Matemáticas

Ver índice

Aritmética

Álgebra

Geometría

Trigonometría

Estadística

Probabilidad

ARITMÉTICA
- NÚMEROS NATURALES
- NÚMEROS ENTEROS
- NÚMEROS RACIONALES

Aritmética

1. Números naturales

Es el conjunto formado por los números que se emplean para contar, el cual tiene un símbolo especial Representado por "**N**"

N= {1, 2, 3, 4,...} conjunto de números naturales. El conjunto de números naturales es infinito porque siempre podemos formar un número más.

1.1. Propiedades

Propiedad de clausura:
Si a $\in$ N y b $\in$ N entonces (a + b) $\in$ N (suma).

Si a $\in$ N y b $\in$ N entonces (a) b $\in$ N (multiplicación).

Propiedad conmutativa:
Si a $\in$ N y b $\in$ N entonces a + b = b + a (suma).
Si a $\in$ N y b $\in$ N entonces ab = ba (multiplicación).

Propiedad asociativa:
Si a $\in$ N, b $\in$ N y c $\in$ N entonces (a + b) + c = a + (b + c) (suma).
Si a $\in$ N, b $\in$ N, c $\in$ N entonces a (bc) = (ab)c (multiplicación).

Ley distributiva de la multiplicación respecto a la suma:
Si a $\in$ N, b $\in$ N y c $\in$ N entonces a (b + c) = ab + ac.

Elemento neutro:
El número **0** (cero) se llama identidad respecto a la operación suma porque **a+0=a** para todo a $\in$ N. El número 1 (uno) se le llama identidad respecto a la operación multiplicación porque **(a) (1) = a** para toda a $\in$ N.

Aritmética

1.2. Operaciones

1.2.1. SUMA O ADICIÓN

Los elementos con los cuales efectuamos una suma se llaman sumandos. El resultado de la operación se llama total o suma y se indica mediante el signo (+).

Elementos de la adición:

	523 →	SUMANDOS
SIGNO +	172 →	SUMANDOS
	69 →	SUMANDOS
	764 →	SUMA O TOTAL

Ejemplos:

6 + 2 = 8	clausura
4 + 2 = 6 y 2 + 4 = 6	conmutativa
3 + (2 + 4) = 9 y (3 + 2) + 4 = 9	asociativa

1.2.2. RESTA O SUSTRACCIÓN

Es la operación contraria a la adición y se indica mediante el signo (–).

Elementos de la sustracción:

	714 →	MINUENDO
SIGNO –		
	291 →	SUSTRAENDO
	423 →	DIFERENCIA

Aritmética

Ejemplos:

6 – 2 = 4 porque 4 + 2 = 6　　　　9 - 3 = 6 porque 6 + 3 = 9

**Las propiedades conmutativa, asociativa y de clausura no se aplican a la resta.*

1.2.3. MULTIPLICACIÓN

Los elementos con los cuales efectuamos la multiplicación se llaman factores. El resultado de esta operación se llama producto. El producto de "a" y "b" se puede escribir en distintas formas:

a × b, (a)(b) , a.b , ab

Los elementos de la multiplicación:

$$\begin{array}{lcrl} & & 9 & \longrightarrow \textbf{MULTIPLICANDO} \\ \textbf{SIGNO} & \times & & \qquad\qquad \searrow\nearrow\ \textbf{FACTORES} \\ & & 6 & \longrightarrow \textbf{MULTIPLICADOR} \\ \hline & & 54 & \longrightarrow \textbf{PRODUCTO} \end{array}$$

Ejemplos:

7 × 20 = 140　　(34)16) = 544　　17 × 30 = 510　　(5)(4) =20

Aritmética

1.2.4. DIVISIÓN O COCIENTE

Es la operación contraria a la multiplicación, la división se indica mediante los símbolos

$$a \div b, \qquad \frac{a}{b}, \qquad a / b$$

Elementos de la división:

	34	→	**COCIENTE**
DIVISOR →	16 ⟌ 544	→	**DIVIDENDO**
	064		
	00	→	**RESIDUO**

Ejemplos:

$15 \div 5 = 3$ porque $3 \times 5 = 15$ $\qquad$ $48 \div 12 = 4$ porque $12 \times 4 = 48$

1.2.5. LA POTENCIACIÓN

Es cuando el factor se multiplica “n” veces por él mismo.

$$a^n = a \times a \times \dots \times a \text{ (“n” veces como factor)}$$

Elementos de la potenciación:

EXPONENTE

BASE → $4^3 = 64$ ← **POTENCIA**

Ejemplos:

$(4)^3=4\times4\times4=64$	$(5)^2= (5)\ (5)=25$	$(2)^4= (2)\ (2)\ (2)\ (2)=16$
$(3)^4=3\times3\times3\times3=81$	$(1)^3= (1)\ (1)\ (1)=1$	$(6)^2= (6)\ (6)=36$

Aritmética

1.2.6. LA RADICACIÓN

Como la aritmética tiene sus operaciones inversas, la potenciación también tiene su operación inversa que es la radicación.

Elementos de la radicación:

RADICAL

ÍNDICE → $\sqrt[3]{64} = 4$ ← **RAÍZ**

RADICANDO

Ejemplos:

$$\sqrt{36} = 6 \quad porque \quad 6^2 = 36 \qquad \sqrt[4]{81} = 3 \quad porque \quad (3)^4 = 81$$

$$\sqrt[5]{32} = 2 \quad porque \quad (2)^5 = 32 \qquad \sqrt[3]{125} = 5 \; porque \; (5)^3 = 125$$

1.3. Factorización

Para facilitar la factorización de números compuestos, hacemos uso del Teorema fundamental de la aritmética.

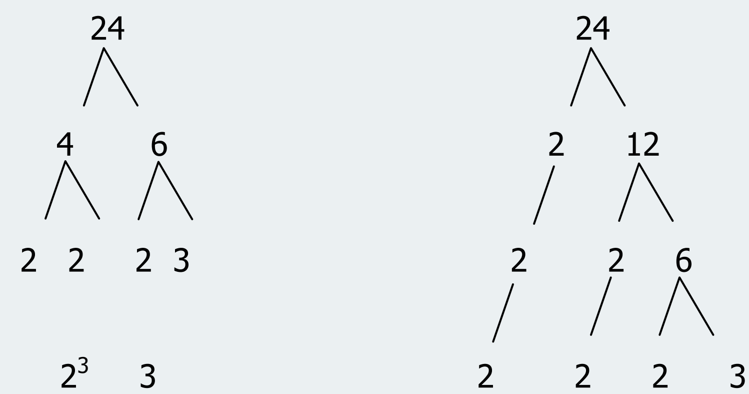
Teorema fundamental de la aritmética:

Un número natural $n > 1$ o es primo o se puede expresar como un producto de factores primos forma única o también como un producto de potencia de primos.

Ejemplo: Expresar 24 como producto de potencias de primos.

$24 = (2)\,(12) = (2)(2)(6) = (2)(2)(2)(3) = (2)^3(3)$

En general, para expresar 24 como producto de potencia de primos, se puede hacer uso de un árbol de factores como sigue:



También podemos realizar divisiones repetidas.

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ \hline 1 & 24 = 2^3 \times 3 \end{array}$$

Observa que se efectúan divisiones entre números primos hasta obtener **1** como cociente.

Aritmética

Veamos como se representa 240 como producto de potencias de primos.

$$\begin{array}{r|c} 240 & 2 \\ 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ \hline 1 & 240 = 2^4 .\ 3.\ 5 \end{array}$$

Recuerda que todo número primo es aquel que sólo tienen dos divisores propios, por sí mismo y la unidad.

Ejemplos: *2, 3, 5, 7, 11, etc.*

1.4. Máximo común divisor

Definición: Dados dos números naturales “a” y “b”, es posible determinar un número natural único “c” tal que:

a) c diferente de 0
b) c es factor de a
c) c es factor de b
d) c es el factor mayor que divide exactamente a ambos

Representaremos el **Máximo Común Divisor** de a y b como: **MCD**(a, b).

Aritmética

Aritmética

Ejemplo: Halla el máximo común divisor de 24 y 36.

D_{24} = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}
D_{36} = {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 36}

Solución: se buscan los elementos que sean comunes a ambos conjuntos, se selecciona el elemento mayor común de estos y ese es el **MCD**

D_{24} y D_{36} = {1, 2, 3, 4, 6, 12}
El MCD (24, 36) = 12

1.5. Mínimo común múltiplo

Definición: “c” es el MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO de “a” y “b” si:

a) $c \neq 0$
b) “a” es divisor propio de “c”
c) “b” es divisor propio de “c”
d) “c” es el número natural menor que es divisible por ambos.
e) el mínimo común múltiplo de “a” y “b” se representa con el símbolo MCM (a,b)

Aritmética

Ejemplos: Halla el MCM (3, 5)

Solución: Encuentra los múltiplos de cada número.

M_3 = {3, 6, 9, 12, 15, 18, 21,...}

M_5 = {5, 10, 15, 20, 25,...}

Después se escogen los múltiplos comunes de cada uno de ellos M_3 y M_5 = (15, 30,...) y se selecciona el menor de ellos, por lo tanto, el MCM (3, 5) = 15

Halla el MCM (6, 8)

M_6 = {6, 12, 18, 24, 30, 36,…}

M_8 = {8, 16, 24, 32, 40, 48,...}

M_6 y M8 = {24, 48, 72,…} múltiplos comunes

MCM (6, 8) = 24

2. Números enteros

- NÚMEROS ENTEROS
  - OPERACIONES
    - SUMA
    - RESTA
    - MULTIPLICACIÓN
    - DIVISIÓN
    - POTENCIACIÓN
  - ORDEN
    - REPRESENTACIÓN GRAFICA
    - VALOR ABSOLUTO

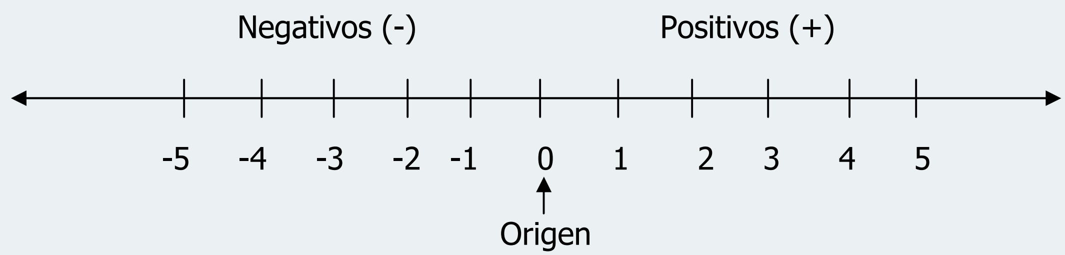
Aritmética

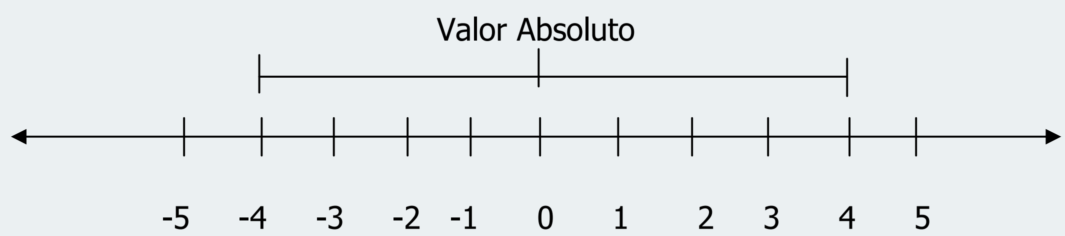
2.1. Definición

El sistema numérico de los números enteros es aquel que contiene a los números positivos, negativos y al cero. Utilizaremos la literal **Z** para representarlos.

Z= {...,-3, -2,-1, 0 ,1, 2, 3,...} números enteros

Representación gráfica. Las cantidades positivas y negativas se representan en la recta numérica de la siguiente manera.





Si analizamos la figura vemos que el entero **–4** representa "4" unidades, hacia la izquierda mientras que el entero **4** representa "4" unidades, hacia la derecha.

Definición: El valor absoluto de un número es la cantidad expresada por el número, sin importar el signo.

Para indicar el valor absoluto de un número usaremos dos líneas verticales.

Valor absoluto $|\quad|$

Ejemplos: Anota el valor absoluto de cada uno de los números.

$|-3| = 3$ se lee valor absoluto de -3 es 3

$|-4| = 4$ se lee valor absoluto de -4 es 4

$|4| = 4$ se lee valor absoluto de 4 es 4

$|0| = 0$ se lee valor absoluto de 0 es 0

Aritmética

Aritmética

2.2. Operaciones

2.2.1. ADICIÓN O SUMA

Usaremos algunas reglas para efectuar la operación de suma de números enteros.

a) Signos iguales se suman conservando el mismo signo.

$$8 + 7 + 3 = 18$$
$$-8 - 7 - 3 = -18$$

b) Signos diferentes se restan conservando el signo del número de mayor valor absoluto.

$$8 - 2 = 6$$
$$-8 + 2 = -6$$

2.2.2. SUSTRACCIÓN O RESTA

Para efectuar la operación de resta de números enteros eliminamos primero los paréntesis.

$$(+6) - (+2) = 6 - 2 = 4$$
$$(+10) - (+6) = 10 - 6 = 4$$
$$(-8) - (-2) = -8 + 2 = -6$$

2.2.3. MULTIPLICACIÓN

Para efectuar la operación de multiplicación de números enteros, haremos uso de la siguiente regla para los signos.

(+) × (+) = +	(5)(4) = 20
(-) × (-) = +	(-6) (-3) =18
(+) × (-) = -	(8) (-5) = -40
(-) × (+) = -	(-7)(3) = -21

Si efectúas operaciones con más de dos factores se procede de la siguiente manera.

(5)(4)(2) = 40	(-6)(-3)(-2) = -36
(8)(-5) (-2) = 80	(-7)(3)(2) = -42
$-2\,[-3(3-4+5)\;-2(3-5)^2] = ?$	¿Cómo lo resolverías?

2.2.4. DIVISIÓN

Para efectuar la operación de división con números enteros haremos uso de la siguiente regla para los signos:

(+) ÷ (+) = +	8 ÷ 4 = 2
(+) ÷ (-) = -	8 ÷ (-4) = -2
(-) ÷ (-) = +	(-8) ÷ (-4) = 2
(-) ÷ (+) = -	(-8) ÷ (4) = -2

Aritmética

Propiedades:

a) Todo número dividido entre 1 es igual al mismo número.

$9 \div 1 = 9$ $\frac{10}{1} = 10$

b) Al dividir el cero entre cualquier número diferente de cero el cociente es igual a cero.

$\frac{0}{5} = 0$ $\frac{0}{25} = 0$ $\frac{0}{x} = 0$

c) El cero si lo usamos como divisor, el resultado no está definido, por lo tanto la división no existe.

$\frac{4}{0} = *$ $\frac{0}{0} = *$ $\frac{x}{0} = *$

*Indefinido

2.2.5. LA POTENCIACIÓN

Para poder llevar a cabo la operación de potenciación con números enteros se sigue la misma regla de los signos de la multiplicación.

$(-5)^2 = 25$ porque $(-5)(-5) = 25$

$(+10)^2 = 100$ porque $(+10)(+10) = 100$

$(-3)^3 = -27$ porque $(-3)(-3)(-3) = -27$

Aritmética

Aritmética

2.2.6. LA RADICACIÓN

Recuerda que la operación de radicación es la operación inversa de la potenciación.

$\sqrt{1} = 1$ porque $1^2 = (1)(1) = 1$

$\sqrt{4} = 2$ porque $2^2 = (2)(2) = 4$

$\sqrt{9} = 3$ porque $3^2 = (3)(3) = 9$

$\sqrt[3]{-8} = -2$ porque $(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$

$\sqrt[3]{-27} = -3$ porque $(-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = -27$

3. Numeros racionales

- NÚMEROS RACIONALES
  - OPERACIONES
    - SUMA
    - RESTA
    - MULTIPLICACIÓN
    - DIVISIÓN
  - ORDEN
    - REPRESENTACIÓN GRAFICA
    - VALOR ABSOLUTO

Aritmética

Aritmética

3.1. Definición

Son aquellos que se pueden representar en la forma a/b en donde b $\neq$ 0 y usaremos la letra **Q** como símbolo.

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Z} \cup \left\{ \frac{a}{b} \;/\; \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{Z} \right\}$$ El conjunto de los números racionales

Racionales = Enteros + Fracciones

3.2. Representación

Los números racionales son aquellos cuya representación puede ser una fracción común o un decimal que sigue un patrón decimal repetitivo.

$$\frac{2}{3} \quad \begin{array}{l} \longrightarrow \textbf{NUMERADOR} \\ \longrightarrow \textbf{DENOMINADOR} \end{array}$$

Aritmética

Fracciones comunes

$\frac{1}{2}$, $\frac{-1}{2}$, $\frac{-3}{4}$, $\frac{10}{3}$

Fracciones decimales

0.5, -0.5, 0.75, 0.3333..., 0.15151515..., 0.345345345...

3.3. Relación de equivalencia

Decimos que una fracción de la forma a/b es equivalente a c/d si lo escribimos así: a/b = c/d si ad = bc [se multiplica en cruz]

Ejemplos:

1/3 = 3/9 *porque (1)(9) =(3)(3)*
9 = 9

5/3 = 25/15 *porque (5)(15) = (3)(25)*
75 = 75

Aritmética

3.4. Fracciones decimales

Son aquellas que teniendo muchos ceros a la derecha del punto decimal su valor no cambia (decimal equivalente) o bien, que en su forma decimal infinita son periódicas.

