Capítulo 10

INTRODUCCIÓN A LAS EDP DE SEGUNDO ORDEN. EDP PARABÓLICAS

Esquema

- Introducción: clasificación y ejemplos.
- Requerimientos adicionales: condiciones de contorno e iniciales.
- Tipos de condiciones de contorno en sistemas finitos.
- Introducción a las edp2 parabólicas: ecuación del calor para una varilla.
- Condiciones de contorno en un problema de difusión del calor.
- Forma más general de la ecuación en derivadas parciales para un proceso difusivo.
- Condiciones de contorno homogéneas: ecuación homogénea y no homogénea.
  - * Ecuacion homogénea, cc de primera especie homogéneas.
  - * Ecuación homogénea, cc de tercera especie homogéneas.
  - * Ecuación diferencial no homogénea, cc homogéneas.
- Condiciones de contorno no homogéneas.
- Ecuación con términos de flujo lateral y/o convección.
- Ecuación del calor o de la difusión para un sistema de longitud infinita

Objetivos

- Dada una ecuación en derivadas parciales lineal de segundo orden (edp2), saber reconocer de qué tipo de ecuación se trata.
- Saber identificar los distintos tipos de condiciones de contorno que aparecen en un problema.
- Saber resolver una edp2 lineal parabólica simple con condiciones de contorno homogéneas, y en particular saber plantear y resolver el problema de Sturm-Liouville asociado.
- Saber transformar otros tipos de edp2 lineales parabólicas a la forma que ya se sabe resolver.
- Saber usar los métodos basados en transformaciones integrales.

10.1 Introducción: clasificación y ejemplos

Estudiaremos únicamente las edp2 lineales cuando la función incógnita depende sólamente de dos variables independientes (normalmente x e y o x y t), es decir, es de la forma

$$A(x,y)u_{xx}+B(x,y)u_{xy}+C(x,y)u_{yy}+D(x,y)u_x+E(x,y)u_y+F(x,y)u=G(x,y). \quad (10.1.1)$$

Si $G(x,y) = 0$ la ecuación se denomina homogénea. Para proceder a su estudio, estas ecuaciones se clasifican en varios tipos que vamos a considerar a continuación. Hay que indicar que en esta clasificación sólo intervienen los coeficientes de las derivadas parciales de segundo orden. Además, si A, B y C son funciones de x e y es posible que la ecuación sea de un tipo diferente en distintas regiones del plano. Dada una ecuación genérica como (10.1.1), se puede efectuar un cambio en las variables independientes de modo que, al menos localmente, la ecuación se puede llevar a una de las tres formas típicas que se comentan a continuación.

10.1.1 Clasificación

- Si $B^2-4AC=0$ la edp2 se denomina de **tipo parabólico**. Este tipo de ecuaciones en general surgen en problemas físicos en los que aparece el fenómeno de la difusión: del calor, de la concentración de una sustancia en un fluido, de la concentración de electrones en un semiconductor, etc.

  Ejemplo: la ecuación que rige la transmisión del calor a lo largo de una varilla unidimensional:
  $$u_t=\alpha^2 u_{xx}, \qquad \alpha = \text{constante}.$$
  Aquí $B=C=0$, $A=\alpha^2$.

- Si $B^2-4AC>0$ la edp2 se denomina de **tipo hiperbólico**. Este tipo de ecuaciones en general surgen en problemas físicos en los que aparece el fenómeno de la propagación de ondas: vibraciones de una cuerda, ondas sonoras, ecuaciones de Maxwell, etc.

  Ejemplo: la ecuación de la cuerda vibrante
  $$u_{tt}=c^2u_{xx}, \qquad c=\text{constante}>0.$$
  En este caso concreto $A=c^2$, $B=0$ y $C=-1$.

- Si $B^2-4AC<0$ la edp2 se denomina de **tipo elíptico**. En general este tipo de ecuaciones surge en el estudio de los fenómenos estacionarios (independientes del tiempo).

  Ejemplo: la ecuación de Laplace en el plano
  $$u_{xx}+u_{yy}=0,$$
  donde $A=C=1$ y $B=0$.

El uso de los calificativos *parabólico*, *hiperbólico* y *elíptico* en esta clasificación se debe a que si consideramos las funciones $Ax^2+Bxy+Cy^2+D=0$ con A, B, C y D constantes, entonces son cónicas, y en concreto si $B^2-4AC=0$ son parábolas, si $B^2-4AC>0$ son hipérbolas y si $B^2-4AC<0$ son elipses.

10.2 Requerimientos adicionales: condiciones de contorno y condiciones iniciales

La mayor parte de los sistemas físicos que se estudian son finitos, es decir, están limitados por un borde o una frontera, como es por ejemplo el caso de una varilla, de una cuerda de longitud L, de una membrana con una forma dada, etc. Además, usualmente se ejerce un cierto control sobre el sistema actuando sobre la frontera del mismo. Esto es lo que se hace por ejemplo al mantener los extremos de una cuerda fijos, o al sumergir los extremos de una varilla en sendos medios con temperaturas prefijadas. Este tipo de restricciones o ligaduras adicionales se plasman en lo que técnicamente se llaman unas **condiciones de contorno**, que deben suplementar a la ecuación diferencial cuando el sistema tiene una frontera, es decir si es finito.

Por otro lado, en el caso bastante frecuente de que una de las variables sea el tiempo, podemos interpretar que la ecuación diferencial nos dice como evoluciona con el tiempo la magnitud que representa la función u. Entonces, para calcular esa magnitud en función del tiempo es necesario conocerla en un instante inicial $t = 0$. Dependiendo del orden de la edp respecto a la variable temporal, puede que sea necesario conocer también otras características de u en $t = 0$ (por ejemplo el valor de su derivada temporal). Este conjunto de condiciones se denominan **condiciones iniciales** y, al igual que las condiciones de contorno, deben suplementar a la ecuación diferencial en el caso de tener una variabe temporal.

Además, en casi todos los casos que se estudian, la magnitud que representa u **debe ser finita** (a veces debe ser incluso positiva ...) y esta es una condición a veces esencial que debe verificar la solución que buscamos. Finalmente, otras veces el tipo de coordenadas que se utilizan para describir el sistema físico requieren algunas **condiciones especiales** de la función con respecto a alguna de las coordenadas, como puede ser algún tipo de periodicidad.

En resumen, el problema físico suele plantearse como

1. La edp2 que describe el fenómeno físico.
2. Las condiciones de contorno (cc)
3. Las condiciones iniciales (ci)
4. La condición de finitud.
5. Otras posibles condiciones especiales.

Si el problema está adecudamente planteado, este conjunto de condiciones debe permitirnos seleccionar cuál es la única solución del problema físico de entre las infinitas soluciones de la ecuación en derivadas parciales.

Observación: como vamos a considerar funciones de dos variables exclusivamente, en los casos en que aparezca el tiempo como variable independiente estaremos estudiando sistemas unidimensionales que evolucionan con el tiempo, mientras que si no aparece el tiempo estaremos ante un sistema bidimensional propiamente dicho.

10.3 Tipos de condiciones de contorno en sistemas finitos

Existen infinidad de posibilidades en cuanto al tipo de control que podemos efectuar sobre la frontera de un sistema. Sin embargo en la práctica existen tres tipos fundamentales de condiciones de contorno que son las más habituales en problemas físicos y que implican fijar el valor de la magnitud estudiada o de su derivada normal en la frontera. A continuación enumeramos estos casos y damos un ejemplo de cada tipo de condición de contorno para un sistema unidimensional finito de longitud L:

- *De primera especie*: cuando se fija el valor de la función en la frontera.

  Ejemplo:
  $$u(x=0,t)=f_1(t), \qquad u(x=L,t)=f_2(t).$$

- *De segunda especie*: cuando se fija el valor de la derivada de la función con respecto al vector normal en cada punto la frontera.

