Capitolo 5 – Funzione di trasferimento

Funzione di trasferimento di sistemi con ritardo

- Dato un sistema dinamico LTI con ritardo sull'ingresso

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t-\tau)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t-\tau)$$

Prima di avere effetto impiego τ secondi

Voglio funz. di trasferimento.

- Trasformando secondo Laplace a partire da condizione iniziale nulla (evoluzione forzata) si ha (per la prop. di traslazione nel tempo)

$$sX(s) = AX(s) + BU(s)e^{-s\tau} \Rightarrow X(s) = (sI-A)^{-1}BU(s)e^{-s\tau}$$
$$Y(s) = CX(s) + DU(s)e^{-s\tau}$$

$$Y(s) = C(sI-A)^{-1}BU(s)e^{-s\tau} + DU(s)e^{-s\tau}$$
$$= [C(sI-A)^{-1}B + D]U(s)e^{-s\tau}$$

- Indicando con $G'(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$ la fdt del sistema senza ritardo ($\tau = 0$), la fdt del sistema di partenza è

$$G'(s)e^{-s\tau}$$

  - Che non è razionale fratta!

- Analogo risultato vale per sistemi dinamici LTI con ritardo sull'uscita

esempio: sensore deve leggere l'uscita

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t+\tau) = Cx(t) + Du(t)$$

Ho quindi $\boxed{G(s) = G'(s)\, e^{-s\tau}}$ e cioè $g_y(t) = g_y'(t-\tau)$

Qui non posso parlare di poli perché non è raz. fratta.

* e lo è se $G'(s)$ ha poli a parte reale negativa

Ma se g'_y è sommabile*, allora lo è anche $g'_y(t-\tau) = g_y(t)$, che è la stessa funz. con ritardo.

Quindi $G(s)$ è stabile BIBO

Parametri della funzione di trasferimento

Forme fattorizzate

al denominatore è monico, ma al numeratore ho $b_n \neq 1$

n non può essere magg. di sotto.

$$G(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

tutte le sing. dell'origine le raccolgo qui

$$= \frac{\rho \prod_i (s - z_i) \prod_i (s^2 + 2\zeta_i \alpha_{ni} s + \alpha_{ni}^2)}{s^g \prod_i (s - p_i) \prod_i (s^2 + 2\xi_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2)}$$

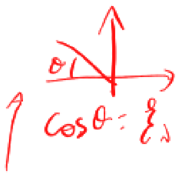
Scrivo le radici complesse così → modulo è α_{ns} con $\zeta < 1$

$$= \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_i (1 + s\tau_i) \prod_i (1 + 2\zeta_i/\alpha_{ni} s + s^2/\alpha_{ni}^2)}{\prod_i (1 + sT_i) \prod_i (1 + 2\xi_i/\omega_{ni} s + s^2/\omega_{ni}^2)}$$

Forma diversa per avere termini noti pari a +1

- ρ: **costante di trasferimento**
- g: **tipo** (è nullo se non ci sono singolarità nell'origine, positivo se ci sono poli nell'origine, negativo se ci sono zeri nell'origine)

  + poli che zeri
- μ: **guadagno**
- z_i: **zeri** reali non nulli
- p_i: **poli** reali non nulli
- $\tau_i = -1/z_i$: **costanti di tempo** relative agli zeri reali (se $z_i < 0 \Rightarrow \tau_i > 0$ e lo zero si trova nel semipiano sinistro)
- $T_i = -1/p_i$: **costanti di tempo** relative ai poli reali (se $p_i < 0 \Rightarrow T_i > 0$ e il polo si trova nel semipiano sinistro)



- ζ_i, α_{ni}: **smorzamenti** e **pulsazioni naturali** relativi agli zeri complessi e coniugati (se $\zeta_i > 0$ gli zeri sono nel semipiano sinistro)
- ξ_i, ω_{ni}: **smorzamenti** e **pulsazioni naturali** relativi ai poli complessi e coniugati (se $\xi_i > 0$ i poli sono nel semipiano sinistro)

$$G(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_i (1 + s\tau_i) \prod_i (1 + 2\zeta_i/\alpha_{ni} s + s^2/\alpha_{ni}^2)}{\prod_i (1 + sT_i) \prod_i (1 + 2\xi_i/\omega_{ni} s + s^2/\omega_{ni}^2)}$$

Parametri della funzione di trasferimento

- Guadagno (μ)
  - Caso $g = 0$ (sistema di tipo zero)
    - Sistema asintoticamente stabile ($T_i > 0, \xi_i > 0$) Hp
    - Ingresso a gradino di ampiezza $\bar{u}$
    - L'uscita sarà combinazione dei modi propri di evoluzione e del modo (costante) dell'ingresso, quindi raggiungerà un valore costante per $t \to \infty$, che può essere calcolato con il teorema del valore finale

