

Tarea 08 - Análisis de datos
Giovanni Gamaliel López Padilla

Problema 2

Para investigar si una moneda es justa o no, alguien decide que va a lanzar la moneda 100 veces. Si el número de veces de obtener sol es entre 42 % y 58 %, va a apoyar la hipótesis de que la moneda es justa. Calcula el nivel de significancia correspondiente.

Sea X una variable aleatoria tal que $X \sim \text{Bern}(0.5)$, entonces se tiene que $\mu = 0.5$ y $\sigma^2 = 0.25$. Entonces el valor de t para la distribución t-student es:

$$Z_{\alpha} = \frac{\mu_{H0} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

entonces

$$\begin{aligned} Z_{\alpha/2} &= \frac{0.58 - 0.5}{\frac{0.5}{\sqrt{100}}} \\ &= \frac{0.08}{0.05} \\ Z_{\alpha/2} &= 1.6 \end{aligned}$$

por lo tanto usando la función `pnorm(1.6,lower.tail=F)` con $Z_{\alpha/2}$ se obtiene que el nivel de significancia es $\alpha = 0.1095986$.

Problema 3

Por experiencia se sabe que el número de accesos , X , durante una hora a una base de datos sigue una distribución Poisson:

$$P(X = x) = \exp(-\lambda) \frac{\lambda^x}{x!} \quad \text{para } x = 0, 1, 2, \dots \text{ y } \lambda > 0$$

Calcula el estimador de máxima verosimilitud para λ en una muestra.

La función de máximo verosimilitud de la distribución es Poisson es:

$$\mathcal{L} = \prod_{i=1}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}$$

Entonces, la función log-verosimilitud es:

$$\begin{aligned}
\log(\mathcal{L}) &= \log \left(\prod_{i=1}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \log \left(e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} \right) \\
&= \sum_{i=1}^n [\log(e^{-\lambda}) + \log(\lambda^{x_i}) - \log(x_i!)] \\
&= \sum_{i=1}^n [-\lambda + x_i \log(\lambda) - \log(x_i!)] \\
\log(\mathcal{L}) &= -\lambda n + \log(\lambda) \sum x_i - \sum \log(x_i!)
\end{aligned}$$

Por lo que calculando el valor crítico de $\log(\mathcal{L})$ se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \log(\mathcal{L})}{\partial \lambda} &= 0 \\
-n + \frac{\sum x_i}{\lambda} &= 0 \\
\hat{\lambda} &= \frac{1}{n} \sum x_i
\end{aligned}$$

donde $\hat{\lambda}$ corresponde a la media aritmética.

Calculando la segunda derivada de $\log(\mathcal{L})$ para comprobar que el valor crítico ($\hat{\lambda}$) se trata de un máximo se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \log(\mathcal{L})}{\partial \lambda^2} &< 0 \\
-\frac{1}{\lambda^2} \sum x_i &< 0
\end{aligned}$$

como $\lambda^2 > 0$ y $x_i \in \{0, 1, 2, \dots\}$, entonces, la segunda derivada de $\log(\mathcal{L})$ será siempre negativa, por lo tanto $\log(\mathcal{L})$ es el estimador de máxima verosimilitud.

Problema 4

Considera los siguientes datos de un estudio en Bélgica sobre la intención de voto entre 1000 parejas. Las variables X_1 , X_2 indican si la mujer, respectivamente el hombre, votará para un partido de la coalición (0) o de la oposición (1) en caso de que hubieran elecciones en ese momento.

	$X_1 = 0$	$X_1 = 1$
$X_2 = 0$	245	170
$X_2 = 1$	218	367

Tabla 1: Datos recolectados.

