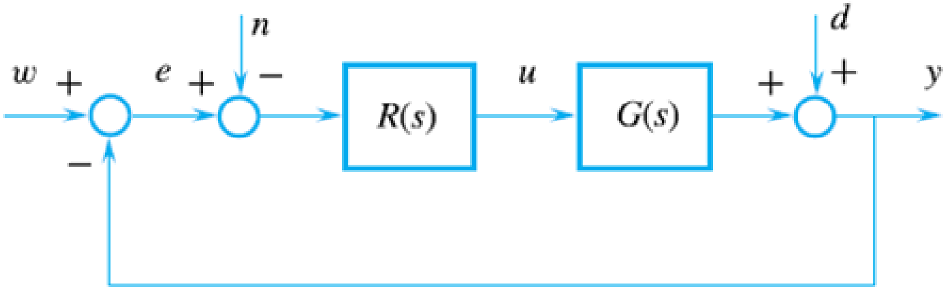
Capitolo 12 – Sintesi dei sistemi di controllo a tempo continuo

Requisiti e specifiche



- il problema della sintesi consiste nel determinare $R(s)$ nota che sia la funzione di trasferimento dell'impianto $G(s)$
  - si supporrà che $L(s) = G(s)R(s)$ soddisfi le ipotesi del criterio di Bode (sistemi a stabilità regolare) Appropriato per loro
- molti dei requisiti che il sistema di controllo deve possedere possono essere soddisfatti imponendo opportune **specifiche** alla funzione d'anello

Requisiti principali

- Stabilità in condizioni nominali
  - sotto le ipotesi del criterio di Bode, è sufficiente che il guadagno della funzione d'anello e il margine di fase siano entrambi positivi
- Stabilità in condizioni perturbate
  - la stabilità robusta si ottiene assicurando opportuni margini di stabilità (K_m, φ_m)
- Precisione statica
  - è assegnata in termini di errore a regime in risposta a riferimenti o disturbi di tipo canonico
  - già abbiamo visto che aumenta all'aumentare del guadagno d'anello e/o del tipo del sistema

tutte la F(s) e la S(s)

Se per esempio non viene richiesto che a regime errore sia 0

$\frac{E}{W}$, $\frac{Y}{D}$

	$A\,\mathrm{sca}(t)$	$A\,\mathrm{ram}(t)$	$A\,\mathrm{par}(t)$
$g=0$	$\frac{A}{1+\mu}$	∞	∞
$g=1$	0	$\frac{A}{\mu}$	∞
$g=2$	0	0	$\frac{A}{\mu}$
$g=3$	0	0	0

Requisiti principali

Precisione dinamica

- per far in modo che l'uscita segua fedelmente l'andamento del riferimento occorre
  - ridurre il tempo di salita e/o quello di assestamento

    legato a parte reale dei poli $T_a \leq T_{a_{max}}$ $T_r \leq T_{r_{max}}$

    che equivale ad aumentare la banda passante e quindi la pulsazione critica

    $$\omega_c \geq \omega_{c_{min}}$$ (Tempo di salita ⇔ banda passante)

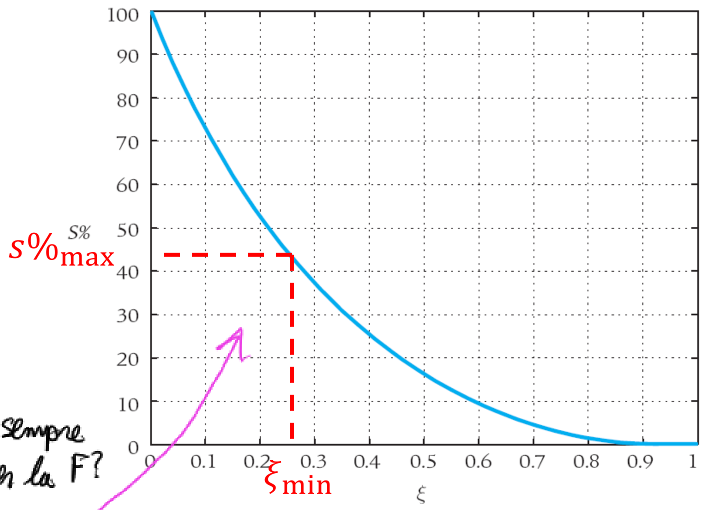
  - limitare la massima sovraelongazione

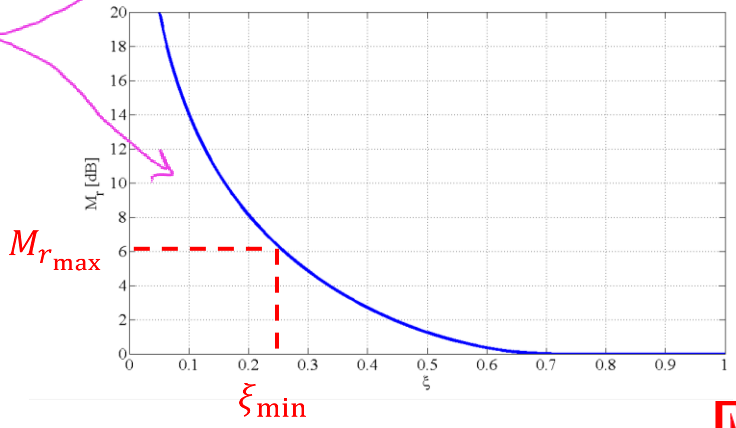
    $$s\% \leq s\%_{\max} \Leftrightarrow \xi \geq \xi_{\min} \qquad \left(s\% = 100e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

