Tarea 2 - Análisis de datos

Giovanni Gamaliel López Padilla
Edgar Osvaldo López Zúñiga

Problema 2

Cuál es la probabilidad de que el segmento seleccionado en la figura 1 tenga una longitud mayor que $\sqrt{3}$?

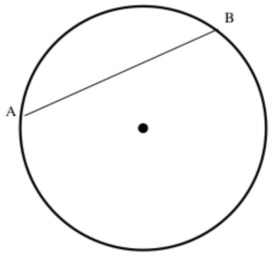

Figura 1

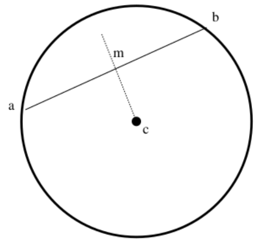

Figura 2

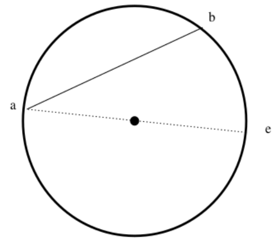

Figura 3

- **Una primera interpretación está basada en el hecho de que cualquier segmento está caracterizado de una manera única por el punto en la intersección del segmento con la recta ortogonal al segmento y que pasa por el centro (ver el punto m en figura 2). Así podemos construir un segmento eligiendo ese punto m al azar dentro del círculo. Calcula bajoesta interpretación la probabilidad de tener un segmento mayor que $\sqrt{3}$.**

  En esta interpretación cada linea trazada sobre el circulo sera rotada hasta que esta sea perpendicular a la linea m. Al nosotros querer lineas mayores a $\sqrt{3}$, calcularemos el valor de m correspondiente a esta medida a la cual llamaremos m_{min}.

$$\begin{aligned} m_{min} &= \sqrt{1 - \left(\frac{3}{2}\right)} \\ &= \sqrt{1 - \frac{3}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4}} \\ m_{min} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

  entonces, se tiene que para $m < \frac{1}{2}$ se obtienen longitudes mayores a $\sqrt{3}$. En la figura 4, las lineas verdes tienen un $m < m_{min}$ y las rojas son $m > m_{min}$.

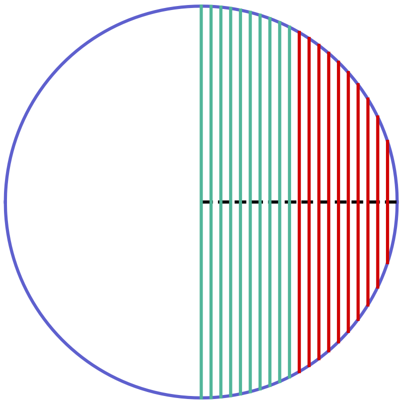

Figura 4

Como el radio del circulo es 1, entonces, la probabilidad de obtener una linea con longitud mayor es:

$$
\begin{aligned}
P(d > \sqrt{3}) &= \frac{\int\limits_0^{m_{min}} dm}{\int\limits_0^{r} dm} \\
&= \frac{m_{min}}{r} \\
&= \frac{\frac{1}{2}}{1} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la probabilidad de obtener una linea con una longitud mayor a $\sqrt{3}$ es $\frac{1}{2}$.

- **En otra interpretación, fijamos primero el punto a en el círculo y elegimos al azar otro punto (b) en el círculo y definimos el segmento como la linea entre a y b (ver figura 3). Para que el segmento tenga una longitud mayor que $\sqrt{3}$: ¿ qué restricción hay para el ángulo abe ?. En base a eso, calcula la probabilidad de tener un segmento mayor que $\sqrt{3}$.**

  Observando la figura 3, se forma un triangulo rectangulo con los puntos a,b y e. La distancia del punto al e es d, que en este caso es 2. Al querer una distancia mayor a $\sqrt{3}$ entre los puntos ab. Calcularemos el angulo abe conn estas distancias.

$$
\begin{aligned}
Cos(\theta) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= 0.86602 \\
\theta &= \frac{\pi}{6}
\end{aligned}
$$

  Como queremos distancias mayores a $\sqrt{3}$, entonces esto sucedera para ángulols menores a $\frac{\pi}{6}$. Como la función coseno es par, entonces nuestro rango de valores admitidos estan en el rango $\theta' \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$. Como el rango de valores que podemos tener en la figura 3 es

$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, entonces la probabilidad con esta interpretación es

$$\begin{aligned} P(-\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6}) &= \frac{\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} d\theta}{\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta} \\ &= \frac{\frac{\pi}{3}}{\pi} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

En la figura 5 se representan algunas lineas con esta interpretación. Las lineas verdes y rojas representan aquellas que tienen una distancia mayor o menor a $\sqrt{3}$ respectivamente.

