Tema 1. El Problema de Cauchy para la Ecuación del Calor

En este capítulo estudiaremos la llamada ecuación del calor homogénea

$$u_t - \Delta u = 0,$$

y la ecuación del calor no homogénea

$$u_t - \Delta u = f,$$

a las que añadiremos condiciones de contorno e iniciales apropiadas. Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ y $0 < T \leq \infty$, supondremos que la función incógnita u está definida, $u : (x,t) \in \Omega \times (0,T) \mapsto u(x,t) \in \mathbb{R}$.

El operador Δ (Laplaciano) está calculado respecto a la variable x:

$$\Delta u(x,t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x,t).$$

Por otro lado, la función $f : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$ está dada.

Nos planteamos en este tema dar algunos resultados relacionados con la existencia y unicidad de solución clásica del problema de Cauchy y del problema de Cauchy-Dirichlet para la ecuación del calor.

1.1. Introducción

Interpretación física: La ecuación del calor (ecuación de difusión) describe la evolución en el tiempo de densidades $u(x,t)$ de ciertas cantidades tales como la temperatura, la concentración química de ciertas sustancias, la concentración de poblaciones, etc. La ley física que rige la función densidad u se expresa diciendo que la razón de cambio de la concentración total dentro de cada abierto $\mathcal{O}$ ($\mathcal{O} \subset \Omega$ es un abierto regular) es igual al flujo normal neto a través de la frontera $\partial\mathcal{O}$ cambiado de signo:

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{O}} u(x,t)\, dx = -\int_{\partial\mathcal{O}} F(x,t) \cdot n(x)\, dS(x), \quad \forall t > 0,$$

donde F es el flujo total sobre la frontera y n es el vector normal unitario exterior a $\partial\mathcal{O}$ en cada punto $x \in \partial\mathcal{O}$. Aplicando el teorema de la divergencia,

$$\int_{\mathcal{O}} \left(u_t(x,t) + \nabla \cdot F(x,t)\right)\, dx = 0, \quad \forall t > 0,$$

donde mediante $\nabla\cdot$ estamos denotando el operador divergencia:

$$\nabla \cdot F = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}.$$

Al ser $\mathcal{O} \subset \Omega$ arbitrario, deducimos

$$u_t(x,t) + \nabla \cdot F(x,t) = 0 \quad \text{en } \Omega \times (0,\infty).$$

En muchas situaciones (p.e. en procesos de calor) F es una función del gradiente de u y en situaciones sencillas, F es proporcional al gradiente de u cambiado de signo (pues el flujo iría de zonas de mayor concentración de u a zonas de concentración más baja). Así,

$$F = -a\nabla u \quad \text{con } a > 0.$$

Cuando $a = 1$ obtenemos la ecuación del calor (obsérvese que $\nabla \cdot F = -a\Delta u$). ■

El objetivo central de este tema es el análisis del llamado problema de Cauchy (o de valores iniciales) para la ecuación del calor en un marco clásico (problema homogéneo y no homogéneo):

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{en } \mathbb{R}^N \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{en } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{1.1}$$

con $0 < T \leq \infty$, $f : \mathbb{R}^N \times (0,T) \to \mathbb{R}$ y $u_0 : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dados, y el análisis del llamado problema de Cauchy-Dirichlet para la ecuación del calor:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{en } \Omega \times (0,T), \\ u(x,t) = g & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto (en general acotado) y $f : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$, $g : \partial\Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$ y $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ son dados. Para ambos problemas buscamos soluciones clásicas, i.e., soluciones regulares que verifican la EDP y las condiciones iniciales y de contorno puntualmente. En concreto, definimos

$$C^{2,1}(\Omega \times (0,T)) = \left\{ u : u, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial u}{\partial t} \in C^0(\Omega \times (0,T)), \quad \forall i,j \right\}.$$

Así,

Definición 1.1. *Se dice que u es solución clásica de (1.1) (resp. solución clásica de (1.2)) si $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^N \times (0,T)) \cap C^0(\mathbb{R}^N \times [0,T))$ (resp. $u \in C^{2,1}(\Omega \times (0,T)) \cap C^0(\overline{\Omega} \times [0,T))$) satisface*

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t), \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

(resp. satisface

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t), \quad \forall (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ u(x,t) = g(x,t), \quad \forall (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \forall x \in \Omega). \end{cases}$$

■

1.2. El problema de Cauchy para la ecuación del calor

1.2.1. Solución fundamental. Núcleo de Gauss

Nuestro objetivo en esta sección es dar un resultado de existencia de solución clásica del problema (1.1) cuando los datos u_0 y f son continuos (que, evidentemente es una condición necesaria de existencia de solución regular). Para ello, al igual que se hizo en el problema de Laplace y el de Poisson, trataremos de dar una fórmula de representación de la solución mediante un cierto núcleo integral (el núcleo de Gauss).

Buscamos soluciones especiales de la ecuación del calor, en concreto, funciones $u(x,t)$ que sean invariantes respecto dilataciones en la forma $u(x,t) \to \lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda t))$ con $\lambda > 0$ (α y β son constantes reales). Tomando $\lambda = t^{-1}$ con $t \in (0,\infty)$, no es difícil comprobar que este tipo de soluciones son de la forma

$$u(x,t) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,T), \tag{1.3}$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ son constantes y $v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es una función a determinar.

