Examen 1 - Métodos numericos

Giovanni Gamaliel López Padilla

Problema 1

Sea $f(x) : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ una función continua. Se dice x' es una solución de la ecuación si $f(x') = 0$. Además x' es un cero de multiplicidad $m \geq 1$ de f. Podemos escribir a f como en la ecuación 1.

$$f(x) = (x - x')^m q(x) \tag{1}$$

donde $q(x') \neq 0$.

Inciso a

Muestra que si $f \in C^1[a, b]$ tiene un cero simple en $x' \in (a, b)$, entonces $f'(x') \neq 0$.

Se tiene que que $f(x)$ se puede escribir como la ecuacion 1. Como x' es un cero simple, entonces $m = 1$, por lo tanto f es:

$$f(x) = (x - x')q(x)$$

Calculando f', se tiene que:

$$f'(x) = q(x) - (x - x')q'(x)$$

evaluando $f'(x')$, se obtiene que:

$$f'(x') = q(x')$$

como $q(x') \neq 0$, por lo tanto $f'(x') \neq 0$.

Inciso b

Se cumple que el recíproco del inciso a, es decir, si $f \in C^1[a, b], x' \in (a, b), f(x') = 0$ y $f'(x') \neq 0$ entonces x' es un cero simple de f. Basado en esta afirmación, muestra que si la función $f(x)$ tiene un cero x' de multiplicidad $m > 1$, entonces x' es un cero simple de la función

$$h(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{2}$$

Se tiene que f puede escribirse como la ecuación 1. Entonces, calculando su derivada se obtiene que:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= m(x-x')^{m-1}q(x) + (x-x')^m q(x) \\
&= (x-x')^m \left[\left(\frac{m}{x-x'}\right) q(x) + q'(x)\right] \\
&= (x-x')^m \left(\frac{mq(x)+q'(x)(x-x')}{x-x'}\right)
\end{aligned}
$$

Entonces, escribiendo la ecuación 2. Se obtiene que:

$$
\begin{aligned}
h(x) &= \frac{f(x)}{f'(x)} \\
&= \frac{(x-x')^m q(x)}{(x-x')^m \left(\frac{mq(x)+q'(x)(x-x')}{x-x'}\right)} \\
&= \frac{q(x)(x-x')}{mq(x)+(x-x')q'(x)}
\end{aligned}
$$

Encontrando los valores para los cuales $h(x) = 0$, se obtiene que:

$$
\begin{aligned}
\frac{q(x)(x-x')}{mq(x)+(x-x')q'(x)} &= 0 \\
q(x)(x-x') &= 0 \\
q(x) = 0 \qquad x - x' &= 0
\end{aligned}
$$

En donde se obtiene que un cero de h es x' con multiplicidad 1.

Inciso c