



Modellistica e Simulazione

(parte 2)

Prof. Salvatore Pirozzi

Email: salvatore.pirozzi@unicampania.it

Equazioni del moto: approccio lagrangiano

Principali svantaggi di utilizzare l'approccio newtoniano

- ▶ Per la scrittura della leggi di Newton (equazioni del moto), per ogni elemento di inerzia, bisogna portare in conto tutte le forze che agiscono sull'elemento:
 - ❖ Forze esterne (ingressi, forza di gravità,...)
 - ❖ Forze di interazione con altri componenti (componenti elastici e di attrito)
 - ❖ Forze di vincolo
- ▶ Per le forze di interazione, il problema maggiore è legato ad errori di segno o di verso
- ▶ Le forze di vincolo, oltre a richiedere una certa attenzione per la loro individuazione, comportano un aumento del numero di incognite per ricavare le quali bisogna aggiungere altre equazioni (equazioni di vincolo).
- ▶ Bisogna infine combinare opportunamente le equazioni del moto e quelle di vincolo per ricavare le equazioni effettivamente indipendenti che caratterizzano il sistema

Con l'approccio Lagrangiano cercheremo di superare tali svantaggi ragionando in termini di energia e non di forza

Esempio 2.16

Utilizzeremo quest'esempio per confrontare il metodo di Newton con il metodo Lagrangiano (tra qualche lezione).

Il sistema meccanico mostrato è costituito da una carico (m) collegato, attraverso una fune che scorre su una puleggia (M), ad un elemento elastico (K). Si vuole determinare un modello i-s-u per lo studio degli spostamenti verticali del carico (m).

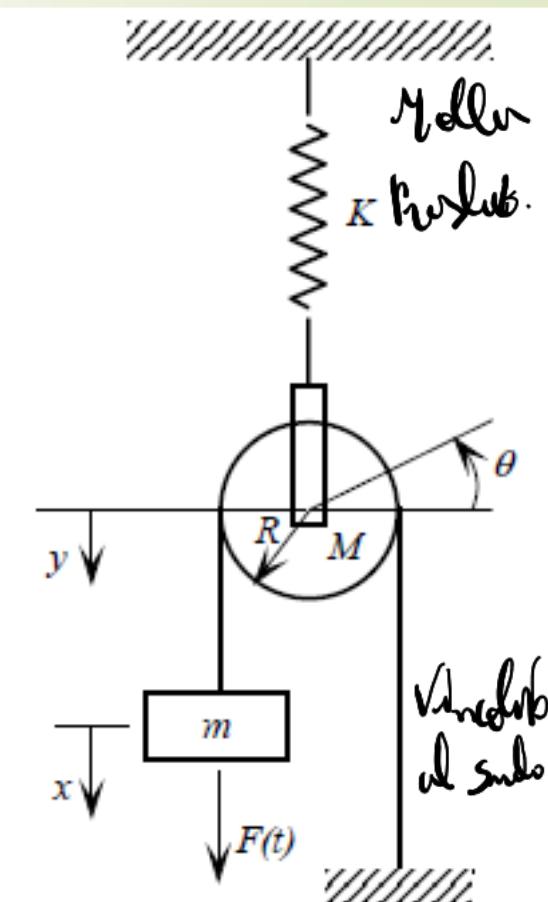
A prima vista, per i due elementi di inerzia, abbiamo

- Movimento traslazionale di m (coordinata posizionale $x(t)$)
- Movimento traslazionale di M (coordinata posizionale $y(t)$)
- Movimento rotazionale di M (coordinata posizionale $\theta(t)$)

Per ognuno possiamo scrivere un'equazione di Newton.

Quindi sono 3 g.d.l.?.....NO

Perché le coordinate posizionali non sono indipendenti.



Puleggi non può muoversi senza abbassarsi. \Rightarrow Y e O collegate.

La X può cambiare, ma ovviamente legato a Y e O.

NOTA: Potremmo avere pure abbassamento senza rotazione.

Senza rotazione $X=2y$ senza rotazione.

La puleggia non può muoversi senza spostarsi.

NOTA: Supponiamo che non sia rotativa solo per legare le 2 relazioni.

A causa del muro, O e Y e O

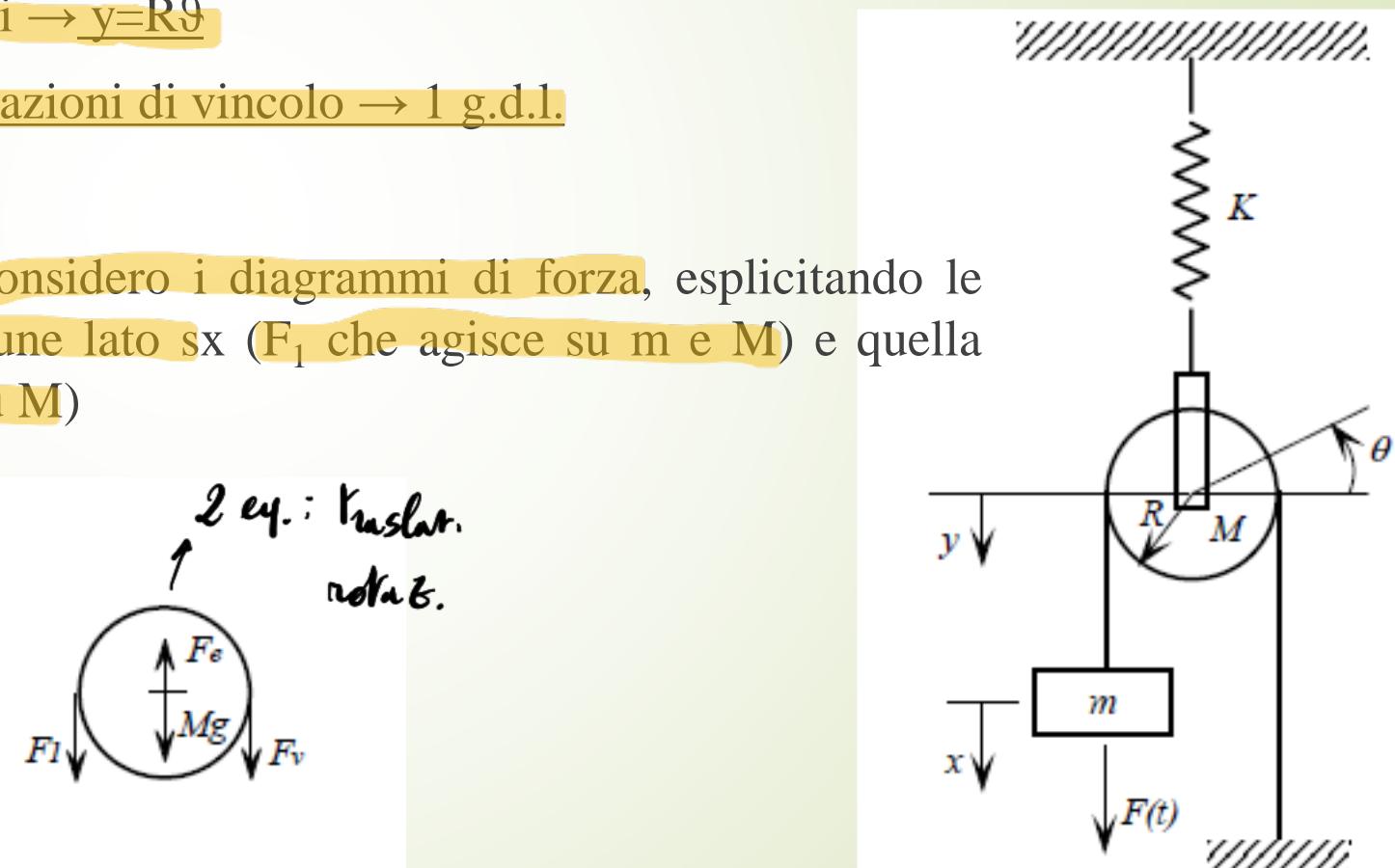
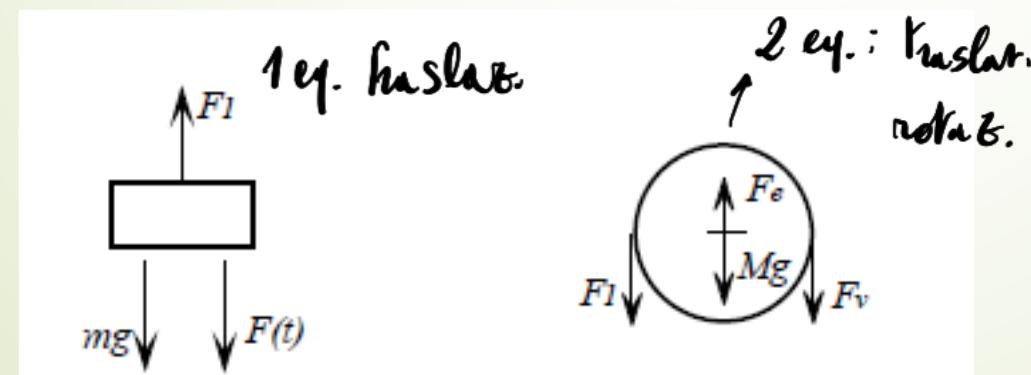
La massa non sa se lo puleggia è rotativa. Guarda X e prova traslazione di Y.

Esempio 2.16

Equazioni di vincolo (non ci può essere rotazione senza abbassamento della puleggia)

- ▶ Possiamo avere un puro abbassamento senza rotazione $\rightarrow \underline{x=2y}$
- ▶ Per ruotare ha bisogno di abbassarsi $\rightarrow \underline{y=R\theta}$
- ▶ Quindi 3 equazioni di moto e 2 equazioni di vincolo $\rightarrow 1$ g.d.l.

Per scrivere le equazioni del moto considero i diagrammi di forza, esplicitando le forze di vincolo: quelle dovute alla fune lato sx (F_1 che agisce su m e M) e quella dovuta al lato dx (F_v che agisce solo su M)



Esempio 2.16

L'equazione di Newton per il moto verticale del carico

$$m\ddot{x} = mg + F - F_1$$

L'equazione di Newton per il moto verticale della puleggia

$$M\ddot{y} = Mg + F_1 + F_v - F_e$$

➡ Considerando la
forza elastica k_y

$$M\ddot{y} = Mg + F_1 + F_v - ky$$

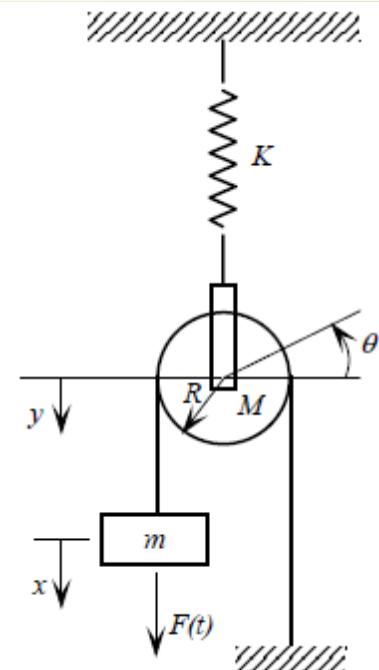
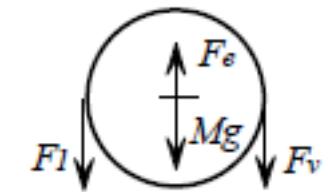
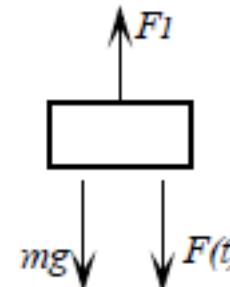
L'equazione di Newton per il moto di rotazione della puleggia

$$J\ddot{\vartheta} = F_1R - F_vR \quad \Rightarrow \quad \frac{MR^2}{2}\ddot{\vartheta} = F_1R - F_vR \quad \Rightarrow \quad \frac{MR}{2}\ddot{\vartheta} = F_1 - F_v$$

Considerando il momento d'inerzia di un cilindro

Ricordiamo le due equazioni di vincolo $x=2y$ e $y=R\vartheta$ (con le derivate).

Siamo interessati allo spostamento di m , quindi manipoliamo le equazioni lasciando come coordinata posizionale $x(t)$.