  Ejemplo: en una dimensión la derivada respecto de la normal en el extremo derecho es la derivada respecto de x, $\partial/\partial\vec{n}=\partial/\partial x$, mientras que en el extremo izquierdo es menos la derivada respecto a x, $\partial/\partial\vec{n}=-\,\partial/\partial x$. Por tanto en una dimensión las condiciones de contorno de segunda especie pueden escribirse como:
  $$u_x(x=0,t)=f_1(t), \qquad u_x(x=L,t)=f_2(t).$$

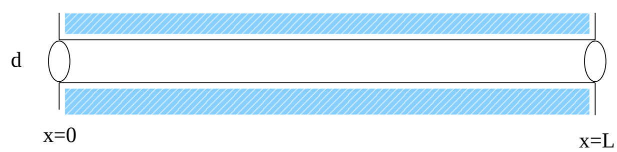
- *De tercera especie*: cuando se fija lo que vale una combinación lineal de la función y de su derivada respecto de la normal en la frontera (evidentemente este caso abarca los dos anteriores).

  Ejemplo:
  $$\alpha_1\,u(x=0,t)+\beta_1\,u_x(x=0,t)=f_1(t), \qquad \alpha_2\,u(x=L,t)+\beta_2\,u_x(x=L,t)=f_2(t).$$

En todos los casos, si $f_1(t)=f_2(t)=0$ las cc se llaman *homogéneas* y en caso contrario se llaman *no homogéneas*.

10.4 Introducción a las edp2 parabólicas: ecuación del calor para una varilla

Consideremos una varilla cilíndrica homogénea formada por un material conductor del calor, de longitud L y diámetro $d << L$, cuya superficie lateral está recubierta por un material aislante, de forma que únicamente es posible el flujo calorífico hacia adentro o hacia afuera de la varilla a través de sus extremos.



Bajo las condiciones que se han establecido, el problema es básicamente unidimensional. Llamemos $u(x,t)$ a la temperatura de una sección de la varilla situada en la posición x, justamente en el instante t. La ecuación diferencial que describe la evolución temporal de la temperatura a lo largo de la varilla es la denominada *ecuación del calor*:

$$u_t=\alpha^2 u_{xx}, \tag{10.4.1}$$

donde $\alpha^2 = \kappa/(c\rho)$, siendo κ la conductividad térmica del material, c su calor específico y ρ su densidad. La constante α^2 se denomina difusividad térmica del material.

Supongamos que durante un tiempo suficientemente prolongado la varilla ha estado en contacto con un baño térmico a temperatura T_0, de forma que después de ese tiempo la temperatura de la varilla es T_0 en todos sus puntos. En un instante que llamaremos $t = 0$ quitamos el baño térmico y colocamos en los dos extremos de la varilla sendos "elementos térmicos" que mantienen los extremos a temperaturas fijas T_1 y T_2. En la situación que acabamos de describir, para conocer la temperatura en cada punto como función del tiempo tendremos que suplementar la ecuación del calor con la *condición inicial* y las *condiciones de contorno* siguientes:

$$\begin{array}{ll} \text{ci:} & u(x,t=0) = T_0, \qquad 0 \le x \le L; \\ \text{cc:} & \left\{ \begin{array}{l} u(x=0,t) = T_1, \\ u(x=L,t) = T_2, \end{array} \right. \qquad 0 < t < \infty. \end{array}$$

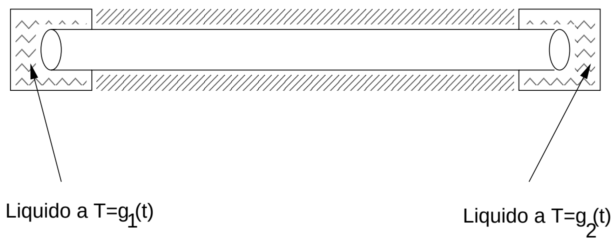
La ecuación del calor se deriva del principio de conservación de la energía junto con la ley de Fourier, que comentaremos más adelante. No vamos a derivar la ecuación aquí, pero sí vamos a interpretar su significado. Para ello escribamos una aproximación para la derivada segunda en términos de diferencias finitas:

$$u_{xx} \approx \frac{2}{(\Delta x)^2} \left[\frac{u(x+\Delta x,t) + u(x-\Delta x,t)}{2} - u(x,t) \right]. \qquad (10.4.2)$$

Esto nos dice que la derivada segunda (el laplaciano si estamos en dimensión espacial mayor que uno) es proporcional a la diferencia entre el valor de la función en un punto y el promedio de la función en un entorno del punto. Por tanto la ecuación del calor nos está diciendo que el ritmo de variación de la temperatura en un punto es proporcional a la diferencia de temperaturas entre el punto y su entorno: si $u(x,t) <$ promedio , entonces $u_{xx} > 0$, por tanto $u_t > 0$ y la temperatura del punto aumenta; por el contrario, si $u(x,t) >$ promedio , entonces $u_{xx} < 0$, $u_t < 0$ y la temperatura disminuye. En resumen, **la ecuación de la difusión nos dice que la temperatura de un punto tiende a igualarse a la de los puntos vecinos**.

10.5 Condiciones de contorno en un problema de difusión del calor

Ya hemos visto que manteniendo las temperaturas de los extremos fijas se obtienen condiciones de contorno de primera especie. Vamos ahora a estudiar qué tipo de condiciones de contorno resultan de efectuar un control de modo diferente de la temperatura de los extremos. Consideremos la misma varilla que antes, pero supongamos ahora que los extremos están en contacto con sendos líquidos a temperaturas dadas, $g_1(t)$ y $g_2(t)$.



Para escribir las condiciones de contorno debemos utilizar dos leyes del calor: la ley de enfriamiento de Newton y la ley de Fourier.

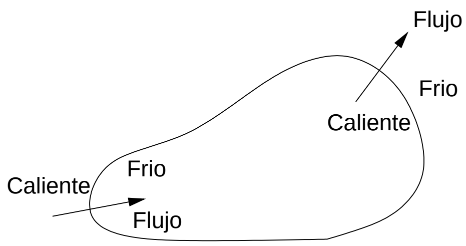
- La ley de Newton nos dice que el flujo de calor entre dos sistemas es proporcional a la diferencia de temperaturas entre ellos. Por tanto

$$\text{flujo hacia el exterior en } x = 0 = h_1 \left[u(0,t) - g_1(t)\right],$$

$$\text{flujo hacia el exterior en } x = L = h_2 \left[u(L,t) - g_2(t)\right],$$

  siendo los h_k coeficientes de intercambio de calor entre la varilla y los líquidos correspondientes (su expresión es complicada, dependiendo de las características de la varilla, los líquidos y la geometría del contacto, pero a fin de cuentas son ciertas constantes positivas).

- La ley de Fourier nos dice que el flujo de calor hacia el exterior de una región es proporcional a la derivada de la temperatura con respecto de la normal orientada hacia el interior (todo evaluado en la frontera o superficie del objeto):



  En la zona izquierda del dibujo la derivada de T respecto de la normal hacia adentro es negativa, u por tanto el flujo de calor hacia el exterior es negativo, es decir el flujo de calor es hacia el interior. En la zona de la derecha la derivada de T respecto de la normal orientada hacia el interior es positiva y por tanto el flujo de calor es hacia el exterior. Por tanto,

$$\begin{aligned}&\text{flujo hacia el exterior en } x = 0 = \kappa\, u_x(0,t),\\ &\text{flujo hacia el exterior en } x = L = -\kappa\, u_x(L,t),\end{aligned}$$

  siendo κ la conductividad térmica de la varilla.