- a) Calcula el oddsratio \hat{R}

Con los datos de la tabla 1 se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\hat{R} &= \frac{245 * 367}{218 * 170} \\ &= \frac{89915}{37060} \\ \hat{R} &= 2.426201\end{aligned}$$

- b) Se puede mostrar que si el tamaño de la muestra va a ∞ , la distribución de $\log(\hat{R})$ converge a una normal con promedio $\log(\hat{R})$, el verdadero log-oddsratio de la distribución subyacente, y con varianza

$$\frac{1}{n_{0,0}} + \frac{1}{n_{0,1}} + \frac{1}{n_{1,0}} + \frac{1}{n_{1,1}}$$

donde $n_{i,j}$ es el número de observaciones con $X_1 = i$ y $X_2 = j$. ¿Apoyas la hipótesis que la pareja vota de manera independiente ($\alpha = 0.05$)?

Calculando los intervalos de confianza, se tiene que:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{1}{n_{0,0}} + \frac{1}{n_{0,1}} + \frac{1}{n_{1,0}} + \frac{1}{n_{1,1}} \\ &= \frac{1}{245} + \frac{1}{367} + \frac{1}{218} + \frac{1}{170} \\ &= 0.01727594\end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned}cu &= \exp(\log(\hat{R}) + z_{\alpha/2}\sigma) \\ &= \exp(0.8863266 + (1.644854)(0.131438)) \\ &= \exp(1.102523) \\ cu &= 3.011754 \\ ci &= \exp(\log(\hat{R}) - z_{\alpha/2}\sigma) \\ &= \exp(0.8863266 - (1.644854)(0.131438)) \\ &= \exp(0.6701303) \\ ci &= 1.954492\end{aligned}$$

entonces el intervalo de confianza es $[1.954492, 3.011754]$. Como este intervalo es mayor a 1, entonces, se puede interpretar como que si la mujer vota por una coalición, el hombre votara por una

Problema 5

Sea c una cierta cadena binaria de longitud 100. Se quiere verificar si proviene de una muestra $Bern(0.5)(=H_0)$. Para eso se calcula el número de cambios. Un cambio es un 1 seguido por un 0 o un 0 seguido por un 1 en la cadena.

- a) Calcula T el número de cambios en una cadena usando una sola línea de código en R.

Para realizar el cálculo del número de cambios se hizo en base a la diferencia del i -ésimo elemento y el $i+1$. En el caso en que este sea 00 o 11, la diferencia es 0. Por ende el 0 representa que no existe un cambio. En cambio 01 y 10, produce una diferencia de -1 y 1 respectivamente. Por ende, al tomar el valor absoluto, 1 representa que existió un cambio en la cadena. Al realizar la suma de estas diferencias se obtiene el número de cambios totales en la cadena. Por lo tanto, el código para conseguir el número de cambios en una cadena es el siguiente:

```
change <- sum(abs(diff(chain)))
```

- b) Usando muchas simulaciones de cadenas bajo H_0 , estima y visualiza la distribución de T .

La distribución usando un espacio de 1000 bootstrap se representa en la figura 1.

