# Ecuación de calor no homogénea unidimensional dependiente del tiempo


- Giovanni Gamaliel López Padilla


14 de diciembre de 2021

# Ecuaciones diferenciales parciales

**Ecuación diferencial parcial:**
Una ecuación que contiene derivadas parciales de una o más variables dependientes de dos o más variables independientes.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

## Condiciones de contorno

En el caso que se tenga una función dependiente de dos variables como $u(x, t)$.

- **Dirichlet**

$$u(a, t) = g(a) \qquad u(b, t) = h(b) \qquad a < x < b$$

- **Neumann**

$$\frac{du(a, t)}{dx} = g(a) \qquad \frac{du(b, t)}{dx} = h(b) \qquad a < x < b$$

- **Mixtas** El sistema se encuentra bajo las condiciones de contorno de Neumann y Dirichlet al mismo tiempo.

# Método de diferencias finitas

$$x'' = p(t)x'(t) + q(t)x(t) + r(t)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}}{h^2} = p(t_j)\left(\frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{2h}\right) + q(t_j)x_j + r(t_j)$$

$$\begin{bmatrix} 2+h^2q_1 & \frac{h}{2}p_1-1 & & & & \\ \frac{-h}{2}p_2-1 & 2+h^2q_2 & \frac{h}{2}p_2-1 & & & 0 \\ & \frac{-h}{2}p_j-1 & 2+h^2q_j & \frac{h}{2}p_j-1 & & \\ 0 & & \frac{-h}{2}p_{N-2}-1 & 2+h^2q_{N-2} & \frac{h}{2}p_{N-2}-1 & \\ & & & \frac{-h}{2}p_{N-1}-1 & 2+h^2q_{N-1} & \frac{h}{2}p_{N-1}-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_j \\ x_{N-2} \\ x_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h^2r_1+e_0 \\ -h^2r_2 \\ -h^2r_j \\ -h^2r_{N-2} \\ -h^2r_{N-1}+e_N \end{bmatrix}$$

# Factorización LU

Sea una matriz de tamaño $n \times n$, tal que su forma esta descrita como:

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & \alpha_3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \alpha_{n-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \beta_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \beta_n \end{bmatrix}$$

donde $b_1 = \beta_1$, por ende, los términos $a_j$ y $b_j$ pueden ser calculados con las ecuaciones:

$$a_j = \alpha_j \beta_{j-1}$$
$$b_j = \alpha_j c_{j-1} + \beta_j$$

# Ecuación de calor dependiente del tiempo

**Euación de calor homogénea**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

donde $u(a, 0) = 0$ y $u(b, 0) = 0$ para $a \leq x \leq b$.

**Euación de calor no homogénea**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t)$$

donde $F(x,t)$ es una función conocida, $u(a,t) = g(t)$, $u(b,t) = h(t)$, $u(x,0) = j(x)$ para $a \leq x \leq b$.

## Aproximación para la ecuación de calor no homogénea

$$\frac{u(x,t+dt)-u(x,t)}{dt} = F(x,t+dt)+k^2\left(\frac{u(x-dx,t+dt)-2U(x,t+dt)+u(x+dx,t+dt)}{(dx)^2}\right)$$

$$
\begin{bmatrix}
0 & 1 & & & \\
-w & 1+2w & -w & & \\
 & -w & 1+2w & -w & \\
 & & -w & 1+2w & -w \\
 & & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
u_a(t) \\
u(x-dx, t+dt) \\
u(x, t+dt) \\
u(x+dx, t+dt) \\
u_b(t)
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
u_a(t) \\
u(x-dx, t) + F(x,t)dt \\
u(x, t) + F(x,t)dt \\
u(x+dx, t) + F(x,t)dt \\
u_b(t)
\end{bmatrix}
$$

donde $w = k^2 \frac{dt}{(dt)^2}$.

**Algorithm 1:** Aproximacion a la solución de la ecuación de calor no homogénea dependiente del tiempo usando diferencias finitas.

