Modellistica e Simulazione

(parte 3)

Prof. Salvatore Pirozzi

Email: salvatore.pirozzi@unicampania.it

MODELLISTICA DI SISTEMI ELETTRICI

Come per i sistemi meccanici, considereremo sistemi elettrici discreti, definiti comunemente sistemi a parametri concentrati.

Sono sistemi ottenuti dall'interconnessione di componenti elementari:

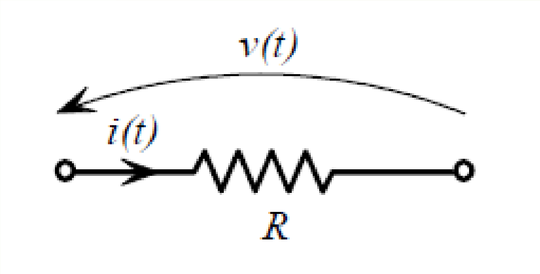
- Utilizzatori
  - elementi resistivi o resistori
  - elementi capacitivi o condensatori
  - elementi induttivi o induttori
- Generatori (ingressi del sistema)
  - generatori di tensione
  - generatori di corrente

Componenti elementari

Richiamiamo le relazioni tra tensioni e correnti adottando la convenzione dell'utilizzatore: la corrente che circola nel componente è positiva se circola nel verso che va dal terminale assunto come positivo (indicato con una freccia) al terminale negativo.

- **Resistore**: è un componente elettrico ideale (privo di induttanza e capacità) in cui, tra la tensione v(t) ai suoi capi e la corrente i(t) in esso circolante nella direzione che va dal terminale positivo a quello negativo, sussiste una relazione di proporzionalità. La costante **R** è detta resistenza del resistore e si misura in ohm.

$$v(t) = Ri(t) \qquad \text{ohm} = \frac{\text{Volt}}{\text{Ampere}} \qquad \left(\Omega = \frac{\text{V}}{\text{A}}\right)$$



- È un legame istantaneo (privo di memoria)
- Dal punto di vista energetico è un componente che dissipa energia sotto forma di calore per effetto Joule (analogia con il dissipatore per i sistemi meccanici). La funzione di dissipazione (o di Rayleigh) D è:

↳ Funzione che quantifica l'energia dissipata. (W?)

D erano Watt!

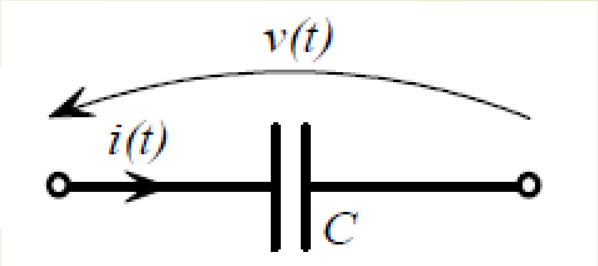
$$D = \frac{1}{2}Ri^2$$

Potenza

Componenti elementari

- **Condensatore:** è un componente elettrico ideale (privo di resistenza e induttanza) in cui, tra la tensione v(t) ai suoi capi e la corrente i(t), con la convenzione dell'utilizzatore, sussiste la relazione seguente. La costante **C** è detta capacità del condensatore e si misura in Farad

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \qquad \text{Farad} = \frac{\text{Ampere}}{\text{Volt/s}} = \frac{\text{Ampere}\cdot\text{s}}{\text{Volt}} = \frac{\text{Coulomb}}{\text{Volt}} \qquad \left(\text{F} = \frac{\text{A}\cdot\text{s}}{\text{V}} = \frac{C}{\text{V}}\right)$$



- Il Farad corrisponde ad un valore di capacità molto elevata, e quindi si utilizzano i suoi sottomultipli: il millifarad ($1mF=10^{-3}F$), il microfarad ($1\mu F=10^{-6}F$), il nanofarad ($1nF=10^{-9}F$), il picofarad ($1pF=10^{-12}F$).
- Il condensatore è un sistema dinamico (con memoria)
- Dal punto di vista energetico è un componente in grado di immagazzinare energia sotto forma di energia elettrostatica (analogia con gli elementi elastici dei sistemi meccanici).

$$U = \frac{1}{2}\frac{\chi^2}{C} = \frac{1}{2}Cv^2$$

energia analoga a questa potenziale

- χ rappresenta la carica accumulata sulle pareti del condensatore:

$$i = \frac{d\chi}{dt} \rightarrow \chi = Cv$$

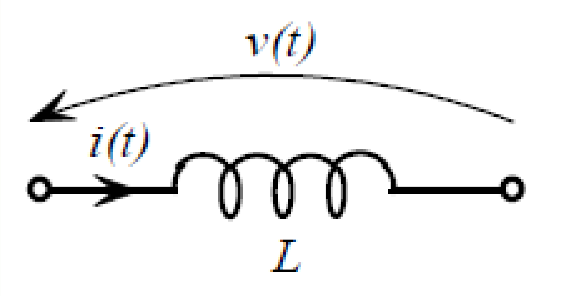
carica sulle pareti del condensatore

Componenti elementari

- **Induttore:** è un componente elettrico ideale (privo di resistenza e capacità) in cui, tra la tensione v(t) ai suoi capi e la corrente i(t), con la convenzione dell'utilizzatore, sussiste la relazione seguente. La costante L è detta induttanza dell'induttore e si misura in Henry.

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

$$\text{Henry} = \frac{\text{Volt}}{\text{Ampere/s}} = \frac{\text{Volt}\cdot\text{s}}{\text{Ampere}} = \frac{\text{Weber}}{\text{Ampere}} \qquad \left(\text{H} = \frac{\text{V}\cdot\text{s}}{\text{A}} = \frac{\text{Wb}}{\text{A}}\right)$$



- Anche per l'Henry si ricorre ad alcuni sottomultipli quali il millihenry ($1mH=10^{-3}H$).
- L'induttore è un sistema dinamico (con memoria)
- Dal punto di vista energetico è un componente in grado di immagazzinare energia sotto forma di energia elettromagnetica (analogia con gli elementi inerziali dei sistemi meccanici).

$$T = \frac{1}{2}Li^2$$

Energia analoga a quella cinetica

POSIZIONE → CARICA
CORRENTE → VELOCITÀ

Analogie

Corrente = derivata della carica

Vediamo alcune analogie tra sistemi meccanici ed elettrici

Dipendono da 2 grandezze, χ e $\dot{\chi}$ che sono uno la derivata dell'altro

- Induttore – massa (o inerzia) $T = \frac{1}{2} L i^2$ $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$ $T = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$
- Condensatore – molla $U = \frac{1}{2}\frac{\chi^2}{C} = \frac{1}{2} C v^2$ $U = \frac{1}{2} k (x_1 - x_2)^2$ $U = \frac{1}{2} k (\theta_1 - \theta_2)^2$
- Resistore - dissipatore $D = \frac{1}{2} R i^2$ $D = \frac{1}{2} \beta (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2$ $D = \frac{1}{2} \beta \left(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2\right)^2$

Nei sistemi meccanici abbiamo visto come le variabili di stato sono legate alle coordinate cartesiane e alle loro derivate (posizione e velocità). Per analogia, possiamo assumere come variabile di stato in un sistema elettrico la corrente nell'induttore e la tensione ai capi del condensatore. In alternativa, sempre per analogia, possiamo considerare la carica χ e la sua derivata $\dot{\chi}$ (corrente). Inoltre, la coppia $(\chi, \dot{\chi})$ per analogia equivale alla coordinata lagrangiana e la sua derivata $(q, \dot{q})$

↳ χ e $\dot{\chi}$ sono le nostre coordinate lagrangiane

$$i = \frac{d\chi}{dt} = \dot{\chi}\,, \qquad \chi = Cv$$

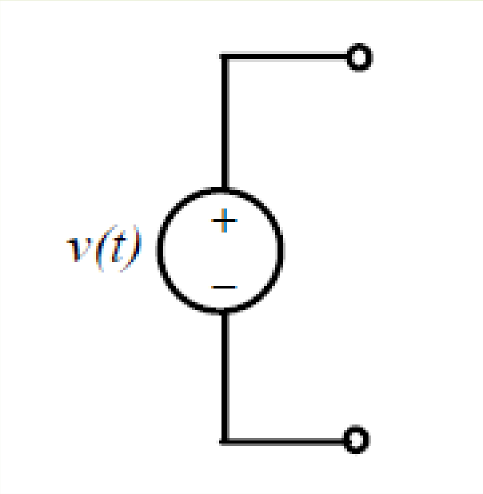
I generatori (ingressi)

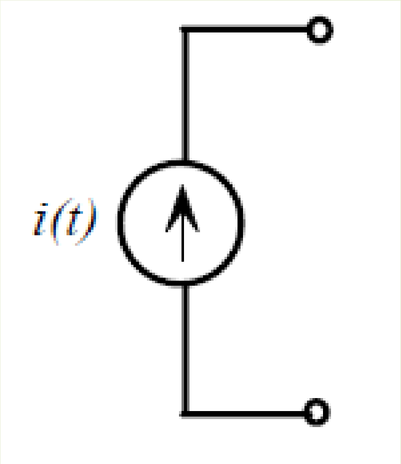
Generatore ideale di tensione: è un componente elettrico ideale che genera ai suoi capi una tensione, che può anche variare nel tempo, il cui valore è indipendente dalla corrente che in esso circola. Nella rappresentazione schematica il segno + indica il morsetto positivo.

