Tarea 3 - Métodos numéricos
Giovanni Gamaliel López Padilla

Problema 1

Use four-digit rounding arithmetic and the quadratic formulas to find the most accurate approximations to the roots of the following quadratic equa- tions. Also use the form of the quadratic formula by rationalizing the numerator. Compute the absolute errors and relative errors.

$$\frac{1}{3}x^2 - \frac{123}{4}x + \frac{1}{6} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{1}{3}x^2 + \frac{123}{4}x - \frac{1}{6} = 0 \tag{2}$$

La ecuación cuadrática es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{3}$$

Realizando el proceso de racionalización se obtiene que:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \left(\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}} \right) \\ &= \frac{-b^2 + b^2 - 4ac}{2a(b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})} \\ x &= \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}} \end{aligned} \tag{4}$$

Los resultados del programa se encuentran en la tabla 1.

Problema	**Función**	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$
Problema 1	Ecuación 3	0.0054	-92.2646
	Ecuación 4	0.005420	-92.255420
Problema 2	Ecuación 3	0.0054	92.2538
	Ecuación 4	0.005420	92.244580

Tabla 1: Resultados de las raices de las ecuaciones 1 y 2 usando las ecuaciones 3 y 4.

Para este caso se definieron la diferencia relativa y absoluta de la siguiente manera:

$$DA = |Y - X| \qquad DR = \frac{DA}{Y} * 100$$

donde Y son los resultados usando la ecuación 4 y X son los resultados de usar la ecuación 3. Obtiendo así, los calculos de la diferencia absoluta y diferencia relativa mostrados en la tabla 2.

Problema	Valores	Diferencia absoluta	Diferencia Relativa
Problema 1	x_1	0.000020	0.369004 %
	x_2	0.009183	0.009953 %
Problema 2	x_1	0.009220	0.009994 %
	x_2	0.000020	0.377269 %

Tabla 2: Diferencias absolutas y relativas de los resultados de la tabla 1.

El programa se encuentra en la carpeta Problema_1. Para compilar el programa se debe ingresar la siguiente linea:

```
gcc -Wall -Wextra -Werror -pedantic -ansi -o main.out main.c -lm -std=c11
```

El output esperado del programa es el siguiente:

```
----------------------------------------
Ecuacion a analizar:
+0.333333 x2 +30.750000 x -0.166667

El resultado usando la ecuacion racionalizada es:
x1 = 0.005420       x2 = -92.255420
El resultado usando redondeando a cuatro digitos es:
x1 = 0.005400       x2 = -92.264603

La diferencia absoluta y la diferencia relativa es:
Para x1
    AD = 0.000020     RD = 0.365475
Para x2
    AD = 0.009183     RD = 0.009953

----------------------------------------
Ecuacion a analizar:
+0.333333 x2 -30.750000 x +0.166667

El resultado usando la ecuacion racionalizada es:
x1 = 92.244580      x2 = 0.005420
El resultado usando redondeando a cuatro digitos es:
x1 = 92.253799      x2 = 0.005400

La diferencia absoluta y la diferencia relativa es:
Para x1
    AD = 0.009220     RD = 0.009994
Para x2
    AD = 0.000020     RD = 0.377269
```

Problema 2

Let

$$f(x) = \frac{xcos(x) - sin(x)}{x - sin(x)} \tag{5}$$

a). Find $\underset{x\to 0}{lim} f(x)$

Como queremos entrar el límite cuando x tiende a 0 de la ecuación 5. Tenemos que comprobar si el límite por la izquierda y por la derecha es igual. Esto es:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = L_i \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = L_s$$

El límite existira si y solo sí $L_i = L_s = L$ y es igual a L. Como el límite que queremos comprobar se encuentra en 0, realizaremos esta busqueda a partir del intervalo $[-1, 1]$. En cada iteración este intervalo se ira reduciendo una cuarta parte, esto es que en la siguiente iteración el intervalo será $[-0.5, 0.5]$. Así hasta obtener una diferencia de L_i y L_s menor a 10^{-6} o al haber realizado 16 iteraciones.

El programa arrojo los resultados mostrados en la tabla 3 y 4.

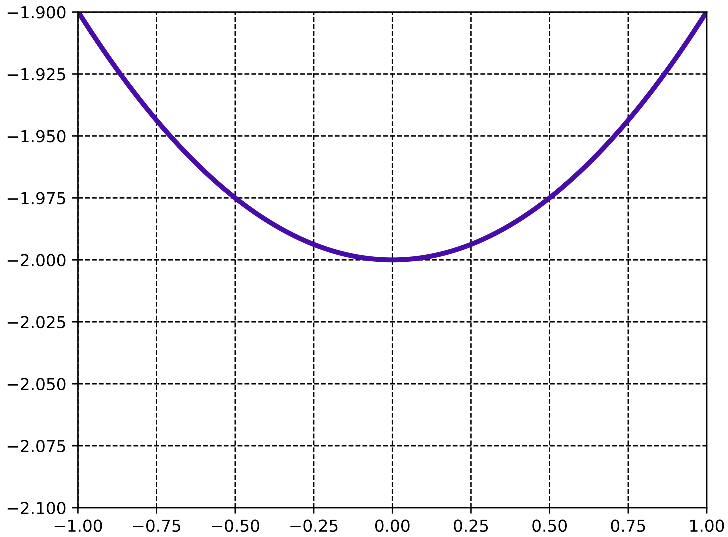

Figura 1

x	$\mathbf{L_i}$
-1.000000	-1.899770
-0.500000	-1.974985
-0.250000	-1.993749
-0.125000	-1.998437
-0.062500	-1.999609
-0.031250	-1.999902
-0.015625	-1.999976
-0.007812	-1.999994
-0.003906	-1.999998
-0.001953	-2.000000
-0.000977	-2.000000
-0.000488	-2.000000

Tabla 3: Valores obtenidos para el límite por la izquierda para una x dada.

x	$\mathbf{L_s}$
1.000000	-1.899770
0.500000	-1.974985
0.250000	-1.993749
0.125000	-1.998437
0.062500	-1.999609
0.031250	-1.999902
0.015625	-1.999976
0.007812	-1.999994
0.003906	-1.999998
0.001953	-2.000000
0.000977	-2.000000
0.000488	-2.000000

Tabla 4: Valores obtenidos para el límite por la derecha para una x dada.

