

Tarea 12 - Métodos numéricos
Giovanni Gamaliel López Padilla

Problema 1

Programar el algoritmo QR para encontrar los eigenpares de las matrices `Eigen_3.txt` y `Eigen_25.txt`. Únicamente reportar: criterio de paro establecido, tolerancia utilizada, iteraciones requeridas, autovalores aproximados y la comprobación dada por

$$\frac{\|AV - \Lambda V\|_2}{\|AV\|_2}$$

donde A es la matriz en cuestión. V y Λ son, respectivamente, las matrices de eigenvectores y eigenvalores aproximados.

Criterio de paro

La condición establecida en el algoritmo implementado se basa en que el resultado de la multiplicación de las matrices RQ es simétrica. Entonces, se encuentra el valor máximo en la parte superior de la matriz. La tolerancia usada fue de 10^{-6} . Entonces el algoritmo se detendrá cuando el valor máximo sea menor a 10^{-6} .

Iteraciones requeridas y comprobación

Las iteraciones realizadas y la comprobación de cada matriz se encuentran la tabla 1.

Matriz	Iteraciones	Comprobación
<code>Eigen_3.txt</code>	27	1.052200
<code>Eigen_25.txt</code>	622	0.998071

Tabla 1: Iteraciones realizadas y comprobaciones usando el algoritmo QR

Para obtener el eigenvalor más grande se implementó el método de la potencia usando la misma tolerancia que el algoritmo QR.

Problema 2

Sea el siguiente spline cúbico:

$$f(x) = \begin{cases} f_0(x) = ax^3 + bx^2 + c(x-1) & -1 \leq x \leq 0 \\ f_1(x) = d(x-1)^2 + ex & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

a) Determina los valores de a, b, c, d y e si f interpola $f(-1) = -4$ y $f(1) = 1$.

Se plantea que f, f' y f'' es continua, entonces esta deberá cumplir la siguiente condición:

$$\begin{aligned} f_0(0) &= f_1(0) \\ f'_0(0) &= f'_1(0) \\ f''_0(0) &= f''_1(0) \end{aligned}$$

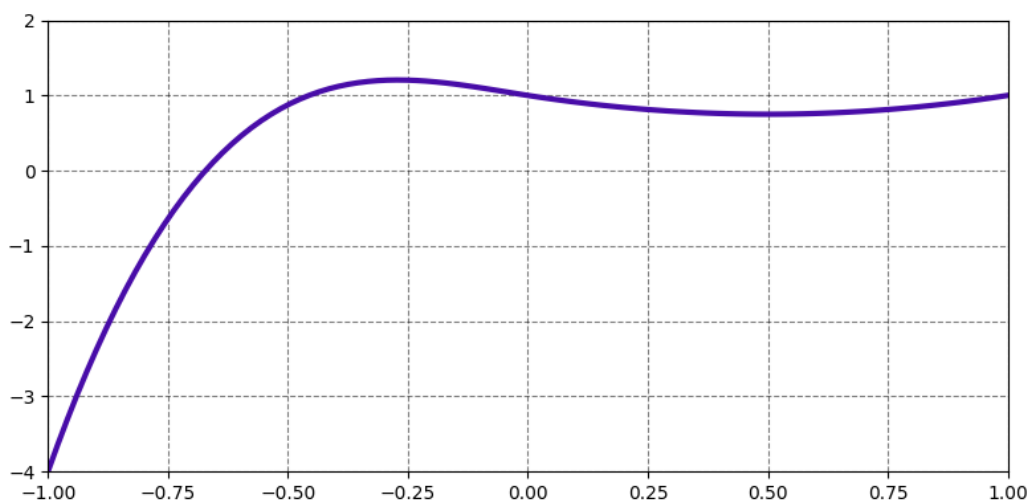
esto es porque f_0 y f_1 son funciones que comparten $x = 0$ en su dominio. Entonces, usando esta condición con las dadas, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} -a + b - 2c &= -4 \\ e &= 1 \\ c + d &= 0 \\ b - d &= 0 \\ c + 2d - e &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, se obtiene que la solución es la siguiente:

$$\begin{aligned} a &= 7 & b &= 1 & c &= -1 \\ d &= 1 & e &= 1 \end{aligned}$$

En la figura 1 se muestra la función f con los parámetros obtenidos.



