

Segnali e Filtri

Prof. Mario Luiso

Dipartimento di Ingegneria

Via Roma, 29 – 81031 Aversa (CE)

mario.luiso@unicampania.it

www.ingegneria.unicampania.it

Serie di Fourier & Segnali Periodici

Un segnale periodico, di periodo T , può essere scomposto in una somma di (infiniti) termini sinusoidali (componenti spettrali o armoniche) a frequenze multiple di $1/T$ detta serie di Fourier:

$$x(t) = C_0 + \sum_{h=1}^{\infty} \sqrt{2}C_h \cos(h \cdot 2\pi f_1 \cdot t + \varphi_h)$$

$f_1 = 1/T$ frequenza fondamentale

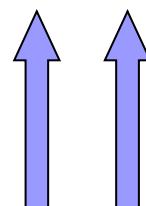
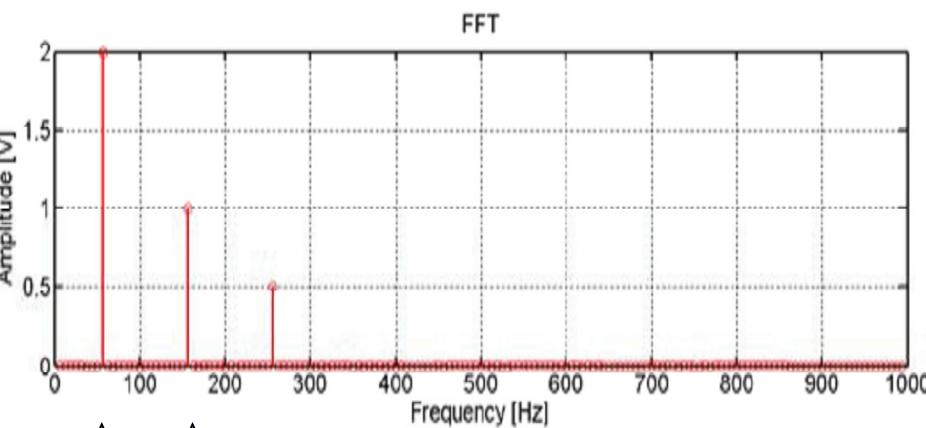
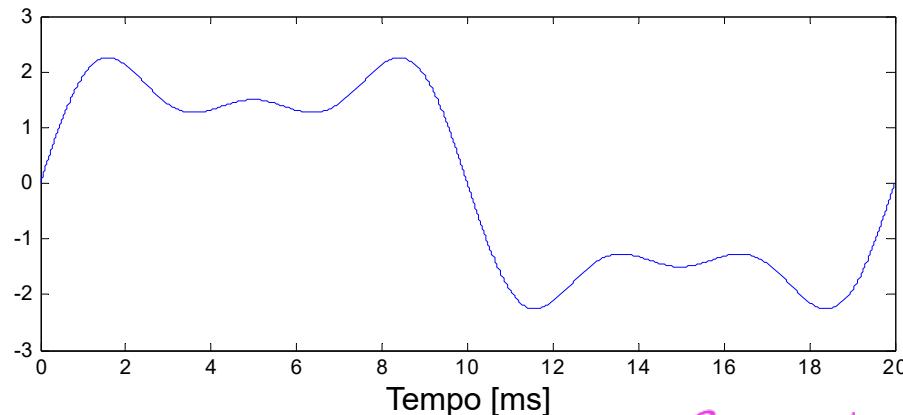
C_0 è la componente continua o valor medio

C_h e φ_h ampiezza rms e angolo di fase della h -esima armonica

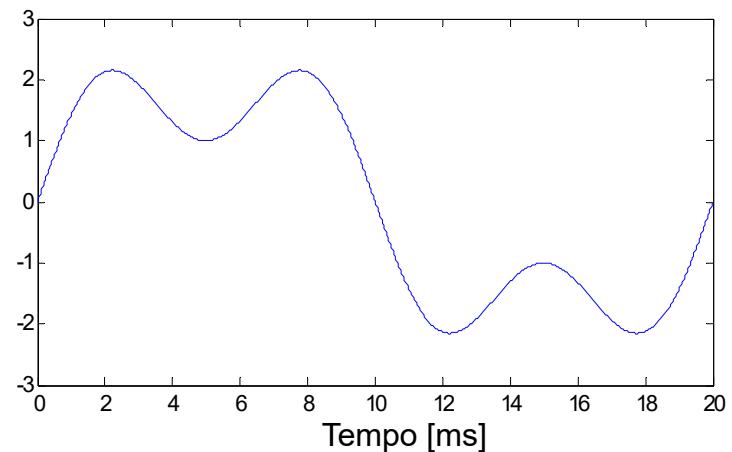
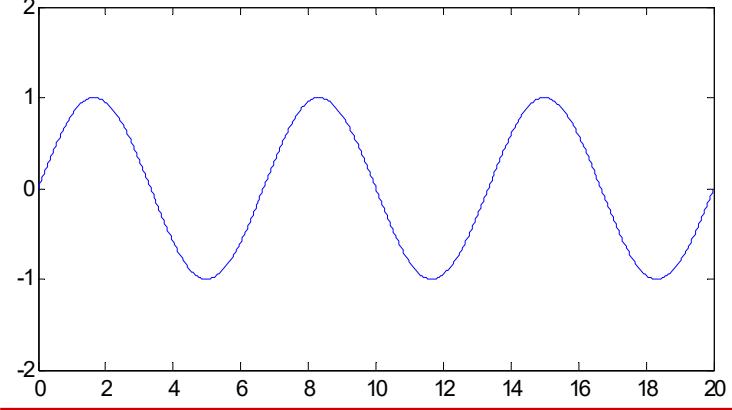
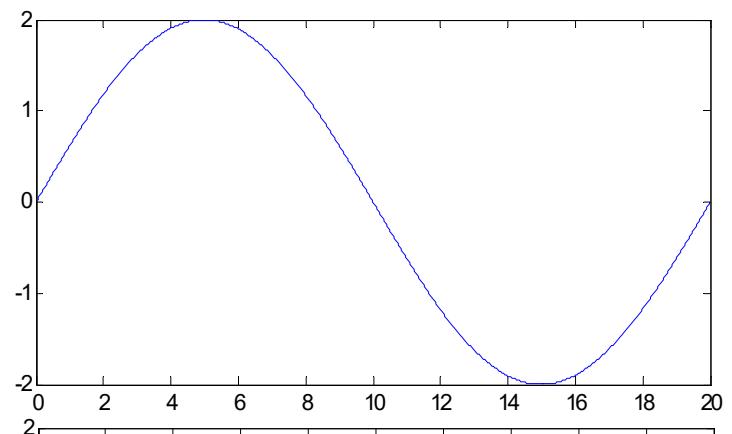
C_0, \dots, C_h sono anche detti coefficienti della serie di Fourier

L'analisi spettrale (dominio della frequenza) consiste nella valutazione dei parametri C_h e talvolta anche dei parametri φ_h .