    Perché assumo sempre risonanze per la F?

    che si traduce nell'assicurare un margine di fase sufficientemente elevato

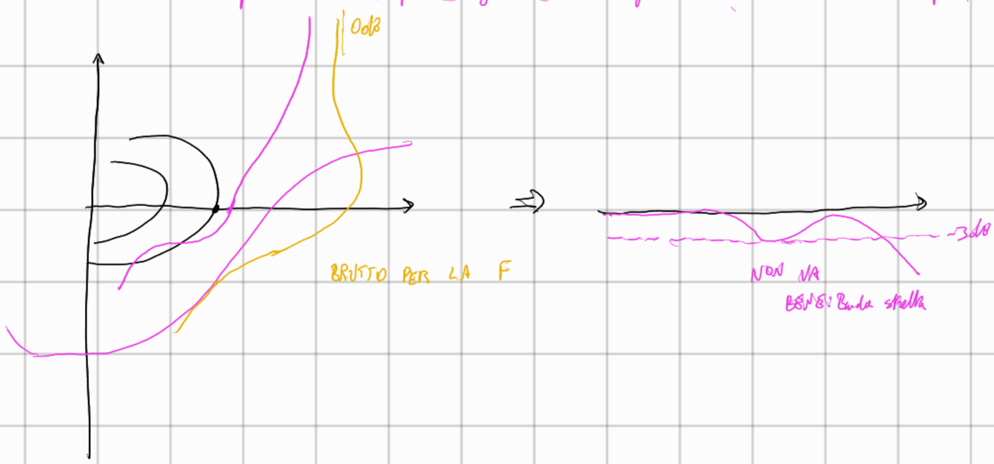
    $$\varphi_m \geq \varphi_{m_{min}} \qquad \left(\xi \simeq \frac{\varphi_m}{100}\right)$$



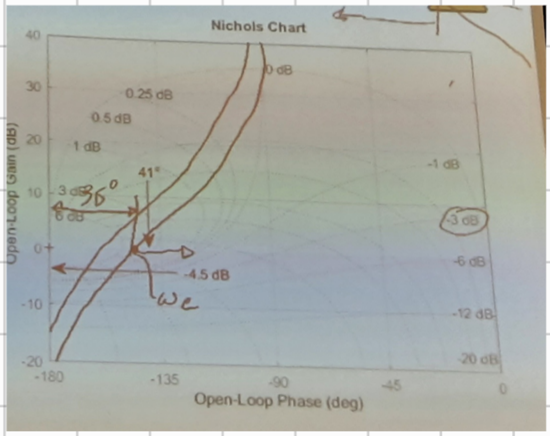


- la specifica sulla sovraelongazione può essere anche tradotta in una specifica sul modulo di risonanza $M_r \leq M_{r\_max}$

* Abbiamo visto che questo vincolo posso gestirlo sul diagramma di Nichols. Lo trasformo in dipendenza da K_m e φ_m.



NOTA: Aumentando il guadagno traslo la curva di L verso l'alto! Guadagno $20 \log_{10} 2$ dB $= 6$ dB



Cambiare il guadagno è limitato da specifiche.
→ es. Rampa con tipo 1

Requisiti principali

- Attenuazione dell'effetto del disturbo d
  - per le proprietà della funzione di sensitività diretta bisogna fare in modo che

$$|L(j\omega)| >> 1$$

almeno nella banda in cui le componenti spettrali del disturbo sono significative

– tipicamente ciò implica un vincolo sul valore minimo della banda e quindi

$$\omega_c \geq \omega_{c_{\min}}$$

- Attenuazione dell'effetto del disturbo n
  - per le proprietà della funzione di sensitività complementare bisogna far sì che

$$|L(j\omega)| << 1$$

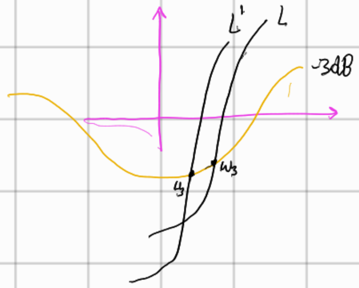
almeno nella banda in cui le componenti spettrali del disturbo sono significative

– tipicamente ciò implica un vincolo sul valore massimo della banda e quindi

$$\omega_c \leq \omega_{c_{\max}}$$

- in conclusione, la specifica sulla banda (e quindi sulla ω_c) è assegnata come una uguaglianza

Se aumento il modulo di L cresce la banda, perché sposto verso il basso la funzione



