

Tarea 03 - Optimización
Giovanni Gamaliel López Padilla

Problema 01

Is the set $S = \{a \in \mathbb{R}^K | p(0) = 1, |p(t)| \leq 1 \text{ for } t \in [\alpha, \beta]\}$ where $p(t) = a_1 + a_2t + \dots + a_k t^{k-1}$ convex?

La función p , se puede escribir de la siguiente manera:

$$p(t) = A^t X$$

donde A y X son vectores donde el primer elemento es 1. Esto es debido a que $p(0) = 1$.

Sean $a, b \in S$ y $\alpha \in [0, 1]$, entonces

$$\begin{aligned} P(\alpha a + (1 - \alpha)b) &= (\alpha A^t + (1 - \alpha)B^t)T \\ &= \alpha A^t T + (1 - \alpha)B^t T \\ P(\alpha a + (1 - \alpha)b) &= \alpha P(A) + (1 - \alpha)P(B) \end{aligned}$$

Calculando $|P(\alpha a + (1 - \alpha)b)|$, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} |P(\alpha a + (1 - \alpha)b)| &= |\alpha P(A) + (1 - \alpha)P(B)| \\ &\leq |\alpha P(A)| + |(1 - \alpha)P(B)| \\ &\leq \alpha |P(A)| + (1 - \alpha)|P(B)| \\ &\leq \alpha + 1 - \alpha \\ |P(\alpha a + (1 - \alpha)b)| &\leq 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto $P(\alpha a + (1 - \alpha)b) \in S$. Se concluye que S es convexo.

Problema 02

Suppose f is convex, $\lambda_1 > 0$ and $\lambda_2 \leq 0$ with $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, and let $x_1, x_2 \in \text{dom } f$. Show that the inequality

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

always holds.

Como $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, entonces $\lambda_1 = 1 - \lambda_2$. Por ende, se puede obtener lo siguiente:

$$\lambda_1 = 1 - \lambda_2 \geq 1$$

Tomando

$$\begin{aligned} 0 < \lambda_1 &\leq 1 \\ 1 &\geq \frac{1}{\lambda_1} > 0 \\ -1 &\leq -\frac{1}{\lambda_1} < 0 \\ 0 &\leq 1 - \frac{1}{\lambda_1} < 1 \end{aligned}$$

Con eso podemos tomar la siguiente operación:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) x_2 &= x_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} x_2 + x_2 - \frac{1}{\lambda_1} x_2 \\ &= x_1 + x_2 + \left(\frac{\lambda_2 - 1}{\lambda_1}\right) x_2 \\ &= x_1 + x_2 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1} x_2 \\ &= x_1 \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f\left(\frac{1}{\lambda}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) x_2\right) \\ &\leq \frac{1}{\lambda} f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) f(x_2) \\ &\leq \frac{1}{\lambda_1} f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} f(x_2) \\ \lambda_1 f(x_1) &\leq f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - \lambda_2 f(x_2) \\ \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) &\leq f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

Problema 03

Show that the following function $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ is convex.

$$f(x) = -\exp(-g(x))$$

where $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ has convex domain and satisfies

$$\begin{bmatrix} \nabla^2 g(x) & \nabla g(x) \\ \nabla^T g(x) & 1 \end{bmatrix} \succeq 0$$

for $x \in \text{dom } g$

Calculando el gradiente de f , se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \nabla f &= \frac{\partial f}{\partial g(x)} \nabla g \\ \nabla f &= e^{-g(x)} \nabla g \end{aligned}$$

Calculando el hessiano de f , se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \nabla^2 f &= -e^{-g(x)} \nabla g^T \nabla g + e^{-g(x)} \nabla^2 g \\ &= e^{-g(x)} (\nabla^2 g - \nabla^T \nabla g) \end{aligned}$$

donde

$$\nabla^2 g - \nabla^T \nabla g = \begin{bmatrix} \nabla^2 g(x) & \nabla g(x) \\ \nabla^T g(x) & 1 \end{bmatrix} \succeq 0$$

como $e^{-g(x)} > 0$, por lo tanto $\nabla^2 f > 0$, por ende f es convexa.

Problema 04

Show that $f(x, y) = x^2/y, y > 0$ is convex.

