Tarea 12 - Métodos numéricos
Giovanni Gamaliel López Padilla

Problema 1

Programar el algoritmo QR para encontrar los eigenpares de las matrices Eigen_3.txt y Eigen_25.txt. Únicamente reportar: criterio de paro establecido, tolerancia utilizada, iteraciones requeridas, autovalores aproximados y la comprobación dada por

$$\frac{||AV - \Lambda V||_2}{||AV||_2}$$

donde A es la matriz en cuestión. V y Λ son, respectivamente, las matrices de eigenvectores y eigenvalores aproximados.

Criterio de paro

La condición establecida en el algoritmo implementado se basa en que el resultado de la multiplicación de las matrices RQ es simetrica. Entonces, se encuentra el valor máximo en la parte superior de la matriz. La tolerancia usada fue de 10^{-6}. Para obtener el eigenvalor más grande se implemento el método de la potencia usando la misma tolerancia que el algoritmo QR. Esto debido a que la definción de la norma 2 de A es la siguiente:

$$||A||_2 = max_\lambda A^T A$$

Iteraciones requeridas y comprobación

Las iteraciones realizadas y la comprobación de cada matriz se encuentran la tabla 1.

Matriz	Iteraciones	Comprobación
Eigen_3.txt	27	1.052200
Eigen_25.txt	622	0.998071

Tabla 1: Iteraciones realizadas y comprobaciones usando el algoritmo QR

Problema 2

Sea el siguiente spline cúbico:

$$f(x) = \begin{cases} f_0(x) = ax^3 + bx^2 + c(x-1) & -1 \leq x \leq 0 \\ f_1(x) = d(x-1)^2 + ex & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

a) **Determina los valores de a, b, c, d y e si f interpola $f(-1) = -4$ y $f(1) = 1$.**

Se plantea que f, f' y f'' es continua, entonces esta debera cumplir la siguiente condición:

$$\begin{aligned} f_0(0) &= f_1(0) \\ f_0'(0) &= f_1'(0) \\ f_0''(0) &= f_1''(0) \end{aligned}$$

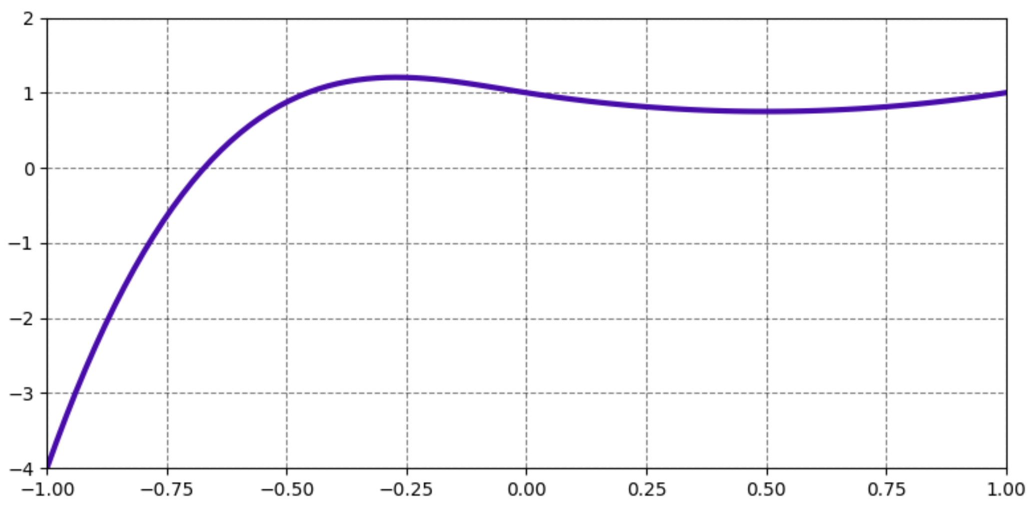
esto es porque f_0 y f_1 son funciones que comparten $x = 0$ en su dominio. Entonces, usando esta condición con las dadas, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} -a + b - 2c &= -4 \\ e &= 1 \\ c + d &= 0 \\ b - d &= 0 \\ c + 2d - e &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, se obtiene que la solución es la siguiente:

$$a = 7 \qquad b = 1 \qquad c = -1$$
$$d = 1 \qquad e = 1$$

En la figura 1 se muestra la función f con los parámetros obtenidos.