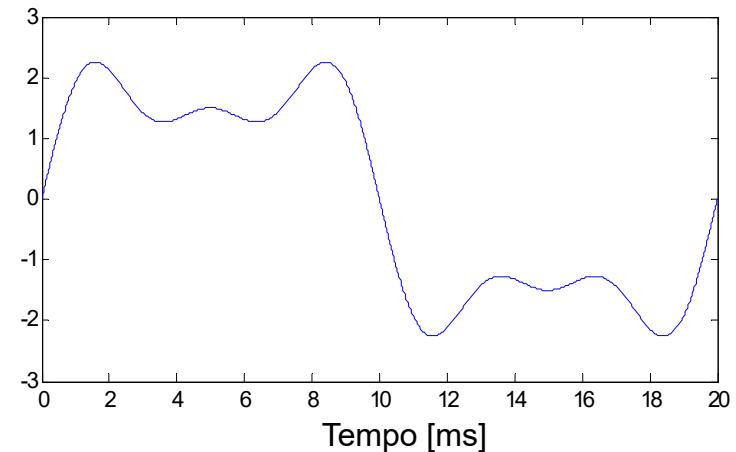
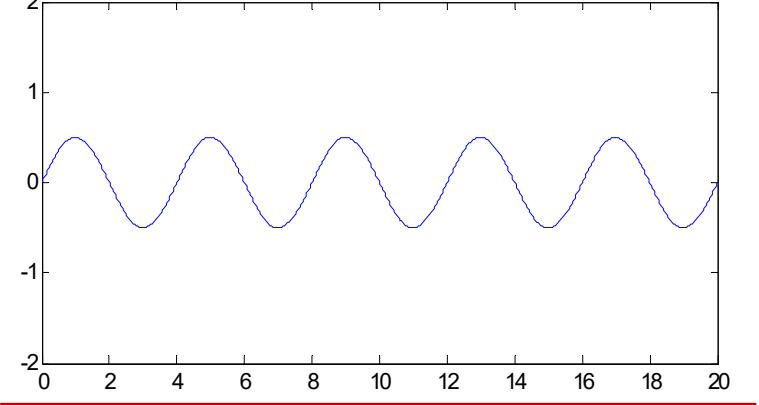
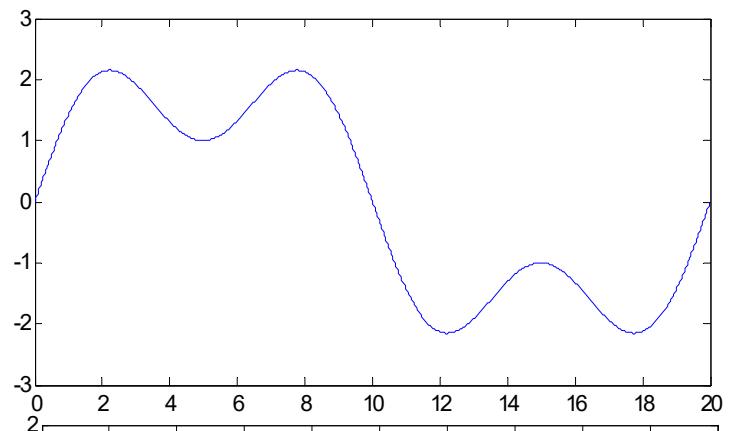
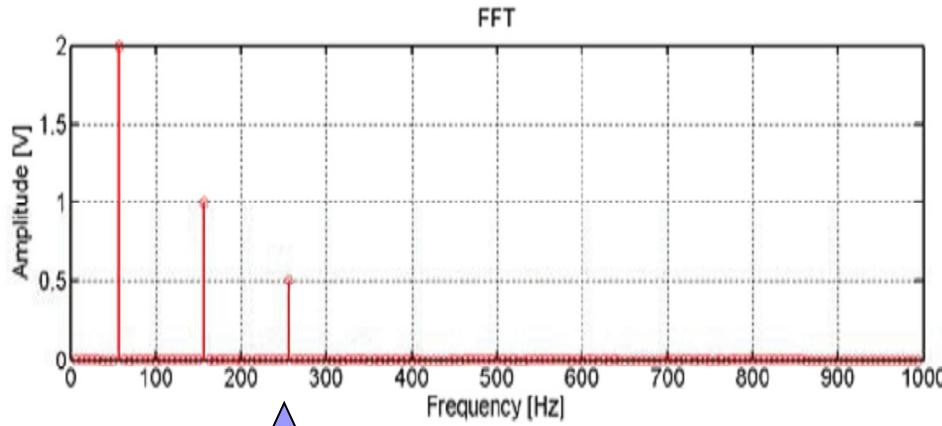
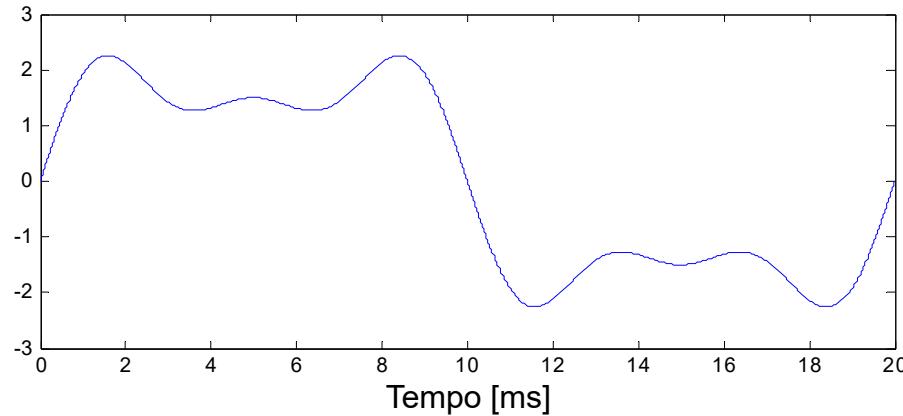
Serie di Fourier



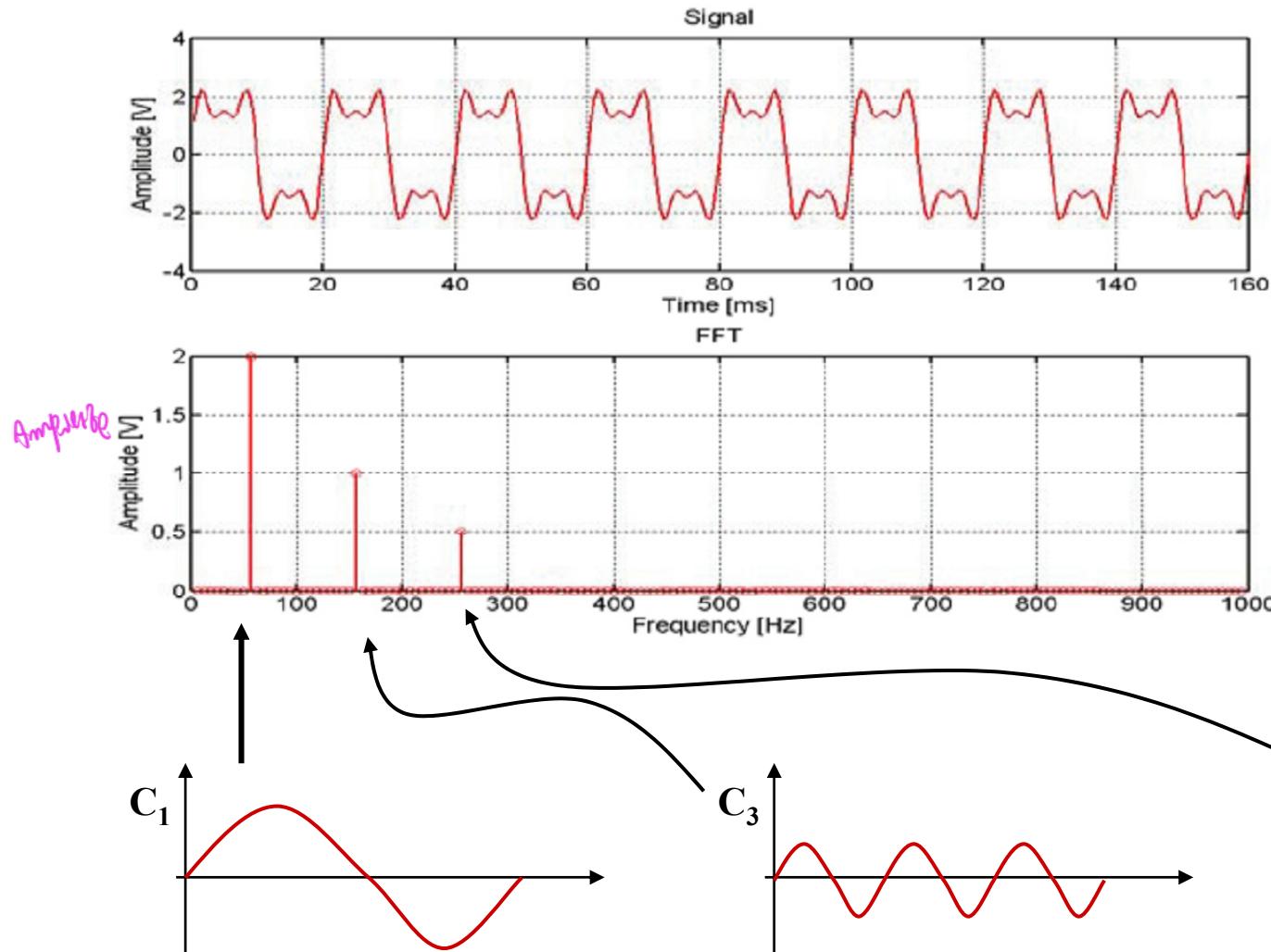
Per avere gabbie due onde
frequenza maggiore che è più
multiplo di quella di partenza
perché ha tutto plauso



Serie di Fourier



Serie di Fourier



Combinando un certo numero di sinusoidi di opportune ampiezza e fase si può approssimare qualsiasi segnale periodico

frequenze

Se faccio somma con frequenze non multipli l'una dell'altra, il periodo della Somma non sarà quello dei periodi

Sinusoidi a frequenza diversa: contenuto informativo delle funzionali. Contenuto energetico a una certa frequenza è
distribuito da contenuto informativo ad un'altra frequenza.

Serie di Fourier & Segnali Periodici

L'utilità di analizzare nel dominio della frequenza un segnale risiede nel fatto che le sinusoidi sono segnali ortogonali quindi a contenuto energetico (o informativo) indipendente.

Dal punto di vista energetico (informativo) un segnale può essere guardato in maniera più dettagliata in termini di componenti spettrali perché si può valutare come il contenuto energetico (informativo) si distribuisca alle varie frequenze.

Le fasi ϕ_h non hanno rilevanza energetica ma influenzano solo la forma

Ciò non significa che le fasi non siano importanti (es. potenza elettrica, segnali radio modulati in fase, ecc.)

Il valore energetico complessivo del segnale può essere calcolato come somma dei valori quadratici dei coefficienti di Fourier (teorema di Parseval):

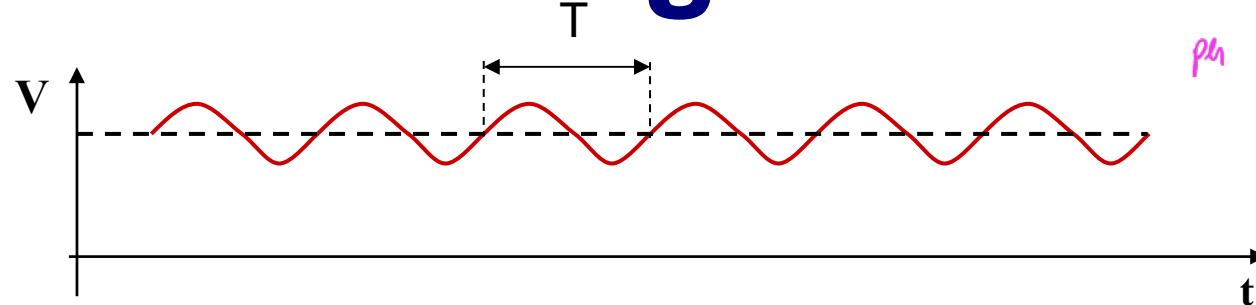
$$x_{rms} = \sqrt{\sum_{h=0}^{\infty} C_h^2} = \sqrt{C_{DC}^2 + C_{AC}^2}$$

$C_{DC} = C_0$ componente continua, ampiezza del valore medio
 $C_{AC} = \sum_{h=1}^{\infty} C_h^2$

Ora ci sono solo le ampiezze. Farci non considerare nel contenuto energetico della singola onda

Solo scorporando le parti continue da quella attuale.