△ Al diminuire della banda, l'amplificazione al controllo è più ridotta

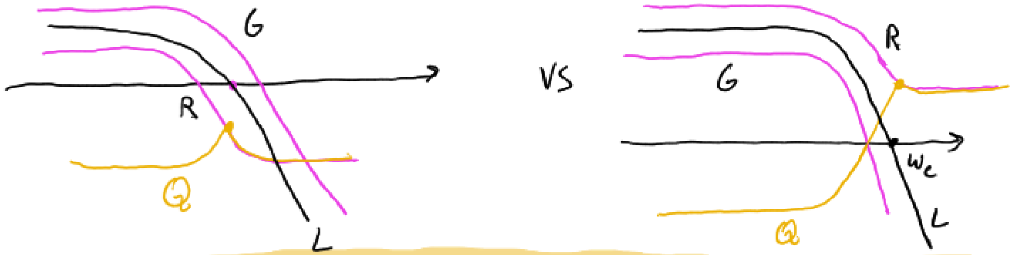
Se aumento ω_c fissato G aumenta il guadagno di R, credo!
Ma quindi R è sempre propria?

Requisiti principali

- **Moderazione della variabile di controllo**
  - per le proprietà della funzione di sensitività del controllo, il guadagno del regolatore va limitato a pulsazioni maggiori di ω_c o equivalentemente evitare che

$$|L(j\omega)| >> |G(j\omega)|$$

$|L(j\omega)| = |R(j\omega)||G(j\omega)|$



- **Realizzabilità del regolatore** fisica
  - affinché la funzione $R(s)$ sia almeno propria è necessario imporre un vincolo sulla pendenza asintotica k_L (per $\omega \to \infty$) del diagramma di Bode del modulo di $L(j\omega)$

$$-k_L \leq -k_G$$

    - in quanto il grado relativo di $L(s) = R(s)G(s)$ deve essere maggiore o uguale a quello di $G(s)$

$R(s) = \dfrac{N_R(s)}{D_R(s)}$ $\dfrac{m}{n}$ ⇒ Pendenza finale è 0.
Quindi pendenza di L al più è uguale.
Se $m<n$ ho pendenza più piccola

- **Altri requisiti**
  - «semplicità» della funzione $R(s)$ (costo dell'implementazione)
  - stabilità del regolatore per evitare malfunzionamenti in caso di fault di sensori e per non enfatizzare il fenomeno del wind-up

Rappresentazione grafica dei vincoli sul guadagno d'anello

tipo del sistema ⇒ Pendenza iniziale o anche se ho sistema di tipo 0 ho valore minimo di dB a 0.

- precisione statica
- astatismo

$\omega_c > \omega_{c\,min}$

- precisione dinamica
- attenuazione disturbo d

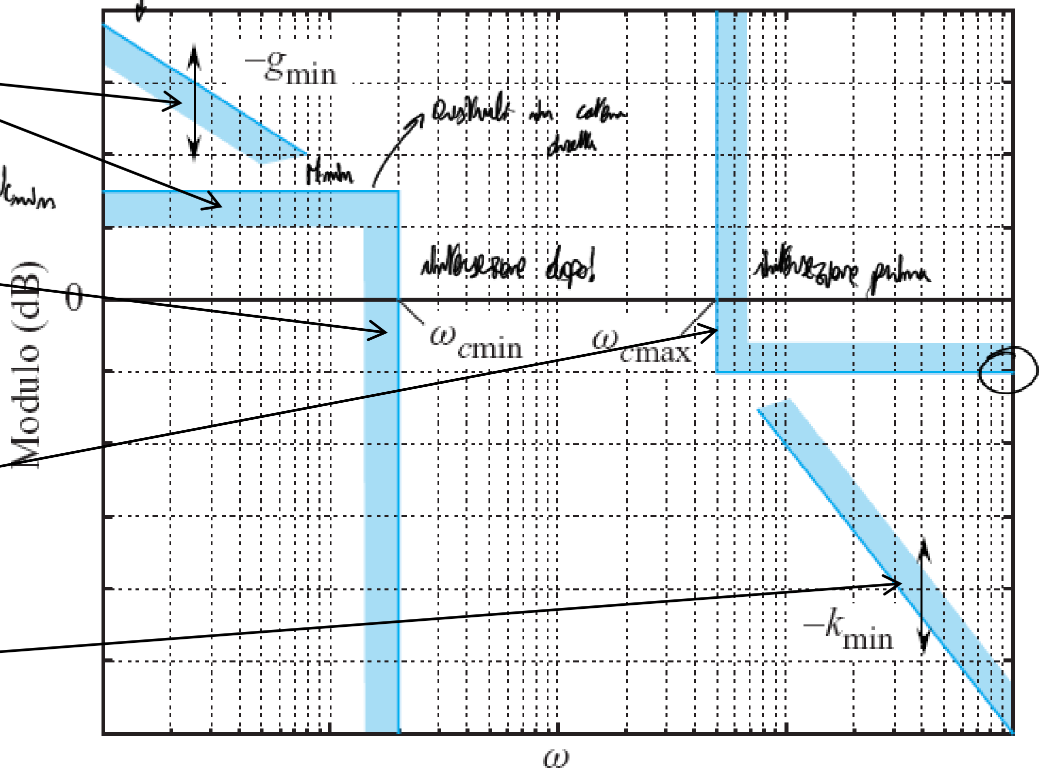
e tempo di salita

- moderazione controllo
- attenuazione disturbo n

filtro passa basso buono

- realizzabilità del regolatore

Pendenza



Vincolo su sforzo di controllo. Guadagno di L non deve portare amplificazioni eccessive ~~$|L(j\omega)| \gg |G(j\omega)|$~~