Esempio 2.16

Ricavando F_1 dall'equazione del moto del carico

$$m\ddot{x} = mg + F - F_1 \quad \rightarrow \quad F_1 = F + mg - m\ddot{x}$$

$$\begin{aligned} y &= R\theta \\ x &= 2R\theta \end{aligned}$$

Ricaviamo F_v dall'equazione del moto rotatorio della puleggia ed utilizziamo l'equazione di vincolo $x=R\dot{\theta}$

$$\frac{MR}{2}\ddot{\vartheta} = F_1 - F_v \quad \rightarrow \quad F_v = F_1 - \frac{MR}{2}\ddot{\vartheta} \quad \rightarrow \quad F_v = F_1 - \frac{M}{4}\ddot{x}$$

Sostituiamo nell'equazione del moto verticale della puleggia, utilizzando anche l'altro vincolo $x=2y$

$$My = Mg + F_1 + F_v - ky \quad \rightarrow \quad M \frac{\ddot{x}}{2} = Mg + \underbrace{F_1 + mg - m\ddot{x}}_{F_1} + \underbrace{F_1 + mg - m\ddot{x}}_{F_v} - M \frac{\ddot{x}}{4} - k \frac{x}{2}$$

Sommando e ordinando

$$M \frac{\ddot{x}}{2} = Mg + 2F + 2mg - 2m\ddot{x} - M \frac{\ddot{x}}{4} - k \frac{x}{2}$$

$$\left(\frac{M}{2} + \frac{M}{4} + 2m \right) \ddot{x} = -\frac{k}{2}x + (M + 2m)g + 2F$$

Salvo la $\times 11$

Appena il sistema si complica per vincoli si vede che non conviene più.

Esempio 2.16

$$\left(\frac{M}{2} + \frac{M}{4} + 2m\right)\ddot{x} = -\frac{k}{2}x + (M+2m)g + 2F \Rightarrow \left(\frac{3}{4}M + 2m\right)\ddot{x} = -\frac{k}{2}x + (M+2m)g + 2F \Rightarrow \text{dividendo per 2}$$

$$\boxed{\left(\frac{3}{8}M + m\right)\ddot{x} = -\frac{k}{4}x + \left(\frac{M}{2} + m\right)g + F}$$

Scegliendo

$$y(t) = x(t), \quad u_1(t) = \left(\frac{M}{2} + m\right)g, \quad u_2(t) = F(t), \quad x_1(t) = x(t), \quad x_2(t) = \dot{x}(t)$$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k}{4\left(\frac{3}{8}M + m\right)}x_1(t) + \frac{u_1}{\left(\frac{3}{8}M + m\right)} + \frac{u_2}{\left(\frac{3}{8}M + m\right)}$$

$$y(t) = x_1(t)$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{k}{4\left(\frac{3}{8}M + m\right)} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \ 0] x(t)$$

Equazioni del moto: approccio lagrangiano

- Per scrivere l'equazione del moto del sistema è stato necessario portare in conto anche le forze di vincolo e poi, successivamente, eliminarle.
 - ❖ Appena aumentano leggermente le direzioni di movimento da portare in conto il numero di equazioni totali (moto+vincolo) aumentano anche in maniera significativa
- Nell'approccio lagrangiano il sistema è considerato nel suo insieme e non nei suoi componenti individuali.
 - ❖ Non parto dall'equilibrio delle forze trattato separatamente per ogni elemento d'inerzia, ma utilizzo l'energia complessiva del sistema

Il problema è trattato in termini di due funzioni scalari (l'energia cinetica e l'energia potenziale) e di un'espressione infinitesimale (il lavoro virtuale fatto dalle forze non conservative in corrispondenza di uno spostamento virtuale del sistema).

Prossimi passi:

- richiamare le espressioni per il calcolo dell'energia cinetica e potenziale immagazzinata in un sistema meccanico in un generico istante,
- introdurre il concetto di spostamento virtuale (e conseguentemente di lavoro virtuale)

Lavoro e energia

Lavoro di una forza. Consideriamo una forza F_x agente su un punto materiale nella direzione x , e indichiamo con dx uno spostamento infinitesimo del punto nella stessa direzione. Definiamo il lavoro elementare fatto dalla forza F_x corrispondente allo spostamento dx

$$dW = F_x dx \xrightarrow{\text{Componente lungo } x}$$

Energia. L'energia è una misura della capacità di un corpo a compiere lavoro. Nei sistemi meccanici, l'energia posseduta da un componente elementare in virtù della sua posizione è detta energia potenziale; quella posseduta in virtù della sua velocità è detta energia cinetica.

Per gli elementi introdotti considereremo:

→ Energia potenziale

- ❖ Energia potenziale gravitazionale (masse)
- ❖ Energia potenziale elastica (elementi elastici)

→ Energia cinetica (elementi d'inerzia)

Energia potenziale gravitazionale

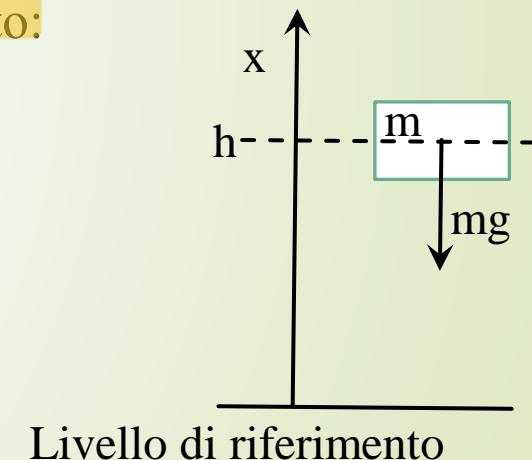
Energia potenziale gravitazionale: indicata con U , è associata ad un corpo di massa m che si trova ad un'altezza h rispetto ad un livello di riferimento prefissato.

Definiamo tale energia potenziale gravitazionale del corpo rispetto al riferimento prescelto: l'opposto del lavoro fatto dalla forza peso in corrispondenza dello spostamento necessario per portare il corpo dal riferimento alla quota h .

Assumendo come verso positivo per la misura degli spostamenti quello verso l'alto:

$$U = - \int_0^h (-mg)dx = mgh$$

Segno dovuto alla definizione
Segno dovuto al verso della forza (opposto allo spostamento)
Lavoro elementare



U è positiva quando il corpo si trova ad una quota più alta del riferimento.

Nota che è misurata rispetto ad una posizione di riferimento (a scelta), per cui il suo valore non è assoluto, ma dipende dal riferimento prescelto.

Energia potenziale elastica

Energia potenziale elastica. Considerata una molla traslatoria deformata rispetto alla sua configurazione di riposo in assenza di forze esterne, l'energia potenziale elastica immagazzinata nella molla è il lavoro fatto dalle forze agenti ai suoi estremi per portarla dalla configurazione di riposo alla configurazione deformata.

Volendola calcolare per una deformazione complessiva della molla pari a x , consideriamo una molla bloccata ad un estremo, ed indichiamo con x' uno spostamento dell'estremo libero compreso tra 0 e x , conseguente all'applicazione di una forza esterna F' , che sarà $F'=kx'$ dove k è la costante elastica.

$$U = \int_0^x F' dx' = \int_0^x kx' dx' = \frac{1}{2} kx^2$$

Lavoro elementare

NOTE: l'energia potenziale elastica è sempre positiva (sia in estensione che in compressione, vedi x^2)

Per la molla torsionale, la coppia (T) prende il posto della forza e la deformazione angolare (θ) prende il posto di quella lineare

$$U = \int_0^\theta T d\theta' = \int_0^\theta k\theta' d\theta' = \frac{1}{2} k\theta^2$$

Energia cinetica

Gli elementi in grado di immagazzinare **energia cinetica** sono solo gli elementi di inerzia.

Energia cinetica **T** per un elemento di massa **m** in moto traslatorio, indicando con **v** il modulo della velocità

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

Analogamente, per un elemento di inerzia che ruota intorno ad un asse **t**, indicando con **J_t** il momento di inerzia e **ω** la velocità angolare

$$T = \frac{1}{2}J_t\omega^2$$

(Elementi dissipativi non immagazzinano energia)

Meccanica di un sistema di punti materiali

NOTA: Arriveremo alla scrittura delle equazioni del moto di Lagrange considerando un sistema di punti materiali in uno spazio a 3 dimensioni, ma i risultati sono estendibili a un qualsiasi sistema di corpi rigidi.

Consideriamo un sistema di N punti materiali

- m_i è la massa dell' i -esimo punto,
- \mathbf{r}_i il vettore delle sue coordinate (x_i, y_i, z_i) in un sistema di riferimento cartesiano

Indicando con \mathbf{R}_i la risultante di tutte le forze agenti sul generico punto,

utilizzando l'approccio Newtoniano, possiamo scrivere:

- equazioni di equilibrio statico (una per ogni punto):

$$\mathbf{R}_i = 0$$

$$i = 1, \dots, N$$

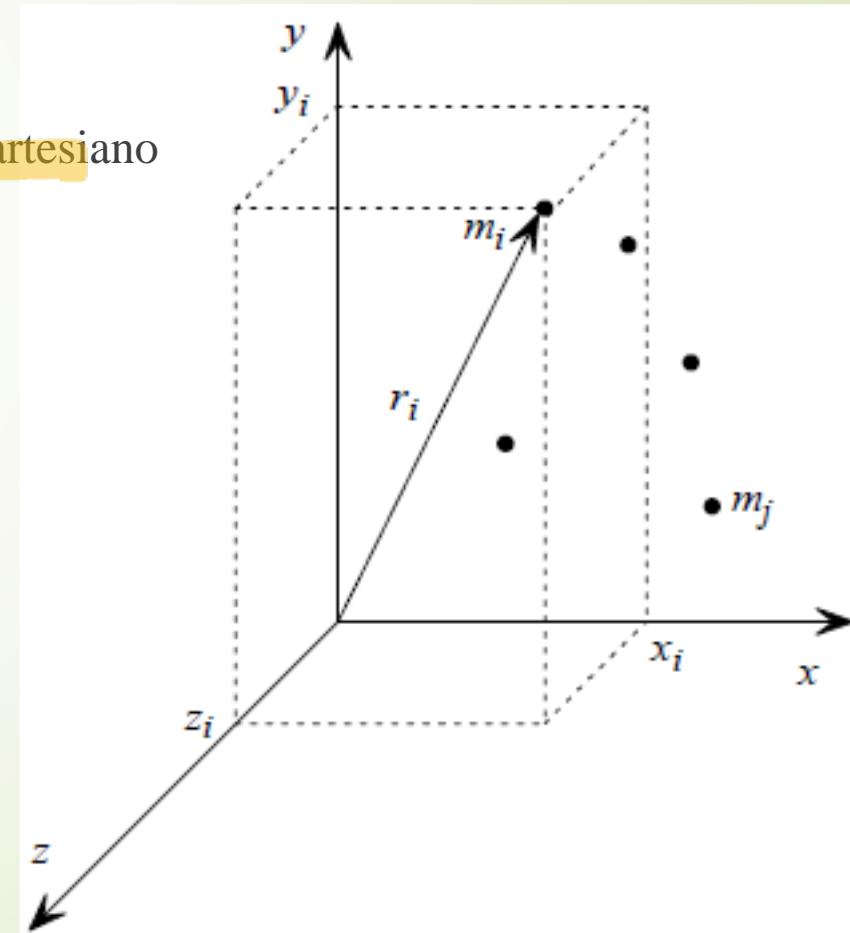
Caso di equilibrio

- equazioni del moto (una per ogni punto):

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{R}_i$$

$$i = 1, \dots, N$$

Caso di moto



I Vincoli

Corpo rigido: insieme di punti materiali vincolati fra loro. Cosa particolare di punti materiali vincolati è stare insieme.

Per **vincolo** agente su un sistema intendiamo qualsiasi causa che limiti il moto del sistema.

► Esempi

- ❖ Una molla traslazionale che congiunge **due punti materiali** ne consente gli spostamenti relativi solo lungo il suo asse
- ❖ Un **punto materiale** posto **sulla superficie** di una sfera potrà muoversi solo sulla superficie o nello spazio esterno ad essa
- ❖ In un **corpo rigido** (aggregazione di punti), le **distanze r_{ij}** tra due generici punti materiali sono vincolate a restare costanti

► Classificazione

Come esprimere analiticamente i vincoli.

- ❖ **vincoli olonomi:** la limitazione da esso imposto alle coordinate dei vari punti è del tipo (caso 1 e 3)

$$g(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_N, y_N, z_N, t) = c \rightarrow \text{equaz.}$$

- ❖ **vincoli anolonomi:** la limitazione da esso imposto alle coordinate dei vari punti è del tipo (caso 2)

$$g(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_N, y_N, z_N, t) \leq c \quad [\dots \geq c]$$

Esempio di **vincolo anolonomo**: due punti connessi attraverso un filo inestensibile,

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \leq L^2$$

(la distanza tra i due estremi è sempre minore o uguale alla lunghezza del filo)

distanza più al massimo diminuire

Punti si possono allontanare da sfera

Se ho 1 vincolo, posso scrivere senz'una relazione.

I Vincoli

Nota: considereremo solo sistemi con vincoli olonomi.

