

Proyecto final - Métodos numéricos
Giovanni Gamaliel López Padilla
Ecuación de calor no homogénea unidimensional dependiente del tiempo

Índice

1. Introducción	2
2. Objetivos	2
2.1. Objetivo general	2
2.2. Objetivos particulares	2
3. Métodos	2
3.1. Ecuaciones diferenciales parciales	2
3.2. Condiciones de contorno	2
3.2.1. Condiciones iniciales	3
3.3. Método de diferencias finitas	3
3.4. Ecuación de calor	4
3.4.1. Ecuación de calor homogénea	4
3.4.2. Ecuación de calor no homogénea	4
3.4.3. Factorización LU de una matriz triangular	4
3.5. Aproximación para la ecuación de calor no homogénea	5
4. Resultados	6
4.1. Dataset 1	6
4.2. Dataset 2	6
4.3. Dataset 3	7
4.4. Dataset 4	8
5. Conclusiones	9
6. Referencias	9

1. Introducción

La ecuación de transferencia de calor es una ecuación diferencial parcial que describe la variación de la temperatura dada una región en un periodo de tiempo. El método de variables separables es un método analítico para resolver de manera práctica una ecuación diferencial ordinaria o parcial. A pesar de la teoría que se tiene para la solución analítica de una ecuación diferencial, esta no es flexible a la hora de modificar datos de la ecuación diferencial. Es por ello que la aplicación de métodos numéricos se convierte en una gran herramienta para obtener una aproximación de las soluciones [1]. Existen dos métodos numéricos para obtener la aproximación de la solución a una ecuación diferencial. El método de elementos finitos y el método de diferencias finitas [2].

2. Objetivos

2.1. Objetivo general

Desarrollar e implementar el método de diferencias finitas a la ecuación de transferencia de calor dependiente del tiempo a un sistema unidimensional en contacto a una fuente de calor.

2.2. Objetivos particulares

- Obtener la matriz espacial para la ecuación de calor no homogénea.
- Calcular la solución aproximada de la ecuación de calor para diferentes funciones.
- Comparar resultados numéricos con los resultados analíticos obtenidos por Yuan Lin [3].

3. Métodos

3.1. Ecuaciones diferenciales parciales

Una ecuación diferencial parcial (PDE, por sus siglas en inglés) es una ecuación que relaciona la dependencia de sí misma con sus derivadas parciales [4]. Las PDE pueden ser clasificadas en homogéneas y no homogéneas. Una PDE es homogénea si cada término contiene alguna dependencia de la variable u o sus derivadas parciales.

3.2. Condiciones de contorno

El uso de una solución particular de una PDE es más frecuente que el uso de la solución general. Dada una PDE y sus valores en un dominio acotado D [5]. Una condición de contorno es denominada homogénea cuando sus valores son iguales a cero, de cualquier otra manera, la condición de contorno es denominada no homogénea. La variable u usualmente está definida en el dominio D . La información del contorno D es llamada condiciones de contorno. Las condiciones de contorno están definidas en tres tipos.

- **Condiciones de contorno de Dirichlet**

En este tipo de condiciones de contorno, la función u es normalmente definida en el contorno D .

■ Condiciones de contorno de Neumann

El tipo de condiciones de contorno de Neumann son aquellas donde las derivadas de u están definidas en el contorno D .

■ Condiciones de contorno mixtas

Las condiciones de contorno mixtas son aquellas que utilizan las condiciones de contorno de Dirichlet y Neumann. Con esto, se tiene a la función u y su derivada definida en el contorno D .

3.2.1. Condiciones iniciales

La mayoría de las PDE son aplicadas para describir la dinámica de un sistema físico. Este conjunto de PDE dependen de una variable temporal t . Por lo que, cuando la función u se encuentra descrita en $t = 0$, se dice que u tiene una condición inicial.

