Tarea 11 - Métodos numéricos

Giovanni Gamaliel López Padilla

Índice

1. Introducción

Sea A una matriz de n×n con componentes reales. El número λ se denomina *valor característico (eigenvalor)* de A si existe un vector diferente de cero (v) tal que

$$Av = \lambda v \tag{1}$$

El vector v se denomina *vector característico (eigenvector)* de A correspondiente al eigenvalor λ. Se dice que λ es un eigenvalor de A si y sólo si

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = 0 \tag{2}$$

donde I es la matrix identidad y p se denomina como el polinomio característico de A. El grado del polinomio p es de grado n, entonces se obtiene que existen n eigenvalores para la matriz A.

Para un número grande de n, el resolver la ecuación característica es difícil de resolver. Es por ello que se plantearon métodos iterativos para aproximar a las raices de la ecuación característica, es decir, los eigenvalores.

2. Métodos

2.1. Método de la potencia y cociente de Rayleigh

El método de Rayleigh es un método iterativo para encontrar los eigenvalores de una matriz cuadrada A. Este método realiza un cambio en la manera de calcular el eigenvalor, es por ellos va acompañado del método de la potencia o el método de la potencia inversa, esto dependiendo de que eigenpar se quiera obtener. En esta version se opto por usar el método de la potencia en conjunto al cociente de Rayleigh.

Se define un vector inicial v_0, el cual será la inicialización del método de potencias. Los elementos de v_0 estan definidos de la siguiente manera:

$$v_{0,i} = \frac{1}{\sqrt{n}} \tag{3}$$

donde n es el número de filas o columnas de la matriz. El método de la potencia aplica la ecuación 4, la cual conforme el número de iteraciones crece, el vector v se aproxima a el eigenvector correspondiente al eigenvalor dominante.

$$v_i = Av_{i-1} \tag{4}$$

El cociente de Rayleigh se define en la ecuación .

$$\mathcal{R}(x) = \frac{\langle v, Av \rangle}{\langle v, v \rangle} \tag{5}$$

Si v es un eigenvector, entonces $\mathcal{R}(x)$ obtiene el valor del eigenvalor correspondiente a ese vector. En este caso, el eigenvalor dominante.

Por lo que el algoritmo de la potencia en conjutno al cociente de Rayleigh puede escribirse de la siguiente manera:

Algorithm 1: Método de la potencia en conjunto del método de la potencia

Input: A
Output: v y λ

```
v_0 ← { 1/√n }
while |λ_i − λ_{i−1}| > tol do
    v_i = A v_{i−1}
    λ_i = ⟨v_i, A v_i⟩ / ⟨v_i, v_i⟩
    v_i = v_i / |v_i|
```

2.2. Método de iteraciones simultaneas

El método de iteraciones simultaneas es una generalización del método de la potencia, esto es debido a que se usa la base del mismo para obtener m eigenvalores de una matriz simetrica A. Existen variaciones de este método, algunas realizan el método de factrozacion QR para realizar la normalización de los vectores. En este caso usaremos partes del método de la potencia, el método de Jacobi y la ortonormalización de Gram-Schmidt para obtener los m eigenvalores dominantes.

El método inicia definiendo una matriz de $n \times m$ donde se guarda la información de los eigenvectores. La matriz v_0 de los eigenvectores esta compuesta de los m primeros vectores ortonormales de la base canonica de un espacio de n dimensiones. Entonces la matriz v_0 puede escribirse como la ecuación 6.

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Para obtener la matriz que contendra a los m eigenvectores del subespacio se realiza la operacion de la ecuación 7.

$$A'_{m\times m} = v^T_{m\times n} A_{n\times n} v_{n\times m} \tag{7}$$

en donde A' es la matriz del subespacio. Se aplicará el método de Jacobi a la matriz A' para obtener una matriz diagonal. Entonces se aplicarán i rotaciones sobre los eigenvectores y la matriz A', de tal forma que

$$\begin{aligned} D &= J_i^T J_{i-1}^T \cdots J_1^T A' J_1 J_2 \cdots J_i \\ v' &= v J_1 J_2 \cdots J_i \end{aligned}$$

Al termino de este proceso se realizará la ortonormalización de Gram-Scmidt (ecuación 8) a los eigenvectores v'.

$$v_i = \frac{v'_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle v'_i, v'_j \rangle v'_j}{\left\| v'_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle v'_i, v'_j \rangle v'_j \right\|} \tag{8}$$

Con este proceso terminado los eigenvectores v_i repetiran el proceso de la ecuación 7 hasta que el resultado de la ecuación 9 sea menor a la tolerancia:

$$\alpha_i = \sqrt{\sum_{j=0}^{n} (D_{i,j} - D_{i-1,j})^2} \tag{9}$$

donde j recorre la diagonal de las matrices D ya que ahi se encuentran los eigenvalores de la matriz A'.

El algoritmo puede escribirse de la siguiente manera:

Algorithm 2: Método de iteraciones simultaneas

Input: A,m
Output: v y λ
$v_0 \leftarrow$canonical_base(m)
while $\alpha > tol$ **do**
    $A' = v^T A v$
    while $|max\{a'_{ij}\}| > tol$ **do**
        $\theta =$obtain_angle(A',max)
        rotate_matrix(A,theta)
    for i=*1*,m **do**
        $v = Av$
        Gram_Schmidt(v)

3. Resultados

3.1. Método de la potencia y cociente de Rayleigh

3.2. Método de subespacio

4. Conclusiones