Gráfica 1: Función f con varios parámetros.

b) Determina los valores de a, b, c, d y e si f interpola $f'(-1) = 6$ y $f(1) = -1$.

Calculando la primer derivada de f , se obtiene lo siguiente:

$$f'(x) = \begin{cases} f'_0(x) = 3ax^2 + 2bx + c & -1 \leq x \leq 0 \\ f'_1(x) = 2d(x-1) + c & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

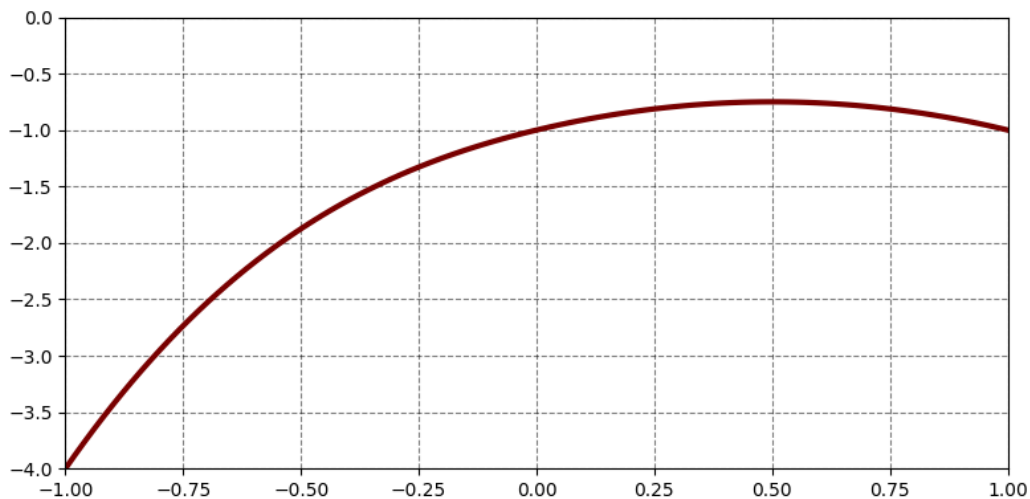
Como f' debe de ser continua, entonces $f'_0(0) = f'_1(0)$. Contemplando las condicones dadas, entonces se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3a - 2b + c &= 6 \\ e &= -1 \\ c + d &= 0 \\ b - d &= 0 \\ c + 2d - e &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, se obtiene que la solución del sistema de ecuaciones es:

$$\begin{aligned} a &= 1 & b &= -1 & c &= 1 \\ d &= -1 & e &= -1 \end{aligned}$$

En la figura 2 se muestra la función f con los parámetros obtenidos.



Gráfica 2: Función f con varios parámetros.

Problema 3

Dado un conjunto de puntos (x_i, y_i) con $i = 0, 1, 2, \dots, n$ con $x_i < x_j$ para $i < j$. Determine el spline de grado 1 y que pasa por los puntos (x_i, y_i) .

