

CAPITULO I

INTRODUCCIÓN A LA TRANSFERENCIA DE CALOR

1.1. Generalidades

La Transferencia de calor es la energía en tránsito debido a una diferencia de temperaturas en un cuerpo o entre cuerpos diferentes.

Siempre que exista una diferencia de temperatura, la energía se transfiere de la región de mayor temperatura a la de menor temperatura

De acuerdo con los conceptos de la Termodinámica, la energía que se transfiere como resultado de una diferencia de temperatura es el calor.

- Las **leyes de la termodinámica** tratan de la transferencia de energía, pero sólo se aplican a sistemas que están en equilibrio (pueden utilizarse para predecir la cantidad de energía requerida para modificar un sistema de un estado de equilibrio a otro), pero no sirven para predecir la rapidez (tiempo) con que pueden producirse estos cambios.
- La **transferencia de calor**, complementa los principios termodinámicos, proporcionando métodos de análisis que permitan predecir esta velocidad de transferencia térmica.

Ejemplo:

El calentamiento de una barra de acero inmersa en agua caliente, los principios termodinámicos se pueden utilizar para predecir las temperaturas finales una vez los dos sistemas hayan alcanzado el equilibrio y la cantidad de energía transferida entre los estados de equilibrio inicial y final, pero nada nos dice respecto a la velocidad de la transferencia térmica o la temperatura de la barra al cabo de un cierto tiempo, o del tiempo que haya que esperar para obtener una temperatura determinada en una cierta posición de la barra.

Realizando un análisis de la transmisión de calor, permite predecir la velocidad de la transferencia térmica del agua a la barra y de esta información se puede calcular la temperatura de la barra, así como la temperatura del agua en función del tiempo.

- Para proceder a realizar un análisis completo de la transferencia del calor es necesario considerar tres mecanismos diferentes: **conducción, convección y radiación.**
- El diseño y proyecto de los sistemas de un intercambio de calor y conversión energética requieren de cierta familiaridad con cada uno de estos mecanismos, así como de sus interacciones.

1.2. TRANSMISIÓN DE CALOR POR CONDUCCIÓN

La conducción, es el único mecanismo de transmisión de calor posible en los medios **sólidos opacos**, cuando en estos cuerpos existe un gradiente de temperatura. **El calor se trasmite de la región de mayor temperatura a la de menor temperatura, debido al movimiento cinético o el impacto directo de las moléculas como en el caso de los fluidos en reposo o por el arrastre de los electrones como sucede en los metales.**

La ley básica de la conducción del calor (Joseph Fourier), establece: “**La tasa de transferencia de calor por conducción en una dirección dada es proporcional al área normal a la dirección del flujo de calor y al gradiente de temperatura en esa dirección**”.

$$Q_x = -K A \frac{\partial T}{\partial x} \quad \left(BTu/h, w \right) \dots \dots \dots \quad (1,1)$$

$$q_x = \frac{Q_x}{A} = -K \frac{\partial T}{\partial x} \quad \left(BTu/h.pie^2, w/m^2 \right) \dots \dots \dots \quad (1,2)$$

Donde: Q_x = Tasa de flujo de calor a través del área A en la dirección positiva.

$$k = \text{Conductividad térmica} \left(\frac{w}{m \cdot k}, \frac{BTu}{h \cdot \text{pie.}^{\circ}\text{R}} \right)$$

A = área de sección transversal de la transferencia de calor

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \text{gradiente de temperatura}$$

El flujo real de calor depende de la conductividad térmica (k), que es una propiedad física del cuerpo

El signo (-) es consecuencia del segundo principio de la termodinámica, según el cual el calor debe fluir hacia la zona de temperatura más baja. El gradiente de temperatura es negativo si la temperatura disminuye para valores crecientes de x, por lo que el calor transferido de la dirección positiva debe ser una magnitud positiva, por lo tanto, al segundo miembro de la ecuación anterior hay que introducir un signo negativa, esto se puede ver en la figura N° 1)

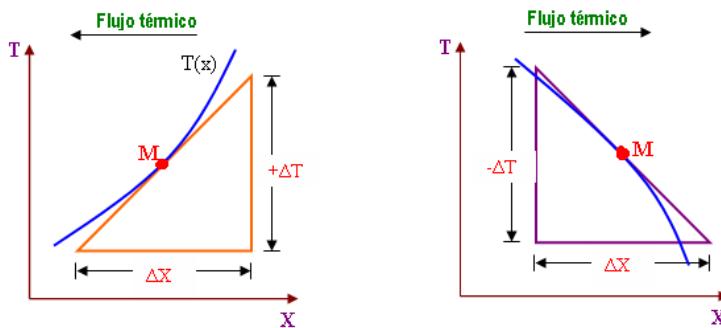


Fig. N° 1.1. Signos para la transmisión de calor por conducción

Fuente: Elaboración propia Ing. Alberto Emilio Panana Giro

1.3. TRANSMISIÓN DE CALOR POR CONVECCIÓN

Cuando un fluido a T_F se pone en contacto con un sólido cuya superficie de contacto está a una temperatura distinta T_S , al proceso de intercambio de energía térmica se denomina **CONVECCIÓN**.

Existen dos tipos de convección:

- a) **Convección libre o natural**, ocurre cuando la fuerza motriz procede de la variación de densidad en el fluido como consecuencia del contacto con una superficie a diferente temperatura, lo que da lugar a fuerzas ascensionales, el fluido próximo a la superficie adquiere una velocidad debida únicamente a esta diferencia de densidades, sin ninguna fuerza motriz exterior.

Ejemplo: La convección en un tanque que contiene un líquido en reposo en el que se encuentra sumergida una bobina de calefacción.

- b) **Convección forzada**, tiene lugar cuando una fuerza motriz exterior mueve un fluido con una velocidad (v), sobre una superficie que se encuentra a una temperatura T_s mayor o menor que la del fluido T_f , como la velocidad del fluido en la convección forzada es mayor que en la convección natural, se transfiere por lo tanto, una mayor cantidad de calor para una determinada temperatura.

Independiente de que la convección sea natural o forzada, la cantidad de calor transmitido Q_c , se puede escribir (**Ley de enfriamiento de Newton**)

$$Q_c = h \cdot A \cdot (T_s - T_f) \quad \dots \quad (1,3)$$

Donde: h = Coeficiente de transmisión del calor por convección en la interface líquido – sólido ($\text{W/m}^2 \cdot \text{k}$)

A = Área superficial en contacto con el fluido (m^2)

La ecuación anterior sirve como definición de (h), su valor numérico se tiene que determinar analíticamente o experimentalmente. En la figura adjunta se puede visualizar el perfil de un fluido adyacente a una superficie sólida

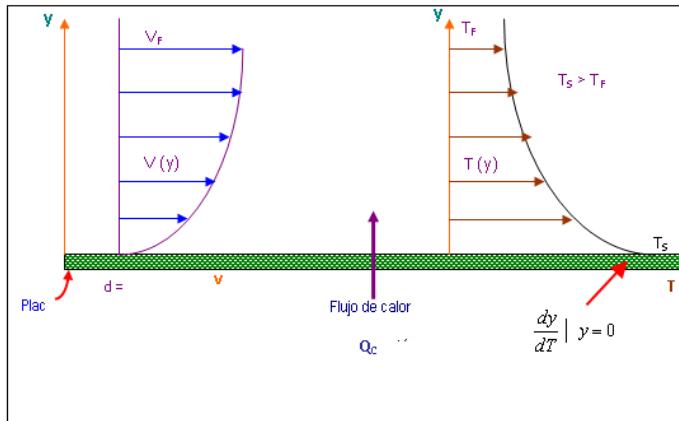


Figura N° 1.2 Distribución de la temperatura y velocidad de un fluido sobre una placa plana en convección forzada

Fuente: Elaboración propia, Ing. Alberto Emilio Panana Giro

- El coeficiente de transmisión de calor por convección forzada depende en general, de la densidad, viscosidad, de la velocidad del fluido, de las propiedades térmicas del fluido (K, C_p), es decir

$$h = f(\rho, \eta, v, k, C_p) \quad \dots \dots \dots \quad (1.4)$$

- En la **convección forzada** la **velocidad** viene impuesta al sistema con una bomba, ventilador y se puede medir directamente

$$V_F = Q_v / A \quad \dots \dots \dots \quad (1.5)$$

- En la **convección natural**, la **velocidad** es de la forma $v = f(\Delta T, \beta, g)$, es decir depende de:

T = diferencia de temperatura entre la superficie y el fluido

= Coeficiente de dilatación térmica del fluido, que determina el cambio de densidad por unidad de diferencia de temperatura.

g = Campo de fuerzas exteriores, en general es la gravedad

- El número adimensional característico para la convección natural es el **número de Grashoff (Gr)**

$$G_r = \frac{g \beta}{V^2} \Delta T L^3 \quad \dots \dots \dots \quad (1,6)$$

- El número adimensional para la convección forzada es **el número de Reynolds (#Re)**

$$\# Re = \frac{\rho \cdot V \cdot D}{\mu} = \frac{V \cdot D}{\nu} \quad \dots \dots \dots \quad (1,7)$$

Donde: ρ = densidad del fluido, (kg/m³)

μ = viscosidad dinámica del fluido, (kg/m.s)

ν = viscosidad cinemática del fluido (m²/s)

V = velocidad media del fluido, (m/s)

D = diámetro del tubo, (m)

1.4. Transmisión de Calor por Radiación

Mientras que la conducción y la convección térmica tienen lugar sólo a través de un medio natural, la Radiación térmica puede transportar el calor a través de un fluido o del vacío, en forma de ondas electromagnéticas o fotones como resultado de los cambios en las configuraciones electrónicas de los átomos o moléculas, estos se propagan a la velocidad de la luz.

La cantidad de energía que abandona una superficie en forma de calor radiante depende de la temperatura absoluta a la que se encuentra y también la naturaleza de la superficie.

El radiador perfecto o cuerpo negro, emite una cantidad de energía radiante de su superficie, Q_r

$$Q_r = \sigma A T^4 = A E_b \quad \dots \dots \dots \quad (1,8)$$

E_b = poder emisivo del radiador.

σ = constante dimensional de Stefan – Boltzmann

5, 67 x 10⁻⁸ w/m².K⁴ para el sistema Internacional (SI)

0, 1714 x 10⁻⁸ Btu/h pie². R⁴ para el sistema americano de ingeniería

La ecuación anterior dice: **que toda superficie negra irradia calor proporcionalmente a la cuarta potencia de su temperatura absoluta.** Siendo la emisión independiente de las condiciones de los alrededores, la

evaluación de una transferencia neta de energía radiante requiere una diferencia en la temperatura superficial de dos o más cuerpos entre los cuales tiene lugar el intercambio.

Si un cuerpo negro irradia calor a un recinto que la rodea completamente y cuya superficie es también negra, es decir, absorbe toda la energía radiante que incide sobre él, la transferencia neta de energía radiante viene dada por:

$$Q_r = \sigma A_1 (T_1^4 - T_2^4) \quad \dots \quad (1,9)$$

Siendo: T_1 y T_2 = la temperatura del cuerpo negro y la temperatura superficial del recinto en (K).

Un cuerpo gris emite radiación según la expresión

$$Q_r = \varepsilon A E_b = \varepsilon \sigma A T^4 \quad (1-10)$$

El calor radiante neto transferido por un cuerpo gris a la temperatura T_1 a un cuerpo negro que lo rodea a la temperatura T_2 es:

$$Q_r = \varepsilon_1 \sigma A (T_1^4 - T_2^4) \quad \dots \quad (1,11)$$

ε = **Emisividad**, propiedad de la superficie es numéricamente igual al cociente de la emisión de radiación del cuerpo en estudio con respecto a la de uno negro, adquiere valores entre 0 y 1 y constituye una medida para evaluar cuan efectivamente emite radiación un cuerpo real con respecto a uno negro. En la figura N° 3 se visualiza los tres mecanismos de transferencia de calor

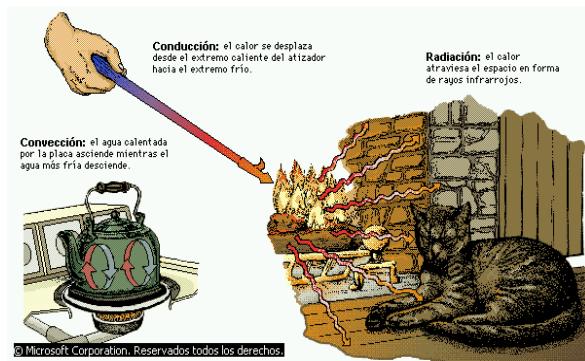


Figura N° 1.3 Mecanismos de transferencia de calor por conducción, Convección y radiación,

Fuente: Alan Chapman, Fundamentos de transferencia de calor, 2da Edición

1.5. Ecuación Fundamental de la Transmisión de Calor por Conducción

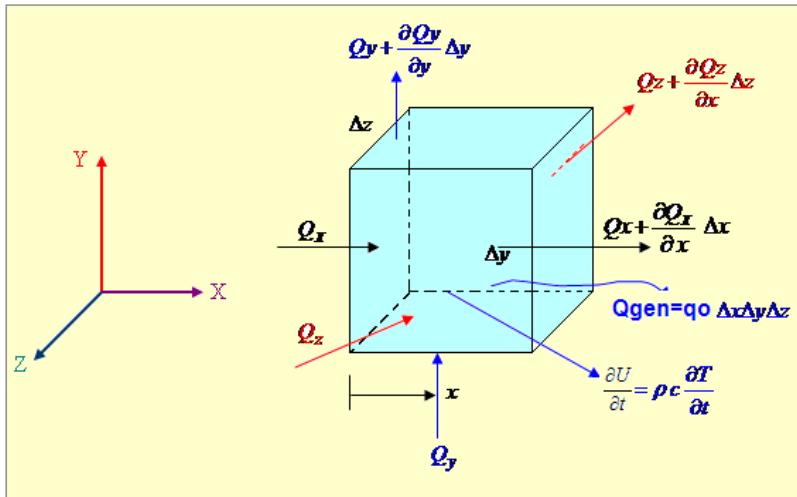


Fig. Nº 1.4 Conducción tridimensional del calor a través de un elemento

Rectangular de volumen de control

Fuente: Elaboración propia, Ing. Alberto Emilio Panama Giro

1.5.1 Deducción de la Ecuación Diferencial para la conducción de calor (coordenadas rectangulares)

Para el flujo térmico de la dirección (x), la ley de Fourier viene dada por:

$$Q_x = -kA \frac{\partial T}{\partial x} \quad q_x = \frac{Q_x}{A} = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (1.12)$$

Q_x = calor que atraviesa la superficie A en la dirección positiva de las x

q_x = flujo de calor por unidad de superficie transversal

k = conductividad térmica del material (magnitud positiva), para flujo unidireccional (según x)

- Considerando un elemento de volumen infinitesimal de dimensiones x, y, z; estableciéndose el balance energético:

$$\left(\begin{array}{l} \text{Energía que atraviesa} \\ \text{por conducción el} \\ \text{elemento de control} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{Energía generada en} \\ \text{el elemento de control} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{Variación de la energía} \\ \text{interna dentro del elemento} \\ \text{de control} \end{array} \right) \quad (1.12)$$

- La energía Q_x que entra por conducción al elemento de volumen infinitesimal en la dirección x es:

$$Q_x = q_x \Delta x$$

- La energía saliente en la misma dirección

$$Q_{x+\Delta x} = Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} \Delta x$$

- El balance de energía que atraviesa el elemento de volumen en la dirección x:

$$Q_x - \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} \Delta x \right) = - \frac{\partial Q_x}{\partial x} \Delta x = - \frac{\partial q_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (1.13)$$

- Haciendo lo mismo en las direcciones y, z

$$Q_y - \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \Delta y \right) = - \frac{\partial Q_y}{\partial y} \Delta y = - \frac{\partial q_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (1.14)$$

$$Q_z - \left(Q_z + \frac{\partial Q_z}{\partial z} \Delta z \right) = - \frac{\partial Q_z}{\partial z} \Delta z = - \frac{\partial q_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (1.15)$$

- La energía que por conducción atraviesa el elemento de volumen es:

$$- \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \quad (1.16)$$

- La energía generada o disipada de el elemento de volumen por fuentes o sumideros de energía

$$Q_{gen} = q_0 \Delta x \Delta y \Delta z \quad (1.19)$$

q_0 = Energía generado por unidad de volumen (W/m^3), (BTU/h.m^3)

- La variación ∂U de la energía interna de dt, para el caso de sólidos y líquidos, en los que los calores específicos a presión (C_p) y volumen (C_v) constante son iguales $C_p = C_v$, es de la forma

$$\frac{\partial U}{\partial t} = m \quad C_p \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \rho \quad C_p \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{T}{t} \quad \Delta x \quad \Delta y \quad \Delta z \quad (1.20)$$

ρ y C_p no varían con el tiempo.

- En consecuencia el balance energético total proporciona la ecuaciónn diferencial de la conducción de calor, en la forma:

$$-\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) + q_0 = \rho \quad C_p \quad \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.21)$$

- Teniendo en cuenta la ecuación de Fourier para cada dirección:

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x}, q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y}, q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z}$$

- Se obtiene, **la ecuación diferencial de conducción de calor en coordenadas rectangulares:**

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_0 = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.22)$$

$$T = T(x, y, z, t) \quad ; \quad q_0 = q_0(x, y, z, t)$$

Ó en notación simbólica:

$$\nabla(k \cdot \nabla T) + q_0 = \rho \quad C_p \quad \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.23)$$

- Si la **conductividad térmica es constante**, entonces la ecuación se simplifica a:

$$k(\nabla^2 T) + q_0 = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.24)$$

Nota 1: El operador Laplaciano en coordenadas cartesianas:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \dots \quad (1.25)$$

Nota 2: $\alpha = \frac{k}{\rho C_p}$, difusividad térmica. (1.26)

➤ Si la conductividad térmica es constante (k), la ecuación se reduce a:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q_0}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \dots \quad (1.27)$$

➤ Cuando no hay generación interna de calor (se conoce como **ecuación de Fourier, o ecuación del calor o de la difusión**)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \dots \quad (1.28)$$

➤ Para regiones estacionarias (**Ecuación de Poisson**)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q_0}{k} = 0 \quad \dots \quad (1.29)$$

➤ Regimen estacionaria sin generación interna de calor (**Ecuación de Laplace**)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad \dots \quad (1.30)$$

1.5.2 Deducción de la ecuación diferencial de conducción de calor en coordenadas cilíndricas en estado transitorio

1. Considerar el pequeño elemento cilíndrico de control

$\Delta r, \Delta z, r\Delta\phi$, de $\rho = \text{densidad}$ y $c_p = \text{calor específico}$.

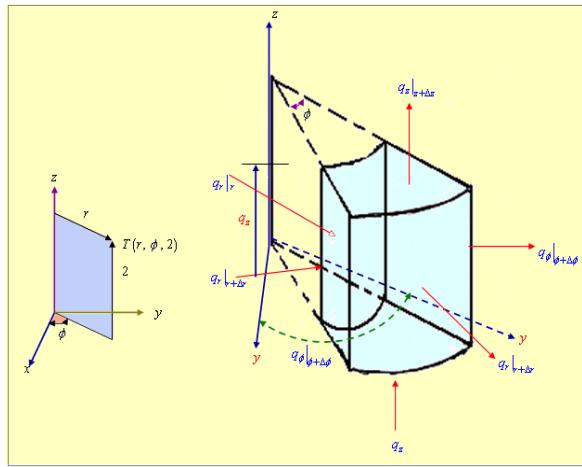


Fig. Nº 1.5 Conducción tridimensional del calor a través de un elemento de volumen de control en coordenadas cilíndricas

Fuente: Elaboración propia, Ing. Alberto Emilio Panana Giro

2. Balance de Energía sobre este elemento durante un pequeño intervalo de tiempo (Δt) se puede expresar como :

$$\left(\begin{array}{l} \text{Velocidad de} \\ \text{conducción de} \\ \text{calor de entrada} \\ \text{al elemento} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{l} \text{Velocidad de} \\ \text{conducción de} \\ \text{calor de salida} \\ \text{del elemento} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{Velocidad de} \\ \text{generación de} \\ \text{calor en el interior} \\ \text{del elemento} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{Velocidad de} \\ \text{cambio de} \\ \text{energía} \\ \text{del elemento} \end{array} \right) \quad (1.31)$$

Reemplazando valores

$$(Q_r + Q_\phi + Q_z) - (Q_{r+\Delta r} + Q_{\phi+\Delta\phi} + Q_{z+\Delta z}) + Q_{gen} = \frac{\Delta E}{\Delta t} \quad (1.32)$$

3. Siendo el volumen del elemento $V = r\Delta\phi\Delta r\Delta z$. El contenido de energía en dicho elemento y la velocidad de generación de calor dentro del mismo se pueden expresar como :

$$\Delta E = \Delta U = mc_p \frac{\Delta T}{\Delta t} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \Delta r \Delta z \cdot r \Delta \phi \quad (1.33)$$

$$Q_{generado} = q_0 V = q_0 \Delta r \Delta z \cdot r \Delta \phi$$

4. Operando en la ecuación (4) y dividiendo entre $\Delta r \Delta z \cdot r \Delta \phi$, se tiene

$$-\left(\frac{1}{r \Delta \phi \Delta z} \frac{Q_{r+\Delta r} - Q_r}{\Delta r} \right) - \left(\frac{1}{r \Delta r \Delta z} \frac{Q_{\phi+\Delta \phi} - Q_\phi}{r \Delta \phi} \right) - \left(\frac{1}{r \Delta \phi \Delta r} \frac{Q_{z+\Delta z} - Q_z}{\Delta z} + q_0 \right) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

5. Dado que el área de transferencia de calor del elemento para la conducción de ese calor en las direcciones r, ϕ, z son:

$$A_r = r \Delta \phi \Delta z, \quad A_\phi = \Delta r \Delta z; \quad A_z = r \Delta \phi \Delta r$$

6. Tomamos el límite cuando $\Delta r, \Delta z, r \Delta \phi$ y Δt tiende a cero se obtiene por definición de derivada y de la Ley de Fourier de la conducción de calor.

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{r \Delta \phi \Delta z} \frac{Q_{r+\Delta r} - Q_r}{\Delta r} \right) = -\frac{1}{r \Delta \phi \Delta z} \frac{\partial Q_r}{\partial r} = -\frac{1}{r \Delta \phi \Delta z} \left(-k A_r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k r \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

$$\begin{aligned} \lim_{r \Delta \phi \rightarrow 0} \left(\frac{1}{r \Delta r \Delta z} \frac{Q_{\phi+\Delta \phi} - Q_\phi}{r \Delta \phi} \right) &= -\frac{1}{r \Delta r \Delta z} \frac{\partial Q_\phi}{\partial \phi} = -\frac{1}{r \Delta r \Delta z} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(-k A_\phi \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) \\ \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(\frac{1}{r \Delta \phi \Delta r} \frac{Q_{z+\Delta z} - Q_z}{\Delta z} \right) &= -\frac{1}{r \Delta \phi \Delta r} \frac{\partial Q_z}{\partial z} = -\frac{1}{r \Delta \phi \Delta r} \frac{\partial}{\partial z} \left(-k A_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

8. Reemplazando en 6, se tiene

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(K r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_0 = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.34)$$

Ecuación diferencial de conducción de calor en **coordenadas cilíndrica (estado transitorio)**.

1.5.3 Ecuación de conducción de calor en coordenadas esféricas

Deducción de la ecuación diferencial de transferencia de calor por conducción en coordenadas esféricas:

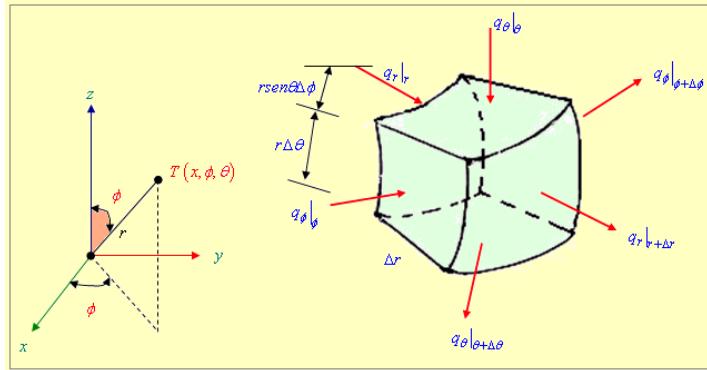


Fig. Nº 1.6 Conducción tridimensional del calor a través de un elemento de volumen de control en coordenadas esféricas

Fuente: Elaboración propia, Ing.Alberto Emilio Panama Giro

r = radial

θ = Polar, cenital o colatitud

$$V = r^2 \operatorname{sen} \theta \Delta \phi \Delta \theta$$

ϕ = azimutal o longitud

$$A_r = r^2 \operatorname{sen} \theta \Delta \phi \Delta \theta$$

$$A_\phi = r \Delta r \Delta \theta; \quad A_\theta = r \operatorname{sen} \theta \Delta r \Delta \phi; \quad Cp : Calor Específico; \quad \rho = Densidad$$

1. Balance de energía :

$$\left(\begin{array}{l} \text{Velocidad de} \\ \text{conducción de} \\ \text{calor de entrada} \\ \text{al elemento} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{l} \text{Velocidad de} \\ \text{conducción de} \\ \text{calor de salida} \\ \text{del elemento} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{Velocidad de} \\ \text{generación de} \\ \text{calor en el interior} \\ \text{del elemento} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{Velocidad de} \\ \text{cambio de} \\ \text{energía} \\ \text{del elemento} \end{array} \right) \quad (1.35)$$

2. Remplazando:

$$(Q_r + Q_\phi + Q_\theta) - (Q_{r+\Delta r} + Q_{\phi+\Delta\phi} + Q_{\theta+\Delta\theta}) + Q_{generado} = \frac{\Delta E}{\Delta t} \quad (1.36)$$

3. El contenido de energía en dicho elemento y la velocidad de generación de calor dentro del mismo se pueden expresar como:

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\Delta U}{\Delta t} = mC_p \frac{\Delta T}{\Delta t} = \rho V C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad 1.37)$$

V= Volumen del elemento = $V = r^2 \sin \theta \Delta r \Delta \phi \Delta \theta$

4. Reemplazando se tiene:

$$(Q_{r+\Delta r} - Q_r) - (Q_{\phi+\Delta \phi} - Q_\phi) - (Q_{\theta+\Delta \theta} - Q_\theta) + q_0 V = r C_p \frac{\partial T}{\partial t} V$$

5. Dividiendo entre el volumen V:

$$-\left(\frac{1}{r^2 \sin \theta \Delta \phi \Delta \theta} \frac{(q_{r+\Delta r} - q_r)}{\Delta r} \right) - \left(\frac{1}{r^2 \sin \theta \Delta r \Delta \theta} \frac{(q_{\phi+\Delta \phi} - q_\phi)}{\Delta \phi} \right) - \left(\frac{1}{r^2 \sin \theta \Delta r \Delta \theta} \frac{(q_{\theta+\Delta \theta} - q_\theta)}{\Delta \theta} \right) + q_0 = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

6. Tomando límites y reemplazando la ecuación de FOURIER:

$$\Rightarrow \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \left[-\left(\frac{1}{r^2 \sin \theta \Delta \phi \Delta \theta} \frac{(q_{r+\Delta r} - q_r)}{\Delta r} \right) \right] = -\left(\frac{1}{r^2 \sin \theta \Delta \phi \Delta \theta} \right) \left(\frac{\partial q_r}{\partial r} \right)$$

$$q_r = -k A_r \frac{\partial T}{\partial r} = -k(r^2 \sin \theta \Delta \phi \Delta \theta) \frac{\partial T}{\partial r}$$

$$\text{Se tiene: } \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(k r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{r \sin \theta \Delta \phi \rightarrow 0} \left[-\left(\frac{1}{r \Delta r \Delta \theta} \frac{(q_{\phi+\Delta \phi} - q_\phi)}{r \sin \theta \Delta \phi} \right) \right] = -\left(\frac{1}{r^3 \sin^2 \theta \Delta r \Delta \theta} \right) \left(\frac{\partial q_\phi}{\partial \phi} \right)$$

$$q_\phi = -k A_\phi \frac{\partial T}{\partial \phi} = -k(r \Delta r \Delta \theta) \frac{\partial T}{\partial \phi}$$

$$\text{Se tiene: } \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right)$$

$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \left[-\left(\frac{1}{r \sin \theta \Delta r \Delta \phi} \frac{(q_{\theta+\Delta\theta} - q_\theta)}{\Delta\theta} \right) = -\left(\frac{1}{r^3 \sin \theta \Delta r \Delta \phi} \right) \left(\frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} \right) \right]$$

$$q_\theta = -k A_\theta \frac{\partial T}{\partial \theta} = -k(r \sin \theta \Delta r \Delta \phi) \frac{\partial T}{\partial \theta}$$

$$\text{Se tiene : } \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right)$$

7. Ordenando, se obtiene la **ecuación diferencial de la conducción de calor en coordenadas esféricas:**

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(k r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + q_0 = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

1.6 Condiciones de bordes y condición inicial

(1-38)

Para poder realizar la integración de la ecuación general de conducción, en términos matemáticos es menester incluir las condiciones iniciales y de borde. En general, por ser la ecuación general de conducción de primer orden en tiempo se requiere del establecimiento de una única condición inicial.

1.6.1 **La condición inicial**, se refiere a la distribución de temperatura que existe en el instante de tiempo inicial.

Condición inicial: $T(x, y, z, t = 0) = T_i(x, y, z)$

1.6.2 Para el caso de las **condiciones de borde**; se observa que en las variables espaciales (x, y, z), la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación general de conducción es dos; por tanto se requiere el establecimiento de dos condiciones de borde por cada variable espacial. A continuación incluimos un conjunto de condiciones de borde que aparecen con frecuencia en la formulación de problemas de conducción.

a) Temperatura especificada constante (condición de Dirichlet)

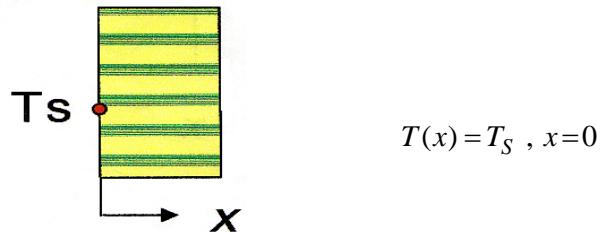


Figura Nº 1.7 Sistema con borde a temperatura constante

Fuente: Elaboración propia, Ing. Panama Giro Alberto Emilio

b) Flujo de calor especificado constante (condición de Neuman)

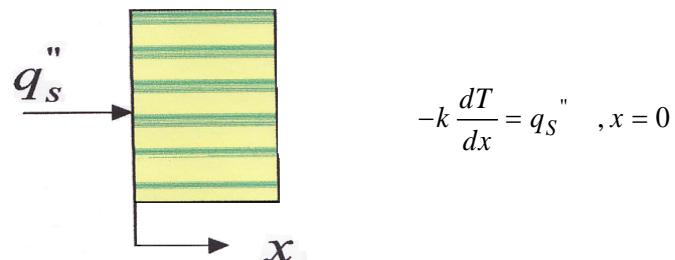


Figura Nº 1.8 Sistema con flujo de calor en el borde constante

Fuente: Elaboración propia, Ing- Alberto Emilio Panama Giro

c). Ambiente convectivo (Robin)

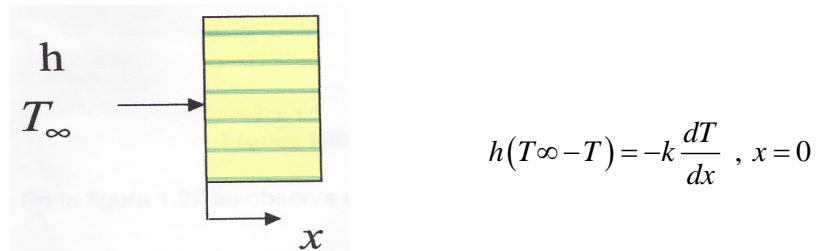


Figura Nº 1.9 Sistema cuyo borde se encuentra adyacente a un fluido

Fuente: Elaboración propia, Ing. Ing. Alberto Emilio Panama Giro

(b) Ambiente radiactivo

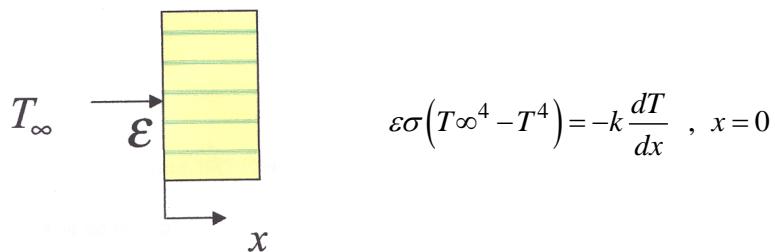


Figura N° 1.10 Sistema con borde expuesto a radiación

Fuente: Elaboración propia, Ing. Alberto Emilio Panama Gario

e). Resistencia térmica de contacto

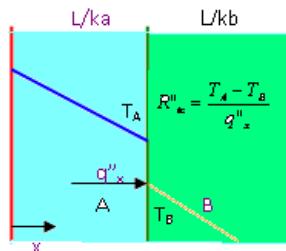


Figura N° 1.11 Resistencia térmica de contacto entre dos sólidos

Fuente: Elaboración propia, Ing. Alberto Emilio Panama Gario

Realizando una ampliación en la interfaz de los materiales mostrada en la figura 10, se tiene:

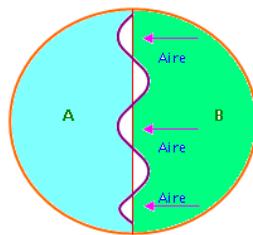


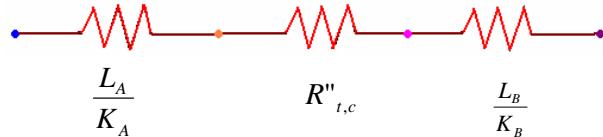
Figura N° 1.12 – Resistencia de contacto entre dos paredes

Fuente: Elaboración propia, Ing. Alberto Emilio Panama Gario

En ella se incorpora $R''_{t,c}$ que es precisamente la resistencia térmica de contacto,.si $R''_{t,c} = 0$. Se satisface que $T_A = T_B$

Desde el punto de vista del cálculo, la presencia de la resistencia térmica de contacto se cuantifica añadiendo una resistencia adicional,

Circuito térmico, mostrando la resistencia térmica de contacto:



La resistencia térmica de contacto, $R''_{t,c}$, generalmente se determina experimentalmente, $R''_{t,c}$ depende en general de:

- La presión de contacto
- Del acabado superficial

A continuación se presenta una tabla donde se muestra valores característicos de la resistencia térmica de contacto.

Tabla 1.1. Resistencia térmica de contacto para:

- (a) Superficies metálicas bajo condiciones de vacío y
- (b) Interfaz de Aluminio (rugosidad; 10 nm) 10^5 N/m^2 con diferentes fluidos interfaciales.

Resistencia térmica de contacto $R''_{t,c} \times 10^4 [\text{m}^2 \cdot \text{K} / \text{W}]$

(a) Interfaz al vacío			(b) Fluido Interfacial	
Presión de contacto	100 kN/m^2	10.000 kN/m^2	Aire	2,75
Acero inoxidable	6 -25	0,7 – 4,0	Helio	1,05
Cobre	1 – 10	0,1 – 0,5	Hidrógeno	0,720
Magnesio	1,5 – 3,5	0,2 – 0,4	Aceite Silicona	0,525
Aluminio	1,5 – 5,0	0,2 – 0,4	Glicerina	0,265

Fuente:Alan Chapman, Fundamentos de transferencia de calor, 2da. Edición

1.7 Problema Resueltos

Problema N° 1

Un recubrimiento especial, que se aplica a la superficie interior de un tubo de plástico, se cura colocando una fuente de calor por radiación cilíndrica dentro del tubo. El espacio entre el tubo y la fuente se vacía, y la fuente entrega un flujo de calor uniforme q_1 , que se absorbe en la superficie interna del tubo. La superficie externa del tubo se mantiene a una temperatura uniforme, $T_{s,2}$.

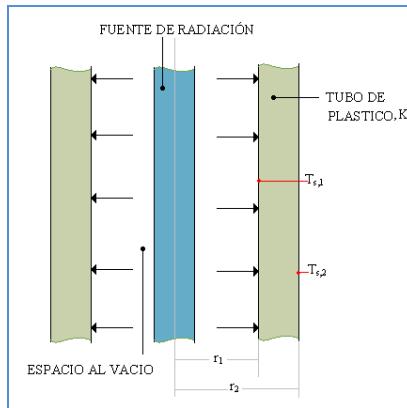


Figura N° 1. 13-a Cilindro con fuentes de calor

Fuente: Elaboración propia, Eng. Alberto Emilio Panana Girio

Desarrolle una expresión para la distribución de temperatura $T(r)$ en la pared del tubo en términos de q_1 , $T_{s,2}$, r_1 , r_2 y k . Si los radios interior y exterior del tubo son $r_1 = 25 \text{ mm}$ y $r_2 = 38 \text{ mm}$, ¿Cuál es la potencia que se requiere por unidad de longitud de la fuente de radiación para mantener la superficie interna a $T_{s,1} = 25^\circ\text{C}$? la conductividad de la pared del tubo es $k = 10 \text{ w/m.K}$.

SOLUCIÓN:

1. Diagrama de flujo

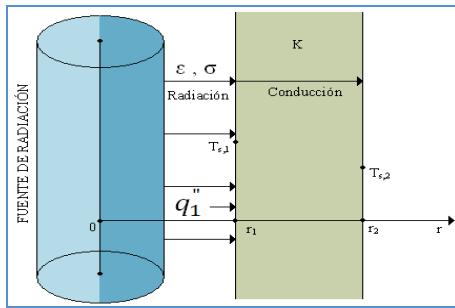


Figura N° 1.13-b Cilindro con fuentes de calor

Fuente : Elaboración propia, Ing Alberto Emilio Panama Girio

2. Balance de energía

$$-K \frac{\partial T_{(r,t)}}{\partial r} = \varepsilon \cdot \sigma (T_{\text{fuente}}^4 - T_{(0,t)}^4)$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Conducción de calor en} \\ \text{la superficie en una} \\ \text{dirección seleccionada} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{Intercambio de Radiación} \\ \text{en la superficie en la misma} \\ \text{dirección} \end{array} \right)$$

Donde:

= Emisividad de la superficie de frontera (superficie del tubo plástico)

$$= 5.67 \times 10^{-8} W/m^2 \cdot K^4$$

3. Este es un problema unidimensional de radiación y conducción de calor es estado estable, con conductividad térmica constante y sin generación de calor en el medio.
4. La ecuación balance de energía se puede expresar:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_r}{\partial r} \right) = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial T_r}{\partial r} \right) = \frac{C_1}{r}$$

5. La solución de la ecuación diferencial general se determina por integración directa

$$T_r = C_1 \ln(r) + C_2 \dots (1)$$

6. Donde C1 y C2 son constantes arbitrarias de integración.

7. Con las condiciones de frontera.

C.F1 $r = r_1 \quad , \quad -k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_1} = q_1''$

CF2 $r = r_2 \quad , \quad T = T_{s,2}$

8. Aplicando la primera condición de frontera, se obtiene:

Dado que, $\left(\frac{\partial T_r}{\partial r}\right) = \frac{C_1}{r}$

$$-K \left(\frac{C_1}{r} \right) = q_1''$$

$$C_1 = -q_1'' \left(\frac{r_1}{K} \right) \dots (2)$$

9. Aplicando la segunda condición de frontera da:

$$T_{s,2} = C_1 \ln(r_2) + C_2$$

$$T_{s,2} = q_1'' \frac{r_1}{K} \ln(r_2) + C_2$$

10. Despejando se obtiene.

$$C_2 = T_{s,2} + q_1'' \frac{r_1}{K} \ln(r_2) \dots (3)$$

11. Reemplazando (2) y (3) en (4):

$$T_r = -q_1'' \frac{r_1}{K} \ln(r) + q_1'' \frac{r_1}{K} \ln(r_2) + T_{s,2}$$

$$T_r = -q_1'' \frac{r_1}{K} \ln\left(\frac{r}{r_2}\right) + T_{s,2} \dots (4)$$

12. La expresión de la distribución de temperaturas T_r en la pared del tubo queda expresada en términos de q_1'' , $T_{s,2}$, r_1 , r_2 y k .

13. Potencia Requerida por la Fuente de Radiación

$$q_{long} = \frac{Velocidad\ de\ transferencia\ de\ calor}{Longitud\ de\ la\ fuente\ de\ Radiación}$$

$$Q_r = \varepsilon_1 \sigma_1 A (T_{fuente}^4 - T_{(s,1)}^4) \dots (5)$$

$$\varepsilon_1 \sigma_1 A (T_{fuente}^4 - T_{(s,1)}^4) = KA \frac{(T_{fuente} - T_{(s,1)})}{r_2 - r_1}$$

14. Para una emisividad de $\varepsilon_1 = 0.85$

$$0.85 \times 5.67 \times 10^{-8} (T_{fuente}^4 - 298^4) = \frac{10}{0.013} (T_{fuente} - 298)$$

$$4.8195 \times 10^{-9} \times T_{fuente}^4 - 769.23077 \times T_{fuente} + 228850.696 = 0$$

$$T_{fuente} = 2517.78K$$

15. Reemplazo en la ecuación (5):

$$Q_r = 0.85 \times 5.67 \times 10^{-8} \times \pi (0.025)^2 (2517.78^4 - 298^4)$$

$$Q_r = 3802.049 \text{ watts}$$

16. Luego:

$$q_{long} = \frac{3802.049}{0.025} = 152.082 \text{ kW/m}$$

Problema N° 2

A través de un tubo de acero de 60mm de diámetro interior y 75mm de diámetro exterior, fluye vapor a una temperatura de 250°C. el coeficiente de convección entre el vapor y la superficie interna del tubo es de 500W/m².K, mientras que la superficie externa del tubo y los alrededores es 25W/m².K. La emisividad del tubo es 0.8, y la temperatura del aire y los alrededores es 20°C. ¿Cuál es la perdida de calor por unidad de longitud de tubo? La conductividad térmica del material es, $k = 56, 5 \text{ W/m.}^\circ\text{C}$

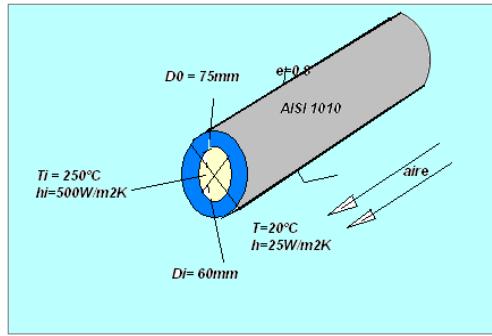
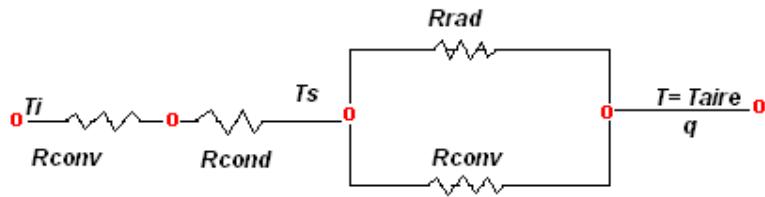


Figura N° 1.14 Tubo de acero sometido a fluidos interior y exterior
Fuente: Elaboración propia, Ing Alberto Emilio Panama Girio

1. Circuito térmico



$$\frac{T_i - T_s}{R_{conv} + R_{cond}} = \frac{T_s - T}{R_{conv}} + \frac{T_s - T_{aire}}{R_{rad}}$$

$$\frac{T_i - T_s}{\frac{1}{\pi D i h_i} + \frac{\ln \frac{D_0}{D_i}}{2\pi K}} = \frac{T_s - T}{\frac{1}{\pi D_0 h_i}} + \epsilon \pi D_0 \sigma (T_s^4 - T_{aire}^4)$$

$$\begin{aligned} \frac{T_i - T_s}{\frac{1}{\pi * 0.06 * 500} + \frac{\ln \frac{75}{60}}{2\pi * 56.5}} &= \frac{T_s - T}{\frac{1}{\pi * 0.075 * 25}} + 0.8 * \pi * 0.075 * 5.67 * 10^{-8} (T_s^4 - 293^4) \\ \frac{523 - T_s}{0.0106 - 0.0006} &= \frac{T_s - 293}{0.170} + 1.07 * 10^{-8} (T_s^4 - 293^4) \end{aligned}$$

Obteniendo $T_s = 502K$

Luego:

$$q = \pi D_0 h_0 (T_s - T) + \epsilon \pi D_0 \sigma (T_s^4 - T_{air}^4)$$

$$q = \pi * 0.075 * 25(502 - 293) + 0.8\pi * 0.075 * 5.67 * 10^{-8}(502^4 - 243^4)$$

$$q = 1231 + 600$$

$$q = 1831 W/m$$

Problema N° 3

Un tubo de diámetro de = 0,5 m, cuya emitancia superficial vale $\epsilon = 0,9$ que transporta vapor de agua posee una temperatura superficial de 500K. El tubo esta localizado en una habitación a 27°C y el coeficiente de transmisión de calor por convección entre la superficie del tubo y el aire de la habitación se puede considerar igual a $hc = 20 \text{ w/m}^2\text{K}$; calcular:

- La conductancia superficial unitaria combinado radiación y convección.
- El calor disipado por unidad de tiempo y por metro de longitud del tubo.

Solución.-

1. Diagrama de flujo

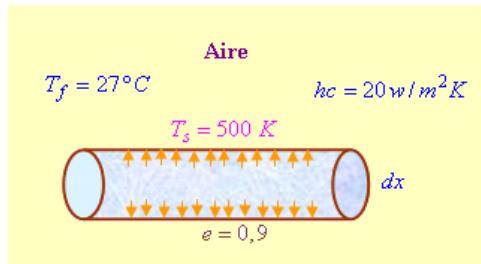


Figura N° 1.15 Tubo de acero sometido a fluido Panama Girio

- El tubo se puede considerar como un cuerpo emisor, rodeado por un cuerpo negro que es la habitación, se tiene que considerar también la convección de tal forma que la conductancia global será:

$$h = h_c + h_r \quad (\text{hr} = \text{coeficiente de radiación})$$

$$h_c = 20 \text{ w/m}^2 \text{ °C}$$

- Se tiene que el calor transferido por radiación

$$Q_r = \sigma \epsilon A (T_{tubo}^4 - T_{ext}^4) = h_r A (T_{tubo} - T_{ext})$$

4. Despejando (h_r)

$$h_r = \frac{\sigma \epsilon A (T_{tubo}^4 - T_{ext}^4)}{A (T_{tubo} - T_{ext})} = \frac{5,67 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4} \times 0,9 \times 1 m^2 (500^4 - 300^4) K^4}{1 m^2 (500 - 300) K}$$

$$h_r = 13,88 \text{ W/m}^2 \text{K}$$

5. Por lo tanto:

$$h = 20 + 13,88 = 33,88 \text{ W/m}^2 \text{K}$$

6. La pérdida de calor por unidad e tiempo y por metro de longitud de tubo

$$Q = \pi d_e L h (T_{tubo} - T_{ext})$$

$$Q/L = \pi (0,5 \text{ m}) \times 1 \times 33,88 \text{ W/m}^2 \text{K} (200 \text{ K}) = 10643,7159 \text{ W/m}$$

Problema N° 4

Un tubo que conduce vapor sobre calentado en un sótano a 10°C tiene una temperatura superficial de 150°C. El calor perdido en el tubo ocurre por radiación natural ($\epsilon = 0.6$) y por convección natural ($h_c = 25 \text{ W/m}^2 \text{K}$). Determine el porcentaje de la perdida total de calor mediante ambos mecanismos.

Solución.-

1. Diagrama de flujo:

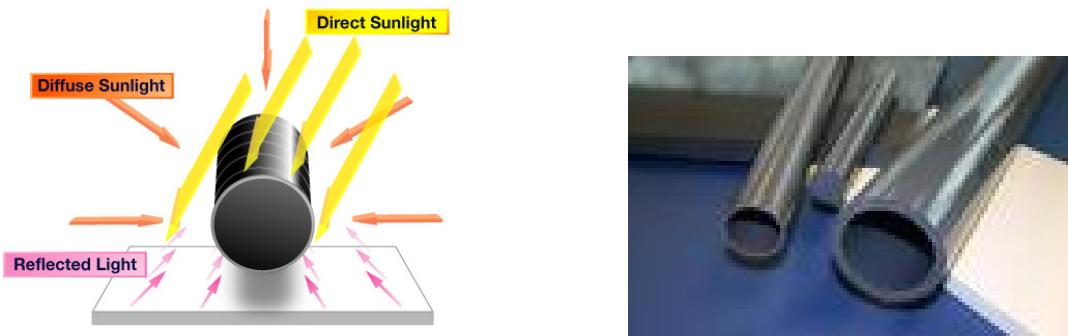


Figura N° 1.16 Tubo de acero sometido a fluidos interior (vapor) y exterior (aire)

Fuente: Elaboración propia, Ing. Alberto Emilio Panama Girio

2. Para un sistema en donde hay convección y radiación:

El calor transferido es:

$$Q = Q_c + Q_r$$

$$Q = h_c A(T_1 - T_2) + h_r A(T_1 - T_2)$$

$$Q = (h_c + h_r)A(T_1 - T_2)$$

3. Donde h_c , es el coeficiente de transferencia de calor por convección promedio entre el área A y el aire a una temperatura T_2 .
4. El coeficiente de transferencia de calor por radiación (h_r) entre el área A y T_2 es:

$$h_r = \epsilon_s (T_1^4 - T_2^4) / (T_1 - T_2) = \epsilon_s (T_1^2 - T_2^2)(T_1 + T_2)$$

5. El coeficiente combinado de transferencia de calor se define:

$$h = h_c + h_r$$

6. Este coeficiente de transferencia, especifica el promedio de la razón de flujo de calor total entre una superficie a un fluido adyacente y los alrededores por unidad de área y por intervalos de temperatura entre la superficie y el fluido.

7. Realizando el reemplazo de los valores de las variables se tiene

$$h_r = 0.6 \times (5.67 \times 10^{-8} \text{W/m}^2\text{k}^4)(423^2 + 283^2)(423 + 283)\text{K}^3$$

$$h_r = 6.221125 \text{W/m}^2\text{k}$$

$$h = h_c + h_r$$

$$h = 25 + 6.221125 = 31.22 \text{W/m}^2\text{k}$$

8. Por lo tanto la transferencia de calor por m es:

$$Q = Ah(T_{tubo} - T_{aire}) = A \times 31.22(150 - 10) \text{W/m}^2\text{K}$$

$$q/A = 4.37 \text{KW} \quad (\text{calor total})$$

9. El calor por convección:

$$q_c/A = h(T - T_f) = 3.5 \text{KW/m}^2$$

10. Calor por radiación:

$$q_r/A = \epsilon (T^4 - T_f^4) = 0.6 \times 5.67 \times 10^{-8} (423^4 - 283^4)$$

$$q_r/A = 0.87 \text{KW/m}^2$$

Por tanto el porcentaje de perdida de calor por radiación respecto el total de calor:

$$\%Q = (0.87/4.37) \times 100 = 19.9\%$$

11. Pérdida de calor por convección respecto el total de calor:

$$\%Q = (3.5/4.37) \times 100 = 80.1\%$$

Problema N° 5

Un tanque Cilíndrico de oxígeno líquido (LOX, por sus siglas en inglés), tienes un diámetro de 4 pies, una longitud de 20 pies y extremos hemisféricos. La temperatura de ebullición del LOX es de -29°F . Se busca un aislante que reduzca la razón de evaporación en estado estacionario a no más de $m = 25 \text{ lb/h}$. El calor de vaporización del LOX es de $H_v = 92 \text{ Btu/lb}$. Si la temperatura exterior del aislante es de 68°F Y el espesor de este no debe ser mayor a 3 pulg, ¿Qué valor debería tener su conductividad térmica?

Solución.-

1. Diagrama de flujo

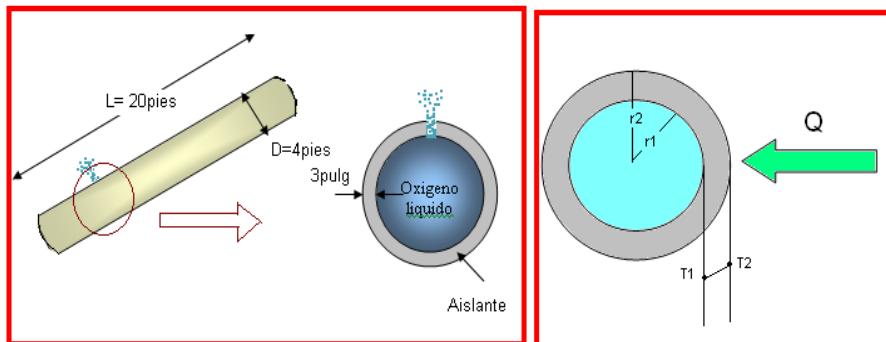


Figura N° 1.17 Tubo de acero sometido a fluidos interior (vapor) y exterior (aire)

Fuente: Elaboración propia, Ing, Alberto Emilio Panama Girio

2. Condiciones

- Según el problema, hay transferencia de calor por conducción.
- Asumiremos calor conductivo unidimensional en el tanque cilíndrico.

3. Datos:

$$r_1 = 2\text{ pies} = 3\text{ pulg} = 0.25\text{ pies}; \quad r_2 = r_1 + 0.25\text{ pies} = 0.5\text{ pies}$$

$$K = ? \quad m = 25\text{ lb/h} \quad h_{fg} = 92\text{ Btu/lb} \quad T_1 = -29^\circ\text{F} \quad T_2 = 68^\circ\text{F}$$

4. Cálculo de la cantidad de calor

$$Q_K = m \times h_{fg} = (25\text{ lb/h})(1\text{ h}/3600\text{ s}) \times (92\text{ Btu/lb})$$

$$Q_K = -0.63889 \text{ Btu/s}$$

5. Determinación de la conductividad térmica K:

$$Q = \frac{2\pi k L (T_1 - T_2)}{\ln(r_2/r_1)} \rightarrow k = \frac{Q L \ln(r_2/r_1)}{L(T_1 - T_2)}$$

$$k = \frac{-0.63889 \text{ Btu/s} \times \ln(2.25/2)}{2\pi(20\text{ pies}) (-29^\circ\text{F} - 68^\circ\text{F})}$$

$$k = 6.1734 \times 10^{-6} \text{ (Btu/s.pie.}^\circ\text{F)} \times (3600\text{ s/h})$$

$$k = 0.0222 \text{ Btu/h.pie.}^\circ\text{F}$$

Problema N° 6

Una esfera de 2 in de diámetro, cuya superficie se mantiene a una temperatura de 170°F, está suspendida en medio de un cuarto que está a 70°F. Si el coeficiente de transferencia de calor por convección es 15 Btu/h.ft².°F y la emisividad de la superficie es 0,8. Determine:

- La razón transferencia de calor desde la esfera.
- La razón de transferencia de calor por unidad de área.

Solución.-

- Diagrama de flujo:

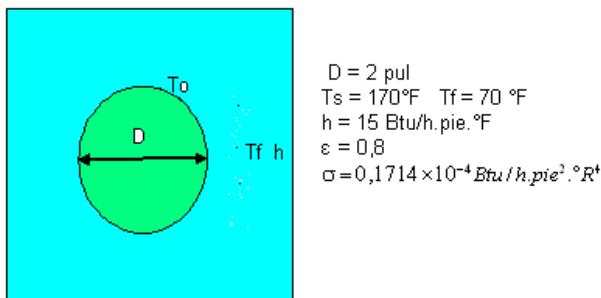


Figura N° 1.18 Esfera sólida sometida a convección

Fuente: Elaboración propia, Ing Alberto Emilio Panana Giro

- El flujo de calor transferido por conducción en la superficie de la esfera es igual al calor transferido por convección mas el calor por radiación

$$Q_k = Q_c + Q_r$$

- Cálculo del área de transferencia

$$A = 4\pi r^2 = 4\pi(1/12)^2 = 8,7266 \times 10^{-2} \text{ pie}^2$$

- Cálculo del calor transferido por convección

$$Q_c = hA_s(T_s - T_f) = 15 \frac{\text{Btu}}{\text{h.pie}^2 \cdot ^\circ F} \times 8,7266 \times 10^{-2} \text{ pie}^2 (170 - 70)^\circ F$$

$$Q_c = 130,4 \text{ Btu/h}$$

- Cálculo del calor transferido por radiación

$$Q_r = \varepsilon \sigma A (T_2^4 - T_{alr}^4) = 0,8 \times 0,1714 \times 10^{-8} \times 8,7266 \times 10^{-2} \times (630^4 - 530^4)$$

$$Q_r = 9,408 \text{ Btu/h}$$

6. Reemplazando en (2) El flujo de calor Q_t y q_t , son:

$$Q_t = 130,4 \text{ Btu/h} + 9,408 \text{ Btu/h} = 140,308 \text{ Btu/h}$$

$$q_t = \frac{Q_t}{A} = \frac{140,308 \text{ Btu/h}}{8,7266 \times 10^{-2} \text{ pie}^2} = 1607,82 \frac{\text{Btu}}{\text{h.pie}^2}$$

En el Sistema Internacional:

$$Q = 41,1207 \text{ W} ; q_t = 5158,2290 \text{ W/m}^2$$

Problema N° 7

El techo de una casa consta de una losa de concreto de $t = 0,8$ ft (pies) de espesor ($k = 1,1 \text{ Btu/h.ft.}^\circ\text{F}$) que tiene $H = 25$ ft de ancho y $L = 35$ ft de largo. La emisividad de la superficie exterior del techo es $\epsilon = 0,8$ y se estima que el coeficiente de transferencia de calor por convección es $h = 3,2 \text{ Btu/h.ft}^2.^\circ\text{F}$. En una noche clara de invierno se informa que el aire ambiental está a $T_f = 50^\circ\text{F}$, en tanto que la temperatura del cielo nocturno para la transferencia de calor por radiación es $T_{alrd} = 310^\circ\text{R}$. Si la temperatura de la superficie interior del techo es $T_1 = 62^\circ\text{F}$, determine:

- La temperatura de su superficie exterior.
- La razón de la pérdida de calor a través del mismo cuando se alcanzan las condiciones estacionarias de operación.

Solución.-

1. Diagrama de flujo

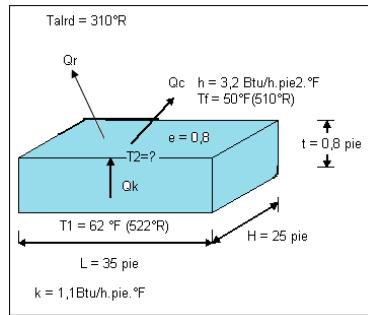


Figura N° 1.19 Techo de concreto, la superficie exterior sometido a convección y radiación

Fuente: Elaboración propia, Ing ° Alberto Emilio Panana Giro

2. Cálculo del calor transferido

$$Q_k = Q_c + Q_r$$

2.1 Determinación del área de transferencia

$$A = H \times L = 25 \text{ pie} \times 35 \text{ pie} = 825 \text{ pie}^2$$

2.2 Determinación del calor transferido por conducción:

$$Q = k \cdot A \left(\frac{T_1 - T_2}{t} \right) = 1,1 \frac{\text{Btu}}{\text{h} \cdot \text{pie}^2 \cdot ^\circ\text{F}} \times 825 \text{ pie}^2 \times \left(\frac{522 - T^2}{0,8} \right)$$
$$Q = 592143,75 - 1134,375T_2$$

2.3 Cálculo del calor transferido por convección:

$$Q_c = hA_s(T_2 - T_F) = 3,2 \frac{\text{Btu}}{\text{h} \cdot \text{pie}^2 \cdot ^\circ\text{F}} \times 825 \text{ pie}^2 (T_2 - 510)^\circ\text{R}$$
$$Q_c = 2640T_2 - 1346400 \text{ Btu/h}$$

2.4 Cálculo del calor transferido por radiación:

$$Q_r = \varepsilon\sigma A(T_2^4 - T_{alr}^4) = 0,8 \times 0,1714 \times 10^{-8} \times 825 \times (T_2^4 - 310^4)$$
$$Q_r = 0,00000113124T_2^4 - 10447,2389$$

2.5 Reemplazando en (2), se tiene:

$$0,000001134T_2^4 + 3774,375T_2 - 1948990,9883 = 0$$

2.6 Resolviendo, la temperatura: $T_2 = 497,97^\circ\text{R}$

3. El calor transferido

$$Q_k = 1,1 \times 825 \times \left(\frac{522 - 497,94}{0,8} \right)$$
$$Q_k = 27293,06 \text{ Btu/h}$$

1.8 Problemas propuestos

P1. Dos superficies perfectamente negras están dispuestas de tal manera que toda la energía radiante que sale de una de ellas, que se encuentra a 800°C , es interceptada por la otra. La temperatura de esta última superficie

se mantiene a 250 °C. Calcúlese la transferencia de calor entre las superficies por hora y por unidad de área de la superficie que se mantiene a 800 °C.

P2. Una placa de metal está perfectamente aislada por una de sus caras y por la otra absorbe el flujo radiante del sol de 700 W/m². El coeficiente de transferencia de calor por convección en la placa es 11 W/m².°C y la temperatura del ambiente 30 °C. Calcúlese la temperatura de la placa en condiciones de equilibrio.

P3. Un cilindro de 3 cm de diámetro se calienta hasta una temperatura de 200 °C, mientras que una corriente de aire a 30 °C y con un coeficiente de transferencia de calor de 180 W/m².°C, le sopla transversalmente. Si la emisividad de la superficie es 0,7. Calcúlese la perdida total de calor por unidad de longitud si las paredes de la habitación en la que esta colocado el cilindro están a 10 °C. Comente sus cálculos.

P4. Se deja una plancha de 1000 W sobre una tabla de planchar con su base expuesta al aire a 20 °C. El coeficiente de transferencia de calor por convección entre la superficie de la base y el aire circundante es 35 W/m².°C. Si la base tiene una emisividad de 0,6 y un área superficial de 0,02 m², determine la temperatura de la base de la plancha.

P5. Una esfera de 2 pulgadas de diámetro, cuya superficie se mantiene a una temperatura de 170 °F, está suspendida en medio de un cuarto que está a 70 °F. Si el coeficiente de transferencia de calor por convección es 15 Btu/h.pie².°F y la emisividad de la superficie es 0,8, determine la razón total de transferencia de calor desde la esfera.

P6 En el verano, las superficies interna y externa de una pared de 25 cm de espesor se encuentran a 27 °C y 44 °C, respectivamente. La superficie exterior intercambia calor por radiación con las superficies que la rodean a 40°C, y por convección con el aire ambiente, también a 40 °C, con un coeficiente de transferencia de 8 W/m². °C. La radiación solar incide sobre la superficie a razón de 150 W/m². Si tanto la emisividad como la capacidad de absorción de la superficie exterior son 0,8, determine la

Conductividad térmica de la pared.

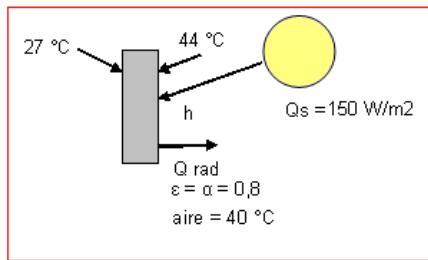


Figura N° 1.20 Superficie sólida sometido a convección y radiación
Fuente: Elaboración propia-Ing. Alberto Emilio Panama Girio

1.9 CIRCUITOS TERMOELÉCTRICOS

Para una **pared plana simple cualquiera** sometida a **convección por una superficie (Izquierda)** y a (**convección + radiación**) por la otra (derecha), tal como se muestra en la figura se tiene,

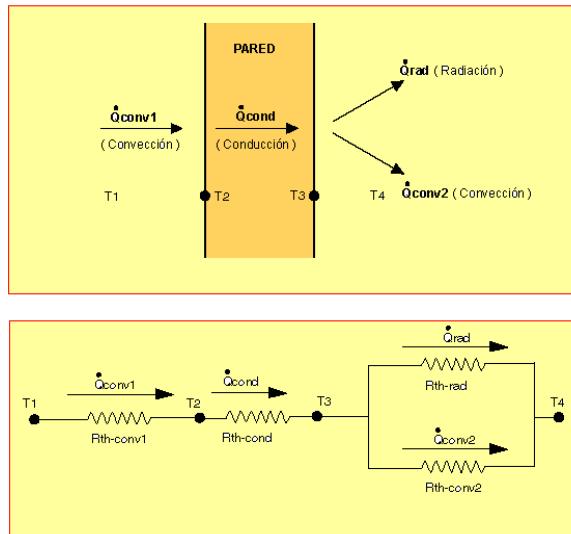


Figura N° 1.21 Circuito térmico de un Superficie sólida sometido a convección interior y convección y radiación exterior

Fuente: Elaboración propia. Ing Alberto E. Panama Girio

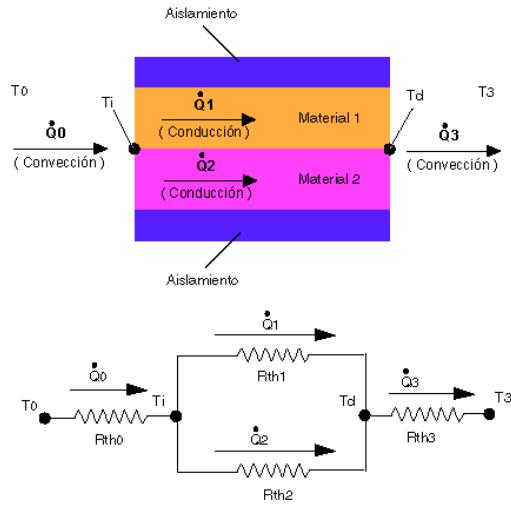


Figura N° 1.22 Circuito térmico de un Superficie sólida sometido a convección interior y convección y radiación exterior

Fuente: Elaboración propia. Ing Alberto E. Panama Giro

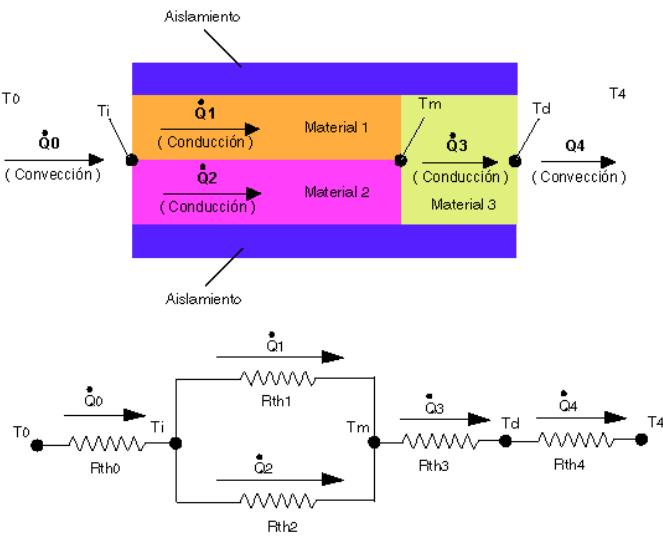


Figura N° 1.23 Circuito térmico de un Superficie sólidas colocadas en serie y paralelo,y sus superficies sometidas a convección

Fuente: Elaboración propia. Ing Alberto E. Panama Giro

CAPITULO II TRANSFERENCIA DE CALOR POR CONDUCCION

2.1 Conducción en estado estable

Se llama estado estable, al caso de transferencia de calor en que el tiempo no es un factor a considerar, la transferencia de calor en donde no interviene el tiempo permite simplificar el análisis en cierta medida.

La ecuación principal para la conducción de estado estable con generación interna es la Ecuación de Poisson

$$\nabla^2 T + \frac{q_o}{K} = 0 \quad (2.1)$$

La ecuación de Laplace se aplica para la conducción de estado estable sin generación de calor.

$$\nabla^2 T = 0 \quad (2.2)$$

Las dos ecuaciones se aplican a un medio isótropo, medio donde sus propiedades no varían con la dirección, se supone que las propiedades físicas también son independientes de la temperatura.

2.2 Conducción en estado estacionario – Unidimensional – Sin generación

Se considera la conducción del calor en estado estable a través de sistemas simples en los que la temperatura y el flujo de calor son funciones de una sola coordenada. La ecuación diferencial gobernante es:

$$\frac{d}{dx} \left(x^n \frac{dT}{dx} \right) = 0 \quad (2.3)$$

Donde:

$n = 0$, para sistema de coordenadas rectangulares.

$n = 1$, para sistema de coordenadas cilíndricas

$n = 2$, para sistema de coordenadas esféricas.

2.2.1 Paredes planas

En el caso de una pared como la mostrada en la figura 2.1 se aplica la ecuación (1) con $n = 0$

$$\frac{d}{dx} \left(x^0 \frac{dT}{dx} \right) = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (2.4)$$

La ecuación y condiciones de frontera que se deben satisfacer son:

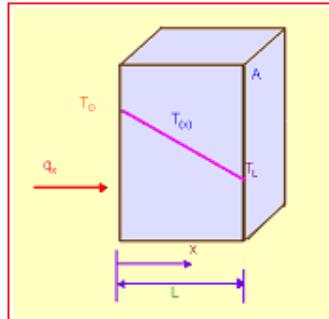


Figura N° 2.1 Pared Plana, para evaluar el perfil de temperatura y el flujo de calor

Fuente: Elaboración propia Ingº Alberto Emilio Panama Gario

$$1). \frac{d^2T}{dx^2} = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (2.5)$$

$$2). \text{C.F: } 1 \quad T_{(x)} = T_{(o)} = T_o \quad x = 0 \quad (2.6)$$

$$\text{C.F: } 2 \quad T_{(x)} = T_{(L)} = T_L \quad x = L \quad (2.7)$$

3). La ecuación (2) se puede separar e integrar dos veces:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dT}{dx} \right) = 0$$

$$\frac{dT}{dx} = C_1 \quad \dots \dots \dots \quad (2.8)$$

$$T_{(x)} = C_1 x + C_2 \quad \dots \dots \dots \quad (2.9)$$

4). Se evalúan las constantes de integración C_1 y C_2 aplicando las condiciones de frontera, con lo que se obtiene:

$$\text{Para } x = 0 \quad T = T_0$$

$$C_2 = T_0 \quad \dots \dots \dots \quad (2.10)$$

$$\text{Para } x = L \quad T = T_L$$

$$T_L = C_1 X + T_0$$

$$C_1 = \frac{T_L - T_0}{L} \quad \dots \quad (2.11)$$

- 5). Sustituyendo los valores de C_1 y C_2 en la expresión (4), la distribución de la temperatura será:

$$T_{(x)} = \frac{T_L - T_0}{L} x + T_0 \quad \text{ó} \quad T_{(x)} = T_0 - \frac{T_0 - T_L}{L} x \quad \dots \quad (2.12)$$

De acuerdo con la ecuación (7), la variación de la temperatura es lineal en una pared bajo las condiciones específicas en la figura (1)

- 6). Se puede usar la **ecuación de Fourier** para determinar el flujo de calor en este caso.

En forma escalar: $Q_x = -KA \frac{dT}{dx} \dots \quad (2.13)$

En estado estable Q_x es constante, se puede separar e integrar directamente esto es como:

$$Qx \int_0^L dx = - KA \int_{T_0}^{T_L} dT$$

$$\text{Lo que da: } Q_x = - KA \frac{\alpha T_L - T_0 \dot{\alpha}}{L} \quad \dots \quad (2.14)$$

La cantidad: $\frac{KA}{L}$ es la **conductancia térmica** (C_t), para una placa o pared plana.

Se llama **resistencia térmica** por conducción al reciproco de la conductancia térmica.

$$\text{Resistencia térmica} = \frac{L}{KA} = R_t$$

7. Si la conductividad térmica varía con la temperatura de acuerdo con alguna relación lineal, como

$$K = K_0(1 + \beta T),$$

la ecuación resultante para el flujo de calor (integrando ecuación Fourier)

con $x = L$, se tiene:

$$Q_x = -\frac{K_0 \times A}{L} \left[(T_2 - T_1) + \frac{\beta}{2} (T_2^2 - T_1^2) \right]$$

También se puede obtener:

$$K_m = \frac{\int_{T_1}^{T_2} K_{(T)} dT}{\int_{T_1}^{T_2} dT}; \quad Si \quad K = K_0 (1 + \beta T) \quad (2.15)$$

$$K_m = \frac{\int_{T_1}^{T_2} (K_0 (1 + \beta T)) dt}{\int_{T_1}^{T_2} dT} = K_0 \frac{\left[(T_2 - T_1) + \frac{\beta}{2} (T_2^2 - T_1^2) \right]}{(T_2 - T_1)}$$

$$K_m = K_0 \left(1 + \frac{\beta}{2} (T_2 + T_1) \right)$$

$$Q_x = \frac{K_0 \times A}{L} \left[(T_1 - T_2) + \frac{\beta}{2} (T_1^2 - T_2^2) \right] \quad (2.16)$$

$$Q = K_m \times A \times \frac{T_1 - T_2}{L}$$

Donde:

K_0 = conductividad térmica en $T = 0$

β = constante llamada coeficiente por temperatura de la conductividad térmica.

$$Q_x = A \frac{(T_1 - T_2)}{L} K_0 \left(1 + \beta \frac{(T_1 + T_2)}{2} \right) = \frac{\Delta T}{\frac{L}{AKm}} \quad (2.17)$$

Donde: $Km = K_0 \left(1 + \beta \frac{(T_1 + T_2)}{2} \right)$, valor medio de la conductividad térmica.

Para una variación lineal de K con T , la conductividad térmica en la ecuación (1) deberá ser evaluada a la media aritmética de la temperatura:

$$\left(\frac{T_1 + T_2}{2} \right)$$

2.2.2 Cilindros Huecos

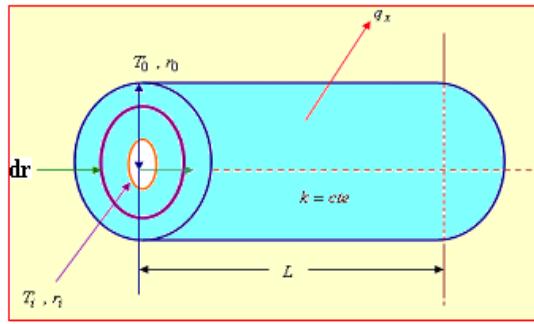


Figura N° 2.2 Cilindro hueco, para evaluar el perfil de temperatura y el flujo de calor

Fuente: Elaboración propia Ing. Alberto Emilio Panana Giro

1. Para la conducción de calor de estado estable a través de una pared cilíndrica en la dirección radial, **la ecuación de Laplace** toma la forma.

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT_{(r)}}{dr} \right) = 0 \quad (2.18)$$

2. Separando las variables e integrando se obtiene: $\frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r}$

$$\text{Integrando nuevamente: } T_{(r)} = C_1 \ln r + C_2$$

3. Si el sistema y las condiciones de frontera son como se indica en la figura o sea que:

$$\text{CF:1} \quad T_{(r_i)} = T_i \quad , \quad r = r_i \quad (2.19)$$

$$\text{CF: 2} \quad T_{(r_0)} = T_0 \quad , \quad r = r_0$$

4. Entonces las constantes de integración C_1 y C_2 son:

$$T_i = C_1 \ln r_i + C_2 \quad T_0 = C_1 \ln r_0 + C_2$$

$$C_1 = -\frac{T_i - T_0}{\ln \frac{r_o}{r_i}} \quad C_2 = T_i - C_1 \ln r_i \quad (2.20)$$

$$C_2 = T_i - \left(-\frac{(T_i - T_0)}{\ln r_o / r_i} \right) \ln r_i$$

5. Reemplazando las constantes C_1 y C_2 en la relación dada en (2) en la ecuación de $T_{(r)}$ (perfil de temperatura), será

$$\begin{aligned} T &= -\frac{(T_i - T_0)}{\ln r_o / r_i} \ln r + T_i - \left(-\frac{T_i - T_0}{\ln r_o / r_i} \right) \ln r_i \\ T - T_i &= -\frac{(T_i - T_0)}{\ln \frac{r_0}{r_i}} \ln \frac{r}{r_i} \end{aligned} \quad (2.21)$$

6. La razón de flujo de calor, aplicando la ecuación de Fourier.

$$Q_r = -KA \frac{dT}{dr}$$

7. El área para un sistema cilíndrico es, $A = 2\pi rL$ y el gradiente de temperatura dT/dr , dado por el resultado de la primera integración.

$$\frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r} ; \quad \text{Donde:} \quad C_1 = -\frac{T_i - T_0}{\ln \frac{r_0}{r_i}} \quad (2.22)$$

8. Reemplazando estos términos en la expresión de la razón del flujo de calor se tiene:

$$Q_r = -K 2\pi L \left[-\frac{T_i - T_0}{\ln \frac{r_0}{r_i}} \right] \quad (2.23)$$

$$Q_r = \frac{2\pi KL}{\ln \frac{r_0}{r_i}} (T_i - T_0)$$

Por lo tanto, la temperatura dentro de un cilindro hueco es una función logarítmica del radio r , mientras que una pared plana la distribución de la temperatura es lineal.

Nota 1- En cilindros se tiene:

- Que en algunas aplicaciones es útil tener la ecuación para la conducción del calor a través de una pared curva, en la misma forma que la ecuación tal como:

$$Q = \frac{AK}{L} (T_i - T_0) = \frac{\Delta T}{\frac{L}{AK}}$$

- Para obtener la ecuación de esta forma, se igualan esta ecuación con la ecuación siguiente:

$$Q = \frac{T_i - T_0}{\frac{Ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}{2\pi KL}}$$

- Pero usando en la ecuación: $L = (r_o - r_i)$, como el espesor de la pared del cilindro a través del cual es conducido el calor.
- Haciendo $A = \bar{A}$

$$\text{Como } \frac{\bar{A} - \Delta T}{r_o - r_i} = \frac{2\pi K L \Delta T}{Ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)} ; \bar{A} = \frac{2\pi(r_o - r_i)L}{Ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}$$

- Como $A = 2\pi r L$ y $\frac{r_o}{r_i} = \frac{A_o}{A_i}$, \bar{A} se puede expresar como:

$$\bar{A} = \frac{A_o - A_i}{Ln\left(\frac{A_o}{A_i}\right)} \quad (2.24)$$

\bar{A} = **área media logarítmica**, entonces, la rapidez de conducción de calor a través de un cilindro hueco, se puede expresar como:

$$Q = \frac{T_i - T_0}{\frac{(r_o - r_i)}{K \bar{A}}} = \frac{T_i - T_0}{\frac{r_o - r_i}{K \frac{(A_o - A_i)}{Ln\left(\frac{A_o}{A_i}\right)}}} \quad (2.25)$$

Nota 2: Para valores de $\frac{A_o}{A_i} < 2$, el área media aritmética $(A_o + A_i)/2$ y el área media logarítmica difieren aproximadamente en

un 4%, por lo cual la primera puede usarse satisfactoriamente, para paredes de mayor espesor, esta aproximación no es aceptable.