La resistenza interna di un generatore ideale di tensione è zero.

Generatore ideale di corrente: è un componente elettrico ideale che fa circolare, nel ramo in cui è inserito, una corrente, che può anche variare nel tempo, il cui valore è indipendente dalle condizioni di funzionamento della parte rimanente del circuito. Nella rappresentazione schematica di un generatore di corrente la freccia indica il verso di circolazione della corrente nel generatore.

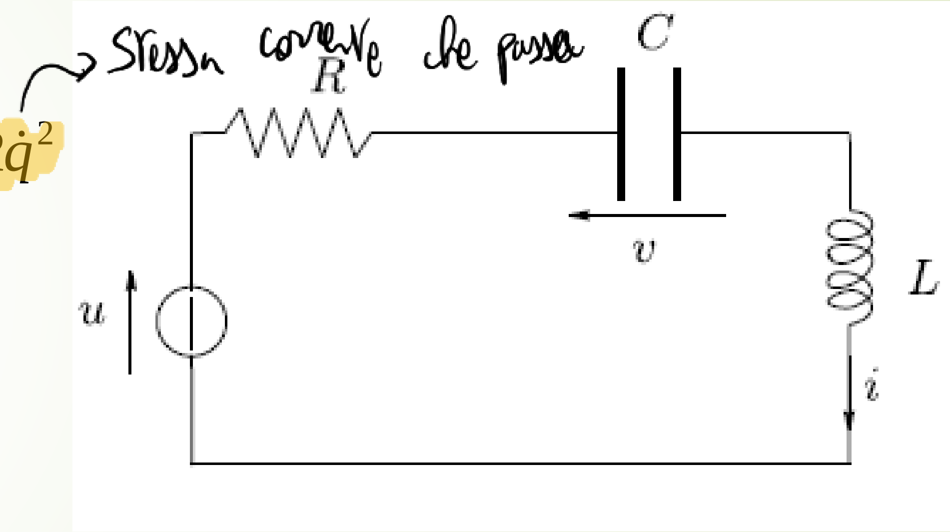
La resistenza interna di un generatore ideale di tensione è infinito





Esempio con lagrangiana

Vogliamo determinare un modello dinamico per il circuito in figura utilizzando l'approccio lagrangiano. Fissiamo come coordinata lagrangiana q la carica χ e considerando anche la sua derivata $\dot{q} = \dot{\chi}$ scriviamo l'energia e la funzione di dissipazione



$$T = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} L \dot{q}^2, \quad U = \frac{1}{2C} \chi^2 = \frac{1}{2C} q^2, \quad D = \frac{1}{2} R i^2 = \frac{1}{2} R \dot{q}^2$$

La lagrangiana

$$L(q, \dot{q}) = T(\dot{q}) - U(q) = \frac{1}{2} L \dot{q}^2 - \frac{1}{2C} q^2$$

Calcoliamo i termini dell'eq. di Lagrange

$$\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}} = L\dot{q} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}} = L\ddot{q}, \quad \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial q} = -\frac{1}{C} q, \quad \frac{\partial D(\dot{q})}{\partial \dot{q}} = R\dot{q}$$

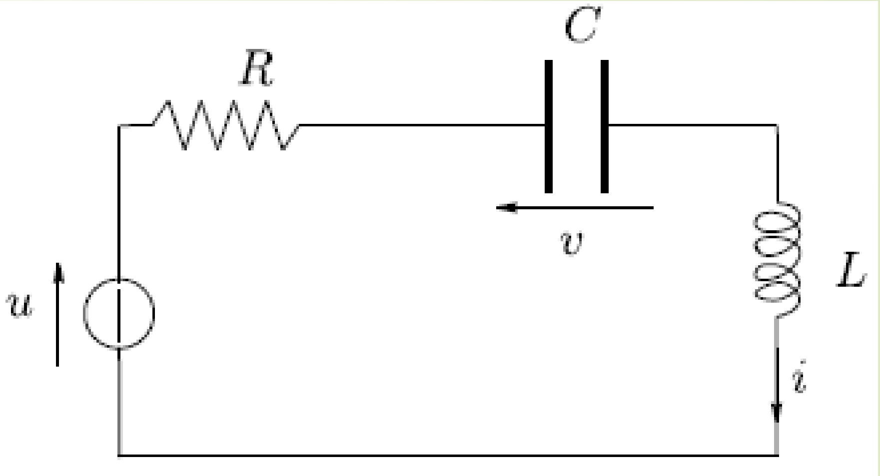
Combinandoli

$$L\ddot{q} + \frac{1}{C} q + R\dot{q} = u$$

Equazione di lagrange

Esempio con lagrangiana - note

Ricordando che $(\chi, \dot{\chi}) = (q, \dot{q})$ e $i = \frac{d\chi}{dt} = \dot{\chi}$, $\chi = Cv$



$$L\ddot{q} + \frac{1}{C}q + R\dot{q} = u$$

$$\Updownarrow$$

$$L\frac{di}{dt} + v + Ri = u$$ Eq. di Kirchhoff alla maglia

Possiamo usare come alternativa a Lagrange le eq. di Kirchhoff. Nella maggior parte dei sistemi elettrici sono più convenienti di Lagrange.

Ovvero per come è fatta equazione

A partire dall'eq. del modello, la rappresentazione i-s-u dipende dalla scelta delle variabili di stato. Possibilità diverse:

$$\begin{cases} x_1 = \chi = q \\ x_2 = \dot{\chi} = \dot{q} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{LC}x_1 - \frac{R}{L}x_2 + \frac{1}{L}u \end{cases}$$

Usando Lagrange

strade differenti

$$\begin{cases} x_1 = i \\ x_2 = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_2 + \frac{1}{L}u \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{C}x_1 \end{cases}$$

Usando Kirchhoff e relazione del condensatore

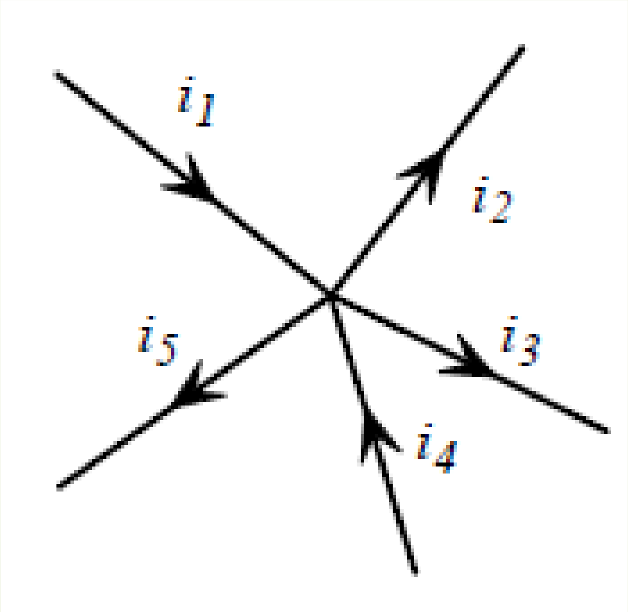
I principi di Kirchhoff

Per modellare i sistemi elettrici useremo i principi di Kirchhoff. Assumeremo note le definizioni di nodo, ramo e maglia.

Primo principio di Kirchhoff. In un generico circuito, supponiamo di aver fissato, in maniera del tutto arbitraria, un verso positivo per la corrente che circola in ciascun ramo. In un qualsiasi istante t la somma algebrica delle correnti che confluiscono in un nodo è zero.

