Tarea 9 - Métodos numéricos

Giovanni Gamaliel López Padilla

Índice

1. Introducción

Sea A una matriz de n×n con componentes reales. El número λ se denomina *valor característico (eigenvalor)* de A si existe un vector diferente de cero (v) tal que

$$Av = \lambda v \tag{1}$$

El vector v se denomina *vector característico (eigenvector)* de A correspondiente al eigenvalor λ. Se dice que λ es un eigenvalor de A si y sólo si

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = 0 \tag{2}$$

donde I es la matrix identidad y p se denomina como el polinomio característico de A. El grado del polinomio p es de grado n, entonces se obtiene que existen n eigenvalores para la matriz A.

Para un número grande de n, el resolver la ecuación característica es difícil de resolver. Es por ello que se plantearon métodos iterativos para aproximar a las raices de la ecuación característica, es decir, los eigenvalores. Llamamos a el eigenvalor domininate (λ_1) al eigenvalor con mayor valor absoluto de A (ecuación 3).

$$|\lambda_1| > |\lambda_i| \qquad i = 2, 3, \dots, n \tag{3}$$

2. Métodos

2.1. Método de las potencias

Se define un vector inicial v_0, el cual será la inicialización del método. Este vector debe estar normalizado. El método aplica la ecuación 4, conforme más se itera el método ira convergiendo hacia el eigenvector de λ_1.

$$v_i = Av_{i-1} \tag{4}$$

Despues de aplicar la ecuación 4, el vector v_i deberá ser normalizado antes de volverse a aplicar al método. Para obtener el eigenvalor λ_1, se usa la siguiente ecuación 5.

$$\lambda_i = \frac{\langle v_i, v_{i-1}\rangle}{\langle v_{i-1}, v_{i-1}\rangle} \tag{5}$$

La convegencia del algoritmo que se implemento fue usando la ecuación 6.

$$\theta = |\lambda_i - \lambda_{i-1}| \tag{6}$$

Entonces, el método de las potencias es descrito en el pseudo código 1.

Algorithm 1: Método de las potencias

Input: v_0
Output: v_i y λ_i
while $\theta > 10^{-6}$ **do**
  $v_i \leftarrow Av_{i-1}$
  $\lambda_i \leftarrow \frac{\langle v_i, v_{i-1}\rangle}{\langle v_{i-1}, v_{i-1}\rangle}$
  $v_i \leftarrow normalize(v_i)$

2.2. Método de las potencias inversas

El método de las potencias inversas se basa en el hecho que los eigenvalores μ de la matriz inversa de A (A^{-1}) pueden ser calculados con la ecuación 7.

$$\mu_i = \frac{1}{\lambda_i} \tag{7}$$

Por lo tanto, la ecuación 1 puede ser escrita de la siguiente manera:

$$A^{-1}v_i = \mu_i v_i \tag{8}$$

En este método para obtener el eigenvector v_i, se tiene que resolver la ecuación matricial señalada en la ecuación 9.

$$Av_i = v_{i_i} \tag{9}$$

donde el vector inicial v_0 tiene que estar normalizado y al obtener el vector v_i este debera pasar por el proceso de normalización. El méotod de las potencias inversas se asemeja mucho al método de las potencias, este obtiene el valor absoluto mayor de la matriz A^{-1}. Por la relación descrita en la ecuación 7, entonces al obtener el μ_i, estaremos obteniendo a su vez λ_n, el cual es el eigenvalor con menor valor absoluto de A. Por lo tanto, para calcular este valor se realiza la ecuación 10.

$$\lambda_i = \frac{\langle v_{i-1}, v_{i-1} \rangle}{\langle v_i, v_{i-1} \rangle} \tag{10}$$

La convergencia del método es el descrito en la ecuación 6. Entonces, el método de las potencias inversas es descrito en el pseudo código 2.