De (1.3) deducimos

$$\begin{cases} u_t(x,t) = -\alpha t^{-(\alpha+1)} v(x/t^\beta) - \beta t^{-(\alpha+1)} t^{-\beta} \nabla v(x/t^\beta) \cdot x, \\ \Delta u(x,t) = t^{-(\alpha+\beta)} t^{-\beta} \Delta v(x/t^\beta). \end{cases}$$

Así, si u es solución del calor y si llamamos $y = x/t^\beta$, entonces es fácil comprobar que v es solución de la EDP

$$\alpha t^{-(\alpha+1)} v(y) + \beta t^{-(\alpha+1)} \nabla v(y) \cdot y + t^{-(\alpha+2\beta)} \Delta v(y) = 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^N, \quad \forall t > 0.$$

Tomando $\beta = 1/2$ podemos eliminar la variable t y deducir que u es solución del calor si y sólo si v satisface

$$\alpha v + \frac{1}{2} y \cdot \nabla v + \Delta v = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N.$$

Se trata de una EDP donde sólo interviene la variable x. Trataremos de resolverla buscando soluciones radiales, es decir, soluciones que se escriben de la forma:

$$v(y) = w(|y|) \text{ con } w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Si llamamos $r = |y|$, entonces la ecuación anterior se transforma:

$$\alpha w + \frac{1}{2} r w' + w'' + \frac{N-1}{r} w' = 0.$$

Si multiplicamos por r^{N-1}, obtenemos

$$r^{N-1} w'' + (N-1) r^{N-2} w' + \alpha r^{N-1} w + \frac{1}{2} r^N w' = 0,$$

que tomando $\alpha = N/2$ se transforma en

$$\left(r^{N-1} w' + \frac{1}{2} r^N w \right)' = 0.$$

Se trata de una e.d.o. lineal de segundo orden que es fácilmente resoluble, dando como solución general

$$w(r) = be^{-r^2/4} + a\int_0^r \frac{1}{s^{N-1}} e^{s^2/4-r^2/4}\, ds,$$

donde a y b son constantes genéricas. Si tomamos $a \equiv 0$ y volvemos a (1.3), obtenemos una solución de la ecuación del calor dada por

$$u(x,t) = b\,\frac{1}{t^{N/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty).$$

Finalmente, tomamos $b = (4\pi)^{-N/2}$ y así,

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\, dx = 1, \quad \forall t > 0.$$

(Obsérvese que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{t^{N/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\, dx = \frac{1}{t^{N/2}} \prod_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-s^2}{4t}}\, ds = (4\pi)^{N/2}\,).$$

Definimos por tanto

Definición 1.2. *La función*

$$E(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & si\ x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0, \\ 0 & si\ x \in \mathbb{R}^N, \quad t \le 0, \end{cases}$$

es llamada solución fundamental de la ecuación del calor o núcleo de Gauss. ■

Observación 1.3. Es fácil comprobar que E es una función muy regular salvo en $(0,0)$. En concreto,

$$E \in C^\infty(\mathbb{R}^{N+1} \setminus \{(0,0)\}).$$

Por otro lado, también es fácil comprobar que, fijado $y \in \mathbb{R}^N$ y $s > 0$, la función de las variables (x,t), $E(x-y,t-s)$, es también solución de la ecuación del calor en $\mathbb{R}^N \times (s,\infty)$:

$$E_t(x-y,t-s) - \Delta_x E(x-y,t-s) = 0, \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (s,\infty).$$

■

1.2.2. Problema de Cauchy homogéneo

Utilizaremos E para determinar una solución del problema de Cauchy (1.1). Utilizaremos la Observación 1.3 y aprovecharemos que la función $E(x-y,t)$ es solución de la ecuación del calor en $\mathbb{R}^N \times (0,\infty)$. En consecuencia, un candidato para ser una solución del problema de Cauchy (1.1) es el producto de convolución de E y u_0: $u(x,t) = (E(\cdot,t) * u_0)(x)$. Teniendo en cuenta lo anterior, definimos

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} E(x-y,t)u_0(y)\, dy = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)\, dy, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty). \tag{1.4}$$

Se tiene:

Teorema 1.4. (Solución clásica del problema de Cauchy) *Supongamos que* u_0 *pertenece a* $C^0(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$. *Entonces, la función* u *dada por* (1.4) *está bien definida en* $\mathbb{R}^N \times (0, \infty)$ *y satisface*

1. $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times (0, \infty))$,
2. $u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = 0$, $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0, \infty)$,
3. $\displaystyle\lim_{(x,t)\to(x_0,0^+)} u(x,t) = u_0(x_0)$, *para cada* $x_0 \in \mathbb{R}^N$,
4. $|u(x,t)| \leq \displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}^N} |u_0(x)| = ||u_0||_{\infty;\mathbb{R}^N}$, $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0, \infty)$.

Prueba: Evidentemente u está bien definida para cada $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,T)$ y, de hecho, es fácil comprobar el punto 4.

Deduciremos los puntos 1. y 2. del teorema de derivación bajo el signo integral.

Veremos en realidad que $u \in C^\infty(B(0,R) \times (T_1, T_2))$ para cada $R > 0$ y para cada T_1, T_2 tales que $0 < T_1 < T_2 < \infty$ (lo cual implicará el primer punto). Por inducción en la longitud del multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^{N+1}$, no es difícil comprobar

$$D^\alpha_{(x,t)} \left(\frac{1}{(4\pi t)^{N/2}}\, e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \right) = \frac{P_\alpha(x,t)}{t^{m(\alpha)}}\, e^{-\frac{|x|^2}{4t}},$$

donde $m(\alpha) \in \mathbb{N}$ y P_α es un polinomio en las variables (x,t), ambos dependientes de α. Por otro lado, si $(x,t) \in B(0,R) \times (T_1,T_2)$ e $y \in \mathbb{R}^N$, entonces

$$e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \leq e^{-\frac{|y|^2-2R|y|}{4T_2}} \quad \text{y} \quad \frac{1}{t^{m(\alpha)}} \leq \frac{1}{T_1^{m(\alpha)}}.$$