Calculando el gradiente de f , se obtiene lo siguiente:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{2x}{y} \\ -\frac{x^2}{y^2} \end{bmatrix}$$

Obteniendo el hessiano de f , se obtiene que:

$$\nabla^2 f = \begin{bmatrix} \frac{2}{y} & -\frac{2x}{y^2} \\ -\frac{2x}{y^2} & \frac{2x^2}{y^3} \end{bmatrix}$$

Calculando el producto interno con el vector $Z = [z_1, z_2]^T$, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
Z^T \nabla^2 f Z &= \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{y} & -\frac{2x}{y^2} \\ -\frac{2x}{y^2} & \frac{2x^2}{y^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{2z_1}{y} - \frac{2xz_2}{y^2} & -\frac{2xz_1}{y^2} + \frac{2x^2z_2}{y^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{2z_1}{y} - \frac{2xz_2}{y^2} - \frac{2xz_1}{y^2} + \frac{2x^2z_2^2}{y^3} \\
&= \frac{2z_1}{y} - \frac{4xz_2}{y^2} + \frac{2x^2z_2^2}{y^3} \\
&= \frac{2}{y^3} (z_1^2y^2 - 2xyz_1z_2 + x^2z_2^2) \\
Z^T \nabla^2 f Z &= \frac{2}{y^3} (z_1y - z_2x)^2
\end{aligned}$$

como $y > 0$, entonces $\frac{2}{y^3} > 0$, entonces $Z^T \nabla^2 f Z > 0$, por lo tanto f es convexa.

Problema 05

Find all the values of the parameter a such that $[1, 0]^T$ is the minimizer or maximizer of the function.

$$f(x_1, x_2) = a^3 x_1 e^{x_2} + 2a^2 \log(x_1 + x_2) - (a + 2)x_1 + 8ax_2 + 16x_1x_2$$

Calculando las derivadas parciales con respecto a x_1 y x_2 se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1} &= a^3 e^{x_2} + \frac{2a^2}{x_1 + x_2} - (a + 2) + 16x_2 \\
\frac{\partial f}{\partial x_2} &= \frac{2a^2}{x_1 + x_2} + 8a + 16x_1 + a^3 x_1 e^{x_2}
\end{aligned}$$

Evaluando en $(1, 0)$, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(1, 0)}{\partial x_1} &= a^3 + 2a^2 - a - 2 \\
\frac{\partial f(1, 0)}{\partial x_2} &= a^3 + 2a^2 + 8a + 16
\end{aligned}$$

Encontrando los valores de a tal que $\frac{\partial f(1, 0)}{\partial x_i} = 0$, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(1,0)}{\partial x_1} &= 0 \\
a^3 + 2a^2 - a - 2 &= 0 \\
(a+2)(a-1)(a+1) &= 0 \\
a &= -2, -1, 1 \\
\frac{\partial f(1,0)}{\partial x_2} &= 0 \\
a^3 + 2a^2 + 8a + 16 &= 0 \\
(a+2)(a^2 + 8) &= 0 \\
a &= -2
\end{aligned}$$

por lo tanto el único valor posible es $a = -2$. Calculando el Hessiano de f , se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} &= -\frac{2a^2}{(x_1 + x_2)^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} &= -\frac{2a^2}{(x_1 + x_2)^2} + a^3 x_1 e^{x_2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} &= -\frac{2a^2}{(x_1 + x_2)^2} + 16 + a^3 e^{x_2}
\end{aligned}$$

Evaluandolas en $(1,0)$, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f(1,0)}{\partial x_1^2} &= -2a^2 \\
\frac{\partial^2 f(1,0)}{\partial x_2^2} &= -2a^2 + a^3 \\
\frac{\partial^2 f(1,0)}{\partial x_1 \partial x_2} &= -2a^2 + 16 + a^3
\end{aligned}$$

Por lo que usando $a = -2$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f(1,0)}{\partial x_1^2} &= -8 \\
\frac{\partial^2 f(1,0)}{\partial x_2^2} &= -16 \\
\frac{\partial^2 f(1,0)}{\partial x_1 \partial x_2} &= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\nabla^2 f(1,0) = 128 > 0$, por lo que $(1,0)$ es un punto máximo con $a = -2$.

Problema 06

Consider the sequence $x_k = 1 + 1/k!$, $k = 0, 1, \dots$. Does this sequence converge linearly to 1? Justify your response.

