Tarea 3 - Métodos numéricos
Giovanni Gamaliel López Padilla

Problema 1

Use four-digit rounding arithmetic and the quadratic formulas to find the most accurate approximations to the roots of the following quadratic equa- tions. Also use the form of the quadratic formula by rationalizing the numerator. Compute the absolute errors and relative errors.

$$\frac{1}{3}x^2 - \frac{123}{4}x + \frac{1}{6} = 0 \tag{1}$$
$$\frac{1}{3}x^2 + \frac{123}{4}x - \frac{1}{6} = 0 \tag{2}$$

La ecuación cuadrática es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{3}$$

Realizando el proceso de racionalización se obtiene que:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}\left(\frac{b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{b \pm \sqrt{b^2-4ac}}\right) \\ &= \frac{-b^2+b^2-4ac}{2a(b \pm \sqrt{b^2-4ac})} \\ x &= \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2-4ac}} \end{aligned} \tag{4}$$

Usando la ecuación 4 para las ecuaciones 1 y 2 se obtiene los resultados de la tabla 1.

	Función	x_1	x_2
Ecuación 1	Función 3	0.0054	-92.2646
	Función 4	0.005420	-92.255420
Ecuación 2	Función 3	0.0054	92.2538
	Función 4	0.005420	92.244580

Tabla 1: Resultados de las raices de las ecuaciones 1 y 2 usando las funciones 3 y 4.

Para este caso se definieron la diferencia relativa y absoluta de la siguiente manera:

$$DA = |Y - X| \qquad DR = \frac{DA}{Y} * 100$$

donde Y son los resultados de la función 4 y X son los resultados de la función 3. Obtiendo los resultados mostrados en la tabla 2.

Ecuación	Valores	Diferencia absoluta	Diferencia Relativa
Ecuación 1	x_1	0.000020	0.369004 %
	x_2	0.009183	0.009953 %
Ecuación 2	x_1	0.009220	0.009994 %
	x_2	0.000020	0.377269 %

Tabla 2: Diferencias absolutas y relativas de los resultados de la tabla 1.

El programa se encuentra en la carpeta Problema_1. Para compilar el programa se debe ingresar la siguiente linea:

```
gcc -Wall -Wextra -Werror -pedantic -ansi -o main.out main.c -lm -std=c11
```

El output esperado del programa es el siguiente:

```
--------------------------------------
Ecuacion a analizar:
+0.333333 x2 +30.750000 x -0.166667

El resultado usando la ecuacion racionalizada es:
x1 = 0.005420        x2 = -92.255420
El resultado usando redondeando a cuatro digitos es:
x1 = 0.005400        x2 = -92.264603

La diferencia absoluta y la diferencia relativa es:
Para x1
    AD = 0.000020     RD = 0.365475
Para x2
    AD = 0.009183     RD = 0.009953

--------------------------------------
Ecuacion a analizar:
+0.333333 x2 -30.750000 x +0.166667

El resultado usando la ecuacion racionalizada es:
x1 = 92.244580       x2 = 0.005420
El resultado usando redondeando a cuatro digitos es:
x1 = 92.253799       x2 = 0.005400

La diferencia absoluta y la diferencia relativa es:
Para x1
    AD = 0.009220     RD = 0.009994
Para x2
    AD = 0.000020     RD = 0.377269
```

Problema 2

Let

$$f(x) = \frac{xcos(x) - sin(x)}{x - sin(x)} \tag{5}$$

a). Find $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

Como queremos encontrar el límite cuando x tiende a 0 de la ecuación 5. Tenemos que comprobar si el límite por la izquierda y por la derecha existe y es igual. Esto es:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = L_i \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = L_s$$

El límite existira si y solo sí $L_i = L_s = L$ y es igual a L. Como el límite que queremos comprobar se encuentra en 0, realizaremos esta busqueda a partir del intervalo $[-1, 1]$. En cada iteración este intervalo se ira reduciendo a la mitad, esto es que en la siguiente iteración el intervalo será $[-0.5, 0.5]$. El número de iteraciones fue 12, al final se comprobo si la diferencia $|L_s - L_i|$ era menos a 10^{-6}. Si lo es, entonces ese es el valor medio de L_s y L_i es el límite de la función.