Assumendo positive le correnti che entrano nel nodo in figura:

$$i_1(t) - i_2(t) - i_3(t) + i_4(t) - i_5(t) = 0$$



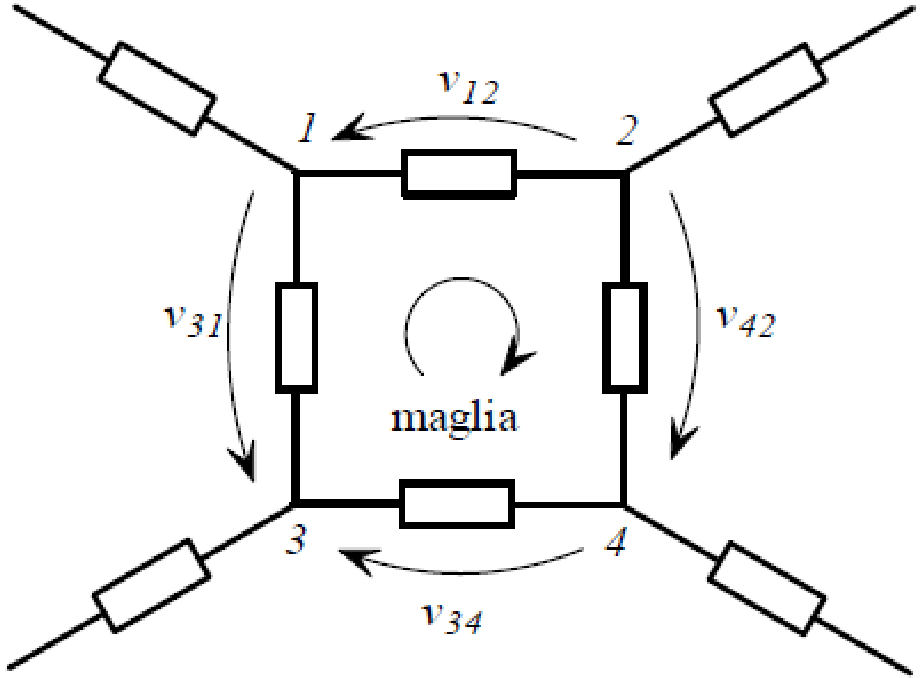
Come iniziamo ad avere più maglie, ho più correnti e succede un bordello!
Se volessimo usare Lagrange dobbiamo comunque scrivere le equaz. di Kirchhoff.

I principi di Kirchhoff

Secondo principio di Kirchhoff. Per una generica maglia di un circuito, supponiamo di aver fissato, in maniera del tutto arbitraria, un verso positivo delle tensioni ai capi di ogni ramo. Fissato allora un verso di percorrenza nella maglia, in un qualsiasi istante *t* la somma algebrica delle tensioni ai capi dei vari componenti che si incontrano percorrendo la maglia nel verso prefissato è zero.

Con riferimento alle tensioni indicate in Figura e al verso di percorrenza della maglia, il secondo principio di Kirchhoff stabilisce che:

$$v_{42}(t)+v_{34}(t)-v_{31}(t)-v_{12}(t)=0$$



N.B. negli appunti è scritta con i segni opposti

No gradi di libertà.
Definisco direttamente stato senza GDL

Modelli i-s-u di sistemi elettrici

- **Scelta delle variabili di stato**: conviene fissare direttamente le variabili di stato che per analogia ai sistemi meccanici scegliamo (quasi sempre) pari alle correnti che circolano negli induttori e le tensioni ai capi dei condensatori. Le eccezioni riguardano i componenti per i quali tali correnti e/o tensioni sono imposte da un generatore (ingresso). Indichiamo con **n** il numero delle variabili di stato.

ATTENZIONE. Nei sistemi meccanici indicavamo con n il numero di g.d.l. mentre il numero di variabili di stato era pari a 2n, perché ad ogni g.d.l. è associato un elemento di inerzia per il quale lo stato è definito da due variabili: la posizione e la sua derivata (velocità).

- **Scrittura delle relazioni fisiche tra le variabili di stato**, fornite dai principi di Kirchhoff e dalle relazioni costitutive dei vari componenti

ATTENZIONE. Per la scrittura delle leggi di Kirchhoff, è necessario introdurre, oltre alle variabili di stato, altre grandezze di comodo. Ogni variabile aggiuntiva implica la scrittura di un'equazione in più. Conviene cercare di ridurre il numero di tali variabili aggiuntive sfruttando le relazioni costitutive e le proprietà relative ai collegamenti in serie e in parallelo. Indichiamo con **z** il numero di variabili aggiuntive.

- Servirà scrivere **n+z** equazioni indipendenti

Perché stato legato a energia immagazzinata! (Ma variabili non devono dipendere direttam. da ingresso)

In alcuni casi un induttore è direttamente collegato a un ingresso. ⇒ Quindi quella corrente o tensione sono già un ingresso: GIC con serie induttore.
n al massimo pari al numero di induttori e di condensatori.

Numero minimo di equaz. è n: una per ogni variabile di stato. Se devo usare variabili aggiuntive (corrente nei resistori) devo sostituire facendole sparire.

Modelli i-s-u di sistemi elettrici

Ricordiamo:

- in un sistema con N nodi, comunque si scelgano N-1 nodi si ottengono altrettante equazioni ai nodi tra loro indipendenti;
- ogni equazione ad una maglia è indipendente dalle altre equazioni alle maglie purché in tale maglia vi sia almeno un ramo che non sia presente nelle precedenti.
- servirà manipolare le **n+z** equazioni scritte insieme alle relazioni costitutive dei singoli componenti al fine di pervenire ad un numero di equazioni indipendenti pari a **n** scritte in funzione delle sole variabili di stato fissate all'inizio.
- Queste ultime verranno ulteriormente manipolate per pervenire ad una rappresentazione i-s-u coerente con quella cercata.

Esempio 3.1

Scrivere un modello i-s-u del circuito in Figura che consenta di studiare l'andamento della tensione ai capi dell'induttanza L.

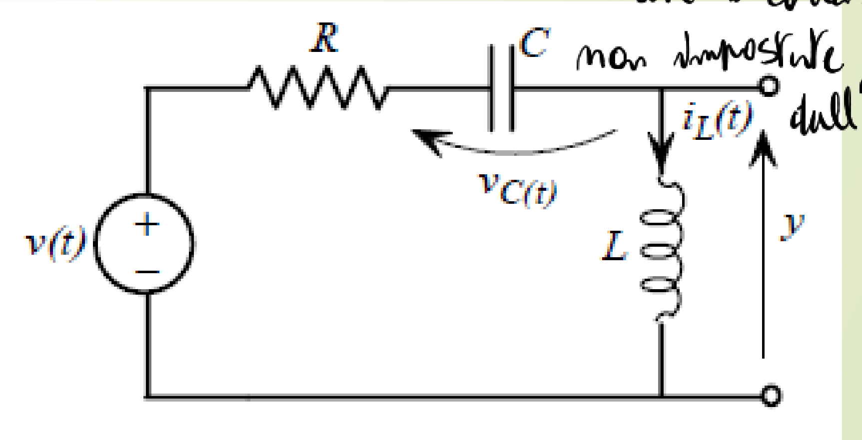
- Definiamo le variabili di stato (n=2): la tensione ai capi del condensatore v_C e la corrente nell'induttore i_L
- L'unico ingresso è rappresentato dal generatore di tensione
- I componenti del circuito sono disposti in serie, per cui in essi circola la stessa corrente i_L

$$x_1(t) = v_C(t), \quad x_2(t) = i_L(t), \quad i_R(t) = i_C(t) = i_L(t), \quad u(t) = v(t),$$

Applichiamo Kirchhoff all'unica maglia presente, fissando la convenzione dell'utilizzatore per ogni componente, sfruttando le relazioni costitutive dei componenti

- n=2 (v_C , i_L), z=2 (v_R , v_L) → n+z=4 eq. indipendenti

Tensione o corrente non imposte dall'est.



$$i_L(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}, \quad v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}, \quad v_R(t) = Ri_L(t)$$

$$v(t) - v_R(t) - v_C(t) - v_L(t) = 0$$

Esempio 3.1

Devo manipolare le n+z (4) equazioni per ridurle a n (2) scritte in funzione solo delle variabili di stato.

