

Tarea III

Para entregar el lunes 6 de septiembre antes de las 10PM (con excepción de la última pregunta)

1. (no entregar) Calcula la entropía de Gini de una distribución $Ber(\theta)$.
2. (no entregar) Verifica que $Var(X) = 0.5E(X_1 - X_2)^2$ si $X_1, X_2 \sim X$ e independientes. Lo anterior permite dar otra interpretación a la varianza.
3. Sea X una v.a. con la siguiente distribución:

$P(X = x)$	1	2	3	4
	0.2	0.1	0.4	0.3

 Calcula $Var(X^2)$ y $E(X^2|X > 1)$.
4. Verifica que si X y Y son independientes: $H(X, Y) = H(X) + H(Y)$
5. Considera una secuencia de lanzamientos independientes de una moneda. Calcula la probabilidad que en el veintésimo lanzamiento se obtiene por cuarta vez *aguila*. En promedio ¿cuántas veces se va a tener que lanzar la moneda para obtener por cuarta vez *aguila*?
6. Verifica que para cualquier v.a. X y Y con una misma distribución:

$$E(X - Y|X + Y) = 0$$

Existe una solución muy cortita.

7. Se debe sujetar N personas a una prueba de sangre para detectar la posible presencia de una cierta enfermedad. Con ese fin se dividen las personas al azar en subgrupos de tamaño k (puedes suponer que N es un múltiplo de k).

Se toma una muestra de sangre de cada persona y se mezclan las que pertenecen a personas de un mismo subgrupo; se aplica la prueba a estas k mezclas. Si el resultado es positivo, se sujeta cada persona del subgrupo correspondiente a una prueba separada.

Suponiendo que la probabilidad de tener la enfermedad es 0.01, y que la presencia de la enfermedad entre las personas ocurre de manera independiente: calcula el promedio del número de pruebas que se va a tener que aplicar.

8.
 - a) Elige al azar sin remplazo n números de $\{1, \dots, n\}$. Da un argumento porque la probabilidad que el último obtenido sea el k -ésimo mayor es igual a $\frac{1}{n}$ ($1 \leq k \leq n$).
 - b) Considera el siguiente código para encontrar el máximo en un arreglo de n números enteros positivos (todos diferentes).

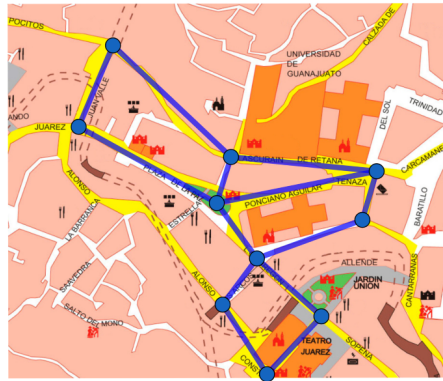
```

max = -1
for (i in 1:n)
{ if (A[i] > max)
    max = A[i] }

```

Supongamos que el orden de los elementos es totalmente al azar. Define X el número de veces que se actualiza la variable **max**. Calcula EX (usa el inciso anterior).

9. Se eligen al azar m números sin reemplazo del conjunto $\{0, 1, 2, \dots, n\}$. Calcula el promedio de la suma de los m números elegidos.
10. (resolver en equipo de dos, se puede entregar hasta el martes 7) Considera el siguiente grafo:



Cada calle (arista) entre dos nodos esté bloqueada por una manifestación con probabilidad p . Supongamos que todos son eventos independientes.

- a) Calcula la probabilidad de poder caminar desde la puerta trasera del Teatro Juárez (nodo más abajo) al café conquistador (nodo más hacia arriba).
- b) Decimos que un nodo del grafo está aislado si todas las aristas que llegan (o salen) están bloqueadas. Calcula el promedio del número de nodos aislados.