Capitolo 5 – Funzione di trasferimento

Quando dico stabile intendo <u>BIBO</u> (anche se per ora sono equivalenti, cioè sono tutte ragg. e osservabili)

Analisi della risposta indiciale

- Si chiama **risposta indiciale**, la risposta forzata ad un gradino unitario $u(t) = \delta_{-1}(t) \Rightarrow U(s) = 1/s$
- Per sistemi asintoticamente stabili permette di capire come un sistema passa da una condizione di equilibrio all'altra a fronte di variazioni finite istantanee dell'ingresso
- La risposta indiciale sarà caratterizzata da una serie di parametri che permettono di quantificare il comportamento del sistema anche in risposta ad ingressi più generali
- Sarà anche lo strumento che ci permetterà di derivare modelli approssimati del comportamento di un sistema
  - Poli dominanti
  - Identificazione di modelli → Modello del sistema é la $G(s)$, che posso pensare legato alla risposta impulsiva (che non posso peró misurare ⇒ Valuto risposta indiciale)
- Valore iniziale e finale

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}, \qquad m \leq n$$

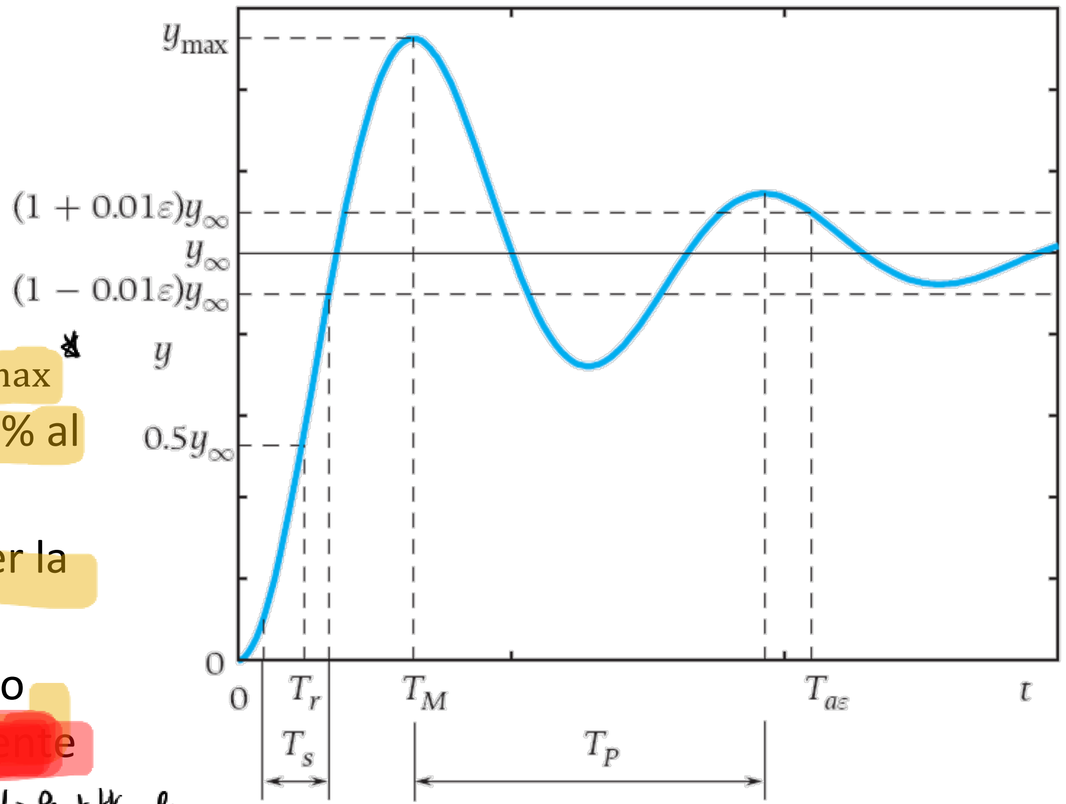
  - Per il teorema del valore inziale si ha

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} sG(s)1/s = \lim_{s\to\infty} \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \begin{cases} 0, & m < n \\ b_m/a_n, & m = n \end{cases}$$

  - Per il teorema del valore finale si ha (per sistemi di tipo 0)

$$y_\infty = \lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sG(s)1/s = \lim_{s\to 0} G(s) = G(0) = \mu$$

- Parametri caratteristici della risposta indiciale
  - **Valore di regime** $y_\infty = \mu$ (se $g = 0$), $y_\infty = 0$ (se $g < 0$)
  - **Valore massimo** $y_{\max}$
  - **Sovraelongazione** $s\% = 100\dfrac{y_{\max} - y_\infty}{y_\infty}$
  - **Tempo di massima sovraelongazione** T_M: istante in cui $y = y_{\max}$ *
  - **Tempo di salita** T_s: tempo richiesto perché l'uscita passi dal 10% al 90% del valore di regime *2
  - **Tempo di ritardo** T_r: tempo richiesto perché l'uscita sia pari per la prima volta al 50% del valore di regime
  - **Tempo di assestamento** $T_{a\varepsilon}$: tempo richiesto affinché il modulo della differenza fra l'uscita e il valore di regime sia definitivamente più piccolo dell'ε % del valore di regime *3
  - **Periodo di oscillazione** T_P: distanza temporale tra i primi due massimi dell'uscita



↳ Per tutti gli t_0 successivi vale

* Se $y_{max} = y_\infty$ ho $T_M \to \infty$

*2 Rapidità con cui il sistema risponde alle variazioni in ingresso (Non rapidità per arrivare a regime)

*3 Quanto tempo impiega a portarsi a regime: ε scelta da noi (o 1 o 2)