Gráfica 1: Función f con varios parámetros.

b) Determina los valores de a, b, c, d y e si f interpola $f'(-1) = 6$ y $f(1) = -1$.
Calculando la primer derivada de f, se obtiene lo siguiente:

$$f'(x) = \begin{cases} f_0'(x) = 3ax^2 + 2bx + c & -1 \leq x \leq 0 \\ f_1'(x) = 2d(x-1) + c & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

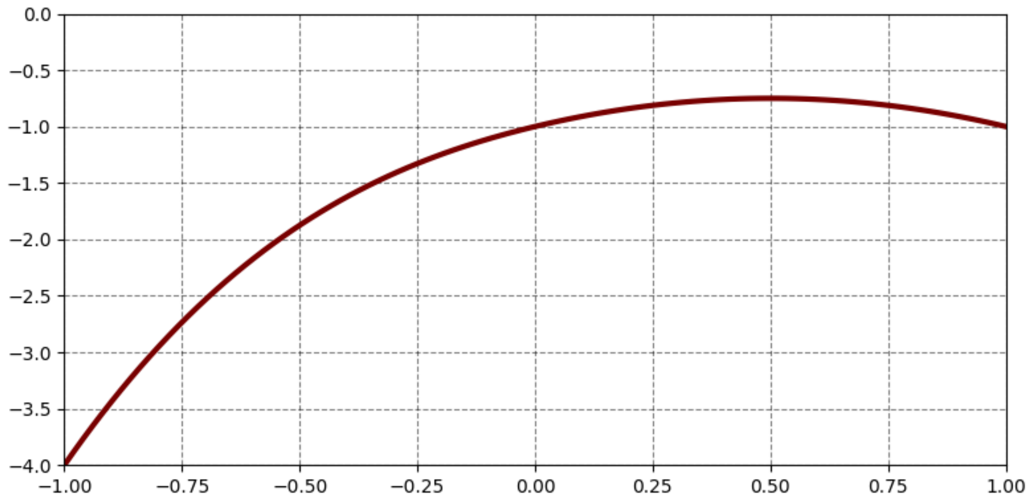
Como f' debe de ser continua, entonces $f_0'(0) = f_1'(0)$. Contemplando las condicones dadas, entonces se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3a - 2b + c &= 6 \\ e &= -1 \\ c + d &= 0 \\ b - d &= 0 \\ c + 2d - e &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, se obtiene que la solución del sistema de ecuaciones es:

$$a = 1 \qquad b = -1 \qquad c = 1$$
$$d = -1 \qquad e = -1$$

En la figura 2 se muestra la función f con los parámetros obtenidos.



Gráfica 2: Función f con varios parámetros.

Problema 3

Dado un conjunto de puntos (x_i, y_i) con $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ con $x_i < x_j$ para $i < j$. Determine el spline de grado 1 y que pasa por los puntos (x_i, y_i).

Al ser ecuaciones de lineas, entonces no se puede asegurar que $S(x)$ sea diferenciable en $[x_i, x_n]$, por lo que, se tratará a cada parámetro del spline como independiente, esto es, formar una ecuación de la recta que pase por los puntos (x_i, x_{i+1}). Entonces se tiene lo siguiente:

$$a_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \tag{1}$$
$$b_i = y_i - a_i x_i \tag{2}$$

