

Tarea 10 - Método numéricos
Giovanni Gamaliel López Padilla

Índice

1. Introducción	1
2. Métodos	2
2.1. Método de las potencias inversas	2
2.2. Método de la potencia inversa con deflación	2
2.3. Método de Jacobi	3
3. Resultados	4
3.1. Método de la potencia inversa con deflación	5
3.2. Método de Jacobi	5
4. Conclusiones	5

1. Introducción

Sea A una matriz de $n \times n$ con componentes reales. El número λ se denomina *valor característico* (*eigenvalor*) de A si existe un vector diferente de cero (v) tal que

$$Av = \lambda v \quad (1)$$

El vector v se denomina *vector característico* (*eigenvector*) de A correspondiente al eigenvalor λ . Se dice que λ es un eigenvalor de A si y sólo si

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0 \quad (2)$$

donde I es la matrix identidad y p se denomina como el polinomio característico de A . El grado del polinomio p es de grado n , entonces se obtiene que existen n eigenvalores para la matriz A .

Para un número grande de n , el resolver la ecuación característica es difícil de resolver. Es por ello que se plantearon métodos iterativos para aproximar a las raíces de la ecuación característica, es decir, los eigenvalores. Llamamos a el eigenvalor dominante (λ_1) al eigenvalor con mayor valor absoluto de A (ecuación 3).

$$|\lambda_1| > |\lambda_i| \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (3)$$

2. Métodos

2.1. Método de las potencias inversas

El método de las potencias inversas se basa en el hecho que los eigenvalores μ de la matriz inversa de A (A^{-1}) pueden ser calculados con la ecuación 4.

$$\mu_i = \frac{1}{\lambda_i} \quad (4)$$

Por lo tanto, la ecuación 1 puede ser escrita de la siguiente manera:

$$A^{-1}v_i = \mu_i v_i \quad (5)$$

En este método para obtener el eigenvector v_i , se tiene que resolver la ecuación matricial señalada en la ecuación 6.

$$Av_i = v_i \quad (6)$$

donde el vector inicial v_0 tiene que estar normalizado y al obtener el vector v_i este debera pasar por el proceso de normalización. El método de las potencias inversas se asemeja mucho al método de las potencias, este obtiene el valor absoluto mayor de la matriz A^{-1} . Por la relación descrita en la ecuación 4, entonces al obtener el μ_i , estaremos obteniendo a su vez λ_n , el cual es el eigenvalor con menor valor absoluto de A . Por lo tanto, para calcular este valor se realiza la ecuación 7.

$$\lambda_i = \frac{\langle v_{i-1}, v_{i-1} \rangle}{\langle v_i, v_{i-1} \rangle} \quad (7)$$

La convergencia del algoritmo que se implemento fue usando la ecuación 8.

$$\theta = |\lambda_i - \lambda_{i-1}| \quad (8)$$

El método de las potencias inversas es descrito en el pseudo código 1.

Algorithm 1: Método de las potencias inversas

Input: A
Output: v_i y λ_i

```

1  $v_0 \leftarrow \text{initialize\_vector}(v_0)$ 
2 while  $\theta > 10^{-6}$  do
3    $v_i \leftarrow \text{solve}(Av_i = v_{i-1})$ 
4    $\lambda_i \leftarrow \frac{\langle v_{i-1}, v_{i-1} \rangle}{\langle v_i, v_{i-1} \rangle}$ 
5    $v_i \leftarrow \text{normalize}(v_i)$ 
```

2.2. Método de la potencia inversa con deflación

Al igual que el método de deflación, este método eliminará las contribuciones de los vectores que ya no son necesarios calcular. En este caso se iniciará calculando el eigenvalor con menor valor absoluto (λ_n), en seguida el método tratara de obtener el siguiente eigenvalor mayor (λ_{n-1}).

Por lo tanto, el método de deflación inversa puede ser condensado en el algoritmo 2.

Algorithm 2: Método de la potencia inversa con deflación

Input: A, m
Output: v y λ

```

1 for  $i=1, m$  do
2    $v_0 \leftarrow \text{initialize\_vector}(v_0)$ 
3   for  $j=1, i-1$  do
4      $v_0 \leftarrow v_0 - \langle v_i, v_j \rangle v_j$ 
5   while  $\theta > 10^{-6}$  do
6      $v_i \leftarrow \text{solve}(Av_i = v_{i-1})$ 
7      $\lambda_i \leftarrow \frac{\langle v_{i-1}, v_{i-1} \rangle}{\langle v_i, v_{i-1} \rangle}$ 
8      $v_i \leftarrow \text{normalize}(v_i)$ 
9     for  $j=1, i-1$  do
10       $v_i \leftarrow v_i - \langle v_i, v_j \rangle v_j$ 
  
```

2.3. Método de Jacobi

El método de Jacobi recibe una matriz simétrica A , la cual reducirá a una matriz diagonal por medio de transformaciones dadas por matrices ortogonales. Consideremos la matriz de rotación $J(i, j, \theta)$ (ecuación 9).

$$J(i, j, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cos(\theta) & \cdots & \sin(\theta) & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -\sin(\theta) & \cdots & \cos(\theta) & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

donde i, j denotan la posición de los elementos diferentes en la matriz identidad. Los valores de la matriz J , deben satisfacer la siguiente relación:

$$\begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ij} & a_{jj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{ii} & 0 \\ 0 & a'_{jj} \end{pmatrix}^T$$

donde $c = \cos(\theta)$ y $s = \sin(\theta)$. Entonces, se puede deducir que:

$$\cos(2\theta)a_{ij} + \frac{1}{2}\sin(2\theta)(a_{ii} - a_{jj}) = 0$$

entonces:

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2a_{ij}}{a_{ii} - a_{jj}} \right)$$

en el caso en que $a_{ii} = a_{jj}$, entonces $\theta = \frac{\pi}{4}$.