3.3. Método de diferencias finitas

Los métodos que involucran la diferencia de la aproximación cocientes puede ser utilizada para ciertos casos de problemas de contorno. Considerando la ecuación 1

$$x'' = p(t)x'(t) + q(t)x(t) + r(t) \quad (1)$$

sobre el intervalo $[a, b]$ con las condiciones de frontera $x(a) = \alpha$ y $x(b) = \beta$. Empleamos una partición sobre el intervalo $[a, b]$ usando los puntos $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$, donde h es el número de elementos de la partición y $t_i = a + ih$ para $i = 0, 1, \dots, N$. Utilizando aproximaciones de la diferencia central, se obtiene que la ecuación 1 puede ser escrita en la ecuación 2.

$$\frac{x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}}{h^2} = p(t_j) \left(\frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{2h} \right) + q(t_j)x_j + r(t_j) \quad (2)$$

Usando $p_j = p(t_j)$, $q_j = q(t_j)$ y $r_j = r(t_j)$, esto produce la ecuación 3.

$$\left(-\frac{h}{2}p_j - 1 \right) x_{j-1} + (2 + h^2q_j)x_j + \left(\frac{h}{2}p_j - 1 \right) x_{j+1} = -h^2r_j \quad (3)$$

La ecuación 3 puede ser descrita en un sistema matricial. En la ecuación 4 se muestra este sistema.

$$\begin{bmatrix} 2 + h^2q_1 & \frac{h}{2}p_1 - 1 & & & & & \\ -\frac{h}{2}p_2 - 1 & 2 + h^2q_2 & \frac{h}{2}p_2 - 1 & & & & \\ & -\frac{h}{2}p_3 - 1 & 2 + h^2q_3 & \frac{h}{2}p_3 - 1 & & & \\ 0 & & -\frac{h}{2}p_{N-2} - 1 & 2 + h^2q_{N-2} & \frac{h}{2}p_{N-2} - 1 & & \\ & & -\frac{h}{2}p_{N-1} - 1 & 2 + h^2q_{N-1} & \frac{h}{2}p_{N-1} - 1 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_j \\ x_{N-2} \\ x_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h^2r_1 + e_0 \\ -h^2r_2 \\ -h^2r_j \\ -h^2r_{N-2} \\ -h^2r_{N-1} + e_N \end{bmatrix} \quad (4)$$

donde

$$e_0 = \left(\frac{h}{2}p_1 + 1 \right) \alpha \quad e_N = \left(-\frac{h}{2}p_{N-1} + 1 \right) \beta$$

3.4. Ecuación de calor

3.4.1. Ecuación de calor homogénea

La ecuación 5 es la ecuación de transferencia de calor homogénea. El término k^2 es una constante que representa la difusión térmica del sistema. El valor de k^2 depende de la conductividad del material, su densidad y del calor específico. La función $u(x, t)$ representa el flujo del calor, la cual debe satisfacer a la ecuación 5.

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (5)$$

donde $u(a, 0) = 0$ y $u(b, 0) = 0$ para $a \leq x \leq b$

3.4.2. Ecuación de calor no homogénea

La forma más general de tener a la ecuación de calor no homogénea se encuentra descrita en la ecuación 6.

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + F(x, t) \quad (6)$$

donde $F(x, t)$ es una función conocida, $u(a, t) = g(x)$, $u(b, t) = h(x)$, $u(x, 0) = j(x)$ para $a \leq x \leq b$ [6].

3.4.3. Factorización LU de una matriz triagonal

Sea una matriz de tamaño $n \times n$, tal que su forma esta descrita como en la ecuación 7 [7].

