Tarea 12 - Métodos numéricos
Giovanni Gamaliel López Padilla

Problema 1

Programar el algoritmo QR para encontrar los eigenpares de las matrices Eigen_3.txt y Eigen_25.txt. Únicamente reportar: criterio de paro establecido, tolerancia utilizada, iteraciones requeridas, autovalores aproximados y la comprobación dada por

$$\frac{||AV - \Lambda V||_2}{||AV||_2}$$

donde A es la matriz en cuestión. V y Λ son, respectivamente, las matrices de eigenvectores y eigenvalores aproximados.

Problema 2

Sea el siguiente spline cúbico:

$$f(x) = \begin{cases} f_0(x) = ax^3 + bx^2 + c(x-1) & -1 \le x \le 0 \\ f_1(x) = d(x-1)^2 + ex & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

a) **Determina los valores de a, b, c, d y e si f interpola $f(-1) = -4$ y $f(1) = 1$.**
Se plantea que f, f' y f'' es continua, entonces esta debera cumplir la siguiente condición:

$$\begin{aligned} f_0(0) &= f_1(0) \\ f_0'(0) &= f_1'(0) \\ f_0''(0) &= f_1''(0) \end{aligned}$$

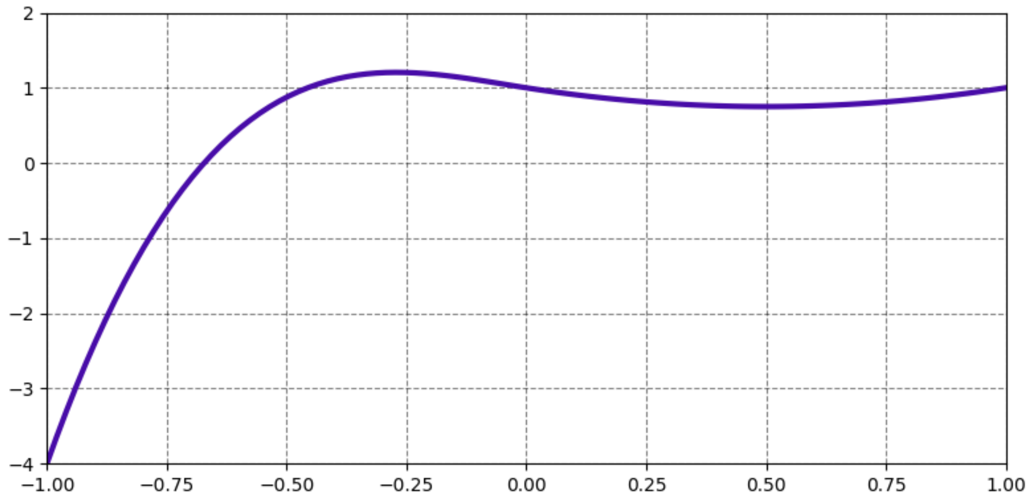
esto es porque f_0 y f_1 son funciones que comparten $x = 0$ en su dominio. Entonces, usando esta condición con las dadas, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} -a + b - 2c &= -4 \\ e &= 1 \\ c + d &= 0 \\ b - d &= 0 \\ c + 2d - e &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, se obtiene que la solución es la siguiente:

$$a = 7 \qquad b = 1 \qquad c = -1$$
$$d = 1 \qquad e = 1$$

En la figura 1 se muestra la función f con los parámetros obtenidos.



Gráfica 1: Función f con varios parámetros.

b) **Determina los valores de a, b, c, d y e si f interpola $f'(-1) = 6$ y $f(1) = -1$.**
Calculando la primer derivada de f, se obtiene lo siguiente:

$$f'(x) = \begin{cases} f_0'(x) = 3ax^2 + 2bx + c & -1 \leq x \leq 0 \\ f_1'(x) = 2d(x-1) + c & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

