Modellistica e Simulazione

(parte 1)

Prof. Salvatore Pirozzi

Email: salvatore.pirozzi@unicampania.it

Introduzione

- Denominazione dell'insegnamento: Modellistica e Simulazione
- Corso di Laurea : LT - Elettronica e Informatica, LM – Gestionale
- SSD: ING-INF/04
- Numero C.F.U.: 6
- Obiettivi del corso
  - Fornire il concetto di sistema astratto orientato per l'analisi, la simulazione, la progettazione, la realizzazione ed il controllo di sistemi naturali e /o artificiali
  - Fornire gli elementi di base per la descrizione matematica ingresso-stato-uscita di vari sistemi dinamici di tipo meccanico, idraulico, elettrico, termico.
  - Fornire le principali tecniche numeriche per la simulazione di un sistema dinamico in ambiente MATLAB/Simulink.

Introduzione

- Programma del corso
  - Definizione formale di sistema, classificazione dei sistemi, modellistica dei sistemi a tempo continuo: sistemi meccanici, elettrici, termici ed idraulici.
  - Principali leggi delle scienze per la modellistica di sistemi dinamici. Leggi di Newton ed equazioni di Eulero-Lagrange per sistemi meccanici. Principi di Kirchhoff generalizzati per sistemi elettrici. Analogie tra sistemi elettrici e meccanici. Leggi fisiche per sistemi a fluido: equazione di continuità, legge di Bernoulli, conservazione della massa e legge di Stevino. Primo principio della termodinamica, capacità e resistenza termica. Analogie tra i sistemi a fluido, i sistemi termici e i sistemi elettrici. Determinazione delle equazioni del modello dinamico. La rappresentazione ingresso–stato–uscita.
  - Ambiente di simulazione MatLab/Simulink: simulazione di sistemi dinamici, algoritmi di integrazione numerica, analisi numerica, simulazioni physics-based.
- Pagina docente: https://www.ingegneria.unicampania.it/dipartimento/docenti?MATRICOLA=059243
- Competenze attese in ingresso e/o Propedeuticità: Lo studente deve possedere solide basi di algebra lineare, analisi matematica e fisica. Per immatricolati 17/18 – Analisi I e Geometria, per i successivi – Analisi 1 e Fisica 1
- Risultati d'apprendimento attesi: Al termine del corso, lo studente dovrà conoscere le tecniche di modellazione e simulazione per sistemi tempo continuo e tempo discreto. Inoltre dovrà conoscere l'ambiente MatLab/Simulink.
- Testi di riferimento
  - Dispense a cura del docente (sito del dipartimento)
  - L. Benvenuti, A. De Santis, L. Farina - Sistemi dinamici. Modellistica, analisi e controllo, Ed. McGraw-Hill
  - S. Chiaverini, F. Caccavale, L. Villani, L. Sciavicco – Fondamenti di sistemi dinamici, Ed. McGraw-Hill
- Organizzazione della didattica: Il corso prevede lezioni in aula ed esercitazioni numeriche in ambiente MATLAB.
- Metodi di valutazione: Prova orale, scritta e pratica
- Orari di ricevimento studenti: tutti i giorni su appuntamento

Premessa

- La modellistica è fondamentale in molti problemi dell'ingegneria
  - analisi delle prestazioni
  - progettazione di sistemi di controllo.
- Tratteremo la modellistica matematica di sistemi dinamici nello spazio di stato
  - Sistemi meccanici,
  - Sistemi elettrici,
  - Sistemi elettromeccanici,
  - Sistemi idraulici
- Tratteremo anche le tecniche di integrazione numerica delle equazioni differenziali ingresso-stato-uscita di sistemi dinamici
  - MATLAB
  - SIMULINK

Definizione di Sistema

Numero di ingressi da 1 a r

Consideriamo un sottoinsieme T di R (istanti di tempo), un insieme $U \subseteq R^r$ detto insieme dei valori di ingresso, un insieme $Y \subseteq R^m$ detto insieme dei valori di uscita e un insieme $X \subseteq R^n$ detto insieme dei valori di stato

r ≠ m in generale

Fino a n variab. di stato

- Definiamo un insieme di funzioni di ingresso u(·) definite in T e a valori in U
- Definiamo un insieme di funzioni di uscita y(·) definite in T e a valori in Y
- Definiamo un insieme di funzioni di stato x(·) definite in T e a valori in X

- ***Modello implicito ingresso-stato-uscita*** di un sistema a tempo continuo.

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)\,, \qquad x(t_0) = x_0$$
$$y(t) = \eta(x(t), u(t), t)$$

cond. iniziali Per risolvere eq. differenziali

equazione di stato
eq. diff. 1° ordine

equazione d'uscita

trasformazione d'uscita - η

funzione generatrice - f
generica

Modello che cerchiamo, che lega le funz. così.

Il numero di prime eq. dipende dal numero di variabili di stato.

Seconda eq. ci dà le uscite. Lega uscite a var. di stato, ingr. e dipendenza diretta da t.

Anche qui 1 eq. ∀ uscita.

Per avere modello devo avere sia eq. di stato che di uscita.

Le forme <u>devono</u> essere quelle.

1) Do ingresso, trovo stato e calcolo l'uscita. Stato tiene conto della storia passata, con eq. differenziali, mi dà sistema dinamico.

UNA VOLTA ELABORATO IL SISTEMA POSSO DIMENTICARE LA FISICA DIETRO:

$x(t)$ stato, indipendentemente da cosa rappresenta.

Costruzione del modello

- Fasi per la costruzione
  - Individuazione delle variabili di ingresso e uscita; → devo capire cosa voglio osservare nell'uscita.
  - Scelta delle variabili di stato;
  - Scrittura delle relazioni costitutive; → tutte le eq. della fisica che mi possono aiutare ($\vec{F} = m\vec{a}$)
  - Elaborazione delle relazioni costitutive per pervenire alla scrittura dell'equazione di stato e della trasformazione di uscita ↳ Arrivo al sistema
- Fase più delicata: scelta variabili di stato (Scelte diverse: modelli diversi)
  - è fortemente legata alla tipologia del sistema e all'esperienza
  - la scelta non è unica, per cui esistono più modelli associati ad uno stesso sistema
  - il numero delle variabili di stato dipende dalla maggiore o minore accuratezza con cui si vuole descrivere il sistema
  - si possono porre questioni di ridondanza nella scelta del numero di variabili
- Nella scelta ci aiuta il significato: lo «stato» rappresenta l'informazione necessaria in un generico istante t per poter calcolare l'evoluzione futura dell'uscita una volta assegnato l'ingresso.
- In pratica, descrive la «situazione interna» del sistema (es. energia) e quindi per la scelta bisogna orientarsi verso quelle grandezze che rappresentano la «memoria» del sistema (es. velocità per energia cinetica, etc.).

Modellistica dei sistemi meccanici

- Fondamentale è prendere dimestichezza con le grandezze fisiche in gioco, con le loro unità di misura e come quantificarle.
- I sistemi usati per la misura di grandezze fisiche si differenziano l'uno dall'altro in base a:
  - le grandezze fisiche assunte come grandezze di base, distinte dalle altre dette grandezze derivate;
  - le unità di misura utilizzate per le grandezze di base.

- Bisogna fissare il sistema di misura scegliendo tra
  - **sistemi assoluti**: tra le grandezze di base è assunta la massa, mentre la forza è una grandezza derivata
    - ***Sistema Internazionale*** (lunghezza [m], massa [kg], tempo [s])
  - **sistemi gravitazionali**: tra le grandezze di base è assunta la forza, mentre la massa è una grandezza derivata.
    - ***Sistema Metrico Ingegneristico*** (lunghezza [m], forza [kgf], tempo [s])

Perciò considerato assoluto

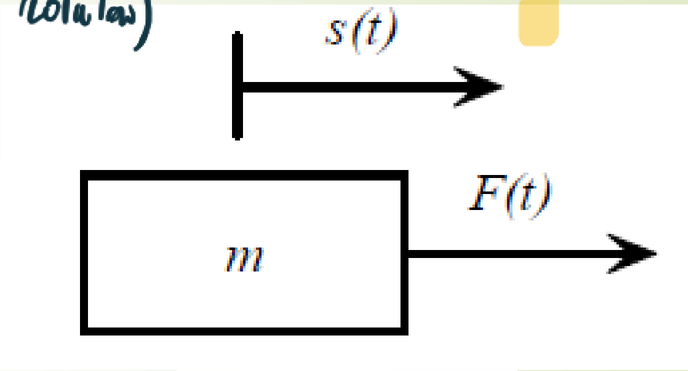
	Sistema Internazionale (SI)	Sistema ingegneristico
Lunghezza	m	m
Massa	kg	$Kg_f/(m/s^2)$=9.81kg
Tempo	s	s
Forza	$N = kg\ m/s^2 = 0.102 kg_f$	$Kg_f = 9.81N = 9.81\ kg\ m/s^2$
Energia	$J = Nm = 0.102 kg_{fm}m = 2.389\ 10^{-4}$ kcal	$Kg_f m = 9.81\ Nm = 9.81\ J$
Potenza	W = Nm/s = J/s = $1.341\ 10^{-3}$hp (1hp = 745.7W)	$Kg_f m/s = 9.81\ J/s$

COSTITUITO DA EL. DISCRETI: Divisibile in numero f. di elementi

Sistemi meccanici elementari (1/3)

- I componenti meccanici elementari sono di tre tipi: elementi di inerzia, elementi elastici e elementi di attrito
- **1) Elementi di inerzia: masse e momenti di inerzia.** (Moto lineare vs Moto rotatorio)
- La massa può essere definita come la variazione di forza necessaria per ottenere una variazione unitaria di accelerazione

$$\text{massa} = \frac{\text{variazione di forza}}{\text{variazione di accelerazione}} \qquad \left(\frac{\text{N}}{\text{m/s}^2} \quad \text{o} \quad \text{kg}\right)$$

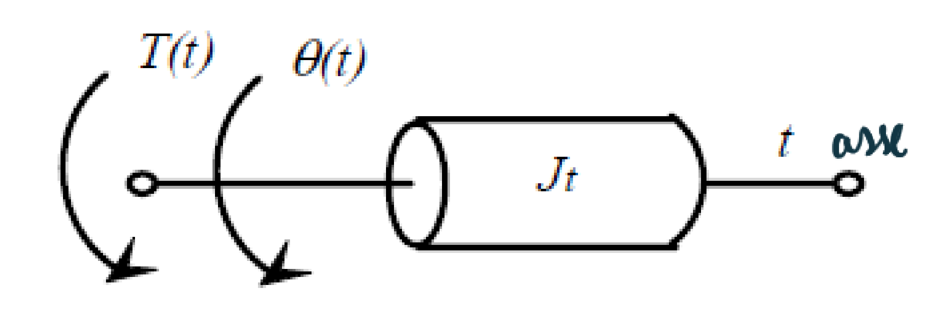


$$F(t) = m\ddot{s}(t)$$

↳ cost

- Il momento di inerzia può essere definito come la variazione di coppia necessaria per ottenere una variazione unitaria di accelerazione angolare.

$$\text{momento di inerzia} = \frac{\text{variazione di coppia}}{\text{variazione di accelerazione angolare}} \qquad \left(\frac{\text{Nm}}{\text{rad/s}^2} \quad \text{o} \quad \text{kg m}^2\right)$$



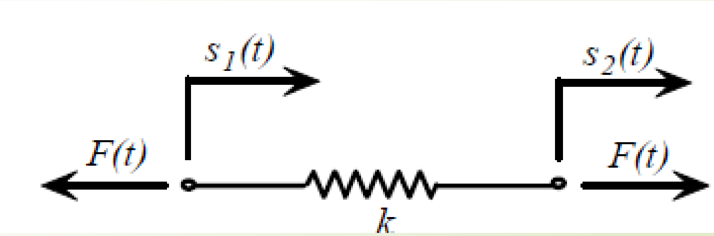
$$T(t) = J_t\ddot{\vartheta}(t)$$

- Le relazioni che descrivono tali elementi, sono riportate sotto. Forze (F), posizione(s), massa(m), coppia(T), posizione angolare(θ), momento d'inerzia rispetto ad un'asse t(J_t), derivata rispetto al tempo(.)

