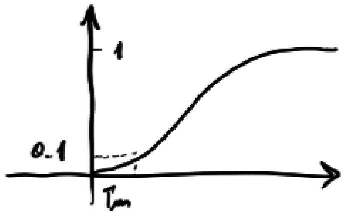
Capitolo 15 – Regolatori PID

Sistemi lenti vanno in maniera estremamente aperiodica a regime



Tempo morto molto lungo

Introduzione

→ Sempre LTI

- I regolatori PID sono detti anche "**standard**" perché hanno una struttura prefissata e quindi piuttosto che di metodi di progetto si parla di metodi di **taratura** ⇒ la struttura è flessibile dovendo trovare 3 oppure 4 parametri
- Sono i più diffusi a livello industriale per i seguenti motivi
  - sono adatti a controllare una vasta gamma di processi
  - sono disponibili diverse tecniche di taratura che richiedono competenze limitate
  - sono estremamente semplici da realizzare con diverse tecnologie
    - meccanica
    - pneumatica
    - idraulica
    - elettronica analogica o digitale
  - hanno costo contenuto e c'è ampia disponibilità sul mercato

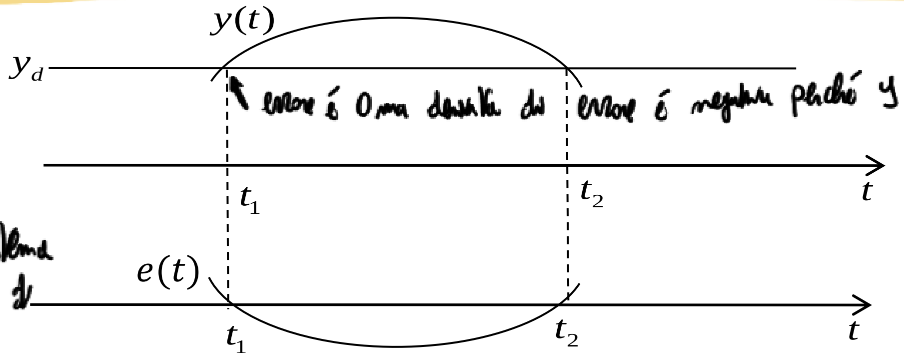
⇒ Progettare PID = determinare 3 o 4 parametri. 4 parametro non influenza gli altri 3.
⇓
struttura è flessibile

* impulso calcolato in maniera proporzionale rispetto all'errore (aumenta però la banda: M non può crescere troppo:

Modello dei regolatori PID

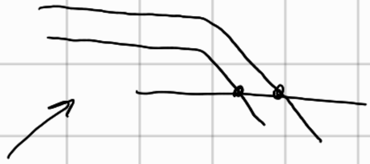
- Il termine PID è la sigla di "**Proporzionale**", "**Integrale**", "**Derivativo**" che indicano le tre azioni che il regolatore effettua sull'errore di regolazione differenza tra u e y. Errore e
  - la presenza dell'azione proporzionale (**P**) è l'azione più elementare che si può effettuare in retroazione e abbiamo già visto che consente di accrescere la velocità di risposta e migliorare la precisione statica oltre che ridurre l'effetto dei disturbi in catena diretta e delle incertezze parametriche *
  - l'azione integrale (**I**) è richiesta per ottenere la proprietà di astatismo l'errore a regime nullo ↓ Tende a peggiorare margine di fase Δ
  - l'azione derivativa (**D**) viene introdotta per tentare di "anticipare" l'andamento dell'errore negli istanti futuri
    - in $t_1, e = 0$ ma $\dot{e} < 0$ quindi, per far diminuire y e quindi ridurre e, u deve diminuire (contributo proporzionale ad $\dot{e}$)
    - in $t_2, e = 0$ ma $\dot{e} > 0$ quindi, per far aumentare y quindi ridurre e, u deve aumentare (contributo proporzionale ad $\dot{e}$)

Tende a smorzare $e(t) = y_d - y(t)$ le oscillazioni: su risposta indiciale tende a ridurre tempo di assestamento → allarga banda sistema e riduce modulo di risonanza

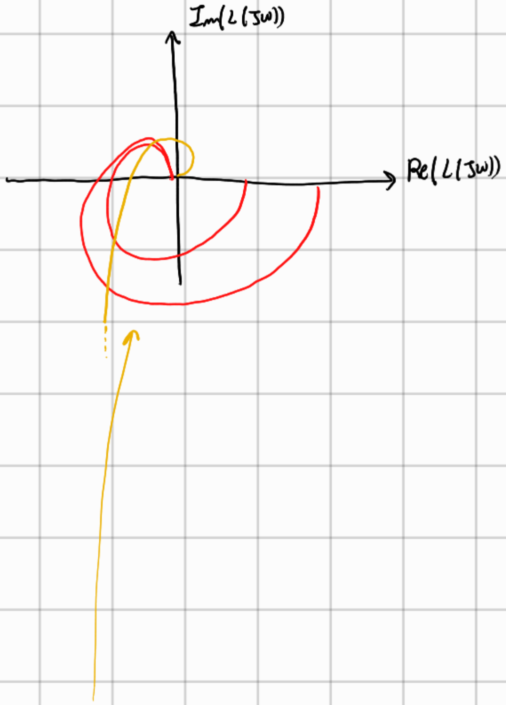


↓ Proporzionale a derivata

↓ Per diminuire errore dovrei alzare uscita e quindi alzare ingresso u: includendo azione proporzionale a ė: ė negativa, deve diminuire u, diminuisce y. Riduce ampiezza degli errori futuri.



Se aumento M aumento in genere banda e sovraelongazione, perché si riduce il margine di fase. Perdo anche per risonanze



∘ accresce velocità di risposta perché diminuisce tempo di salita. La funzione di sensitività diretta tende ad abbassarsi, reiettando meglio disturbi in catena diretta.

Nota: $S(s) = \frac{E(s)}{W(s)}$, quindi riduce errore.

Aumentare banda riduce effetto delle incertezze parametriche

△ Why? Perché cambia diagramma. Fase finale diversa e modulo parte da $+\infty$.

Rischio di circondare -1.