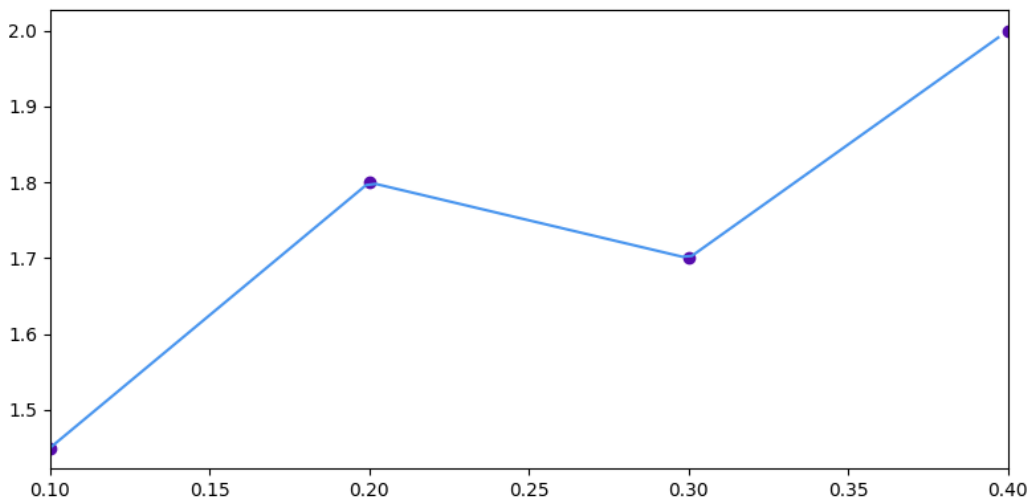
$$S(x) = \begin{cases} a_0x + b_0 & \text{para } x_0 \leq x \leq x_1 \\ a_1x + b_1 & \text{para } x_1 \leq x \leq x_2 \\ a_2x + b_2 & \text{para } x_2 \leq x \leq x_3 \\ \vdots & \vdots \\ a_ix + b_i & \text{para } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n-1}x + b_{n-1} & \text{para } x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases}$$

Al ser ecuaciones de líneas, entonces no se puede asegurar que $S(x)$ sea diferenciable en $[x_i, x_n]$, por lo que, se tratará a cada parámetro del spline como independiente, esto es, formar una ecuación de la recta que pase por los puntos (x_i, x_{i+1}) . Entonces se tiene lo siguiente:

$$a_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (1)$$

$$b_i = y_i - a_ix_i \quad (2)$$

Usando los siguientes puntos $\{(0.1, 1.45), (0.2, 1.8), (0.3, 1.7), (0.4, 2.0)\}$, y las ecuaciones 1 y 2, se obtuvo la gráfica 3.



Gráfica 3: Spline de grado 1 usando los puntos $\{(0.1, 1.45), (0.2, 1.8), (0.3, 1.7), (0.4, 2.0)\}$.

1. Problema 4

Problema 4

Implementa el algoritmo Spline Natural Cúbico y realiza la interpolación para la ecuación 3 a partir de los siguientes puntos de las ecuaciones 4 y 5.

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \quad (3)$$

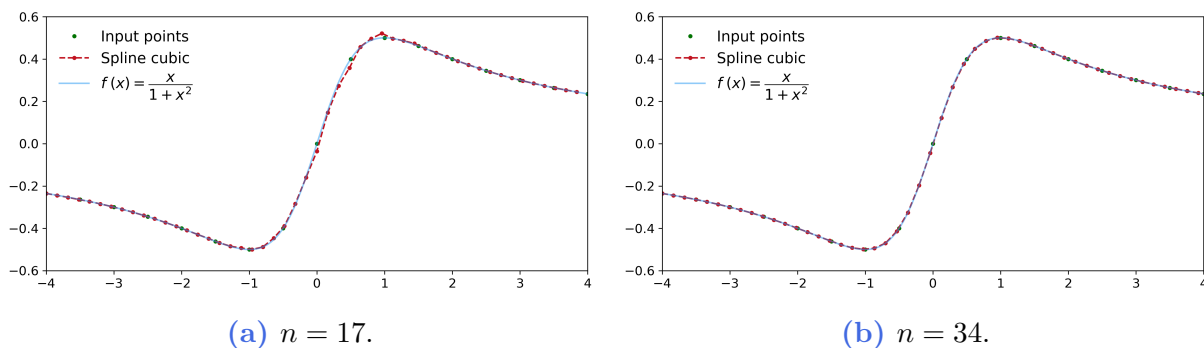
$$x = \frac{i-8}{2} \quad i = 0, 1, 2, \dots, 16 \quad (4)$$

$$y = f(x) \quad (5)$$

Las ecuación 4 fue modificada para obtener más valores en el mismo rango. La modificación esta representada en la ecuación ??.

$$x = \frac{\frac{17i}{n} - 8}{2} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

En la gráfica 4 se visualiza los resultados de la interpolación realizada con n puntos. Se usaron $n = \{17, 34\}$ para este ejercicio.