2.2.3 Esferas Huecas

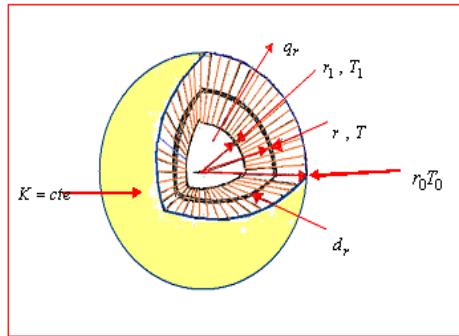


Figura N° 2.3 Esfera hueca, para evaluar el perfil de temperatura y el flujo de calor

Fuente: Elaboración Propia, Ing.Alberto Emilio Panama Giro

- En el caso esférico, la forma unidimensional de la ecuación de Laplace para el flujo de calor es radial:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (2.26)$$

- Separando las variables e integrando dos veces se obtiene:

$$\frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r^2} \quad \dots \dots \dots \quad (2.27)$$

$$T = -\frac{C_1}{r} + C_2 \quad \dots \dots \dots \quad (2.28)$$

- Las condiciones aplicables de frontera para el caso esférico son:

$$\text{CF: 1} \quad T_{(ri)} = T_i \quad , \quad r = r_i \quad \dots \dots \dots \quad (2.29)$$

$$\text{CF: 2} \quad T_{(r0)} = T_0 \quad , \quad r = r_0 \quad \dots \dots \dots \quad (2.30)$$

- Aplicando estas condiciones de frontera se obtiene las constantes de integración:

$$T_i = -(C_1 / r_i) + C_2$$

$$T_o = -(C_1 / r_o) + C_2$$

$$C_1 = -\frac{T_i - T_0}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o}} \quad C_1 = \frac{T_i - T_0}{\frac{1}{r_o} - \frac{1}{r_i}} \quad \dots\dots\dots (2.31)$$

$$C_2 = \frac{C_1 + T_i}{r_i} \rightarrow C_2 = -\frac{\frac{T_i - T_0}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o}} + T_i}{r_i} \quad \dots\dots\dots (2.32)$$

- Reemplazando las constantes en el perfil dado y despejando se tiene que la distribución de temperaturas para este caso es:

$$T - T_i = -\frac{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o}}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o}} (T_i - T_0) \quad (2.33)$$

- La expresión para el **flujo radial de calor** en una capa esférica es:

$$Q_r = -KA \frac{dT}{dr}$$

- En donde $A = 4\pi r^2$ y $\frac{dT}{dr}$ esta dado por:

$$\frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r^2} \quad \frac{dT}{dr} = -\left(\frac{\frac{T_i - T_0}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o}}}{r^2} \right) \quad (2.34)$$

- Sustituyendo Qr queda:

$$Q_r = \frac{4\pi K}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o}} (T_i - T_0)$$

$$Q_r = \frac{4\pi K r_i r_o}{r_o - r_i} (T_i - T_0) \quad \dots\dots\dots . (2.35)$$

- La resistencia térmica para una esfera hueca es:

$$R_t = \frac{r_o - r_i}{4\pi K r_i r_o} \quad (2.36)$$

- Para determinar el calor evacuado a través de una esfera hueca de radio interior r_1 y radio exterior r_2 , calentada por un fluido T_{F1}

de coeficiente de convección h_1 , a un medio exterior T_{f2} con coeficiente de convección h_2 , se tendrá:

$$Q = \frac{T_{f_1} - T_{f_2}}{\frac{1}{4\pi r_1^2 h_1} + \frac{r_2 - r_1}{4\pi r_1 r_2 K} + \frac{1}{4\pi r_2^2 h_2}} \quad (2.37)$$

h_1 = coeficiente de convección en el interior de la esfera

h_2 = coeficiente de convección en el exterior de la esfera

R_{esf} = resistencia térmica de la esfera

$$R_{t,esf} = \frac{r_2 - r_1}{4\pi r_2 r_1 K} \quad (2.38)$$

- Para una esfera el radio crítico se puede determinar mediante:

$$r_c = \frac{2K}{h} \quad (2.39)$$

2.2.4 Espesor Crítico de Aislante para una tubería

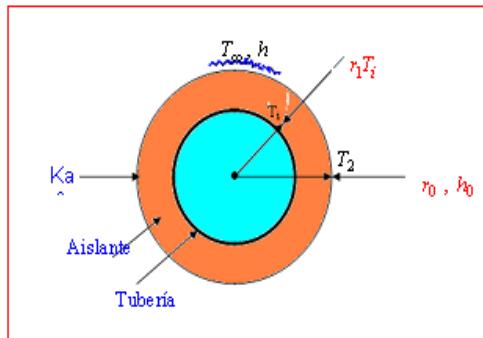


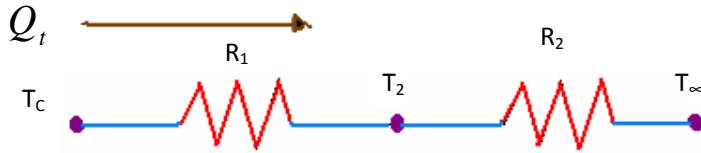
Figura N° 2.4 Esfera hueca, para evaluar el perfil de temperatura y el flujo de calor

Fuente: Elaboración propia, Ingº Alberto Emilio Panana Giro

- Considerar una capa de aislante, que podría instalarse alrededor de una tubería circular.
- La temperatura interior del aislante se fija en T_i y la superficie exterior esta expuesta a un medio de convención (fluido) a una temperatura T_∞

- K = conductividad del aislante.

a. Circuito térmico



$$R_1 = \frac{L_n \left(\frac{r_0}{r_i} \right)}{2\pi K L} \quad R_2 = \frac{1}{2\pi r_0 L h}$$

b. La transferencia de calor radial

$$Q_r = \frac{2\pi L (T_1 - T_\infty)}{\frac{L_n \left(\frac{r_0}{r_i} \right)}{K} + \frac{1}{r_o h_o}}$$

- Transformando esta expresión para determinar el radio extremo del aislante (r_0), que hará máxima la transferencia de calor, es cuando

$$\frac{dq_r}{dr_0} = 0 \quad ; \quad \frac{dQ_r}{dr_0} = \frac{-2\pi L (T_1 - T_\infty) \left(\frac{1}{Kr_0} - \frac{1}{hr_0^2} \right)}{\left[\frac{L_n \left(\frac{r_0}{r_i} \right)}{K} + \frac{1}{r_o h} \right]} = 0$$

$$c. \text{ Por tanto } r_o = \frac{K}{h} = \text{radio crítico de aislante.} \quad (2.40)$$

Respecto al radio critico se debe consider:

1. Si el radio externo es menor al valor expresado por la relación (radio crítico), la transferencia de calor se incrementara adicionando más aislante.
2. Para radios externos mayores al valor crítico, un incremento en el espesor del aislante provocará una reducción en la transferencia de calor.

- Para los valores de h suficientemente pequeñas, la perdida de calor por convección puede de realidad incrementarse con la adición del aislante debido al incremento de área de superficie.

2.2.5 Coeficiente Total de Transferencia de Calor (U)

El flujo de calor a través de una configuración **plana, cilíndrica** es:

$$Q = UA\Delta T_{total} \rightarrow U = \frac{1}{R_{total}A} \quad (2.41)$$

a. Para una pared plana

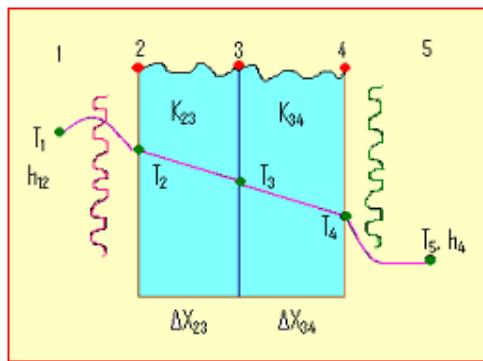


Figura N° 2.5 Pared plana compuesta con superficies convectivas para evaluar el coeficiente de convección global

Fuente: Elaboración propia Ingº Alberto Emilio Panana Giro

- Si la pared esta formado por n capas con fronteras conectivas las temperaturas de los fluidos T_1 y T_{n+3} donde $n=2$ capas

$$Q = UA(T_1 - T_{n+3})$$

$$U = \frac{1}{\frac{1}{h_{12}} + \frac{\Delta X_{23}}{K_{23}} + \frac{\Delta X_{34}}{K_{34}} + \dots + \frac{1}{h_{(n+2)+(n+3)}}} \quad (2.42)$$

b. Para un cilindro

- El coeficiente global se puede expresa en función al área interna o en del área externa. Por ejemplo basado en área externa

$$Q = U_4 A_4 (T_1 - T_5) \quad ; \quad A_4 = 2\pi r_4 L$$

➤ Basado en el radio r_4

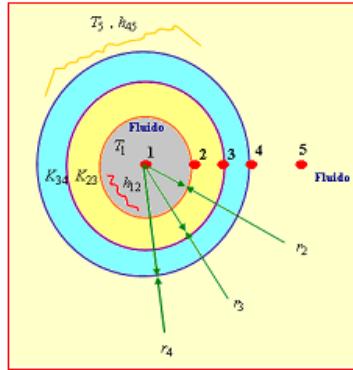


Figura N° 2.6 Cilindro hueco compuesto con superficies convectivas para evaluar el coeficiente de convección global

Fuente: Elaboración propia Ingº Alberto Emilio Panama Giro

$$U_4 = \frac{1}{\frac{r_4 L_n \frac{\partial T_1}{\partial r}}{r_2 h_{12}} + \frac{r_4 L_n \frac{\partial T_1}{\partial r}}{K_{23}} + \frac{r_4 L_n \frac{\partial T_1}{\partial r}}{K_{34}} + \frac{1}{h_{45}}} \quad (2.43)$$

2.2.6 Conducción a través de Materiales en paralelo

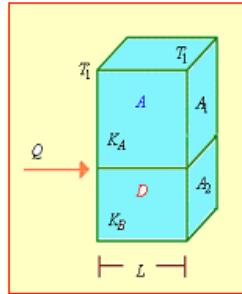


Figura N° 2.7 Pared plana colocados en paralelo para evaluar la transferencia de calor

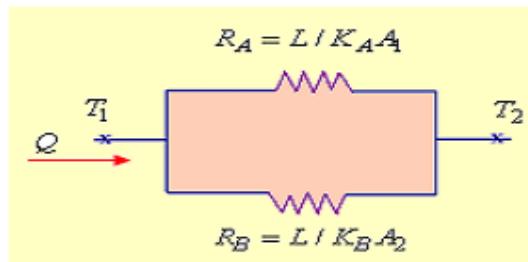
Fuente: Elaboración propia Ingº Alberto Emilio Panama Giro

L

- Suponga que dos sólidos A y B se colocan uno junto al otro en paralelo y que la dirección del flujo de calor es perpendicular al plano de la superficie expuesta de cada sólido.
- Entonces el flujo de calor total es la suma del flujo de calor a través del sólido A, más el que pasa por B. Escribiendo la ecuación de Fourier para cada sólido y sumando.

$$Q_t = Q_A + Q_B = \frac{K_A A_1}{L} (T_1 - T_2) + \frac{K_B A_2}{L} (T_1 - T_2) \quad (2.44)$$

- Circuito térmico



$$\text{Resistencia A } = R_A = \frac{L}{K_A A_1}$$

$$\text{Resistencia B } = R_B = \frac{L}{K_B A_2}$$

O sea:

$$Q_t = \left(\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} \right) (T_1 - T_2) = \frac{R_A + R_B}{R_A R_B} (T_1 - T_2)$$

$$Q_t = \frac{\frac{T_1 - T_2}{R_A R_B}}{R_A + R_B} \quad (2.45)$$

2.3 Problemas Resueltos

Problema N° 1

Una placa grande de acero que tiene un espesor de L= 4pulg, conductividad térmica K = 7.2 BTU/h.pie.^oF y una emisividad de ε = 0.6, esta tendida sobre el suelo. Se sabe que la superficie expuesta de la placa en x = L intercambia calor por convección con el aire ambiente que está a la temperatura de 90^oF, con un

coeficiente promedio de transferencia de calor $h = 12 \text{ BTU/h.pie}^2. {}^\circ\text{F}$, así como por radiación hacia el cielo abierto, con una temperatura del cielo a $510 {}^\circ\text{R}$. Así mismo la temperatura de la superficie superior de la placa es $75 {}^\circ\text{F}$. Si se supone una transferencia unidimensional de calor en estado estable.

- Exprese la ecuación diferencial y las condiciones de frontera.
- Obtenga una relación para la variación de la temperatura en ella.
- Determine el valor de la temperatura en la superficie inferior de la placa.

Solución:

1. Diagrama de flujo

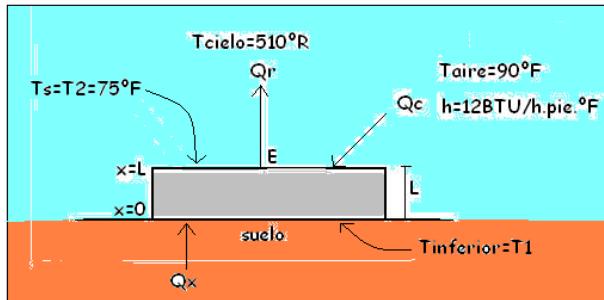


Figura N° 2.8 Placa de acero con superficie exterior expuesta a convección y radiación

Fuente: Elaboración propia Ingº Alberto Emilio Panama Giro

2. Datos:

$$L = 4 \text{ pulg} = \frac{1}{3 \text{ pie}} \quad K = \frac{7.2 \text{ BTU}}{\text{hpie}^2 {}^\circ\text{F}} = 0,6$$

$$T_{aire} = 90 {}^\circ\text{F} = 549.7 {}^\circ\text{R} \quad T_{cielo} = 510 {}^\circ\text{R} \quad T_s = T_2 = 75 {}^\circ\text{F} = 534.7 {}^\circ\text{R}$$

$$\sigma = 0.1714 * 10^{-8} \frac{\text{BTU}}{\text{hpie}^2 {}^\circ\text{R}^4}$$

3. Resolviendo las preguntas planteadas:

a. Hallando la ecuación diferencial y las condiciones de frontera.

➤ La ecuación diferencial para el problema será:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

➤ Las condiciones de frontera son:

CF: 1. $x = 0 \rightarrow T = T_1$

CF: 2. $x = L = 4 \text{ pulg} \rightarrow T = T_2, Q_x = Q_c + Q_r$

b. Obteniendo una relación para la variación de la temperatura en la placa.

- Primero hallamos las ecuaciones de calor de conducción, convección y radiación:

$$\begin{cases} Q_x = -KA \frac{dT}{dx} \\ Q_c = hA(T_{aire} - T_2) \\ Q_r = \varepsilon\sigma A(T_2^4 - T_{cielo}^4) \end{cases}$$

- De la ecuación diferencial, separamos e integramos variables:

$$\frac{dT}{dx} = C_1 \rightarrow T = C_1x + C_2$$

- Hallamos las constantes de integración:

Cuando: $x = 0 \rightarrow T_1 = C_1x + C_2 \rightarrow T_1 = C_2$

Cuando: $x = L = 4 \text{ pulg}$

$$\begin{cases} T_2 = C_1L + C_2 \dots (1) \\ -KA \frac{dT}{dx} = hA(T_{aire} - T_2) + \varepsilon\sigma A(T_2^4 - T_{cielo}^4) \dots (2) \end{cases}$$

- Hallando C_1 de la ecuación (2):

$$-KC_1 = h(T_{aire} - T_2) + \varepsilon\sigma(T_2^4 - T_{cielo}^4)$$

$$C_1 = -\left[\frac{h(T_{aire} - T_2) + \varepsilon\sigma(T_2^4 - T_{cielo}^4)}{K} \right]$$

- Reemplazando las constantes de integración en la ecuación general, hallamos la distribución de la variación de temperatura en la placa:

$$T = -\left[\frac{h(T_{aire} - T_2) + \varepsilon\sigma(T_2^4 - T_{cielo}^4)}{K} \right]x + T_1 \dots (3)$$

c. Determinamos el valor de la temperatura en la superficie inferior de la placa.

- De la primera condición de frontera:

$$X = L = 4 \text{ pulg} \rightarrow T = T_2$$

➤ Reemplazamos estos datos en la ecuación (3):

$$T_2 = - \left[\frac{h(T_{aire} - T_2) + \varepsilon\sigma(T_2^4 - T_{cielo}^4)}{K} \right] L + T_1$$

➤ Despejando T_1 :

$$T_1 = T_2 + \left[\frac{h(T_{aire} - T_2) + \varepsilon\sigma(T_2^4 - T_{cielo}^4)}{K} \right] L$$

➤ Por último reemplazamos los datos del problema:

$$T_1 = 75^{\circ}F + \frac{1}{3} \pi e \left[\frac{12BTU}{hpie^{2^{\circ}F}} (90 - 75)^{\circ}F + 0.6 * 0.1718 * \frac{10^{-8}BTU}{hpie^{2^{\circ}R^4}} (534.7^4 - 510^4)^{\circ}R^4 \right] \frac{7.2BTU}{hpie^{2^{\circ}F}}$$

➤ Así obtenemos el valor de la temperatura en la parte inferior de la placa:

$$T_1 = 84.004^{\circ}F$$

4. Las respuestas respectivas son:

a. La ecuación diferencial y las condiciones de frontera son:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

$$CF1: \quad x = 0 \rightarrow T = T_1$$

$$CF2: \quad x = L = 4 \text{ pulg} \rightarrow T = T_2, Qx = Qc + Qr$$

b. La relación para la variación de la temperatura en ella.

$$T = - \left[\frac{h(T_{aire} - T_2) + \varepsilon\sigma(T_2^4 - T_{cielo}^4)}{K} \right] x + T_1$$

c. El valor de la temperatura en la superficie inferior de la placa.

$$T_1 = 84.004^{\circ}F$$

PROBLEMA N°2

Una barra de oro está en contacto térmico con una barra de plata, una a continuación de la otra, ambas de la misma longitud y área transversal. Un extremo de la barra compuesta se mantiene a $T_1 = 80^{\circ} C$ y el extremo opuesto a $T_2 = 30^{\circ} C$. Calcular la temperatura de la unión cuando el flujo de calor alcanza el estado estacionario.

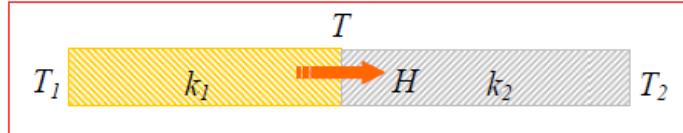


Figura N° 2.9 Barras planas colocados en serie, para evaluar la temperatura de contacto

Fuente: Elaboración propia Ing° Alberto Emilio Panama Giro

Solución:

1. Con $L_1 = L_2 = L$ (Longitudes de la barra de oro y de plata)
2. Calculo de los calores transferidos por cada barra, según la ley de la conducción de calor de Fourier:

$$Q_{oro} = k_{1A} \frac{(T_1 - T)}{L}, Q_{plata} = k_{2A} \frac{(T - T_2)}{L}$$

3. Cuando se alcanza el estado estacionario estos dos valores son iguales:

$$Q_{oro} = Q_{plata} \rightarrow k_{1A} * \frac{(T_1 - T)}{L} = k_{2A} \frac{(T - T_2)}{L}$$

$$k_1(T_1 - T) = k_2(T - T_2)$$

4. Despejando la temperatura T , con k_1 del oro y k_2 de la plata, valores obtenidos de esta tabla:

Metales, a 25°C	
Sustancia	k (W/mK)
Aluminio	238
Cobre	397
Oro	314
Hierro	79.5
Plomo	34.7
Plata	427
Latón	110

$$T = \frac{k_1 T_1 + k_2 T_2}{k_1 + k_2} = \frac{314 * 353 + 427 * 303}{314 + 427}$$

$$T = 324.2K = 51.2^{\circ}C$$

PROBLEMA N° 3

Una pared compuesta de un horno consiste en tres materiales, dos de los cuales son de conductividad térmica conocida, $K_A = 20 \text{ W/mK}$ y $K_C = 50 \text{ W/mK}$ y de espesor conocido $L_A = 0.30 \text{ m}$ y $L_C = 0.15 \text{ m}$. El tercer material B, que se

intercala entre los materiales A y C, es de espesor conocido. $L_B = 0,15$ m, pero de conductividad térmica K_B desconocida. En condiciones de operación de estado estable, las mediciones revelan una temperatura de la superficie externa $T_{so} = 20^\circ\text{C}$, una Temperatura de la superficie interna $T_{si} = 600^\circ\text{C}$ y una $T_f = 800^\circ\text{C}$. Se sabe que el coeficiente de convección interior $h = 25\text{W/m}^2\text{K}$ ¿Cuál es el valor de K_B ?

Diagrama de flujo.-

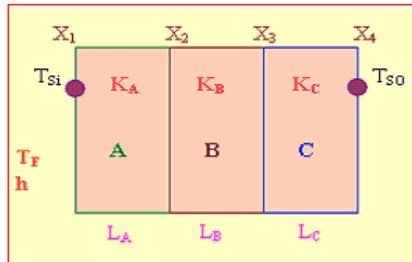


Figura N° 2.10 Pared plana compuesta colocados en serie, con conductividad térmica del plano central desconocida

Fuente: Elaboración propia Ing° Alberto Emilio Panama Girio

Datos.-

$$K_A = 20\text{w/mk}$$

$$K_C = 50\text{w/mk}$$

$$K_B = ?$$

$$L_A = 0,3 \text{ m}$$

$$L_B = 0,15 \text{ m}$$

$$L_C = 0,15 \text{ m}$$

$$T_f = 800^\circ\text{C}$$

$$T_{si} = 600^\circ\text{C}$$

$$T_{so} = 20^\circ\text{C}$$

Solución.-

- La transferencia de calor a través del sistema mostrado en la figura, en condiciones estacionarias, unidireccional (dirección de las X), sin generación de calor, se tiene que :

$$Q_{conv} = Q_a = Q_B = Q_c$$

- Por lo tanto se deduce que la transferencia de calor se puede determinar mediante la ecuación:

$$q_x = \frac{t_F - t_{s,o}}{\frac{1}{h} + \frac{L_A}{K_A} + \frac{L_B}{K_B} + \frac{L_C}{K_C}}$$

$$q_x = \frac{800^\circ C - 20^\circ C}{\frac{1}{25} + \frac{0.3}{20} + \frac{0.15}{K_B} + \frac{0.15}{50}} = \frac{780}{0.058 + \frac{0.15}{K_B}} \quad \dots \dots \dots \quad (\alpha)$$

3.-La transferencia de calor a través del sistema es igual a lo que se transfiere por convección a la pared A: $q_{\text{Conv}} = q_x$

$$q_C = 25(800 - 600) = 5000 \text{W} \quad \dots \dots \dots \quad (\beta)$$

4. Igualamos (α) y (β) tenemos:

$$5000 = \frac{780}{0.058 + \frac{0.15}{K_B}}$$

5. Operando en (4) , se obtiene la conductividad térmica de B

$$K_B = 1.5306 \text{W/mk}$$

Problema N° 4

Una pared plana grande, tiene un espesor de 0.35m; una de sus superficies se mantiene a una temperatura de $35^\circ C$ mientras que la otra superficie esta a $115^\circ C$. Únicamente se dispone de dos valores de la conductividad térmica del material de que esta hecha la pared: así se sabe que a $T = 0^\circ C$, $K = 26 \text{W/mk}$ y a $T = 100^\circ C$, $K = 32 \text{W/mk}$. Determine el flujo térmico que atraviesa la pared, suponiendo que la conductividad térmica varía linealmente con la temperatura.

Solución.-

1. Diagrama de flujo

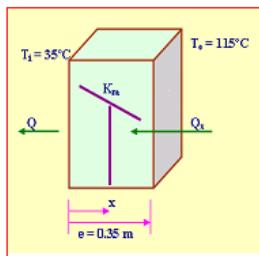


Figura N° 2.11 Pared plana con conductividad térmica variable

Fuente: Elaboración propia Ing° Alberto Emilio Panana Giro

2. Primera forma de solución:

- i. La temperatura media de la pared.

$$x_m = \frac{0.35}{2} = 0.175m \quad , T_m = \frac{115 + 35}{2} = 75^\circ C$$

- ii. La conductividad térmica media se puede obtener interpolando linealmente entre las dos temperaturas media.

$$\frac{K_m - 26}{75 - 0} = \frac{32 - 26}{100 - 0} \quad , K_m = 30.5 \text{ w/m}^\circ\text{C}$$

- iii. El flujo térmico a través de la pared.

$$\frac{Q_x}{A} = q_x = K_m \frac{T_0 - T_i}{e} = 30.5 \text{ w/m}^\circ\text{C} \times \frac{(115 - 35)^\circ\text{C}}{0 - 35 \text{ m}}$$

$$q_x = 6971,4285 \text{ w/m}^2$$

3. Segunda forma de solución:

- i. Suponiendo que $K(T)$ varia linealmente de la forma: $K = K_0(1 + \alpha T)$
Reemplazando:

$$26 = K_0(1 + \alpha(0)) \quad \dots \quad (1)$$

$$32 = K_0(1 + \alpha(100)) \quad \dots \quad (2)$$

$$\text{De (1)} \quad K_0 = 26$$

- ii. Reemplazando en (2) $32 = 26(1 + 100\alpha)$

$$\alpha = \left(\frac{32}{26} - 1 \right) / 100 = 2.30769 \times 10^{-3}$$

$$K(T) = 26 \left(1 + 2.30769 \times 10^{-3} T \right), \quad K_m = K_0 \left(1 + \beta \frac{(T_1 + T_2)}{2} \right)$$

- iii. Por tanto la conductividad térmica media es:

$$K_m = 26 \left[1 + 2.30769 \times 10^{-3} \left(\frac{115 + 35}{2} \right) \right] = 30.499$$

4. También se puede determinar mediante la relación:

$$K_m = \frac{\int K(T) dT}{\int dT} ; \quad K_m = \frac{\int_{35}^{115} (26 + 26x2.30769x10^{-3}T) dT}{115 - 35}$$

$$K_m = \frac{26(115 - 35) + \frac{26x2.30769x10^{-3}}{2} (115^2 - 35^2)}{80} = 30.499 \text{ w/m}^\circ\text{C}$$

PROBLEMA N°5

Una sección de pared compuesta con las dimensiones mostradas a continuación se tiene temperaturas uniformes de 200°C y 50°C en las superficies izquierda y derecha respectivamente. Si las conductividades térmicas de los materiales de la pared son:

$K_A = 70 \text{ W/mK}$, $K_B = 60 \text{ w/mk}$, $K_C = 40 \text{ w/mk}$ y $K_D = 20 \text{ w/mk}$. Determine la razón de transferencia de calor a través de esta sección de pared y las temperaturas en las superficies de contacto.

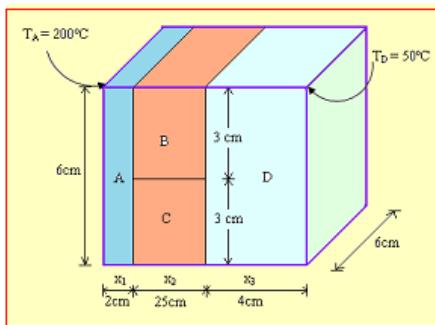


Figura N° 2.12 Pared plana compuesta colocados en serie y en paralelo para evaluar la transferencia de calor

Fuente: Elaboración propia Ing° Alberto Emilio Panana Giro

Datos:

$$A_A = A_D = 36 \text{ cm}^2 = 36 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$A_B = A_C = 18 \text{ cm}^2 = 18 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

Solución:

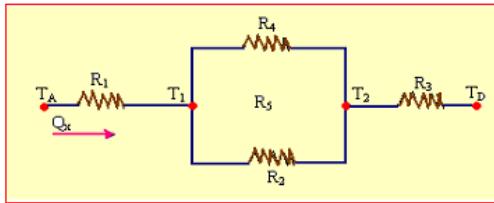
- Se tiene una pared compuesta que contiene resistencias térmicas en serie y paralelas, en este caso la resistencia de la capa intermedia (caso B y C) es:

$$R_2 = \frac{R_B R_C}{R_B + R_C}$$

2. La razón de flujo de calor es:

$$Q = \frac{\Delta T_{\max \text{imo}}}{\sum_1^3 R_n}$$

3. El circuito térmico para este sistema es:



$$\Delta T_{\max} = T_A - T_D = 200 - 50 = 150^\circ C$$

4. Las resistencias térmicas son:

$$\sum_1^3 R_n = R_1 + R_2 + R_3$$

$$R_1 = \frac{X_A}{K_A A_A} = \frac{0.02m}{(70w/mk)(36 \times 10^{-4} m^2)} = 0.079365 k/w$$

$$R_2 = \frac{R_B R_C}{R_B + R_C}$$

$$R_B = \frac{X_B}{K_B A_B} = \frac{0.025m}{60 \frac{w}{mk} (18 \times 10^{-4} m^2)} = 0.23148 k/w$$

$$R_C = \frac{X_C}{K_C A_C} = \frac{0.025m}{40 \frac{w}{mk} (18 \times 10^{-4} m^2)} = 0.34722 k/w$$

$$R_2 = \frac{0.23148 \times 0.34722}{0.23148 + 0.34722} = \frac{0.080374}{0.3787} = 0.13888 k/w$$

$$R_3 = \frac{X_D}{K_D A_D} = \frac{0.04m}{20w/mk \times 36 \times 10^{-4} m^2} = 0.55555 k/w$$

$$\sum_1^3 R_n = 0.079365 + 0.13888 + 0.55555 = 0.773795 \left(\frac{w}{k} \right)^{-1}$$

5. Reemplazando:

$$Q_x = \frac{150^\circ C}{0.773795 \frac{\text{°C}}{w}} = 193.849 w$$

PROBLEMA N° 6

El vapor a través de un tubo largo de pared delgada mantiene la pared a una temperatura uniforme de 500K. El tubo está cubierto con una manta aislante compuesta con dos materiales diferentes A y B

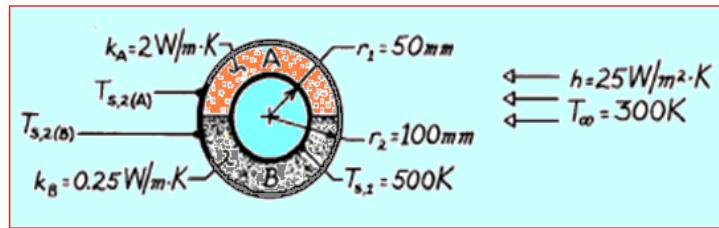


Figura N° 2.13 Cilindro hueco, con material aislante diferentes colocados en paralelo para evaluar la transferencia de calor

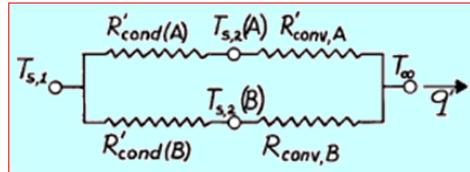
Fuente: Elaboración propia Ing° Alberto Emilio Panama Girio

Se supone que la interfaz entre los dos materiales tiene una resistencia de contacto infinita y que toda la superficie externa está expuesta al aire, para el cual $T_\infty = 300K$ y $h = 25W/m^2K$

- Dibuje el circuito térmico del sistema. Usando los símbolos precedentes, marque todos los nodos y resistencias pertinentes.
- Para las condiciones que se establecen. ¿Cuál es la pérdida total del calor del tubo? ¿Cuáles son las temperaturas de la superficie externa $T_{s,2(A)}$ y $T_{s,2(B)}$?

Solución.-

- El circuito térmico, de acuerdo al diagrama de flujo, es:



- De la grafica de la conducción térmica tenemos

$$Q = Q_A + Q_B$$

3. Cálculo de las resistencias térmicas

$$R'_{conv} = \left(\pi * 0.1m * \frac{25W}{m^2 K} \right)^{-1} = 0.1273 mK/W$$

$$R'_{condA} = \frac{\ln(\frac{0.1m}{0.05m})}{\pi * 2W/mK} = 0.1103 mK/W$$

$$R'_{condB} = 8R'_{condA} = 0.8825 mK/W$$

$$q' = \frac{T_{s,1} - T_\omega}{R'_{condA} + R'_{conv}} + \frac{T_{s,1} - T_\omega}{R'_{condB} + R'_{conv}}$$

4. Reemplazando valores tenemos

$$q' = \frac{(500 - 300)K}{(0.1103 + 0.1273)mK/W} + \frac{(500 - 300)K}{(0.8825 + 0.1273)mK/W} = 1040 W/m$$

$$T_{s,2A} = T_{s,1} - q' A R'_{condA} = 500 - \frac{842W}{m} * \frac{0.1103mK}{W} = 407K$$

$$T_{s,2B} = T_{s,1} - q' A R'_{condB} = 500 - \frac{198W}{m} * \frac{0.8825mK}{W} = 325K$$

Problema N°7

Vapor con calidad del 98% fluye a una presión de 1,37. 105 N/m², a una velocidad de 1 m/s por un tubo de acero de 2,7 cm. de diámetro exterior y 2,1 cm. de diámetro interior. El coeficiente de transferencia de calor en la superficie interna donde ocurre condensación es de 567 w/m²k. Una película de grasa en la superficie interna añade una resistencia térmica unitaria de 0,18 m²k/w. Estime la razón de pérdida de calor por metro de longitud de tubo, si:

- a. El tubo está descubierto.
- b. El tubo está recubierto con 1 capa de 5 cm. de 85% Mg en ambos casos suponga que el coeficiente de transferencia de calor por convección en la superficie externa es de 11 w/m²k y temperatura ambiente 21°C. Evalué x; L = 3m.

Solución.-

1. Diagrama de flujo

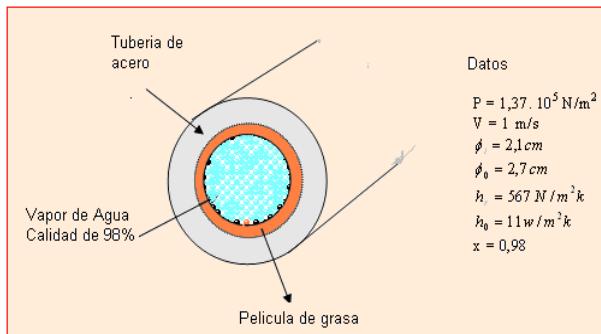


Figura N° 2.14 Tubería aislada donde fluye vapor por su interior

Fuente: Elaboración propia Ingº Alberto Emilio Panana Giro

2. De tablas de vapor saturado a $P = 0,137 \text{ MPa}$

$$T_r = 108,6^\circ C \quad V_F = 0,0011 \text{ m}^3 / \text{kg} \quad h_F = 455,3593 \text{ KJ / kg}$$

$$V_g = 1,2687 \text{ m}^3 / \text{kg} \quad h_g = 2689,3471 \text{ KJ / kg}$$

3. Cálculo de la entalpía de entrada

$$h_1 = h_F + x(h_g - h_F)$$

$$h_1 = 455,3593 + 0,98(2689,3471 - 455,3593)$$

$$h_1 = 455,3593 + 2189,3081$$

$$h_1 = 2644,6673 \text{ KJ / kg}$$

4. Cálculo del volumen específico a la entrada

$$V_1 = V_F + x(V_g - V_F)$$

$$V_1 = 0,0011 + 0,98(1,2687 - 0,0011)$$

$$V_1 = 0,0011 + 1,2422$$

$$V_1 = 1,2433 \text{ m}^3 / \text{kg}$$

5. Evaluación del flujo másico

$$m = Q \cdot \rho \quad m = V \cdot A \cdot (V_1)^{-1}$$

$$m = \frac{1m}{s} \pi (0,0105m)^2 \left(\frac{1kg}{1,2433m^3} \right)$$

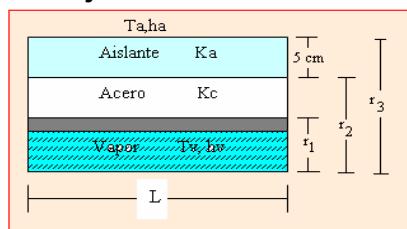
$$m = 2,78581 \cdot 10^{-4} \text{ kg / s}$$

6. Cálculo de la entalpía de entrada

$$H_1 = h_1 \cdot m \quad H_1 = 2644,6673 \times 2,78581 \cdot 10^{-4}$$

$$H_1 = 0,7368 \frac{\text{KJ}}{\text{s}} = 736,8 \text{ watt}$$

7. Realizando un corte transversal se tiene en el siguiente Diagrama de flujo:



$$K_a = 0,07788 \frac{w}{mk}$$

$$K_c = 43,27 w / mk$$

8. Cálculo de la cantidad de calor, cuando el tubo está descubierto

$$\frac{Q}{L} = \frac{T_v - T_a}{\frac{1}{2\pi r_1 h_v} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi K_c} + \frac{1}{2\pi r_2 h_a} + R_T} \quad \phi = 2r$$

$$\frac{Q}{L} = \frac{T_v - T_a}{\frac{1}{\pi(2,1 \cdot 10^{-2})567} + \frac{\ln(2,7/2,1)}{2\pi(43,27)} + \frac{1}{\pi(2,7 \cdot 10^{-2})(11)} + 0,18}$$

$$\frac{Q}{L} = 38,7822 \frac{w}{m}$$

9. Cálculo de la entalpía de salida para un tubo de 3 m de largo

$$\text{Si } L = 3\text{m} \quad Q = 206,3467 \text{ watt}$$

$$H_2 = H_1 - Q \quad H_2 = 736,8 - 206,3467$$

$$H_2 = 530,4533w$$

$$h_2 = \frac{H_2}{m}$$

$$h_2 = \frac{530,4533w}{2,78581 \cdot 10^{-4} \text{ kg / s}}$$

$$h_2 = 1904,1258 \frac{KJ}{Kg}$$

$$x = \frac{h_2 - h_F}{h_g - h_F} = \frac{1904,1258 - 455,3593}{2689,3471 - 455,3593}$$

$$x = 64,8551\%$$

10. Cálculo de la cantidad de calor perdido para la tubería con aislante

$$\frac{Q}{L} = \frac{T_v - Ta}{\frac{1}{2\pi r_1 h_v} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi K_c} + \frac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi K_a} + R_t}$$

$$e = 10\text{cm} \quad r_3 = r_2 + e = 2,7 + 5 = 7,7\text{cm}$$

$$\frac{Q}{L} = \frac{(108,6 - 21)^\circ C}{\frac{1}{\pi(2,1 \cdot 10^{-2})567} + \frac{\ln(2,7/2,1)}{2\pi(43,21)} + \frac{\ln(7,7/2,7)}{2\pi(0,07788)} + \frac{1}{\pi(7,7 \cdot 10^{-2})(11)} + 0,18}$$

$$\frac{Q}{L} = 32,14 \frac{w}{m}$$

11. Determinación de la entalpía de salida para la tubería con aislante y la calidad del vapor a la salida

$$\text{Si } L = 3\text{m} \quad Q = 96,4374 \text{ w}$$

$$H_2 = H_1 - Q = 736,8 - 96,4374 = 640,3625W$$

$$H_2 = 640,3625w$$

$$h_2 = \frac{H_2}{m} = \frac{640,3625w}{2,78581 \cdot 10^{-4} \text{Kg/s}} = 2298,658199 \text{Kj/kg}$$

$$x = \frac{h_2 - h_F}{h_g - h_F} = \frac{2381,5716 - 455,3593}{2689,3471 - 455,3593} = 0,8174$$

$$x = 81,76\%$$

2.4 PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 1

La conductividad calorífica de una lámina aislante varía con la temperatura. De acuerdo con la expresión:

$$k = 3,35 \times 10^{-4} T + 0,1179$$

Donde: T (K) y k (Kj/h.m.K).

Si el espesor de la lámina es de 0,10 m y las temperaturas a ambos lados de la misma son 673 y 373 K respectivamente, calcular:

- El flujo de calor a través de la lámina.
- La temperatura en un punto situado a 0,081 m del lado más frío.

Para las condiciones del sistema mostrado en la tabla, se produce una conducción de régimen estacionario unidimensional sin generación de calor. La conductividad térmica es 25 W/m.K y el espesor L = 0,5m. Determine las cantidades desconocidas para cada caso de la tabla siguiente:

Caso	T ₁	T ₂	dT / dC (K/m)	qx (W/m ²)
1	400K	300K		
2	100°C		-250	
3	80°C		200	
4		-5°C		4000
5	30°C			-3000

PROBLEMA 2

La ventana posterior de un automóvil se desempeña mediante el paso de aire caliente sobre su superficie interna.

- Calcular las temperaturas de las superficies interna y externa de una ventana de vidrio de 4 mm de espesor, siendo la temperatura del aire caliente $T_{\infty,int} = 40^{\circ}\text{C}$ y su coeficiente de convección $h_{int} = 30 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ y la temperatura del aire exterior $T_{\infty,ext} = -10^{\circ}\text{C}$ y su coeficiente de convección $h_{ext} = 65 \text{ W/m}^2 \text{ K}$

- b) Evalúe cualitativamente la influencia de $T_{\infty,ext}$ y h_{ext} sobre las temperaturas.

Datos: $k_{vidrio}(a 300K) = 1,4 \text{ W/m.K}$

Solución:

a) $T_{int} = 7,7^\circ C$ y $T_{ext} = 4,9^\circ C$

b) Ambas disminuyen al aumentar h_{ext} y aumentan al aumentar $T_{\infty,ext}$

PROBLEMA 3

En la ventana posterior del automóvil del problema anterior se instala como sistema para desempeñar su superficie interior un elemento de calentamiento consistente en una película transparente delgado con resistencias eléctricas. Al calentarse eléctricamente este dispositivo se establece un flujo de calor uniforme en la superficie interna.

- Calcular la potencia eléctrica por unidad de área de ventana necesaria para mantener la temperatura de la superficie interna a $15^\circ C$ cuando la temperatura del aire interior es $T_{\infty,int} = 25^\circ C$ y su coeficiente de convección $h_{int} = 10 \text{ W/m}^2\text{K}$. El aire exterior está en las mismas condiciones que en el problema anterior.
- Calcular la temperatura de la superficie externa de la ventana.
- Evalúe cualitativamente la influencia de $T_{\infty,ext}$ y h_{ext} sobre la potencia eléctrica.

Solución:

a) $P''_{elec} = 1,27 \text{ kW/m}^2$

b) $T_{ext} = 11,1^\circ C$

c) P''_{elec} aumenta al aumentar h_{ext} y disminuye al aumentar $T_{\infty,ext}$

PROBLEMA 4

Una casa tiene una pared compuesta de madera, aislante de fibra y tablero de yeso, como se indica en el esquema. En un día frío de invierno los coeficientes de transferencia de calor por convección son $h_{ext} = 60 \text{ W/m}^2\text{K}$ y $h_{int} = 30 \text{ W/m}^2\text{K}$. El área total de la superficie es de 350 m^2 .

Datos: Tablero de yeso: $k(a 300K) = 0,17 \text{ W/m.K}$

Propiedades termo-físicas de la fibra de vidrio:

T (K)	$\rho(kg / m^3)$	$k(W / m.K)$
300	16	0,046
300	28	0,038
300	40	0,035

Tablero de madera contra placada: k (a 300 K) = 0,12 W/m.K.

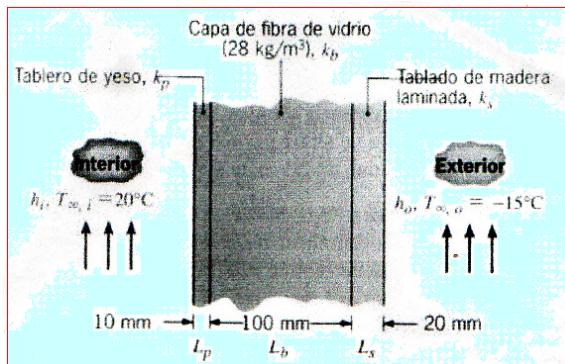


Figura N° 2.15 Pared plana aislada y sometido a convección interior y exterior

Fuente: Elaboración propia Ing° Alberto Emilio Panana Girio

- Determine una expresión simbólica para la resistencia térmica total de la pared incluyendo los efectos de convección.
- Determine la pérdida de calor total de la pared.
- Si el viento soplara de manera violenta elevando h_{ext} a 300 W/m².K, ¿Cuál sería el porcentaje de aumento relativo de la pérdida de calor?
- ¿Qué resistencia térmica influye en mayor medida sobre la pérdida de calor a través de la pared?

Solución: b. 4.214 W; c. 0, 45 %

c. La de la fibra de vidrio, que es el aislante y tiene la k menor.

PROBLEMA N° 5

Una hielera cuyas dimensiones exteriores son: 30cm x 40cm x 40cm está hecha de espuma de estireno ($K = 0.033 \frac{W}{m^2 \cdot C}$). Inicialmente la hielera está llena con 40 Kg de hielo a 0 °C y la temperatura de la superficie interior se puede tomar como 0 °C en todo momento, el calor de fusión del hielo a 0 °C es $\Delta H_f = 333.7 \frac{KJ}{kg}$ y el aire ambiente circundante está a 30°C. Descartando toda

transferencia de calor desde la base de 40cmx40cm de la hielera, determine cuánto tiempo transcurrirá para que el hielo que está dentro de ella se funda por completo, si las superficies exteriores de la misma están a 8°C

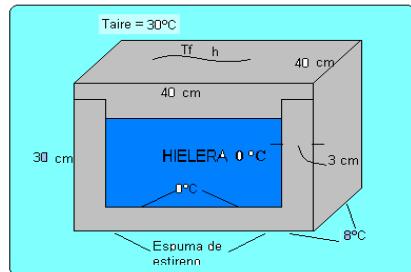


Figura N° 2.16 Hielera sometida a convección tanto interior y exterior

Fuente: Elaboración propia Ing° Alberto Emilio Panama Giro

PROBLEMA N° 6

La ventana posterior de un automóvil se desempeña mediante el paso del aire caliente sobre su superficie interior.

- Calcular las temperaturas de las superficies interna y externa de la ventana de vidrio de 4 mm de espesor, siendo la temperatura del aire caliente 40 °C y su coeficiente de convección $h = 30 \frac{W}{(m^2)K}$ (esto en el interior), y la temperatura del aire exterior es -10°C y su coeficiente de convección es $h = 65 \frac{W}{m^2 K}$.
- Evalúe cualitativamente la influencia de la temperatura del aire exterior y el coeficiente exterior sobre las temperaturas.

$$K(300K) = 1.4 \frac{W}{mK}$$

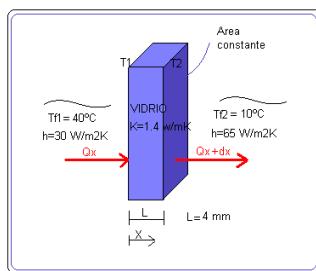


Figura N° 2.17 Ventana de vidrio sometida a convección interior y exterior

Fuente: Elaboración propia Ing° Alberto Emilio Panama Giro

PROBLEMA N° 7

Considere el caso de la conducción estable unidimensional a través de un material que tiene una sección transversal que disminuye linealmente desde el valor, A_0 en $X = 0$ hasta A_L en $X = L$. Si su superficie lateral esta aislado y las temperaturas en $X = 0$ y $x = L$ son T_0 y T_L respectivamente. La conductividad térmica del material es: $K = K_0 (1 + aT + b T^2)$, donde K_0 , a y b son constantes. Determinar el flujo de calor.

1. Diagrama de flujo

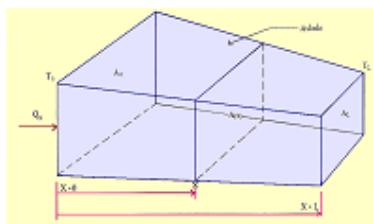


Figura N° 2.18 Sólido de área y conductividad térmica variable

Fuente: Elaboración propia Ing° Alberto Emilio Panana Giro

PROBLEMA N° 8

Un recipiente esférico de radio interior $r_1 = 2\text{m}$, radio exterior $r_2 = 2,1\text{ m}$ y conductividad térmica $k = 30 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$ está lleno de agua con hielo a 0°C . El recipiente está ganando calor por convección del aire circundante que está a $T_f = 25^\circ\text{C}$, con un coeficiente de transferencia de calor de $h = 18 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$. Si se supone que la temperatura de la superficie interior del recipiente es de 0°C

- Exprese la ecuación diferencial y las condiciones de frontera para la conducción unidimensional y estable de calor a través del recipiente.
- Obtenga una relación para la variación de la temperatura en él, resolviendo la ecuación diferencial.
- Evalúe la velocidad de la ganancia de calor del agua con hielo

CAPITULO III CONDUCCION CON FUENTES DE CALOR (Generación Interna de calor)

3.1 Generalidades

Entre las aplicaciones de la transferencia de calor se requiere realizar el análisis en aquellos donde existe la generación o absorción de calor dentro de un sistema, dentro de estos casos se puede encontrar en:

- Materiales a través de los cuales fluye corriente eléctrica.
- En reactores nucleares.
- Horno de Microondas.
- Industria de proceso químicos.
- Proceso de combustión,
- Esfuerzo térmico en el concreto durante su curado o secado, ya que se genera calor en el proceso de curado, procurando que ocurran diferencias de temperatura en la estructura.

En esta sección se considera estudiara a una pared plana, un cilindro sólido y esfera sólida, con fuentes de calor interna en forma uniforme:

$$\frac{Q_{gen}}{V} = q_o = \left[\frac{\text{Cantidad de energía}}{\text{unidad de tiempo y unidadad de volumen}} \right] = \left(W/m^3 \right) \text{ o } \left(Btu/h \cdot pie^3 \right)$$

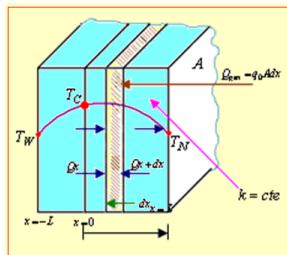
Q_{gen} = Cantidad de calor generado interno por unidadde tiempo = (W) o (BTU / h)

V = volumen del sólido = m^3 o pie^3

3.2 Pared Plana

Considere una placa delgada de cobre sumergida en un baño o temperatura constante igual a T_f . Suponga que circula una corriente eléctrica o través de la placa, provocando en esta una generación de calor uniforme (q_o) por unidad de tiempo y volumen.

El coeficiente de transferencia de calor por convección (h) en cada lado de la placa es el mismo, dando por resultado una temperatura (T_w) (temperatura de la pared) en ambos casos



- Para encontrar la distribución de temperatura en la placa, se debe conocer la Ecuación Diferencial apropiada.
- Haciendo un balance de energía en la placa de espesor (dx) y Área Transversal (A)

Figura 3.1 – Pared Plana con generación de Calor Uniforme

Fuente: Elaboración propia, Alberto Emilio panana Girio

- $$Q_x + Q_{gen} = Q_{x+dx} = Q_x + \frac{dQ_x}{dx} dx \quad (3.1)$$

- $$Q_{gen} = q_0^{\circ} Adx \quad (3.2)$$

- Reemplazando en 3:

$$-KA \frac{dT}{dx} + q_0^{\circ} Adx = -KA \frac{dT}{dx} - KA \frac{d^2T}{dx^2} dx \quad (3.3)$$

- Simplificando: $\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{q_0^{\circ}}{K} = 0$ Ecuación diferencial de 2do orden (3.4)

- Condiciones de Frontera:

$$\text{CF: 1} \quad x=0 \quad \frac{dT}{dx} = 0 \quad (3.5)$$

También se tiene que $+KA \frac{dT}{dx} \Big|_{x=-L} = \frac{1}{2}(q_0^{\circ} 2LA)$

$$-KA \frac{dT}{dx} \Big|_{x=+L} = \frac{1}{2}(q_0^{\circ} 2LA)$$

$$\begin{array}{lll} \text{CF: 2} & x=L & T=T_w \\ & x=-L & T=T_w \end{array} \quad (3.6)$$

Estas ecuaciones expresan el hecho de que la distribución de temperatura es simétrica con respecto al eje y ($x=0$).

- De la ecuación 4, separando variables e integrando se obtiene:

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{q_0^{\circ} x}{K} + C_1 \quad (3.7)$$

- Separando variables e integrando nuevamente

$$T_{(x)} = -\frac{q_0^{\circ} x^2}{2K} + C_1 x + C_2$$

- Aplicando la CF:1 $C_1 = 0$ (3.8)

- Con la CF:2

$$C_2 = T_w + \frac{q_0^{\circ} L^2}{2K} \quad (3.9)$$

- Reemplazando en $T_{(x)}$, C_1 y C_2 y Simplificando se tiene

$$T_{(x)} - T_w = \frac{q_0^{\circ}}{2K} (L^2 - x^2) \quad (\text{Distribución de temperatura}) \quad (3.10)$$

- La temperatura en el centro, se puede determinar en $x=0$ por lo tanto $T=T_c$

Reemplazando esta condición en la distribución de temperatura se obtiene: $T_c = T_w + \frac{q_o}{2K} L^2 = T_{\max}$ (3.11)

12. El flujo de calor se obtiene a partir de la ecuación de Fourier

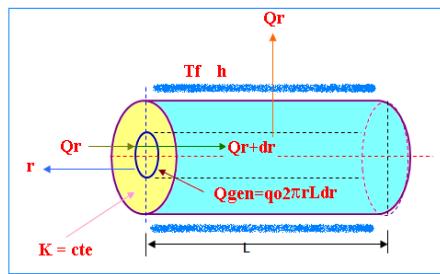
$$q_x = -K \frac{dT}{dx} \quad \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = -\frac{q_o \cdot L}{K} \quad (3.12)$$

$$q_x|_{x=L} = -K(-q_o L / K)$$

$$q_x|_{x=L} = q_o L \quad (3.13)$$

De igual forma la cantidad de calor se conduce para el otro lado, en $x = -L$

3.3 CILINDRO SÓLIDO



Sea el cilindro sólido de longitud L , que tiene una perdida de calor despreciable en los extremos, de $K = \text{cte}$, con generación interna de calor, la superficie exterior del cilindro se mantiene a una temperatura T_w (conocida)

Figura 3.2 Cilindro sólido con generación interna de Calor Uniforme

Fuente: Elaboración propia, Alberto Emilio Panana Giro

$$A = 2\pi rL \quad V = \pi r^2 L, \quad dV = 2\pi r L dr \quad (3.14)$$

3.3.1 Se determinará la ecuación diferencial que describe la distribución de temperaturas, haciendo un balance de energía en una cáscara cilíndrica de espesor (dr)

$$Q_r + Q_{gen} = Q_{r+dr} = Q_r + \frac{d}{dr}(Q_r)dr \quad (3.15)$$

1. Reemplazando los valores de calor en la ecuación anterior

$$\begin{aligned} 2. \quad & -K 2\pi r L \frac{dT}{dr} + q_o 2\pi r L dr = -K 2\pi r L \frac{dT}{dr} - K 2\pi L \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) dr \\ & \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{q_o r}{K} = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

3. Las condiciones de frontera para resolver la ecuación (16), son :

$$\text{CF: 1} \quad r=r_0 \quad T=T_w \quad (3.17)$$

$$\text{CF: 2} \quad r=0 \quad \frac{dT}{dr}=0 \quad (\text{simetría}) \quad (3.18)$$

4. Separando variables e integrando la ecuación N° 3.16, se tiene

$$r \frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}_o r^2}{2K} + C_1$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}_o r}{2K} + \frac{C_1}{r} \quad (3.19)$$

Separando variable e integrando nuevamente (19)

$$T = -\frac{\dot{q}_o r^2}{4K} + C_1 L_n r + C_2 \quad (3.20)$$

5. Las constantes de integración se evalúan con las condiciones de frontera, con la CF:2,

$$C_1 = 0 \quad (3.21)$$

6. Con la primera condición de frontera

$$T_w = -\frac{\dot{q}_o r_0^2}{4K} + C_2 \quad C_2 = T_w + \frac{\dot{q}_o r_0^2}{4K} \quad (3.22)$$

7. Reemplazando en (3.20), los valores de las constantes C1 y C2, y simplificando, se obtiene la distribución de temperatura

$$T = -\frac{\dot{q}_o r^2}{4K} + T_w + \frac{\dot{q}_o r_0^2}{4K} \quad T - T_w = \frac{\dot{q}_o}{4K} (r_0^2 - r^2) \quad (3.23)$$

La temperatura máxima o el centro, para $r = 0$ y $T = T_{\max}$

$$T_c = T_{\max} = T_w + \frac{\dot{q}_o r_0^2}{4K} \quad (3.24)$$

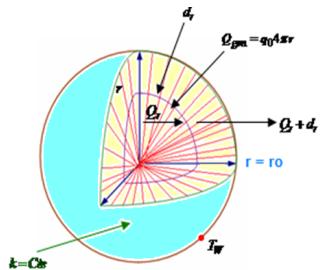
3.3.2 Cálculo del flujo de Calor

$$q_r|_{r=r_0} = -K \frac{dT}{dr} \quad \text{Como: } \frac{dT}{dr}|_{r=r_0} = -\frac{q_0 r_0}{2K} \quad (3.25)$$

Reemplazando se tiene

$$q|_{r=r_0} = -K \left(-\frac{q_0 r_0}{2K} \right) \quad q_r|_{r=r_0} = \frac{q_0 r_0}{2} \quad (3.26)$$

3.4 ESFERA SÓLIDA



- Considerar una esfera sólida con una fuente de calor distribuida, (q_0) uniformemente, de $K=$ constante y su superficie a una temperatura constante T_w .

Figura 3.3 Esfera sólida con generación interna de Calor Uniforme

Fuente: Elaboración propia, Alberto Emilio Panana Giro

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad dV = 4\pi r^2 dr \quad A = 4\pi r^2 \quad (3.27)$$

- 3.4.1 Se formulará la ecuación diferencial para lo cual se realizará un balance de energía en la cáscara esférica de espesor (dr)

$$Q_r + Q_{gen} = Q_r + \frac{d}{dr}(Q_r)dr \quad (3.28)$$

Q_{gen} = Calor generado por unidad de tiempo en la cáscara esférica de espesor dr y por área de la superficie $4\pi r^2$ y representa un incremento de energía de volumen $Q_{gen} = q_0 4\pi r^2 dr$

1. Reemplazando las cantidades de calor en el balance anterior

$$-K4\pi r^2 \frac{dT}{dr} + q_0 4\pi r^2 dr = -K4\pi r^2 \frac{dT}{dr} - K4\pi \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) dr \quad (3.29)$$

2. Simplificando, se obtiene la ecuación diferencial gobernante

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) + \frac{r^2 q_0}{K} = 0 \quad (3.30)$$

3. Esta ecuación diferencial es de segundo orden, requiere dos condiciones limítrofes para obtener su solución

$$CF: 1 \quad r = r_o \quad T = T_w \quad (3.31)$$

4. Debido a que (q_0) es uniforme a través de la esfera y T_w es constante sobre toda la superficie exterior de la esfera, es de esperar que la distribución de temperatura sea simétrica con respecto al centro de la esfera, por tanto la otra condición de frontera es:

$$CF: 2 \quad r = 0 \quad \frac{dT}{dr} = 0 \quad (3.32)$$

5. Separando variable (30) e integrando, se tiene:

$$r^2 \frac{dT}{dr} = -\frac{q^{\circ}r^3}{3K} + C_1$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{q^{\circ}r^2}{3K} + \frac{C_1}{r^2} \quad (3.33)$$

6. Separando variables de nuevo o integrando la relación anterior:

$$T = -\frac{q^{\circ}r^2}{6K} - \frac{C_1}{r} + C_2 \quad (3.34)$$

7. Aplicando la segunda condición en la frontera, a la ecuación (34)

$$0 = -0 + C_1 \quad C_1 = 0 \quad (3.35)$$

$$\text{O sea } T = -\frac{q^{\circ}r^2}{6K} + C_2$$

8. Aplicando la primera condición de frontera:

$$T_w = -\frac{q^{\circ}r_o^2}{6K} + C_2 \quad C_2 = T_w + \frac{q^{\circ}r_o^2}{6K} \quad (3.36)$$

9. Reemplazando los valores C_1 y C_2 en (3.35), se tiene:

$$T - T_w = \frac{q^{\circ}}{6K} (r_o^2 - r^2) \quad (3.37)$$

10. Se puede determinar la temperatura T_c en el centro de la esfera ($r=0$)

$$T_c = T_w + \frac{q^{\circ}r_o^2}{6K} \equiv T_{\max} \quad (3.38)$$

3.4.2 Flujo de calor

$$q_r = -K \frac{dT}{dx} \quad \left. \frac{dT}{dx} \right|_{r=r_o} = -\frac{q_0 r_0}{3K} \quad (3.39)$$

$$q_r = -K \left(-\frac{q_0 r_0}{3K} \right) = \frac{q_0 r_0}{3} \quad (3.40)$$

3.5 DETERMINACIÓN DE LA TEMPERATURA DE LA PARED

NOTA 1.- Puede suceder que algunos problemas no se conozca T_w , pero en cambio, q° , h y T_f (temperatura de fluido), son conocidas. En este estado estacionario, todo el calor generado en el sólido se debe transmitir por convección hacia fuera al fluido que lo rodea (si no fuera así, se tendría un crecimiento de la energía en el sólido, que daría por resultado un incremento de la energía interna del material que posteriormente requeriría un cambio de temperatura con respecto al

tiempo), se puede determinar T_w para las tres geometrías en la forma siguiente, si el coeficiente de transferencia de calor (h) es uniforme:

$$Q_{gen} = q_o^{\circ}V = h.S_{superficie}(T_w - T_f) \quad (3.41)$$

Donde:

V = Volumen de todo el cuerpo

$S_{superficie}$ = área de la superficie del cuerpo que transfiere calor por convección al fluido que se encuentra T_f

3.5.1 PARED PLANA DE ESPESOR 2L

- Calor total generado en la pared $Q_{gen} = q_o^{\circ}.A.2L$
- Calor que transfiere por convección la pared al fluido que lo rodea $Q_c = h.2A.(T_w - T_f)$, por tanto se tiene:

$$q_o^{\circ}.A.2L = h.2A.(T_w - T_f)$$

$$T_w = \frac{q_o^{\circ}L}{h} + T_f \quad (3.42)$$

3.5.2 CILINDRO DE LONGITUD (L) Y RADIO (r_0), donde ($L \gg r_0$)

- Calor total generado en el cilindro sólido ,
- $Q_{gen} = q_o^{\circ}\pi r_0^2 L$
- Calor transferido por convección del cilindro al fluido que lo rodea $Q_c = h.2\pi.r_0.L.(T_w - T_f)$
- Igualando estas expresiones

$$q_o^{\circ}\pi r_0^2 L = hL2\pi r_0(T_w - T_f)$$

$$T_w = \frac{q_o^{\circ}r_0}{2h} + T_f \quad (3.43)$$

3.5.3 ESFERA SOLIDA (de radio r_0)

- Energía total generado en la esfera, $Q_{gen} = q_o^{\circ}V = q_o^{\circ}\left(\frac{4}{3}\right)\pi r_0^3 \quad (3.44)$
- Calor que transfiere por convección la esfera al fluido que lo rodea

$$Qc = h \cdot 4\pi r_0^2 \cdot (T_w - T_f)$$

➤ Igualando estas expresiones

$$q_{\circ} \left(\frac{4}{3} \right) \pi r_0^3 = h 4 \pi r_0^2 (T_w - T_f) \quad (3.45)$$

$$T_w = \frac{\frac{q_{\circ}}{h} r_0}{3} + T_f \quad (3.46)$$

Se puede afirmar que:

1. Para la esfera y el cilindro, siempre ocurre la temperatura máxima en el centro de simetría, si la fuente de calor es uniforme y el coeficiente (h) es constante de toda la superficie.
2. Para una pared plana con una fuente de calor uniforme la temperatura máxima ocurre en el plano central solamente si los coeficientes conectivos y las temperaturas ambientales son iguales por ambas caras.

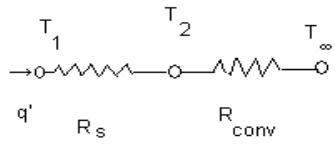
3.6 PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA Nº 01

1. Una varilla cilíndrica larga, de 200 mm de diámetro y conductividad térmica de 0,5 W/m.k, experimenta una generación volumétrica uniforme de calor de 24000 W/m³. La varilla está encapsulada en una manga circular que tiene un diámetro externo de 400 mm y una conductividad térmica de 4 W/m. K. La superficie externa de la manga se expone a un flujo de aire cruzado a 27 °C con un coeficiente de convección de 25 W/m².K
 - a. Realizar el circuito térmico.
 - b. Encuentre la temperatura en la interfaz entre la varilla y la manga y en la superficie externa.
 - c. ¿Cuál es la temperatura en el centro de la varilla?

Solución:

1. Para resolver el problema se harán algunas suposiciones:
 - La conducción en la varilla y la manga es radial unidimensional
 - Condiciones de estado estable.
 - La varilla presenta generación volumétrica uniforme.
 - La resistencia de contacto entre la varilla y la manga es despreciable.
2. El circuito térmico para la manga.



3. El calor generado por unidad de longitud y tiempo es:

$$q' = E'_{gen} = \frac{\dot{q}}{4} \pi D_i^2 = 24,000 \text{ W/m}^3 \times \pi (0.20m)^2 / 4 = 754.0 \text{ W/m}$$

4. La resistencia térmica por conducción a través de la manga

$$R'_s = \frac{\ln(\frac{r_2}{r_1})}{2p k_s} = \frac{\ln(400/20)}{2p \times 4 W/m.K} = 2.758 \times 10^{-2} m.K/W$$

5. Resistencia térmica por convección

$$R_{conv} = \frac{1}{hp D_2} = \frac{1}{25 W/m^2.K \times 0.400m} = 3.183 \times 10^{-2} m.K/W$$

6. Cálculo de la cantidad de calor a través del sistema (de la temperatura interior y la temperatura exterior de la manga, es

$$T_{(0)} = T_0 = \frac{qr_1^2}{4K_r} + T_1 = \frac{24,000 W/m^3 (0.100m)^2}{4 \times 0.5 W/m.K} + 71.8^\circ C$$

$$T_0 = 192^\circ C$$

$$T_1 = T_\infty + q'(R'_s + R'_{conv})$$

$$T_1 = 27^\circ C + 754 W/m (2.758 \times 10^{-2} + 3.183 \times 10^{-2}) K.m/W$$

$$T_1 = 71.8^\circ C$$

$$T_2 = T_\infty + q' R'_{conv} = 27^\circ C + 754 W/m \times 3.183 \times 10^{-2} m.K/W = 51.0^\circ C$$

7. Cálculo de la temperatura del centro de la varilla:

$$T_{(0)} = T_0 = \frac{qr_1^2}{4K_r} + T_1 = \frac{24,000 W/m^3 (0.100m)^2}{4 \times 0.5 W/m.K} + 71.8^\circ C = 192^\circ C$$

$$T_{(0)} = 192^\circ C$$

PROBLEMA 2

Un muro de espesor $2L = 40$ mm y conductividad térmica $k = 5$ W/m·K experimenta una generación volumétrica de calor q_o (W/m^3) mientras está sometido a un proceso de convección en sus dos superficies ($x = -L, x = L$) con un fluido a temperatura $T_f = 20$ °C. En condiciones de estado estacionario la distribución de temperaturas en el muro es de la forma $T(x) = a + bx + cx^2$, siendo $a = 82$ °C, $b = -210$ °C/m y $c = -2 \cdot 104$ °C/m². El origen de coordenadas se encuentra en el plano medio del muro.

- Calcular el valor de la generación volumétrica de calor q_o
- Calcular los valores de los flujos de calor en las dos superficies del muro, $q''(-L)$ y $q''(L)$.
- ¿Cómo están relacionados estos flujos de calor con la generación volumétrica de calor en el interior del muro?

Solución:

- Diagrama de flujo

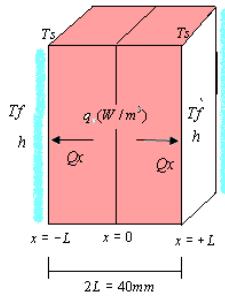


Figura 3.4 Pared sólida con generación interna de Calor Uniforme

Fuente: Elaboración propia, Alberto Emilio Panana Giro

- Se tiene que la ecuación diferencial gobernante:

$$k \frac{d^2T}{dx^2} + q_o = 0$$

- obtiene al resolver la ecuación de calor la ecuación anterior separando variables e integrando dos veces:

$$T(x) = -\frac{\dot{q}}{2k}x^2 + C_1x + C_2$$

4. Al comparar de (3) con la ecuación del enunciado: $T(x) = a + bx + cx^2$
Se tiene que:

$$-\frac{\dot{q}}{2k} = c = -2 \cdot 10^4 \text{ } ^\circ\text{C/m}^2$$

5. Despejando: $q_o = 2 \times 10^5 \text{ W/m}^3$
6. Aplicando la ley de Fourier en los dos extremos de la pared:

$$q''(x = L) = -k \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = 5.050 \text{ W/m}^2 \text{ y } q''(x = -L) = -k \frac{dT}{dx} \Big|_{x=-L} = -2.950 \text{ W/m}^2.$$

7. Toda la energía generada en la pared ha de salir por las dos superficies

$$\dot{q} \cdot Vol = \dot{q} \cdot A \cdot 2L = |q''(x = L)| \cdot A + |q''(x = -L)| \cdot A \Rightarrow 2 \cdot 10^5 \cdot 0.04 = 5.050 + 2.950 = 8.000 \text{ W/m}^2.$$

PROBLEMA 3

Considere un alambre largo usado como resistencia con radio $r_1 = 0,3 \text{ cm}$ y conductividad térmica $k_{\text{alambre}} = 18 \text{ W/m. } ^\circ\text{C}$ en el cual se genera calor de manera uniforme a una razón constante de $q_o = 1,5 \text{ W/cm}^3$, como resultado del calentamiento por resistencia. El alambre está recubierto con una capa gruesa de plástico de $0,4 \text{ cm}$ de espesor, cuya conductividad térmica es $k_{\text{plástico}} = 1,8 \text{ W/m. } ^\circ\text{C}$. La superficie exterior de la cubierta de plástico pierde calor por convección hacia el aire ambiente que está a $T_f = 25 \text{ } ^\circ\text{C}$, con un coeficiente combinado promedio de transferencia de calor de $h = 14 \text{ W/m}^2. ^\circ\text{C}$ Al suponer una transferencia unidimensional de calor, determine en condiciones estacionarias:

- La temperatura en el centro del alambre.
- La temperatura en la inter-fase alambre – capa de plástico.
- La temperatura superficial del plástico

Solución.-

- Diagrama de flujo

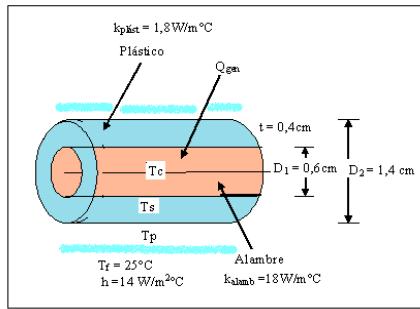


Figura 3.5 Alambre cilíndrico aislado sólida con generación interna de Calor Uniforme

Fuente: Elaboración propia, Alberto Emilio Panana Giro

2. Sea:

T_c = temperatura en el centro del alambre

T_s = Temperatura en la interfase alambre – plástico

T_p = temperatura superficial del plástico

K₁ = conductividad térmica del alambre

K₂ = conductividad térmica del plástico

T' = temperatura en función del radio para el alambre

T'' = temperatura en función del radio para el plástico

3. Cálculos en el alambre

3.1 Ecuación diferencial de conducción de calor con generación interna de calor

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{q_o}{k} \quad k = \text{constante}$$

3.2 Separando variables e integrando dos veces, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dr} &= -\frac{q_o r}{2k} + \frac{C_1}{r} \\ T' &= -\frac{q_o r^2}{4k} + C_1 \ln r + C_2 \end{aligned}$$

3.3 Condiciones de frontera para evaluar las constantes de integración

$$CF : 1 \quad r = 0 \quad \frac{dT}{dr} = 0$$

$$CF : 2 \quad r = r_1 \quad T = T_s$$

3.4 Evaluando se tiene; $C_1 = 0$; $C_2 = Ts + \frac{q_o r_1^2}{4k_1}$

3.5 Distribución de temperatura para el alambre

$$T = Ts + \frac{q_o}{4k_1} (r_1^2 - r^2) \quad (\text{i})$$

4 Cálculos en el plástico

4.1 Ecuación diferencial de conducción de calor a través del plástico

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

4.2 Separando e integrando dos veces

$$\frac{dT}{dr} = \frac{C_3}{r}; \quad T = C_3 \ln r + C_4$$

4.3 Condiciones de frontera para evaluar las constantes de integración

$$CF : 3 \quad r = r_1 \quad T = Ts$$

$$CF : 4 \quad r = r_2 \quad -k \frac{dT'}{dr} = h(T' - T_f)$$

4.4 Evaluando las constantes se tiene:

$$C_4 = Ts - C_3 \ln r_1 \quad C_3 = \frac{T_f - Ts}{\ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{k_2}{hr_2}}$$

4.5 Reemplazando y simplificando se tiene la siguiente distribución de temperaturas

$$T' = Ts + \left(\frac{\frac{T_f - Ts}{\ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{k_2}{hr_2}}}{\frac{T_f - Ts}{\ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{k_2}{hr_2}}} \right) \ln \frac{r}{r_1} \quad (\text{ii})$$

5 En la interface alambre - plástico la cantidad de calor intercambiado

$$-k_1 \frac{dT'}{dr} \Big|_{r=r_1} = -k_2 \frac{dT''}{dr} \Big|_{r=r_1} = Q_{\text{gen}}$$

6. El calor generado en el alambre es igual al que se conduce a la superficie del mismo, igual al que se conduce a través del plástico y es igual al transferido por convección al fluido.

$$\frac{q_o r_1}{2} = -k_p \frac{dT''}{dr} ; \quad \frac{dT''}{dr} = \left(\frac{T_f - T_s}{\ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{k_p}{h r_2}} \right) \times \frac{1}{r_1}$$

7. Reemplazando y despejando, Ts

$$T_s = \frac{q_o r_1^2}{2k_p} \left(\ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{k_p}{h r_2} \right) + T_f$$

8. Calculo de la temperatura de la Inter-fase (Ts)

$$T_s = \frac{1,5 \times 10^6 \times (0,003)^2}{4 \times 1,8} \left(\ln \frac{0,7}{0,3} + \frac{1,8}{14 \times 0,007} \right) + 25$$

$$T_s = 97,0549 \sim 97,1^\circ C$$

9. Cálculo de la temperatura en el centro, Tc

$$T_c = 97,1 + \frac{1,5 \times 10^6}{4 \times 18} \times (0,003)^2$$

$$T_c = 97,28 \sim 97,3^\circ C$$

10. Cálculo de la temperatura superficial, Tp, de la relación (ii)

$$T_p = 97,1 + \left(\frac{25 - 97,1}{\ln \frac{0,7}{0,3} + \frac{1,8}{14 \times 0,007}} \right) \ln \frac{0,7}{0,3}$$

$$T_p = 93,92^\circ C$$

PROBLEMA Nº 04

Una placa plana cuyo espesor es 10 cm. genera calor a razón de $30000 \frac{w}{m^3}$, cuando se hace pasar una corriente eléctrica a través de ella, una de las caras de la pared esta aislada y la otra esta expuesta al aire con temperatura de $25^\circ C$. Si el coeficiente convectivo de transferencia de calor entre el aire y la superficie de la placa es $h = 50 \frac{w}{m^2 K}$, y la conductividad térmica del material $K = 3 \frac{w}{mK}$. Determine:

- a) El perfil de temperatura en función de la distancia x.
- b) La temperatura máxima de la pared.

Solución:

1. Diagrama De flujo

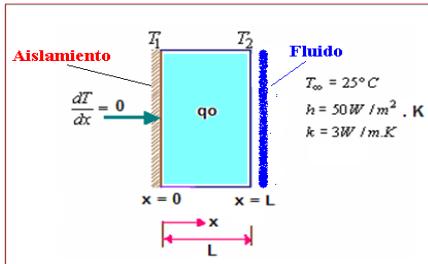


Figura 3.6 Pared con superficies una aislada y otra expuesto a un fluido con generación interna de Calor Uniforme

Fuente: Elaboración propia, Alberto Emilio Panana Giro

1. Ecuación diferencial gobernante

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{q_o}{K} = 0$$

2. Separando variables e integrando 2 veces

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{q_o}{K}x + C_1 ; \quad T = -\frac{q_o}{2K}x^2 + C_1x + C_2 ;$$

Las constantes C_1 y C_2 evaluadas a la C.F

$$\text{CF: 1} \quad x=0 \quad \frac{dT}{dx} = 0$$

$$\text{CF: 2} \quad x=L \quad -K \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = h(T_x - T_{\infty})$$

3. Los valores de las constantes son:

$$C_1 = 0$$

$$K \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} + hT_{(x)} \Big|_{x=L} = hT_{\infty}$$

$$\frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = -\frac{q_o}{k}L ; \quad T_{(x)} \Big|_{x=L} = -\frac{q_o}{2k}L^2 + C_2$$

Reemplazando las relaciones en la condición de frontera y simplificando

$$K\left(-\frac{q_o}{k}L\right) + h\left(-\frac{q_o}{2k}L^2 + C_2\right) = hT^\infty$$

$$C_2 = T^\infty + \frac{q_o L}{h} + \frac{q_o}{2k}L^2 = T^\infty + \frac{q_o L^2}{2k}\left(1 + \frac{2k}{hL}\right)$$

4. El perfil de temperatura (Reemplazando C_1 y C_2)

$$T = T^\infty + \frac{qL^2}{2k} \left[1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2 + \frac{2k}{hL} \right]$$

5. Operando las cantidades en el perfil y simplificando

$$T = 25 + \frac{30000}{2x3}(0.1)^2 \left[1 - \left(\frac{x}{0.1}\right)^2 + \frac{2x3}{50x0.1} \right]$$

$$T = 135 - 5000x^2 \quad \text{Distribución de temperatura}$$

6. La T_{\max} estará cuando $\frac{dT}{dx} = 0$

$$\frac{dT}{dx} = -5000(2x) = 0, \text{ estará en, } x = 0$$

$$7. T_{\max} = 135 - 5000(0) \quad T_{\max} = 135$$

PROBLEMA 5

Dos Grandes placas de acero a 90°C y 70°C están separadas por una barra de acero de 0.3 m de largo y 2.5 cm de diámetro. La barra está soldada en cada placa. El espacio entre las placas se rellena de aislante que también aisla la circunferencia de la varilla. Debido al diferencial de voltaje entre ambas, fluye corriente a través de la barra, y se disipa energía eléctrica a razón de 12 W. Calcule:

- La temperatura máxima en la barra y la razón de flujo de calor en cada extremo.
- Verifique los resultados comparando la razón neta del flujo de calor en ambos extremos con la razón total de generación de calor.

Dato: Conductividad del acero $K_{\text{acero}}=14.4 \text{ W/m}^\circ\text{C}$.