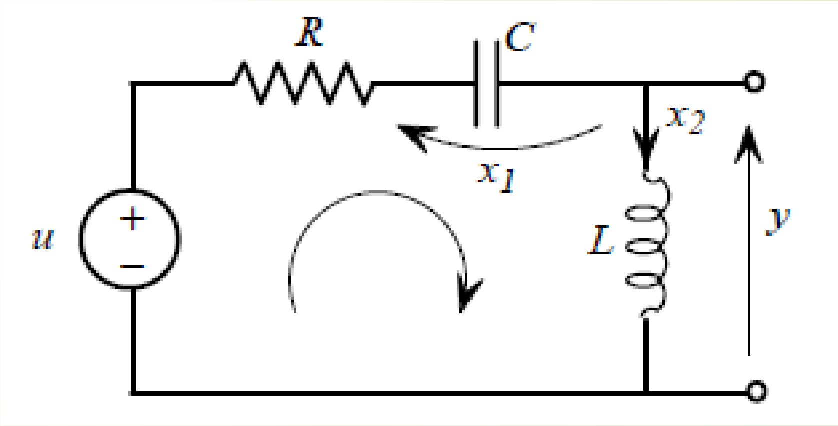
Dalle relazioni della slide precedente, sostituisco la 2° e la 3° relazione costitutiva nell'eq. di Kirchhoff

$$i_L(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}, \quad v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}, \quad v_R(t) = Ri_L(t)$$

$$v(t) - v_R(t) - v_C(t) - v_L(t) = 0$$

$$\Rightarrow \quad i_L(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}$$

$$v(t) - Ri_L(t) - v_C(t) - L\frac{di_L(t)}{dt} = 0$$



Sostituisco poi le variabili di stato e gli ingressi

$$x_2(t) = C\dot{x}_1(t)$$

$$u(t) - Rx_2(t) - x_1(t) - L\dot{x}_2(t) = 0$$

Ordino i termini ed aggiungo l'eq. di uscita

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{C}x_2(t)$$

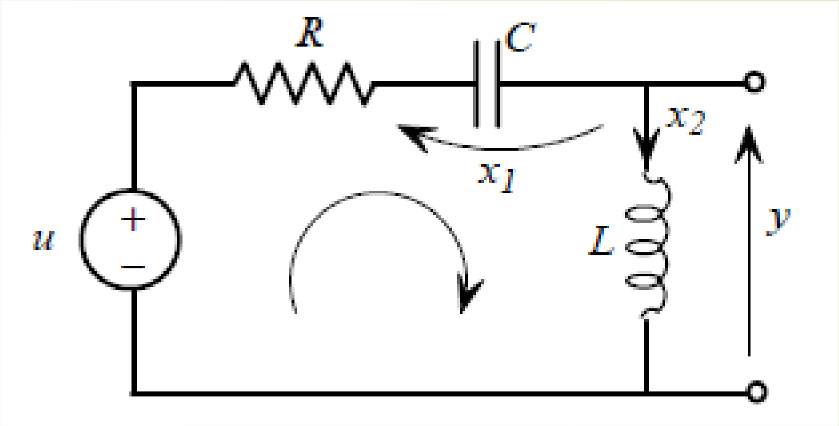
$$\dot{x}_2(t) = -\frac{1}{L}x_1(t) - \frac{R}{L}x_2(t) + \frac{1}{L}u(t)$$

$$y(t) = v_L(t) = L\dot{x}_2(t) = -x_1(t) - Rx_2(t) + u(t)$$

↑ Ci deve stare stato no derivato

Esempio 3.1

Il sistema è lineare tempo invariante



$$\dot{x}_1 = \frac{1}{C} x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{L} x_1 - \frac{R}{L} x_2 + \frac{1}{L} u$$

$$y = -x_1 - Rx_2 + u$$

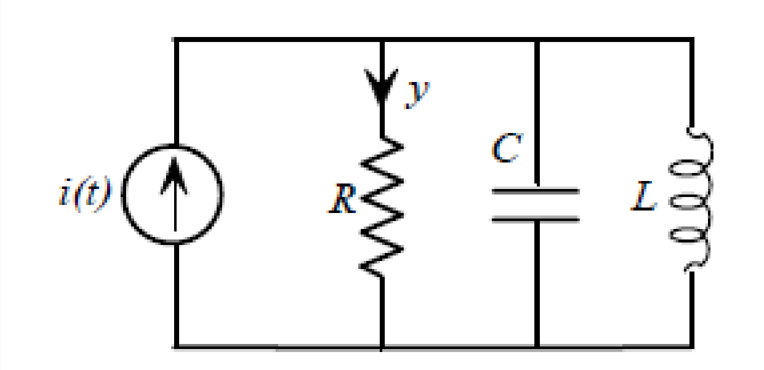
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} -1 & -R \end{bmatrix} x + u$$

Esempio 3.2

Scrivere un modello i-s-u del circuito in Figura per studiare l'andamento della corrente nella resistenza R.

- Definiamo le variabili di stato (n=2): la tensione ai capi del condensatore $x_1 = v_C$ e la corrente nell'induttore $x_2 = i_L$

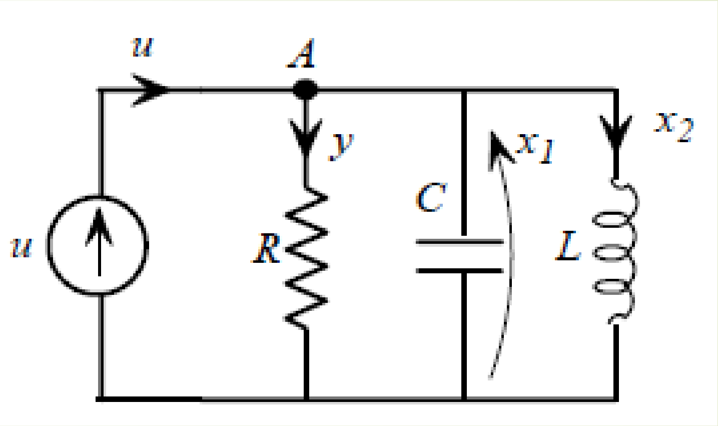


- I componenti sono tutti in parallelo → x_1 è la tensione ai capi di tutti
- Scriviamo l'eq. di Kirchhoff al nodo A e le relazioni costitutive

corrente

$$i_C(t) = C\frac{dx_1(t)}{dt}, \quad x_1(t) = L\frac{dx_2(t)}{dt}, \quad x_1(t) = Ri_R(t)$$

$$i(t) - i_R(t) - i_C(t) - x_2(t) = 0$$



- Sostituisco la 1° e la 3° relazione nell'eq. di Kirchhoff

$$x_1(t) = L\frac{dx_2(t)}{dt}$$

$$u(t) - \frac{1}{R}x_1(t) - C\frac{dx_1(t)}{dt} - x_2(t) = 0$$

Esempio 3.2

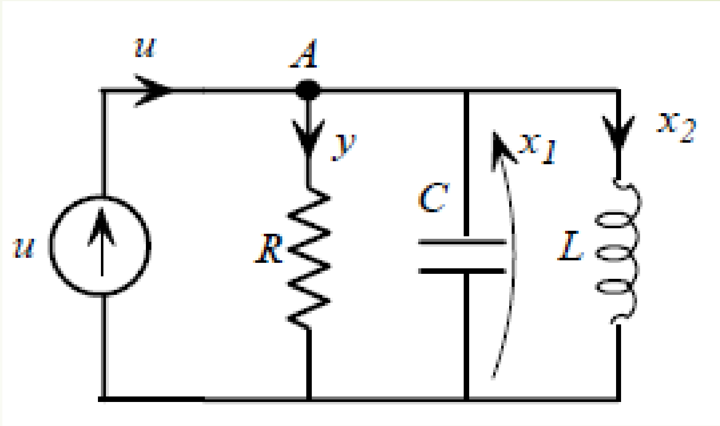
Lineare tempo invariante

Riordino ed aggiungo l'equazione di uscita

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{RC}x_1(t) - \frac{1}{C}x_2(t) + \frac{1}{C}u$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{L}x_1$$

$$y = \frac{1}{R}x_1$$



$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

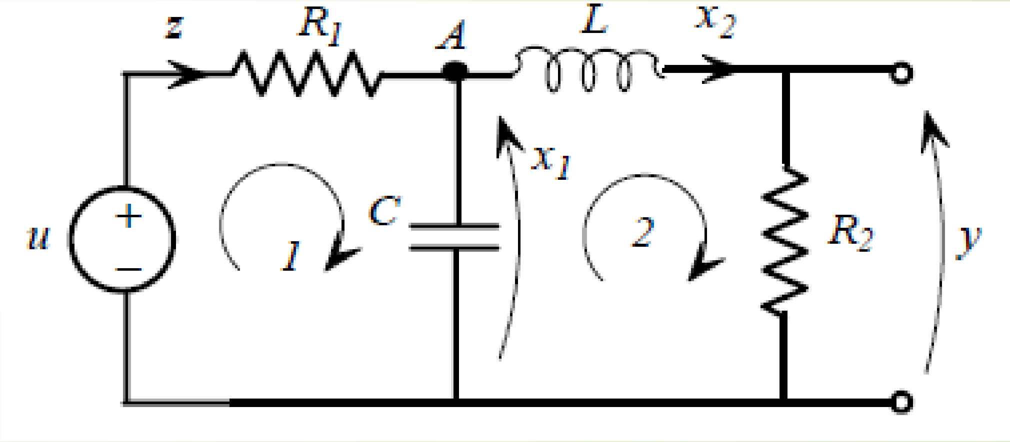
$$y = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & 0 \end{bmatrix} x$$

Esempio 3.3

Scrivere un modello i-s-u del circuito in Figura per studiare l'andamento della tensione ai capi della resistenza R_2.

