Modellistica e Simulazione

(parte 4)

Prof. Salvatore Pirozzi

Email: salvatore.pirozzi@unicampania.it

Definizioni

- I fluidi sono particolari stati della materia che si possono presentare in due forme: liquido e gassoso.
- A seconda della forma del fluido abbiamo i sistemi idraulici (liquidi) e i sistemi pneumatici (gas).
- Le unità di misura utilizzate nel SI per la misura di alcune grandezze ricorrenti nello studio dei sistemi a fluido sono
  - Portata volumetrica – [m³/s] – principalmente usata per i liquidi
  - Portata di massa – [kg/s] – principalmente usata per i gas
  - Pressione – [N/m²]= [Pa] (Pascal)

equivalenti

Massa per unità di tempo
Volume per unità di tempo

Nei liquidi incomprimibili si ragiona con volume. Gas si ragiona con massa perché volume varia.

Proprietà caratteristiche dei fluidi

- **Coefficiente di compressibilità (β)** = l'opposto della variazione relativa di volume (V) che subisce un volumetto di fluido in conseguenza di una variazione unitaria di pressione (p).

$$\beta = -\frac{\partial V / V}{\partial p}$$

Variazione volume é negativa

δV variazione rispetto a volume unitario

  - è sempre positivo
  - per i liquidi il suo valore è molto piccolo (fluido incompressibile).
  - per i gas dipende fortemente dalla temperatura.

- **Coefficiente di dilatazione termica (α)** = la variazione relativa di volume (V) che subisce un volumetto di fluido in conseguenza di una variazione unitaria di temperatura esterna (T).

$$\alpha = \frac{\partial V / V}{\partial T}$$

  - per i gas dipende fortemente dalla temperatura.

NOTA: Vetro è un fluido solo in arco temporale lunghissimo. Se devo modellare sistema per 3 giorni, allora è un solido.

Proprietà caratteristiche dei fluidi

- **Viscosità (fluidi Newtoniani).** Per un liquido che avanza a bassa velocità, il moto avviene per scorrimento di strati uno sull'altro: lo strato sul fondo è fermo, mentre gli strati superiori hanno una velocità sempre maggiore. Gli strati meno veloci oppongono una resistenza al trascinamento sugli strati più veloci. Tale resistenza è proporzionale (μ = coefficiente di viscosità) alla variazione di velocità ($v(h)$) per unità di spostamento normale. Per due strati ad una quota h_0, con superficie di contatto S, la forza di attrito è

$$F_a = \mu S \left. \frac{dv(h)}{dh} \right|_{h=h_0}$$

F cambia ad altezze diverse.

Parametro caratteristico del fluido

- diminuisce al crescere della temperatura
- aumenta al crescere della pressione

Strati di sopra si muovono più velocemente di quelli di sotto.

V è funz. di h: $\frac{dV}{dh}$ è derivata: variaz. di velocità rispetto all'altezza a cui ci troviamo.

Per definizione, un fluido è detto ideale se è incompressibile e privo di viscosità.

Viscosità tiene conto dell'attrito che viene portato quando il fluido si muove.
Strati superficiali si muovono con velocità maggiore rispetto a quelli sotto. Quando quello di sopra tende a scivolare, quello sotto si oppone allo scivolamento.

Bisogna usare fluidi ideali per approssimare modelli, es. acqua é modellabile come fluido ideale.

ES. Silicone é viscoso, ma ancora incompressibile.

Studio del moto di un fluido - definizioni

- Approccio Lagrangiano, applicato ai vari volumetti di fluido come se fossero dei punti materiali, soggetti sia a forze esterne (es. forza peso) sia a forze interne (pressione)
- Approccio Euleriano, consistente nel determinare, in ogni punto P del fluido in movimento, e in ogni istante di tempo t: la pressione p(P,t), la densità di massa ρ(P,t), e il vettore velocità v(P,t). L'insieme nei vari punti prendono i nomi di: campo di pressione, campo di densità e campo di velocità.

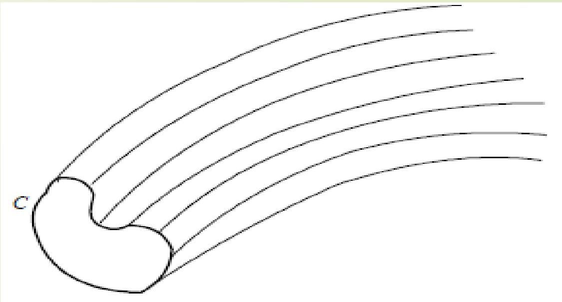
Assumeremo che tali grandezze, in un generico punto P, non varino al variare del tempo, p=p(x,y,z), ρ=ρ(x,y,z), v=v(x,y,z) (**regime stazionario**). Richiameremo le equazioni della fisica che ci interessano in tale ipotesi.

In regime stazionario, si definisce linea di flusso una linea che, in ogni suo punto, ha per tangente il vettore velocità del fluido.

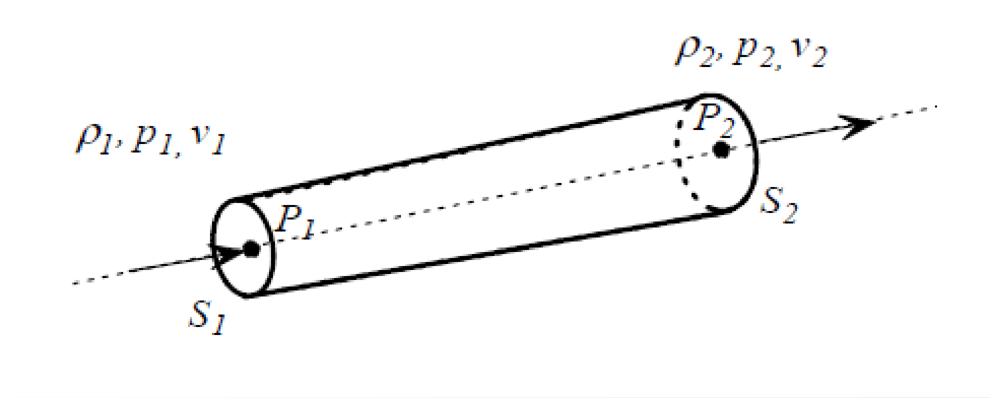
- regime stazionario -> il campo di velocità è costante -> le linee di flusso non cambiano al variare del tempo e non si intersecano
- ogni linea di flusso individua la traiettoria seguita da un volumetto di fluido passante per quel punto

- **Tubo di flusso**

totalità delle linee di flusso passanti per i punti di una curva chiusa C selezionata nel fluido.



Equazione di continuità



In un fluido in movimento in regime stazionario:

- consideriamo un punto P_1, la linea di flusso passante per P_1, un punto P_2 sulla stessa linea di flusso, una superficie piana S_1, passante per P_1 e ortogonale al vettore velocità.
- supponiamo S_1 sufficientemente piccola per considerare densità, pressione e velocità (ρ_1,p_1,v_1) costanti in tutti i suoi punti
- consideriamo la superficie piana S_2 passante per P_2, ortogonale al vettore velocità, e delimitata dal tubo di flusso, e siano (ρ_2,p_2,v_2) i parametri caratteristici del fluido in tale sezione

Principio di conservazione della massa o equazione di continuità: Se all'interno del tubo di flusso non vi sono né "sorgenti", né "pozzi" di massa, allora la portata di massa entrante è uguale a quella uscente

$$q_{m1} = q_{m2} \Longleftrightarrow \rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2 \qquad \frac{kg}{m^3} m^2 \frac{m}{s} = \frac{kg}{s}$$

Densità kg/m³

Le ipotesi alla base sono sempre verificate nel caso di fluidi incompressibili (es. liquidi), per i quali è inoltre possibile ritenere la densità costante nelle varie sezioni e quindi semplificarla (con q_V portate volumetriche)

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \Longleftrightarrow q_{V1} = q_{V2} \qquad m^2 \frac{m}{s} = \frac{m^3}{s}$$

solo con densità cost

Legge di Bernoulli

Consideriamo un volumetto dV di un fluido omogeneo, ideale, in regime stazionario, in movimento lungo una linea di flusso. Per ogni istante di tempo t la sua energia è somma di tre termini: energia cinetica, energia potenziale gravitazionale ed energia di pressione.

