Tarea 2 - Análisis de datos

Giovanni Gamaliel López Padilla

Problema 4

- **Si A y B son independientes, A y B^c son independientes. Demuéstralo.**

  Se tiene que:
  $$P(B^c|A) = 1 - P(B|A) \tag{1}$$
  como A y B son independientes se cumple que:
  $$P(B|A) = P(B)$$
  entonces, la ecuación 1 puede reescribirse como:
  $$\begin{aligned} P(B^c|A) &= 1 - P(B|A) \\ &= 1 - P(B) \\ &= P(B^c) \end{aligned}$$
  por lo tanto
  $$P(B^c|A) = P(B^c) \tag{2}$$
  La ecuación 2 es valida unicamente si los eventos B^c y A son independientes.

- **Cierto o falso: si A y B son independientes, A^c y B^c son independientes. Demuéstralo**

  Calculando $P(A^c|B^c)$
  $$P(A^c|B^c) = 1 - P(A|B^c) \tag{3}$$
  como en el ejercicio anterior se demostro que si A y B son independientes entonces A y B^c son independientes, se tiene que
  $$P(A|B^c) = P(A) \tag{4}$$
  Usando la ecuación 4 en la ecuación 3 se obtiene que:
  $$\begin{aligned} P(A^c|B^c) &= 1 - P(A|B^c) \\ &= 1 - P(A) \\ &= P(A^c) \end{aligned}$$
  por lo tanto
  $$P(A^c|B^c) = P(A^c) \tag{5}$$
  La ecuación 5 es valido unicamente si A^c y B^c son independientes.

Problema 5

En un examen de opción múltiple, se sabe que la probabilidad que alguien sepa la respuesta correcta es 0.4. Si no sabe la respuesta, la persona elige al azar una respuesta. Cada pregunta tiene 4 posibles respuestas. Para una pregunta particular: si alguien da la respuesta correcta, ¿ cuál es la probabilidad que adivinó?
Sea A el evento que un alumno sepa la respuesta correcta y B que conteste correctamente. Entonces la información que se tiene es:

$$\begin{aligned} P(A) &= 0.4 \\ P(B|A^c) &= 0.25 \\ P(B|A) &= 1 \end{aligned}$$

A partir de la defínción del evento A y B, se quiere conocer $P(A^c|B)$. Realizando el calculo se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} P(A^c|B) &= \frac{P(B|A^c)P(A^c)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B|A^c)(1-P(A))}{P(B)} \\ &= \frac{(0.25)(1-0.4)}{0.25} \\ P(A^c|B) &= 0.6 \end{aligned}$$

Con este resultado comprobamos que el suceso A y B son independientes, entonces. Esto se pudo haber comprobado desde el calculo de $P(B)$ y $P(B|A^c)$.

Problema 6

Tienes una bolsa con 6 pelotas rojas y 10 pelotas verdes. Eliges al azar una pelota y la sacas de la bolsa. De nuevo, eliges al azar una pelota de la bolsa (ahora con 15 pelotas). Calcula la probabilidad de obtener una pelota roja.
La probabilidad de obtener la pelota roja en el primer intento (R_1) es de $\frac{6}{16}$. Suponiendo que no se obtuvo en el primer intento, entonces la probabilidad de obtener una pelota roja (R_2) y la anterior fue verde (V_1) es

$$\begin{aligned} P(R_2 \cap V_1) &= P(V_1)(R_2) \\ &= \left(\frac{10}{16}\right)\left(\frac{6}{15}\right) \\ &= \frac{60}{240} \end{aligned}$$

entonces, la probabilidad de obtener una pelota roja es:

$$\begin{aligned} P(R) &= P(R_1) + P(R_2 \cap V_1) \\ &= \frac{6}{16} + \frac{60}{240} \\ &= \frac{6}{16} + \frac{6}{24} \\ &= \frac{30}{48} \\ P(R) &= \frac{5}{8} \end{aligned}$$

Problema 7

Sea X una variable aleatoria con la siguiente distribución

	1	2	3	4
$P(X = x)$	0.2	0.1	0.4	0.3

y $Y \sim X$ e independiente de X. Calcula $P(X > 2|Y < 3)$ y $P(X \neq Y)$.

- **Calcula** $P(X > 2|Y < 3)$

  Al ser X, Y variables aleatorias independientes entonces:

$$\begin{aligned} P(X > 2|Y < 3) &= P(X > 2) \\ &= P(X = 3) + P(X = 4) \\ &= 0.4 + 0.3 \\ &= 0.7 \end{aligned}$$

  Por lo tanto:

$$P(X > 2|Y < 3) = 0.7$$

  Realizando el calculo de $P(X \neq Y)$.

  El cálculo de este problema es complejo, ya que para cada X seleccionada correspondera a tres opciones de Y, cada una con su probabilidad. Es por ello que se aplicará lo siguiente:

$$P(X \neq Y) = 1 - P(X = Y)$$

- **Calcula** $P(X \neq Y)$

  Realizando este cálculo se obtiene lo siguiente:

$$P(X = Y) = \sum_i P(X = x_i, Y = x_i) \tag{6}$$

  como X, Y son variables aleatorias independientes, entonces

$$P(X = x_i, Y = x_i) = P(X = x_i)P(Y = x_i)$$

  entonces, la ecuación 6 se puede escrbir como

$$\begin{aligned} P(X = Y) &= \sum_i P(X = x_i, Y = x_i) \\ &= \sum P(X = x_i, Y = x_i) \\ &= P(X = 1, Y = 1) + P(X = 2, Y = 2) + P(X = 3, Y = 3) + P(X = 4, Y = 4) \\ &= 0.2 * 0.2 + 0.1 * 0.1 + 0.4 * 0.4 + 0.3 * 0.3 \\ &= 0.3 \end{aligned}$$

  Por lo tanto:

$$\begin{aligned} P(X \neq Y) &= 1 - P(X = Y) \\ &= 1 - 0.3 \\ P(X \neq Y) &= 0.7 \end{aligned}$$