Gráfica 4: Interpolación de la ecuación 3 dados los puntos generados con las ecuaciones 5 y 6.

Las diferencias entre las gráficas 4a y 4b radican en el punto de inflexión superior, esto debido a que en la gráfica 4a contiene menos puntos para obtener los parámetros en esa región en comparación a la gráfica b. A pesar de estas diferencias, la interpolación obtenida con $n = 17$ es aceptable, debido a que las diferencias con la función original son despreciables en la región analizada.

Problema 4b

Interpola la curva paramétrica de la ecuación 7.

$$f(t) = (r(t)\sin(t), r(t)\cos(t)) \quad (7)$$

donde

$$r(t) = \exp(\cos(t) - 2\cos(4t) + \sin\left(\frac{t}{12}\right)^5)$$

a partir de 25 puntos definidos en la ecuación 8.

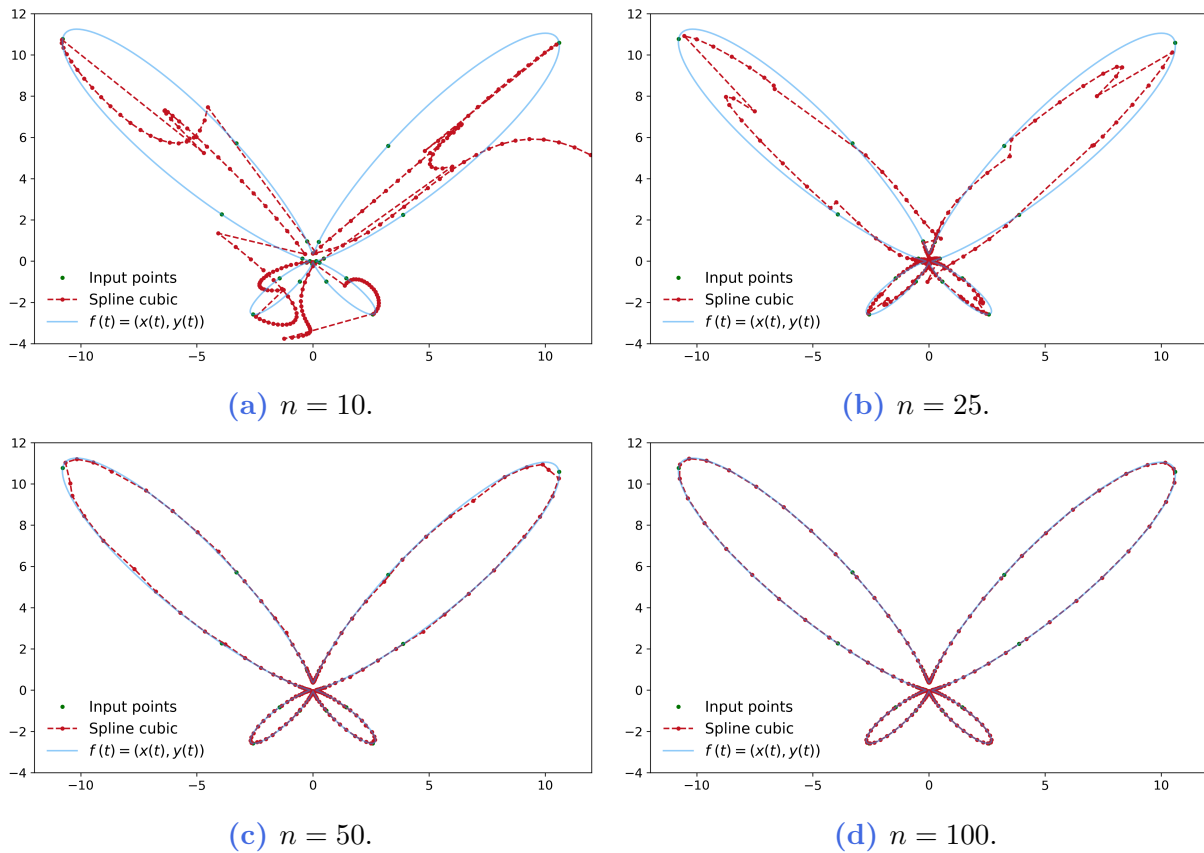
$$(x_i, y_i) = (x(t_i), y(t_i)) \quad t_i = \frac{\pi i}{12} \quad i = 0, 1, 2, \dots, 24 \quad (8)$$

