Proyecto final - Métodos númericos
Giovanni Gamaliel López Padilla
Ecuación de calor no homogénea unidimensional dependiente del tiempo

Índice

1. Introducción

La ecuación de transferencia de calor es una ecuación diferencial parcial que describe la variación de la temperatura dada una región en un periodo de tiempo. El método de variables separables es un método análitico para resolver de manera práctica una ecuación diferencial ordinaria o parcial. A pesar de la téoria que se tiene para la solución análitica de una ecuación diferencial, esta no es flexible a la hora de modificar datos de la ecuación diferencial. Es por ello que la aplicación de métodos numéricos se convierte en una gran herramienta para obtener una aproximación de las soluciones [1]. Existen dos métodos numéricos para obtener la aproximación de la solución a una ecuación diferencial. El método de elementos finitos y el método de diferencias finitas [2].

2. Objetivos

2.1. Objetivo general

Desarrollar e implementar el método de diferencias finitas a la ecuación de transferencia de calor dependiente del tiempo a un sistema unidimensional en contacto a una fuente de calor.

2.2. Objetivos particulares

3. Métodos

3.1. Ecuaciones diferenciales parciales

Una ecuación diferencial parcial (PDE, por sus siglas en ingles) es una ecuación que relaciona la dependencia de si misma con sus derivadas parciales [3]. Las PDE pueden ser clasificadas en homogéneas y no homogéneas. Una PDE es homogénea si cada término contiene alguna dependencia de la variable u o sus derivadas parciales.

3.2. Condiciones de contorno

El uso de una solución particular de una PDE es más frecuente que el uso de la solución general. Dada una PDE y sus valores en un dominio acotado D [4]. Una condición de contorno es denominada homogénea cuandos sus valores son iguales a cero, de cualquier otra manera, la condicion de contorno es denominada no homogénea. La variable u usualmente esta definida en el dominio D. La información del contorno D es llamada condiciones de contorno. Las condiciones de contorno estan definidas en tres tipos.

- **Condiciones de contorno de Dirichlet**

  En este tipo de condiciones de contorno, la función u es normalmente definida en el contorno D.

- **Condiciones de contorno de Neumann**

  El tipo de condiciones de contorno de Neumann son aquellas donde las derivadas de u estan definidas en el contorno D.

- **Condiciones de contorno mixtas**

  Las condiciones de contorno mixtas son aquellas que utilizan las condiciones de contorno de Dirichlet y Neumann. Con esto, se tiene a la función u y su derivada definida en el contorno D.

3.2.1. Condiciones iniciales

La mayoria de las PDE son aplicadas para describir la dinámica de un sistema físico. Este conjunto de PDE dependen de una variable temporal t. Por lo que, cuando la función u se encuentra descrita en $t = 0$, se dice que u tiene una condicióm inicial.

3.3. Ecuación de calor

3.3.1. Ecuación de calor homogénea

La ecuación 1 es la ecuación de transferencia de calor homogénea. El término k^2 es una constante que representa la difusión térmica del sistema. El valor de k^2 depende de la conductividad del material, su densidad y del calor específico. La función $u(x,t)$ representa el flujo del calor, la cual debe satisfacer a la ecuación 1.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{1}$$

donde $u(a,0) = 0$ y $u(b,0) = 0$ para $a \leq x \leq b$

3.3.2. Ecuación de calor no homogénea

La forma más general de tener a la ecuación de calor no homogenea se encuentra descrita en la ecuación 2.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + F(x,t) \tag{2}$$

donde $F(x,t)$ es una función conocida, $u(a,t) = g(x)$, $u(b,t) = h(x)$, $u(x,0) = j(x)$ para $a \leq x \leq b$.

3.4. Método de diferencias finitas

3.5. Solución para sistemas de matrices tridiagonales

4. Resultados

5. Conclusiones

6. Referencias

[1] Sequeira-Chavarría F, Ramírez-Bogantes M. Aspectos computacionales del método de diferencias finitas para la ecuación de calor dependiente del tiempo. Uniciencia. 2019 Jan;33(1):83. Available from: https://doi.org/10.15359/ru.33-1.7.

[2] Quintana Murillo J. Métodos numéricos en diferencias finitas para la resolución de ecuaciones difusivas fraccionarias. Universidad de Extremadura. 2016;Available from: http://hdl.handle.net/10662/4379.

[3] Sommerfeld A. Partial differential equations in physics. Academic press; 1949.

[4] Wazwaz AM. Partial differential equations. CRC Press; 2002.

[5] Gorguis A, Benny Chan WK. Heat equation and its comparative solutions. Computers & Mathematics with Applications. 2008;55(12):2973–2980. Available from: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S089812210700819X.

[6] Sandoval-Ruiz, E C. Métodos numéricos en diferencias finitas para la estimación de recursos de Hardware FPGA en arquitecturas LFSR(n,k) fractales. Ingeniería, investigación y tecnología. 2019 09;20. Available from: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1405-77432019000300008&nrm=iso.