Tarea 9 - Métodos numéricos

Giovanni Gamaliel López Padilla

Índice

1. Introducción **1**

2. Métodos **1**

2.1. Método de las potencias 1

2.2. Método de las potencias inversas 2

2.3. Método de deflación 3

3. Resultados **3**

4. Conclusiones **3**

5. Referencias **3**

1. Introducción

Sea A una matriz de n×n con componentes reales. El número λ se denomina *valor característico (eigenvalor)* de A si existe un vector diferente de cero (v) tal que

$$Av = \lambda v \tag{1}$$

El vector v se denomina *vector característico (eigenvector)* de A correspondiente al eigenvalor λ. Se dice que λ es un eigenvalor de A si y sólo si

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = 0 \tag{2}$$

donde I es la matrix identidad y p se denomina como el polinomio característico de A. El grado del polinomio p es de grado n, entonces se obtiene que existen n eigenvalores para la matriz A. Para un número grande de n, el resolver la ecuación característica es difícil de resolver. Es por ello que se plantearon métodos iterativos para aproximar a las raices de la ecuación característica, es decir, los eigenvalores. Llamamos a el eigenvalor domininate (λ_1) al eigenvalor con mayor valor absoluto de A (ecuación 3).

$$|\lambda_1| > |\lambda_i| \qquad i = 2, 3, \ldots, n \tag{3}$$

2. Métodos

2.1. Método de las potencias

Se define un vector inicial v_0, el cual será la inicialización del método. Este vector debe estar normalizado. El método aplica la ecuación 4, conforme más se itera el método ira convergiendo hacia el eigenvector de λ_1.

$$v_i = Av_{i-1} \tag{4}$$

Despues de aplicar la ecuación 4, el vector v_i deberá ser normalizado antes de volverse a aplicar al método. Para obtener el eigenvalor λ_1, se usa la siguiente ecuación 5.

$$\lambda_i = \frac{\langle v_i, v_{i-1} \rangle}{\langle v_{i-1}, v_{i-1} \rangle} \tag{5}$$

La convegencia del algoritmo que se implemento fue usando la ecuación 6.

$$\theta = |\lambda_i - \lambda_{i-1}| \tag{6}$$

El algoritmo puede escribirse de la siguiente manera:

Algorithm 1: Método de las potencias

Input: v_0
Output: v_i y λ_i
while $\theta > 10^{-6}$ **do**
  $v_i \leftarrow Av_{i-1}$
  $\lambda_i \leftarrow \frac{\langle v_i, v_{i-1} \rangle}{\langle v_{i-1}, v_{i-1} \rangle}$
  $v_i \leftarrow normalize(v_i)$

2.2. Método de las potencias inversas

El método de las potencias inversas se basa en el hecho que los eigenvalores μ de la matriz inversa de A (A^{-1}) pueden ser calculados con la ecuación 7.

$$\mu_i = \frac{1}{\lambda_i} \tag{7}$$

Por lo tanto, la ecuación 1 puede ser escrita de la siguiente manera:

$$A^{-1} v_i = \mu_i v_i \tag{8}$$

En este método para obtener el eigenvector v_i, se tiene que resolver la ecuación matricial señalada en la ecuación

$$Av_i = v_{i_i} \tag{9}$$

donde el vector inicial v_0 tiene que estar normalizado y al final de obtener el vector v_i este debera pasar por una normalización. Como este proceso se asemeja mucho al método de las potencias, este obtiene el valor absoluto mayor de la matriz A^{-1}. Por la relación descrita en la ecuación 7, entonces al obtener el μ_i, estaremos obteniendo a su vez λ_n, el cual es el eigenvalor con menor valor absoluto de A. Por lo tanto, para calcular este valor se realiza la ecuación 10.

$$\lambda_i = \frac{\langle v_{i-1}, v_{i-1} \rangle}{\langle v_i, v_{i-1} \rangle} \tag{10}$$

La convergencia del método es el descrito en la ecuación 6. El algoritmo puede escribirse de la siguiente manera:

Algorithm 2: Método de las potencias inversas

Input: v_0
Output: v_i y λ_i
while $\theta > 10^{-6}$ **do**
  $v_i \leftarrow solve(Av_i = v_{i-1})$
  $\lambda_i \leftarrow \frac{\langle v_{i-1}, v_{i-1} \rangle}{\langle v_i, v_{i-1} \rangle}$
  $v_i \leftarrow normalize(v_i)$

2.3. Método de deflación

Usando el método de potencias descrito en la sección 2.1 podemos tener una aproximación del eigenvalor dominante y su eigenvector asociado. El método de deflación calcula los m eigenvalor de una matriz, este se define de la siguiente manera:
Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ los valores propios de la matriz A. Supongamos que λ_1 es el eigenvalor dominante, v_1 su eigenvector asociado Y v un vector tal que $\langle v_1, v\rangle = 1$. Sea B la matriz definida como

$$B = A - \lambda_1 v_1 v^T$$

entonces los valores propios de la matriz B son $0, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$.
Entonces al haber 'eliminado' al eigenvalor dominante de la matriz, al aplicar el método de potencias encontraremos un eigenvalor distinto. Tomaremos a $v = v_1$, esto porque al ser v_1 normalizado, entonces su producto punto consigo mismo debe ser 1. El algoritmo de este proceso es descrito de la siguiente manera:

Algorithm 3: Método de deflación

Input: v_0, A
Output: v y λ
for *i=1,m* **do**
  $v_0 \leftarrow initialize\_vector(v_0)$
  for *j=1,i* **do**
    $v_0 \leftarrow v_0 - \langle v_i, v_i\rangle v_i$
  j $\leftarrow$1
  while $\theta > 10^{-6}$ **do**
    $v_j \leftarrow Av_{j-1}$
    $\lambda_j \leftarrow \frac{\langle v_j, v_{j-1}\rangle}{\langle v_{j-1}, v_{j-1}\rangle}$
    $v_j \leftarrow normalize(v_j)$
    for *k=1,i* **do**
      $v_j \leftarrow v_j - \langle v_k, v_k\rangle v_k$
    $j \leftarrow j + 1$

3. Resultados

4. Conclusiones

5. Referencias

[1] Stanley Grossman. *Álgebra lineal.* McGraw Hill, Ciudad de México, 2019.