Tarea 5 - Métodos numéricos
Giovanni Gamaliel López Padilla

Problema 1

A lighthouse L is located on a small island 5 km north of a point A on a straight east-west shoreline. A cable is to be laid from L to point B on the shoreline 10 km east of A. The cable will be laid through the water in a straight line from L to a point C on the shoreline between A and B, and from there to B along the shoreline. (see Figure 1). The part of the cable lying in the water costs \$5.000/km, and the part along the shoreline costs \$3, 000/km. Where should C be chosen to minimize the total cost of the cable?

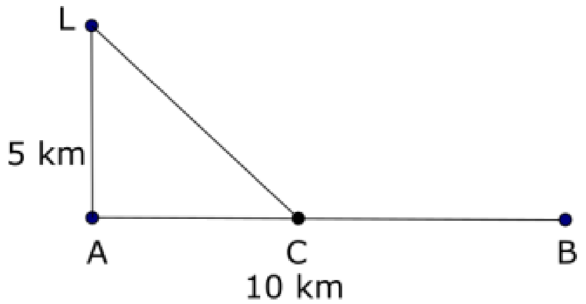

Figura 1: Problema 1

Llamnado x al segmento de recta $\overline{AC}$, y a $\overline{LC}$, entonces el segmento $\overline{CB}$ puede ser calculado como $10 - x$. Las definiciones antes mencionadas se encuentran en la figura 2.

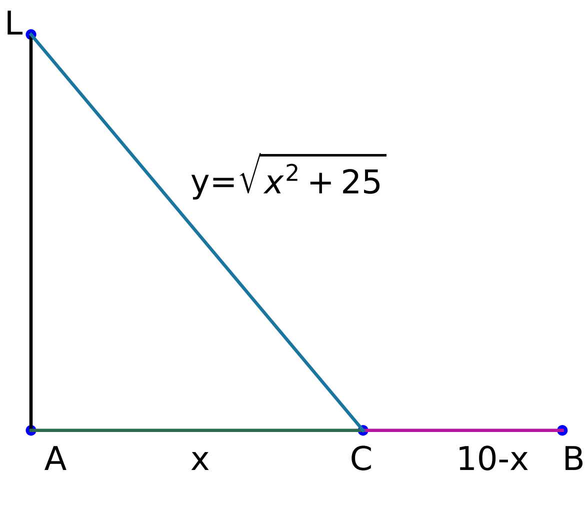

Figura 2: Representación de las definiciones de cada segmento de linea.

Definiendo la función de costo de cada linea se obtiene la función 1.

$$C(x) = 3000(10 - x) + 5000\sqrt{x^2 + 25} \tag{1}$$

Realizando la derivada con respecto a x de le función 1 para encontrar los valores críticos.

$$\frac{dC(x)}{dx} = -3000 + \frac{5000(x)}{\sqrt{x^2+25}}$$

Encontrando los valores criticos se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
-3000 + \frac{5000(x)}{\sqrt{x^2+25}} &= 0 \\
\frac{5000(x)}{\sqrt{x^2+25}} &= 3000 \\
5x &= 3\sqrt{x^2+25} \\
25x^2 &= 9(x^2+25) \\
16x^2 - 225 &= 0 \\
(4x-15)(4x+15) &= 0 \\
x_1 &= \frac{15}{4} \\
x_2 &= -\frac{15}{4}
\end{aligned}$$

La solución x_2 es despreciada, ya que su sentido físico no admisible, por lo tanto el punto C debe estar a 3.75km del punto A.

Problema 2

Implement the following algorithms: Bisection, Newton, and Secant methods for optimization in 1D.