Podemos aplicar el teorema de derivación puesto que existe

$$D^\alpha_{(x,t)} \left(\frac{1}{(4\pi t)^{N/2}}\, e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) \right) = \frac{P_\alpha(x-y,t)}{t^{m(\alpha)}}\, e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y),$$

y, para $(x,t) \in B(0,R) \times (T_1,T_2)$, podemos acotar

$$\left| D^\alpha_{(x,t)} \left(\frac{1}{(4\pi t)^{N/2}}\, e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) \right) \right| \leq ||u_0||_{\infty;\mathbb{R}^N} \frac{\widetilde{P}_\alpha(R,|y|,T_2)}{T_1^{m(\alpha)}}\, e^{-\frac{|y|^2-2R|y|}{4T_2}} \in L^1(\mathbb{R}^N),$$

donde $\widetilde{P}_\alpha$ es un nuevo polinomio. Como consecuencia también deducimos

$$D^\alpha u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} D^\alpha E(x-y,t) u_0(y)\, dy,$$

fórmula de la que se deduce el punto 2.

3. Fijemos $x_0 \in \mathbb{R}^N$ y $\varepsilon > 0$. De la continuidad de la función u_0 deducimos que existe $\delta > 0$ tal que si $y \in \mathbb{R}^N$ y $|y - x_0| \leq \delta$, entonces

$$|u_0(y) - u_0(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.5}$$

Si $|x-x_0|\le\delta/2$, entonces

$$\begin{cases} |u(x,t)-u(x_0)| = \dfrac{1}{(4\pi t)^{N/2}}\left|\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}(u_0(y)-u_0(x_0))\,dy\right| \\ \qquad\qquad \le \dfrac{1}{(4\pi t)^{N/2}}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\,|u_0(y)-u_0(x_0)|\,dy = I+J, \end{cases}$$

donde

$$\begin{cases} I = \dfrac{1}{(4\pi t)^{N/2}}\displaystyle\int_{B(x_0,\delta)} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\,|u_0(y)-u_0(x_0)|\,dy \quad \text{y} \\ J = \dfrac{1}{(4\pi t)^{N/2}}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N\setminus B(x_0,\delta)} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\,|u_0(y)-u_0(x_0)|\,dy \end{cases}$$

De las propiedades de la solución fundamental y de (1.5) obtenemos fácilmente

$$I\le\frac{\varepsilon}{2}.$$

Por otro lado, cuando $|x-x_0|\le\delta/2$ y $|y-x_0|\ge\delta$, se tiene:

$$|y-x_0|\le|y-x|+|x-x_0|\le|y-x|+\frac{\delta}{2}\le|y-x|+\frac{1}{2}|y-x_0|,$$

luego $|y-x|\ge\dfrac{1}{2}|y-x_0|$. Así, (designamos mediante C una constante genérica cuyo valor va cambiando de una fórmula a la siguiente)

$$\begin{cases} J\le \dfrac{C}{t^{N/2}}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N\setminus B(x_0,\delta)} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}dy \le \dfrac{C}{t^{N/2}}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N\setminus B(x_0,\delta)} e^{-\frac{|y-x_0|^2}{16t}}dy = \\ \quad = \dfrac{C}{t^{n/2}}\displaystyle\int_\delta^\infty e^{-\frac{r^2}{16t}}r^{N-1}dr = C\displaystyle\int_{\frac{\delta}{4\sqrt{t}}}^\infty e^{-s^2}s^{N-1}ds\to 0 \quad \text{cuando} \quad t\downarrow 0^+. \end{cases}$$

Podemos, por tanto, elegir $\widetilde{\delta}>0$ tal que si $|x-x_0|+t\le\widetilde{\delta}$, entonces $I+J\le\varepsilon$. ∎

Ejercicio 1. *Supongamos que $u_0\in L^p(\mathbb{R}^N)$ con $p\in[1,\infty]$. Entonces, la función u dada por (1.4) está bien definida en $\mathbb{R}^N\times(0,\infty)$ y*

1. *$u\in C^\infty(\mathbb{R}^N\times(0,\infty))$,*
2. *$u_t(x,t)-\Delta u(x,t)=0$, $\forall(x,t)\in\mathbb{R}^N\times(0,\infty)$,*
3. *Si $p\in[1,\infty)$, $u(\cdot,t)\to u_0$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$ cuando $t\downarrow 0^+$,*
4. *$||u(\cdot,t)||_{p;\mathbb{R}^N}\le||u_0||_{p;\mathbb{R}^N}$, $\forall t\in(0,\infty)$.* ∎

Observación 1.5. 1. El resultado anterior es un resultado de existencia de solución clásica de (1.1) cuando $f\equiv 0$ y $u_0\in C^0(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ (problema homogéneo). Efectivamente, si prolongamos $u(x,t)$ a $t=0$ haciendo $u(x,0)=u_0(x)$ para $x\in\mathbb{R}^N$, entonces

$$u\in C^\infty(\mathbb{R}^N\times(0,\infty))\cap C^0(\mathbb{R}^N\times[0,\infty)),$$

y u satisface la ecuación del calor y la condición inicial.

2. Por otro lado, si $u_0 \in C^0(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ y $u_0 \geq 0$ en $\mathbb{R}^N$ con $u_0 \not\equiv 0$ (u_0 no idénticamente nula), entonces la función u dada por (1.4) satisface
$$u(x,t) > 0, \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty).$$
Se interpreta esta condición diciendo que la ecuación del calor tiene velocidad infinita de propagación: si el dato inicial es no negativo y es positivo en algún punto, entonces la temperatura en un instante posterior t (por muy pequeño que éste sea) es positiva en todos los puntos. A diferencia de lo que ocurre en la ecuación del calor, veremos que la ecuación de ondas tiene velocidad finita de propagación.