Ejemplos:

0.2 = 0.20 = 0.200, etc.
0.65 = 0.650 = 0.6500
0.3333... = 1/3
.272727... = 3/11

$0.2 = \frac{2}{10}$, $0.20 = \frac{20}{100}$, $0.200 = \frac{200}{1000}$

$0.65 = \frac{65}{100}$, $0.650 = \frac{650}{1000}$, $0.6500 = \frac{6500}{10{,}000}$

3.5. Relación de orden

Apartir de las siguientes fracciones: a/b y c/d una de las siguientes relaciones es verdadera:

a) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ b) $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ c) $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

Esto nos permite ordenar las fracciones de mayor a menor o viceversa, según sea el caso.

Aritmética

Ejemplos:

$$\frac{3}{5} < \frac{4}{5} \qquad \frac{3}{7} < \frac{5}{7} \qquad \frac{7}{9} > \frac{4}{9}$$

**Si las dos fracciones son homogéneas, será menor aquella cuyo numerador sea menor*

Cuando las fracciones no son homogéneas, puedes hacerlas homogéneas usando el principio de fracciones equivalentes para convertirlas a homogéneas, con el **MCM** de los denominadores como denominador común.

Ejemplos: Determina si $\frac{2}{5}$ es menor que $\frac{3}{2}$

$$\frac{2}{5} = \frac{4}{10} \qquad y \qquad \frac{3}{2} = \frac{15}{10}$$

[Fracciones homogéneas]

Comparando los numeradores de las fracciones equivalentes.

$4 < 15$

$4/10 < 15/10$ por lo tanto $2/5 < 3/2$

Determina si $\frac{4}{7}$ es menor que $\frac{5}{3}$

$$\frac{4}{7} = \frac{12}{21} \quad \text{y} \quad \frac{5}{3} = \frac{35}{21}$$

Comparando los numeradores de las fracciones equivalentes vemos que

$$12 < 35 \qquad \text{por lo tanto} \qquad \frac{4}{7} < \frac{5}{3}$$

Coloca en orden ascendente (de menor a mayor) las fracciones $\frac{3}{5}, \frac{5}{6}, \frac{2}{3}$

Solución: Cambiamos las fracciones dadas a fracciones homogéneas equivalentes.

$$\frac{3}{5} = \frac{18}{30} \qquad \frac{5}{6} = \frac{25}{30} \qquad \frac{2}{3} = \frac{20}{30}$$

[*Fracciones equivalentes homogéneas*]

Aritmética

Comparando los numeradores de las fracciones equivalentes homogéneas vemos que 18 < 20 < 25 por lo tanto: 3/5 < 2/3 < 5/6 y esto nos permite ordenar las fracciones en orden ascendente.

$$\frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}$$

**Homogéneas: fracciones que tienen el mismo denominador*

3.6. Operaciones

Adición o suma de números racionales

Para sumar dos números racionales que tengan el mismo denominador a/b y c/b bastará con sumar los numeradores y conservar el denominador:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$$

Ejemplos:

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \qquad \frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7} \qquad \frac{5}{9} + \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

Cuando la suma de los relacionales no tiene el mismo denominador, debemos de encontrar fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador.

Ejemplos:

Fracciones equivalentes con el mismo denominador

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{4} =$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{4} = \frac{8}{12} \qquad \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{3} = \frac{15}{12}$$

$$\frac{8}{12} + \frac{15}{12} = \frac{8 + 15}{12} = \frac{23}{12}$$

$$\frac{3}{5} + \frac{4}{7} =$$

Aritmética

Solución: también puedes multiplicar cruzado para obtener los numeradores y multiplicar los denominadores.

$$\frac{3}{5} + \frac{4}{7} = \frac{21 + 20}{35} = \frac{41}{35}$$

**En la fracción a/b recuerda que hay dos tipos de fracciones, que son fracción propia si a < b y fracción impropia si a> b.*

Ejemplos:

$\frac{5}{6} \rightarrow \frac{a}{b}$, $\quad \frac{4}{5}$, $\frac{7}{9}$ fracciones propias

$\frac{6}{5} \rightarrow \frac{a}{b}$, $\quad \frac{8}{3}$, $\frac{7}{4}$ fracciones impropias

Recuerda que también existen fracciones mixtas que es otra manera de representar fracciones impropias y un número mixto es la suma de un número entero y una fracción.

Aritmética

Aritmética

Ejemplos:

$$3\frac{5}{8}, \qquad 8\frac{1}{3} \longrightarrow$$ *números mixtos*

Escribe $\frac{49}{32}$ *como a un número mixto.*

Solución La fracción $\frac{49}{32}$ se puede dividir

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline 32 & 49 \\ & 17 \end{array}$$

entonces $\frac{49}{32} = 1\frac{17}{32}$ *número mixto*

Sustracción o resta de números racionales. Para restar dos números racionales que tengan el mismo denominador $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$

Ejemplos:

$$\frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \qquad \frac{8}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \qquad \frac{5}{x} - \frac{2}{x} = \frac{3}{x} \qquad \frac{7}{5} - \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$$

Cuando al restar los números racionales no tienen el mismo denominador, debemos encontrar fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador.

Aritmética

Ejemplos:

$$\frac{7}{5} - \frac{4}{3} =$$

$$\frac{7}{5} \cdot \frac{3}{3} = \frac{21}{15}$$

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{5} = \frac{20}{15}$$

Fracciones equivalentes con el mismo denominador

$$\frac{7}{5} - \frac{4}{3} = \frac{21}{15} - \frac{20}{15} = \frac{1}{15}$$

Solución: También puedes multiplicar en cruz para obtener los numeradores y multiplicar los denominadores numeradores

$$\frac{8}{3} - \frac{6}{7} = \frac{56 - 18}{21} = \frac{38}{21}$$

$$\frac{7}{5} - \frac{4}{3} = \frac{21}{15} - \frac{20}{15} = \frac{1}{15}$$

Multiplicación de números racionales. El producto de dos números racionales da como resultado otro número racional y se obtiene multiplicando los numeradores y los denominadores., a /b y c/d entonces a/b .c/d = ac/bd.

Ejemplos:

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{5}=\frac{21}{20}$$

$$\frac{5}{3}\cdot\frac{9}{2}=\frac{45}{6}=\frac{15}{2}$$

$$5\frac{1}{3}\cdot 3\frac{1}{2}=\frac{16}{3}\cdot\frac{7}{2}$$

$$=\frac{112}{6}=\frac{56}{3}=18\frac{2}{3}$$

$$3\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{13}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{13}{20}$$

División de números racionales: el cociente de dos números racionales da como resultado otro número racional y se obtiene multiplicando la primera fracción por el recíproco de la segunda fracción.

$$\frac{a}{b} \text{ y } \frac{c}{d} \text{ entonces } \frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

Recíproco: el recíproco de un número $a \neq 0$ es un número "c" tal que $a.c = 1$.

Ejemplos:

El recíproco de 3 es $\frac{1}{3}$ *porque* $3.\frac{1}{3}=\frac{3}{3}=1$

El recíproco de $\frac{1}{3}$ es 3 *porque* $\frac{1}{3}.3=\frac{3}{3}=1$

Aritmética

El recíproco de $\frac{5}{5}$ *es* $\frac{4}{5}$ *porque* $\frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{20}{20} = 1$

**El número cero no tiene recíproco y ningún número tiene al número cero como recíproco.*

Ejemplos:

$$\frac{3}{5} \div \frac{2}{7} = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{2} = \frac{21}{10}$$

$$\frac{7}{6} \div \frac{8}{3}$$

$$\frac{9}{4} \div \frac{5}{7} = \frac{63}{20}$$

**El recíproco de* $\frac{2}{7}$ *es* $\frac{7}{2}$

(otra forma será multiplicar cruzado).

$$\frac{7}{6} \div \frac{8}{3} = \frac{(7)(3)}{(6)(8)} = \frac{21}{48} = \frac{7}{16}$$

La potenciación de números racionales: para poder llevar a cabo la potenciación de números racionales se sigue la siguiente regla:

$(a/b)^n = (a/b) (a/b) (a/b) = (a/b)^n$ “ n “ factores $(a/b)^n = a^n / b^n$

Aritmética

Ejemplos:

$(7/5)^2 = (7/5)\ (7/5) = 49/25$
ó $7^2 / 5^2 = 49 / 25$

$(3/2)^3 = (3/2)(3/2)(3/2) = 27/8$
ó $3^3/2^3 = 27/8$

$(1/5)^4 = (1/5)(1/5)(1/5)(1/5) = 1/625$
ó $1^4/5^4 = 1/625$

La radicación de números racionales: recuerda que la radicación es la operación inversa de la potenciación, para resolverla seguimos la siguiente regla.

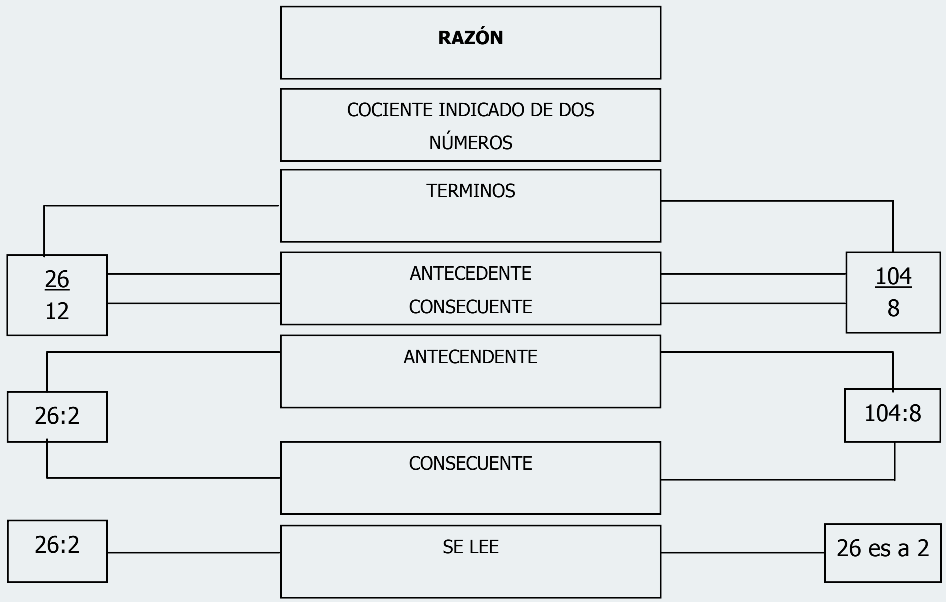
$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Ejemplos:

$$\sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3} \qquad \sqrt[3]{\frac{64}{27}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{4}{3} \qquad \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}} = \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}$$

3.7. Razones y proporciones

Razón: es el cociente indicado de dos números. Así por ejemplo, la razón entre el número “a” y el número “b” se representa como a/b. En toda razón puede distinguirse dos términos, el antecedente y el consecuente.



Ejemplo: Un atleta corrió en un maratón en 184 minutos. Si el maratón es una carrera de 52 kilómetros, ¿Cuál es la razón ente los kilómetros recorridos y el tiempo empleado?

$$\textit{La razón es } \frac{52}{184} = \frac{13}{46}$$

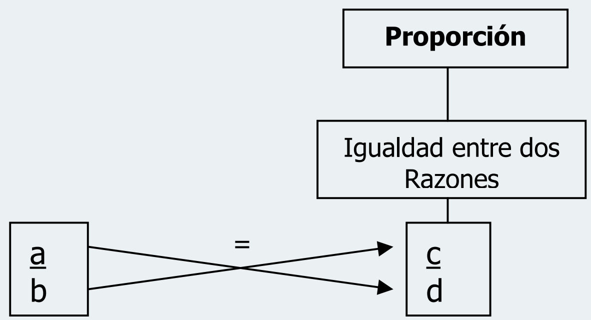
Aritmética

Ejemplo: el ancho de una casa mide 1,500 centímetros, en el plano el ancho es 5 centímetros ¿a qué escala está hecho el plano?

La escala es $\frac{5}{1,500} = \frac{1}{300}$*, esta escala indica una reducción.*

Proporción: es la igualdad entre dos razones y sus términos son los medios y los extremos.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$



Extremos = Medios

(a)(d) (b)(c)

**Las proporciones permiten calcular un término desconocido siguiendo la siguiente regla. El producto de los extremos es igual al producto de los medios (proporción directa).*

Aritmética

Ejemplos: Encuentra el valor desconocido (x) en cada proporción.

$$\frac{40}{4} = \frac{x}{2}$$

$(40)(2) = 4(x)$

$80 = 4x$

$$\frac{80}{4} = x$$

$x = 20$

$$\frac{15}{x} = \frac{5}{3}$$

$(15)(3) = (5)(x)$

$45 = 5x$

$$\frac{45}{5} = x$$

$x = 9$

$$\frac{6}{36} = \frac{2}{x}$$

$(6)() = (36)(2)$

$6x = 72$

$$x = \frac{72}{6}$$

$x = 12$

Ejemplo: un automóvil recorre 200 kilómetros en 5 horas. ¿Cuántos kilómetros puede recorrer en 12 horas a la misma velocidad?

Solución: Sabemos que la distancia recorrida será mayor si aumenta el tiempo, por lo tanto la razón entre el tiempo y la distancia recorrida será igual en cada caso.

$$\frac{5}{200} = \frac{12}{x} \qquad (5)(x) = (200)(12) \qquad 5x = 2400 \qquad x = \frac{2400}{5}$$

$x = 480$ km

**Proporción inversa: Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando el producto de cada pareja de valores asociados es constante. (x) [f(x)] = k*

Observa el siguiente cuadro.

x	f (x)
Velocidad	**Tiempo**
60 km/h	5 horas
50 km/h	6 horas
40 km/h	7 ½ horas
30 km/h	10 horas

En el cuadro anterior están las observaciones que hizo un trailero al trasladarse de una ciudad a otra. Observa que entre más tiempo empleaba menos le marcaba el velocímetro y entre mayor era la velocidad menor era el tiempo que tardaba en el viaje.

**Como observarás, las proporciones inversas se caracterizan en que para poder mantener un producto constante, cuando uno de los valores aumenta, el otro disminuye.*

(x)[f(x)] = k (x)[f(x)] = k
(60)(5) = 300
(50)(6) = 300

Aritmética

Aritmética

Ejemplo:

ÁREA DE UN RECTÁNGULO		
Base	**Altura**	**k**
6	6	36
9	4	36
12	3	36
18	2	36

3.8. Cálculo de porcentajes

Por ciento. El tanto por cierto o porcentaje comúnmente designado por el signo % significa tantas partes de cada 100.

Porcentajes

Por ciento	Fracción común	Fracción decimal
30 %	30/100 = 3/10	0.30
8 %	8/100 = 8/25	0.08
250 %	250/100 = 5/2	2.50

Para calcular el tanto por ciento.

CÁLCULO DE %

LA CANTIDAD SE MULTIPLICA POR EL PORCENTAJE

EL RESULTADO SE DIVIDE ENTRE 100

$$\left(\frac{r}{100}\right)(N)$$

Aritmética

Ejemplos: encuentra los siguientes porcentajes.		
El 2 % de 346 es: $\left(\frac{2}{100}\right)(346) = \frac{692}{100}$ R= 6.92	El 15 % de 524.2 es: $\left(\frac{15}{100}\right)(524.2)=\frac{7863}{100}=78.63$	¿De qué número es 100 el 40 %? Solución: puedes usar fracciones equivalentes para resolver problemas que se relacionen con porcentajes $\frac{40}{100} = \frac{100}{N}$ $(N)\left(\frac{40}{100}\right) = 100$ $N = \frac{(100)(100)}{40}$ $N = 250$

Aritmética

3.9. Potencias de 10 y notación científica

Potencias de 10. Mencionaremos que los exponentes usados adecuadamente nos servirán para efectuar operaciones con expresiones de valor numérico muy grande o muy pequeño, basándose esto en el manejo de las potencias de diez.

Al dividir un número entre 10, 100 ó 1000, etc., sólo vamos corriendo el punto decimal tantos lugares como sea el caso. Ejemplos:

$$\frac{4536}{10} = 453.6 \qquad \frac{4536}{100} = 45.36 \qquad \frac{4536}{1000} = 4.536$$

Al multiplicar también sucede lo mismo. Ejemplos:

$$453.6 \times 10 = 4536 \qquad 45.36 \times 100 = 4536 \qquad 4.536 \times 1000 = 4536$$

Podemos pensar que utilizando potencia de diez se puede representar cualquier número.

$10 = 10^1$	$1/10 = 10^{-1}$
$100 = 10^2$	$1/100 = 10^{-2}$
$1000 = 10^3$	$1/1000 = 10^{-3}$
$10000 = 10^4$	$1/10000 = 10^{-4}$

NOTACIÓN CIENTÍFICA

**Decimos que un número "N" está en notación científica cuando lo expresamos como el producto de un número P, $1 \leq P < 10$, por una potencia entera de 10.*
*Esto es $\mathbf{N} = \mathbf{P} \cdot 10^{n}$, donde $1 \leq \mathbf{P} < 10$ y **"n"** es un número entero.*

Aritmética

Ejemplos: Escribe cada número usando notación científica:

$84\ 700 = 8.47 \times 10^4$

$8.005 = 8.0 \times 10^0$

$0.0000000065 = 6.5 \times 10^{-9}$

$70\ 000\ 000 = 7.0 \times 10^7$ ó 7×10^7

$0.3007 = 3.0 \times 10^{-1}$

Ejemplos: Usa notación científica y efectúa la operación indicada.

