Tarea 1 - Métodos numéricos
Giovanni Gamaliel López Padilla

1. **Find intervals containing solutions to the following equations.**

   a) $x - 2^{-x} = 0$
   Sea $f(x) = x - 2^{-x}$, calculando su primer derivada obtenemos lo siguiente:

$$f'(x) = 1 + 2^{-x} ln(2)$$

   donde se obtiene que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$, por lo tanto, $f(x)$ es creciente en todo su dominio. Entonces la función solo contiene un ξ tal que $f(\xi) = 0$. La gráfica de la función esta representada en la figura 1.

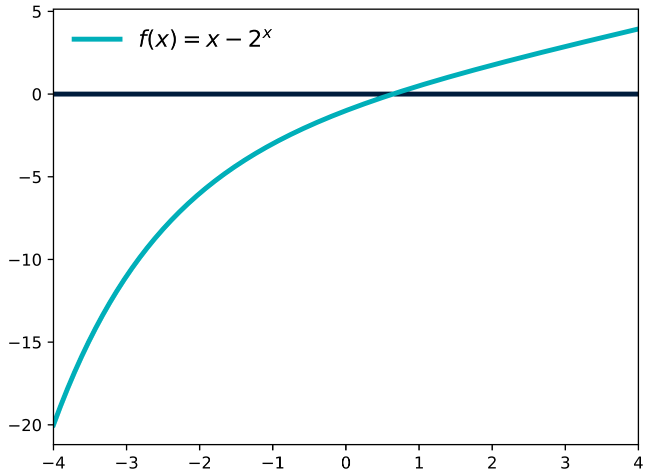

Figura 1: Función: $f(x) = x - 2^{-x}$ en el intervalo $[-4, 4]$.

   donde se aprecia que su solución se encuentra en el intervalo de $[-1, 1]$. Análiticamente podemos comprbar este resultado usando el teorema de Bolzano. Evaluando $f(-1)$ y $f(1)$, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} f(-1) &= -1 - 2^{-(-1)} \\ &= 1 - 2 \\ &= -1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f(1) &= 1 - 2^{-1} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

   como $f(-1) < 0$ y $f(1) > 0$, entonces entre $[-1, 1]$ se encuentra la solución de la ecuación.

   b) $2xcos(2x) - (x+1)^2 = 0$
   Sea $f(x) = 2xcos(2x) - (x+1)^2$, en el caso de esta función, al estar compuesta de una función periodica y un polinomio es complicado obtener puntos importantes como serían los valores críticos y puntos de inflexión. Por lo que se optara por realizar una gráifca de la función. Se eliguio el intervalo de $[-4, 4]$, porque $(x+1)^2$ obtiene valores más grandes en comparación a $2xcos(2x)$ en el dominio de la función. Provocando que

la función $f(x)$ obtenga valores negativos. Observando la figura 2 se comprueba lo antes dicho, entonces los intervalos que para la solución del problema son $[-2, -0.5]$ y $[0, 0.5]$

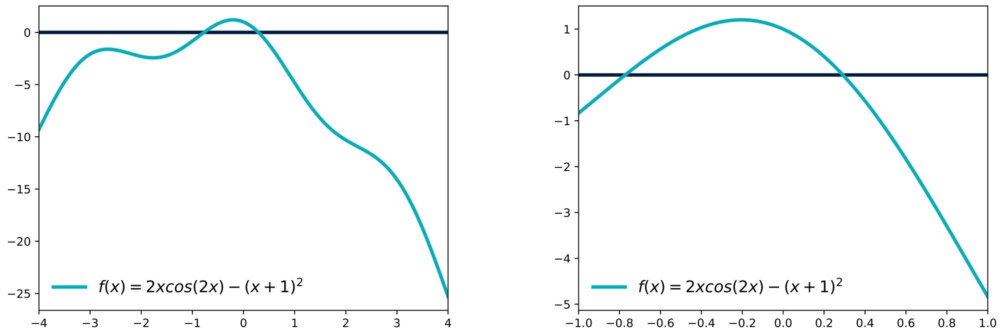

Figura 2: Función: $f(x) = 2xcos(2x) - (x+1)^2 = 0$ en el intervalo $[-4, 4]$ (izquierda) y en el intervalo $[-1, 1]$ (derecha).