3. **Unicidad:** Se puede comprobar, gracias a un ejemplo dado por Tikhonov (ver [Peral] o [John]), que el problema de valores inciales (1.1) no tiene unicidad de solución clásica. De hecho, Tikhonov probó que el problema de Cauchy (1.1) para $f \equiv 0$ y $u_0 \equiv 0$ admite una solución clásica no nula. Veremos en la Sección siguiente que es posible probar la unicidad de solución clásica de (1.1) dentro de una clase de funciones que satisfacen una condición de acotación adicional.

4. Como pone de manifiesto el ejercicio 1, el problema homogéneo de Cauchy (1.1) ($f \equiv 0$) admite solución incluso para datos iniciales en $L^p(\mathbb{R}^N)$ (en este caso la EDP se satisface en sentido clásico y la condición inicial en el sentido de $L^p(\mathbb{R}^N)$, es decir, en casi todo $\mathbb{R}^N$). Es interesante señalar que la función u dada por (1.4) es muy regular cuando $t > 0$:
$$u(\cdot,t) \in C^\infty(\mathbb{R}^N), \quad \forall t > 0.$$
De hecho, se puede demostrar que la función $u(\cdot,\cdot)$ es analítica en $\mathbb{R}^N \times (0,T)$ (ver [John]). Esta regularidad es independiente de la regularidad del dato inicial u_0. Se resume esta idea diciendo que la ecuación del calor tiene un fuerte efecto regularizante: aunque el dato inicial sea irregular, la solución u del problema homogéneo de Cauchy es analítica para $t > 0$. Cuando analicemos el problema de Cauchy para la ecuación de ondas veremos que esta ecuación no tiene efecto regularizante: la solución en el instante $t > 0$ tiene la misma regularidad que en el instante inicial.

5. **Irreversibilidad:** El fuerte efecto regularizante de la ecuación del calor hace que el problema de Cauchy esté mal planteado cuando $t < 0$. De nuevo, como veremos en el tema siguiente, esto no ocurre en la ecuación de ondas. ■

1.2.3. Problema de Cauchy no homogéneo

Pasamos seguidamente a ocuparnos del análisis de la existencia y/o unicidad de solución clásica del problema de Cauchy no homogéneo (1.1). Al tratarse de un problema lineal, para obtener una solución de (1.1), basta analizar el problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t - \Delta u = f & \text{en } \mathbb{R}^N \times (0,T), \\ u(x,0) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N, \end{array} \right. \tag{1.6}$$

con $T \in (0,\infty]$ y f una función dada. Utilizando el principio de superposición podremos obtener fácilmente una solución clásica del problema no homogéneo (1.1).

Para calcular una solución de (1.6) utilizaremos el llamado principio de Duhamel. Este principio es una generalización de la fórmula de variación de las constantes, fórmula que permitía calcular la solución general de sistemas diferenciales ordinarios lineales no homogéneos. Este principio ha sido también utilizado en la asignatura de Ecuaciones en Derivadas Parciales y Análisis Funcional de 4º curso para la resolución del problema de Cauchy no homogéneo para la ecuación de ondas en dimensión 1.

Antes de recordar el principio de Duhamel, observemos que, fijado $y \in \mathbb{R}^N$ y $s > 0$, la función de las variables (x,t), $E(x-y, s-t)$, es solución de la ecuación del calor en $\mathbb{R}^N \times (s,\infty)$. De la discusión hecha en la sección anterior, la función

$$U(x,t;s) = \int_{\mathbb{R}^N} E(x-y, t-s) f(y,s)\, dy$$

resuelve el problema de Cauchy *homogéneo* :

$$\left\{ \begin{array}{ll} U_t(\cdot;s) - \Delta U(\cdot;s) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times (s,\infty), \\ U(x,s;s) = f(x,s) & \text{en } \mathbb{R}^N, \end{array} \right. \tag{1.7}$$

problema que tiene como instante inicial de tiempo el instante $t = s$ y como dato inicial $f(\cdot, s)$.

El principio de Duhamel aserta que podemos construir una solución de (1.6) a partir de una solución de (1.7), integrando respecto de s en el intervalo $(0,t)$. La idea es tomar

$$u(x,t) = \int_0^t U(x,t;s) ds, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,T),$$

con $U(\cdot, s)$ solución de (1.7). Por tanto, definimos

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x,t) = \displaystyle\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} E(x-y,t-s) f(y,s)\, dy\, ds \\ \qquad\quad = \displaystyle\int_0^t \frac{1}{[4\pi(t-s)]^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(y,s)\, dy\, ds. \end{array} \right. \tag{1.8}$$

Se tiene:

Teorema 1.6. Existencia de solución de (1.6). *Sea $0 < T \le \infty$ y supongamos que $f \in C^0(\mathbb{R}^N \times (0,T)) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N \times (0,T))$ es tal que*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^0(\mathbb{R}^N \times (0,T)) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N \times (0,T)) \quad \forall i : 1 \le i \le N.$$

Entonces, la función u dada por (1.8) satisface

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^N \times (0,T)) \cap C^0(\mathbb{R}^N \times [0,T)), \\ |u(x,t)| \le t \sup\limits_{\mathbb{R}^N \times (0,T)} |f(y,s)|, \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,T), \end{array} \right.$$

y es una solución clásica del problema (1.6).

Prueba: Consideramos la función:

$$\begin{cases} U(x,t;s) = \dfrac{1}{[4\pi(t-s)]^{N/2}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(y,s)\,dy \\ \qquad\quad = \dfrac{1}{\pi^{N/2}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} e^{-|z|^2} f(x+2z\sqrt{t-s},s)\,dz. \end{cases}$$

Aplicaremos a la expresión anterior el teorema de derivación respecto de parámetros.

