Tarea 12 - Métodos numéricos

Giovanni Gamaliel López Padilla

Problema 1

Problema 2

Sea el siguiente spline cúbico:

$$f(x) = \begin{cases} f_0(x) = ax^3 + bx^2 + c(x-1) & -1 \leq x \leq 0 \\ f_1(x) = d(x-1)^2 + ex & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

a) Determina los valores de a, b, c, d y e si f interpola $f(-1) = -4$ y $f(1) = 1$.
Se plantea que f, f' y f'' es continua, entonces esta debera cumplir la siguiente condición:

$$\begin{aligned} f_0(0) &= f_1(0) \\ f_0'(0) &= f_1'(0) \\ f_0''(0) &= f_1''(0) \end{aligned}$$

esto es porque f_0 y f_1 son funciones que comparten $x = 0$ en su dominio. Entonces, usando esta condición con las dadas, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} -a + b - 2c &= -4 \\ e &= 1 \\ c + d &= 0 \\ b - d &= 0 \\ c + 2d - e &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, se obtiene que la solución es la siguiente:

$$a = 7 \qquad b = 1 \qquad c = -1$$
$$d = 1 \qquad e = 1$$

En la figura 1 se muestra la función f con los parámetros obtenidos.

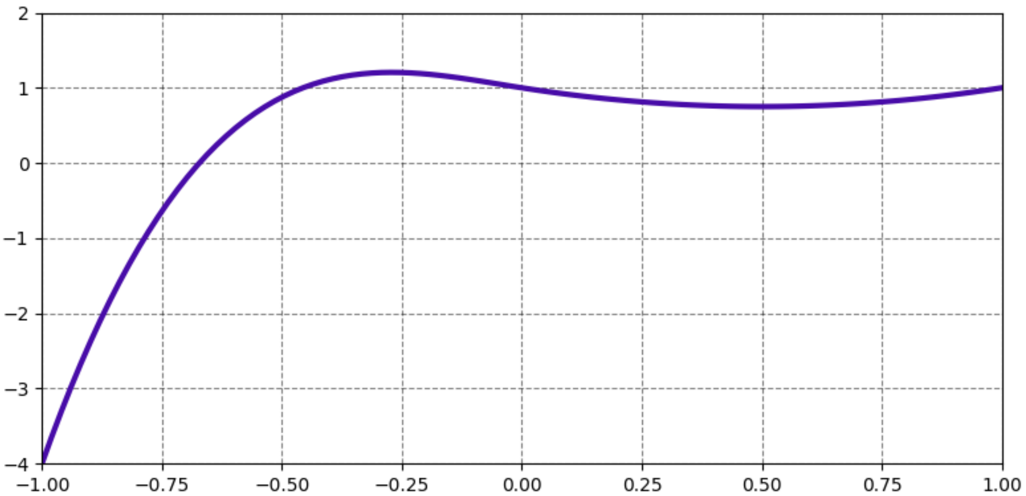


Figura 1: Función f con varios parámetros.

b) Determina los valores de a, b, c, d y e si f interpola $f'(-1) = 6$ y $f(1) = -1$.

Calculando la primer derivada de f, se obtiene lo siguiente:

$$f'(x) = \begin{cases} f_0'(x) = 3ax^2 + 2bx + c & -1 \leq x \leq 0 \\ f_1'(x) = 2d(x-1) + c & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Como f' debe de ser continua, entonces $f_0'(0) = f_1'(0)$. Contemplando las condicones dadas, entonces se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3a - 2b + c &= 6 \\ e &= -1 \\ c + d &= 0 \\ b - d &= 0 \\ c + 2d - e &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, se obtiene que la solución del sistema de ecuaciones es:

$$a = 1 \qquad b = -1 \qquad c = 1$$
$$d = -1 \qquad e = -1$$

En la figura 2 se muestra la función f con los parámetros obtenidos.

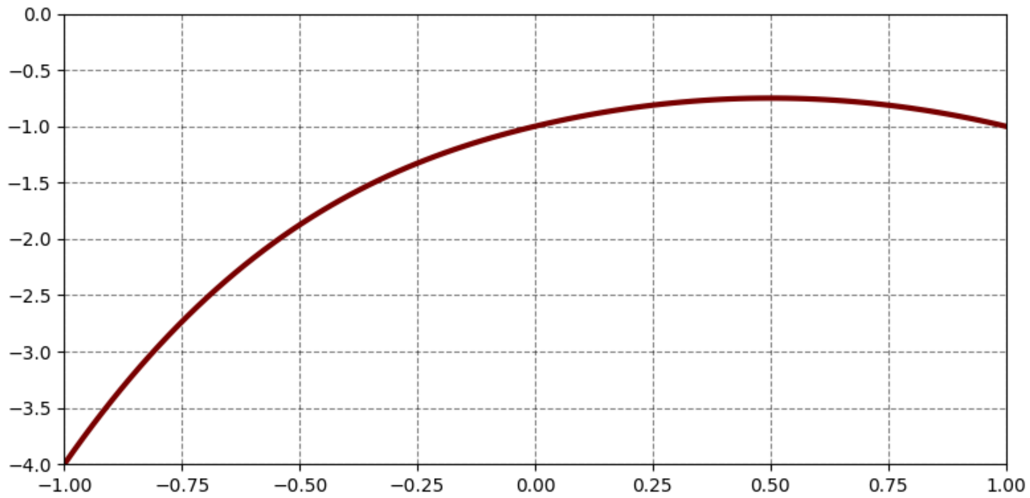


Figura 2: Función f con varios parámetros.