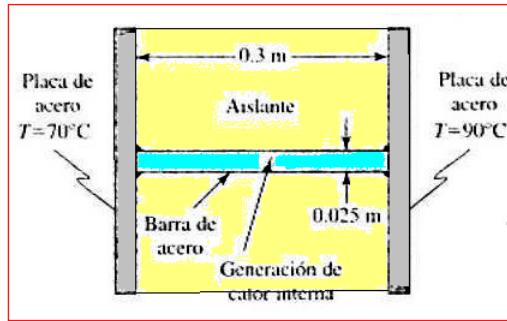


Figura 3.7 Barra de acero conectada a placas en sus extremos, con su superficie aislada y con generación interna de Calor Uniforme

Fuente: Elaboración propia, Alberto Emilio Panama Giro

Solución:

1. Cálculo del calor generado por unidad de volumen y por unidad de tiempo $Q_{gen} = q_0 x V$

$$12w = q_0 \left[\frac{\pi x 0.025^2 x 0.3}{4} \right] m^3$$

$$q_0 = 81487.33086 w/m^3$$

2. Ecuación diferencial gobernante

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{q_0}{K} = 0$$

3. Separando variables e integrando 2 veces:

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{q_0}{K} x + C_1$$

$$T = -\frac{q_0 x^2}{2K} + C_1 x + C_2 \dots \dots \dots \quad (\alpha)$$

4. Condición de frontera

$$\text{C.F.1.} \quad x = 0 \quad T = T_1 = 70^\circ\text{C} \quad \Rightarrow \quad C_2 = T_1 = 70^\circ\text{C}$$

$$\text{C.F.2.} \quad x = L = 0.3 \quad T = T_2 = 90^\circ\text{C}$$

$$T_2 = -\frac{q_0 L^2}{2K} + C_1 L + T_1$$

$$C_1 = \frac{(T_2 - T_1) - \frac{q_0 \cdot L^2}{2K}}{L} \quad C_2 = \frac{T_2 - T_1}{L} - \frac{q_0 L}{2K}$$

Reemplazando C_1 y C_2 en (α)

$$T = -\frac{q_0}{2K}x^2 + \left[\frac{T_2 - T_1}{L} + \frac{q_0 \cdot L}{2K} \right]x + T_1$$

$$T = -\frac{q_0}{2K}(x^2 - Lx) + \left(\frac{T_2 - T_1}{L} \right)x + T_1$$

$$T = \frac{-81487.33086(x^2 - 0.3x)}{2(14.4)} + \left(\frac{90 + 70}{0.3} \right)x + 70$$

$$T = -2829.42121x^2 + 915.493029x + 70$$

5. La temperatura máxima se encuentra cuando $x = 0.1617$ por la condición

$$\frac{dT}{dx} = 0 \quad \frac{dT}{dx} = -2(2829.4212)x^2 + 915.493029 = 0$$

$$x = 0.1617$$

$$T_{máx} = -2829.42121(0.1617)^2 + 915.4930298(0.1617) + 70$$

$$T_{máx} = 144.05^{\circ}C$$

6. Flujo de calor

$$\frac{Q_x}{A} = q_x = -K \frac{dT}{dx}$$

➤ Para X=0.3

$$q_x|_{x=0.3} = -K \frac{dT}{dx}|_{x=0.3} \dots \dots \dots \text{ ()}$$

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dx}|_{x=0.3} &= \frac{-81487.33086w/m^3 \times 0.3m}{14.4w/m^{\circ}C} + \left(\frac{90^{\circ}C - 70^{\circ}C}{0.3m} \right) + \left(\frac{81487.33086w/m^3 \times 0.3m}{2 \times 14.4w/m^{\circ}C} \right) \\ \frac{dT}{dx}|_{x=0.3} &= -782.1596 \frac{{}^{\circ}C}{m} \end{aligned}$$

7. Remplazando en ()

$$q_x|_{x=0.3} = -\left(14.4 \frac{w}{m^{\circ}C}\right)x\left(-782.1596 \frac{{}^{\circ}C}{m}\right)$$

$$q_x|_{x=0.3} = 11263.0996 w/m^2$$

8. Calculo del flujo de calor

$$Q_x|_{x=0.3} = q_x|_{x=0.3} xA$$

$$Q_x|_{x=0.3} = \left(11263.0996 \frac{w}{m^2}\right)x\left(\frac{\pi}{4}x0.025^2\right)m^2$$

$$Q_x|_{x=0.3} = 5.52876 w$$

9. Para X=0

$$q_x|_{x=0} = -K \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} \dots \dots \dots \quad ()$$

$$\frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = -\frac{q_0 x}{K} + \frac{T_2 - T_1}{L} + \frac{q_0 L}{2K}$$

$$\frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = \left(\frac{90^{\circ}C - 70^{\circ}C}{0.3m}\right) + \left(\frac{81487.33086 w/m^3 x 0.3m}{2 \times 14.4 w/m^{\circ}C}\right)$$

$$\frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = 915.493020 \frac{{}^{\circ}C}{m}$$

10. Reemplazando en ()

$$q_x|_{x=0} = -\left(14.4 \frac{w}{m^{\circ}C}\right)x\left(915.493020 \frac{{}^{\circ}C}{m}\right)$$

$$q_x|_{x=0} = -13183.099 w/m^2$$

11. Calculando el Flujo de Calor

$$Q_x|_{x=0} = q_x|_{x=0} . A$$

$$Q_x|_{x=0} = \left(-13183.099 \frac{w}{m^2}\right) \cdot \left(\frac{\pi}{4} \cdot 0.025^2\right)$$

$$Q_x|_{x=0} = -6.47123 w$$

12. Flujo de calor neto

$$Q_x = |Q_x|_{x=0.3} + |Q_x|_{x=0}$$

$$Q_x = |5.52876w| + |-6.47123w|$$

$$Q_x = 11.999w$$

13. Comparando el flujo de calor total con el flujo de calor por generación

$$Q_x \approx Q_{gen}$$

$$11.999w \approx 12w$$

PROBLEMA Nº 06

Un cilindro sólido con generación interna de calor uniforme de 2 cm. de diámetro, sus extremos se encuentran a las temperaturas siguientes en $x_1 = 0$ $T_1 = 400^\circ C$ y en $x_2 = 3m$ $T_2 = 0^\circ C$ su superficie exterior se encuentra aislada, la conductividad térmica del cilindro es $100 \frac{W}{WK}$, si su temperatura máxima se alcanza a $x = 0.8m$ del extremo inicial, determinar:

- a) La temperatura máxima.
- b) La generación interna de calor.
- c) Los flujos de calor en $x = 0$ y $x = 3m$.
- d) Realizar un diagrama $T_{(vs)}$ longitud del cilindro.

Solución:

1. Diagrama de flujo

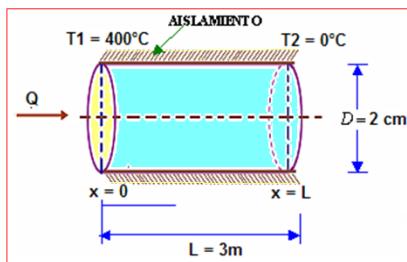


Figura 3.8 Cilindro sólida con generación interna de Calor Uniforme, con superficie aislada

Fuente: Elaboración propia, Alberto Emilio Panana Giro

2. Ecuación diferencial gobernante Sistema Unidimensional con generación de calor

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{q_o}{K} = 0$$

3. Separando variable e integrando

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{q_o}{K}x + C_1 \quad (2)$$

4. Separando variables e integrando nuevamente, de (2)

$$T = -\frac{q_o}{2K}x^2 + C_1x + C_2 \quad (3)$$

5. Las constantes C_1 y C_2 se pueden evaluar para las condiciones de frontera.

$$\text{CF: 1} \quad x_1=0 \quad T_1 = 40^\circ C$$

$$\text{CF: 2} \quad x_2=3 \quad T_2 = 0^\circ C$$

6. Reemplazando los CF se tiene se halla C_1 y C_2 :

$$C_2 = 400^\circ C$$

$$0 = -\frac{q_o}{2K}x^2 + C_1x + C_2 = -\frac{9 \times q_o}{2 \times 100} + 3C_1 + 400$$

$$C_1 = \frac{9 \times q_o}{3 \times 200} - 133,333 = 0,015q_o - 133,333$$

7. Reemplazando C_1 y C_2 en T Ecuación (3)

$$T = -\frac{q_o}{2(100)}x^2 + (0,015q_o - 133,333)x + 400$$

Perfil de Temperatura

8. La temperatura máxima (T_{\max}), se encuentra cuando $x = 0.8m$, por la condición de máximo: $\frac{dT}{dx}|_{x=0.8} = 0$

8.1 Hallamos: $\frac{dT}{dx}$ de la ecuación 6. se tiene

$$0 = -\frac{q_o}{100}(0.8) + 0,015q_o - 133,333$$

$$q^\circ = 19047.57 \frac{W}{m^3}$$

8.2 $T_{\max} \Big|_{x=0.8} =$

$$T_{\max} = -\frac{19047.57}{2(100)}(0.8)^2 + [0.015(19047.57) - 133.333]0.8 + 400$$

$$T_{\max} = 460.95^\circ C$$

9. Calculo del flujo de calor en $x = 0$ y $x = 3$

9.1 $Q \Big|_{x=0} = -KA \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0}$

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{q^\circ}{100}x + 0.015q^\circ - 133.333$$

$$Q_x = -K \left(-\frac{q^\circ}{100}x + 0.015q^\circ - 133.333 \right) \left(\frac{\pi D^2}{4} \right)$$

$$Q_x = \left(\frac{Kq^\circ}{100}x - K(0.015)q^\circ + 133.333K \right) \frac{\pi D^2}{4}$$

9.2 Con $x=0$

$$Q \Big|_{x=0} = \left[-100(0.015)19047.57 + 133.333(100) \right] \frac{\pi(0.02)^2}{4} ; \quad Q \Big|_{x=0} = -4.787$$

$$Q \Big|_{x=3} = \left[\frac{100(19047.57)}{100} - 100(0.015)19047.57 + 133.333(100) \right] \frac{\pi(0.02)^2}{4}$$

$$Q \Big|_{x=3} = 13.16$$

10. Comprobación

$$q_o V = |q|_{x=0} + |q|_{x=3} = 17.947 \quad |q_o V| = 19047.57 \times \frac{\pi}{4}(0.02) \times 3 = 17.95$$

11. Datos para la Grafica T(vs)x

T	400		460.95					0
X	0	0.5	0.8	1	1.5	2	2.5	3

Problema N°7

Un cable eléctrico de 1,4 m de largo y 0,2 cm de diámetro es extendido a través de una habitación que se mantiene a 20°C. En el cable se genera calor como resultado de la disipación de la energía eléctrica, al medirse la temperatura de la superficie del cable, resulta ser de 240°C, en condiciones de operación estacionaria. Asimismo al medirse el voltaje y la corriente eléctrica en el cable, resulta ser de 110 V y 3 A, respectivamente. Si se ignora cualquier transferencia de calor por radiación, determine:

- El coeficiente de transferencia de calor por convección para la transferencia de calor entre la superficie externa del cable y el aire de la habitación. Si el cable es de cobre de $k=401\text{W/mK}$ cual es su temperatura en el centro.

Diagrama de flujo:

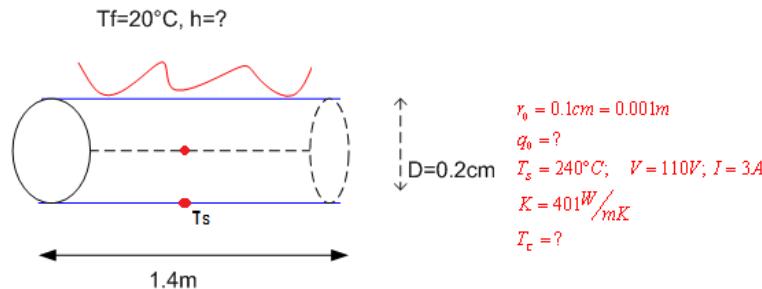


Figura 3.9 Cable eléctrico con generación interna de Calor Uniforme

Fuente: Elaboración propia, Alberto Emilio Panama Giro

Solucion.-

1. Ecuación diferencial gobernante:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{q_0}{k} = 0$$

2. Separando variables e integrando dos veces, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dx} &= -\frac{q_0 r}{2k} + \frac{C_1}{r} \\ T &= -\frac{q_0 r^2}{4k} + C_1 \ln r + C_2 \end{aligned}$$

3. Condiciones de frontera para evaluar las constantes de integración

$$CF : 1 \quad r = r_0 \quad T = T_s$$

$$CF : 2 \quad r = 0 \quad \frac{dT}{dr} = 0$$

4. Evaluando las constantes de integración

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = T_s + \frac{q_0 r_0^2}{4k}$$

5. Reemplazando las constantes de integración se tiene la distribución de temperaturas, y evaluando la temperatura en el centro, se tiene:

$$T = T_s + \frac{q_0}{4k} (r_0^2 - r^2)$$

Cuando: $r = 0 \quad T = T_c$; la temperatura en el centro es:

$$T_c = T_s + \frac{q_0}{4k} r_0^2$$

6. Por balance de energía

$$Q_{gen} = Q_K = Q_C = q_0 \pi r_0^2 L = h 2 \pi r_0 L (T_s - T_f)$$

$$\frac{q_0 r_0}{2} = h(T_s - T_f) \rightarrow h = \frac{q_0 r_0}{2(T_s - T_f)}$$

7. Cálculo de la cantidad de calor generado interno por unidad de volumen y unidad de tiempo

$$P = V \cdot I = 110 \times 3 = 330W \quad V = \text{voltaje}$$

$$q_0 = \frac{P}{V} = \frac{330W}{\pi r^2 \times L} = \frac{330W}{\pi (0.001m)^2 \times 1.4m} \quad V = \text{volumen}$$

$$q_0 = 75030012.01 \text{ W/m}^3$$

8. Cálculo de la temperatura en el centro y el coeficiente de transferencia de calor por convección

$$T_c = 240 + \frac{75030012.01}{4 \times} (0.001)^2$$

$$T_c = 240.0467768^\circ C$$

$$h = \frac{75030012.01 \times 0.001}{2(240 - 20)} = 170.4865 \text{ W/m}^2 \text{ }^\circ C$$

3.7 PROBLEMAS PROPUESTOS

P.3.7.1 En un reactor nuclear, barras cilíndricas de uranio de 1 cm de diámetro, enfriadas por agua desde fuera, sirven como combustible. El calor se genera uniformemente en las barras ($k= 29,5 \text{ W/m.}^{\circ}\text{C}$) a razón de $4 \times 10^7 \text{ W/m}^3$. Si la temperatura de La superficie exterior de las barras es $220 \text{ }^{\circ}\text{C}$, determine la temperatura en su centro.

P3.7..2 Una resistencia eléctrica de alambre de 2 kW y 6 m de largo está hecha de acero inoxidable de 0,2 cm de diámetro ($k=15,1 \text{ W/m.}^{\circ}\text{C}$) La resistencia de alambre opera en un medio ambiente a $20 \text{ }^{\circ}\text{C}$. con un coeficiente de transferencia de calor de $175 \text{ W/m}^2 \cdot {}^{\circ}\text{C}$ en la superficie exterior. Determine la temperatura superficial del alambre:

- Usando una relación aplicable.
- Planteando la ecuación diferencial apropiada y resolviéndola.

P.3.7.3 Considere una pieza esférica homogénea de material radiactivo de radio $r_0 = 0,04 \text{ m}$ que está generando calor a una razón constante de $q_o = 4 \times 10^7 \text{ W/m}^3$. El calor generado se disipa hacia el medio estacionario. La superficie exterior de la esfera se mantiene a una temperatura uniforme de $80 \text{ }^{\circ}\text{C}$. y la conductividad térmica de la esfera es $k = 15 \text{ W/m.}^{\circ}\text{C}$. Si se supone una transferencia de calor unidimensional en estado estacionario.

- Exprese la ecuación diferencial y las condiciones de frontera para la conducción de calor a través de la esfera.
- Obtenga una relación para la variación de la temperatura en ella, resolviendo la ecuación diferencial.
- Determine la temperatura en el centro de la misma.

P.3.7.4 El exterior de un hilo de cobre de 2 mm de diámetro está expuesto a un entorno convectivo con $h = 5000 \text{ W/m}^2 \cdot {}^{\circ}\text{C}$ y $T_f = 100 \text{ }^{\circ}\text{C}$. ¿Qué corriente eléctrica debe pasar a través del hilo para que la temperatura en el centro sea de $150 \text{ }^{\circ}\text{C}$? $K = 324 \text{ W/m.}^{\circ}\text{C}$

P3.7.5 Considere un muro blindado para un reactor nuclear. El muro recibe un flujo de rayos gamma de modo que dentro del muro se genera calor de acuerdo con la relación : $q = q_o e^{-ax}$, donde q_o es la generación de calor en la cara interna del muro expuesto al flujo de rayos gamma y (a), es una constante. Utilizando esta relación para la generación de calor, obténgase una expresión para la distribución de temperatura en una pared de espesor (L), donde las temperaturas interior y exterior se mantienen a T_i y

To respectivamente. Obténgase también una expresión para la temperatura máxima de la pared. Y el flujo de calor en la superficie.

P3.7.6 Un reactor nuclear de altas temperaturas enfriado por gas consiste en una pared cilíndrica compuesta, en la cual un elemento de combustible de torio ($k=57 \text{ W/m.K}$), se encapsula en grafito ($k= 3 \text{ W/m.K}$) y para la cual fluye helio gaseoso por un canal anular de enfriamiento. Considere condiciones para las que la temperatura del helio es $T_f = 600 \text{ K}$ y el coeficiente de convección en la superficie externa del grafito es $h = 2000 \text{ W/m}^2\text{.K}$.

Si se genera energía térmica de manera uniforme en el elemento de combustible a una rapidez $q_o = 108 \text{ W/m}^3$. ¿Cuáles son las temperaturas T_1 y T_2 en las superficies interna y externa respectivamente del elemento de combustible?

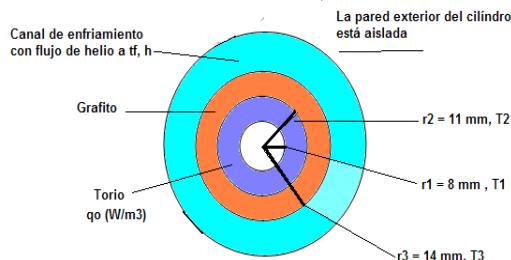


Figura 3.10 Corte transversal del elemento cilíndrico de un reactor nuclear con generación interna de Calor Uniforme

Fuente: Elaboración propia, Alberto Emilio Panana Giro

P3.7.7 El siguiente sistema esta compuesto por tres planos generadores de calor, un extremo se encuentra aislado perfectamente.

- Calcular el $\left(\frac{q}{A}\right)$ en el extremo libre
- Encontrar las temperaturas interfaciales (T_1, T_2, T_3, T_4)

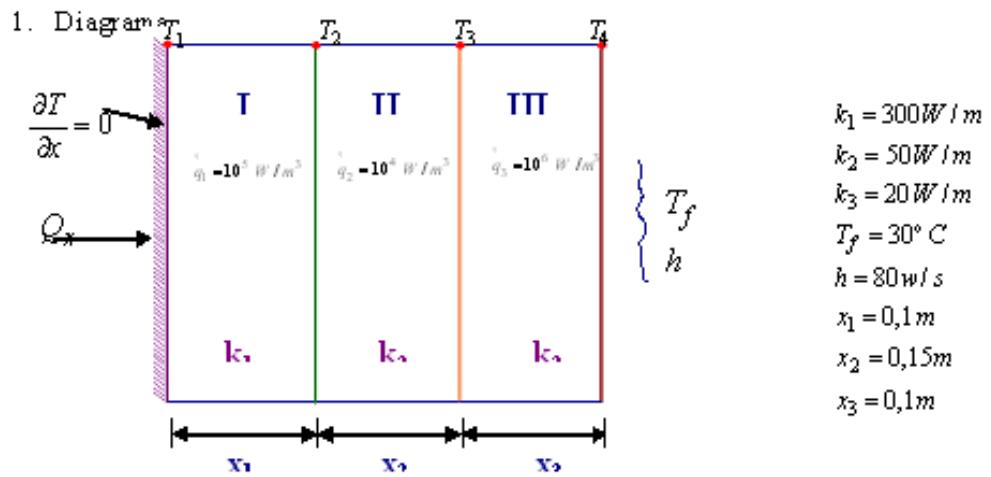


Figura 3.11 Sistema planos en serie con generación interna de Uniforme

Fuente: Elaboración propia, Alberto Emilio Panama Giro

IV. SUPERFICIES EXTENDIDAS (ALETAS)

4.1 INTRODUCCION

La transferencia de calor por convección entre una superficie y el fluido que la rodea puede aumentarse adicionando a la superficie, fajas delgadas de metal llamadas aletas. Para la transferencia de calor se fabrica, una gran variedad de aletas de diferentes formas geométricas

Cuando en una placa o de un tubo se transfiere calor por convención, la superficie (interior o exterior), provista de aletas es generalmente aquella en la cual el fluido de contacto es aquel cuyo coeficiente de transferencia de calor es menor.

4.2 FUNDAMENTO DE LA TRANSFERENCIA DE CALOR EN SUPERFICIES EXTENDIDAS (ALETAS)

4.2.1 Aletas

Se usan las aletas o superficies extendidas con el fin de incrementar la razón de transferencia de calor de una superficie, aumenta el área total disponible para la transferencia de calor.

Las aletas pueden ser de sección transversal rectangular, como tiras que se anexan a lo largo de un tubo, se les llama **aletas longitudinales**, o bien discos anulares concéntricos alrededor de un tubo, son las **aletas circunferenciales**. El espesor o el área de la sección transversal de una superficie extendida pueden ser uniformes o variables

Se tienen superficies extendidas, por ejemplo las superficies de enfriamiento de los componentes electrónicos, o en los cilindros de los motores, en los tubos del condensador de un equipo de refrigeración.

4.2.2 Ecuación Diferencial Gobernante

Para determinar la transferencia de calor asociada con una aleta, se debe primero obtener la distribución de temperaturas a lo largo de la aleta. Para tal efecto se ha de formular un balance de energía sobre un elemento diferencial apropiado, en la figura Fig. N°2, en el se muestra, una aleta anexada a una superficie primaria, así como las coordenadas, nomenclatura necesaria para derivar la ecuación de energía de una aleta, en estado estable, el calor fluye de una dimensión, sin generación de calor.

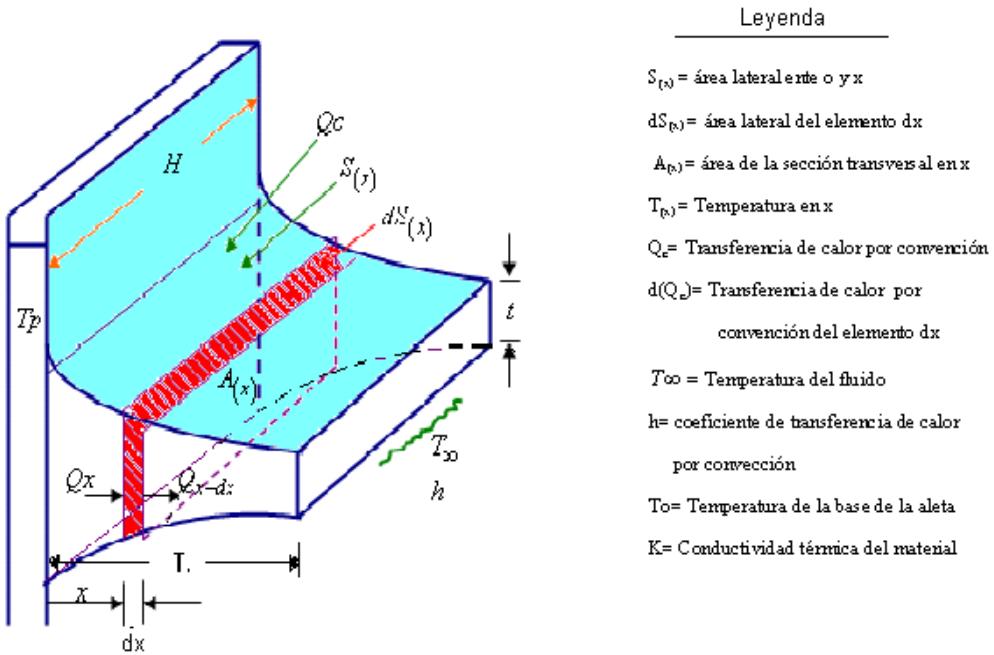


Figura N° 4.1 Superficie extendida de área variable

Fuente: Elaboración propia, Alberto Emilio Panana Giro

Se supone que la temperatura en cualquier sección transversal de la aleta es uniforme, por tanto $T_{(x)}$ es solamente función de x , (coordenada en la dirección x). Para encontrar la ecuación diferencial que gobierna la distribución de temperaturas en la aleta, considerar un pequeño elemento de volumen de control de espesor (dx), tal como se muestra en la figura N° 4.1

- Efectuando un balance de energía a este elemento de volumen en estado estable.

$$Q_x = Q_{x+dx} + dQ_{\text{conv}} \quad (4.1)$$

- De la ley de Fourier

$$Q_x = -KA_{(x)} \frac{dT}{dx} \quad (4.2)$$

Donde: $A_{(x)}$ = es el área de la sección transversal que varia con x

- Como la conducción de calor en $x+dx$ se expresa como

$$Q_{x+dx} = Q_x + \frac{dQ_x}{dx} dx \quad (4.3)$$

$$Q_{x+dx} = -KA_{(x)} \frac{dT}{dx} - K \frac{d}{dx} \left(A_{(x)} \frac{dT}{dx} \right) dx \quad (4.4)$$

- d) La transferencia de calor por convección dQ_c , se expresa como

$$dQ_c = h dS_{(x)} (T - T_\infty) \quad (4.5)$$

- e) Sustituyendo las cantidades de flujo de calor en el balance de energía (1) y simplificando se obtiene

$$\frac{d}{dx} \left(A_{(x)} \frac{dT}{dx} \right) - \frac{h}{k} \frac{dS_{(x)}}{dx} (T - T_\infty) = 0$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \left(\frac{1}{A_{(x)}} \frac{dA_{(x)}}{dx} \right) \frac{dT}{dx} - \left(\frac{1}{A_{(x)}} \times \frac{h}{K} \times \frac{dS_{(x)}}{dx} \right) (T - T_\infty) = 0 \quad (4.6)$$

Esta ecuación (6), proporciona una forma general de la ecuación de energía para condición unidimensional en una superficie extendida. La solución de esta ecuación y con las condiciones de frontera permite determinar la distribución de temperaturas, para calcular la temperatura en cualquier distancia, así como la transferencia de calor, (Q); que se transfiere al fluido

4.3 Superficies Extendidas de área de sección transversal Uniforme

En la siguiente figura se presenta una superficie extendida de sección transversal uniforme.

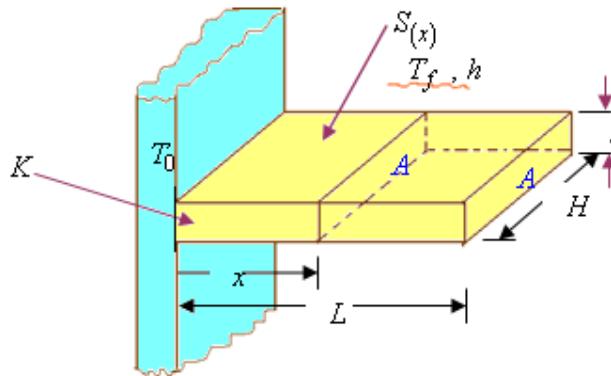


Figura Nº 4.2 Aleta recta (perfil rectangular) de Sección Transversal Uniforme

Fuente: Elaboración propia, Alberto Emilio Panama Giro

La aleta se une a una superficie base de temperatura $T = T_o$, en $x=0$ y extiende en un fluido de temperatura T_f . Cuando la sección transversal

de una aleta es uniforme, son constantes el área $A_{(x)} = A$, y el perímetro P , el área lateral $S_{(x)}$, está relacionado con el perímetro de la siguiente forma: $S_{(x)} = P \cdot x$

- En consecuencia:

$$\frac{dA}{dx} = 0 \quad \frac{dS_{(x)}}{dx} = P$$

- Por lo tanto la ecuación (6) se reduce a

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{KA}(T - T_{\infty}) = 0 \quad (4.7)$$

- Para simplificar la forma de esta ecuación, transformamos la variable dependiente definiendo la variable auxiliar temperatura Θ como:

$$\Theta_{(x)} = T_{(x)} - T_f \quad (4.8)$$

Donde: T_f es la temperatura del medio ambiente, es constante

$$\frac{d\Theta}{dx} = \frac{dT}{dx}$$

- Sustituyendo (8) en (7), se obtiene

$$\frac{d^2\Theta}{dx^2} - m^2\Theta = 0 \quad (4.9)$$

$$\text{Donde: } m^2 = \frac{hP}{KA} \quad (4.10)$$

La ecuación (4.9) es una ecuación diferencial lineal de segundo orden, homogénea, con coeficientes constantes, recibe el nombre de ecuación diferencial para aletas en una dimensión de sección transversal uniforme.

- **La ecuación diferencial (4.9) puede tener las siguientes soluciones:**

- $\Theta_{(x)} = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$ (4.11)

- $\Theta_{(x)} = C_3 \cosh(mx) + C_4 \sinh(mx)$ (4.12)

- $\Theta_{(x)} = C_5 \cosh[m(L-x)] + C_6 \sinh[m(L-x)]$ (4.13)

➤ Las funciones hiperbólicas se definen:

$$\operatorname{Senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (4.14)$$

4.3.1 Distribución de Temperatura y Flujo de Calor en aletas de sección transversal uniforme

Se puede encontrar la distribución, de temperaturas en la aleta al resolver la ecuación (4.), sometiéndoles a condiciones apropiadas de frontera. En general se conoce la temperatura en la base $x = 0$ de la aleta, pero hay varias situaciones físicas posibles en el extremo $x = L$, de la aleta.

Se consideraran en el análisis siguiente, cuatro situaciones diferentes.

- Aletas larga o infinita, ($L \rightarrow \infty$).
- Aleta en el extremo $x = L$, la perdida de calor es despreciable (adiabática)
$$\frac{dT}{dx} = 0.$$
- Aleta en el extremo $x = L$, la temperatura es conocida: $\Theta_{(x)} = \Theta_L$.
- Aleta en el extremo $x = L$, hay transferencia de calor por convención

$$-K \frac{dT}{dx} = h(T - T_f)$$

CASO 1.- Aletas Largas (ó infinitas)

a) Distribución de Temperaturas

En una aleta suficientemente largo se puede suponer razonablemente que la temperatura en el extremo o borde de la aleta es aproximadamente igual a la temperatura (T_∞) del medio circundante, además se considera que se conoce la temperatura (T_b) en la base de la aleta.

La formulación matemática de este tipo de aletas y su solución, se procede de la siguiente forma:

4.1 Ecuación Diferencial

$$\frac{d^2\Theta_{(x)}}{dx^2} - m^2\Theta_{(x)} = 0$$

1. Condiciones de Frontera

$$CF1: \Theta_{(x)} = T_o - T_f = \Theta_o \quad \text{en } x = 0$$

$$CF2: \Theta_{(x)} \rightarrow 0, \quad \text{cuando } x \rightarrow \infty$$

2. Se tiene que: $m^2 = \frac{Ph}{kA}$ (4.15)

3. Solución de la Ecuación Diferencial

$$\Theta_{(x)} = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$

Las constantes de integración C_1 y C_2 se determinan aplicando las condiciones de frontera. La condición de frontera, $CF : 2$, requiere que $C_1 = 0$, aplicando entonces la condición de frontera $CF : 1$, se obtiene:

$$C_2 = \Theta_o.$$

4. La solución o Distribución de Temperatura será

$$\frac{\Theta_{(x)}}{\Theta_o} = \frac{T_{(x)} - T^\infty}{T_o - T^\infty} = e^{-mx}. \quad (4.16)$$

b. Determinación del flujo de calor

El flujo de calor, hacia o desde la aleta se puede obtener, ya sea por integración la transferencia de calor por convención sobre toda la superficie de la aleta ó calculando el calor que fluye por conducción a través de la base de la aleta

b.1 Transferencia de calor por convención sobre la superficie de la aleta.

$$Q = \int_{x=0}^{x=\infty} hPQ_{(x)} dx \quad (4.17)$$

$$Q = \int_0^\infty hP\Theta e_0^{-mx} \bullet dx = -\frac{hP}{m} \Theta e_0^{-mx} \Big|_0^\infty =, m = \sqrt{\frac{hP}{KA}}$$

$$Q = \sqrt{hPAK} \bullet \Theta_0 \quad (4.18)$$

b.2 Cálculo de la transferencia de calor por conducción en la base de la aleta.

$$Q = -KA \frac{d\Theta}{dx} \Big|_{x=0} = -KA \left[-m\Theta_0 e^{-mx} \right]_{x=0}$$

$$Q = \sqrt{hPAK} \cdot Q_0$$

CASO 2.- Aletas con flujo de calor despreciada en el extremo

En la transferencia de calor en una aleta, donde el área del extremo o borde de la aleta es muy pequeña en comparación con el área lateral de aleta. en este caso el calor transferido por el extremo de la aleta es despreciable. entonces la condición de frontera que caracteriza esta situación en el extremo o borde de la aleta es,

$$\frac{d\Theta}{dx} = 0 \quad \text{en } x=L$$

La siguiente es la formulación matemática para este caso:

a) Distribución de Temperatura

➤ Ecuación Diferencial

$$\frac{d^2\Theta_{(x)}}{dx^2} - m^2\Theta_{(x)} = 0 \quad \text{para: } 0 \leq x \leq L$$

➤ Condiciones de Frontera

$$CF1: \quad \Theta_x = T_o - T_f = \Theta_o \quad x=0$$

$$CF2: \quad \frac{d\Theta_{(x)}}{dx} = 0 \quad x=L$$

$$m^2 = hP/KA$$

➤ Solución de la Ecuación Diferencial

$$\Theta_{(x)} = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$

➤ Reemplazando las Condiciones en la Frontera CF_2 y CF_1 , se tiene:

$$\frac{d\Theta}{dx} \Big|_{x=L} = 0 = mC_1 e^{mL} - mC_2 e^{-mL} \quad (i)$$

$$\Theta_o = C_1 + C_2 \quad C_2 = \Theta_o - C_1 \quad (ii)$$

- Resolviendo en forma simultanea (i) y (ii)

$$C_1 = \frac{\Theta_o e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL}} \quad \text{y} \quad C_2 = \Theta_o - \frac{\Theta_o - e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL}}$$

- Sustituyendo C_1 y C_2 en la ecuación (3) y simplificando

$$\Theta_{(x)} = \Theta_o \left(\frac{e^{mx}}{1 + e^{2mL}} + \frac{e^{-mx}}{1 + e^{-2mL}} \right)$$

- Mediante las relaciones de las funciones hiperbólicas se tiene:

$$Q_{(x)} = Q_o \frac{\cosh[m(L - x)]}{\cosh(mL)} \quad (4.19)$$

b) Determinación del Flujo de Calor

De la ecuación de Fourier

$$Q = -AK \frac{d\Theta_{(x)}}{dx} \Big|_{x=0}$$

Sustituyendo, $\frac{d\Theta_{(x)}}{dx}$ de la ecuación (14) en la ecuación de flujo de calor y simplificando;

$$Q = AK\Theta_o m \operatorname{Tanh}(mL)$$

$$Q = \Theta_o \sqrt{PhKA} \times \operatorname{Tanh}(mL) \quad (4.20)$$

CASO 3.- Aleta finita con temperatura en el extremo conocido

a) Determinación del perfil de temperatura

- Ecuación Diferencial

$$\frac{d\Theta_{(x)}}{dx} - m^2 \Theta_{(x)} = 0$$

- Solución de Ecuación Diferencial

$$Q_x = C_1 \cosh[m(L - x)] + C_2 \operatorname{senh}[m(L - x)]$$

- Condiciones de Frontera
CF1: $\Theta = \Theta_0$ $x=0$

$$\text{CF2: } Q = Q_L \quad x=L$$

- Distribución de Temperatura

$$\frac{Q}{Q_o} = \frac{(Q_L/Q_o) \operatorname{senh}(mx) + \operatorname{senh}[m(L-x)]}{\operatorname{senh}(mL)} \quad (4.21)$$

b) Flujo de calor

$$Q_o = \sqrt{hPKA} \cdot Q_o \cdot \frac{\cosh(mL) - Q_L/Q_o}{\operatorname{senh}(mL)} \quad (4.22)$$

CASO 4.- Aletas con Convención en el extremo

Una condición de frontera físicamente más de una aleta es aquella que se considera que en el borde o extremo de la aleta se transfiere calor por convención al fluido que la rodea. La formulación matemática y solución es la siguiente

a) Determinación del Perfil de Temperatura

- Ecuación Diferencial

$$\frac{d^2\Theta_{(x)}}{dx^2} - m^2\Theta_{(x)} = 0$$

- Solución Ecuación Diferencial

$$Q_x = C_1 \cosh[m(L-x)] + C_2 \operatorname{senh}[m(L-x)]$$

- Condiciones en la Frontera

$$\text{CF1: } \Theta_{(x)} = T_0 - T_f = \Theta_o \quad \text{en } x=0$$

$$\text{CF2: } K \frac{d\Theta_{(x)}}{dx} + h\Theta_{(x)} = 0 \quad \text{en } x=L$$

- Las constantes de integración C_1 y C_2 de la solución (b) se determinan aplicando las condiciones de frontera donde se obtienen respectivamente:

$$\Theta_o = C_1 \cosh mL + C_2 \operatorname{senh}(mL) \quad (\text{i})$$

$$-KC_2m + hC_1 = o \quad (\text{ii})$$

➤ Operando en forma simultanea, i y ii ,se obtiene:

$$C_2 = \left(\frac{h}{Km}\right) C_1$$

$$C_1 = \frac{\Theta_o}{\cosh mL + \left(\frac{h}{Km}\right) \operatorname{senh}(mL)}$$

➤ Reemplazando C₁ y C₂ en (b) y simplificando

$$\frac{\Theta_{(x)}}{\Theta_0} = \frac{T_x - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{\cosh[m(L-x)] + \left(\frac{h}{Km}\right) \operatorname{senh}[m(L-x)]}{\cosh(mL) + \left(\frac{h}{Km}\right) \operatorname{senh}(mL)} \quad (4.23)$$

b. Determinación del Flujo de calor

$$Q_o = \sqrt{hPKA} \cdot Q_0 \cdot \frac{\operatorname{senh}(mL) + \left(\frac{h}{mK}\right) \cosh(mL)}{\cosh(mL) + \left(\frac{h}{mK}\right) \operatorname{senh}(mL)} \quad (4.24)$$

4.3.2 Perfil de Temperatura de los tipos de aletas estudiadas

En la figura N° 4.3. Se representan el perfil de temperatura para los cuatro tipos de aletas mostrando las condiciones limitantes en la punta de dichas aleta

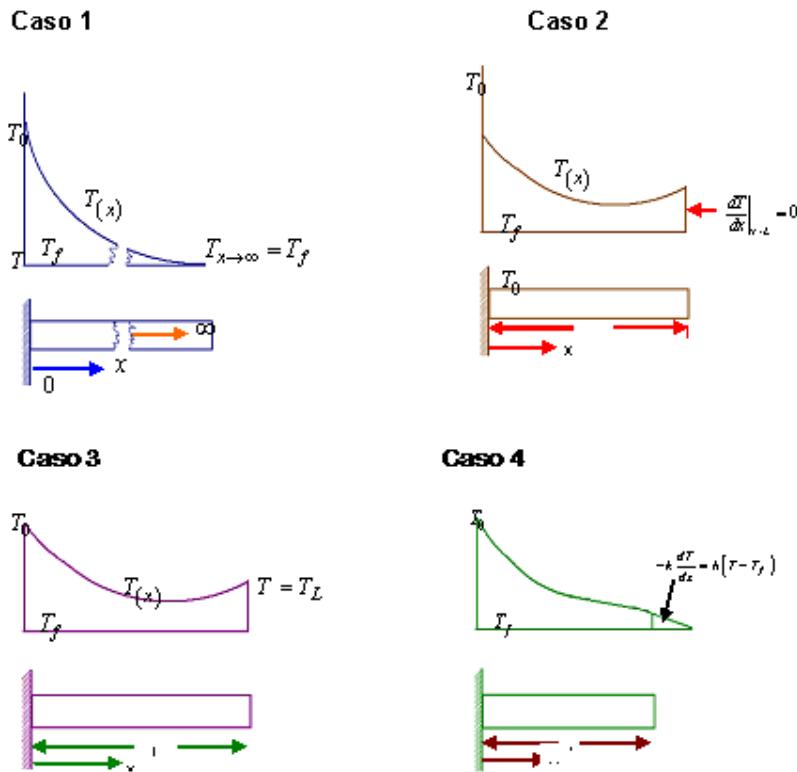


Figura N° 4.3 Perfil de temperaturas para aletas de área uniforme, con diferentes condiciones de frontera en el extremo

Fuente: Elaboración propia, Alberto Emilio Panana Giro

4.4 Problemas Resueltos

Problema N° 4.1 Aleta longitudinal con extremo aislado (caso 2)

Tres varillas, una hecha de vidrio de $K = 1.09 \text{ w/m}^{\circ}\text{C}$, otra de aluminio puro $K_2 = 228 \text{ w/m}^{\circ}\text{C}$ y una producida de acero $K_3 = 57 \text{ w/m}^{\circ}\text{C}$, todos tienen un diámetro de 1.25 cm, de 30 cm de longitud, son calentados de su base a partir de 120°C hasta el extremo final.

Las tres varillas extendidas, son expuestas al aire ambiente (longitudinalmente) a 20°C , el cual presenta un coeficiente de transferencia conectivo $h = 9.0 \text{ w/m}^2 \text{ }^{\circ}\text{C}$.

Encontrar:

- La distribución de temperatura de las varillas si el extremo se encuentra aislado.
- El flujo de calor desde las varillas

Solución.-

- Diagrama de flujo, de una varilla:

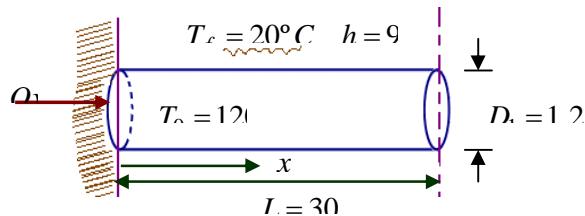


Figura N° 4.4 Varilla de acero circular de perfil longitudinal con superficie exterior expuesto a un fluido de área uniforme, con diferentes condiciones de frontera en el extremo

Fuente: Elaboración propia, Alberto Emilio Panama Giro

- Se tiene una aleta con el extremo aislado, de sección transversal uniforme, la ecuación diferencial, y condiciones de fronteras:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{KP}(T - T_{\infty}) = 0 \quad \frac{d^2\Theta}{dx^2} - m^2\Theta = 0$$

$$\text{CF1:} \quad \Theta = \Theta_o \quad x = 0$$

$$\text{CF2:} \quad \frac{d\Theta}{dx} = 0 \quad x = L$$

- Con:

$$\Theta = T - T_{\infty} \quad y \quad m^2 = \frac{hP}{KA}$$

- Se Tiene, la solución de la Ecuación Diferencial (Caso 2)

$$\Theta = C_1 \cosh(m(L-x)) + C_2 \sinh(m(L-x))$$

- Para evaluar las constantes de integración y reemplazando en el perfil, y simplificando se tiene que la distribución de temperatura, es.

$$\frac{Q}{Q_o} = \frac{\cosh[m(L-x)]}{\cosh(mL)} = \frac{T - T_{\infty}}{T_o - T_{\infty}}$$

- Para determinando el flujo de calor desde la aleta para este caso

$$Q_o = K \times A \times m \times \Theta_0 \times \text{Tanh}(mL)$$

7. Calculus

- a. Determinación del perfil de temperatura de las 3 aletas

- Aleta de vidrio, $m^2 = \frac{ph}{KA}$

$$m = \sqrt{\frac{P \bullet h}{K \bullet A}} \quad \text{Donde:} \quad P = \text{Perímetro} = \pi D$$

$$A = \text{Área Transversal} = \pi D^2 / 4$$

Por tanto:

$$m = \sqrt{\frac{4h}{DK}} \quad m = \sqrt{\frac{4x9}{1.09x1.25x10^{-2}}} = 51.40m^{-1}$$

$$m = 0.514cm^{-1}$$

- Para la aleta de acero: $m = 0.07108cm^{-1}$
- Para aleta de aluminio: $m = 0.03554cm^{-1}$

- b. Reemplazando en el perfil de temperaturas en la aleta de vidrio

Para $x_1 = 7.5cm \quad T = T_1$

$$\frac{T_{(x)} - T^\infty}{Tb - T^\infty} = \frac{T_1 - 20}{120 - 20} = \frac{\cosh[0.514(30 - 75)]}{\cosh(0.514x30)}$$

$$T_1 = 22.11^\circ C$$

- En forma similar se tiene para las siguientes distancias:

$$x = 15 \text{ cm} \quad T_2 = 20,044^\circ C$$

$$x = 22.5 \text{ cm} \quad T_3 = 20,0094^\circ C$$

$$x = 30 \text{ cm} \quad T_4 = 20,00004^\circ C$$

- En la siguiente tabla se presenta la variación de temperatura para diferentes distancias para los tres tipos de aletas

Distribución de Temperatura

Distancia	Material	T _v °C	T _a	T _{sl}
	Vidrio	Acer	Aluminio	
0 (cm)	120	120	120	
7,5	22,11	80,227	102,375	
15	20,044	57,979	90,526	
22,5	20,0094	46,78	83,764	
30	20,00004	43,38	81,584	

Fuente: Elaboración propia, Ing Alberto Emilio Panana Gírio

c. Calculo del flujo de calor desde las aletas

$$Q_o = KA' m' Q_o' \operatorname{Tanh}(mL)$$

$$\text{Con : } m = 0.5140 \text{ m}^{-1} \quad K_v = 1.09 \text{ W/m}^\circ\text{C} \quad Kal = 228 \text{ W/m}^\circ\text{C}$$

$$Ka = 57 \text{ W/m}^\circ\text{C} \quad A = \frac{\pi D^2}{4}$$

- Reemplazando en la Ecuación, el flujo de calor para las aletas son:

- Arleta de vidrio

$$Q = 1.09 \text{ W/m}^\circ\text{C} \times \frac{\pi (1.25 \text{ cm})^2 \text{ m}^2}{4 (100 \text{ cm})^2} \times (120 - 20)^\circ\text{C} \times 51,4 \text{ m} \times \operatorname{Tanh}(0.514 \times 30)$$

$$Q = 0.688 \text{ W}$$

- Flujo de calor a través de la aleta de acero

$$Q = 4.83 \text{ W}$$

- Flujo de calor a través de la aleta de aluminio

$$Q = 7.84 \text{ W}$$

Problema Nº 4.2, aleta longitudinal del perfil rectangular, con el extremo convectivo (caso 4)

Para un mejor enfriamiento de la superficie exterior de una nevera de semiconductores, la superficie externa de las paredes laterales de la

cámara ha sido construida con aletas verticales de enfriamiento fabricado de aluminio, ver la figura. En el plano la cámara es cuadrada.

El ancho de las paredes laterales es $b = 800 \text{ mm}$, su altura $H = 1000 \text{ mm}$; la longitud y el espesor de las aletas son: $L = 30 \text{ mm}$ y $\varepsilon = 3 \text{ mm}$ respectivamente, y cada una de las paredes tiene 40 aletas.

La temperatura en la base de la aleta es $T_0 = 30^\circ\text{C}$, la temperatura ambiente $T_a = 20^\circ\text{C}$, la conductividad térmica del aluminio $K = 202 \text{ W/m}^\circ\text{C}$, el coeficiente de traspaso de calor de la superficie con aletas al ambiente es $h = 7 \text{ W/m}^2\text{ }^\circ\text{C}$.

Calcular.

- La temperatura (T_L) en el extremo de las aletas y la cantidad de calor (Q) que desprende las cuatro paredes laterales.
- La cantidad de calor (Q) que en las mismas condiciones se transmitiría al ambiente si las paredes no tienen aletas.

Al resolver el problema se debe suponer que el coeficiente de traspaso de calor de la superficie de los intervalos entre las aletas (superficie lisa sin aletas) es igual al coeficiente de traspaso de calor de la superficie con aletas.

Solución:

- Figura que muestra es una porción de pared con aletas

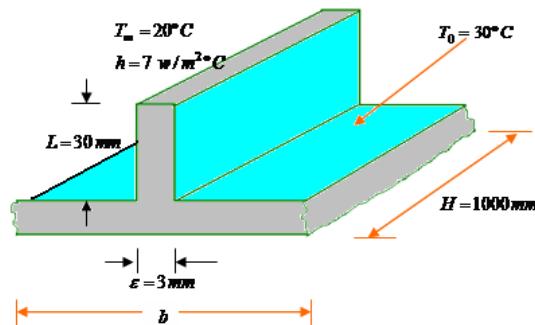


Figura N° 4.5 Porción de un lado exterior de la nevera mostrando una aleta de perfil rectangular de área uniforme expuesta a un fluido exterior

Fuente: Elaboración propia, Alberto Emilio Panana Giro

2. Se tiene el caso de aletas rectas de sección transversal uniforme. Considerando el cuarto caso de aletas en donde el extremo, la conducción de calor es igual a transferencia por convección.

3. Ecuación diferencial gobernante

$$\frac{d^2\Theta}{dx^2} - m^2\Theta = 0 \quad m^2 = \frac{hP}{KA}$$

4. Solución ecuación diferencial

$$\Theta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$

5. Condiciones de frontera

$$CF1: \quad \Theta = \Theta_o \quad x = 0$$

$$CF2: \quad -K \frac{d\Theta}{dx} = h\Theta \quad x = L$$

6. Perfil de temperatura.

$$\frac{\Theta_{(x)}}{\Theta_0} = \frac{T_x - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{\cosh[m(L-x)] + \left(\frac{h}{Km}\right) \operatorname{senh}[m(L-x)]}{\cosh(mL) + \left(\frac{h}{Km}\right) \operatorname{senh}(mL)}$$

7. Flujo de calor para este tipo de aleta

$$Q_o = \sqrt{hPKA} \bullet \Theta_b \frac{\operatorname{senh}(mL) + \left(\frac{h}{Km}\right) \cosh(mL)}{\cosh(mL) + \left(\frac{h}{Km}\right) \operatorname{senh}(mL)}$$

8. Cálculos para hallar la temperatura en el extremo (T_L)

Datos

$$h = 7 \text{ w/m}^2 \cdot ^\circ\text{C} \quad T_o = 30^\circ\text{C} \quad K = 202 \text{ w/m} \cdot ^\circ\text{C}$$

$$T_\infty = 20^\circ\text{C} \quad H = 1000 \text{ mm} \quad T_L = ?$$

$$L = 30 \text{ mm} \quad Q_t = ? \quad \varepsilon = 3 \text{ mm}$$

$$8.1 \quad \Theta_o = T_o - T_\infty = 30 - 20 = 10^\circ\text{C}$$

$$8.2 \quad \Theta_L = T_L - T_\infty = T_L - 20$$

8.3 Calculo del parámetro (m)

$$m = \sqrt{\frac{hP}{KA}}$$

Donde: $A = \varepsilon \times H = 0.003 \times 1 = 0.003 \text{ m}^2$

$$P = 2(H + \varepsilon) = 2(110.003) = 2.006m$$

Reemplazando

$$m = \sqrt{\frac{7x2.003}{0.003x202}} = 4.81369 \text{ m}^{-1}$$

8.4 De la relación del perfil de temperatura

$$\frac{\Theta_{(x)}}{\Theta_0} = \frac{T_x - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{\cosh[m(L-x)] + \left(\frac{h}{Km}\right) \operatorname{senh}[m(L-x)]}{\cosh(mL) + \left(\frac{h}{Km}\right) \operatorname{senh}(mL)}$$

- Para $T = T_L$ en $x = L = 0.030 \text{ metros}$

- Ó sea:

$$\cosh m(L-L) = \cosh m(0) = 1$$

$$\operatorname{senh}(L-L) = \operatorname{senh}(0) = 0$$

$$\cosh mL = \cosh(4.81369 \times 0.030) = 1.01044$$

$$\operatorname{senh} mL = \operatorname{senh}(4.81369 \times 0.030) = 0.14491$$

- Reemplazando

$$\frac{T_L - 20}{10} = \frac{1}{1.01044 + (7/202 \times 4.81369) \times 0.14491}$$

$$T_L = 29.8^\circ C$$

8.5 Cálculo del flujo de calor por aleta Q_a

$$Q_a = \sqrt{hKPA} \bullet \Theta_o \frac{\operatorname{senh}(mL) + \left(\frac{h}{Km}\right) \cosh(mL)}{\cosh(mL) + \left(\frac{h}{Km}\right) \operatorname{senh}(mL)}$$

Se tiene:

$$\sqrt{hKPA} = \sqrt{7x2.006x0.003x202} = 2.917096$$

$$\Theta_o = 10^\circ C$$

$$\operatorname{senh}(mL) = 0.14491$$

$$\cosh(mL) = 1.01044$$

$$(h/K_m) = \frac{7}{202 \times 4.81369} = 0.0071989$$

Reemplazando:

$$Q_a = 2.917096 \times 10 \cdot \frac{0.14491 + (0.0071989 \times 1.01044)}{1.01044 + (0.0071989 \times 0.14491)}$$

$$Q_a = 4.3980w$$

- 8.5 Calor transferido por los 4 lados con 40 aletas por lado (Q_{ta})

$$Q_{ta} = 4.3980 \times 40 \times 4 = 702.242w$$

- 8.6 Calor transferido por los 4 superficies sin aletas (Q_{sa})

$$Q_{sa} = 4hA_{SA}(T_o - T^\infty)$$

Donde: A_{SA} = área de pared libre de aletas

$$A_{SA} = A_{tp} - A_a$$

$$A_{tp} = \text{área de la pared} = b \times H = 1 \times 0.8 = 0.8m^2$$

$$A_a = \text{área de aletas} = \varepsilon \times H \times N = 1 \times 0.003 \times 40 = 0.12m^2 \text{ (área de sección transversal de las 40 aletas)}$$

$$A_{SA} = 0.8 - 0.12 = 0.68m^2 \text{ (area sin aletas)}$$

Reemplazando

$$Q_{sa} = 4 \times 7 \times 0.68(30 - 20) = 190.4w$$

- 8.7 Calor total transferido por las 4 paredes

$$Q_t = Q_{ta} + Q_{sa} = 702.2 + 190.4 = 892.6w$$

$$Q_t = 892.6w$$

- 8.8 Cálculo de la cantidad de calor transferido por las 4 paredes sin aletas

$$Q = 4hA(T_o - T^\infty)$$

$$Q = 4 \times 7 \times 1 \times 0.8 (30 - 20) = 224W$$

Respuesta:

- a. $T_L = 29.8^\circ C$
- b. $Q_t = 892.6W$ (calor transferido con aletas)
- c. $Q = 224W$ (calor transferido sin aletas)

PROBLEMA Nº 4.3

Una aleta recta, de sección transversal uniforme A, longitud L, perímetro C, de conductividad térmica K, es mantenida a una temperatura expuesta al ambiente. De temperatura θ_0 cuando $x = 0$ y θ_L en $x = L$. El coeficiente de transferencia de calor sobre la superficie es h . Derivar las siguientes expresiones para el flujo de calor en las dos terminales (positiva $x = 0$ y $x = L$)

$$Q_0 = K_m A \frac{\theta_0 \cosh mL - \theta_L}{\operatorname{senh} mL} \quad Q_L = L_m A \frac{\theta_0 - \theta_L \cosh mL}{\operatorname{senh} mL}$$

Solución.-

1) Ecuación Diferencial

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{KA} (T - T^\infty) = 0$$

2) Si $\theta = (T - T^\infty)$ y $m^2 = Lp / KA$

$$\text{Entonces } \frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0$$

3) Condiciones de frontera

$$CF : 1 \quad q = q_0 = T_0 - T_\infty \quad x = 0$$

$$CF : 2 \quad q = q_L = T_L - T_\infty \quad x = L$$

4) La solución de la ecuación diferencial

$$\theta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$

5) Reemplazando las condiciones de frontera para evaluar C_1 y C_2

$$\text{con } CF : 1 \quad \theta_0 = C_1 + C_2$$

$$CF : 2 \quad \theta_L = C_1 e^{mL} + C_2 e^{-mL}$$

- 6). Resolviendo las ecuaciones anteriores en forma simultánea

$$C_2 = \theta_0 - C_1$$

$$\theta_L = C_1 e^{mL} + (\theta_0 - C_1) e^{-mL} = C_1 e^{mL} + \theta_0 e^{-mL} - C_1 e^{-mL}$$

$$\theta_L - \theta_0 e^{-mL} = C_1 (e^{mL} - e^{-mL})$$

Se determina, C1 y C2

$$C_1 = \frac{\theta_L - \theta_0 e^{-mL}}{e^{mL} - e^{-mL}} \quad C_2 = \theta_0 - \frac{\theta_L - \theta_0 e^{-mL}}{e^{mL} - e^{-mL}}$$

- 7) Reemplazando C_1 y C_2 en 4, se tiene el perfil de temperatura

$$\theta = \frac{\theta_L - \theta_0 e^{-mL}}{e^{mL} - e^{-mL}} e^{mx} + \left[\theta_0 - \left(\frac{\theta_L - \theta_0 e^{-mL}}{e^{mL} - e^{-mL}} \right) \right] e^{-mx}$$

$$\theta = \frac{\theta_L - \theta_0 e^{-mL}}{e^{mL} - e^{-mL}} e^{mx} + \theta_0 e^{-mx} - \left(\frac{\theta_L - \theta_0 e^{-mL}}{e^{mL} - e^{-mL}} \right) e^{-mx}$$

$$\theta = \left(\frac{\theta_L - \theta_0 e^{-mL}}{e^{mL} - e^{-mL}} \right) (e^{mx} - e^{-mx}) + \theta_0 e^{-mx}$$

$$\frac{q}{q_0} = \frac{\theta_L - \theta_0 e^{-mL}}{e^{mL} - e^{-mL}} \cdot \frac{e^{mx} - e^{-mx}}{e^{mL} - e^{-mL}} + \theta_0 e^{-mx}$$

Perfil de temperatura

- 7) También el perfil se puede expresar, en función de las funciones hiperbólicas, para su determinación se realiza de la siguiente forma

$$\theta = \left(\theta_L - \theta_0 e^{-mL} \right) \frac{e^{mx} - e^{-mx}}{e^{mL} - e^{-mL}} + \theta_0 e^{-mx}$$

$$\theta = \theta_L e^{mx} - \theta_L e^{-mx} - \theta_0 e^{-mL} e^{mx} + \theta_0 e^{-mL} e^{-mx} + \theta_0 e^{-mx} e^{mL} - \theta_0 e^{-mL} e^{-mL}$$

$$\theta = \frac{\theta_L (e^{mx} - e^{-mx}) + \theta_0 (e^{(mL-mx)} - e^{-(mL-mx)})}{(e^{mL} - e^{-mL})}$$

$$q = \frac{q_L \operatorname{senh} mx + q_0 \operatorname{senh} m(L-x)}{\operatorname{senh} mL}$$

..... Perfil de temperaturas

- 8) La pérdida de calor en la base de la aleta

$$Q_a = -KA \left. \frac{dq}{dx} \right|_{x=0}$$

➤ Diferenciando el perfil

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\theta_L \cosh mx \cdot m + \theta_0 \cosh m(L-x)(-m)}{\operatorname{senh} mL}$$

$$\frac{dq}{dx} = \frac{m[\theta_L \cosh mx - \theta_0 \cosh m(L-x)]}{\operatorname{senh} mL}$$

$$\left. \frac{dq}{dx} \right|_{x=0} = \frac{m[q_L - q_0 \cosh mL]}{\operatorname{senh} mL}$$

➤ Reemplazando y simplificando en (8)

$$Q_a = KA m \left. \frac{q_0 \cosh mL - q_L \cosh m(L-x)}{\operatorname{senh} mL} \right|_{x=0}$$

- 9) Pérdida de calor en la base de la aleta

$$Q_L = -KA \left. \frac{dq}{dx} \right|_{x=L}$$

➤ Diferenciando el perfil

$$\left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L} = \theta_L \frac{\cosh mx \cdot m + \theta_0 \cosh m(L-x)(-m)}{\operatorname{senh} mL}$$

$$\left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L} = m \frac{[\theta_L \cosh mx - \theta_0 \cosh m(L-x)]}{\operatorname{senh} mL}$$

$$\left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L} = \frac{m[\theta_L \cosh mL - \theta_0]}{\operatorname{senh} mL}$$

➤ Reemplazando y simplificando en (9)

$$Q_L = K A m \frac{(q_0 - q_L \cosh mL)}{\operatorname{senh} mL}$$

PROBLEMA Nº 4.4

Un extremo de una barra de acero de 0,3 m de largo está conectado a una pared de $T = 204^\circ C$. El otro extremo está conectado a otra pared que se mantiene a $T = 93^\circ C$. Se sopla aire de un lado a otro de la barra de modo que se mantenga un coeficiente de transferencia de calor de $17 \text{ W/m}^2 K$ en toda su superficie. Si el diámetro de la barra es de 5 cm. ¿Cuál es la razón neta de pérdida de calor? Si la temperatura del aire es $T_f = 25^\circ C$ y la conductividad térmica del material es: $K = 45 \text{ W/m}^\circ C$.

Solución.-

1. Diagrama de la aleta

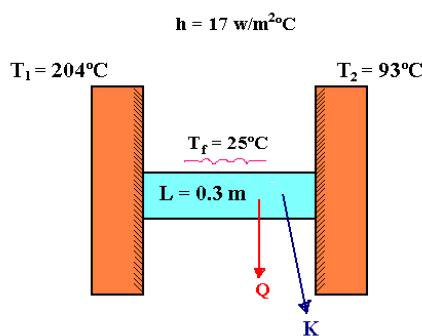


Figura N° 4.6 Barra cilíndrica conectada a placas de acero a diferentes temperaturas, con superficie exterior expuesta a un medio convectivo

Fuente: Elaboración propia, Alberto Emilio Panana Giro

2. Ecuación Diferencial para la superficie extendida.

2.1 Aleta uniforme (sección transversal constante)

$$KA \frac{d^2T}{dx^2} - hP(T - T_f) = 0 \quad \theta = T - T_f \quad m^2 = \frac{hP}{KA}$$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0 \quad \dots\dots\dots \quad \dots(1)$$

2.2 Solución de la ecuación diferencial

$$\theta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} \quad \dots\dots\dots \quad \dots(2)$$

2.3 Aplicando el caso III para condiciones de frontera con temperatura en el extremo conocido.

$$C.F.1 \rightarrow x = 0 \quad \theta = \theta_1 = (T_1 - T_f) \quad \dots\dots\dots \quad \dots(3)$$

$$C.F.2 \rightarrow x = L \quad \theta = \theta_2 = (T_2 - T_f) \quad \dots\dots\dots \quad \dots(4)$$

2.4 Con las condiciones de frontera:

$$CF:1 \quad \theta_1 = C_1 + C_2 \quad C_2 = \theta_1 - C_1$$

C.F. 2

$$\theta_2 = C_1 e^{mL} + C_2 e^{-mL}, \text{ reemplazando } C_2$$

$$\theta_2 = C_1 e^{mL} + \theta_1 e^{-mL} - C_1 e^{-mL}$$

2.5 Despejando:

$$c_1 = \frac{\theta_2 - \theta_1 e^{-mL}}{2 \operatorname{senh} mL} \quad \text{ó} \quad c_1 = \frac{\theta_2 - \theta_1 e^{-mL}}{e^{mL} - e^{-mL}}$$

$$c_2 = \theta_1 - \left(\frac{\theta_2 - \theta_1 e^{-mL}}{2 \operatorname{senh} mL} \right) \quad \text{ó} \quad c_2 = \theta_1 - \left(\frac{\theta_2 - \theta_1 e^{-mL}}{e^{mL} - e^{-mL}} \right)$$

2.6 Reemplazando C1 y C2 en el perfil, se tiene

$$\theta(x) = \frac{\theta_2 (e^{mx} - e^{-mx}) + \theta_1 [e^{m(L-x)} - e^{-m(L-x)}]}{e^{mL} - e^{-mL}}$$

$$\theta_{(x)} = \frac{\theta_2 \left(e^{mx} - e^{-mx} \right)}{e^{mL} - e^{-mL}} + \frac{\theta_1 \left(e^{m(L-x)} - e^{-m(L-x)} \right)}{e^{mL} - e^{-mL}}$$

$$\theta_{(x)} = \frac{\theta_2}{\theta_1} \cdot \operatorname{senh} mx + \operatorname{senh} [m(L-x)]$$

2.5 La transferencia de calor neto

$$Q_{neto} = Q|_{x=0} + Q|_{x=L}$$

$$Q_{neto} = -KA \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=0} + \left(-KA \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=L} \right) \quad(\alpha)$$

$$\left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=0} = \frac{m(\theta_L - \theta_0 \cosh mL)}{\sinh mL} = -\frac{m(\theta_0 \cosh mL - \theta_L)}{\sinh mL}$$

Reemplazando en ()

$$Q_{x=0} = \frac{KAm\theta_0 \left(\cosh mL - \frac{\theta_L}{\theta_0} \right)}{\sinh mL} \quad \dots \dots \dots (6)$$

$$\frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=L} = \frac{\theta_L m \cosh mL - \theta_0 m}{\operatorname{senh} mL} = \frac{-m(\theta_0 - \theta_L \cosh mL)}{\operatorname{senh} mL}$$

Reemplazando

$$Q_{x=L} = KAm \left[\frac{\theta_0 - \theta_L \cosh mL}{\sinh mL} \right] \quad \dots \dots \dots (7)$$

2.6 Cálculos:

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi x(0.05)^2}{4}, \quad A = 1,963595x10^{-3} m^2$$

$$\theta_0 = 204 - 25 = 179^\circ, \quad \theta_L = 93 - 25 = 68^\circ$$

$$m = \sqrt{\frac{Ph}{KA}} = \sqrt{\frac{4h}{KD}}, \quad m = 5,497471 \text{ } m^{-1}$$

Reemplazando en, 1 y en 2, se tiene:

$$Q_{x=0} = \frac{45 \times 1,9634 \times 10 - 3 \times 179 \times 5,4974 \times \left(2,6976 - \frac{68}{179} \right)}{2,5054} = 80,4545 \text{ W}$$

$$Q_{x=L} = 45 \times 1,9639 \times 10^{-3} \times 5,4974 \times \left[\frac{179 - 68 \times 2,6976}{2,5054} \right] = -0,86041 \text{ W}$$

$$Q_{neto} = 79,57 \text{ W}$$

Problema N° 4.5

Una varilla larga pasa a través de la abertura en un horno que tiene una temperatura del aire de 400°C y se prensa firmemente en la superficie de un lingote. Termopares empotrados en la varilla a 25 y 120 mm del lingote registran temperaturas de 325 y 375°C, respectivamente ¿Cuál es la temperatura del lingote?

Solución.- 1. Diagrama de flujo

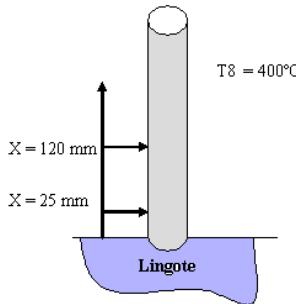


Figura N° 4.7 Varilla larga con termopares colocados a diferentes distancias de la superficie primaria

Fuente: Elaboración propia, Alberto Emilio Panana Giro

2. Tomamos el Caso I: aleta infinitamente larga, donde la solución es dada por:

$$\frac{\Theta_{(x)}}{\Theta} = \frac{T_{(x)} - T_{\infty}}{T - T_{\infty}} = e^{-mx}$$

3. Donde las condiciones de frontera son:

$$CF_1 \quad x = x_1 \quad \theta = \theta_1 = T_1 - T_f$$

$$CF_2 \quad x = x_2 \quad \theta = \theta_2 = T_2 - T_f$$

4. Evaluamos en la ecuación (2):

$$\frac{\theta(x_1)}{\theta(x_2)} = \frac{\theta_b e^{-mx_1}}{\theta_b e^{-mx_2}} = e^{-m(x_1-x_2)} = \frac{(325 - 400)^\circ C}{(375 - 400)^\circ C} = e^{-m * (0.025 - 0.12) m}$$

$$m = 11.56$$

6. Evaluando la ecuación (1) con la condición de frontera:

$$q_{(x1)} = T_1 - T_\infty = (T_b - T_\infty) \cdot e^{-mx}$$

$$325 - 400 = (T_b - 400) \cdot e^{-11.56 * 0.025}$$

$$\therefore T_b = 300^\circ C$$

Problema 4.6

Una varilla de estaño de 100 mm de longitud y 5 mm de diámetro se extiende horizontalmente de un molde a 200°C. La varilla está en un aire ambiental con $T_\infty = 20^\circ C$ y $h = 30 W/m^2 \cdot K$. ¿Cuál es la temperatura de la varilla a 25, 50 y 100mm del molde?

Solución:

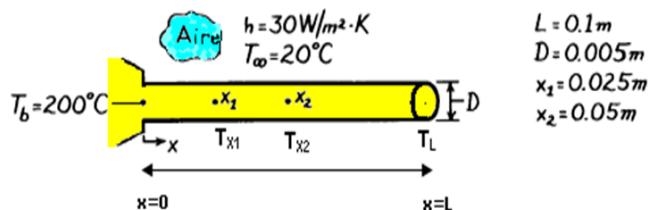


Figura N° 4.8 Varilla horizontal con superficie exterior expuesta a un medio convectivo

Fuente: Elaboración propia, Alberto Emilio Panama Giro

1. Se desea hallar:

- a. T_{x1} cuando $X=X_1$
- b. T_{x2} cuando $X=X_2$
- c. T_L cuando $X=L$

2. Para el desarrollo del problema se hará el siguiente análisis:

- La ecuación diferencial para una aleta de área constante es :

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{h \cdot P}{k \cdot A} \cdot (T - T_f) = 0$$

- Para calcular la ecuación, sabemos que para una aleta cilíndrica:

$$P = \pi \cdot D \quad ; \quad A = \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \quad ; \quad T_f = T_\infty$$

- valor de k (conductividad térmica) de la varilla de estaño lo ubicamos en el apéndice A (Tabla A1) del Incropera, para lo cual debemos conocer la temperatura promedio:

$$T_{\text{promedio}} = \frac{T_b + T_\infty}{2} = 110 \text{ } ^\circ\text{C} \longrightarrow k = 133 \text{ W/m } ^\circ\text{K.}$$

- Determinación de la distribución de temperaturas para una aleta que en extremo existe transferencia de calor (4^{to} caso):

Haciendo cambio de variables:

$$\theta = (T - T_f) \quad ; \quad m^2 = \frac{h \cdot P}{k \cdot A}$$

- Entonces la nueva ecuación diferencial seria:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2 \cdot \theta = 0$$

- Integrando 2 veces se obtiene:

$$\theta = C_1 \cdot e^{mx} + C_2 \cdot e^{-mx}$$

- Condiciones de frontera:

$$\text{CF1: } x=0 \quad , \quad \theta = \theta_b = (T_b - T_\infty)$$

$$\text{F2: } x=L \quad , \quad -k \cdot \frac{dT}{dx} = h \cdot (T - T_\infty)$$

$$\theta = \frac{\cosh m(L-x) + (h/mk) \sinh m(L-x)}{\cosh mL + (h/mk) \sinh mL} \theta_b$$

➤ Evaluando las CF
obtenemos el perfil de
temperaturas:

➤ **Realizando los cálculos:**

1. $m = \left[\frac{hP}{kA_c} \right]^{1/2} = \left[\frac{h\pi D}{k\pi D^2 / 4} \right]^{1/2} = \left[\frac{4h}{kD} \right]^{1/2} = \left[\frac{4 \times 30 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}}{133 \text{ W/m} \cdot \text{K} \times 0.005 \text{ m}} \right]^{1/2}$
 $m = 13.43 \text{ m}^{-1}$.
2. $\frac{h}{mk} = \frac{30 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}}{13.43 \text{ m}^{-1} (133 \text{ W/m} \cdot \text{K})} = 0.0168$,
3. $\theta_b = (T_b - T_\infty) = 200^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C} = 180^\circ\text{C}$
4. $mL = (13.43) \times 0.1 = 1.34$, al evaluar en la función hiperbólica se tiene:
 $\cosh mL = 2.04$ y $\operatorname{senh} mL = 1.78$
 $\cosh mL + \frac{h}{mk} \operatorname{senh} mL = 2.07$
5. Reemplazando estos datos en el perfil de temperaturas se obtiene la siguiente ecuación:

$$\theta = \frac{\cosh m(L-x) + 0.0168 \operatorname{senh} m(L-x)}{2.07} (180^\circ\text{C}).$$

6. Reemplazando se obtiene:

<u>x(m)</u>	<u>cosh m(L-x)</u>	<u>senh m(L-x)</u>	<u>θ</u>	<u>T(°C)</u> = θ + T _∞
x ₁ = 0.025	1.55	1.19	136.5	156.5
x ₂ = 0.05	1.24	0.725	108.9	128.9
L = 0.10	1.00	0.00	87.0	107.0

4.5. Superficies Extendidas de área variable

4.5.1 Aletas Anulares – Ecuación Diferencial General

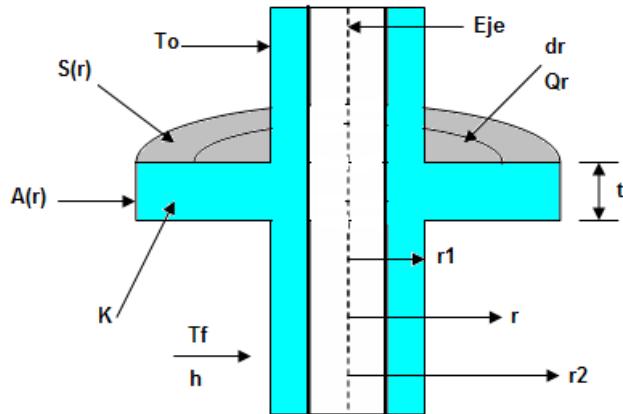


Figura N° 4.9 Corte transversal de un tubo con aleta anular de perfil circunferencial, expuesto a un fluido convectivo

Fuente: Elaboración propia, Alberto Emilio Panama Giro

La ecuación diferencial general obtenida (ecuación 1), para aletas de cualquier sección transversal:

$$\frac{d^2\Theta}{dx^2} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \frac{dT}{dx} - \frac{h\Theta}{kA} \frac{ds}{dx} = 0 \quad (4.25)$$

Para el caso de aletas anulares de espesor t y radios r₁ y r₂ se tiene que:

- Área de sección transversal (A) en función del radio

$$A = 2\pi r t \quad \text{y} \quad \frac{dA}{dr} = 2\pi t \quad (4.26)$$

- Área lateral (S), en función del radio (r)

$$S = 2\pi(r^2 - r_1^2) \quad \text{y} \quad \frac{dS}{dr} = 4\pi r \quad (4.27)$$

Si se considera el área en el extremo:

$$S = 2\pi(r_2^2 - r_1^2) + 2\pi r_2 t$$

- Reemplazando las relaciones 2 y 3 en 1 y simplificando

$$\frac{d^2\Theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Theta}{dr} - \frac{2h}{kt} \Theta = 0 \quad (4.28)$$

- La ecuación (4), obtenida es una ecuación que en términos generales se denominan ecuación de Bessel, que son de la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(\frac{x}{a} \right)^2 - \frac{n^2}{x^2} y = 0 \quad (4.29)$$

- Donde (n) es un numero natural y (a) es un parámetro, y cuyas soluciones para $+a^2 y - a^2$ son respectivamente:

$$y = C_1 J_n(ax) + C_2 Y_n(ax) \quad (4.30)$$

$$y = C_1 I_n(ax) + C_2 K_n(ax) \quad (4.31)$$

- C_1 y C_2 son las constantes de integración y las funciones J_n , Y_n , I_n y K_n reciben los nombres de funciones de Bessel de orden n y primera especie (J_n) de orden n y segundo especie Y_n y funciones de Bessel modificada de orden n y primera especie (I_n) y modificada de orden n y segunda especie (K_n).

4.5.2 Solución de la Ecuación de Bessel (para aleta anulares)

1. A partir de la ecuación obtenido, se evalúa la distribución de temperaturas y el flujo de calor, con: $a = m$, donde $m^2 = \frac{2h}{kt}$ y $n = 0$

$$\frac{d^2\Theta}{dx^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Theta}{dr} - m^2 \Theta = 0$$

Es una ecuación de Bessel modificada de orden cero, cuya solución general es:

$$\Theta = C_1 I_0(mr) + C_2 K_0(mr) \quad (4.32)$$

I_0 y K_0 son las funciones de Bessel modificadas de orden cero de primera y segunda especie respectivamente.

2. Las condiciones de contorno más sencillas que nos permiten determinar las dos constantes son, suponer conocida la temperatura en la base y despreciable el calor convectado en el extremo de la aleta, estas son:

$$\text{CF:1} \quad r = r_1 \quad \Theta = \Theta_0 = (T_0 - T_f) \quad (4.33)$$

$$\text{CF:2} \quad r = r_2 \quad \frac{d\Theta}{dr} = 0 \quad (4.34)$$

3. Las reglas de diferenciación de las funciones de Bessel anteriores son:

$$\frac{d}{dx} [I_0(ax)] = aI_1(ax) \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx} [K_0(ax)] = -aK_1(ax) \quad (4.35)$$

Donde: I_1 y K_1 son las funciones de Bessel modificadas de primer orden de primera y segunda especie respectivamente.