Sistemi del I ordine

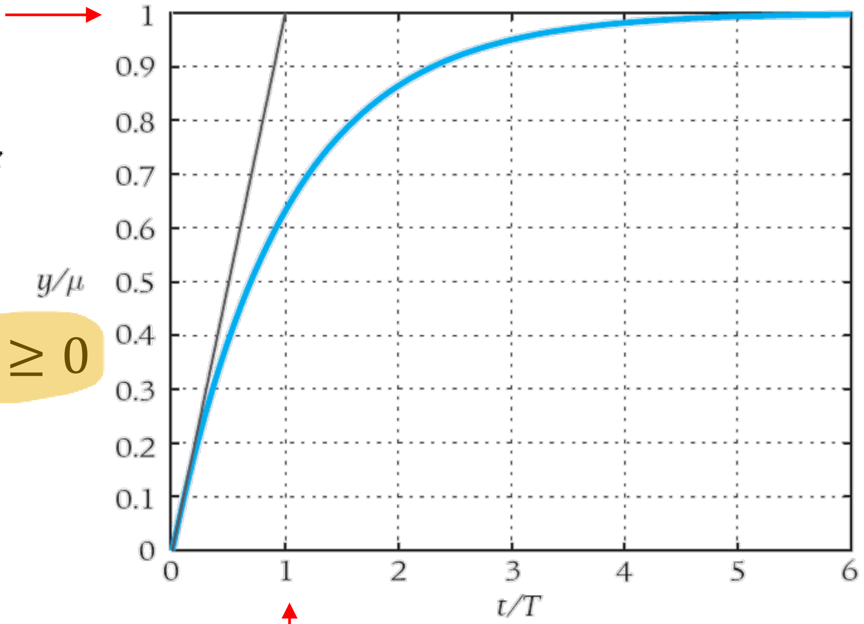
$$G(s) = \frac{\mu}{1+sT}$$

- Risposta indiciale

$$Y(s) = \frac{\mu}{1+sT}\frac{1}{s} = \frac{\mu/T}{(s+1/T)s} = \frac{\mu}{s} + \frac{-\mu}{s+1/T} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \mu\left(1-e^{-t/T}\right), t \geq 0$$

$y_\infty = \mu$

Cost di tempo $\frac{1}{T}$



  - Intorno a $t = 0$

$$y(0) = 0, \qquad \dot{y}(0) = \mu/T$$

  - Asintoticamente

$$y_\infty = \lim_{t\to+\infty} y(t) = \mu$$

  - Parametri caratteristici

$y_{max} - y_\infty = 0$

$$y_{max} = \mu, s\% = 0, T_{a\varepsilon} = T\log\frac{100}{\varepsilon}$$

È l'istante di tempo in cui la tangente incontra il valore di regime!

$y(T) \simeq 0.63 y_\infty$

μ

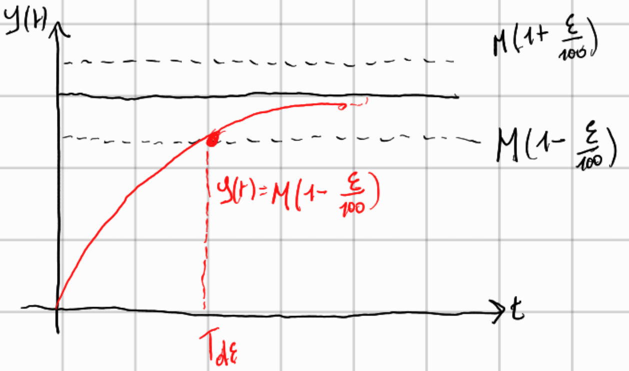
$y = \frac{\mu}{T} t$

$\downarrow$

$t^* = T$

  - Infatti, per definizione di tempo di assestamento all'ε%

$$y(T_{a\varepsilon}) = \mu\left(1-e^{-T_{a\varepsilon}/T}\right) = \mu\left(1-\frac{\varepsilon}{100}\right) \Rightarrow -\frac{T_{a\varepsilon}}{T} = \log\frac{\varepsilon}{100} \Rightarrow \boxed{T_{a\varepsilon} = T\log\frac{100}{\varepsilon} = \begin{cases} 4.6T, & \varepsilon = 1 \\ 3.9T, & \varepsilon = 2 \end{cases}}$$


y(t)
$M(1+\frac{\varepsilon}{100})$
$M(1-\frac{\varepsilon}{100})$
$y(t)=M(1-\frac{\varepsilon}{100})$
t
$T_{d\varepsilon}$

- Sistemi del II ordine (poli reali e distinti)

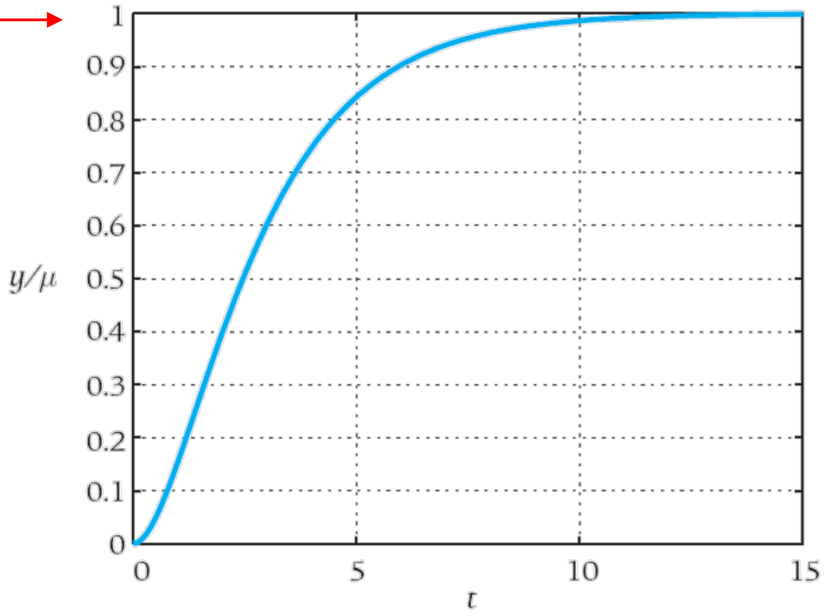
$$G(s) = \frac{\mu}{(1+sT_1)(1+sT_2)}, T_1 > T_2$$

- Risposta indiciale

$$Y(s) = \frac{\mu}{s} + \frac{-\mu T_1/(T_1-T_2)}{s+1/T_1} + \frac{\mu T_2/(T_1-T_2)}{s+1/T_2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$$

$$y(t) = \mu\left(1 - T_1/(T_1-T_2)e^{-t/T_1} + T_2/(T_1-T_2)e^{-t/T_2}\right), t \geq 0$$

$y_\infty = \mu$



- Intorno a $t = 0$

$$y(0) = 0, \qquad \dot{y}(0) = 0$$

- Asintoticamente

$$y_\infty = \lim_{t\to+\infty} y(t) = \mu$$ Valore di regime

- Parametri caratteristici
  - Non semplici da calcolare, a meno che non ci sia un «polo dominante», cioè $T_1 \gg T_2$, e quindi il residuo $\frac{T_2}{T_1-T_2} \ll \frac{T_1}{T_1-T_2} \simeq 1$