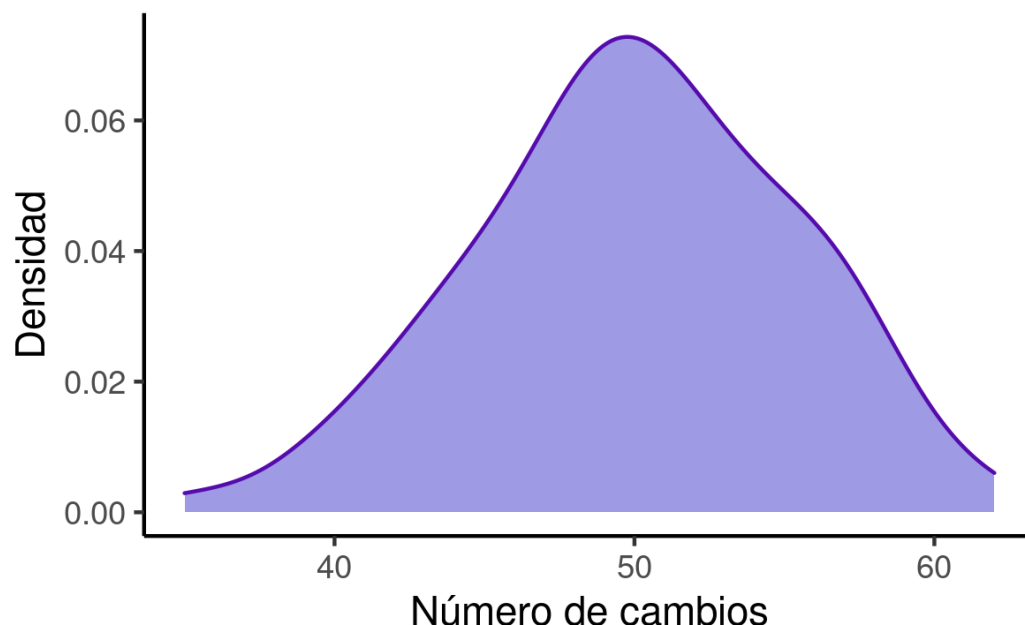
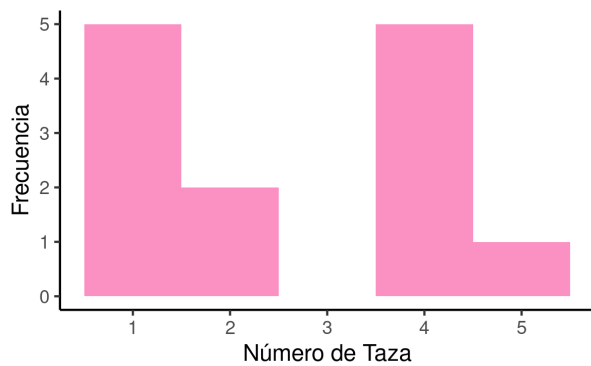


Figura 1: Distribución del número de cambios en una cadena de 100 elementos.

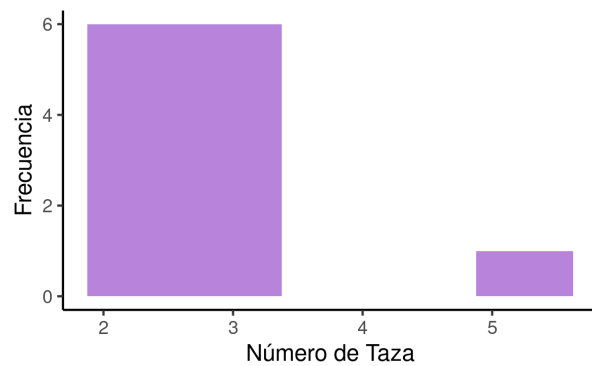
- c) Calcula el valor de p para H_0 si $T=42$.

Problema 6

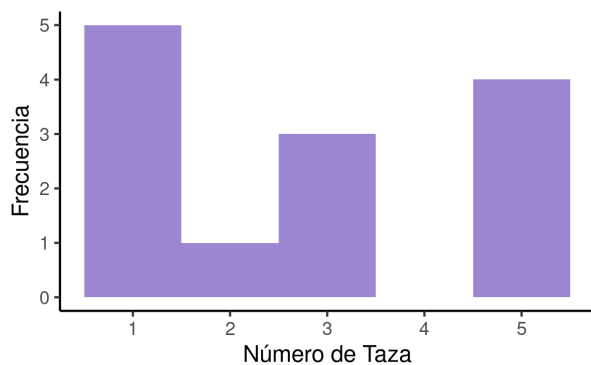
¿Hay alguna semejanza entre una taza y su dueño? Para eso se decide hacer un pequeño experimento. Se muestran a n voluntarios 5 fotos de personas y 5 tazas en orden al azar. Se pide a cada persona asociar cada taza con una persona (una a una). ¿Cómo formular una prueba de hipótesis para este problema? Propon una estadística de prueba. Estima su distribución con simulaciones de respuestas bajo H_0 .