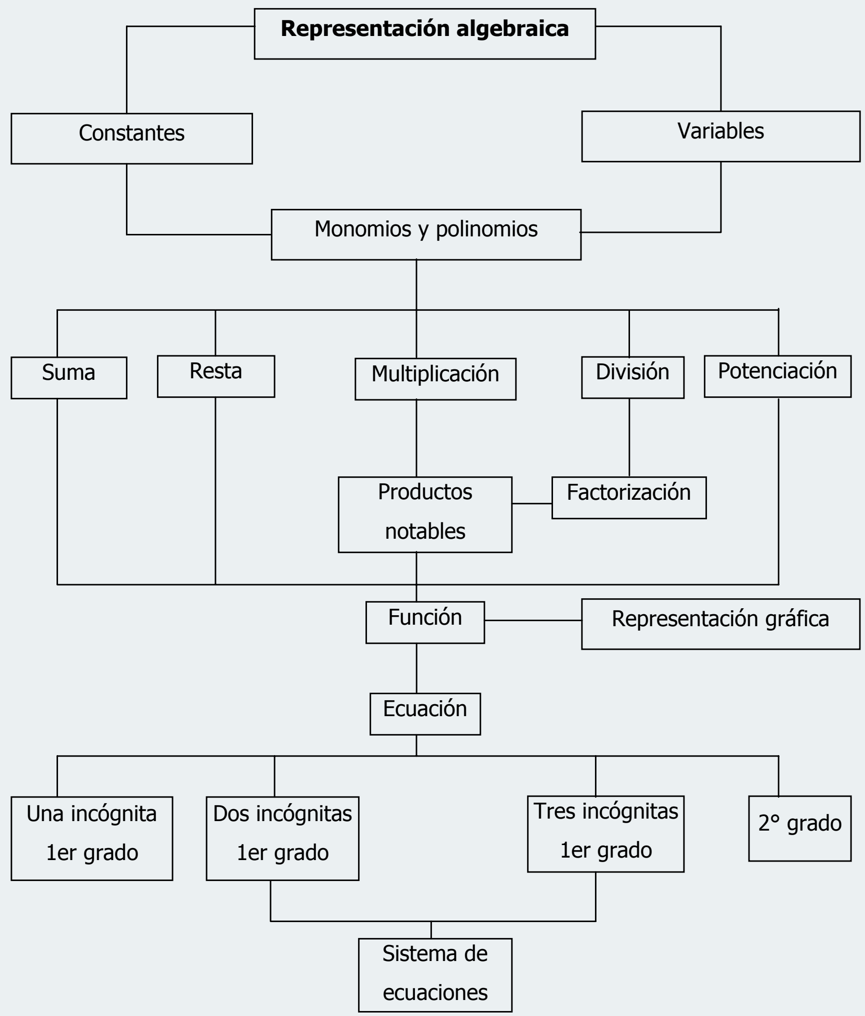
$(60\ 000)\ (700\ 000) = (6 \times 10^4)\ (7 \times 10^5)$

$= 42 \times 10^9 = 4.2 \times 10^{10}$

$(3\ 000)\ (200) = (3 \times 10^3)(2 \times 10^2) = 6 \times 10^5$

$$\frac{600\ 000}{200} = \frac{6 \times 10^5}{} = 3 \times 10^3$$

ÁLGEBRA


Representación algebraica
Constantes
Variables
Monomios y polinomios
Suma
Resta
Multiplicación
División
Potenciación
Productos notables
Factorización
Función
Representación gráfica
Ecuación
Una incógnita 1er grado
Dos incógnitas 1er grado
Tres incógnitas 1er grado
2° grado
Sistema de ecuaciones

Álgebra

1. Definiciones

Expresión Algebraica: un grupo de números y letras combinadas entre sí mediante una o más operaciones fundamentales.

$2x^2 + 5y - 3x + 4y^2 + 5$, xy , $\frac{1}{3}ab^2$; $3a + 5b - 2$ son expresiones algebraicas.

Término: Un número o una letra o varios números y letras combinadas entre sí mediante las operaciones de multiplicación y de división o de ambas, y separadas mediante los signos (+) o (-), recibe el nombre de término.

Ejemplos:

$6y^2$ *término*

$5a^2 - 2ab + 3b \longrightarrow$ *expresión algebraica*

Término

$3a - 4b^2$

Término

1.1. Elementos del término

Exponente

Signo → $-8a^2$ ← Parte literal

Coeficiente

Signo: Los términos positivos son lo que van precedidos del digno (+), los términos negativos son lo que van precedidos del signo (-)

$+ 5a^3$	$-15b^4$	$4c^4$
Término positivo	Término negativo	Término positivo

Coeficiente: es el número que indica cuantos sumandos iguales se toman.

Ejemplos:

6x, el 6 indica que se han tomado 6 sumandos iguales a “x”,
$6x = x + x + x + x + x + x$,
6 es el coeficiente.

Exponente: El exponente de un término es el número que se coloca en la parte superior derecha de una o más letras del término, para indicar el número de veces que dicha letra se ha tomado como factor.

$5y^3$ En el término *$5y^3$*, el 3 es el exponente que indica que se han tomado tres factores iguales a “y” así: $y^3 = y \times y \times y$

Álgebra

1.2. Clasificación de las expresiones algebraicas

Las expresiones algebraicas se clasifican de acuerdo con el número de términos incluidos en ellos.

Monomios, binomios, trinomios y polinomios, la expresión algebraica si consta de dos o más términos se llama polinomio.

Clasificación	
Monomio	$4a^2$
Binomio o polinomio	$3a + 5b^2$
Trinomio o polinomio	$2a^2 + 6b - 7c^3$
Polinomio	$5a^3 + 2b^4 + 3c - 8d^5$

1.3. Términos semejantes

Términos semejantes son aquellos que difieren por sus coeficientes numéricos, o sea son lo que tienen las mismas literales con los mismos exponentes correspondientes.

Ejemplos:

$6ab^3$ y $-8ab^3$; términos semejantes
$6a^3b$ y $8ab$; términos no semejantes

Álgebra

1.4. Leyes de los exponentes

Ley del producto de potencias de la misma base.

LEY I

$$a^m \ . \ a^n = a^{m+n} \quad ; m, n \in N$$

Ejemplos: Escribe como una potencia de un número.

$(3)^3 (3)^4 = 3^{3+4} = 3^7$

$(0.\ )(0.3)^2 = (0.3)^{1+2} = (0.)^3$

$(2)^2 \ (2) = 2^{2+1} = 2^3$

$(-4)^2 \ (-4)^3 = (-4)^{2+3} = (-4)^5$

$(1/3)^3 \ (1/3)^5 = (1/3)^{3+5} = (1/3)^8$

Como observarás en la multiplicación de potencias de la misma base, se deja la misma base y se suman los exponentes.

Ley de la potencia de una potencia.

LEY II

$$(a^m)^n = a^{m.n} \qquad m, n \in N$$

Álgebra

Ejemplos: escribe como una potencia de un número.

$(2^4)^2 = 2^{4.2} = 2^8$

$[(-2\ ^5]^6 = (-2)^{5.6} = (-2)^{30}$

$(3^3)^4 = 3^{3.4} = 3^{12}$

$[(0.03)^4]^2 = (0.03)^8$

$4(4^3)4 = 4.4^{3.4} = 4.4^{12} = 4^{13}$

Cuando se debe elevar una potencia a otra potencia se deja la misma base y se multiplican los exponentes.

Ley de la potencia de un producto.

LEY III

$$\boxed{(ab)^n = a^n b^n \qquad n \in N}$$

Ejemplos:

$(3.4)^5 = 3^5.4^5$ $\qquad (2.5)^8 = 2^8.5^8$ $\qquad 2^4.3^4 = (2.3)^4 = 6^4$

En la ley de la potencia de un producto, se eleva cada uno de los factores del producto a la potencia mencionada.

Ley de la potencia de un cociente.

LEY IV

$(a/b)^n = a^n/b^n \qquad b \neq 0 \; ; n \in N$

Ejemplos:

$(7/5)^8 = 7^8/5^8 \qquad 9^6/2^6 = (9/2)^6 \qquad (5/18)^4 = 5^4/18^4 \qquad (-4/5)^{11} = -4^{11}/5^{11}$

Para elevar un cociente a una potencia se elevan el numerador y el denominador a la misma potencia.

Ley del cociente de potencias de igual base.

LEY V

$a^m/a^n = a^{m-n} \quad a \neq 0 \qquad m \text{ y } n \in N$

Caso I $\qquad \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad$ cuando $m > n$, $a \neq 0$.

Caso II: $\qquad \dfrac{a^m}{a^n} = 1 \qquad$ cuando $m = n$, $a \neq 0$.

Caso III: $\qquad \dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{1}{a^{n-m}} \qquad$ cuando $n > m$; $a \neq 0$.

Álgebra

Por definición:

$a^0 = 1$ si $a \neq 0$, $a \in R$

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ si $a \neq 0$; $n \in N$

Para dividir potencias de la misma base se deja la base y se restan los exponentes.

Ejemplos:

$$\frac{a^6}{a^3} = \frac{a.a.a.a.a.a}{a.a.a} = a^{6-3} = a^3 \qquad \frac{a^5}{a^5} = \frac{a.a.a.a.a}{a.a.a.a.a} = a^{5-5} = a^0 = 1$$

$$\frac{2^4}{2^2} = \frac{2.2.2.2}{2.2.} = 2^{4-2} = 2^2 \qquad \frac{3^2}{3^5} = \frac{3.3}{3.3.3.3.3} = 3^{2-5} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3}$$

1.5. Operaciones

Adición o suma. Es la operación que tiene por objeto reunir varias cantidades de la misma especie en una sola.

El signo empleado para esta operación es (+).

Ejemplos:

$4a^2b + 5a^2b = 9a^2b$

$3xy^2 + 2xy^2 = 5xy^2$

$6xy + xy = 7xy$

$4a^2b + 3ab = 4a^2b + 3ab$

$$\begin{array}{r}
a^4 + 4a^3x + 5a^2x^2 + 3ax^3 + x^4 + 7 \\
2a^4 + 3a^3x + 2a^2x + ax^3 + 2x^4 + 3 \\
3a^4 + a^3x + 3^{a2}x^2 + 2ax^3 + 5x^4 + 2 \\
\hline
6a^4 + 8a^3x + 10a^2x^2 + 6ax^3 + 8x^4 + 12
\end{array}$$

Sustracción o resta: el signo empleado para esta operación es (-)

Ejemplos:

$5a^2b – 3a^2b = 2a^2b$

$-5a^2b + 3a^2b = -2a^2b$

$8xy – 2xy = 6xy$

$2xy – 8xy = -6xy$

$$\begin{array}{r}
x^4 + 2x^3y + 6x^2y^2 + 5xy^3 + y^4 + 8 \\
-2x^4 - x^3y - 4x^2y^2 - 3xy^3 - y^4 - 5 \\
3x^4 + 3x^3y - 3x^2y^2 - 6xy^3 + 3y^4 + 2 \\
\hline
2x^4 + 4x^3y - x^2y^2 - 4xy^3 + 3y^4 + 5
\end{array}$$

Multiplicación: es la operación que tiene por objeto repetir un número como sumando, tantas veces como unidades tiene el otro.

El signo de la multiplicación es una cruz (×) ó un punto (.), o bien, utilizando paréntesis ( ).

Álgebra

Ejemplos:

$$(2x)(3y) = 6xy$$

$$(3x)(2x + 4y) = 6x^2 + 12xy$$

$$(x)(4x + 2y - 5z) = 4x^2 + 2xy - 5xz$$

$$(a + b)(a^2 + 2ab + b^2)$$
$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\begin{array}{r} x^2 + 2xy - 3y^2 \\ \times \quad x^2 - xy + 2y^2 \\ \hline x^4 + 2x^3y - 3x^2y^2 \qquad\qquad\qquad \\ - x^3y - 2x^2y^2 + 3xy^3 \qquad \\ + 2x^2y^2 + 4xy^3 - 6y^4 \\ \hline x^4 + x^3y - 3x^2y^2 + 7xy^3 - 6y^4 \end{array}$$

Recuerda aplicar la ley de los signos para la multiplicación y la ley de los exponentes para resolver la operación de multiplicación.

División: es la operación que tiene por objeto, repartir un número, en tantas partes iguales como unidades tiene el otro, o hallar las veces que un número contiene a otro. El signo de la división se representa de las siguientes formas:

a ÷ b **a : b** $\mathbf{\frac{a}{b}}$ **a/b**

Álgebra

Ejemplos:

$$\frac{4x^2y - 8xy^2 + 12x}{4x} = \frac{4x^2y}{4x} - \frac{8xy^2}{4x} + \frac{12x}{4x} = xy - 2y^2 + 3$$

$$(8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3) \div (4x^2 + 4xy + y^2)$$

$$\begin{array}{llrl}
 & & 2x + y & \longleftarrow \textbf{Cociente} \\
\textbf{Divisor} & 4x^2 + 4xy + y^2 & \overline{\big)\, 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3} & \longleftarrow \textbf{Dividendo} \\
 & & \underline{-8x^3 - 8x^2y - 2xy^2 \quad} & \\
 & & +4x^2y + 4xy^2 + y^3 & \longleftarrow \textbf{Primer residuo} \\
 & & \underline{-4x^2y - 4xy^2 - y^3} & \\
 & & 0 & \longleftarrow \textbf{Residuo}
\end{array}$$

**Recuerda aplicar la ley de los signos para la división y la ley de los exponentes para la realización de la operación de división.*

1.6. Valor numérico de las expresiones

El valor numérico de una expresión algebraica se calcula sustituyendo las literales por sus valores correspondientes, después se efectuarán las operaciones.

Ejemplos:

Encontrar el valor numérico de la expresión: $4a + 2ab$, sí: $a = 2$ y $b = 1$
Solución:

$4a + 2ab = 4(2) + 2(2)(1) = 8 + 4 = 12$

Encontrar el valor numérico de la expresión: $3a^2 + 4ab$, si: $a = 3$ y $b = 1$
Solución:

$3a^2 + 4ab = 3(3)^2 + 4(3)(1) = 3(9) + 12 = 27 + 12 = 39$

Encontrar el valor numérico de la expresión: $5a^2 - 3ab$, sí: $a = 2$ y $b = 2$.
Solución:

$5a^2 - 3ab = 5(2)^2 - 3(2)(2) = 5(4) - 3(4) = 20 - 12 = 8$

Álgebra

1.7. Traducción de lenguaje verbal a lenguaje matemático

Traducir es representar en forma algebraica las expresiones verbales.

Ejemplos:

La representación algebraica de la expresión: El triple de un número aumentado en cuatro unidades.
Solución: $3x + 4$

La representación algebraica de la expresión: el cuadrado de un número disminuido en cuatro unidades.
Solución: $x^2 - 4$

La representación algebraica de la expresión: el cociente de dos números
Solución: $\frac{x}{y}$

1.8. Productos notables

Se llaman productos notables a ciertos productos que cumplen reglas fijas y cuyo resultado puede ser escrito por simple inspección, es decir, sin verificar la multiplicación. De este modo se puede, para muchos tipos de productos, abreviar el proceso de multiplicación.

Producto de dos binomios con términos semejantes.

Álgebra

Términos semejantes

$(ax + by)\,(cx + dy)$

Términos semejantes

Ejemplo: Obtén el siguiente producto.

(2a + 3b)(3a- 4b)

Solución:

$(2a + 3b)(3a - 4b) = 6a^2 – 8ab + 9ab – 12b^2$

1.- $(2^a)(3^a) = 6^{a2}$
2.- $(2^a)(-4b) = -8ab$
3.- $(3b)(3^a) = 9ab$
4.- $(3b)(-4b) = -12b^2$
$(2a + 3b)(3a – 4b) = 6a^2 + ab – 12b^2$

Resultado final

(3x + 2y)(4x + 3)

Solución:

$(3x + 2y)(4x + 3y) = 12x^2 + 9xy + 8xy + 6y^2$

1.- $(3x)(4x) = 12x^2$
2.- $(3x)(3y) = 9xy$
3.- $(2y)(4x) = 8xy$
4.- $(2y)(3y) = 6y^2$
$(3x + 2y)(4x + 3y) = 12x^2 + 17xy + 6y^2$

Resultado final

Álgebra

El cuadrado de la suma o diferencia de un binomio.

El cuadrado de la suma del binomio (x + y) se expresa:

$$(x + y)^2 = (x + y)(x + y)$$

$$(x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x^2 + xy + xy + y^2$$

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

El cuadrado de la diferencia del binomio (x – y) se expresa:

$$(x - y)^2 = (x - y)(x - y)$$

$$(x - y)^2 = (x - y)(x - y) = x^2 - xy - xy + y^2$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

En consecuencia diremos que: “El cuadrado de la suma o diferencia de un binomio es igual al cuadrado del primer término más o menos dos veces el producto del primer término por el segundo término, más el cuadrado del segundo término”.

