

Tarea 9 - Métodos numéricos
Giovanni Gamaliel López Padilla

Índice

1. Introducción	1
2. Métodos	2
2.1. Método de las potencias	2
2.2. Método de las potencias inversas	2
2.3. Método de deflación	3
2.4. Método de deflación inversa	4
3. Resultados	4
3.1. Método de las potencias	5
3.2. Método de las potencias inversas	5
3.3. Método de deflación	5
4. Conclusiones	6
5. Referencias	6

1. Introducción

Sea A una matriz de $n \times n$ con componentes reales. El número λ se denomina *valor característico* (*eigenvalor*) de A si existe un vector diferente de cero (v) tal que

$$Av = \lambda v \quad (1)$$

El vector v se denomina *vector característico* (*eigenvector*) de A correspondiente al eigenvalor λ . Se dice que λ es un eigenvalor de A si y sólo si

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0 \quad (2)$$

donde I es la matrix identidad y p se denomina como el polinomio característico de A . El grado del polinomio p es de grado n , entonces se obtiene que existen n eigenvalores para la matriz A .

Para un número grande de n , el resolver la ecuación característica es difícil de resolver. Es por ello que se plantearon métodos iterativos para aproximar a las raíces de la ecuación característica, es decir, los eigenvalores. Llamamos a el eigenvalor dominante (λ_1) al eigenvalor con mayor valor absoluto de A (ecuación 3).

$$|\lambda_1| > |\lambda_i| \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (3)$$

2. Métodos

2.1. Método de las potencias

Se define un vector inicial v_0 , el cual será la inicialización del método. Los elementos del vector v_0 son iguales a

$$v_{0,i} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Con esta definición considerará que el vector v_0 debe ser siempre normalizado. El método aplica la ecuación 4, conforme más se itera el método ira convergiendo hacia el eigenvector de λ_1 .

$$v_i = Av_{i-1} \quad (4)$$

Despues de aplicar la ecuación 4, el vector v_i deberá ser normalizado antes de volverse a aplicar al método. Para obtener el eigenvalor λ_1 , se usa la siguiente ecuación 5.

$$\lambda_i = \frac{\langle v_i, v_{i-1} \rangle}{\langle v_{i-1}, v_{i-1} \rangle} \quad (5)$$

La convegenia del algoritmo que se implemento fue usando la ecuación 6.

$$\theta = |\lambda_i - \lambda_{i-1}| \quad (6)$$

Entonces, el método de las potencias es descrito en el pseudo código 1.

Algorithm 1: Método de las potencias

Input: A
Output: v_i y λ_i
1 while $\theta > 10^{-6}$ **do**
2 $v_i \leftarrow Av_{i-1}$
3 $\lambda_i \leftarrow \frac{\langle v_i, v_{i-1} \rangle}{\langle v_{i-1}, v_{i-1} \rangle}$
4 $v_i \leftarrow \text{normalize}(v_i)$

2.2. Método de las potencias inversas

El método de las potencias inversas se basa en el hecho que los eigenvalores μ de la matriz inversa de A (A^{-1}) pueden ser calculados con la ecuación 7.

$$\mu_i = \frac{1}{\lambda_i} \quad (7)$$

Por lo tanto, la ecuación 1 puede ser escrita de la siguiente manera:

$$A^{-1}v_i = \mu_i v_i \quad (8)$$

En este método para obtener el eigenvector v_i , se tiene que resolver la ecuación matricial señalada en la ecuación 9.

$$Av_i = v_i \quad (9)$$

donde el vector inicial v_0 tiene que estar normalizado y al obtener el vector v_i este deberá pasar por el proceso de normalización. El método de las potencias inversas se asemeja mucho al método de las potencias, este obtiene el valor absoluto mayor de la matriz A^{-1} . Por la relación descrita en la ecuación 7, entonces al obtener el μ_i , estaremos obteniendo a su vez λ_n , el cual es el eigenvalor con menor valor absoluto de A. Por lo tanto, para calcular este valor se realiza la ecuación 10.

$$\lambda_i = \frac{\langle v_{i-1}, v_{i-1} \rangle}{\langle v_i, v_{i-1} \rangle} \quad (10)$$

La convergencia del método es el descrito en la ecuación 6. Entonces, el método de las potencias inversas es descrito en el pseudo código 2.

Algorithm 2: Método de las potencias inversas

Input: A
Output: v_i y λ_i

```

1  $v_0 \leftarrow \text{initialize\_vector}(v_0)$ 
2 while  $\theta > 10^{-6}$  do
3    $v_i \leftarrow \text{solve}(Av_i = v_{i-1})$ 
4    $\lambda_i \leftarrow \frac{\langle v_{i-1}, v_{i-1} \rangle}{\langle v_i, v_{i-1} \rangle}$ 
5    $v_i \leftarrow \text{normalize}(v_i)$ 
```

2.3. Método de deflación

Usando el método de potencias descrito en la sección 2.1 podemos tener una aproximación del eigenvalor dominante y su eigenvector asociado. El método de deflación calcula los m eigenvalor de una matriz, este se define de la siguiente manera:

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ los valores propios de la matriz A. Supongamos que λ_1 es el eigenvalor dominante, v_1 su eigenvector asociado Y v un vector tal que $\langle v_1, v \rangle = 1$. Sea B la matriz definida como

$$B = A - \lambda_1 v_1 v^T$$

entonces los valores propios de la matriz B son $0, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$.