- Definiamo le variabili di stato (n=2): la tensione ai capi del condensatore $x_1 = v_C$ e la corrente nell'induttore $x_2 = i_L$ Non passati da ingresso
- Scriviamo le relazioni di Kirchhoff al nodo A e alle due maglie, definendo z(t) (la corrente nel primo ramo) e $i_C(t)$ come variabile di comodo ed utilizziamo una relazione costitutiva (4 equazioni in 4 incognite)

$$
\begin{aligned}
&\text{nodo A} && z(t) - i_C(t) - x_2(t) = 0 \\
&\text{maglia 1} && u(t) - R_1 z(t) - x_1(t) = 0 \\
&\text{maglia 2} && x_1(t) - L\dot{x}_2(t) - R_2 x_2(t) = 0 \\
&\text{rel. cost.} && i_C(t) = C\dot{x}_1(t)
\end{aligned}
$$



- Manipolando le equazioni (2 eq. nelle due variabili di stato)

$$
\begin{aligned}
&u(t) - R_1 C\dot{x}_1(t) - R_1 x_2(t) - x_1(t) = 0 \\
&x_1(t) - L\dot{x}_2(t) - R_2 x_2(t) = 0
\end{aligned}
$$

→ 2 equazioni!

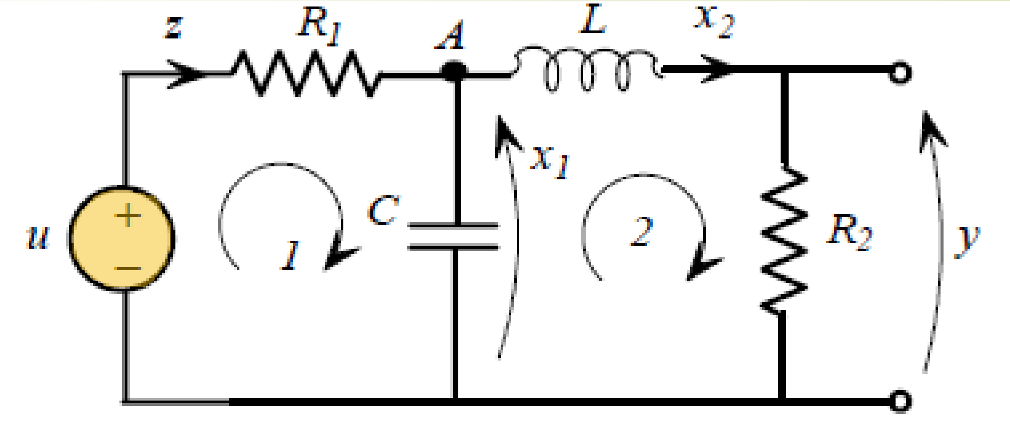
Esempio 3.3

Riordinando e aggiungendo l'uscita

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{R_1C}x_1(t) - \frac{1}{C}x_2(t) + \frac{1}{R_1C}u(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{L}x_1(t) - \frac{R_2}{L}x_2(t)$$

$$y(t) = R_2x_2(t)$$

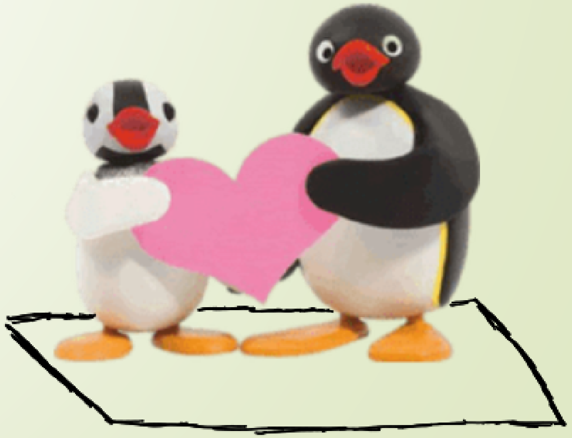


Lineare tempo invariante

NOTA: Attento a maglie con gic in una maglia. Non avrei modo di sostituire la tensione.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1C} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & R_2 \end{bmatrix} x$$



MODELLISTICA DI SISTEMI ELETTROMECCANICI

Un sistema elettromeccanico è un sistema in grado di trasformare potenza elettrica in potenza meccanica (**motore**) o viceversa (**generatore**).

Tra i vari sistemi elettromeccanici, quelli probabilmente più utilizzati in pratica sono i motori elettrici che convertono energia elettrica in energia meccanica di rotazione, e vengono largamente utilizzati nei sistemi di controllo.

Vi sono diversi tipi di motori elettrici basati su diversi principi di funzionamento e dotati di caratteristiche diverse in termini di massima velocità di rotazione, massima coppia, e così via.

Corsi più avanzati trattano diverse tipologie di motori.

In questo corso consideriamo il motore elettrico in corrente continua con gli obiettivi di

- descrivere il principio di funzionamento
- ricavare un modello matematico i-s-u

Legge di Lorentz

Il principio di funzionamento si base sulla legge di Lorentz e sulla legge di Lenz.

- legge di Lorentz: dice che su un conduttore rettilineo di lunghezza ℓ percorso da una corrente i, immerso in un campo di induzione magnetica $\vec{\boldsymbol{B}}$, agisce una forza meccanica $\vec{\boldsymbol{F}}$ data dal prodotto vettoriale:

$$\vec{\boldsymbol{F}} = i\vec{\ell}x\vec{\boldsymbol{B}}$$

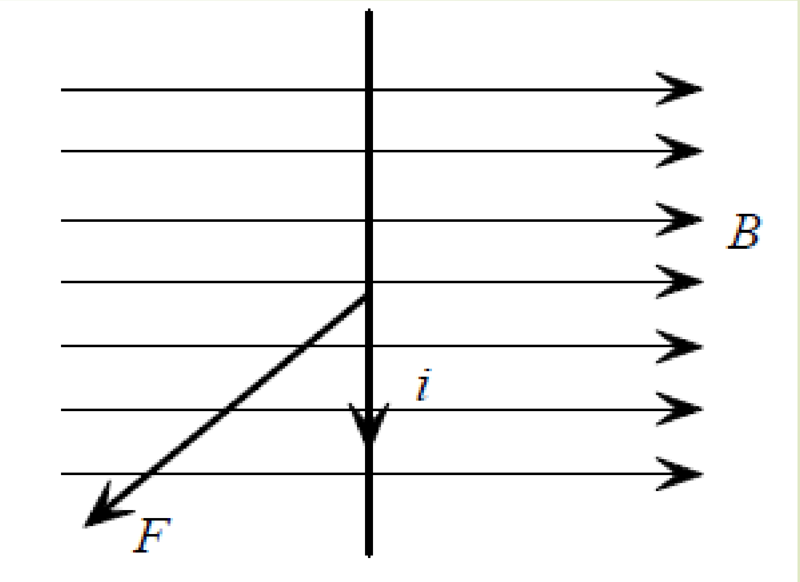
dove $\vec{\ell}$ è un vettore avente modulo ℓ, direzione e verso della corrente i.

Tale forza ha direzione ortogonale al piano formato da $\vec{\ell}$ e $\vec{\boldsymbol{B}}$, verso ricavato con la regola della mano destra e modulo pari a

$$F = i\ell B \sin \vartheta$$

dove ϑ è l'angolo tra il conduttore e il campo magnetico.

Caso in cui il conduttore è ortogonale al campo



Legge di Lenz

- legge di Lenz: dice che se un conduttore rettilineo di lunghezza ℓ si muove con velocità $\vec{v}$ in un campo magnetico di induzione $\vec{B}$, ai suoi capi si manifesta una forza elettromotrice indotta e il cui valore è dato dal prodotto scalare

$$e = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{\ell}$$

dove il verso di $\vec{\ell}$ è quello assunto come positivo per la determinazione della f.e.m.

L'effetto di tale forza elettromotrice è tale che, se il conduttore fosse chiuso su un circuito, essa farebbe circolare una corrente che, per la legge di Lorentz, svilupperebbe una forza meccanica che si opporrebbe al moto del conduttore.

In maniera duale, se il moto del conduttore fosse dovuto ad una corrente in esso circolante, la forza elettromotrice indotta si opporrebbe a quella che genera la corrente.

Per tale motivo la f.e.m. e è detta *forza controelettromotrice (f.c.e.m.)*.

Interazione tra leggi di Lenz e di Lorentz

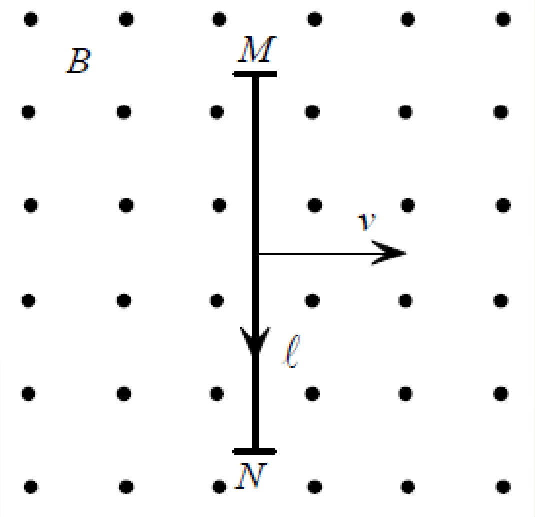
Esempio. In Figura è riportato il caso in cui la velocità, il campo e il conduttore sono tra loro ortogonali e costituiscono una terna levogira.