El programa arrojo los resultados mostrados en la tabla 3 y 4.

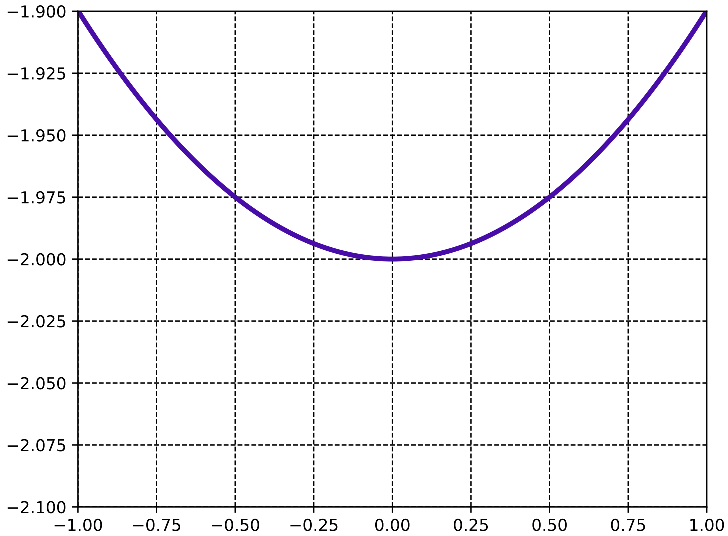

Figura 1

x	$\mathbf{L_i}$
-1.000000	-1.899770
-0.500000	-1.974985
-0.250000	-1.993749
-0.125000	-1.998437
-0.062500	-1.999609
-0.031250	-1.999902
-0.015625	-1.999976
-0.007812	-1.999994
-0.003906	-1.999998
-0.001953	-2.000000
-0.000977	-2.000000
-0.000488	-2.000000

Tabla 3: Valores obtenidos para el límite por la izquierda para una x dada.

x	$\mathbf{L_s}$
1.000000	-1.899770
0.500000	-1.974985
0.250000	-1.993749
0.125000	-1.998437
0.062500	-1.999609
0.031250	-1.999902
0.015625	-1.999976
0.007812	-1.999994
0.003906	-1.999998
0.001953	-2.000000
0.000977	-2.000000
0.000488	-2.000000

Tabla 4: Valores obtenidos para el límite por la derecha para una x dada.

Observando los resultados de las tablas 3 y 4 podemos decir que el límite buscado sí existe y es igual a -2. El programa llega a la misma conclusión. En la figura 1 se puede verificar la misma conclusión.

b). Use four-digit rounding arithmetic to evaluate $f(0.1)$

La forma en la cual se realizo el calculo es la siguiente. Sea round(x) una función la cual redondea a cuatro decimales, entonces la ecuación 5 es escrita como:

$$f_b(x) = round\left(\frac{round(round(x'cos(x')') - sin(x')')}{round(x' - sin(x')')}\right) \tag{6}$$

donde $sin(x)', cos(x)'$ y x' son los valores de $sin(x), cos(x)$ y x redondeados a cuatro decimales respectivamente. Evaluando la ecuación 6 en $x = 0.1$ se obtiene que $f_b(x)$ es igual a -1.5000.

c). Replace each trigonometric function with its third Maclaurin polynomial and repeat part (b).

Escribiendo las ecuaciones de seno y coseno como sereis de potenicas, se obtiene lo siguiente:

$$sin(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1} \qquad cos(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{(2i)!} x^{2i}$$

Transformando estas ecuaciones a una ecuación recursiva se obtiene que

para $sin(x)$ es

$$\begin{aligned} P_0 &= a_n \\ P_1 &= a_{n-1} + x^2 P_0 \\ P_2 &= a_{n-2} + x^2 P_1 \\ &\vdots \\ P_i &= a_{n-i} + x^2 P_{i-1} \\ &\vdots \\ P_n &= x P_n \end{aligned}$$