Álgebra

Ejemplo: Obtener el cuadrado de:

$(2a + 3b)^2$

Solución:

$$(2a + 3b)^2 = (2a + 3b)(2a + 3b)$$
$$= 4a^2 + 6ab + 6ab + 9b^2$$
$$(2a + 3b)^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2$$

$(3x – 4y)^2$

Solución:

$$(3x - 4y)^2 = (3x - 4y)(3x - 4y)$$
$$= 9x^2 - 12xy + 16y^2$$
$$(3x - 4y)^2 = 9x^2 - 24xy + 16y^2$$

El producto de la suma y diferencia de dos números.

El producto de la suma y diferencia de dos números “x” e “y” se expresa como $(x + y)(x – y)$
Y se les llama binomios conjugados.

$$(x + y)(x - y) = x^2 - xy + xy - y^2$$

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

El resultado recibe el nombre de **diferencia de cuadrados.**

Ejemplos: Obtener el producto de:

$$(3x + 4y)(3x - 4y) = (3x)^2 - (4y)^2 = 9x^2 - 16y^2$$

$$(4x + y)(4x-y) = (4x)^2 - (y)^2 = 16x^2 - y^2$$

Álgebra

Álgebra

1.9. Factorización

Factorización: Operación que consiste en descomponer una expresión algebraica en dos o más factores cuyo producto es igual a la expresión propuesta. Es la operación inversa de la multiplicación.

En la factorización se involucran los siguientes casos:

- Factor común
- Diferencia de dos cuadrados
- Trinomio cuadrado perfecto
- Trinomio de segundo grado de la forma: $x^2 + bx + c$

Factor Común: al factorizar cualquier expresión es conveniente separar el factor común de todos los términos, en caso de que lo haya.

Ejemplos: Descomponer las expresiones siguientes en factores.

$x + x^2 = x(1 + x)$ $\quad$ $x^3 - x^5 + x^7 = x^3(1 - x^2 + x^4)$ $\quad$ $6a^3 + 4a^2 - 2a = 2a(3a^2 + 2a - 1)$

Para encontrar el factor común, con respecto a las literales se escoge la letra que esté en todos los términos y con el menor exponente, y con respecto a los coeficientes es conveniente elegir el M.C.D. de los términos de la expresión.

Hay ocasiones que en una expresión cuyos términos no contienen ningún factor común pueden ser separados en grupos de términos con algún factor común.

Álgebra

Ejemplos:

Factorizar:

$4x + 4y + ax + ay$

Solución:

a) *Primero escoge aquellos términos que tengan algo en común, y agrúpalos adecuadamente.*

$$4x + 4y + ax + ay = (4x + ax) + (4y + ay)$$

b) *Encuentra el factor común de cada una de las agrupaciones anteriores.*

$$(4x + ax) + (4y + ay) = x(4 + a) + y(4 + a)$$

c) *Obtener el factor común de la expresión anterior.*

$$x(4 + a) + y(4 + a)$$

$$x(4 + a) + y(4 + a)= (4 + a)(x + y)$$

Entonces $4x + 4y + ax + ay = (4 + a)(x + y)$

$$2ax - 15by - 10ay + 3bx = (2ax - 10ay) + (3bx - 15by) = 2a (x - 5) + 3b(x - 5y)$$

$$2ax - 15by - 10ay + 3bx = (x - 5y)(2a + 3b)$$

Álgebra

Factorización de una diferencia de dos cuadrados.

Para factorizar una diferencia de cuadrados de la forma $x^2 - y^2$, se realiza como el producto de dos binomios conjugados de la forma $(x + y)(x - y)$, donde el término común x es una raíz cuadrada del minuendo y los términos simétricos (y) y (-y) son las raíces cuadradas del sustraendo, es decir:

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

Ejemplos: Encuentra los factores de las siguientes expresiones:

$36x^2 - 25y^2$ $\qquad$ $a^4 - 49 = (a^2 + 7)(a^2 - 7)$

Solución:

a) Obtener la raíz cuadrada de cada término.

$$\sqrt{36x^2} = 6x \qquad \sqrt{25y^2} = 5y$$

b) Se escriben los resultados como binomios conjugados

$$36x^2 - 25y^2 = (6x + 5y)(6x - 5y)$$

**Recuerda que para obtener la raíz cuadrada de un monomio se extrae la raíz cuadrada de su coeficiente y se divide el exponente de cada letra entre dos.*

Álgebra

Factorización de trinomios cuadrados perfectos.

Recuerda que el resultado de elevar al cuadrado un binomio de la forma (x + y) o de la forma (x – y) era un trinomio cuadrado perfecto, es decir.

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \longleftarrow \text{Trinomio cuadrado perfecto.}$$

Binomio al cuadrado

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

Esto significa que si tenemos un trinomio cuadrado perfecto, podemos expresarlo como el cuadrado de un binomio.

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$
$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$$

Ejemplos: Factoriza las siguientes expresiones.

$$4x^2 + 24xy + 36y^2 = (2x + 6y)^2 = (2x + 6y)(2x + 6y)$$

$$9x^2 - 48x + 64 = (3x - 8)^2 = (3x - 8)(3x - 8)$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^4}{9} - \frac{2xy^2}{15} = \left(\frac{x}{5} - \frac{y^2}{3}\right)^2$$

Factorización de un trinomio general de segundo grado de la forma: $x^2 + bx + c$.

El trinomio se factoriza como el producto de dos binomios con términos semejantes.

Ejemplos:

Factoriza las siguientes expresiones.

$x^2 + 6x + 5 = (x + 5)(x + 1)$

$y^2 + 5y - 24 = (y + 8)(y - 3)$

$a^2 - 9a + 18 = (a - 6)(a - 3)$

$b^2 - 2b - 35 = (b - 7)(b + 5)$

Para factorizar un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, sigue la regla siguiente:

a) El trinomio se factoriza en dos binomios, encontrando la raíz cuadrada del primer término y serán los primeros términos de los binomios.

b) Para encontrar los signos de cada binomio se multiplica el signo del primer término por el signo del segundo término y el signo del segundo término por el signo del tercer término.

c) Para encontrar los segundos términos de los binomios se buscan dos números que multiplicados den el tercer término y que sumados algebraicamente den el segundo término.

Álgebra

2. Funciones

2.1. Definición

Una función es una relación en la cual a todo elemento de un conjunto "X" le corresponde un valor de un segundo conjunto "Y".[Parejas ordenadas (x , y)].

Al conjunto "**X**" se llama dominio de la función (**D**)

Al conjunto "**Y**" se llama imagen, rango o contradominio de la función (**R**).

Ejemplo:

En las parejas ordenadas {(1,3) (2,4) (3,5)}

El dominio es D = {1, 2, 3}

El rango es R = {3, 4, 5}

Para denotar funciones puedes utilizar cualquier letra. Por ejemplo: f(x) se lee**: " f de x"**, o bien g(x), que se lee **"g de x"**

Ejemplos:

Si f(x) = 3x + 1, encuentra f (2):

Solución: f (2) es el valor de la función
Cuando x = 2
f (x) = 3x + 1
f (2) = 3 (2) + 1 = 6 + 1 = 7

Si g(x) = 4x – 2; encuentra g (3):

Solución: g (x) = 4x + 2
g (3) = 4(3) – 2 = 12 – 2 = 10

2.2. Trazo e interpretación de gráficas cartesianas

Las gráficas son también útiles para comprender las relaciones que existen cuando una función se representa mediante una ecuación.

Ejemplos:

Graficar la siguiente función: f (x) = 2x + 1

Solución:

a) Darle valores arbitrarios a ***"x"*** *(-2, -1, 0, 1, 2) y sustituirlos en la función para encontrar los de f (x).*

Función: f(x) = 2x + 1

f(-2) = 2(-2) + 1
f (-2) = -4 + 1
f (-2) = -3

f (-1) = 2(-1) + 1
f (-1) = -2 + 1
f (-1) = -1

f (0) = 2(0) + 1
f (0) = 0 + 1
f (0) = 1

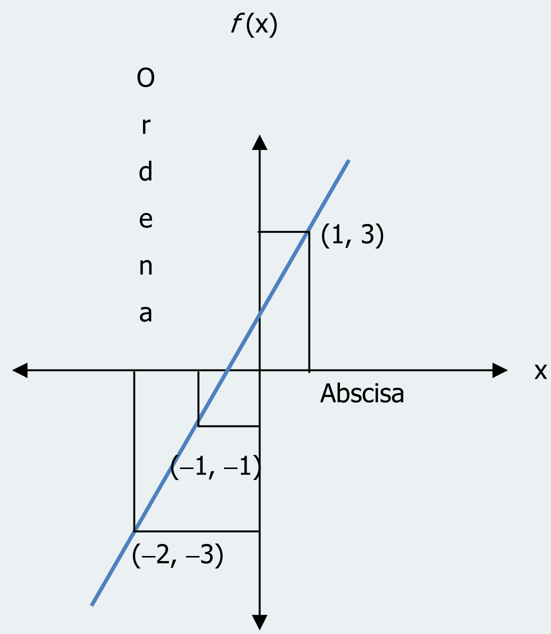
f (1) = 2 (1) + 1
f (1) = 2 + 1
f (1) = 3

f (2) = 2(2) + 1
f (2) = 4 + 1
f (2) = 5

b) Graficar los puntos encontrados en un plano cartesiano.

x	**f(x)**	[**x, f(x)**]
–2	–3	(–2, –3)
–1	–1	(–1, –1)
0	1	(0, 1)
1	3	(1, 3)
2	5	(2, 5)

Álgebra



c) La gráfica representa una función lineal y su gráfica es una recta

Graficar la siguiente función: $f(x) = x^2 - 3$

Solución:

a) Darle valores arbitrarios a ***"x"*** *(-2,-1, 0, 1, 2)*

b) Sustituirlos en la función para encontrar los de ***f(x)****.*
Función: $f(x) = x^2 – 3$

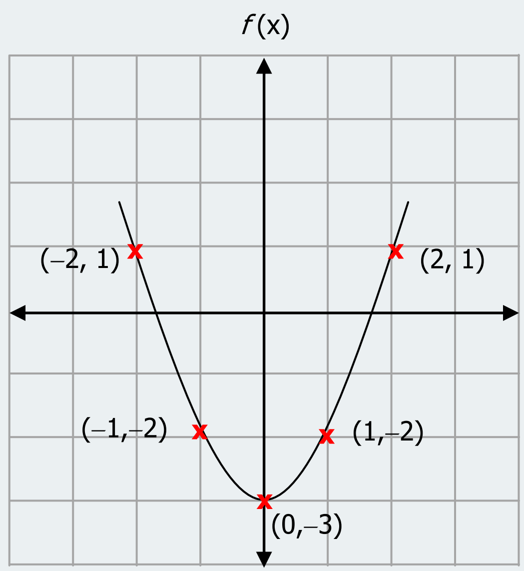
f(2) = (2)2 3	f(1) = (1)2 3	f(0) = (0)2 3	f(1) = (1)2 3	f(2) = (2)2 3
f(2) = 4 3	f(1) = 1 3	f(0) = 0 3	f(1) = 1 3	f(2) = 4 3
f(2) = 1	f(1) = 2	f(0) = 3	f(1) = 2	f(2) = 1

c) Graficar los puntos encontrados en un plano cartesiano.

x	**f(x)**	[**x, f(x)**]
–2	1	(–2, 1)
–1	–2	(–1, –2)
0	–3	(0, –3)
1	–2	(1, –2)
2	1	(2, 1)

Álgebra

Álgebra



La gráfica representa una curva y recibe el nombre de parábola.

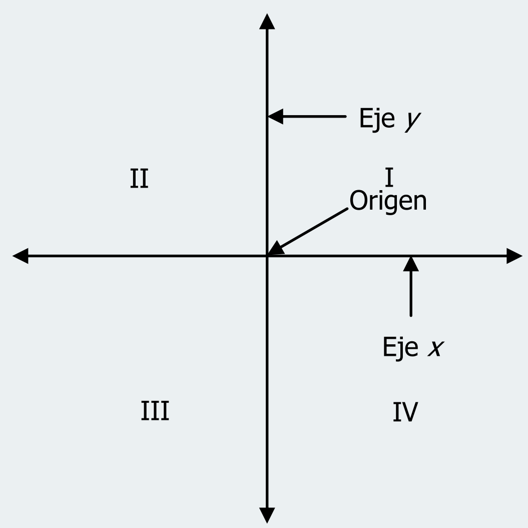
Recuerda que: la gráfica de una función es una representación geométrica de todos los puntos en un plano cuyas coordenadas son parejas ordenadas de valores que satisfacen una función y = f(x).

2.3. Coordenadas de un punto, ejercicios de localización de puntos y otras actividades en un plano cartesiano

Plano cartesiano: Es un plano dividido en cuatro regiones por un sistema de ejes coordenados.

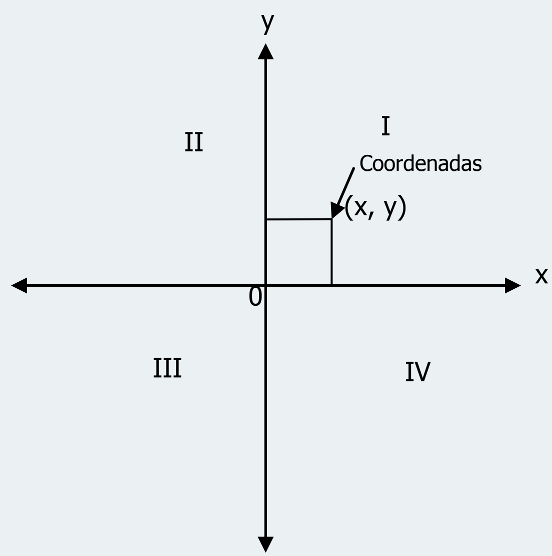
Cuadrantes:

I, II, III, IV



Álgebra

Coordenadas: es un punto localizado en un plano cartesiano formado por un par ordenado (x, y)



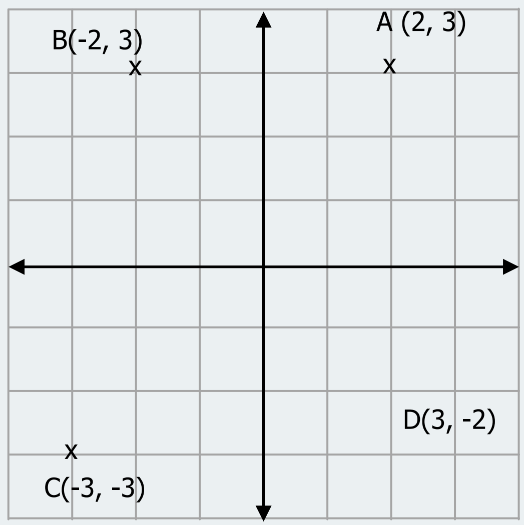
Ejemplo: Localiza los siguientes puntos en un plano cartesiano.

A(2, 3)

B(–2, 3)

C(–3, –3)

D(3, –2)



Álgebra

3. Ecuaciones

3.1. Ecuaciones de primer grado

Son aquellas igualdades (**=**) en el que el exponente de la variable es uno.

Ejemplo: $5x + 2 = 3x + 6$

Partes de la Ecuación:

Variable: x
Miembro izquierdo de la ecuación es: $5x + 2$
Miembro derecho de la ecuación es: $3x + 6$

3.2. Solución de ecuaciones lineales

Resolver una ecuación es encontrar el valor de la variable que haga verificar la igualdad.

Ejemplo: Resolver la siguiente ecuación, aplicando las propiedades de la igualdad.

$$5x + 2 = 12$$

Solución:

a) Suma un –2 a ambos lados de la ecuación y simplifica. $5x + 2 = 12$ $5x + 2 - 2 = 12 - 2$ $5x = 10$	b) Divide entre 5 ambos lados de la ecuación y simplifica. $5x = 10$ $\frac{5x}{5} = \frac{10}{5}$ $x = 2$	c) Comprueba el resultado sustituye el valor de “x” en la ecuación original. $5x + 2 = 12$ $5(2) + 2 = 12$ $10 + 2 = 12$ $12 = 12$

Álgebra

$4x + 5 = 3x + 8$

Solución:

$4x + 5 = 3x + 8$
$4x = 3x + 8 - 5$
$4x = 3x + 3$
$4x - 3x = 3$
$x = 3$

Comprobación

$4x + 5 = 3x + 8$
$4(3) + 5 = 3(3) + 8$
$12 + 5 = 9 + 8$
$17 = 17$

Álgebra

3.3. Ecuaciones de la forma: a + x = b

La solución de una ecuación de la forma **a + x = b** es **x = b – a**

Ejemplos: Resuelve las siguientes ecuaciones:

$x + 8 = 3$	$4 + z = 6$	$y + 6 = 18$
Solución:	*Solución:*	*Solución:*
$x + 8 = 3$	$4 + z = 6$	$y + 6 = 18$
$x = 3 - 8$	$z = 6 - 4$	$y = 18 - 6$
$x = -5$	$z = 2$	$y = 12$

Ecuaciones de la forma: ax = b

La solución de las ecuaciones de la forma **ax = b** es **x = b/a**

Ejemplos: Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{6x = 18} \qquad \mathbf{8x = \frac{3}{2}} \qquad \mathbf{\frac{7}{4}t = -\frac{7}{2}}$$

Solución:

$6x = 18$

$x = \dfrac{18}{6}$

$X = 3$

Solución: $8x = \dfrac{3}{2}$

$X = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{1}{8}$

$X = \dfrac{3}{16}$

Solución: $\dfrac{7}{4}t = -\dfrac{7}{2}$

$t = \dfrac{\frac{-7}{2}}{\frac{7}{4}}$

$t = -\dfrac{28}{14}$

$t = -2$

Álgebra

Ecuaciones de la forma: ax + b = c

La solución de las ecuaciones de la forma **ax + b = c** es $\mathbf{x = \dfrac{c - b}{a}}$

Ejemplos: Resuelve las siguientes ecuaciones.

