Titulo
Giovanni Gamaliel López Padilla

Problema 1

Usemos la distancia de Kullback-Leibler para T-SNE. En el caso discreto, la definición de la distancia de Kullback-Leibler es:

$$d(P^1, P^2) = \sum_i P_i^1 \log\left(\frac{P_i^1}{P_i^2}\right)$$

- Calcula $d(P^1, P^2)$ si $P^1 \sim Bern(\theta_1)$ y $P^2 \sim Bern(\theta_2)$.
- Grafica $d(P^1, P^2)$ como función de θ_2 con θ_1 fija, y verifica que efectivamente mide de alguna manera la disimilitud entre P^1 y P^2 .

Se tiene que

$$P(\theta) = \theta^x (1-\theta)^{1-x}$$

Calculando $\log\left(\frac{P_i^1}{P_i^2}\right)$, se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{P_i^1}{P_i^2}\right) &= \log\left(\frac{\theta_1^x (1-\theta_1)^{1-x}}{\theta_2^x (1-\theta_2)^{1-x}}\right) \\
&= \log\left(\theta_1^x (1-\theta_1)^{1-x}\right) - \log\left(\theta_2^x (1-\theta_2)^{1-x}\right) \\
&= x\log(\theta_1) + (1-x)\log(1-\theta_1) - x\log(\theta_2) - (1-x)\log(1-\theta_2) \\
&= x\left(\log(\theta_1) - \log(\theta_2)\right) + (1-x)\left(\log(1-\theta_1) - \log(1-\theta_2)\right)
\end{aligned}$$

Entonces, la distancia de Kullback-Leibler para dos distribuciones de Bernoulli es la siguiente:

$$\begin{aligned}
d(P^1, P^2) &= \sum_{i=0}^{1} \theta_1^i (1-\theta_1)^{1-i} \left[i\left(\log(\theta_1) - \log(\theta_2)\right) + (1-i)\left(\log(1-\theta_1) - \log(1-\theta_2)\right)\right] \\
d(P^1, P^2) &= (1-\theta_1)\left(\log(1-\theta_1) - \log(1-\theta_2)\right) + \theta_1\left(\log(\theta_1) - \log(\theta_2)\right)
\end{aligned}$$