Sistemi meccanici elementari (2/3)

- **2) Elementi elastici.** Sono elementi meccanici privi di massa e di attrito che, ad una sollecitazione esterna, rispondono con una deformazione proporzionale alla sollecitazione stessa.
- Nel caso di sollecitazioni in forza e deformazioni di tipo traslatorio degli estremi, l'elemento elastico è detto **molla traslatoria**. Nel caso di sollecitazioni in coppia e deformazioni di tipo torsionale degli estremi, l'elemento elastico è detto **molla torsionale**.
  - Per le molle traslatorie, (Trasla solo in una direzione)

$$F(t) = k\left[s_2(t) - s_1(t)\right]$$



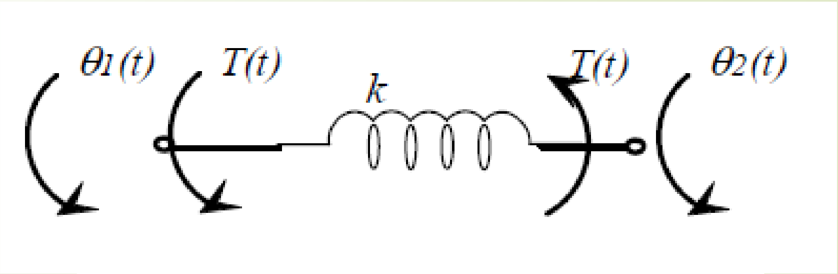
$$k = \frac{\text{variazione di forza}}{\text{variazione di spostamento}} \quad \left(\frac{\text{N}}{\text{m}}\right)$$

F(t) il valore delle forze uguali ed opposte applicate agli estremi, s1(t) e s2(t) gli spostamenti degli estremi, k è la **costante elastica** o **rigidezza**

  - Per le molle torsionali,

→ concorde con T

$$T(t) = k\left[\vartheta_1(t) - \vartheta_2(t)\right]$$



$$k = \frac{\text{variazione di coppia}}{\text{variazione angolare}} \quad \left(\frac{\text{N m}}{\text{rad}}\right)$$

T(t) il valore delle coppie uguali ed opposte applicate agli estremi, θ1(t) e θ2(t) gli spostamenti angolari degli estremi, k è la **rigidezza torsionale**.

  - Talvolta, per entrambe, una molla è caratterizzata con l'inversa di k, ossia c=1/k, detta **cedevolezza**

$S_2 - S_1$ perché S_2 é concorde con $\vec{F}$ e S_1 no. Stessa cosa per il caso torsionale.

UNITÁ DI MISURA DELLA MOLLA, QUALE DELLE DUE?

m=0 ⇒ F deve essere uguale a 0.

Sistemi meccanici elementari (3/3)

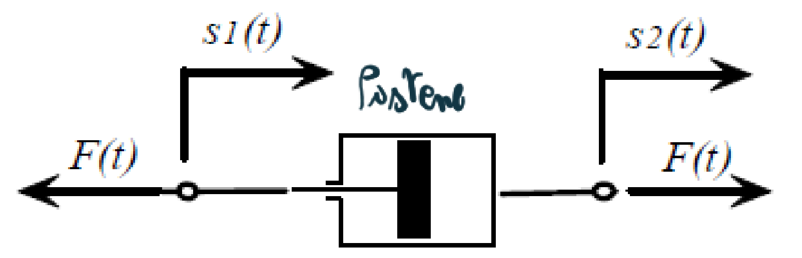
→ Legato al moto nei fluidi

- **3) Elementi di attrito viscoso (smorzatori).** Sono elementi meccanici privi di massa e di elasticità che, ad una sollecitazione esterna, rispondono con una velocità relativa degli estremi proporzionale alla sollecitazione stessa. Nota: A differenza dei precedenti che immagazzinano energia, questi elementi dissipano energia.

- **Smorzatore traslativo**,

velocità ai capi

$$F(t) = b[\dot{s}_2(t) - \dot{s}_1(t)]$$

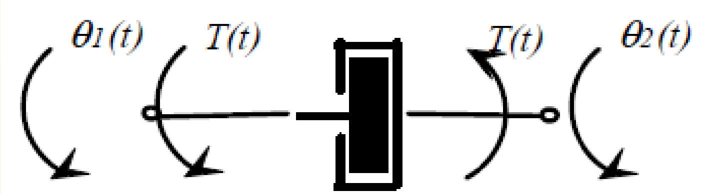


$$b = \frac{\text{variazione di forza}}{\text{variazione di velocità}} \quad \left(\frac{\text{N}}{\text{m/s}}\right)$$

F(t) il valore delle forze uguali ed opposte applicate agli estremi, s1(t) e s2(t) gli spostamenti degli estremi, le derivate sono quindi le **velocità**, b è il **coefficiente di attrito viscoso**

- **Smorzatore torsionale**,

$$T(t) = b[\dot{\vartheta}_1(t) - \dot{\vartheta}_2(t)]$$



$$b = \frac{\text{variazione di coppia}}{\text{variazione di velocità angolare}} \quad \left(\frac{\text{N m}}{\text{rad/s}}\right)$$

T(t) il valore delle coppie uguali ed opposte applicate agli estremi, θ1(t) e θ2(t) gli spostamenti angolari degli estremi, le derivate sono quindi le **velocità angolari**, b è il **coefficiente di attrito viscoso torsionale.**

→ da cui partire

Equazioni del moto: approccio Newtoniano

- **Seconda legge di Newton per moti traslatori.**
  - Consideriamo un corpo rigido di massa m ed una qualsiasi direzione d
  - Denotiamo con ΣF, la somma di tutte le componenti di forza agenti lungo d
  - Denotiamo con a, la componente dell'accelerazione lungo d

$$\Sigma F = ma$$

lungo la direz. perché $\vec{F}$ vettore

- **Seconda legge di Newton per moti rotatori**.
  - Consideriamo un corpo rigido libero di ruotare intorno ad un asse t
  - Denotiamo con Jt il momento di inerzia del corpo intorno all'asse t
  - Denotiamo con ΣT, la somma di tutte le coppie agenti intorno all'asse t,
  - Denotiamo con α, l'accelerazione angolare del corpo intorno all'asse t

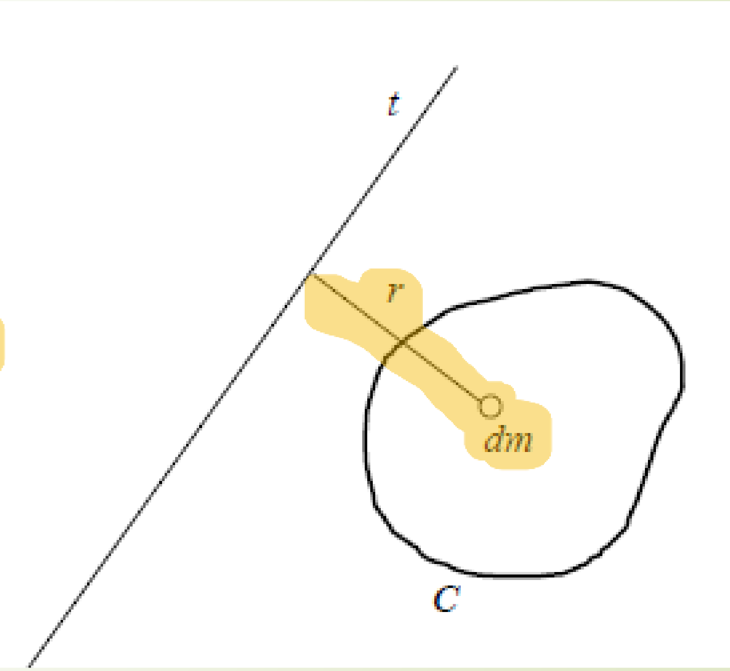
$$\Sigma T = J_t \alpha$$

← la massa indipendente da direz. di moto, J_t no.

Equazioni del moto: approccio Newtoniano

- **Momento d'inerzia.**
  - Consideriamo un corpo rigido C libero di ruotare intorno ad un asse t
  - Denotiamo con dm un elemento di massa a distanza r dall'asse t

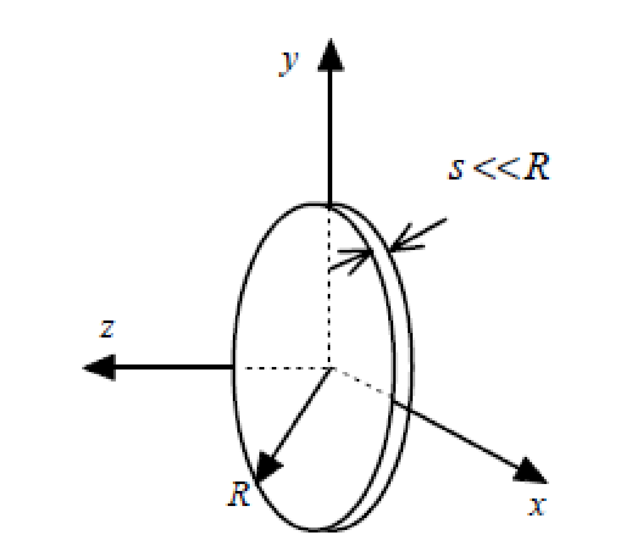
$$J_t = \int_C r^2 dm$$



N.B. Il calcolo analitico può essere effettuato facilmente solo nel caso di corpi omogenei, geometrie semplici, e simmetrie rispetto all'asse di rotazione.

Momento d'inerzia: Esempio per Jz

- Calcolare il momento d'inerzia di un disco sottile, rispetto ad un asse (z) ortogonale al disco e passante per il suo centro - J_z
  - Disco omogeneo di densità c, raggio R e spessore s



- Massa totale $M = \pi R^2 sc$

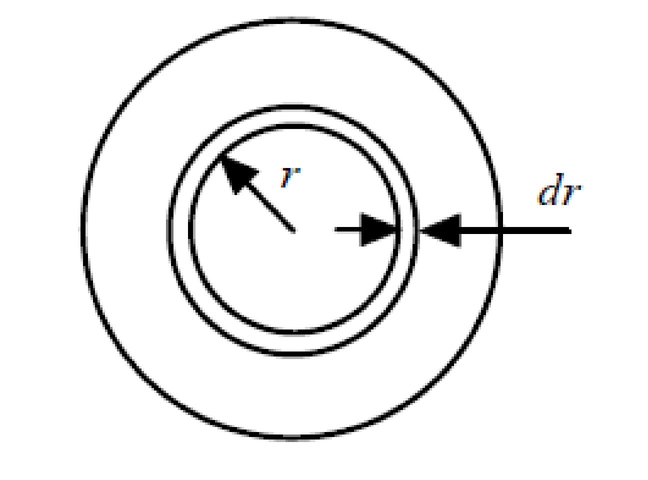
volume densità

- Dividiamo il disco in corone circolari di larghezza dr, e calcoliamo la massa elementare dm associata ad una generica corona

$$dm = 2\pi r\, dr\, s\, c$$

spessore

dV volume infinitesimo



- Applicando la definizione

$$J_z = \int_C r^2 dm = \int_0^R r^2 2\pi r s c\, dr = \frac{1}{2} R^4 \pi s c = M \frac{R^2}{2}$$