Modello dei regolatori PID

- La grande potenzialità del PID, e contemporaneamente la sua flessibilità, è che le tre azioni possono essere opportunamente combinate tra loro: dipende dal progettista scegliere quale usare

- La **legge di controllo** generale nel dominio del tempo è

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_{t_0}^{t} e(\tau)d\tau + K_D \dot{e}(t)$$

Prima azione proporzionale a errore, integrale di errore e derivata dell'errore

  - K_P è detto "coefficiente dell'azione proporzionale" o "guadagno proporzionale"
  - K_I è detto "coefficiente dell'azione integrale" o "guadagno integrale"
  - K_D è detto "coefficiente dell'azione derivativa" o "guadagno derivativo"

- Cui corrisponde la funzione di trasferimento (**non fisicamente realizzabile – ideale**) con 2 zeri e 1 polo nell'origine

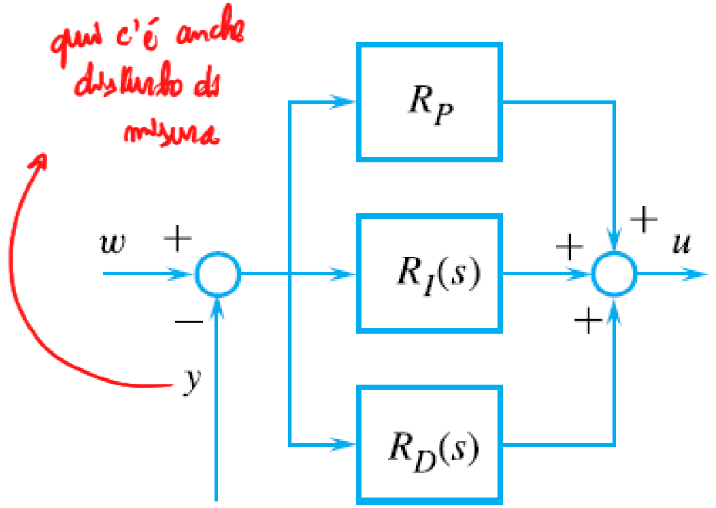
$$R_{PID}(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s}$$

- Che è il **parallelo** delle tre funzioni di trasferimento

$$R_P(s) = K_P, \quad R_I(s) = \frac{K_I}{s}, \quad R_D(s) = K_D s$$

Modello dei regolatori PID

- Lo schema a blocchi corrispondente è



- Rappresentazioni più comuni del PID ideale sono

$$R_{PID}(s) = K_P\left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right) = K_P \frac{T_I T_D s^2 + T_I s + 1}{T_I s}$$

  - con

$T_I = K_P / K_I$ tempo integrale $\qquad$ $T_D = K_D / K_P$ tempo derivativo

Università degli Studi della Campania Luigi Vanvitelli
Dipartimento di Ingegneria

Modello dei regolatori PID

- Per rendere la funzione di trasferimento fisicamente realizzabile, si modifica l'azione derivativa ideale definendo l'azione **derivativa reale**

derivatore in banda:

$$R_D^a(s) = \frac{K_P T_D s}{1 + \frac{T_D}{N} s} = \frac{K_D s}{1 + \frac{K_D}{K_P N} s}, \quad N = 5 \div 20$$

→ costante di tempo N volte più piccola di T_D

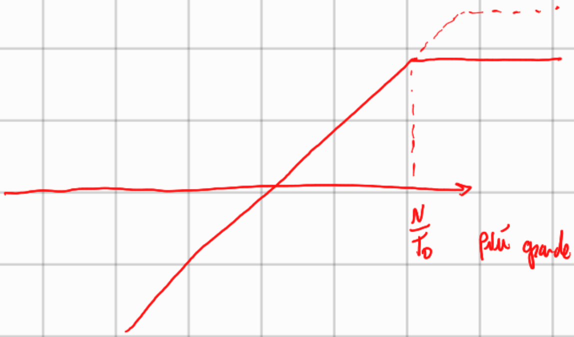
- E quindi il PID reale ha la funzione di trasferimento con due poli e due zeri

$$R_{PID}^a(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + \frac{T_D s}{1 + \frac{T_D}{N} s} \right) = K_P + \frac{K_I}{s} + \frac{K_D s}{1 + \frac{K_D}{K_P N} s}$$

  - si noti però che, a parità di guadagni, gli zeri del PID reale sono (poco) diversi da quelli del PID ideale che li ha in

$$s = \frac{-T_I \pm \sqrt{T_I(T_I - 4T_D)}}{2 T_I T_D}$$

- Sono reali e coincidenti per $T_I = 4T_D$ e si trovano in $-\frac{1}{2T_D} = -\frac{2}{T_I}$



$\frac{N}{T_0}$ più grande è n più sposto alle alte frequenze

Se cresce n amplificazione alle alte frequenze è maggiore, quindi il rumore di misura presente sull'errore cresce. N si sceglie dalle specifiche.

Sistema si comporta da derivatore fino a prima del punto di rottura.

Prezzo: amplificazione su errore dell'errore di misura.

In genere, $-\frac{N}{T_0}$ è un polo che si trova al di fuori della banda del sistema.

DOMANDA ESAME: perché possiamo dire che N si può scegliere a valle?

Essendo $N \gg 1$, questo polo sta sempre al di fuori della banda del sistema a ciclo chiuso. Quando introduco poli in $L(s)$ fuori dalla banda a ciclo chiuso, i poli della F di trasferimento a ciclo chiuso rimangono essenzialmente invariati. Cresce +1 polo, ma poli di F e poli di L fuori dalla banda sono praticamente uguali.

$$F(j\omega)=\frac{L(j\omega)}{1+L(j\omega)}$$

se $\omega \gg \omega_3 \approx \omega_c$, $|F(j\omega)| \approx |L(j\omega)|$, $\angle F(j\omega) \approx \angle L(j\omega)$

Poli fuori banda sono gli stessi. Polo in $-\frac{N}{T_0}$ si trova di poco spostato in F.

Faccio progetto, metto poi polo facendo in modo che

$\frac{N}{T_0} \gg \omega_3$

Modello dei regolatori PID

- Non necessariamente tutte le azioni sono presenti contemporaneamente, ma le combinazioni più usate sono
  - **P** $(K_D = 0,\ K_I = 0)$

    oppure instabili ma con 1 polo a ciclo aperto
    - uso limitato a processi stabili a ciclo aperto e specifiche statiche "blande"
  - **I** $(K_P = 0,\ K_D = 0)$