Algorithm 2: Método de las potencias inversas

Input: v_0
Output: v_i y λ_i
while $\theta > 10^{-6}$ **do**
    $v_i \leftarrow solve(Av_i = v_{i-1})$
    $\lambda_i \leftarrow \frac{\langle v_{i-1}, v_{i-1} \rangle}{\langle v_i, v_{i-1} \rangle}$
    $v_i \leftarrow normalize(v_i)$

2.3. Método de deflación

Usando el método de potencias descrito en la sección 2.1 podemos tener una aproximación del eigenvalor dominante y su eigenvector asociado. El método de deflación calcula los m eigenvalor de una matriz, este se define de la siguiente manera:

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ los valores propios de la matriz A. Supongamos que λ_1 es el eigenvalor dominante, v_1 su eigenvector asociado Y v un vector tal que $\langle v_1, v \rangle = 1$. Sea B la matriz definida como

$$B = A - \lambda_1 v_1 v^T$$

entonces los valores propios de la matriz B son $0, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$.

Entonces al haber 'eliminado' al eigenvalor dominante de la matriz, al aplicar el método de potencias encontraremos un eigenvalor distinto. Tomaremos a $v = v_1$, esto porque al ser v_1 normalizado, entonces su producto punto consigo mismo debe ser 1.

El método de deflación es descrito en el pseudo código 3.

Algorithm 3: Método de deflación

Input: v_0, A
Output: v y λ
for i=*1*,m **do**
  $v_0 \leftarrow initialize\_vector(v_0)$
  for j=*1*,i **do**
    $v_0 \leftarrow v_0 - \langle v_i, v_i \rangle v_i$
    j $\leftarrow$1
    while $\theta > 10^{-6}$ **do**
      $v_j \leftarrow Av_{j-1}$
      $\lambda_j \leftarrow \frac{\langle v_j, v_{j-1} \rangle}{\langle v_{j-1}, v_{j-1} \rangle}$
      $v_j \leftarrow normalize(v_j)$
      for k=*1*,i **do**
        $v_j \leftarrow v_j - \langle v_k, v_k \rangle v_k$
      $j \leftarrow j + 1$

3. Resultados

Para los tres métodos se calcularon los eigenvectores y sus eigenvalores correspondinetes de las matrices contenidas en los archivos Eigen_3x3.txt, Eigen_50x50.txt y Eigen_125x125.txt. Estos archivos se encuentran en la carpeta Data. Los resultados de cada método se muestran en los siguientes puntos.

3.1. Método de las potencias

Los resultados de este método de encuentrancontenidos en la carpeta Power_method/Output. Para el caso de la matriz contenida en el archivo Eigen_3x3.txt, se tiene que la matriz es la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ -0.1 & 7 & -0.3 \\ -0.2 & -0.3 & 10 \end{pmatrix}$$

El eigenvalor dominante y su eigenvector correspondinete que se obtuvo es el siguiente:

$$\lambda_1 = 10.034796 \qquad v_1 = \begin{bmatrix} -0.026902 \\ -0.097366 \\ 0.994885 \end{bmatrix}$$

3.2. Método de las potencias inversas

Los resultados de este método de encuentrancontenidos en la carpeta Inverse_method/Output. Para el caso de la matriz contenida en el archivo Eigen_3x3.txt, se tiene que la matriz es la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ -0.1 & 7 & -0.3 \\ -0.2 & -0.3 & 10 \end{pmatrix}$$

El eigenvalor con menor valor absoluto y su eigenvector correspondinete que se obtuvo es el siguiente:

$$\lambda_3 = 2.991343 \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 0.999190 \\ 0.027185 \\ 0.029679 \end{bmatrix}$$

3.3. Método de deflación

Los resultados de este método de encuentrancontenidos en la carpeta Deflection_method/Output. Para el caso de la matriz contenida en el archivo Eigen_3x3.txt, se tiene que la matriz es la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ -0.1 & 7 & -0.3 \\ -0.2 & -0.3 & 10 \end{pmatrix}$$

Este método se implemento para obtener los $max2, n-2$ eigenvalores máximos de una matriz de n×n, para la matriz A, se tiene que $n = 3$, por lo que, se obtuvieron los primeros dos eigenvalores máximos. El método arrojo como resultado el eigenvalor dominante obtenido en la sección 3.1 y el próximo eigenvalor los cuales son los siguientes:

$$\lambda_1 = 10.034796 \qquad v_1 = \begin{bmatrix} -0.026902 \\ -0.097366 \\ 0.994885 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 10.034796 \qquad v_2 = \begin{bmatrix} -0.029881 \\ 0.994879 \\ 0.096558 \end{bmatrix}$$

4. Conclusiones

5. Referencias

[1] Stanley Grossman. *Álgebra lineal.* McGraw Hill, Ciudad de México, 2019.