La presenza di vincoli in un sistema meccanico introduce due difficoltà nella scrittura delle equazioni:

1. le coordinate r_i non sono più indipendenti essendo legate dalle equazioni di vincolo
 - ❖ le equazioni di Newton non sono più indipendenti
2. i vincoli esercitano sui punti materiali delle forze (dette forze vincolari)
 - ❖ Le forze vincolare sono ulteriori incognite del problema da portare in conto nei diagrammi delle forze

Per superare la prima difficoltà si ricorre al concetto di coordinate generalizzate, scegliendone opportunamente $3N-m$ (N numero di punti materiali e m numero di vincoli). In vari esempi abbiamo già visto come scegliere le coordinate generalizzate nell'ambito di coordinate posizionali. Nel seguito useremo anche coordinate non di tipo posizionale.

Per superare la seconda difficoltà, cercheremo di pervenire ad una formulazione delle leggi della meccanica in cui non appaiano le forze vincolari. Introdurremo ed utilizzeremo:

- il principio dei lavori virtuali per lo studio degli equilibri
- le equazioni di Lagrange per lo studio del moto

Lo spostamento virtuale

Il principio dei lavori virtuali consente di calcolare le configurazioni di equilibrio statico di un sistema, in modo alternativo all'approccio Newtoniano, senza introdurre le forze vincolari nell'equazioni, come ulteriori incognite (riducendo il numero di eq.).

Esso è basato sul concetto di sostamento virtuale di un sistema

Definizione. Consideriamo un sistema di N punti materiali, e supponiamo che esso sia soggetto ad un vincolo olonomo. Chiameremo sostamento virtuale del sistema all'istante t un qualsiasi spostamento infinitesimo

$$\delta P = (\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \dots, \delta x_N, \delta y_N, \delta z_N)$$

che, a partire dalla configurazione del sistema all'istante t , \rightarrow Quando comincio a osservare il sistema

$$\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1, \dots, \bar{x}_N, \bar{y}_N, \bar{z}_N$$

configurazione che quindi soddisfa il vincolo, porta il sistema in una configurazione adiacente che soddisfa anch'essa il vincolo mantenendo il tempo costante

$$g(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1, \dots, \bar{x}_N, \bar{y}_N, \bar{z}_N, t) = c$$



$$g(\bar{x}_1 + \delta x_1, \bar{y}_1 + \delta y_1, \bar{z}_1 + \delta z_1, \dots, \bar{x}_N + \delta x_N, \bar{y}_N + \delta y_N, \bar{z}_N + \delta z_N, t) = c$$

Nota: t è lo stesso

Sarà nello stesso istante del
tempo del spostam=0.
Oppure wp drifts che
vincolo non dipende da t.

Lo spostamento virtuale – NOTE (1)

- Lo spostamento è definito virtuale piuttosto che reale dato che nessuno spostamento può effettivamente avvenire a tempo costante.
- Se i vincoli non dipendono dal tempo t lo spostamento virtuale e quello reale coincidono.
- Se i vincoli sono mobili (dipendono da t), lo spostamento virtuale considera soltanto lo spostamento del punto sul vincolo (il quale anche se mobile viene considerato costantemente nella stessa posizione che aveva al tempo t), al contrario dello spostamento reale, che considera anche il moto del vincolo.
- Rappresentano tutti i possibili spostamenti che non violano l'equazione dei vincoli.

Esempio: se un punto materiale è vincolato a muoversi restando su una sfera che si dilata nel tempo (che rappresenta l'equazione di vincolo), in uno spostamento virtuale il punto rimarrà sempre su una sfera di raggio costante, mentre nella realtà la sfera varia di raggio (spostamento reale diverso da quello virtuale)

La definizione di spostamento virtuale facilmente si generalizza al caso di m equazioni di vincolo

(Spostamento dell'oggetto del sistema ma non del vincolo) \Rightarrow Ogni singolo vendo deve averlo come spostam. virtuale.

Lo spostamento virtuale – NOTE (2)

Sviluppiamo la funzione g , nel caso di spostamenti virtuali, in serie di Taylor

$$g(\bar{x}_1 + \delta x_1, \bar{y}_1 + \delta y_1, \bar{z}_1 + \delta z_1, \dots, \bar{x}_N + \delta x_N, \bar{y}_N + \delta y_N, \bar{z}_N + \delta z_N, t) = c$$

nell'intorno della posizione $\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1, \dots, \bar{x}_N, \bar{y}_N, \bar{z}_N$

e approssimando al primo termine (cosa lecita nell'ipotesi di spostamenti infinitesimi)

$$\begin{aligned} & g(\bar{x}_1 + \delta x_1, \bar{y}_1 + \delta y_1, \bar{z}_1 + \delta z_1, \dots, \bar{x}_N + \delta x_N, \bar{y}_N + \delta y_N, \bar{z}_N + \delta z_N, t) = \\ & = g(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1, \dots, \bar{x}_N, \bar{y}_N, \bar{z}_N, t) + \frac{\partial g}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial g}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial g}{\partial z_1} \delta z_1 + \dots + \frac{\partial g}{\partial x_N} \delta x_N + \frac{\partial g}{\partial y_N} \delta y_N + \frac{\partial g}{\partial z_N} \delta z_N \end{aligned}$$

La derivata parziale rispetto a t non appare perché consideriamo spostamenti virtuali. In forma compatta

$$g(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1, \dots, \bar{x}_N, \bar{y}_N, \bar{z}_N, t) + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial g}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial g}{\partial z_i} \delta z_i \right) = c$$

$\Delta r \leq 0$

ricordiamo come esempio di Taylor il caso a due variabili

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot h + f_y(x_0, y_0) \cdot k + R(h, k)$$

Lo spostamento virtuale – NOTE (2)



Sostituendo il primo termine con ‘c’, rimane:

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial g}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial g}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0$$

che implica che, in uno spostamento virtuale, solo **3N-1** componenti dello spostamento possono essere fissate ad arbitrio (l’ultima componente deve necessariamente garantire l’uguaglianza di sopra). Ovvero la presenza di un vincolo riduce il numero di gradi libertà.

In presenza di m vincoli, ho m equazioni come la precedente e quindi posso fissare solo fino a **3N-m** componenti dello spostamento in maniera arbitraria.

In generale il numero di componenti arbitrarie coincide con il numero di gradi di libertà del sistema.

Indicheremo il vettore delle componenti dello spostamento del punto materiale i -esimo nello spostamento virtuale complessivo δP come

avendo
e anche
 $\delta r_i = (\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i)^T$

Nel caso di vincoli olonomi, se δP è uno spostamento virtuale lo sarà anche $-\delta P$. Diciamo che in un sistema olonomo i vincoli sono bilaterali e gli spostamenti virtuali sono reversibili.

Il principio dei lavori virtuali

Il lavoro virtuale: lavoro compiuto da un sistema di forze associato a spostamenti virtuali.

ENUNCIATO Originale (Lagrange 1736-1783):

→ Richiama solo forze interne

Condizione Necessaria e Sufficiente perché un sistema materiale sia in equilibrio, è che sia nullo il lavoro virtuale delle forze attive associato a qualunque spostamento virtuale compatibile

In pratica il principio asserisce che per un sistema in equilibrio, se si perturba infinitesimalmente la sua condizione, le forze esterne applicate non compiono lavoro – il sistema non cambia stato energetico – L'energia totale è in una condizione di stazionarietà.

Al fine di formalizzare tale principio, e definire in quali condizioni è valido, supponiamo di scomporre la risultante \mathbf{R}_i di tutte le forze agenti sul punto materiale i-esimo nella somma di due termini:

→ La risultante delle reazioni vincolari $F_i^{(v)}$

→ La risultante delle forze attive, (forze esterne, forze apparenti, forze elastiche, etc.) $F_i^{(a)}$

In una condizione di equilibrio statico risulta

→ Per tutti i punti del sistema

$$F_i^{(a)} + F_i^{(v)} = 0$$

$$1 = 1, \dots, N$$



$$R_i = 0$$

Il principio dei lavori virtuali

Consideriamo, in un generico istante t , uno spostamento virtuale δP del sistema, definito dai vettori $(\delta r_1, \dots, \delta r_N)$, e calcoliamo il lavoro delle forze agenti sul punto associato ad esso.

$$(F_i^{(a)} + F_i^{(v)}) \cdot \delta r_i = 0 \quad 1=1, \dots, N$$

PRODOTTO SCALARE

sommendo su tutti gli N punti materiali (lavoro totale del sistema associato a δP).

$$\sum_{i=1}^N F_i^{(a)} \cdot \delta r_i + \sum_{i=1}^N F_i^{(v)} \cdot \delta r_i = 0$$

Se il secondo termine è 0 si
formula così,

Il primo termine rappresenta il lavoro fatto dalle forze attive, mentre il secondo il lavoro fatto dalle forze di attrito, entrambi in corrispondenza di uno spostamento virtuale.

Dalla definizione siamo interessati al caso in cui il lavoro virtuale associato alle forze attive (ovvero il primo termine) è nullo.

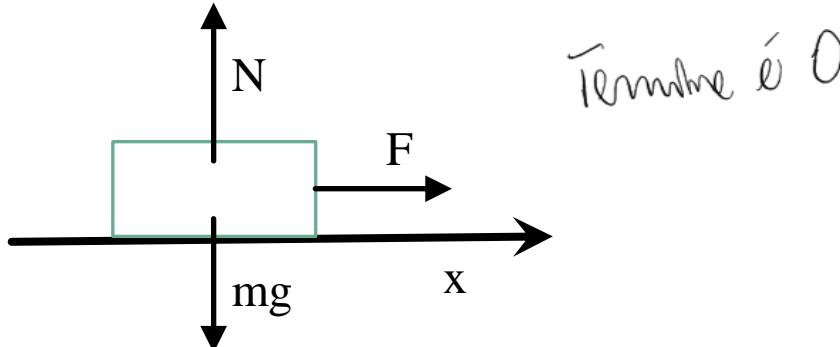
Analizziamo quindi i casi in cui il lavoro virtuale associato alle reazioni vincolari (ovvero il secondo termine) è nullo in modo da eliminarlo dall'equazione precedente.

Il principio dei lavori virtuali

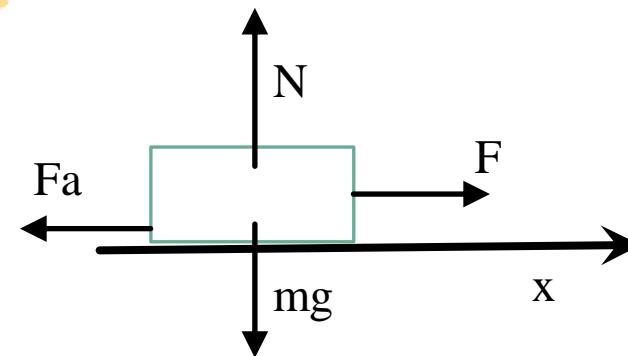
Ricordiamo che quando forza e spostamento non sono allineati il lavoro è il prodotto scalare tra il vettore forza ed il vettore spostamento.

Il lavoro virtuale delle forze vincolari è nullo in tutti i casi in cui lo spostamento virtuale e la reazione vincolare sono tra loro ortogonali (rappresentano la maggior parte degli esempi fatti fino adesso).

I soli casi in cui la condizione non è vera, sono quelli in cui i vincoli presentano attrito secco, per cui la forza di attrito è allineata al direzione di spostamento.



Per uno spostamento orizzontale dovuto alla forza esterna F , il lavoro associato alla reazione vincolare N è nullo perché N e x sono ortogonali



Se considero la forza di attrito secco F_a , il lavoro ad essa associato non è nullo perché F_a e x sono allineati

no altrui, vincolo olonomico è
nel caso di siano forze vincolari,
complessivamente l'effetto del vincolo
è di lavoro nullo.

Il principio dei lavori virtuali

In definitiva possiamo enunciare:

Principio dei lavori virtuali. In un sistema con vincoli olonomi (ovvero formalizzati da un'equazione), privi di attrito (ovvero lisci) e per i quali il lavoro virtuale è nullo (ovvero il lavoro associato alle reazioni vincolari introdotte dal vincolo), *il lavoro delle forze attive applicate in corrispondenza di un qualsiasi spostamento virtuale a partire da una configurazione di equilibrio statica è uguale a zero.*

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

Scomponendo lungo gli assi

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N (F_{ix}^{(a)} \cdot \delta x_i + F_{iy}^{(a)} \cdot \delta y_i + F_{iz}^{(a)} \cdot \delta z_i) = 0$$

→ grado di libertà

?

