Examen 1 - Métodos numericos
Giovanni Gamaliel López Padilla

Problema 1

Sea $f(x) : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ una función continua. Se dice x' es una solución de la ecuación si $f(x') = 0$. Además x' es un cero de multiplicidad $m \geq 1$ de f. Podemos escribir a f como en la ecuación 1.

$$f(x) = (x - x')^m q(x) \tag{1}$$

donde $q(x') \neq 0$.

Inciso a

Muestra que si $f \in C^1[a, b]$ tiene un cero simple en $x' \in (a, b)$, entonces $f'(x') \neq 0$.

Se tiene que que $f(x)$ se puede escribir como la ecuacion 1. Como x' es un cero simple, entonces $m = 1$, por lo tanto f es:

$$f(x) = (x - x')q(x)$$

Calculando f', se tiene que:

$$f'(x) = q(x) - (x - x')q'(x)$$

evaluando $f'(x')$, se obtiene que:

$$f'(x') = q(x')$$

como $q(x') \neq 0$, por lo tanto $f'(x') \neq 0$.

Inciso b

Se cumple que el recíproco del inciso a, es decir, si $f \in C^1[a, b], x' \in (a, b), f(x') = 0$ y $f'(x') \neq 0$ entonces x' es un cero simple de f. Basado en esta afirmación, muestra que si la función $f(x)$ tiene un cero x' de multiplicidad $m > 1$, entonces x' es un cero simple de la función

$$h(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{2}$$

Se tiene que f puede escribirse como la ecuación 1. Entonces, calculando su derivada se obtiene que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= m(x-x')^{m-1}q(x) + (x-x')^m q(x) \\ &= (x-x')^m \left[\left(\frac{m}{x-x'} \right) q(x) + q'(x) \right] \\ &= (x-x')^m \left(\frac{mq(x) + q'(x)(x-x')}{x-x'} \right) \end{aligned}$$

Entonces, escribiendo la ecuación 2. Se obtiene que:

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{f(x)}{f'(x)} \\ &= \frac{(x-x')^m q(x)}{(x-x')^m \left(\frac{mq(x)+q'(x)(x-x')}{x-x'} \right)} \\ &= \frac{q(x)(x-x')}{mq(x) + (x-x')q'(x)} \end{aligned}$$

Encontrando los valores para los cuales $h(x) = 0$, se obtiene que:

$$\begin{aligned} \frac{q(x)(x-x')}{mq(x) + (x-x')q'(x)} &= 0 \\ q(x)(x-x') &= 0 \\ q(x) = 0 \qquad x - x' &= 0 \end{aligned}$$

En donde se obtiene que un cero de h es x' con multiplicidad 1.

Inciso c

El algoritmo de newton moficado haciendo uso de la ecuación 2 se encuentra en la carpeta Problema_1.

Se uso como ejemplo la ecuación 3. En la tabla 1 se encuentran los parámetros usados para este ejemplo.

$$f(x) = e^{2x-2} - 2x + 1 \tag{3}$$

$\mathbf{x_0}$	**tol_x**	**tol_f**
-10	10^{-6}	10^{-6}

Tabla 1: Parámetros usados para el ejemplo de la ecuación 3

Los resultados para cada iteración se encuentran en la tabla 2.

Iteración	**x**	$\|\mathbf{f(x)}\|$
1	0.500000	0.367879
2	0.940018	0.006916
3	0.998848	0.000003
4	1.000000	0.000000

Tabla 2: Resultados del programa usando la ecuación 3

Problema 2

Se requiere resolver el sistema de ecuaciones lineales Ax = b. La matriz y el vector de términos independientes está en A_01.mtx y b_01.vec respectivamente. El sistema tiene n = 1000 variables. Obtener: La inversa de la matriz A y guardar la solución en un archivo la solución al sistema y de igual forma pon el resultado en un archivo. Menciona qué método o métodos usaste y por qué.

Al ser una matriz de gran tamaño, el resolverla usando el método de Gauss será tardado ya que tendra que transformar la matriz a una triangular superior y en seguida resolverla usando un método para la misma. Los términos de la diagonal de la matriz son más grandes que los términos aledaños, esto podria causar que se llegue a una indeterminación causando asi que el método falle. Es por ello que se decidio aplicar una factorización LU para en seguida resolver el sistema de una matriz triangular inferior y una traingular superior.

Para obtener la inversa de la matriz de opto por resolver un sistema de ecuaciones de tal manera que:

$$Ax = I_n$$

donde x es el n vector columna correspondiente a la matriz inversa de A y I_n es el vector columna donde el elemento de la posición n hay un 1 y en las demás ceros.

Problema 3

Haz una comparación entre los métodos directos e iterativos para resolver el sistema de ecuaciones lineales con la matriz en A_02.mtx y el vector en b_02.vec con n = 3134. De acuerdo a tus resultados, ¿Cuál de los métodos es el más adecuado para este problema? Menciona los pros y contras de los métodos y emplea varios aspectos para medir el rendimiento como la memoria empleada, tiempo, iteraciones, error, etc.

La matriz contenida en el archivo A_3134.mtx es una matriz diagonal, por ende se intuye que el mejor método para resolver el sistema de ecuaciones será usando el método para matrices triangulares. Se comprararan las soluciones usando el método para matrices triangulares superiores, inferiores y diagonales. Los métodos de Gauss y factorización de LU serán descartados ya que al final de sus procesos usan los métodos para matrices triangulares.

Las comparaciones de tiempo de ejecución e iteraciones de cada método se encuentran en la tabla 3.

Método	**Número de iteraciones**	**Tiempo (s)**
Triangular superior	4909411	0.090660
Triangular inferior	4909411	0.073247
Diagonal	3134	0.000597

Tabla 3: Comparación en númro de iteraciones y tiempo de los métodos para matrcices diagonales, triangular superior y triangular inferior

La comparación en memoria de cada método resulta en que el método de matrices diagonales ocupa menos memoria a comparación de los dos métodos, ya que este solo hace uso de los elementos en la diafonal, por ende podemos darle un vector con estos datos. En cambio, los métodos para matrices triangulares inferiores y superiores necesitan al menos la mitad de de una matriz cuadrada.

Problema 4

Se requiere resolver un problema de valores y vectores propios de una matriz que está formada por una discretización muy fina de un problema de difusión. Cada ecuación del sistema tiene la siguiente forma:

$$-8x_{i-2} - 8x_{i-1} + 40x_i - 8x_{i+1} - 4x_{i+2}$$

En los extremos de la matriz se eliminan los términos que quedan fuera (cuando el índice es negativo o mayor a 2000). La primer ecuación sería $40x_1$-$8x_2$-$4x_3$, la segunda -$8x_1$+$40x_2$-$8x_3$-$4x_4$. La penúltima sería -$4x_{1997}$-$8x_{1998}$+$40x_{1999}$-$8x_{2000}$ y la última -$4x_{1998}$-$8x_{1999}$+$40x_{2000}$. Obtener: Los 10 valores propios más chicos y los valores propios correspondientes. Los 10 valores propios más grandes y los valores propios correspondientes.

Al ser una matriz muy grande y querer un número reducido de eigenvalores no es una buena elección utilizar el métodod de Jacobi, ya que calcularemos los 2000 eigenvalores, es por ello que se prefirio usar el método de deflación con potencia y potencia inversa para los eigenvalores mayores y menores respectivamente. Se uso una tolerancia de 10^{-4} para los dos métodos. El programa podría optimizarse usando la factorización de Cholesky en ves del uso de la factorización LU que se implemento en los métodos de la potencia inversa.