Momento d'inerzia: Esempio per Jx e Jy

- Calcolare il momento d'inerzia di un disco sottile, rispetto ad un asse (x o y) ortogonale all'asse z – J_x o J_y
- Consideriamo coordinate polari (ρ ,θ) e calcoliamo la massa associata ad un volume infinitesimo e la sua distanza dall'asse y per calcolare J_y

$$x = \rho\cos\vartheta$$

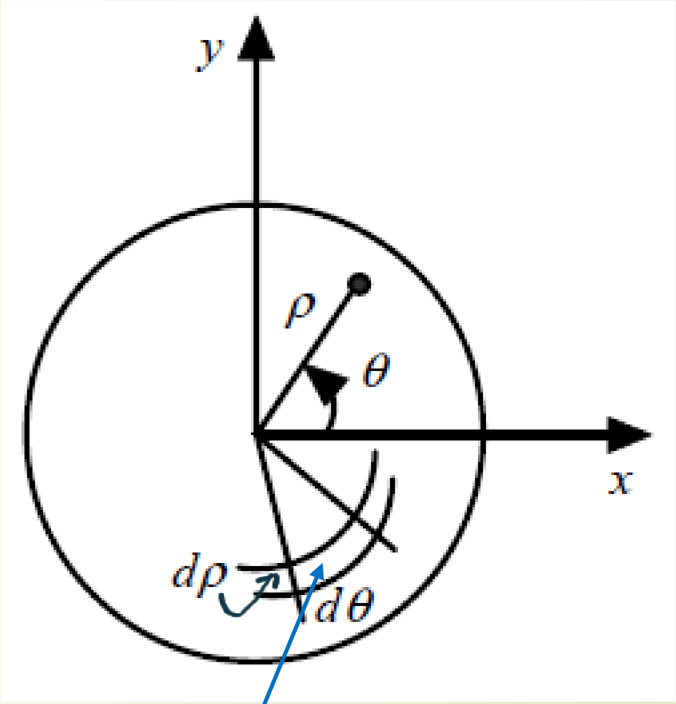
$$dm = cs\,\underbrace{\rho\, d\vartheta}_{\text{Base}}\,\underbrace{d\rho}_{\text{altezza}}$$

$$\iint_{\Omega} \delta^2(x,y)\, c\, dx\, dy$$

- Applicando la definizione di momento d'inerzia

$$J_y = \int_C x^2 dm = \int_0^{2\pi}\int_0^R \rho^2\cos^2\vartheta\, cs\,\rho\, d\rho\, d\vartheta = \int_0^{2\pi} cs\cos^2\vartheta\left(\int_0^R \rho^3 d\rho\right)d\vartheta =$$

$$= \frac{R^4}{4}sc\int_0^{2\pi}\cos^2\vartheta\, d\vartheta = \frac{R^4}{4}sc\left[\frac{\vartheta + sen\,\vartheta\cos\vartheta}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi\frac{R^4}{4}sc = M\frac{R^2}{4} = J_x$$



dV volume infinitesimo

l arco $= R\theta$

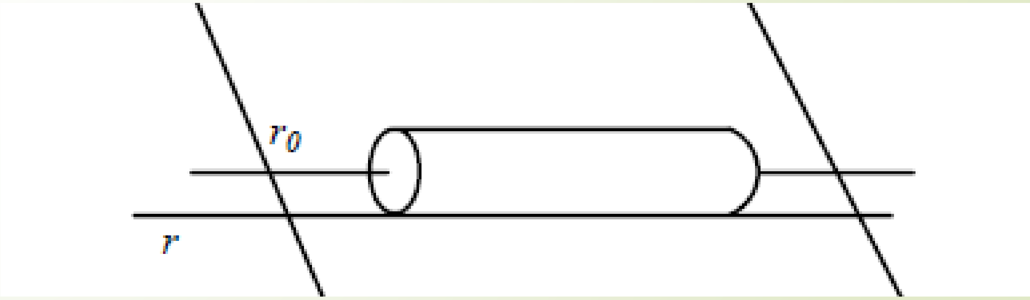
Momento d’inerzia: altre definizioni

- In Tabella 2.II (pagg. II-7 e II-8) sono indicati i momenti di inerzia di alcuni corpi rigidi di uso comune
- **Raggio d'inerzia**. Il raggio d'inerzia Kt di un corpo rigido rispetto ad un asse t è la distanza di un punto P dall'asse t in cui può essere concentrata la massa del corpo per avere momento d'inerzia uguale a quello del corpo rispetto allo stesso asse.

$$K_t = \sqrt{\frac{J_t}{m}}$$

- Momento d'inerzia rispetto ad un asse parallelo ad uno passante per il baricentro. Sia Jr0 il momento d'inerzia di un corpo di massa m rispetto ad una retta r0 baricentrale e sia r una retta parallela a r0 e a distanza δ da essa. È possibile calcolare il momento d’inerzia rispetto ad r nel modo seguente:

$$J_r = J_{r_0} + m\delta^2$$



Momento d'inerzia: esempio

- Si consideri il sistema in figura in cui un cilindro omogeneo di massa m e raggio R rotola su una superficie piana. Si vuole calcolare il momento di inerzia Jr del cilindro rispetto alla linea di contatto con la superficie.
- Dalla slide precedente:

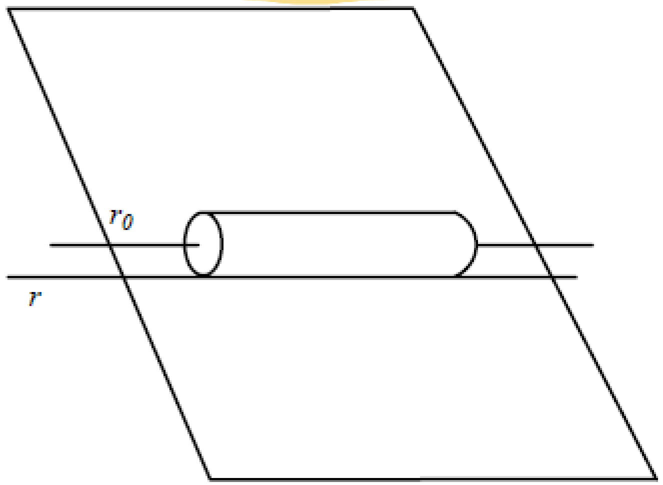
$$J_r = J_{r_0} + mR^2$$

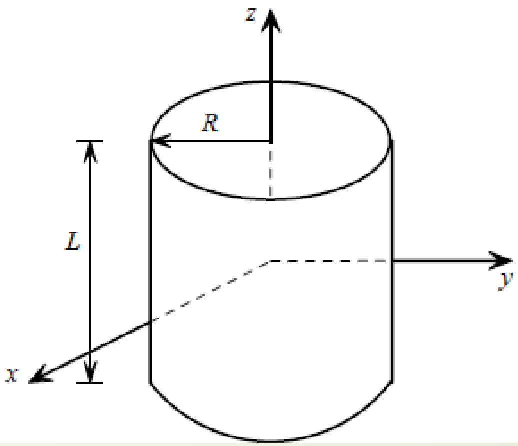
- Dalla tabella 2.II

$$J_{r_0} = m\frac{R^2}{2}$$

- Risulta

$$J_r = \frac{3}{2}mR^2$$





$$J_x = J_y = M\frac{3R^2 + L^2}{12}$$

$$J_z = M\frac{R^2}{2}$$

Esempi di modelli di sistemi meccanici semplici

- Prima operazione: individuare il **numero ν di gradi di libertà** del sistema, ovvero il minimo numero di coordinate posizionali necessarie per individuare, in un generico istante t, la posizione completa di tutti i componenti del sistema. Non è sempre semplice per la presenza di **vincoli**. → Telecomando con 6 gradi di libertà
- Faremo riferimento (salvo eccezioni) a sistemi planari:
  - Nel caso di moto planare, per sistemi costituiti da μ punti materiali interconnessi, risulta $\nu = 2\mu - l$, dove l è il numero di equazioni di vincolo imposte dagli elementi di interconnessione tra i punti materiali
  - Nel caso di corpi rigidi bisogna considerare anche le possibili rotazioni di ciascun corpo, per cui risulta $\nu = 3\mu - l$
- Per sistemi nello spazio avremo $3\mu - l$ nel caso di punti materiali e $6\mu - l$ nel caso di corpi rigidi
- Seconda operazione: scelta delle coordinate posizionali da utilizzare per la scrittura delle leggi del moto (leggi di Newton). Scegliere le coordinate dei punti materiali (o del baricentro dei corpi rigidi oltre all'angolo di rotazione) sembra naturale, ma non sempre tale scelta è la più conveniente. Avremmo un numero di coordinate maggiori del numero di gradi di libertà, per cui saremmo costretti a portare in conto tutte le l equazioni di vincolo.
- Terza operazione: scrittura delle equazioni del moto. In questa prima parte useremo le equazioni di Newton per ciascun elemento di massa e per ciascuna delle coordinate posizionali scelte (punto 2). Se le coordinate utilizzate per la scrittura delle leggi di Newton sono in numero maggiore dei gradi di libertà (ν), bisogna portare in conto altrettante equazioni di vincolo. L'insieme di tutte le equazioni ottenute le chiameremo «**relazioni costitutive**».

Se metto il telecomando sul tavolo ho 3 gradi di libertà.
Sul piano ho aggiunto 3 vincoli: la z deve essere costante.
Oppure sul binario rimane solo 1 grado di libertà.

Numero minimo delle coordinate posizionali = numero di gradi di libertà, idealmente

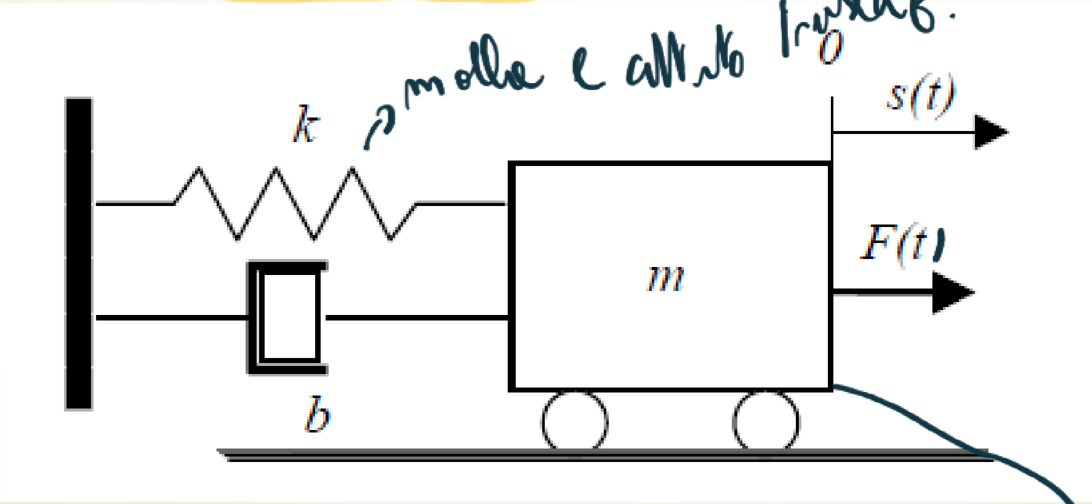
Se ho il telecomando con 3 gradi di libertà, ma scrivo 4 equaz.
devo bilanciare con un'equaz. di vincolo.

Esempi di modelli di sistemi meccanici semplici

- Quarta operazione: Scelta delle variabili di stato e manipolazione delle relazioni costitutive con l'obiettivo di pervenire ad una rappresentazione i-s-u nella forma definita all'inizio.
  - La scelta delle variabili di stato, quasi sempre, coincide con ν coordinate posizionali (coordinate generalizzate) e con le loro derivate temporali (velocità generalizzate), in totale il doppio dei g.d.l.
  - In alcuni casi, tale scelta non porta ad un modello i-s-u nella forma standard, e quindi bisogna utilizzare un approccio "ad hoc".

- **Esempio 2.3.** Si consideri il sistema massa-molla-attrito mostrato in Figura. Si vuole scrivere un modello i-s-u per lo studio dell'andamento della posizione del carrello.

molla e attrito traslaz.



Parete e pavimento fissi

Sistema di riferimento?

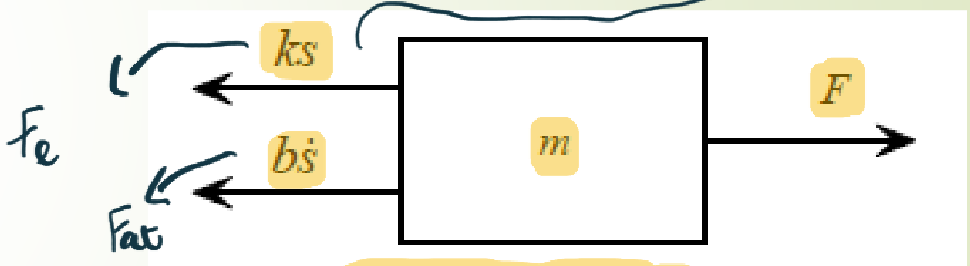
La massa é su un binario, si capisce dalla molla e da attrito.
1 grado di libertà: ho bisogno di coordinata posizionale.
Metto lo 0 come asse parallelo a pavimento.

Esempio

Estremo a sinistra vincolato!