    Non mi serve modificare banda
    - uso in caso di specifiche stringenti per la precisione statica ma non per la velocità di risposta
  - **PI** $(K_D = 0)$ (D non si usa, perché dà problemi per errore a regime)
    - sono usati per allargare la banda passante in presenza di un'azione integrale

      astalliamo

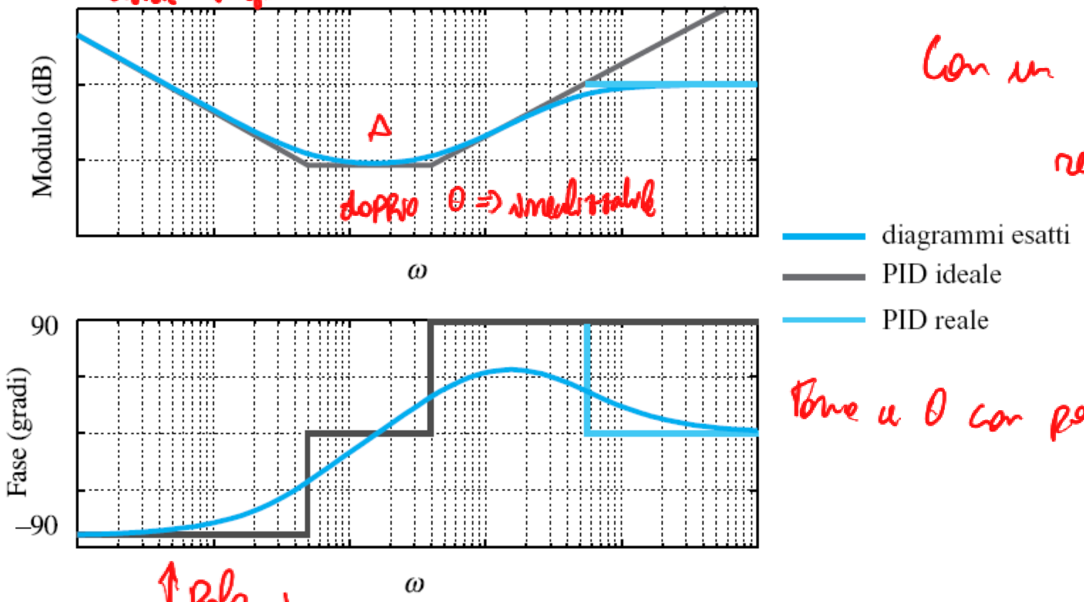
      ma serve anche sistema stabile a ciclo chiuso
      se ho problemi di stabilità è la prima cosa che vedo
  - **PD** $(K_I = 0)$ Non realizzabile
    - sono utilizzati per stabilizzare e ampliare la banda passante

      ↳ Zeri anticipano la fase e quindi aumentano la banda passante a ciclo chiuso
  - **PID**
    - possono essere interpretati come una rete a sella e sono impiegati per una vasta classe di processi

Modello dei regolatori PID

$$\frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s}$$

azione integrale



↑ Polo in origine

Con un polo in $-\frac{N}{T_D}$ ottengo funzione realizzabile.

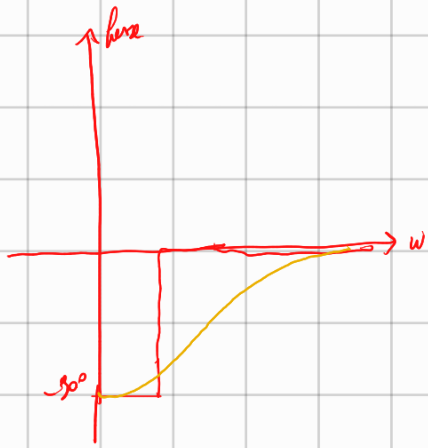
Torna a 0 con polo di fisica realizzabilità.

- La risposta in frequenza del PID
  - il PID ideale, essendo improprio, ha una elevata amplificazione ad alta frequenza, analogamente, quello reale al crescere di N
    - amplificazione del rumore di misura
  - la fase mostra come si tratta di una rete a ritardo e anticipo (sella)

Rete che in un certo intervallo di f tende a ritardare, in un altro ad anticipare.

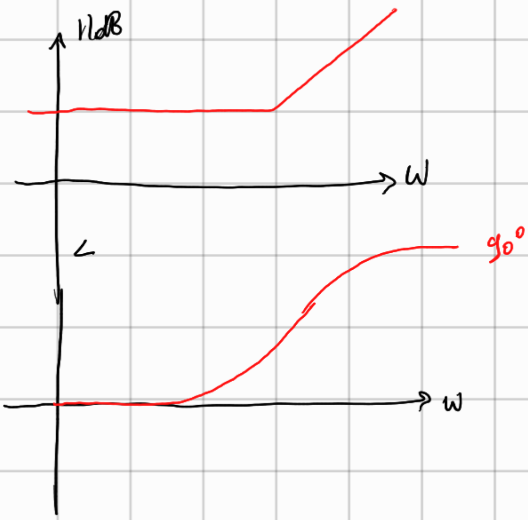
Δ Se $T_i = 4T_d$ avremo ancora zeri reali e coincidenti.

Scelta PI:



Questo andamento ricorda rete ritardatrice.

Rete PD



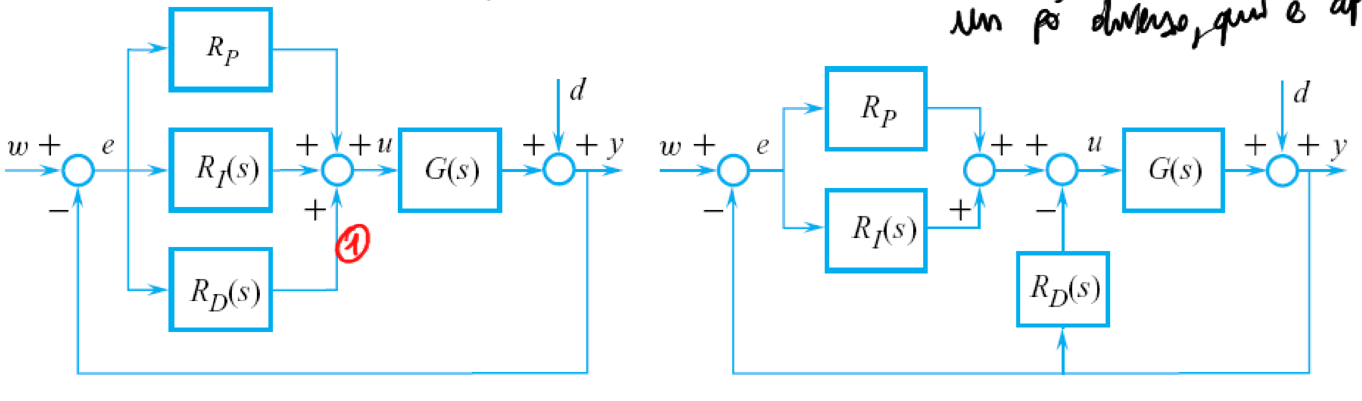
$\varphi > 0$, è una rete anticipatrice (se considero fisica realizzabilità)

Realizzazione dei regolatori PID

- Nell'implementazione pratica dei regolatori PID occorre adottare alcuni accorgimenti necessari a migliorare le prestazioni del sistema di controllo
- Limitazione dell'azione derivativa

Standard

un pò diverso, qui è applicata su y.
Proporzionale a -y.
Perché?



a) *b)*

- lo schema *a)* presenta l'azione derivativa sull'errore, quindi nel caso di andamenti discontinui l'ingresso di controllo ha andamento impulsivo
- nello schema *b)* viene derivata la sola uscita che è certamente continua; cambiano solo gli zeri della $F(s)$ quindi non la stabilità ma solo il transitorio

Perché se ho segnale in ingresso W discontinuo, e sarà discontinuo. Quindi ho un impulso. Se R_D ideale, ho in out una δ di Dirac. Ma nel derivatore in banda cosa succede?