La manera en que se elijen las posiciones i, j es encontrando la posición del elemento con valor absoluto mayor de la matriz A fuera de la diagonal.

La convergencia de este método es dado con la siguiente ecuación:

$$\max\{a_{ij}\} < tol \quad i \neq j$$

Se busca esta convergencia en los valores de $i = 1, 2, \dots, n-1$ $j = i+1, i+2, \dots, n$. Esto es porque la matriz A se supone que es simétrica.

Los eigenvalores se encontrarán en la diagonal de la matriz A al final del método. Los eigenvectores asociados a cada eigenvalor pueden ser calculados con la siguiente operación

$$v = J_1 J_2 J_3 \dots J_n$$

Por lo tanto, el algoritmo de Jacobi puede ser escrito de la siguiente manera:

Algorithm 3: Método de Jacobi

Input: A

Output: v y λ

```

1  $v \leftarrow I_{n \times n}$ 
2 while  $|\max\{a_{ij}\}| > tol$  do
3    $i, j \leftarrow pos(|\max\{a_{ij}\}|)$ 
4    $\theta = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2a_{ij}}{a_{ii} - a_{jj}}\right)$ 
5    $A \leftarrow J^T A J$ 
6    $v \leftarrow v J$ 
```

En este trabajo, el proceso de la línea 5 y 6 se optimizó para realizar únicamente la multiplicación en los elementos afectados por la rotación. Usando las siguientes relaciones:

$$a_{ip}^{(k)} = a_{ip}^{(k-1)} \cos(\theta) + a_{iq}^{(k-1)} \sin(\theta) \quad (10)$$

$$a_{iq}^{(k)} = a_{iq}^{(k-1)} \cos(\theta) - a_{ip}^{(k-1)} \sin(\theta) \quad (11)$$

$$a_{pj}^{(k)} = a_{pj}^{(k-1)} \cos(\theta) + a_{qj}^{(k-1)} \sin(\theta) \quad (12)$$

$$a_{qj}^{(k)} = a_{qj}^{(k-1)} \cos(\theta) - a_{pj}^{(k-1)} \sin(\theta) \quad (13)$$

donde $a_{ij}^{(0)}$ son los elementos de la matriz A . Para el cálculo de los eigenvectores se usan las ecuaciones 10 y 11 tomando en cuenta que $a^0 = I$.

3. Resultados

Para la demostración de algunos resultados se usaron las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ -0.1 & 7 & -0.3 \\ -0.2 & -0.3 & 10 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Se propuso una tolerancia igual a 10^{-6} y sin límites de iteraciones.

3.1. Método de la potencia inversa con deflación

Para el método de la potencia inversa con deflación se obtuvieron los siguientes eigenvalores para las matrices A y B.

$$\lambda_A = \begin{pmatrix} 2.991343 \\ 6.973860 \end{pmatrix} \quad \lambda_B = \begin{pmatrix} -1.164248 \\ 1.772866 \end{pmatrix}$$

con sus respectivos eigenvectores:

$$v_A = \begin{pmatrix} 0.999190 & -0.029942 \\ 0.027185 & 0.994855 \\ 0.029679 & 0.096782 \end{pmatrix} \quad v_B = \begin{pmatrix} 0.661072 & -0.497285 \\ 0.226165 & 0.846066 \\ -0.715425 & -0.192040 \end{pmatrix}$$

3.2. Método de Jacobi

Para el método de Jacobi se obtuvieron los siguientes eigenvalores para las matrices A y B.

$$\lambda_A = \begin{pmatrix} 2.991343 \\ 6.973860 \\ 10.034796 \end{pmatrix} \quad \lambda_B = \begin{pmatrix} 3.391382 \\ 1.772866 \\ -1.164248 \end{pmatrix}$$

Los eigenvectores correspondientes a cada eigenvalor son los siguientes:

$$v_A = \begin{pmatrix} 0.999191 & -0.029900 & -0.026899 \\ 0.027147 & 0.994869 & -0.097461 \\ 0.029675 & 0.096651 & 0.994876 \end{pmatrix} \quad v_B = \begin{pmatrix} 0.561818 & -0.497279 & -0.661115 \\ 0.482801 & 0.846041 & -0.226091 \\ 0.671761 & -0.192165 & 0.715409 \end{pmatrix}$$

4. Conclusiones

El método de la potencia inversa con deflación tiende a realizar tener un tiempo mayor de calculo. En nuestro caso para la matriz de dimension 1000x1000 esta se tardo 20 horas en tener el resultado. La ventaja de este método es la definición de cuantos eigenvalores queremos calcular de la matriz dada.

El método de Jacobi tiende a realizar un buen trabajo con matrices simetricas, ya que para esto esta diseñado, este método puede llegar a tener un tiempo de ejecuccion más largo. Esto es si seguimos la definición del método, pero si se realiza una optimización intermedia al realizar la multiplicación de matrices, este método es más eficiente. El método de Jacobi tardo 8 horas en llegar al resultado de la matriz de dimension 1000x1000.