Método de bisección

El método de bisección supone que la función f es unimodal, esto quiere decir que existe un único valor crítico. La función f también debe de cumplir que es continuamente diferenciable. Dada una x en el intervalo $[a_0, b_0]$, el método obtiene una secuencia de intervalos tal que:

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_k, b_k]$$

En cada intervalo, el valor crítico estara contenido. El algoritmo para obtener el valor mínimo de una función es el siguiente:

```
1   input: df(x), [a,b], tolerancia
2   output: x, approximacion valor minimo
3   x=(a+b)/2
4   while |b-a| > tolerancia:
5       if (df(x) > 0):
6           b=x
7       else:
8           a=x
9       x=(a+b)/2
10  return x
```

En el caso que se quiera aplicar el algoritmo para obtener el valor máximo de una función se deberá realizar una modificación en la linea 4, ya que si no, el algoritmo arrojara como resultado alguno de los extremos del intervalo. La modificación sería la siguiente:

```
input: df(x), [a,b], tolerancia
output: x, approximacion valor maximo
x=(a+b)/2
while |b-a| > tolerancia:
    if (df(x) < 0):
        b=x
    else:
        a=x
    x=(a+b)/2
return x
```

La implementación del algoritmo se encuentra en la carpeta Problema_3a y Problema_3b en el archivo bisection.h.

Método de Newton

El método de Newton supone que tenemos una f, la cual es de clase C^2, lo cual quiere decir que la primer y segunda derivada de f son continuas. El algoritmo del descendiente es el siguiente: Dado un valor pequeño de h, donde $h > 0$, entonces el siguiente valor de x es:

$$x_{k+1} = x_k - hf'(x_k) \tag{2}$$

Con la ecuación 2 se obtienen los siguientes casos:

- Si $f'(x_0) > 0$ entonces $x_{k+1} < x_0$, ya que existe $\delta > 0$ para $f'(x) > 0$ para todo $|x - x_0| < \delta$. Por lo tanto f es creciente en el interalo.
- Si $f'(x_0) < 0$ entonces $x_{k+1} > x_0$, ya que existe $\delta > 0$ para $f'(x) < 0$ para todo $|x - x_0| < \delta$. Por lo tanto f es decreciente en el interalo.

Podemos aproximar la función f usando una serie de Taylor hasta segundo orden. Entnces:

$$f(x) \approx q(x) \stackrel{def}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$$

Por lo que al querer minimizar f, el método de Newton genera la siguiente secuencia

$$x_{k+1} = \underset{x}{argmin} q(x)$$

Calculando la primer derivada de $q(x)$, obtenemos lo siguiente:

$$q'(x) = f'(x_k) + f''(x_k)(x - x_k)$$

En donde al encontrar sus valores críticos, obtenemos la secuencia para el método de Newton (ecuación 3).

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)} \tag{3}$$

El algoritmo del método de Newton es el siguiente:

```
input: df, ddf, x0, tolerancia
output: x, aproxximacion de sus valores criticos
while |df| > tolerancia:
    x = x- df/dff
return x
```

La implementación del método de Newton se encuentra en las carpetas Problema_2 y Problema_3 en el archivo newton.h.

Método de secante

El método de la secante es una alternativa al método de Newton. Supongamos que no se tiene la manera de obtener la segunda derivada de f. Entonces podemos aproximar este valor con la ecuación 4.

$$f''(x_k) = \frac{f'(x_k) - f'(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \tag{4}$$

Sustituyendo la ecuación 4 en 3, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f'(x_k) - f'(x_{k-1})} f'(x_k) \\ x_{k+1} &= \frac{f'(x_k)x_{k-1} - f'(x_k)x_k}{f'(x_k) - f'(x_{k-1})} \end{aligned} \tag{5}$$

Por lo tanto, el algoritmo del método de la secante es el siguiente:

```
input: df, x0, x1, tolerancia
output: x1, aproxximacion de sus valores criticos
while |df| > tolerancia:
    x2 = x1 - df(x1)(x1-x0)/(df(x1)-df(x0))
    x0, x1 = x1, x2
return x1
```

La implementación del método de Newton se encuentra en las carpetas Problema_2 y Problema_3 en el archivo secant.h.

Problmea 3

Problema 3a

Find the minimum value and minimum point of the function 6 on the interval [-1, 1] using the previous implemented algorithms. Compare the results in terms of number of iterations.

$$f(x) = -sin(x) + x^2 + 1 \tag{6}$$

Problema 3b

Compare and comment the results obtained for each algorithm on the interval [-1, 1] with function 7.

$$f(x) = sin(x) - x^2 + 1 \tag{7}$$