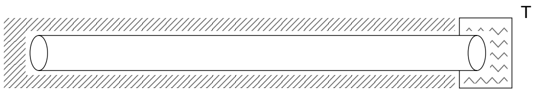
Combinando ambos resultados obtenemos para el problema que estamos analizando

$$\kappa\, u_x(0,t) - h_1 u(0,t) = -h_1 g_1(t), \qquad \kappa\, u_x(L,t) + h_2 u(L,t) = h_2 g_2(t), \tag{10.5.1}$$

es decir, encontramos condiciones de contorno de tercera especie. Nótese que si $h_j >> \kappa$ entonces las ecuaciones se reducen a unas de primera especie.

Finalmente, si pudieramos controlar el flujo de calor en los extremos entonces según la ley de Fourier estaríamos fijando el valor de la derivada de la función respecto de la normal, es decir, tendríamos condiciones de contorno de segunda especie. Una manera muy sencilla de fijar el flujo de calor en los extremos es aislarlos térmicamente, con lo cual el flujo es nulo, y las cc serían homogéneas de segunda especie.

Por supuesto nos podemos encontrar con casos mixtos, por ejemplo, un extremo de la varilla aislado y el otro en contacto con un líquido a temperatura constante T, como se muestra en la siguiente figura:



En este caso las cc serían

$$u_x(0,t) = 0, \qquad \kappa\, u_x(L,t) + h\, u(L,t) = h\, T. \tag{10.5.2}$$

10.6 Forma más general de la ecuación en derivadas parciales para un proceso difusivo

La ecuación parabólica más general que suele aparecer en problemas físicos de tipo difusivo es la siguiente:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} - \beta(u - u_0) - \nu\, u_x + f(x,t). \tag{10.6.1}$$

Nos indica que el ritmo de variación de la temperatura es debido a diversos factores, que según el orden en el que aparecen en la fórmula son los siguientes:

- Flujo interno debido a la difusión.
- Flujo lateral: si la varilla no está aislada en su superficie lateral puede intercambiar calor con el medio externo, y si éste se encuentra a una temperatura u_0 aparece el término mostrado.
- Flujo debido a la convección: este tipo de términos intervienen cuando, por ejemplo, estamos estudiando la difusión de una sustancia en un fluido que se está moviéndo con velocidad ν.
- Fuentes externas: si la varilla es metálica y por ella pasa una corriente eléctrica, o si en su interior ocurren reacciones nucleares, por ejemplo.

Comenzaremos estudiando los casos más sencillos para ir considerando posteriormente otros más complicados. Así, en primer lugar estudiaremos la ecuación sin términos de flujo lateral ni convectivo. Dentro de este apartado estudiaremos en primer lugar el caso de condiciones de contorno de primera especie homogéneas y ecuación homogénea ($f(x,t) = 0$). A continuación estudiaremos cc de tercera especie homogéneas y ecuación homogénea. Pasaremos después a estudiar el caso de cc homogéneas y ecuación no homogénea y finalmente veremos como resolver problemas con cc no homogéneas. Por último retomaremos el caso más general, estudiando qué se puede hacer cuando aparecen los términos de flujo lateral y/o convectivos. A partir de ahora vamos a suponer, sin pérdida de generalidad, que la longitud de la varilla es $L = 1$ (si no fuera así, basta hacer un cambio de variable a $\xi = x/L$).

10.7 Condiciones de contorno homogéneas: ecuación homogénea y no homogénea

10.7.1 Ecuacion homogénea, cc de primera especie homogéneas

El problema que se plantea es:

$$\begin{aligned} \text{edp2:} \quad & u_t = \alpha^2 u_{xx}, \\ \text{cc:} \quad & \begin{cases} u(0,t) = 0, \\ u(1,t) = 0, \end{cases} \\ \text{ci:} \quad & u(x,0) = \phi(x). \end{aligned} \tag{10.7.1}$$

El problema se resuelve siguiendo sistemáticamente las distintas etapas que se indican a continuación: (1) en primer lugar buscaremos soluciones de la edp2; (2) después, entre las halladas anteriormente buscaremos soluciones de la edp2 que además verifiquen las cc y daremos la forma más general de una solución de ese tipo; (3) finalmente buscaremos la solución "particular" que verifica también la ci.

PASO 1. Soluciones de la edp2

Vamos a buscar soluciones de la edp2 utilizando el método de **separación de variables**, que consiste en buscar las soluciones en forma factorizada

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{10.7.2}$$

Llevando esta expresión a la edp2 obtenemos:

$$X(x)\dot{T}(t) = \alpha^2 X''(x)T(t), \tag{10.7.3}$$

donde el punto representa derivada respecto de t y las primas derivadas respecto de x. Dividiendo toda la ecuación entre $\alpha^2 X(x)T(t)$ nos queda

$$\frac{\dot{T}(t)}{\alpha^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{10.7.4}$$

Ahora observamos que el lado izquierdo de la igualdad depende únicamente de t, mientras que el lado derecho depende sólo de x. Por tanto, para que ambos lado sean iguales para cualquier valor de x y de t la única posibilidad es que de hecho ninguna de las dos expresiones dependa de las variables respectivas, es decir, que sean iguales a una constante (la misma en los dos casos):

$$\frac{\dot{T}(t)}{\alpha^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \mu. \tag{10.7.5}$$

La constante μ que acabamos de introducir se denomina constante de separación. Las anteriores expresiones nos llevan a un conjunto de dos ecuaciones diferenciales ordinarias, una para la parte temporal y otra para la parte espacial de la función:

$$\begin{cases} \dot{T}(t) - \mu\alpha^2 T(t) = 0, \\ X''(x) - \mu X(x) = 0. \end{cases} \tag{10.7.6}$$

El problema de resolver la edp2 ha quedado por tanto reducido a otro que ya sabemos resolver: dos ecuaciones diferenciales ordinarias. La ecuación temporal puede resolverse de inmediato, siendo la solución de la forma

$$T(t) = T_0 e^{\mu\alpha^2 t}, \tag{10.7.7}$$

sea cual sea el valor de $\mu \in \mathbb{R}$. Por otra parte la forma funcional de la solución para la ecuación espacial depende del signo de μ:

• Si $\mu > 0, \mu = \beta^2$ ($\beta > 0$) y la solución es una combinación lineal de exponenciales reales.
• Si $\mu = 0$ la solución es un polinomio de primer grado en x.
• Si $\mu < 0, \mu = -\lambda^2$ (con $\lambda > 0$) y la solución es una combinación lineal de exponenciales imaginarias, o bien de senos y cosenos:

$$\begin{aligned} \mu &= \beta^2 & \Rightarrow \quad X(x) &= Ae^{\beta x} + Be^{-\beta x}. \\ \mu &= 0 & \Rightarrow \quad X(x) &= Ax + B. \\ \mu &= -\lambda^2 & \Rightarrow \quad X(x) &= A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x). \end{aligned} \tag{10.7.8}$$

En todos los casos A y B son constantes reales arbitrarias.