$\vec{\boldsymbol{F}} = i\vec{\ell}x\vec{\boldsymbol{B}}$

La legge di Lenz implica

$$e = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{\ell}$$

$$e = V_{NM} = vB\ell$$



$(\vec{v} \times \vec{B})$

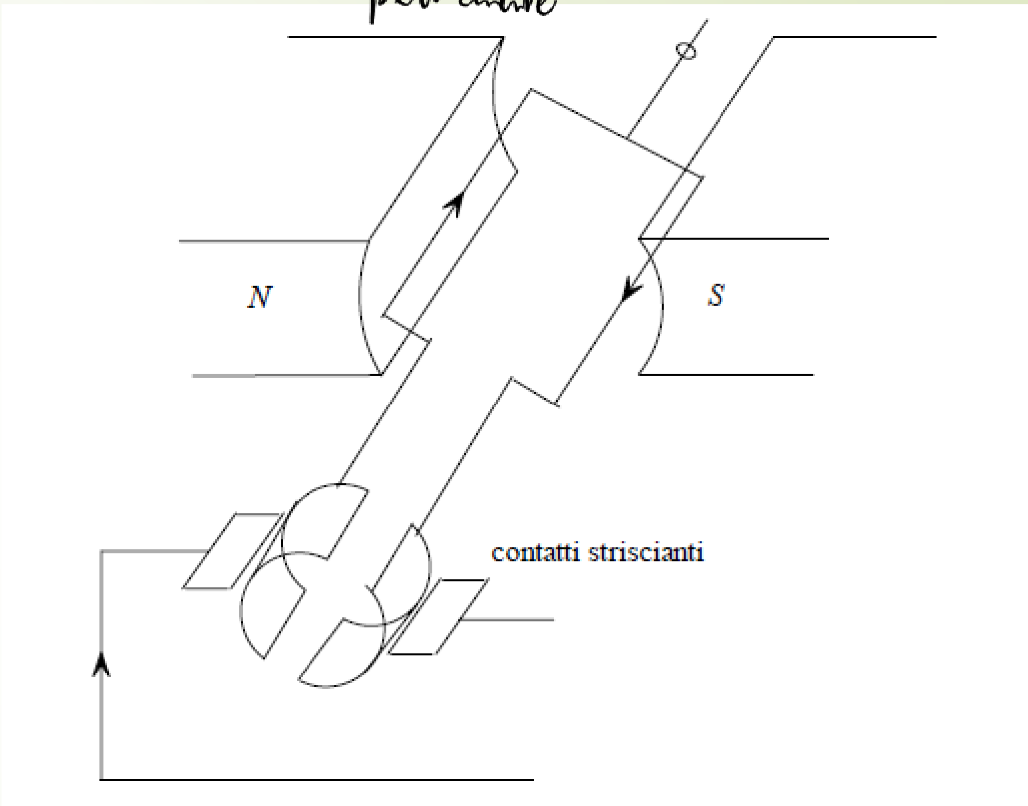
Diretto verso il basso

Essendo tale f.e.m. positiva tra N e M, chiudendo il conduttore su un circuito esterno farebbe circolare una corrente nel verso che va da M a N; la forza prodotta per la legge di Lorentz da tale corrente avrebbe verso opposto a v.

Motore in corrente continua

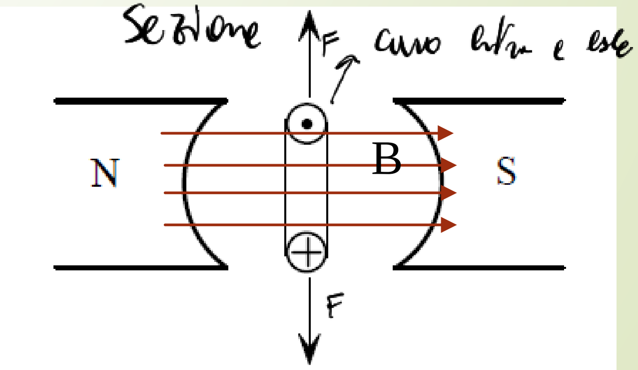
Insieme di spire in un campo permanente

Supponiamo di disporre, nello spazio compreso tra i poli di un magnete permanente, una spira rettangolare libera di ruotare intorno al proprio



Connettiamo gli estremi di tale spira ad un dispositivo di commutazione collegato ad un circuito esterno capace di far circolare corrente nella spira.

La spira tenderà a ruotare fino a disporre il suo piano perpendicolarmente al campo magnetico e con corrente circolante in maniera tale che le forze agenti sui due lati lunghi della spira siano orientate verso l'esterno della spira (posizione di equilibrio stabile).



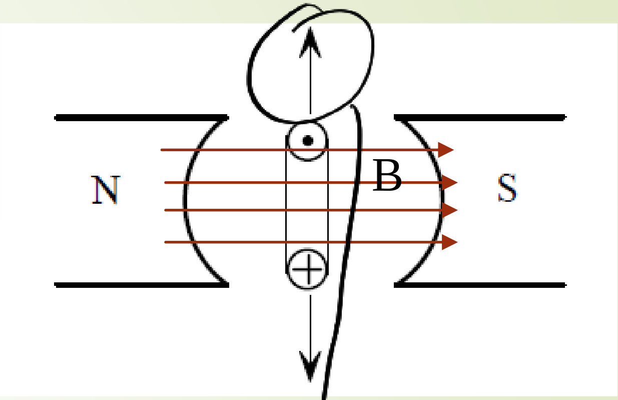
$$\vec{F} = i\vec{\ell} x \vec{B}$$

Il motore ha dei contatti striscianti. La corrente cambia verso perché mi sposto con dei [illegible].
Corrente stessa, lunghezza stessa. Spira é in equilibrio rispetto a E.
Se la spira parte in una posizione differente tende

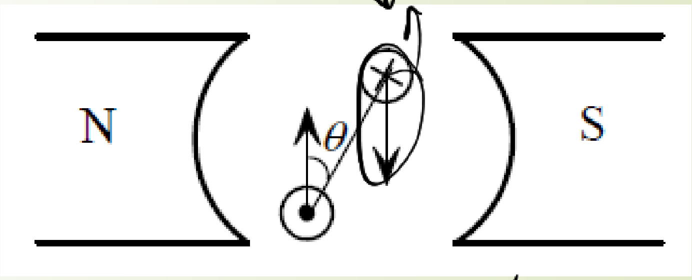
Motore in corrente continua

Si inverte verso delle forze

Raggiunta tale configurazione, il commutatore inverte la corrente nella spira, le forze cambiano verso e la spira, superato per inerzia il punto morto in cui le forze sono uguali ed opposte, continuerà a ruotare.



In un generico istante t la coppia motrice che fa ruotare la spira (legata alla coppia di forze agenti su di essa) è proporzionale alla corrente che circola e varia al variare della posizione angolare della spira (campo e lunghezza spira sono costanti)



Allo stesso modo la f.c.e.m. che si manifesta ai capi della spira è proporzionale alla velocità di rotazione della spira stessa.

Cavo in moto in $\vec{E}$

$$\vec{F} = i\vec{\ell} x \vec{B}$$

$$e = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{\ell}$$

Lenz

I due effetti sono sempre presenti contemporaneamente e si oppongono tra loro

Motore in corrente continua

Nei casi reali, per eliminare gli inconvenienti derivanti dalla variazione di coppia e quindi di velocità angolare, si ricorre ad un sistema costituito da un unico avvolgimento formante più spire angolarmente distribuite intorno ad un cilindretto, come mostrato in Figura. In questo caso sia la coppia motrice che la f.c.e.m. sono linearmente proporzionali con la corrente e la velocità angolare, rispettivamente.

aumenta se ho più spire

$$C_m = k_c i$$

$$e = k_v \omega$$

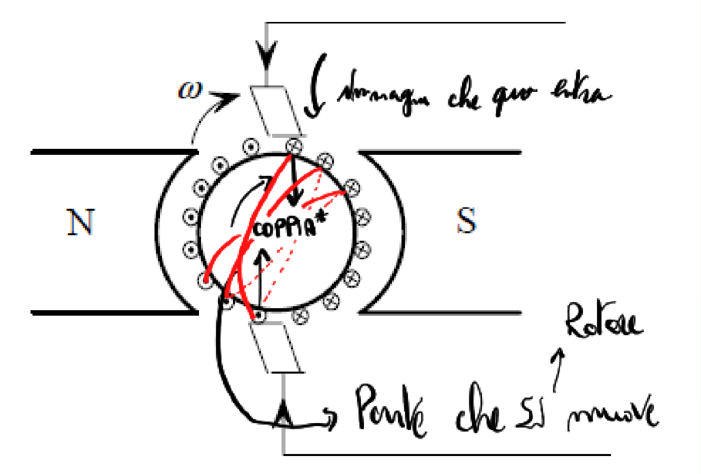
C_m = coppia motrice agente sul cilindretto

k_c, k_v = costanti di proporzionalità

i = correnti nelle spire

e = forza controelettromotrice

ω = velocità angolare del cilindretto



Il magnete permanente e il supporto esterno insieme prendono il nome di *statore o equipaggio fisso;*

Il tamburo (cilindretto) centrale e le spire su di esso avvolte prendono il nome di *rotore o equipaggio mobile*. Al rotore è collegato un alberino che ruota con esso e che è detto *albero motore*.