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\rho dV v^2 \qquad U = mgz = \rho dV gz \qquad P = pdV$$

Il teorema di Bernoulli stabilisce che, in un qualsiasi punto lungo la linea di flusso l'energia totale del volumetto di fluido è costante. Per un volumetto dV unitario si può formalizzare con l'equazione di Bernoulli (somma energia)

$$T + U + P = cost \qquad \frac{1}{2}\rho dV v^2 + \rho dV gz + pdV = cost$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz + p = cost}$$

dV si semplifica

Osservazione: poiché il teorema di Bernoulli si riferisce ad un fluido ideale, esso è applicabile prevalentemente ai liquidi a bassa viscosità.

Esempio 1

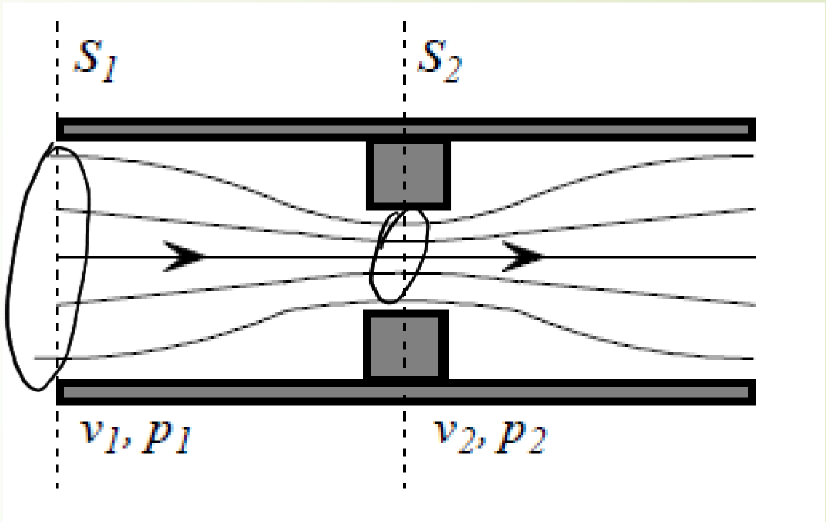
Mi metto in due punti e valuto la somma delle energie

Differenza di h dei due punti trascurabile.

Variazione di pressione in una strozzatura. Consideriamo una condotta orizzontale contenente una strozzatura e in cui fluisce un liquido ideale con portata volumetrica costante q_V

Si vuole determinare il salto di pressione nella strozzatura.

Per la legge di Bernoulli (tenendo conto che l'energia potenziale è nulla)



$$p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2$$

Sostituendo le velocità mediante l'eq. di continuità $S_i v_i = q_V$

Flusso che entra = flusso che esce.

Su Si ho valori uguali.

$$p_1 + \frac{\rho}{2} \frac{q_v^2}{S_1^2} = p_2 + \frac{\rho}{2} \frac{q_v^2}{S_2^2}$$

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} \left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2} \right) q_V^2 \quad \xrightarrow{S_2 \ll S_1} \quad p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2 S_2^2} q_V^2$$

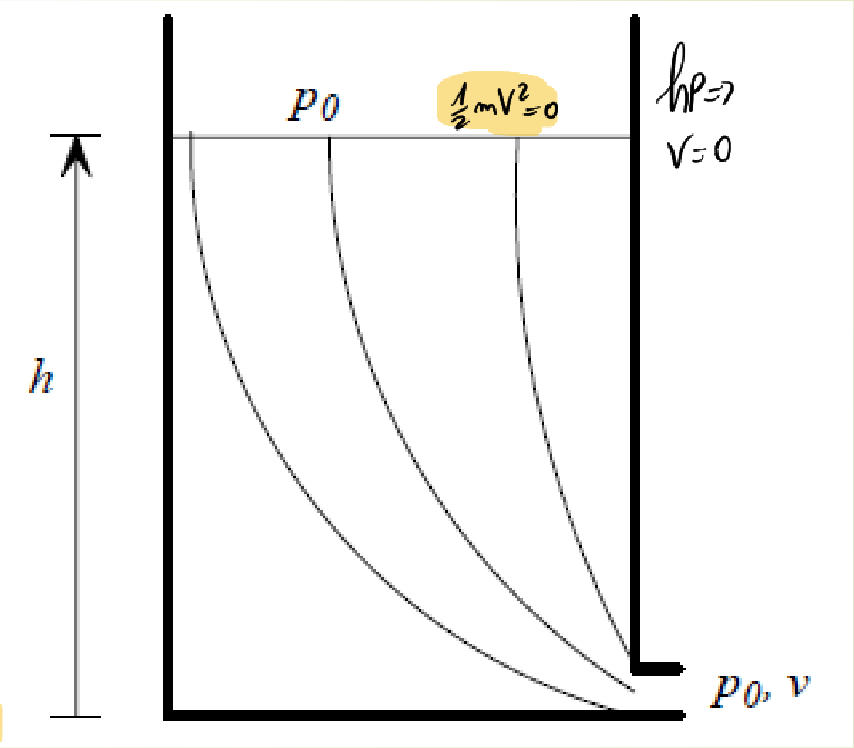
Il salto di pressione dipende dal quadrato della portata

Esempio 2

Portata attraverso un orifizio posto sul fondo di un serbatoio (teorema di Torricelli). Consideriamo un serbatoio con un liquido ideale e con sul fondo un orifizio di sezione S. Detta h l'altezza del liquido nel serbatoio in un istante di tempo t, si vuole determinare la portata q_V del liquido attraverso l'orifizio.

Applichiamo l'eq. di Bernoulli sul pelo libero (dove il liquido è praticamente fermo e l'energia cinetica è nulla) e all'orifizio (dove è nulla l'energia potenziale)

$$\cancel{p_0} + \cancel{\rho} g h = \cancel{p_0} + \frac{\cancel{\rho}}{2} v_2^{\,2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh} \quad \underset{Sv = q_V}{\Rightarrow} \quad q_V = \left(S\sqrt{2g}\right)\sqrt{h}$$



mgh=0

La portata volumetrica dipende solo dall'altezza e dalla sezione
Non dipende dalla densità e dalla pressione esterna

(Non lineare con h)

Esempio 3

Sul fondo di una colonna di fluido in quiete:
$\frac{1}{2} m V^2 = 0$

Pressione in un fluido in quiete: legge di Stevino. Consideriamo un fluido ideale in condizioni di quiete, come ad esempio un liquido in un serbatoio, la legge di Bernoulli si semplifica

$$\boxed{\rho g z + p = cost}$$

E si ricava la legge di Stevino (con p_0 la pressione atmosferica e p_z la pressione ad una generica quota -z)

$$p_0 = -\rho g z + p_z \quad \Rightarrow \quad p_z = p_0 + \rho g z$$

STEVINO

Peso di una colonna di liquido alta z

Osservazione: essendo il fluido in quiete, l'ipotesi di incompressibilità e di assenza di viscosità non gioca alcun ruolo, per cui la legge di Stevino è valida anche per fluidi (sia liquidi che gassosi) reali.

Sistemi liquido-livello con liquido ideale

I sistemi liquido-livello sono sistemi costituiti da serbatoi collegati attraverso tratti di condotte in cui possono essere presenti strozzature e/o valvole (strozzature variabili). → Condotta si stringe o si allunga (Rubinetto)

Assumeremo che le masse di fluido nei tratti di condotta sono trascurabili rispetto a quelle presenti nei serbatoi, e le loro velocità anche se variabili (presentano accelerazioni), si mantengano basse. Questo consente di assumere che il fluido nei serbatoi è in quiete. → Nella condotta tengo conto di velocità, nei serbatoi no.

Useremo le seguenti analogie con i sistemi elettrici:

- la portata volumetrica corrisponde alla corrente ⇒ Carica/t, V/t flusso di volumetti di fluido.
- la pressione corrisponde al potenziale elettrico e quindi la differenza di pressione tra due sezioni corrisponde alla tensione tra due punti di un sistema elettrico

È possibile definire modelli equivalenti per i componenti fondamentali: e.g., tratto di condotta, serbatoio, strozzatura o valvola

Come ingressi considereremo due tipologie:

- alimentatori ideali di pressione, in grado di imporre il valore di pressione in una sezione del sistema; ⇒ Gst → Riferito a press. atm.
- alimentatori ideale di portata, in grado di imporre la portata in un tratto di condotta ⇒ gc

Dobbiamo trovare eq. di serbatoio, condotta e strozzatura e ho finito.

