

Tarea 3 - Métodos numéricos
Giovanni Gamaliel López Padilla

Problema 1

Use four-digit rounding arithmetic and the quadratic formulas to find the most accurate approximations to the roots of the following quadratic equations. Also use the form of the quadratic formula by rationalizing the numerator. Compute the absolute errors and relative errors.

$$\frac{1}{3}x^2 - \frac{123}{4}x + \frac{1}{6} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{3}x^2 + \frac{123}{4}x - \frac{1}{6} = 0 \quad (2)$$

La ecuación cuadrática es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (3)$$

Realizando el proceso de racionalización se obtiene que:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \left(\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}} \right) \\ &= \frac{-b^2 + b^2 - 4ac}{2a(b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})} \\ x &= \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}} \end{aligned} \quad (4)$$

Los resultados del programa se encuentran en la tabla 1.

Problema	Función	x_1	x_2
Problema 1	Ecuación 3	0.0054	-92.2646
	Ecuación 4	0.005420	-92.255420
Problema 2	Ecuación 3	0.0054	92.2538
	Ecuación 4	0.005420	92.244580

Tabla 1: Resultados de las raíces de las ecuaciones 1 y 2 usando las ecuaciones 3 y 4.

Para este caso se definieron la diferencia relativa y absoluta de la siguiente manera:

$$DA = |Y - X| \quad DR = \frac{DA}{Y} * 100$$

donde Y son los resultados usando la ecuación 4 y X son los resultados de usar la ecuación 3. Obteniendo así, los calculos de la diferencia absoluta y diferencia relativa mostrados en la tabla 2.

Problema	Valores	Diferencia absoluta	Diferencia Relativa
Problema 1	x1	0.000020	0.369004 %
	x2	0.009183	0.009953 %
Problema 2	x1	0.009220	0.009994 %
	x2	0.000020	0.377269 %

Tabla 2: Diferencias absolutas y relativas de los resultados de la tabla 1.

El programa se encuentra en la carpeta **Problema_1**. Para compilar el programa se debe ingresar la siguiente línea:

```
1 gcc -Wall -o main.out main.c -lm -std=c11
```

Problema 2

Let

$$f(x) = \frac{x \cos(x) \sin(x)}{x - \sin(x)} \quad (5)$$

a). Find $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

Como queremos entrar el límite cuando x tiende a 0 de la ecuación 5. Tenemos que comprobar si el límite por la izquierda y por la derecha es igual. Esto es:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = L_i \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = L_s$$

El límite existirá si y solo si $L_i = L_s = L$ y es igual a L . Como el límite que queremos comprobar se encuentra en 0, realizaremos esta búsqueda a partir del intervalo $[-1, 1]$. En cada iteración este intervalo se irá reduciendo una cuarta parte, esto es que en la siguiente iteración el intervalo será $[-0.5, 0.5]$. Así hasta obtener una diferencia de L_i y L_s menor a 10^{-6} o al haber realizado 16 iteraciones.

El programa arroja los resultados mostrados en la tabla 3 y 4.

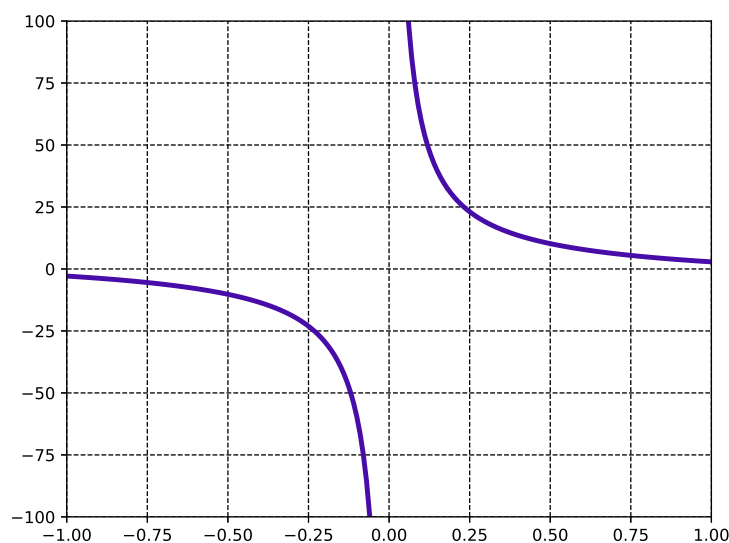


Figura 1

x	L _i
-1.000000	-2.867921
-0.500000	-10.224702
-0.250000	-23.084458
-0.125000	-47.538686
-0.062500	-95.768898
-0.031250	-191.884394
-0.015625	-383.942190
-0.007812	-767.971094
-0.003906	-1535.985547
-0.001953	-3071.992773
-0.000977	-6143.996387
-0.000488	-12287.998196
-0.000244	-24575.999115
-0.000122	-49152.000244
-0.000061	-98304.005615