Analisi dei Segnali



I segnali possono essere suddivisi in componente continua (valor medio) e componente alternata (segna meno componente continua)

La componente continua può essere visualizzata tracciando una linea orizzontale (circa) in corrispondenza del centro del segnale, come se fosse a valor medio nullo *

La componente alternata viene caratterizzata dalla sua periodicità (T) che individua la frequenza della componente fondamentale della serie di Fourier ($f_1 = 1/T$)

Le altre componenti, dette armoniche, sono a frequenza multipla intera della fondamentale ($f_h = h \cdot f_1$). La loro presenza, ampiezza e fase dipendono dalla forma d'onda della componente alternata

Analisi dei Segnali

Nei casi più semplici l'informazione e disturbo sono separati in frequenza. Ad esempio, situazioni comuni sono

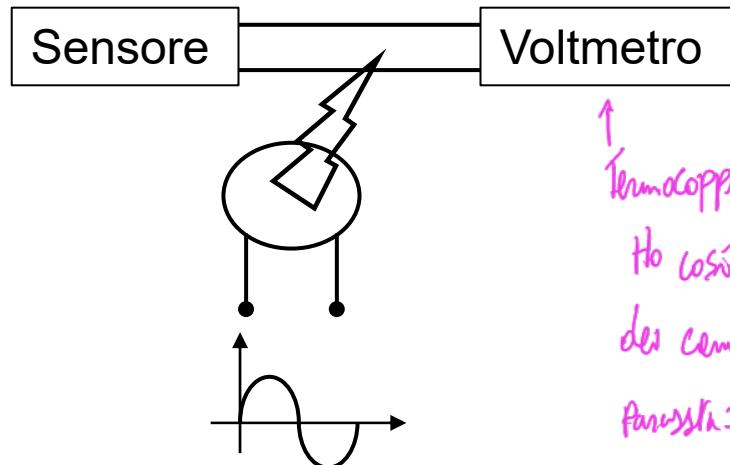
- Informazione nella componente continua e disturbo in alternata: *es: tensione continua con un disturbo a frequenza alta nel voltmetro a integrazione.*
- Informazione in alternata e disturbo nella componente continua *Disturbo degli amplificatori operazionali offset che aggiungono agli estremi*
- Informazione ad una certa frequenza e il resto è rumore o componenti non desiderate

In questi casi si può elaborare il segnale affinché il contenuto informativo risulti enfatizzato e/o il disturbo attenuato
(aumenti il rapporto segnale rumore)

↓
Tranne circuito analogico

Esempi di disturbi

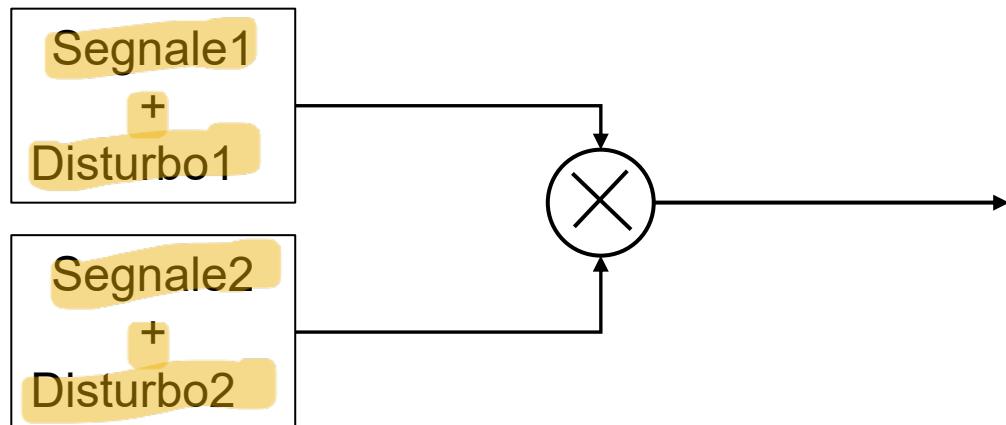
Disturbo additivo (che si somma al segnale)



↑
Termocoppia connessa a Voltmetro,

Ho così creato una maglia/spira. Questa potrebbe accoppiarsi con dei campi presenti nell'ambiente. Ho campi variabili che generano corrente: Voltmetro misura tensione costante generata da termocoppia, ma un'altra sorgente si va a sommare.

Disturbo moltiplicativo (che si moltiplica con il segnale)



Segnale1*Segnale2 +

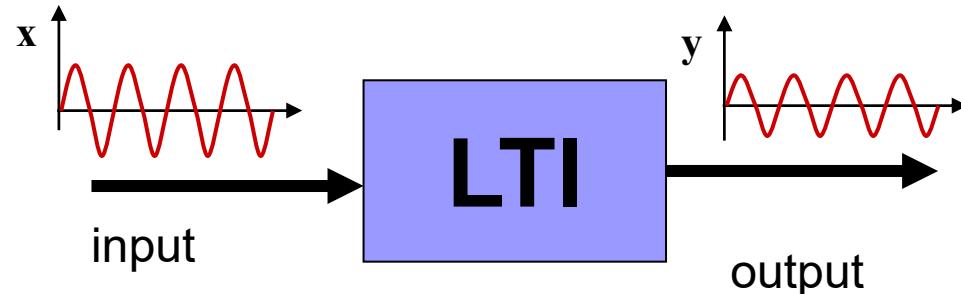
Segnale1*Disturbo2 +

Segnale2*Disturbo1 +

Disturbo1*Disturbo2

Sistemi LTI

L'elaborazione si realizza con sistemi lineari tempo invarianti (LTI)



Per il principio di sovrapposizione degli effetti, una somma di sinusoidi in ingresso produce una somma di sinusoidi in uscita.

Le singole sinusoidi in uscita sono le stesse che si avrebbero se il sistema fosse forzato con le singole sinusoidi in ingresso, anziché con la somma

Questo principio consente di studiare il comportamento del sistema con le singole sinusoidi

Una volta studiato il comportamento con le singole sinusoidi, risulta semplice ricostruire il comportamento del sistema quando all'ingresso c'è una somma di sinusoidi

MODIFICARE CONTENUTO SPEGTRALE DELLA MIA FORMA D'ONDA

Lineari: Se un input, mille sinusoidi, a regime uscirà senso una sinusoidi con stessa f.

Se mille somma

di sinusoidi, bis

slusare a regime

una somma di

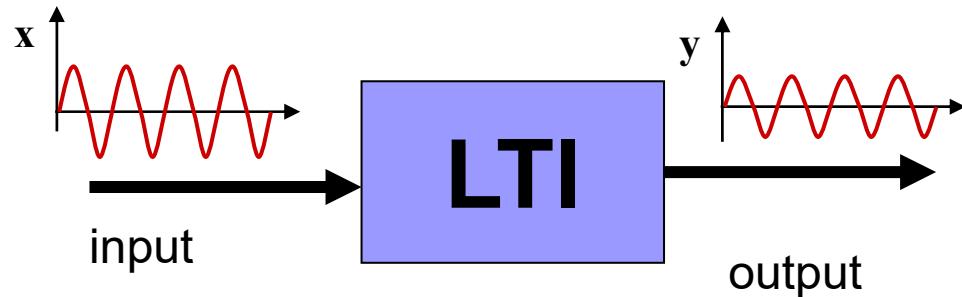
sinusoidi che abbia

se sinusoidi sistema

con le singole

sinusoidi.