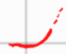
$$y(t) \simeq \mu\left(1 - e^{-t/T_1}\right), t > 4.6T_2 \Rightarrow \quad \boxed{T_{a1} \simeq 4.6T_1}$$

- **Modello ridotto**: «sopravvive» la costante di tempo più grande (almeno osservando la risposta per tempi lunghi)

$$G(s) = \frac{M}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$$

$$Y(s) = \frac{M/(T_1T_2)}{(s+1/T_1)(s+1/T_2)s}$$

Grado relativo del sistema: diff. tra quello denom. - numeratore

$y(0) = 0$, perché il grado relativo è 2
$\dot{y}(0) = 0$, perché il grado relativo è 2 $\Rightarrow$ Curva parte così: 

Calcolo dei residui:

- Residuo di s è sempre M: costante per cui devo moltiplicare l'ingresso per ottenere l'uscita a regime $\Rightarrow$ gli altri parametri che $\to 0$ non possono avere effetto.

$$r_2 = \frac{M}{\cancel{T_1}\cdot T_2}\cdot\frac{-\cancel{T_1}}{-\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}} = -\frac{M\,T_1}{T_1-T_2}$$

Δ Se $T_1 \gg T_2$ scompare la costante di tempo relativa al modo più veloce ad ordine 0, che è pure pesato per un residuo più piccolo

Quindi, $G_a(s) = \frac{M}{1+sT_1}$ approssima il mio sistema

NOTA: $\cancel{G(s) \simeq \frac{M}{1+sT_1}}$, non ci sono relazioni d'ordine

$G_a(s)$ è una nuova funzione di trasf. approssimata, che significa $y(t) \simeq M(1-e^{-\frac{t}{T}})$

⋈ Approssimaz. è precisa se $4.6\,T_2$, cioè quando T_2 si estingue.

Sistemi del II ordine (poli reali e coincidenti)

$$G(s) = \frac{\mu}{(1+sT)^2}$$

- Risposta indiciale

$$Y(s) = \frac{\mu}{s} + \frac{-\mu}{s+1/T} + \frac{-\mu/T}{(s+1/T)^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \mu\left(1 - e^{-t/T} - t/Te^{-t/T}\right), t \geq 0$$

  - Intorno a $t = 0$

$$y(0) = 0, \qquad \dot{y}(0) = 0$$

  - Asintoticamente

$$y_\infty = \lim_{t\to+\infty} y(t) = \mu$$

  - Parametri caratteristici

y_∞	T_s	T_r	T_{a5}	T_{a1}
μ	$\simeq 3.36T$	$\simeq 1.68T$	$\simeq 4.74T$	$\simeq 6.64T$

Un po' più grande
ma proporzionale

Sistemi del II ordine (poli reali e uno zero)

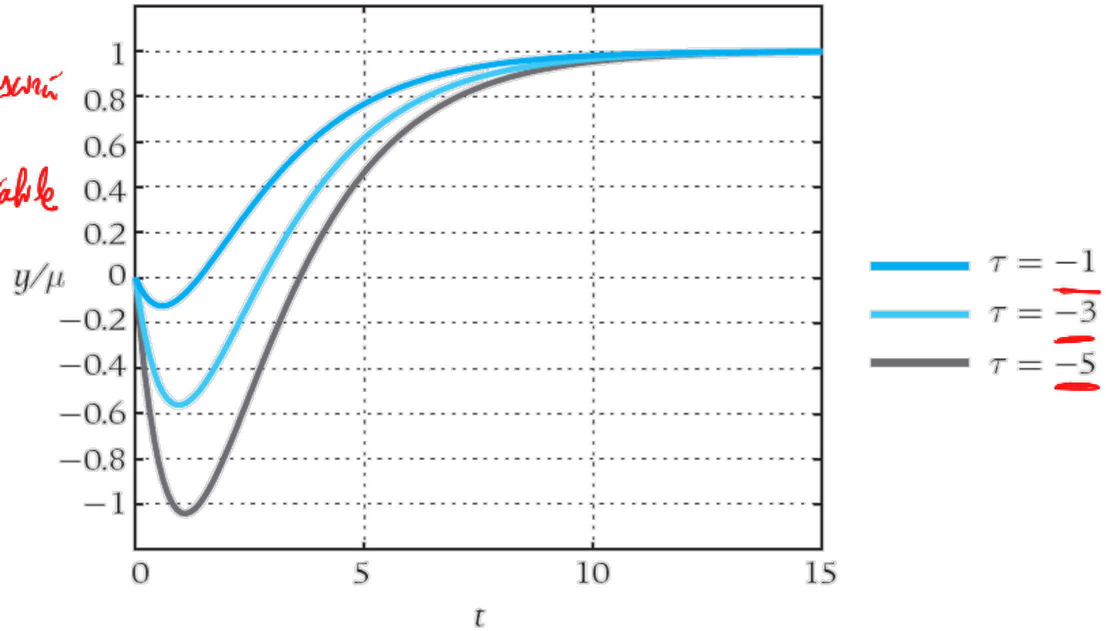
Se $\tau = T_1$ o T_2, uno dei modi non uscirà in uscita
Non raggiungibile/osservabile

$$G(s) = \frac{\mu(1+s\tau)}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$$

- Risposta indiciale

$$Y(s) = \frac{\mu}{s} - \frac{\mu(T_1-\tau)/(T_1-T_2)}{s+\frac{1}{T_1}} + \frac{\frac{\mu(T_2-\tau)}{T_1-T_2}}{s+\frac{1}{T_2}} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$$

$$y(t) = \mu\left(1 - \frac{T_1-\tau}{T_1-T_2}e^{-t/T_1} + \frac{T_2-\tau}{T_1-T_2}e^{-t/T_2}\right), t \geq 0$$



- Intorno a $t = 0$

$$y(0) = 0, \qquad \dot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} s^2 \frac{\mu(1+s\tau)}{s(1+sT_1)(1+sT_2)} = \frac{\mu\tau}{T_1T_2}$$

