

Tarea 4 - Análisis de datos
Giovanni Gamaliel López Padilla

Problema 3

Completa cada linea con $\leq, \geq, =$ para obtener una verdad para cualquier v.a. discreta (X,Y)

- Entropia_Shannon(X+1) ... Entropia_Shannon(X)
- Var(X+1) ... Var(X)

Desarrollando $Var(X + 1)$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} Var(X + 1) &= E(X + 1)^2 - (E(X + 1))^2 \\ &= E(X^2 + 2X + 1) - ((EX)^2 + 2EX + 1) \end{aligned}$$

Aplicando la linealidad de la esperanza de tiene que

$$\begin{aligned} Var(X + 1) &= E(X^2 + 2X + 1) - ((EX)^2 + 2EX + 1) \\ &= EX^2 + E(2X) + E(1) - (EX)^2 - 2EX - 1 \end{aligned}$$

Aplicando $E(a) = a$ y $E(aX) = aEX$, para $a \in \mathbb{R}$, se obtiene que:

$$\begin{aligned} Var(X + 1) &= EX^2 + E(2X) + E(1) - (EX)^2 - 2EX - 1 \\ &= EX^2 + 2EX + 1 - (EX)^2 - 2EX - 1 \\ &= EX^2 - (EX)^2 \\ &= Var(X) \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$Var(X + 1) = Var(X)$$

- EX ... E exp(X)

Expandiendo hasta el segundo termino de la serie de potencias de EX se obtiene lo siguiente:

$$\exp(x) > 1 + x$$

entonces

$$E(\exp(X)) > E(1 + X)$$

por linealidad de la esperanza entonces:

$$\begin{aligned} E(\exp(X)) &> E(1 + X) \\ &> E(1) + E(X) \\ E(\exp(X)) &> 1 + E(X) \end{aligned}$$

como

$$E(X) + 1 > EX$$

podemos afirmar que

$$E(X) < E(\exp(X))$$

Problema 4

Problema 4a

Supongamos que te contrataron como científico de datos en una base aérea durante la segunda guerra mundial. Cada día salen aviones para misiones de bombardeo. Estudias cada noche el daño en los aviones que regresan de su misión. Aplicas tu algoritmo favorito de aprendizaje máquina y reconocimiento de patrones para buscar cuáles partes se dañan más y por ende valen la pena reforzar en los aviones. ¿Qué será una limitante muy fuerte para poder llegar a conclusiones contundentes?

Problema 4b

Quieres estimar la duración promedio de la estancia de turistas en la ciudad de Guanajuato. Eliges en diferentes momentos, en diferentes lugares un turista al azar y preguntas por la duración de su estancia. Decides promediar los valores obtenidos para estimar la duración promedio. ¿Te parece una buena estrategia?

Problema 5

Un fabricante de misiles pretende que la precisión de sus misiles de larga distancia de la marca Palomas de Paz es tal que la variable R que mide la distancia entre donde cayó un misil y su destino original (en km.), tiene la siguiente densidad sobre $[0,1]$:

$$f_R(r) = 2(1 - r)$$

ER y $Var(R)$. Calcula la probabilidad de que un misil caiga a menos de 100 metros de su destino original, lo que se considera como objetivo destruido. Si los vuelos de cada misil son independientes entre sí ¿Cuántos misiles se tienen que lanzar en promedio para que el objetivo quede destruido?

Calculando ER :

$$\begin{aligned}
ER &= \int_{-\infty}^{\infty} r f_R(r) dr \\
&= \int_0^1 r f_R(r) dr \\
&= \int_0^1 2(r - r^2) dr \\
&= 2 \int_0^1 (r - r^2) dr \\
&= 2 \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} \right) \Big|_0^1 \\
&= 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \\
&= 2 \left(\frac{1}{6} \right) \\
ER &= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Calculando $Var(R)$, como ya se tiene cuanto vale ER , entonces se calculara $E(R^2)$.

$$\begin{aligned}
E(R^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} r^2 f_R(r) dr \\
&= \int_0^1 r^2 f_R(r) dr \\
&= \int_0^1 2(r^2 - r^3) dr \\
&= 2 \int_0^1 (r^2 - r^3) dr \\
&= 2 \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^1 \\
&= 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \\
&= 2 \left(\frac{1}{12} \right) \\
E(R^2) &= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
Var(R) &= E(R^2) - (ER)^2 \\
&= \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3} \right)^2 \\
&= \frac{1}{6} - \frac{1}{9} \\
Var(R) &= \frac{1}{18}
\end{aligned}$$

El evento que un misil caiga a menos de 100 metros de su destino original quiere decir que $R \leq 0.1$, entonces:

$$\begin{aligned}
 P(R \leq 0.1) &= \int_0^{0.1} f_R(r) dr \\
 &= \int_0^{0.1} 2(1-r) dr \\
 &= 2 \int_0^{0.1} (1-r) dr \\
 &= 2 \left(r - \frac{r^2}{2} \right) \Big|_0^{0.1} \\
 &= 2 \left(0.1 - \frac{(0.1)^2}{2} \right) \\
 &= 2(0.095) \\
 P(R \leq 0.1) &= 0.19
 \end{aligned}$$

Problema 6

Se tiene una barra de longitud 1 metro y una posición p dada en la barra. Se rompe la barra en dos en un punto elegido al azar. Calcula la longitud promedio de la pieza de la barra que contiene p ($0 < p < 1$).

Problema 7

Define

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} kyx & \text{con } 0 < x < 2, 0 < y < 1, 2y < x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Calcula el valor de k y $P(3Y < X)$.

Calculando de k :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^{2y} kxy dx dy &= 1 \\
\int_0^1 ky \int_0^{2y} x dx dy &= 1 \\
\int_0^1 ky \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{2y} dy &= 1 \\
\frac{k}{2} \int_0^1 y(2y)^2 dy &= 1 \\
2k \int_0^1 y^3 dy &= 1 \\
2k \left(\frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^1 &= 1 \\
\frac{k}{2} &= 1 \\
k &= 2
\end{aligned}$$

Calculando $P(3Y < X)$, como $0 < x < 2$ y $0 < y < 1$, entonces se tiene que obtener el valor máximo para y , tal que $3Y < X$, esto sería

$$\begin{aligned}
3Y &< X \\
3Y &< 2 \\
Y &< \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned}
P(3Y < X) &= \int_0^{\frac{2}{3}} \int_0^{3y} 2xy \, dx dy \\
&= \int_0^{\frac{2}{3}} 2y \int_0^{3y} x \, dx dy \\
&= \int_0^{\frac{2}{3}} 2y \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{3y} dy \\
&= \int_0^{\frac{2}{3}} y(3y)^2 dy \\
&= \int_0^{\frac{2}{3}} 9y^3 dy \\
&= \frac{9}{4} y^4 \Big|_0^{\frac{2}{3}} \\
&= \left(\frac{9}{4} \right) \left(\frac{2}{3} \right)^4 \\
&= \left(\frac{9}{4} \right) \left(\frac{16}{81} \right) \\
P(3Y < X) &= \frac{4}{9}
\end{aligned}$$