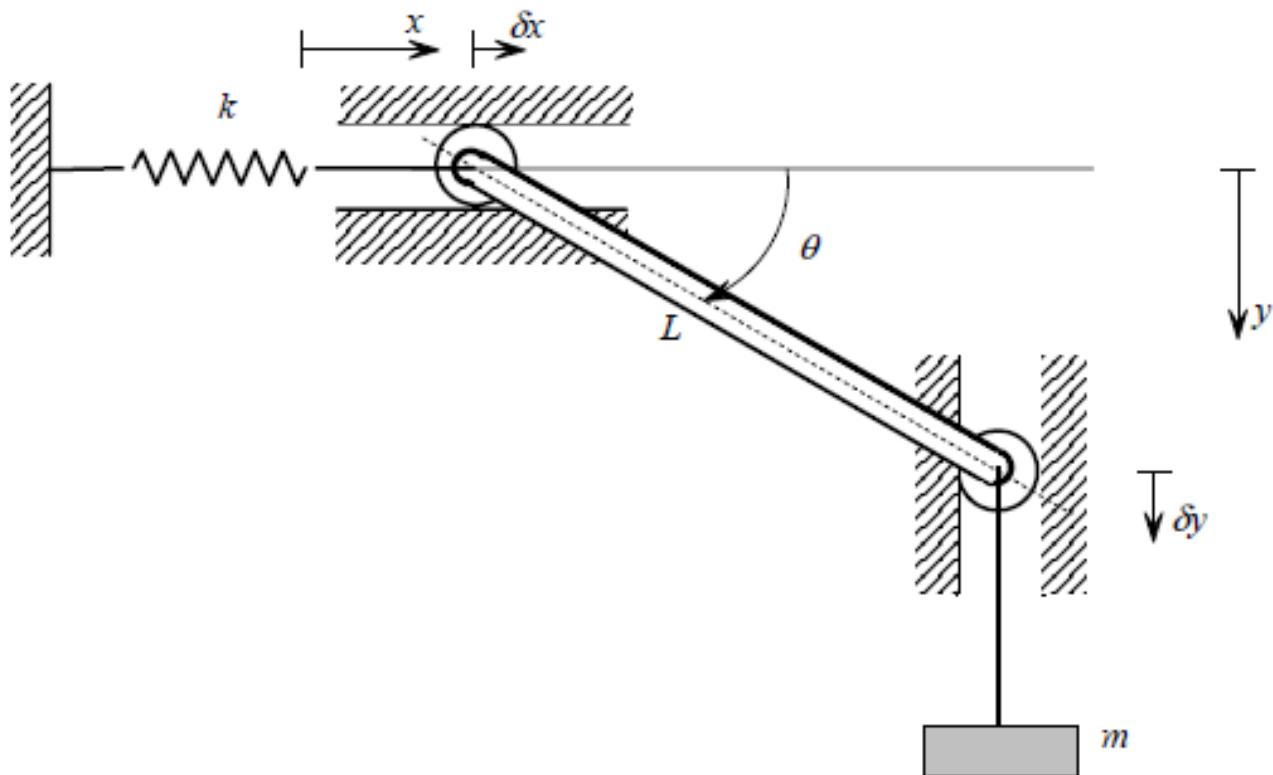
Nel caso di sistemi in equilibrio, imponendo tale condizione per $3N-m$ spostamenti virtuali indipendenti, si ottiene un sistema di $3N-m$ equazioni algebriche (pari al numero di gdl) che, insieme alle m equazioni di vincolo, consente di calcolare le configurazioni di equilibrio del sistema

Esempio

Consideriamo il sistema meccanico in Figura, in assenza di attrito, costituito da un'asta rigida, priva di massa, avente gli estremi liberi di muoversi in due guide, una orizzontale e l'altra verticale. L'estremo che si muove nella guida orizzontale è collegato, attraverso un elemento elastico, ad una parete; l'altro è collegato ad un carico di massa m . Si vuole determinare la posizione di equilibrio statico del sistema

Il sistema ha 1 solo grado di libertà
(m è l'unico elemento inerziale)

Dopo ottenere una sola equazione



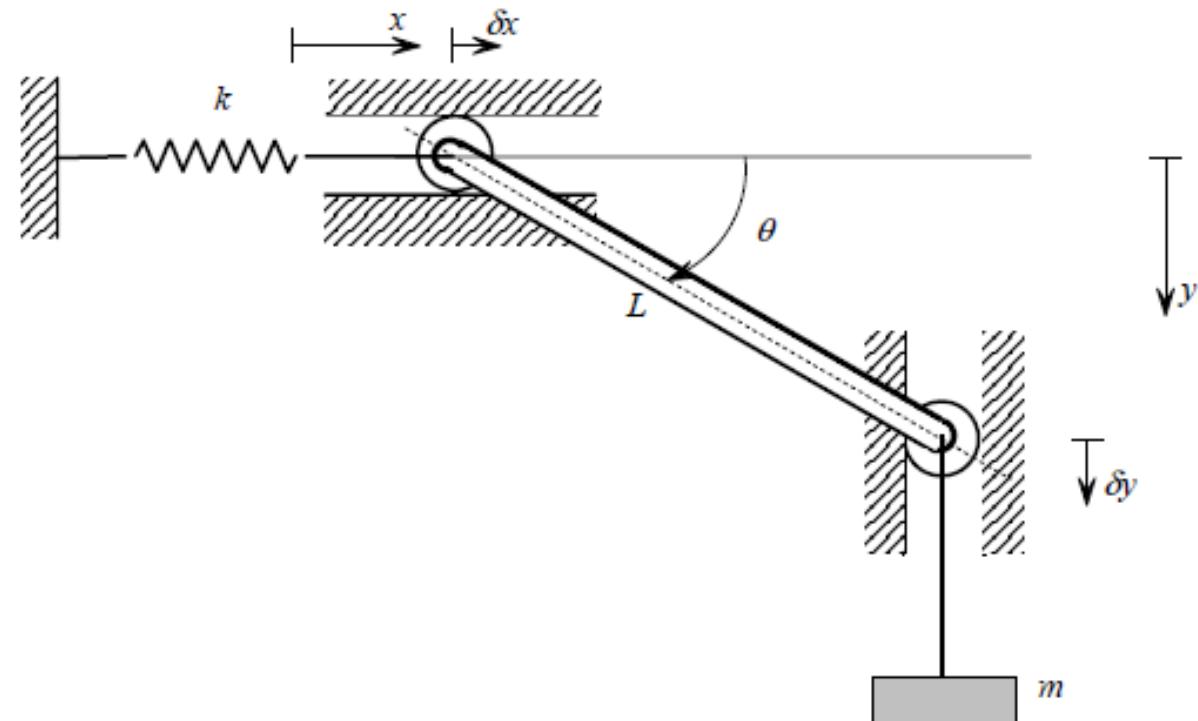
Esempio

Assumiamo che in assenza di carico la sbarretta, sia in posizione orizzontale e scegliamo come coordinata posizionale l'angolo θ per definire in maniera univoca la posizione di equilibrio.

Non siamo in grado di scrivere direttamente una sola equazione in θ e quindi utilizziamo coordinate aggiuntive che ci aiutano. Risultano comode:

- lo spostamento orizzontale del primo capo dell'asta (x), coincidente con l'estremo della molla
- lo spostamento verticale dell'altro capo dell'asta (y)

Queste tre coordinate posizionali scelte sono dipendenti tra loro. Avendo scelto 3 coordinate posizionali per descrivere il sistema, che ha un solo g.d.l., servono 2 equazioni di vincolo



Esempio

Le equazioni di vincolo sono:

$$x = L - L \cos \theta = L(1 - \cos \theta)$$

$$y = L \sin \vartheta$$

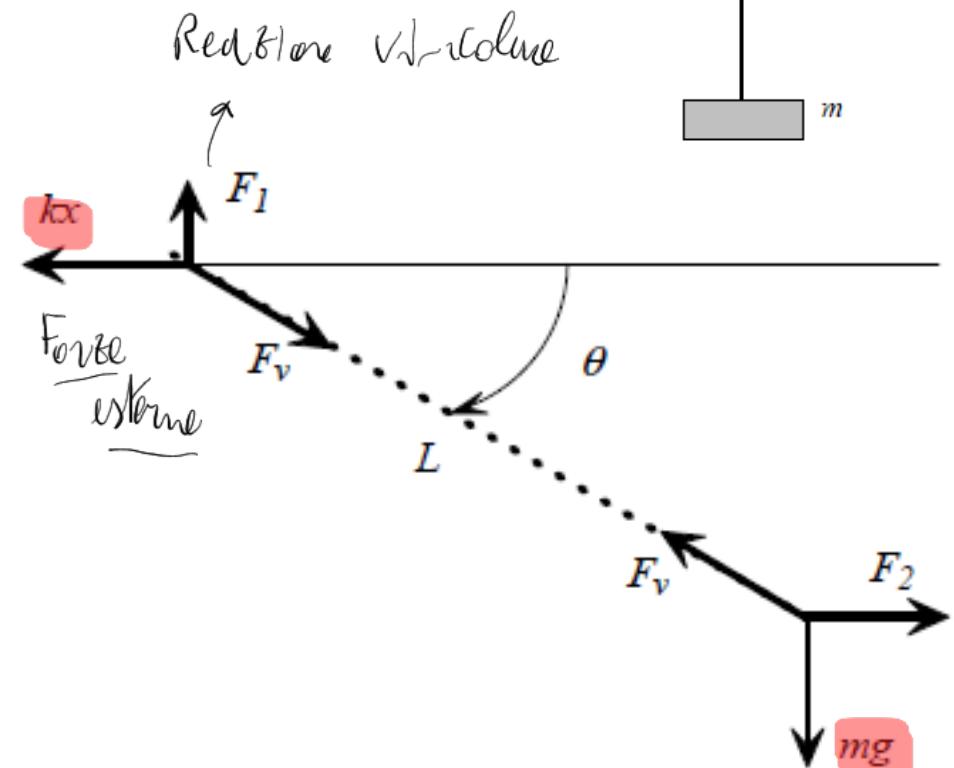
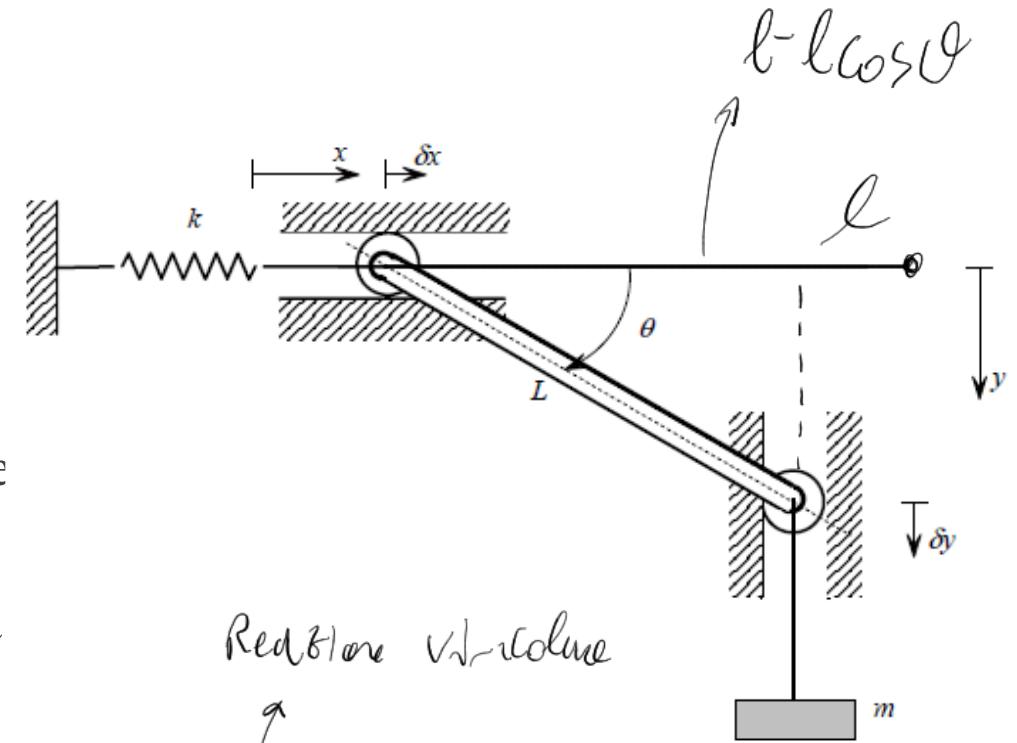
La configurazione di equilibrio statico può essere determinata in due modi:

- ▶ imponendo il bilancio delle forze sugli estremi dell'asta
- ▶ utilizzando il principio dei lavori virtuali

Primo caso.

Serve individuare tutte le forze agenti sull'asta

- ▶ Forze esterne (forza elastica, forza peso)
- ▶ Reazioni vincolari (F_v forza di vincolo dell'asta, F_1 vincolo guida orizzontale, F_2 vincolo guida verticale)



Esempio

Le **equazioni di equilibrio per i due estremi**

$$kx = F_v \cos \theta,$$

$$F_2 = F_v \cos \theta,$$

$$F_1 = F_v \sin \theta$$

$$mg = F_v \sin \theta$$

→ Perché per
i 2 estremi?

