SIMULAZIONE - TERZA PROVA INTERCORSO
corso di ANALISI MATEMATICA II

Docente: Giovanni Pisante

Esercizi

1. Calcolare il valore di
$$z = \sqrt[3]{i}.$$

2. Determinare l'insieme del piano complesso definito dalla relazione
$$Re\left(\frac{z+i}{z-i}\right) = 0.$$

3. Sia $u(x,y) = e^{(x^2-y^2)}\cos(2xy)$. Determinare una funzione olomorfa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ di cui $u(x,y)$ sia la parte reale.

4. Sia γ una circuito semplice e regolare nel piano complesso. Discutere in funzione della curva γ il seguente integrale curvilineo:
$$I_\gamma := \int_\gamma \frac{\cos(2z)}{z}\, dz.$$

5. Scrivere la serie di Laurent della funzione $f(z)$ centrata nel punto z_0 (precisando il tipo di singolarità e il residuo), dove
$$f(z) = z\cos\left(\frac{1}{z}\right) \quad , \quad z_0 = 0.$$

6. Calcolare, con il metodo dei residui, il seguente integrale
$$I = \int_\gamma \frac{\sin(z+1)}{z(z+1)}dz, \quad \text{dove } \gamma := \{|z| = 3\}.$$

7. Calcolare il seguente integrale usando il teorema dei residui:
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)^2(x^2+9)}\, dx.$$

8. Calcolare il seguente integrale usando il teorema dei residui:
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos(2x)}{x^2}\, dx.$$

Risposte

1.
$$w_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\ , \quad w_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\ , \quad w_3 = -i$$

2. Usando la notazione $z = x + iy$ l'insieme desiderato è
$$\left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \ : \ Re\left(\frac{z+i}{z-i}\right) = 0 \right\} = \big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\} \ : \ x^2 + y^2 = 1 \big\} \,.$$

3. Se $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, si ha $v(x,y) = e^{(x^2-y^2)} \sin(2xy) + cost.$ e quindi $f(z) = e^{z^2} + cost.$

4.
$$I_\gamma = \begin{cases} 2\pi\, i & \text{se } \ 0 \in \operatorname{int}\gamma \\ 0 & \text{se } \ 0 \notin \overline{\operatorname{int}\gamma} \ . \\ \text{non definito} & \text{se } \ 0 \in \gamma \end{cases}$$

5. 0 è una singolarità essenziale isolata, $Res[f,0] = -\frac{1}{2}$ e si ha
$$z \cos\left(\frac{1}{z}\right) = z - \frac{1}{2!z} + \frac{1}{4!z^3} - \frac{1}{6!z^5} + \dots$$

6.
$$I = 2\pi \sin(1).$$

7.
$$I = \frac{\pi}{200}$$

8.
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos(2x)}{x^2}\, dx = Re\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-e^{2ix}}{x^2}\, dx \right) = 2\pi.$$