I *contatti striscianti* si chiamano *spazzole*. Il circuito elettrico complessivo è detto *circuito di armatura*.

* Induce una W in questo modo.

Motore caratterizzato da 2 leggi: come coppia motrice è legata alle condiz

$C_m = K_c \underline{i}$ → unico parametro della legge di Lorentz che posso modificare
Legame è lineare

NOTA: Se lui ruota ho legge di Lenz: f.c.e.m, anche essa legata linearmente a i.
Dipende da quanto veloce gira il motore.

Idealmente: $K_c \to +\infty$ e $K_v \to 0$, poca opposizione
Se funziona da motore.
Se da generatore invece? $\omega \Rightarrow$ velocità con cui gira bicicletta. Tensione è quella che fa accendere la lampadina.

Motore in corrente continua: schema

Per le spazzole

Nel funzionamento usuale il motore in corrente continua è comandato da un generatore di tensione che alimenta il circuito d'armatura: variando la tensione di comando viene fatta variare la corrente e di conseguenza la coppia motrice e quindi la velocità di rotazione.

Per il modello bisogna considerare la parte elettrica e quella meccanica.

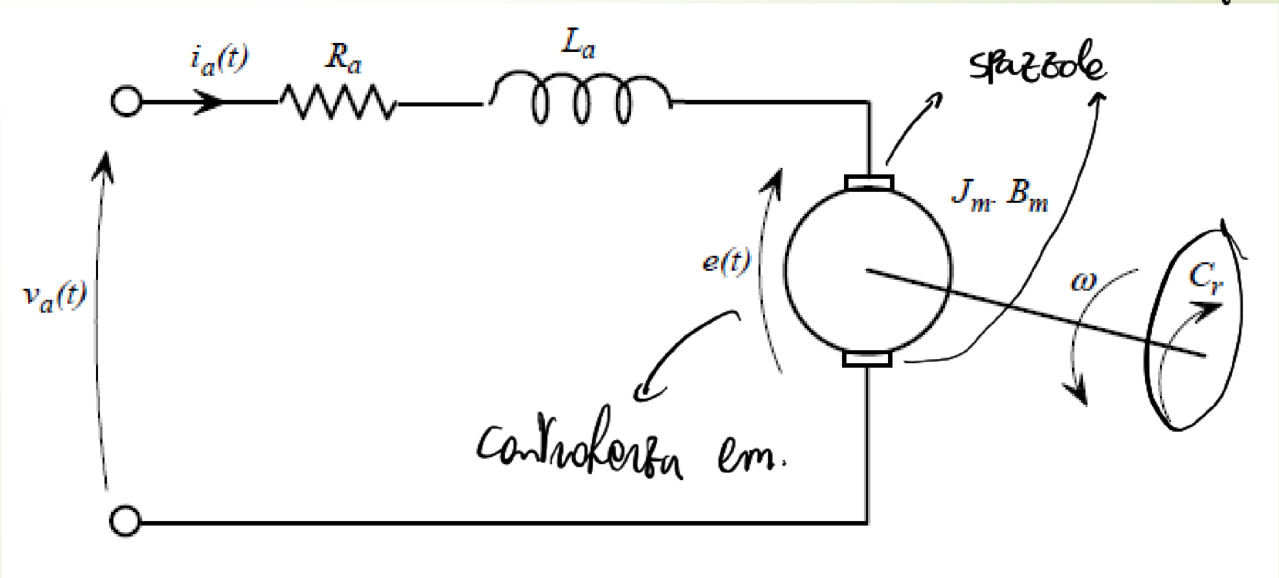
Nell'equazione di equilibrio elettrico bisogna portare in conto la resistenza e l'induttanza di armatura.

Nell'equazione di equilibrio meccanico bisogna portare in conto l'inerzia e il coefficiente di attrito dell'equipaggio mobile (rotore + albero motore + supporti esterni)

massa e momento di inerzia

Lo schema complessivo risulta il seguente:

Un filo ha un minimo di resistenza e induttanza

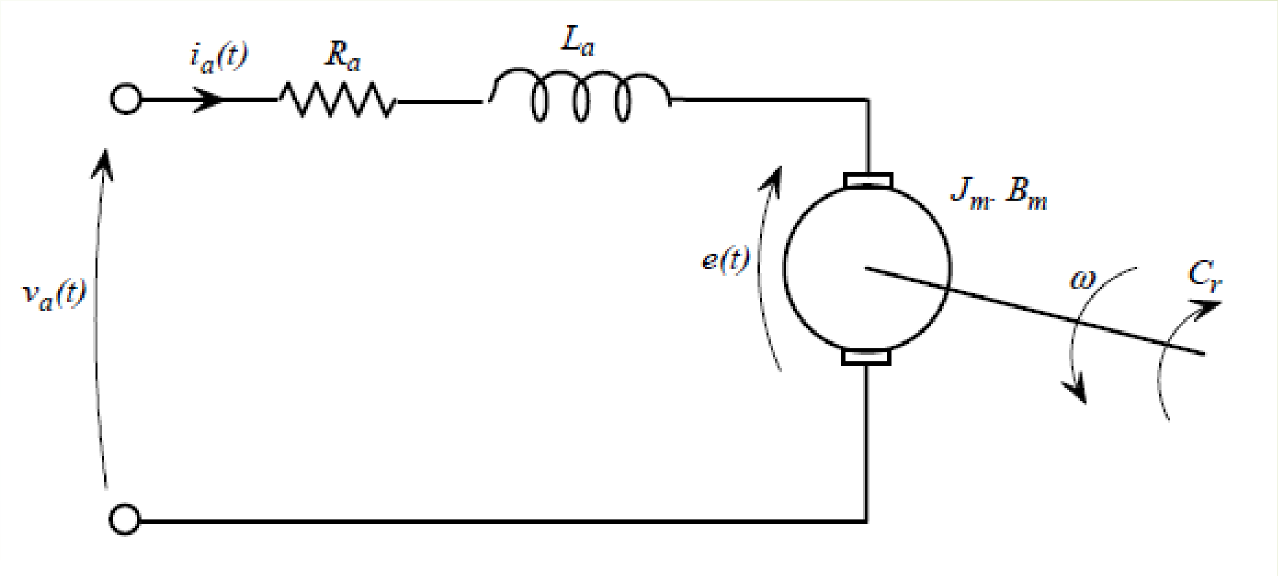


Tensione in ingresso: tensione di armatura, resistenza di armatura

Attrito c'è perché c'è contatto con le spazzole.
Carico è modellato da una coppia resistente: sarà meno libero di muoversi il motore.
↳ Il carico si oppone al moto del motore.