4. Aplicando las condiciones de contorno se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\Theta_0 = C_1 I_0(mr_1) + C_2 K_0(mr_1)$$

$$0 = C_1 I_1(mr_2) - C_2 K_1(mr_2)$$

Operando en forma simultanea, las constantes C_1 y C_2 son:

$$C_1 = \frac{\Theta_0 K_1(mr_2)}{I_0(mr_1) K_1(mr_2) + I_1(mr_2) K_0(mr_1)} \quad (4.36)$$

$$C_2 = \frac{\Theta_0 I_1(mr_2)}{I_0(mr_1) K_1(mr_2) + I_1(mr_2) K_0(mr_1)} \quad (4.37)$$

5. Reemplazando C_1 y C_2 en la ecuación la distribución es

$$\Theta = \Theta_0 \frac{I_0(mr) K_1(mr_2) + K_0(mr) I_1(mr_2)}{I_0(mr_1) K_1(mr_2) + I_1(mr_2) K_0(mr_1)} \quad (4.38)$$

4.5.3 Calor disipado por la aleta

El flujo de calor disipado por la aleta puede calcularse mediante el cálculo del calor que fluye por su base

$$Q_a = -KA \frac{dT}{dr} \Big|_{r=r_1} \quad A = 2\pi r_1 t$$

$$Q_a = -2\pi r_1 t K \frac{d\Theta}{dr} \Big|_{r=r_1} \quad (4.39)$$

- Diferenciando la ecuación (12) con respecto a r y evaluando cuando $r = r_1$, se tiene

$$\Theta = C_1 I_0(mr) + C_2 K_0(mr)$$

$$\frac{d\Theta}{dr} \Big|_{r=r_1} = C_1 m I_1(mr_1) - C_2 m K_1(mr_1) \quad (4.40)$$

Por lo tanto el calor que fluye por la base es:

$$Q_a = 2\pi r_1 t K m \Theta_0 [C_2 K_1(mr_1) - C_1 I_1(mr_1)] \quad (4.41)$$

Reemplazando C_1 y C_2 y simplificando se obtiene que el calor disipado con las aletas, sería:

$$Q_a = 2\pi r_1 t K m \Theta_0 \frac{I_1(mr_2)K_1(mr_1) - I_1(mr_1)K_1(mr_2)}{I_0(mr_1)K_1(mr_2) + I_1(mr_2)K_0(mr_1)} \quad (4.42)$$

4.5.4 Determinación de la eficiencia de la aleta η_a

$$\eta_a = \frac{Q_a}{Q_{\max}} \quad (4.43)$$

Donde:

Q_{\max} = es la perdida de calor por la aleta si fuese isoterma

$Q = h A_s \Theta_0$; A_s = área superficial de la aleta

$$A_s = 2\pi(r_2^2 - r_1^2)$$

$$Q = 2h\pi(r_2^2 - r_1^2)\Theta_0 \quad (4.44)$$

Por tanto:

$$\eta_a = \frac{2\pi r_1 t K m \Theta_0 \cdot \frac{I_1(mr_2)K_1(mr_1) - I_1(mr_1)K_1(mr_2)}{I_0(mr_1)K_1(mr_2) + I_1(mr_2)K_0(mr_1)}}{2h\pi(r_2^2 - r_1^2)\Theta_0}$$

$$\eta_a = \frac{\left(\frac{2.r_1}{m}\right)}{\left(r_2^2 - r_1^2\right)} \bullet \frac{K_1(mr_1)I_1(mr_2) - I(mr_1)K_1(mr_2)}{K_0(mr_1)I_1(mr_2) + I_0(mr_1)K_1(mr_2)} \quad (4.45)$$

4.5.5 Soluciones graficas (para determinar la eficiencia de las aletas caso de aletas rectas de perfil rectangular (Caso 2))

- La eficiencia de una aleta se define como

: $\eta = \frac{Q_a}{Q_{\max}}$

Donde:

Q_{\max} = El calor máximo que transfiere una aleta, se establecería en el caso hipotético que toda la aleta se mantiene a la temperatura de la base, en cuyo caso se calcularía, mediante:

$$Q_{\max} = hPL(T_0 - Tf) = hPL\Theta_0,$$

- Sustituyendo la expresión anterior en la definición de la aleta y simplificando, la eficiencia de la aleta es::

$$\eta = \frac{\sqrt{PhKA} \bullet \Theta_0 \tanh(mL)}{hPL\Theta_0} = \frac{\tanh(mL)}{(mL)} \quad (4.46)$$

- En la práctica las aletas pierden calor por el extremo, para contabilizar esa perdida de calor Jacob, recomienda utilizar las expresiones deducidas para una aleta con extremo aislado, pero realizando una corrección a la longitud de la aleta, que viene dada por:

$$L_c = L + \frac{A}{P} \quad (4.47)$$

Donde: L_c = Longitud corregida.

Entonces se ha de determinar el incremento de longitud de la aleta, teniendo en cuenta que el calor que se pierde por el extremo, sea equivalente al calor que se transfiere por la periferia de la porción de aleta agregada, teniendo en cuenta que esta adición de longitud es pequeña, se puede afirmar que la temperatura de esta porción, es igual a la

temperatura del extremo de la aleta original. En consecuencia se puede escribir la siguiente equivalencia:

$$Q = hPL \times (T_L - T_f) = hA(T_L - T_f),$$

$$\text{Simplificando, } L^* = \frac{A}{P} = \frac{t}{2}$$

- Con la ayuda de este aproximación, la cuantificación de la eficiencia de una aleta que pierde calor por convección, es

$$\eta = \frac{\tanh[m(L + A/P)]}{m(L + A/P)} \quad (4.48)$$

- Demostración gráfica de la aproximación de Jacob

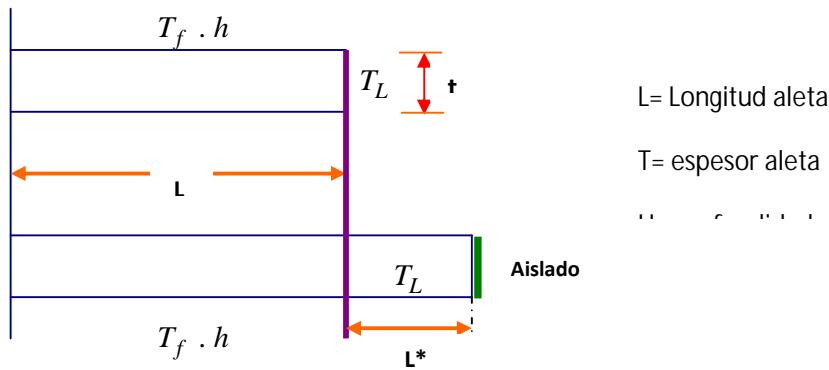


Figura N° 4.10 Corte transversal de una barra longitudinal, para la demostración de la relación de Jacob

Fuente: Elaboración propia, Ing Alberto Emilio Panana Giro

- Para este tipo de aleta

$$A = H \times t \quad , \quad \text{si } H=1 \quad \text{Profundidad unitaria} \longrightarrow \quad A = t$$

$$P = 2H + 2t \quad \text{si } H \gg t \quad H=1 \quad \longrightarrow \quad P = 2$$

$$\frac{A}{P} = \frac{t}{2} = L^*$$

- La **eficiencia de diversos tipos de aleta** se puede determinar gráficamente tal como se presentan en las **figuras N° 4.11 (aletas de**

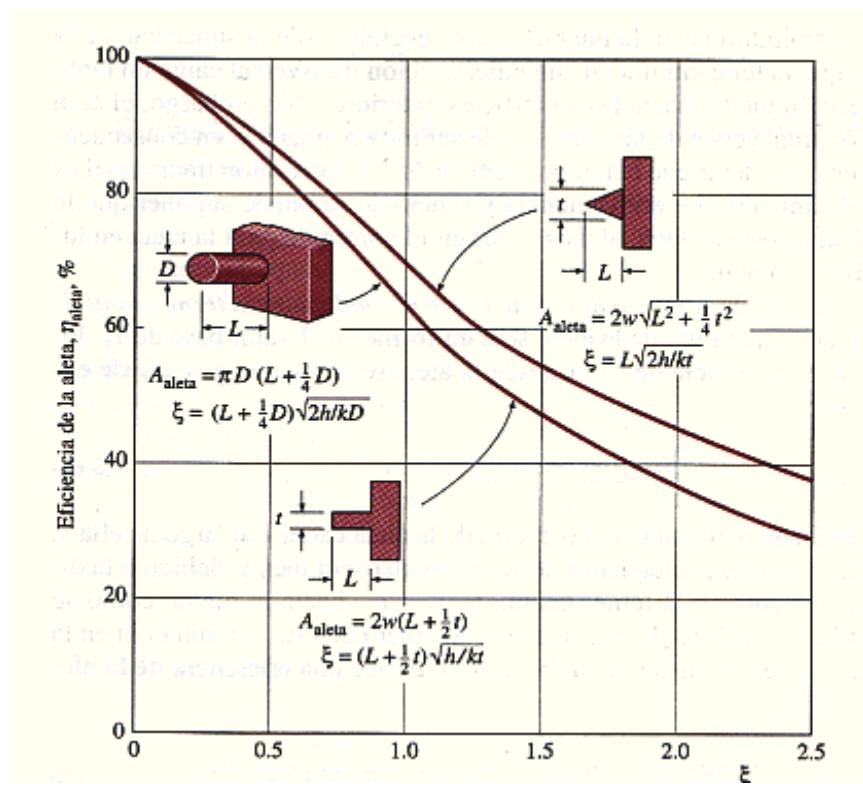
perfil rectangular, triangular y hiperbólico) y Nº 4.12 (caso de aletas anulares).

- En dichos gráficos, se tiene que:

L_C = Longitud corregida, r_{2C} = Radio corregido, A_p = Área de perfil

Evaluada la eficiencia en la grafica (η), se puede determinar el calor transferido desde la aleta, mediante:

$$Q = \eta Q_{\max}$$



$$\xi = L^{3/2} \left(\frac{h}{kA_p} \right)^{1/2}$$

Figura N° 4.11. Para determinar la eficiencia de aletas de perfil rectangular, triangular, hiperbólica

Fuente: Yunus A. Cengel, Transferencia de Calor y Masa Tercera Edición , Editorial McGraw Hill, México

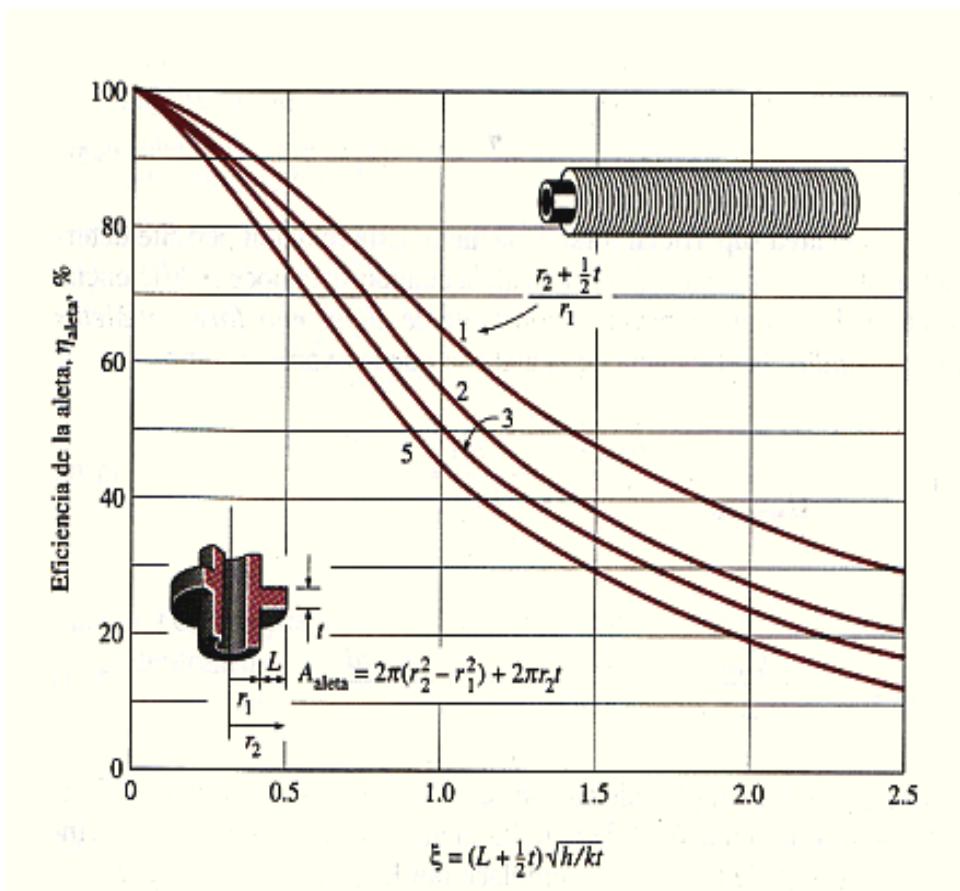


Figura Nº 4.12. Para determinar la eficiencia en aletas anulares

Fuente: Yunus A. Cengel, Transferencia de Calor y Masa Tercera Edición , Editorial McGraw Hill, México

4.5.6 Eficiencia global de un grupo de aleta (η_o)

A_b : área de la base expuesta al fluido

A_f : área superficial de unas sola aleta.

A_t : área total incluyendo el área de la base sin aletas y toda la superficie aleteada, $A_t = A_b + N A_f$.

N= Número total de aletas.

Se define la eficiencia global de un grupo de aletas como:

$$\eta_0 = 1 - \frac{NA_f}{A_t} (1 - \eta_f)$$

$$\begin{aligned}
q_t &= q_b + Nq_f = hA_b(T_b - T_\infty) + N\eta_f h A_f (T_b - T_\infty) \\
&= h(A_t - NA_f) + N\eta_f A_f (T_b - T_\infty) = h[A_t - NA_f(1 - \eta_f)](T_b - T_\infty) \\
&= hA_t \left[1 - \frac{NA_f}{A_t} (1 - \eta_f) \right] (T_b - T_\infty) = \eta_0 h A_t (T_b - T_\infty)
\end{aligned}$$

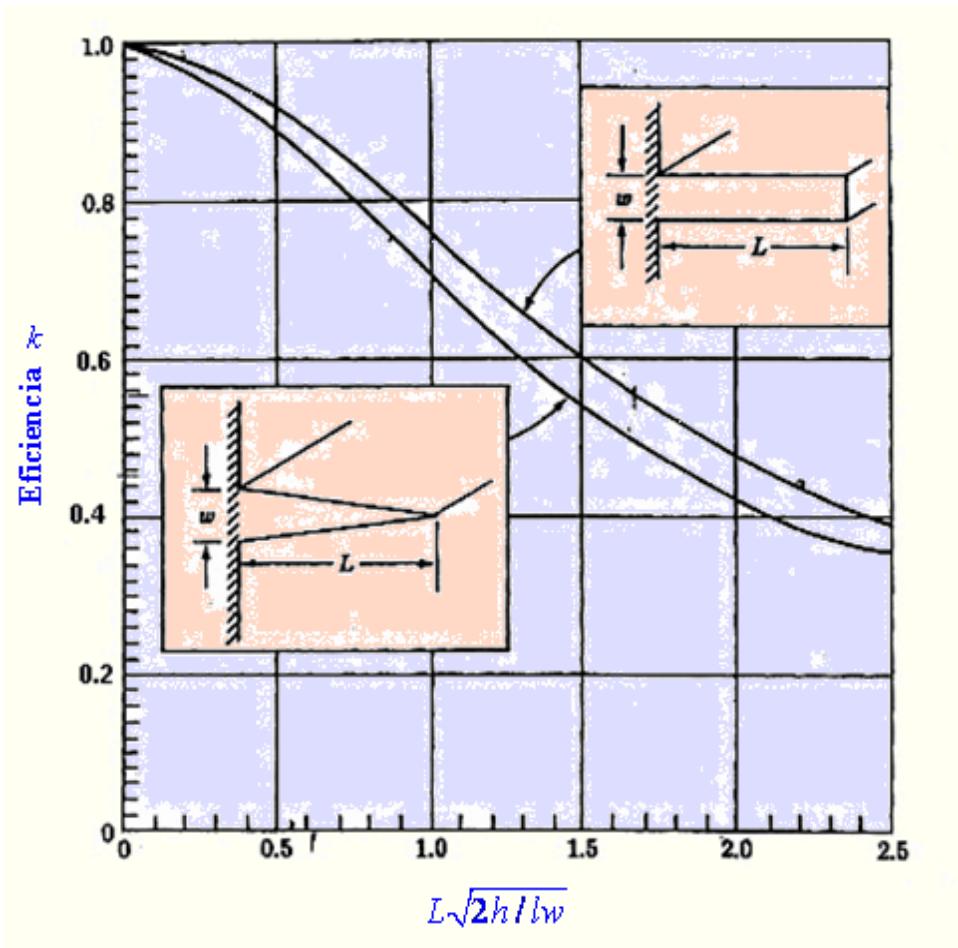
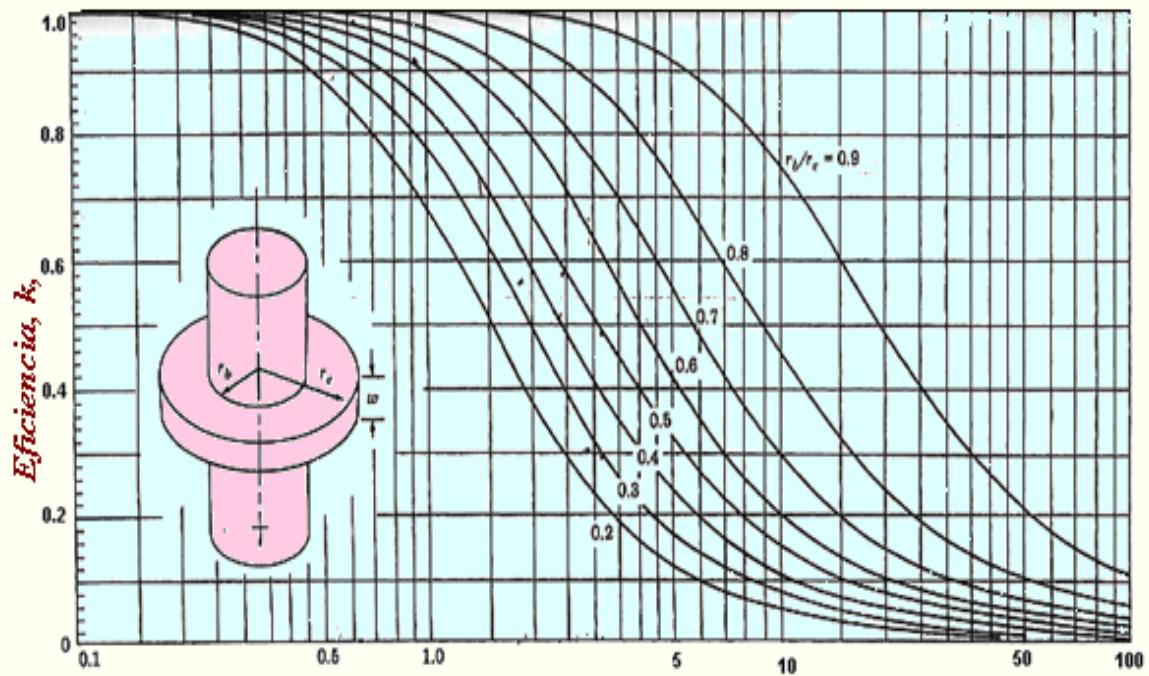


Figura N° 4.13 Grafica para determinar la eficiencia de aletas de perfil rectangular y triangular

Fuente: Alan Chapman, Fundamentos de transferencia de calor, Tercera Edición , Editorial McGraw Hill, México



$$r_e \sqrt{2h / kw}$$

Figura N° 4.14 Gráfica para la evaluación de la eficiencia de aletas anulares o circunferenciales

Fuente: Alan Chapman, Fundamentos de transferencia de calor, Tercera Edición
Editorial McGraw Hill, México

Tabla N° FUNCIONES DE BESEL MODIFICADAS DE PRIMERA Y SEGUNDA ESPECIE

x	$e^{-x}I_0(x)$	$e^{-x}I_1(x)$	$e^xK_0(x)$	$e^xK_1(x)$
0.0	1.0000	0.0000	∞	∞
0.2	0.8269	0.0823	2.1407	5.8334
0.4	0.6974	0.1368	1.6627	3.2587
0.6	0.5993	0.1722	1.4167	2.3739
0.8	0.5241	0.1945	1.2582	1.9179
1.0	0.4658	0.2079	1.1445	1.6361
1.2	0.4198	0.2152	1.0575	1.4429
1.4	0.3831	0.2185	0.9881	1.3010
1.6	0.3533	0.2190	0.9309	1.1919
1.8	0.3289	0.2177	0.8828	1.1048

2.0	0.3085	0.2153	0.8416	1.0335
2.2	0.2913	0.2121	0.8056	0.9738
2.4	0.2766	0.2085	0.7740	0.9229
2.6	0.2639	0.2046	0.7459	0.8790
2.8	0.2528	0.2007	0.7206	0.8405
3.0	0.2430	0.1968	0.6978	0.8066
3.2	0.2343	0.1930	0.6770	0.7763
3.4	0.2264	0.1892	0.6579	0.7491
3.6	0.2193	0.1856	0.6404	0.7245
3.8	0.2129	0.1821	0.6243	0.7021
4.0	0.2070	0.1787	0.6093	0.6816
4.2	0.2016	0.1755	0.5953	0.6627
4.4	0.1966	0.1724	0.5823	0.6453
4.6	0.1919	0.1695	0.5701	0.6292
4.8	0.1876	0.1667	0.5586	0.6142
5.0	0.1835	0.1640	0.5478	0.6003
5.2	0.1797	0.1614	0.5376	0.5872

5.4	0.1762	0.1589	0.5279	0.5749
5.6	0.1728	0.1565	0.5188	0.5633
5.8	0.1696	0.1542	0.5101	0.5525
6.0	0.1666	0.1520	0.2019	0.5422
6.4	0.1611	0.1479	0.4865	0.5232
6.8	0.1561	0.1441	0.4724	0.5060
7.2	0.1515	0.1405	0.4595	0.4905
7.6	0.1473	0.1372	0.4476	0.4762
8.0	0.1434	0.1341	0.4366	0.4631
8.4	0.1398	0.1312	0.4264	0.4511
8.8	0.1365	0.1285	0.4168	0.4399
9.2	0.1334	0.1260	0.4079	0.4295
9.6	0.1305	0.1235	0.3995	0.4198
10.0	0.1278	0.1213	0.3916	0.4108

Fuente Frank Incropera, Transferencia de calor

4.6 Problemas resueltos

Problema N° 4.7

Una aleta anular de aluminio de perfil rectangular se une a un tubo circular que tienen un diámetro externo de 25mm y a una temperatura superficial de 250°C. La aleta es de 1mm de espesor y 10mm de longitud y la temperatura y el coeficiente de convección asociados con el fluido adyacente son 25°C y 25 W/m²K, respectivamente.

- ¿Cuál es la perdida de calor por la aleta?
- Si 200 de estas aletas están espaciadas en incrementos de 5mm a lo largo de la longitud del tubo. ¿Cuál es la perdida de calor por metro de longitud del tubo?

SOLUCION:

1. Diagrama de la aleta

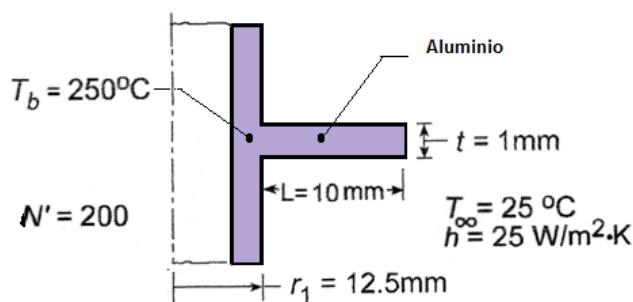


Figura N° 4.15 Corte transversal de una aleta anular de perfil rectangular

Fuente: Elaboración propia, (Alberto Emilio Panana Giro)

2. Determinación de la longitud corregida, radio corregido la relación

adimensional de radios. Área de perfil y el parámetro: $L_c^{3/2} \frac{h}{kA_p} \frac{\dot{\theta}}{\dot{\theta}_c}$

$$r_{2c} = r_2 + \frac{t}{2} = (12.5\text{mm} + 10\text{mm}) + 0.5\text{mm} = 23\text{mm} = 0.023m$$

$$\frac{r_{2c}}{r_1} = 1.84 \quad (\text{i})$$

$$L_c = L + \frac{t}{2} = 10.5mm = 0.0105m$$

$$A_p = L_c t = 0.0105m \times 0.001m = 1.05 \times 10^{-5} m^2$$

$$\frac{L_c^{3/2} h / k A_p \dot{\theta}}{240 W / mK \times 1.05 \times 10^{-5} m^2} = 0.15 \quad (\text{ii})$$

3. Mediante gráfica N° 4.11 se determina la eficiencia de la aleta, con las relaciones (i) y (ii)

$$\eta = 0.97$$

4. Cálculo del calor disipado por la aleta :

$$Q = \eta x Q_{\max} = 2\pi \eta h (r_{2,c}^2 - r_1^2) \theta_b$$

$$Q = 2\pi \times 0.97 \times 25 W / m^2 K \times ((0.023m)^2 - (0.0125m)^2) \times 225^\circ C = 12.8W$$

4. Perdida de calor por las 200 aletas :

$$Q' = NQ + h (1 - Nt) 2\pi r_i \theta_b$$

$$Q' = 200 m^{-1} \times 12.8W + 25 W / m^2 K (1 - 200 m^{-1} \times 0.001m) \times 2\pi \times 0.0125m \times 225^\circ C$$

$$Q' = (2560W + 353W) / m$$

$$Q' = 2.91KW / m$$

PROBLEMA N° 4.8

Al realizar un estudio para instalar calefacción en una factoría en la que se dispone de agua caliente a $85^\circ C$, se llegó a la conclusión de que había que aportar 460 Kcal/h.m para mantener la temperatura ambiente en $+24^\circ C$. Dado que en la factoría se dispone de hierro fundido $K = 50 \text{ Kcal} / hm^\circ C$ del calibre 60/66 y de aletas anulares del mismo material y de radio exterior 66mm, con un espesor de 3 mm y consideremos que los coeficientes de película son 1000 y $8 \text{ Kcal} / hm^\circ C$. Determinar el número de aletas necesario para disipar el calor indicado.

Solución

1) Diagrama de flujo

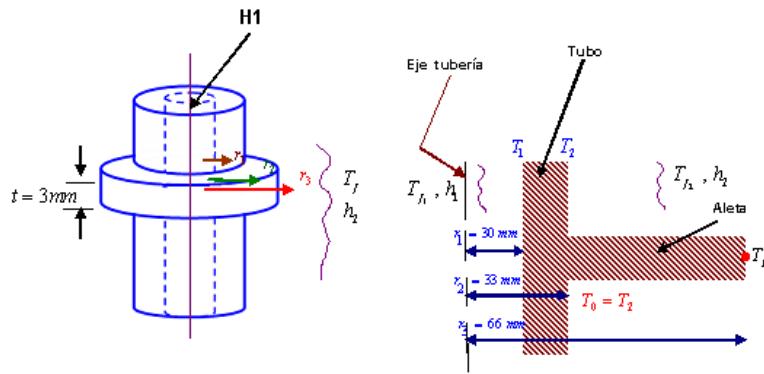


Figura Nº 4.16 Tubo con aleta anular

Fuente: Elaboración propia, (Alberto Emilio Panama Girio)

$$T_{f_1} = 85^{\circ}\text{C} \quad T_{f_2} = 24^{\circ}\text{C}$$

$$K = 50 \text{ Kcal} / \text{hm}^0\text{C} \quad h_1 = 1000 \text{ Kcal} / \text{hm}^2\text{C} \quad h_2 = 8 \text{ Kcal} / \text{hm}^{20}\text{C}$$

$$Q = 460 \text{ Kcal} / \text{h.m}$$

- 2) Primero se comprobará si es necesario las aletas para esa cantidad de calor afectado.

$$\frac{Q}{L} = \frac{2\pi(T_{f1} - T_{f2})}{\frac{1}{r_1 h_1} + \frac{\ln r_2 / r_1}{K} + \frac{1}{r_2 h_2}} = \frac{2\pi(85 - 24)^{\circ}\text{C}}{\frac{1}{0.03 \times 1000} + \frac{\ln 33 / 30}{50} + \frac{1}{0.033 \times 8}}$$

$$\frac{Q}{L} = Q_{C_1} = Q_K = Q_{C_2}$$

$$Q_{C_1} = h_1 2\pi r_1 L (T_{f1} - T_1)$$

$$Q_K = 2\pi L K (T_1 - T_2) / \ln(r_2 / r_1)$$

$$Q_{C_2} = h_2 \times 2\pi (r_2 - L) (T_2 - T_{f2})$$

$$Q/L = 100.25 \text{ Kcal / h.w}$$

Como $100.25 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}} < 460 \text{ Kcal / h.m}$

Si son necesarias las aletas, ya que el tubo sin aleta no puede aportar la energía calorífica necesaria.

- 2) Cálculo de la temperatura en la base de la aleta ($T_0 = T_2$)

$$\frac{Q}{L} = \frac{T_{f1} - T_1}{\frac{1}{2\pi r_1 h_1}} = \frac{T_1 - T_0}{\frac{\ln r_2 / r_1}{2\pi K}} = \frac{T_{f1} - T_0}{\frac{1}{2\pi r_1 h_1} + \frac{\ln r_2 / r_1}{2\pi K}}$$

Separando T_0

$$T_{f1} - T_0 = \frac{Q}{L} \left(\frac{1}{2\pi r_1 h_1} + \frac{\ln r_2 / r_1}{2\pi K} \right)$$

$$T_{f1} - T_0 = 460 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}} \left(\frac{1}{2\pi \times 0,03 \times 1000} + \frac{\ln 33/30}{2\pi \times 50} \right) = 2,58$$

Por lo tanto: $T_0 = T_f - 2,58 = 85 - 2,58 = 82,42^\circ \text{C}$

$$T_0 = 82,42^\circ \text{C}$$

- 4) Cálculo del calor disipado por una aleta

Mediante la figura N° 2.18

4.1 Cálculo de $r_2 / r_3 = \frac{0,033}{0,066} = 0.5$

4.2 Cálculo: $r_3 \sqrt{\frac{2h}{Kt}} = 0,066 \sqrt{\frac{2 \times 8}{50 \times 0,003}} = 0.68164 \approx 0,682$

- 4.3 Por gráfico la eficiencia (aleta anular)

$$\eta = 0.95$$

4.4 Cálculo de $Q_{\max} = h_2 a_2 (T_0 - T_f)$; $a_2 = 2\pi (r_3^2 - r_2^2)$

$$Q_{\max} = 8 \times 2\pi (0,066^2 - 0,033^2) (82,42 - 24)$$

$$Q_{\max} = 9.59359$$

4.5 $Q_a = \eta Q_{\max} = 0.95 \times 9.59359 = 9.1139 \text{ Kcal/h}$

6) Cálculo del máximo de aletas necesarios para $L = 1$ metro de tubería, habrá N_a (Número de aletas) de espesor $t = 0,003 \text{ mm}$

5.1 Longitud de tubería que ocupan las N_a (Aleta)

$$L_{Na} = t \cdot N_a (\text{m})$$

5.2 Longitud de tubería libre de aletas (L_{La})

$$L_{La} = (1 - tN_a)$$

5.3 Calor total disipado

$$Q_t = Q_{ta} + Q_{La}$$

$$Q_t = 460 \text{ Kcal/h.m} \times 1 \text{ m} = 460 \text{ Kcal/h}$$

$$Q_{ta} = 9.11 \times N_a$$

$$Q_{La} = 100.25 \text{ Kcal/h.m} (1 - N_a \cdot t)$$

5.4 Reemplazando

$$460 = 9.11N_a + 100.25 (1 - 0.003N_a)$$

$$N_a = 40,8377 \approx 41 \text{ aletas}$$

5.5 Separación entre aletas

$$S = \frac{1 - (41 \times 0,003)}{41} = 0,02139 \text{ m}$$

$$S = 21,39 \text{ mm}$$

Problema N° 4.8

Unas aletas anulares de aluminio de perfil rectangular están unidas a un tubo circular que tiene un diámetro externo de 50 mm y una temperatura de superficie externa de 200°C. Las aletas tienen 4 mm de espesor y 15 mm de longitud. El sistema está en contacto con aire ambiental a una temperatura de 20°C y el coeficiente de transferencia por convección es 40 W/m²K. $k = 240 \text{ W/m.K}$

- ¿Cuáles son la eficiencia y la efectividad de la aleta?
- Si hay 125 de estas aletas por metro de longitud de tubo, ¿Cuál es la transferencia de calor por unidad de longitud del tubo?

SOLUCION:

1. Esquema de las aletas

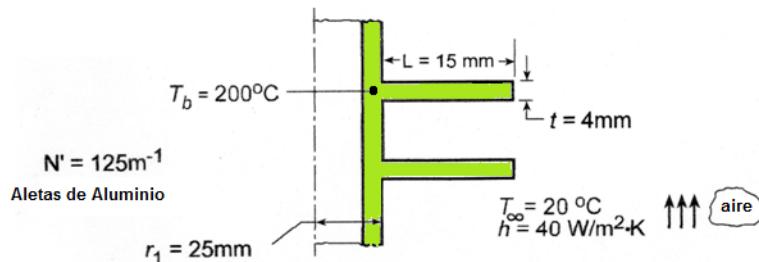


Figura N° 4.17 Corte transversal de un tubo con aletas anulares

Fuente: Elaboración propia, (Alberto Emilio Panama Girio)

- Determinación de la longitud corregida, radio corregido la relación adimensional de radios. Área de perfil y el parámetro: $L_c^{3/2} \frac{\alpha}{\delta} h / k A_p \frac{\delta}{\theta}$

$$r_{2c} = r_2 + \frac{t}{2} = (40mm + 2mm) = 0.042m$$

$$\frac{r_{2c}}{r_1} = \frac{0.042m}{0.025m} = 1.68 \quad (i)$$

$$L_c = L + \frac{t}{2} = 15mm + 2mm = 0.017m$$

$$A_p = L_c t = 0.017m \times 0.004m = 6.8 \times 10^{-5} m^2$$

$$L_c^{3/2} \frac{\alpha h}{k A_p \theta} = (0.017)^{3/2} \frac{40}{240} \frac{1}{6.8 \times 10^{-5}} = 1.216 \times 10^{-4}$$

3. Mediante gráfica N° 4.12 se determina la eficiencia de la aleta, con las relaciones (i) y (ii)

$$\eta = 0.97$$

5. La perdida de calor por aleta es:

$$Q = \eta x Q_{\max} = 2\pi \eta h (r_{2,c}^2 - r_1^2) \theta_b$$

$$Q = 2\pi \times 0.97 \times 40 \frac{W}{m^2 K} \times ((0.042m)^2 - (0.025m)^2) \times 180^\circ C = 50W$$

6. La efectividad de la aleta es:

$$\varepsilon = \frac{Q}{h A_{c,b} \theta_b} = \frac{50W}{40 \frac{W}{m^2 K} \times 2\pi (0.025m) \times (0.004m) \times 180^\circ C} = 11.05$$

6. Cálculo de la transferencia de calor por las 125 aletas:

$$Q' = NQ + h(1 - Nt) 2\pi r_1 \theta_b$$

$$Q' = 125 \times 50 W/m + 40 \frac{W}{m^2 K} (1 - 125 \times 0.004) \times 2\pi \times 0.025m \times 180^\circ C$$

$$Q' = (6250 + 565) W/m$$

$$Q' = 6.82 KW/m$$

Problema N° 4.9

Se instalan aletas anulares de aluminio de 2mm de espesor y 15 mm de longitud sobre un tubo de aluminio de 30 mm. de diámetro. Se sabe que la resistencia de contacto termino entre una aleta y el tubo es de $2 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \text{K/w}$.

Si la pared del tubo esta a 100°C y el flujo contiguo esta a 25°C , con un coeficiente de convección de $75 \text{ W/m}^2\text{K}$. ¿Cuál es la transferencia de calor de una sola aleta? ¿Cuál será la transferencia de calor si la resistencia de contacto pudiera eliminarse?

Solución.-

1. Diagrama de flujo

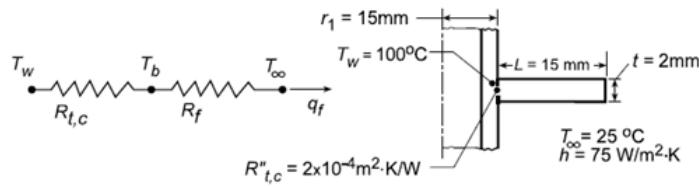


Figura Nº 4.18 Corte transversal de un tubo con aletas anulares

Fuente: Elaboración propia, (Alberto Emilio Panama Girio)

2. La determinación del calor transferido, se determina mediante la siguiente expresión.

$$q_f = \frac{T_w - T_\infty}{R_{t,c} + R_f}$$

$$\text{Donde: } R_{t,c} = \frac{R_{t,c}}{A_b} = \frac{2 \times 10^{-4}}{2\pi \times 0.015 \text{ m} \times 0.002 \text{ m}} = 1.06 \text{ K/W}$$

$$\text{Además: } R_f = \frac{\theta b}{q_f} = \frac{\theta b}{n_f \times q_{\max}} = \frac{\theta b}{n_f \times h \times A_f \times \theta b} = \frac{1}{2\pi \times h \times n_f (r_{2,c}^2 - r_1^2)}$$

3. Evaluación de los siguientes parámetros

$$r_{2,c} = r_2 + t/2 = 30 \text{ mm} + 1 \text{ mm} = 0.031 \text{ m}$$

$$Lc = L/2 = 0.016 \text{ m}$$

$$r_{2,c}/r_1 = 0.031/0.015 = 2.07$$

$$Ap = Lc \times t = 3.2 \times 10^{-5} \text{ m}^2$$

$$L_c^{3/2} \times (h/kAp)^{1/2} = 0.016^{3/2} \times (75/240 \times 3.2 \times 10^{-5})^{1/2} = 0.20$$

4. De la grafica N° 4.13 se determina la eficiencia

$$Nf = 0.94$$

$$R_f = \frac{1}{2\pi \times (75W/m^2 \cdot K)(0.94)((0.031m)^2 - (0.015m)^2)} = 3.07K/W$$

5. Para una aleta adiabática con la resistencia de contacto:

$$q_f = \frac{(100 - 25)^\circ C}{(1.06 + 3.07)K/W} = 18.2W$$

6. Sin la resistencia de contacto $T_w = T_b$

$$q_f = \frac{\theta_b}{R_f} = \frac{75^\circ C}{3.07K/W} = 24.4W$$

PROBLEMA Nº 4.10

El calor es transferido a través de una pared plana de espesor $\Delta x = 1.25$, de conductividad térmica $k = 200 W/m \cdot ^\circ C$. El lado izquierdo de la pared está expuesto a un fluido $T_1 = 120^\circ C$ con un coeficiente de transferencia de calor $h_1 = 450 W/m^2 \cdot ^\circ C$. El lado derecho de la pared, también está expuesto a otro fluido $T_4 = 20^\circ C$ con un coeficiente de transferencia de calor $h_4 = 25 W/m^2 k$. Se decide que el intercambio de calor entre ambos fluidos usar aletas (rectas) de perfil rectangular de longitud $L = 2.5$ cm de espesor $w = 0.16$ cm y espaciadas 1.25 cm sobre sus centros, la conductividad es la misma del material de la pared asumiendo que el flujo es unidimensional, encontrar el flujo de transferencia de calor con unidad de área de la superficie primaria de la pared, si esta a) no tiene aleta. b) si se adicionan aletas al lado derecho.

Solución.-

1. Diagrama de Flujo

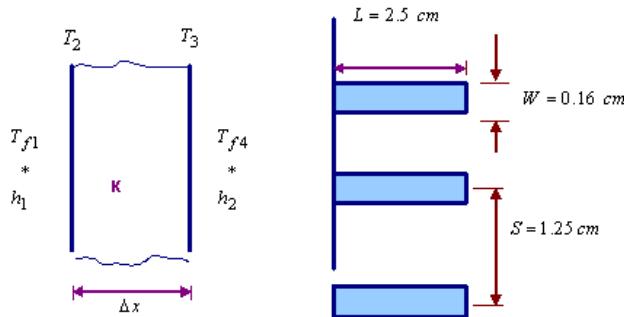


Figura Nº 4.19 Corte transversal de una pared con aletas y sin aletas

Fuente: Elaboración propia, (Alberto Emilio Panama Girio)

2. Para la pared sus aletas por área primaria Ap . El flujo de calor es.

$$\frac{q}{Ap} = \frac{T_{f1} - T_{f4}}{\frac{1}{h} + \frac{\Delta x}{k} + \frac{1}{h_2}} \quad H = 1 \text{ (profundidad unitaria)}$$

$$\frac{q}{Ap} = \frac{120 - 20}{\frac{1}{450} + \frac{0.0125}{200} + \frac{1}{25}} = 2364.9 \text{ W/m}^2$$

3. Si se adicionan aletas al lado derecho, el flujo de calor será:

$$q/Ap = \frac{T_{f1} - T_{f4}}{\frac{1}{h_1} + \frac{\Delta x}{k} + \left(\frac{At}{Ap} \right) \eta' h_4} \quad \dots \dots \dots (3)$$

3.1 La determinación de la efectividad total de superficie derecha

$$\eta' = 1 - \left(\frac{A_f}{A_t} \right)_3 (1 - \eta)$$

3.2 La efectividad de cada aleta

$$\eta = \frac{\tanh mL}{mL} \quad ; \text{ Se determina mediante la gráfica}$$

3.3 Para las condiciones del lado derecho

$$mL = L \sqrt{\frac{2h}{kW}} = 0.025 x \sqrt{\frac{2 \times 25}{200 x 0.0016}} = 0.3125$$

$\eta = 0.9687$ (Por gráfica N° 1)

3.4 Cálculo de relación área de aleta A_f o área total superficie aleta más área sin aletas A_t

$$\frac{A_f}{A_t} = \frac{2L+W}{2L+\delta} = \frac{(2(2.5)+0.16)}{2(2.5)+1.25} = 0.8256$$

3.5 Cálculo de relación área total A_t a área sin aleta Ap

$$\frac{A_t}{Ap} = \frac{2L + \delta}{\delta} = 5$$

3.6 Determinación de efectividad total

$$h' = 1 - 0.8256(1 - 0.9687) \quad h' = 0.9742$$

3.7 Reemplazando en la ecuación (3)

$$\frac{q}{Ap} = \frac{120 - 20}{\frac{1}{459} + \frac{0.0125}{20} + \frac{1}{5 \times 0.9742 \times 25}}$$

$$\frac{q}{Ap} = 9526.6 \text{ W/m}^2 \quad (\text{Flujo de calor se incremento casi en un 300 \%})$$

Nota: Si se agregan aletas al lado izquierdo

$$mL = 0.025 \sqrt{\frac{2 \times 450}{200 \times 0.0016}} = 1.3258$$

$$\eta_2 = \frac{\tanh mL}{mL} = \frac{\tanh(1.3258)}{1.3258} = 0.6549$$

$$\frac{A_f}{A_t} = \frac{2L + \omega}{2L + \delta} = 0.8256$$

$$\frac{A_f}{A_t} = \frac{2L + \delta}{\delta} = 5$$

$$\eta_2^i = 1 - \left(\frac{A_f}{A_t} \right) (1 - \eta) = 1 - 0.8256 (1 - 0.6549)$$

$$\eta_2^i = 0.7151$$

$$\left(\frac{q}{Ap} \right)_2 = \frac{120 - 20}{\frac{1}{5 \times 0.7151 \times 450} + \frac{0.0125}{200} + \frac{1}{25}} = 2458 \text{ W/m}^2$$

Aplicar aletas al lado derecho solo se incrementa el flujo de calor en un 4% aproximadamente.

PROBLEMA N° 4.11

Una aleta circular con una sección transversal rectangular de 3,7 cm. De diámetro externo y 0,3 cm. de espesor, rodea un tubo de 2,5 cm. de diámetro. La aleta está construida de acero inoxidable de $K = 14,4 \text{ W/m.K}$. El aire que sopla la aleta produce un coeficiente de Transferencia de Calor de $28,4 \text{ w/m}^2 \text{ K}$. Si las temperaturas de la base de la aleta y el aire están a 260°C y 38°C , respectivamente.

Calcule:

- a) El perfil de Temperatura para la aleta
- b) La razón de Transferencia de Calor de la aleta

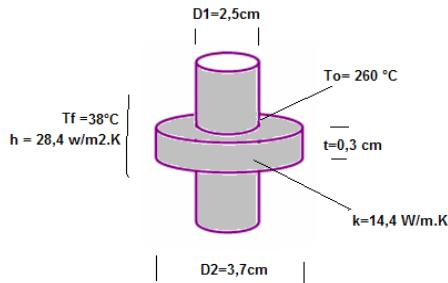


Figura N° 4.20 Tubo con aletas anulares, expuesto a un fluido convectivo

Fuente: Elaboración propia, (Alberto Emilio Panama Girio)

Solución.-

1. Perfil de temperatura para la aleta Ecuación de Bessel de Orden Cero.

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\theta}{dr} - m^2\theta = 0$$

2. Condiciones de frontera

$$C.F: 1 \quad \theta = \theta_0 \quad \text{ó} \quad T = T_0 \quad ; \quad r = r_1$$

$$C.F: 2 \quad \frac{d\theta}{dr} = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{dT}{dr} = 0 \quad ; \quad r = r_2$$

3. Solución de la ecuación de Bessel

$$\theta = C_1 I_0(mr) + C_2 K_0(mr)$$

4. Reemplazando las condiciones de frontera, las constantes de integración C1 y C2 son.

Con la primera condición de frontera CF:1

$$\theta_0 = C_1 I_0(mr_1) + C_2 K_0(mr_1)$$

7. De acuerdo a regla de la diferenciación de las funciones de Bessel

$$\frac{dI_o(x)}{dx} = I_1(x) \quad ; \quad \frac{dk_o(x)}{dx} = -k_1(x)$$

$$\frac{dI_0(mr)}{dr} = C_1 m I_1(mr), \quad \frac{dK_0(mr)}{dr} = -C_2 m K_1(mr)$$

6. Con la segunda condición de frontera CF: 2

$$0 = C_1 m I_1(mr_2) - C_2 m K_1(mr_2)$$

5. Operando en forma simultanea, se tiene

$$I_0(mr_1)C_1 + K_0(mr_1)C_2 = \theta_0$$

$$I_1(mr_2)C_1 - K_1(mr_2)C_2 = 0$$

$$C_1 = \frac{K_1(mr_2)\theta_0}{I_0(mr_1)K_1(mr_2) + I_1(mr_2)K_0(mr_1)}$$

$$C_2 = \frac{I_1(mr_2) \theta_0}{I_0(mr_1) K_1(mr_2) + I_1(mr_2) K_0(mr_1)}$$

6. Por tanto la distribución de temperatura será

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{K_1(mr_2) I_0(mr) + I_1(mr_2) K_0(mr)}{I_0(mr_1) K_1(mr_2) + I_1(mr_2) K_0(mr_1)}$$

7. Cálculos:

$$m = \sqrt{\frac{2h}{Ke}} = \sqrt{\frac{2 \times 28,4}{14,4 \times 0.003}} = 36,260 m^{-1}$$

$$r_1 = 1,25 cm \equiv 0,0125 m ; \quad L_c = L + \frac{t}{2} = (r_2 - r_1) + \frac{t}{2} = 0,6 + \frac{0,3}{2} = 0,75 cm \equiv 0,0075 m$$

$$r_{2c} = L_c + r_1 = 1,25 + 0,75 = 2 cm \equiv 0,02 m$$

Por Tanto:

$$mr_1 \Rightarrow 36,260375 \times 0.0125 = 0,45325$$

$$mr_{2c} \Rightarrow 36,260375 \times 0,02 = 0,7252075$$

8. De las Tablas de funciones de Bessel

. De las Tablas de funciones de Bessel

$$I_0(0,45325) = 1.056205$$

$$I_0(0,725207) = 1.140426328$$

$$I_1(0,45325) = 0.23007$$

$$I_1(0,725207) = 0.384451112$$

$$K_0(0,45325) = 1.015116$$

$$K_0(0,725207) = 0.637442017$$

$$K_1(0,45325) = 1.921373$$

$$K_1(0,725207) = 1.01126659$$

9. De la ecuación de perfil de temperatura:

$$T - T_f = \frac{(260 - 38) \times [1.01126659 \times I_0(mr) + 0.384451 \times K_0(mr)]}{1.45835}$$

$$T - T_f = 153.9419 I_0(mr) + 58.5237 K_0(mr)$$

10. La razón de transferencia de calor de la aleta

$$Q_{aleta} = \eta \times Q_{max} ; \quad \eta = \text{gráficamente} \quad (1)$$

11. Cálculos de los parámetros

$$\frac{r_{2c}}{r_1} \dots (1) \quad L_c^{3/2} \left(\frac{h}{KAp} \right)^{1/2} \dots (2)$$

$$r_{2c} = R_i + L_c \quad L_c = L + \frac{t}{2} \quad L = r_2 - r_1$$

$$Lc = 0,75cm = 75 \times 10^{-4} m \quad r_{2c} = 2cm = 2 \times 10^{-2} m$$

$$Ap = L_c \times t = 0,75 \times 0,3cm^2 \equiv 0,225 \times 10^{-4} m^2$$

$$\frac{r_{2c}}{r_1} = \frac{2 \times 10^{-2}}{1,25 \times 10^{-2}} = 1,6$$

$$L_c^{3/2} \left(\frac{h}{KAp} \right)^{1/2} = (75 \times 10^{-4})^{3/2} \left(\frac{28,4}{0,225 \times 10^{-4} \times 14,4} \right)^{1/2} = 0,19229$$

$$Ap = L_c \times t = 0,75 \times 0,3cm^2 \equiv 0,225 \times 10^{-4} m^2$$

De la grafica: **= 0,985**

$$Q_{\max} = h A_{\text{sup}} (T_0 - T_f)$$

$$A_{\text{sup}} = 2\pi (r_{2c}^2 - r_1^2)$$

$$A_{\text{sup}} = 2\pi (r_2^2 - r_1^2) + 2\pi r_2 t \quad (\text{sin el radio corregido})$$

$$A_{\text{sup}} = 2\pi [(2 \times 10^{-2})^2 - (1,25 \times 10^{-2})^2] = 1,532 \times 10^{-3} m^2$$

$$Q_{\max} = 28,4 \times 1,532 \times 10^{-3} (260 - 38) = 9,656 W$$

$$Q_{\text{aleta}} = \eta \times Q_{\max}$$

$$Q_{\text{aleta}} = 0,985 \times 9,656 = 9,51115 W$$

Problema N° 4.12

A un tubo de 40 mm. de diámetro exterior se le adosan aletas anulares de aluminio $K = 197 \text{ Kcal / h.m}^\circ\text{C}$ de 0,5 mm. de espesor y 100 mm. de radio exterior separados entre si a una distancia de 5,5 mm. desde sus centros. Las aletas son aisladas térmicamente en sus extremos.

La presencia de un fluido exterior implica la existencia de un coeficiente de película de $60 \text{ Kcal/h.m}^{2,0}\text{C}$. Si existe una diferencia de temperaturas de 50°C entre las superficies de tubo y el medio exterior, determinar:

- a) El calor disipado en cada metro de longitud de tubería sin aletas.
- b) El calor disipado en cada metro de longitud de tubería con aletas.
- c) La temperatura en el extremo aislado de la aleta.
- d) El aumento en porcentaje de calor disipado por el hecho de colocar las aletas.

Solución.-

1. Diagrama de flujo

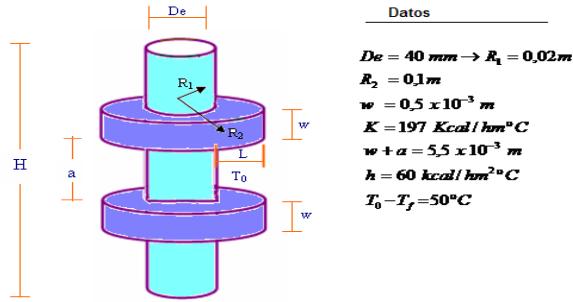


Figura Nº 4.21 Tubo con aletas anulares circunferenciales, expuesta a un fluido convectivo

Fuente: Elaboración propia, (Alberto Emilio Panana Girio)

1. Cálculo de calor disipado por metro de longitud de tubo sin aletas

$$Q_1 = A \cdot h \cdot q_0$$

$$Q_1 = 2\pi R_1 L h \theta_0 = 2\pi \times (0,02) \times 60 \times 1 \times \theta_0 = 7,5398 \theta_0$$

$$Q_1 = 7,5398 \times 50 = 376,99 \text{ kcal/h } ^{\circ}\text{C}$$

2. Calculando Na (Números de alertas)

$$H = Na(w + a) + a \quad \dots\dots(3)$$

$$Na = \frac{H - a}{w + a} = \frac{1 - 5 \times 10^{-3}}{0,5 \times 10^{-3} + 5 \times 10^{-3}} = 182 \text{ aletas}$$

3. El calor disipado en cada metro de longitud de tubería con aletas

$$Q_T = A_t \cdot \eta' \cdot h \cdot (T_0 - T_f) \quad \dots\dots(4)$$

3.1 Calculando n' (eficiencia global)

$$\eta' = 1 - \frac{A_f \times Na}{A_t} (1-\eta) \dots \dots \dots (5)$$

3.2 Cálculo de los parámetros siguiente:

a. $(r_1/r_2) = 0,4$

b. $r_2 \sqrt{\frac{2 \times h}{k \times t}} = 0,05 \sqrt{\frac{2 \times 60}{197 \times 0,0005}} = 1,745$

- c. Mediante gráfico N|° 2.18 Gráfica para determinar la eficiencia de aletas anulares se tiene que la eficiencia de la aleta es:
= 0,65

d. Calculo del área de la aleta

$$A_{aleta} = 2\pi(r_2^2 - r_1^2) = 2\pi(0,05^2 - 0,02^2) = 0,01319m^2$$

e. Cálculo del área del tubo libre de aletas (A_{la})

$$A_{la} = (L - Na \times t) \times 2\pi r_1$$

$$A_{la} = (1 - 182 \times 0,0005) \times 2\pi \times 0,02 = 0,1142 m^2$$

f. Cálculo del área total (A_t)

$$A_t = N_a \times A_a + A_{la} = 0,01319 \times 182 + 0,1142 = 2,51478m^2$$

g. Cálculo de la eficiencia global (η'), incluye el tubo libre aletas con las aletas

$$\eta' = 1 - \frac{Na \times Aa}{At} (1-\eta) = 1 - \frac{182 \times 0,01319}{2,51478} (1-0,65) = 0,6658$$

3.2 Reemplazando en la ecuación (4), para determinar el calor total disipado por la tubería con aletas

$$Q_t = \eta' A_t \times h(T_o - T_f) = 0,6658 \times 2,51478 \times 60 \times 50 = 5023,73 Kcal/h$$

4. Determinación de la temperatura en el extremo aislado (T_L)

4.1 La distribución de temperaturas determinado para este tipo de aletas:

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{K_1 (mr_2) I_0 (mr) + I_1 (mr_2) K_0 (mr)}{I_0 (mr_1) K_1 (mr_2) + I_1 (mr_2) K_0 (mr_1)}$$

4.2 Datos: $T_o - T_f = 50 ^\circ C$. $r_2 = 0,05 m$ $r_1 = 0,02 m$

4.3 Cálculo del parámetro (m),

$$m = \sqrt{\frac{2 \times h}{k \times t}} = \sqrt{\frac{60 \times 2}{197 \times 0,005}} = 34,90378 m^{-1}$$

4.4 Cálculo de las funciones de Bessel , los cuales se dan en la siguiente tabla:

Con: $mr_1 = 0,69807$ y $mr_2 = 1,745189$

$I_0(mr_1)$	$I_0(mr_2)$	$I_1(mr_1)$	$I_1(mr_2)$	$K_0(mr_1)$	$K_0(mr_2)$	$K_1(mr_1)$	$K_2(mr_2)$
1,1304	1,9219	0,3680	1,2488	0,6662	0,1564	1,0698	0,1970

4.5 Reemplazando en la distribución de temperatura:

$$\theta = \theta_L = (T_L - T_f) \quad \text{cuando} \quad r = r_2$$

$$\frac{\theta_L}{\theta_0} = \frac{K_1(mr_2) I_0(mr_2) + I_1(mr_2) K_0(mr_2)}{I_0(mr_1) K_1(mr_2) + I_1(mr_2) K_0(mr_1)}$$

$$\theta = \theta_L = (T_L - T_f) \quad \text{cuando} \quad r = r_2$$

$$\theta = \theta_0 = (T_0 - T_f) = 50^{\circ}\text{C} \quad r = r_1$$

$$\frac{\theta_L}{\theta_0} = \frac{T_L - T_f}{50^{\circ}\text{C}} = \frac{0,1970 \times 0,9219 + 1,2488 \times 0,1564}{1,1304 \times 0,1970 + 1,2488 \times 0,6662}$$

$$\theta_L = (T_L - T_f) = 17,8699^{\circ}\text{C}$$

4.6 Calculo del aumento de calor disipado con el tubo con aletas

$$\% \text{ de aumento} = \frac{Q_T - Q_1}{Q_1} \times 100 = \frac{5023,73 - 376,99}{376,99} \times 100 = 1232,58\%$$

PROBLEMAS Nº 13

Si desea incremental el paso de calor desde una pared plana al medio ambiente que lo rodea, instalado para ello aletas de diferentes tipos sobre dicha superficie de la forma que sobresalgan de la superficie de la pared una longitud de 20 cm, siendo el material utilizado un conductor de $k = 40$ kcal/hm $^{\circ}\text{C}$ y suponiendo en cualquier caso un coeficiente de transmisión de calor sólido - fluido de $17\text{kcal / hm}^{\circ}\text{C}$. Bajo estas condiciones se desea saber:

- a) La configuración que será la más eficaz de entre las siguientes
 - a.1 Aleta recta de perfil rectangular constante, de espesor $e = 1.25$ cm y anchura unitaria.
 - a.2 Aleta triangular de similar base de apoyo a la anterior.

- b) Material con el que se debe construir la aleta triangular, tomando como referencia su conductividad térmica para que en las condiciones anteriores tenga la misma efectividad que la encontrada para la alta rectangular

Solución

1. Diagrama de flujo

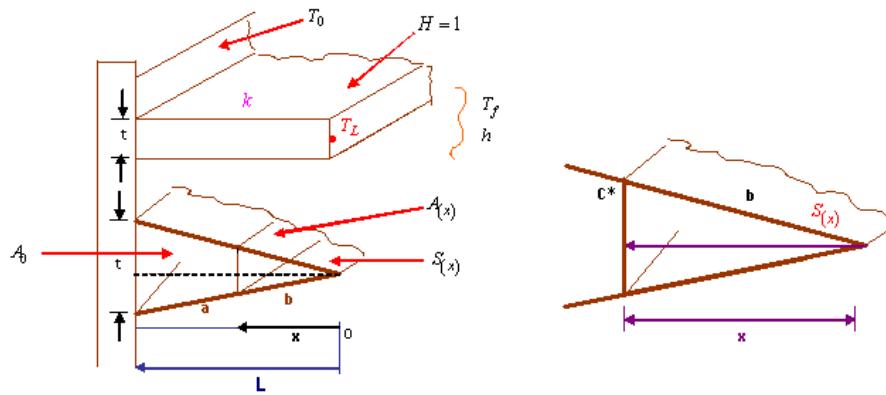


Figura N° 4.22 Aleta de perfil triangular instalado en una superficie plana, y expuesta a un fluido convectivo

Fuente: Elaboración propia, (Alberto Emilio Panama Girio)

2. Cálculo de la eficiencia de una aleta recta de perfil rectangular constante, de espesor $t = 1.25$ cm y anchura unitaria $H = 1$ y longitud $L = 20$ cm, con extremo aislado.

$$\eta = \frac{\text{Tanh}(mL)}{mL}, \quad m = \sqrt{\frac{ph}{KA}}$$

$$P = 2(H + t) \quad H \gg t \quad P = 2H \quad A = H \times t$$

$$A = 1 \times 0.0125 = 0.0125 \text{ m}^2 \quad P = 2(1 + 0.0125) = 2.0250$$

$$\text{Pero con } H = 1 \quad P = 2 \quad y \quad A = t$$

$$m = \sqrt{\frac{2H \cdot h}{H \cdot t \cdot K}} = \sqrt{\frac{2h}{Kt}} = \sqrt{\frac{2 \times 17 \text{ kcal} / \text{hm}^2 \text{C}}{40 \text{ kcal} / \text{hm}^\circ \text{C} \times 0.0125 \text{ m}}}$$

$$m = 8.2462 \text{ m}^{-1}$$

3. Reemplazando : $\text{Tanh}(1.644924)$

$$1. \quad \eta = \frac{\tanh(8.2462m^{-1})(0.2m)}{8.2462m^{-1} \cdot 0.2m} = \frac{0.92875}{1.64924} = 0.563$$

Nota: 1 Cálculo de $m = \sqrt{\frac{Ph}{KA}}$

$$\text{Con } P = 2(1 + 0.0125) = 2.025m$$

$$A = 1 \times 0.0125 = 0.0125m^2$$

$$m = \sqrt{\frac{2.025 \times 17}{0.0125 \times 40}} = \sqrt{68.85} = 8.29759$$

$$\eta = \frac{\tanh(8.29759m^{-1})(0.2m)}{8.29759 \times 0.2} = \frac{0.93015223}{1.659518} = 0.56049$$

$$\eta = 56 \%$$

a.1 Cálculo de la eficiencia de aleta con convección en su extremo libre

$$\eta = \frac{Q_a}{Q_{max}} = \frac{\sqrt{hPKA\theta_0} \frac{\operatorname{senh} m L + (h/M) \cosh m L}{\cosh m L + (h/M) \operatorname{senh} m L}}{hS_s}$$

$$S = (H \times L) \times 2 \quad P = (1 \times 0.2) \times 2 \quad S = 0.4m^2$$

Reemplazando

$$\eta = \frac{\sqrt{17 \times 2.025 \times 9.9125 \times 40} \frac{\operatorname{senh}(8.29759 \times 0.2) + (17/8.29759 \times 40) \cosh(8.29759 \times 0.2)}{\cosh(8.29759 \times 0.2) + (17/8.29759 \times 40) \operatorname{senh}(8.29759 \times 0.2)}}{17 \times 0.4}$$

$$\eta = \frac{4.178795 \times (5.672765 / 2.85325)}{17 \times 0.4} = 0.5715$$

Nota 2: Cálculo de la Eficiencia mediante gráfica fig 2.17 para aleta recta de perfil rectangular (aislada térmica en su extremo).

$$\text{Parámetro: } L\sqrt{\frac{2f}{Kt}} = 0.2 \times 8.2462 = 1.649 \approx 1.65$$

Por gráfica $N = 0.56$

Nota 3: Cálculo de la Eficiencia para aleta recta con convección en su extremo, su figura 2.18

Cálculos de los parámetros

- 1) Longitud corregida, $Lc = L + \frac{t}{2} = 0.2 + \frac{0.0125}{2} = 0.20625 \text{ m}$
- 2) Área del perfil $Ap = Lc \cdot t = 0.20625 \text{ m} \times 0.0125 = 2.578 \times 10^{-3} \text{ m}^2$
- 3) Cálculo del parámetro : $Lc^{3/2} (h / Ap \cdot k)^{1/2} = (0.20625)^{3/2} (17 / 40 \times 2.578 \times 10^{-3})^{1/2} = 1.20265$
- 4) Por gráfico aproximado la eficiencia es: **= 0.57**

a.2 Aleta triangular de similar base de apoyo a la anterior según tabla 3.5 (T.C. F Incropora), para aleta triangular , la Eficiencia es:

$$\eta_a = \frac{1}{mL} \times \frac{I_1(2mL)}{I_0(2mL)} \quad m = \sqrt{\frac{2h}{kt}}$$

$$\text{Área de Perfil: } Af = 2H \left[L^2 + \left(\frac{t^2}{2} \right) \right]^{1/2}$$

Nota 4: Pasos para determinar la Eficiencia de una aleta triangular

- 1) Área de Sección Transversal (ver fig) $A(x)$

$$\frac{A(x)}{X} = \frac{AI}{L} \quad AI = Ht, \text{ entonces } A(x) = \frac{Htx}{L}$$

$$dA(x) = \frac{Ht}{L}$$

- 2) Área superficial de la aleta : $S(x)$

$$S_{(x)} = 2bH \quad , \quad b = \sqrt{x^2 + (C^*)^2}$$

Donde C^* se determina: $\frac{t/2}{L} = \frac{C^*}{x}$, donde $C^* = \frac{t/2X}{L}$

$$\text{O sea } b = \sqrt{x^2 + \left[\frac{(t/s)X}{L} \right]^2} = X \sqrt{1 + \left(\frac{t}{2L} \right)^2}$$

$$\text{Por tanto: } S_{(x)} = 2Hx \sqrt{1 + \left(\frac{t}{2L} \right)^2}$$

$$\text{Si } f = \sqrt{1 + \left(\frac{t}{2L} \right)^2}$$

$$S_{(x)} = 2Hx f \quad \text{y} \quad \frac{dS_{(x)}}{dx} = 2Hf$$

3) Reemplazando en la Ec. Diferencial y Simplificando

$$K \left[A_{(x)} \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{dA_{(x)}}{dx} \cdot \frac{d\theta}{dx} \right] - h\theta \frac{dS_{(x)}}{dx} = 0$$

$$K \left[\frac{Htx}{L} \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{Ht}{L} \cdot \frac{d\theta}{dx} \right] - h\theta 2Hf = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\theta}{dx} - \frac{2hfL}{Kt} \left(\frac{\theta}{x} \right) = 0$$

$$\text{Si } n = \sqrt{\frac{2hLf}{Kb}} \quad \text{además si } L \gg b \rightarrow f = 1$$

En la Ec. Diferencial para Aleta Triangular:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\theta}{dx} - \frac{n^2}{x} \theta = 0 \quad \dots \dots \dots \text{(i)}$$

Se satisface la condición monodimensional

$$S_{(x)} = 2XH \quad \frac{dS_{(x)}}{dx} = 2 \quad H = 1$$

Por tanto si se reemplaza $A_{(x)}$ $\frac{dA_{(x)}}{dx}$ $\frac{dS_{(x)}}{dx}$

$$K \left[\frac{Htx}{L} \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{Ht}{L} \cdot \frac{d\theta}{dx} \right] - h\theta 2 = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\theta}{dx} - \frac{2hL}{Ktx} \theta = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\theta}{dx} - \frac{m^2 t}{x} \theta = 0 \quad (ii)$$

$$\text{Donde : } n = \sqrt{\frac{2hL}{kt}} = m\sqrt{L}$$

4) Siendo la solución de esta Ecuación Diferencial

$$(i) \theta = BI_0(2n\sqrt{x}) + CK_0(2n\sqrt{x})$$

5) Para la Ec. ii la solución es:

$$\theta = BI_0(2mx) + CK_0(2mx)$$

6) Para calcular las constantes de integración de Aleta triangular B y C se parte de la condición de los extremos de acuerdo con la figura.

6.1) Para $x = 0$; $C = 0$, por cuanto la función de Bessel modificada (K_0) tiende a infinito cuando el argumento tiende a cero, por lo tanto:

$$\theta = BI_0(2n\sqrt{x})$$

6.2) Para $x = L$: $T = T_0$, que se supone constante $\theta = \theta_0$ y por lo tanto, el valor de B es:

$$\theta = BI_0(2n\sqrt{x}) \quad ; \quad B = \frac{\theta_0}{I_0(2n\sqrt{L})}$$

6.3) La distribución de temperaturas queda en la forma:

$$\theta = \frac{\theta_0}{I_0(2n\sqrt{L})} \cdot I_0(2n\sqrt{x}) \quad \text{ó} \quad \frac{\theta}{\theta_0} = \frac{I_0(2n\sqrt{L})}{I_0(2n\sqrt{x})}$$

- 6.4) El calor disipado al exterior por la aleta longitudinal de anchura unitaria será igual al que penetra por conducción por su base, por lo que:

$$Q_a = -KA \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=L}$$

$$A = tH \rightarrow H = 1 \rightarrow A = t$$

$$\frac{d[I_0(ax)]}{dx} = aI_1(ax)$$

$$\frac{d[k_0(ax)]}{dx} = -ak_1(ax)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=L} &= \frac{\theta_0}{I_0(2n\sqrt{L})} x I_1(2n^{1/2}) 2nx^{1/2} \Big|_{x=L} \\ &= \frac{\theta_0}{I_0(2n\sqrt{L})} x \frac{2n}{2x^{1/2}} I_1(2nx^{1/2}) \Big|_{x=L} \\ &= \frac{\theta_0}{I_0(2n\sqrt{L})} x \frac{2n}{2\sqrt{L}} I_1(2n\sqrt{L}) \end{aligned}$$

Reemplazando en Q_a

$$Q_a = Kt\theta_0 \times \frac{2n}{2\sqrt{L}} \times \frac{I_1(2n\sqrt{L})}{I_0(2n\sqrt{L})}$$

$$n = \sqrt{\frac{2hL}{kt}} = m\sqrt{L} \quad m = \sqrt{\frac{2h}{kt}}$$

Cálculo de la Eficiencia

$$\eta_0 = \frac{Q_o}{Q_{\max}} \quad Q_{\max} = h2(H \times d)(T_0 - T_x)$$

$$d = \sqrt{\left(\frac{t}{2}\right)^2 + L^2} \quad \text{como } L \gg t \quad H = 1$$

$$d = L$$

Reemplazamos

$$\eta_a = \frac{kt\theta_0 \frac{2n}{2\sqrt{L}} x \frac{I_1(2n\sqrt{L})}{I_0(2n\sqrt{L})}}{h2L\theta_0}$$

donde $n = \sqrt{\frac{2hL}{kt}}$

$$\eta_a = \frac{1}{n\sqrt{L}} x \frac{I_1(2n\sqrt{L})}{I_0(2n\sqrt{L})} \quad \text{ó} \quad n^2 = \frac{2hL}{kt}$$

$$\text{Si : } n = m\sqrt{L} \quad n\sqrt{L} = m\sqrt{L} \cdot \sqrt{L} \quad n\sqrt{L} = mL$$

Por tanto la Eficiencia también se puede determinar:

$$\eta_a = \frac{1}{mL} x \frac{I_1(2mL)}{I_0(2mL)} \quad m = \sqrt{\frac{2h}{kt}}$$

Cálculos

$$n = \sqrt{\frac{2hL}{kt}} = \sqrt{\frac{2 \times 17 \times 0.2}{40 \times 0.0125}} = 3.6878$$

$$2n\sqrt{L} = 2 \times 3.6878 \times \sqrt{0.2} = 3.29846$$

- h. Las funciones de Bessel modificada de primera especie de orden cero y orden uno

$$n\sqrt{L} = 3.6878 \times \sqrt{2} = 1.64925$$

$$I_1 = (2n\sqrt{L}) = I_1(3.2985) = 5.195$$

$$I_0 = (2n\sqrt{L}) = I_0(3.2985) = 0.258$$

Reemplazando

$$\eta_0 = \frac{1}{1.64925} x \frac{5.195}{6.258} = 0.503$$

- i. Se observa que el rendimiento de las aletas rectangulares es superior al de la aleta triangular.
- j.
- a. La Determinación de la Eficiencia mediante gráfico Fig. 217
(Aleta triangular de perfil rectangular)

*) Cálculo del perímetro

$$L\sqrt{\frac{2h}{kt}} = 0.2 \sqrt{\frac{2x17}{40x0.0125}} = 1.649$$

Por gráfico: $\eta_a = 0.5$

- b. Material con el que se debe construir la aleta triangular tomando como referencia su conductividad térmica, para que en las condiciones anteriores tenga la misma efectividad que la encontrado para la aleta rectangular, se ha de determinar la conductividad térmica del material

$$\eta_a = 0.58 = \frac{1}{n\sqrt{L}} \times \frac{I_1(2n\sqrt{L})}{I_0(2n\sqrt{L})} \quad Si \quad n\sqrt{L} = N$$

$$\eta_a = 0.58 = \frac{1}{N} \times \frac{I_1(2N)}{I_0(2N)}$$

Por lo que se debe tantear la relación.

Nº	0.58 N	$I_0(2N)$	$I_1(2N)$	$\frac{I_1(2N)}{I_0(2N)}$	
1	0.58	2.2796	1.5906	0.6967	0.58 < 0.6968
1.5	0.87	4.8808	3.9534	0.8099	0.87 > 0.8099
1.4	0.812	4.1573	3.301	0.7943	0.812 > 0.794
1.3	0.754	3.5533	2.7554	0.7754	0.754 < 0.7754
1.35	0.783	3.8553	3.0283	0.7854	0.783 < 0.785

En valor muy aceptable es $N = 1.35$, entonces

$$n = \sqrt{\frac{2hL}{kt}} = \frac{N}{\sqrt{L}} \quad \text{como} \quad N = \sqrt{\frac{2hL}{kt}} \cdot L$$

$$K = \frac{2hL^2}{tN^2} = \frac{2x17x0.2^2}{0.0125x1.35^2} = 59.69 \frac{kcal}{hm^\circ C}$$

4.7 Problemas Propuestos

Problema 4.7.1

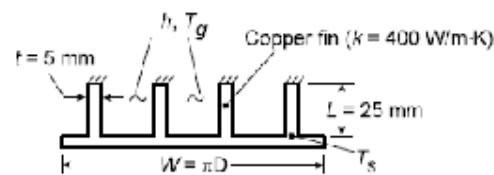
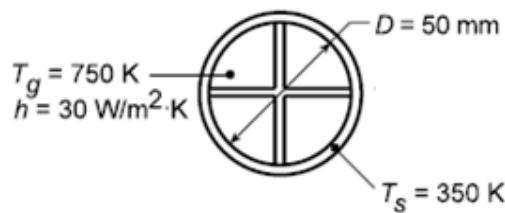
El vapor de un sistema de calefacción fluye por tubos cuyo diámetro exterior es de 5 cm. y cuyas paredes se mantienen a 180 °C. Al tubo se le sujetan aletas circulares de la aleación de aluminio 2024-T6 ($k = 186 \text{ W/m.}^{\circ}\text{C}$). de diámetro exterior de 6 cm. espesor constante de 1 mm. El espacio entre las aletas es de 3 mm y por lo tanto se tienen 250 aletas por metro de longitud de tubo. El calor se transfiere al aire circundante que está a $T_f = 25^{\circ}\text{C}$, con un coeficiente de transferencia de calor de 40 $\text{W/m}^2\text{.}^{\circ}\text{C}$. Determine el aumento en la transferencia de calor desde el tubo por metro de longitud, como resultado de la adición de las aletas

Problema 4.7.2

Una aleta anular de perfil rectangular, de acero $k = 44 \text{ Kcal/h.m.}^{\circ}\text{C}$ y dimensiones, espesor, $e = 0.5 \text{ mm}$ y longitud $L = 15 \text{ mm}$, se coloca en un tubo de 20 mm de diámetro exterior. La temperatura en la base de la aleta es $T_o = 90^{\circ}\text{C}$, la temperatura del fluido $T_f = 20^{\circ}\text{C}$, y el coeficiente de película, $h = 100 \text{ Kcal/h.m.}^{\circ}\text{C}$.

Problema 4.7.3

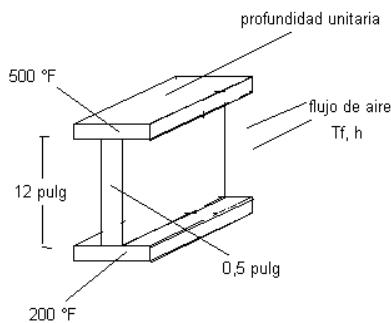
Se calienta agua sumergiendo tubos de cobre con pared delgada de 50 mm de diámetro en un tanque y haciendo pasar gases calientes de combustión ($T_g=750\text{K}$) a través de los tubos. Para reforzar la transferencia de calor al agua, se insertan en cada tubo cuatro aletas rectas de sección transversal uniforme, para formar una cruz. Las aletas tienen un espesor de 5mm y también están fabricadas de cobre ($k=400\text{W/m.K}$). Si la temperatura de la superficie del tubo es $T_s=350\text{K}$ y el coeficiente de convección del lado del gas es $h_g=30\text{W/m}^2\text{.K}$. ¿Cuál es la transferencia de calor al agua por metro de longitud del tubo?



Problema 4.7.4

La cara superior de una viga de forma (I) de 12 pulgadas se mantiene a una temperatura de 500 °F, mientras que la inferior está a 200 °F. El espesor de la estructura es de 1/2 pulgada y a lo largo de la viga sopla aire a 500 °F se tal suerte que $h = 7 \text{ Btu/h.pie}^2.\text{°F}$. Suponiendo que la conductividad térmica del acero es constante e igual a 25 Btu/h.pie.°F, determine:

- La distribución de temperatura desde la cara superior a la inferior.
- La temperatura a 6 pulgadas del lado mas caliente.
- La cantidad calor transferido por la viga al aire.



Problema 4.7.5

Los dos extremos de una barra de cobre en forma de U de 0.6 cm de diámetro están rígidamente empotrados en una pared vertical, como se muestra en la figura. La temperatura de la pared se mantiene a 93°C. La longitud desarrollada de la barra es de 0.6 m, y está expuesta al aire a 38°C. El coeficiente de transferencia de calor por convección es de 34 W/m²K. De conductividad térmica 180 W/m.°C

- Calcule la temperatura del punto medio de la barra
- ¿Cuál será la razón de transferencia de Calor de la barra?

Problema 4.7.6

Un calentador de aire consiste en un tubo de acero ($k=20 \text{ w/m .K}$), con radios interno y externo de $r_1 = 13 \text{ mm}$ y $r_2 = 16 \text{ mm}$, respectivamente, y ocho aletas longitudinales fabricadas integralmente, cada una de espesor $t = 3\text{mm}$. Las aletas se extienden a lo largo de un tubo concéntrico, que tiene radio $r_3 = 40\text{mm}$ y aislado en la superficie externa. Agua a temperatura $T_i = 90^\circ\text{C}$, con un coeficiente de transferencia de calor $h_i = 5000 \text{ W/m}^2.\text{K}$ fluye por el tubo interior. A través de la región anular formada por el tubo concéntrico mas grande fluye aire a la

temperatura de 25 °C con un coeficiente de transferencia de calor $h_0 = 200 \text{ W/m}^2$

- a. ¿Cuál es la transferencia de calor por unidad de longitud para este sistema,
tal como se muestra en la figura?

Problema 4.7.7

Aletas de aluminio de perfil triangular se unen a una pared plana cuya temperatura superficial es 250 °C. El espesor de la base de aleta es 2 mm, y su longitud es 6 mm. El sistema está en aire ambiental a una temperatura de 20°C, y el coeficiente de convección superficial es 40 W/m² . K, de conductividad térmica $k = 240 \text{ W/m.K}$.

- (a) ¿Cuáles son la eficiencia y efectividades de la aleta?
(b) ¿Cuál es el calor disipado por unidad de ancho por una sola aleta?

V. CONDUCCIÓN DE CALOR EN RÉGIMEN ESTACIONARIO EN FUNCIÓN DE DOS O MÁS VARIABLES

5.1 METODO ANALITICO - Conducción en Régimen Permanente en Placas Rectangulares

5.1.1 Determinación de la Distribución de la Temperatura

- La ecuación de conducción del calor con el régimen permanente, en coordenadas rectangulares y en dos dimensiones es:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (5.1)$$

- La solución de la ecuación anterior se obtiene, suponiendo que la distribución de temperatura se puede expresar como el producto de dos funciones, cada una de las cuales depende solamente de una de las fronteras a una temperatura determinada independiente, es decir que:

X(x) es únicamente función de x

Y(y) es únicamente función de y

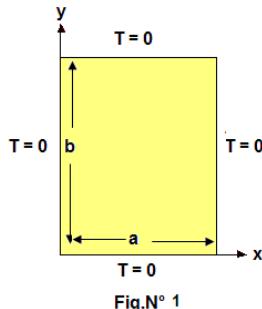


Fig.N° 1

Figura N° 5.1 Placa plana en dos dimensiones, con temperaturas en los bordes iguales

Fuente: Elaboración propia- Ing Alberto Emilio Panana Girio

- $T = X(x) \times Y(y)$ (5.2)
- Sustituyendo este valor en la ecuación diferencial de partida y ordenando la expresión resultante se tiene:

$$Y \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \rightarrow -\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \quad (5.3)$$

- Como cada miembro de esta ecuación depende solo de una variable, los dos miembros tienen que ser iguales a una constante (λ^2)

$$-\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = \lambda^2 \quad (5.4)$$

- Resultando dos ecuaciones diferenciales siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \lambda^2 X &= 0 \\ \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} - \lambda^2 Y &= 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

- Las soluciones de las ecuaciones diferenciales son:

$$\begin{aligned} Y &= \begin{cases} 1 & (1) \\ 2 & (2) \end{cases} \\ X &= \begin{cases} 3 & (3) \\ 4 & (4) \end{cases} \end{aligned} \quad (5.6)$$

- Por tanto la distribución de temperatura es:

$$T = \{\beta_1 \operatorname{Senh}(\lambda y) + \beta_2 \operatorname{Cosh}(\lambda y)\} \{\beta_3 \operatorname{Sen}(\lambda x) + \beta_4 \operatorname{Cos}(\lambda x)\} \quad (5.7)$$

Se tiene que () y las (), son constantes que hay que determinar mediante las condiciones de contorno.