Ci conviene! Altrimenti altrami troppi vincoli

Utilizzando le tre equazioni evidenziate nelle tre incognite x, F_v e θ

Sostituisco x nella prima

$$kL(1 - \cos \theta) = F_v \cos \theta \quad F_v \text{ non lo voglio}$$

$$mg = F_v \sin \theta$$

Faccio il rapporto (in modo da eliminare F_v)

$$\frac{kL(1 - \cos \theta)}{mg} = \frac{1}{\tan \theta} \Rightarrow (1 - \cos \theta) \tan \theta = \frac{mg}{kL}$$

I valori di θ , soluzioni di quest'equazione, rappresentano le condizioni di equilibrio statico del sistema

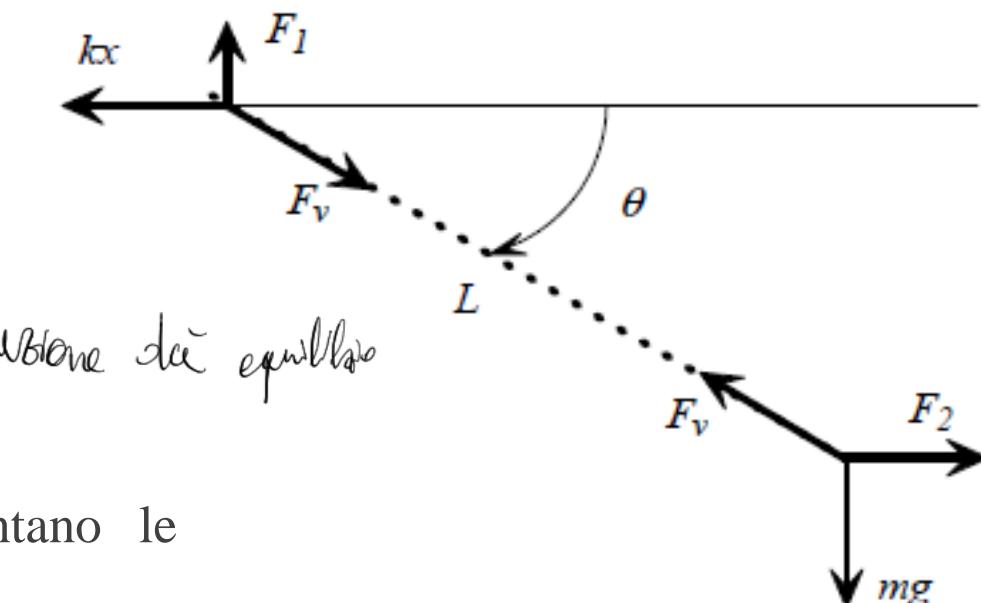
Estremo di sx

Estremo di dx

$$x = L - L \cos \theta = L(1 - \cos \theta)$$

$$y = L \sin \vartheta$$

Estremo di vincolo



Esempio

Secondo caso: il principio dei lavori virtuali.

- Vicoli olonomi? SI
- Assenza di attrito secco? SI
- Lavoro virtuale delle reazioni vincolari nullo? SI

Il generico spostamento virtuale infinitesimo è dato da $(\delta x, \delta y, \delta \theta)$ con le condizioni (derivate dalle equazioni di vincolo):

$$\delta x = L \sin \theta \delta \theta$$

$$\delta y = L \cos \theta \delta \theta$$

Le forze esterne alla sbarretta sono la forza elastica (kx) e la forza peso (mg). Il lavoro da esse fatto in uno spostamento virtuale è:

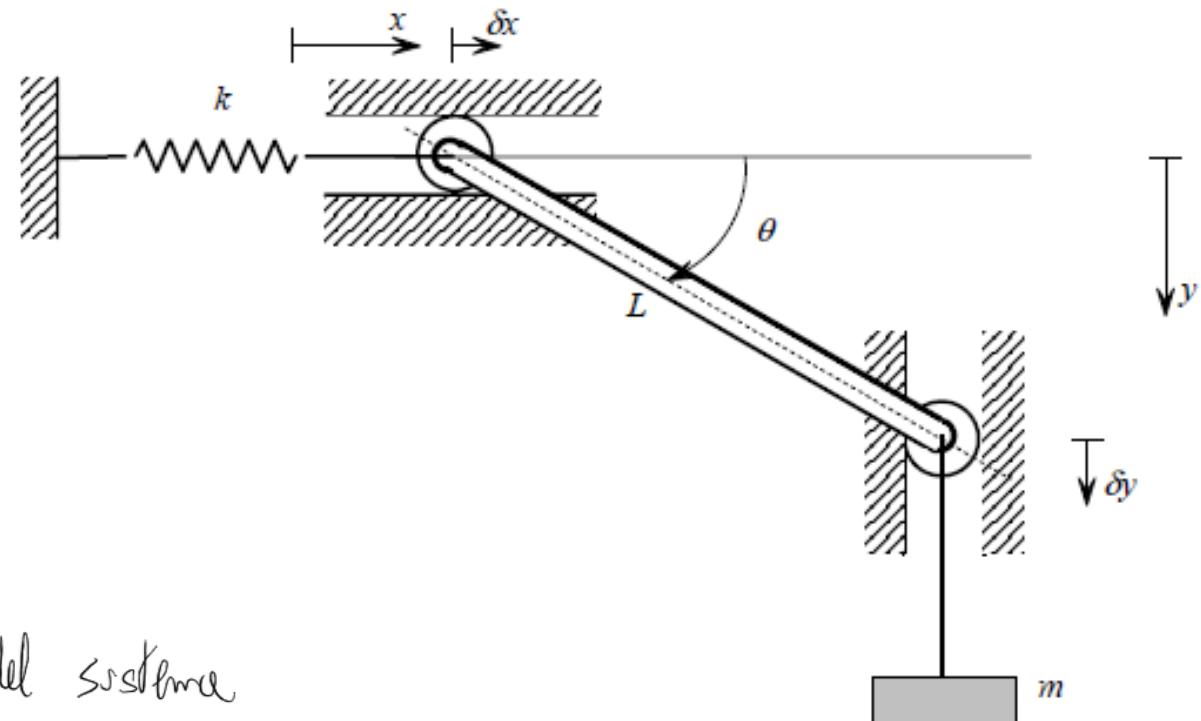
$$\delta W = -kx \delta x + mg \delta y$$

Lavoro complessivo del sistema



$$x = L - L \cos \theta = L(1 - \cos \theta)$$

$$y = L \sin \vartheta$$



Esempio

Sostituisco in δW

$$x = L - L \cos \theta = L(1 - \cos \theta)$$

$$y = L \sin \vartheta$$

$$\delta x = L \sin \theta \delta \theta$$

$$\delta y = L \cos \theta \delta \theta$$



$$\delta W = -kx \delta x + mg \delta y$$

Ottenendo

$$\delta W = -kL(1 - \cos \theta)L \sin \theta \delta \theta + mgL \cos \theta \delta \theta = 0$$

Per principio dei lavori virtuali

Semplifico $\delta \theta$, divido per $kL^2 \cos \theta$, ottenendo infine la stessa equazione del primo caso

$$(1 - \cos \theta) \tan \theta = \frac{mg}{kL}$$

E' da notare che nell'applicazione del principio dei lavori virtuali non è stato necessario considerare le forze di vincolo.

Il principio di d'Alembert

Il principio di d'Alembert consente di estendere i vantaggi del principio dei lavori virtuali allo studio di sistemi in movimento (alla determinazione delle equazioni del moto).

Considerando lo stesso sistema di N particelle introdotto in precedenza, in condizioni di moto, possiamo considerare l'eq. di Newton per ogni punto i -mo

$$m_i \ddot{r}_i = F_i^{(a)} + F_i^{(v)}$$

$$1=1, \dots, N$$



$$-m_i \ddot{r}_i + F_i^{(a)} + F_i^{(v)} = 0$$

$$1=1, \dots, N$$

Ricordando

- ➡ La risultante delle reazioni vincolari $F_i^{(v)}$
- ➡ La risultante delle forze attive $F_i^{(a)}$
- ➡ E riguardando il termine $-m_i \ddot{r}_i$ come un'ulteriore forza, detta forza d'inerzia

Principio di d'Alembert. In un sistema meccanico, in ogni istante la somma di tutte le forze agenti su un generico elemento di massa, compresa la forza di inerzia, è uguale a zero.

Il principio di d'Alembert

Come per il principio dei lavori virtuali, consideriamo, in un generico istante t , uno spostamento virtuale $\delta\mathbf{P}$ del sistema, definito dai vettori $(\delta\mathbf{r}_1, \dots, \delta\mathbf{r}_N)$, e consideriamo il lavoro virtuale compiuto da tutte le forze che agiscono sul sistema (che sarà nullo perché la somma delle forze è nulla). Separiamo il lavoro delle reazioni vincolari dal resto, ottenendo (equivalente della slide 21)

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(v)} \cdot \delta\mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i^{(a)} - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0$$

Lavoro virtuale

Mettendoci nelle stesse ipotesi, (sistema con vincoli olonomi, privi di attrito e per i quali il lavoro virtuale è nullo), possiamo scrivere

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i^{(a)} - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0$$

che è la base delle equazioni di Eulero-Lagrange. L'obiettivo seguente è quello di riscrivere tale equazione in funzione delle funzioni di energia.

Il principio di d'Alembert – Note (1)

Scomponiamo la risultante delle forze attive in due termini,

$$F_i^{(a)} = F_{c,i} + F_{nc,i}$$

dove il primo rappresenta la risultante delle forze conservative (di tipo potenziale, come, ad esempio, le forze elastiche, le forze gravitazionali, etc), e il secondo la risultante delle forze non conservative (quali, ad esempio, le forze esterne). Possiamo riscrivere il lavoro delle forze attive, come somma di tre termini

$$\sum_{i=1}^N (F_i^{(a)} - m_i \ddot{r}_i) \cdot \delta \dot{r}_i = 0$$



$$-\sum_{i=1}^N m_i \ddot{r}_i \cdot \delta \dot{r}_i + \sum_{i=1}^N F_{c,i} \cdot \delta \dot{r}_i + \sum_{i=1}^N F_{nc,i} \cdot \delta \dot{r}_i = 0$$

Per le forze conservative ricordiamo che esse sono uguali al gradiente dell'energia potenziale, cambiato di segno. Indicando con $\mathbf{U}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t)$ l'energia complessiva del sistema (per tutti gli N punti), per ogni singolo punto i-mo, possiamo calcolare le componenti della risultante delle forze conservative come

→ Energia potenziale totale

$$F_{c,i} = -\nabla_{r_i} U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \quad \frac{\partial U}{\partial y_i} \quad \frac{\partial U}{\partial z_i} \right)^T$$

Da cui →

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{r}_i \cdot \delta \dot{r}_i + \sum_{i=1}^N \nabla_{r_i} U \cdot \delta \dot{r}_i - \sum_{i=1}^N F_{nc,i} \cdot \delta \dot{r}_i = 0$$

Le coordinate lagrangiane

Le equazioni del moto di Lagrange vengono formulate in un sistema di coordinate, dette coordinate lagrangiane (non sono sempre coordinate posizionali)

Coordinate lagrangiane. Le $3N$ coordinate cartesiane (x_i, y_i, z_i) dovendo soddisfare le m equazioni di vincolo, si potranno esprimere in funzione di $n=3N-m$ parametri arbitrari (q_1, q_2, \dots, q_n) secondo delle relazioni che, in generale, possono anche variare nel tempo. In forma vettoriale:

N equazioni

$$r_i = r_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

\hookrightarrow Relazione algebrica

$$i = 1, \dots, N$$

numero di coordinate per descrivere m/v
di sistema v.v.

Le relazioni precedenti rappresentano le equazioni di trasformazione dal sistema di $3N$ coordinate cartesiane (x_i, y_i, z_i) al sistema di $3N-m$ coordinate lagrangiane q_i . Esse sono in numero pari ai gradi di libertà.

La scelta delle coordinate lagrangiane è arbitraria. Potrebbero essere un sottoinsieme ($3N-m$) delle coordinate cartesiane, ma anche altro.

Esempi: se un punto è vincolato ad appartenere ad una curva, si potrà assumere come coordinata lagrangiana l'ascissa curvilinea; se alcuni punti sono vincolati a rimanere su una curva descritta da una funzione polinomiale, si possono assumere come coordinate lagrangiane i coefficienti della polinomiale.

Le coordinate lagrangiane - esempio

Supponiamo di avere un sistema di due punti materiali $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$. In questo caso $N=2$ e quindi $3N=6$ (numero di coordinate cartesiane). Supponiamo inoltre che ci siano due relazioni di vincolo ($m=2$), che sono $x_1+y_1+z_1=2$ e $x_2+y_2+z_2=3$. Il numero di coordinate lagrangiane = $3N-m = 4 =$ numero di g.d.l.