Esempio

- sia $G(s)$ di tipo 0 e grado relativo 2 (asintoticamente stabile)

* $\leq T_{a1} \Rightarrow \xi \omega_n \geq$ limite che hai
Dove $\omega_n \approx \omega_c$ nel sistema a ciclo aperto. Per motivo prestazionale ci conviene risonanza

$e_\infty = 0$ con rif. a gradino

$\approx \log(\xi/100)/\xi\omega_n$ *

$s\% \leq 3\%, \quad T_{a1} \leq 10$ s

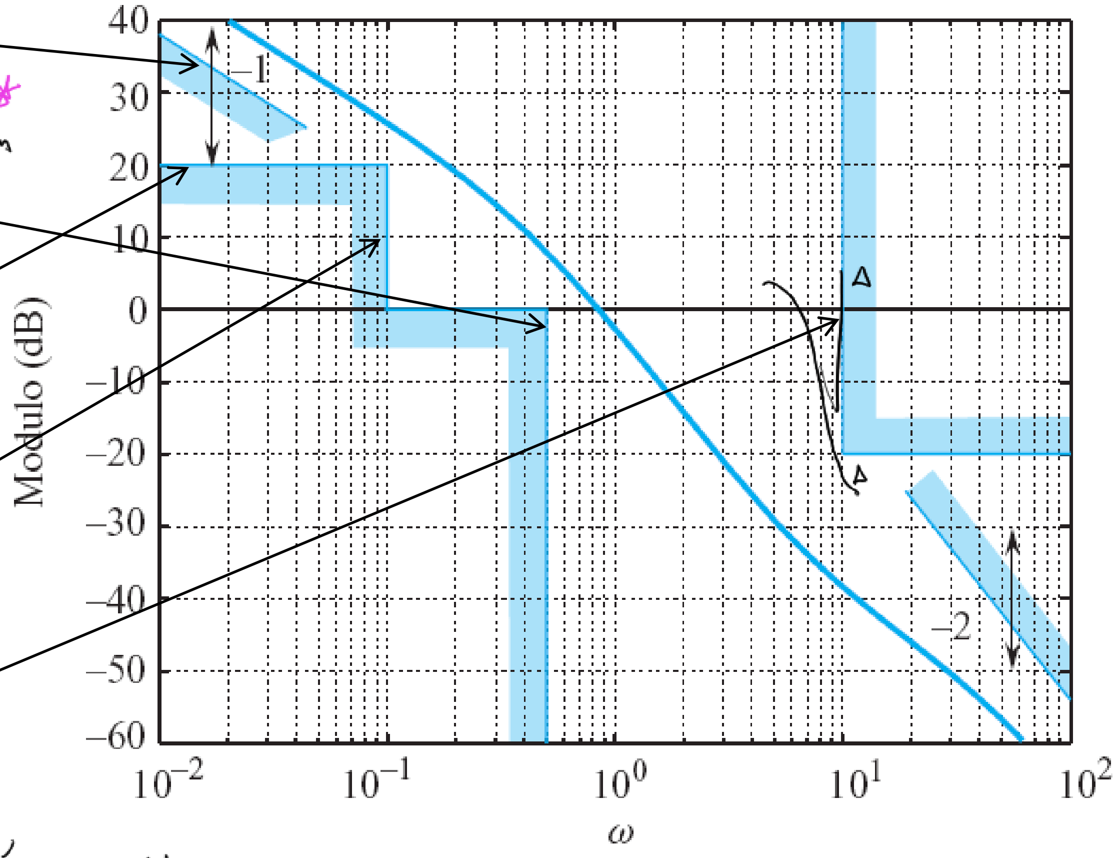
↳ la loro combinazione dai info su ξ e ω_n.

attenuare di 20 dB
$d(j\omega),\ \omega \in [0{,}0.1]$

Fino a 0.01 voglio attenuazione *2

attenuare di 20 dB
$n(j\omega),\ \omega \in [10{,}100]$

→ dai una $\omega_{c\,max}$



MARGINE DI FASE
dovrei essere in grado di gestirlo con pendenza in ω_c

γ_2 Vincolo su guadagno minimo della L

$$|S| = \frac{1}{|1+L|} \approx \frac{1}{|L|}$$

$\uparrow$ $-20dB$ $\Rightarrow$ $|L|_{dB} > 20\,dB$

Δ Disturbo di misura su attenuato a partire da 10 rad/s.

Devo stare sotto quella curva.

Perché limite orizzontale?