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix} \quad (7)$$

entonces, esta se puede descomponer en dos matrices diagonales, de tal forma que:

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \alpha_{n-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \beta_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \beta_n \end{bmatrix} \quad (8)$$

donde $b_1 = \beta_1$, por ende, los términos a_j y b_j pueden ser calculados con las ecuaciones 9 y 10.

$$a_j = \alpha_j \beta_{j-1} \quad (9)$$

$$b_j = \alpha_j c_{j-1} + \beta_j \quad (10)$$

3.5. Aproximación para la ecuación de calor no homogénea

Usando el intervalo espacial $[a, b]$ y temporal $[t_0, t_n]$, se tiene que las condiciones de frontera son:

$$\begin{aligned} u(a, t) &= u_a(t) \\ u(b, t) &= u_b(t) \\ u(x, 0) &= u_0(x) \end{aligned} \quad (11)$$

Se tiene que la forma en diferencias finitas de la ecuación 6 es:

$$\frac{u(x, t + dt) - u(x, t)}{dt} = F(x, t + dt) + k^2 \left(\frac{u(x - dx, t + dt) - 2u(x, t + dt) + u(x + dx, t + dt)}{(dx)^2} \right) \quad (12)$$

el cual, puede ser escrito en la ecuación 13.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ -w & 1 + 2w & -w & & \\ & -w & 1 + 2w & -w & \\ & & -w & 1 + 2w & -w \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a(t) \\ u(x - dx, t + dt) \\ u(x, t + dt) \\ u(x + dx, t + dt) \\ u_b(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_a(t) \\ u(x - dx, t) + F(x, t)dt \\ u(x, t) + F(x, t)dt \\ u(x + dx, t) + F(x, t)dt \\ u_b(t) \end{bmatrix} \quad (13)$$

donde $w = k^2 \frac{dt}{(dx)^2}$. La ecuación 13, es una ecuación de la forma $Ax = b$, donde la matriz A , es una matriz tridiagonal de tamaño $n \times n$, donde n es el número de intervalos en el segmento $[a, b]$.

El sistema de ecuaciones mostrado en la ecuación 13, puede ser resuelto usando una factorización LU, como fue mostrado en la sección 3.4.3. Lo cual llevara a que el sistema sea resuelto usando el siguiente esquema:

$$\begin{cases} Ux = y \\ Ly = b \end{cases} \quad (14)$$

El esquema de la ecuación 14 es un sistema de ecuaciones lineales diagonales, llevando a si, una optimización en la solución del sistema en general. Los elementos de la matriz A de la ecuación 13 son dependientes unicamente del elemento espacial del sistema. Por lo que el proceso de factorización LU puede realizarse una única vez al momento de definirse el valor del parámetro w .

El algoritmo 1 es fue el implementado para obtener la solución aproximada de la ecuación de calor no homogénea dependiente del tiempo.

Algorithm 1: Aproximacion a la solución de la ecuación de calor no homogénea dependiente del tiempo usando diferencias finitas.

Input: t_0, t_n, x_0, x_m, n, m

Output: $u(x, t)$

```

1  $u(x, 0) \leftarrow \text{initial\_state}(f(x))$ 
2  $u(x_0, 0), u(x_m, 0) \leftarrow \text{set\_boundary\_conditions}()$ 
3  $\text{matrix\_a} \leftarrow \text{create\_matriz\_A}()$ 
4  $\text{matrix\_a} \leftarrow \text{LU\_decomposition}(\text{matrix\_a})$ 
5 for  $i = 1, n$  do
6   for  $j = 1, m$  do
7      $b_j \leftarrow u(x_j, t_{i-1}) + F(x_j)dt$ 
8    $u(x, t_i) \leftarrow \text{solve\_system}(\text{matrix\_a}, b)$ 
```

4. Resultados

En el artículo de Yuan Lin [3] se mencionan una serie de PDE con su solución analítica. Realizando una comparación de los resultados obtenidos con el programa propio y los resultados de Yuan Lin, se obtuvo lo siguiente:

4.1. Dataset 1

Se tiene la siguiente ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < 1, t > 0 \quad (15)$$

con las siguientes condiciones de frontera:

$$\begin{cases} u(x, 0) = \sin(\pi x) & 0 < x < 1 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t > 0 \end{cases} \quad (16)$$

La solución analítica de este conjunto de ecuaciones es:

$$u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x) \quad (17)$$

En la figura 1 se muestra la solución analítica y numérica de la ecuación 16 bajo las condiciones de frontera de la ecuación 16. La diferencia relativa entre los dos resultados es de 0.3531 %, dando así una gran similitud entre los dos resultados.