- 1) Il sistema ha **1 solo grado di libertà**.
- 2) Come coordinata posizionale assumiamo lo spostamento del carrello rispetto alla posizione di molla non sollecitata.
- 3)Per la scrittura della seconda legge di Newton facciamo riferimento alla schematizzazione delle forze agenti sul carrello mostrata in Figura.

$$m\ddot{s} = F - ks - b\dot{s}$$



forza elastica = kΔs con Δs = s (da fisica1).
La direzione è negativa perché è la reazione ad F della molla

- 4) Manipolando le relazioni costitutive con le posizioni seguenti

$$u(t) = F(t); \quad y(t) = s(t); \quad x_1(t) = s(t); \quad x_2(t) = \dot{s}(t).$$

Si ottiene

Voglio vedere come si sposta la massa → uscita

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k}{m}x_1(t) - \frac{b}{m}x_2(t) + \frac{1}{m}u(t)$$
$$y(t) = x_1(t)$$

In forma matriciale

in alcuni casi A B

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} u$$

qui è scalare

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\vec{x} + (0)\vec{u}$$

C D

N.B. 1/m

Nei sistemi meccanici conviene usare posizioni: Energia elastica legata
velocità: Energia cinetica

OBIETTIVO:

$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$

$y(t) = \eta(x(t), u(t), t)$

ANCHE COME SISTEMA → $\dot{x}_1(t) = \dots\dots$ → Qualsiasi comb. delle variab. di stato $(x_1, x_2 \dots)$

→ $\dot{x}_2(t)$

→ $y(t)$

$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$

*

Possono essere lineari se compaiono come combinaz. lineari

Modello lineare tempo-invariante (+ semplice) se sono tutte eq. lin. e t.-inv.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \vec{u}$$

→ $\dot{x}_1(t) =$ ______

→ $\dot{x}_2(t) =$ ______

$\vec{x}$ → 2 righe, 1 colonna

Il primo elemento di $\dot{x}$ sarà pari al prodotto della prima riga per la colonna x.

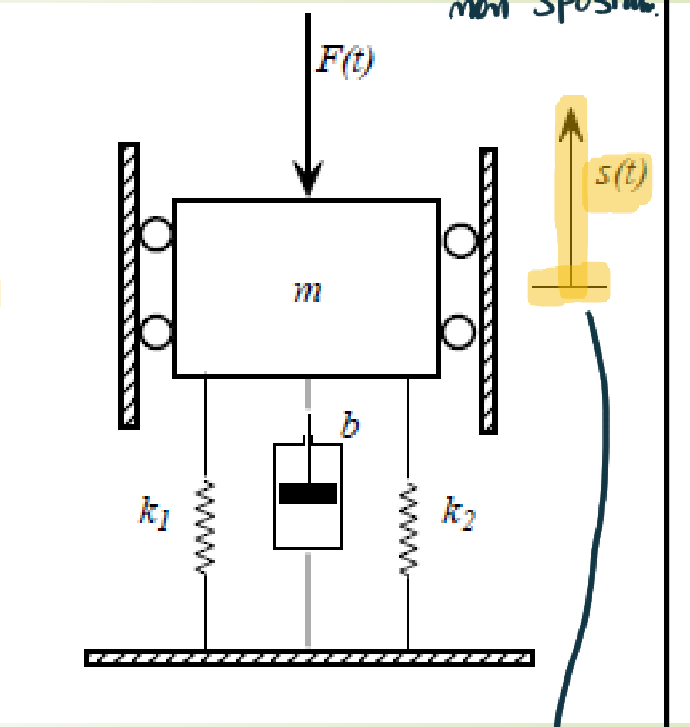
Numero di righe sempre = alle variabili di stato e colonne pari al numero di ingressi.


Bonasē

Esempio 2.4

Sospensione auto

Sistema di riferimento, non spostam.



Esempio 2.4 Con riferimento al sistema massa-molla-attrito (sospensione) mostrato in Figura, si ricavi un modello i-s-u per lo studio della velocità verticale dell'elemento di massa.

- Il sistema ha **1 solo grado di libertà**. Come coordinata posizionale assumiamo lo spostamento del carrello rispetto alla posizione di molle non sollecitate. Indichiamo con **g l'accelerazione di gravità**.

$$m\ddot{s} = -F - k_1 s - k_2 s - b\dot{s} - mg$$

→ Comfort

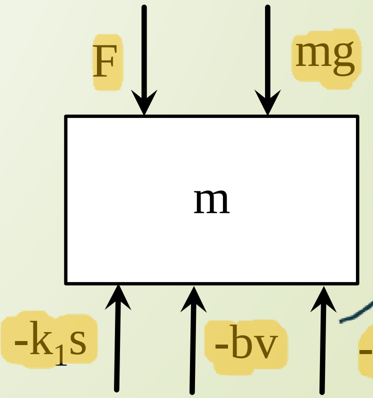
- Ponendo $x_1(t) = s(t), x_2(t) = \dot{s}(t), y(t) = \dot{s}(t), u_1(t) = F(t), u_2(t) = g$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k_1 + k_2}{m} x_1(t) - \frac{b}{m} x_2(t) - \frac{1}{m} u_1(t) - u_2(t)$$

$$y(t) = x_2(t)$$

↑+ ↓-



→ hanno segno -: +(-bv)

ks: Verso: opposto a F. Modulo lo sai

Perché nel primo esempio mettere -F e -mg é scorretto?

Perché mettere +F e +mG nel secondo scorretto?

Matrice A 2×2 → stati, stati → stati

B 2×2 → ingressi

C 1×2 → uscite, → stati

D 1×2 → uscita, → ingressi

Forza peso: integrata nella coordinata posizionale!

Forza peso può essere considerata come esterno.

Esempio 2.4

Riscriviamo lo stesso modello assumendo come riferimento per la misura degli spostamenti la posizione assunta dalla massa quando è nella posizione di equilibrio sotto l'azione della forza peso (F=0, massa ferma)

$$0 = -k_1\bar{s} - k_2\bar{s} - mg \quad \Rightarrow \quad -mg = k_1\bar{s} + k_2\bar{s}$$

Posiz. iniziale: compressione molla sotto effetto della forza peso.

$F(t)=0$ e $\dot{s}(t)=0$ MASSA FERMA

$b\dot{s}(t)=0$

- Definiamo lo spostamento nel nuovo riferimento:

$$s(t) = \tilde{s}(t) + \bar{s}$$

dovuto dalla forza peso

Forza

- Sostituendo nell'equazione del moto $\dot{s}(t) = \dot{\tilde{s}}(t)$ e $\ddot{s}(t) = \ddot{\tilde{s}}(t)$

$$m\ddot{\tilde{s}} = -F - k_1\tilde{s} \underbrace{- k_1\bar{s} - k_2\bar{s}}_{mg} - k_2\tilde{s} - b\dot{\tilde{s}} - mg$$

$$m\ddot{\tilde{s}} = -F - (k_1 + k_2)\tilde{s} - b\dot{\tilde{s}}$$

- Ha la stessa forma di quella che avremmo scritto in assenza di forza peso e in presenza di una molla con costante elastica (k1+k2). Pertanto
  - **quando gli spostamenti vengono misurati rispetto alla posizione del sistema sotto l'azione della forza peso, nella scrittura delle equazioni si può non considerare la forza peso stessa;**
  - **due elementi elastici in parallelo si comportano come un unico elemento equivalente avente costante elastica pari alla somma delle costanti elastiche.**

Esempio 2.4

- Ponendo

$$u(t)=F(t);\quad y(t)=\dot{\tilde{s}}(t);\quad x_1(t)=\tilde{s}(t);\quad x_2(t)=\dot{\tilde{s}}(t),$$

- Si ottiene

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t)=-\frac{(k_1+k_2)}{m}x_1(t)-\frac{b}{m}x_2(t)-\frac{1}{m}u(t)$$
$$y(t)=x_2(t)$$

- In forma matriciale

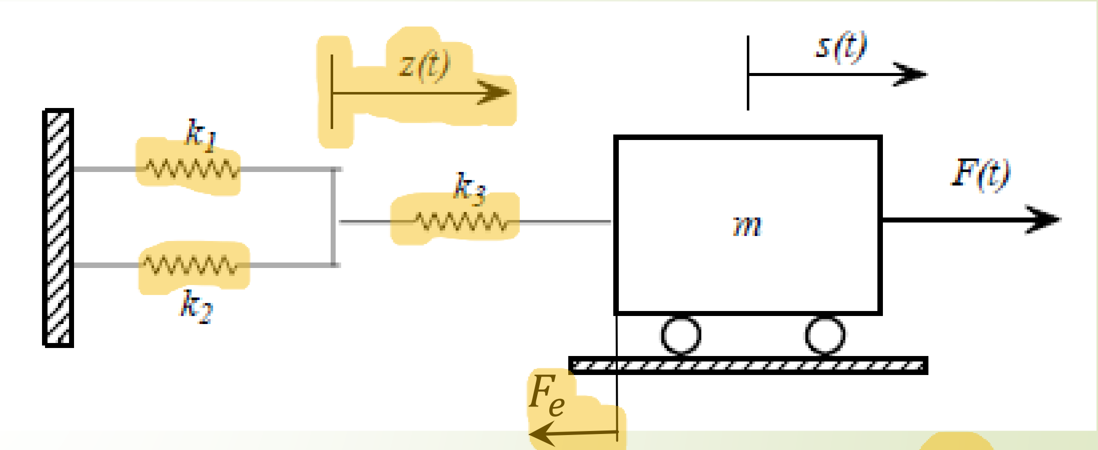
$$\dot{x}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\dfrac{k_1+k_2}{m} & -\dfrac{b}{m}\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}u$$
$$y=\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}x+(0)u$$

N.B. -1/m

Avrei bisogno della variabile z che definisce lo spostamento della molla k_3 modellata da z(t).

Esempio 2.5

Si ricavi un modello i-s-u del sistema mostrato in Figura, assumendo come uscita la posizione s(t) del carrello.



- Sfruttiamo le relazioni per le molle in parallelo e serie:
  - parallelo $k_e = k_1 + k_2$
  - Serie $\dfrac{1}{k_e} = \dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2}$
- Combinando le relazioni otteniamo una sola molla

$$k_{12} = k_1 + k_2$$

$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_{12}} = \frac{k_{12} + k_3}{k_3 k_{12}} = \frac{k_1 + k_2 + k_3}{k_3(k_1 + k_2)}$$

$$k_e = \frac{k_3(k_1 + k_2)}{k_1 + k_2 + k_3} \quad \Rightarrow F_e = k_e s \Rightarrow F(t) - k_e s(t) = m\ddot{s}(t)$$

Con $u(t) = F(t), y(t) = s(t), x_1(t) = s(t), x_2(t) = \dot{s}(t)$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\dfrac{k_e}{m} x_1(t) + \dfrac{1}{m} u(t) \end{cases}$$

$$y(t) = x_1(t)$$

N.B. sugli appunti c'è il termine di attrito in più che non deve esserci

Equazioni nella seconda forma

Le equazioni della meccanica nella prima forma non valgono nel caso in cui la massa e/o il momento d'inerzia degli elementi di inerzia variano nel tempo. Si utilizzano le forme più generali:

- per i moti traslatori è il **teorema di conservazione della quantità di moto**

$$\frac{d(mv)}{dt} = \Sigma F$$

- per i moti rotatori è il **teorema di conservazione del momento della quantità di moto**

$$\frac{d(J_t\omega)}{dt} = \Sigma T$$

m è la massa, v indica la velocità del corpo in una generica direzione prescelta e ΣF la risultante delle componenti delle forze nella stessa direzione, Jt indica il momento di inerzia del corpo rispetto ad un asse t, ω indica la velocità angolare intorno a tale asse, e ΣT la somma dei momenti di tutte le forze intorno all'asse t.

Esempio 2.11

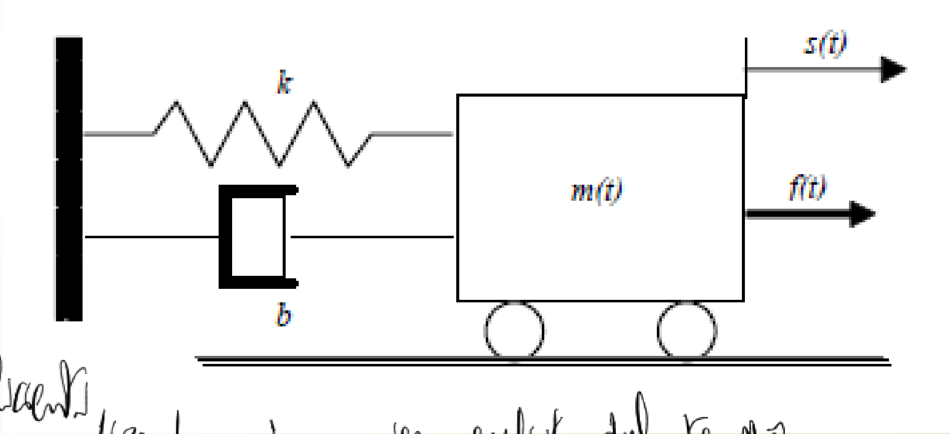
Sistema massa-molla-smorzatore con massa tempo variante. Si consideri il sistema massa-molla-smorzatore, in cui la massa del carrello varia nel tempo. Si vuole studiare l'andamento nel tempo della posizione del carrello.

