

**Tarea 04 - Optimización**  
**Giovanni Gamaliel López Padilla**

## Resumen

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

## Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Marco teórico</b>	<b>2</b>
2.1. Convexidad . . . . .	2
2.2. Condiciones necesarias . . . . .	2
2.3. Direcciones de búsqueda . . . . .	3
2.4. Condiciones de Wolfe . . . . .	3
<b>3. Métodos</b>	<b>4</b>
<b>4. Resultados</b>	<b>4</b>
<b>5. Conclusiones</b>	<b>4</b>
<b>6. Referencias</b>	<b>4</b>

## 1. Introducción

La optimización es procedimiento que con sus resultados se toman de decisiones en el análisis de sistemas físicos. Para realizar es la optimización de un sistema o situación se debe de contemplar un objetivo, el cual debe ser caracterizado por una función cuantitativa.

El resultado de realizar la optimización a un sistema puede representarse como un ahorro de tiempo, energía o cualquier objeto que pueda ser reflejado en un número. El objetivo del proceso

de una optimización es obtener un conjunto de números o características que representen un mínimo o máximo de objeto el cual esta siendo caracterizado. Esto puede ser representado como se encuentra en la ecuación 1.

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) \quad (1)$$

donde  $f$  es la caracterización cuantitativa del problema y  $x$  son los objetos que interactúan con el sistema.

Una optimización local es una solución al problema de optimización en una vecindad alrededor del valor de  $x$  encontrado. En cambio una optimización global es aquella solución que es menor o mayor con respecto a todas las demás. La solución de un proceso de optimización no siempre encontrará los valores en que el sistema se sitúe una optimización global.

## 2. Marco teórico

### 2.1. Convexidad

El concepto de convexidad en los problemas de optimización es de gran importancia. Este concepto aporta una mayor facilidad al resolver un problema. La convexidad puede ser aplicado a conjunto o funciones. Se dice que  $S$  es un conjunto convexo si un segmento de línea conecta cualquier par de puntos en  $S$ . Sean  $x, y \in S$ , entonces  $\alpha x + (1 - \alpha)y \in S$  donde  $\alpha \in [0, 1]$ . Se dice que una función es convexa si su dominio  $S$  es convexo y cumplen con la propiedad escrita en la ecuación 2.

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) \quad (2)$$

Donde  $x, y \in S$  y  $\alpha \in [0, 1]$ .

### 2.2. Condiciones necesarias

Suponiendo que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y que es continuamente diferenciable y  $p \in \mathbb{R}^n$ . Entonces, tenemos que

$$f(x + p) = f(x) + \nabla f(x + tp)^T p$$

donde  $t \in (0, 1)$ . De igual manera, si  $f$  es doblemente continua diferenciable, entonces se tiene que:

$$\nabla f(x + p) = \nabla f(x) + \int_0^1 \nabla^2 f(x + tp) p dt$$

por lo tanto

$$f(x + p) = f(x) + \nabla f(x)^T p + \frac{1}{2} p^T \nabla^2 f(x + tp) p$$

Con estas hechas, se puede demostrar que si  $x^*$  es un punto estacionario entonces el gradiente y el hessiano de  $f$  tiene las características mostradas en la ecuación 3.

$$\nabla f(x^*) = 0 \quad \nabla^2 f(x^*) \succ 0 \quad (3)$$

También se puede demostrar que si  $\nabla^2 f$  es continua en una vecindad alrededor de  $x^*$  y que  $\nabla f(x^*) = 0$  y  $\nabla^2 f(x^*)$  es positiva definida. Entonces  $x^*$  es un mínimo local de  $f$ .

### 2.3. Direcciones de búsqueda

La dirección mas eficiente usando un método de descenso es usar una dirección  $p$  descrita en la ecuación 4 en cada paso.

$$p_k = -\nabla f_k \quad (4)$$

En cada iteración de la linea de búsqueda se implementa un cambio en la posición siguiendo la ecuación 5.

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k \quad (5)$$

Donde  $\alpha_k$  es un escalar positivo llamado tamaño de paso.

### 2.4. Condiciones de Wolfe

Existen maneras de verificar si el  $\alpha_k$  elegido para el  $k$ -esimo paso es el óptimo para seguir en la dirección  $p_k$ . La condición de decrecimiento suficiente esta descrita en la ecuación 6.

$$f(x_k + \alpha_k p_k) \leq f(x_k) + c_1 \alpha_k \nabla f_k^T p_k \quad (6)$$

La interpretación de este resultado es que la función  $f$  debe ser proporcional al tamaño de paso  $\alpha_k$  y la derivada direccional  $\nabla f_k^T p_k$  para una constante  $c_1 \in (0, 1)$ . Esta condición también es conocida como la condición de Armijo.

La condición de decrecimiento suficiente no es la única que se tiene que contemplar, esto debido a que existen  $\alpha_k$  muy pequeñas que satisfacen a la desigualdad. Es por ello que se tiene que contemplar la condición de curvatura. La condición de curvatura esta definida en la ecuación 7.

$$\nabla f(x_k + \alpha_k p_k)^T \geq c_2 \nabla f_k^T p_k \quad (7)$$

Donde  $c_2 \in (0, 1)$ .

La búsqueda de un  $\alpha_k$  que cumpla las condiciones de las ecuaciones 6 y 7 esta descrito en el algoritmo 1.

**Algorithm 1:** Búsqueda de un  $\alpha$  que cumpla las condiciones de las ecuaciones 6 y 7

---

```

1  $\alpha_0 \leftarrow 0$ 
2  $\alpha_i \in 1$ 
3  $\beta \leftarrow \infty$ 
4 repeat
5   if armijo conditon( $\alpha_i$ ) or curvature contidion( $\alpha_i$ ) then
6     if armijo condition( $\alpha_i$ ) then
7        $\beta \leftarrow \alpha_i$ 
8        $\alpha_i = \frac{\beta + \alpha}{2}$ 
9     else if curvature condition ( $\alpha_i$ ) then
10       $\alpha \leftarrow \alpha_i$ 
11      if  $\beta$  equals  $\infty$  then
12         $\alpha_i \leftarrow 2\alpha$ 
13      else
14         $\alpha_i = \frac{\beta + \alpha}{2}$ 
15   else
16     break
17 return  $\alpha_i$ 

```

---

### 3. Métodos

### 4. Resultados

### 5. Conclusiones

### 6. Referencias

- [1] Ipiña A, López-Padilla G, Retama A, Piacentini RD, Madronich S. Ultraviolet Radiation Environment of a Tropical Megacity in Transition: Mexico City 2000–2019. *Environmental Science & Technology*. 2021 Aug;55(16):10946–10956. Available from: <https://doi.org/10.1021/acs.est.0c08515>.