Serbatoio con liquido ideale

Definizioni: V = volume di liquido in esso contenuto, S = sezione trasversale del serbatoio, h = altezza del liquido, q_i = portata entrante, p_0 = pressione atmosferica in superficie, p_u = pressione sul fondo

Legge di conservazione della massa (variazione di volume = portata volumetrica) e legge di Stevino

Variaz. di volume rispetto al tempo è q_i

$$\frac{dV}{dt} = q_i \Rightarrow S\frac{dh}{dt} = q_i$$

Sezione è costante

Stevino

$$p_u = p_0 + \rho g h$$

Da Stevino

$$\boxed{\rho g h = p_u - p_0 \rightarrow p_{u0} = \rho g h \rightarrow \frac{dp_{u0}}{dt} = \frac{d(\rho g h)}{dt}} \quad (A)$$

è lui l'equivalente della tensione

Differenza di pressione

devo estrarli

Analogo elettrico del serbatoio. Indicando con $p_{u0} = p_u - p_0$ la differenza di pressione tra fondo e pelo libero, la ricaviamo dalla seconda e consideriamo la sua variazione rispetto al tempo, ottenendo

$$(A) \quad \boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\rho g}\frac{dp_{u0}}{dt}}$$

Sost. nella prima

$$\left(\frac{S}{\rho g}\right)\frac{dp_{u0}}{dt} = q_i$$

corrente

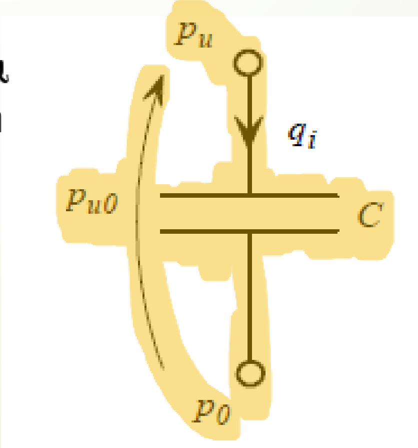
tensione

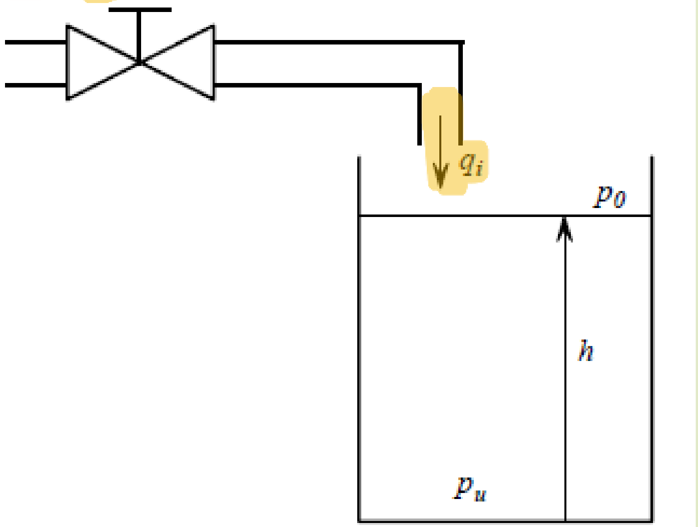
Corrispondente all'eq. costitutiva di un condensatore con

$$C = \frac{S}{\rho g}$$

P = pressione

ρ = densità





Nota: Dimensionalmente non sono Farad.

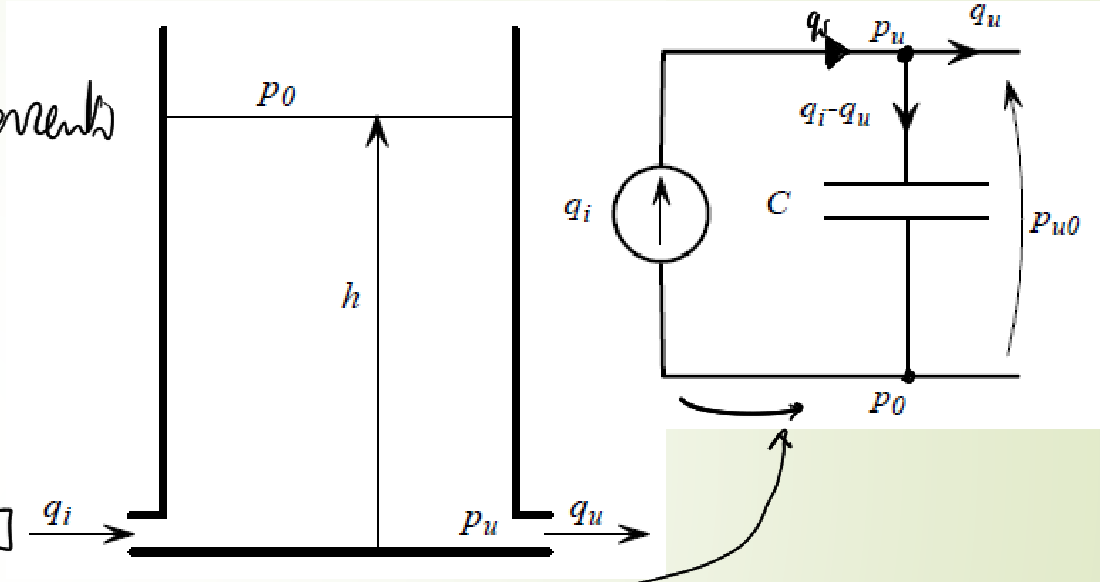
Serbatoio con liquido ideale

Caso con orifizio in uscita

La conservazione della massa diventa

$$\frac{dV}{dt} = q_i - q_u \qquad \Rightarrow \qquad S\frac{dh}{dt} = q_i - q_u$$

Sono due correnti



E seguendo gli stessi passaggi del caso precedente si ottiene

$$\left(\frac{S}{\rho g}\right)\frac{dp_{u0}}{dt} = q_i - q_u$$

sto applicando Kirchhoff.

Po

qui c'è po.

Il circuito equivalente prevede un generatore ideale di portata (equivalente a quello di corrente)

- Osservazione 1: per ottenere una rappresentazione i-s-u di un serbatoio, conviene assumere come variabile di stato la differenza di pressione tra fondo e pelo libero del serbatoio sfruttando l'equivalenza con i circuiti elettrici.
- Osservazione 2: tale variabile è legata all'altezza h del liquido nel serbatoio dalla legge di Stevino. In alternativa si utilizza direttamente l'altezza come variabile di stato.

Non è sempre univoca!

Suppongo volumetto che entra

orizzontale

Condotta con liquido ideale

Sez. S, lunghezza ℓ, portata vol. uguale e press. V_1 e V_2

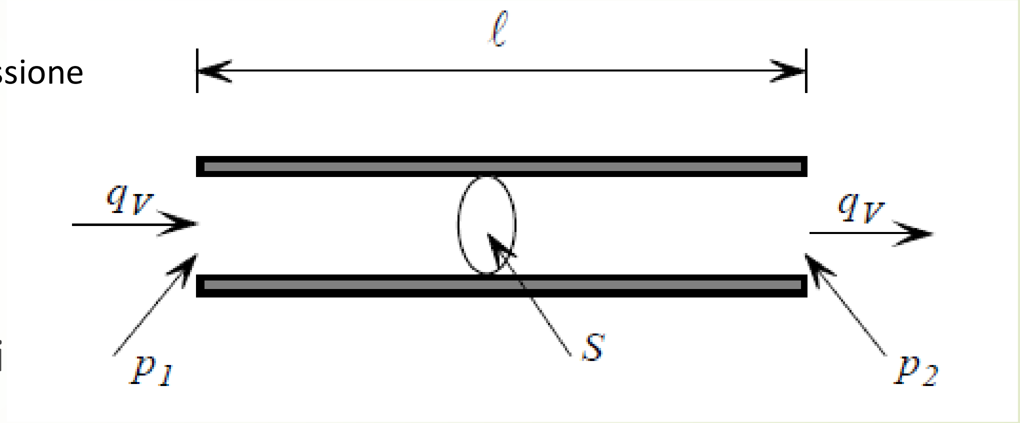
Supponiamo che il regime di moto non è stazionario (presenza di accelerazioni). Essendo il liquido ideale (assenza di attrito interno), l'unica legge necessaria per descrivere il legame pressione-portata è la legge di Newton F=ma che fornisce il legame tra la forza derivante dalla differenza di pressione agli estremi e l'accelerazione della massa di fluido.

