Tarea 03 - Optimización
Giovanni Gamaliel López Padilla

Problema 01

Is the set $S = \{a \in \mathbb{R}^K | p(0) = 1, |p(t)| \leq 1 fort \in [\alpha, \beta]\}$ where $p(t) = a_1 + a_2t + \cdots + a_k t^{k-1}$ convex?

La función p, se puede escribir de la siguiente manera:

$$p(t) = A^t X$$

donde A y X son vectores donde el primer elemento es 1. Esto es debido a que $p(0) = 1$.

Sean $a, b \in S$ y $\alpha \in [0, 1]$, entonces

$$\begin{aligned} P(\alpha a + (1-\alpha)b) &= (\alpha A^t + (1-\alpha)B^t)T \\ &= \alpha A^t T + (1-\alpha)B^t T \\ P(\alpha a + (1-\alpha)b) &= \alpha P(A) + (1-\alpha)P(B) \end{aligned}$$

Calculando $|P(\alpha a + (1-\alpha)b)|$, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} |P(\alpha a + (1-\alpha)b)| &= |\alpha P(A) + (1-\alpha)P(B)| \\ &\leq |\alpha P(A)| + |(1-\alpha)P(B)| \\ &\leq \alpha |P(A)| + (1-\alpha)|P(B)| \\ &\leq \alpha + 1 - \alpha \\ |P(\alpha a + (1-\alpha)b)| &\leq 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto $P(\alpha a + (1-\alpha)b) \in S$. Se concluye que S es convexo.

Problema 02

Suppose f is convex, $\lambda_1 > 0$ and $\lambda_2 \leq 0$ with $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, and let $x_1, x_2 \in$ dom f. Show that the inequality

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

always holds.

Como $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, entonces $\lambda_1 = 1 - \lambda_2$. Por ende, se puede obtener lo siguiente:

$$\lambda_1 = 1 - \lambda_2 \geq 1$$

Tomando

$$\begin{aligned}\lambda_1 &\geq 1\\ 1 \geq &\frac{1}{\lambda_1} > 0\\ -1 \leq &-\frac{1}{\lambda_1} < 0\\ 0 \leq 1 &- \frac{1}{\lambda_1} < 1\end{aligned}$$

Con eso podemos tomar la siguiente operación:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) x_2 &= x_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} x_2 + x_2 - \frac{1}{\lambda_1} x_2\\ &= x_1 + x_2 + \left(\frac{\lambda_2 - 1}{\lambda_1}\right) x_2\\ &= x_1 + x_2 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1} x_2\\ &= x_1\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}f(x_1) &= f\left(\frac{1}{\lambda}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) x_2\right)\\ &\leq \frac{1}{\lambda} f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + \left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\right) f(x_2)\\ &\leq \frac{1}{\lambda_1} f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} f(x_2)\\ \lambda_1 f(x_1) &\leq f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - \lambda_2 f(x_2)\\ \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) &\leq f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

Problema 03

Show that the following function $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is convex.

$$f(x) = -exp(-g(x))$$

where $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ has convex domain and satisfaces

$$\begin{bmatrix} \nabla^2 g(x) & \nabla g(x) \\ \nabla^T g(x) & 1 \end{bmatrix} \succeq 0$$

for $x \in$ **dom** g

Calculando el gradiente de f, se obtiene lo siguiente:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial g(x)} \nabla g$$
$$\nabla f = e^{-g(x)} \nabla g$$

Calculando el hessiano de f, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \nabla^2 f &= -e^{-g(x)} \nabla g \nabla g^T + e^{-g(x)} \nabla^2 g \\ &= e^{-g(x)} \left(\nabla^2 g - \nabla g \nabla g^T \right) \end{aligned}$$

donde por el complemento de Schur se tiene que $\nabla^2 g - \nabla g \nabla g^T \succeq 0$, y como $e^{-g(x)} > 0$. Entonces $\nabla^2 f > 0$, por lo tanto f es convexa.