Sistemi LTI



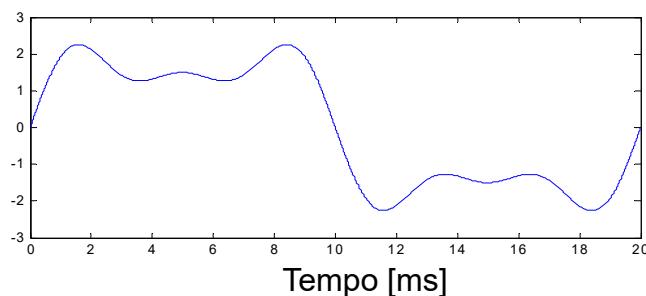
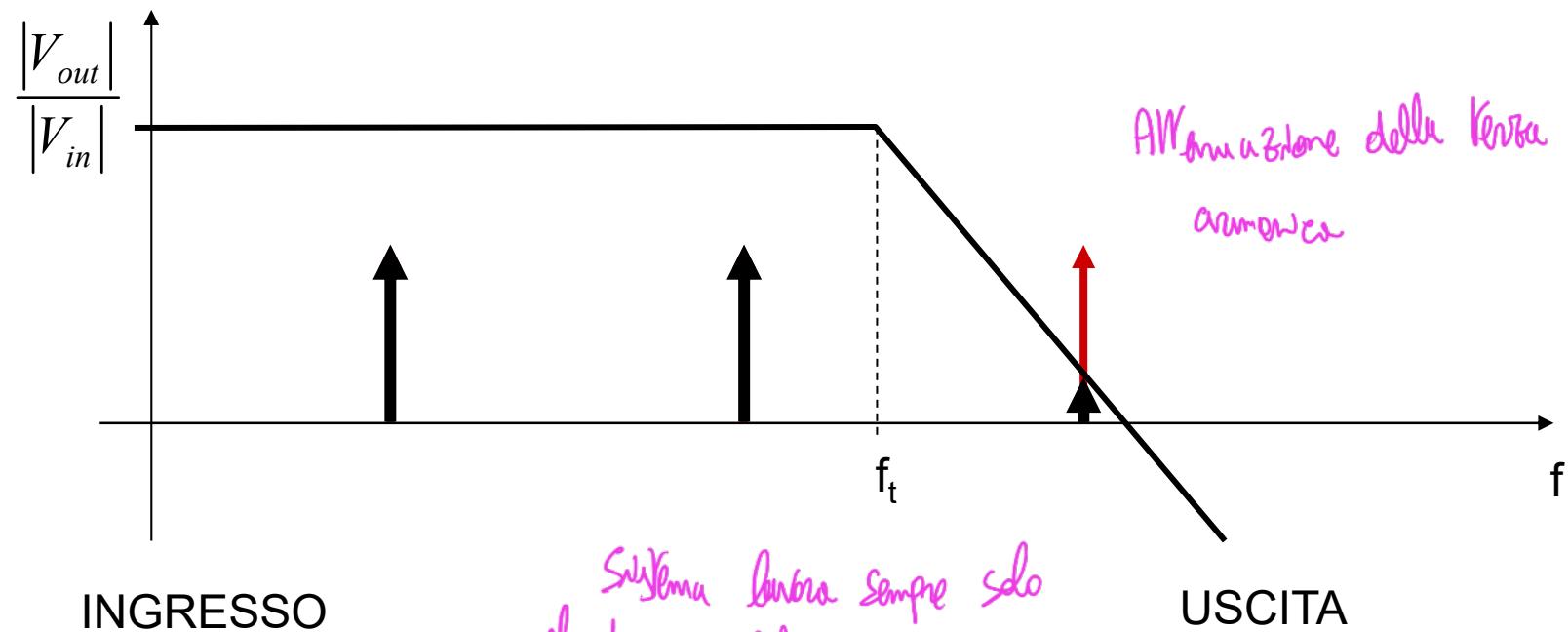
Segnali a differenti frequenze sono trattati in maniera differente

Il comportamento alle varie frequenze è descritto dalla risposta in frequenza del sistema (diagrammi di bode):

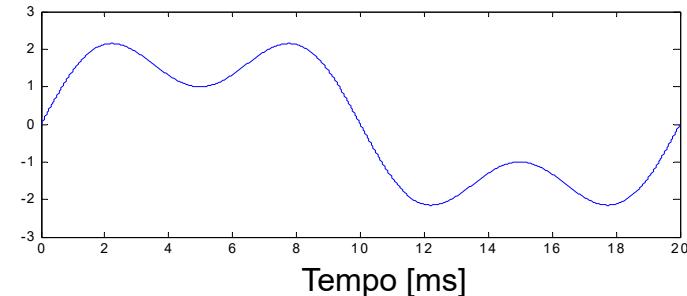
La risposta in frequenza mi dice di quanto sarà alterata l'ampiezza e la fase della sinusoide in ingresso in funzione della frequenza

Elaborazione dei segnali

In base quindi alla collocazione frequenziale posso prevedere come il contenuto informativo sarà alterato

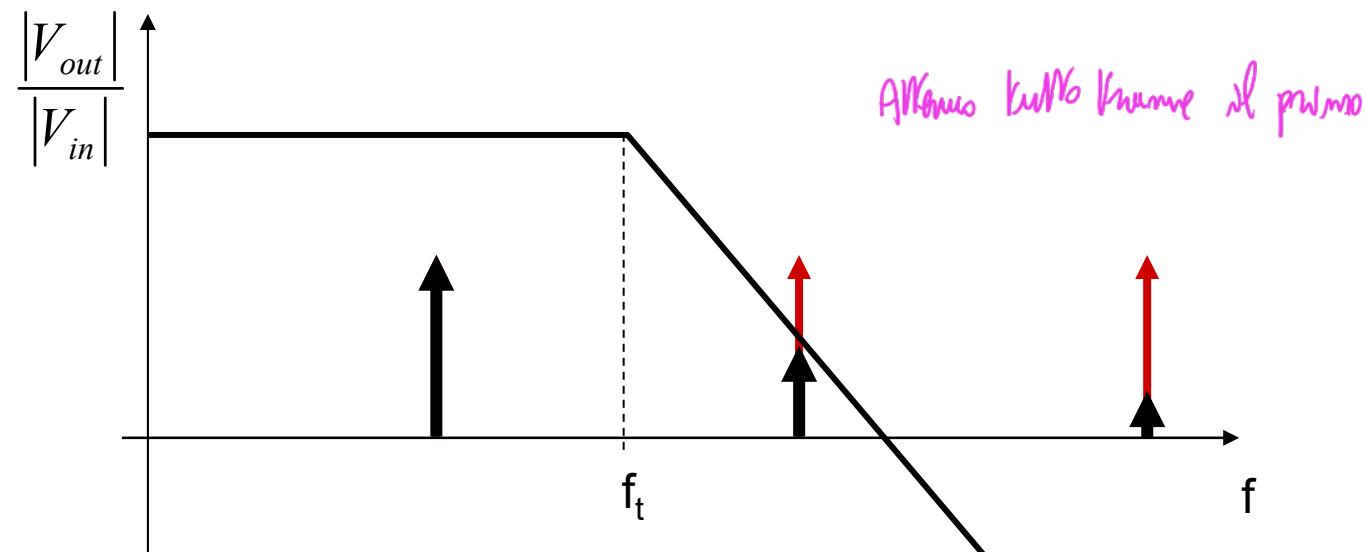


Sistema lavora sempre solo
nel dominio del tempo.
Questo è sempre una
mostra astrazione

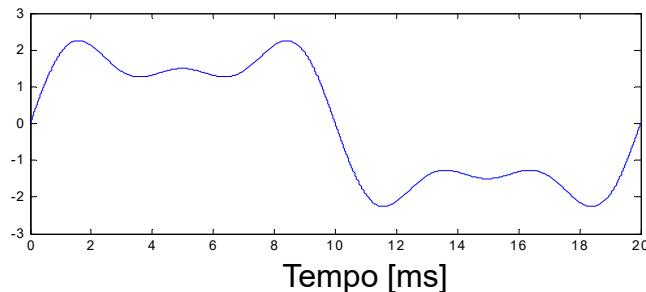


Elaborazione dei segnali

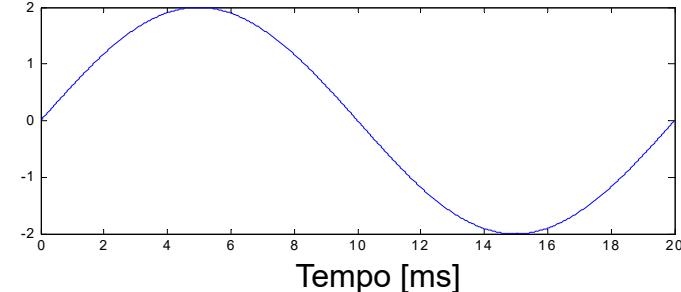
Oppure, posso utilizzare un sistema LTI (filtro) per alterare opportunamente il contenuto energetico (informativo) del segnale



INGRESSO



USCITA

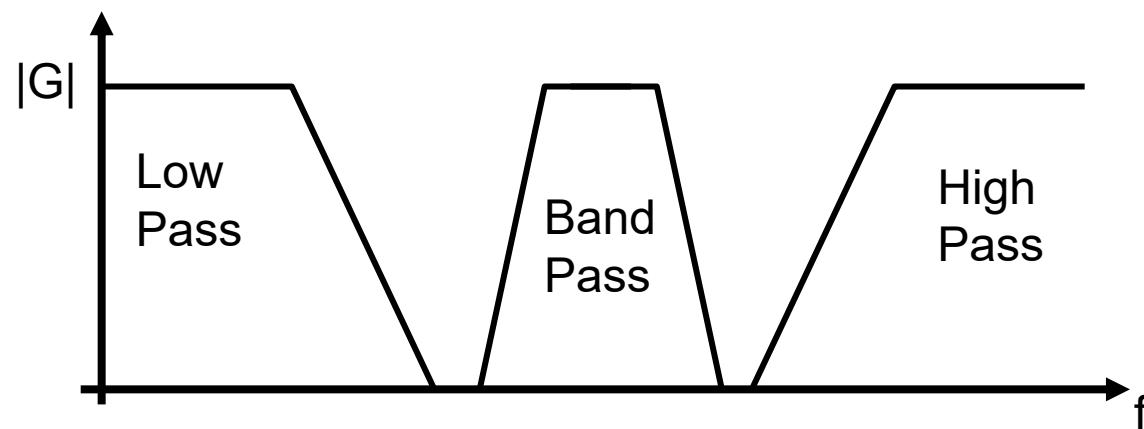


Filtraggio

Le diverse possibili risposte in frequenza sono utilizzate per alterare in maniera differente i contenuti del segnale che sono collocati a differenti frequenze. Tipicamente si cerca di lasciare inalterata o amplificare l'informazione e attenuare i disturbi.