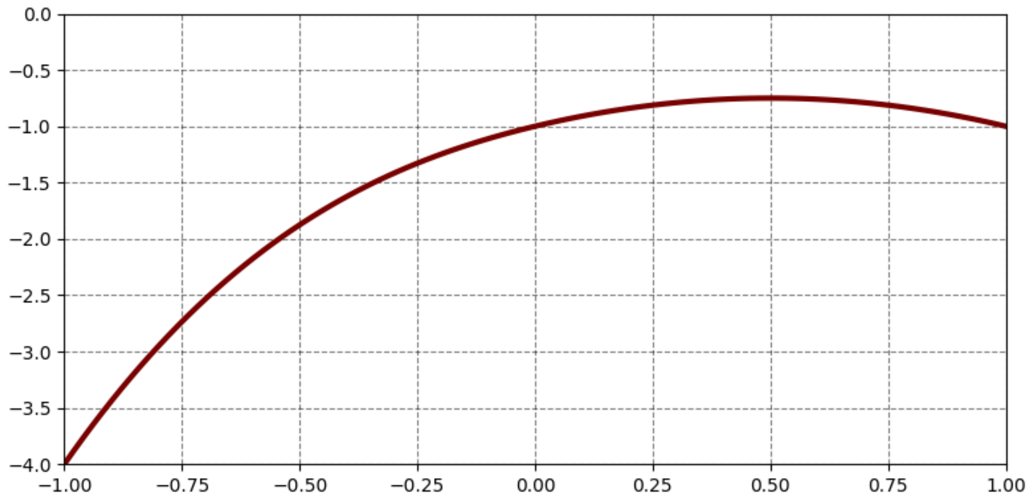
Como f' debe de ser continua, entonces $f_0'(0) = f_1'(0)$. Contemplando las condicones dadas, entonces se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3a - 2b + c &= 6 \\ e &= -1 \\ c + d &= 0 \\ b - d &= 0 \\ c + 2d - e &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, se obtiene que la solución del sistema de ecuaciones es:

$$a = 1 \qquad b = -1 \qquad c = 1$$
$$d = -1 \qquad e = -1$$

En la figura 2 se muestra la función f con los parámetros obtenidos.



Gráfica 2: Función f con varios parámetros.

Problema 3

Dado un conjunto de puntos (x_i, y_i) con $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ con $x_i < x_j$ para $i < j$. Determine el spline de grado 1 y que pasa por los puntos (x_i, y_i).

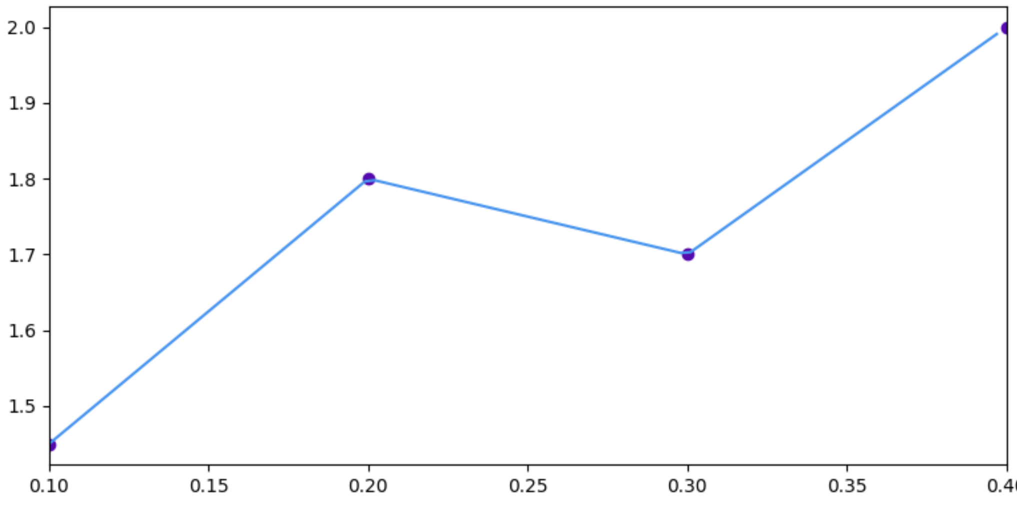
$$S(x) = \begin{cases} a_0 x + b_0 & \text{para} \quad x_0 \leq x \leq x_1 \\ a_1 x + b_1 & \text{para} \quad x_1 \leq x \leq x_2 \\ a_2 x + b_2 & \text{para} \quad x_2 \leq x \leq x_3 \\ \vdots & \qquad\quad \vdots \\ a_i x + b_i & \text{para} \quad x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ \vdots & \qquad\quad \vdots \\ a_{n-1} x + b_{n-1} & \text{para} \quad x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases}$$

Al ser ecuaciones de lineas, entonces no se puede asegurar que $S(x)$ sea diferenciable en $[x_i, x_n]$, por lo que, se tratará a cada parámetro del spline como independiente, esto es, formar una ecuación de la recta que pase por los puntos (x_i, x_{i+1}). Entonces se tiene lo siguiente:

$$a_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \tag{1}$$

$$b_i = y_i - a_i x_i \tag{2}$$

Usando los siguientes puntos $\{(0.1, 1.45), (0.2, 1.8), (0.3, 1.7), (0.4, 2.0)\}$, y las ecuaciones 1 y 2, se obtuvo la gráfica 3.