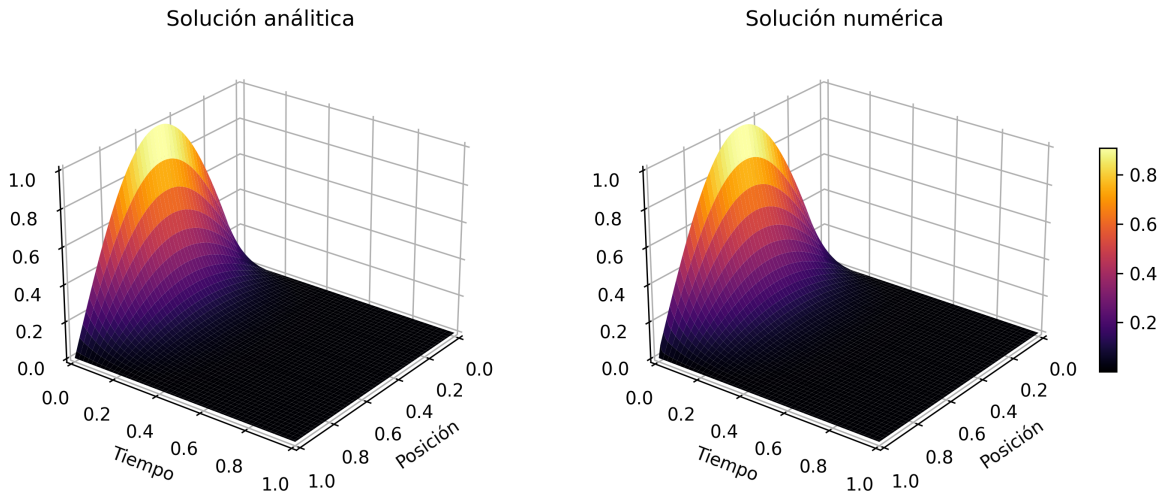


Figura 1: Solución analítica y numérica de la ecuación 15 bajo las condiciones de frontera de la ecuación 16.

4.2. Dataset 2

Se tiene la siguiente ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\pi^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < 1, t > 0 \quad (18)$$

con las siguientes condiciones de frontera:

$$\begin{cases} u(x, 0) = \sin(\pi x) & 0 < x < 1 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t > 0 \end{cases} \quad (19)$$

La solución analítica de este conjuntos de ecuaciones es:

$$u(x, t) = e^{-t} \sin(\pi x) \quad (20)$$

En la figura 2 se muestra la solución analítica y numérica de la ecuación 19 bajo las condiciones de frontera de la ecuación 19. La diferencia relativa entre los dos resultados es de 0.3512 %, dando así una gran similitud entre los dos resultados.

