Tarea 05 - Optimización
Giovanni Gamaliel López Padilla

Problema 01

Calcule y clasifique los puntos críticos de la siguiente función

$$f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2 - 1)^2 + (x_2^2 - 1)^2$$

Muestra la función usando python

Problema 02

Sea A una matriz positiva definida. Muestra que

$$A_{ij} < \frac{A_{ii} + A_{jj}}{2}$$

Sea A' una matriz tal que sus elementos son submatrices de la matriz A tal que:

$$A' = \begin{bmatrix} A_{ii} & A_{ij} \\ A_{ji} & A_{jj} \end{bmatrix}$$

calculando el determinante de A' se tiene lo siguiente:

$$detA' = A_{ii}A_{jj} - A_{ij}^2$$

lo cual es una descomposición de Schur de la matriz A. Como A es una matriz positiva definida entonces

$$A_{ii}A_{jj} - A_{ij}^2 > 0$$

por ende

$$A_{ij} < \sqrt{A_{ii}A_{jj}}$$

por la desigualdad de $\sqrt{A_{ii}A_{jj}} \leq \frac{A_{ii}+A_{jj}}{2}$ entonces:

$$A_{ij} < \frac{A_{ii} + A_{jj}}{2}$$

Problema 03

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa. Muestra que para todo x, y se cumple

$$f(y) \geq f(x) + \alpha(f(x) - f(z))$$

donde $\alpha > 0$ y $z = x + \frac{1}{\alpha}(x - y)$.

Sen dos parámetros β_1, β_2 tal que $\beta_1 > 0$, $\beta_2 \leq 0$ y $\beta_1 + \beta_2 = 1$. Con esto pueden definir de la siguiente manera:

$$\beta_1 = 1 + \frac{1}{\alpha} \qquad \beta_2 = -\frac{1}{\alpha}$$

Se tiene la siguiente operación:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\beta_1}(\beta_1 x + \beta_2 y) + \left(1 - \frac{1}{\beta_1}\right) y &= x + \frac{\beta_2}{\beta_1} y + y - \frac{1}{\beta_1} y \\
&= x + y + \frac{\beta_2 - 1}{\beta_1} y \\
&= x + y - \frac{\beta_1}{\beta_1} y \\
&= x + y - y \\
&= x
\end{aligned}$$

Entonces, se tiene que:

$$f(x) = f\left(\frac{1}{\beta_1}(\beta_1 x + \beta_2 y) + \left(1 - \frac{1}{\beta_1}\right) y\right)$$

como f es convexa y $0 > \frac{1}{\beta_1} > 1$, Entonces

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f\left(\frac{1}{\beta_1}(\beta_1 x + \beta_2 y) + \left(1 - \frac{1}{\beta_1}\right) y\right) \\
&\leq \frac{1}{\beta_1} f(\beta_1 x + \beta_2 y) + \left(1 - \frac{1}{\beta_1}\right) f(y) \\
&\leq \frac{1}{\beta_1} f(\beta_1 x + \beta_2 y) - \frac{\beta_2}{\beta_1} f(y) \\
\beta_1 f(x) &\leq f(\beta_1 x + \beta_2 y) - \beta_2 f(y) \\
\left(\frac{\alpha + 1}{\alpha}\right) f(x) &\leq f\left(\frac{\alpha + 1}{\alpha} x - \frac{1}{\alpha} y\right) + \frac{1}{\alpha} f(y) \\
(\alpha + 1) f(x) &\leq \alpha f\left(x + \frac{1}{\alpha} x - \frac{1}{\alpha} y\right) + f(y) \\
f(y) &\geq (\alpha + 1) f(x) - \alpha f\left(x + \frac{1}{\alpha} x - \frac{1}{\alpha} y\right) \\
f(y) &\geq f(x) + \alpha f(x) - \alpha f\left(x + \frac{1}{\alpha}(x - y)\right) \\
f(y) &\geq f(x) + \alpha f(x) - \alpha f\left(x + \frac{1}{\alpha}(x - y)\right) \\
f(y) &\geq f(x) + \alpha f(x) - \alpha f(z) \\
f(y) &\geq f(x) + \alpha \left(f(x) - f(z)\right)
\end{aligned}
$$

Problema 04

Sea

$$
f(x) = \frac{1}{2} x^T \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 2 \\ 0\frac{3}{2} & \end{bmatrix} x + x^T \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} - 22
$$

Parte 1

Si se usa al algoritmo de gradiente descendente con tamaño de paso fijo para mininizar la funcion anterior, diga el rango de valores que puede tomar el tamaño de paso para que el algoritmo converja al minimizador.

Parte 2

Calcula el tamaño de paso exacto α_0 si el punto incial es $x_0 = [0, 0]^T$?

Se tiene que se puede calcular el k-esimo tamaño de paso de la siguiente manera:

$$\alpha_k = \frac{g_k^T g_k}{g_k^T Q g_k}$$

En nuestro caso, el gradiente es:

$$g_k = Qx - b$$

para $x_0 = [0,0]^T$, se tiene que g_k es

$$g_k = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

por ende

$$g_k^T g_k = 10 \qquad g_k^T Q g_k = 9$$

por lo tanto el tamaño de paso para x_0 es :

$$\alpha_k = \frac{10}{9}$$