- il sistema ha 1 solo grado di libertà.
- la massa varia nel tempo → la relazione costitutiva è fornita dalla legge di conservazione della quantità di moto (tranne k e b tutte le variabili dipendono dal tempo t)

$$\frac{d(mv)}{dt} = \Sigma F \qquad \frac{d(mv)}{dt} = -ks(t) - b\frac{ds}{dt} + f(t)$$

$m(t)$

$$m\ddot{s} + \dot{m}\dot{s} = -ks - b\dot{s} + f(t)$$



- Con $u(t) = f(t); \quad y(t) = s(t); \quad x_1(t) = s(t); \quad x_2(t) = \dot{s}(t)$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k}{m(t)}x_1(t) - \frac{b}{m(t)}x_2(t) - \frac{\dot{m}(t)}{m(t)}x_2(t) + \frac{1}{m(t)}u(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}$$

Coefficienti dipendono in maniera esplicita dal tempo

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m(t)} & -\frac{b}{m(t)} - \frac{\dot{m}(t)}{m(t)} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m(t)} \end{pmatrix} u$$

tempo variante

È lineare ma non stazionario (LTV) →

$$y = (1 \quad 0)x + (0)u$$

Non ci interessa la sua angolazione

Fatto che satellite gira genera forza centrifuga

Esempio 2.12

Si consideri il sistema satellite-terra mostrato in figura. Assumiamo che sul satellite possa essere esercitata sia una spinta radiale u1 che una tangenziale all'orbita u2. Supponendo la terra ferma, si vuole studiare il moto del satellite intorno alla terra.

- il sistema ha 2 g.d.l. in quanto il satellite è libero di muoversi nell'intero piano dell'orbita
- conviene assumere come coordinate posizionali le coordinate polari del satellite ρ,θ
  - le due spinte contribuiscono separatamente al moto lungo ciascuna coordinata posizionale

Per la scrittura delle equazioni del moto, notiamo che sul satellite, oltre alle forze esterne, agiscono la forza di attrazione gravitazionale (dovuta alla terra), che ha direzione radiale ed è orientata verso la terra, e la forza centrifuga (dovuta alla rotazione), che ha direzione radiale ed è orientata in verso opposto a quella gravitazionale.

Le equazioni del moto

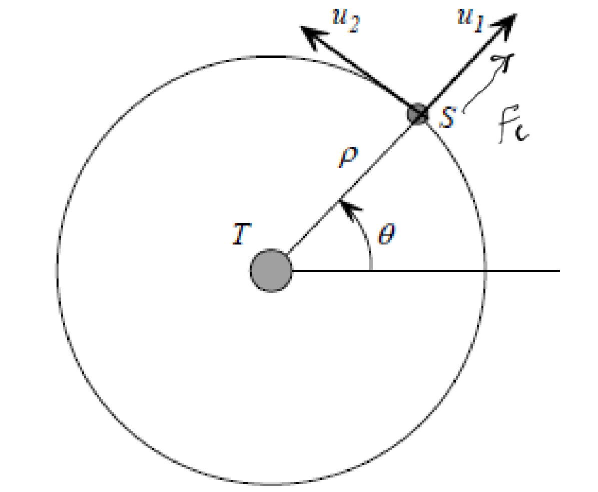
- legge di Newton nella prima forma (M_S costante) relativa alle traslazioni lungo ρ
- legge di Newton nella seconda forma ($J_s = M_S \rho^2$ varia con ρ) relativa alle rotazioni

$$M_S \ddot{\rho} = -K\frac{M_T M_S}{\rho^2} + M_S \rho \dot{\vartheta}^2 + u_1$$

→ ingresso

$$F_c = ma_c = m\omega^2 r = M_S \dot{\vartheta}^2 \rho$$

$$F_g = k\frac{m_1 m_2}{r^2} = K\frac{M_S M_T}{\rho^2}$$



M_T massa della terra, M_S massa del satellite, K la costante di attrazione gravitazionale

Esempio 2.12

Per quanto riguarda il moto rotazionale, poiché il momento di inerzia del satellite rispetto alla terra varia nel tempo in quanto varia la distanza ρ, bisogna scrivere l'equazione di conservazione del momento della quantità di moto.

$$\frac{d(J_t\omega)}{dt} = \Sigma T \qquad \frac{d(M_S\rho^2\dot{\vartheta})}{dt} = u_2\rho$$

$$J_S = M_S\rho^2$$

$$\vec{T} = \vec{b} \times \vec{F} \Rightarrow T = Fb\sin\alpha = Fb = u_2\rho \; (\alpha = 90^o)$$

Che sviluppata diventa $2M_S\rho\dot{\rho}\dot{\vartheta} + M_S\rho^2\ddot{\vartheta} = u_2\rho$

Ponendo $y_1(t) = \rho(t); \quad y_2(t) = \vartheta(t); \quad x_1(t) = \rho(t); \quad x_2(t) = \dot{\rho}(t); \quad x_3(t) = \vartheta(t); \quad x_4(t) = \dot{\theta}(t)$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -K\frac{M_T}{x_1^2} + x_1x_4^2 + \frac{1}{M_S}u_1$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

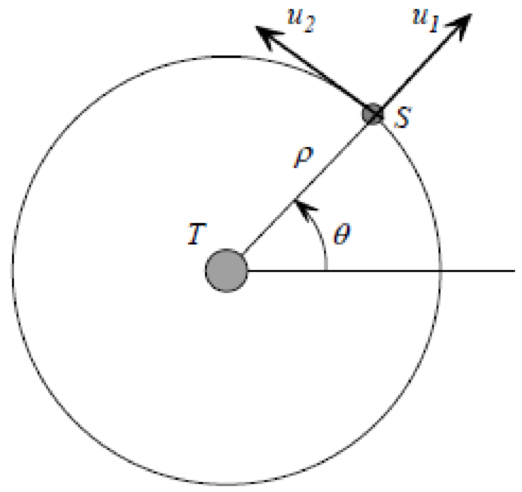
$$\dot{x}_4 = -\frac{2x_2x_4}{x_1} + \frac{1}{M_S}\frac{u_1}{x_1}$$

$$y_1 = x_1 \qquad y_2 = x_3$$

No forma matriciale

Non lineare tempo invariante

N.B. u_2



Attrito non lineare

Nella pratica, spesso si ha a che fare con fenomeni di attrito in cui la forza d'attrito dipende in maniera non lineare dalla velocità, diversamente dagli elementi visti finora.

1) **Attrito di tipo quadratico:** quando un corpo solido (e.g. aereo, auto) si muove in un fluido ad alta velocità

$$F_R = KS\,v^2$$

Non lineare

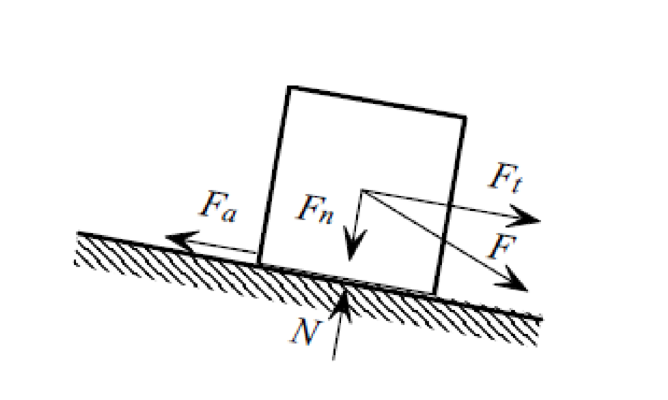
- v è la velocità relativa del corpo rispetto al fluido,
- S è la superficie corrispondente alla proiezione del corpo su un piano ortogonale al vettore velocità,
- K è un coefficiente di proporzionalità dipendente dalla densità del fluido e dalla geometria del corpo.

2) **Attrito secco:** quando un corpo viene messo in movimento su una superficie non lubrificata

- *attrito radente* o *attrito di scivolamento*: nel caso in cui il corpo viene fatto scivolare sulla superficie
- *attrito volvente* o *attrito di rotolamento*: nel caso in cui il corpo viene fatto rotolare sulla superficie

Attrito radente o di scivolamento

- Consideriamo un corpo poggiato su un piano inclinato ruvido e sia *F* la risultante delle forze esterne ad esso applicate(compresa la forza peso).
- F ha due componenti: una componente Ft tangente al piano che tende a far scivolare il corpo; una componente Fn normale al piano che tende invece a spingere il corpo contro il piano
- Fn è la forza di appoggio, bilanciata da una reazione vincolare N



Quando il corpo tende a muoversi per effetto di Ft , nasce una forza resistente Fa che si oppone al moto e che agisce sul corpo tangenzialmente al piano di appoggio:

la forza di attrito radente.

Sperimentalmente Fa ha la stessa direzione e verso opposto a Ft quando il corpo è fermo, mentre ha la stessa direzione e verso opposto al vettore velocità quando il corpo è in movimento.

Il modulo è proporzionale alla forza di appoggio Fn secondo un coefficiente μ detto coefficiente di attrito radente.

$$F_a = \mu F_n$$

Attrito radente o di scivolamento

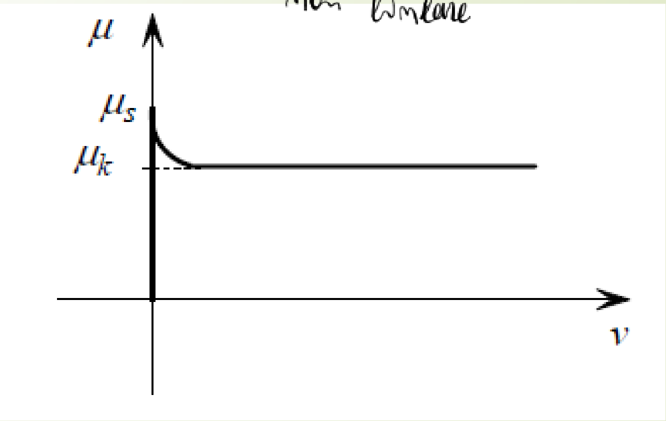
Il coefficiente d'attrito radente dipende delle superfici a contatto e dal modulo della velocità v del corpo secondo l'andamento qualitativo mostrato in figura.

Quando il sistema è fermo, il coefficiente μ può raggiungere un valore μ_s maggiore di quello μ_k che si ha quando il sistema è in movimento. Quindi, quando il sistema è fermo, la forza d'attrito può assumere valori maggiori di quelli che assume quando il corpo è in movimento.

- μ_s è detto coefficiente di attrito statico o di primo distacco
- μ_k è detto coefficiente di attrito cinetico o di scivolamento

Funzione non lineare: induce sistema non lineare

M é una funzione della velocità

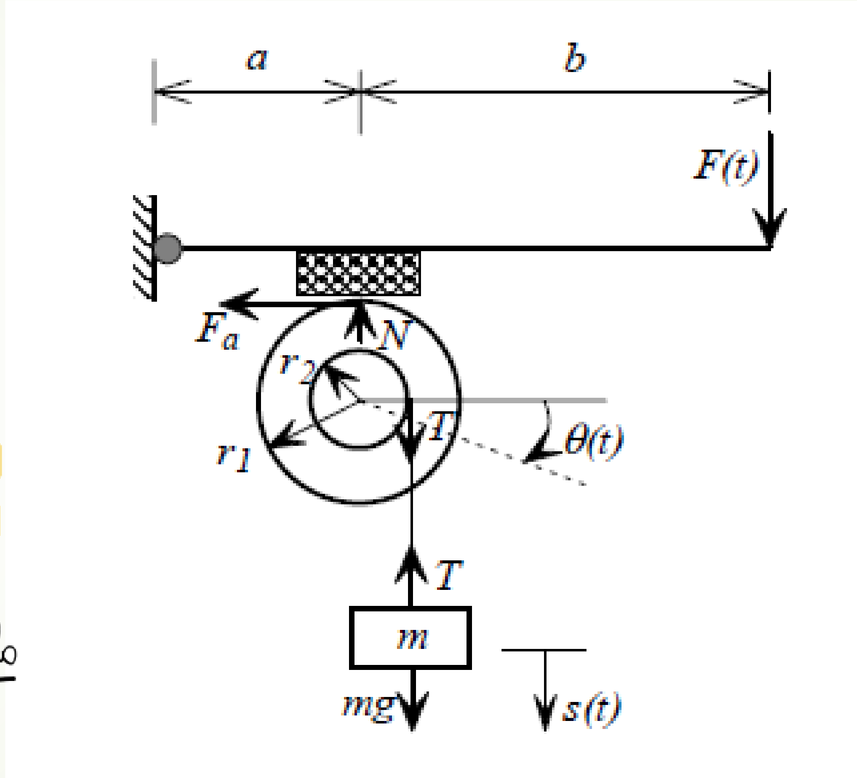


M é funz. della velocità: un parametro é funz. della velocità

Esempio 2.13

Disco piccolo ha fune arrotolata, grande ha freno con attrito.