Risposta deve essere continua.

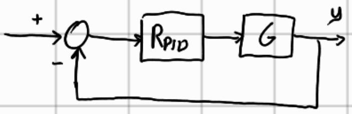
$\frac{K_D s}{1+s\tau}$, mano a mano che τ diventa piccolo, segnale ① diventa più veloce e alto. Se $\tau \to 0$ tendo a $\delta(t)$.

$\tau = \frac{K_D K_P}{N}$

- Il secondo non ha questo problema perché ha in ingresso funzione y certamente continua. Se d fosse discontinua però? R_D avrebbe comunque problemi. Ma nella maggior parte dei casi, d è applicato a monte del sistema G, fisicamente realizzabile e sarà quindi un segnale continuo. Così risolvo problemi di non avere picchi elevati all'impulso (problema con attuatori ecc).
- Nei 2 sistemi, il comportamento a regime cambia poco: se $W = cost$, o derivo $W-y$ o di $-y$, ho la stessa cosa. Se w è variabile diverso. Ma questo è regolatore.

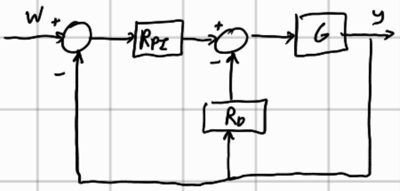
Può cambiare nel transitorio, che accade con stessi poli ma zeri diversi.

DIM:



$$F(s) = \frac{G(s)R_{PID}(s)}{1+G(s)R_{PID}(s)}$$

2)



$$F' = \frac{Y}{W}$$

R_{PI} per errore

$$Y = G\left[R_{PI}(W-Y) - R_D Y\right] =$$

Parallelo = PID

$$Y = GR_{PI}W - G\left[R_{PI}+R_D\right]Y$$

$$Y\left[1+GR_{PID}\right] = GR_{PI}W$$

$$F'(s) = \frac{G(s)R_{PI}(s)}{1+G(s)R_{PID}(s)}$$

Stessi modi di evoluzione, ma transitori diversi

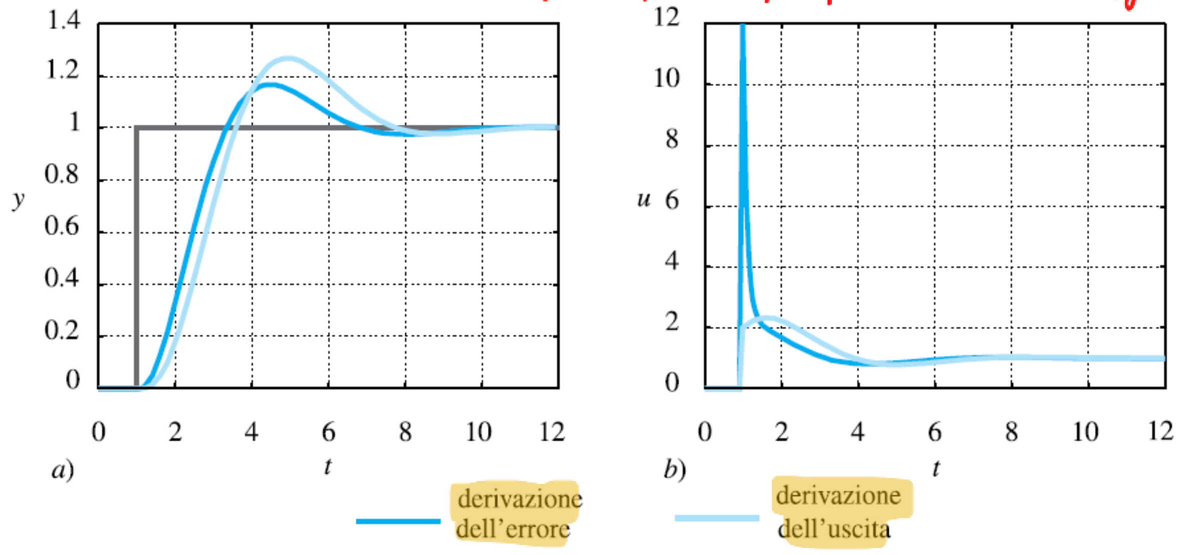
- Effetti degli zeri nel transitorio tendono a far aumentare la sovraelongazione (sopratutto in banda: effetto anticipo).

Secondo sistema mi aspetto avrò sovraelongazione più elevata. Ho meno zeri nella config nuova

Realizzazione dei regolatori PID

Esempio

Sovraelongazione più alta, tempo di risposta leggermente più lungo.



Quando ho bisogno di prestaz. spinte continuo ad usare 1, ma a patto che non usi gradini in ingresso.

- nel derivare l'uscita e non l'errore scompare il picco iniziale causato dall'andamento a gradino del riferimento ma cambia il transitorio, peggiorando la precisione dinamica, tuttavia l'errore a regime rimane invariato