$|F| \approx |L|$, e voglio stare sotto $\sim 20dB$

Approcci alla sintesi

- Approccio analitico
  - si traducono i requisiti in vincoli sulla funzione d'anello con ulteriori specifiche di robustezza se non assegnate (margini) e di non cancellazione di poli o zeri a parte reale positiva (stabilità interna) Altrimenti instabilità
  - si individua una funzione $L^*(s)$ che soddisfa i vincoli → $\gamma(\omega)$ e ne ricavo requisiti con vincoli su F_M e S_M e k_m, φ_m.
  - si determina $R(s) = L^*(s)/G(s)$ Non posso usarla convenientemente se G ha zeri a parte reale positiva / poli a parte reale positiva, RG li cancella e perdo stabilità
  - Spesso l'ordine del regolatore è inutilmente elevato e non si può fare un confronto fra varie soluzioni e il loro impatto su aspetti non necessariamente esplicitamente indicati nelle specifiche assegnate
    dipende da zeri nella G e poli nella L
- Approccio per tentativi
  - si assume la funzione di trasferimento del regolatore fattorizzata come

$$R(s) = R_1(s)R_2(s)$$

→ Reiezione dei disturbi = risposta nulla a disturbi costanti / rampa ecc.

  - si progetta il regolatore $R_1(s)$ in modo da soddisfare le specifiche di precisione statica e/o astatismo (**ipotizzando** che il ciclo chiuso sia stabile!) $R_1(s) = \dfrac{\mu_R}{s^r}$ Deve avere r poli nell'origine o guadagno per l'errore (dipende da poli nella G) controllabilità col polo)

Approcci alla sintesi

- Approccio per tentativi
  - si progetta il regolatore $R_2(s)$ in modo da soddisfare le specifiche di precisione dinamica (**e in modo che il ciclo chiuso sia stabile!**)

$$R_2(s) = \frac{\prod_i (1+\tau_i s) \prod_i \left(1 + 2\zeta_i s/\alpha_{ni} + s^2/\alpha_{ni}^2\right)}{\prod_i (1+T_i s) \prod_i \left(1 + 2\xi_i s/\omega_{ni} + s^2/\omega_{ni}^2\right)}$$

  - si vede che tale scelta di forma funzionale non inficia il soddisfacimento delle specifiche statiche ($R_2(0) = 1$) ma serve a garantire innanzitutto che il sistema a ciclo chiuso sia stabile e che le prestazioni dinamiche siano quelle desiderate
  - a volte il guadagno μ_R è indeterminato e quindi diventa anch'esso un parametro del progetto dinamico
  - la fase finale consiste nel **verificare** che le specifiche sul comportamento del sistema a ciclo chiuso siano soddisfatte
  - in caso contrario si effettua un **nuovo tentativo** ritraducendo le specifiche in caratteristiche un po' diverse della funzione d'anello (margini e pulsazione critica)

Tentativo: traduco requisiti in specifiche sulla L con relazioni approssimate.

Es: $\varphi_m = \xi_{min} \cdot 100$, $\varphi_m = 45°$

Reti stabilizzatrici

- Nella grande maggioranza dei casi il regolatore $R_2(s)$ può essere realizzato come cascata di due soli tipi di sistema dinamico detti «reti stabilizzatrici» o nelle correttrici

- **Rete anticipatrice** (o coppia zero-polo) Prima lo zero e poi il polo

$$R_a(s) = \frac{1+Ts}{1+\alpha Ts}, \quad T > 0, \qquad 0 < \alpha < 1$$

Costante di tempo più piccola ⇒ frequenza maggiore

↳ A volte ne servono pure 2 o 3 di queste.

- **Rete ritardatrice** (o coppia polo-zero)

$$R_r(s) = \frac{1+Ts}{1+\alpha Ts}, \quad T > 0, \qquad \alpha > 1$$

- **Rete a sella** (combinazione delle due)

$$R_s(s) = R_r(s)R_a(s) = \frac{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}, \quad T_1 > \tau_1 \geq \tau_2 > T_2 > 0$$

Rete anticipatrice

$$R_a(s) = \frac{1+Ts}{1+\alpha Ts}, \quad T>0, \qquad 0<\alpha<1$$

$$\bar{\omega} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$

③ Curva fase è simmetrica rispetto a $\frac{1}{T}$ e $\frac{1}{\alpha T}$ in scala logaritmica

④

$$\angle R_a(j\bar{\omega}) = \text{atan}\frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \text{atan}\sqrt{\alpha}$$

MEDIA $= \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\frac{1}{\alpha T}} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$

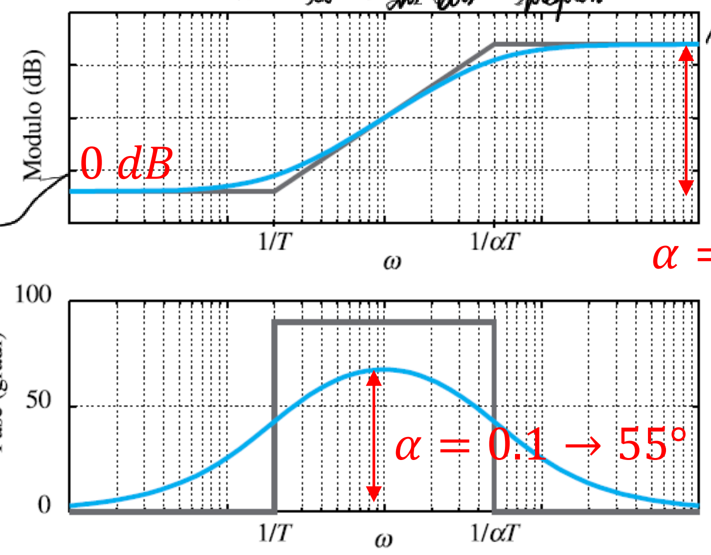
↳ $\frac{1}{2}\left(\log\frac{1}{T} + \log\frac{1}{\alpha T}\right)$