5x + 7 = 22
Solución
$5x + 7 = 22$
$5x = 22 - 7$
$5x = 15$
$x = \frac{15}{5}$
$x = 3$

8x + 8 = 24
Solución:
$8x + 8 = 24$
$8x = 24 - 8$
$8x = 16$
$x = \frac{16}{8}$
$x = 2$

Ecuaciones de la forma ax: + b = cx + d

Las ecuaciones de la forma **ax + b = cx + d** se resuelven por el proceso de despeje y tienen como solución:

$$x = \frac{d - b}{a - c}$$

Ejemplos: Resuelve las siguientes ecuaciones:

5x + 12 = 3x + 16
Solución: $5x + 12 = 3x + 16$
$5x - 3x + 12 = 16$
$2x + 12 = 16$
$2x = 16 - 12$
$2x = 4$
$x = \frac{4}{2}$
$x = 2$

8 – 3t = 14 – 5t
Solución: $8 - 3t = 14 - 5t$
$8 - 3t + 5t = 14$
$8 + 2t = 14$
$2t = 14 - 8$
$2t = 6$
$t = \frac{6}{2}$
$t = 3$

Álgebra

Ecuaciones de la forma: ax + bx + c = dx + ex + f

Las ecuaciones de la forma ax + bx + c = dx + ex + f se resuelven por el proceso de despeje y tienen como solución:

$$x = \frac{f - c}{a + b - d - e}$$

Ejemplos: Resuelve las siguientes ecuaciones.

5x + 4x + 6 = 4x +3x +16

Solucion: 5x + 4x + 6 = 4x +3x +16

$$\begin{aligned} 9x + 6 &= 7x + 16 \\ 9x - 7x + 6 &= 16 \\ 2x + 6 &= 16 \\ 2x &= 16 - 6 \\ 2x &= 10 \\ x &= \frac{10}{2} \\ x &= 5 \end{aligned}$$

3x + 6x + 2 = 2x + 3x + 18

Solución: 3x + 6x + 2 = 2x + 3x +18

$$\begin{aligned} 9x + 2 &= 5x + 18 \\ 9x - 5x + 2 &= 18 \\ 4x + 2 &= 18 \\ 4x &= 18 - 2 \\ 4x &= 16 \\ x &= \frac{16}{4} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

3.4. Despeje de literales (en fórmulas)

Hay ocasiones en que nos vemos en la necesidad de despejar una variable en las fórmulas matemáticas, físicas o químicas, en las muy variadas aplicaciones que se hacen de ellas.

Ejemplos: Despeja la literal que se indica en cada fórmula.

A = Dd, despeja "D"

Solución: $A = Dd$ $\qquad \dfrac{A}{d} = \dfrac{Dd}{d} \qquad \dfrac{A}{d} = \dfrac{Dd}{d} \qquad \dfrac{A}{d} = D \qquad \boxed{D = \dfrac{A}{d}}$

$A = \dfrac{bh}{2}$ $\quad b = ?$ $\quad$ *Solución:* $A = \dfrac{bh}{2} \qquad 2A = \dfrac{(bh)(2)}{2} \qquad \dfrac{2A}{h} = \dfrac{bh}{h} \qquad \dfrac{2A}{h} = \dfrac{bh}{h} \qquad \boxed{\dfrac{2A}{h} = b}$

$\dfrac{PV}{T} = K$ $\qquad$ *Solución:* $\dfrac{PV}{T} = K \qquad \dfrac{PV}{K} = T \qquad \boxed{T = \dfrac{PV}{K}}$

$PV = KT$

Despeja "T"

3.5. Rectas en el plano

Una recta en el plano cartesiano es un conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen una ecuación.

Ejemplos: Encuentra la gráfica de la siguiente ecuación.

$$Y = 2x + 1$$

Solución:

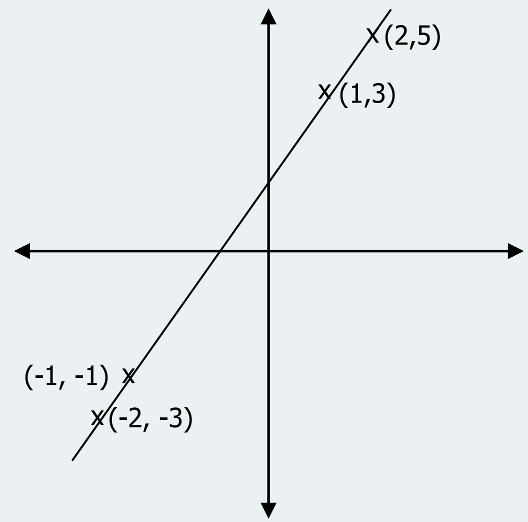
a). Dar a “x” valores arbitrarios (-2, -1, 0, 1, 2) y sustituirlos en la ecuación.

$y = 2x + 1$	$y = 2x + 1$	$y = 2x + 1$	$y = 2x + 1$	$y = 2x + 1$
$y=(2)(-2) + 1$	$y = 2(-1) + 1$	$y = 2(0) + 1$	$y = 2(1) + 1$	$y = 2(2) + 1$
$y = -4 + 1$	$y = -2 + 1$	$y = 0 + 1$	$y = 2 + 1$	$y = 4 + 1$
$y = -3$	$y = -1$	$y = 1$	$y = 3$	$y = 5$

b). Graficar los puntos encontrados en un plano cartesiano y unirlos por una línea contínua.

x	y
–2	–3
–1	–1
0	1
1	3
2	5

Álgebra



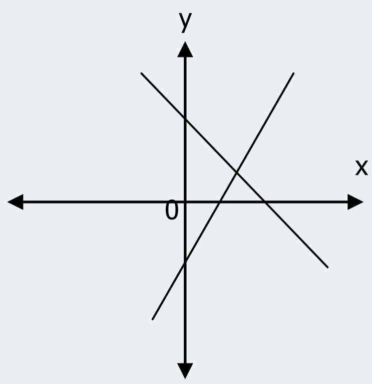
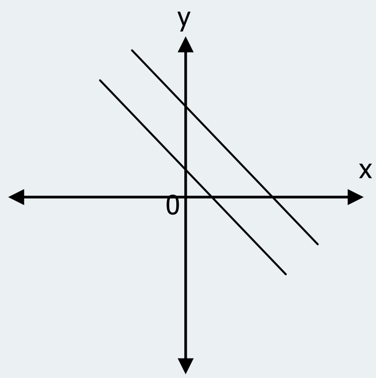
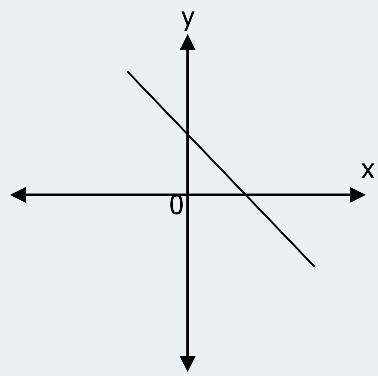
c). La gráfica representa una línea recta.

Álgebra

4. Sistemas de ecuaciones lineales

4.1. Concepto de sistema con dos ecuaciones lineales

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas tiene una única solución cuando las rectas que representan a las ecuaciones se cortan en un punto, ninguna solución si dichas rectas no se cortan (rectas paralelas distintas), y una infinidad de soluciones cuando las rectas coinciden.

		
a)Única solución	b) No hay solución	c)Infinidad de soluciones (una recta esta sobre la otra recta)

Para la solución de sistema de dos ecuaciones con dos variables haremos uso de cuatro métodos que son:

1) Método gráfico.
2) Método de suma y resta.
3) Método de sustitución.
4) Método de igualación.

4.2. Método gráfico

El método gráfico consiste en obtener la gráfica de cada una de las ecuaciones y la solución se encuentra determinando las coordenadas del punto de intersección de ambas rectas.

Ejemplos: Encuentra los valores de **"x", "y"** que satisface el siguiente sistema.

Ec. 1 $2x + y = 8$
Ec. 2 $3x + y = 11$

Solución:

a) Se despeja una variable de cada ecuación.

$2x + y = 8$	$3x + y = 11$
$y = 8 – 2x$	$y = 11 – 3x$

b) Se hace una tabulación, dándole valores a "x" y sustituirlos en cada ecuación despejada.

$y = 8 – 2x$	$y = 8 – 2x$	$y = 8 –2x$	$y = 8 –2x$
$y = 8 –2x$	$y = 8 –2 (0)$	$y = 8 –2 (1)$	$y = 8 –2 (2)$
$y = 8 –2 (-1)$	$y = 8 – 0$	$y = 8 – 2$	$y = 8 – 4$
$y = 8 + 2$	$y = 8$	$y = 6$	$y = 4$
$y = 10$			

y = 11–3x
y = 11–3 (-1)
y = 11+3
y = 14

y = 11–3x
y = 11–3 (0)
y = 11–0
y = 11

y=11–3x
y=11–3 (1)
y=11–3
y=8

y = 11–3x
y = 11–3(2)
y = 11–6
y = 5

y = 11–3x
y = 11-3(3)
y = 11–9
y = 2

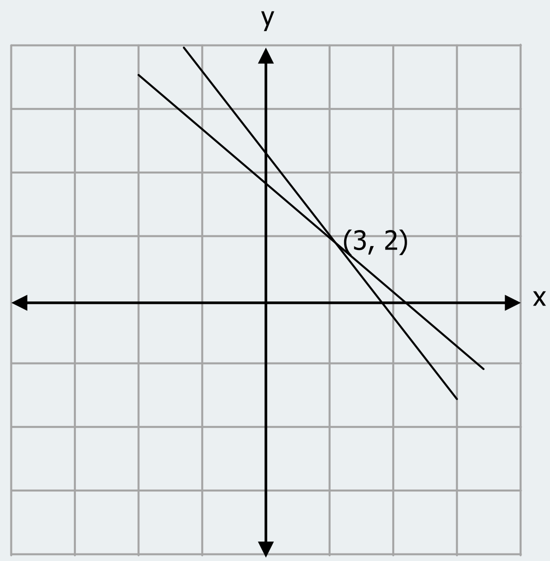
c) Se grafican los puntos encontrados de cada ecuación en un plano cartesiano.

x	**y**
–1	10
0	8
1	6
2	4
3	2

x	**y**
–1	14
0	11
1	8
2	5
3	2

Álgebra

Álgebra



d) En la intersección se encuentran los valores de **"x", "y".**
En este caso el valor de **"x = 3"** y el valor de **"y = 2".**

e) El conjunto solución es: {(3, 2)}
x, y

4.3. Método de suma y resta

El método consiste en eliminar una variable sumando algebraicamente ambas ecuaciones y utilizando la propiedad multiplicativa de las igualdades.

Ejemplo: Encuentra el conjunto solución (x, y) del siguiente sistema.

Sistema de Ecuaciones:

Ec. 1 $6x + 3y = 12$
Ec. 2 $\underline{3x + 4y = 11}$

Solución:

a) Multiplica la Ec. 1 por (4) y la Ec. 2 por (-3) para encontrar ecuaciones equivalentes.

$(4)\,[6x + 3y = 12]$
$(-3)\,\underline{[3x + 4y = 11]}$

$24x + 12y = 48$ (Ecuaciones equivalentes)
$-9x - 12y = -33$

b) Sumar las ecuaciones equivalentes para reducir el sistema a una ecuación con una variable.

$$\begin{array}{rcrcr} 24x & + & 12y & = & 48 \\ \underline{-\,9x} & \underline{-} & \underline{12y} & \underline{=} & \underline{-33} \\ 15x & + & 0 & = & 15 \end{array}$$ Ecuación resultante

Álgebra

c) Se resuelve la ecuación resultante para encontrar el valor de la variable.

$$15x = 15$$
$$x = \frac{15}{15}$$
$$x = 1$$

d) Se sustituye el valor de la variable encontrada en cualquiera de las ecuaciones del sistema original para encontrar el valor de la otra variable.

$$6x + 3y = 12$$
$$6(1) + 3y = 12$$
$$6 + 3y = 12$$
$$3y = 12 - 6$$
$$3y = \frac{6}{3}$$
$$y = 2$$

e) El conjunto solución del sistema es x = 1, y = 2, o sea {(1,2)}

4.4. Método de sustitución

Este método consiste en despejar una variable en cualquiera de las dos ecuaciones y sustituirla en la otra, para reducir el sistema a una sola ecuación con una sola variable.

Ejemplo: Encuentra el conjunto solución (**x,y**) que satisfagan el siguiente sistema:

Sistema de ecuaciones.

Ec. 1 $3x + y = 14$
Ec. 2 $2x + 4y = 16$

Solución:

a) Despejar "y" de la ecuación 1.

$$3x + y = 14$$
$$y = 14 - 3x$$

b) Sustituir el valor de la variable despejada en la ecuación **2** y realizar las operaciones indicadas

$$2x + 4y = 16$$
$$2x + 4\,\mathbf{(14 - 3x)} = 16$$
$$2x + 56 - 12x = 16$$
$$-10x + 56 = 16$$

c) Encontrar el valor de la variable.

$$-10x + 56 = 16$$
$$-10\,x = 16 - 56$$
$$-10\,x = -40$$
$$x = \frac{-10x}{-40}$$
$$x = 4$$

Álgebra

d) Se sustituye el valor de esta variable en el sistema original para encontrar el valor de la otra variable.

$$3x + y = 14$$
$$3(4) + y = 14$$
$$12 + y = 14$$
$$y = 14 - 12$$
$$y = 2$$

e) El conjunto solución del sistema es: $x = 4$, $y = 2$; o sea $\{(4, 2)\}_{x,\,y}$

4.5. Método de igualación

Este método consiste en despejar la misma variable de las dos ecuaciones para reducir el sistema a una sola ecuación con una variable.

Ejemplo: Resuelve el siguiente sistema.

Ec. 1 $\quad 3x + 4y = 36$
Ec 2 $\quad x + y = 10$

a) Despeja **"x"** de ambas ecuaciones

Ec. 1: $3x + 4y = 36$

$3x = 36 - 4y$

$x = \dfrac{36 - 4y}{3}$

Ec. 2: $x + y = 10$

$x = 10 - y$

b) Se igualan las nuevas ecuaciones.

$\frac{36 - 4y}{3}$ y $x = 10 - y$

$x = \frac{36 - 4y}{3} = 10 - y$

c) Se resuelve la igualación, para encontrar el valor de una nueva variable

$x = \frac{36 - 4y}{3} = 10 - y$

$36 - 4y = (10 - y)(3)$

$36 - 4y = 30 - 3y$

$36 - 30 = 4y - 3y$

$6 = y$

$\mathbf{y = 6}$

d) Se sustituye el valor de la variable en cualquiera de las dos ecuaciones despejadas para obtener el valor de la otra variable.

$x = 10 - y$

$x = 10 - 6$

$\mathbf{x = 4}$

e) El conjunto solución del sistema es: $x = 4$, $y = 6$ o sea $\{(4, 6)\}_{x,\,y}$

Álgebra

Álgebra

4.6. Sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas

Para resolver este tipo de sistemas puedes usar cualquier método algebraico (suma y resta, igualación o sustitución).

Método de suma y resta: Este método consiste en ir eliminando variables hasta reducir el sistema a una sola ecuación con una variable.

Ejemplo: resuelve el siguiente sistema.

Ec. 1: $x + y + z = 6$
Ec. 2: $2x + 3y - z = 5$
Ec. 3: $\underline{3x + 4y + z = 14}$

a) Suma la Ec, 1 y la Ec, 2 para eliminar la variable **"z"**

$$\begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ \underline{2x + 3y - z = 5} \\ \mathbf{3x + 4y + 0 = 11} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ecuación (4)}\quad 3x + 4y = 11}$$

b) Suma la Ec. 2 y la Ec. 3 para eliminar la variable **"z"**

$$\begin{array}{l} 2x + 3y - z = 5 \\ \underline{3x + 4y + z = 14} \\ \mathbf{5x + 7y + 0 = 19} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ecuación (5)}\quad 5x + 7y = 19}$$

c) Se resuelve el nuevo sistema de ecuaciones para eliminar una variable.

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 11 \\ \underline{5x + 7y} &\underline{= 19} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &[3x + 4y = 11](7) \\ &[5x + 7y = 19](-4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 21x + 28y &= 77 \\ \underline{-20x - 28y} &\underline{= -76} \\ x + 0 &= 1 \\ \mathbf{x} &\mathbf{= 1} \end{aligned}$$

d) Se sustituye el valor de la **"x"** en la ecuación 4 ó ecuación 5 para encontrar el valor de la otra variable.

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 11 \\ 3(1) + 4y &= 11 \\ 3 + 4y &= 11 \\ 4y &= 11 - 3 \\ 4y &= 8 \\ y &= \frac{8}{4} \\ \mathbf{y} &\mathbf{= 2} \end{aligned}$$

Álgebra

e) Se sustituye el valor de las dos variables encontradas en cualquier ecuación del sistema original

$$x + y + z = 6$$
$$1 + 2 + z = 6$$
$$3 + z = 6$$
$$z = 6 - 3$$
$$\mathbf{z = 3}$$

f) El conjunto solución del sistema es: x = 1, y = 3, z= 3; o sea $\{(1, 2, 3)\}_{x,\,y,\,z}$

Álgebra

5. Ecuaciones de segundo grado

Las ecuaciones de segundo grado son de la forma: $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$

ax^2: Término cuadrático
bx: Término lineal
c: Término independiente

A una ecuación cuadrática le puede faltar algún término, menos el término cuadrático.