- Las siguientes condiciones de contornos páralelos sistema mostrado son:

$$\begin{aligned} x = 0 & \quad T = 0 \quad ; \quad x = a \quad T = 0 \\ y = 0 & \quad T = 0 \quad ; \quad y = b \quad T = f(x) \end{aligned} \quad (5.8)$$

- La aplicación de las condiciones de contorno conduce a:

$$\begin{aligned} y = 0 & \quad T = 0 \quad \rightarrow \quad _2 = \\ x = 0 & \quad T = 0 \quad \rightarrow \quad _4 = \end{aligned} \quad (5.9)$$

- Entonces la ecuación general (5.7) se reduce a:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & (y) & 3 & (x) \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

$$\text{Además : } = \begin{pmatrix} 1 & \times & 3 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

- La aplicación de la primera condición de frontera, conduce:

$$x = a \quad T=0 \rightarrow 0 = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

- Para que esta ecuación se cumpla para todos los valores de (y), es necesario que:

- $\text{Sen}()$

- Que se satisface $= 0, \frac{\pi}{a}, \frac{2\pi}{a}$

- Y en general por: $\lambda_n = \frac{\pi n}{a}$, siendo $n = 0, 1, 2, \dots$

- Para cada valor de (n) se obtiene un valor de () que proporciona una solución diferente de la ecuación

$$T = \text{senh}(y) \text{sen}(x) \quad (5.13)$$

- La solución general será la suma de todas estas soluciones parciales:

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \text{Senh}\left(\frac{n\pi}{a} b\right) \quad (5.14)$$

En la que β_n representa a la constante β , para cada una de las soluciones.

- Para $n=0 \rightarrow$ por lo que el primer sumando de la serie se anula, obteniéndose

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \text{Senh}\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \quad (5.15)$$

- La aplicación de la condición $y = b$; $T = f(x)$ conduce al cálculo de β_n

$$T = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \text{Senh}\left(\frac{n\pi}{a} b\right) \quad (5.16)$$

$$\text{Con: } n - \frac{n}{a} \leq x \leq$$

- En una serie infinita de funciones de la forma:

$$\operatorname{Sen}(x_1) + (x_2) + (x_3) + \dots + (x_n)$$

- Estas son ortogonales y se cumple cuando

$$\int_0^a \operatorname{Sen}(x_i) \operatorname{Sen}(x_j) dx = 0 \quad \text{con } i \neq j$$

- Y tiene un valor determinado en un instante considerado, por lo tanto si la serie es convergente e integrable y si se multiplica por $\operatorname{Sen}(x_n)$ se obtiene:

$$T = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \operatorname{Sen}(x_n) = (a_0) + (a_1) x + (a_2) x^2 + \dots$$

$$\int_0^a f(x) \operatorname{Sen}(x_n) dx = (a_0) \int_0^a 1 dx + \dots + (a_n) \int_0^a x^n dx + \dots$$

- Por definición de ortogonalidad se hacen cero (0), todas las integrales del segundo miembro, menos la correspondiente al coeficiente a_n por lo que:

$$a_n = \frac{\int_0^a f(x) \operatorname{Sen}(x_n) dx}{\int_0^a \operatorname{Sen}^2(x_n) dx} = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{Sen}(x_n) dx \quad (5.17)$$

- Por la que la expresión de la distribución de la temperatura toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} T_{(x,y)} &= \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Senh}(\lambda_n y)}{\operatorname{Senh}(\lambda_n b)} \operatorname{Sen}(\lambda_n x) \int_0^a f(x) \operatorname{Sen}(\lambda_n x) dx = \\ T_{(x,y)} &= \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Senh} \frac{\pi ny}{a}}{\operatorname{Senh} \frac{\pi nb}{a}} \operatorname{Sen} \frac{\pi nx}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{Sen} \frac{\pi nx}{a} dx \end{aligned} \quad (5.18)$$

5.1.2 Determinación de la temperatura para un sistema bidimensional (placa rectangular o cuadrada), cuando una frontera se encuentra a una temperatura uniforme diferente a las temperaturas de las otras fronteras

Caso 1: Placa con un borde a temperatura uniforme

- En el caso particular Fig.5.2, en que el borde $y = b$ se mantenga a temperatura constante $f(x) = T_0$ y teniendo en cuenta que:

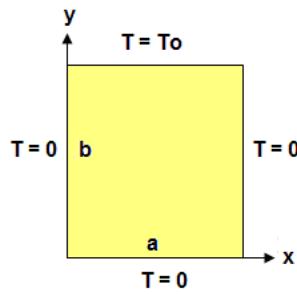


Figura N° 5.2 Placa plana en dos dimensiones, con temperaturas en bordes iguales y la cuarta a una temperatura diferente

Fuente: Elaboración propia- Ing Alberto Emilio Panana Giro

$$\int_0^a f(x) \operatorname{Sen} \frac{\pi n x}{a} dx = \int_0^a T_0 \operatorname{Sen} \frac{\pi n x}{a} dx = \frac{T_0 a}{\pi n} \left(1 - (-1)^n \right) \quad (5.19)$$

- La ecuación anterior se convierte en:

$$\frac{T}{T_0} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Senh} \frac{\pi n y}{a}}{\operatorname{Senh} \frac{\pi n b}{a}} \times \frac{1 - (-1)^n}{\pi n} \operatorname{Sen} \frac{\pi n x}{a}; \quad \frac{T_{(x,y)}}{T_0} = 4 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\operatorname{Senh} \frac{\pi n y}{a}}{\operatorname{Senh} \frac{\pi n b}{a}} \frac{\operatorname{Sen} \frac{\pi n x}{a}}{\pi n} \quad (5.20)$$

La figura 5.3. se representa la forma de las Isotermas de una placa rectangular aplicada a un borde

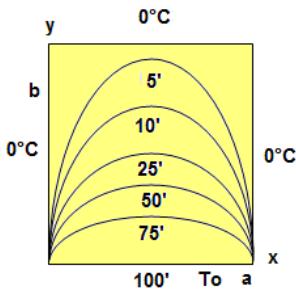


Figura N° 5.3 Placa plana en dos dimensiones, mostrando las isotermas, con borde inferior caliente

Fuente: Elaboración propia- Ing Alberto Emilio Panama Giro

Caso 2: Si el borde caliente es la base inferior y los demás están a $T = 0$, la solución se encuentra cambiando (y) por ($b-y$)

$$\frac{T}{T_0} = 4 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\operatorname{Senh} \frac{\pi n(b-y)}{a}}{\operatorname{Senh} \frac{\pi nb}{a}} \frac{\operatorname{Sen} \frac{\pi nx}{a}}{\pi n} \quad (5.21)$$

Caso 3: Si el borde caliente es el correspondiente a ($x = a$) y las demás están a $T = 0$ la solución se encuentra cambiando (y) por (x); (x) por (y); (a) por (b); (b) por (a)

$$\frac{T}{T_0} = 4 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\operatorname{Senh} \frac{\pi nx}{b}}{\operatorname{Senh} \frac{\pi na}{b}} \frac{\operatorname{Sen} \frac{\pi ny}{b}}{\pi n} \quad (5.22)$$

Caso 4: Si el borde caliente es correspondiente a ($x = 0$) y los demás están a ($T = 0$) la solución se encuentra cambiando en el caso anterior x por ($a-x$)

$$\frac{T}{T_0} = 4 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\operatorname{Senh} \frac{\pi n(a-x)}{b}}{\operatorname{Senh} \frac{\pi na}{b}} \frac{\operatorname{Sen} \frac{\pi ny}{b}}{\pi n} \quad (5.23)$$

5.1.2 Evaluación de la tasa de calor

- b1) El calor que atraviesa una superficie se determina a partir la ecuación de Fourier, particularizando para dichas superficies e integrando a lo largo de ella.

- b2) Para el caso particular del calor transmitido a través de la superficie $x = 0$, por unidad de longitud perpendicular al plano (x, y) se tiene:

$$\begin{aligned}
 Q|_{x=0} &= \int_{y=0}^b K \frac{\partial T_{(x,y)}}{\partial X}|_{x=0} dy = \\
 Q|_{x=0} &= \int_{y=0}^b \left(-\frac{2K}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Senh} \frac{\pi ny}{a}}{\operatorname{Senh} \frac{\pi nb}{a}} \times \frac{\pi n}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{Sen} \frac{\pi nx}{a} dx \right) dy \\
 Q|_{x=0} &= -\frac{2K}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Cosh} \frac{\pi nb}{a} - 1}{\operatorname{Senh} \frac{\pi nb}{a}} \int_0^a f(x) \operatorname{Sen} \frac{\pi nx}{a} dx
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

Problema N° 5.1

Una placa rectangular bidimensional se somete a condiciones de frontera preestablecidas tal y como se muestra en la figura. Utilizando la expresión de la solución exacta para la ecuación de calor:

$$\Theta_{(1, 0.5)} = \frac{T_{(1, 0.5)} - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1,3,5..}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \frac{\operatorname{Senh} \frac{\pi ny}{L}}{\operatorname{Senh} \frac{\pi nW}{L}} \times \operatorname{Sen} \frac{\pi nx}{L}$$

- Calcule la temperatura en el punto medio considerando los cinco primeros términos de la serie.
- Estime el error cometido al emplear sólo los tres primeros términos de la serie.

Diagrama de flujo:

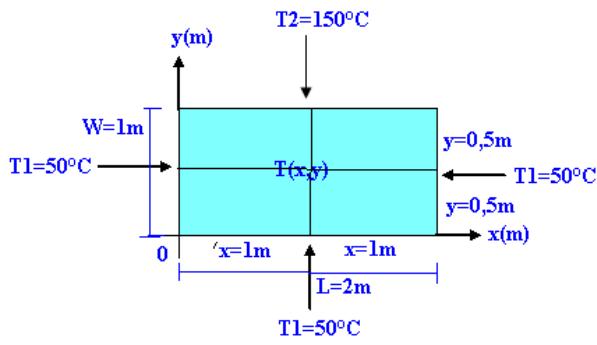


Figura N° 5.4 Placa plana rectangular (bi-dimensional), con tres bordes a temperaruras iguales, y la superior a otra temperatura

Fuente: Elaboración propia- Ing Alberto Emilio Panana Giro

Solución.-

1. De acuerdo a la figura, la placa rectangular tiene por dimensiones $W = 1\text{m}$ y $L = 2\text{m}$
2. Dividiendo la placa en incrementos de $x = 1\text{ m}$, $y = 0,5\text{m}$, La temperatura del punto medio de la placa, tendrá por coordenadas, $T_{(x=1,y=0,5)}$
3. Reemplazando las cantidades en la ecuación, para los cinco primeros números de la serie
 $n = 1, 3, 5$. Se debe tener en cuenta que al utilizar la ecuación para $n= 2,4,6$ se hace cero

$$\Theta_{(1, 0,5)} = \frac{T_{(1, 0,5)} - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1 - (-1)^1 \times \operatorname{Sen} \frac{\pi(1)(1)}{2} \times \frac{\operatorname{Senh} \frac{\pi(1)0,5}{2}}{\operatorname{Senh} \frac{\pi(1)(1)}{2}}}{1} + \right. \\ \left. \frac{1 - (-1)^3 \times \operatorname{Sen} \frac{\pi(3)(1)}{2} \times \frac{\operatorname{Senh} \frac{\pi(3)0,5}{2}}{\operatorname{Senh} \frac{\pi(3)(1)}{2}} + \frac{1 - (-1)^5 \times \operatorname{Sen} \frac{\pi(5)(1)}{2} \times \frac{\operatorname{Senh} \frac{\pi(5)0,5}{2}}{\operatorname{Senh} \frac{\pi(5)(1)}{2}}}{3} \right]$$

$$\Theta_{(1, 0,5)} = \frac{T_{(1, 0,5)} - T_1}{T_2 - T_1} = 0,4457757$$

$$T = 0,4457757(150 - 50) + 50 = 94,5757^\circ\text{C}$$

4. Para la pregunta (b)

$$\Theta_{(1, 0, 5)} = \frac{T_{(1, 0, 5)} - T_1}{T_2 - T_1}$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\frac{1 - (-1)^1}{1} \times \text{Sen} \frac{\pi(1)(1)}{2} \times \frac{\text{Senh} \frac{\pi(1)0,5}{2}}{\text{Senh} \frac{\pi(1)(1)}{2}} + \frac{1 - (-1)^3}{3} \times \frac{\text{Sen} \frac{\pi(3)(1)}{2} \times \frac{\text{Senh} \frac{\pi(3)0,5}{2}}{\text{Senh} \frac{\pi(3)(1)}{2}}}{2} \right]$$

$$\Theta_{(1, 0, 5)} = \frac{T_{(1, 0, 5)} - T_1}{T_2 - T_1} = 0,440742$$

$$T = 0,440742(150 - 50) + 50 = 94,0742^{\circ}\text{C}$$

5. Cálculo del porcentaje de error

$$\% \text{error} = \frac{94,5757^{\circ}\text{C} - 94,0742^{\circ}\text{C}}{94,5757} = 0,53$$

Nota 1.- De la ecuación, cuando se ha de calcular:

$$\text{Sen} \frac{\pi n x}{L}, \text{ el valor de } \pi = 180^{\circ}$$

Nota 2.- De la ecuación, cuando se ha de calcular:

$$\text{Senh} \frac{\pi n y}{L}, \text{ y } \text{Senh} \frac{\pi n W}{L} \text{ el valor de } \pi = 3,1416$$

5.2 CONDUCCIÓN DE CALOR EN RÉGIMEN ESTACIONARIO EN FUNCIÓN DE DOS O MÁS VARIABLES

5.2.1 CONDUCCIÓN UNIDIMENSIONAL ESTACIONARIA (MÉTODO NUMÉRICO)

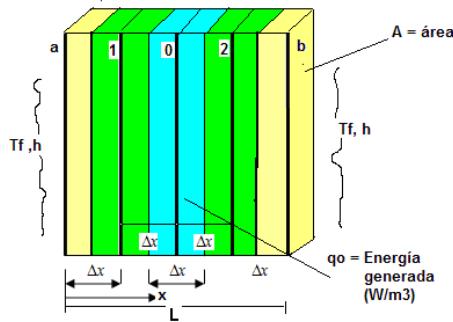


Figura N° 5.5 Conducción unidimensional (Método numérico)

Fuente: Elaboración propia – Ing Alberto Emilio Panama Girio

- Considerar una placa prismática cuadrangular de área de sección transversal al flujo de calor $A = y \cdot z$, de longitud (L), tal como de muestra en la figura N° 5.4
- Suponer que la placa actúa como elemento calefactor del fluido que lo rodea, en el se genera energía, q_o (W/m^3), que se distribuye en forma uniforme en toda la placa.
- Si la conducción de calor es unidimensional, en la dirección de la coordenada (x), de tal forma que la placa se dividido en celdillas cúbicas, de amplitud en esa dirección x , de tal modo que en la placa existen planos seccionales en el interior, identificados como: 0, 1, y 2: así como los planos situados en frontera adyacentes al fluido convectivo: a y b.
- La placa presenta una conductividad térmica (k), cuyo valor se puede asumir constante.

a. Nodo interno (0)

La determinación de la ecuación nodal para los **nodos internos**, se procederá de la siguiente forma:

- a1. Realizando un balance de energía para el placa seccional (0), la cual se encuentra adyacente a los placas seccionales 1 y 2

$$Q_{1 \rightarrow 0} + Q_{2 \rightarrow 0} + Q_{gen} = 0$$

$$kA\left(\frac{T_1 - T_0}{\Delta x}\right) + kA\left(\frac{T_2 - T_0}{\Delta x}\right) + q_o A \Delta x = 0 \quad (5.25)$$

- a2. Simplificando la ecuación nodal del nodo (0), será:

$$T_1 + T_2 - 2T_0 + \frac{q_o \Delta x^2}{k} = 0 \quad (5.26)$$

a3. De la misma forma se procederá para la determinación de la ecuación nodal, para los nodos 1 y 2

b. Nodo en frontera convectiva, (a y b)

b1. . Realizando un balance de energía para el placa situado en frontera conectiva (a), la cual se encuentra adyacente al fluido de temperatura Tf, de coeficiente de película h y al nodo (1):

$$Q_{f \rightarrow a} + Q_{l \rightarrow a} + Q_{gen} = 0$$
$$hA(T_f - T_a) + kA\left(\frac{T_1 - T_a}{\Delta x}\right) + q_o A \frac{\Delta x}{2} = 0$$

b2. Simplificando la ecuación nodal del nodo (a), será

$$2T_1 + \frac{2h\Delta x}{k}T_f + \frac{q_o\Delta x^2}{k} - \left(2 + \frac{2h\Delta x}{k}\right)T_a = 0 \quad (5.27)$$

b3. De la misma forma se procederá para la determinación de la ecuación nodal, para otro nodo situado en frontera convectiva (b)

5.2.2 CONDUCCIÓN BIDIMENSIONAL DE CALOR, RÉGIMEN PERMANENTE EN PLACAS RECTANGULARES

Los métodos numéricos se pueden aplicar a problemas de conducción en régimen estacionario y a problemas en que aparezcan condiciones de contorno radiactivas o que exista una generación de calor interna q_o (W/m^3).

El método numérico de diferencias finitas divide al modelo sólido en una serie de nodos, haciendo en cada uno de ellos un balance de energía, se obtiene una ecuación para el cálculo de la temperatura de cada nodo, también se obtiene una ecuación separada para cada nodo situado en el contorno o periferia del sólido.

El resultado final de la aplicación del método es la obtención de un sistema de n ecuaciones correspondientes a los (n) nodos del sistema, que sustituyen a las ecuaciones en derivadas parciales y a las condiciones de contorno a aplicar.

Si el número (n) de nodos es pequeño, se puede utilizar técnicas normales de resolución de ecuaciones; si el número aumenta, puede ser ventajoso el utilizar soluciones aproximadas por métodos iterativos, y si el número de nodos es muy grande hay que utilizar a programas computacionales.

Para un problema de conducción bidimensional, la técnica de diferencias finitas se aplica como se especifica a continuación.

- Se divide el sólido en un cierto número de cuadrados o rectángulos de igual tamaño
- Se supondrá que las características de cada cuadrado o rectángulo, se concentran en el centro del mismo, como la masa, temperatura, etc.
- Cada uno de los cuadrados o rectángulos, tiene una longitud x , en la dirección x, y y en la dirección y.
- El nodo al que se ha asignado el subíndice (0) se puede encontrar rodeado por cuatro nodos adyacentes, como se muestra en la Fig.5, de forma que cada nodo esté conectado a los contiguos mediante una línea conductora a través de la cual se pueda conducir el calor de un cuadrado a otro

5.2.1.2 Nodos Interiores

a)- Aplicando la ecuación de Fourier al nodo interior (0), con $x \neq \Delta y$ (corresponde a un rectángulo de profundidad (d), el balance energético, en régimen estacionario, sin generación de energía térmica es:

$$\sum_{i=1}^{i=4} Q_{i \rightarrow 0} = 0$$

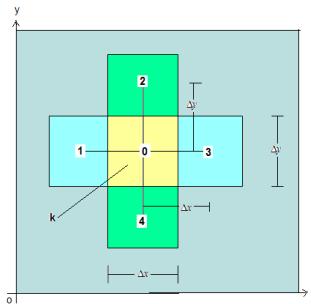


Figura. N° 5.6 Nodo interior conductorivo, sin generación interna de calor

Fuente: Elaboración propia, Ing Alberto Emilio Panana Gario

$$Q_{1 \rightarrow 0} + Q_{2 \rightarrow 0} + Q_{3 \rightarrow 0} + Q_{4 \rightarrow 0} = 0$$

$$\begin{aligned} k\Delta y d \left(\frac{T_1 - T_0}{\Delta x} \right) + K\Delta x d \left(\frac{T_2 - T_0}{\Delta x} \right) + k\Delta y d \left(\frac{T_3 - T_0}{\Delta x} \right) + K\Delta x d \left(\frac{T_4 - T_0}{\Delta x} \right) &= 0 \\ \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right) T_1 + \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} \right) T_2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right) T_3 + \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} \right) T_4 - \left(2 \frac{\Delta y}{\Delta x} + 2 \frac{\Delta x}{\Delta y} \right) T_0 &= 0 \end{aligned} \quad (5.28)$$

La ecuación (5.28) es la ecuación nodal de temperaturas para un nodo interno en una placa rectangular. (bidimensional)

b)- Si es un cuadrado de espesor (d), de acuerdo a la Fig. 5.6, con: $x = y$, el balance energético será:

$$\begin{aligned} Q_1 \rightarrow 0 &= -KA \frac{\partial T}{\partial x} = K \left(\frac{T_1 - T_0}{\Delta x} \right) = kd \left(\frac{T_1 - T_0}{\Delta x} \right) \\ Q_2 \rightarrow 0 &= Kd(T_2 - T_0) \\ Q_3 \rightarrow 0 &= Kd(T_3 - T_0) \\ Q_4 \rightarrow 0 &= Kd(T_4 - T_0) \\ \sum_{i=1}^{i=4} Q_{i \rightarrow 0} &= 0 \Rightarrow T_1 + T_2 + T_3 + T_4 - 4T_0 = 0 \end{aligned} \quad (5.29)$$

La exactitud que se consigue al sustituir el gradiente de temperaturas, dT/dx , por la diferencias finitas de dos temperaturas, $(T_1 - T_0)$, depende del tamaño de cada cuadrado, a menores dimensiones de los cuadrados, mayor exactitud en el gradiente de temperatura.

5.2.2.2 Nodos en contacto con un fluido

A todos los nodos que se encuentran situados en toda la periferia del sólido, hay que hacerles un balance de energía por separado.

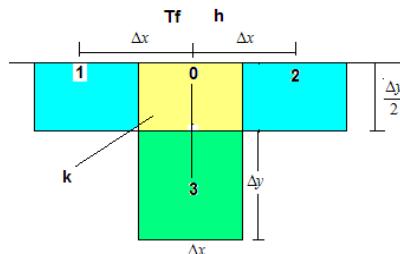


Figura. N°5.7 Nodo situado en frontera convectiva

Fuente: Elaboración propia, Ing Alberto Emilio Panana Girio

- Si el sólido esta en contacto con un fluido a T_f , Fig. N° 5.7, con un coeficiente de transmisión de calor por convección (h), se asigna a cada nodo de este tipo la mitad de la superficie que a cualquier otro nodo interior. El nodo (0) puede intercambiar calor por conducción con tres nodos continuos, y transferir calor por convección al fluido
 - El balance de energía en el nodo (0) es:
- $$Q_{1 \rightarrow 0} + Q_{2 \rightarrow 0} + Q_{3 \rightarrow 0} + Q_{f \rightarrow 0} = 0$$
- Sustituyendo las aproximaciones de las diferencias finitas para la ley de Fourier correspondientes a los tres primeros términos y para la ley de Newton en el último, se obtiene, para un espesor unidad, cuando x es diferente a y (placa rectangular):

$$k \left(\frac{T_1 - T_0}{x} \right) - \frac{x}{2} \left(\frac{T_2 - T_0}{y} \right) - \frac{x}{2} \left(\frac{T_3 - T_0}{y} \right) = -Q_{f \rightarrow 0}$$

- Si $x = y$, se simplifica, quedando en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{T_2 + T_3}{2} + T_1 + \frac{h_0}{K} T_f - \left(2 + h_c \frac{x}{K} \right) T_0 &= 0 \\ T_2 + T_3 + 2T_1 + \frac{2h}{K} T_f - \left(4 + \frac{2h}{K} \right) T_0 &= 0 \end{aligned} \quad (5.31)$$

5.2.2.3 GENERACION DE ENERGIA EN LA PLACA

Si el nudo (0) de la placa, Fig. N° 5.7, existe un foco térmico generador de energía E , el balance energético en el nodo citado, en un sistema bidimensional con 4 nodos vecinos es:

$$Q_{1 \rightarrow 0} + Q_{2 \rightarrow 0} + Q_{3 \rightarrow 0} + Q_{4 \rightarrow 0} + E = 0$$

Sustituyendo cada término del balance térmico y:

i.- Si la red es rectangular, donde: $x \neq \Delta y$

$$k \left(\frac{T_1 - T_0}{x} \right) - \left(\frac{T_2 - T_0}{y} \right) - \left(\frac{T_3 - T_0}{x} \right) - \left(\frac{T_4 - T_0}{y} \right) + E = 0 \quad (5.32)$$

2- Si la red es cuadrada: $x = \Delta y$

$$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 - 4T_0 + q_o \frac{\Delta x^2}{K} = 0$$

$$T_0 = \frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + q_o \frac{\Delta x^2}{K}}{4} \quad (5.33)$$

5.2.3 CONDUCCIÓN TRIDIMENSIONAL (MÉTODO NUMÉRICO)

Considerar una cámara cúbica de paredes gruesas y aristas externas 2a, 2b, 2c, la octava parte se representa en la figura N° 5.8

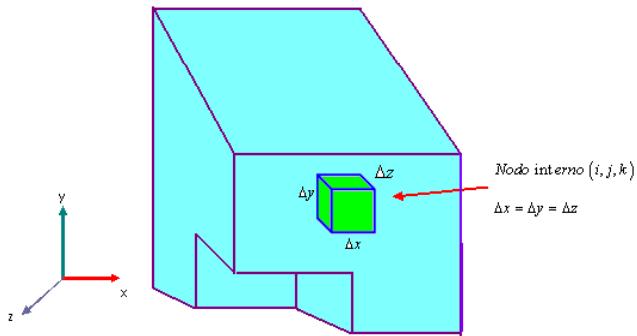


Figura. N°5.8 Nodo interno en un sistema

Fuente: Elaboración propia, Ing Alberto Emilio Panana Girio

- 1) Considerar que la cámara cónica es la de un horno, contenido en sus paredes resistencias eléctricas calefactoras.
- 2) Se requiere tres coordenadas *x*, *y*, *z* para expresar la distribución de temperaturas en sus paredes, para tal fin se ha dividido en celdillas cónicas de dimensiones $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ de tal forma que sus nodos extremos coinciden con sus límites.
- 3) La aplicación de Balance de energía para el nodo interno (i, j, k) ver la figura N° 5.9

Se tiene: $\sum Q_0 = 0$

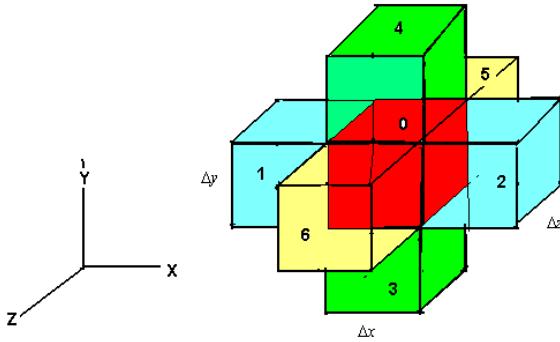


Figura Nº 5.9 Nodo Interno (i, j, k) de una cámara cúbica (con generación interna de calor $(q_0 = W / m^3)$, en estado estacionario).

Fuente: Elaboración propia, Ing Alberto Emilio Panana Giro

4. Sean las celdillas identificadas como puntos nodales:

$$\text{Nodo } 0 = (i, j, k)$$

$$\text{Nodo } 4 = (i, j-1, k)$$

$$\text{Nodo } 1 = (i+1, j, k)$$

$$\text{Nodo } 5 = (i, j, k+1)$$

$$\text{Nodo } 2 = (i-1, j, k)$$

$$\text{Nodo } 6 = (i, j, k-1)$$

$$\text{Nodo } 3 = (i, j+1, k)$$

5. Reemplazando las cantidades de calor en el balance de energía

$$Q_{1 \rightarrow 0} + Q_{2 \rightarrow 0} + Q_{3 \rightarrow 0} + Q_{4 \rightarrow 0} + Q_{5 \rightarrow 0} + Q_{6 \rightarrow 0} + Q_{gen} = 0$$

$$\begin{aligned}
 & k\Delta y\Delta z \left(\frac{T_1 - T_0}{\Delta x} \right) + k\Delta y\Delta z \left(\frac{T_2 - T_0}{\Delta x} \right) + k\Delta x\Delta z \left(\frac{T_3 - T_0}{\Delta y} \right) + \\
 & + k\Delta x\Delta z \left(\frac{T_4 - T_0}{\Delta y} \right) + k\Delta x\Delta y \left(\frac{T_5 - T_0}{\Delta z} \right) + k\Delta x\Delta y \left(\frac{T_6 - T_0}{\Delta z} \right) \\
 & + q_0\Delta x\Delta y\Delta z = 0
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

6. Simplificando

$$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6 - 6T_0 + q_0 \frac{\Delta x^2}{k} = 0 \tag{5.35}$$

7. Si en la cámara no hay generación interna de calor

$$T_0 = \frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6}{6} \quad (5.36)$$

5.2.4 Problemas Resueltos

PROBLEMA N° 1

Calcule la temperatura en los nodos de la figura adjunta, toda la superficie exterior está expuesta al entorno convectivo y toda la superficie interior está a una temperatura constante de 300 °C.

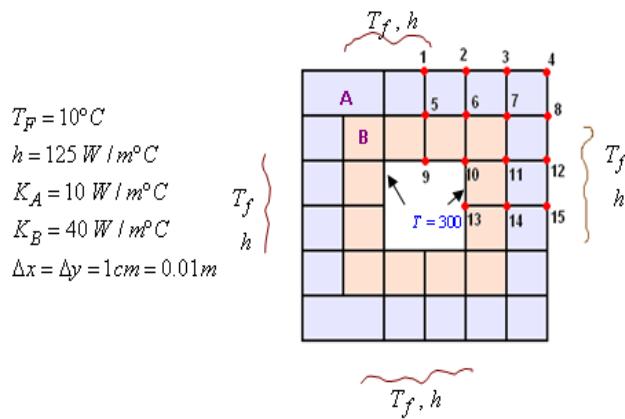


Figura N° 5.10 Corte transversal de una chimenea compuesto de dos materiales en forma cuadrada (sistema bidimensional) en estado estacionario.

Fuente: Elaboración propia, Ing Alberto Emilio Panama Girio

Solución.-

1. Por simetría de la cuarta parte de la figura, se tiene:

$$\begin{aligned} T_1 &= T_{15} & T_2 &= T_{12} & T_3 &= T_8 & T_4 &= T_{14} & T_6 &= T_{11} \\ T_9 &= T_{10} = T_{13} & = 300^\circ\text{C} \end{aligned}$$

2. Se ha de determinar la temperatura de los nodos: $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7$

➤ Ecuación para el Nodo 1:

$$2Q_{2 \rightarrow 1} + Q_c + Q_{5 \rightarrow 1} = 0$$

$$2K_A \left(\frac{\Delta Y}{2} \right) L \frac{(T_2 - T_1)}{\Delta X} + h \Delta X L (T_F - T_1) + K_A \Delta X L \frac{(T_5 - T_1)}{\Delta Y} = 0$$

Donde: $\Delta X = \Delta Y$

$$K_A (T_2 - T_1) + h \Delta X (T_F - T_1) + K_A (T_5 - T_1) = 0$$

$$-(2K_A + h \Delta X) T_1 + K_A T_2 + K_A T_5 = -h \Delta X T_F \quad \dots\dots (1)$$

Ecuación para el Nodo 2:

$$Q_{1 \rightarrow 2} + Q_c + Q_{3 \rightarrow 2} + Q_{6 \rightarrow 2} = 0$$

$$K_A \left(\frac{\Delta Y}{2} \right) L \frac{(T_1 - T_2)}{\Delta X} + h \Delta X L (T_F - T_2) + K_A \left(\frac{\Delta Y}{2} \right) L \frac{(T_3 - T_2)}{\Delta X} + K_A \Delta X L \frac{(T_6 - T_2)}{\Delta Y} = 0$$

Donde: $\Delta X = \Delta Y$

$$\frac{K_A}{2} (T_1 - T_2) + h \Delta X (T_F - T_2) + \frac{K_A}{2} (T_3 - T_2) + K_A (T_6 - T_2) = 0$$

$$\frac{K_A}{2} T_1 - (2K_A + h \Delta X) T_2 + \frac{K_A}{2} T_3 + K_A T_6 = -h \Delta X T_F \quad \dots\dots (2)$$

➤ Ecuación para el Nodo 3:

$$Q_{2 \rightarrow 3} + Q_c + Q_{4 \rightarrow 3} + Q_{7 \rightarrow 3} = 0$$

$$K_A \left(\frac{\Delta Y}{2} \right) L \frac{(T_2 - T_3)}{\Delta X} + h \Delta X L (T_F - T_3) + K_A \left(\frac{\Delta Y}{2} \right) L \frac{(T_4 - T_3)}{\Delta X} + K_A \Delta X L \frac{(T_7 - T_3)}{\Delta Y} = 0$$

Donde: $\Delta X = \Delta Y$

$$\frac{K_A}{2} (T_2 - T_3) + h \Delta X (T_F - T_3) + \frac{K_A}{2} (T_4 - T_3) + K_A (T_7 - T_3) = 0$$

$$\frac{K_A}{2} T_2 - (2K_A + h \Delta X) T_3 + \frac{K_A}{2} T_4 + K_A T_7 = -h \Delta X T_F \quad \dots\dots (3)$$

Ecuación para el Nodo 4:

$$Q_{3 \rightarrow 4} + Q_c + Q_{8 \rightarrow 4} = 0$$

$$K_A \left(\frac{\Delta Y}{2} \right) L \frac{(T_3 - T_4)}{\Delta X} + h \frac{\Delta X}{2} L (T_F - T_4) + h \frac{\Delta Y}{2} L (T_F - T_4) + K_A \left(\frac{\Delta X}{2} \right) L \frac{(T_8 - T_4)}{\Delta Y} = 0$$

Donde: $\Delta X = \Delta Y$, $T_8 = T_3$

$$\frac{K_A}{2}(T_3 - T_4) + h\Delta X(T_F - T_4) + \frac{K_A}{2}(T_3 - T_4) = 0$$

$$K_A T_3 - (K_A + h\Delta X) T_4 = -h\Delta X T_F \quad \dots\dots (4)$$

➤ **Ecuación para el Nodo 5:**

$$2Q_{6 \rightarrow 5} + Q_{1 \rightarrow 5} + Q_{9 \rightarrow 5} = 0$$

$$2K_B \left(\frac{\Delta Y}{2} \right) L \frac{(T_6 - T_5)}{\Delta X} + 2K_A \left(\frac{\Delta Y}{2} \right) L \frac{(T_6 - T_5)}{\Delta X} + K_A \Delta X L \frac{(T_1 - T_5)}{\Delta Y} + K_B \Delta X L \frac{(T_9 - T_5)}{\Delta Y} = 0$$

Donde: $\Delta X = \Delta Y$

$$2K_B (T_6 - T_5) + K_A (T_6 - T_5) + K_A (T_1 - T_5) + K_B (T_9 - T_5) = 0$$

$$K_A T_1 - (2K_A + K_B) T_5 + (K_A + K_B) T_6 = K_B T_9 \quad \dots\dots (5)$$

Ecuación para el Nodo 6:

$$Q_{5 \rightarrow 6} + Q_{2 \rightarrow 6} + Q_{7 \rightarrow 6} + Q_{10 \rightarrow 6} = 0$$

$$K_B \left(\frac{\Delta Y}{2} \right) L \frac{(T_5 - T_6)}{\Delta X} + K_A \left(\frac{\Delta Y}{2} \right) L \frac{(T_5 - T_6)}{\Delta X} + K_A \Delta X L \frac{(T_2 - T_6)}{\Delta Y} + K_A \left(\frac{\Delta Y}{2} \right) L \frac{(T_7 - T_6)}{\Delta X} +$$

$$K_B \left(\frac{\Delta Y}{2} \right) L \frac{(T_7 - T_6)}{\Delta X} + K_B \Delta X L \frac{(T_{10} - T_6)}{\Delta Y} = 0$$

Donde: $\Delta X = \Delta Y$

$$\frac{K_B}{2}(T_5 - T_6) + \frac{K_A}{2}(T_5 - T_6) + K_A(T_2 - T_6) + \frac{K_A}{2}(T_7 - T_6) + \frac{K_B}{2}(T_7 - T_6) + K_B(T_{10} - T_6) = 0$$

$$K_A T_2 + \left(\frac{K_A + K_B}{2} \right) T_5 - 2(K_A + K_B) T_6 + \left(\frac{K_A + K_B}{2} \right) T_7 = -K_B T_{10} \quad \dots\dots (6)$$

➤ **Ecuación para el Nodo 7:**

$$Q_{6 \rightarrow 7} + Q_{3 \rightarrow 7} + Q_{8 \rightarrow 7} + Q_{11 \rightarrow 7} = 0$$

$$K_B \left(\frac{\Delta Y}{2} \right) L \frac{(T_6 - T_7)}{\Delta X} + K_A \left(\frac{\Delta Y}{2} \right) L \frac{(T_6 - T_7)}{\Delta X} + K_A \Delta X L \frac{(T_3 - T_7)}{\Delta Y} + K_A \Delta Y L \frac{(T_8 - T_7)}{\Delta X} +$$

$$K_A \left(\frac{\Delta X}{2} \right) L \frac{(T_{11} - T_7)}{\Delta Y} + K_B \left(\frac{\Delta X}{2} \right) L \frac{(T_{11} - T_7)}{\Delta Y} = 0$$

Donde: $\Delta X = \Delta Y$, $T_{11} = T_6$

$$\frac{K_B}{2}(T_6 - T_7) + \frac{K_A}{2}(T_6 - T_7) + K_A(T_3 - T_7) + K_A(T_8 - T_7) + \frac{K_A}{2}(T_6 - T_7) + \frac{K_B}{2}(T_6 - T_7) = 0$$

$$2K_A T_3 + (K_A + K_B) T_6 - 3(K_A + K_B) T_7 = 0 \quad \dots\dots (7)$$

➤ Reemplazando valores a las ecuaciones 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 tenemos:

$$-21.25T_1 + 10T_2 + 10T_5 = -12.5 \quad (1)$$

$$5T_1 - 21.25T_2 + 5T_3 + 10T_6 = -12.5 \quad (2)$$

$$5T_2 - 21.25T_3 + 5T_4 + 10T_7 = -12.5 \quad (3)$$

$$10T_3 - 11.25T_4 = -12.5 \quad (4)$$

$$10T_1 - 100T_5 + 50T_6 = -12000 \quad (5)$$

$$10T_2 + 25T_5 - 100T_6 + 25T_7 = -12000 \quad (6)$$

$$20T_3 + 50T_6 - 70T_7 = 0 \quad (7)$$

➤ Resolviendo este sistema de ecuaciones, se tiene que las temperaturas de los nodos son:

$$T_1 = T_{15} = 253,5477^\circ C \quad T_2 = T_{12} = 249,8672^\circ C$$

$$T_3 = T_8 = 236,6211^\circ C \quad T_4 = 211,4410^\circ C$$

$$T_5 = T_{14} = 287,6715^\circ C \quad T_6 = T_{11} = 284,6335^\circ C$$

$$T_7 = 270,9157^\circ C$$

PROBLEMA Nº 2

Obtenga las ecuaciones en diferencias fijas en estado estacionario para los modos (m,n) , $(m+1, n)$, $(m-1, n-1)$, de la siguiente configuración en la que $\Delta x = \Delta y$, la superficie superior está sometida a un flujo de calor constante \dot{q} , y la superficie diagonal está sometida a una convección con un fluido a temperatura T_∞ y coeficiente de convección, h suponga profundidad unitaria y generación interna de calor q_0 .

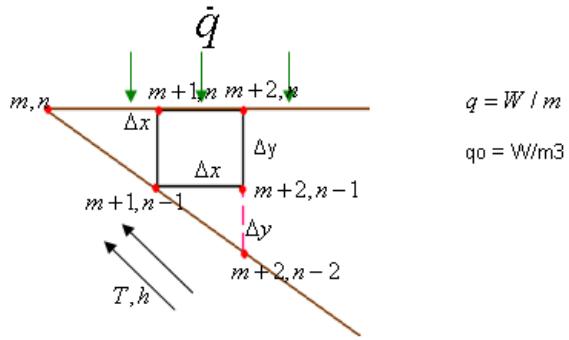


Figura Nº 5.11 Sistema bidimensional para evaluar la ecuación nodal de temperaturas para los nodos: (m,n) , $(m+1, n)$, $(m-1, n-1)$, (sistema bidimensional en estado estacionario).

Fuente: Elaboración propia, Ing Alberto Emilio Panama Giro

Solución.-

1) Para el nodo (m,n)

1.1 Balance de Energía

$$Q_{m+1,m,n} + Q + Q_{gen} + Q_c = 0$$

$$K \frac{\Delta y}{2} \frac{(T_{m+1} - T_{m,n})}{\Delta x} + \dot{q} \frac{\Delta x}{2} + \frac{q_0 \left(\frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta y}{2} \right)}{L} + hL(T_\infty - T_{m,n}) = 0$$

1.2 Cálculo de L:

$$L = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{2}\right)^2} \quad \text{Si } \Delta x = \Delta y$$

$$L = \sqrt{2 \left(\frac{\Delta x^2}{4}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}} \Delta x$$

$$\frac{k}{2} (T_{m+1} - T_{m,n}) + \dot{q} \frac{\Delta x}{2} + q_0 \frac{\Delta x^2}{4} + h \Delta x \sqrt{1/2} (T_\infty - T_{m,n}) = 0$$

1.3 Simplificando y multiplicando por $(2/k)$

$$T_{m+1} - T_{m,n} + \dot{q} \frac{\Delta x}{k} \frac{q_0 \Delta x^2}{4k} + 2 \frac{h}{k} \Delta x \sqrt{1/2} (T_\infty - T_{m,n}) = 0$$

$$T_{m+1} - \left(1 + \frac{2h}{k} \Delta x \sqrt{1/2} \right) T_{m,n} + \frac{\dot{q} \Delta x}{k} + \frac{q_0 \Delta x^2}{4k} + \frac{2h}{k} \Delta x \sqrt{1/2} T_\infty = 0$$

2) Para el nodo (m+1,n)

$$Q_{m,n \rightarrow m+1} + Q_{m+2,n \rightarrow m+1,n} + Q_{m+1,n \rightarrow m+1,n} + Q + Q_{gen} = 0$$

$$k \frac{\Delta y}{2} \frac{(T_{m,n} - T_{m+1,n})}{\Delta x} + k \frac{\Delta y}{2} \frac{(T_{m+2,n} - T_{m+1,n})}{\Delta x} + k \Delta x \frac{(T_{m+1,n-1} - T_{m+1,n})}{\Delta y} + \dot{q} \Delta x 1 + q_0 \frac{\Delta y}{2} \Delta x = 0$$

$$T_{m,n} - 4T_{m+1,n} + T_{m+2,n} + 2T_{m+1,n-1} + \frac{2}{k} \dot{q} \Delta x + q_0 \frac{\Delta x^2}{k} = 0$$

3) Para el nodo (m+1,n-1)

$$Q_{m+1,n \rightarrow m+1,n-1} + Q_{m+2,n-1 \rightarrow m+1,n-1} + Q_c + Q_{gen} = 0$$

$$k \Delta x \frac{(T_{m+1,n} - T_{m+1,n-1})}{\Delta y} + k \Delta y \frac{\Delta y}{2} \frac{(T_{m+2,n-1} - T_{m+1,n-1})}{\Delta x} + hH(T_\infty - T_{m+1,n-1}) + q_0 \frac{\Delta x \Delta y}{2} = 0$$

$$H = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \Delta x \sqrt{2}$$

Multiplicando 2/k

$$2(T_{m+1,n} - T_{m+1,n-1}) + 2(T_{m+2,n-1} - T_{m+1,n-1}) + \frac{2h}{k} \Delta x \sqrt{2} (T_\infty - T_{m+1,n-1}) + \frac{q_0 \Delta x^2}{k} = 0$$

$$2T_{m+1,n} + 2T_{m+2,n-1} - \left(4 - \frac{2h}{k} \Delta x \sqrt{2} \right) T_{m+1,n-1} + \frac{q_0 \Delta x^2}{k} + \frac{2h \Delta x \sqrt{2}}{k} T_\infty = 0$$

PROBLEMA Nº 3

Ecuación nodal ubicada en una esquina externa con convección y generación interna de calor de una placa cuadrada

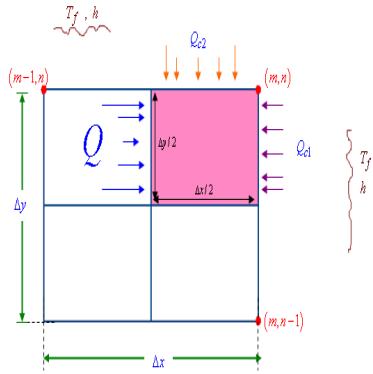


Figura Nº 5.12 Sistema bidimensional para evaluar la ecuación nodal de temperaturas para los nodos: (m,n), situado en un vértice convectivo, con generación interna de calor, (sistema bidimensional en estado estacionario).

Fuente: Elaboración propia, Ing Alberto Emilio Panana Girio

- 1) Balance de Energía ; d = 1

$$Q_{m-1, n \rightarrow m,n} + Q_{m, n-1} + Qc_1 + Qc_2 + Q_{gen} = 0$$

$$\frac{k\Delta y}{2} \frac{(T_{m-1,n} - T_{m,n})}{\Delta x} + \frac{x}{2} \frac{(T_{m,n-1} - T_{m,n})}{\Delta y} + \frac{h\Delta y}{2} (T_f - T_{m,n}) + h \frac{\Delta x}{2} (T_f - T_{m,n}) + q_0 \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{\Delta y}{2} \cdot 1$$

Si el sistema es una placa cuadrada $\Delta x = \Delta y$

Multiplicando por $\frac{2}{k}$

$$T_{m-1} + T_{m,n-1} - 2T_{m,n} + 2h \frac{\Delta x}{k} T_f - 2h \frac{\Delta x}{k} T_{m,n} + q_0 \frac{\Delta x^2}{4} = 0$$

$$T_{m,n-1} + T_{m-1,n} + \frac{2h\Delta x \cdot T_f}{k} - 2 \left(h \frac{\Delta x}{k} + 1 \right) T_{m,n} + \frac{q_0 \Delta x^2}{4k} = 0$$

PROBLEMA N° 4

Hallar la ecuación nodal para nodo situado en una esquina interna con convección y generación, en un sistema bidimensional., para una placa rectangular y placa cuadrada

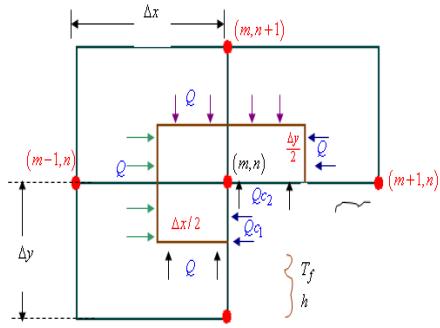


Figura N° 5.13 Sistema bidimensional para evaluar la ecuación nodal de temperaturas para los nodos: (m,n), situado en un vértice convectivo, interior con generación interna de calor, (sistema bidimensional en estado estacionario).

Fuente: Elaboración propia, Ing Alberto Emilio Panana Giro

Solución

- 1) Balance de energía $d = 1$

$$Q_{m-1,n \rightarrow m,n} + Q_{m-1,n \rightarrow m,n} + Q_{m,n+1 \rightarrow m,n} + Q_{m,n-1 \rightarrow m,n} + Qc_1 + Qc_2 + Q_{gen} = 0$$

$$\begin{aligned} k\Delta y \frac{(T_{m-1,n} - T_{m,n})}{\Delta x} + k \frac{\Delta y}{2} \frac{(T_{m+1,n} - T_{m,n})}{\Delta x} + k\Delta x \frac{(T_{m,n+1} - T_{m,n})}{\Delta y} + k \frac{\Delta x}{2} \frac{(T_{m,n-1} - T_{m,n})}{\Delta y} + \\ + h \frac{\Delta y}{2} (T_f - T_{m,n}) + h \frac{\Delta x}{2} (T_f - T_{m,n}) + q_0 \left[\left(\Delta y \cdot \frac{\Delta x}{2} \right) + \left(\frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{\Delta x}{2} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

Si el sistema es una placa cuadrada $\Delta x = \Delta y$, multiplicando por $\frac{2}{k}$

$$\begin{aligned} 2T_{m-1,n} + T_{m+1,n} + 2T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 6T_{m,n} - 2h \frac{\Delta x}{k} (T_{m,n}) + 2h \frac{\Delta x}{k} (T_f) + q_0 \left(\frac{\Delta x^2}{2} + \frac{\Delta x^2}{4} \right) \\ 2(T_{m-1,n} + T_{m,n+1}) + T_{m+1,n} + T_{m,n-1} + 2h \frac{\Delta x}{k} T_f - 2 \left(3 + \frac{h\Delta x}{k} \right) T_{m,n} + q_0 \cdot 3 \frac{\Delta x^2}{4} \end{aligned}$$

Problema N° 5

Hallar la ecuación nodal para un nodo en un sistema tridimensional ubicado en una arista exterior, en el cual existe transferencia por convección y se produce generación interna de calor.

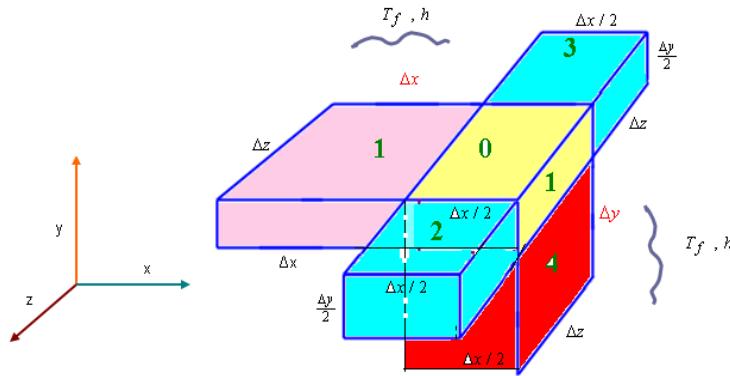


Figura N° 5.14 Nodo situado en una arista convectiva exterior de un sistema para evaluar la ecuación nodal de temperaturas para los nodos: 0, con generación interna de calor, en estado estacionario

Fuente: Elaboración propia, Ing Alberto Emilio Panana Giro

Solución.-

1. Balance de energía para el sistema mostrado en la figura

$$Q_{1 \rightarrow 0} + Q_{2 \rightarrow 0} + Q_{3 \rightarrow 0} + Q_{4 \rightarrow 0} + Q_{c1} + Q_{c2} + Q_{gen} = 0$$

2. Reemplazando las cantidades de calor y simplificando se tiene.

$$\begin{aligned} & k \frac{\Delta y}{2} \cdot \Delta z \left(\frac{T_1 - T_0}{\Delta x} \right) + k \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta y \left(\frac{T_2 - T_0}{\Delta z} \right) + k \frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta y \left(\frac{T_3 - T_0}{\Delta z} \right) + k \cdot \Delta z \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{T_4 - T_0}{\Delta y} \right) \\ & + h \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta z (T_f - T_0) + h \cdot \frac{\Delta y}{2} \Delta z (T_f - T_0) + q_0 \cdot \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta y}{2} \cdot \Delta z = 0 \end{aligned}$$

3. Ahora : si $\Delta x = \Delta y = \Delta z$,

$$k \frac{\Delta x}{2} (T_1 - T_0) + k \frac{\Delta x}{4} (T_2 - T_0) + k \frac{\Delta x}{4} (T_3 - T_0) + k \frac{\Delta x}{2} (T_4 - T_0) + h \frac{\Delta x^2}{2} (T_f - T_0) + \\ h \cdot \frac{\Delta x^2}{2} (T_f - T_0) + q_0 \frac{\Delta x^3}{4} = 0$$

4. Si multiplicamos todo por $\frac{4}{k \cdot \Delta x}$ obtenemos

$$2T_1 - 2T_0 + T_2 - T_0 + T_3 - T_0 + 2T_4 - 2T_0 + 4 \frac{h}{k} \Delta x T_f - 4 \frac{h}{k} \Delta x T_0 + q_0 \frac{\Delta x^2}{k} = 0$$

$$2T_1 + T_2 + T_3 + 2T_4 + T_f \left(\frac{4h}{k} \Delta x \right) - T_0 \left(6 + \frac{4h\Delta x}{k} \right) + \frac{q_0}{k} \Delta x^2 = 0$$

PROBLEMA Nº 6

Una varilla de aluminio de 2.5 cm de diámetro y 15 cm de largo sobresale de una pared que es mantenida a 300°C. La temperatura ambiente es de 38°C. El coeficiente de transferencia de calor es de 38°C. El coeficiente de transferencia de calor es de $17W / m^2 \cdot ^\circ C$ utilizando una técnica numérica de acuerdo con el resultado

$$T_m \left[\frac{LP(\Delta x)^2}{kA} + 2 \right] - \frac{hP(\Delta x)^2}{kA} T_\infty - (T_{m+1} + T_{m-1}) = 0$$

Obtener valores para las temperaturas a lo largo de la varilla. Subsecuentemente obtenga el flujo de calor de la pared en $x=0$. Sugestión: La conducción de frontera en la junta de la varilla puede expresarse por:

$$T_m \left[\frac{h\Delta x}{k} + \frac{hP(\Delta x)^2}{2kA} + 1 \right] - T_\infty \left[\frac{h\Delta x}{k} + \frac{hP(\Delta x)^2}{2kA} \right] - T_{m-1} = 0$$

Donde: (m) denota el nodo que se encuentra en la punta de la aleta.

El flujo de calor en la base es: $q_{x=0} = -\frac{kA}{\Delta x} (T_{m+1} - T_m)$

Donde T_m en la temperatura de base y T_{m+1} es la temperatura en el primer incremento.

Solución.-

1. Diagrama

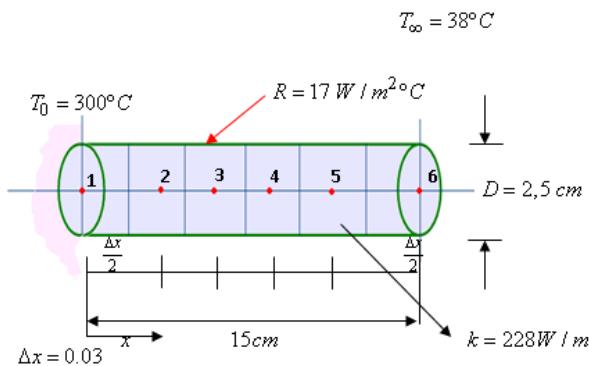
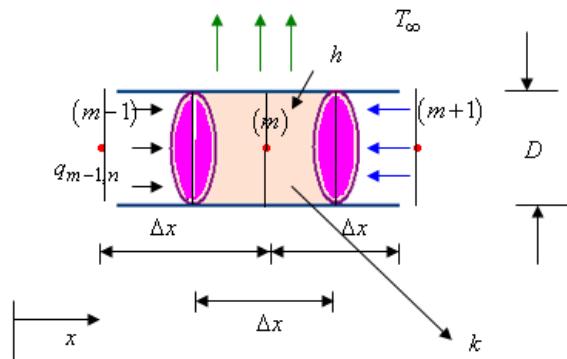


Figura N° 5.15 Sistema unidimensional con cuatro nodos nos y dos en los bordes, con superficie exterior expuesto a un fluido convectivo, en estado estacionario

Fuente: Elaboración propia, Ing Alberto Emilio Panama Girio

2. La varilla se divide en secciones de incremento $\Delta x = 3\text{cm}$ por lo tanto se tiene: $M_{(celdillas)} = \frac{15}{3} = 5$
3. Existiendo 6 superficies transversales (1, 2, 3, 4, 5, 6), donde las superficies externas son: (1 y 6), y las superficies internas son: (2, 3, 4, 5)
4. Deducciones de las ecuaciones nodales de los planos 2, 3, 4 y 5 (secciones internas)
- 4.1 Para un plano seccional interno conducción unidimensional. estacionario, sin generación interna de calor, tal como se muestra en la figura siguiente, se plantea el balance de energía para un nodo interno identificado por (m)



$$Q_{(m-1) \rightarrow m} = Q_{(m+1) \rightarrow m} + Q_{convec}$$

$$-kA \frac{T_m - T_{m-1}}{\Delta x} = -kA \frac{T_{m+1} - T_m}{\Delta x} + hP\Delta x(T_m - T_\infty)$$

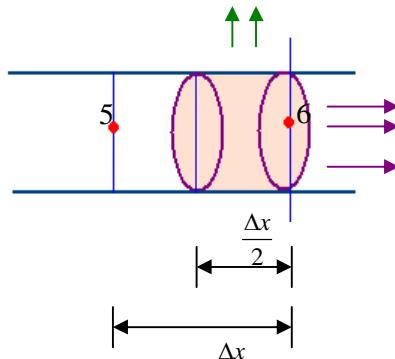
$$T_m \left(2 + \frac{hP\Delta x^2}{kA} \right) - \frac{hP\Delta x^2}{kA} T_\infty - (T_{m+1} + T_{m-1}) = 0$$

4.2 Ecuación nodal para nodos en fronteras

4.2.1 Para el nodo T_1

$$T_1 = 300^\circ C$$

4.2.2 Nodo 6 (Situado en frontera convectiva)



Balance de Energía

$$Q_{5-6} + Q_{con6} + Q_{con6} = 0$$

$$kA \frac{T_5 - T_6}{\Delta x} + \frac{hP\Delta x}{2} (T_\infty - T_6) + hA(T_\infty - T_6) = 0$$

$$T_6 \left(1 + \frac{hP\Delta x^2}{2kA} + \frac{h\Delta x}{k} \right) - \left(h \frac{P\Delta x^2}{2kA} + \frac{h\Delta x}{k} \right) T_\infty - T_5 = 0$$

5. Ecuaciones Nodales

Nodo 1: $T_1 = 300^\circ C$

Nodo 2: con $P = \pi D$ $A = \pi \frac{D^2}{4}$ $\frac{P}{A} = \frac{\pi D}{\pi \frac{D^2}{4}} = \frac{4}{D}$

$$T_2 \left(2 + \frac{h4\Delta x^2}{kD} \right) - \frac{h4\Delta x^2}{kD} T_\infty - (T_1 + T_3) = 0$$

Reemplazando valores

$$T_2 \left(2 + \frac{4(17)(0.03)^2}{228 \times 0.025} \right) - \frac{4(17)(0.03)^2}{228 \times 0.025} (38) - 300 - T_3 = 0$$

$$20107T_2 - 300,408 - T_3 = 0$$

Nodo 3

$$T_3 \left(2 + \frac{4h\Delta x^2}{kD} \right) - \frac{4h\Delta x^2}{kD} T_\infty - (T_2 + T_4) = 0$$

$$T_3 \left(2 + \frac{4(17)(0.03)^2}{228 \times 0.025} \right) - \frac{4(17)(0.03)^2}{228 \times 0.025} - T_2 - T_4 = 0$$

$$20107T_3 - 0.408 - T_2 - T_4 = 0$$

Nodo 4

$$T_2 \left(2 + \frac{4h\Delta x^2}{kD} \right) - \frac{4h\Delta x^2}{kD} T_{\infty} - (T_3 + T_5) = 0$$

$$T_4 \left(2 + \frac{4(17)(0.03)^2}{228 \times 0.025} \right) - \frac{4(17)(0.03)^2 \times 38}{228 \times 0.025} - T_3 - T_5 = 0$$

$$20107T_4 - 0.408 - T_3 - T_5 = 0$$

Nodo 5

$$T_5 \left(2 + \frac{4h\Delta x^2}{kD} \right) - \frac{4h\Delta x^2}{kD} T_{\infty} - (T_4 + T_6) = 0$$

$$T_5 \left(2 + \frac{4(17)(0.03)^2}{228 \times 0.025} \right) - \frac{4(17)(0.03)^2 \times 38}{228 \times 0.025} - T_4 - T_6 = 0$$

$$20107T_5 - 0.408 - T_4 - T_6 = 0$$

Nodo 6

$$T_6 \left(1 + \frac{2h\Delta x^2}{kD} + \frac{h\Delta x^2}{k} \right) - \left(h \frac{\Delta x}{k} + \frac{2h(\Delta x)^2}{kD} \right) T_{\infty} - T_5 = 0$$

$$T_6 \left(1 + \frac{17 \times 2 \times 0.03^2}{228 \times 0.025} + \frac{17 \times 0.03}{228} \right) - \left(\frac{17 \times 0.03}{228} + \frac{2 \times 17 \times 0.03^2}{228 \times 0.025} \right) \times 38 - T_5 = 0$$

$$1.007605 T_6 - 0.289 - T_5 = 0$$

Rpta:

$T_2 = 228.049$	$T_3 = 278.779$	$T_4 = 272.083$
$T_5 = 267.89$	$T_6 = 266.157$	

PROBLEMA 7

Considere la transferencia de calor bidimensional en estado estacionario en una barra sólida larga de sección transversal cuadrada en la cual se genera calor de manera uniforme con una velocidad de $q_0 = 0.19 \times 105 \text{ BTU/h.pie}^2$.

La sección transversal de la barra tiene un tamaño de 0.4 pies x 0.4 pies y su conductividad térmica es $K = 16 \text{ BTU/h.pie}^2$. Los cuatro lados de la barra están sujeto a convección con el aire ambiente que está a $T_{\infty} = 70^{\circ}\text{F}$, con un coeficiente de transferencia de calor de $h = 7.9 \text{ BTU/h.pie}^2$. Mediante el método de diferencias finitas con un tamaño de malla de $\Delta x = \Delta y = 0.2 \text{ pies}$.

Determine:

- a) Las temperaturas en los nueve nodos
- b) La velocidad de la pérdida de calor desde la barra a través de una sección de 1 pie de largo.

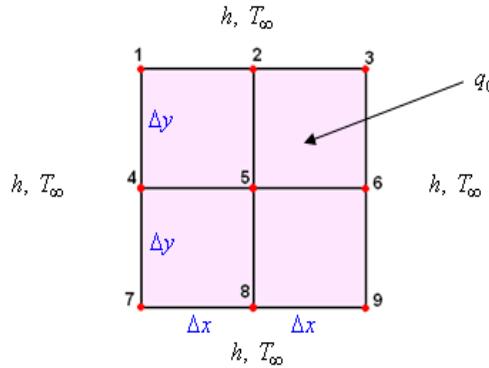


Figura Nº 5.16 Sistema bidimensional con fronteras expuesta a fluidos convectivos

Fuente: Elaboración propia, Ing Alberto Emilio Panama Giro

Solución.-

1.- Datos

$$q_0 = 0.19 \times 10^5 \frac{BTU}{h \cdot pie^2} \quad h = 16 \frac{BTU}{h \cdot pie \cdot ^\circ F} \quad T_\infty = 70^\circ F$$

$$h = 7,9 \frac{BTU}{h \cdot pie \cdot ^\circ F} \quad \Delta x = \Delta y = 0.2 \text{ pies}$$

2.- Determinación de las ecuaciones para los nodos mostrados en la figura

Para el nodo 5:

$$Q_{4 \rightarrow 5} + Q_{6 \rightarrow 5} + Q_{2 \rightarrow 5} + Q_{8 \rightarrow 5} + Q_{gen} = 0$$

$$k \frac{\Delta y}{\Delta x} \frac{(T_4 - T_5)}{\Delta x} + k \frac{\Delta y}{\Delta x} \frac{(T_6 - T_5)}{\Delta x} + k \frac{\Delta x}{\Delta y} \frac{(T_2 - T_5)}{\Delta y} + k \frac{\Delta x}{\Delta x} \frac{(T_8 - T_5)}{\Delta x} + q_0 \Delta x \Delta y = 0$$

$$T_4 - T_5 + T_6 - T_5 + T_2 - T_5 + T_8 - T_5 + \frac{q_0 \Delta x^2}{k} = 0$$

$$T_2 + T_4 - 4T_5 + T_6 + T_8 + \frac{0.19 \times 10^5 \times 0.2^2}{16} = 0$$

$$T_2 + T_4 - 4T_5 + T_6 + T_8 + 47,5 = 0 \dots \dots \dots (1)$$

Para el nodo 2:

$$Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{3 \rightarrow 2} + Q_{5 \rightarrow 2} + Q_{6 \rightarrow 2} + Q_{gen} = 0$$

$$k \frac{\Delta y}{2} \frac{(T_1 - T_2)}{\Delta x} + \frac{k \Delta y}{2} \frac{(T_3 - T_2)}{\Delta x} + k \Delta x \frac{(T_5 - T_2)}{\Delta y} + h \Delta x (T_\infty - T_2) + q_0 \Delta x \frac{\Delta y}{2} = 0$$

Para el nodo 8:

$$Q_{7 \rightarrow 8} + Q_{9 \rightarrow 8} + Q_{5 \rightarrow 8} + Q_{c \rightarrow 8} + Q_{gen} = 0$$

$$2T_5 + T_7 - 4.1975T_8 + T_9 + 61.325 = 0 \quad \dots\dots\dots(3)$$

Para el nodo 6:

$$Q_{5 \rightarrow 6} + Q_{3 \rightarrow 6} + Q_{9 \rightarrow 6} + Q_{c \rightarrow 6} + Q_{gen} = 0$$

$$T_3 + 2T_5 - 4.1975T_6 + T_9 + 61.325 = 0 \quad \dots\dots\dots(4)$$

Para el nodo 4:

$$Q_{l \rightarrow 4} + Q_{7 \rightarrow 4} + Q_{5 \rightarrow 4} + Q_{c \rightarrow 4} + Q_{gen} = 0$$

$$T_1 - 4.1975T_4 + 2T_5 + T_7 + 61.325 = 0 \quad \dots\dots\dots(5)$$

Para el nodo 1

$$Q_{2 \rightarrow 1} + Q_{4 \rightarrow 1} + Q_{c \rightarrow 1} + Q_{c \rightarrow 1} + Q_{gen} = 0$$

$$-2.1975T_1 + T_2 + T_4 + 37.575 = 0 \quad \dots\dots\dots(6)$$

Para el nodo 3:

$$Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{6 \rightarrow 3} + Q_{c \rightarrow 3} + Q_{c \rightarrow 3} + Q_{gen} = 0$$

$$T_2 - 2.1975T_3 + T_6 + 37.575 = 0 \quad \dots\dots\dots(7)$$

Para el nodo 7:

$$Q_{4 \rightarrow 7} + Q_{c \rightarrow 7} + Q_{8 \rightarrow 7} + Q_{c \rightarrow 7} + Q_{gen} = 0$$

Para el nodo 9:

$$Q_{8 \rightarrow 9} + Q_{c \rightarrow 9} + Q_{6 \rightarrow 9} + Q_{c \rightarrow 9} + Q_{gen} = 0$$

$$T_6 + T_8 - 2.1975 T_9 + 37.575 = 0 \quad \dots \dots \dots (9)$$

Resolviendo

$$\begin{array}{ll} T_1 = 304,8482^\circ F & T_5 = 328,0394^\circ F \\ T_2 = 316,1644^\circ F & T_6 = 316,1644^\circ F \\ T_3 = 304,8482^\circ F & T_7 = 304,8482^\circ F \\ T_4 = 316,1644^\circ F & T_8 = 316,1644^\circ F \\ & T_9 = 304,8482^\circ F \end{array}$$

3.- Cálculo del flujo de calor desde la barra hacia el fluido

$$Q = \sum h\Delta y \Delta T$$

$$Q = h \left[\frac{\Delta y}{2} (T_3 - T_\infty) + \Delta y (T_6 - T_\infty) + \frac{\Delta y}{2} (T_9 - T_8) \right]$$

$$Q = h\Delta y \left[\frac{1}{2} (304,8482 - 70) + (316,1644 - 70) + \frac{1}{2} (304,8482 - 70) \right]$$

$$Q = 7,9 \frac{BTU}{h pie^\circ F} \times 0,2 pie (481,0126)^\circ F$$

$$Q = 759,9999 \frac{BTU}{h pie}$$

PROBLEMA N° 8

Obtener la ecuación nodal para un nodo situado en la cara interior de un horno que se encuentra expuesta a los gases calientes cuya $T = T_f$ de coeficiente h , de conductividad térmica k , con generación de energía interna. En donde las amplitudes para este horno en las direcciones x, y, z son x, y, z ; iguales.

Solución:

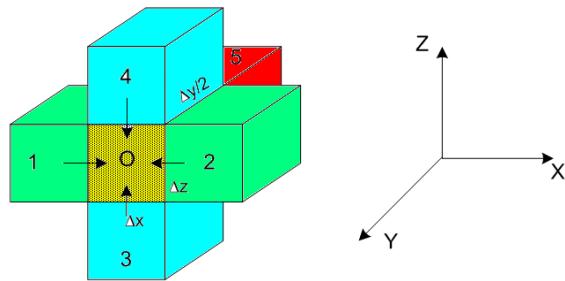
1. Balance de energía

$$Q_{1-0} + Q_{2-0} + Q_{3-0} + Q_{4-0} + Q_{5-0} + Q_{C-0} + Q_{\text{generado}} = 0$$

2. Reemplazando la ecuación de Fourier en cada una de las cantidades de calor por conducción, el calor convectivo y generado y simplificando se tiene,

$$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + 2T_5 + \frac{2hDxT_f}{k} + \frac{q_oDx^2}{k} - (6 + \frac{2hDx}{k})T_o = 0$$

Figura N° 5.17 Nodo situado en la cara interna de un horno hueco, sistema tridimensional



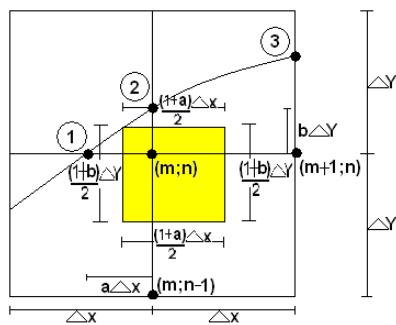
Fuente: Elaboración propia, Ing.Alberto Emilio Panana Giro

5.2.5 PROBLEMAS PROPUESTOS

Problema N°1

Del libro de transferencia de calor (*Holman*) tabla 3.2 demostrar la ecuación nodal para un nodo interior (m; n) situado en un contorno curvo (F).

Diagrama



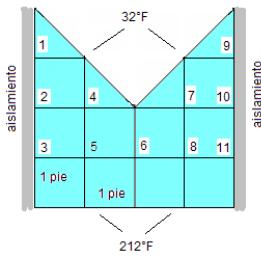
Fuente : J.P.Holman; Transferencia de calor, 8ava Edición

Problema N° 2

Determinar la ecuación nodal, para un nodo identificado por (i, j, k), en tres dimensiones, en estado transitorio, con generación de calor interno por unidad de volumen y por unidad de tiempo (q_0), situado en un lado de una cámara cúbica o de un horno, de conductividad térmica (k), expuesto a un medio ambiente de temperatura (T_f) y coeficiente de transferencia de calor (h). Las celdillas para un sistema tridimensional x, y, z , son de amplitudes $\Delta x = \Delta y = \Delta z$, el material tiene una densidad (ρ), conductividad térmica (k), y difusividad térmica (a).

Problema N° 3

Considere la transferencia de calor bidimensional en estado estacionario en un cuerpo sólido con una ranura en V cuya sección transversal se da en la figura, las superficies superiores de la ranura se mantienen a 32°F en tanto que la superficie inferior se mantiene a 212°F . las superficies laterales de la ranura están aisladas. Con $\Delta x = \Delta y = 1$ pie, determine las temperaturas de 1 a 11 de la figura.



Fuente: Yenes Cengel, Transferencia de Calor, 2da Edición

Problema N° 4

Obtenga la ecuación en diferencias finitas de estado estacionario para el nodo (m, n) situado en la superficie exterior de un sólido bidimensional (el sólido tiene dimensiones según los ejes x e y , la dimensión según el eje z es unitaria), en el que hay una generación de calor volumétrica de valor $q_0 = \text{W/m}^3$, para las siguientes condiciones:

- La superficie frontera está aislada.

- b) La superficie frontera está sometida a un flujo de calor entrante de valor constante, q''_o .

TEMA VI: CONDUCCIÓN DE CALOR TRANSITORIA

Un proceso de transferencia de calor es transitorio siempre que la temperatura correspondiente al interior del sistema varíe a lo largo del tiempo; existen muchos ejemplos, tales como:

- Procesos de fabricación productos, los cuales se tienen que calentar o enfriar para transformarlos en productos adecuados.
- Los hornos industriales los que se encienden o apagan de modo cíclico, en los cuales se realizan procesos que originan variaciones de temperaturas, tanto en el interior como en sus paredes
- Los aceros y otras aleaciones suelen calentarse o enfriarse para modificar sus propiedades físicas, mediante tratamientos térmicos

Las variaciones de la temperatura en el sólido a estudiar se consiguen poniéndole en contacto con un medio exterior, líquido o gas, se originan la convección, y según sea el valor del coeficiente de convección del fluido y la conductividad térmica del sólido, se pueden dar los siguientes casos:

- a. Condición de resistencia térmica interna despreciable
- b. Condición de contorno de convección
- c. Condición de contorno isotérmica

6.1 SOLUCIÓN NUMÉRICA A PROBLEMAS DE CONDUCCIÓN UNIDIMENSIONAL EN RÉGIMEN TRANSITORIO

El método numérico aplicado a los problemas de conducción de conducción en régimen transitorio es semejante a lo realizado para régimen estacionario. El sólido se divide en un cierto número de celdillas y en el centro de cada una se sitúa un nodo ficticio en el que se supone están concentradas las propiedades térmicas de las mismas.

Realizando un balance de energía en cada nodo permite hallar una expresión para determinar su temperatura, en función de las temperaturas de los nodos

vecinos, y de las características térmicas y geométricas del nodo. Se ha de tener en cuenta la energía almacenada en cada nodo de la celdilla, en el tiempo considerado, la cual se puede expresar como la variación de la energía interna del mismo.

6.1.1 NODOS INTERIORES

Considerar un nodo interno (0), según se muestra en la figura N° 6.1, la ecuación correspondiente a la variación de la energía interna del nodo (0) respecto al tiempo, para un problema monodimensional, viene dado por:

$$\sum_{i=1}^2 Q_i = 0 \rightarrow Q_{1 \rightarrow o} + Q_{2 \rightarrow o} = \frac{\partial U_0}{\partial t} \quad (6.1)$$

Los términos de conducción de la ecuación anterior pueden aproximarse mediante la expresión de diferencias finitas de la Ecuación de Fourier:

$$Q_{1 \rightarrow o} = kA \frac{T_1^t - T_0^t}{\Delta x} ; \quad Q_{2 \rightarrow o} = kA \frac{T_2^t - T_0^t}{\Delta x} \quad (6.2)$$

Los superíndices indican que las temperaturas han de calcularse en el instante (t) es decir, especifican la variación temporal de la temperatura; los subíndices se refieren a la posición de los nodos y especifican la variación espacial a lo largo del eje x. La variación de la energía interna del nodo (0) en el tiempo t , suponiendo constante la densidad ρ , y el calor específico C_p del material se pueden expresar en las forma:

$$\frac{\partial U_0}{\partial t} = m.C_p \frac{\Delta T_0}{\Delta t} = \rho.A.\Delta x.C_p \frac{T_0^{t+\Delta t} - T_0^t}{\Delta t}$$

luego :

$$(6.3)$$

$$Q_{1 \rightarrow o} + Q_{2 \rightarrow o} = \frac{\partial U_0}{\partial t} \Rightarrow kA \frac{T_1^t - T_0^t}{\Delta x} + kA \frac{T_2^t - T_0^t}{\Delta x} = \rho.A.\Delta x.C_p \frac{T_0^{t+\Delta t} - T_0^t}{\Delta t}$$

Despejando, $T_0^{t+\Delta t}$

$$T_0^{t+\Delta t} = T_0^t + \frac{k\Delta t}{\rho.C_p.\Delta x^2} (T_1^t + T_2^t - 2T_0^t) = \left| F_0 = \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} = \frac{k\Delta t}{\rho.C_p\Delta x^2} \right| =$$

&.4)

$$T_0^{t+\Delta t} = F_0 (T_1^t + T_2^t) + T_0^t (1 - 2F_0)$$

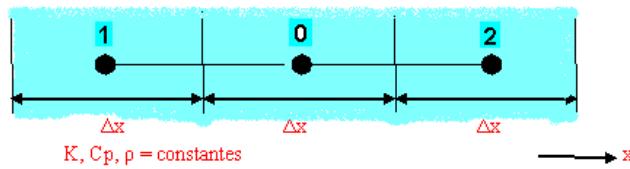


Figura N° 6.1 Nodo interno (0) en una placa plana, sistema unidimensional transitorio

Fuente: Elaboración propia, Ing. Alberto Emilio Panana Giro

6.1.2 NODOS SITUADOS EN FRONTERAS

Si un nodo se encuentra situado en el contorno o frontera de un cuerpo, el balance de energía depende de las condiciones de contorno en la superficie. Una condición muy importante es la convección desde la superficie a un fluido exterior. Para el estudio considerar un problema monodimensional, en donde el nodo (0), está situado sobre la superficie como se muestra en la figura N° 6.2.

El Balance de energía para este nodo es

$$\sum_{i=1}^2 Q_o = 0 \rightarrow Q_{1 \rightarrow o} + Q_{F \rightarrow o} = \frac{\partial U_o}{\partial t} \quad (6.5)$$

$$kA \frac{T_1^t - T_0^t}{\Delta x} + hA(T_F - T_0^t) = \frac{\rho \cdot A \cdot \Delta x \cdot C_p}{2} \frac{T_0^{t+\Delta t} - T_0^t}{\Delta t} \quad (6.6)$$

Debido a que el intervalo del nodo en la superficie es $\Delta x/2$, puesto que el nodo (0) tiene la mitad de la anchura que un nodo interior; los nodos interiores tienen una anchura igual a Δx ; los nodos en la frontera tienen una anchura $\Delta x/2$, despejando la temperatura futura del nodo superficial, se tiene:

$$T_0^{t+\Delta t} = 2F_0(T_1^t + BiT_F) + (1 - 2F_0 - 2F_0Bi)T_0^t ; \quad \begin{cases} F_0 = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \\ Bi = \frac{h \cdot \Delta x}{k} \end{cases} \quad (6.7)$$

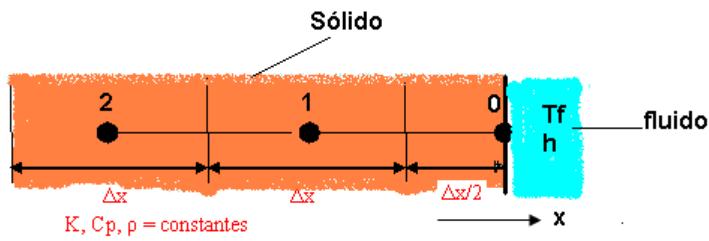


Figura N° 6.2 Nodo en frontera convectiva de un plana, sistema unidimensional transitorio

Fuente: Elaboración propia, Ing. Alberto Emilio Panama Giro

6.2. CONDUCCIÓN TRANSITORIA EN UN SÓLIDO CON RESISTENCIA TÉRMICA DESPRECIABLE

Suponer un sólido en el que la energía transferida desde el mismo se elimina por convección a un fluido, y si considerando que la temperatura de dicho sólido varía de forma uniforme, se puede afirmar que la resistencia a la conducción en el sólido es mucho menor que la resistencia a la conducción desde la superficie. Esto ocurre cuando el fluido adyacente tiene un coeficiente de transferencia de calor por convección es bien bajo. Por lo que se supone que el número de Biot (Bi) es menor que 0,1

$$Bi = \frac{h \cdot L}{k} \ll 0,1$$

En cualquier problema de este tipo, se ha de calcular primero el número de Biot.