Análiticamente podemos comprbar este resultado usando el teorema de Bolzano. Evaluando $f(-2)$ y $f(-0.5)$ obtenemos lo siguiente:

$$f(-2) = -2.307 \qquad f(-0.5) = 0.831$$

como $f(-2) < 0$ y $f(-0.5) > 0$, entonces en el intervalo $[-2, 0.831]$ se encuentra una solución de la ecuación.
De igual manera, evaluando $f(0)$ y $f(0.5)$ obtenemos lo siguiente:

$$f(0) = 1 \qquad f(0.5) = -1.169$$

como $f(0.5) < 0$ y $f(0) > 0$, entonces en el intervalo $[0, 0.5]$ se encuentra una solución de la ecuación.

2. **Find**

$$\underset{a\leq x\leq b}{max} f(x) \qquad \underset{a\leq x\leq b}{min} f(x) \qquad \underset{a\leq x\leq b}{max} |f(x)|$$

for the following functions and intervals

a) $f(x) = \frac{2-e^x+2x}{3}$ $\quad [0, 1]$
Calculando la primer y segunda derivada se obtiene lo siguiente:

$$f'(x) = \frac{2-e^x}{3} \qquad f''(x) = \frac{-e^x}{3}$$

A partir de la primer derivada podemos obtener los valores criíticos, por lo que se optará por resolver $f'(x_c) = 0$. Resultando que ese valor es $x_c = ln(2)$, el cual se encuentra contenido en $[0, 1]$, para saber si se trata de un máximo o mínimo de la función se calculará $f''(x_c)$, obteniendo que $f''(ln(2)) = -2/3$. Por lo tanto x_c representa un máximo de la función. Grafiando la función en el intervalo $[0, 1]$ se obtiene la figura 3.

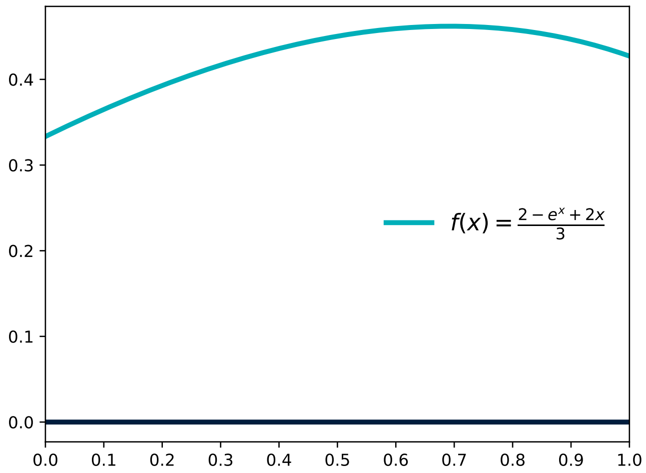

Figura 3: función $f(x) = \frac{2-e^x+2x}{3}$ en el intervalo $[0, 1]$

Verificando así la existencia de x_c dentro del rango. Análiticamente no se puede obtener un mínimo, es por ello que se tomará el valor mínimo o máximo del rango. Siendo este caso el límite inferior. La función es positiva para todo valor en el intervalo, entonces $|f(x)| = f(x)$. Por lo tanto, los valores máximos y mínimos requeridos son:

$$\underset{a\leq x\leq b}{max} f(x) = \frac{2ln(2)}{3} \qquad \underset{a\leq x\leq b}{min} f(x) = \frac{1}{3} \qquad \underset{a\leq x\leq b}{max} |f(x)| = \frac{2ln(2)}{3}$$

b) $f(x) = \frac{4x-3}{x^2-2x}$ $\qquad [0.5, 1.5]$
Calculando la primer derivada de la función obtenemos lo siguiente:

$$f'(x) = \frac{-4x^2+6x-6}{(x^2-2x)^2}$$

Al obtener los valores críticos se observa que estos son números complejos, entonces no se pueden obtener valores mínimos o máximos analñiticamente. Es por ello que evaluaremos la función en los límites del intervalo. Se realizó la gráfica de la función (figura 4) para comprobar lo antes dicho. De aqui podemos observar que el valor mínimo y máximo estan en el límite superior e inferior respectivamente.