Problema 3

1. Problema 4

Problema 4

Implementa el algoritmo Spline Natural Cúbico y realiza la interpolación para la ecuación 1 a partir de los siguientes puntos de las ecuaciones 2 y 3.

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \tag{1}$$

$$x = \frac{i-8}{2} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, 16 \tag{2}$$

$$y = f(x) \tag{3}$$

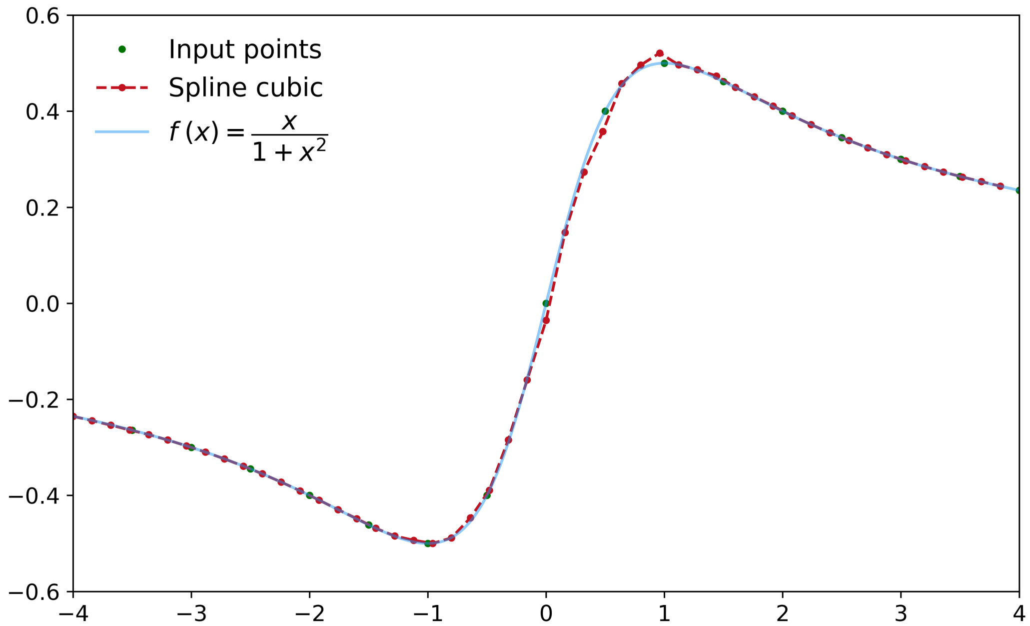


Figura 3: Interpolación de la ecuación 1 dados los puntos generados con las ecuaciones 2 y 3.

Problema 4b

Interpola la curva paramétria de la ecuación 4.

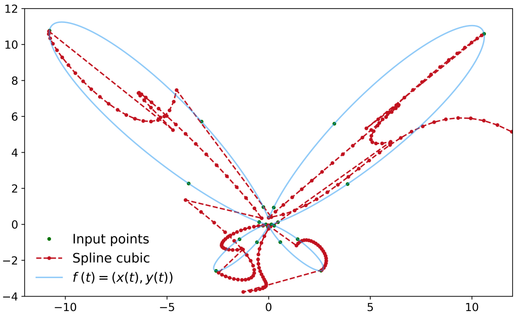
$$f(t) = (r(t)sin(t), r(t)cos(t)) \tag{4}$$

donde

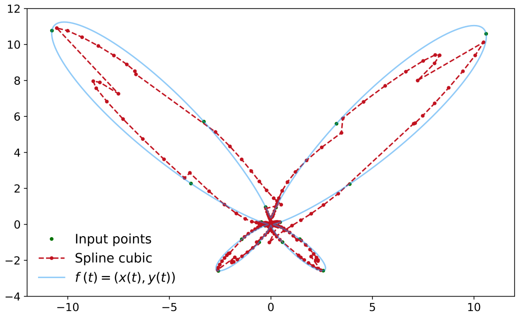
$$r(t) = exp(cos(t) - 2cos(4t) + sin\left(\frac{t}{12}\right)^5$$

a partir de 25 puntos definidos en la ecuación 5.

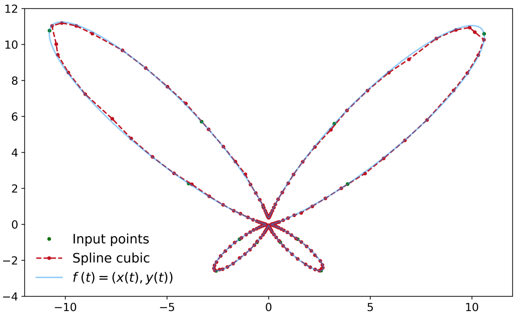
$$(x_i, y_i) = (x(t_i), y(t_i)) \qquad t_i = \frac{\pi i}{12} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, 24 \tag{5}$$



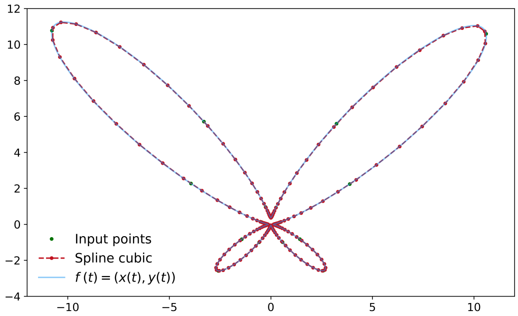
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 4