**Tarea 08 - Análisis de datos**
**Giovanni Gamaliel López Padilla**

# Problema 2

**Para investigar si una moneda es justa o no, alguien decide que va a lanzar la moneda 100 veces. Si el número de veces de obtener sol es entre 42 % y 58 %, va a apoyar la hipótesis de que la moneda es justa. Calcula el nivel de significancia correspondiente.**

Sea X una variable aleatoria tal que $X \sim Bern(0.5)$, entonces se tiene que $\mu = 0.5$ y $\sigma^2 = 0.25$. Entonces el valor de t para la distribución t-student es:

$$t_{100,\alpha} = \frac{0.58 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

entonces

$$\begin{aligned} t_{100,\alpha} &= \frac{0.58 - 0.5}{\frac{0.5}{\sqrt{100}}} \\ &= \frac{0.08}{0.05} \\ t_{100,\alpha} &= 1.6 \end{aligned}$$

por lo tanto usando la función pt con $t_{100,\alpha}$ se obtiene que el nivel de significancia es $\alpha = 0.05639257$.

# Problema 3

**Por experiencia se sabe que el número de accesos ,X, durante una hora a una base de datos sigue una distribución Poisson:**

$$P(X = x) = exp(-\lambda)\frac{\lambda^x}{x!} \qquad \text{para } x = 0, 1, 2, \ldots \text{ y } \lambda > 0$$

**Calcula el estimador de máxima verosimilitud para $\lambda$ en una muestra.**

La función de máximo verosimilitud de la distribución es Poisson es:

$$\mathcal{L} = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$$

Entonces, la función log-verosimilitud es:

$$
\begin{aligned}
log(\mathcal{L}) &= log\left(\prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} log\left(e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[log(e^{-\lambda}) + log(\lambda^{x_i}) - log(x!)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[-\lambda + x_i log(\lambda) - log(x_i)\right] \\
log(\mathcal{L}) &= -\lambda n + log(\lambda)\sum x_i - \sum log(x_i!)
\end{aligned}
$$

Por lo que calculando el valor crítico de $log(\mathcal{L})$ se obtiene que:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \log(\mathcal{L})}{\partial \lambda} &= 0 \\
-n + \frac{\sum x_i}{\lambda} &= 0 \\
\hat{\lambda} &= \frac{1}{n}\sum x_i
\end{aligned}
$$

donde $\hat{\lambda}$ corresponde a la media aritmética.

Calculando la segunda derivada de $log(\mathcal{L})$ para comprobar que el valor crítico ($\hat{\lambda}$) se trata de un máximo se obtiene lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \log(\mathcal{L})}{\partial \lambda^2} &< 0 \\
-\frac{1}{\lambda^2}\sum x_i &< 0
\end{aligned}
$$

como $\lambda^2 > 0$ y $x_i \in \{0, 1, 2, \dots\}$, entonces, la segunda derivada de $log(\mathcal{L})$ será siempre negativa, por lo tanto $log(\mathcal{L})$ es el estimador de máxima verosimilitud.

# Problema 4

**Considera los siguientes datos de un estudio en Bélgica sobre la intención de voto entre 1000 parejas. Las variables $X_1$ , $X_2$ indican si la mujer, respectivamente el hombre, votará para un partido de la coalición (0) o de la oposición (1) en caso de que hubieran elecciones en ese momento.**

| | $X_1 = 0$ | $X_1 = 1$ |
|---|---|---|
| $X_2 = 0$ | 245 | 170 |
| $X_2 = 1$ | 218 | 367 |

**a)** Calcula el oddsratio $\hat{R}$

**b)** Se puede mostrar que si el tamaño de la muestra va a $\infty$, la distribución de $\log(\hat{R})$ converge a una normal con promedio $\log(\hat{R})$, el verdadero log-oddsratio de la distribución subyacente, y con varianza

$$\frac{1}{n_{0,0}} + \frac{1}{n_{0,1}} + \frac{1}{n_{1,0}} + \frac{1}{n_{1,1}}$$

donde $n_{i,j}$ es el número de observaciones con $X_1 = i$ y $X_2 = j$. ¿Apoyas la hipótesis que la pareja vota de manera independiente ($\alpha = 0.05$)?

# Problema 5

**Sea c una cierta cadena binaria de longitud 100. Se quiere verificar si proviene de una muestra $Bern(0.5)(= H_0)$. Para eso se calcula el número de cambios. Un cambio es un 1 seguido por un 0 o un 0 seguido por un 1 en la cadena.**

**a)** Calcula T el número de cambios en una cadena usando una sola linea de código en R.

**b)** Usando muchas simulaciones de cadenas bajo $H_0$ , estima y visualiza la distribución de T.

**c)** Calcula el valor de p para $H_0$ si T=42.

# Problema 6

**¿Hay alguna semejanza entre una taza y su dueño? Para eso se decide hacer un pequeño experimento. Se muestran a n voluntarios 5 fotos de personas y 5 tazas en orden al azar. Se pide a cada persona asociar cada taza con una persona (una a una). ¿Cómo formular una prueba de hipótesis para este problema? Propon una estadistica de prueba. Estima su distribución con simulaciones de respuestas bajo $H_0$.**