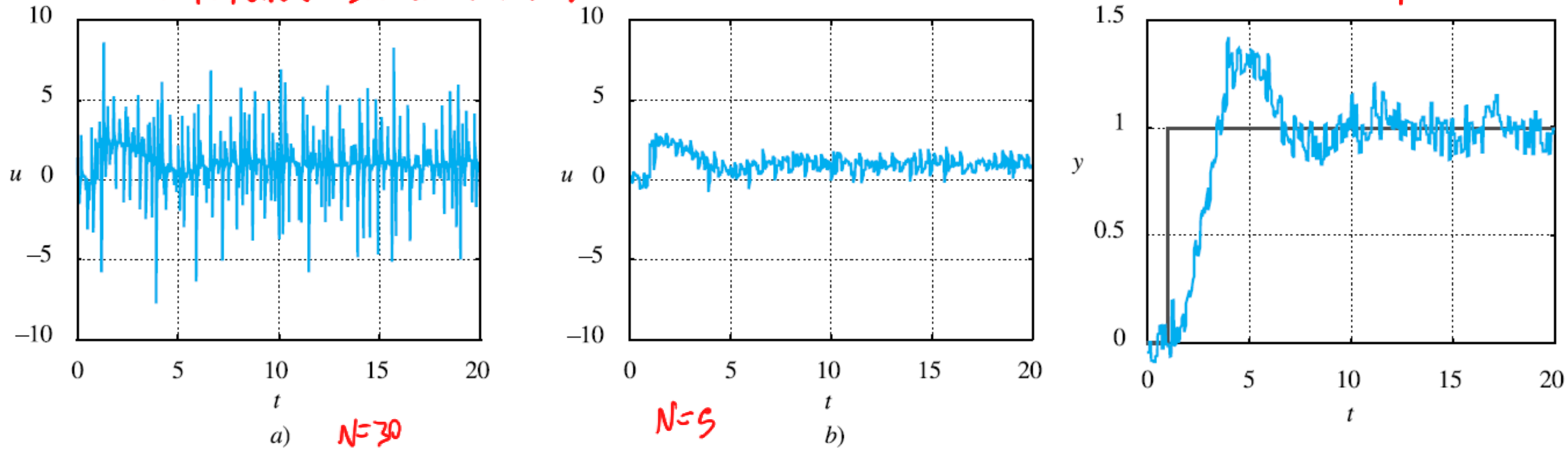
Realizzazione dei regolatori PID

Variazione di N

- Esempio

Amplificazione sul rumore di misura enorme

Risposta y è però robusta:



- a sinistra il segnale di controllo in uscita ad un PID reale con $N = 30$
- al centro il segnale di controllo in uscita allo stesso PID reale ma con $N = 5$; è evidente la riduzione dell'amplificazione del rumore di misura
- a destra l'uscita in entrambi i casi; i due andamenti sono praticamente identici, quindi N va scelto il più piccolo possibile compatibilmente con l'andamento desiderato per la variabile controllata

N>5, sempre fuori banda. Aumento N fino a che non ho problemi.

Polo di fisica realizzabilità troppo a bassa frequenza determina aumento della sovraelongazione e del tempo di assestamento (parametro φ_m).

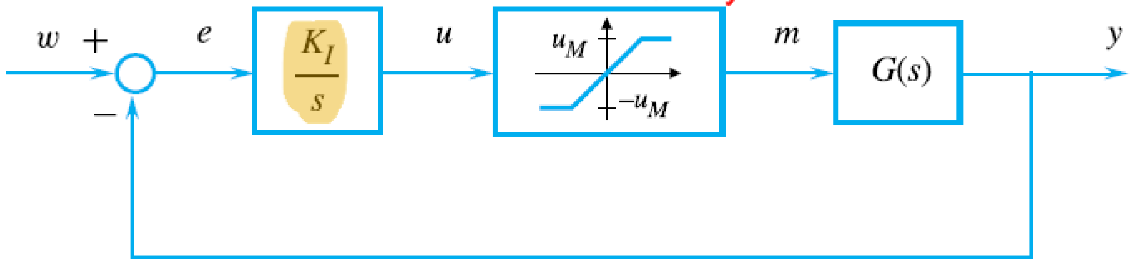
Realizzazione dei regolatori PID

- Desaturazione dell'azione integrale

azione proporzionale integrale

deve essere comportamento non lineare di tipo saturazione

Fenomeno per il quale non posso erogare segnali in ingresso al di sopra di un certo limite: attuatore è limitato.



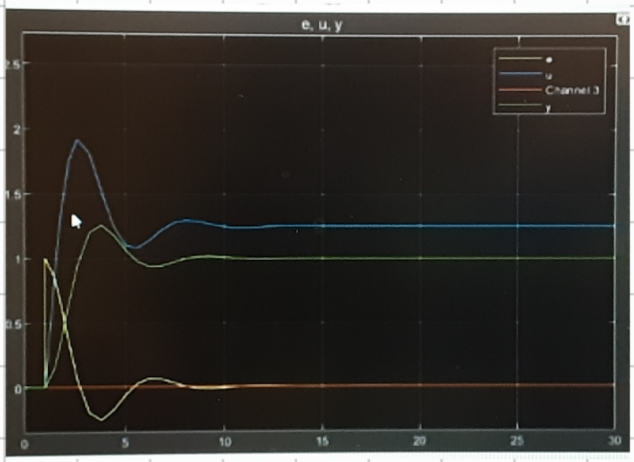
- il fenomeno indesiderato del **wind-up** si verifica quando un'azione integrale agisce in presenza di un attuatore (o un amplificatore di potenza) **saturante**

$$m(t) = \begin{cases} -u_M, & u(t) < -u_M \\ u(t), & |u(t)| < u_M \\ u_M & u(t) > u_M \end{cases}$$

Quindi la limita la nostra u.*

- se l'errore rimane di segno costante l'uscita u dell'integratore tende ad aumentare mentre l'effettivo segnale di controllo m rimane costante pari a $\pm u_M$
- quando l'errore cambia segno, **occorre un certo tempo** prima che l'integratore "si scarichi" e u scenda sotto il valore di saturazione e sia di nuovo $m = u(t)$

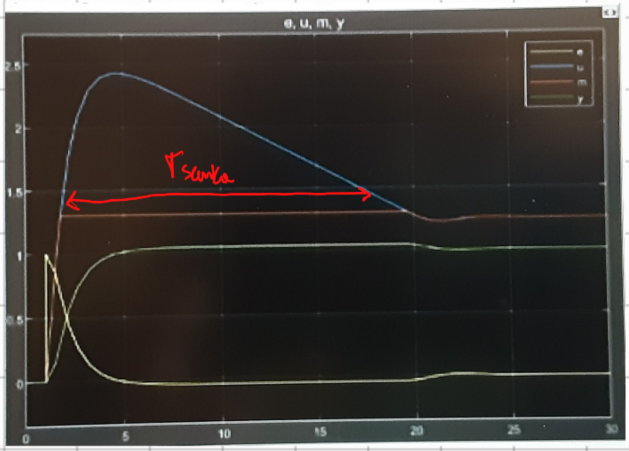
Risposta senza saturazione



Errore che controllo è il segnale giallo. Uscita aumenta fino a quando errore è positivo. Quando diventa negativo inizia a diminuire.

Tempo di assestamento effettivo è aumentato.

Risposta con saturazione a 1.3 s



Segnale rosso è uscita dell'impianto.

Segnale, nonostante cambio segno dell'errore rimane bloccato, insieme a y fino a quando integratore si scarichi. Devo aspettare la scarica dell'integratore.