A regime

$$\bar{y} = \lim_{t \to +\infty} y(t) = \lim_{s \to 0} sY(s) = \lim_{s \to 0} sG(s)U(s) = \lim_{s \to 0} sG(s)\frac{\bar{u}}{s} = G(0)\,\bar{u} = \mu\bar{u} \Rightarrow \mu = \frac{\bar{y}}{\bar{u}}$$

ora so che esiste

    - **Guadagno statico**: $\mu = G(0) = C(sI - A)^{-1}B + D|_{s=0} = -CA^{-1}B + D$ MATRICE

Prodotto di tutti i numeri nel semipiano sinistro.

  - Caso $g \neq 0$
    - **Guadagno generalizzato** («di velocità» per $g = 1$, «di accelerazione» per $g = 2$)

x S è derivata

$$\boxed{\mu = \lim_{s \to 0} s^g G(s)}$$

$$Y(s) = G(s)\,U(s) = G(s)\,\frac{\bar{u}}{s} = \underbrace{\frac{r}{s}}_{\text{Modo relativo all'ingresso}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} r_k/_{s-p_k}}_{\text{Scomposta della } G}$$

Quindi, $r = G(s)\,\frac{\bar{u}}{s}\cdot s\Big|_{s=0} = \underbrace{G(0)}_{\text{Ben definita perché } g=0}\,\bar{u}$

NOTA: Se il sistema è stabile BIBO non posso avere g positivo

Quindi $\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} G(0)\,\bar{u} + \sum_{k=1}^{n} r_k e^{p_k t} \longrightarrow G(0)\,\bar{u}$ se $t \to +\infty$ per AS

↳ La risposta forzata a $\bar{u}$ ammette limite per $t \to +\infty$.

$Y(s) = G(s)\,U(s)$ SOLO RISP. FORZATA

CASO Ez

Derivatore ideale

- Consideriamo un sistema di tipo negativo con $g = -1$, che abbia solo la singolarità nell'origine

  e infatti G è impropria

$$\boxed{G(s) = s}$$

→ $y(t) = \dot{u}(t)$, fisicamente irrealizzabile

- Prende il nome di «**derivatore ideale**» (non realizzabile)
- È un sistema improprio (grado del numeratore maggiore del grado del denominatore) e per questo non fisicamente realizzabile, nel senso che non soddisfa il principio di causalità
  - Difatti la risposta nel dominio del tempo è $y(t) = \dot{u}(t)$, che richiede la conoscenza dell'ingresso in istanti di tempo successivi a t
  - La risposta ad un segnale a gradino è un impulso nell'origine (fisicamente non realizzabile) e quindi nulla a regime
  - s è proprio l'operatore di derivazione

Integratore

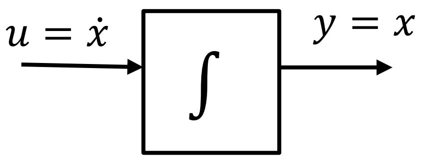
- Consideriamo un sistema di tipo positivo con $g = 1$, che abbia solo la singolarità nell'origine

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{s}}$$

Ci fa realizzare un qualunque sistema LTI

- Prende il nome di «**integratore**», infatti la sua i-s-u è
  - $1/s$ è proprio l'operatore di integrazione

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{x}(t) &= u(t)\\ y(t) &= x(t)\end{aligned}}$$



Risposta a regime permanente

- La risposta a regime di un sistema LTI è la risposta ad un segnale applicato da un istante iniziale t_0 infinitamente lontano nel tempo, cioè è una funzione del tempo $x_r(t)$ (o $y_r(t)$) t.c.

$$\boxed{x_r(t) = \lim_{t_0 \to -\infty} x(t)} \qquad \boxed{(\text{o } y_r(t) = \lim_{t_0 \to -\infty} y(t))}$$

  - Esiste solo se è indipendente dalle condizioni iniziali e per particolari ingressi
  - Per calcolarla si può usare la soluzione del movimento nella sua forma più generale a partire da un istante $t_0 \neq 0$

$$x_r(t) = \lim_{t_0 \to -\infty} \underbrace{e^{A(t-t_0)} x(t_0)}_{} + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