En el caso de $cos(x)$ es:

$$\begin{aligned} P_0 &= a_n \\ P_1 &= a_{n-1} + x^2 P_0 \\ P_2 &= a_{n-2} + x^2 P_1 \\ &\vdots \\ P_i &= a_{n-i} + x^2 P_{i-1} \\ &\vdots \\ P_n &= a_{n-1} + x^2 P_{n-1} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación que se calculara es la siguiente:

$$f_c(x) = \frac{x\left(\sum\limits_{i=0}^{n=2} \frac{(-1)^i}{(2i)!} x^{2i}\right) - \left(\sum\limits_{i=0}^{n=2} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1}\right)}{x - \sum\limits_{i=0}^{n=2} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1}} \tag{7}$$

Cada término de la ecuación 7 fue redondeado como en la ecuación 6. A su vez cada término de las series fue redondeado a cuatro decimales usando la función round_custom(). Evaluando la función en $x = 0.1$, se obtiene como resultado que $f(x = 0.1) = -1., 5000$.

d). The actual value is f (0.1) = -1.99899998. Find the relative error for the values obtained in parts (b) and (c).

Calculando la diferecia relativa entre los datos obtenidos se obtienen los resultados que se muestran en la tabla 5.

Función	f(x)	Diferencia Relativa
Análitica (Ecuación 5)	-1.998999	-
Redondeo (Ecaución 6)	-1.500000	24.9625
Serie de potencias (Ecuación 7)	-1.500000	24.9625

Tabla 5: Valores obtenidos en los ejercicos 2b y 2c comparandolos con el resultado análitico de la ecuación 5 en x=0.1.

Con los resultados mostrados en las tablas 1 y 5 se puede aclarar que el redondear a cuatro decimales la funciones seno y coseno es equivalente a usar hasta el tercer término de la expansión por serie de Maclaurin. El programa se encuentra en la carpeta Problema_2. Para compilar el programa se debe ingresar la siguiente linea:

```
gcc -Wall -Wextra -Werror -pedantic -ansi -o main.out main.c -lm -std=c11
```

El output esperado del programa es el siguiente:

```
________________________________________
x           Li            x            Ls
-1.000000   -1.899770     1.000000     -1.899770
-0.500000   -1.974985     0.500000     -1.974985
-0.250000   -1.993749     0.250000     -1.993749
-0.125000   -1.998437     0.125000     -1.998437
-0.062500   -1.999609     0.062500     -1.999609
-0.031250   -1.999902     0.031250     -1.999902
-0.015625   -1.999976     0.015625     -1.999976
-0.007812   -1.999994     0.007812     -1.999994
-0.003906   -1.999998     0.003906     -1.999998
-0.001953   -2.000000     0.001953     -2.000000
-0.000977   -2.000000     0.000977     -2.000000
-0.000488   -2.000000     0.000488     -2.000000

El limite cuando f(x) tiende a cero es -2.000000

________________________________________
El valor de f(x)
       Con series es: -1.5000
       Con redondeo a 4 decimales es: -1.5000

________________________________________
La diferencia relativa de f(x)
       Con redondeo a 4 decimales es: 24.9625
       Con series es: 24.9625
```

Problema 3

Find the number of terms of the exponential series such that their sum gives the value of e^x correct to six decimal places at x = 1.

El procedimiento para encontrar la respuesta a este problema fue el siguiente:

```
n_term = 1
fx = round(exp(1.0),6)
fx_approx = round(approx(x,n_term),6)
while fx != fx_approx:
    n_term++
    fx_approx = round(approx(x,n_term),6)
```

El número de terminos de la serie de la función $f(x) = e^x$ necesaria para que coincida su valor numérico a seis decimales es 9.

El programa de este problema se encuentra en la carpeta Problema_3. El comando para compilarlo es el siguiente:

```
gcc -Wall -Wextra -Werror -pedantic -ansi -o main.out main.c -lm -std=c11
```

El output esperado del programa es el siguiente:

```
--------------------------------------------------
n    f(x)              f_approx(x)
1    2.718282          2.000000
2    2.718282          2.500000
3    2.718282          2.666667
4    2.718282          2.708334
5    2.718282          2.716667
6    2.718282          2.718056
7    2.718282          2.718254
8    2.718282          2.718279
9    2.718282          2.718282
--------------------------------------------------

Se obtuvo la igualdad usando 9 terminos de la serie
```