Tarea 01 - Reconocimiento de patrones
Giovanni Gamaliel López Padilla

Problema 2

Supongamos que X=(X_1, X_2), Var(X_1)=Var(X_2)=1.

a) Supongamos que X_1 y X_2 son v.a. independientes con promedio 0. Verifica que cualquier dirección l da máxima varianza en las proyecciones.

Como X_1 y X_2 son v.a independientes entonces, la matriz de covarianza Cov(X) es:

$$Cov(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

por lo que se obtiene que $Cov(X) = \mathbb{I}$. Entonces, se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\underset{||l||}{max} \ \frac{l^t Cov(X) l}{l^t l} &= \underset{||l||}{max} \ \frac{l^t \mathbb{I} l}{l^t l} \\
&= \underset{||l||}{max} \ \frac{l^t l}{l^t l} \\
&= \underset{||l||}{max} \ 1 \\
&= \ 1
\end{aligned}$$

por lo tanto, se maximiza la varianza para cualquier dirección de l en las proyecciones.

b) Supongamos que X_1 y X_2 son v.a. dependientes. Calcula la primer componente principal a mano. ¿Qué particularidad tiene?

Suponiendo de la covarianza de X_1 Y X_2 es a, entonces, la matriz de covarianza es:

$$Cov(X) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

Calculando la primer componente l, se obtiene que los valores propios de $Cov(X)$ es:

$$\begin{aligned}
|Cov(X) - \lambda \mathbb{I}| &= 0 \\
\begin{vmatrix} 1-\lambda & a \\ a & 1-\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\
(1-\lambda)^2 - a^2 &= 0 \\
(1-\lambda-a)(1-\lambda+a) &= 0 \\
\lambda_1 &= 1-a \\
\lambda_2 &= 1+a
\end{aligned}$$

Suponiendo que $a > 0$, entonces λ_2 es el eigenvalor mayor. Calculando los vectores propios relacionados a λ_2, se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -a & a \\ a & -a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ a & -a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
-x_1 + x_2 &= 0 \\
x_1 &= x_2
\end{aligned}$$

por lo tanto, el vector propio asociado a λ_2 es $v_2 = [x_1, x_1]^T$. La particularidad que tiene es que las componetes no tienen un valor determinado por lo que es necesario elegir el parámetro x_1 y en seguida normalizar el vector.