Tarea 2 - Análisis de datos
Giovanni Gamaliel López Padilla

Problema 2

Cuál es la probabilidad de que el segmento seleccionado en la figura 1 tenga una longitud mayor que $\sqrt{3}$?

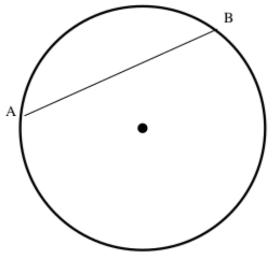

Figura 1

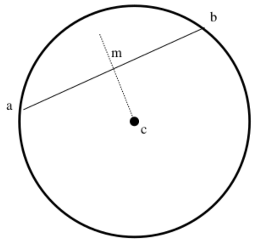

Figura 2

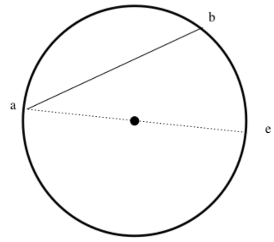

Figura 3

- **Una primera interpretación está basada en el hecho de que cualquier segmento está caracterizado de una manera única por el punto en la intersección del segmento con la recta ortogonal al segmento y que pasa por el centro (ver el punto m en figura 2). Así podemos construir un segmento eligiendo ese punto m al azar dentro del círculo. Calcula bajoesta interpretación la probabilidad de tener un segmento mayor que $\sqrt{3}$.**

  En esta interpretación cada linea trazada sobre el circulo sera rotada hasta que esta sea perpendicular a la linea m. Al nosotros querer lineas mayores a $\sqrt{3}$, calcularemos el valor de m correspondiente a esta medida a la cual llamaremos m_{max}.

$$
\begin{aligned}
m_{max} &= \sqrt{1-\left(\frac{3}{2}\right)} \\
&= \sqrt{1-\frac{3}{4}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{4}} \\
m_{max} &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

  entonces, se tiene que para $m < \frac{1}{2}$ se obtienen longitudes mayores a $\sqrt{3}$. En la figura 4, las lineas verdes tienen un $m < m_{max}$ y las rojas son $m > m_{max}$.

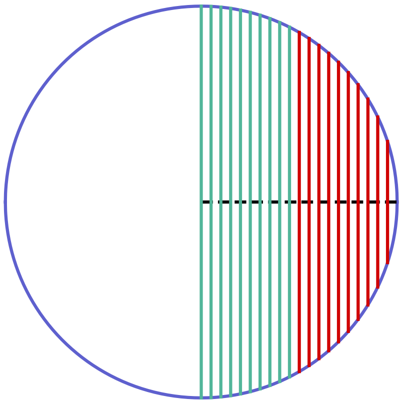

Figura 4

Como el radio del circulo es 1, entonces, la probabilidad de obtener una linea con longitud mayor es:

$$P(d > \sqrt{3}) = \frac{\frac{1}{2}}{1}$$
$$P(d > \sqrt{3}) = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, la probabilidad de obtener una linea con una longitud mayor a $\sqrt{3}$ es $\frac{1}{2}$.

- **En otra interpretación, fijamos primero el punto a en el círculo y elegimos al azar otro punto (b) en el círculo y definimos el segmento como la linea entre a y b (ver figura 3). Para que el segmento tenga una longitud mayor que $\sqrt{3}$: ¿ qué restricción hay para el ángulo abe ?. En base a eso, calcula la probabilidad de tener un segmento mayor que $\sqrt{3}$.**

  Observando la figura 3, se forma un triangulo rectangulo con los puntos a,b y e. La distancia del punto al e es d, que en este caso es 2. Al querer una distancia mayor a $\sqrt{3}$ entre los puntos ab. Calcularemos el angulo abe conn estas distancias.

$$Cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= 0.86602$$
$$\theta = 30$$

  Como queremos distancias mayores a $\sqrt{3}$, entonces esto sucedera para ángulols menores a 30. Como la función coseno es par, entonces nuestro rango de valores admitidos estan en el rango $\theta' \in [-30, 30]$. Como el rango de valores que podemos tener en la figura 3 es [-90,90], entonces la probabilidad con esta interpretación es

$$P(-30 < \theta < 30) = \frac{60}{180}$$
$$= \frac{1}{3}$$

  En la figura 5 se representan algunas lineas con esta interpretación. Las lineas verdes y rojas representan aquellas que tienen una distancia mayor o menor a $\sqrt{3}$ respectivamente.