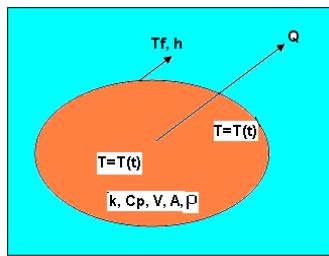


Figura N° 6.3 Sólido con resistencia térmica interna despreciable sistema transitorio

Fuente: Elaboración propia, Ing. Alberto Emilio Panama Giro

Realizando un balance de energía al sistema mostrado en la figura N° 6.3, que se encuentra a $T=T(t)$ en el instante (t), se tiene que la variación de su energía interna en ese instante es igual a la energía que es transferida al fluido que le rodea en dicho instante:

$$Q = -\rho V Cp \frac{\partial T}{\partial t} = h A \{T(t) - T_f\} \quad \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{h A \{T(t) - T_f\}}{\rho V Cp} \quad (6.8)$$

Esta es una ecuación diferencial de la distribución de temperaturas, la variable independiente es el tiempo, Siendo V el volumen del sólido y A la superficie de contacto con el fluido.

6.2.1 Distribución de temperaturas

La solución para la temperatura instantánea $T(t)$ es la que corresponde a todos los puntos del interior del sistema, incluyendo la superficie, puesto que se ha supuesto que la resistencia térmica es despreciable.

Si se define una función, $\theta = T(t) - T_f$, y además conocida la temperatura del sistema T_0 en el instante $t = 0$, la condición inicial para la ecuación anterior es:

$$\theta_0 = T_0 - T_f,$$

La distribución de temperatura queda de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= -\frac{h A \{T(t) - T_f\}}{\rho V Cp} ; \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{h A \theta(t)}{\rho V Cp} ; \quad \frac{d\theta}{\theta} = -\frac{h A}{\rho V Cp} dt \\ \theta(t) &= \theta_0 e^{-\frac{h A}{\rho V Cp} t} = \theta_0 e^{-Bi Fo} ; \quad Bi = \frac{hL}{k} ; \quad Fo = \frac{\alpha t}{L^2} \end{aligned} \quad (6.9)$$

Ecuación que predice la historia de la relación entre el tiempo y la temperatura.

La temperatura de equilibrio se obtiene cuando la variación de energía interna sea cero (0), régimen estacionario.

6.2.2 Cálculo de la cantidad de calor $Q_{(t)}$

La transferencia de calor instantánea, o flujo térmico, es:

$$q(t) = h A \left\{ T(t) - T_f \right\} = h A \theta(t) = h A \theta_o e^{-Bi Fo}$$

La cantidad de calor total transferida desde $t = 0$ hasta $t = t$, es:

$$\begin{aligned} Q(t) &= \int_{t=0}^t q(t) dt = h A (T_o - T_f) \int_{t=0}^t e^{-Bi Fo} dt = \\ &= h A (T_o - T_f) \frac{\rho V Cp}{h A} (1 - e^{-Bi Fo}) = h A (T_o - T_f) t \frac{1 - e^{-Bi Fo}}{Bi Fo} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Como:

$$Q_0 = \rho V Cp (T_o - T_f) \rightarrow \frac{Q(t)}{Q_0} = 1 - e^{-Bi Fo} \quad (6.11)$$

$\frac{Q(t)}{Q_0}$ = Fracción de pérdida de energía

La energía almacenada en el sólido en el intervalo, $0 \div t$, es igual a la diferencia entre el calor en $t = 0$ y el que ha salido hasta t :

$$Q_{alm} = Q_0 - Q(t) = Q_0 e^{-Bi Fo} \quad (6.12)$$

6.3 SOLUCIÓN GRÁFICA DE LA CONDUCCIÓN TRANSITORIA UNIDIMENSIONAL

A continuación se realizará el estudio, para obtener la solución gráfica a la ecuación de la conducción de calor en régimen transitorio, en sistemas en los que se produzcan variaciones de sus temperaturas, tanto espaciales como temporales, para geometrías simples, que suelen encontrarse en determinadas aplicaciones prácticas, como:

1. Una placa infinita de espesor (L), para la cual $T = T(x,t)$
2. Un cilindro sólido infinitamente largo de radio R , para el que $T = T(r,t)$
3. Una esfera sólida de radio R , para la cual $T = T(r,t)$

Las condiciones de contorno para estas geometrías son:

- a. **La primera condición de contorno** específico, que el **plano medio** de la placa equivale a un aislamiento o plano adiabático, al igual que el eje del **cilindro** o el **centro de la esfera**.

- b. **La segunda condición de contorno** dice que el calor se transfiere desde la superficie exterior del sólido a un fluido a la temperatura Tf, con un coeficiente de transferencia de calor h. Esta condición de contorno se expresa:

$$h(T_{pf} - T_f) = -k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

La condición de inicial en los tres casos es la misma, se puede partir de un sólido isotermo, temperatura Ti (temperatura inicial), para t = 0, y a partir de ese instante se introduce el sólido en el fluido que se encuentra a una temperatura Tf, iniciándose el proceso transitorio de transferencia de calor. Los problemas de conducción en régimen transitorio en los que intervienen condiciones de contorno de convección, vienen regidos por los números de Biot y Fourier, las temperaturas locales son función de la **posición a dimensional dentro del sólido, del número de Biot y del número de Fourier**.

6.3.1 GRAFICAS PARA LA EVALUACIÓN DE LAS TEMPERATURAS EN FUNCIÓN DEL TIEMPO.

En un problema de convección, cada una de las gráficas que se obtienen, se componen de dos familias de curvas:

- La primera representa la **temperatura a dimensional del centro, eje, o plano central (esfera, cilindro, plano)**, se representa como:

$$\frac{\Theta_{Centro}}{\Theta_0} = \frac{\Theta_C}{\Theta_0} = \frac{T_c - T_f}{T_0 - T_f} \quad (6.13)$$

- Para determinar una **temperatura local** que se corresponda con una posición distinta de la simetría mencionada, se tiene que utilizar la segunda familia de curvas propuestas, que representa la **temperatura a dimensional local en función de la temperatura de la línea, plano central, o centro**, según el caso, para placa infinita, cilindro o esfera, es de la forma:

$$\frac{\Theta}{\Theta_c} = \frac{T - T_f}{T_c - T_f} \quad (6.14)$$

- Para determinar el valor correspondiente a una temperatura local se puede utilizar el producto de las dos ecuaciones anteriores, obteniéndose:

$$\frac{\Theta}{\Theta_0} = \frac{\Theta_c}{\Theta_0} \times \frac{\Theta}{\Theta_c} = \frac{T - T_f}{T_c - T_f} \times \frac{T_c - T_f}{T_0 - T_f} = \frac{T - T_f}{T_0 - T_f} \quad (6.15)$$

6.3.2 GRAFICA PARA CALCULAR EL CALOR TRANSFERIDO

Una vez conocida la distribución de temperaturas , se calcula el calor transferido desde la superficie, utilizando la ecuación de Fourier evaluada en la intercara (sólido-fluido)

Cada valor $Q(t)$ de transferencia térmica, es la cantidad total de calor que se transfiere desde la superficie hacia el fluido, en el intervalo, $0 \div t$. El valor de Q_0 es la energía inicial almacenada que existe en el sólido, en $t = 0$ siendo T_f la temperatura de referencia.

La energía almacenada en el sólido en el intervalo de tiempo $0 \div t$, es la diferencia:

$$Q_0 - Q(t).$$

6.4 CONDUCCIÓN TRANSITORIA EN PLACA INFINITA CON CONDICIÓN DE CONTORNO DE CONVECCIÓN

Una situación general que tiene una gran importancia práctica es el enfriamiento o el calentamiento de una placa rodeada por un fluido convectivo T_f , la placa se introduce instantáneamente en el fluido en condiciones en las que la resistencia a la transferencia de calor es muy pequeña, es decir el número de Biot es grande, la superficie del sólido va tomando la temperatura del medio exterior en forma paulatina, a medida que el efecto térmico se transmite al interior.

Si se considera una placa de espesor, $e = 2L$, para la que en el tiempo $t = 0$ existe una distribución de temperatura conocida y en la que no existen efectos de borde, se aplica la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Theta}{\partial t}, \text{ con } \Theta = T - T_f, \quad (6.16)$$

La solución de la ecuación diferencial se puede obtener gráficamente, tal como se especifica a continuación:

- **La temperatura en el centro** se puede determinar en la gráfica de **HEISLER**, de la Figura N° 4-13 (a), Temperatura en el plano central), dicha temperatura se determina interceptando, los valores calculados del inverso del número de Biot y el número de Fourier:

$$\frac{\Theta}{\Theta_0} = \frac{T - T_f}{T_0 - T_f} = \begin{cases} \frac{x}{L} \\ \frac{\alpha \cdot t}{L^2} \end{cases} \quad (6.17)$$

- La temperatura local se halla con la gráfica de Heisler N° 4-13 (b), interceptando los parámetros: x/L y el número de Biot:

$$\frac{\Theta_{(x,t)}}{\Theta_c} = \frac{T_{(x,t)} - T_f}{T_c - T_f} = \begin{cases} \frac{x}{L} \\ \frac{1}{Bi} = \frac{k}{h \cdot L} \end{cases} \quad (6.18)$$

- a. La expresión del **flujo de calor a dimensional**, Q/Q_o se conoce como fracción de energía perdida, y es la pérdida real de energía en el tiempo (t), dividida entre la pérdida total necesaria para alcanzar la temperatura del medio ambiente.

La pérdida total de calor necesaria para alcanzar la temperatura del medio ambiente se halla mediante la relación:

$$Q_o = 2L A \rho C_p (T_o - T_f) = 2L A \frac{k}{\alpha} \Theta_o \quad (6.19)$$

La relación de calor a dimensional se determina en la gráfica de la figura N° 4.13 c, conocida como **gráfica de Gröber**, interceptando los parámetros:

Número de Biot y $Bi^2 Fo = \frac{h^2 \alpha t}{k^2}$, tal como se muestra:

$$\frac{Q_{(t)}}{Q_{\max}} = \begin{cases} Bi = \frac{h \cdot L}{k} \\ Bi^2 F_o = \frac{h^2 \alpha t}{k^2} \end{cases} \quad (6.20)$$

Nota.- Estas gráficas se pueden utilizar siempre que se mantenga la hipótesis de conducción mono dimensional, y se desprecien los efectos de borde, para valores del número de Fourier, $Fo > 1$. No se recomienda para valores del N° $Fo < 1$, para esos casos se recomienda utilizar la condición de contorno isotérmica.

6.5 CONDUCCIÓN TRANSITORIA EN UN CILINDRO INFINITO CON CONDICIÓN DE CONTORNO DE CONVECCIÓN

Este problema se resuelve análogamente al caso anterior. Si el radio exterior del cilindro es (R), que se calienta o enfriá y que inicialmente para $t = 0$ en el intervalo ($0 \leq r \leq R$) tiene una distribución de temperatura conocida de la forma $\Theta = f(r)$ ó $(T_o - T_f)$, la ecuación en coordenadas cilíndricas es:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Theta}{\partial t}, \text{ con } \Theta = T - T_f, \text{ se puede resolver gráficamente}$$

- a. **La temperatura en el centro** se puede determinar en la gráfica de HEISLER, de la Figura N° 4-14 (a), (Temperatura en el plano central), dicha temperatura se determina interceptando, los valores calculados del inverso del número de Biot y el número de Fourier:

$$\frac{\Theta}{\Theta_0} = \frac{T - T_f}{T_0 - T_f} = \begin{cases} 1/Bi \\ Fo = \frac{\alpha \cdot t}{R^2} \end{cases} \quad (6.21)$$

- b. **La temperatura local** se halla con la gráfica de Heisler N° 4-14 (b), interceptando los parámetros: x/R y el número de Biot:

$$\frac{\Theta_{(r,t)}}{\Theta_C} = \frac{T_{(r,t)} - T_f}{T_C - T_f} = \begin{cases} r/R \\ \frac{1}{Bi} = \frac{k}{h \cdot R} \end{cases} \quad (6.22)$$

- c. La expresión del flujo **de calor a dimensional**, Q/Q_0 se conoce como fracción de energía perdida, y es la pérdida real de energía en el tiempo (t), dividida entre la pérdida total necesaria para alcanzar la temperatura del medio ambiente.
- d. La pérdida total de calor necesaria para alcanzar la temperatura del medio ambiente se halla mediante la relación también es conocida como cantidad de calor máxima:

$$Q_{\max} = m \cdot Cp \cdot (T_\infty - T_i) = \rho \cdot V \cdot Cp \cdot (T_\infty - T_i) \quad (6.23)$$

La relación de calor a dimensional se determina en la gráfica de la figura N° 4.14 c, conocida como gráfica de Gröber, interceptando los parámetros:

$$\text{Número de Biot y } Bi^2 Fo = \frac{h^2 \alpha \cdot t}{k^2}$$

$$\frac{Q_{(t)}}{Q_{\max}} = \begin{cases} Bi = h.R/k \\ Bi^2 Fo = \frac{h^2 \alpha t}{k^2} \end{cases} \quad (6.24)$$

6.6 CONDUCCIÓN TRANSITORIA EN UNA ESFERA CON CONDICIÓN DE CONTORNO DE CONVECCIÓN

Para estudiar la distribución de temperatura en una esfera, de radio exterior R, que se calienta o enfriá en un fluido, y que inicialmente para t = 0 en el intervalo (0 ≤ r ≤ R) tiene una distribución de temperatura conocida de la forma $\Theta = f(r)$ ó $(T_o - T_f)$, se parte de la ecuación en coordenadas esféricas:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Theta}{\partial t}, \text{ con } \Theta = T - T_f \quad (6.25)$$

Esta ecuación se puede resolver gráficamente

- a. **La temperatura en el centro se** puede determinar en la gráfica de **HEISLER**, de la Figura N° 4-15(a), (Temperatura en el plano central), dicha temperatura se determina interceptando, los valores calculados del inverso del número de Biot y el número de Fourier:

$$\frac{\Theta}{\Theta_0} = \frac{T - T_f}{T_0 - T_f} = \begin{cases} 1/Bi \\ Fo = \frac{\alpha \cdot t}{R^2} \end{cases} \quad (6.26)$$

- b. **La temperatura local** se halla con la gráfica de Heisler N° 4-15 (b), interceptando los parámetros: x/R y el número de Biot:

$$\frac{\Theta_{(r,t)}}{\Theta_c} = \frac{T_{(r,t)} - T_f}{T_c - T_f} = \begin{cases} r/R \\ \frac{1}{Bi} = \frac{k}{h \cdot R} \end{cases} \quad (6.27)$$

- c. La expresión del **flujo de calor a dimensional**, Q/Q₀ se conoce como fracción de energía perdida, y es la pérdida real de energía en el tiempo (t), dividida entre la pérdida total necesaria para alcanzar la temperatura del medio ambiente.

La pérdida total de calor necesaria para alcanzar la temperatura del medio ambiente se halla mediante la relación. También es conocida como cantidad de:

$$Q_{\max} = m \cdot Cp \cdot (T_{\infty} - T_i) = \rho \cdot V \cdot Cp \cdot (T_{\infty} - T_i) \quad (6.28)$$

La relación de calor a dimensional se determina en la gráfica de la figura N° 4.15 (c), conocida como gráfica de Gröber, interceptando los parámetros:

Número de Biot y $Bi^2Fo = \frac{h^2 \alpha t}{k^2}$

$$\frac{Q_{(t)}}{Q_{\max}} = \begin{cases} Bi = \frac{h \cdot R}{k} \\ Bi^2 Fo = \frac{h^2 \alpha t}{k^2} \end{cases} \quad (6.30)$$

6.7 SOLUCIÓN ANALITICA LA CONDUCCIÓN TRANSITORIA

Las temperaturas locales, las temperaturas en el centro de un plano de espesor (2L), para un cilindro infinito de radio (r_o), o de una esfera sólida de radio (r_o), se pueden determinar mediante las soluciones analíticas de las ecuaciones diferenciales gobernantes para estas tres geometrías, en donde $Fo > 0,2$

6.7.1 CONDUCCIÓN TRANSITORIA EN UNA PLACA INFINITA

➤ CALCULO DE TEMPERATURAS LOCALES, PARA UNA PARED PLANA

- Ecuación Diferencial gobernante

Si se considera una placa de espesor, $e = 2L$, para la que en el tiempo $t = 0$ existe una distribución de temperatura conocida y en la que no existen efectos de borde, se aplica la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Theta}{\partial t}, \text{ con } \Theta = T - T_f, \quad (6.32)$$

- La solución Analítica de la ecuación diferencial, que permite obtener la Temperatura Local o de la Temperatura de la Superficie, es la siguiente ecuación:

$$Q_{(x,t)pared} = \frac{T_{(x,t)} - T_f}{T_i - T_f} = A_1 e^{-\frac{1}{Bi}t} \cos\left(\frac{1}{Bi} \cdot \frac{x}{L}\right) \quad t > 0,2 \quad (6.33)$$

Donde las constantes A_1 y α son funciones sólo del número de Bi y en la Tabla (6.1) se da una lista de sus valores con respecto al número de Bi.

➤ CALCULO DE TEMPERATURAS EN EL CENTRO, PARA UNA PARED PLANA

- De la ecuación anterior (para determinar la temperatura local), se tiene que: **Cos (0) = 1, la temperatura en el centro se halla, mediante la ecuación**

$$Q_{(0,t)pared} = \frac{T_{(0,t)} - T_f}{T_i - T_f} = A_1 e^{-\frac{1}{Bi}t} \quad (6.34)$$

6.7.2 CONDUCCIÓN TRANSITORIA EN UN CILINDRO

➤ CALCULO DE TEMPERATURAS LOCALES, PARA UN CILINDRO

- Ecuación Diferencial gobernante

Si se considera un cilindro de radio $r = r_0$, para la que en el tiempo $t = 0$ existe una distribución de temperatura conocida y en la que no existen efectos de borde, se aplica la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Theta}{\partial t}, \text{ con } \Theta = T - T_f \quad (6.35)$$

- La solución analítica de la ecuación diferencial, que permite obtener la Temperatura Local o de la Temperatura de la Superficie, se puede hallar mediante la siguiente ecuación:

$$Q_{(r,t)cilindro} = \frac{T_{(r,t)} - T_f}{T_i - T_f} = A_1 e^{-\frac{1}{Bi}t} J_0 \left[\frac{\alpha}{Bi} \right] \cdot \frac{r}{r_0} \quad t > 0,2 \quad (6.36)$$

- Donde las constantes A_1 y α son funciones sólo del número de Bi y en la Tabla (6.1) se da una lista de sus valores con respecto al número de Bi.

➤ **CALCULO DE TEMPERATURAS EN EL CENTRO, PARA UN CILINDRO**

- De la ecuación anterior (para determinar la temperatura local), se tiene que: $J_0(0) = 1$, la temperatura en el centro se halla, mediante la ecuación

$$Q_{(0,t)cilindro} = \frac{T_{(0,t)} - T_f}{T_i - T_f} = A_1 e^{-1^2 t} \quad (6.37)$$

6.7.3 CONDUCCIÓN TRANSITORIA EN UNA ESFERA

➤ **CALCULO DE TEMPERATURAS LOCALES, PARA UNA ESFERA**

- **Ecuación Diferencial gobernante**

Si se considera un cilindro de radio $r = r_0$, para la que en el tiempo $t = 0$ existe una distribución de temperatura conocida y en la que no existen efectos de borde, se aplica la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Theta}{\partial t}, \text{ con } \Theta = T - T_f \quad (6.38)$$

- La solución de la ecuación diferencial, que permite obtener la Temperatura Local o de la Temperatura de la Superficie para una esfera, se puede hallar mediante la siguiente ecuación:

$$Q_{(r,t)esfera} = \frac{T_{(r,t)} - T_f}{T_i - T_f} = A_1 e^{-1^2 t} \frac{\operatorname{sen}^{\frac{\alpha}{Bi}} 1 \cdot r / r_0}{1 \cdot r / r_0} \quad t > 0,2 \quad (6.39)$$

- Donde las constantes A_1 y 1 son funciones sólo del número de Bi y en la Tabla (6.1),

➤ **CALCULO DE TEMPERATURAS EN EL CENTRO, PARA UNA ESFERA**

- En el límite de $(\operatorname{sen} x)/x$, es igual a 1, de la ecuación anterior (para determinar la temperatura local), la temperatura en el centro del cilindro, se halla mediante la ecuación:

$$Q_{(0,t)\text{esfera}} = \frac{T_{(0,t)} - T_f}{T_i - T_f} = A_1 e^{-l_1^2 t} \quad (6.40)$$

- Una vez que se conoce el número de Bi, se puede usar las relaciones anteriores para determinar la temperatura en cualquier punto en el medio.
- La determinación de las constantes A_1 y l_1 suele requerir interpolación

➤ **CALCULO DE TRANSFERENCIA DE CALOR (Q_t), PARA PARED PLANA, CILINDRO Y ESFERA**

La determinación de la fracción de la transferencia de calor, para las tres configuraciones se puede utilizar las siguientes ecuaciones:

- **Pared Plana**

$$\frac{\frac{Q_t}{Q_{\max}} \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}_{\text{pared}}}}{} = 1 - q_{0,\text{pared}} \frac{\operatorname{sen} l_1}{l_1} \quad (6.41)$$

- **Cilindro sólido**

$$\frac{\frac{Q_t}{Q_{\max}} \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}_{\text{cilindro}}}}{} = 1 - 2q_{0,\text{cilindro}} \frac{J_1(l_1)}{l_1} \quad (6.42)$$

- **Esfera sólida**

$$\frac{\frac{Q_t}{Q_{\max}} \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}_{\text{esfera}}}}{} = 1 - 3q_{0,\text{esfera}} \frac{\operatorname{Sen} l_1 - l_1 \operatorname{Cos} l_1}{l_1^3} \quad (6.43)$$

- La cantidad máxima de calor de un cuerpo puede ganar o perder, es sencillamente el cambio en el contenido de energía del cuerpo

$$Q_{\max} = mC_p(T_f - T_i) = rVC_p(T_f - T_i) \quad (6.44)$$

6.8. CONDUCCIÓN TRANSITORIA BIDIMENSIONAL Y TRIDIMENSIONAL

Los problemas de conducción transitoria estudiados se limitan a configuraciones especiales como son la placa, el cilindro y la esfera, con diversas situaciones de contorno. Estas formas se han escogido para asegurarnos de que la temperatura del sólido depende solo de la coordenada espacial en el tiempo. En ciertas aplicaciones se tiene que considerar la conducción transitoria en función de más de una dimensión espacial.

Bajo ciertas condiciones, la solución de los problemas de conducción transitoria en dos o tres dimensiones se puede obtener por superposición de las soluciones de problemas unidimensionales.

- Aplicando este método de superposición al problema de conducción transitoria en **una barra larga rectangular**, cuya sección transversal tiene por dimensiones, A en la dirección de las x, B en las y, es indefinida en la dirección de las z, la conducción tendrá solo lugar en las direcciones de las x y las y, por lo que se ha reducido el problema a un caso bidimensional y transitorio.
- Si se calienta la barra de forma que inicialmente la distribución de temperaturas es, $T = f(x, y)$, y en el instante, $t=0$, la barra entra en contacto con un fluido convector, o con un foco térmico, a una temperatura, $T_F = 0$, (o cualquier otra, constante), con un coeficiente de convección h_c constante en todas las superficies, la ecuación diferencial a resolver es:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (6.45)$$

Con las condiciones de contorno:

- Para $t = 0$; $T = f(x, y)$

- Para, $t > 0$, $\begin{cases} \text{en, } x = 0, \text{en, } x = A, \frac{dT}{dx} = \pm \frac{h_c T}{k} \\ \text{en, } y = 0, \text{en, } y = B, \frac{dT}{dy} = \pm \frac{h_c T}{k} \end{cases}$ (6.46)

- Se toma el signo (+) en $x = 0$ y en $y = 0$, y el signo (-) en, $x = A$ y en $y = B$.
- Si la función de distribución de temperatura inicial, $T = f(x, y)$, es tal que se pueda descomponer en forma de producto de otras dos funciones, cada una de las cuales solo depende de una de las variables espaciales independientes, la condición inicial puede sustituirse por:

Para $t = 0$, $T = f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$

Y si esto es posible, la solución de la ecuación (1), con las condiciones indicadas, se puede expresar como el producto de dos soluciones transitorias unidimensionales.

- Si representamos la solución que se busca, $T(x,y,t)$, por el producto:

$$T = T_x(x, t) T_y(y, t)$$

Siendo, $T_x(x, t)$ función de x y del tiempo t , y $T_y(y, t)$ función de y y del t .

Se observa que la solución del problema de conducción transitoria bidimensional se puede obtener como el producto de las soluciones de dos problemas unidimensionales, más sencillos, de las ecuaciones anteriores, siempre que la distribución inicial de la temperatura sea susceptible de expresarse en forma del producto:

$$T = f(x, y) = f_1(x) f_2(y), \text{ para, } t = 0$$

1. Estas ecuaciones para **placa finita** son idénticas a las que regulan la conducción transitoria de calor en una **placa plana infinita**. Por tanto, la solución al problema de conducción transitoria del calor en la barra rectangular se obtiene como el producto de las soluciones para dos placas infinitas cuya intersección forma la barra en cuestión.
2. En el caso de la barra rectangular calentada inicialmente a una temperatura uniforme, se puede utilizar directamente tanto las soluciones analíticas, como los gráficos de Heysler para la placa plana, que se encuentre inicialmente a una temperatura uniforme. Los números de Biot y de Fourier para cada una de las dos placas que forman la barra serán distintos, a menos que dicha barra sea de sección trasversal cuadrada.
3. El principio de superposición por producto que se acaba de exponer en la conducción transitoria bidimensional en una barra rectangular se puede hacer extensivo a otros tipos de configuraciones. Así, para un **paralelepípedo** de dimensiones finitas, la solución se puede obtener como el producto de las soluciones de tres placas infinitas.
4. Para el **cilindro circular** como el producto de las soluciones para una **placa infinita** y para un **cilindro circular de longitud infinita**.

Este principio de superposición es solo aplicable a aquellos casos en los que la distribución de temperatura inicial se pueda descomponer en producto de varias funciones, cada una de las cuales solo depende de una de las variables espaciales independientes.

6.8.1 CILINDRO FINITO

Si por ejemplo, se desea determinar la temperatura en el punto P del cilindro de longitud finita que se muestra en la Fig. 6.4, dicho punto vendrá localizado por dos coordenadas (x, r), siendo x una coordenada axial medida desde el centro del cilindro y r su posición radial.

La condición inicial y las condiciones de contorno son las mismas que se aplican en el caso de gráficos mono dimensionales correspondientes a procesos transitorios.

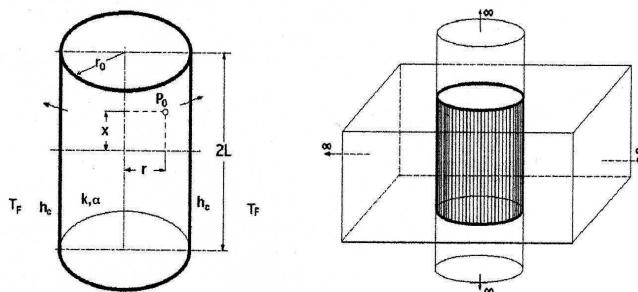


Fig VII.1.- Cilindro de longitud finita

Figura N° 6.4 Cilindro de longitud finita

Fuente: Yunus cengel, Transferencia de calor 2da Edición

El cilindro se puede suponer se encuentra inicialmente, $t = 0$, a una temperatura uniforme T_0 ; en este instante toda la superficie se pone en contacto con un fluido, que es el medio exterior el cual se encuentra a una temperatura ambiental constante T_F .

El coeficiente de transferencia de calor por convección entre la superficie del cilindro y el fluido h_c , se puede suponer de valor constante.

a. Determinación de la distribución de temperaturas

Por tratarse de un cilindro de **longitud finita**, la distribución de temperaturas en régimen bidimensional se puede considerar como **el producto de las soluciones unidimensionales correspondientes a un cilindro infinito y a una placa infinita**, siempre que la distribución inicial de temperaturas se puede descomponer en dos factores, cada uno de los cuales depende de una sola coordenada espacial, es decir:

$$\frac{F}{F_0} = \frac{F_p(r, x, t)}{F_0} = C(r)P(x) = \frac{T(r, x, t) - T_F}{T_0 - T_F} \quad (6.47)$$

Donde los símbolos $C(r)$ y $P(x)$ son las temperaturas a dimensionales que corresponden, respectivamente, al cilindro infinito y a la placa infinita:

$$C(r) = \frac{F(r,t)}{F_0} \Big|_{cilindro} ; \quad P(x) = \frac{F(x,t)}{F_0} \Big|_{placa} \quad (6.48)$$

La solución para $C(r)$ se obtiene de los gráficos de temperaturas correspondientes al cilindro, mientras que la solución de $P(x)$ se obtiene de los gráficos de temperaturas correspondientes a la placa plana infinita.

Mediante un procedimiento análogo al citado para el cilindro finito, se pueden obtener soluciones para otras geometrías bi o tridimensionales, como el paralelepípedo representado en la Fig.6.5, intersección de tres placas infinitas.

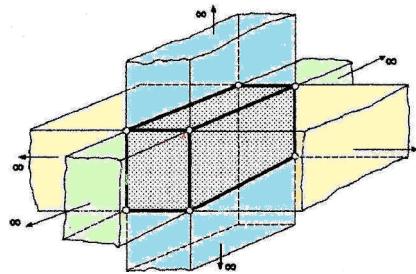


Figura N° 6.5 Paralelepípedo finito (tres dimensiones)

Fuente: Elaboración propia, Ing Alberto Emilio Panama Giro

En las **graficas que se representan en las Fig. 6.6 y Fig 6.7**, se hace un resumen de las soluciones para sistemas bidimensionales y tridimensionales, mediante gráficos de Heisler (para sistemas unidimensionales), utilizando las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{F(x,t)}{F_0} \text{ (solido semi Ψ)} \\ P(x) &= \frac{F(x,t)}{F_0} \text{ (placa Ψ)} \\ C(x) &= \frac{F(r,t)}{F_0} \text{ (cilindro Ψ)} \end{aligned} \quad (6.49)$$

b. Flujo de calor en sistemas unidimensionales y tridimensionales

Para hallar el calor total, se puede utilizar una expresión debida a Langston, de la forma:

$$Q = Q \cdot r \cdot C_p \cdot V \cdot (T_0 - T_F) \quad (6.50)$$

En la que Θ es la fracción de energía disipada, $\Theta = \frac{Q(t)}{Q_0}$, que se puede aplicar en la forma:

- a) Intersección de placa infinita y cilindro infinito, (SISTEMA BIDIMENSIONAL)

$$\begin{aligned} Q &= Q_{PLACA} + Q_{CILINDRO} (1 - Q_{PLACA}) \\ Q &= Q_{PLACA} + Q_{CILINDRO} - Q_{PLACA} \cdot Q_{CILINDRO} \end{aligned} \quad (6.51)$$

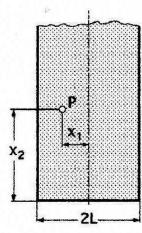
- b) Intersección de 3 placas infinita (SISTEMA TRIDIMENSIONAL)

$$Q = Q_{PLACA(1)} + Q_{PLACA(2)} (1 - Q_{PLACA(1)}) + Q_{PLACA(3)} (1 - Q_{PLACA(1)}) (1 - Q_{PLACA(2)}) \quad (6.52)$$

Estas soluciones no son validas cuando la temperatura inicial del cuerpo no sea uniforme, o cuando la temperatura T_F del fluido no sea la misma en toda la superficie de contacto del sólido.

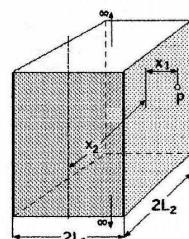
SISTEMAS BIDIMENSIONALES

a) PLACA SEMIINFINITA



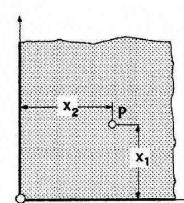
$$\frac{\Phi_p(x_1, x_2)}{\Phi_0} = P(x_1) S(x_2)$$

b) BARRA RECTANGULAR INFINITA



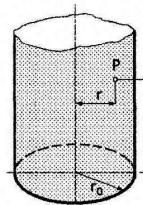
$$\frac{\Phi_p(x_1, x_2)}{\Phi_0} = P(x_1) P(x_2)$$

c) UN CUARTO DE SÓLIDO INFINITO



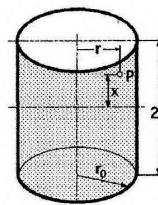
$$\frac{\Phi_p(x_1, x_2)}{\Phi_0} = S(x_1) S(x_2)$$

d) CILINDRO SEMIINFINITO



$$\frac{\Phi_p(x, r)}{\Phi_0} = S(x) C(r)$$

e) CILINDRO FINITO



$$\frac{\Phi_p(x, r)}{\Phi_0} = P(x) C(r)$$

VII.-129

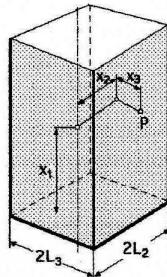
Figura 6.6 Soluciones en forma de producto a los problemas de

Conducción en régimen transitorio utilizando la información facilitada por los gráficos

Fuente: Yunus Cengel, Transferencia de Calor, 2da. Edición

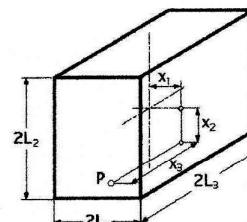
SISTEMAS TRIDIMENSIONALES

a) BARRA RECTANGULAR SEMIINFINITA



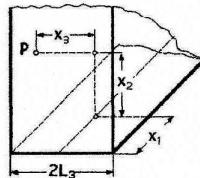
$$\frac{\Phi_p(x_1, x_2, x_3)}{\Phi_0} = S(x_1) P(x_2) P(x_3)$$

b) PARALELEPÍPEDO RECTANGULAR



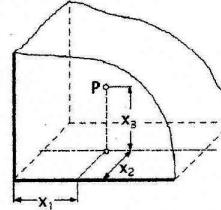
$$\frac{\Phi_p(x_1, x_2, x_3)}{\Phi_0} = P(x_1) P(x_2) P(x_3)$$

c) UN CUARTO DE PLACA INFINITA



$$\frac{\Phi_p(x_1, x_2, x_3)}{\Phi_0} = S(x_1) S(x_2) P(x_3)$$

d) UN OCTAVO DE PLACA INFINITA



$$\frac{\Phi_p(x_1, x_2, x_3)}{\Phi_0} = S(x_1) S(x_2) S(x_3)$$

Fig VII.3.- Soluciones en forma de productos a los problemas de conducción en régimen transitorio, utilizando la información facilitada por los gráficos

**Figura 6.7 Soluciones en forma de producto a los problemas de
Conducción en régimen transitorio utilizando la información facilitada
por los gráficos**

Fuente: Yunus Cengel, Transferencia de Calor, 2da. Edición

6.9 Número de Biot (Bi)

El número de Biot compara los valores relativos de la resistencia a la transferencia de calor por convección en la superficie y la resistencia interna a la conducción:

$$\text{Número de Biot} = \text{Bi} = \frac{h \cdot s}{k} \quad (6.53)$$

6.10 Número de Fourier (Fo)

El número de Fourier compara una longitud característica del cuerpo con un valor aproximado de longitud hasta la que penetra la onda de temperatura en un tiempo dado (t)

$$\text{Número de Fourier} = \text{Fo} = \frac{t}{s^2} = \frac{k t}{2} \quad (6.54)$$

En estos parámetros, (s) indica una dimensión característica del cuerpo; para la **placa es la mitad del espesor**, mientras que para el **cilindro y la esfera es el radio**.

6.11 Flujo de calor transitorio en un sólido semi-infinito

Considerar un sólido semi-infinito, tal como se muestra en la figura Nº 6.8, tiene una temperatura inicial T_i , se baja rápidamente la temperatura de la superficie a T_o , manteniendo esta temperatura, se ha de encontrar una expresión para la distribución de temperatura en el sólido en función del tiempo, posteriormente esta distribución puede utilizarse para calcular el flujo de calor en una posición cualquiera (x) del sólido en función del tiempo.

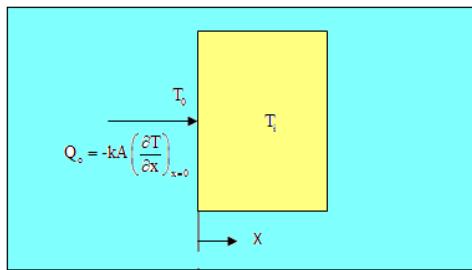


Figura Nº 6.8 Flujo de calor en régimen transitorio en un sólido semi-infinito

Fuente: Yunus Cengel, Transferencia de calor, 2da. Edición

- La ecuación diferencial para la distribución de temperatura $T(x,t)$, cuando las propiedades son constantes, es:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (6.55)$$

- Las condiciones de contorno e inicial son:

$$\begin{aligned} T(x,0) &= T_i \\ T(0,t) &= T_0 \quad \text{para } t>0 \end{aligned} \quad (6.56)$$

- Este es un problema que puede resolverse mediante la transformación de Laplace, la solución es:

$$\frac{T_{(x,t)} - T_0}{T_i - T_0} = \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{t}} \quad (6.57)$$

- La función de error de Gauss viene definida por

$$\operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x/2\sqrt{t}} e^{-z^2} dz \quad (6.58)$$

- Se ha de notar que en esta definición x es una variable muda y la integral es función de su límite superior. Cuando se introduce la definición de la función error en la ecuación (3), la expresión de la distribución de temperatura se convierte en

$$\frac{T_{(x,t)} - T_0}{T_i - T_0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x/2\sqrt{t}} e^{-z^2} dz \quad (6.59)$$

- El flujo de calor en una posición x puede obtenerse de: $Q_x = -kA \frac{\partial T}{\partial x}$

- Efectuando la derivada parcial de la ecuación anterior

$$\frac{\partial T}{\partial x} = (T_i - T_0) \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2/4t} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} \right) = \frac{T_i - T_0}{\sqrt{t}} e^{-x^2/4t} \quad (6.60)$$

- El flujo de calor en la superficie ($x=0$) es:

$$Q_0 = \frac{kA(T_i - T_0)}{\sqrt{t}} \quad (6.61)$$

- Este flujo de calor en la superficie se determina evaluando el gradiente de temperatura en $x = 0$ con la ecuación (6). En la figura N° 4.4 se representa la distribución de temperatura para un sólido semi-infinito. Los valores de la función error se encuentran en la tabla A.1

6.12 Flujo de calor constante en un sólido semi-infinito

Con la distribución de temperaturas inicial, se podría exponer instantáneamente la superficie a un flujo de calor constante por unidad de superficie Q_0/A . Las condiciones inicial y de contorno de la ecuación 819 se transformarían en:

$$\begin{aligned} T_{(x,0)} &= T_i \\ \frac{Q_0}{A} &= -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad \text{para } t > 0 \end{aligned} \quad (6.62)$$

- La solución en este caso es:

$$T_i - T_0 = \frac{2Q_0\sqrt{\pi}}{ka} \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right) = \frac{Q_0 x}{ka} \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\pi}}\right)\right) \quad (6.63)$$

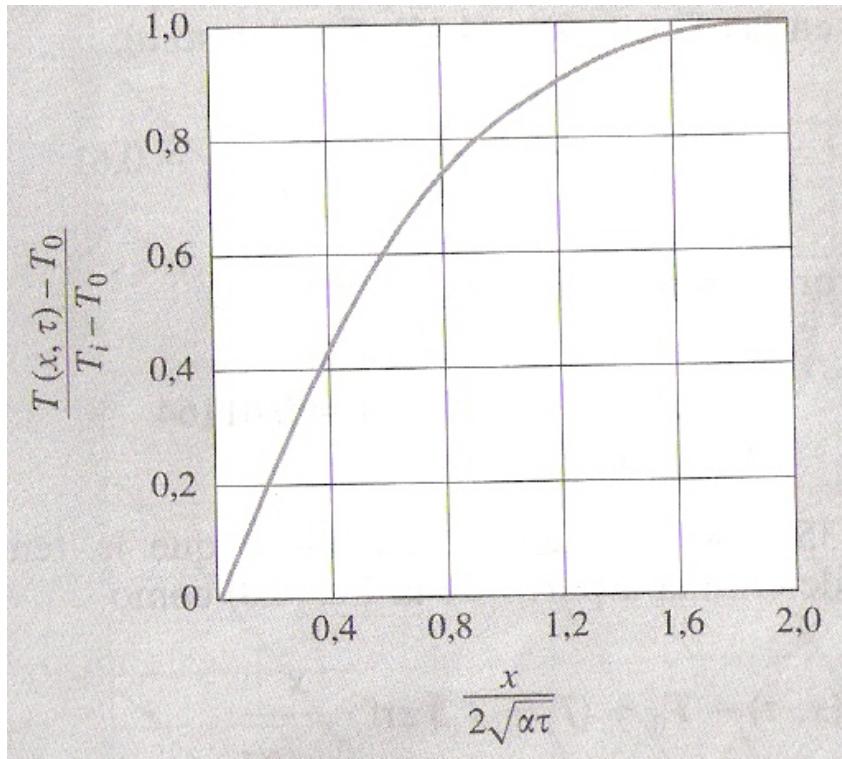


Figura 6.9 Distribución de temperaturas en el sólido semi-infinito

Fuente : J.P. Holman, Transferencia de calor, 8ava. Edición

6.13 PROBLEMAS RESUELTOS

P6.13.1.- Una placa de acero de 1 cm de espesor se saca de un horno a 600°C y se sumerge en un baño de aceite a 30°C. Si se calcula que el coeficiente de transferencia de calor es de $400 \frac{W}{m^2 K}$, ¿Cuánto tiempo tarda la placa en enfriarse hasta 100°C?

Datos: $K_{ACERO} = 50 \frac{W}{mK}$; $\rho = 7800 \frac{kg}{m^3}$; $C_p = 450 \frac{J}{kgK}$

SOLUCIÓN:

1. Diagrama de flujo

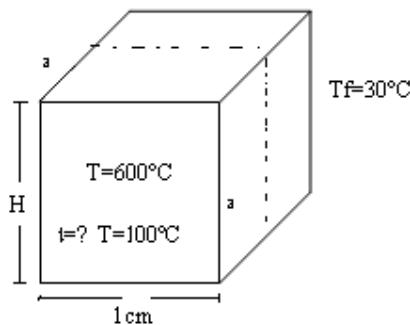


Figura 6.10 Plano para determinar el tiempo que tardara en enfriarse

Fuente: Elaboración propia, Ing Alberto Emilio Panana Girio

- 2) Primero se ha de determinar el número de Biot, para ver en que tipo de condición térmica estamos.
- 3) Para una placa de ancho (a), altura (H) y espesor (e) y despreciando el efecto de los bordes, se tiene:

$$Bi = \frac{hL}{K} \quad L = \frac{V}{A} = \frac{a \cdot l \cdot H}{2 \cdot a \cdot H} = \frac{l}{2}$$

$$Bi = \frac{h \cdot l / 2}{K} = \frac{400 \text{ w/m}^2 \text{ K} \cdot 0.005 \text{ m}}{50 \text{ w/mK}} = 0.04 < 0.1$$

4) Se admite la resistencia térmica interna despreciable.

5) Se calcula el número de Fourier:

$$F_o = \frac{\alpha \cdot t}{(V/A)^2} = \frac{\alpha \cdot t}{(l/2)^2} = \frac{1.4245 \times 10^{-5} t}{(0.01/2)^2} = 0.5698t$$

$$\alpha = \frac{K}{\rho \cdot C_p} = \frac{50 \text{ w/mK}}{7800 \text{ kg/m}^3 \times 450 \text{ J/kg.K}} = 1.4245 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

6) Calculo de la Temperatura:

$$\frac{T_{(t)} - T_F}{T_i - T_F} = e^{-Bi \cdot F_o}$$

P6.8.2.- Una barra cilíndrica de acero inoxidable 18-8 de 20cm de diámetro, se calienta a 100°C y a continuación se templa en un baño de aceite a 50°C, en el que el coeficiente de película es $h = 500 \text{ Kcal/h m}^2 \text{ }^\circ\text{C}$.

Determine:

- a) El tiempo que transcurrirá hasta que el eje del cilindro alcance la temperatura de 250°C.
- b) La temperatura que se alcanzara en $r = 0.05 \text{ m}$ al cabo de ese tiempo.

Datos:

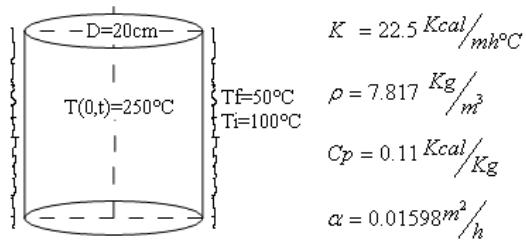


Figura 6.11 Cilindro, para evaluar la temperatura en el eje, así como a una distancia radial en función del tiempo

Fuente: Elaboración propia, Ing Alberto Emilio Panama Girio

Solución:

$$1) \frac{h}{K} = \frac{500}{22.5} = 22.2 \quad (\text{condición de contorno con convección})$$

2) Calculo de los parámetros:

$$Bi = \frac{hR}{K} = \frac{500 \times 0.1}{22.5} = 2.22 \rightarrow 0.1$$

$$Bi^{-1} = 0.45$$

3) La temperatura en el centro (eje del cilindro)

$$\frac{\theta_{(0,t)}}{\theta_i} = \frac{T_{(0,t)} - T_f}{T_i - T_f} = \frac{250 - 50}{1000 - 50} = 0.21$$

4) Mediante la Fig 2.38 a (para calcular las temperaturas en el centro de los cilindros infinitamente largo de radio r_0)

$$\text{Se obtiene } F_0 = 0.60 \text{ con } \begin{cases} \frac{\theta_{(0,t)}}{\theta_i} = 0.21 \\ Bi^{-1} = 0.45 \end{cases}$$

Por tanto el tiempo que transcurrirá hasta que el eje del cilindro alcance una temperatura de 250°C.

$$F_0 = 0.60 = \frac{\alpha t}{R^2} \rightarrow t = \frac{0.6R^2}{\alpha} = \frac{0.6 \times 0.1^2}{0.01598} = 0.375 \text{ h} \approx 22 \text{ min } 30 \text{ seg}$$

5) Calculo de la temperatura que alcanzara a un radio R=0.05m al cabo de ese

tiempo, mediante la Fig 2.38b $\frac{\theta_{(r,t)}}{\theta_i}$ con los parámetros (r/R y Bi^{-1})

$$\frac{r}{R} = \frac{0.05}{0.1} = 0.5 \quad Bi^{-1} = 0.45$$

$$\frac{\theta_{(r,t)}}{\theta_{(0,t)}} = \frac{T_{(R,t)} - T_F}{T_{(0,t)} - T_F} = \frac{T_{(R,t)} - 50}{250 - 50} = 0.85$$

$$T_{(R,t)} = 50 + 0.85(250 - 50) = 220^\circ C$$

$$T_{(R,t)} = 220^\circ C$$

También:

$$\frac{q_{(R,t)}}{q_{(i,t)}} = \frac{q_{(0,t)}}{q_{(i)}} \times \frac{q_{(R,t)}}{q_{(0,t)}} ; \quad \frac{q_{(0,t)}}{q_{(i)}} = \frac{250 - 50}{1000 - 50} = 0.21 ; \quad \frac{q_{(R,t)}}{q_{(0,t)}} = 0.85$$

$$\frac{\theta_{(R,t)}}{\theta_{(i)}} = \frac{T_{(R,t)} - T_F}{T_{(i)} - T_F} = 0.21 \times 0.85 = 0.1785$$

Por tanto:

$$T_{(R,t)} = 0.1785(1000 - 50) + 50 = 219.575^\circ C$$

$$T_{(R,t)} = 220^\circ C$$

6.8.3.- Una lámina de cierto material de propiedades térmicas $K = 2 \text{ Kcal}/\text{hm}^\circ\text{C}$, $\alpha = 0.0002 \text{ m}^2/\text{h}$ tiene un espesor de 3cm y se encuentra a

una temperatura de 24°C . En estas condiciones, se introduce en un horno a 400°C . El coeficiente de convección es $h = 60 \frac{\text{Kcal}}{\text{m}^2 \text{h}^{\circ}\text{C}}$

Determine:

- El tiempo que tardara el centro geométrico en alcanzar la temperatura de 300°C y la temperatura que se alcanza en ese instante en un plano situado a 1 cm del plano central.
- Si el calentamiento continua, el tiempo necesario para que en el plano situado a 1 cm del plano central se alcancen 350°C .
- Si existiese un aislamiento perfecto en una de las caras de la lámina, el tiempo que deberá transcurrir para que en el plano central se alcancen 200°C .

Solución:

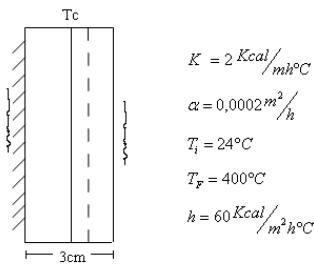


Figura 6.11 Plano para determinar el tiempo que tardara en enfriarse, en diferente distancia del centro

Fuente: Elaboración propia, Ing. Alberto Emilio Panana Giro

- 2) Tiempo que tardara el centro geométrico en alcanzar la temperatura de 300°C .

- Calculo del número de Biot:

$$Bi = \frac{h (\sqrt{A})}{K} = \frac{h}{2} \times \left(\frac{L}{2}\right) = \frac{60 \times 0.015}{2} = 0.45 \approx 0.1$$

Condición de criterios:

$$\frac{h}{k} = \frac{60}{2} = 30 \text{ por convección}$$

- 3) En la condición de criterio de convección, la longitud característica es la mitad del espesor, mediante la grafica de Heisler 4.13a.

Se obtiene:

$$Bi = \frac{hR}{K} = \frac{60 \times 0.015}{2} = 0.45 ; Bi^{-1} = 2.22$$

$$\frac{\theta_{(0,t)}}{\theta_i} = \frac{T_{(0,t)} - T_F}{T_i - T_F} = \frac{300 - 400}{24 - 400} = 0.27$$

Interceptando en la grafica $\frac{\theta_{(0,t)}}{\theta_i}$ con Bi^{-1} se obtiene :

$$F_0 = 3.56 = \frac{\alpha t}{L^2} = \frac{2 \times 10^{-4} m^2/h \times t}{(0.015m)^2} \rightarrow t = 4 \text{ horas}$$

- b) Cálculo de la temperatura que se alcanza en ese instante situado a 1 cm del plano central.

Mediante la figura 2.37b (Heisler), se tiene:

$$\frac{\theta_{(x,t)}}{\theta_{(0,t)}} = \frac{T_{(x,t)} - T_F}{T_{(0,t)} - T_F} = \frac{T_{(R,t)} - 400}{300 - 400} \text{ y con los parametros :}$$

$$Bi^{-1} = 2.22 \quad \frac{x}{L} = \frac{1}{1.5} = 0.66 \text{ se tiene que}$$

$$\frac{T_{(R,t)} - 400}{300 - 400} = 0.92 \rightarrow T_{(x=1,t)} = 0.92(-100) + 400 = 345.6^\circ C$$

$$T_{(x=1,t)} = 345.6^\circ C = T_1$$

- c) Cálculo del tiempo necesario, si el calentamiento continúa para que el plano situado a 1 cm del plano central se alcancen $350^\circ C$.

Temperatura en el plano central en estas condiciones.

$$\frac{q_{(x,t)} \dot{\theta}^{-1}}{q_{(0,t)} \dot{\theta}} = \frac{T_{(x,t)} - T_F}{T_{(0,t)} - T_F} = \frac{300 - 400}{T_{(R,t)} - 400} = 0.92 \text{ mediante los parametros}$$

$$\frac{x}{L} = \frac{1}{1.5} = 0.66, \quad Bi = 0.45 \quad \text{en la Fig 4.13b}$$

$$T_{(0,t)} = 345.6^\circ C$$

Luego mediante la grafica 237a se obtiene F_0 con los parámetros

$$\frac{q_{(0,t)}}{q_i} \text{ y } Bi^{-1}; \quad Bi^{-1} = 2.22$$

$$\frac{\theta_{(0,t)}}{\theta_i} = \frac{T_{(0,t)} - T_F}{T_i - T_F} = \frac{345.6 - 400}{24 - 400} = 0.145$$

$$\text{Po lo tanto: } F_0 = 5.1 = \frac{\alpha t}{L^2} = \frac{2 \times 10^{-4} m^2/h \cdot xt}{0.015^2 m^2} \rightarrow t = 5.7 \text{ horas}$$

- d) Si existe un aislamiento perfecto en una de las caras de la lámina, el tiempo que deberá transcurrir para que el plano central alcance $200^\circ C$.

El desarrollo es similar a los casos anteriores que con el espesor doble $e=6\text{cm}$, por cuanto el plano aislado se considera como plano adiabático.

- La longitud característica es $L^* = 3\text{cm}$
- La temperatura en la cara aislada se obtiene a partir de la primera grafica de Heysler, Fig.4.13b

$$\frac{\theta_{(x,t)}}{\theta_{(0,t)}} = \frac{T_{(x,t)} - T_F}{T_{(0,t)} - T_F} = \frac{200 - 400}{T_{(0,t)} - 400} \text{ se calcula con los parametros :}$$

$$Bi = \frac{hL^*}{k} = \frac{60 \times 0.03}{2} = 0.9$$

$$Bi^{-1} = 1.11$$

para plano central :

$$\frac{x}{L^*} = \frac{1.5}{3} = 0.5$$

se tiene que

$$\frac{\theta_{(x,t)}}{\theta_{(0,t)}} = 0.915 \rightarrow \frac{T_{(x,t)} - T_F}{T_{(0,t)} - T_F} = \frac{20 - 400}{T_{(0,t)} - 400} = 181.4^\circ C$$

$$T_{(0,t)} = 181.4^\circ C$$

Con esta temperatura y la grafica 4.13a de Heysler se obtiene el F_o por lo tanto que cabe transcurrir.

$$\frac{\theta_{(0,t)}}{\theta_i} = \frac{T_{(0,t)} - T_F}{T_i - T_F} = \frac{181.4 - 40}{24 - 40} = 0.58$$

se obtiene :

$$F_o = 3.83 = \frac{\alpha t}{L^{*2}} = \frac{2 \times 10^{-4} \frac{m^2}{h} x t}{(3m)^2} \rightarrow t = 17,335 \text{ horas}$$

6.8.4.- Un cilindro de 10 cm de diámetro y una longitud de 16cm

$K = 2 \frac{Kcal}{hm^\circ C}$ y $\alpha = 5 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s}$ esta inicialmente a la temperatura

uniforme de $20^\circ C$. Se coloca el cilindro en un horno en el que la temperatura ambiental es de $500^\circ C$ con un $h = 30 \frac{w}{m^2 K}$

Determinar:

- a) La temperatura máxima y mínima del cilindro treinta minutos después de haberlo introducido en el horno.

b) El calor absorbido en ese tiempo.

SOLUCIÓN:

1) Considerando Cilindro Finito:

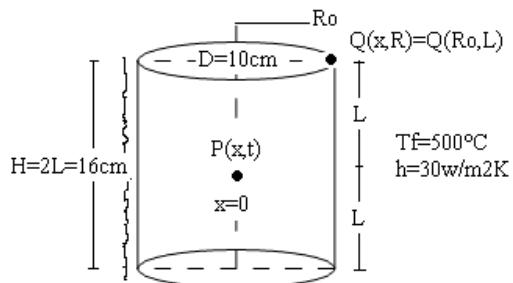


Figura 6.12 Cilindro, para evaluar la temperatura máxima y mínima en función del tiempo

Fuente: Elaboración propia, Ing Alberto Emilio Panama Giro

a) $T_{\max}=?$, $T_{\min}=?$ Para $t=30\text{ minutos}$

b) $Q_{\text{absorbido}}$ $t=30\text{ minutos}$

2) la distribución de temperaturas en el cilindro de longitud finita es posible determinarla, mediante el producto de la solución para una placa infinita y con cilindro finito, ver la tabla 2.4 (Esquemas y nomenclaturas para las soluciones por producto de los problemas se conducción transitoria) con las Fig.2.35,2.37 y 2.38 para sistemas bidimensionales)

*En cualquier instante, la temperatura mínima, se localiza en el centro geométrico del cilindro y la, temperatura máxima, en la circunferencia externa de cada extremo del cilindro.

*Utilizando las coordenadas del cilindro finito que se muestra en la Fig, se obtiene:

Temperatura Mínima con $x=0$ $R=0$ (Punto $P(x,R)$)

Temperatura Máxima con $x=L$ $R=R_0$ (Punto $Q(x, R)$)

3) Cálculo del # Bi:

$$Bi = \frac{hL}{K} = \frac{30 \times 0.08}{0.5} = 4.8$$

$$4) \frac{h}{k} = \frac{30 \text{ w/m}^2 \text{ K}}{0.5 \text{ w/m K}} = 60 \text{ 1/m} \quad (\text{condición de criterios de convección})$$

5) La distribución de temperatura para este cilindro finito, se determina con la intersección de la placa plana infinita de espesor 16 cm, con un cilindro infinito de diámetro 10 cm.

En la tabla 2.4 para el cilindro finito

$$\frac{\theta_{p(x,r,t)}}{\theta_i} = P(x)C_{(R)}$$

$$P_{(x)} = \frac{\theta_{(x,t)}}{\theta_i} \quad \text{para una placa inf inita, mediante Fig 2.37a y b}$$

$$C_{(R)} = \frac{\theta_{(R,t)}}{\theta_i} \quad \text{para un cilindro largo (infinito), Fig 2.38a y b}$$

El **proceso térmico**, en el calentamiento, en el tiempo "t", la **temperatura mínima**, se ha dado se localiza en el centro geométrico del cilindro, y la **temperatura máxima**, se corresponde con los puntos de la circunferencia de sus bases.

6) Para la Placa Infinita:

$$F_0 = \frac{a}{L^2} t = \frac{5 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s} \times 1800\text{s}}{(0.08\text{m})^2} = 0.14$$

$$Bi = \frac{hL}{K} = \frac{30 \times 0.08}{0.5} = 4.8 \rightarrow Bi^{-1} = 0.208$$

*Mediante la Fig. 4.13a, con Bi^{-1} y F_0 se tiene:

$$P_{(0)} = \frac{\theta_{(0,L)}}{\theta_i} = \frac{T_{(0,t)} - T_F}{T_i - T_F} = 0.9$$

*Mediante la Fig. 4.13b

$$P_{(L)} = \frac{\theta_{(x,L)}}{\theta_i} = \frac{\theta_{(x,t)}}{\theta_{(0,t)}} \cdot \frac{\theta_{(0,t)}}{\theta_i}$$

$$\frac{\theta_{(x,t)}}{\theta_{(0,t)}} = 0.27 \begin{cases} \text{con Fig 2.37b y los parametros } \frac{x}{L} = 1 \\ x = L \text{ y } (Bi = 4.8), Bi^{-1} = 0.208 \end{cases}$$

Por tanto:

$$P_L = 0.27 \times 0.9 = 0.249$$

7) Para el Cilindro Finito:

Los parámetros:

$$F_0 = \frac{a \ t}{R^2} = \frac{5 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 1800s}{(0.05m)^2} = 0.36$$

$$Bi = \frac{hR}{K} = \frac{30 \times 0.05}{0.5} = 3 \quad Bi^{-1} = 0.333$$

*Mediante la Fig. 4.14a, con Bi^{-1} y se tiene:

$$C_0 = \frac{\theta_{(0,t)}}{\theta_i} = \frac{T_{(0,t)} - T_F}{T_i - T_F} = 0.47 \quad \text{en el eje}$$

*Mediante la Fig. 4.14b con Bi^{-1} y $R/R_0=1$ $R=R_0$

$$C_{(R)} = \frac{\theta_{(R,t)}}{\theta_i} = \frac{\theta_{(R,t)}}{\theta_{(0,t)}} \cdot \frac{\theta_{(0,t)}}{\theta_i}$$

$$\frac{\theta_{(R,t)}}{\theta_i} = 0.36 \quad \{Fig. 2.38b \quad Bi^{-1} = 0.33 \quad R/R_0 = 1\}$$

Por tanto:

$$C_R = \frac{\theta_{(R,t)}}{\theta_i} = 0.47 \times 0.36 = 0.1692$$

8) Cálculo de temperatura Minima del Cilindro (en el centro geométrico)

$$\frac{\theta_{(\min)}}{\theta_i} = P_{(0)} \times C_{(0)} = 0.90 \times 0.47 = 0.423$$

$$\frac{\theta_{(\min)}}{\theta_i} = \frac{T_{\min} - T_F}{T_i - T_F} = 0.423$$

$$T_{\min} = 0.423 \times (20 - 500) + 500 = 297^\circ C = T_{\min}$$

9) Cálculo de la temperatura máxima (en la circunferencia de la base)

$$\frac{\theta_{(\max)}}{\theta_i} = P_{(L)} \times C_{(R)} = 0.249 \times 0.1692 = 0.042$$

$$\frac{T_{\max} - T_F}{T_i - T_F} = \frac{T_{\max} - 500}{20 - 500} = 0.042$$

$$T_{\max} = 480^\circ C$$

10) Cálculo de Calor Absorbido en ese tiempo:

$$Q = \Phi \rho C V (T_i - T_F)$$

*Para la placa con los parámetros Bi²F₀ y Bi, en la Fig. 4.13c

$$Q_p = \frac{Q}{Q_L} = 0.52$$

*Para el cilindro, con los parámetros Bi²F₀ y Bi, en la Fig. 4.14c

$$Q_{cil} = \frac{Q}{Q_L} = 0.7$$

Se tiene que ϕ

$$\phi = Q_p + Q_{cil} (1 - Q_p)$$

$$\phi = 0.52 + 0.7(1 - 0.52) = 0.856$$

Por tanto:

$$Q = Fr \cdot C \cdot V(T_i - T_f),$$

$$\alpha = \frac{K}{r \cdot C_p} \quad rC = \frac{k}{a} \quad D = 0.1m \quad H = 0.16m$$

$$Q = \Phi \frac{k}{\alpha} \cdot V(T_i - T_f)$$

$$Q = 0.856x \frac{0.5w/mk}{5 \times 10^{-7} m^2/seg} x (\pi R^2 H) m^3 (20 - 500) k$$

$$Q = 0.856x \frac{0.5w/mk}{5 \times 10^{-7} m^2/seg} x (\pi 0.05^2 x 0.16H) m^3 (20 - 500) k$$

$$Q = 516327 W \cdot seg = 516327 Joule = 516.327 KJ \frac{1kcal}{4.186J}$$

$$Q = 123.34 Kcal$$

6.8.5.-Una lata cilíndrica de 5 cm de espesor y 30cm de diámetro contiene un determinado producto a una temperatura uniforme de 15°C y se calienta mediante una corriente de aire a 160°C sabiendo que

$$\alpha = 0.04 m^2/h , K = 4 Kcal/h \cdot m \cdot ^\circ C , h_{aire-lata} = 20 Kcal/h \cdot m^2 \cdot ^\circ C$$

Determinar:

- El tiempo necesario para que la temperatura de cualquier punto del producto sea, por lo menos de 138°C.
- La temperatura en el centro de la base de la lata en ese instante.
- El calor absorbido por la lata durante los 36 primeros minutos del calentamiento.

SOLUCION:

- Diagrama de flujo

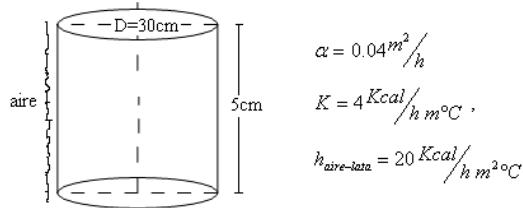


Figura 6.13 Cilindro, para evaluar la temperatura en el eje, así como el calor absorbido

Fuente: Elaboración propia, Ing Alberto Emilio Panama Girio

- 2) Cálculo del tiempo necesario para que la temperatura del centro sea de 138°C , ya que de los demás puntos será superior.

El diámetro del cilindro es bastante mayor que la altura, por la que la transmisión de calor se realizará principalmente en sentido axial y sería equivalente al de la transmisión de calor por conducción en régimen transitorio en una placa de 5 cm de espesor y longitud infinita.

- 3) Cálculo del # Bi:

$$Bi = \frac{hL}{K} = \frac{20 \times 0.025}{4} = 0.125 \rightarrow Bi^{-1} = (0.125)^{-1} = 8$$

- a) Cálculo del tiempo necesario para que la placa alcance la temperatura en el centro $T_0=138^{\circ}\text{C}$, del gráfico de Heysler 2.37 para placa infinita, la temperatura del centro:

$$\frac{T_0 - T_F}{T_i - T_F} = \frac{138 - 160}{15 - 160} = 0.1517$$

De este gráfico se determina el número de F_0 con los parámetros

$$\left(\frac{T_0 - T_F}{T_i - T_F}, Bi^{-1} \right), \text{ este igual a : } F_0 = 16$$

$$F_0 = \frac{a \cdot t}{L^2} = \frac{0.04 \text{ m}^2/\text{h} \times t}{(0.025\text{m})^2} = 16 \quad \text{®} \quad t = 0.25 \text{ horas} \quad t = 15 \text{ min}$$

Que es un valor bastante aproximado

b) Cálculo de la temperatura en el centro de base de la aleta para ese instante.

b.1) Conducción Bidimensional:

$$\text{Placa Infinita: } P_L = \frac{\theta_{(L,t)}}{\theta_i} = \frac{\theta_{(L,t)}}{\theta_{(0,t)}} \frac{\theta_{(0,t)}}{\theta_o}$$

$$\frac{\theta_{(L,t)}}{\theta_{(0,t)}} = \frac{T_L - T_F}{T_0 - T_F} = 0.93 \quad \text{con } \frac{x}{L} = 1$$

$$P_0 = \frac{\theta_{(0,t)}}{\theta_{(0)}} = \frac{T_c - T_F}{T_0 - T_F} = 0.1517$$

$$P_L = 0.93 \times 0.1517 = 0.1411$$

-Cilindro Infinito:

$$F_0 = \frac{a}{R^2} \frac{t}{h} = \frac{0.04 \frac{m^2}{h} \times 0.25h}{(0.15m)^2} = 0.444 \quad ; \quad Bi = \frac{hR}{K} = \frac{20 \times 0.15}{4} = 0.75$$

$$Bi^{-1} = 1.333 \quad ; \quad C_{(0)} = \frac{q_{(0,t)}}{q_{(0)}} = \frac{T_c - T_F}{T_0 - T_F} = 0.58 \quad \text{eje}$$

$$C_{(R)} = \frac{q_{(R,t)}}{q_{(0)}} = \frac{q_{(R,t)}}{q_{(EJE)}} \times \frac{q_{(EJE)}}{q_{(0)}} =$$

$$\frac{q_{(EJE)}}{q_{(0)}} = 0.58 \quad \frac{q_{(R,t)}}{q_{(EJE)}} = 0.62$$

Por lo tanto:

$$C_R = 0.58 \times 0.62 = 0.3596$$

-La temperatura en el centro de la base:

$$P_{(L)} \times C_{(0)} = 0.1411 \times 0.58 = 0.0818$$

$$\frac{\theta_{(X)}}{\theta_{(0)}} = \frac{T_X - T_F}{T_0 - T_F} = 0.0818$$

$$T_X = T_F + 0.0818(T_0 - T_F) = 160 + 0.0818(15 - 100)$$

$$T_X = 148.14^\circ C$$

b.2) Conducción Unidimensional:

$$\frac{\theta_{(L,t)}}{\theta_{(0,t)}} = \frac{T_L - T_F}{T_0 - T_F} = \frac{T_L - 100}{138 - 100} = 0.93$$

$$T_L = 139.5^\circ C$$

c) Calor absorbido por la lata durante los 36 primeros minutos de calentamiento:

$$Q_0 = r \cdot C_p \cdot V(\Delta T) = \left| r \cdot C_p = \frac{k}{a} \right| = V \frac{k}{a} (\Delta T) = (p R^2 L) \frac{k}{a} (\Delta T)$$

$$Q_0 = (p \times 0.15^2 \times 0.05) m^3 \frac{4 \text{ kcal}/\text{hm}^\circ \text{C}}{0.04 \text{ m}^2/\text{h}} (160 - 15)^\circ \text{C}$$

$$Q_0 = 51.24 \text{ kcal}$$

$$F_0 = \frac{a \cdot t}{L^2} = \frac{0.04 \text{ m}^2/\text{h} \times \frac{36}{60}}{(0.025m)^2} = 38.4^\circ \text{C} \quad \frac{Q}{Q_0} = 0.97$$

$$Bi^2 F_0 = 0.6, \quad Bi = 0.125$$

$$Q = 0.97 \times 51.24 = 49.70 \text{ kcal}$$

6.14 PROBLEMAS PROPUESTOS

Problema N° 1

En un proceso de fabricación, de cilindros de acero inoxidable, que se encuentran a 600 K se enfrián en un baño de aceite que se encuentra a la

temperatura de 300 K con $h = 500 \text{ W/m}^2\text{.K}$. la longitud del cilindro es de 60 mm y el diámetro es de 80 mm. Considere un tiempo de 3 minutos en el proceso de enfriamiento y determine:

- a. La temperatura en el centro del cilindro
- b. La Temperatura en la mitad de la altura lateral.

Datos: Las propiedades para el acero se pueden tomar los siguientes valores $T_m = 450 \text{ K}$

$$\rho = 7900 \text{ kg/m}^3, \alpha = 4,19 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}, K = 17,4 \text{ W/m.K}, C_p = 526 \text{ J/kg.K}$$

Problema N° 2

Una esfera de acero con diámetro de 7.6 cm se tiene que endurecer calentándola primero a una temperatura uniforme de 870°C y luego enfriándola en un baño de agua a una temperatura de 38°C . Se tienen los datos siguientes:

- Coeficiente de transferencia de calor superficial $h = 590 \text{ W/m}^2\text{.K}$.
- Conductividad térmica del acero . $k = 43 \text{ W/m.K}$
- Calor específico del acero $C_p = 628 \text{ J/kg.K}$
- Densidad del acero $\rho = 7840 \text{ kg/m}^3$

Calcule:

- a. El tiempo transcurrido para enfriar la superficie de la esfera hasta 204°C .
- b. El tiempo transcurrido para enfriar su centro hasta 204°C

Problema N° 3

Una esfera de acero con diámetro de 7.6 cm se tiene que endurecer calentándola primero a una temperatura uniforme de 870°C y luego enfriándola en un baño de agua a una temperatura de 38°C . Se tienen los datos siguientes:

- Coeficiente de transferencia de calor superficial $h = 590\text{W} / \text{m}^2.\text{K}$.
- Conductividad térmica del acero . $k = 43\text{W} / \text{m.K}$
- Calor específico del acero $C_p = 628\text{J} / \text{kg.K}$
- Densidad del acero $\rho = 7840\text{kg} / \text{m}^3$

Calcule:

- a. El tiempo transcurrido para enfriar la superficie de la esfera hasta 204°C .
- b. El tiempo transcurrido para enfriar su centro hasta 204°C

Problema N° 4

Un cilindro de acero con diámetro $d = 500$ mm se enfriá en un ambiente cuya temperatura es constante $T_f = 15^{\circ}\text{C}$. En el momento inicial la temperatura del cilindro era igual en todas las partes de éste:

$T_i = 450^{\circ}\text{C}$. El coeficiente de traspaso de calor por convección en todos los puntos de la superficie del cilindro durante el proceso de enfriamiento permanece constante, $h = 160 \text{ W/m}^2. ^{\circ}\text{C}$. La conductividad térmica, la difusividad térmica y la densidad del acero son, respectivamente, $k = 49 \text{ W/m.}^{\circ}\text{C}$; $\alpha = 1,4 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$; $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$.

Determinar la cantidad de calor que será transferida al ambiente desde 1 m del cilindro durante tres horas una vez comenzado el enfriamiento y la temperatura en la superficie.

TEMA VII TRANSFERENCIA DE CALOR POR CONVECCIÓN.

7.1 DEFINICIÓN.

La convección es el mecanismo mediante el cual se transfiere calor, entre una superficie sólida y un fluido en movimiento adyacente a ella.

La transferencia de energía por convección desde una superficie sólida cuya temperatura es superior a la del fluido que lo rodea, se realiza en varias etapas:

1. El calor fluye por convección desde la superficie sólida hacia las partículas adyacentes del fluido. La energía así transferida servirá para incrementar la temperatura y la energía interna de esas partículas de fluido.
2. Las partículas se moverán hacia una región de fluido con temperatura más baja, donde al mezclarse transfieren parte de su energía a otras partículas del fluido.
3. la energía será almacenada en las partículas del fluido y transportada como resultado del movimiento de masas.

Hay dos clases de proceso convectivo:

➤ Convección Natural

Ocurre cuando el movimiento del fluido es causado por medios naturales, como el efecto de flotación, el cual se manifiesta como la subida del fluido caliente y caída del fluido frío (diferencia de densidades que se presenta en el fluido), como resultado de una diferencia de temperatura.

➤ Convección Forzada

Si el movimiento del fluido se produce por la acción de algún agente externo, tal como una bomba hidráulica, un agitador o un ventilador.

Pueden ocurrir situaciones donde ambas formas de convección actúen simultáneamente, siendo la convección forzada de mayor interés práctico que la convección natural, debido a las aplicaciones industriales.

La convección también se clasifica como externa e interna, dependiendo de si se obliga al fluido a fluir sobre una superficie o en un caudal.

Newton (1701), definió: “el calor transferido desde la superficie de un sólido o un fluido en movimiento, es proporcional a la diferencia de temperatura y el área de transferencia y se expresa:

$$Q_C = h_{\text{prom}} \cdot A \cdot (T_s - T_f) \quad (7.1)$$

Donde:

Q_C = calor transferido, w

h_{prom} = coeficiente de transferencia de calor por convección, $\text{w/m}^2 \cdot \text{K}$

A = área de transferencia, m^2

T_s, T_f = temperaturas del sólido(s), y del fluido (f), en K

El coeficiente de transferencia de calor por convección h , no es una propiedad, puesto que depende de una variedad de factores, velocidad, densidad, viscosidad, conductividad térmica, calor específico del fluido, de la geometría de la superficie, de la presencia de fuerzas de flotamiento, por lo que hace difícil llegar a una expresión analítica para el coeficiente de transferencia de calor. Generalmente se recurre a la determinación experimental, empleando ciertas técnicas, tales como:

1. El análisis dimensional combinado con experimentos.
2. Soluciones matemáticas exactas de las ecuaciones de capa límite
3. Análisis aproximadas de las ecuaciones de capa límite
4. La analogía entre la transferencia de calor y la transferencia de cantidad de movimiento
5. Análisis numérico.

En este capítulo se incidirá en el estudio de convección forzada por el interior y exterior tubos.

El análisis de transferencia de calor para la convección es en general, más compleja que la conducción de calor, debido a que se debe satisfacer, **la conservación de masa y de movimiento, además de cumplirse el principio de conservación de la energía**.

7.2 Número de Nusselt

En el estudio de transferencia de calor por convección se ha de determinar la razón de transferencia de calor entre una superficie sólida y un fluido adyacente, siempre que exista una diferencia de temperaturas, entre ellos.

Considere un fluido que fluye sobre un cuerpo, si la temperatura de la superficie T_s y la temperatura del fluido T_f , la temperatura del fluido cercano a la frontera sólida variará tan como se muestra en la figura N°7.1.

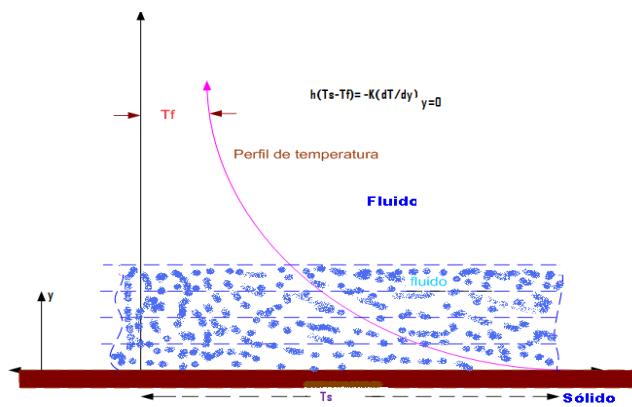


Figura N° 7.1 Distribución de temperatura de un fluido, fluyendo cerca de frontera sólida

Fuente: Alan Chapman: Fundamentos de Transferencia de calor

- La razón de transferencia de calor Q

$$Q_y = -k_{y=0} \cdot A \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (7.2)$$

K = conductividad térmica del fluido ($\text{W/m. } ^\circ\text{C}$), evaluado en $y = 0$
(interface en la frontera sólido – fluido)

$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}$ = gradiente de temperatura en el fluido en $y = 0$. La coordenada (y),
se mide a lo largo de la normal a la superficie.

- Combinando las ecuaciones (1) y (2)

$$h.A(T_s - T_f) = -k.A\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}$$

$$\frac{h}{k} = -\frac{1}{(T_s - T_f)}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}$$

- Definiendo una distancia a dimensional, $\eta = (y/L_c)$, donde L_c , es longitud característica, se obtiene:

$$\frac{h}{k} = -\frac{1}{(T_s - T_f)L_c}\left(\frac{\partial T}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} \quad (7.3)$$

$$Nu = \frac{h \cdot L_c}{k} = -\frac{1}{(T_s - T_f)}\left(\frac{\partial T}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} \quad (7.4)$$

- Si se define una temperatura a dimensional, (θ) , la expresión anterior se puede escribir:

$$\theta = \frac{(T - T_f)}{(T_s - T_f)}$$

$$Nu = \frac{h \cdot L_c}{k} = -\left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} \quad (7.5)$$

- La relación $(h \cdot L_c / k)$, cantidad a dimensional, es conocido como **el número de Nusselt**, es el gradiente de temperatura sin dimensiones para el fluido, evaluado en la interface pared – fluido.
- La relación del número de Nusselt es similar a la del **número de Biot**, se diferencian en la conductividad térmica, (k), para el número de Nusselt es del fluido, en cambio en el número de Biot, la conductividad térmica es del sólido.