Esempi:

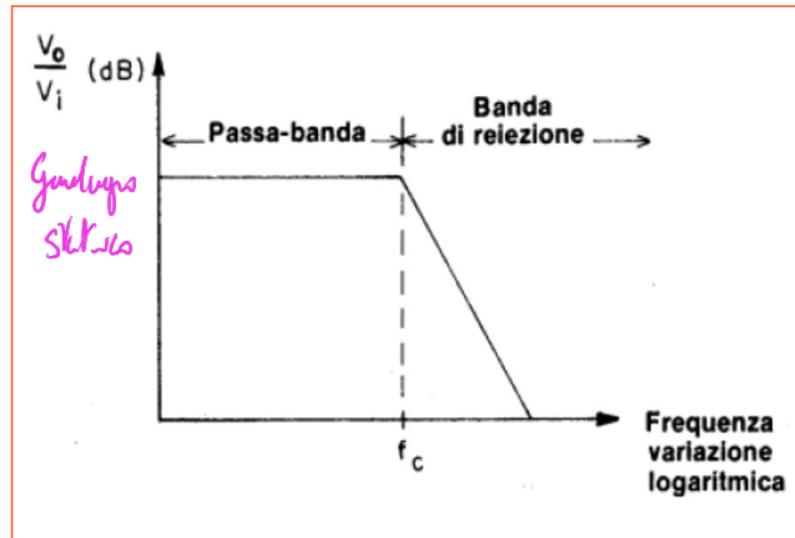
- informazione in bassa frequenza e disturbo in alta frequenza → filtro passa basso
- informazione a frequenza f_1 e disturbo alle altre frequenze → filtro passa banda
- informazione in alternata e disturbo in continua → filtro passa alto



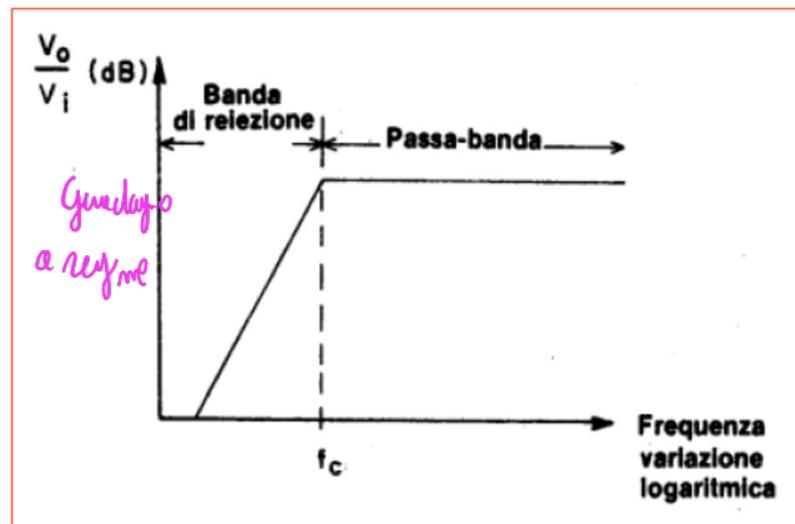
Filtraggio

IRI se ho più di ordine alto.

Un filtro **passa-basso** (*low-pass*) elimina tutte le armoniche a frequenza alta e lascia passare quelle inferiori alla frequenza di taglio (*cut-off frequency*).

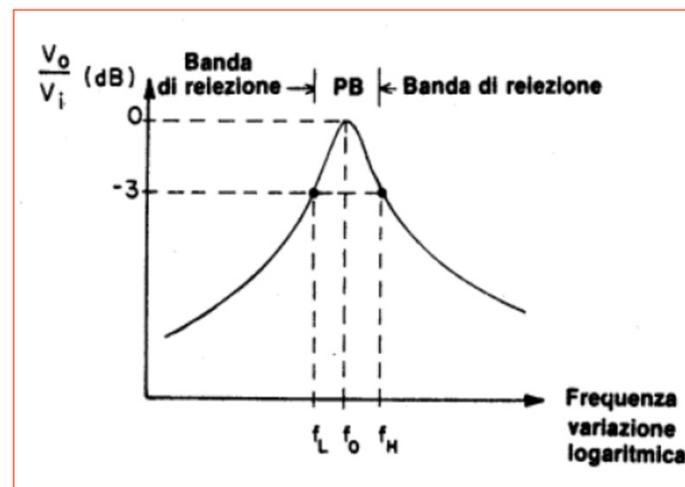


Un filtro **passa-alto** (*high-pass*) elimina le armoniche al di sotto della frequenza di taglio.

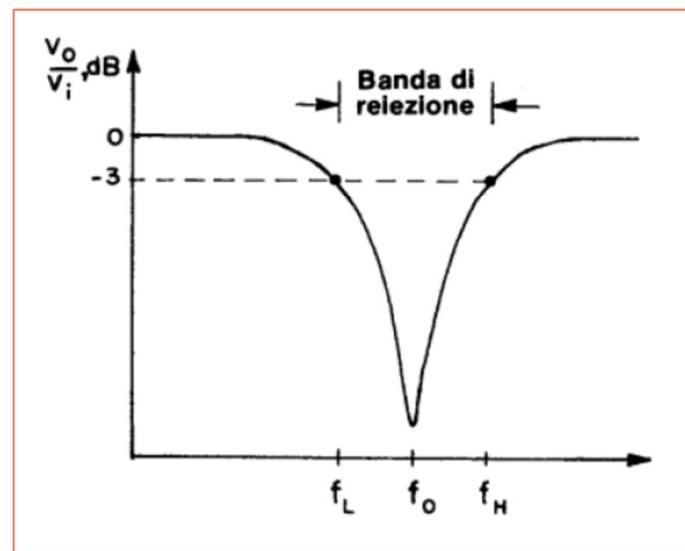


Filtraggio

Un filtro **passa-banda** elimina le armoniche inferiori e superiori ad una determinata banda di frequenze.

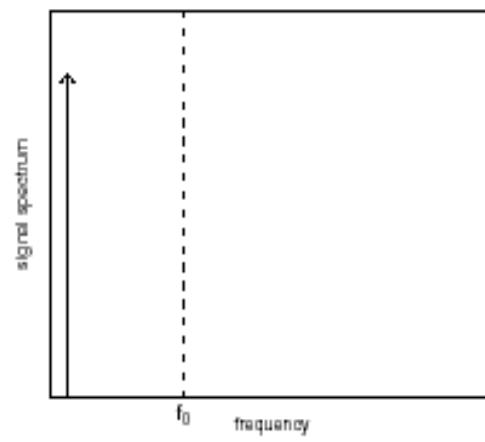
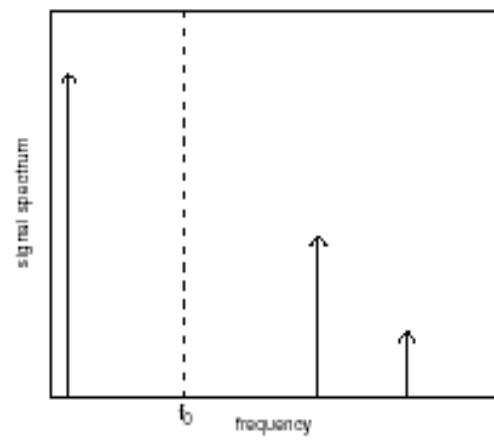
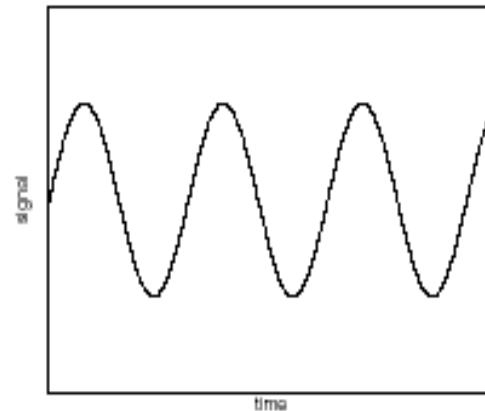
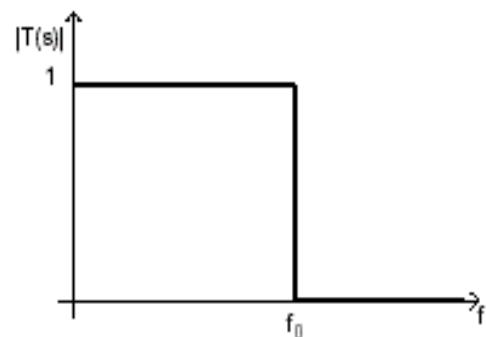
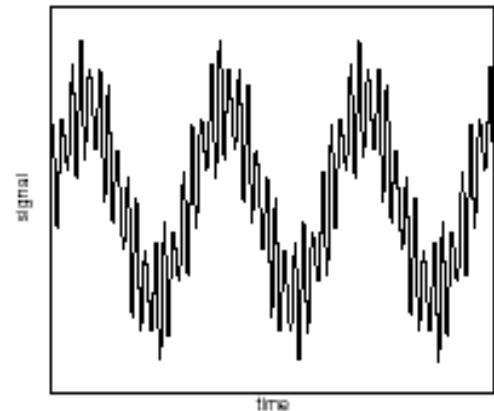


Un filtro a **reiezione di banda** (**notch**) elimina solamente le armoniche all'interno di una determinata banda e lascia passare quelle esterne.