Se $\tau>0$, mi sposto correttamente verso μ

Denominatore >0, per stabilità

- Asintoticamente

$$y_\infty = \lim_{t\to+\infty} y(t) = \mu$$

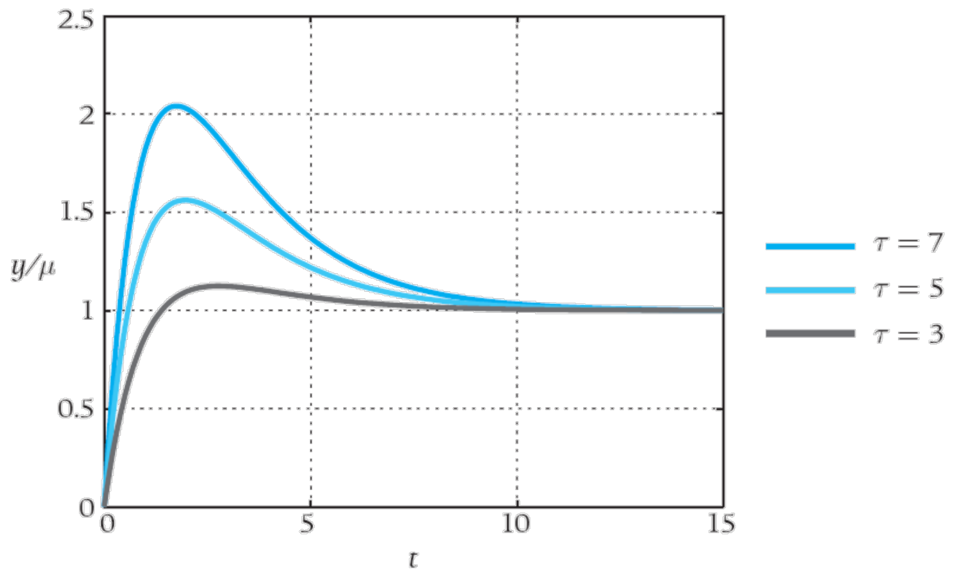
- Caso $\tau < 0$
  - Se lo zero è positivo la risposta indiciale presenta il fenomeno della «sottoelongazione», il cui picco cresce al crescere di $|\tau|$

Tempo per recuperare l'andamento corretto aumenta con τ.

Sistemi del II ordine (poli reali e uno zero) CASO 1

$$y(t) = \mu\left(1 - \frac{T_1 - \tau}{T_1 - T_2}e^{-t/T_1} + \frac{T_2 - \tau}{T_1 - T_2}e^{-t/T_2}\right), t \geq 0$$

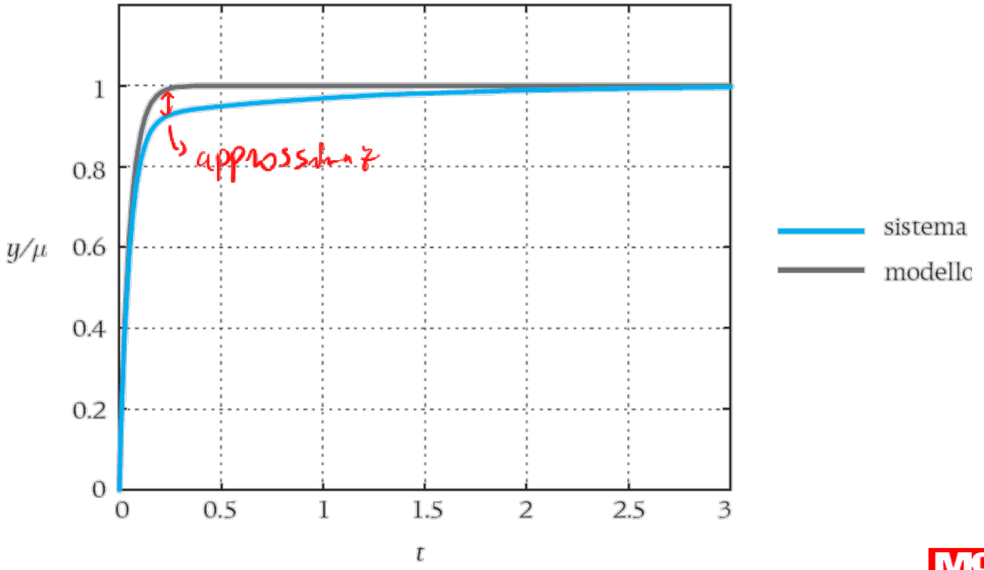
- Caso $\tau > T_1 > T_2 > 0$
  - Se lo zero è negativo la risposta indiciale presenta il fenomeno della «sovraelongazione», il cui picco cresce al crescere di τ
  - Dunque, anche sistemi con poli reali e distinti possono sovraelongare, anche se senza oscillazioni



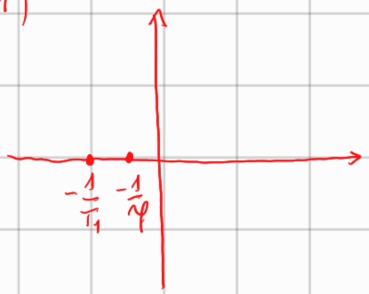
- Caso $\tau \simeq T_1 \gg T_2 > 0$ CASO 2
  - Polo e zero quasi si cancellano, quindi il residuo relativo a T_1 tende a zero e quello relativo a T_2 tende a -1

$$y(t) \simeq \mu\left(1 - e^{-t/T_2}\right), t \geq 0$$

  - Le risposte indiciali completa e approssimata si discostano poco l'una dall'altra
    - **Modello ridotto**: stavolta però «sopravvive» la costante di tempo più piccola (la riduzione del modello è dovuta ad una cancellazione polo-zero)



CASO 1)



CASO 2)

$$G_a(s) = \frac{M}{(1+sT_2)}$$

All'inizio é come se vedessi solo T_2, poi la piccola presenza di T_1 si sente.