# Problema 7

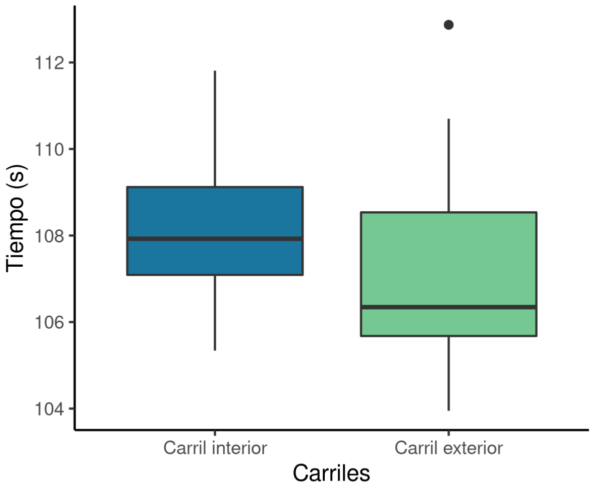
**Durante los juegos olimpicos de Salt Lake City surgió en un periódico la discusión si en las pruebas de 1500m de patinaje, la persona en el carril exterior no tendria ventaja sobre el carril interior. Se organizaron 24 pruebas (una se canceló por una caida). Abajo los tiempos. Aplica una(s) pruebas de estadistica relevante para contestar esta pregunta.**

En la tabla 1 se encuentran las medidas de tendencia central y despersión de los datos contenidos en el archivo data.csv. Se observa que estas medidas son semejantes entre los dos conjuntos, en donde existe una mayor diferencia es en la varianza.

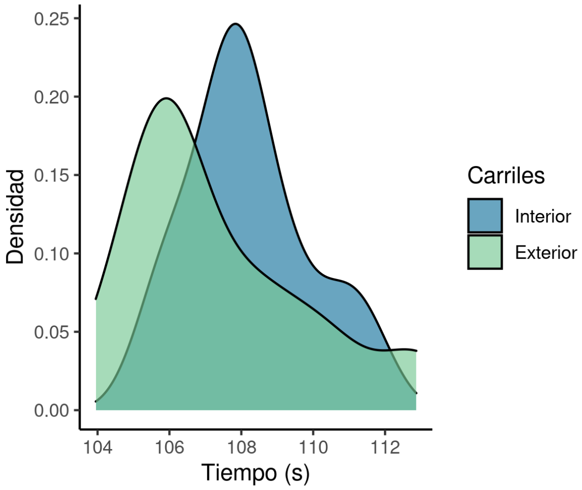
| Linea | Mediana (s) | Promedio (s) | Varianza ($s^2$) |
|---|---|---|---|
| Interna | 107.9 | 108.2 | 2.9653 |
| Externa | 106.3 | 107.4 | 6.3327 |

**Tabla 1:** Medidad de tendencia central y de dispersión de los datos.

Una primera aproximación para llegar a una conclusión es visualizar la distribución de datos por medio de boxplots (figura 1a) y las frecuencias de los datos (figura 1b). Con esto podemos comprobar resultado obtenido en la tabla 1. Con esto podemos llegar a la aproximación que la hipótesis será rechazada. Esto debido a que los datos presentan distribuciones diferentes.




(a) Boxplot de los datos del carril interior y exterior.




(b) Distribución de los datos del carril interior y exterior.

**Figura 1:** Representación gráfica de la distribucion de los datos.

En la tabla 1 se observa que las varianzas muestrales son diferentes, por ende, al estar basadas en un estimador insesgado, entonces las varianzas de los datos son diferentes. Entonces el nonpooled variance (agregar cita) puede ser calculado como:

$$S_d^2 = \frac{S_x^2}{n} + \frac{S_y^2}{n}$$

El cual es un estimador insesgado para $Var(\bar{X} - \bar{Y})$, entonces, se puede calcular un valor t de la siguiente manera:

$$T_d = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_d}$$

El calculo de $T_d$ con los datos, da como resultado 1.2343. El cual es un valor lejano a 0, por ende, la hipótesis es rechaza. Otra manera de comprobar esto es obteniendo el intervalo de confianza para las diferencias de tiempos de una misma carrera. La frecuencia de las diferencias de tiempos se muestra en la figura 2.

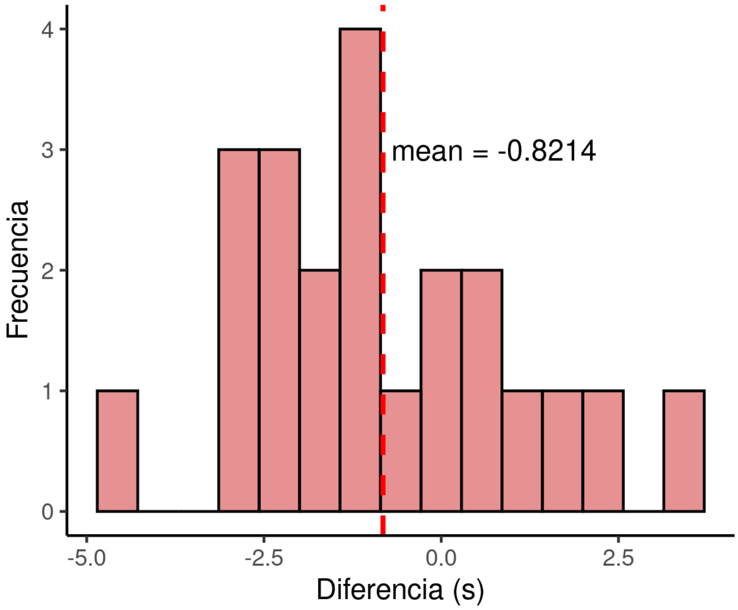



**Figura 2:** Frecuencia de la diferencia entre los tiempos del carril exterior y carril interior.