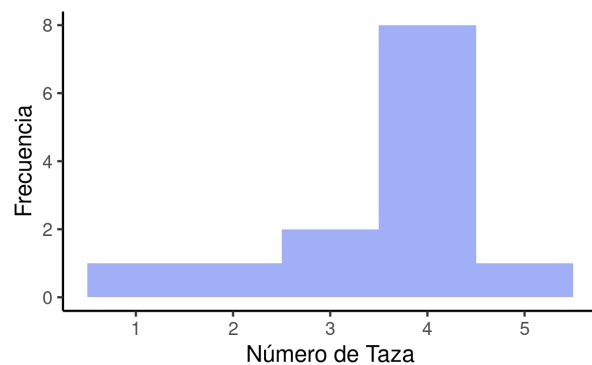
(a)



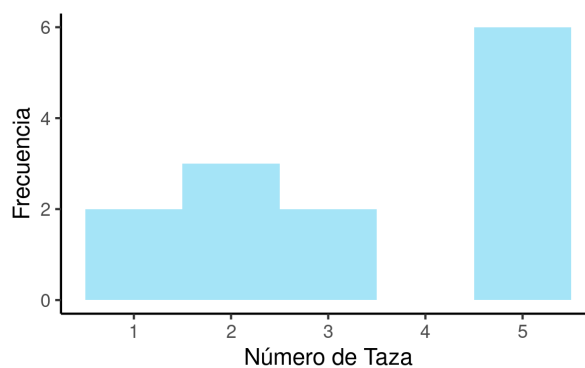
(b)



(c)



(d)



(e)

Problema 7

Durante los juegos olímpicos de Salt Lake City surgió en un periódico la discusión si en las pruebas de 1500m de patinaje, la persona en el carril exterior no tendría ventaja sobre el carril interior. Se organizaron 24 pruebas (una se canceló por

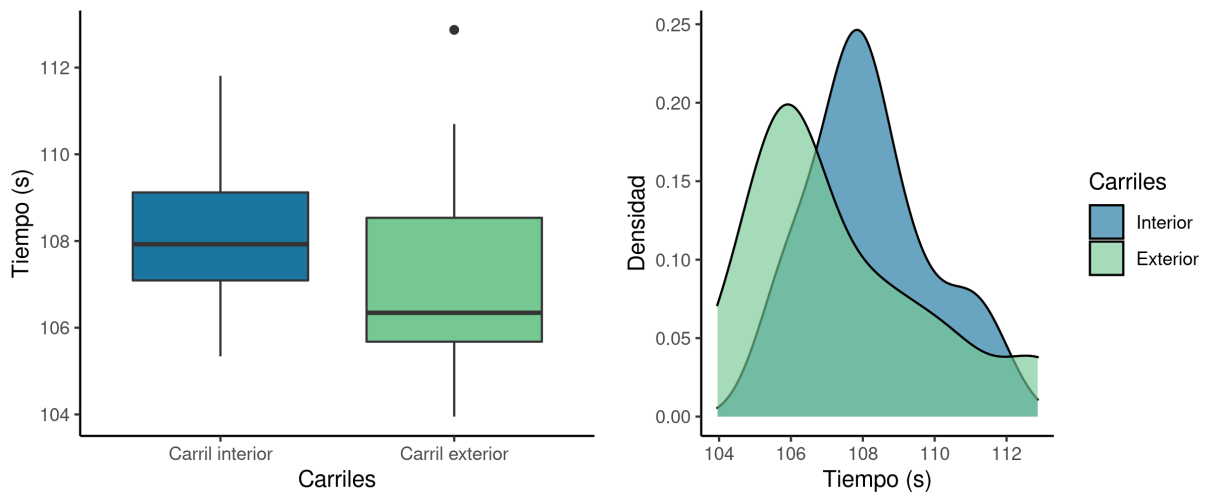
una caída). Abajo los tiempos. Aplica una(s) pruebas de estadística relevante para contestar esta pregunta.