- se l'anticipo di fase viene collocato intorno alla pulsazione critica, il margine di fase aumenta — Lo uso se vedo tanto anticipo, per
- grazie all'amplificazione la banda aumenta* — intersecare 0dB lontano da −180°
- al decrescere di α l'anticipo aumenta ma allo stesso tempo anche l'amplificazione alle alte frequenze
  - lo sforzo di controllo aumenta — Peggiora la Q
  - la reiezione dei disturbi di misura peggiora — $\frac{U}{N} = Q$, non posso fare salto troppo
- il caso $\alpha = 0$ equivale ad un regolatore PD (vedremo)

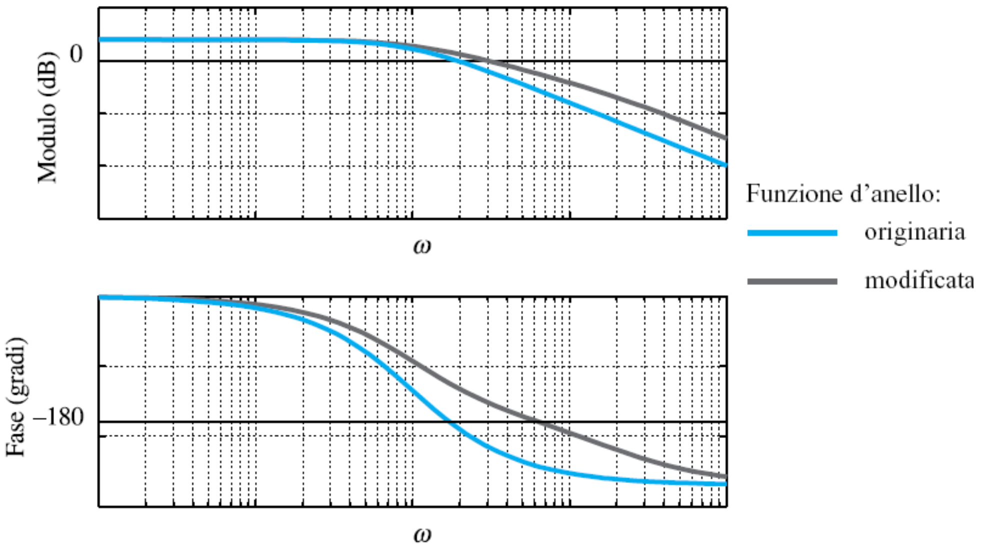
Prima lo $\bar{\omega}$ che barra frequenza ①

Anche chiamata rete amplificatrice

$\left|\frac{1}{\alpha}\right|_{dB} > 0$ ② $\omega\to\infty$



anticipatrice perché porta anticipo

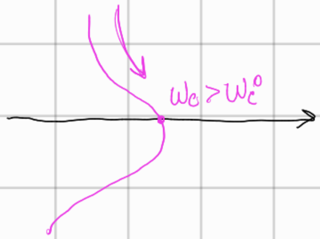


$\Delta \quad \angle 1+Tj\omega - \angle 1+jT\alpha\omega \Rightarrow \angle R_a(j\omega) = \mathrm{atan}(T\omega) - \mathrm{atan}(T\alpha\omega)$

Picco aumenta

Se α diventa più piccolo, aumenta l'intervallo disponibile per salire di fase. Non arrivo però mai a $\frac{\pi}{2}$ perché è una cosa asintotica

vs



Rete anticipatrice

$$R_a(s) = \frac{1+Ts}{1+\alpha Ts}, \quad T > 0, \qquad 0 < \alpha < 1$$

Formule inverse

- Siano dati modulo M e fase φ desiderati che la rete deve assumere ad una certa pulsazione $\hat{\omega}$, i parametri della rete α e T tali che $|R_a(j\hat{\omega})| = M$ e $\angle R_a(j\hat{\omega}) = \varphi$ sono

→ dipende da $\hat{\omega}$?