PASO 2. Soluciones de la edp2 y las cc

Si imponemos las condiciones de contorno a las soluciones factorizadas en variables separadas que acabamos de hallar tendremos:

$$u(0,t) = 0 = X(0)T(t) \quad \text{y esto } \forall t \quad \Rightarrow \quad X(0) = 0, \tag{10.7.9}$$

$$u(1,t) = 0 = X(1)T(t) \quad \text{y esto } \forall t \quad \Rightarrow \quad X(1) = 0. \tag{10.7.10}$$

Por tanto observamos que las cc se traspasan directamente a la parte espacial de la solución en variables separadas. Así pues, para encontrar las soluciones de la edp2 y las cc debemos resolver la ecuación diferencial ordinaria para la parte espacial con las cc especificadas.

$$\begin{cases} X''(x) - \mu X(x) = 0, \\ X(0) = 0, \\ X(1) = 0. \end{cases} \tag{10.7.11}$$

A este tipo de ecuaciones diferenciales se le denomina *problema de Sturm-Liouville (SL) asociado a la edp2 con cc dadas*. Vamos a resolver este problema de SL. En primer lugar observemos que $X(x) = 0$ siempre es solución del problema. Sin embargo esto implicaría que $u(x,t) = 0$, lo cual en general no es compatible con la C.I. Por tanto esta solución $X(x) = 0$ la llamaremos solución trivial y no la aceptaremos como solución válida del problema de SL. Veamos entonces cuales son las soluciones no triviales del problema de SL planteado en (10.7.11):
• Consideremos en primer lugar el caso $\mu = \beta^2$:

$$X(x) = Ae^{\beta x} + Be^{-\beta x} \quad \Rightarrow \quad X(0) = A + B, \quad X(1) = Ae^{\beta} + Be^{-\beta}. \tag{10.7.12}$$

Según las cc (10.7.11):

$$A + B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -A \quad \Rightarrow \quad Ae^{\beta} + Be^{-\beta} = A\left(e^{\beta} - e^{-\beta}\right) = 0. \tag{10.7.13}$$

Para que se cumpla esta segunda ecuación tenemos dos posibilidades, ya que para que el producto de dos factores sea nulo es suficiente que lo sea uno de ellos. La primera opción es

$A = 0$, pero entonces también $B = 0$ y la solución que se obtiene es la trivial. La segunda opción es que el paréntesis sea nulo, pero eso es imposible ya que el paréntesis sólo se anula para $\beta = 0$ que no está permitido. En resumen, para el caso $\mu > 0$ no existen soluciones no triviales al problema de SL.

• Analicemos ahora el caso $\mu = 0$:

$$X(x) = Ax + B \quad \Rightarrow \quad X(0) = B,\ X(1) = A + B. \tag{10.7.14}$$

Según las cc

$$B = 0 \quad A + B = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0, \tag{10.7.15}$$

que es la solución trivial.

• Veamos finalmente el caso $\mu = -\lambda^2$:

$$X(x) = A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x) \quad \Rightarrow \qquad X(0) = B \qquad X(1) = A\sin\lambda + B\cos\lambda. \tag{10.7.16}$$

Usando las cc

$$B = 0 \quad A\sin\lambda = 0. \tag{10.7.17}$$

Igual que antes, para la segunda ecuación tenemos dos posibilidades: o bien $A = 0$, que nos produce la solución trivial, o bien $\sin\lambda = 0$. Ahora bien, al contrario que en el caso de las exponenciales reales esta última ecuación sí tiene soluciones distintas de $\lambda = 0$ (que existe pero no está permitida), y en concreto tiene un conjunto infinito numerable de soluciones, a saber,

$$\lambda_n = n\pi, \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \tag{10.7.18}$$

A cada uno de estos valores le corresponde una constante de separación $\mu_n = -\lambda_n^2 = -n^2\pi^2$ y unas funciones espaciales $X_n(x) = A_n \sin(n\pi x)$. Podemos observar que los valores negativos de n dan lugar a la misma constante de separación que el correspondiente valor positivo y a una función espacial que es proporcional a la correspondiente al valor positivo. Esto quiere decir que de hecho los valores negativos de n producen las mismas soluciones al problema de SL que los valores positivos, y en consecuencia habitualmente se obvian.

En resumen, hemos encontrado que las soluciones no triviales del problema de SL son de la forma

$$X_n(x) = \sin(n\pi x) \tag{10.7.19}$$

y ademas la constante de separación no puede tomar cualquier valor, sino uńicamente

$$\mu_n = -n^2\pi^2, \tag{10.7.20}$$

y todo ello para valores de $n = 1, 2, 3, \ldots$ Obsérvese también que hemos eliminado la constante multiplicativa de $X_n(x)$, y lo mismo haremos con la constante que aparece en la parte temporal de la solución.

Dado que μ no puede tomar cualquier valor, la solución para la parte temporal también llevará asociado un índice n:

$$T_n(t) = e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t} \tag{10.7.21}$$

y por tanto, hemos encontrado un conjunto de funciones $u_n(x,t)$ que son soluciones de la edp2 y verifican las cc, a saber

$$u_n(x,t) = e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t}\sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{10.7.22}$$

Estas funciones se denominan *soluciones fundamentales* de la edp2. Ahora bien, la edp2 es una ecuación lineal homogénea, y esto implica que cualquier combinación lineal de soluciones es también solución de la ecuación. En realidad nosotros vamos a ir algo más lejos y consideraremos la posibilidad de que, dado que tenemos un conjunto infinito numerable de soluciones fundamentales, podamos construir una solución a la edp2 formada como una *serie* de soluciones fundamentales:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t} \sin(n\pi x). \tag{10.7.23}$$

Inmediatamente se plantean dos problemas: si la serie que acabamos de escribir es convergente o no, y caso de serlo, si su suma realmente será solución de la edp2. En el caso que estamos considerando podemos darnos cuenta que la serie que aparece es en realidad una serie de Fourier (desplazada y escalada) de senos, y por tanto los criterios de convergencia son ya conocidos y sabemos que si la serie converge, entonces de hecho es solución de la edp2. En definitiva, la solución más general de la edp2 verificando las cc viene dada por la serie anterior (cuando ésta sea convergente).

PASO 3. Solución de la edp2, las cc y la ci

Para terminar de encontrar la solución a nuestro problema original nos falta que la serie anterior satisfaga la condición inicial del problema. Por tanto simplemente la imponemos y esto nos va a resultar en que las constantes A_n que aparecen en (10.7.23) van a quedar determinadas en función de esta ci:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x) = \phi(x). \tag{10.7.24}$$

Esto nos está diciendo que las constantes A_n han de ser los coeficientes del desarrollo en serie de senos de $\phi(x)$. Si queremos una expresión cerrada para estos coeficientes, hemos de utilizar las propiedades de ortogonalidad de los senos, a saber

$$\int_0^1 dx\, \sin(n\pi x)\sin(m\pi x) = \frac{1}{2}\,\delta_{nm}. \tag{10.7.25}$$

Utilizando esta relación podemos despejar las constantes:

$$A_n = 2\int_0^1 \phi(x)\sin(n\pi x)\; dx. \tag{10.7.26}$$

En definitiva, la solución al problema de edp2 homogénea con cc homogéneas de primera especie (10.7.1) es la siguiente:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t} \sin(n\pi x) \quad \text{con} \quad A_n = 2\int_0^1 \phi(x)\sin(n\pi x)\; dx. \tag{10.7.27}$$

Añadiremos tres comentarios:

1. Podemos visualizar el proceso de resolución del problema de la siguiente manera: dada la condición inicial, la desarrollamos como una suma (en general infinita) de funciones simples. A continuación cada uno de los términos es multiplicado por un factor de atenuación que corresponde a la respuesta del sistema a cada una de las funciones simples. Y finalmente sumamos todas esas respuestas para encontrar la solución.

2. Aunque la solución se ha escrito como una serie, en realidad la solución final podría ser una combinación lineal finita en el caso de que el número de términos que aparezca en el desarrollo de la condición inicial sea sólo un número finito. Esto ocurrirá si $\phi(x)$ ya está escrita como una combinación lineal de senos. Además, en este caso no seriá estrictamente necesario hacer las integraciones para hallar los valores de las constantes A_n ya que éstas pueden obtenerse directamente por inspección.
   Por ejemplo, si $\phi(x) = \sin(\pi x) + \frac{1}{2}\sin(3\pi x)$, vemos que $A_1 = 1, A_3 = 1/2$ y las demás $A_n = 0$. La solución será: $u(x,t) = \exp[-\pi^2\alpha^2 t]\sin(\pi x) + \frac{1}{2}\exp[-9\pi^2\alpha^2 t]\sin(3\pi x)$.