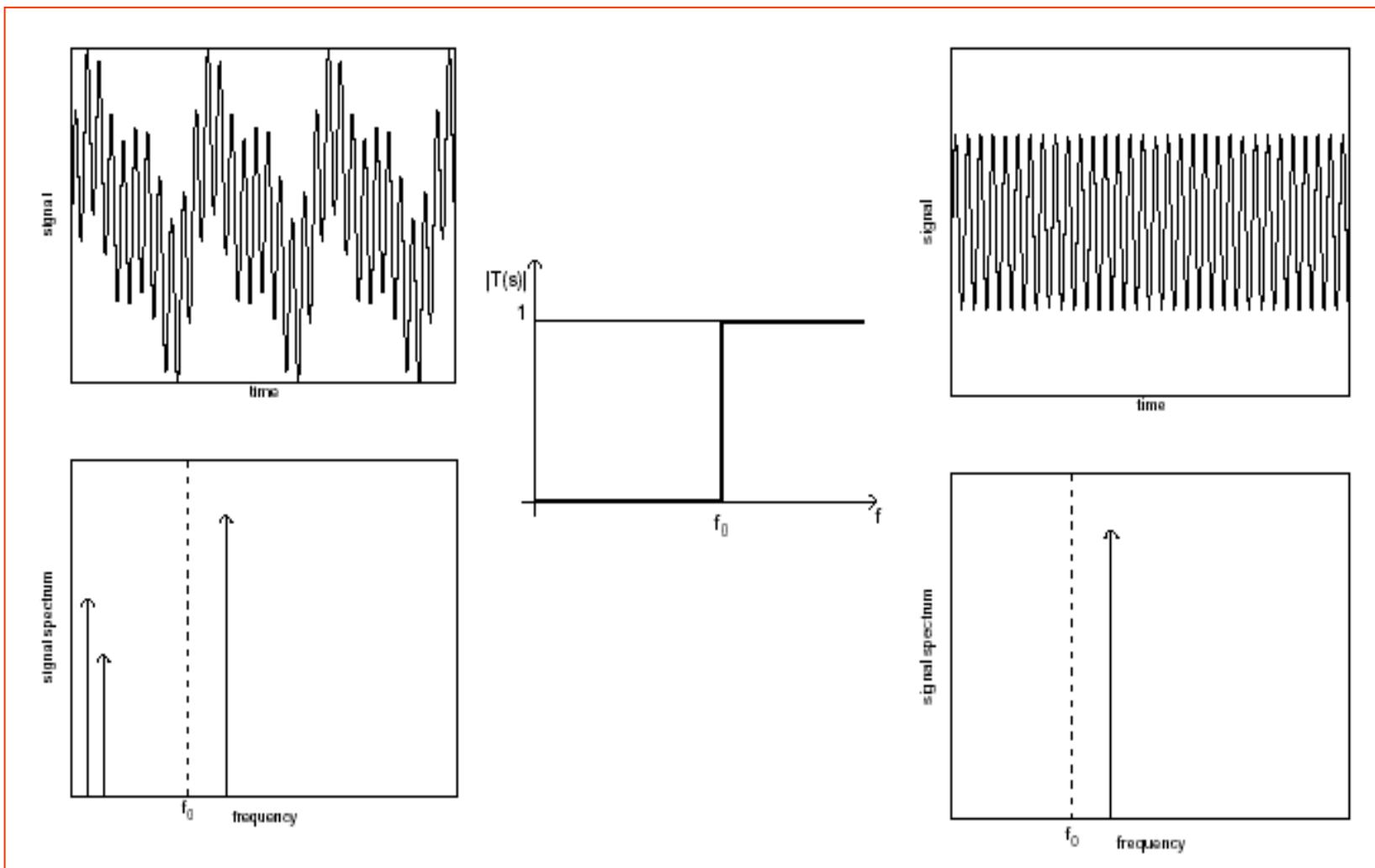


Soppressione del rumore : filtro passa-basso

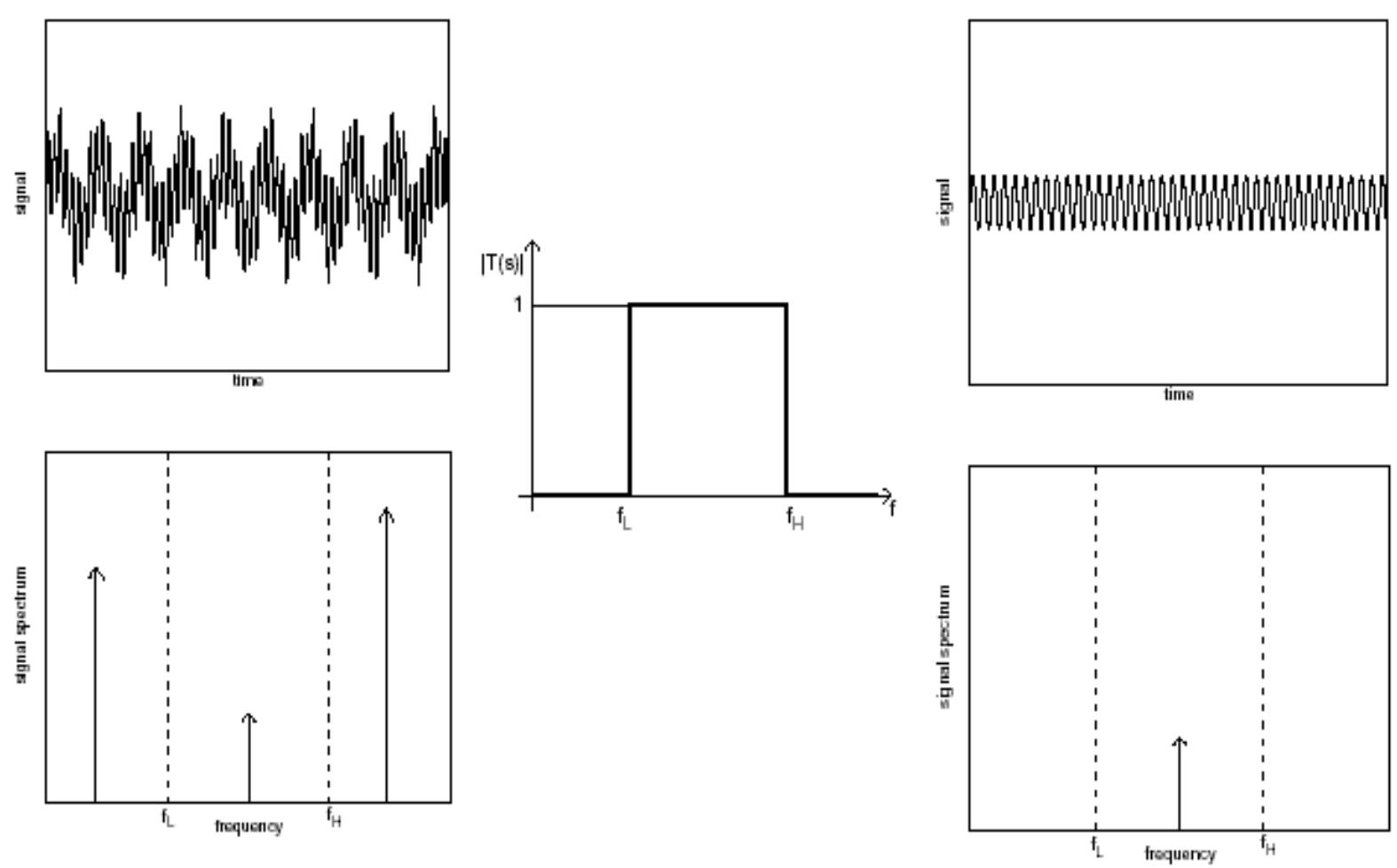
Alle frequenze: rumore



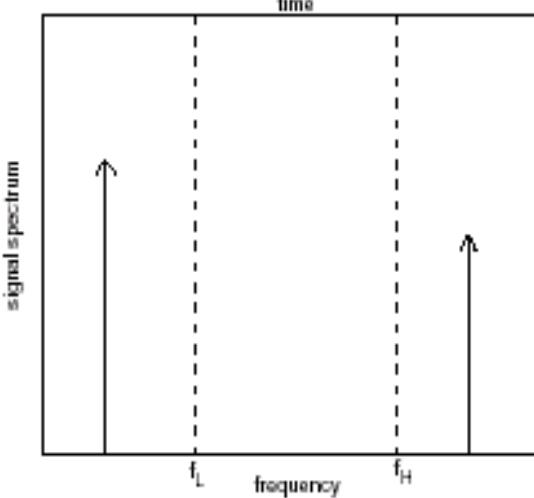
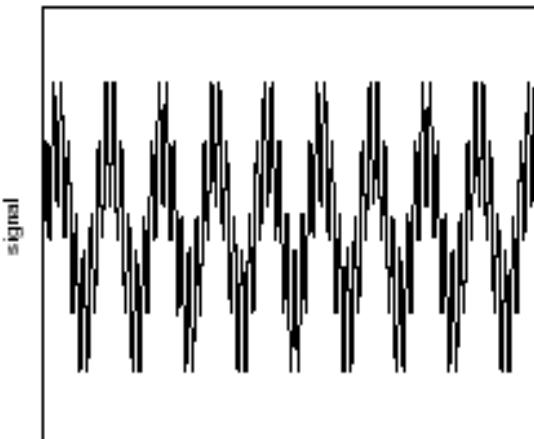
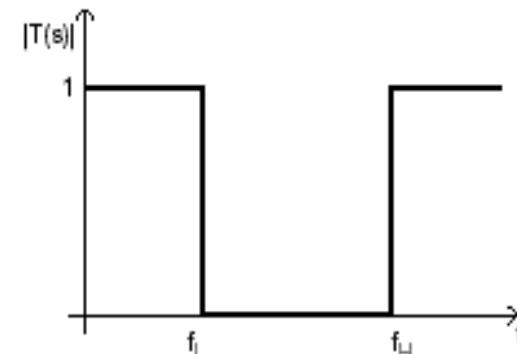
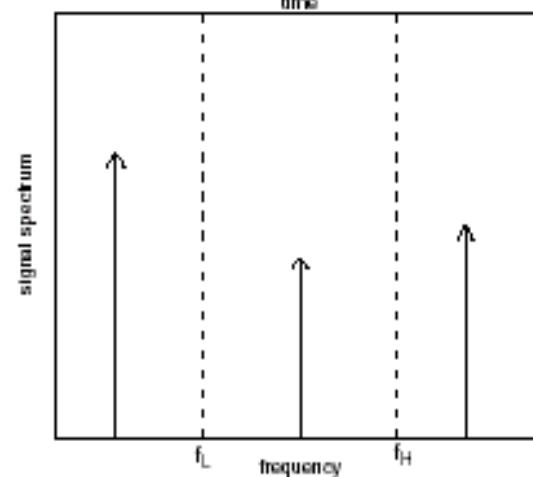
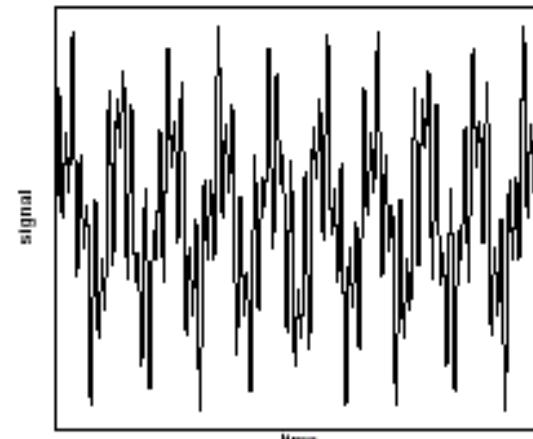
Soppressione di frequenze interferenti: filtro passa-alto



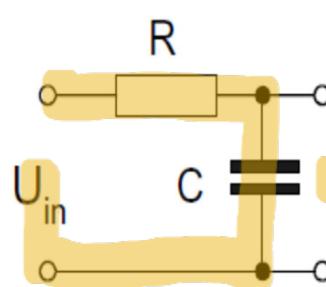
Isolamento di un segnale utile : filtro passa-banda



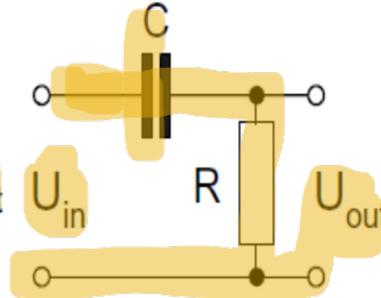
Eliminazione di un segnale di disturbo : filtro arresta-banda (notch)



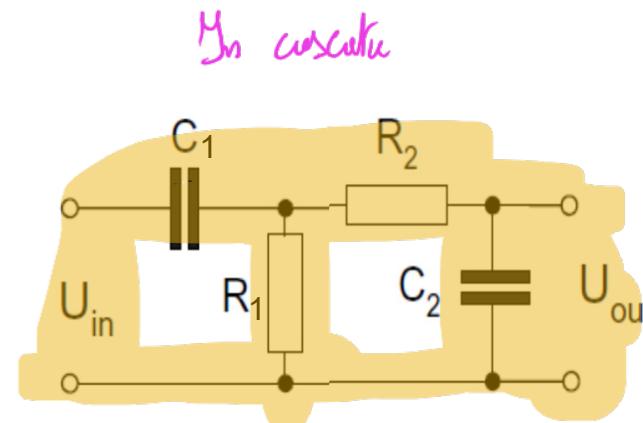
Filtri circuituali



Filtro passa basso



Filtro passa alto



Filtro passa banda

Lo studio dei circuiti elettrici può essere condotto in maniera semplificata considerando i comportamenti alle condizioni estreme di frequenza (in continua ed ad altissima frequenza)

$$G(s) = \frac{1}{1+s\tau}$$

$$G(s) = \frac{s\tau}{1+s\tau}$$

$$G(s) = \frac{s\tau_2}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)}$$

Se $R_2 > R_1$, il secondo passo non assorbe corrente dal primo passo - Non serve τ_2 . Capacità non è sempre produttivo. Nel caso operazionale è tutto disaccoppiato.