Gráfica 3: Spline de grado 1 usando los puntos $\{(0.1, 1.45), (0.2, 1.8), (0.3, 1.7), (0.4, 2.0)\}$.

1. Problema 4

Problema 4

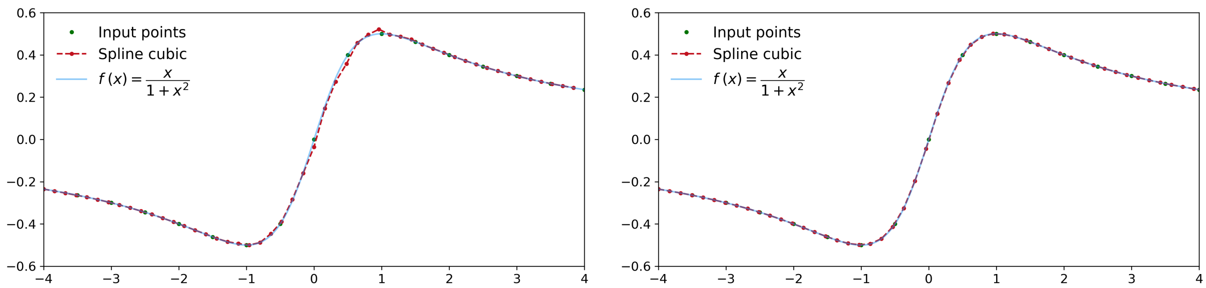
Implementa el algoritmo Spline Natural Cúbico y realiza la interpolación para la ecuación 3 a partir de los siguientes puntos de las ecuaciones 4 y 5.

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \tag{3}$$

$$x = \frac{i-8}{2} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, 16 \tag{4}$$

$$y = f(x) \tag{5}$$

Las ecuaciones 4 y 5 fueron



(a) $n = 17$. (b) $n = 34$.

Gráfica 4: Interpolación de la ecuación 3 dados los puntos generados con las ecuaciones 4 y 5.

Problema 4b

Interpola la curva paramétria de la ecuación 6.

$$f(t) = (r(t)sin(t), r(t)cos(t)) \tag{6}$$

donde

$$r(t) = exp(cos(t) - 2cos(4t) + sin\left(\frac{t}{12}\right)^5$$

a partir de 25 puntos definidos en la ecuación 7.

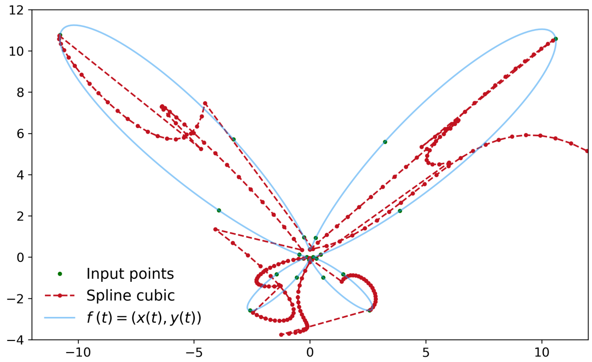
$$(x_i, y_i) = (x(t_i), y(t_i)) \qquad t_i = \frac{\pi i}{12} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, 24 \tag{7}$$

Se modifico la ecuación 7 de la siguiente manera:

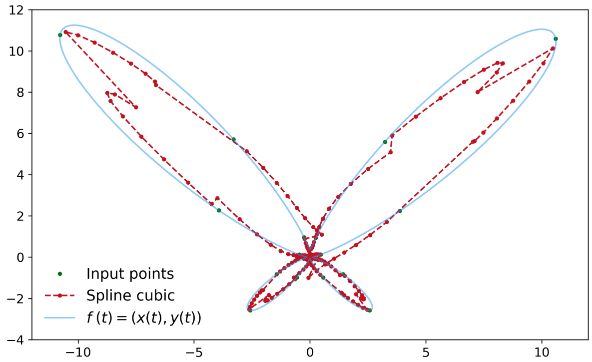
$$(x_i, y_i) = (x(t_i), y(t_i)) \qquad t_i = \frac{25\pi i}{12n} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{8}$$

Esto para tener diferentes cantidades de puntos entre el valor mínimo y máximo de la ecuación 7.