Accelerazione

Massa del fluido=Volume*densità

Forza=area*pressione

$$S\ell\rho\frac{dv}{dt} = S(p_1 - p_2)$$

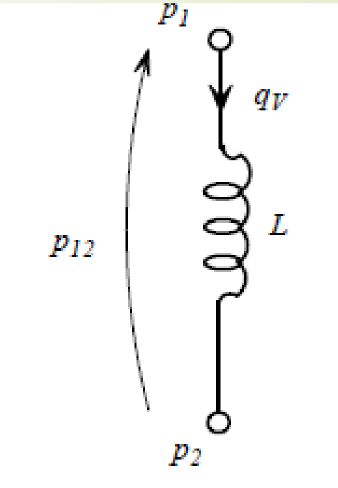


Portiamo la S sotto il segno di derivata e utilizzando le definizioni

$q_v = Sv$ $\quad$ $p_{12} = p_1 - p_2$

Otteniamo una relazione equivalente all'induttore con $L = \dfrac{\rho\ell}{S}$

$$p_{12} = \left(\frac{\rho\ell}{S}\right)\frac{dq_V}{dt}$$



Per ottenere una rappresentazione i-s-u di un tratto di condotta, conviene assumere come variabile di stato la portata volumetrica del liquido che fluisce in essa.

Cioè la corrente

Condotta con liquido ideale obliqua

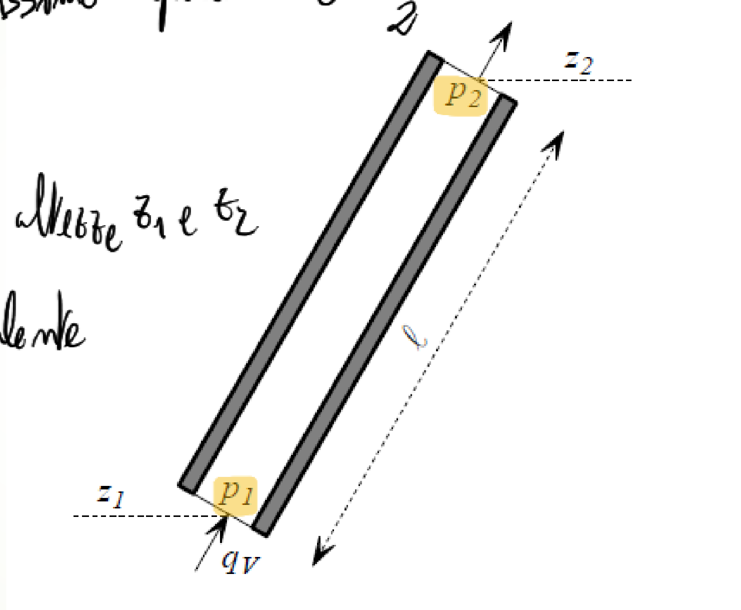
Se la condotta non è orizzontale si aggiungono i termini dovuti all'altezza del fluido e la relazione diventa

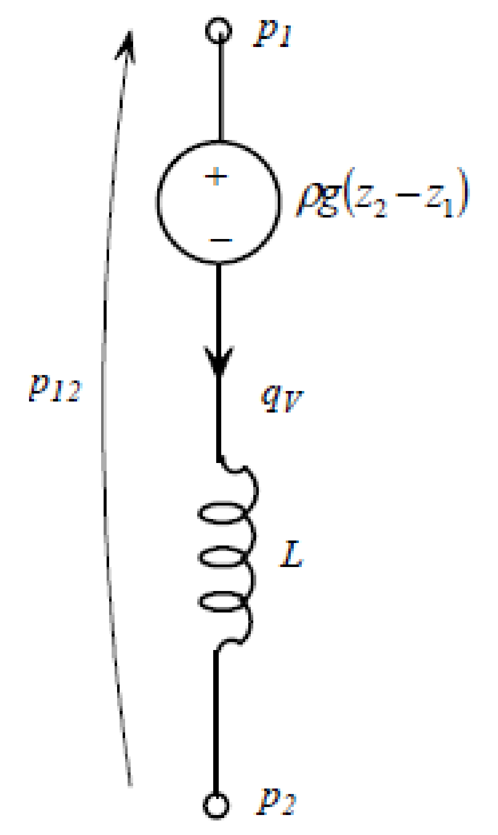
$$(p_1 - p_2) = \left(\frac{\rho \ell}{S}\right)\frac{dq_V}{dt} + \rho g(z_2 - z_1)$$

massimo quando $\vartheta = \frac{\pi}{2}$

dipende anche dalla differenza delle altezze z_1 e z_2

Somma di 2 termini: 1 di cui equivalente è induttore + generatore.





Il generatore ideale di pressione è equivalente ad un generatore di tensione in serie

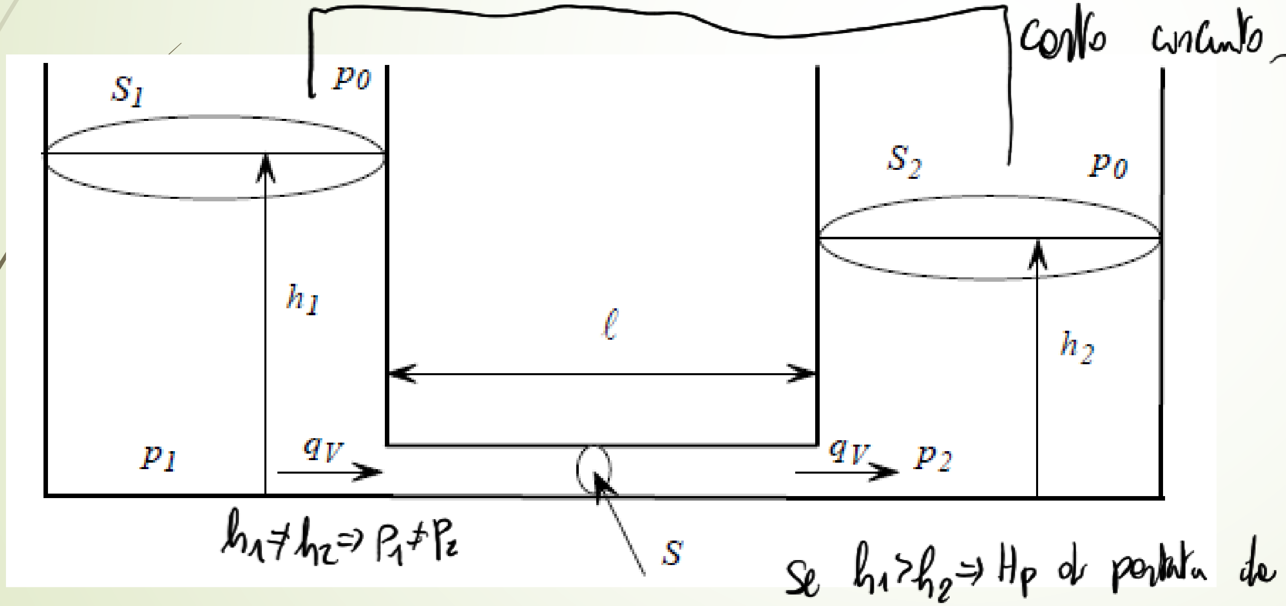
Serbatoio con ingresso e uscita: q_C in parallelo che aggiunge portata

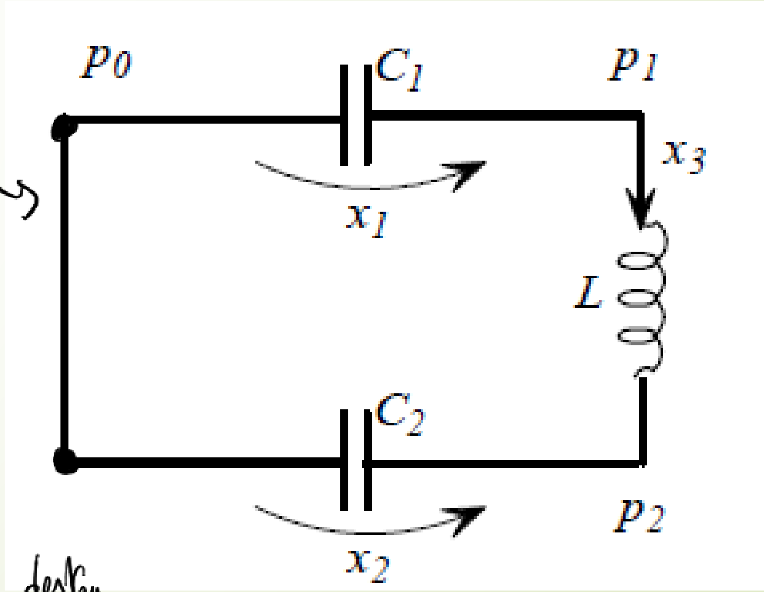
Condotta con pendenza: q_R in serie che aggiunge pressione

Modelli i-s-u, esempio

Scrivere un modello i-s-u del sistema liquido-livello mostrato in Figura che consenta di studiare l'andamento dell'altezza di liquido nel serbatoio 2.