Ecuaciones cuadráticas incompletas: Son aquellas ecuaciones cuando le falta el término lineal o el independiente y toman la forma:

$ax^2 + c = 0$	Falta término lineal
$ax^2 + bx = 0$	Falta término independiente

5.1. Solución de ecuaciones cuadráticas incompletas

Ejemplos: Resuelve las siguientes ecuaciones.

$2x^2 - 32 = 0$
$2x^2 = 32$
$x^2 = \frac{32}{2}$
$x^2 = 16$

$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{16}$
$x = \pm 4$

Las raíces de la ecuación son:
$x = 4$ *o* $x = -4$

$4x^2 - 16x = 0$
$4x(x - 4) = 0$
$4x = 0$ *o* $x - 4 = 0$
$\frac{0}{4}$ $\quad x = 4$
$x = 0$

Las raíces de la ecuación son:
$x = 0$ *o* $x = 4$

Álgebra

Solución de las ecuaciones cuadráticas completas.

Existen varias soluciones para resolver este tipo de ecuaciones que son:

a)- Factorización
b)- Completando al cuadrado
c)- Fórmula general.

Solución por factorización

Ejemplo: Resuelve la ecuación:

$$x^2 + 12x + 35 = 0$$

Factorizando: $(x + 7)(x + 5) = 0$

Igualando cada factor a cero se obtienen las raíces

$x + 7 = 0$ *o* $x + 5 = 0$

$x = -7$ $x = -5$

Solución Completando al Cuadrado.

Este método consiste en transformar el lado izquierdo de la ecuación cuadrática en un trinomio cuadrado perfecto, para después factorizarlo y obtener las dos raíces de la ecuación.

Álgebra

Ejemplo: resuelve la ecuación.	$X^2 + 6x + 5 = 0$
a) Pasa el término independiente al lado derecho de la ecuación.	$x^2 + 6x = -5$
b) Para que el lado izquierdo de la ecuación sea un trinomio cuadrado perfecto, se le tiene que sumar el cuadrado de la mitad del coeficiente del término lineal.	$x^2 + 6x = -5$ $(6/2)^2 = 9$ $x^2 + 6x + 9 = 9 - 5$ $x^2 + 6x + 9 = 4$
c) Factoriza el trinomio cuadrado perfecto	$x^2 + 6x + 9 = 4$ $(x + 3)^2 = 4$
d) Extrae la raíz cuadrada a ambos lados	$(x + 3)^2 = 4$ $\sqrt{(x+3)2} = \pm\sqrt{4}$ $x + 3 = \pm 2$
e) Encuentra las raíces de la ecuación	$x + 3 = \pm 2$ *Con la raíz positiva* $x + 3 = 2$ $x = 2 - 3$ $x = -1$ *Con la raíz negativa* $x + 3 = -2$ $x = -2 - 3$ $x = -5$

Álgebra

5.2. Fórmula general y discriminante

La formula General: se utiliza para resolver ecuaciones de segundo grado de la forma:
$ax^2 + bx + c = 0$

Fórmula general

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El discriminante: se utiliza para saber el tipo de raíces que tiene la ecuación cuadrática.

$D = b^2 - 4ac$	**Discriminante**
Discriminante	Soluciones
$(b^2 - 4ac) > 0$	2 raíces reales y distintas
$(b^2 - 4ac) = 0$	2 raíces reales e iguales
$(b^2 - 4ac) < 0$	No tiene raíces reales

Álgebra

5.3. Solución por fórmula general

Ejemplo: Resuelve la siguiente ecuación: $x^2 + 13x + 40 = 0$

Solución: Se determina el valor de los coeficientes:

$a = 1$
$b = 13$
$c = 40$

se sustituyen en la formula. $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{(13)^2 - 4(1)(40)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{169 - 160}}{2} \qquad x = \frac{-13 \pm \sqrt{9}}{2} \qquad x = \frac{-13 \pm 3}{2}$$

$$x = \frac{-13+3}{2} \qquad x = \frac{-10}{2} \qquad x = -5$$

$$x = \frac{-13-3}{2} \qquad x = \frac{-16}{2} \qquad x = -8$$

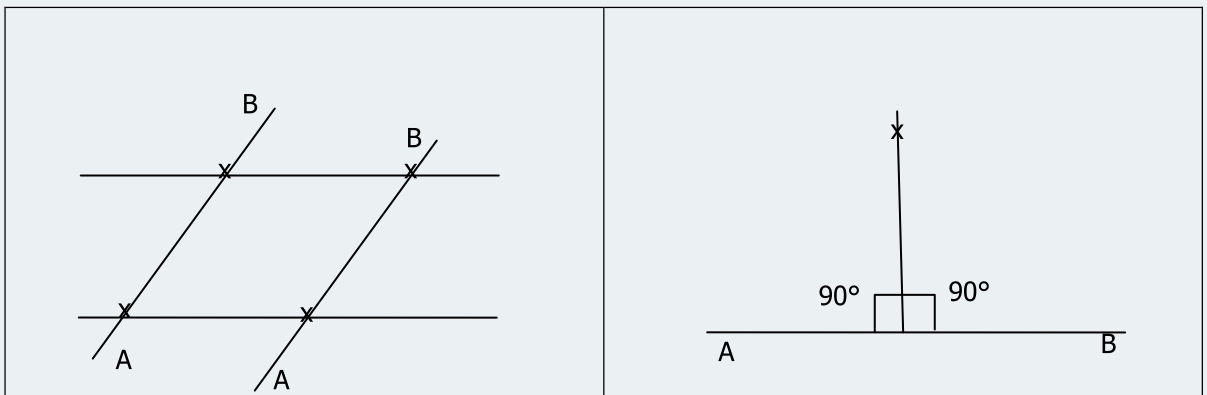
Álgebra

Geometría

1. Dibujo y trazos geométricos

1.1. Trazado y construcción de las figuras básicas, de perpendiculares y paralelas

Para trazar rectas paralelas y perpendiculares se emplea como auxiliar una regla y compás.
Ejemplos:

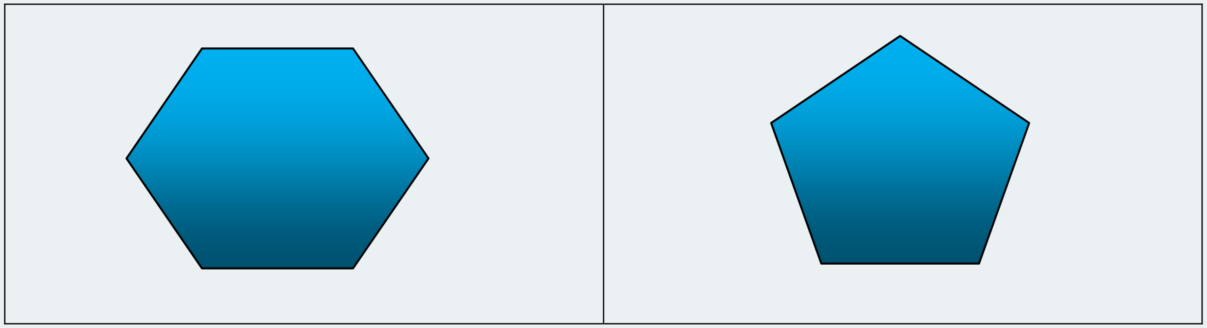


Paralelas	Perpendiculares

Nota: Rectas paralelas: son aquellas que están a la misma distancia una de otra por más que se prolonguen nunca se intersectan.

Rectas Perpendiculares: son las que al cortarse forman ángulos de 90º.

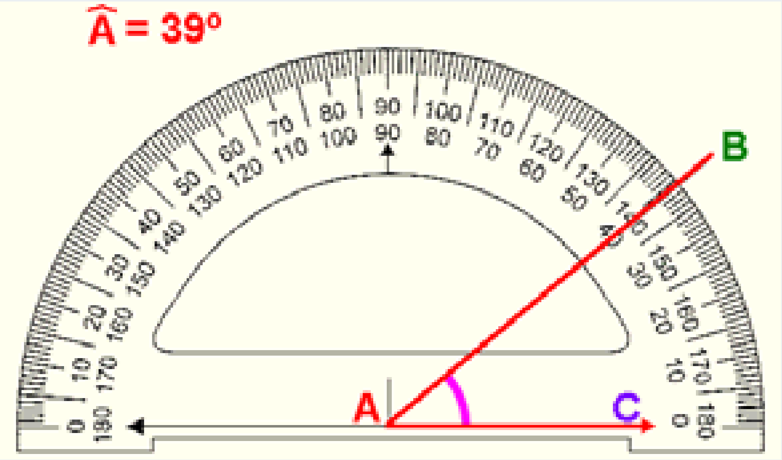
Para reproducir polígonos utiliza el método de triangulación y en los polígonos regulares se toma como base un círculo y se fraccionan los 360º (360 grados)



Geometría

1.2. Uso del transportador en la medición de ángulos

Se coloca el transportador en el cruce de las rectas para medir el ángulo.



2. Triángulos y cuadriláteros

2.1. Observación de los elementos de una figura geométrica. Congruencia de triángulos

Dos figuras son congruentes si al colocarse una sobre la otra coinciden en todos sus puntos.

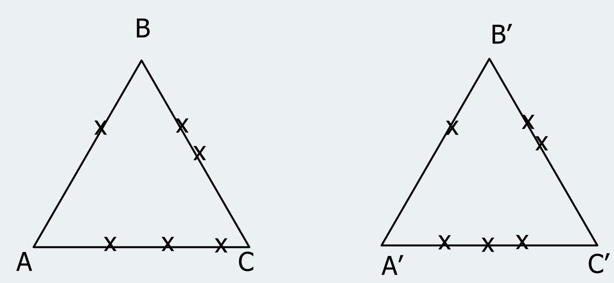
a) **Postulado LLL:** Dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente iguales las medidas de sus tres lados.

De acuerdo con el postulado, se debe dar:

$\overline{A'B'} = \overline{AB}$ (L)

$\overline{B'C'} = \overline{BC}$ (L)

$\overline{C'A'} = \overline{CA}$ (L)



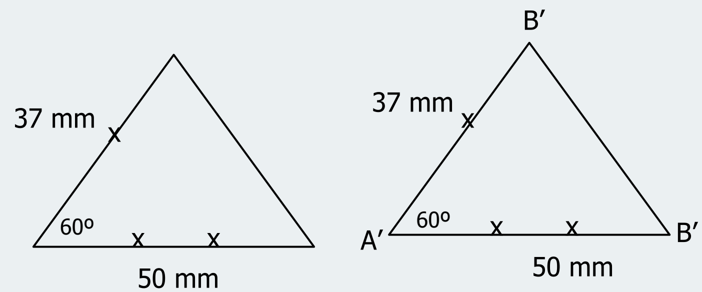
b) **Postulado LAL:** Dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente iguales las medidas de dos lados y del ángulo que forman.

De acuerdo al postulado se debe dar:

$\overline{A'B'} = \overline{AB}$ (L)

$< A' = \angle A$ (A)

$\overline{A'C'} = \overline{AC}$ (L)



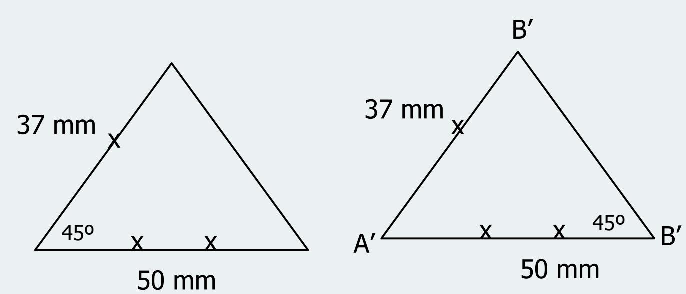
c) **Postulado ALA:** Dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente iguales las medidas de un lado y sus ángulos adyacentes.

De acuerdo con el postulado se debe dar:

$\angle A' = \angle A$ (A)

$\overline{A'C'} = \overline{AC}$ (L)

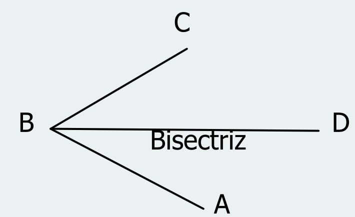
$\angle C = \angle C$ (A)



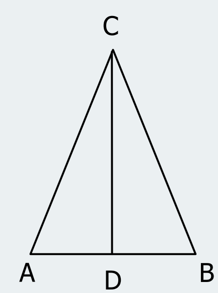
Geometría

2.2. Aplicación de los criterios de congruencia y propiedades de los triángulos y paralelogramos

Al trazar una bisectriz en un ángulo, ésta lo divide en dos ángulos congruentes.
Si BD es la bisectriz, entonces ∠ ABD = DBC

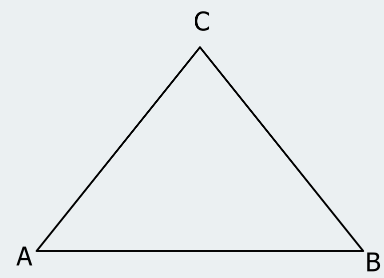


Propiedades:
1. En todo triángulo los lados opuestos a ángulos iguales son iguales.
CD bisecta el ∠ ACD

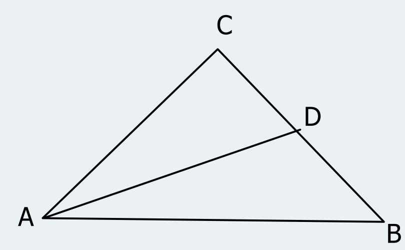


Geometría

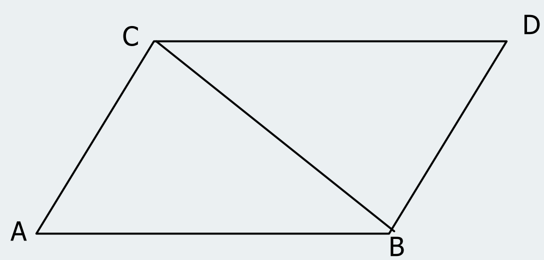
2. La suma de dos de los lados de un triángulo es mayor que el tercer lado; la diferencia es menor.
AB es el lado mayor



3. En todo triángulo, al lado mayor se opone ángulo mayor.
AB es el lado mayor y $\angle C$ es el ángulo mayor

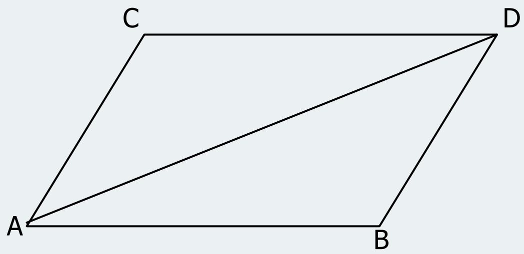


4. En todo paralelogramo, los lados opuestos son iguales.

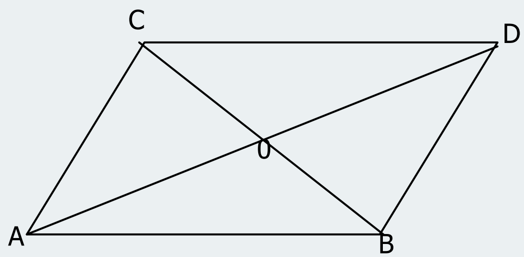


Geometría

5. En todo paralelogramo, los ángulos opuestos miden lo mismo.



6. Las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.



POLÍGONOS Y CUERPOS.

Geometría

2.3. Unidades de longitud, área y volumen

Las medidas de longitud se usan para medir distancias en nuestro país usamos el sistema métrico decimal.

Nombre	Símbolo	Equivalencia en metros
Miriámetro	mam	10000
kilómetro	Km	1000
Hectómetro	hm	100
Decámetro	dam	10
Metro	m	1
Decímetro	dm	0.1
Centímetro	cm	0.01
Milímetro	mm	0.001
Micra	µ	0.000001
Angstrom	A	0.000000001
Pulgada	in	0.0254
Pie	ft	0.3048
Yarda	yd	0.9144
Braza		1829
Milla terrestre		1609
Milla marítima		1852

Para convertir una medida a otra dentro del mismo sistema, es necesario conocer la equivalencia.

Ejemplos: ¿Cuántos centímetros hay en 3.40 metros?

Solución: Se multiplica por 100 cm que es la equivalencia de 1metro a centímetros.

$$3.40\text{ m} \times \frac{100\text{ cm}}{1\text{m}} = 340\text{ cm}$$

Ejemplo: ¿Cuántos milímetros hay en 7.79 metros?

7.79 m × [1,000/ 1m] = 7,790mm

Unidades de Áreas: Se usan para medir superficies.