Possiamo scegliere arbitrariamente le coord lagrangiane e scrivere le equazioni che le legano alle coord cartesiane.

non prendo $q_3=z_1$ perché è vincolata! La ho delle altre

Esempio 1: scelgo $q_1=x_1$, $q_2=y_1$, dal primo vincolo $z_1=2-q_1-q_2$. Scelgo $q_3=x_2$, $q_4=y_2$, dal secondo vincolo $z_2=3-q_3-q_4$. Ho ottenuto le relazioni r_i (in totale 6) scegliendo coord lagrangiane coincidenti con coordinate cartesiane (sottoinsieme pari a 4)

Esempio 2: scelgo $q_1=x_1$, $q_2=x_1+y_1$, dal primo vincolo $z_1=2-q_2$. Scelgo $q_3=x_2$, $q_4=x_2+z_2$, dal secondo vincolo $y_2=3-q_4$. Ho ottenuto le relazioni r_i (in totale 6) scegliendo coord lagrangiane non coincidenti con coordinate cartesiane (2 sono somme di coordinate cartesiane).

Sostituendo le relazioni r_i nelle equazioni del moto posso riportarle in coordinate lagrangiane.

6 equazioni che legano r_i con q_i

(q anche puote dirlo spazio fisico)

Sceglieremo SP al punt. di cf.

Le coordinate lagrangiane - note

Spostamento virtuale in coordinate lagrangiane. Uno spostamento virtuale, finora espresso in termini degli N vettori $\delta\mathbf{r}_i$ in coordinate cartesiane, può anche essere espresso in coordinate lagrangiane δq_k ($k=1,\dots,n$). Tenendo presente la definizione di spostamento virtuale (spostamento infinitesimo a t costante) e le relazioni tra \mathbf{r}_i e q_i

differenziale della funzione $r_i = \text{spostamento virtuale}$, ma per spostamento virtuale $\delta t = 0$

$$\Rightarrow \frac{\delta r_i}{\delta t} \Big|_{t=0}$$

$$r_i = r_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$



$$\delta r_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

$$i = 1, \dots, N$$

Velocità degli elementi di massa in coordinate lagrangiane. L'espressione della velocità dell' i -esimo elemento di massa in coordinate lagrangiane può essere ricavata come (ogni q_i dipende da t)

$$v_i = \dot{r}_i = \frac{d}{dt} r_i(q_1, \dots, q_n, t) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial r_i}{\partial t} \quad i = 1, \dots, N$$

Sono funzioni del
tempo

Non spariscono mai



Derivazione delle equazioni di Lagrange

Partiamo dal risultato ottenuto formalizzando il principio di d'Alembert, analizzando i singoli termini
(vogliamo passare dalle coord cartesiane a quelle lagrangiane)

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{r}_i \cdot \delta r_i + \sum_{i=1}^N \nabla_{r_i} U \cdot \delta r_i - \sum_{i=1}^N F_{nc,i} \cdot \delta r_i = 0$$

1° 2° 3°

spostamento virtuale nelle n coord. lagrangiane

$$\delta r_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

Partiamo dal primo

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{r}_i \cdot \delta r_i = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{r}_i \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N m_i \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k$$

Aggreghiamo nella sommatoria più interna
tutti i termini dipendenti da i

Riscriviamo il termine nella sommatoria (derivata di un prodotto)

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right) - m_i \dot{r}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right) \right]$$

N.B. negli appunti c'è \ddot{r}_i nell'ultimo termine

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [f(t) \cdot g(t)] &= \frac{df}{dt} g + f \frac{dg}{dt} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{df}{dt} g &= \frac{d}{dt} (f \cdot g) - f \frac{dg}{dt} \\ \text{con } f &= m_i \dot{r}_i, \quad g = \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \end{aligned}$$

Derivazione delle equazioni di Lagrange

Nell'ultimo termine i segni di derivata si possono scambiare di posto

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right) - m_i \dot{r}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right) \right]$$

Si scambiano, ma sarebbe
perché

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{dr_i}{dt} \right) = \frac{\partial v_i}{\partial q_k}$$

(per dimostrare lo scambio possibile posso sfruttare la definizione di velocità calcolata nella slide 35 e la derivata rispetto al tempo di una funzione di più variabili)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_k \partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial q_k}$$

Dalla slide 35
e sue note

deriva
rispetto alla prima variabile

Applico la derivata alla funzione di più variabili $\frac{\partial r_i}{\partial q_k}$, metto in evidenza $\frac{\partial}{\partial q_k}$, e rimane v_i della slide 35

mentre la derivata rispetto a q_k è vero che non è proprio
v_i.

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t), t) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$v_i = \dot{r}_i = \frac{d}{dt} r_i(q_1, \dots, q_n, t) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial r_i}{\partial t}$$

Derivazione delle equazioni di Lagrange

Sempre dalla definizione della velocità (slide 35), applicando la derivata parziale di v_i rispetto a \dot{q}_k rimane un solo termine

$$\frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial r_i}{\partial q_k}$$

Applicando la derivata

$$v_i = \dot{r}_i = \frac{d}{dt} r_i(q_1, \dots, q_n, t) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial r_i}{\partial t}$$

Sostituendo tutto

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right) - m_i \dot{r}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right) \right]$$

Copri la parola

$$\frac{\partial v_i}{\partial q_k}$$

\uparrow

Non
dipende
da q_k
 $\rightarrow 0$.

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{d}{dt} \left(m_i v_i \cdot \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_k} \right) - m_i v_i \cdot \frac{\partial v_i}{\partial q_k} \right]$$

Derivazione delle equazioni di Lagrange

Ritornando al primo termine completo (nella slide 36), sostituendo l'espressione appena ricavata

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{r}_i \cdot \delta r_i = \sum_{k=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^N \left[\frac{d}{dt} \left(m_i v_i \cdot \frac{\partial v_i}{\partial q_k} \right) - m_i v_i \cdot \frac{\partial v_i}{\partial q_k} \right] \right\} \delta q_k =$$

Portando i termini $m_i v_i$ sotto il segno di derivata, diventano $\frac{1}{2} m_i v_i^2$. Poi lasciamo come argomento della sommatoria in i solo i termini che effettivamente dipendono da i, ottenendo

$$= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right\} \delta q_k$$

Utilizzando l'energia cinetica

Non dipende da $\delta = \nu_{\text{in}} \text{ fissa}$

Energia cinetica totale
del sistema (\mathbf{T})

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{r}_i \cdot \delta r_i = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right\} \delta q_k$$

Lavoro fatto dalla forza di inerzia + funzione di coord.
Lagrangiana e dell'energia cinetica
Espressione finale primo termine

Derivazione delle equazioni di Lagrange

Passiamo al secondo termine

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{r}_i \cdot \delta r_i + \sum_{i=1}^N \nabla_{r_i} U \cdot \delta r_i - \sum_{i=1}^N F_{nc,i} \cdot \delta r_i = 0$$

1° 2° 3°

$$\sum_{i=1}^N \nabla_{r_i} U \cdot \delta r_i = \sum_{i=1}^N \frac{\partial U}{\partial r_i} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{k=1}^n \frac{\partial U}{\partial q_k} \delta q_k$$

δr_i si «semplifica» e quindi questo termine non dipende da i

Espressione finale secondo termine

Semplifico S r_i e la sommatoria non ha motivo di esistere

Dalla definizione
di gradiente

Dalla definizione di
spostamento virtuale

$$(\delta_{q_1}, \delta_{q_2}, \delta_{q_3})$$

(slide 35)

$$\delta r_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

Derivazione delle equazioni di Lagrange

Passiamo al terzo termine

$$1^{\circ} \quad \sum_{i=1}^N m_i \ddot{r}_i \cdot \delta r_i + \sum_{i=1}^N \nabla_{r_i} U \cdot \delta r_i - \sum_{i=1}^N F_{nc,i} \cdot \delta r_i = 0$$

Immagini

Ri definizioni

$$\sum_{i=1}^N F_{nc,i} \cdot \delta r_i = \sum_{i=1}^N F_{nc,i} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N F_{nc,i} \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k = \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k$$

Espressione finale
terzo termine

Dalla definizione di
spostamento virtuale
(slide 35)

$$\delta r_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

Scambio l'ordine
delle sommatorie

Sicuramente
è un lavoro

Definisco le forze generalizzate Q_k .
NB. Potrebbero non essere delle
forze perché le δq_k potrebbero non
essere spostamenti, ma il prodotto
 $Q_k \delta q_k$ deve essere un lavoro

Derivazione delle equazioni di Lagrange

Sostituendo tutti i termini espressi in funzione delle coordinate generalizzate (slides 39, 40, 41)

$$\begin{aligned}
 & \text{1}^{\circ} \quad \sum_{i=1}^N m_i \ddot{r}_i \cdot \delta r_i \\
 & \text{2}^{\circ} \quad + \sum_{i=1}^N \nabla_{r_i} U \cdot \delta r_i \\
 & \text{3}^{\circ} \quad - \sum_{i=1}^N F_{nc,i} \cdot \delta r_i = 0
 \end{aligned}$$

$m = \text{numero di } q_k$

$$\sum_{k=1}^m \left\{ \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right] + \frac{\partial U}{\partial q_k} - Q_k \right\} \delta q_k = 0$$

Coordinate lagrangiane scelte
indipendentemente

Dalla definizione di coordinate lagrangiane, in presenza di vincoli olonomi, le δq_k possono essere scelte indipendenti e quindi la sommatoria di sopra è nulla solo se tutti i coefficienti di δq_k (termini tra graffe) sono nulli, ovvero

una loro combinaz.
lineare $\neq 0$ sempre

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial(T - U)}{\partial q_k} = Q_k,$$

$k = 1, \dots, n$

↳ una per ogni
degli n gradi di libertà

equazioni di
Lagrange del moto

Equazioni di Lagrange del moto - NOTE

- ▶ Per la loro scrittura, non è necessario far riferimento alle forze vincolari. Non appaiono
- ▶ Richiedono solo la determinazione dell'energia cinetica totale (T), dell'energia potenziale totale (U), in coordinate lagrangiane, e la determinazione delle forze generalizzate

↓ Di fatto al sistema,
Totale.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial(T - U)}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = 1, \dots, n$$

- ▶ Le Q_k portano in conto tutte le forze non derivanti da un potenziale. Quindi sono incluse anche le forze dipendenti dalla velocità, come le **forze d'attrito viscoso**. \rightarrow elementi che mancavano
- ▶ Tra gli argomenti trattati le uniche forze che non sono incluse sono le **forze di attrito secco**, le quali, abbiamo già chiarito che compiono lavoro in presenza di uno spostamento virtuale
- ▶ In presenza di forze di attrito secco l'approccio lagrangiano non è utilizzabile. Bisogna ricorrere per forza all'approccio Newtoniano.