Observando los resultados de las tablas 3 y 4 podemos decir que el límite buscado sí existe y es igual a -2. El programa llega a la misma conclusión. En la figura 1 se puede verificar la misma conclusión.

b). Use four-digit rounding arithmetic to evaluate $f(0.1)$

La forma en la cual se realizo el calculo es la siguiente. Sea round(x) una función la cual redondea a cuatro decimales, entonces la ecuación 5 es escrita como:

$$f_b(x) = round\left(\frac{round(x' sin(x)' cos(x)'))}{round(x' - sin(x)')}\right) \tag{6}$$

donde $sin(x)', cos(x)'$ y x' son los valores de $sin(x), cos(x)$ y x' redondeados a cuatro decimales respectivamente. Evaluando la ecuación 6 en $x = 0.1$ se obtiene que $f'(x)$ es igual a 49.5000.

c). Replace each trigonometric function with its third Maclaurin polynomial and repeat part (b).

Escribiendo las ecuaciones de seno y coseno como sereis de potenicas, se obtiene lo siguiente:

$$sin(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1} \qquad cos(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{(2i)!} x^{2i}$$

Transformando estas ecuaciones a una ecuación recursiva se obtiene que para $sin(x)$ es

$$\begin{aligned} P_0 &= a_n \\ P_1 &= a_{n-1} + x^2 P_0 \\ P_2 &= a_{n-2} + x^2 P_1 \\ &\vdots \\ P_i &= a_{n-i} + x^2 P_{i-1} \\ &\vdots \\ P_n &= x P_n \end{aligned}$$

En el caso de $cos(x)$ es:

$$\begin{aligned} P_0 &= a_n \\ P_1 &= a_{n-1} + x^2 P_0 \\ P_2 &= a_{n-2} + x^2 P_1 \\ &\vdots \\ P_i &= a_{n-i} + x^2 P_{i-1} \\ &\vdots \\ P_n &= a_{n-1} + x^2 P_{n-1} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación que se calculara es la siguiente:

$$f_c(x) = \frac{x\left(\sum_{i=0}^{n=2} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!}\right)\left(x^{2i+1} \sum_{i=0}^{n=2} \frac{(-1)^i}{(2i)!} x^{2i}\right)}{x - \sum_{i=0}^{n=2} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1}} \tag{7}$$

Evaluando la función en $x = 0.1$, se obtiene como resultado que $f(x = 0.1) = 49.5000$.

d). The actual value is f (0.1) = -1.99899998. Find the relative error for the values obtained in parts (b) and (c).

Calculando la diferecia relativa entre los datos obtenidos se obtienen los resultados mostrados en la tabla 5.

Función	**f(x)**	**Diferencia Relativa**
Análitica (Ecuación 5)	-1.998999	-
Redondeo (Ecaución 6)	-1.500000	24.9625
Serie de potencias (Ecuación 7)	-1.500000	24.9625

Tabla 5: Valores obtenidos en los ejercicos 2b y 2c comparandolos con el resultado análitico de la ecuación 5 en x=0.1.

El programa se encuentra en la carpeta Problema_2. Para compilar el programa se debe ingresar la siguiente linea:

```
gcc -Wall -Wextra -Werror -pedantic -ansi -o main.out main.c -lm -std=c11
```

El output esperado del programa es el siguiente:

```
El limite cuando f(x) tiende a cero es -2.000000
El valor de f(x)
    Con series es: -1.5000
    Con redondeo a 4 decimales es: -1.5000
La diferencia relativa de f(x)
    Con redondeo a 4 decimales es: 24.9625
    Con series es: 24.9625
```

Problema 3

Find the number of terms of the exponential series such that their sum gives the value of e^x correct to six decimal places at $x = 1$.

El procedimiento para encontrar la respuesta a este problema fue el siguiente:

```
n_term = 1
fx = round(exp(1.0),6)
fx_approx = round(approx(x,n_term),6)
while fx != fx_approx:
    n_term++
    fx_approx = round(approx(x,n_term),6)
```

El número de terminos de la serie de la función $f(x) = e^x$ necesaria para que coincida su valor numérico a seis decimales es 9.

El programa de este problema se encuentra en la carpeta Problema_3. El comando para compilarlo es el siguiente:

```
gcc -Wall -Wextra -Werror -pedantic -ansi -o main.out main.c -lm -std=c11
```

El output esperado del programa es el siguiente:

```
----------------------------------------
n    f(x)            f_approx(x)
1    2.718282        2.000000
2    2.718282        2.500000
3    2.718282        2.666667
4    2.718282        2.708334
5    2.718282        2.716667
6    2.718282        2.718056
7    2.718282        2.718254
8    2.718282        2.718279
9    2.718282        2.718282

Se obtuvo la igualdad usando 9 terminos de la serie
```