Motore in corrente continua: schema

Nomenclatura dei simboli



R_a = resistenza d'armatura

L_a = induttanza d'armatura

v_a = tensione d'armatura

i_a = corrente d'armatura

e = forza controelettromotrice

J_m , B_m = momento d'inerzia e coefficiente d'attrito del motore

ω= velocità angolare dell'albero motore

C_r = coppia resistente del carico

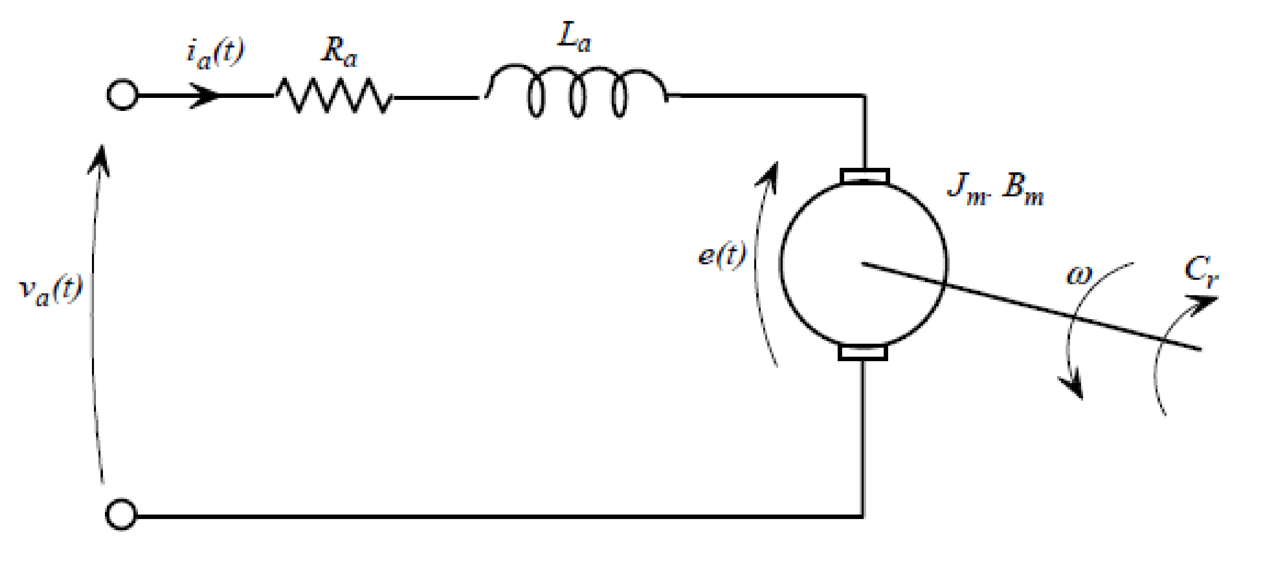
Motore in corrente continua: equazioni

Parte elettrica: Kirchhoff alla maglia

Parte meccanica: Newton

$$v_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e \qquad \text{(equilibrio elettrico)}$$

$$C_m = J_m \frac{d\omega}{dt} + B_m \omega + C_r \qquad \text{(equilibrio meccanico)}$$



sostituendo

$$C_m = k_c i$$

$$e = k_v \omega$$

$$v_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + k_v \omega$$

$$k_c i_a = J_m \frac{d\omega}{dt} + B_m \omega + C_r$$

Comportamento elettromeccanico le va ad accoppiare:
Compare ω nella prima e i nella seconda!

Motore in corrente continua: modello

Per ottenere una rappresentazione i-s-u, supponiamo di essere interessati alla posizione e alla velocità angolare:

$$x_1(t)=i_a(t),\ x_2(t)=\dot{\vartheta}(t)=\omega(t),\ x_3(t)=\vartheta(t),$$
$$u_1(t)=v_a(t),\ u_2(t)=C_r(t),$$
$$y_1(t)=\vartheta(t),\ y_2(t)=\omega(t)$$

$$v_a=R_a i_a+L_a\frac{di_a}{dt}+k_v\omega$$

$$k_c i_a=J_m\frac{d\omega}{dt}+B_m\omega+C_r$$

$$u_1=R_a x_1+L_a\dot{x}_1+k_v x_2$$
$$k_c x_1=J_m\dot{x}_2+B_m x_2+u_2$$

$$\dot{x}_1=-\frac{R_a}{L_a}x_1-\frac{k_v}{L_a}x_2+\frac{1}{L_a}u_1$$

$$\dot{x}_2=\frac{k_c}{J_m}x_1-\frac{B_m}{J_m}x_2-\frac{1}{J_m}u_2$$

$$\dot{x}_3=x_2$$
$$y_1=x_3$$
$$y_2=x_2$$

N.B. sugli appunti non c'è la posizione (1 var di stato in meno)

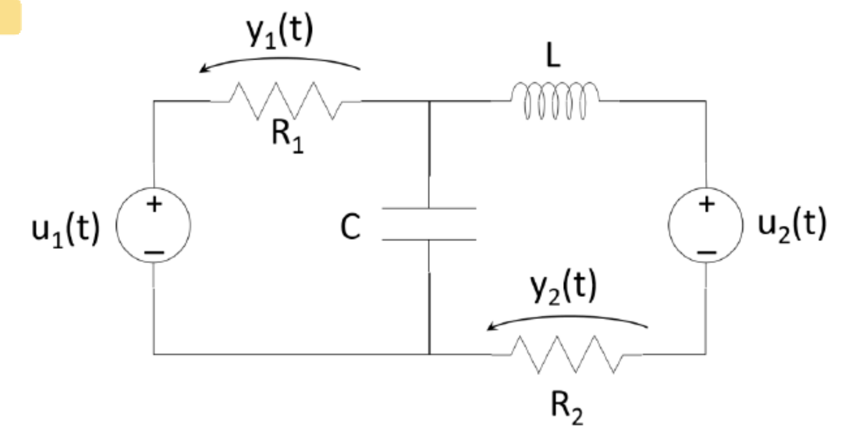
N.B. sugli appunti c'è il segno + (sbagliato)

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-\frac{R_a}{L_a} & -\frac{k_v}{L_a} & 0\\ \frac{k_c}{J_m} & -\frac{B_m}{J_m} & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}\frac{1}{L_a} & 0\\ 0 & -\frac{1}{J_m}\\ 0 & 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}x$$

Prova d'esame (24 giugno 2019)

Ricavare un modello ingresso-stato-uscita per il circuito in figura considerando come uscite le due tensioni ai capi dei resistori

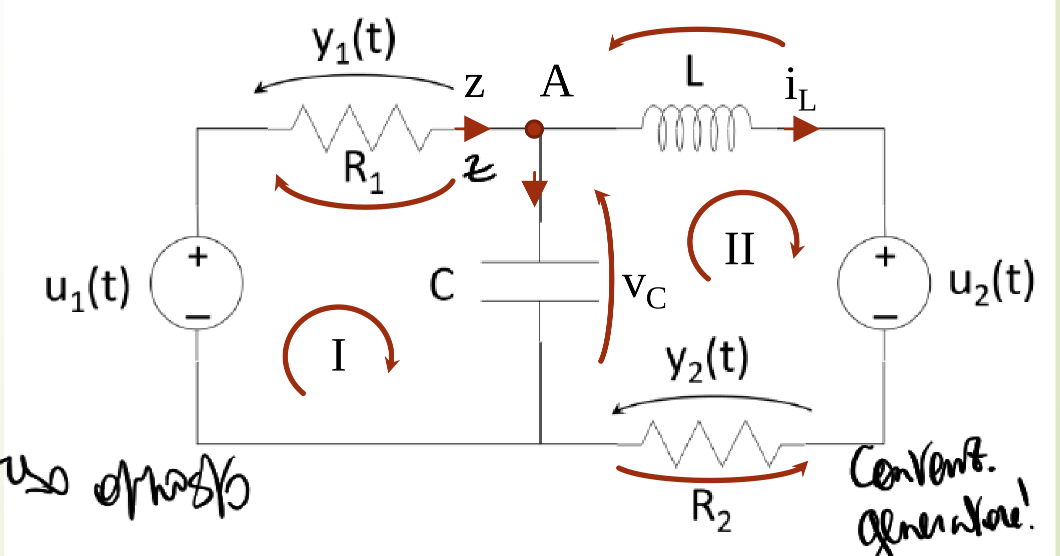


- Scegliamo le variabili di stato v_C e i_L e la variabile di appoggio z
- Fissiamo la convenzione dell'utilizzatore (frecce in rosso)
- Scriviamo le eq.di Kirchhoff sfruttando le relazioni costitutive

$$A)\quad z(t) - i_L(t) - C\frac{dv_C}{dt} = 0$$

$$I)\quad u_1(t) - R_1 z(t) - v_C(t) = 0$$

$$II)\quad v_C(t) - L\frac{di_L}{dt} - u_2(t) - R_2 i_L(t) = 0$$



- Ricaviamo z(t) dalla prima e sostituiamo nelle altre

$$u_1(t) - R_1 i_L(t) - R_1 C\frac{dv_C}{dt} - v_C(t) = 0$$

$$v_C(t) - L\frac{di_L}{dt} - u_2(t) - R_2 i_L(t) = 0$$

Uscita: Verso opposto

Prova d'esame

Sostituiamo le variabili di stato $\mathbf{v_C = x_1}$ e $\mathbf{i_L = x_2}$

$$u_1 - R_1 x_2 - R_1 C \dot{x}_1 - x_1 = 0$$

$$x_1 - L\dot{x}_2 - u_2 - R_2 x_2 = 0$$

Ordiniamo ed aggiungiamo le equazioni di uscita

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{R_1 C} x_1 - \frac{1}{C} x_2 + \frac{1}{R_1 C} u_1$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{L} x_1 - \frac{R_2}{L} x_2 - \frac{1}{L} u_2$$

$$y_1 = R_1 z = -x_1 + u_1 \ (da\ I)$$

$$y_2 = -R_2 x_2 \ (attenzione\ al\ segno)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -R_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u$$

$$con \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

MATLAB e SIMULINK