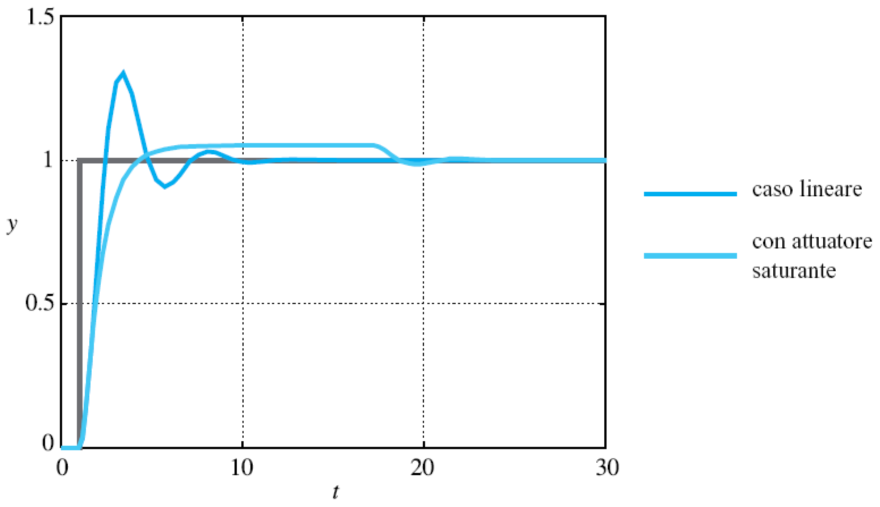
Errore è molto piccolo e negativo, quindi ci vuole troppo a scaricarsi.

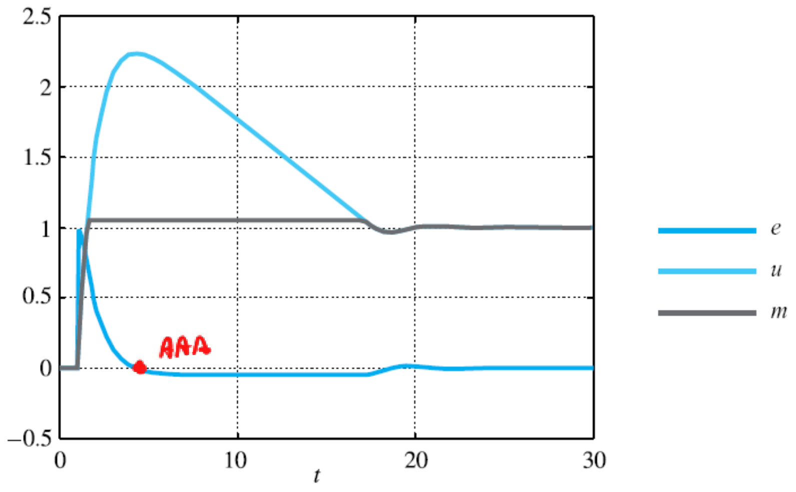
$$\rightarrow \boxed{\frac{2}{s}} \rightarrow \boxed{\frac{0.8}{s+1}} \rightarrow$$

Qui l'ingresso del sistema non è proprio l'uscita che mi aspettavo con la u.

Realizzazione dei regolatori PID

- Esempio Succede una cosa del genere





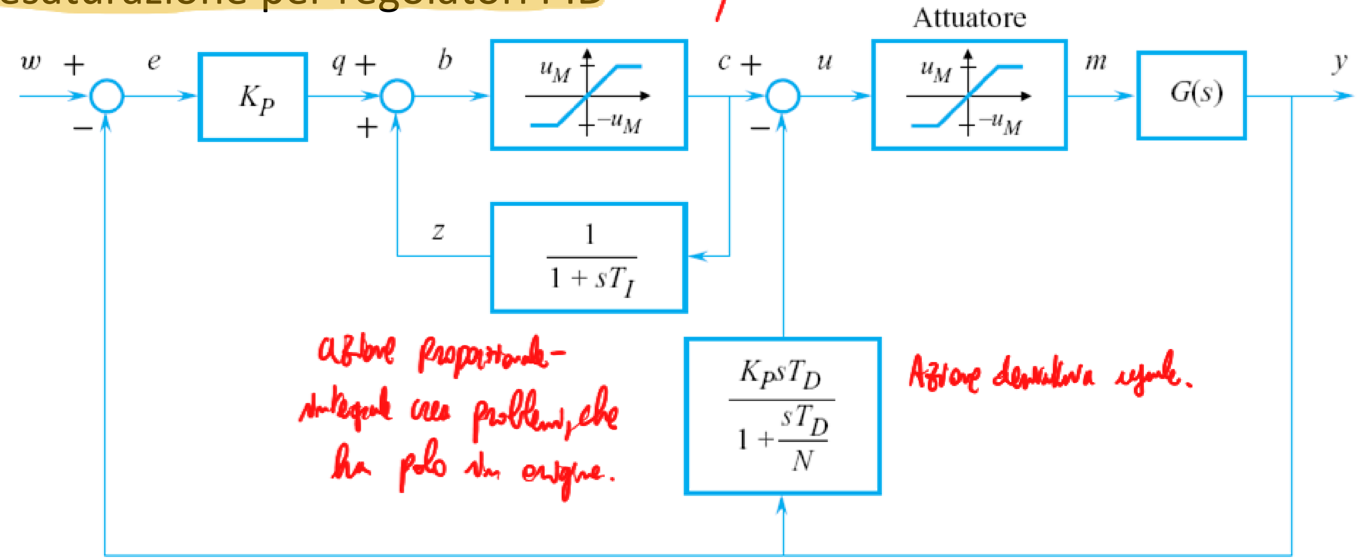
- in presenza di wind-up i tempi di assestamento si allungano in quanto la variabile u raggiunge valori così elevati che per tornare al di sotto del valore di saturazione occorrono tempi lunghi e solo allora l'errore può portarsi a zero
- il problema è che lo stato del regolatore **non è congruente** con l'effettiva variabile di controllo m

Università degli Studi della Campania Luigi Vanvitelli
Dipartimento di Ingegneria

Realizzazione dei regolatori PID

- Schema di desaturazione per regolatori PID

Si replica nell'algoritmo di controllo il blocco di saturazione.



Azione proporzionale-integrale crea problemi, che ha polo in origine.

Azione derivativa uguale.