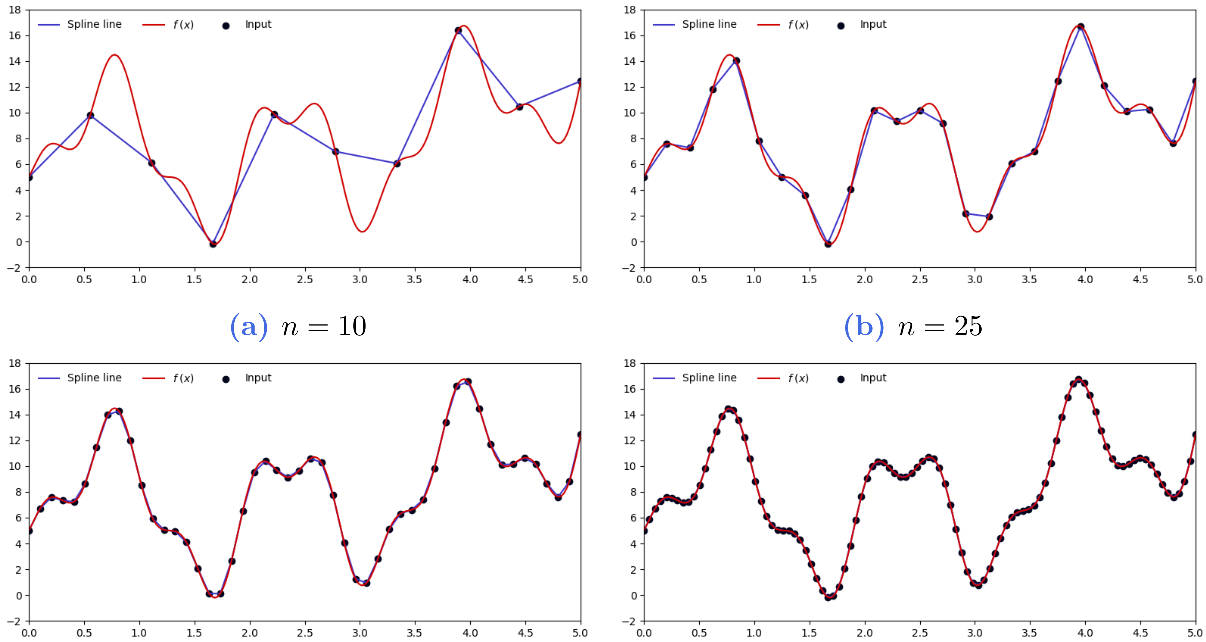
Se crearon puntos consecutivos dados por la ecuación 3.

$$x = x_i + \frac{i(x_f - x_i)}{n - 1} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{3}$$

Donde x_i, x_f es el límite inferior y superior del intervalo y n es el número de puntos que se quieren generar. Para este ejercicio se hizo uso de la ecuación 4 para interpolar.

$$f(x) = x^2 - 4x + 10 + 2\sin(10x) - 5\cos(4x) \tag{4}$$

La interpolación se realizo con $n = \{10, 25, 50, 100\}$ para el intervalo $[0, 5]$. En la figura 3 se muestra la interpolación de la ecuación 4.



(a) $n = 10$ (b) $n = 25$

(c) $n = 50$ (d) $n = 100$

Gráfica 3: Spline lineal de la ecuación 4 para diferentes números de input.

Con estos resultados se obtiene que a un mayor número de inputs se obtiene una mejor interpolación para la función original de los datos.

1. Problema 4

Problema 4

Implementa el algoritmo Spline Natural Cúbico y realiza la interpolación para la ecuación 5 a partir de los siguientes puntos de las ecuaciones 6 y 7.