1. Ricaviamo il circuito elettrico equivalente
2. Utilizziamo l'approccio noto per i circuiti elettrici





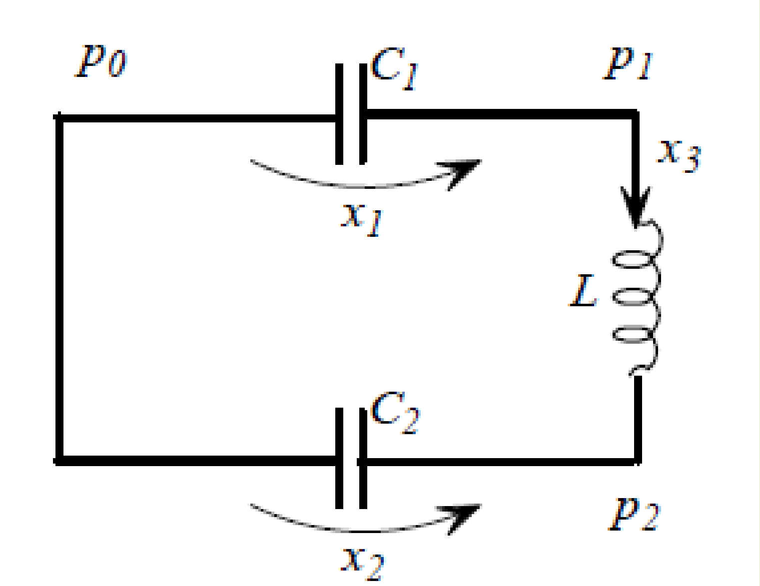
$$\left(\frac{S}{\rho g}\right)\frac{dp_{u0}}{dt} = q_i$$

$$p_{12} = \left(\frac{\rho \ell}{S}\right)\frac{dq_V}{dt}$$

Modello

Fissiamo le variabili di stato

$$x_1 = v_{C1} = p_{10},$$
$$x_2 = v_{C2} = p_{20},$$
$$x_3 = i = q_V$$



$$\left(\frac{S}{\rho g}\right)\frac{dp_{u0}}{dt} = q_i \qquad p_{12} = \left(\frac{\rho\ell}{S}\right)\frac{dq_V}{dt}$$

Scrivo le equazioni di Kirchhoff e le relazioni costitutive

$$v_{C1} - v_L - v_{C2} = 0, i = -C_1\frac{dv_{C1}}{dt}, i = C_2\frac{dv_{C2}}{dt}, v_L = p_{12} = L\frac{di}{dt}$$

Sostituisco, ottenendo 3 equazioni

$$x_1 - L\dot{x}_3 - x_2 = 0, \qquad x_3 = -C_1\dot{x}_1, \qquad x_3 = C_2\dot{x}_2$$

Riordino e aggiungo l'uscita (legge di Stevino)

$$p_2 = p_0 + \rho g h \rightarrow p_{20} = \rho g h \rightarrow \mathrm{h} = \frac{p_{20}}{\rho g}$$

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{C_1}x_3$$
$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C_2}x_3$$
$$\dot{x}_3 = \frac{1}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_2$$
$$y = \frac{1}{\rho g}x_2$$

Convenz generatore

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\rho g} & 0 \end{bmatrix} x$$

Lineare,
tempo invariante

$$C_1 = \frac{S_1}{\rho g} \qquad C_2 = \frac{S_2}{\rho g} \qquad L = \frac{\rho\ell}{S}$$

4 equaz: 3 costitutive e 1 di Kirchhoff ⇒ Devo avere 3 equaz.
sostituendo

Sistemi liquido-livello con liquido reale

Nei casi di liquido reale non si può trascurare l'attrito legato agli effetti di viscosità quando il liquido è in moto (trascurati nel caso reale).

La trattazione fisica è molto più complessa e prevede due tipologie di moto all'interno delle condotte:

- Moto laminare – bassa velocità – traiettorie di moto regolari – portata volumetrica proporzionale alla differenza di pressione
- Moto turbolento – elevate velocità – traiettorie irregolari - portata volumetrica proporzionale alla radice quadrata della differenza di pressione

Per gli scopi di un corso di Modellistica basta ricordarsi che è sempre possibile definire un circuito equivalente ed usare poi la trattazione dei circuiti elettrici.

Le perdite per attrito dovute alla viscosità del fluido diventano l'analogo di un resistore.

Esempio: per la condotta oltre al termine equivalente all'induttore e a quello equivalente al generatore di tensione, nel caso di liquido reale la differenza di pressione ai capi della condotta dipende anche dalla viscosità che rappresenta un effetto che si oppone al movimento del fluido, equivalente ad un resistore.

NOTE: per i serbatoi in cui il liquido è praticamente in quiete, l'effetto della viscosità è trascurabile e quindi il circuito equivalente è lo stesso.

PER BASSE VELOCITÁ (QUI NON VIENE FATTA DIFFERENZA) → Quindi sono incompressibili, conta solo viscosità.

Tratto di condotta con liquido reale

L'effetto della viscosità per una condotta di sezione cilindrica di raggio R, lunghezza ℓ, viscosità μ, è rappresentato dall'equazione

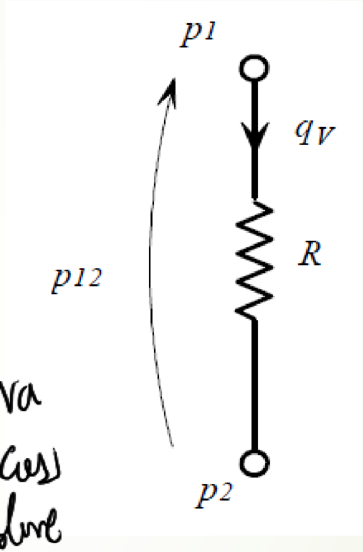
$$p_1 - p_2 = \frac{8\mu\ell}{\pi R^4} q_V$$

La quale è equivalente ad un resistore di valore

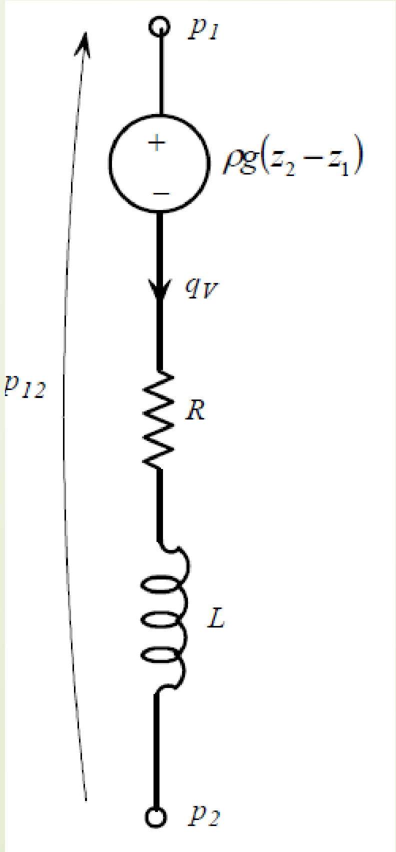
$$R = \frac{8\mu\ell}{\pi R^4}$$

Lo si trova solo in casi particolari

Tubi circolari perché riduce Resistenza.



Aggiungendolo al caso ideale, ottengo il caso completo:



A seconda dei casi i vari termini possono essere trascurati semplificando il circuito equivalente

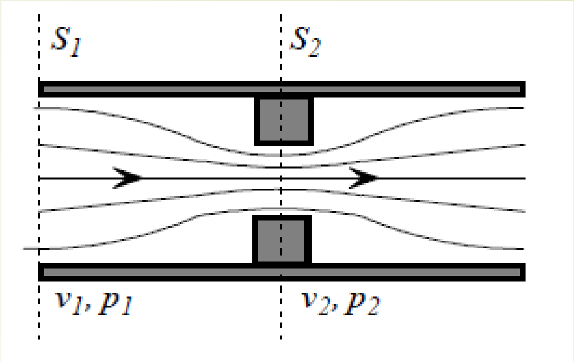
Nota: nel serbatoio il fluido é fermo. Non rientra viscosità.