- quando l'attuatore funziona in zona lineare la funzione di trasferimento da e a c è quella di un PI, infatti

$$\text{A} \qquad \frac{C(s)}{E(s)} = K_P \frac{1}{1 - \frac{1}{1+sT_I}} = K_P \frac{1+sT_I}{sT_I}$$

- supponiamo che $e > 0$ e che b superi il valore u_M; allora c è pari ad u_M e dopo un breve transitorio (tanto più veloce quanto più T_I è piccola) anche z vale u_M; non appena $e < 0$, e quindi $q = K_P e < 0$, risulta $b = q + z = q + u_M < u_M$

1. Si mette sull'errore la sola azione proporzionale K_p. Si chiude in retroaz. positiva blocco non lineare con una $\frac{1}{1+sT_i}$, che si mette al denominatore invece che numeratore: $\frac{1}{T_i s}+1$ che era al numeratore del PI.

Perché questo schema da e fino a impresso c è ancora un PI?

Se blocco in andata funziona in zona lineare, allora la relaz. tra c e b è di uguaglianza, in questa Hp ho 1.

In retroazione positiva ho (A), che è la transfer function del PI.

3) Che succede se vado in saturazione?

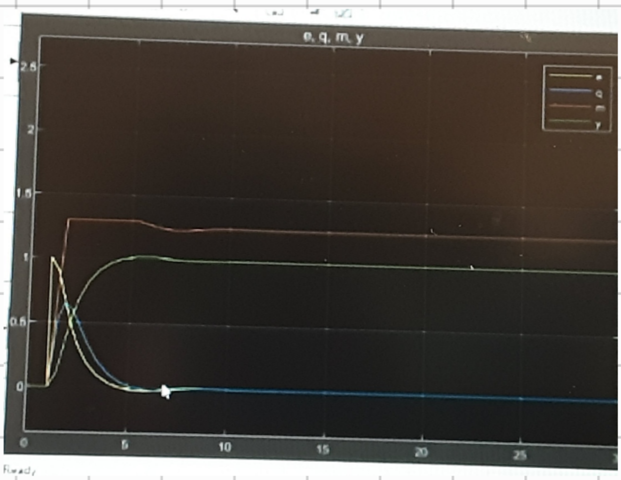
Hp: $b > u_M$, vado in saturazione con errore positivo.

uscita è u_M. In ingresso a sistema in retroaz. ho u_M. Dopo transitorio che dipende solo da T_i (tanto breve quanto T_i è piccolo), z è pari ad U_M anche lui, perché sistema ha guadagno statico unitario.

Allora immaginiamo che e cambi segno: (AAA)

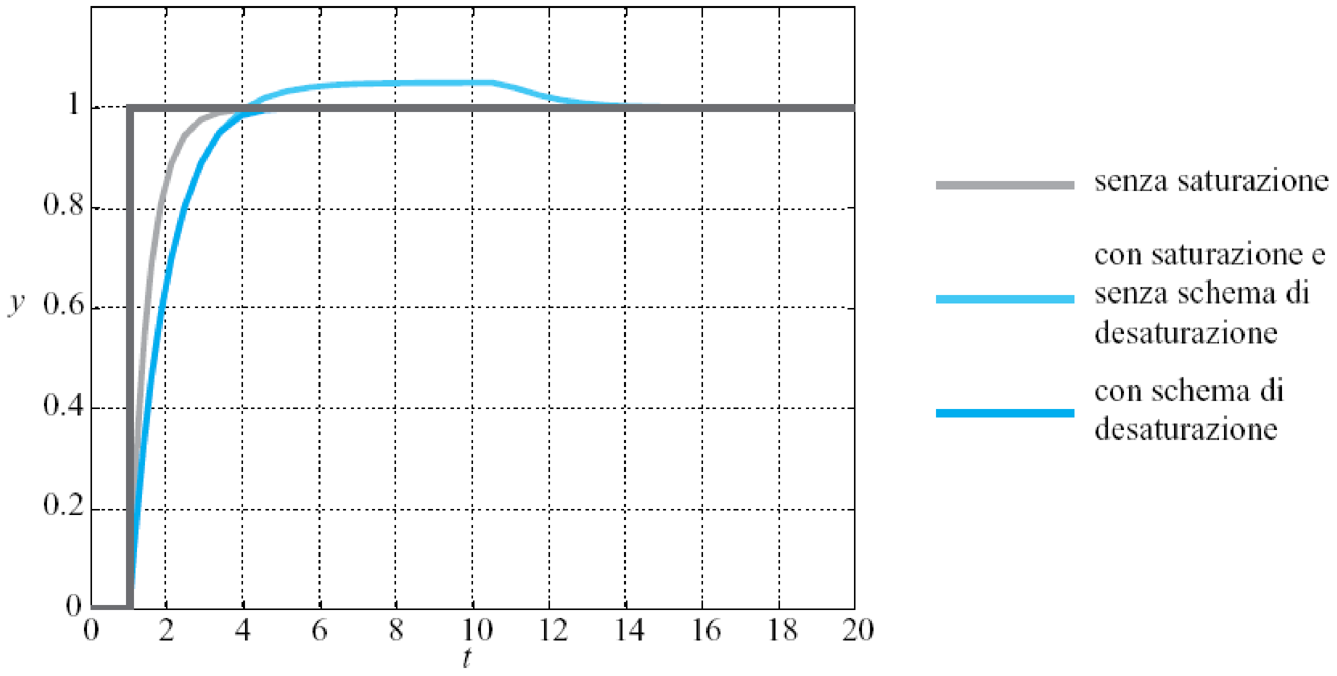
Allora, q diventa negativo in maniera istantanea, perché non ho più integratore. $b = \underset{\substack{\uparrow \\ u_M}}{z} + \underset{<0}{q} = u_M -$ certa quantità e diventa subito più piccolo di u_M e c ritorna a funzionare in zona lineare. $c < u_M$ in maniera quasi istant. (dipende da T_i, SOLO da T_i, 4-5 volte T_i).

• Questo corregge il tempo di assestamento.



Realizzazione dei regolatori PID

- Schema di desaturazione per regolatori PID (esempio)