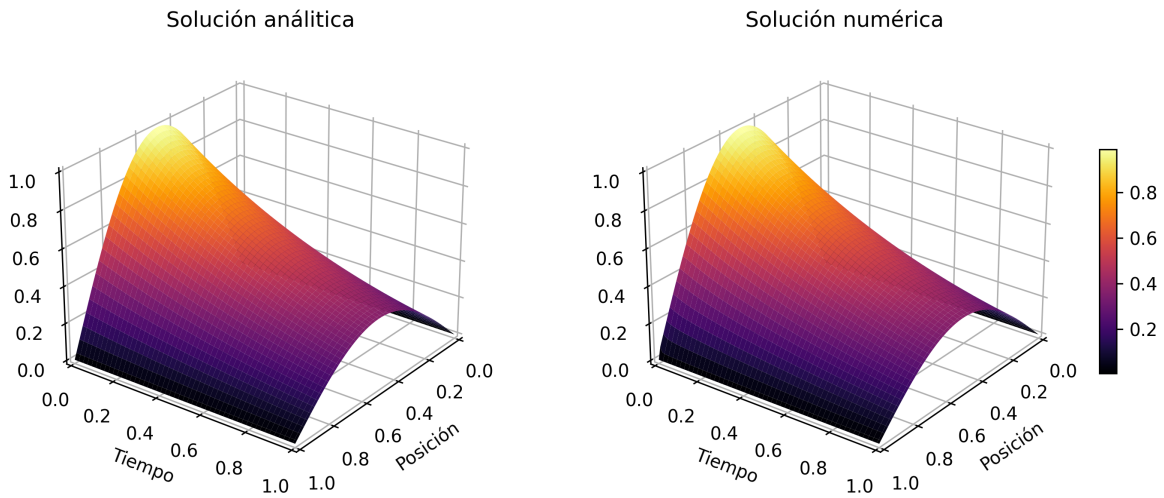


Figura 2: Solución analítica y numérica de la ecuación 18 bajo las condiciones de frontera de la ecuación 19.

4.3. Dataset 3

Se tiene la siguiente ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 10x(1-x)\cos(10t) + 2\sin(10t) \quad 0 < x < 1, t > 0 \quad (21)$$

con las siguientes condiciones de frontera:

$$\begin{cases} u(x, 0) = \sin(\pi x) & 0 < x < 1 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t > 0 \end{cases} \quad (22)$$

La solución analítica de este conjuntos de ecuaciones es:

$$u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x) + x(1-x)\sin(10t) \quad (23)$$

En la figura 3 se muestra la solución analítica y numérica de la ecuación 22 bajo las condiciones de frontera de la ecuación 22. La diferencia relativa entre los dos resultados es de 0.4409 %, dando así una gran similitud entre los dos resultados.

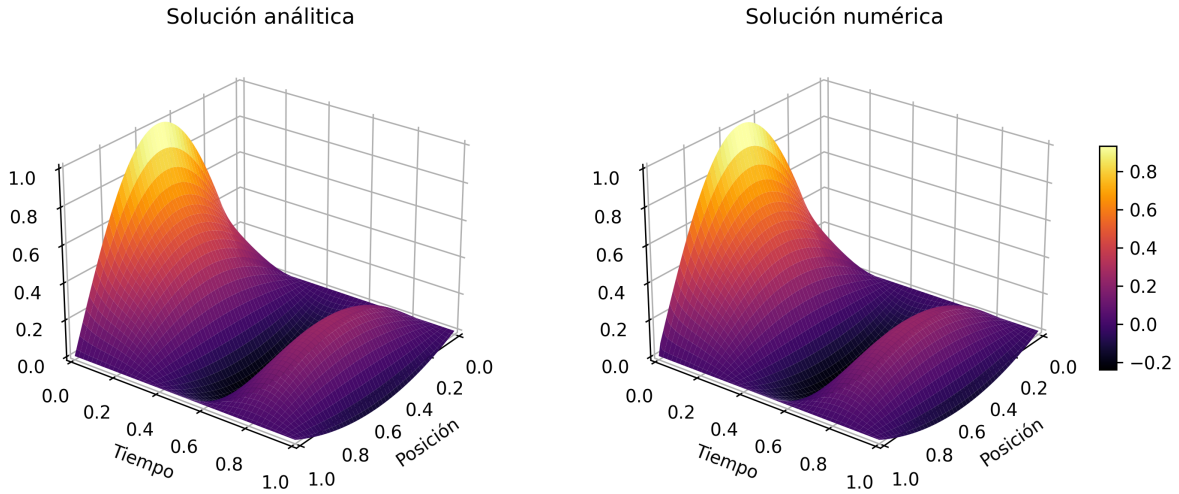


Figura 3: Solución analítica y numérica de la ecuación 21 bajo las condiciones de frontera de la ecuación 22.