Sistemi del II ordine (poli reali e uno zero)

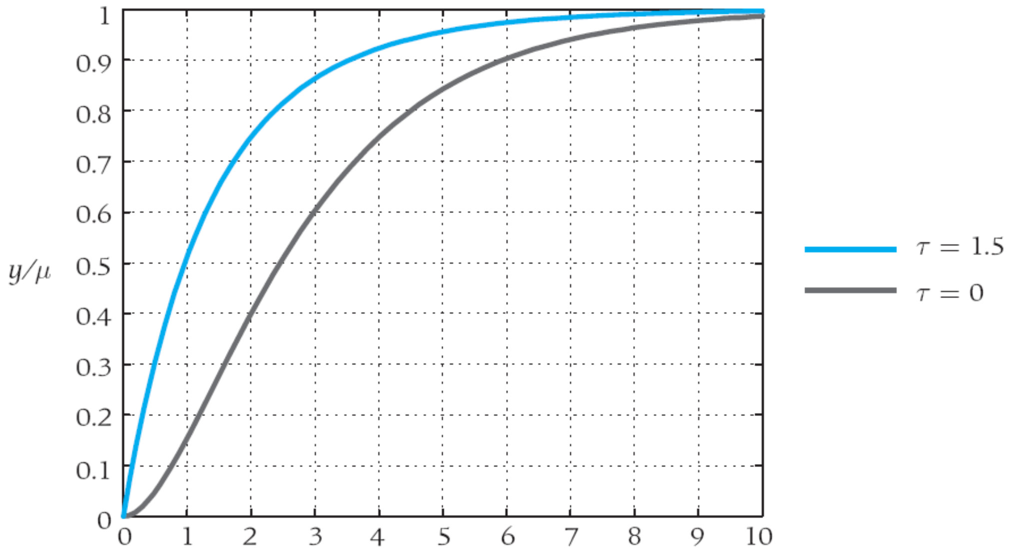
CASO 3

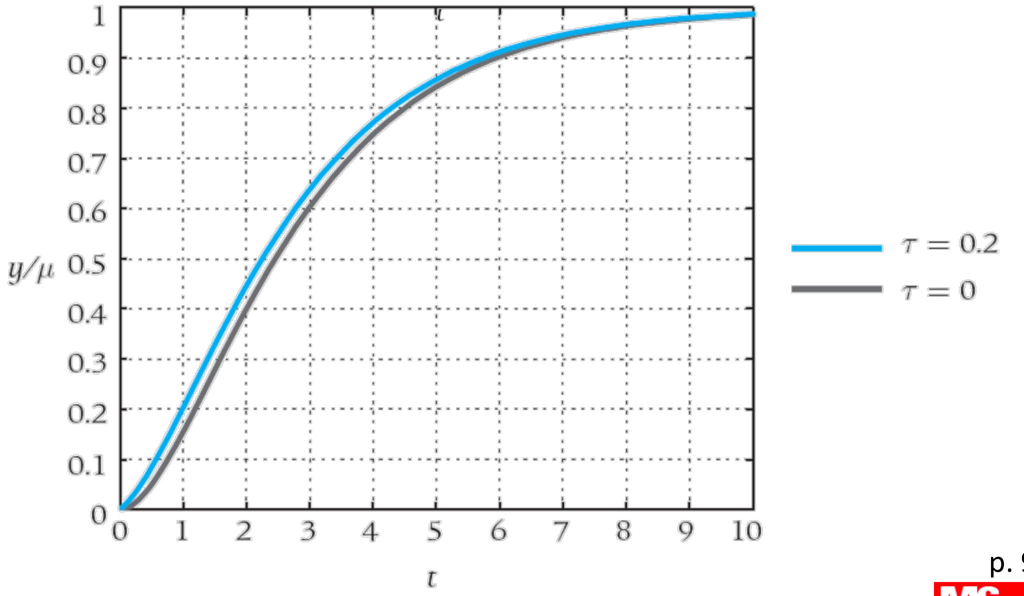
$$y(t) = \mu\left(1 - \frac{T_1 - \tau}{T_1 - T_2} e^{-t/T_1} + \frac{T_2 - \tau}{T_1 - T_2} e^{-t/T_2}\right), t \geq 0$$

- Caso $T_2 < \tau < T_1$
  - La presenza di uno zero con costante di tempo paragonabile a quelle dei due poli tende a velocizzare la risposta
  - Ovviamente, se $\tau \simeq T_2$, il polo dominante diventa quello relativo alla costante di tempo T_1 (riduzione di modello dovuta alla cancellazione polo-zero) Caso $\tau \simeq T_1$ simile a caso 2

$-\frac{1}{\tau}$ $-\frac{1}{T_2}$

- Caso $0 < \tau < T_2 < T_1$
  - Al diminuire di τ lo zero (in $-1/\tau$) si sposta sempre più lontano dall'asse immaginario
    - La risposta tende ad assomigliare a quella del sistema senza lo zero
    - Anche per gli zeri, l'effetto sulla risposta diminuisce all'allontanarsi dall'asse immaginario





Sistemi del II ordine (poli complessi e coniugati)

$$G(s) = \frac{\mu\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \omega_n > 0, |\xi| < 1$$

poli $p = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$, e p^*

- Risposta indiciale

* $\xi = \cos\vartheta$

$$Y(s) = \frac{\mu}{s} + \frac{r}{s-p} + \frac{r^*}{s-p^*} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$$

$$\left(\mu + 2|r|e^{-\xi\omega_n t}\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t + \angle r\right)\right), t \geq 0$$

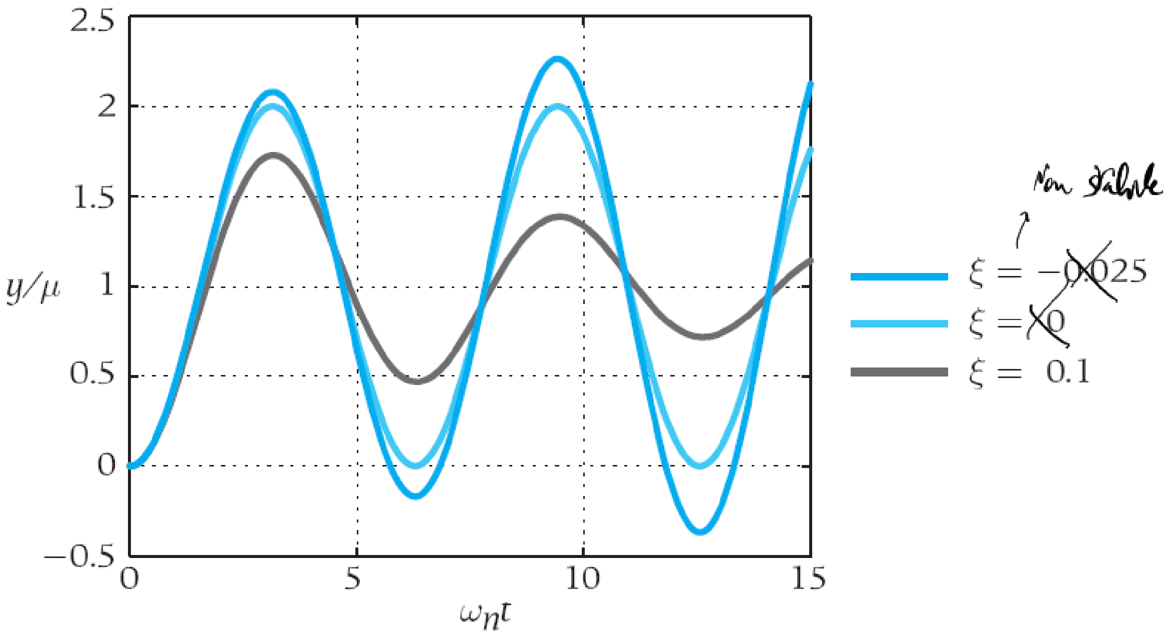
$$y(t) = \mu\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t + \arccos\xi\right)\right), t \geq 0$$

