - Che nel caso di A invertibile si può scrivere nella forma

      → la seconda parte costante, simile alla sollecitazione

      $$y_f(t) = C[A^{-1} e^{A\sigma} B]_0^t \bar{u} + D\bar{u} = [CA^{-1}(e^{At} - I)B + D]\bar{u}$$

  - Se A non fosse invertibile occorrerebbe prima calcolare $e^{A\sigma}B$ e poi integrare
  - In ogni caso, la risposta ad un ingresso costante sarà una **combinazione lineare di modi di evoluzione più una costante**

    SOLO SE LINEARI modo dell'ingresso

Equilibrio

- Definizione
  - uno stato di equilibrio di un sistema dinamico è un vettore $\bar{x}$ costante corrispondente ad un ingresso costante $\bar{u}$

$$0 = A\bar{x} + B\bar{u}$$

Se $\bar{x}$ deve essere soluzione che garantisce questo

↳ Bisogna usare Rouchè-Capelli

  - corrispondentemente l'uscita di equilibrio è

$$\bar{y} = C\bar{x} + D\bar{u}$$

- Nel caso particolare di A invertibile, l'equilibrio è unico

$$\bar{x} = -A^{-1}B\bar{u}$$

→ Assumendo che esista.

$$\bar{y} = (-CA^{-1}B + D)\bar{u}$$

- Matrice dei guadagni statici

$$G = -CA^{-1}B + D \in \mathbb{R}^{p \times m}$$