Nombre	Símbolo	Equivalencia en metros^2
Kilómetro cuadrado	Km^2	1 000 000
Hectómetro cuadrado	hm^2	10 000
Decámetro cuadrado	dam^2	100
Metro cuadrado	m^2	1
Decímetro cuadrado	dm^2	0.01
Centímetro cuadrado	cm^2	0.0001
Milímetro cuadrado	mm^2	0.000001

Geometría

Geometría

Medidas de Volumen

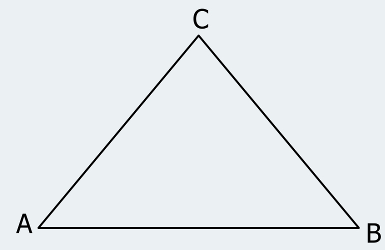
Nombre	Símbolo	Equivalencia en metros^3
Kilómetro cúbico	Km^3	1000000000
Hectometro cúbico	hm^3	1000000
Decámetro cúbico	dam^3	1000
Metro cúbico	m^3	1
Decímetro cúbico	dm^3	0.001
Centímetro cúbico	cm^3	0.000001
Milímetro cúbico	mm^3	0.000000001

Geometría

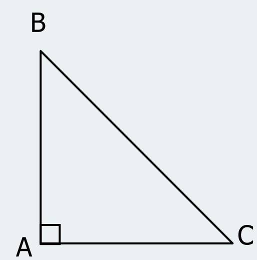
2.4. Triángulos y su clasificación

a) De acuerdo a la medida de sus ángulos:

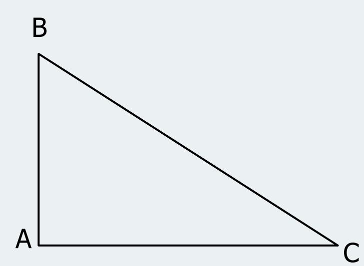
1. Acutángulo:
Es aquel triángulo que tiene sus tres ángulos agudos.
(Ángulo menor de 90º)



2. Rectángulo:
Es aquel triángulo que tiene un ángulo recto.
(Ángulo de 90º)



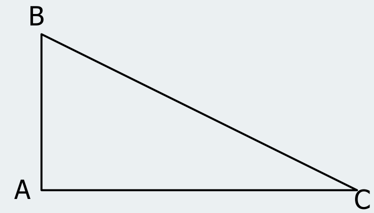
3. Obtusángulo:
Es aquel triángulo que tiene un ángulo obtuso.
(Ángulo mayor de 90º)



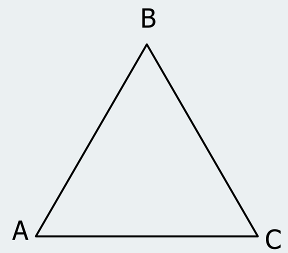
Geometría

b) De acuerdo a la medida de sus lados:

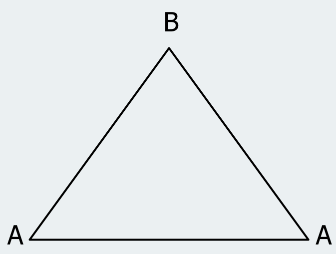
1. Escaleno:
Es aquel triángulo que tiene sus tres lados desiguales.
(Ángulo menor de 90º)



2. Isósceles:
Es aquel triángulo que tiene dos lados iguales.



3. Equilátero:
Es aquel triángulo que tiene sus tres lados iguales.

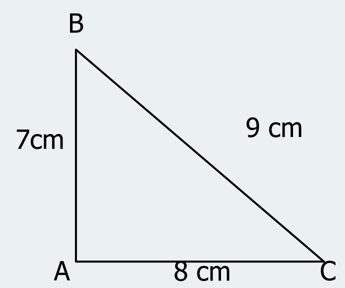


Geometría

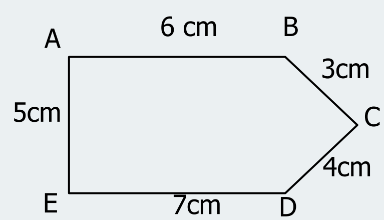
2.5. Polígonos regulares e irregulares

Perímetro: Para calcular el perímetro de un polígono es la suma de todos y cada uno de sus lados. Usaremos la letra **(P)** para representar el perímetro de los polígonos.

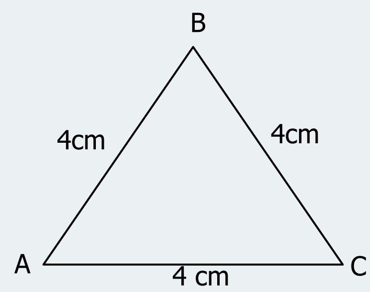
Ejemplo: Determina el perímetro de las siguientes figuras:



P = AB + BC + CA
P = 9cm + 7 cm + 8cm
P = 24 cm



P= ED + DC + CB + BA + AE
P= 7cm + 4cm + 3cm + 6cm + 5cm
P = 25 cm



$P = AC + CB + BA$
$P = 4cm + 4cm + 4cm$
$P = 12\ cm$

Área de polígonos regulares.
Recuerda que un polígono regular es aquella figura en que todos sus lados tienen la misma medida.

ÁREA:
Para calcular el área de un polígono regular es la mitad del producto del perímetro por su apotema.

$$A = \frac{P \times a}{2}$$

Usaremos la letra (**A**) para encontrar el área de los polígono regulares.

Ejemplo: Determinar el área de un hexágono que mide 6 centímetros por lado y 4 centímetros de apotema.

Solución: $A = \frac{P \times a}{2}$

$P = 6cm + 6cm + 6cm + 6cm + 6cm + 6cm$
$P = 36\ cm$
$A = (36cm)(4cm)/2 = 144\ cm/2$
$A = 72\ cm^2$

Geometría

Geometría

2.6. Volúmenes de prismas y pirámides

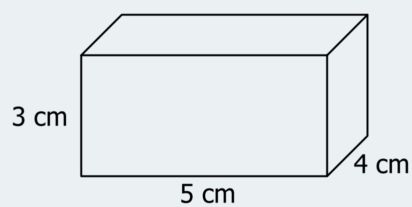
El volumen de un prisma se calcula con el producto del área de la base (B) por la altura (h), Usaremos la letra (**V**) para representar el volumen.

Volumen = (área de la base) x (altura)

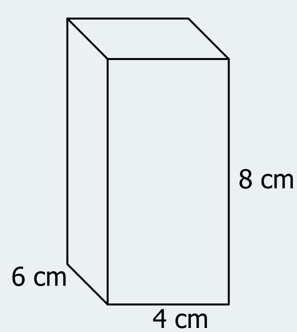
$$V = B \times h$$

El volumen se da en unidades cúbicas.

Ejemplos: Determina el volumen de las siguientes figuras:



Solución:
$V = B \times h$
El área de la base (B) se obtiene multiplicando (5 cm) (4 cm)
$B = (5cm)(4cm) = 20\ cm^2$
$V = (20\ cm^2)(3cm)$
$V = 60\ cm^3$



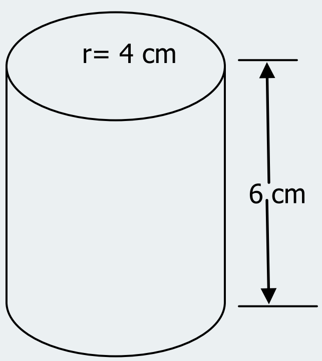
$V = B \times h$
$V = \underbrace{\underline{(4cm)(6m)}}_{B} \times \underbrace{\underline{(8cm)}}_{h}$
$V = (24\ cm^2)(8cm)$
$V = 192\ cm^3$

Geometría

El volumen del cilindro: Se calcula por el producto del área del círculo (**base**) multiplicado por su altura (**h**).

$$\textbf{Volumen del cilindro} = \underbrace{\pi r^2}_{\text{base}} \ \underbrace{h}_{\text{altura}} = \mathbf{B \times h}$$

Ejemplo: Determina el volumen de un cilindro cuya base mide 4 centímetros de radio y 6 centímetros de altura



Solución:

$V = B \times h$

$V = \pi r^2 \ h$

$V = (3.14)(4cm)^2(6cm)$

$V = (3.14)(16cm^2)(6cm)$

$V = 301.44\ cm^3$

Volumen de la pirámide: es la tercera parte del área de su base por la altura.

$$\textbf{Volumen de la pirámide} = \frac{A_B \times h}{3}$$

Ejemplo: Determina el volumen de la siguiente figura.

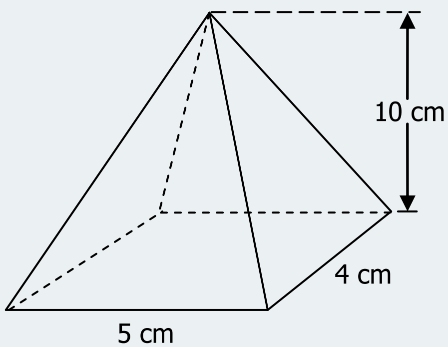
$$V = A_B \times h$$

$$V = \frac{(5cm)(4cm)}{3}(10\ cm)$$

$$V = \frac{(20cm^2)(10cm)}{3}$$

$$V = \frac{200cm^3}{3}$$

$$V = 66.67cm^3$$

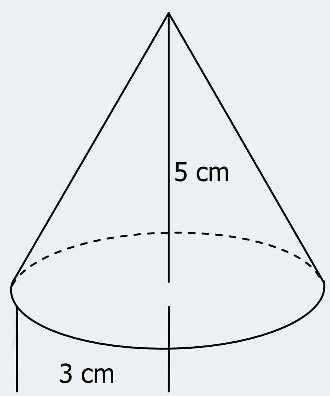


Geometría

Volumen del cono: Es la tercera parte del área de la base del cono por su altura, la base de cono es un círculo y su área es πr^2

$$\textbf{Volumen del cono} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Ejemplo: Determina el volumen del siguiente cono:



Solución:

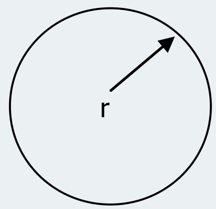
$$V= \frac{\pi r^2 h}{3}$$

$$V= \frac{(3.14)(3cm)^2(5cm)}{3}$$

$$V= 47.1\ cm^3$$

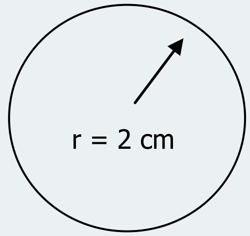
Geometría

Volumen de la esfera: La esfera es una figura geométrica especial.



Volumen de la esfera $= \frac{4}{3} \pi r^3$

Ejemplo: Determina el volumen de una esfera cuyo radio es de 2 centímetros.



Solución:

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$V = \frac{4}{3}(3.14)(2\text{ cm})^3$

$V = \frac{4}{3}(3.14)(8\text{cm}^3)$

$V = \frac{100.48\text{ cm}^3}{3}$

$V = 33.49\text{ cm}^3$

Geometría

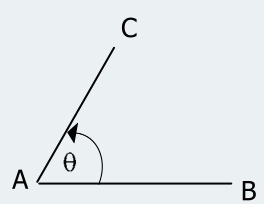
Geometría

3. Ángulos

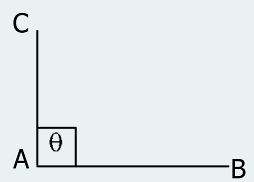
3.1. Clasificación

Por su amplitud se clasifican en:

Agudos: Mide más de 0º y menos de 90º (0º <θ< 90º)

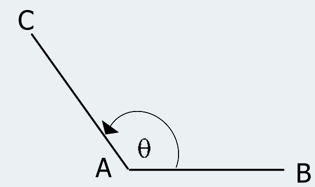


Rectos: Son los que miden 90º (θ = 90º)

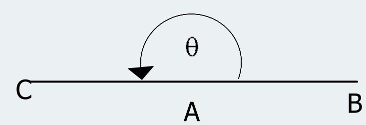


Geometría

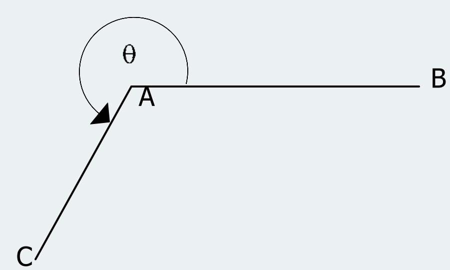
Obtusos: Son los que miden más de 90^0 pero menos de 180^0 ($90^0 < \theta < 180^0$)



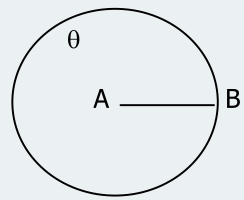
Llanos o colineales: Son los que miden 180° (θ = 180°)



Entrantes: Son los que miden más de 180^0 pero menos de 360^0



Perigonales: son los que miden 360⁰ (θ = 360º)

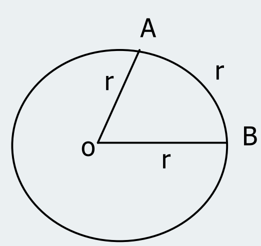


3.2. Unidades de medidas angulares (sexadecimal)

Grado (º): Es la medida del ángulo central subtendido por un arco de longitud igual a $\frac{1}{360}$ de la circunferencia de un círculo.

$$1^{o} = \left(\frac{1}{360}\right)^{o} \qquad 1' = \left(\frac{1}{60}\right)^{o} \qquad 1'' = \left(\frac{1}{60}\right)'$$

Radián (rad): Es el ángulo central subtendido por un arco de longitud igual al radio de la circunferencia del círculo.



$$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{0} = 57.296^{0} = 57^{o}\ 17'\ 45''$$

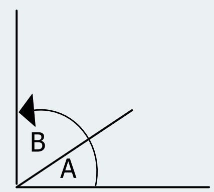
$$\pi \text{ rad} = 180^{o} \qquad 2\pi \text{ rad} = 360^{o}$$

Geometría

3.3. Adición y sustracción de ángulos

Ángulos complementarios:

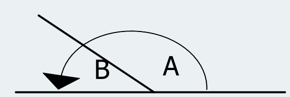
Son dos ángulos cuya suma es un ángulo recto (90º).



$< A + < B = 90^{o}$

Ángulos Suplementarios:

Son dos ángulos cuya suma es un ángulo llano (180º).



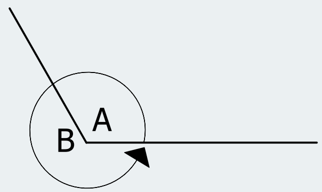
$< A +< B = 180^{o}$

Ángulos Conjugados:

Geometría

Geometría

Son dos ángulos cuya suma es igual a un périgono (360º).



$< A + < B = 360º$

Ejemplo: Si los ángulos **A** y **B** son suplementarios. Encuentra: La medida del ángulo B si el ángulo A es de 50º

Solución:

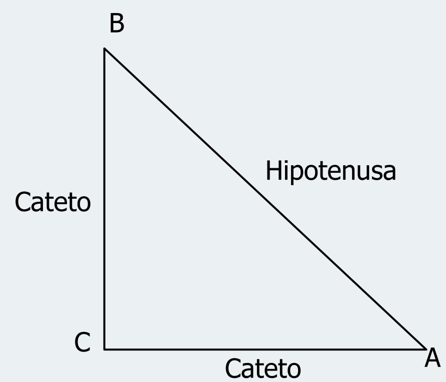
$< A + < B = 180º$
$50º + < B = 180º$
$< B = 180º - 50º$
$< B = 130º$

Trigonometría

1. Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

$$c^2 = a^2 + b^2$$



Trigonometría

Para encontrar el valor de cualquier lado de un triángulo rectángulo tienes que despejar del teorema.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

El teorema de Pitágoras solamente es válido para los triángulos rectángulos.

Ejemplo: Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo ABC mide 10 centímetros y uno de los catetos mide 6 centímetros halla la medida del otro cateto.
Solución:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$a^2 = c^2 - b^2$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$a = \sqrt{(10\ cm)^2 - (6\ cm)^2}$$

$$a = \sqrt{100\ cm^2 - 36\ cm^2}$$

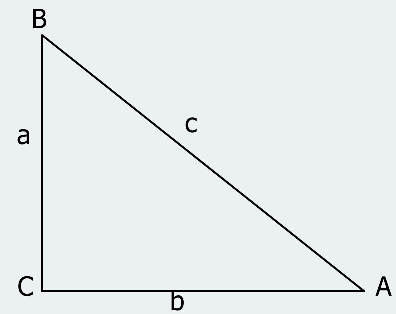
$$a = \sqrt{64\ cm^2}$$

$$a = 8\ cm$$

Trigonometría

2. Definiciones de las funciones trigonométricas

A partir del triángulo rectángulo definiremos las funciones trigonométricas.