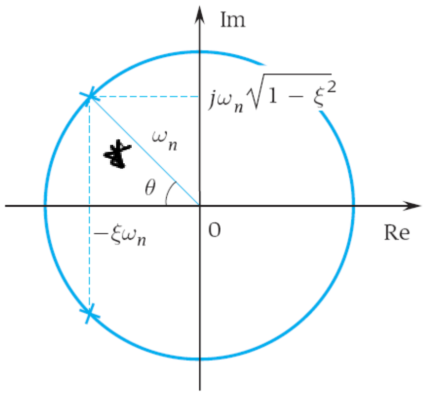
- Intorno a $t = 0$

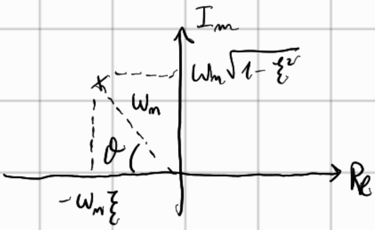
$$y(0) = 0, \qquad \dot{y}(0) = 0$$

- Asintoticamente (se $\xi > 0$)

$$y_\infty = \lim_{t\to+\infty} y(t) = \mu$$







$\xi = \cos\theta$

$\angle p = \pi - \cos^{-1}\xi$

$|p| = \omega_n$

NOTA: $r = \dfrac{M\omega_n^2}{p(p-p^*)}$

$|r| = \dfrac{M\omega_n^2}{|p|\,|p-p^*|} = \dfrac{M\cancel{\omega_n^2}}{\cancel{\omega_n}\, 2\cancel{\omega_n}\sqrt{1-\xi^2}}$

$z-\bar{z} = 2\,\mathrm{Im}(z)$

$\angle r = 0 - \angle p - \angle(p-p^*) = -\pi + \cos^{-1}\xi - \frac{\pi}{2} = -\frac{3}{2}\pi + \cos^{-1}\xi$

Quindi:

$$2|r|\, e^{-\xi\omega_n t}\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\, t + \angle r\right) =$$

$$\frac{M}{\sqrt{1-\xi^2}}\, e^{-\xi\omega_n t}\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\, t - \frac{3}{2}\pi + \operatorname{acos}\xi\right) =$$

$$= -\frac{M}{\sqrt{1-\xi^2}}\, e^{-\xi\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\, t + \operatorname{acos}\xi\right)$$

Sistemi del II ordine (poli complessi e coniugati)

- Risposta indiciale

$$y(t) = \mu\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t + \arccos\xi\right)\right), t \geq 0$$

- Istanti di massimo e minimo relativo

$$\bar{t}_k = \frac{k\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \Rightarrow y(\bar{t}_k) = \mu\left(1 - (-1)^k e^{-k\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

- Parametri caratteristici

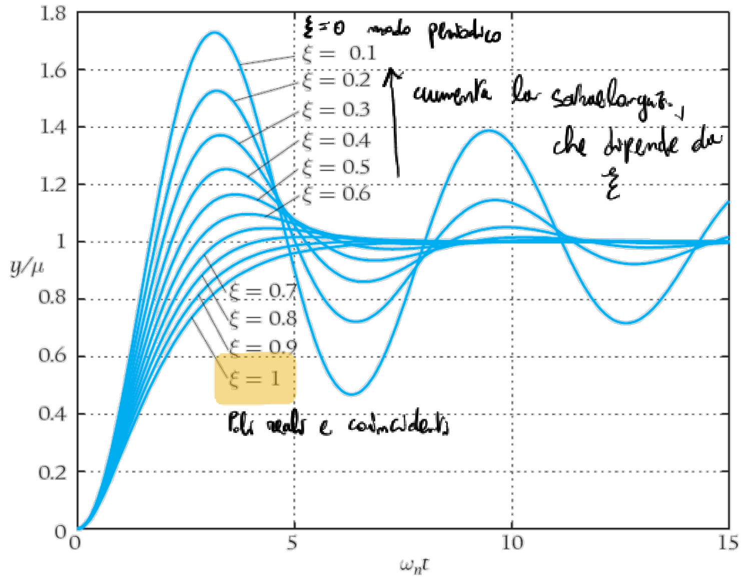
$$y_{max} = \mu\left(1 + e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}\right) \text{ in } T_M = \bar{t}_1 = \pi/\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right)$$

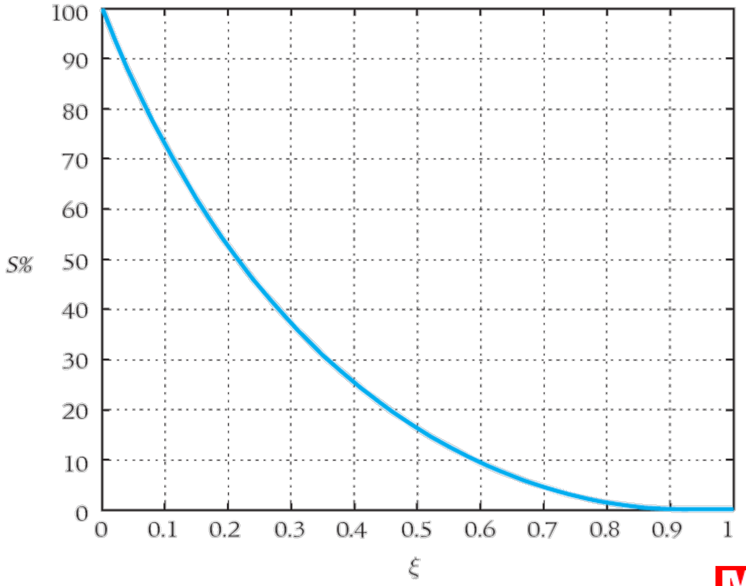
  - Sovraelongazione

$$\boxed{s\% = 100 e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}$$

$$\frac{y_{max} - y_\infty}{y_\infty} \cdot 100$$

Dipende solo da ξ → Sovraelongaz. più piccola.