1. Comenzamos aplicando el resultado de continuidad en el conjunto

$$\widetilde{\mathcal{O}} = \{(x,t,s) : x \in \mathbb{R}^N, \quad t \in (0,T), \quad s \in (0,t]\}.$$

y deducimos que $U \in C^0(\widetilde{\mathcal{O}})$. De hecho, también se tiene

$$\begin{cases} |U(x,t;s)| \le \displaystyle\sup_{\mathbb{R}^N \times (0,T)} |f|, \quad \forall (x,t;s) \in \widetilde{\mathcal{O}} \text{ y} \\ U(x,t;t) = f(x,t), \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,T). \end{cases}$$

2. Si consideramos

$$\mathcal{O} = \{(x,t,s) : x \in \mathbb{R}^N, \quad t \in (0,T), \quad s \in (0,t)\},$$

podemos aplicar de nuevo el teorema de derivabilidad a la función U y deducir que existe $\partial U/\partial x_i \in C^0(\mathcal{O})$ para cada i, $1 \le i \le N$, y

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x_i}(x,t;s) = \dfrac{1}{\pi^{N/2}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} e^{-|z|^2} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x+2z\sqrt{t-s},s)\,dz, \quad \text{y} \\ \left|\dfrac{\partial U}{\partial x_i}(x,t;s)\right| \le \displaystyle\sup_{\mathbb{R}^N \times (0,T)} \left|\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right|, \quad \forall (x,t;s) \in \mathcal{O}. \end{cases}$$

Obsérvese que, para $(x,t,s) \in \mathcal{O}$, también podemos escribir

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x_i}(x,t;s) = \dfrac{1}{\pi^{N/2}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} e^{-|z|^2} \dfrac{\partial}{\partial z_i}\left(f(x+2z\sqrt{t-s},s)\right) \dfrac{1}{2\sqrt{t-s}}\,dz, \\ \qquad\qquad\quad = \dfrac{1}{\pi^{N/2}\sqrt{t-s}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} e^{-|z|^2} z_i\, f(x+2z\sqrt{t-s},s)\,dz. \end{cases}$$

Es fácil comprobar que podemos aplicar, a la expresión anterior y en $\mathcal{O}$, el teorema de derivación respecto parámetros para obtener que existe $\partial^2 U/\partial x_i \partial x_j \in C^0(\mathcal{O})$ y, para cada $(x,t,s) \in \mathcal{O}$,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}(x,t;s) = \frac{1}{\pi^{N/2}\sqrt{t-s}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-|z|^2} z_i \frac{\partial f}{\partial x_j}(x+2z\sqrt{t-s},s)\,dz.$$

En particular,

$$\Delta U(x,t;s) = \frac{1}{\pi^{N/2}\sqrt{t-s}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-|z|^2}\, z \cdot \nabla f(x+2z\sqrt{t-s},s)\,dz, \quad \forall (x,t,s) \in \mathcal{O}.$$

3. Sea $K \subset \mathcal{O}$, un compacto. Aplicando el teorema de derivación respecto de parámetros en K, deducimos que $U_t \in C^0(K)$ y
$$U_t(x,t;s) = \frac{1}{\pi^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-|z|^2} z \cdot \nabla f(x + 2z\sqrt{t-s}, s) \frac{1}{\sqrt{t-s}}\, dz, \quad \forall (x,t;s) \in K.$$
Como K es un compacto arbitrario de $\mathcal{O}$, deducimos que existe $\partial U/\partial t$ en $\mathcal{O}$ y se satisface la fórmula anterior en todos los puntos de $\mathcal{O}$.

Por otro lado, observando que
$$u(x,t) = \int_0^t U(x,t;s)\, ds,$$
y teniendo en cuenta los puntos 1., 2. y 3., podemos aplicar de nuevo el teorema de derivación respecto de parámetros y deducir que
$$u \in C^0(\mathbb{R}^N \times [0,T)) \quad \text{y} \quad u, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, u_t \in C^0(\mathbb{R}^N \times (0,T)), \quad \forall i,j : 1 \le i,j \le N$$
y
$$\begin{cases} u(x,0) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \\ u_t(x,t) = U(x,t;t) + \dfrac{1}{\pi^{N/2}} \displaystyle\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} e^{-|z|^2}\, z \cdot \nabla f(x + 2z\sqrt{t-s}, s)\, dz\, ds \\ \qquad\qquad = f(x,t) + \dfrac{1}{\pi^{N/2}} \displaystyle\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} e^{-|z|^2}\, z \cdot \nabla f(x + 2z\sqrt{t-s}, s)\, dz\, ds, \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,T), \\ \Delta u(x,t) = \dfrac{1}{\pi^{N/2}} \displaystyle\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} e^{-|z|^2}\, z \cdot \nabla f(x + 2z\sqrt{t-s}, s)\, dz\, ds, \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,T). \end{cases}$$
Evidentemente, estas igualdades prueban el resultado. ■

Como consecuencia del resultado anterior, también obtenemos

Corolario 1.7. Existencia de solución del problema de Cauchy no homogéneo. *Supongamos que $u_0 \in C^0(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ y que f, $\partial f/\partial x_i \in C^0(\mathbb{R}^N \times (0,T)) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N \times (0,T))$, con $0 < T \le \infty$ e i: $1 \le i \le N$. Entonces la función*
$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} E(x-y,t) u_0(y)\, dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} E(x-y,t-s) f(y,s)\, dy\, ds$$
satisface $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^N \times (0,T)) \cap C^0(\mathbb{R}^N \times [0,T))$, es una solución clásica del problema de Cauchy (1.1) y
$$|u(x,t)| \le ||u_0||_{\infty;\mathbb{R}^N} + t||f||_{\infty;\mathbb{R}^N \times (0,T)}, \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,T).$$
■

Observación 1.8. 1. Obsérvese que para poder asegurar la existencia de solución del problema de Cauchy no homogéneo (1.1) hemos supuesto que el segundo miembro y *sus derivadas espaciales* son continuas. Se puede comprobar que la única hipótesis de continuidad sobre el segundo miembro f no es suficiente para poder asegurar la existencia de solución clásica del problema de Cauchy (1.1) (para ver un contraejemplo, véase el libro de [Peral]).