**Input:** $t_0, t_n, x_0, x_m, n, m, f(x), F(x, t)$

**Output:** $u(x, t)$

$u(x, 0) \leftarrow$ initial_state($f(x)$)

$u(x_0, 0), u(x_m, 0) \leftarrow$ set_boundary_contidions()

matrix_a $\leftarrow$ create_matriz_A()

matrix_a $\leftarrow$ LU_decomposition(matrix_a)

**for** $i = 1, n$ **do**

    **for** $j = 1, m$ **do**

        $b_j \leftarrow u(x_j, t_{i-1}) + F(x_j, t_{i-1})dt$

    $u(x, t_i) \leftarrow$ solve_system(matrix_a,b)

# Resultados

Se tiene la siguiente ecuación diferencial parcial:

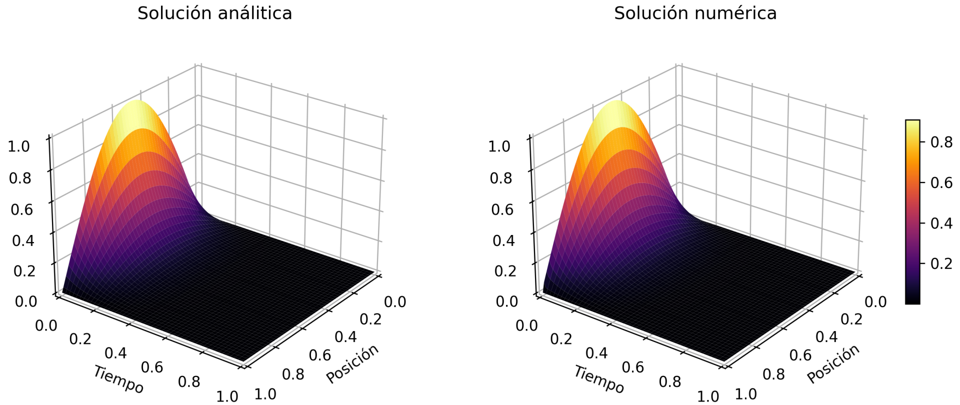
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < x < 1, \; t > 0 \tag{1}$$

con las siguientes condiciones de frontera:

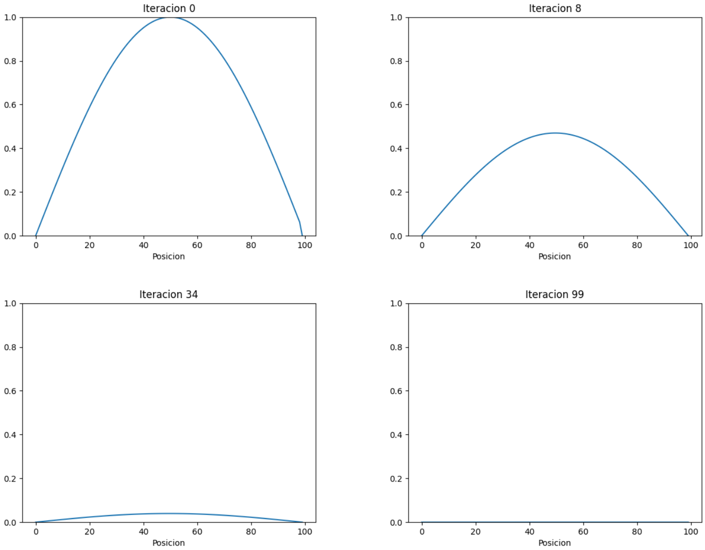
$$\begin{cases} u(x,0) & = sin(\pi x) \qquad 0 < x < 1 \\ u(0,t) & = u(1,t) = 0, \qquad t > 0 \end{cases}$$