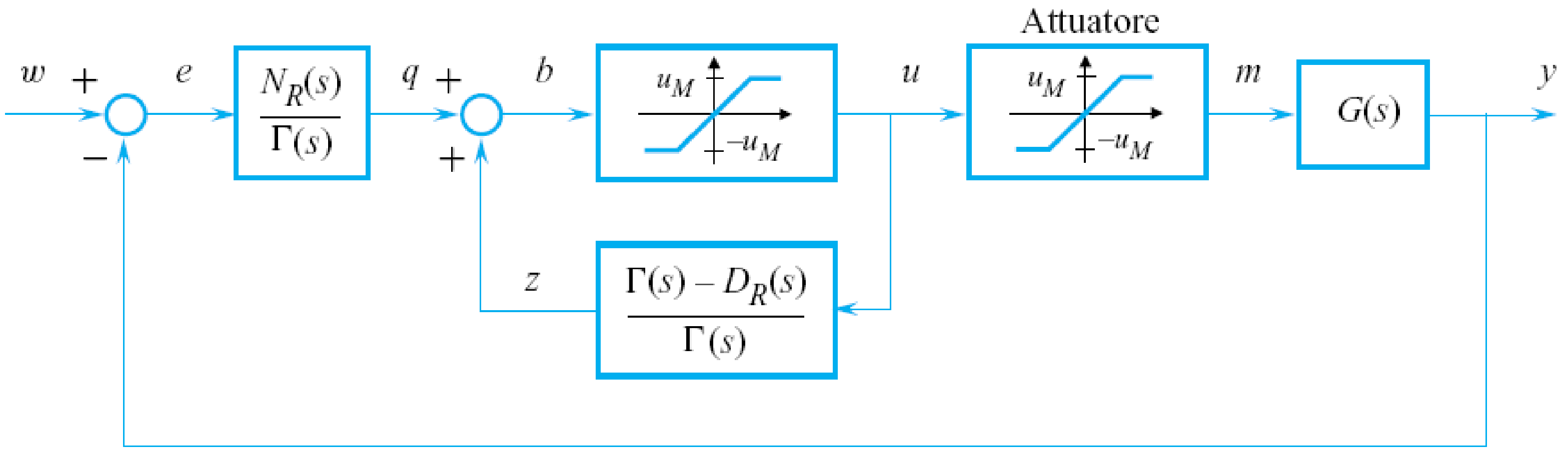
- grazie al fatto che la relazione tra q ed e è istantanea, il tempo di desaturazione è notevolmente ridotto e l’errore arriva a regime più rapidamente

Università
degli Studi
della Campania
Luigi Vanvitelli
Dipartimento di Ingegneria

Realizzazione dei regolatori PID

Caso generale

- Schema generale di desaturazione



- supponiamo che il regolatore debba essere

cioè ho un polo nell'origine

$$R(s) = \frac{N_R(s)}{D_R(s)}, \quad D_R(0) = 0 \text{ (azione integrale)}$$

- la funzione di trasferimento

$$\psi(s) = \frac{\Gamma(s) - D_R(s)}{\Gamma(s)}, \quad (\psi(0) = 1)$$

va scelta asintoticamente stabile e strettamente propria, mentre il polinomio $\Gamma(s)$ va scelto in modo che $N_R(0)/\Gamma(0) > 0$

Può verificarsi la saturazione. Solo se tolleró anti wind-up.

Uso stessa tecnica di prima, ma metto un polinomio $\Gamma(s)$ scelto da me,

in modo che alla retroazione costruisco in quel modo.

- $\Gamma(s)$ deve essere polinomio con tutte radici a parte reale negativa: deve essere il sistema (A) asintoticamente stabile. Se ho u_M in ingresso, dopo un breve transitorio questo deve portarsi a u_M in uscita (breve e dipende da poli di Γ). COME PRIMA

Al numeratore metto quello perché in zona lineare ottengo funzione di trasferimento in retroaz. del tipo $\Gamma(s)/D_R(s)$

Nota: quella funzione ha guadagno unitario sicuro intanto:

$$\Psi(s)=\frac{\Gamma(s)-D_R(s)}{\Gamma(s)}, \text{ se } s\to 0,\ D_R(s)=0.$$

Se errore cambia segno in maniera che dipende da velocità dei poli di Γ (se ho radici ad alta frequenza), allora q cambia velocemente perché modi si estinguono velocemente.

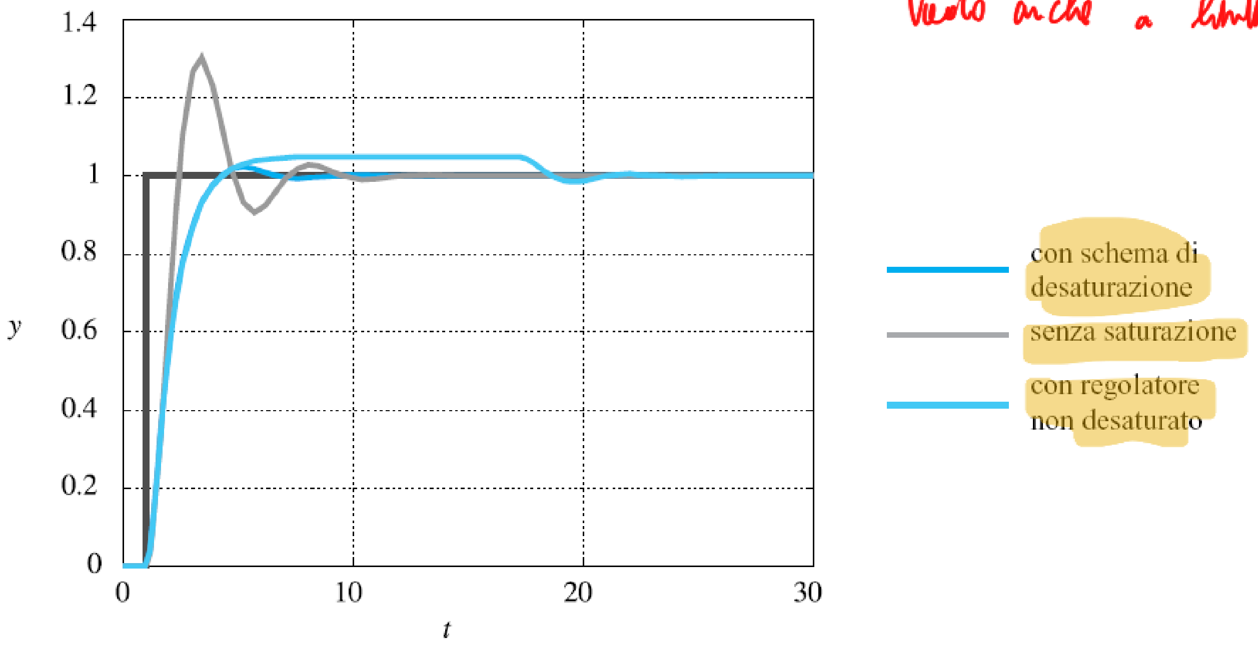
NOTA: $\Gamma(s) \,/\, \frac{N_R(0)}{\Gamma(0)} > 0$ per avere cambio di segno.

Così a b tolgo qualcosa per desaturarlo.

Realizzazione dei regolatori PID

Schema generale di desaturazione (esempio)

Vedo anche a limitare la sovraelongazione



- con un regolatore puramente integrale, se si sceglie il polinomio $\Gamma(s) = s + 10$, la funzione di trasferimento $\psi(s)$ risulta

$$\psi(s) = \frac{10}{s + 10}$$