La strozzatura (valvola)

Per il caso liquido ideale valgono le equazioni di Bernoulli (slide 8)

Il legame tra pressione e portata è istantaneo ed invertibile

$$p_{12} = \gamma(q_V) \qquad q_V = \gamma^{-1}(p_{12})$$



$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2S_2^{\,2}} q_V^{\,2}$$

Nel caso dei liquidi reali cambia l'espressione ma continua ad essere istantaneo ed invertibile

- Regime laminare $\quad q_V = k_l(p_1 - p_2) \quad \Rightarrow \quad p_1 - p_2 = \dfrac{1}{k_l} q_V$ Diventa lineare
- Regime turbolento $\quad q_V = k_t\sqrt{p_1 - p_2} \quad \Rightarrow \quad p_1 - p_2 = \dfrac{1}{k_T^{\,2}} q_V^{\,2}$

Turbolento rimane quadratico

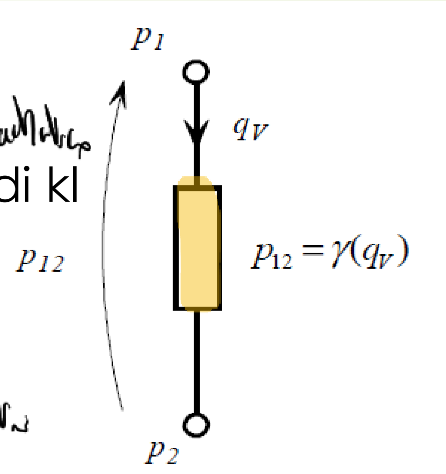
Nota Kt al posto di kl

→ Qualsiasi strozzatura

La rappresentazione elettrica è data da un generico dipolo caratterizzato dalla relazione

$$p_{12} = \gamma(q_V)$$

Dato nei parametri di catalogo



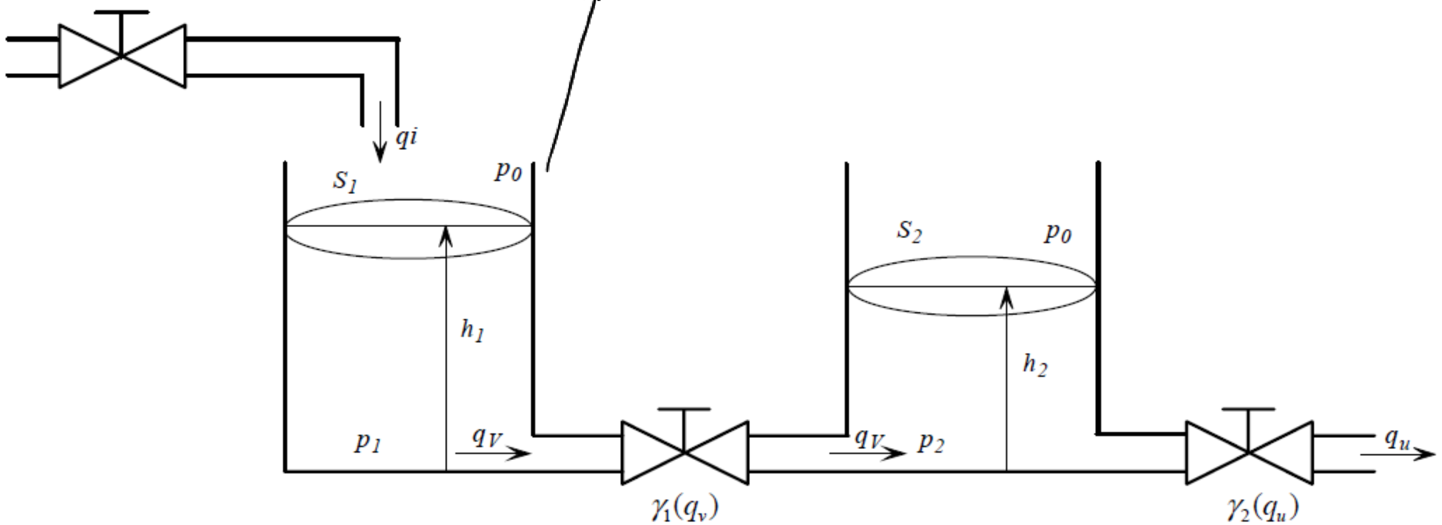
Essendo istantanea (è equivalente ad un resistore non lineare) non introduce variabili di stato, ma rientra semplicemente nelle equazioni di Kirchhoff. Il caso reale con moto laminare è una resistenza lineare classica.

Esempio con liquido reale

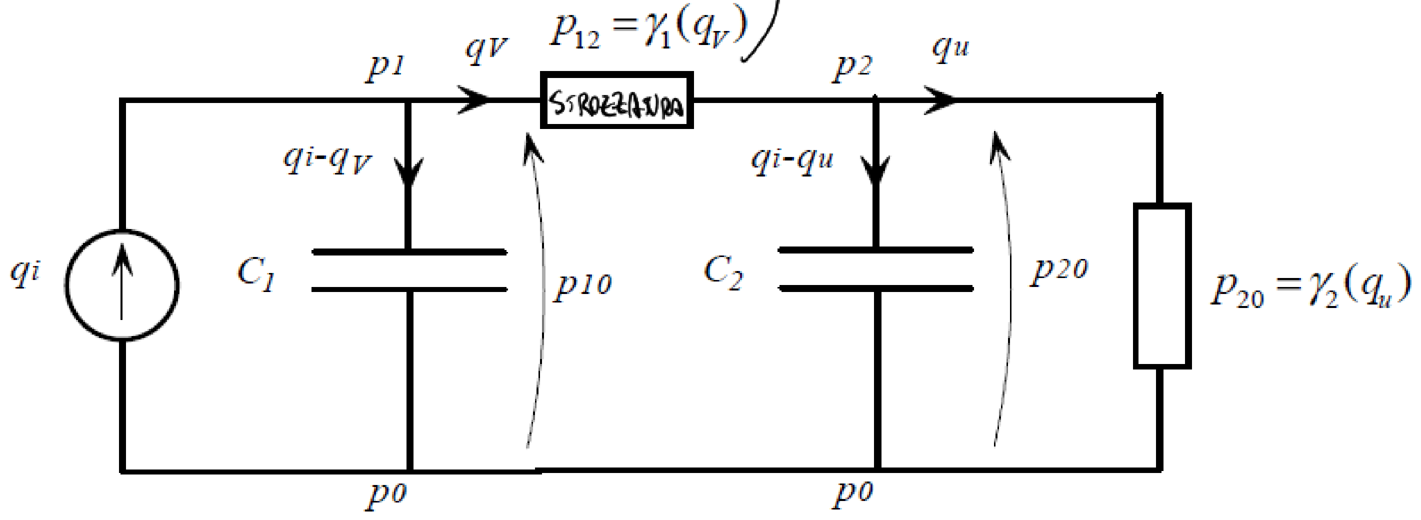
Sempre lo stesso modello

L'approccio prevede di ricavare l'analogo elettrico e seguire la stessa procedura utilizzata per i sistemi elettrici

Esempio: Si consideri il sistema liquido-livello mostrato in Figura. Facendo l'ipotesi di liquido reale, e supponendo trascurabile sia la resistenza che l'induttanza idraulica dei tratti di condotta, determinare un modello i-s-u che consenta di studiare l'andamento della portata in uscita



Kt o Kl dub.



$$C_1 = \frac{S_1}{\rho g}$$

$$C_2 = \frac{S_2}{\rho g}$$

N.B. nel secondo condensatore scorre $q_v - q_u$

Esempio con liquido reale

Variabili di stato p_{10} e p_{20}, variabili di comodo p_{12} e q_V, uscita d'interesse q_u