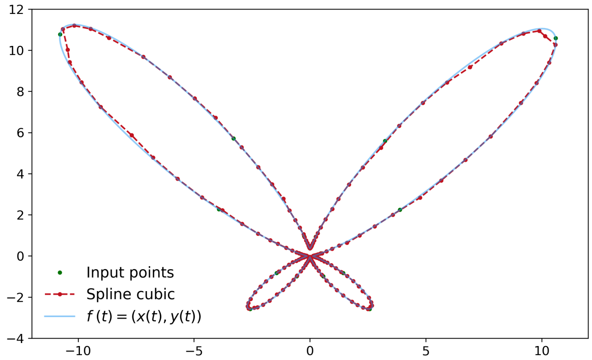
En la gráfica 5 se encuentran los resultados de la interpolación usando $n = \{10, 25, 50, 100\}$



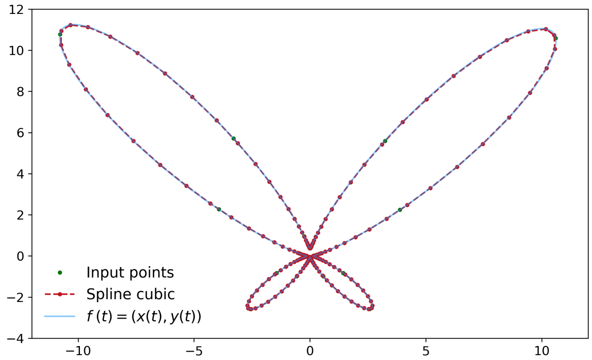
(a) $n = 10$.



(b) $n = 25$.



(c) $n = 50$.

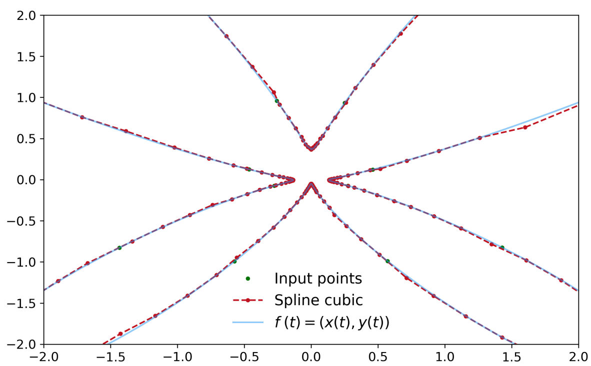


(d) $n = 100$.

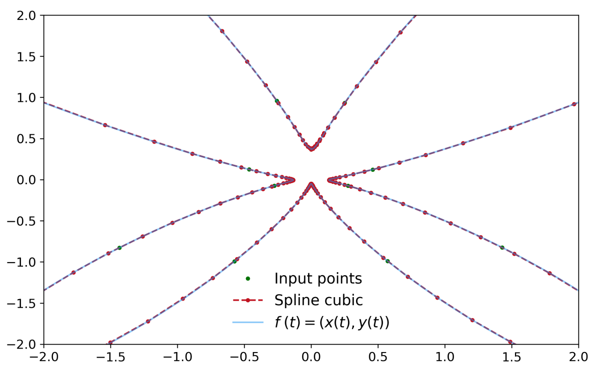
Gráfica 5: Ecuación 6 y 8 con para diferentes cantidades de puntos como input.

En las gráficas 5a y 5b se aprecia que la falta de información en central y superior provoca que la interpolación sea diferente a la ecuación real, siendo la gráfica 5a la que contiene una mayor diferencia. Con esto se llega a la conclusión que mientras más sean los puntos que se conocen de la función la interpolación se acercará a la función original.

Realizando un acercamiento a la zona $[-2, 2] \times [-2, 2]$ se obtiene la gráfica 6.



(a) $n = 50$.



(b) $n = 100$

Gráfica 6: Ecuación 6 en la zona $[-2, 2] \times [-2, 2]$.

En la gráfica 6 se logra visualizar la diferencia a detalle para el uso de $n = \{50, 100\}$. La gráfica 6a contiene diferencias con respecto a la función original, las cuales la gráfica 6b no presenta. Estas diferencias son muy mínimas al punto en que son aceptables, ya que la cantidad de puntos para obtener esa apŕoximación es la mitad de la otra.