2. De nuevo, si $u_0 \geq 0$ en $\mathbb{R}^N$ y $f \geq 0$ en $\mathbb{R}^N \times (0,T)$, entonces también se tiene que $u(x,t) \geq 0$ en $\mathbb{R}^N \times (0,T)$. De hecho, se tiene: existe $(x_0,t_0) \in \mathbb{R}^N \times (0,T)$ tal que $u(x_0,t_0) = 0$ si y sólo si

$$u_0 \equiv 0 \text{ en } \mathbb{R}^N \quad \text{y} \quad f \equiv 0 \text{ en } \mathbb{R}^N \times [0,t_0].$$

■

1.3. Principio del máximo. Unicidad

Dedicamos esta sección a enunciar y demostrar el principio del máximo débil para soluciones regulares de la ecuación del calor en dominios acotados. Como consecuencia, seremos capaces de demostrar un resultado de unicidad de solución clásica para el problema de Cauchy-Dirichlet para la ecuación del calor planteada en un dominio acotado.

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado y conexo de frontera $\partial\Omega$ y $T \in (0,\infty]$. Definimos $Q_T = \Omega \times (0,T)$ (cilindro), $\Sigma_T = \partial\Omega \times (0,T)$ (superficie lateral del cilindro Q_T) y $\Gamma_T = (\Omega \times \{0\}) \cup \overline{\Sigma}_T$ ("tapa" inferior + superficie lateral del cilindro Q_T). Entonces

Teorema 1.9. Principio del máximo débil en dominios acotados. *Supongamos que $T \in (0,\infty]$ y $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^0(\overline{\Omega} \times [0,T))$ satisface*

$$u_t - \Delta u \leq 0 \quad \text{en } Q_T\,.$$

Entonces,

$$\sup_{Q_T} u \leq \sup_{\Gamma_T} u.$$

Prueba: Supondremos en primer lugar que la función u satisface

$$u_t - \Delta u < 0 \text{ en } Q_T. \tag{1.9}$$

Para cada $n \geq 1$ y $T_n = \frac{2n-1}{2n}T$, si $T < \infty$, o $T_n = n$, si $T = \infty$, consideramos el abierto $Q_n = \Omega \times (0,T_n)$. Obtenemos que $Q_n \subset Q_T$ y $u \in C^0(\overline{Q}_n)$. Así, deducimos la existencia de $(x_0,t_0) \in \overline{Q}_n$ tal que

$$u(x_0,t_0) = \max_{\overline{Q}_n} u.$$

Si $(x_0,t_0) \in Q_n$, las condiciones necesarias de máximo junto con las hipótesis de regularidad de la función u en Q_T implican las relaciones $u_t(x_0,t_0) = 0$ y $\Delta u(x_0,t_0) \leq 0$, lo cual contradice la condición (1.9). Si $(x_0,t_0) \in \Omega \times \{T_n\}$ ("tapa" superior del cilindro Q_n), de nuevo, las condiciones necesarias de máximo implican $u_t(x_0,t_0) \geq 0$ y $\Delta u(x_0,t_0) \leq 0$ que, otra vez, están en contradicción con la condición (1.9). Por lo tanto, (x_0,t_0) pertenece a $\Gamma_n = \big(\overline{\Omega} \times \{0\}\big) \cup (\partial\Omega \times [0,T_n])$ y

$$\max_{\overline{Q}_n} u = \max_{\Gamma_n} u \leq \sup_{\Gamma_T} u,$$

para cada $n \geq 1$. De la desigualdad anterior deducimos el principio del máximo: En efecto, sea $(x,t) \in Q_T$, entonces, para $n \geq 1$ suficientemente grande se tiene $(x,t) \in Q_n$ y

$$u(x,t) \leq \max_{\overline{Q}_n} u = \max_{\Gamma_n} u \leq \sup_{\Gamma_T} u.$$

Tomando supremo en la desigualdad anterior, llegamos al resultado.

Veamos ahora el caso general $u_t - \Delta u \leq 0$ en Q_T. Consideramos κ una constante positiva e introducimos la función $v(x,t) = u(x,t) - \kappa t$. Entonces $v \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^0(\overline{\Omega} \times [0,T))$ y

$$v_t - \Delta v = u_t - \Delta u - \kappa < 0 \text{ en } Q_T \,.$$

Aplicando el punto anterior, si $(x,t) \in Q_T$, deducimos,

$$u(x,t) = \kappa t + v(x,t) \leq \kappa t + \sup_{Q_T} v \leq \kappa t + \sup_{\Gamma_T} v \leq \kappa t + \sup_{\Gamma_T} u.$$

Si en la expresión anterior tomamos límite cuando $\kappa \downarrow 0$ obtenemos $u(x,t) \leq \sup_{\Gamma_T} u$ para cualquier $(x,t) \in Q_T$. Basta tomar supremo para obtener la prueba del teorema en el caso general. ■

Observación 1.10. 1. Evidentemente podemos dar un resultado análogo al Teorema 1.4 para funciones $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^0(\overline{\Omega} \times [0,T))$ que satisfacen

$$u_t - \Delta u \geq 0 \quad \text{en } Q_T \,,$$

cambiando supremo por ínfimo.