N.B. nel secondo condensatore scorre $q_v - q_u$

$$C_1 \frac{dp_{10}}{dt} = q_i - q_V \qquad C_2 \frac{dp_{20}}{dt} = q_V - q_U$$

Relazioni costitutive condensatori

$$p_{12} = p_1 - p_2 = p_{10} - p_{20}$$

Equazione di Kirchhoff alla maglia centrale

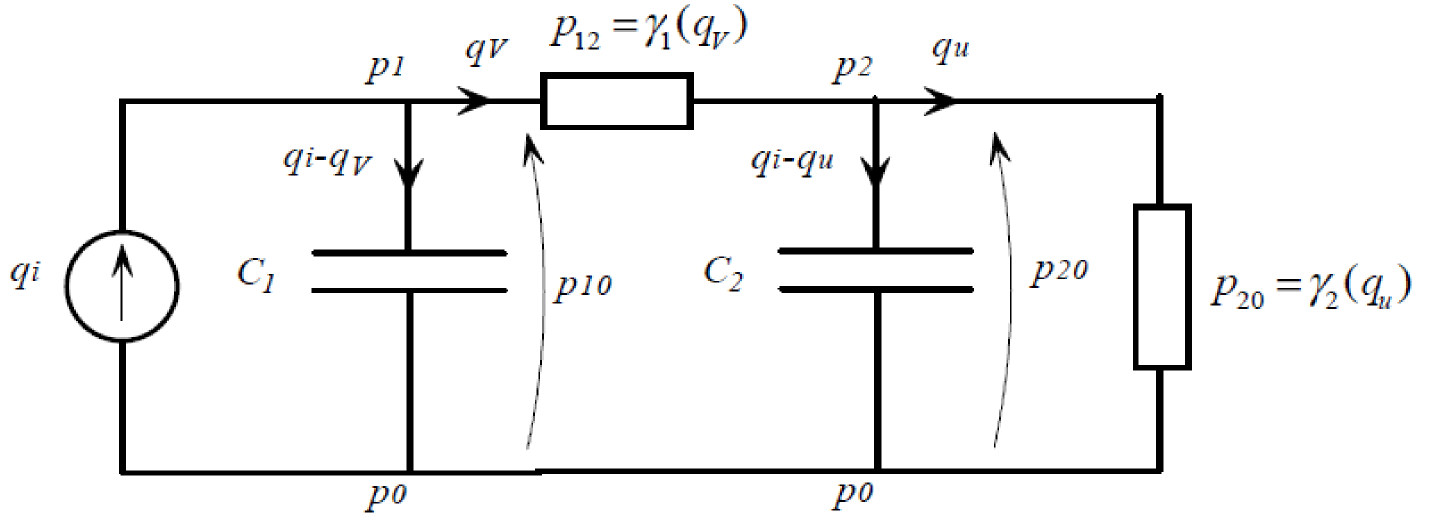
$$q_V = \gamma_1^{-1}(p_{12})$$
$$q_u = \gamma_2^{-1}(p_{20})$$

Relazioni costitutive dipoli (valvole), [illegible]

$$x_1(t) = p_{10}(t); \quad x_2(t) = p_{20}(t); \quad u(t) = q_i(t)$$

Sostituendo nelle prime due trovo le equazioni di stato

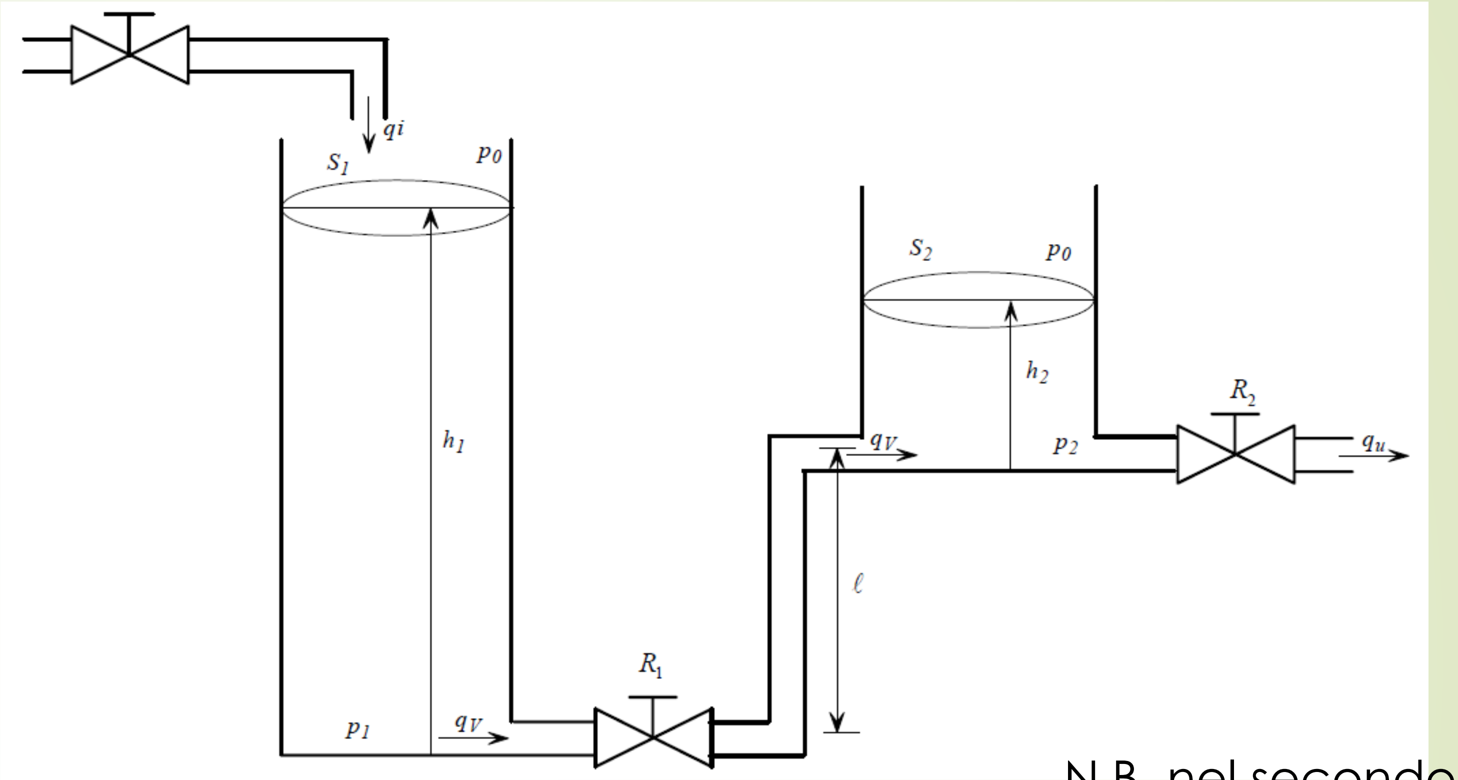
$$\dot{x}_1(t) = -\frac{1}{C_1}\gamma_1^{-1}(x_1(t) - x_2(t)) + \frac{1}{C_1}u(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{C_2}\gamma_1^{-1}(x_1(t) - x_2(t)) + \frac{1}{C_2}\gamma_2^{-1}(x_2(t))$$
$$y(t) = \gamma_2^{-1}(x_2(t))$$



È stazionario, mentre la linearità dipende se il regime è laminare o turbolento

Esempio 2

Esempio. Si consideri il sistema liquido-livello mostrato in Figura. Facendo l'ipotesi di liquido reale, di regime laminare di funzionamento delle valvole, e supponendo non trascurabile la resistenza e l'induttanza idraulica del tratto verticale di condotta, determinare un modello i-s-u che consenta di studiare l'andamento della portata in uscita.



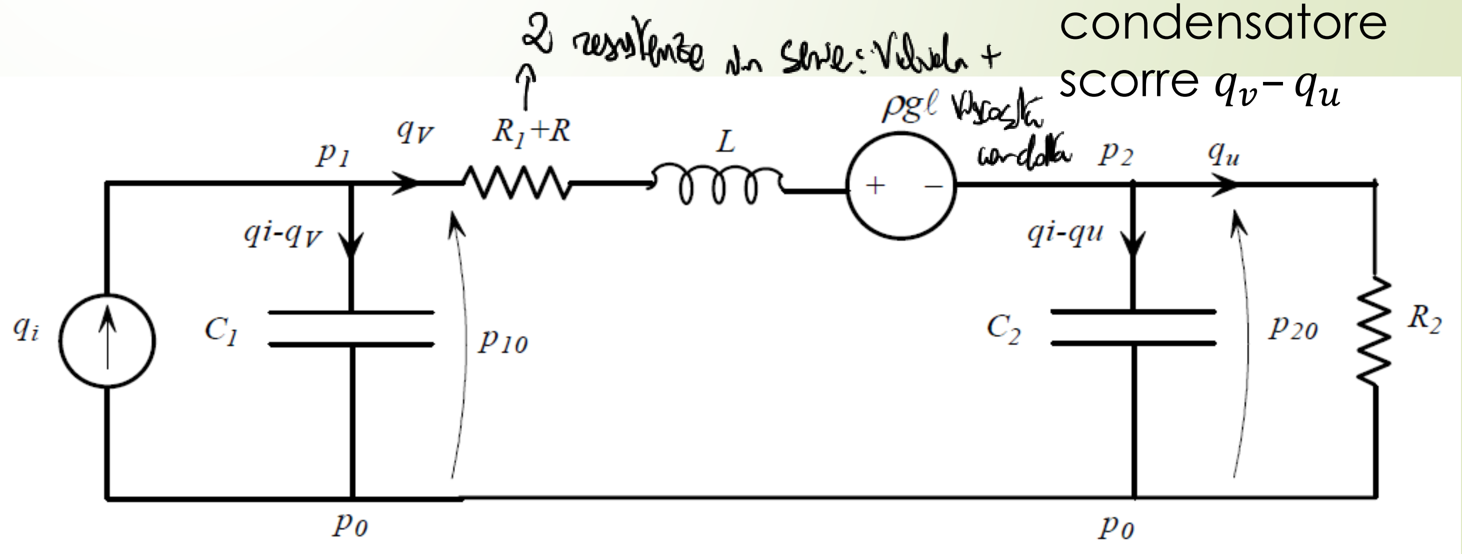
R_1 ed R_2 sono le due valvole che in regime laminare diventano una pura resistenza

$$L = \frac{\rho}{\ell \pi R^2} \qquad C_1 = \frac{S_1}{\rho g}$$

$$R = \frac{8\mu\ell}{\pi R^4} \qquad C_2 = \frac{S_2}{\rho g}$$

N.B. $L = \rho l / S$

N.B. nel secondo condensatore scorre $q_v - q_u$



Sistemi pneumatici

Il funzionamento dei sistemi pneumatici è abbastanza simile a quello dei sistemi idraulici, fatta eccezione per le caratteristiche di compressibilità dei fluidi (aria o gas) con cui sono realizzati e la sua dipendenza da pressione e temperatura.