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \tag{5}$$

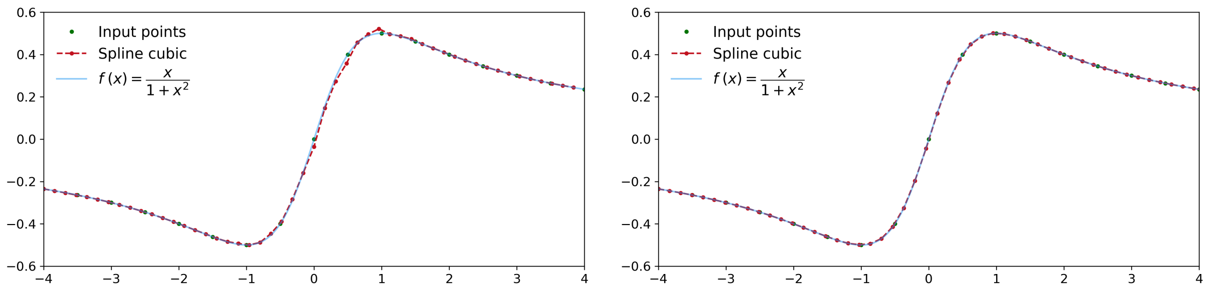
$$x = \frac{i-8}{2} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, 16 \tag{6}$$

$$y = f(x) \tag{7}$$

Las ecuación 6 fue modificada para obtener más valores en el mismo rango. La modificación esta representada en la ecuación 8.

$$x = \frac{\frac{17i}{n} - 8}{2} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{8}$$

En la gráfica 4 se visualiza los resultados de la interpolación realizada con n puntos. Se usaron $n = \{17, 34\}$ para este ejercicio.



(a) $n = 17$. (b) $n = 34$.

Gráfica 4: Interpolación de la ecuación 5 dados los puntos generados con las ecuaciones 7 y 8.

Las diferencias entre las gráficas 4a y 4b radican en el punto de inflexión superior, esto debido a que en la gráfica 4a contiene menos puntos para obtener los parámetros en esa región en comparación a la gráfica b. A pesar de estas diferencias, la inteprolación obtenida con $n = 17$ es aceptable, debido a que las diferencias con la función original son despreciables en la región analizada.

Problema 4b

Interpola la curva paramétria de la ecuación 9.

$$f(t) = (r(t)sin(t), r(t)cos(t)) \tag{9}$$

donde

$$r(t) = exp(cos(t) - 2cos(4t) + sin\left(\frac{t}{12}\right)^5$$

a partir de 25 puntos definidos en la ecuación 10.

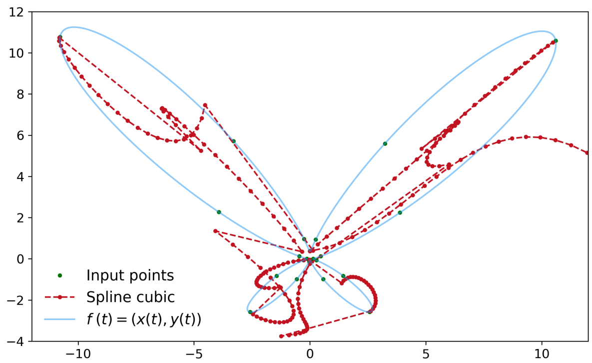
$$(x_i, y_i) = (x(t_i), y(t_i)) \qquad t_i = \frac{\pi i}{12} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, 24 \tag{10}$$

Se modifico la ecuación 10 de la siguiente manera:

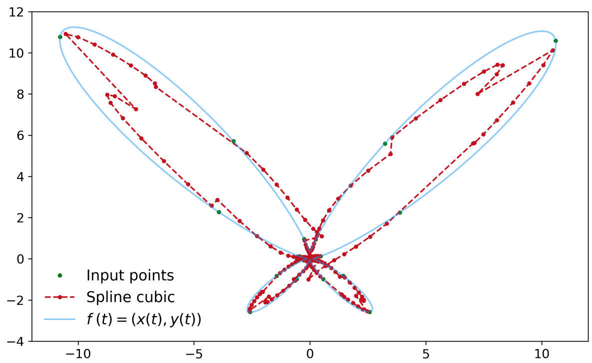
$$(x_i, y_i) = (x(t_i), y(t_i)) \qquad t_i = \frac{25\pi i}{12n} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{11}$$

Esto para tener diferentes cantidades de puntos entre el valor mínimo y máximo de la ecuación 10.