Se modifico la ecuación 8 de la siguiente manera:

$$(x_i, y_i) = (x(t_i), y(t_i)) \quad t_i = \frac{25\pi i}{12n} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

Esto para tener diferentes cantidades de puntos entre el valor mínimo y máximo de la ecuación 8.

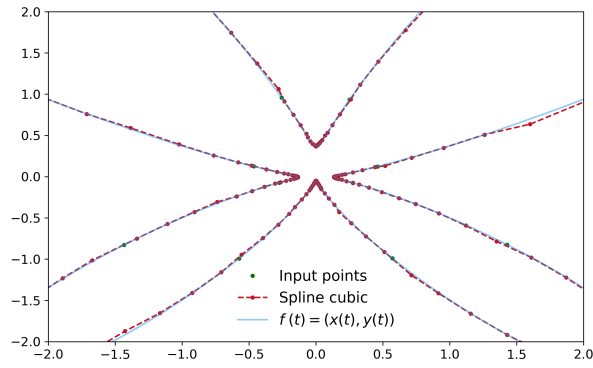
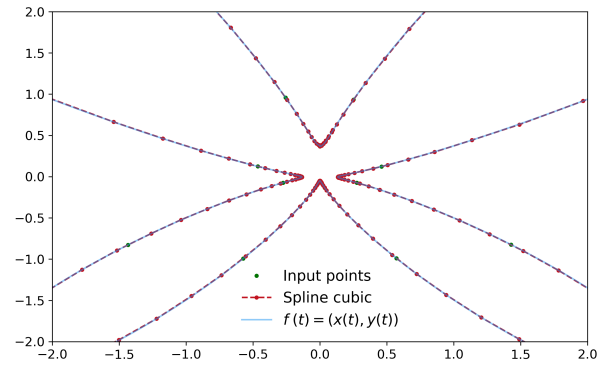
En la gráfica 5 se encuentran los resultados de la interpolación usando $n = \{10, 25, 50, 100\}$



Gráfica 5: Ecuación 7 y 9 con para diferentes cantidades de puntos como input.

En las gráficas 5a y 5b se aprecia que la falta de información en central y superior provoca que la interpolación sea diferente a la ecuación real, siendo la gráfica 5a la que contiene una mayor diferencia. Con esto se llega a la conclusión que mientras más sean los puntos que se conocen de la función la interpolación se acercará a la función original.

Realizando un acercamiento a la zona $[-2, 2] \times [-2, 2]$ se obtiene la gráfica 6.

(a) $n = 50$.(b) $n = 100$ **Gráfica 6:** Ecuación 7 en la zona $[-2, 2] \times [-2, 2]$.

En la gráfica 6 se logra visualizar la diferencia a detalle para el uso de $n = \{50, 100\}$. La gráfica 6a contiene diferencias con respecto a la función original, las cuales la gráfica 6b no presenta. Estas diferencias son muy mínimas al punto en que son aceptables, ya que la cantidad de puntos para obtener esa aproximación es la mitad de la otra.