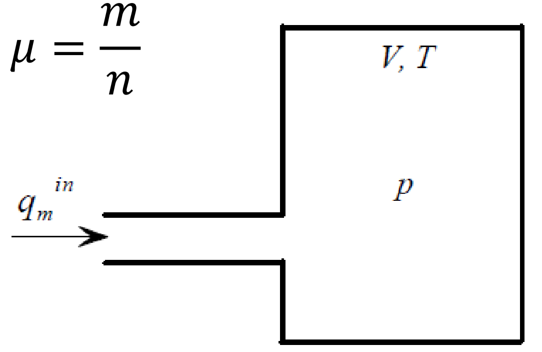
La trattazione porta sempre a circuiti elettrici equivalenti.

Gli elementi di base sono il serbatoio in pressione, la strozzatura e la condotta

Equivalente del serbatoio in pressione. Si utilizza la legge dei gas perfetti per ricavare la seguente relazione tra portata massica in ingresso e pressione del serbatoio. V è il volume del serbatoio, T è la temperatura del gas, R è la costante universale dei gas perfetti, μ è la massa molecolare

$$q_m^{in} = \frac{\mu V}{RT}\frac{dp}{dt}$$

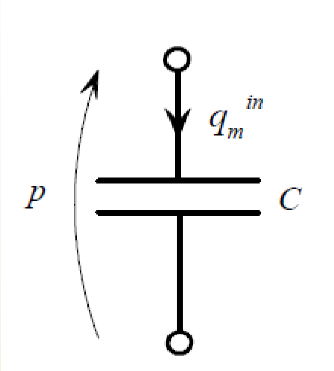
$$\mu = \frac{m}{n}$$



È equivalente ad un condensatore

$$C = \frac{\mu V}{RT}$$

Ricorda: so che posso trasformare in circuito formato da dipoli.

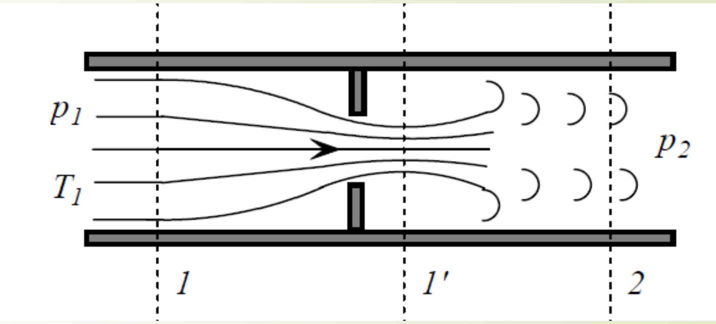


Si lavora con la portata massica.

Sistemi pneumatici

Equivalente della strozzatura. Il legame tra portata massica e pressione dipende dal moto del gas, che può essere in regime sonico $p < p_c$ o regime subsonico $p > p_c$, dove p_c rappresenta la pressione critica che è un parametro caratteristico del gas utilizzato. Le relazioni corrispondenti sono le seguenti:

- Regime subsonico $\quad q_m = k_{ss}\sqrt{p_2(p_1 - p_2)}$
- Regime sonico $\quad q_m = k_s p_1$



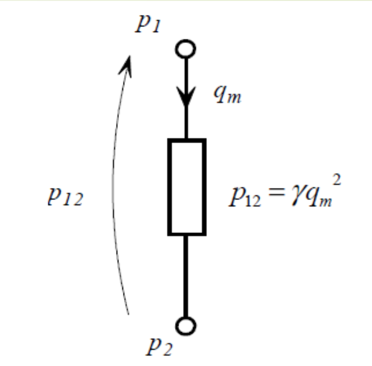
Nel secondo caso la portata massica dipende solo dalla pressione a monte della strozzatura, quindi un legame con la differenza di pressione non si riesce a scrivere.

Nel primo caso la relazione è fortemente non lineare perché il coefficiente dipende dall'apertura della valvola

In pratica non sempre è possibile trovare un equivalente elettrico. A seconda dei casi si valuta se le ipotesi di lavoro lo consentono e si procede con l'equivalente elettrico, altrimenti servono trattazioni più complesse.

Un caso in cui è utilizzabile è in presenza di regime subsonico con p_2 costante o di poco variabile.
In questo caso la relazione diventa simile a quella di un resistore non-lineare

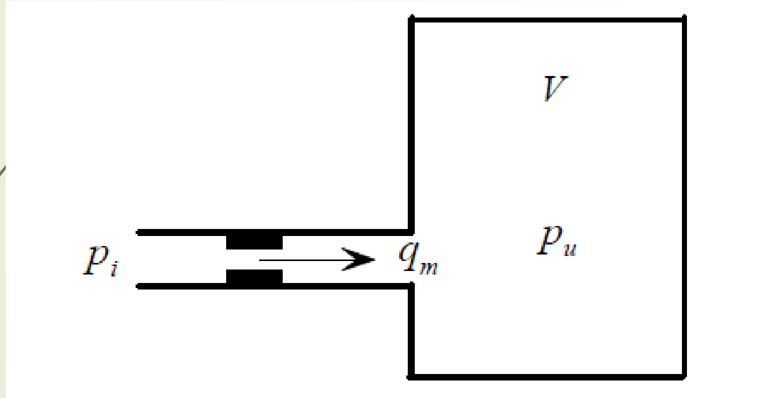
$$p_1 - p_2 = \frac{1}{k_{ss}^{\,2}\,\overline{p}_2} q_m^{\,2} = \gamma q_m^{\,2}$$

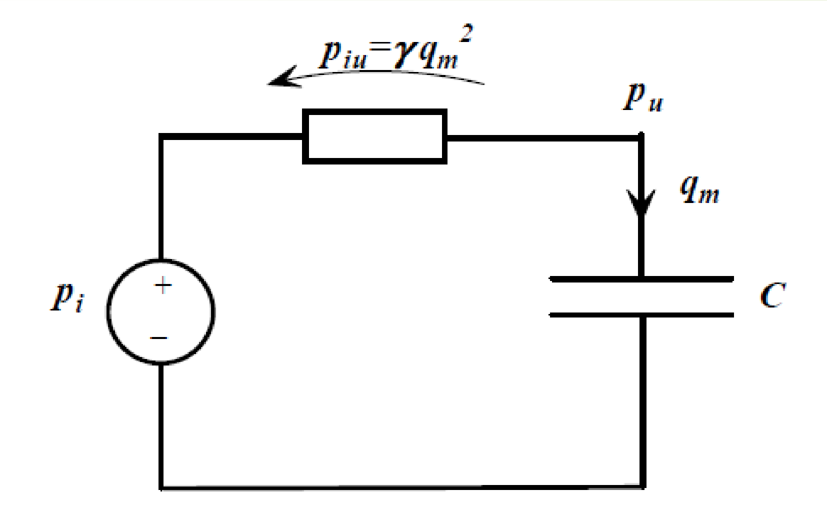


Sistemi pneumatici

Equivalente della condotta. Per la condotta andrebbero considerati gli stessi effetti dei sistemi idraulici, ma sono quantitativamente piccoli rispetto agli effetti legati alle strozzature e ai serbatoi, perché il gas in esse contenute è minimo. Di conseguenza si modella con un conduttore elettrico ideale.

Esempio. Serbatoio messo in pressione da una sorgente esterna mediante una valvola (compressore).





$$p_i - p_u = \gamma q_m^2$$

$$q_m = C\frac{dp_u}{dt}$$

$$\dot{x} = \frac{1}{C\sqrt{\gamma}}\sqrt{u-x}$$

$$y = x$$

$$u(t) = p_i(t),\ y(t) = p_u(t),\ x(t) = p_u(t),$$