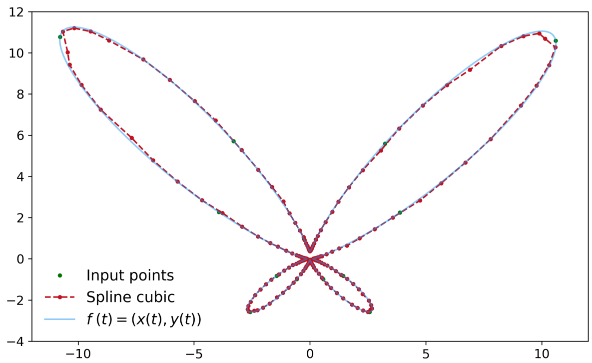
En la gráfica 5 se encuentran los resultados de la interpolación usando $n = \{10, 25, 50, 100\}$



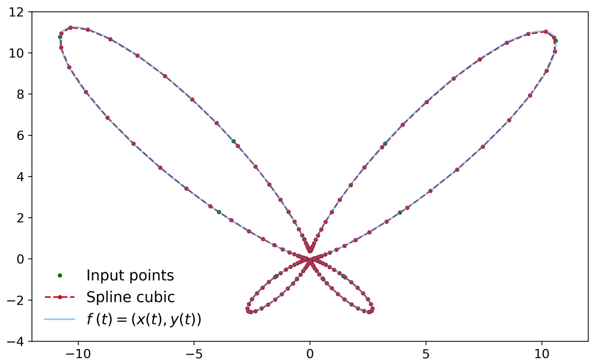
(a) $n = 10$.



(b) $n = 25$.



(c) $n = 50$.

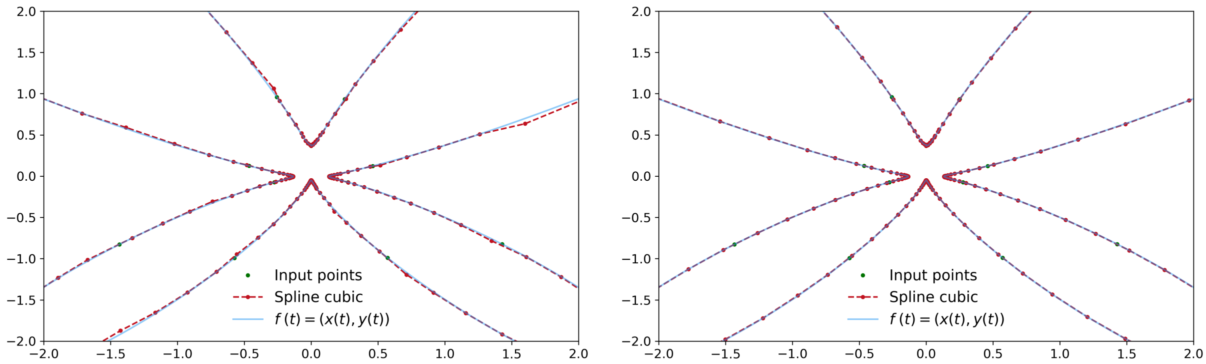


(d) $n = 100$.

Gráfica 5: Ecuación 9 y 11 con para diferentes cantidades de puntos como input.

En las gráficas 5a y 5b se aprecia que la falta de información en central y superior provoca que la interpolación sea diferente a la ecuación real, siendo la gráfica 5a la que contiene una mayor diferencia. Con esto se llega a la conclusión que mientras más sean los puntos que se conocen de la función la interpolación se acercará a la función original.

Realizando un acercamiento a la zona $[-2, 2] \times [-2, 2]$ se obtiene la gráfica 6.



(a) $n = 50$.　　(b) $n = 100$

Gráfica 6: Ecuación 9 en la zona $[-2, 2] \times [-2, 2]$.

En la gráfica 6 se logra visualizar la diferencia a detalle para el uso de $n = \{50, 100\}$. La gráfica 6a contiene diferencias con respecto a la función original, las cuales la gráfica 6b no presenta. Estas diferencias son muy mínimas al punto en que son aceptables, ya que la cantidad de puntos para obtener esa apŕoximación es la mitad de la otra.