Equazioni di Lagrange – forze viscose

Ricordiamo che le **forze di attrito viscoso** (associate agli elementi di dissipazione) sono legate alle **velocità** mediante i **coefficients di viscosità** β e che si **oppongono al moto del sistema**. Per ogni punto i -mo possiamo **formalizzarle come riportate qui di seguito** e vanno **calcolate per essere portate in conto nelle Q_k** .

$$F_i = -\beta v_i$$

Tuttavia è possibile **definire una funzione di dissipazione scalare** che consente di separare le **forze viscose** dalle Q_k , e portare in conto nelle **equazioni di Lagrange** il loro effetto in maniera più semplice

- Ricordiamo l'**espressione delle Q_k**
- Ed il legame tra v_i e r_i (slide 38)

$$\frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial r_i}{\partial q_k}$$

$$Q_k = \sum_{i=1}^N F_{nc,i} \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_k}$$

$$Q_k = \sum_{i=1}^N F_{nc,i} \frac{\partial r_i}{\partial q_k} = - \sum_{i=1}^N \beta v_i \frac{\partial r_i}{\partial q_k}$$

$$-\sum_{i=1}^N \beta v_i \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_k} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \beta v_i^2 \right) = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k}$$

Uniche forze sono attrito viscoso

É una rotante, funzione di dissipazione o funzione di Rayleigh

N.B. Questa parte è presente negli appunti integrativi sempre disponibili sul sito docente

Equazioni di Lagrange con funzione di dissipazione

Le equazioni di Lagrange complete con il termine relativo all'attrito viscoso diventano (funzione di dissipazione):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial(T - U)}{\partial q_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} = Q_k \quad k = 1, \dots, n$$

Le funzioni scalari T , U , D , definite rispetto alle coordinate cartesiane si possono riportare in coordinate lagrangiane usando le equazioni che legano tra loro le coordinate (slide 33),

*Coordinate, dipende siano
dalle \dot{q}*

$r_i = r_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ $i = 1, \dots, N$

Velocità dipende da q e \dot{q} \Rightarrow T e D dipendono da \dot{q} e D .

$$T = T(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, q_1, q_2, \dots, q_n) \quad U = U(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad D = D(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$$

Definiamo inoltre la funzione Lagrangiana $L(\dot{q}, q) = T(\dot{q}, q) - U(q)$, e riscriviamo le equazioni

\Rightarrow U dipende solo da q e non da \dot{q}

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\dot{q}, q)}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L(\dot{q}, q)}{\partial q_k} + \frac{\partial D(\dot{q})}{\partial \dot{q}_k} = Q_k \quad k = 1, \dots, n$$

**Forma completa
che useremo!**

Applicazione equazioni di Lagrange (1/2)

Procedura (anche in presenza di corpi rigidi)

1. Si sceglie un insieme di coordinate posizionali, non necessariamente cartesiane né pari al numero di gradi di libertà, comode per ricavare l'energia cinetica e l'energia potenziale del sistema. Indicando con N il numero di tali coordinate (e non più il numero di punti materiali come finora assunto), saranno:

$$x_1, x_2, \dots, x_N$$

2. Si sceglie un insieme di coordinate lagrangiane, e quindi di parametri indipendenti, in numero pari al numero n di gradi di libertà ($n \leq N$), legate, in maniera univoca, alle coordinate posizionali:

$$q_1, q_2, \dots, q_n$$

3. Si determinano le equazioni di trasformazione tra coordinate posizionali e coordinate lagrangiane:

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \quad i = 1, \dots, N$$

4. Si determina l'espressione dell'energia cinetica complessiva, prima in coordinate posizionali (più comode) e poi in coordinate lagrangiane utilizzando le trasformazioni ricavate al punto 3:

$$T = T(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, q_1, q_2, \dots, q_n)$$

Applicazione equazioni di Lagrange (2/2)

5. Si determina l'espressione dell'energia potenziale complessiva, prima in coordinate posizionali (più comode) e poi in coordinate lagrangiane utilizzando le trasformazioni ricavate al punto 3:

$$U = U(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

6. Si determina l'espressione della funzione di dissipazione, prima in coordinate posizionali (più comode) e poi in coordinate lagrangiane utilizzando le trasformazioni ricavate al punto 3:

$$D = D(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$$

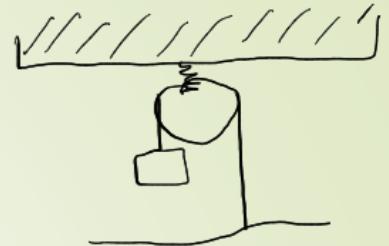
7. Si individuano le forze generalizzate Q_k agenti sul sistema. (Saranno inquessate)

8. Si scrivono le n equazioni del moto nella forma (pari al numero di g.d.l.)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\dot{q}, q)}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L(\dot{q}, q)}{\partial q_k} + \frac{\partial D(\dot{q})}{\partial \dot{q}_k} = Q_k \quad k = 1, \dots, n$$

Tante quantità sono quelle
di libertà.

accanto alle K-ème coordinate.



Esempio 2.16

Ricordate l'esempio 2.16 (slides da 3 a 7)?

- Ha 1 g.d.l. ($n=1$)
- Abbiamo utilizzato 3 equazioni di moto nelle coordinate posizionali $x(t)$, $y(t)$, $\vartheta(t)$ ($N=3$)
- Abbiamo utilizzato 2 equazioni di vincolo: $x=2y$ e $y=R\vartheta \rightarrow y=\frac{x}{2}$, $\vartheta = \frac{x}{2R}$
- Con l'approccio lagrangiano scriviamo l'energia complessiva del sistema

Energia cinetica ed energia potenziale ($U=0$ all'altezza del soffitto)

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\vartheta}^2$$

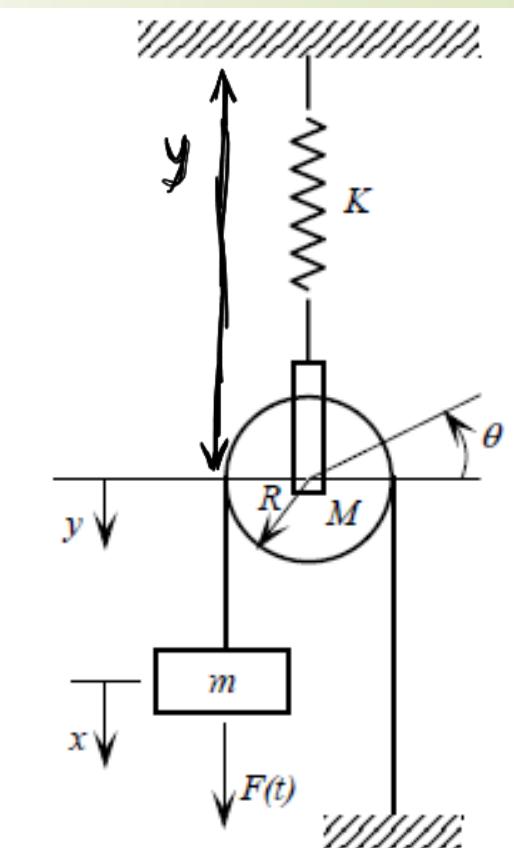
$$U = \frac{1}{2}Ky^2 - Mgy - mgx$$

$\hookrightarrow (U=0 \text{ per ogni inerzia da posizione di riferimento})$

Sostituendo le relazioni di vincolo

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\vartheta}^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{8}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}MR^2 \frac{\dot{x}^2}{4R^2} = \frac{1}{2} \left(m + \frac{3}{8}M \right) \dot{x}^2$$

$$U = \frac{1}{2}Ky^2 - Mgy - mgx = \frac{1}{8}Kx^2 - Mg\frac{x}{2} - mgx = \frac{1}{8}Kx^2 - \left(\frac{M}{2} + m \right) gx$$



Esempio 2.16

Per quanto riguarda le forze attive non conservative, l'unica è l'ingresso F , quindi $\mathbf{Q} = \mathbf{F}$

Tutta l'energia è funzione di una sola coordinata posizionale (x) e possiamo considerarla come l'unica coordinata lagrangiana (q) necessaria per scrivere l'unica eq. di lagrange associata al moto del sistema.

Possiamo passare direttamente al punto 8 della slide 47 con $q=x$

$$\text{con } q = x \rightarrow L(\dot{q}, q) = T(\dot{q}) - U(q)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\dot{q}, q)}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T(\dot{q})}{\partial \dot{q}} \right); \quad - \frac{\partial L(\dot{q}, q)}{\partial q} = + \frac{\partial U(q)}{\partial q};$$

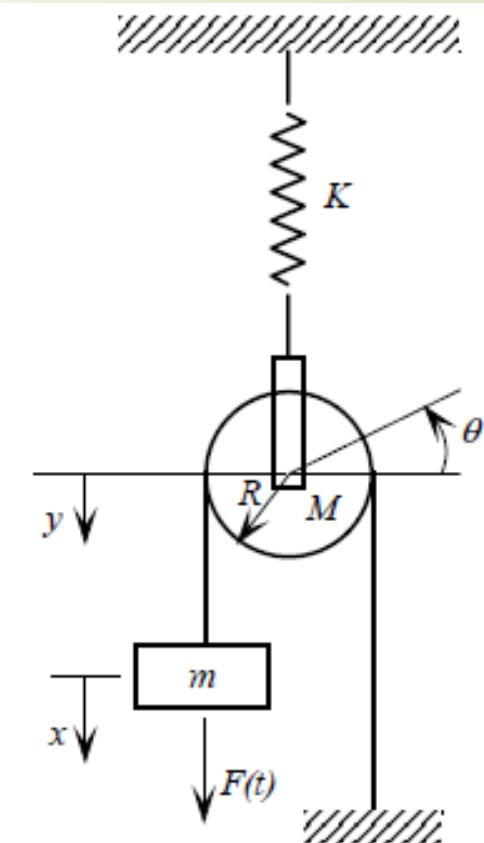
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \left(m + \frac{3}{8} M \right) \dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = \left(m + \frac{3}{8} M \right) \ddot{x}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = + \frac{1}{4} Kx - \left(m + \frac{M}{2} \right) g$$

Non c'è D

La stessa della slide 7

$$\left(m + \frac{3}{8} M \right) \ddot{x} + \frac{1}{4} Kx + \left(\frac{M}{2} + m \right) g = F$$



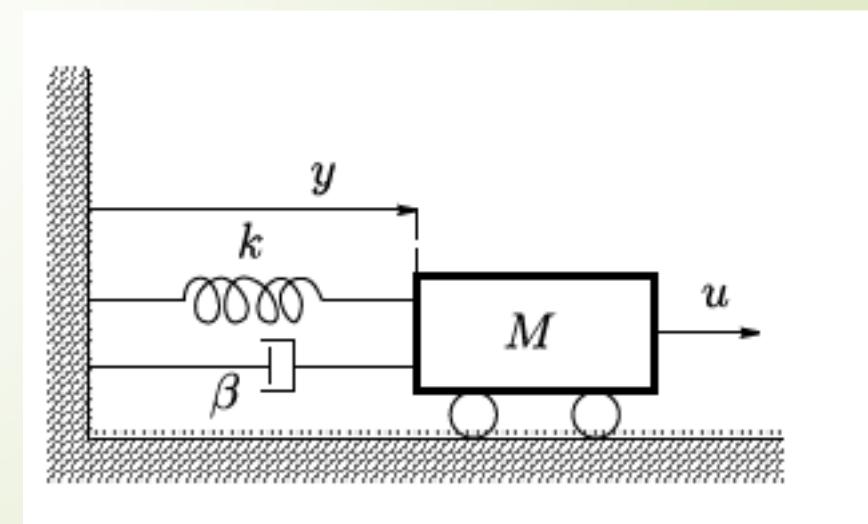
Sistema massa-molla-smorzatore

Dato il sistema in figura, dove y indica la posizione orizzontale della massa M , la quale è soggetta ad una forza d'ingresso u , vogliamo determinare le equazioni del moto mediante le equazioni di Lagrange.

- Il sistema ha un grado di libertà (cerchiamo una sola eq. del moto)
- Utilizzando la coordinata cartesiana y siamo facilmente in grado di scrivere le funzioni T , U , D (passo 1)
- Scegliamo l'unica coordinata lagrangiana coincidente con la coordinata cartesiana $q=y$ (passi 2 e 3)
- Ricaviamo T (Energia cinetica), U (Energia potenziale) e D (Funzione di dissipazione) (passi 4, 5 e 6)

$$T = \frac{1}{2} M \dot{q}^2, \quad U = \frac{1}{2} k q^2, \quad D = \frac{1}{2} \beta \dot{q}^2$$

- L'unica forza generalizzata agente è la forza u , quindi $Q_k=u$ (passo 7)
- Scrivo l'unica eq. di lagrange (numero g.d.l. $n=1$)
 - ricavo la lagrangiana, calcolo i singoli termini e li combino



Sistema massa-molla-smorzatore

Calcolo delle lagrangiana

$$L(q, \dot{q}) = T - U = \frac{1}{2} M \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k q^2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\dot{q}, q)}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L(\dot{q}, q)}{\partial q_k} + \frac{\partial D(\dot{q})}{\partial \dot{q}_k} = Q_k \quad k = 1, \dots, n$$

Calcolo delle derivate

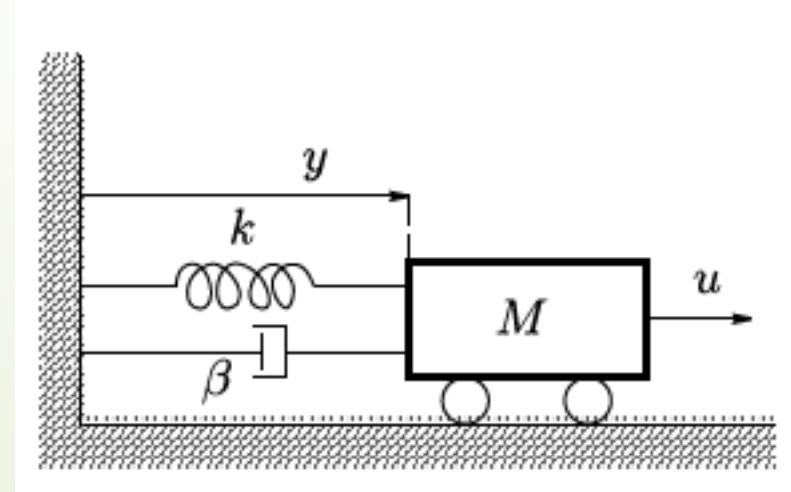
$$\frac{\partial L(\dot{q}, \dot{q})}{\partial \dot{q}} = M \dot{q} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\dot{q}, \dot{q})}{\partial \dot{q}_k} \right) = M \ddot{q}$$

$$\frac{\partial L(\dot{q}, \dot{q})}{\partial q} = -kq, \quad \frac{\partial D(\dot{q})}{\partial \dot{q}} = \beta \dot{q}$$

Eq. di Lagrange (eq. del moto)

$$M \ddot{q} + \beta \dot{q} + kq = u$$

Che è la stessa ricavata per l'esempio 2.3 (slide 18 prima parte)



Sistema massa-molla-smorzatore

Dopo aver ricavato le equazioni del moto in coordinate generalizzate, se vogliamo ricavare un modello i-s-u, dobbiamo fissare le $2n$ variabili di stato (pari al doppio dei g.d.l.) e le uscite

$$M\ddot{q}(t) + \beta\dot{q}(t) + kq(t) = u(t)$$

L'uscita dipende da cosa vogliamo osservare del modello. Supponiamo di considerare come uscita la posizione della massa M .