Tabla 3: Valores obtenidos para el límite por la izquierda para una x dada.

x	L _s
1.000000	2.867921
0.500000	10.224702
0.250000	23.084458
0.125000	47.538686
0.062500	95.768898
0.031250	191.884394
0.015625	383.942190
0.007812	767.971094
0.003906	1535.985547
0.001953	3071.992773
0.000977	6143.996387
0.000488	12287.998196
0.000244	24575.999115
0.000122	49152.000244
0.000061	98304.005615

Tabla 4: Valores obtenidos para el límite por la derecha para una x dada.

Observando los resultados de las tablas 3 y 4 podemos decir que el límite buscado no existe. El programa llega a la misma conclusión. En la figura 1 se puede verificar la misma conclusión.

b). Use four-digit rounding arithmetic to evaluate $f(0.1)$

La forma en la cual se realizó el cálculo es la siguiente. Sea $\text{round}(x)$ una función la cual redondea a cuatro decimales, entonces la ecuación 5 es escrita como:

$$f_b(x) = \text{round} \left(\frac{\text{round}(x' \sin(x)' \cos(x)')}{\text{round}(x' - \sin(x)')} \right) \quad (6)$$

donde $\sin(x)'$, $\cos(x)'$ y x' son los valores de $\sin(x)$, $\cos(x)$ y x' redondeados a cuatro decimales respectivamente. Evaluando la ecuación 6 en $x = 0.1$ se obtiene que $f'(x)$ es igual a 49.5000.

c). Replace each trigonometric function with its third Maclaurin polynomial and repeat part (b).

Escribiendo las ecuaciones de seno y coseno como series de potencias, se obtiene lo siguiente:

$$\sin(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1} \quad \cos(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{(2i)!} x^{2i}$$

Transformando estas ecuaciones a una ecuación recursiva se obtiene que

para $\sin(x)$ es

$$\begin{aligned} P_0 &= a_n \\ P_1 &= a_{n-1} + x^2 P_0 \\ P_2 &= a_{n-2} + x^2 P_1 \\ &\vdots \\ P_i &= a_{n-i} + x^2 P_{i-1} \\ &\vdots \\ P_n &= x P_n \end{aligned}$$

En el caso de $\cos(x)$ es:

$$\begin{aligned} P_0 &= a_n \\ P_1 &= a_{n-1} + x^2 P_0 \\ P_2 &= a_{n-2} + x^2 P_1 \\ &\vdots \\ P_i &= a_{n-i} + x^2 P_{i-1} \\ &\vdots \\ P_n &= a_{n-1} + x^2 P_{n-1} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación que se calculara es la siguiente:

$$f_c(x) = \frac{x \left(\sum_{i=0}^{n=2} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} \right) \left(x^{2i+1} \sum_{i=0}^{n=2} \frac{(-1)^i}{(2i)!} x^{2i} \right)}{x - \sum_{i=0}^{n=2} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1}} \quad (7)$$

Evaluando la función en $x = 0.1$, se obtiene como resultado que $f(x = 0.1) = 49.5000$.

- d). **The actual value is $f(0.1) = -1.99899998$. Find the relative error for the values obtained in parts (b) and (c).**

Calculando la diferecia relativa entre los datos obtenidos se obtienen los resultados mostrados en la tabla 5.

Función	f(x)	Diferencia Relativa
Análítica (Ecuación 5)	59.6306	-
Redondeo (Ecaución 6)	49.5000	16.9889
Serie de potencias (Ecuación 7)	49.5000	16.9889

Tabla 5: Valores obtenidos en los ejercicios 2b y 2c comparandolos con el resultado analítico de la ecuación 5 en $x=0.1$.

El programa se encuentra en la carpeta [Problema_2](#). Para compilar el programa se debe ingresar la siguiente linea:

```
1 gcc -Wall -o main.out main.c -lm -std=c11
```

Problema 3

Find the number of terms of the exponential series such that their sum gives the value of e^x correct to six decimal places at $x = 1$.

El procedimiento para encontrar la respuesta a este problema fue el siguiente:

```
1 n_term = 1
2 fx = round(exp(1.0),6)
3 fx_approx = round(approx(x,n_term),6)
4 while fx != fx_approx:
5     n_term++
6     fx_approx = round(approx(x,n_term),6)
```

El número de terminos de la serie de la función $f(x) = e^x$ necesaria para que coincida su valor numérico a seis decimales es 9.

El programa de este problema se encuentra en la carpeta [Problema_3](#). El comando para compilarlo es el siguiente:

```
1 gcc -Wall -o main.out main.c -lm -std=c11
```