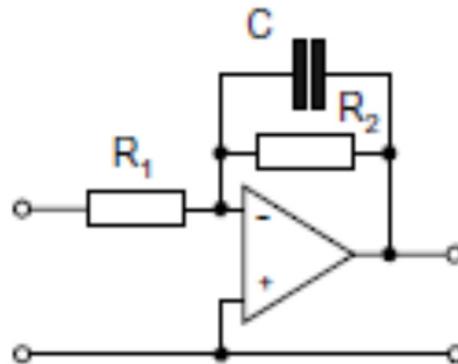
Oppure andando ad analizzare il comportamento al limite delle funzioni di trasferimento ($\lim s \rightarrow 0$ e $\lim s \rightarrow +\infty$)

O in maniera esaustiva tracciando i diagrammi di bode (le pulsazioni di taglio, $\omega_t = 2\pi f_t$, sono calcolabili con $\omega_t = 1/\tau = 1/RC$)

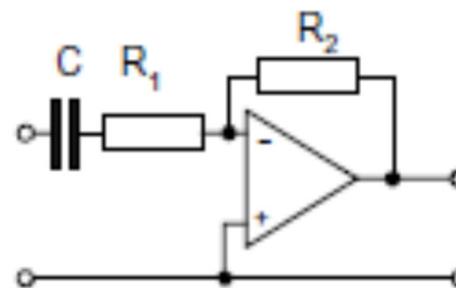
Filtri circuituali

Amplificatori sono circuiti attivi

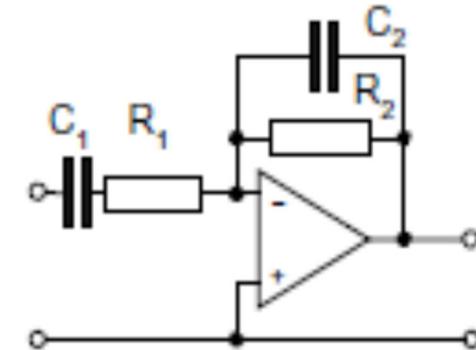
$$\frac{V_u}{V_i} = -\frac{Z_r}{Z_i}$$



Filtro passa basso



Filtro passa alto



Filtro passa banda

$$G(s) = \frac{k}{1 + s\tau}$$

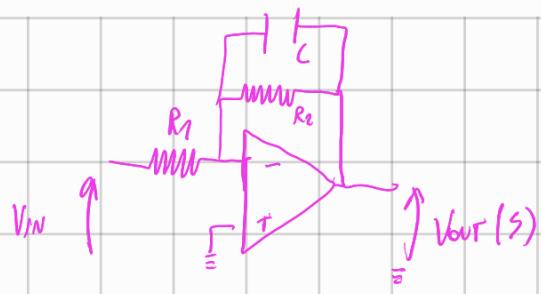
$$G(s) = k \frac{s}{1 + s\tau}$$

$$G(s) = k \frac{s}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)}$$

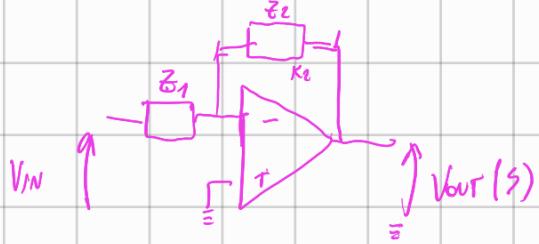
Filtri in tecnica operazionale elementari hanno prestazioni migliori e tecniche di analisi simili a quelli con componenti passivi

Filtri O.V.V. possono anche amplificare.

Possono però presentare ampiezze alte all'ingresso (non assolutamente corrette) e nulli non regolati. Pensare che nulla mai dipende dal circuito.



Generador con impedancia.