7.3 Temperatura en bulto (T_b)

Es la **temperatura promedio del fluido** en una sección transversal dada del tubo, llamada también temperatura media de mezclado. Esta temperatura varia de una sección transversal del tubo a otra, se expresa:

$$T_b = \frac{\left(\begin{array}{l} \text{energía térmica total a travesando una sección} \\ \text{del tubo en una unidad de tiempo} \\ \hline \text{capacidad calorífica del fluido a travesando la} \\ \text{misma sección en una unidad de tiempo} \end{array} \right)}{(7.6)}$$

- La energía térmica total que cruza una sección transversal del tubo en una unidad de tiempo es:

$$\int_0^R C_p T \rho v 2\pi r dr$$

- La capacidad calorífica de un fluido es el producto de su calor específico a presión constante y su masa, por lo tanto la capacidad calorífica de un fluido que cruza una sección transversal de tubo en una unidad de tiempo es :

$$\int_0^R C_p \rho v 2\pi r dr$$

- Entonces la temperatura en bullo esta dada por

$$T_b = \frac{\int_0^R C_p T \rho v 2\pi r dr}{\int_0^R C_p \rho v 2\pi r dr} \quad (7.7)$$

7.4 Fluidos que circulan por el interior de tuberías en convección forzada en régimen laminar

7.4.1 Flujos desarrollados

Caso 1.- Que la tubería esta sometida a un flujo de calor constante

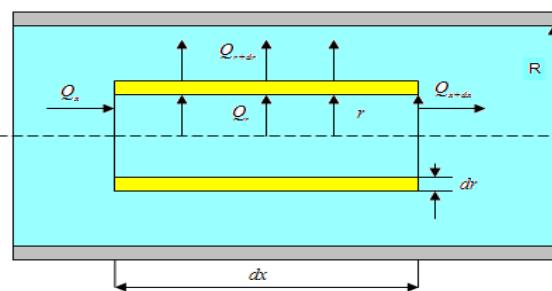


Figura N° 7.2 Tubería de sección circular, donde se muestra el volumen de control para el balance de energía

Fuente: Elaboración propia, Ing Alberto Emilio Panana Girio

1. Considerar un flujo forzado laminar por el interior de un conducto de sección circular de radio R, sometido a un flujo de calor uniforme desde una pared a (T_p), Si se toma un volumen de control anular de longitud (dx) y espesor (dr), en la región donde los perfiles de velocidad y temperatura están completamente desarrollados.
2. Un balance de energía permite determinar la distribución de temperaturas en la forma: "En condiciones estacionarias, el calor neto que se conduce hacia dentro del volumen de control desde las direcciones radial y axial, debe ser igual al calor neto que se transfiere por convección alejándolo en la dirección (x). No existe convección en la dirección radial, para este caso en vista que la velocidad es axial puramente"

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{r \rho C_p v}{k} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{rv}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (7.8)$$

3. Debido que para la distribución de velocidades es de tipo parabólico (régimen laminar), se tiene

$$\frac{v}{v_{\max}} = 1 - \frac{r^2}{R^2}; \quad v = v_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) = 2v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (7.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial x} \left[2v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) r \right] \quad (7.10)$$

7. De la expresión anterior, se tiene que para flujo térmicamente desarrollado ($T/x = \text{Cte.}$)

4. Integrando la expresión anterior, se obtiene la distribución de temperaturas:

$$r \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{2}{\alpha x} v_0 \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2} \right) + C_1; \quad dT = \left\{ \frac{2}{\alpha x} v_0 \left(\frac{r}{2} - \frac{r^3}{4R^2} \right) + \frac{C_1}{r} \right\} dr \\ T = \frac{1}{\alpha x} v_0 \left(\frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{16R^2} \right) + C_1 \ln r + C_2 \quad (7.11)$$

5. Las constantes de integración se calculan teniendo en cuenta las siguientes condiciones:

- 5.1 Para, $r = 0$; $T = T_c$, (temperatura en el eje de la tubería, $v = 2 v_0$)

Entonces: $C_1 = 0$ y $C_2 = T_c$, por tanto, se tiene:

$$T - T_c = \frac{v_0}{\partial x} \left(\frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{16R^2} \right) ; \quad v = 2v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (7.12)$$

5.2 Para, $r = R$, se determina el coeficiente de transmisión de calor h_c

- La temperatura de la pared T_p es: $T_p = T_c + \frac{v_0}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{3r^2}{16}$
- El flujo de calor es $Q = \text{cte}$;

$$-k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{r=R} = h_c (T_p - T_f) ; \quad h_c = \frac{-k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{r=R}}{T_p - T_f} \quad (7.13)$$

5.3 Esta ecuación permite determinar el coeficiente de transmisión de calor por convección.

- La temperatura media del fluido T_f se puede determinar a partir de la expresión

$$\begin{aligned} T_f \int_0^R C_p v^2 r dr &= \int_0^R T C_p v^2 r dr \\ T_f &= \frac{\int_0^R T v r dr}{\int_0^R v r dr} = \frac{\int_0^R 2v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \left\{ T_c + \frac{2v_0}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} \left(\frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{16R^2} \right) \right\} r dr}{\int_0^R 2v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) r dr} \quad (7.14) \\ T_f &= T_c + \frac{7}{48} \frac{v_0 R^2}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} \end{aligned}$$

- La distribución de temperaturas y el coeficiente de convección se pueden colocar en la forma:

$$\begin{aligned} \frac{T - T_p}{T_f - T_p} &= \frac{24}{11} \left\{ \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \left(\frac{r}{R} \right)^4 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right\} \\ h_c &= \frac{k}{T_p - T_f} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{\frac{k}{2} \frac{v_0 R}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x}}{\left(T_c + \frac{3}{8} \frac{v_0 R^2}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \left(T_c + \frac{7}{11} \frac{v_0 R^2}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} \right)} = \frac{24 k}{11 R} \quad (7.15) \end{aligned}$$

$$h_c = \frac{48 k}{11 D} ; \quad \text{siendo } D = \text{diámetro} = 2 R$$

- Entonces para flujo de calor uniforme, el número de Nusselt es:

$$h_c = 4,3636 \frac{k}{D} ; \quad Nu = 4,3636 \quad (7.17)$$

Este valor se utiliza para el flujo de fluidos en tuberías en régimen laminar si se cumple que el numero de Reynolds, $Re < 2.100$, además el flujo está completamente desarrollados en un tubo circular, de y la longitud $L \rightarrow \infty$

Caso 2.- Cuando la tubería está sometida a una temperatura de pared constante

Esto puede ocurrir por ejemplo cuando fluye vapor condensado sobre la superficie exterior de la tubería. A una distancia suficiente del punto en el que empieza el calentamiento corriente abajo, el flujo se vuelve totalmente desarrollado térmicamente, la forma del perfil de temperatura no cambia, y el número de Russel tiene un valor constante dada por la ecuación:

$$\alpha T_p = Cte \rightarrow Nu = 3.656 \quad (7.18)$$

7.4.2 Flujos no desarrollados

El efecto de entrada del fluido en tuberías se manifiesta cuando las longitudes turbulentas iniciales sean mucho más cortas que en condiciones de régimen laminar o cuando el intercambio térmico comienza a efectuarse desde la entrada de la tubería y por lo tanto la capa límite térmica no está todavía desarrollada. Dentro de las ecuaciones para determinar en este caso el número de Nusselt y por ende el coeficiente de transferencia de calor, se tienen:

➤ **Ecuación de Seider y Tate**, con temperatura de pared constante

$$Nu = 1,86 \sqrt[3]{G_z} \left(\frac{\eta_F}{\eta_p} \right)^{0,14}, \text{ con } G_z = \text{número de Graetz} = \left(\frac{d}{L} \right) Re Pr \quad (7.19)$$

$$\text{Para: } \begin{cases} G_z > 10; \sqrt[3]{G_z} \eta_c > 2 \\ \text{Pr} > 0,5 \end{cases}$$

Las propiedades del fluido que conducen al cálculo de Re y Pr se calculan a la temperatura T_f .

En la ecuación se tiene, (L) la longitud de la tubería y (d) el diámetro; el parámetro (η_c), se utiliza para expresar el efecto de la diferencia de

temperaturas del fluido Tf y de la pared Tp, sobre las propiedades del fluido. Se aplica en aquellos casos en que la viscosidad del fluido cambie marcadamente con la temperatura, $\eta = f(T)$; en muchos casos (c) se considera la unidad, siendo de interés en los fluidos muy viscosos.

➤ **Ecuación de Hausen**

- a. Con temperatura de pared constante, es:

$$Nu = 3,66 + \frac{0,0668Gz}{1+0,04Gz^{2/3}} \quad c \quad (7.10)$$

- b. Con flujo de calor constante, la ecuación de Hausen es

$$Nu = 4,36 + \frac{0,023Gz}{1+0,0012Gz} \quad c \quad (7.21)$$

En ambas ecuaciones las propiedades del fluido, para determinar Re y Pr se hallan a la temperatura Tv

- Si el flujo turbulento está hidrodinámicamente desarrollado.

El coeficiente de rozamiento viene dado por:

$$\lambda = \frac{64}{Re_d}; \quad Re_d < 2300 \quad \text{y el número de Nusselt por:}$$

$$Nu_d = 3,66 + \frac{0,065 \frac{d}{L} Re_d Pr}{1 + 0,04 \left(\frac{d}{L} Re_d Pr \right)^{2/3}} ; \quad Re_d < 2300 \quad (7.22)$$

7.5 Flujo turbulento desarrollado por el interior de tuberías

Los estudios realizados sobre el movimiento en tubos de un gran número de líquidos, gases y vapores, se pueden expresar por las siguientes ecuaciones:

7.5.1 Ecuación de Dittus-Boelter

se aplica para tubos lisos:

$$Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^n, \text{ para } (L/d) > 60 \text{ y } \begin{cases} 0,7 < Pr < 160 \\ Re > 10000 \end{cases} \quad (7.23)$$

n = 0,4 para calentamiento y
n = 0,3 para enfriamiento

7.5.2 Ecuación de Sieder y Tate

$$Nu = 0,027 Re^{0,8} Pr^{1/3} \left(\frac{f}{p} \right)^{0,14} \text{ con: } \begin{cases} Re > 10000 ; \frac{L}{d} > 60 \\ 0,7 < Pr < 16500 \end{cases} \quad (7.24)$$

Recomendándose para aquellos casos de transmisión de calor en los que la viscosidad de los fluidos cambie marcadamente con la temperatura

Para determinar Nu, Re, Pr y f_p hay que conocer las propiedades del fluido a su temperatura media Tf, mientras que ρ_p se calcula a la temperatura de la pared Tp.

7.5.3 Ecuación de Petukhov

S e utiliza para tubos rugosos

$$Nu_d = \frac{Re_d \Pr}{X} \frac{\lambda}{8} \left(\frac{f}{p} \right)^n ; \quad X = 1,07 + 12,7 (\Pr^{2/3} - 1) \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \quad (7.25)$$

cuyo campo de validez es:

$$\begin{cases} 104 < Re < 5.106; 0,5 < Pr < 200 ; \text{error} < 5 + 6\% \\ 104 < Re < 5.106; 0,5 < Pr < 2000 ; \text{error} \sim 10\% \\ 0 < \frac{f}{p} < 40 \end{cases}$$

n = 0,11 para calentamiento con Tp uniforme

n = 0,20 para enfriamiento con Tp uniforme

n = 0 para flujo de calor uniforme o gases

El valor del coeficiente de rozamiento viene dado para Pr > 0,5 por:

$$\lambda = (0,79 \ln Re_d - 1,64)^{-2} ; 10^4 < Red < 5 \cdot 10^6$$

Tomándose las propiedades del fluido a la temperatura media T_F , excepto η_p que lo es a la temperatura de la pared T_p .

7.6 Correlaciones para la convección forzada por el exterior de tuberías

7.6.1 Flujo turbulento paralelo por el exterior de un tubo

Numerosos estudios y experimentaciones en gases, vapores y líquidos, que se mueven por el exterior de un tubo simple, en forma paralela, el número de Nusselt se puede determinar por las siguientes correlaciones:

$$\begin{aligned} Nu &= 0,26 \text{Re}^{0,6} \text{Pr}^{0,3} \eta_c & ; \quad 10^3 < \text{Re} < 10^5 \\ Nu &= 0,86 \text{Re}^{0,43} \text{Pr}^{0,3} \eta_c & ; \quad 10^2 < \text{Re} < 200 (\text{sólo para líquidos normales}) \end{aligned} \quad (7.26)$$

7.6.2 Flujo turbulento paralelo por el exterior de tubos en batería

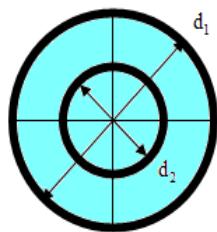
Cuando fluye un fluido sobre una batería de tubos (como intercambiadores de calor en contracorriente y en equicorriente), se pueden considerar dos casos:

- a. Si se obliga al fluido a circular paralelo y pegado a la pared de las tuberías mediante pantallas, se considera como flujo por el exterior de tubos, y se utilizan para determinar el número de Russel, las ecuaciones dadas para un tubo único.
- b. Si no existen pantallas y los tubos están contenidos en una carcasa, se considera como flujo por el interior de un tubo, (la carcasa), para la determinación del número de Reynolds, se usa el diámetro equivalente, y en la formulación en que interviene en el cálculo del número de Russel (Nu).
- c. En estas situaciones el número de Re y número de Nu, se calculan en función del diámetro hidráulico:

$$\text{Re} = \frac{v_f \cdot d_h}{\nu} \quad ; \quad Nu = \frac{h_c \cdot d_h}{k_f} \quad (7.27)$$

$$\text{Diámetro hidráulico, } d_h = 4 \frac{\text{Sección transversal mojada}}{\text{perímetro mojado}} \quad (7.28)$$

- d. Para una conducción formada por dos tubos concéntricos, el diámetro hidráulico se determina mediante la relación siguiente:



$$d_h = 4 \frac{\pi \frac{d_1^2 - d_2^2}{4}}{\pi(d_1 + d_2)} = \frac{(d_1 + d_2)(d_1 - d_2)}{d_1 + d_2} = d_1 - d_2$$

Figura Nº 7.3 Determinación del diámetro hidráulico en tubos concéntricos

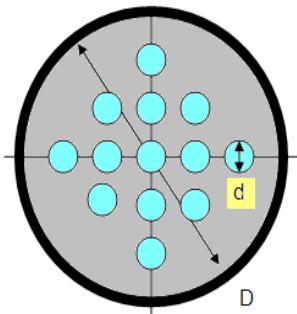
Fuente: Elaboración propia, Ing. Alberto Emilio Panama Giro

Donde:

d_1 = diámetro interior del tubo exterior

d_2 = diámetro exterior del tubo interior

- e. para un conducto tipo intercambiador, formada por varios tubos rodeados por una carcasa exterior, el diámetro hidráulico se determina mediante la relación siguiente:



$$d_h = 4 \frac{\pi \frac{D^2 - nd^2}{4}}{\pi(D + nd)} =$$

$$d_h = \frac{D^2 - nd^2}{D + nd}$$

Figura Nº 7.4 Determinación del diámetro hidráulico en un sistema formado por una carcasa y tubos

Fuente: Elaboración propia, Ing. Alberto Emilio Panama Giro

Donde: D, diámetro interior de la carcasa

d, diámetro de los tubos.

7.7 Correlaciones para la convección en flujos cruzados

7.7.1 Flujo cruzado en un solo tubo

Cuando se trata de un tubo único, para la circulación de gases y líquidos ordinarios, el coeficiente de transferencia térmica medio correspondiente al flujo cruzado, se puede calcular mediante las relaciones siguientes:

$$Nu = C Re^n Pr^{1/3} \quad (7.29)$$

En la que los valores de n y C, se obtienen de la Tabla N° 7.1

Las propiedades del fluido se calcular a una temperatura media, entre la del flujo T_f y la de la pared exterior T_p .

Tabla N°7. 1 Constantes para utilizar en la ecuación:

$$\frac{h d}{k} = C \left(\frac{V_f d}{\nu_f} \right)^n Pr_f^{1/3} \quad (7.30)$$

RE DF	C	N
0,4 – 4	0,989	0,330
4 – 40	0,911	0,385
40 – 4 000	0,683	0,466
4 000 – 40 000	0,193	0,618
40000 – 400 000	0,0266	0,805

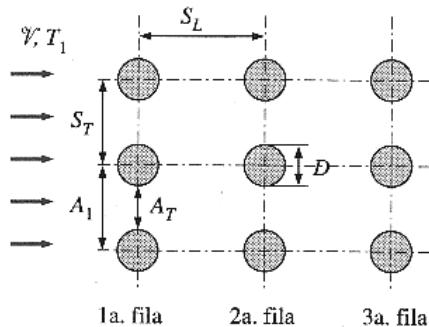
Fuente: J.P. Holman, Transferencia de calor, 8 ava Edición

7.7.2 Flujo cruzado en tubos en batería

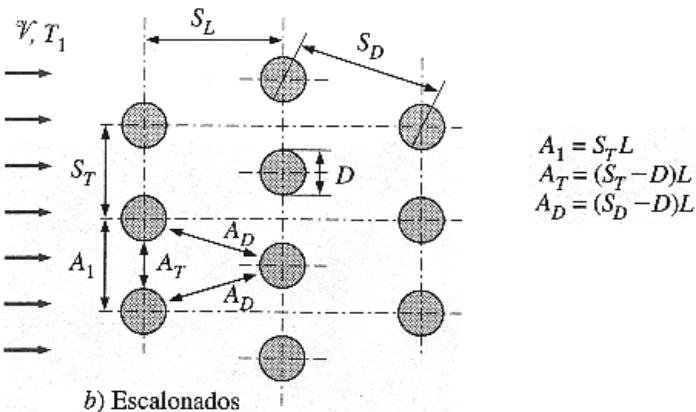
La transferencia de calor en la circulación de un fluido sobre una batería de tubos, en flujo cruzado, es muy importante por su aplicación al diseño y

proyecto de la inmensa mayoría de intercambiadores de calor., en la Fig. N° 7.5 el flujo forzado a través de un haz de tubos en batería.

FIGURAS N° 7.5 Disposición de los tubos en los bancos alineados o escalonados (a_1 , a_t , y a_d) son las áreas de flujos en los lugares indicados y L es la longitud de los tubos.



a) Alineados



$$A_1 = S_T L$$

$$A_T = (S_T - D)L$$

$$A_D = (S_D - D)L$$

Fuente: Yunus Cengel, Transferencia de calor, 2 da Edición

a. Primer Método

- Se utiliza una ecuación parecida a la de un solo tubo, en la que los valores de C y n dependen de las distancias entre tubos adyacentes. Estos parámetros varían si los tubos están al tresbolillo o en quincunce, ambas disposiciones triangulares, ver la fig. N° 7.5

- Para el caso de un flujo turbulento sobre baterías de 10 ó más tubos en la dirección del flujo, se utiliza la siguiente ecuación y los valores C y n se determinan de la tabla N°7.2

$$Nu = C \operatorname{Re}_{\max}^n \operatorname{Pr}^{1/3}; \left\{ \begin{array}{l} 2000 < \operatorname{Re}_{\max} < 40000 \\ \operatorname{Pr} > 0,7 \end{array} \right\} \quad (7.31)$$

Tabla N°7.2 Para evaluar los valores de las constantes C y N

Correlación de Grimson modificada para transferencia de calor en haces de tubos de 10 filas a más									
Sn / d									
Sp / d	1.25		1.5		2		3		
	C	n	C	n	C	n	C	n	
En línea									
1.25	0.386	0.592	0.305	0.608	0.111	0.704	0.0703	0.752	
1.5	0.407	0.586	0.278	0.62	0.112	0.702	0.0753	0.744	
2	0.464	0.57	0.332	0.602	0.254	0.632	0.22	0.648	
3	0.322	0.601	0.396	0.584	0.415	0.581	0.317	0.608	
Al tresbolillo									
0.6	-	-	-	-	-	-	0.236	0.636	
0.9	-	-	-	-	0.495	0.571	0.455	0.581	
1	-	-	0.552	0.558	-	-	-	-	
1.125	-	-	-	-	0.531	0.565	0.575	0.56	
1.25	0.575	0.556	0.561	0.554	0.576	0.556	0.579	0.562	
1.5	0.501	0.568	0.511	0.562	0.502	0.568	0.542	0.568	
2	0.448	0.572	0.462	0.568	0.535	0.556	0.498	0.57	

3	0.344	0.592	0.395	0.58	0.488	0.562	0.467	0.574
---	-------	-------	-------	------	-------	-------	-------	-------

Fuente: J.P. Holman, Transferencia de calor, 8ava Edición

- En el caso en que el número de tubos en la dirección del flujo sea menor de 10, en la tabla N° 3, se indica un factor de corrección, que es el cociente entre el valor (hc) para (n) filas en la dirección del flujo, respecto al valor de hc para 10 filas obtenido a partir de los datos tomados de la tabla 7.3:

$$h_{c(N \text{ tubos})} = h_{c(10 \text{ tubos})} \quad (7.32)$$

Tabla N° 7.3 Relaciones entre hc para N filas de profundidad y h para 10 filas de profundidad

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Relación para tubos al tresbolillo	0,68	0,75	0,83	0,89	0,92	0,95	0,97	0,98	0,99	1,0
Relación para tubos en línea	0,64	0,80	0,87	0,90	0,92	0,94	0,96	0,98	0,99	1,0

Fuente: J.P. Holman, Transferencia de calor, 8ava Edición

- El valor de Re_{\max} se corresponde con la velocidad máxima, y ésta con la sección mínima de paso; de acuerdo con la Fig. N° 7.3, se tiene:
Disposición regular

$$\text{Paso mínimo} = (S_T - d) \Rightarrow v_{\max} = \frac{v_f S_T}{S_T - d} \quad (7.33)$$

Disposición triangular.

Se toma el menor de los pasos:

$$\left\{ \frac{\frac{S_T - d}{2}}{\sqrt{\left(\frac{S_T}{2}\right)^2 + S_{Ly}^2} - d} \right\} \Rightarrow v_{\max} = \frac{\frac{v_f S_T}{2}}{\text{Paso mínimo}} \quad (7.34)$$

Donde: S_T = espaciamiento transversal, desde los centro de tubos

S_L = espaciamiento longitudinal, desde los centro de tubos

S_D = espaciamiento diagonal, en otros textos es S_D)

$$S_D = \sqrt{\left(\frac{S_T}{2}\right)^2 + S_{Ly}^2} \quad (7.35)$$

b. Segundo método

Cuando el número (Nt) de tubo por fila sea superior a 20, se recomienda utilizar la ecuación de Zukauskas, más moderna que la anterior, de la forma:

$$\text{Para gases, } Nu_d = C^* \ Re_{\max}^m \ Pr^{0,36} \frac{Pr_{T_f}}{Pr_{T_p}} \quad (7.36)$$

$$\text{Para líquidos, } Nu_d = C^* \ Re_{\max}^m \ Pr^{0,36} \sqrt[4]{\frac{Pr_{T_f}}{Pr_{T_p}}} \quad (7.37)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0,7 < Pr < 500 \\ 10 < Re_{\text{med}} < 10^6 \\ C^* \text{ y } m \text{ están tabulados, tabla N}^{\circ} 4 \end{array} \right\}$$

- Para líquidos, las propiedades se toman a T_F , excepto los números de Pr de la raíz, que lo son a las temperaturas respectivas.
- Para gases, las propiedades se toman a la temperatura de película; el término de la raíz que relaciona los números de Pr es aproximadamente la unidad.

Tabla N° 7.4 Valores de C y n para la ecuación de Zukauskas

Constantes para la correlación de Zukauskas para transferencia de calor en haces de tubos de 20 filas o más			
Geometría	Re _{d,max}	C	n
En línea	10 - 100	0.8	0.4
	$100 - 10^3$	Tratamiento como tubos individuales	
	$10^3 - 2 \times 10^5$	0.27	0.63
	$> 2 \times 10^5$	0.21	0.84
Al tresbolillo	10 - 100	0.9	0.4
	$100 - 10^3$	Tratamiento como tubos individuales	
	$10^3 - 2 \times 10^5$	$0.35 \left(\frac{S_n}{S_1} \right)^{0.2}$ para $\frac{S_n}{S_1} < 2$	0.60
	$10^3 - 2 \times 10^5$	0.40 para $\frac{S_n}{S_1} > 2$	0.60
	$> 2 \times 10^5$	0.022	0.84

Fuente: Alan Chapman, Fundamentos de Tranferencia de calor, 2da Edición

- Para haces con menos de 20 tubos por fila, $N<20$, el número de Nu_d obtenido con la ecuación de Zukauskas se corrige mediante un factor de corrección x que se determina a partir de la Fig. N° 7.6 o de la tabla N° 7.5, de tal forma que el factor de corrección es::

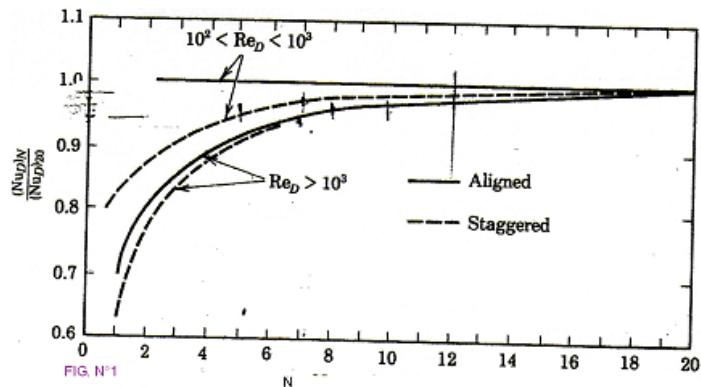


Figura N° 7.6 Gráfica para determinar el factor de corrección para el número de filas en un banco de tubos, a utilizar en la ecuación de Zhukauskas

Fuente: Alan Chapman, Fundamentos de transferencia de calor, 2da Edición

Tabla N°5 Relación entre h para N filas de profundidad y h para 20 filas de profundidad

N	2	3	4	5	6	8	10	16	20
Al tresbolillo	0.77	0.84	0.89	0.92	0.94	0.97	0.98	0.99	1.0
En línea	0.70	0.80	0.90	0.92	0.94	0.97	0.98	0.99	1.0

Fuente: J. Holman, Transferencia de calor, 3era Edición

$$Nu_{(N)} = x \cdot Nu_{N>20} \quad (7.38)$$

- La velocidad que interviene en el cálculo del número de Re es la correspondiente a la sección entre los tubos, que depende de la geometría de la batería y de la disposición espacial de los mismos.

7.8 Cálculo de la caída de presión

Una ecuación para determinar la caída de presión en un banco de tubos, de acuerdo a estudios reportados por Jacob, es la siguiente:

$$-\Delta P = f N \left(\frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{\max}^2 \right) \left(\frac{\mu_s}{\mu_{\infty}} \right),$$

$$f = \left[C_1 + \frac{C_2}{(S_T / D - 1)^n} \right] \text{Re}_{Dm}^{-m}, \quad (7.39)$$

$$\begin{bmatrix} \text{Las propiedades a } T_m \text{ excepto } \rho_{\infty}, \mu_{\infty}, \mu_s \\ \rho_{\infty} \text{ y } \mu_{\infty} \text{ a } T_{\infty} \\ \mu_s \text{ a } T_s \\ \text{Banco Alternado: } C_1 = 1.0, C_2 = 0.470 \\ n = 1.08, m = 0.16 \\ \text{Banco Alineado: } C_1 = 0.176, C_2 = 0.34 S_L / D \\ n = 0.43 + (1.13 D / S_T) \\ m = 0.15 \end{bmatrix}$$

Fuente: J.P.Holman, Transferencia de Calor 8 ava Edición

Donde:

f = factor de fricción

N = número de filas de tubos paralelo a dirección del flujo

μ_s = viscosidad din de la pared

μ_f = viscosidad din del fluido

7.9 Problemas Resueltos

Problema Nº 1

En un sistema de acondicionamiento de aire. A menudo se usa el enfriamiento del aire, reduciendo la temperatura del aire para confort del ser humano. El sistema de acondicionamiento consiste de un banco de tubos, donde el aire fluye por el exterior de los tubos y por el interior de estos fluye agua refrigerante. La figura adjunta ilustra este el arreglo del banco de tubos en forma alternado, cuyos tubos tienen un diámetro, $D = 1,59$ cm. Las filas de tubos en la dirección al flujo es de 4 filas, con espaciamiento longitudinal $SL = 3,5$ cm. y un espaciamiento transversal $St = 3,0$ cm. La temperatura del agua que fluye por los tubos, mantiene una temperatura superficial de los tubos $T_s = 5$ °C. El aire presurizado que se alimenta al banco de tubos, lo hace a una velocidad de $V = 5$ m /s, a una temperatura $T_f = 30$ °C.

- Determinar el coeficiente de transferencia de calor superficial.

b. Encontrar la caída de presión del aire para este arreglo del banco de tubos.

Solución.-

1. Diagrama de flujo

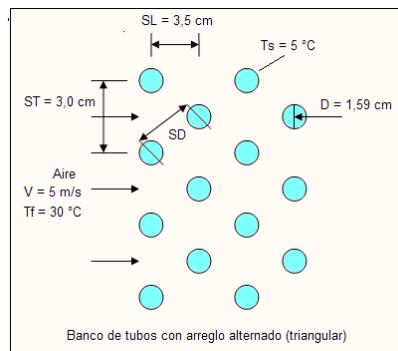


Figura N° 7.7 Banco de tubos de arreglo escalonado

Fuente: Elaboración propia, Ing. Alberto Emilio Panana Girio

2. Valores de las propiedades del fluido a las temperaturas, de la pared T_s , T_f y temperatura promedio $T_m = (T_s+T_m)/2 = 17,5 \text{ }^{\circ}\text{C}$.

- A la temperatura $T_s = 5 \text{ a.C.}$:

$$\mu_s = 17,45 \times 10^{-6} \text{ Kg./mS}; \text{ Pr} = 0,717$$

- A la temperatura de entrada del fluido, $T_f = 30 \text{ }^{\circ}\text{C}$
 $\mu_f = 18,65 \times 10^{-6} \text{ kg/ms}; \rho_f = 1,1644 \text{ kg/m}^3; \text{ Pr} = 0,712$

- A la temperatura $T_m = 17,5 \text{ a.C.}$
 $= 14,87 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}; K = 25,45 \times 10^{-3} \text{ w/m}^{\circ}\text{C}; \text{ Pr} = 0,714$

3. El espaciamiento diagonal para este banco de tubos de arreglo escalonado

$$S_D = \left[S_L^2 + \left(\frac{S_T}{2} \right)^2 \right]^{1/2} = \left[3,5^2 + \left(\frac{3,0}{2} \right)^2 \right]^{1/2} = 3,808 \text{ cm}$$

4. El área frontal de flujo, de los tubos es: $(S_T - D) = 3,0 - 1,59 = 1,41 \text{ cm}$.

5. El área de flujo diagonal es: $2(SD - D) = 2(3,808 - 1,59) = 4,436 \text{ cm}$.

6. Como el área frontal es menor que el área de flujo diagonal, es decir:

$(S_T - D) < 2(SD - D)$; entonces la velocidad máxima ocurre en el espaciamiento: $(ST - D)$, y se determina, mediante la expresión:

$$V_{\max} = V_f \frac{S_T}{S_T - D} = 5 \times \frac{3,0}{3,0 - 1,59} = 10,638 \text{ m/s}$$

7. El número de Reynolds, basado en esta velocidad, es:

$$\text{Re} = \frac{V_{\max} \cdot D}{\nu} = \frac{10,638 \times 0,0159}{14,87 \times 10^{-6}} = 1,138 \times 10^4$$

7.1 Para este número de Reynolds, mediante la tabla N° 6,5 las constantes C y n para la ecuación 6,54 a usar, con, $S_T/S_L = 3,0/3,5 = 0,857$, son:

$$C = 0,35(S_T / S_L)^{1/5} = 0,35(0,857)^{1/5} = 0,339$$

$$n = 0,6$$

8. La ecuación de Zhukauskas, para determinar el número de Nusselt, para 20 filas es:

$$N_{u_{20}} = C \text{Re}^n \text{Pr}^{0,36} \left(\frac{\text{Pr}_f}{\text{Pr}_s} \right)^{1/4} = 0,339 (1,138 \times 10^4) (0,714)^{0,36} \left(\frac{0,712}{0,717} \right)^{1/4}$$

$$N_{u_{20}} = 81,44$$

9. El número de Nusselt calculado es para 20 filas de tubos, en la dirección del flujo, como el banco de tubos es de cuatro filas, se ha de hacer la corrección respectiva, utilizando la figura N° 6,7, obteniéndose:

$$\frac{Nu_4}{Nu_{20}} = 0,88 \rightarrow Nu_4 = 0,88 \times 81,44 = 71,66$$

10. Por tanto el coeficiente de transferencia de calor convectivo es.

$$h = Nu \frac{k}{D} = 71,66 \times \frac{0,02545}{0,0159}$$

$$h = 114,7 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C} (20,2 \text{ Btu/h} - \text{pie}^2 - ^\circ\text{F})$$

11. Para evaluar la caída de presión a través del banco de tubos, se determina primeramente el factor de fricción, para banco de tubos alternados:

$$f = \left[1,0 + \frac{0,472}{(3,0/1,59-1)^{1,08}} \right] (1,138 \times 10^4)^{-0,16} = 0,345$$

- $P = 0,345 \times 4 \times \left(\frac{1}{2} \times 1,1644 \times 10,638^2 \right) \left(\frac{17,45}{18,65} \right)^{0,14}$
- $P = 90,1 \text{ N/m}^2 (0,0131 b_f / pul^2)$

Problema Nº 2

Un haz de tubos utiliza una disposición en línea con $S_n = SP = 1,9 \text{ cm}$. y $6,33 \text{ mm}$ de diámetro de tubos. Se emplean 6 filas de tubos que constan de una pila de 50 tubos de altura. La temperatura de la superficie de los tubos se mantiene constante a 90 a.C. y transversalmente a ellos circula aire atmosférico a 20 a.C. siendo $4,5 \text{ m/s}$ la velocidad antes que la corriente entre al haz de tubos. Calcúlese el calor total por unidad de longitud transferido en el haz de tubos. Estímese la caída de presión para esta disposición.

Solución.-

1. Diagrama de flujo

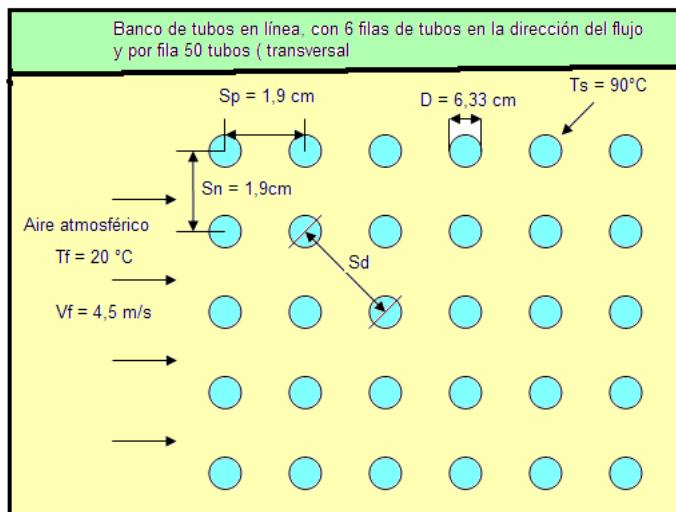


Figura N° 7.8 Banco de tubos de arreglo alineado

Fuente: Elaboración propia, Ing. Alberto Emilio Panama Girio

2. Las constantes para utilizar en la ecuación, pueden obtenerse en la tabla N° 6,4, empleando

$$Nu = \frac{h \cdot D}{k} = C \left(\frac{V_f \cdot D}{\nu_f} \right)^n \text{Pr}_f^{1/3}$$

$$\frac{S_p}{D} = \frac{1,9}{0,633} = 3,00157 = \frac{S_n}{D}$$

$$C = 0,317; \quad n = 0,608$$

3. Las propiedades del aire se evalúan a la temperatura de película, que a la entrada del haz de tubos:

$$T_{f_1} = \frac{T_p - T_f}{2} = \frac{90 + 20}{2} = 55^{\circ}\text{C} \equiv 328K$$

$$\mu = 1,974 \times 10^{-6} \text{ kg/m.s}$$

$$\rho = 1,0769 \text{ kg/m}^3$$

$$k = 0,02836 \text{ W/m.}^{\circ}\text{C}$$

$$C_p = 1007,5 \text{ J/kg.}^{\circ}\text{C}$$

$$\text{Pr} = 0,7079$$

4. Para calcular la velocidad máxima, debe de determinarse el área de paso mínima. En la Fig. 6.14 se observa que la relación entre el área de paso mínima y el área total frontal es $((S_n - D)/S_n)$, entonces la velocidad máxima es:

$$V_{\max} = V_f \frac{S_n}{S_n - D} = 4,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{1,9 \text{ cm}}{1,9 \text{ cm} - 0,633 \text{ cm}}$$

$$V_{\max} = 6,748 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

5. El número de Reynolds se determina, utilizando esta velocidad máxima

$$Re = \frac{\rho V_{\max} D}{\mu} = \frac{1,0769 \text{ kg/m}^3 \times 6,748 \text{ m/s} \times 0,00633 \text{ m}}{1,974 \times 10^{-6} \text{ kg/m.s}}$$

$$Re = 23302,7412 \text{ (flujo turbulento)}$$

6. Calculo del coeficiente de transferencia de calor,

$$Nu = \frac{h \cdot D}{k} = 0,317 \left(2,33 \times 10^4 \right)^{0,608} (0,7075^{1/3} = 127,7619$$

$$h = \frac{127,7619 \times 0,02836}{0,00633} = 572,4056 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$$

7. Este sería el coeficiente de transferencia de calor que se obtendría si hubiese 10 filas de tubos en la dirección de la corriente. Puesto que hay solo 6 filas., este valor debe multiplicarse por el factor 0,94, obtenido de la tabla 7,5
8. El área total de la superficie para transferencia de calor, por unidad de longitud de los tubos, es

$$A = N_r \pi D L = 50 \times 6 \times \pi \times 0,00633 \text{ m} \times (1) = 5,965 \text{ m}^2$$

9. Se ha de observar que la temperatura del aire aumenta cuando atraviesa el haz de tubos. Como buena aproximación, puede utilizarse el valor de la media aritmética de T_f , escribiendo el balance energético

$$Q = hA \left(T_p - \frac{T_{f1} + T_{f2}}{2} \right) = mC_p (T_{f2} - T_{f1})$$

Donde: los subíndices 1 y 2 designan ahora la entrada y la salida del haz de tubos.

10. El flujo másico a la entrada de los 50 tubos es

$$m = \rho_f V_f (50) S_n = 1,0769 \times 4,5 \times 50 \times 0,019 = 4,6037 \text{ kg/s}$$

10. Reemplazando en (8)

$$Q = 0,94 \times 572,4056 \times 0,119317 \times \left(90 - \frac{20 + T_{f2}}{2} \right) = 4,6037 \times 1007,5 \times (T_{f2} - 20)$$

$$T_{f2} = 20,96 \text{ } ^\circ\text{C}$$

11. El calor transferido se obtiene entonces del balance de energía

$$Q = 4,6037 \times 1007,5 \times (20,96 - 20) = 4452,69864 \text{ W}$$

Problema N° 3

En la calefacción de locales, normalmente se suele usar un haz de tubos en el que el agua se hace circular en ellos y aire en flujo cruzado sobre ellos (por el exterior). Considere un arreglo escalonado, el diámetro exterior de los tubos es 16,4 mm y los espaciamientos longitudinal y transversal: SL = 34,3 mm y ST = 31,3 mm, existen 7 hiladas de tubos en la dirección del flujo de aire y 8 tubos por línea. En condiciones de operación típicas la temperatura superficial del cilindro es de 70 a.C., mientras que la temperatura del flujo de aire cruzado y la velocidad son 15 a.C. y 6 m/s respectivamente.

Calcular:

- El coeficiente de transferencia de calor del lado del aire.
- la transferencia de calor por el haz de tubos.
- Cuál es la caída de presión del laso del aire.

Solución.-

1. Datos: Para el aire

$T_f = 15 \text{ a.C.} : \rho = 1,217 \text{ kg/m}^3; C_p = 1007 \text{ J/kg.K}; v = 14,82 \times 10.6 \text{ m}^2/\text{s};$

$$k = 0,0253 \text{ W/m.K}; Pr = 0,710$$

$T_s = 70 \text{ }^\circ\text{C} : Pr = 0,701$

$T_m = 43 \text{ }^\circ\text{C} : v = 17,4 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}, k = 0,0274 \text{ W/m.K}; Pr = 0,705$

2. Diagrama de flujo

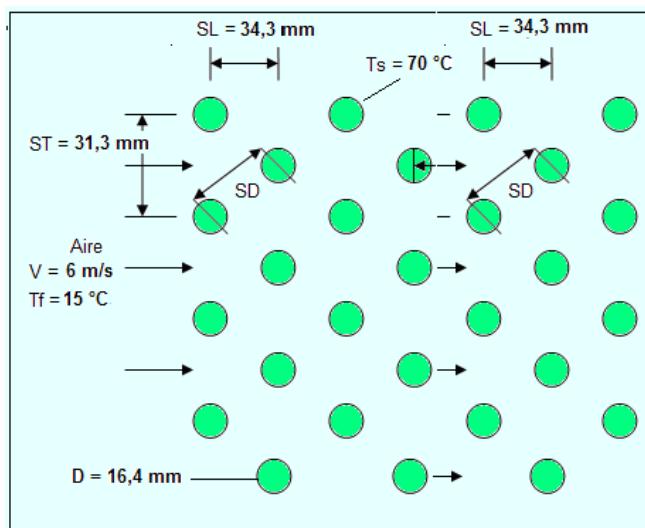


Figura N° 7.9 Banco de tubos de arreglo alternado (triangular)

Fuente: Elaboración propia, Ing. Alberto Emilio Panana Girio

3. El espaciamiento diagonal para este banco de tubos escalonado

$$S_D = \left[S_L^2 + \left(\frac{S_T}{2} \right)^2 \right]^{1/2} = \left[3,43^2 + \left(\frac{3,13}{2} \right)^2 \right]^{1/2} = 37,7 \text{ cm}$$

4. El área frontal de flujo, de los tubos es: $(S_T - D) = 31,3 - 16,4 = 14,9 \text{ mm.}$

5. El área de flujo diagonal es: $2(SD - D) = 2(37,7 - 16,4) = 42,6 \text{ mm.}$

6. Como el área frontal es menor que el área de flujo diagonal, es decir:

$(S_T - D) < 2(SD - D)$; entonces la velocidad máxima ocurre en el espaciamiento: $(ST - D)$, y se determina, mediante la expresión:

$$V_{\max} = V_f \frac{S_T}{S_T - D} = 6 \times \frac{31,3}{31,3 - 16,4} = 12,6 \text{ m/s}$$

7. El número de Reynolds, basado en esta velocidad, es:

$$Re = \frac{V_{\max} \cdot D}{\nu} = \frac{12,6 \text{ m/s} \times 0,0614 \text{ m}}{14,82 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 13943$$

7.1 Para este número de Reynolds, mediante la tabla N° 6,5 las constantes C y n para la ecuación 6,54 a usar, con, $S_T/S_L < 2$, por tanto

$$C = 0,35 (S_T / S_L)^{1/5} = 0,35(0,91)^{1/5} = 0,34 \quad n = 0,6$$

8. Mediante la ecuación de Zhukauskas, sirve para determinar el número de Nusselt, para 8 filas es:

$$N_{u_{20}} = C Re^n Pr^{0,36} \left(\frac{Pr_f}{Pr_s} \right)^{1/4} = 0,34 (13943)^{0,6} (0,71)^{0,36} \left(\frac{0,710}{0,701} \right)^{1/4}$$

$$N_{u_{20}} = 87,9$$

9. El número de Nusselt calculado es para 20 filas de tubos, en la dirección del flujo, como el banco de tubos es de ocho filas, se ha de hacer la corrección respectiva, utilizando la figura N° 6,7, obteniéndose:

$$\frac{Nu_7}{Nu_{20}} = 0,98 \rightarrow Nu_7 = 0,98 \times 92,5263 = 87,9$$

10. Por tanto el coeficiente de transferencia de calor convectivo es.

$$h = Nu \frac{k}{D} = 87,9 \times \frac{0,0253}{0,0164}$$

$$h = 135,6 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

11. Calculo de la diferencia de temperatura a la salida, ($T_s - T_{f,s}$)

Mediante la relación:

$$(T_s - T_{f,s}) = (T_s - T_{f,i}) e^{\left(-\frac{\pi D h}{\rho V_f N_t S_T C_p} \right)}$$

12 Reemplazando valores

$$(T_s - T_{f,s}) = (T_s - T_{f,i}) e^{\left(-\frac{\pi D h}{\rho V_f N_t S_T C_p} \right)}$$

$$(T_s - T_{f,s}) = 55 e^{\left(-\frac{\pi(0,0164) \cdot 56 \cdot 135,6 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}}{1217 \times 6 \times 8 \times 0,0313} \right)^\circ \text{C}} = 44,5^\circ \text{C}$$

$$Q = N h \pi \Delta T_{ml} = 56 \Delta \pi 135,6 \times 0,0164 \times 49,6$$

$$Q = 19,4 \text{ KW/m}$$

13. Calculo de la caída de presión

$$\Delta P = f \cdot N \cdot \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \max \right) \left(\frac{17,4 \times 10^{-6}}{14,82 \times 10^{-6}} \right)^{0,14} = 228,53 \text{ N/m}^2$$

Problema N° 4

Un haz de tubos cuadrado consta de 144tubos dispuestos en línea. Los tubos tienen un diámetro de 1.5cm y una longitud 1.0m; la distancia entre los centros es 2.0cm. Si las temperaturas de la superficie de los tubos se mantienen a 500K y el aire entra al haz de tubos de 1 atm y 300K a una velocidad de 6 m/s².calcúlese:

- a. El calor total perdido por los tubos.

b. La caída de presión a través del banco de tubos.

Solución

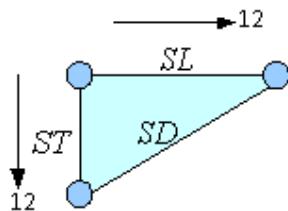


Figura N° 7.10 Banco de tubos de arreglo alineado (cuadrado)

Fuente: Elaboración propia, Ing. Alberto Emilio Panama Girio

Datos:

$$N_1 = 144 \text{ tubos}$$

$$D = 1,5 \text{ cm} ; L = 1 ; S_T = S_L = 2 \text{ cm}$$

$$T_S = 50 \text{ k} ; T_f = 300 \text{ k} ; v = 6 \text{ m/s}$$

$$1) \text{ Cálculo } S_D = \left(S_T^2 + S_L^2 \right)^{1/2} = \left(2^2 + 2^2 \right)^{1/2} = 2,828 \text{ cm}$$

$$(S_T - D) = (2 - 1.5) = 0.5$$

$$2(S_D - D) = 2(2.828 - 1.5) = 2.65 ; \text{ Como } (S_T - D) < 2(S_D - D)$$

2) La velocidad máxima

$$v_{\max} = v_f \left(\frac{S_T}{S_T - D} \right)$$

$$v_{\max} = 6 \left(\frac{2}{2 - 1.5} \right) = 24 \text{ m/s}$$

3) Cálculo R_{\max}

$$R_{\max} = \frac{v_{\max} D}{\nu} = \frac{24 \text{ m/s} \cdot 0.015 \mu}{25,9 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 13899,6135 \dots \text{ Flujo turbulento}$$

- 4) Para lograr que el Nº Re se determina las constantes C y por la ecuación de Zukauskas para banco de tubos

$$Nu = CR_e^n P_r^{0,36} \left(\frac{P_{rf}}{P_{rs}} \right)^{1/4}$$

Como: $S_T / S_L = 1 > 0,7$

$C = 0,27$; $n = 0,63$

$$Nu_{20} = 0,27 (13899,6138)^{0,63} (0,689)^{0,36} \left(\frac{0,708}{0,68} \right)^{1/4}$$

$$Nu_{20} = 97,18416 \quad f_c = 0.98$$

$$Nu_{12} = f_c Nu_{20} = 0.98 (97,18416) = 95,2404$$

$$h = \frac{Nu \times k}{D} = \frac{95,2404 \times 0,03365}{0,015m} W/m^2\circ C = 213,656 W/m^2\circ C$$

$$h = 213,6561 W/m^2\circ C$$

- 5) Balance de energía, permite calcular la T_{f2}

$$Q = mCp(T_{f2} + T_{f1}) = hA \left(T_s - \frac{T_{f2} + T_{f1}}{2} \right)$$

$$\dot{m} = \rho_f v_f N_{TT} S_T x L = 1,1774 Kg/m^3 \times 6m/s \times 12 \times 0.02 \times 1$$

$$\dot{m} = 1,695436 Kg/s$$

6).Cálculo de Área

$$A = N_T \pi D L = 144 \times \pi \times 0.015 \times 1 = 6,7858 m^2$$

- 7).Reemplazando en (5)

$$1,695456 \times 1014 J / Kg^{\circ}C (T_{f2} - 300) = 213,6561 \times 6,7858 \left(500 - \frac{T_{f2} + 300}{2} \right)$$

$$T_{f2} = 418,65 K$$

8). Por tanto el flujo de calor transferido, será

$$Q = 1,695456 \times 1014 (418,65 - 300) = 203994,6887 J / s$$

$$Q = 203,9946 KJ / s$$

9). Determinación de la caída de presión

$$-\Delta P = f \rho_f \left(\frac{1}{2} v_{máx}^2 \right) \left(\frac{\mu_s}{\mu_f} \right)^{0.14}$$

$$f = \left[C_1 + \frac{C_2}{(ST / D - 1)^n} \right] R_c^{-m}$$

Para banco de tubos alineado

$$C_1 = 0.176$$

$$C_2 = 0,34 SL / D = 0,34 \times \frac{2}{1,5} = 0,4533$$

$$n = 0,43 + \left(\frac{1,13 \times 1,5}{2} \right) = 1,277,5 ; \quad m = 0,15$$

$$f = \left[0,176 + \frac{0,4533}{\left(\frac{2}{1,5} - 1 \right)^{1,2775}} \right] (1,3899,6138)^{-0,15} ; \quad f = 0,483098$$

Problema N° 5

Fluye aire a razón de 5pies/s, sobre un intercambiador de calor de flujo cruzado, que consta de siete tubos en la dirección del flujo y ocho tubos en la dirección transversal al flujo. La longitud de cada tubo es de 4pies. El diámetro exterior de los tubos es de $\frac{3}{4}$ de pulgada, la separación longitudinal es $SL=1.5$ pulg. Y la separación transversal $ST=1.125$ pulg. La temperatura del aire que entra en el intercambiador del calor es de 400°F y la temperatura de la superficie de los tubos se puede considerar como 200°F . Las propiedades del aire alas siguientes temperaturas son:

$$T_s = 200^{\circ}\text{F}; \quad Cp = 0.2414 \text{Btu/lb.}^{\circ}\text{F}; \quad \rho = 0.06013 \text{ lb/pie}^3; \quad \mu = 0.05199 \text{ lb/h-pie},$$

$$v = 0.8647 \text{pie}^2/\text{h}; \quad k = 0.01781 \text{Btu/h-pie-}^{\circ}\text{F}; \quad Pr = 0.705$$

$$T_m = 300^{\circ}\text{F}; \quad Cp = 0.2429 \text{Btu/lb.}^{\circ}\text{F}; \quad \rho = 0.05222 \text{ lb/pie}^3; \quad \mu = 0.05757 \text{lb/h-pie},$$

$$v = 1.1026 \text{pie}^2/\text{h}; \quad k = 0.01995 \text{Btu/h-pie-}^{\circ}\text{F}; \quad Pr = 0.701$$

$$T_s = 400^{\circ}\text{F}; \quad Cp = 0.2450 \text{Btu/lb.}^{\circ}\text{F}; \quad \rho = 0.04614 \text{lb/pie}^3; \quad \mu = 0.06280 \text{lb/h-pie},$$

$$v = 1.3609 \text{pie}^2/\text{h}; \quad k = 0.02201 \text{Btu/h-pie-}^{\circ}\text{F}; \quad Pr = 0.699$$

Suponiendo que el arreglo de los tubos es en línea.

- ¿calcular la temperatura de salida del aire del banco de tubos?
- La caída de presión a través del banco de tubos.

Solución.-

1. Diagrama de flujo

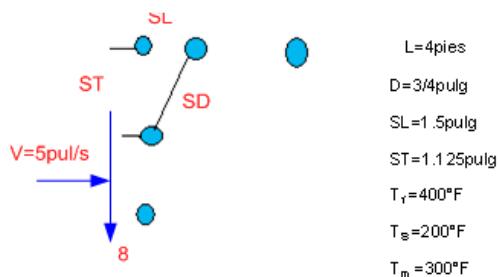


Figura N° 7.11 Banco de tubos de arreglo alineado (cuadrado)

Fuente: Elaboración propia, Ing. Alberto Emilio Panama Giro

2. Cálculo del coeficiente h

2.1 Determinación de la velocidad máxima

$$\nu_{\max} = \nu \frac{S_T}{S_T - D} \quad \left\{ S_D = \sqrt{S_L^2 + S_T^2} = (1.5^2 + 1.125^2)^{1/2} \right.$$
$$S_D = 1.875; \quad (S_T - D) \angle 2(S_D - D)$$
$$0.75 \angle 1.125$$
$$\nu_{\max} = 5x \frac{1.125}{1.125 - 0.75} = 15 \text{ pies / seg}$$

2.2 Cálculo del número de Reynolds

$$R_{E\max} = \nu_{\max} x D / \mu$$
$$R_{E\max} = \frac{15x0.75/12}{1.1026x1/3600} = 3060.946$$

2.3 determinación de las constantes C y M, para la ecuación de Zukauskas

$$N_u = h \frac{A}{k} = CR_c^n P_r^{0.36} \left(\frac{P_r}{P_{rs}} \right)^{1/4}$$

Por tabla para el número de Reynolds determinado, se tiene

$$C = 0.27; \quad y \quad n = 0.63$$

$$\frac{hD}{k} = 0.27(3060.946)^{0.63}(0.701)^{0.36} \left(\frac{0.701}{0.705} \right)^{1/4} = 37.26$$

2.4 despejando (h)

$$h = \frac{37.26x0.01995}{0.75/12} = 11.89 W / h \cdot pie^{\circ}F$$

2.5 corrigiendo el valor de h, será

$$h = 11.89 \times 0.955 = 11.3549$$

3. Para evaluar la transferencia de calor y la temperatura de salida del fluido se procede:

$$Q = hA(T_s - \frac{T_{f1} + T_{f2}}{2}) = mCp(T_{f1} - T_{f2})$$

$$A = N_r \pi \Delta L = 8 \times 7 \times \pi \times \frac{0.75}{12} \times 4 = 43.9824 \text{ pie}^2$$

$$m = \rho_f \times V_t \times N \times S_T \times 4 = 0.04614 \times 5 \times 8 \times \frac{1.125}{12} \times 4 = 0.6921$$

4. Reemplazando

$$Q = 11.3545 \frac{BTU}{h \cdot \text{pie}^2 \circ F} \times \frac{1h}{3600 \text{seg}} \times 43.984 (200 - \frac{400 + T_{f2}}{2})$$

$$Q = 0.6921 \frac{\text{lb}}{\text{s}} \times 0.2429 \frac{BTU}{\text{lb}^\circ F} (T_{f2} - 400)$$

$$T_{f2} = 283.16^\circ F$$

5. Cálculo de la caída de presión

$$\begin{aligned} \Delta P &= f N \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) \left(\frac{\mu_s}{\mu_f} \right)^{0.14} \\ f &= \left[C_1 + \frac{C_2}{\left(\frac{S_r}{D} - 1 \right)^n} \right] R_c^{-m} \end{aligned}$$

Para banco de tubos en línea: $C_1 = 0.176$, $C_2 = 0.34S_L/D$

$$n = 0.43 + \frac{1.13D}{S_r} m = 0.15$$

$$C_2 = 0.34 \times \left(\frac{1.15}{0.75} \right) = 0.68$$

$$n = 0.45 \left(\frac{1.13 \times 0.75}{1.125} \right) = 101833$$

$$f = \left[0.176 + \frac{0.68}{0.4403} \right] (3060.946)^{-0.15}$$

$$f = 0.516$$

$$\Delta P = 0.5160 \times \left[\frac{1}{2} 0.04614 \times 15^2 \right] \left(\frac{0.05199}{0.06280} \right)^{0.14}$$

$$\Delta P = 18.2596 lbf / pu \text{ lg}^2 = 0.126 lbf / pu \text{ lg}^2$$

7.10. Problemas propuestos

P.7.10.1

Un banco de tubos con arreglo alineados, tiene espaciamiento longitudinal $SI = 2,5 \text{ cm}$ y espaciamiento transversal 2 cm . de diámetro $1,5 \text{ cm}$. El banco tiene cuatro filas de tubos en la dirección del flujo, la temperatura superficial de los tubos se encuentra a 5 a.C. Aire atmosférico fluye por el exterior de los tubos a 25 a.C. , en dirección normal a los tubos, con una velocidad de entrada de 6 m/s. Estimar el coeficiente de transferencia de calor promedio para el banco de tubos y la caída de presión a través del banco.

P.7.10.2

En el interior de un haz de tubos se utiliza vapor que condensa a 150 a.C. para calentar una corriente de CO_2 , que entra a 3 atm. , 35°C y 5 m/s. El haz de tubos consta de 100 tubos de $1,25 \text{ cm}$ de diámetro exterior en disposición cuadrada en línea con espaciamientos $Sn = Sp = 1,875 \text{ cm.}$ Los tubos tienen una longitud de 60 cm. Suponiendo que la temperatura de la pared de los tubos se mantiene constante a 150°C , Calcúlese el calor total transferido al CO_2 y su temperatura de salida del CO_2 del banco de tubos.

P7.10.3 Un haz de tubos en línea consta de tubos de $2,5 \text{ cm}$ de diámetro en 15 filas de altura y 7 filas de profundidad. Los tubos se mantienen a 90 a.C. y transversalmente a ellos, se sopla aire atmosférico a 20 a.C. y $v = 12 \text{ m/s.}$ La disposición tiene $SI = 3,75 \text{ cm}$ y $St = 5,0 \text{ cm.}$ Calcúlese el calor por unidad de longitud transferido desde el haz de tubos. Calcúlese también la caída de presión.

P7.10.4

A través de un tubo de 1.2cm de diámetro interno fluye mercurio a una temperatura de volumen másico de entrada de 90°C a razón de 4535 kg/hr. Este tubo forma parte de un reactor nuclear en el cual se genera calor uniformemente a cualquier razón deseada, ajustando el nivel del flujo de electrones. Determine la longitud del tubo necesaria para elevar la temperatura del volumen másico de mercurio a 230°C , sin que se genere vapor de mercurio,

y determine el flujo de calor correspondiente. El punto de ebullición de mercurio es de 355°C.

P7.10.5

Se tiene que calentar bióxido de carbono que se encuentra a 1 atmósfera de presión, de 25°C a 75°C, bombeándolo a través de una distribución de tubos a una velocidad de 4 m/s. Los tubos se calientan con vapor condensado a 200°C dentro de ellos. Los tubos tienen un diámetro externo de 10mm, están dispuestos en línea y tienen una separación longitudinal de 15mm y una separación transversal de 17 mm. Si se requieren 13 filas de tubos. ¿Cuál es el coeficiente promedio de transferencia de calor y cuál es la caída de presión del bióxido de carbono?

P7.10.6

Fluye agua a una velocidad másica de 2.6Kg/seg. A través de una tubería liza de 2 pulgadas de diámetro cedula 40 y es calentada de 20°C a 40°C. La pared interna del tubo se mantiene a 90°C. Calcular:

- La longitud de la tubería.
- Cual es la caída de presión que experimenta el agua en la tubería.

Datos:

A la temperatura; $T_m = 30^\circ C$

$$C_p = 4.18 \text{ Kj} / \text{Kg}^\circ C \quad \mu = 0.7978 \times 10^{-3} \text{ Kg} / \text{m.seg}$$

$$\rho = 995.7 \text{ Kg} / \text{m}^3 \quad \nu = 0.812 \times 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{seg}$$

$$Pr = 5.42 \quad k = 0.615 \text{ W} / \text{m}^\circ C$$

A la temperatura; $T_s = 90^\circ C$; $\mu_s = 0.315 \times 10^{-3} \text{ Kg} / \text{m.seg}$

$$\text{para } D = 2 \text{ pulg} \begin{cases} D_0 = 6.033 \text{ cm} \\ D_i = 5.25 \text{ cm} \end{cases}$$

CAPITULO VIII INTERCAMBIADORES DE CALOR

8.1 INTRODUCCION

Un Intercambiador de calor es un sistema mecánico, construido para transferir calor entre dos fluidos a diferente temperatura que están separados por una pared que puede ser metálica.

Cuando la diferencia de temperatura es pequeña se desprecia la transferencia de calor por radiación y el intercambiador de calor se calcula aplicando las correlaciones de transferencia de calor por conducción y convección.

Un aspecto importante en la aplicación de los intercambiadores es la recuperación del calor de procesos o incluso a la recuperación de calor de fluidos residuales, que en si mismo no tienen valor económico, pero estando a temperaturas superiores al ambiente, transportan calor, que al recuperarlo, tiene un valor energético (recuperación de energía) y económico. Además permite o contribuye a la conservación del medio ambiente, ayuda a que el ahorro de energía se traduce en un ahorro de combustible, disminución de masa de contaminantes (dióxido de carbono y otros), emitidos a la atmósfera.

8.2 CLASIFICACION

Los diferentes tipos de intercambiadores de calor con sus características constructivas y funcionalidad, se pueden hacer diferentes clasificaciones:

8.2.1 Según el proceso de transferencia de calor, se puede distinguir:

- Recuperadores o transferencia directa.
- Regeneradores o de almacenamiento
- Lecho fluidizado.
- Contacto directo.
- Con combustión o generadores de calor (hornos y calderas)

8.2.2 Segun las características constructivas

- Tubular: doble tubo, carcasa y tubos.
- Placas: paralelas, espiral.

- Compactos: tubos – aletas, placas – aletas.

8.2.3 Según la disposición de los fluidos.

- Paralelo.
- Contracorriente.
- Cruzado.

8.2.4 Dependiendo de su función

- Intercambiador.
- Calentador y enfriador.
- Refrigerador.
- Evaporador y condensador.
- Generador de vapor

a) Los intercambiadores que por su construcción son de **flujo concéntrico** y por el sentido en que se mueven los flujos denominados de **flujo paralelo y de flujo en contracorriente**. Figura N° 8.1

- En el **intercambiador de calor de flujos paralelos**, el flujo másico más caliente intercambia calor con el flujo másico más frió a la entrada del intercambiador. Al comienzo, la transferencia de calor es mejor ya que la diferencia de temperatura es máxima, pero a lo largo del intercambiador esa diferencia disminuye con rapidez y las temperaturas de las dos corrientes se aproximan asintoticamente y con gran lentitud. En el flujo paralelo en equicorriente, la temperatura final del fluido más frió nunca puede llegar a ser igual a la temperatura de salida del fluido más caliente
- En el **intercambiador en contracorriente**, el flujo a mayor temperatura del fluido caliente intercambia calor con la parte más caliente del fluido frió, y lo más fría del fluido caliente con la más fría del fluido frió. Esto permite establecer una diferencia de temperatura más constante a lo

largo del intercambiador. En el flujo en contracorriente la temperatura final del fluido más frió (que es lo que se calienta) puede superar la temperatura de salida del fluido mas caliente (que se enfria), puesto que existe un gradiente de temperatura favorable a todo lo largo del intercambiador de calor.

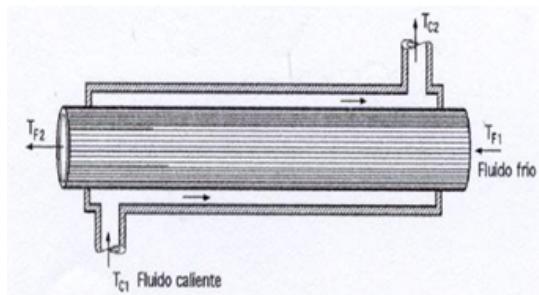


Figura N° 8.1 Intercambiador simple de tubos concéntricos

Fuente : Alan Chapman, Fundamentos de Transferencia de calor, 3era Edición

b) Los intercambiadores de calor de flujos cruzados

En este caso el fluido exterior es un gas (generalmente aire), mientras que el fluido interior puede ser un fluido cualquiera gas o liquido, que se mueven en forma perpendicular entre si, estos intercambiadores de calor pueden ser: tubulares con o sin aletas (placas), los fluidos pueden ser mezclados y sin mezclar.

En la figura N°8.2 se presentan estos tipos de intercambiadores de calor

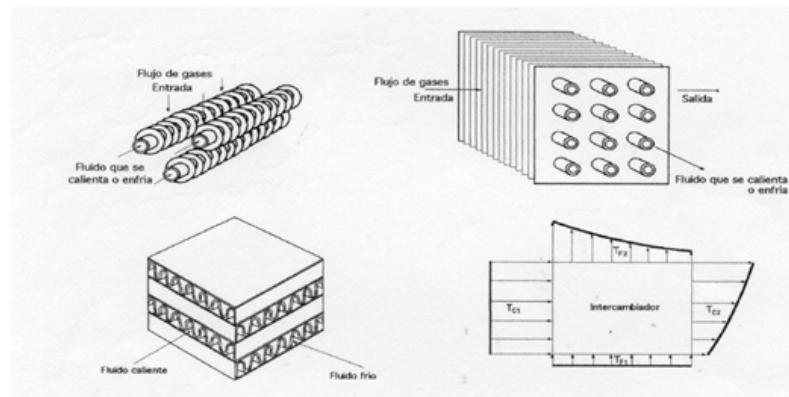


Figura N° 8.2 Intercambiador de flujo cruzado

Fuente : Alan Chapman, Fundamentos de Transferencia de calor, 3era Edición

c. Intercambiador de tubos y carcasa, 1-2 (corrientes paralelas y en contracorriente)

Se tiene **intercambiadores de calor de carcasa y tubos**, se utiliza para la transferencia de calor entre líquidos, uno de los fluidos circula por el interior de los tubos y el otro por el exterior. La carcasa envuelve el conjunto de tubos. Los deflectores (BAFFLES), cumplen la función de desviar el flujo exterior con objeto de generar un proceso de mezcla que genera turbulencia para aumentar la transferencia de calor. El flujo de un intercambiador (1-2) es generalmente en contracorriente y parcialmente en corrientes paralelas. Ver figura. N° 8.3

En los intercambiadores de paso múltiple, se pueden utilizar velocidades mas elevadas, tubos más cortos y resolver fácilmente el problema de las expansiones y dilataciones. Disminuye la sección libre para el flujo, con el cual aumenta la velocidad, dando lugar a un incremento del coeficiente de transmisión de calor por convección.

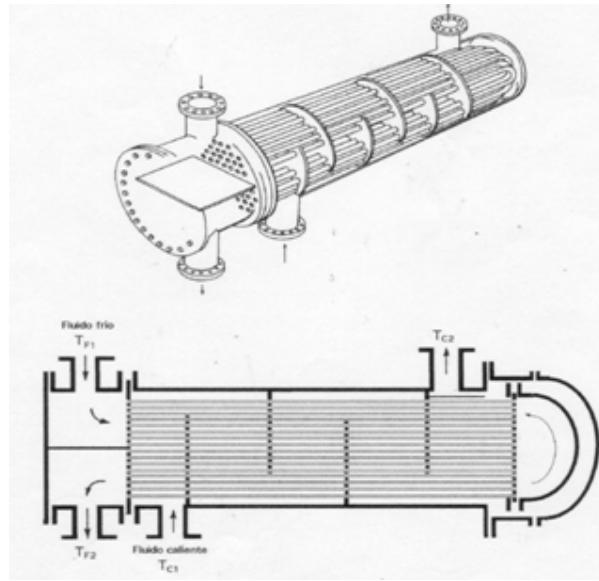


Figura N° 8.3 Intercambiador de carcasa y tubos (1-2)

Fuente : Alan Chapman, Fundamentos de Transferencia de calor, 3era Edición

Las desventajas son:

- El intercambiador es más complicado.
- Aumentan las perdidas por fricción debido a la mayor velocidad y a la multiplicación de las perdidas de carga en la entrada o la salida.
- El intercambiador (1-2) posee una importante limitación ya que debido al paso del flujo en corrientes paralelas, el intercambiador no permite que la temperatura de uno de los fluidos a la salida sea muy próxima a la temperatura del otro fluido a la entrada, lo que se traduce en que la recuperación de calor de un intercambiador (1-2) es necesariamente mala.

8.3 DISTRIBUCION DE TEMPERATURAS

En la figura N° 8.4 se presenta la distribución de temperatura de varios intercambiadores típicos: de flujo paralelo, contracorriente y de un paso por la carcasa y dos pasos por los tubos, condensador de un paso de tubos, vaporizadores de un paso de tubos.

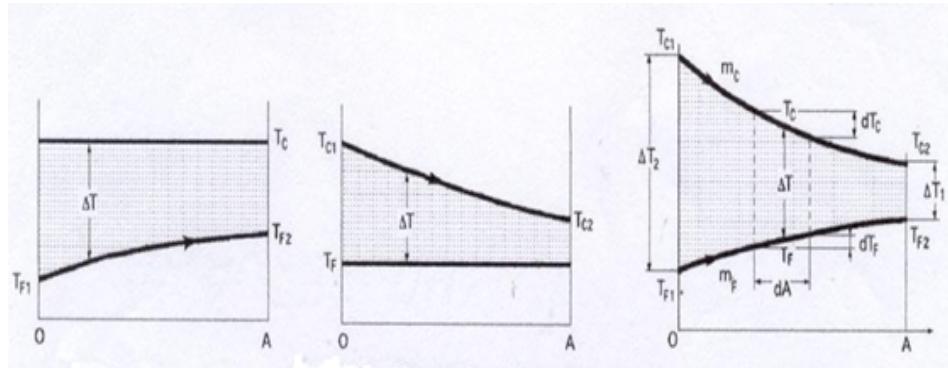


Figura N° 8.4 Distribución de temperaturas en :

- Condensadores de un solo paso en los tubos
- Vaporizadores de un solo paso de tubos
- Intercambiador de flujos de calor en equicorrientes

Fuente: Alan Chapman, Fundamentos de Transferencia de calor, 3era Edición

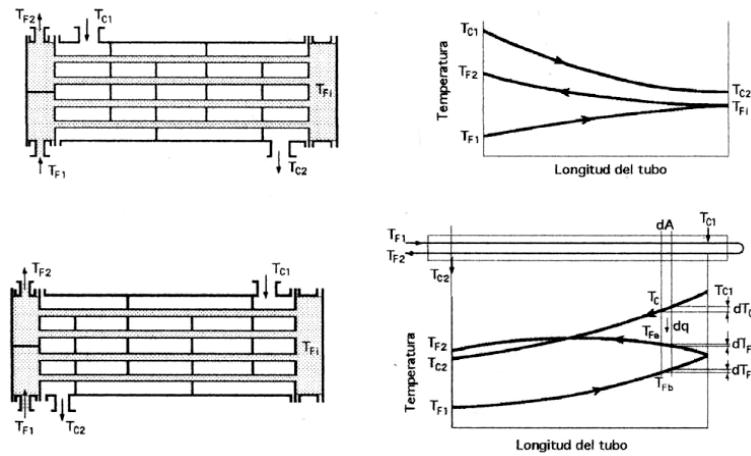


FIGURA N° 8.5 Distribución de temperaturas en intercambiador de calor de tubos y carcasa (1-2)

Fuente: Alan Chapman, Fundamentos de Transferencia de calor, 3era Edición

8.4 COEFICIENTE GLOBAL DE TRANSFERENCIA DE CALOR

El coeficiente total de transferencia de calor U es un factor que para una configuración geométrica dada, el valor del calor total transferida, hay que multiplicarlo por el área del intercambio y por la diferencia total de temperaturas.

$$Q = U A \Delta T_{total} \quad (8.1)$$

Una de las primeras cuestiones a realizar en el análisis térmico de un intercambiador de calor de carcasa y tubos consiste en evaluar el coeficiente de transferencia térmica global entre las dos corrientes fluidas, tal como

$$UA = \frac{1}{\sum_{i=1}^{i=3} Ri} = \frac{1}{\frac{1}{h_c A} + \frac{L}{kA} + \frac{1}{h_f A}} \quad (8.2)$$

En el caso de un intercambiador de calor formado por dos tubos concéntricos, Fig. N° (8.1) el área de la superficie de intercambio térmico es:

$$Area \begin{cases} Interior : A_i = 2\pi r_i L \\ Exterior : A_e = 2\pi r_e L \end{cases} \quad (8.3)$$

De tal forma que:

$$UA = \frac{1}{\frac{1}{h_{ci} A_i} + \frac{\ln \frac{r_e}{r_i}}{2\pi k L} + \frac{1}{h_{fe} A_e}} \quad (8.4)$$

Si el coeficiente de transferencia térmica global viene referido a la superficie exterior A_e el calor de U_e será:

$$U_e = \frac{1}{\frac{A_e \ln \frac{r_e}{r_i}}{h_{ci} A_i} + \frac{1}{2\pi k L} + \frac{1}{h_{fe}}} \quad (8.5)$$

Mientras que si viene referido a la superficie interior A_i será:

$$U_i = \frac{1}{\frac{1}{h_{ci}} + \frac{A_i \ln \frac{r_e}{r_i}}{2\pi k L} + \frac{A_i}{A_e h_{Fe}}} \quad (8.6)$$

8.5 FACTOR DE SUCIEDAD (Rd)

Con frecuencia resulta imposible predecir el coeficiente de transferencia de calor global de un intercambiador de calor al cabo de un cierto tiempo de funcionamiento, teniendo solo en cuenta el análisis térmico; durante el funcionamiento con la mayoría de los líquidos y con algunos gases, se van produciendo gradualmente unas películas de suciedad sobre la superficie en la que se realiza la transferencia térmica, que pueden ser de óxidos, incrustaciones calizas procedentes de la caldera, lodos, carbonilla u otros precipitados, Figura N° 8.6; el efecto que esta suciedad origina, se conoce con el nombre de incrustaciones, y provoca un aumento de la resistencia térmica del sistema

Si se realizan ensayos de rendimiento en un intercambiador limpio y se repiten después de que el aparato haya estado en servicio durante algún tiempo, se puede determinar la resistencia térmica del depósito (o factor de incrustación) R_{Suc} mediante la relación:

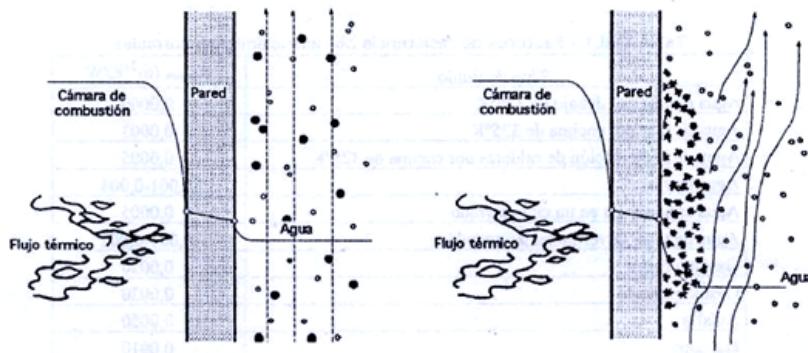


FIGURA N° 8.6 Transmisión de calor entre la cámara de combustión y el agua de una caldera con incrustaciones

Fuente: Alan Chapman, Fundamentos de Transferencia de calor, 3era Edición

$$R_{Sucio} = R_{Func} - R_{Limpio} = \frac{1}{U_{Func}} - \frac{1}{U_{Limpio}} \Rightarrow U_{Fun} = \frac{1}{\frac{1}{R_{Sucio}} + \frac{1}{U_{Limpio}}} \quad (8.7)$$

8.6 CALCULO DE TRANSFERENCIA DE CALOR EN UN INTERCAMBIADOR DE CALOR.

$$Q = m_c C_{PC} (T_{C1} - T_{C2}) = UA \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}} = UA(LMTD) \quad (8.8)$$

En la que la expresión, $\frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}}$ se denomina **temperatura media logarítmica ó (LMTD), (Logarithmic mean temperature difference).**

8.7 INTERCAMBIADOR DE CALOR CON (U) variable, (varia linealmente con t)

Cuando el coeficiente global de transmisión de calor U, varíe mucho de uno a otro extremo del intercambiador, no es posible representarle por este valor; si se admite que U varía linealmente con la diferencia de temperaturas T se puede poner:

$$U = a + b\Delta T \quad (8.9)$$

$$\int \frac{d(\Delta T)}{dq} = \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{Q} = |U = a + b\Delta T| = \int \frac{d(\Delta T)}{U dA \Delta T} = \int \frac{d(\Delta T)}{(a + b\Delta T) dA \Delta T} = \dots$$

$$\dots = \frac{1}{A} \left(\frac{1}{a} \ln \frac{\Delta T_2}{a + b\Delta T_1} \right)_{\Delta T_1}^{\Delta T_2}$$

$$DMLC = \frac{U_1 \Delta T_2 - U_2 \Delta T_1}{\ln \frac{U_1 \Delta T_2}{U_2 \Delta T_1}} \quad (8.10)$$

DMLC = (Diferencia media logarítmica cruzada)

$$Q = A \frac{U_1 \Delta T_2 - U_2 \Delta T_1}{\ln \frac{U_1 \Delta T_2}{U_2 \Delta T_1}} \quad (8.11)$$

Suponiendo de modo general, que el intercambiador completo se haya dividido en (*n*) elementos parciales:

$$Q = Q_{1-2} + Q_{2-3} + \dots + \sum_{i=1}^n Q(1-2)i \quad (8.12)$$

8.8 Intercambiadores de calor en donde las diferencias de temperatura de los fluidos en los extremos son iguales

Si las capacidades caloríficas de los fluidos son iguales, las diferencias de temperaturas en contracorriente resultan iguales y $T = T_1 = T_2$ por lo que para salvar la indeterminación 0/0 en el valor de la (LMTD), hay que aplicar la regla del L'Hopital.

$$Q = UA \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}} = \frac{0}{0} = |\Delta T_2 - x\Delta T_1| = UA\Delta T_1 \frac{x-1}{\ln x} = \\ |\text{L'Hopital}| = UA\Delta T_2 \quad (8.13)$$

Si la diferencia de temperaturas T_1 no es mayor que un 50% de T_2 , es decir:

$$\Delta T_1 < \frac{\Delta T_2}{2} \Rightarrow T_{c2} - T_{f1} \leq \frac{T_{c2} - T_{f1}}{2} \quad (8.14)$$

La diferencia de temperaturas media aritmética no difiere de la (LMTD) es más de 1% y se puede utilizar en lugar de ella para simplificar los cálculos.

8.9 FACTOR DE CORRECIÓN DE LA DIFERENCIA MEDIA LOGARÍTMICA DE TEMPERATURAS (LMTD)

Cuando se tiene intercambiadores muy complejos, como los montajes en carcasa, y tubos, con varios pasos de tubos por la carcasa o varias carcasa, y en el caso de intercambiadores de flujo cruzado, la deducción analítica de una expresión para la diferencia media de temperaturas resulta muy compleja.

En los Intercambiadores de calor de tubos y carcasa es mas complicados, la determinación de T , aunque el procedimiento es el mismo que para el intercambiador (1-1) en contracorriente.