Problema 04

Show that $f(x, y) = x^2/y, y > 0$ **is convex.**

Calculando el gradiente de f, se obtiene lo siguiente:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{2x}{y} \\ \frac{-x^2}{y^2} \end{bmatrix}$$

Obteniendo el hessiano de f, se obtiene que:

$$\nabla^2 f = \begin{bmatrix} \frac{2}{y} & -\frac{2x}{y^2} \\ -\frac{2x}{y^2} & \frac{2x^2}{y^3} \end{bmatrix}$$

Calculando el producto interno con el vector $Z = [z_1, z_2]^T$, se obtiene lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
Z^T\nabla^2 fZ &= \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{y} & -\frac{2x}{y^2} \\ -\frac{2x}{y^2} & \frac{2x^2}{y^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{2z_1}{y} - \frac{2xz_2}{y^2} & -\frac{2xz_1}{y^2} + \frac{2x^2z_2}{y^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{2z_1}{y} - \frac{2xz_2}{y^2} - \frac{2xz_1z_2}{y^2} + \frac{2x^2z_2^2}{y^3} \\
&= \frac{2z_1}{y} - \frac{4xz_2}{y^2} + \frac{2x^2z_2^2}{y^3} \\
&= \frac{2}{y^3}\left(z_1^2y^2 - 2xyz_1z_2 + x^2z_2^2\right) \\
Z^T\nabla^2 fZ &= \frac{2}{y^3}\left(z_1y - z_2x\right)^2
\end{aligned}
$$

como $y > 0$, entonces $\frac{2}{y^3} > 0$, entonces $Z\nabla^2 fZ > 0$, por lo tanto f es convexa.

Problema 05

Find all the values of the parameter a such that $[1, 0]^T$ is the minimizer or maximizer of the function.

$$
f(x_1, x_2) = a^3x_1e^{x_2} + 2a^2log(x_1 + x_2) - (a + 2)x_1 + 8ax_2 + 16x_1x_2
$$

Calculando las derivadas parciales con respecto a x_1 y x_2 se obtiene lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1} &= a^3e^{x_2} + \frac{2a^2}{x_1 + x_2} - (a + 2) + 16x_2 \\
\frac{\partial f}{\partial x_2} &= \frac{2a^2}{x_1 + x_2} + 8a + 16x_1 + a^3x_1e^{x_2}
\end{aligned}
$$

Evaluando en $(1, 0)$, se obtiene lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f(1,0)}{\partial x_1} &= a^3 + 2a^2 - a - 2 \\
\frac{\partial f(1,0)}{\partial x_2} &= a^3 + 2a^2 + 8a + 16
\end{aligned}
$$

Encontrando los valores de a tal que $\frac{\partial f(1,0)}{\partial x_i} = 0$, se obtiene lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f(1,0)}{\partial x_1} &= 0 \\
a^3 + 2a^2 - a - 2 &= 0 \\
(a+2)(a-1)(a+1) &= 0 \\
a &= -2, -1, 1 \\
\frac{\partial f(1,0)}{\partial x_2} &= 0 \\
a^3 + 2a^2 + 8a + 16 &= 0 \\
(a+2)(a^2+8) &= 0 \\
a &= -2
\end{aligned}
$$

por lo tanto el único valor posible es $a = -2$. Calcuando el Hessiano de f, se obtiene lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} &= -\frac{2a^2}{(x_1+x_2)^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} &= -\frac{2a^2}{(x_1+x_2)^2} + a^3 x_1 e^{x_2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} &= -\frac{2a^2}{(x_1+x_2)^2} + 16 + a^3 e^{x_2}
\end{aligned}
$$

Evaluandolas en $(1,0)$, se obtiene lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f(1,0)}{\partial x_1^2} &= -2a^2 \\
\frac{\partial^2 f(1,0)}{\partial x_2^2} &= -2a^2 + a^3 \\
\frac{\partial^2 f(1,0)}{\partial x_1 \partial x_2} &= -2a^2 + 16 + a^3
\end{aligned}
$$

Por lo que usando $a = -2$, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f(1,0)}{\partial x_1^2} &= -8 \\
\frac{\partial^2 f(1,0)}{\partial x_2^2} &= -16 \\
\frac{\partial^2 f(1,0)}{\partial x_1 \partial x_2} &= 0
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\nabla^2 f(1,0) = 128 > 0$, por lo que $(1,0)$ es un punto máximo con $a = -2$.

Problema 06

Consider the sequence $x_k = 1 + 1/k!, k = 0, 1, \ldots$. Does this sequence converge linearly to 1? Justify your response.