Entonces al haber ‘eliminado’ al eigenvalor dominante de la matriz, al aplicar el método de potencias encontraremos un eigenvalor distinto. Tomaremos a $v = v_1$, esto porque al ser v_1 normalizado, entonces su producto punto consigo mismo debe ser 1.

El método de deflación es descrito en el pseudo código 3.

Algorithm 3: Método de deflación

Input: A, m
Output: v y λ

```

1 for  $i=1, m$  do
2    $v_0 \leftarrow \text{initialize\_vector}(v_0)$ 
3   for  $j=1, i-1$  do
4      $v_0 \leftarrow v_0 - \langle v_j, v_j \rangle v_j$ 
5   while  $\theta > 10^{-6}$  do
6      $v_i \leftarrow Av_{i-1}$ 
7      $\lambda_i \leftarrow \frac{\langle v_i, v_{i-1} \rangle}{\langle v_{i-1}, v_{i-1} \rangle}$ 
8      $v_j \leftarrow \text{normalize}(v_j)$ 
9     for  $j=1, i-1$  do
10     $v_i \leftarrow v_i - \langle v_j, v_j \rangle v_j$ 
  
```

2.4. Método de deflección inversa

Al igual que el método de deflección, este método eliminará las contribuciones de los vectores que ya no son necesarios calcular. En este caso se iniciará calculando el eigenvalor con menor valor absoluto (λ_n), en seguida el método tratara de obtener el siguiente eigenvalor mayor (λ_{n-1}).

Por lo tanto, el método de deflección inversa puede ser condensado en el algoritmo 4.

Algorithm 4: Método de deflación inversa

Input: A, m
Output: v y λ

```

1 for  $i=1, m$  do
2    $v_0 \leftarrow \text{initialize\_vector}(v_0)$ 
3   for  $j=1, i-1$  do
4      $v_0 \leftarrow v_0 - \langle v_j, v_j \rangle v_j$ 
5   while  $\theta > 10^{-6}$  do
6      $v_i \leftarrow \text{solve}(Av_i = v_{i-1})$ 
7      $\lambda_i \leftarrow \frac{\langle v_{i-1}, v_{i-1} \rangle}{\langle v_i, v_{i-1} \rangle}$ 
8      $v_i \leftarrow \text{normalize}(v_i)$ 
9     for  $j=1, i-1$  do
10     $v_i \leftarrow v_i - \langle v_j, v_j \rangle v_j$ 
  
```

3. Resultados

Para los tres métodos se calcularon los eigenvectores y sus eigenvalores correspondientes de las matrices contenidas en los archivos [Eigen_3x3.txt](#), [Eigen_50x50.txt](#) y [Eigen_125x125.txt](#). Estos archivos se encuentran en la carpeta [Data](#). Los resultados de cada método se muestran en los siguientes puntos.

3.1. Método de las potencias

Los resultados de este método de encuentran contenidos en la carpeta [Power_method/Output](#). Para el caso de la matriz contenida en el archivo [Eigen_3x3.txt](#), se tiene que la matriz es la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ -0.1 & 7 & -0.3 \\ -0.2 & -0.3 & 10 \end{pmatrix}$$

El eigenvalor dominante y su eigenvector correspondiente que se obtuvo es el siguiente:

$$\lambda_1 = 10.034796 \quad v_1 = \begin{bmatrix} -0.026902 \\ -0.097366 \\ 0.994885 \end{bmatrix}$$

3.2. Método de las potencias inversas

Los resultados de este método de encuentran contenidos en la carpeta [Inverse_method/Output](#). Para el caso de la matriz contenida en el archivo [Eigen_3x3.txt](#), se tiene que la matriz es la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ -0.1 & 7 & -0.3 \\ -0.2 & -0.3 & 10 \end{pmatrix}$$

El eigenvalor con menor valor absoluto y su eigenvector correspondiente que se obtuvo es el siguiente:

$$\lambda_3 = 2.991343 \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0.999190 \\ 0.027185 \\ 0.029679 \end{bmatrix}$$

3.3. Método de deflación

Los resultados de este método de encuentran contenidos en la carpeta [Deflection_method/Output](#). Para el caso de la matriz contenida en el archivo [Eigen_3x3.txt](#), se tiene que la matriz es la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ -0.1 & 7 & -0.3 \\ -0.2 & -0.3 & 10 \end{pmatrix}$$

Este método se implemento para obtener los $\max\{2, n-2\}$ eigenvalores máximos de una matriz de $n \times n$, para la matriz A, se tiene que $n = 3$, por lo que, se obtuvieron los primeros dos eigenvalores máximos. El método arrojó como resultado el eigenvalor dominante obtenido en la sección 3.1 y el próximo eigenvalor los cuales son los siguientes:

$$\lambda_1 = 10.034796 \quad v_1 = \begin{bmatrix} -0.026902 \\ -0.097366 \\ 0.994885 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 10.034796 \quad v_2 = \begin{bmatrix} -0.029881 \\ 0.994879 \\ 0.096558 \end{bmatrix}$$

4. Conclusiones

Los métodos realizan su proposito de manera efectiva. El problema que presentan es que el tiempo de ejecución incrementa demasiado al recibir una matriz de grandes dimensiones. Por otro lado, el obtener los eigenvalores y sus correspondientes eigenvectores nos presta información del comportamiento de la matriz o sus características. Esto con lleva a una interpretación del problema que se esta resolviendo.

5. Referencias

¹ Stanley Grossman. *Álgebra lineal*. McGraw Hill, Ciudad de México, 2019.