3. Finalmente observemos que los términos de la serie con valores de n mayores decaen más rápido con el tiempo que los correspondientes a valores menores de n, debido al factor exponencial. Por tanto para tiempos grandes la solución es aproximadamente igual al primer término no nulo de la serie, y de hecho para $t \to \infty$ la solución será $u(x,t) = 0$.

10.7.2 Ecuación homogénea, condiciones de contorno de tercera especie homogéneas

$$\begin{aligned}
\text{edp2:} \quad & u_t = \alpha^2 u_{xx}, \\
\text{cc:} \quad & \begin{cases} \alpha_1 u_x(0,t) + \beta_1 u(0,t) = 0, \\ \alpha_2 u_x(1,t) + \beta_2 u(1,t) = 0, \end{cases} \\
\text{ci:} \quad & u(x,0) = \phi(x).
\end{aligned} \tag{10.7.28}$$

El método para resolver el problema cuando las cc son de tercera especie es en realidad el mismo que el que se llevó a cabo para cc de primera especie, es decir, separación de variables, resolución del problema de SL (soluciones fundamentales), solución general como serie y solución particular imponiendo la ci. La única diferencia radica en que ahora el problema de SL es diferente y por tanto los posibles valores de la constante de separación y las soluciones no triviales serán en principio diferentes de los que se obtenían con cc de primera especie. En concreto, es posible que el valor $\mu = 0$ origine una solución de SL distinta de la trivial y por tanto sea un valor aceptable. Se puede demostrar que siempre sucede lo siguiente:

- Sólo un conjunto numerable de constantes de separación μ dan lugar a soluciones no triviales. Sean éstas μ_n, con $n = 1, 2, \dots$

- Para cada una de las μ_n existe únicamente una función $X_n(x)$ solución del problema de SL (salvo por una constante multiplicativa que se ignora habitualmente). Los números μ_n y las funciones $X_n(x)$ se denominan respectivamente autovalores (o valores propios) y autofunciones (o funciones propias) del problema de SL.

- Las funciones propias forman una familia de funciones ortogonales:

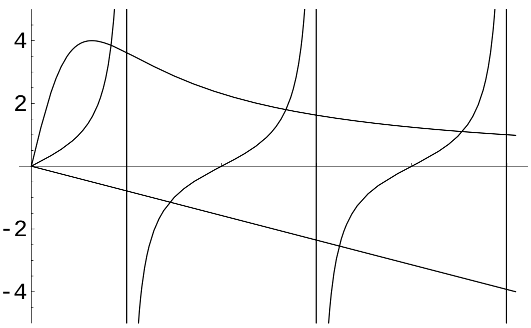
$$\int_0^1 dx\, X_n(x) X_m(x) = N_n \delta_{nm}. \tag{10.7.29}$$

- Las series en funciones propias del problema de SL tienen las mismas propiedades que las series de Fourier (por ejemplo, si la serie es convergente entonces es la solución de la misma edp2 que verifica las soluciones fundamentales).

El problema de SL hay que resolverlo en cada caso concreto que se presente, según las cc impuestas. En el caso más general posible de cc de tercera especie, es decir, todas las constantes α y β en (10.7.28) diferentes de cero, se demuestra que las constantes de separación sólo pueden ser negativas $\mu_n = -\lambda_n^2$ y los valores de λ_n son las soluciones (distintas de cero) de una ecuación trascendente, que ha de resolverse numéricamente:

$$\tan\lambda = \frac{(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\lambda}{\alpha_1\alpha_2\lambda^2 + \beta_1\beta_2}. \tag{10.7.30}$$

En la figura siguiente se muestran los resultados de representar por un lado la función $\tan\lambda$ y por otro el segundo miembro de (10.7.30) para dos valores diferentes de las constantes (un caso corresponde a $\alpha_1 = 0$, que es el trozo de recta; la otra curva se obtiene si $\alpha_1 \neq 0$).



Las funciones propias son de la forma

$$X_n(x) = \sin(\lambda_n x) - \frac{\alpha_1}{\beta_1}\lambda_n \cos(\lambda_n x). \tag{10.7.31}$$

No tiene sentido aprenderse estas expresiones; en cada caso concreto lo que hay que hacer es resolver el problema de SL asociado a las cc que aparezcan en el problema. Una vez hecho esto la solución del problema será de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n^2\alpha^2 t} X_n(x) \tag{10.7.32}$$

y los A_n se obtendrán imponiendo la condición inicial

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) = \phi(x), \tag{10.7.33}$$

que nos dice que las constantes A_n son los coeficientes del desarrollo de $\phi(x)$ en funciones propias del problema de SL correspondiente. De manera explícita

$$A_n = \frac{1}{N_n}\int_0^1 dx\, \phi(x) X_n(x), \tag{10.7.34}$$

siendo N_n las constantes de normalización de las funciones propias.

10.7.3 Ecuación diferencial no homogénea, condiciones de contorno homogéneas

Este es el problema que hay que resolver:

$$\begin{aligned} &\text{edp2:} \quad u_t = \alpha^2 u_{xx} + f(x,t), \\ &\text{cc:} \quad \begin{cases} \alpha_1 u_x(0,t) + \beta_1 u(0,t) = 0, \\ \alpha_2 u_x(1,t) + \beta_2 u(1,t) = 0, \end{cases} \\ &\text{ci:} \quad u(x,0) = \phi(x). \end{aligned} \tag{10.7.35}$$

Para entender como se resuelven las edp2 lineales de tipo parabólico no homogéneas recordemos como se resolvían las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas: la solución general de la ecuación no homogénea se escribía como suma de la solución general de la ecuación homogénea asociada más una solución particular de la ecuación no homogénea. Si la ecuación es de orden n, en la solución general de la homogénea aparecen n constantes arbitrarias. El cálculo de la solución particular de la no homogénea podía hacerse de diversos modos. Aquí nos interesa recordar el método de variación de las constantes, que básicamente consiste en sustituir en la solución de la ecuación homogénea las constantes arbitrarias por funciones. La expresión obtenida se lleva entonces a la ecuación diferencial no homogénea y se opera, dando como resultado unas ecuaciones diferenciales para las "constantes". Resolviendo estas ecuaciones diferenciales se obtiene la solución particular de la ecuación no homogénea; es más, si en esta integración se incorporan las constantes de integración necesarias, entonces se obtiene directamente la solución general de la ecuación diferencial no homogénea.

En nuestro caso (edp2 no homogénea) seguiremos un procedimiento análogo. En primer lugar consideramos el mismo problema pero con la ecuación homogénea:

$$\begin{aligned} &\text{edp2:} \quad u_t = \alpha^2 u_{xx}, \\ &\text{cc:} \quad \begin{cases} \alpha_1 u_x(0,t) + \beta_1 u(0,t) = 0, \\ \alpha_2 u_x(1,t) + \beta_2 u(1,t) = 0, \end{cases} \end{aligned} \tag{10.7.36}$$

y encontramos su solución general, que ya sabemos que se obtiene mediante el proceso de separación de variables, resolución del problema de Sturm-Liouville asociado a la ecuación espacial con las cc dadas, resultando unos autovalores μ_n y unas funciones propias $X_n(x)$ que dan lugar a las soluciones fundamentales $u_n(x,t) = \exp[\mu_n \alpha^2 t] X_n(x)$, y finalmente la solución más general de la edp2 que cumple las cc se escribe como una serie en funciones propias:

$$u^{\text{hom}}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \; e^{\mu_n \alpha^2 t} X_n(x), \tag{10.7.37}$$

siendo A_n constantes. Para aplicar el "metodo de variación de constantes" a la resolución de la ecuación no homogénea, sustituimos las constantes A_n por funciones $A_n(t)$ escribiendo entonces la solución de la ecuación no homogénea como

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \; e^{\mu_n \alpha^2 t} X_n(x). \tag{10.7.38}$$

De hecho podemos englobar la función temporal desconocida y el factor exponencial temporal en una sóla función de t:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)\, X_n(x). \tag{10.7.39}$$

Ahora debemos llevar esta expresión a la edp2 no homogénea (10.7.36), lo que origina un conjunto de ecuaciones diferenciales para las funciones incógnita $g_n(t)$ que deberemos resolver. Recordemos que $X_n(x)$ son funciones conocidas: las soluciones (no triviales) del problema de Strum-Liouville asociado a la parte espacial de la ecuación homogénea. Antes de proceder conviene comentar que este procedimiento que estamos siguiendo no suele denominarse variación de constantes, sino **método de desarrollo en funciones propias** (por motivos evidentes) o también método de Fourier.