Si consideri il sistema mostrato in figura costituito da due dischi coassiali e collegati rigidamente, liberi di ruotare intorno all'asse. Il disco interno sostiene, mediante un cavo inestensibile avvolto lungo la circonferenza, un carico di massa m. Il disco esterno, viceversa, viene frenato per attrito mediante una leva fissata ad un estremo, e esercitando una forza F(t) sull'altro estremo. Indicando con J il momento di inerzia totale dei due dischi intorno all'asse di rotazione e con μ_k il coefficiente di attrito cinetico tra le superfici a contatto, scrivere un modello i-s-u per lo studio del moto del disco nell'ipotesi che la forza F(t) sia sempre positiva (freno sempre in azione) e non raggiunga mai valori tali da fermare il disco. Sempre attrito dinamico



Relaz. di vincolo

- Il sistema ha 1 solo grado di libertà dal momento che $s=r_2\theta$.
- Assumiamo allora θ come coordinata posizionale per la descrizione del moto del sistema.

Ho momento di inerzia e massa m. Devo descrivere la posizione. Massa può solo spostarsi. Disco può solo ruotare. Sono però legati.

2 elementi di inerzia ma 1 relaz. di vincolo. Se potessi, potrei scrivere anche solo 1 equaz. Ma di solito si scrivono tutte le eq. e guardiamo le eq. vincolo

Dischi azzeccati.

La leva in alto la uso come se fosse un freno (Attrito)

Hp: C'é sempre un pó di contatto (non la libero)

La nostra forza puó aumentare o ridurre Fa.

Dobbiamo scegliere 1 coordinata posizionale (θ oppure S é indiff.)

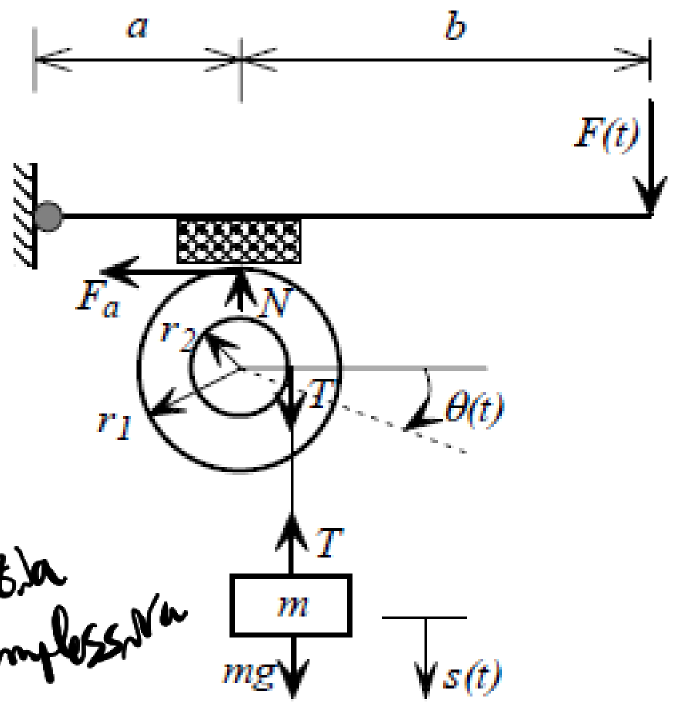
Esempio 2.13

Consideriamo la legge di Newton per gli spostamenti verticali di m e quella per gli spostamenti rotazionali del disco, indicando con T la forza trasmessa, attraverso la fune.

$$m\ddot{s} = -T + mg$$ Forze applicate su m

$$J\ddot{\vartheta} = Tr_2 - F_a r_1$$ Coppie applicate su disco

dato



Ricavando T dalla prima e sostituendo nella seconda, e sfruttando inoltre l'equazione di vincolo $s=r_2\theta$

$$T = -m\ddot{s} + mg = -mr_2\ddot{\vartheta} + mg$$

$$J\ddot{\vartheta} = -mr_2^{\,2}\ddot{\vartheta} + mgr_2 - F_a r_1 \quad \Rightarrow \quad (J + mr_2^{\,2})\ddot{\vartheta} = mgr_2 - F_a r_1$$

Massa M pesa su inerzia complessiva come massa su R2 nel cilindro.

Per quanto riguarda la forza di attrito Fa, per l'equilibrio dei momenti agenti sull'asta (per evidenziare come ingresso F e non Fa)

$$F(a+b) = Na \;\rightarrow\; F_a = \mu_k N = \mu_k \frac{a+b}{a} F = \alpha F \;\rightarrow\; (J + mr_2^{\,2})\ddot{\vartheta} = mgr_2 - \alpha r_1 F$$

Siamo partiti da due equaz. del moto e siamo arrivati a una sola equaz.

Esempio 2.13

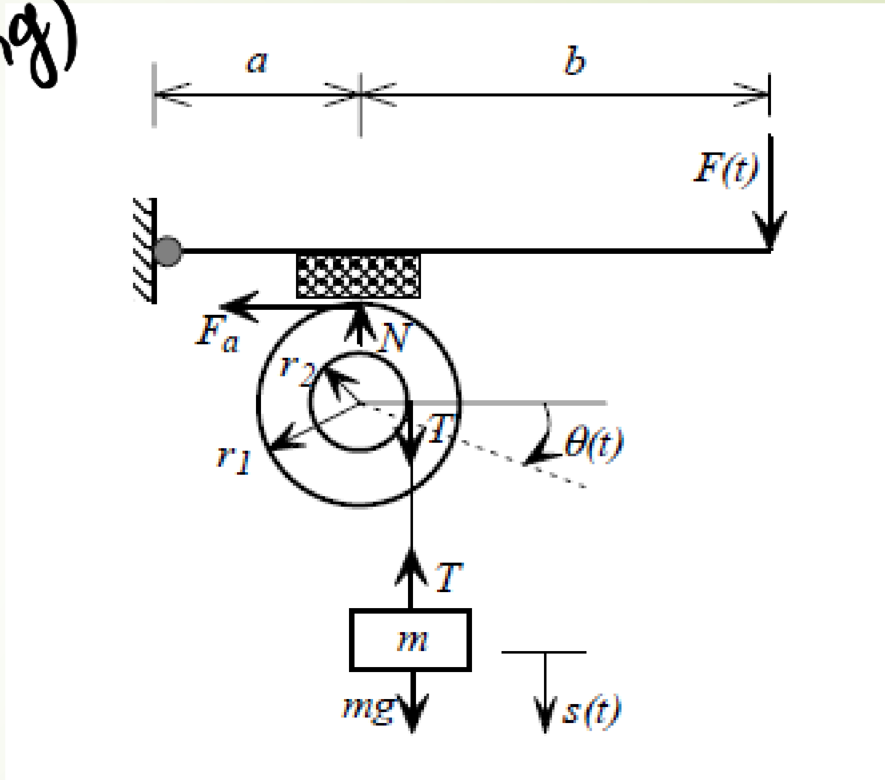
$$(J+mr_2^{\,2})\ddot{\vartheta} = mgr_2 - \alpha r_1 F$$

forza peso (coppia di mg)

$$y(t)=\vartheta(t);\quad u_1(t)=F(t);\quad u_2(t)=mgr_2;\quad x_1(t)=\vartheta(t);\quad x_2(t)=\dot{\vartheta}(t)$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\frac{\alpha r_1}{J+mr_2^{\,2}}u_1 + u_2$$
$$y = x_1$$

Manca la divisione per $(J+mr_2^{\,2})$



Se consideriamo tutta la funzione di attrito μ è non lineare

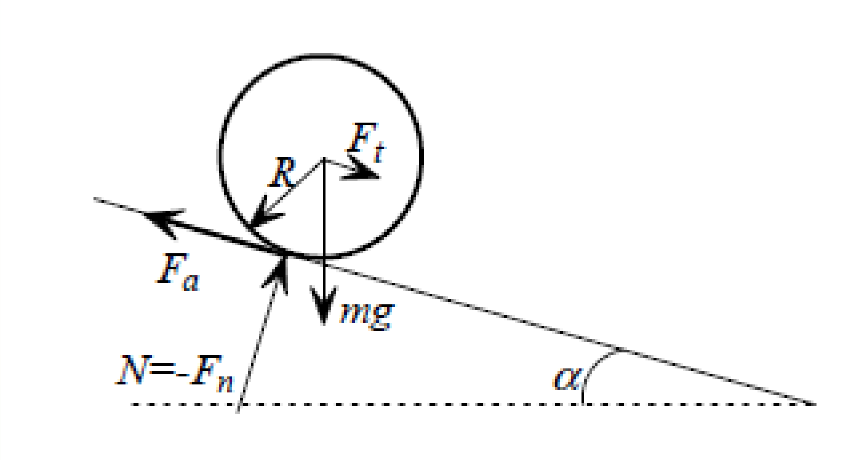
μ cost = lineare tempo invariante. se μ(v) non é più lineare ⇒ μ($x_1(t)\cdot r_2$)

Attrito volvente o attrito di rotolamento

Scivolamento e rotolamento di corpi cilindrici in presenza di attrito. Consideriamo il corpo cilindrico di raggio R mostrato in figura, poggiato su un piano inclinato di pendenza α. Supponiamo che esso sia soggetto solo alla forza peso, e indichiamo con Ft la componente della forza peso tangente al piano di appoggio, e con Fn la componente normale al piano di appoggio. La reazione vincolare N sarà ovviamente uguale ed opposta alla forza di appoggio Fn.

- Senza attrito: il cilindro scivolerebbe senza rotolare, perché non soggetto ad alcuna coppia.
- Con attrito: la forza di attrito Fa implica un momento intorno all'asse del cilindro che tenderà a farlo rotolare

- moto misto di scivolamento e di rotolamento (2gdl): il valore della forza di attrito è μ_kN, serve una eq. di Newton per lo scivolamento e una per il rotolamento
- solo moto di rotolamento (1gdl, 2eq.+1vincolo): la forza di attrito sarà minore di μ_sN (non nota), ma non essendoci scivolamento, lo spostamento traslatorio s del baricentro e l'angolo di rotazione θ del cilindro intorno al suo asse sono legati dalla relazione s=Rθ che è l'equazione in più che consente di eliminare dalle incognite del problema la forza di attrito.



F_t non vince F_a.

