

## Tarea 7 - Métodos numéricos

### Giovanni Gamaliel López Padilla

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Métodos</b>	<b>1</b>
2.1. Factorización LU - Crout . . . . .	1
2.2. Factorización Cholesky . . . . .	2
2.3. Factorización Doolittle . . . . .	3
<b>3. Resultados</b>	<b>4</b>
3.1. Factorización LU - Crout . . . . .	4
3.2. Factorización Cholesky . . . . .	5
<b>4. Conclusiones</b>	<b>5</b>
<b>5. Compilación y ejecución de los programas</b>	<b>5</b>

## 1. Introducción

La factorización de una matriz es usada para reducir la complejidad de la solución a un sistema de ecuaciones lineales. La factorización de una matriz da como resultado la multiplicación de dos matrices, una del tipo triangular inferior y la otra del tipo triangular superior. Esto es:

$$A = LU \quad (1)$$

donde  $L$  es la matriz triangular inferior y  $U$  matriz triangular superior.

## 2. Métodos

### 2.1. Factorización LU - Crout

Si  $A$  es una matriz de tamaño  $n \times n$ , entonces su factorización en matrices  $L$  y  $U$  deben seguir la forma de las ecuaciones 2 y 3.

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Para calcular los elementos de cada matriz se tiene el conjunto de ecuaciones 4.

$$\begin{cases} l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \\ u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}}{l_{ii}} \end{cases} \quad (4)$$

El algoritmo planteado para la solución de este problema se encuentran en las carpetas [Problema\\_1](#) y [Problema\\_2](#), en el archivo [LU\\_decomposition.h](#) en la función [obtain\\_LU\\_crout](#).

Al tener los elementos determinandos de las matrices L y U, es más sencillo realizar la solución a un sistema de ecuaciones, ya que, Al tratarse de matrices triangulares sus algoritmos son más fáciles de implementar. Suponiendo que se tiene el sistema  $Ax = B$ , entonces:

$$\begin{aligned} Ax &= B \\ LUx &= B \end{aligned}$$

nombrando

$$Ux = y \quad (5)$$

, entonces:

$$Ly = B \quad (6)$$

donde las ecuaciones 5 y 6 son dos sistemas de ecuaciones lineales del tipo triangular.

El algoritmo planteado para realizar la factorización LU con la versión de Crout es la siguiente:

```

1  // input: matriz
2  // output: L,U
3  for (int i = 0; i < n; i++)
4  {
5      for (int j = i; j < n; j++)
6      {
7          sum_ij = 0;
8          for (int k = 0; k <= i - 1; k++)
9          {
10             sum_ij += l_ik * u_kj;
11          }
12          l_ij = matrix_ij - sum_ij;
13      }
14      for (int j = i + 1; j < n; j++)
15      {
16          sum_ij = 0;
17          for (int k = 0; k < j - 1; k++)
18          {
19             sum_ij += l_ik * u_kj;
20          }
21          u_ij = (matrix_ij - sum_ij) / l_ii;
22      }
23  }
```

Al término de este se implementaron las funciones [solve\\_triangular\\_inferior\\_matrix](#) y [solve\\_triangular\\_superior\\_matrix](#).

## 2.2. Factorización Cholesky

Sea A, una matriz simétrica y definida positiva puede ser factorizada en la forma LU con  $U = L^T$ , esto es descrito en la ecuación 7.

$$A = LL^T \quad (7)$$

El algoritmo emplea el conjunto de ecuaciones .

$$\begin{cases} l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2} \\ l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{kj}}{l_{jj}} \end{cases} \quad (8)$$

El algoritmo de factorización de Cholesky se encuentra en la carpeta [Problema\\_3](#) en el archivo [Cholesky\\_decomposition.h](#) en la función [obtain.Cholesky](#). La función es la siguiente:

```

1  // inputs: matrix, n
2  // output
3  for (int i = 0; i < n; i++)
4  {
5      sum = 0;
6      for (int j = 0; j < i; j++)
7      {
8          sum += l_ik * l_ik;
9      }
10     sqrt_number = matrix_ii - sum;
11     validate_positive_matrix(sqrt_number);
12     validate_l_ii(l_ii);
13     for (int j = i; j < n; j++)
14     {
15         sum = 0;
16         for (int k = 0; k < i; k++)
17         {
18             sum += l_ik * l_jk;
19         }
20         l_ij = (matrix_ij - sum) / l_ii;
21     }
22 }
23 fill_L_transpose(l, lt);

```

## 2.3. Factorización Doolittle

El método de factorización se basa en la eliminación Gaussiana. A partir de una matriz de tamaño  $n \times n$  se obtiene una matriz triangular superior realizando operaciones entre columnas y renglones de la misma matriz. Entonces, la factorización de Doolittle se concentra en encontrar la matriz triangular inferior tal que se cumple la ecuación 9.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (9)$$

Realizando la multiplicación de matrices se obtiene que:

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ l_{21} & l_{21}u_{12} + u_{22} & \cdots & l_{21}u_{1n} + u_{2n} \\ l_{31} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & \cdots & l_{31}u_{1n} + l_{3n}u_{22} + u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n1}u_{12} + l_{n2}u_{22} + \cdots & \cdots & l_{n1}u_{1n} + l_{n2}u_{2n} + \cdots + u_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (10)$$

Observando la diagonal de la ecuación 10, se puede obtener la ecuación 11.

$$u_{ii} = a_{ii} - \sum_{j=1}^i l_{ij} u_{ji} \quad (11)$$

Los elementos en los queda se obtiene un elemento de U sin realizar una multiplicación con un termino de L se obtiene la ecuación 12.

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \quad (12)$$

De los elementos donde un elemento de L esta multiplicando a un termino de la diagonal de U, se obtiene la ecuación 13.

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}}{u_{jj}} \quad (13)$$

### 3. Resultados

#### 3.1. Factorización LU - Crout

Se realizaron diferentes pruebas para el algoritmo de factorización LU usando la versión de Crout. La primera fue realizada con la matriz de la ecuación 14.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 7 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 1 \\ -20 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Se obtuvo la factorización es la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1.34 & 0 & 0 \\ 2 & 3.67 & 8.25 & 0 \\ 7 & 3.34 & 2.5 & 5.54 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -0.34 & 1.34 & -0.34 \\ 0 & 1 & -3.25 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0.18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

Y la solución del sistema de ecuaciones asociado es el siguiente:

$$\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = -5 \end{cases} \quad (16)$$

El sistema de la ecuación 14 fue resuelto en anteriores tareas y se obtuvieron los mismo resultados expuestos en las ecuaciones 16.

Usando los archivos [M\\_LARGE.txt](#) y [V\\_LARGE.txt](#) se obtuvieron los resultados contenidos en el archivo [Solution\\_Large.txt](#), el cual se encuentra en la carpeta [Problema\\_1](#).

**3.2. Factorización Cholesky**

**4. Conclusiones**

**5. Compilación y ejecución de los programas**