Al sustituir la expresión anterior en la ecuación no homogénea $u_t = \alpha^2 u_{xx} + f(x,t)$ nos damos cuenta de que tanto u_t como u_{xx} aparecen en forma de serie, y por tanto para poder hacer algún progreso necesitamos también que el término no homogéneo $f(x,t)$ aparezca como una serie. Por tanto **evaluamos** el desarrollo de $f(x,t)$ en serie de funciones propias $X_n(x)$ resultando

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\, X_n(x). \tag{10.7.40}$$

Es esencial darse cuenta de que a diferencia de $g_n(t)$ que de momento son funciones incógnita, las funciones $f_n(t)$ se pueden calcular, ya que $f(x,t)$ es una función dada desde el principio. Explícitamente tenemos

$$f_n(t) = \frac{1}{N_n} \int_0^1 dx\, f(x,t) X_n(x), \tag{10.7.41}$$

siendo N_n las constantes de normalización de las funciones propias. Finalmente, sustituyendo en la ecuación no homogénea tenemos:

$$u_t = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{g}_n(t)\, X_n(x), \tag{10.7.42}$$

$$u_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)\, X_n''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)\, \mu_n\, X_n(x), \tag{10.7.43}$$

donde hemos utilizado la ecuación diferencial asociada a la parte espacial, y

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\, X_n(x). \tag{10.7.44}$$

Por tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \dot{g}_n(t)\, X_n(x) = \alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)\, \mu_n\, X_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\, X_n(x), \tag{10.7.45}$$

o lo que es lo mismo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\dot{g}_n(t) - \mu_n \alpha^2 g_n(t) - f_n(t)\right] X_n(x) = 0. \tag{10.7.46}$$

Dado que los desarrollos en funciones propias de problemas de SL tienen propiedades similares a las de las series de Fourier, para que la serie anterior sume cero es necesario que todos sus términos sean nulos, es decir, debemos tener

$$\dot{g}_n(t) - \mu_n \alpha^2 g_n(t) = f_n(t), \quad n = 1, 2, \dots \tag{10.7.47}$$

Lo que obtenemos es un conjunto (en principio infinito numerable) de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden lineales y no homogéneas, que debemos resolver. Su solución en cualquier caso siempre puede escribirse como suma de la solución general de la correspondiente ecuación homogénea (que ya sabemos es de la forma $A_n \exp[\mu_n \alpha^2 t]$) más una particular de la no homogénea (llamémosla $w_n(t)$). Esta solución particular puede obtenerse por cualquiera de los métodos conocidos (variación de constantes, coeficientes indeterminados, etc.). En definitiva una vez resueltas estas ecuaciones diferenciales ordinarias tendremos

$$g_n(t) = A_n \, e^{\mu_n \alpha^2 t} + w_n(t) \tag{10.7.48}$$

y la solución más general de la edp2 no homogénea que cumple las cc será por tanto

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \, e^{\mu_n \alpha^2 t} + w_n(t) \right] X_n(x). \tag{10.7.49}$$

Para terminar de resolver nuestro problema nos falta encontrar las constantes A_n que hacen que se verifique la condición inicial. Imponiéndola tenemos:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n + w_n(0) \right] X_n(x) = \phi(x), \tag{10.7.50}$$

de donde obtenemos que $A_n + w_n(0)$ son los coeficientes del desarrollo de $\phi(x)$ en serie de funciones propias $X_n(x)$. Explícitamente tendremos que las constantes A_n serán

$$A_n = -w_n(0) + \frac{1}{N_n} \int_0^1 dx \, \phi(x) X_n(x). \tag{10.7.51}$$

En la solución final del problema para la función $u(x,t)$ aparecen diversos términos

- uno que involucra las funciones $w_n(t)$,

  $$\sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) X_n(x), \tag{10.7.52}$$

  que depende de las fuentes externas $f(x,t)$ (a través de w_n) y de las cc (a través de X_n), pero no de la ci.

- otro, el resto, que depende de la ci (a través de ella se determinan las constantes A_n), y que se anula para tiempos grandes

  $$\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\mu_n \alpha^2 t} X_n(x). \tag{10.7.53}$$

Este último término se denomina **transitorio** y el primero (independiente de la ci) se denomina **estacionario**. El hecho de que el término transitorio desaparezca para tiempos grandes y que el estacionario sea independiente de las condiciones iniciales hace que la solución al problema para tiempos grandes sea de hecho independiente de las condiciones iniciales: una vez alcanzado el régimen estacionario no importa de donde se haya partido, la solución es siempre la misma.

10.8 Condiciones de contorno no homogéneas

Empecemos con un caso sencillo de condiciones de contorno no homogéneas:

$$\begin{aligned} &u_t = \alpha^2 u_{xx}, \\ &u(0,t) = k_1, \quad u(1,t) = k_2, \\ &u(x,0) = \phi(x). \end{aligned} \tag{10.8.1}$$

Supongamos que para tiempos grandes el sistema alcanza un estado estacionario independiente del tiempo. Entonces para estos tiempos grandes $u_t = 0$ y la ecuación diferencial es $u^{\text{est}}_{xx} = 0$, cuya solución es $u^{\text{est}} = Ax + B$. Imponiendo las condiciones de contorno se obtienen directamente los coeficientes A y B, resultando $u^{\text{est}} = k_1(1-x) + k_2 x$. Para obtener la solución para cualquier valor de t escribimos esta solución como suma de la solución anterior más una nueva función incógnita $\varphi(x,t)$:

$$u(x,t) = k_1(1-x) + k_2 x + \varphi(x,t). \tag{10.8.2}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial tenemos :

$$u_t = \varphi_t, \quad u_x = -k_1 + k_2 + \varphi_x, \quad u_{xx} = \varphi_{xx} \tag{10.8.3}$$

y por tanto la edp2 queda

$$\varphi_t = \alpha^2 \varphi_{xx}. \tag{10.8.4}$$

En cuanto a las condiciones de contorno tenemos

$$u(0,t) = k_1 + \varphi(0,t) = k_1, \qquad u(1,t) = k_2 + \varphi(1,t) = k_2, \tag{10.8.5}$$

y por tanto

$$\varphi(0,t) = 0 \qquad \varphi(1,t) = 0. \tag{10.8.6}$$

Finalmente la condición inicial quedará

$$u(x,0) = k_1(1-x) + k_2 x + \varphi(x,0) = \phi(x), \tag{10.8.7}$$

y por tanto

$$\varphi(x,0) = \phi(x) - k_1(1-x) - k_2 x = \tilde{\phi}(x). \tag{10.8.8}$$

Resumiendo, en términos de la nueva incógnita $\varphi(x,t)$ el problema queda planteado como

$$\begin{aligned} &\varphi_t = \alpha^2 \varphi_{xx}, \\ &\varphi(0,t) = 0, \quad \varphi(1,t) = 0, \\ &\varphi(x,0) = \tilde{\phi}(x), \end{aligned} \tag{10.8.9}$$

que es un problema con condiciones de contorno homogéneas, que ya sabemos resolver.