La solución análitica de este conjuntos de ecuaciones es:

$$u(x,t) = e^{-\pi^2 t} sin(\pi x)$$




Solución de la ecuación 1




Función u(x,t) para la ecuación 1

Se tiene la siguiente ecuación diferencial parcial:

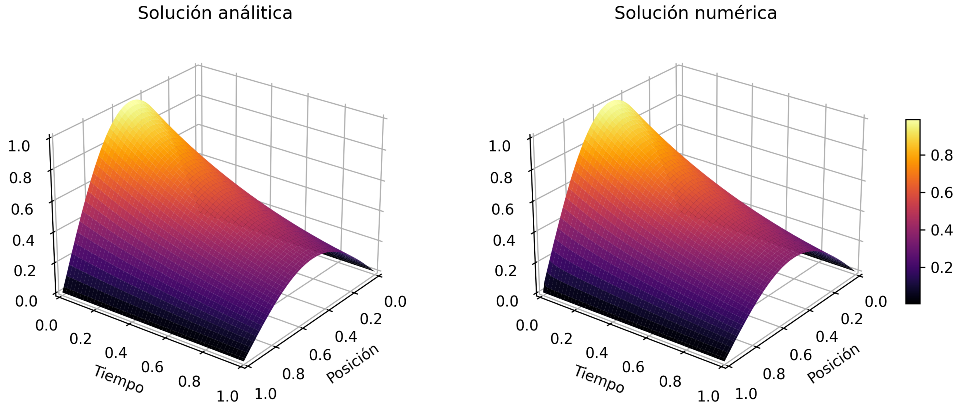
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\pi^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < x < 1,\ t > 0 \tag{2}$$

con las siguientes condiciones de frontera:

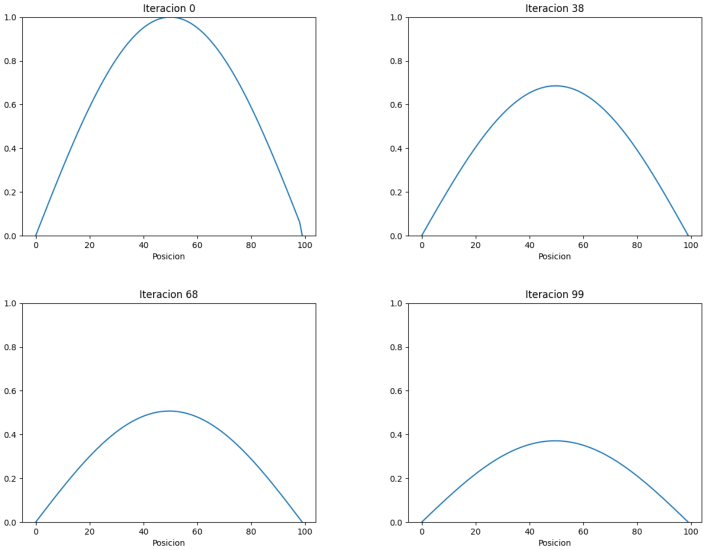
$$\begin{cases} u(x,0) & = sin(\pi x) \qquad 0 < x < 1 \\ u(0,t) & = u(1,t) = 0, \qquad t > 0 \end{cases}$$

La solución análitica de este conjuntos de ecuaciones es:

$$u(x,t) = e^{-t} sin(\pi x)$$




Solución de la ecuación 2




Función u(x,t) para la ecuación 2

Se tiene la siguiente ecuación diferencial parcial:

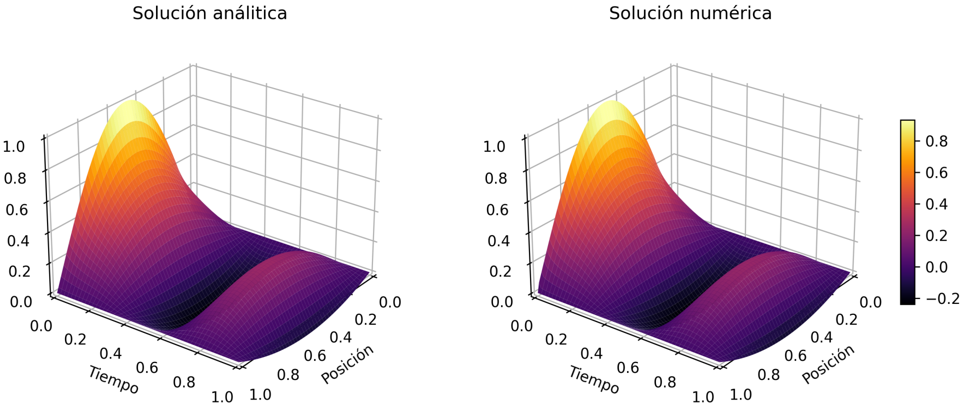
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 10x(1-x)cos(10t) + 2sin(10t) \qquad 0 < x < 1,\ t > 0 \tag{3}$$

con las siguientes condiciones de frontera:

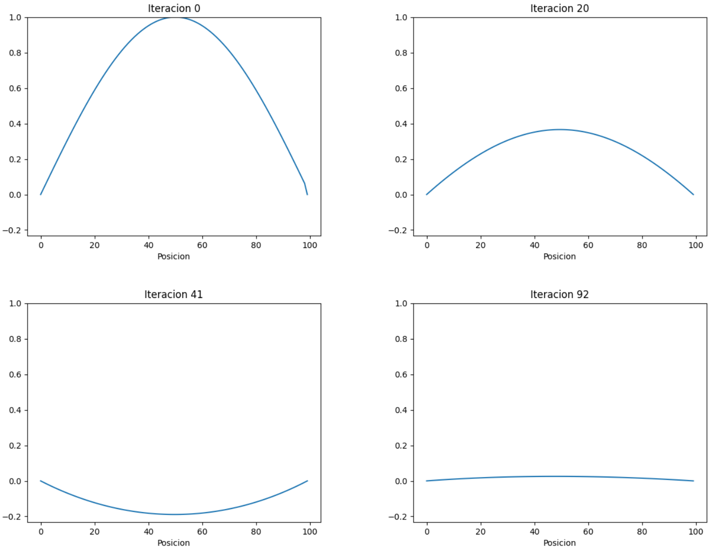
$$\begin{cases} u(x,0) & = sin(\pi x) \qquad 0 < x < 1 \\ u(0,t) & = u(1,t) = 0, \qquad t > 0 \end{cases}$$

La solución análitica de este conjuntos de ecuaciones es:

$$u(x,t) = e^{-\pi^2 t} sin(\pi x) + x(1-x)sin(10t)$$




Solución de la ecuación 3




Función u(x,t) para la ecuación 3

Se tiene la siguiente ecuación diferencial parcial:

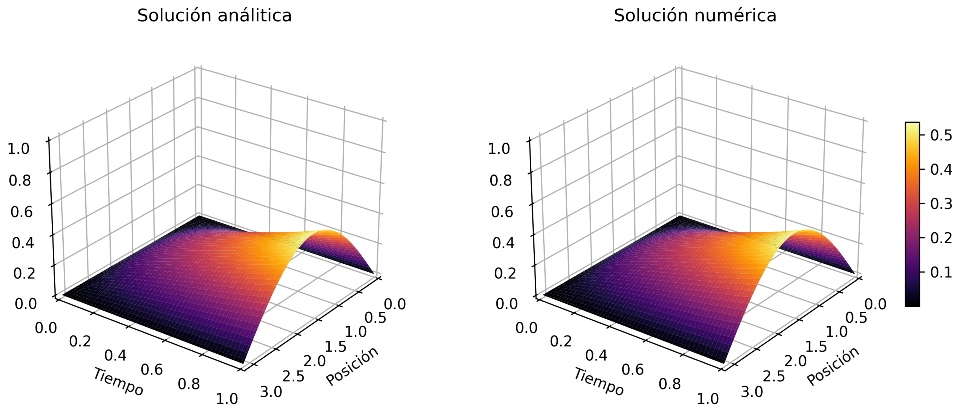
$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^t sin(x) \qquad 0 < x < \pi,\ t > 0 \tag{4}$$

con las siguientes condiciones de frontera:

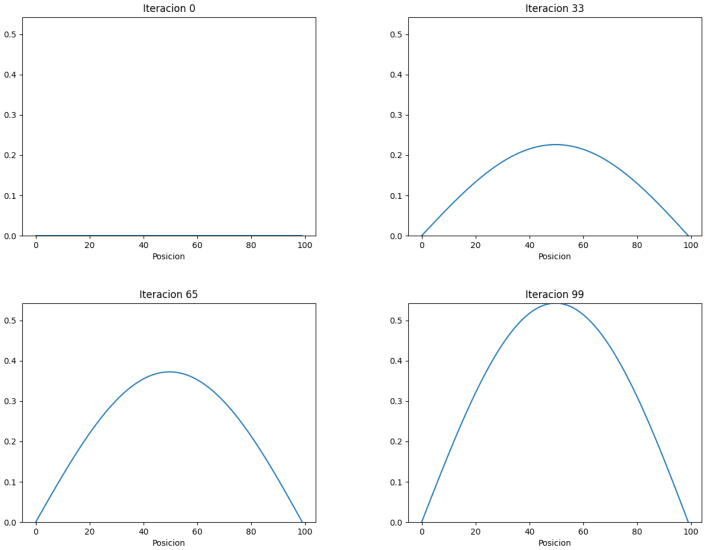
$$\begin{cases} u(x,0) &= sin(\pi x) \qquad 0 < x < 1 \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, \qquad t > 0 \end{cases}$$

La solución análitica de este conjuntos de ecuaciones es:

$$u(x,t) = \frac{1}{5}(e^t - e^{-4t})sin(x)$$




Solución de la ecuación 4




Función u(x,t) para la ecuación 4

| Ecuación diferencial parcial | Diferencia absoluta relativa promedio |
|---|---|
| Ecuación 1 | 0.3531 % |
| Ecuación 2 | 0.3512 % |
| Ecuación 3 | 0.4409 % |
| Ecuación 4 | 0.0997 % |

Cuadro: Diferencias absolutas promedio de los resultados numéricos con respecto a la solución análitica.

# Conclusiones

# Referencias


[1] J. Quintana Murillo, “Métodos numéricos en diferencias finitas para la resolución de ecuaciones difusivas fraccionarias,” *Universidad de Extremadura*, 2016.

[2] F. Sequeira-Chavarría and M. Ramírez-Bogantes, “Aspectos computacionales del método de diferencias finitas para la ecuación de calor dependiente del tiempo,” *Uniciencia*, vol. 33, p. 83, Jan. 2019.

[3] A.-M. Wazwaz, *Partial differential equations*.
CRC Press, 2002.

[4] A. Sommerfeld, *Partial differential equations in physics*.
Academic press, 1949.

[5] D. D. Trong, N. T. Long, and P. N. D. Alain, “Nonhomogeneous heat equation: Identification and regularization for the inhomogeneous term,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 312, no. 1, pp. 93–104, 2005.

[6] M. El-Mikkawy, “A note on a three-term recurrence for a tridiagonal matrix,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 139, no. 2, pp. 503–511, 2003.

[7] Y. Lin, X. Gao, and M. Xiao, “A high-order finite difference method for 1d nonhomogeneous heat equations,” *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, vol. 25, no. 2, pp. 327–346, 2009.

# Anexos

**Animación de la solución de la ecuación 1**

Descargar aqui

**Animación de la solución de la ecuación 2**

Descargar aqui

**Animación de la solución de la ecuación 3**

Descargar aqui

**Animación de la solución de la ecuación 4**

Descargar aqui