Calculando el límite cuando $k \to \infty$ de x_k se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \; x_k &= \lim_{k\to\infty} \; \left(1 + \frac{1}{k!}\right) \\
&= \lim_{k\to\infty} \; 1 + \lim_{k\to\infty} \; \frac{1}{k!} \\
&= 1 + 0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Comprobando que converge de forma lineal, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \; \frac{||x_{k+1} - 1||}{||x_k - 1||} &= \lim_{k\to\infty} \; \frac{||1 + \frac{1}{(k+1)!} - 1||}{||1 + \frac{1}{k!} - 1||} \\
&= \lim_{k\to\infty} \; \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} \\
&= \lim_{k\to\infty} \; \frac{k!}{(k+1)!} \\
&= \lim_{k\to\infty} \; \frac{1}{k+1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

por lo tanto la sucesión x_k converge linealmente a 1.

Problema 07

Show that

$$f(x) = log\left(\sum_{i=1}^{n} exp(x_i)\right)$$

is convex

Comprobando que $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) &= log\left(\sum exp((\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2))\right) \\
&= log\left(\sum exp(\alpha x_1)exp((1-\alpha)x_2)\right) \\
&= log\left(\sum exp(x_1)^{\alpha} exp(x_2)^{1-\alpha}\right) \\
&\leq log\left(\sum exp(x_1)^{\alpha} \sum exp(x_2)^{1-\alpha}\right) \\
&\leq \alpha log\left(\sum exp(x_1)\right) + (1-\alpha)log\left(\sum exp(x_2)\right) \\
f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) &\leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)
\end{aligned}$$

por lo tanto, f es convexa.

Problema 08

Show that

$$f(x) = log\left(\sum_{i=1}^{n} exp(g_i(x_i))\right)$$

is convex if $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are convex.
Comprobando que $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) &= log\left(\sum exp(g_i(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2))\right) \\
&\leq log\left(\sum exp(\alpha g_i(x_1) + (1-\alpha)g_i(x_2))\right) \\
&\leq log\left(\sum exp(\alpha g_i(x_1))exp((1-\alpha)g_i(x_2))\right) \\
&\leq log\left(\sum exp(\alpha g_i(x_1) \sum exp((1-\alpha)g_i(x_2)))\right) \\
&\leq log\left(\sum exp(\alpha g_i(x_1))\right) + log\left(\sum exp((1-\alpha)g_i(x_2))\right) \\
&\leq log\left(\sum exp(g_i(x_1))\right)^{\alpha} + log\left(\sum exp(g_i(x_2))\right)^{1-\alpha} \\
&\leq \alpha log\left(exp(g_i(x_1))\right) + (1-\alpha)log\left(\sum exp(g_i(x_2))\right) \\
f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) &\leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)
\end{aligned}$$

por lo tanto f es convexa.

Problema 09

Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be a differentiable function. Show that if f is convex over a nonempty convex set C then

$$(\nabla f(x) - \nabla f(y))^T(x-y) \geq 0, \qquad \forall x, y \in C$$

Supongamos que se cumple:

$$(\nabla f(x) - \nabla f(y))^T(x-y) < 0, \qquad \forall x, y \in C$$

Se tiene que $x + \alpha(y-x) \in C$ si $x, y \in C$ con $\alpha \in [0,1]$, entonces:

$$\begin{aligned}
(\nabla f(x + \alpha(y-x)) - \nabla f(x))^T(x + \alpha(y-x)) < 0 \\
\alpha(\nabla f(x + \alpha(y-x)) - \nabla f(x))^T(y-x) < 0
\end{aligned}$$

por consiguiente

$$\nabla f(x + \alpha(y-x)) < \nabla f(x)$$

nombrando a

$$\theta(\alpha) = f(x + \alpha(y - x))$$

la cual

$$\theta(0) = f(x) \qquad \theta(1) = f(y)$$

calculando el gradiente de la función θ, se obtiene que

$$\nabla\theta(\alpha) = \nabla f(x + \alpha(y - x))^T (y - x)$$

usando el teorema fundamental del calculo se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
f(y) - f(x) &= \theta(1) - \theta(0) \\
&= \int_0^1 \nabla\theta(\alpha) d\alpha \\
&= \int_0^1 \nabla f(x + \alpha(y - x))^T (y - x) d\alpha \\
&< \int_0^1 \nabla f(x)^T (y - x) d\alpha \\
&< \nabla f(x)^T (y - x) \int_0^1 d\alpha \\
&< \nabla f(x)^T (y - x)
\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$f(y) - f(x) < \nabla f(x)^T (y - x)$$

lo cual contradice que la función f es convexa. Por ende la suposición que se realizo es incorrecta. Por ende, si f es convexa, entonces se cumple que

$$(\nabla f(x) - \nabla f(y))^T (x - y) \geq 0, \qquad \forall x, y \in C$$