Le variabili di stato (per questo esempio pari a 2) si possono scegliere coincidenti con le coordinate lagrangiane e le sue derivate (in questo esempio coincidono con posizione e velocità della massa). Ricapitolando:

$$x_1(t) = q(t), \quad x_2(t) = \dot{q}(t), \quad y(t) = q(t)$$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k}{M}x_1(t) - \frac{\beta}{M}x_2(t) + \frac{1}{M}u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$



$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{\beta}{M} \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}u \\ y &= [1 \ 0]x\end{aligned}$$

Esercizio d'esame (24 giugno 2019)

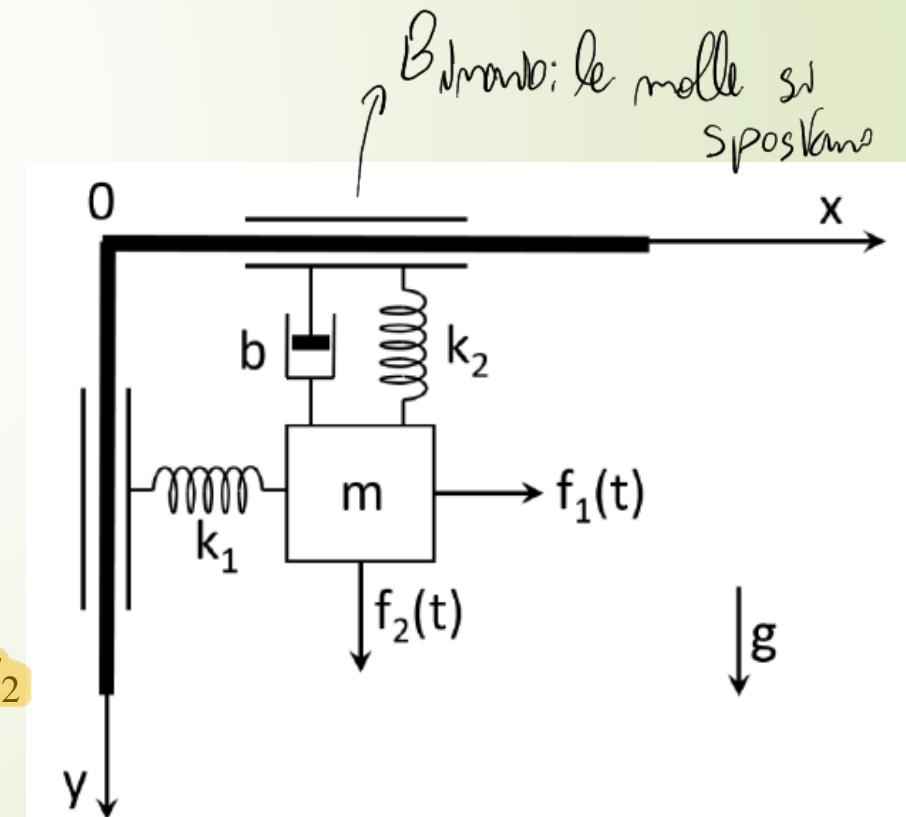
Ricavare un modello ingresso-stato-uscita per il sistema meccanico in figura, tenendo conto anche della gravità g . Considerare come uscita la posizione verticale della massa.

- 2 g.d.l. $\rightarrow n = 2$ (numero variabili di stato = $2n = 4$)
- Equazioni del moto necessarie = $n = 2$
- Coordinate cartesiane convenienti per scrivere T , U e D : x e y
- Coordinate generalizzate = coordinate cartesiane $\rightarrow q_1 = x$, $q_2 = y$
- Energia cinetica

$$T(\dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 = \frac{1}{2}m\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{q}_2^2$$

- Energia potenziale

$$U(q_1, q_2) = \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}k_2y^2 - mgy = \frac{1}{2}k_1q_1^2 + \frac{1}{2}k_2q_2^2 - mgq_2$$



Esercizio d'esame

- Funzione di dissipazione

$$D(\dot{q}_2) = \frac{1}{2} \beta \dot{y}^2 = \frac{1}{2} \beta \dot{q}_2^2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\dot{q}, q)}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L(\dot{q}, q)}{\partial q_k} + \frac{\partial D(\dot{q})}{\partial \dot{q}_k} = Q_k \quad k=1, \dots, n$$

- Lagrangiana

$$L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = T(\dot{q}_1, \dot{q}_2) - U(q_1, q_2) = \frac{1}{2} m \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{q}_2^2 - \frac{1}{2} k_1 q_1^2 - \frac{1}{2} k_2 q_2^2 + mg q_2$$

- Forze generalizzate f_1 agente lungo q_1 e f_2 agente lungo q_2

- Scrivo $n=2$ equazioni di Lagrange ($k=1$ e $k=2$)

- Per $k=1$

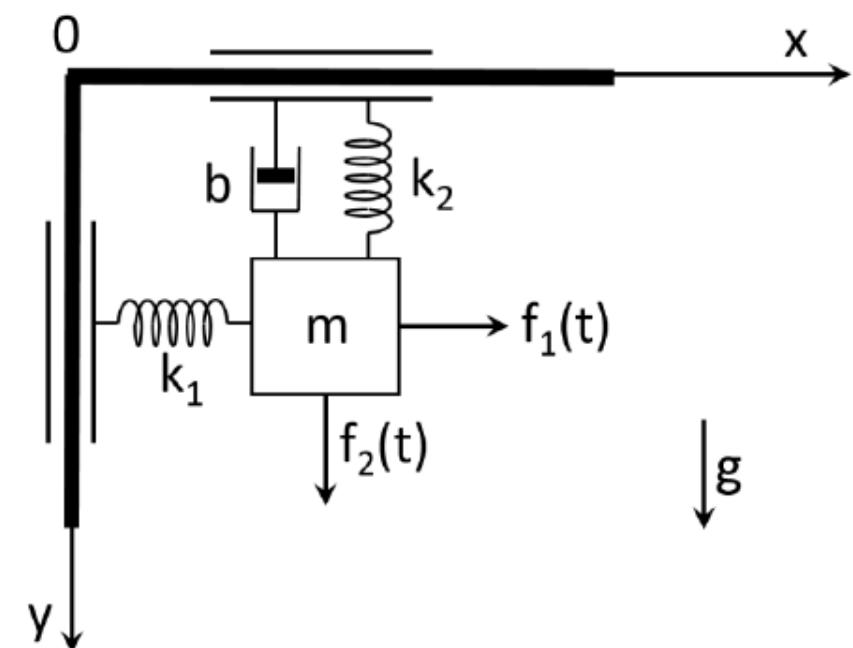
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)}{\partial \dot{q}_1} \right) = m \ddot{q}_1 \quad \frac{\partial L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)}{\partial q_1} = -k_1 q_1$$

$$\frac{\partial D(\dot{q}_2)}{\partial \dot{q}_1} = 0 \quad Q_1 = f_1$$

$$m \ddot{q}_1 + k_1 q_1 = f_1$$

prima eq. del moto,
prima eq. di Lagrange

*upward force f_1
at angle θ
 q_1
 f_2 at angle q_2 .*



Esercizio d'esame

- Per $k=2$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)}{\partial \dot{q}_2} \right) = m\ddot{q}_2 \quad \frac{\partial L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)}{\partial q_2} = -k_2 q_2 + mg \quad \frac{\partial D(\dot{q}_2)}{\partial \dot{q}_2} = \beta \dot{q}_2 \quad Q_2 = f_2$$

$$m\ddot{q}_2 + k_2 q_2 - mg + \beta \dot{q}_2 = f_2$$

seconda eq. del moto,
seconda eq. di Lagrange

- Fissiamo le variabili di stato ($2n = 4$) coincidenti con coordinate generalizzate e sue derivate (l'ordine non è importante), gli ingressi e le uscite

$$x_1 = q_1, x_2 = q_2, x_3 = \dot{q}_1, x_4 = \dot{q}_2 \rightarrow$$

- g è un ingresso del sistema, possiamo considerarlo come terzo ingresso o considerare un unico ingresso lungo la verticale dato dalla somma delle forze f_2 ed mg

$$u_1 = f_1 \quad u_2 = f_2 + mg$$

$$\dot{x}_1 = x_3$$

$$\dot{x}_2 = x_4$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{k_1}{m} x_1 + \frac{1}{m} f_1$$

$$\dot{x}_4 = -\frac{k_2}{m} x_2 - \frac{\beta}{m} x_4 + g + \frac{1}{m} f_2$$

$$y = x_2$$

Esercizio d'esame

- Riscrivendo il modello i-s-u con le u definite

$$\dot{x}_1 = x_3$$

$$\dot{x}_2 = x_4$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{k_1}{m}x_1 + \frac{1}{m}u_1$$

$$\dot{x}_4 = -\frac{k_2}{m}x_2 - \frac{\beta}{m}x_4 + \frac{1}{m}u_2$$

$$y = x_2$$

con

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k_2}{m} & 0 & -\frac{\beta}{m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \ 1 \ 0 \ 0]x$$

Esempio - NOTE

- Vicoli olonomi: si vede direttamente dalle equazioni di vincolo
- Assenza di attrito secco: è un dato del problema
- Lavoro virtuale delle reazioni vincolari nullo: abbiamo lo spostamento virtuale infinitesimo ($\delta x, \delta y, \delta\theta$) e le reazioni vincolari F_1, F_2, F_v

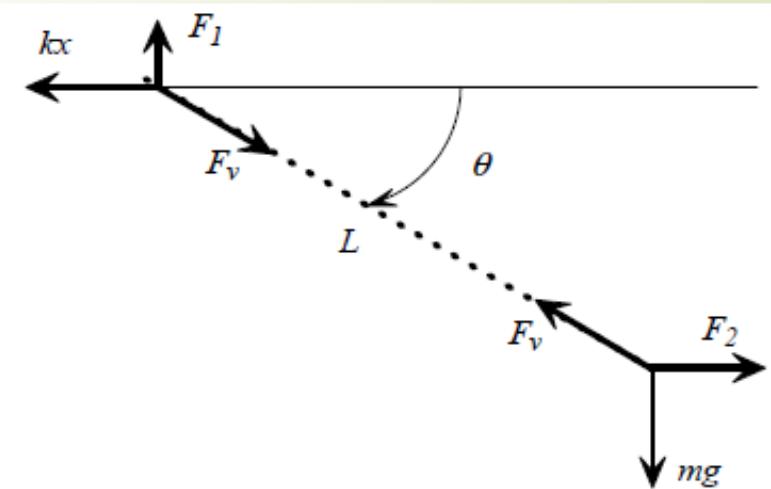
- ❖ F_1 subisce uno spostamento δx , ortogonale alla forza, quindi il lavoro è nullo
- ❖ F_2 subisce uno spostamento δy , ortogonale alla forza, quindi il lavoro è nullo
- ❖ F_v subisce a sx uno spostamento δx (verso dx) che forma un angolo θ
- ❖ F_v subisce a dx uno spostamento δy (verso il basso) che forma un angolo $90^\circ + \theta$



Per F_v applico il prodotto scalare

$$\begin{aligned}\delta W &= F_v \delta x \cos \theta + F_v \delta y \cos(90^\circ + \theta) = \\ &= F_v \delta x \cos \theta - F_v \delta y \sin \theta = \\ &= F_v L \sin \theta \delta \theta \cos \theta - F_v L \cos \theta \delta \theta \sin \theta = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta x &= L \sin \theta \delta \theta \\ \delta y &= L \cos \theta \delta \theta\end{aligned}$$



Le coordinate lagrangiane - note

Per una funzione di più variabili.

$$f = f(x, y, z, t)$$

Il differenziale è

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

Per gli spostamenti virtuali $dt=0$ e quindi l'ultimo termine non appare

La derivata rispetto al tempo

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t), t) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