Con respecto al ángulo **A**

$$\text{Sen de A} = \frac{\text{Cateto opuesto al} < A}{\text{Hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\text{Cos de A} = \frac{\text{Cateto adyacente al} < A}{\text{Hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\text{Tan de A} = \frac{\text{Cateto Opuesto al} < A}{\text{Cateto adyacente al} < A} = \frac{a}{b}$$

$$\text{Cot de A} = \frac{\text{Cateto adyacente al} \angle A}{\text{Cateto opuesto al} \angle A} = \frac{b}{a}$$

$$\text{Sec de A} = \frac{\text{Hipotenusa al} \angle A}{\text{Cateto adyacente al} \angle A} = \frac{c}{b}$$

Con respecto al ángulo **B**

$$\text{Sen de B} = \frac{\text{Cateto opuesto al} < B}{\text{Hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\text{Cos de B} = \frac{\text{Cateto adyacente al} < B}{\text{Hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\text{Tan de B} = \frac{\text{Cateto opuesto al} < B}{\text{Cateto adyacente al} \angle B} = \frac{b}{a}$$

$$\text{Cot de B} = \frac{\text{Cateto adyacente al} \angle B}{\text{cateto opuesto al} \angle B} = \frac{a}{b}$$

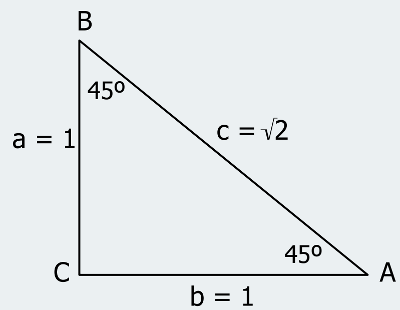
$$\text{Sec de B} = \frac{\text{Hipotenusa al} \angle B}{\text{cateto adyacente al} \angle B} = \frac{c}{a}$$

$$\text{Csc de A} = \frac{\text{Hipotenusa al } \angle A}{\text{Cateto opuesto al } \angle A} = \frac{c}{a} \qquad \text{Csc de B} = \frac{\text{Hipotenusa al } \angle B}{\text{Cateto opuesto al } \angle B} = \frac{c}{b}$$

Trigonometría

3. Valor del seno, coseno, tangente para los ángulos de 30º, 45º y 60º

Para 45º



$$\text{Sen } 45° = \frac{a}{c}$$

$$\text{Cos } 45° = \frac{b}{c}$$

$$\text{Tan } 45° = \frac{a}{b}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$c = \sqrt{1 + 1}$$

$$c = \sqrt{2}$$

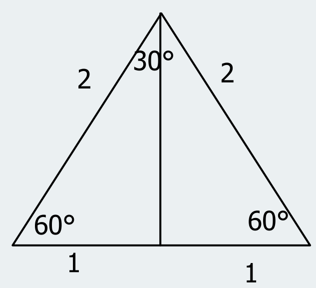
$$\text{Sen } 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Cos } 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Tan } 45° = \frac{1}{1} = 1$$

Trigonometría

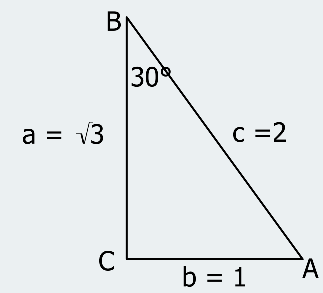
Para 60º



$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$a^2 = c^2 - b^2$$
$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$
$$a = \sqrt{2^2 - 1^2}$$
$$a = \sqrt{4 - 1}$$
$$a = \sqrt{3}$$

$$\text{Sen } 60º = \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\text{Cos } 60º = \frac{b}{c} = \frac{1}{2}$$
$$\text{Tan } 60º = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

Para 30º

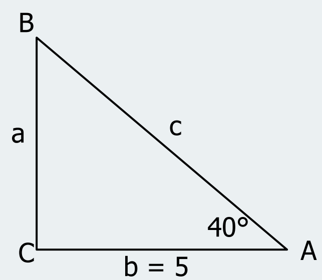


$$\text{Sen } 30º = \frac{b}{c} = \frac{1}{2}$$
$$\text{Cos } 30º = \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\text{Tan } 30º = \frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$
$$\text{Tan } 30º = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

4. Razones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo

Resolver un triángulo rectángulo significa hallar el valor de los tres ángulos y de los tres lados.

Ejemplo: A partir del triángulo ABC encuentra los datos que faltan.



$C = 90°$
$A = 40°$
$b = 5$
$B = ?$
$a = ?$
$c = ?$

Solución:

$\angle B = 90° - 40°$

$B = 50°$

$\text{Tan } A = \dfrac{a}{B}$

$\text{Tan } 40° = \dfrac{a}{5}$

$(\text{Tan } 40°)(5) = a$

$a = (\text{Tan } 40°)(5)$

$a = (0.839)(5)$

$a = 4.19$

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = (4.19)^2 + (5)^2$

$c = \sqrt{17.6 + 25}$

$c = \sqrt{42.6}$

$c = 6.52$

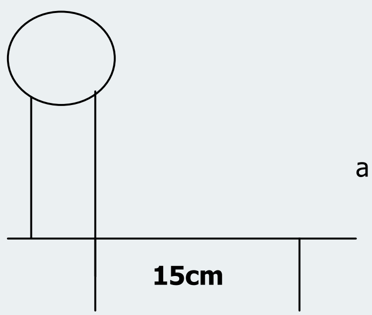
Trigonometría

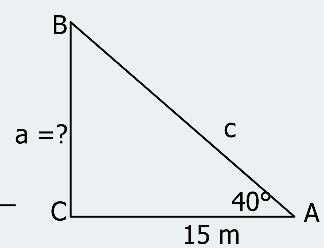
5. Solución de triángulos rectángulos y su aplicación a la solución de problemas

Es de mucha ayuda hacer un bosquejo aproximado del triángulo, esto te ayudará a determinar que funciones trigonométricas puedes usas para encontrar las partes desconocidas.

Ejemplo: Un árbol proyecta una sombra de 15 metros en el momento en que el sol se observa con un ángulo de elevación de 40º ¿cuál es la altura del árbol?

Solución: Hacemos uso del bosquejo del triángulo y encontramos que el dato que nos piden es el cateto opuesto. Haciendo uso de la función Tangente para el ángulo A, tenemos:





$$\text{Tan } A = \frac{a}{b}$$

$$\text{Tan } 40° = \frac{a}{b}$$

$$\text{Tan } 40° = \frac{a}{15}$$

$$\text{Tan } 40°(15) = a$$

$$a = \text{Tan } 40°(15)$$

$$a = (0.8390)(15)$$

$$\boxed{a = 12.58 \quad \textbf{(Altura del árbol)}}$$

ESTADÍSTICA

Estadística

1. Interpretación de registros estadísticos mediante listados y gráficas

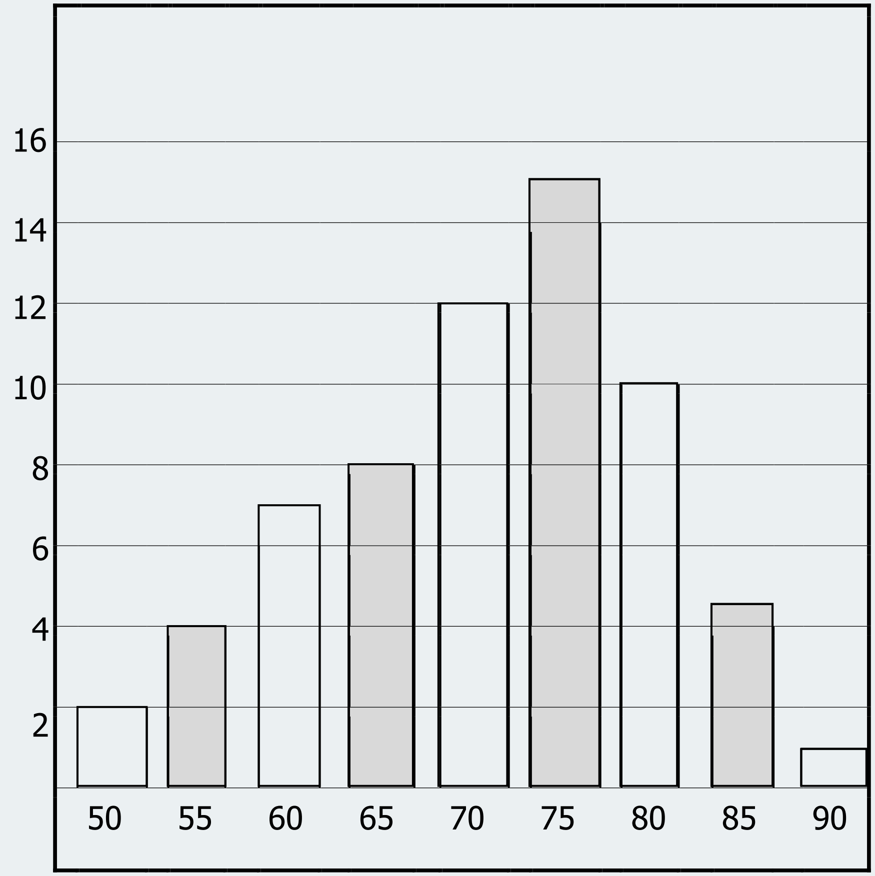
Estadística: La estadística estudia la recolección, organización, presentación, análisis e interpretación

Dato: Es cada uno de los resultados de una investigación.de datos.

Estadística

Ejemplo: Los pesos obtenidos de los 65 jugadores de un equipo de fútbol americano de una escuela.

Peso (kg)	Frecuencia
50	2
55	4
60	7
65	9
70	12
75	15
80	10
85	5
90	1

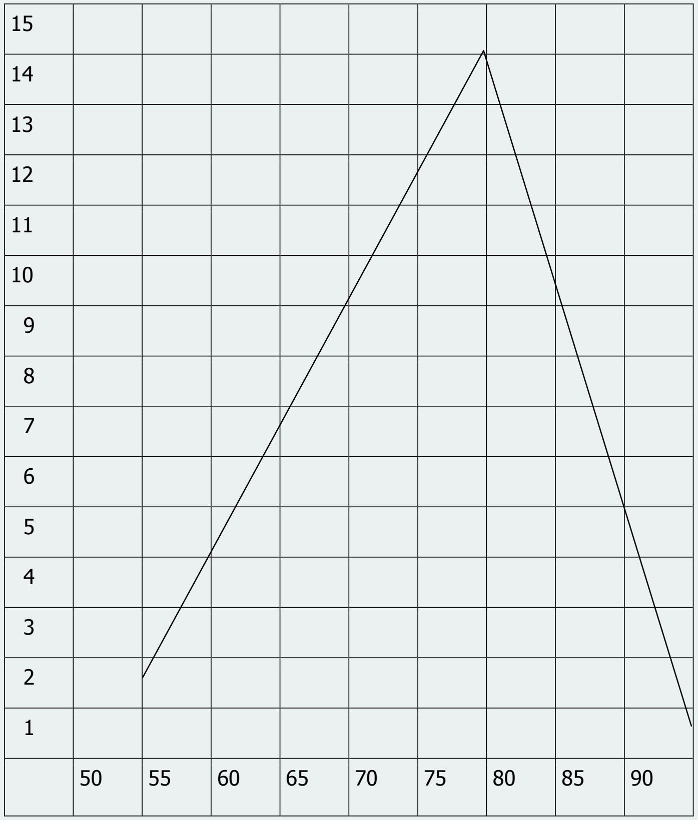


Gráfica de barras

Estadística

2. Construcción de gráficas (barras, polígonos de frecuencias)

Ejemplo: Vamos a representar los datos de la tabla anterior en una gráfica poligonal:



Estadística

3. Medidas de tendencia central

Media Aritmética: Es la suma de los valores de una variable dividida por su número.
Expresión en forma algebraica.

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{N}$$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{N}$$

Donde:

$\bar{x}$ = La media

N = Número de observaciones.

Σx = Nos ordena sumar todas las observaciones.

Ejemplo: Encuentra el promedio de las siguientes calificaciones:

8, 10, 7, 7, 8, 9, 8, 7

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{N}$$

$$\bar{x} = \frac{8 + 10 + 7 + 7 + 8 + 9 + 8 + 7}{8}$$

$$\bar{x} = \frac{64}{8}$$

$$\bar{x} = 8$$

Estadística

Mediana (Md): Para encontrar el valor de la mediana se ordenan los datos en forma ascendente o descendente y se toma el que ocupa el lugar central.

Ejemplo: Encuentra el valor de la mediana de los siguientes datos:

a) 45, 5, 39, 19, 37

Ordénalos en forma ascendente:

5, 19, $\boxed{37}$, 39, 45

Md = 37

b) 8, 28, 35, 43, 47, 73

8, 28, $\boxed{35, 43}$, 47, 73

Cuando el número de datos es par, se ordenan las cantidades y se toman los datos centrales y se promedian.

$$\bar{x} = \frac{35 + 43}{2} = \frac{78}{2} = 39$$

Md = 39

Moda (Mo): La moda es simplemente el dato que ocurre con mayor frecuencia.

Ejemplo: Obtener la moda de las siguientes calificaciones:

7, 8, 10, 8, 7, 9, 8, 8, 9

Dato	Frecuencia
7	2
8	4
9	2
10	1

Mayor frecuencia

Mo = 8

Estadística

PROBABILIDAD

Probabilidad

1. Nociones de probabilidad

Definición: La probabilidad de que ocurra un cierto evento está dada por la razón del número de formas favorables de que ocurra entre el número total de formas, de que ocurra o no ocurra dicho evento.

Los valores de la probabilidad van desde cero hasta uno.

$$0 \leq p \leq 1$$

Fórmula: $P_{(E)} = \dfrac{a}{N} = \dfrac{\text{Número casos favorables}}{\text{Número total de casos}}$

O bien: $P_{(E)} = \dfrac{a}{a+b}$

Donde:

$P_{(E)}$: Probabilidad de que ocurra el evento.
"a" = Número de casos a favor del evento
"b"= Número de casos en contra del evento.
"a + b" = Número total de casos posibles.

$$P_{(E')} = \frac{b}{a+b}$$

Donde: $P_{(E')}$: Probabilidad de que no ocurra el evento

1.1. Aplicaciones diversas de la fórmula clásica de la probabilidad

Ejemplo: Se tira un dado, encuentra la probabilidad de obtener un 4.

Solución: Al tirar un dado hay seis resultados posibles y sólo uno es favorable, a = 1, mientras los casos no favorables son 5, o sea, b = 5

$a = 1$

$b = 5$

$a + b = 6$

$$P_{(E)} = \frac{a}{a+b}$$

$$P_{(E)} = \frac{1}{1+5} = \frac{1}{6}$$

$$P_{(E)} = 0.166$$

Ejemplo: En una urna se colocan 10 bolas, 4 de color blanco, 3 de color negro, 2 de color azul y 1 de color rojo. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una de color blanco?

$$P_{(E)} = \frac{a}{a+b}$$

$a = 4$

$b = 6$

$a + b = 10$

$$P_{(E)} = \frac{4}{4+6}$$

$$P_{(E)} = \frac{4}{10}$$

$$P_{(E)} = 0.4$$

Probabilidad

Probabilidad

2. Cálculo de probabilidad

2.1. Probabilidad de que un evento no ocurra

Fórmula: $P_{(E')} = \dfrac{b}{a+b}$

Ejemplo: ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar un dado no caiga un 2?

$$P_{(E)} = \frac{b}{a+b}$$

$a = 1$

$b = 5$

$$P_{(E)} = \frac{5}{1+5}$$

$$P_{(E)} = \frac{5}{6}$$

Nótese que siempre se cumple que:

$$P_{(E)} + P_{(E')} = 1, \quad \text{o sea que} \quad P_{(E')} = 1 - P_{(E)}$$

Probabilidad

2.2. Ocurrencia de uno de dos eventos

La probabilidad de que ocurra uno u otro evento de dos eventos mutuamente excluyentes (no tiene elementos en común), es la suma de las probabilidades de ocurrencia de cada uno.

Fórmula: $P = P_1 + P_2$

2.3. Aplicación del principio de suma

$$P = P_1 + P_2$$

Probabilidad

Ejemplo: ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar un dado caiga un 3 ó un 5?

$$P_1 = \frac{a}{a+b} \qquad P_1 = \frac{1}{1+5}$$

$a = 1$

$b = 5$

$$\boxed{P_1 = \frac{1}{6}}$$

$$P_2 = \frac{a}{a+b} \qquad P_2 = \frac{1}{1+5}$$

$$\boxed{P_2 = \frac{1}{6}}$$

$$P = P_1 + P_2 \qquad P = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$$

$$p = \frac{2}{6}$$

$$\boxed{p = \frac{1}{3}}$$

Probabilidad

¿Cuál es la probabilidad de que al sacar una carta de la baraja de lotería salga el nopal o la rana? (Considerar 54 cartas).

$$P_1 = \frac{a}{a+b} \qquad P_1 = \frac{1}{1+53}$$

$a = 1$

$b = 53$

$$\boxed{P_1 = \frac{1}{54}}$$

$$P_2 = \frac{a}{a+b} \qquad P_2 = \frac{1}{1+53}$$

$a = 1$

$b = 53$

$$\boxed{P_2 = \frac{1}{54}}$$

$$P = P_1 + P_2 \qquad P = \frac{1}{54} + \frac{1}{54}$$

$$P = \frac{2}{54}$$

$$\boxed{P = \frac{1}{27}}$$

Probabilidad

2.4. Ocurrencia de dos eventos conjuntamente

La probabilidad de que ocurran dos eventos independientes (la probabilidad de uno de ellos no altera la probabilidad de ocurrencia del otro) conjuntamente, es el producto de las probabilidades de ocurrencia de cada uno.

Fórmula: $P = P_1 \times P_2$

2.5. Aplicación del principio del producto

$$P = P_1 \times P_2$$

Probabilidad

Ejemplo: ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar una moneda y un dado, en la moneda caiga "águila" y en el dado un 3?

$$P_1 = \frac{a}{a+b} \qquad P_1 = \frac{1}{1+1}$$

$a = 1$

$b = 1$

$$P_1 = \frac{1}{2}$$

$$P_2 = \frac{a}{a+b} \qquad P_2 = \frac{1}{1+5}$$

$a = 1$

$b = 5$

$$P_2 = \frac{1}{6}$$

$$P = P_1 \times P_2 \qquad P = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6}$$

$$\boxed{P = \frac{1}{12}}$$