$M>1$ perché deve amplificare $\varphi>0$ perché deve anticipare

$$\boxed{\alpha = \frac{M\cos\varphi - 1}{M(M-\cos\varphi)}, \quad T = \frac{M - \cos\varphi}{\hat{\omega}\sin\varphi}}$$

- Tali espressioni sono però valide (garantiscono che $T > 0$ e $0 < \alpha < 1$) solo se

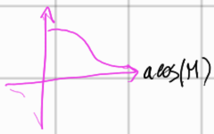
Rete anticipatrice solo in questo caso

$$\boxed{M > 1 \text{ (amplificazione) e } 0 < \varphi < \operatorname{acos}(1/M) \text{ (anticipo)}}$$

  - Cioè se l'anticipo desiderato φ è sufficientemente piccolo data una amplificazione desiderata M
  - In altre parole: non esiste una rete anticipatrice (a fase minima) che anticipi «molto» e amplifichi «poco»

* $\varphi > 0 \Rightarrow \quad M - \cos\varphi \geq 0 \checkmark \qquad M > 1$

$M\cos\varphi - 1 \geq 0 \Rightarrow \cos\varphi > \frac{1}{M} \qquad \varphi < \arccos\left(\frac{1}{M}\right)$



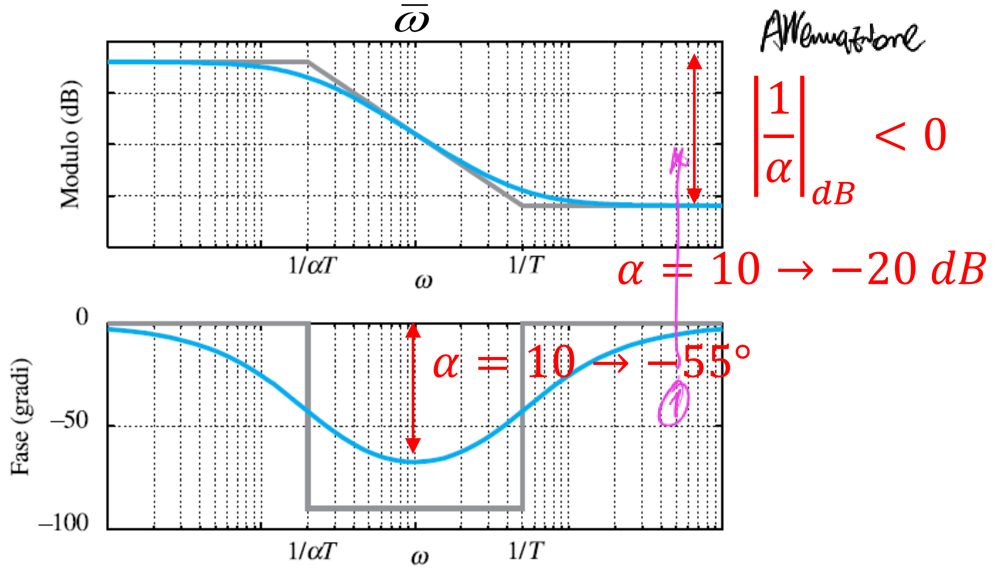
Rete ritardatrice

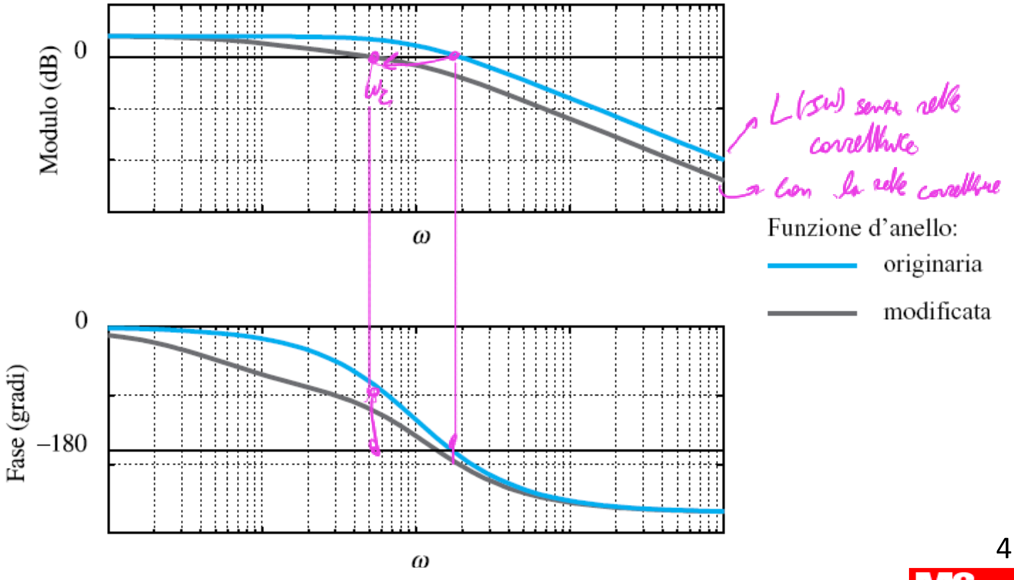
$$R_r(s) = \frac{1+Ts}{1+\alpha Ts}, \quad T > 0, \alpha > 1$$

$$\bar{\omega} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$

$$\angle R_r(j\bar{\omega}) = \text{atan}\frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \text{atan}\sqrt{\alpha} < 0$$