4.4. Dataset 4

Se tiene la siguiente ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^t \sin(x) \quad 0 < x < \pi, t > 0 \quad (24)$$

con las siguientes condiciones de frontera:

$$\begin{cases} u(x, 0) = \sin(\pi x) & 0 < x < 1 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t > 0 \end{cases} \quad (25)$$

La solución analítica de este conjuntos de ecuaciones es:

$$u(x, t) = \frac{1}{5}(e^t - e^{-4t})\sin(x) \quad (26)$$

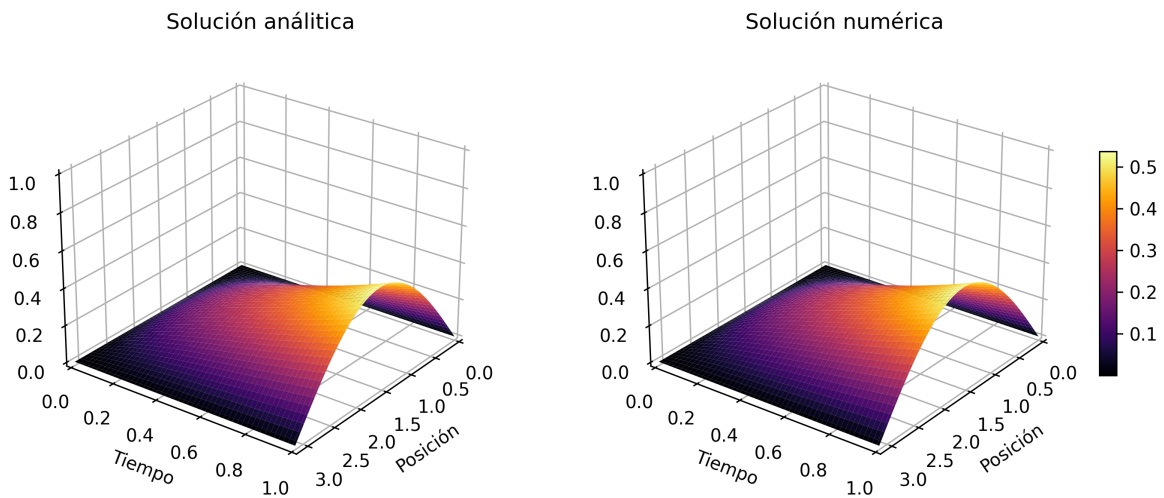


Figura 4: Solución analítica y numérica de la ecuación 24 bajo las condiciones de frontera de la ecuación 25.

En la figura 4 se muestra la solución analítica y numérica de la ecuación 25 bajo las condiciones de frontera de la ecuación 25. La diferencia relativa entre los dos resultados es de 0.0997 %, dando así una gran similitud entre los dos resultados.

5. Conclusiones

El uso de herramientas numéricas para resolver problemas que pueden resolverse de manera analítica es una forma eficiente de confirmar que los resultados obtenidos son correctos. Y al confirmar que la herramienta funciona, esta puede ser usada para problemas en los que obtener una solución analítica sea difícil o imposible de obtener.

6. Referencias

- [1] Sequeira-Chavarría F, Ramírez-Bogantes M. Aspectos computacionales del método de diferencias finitas para la ecuación de calor dependiente del tiempo. Uniciencia. 2019 Jan;33(1):83. Available from: <https://doi.org/10.15359/ru.33-1.7>.
- [2] Quintana Murillo J. Métodos numéricos en diferencias finitas para la resolución de ecuaciones difusivas fraccionarias. Universidad de Extremadura. 2016; Available from: <http://hdl.handle.net/10662/4379>.
- [3] Lin Y, Gao X, Xiao M. A high-order finite difference method for 1D nonhomogeneous heat equations. Numerical Methods for Partial Differential Equations. 2009;25(2):327–346. Available from: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/num.20345>.
- [4] Sommerfeld A. Partial differential equations in physics. Academic press; 1949.
- [5] Wazwaz AM. Partial differential equations. CRC Press; 2002.
- [6] Trong DD, Long NT, Alain PND. Nonhomogeneous heat equation: Identification and regularization for the inhomogeneous term. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2005;312(1):93–104. Available from: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022247X05002362>.
- [7] El-Mikkawy M. A note on a three-term recurrence for a tridiagonal matrix. Applied Mathematics and Computation. 2003;139(2):503–511. Available from: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300302002126>.