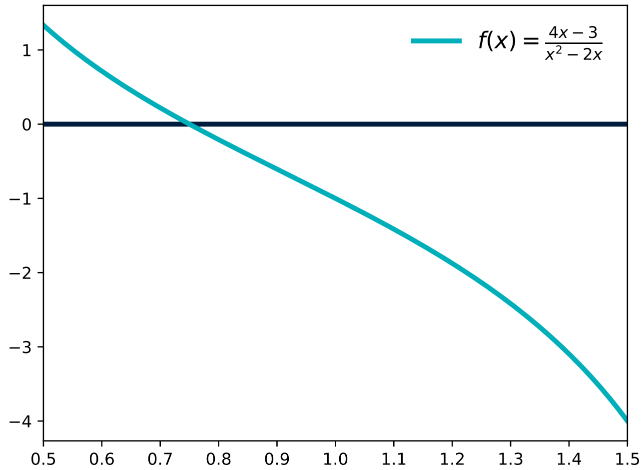

Figura 4: Función $f(x) = \frac{4x-3}{x^2-2x}$ en el intervalo $[0.5, 1.5]$

Por lo tanto

$$\underset{a\leq x\leq b}{max} f(x) = f(0.5) = \frac{4}{3} \qquad \underset{a\leq x\leq b}{min} f(x) = f(1.5) = -4$$

como $|f(1.5)| > |f(0.5)|$, entonces:

$$\begin{aligned} \underset{a\leq x\leq b}{max} |f(x)| &= |f(1.5)| \\ &= |-4| \\ &= 4 \end{aligned}$$

3. **Suppose $f \in C[a,b]$ and $x_1, x_2 \in [a,b]$. Show that exist a number ξ between x_1 and x_2 such that:**

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

Como f es continua en el intervalo $[a,b]$, y el valor de $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ se encuentra entre $f(x_1)$ y $f(x_2)$ ya que es el valor medio. Entonces, por el teorma del valor intermedio, el número ξ existe entre x_1 y x_2.

4. **Assume you have n values x_i.**

   a) **Evaluate the sample mean**

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

   b) **Evaluate the sample variance**

      1) **You can evaluate the sample variance using a two-pass algorithm**

$$\sigma_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

      2) **You can also evaluate the sample variance using the one-pass algorithm**

$$\sigma_1 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \mu^2$$

Write two functions, one for each algorithm, and test themon the two cases below:

- $x_i \in \{0, 0.01, 0.02, \ldots, 0.09\}$
- $y_i \in \{123456789.0, 123456788.01, \ldots, 123456789.09\}$

El programa que contiene a cada método se encuentra en la carpeta Problema_4. La media, varianza con el **two-pass algorithm** y **one-pass algorithm** se encuentran en las funciones *obtain_mean, obtain_variance_two_pass y obtain_variance_one_pass* respectivamente. Los valores encontrados para el conjunto de datos se encuentran en la tabla 1.

Datos	μ	σ_2	σ_1
x_i	0.045000	0.000825	0.000825
y_i	123456789.045000	0.000825	0.002930

Tabla 1: Resultados obtenidos con cada conjunto de datos con los algoritmos de media y varianza

La primera aproximación a este problema fue realizada con todas las variables definidas con el tipo double. En ese caso μ, σ_2, σ_1 para el conjunto de datos x_i daban resultados iguales a los mostrados en la tabla 1. En cambio para el conjunto y_i, el valor de σ_2 fue de 10.

Checando las bibliografía acerca de los métodos de obtener la varianza se menciona que el algoritmo de one-pass al tener una gran cantidad de dígitos o cifras significativas al momento de restar estas cifras perderemos esta precisión [1]. Eso fue lo que exactamente paso con los resultados que se muestran en la tabla 1.

Referencias

[1] J. D. Cook, "Theoretical explanation for numerical results." https://www.johndcook.com/blog/2008/09/28/theoretical-explanation-for-numerical-results/. Accedido el día 17 de agosto de 2021.