Fijémonos en que la propiedad fundamental que ha permitido reformular el problema original con cc no homogéneas en términos de uno con cc homogéneas ha sido el hecho de que u^{est} verificaba las cc no homogéneas originales. Esto nos permite entender que en el caso más general, que estudiaremos a continuación, el procedimiento a seguir es separar la función incógnita $u(x,t)$ como suma de una función **que verifique las cc no homogéneas** más una nueva función incógnita; de esta manera, en términos de la nueva función incógnita, el problema aparecerá como uno con cc homogéneas, que por tanto ya sabremos resolver.

Consideremos pues el caso más general de problema con cc no homogéneas:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} + f(x,t),$$

$$\begin{cases} \alpha_1 u_x(0,t) + \beta_1 u(0,t) &= g_1(t), \\ \alpha_2 u_x(1,t) + \beta_2 u(1,t) &= g_2(t), \end{cases} \tag{10.8.10}$$

$$u(x,0) = \phi(x). \tag{10.8.11}$$

Para resolverlo procedemos como se ha indicado, escribiendo

$$u(x,t) = S(x,t) + \varphi(x,t), \tag{10.8.12}$$

siendo $S(x,t)$ una función **cualquiera** que verifique las condiciones de contorno, es decir, una función tal que

$$\begin{cases} \alpha_1 S_x(0,t) + \beta_1 S(0,t) &= g_1(t), \\ \alpha_2 S_x(1,t) + \beta_2 S(1,t) &= g_2(t). \end{cases} \tag{10.8.13}$$

No importa en exceso como se obtenga la función $S(x,t)$ ni si va a representar o no la solución del problema para tiempos grandes (como supusimos anteriormente para u^{est}); lo único importante es **que verifique las condiciones de contorno**. Después comentaremos un poco cómo podemos encontrar una función $S(x,t)$ para el problema que se nos plantee.

En términos pues de la nueva función incógnita $\varphi(x,t)$ veamos como queda planteado el problema:

• Haciendo la sustitución, la edp2 quedará

$$S_t + \varphi_t = \alpha^2 (S_{xx} + \varphi_{xx}) + f(x,t),$$

o bien

$$\varphi_t = \alpha^2 \varphi_{xx} + f(x,t) + \alpha^2 S_{xx} - S_t = \alpha^2 \varphi_{xx} + \tilde{f}(x,t). \tag{10.8.14}$$

• En cuanto a las cc tendremos

$$\begin{aligned} g_1(t) &= \alpha_1 u_x(0,t) + \beta_1 u(0,t) = \alpha_1 S_x(0,t) + \alpha_1 \varphi_x(0,t) + \beta_1 S(0,t) + \beta_1 \varphi(0,t) \\ &= g_1(t) + \alpha_1 \varphi_x(0,t) + \beta_1 \varphi(0,t), \end{aligned}$$

y en consecuencia

$$\alpha_1 \varphi_x(0,t) + \beta_1 \varphi(0,t) = 0. \tag{10.8.15}$$

Operando exactamente igual con la otra cc, resulta

$$\alpha_2 \varphi_x(1,t) + \beta_2 \varphi(1,t) = 0. \tag{10.8.16}$$

Como vemos las dos cc son homogéneas.

• Finalmente la condición inicial resultará

$$\varphi(x,0) = \phi(x) - S(x,0) = \tilde{\phi}(x). \tag{10.8.17}$$

En resumen, el problema ahora se plantea como

$$\varphi_t = \alpha^2 \varphi_{xx} + \tilde{f}(x,t),$$

$$\begin{cases} \alpha_1 \varphi_x(0,t) + \beta_1 \varphi(0,t) = 0, \\ \alpha_2 \varphi_x(1,t) + \beta_2 \varphi(1,t) = 0, \end{cases} \tag{10.8.18}$$

$$\varphi(x,0) = \tilde{\phi}(x). \tag{10.8.19}$$

Se trata por tanto de una edp2 no homogénea, con el término no homogéneo modificado, con cc homogéneas y una ci modificada; en cualquier caso un problema que ya sabemos resolver (en general mediante desarrollo en funciones propias). En la solución final del problema para la función $u(x,t)$ aparecen los siguientes términos:

- $S(x,t)$, que depende únicamente de las cc pero no de las fuentes externas ni de la ci;
- un término que involucra las funciones $w_n(t)$, que depende de las fuentes externas y las cc, pero no de la ci;
- un término que depende de la ci y que se anula para tiempos grandes.

El último término se denomina **transitorio** y la suma de los dos primeros (independientes de la ci) se denomina **estacionario**.

Para terminar esta sección hagamos unos comentarios sobre la elección de la función $S(x,t)$. Una primera posibilidad es hallar la función $S(x,t)$ que verifique las cc por inspección (*a ojo*, lo cual es perfectamente admisible). Si queremos un método más sistemático podemos guiarnos por lo obtenido en el ejemplo sencillo que vimos inicialmente, e intentar una expresión de la forma

$$S(x,t) = a(t)(1-x) + b(t)x, \tag{10.8.20}$$

determinando $a(t)$ y $b(t)$ al imponer las cc. Este método es aplicable en muchos casos, pero a veces no resulta adecuado, es decir a veces es imposible encontar funciones $a(t), b(t)$ tales que se verifiquen las cc dadas. En este caso se puede recurrir a escribir una expresión de grado mayor en x, por ejemplo,

$$S(x,t) = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2 + \cdots \tag{10.8.21}$$

y calcular los coeficientes imponiendo las cc.

En cualquier caso, resulta evidente que existen infinitas funciones $S(x,t)$ que van a verificar las cc. ¿Cuál de todas ellas es más conveniente? Como consejo se recomienda usar aquella elección que produce un problema modificado más sencillo, es decir, la que hace que $\tilde{\phi}(x)$ o $\tilde{f}(x,t)$ tomen formas lo más sencillas posible. De todas formas es importante señalar que sea cual fuere la elección que se haga, el resultado final para $u(x,t)$ es siempre el mismo, aunque es posible que aparezca escrito formalmente de manera distinta (por ejemplo, para una determinada elección de S puede aparecer explícitamente una función digamos como x^2 mientras que para otra elección de S lo que aparece es su desarrollo en serie de funciones propias).

10.9 Ecuaciones con términos de flujo lateral y/o convección

10.9.1 Ecuación con flujo lateral

Pasamos a estudiar los casos en que aparecen términos adicionales en la ecuación en derivadas parciales, comenzando por el caso de la ecuación con un término proporcional a $u(x,t)$:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} - \beta u + f(x,t). \tag{10.9.1}$$

Supongamos que $f(x,t) = 0$ y que $\alpha^2 << \beta$. En este caso podríamos escribir la ecuación de manera aproximada como $u_t = -\beta u$, ecuación muy sencilla de resolver y cuya solución es

$$u(x,t) = u_0(x)e^{-\beta t}. \tag{10.9.2}$$

Esta expresión nos puede guiar para encontrar la solución al problema general de α y β arbitrarios y término no homogéneo. La idea es escribir

$$u(x,t) = e^{-\beta t}\varphi(x,t), \tag{10.9.3}$$

siendo $\varphi(x,t)$ una nueva función incógnita. Al sustituir esta relación en la ecuación diferencial original, el resultado que se obtiene es

$$\varphi_t = \alpha^2 \varphi_{xx} + \tilde{f}(x,t), \tag{10.9.4}$$

que es una ecuación difusiva de las que ya sabemos resolver (ha desaparecido el término de flujo lateral).

Ejercicio: Encontrar la expresión de $\tilde{f}(x,t)$ y calcular cómo se modifican las condiciones de contorno y la condición inicial.

