Tarea 12 Métodos Numéricos

Oscar Dalmau

Entrega: 23:59 del 7/11/21

(1) Programar el algoritmo QR para encontrar los eigenpares de las matrices *Eigen_3.txt* y *Eigen_25.txt*. Únicamente reportar: criterio de paro establecido, tolerancia utilizada, iteraciones requeridas, autovalores aproximados y la comprobación dada por

$$\frac{\|AV - \Lambda V\|_2}{\|AV\|_2},$$

donde A es la matriz en cuestión, V y Λ son, respectivamente, las matrices de autovectores y autovalores aproximados. ($V = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$)

(2) Sea el siguiente spline cúbico

$$f(x) = \begin{cases} f_0(x) = ax^3 + bx^2 + c(x-1), & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ f_1(x) = d(x-1)^2 + cx & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

a) Determinar los valores que deben tomar los parámetros a, b, c y d si f interpola $g(-1) = -4$ y $g(1) = 1$

b) Determinar los valores que deben tomar los parámetros a, b, c y d si f interpola $g'(-1) = 6$ y $g'(1) = -1$

(3) Dado un conjunto de puntos (x_i, y_i) con $i = 0, 1, \cdots, n$ con $x_i < x_j$ para $i < j$, determine el spline de grado 1, $S(x)$, que se presenta a continuación

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_0 x + b_0, \text{ si } x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) = a_1 x + b_1, \text{ si } x \in [x_1, x_2] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ S_j(x) = a_j x + b_j, \text{ si } x \in [x_j, x_{j+1}] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ S_{n-1}(x) = a_{n-1} x + b_{n-1}, \text{ si } x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

y que pasa por los puntos (x_i, y_i).

(4) Implementa el algoritmo Spline Natural Cúbico (Natural cubic spline) y usa el algoritmo anterior para interpolar la funcion/curva a partir de puntos dados abajo:

(a) Interpola la función
$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$
a partir de los puntos (x_i, y_i) donde
$$\begin{aligned} x_i &= \frac{i-8}{2} \\ y_i &= f\left(x_i\right) \end{aligned}$$
para $i = 0, 1, \cdots, 16$. En una gráfica muestra la función, la interpolación y los puntos usados para la interpolación.

(b) Interpola la curva paramétrica $(x(t), y(t))$
$$\begin{aligned} x(t) &= r(t) \sin(t) \\ y(t) &= r(t) \cos(t) \end{aligned}$$
donde
$$r(t) = \exp(\cos(t)) - 2\cos(4t) + (\sin(t/12))^5$$
a partir de 25 puntos $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{24}$ definidos abajo
$$\begin{aligned} x_i &:= x\left(t_i\right) \\ y_i &:= x\left(t_i\right) \end{aligned}$$
donde $t_i = \frac{\pi i}{12}, i = 0, 1, \cdots, 24$. En una gráfica muestra la curva parámetrica, la interpolación y los 25 puntos usados para la interpolación.