Fase ora <0 perché $\alpha > 1$, perché avviene prima polo e poi zero



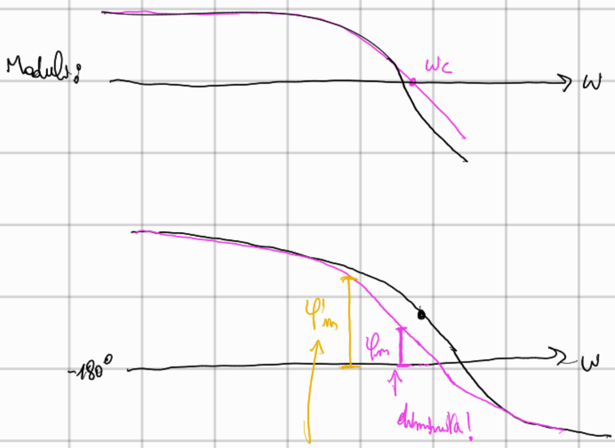


- grazie all'attenuazione, la banda diminuisce e quindi la reiezione dei disturbi di misura migliora
  - il margine di fase può aumentare
- al crescere di α il ritardo aumenta
  - il margine di fase può diminuire
- il caso $\alpha = \infty$ equivale ad un regolatore PI (vedremo)

La rete anticipatrice lavora con ω_c desiderato intorno al picco della fase

Quella standard con picco prima di ω_c desiderata

Perché così introduco nell'intorno di ω_c attenuazione ① : Altrimenti peggioro solo la situazione:



Se mi fossi spostato prima andava bene.

Rete ritardatrice

$$R_r(s) = \frac{1 + Ts}{1 + \alpha Ts}, \quad T > 0, \alpha > 1$$

Formule inverse

- Siano dati modulo M e fase φ desiderati che la rete deve assumere ad una certa pulsazione $\hat{\omega}$, i parametri della rete α e T tali che $|R_r(j\hat{\omega})| = M$ e $\angle R_r(j\hat{\omega}) = \varphi$ sono

$$\alpha = \frac{M\cos\varphi - 1}{M(M - \cos\varphi)}, \qquad T = \frac{M - \cos\varphi}{\hat{\omega}\sin\varphi}$$

- Tali espressioni sono però valide (garantiscono che $T > 0$ e $\alpha > 1$) solo se

$$0 < M < 1 \text{ (attenuazione) e } \varphi < -\operatorname{acos} M \text{ (ritardo)}$$

  - Cioè se il ritardo desiderato φ è sufficientemente piccolo (in valore assoluto) data una attenuazione desiderata M
  - In altre parole: non esiste una rete ritardatrice (a fase minima) che ritardi «poco» e attenui «molto»

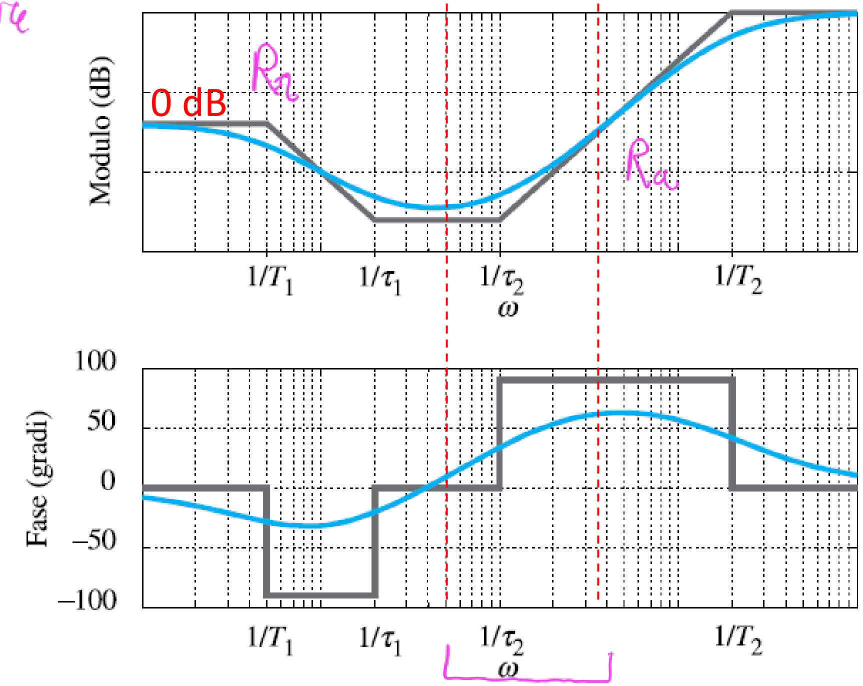
Rete a sella

- È la serie di una rete ritardatrice e una rete anticipatrice

$$R_s(s) = R_r(s)R_a(s) = \frac{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}, \quad T_1 > \tau_1 \geq \tau_2 > T_2 > 0$$

Prima ritardo a basse frequenze pre-ω_c. Poi dopo l'anticipatrice

Attenua e anticipa nello stesso range di frequenze



Riesco ad attenuare ed anticipare! (oppure amplifico e ritardo)

- può anticipare e attenuare alle stesse frequenze
- può ritardare e amplificare alle stesse frequenze
  - la banda aumenta senza necessariamente peggiorare il margine di fase ? Why
- tipicamente si fa in modo che
$$1/\tau_2 < \omega_c < 1/T_2$$
  laddove la rete anticipa
- ha una struttura simile a quella di un regolatore PID (vedremo)