Calculando el límite cuando $k \rightarrow \infty$ de x_k se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} x_k &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k!} \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} 1 + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k!} \\ &= 1 + 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Comprobando que converge de forma lineal, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{||x_{k+1} - 1||}{||x_k - 1||} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{||1 + \frac{1}{(k+1)!} - 1||}{||1 + \frac{1}{k!} - 1||} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k!}{(k+1)!} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

por lo tanto la sucesión x_k converge linealmente a 1.

Problema 07

Show that

$$f(x) = \log \left(\sum_{i=1}^n \exp(x_i) \right)$$

is convex

Comprobando que $f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) &= \log \left(\sum \exp((\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2)) \right) \\ &= \log \left(\sum \exp(\alpha x_1) \exp((1 - \alpha)x_2) \right) \\ &= \log \left(\sum \exp(x_1)^\alpha \exp(x_2)^{(1 - \alpha)} \right) \\ &\leq \left(\sum \exp(x_1)^\alpha \sum \exp(x_2)^{(1 - \alpha)} \right) \\ &\leq \alpha \log \left(\sum \exp(x_1) \right) + (1 - \alpha) \log \left(\sum \exp(x_2) \right) \\ f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) &\leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \end{aligned}$$

por lo tanto, f es convexa.

Problema 08

Show that

$$f(x) = \log \left(\sum_{i=1}^n \exp(g_i(x_i)) \right)$$

is convex if $g_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ are convex.

Comprobando que $f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) &= \log \left(\sum \exp(g_i(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2)) \right) \\ &\leq \log \left(\sum \exp(\alpha g_i(x_1) + (1 - \alpha)g_i(x_2)) \right) \\ &\leq \log \left(\sum \exp(\alpha g_i(x_1)) \exp((1 - \alpha)g_i(x_2)) \right) \\ &\leq \log \left(\sum \exp(\alpha g_i(x_1)) \sum \exp((1 - \alpha)g_i(x_2)) \right) \\ &\leq \log \left(\sum \exp(\alpha g_i(x_1)) \right) + \log \left(\sum \exp((1 - \alpha)g_i(x_2)) \right) \\ &\leq \log \left(\sum \exp(g_i(x_1)) \right)^\alpha + \log \left(\sum \exp(g_i(x_2)) \right)^{1-\alpha} \\ &\leq \alpha \log \left(\sum \exp(g_i(x_1)) \right) + (1 - \alpha) \log \left(\sum \exp(g_i(x_2)) \right) \\ f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) &\leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \end{aligned}$$

por lo tanto f es convexa.

Problema 09

Let $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ be a differentiable function. Show that if f is convex over a nonempty convex set C then

$$(\nabla f(x) - \nabla f(y))^T(x - y) \geq 0, \quad \forall x, y \in C$$

Supongamos que se cumple:

$$(\nabla f(x) - \nabla f(y))^T(x - y) \geq 0, \quad \forall x, y \in C$$

Se tiene que $x + \alpha(y - x) \in C$ si $x, y \in C$ con $\alpha \in [0, 1]$, entonces:

$$\begin{aligned} (\nabla f(x + \alpha(y - x)) - \nabla f(x))^T(x + \alpha(y - x)) &\geq 0 \\ \alpha(\nabla f(x + \alpha(y - x)) - \nabla f(x))^T(y - x) &\geq 0 \end{aligned}$$

por consiguiente

$$\nabla f(x + \alpha(y - x)) \geq \nabla f(x)$$

nombrando a

$$\Theta(\alpha) = f(x + \alpha(y - x))$$

la cual

$$\Theta(0) = f(x) \quad \Theta(1) = f(y)$$

calculando el gradiente de la función Θ , se obtiene que

$$\nabla \Theta(\alpha) = \nabla f(x + \alpha(y - x))^T (y - x)$$

usando el teorema fundamental del calculo se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= \Theta(1) - \Theta(0) \\ &= \int_0^1 \Theta'(\alpha) d\alpha \\ &= \int_0^1 \nabla f(x + \alpha(y - x))^T (y - x) d\alpha \\ &\geq \int_0^1 \nabla f(x)^T (y - x) d\alpha \\ &\geq \nabla f(x)^T (y - x) \int_0^1 d\alpha \\ &\geq \nabla f(x)^T (y - x) \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$f(y) - f(x) \geq \nabla f(x)^T (y - x)$$

lo cual se indica que la función f es convexa. Por ende la suposición que se realizo es correcta.