Abbiamo la risposta più generale. Istante iniziale non cambia Δ

Va a 0

$\downarrow t_0 \to -\infty$

$0 \ \forall x(t_0) \Leftrightarrow$ tutti gli autovalori di A sono a $Re(\cdot) < 0$ *

invertibile

  - Calcoliamola per un ingresso costante $u(t) = \bar{u}$

Δ2

$$x_r(t) = \lim_{t_0 \to -\infty} \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} B\bar{u} d\tau = \lim_{t_0 \to -\infty} \int_{0}^{t-t_0} e^{A\sigma} d\sigma B\bar{u} = [A^{-1} e^{A\sigma}]_0^{+\infty} B\bar{u} = -A^{-1} B\bar{u} = (sI - A)^{-1}\Big|_{s=0} B\bar{u}$$

*3

Matrice di transizione

*4

$$y_r(t) = \lim_{t_0 \to -\infty} C \int_{0}^{t-t_0} e^{A\sigma} d\sigma B\bar{u} + D\bar{u} = \{C[A^{-1} e^{A\sigma}]_0^{+\infty} B + D\}\bar{u} = [C(sI - A)^{-1} B + D]_{s=0}\, \bar{u} = G(0)\bar{u} = \mu\bar{u}$$

Δ Se $t_0 = 0$ $\quad X(t) = e^{At} X(0) + \int_0^t e^{A(t-\varphi)} B u(\varphi)\, d\varphi$ *

Caso $t_0 \neq 0$ $\quad X(t) = e^{A(t-t_0)} X(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\varphi)} B u(\varphi)\, d\varphi$

* Se $t=0$ ho condiz. iniziali. Se $t=t_0$ ho $X(t_0)$

* C. L. dei modi di evoluz. $\Rightarrow$ es. $e^{\lambda_i(t-t_0)} \, \tau(X_0)$
Quindi se $Re(\lambda_i)<0$ tendono tutti a 0 se $t_0 \to -\infty$

$\Delta_2 \to$ Se chiedo risposta ad $u(t) = \bar{u}$, ho u applicato da $-\infty$. Si può solo se A.S.

*3 Se ho tutti autovalori negativi, da dove parto parto per un movimento, là ci torno. Quella è la risposta forzata in ingresso in $S=0$.

Ci permette di dire che $X_2(t) = \bar{X} = -A^{-1} B \bar{u} = (sI - A)^{-1} B \bar{u} = \underbrace{\Phi(0)}_{\text{Matrice guadagni statici nello stato}} B \bar{u}$

*4 sistema risponde con una costante che è pari all' ingresso · guadagno statico

Risposta a regime permanente

- La risposta a regime di un sistema LTI esiste solo se il sistema è asintoticamente stabile
  - La stabilità interna è necessaria, altrimenti non può essere indipendente dalle condizioni iniziali
- La differenza fra il movimento e la risposta a regime è detta «risposta in transitorio»

$$x_t(t) = x(t) - x_r(t) \qquad \left(\text{o } y_t(t) = y(t) - y_r(t)\right)$$

Cioè tutto ciò che si estingue nel tempo

- Ovviamente la risposta transitoria converge a zero per $t \to +\infty$, cioè

$$\lim_{t\to+\infty} x_t(t) = 0 \qquad \left(\text{o } \lim_{t\to+\infty} y_t(t) = 0\right)$$

qualsiasi

- In sintesi, abbiamo trovato che
  - a regime, un sistema LTI asintoticamente stabile risponde con un segnale dello stesso tipo del segnale di ingresso *
- Più avanti calcoleremo la risposta a regime anche per un'altra classe di segnali di ingresso molto importante, quelli sinusoidali
  - Varrà lo stesso risultato!

$$Y(s) = \sum_{k=1}^{m} \frac{r_k}{s-p_k} + \sum_{k=1}^{m} \frac{v_k}{s-q_k}$$

uso solo poli stabili per semplicità

$$* \quad y(t) = \underbrace{\sum_{k=1}^{m} r_k e^{p_k t}}_{\to 0 \text{ per A.S.}} + \sum_{k=1}^{m_0} v_k e^{q_k t}$$

quindi ho la C.L. dei modi di ingresso

Proprietà bloccante degli zeri

- In generale abbiamo visto che la risposta forzata è combinazione lineare dei modi propri del sistema e dei modi propri dell'ingresso
- A volte i modi proprio dell'ingresso possono non apparire nella risposta forzata, vediamo quando
  - Assumiamo per semplicità che la fdt e la trasformata dell'ingresso abbiano poli distinti

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{N_G(s)}{D_G(s)}\frac{N_U(s)}{D_U(s)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{r_k}{s-p_k} + \sum_{k=1}^{m} \frac{v_k}{s-q_k}$$

$$\downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} r_k e^{p_k t} + \sum_{k=1}^{m} v_k e^{q_k t}$$