10.9.2 Ecuación con convección

Consideremos la edp2

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} - \nu u_x + f(x,t). \tag{10.9.5}$$

Guiados por el resultado encontrado en la sección inmediatamente anterior, podemos pensar que un cambio de función incógnita de la forma

$$u(x,t) = e(x,t)\varphi(x,t) \tag{10.9.6}$$

podría reducir la ecuación a la forma estándar

$$\varphi_t = \alpha^2 \varphi_{xx} + \tilde{f}(x,t), \tag{10.9.7}$$

eligiendo adecuadamente la función $e(x,t)$. Pues bien, llevando a cabo el cambio e imponiendo que la edp2 resultante sea de la forma deseada se obtienen unas ecuaciones que debe verificar la función $e(x,t)$, que se resuelven de manera sencilla, dando como resultado que el cambio de función buscado es de la forma

$$u(x,t) = \exp\left[\frac{\nu}{2\alpha^2}\left(x - \frac{\nu t}{2}\right)\right]\ \varphi(x,t). \tag{10.9.8}$$

Ejercicio: comprobar este resultado y analizar qué ocurre con las condiciones de contorno e inicial.

10.10 Ecuación del calor o de la difusión para un sistema de longitud infinita

A continuación vamos a resolver un mismo ejemplo usando dos métodos diferentes, basados ambos en las transformaciones integrales. Esto nos servirá para mostrar algunas de las técnicas más útiles de resolución de problemas de edp2.

10.10.1 Resolución usando la transformación de Fourier

Consideremos el problema de Cauchy

$$u_t = c^2 \, u_{xx}, \; x \in \mathbb{R}, \; t > 0, \qquad u(x,0) = \phi(x). \tag{10.10.1}$$

Ahora no hay condiciones de contorno. En consecuencia, al aplicar el método de separación de variables se llega a (10.7.6), pero no se obtienen restricciones sobre la constante de separación μ, salvo que ha de ser negativa, $\mu = -\lambda^2$, pudiendo ser ahora $\lambda \in \mathbb{R}$. Las soluciones son

$$X_\lambda(x) = C_1(\lambda)\, e^{i\lambda x} + C_2(\lambda)\, e^{-i\lambda x}, \tag{10.10.2}$$

$$T_\lambda(t) = D(\lambda)\, e^{-c^2\lambda^2 t}. \tag{10.10.3}$$

Usando sólo el primero de los términos de $X_\lambda(x)$, podemos escribir las soluciones fundamentales del problema así:

$$u_\lambda(x,t) = K(\lambda)\, e^{-c^2\lambda^2 t}\, e^{i\lambda x}. \tag{10.10.4}$$

Podemos superponer ahora todas estas soluciones para generar la solución más general imaginable:

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} K(\lambda)\, e^{-c^2\lambda^2 t}\, e^{i\lambda x} \; d\lambda. \tag{10.10.5}$$

Para detrerminar perfectamente la solución al problema de Cauchy que se ha planteado al comienzo de esta sección hay que determinar la función $K(\lambda)$. Esto se logra imponiendo la condición inicial

$$u(x,0) = \phi(x) = \int_{\mathbb{R}} K(\lambda)\, e^{i\lambda x} \; d\lambda. \tag{10.10.6}$$

Esta ecuación nos indica que $\phi(x)$ es (salvo factores constantes) la **transformada de Fourier** de la función $K(\lambda)$. Usando la fórmula de inversión de la transformación de Fourier resulta que la función $K(\lambda)$ viene dada por la integral

$$K(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi(\xi)\, e^{-i\,\xi\,\lambda} \; d\xi. \tag{10.10.7}$$

Substituyendo esta expresión en la forma de la solución hallada en (10.10.5) llegamos a lo siguiente

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi(\xi)\, d\xi \int_{\mathbb{R}} e^{-c^2\lambda^2 t}\, e^{i\lambda(x-\xi)} \; d\lambda. \tag{10.10.8}$$

La integral en la variable λ puede realizarse fácilmente y resulta

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-c^2\lambda^2 t}\, e^{i\lambda(x-\xi)} \; d\lambda = \frac{1}{2c\sqrt{\pi\, t}} \; \exp[-(x-\xi)^2/4c^2 t] = G(x,\xi,t). \tag{10.10.9}$$

Esta función se denomina **función de Green** para el problema de Cauchy que estamos estudiando. La solución al problema se puede expresar usando esta función de Green:

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} G(x,\xi,t)\,\phi(\xi)\;d\xi. \tag{10.10.10}$$

Esta forma de la solución se llama *integral de Poisson*. Estrictamente hablando es válida para $t > 0$. Para analizar lo qué sucede en $t = 0$ debemos tener en cuenta que al considerar el límite

$$\lim_{t\to 0} G(x,\xi,t) = \delta(x-\xi), \tag{10.10.11}$$

resulta la distribución delta de Dirac, de manera que en el sentido de las distribuciones se tiene

$$u(x,0) = \int_{\mathbb{R}} \delta(x-\xi)\,\phi(\xi)\;d\xi = \phi(x), \tag{10.10.12}$$

y se cumple la condición inicial del problema. El problema está resuelto: viene dado por la fórmula de Poisson siendo el núcleo integral la función de Green de la ecuación (10.10.9).

Reflexionando un poco, parece adecuado usar la transformación de Fourier en la variable x, pues es la única de las dos (x,t) cuyo dominio es toda la recta real.

10.10.2 Resolución usando la transformación de Laplace

El mismo problema anterior puede resolverse usando la transformación de Laplace. Lógicamente, y a diferencia de lo hecho con anterioridad, esta transformación habra de aplicarse a la variable temporal, que toma valores sólo en la semirecta $t \geq 0$. Aplicando la transformación de Laplace tenemos:

$$\mathcal{L}u(x,t) = U(x,s), \quad \mathcal{L}u_{xx}(x,t) = U_{xx}(x,s), \quad \mathcal{L}u_t(x,t) = sU(x,s) - u(x,0), \tag{10.10.13}$$

con lo cual la ecuación del calor se transforma en

$$c^2\,U_{xx}(x,s) - sU(x,s) + \phi(x) = 0. \tag{10.10.14}$$

A pesar de la presencia de las dos variables, esta ecuación puede verse como una ecuación ordinaria lineal y de segundo orden. Aplicando el método de variación de las constantes

$$\begin{aligned} U(x,s) &= \frac{e^{\sqrt{s}\,x/c}}{2c\sqrt{s}} \int_x^\infty \phi(\xi) e^{-\sqrt{s}\,\xi/c}\,d\xi + \frac{e^{-\sqrt{s}\,x/c}}{2c\sqrt{s}} \int_{-\infty}^x \phi(\xi) e^{\sqrt{s}\,\xi/c}\,d\xi \\ &= \frac{1}{2c\sqrt{s}} \int_{-\infty}^\infty \phi(\xi)\; e^{-\sqrt{s}\,|x-\xi|/c}\,d\xi. \end{aligned} \tag{10.10.15}$$

Para concluir hay que realizar la transformación de Laplace inversa

$$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}U(x,s) = \int_{-\infty}^\infty d\xi\;\phi(\xi)\;\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2c\sqrt{s}}\;e^{-\sqrt{s}\,|x-\xi|/c}\right\}, \tag{10.10.16}$$

lo cual no es muy complicado, obteniéndose, como no podía ser de otro modo, el resultado ya calculado con anterioridad en (10.10.8)–(10.10.9):

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^\infty d\xi\;\phi(\xi)\;\frac{1}{2c\,\sqrt{\pi\,t}}\;\exp[-(x-\xi)^2/4c^2t]. \tag{10.10.17}$$

Interesa resaltar que los dos métodos de transformación de Fourier y Laplace que acabamos de ilustrar pueden aplicarse a otros muchos problemas, incluso a ecuaciones de otros órdenes. El mayor inconveniente que presentan suele ser de tipo práctico: la dificultad para calcular las transformaciones inversas que aparecen.

10.11 Bibliografía

1. A. Castro, *Curso básico de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales*, Addsison-Wesley Iberoamericana.

2. S.J. Farlow, *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, Wiley.

3. Tyn Myint-U, *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, Elsevier.