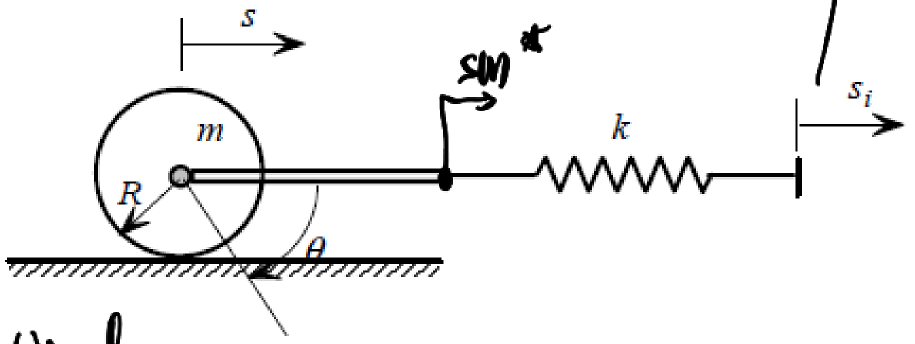
* Stesso spostamento

Esempio 2.14

Si consideri il sistema mostrato, costituito da un cilindro di massa m e raggio R tirato per mezzo di una molla di costante elastica k comandata in posizione sull'estremo libero. Determinare:

- la condizione che deve soddisfare il coefficiente di attrito μ_s perché il moto sia di solo rotolamento
- un modello i-s-u per lo studio del moto del baricentro nell'ipotesi di solo moto di rotolamento

ingresso



1, spostamenti orizzontali del baricentro

$$m\ddot{s} = k(s_i - s) - F_a$$

Rotaz. solo per effetto di Fa

2. rotazioni intorno all'asse passante per il baricentro

$$J\ddot{\vartheta} = F_a R$$

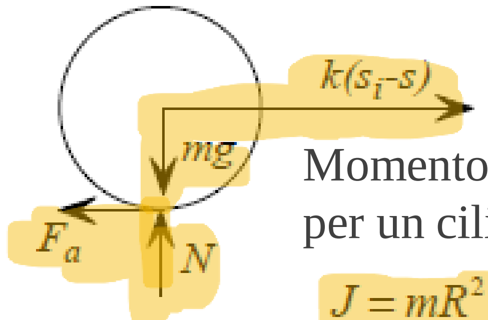
vale la relaz. di vincolo

Nel caso di solo rotolamento, s=Rθ e sostituendo nelle precedenti:

dalla 2ª : $\ddot{\vartheta} = \dfrac{F_a R}{J} = F_a R \dfrac{2}{mR^2} = \dfrac{2F_a}{mR}$ $\qquad \ddot{s} = R\ddot{\vartheta}$

sostituisco nella 1ª : $mR\ddot{\vartheta} = k(s_i - s) - F_a \Rightarrow \mathrm{mR}\dfrac{2F_a}{mR} = k(s_i - s) - F_a$

$\Rightarrow 2F_a = k(s_i - s) - F_a \Rightarrow F_a = \dfrac{k(s_i - s)}{3}$ attrito in funz. di spostam. s.



Momento d'inerzia per un cilindro

$$J = mR^2/2$$

Esempio 2.14

Mk costante visto che abbiamo rotolamento.

Per avere solo rotolamento la forza di attrito statico deve essere minore di $\mu_s N$.

$$F_a = \frac{k(s_i - s)}{3} < \mu_s N \Rightarrow \mu_s > \frac{k(s_i - s)}{3mg}$$

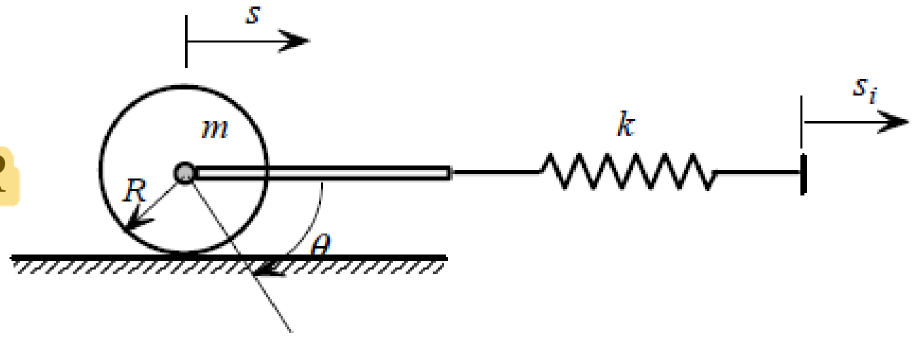
Se la forza elastica si fa grande scivola

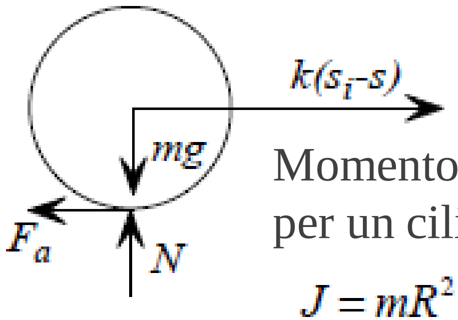
Ricaviamo il modello i.s.u. in questa ipotesi (solo rotolamento – 1 g.d.l. sfruttiamo le 2 eq. più il vincolo s=Rθ)

$$\text{dalla } 1^a: F_a = k(s_i - s) - m\ddot{s}$$

$$\text{sost. nella } 2^a: J\ddot{\vartheta} = [k(s_i - s) - m\ddot{s}]R, \quad J = mR^2/2, \quad \ddot{\vartheta} = \ddot{s}/R$$

$$\Rightarrow \frac{mR^2}{2}\frac{\ddot{s}}{R} + m\ddot{s}R = k(s_i - s)R \Rightarrow \frac{3}{2}m\ddot{s} = -ks + ks_i$$





Momento d'inerzia per un cilindro

$J = mR^2/2$

con $y(t) = s(t); \quad u(t) = s_i(t); \quad x_1(t) = s(t); \quad x_2(t) = \dot{s}(t)$,

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{2}{3}\frac{k}{m}x_1 + \frac{2}{3}\frac{k}{m}u$$

$$y = x_1$$

LTI

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{2k}{3m} & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{2k}{3m} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 0]\,x(t)$$

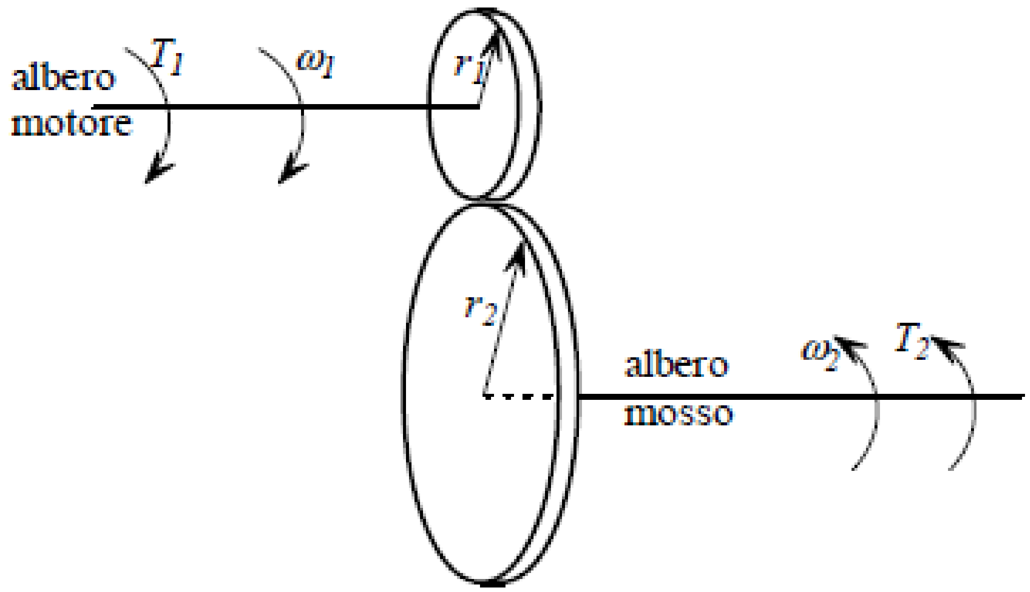
Rappresenta eq. di vincolo, non un nuovo grado di libertà.

Le ruote dentate

- Gli accoppiamenti a ruote dentate, o riduttori, sono dei dispositivi meccanici che consentono di trasmettere il moto e la potenza meccanica tra due alberi in rotazione variandone la coppia e la velocità angolare.
- Sono utilizzati per aumentare la coppia o per ridurre la velocità. Per questo sono anche detti trasformatori meccanici.
- L'albero che imprime il moto al sistema è detto albero motore, mentre l'altro è detto albero mosso o utilizzatore.
- Nella schematizzazione ideale si assumono privi di massa, elasticità e attrito.

T_1=coppia, ω_1=velocità angolare, r_1=raggio (Albero motore)

T_2=coppia, ω_2=velocità angolare, r_2=raggio (Albero mosso)



Le ruote dentate

Quel punto è soggetto alla stessa velocità tangenziale.

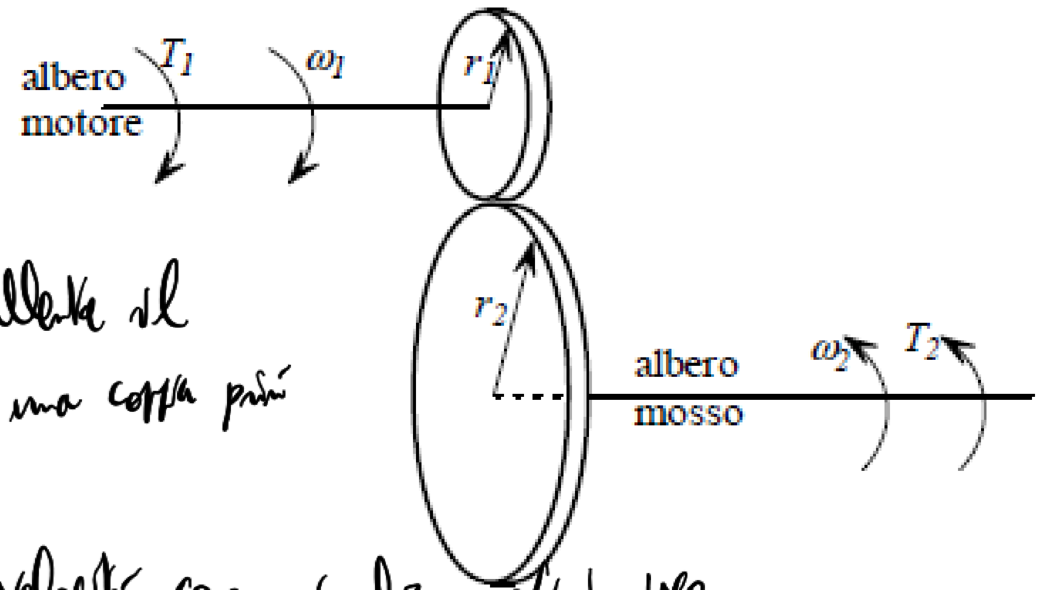
Uguaglianza tra le velocità tangenziali delle ruote (nel punto di contatto)

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 \rightarrow \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2} = n$$

Coppie piccole e asse stretto

Uguaglianza tra le potenze meccaniche disponibili sui due alberi

$$T_1 \omega_1 = T_2 \omega_2 \rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{n}$$



n è detto rapporto di riduzione

Normalmente si collega al motore e otteniamo una coppia più elevata.

Hp: Non ci sono perdite di attrito.

Se devo alzare 4 kili, la coppia aumenta e la velocità con cui alzo diminuisce

Relazioni sono relazioni di vincolo.

Rapporto di riduzione: unico modo per cambiare ω e T.

Esempio 2.15

Per il sistema in figura, un carico viene messo in rotazione da un motore attraverso un riduttore reale. Indicando con J_1 e J_2 i momenti di inerzia di ciascuna ruota rispetto al proprio asse di rotazione, con J_c il momento di inerzia del carico, con b_1 e b_2 i coefficienti di attrito viscoso dovuto ai supporti, si determini un modello i-s-u per lo studio della velocità angolare (ω_2) del carico in dipendenza della coppia motrice T_m.