Hp N_G e D_G coprimi
Ma può accadere di avere fattori comuni tra N_G e D_U
⇒ Un modo dell'ingresso non appare in uscita

  - Dove può accadere che $\exists h\colon\ v_h = 0$, e ciò accade se la $G(s)$ ha uno zero proprio in q_h, cioè se $N_G(q_h) = 0$, infatti è

$$v_h = (s-q_h)Y(s)\Big|_{s=q_h} = \frac{N_G(q_h)}{D_G(q_h)}\frac{N_U(q_h)}{D_U'(q_h)} = 0$$

  - E quindi in $y(t)$ manca il modo proprio dell'ingresso $e^{q_h t}$


Esempio

ES: $G(s) = \dfrac{s+1}{(s+2)^2}$ $\quad u(t) = e^{-t},\ t \geq 0$

$$Y(s) = \frac{\cancel{s+1}}{(s+2)^2} \cdot \frac{1}{\cancel{s+1}} = \frac{1}{(s+2)^2} \qquad y(t) = t\,e^{-2t},\ t \geq 0$$

ES. 2

$u(t) = \sin(2t)$ $\quad G(s) = \dfrac{s^2+4}{s^2+2s+1}$ $\quad u(t) = \sin(2t)$

$$Y(s) = \frac{\cancel{s^2+4}}{s^2+2s+1} \cdot \frac{2}{\cancel{s^2+4}}$$

$y(t) = 2t\,e^{-t},\ t \geq 0$ Blocco la sinusoide.

Esercitazione

Esercizio 1

- Dato il sistema massa-molla-smorzatore con i seguenti parametri

$$m = 1\ \mathrm{kg}, k = 10\ \mathrm{N/m}, \beta = 2\ \mathrm{Ns/m}$$

- Determinare lo spostamento della massa assumendo che tra 0 s e 3 s alla massa sia applicata una forza di 3 N, che poi si annulla e, nello stesso istante ($t = 3$ s), il carrello si stacca dal vincolo

Esercizio 2

- Tracciare l'andamento qualitativo della risposta al gradino unitario del sistema con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{10s^2 + 10s - 32}{s^3 + 8s^2 + 20s + 16}$$

Esercizio 3

- Dato il sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{s-1}{s^2 + 3s + 2}$

- Soggetto ad un ingresso $u(t) = e^{at}\delta_{-1}(t)$, determinare i valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che la risposta a regime è nulla.

ES. 2

$$G(s) = \frac{10s^2 + 10s - 32}{s^3 + 8s^2 + 20s + 16} \qquad u(t) = \delta_{-1}(t) \qquad \bar{y} = G(0) \cdot 1 = -2$$

Nota: non c'è accoppiamento diretto tra num e denom. $\Rightarrow y(0) = 0$.

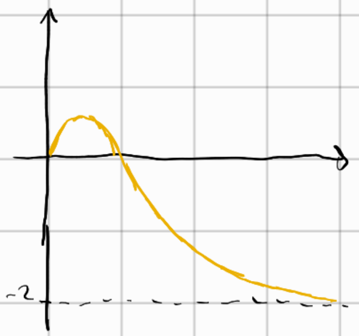
NOTA: Si assume che il sistema sia già ragg. e osservabile. Quindi devo verificare se ho poli con $\alpha < 0$.

CRITERIO DI ROUTH LO CONFERMA: $p_1 = -2$ (Molt. 2)

$p_2 = -4$

Quindi espressione ha senso. Parto da 0 e arrivo a -2.

NOTA: non ho modi pseudo periodici, non posso avere oscillazioni.



Calcolo $\dot{y}(0) = \lim_{s \to \infty} s \mathcal{L}[\dot{y}(t)] = \lim_{s \to \infty} s \cdot s G(s) \cdot \frac{1}{s} =$

$= \lim_{s \to \infty} s G(s) = 10$

Perché $y(0) = 0$ al gradino?

$$Y(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{N_G(s)}{D_G(s) \cdot s}$$

$$y(0) = \lim_{s \to \infty} sY(s) = \lim_{s \to \infty} \frac{N_G(s)}{D_G(s)} = 0$$

$N_G(s) \to m$, $D_G(s) \to n$

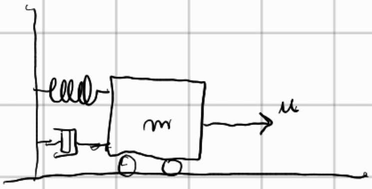
$n > m$

$n = m \neq 0$.