2. Supongamos que $T < \infty$ y $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^0(\overline{Q}_T)$. Del teorema anterior deducimos,

$$\max_{\overline{Q}_T} u = \max_{\Gamma_T} u.$$

Esta igualdad no excluye la posibilidad de que el máximo en $\overline{Q}_T$ se alcance en un punto $(x_0,t_0) \in Q_T$ (de ahí el nombre de principio del máximo débil). Como en el caso de la ecuación de Laplace (Ampliación de EDP) se puede demostrar el llamado principio del máximo fuerte:

Teorema 1.11. Principio del máximo fuerte. *En las condiciones anteriores, si existe $(x_0,t_0) \in Q_T \cup (\Omega \times \{T\})$ tal que*

$$u(x_0,t_0) = \max_{\overline{Q}_T} u \equiv M,$$

entonces, $u(x,t) = M$, $\forall (x,t) \in Q_T$. ■

Estudiaremos ahora el problema de Cauchy-Dirichlet (1.2) donde $f \in C^0(Q_T)$, $g \in C^0(\Sigma_T)$ y $u_0 \in C^0(\Omega)$ son dadas. Veamos que una consecuencia inmediata del principio del máximo débil es la unicidad de solución clásica del problema (1.2) en dominios Ω que son acotados.

Teorema 1.12. Unicidad de solución clásica en dominios acotados. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado y $T \in (0,\infty]$. Supongamos que $f \in C^0(Q_T)$, $g \in C^0(\Sigma_T)$ y $u_0 \in C^0(\Omega)$. Entonces el problema de Cauchy-Dirichlet (1.2) admite a lo sumo una solución clásica $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^0(\overline{\Omega} \times [0,T))$.*

Prueba: Sean u_1 y u_2 dos soluciones clásicas de (1.2) en $C^{2,1}(Q_T) \cap C^0(\overline{\Omega} \times [0,T))$. Basta aplicar el principio del máximo débil a $w = u_1 - u_2$ y a $w = u_2 - u_1$ en el cilindro Q_T para concluir que $u_1 \equiv u_2$ en Q_T. ∎

Extenderemos a continuación el principio del máximo débil y el resultado de unicidad de solución clásica al caso en el que consideramos $\Omega \equiv \mathbb{R}^N$ y el problema de Cauchy (1.1). Para obtener estos resultados tenemos que añadir ciertas condiciones de crecimiento en el infinito a las funciones implicadas:

Teorema 1.13. Principio del máximo débil en $\mathbb{R}^N$. *Sea* $T \in (0,\infty]$ *y supongamos que* $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^N \times (0,T)) \cap C^0(\mathbb{R}^N \times [0,T))$ *satisface*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u \le 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{en } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

y, para ciertas constantes positivas A *y* a*, se tiene la condición de crecimiento*

$$u(x,t) \le A e^{a|x|^2}, \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,T).$$

Entonces,

$$u(x,t) \le \sup_{\mathbb{R}^N} u_0, \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T).$$

Prueba: A lo largo de la prueba supondremos que se tiene $\sup_{\mathbb{R}^N} u_0 < \infty$. Haremos la prueba en tres etapas:

1. Supongamos en primer lugar que T es finito y que satisface la desigualdad $4aT < 1$. De este modo, podemos elegir $\varepsilon > 0$ tal que $4a(T+\varepsilon) < 1$. Por otro lado, fijado $y \in \mathbb{R}^N$ y $\mu > 0$, definimos

$$v_y(x,t) = u(x,t) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{N/2}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)}} \quad \text{para } (x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T].$$

Es fácil comprobar que $v \in C^{2,1}(\mathbb{R}^N \times (0,T)) \cap C^0(\mathbb{R}^N \times [0,T])$ y,

$$v_{y,t} - \Delta v_y = u_t - \Delta u \le 0 \text{ en } \mathbb{R}^N \times (0,T).$$

Tomemos $r > 0$ (que fijaremos más adelante) y hagamos $\Omega = B(y,r)$ y $Q_T = \Omega \times (0,T)$. Podemos aplicar el Teorema 1.9 a v_y y deducir

$$\sup_{Q_T} v_y = \sup_{\Gamma_T} v_y$$

donde $\Gamma_T = (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0,T])$.

2. Por otro lado, si $x \in \mathbb{R}^N$

$$v_y(x,0) = u(x,0) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon)^{N/2}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon)}} \le u(x,0) = u_0(x).$$

Si ahora $(x,t) \in \partial\Omega \times [0,T]$, i.e., si $|x-y| = r$ y $t \in [0,T]$:

$$\begin{cases} v_y(x,t) = u(x,t) - \dfrac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{N/2}} e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}} \\ \qquad \le A e^{a|x|^2} - \dfrac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{N/2}} e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}} \le A e^{a(|y|+r)^2} - \dfrac{\mu}{(T+\varepsilon)^{N/2}} e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon)}}. \end{cases}$$

Obsérvese que bajo la hipótesis $4a(T+\varepsilon) < 1$, tenemos $a < (4(T+\varepsilon))^{-1}$, es decir, para cierto $\gamma > 0$, $(4(T+\varepsilon))^{-1} = a + \gamma$. Así, volviendo a la desigualdad anterior,

$$v_y(x,t) \leq Ae^{a(|y|+r)^2} - \frac{\mu}{(T+\varepsilon)^{N/2}} e^{(a+\gamma)r^2} \to -\infty \text{ cuando } r \to \infty.$$

Por lo tanto, podemos elegir r suficientemente grande para que también se tenga

$$v_y(x,t) \leq \sup_{\mathbb{R}^N} u_0 \quad \forall (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T].$$

Resumiendo,

$$v_y(y,t) = u(y,t) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{N/2}} \leq \sup_{\overline{Q}_T} v_y \leq \sup_{\Gamma_T} v \leq \sup_{\mathbb{R}^N} u_0.$$

Tomando límite cuando $\mu \downarrow 0$ obtenemos el resultado bajo la hipótesis $4aT < 1$.