La expresión que proporciona el calor transmitido en el intercambiador (1-2) es:

$$Q = UAF \frac{(T_{C1} - T_{F2}) - (T_{C2} - T_{F1})}{\ln \frac{T_{C1} - T_{F2}}{T_{C2} - T_{F1}}} = UAF(LMTD) \quad (8.15)$$

En la que la temperatura media logarítmica verdadera es $T=F(LMTD)$ La expresión anterior se simplifica utilizando las siguientes relaciones a dimensionales:

$$\text{Coeficiente de efectividad, } p = \frac{T_{F2} - T_{f1}}{T_{C1} - T_{f1}} \quad (8.16)$$

Relación de capacidades térmicas,

$$R = \frac{m_F C_{pF}}{m_C C_{pC}} = \frac{C_F}{C_C} = \frac{T_{C1} - T_{C2}}{T_{F2} - T_{F1}} = \frac{1}{\varphi} \quad (8.17)$$

Estas relaciones se ha representado en la figuras que se dan en el Anexo N°., estas se utilizan para hallar el factor de corrección de temperaturas para intercambiadores de tubos y carcasa y de flujo cruzado.

8.10 EFECTIVIDAD Y NUMERO DE UNIDADES DE TRANSMISION

El calor intercambiado entre los dos fluidos se determina por la aplicación simultánea de las tres siguientes ecuaciones.

$$Q = UA\Delta T_{total} = Q = m_f C_{pf} (T_{fs} - T_{fe}) = Q = m_c C_{pc} (T_{ce} - T_{cs}) \quad (8.18)$$

En estas expresiones, aún conociendo U y A, y dos temperaturas: las de entrada de fluido caliente y la de salida del fluido frió, o de la entrada del fluido caliente y entrada del fluido frió, todavía nos quedan dos temperaturas por conocer. El sistema lo debemos resolver por iteración, partiendo de un valor aproximado de una de las temperaturas, calculando Q y aplicando la ecuación (8.18), a continuación resolver el sistema, hasta que la solución satisfaga simultáneamente a las tres ecuaciones. Este método, además de artificioso y lento, se complica cuando tenemos que aplicar la función F (P, R), con el agravante de que esta última introduce los errores comentados anteriormente.

Para resolver este problema Nusselt desarrollo el método que lleva por nombre Número de Unidades de Transmisión (NTU). Este método fue perfeccionándose después por Kays y London. Consiste en determinar el intercambio de calor por cada grado de diferencia de temperatura, que según la expresión (18) es el producto UA.

El calor transmitido por cada grado de aumento de temperatura, a uno (o desde uno) de los dos fluidos lo determinan los productos $m_c C_{pc}$ o $m_f C_{pf}$. Como estos productos y el UA tienen las mismas unidades, el producto UA se puede hacer a dimensional dividiendo por mC_p . Así obtenemos un número que expresa la capacidad de transmisión de calor del cambiador. **El NTU se define como el cociente entre UA y el producto mC_p de menor valor.**

$$NTU = \frac{UA}{(mC_p)_{\min}} \quad (8.19)$$

Las definiciones de capacidad, C_R y de la efectividad se generalizan de la siguiente forma:

➤ **Coeficiente de capacidad,**

$$C_R = \frac{(mC_p)_{\min}}{(mC_p)_{\max}} \quad (8.20)$$

➤ **Efectividad,**

$$\varepsilon = \frac{T_{fs} - T_{fe}}{T_{ce} - T_{fe}}, \quad m_f C_{pf} \leq m_c C_{pc} \quad (8.21)$$

$$\varepsilon = \frac{T_{cc} - T_{cs}}{T_{cc} - T_{fe}}, \quad m_f C_{pf} \geq m_c C_{pc} \quad (8.22)$$

La efectividad es el cociente entre el calor realmente intercambiado y el máximo que podría transmitirse en un cambiador en contracorrientes de área infinita. En estos tres parámetros (NTU, C_R , ε) no intervienen conceptos nuevos.

En los anexos N° se dan las gráficas para determinar la eficiencia de los diferentes tipos de intercambiadores de calor

8.11 Problemas resueltos

Problema N° 1

Aceite caliente ($C_p = 2200 \text{ J/Kg. } ^\circ\text{C}$) se va a enfriar por medio de agua ($C_p = 4180 \text{ J/kg. } ^\circ\text{C}$) en un intercambiador de calor de dos pasos por el casco y 12 pasos por los tubos. Estos son de pared delgada y están hechos de cobre con un diámetro de 1,8 cm. La longitud de cada paso de los tubos en el intercambiador es de 3 m y el coeficiente de transferencia de calor total es de 340 W/m²°C. Por los tubos fluye agua a una razón total de 0,1 Kg./s y por el casco fluye el aceite a razón de 0,2 Kg./s. El agua y el aceite entran a las temperaturas de 18 °C. y 160 °C. respectivamente. Determine la velocidad de transferencia de calor en el intercambiador y las temperaturas de salida de las corrientes del agua y del aceite.

Diagrama de flujo

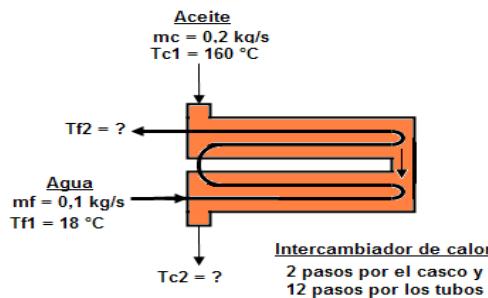


FIGURA N° 8.7 Intercambiador de calor de carcasa y tubos de fluido a agua y aceite

Fuente: Elaboración propia, Ing. Alberto Emilio Panana Girio

Solución.-

1. Para determinar el flujo de calor y las temperaturas de salidas de los fluidos, se aplicara el método de la eficiencia – número de unidades de transferencia (e – NTU – Rc)
2. Cálculo de la razón de capacidades térmicas de los fluidos, para identificar cual es el mínimo y el máximo

- **Fluido caliente, el aceite:**

$$m_C C_p = 0,2 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \times 2200 \frac{\text{j}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}} = 440 \frac{\text{j}}{\text{s} \cdot ^\circ\text{C}} = 440 \frac{\text{W}}{\text{^\circ C}} = C_{\max}$$

- **Fluido frío, el agua:**

$$m_F C_p = 0,1 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \times 4180 \frac{\text{j}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}} = 418 \frac{\text{j}}{\text{s} \cdot ^\circ\text{C}} = 418 \frac{\text{W}}{\text{^\circ C}} = C_{\min}$$

3. Siendo el fluido frío el de menor capacidad térmica, la eficiencia se determina, mediante la gráfica N° 13-26, (d), con los parámetros NTU y Rc.

$$\varepsilon = \frac{T_{F_2} - T_{F_1}}{T_{C_1} - T_{F_1}} = \left\{ \begin{array}{l} NTU = \frac{U \times A}{C_{\min}} \\ RC = \frac{C_{\min}}{C_{\max}} \end{array} \right\}$$

4. Cálculos de los parámetro:

➤ Área de transferencia de calor

$$A = \pi D L N p = \pi \times 0,018 \text{m} \times 3 \text{m} \times 12 = 20357 \text{m}^2$$

➤ Cálculo de NTU y Rc

$$NTU = \frac{340 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}} \times 2,0357 \text{m}^2}{418 \frac{\text{W}}{\text{^\circ C}}} = 1,655 \quad RC = \frac{418 \frac{\text{W}}{\text{^\circ C}}}{440 \frac{\text{W}}{\text{^\circ C}}} = 0,95$$

5. Por el grafico la eficiencia es: $\varepsilon = 0,61$
6. Reemplazando en (3)

$$\varepsilon = 0,61 = \frac{T_{F_2} - 18}{160 - 18} \rightarrow T_{F_2} = 104,62^{\circ}C$$

El flujo de calor:

$$Q = C_F (T_{F_2} - T_{F_1}) = 418 \frac{W}{^{\circ}F} (104,62 - 18)^{\circ}F = 36207,16W \equiv 36,20716KW$$

7. la temperatura de salida del fluido caliente se determina del balance de energía:

$$T_{C_2} = T_{C_1} - \frac{Q}{C_c} = 160^{\circ}C - \frac{36207,16W}{440 \frac{W}{^{\circ}C}} = 77,711^{\circ}C$$

Problema Nº 2

Determinar el área de intercambio térmico que se necesita para que un intercambiador de calor construido con un tubo de 25 mm. De diámetro exterior, enfríe 6,93 Kg. /s de una solución de alcohol etílico al 95 %, $C_p = 3810 \text{ J/kg.K}$, desde $65,6^{\circ}\text{C}$. hasta $39,4^{\circ}\text{C}$, utilizando 6,3 Kg./s de agua a 10°C . Se supondrá que el coeficiente global de transferencia térmica basado en el área exterior del tubo es de $568 \text{ W/m.}^{\circ}\text{C}$. En el problema se realizará en los siguientes supuestos:

- a. Carcasa y tubo con flujo en equicorriente
- b. Carcasa y tubo con flujo en contracorriente
- c. Intercambiador en contracorriente con dos pasos en la carcasa y 4 pasos en los tubos de 72 tubos en cada paso, circulando el alcohol por la carcasa y el agua por los tubos.
- d. Flujo cruzado, con un paso de tubos y otro de carcasa, siendo con mezcla de fluido en la carcasa.

Solución.-

- a. Intercambiador de calor de carcasa y tubo con flujo en equicorriente

1. **Diagrama de flujo del intercambiador de calor;** en el se tiene que el agua = f (fluido frío), y el alcohol etílico = c (fluido caliente)

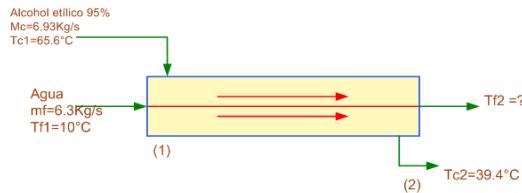


FIGURA Nº 8.7 Intercambiador de calor de tubos concéntricos, para fluidos agua y alcohol etílico en corrientes paralelos

Fuente: Elaboración propia, Ing. Alberto Emilio Panana Girio

2. Datos: $U = 568 \text{ w/m.}^{\circ}\text{C}$; $D_o = 25,4 \text{ mm.}$; $Cp_f = 3810 \text{ j/Kg.K}$ (alcohol etílico);
 $Cp_f = 4186 \text{ j/kg.K}$ (agua)

3. Balance de energía, considerando que no hay pérdidas de calor

$$Q = m_c \cdot Cp_c (T_{C_1} - T_{C_2}) = m_f \cdot Cp_f (T_{F_2} - T_{F_1})$$

$$Q = 6,93 \text{ kg/s} \times 3810 \text{ J/kg.}^{\circ}\text{C} \times (65,6 - 39,4) ^{\circ}\text{C} = 691766 \text{ J/s} \equiv 691,766 \text{ KW}$$

$$Q = 691766 \text{ J/s} = 6,3 \times 4186 \times (T_{F_2} - 10)$$

$$T_{F_2} = 36,23^{\circ}\text{C}$$

4. Cálculo de la diferencia media logarítmica de temperatura (T_{ML})

$$\Delta T_{ML} = \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}} = \left| \frac{\Delta T_1 = T_{C_1} - T_{F_1}}{\Delta T_2 = T_{C_2} - T_{F_2}} \right| = \frac{(39,4 - 36,23) - (65,6 - 10)}{\ln \frac{(39,4 - 36,23)}{(65,6 - 10)}}$$

$$\Delta T_{ML} = 18,3 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

5. De la ecuación de diseño, para la transferencia de calor

$$Q = U \cdot A \cdot \Delta T_{ML} \rightarrow A = \frac{Q}{U \cdot \Delta T_{ML}} = \frac{691766 \text{ (J/s)}}{568 \text{ (w/m.}^{\circ}\text{C)} \times 18,3 \text{ }^{\circ}\text{C}} = 66,55 \text{ m}^2$$

$$A = \pi \cdot D \cdot L \rightarrow L = \frac{A}{\pi \cdot D} = \frac{66,55 \text{ m}^2}{\pi \times 0,0254 \text{ m}} = 834 \text{ m}$$

- b. Intercambiador de calor de carcasa y tubo con flujo en contracorriente

1. **Diagrama de flujo del intercambiador de calor;** en el se tiene que el agua = f (fluído frío), y el alcohol etílico = c (fluído caliente)

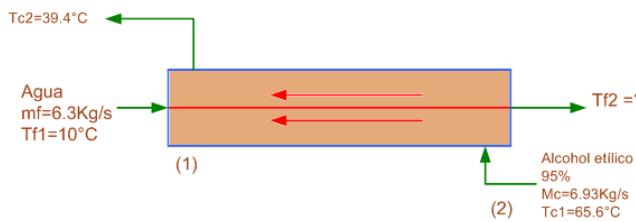


FIGURA Nº 8.8 Intercambiador de calor de tubos concéntricos, para fluidos agua y alcohol etílico en contracorriente

Fuente: Elaboración propia, Ing. Alberto Emilio Panama Giro

2. Cálculo de la diferencia media logarítmica de temperatura (T_{ML})

$$\Delta T_{ML} = \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}} = \left| \frac{\Delta T_1 = T_{C_1} - T_{F_2}}{\Delta T_2 = T_{C_2} - T_{F_1}} \right| = \frac{(39,4 - 10) - (65,6 - 36,23)}{\ln \frac{(39,4 - 10)}{(65,6 - 36,23)}}$$

$\Delta T_{ML} = \frac{0}{0}$, las diferencias de temperaturas en los terminales son iguales, por lo aparentemente ser indeterminado

3. Puede ocurrir que las capacidades caloríficas de los fluidos son iguales, las diferencias de temperaturas en contracorriente resultan iguales, $T = T_1 = T_2$, por que se ha de aplicar la regla de L'Hôpital.

$$Q = UA\Delta T_{ML}$$

$$\Delta T_{ML} = \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}} = \frac{0}{0} = |\Delta T_2 = x\Delta T_1| = \frac{\Delta T_1(x-1)}{\ln x} = |L'Hôpital| = x\Delta T_1 = \Delta T_2$$

$$\Delta T_{ML} = (T_{C_1} - T_{F_2}) = 65,6 - 36,23 = 29,37^\circ C$$

4. De la ecuación de diseño, para la transferencia de calor

$$Q = U \cdot A \cdot \Delta T_{ML} \rightarrow A = \frac{Q}{U \cdot \Delta T_{ML}} = \frac{691766(j/s)}{568(w/m \cdot ^\circ C) \times 29,37^\circ C} = 41,47 m^2$$

$$A = \pi \cdot D \cdot L \rightarrow L = \frac{A}{\pi \times D} = \frac{41,47 m^2}{\pi \times 0,0254 m} = 519,69 m$$

c. Intercambiador de calor de carcasa y tubos, dos pasos por la carcasa y cuatro pasos por los tubos (2-4)

1. **Diagrama de flujo del intercambiador de calor;** en el se tiene que el agua = f (fluido frío), y el alcohol etílico = c (fluido caliente)

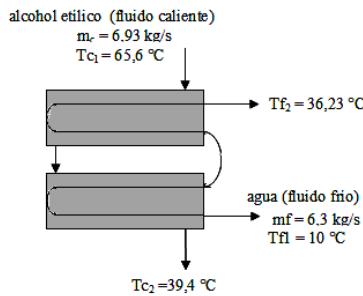


FIGURA Nº 8.9 Intercambiador de calor de carcasa y tubos, para fluidos agua y alcohol etílico

Fuente: Elaboración propia, Ing. Alberto Emilio Panama Giro

5. De los cálculos realizados, en (b), se tiene:

$$Q = 691766 \text{ kg/s}; \quad T_{c_2} = 36, 37^\circ\text{C}; \quad T_{ML} = 29,37^\circ\text{C}$$

4. Cálculo del factor de corrección de temperatura (F_T), se determina por gráfico, para intercambiador de calor (2-4), interceptando (P y R)

$$F_T = |P, R| \quad \left| \begin{array}{l} P = \text{razón de efectividad} \\ R = \text{razón de capacidad} \end{array} \right| = 0,97$$

$$P = \frac{T_{F_2} - T_{F_1}}{T_{C_1} - T_{F_1}} = \frac{36,23 - 10}{65,6 - 10} = 0,47$$

$$R = \frac{C_F}{C_C} = \frac{m_F C p_F}{m_C C p_C} = \frac{T_{C_1} - T_{C_2}}{T_{F_2} - T_{F_1}} = \frac{65,6 - 39,4}{36,23 - 10} = 0,9988 \sim 1.00$$

5. De la ecuación de diseño

$$Q = U \cdot A \cdot F_T \cdot T_{ML} \quad \therefore A = \frac{Q}{U \cdot F_T \cdot T_{ML}} = \frac{691766 w}{w \cdot m^2 \cdot ^\circ\text{C} \times \times \cdot ^\circ\text{C}}$$

$$A = 42,75 m^2$$

6. Cálculo de la longitud de tubos

$$L = \frac{A}{4 \times 72 \times \pi \times D \times} = \frac{42,75 m^2}{4 \times 72 \times \pi \times 0,0254 m}$$

$$L = 1.86 m$$

- d. Intercambiador de flujo cruzado con un paso de tubos y un paso por la carcasa, siendo con mezcla de fluido por la carcasa

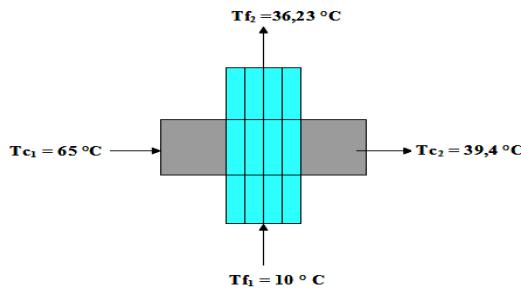


FIGURA Nº 8.9 Intercambiador de calor de flujo cruzado, para fluidos agua y alcohol etílico

Fuente : Elaboración propia, Ing. Alberto Emilio Panana Giro

1. Para el intercambiador de flujo cruzado, se tiene:

$$Q = 691766 \text{ kg/s}; \quad T_{c2} = 36.37 \text{ }^{\circ}\text{C}; \quad T_{ML} = 29.37 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

2. Cálculo del factor de corrección de temperatura (F_T), se determina por gráfico, para intercambiador de calor de flujo cruzado, con un fluido mezclado, por la carcasa (líquido caliente) y el otro fluido sin mezclar (líquido frío), $F_T(P,R)$

$$F_T = |P, R| \quad \left| \begin{array}{l} P = \text{razón de efectividad} \\ R = \text{razón de capacidad} \end{array} \right| = 0,875$$

$$P = \frac{T_{F_2} - T_{F_1}}{T_{C_1} - T_{F_1}} = \frac{36,23 - 10}{65,6 - 10} = 0,47$$

$$R = \frac{C_F}{C_C} = \frac{m_F C_p F}{m_C C_p C} = \frac{T_{C_1} - T_{C_2}}{T_{F_2} - T_{F_1}} = \frac{65,6 - 39,4}{36,23 - 10} = 0,9988 \sim 1.00$$

3. De la ecuación de diseño

$$Q = U \cdot A \cdot F_T \cdot T_{ML} \quad \therefore A = \frac{Q}{U \cdot F_T \cdot T_{ML}} = \frac{691766 w}{w \text{ } m^2 \text{ } ^{\circ}\text{C} \times \times \text{ } ^{\circ}\text{C}}$$

$$A = 47,39 m^2$$

Problema Nº 3

En una planta textil se va a usar el agua de desecho del teñido ($C_p = 4290 \text{ J/kg. } ^{\circ}\text{C}$) que está a $75 \text{ }^{\circ}\text{C}$. para precalentar agua fresca ($C_p = 4180 \text{ J/kg. } ^{\circ}\text{C}$) a

15 °C, con el mismo gasto de masa., en un intercambiador de calor de tubo doble y a contraflujo. El área superficial de transferencia de calor del intercambiador es de 1,65 m² y coeficiente de transferencia de calor total es de 625 W/m². °C. Si la velocidad de la transferencia de calor en el intercambiador es de 35 KW, determine la temperatura de salida y el gasto de masa de cada corriente de fluido

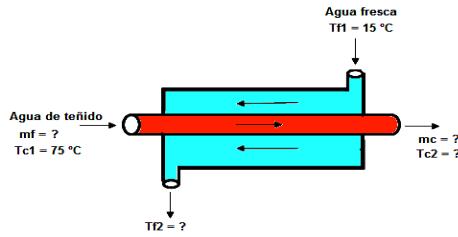


FIGURA Nº 8.10 Intercambiador de calor de tubos concéntricos de flujo a contracorriente

Fuente: Elaboración propia, Ing. Alberto Emilio Panama Giro

Solución.-

1. Datos: Área = 1,65 m²; U = 625 W/m². °C ; Q = 35 000 W
 2. De acuerdo al método de la Diferencia media logarítmica, se ha de determinar:
- 2.1 Del Balance de energía, se tiene.

$$Q = m_C \times Cp_C (T_{C_1} - T_{C_2}) = m_F \times Cp_F (T_{F_2} - T_{F_1})$$

$$Q = U \times A \times \Delta T_{ML} = U \times A \times \frac{(T_{C_1} - T_{F_2}) - (T_{C_2} - T_{F_1})}{\ln \frac{(T_{C_1} - T_{F_2})}{(T_{C_2} - T_{F_1})}}$$

2.2 Como ambos fluidos tienen el mismo flujo másico

$$T_{C_2} = T_{C_1} - \frac{Cp_F}{Cp_C} (T_{F_2} - T_{F_1})$$

- 2.3 El procedimiento para calcular las temperaturas de salidas de los fluidos , aplicando el método de la diferencia media logarítmica de temperaturas, el mediante el ensayo y error, es el siguiente:
- Primero se supone un valor de la temperatura de salida del fluido frío TF₂
 - Se determina la temperatura de salida del fluido caliente TC₂
 - Se halla la diferencia media logarítmica

- Luego mediante la ecuación de diseño se halla el calor transferido, si no es igual al flujo de calor dado se procede a realizar otras suposiciones, hasta encontrar un valor cercano.

2.4 Ejemplo de calculo para una primera suposición, el resto de cálculos efectuados se muestran en la tabla siguiente

- Asumiendo que $T_{F2} = 45^{\circ}\text{C}$; $\left(T_{F_2} = \frac{T_{C_1} + T_{F_1}}{2} = \frac{75 + 15}{2} = 45^{\circ}\text{C} \right)$
- $T_{C_2} = 75^{\circ}\text{C} - \frac{4180 \frac{j}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}} (45 - 15)^{\circ}\text{C}}{4295 \frac{j}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}} = 45,80^{\circ}\text{C}$
- $\Delta T_{ML} = \frac{(75 - 45) - (45,80 - 15)}{\ln \frac{(75 - 45)}{(45,80 - 15)}} = 30,4002^{\circ}\text{C}$
- $Q = U \times A \times \Delta T_{ML} = 625 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ\text{C}} \times 1,65 m^2 \times 30,4002^{\circ}\text{C} = 31350,235 W$
- Como no se alcanza el valor del calor transferido, se produce a realizar otras suposiciones, los cálculos realizados se muestran en la siguiente tabla:

Suposición	$T_{F2} = ^\circ\text{C}$	$T_{C2} = ^\circ\text{C}$	$\Delta T_{ML} = ^\circ\text{C}$	$Q = \text{W}$
1	45	45,804	30,4002	31350,236
2	42	48,7236	33,3604	34405,007
3	41,5	49,2102	33,8538	34911,7915
4	41,4	49,3075	33,9525	35013,55

- De los resultados, se puede adoptar que las temperaturas de salida de los fluido, son:

$$T_{C2} = 49,3^{\circ}\text{C} \text{ y } T_{F2} = 41,4^{\circ}\text{C}$$

- Por tanto el flujo máscico ($m_F = m_C$) de los fluidos será:

$$Q = m_F \cdot C_p F (T_{F_2} - T_{F_1}) \rightarrow m_F = \frac{Q}{C_p F (T_{F_2} - T_{F_1})} = \frac{35013}{4180(41,4 - 15)} = 0,31 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Problema N° 4

En un intercambiador de calor con flujo en contracorriente, por el que circulan 5 Kg. de agua por minuto, y 8 Kg. de aceite por minuto, el agua entra a 20 °C y sale a 40 °C, mientras que el aceite entra a 90 °C. El calor específico del agua es $Cp_{agua} = 1 \text{ Kcal./kg. } ^\circ\text{C}$, el calor específico del aceite obedece a la siguiente relación, $Cp_{aceite} = 0,8+0,002T_{aceite}$, con $T_{aceite} = ^\circ\text{C}$.

Determinar:

- La temperatura de salida del aceite
- La eficiencia del intercambiador de calor
- Si el coeficiente global (U), para el rango de temperaturas del intercambiador, viene

Dado por: $U \left(\frac{\text{Kcal}}{\text{min} \cdot m^2 \cdot ^\circ\text{C}} \right) = \frac{10T_{aceite}}{T_{aceite} - T_{agua}}$, con T en $^\circ\text{C}$

¿Calcular el valor del área de intercambio térmico?

Solución.-

1. Diagrama de flujo del intercambiador de calor

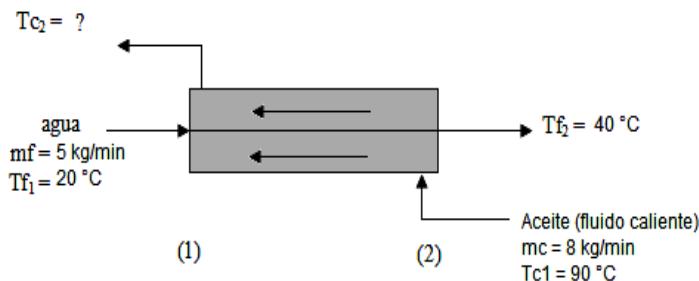


FIGURA N° 8.11 Intercambiador de calor de tubos concéntricos de flujo a contracorriente

Fuente: Elaboración propia, Ing. Alberto Emilio Panana Giro

2. Cálculo de la temperatura de salida del aceite, mediante un balance de energía

$$Q = m_{ac} \cdot Cp_{ac} (T_{c_1} - T_{c_2}) = m_{ag} \cdot Cp_{ag} (T_{f_2} - T_{f_1}) = U \cdot A \cdot \Delta T , \quad \Delta T = (T_{ac} - T_{ag})$$

3. Realizando un balance diferencial, se tiene:

$$dQ = m_{ac} \cdot Cp_{ac} dT_{ac} = m_{ag} \cdot Cp_{ag} dT_{ag} = U \cdot dA(T_{ac} - T_{ag})$$

4. Reemplazando el valor de Cp del aceite

$$dQ = m_{ac} (0,8 + 0,002T) dT_{ac} = m_{ag} \cdot Cp_{ag} dT_{ag}$$

5. Integrando la expresión:

$$m_{ac} \left[(0,8T) + \frac{0,002T^2}{2} \right]_{T_{C_1}}^{T_{C_2}} = m_{ag} \cdot Cp_{ag} (T_{F_2} - T_{F_1}) = -m_{ag} \cdot Cp_{ag} (T_{F_1} - T_{F_2})$$

6. Reemplazando valore y luego simplificando la expresión se tiene:

$$8 \left[\left(0,8T_{C_2} + \frac{0,002T_{C_2}^2}{2} \right) - \left(0,8 \times 90 + \frac{0,002 \times 90^2}{2} \right) \right] = -5 \times 1 (40 - 20)$$

$$0,8T_{C_2} + 0,001T_{C_2}^2 - 67,6 = 0$$

7. Resolviendo, la ecuación (6), de segundo grado

$$T_{C_2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-0,8 \pm \sqrt{0,8^2 - 4(0,001)(-67,6)}}{2(0,001)}$$

$$T_{C_2} = 77,07 \text{ } ^\circ\text{C}$$

8. Cálculo de la eficiencia del intercambiador de calor

La potencia calorífica real intercambiado, es la absorbida por el agua

$$Q_{real,agua} = m_{ag} \cdot Cp_{ag} \Delta T_{ag} = 5 \times 1 \times (40 - 20) = 100 \text{ Kcal / min}$$

La velocidad máxima posible de transferencia de calor para el agua ($Q_{max,agua}$), es cuando, $T_f = T_c$

$$Q_{max,agua} = m_{ag} \cdot Cp_{ag} (T_{C_1} - T_{F_1}) = 5 \left(\frac{\text{kg}}{\text{min}} \right) \times 1 \left(\frac{\text{Kcal}}{\text{kg.}^\circ\text{C}} \right) \times (90 - 20) \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$Q_{max,agua} = 350 \text{ Kcal / min}$$

La velocidad máxima posible de transferencia de calor para el aceite ($Q_{\max,aceite}$) es cuando: $Tc_2 = Tf_1$

$$Q_{\max,aceite} = \int_{F_1}^{C_1} m_{ac} Cp_{ac} dT_{ac} = m_{ac} \int_{F_1}^{C_1} (0,8 + 0,002T_{ac}) dT_{ac}$$

$$Q_{\max,aceite} = 8 \frac{kg_{ac}}{\min} \left\{ (0,8 \times 90) + 0,002 \times \frac{90^2}{2} - (0,8 \times 20) \times \frac{20^2}{2} \right\}$$

$$Q_{\max,aceite} = 509,6 \frac{Kcal}{\min}$$

La eficiencia del intercambiador,

$$\varepsilon = \frac{Q_{real}}{Q_{max}} = \frac{Q_{real}}{C_{min} (T_{C_1} - T_{F_1})}, \quad C_{min} = m \times Cp$$

$$\varepsilon = \frac{100}{350} = 0,2857 \equiv 28,7\%$$

Otra forma de determinar la eficiencia , es tal como sigue:

- Determinación de la capacidad calorífica mínima C_{min}

$$C_{ag} = m_{ag} \times Cp_{ag} = 5 \left(\frac{kg}{\min} \right) \times 1 \left(\frac{Kcal}{kg \cdot ^\circ C} \right) = 5 \frac{Kcal}{\min \cdot ^\circ C} = C_{min}$$

$$C_{ac} = m_{ac} \times Cp_{ac} = 8 \left(\frac{kg}{\min} \right) \times \left(0,8 + 0,002 \times \frac{90 + 77,07}{2} \right) \left(\frac{Kcal}{kg \cdot ^\circ C} \right)$$

$$C_{ac} = 7,736 \frac{Kcal}{\min \cdot ^\circ C} = C_{max}$$

- Cálculo de la T_{ML}

$$\Delta T_{ML} = \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{Ln \left(\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} \right)} = \frac{\left| \Delta T_2 = T_{C_1} - T_{F_2} = 90 - 40 = 50^\circ C \right|}{\left| \Delta T_1 = T_{C_2} - T_{F_1} = 77,07 - 20 = 57,07^\circ C \right|} = \frac{50 - 57,07}{Ln \left(\frac{50}{57,07} \right)}$$

$$\Delta T_{ML} = 53,45^\circ C$$

- De la ecuación de diseño

$$Q = U \cdot A \cdot \Delta T_{ML} = 100 \frac{Kcal}{\min} = U \cdot A \times 53,45^\circ C \quad \therefore U \cdot A = 1,87 \frac{Kcal}{\min \cdot ^\circ C}$$

$$NTU = \frac{U \cdot A}{C_{min}} = \frac{1,87}{5} = 0,374$$

- La ecuación para determinar la eficiencia , para un intercambiador de calor a contracorriente, es:

$$\varepsilon = \frac{1 - e^{NTU \left(\frac{C_{\min} - 1}{C_{\max}} \right)}}{1 - \frac{C_{\min}}{C_{\max}} e^{NTU \left(\frac{C_{\min} - 1}{C_{\max}} \right)}} = \frac{1 - e^{0,374 \left(\frac{5}{7,736} - 1 \right)}}{1 - \frac{5}{7,736} e^{0,374 \left(\frac{5}{7,736} - 1 \right)}} = 0,2857 \equiv 28,57\%$$

- También se puede determinar mediante la siguiente relación, teniendo en cuenta que la capacidad calorífica min. corresponde al fluido frío

$$\varepsilon = \frac{C_F (T_{F_2} - T_{F_1})}{C_{\min} (T_{C_1} - T_{F_1})} = \frac{(T_{F_2} - T_{F_1})}{(T_{C_1} - T_{F_1})} = \frac{40 - 20}{90 - 20} = 0,2857 \equiv 28,57\%$$

9. Cálculo del área de intercambio térmico

Del balance de energía

$$Q = m_{ac} \cdot Cp_{ac} \cdot dT_{ac} = UdA(T_{ac} - T_{ag})$$

$$m_{ac} (0,8 + 0,002T_{ac}) dT_{ac} = UdA(T_{ac} - T_{ag}) = \frac{10T_{ac}}{T_{ac} - T_{ag}} dA(T_{ac} - T_{ag}) = 10T_{ac} dA$$

$$dA = \frac{m_{ac} (0,8 + 0,002T_{ac}) dT_{ac}}{10T_{ac}}, \text{ integrando}$$

$$A = m_{ac} \int_{T_{C_2}}^{T_{C_1}} \frac{(0,8 + 0,002T_{ac}) dT_{ac}}{10T_{ac}} = \frac{m_{ac}}{10} \left\{ 0,8 \ln \frac{T_{C_1}}{T_{C_2}} + 0,002 (T_{C_1} - T_{C_2}) \right\} =$$

$$A = 0,8 \left\{ 0,8 \ln \frac{90}{77,07} + 0,002 (90 - 77,07) \right\} =$$

$$A = 0,11988 m^2$$

10. También se puede determinar, de la siguiente forma:

$$U = \frac{10T_{aceite}}{T_{aceite} - T_{agua}} = \frac{10(90 - 77,07)}{(90 - 77,07) - (40 - 20)} = 15,6 \frac{Kcal}{m^2 \cdot \text{min} \cdot {}^\circ C}$$

$$U \times A = 1,87 \frac{Kcal}{\text{min} \cdot {}^\circ C} \rightarrow A = \frac{1,87 \left(\frac{Kcal}{\text{min} \cdot {}^\circ C} \right)}{15,6 \left(\frac{Kcal}{m^2 \cdot \text{min} \cdot {}^\circ C} \right)} = 0,11987 m^2$$

Problema N°5

Se dispone de dos tuberías de acero concéntricos, de diámetros interiores 50 mm y 100 mm y espesor 5 mm. Por la tubería interior circula amoniaco líquido, que penetra a la temperatura de 20.C. y velocidad de 3 m/s, mientras que por el extremo opuesto del espacio anular penetra agua a 80 .C. y velocidad 1,5 m/s. La longitud de las tuberías es de 100 m. y la conductividad térmica del acero de 40 w/m.°C. Se supondrá no existen pérdidas térmicas.

Datos:

- Para el NH₃:
 $\rho = 580 \text{ kg/m}^3$; $C_p = 5 \text{ KJ/Kg.}^\circ\text{C}$; $k = 0,50 \text{ w/mK}$; $\nu = 0,34 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$;
 $\text{Pr} = 2$
- Para el agua:
 $\rho = 985 \text{ kg/m}^3$; $C_p = 4,186 \text{ Kj/kg.}^\circ\text{C}$; $k = 0,66 \text{ w/mK}$; $\nu = 0,484 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$;
 $\text{Pr}=3$

Con estos datos determinar:

- a. Los coeficientes de convección correspondientes.
- b. El coeficiente global de transmisión de calor referido a la sección exterior del tubo interior.
- c. La temperatura de salida de los dos fluidos.
- d. El calor intercambiado.

Solución.-

1. Diagrama de flujo

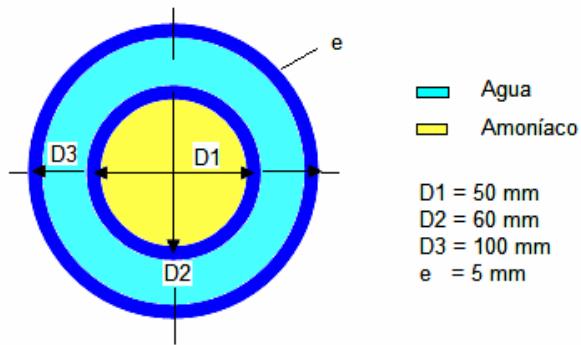


FIGURA N° 8.12 Intercambiador de calor de tubos concéntricos de flujo a contracorriente

Fuente: Elaboración propia, Ing. Alberto Emilio Panama Girio

2. Cálculo del coeficiente de transmisión por convección del amoniaco (fluido frío), que fluye por el interior del tubo interior. Este fluido sufre calentamiento

Diámetro interior del tubo interior, $D_1 = 50 \text{ mm}$

- Flujo másico del amoniaco

$$m_{amon} = vA = 3 \frac{m}{s} \times \frac{\pi(0,05m)^2}{4} \times 580 \frac{kg}{m^3} = 3,4165 \frac{kg}{s} \equiv 12300 \frac{kg}{h}$$

- Determinación del número de Reynolds (para el flujo del amoniaco)

$$Re = \frac{V \cdot D_1}{\nu} = \frac{3 \frac{m}{s} \times 0,05m}{0,34 \times 10^{-6} \frac{m^2}{s}} = 441176 \text{ (flujo turbulento)}$$

- Cálculo del número de Nusselt, para luego hallar el coeficiente por convección por el lado del amoniaco (hi), para esto se hará uso de la ecuación de Dittus-Boelter, este fluido sufre calentamiento

$$Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^n; \quad n = 3 \text{ (para enfriamiento)} \\ n = 4 \text{ (para calentamiento)}$$

$$Nu = 0,023(441176)^{0,8} (2)^{0,4} = 995 = \frac{hi \times D_1}{k_{amon}}$$

$$hi = \frac{Nu \times k_{amon}}{D_1} = \frac{995 \times 0,5}{0,05} = 9950 \frac{W}{m^2 \cdot K}$$

3. Cálculo del coeficiente de transmisión por convección del agua (fluido caliente), que fluye por el anulo. Este fluido sufre enfriamiento

3.1 Se debe usar el diámetro hidráulico (D_H)

$$D_H = 4 \left(\frac{\pi / 4 (D_3^2 - D_2^2)}{\pi (D_3 + D_2)} \right) = D_3 - D_2 = 100 - 60 = 40mm$$

3.2 Cálculo del numero de Reynolds

$$Re = \frac{V \cdot D_H}{\nu} = \frac{1,5 \frac{m}{s} \times 0,040m}{0,48 \times 10^{-6} \frac{m^2}{s}} = 125000 \text{ (flujo turbulento)}$$

3.3 Cálculo del número de Nusselt, para luego hallar el coeficiente por convección por el lado del agua (h_o), para esto se hará uso de la ecuación de Dittus-Boelter, este fluido sufre enfriamiento

$$Nu = 0,023 \text{Re}^{0.8} \text{Pr}^n; \quad n = 3 \text{ (para enfriamiento)} \\ n = 4 \text{ (para calentamiento)}$$

$$Nu = 0,023(125000)^{0.8} (3)^{0.3} = 382,3 = \frac{h_o \times D_H}{k_{\text{agua}}}$$

$$h_o = \frac{Nu \times k_{\text{agua}}}{D_H} = \frac{382,3 \times 0,66}{0,04} = 6307,75 \frac{W}{m^2 \cdot K}$$

4. El coeficiente de transmisión de calor global (U), referido a la sección transversal exterior del tubo interior, se determina mediante la relación

$$U_o = \frac{1}{\frac{r_2}{r_1 \times h_{NH_3}} + \frac{r_2}{k} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{h_{H_2O}}} = \frac{1}{\frac{30}{25 \times 9950} + \frac{0,03}{40} \ln \frac{30}{25} + \frac{1}{6307,75}} =$$

$$U_o = 2400 \frac{W}{m^2 \cdot K}$$

5. Cálculos de las temperaturas de salida de los fluidos

5.1 Determinación de las razones de capacidad térmica, para el amoniaco y el agua

- Para el amoniaco:

$$C_{NH_3} = (m.Cp)_{NH_3} = 12300 \frac{kg}{h} \times 5 \frac{Kj}{kg \cdot ^\circ C} = 61500 \frac{Kj}{h \cdot ^\circ C} \equiv 17,08 \frac{Kj}{s \cdot ^\circ C}$$

- Para el agua:

Cálculo del flujo mÁsico del agua

$$m_{H_2O} = Qv \times \rho = v.A.\rho = \frac{\pi(D_3^2 - D_2^2)}{4} v.\rho = \frac{\pi(0,1^2 - 0,06^2)m^2}{4} \times 1,5 \frac{m}{s} \times 985 \frac{kg}{m^3} =$$

$$m_{H_2O} = 7,4267 \frac{kg}{s} \equiv 26736 \frac{kg}{h}$$

$$C_{H_2O} = (m.Cp)_{H_2O} = 26736 \frac{kg}{h} \times 4,184 \frac{Kj}{kg.^{\circ}C} = 11918 \frac{Kj}{h.^{\circ}C} \equiv 31,088 \frac{Kj}{s.^{\circ}C}$$

- De las razones de capacidad térmicas calculadas, se tiene:

$$C_{NH_3} = C_{min} = 17,08 \frac{Kj}{s.^{\circ}C} = C_F \quad (\text{fluido frío})$$

$$C_{H_2O} = C_{max} = 31,08 \frac{Kj}{s.^{\circ}C} = C_C \quad (\text{fluido caliente})$$

5.2 Cálculo de la superficie de intercambio térmico, basado en el radio exterior del tubo interior

$$A_2 = 2\pi r^2 L = 2\pi \times 0,03m \times 100m = 18,85m^2$$

5.3 El número de unidades de transferencia de calor (NTU), es:

$$NTU = \frac{(A.U)_2}{C_{min}} = \frac{18,85m^2 \times 2400 \frac{W}{m^2.^{\circ}C}}{17,08 \frac{Kj}{s.^{\circ}C}} = 2,6486$$

5.4 Cálculo de la razón de capacidades caloríficas (R_C)

$$R_C = \frac{C_{min}}{C_{max}} = \frac{17,08}{31,088} = 0,5494$$

5.5 La eficiencia del intercambiador de calor se puede determinar mediante la gráfica Nº interceptando los valores de NTU y R_C , o mediante la siguiente ecuación (intercambiador de calor con flujos a contracorriente)

$$\epsilon = \frac{1 - e^{\left\{ NTU \left(\frac{C_{min}}{C_{max}} - 1 \right) \right\}}}{1 - \frac{C_{min}}{C_{max}} e^{\left\{ NTU \left(\frac{C_{min}}{C_{max}} - 1 \right) \right\}}} = \frac{1 - e^{\left\{ 2,6486 \left(\frac{17,03}{31,088} - 1 \right) \right\}}}{1 - \frac{17,03}{31,088} e^{\left\{ 2,6486 \left(\frac{17,03}{31,088} - 1 \right) \right\}}} = 0,8361$$

5.5 Las temperaturas de salida de los fluidos serán :

$$T_{C_2} = T_{C_1} - (T_{C_1} - T_{F_1}) \epsilon \frac{C_{min}}{C_{max}} = 80 - (80 - 20) \times 0,8361 \times 0,5494 = 52,5^{\circ}C$$

$$T_{F_2} = T_{F_1} + (T_{C_1} - T_{F_1}) \varepsilon \frac{C_{\min}}{C_F} = 20 + (80 - 20) \times 0,8361 \times 1 = 70,17^{\circ}\text{C}$$

6. El calor intercambiado se puede determinar, mediante:

$$Q = UA \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}} = \varepsilon C \min(T_{C_1} - T_{F_1})$$

$$\Delta T_2 = (T_{C_1} - T_{F_2}) = 80 - 71,17 = 9,83$$

$$\Delta T_1 = (T_{C_2} - T_{F_1}) = 52,5 - 20 = 32,5$$

- Reemplazando valores se tiene :

$$Q = 2400 \frac{w}{m^2.K} \times 18,85 m^2 \times \frac{9,83 - 32,5}{\ln \frac{9,83}{32,5}} = 857,66 Kw$$

- El flujo de calor se puede determinar mediante la otra ecuación

$$Q = 0,8361 \times 17,08 \frac{Kj}{s.^{\circ}\text{C}} \times (80 - 20) = 856,8 Kw$$

Problema N° 6

Un intercambiador de calor de un solo paso en flujo cruzado usa gases de escape calientes (mezclados) para calentar agua (sin mezclar) de 30 a 80°C a un flujo de 3 Kg./s. Los gases de escape, que tienen propiedades termo físicas similares a las del aire, entran y salen del intercambiador a 225 y 100°C, respectivamente. Si el coeficiente global de transferencia de calor es 200W/m²*K, estime el área de la superficie que se requiere.

Solución:

1. Diagrama de flujo

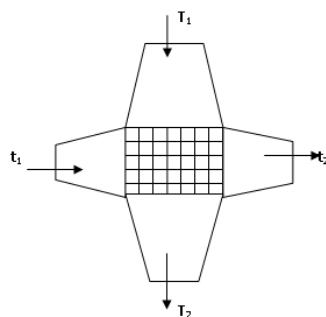


FIGURA N° 8.13 Intercambiador de calor de flujos cruzados

Fuente: Elaboración propia, Ing. Alberto Emilio Panana Girio

2. Cálculo del área de transferencia

$$A = Q / U \Delta T F_T$$

3. Determinación de la razón de capacidad (R) y la razón de efectividad (P)

$$P = \frac{(80-30)}{(225-30)} = 0.26 ; R = \frac{(225-30)}{(80-30)} = 2.5$$

4. Mediante la grafica para flujo cruzado, con fluidos sin mezclar se determina el factor de corrección de temperaturas

$$F_T = 0.92$$

5. El flujo de calor es::

$$Q = m * Cp * \Delta T = 3\text{kg/s} * 4184\text{J/Kg}^{\circ}\text{K} * (80-30) =$$

6. La diferencia media logarítmica de temperaturas

$$\Delta T_{ML} = \frac{(225-80) - (100-30)}{\ln \frac{(225-80)}{(100-30)}} = 103^{\circ}\text{C}$$

7. Reemplazamos estos datos en la ecuación (2):

$$A = Q / U \Delta T F_T = 627.600 / (200 * 0.92 * 103) = 33.1 \text{ m}^2$$

8.12 Problemas propuestos

PROBLEMA N°1

- 1.- Se dispone de un intercambiador de dos pasos por la coraza y cuatro pasos por los tubos, para enfriar 5kg/s de amoniaco líquido a 70°C, de calor específico $C_p = 4620\text{J/Kg.K}$, por medio de 8kg/s de agua a 15°C. ($C_p = 4186\text{J/Kg.K}$). Si el área de transferencia de calor es de 40m^2 y el coeficiente global de transferencia de calor esperado es de $2000\text{W/m}^2.\text{K}$, cuando el amoniaco está sobre el lado de la coraza. Determine:

- a. El calor transferido.
- b. La eficiencia del intercambiador.

PROBLEMA N°2

Se va a calentar aceite de motor ($C_p = 2\ 100 \text{ J/kg. } ^\circ\text{C}$) de 20 a.C. hasta 60 a.C., a razón de 0,3 Kg./s, en un tubo de cobre de pared delgada y de 2 cm de diámetro, por medio de vapor de agua en condensación que se encuentra afuera a una temperatura de 130 a.C. ($h_{fg} = 2\ 174 \text{ KJ/kg.}$). Para un coeficiente de transferencia de calor total de $650 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$, determine la velocidad de la transferencia de calor y la longitud requerida del tubo para lograrlo.

PROBLEMA N°3

Cierto intercambiador de calor de tubos concéntricos, tiene un área de superficie exterior total de 17.5 m^2 . Se requiere para utilizarlo en el enfriamiento de aceite cuya temperatura es de 200°C , con una razón de flujo de masa de 10000 Kg/h y con un calor específico de 1900 J/Kg.K . Se dispone de agua a razón de flujo de 3000 Kg/h y con temperatura de 20°C , de calor específico $C_p = 4181.8 \text{ J/Kg.K}$, como agente congelante. Si el coeficiente de transferencia de calor total es $300 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ basado en el área externa, calcular la transferencia de calor intercambiado, si se opera:

- a. En forma de flujo paralelo.
- b. En forma de flujo a contracorriente.

PROBLEMA N°4

Vapor saturado a 0.14 bar se condensa en un intercambiador de calor de coraza y tubos con un paso por la coraza y dos pasos por los tubos que consisten en 130 tubos de bronce, cada uno con una longitud por paso de 2 m.

Los tubos tienen diámetro interior y exterior de 13.4 mm y 15.9 mm, respectivamente. El agua de enfriamiento entra en los tubos a 20°C con una velocidad media de 1.25 m/s.

El coeficiente de transferencia de calor para la condensación en las superficies exteriores de los tubos es $13,500 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{K}$.

- a. Determine el coeficiente global de transferencia de calor (U), la temperatura de salida del agua de enfriamiento (T_c) y el flujo de condensación de vapor (m_h).
- b. Con todas las demás condiciones iguales, pero teniendo en cuenta los cambios en el coeficiente global. Grafique la temperatura de salida del

agua de enfriamiento (T_c) y el flujo de condensación de vapor (\dot{m}_h) como función del flujo de agua para $10 \dot{m}_c = 30\text{kg/s}$.

Problema N°5

Aceite caliente ($C_p = 2200 \frac{J}{Kg \cdot ^\circ C}$) se va a enfriar por medio de agua ($C_p = 4180 \frac{J}{Kg \cdot ^\circ C}$) en un intercambiador de calor de dos pasos de coraza y 12 pasos por los tubos. Estos son de pared delgada y están hechos de cobre con un diámetro de 1.8 cm, la longitud de cada paso de los tubos en el intercambiador es de 3 m y el coeficiente de transferencia de calor total es de $340 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}$. Por los tubos fluye el agua a una razón total de 0.1Kg/s y por la coraza fluye aceite a razón de 0.2Kg/s. El agua y el aceite entran a las temperaturas de $18^\circ C$ y $160^\circ C$ respectivamente.

Determine:

- La razón de transferencia de calor en el intercambiador.
- Las temperaturas de salida de las corrientes de agua y del aceite.

IX. REFERENCIALES

1. YUNUS A. ÇENGEL, YUNUS A, Transferencia de calor, Impreso en México: Editorial McGraw Hill. Segunda edición, 2004.
2. CHAPMAN ALAN J, Fundamentals de Heat Transfer, Printed in the United States of America: Editorial Macmillan Publishing Company, Cuarta Edición, 1974.
3. HOLMAN J.P, Transferencia de calor. España: Editorial McGraw – Hill / Interamericana de S. A. U. Octava Edición, 1998.
4. KERN DONALD Q, Procesos de transferencia de calor, México: Editorial Continental. S.A, Edición Décimo Novena, 1986.
5. KREITH FRANK, Bohn Mark S., Principios de Transferencia de Calor, Impreso en México: Editorial Thomson Learning, Sexta edición, 2001
6. LIENHARD JOHN H, Heat transfer, Massachetts U.S.A. Published by Phlogiston Press, Cambridge,. Third Edition. 2002.
7. MANRIQUE VALADEZ JOSÉ ANGEL, Transferencia de calor. Impreso en México: Editorial Oxford University Press, Segunda edición., 2002.
8. MILLS ANTHONY F, Transferencia de calor, Impreso en Colombia: Editorial McGraw – Hill / Irwin, 1994.
9. NOVELLA E. COSTA. Ingeniería Química, 4. Transmisión de Calor Impreso en España: Editorial Alambra S.A. Primera Edición. 1986

10. OCÓN GARCÍA JOAQUÍN, TOJO BARREIRO GABRIEL.
Problemas de Ingeniería Química, Madrid, España: Tomo I
Editorial Aguilar S. A. 1963.
11. SPIGEL MURRIA R.,.. Fórmulas y tablas de Matemática Aplicada.
España: Editorial McGraw – Hill / Interamericana, Segunda
Edición, 2005
12. WELTY J.R. WICKS C.E, WILSON R.E, Fundamentos de
transferencia de momento, calor y masa, Impreso en México:
Editorial Limusa S. A. Primera Edición, 1982
13. INCROPERA FRANK P Y DEWITT DAVID P, Fundamentos de
Transferencia de Calor, Impreso en México: Editorial Pearson,
Cuarta Edición, 1996
14. KAYS W.M Y LONDON J, Compact Heat Exchangers, Nueva
York Ed. McGraw-Hill, 3a Edición, 1984

INTERNET

15. http://es.wikipedia.org/wiki/intercambiador_de_calor.

Intercambiador de calor de Wikipedia, la enciclopedia libre.
16/09/2007.

16. <http://www.ellaboratorio.sevif.org>. Generalidades del
intercambiador de placas. 30/03/2005.

17. http://www.scielo.org.ve/cielo.php?pid=S0378-18442001000900003&script=sci_artt... Efecto en la

hidrodinámica y transferencia de calor del desfasamiento entre placas de un intercambiador de calor de placas onduladas.

30/03/2005.

18. http://www.scielo.cl/scielo.php?pid=S07642004000400007&script=sci_arttext. Evaluación de intercambiador de calor compacto de tubos aleteados.
16/09/2007.
19. <http://www.itsimo.edu.mx/metalmechanica/tema1intercambiadoresdecalorudemavarra.pdf>
20. <http://torresdeenfriamiwento.blogspot.com/2007/02/torres-de-enfriamiento.html>.

APENDICE

NOMENCLATURA

Símbolo	Cantidad	Sistema Internacional de Unidades
A	Área de transferencia de calor	m ²
Ac	Área de sección transversal de la aleta	m ²
Amin	Área mínima de flujo libre	m ²
Af	Área total de transferencia de calor del lado del aire	m ²
Cp	calor específico a presión constante	J/kg°K
C	Capacidad térmica	J/°K
d	Diámetro del tubo	m
Dh	diámetro hidráulico	m
dA	Área de la superficie del lado del aire en un elemento infinitesimal	m
dQ	Flujo de calor total en un elemento	W
f	factor de fricción de Darcy	
g	aceleración de gravedad	m/s ²
gc	factor de conversión de dimensiones	1 kg.m/N.s ²
G	gasto másico	kg/m ² .s
h	coeficiente de transferencia de calor	W/m ² .°K
h _D	coeficiente de transferencia de masa	
h _w	coeficiente de transferencia de calor bajo condiciones de superficie húmeda	
i	Entalpía del aire húmedo por unidad de masa de aire seco	J/kg
i _{fg}	Calor latente de vaporización	J/kt
j	Factor de Colburn	
k	Conductividad térmica	W/m.°K

l	longitud de la aleta (distancia media entre las placas)	m
L	longitud de la matriz del intercambiador de calor	m
Lf	altura de las aletas	mm
m	velocidad de flujo de masa	kg
M	peso molecular	g/gmol
N	número de placas	
P	Perímetro de la aleta	m
q	flujo de calor por unidad de área y unidad de tiempo	W/m ²
q ₀	calor generado por unidad de volumen	W/m ³
Q	cantidad de calor	W
r	radio, rh radio hidráulico, ri radio interior, ro radio exterior.	m
R	Resistencia térmica, Rc resistencia térmica por convección Rk resistencia por conducción, Rr resistencia térmica por Radiación	K/W
t	espesor de aletas	mm
T	Temperatura	°K, °C
U	Coeficiente global de transferencia de calor	W/m ² °K

Letras griegas

	Difusividad térmica = k/ c	m²/s
,	Volumen entre placas/Área de transferencia de calor	m ⁻¹
δ	espesor	m
η	Eficiencia de la aleta	
‐	diferencia de valores	
μ	Viscosidad dinámica	N.s/m ²
	viscosidad cinemática= μ/	m ² /s

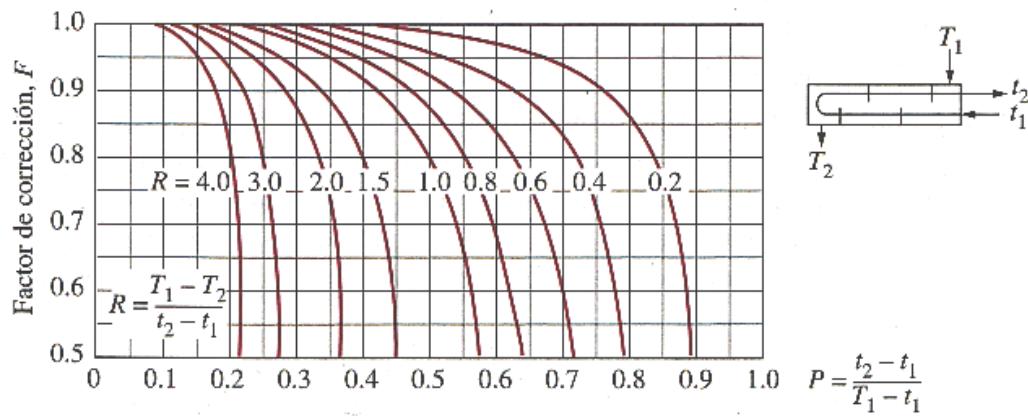
densidad	kg/m ³
Factor de escala	

Números adimensionales

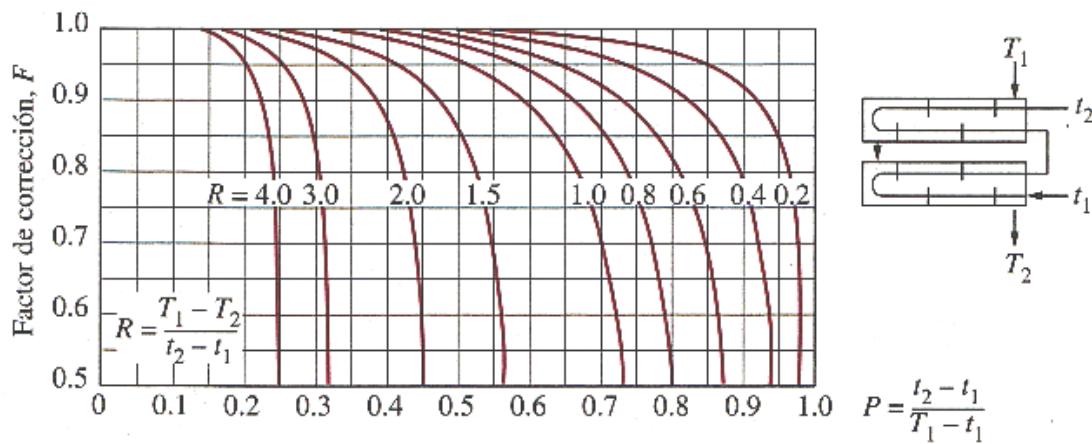
Bi	Número de Biot = hL/k o hr/k
Fo	Número de Fourier = t/L^2 o t/r^2
Gz	Número de Graetz = $(\delta/L) Re Pr (D/L)$
Gr	Número de Grashof = $gL^3 \Delta T / v^2$
Nu	Número de Nusselt promedio = hD/k
Pr	Número de Prandtl = $c_p \mu / k$
Re	Número de Reynolds = $v D / \mu$
St	Número de Stanton = $h / v c_p$ o $U_n / Re Pr$

ANEXOS

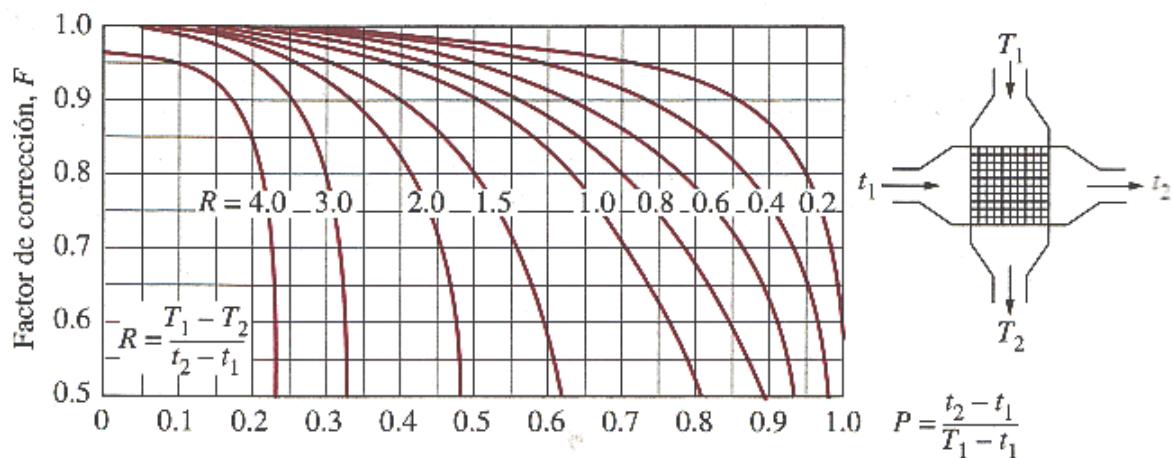
FIGURA N° 8.14 Diagrama del factor de corrección F para intercambiadores de calor comunes de casco y tubos y de flujo cruzado
(tomado de Bowman, Mueller y Tagle, Ref.2)



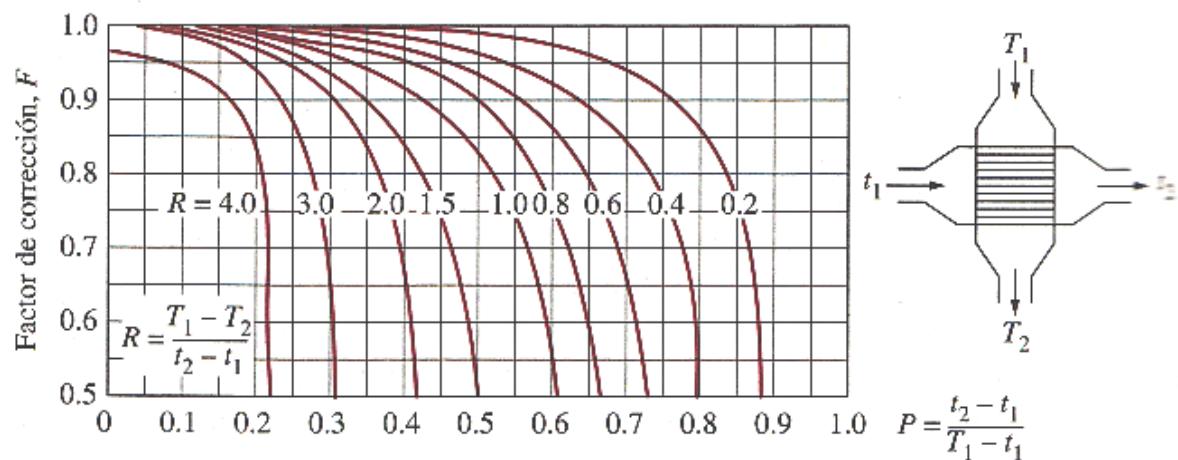
a) Un paso por el casco y 2, 4, 6, etc. (cualquier múltiplo de 2) pasos por los tubos



b) Dos pasos por el casco y 4, 8, 12, etc. (cualquier múltiplo de 4) pasos por los tubos



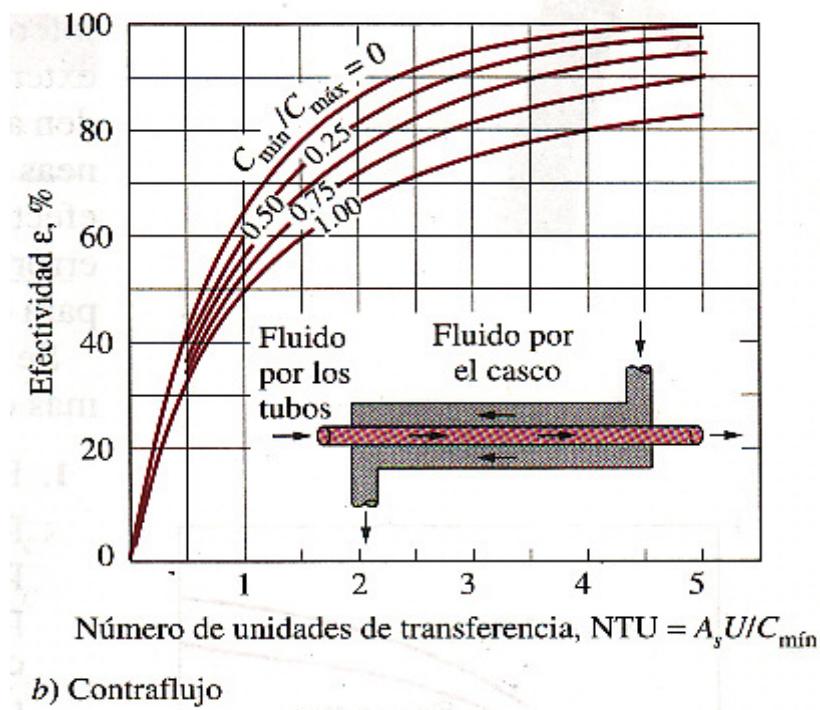
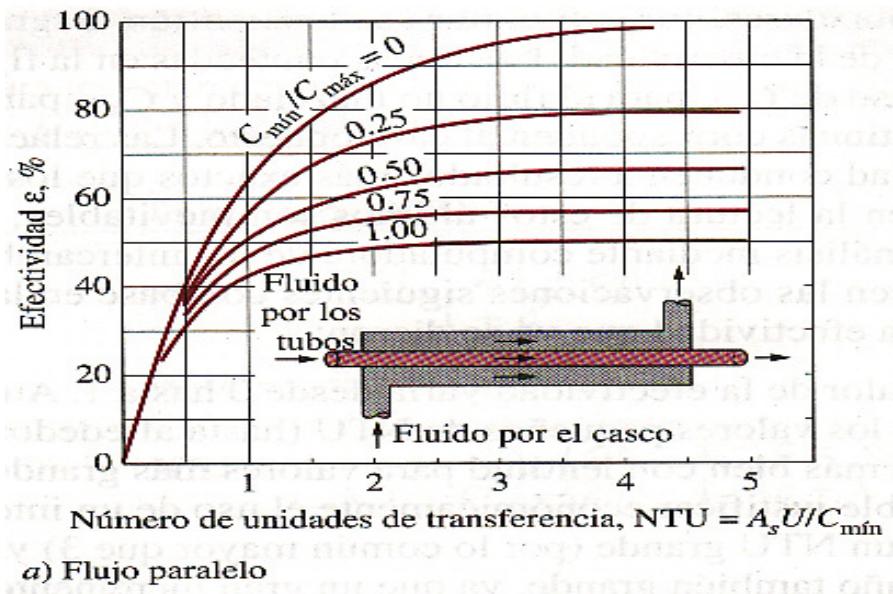
c) Flujo cruzado de un solo paso con los dos fluidos de flujo no mezclado

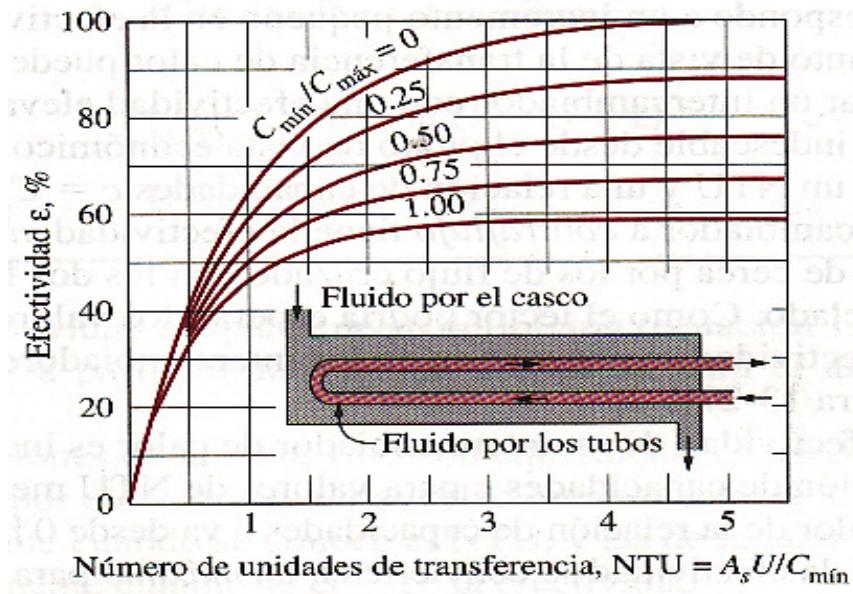


d) Flujo cruzado de un solo paso con uno de los fluidos de flujo mezclado y el otro no mezclado

Fuente: Cengel Yunus A, Transferencia de calor, Tercera Edición, 2004

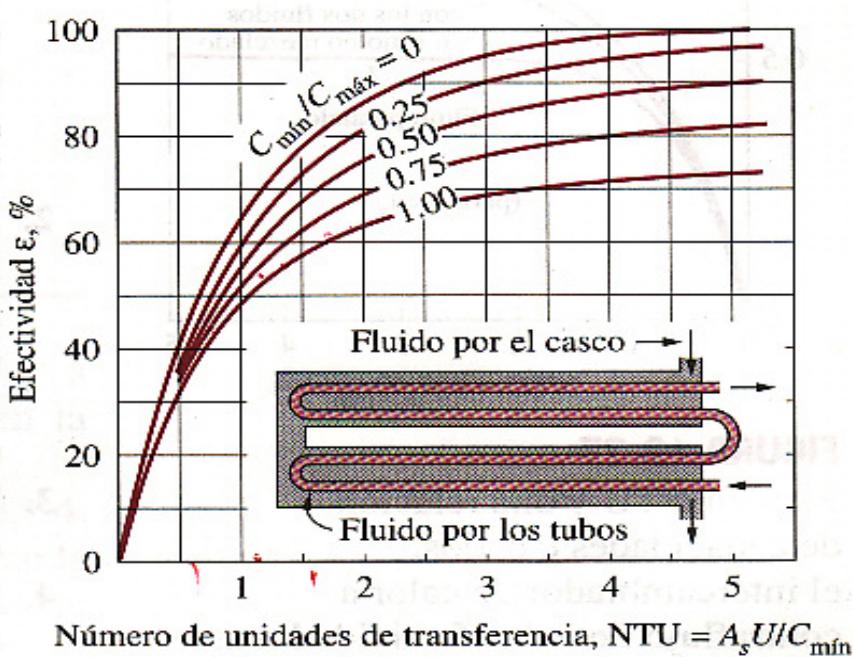
FIGURA N° 8.15 EFECTIVIDAD PARA LOS INTERCAMBIADORES DE CALOR (TOMADO DE KAYS Y LONDON, Ref. 5)





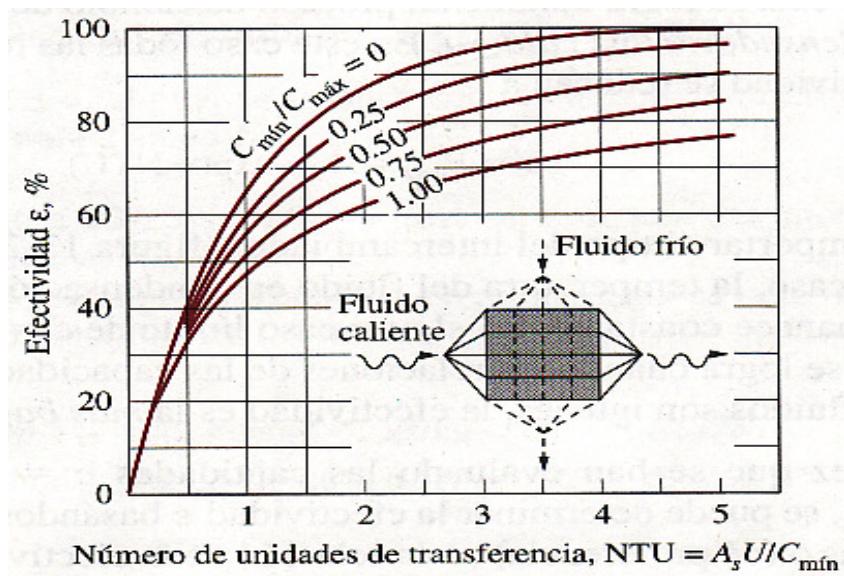
Número de unidades de transferencia, $NTU = A_s U / C_{\min}$

c) Un paso por el casco y 2, 4, 6, . . . pasos por los tubos

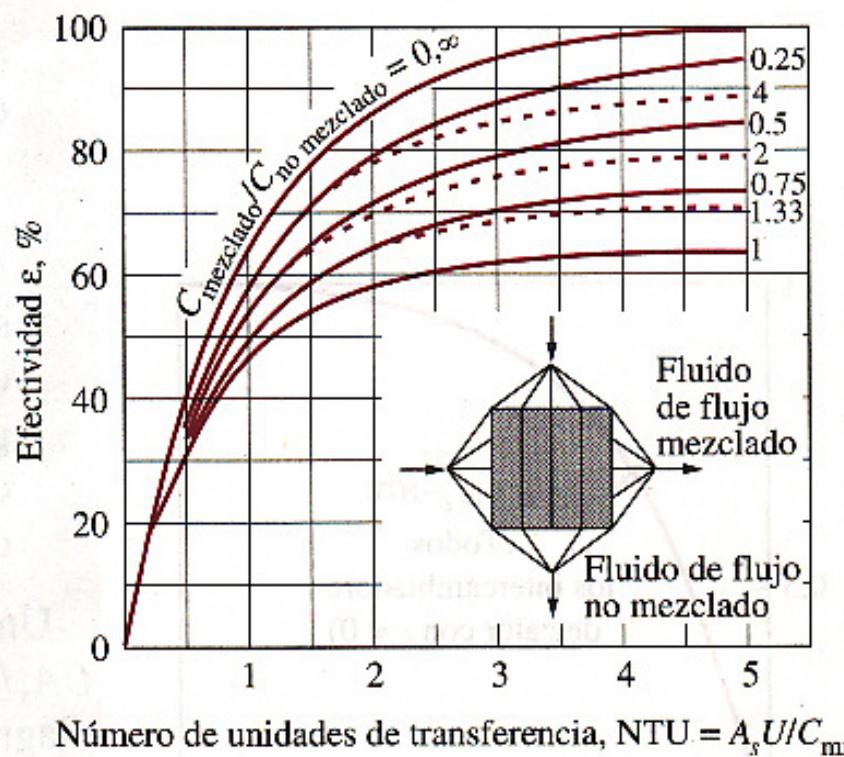


Número de unidades de transferencia, $NTU = A_s U / C_{\min}$

d) Dos pasos por el casco y 4, 8, 12, . . . pasos por los tubos



e) Flujo cruzado con los dos fluidos de flujo no mezclado



f) Flujo cruzado con uno de los fluidos de flujo mezclado y el otro no mezclado

Fuente: Cengel Yunus A, Transferencia de calor, tercera Edición, 2004

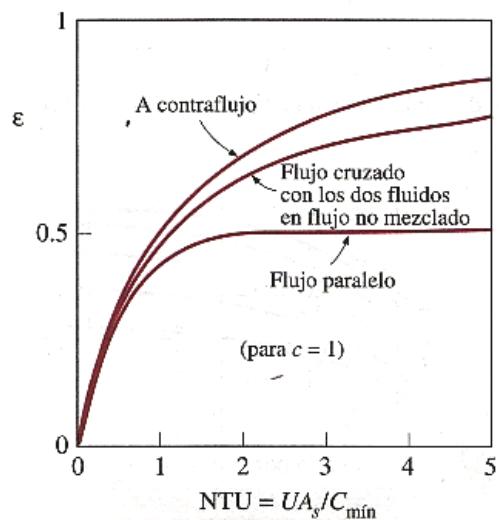


Figura N° 8.16 Para un NTU y una relación de capacidades C dados, el intercambiador de calor a contraflujo tiene la efectividad más alta y el de flujo paralelo, la más baja

Fuente: Cengel Yunus A, Transferencia de calor, tercera Edición, 2004

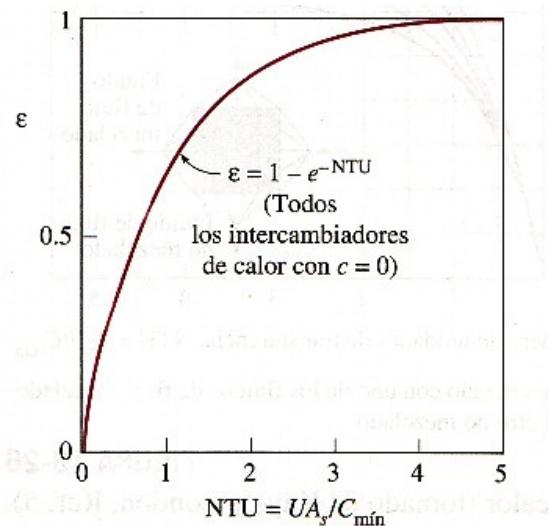


Figura N° 8.17 La relación para la efectividad se reduce a :

$$\varepsilon = \varepsilon_{\max} = 1 - \exp(-\text{NTU}), \text{ para todos los intercambiadores de calor, cuando la relación de capacidades } C = 0$$

Fuente: Cengel Yunus A, Transferencia de calor, tercera Edición, 2004

Tabla N° 6 Factores de resistencia por ensuciamiento normales

Tipo de fluido	Requiv (m².K/W)
Agua de mar por debajo de 325 K	0,0009
Agua de mar por encima de 325 K	0,0003
Agua de alimentación de calderas por encima de 325 K	0,0005
Agua de río	0,001-0,004
Agua condensada en un ciclo cerrado	0,0005
Agua de torre de refrigeración tratada	0,001 – 0,002
Gasóleo ligero	0,0020
Gasóleo pesado	0,0030
Asfalto	0,0050
Gasolina	0,0010
Queroseno	0,0010
Soluciones cáusticas	0,0020
Fluido hidráulico	0,0010
Sales fundidas	0,0005
Aceite para temple	0,0007
Gases de escape de un motor	0,0100
Aceite combustible	0,0050
Aceite para transformadores	0,0010
Aceite vegetales	0,0030
Vapores de alcohol	0,0001
Vapor, cojinete sin aceite	0,0005
Vapor, con aceite	0,0010
Vapores refrigerantes, con aceite	0,0020
Aire comprimido	0,0010
Líquido refrigerante	0,0010

Fuente: Kreith Frank, Bohn Mark S, Principios de transferencia de calor Sexta Edición, 2001





UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE INGENIERIA QUIMICA
INSTITUTO DE INVESTIGACION DE INGENIERIA QUIMICA

Bellavista, 07 de Diciembre del
2009

Señor:

Ing. OSCAR CHAMPA HENRIQUEZ
DIRECTOR DEL INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN DE LA FIQ

Presente.-

De mi mayor consideración:

Me es grato dirigirme a usted, para saludarlo muy cordialmente y a la vez presentarle el Informe Trimestral Nº 01 (Octubre, Noviembre, Diciembre) de mi Proyecto de Investigación titulado “**TEXTO UNIVERSITARIO: TRANSFERENCIA DE CALOR**”; que fue desarrollado de acuerdo al Cronograma de Actividades presentado en el Proyecto.

Con la seguridad de contar con su atención al presente quedo de usted,

Atentamente,

Ing. Alberto Emilio Panana Girio

Investigador responsable

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE INGENIERIA QUIMICA



INSTITUTO DE INVESTIGACION DE INGENIERIA QUIMICA

Bellavista, 11 de Diciembre del
2007

Señor:

Lic. SANTOS RODRIGUEZ CHUQUIMANGO

DIRECTOR DEL INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN DE LA FIQ

Presente.-

De mi mayor consideración:

Me es grato dirigirme a usted, para saludarlo muy cordialmente y a la vez presentarle el Informe Trimestral Nº 01 (Octubre, Noviembre, Diciembre) de mi Proyecto de Investigación titulado "**Diseño de un intercambiador de calor compacto de placas con aletas para fluidos gas - gas**"; que fue desarrollado de acuerdo al Cronograma de Actividades presentado en el Proyecto.

Con la seguridad de contar con su atención al presente quedo de usted,

Atentamente,

Ing. Alberto Emilio Panana Girio

Investigador responsable

$Q_a = 3850.8$
Kcal/hm²