En la tabla 2 se encuentran las medidas de tendencia central y dispersión de los datos contenidos en el archivo [data.csv](#). Se observa que estas medidas son semejantes entre los dos conjuntos, en donde existe una mayor diferencia es en la varianza.

Línea	Mediana (s)	Promedio (s)	Varianza (s ²)
Interna	107.9	108.2	2.9653
Externa	106.3	107.4	6.3327

Tabla 2: Medida de tendencia central y de dispersión de los datos.

Una primera aproximación para llegar a una conclusión es visualizar la distribución de datos por medio de boxplots (figura 3a) y las frecuencias de los datos (figura 3b). Con esto podemos comprobar resultado obtenido en la tabla 2. Con esto podemos llegar a la aproximación que la hipótesis será rechazada. Esto debido a que los datos presentan distribuciones diferentes.



(a) Boxplot de los datos del carril interior y exterior. **(b)** Distribución de los datos del carril interior y exterior.

Figura 3: Representación gráfica de la distribución de los datos.

En la tabla 2 se observa que las varianzas muestrales son diferentes, por ende, al estar basadas en un estimador insesgado, entonces las varianzas de los datos son diferentes. Entonces el nonpooled variance (agregar cita) puede ser calculado como:

$$S_d^2 = \frac{S_x^2}{n} + \frac{S_y^2}{n}$$

El cual es un estimador insesgado para $Var(\bar{X} - \bar{Y})$, entonces, se puede calcular un valor t de la siguiente manera:

$$T_d = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_d}$$

El cálculo de T_d con los datos, da como resultado 1.2343. El cual es un valor lejano a 0, por ende, la hipótesis es rechazada. Otra manera de comprobar esto es obteniendo el intervalo de

confianza para las diferencias de tiempos de una misma carrera. En la tabla 3 se muestran los intervalos de confianza para diferentes valores de α . La hipótesis es aceptada en únicamente para $\alpha = 0.1$, esto es debido a que el el valor de 0 esta contenido en el intervalo. En cambio para $\alpha = 0.05, 0.01$ la hipótesis será rechazada.

α	Límite inferior	Límite superior
0.1	-1.5177627	-0.1249646
0.05	-1.66300079	0.02027351
0.01	-1.9672386	0.3245113

Tabla 3: Intervalos de confianza para difentes valores de α .

La frecuencia de las diferencias de tiempos se muestra en la figura 4.

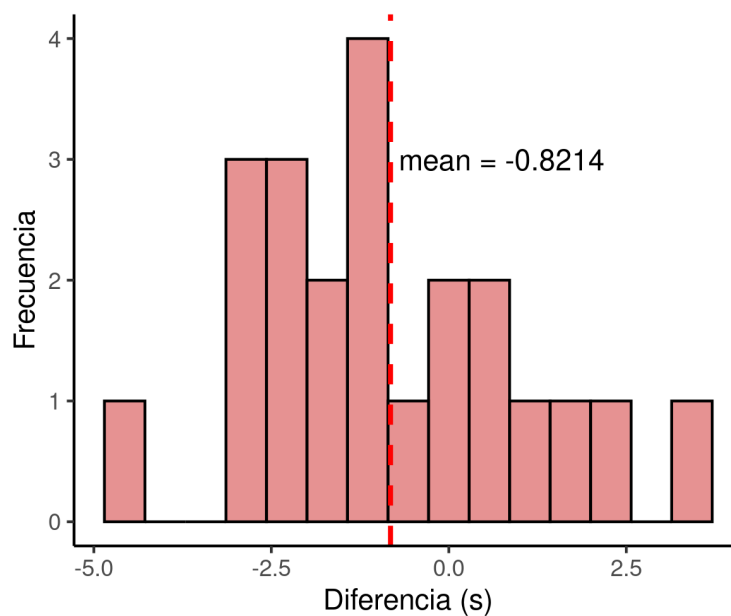


Figura 4: Frecuencia de la diferencia entre los tiempos del carril exterior y carril interior.