Calcolo gli zeri derivando:

$$-\frac{M}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\underbrace{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\, t + a\cos\xi}_{\alpha(t)}) \longrightarrow$$

$$f(t) = e^{-\xi\omega_n t} \sin(\alpha(t))$$

$$f'(t) = \underbrace{-\xi\omega_n}_{Re(polo)} \cancel{e^{-\xi\omega_n t}} \sin(\alpha(t)) + \cancel{e^{-\xi\omega_n t}} \cos(\alpha(t)) \cdot \underbrace{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}_{\omega_n \sin\theta} = 0$$

$$-\omega_n\cos\theta = \omega_n \cos\angle p \qquad \omega_n \sin\theta \to \omega_n \sin\angle p$$

$$\cancel{\omega_n} \cos\angle p \sin(\alpha(t)) + \cancel{\omega_n} \sin\angle p \cos(\alpha(t)) = 0$$

$$\sin(\alpha(t) + \angle p) = 0$$

Quindi,
$$\alpha(t) + \angle p = K\pi$$

$$\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\, t_h + \cancel{\cos^{-1}\xi} + \pi - \cancel{\cos^{-1}\xi} = h\pi$$

$$t_h = \frac{(h-1)\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}, \quad h \in \mathbb{Z}$$

$$t_K = \frac{K\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \quad K \in \mathbb{Z}$$

Sistemi del II ordine (poli complessi e coniugati)

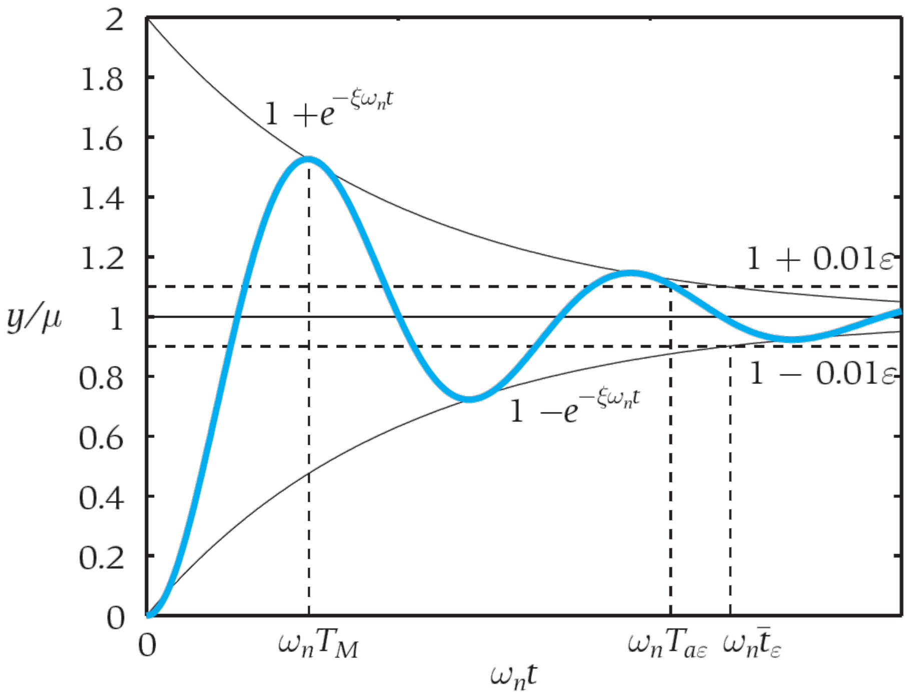
- Parametri caratteristici
  - Tempo di assestamento (determinazione approssimata)
    - I punti di massimo appartengono alla funzione

$$y_M(t) = 1 + e^{-\xi\omega_n t}$$

    - I punti di minimo appartengono alla funzione

$$y_m(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t}$$

    - L'istante di tempo $\bar{t}_\varepsilon$ in cui tali funzioni entrano nella fascia $[1-0.01\varepsilon, +0.01\varepsilon]$, approssimazione di $T_{a\varepsilon}$, si trova facilmente



$$y_m(\bar{t}_\varepsilon) = 1 - e^{-\xi\omega_n \bar{t}_\varepsilon} = 1 - 0.01\varepsilon \Rightarrow T_{a\varepsilon} \simeq \bar{t}_\varepsilon = \frac{1}{\xi\omega_n}\ln\left(\frac{100}{\varepsilon}\right)$$

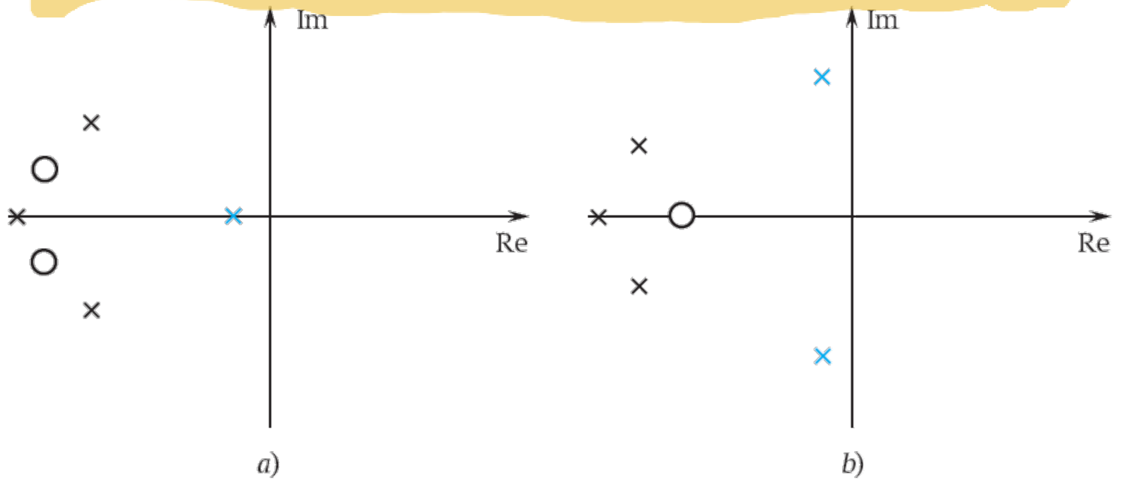
$$\boxed{T_{a1} \simeq \frac{4.6}{\xi\omega_n}}$$

y_∞	$S\%$	T_M	T_P	stima di $T_{a\varepsilon}$
μ	$100e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}$	$\dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$	$\dfrac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$	$-\dfrac{1}{\xi\omega_n}\ln(0.01\varepsilon)$

