Métodos numéricos - Tarea 2
Giovanni Gamaliel López Padilla

1. **Find the fourth Taylor polynomial $P_4(x)$ for the function $f(x) = xe^{x^2}$ about $x_0 = 0$.**
   Como se sabe que
   $$e^x = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}$$
   entonces
   $$\begin{aligned} f(x) &= xe^{x^2} \\ &= x\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{(x^2)^i}{i!}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n} x\left(\frac{x^{2i}}{i!}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{2i+1}}{i!} \end{aligned}$$
   por lo tanto, la función a implementar es:
   $$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{2i+1}}{i!}$$

   a) **Find an upper bound for $|f(x) - P_4(x)|$, for $0 \leq x \leq 0.4$, ie find an upper bound of $|R_4(x)|$ for $0 \leq x \leq 0.4$**
   Los límites superiores que se encontraron para $|f(x) - P_4(x)|$ fue 0.000000 y 0.000011 para $|R_4(x)|$.

   b) **Approximate $\int_0^{0.4} f(x)dx$ using $\int_0^{0.4} P_4(x)dx$**
   El resultado de la integral usando el polinomio $P_4(x)$ es de 0.086784.

   Los resultados anteriores pueden ser verificados en el script contenido en la carpeta Problema_1, los valores del salida del programa son los que se muestran en la figura 1.

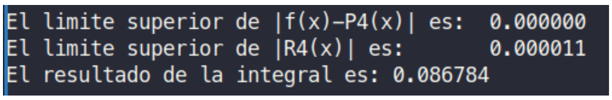


Figura 1: Captura de pantalla de los valores de salida del programa.

2. **Implement a function to comput**
   $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x}$$
   When evaluating the previous function we can lose accuracy, transform the right hand side to avoid error (or improve the accuracy). Implement the transformed expression and compare the results with the original function. Note:

use values of x greater than 10000.
Se crearon una serie de funciones donde se calculará $f(x)$, como entrada recibiran un número del tipo double y daran de salida un número float, double y long double. Los resultados de cada función con diferentes valores de x se encuentran enlistados en la tabla 1.

x	float f(x)	double f(x)	long double f(x)
1.000000	2.414214	2.414214	2.414214
10.000000	20.050020	20.049876	20.049876
100.000000	200.109924	200.005000	200.005000
1000.000000	2048.000000	2000.000500	2000.000500
10000.000000	inf	19999.999778	20000.000050
100000.000000	inf	200000.223331	199999.999937
1000000.000000	inf	1999984.771129	2000000.005050
10000000.000000	inf	19884107.851852	19999847.711292
100000000.000000	inf	inf	200056700.832606
10000000000.000000	inf	inf	inf

Tabla 1: Valores de x para las diferences funciones.

3. **Implement a function to compute the exponential function by using the Taylor/Maclaurin series**

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Since we cannot add infinite terms, we can approximate this expansion by

$$e^x = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}$$

El programa de este problema se encuentra contenido en la carpeta Problema_3.

4. **Riemann sums can be used to estimate the area under the curve $y = f(x)$ in the interval $[a, b]$. Left-and right-endpoint approximations, with subintervals of the same width, are special kinds of Riemann sums, ie,**

Left-endpoint approximation:

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$

Right-endpoint approximation:

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

where $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} \qquad x_i = a + i\Delta x,\ i = 0, 1, \cdots, n$

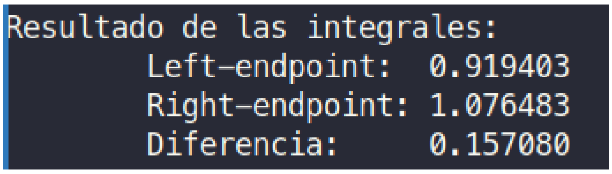
Implement functions to compute L_n and R_n . Using the function $f(x) = sinx$ over the interval $[0, \frac{\pi}{2}]$, compute L_n and R_n for n=10. Compare the previous results with

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$$

El programa que emplea los dos algoritmos esta contenida en la carpeta Problema_4. Los resultados de cada integral son los que se muestran en la tabla 2 y el programa arroja los resultados en la terminal como se muestra en la figura 2. Con estos resultados podemos obtener la diferencia entre los algoritmos, que es 0.157080.

Algoritmo	**Resultado**
Left-endpoint	0.919403
Right-endpoint	1.076483

Tabla 2: Resultados de los algoritmos de integración con los parámetros especificados para $f(x) = sin(x)$



```
Resultado de las integrales:
        Left-endpoint:  0.919403
        Right-endpoint: 1.076483
        Diferencia:     0.157080
```

Figura 2: Resultados impresos en la termianl obtenidos por el programa