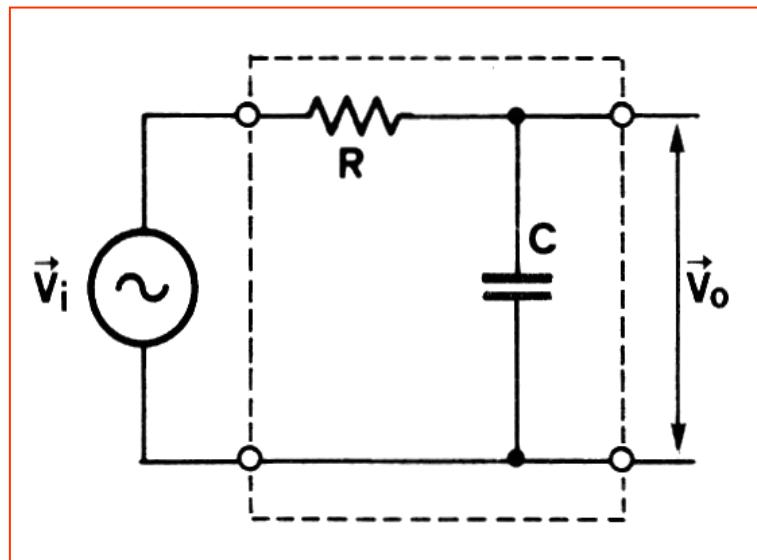


$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = -\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{R_2}{SC}$$

$$\frac{\frac{R_2}{SC}}{R_1} = -\frac{1}{R_1} \frac{R_2}{1 + SR_2C} = -\frac{R_1}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + SRC} = -\frac{K}{1 + SRC}$$

Effetti dei filtri sull'onda quadra

Filtro passa-basso



C crescente

τ crescente

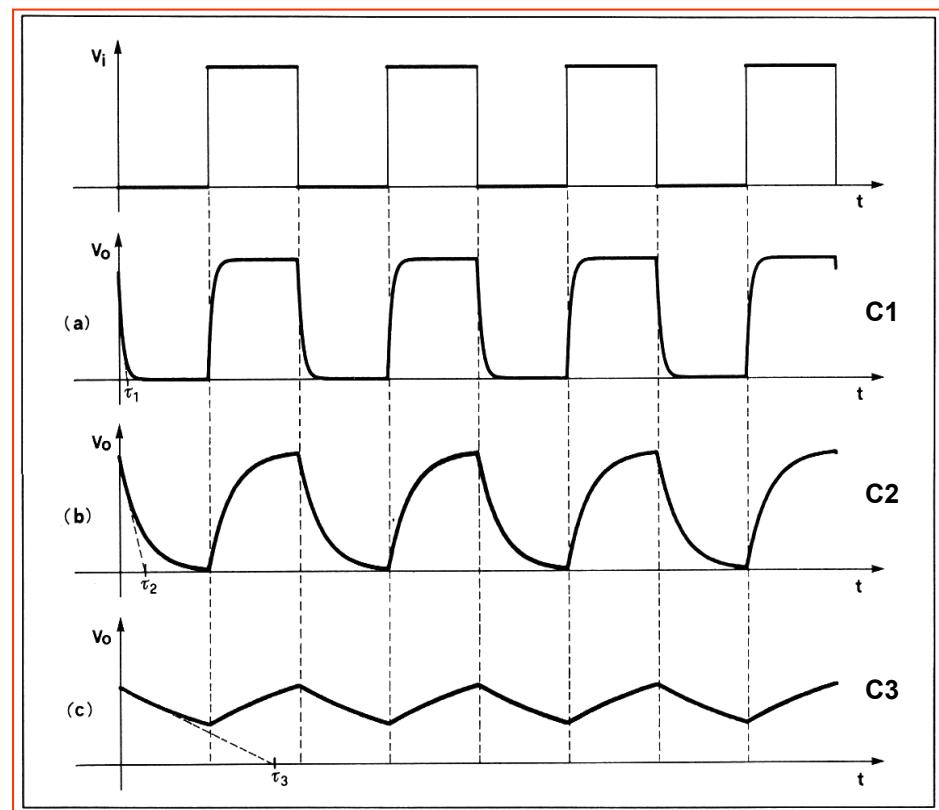
f_t decrescente

Banda passante più piccola

Circuito più lento

A penso di R faccio crescere C

elimino sempre più componenti spettrali



$C_1 < C_2 < C_3$

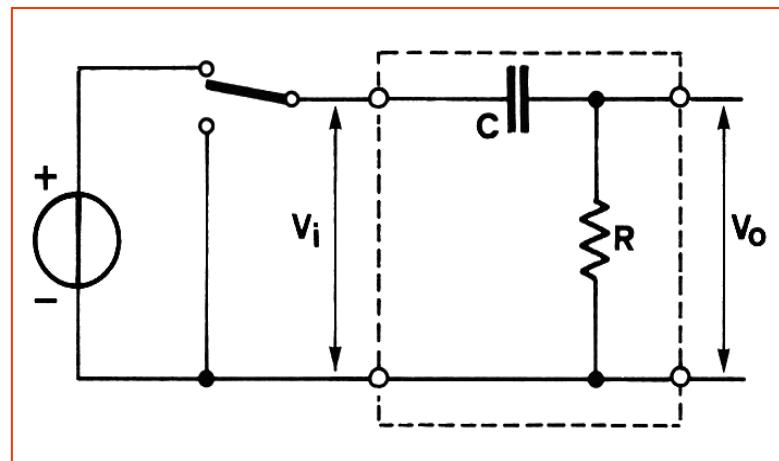
Risposta del sistema al gradino
Costante di tempo piccola \Rightarrow sistema veloce
Se τ cresce sistema è lento

Se ho banda più larga prendo più delle infinite componenti dell'onda gravitazionale.

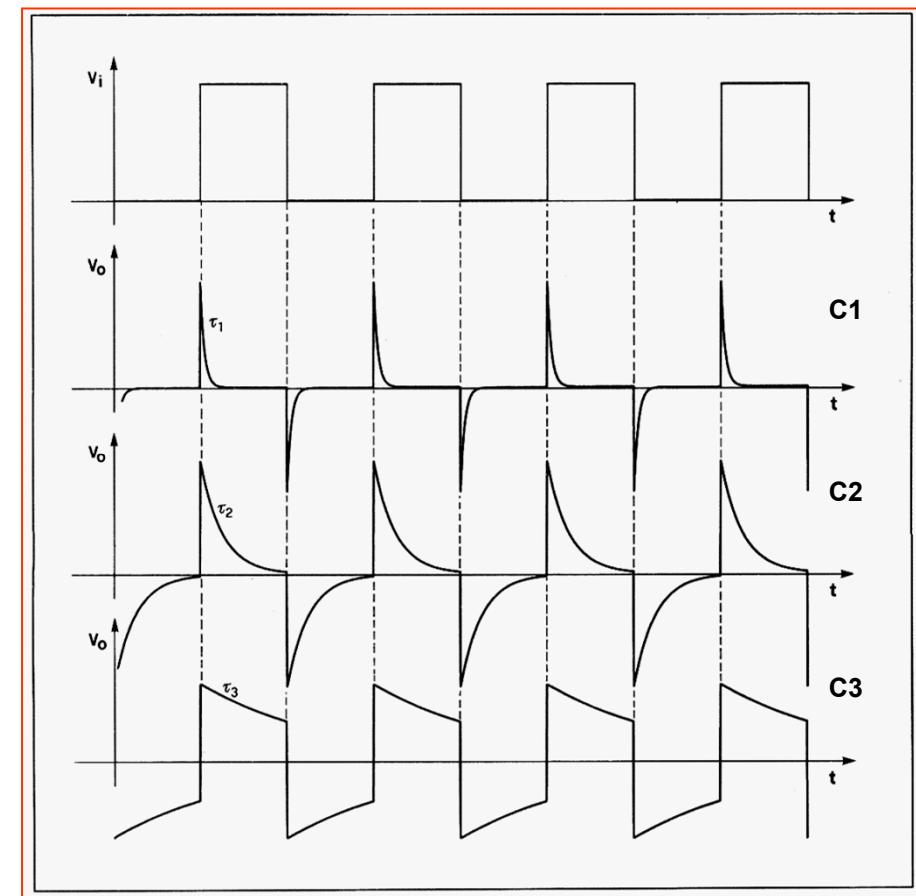
Se $C \rightarrow \infty$, faccio passare solo la componente continua, cioè il valore medio.

Effetti dei filtri sull'onda quadra

Filtro passa-alto



C crescente
 τ crescente
 f_t decrescente
Banda passante più grande
Circuito più lento



$C_1 < C_2 < C_3$

Durante duale: Keylo tutta la parte bassa dello spettro. Valori medi sono sempre 0.

Intuivamente il sistema reagisce solo alle frequenze alte (discontinui). Mano a mano che allungo la banda, acquisisce quelle componenti a bassa frequenza. $C \rightarrow \infty$, ha solo 0 di frequenze escluse.

Segnale campionato

- $a(t) = \sqrt{2}A \sin(2\pi ft + \varphi) \quad \forall t \in R, t \geq 0, f = \frac{1}{T}$
- Sia campionato con frequenza di campionamento
- $f_c = Nf, T = NT_c$
- N è il numero di campioni in un periodo
- Il segnale $a(t)$ esisterà solo negli istanti di tempo
- $\forall t = kT_c, k = 0, 1, 2, \dots$
- $a(t) = a(kT_c) = \sqrt{2}A \sin(2\pi fkT_c + \varphi) =$
- $\sqrt{2}A \sin\left(2\pi \frac{f}{f_c} k + \varphi\right) = \sqrt{2}A \sin(2\pi Nk + \varphi) = a(k)$
- $a(k) = \sqrt{2}A \sin\left(2\pi \frac{k}{N} + \varphi\right)$

Filtri Numerici

- FIR:

$$y(k) = \sum_{k=0}^n a_k x(n-k)$$

- IIR: ricorsivi

$$y(n) = \sum_{l=0}^L a_l x(n-l) + \sum_{m=1}^M b_m y(n-m)$$

- Es. $y(k) = x(k) + 0.5 x(k-1)$
- Le caratteristiche di banda possono essere determinate tramite la trasformata tempo-discreta z.
- Funzione di trasferimento $H(z)$

$$Y(z) = \mathbf{H}(z)X(z)$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{n=0}^N a_n z^{-n}}$$

Esercizi con LabVIEW

- Generazione di segnali standard: sinusoide, cosinusoide, onda quadra, onda triangolare, dente di sega, ecc.
- Componente continua
- Generazione di segnali con componenti spettrali armoniche ed arbitrarie
- Trasformata di Fourier
- Filtri passa basso, passa alto, passa banda
- Trasformata di Fourier di segnali filtrati