$m > n$ non fisicamente realizzabile

1)

$m = 1\,Kg$



$u(t) = \begin{cases} 3 & t \in [0,3] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

$K = 10\ N/m$

$\beta = 2\ \frac{N\cdot s}{m}$

$m\ddot{x} = u - Kx - \beta\dot{x}$

$x_1(t) =$ posizione $\quad x_2(t) =$ velocità

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{K}{m}x_1(t) - \frac{\beta}{m}x_2(t) + \frac{u}{m} \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -10x_1(t) - 2x_2(t) + u(t) \\ y = x_1(t) \end{cases}$$

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$$

RISPOSTA FORZATA:

$$x(t) = A^{-1}(e^{At} - I)B\bar{u}$$

Calcolo e^{At}:

$$(sI - A) = \begin{pmatrix} s & -1 \\ 10 & s+2 \end{pmatrix} \qquad P_s(s) = s^2 + 2s + 10$$

$$s_{1,2} = -1 \pm 3j$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + 2s + 10}\begin{pmatrix} s+2 & 1 \\ -10 & s \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{s+2}{s^2+2s+10} & \frac{1}{s^2+2s+10} \\ \frac{-10}{s^2+2s+10} & \frac{s}{s^2+2s+10} \end{pmatrix}$$

$$\frac{s}{(s+1-3j)(s+1+3j)} = \frac{r_1}{s+1-3j} + \frac{r_2}{s+1+3j}$$

$$r_1 = \left.\frac{s}{s+1+3j}\right|_{s=-1+3j} = \frac{-1+3j}{6j} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}j \qquad |z| = 0.53 \quad \varphi = 0.32$$

$$\mathcal{L}^{-1} \rightarrow \quad 1.06\, e^{-t} \cos(3t + 0.32)$$

$$\frac{1}{(s+1-3j)(s+1+3j)} = \frac{r_1}{s+1-3j} + \frac{r_2}{s+1+3j}$$

$$r_1 = \left.\frac{1}{s+1+3j}\right|_{s=-1+3j} = \frac{1}{6j} = -\frac{1}{6}j$$

$$\mathcal{L}^{-1} \rightarrow \quad \frac{1}{3} e^{-t} \cos\left(3t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{s+2}{s^2+2s+10} & \frac{1}{s^2+2s+10} \\ \frac{-10}{s^2+2s+10} & \frac{s}{s^2+2s+10} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \begin{pmatrix} 1.06\, e^{-t}\cos(3t+0.32) + \frac{2}{3} e^{-t}\cos\left(3t-\frac{\pi}{2}\right) & \frac{1}{3} e^{-t}\cos\left(3t-\frac{\pi}{2}\right) \\ -\frac{10}{3} e^{-t}\cos\left(3t-\frac{\pi}{2}\right) & 1.06\, e^{-t}\cos(3t+0.32) \end{pmatrix}$$

$$X(t) = A^{-1}\left(e^{At} - I\right) B \bar{u}$$

$$= \frac{3}{10}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.06\, e^{-t}\cos(3t+0.32) + \frac{2}{3} e^{-t}\cos\left(3t-\frac{\pi}{2}\right) - 1 & \frac{1}{3} e^{-t}\cos\left(3t-\frac{\pi}{2}\right) \\ -\frac{10}{3} e^{-t}\cos\left(3t-\frac{\pi}{2}\right) & 1.06\, e^{-t}\cos(3t+0.32) - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{3}{10}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} e^{-t} \cos\left(3t - \frac{\pi}{2}\right) \\ \\ 1.06\, e^{-t} \cos(3t + 0.32) - 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{3}{10} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} e^{-t} \cos\left(3t - \frac{\pi}{2}\right) - 1.06\, e^{-t} \cos(3t + 0.32) + 1 \\ \\ \frac{10}{3} e^{-t} \cos\left(3t - \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} e^{-t} \cos\left(3t - \frac{\pi}{2}\right) - 0.318\, e^{-t} \cos(3t + 0.32) + 0.3 \\ \\ e^{-t} \cos\left(3t - \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$X_1(3) = 0.31 \text{ m}$ $\qquad$ $X_2(3) = 0.021 \text{ m/s}$

$$X_1(t) = \begin{cases} -\frac{1}{5} e^{-t} \cos\left(3t - \frac{\pi}{2}\right) - 0.318\, e^{-t} \cos(3t + 0.32) + 0.3 & t \in [0, 3] \\ \left[e^{-3} \cos\left(9 - \frac{\pi}{2}\right)\right] t & t \in [3, +\infty) \end{cases}$$