- Sistemi con ritardi di tempo

$$G(s) = G'(s)e^{-s\tau}$$

  - I parametri caratteristici sono gli stessi di $G'(s)$ tranne quelli relativi ai tempi (massimo, salita, ritardo, assestamento) a cui va aggiunto il ritardo τ
- Sistemi di ordine superiore al secondo
  - Le dinamiche (modi di evoluzione) relative a poli vicini a zeri «pesano poco» nella risposta
  - Le dinamiche relative a poli lontani dall'asse immaginario «pesano poco» nella risposta
    - Nel senso che influenzano la risposta solo nei primi istanti di tempo dell'evoluzione
  - È possibile eliminarle dalla funzione di trasferimento, ma mantenendo il guadagno statico ($G(0)$) inalterato!
    - È bene quindi usare sempre la forma fattorizzata
    - L'approssimazione consiste nell'accontentarsi di una risposta indiciale approssimata



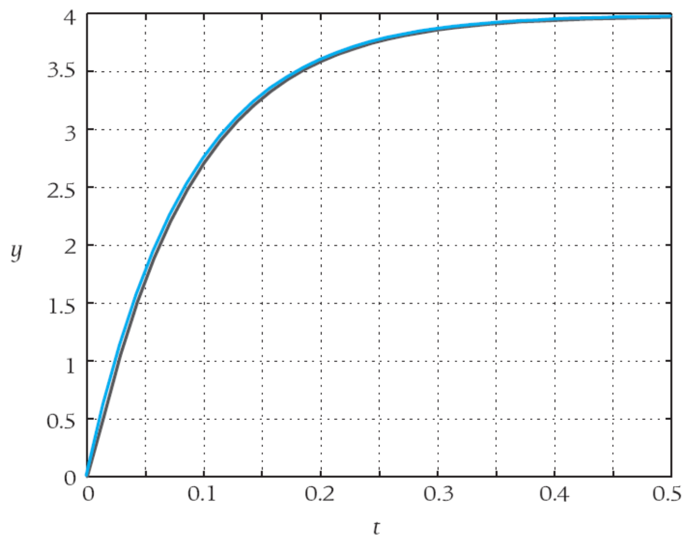
In azzurro i «poli dominanti»

Sistemi di ordine superiore al secondo

- Esempio 1

$$G(s) = \frac{3.98}{(1 + 0.0856s)(1 + 0.0022s)}$$

costanti di tempo



  - Il polo con costante di tempo maggiore (più vicino all'asse immaginario) è quello dominante

$(s^2 + 10s + 500)$

$2\xi\omega_n \Rightarrow$ Parte reale -5

$$G_a(s) = \frac{3.98}{1 + 0.0856s}$$

- Esempio 2

τ piccolo rispetto a 1 $\rightarrow$ lontano da asse

$$G(s) = \frac{1 + s\tau}{(1 + 0.1s)(1 + 0.02s + 0.002s^2)(1 + 0.1s + s^2)}$$

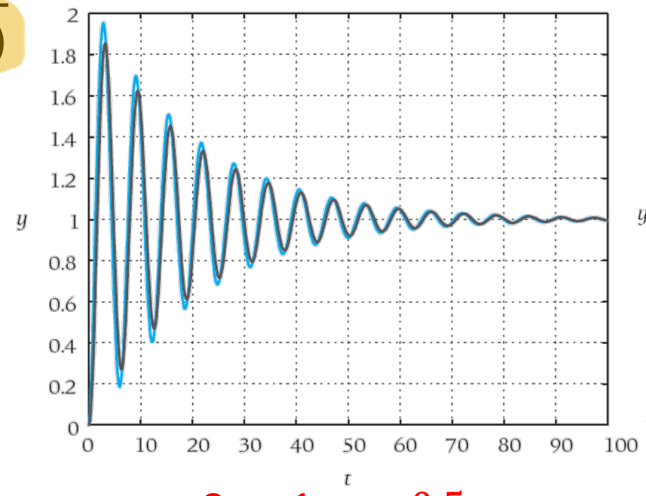
  - I poli più vicini all'asse immaginario sono quelli complessi con $\omega_n = 1$

Caso 1: zero lontano dall'asse immaginario

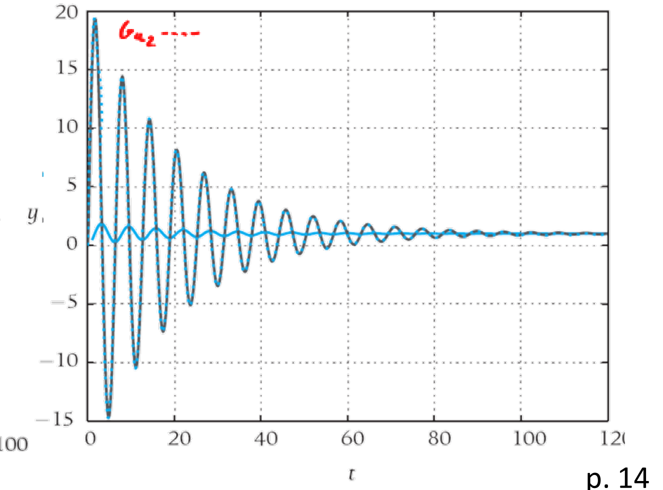
$$G_{a1}(s) = \frac{1}{1 + 0.1s + s^2}$$

Caso 2: zero vicino dall'asse immaginario

$$G_{a2}(s) = \frac{1 + s20}{1 + 0.1s + s^2}$$



Caso 1: $\tau = 0.5$



Caso 2: $\tau = 20$