3. Para obtener el caso general, dividimos el intervalo $[0,T]$ (para $T < \infty$) o el intervalo $[0,\infty)$ (si $T = \infty$) en subintervalos $[0,T_1]$, $[T_1, 2T_1]$, $\ldots$, para $T_1 = 1/8a$ y aplicamos los apartados anteriores a cada uno de los subintervalos. Obtenemos de este modo la prueba del resultado. ∎

De nuevo, como consecuencia inmediata del resultado anterior obtenemos un resultado de unicidad de solución clásica del problema de Cauchy bajo hipótesis de crecimiento en el infinito:

Corolario 1.14. Unicidad para el problema de Cauchy. *Sea $T \in (0,\infty]$ y supongamos que $f \in C^0(\mathbb{R}^N \times (0,T))$ y $u_0 \in C^0(\mathbb{R}^N)$. Entonces, el problema de Cauchy (1.1) admite a lo sumo una solución clásica $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^N \times (0,T)) \cap C^0(\mathbb{R}^N \times [0,T))$ dentro de la clase de funciones que, para ciertas constantes positivas A y a, verifican*

$$|u(x,t)| \leq Ae^{a|x|^2} \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,T).$$

∎

Observación 1.15.

1. El Corolario 1.14 no contradice el ejemplo de Tikhonov de solución clásica no nula del problema homogéneo

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times (0,T) \\ u(x,0) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

   De hecho, el ejemplo de Tikhonov no satisface la condición de acotación $|u(x,t)| \leq Ae^{a|x|^2}$ en $\mathbb{R}^N \times (0,T)$. Por otro lado, el Corolario 1.14 puede ser visto como un resultado de unicidad en la clase de funciones que son, desde un cierto punto de vista, físicamente correctas.

2. Bajo las hipótesis del Corolario 1.7 tenemos que el problema de Cauchy homogéneo (1.1) admite, al menos, una solución clásica $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^N \times (0,T)) \cap C^0(\mathbb{R}^N \times [0,T))$. Obsérvese que ésta es la única solución acotada que tiene el problema (1.2). ∎

1.4. Otros resultados relacionados con la ecuación del calor

1. **Dependencia continua.** En los teoremas de existencia de solución clásica dados para el problema de Cauchy (1.1) (problema homogéneo y no homogéneo) es posible añadir un resultado de dependencia continua de la solución construida respecto de los datos del problema. En concreto, se puede demostrar:

   Teorema 1.16. *Sean $\{u_0^n\}_{n\geq 1}$ y $\{f_n\}_{n\geq 1}$ dos sucesiones y u_0 y f dos funciones tales que*

   $$\begin{cases} u_0^n, u_0 \in C^0(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N), \quad \forall n \geq 1, \\ f_n, \dfrac{\partial f_n}{\partial x_i}, f, \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \in C^0(\mathbb{R}^N \times (0,T)) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N \times (0,T)) \quad \forall n \geq 1, \forall i. \end{cases}$$

   Supongamos además que

   $$\begin{cases} u_0^n \to u_0 \text{ uniformemente sobre los compactos de } \mathbb{R}^N \text{ y} \\ f_n \to f \text{ uniformemente sobre los compactos de } \mathbb{R}^N \times (0,T). \end{cases}$$

   Entonces,

   $$u_n \to u \text{ uniformemente sobre los compactos de } \mathbb{R}^N \times (0,T)$$

   donde u_n y u son, respectivamente, las soluciones del problema de Cauchy (1.1) asociadas a (u_0^n, f_n) y a (u_0, f) proporcionadas por el Corolario 1.7. ■

2. **Unicidad de soluciones positivas.** Una de las consecuencias del *Segundo Principio de la Termodinámica* dice que la temperatura absoluta es siempre positiva. Este hecho sugiere que la condición $u \geq 0$ en $\mathbb{R}^N \times (0,\infty)$ es una condición natural para que la ecuación del calor esté bien planteada. En concreto, debería ser una condición para que el problema de Cauchy para la ecuación del calor tenga unicidad de solución clásica. Este hecho es establecido en el siguiente resultado:

   Teorema 1.17. Unicidad de soluciones positivas. *Sea $T \in (0,\infty]$. Supongamos que $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^N \times (0,T)) \cap C^0(\mathbb{R}^N \times [0,T))$ satisface*

   a) $u_t - \Delta u = 0$ *en* $\mathbb{R}^N \times (0,T)$,

   b) $u(x,t) \geq 0$ *en* $\mathbb{R}^N \times (0,T)$,

   Entonces, la función $u(x,t)$ viene dada por (1.4). ■

   Para una demostración del resultado anterior, véase el libro de [John] o [Peral].

3. **Analiticidad.** Habíamos comentado en la Sección 1.2.2 que la función u del problema homogéneo de Cauchy (1.1) dada por (1.4) es una función analítica en $\mathbb{R}^N \times (0,\infty)$. En realidad, se puede demostrar un resultado más general de regularidad:

Teorema 1.18. Analiticidad en espacio. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un abierto y* $T \in (0,\infty]$. *Sea* $u \in C^{2,1}(\Omega \times (0,T))$ *una función tal que*

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \text{en } \Omega \times (0,T).$$

Entonces, $u \in C^\infty(\Omega \times (0,T))$. *Además, para cualquier* $t \in (0,T)$, *también se tiene que la función* $u(\cdot,t)$ *es analítica en* Ω. ∎

De nuevo, para una demostración de este resultado, véase [John].

Bibliografía

[1] Evans, L.C., *Partial Differential Equations,* Graduate Studies in Mathematics, 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[2] John, F., *Partial Differential Equations,* Fourth edition, Applied Mathematical Sciences 1, Springer-Verlag, New York, 1982.

[3] Peral, I., *Primer Curso de Ecuaciones en Derivadas Parciales,* Editorial Addison-Wesley/Universidad Autónoma de Madrid, Madrid, 1995.