Abbiamo un solo g.d.l. (usiamo le 2 eq. di Newton per i due assi più il vincolo dell'accoppiamento tra ruote dentate)

- Asse motore $J_1\dot{\omega}_1 = \underbrace{-b_1\omega_1}_{\text{coppia di attrito}} + T_m - T_{s1}$ → Opposizione della coppia del disco2

(T_{s1} indica la coppia resistente agente sulla ruota motrice per effetto della ruota mossa, si oppone a T_m)

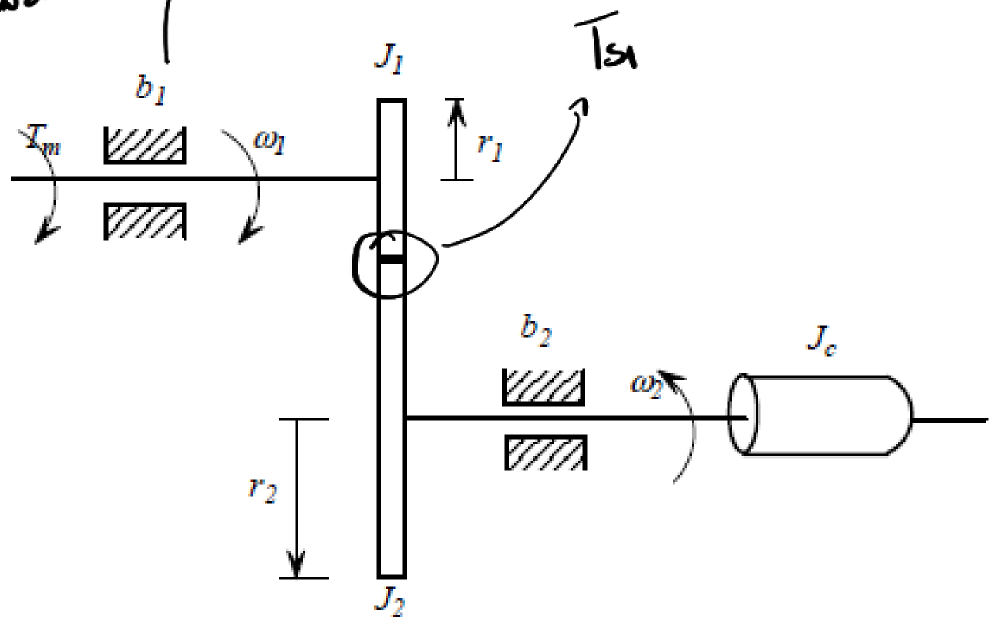
- Asse mosso $(J_2 + J_c)\dot{\omega}_2 = -b_2\omega_2 + T_{s2}$

(T_{s2} indica la coppia, trasmessa dalla ruota motrice, che mette in movimento la ruota mossa, J_2 e J_c sono fissate rigidamente)

- Vincolo per le ruote dentate

$$T_{s1}\omega_1 = T_{s2}\omega_2 \quad \Rightarrow \quad T_{s1} = \frac{\omega_2}{\omega_1}T_{s2} = nT_{s2} \qquad \omega_1 = \frac{1}{n}\omega_2$$

elemento di attrito rotazionale



Nota: Se ho ruota dentata con no inerzia e massa con nessuna
⇒ Non cambia niente se assegno momento di inerzia a ruota direttamente.

Nota: Se abbiamo 2 momenti di inerzia, asse rigido che collega, l'inerzia totale è $J_1 + J_2$.
Potevo assegnare inerzia complessiva alla ruota, non cambia nulla.
Le inerzie vanno separate solo se tra le due c'è un elemento che differenzia coordinata posizionale!

Potremmo dire "3 inerzie, 3 coordinate posizionali", ma ho vincoli:

J_c collegato a $J_2 \Rightarrow \theta(t)$ è la stessa.

J_1 e J_c rappresentano albero, le velocità angolari sono le stesse.
⇒ 3 eq. di moto, 2 di vincolo ⇒ 1 eq. totale.

Scriveremo 3 eq. e 2 eq. di vincolo (anche se non introduciamo ω_2 e ω_c)

2 eq. di moto: Albero motore e albero mosso

T_{s_2} = Coppia che mette in moto l'asse ($-b_2 \omega_2$ attrito che si oppone al moto).
Inerzia asse: $J_2 + J_c$

T_{s1} = coppia di scambio tra le ruote dentate (Punto con coppia, ma ne perdo in parte su attrito)

Esempio 2.15

Sostituiamo i vincoli in modo da riscrivere le equazioni tutte in funzione di ω_2 e T_{s2}

$$J_1\dot{\omega}_1 = -b_1\omega_1 + T_m - T_{s1} \quad \Rightarrow \quad \frac{J_1}{n}\dot{\omega}_2 = -\frac{b_1}{n}\omega_2 + T_m - nT_{s2}$$

$$\Rightarrow T_{s2} = -\frac{J_1}{n^2}\dot{\omega}_2 - \frac{b_1}{n^2}\omega_2 + \frac{T_m}{n}$$

Sostituendo nella seconda

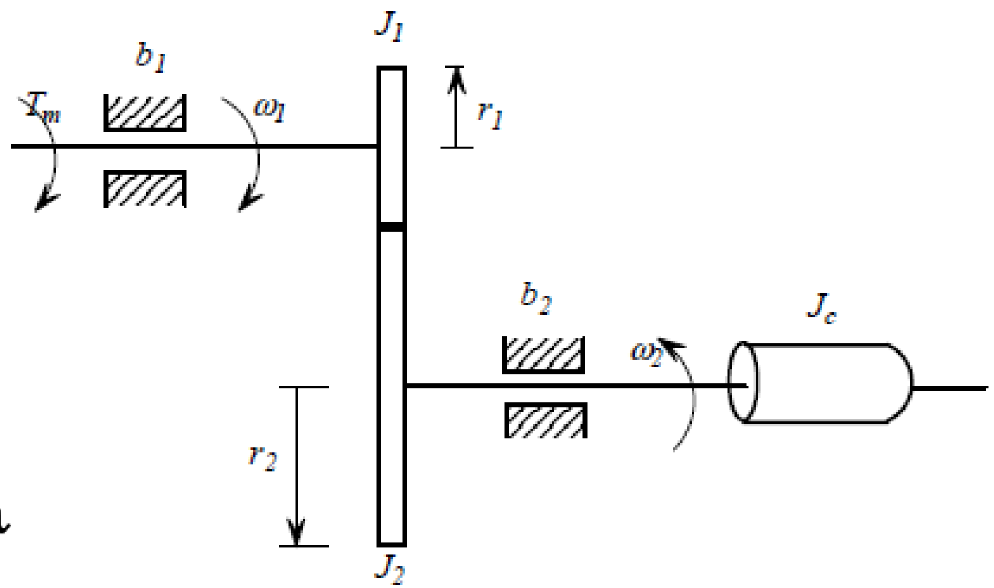
$$(J_2 + J_c)\dot{\omega}_2 = -b_2\omega_2 + T_{s2}$$

$$(J_2 + J_c)\dot{\omega}_2 = -b_2\omega_2 - \frac{J_1}{n^2}\dot{\omega}_2 - \frac{b_1}{n^2}\omega_2 + \frac{T_m}{n}$$

unica inerzia ... unico attrito

$$\left(J_2 + J_c + \frac{J_1}{n^2}\right)\dot{\omega}_2 = -\left(b_2 + \frac{b_1}{n^2}\right)\omega_2 + \frac{T_m}{n}$$

→ Coppia



Esempio 2.15

$$\left(J_2 + J_c + \frac{J_1}{n^2}\right)\dot{\omega}_2 = -\left(b_2 + \frac{b_1}{n^2}\right)\omega_2 + \frac{T_m}{n}$$

N.B. su appunti b_1

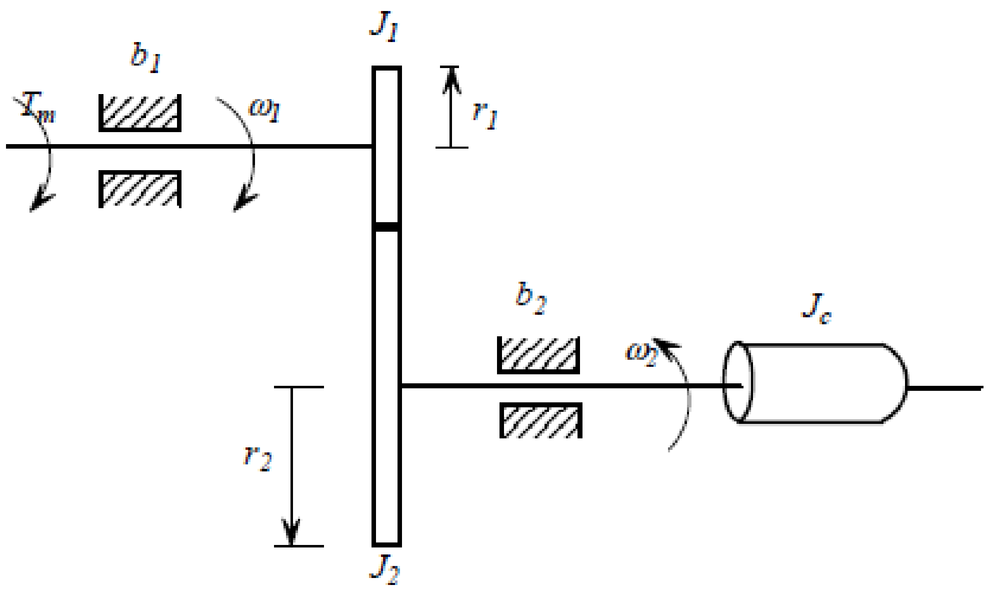
Ponendo $y(t) = \omega_2(t), u(t) = T_m, x_1(t) = \vartheta_2(t), x_2(t) = \omega_2(t)$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{\left(b_2 + \frac{b_1}{n^2}\right)}{\left(J_2 + J_c + \frac{J_1}{n^2}\right)} x_2(t) + \frac{1}{n\left(J_2 + J_c + \frac{J_1}{n^2}\right)} u(t)$$

$$y(t) = x_2(t)$$

Il sistema è lineare, tempo-invariante



Ruote dentate: Trasportare una grandezza dall'albero motore all'albero mosso.

Su albero mosso, J_1 lo vedo attraverso il sistema degli alberi. Unico sistema con 1 ingresso, unica inerzia e unico attrito.

NOTA: Abbiamo ottenuto sempre sistemi 2x2 con struttura che abbiamo visto, quindi se so qualcosa su questo sistema posso generalizzarlo.

Momento d’inerzia: Esempio per Jz - NOTE

- **Nota 1 – Calcolo di dV**

→ circonf. + grande - più piccola

$$dV = (\pi(r+dr)^2 - \pi r^2)s = (\pi r^2 + 2\pi r dr + \pi dr^2 - \pi r^2)s = (2\pi r dr + \pi dr^2)s = 2\pi r dr s$$

dr è un'infitesimo $\Rightarrow$ dr^2 è un'infinitesimo di ordine superiore e quindi trascurabile

$dr \to 0, \Rightarrow$ l'area della corona tende all'area di un rettangolo con un lato pari a $2\pi r$ e l'altro pari a dr

- **Nota 2 - Calcolo di Jz**

$$J_z = \int_0^R r^2 2\pi r s c dr = 2\pi s c \int_0^R r^3 dr = 2\pi s c \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = 2\pi s c \frac{R^4}{4} = \pi s c R^2 \frac{R^2}{2} = M \frac{R^2}{2}$$

$M = \pi R^2 s c$

Momento d'inerzia: Esempio per Jx e Jy - NOTE

- **Nota 1 – Calcolo di dm**

$$dm = dVs = \rho d\theta d\rho cs$$

$$d\theta \to 0,\ d\rho \to 0$$

$$\Downarrow$$

l'area di base del volume infinitesimo $\to$ ad un rettangolo con lati $\rho d\theta$ e $d\rho$

- **Nota 2 - Calcolo di Jy**

si utilizza l'integrale notevole e l'equazione della M totale

$$\int \cos^2 x dx = \frac{x + \sin x \cos x}{2} + c$$

$$M = \pi R^2 sc$$

SOLO SE È TUTTO LINEARE!

Forma matriciale

A rapp. i coefficienti che legano lo stato derivato allo stato.

Dopo aver scritto le equazione del modello possiamo trovarci nei seguenti casi:

- Sistema caratterizzato da equazioni non lineari (Sistema non lineare)
- Sistema caratterizzato da equazioni lineari
  - Sistemi lineari tempo varianti (almeno un parametro dipende dal tempo) **LTV**

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)$$
$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{u}(t)$$

  - Sistemi lineari tempo invarianti (i parametri non dipendono dal tempo) **LTI**

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$$
$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)$$

Damn Daniel

A2 A2 A2 A2 A2

Nei casi lineari è possibile scrivere le equazioni in forma compatta utilizzando le matrici **A,B,C,D** e sfruttando il prodotto righe per colonne. **A**=matrice dinamica dello stato, **B**=matrice degli ingressi, **C**=matrice delle uscite, **D** = matrice del legame diretto ingresso-uscita

$$\vec{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \end{bmatrix}, \vec{\boldsymbol{u}}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \end{bmatrix}, \vec{\boldsymbol{y}}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Dimensioni $\boldsymbol{A} \to n \times n, \boldsymbol{B} \to n \times m, \boldsymbol{C} \to r \times n, \boldsymbol{D} \to r \times m$ con m ingressi, r uscite e n variabili di stato