Tarea VI

Para entregar el lunes 25 de octubre antes de las 10PM.

1. Verifica que la informacion mutua está bien definida. Es decir $I(X,Y) = I(Y,X)$.

2. Sea $X = (X_1, X_2, X_3) \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ con $\mu^t = (2, -3, 1)$ y $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

   a) Encuentra la distribución de $X_1 + X_2 - X_3$.

   b) Calcula $EX_1|X_2 = 2$.

   c) Encuentra un vector v tal que X_2 y $X_2 - v^t \begin{pmatrix} X_1 \\ X_3 \end{pmatrix}$ sean independientes. Usa las propiedades de la distribuición multivariada normal (en caso de que sea posible obtenerlo).

3. (en equipos de dos) Supongamos que se quiere estimar el número promedio μ de amigos que alguien tiene en Facebook. Se toma una muestra de personas y ellos eligen al azar algunos de sus amigos en Facebook. Se calcula el promedio del número de amigos que estos amigos tienen. Aunque suponemos independencia, argumenta que en general se va a sobrestimar μ de esta manera.

4. (no entregar nada; opcional) El siguiente documental sirve de insumo para una discusión sobre aspectos éticos de (uso de) algoritmos de clasificación a la hora de la comida:

   Está en Netflix.

5. (no entregar nada; cultura general)
   Les recomiendo visitar `rocknpoll.graphics` , una visualización muy atractiva del problema central en inferencia estadistica.

6. En este ejercicio hay que completar lo que empezamos en clase.
   Sea X una v.a. que toma valores en $\{1, 2, 3\}$. Define $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ donde $\theta_i = P(X = i)$. Supongamos que tenemos una muestra con n_i observaciones igual a i, $i = 1, 2, 3$, calcula $l(\theta)$ y el estimador de máxima verosimilitud.

7. Considera el siguiente método para estimar el tamaño (N) de una población de animales de un especie particular. Primero se capturan M animales, los marcan y son puestos de nuevo en libertad.

   Un tiempo más tarde se capturan animales hasta encontrar un animal marcado. Sea X el número total de animales capturados (X incluye el animal marcado). Después se dejan todos los animales en libertad. Se repite lo anterior de tal forma que se obtenga una muestra $\{x_1, \cdots x_n\}$ de X (así este procedimiento puede tardar bastante).

   Puedes suponer que en cada momento la probabilidad de capturar un animal marcado es siempre igual (así se supone que N es mucho mayor que M).

   - Demuestra que

   $$P(X = x) = \frac{M}{N}(1 - \frac{M}{N})^{x-1}, x = 1, 2, \cdots$$

   - Demuestra que

   $$\hat{\Theta}_n = \frac{M}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

     es el estimador de Máximo Verosimilitud. ¿Está insesgado? ¿Qué puedes decir si $n \to \infty$?