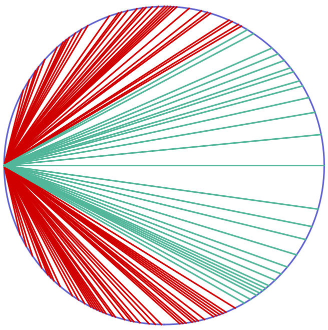

Figura 5

- Otra interpretación a la que llegamos en la siguiente: Cualquier segmento puede ser caracterizado mediante el uso del punto medio de sus intersecciones con la circunferencia. Si dibujamos una linea recta del centro hasta este punto medio nos daremos cuenta que se formara una circunferencia de radio menor (C'). Tomando de referencia la figura 4, notaremos que la circunferencia C' tiene radio m_{min}. Entonces, la probabilidad de obtener una linea recta de longitud mayor o igual a $\sqrt{3}$ puede calcularse como:

$$\begin{aligned} P(d > \sqrt{3}) &= \frac{A(C')}{A(C)} \\ &= \frac{\pi m_{min}^2}{\pi} \\ &= m_{min}^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ P(d > \sqrt{3}) &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Por lo tanto, bajo esta interpretación la probabilidad es de $\frac{1}{4}$. En la figura 6 se representa esta interpretación con lineas rectas generadas aleatoriamente.

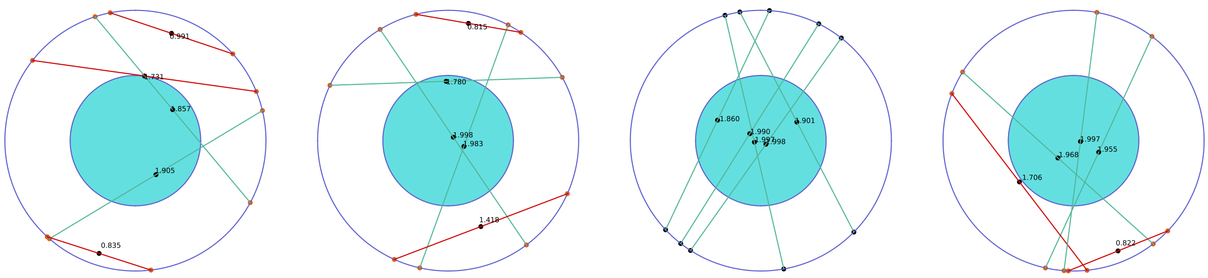

Figura 6

Problema 3

Se rompe una barra en tres piezas en 2 lugares elegidos completamente al azar. Calcula la probabilidad que la longitud de la pieza de en medio sea al menos dos veces la diferencia de las longitudes de las demás dos piezas (nota: se toma como diferencia de 2 y 3, 1, o sea, siempre es positiva).
Para simplificar cálculos y sin perder generalidad, supondremos que tratamos con una barra de largo 1, de manera que al extremo izquierdo de la barra le corresponde el 0, y al derecho el 1. Además, al romper la barra en tres piezas llamaremos x al extremo izquierdo de la pieza de en medio y y a su extremo derecho. De forma que el conjunto de todos los puntos x e y que se obtienen al romper la barra en tres es:

$$\Omega = \{(x, y) : x, y \in (0, 1), x < y\}$$

Siendo

$$A = \{(x, y) \in \Omega : y - x \geq 2 \mid 1 - y - (x - 0) \mid\} \quad = \{(x, y) \in \Omega : y - x \geq 2 \mid 1 - (y + x) \mid\}$$

el conjunto de todos los x e y tales que la longitud de la pieza de en medio sea al menos dos veces la diferencia de las longitudes de las otras dos piezas.
Las condiciones a las que estamos sujetos son

$$y - x \geq 2 - 2y - 2x \ \wedge \ 2 - 2y - 2x \geq x - y, \ y > x$$

esto es

$$y \geq \frac{2 - x}{3} \ \wedge \ y \leq 2 - 3x, \ y > x$$

o escrito de otra forma

$$\frac{2 - x}{3} \leq y \leq 2 - 3x, \ y > x.$$

La intersección de las rectas que delimitan los intervalos se da cuando

$$\frac{2 - x}{3} = 2 - 3x,$$

y esto sucede cuando $x = 1/2$, que al sustituir en una de las rectas nos da $y = 1/2$.
Para la ecuación $y = (2 - x)/3$ se tiene que $y = 2/3$ cuando $x = 0$, y para $y = 2 - 3x$, se tiene que $y = 2$ cuando $x = 0$ y $y = 1$ cuando $x = 1/3$. Todo esto nos da la base para calcular la probabilidad de obtener un elemento de A, que se puede hacer de la siguiente manera:

$$P(A) = \frac{\int_0^{\frac{1}{3}} \int_{\frac{2-x}{3}}^{1} dydx + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{2-x}{3}}^{2-3x} dydx}{\frac{1}{2}}$$

Donde el 1/2 del denominador es el área total que representa a Ω

$$P(A) = 2\left(\int_0^{\frac{1}{3}}\left[1-\left(\frac{2-x}{3}\right)\right]dx+\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}\left[(2-3x)-\left(\frac{2-x}{3}\right)\right]dx\right)$$

Que al integrar y realizar los cálculos aritméticos necesarios nos lleva a que la probabilidad de que la longitud de la pieza de en medio sea al menos dos veces la diferencia de las longitudes de las otras dos piezas es

$$P(A) = 2\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3}$$