Tarea 6 - Métodos numéricos

Giovanni Gamaliel López Padilla

Índice

1. Introducción

Una matriz A de m×n es un ordenamiento rectangular de m por n númros distribuidos en un orden definido de m filas y n columnas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

donde a_{ij} es el i,j-ésimo elemento de A. Se define una matriz cuadrada si y solo si $m = n$. Una matriz diagonal es una matriz cuadrada, en la que los elementos a_{ij} son iguales a 0 para $i \neq j$ y es un escalar para $i = j$. Se define a una matriz triangular superior aquellas matrices cuadradas que sus elementos a_{ij} son iguales a cero para $i > j$. Para una matriz triangular inferior es el caso contrario, sus elementos a_{ij} son iguales a cero para $i < j$.
Una ecuación lineal es una expresión del tipo:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b \tag{2}$$

donde $x_{1,2,\ldots,n}$ se denominan como variables, $a_{1,2,\ldots,n}$ son los coeficientes de cada termino y b es un término constante. Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de m ecuaciones lineales en las cuales contienen n variables.

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + \cdots + a_{1n}x_{1n} = b_1 \\ a_{21}x_{21} + a_{22}x_{22} + \cdots + a_{2n}x_{2n} = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_{m1} + a_{m2}x_{m2} + \cdots + a_{mn}x_{mn} = b_m \end{cases} \tag{3}$$

Las operaciones definidas sobre las matrices y sobre las ecuaciones son idénticas, por lo tanto, es posible realizar la escritura de un sistema de ecuaciones en forma matricial. Cada elemento de la matriz A (ecuación 1) correspondera a un coeficiente del sistema de ecuaciones (ecuación 3), donde cada fila representará a una ecuación lineal.

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + \cdots + a_{1n}x_{1n} = b_1 \\ a_{21}x_{21} + a_{22}x_{22} + \cdots + a_{2n}x_{2n} = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_{m1} + a_{m2}x_{m2} + \cdots + a_{mn}x_{mn} = b_m \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad (4)$$

La parte derecha de la ecuación 4 puede escribirse como $AX = B$, esta es llamada la ecuación matricial del sistema.

2. Métodos

2.1. Matriz diagonal

Suponiendo que se tiene un sistema de ecuaciones de n ecuaciones donde los coeficientes son iguales a cero excepto cuando el la posición del coeficiente coincide con el número de la ecuación. Entonces representando el sistema de ecuaciones antes descrito en una ecuación matricial se obtiene lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

realizando la multiplicación de matrices se obtiene que:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 \\ a_{22}x_2 \\ \vdots \\ a_{nn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

por igualación de términos se obtiene que las soluciones del sistema de ecuaciones son descritas como:

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$$

El algoritmo planteado para realizar la solución a este tipo de sistema de ecuaciones es el siguiente:

```
// input: matriz, vector_b
// output: solutions
for(i = 1; i <= n; i++)
{
    solutions[i] = vector_b[i] / matriz[i][i]
}
```

La imprementación de este problema se encuentra en la carpeta Problema_1. La función solve_diagonal_matrix esta contenido en el archivo solution.h

2.2. Matriz triangular superior

Suponiendo que se tiene un sistema de ecuaciones de n ecuaciones donde los coeficientes son iguales a cero cuando la posición del coeficiente es menor a el número de la ecuación. Entonces representando el sistema de ecuaciones antes descrito en una ecuación matricial se obtiene lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

realizando la multiplicación de matrices de obtiene que:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{nn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

reduciendo esto a una expresión generalizada se obtiene que la solución de la i-ésima variable es:

$$x_i = \frac{b_i - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}}$$

El algoritmo planteado para realizar la solución a este tipo de ecuacioes es el siguiente:

```
// input: matriz, vector_b
// output: solutions
for(i = n; i <= 1; i--)
{
    sum_i = 0
    for(j = n; j <= i+1; j--)
    {
        sum_i += matriz[i][j]*solutions[j]
    }
    solutions[i] = (vector_b[i] - sum_i) / matriz[i][i]
}
```

La imprementación de este problema se encuentra en la carpeta Problema_2. La función solve_triangular_superior_matrix esta contenido en el archivo solution.h

2.3. Matriz triangular inferior

Suponiendo que se tiene un sistema de ecuaciones de n ecuaciones donde los coeficientes son iguales a cero cuando la posición del coeficiente es mayor a el número de la ecuación. Entonces representando el sistema de ecuaciones antes descrito en una ecuación matricial se obtiene lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

realizando la multiplicación de matrices de obtiene que:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

reduciendo esto a una expresión generalizada se obtiene que la solución de la i-ésima variable es:

$$x_i = \frac{b_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j}{a_{ii}}$$

El algoritmo planteado para realizar la solución a este tipo de ecuacioes es el siguiente:

```
// input: matriz, vector_b
// output: solutions
for(i = 1; i <= n; i++)
{
    sum_i = 0
    for(j = 1; j <= i-1; j++)
    {
        sum_i += matriz[i][j]*solutions[j]
    }
    solutions[i] = (vector_b[i] - sum_i) / matriz[i][i]
}
```

La imprementación de este problema se encuentra en la carpeta Problema_3. La función solve_triangular_inferior_matrix esta contenido en el archivo solution.h

2.4. Eliminación Gaussiana

3. Referencias

José Arias. *Matrices y sistemas de ecuaciones lineales*. Universidad de Medellín, Medellín, Colombia, 2010. ISBN 9789588348612.

Stanley Grossman. *Álgebra lineal*. McGraw Hill, Ciudad de México, 2019. ISBN 978-1456272128.