Métodos Numéricos
Tarea 08

Entrega: 23:59 del 26/septiembre/2021

Ecuación de calor

- Resolver la ecuación de calor considerando $\{Q = 3, K = 5, \hat{\Phi}_0 = 10, \hat{\Phi}_n = 20, n = 4, L = 1\}$, L es la longitud de la barra.
- Resolver la ecuación de calor considerando $\{Q = 3, K = 5, \hat{\Phi}_0 = 10, \hat{\Phi}_n = 20, n = 100, L = 1\}$.
- Graficar la variación de temperatura Φ del nodo central contra el número de elementos $n \in \{10, 30, 50, 70, 100\}$ que equivale a $n + 1$ nodos.

Notas de apoyo

La ecuación del calor describe la distribución del calor (o variaciones de temperatura) y está descrita en la ecuación (1), donde Φ es la variación de la temperatura, K es la difusividad del térmica (constante del material) y Q es una fuente de energía. En la clase se vió que la ecuación del calor puede ser resuelta por medio del método numérico conocido como diferencias finitas.

$$K \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + Q = 0. \tag{1}$$

El método de diferencias finitas sirve para la aproximación de las derivadas y es bien utilizado para la resolución de ecuaciones diferenciales. Como se vió en clase la aproximación numérica para derivadas de segundo orden y utilizando la fórmula de diferencia central, se puede calcular como se indica en la ecuación (2).

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\Phi(x_{i+1} - 2\Phi(x_i + \Phi(x_{i-1})}{\Delta x^2}. \tag{2}$$

El proceso para resolver la ecuación (1) con (2) resulta de la siguiente forma

$$K \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\Phi(x_{i+1} - 2\Phi(x_i + \Phi(x_{i-1})}{\Delta x^2} + Q = 0. \tag{3}$$

Por lo tanto, es necesario discretizar una barra en n elementos que corresponde a $n+1$ nodos, donde el primer nodo y el último nodo corresponden a las condiciones de frontera (condiciones Dirichlet en este caso) $\hat{\Phi}_0$ y $\hat{\Phi}_n$. En resultado, se obtiene un sistema de ecuaciones de una matriz simétrica y definida positiva.

Ejemplo de la ecuación de calor

Para el caso de 4 elementos, es decir 5 nodos, la barra quedaría discretizada de la siguiente forma

$$\hat{\Phi}_0 ===== \Phi_1 ==== \Phi_2 ==== \Phi_3 ==== \hat{\Phi}_4.$$

Después de discretizar el dominio, se obtiene un sistema de ecuaciones de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\hat{\Phi}_0 - 2\Phi_1 + \Phi_2 &= -\frac{Q\Delta x^2}{K} \\
\Phi_1 - 2\Phi_2 + \Phi_2 &= -\frac{Q\Delta x^2}{K} \\
\Phi_2 - 2\Phi_3 + \hat{\Phi}_4 &= -\frac{Q\Delta x^2}{K},
\end{aligned}$$

esto es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Q\Delta x^2}{K} + \hat{\Phi}_0 \\ \frac{Q\Delta x^2}{K} \\ \frac{Q\Delta x^2}{K} + \hat{\Phi}_4 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

En el caso de la configuración $\{Q = 3, K = 5, \hat{\Phi}_0 = 10, \hat{\Phi}_n = 20, n = 4, L = 1\}$, se tiene que $\Delta x = 1/4 = 0.25$, por lo que

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.0375 \\ 0.0375 \\ 20.0375 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

cuya solución es $\mathbf{\Phi} = [\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3]^T = [12.556, 15.075, 17.556]^T$.

Métodos iterativos para sistemas de ecuaciones

Implementar un código para resolver cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones

- Jacobi
- Gauss-Seidel

Notas

Entregar un programa por separado en una carpeta para cada uno de los puntos mencionados en la sección de programar

- Usar los archivos M_sys_3x3.txt con V_sys_3x3.txt y M_sys_125x125.txt con V_sys_125x125.txt como ejemplo para probar el método de Jacobi.
- Usar los archivos M_sys_3x3.txt con V_sys_3x3.txt y M_sys_125x125.txt con V_sys_125x125.txt como ejemplo para probar el método de Gauss-Seidel.

Los códigos se deberán entregar en un comprimido (.zip, .tar, etc.) con el formato *NumeroTarea_Posgrado_Nombre.zip*.
Como ejemplo, la tarea 8 del alumno Marco Flores del posgrado en computación sería ***T08_MC_MarcoFlores.zip***, en caso de ser del posgrado en matemáticas aplicadas sería ***T08_MA_MarcoFlores.zip***.