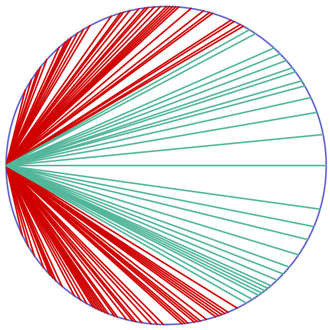

Figura 5

- Otra interpretación a la que llegamos en la siguiente: Cualquier segmento puede ser caracterizado mediante el uso del punto medio de sus intersecciones con la circunferencia. Si dibujamos una linea recta del centro hasta este punto medio nos daremos cuenta que se formara una circunferencia de radio menor (C'). Tomando de referencia la figura 4, notaremos que la circunferencia C' tiene radio m_{max}. Entonces, la probabilidad de obtener una linea recta de longitud mayor o igual a $\sqrt{3}$ puede calcularse como:

$$\begin{aligned} P(d > \sqrt{3}) &= \frac{A(C')}{A(C)} \\ &= \frac{\pi m_{max}^2}{\pi} \\ &= m_{max}^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ P(d > \sqrt{3}) &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

  Por lo tanto, bajo esta interpretación la probabilidad es de $\frac{1}{4}$. En la figura 6 se representa esta interpretación con lineas rectas generadas aleatoriamente.

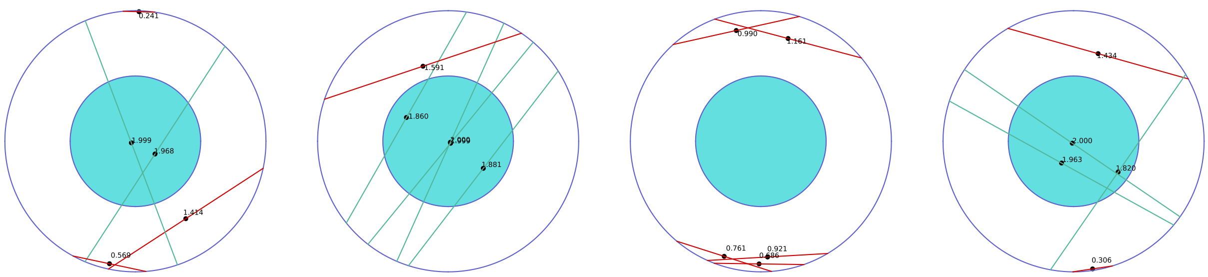

Figura 6

Problema 3

Se rompe una barra en tres piezas en 2 lugares elegidos completamente al azar. Calcula la probabilidad que la longitud de la pieza de en medio sea al menos dos

veces la diferencia de las longitudes de las demás dos piezas (nota: se toma como diferencia de 2 y 3, 1, o sea, siempre es positiva).

Problema 4

- **Si A y B son independientes, A y B^c son independientes. Demuéstralo.**

  Se tiene que:
  $$P(B^c|A) = 1 - P(B|A) \tag{1}$$
  como A y B son independientes se cumple que:
  $$P(B|A) = P(B)$$
  entonces, la ecuación 1 puede reescribirse como:
  $$\begin{aligned} P(B^c|A) &= 1 - P(B|A) \\ &= 1 - P(B) \\ &= P(B^c) \end{aligned}$$
  por lo tanto
  $$P(B^c|A) = P(B^c) \tag{2}$$
  La ecuación 2 es valida unicamente si los eventos B^c y A son independientes.

- **Cierto o falso: si A y B son independientes, A^c y B^c son independientes. Demuéstralo**

  Calculando $P(A^c|B^c)$
  $$P(A^c|B^c) = 1 - P(A|B^c) \tag{3}$$
  como en el ejercicio anterior se demostro que si A y B son independientes entonces A y B^c son independientes, se tiene que
  $$P(A|B^c) = P(A) \tag{4}$$
  Usando la ecuación 4 en la ecuación 3 se obtiene que:
  $$\begin{aligned} P(A^c|B^c) &= 1 - P(A|B^c) \\ &= 1 - P(A) \\ &= P(A) \end{aligned}$$
  por lo tanto
  $$P(A^c|B^c) = P(A) \tag{5}$$
  La ecuación 5 es valido unicamente si A^c y B^c son independientes.

Problema 5

En un examen de opción múltiple, se sabe que la probabilidad que alguien sepa la respuesta correcta es 0.4. Si no sabe la respuesta, la persona elige al azar una respuesta. Cada pregunta tiene 4 posibles respuestas. Para una pregunta particular: si alguien da la respuesta correcta, ¿ cuál es la probabilidad que adivinó?
Sea A el evento que un alumno sepa la respuesta correcta y B que conteste correctamente. Entonces la información que se tiene es:

$$\begin{aligned} P(A) &= 0.4 \\ P(B|A^c) &= 0.25 \end{aligned}$$

Problema 6

Tienes una bolsa con 6 pelotas rojas y 10 pelotas verdes. Eliges al azar una pelota y la sacas de la bolsa. De nuevo, eliges al azar una pelota de la bolsa (ahora con 15 pelotas). Calcula la probabilidad de obtener una pelota roja.

Problema 7

Sea X una variable aleatoria con la siguiente distribución

	1	2	3	4
$P(X = x)$	0.2	0.1	0.4	0.3

y $Y \sim X$ e independiente de X. Calcula $P(X > 2 | Y < 3)$ y $P(X \neq Y)$.