Tarea 01 - Reconocimiento de patrones
Giovanni Gamaliel López Padilla

Problema 2

Supongamos que X=(X_1, X_2), Var(X_1)=Var(X_2)=1.

a) Supongamos que X_1 y X_2 son v.a. independientes con promedio 0. Verifica que cualquier dirección l da máxima varianza en las proyecciones.

Como X_1 y X_2 son v.a independientes entonces, la matriz de covarianza Cov(X) es:

$$Cov(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

por lo que se obtiene que $Cov(X) = \mathbb{I}$. Entonces, se obtiene que:

$$\begin{aligned} \underset{||l||}{max} \; \frac{l^t Cov(X) l}{l^t l} &= \underset{||l||}{max} \; \frac{l^t \mathbb{I} l}{l^t l} \\ &= \underset{||l||}{max} \; \frac{l^t l}{l^t l} \\ &= \underset{||l||}{max} \; 1 \\ &= \; 1 \end{aligned}$$

por lo tanto, se maximiza la varianza para cualquier dirección de l en las proyecciones.

b) Supongamos que X_1 y X_2 son v.a. dependientes. Calcula la primer componente principal a mano. ¿Qué particularidad tiene?

Suponiendo de la covarianza de X_1 Y X_2 es a, entonces, la matriz de covarianza es:

$$Cov(X) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

Calculando la primer componente l, se obtiene que los valores propios de $Cov(X)$ es:

$$\begin{aligned} |Cov(X) - \lambda \mathbb{I}| &= 0 \\ \begin{vmatrix} 1-\lambda & a \\ a & 1-\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ (1-\lambda)^2 - a^2 &= 0 \\ (1-\lambda-a)(1-\lambda+a) &= 0 \\ \lambda_1 &= 1-a \\ \lambda_2 &= 1+a \end{aligned}$$

Suponiendo que $a > 0$, entonces λ_2 es el eigenvalor mayor. Calculando los vectores propios relacionados a λ_2, se obtiene que:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -a & a \\ a & -a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ a & -a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
-x_1 + x_2 &= 0 \\
x_1 &= x_2
\end{aligned}
$$

por lo tanto, el vector propio asociado a λ_2 es $v_2 = [x_1, x_1]^T$. La particularidad que tiene es que las componetes no tienen un valor determinado por lo que es necesario elegir el parámetro x_1 y en seguida normalizar el vector.

Problema 3

Haz unos pequeños cambios necesarios para demostrar que el segundo vector propio de Cov(X) es la solución del problema de maximizar el cociente bajo la restricción adicional de ser ortogonal primer vector propio.

Al final del video se obtiene que una solución del problema descrito en la ecuación 1 es el primer vector propio de Cov(X).

$$\max_{||l||} \frac{l^t Cov(X) l}{l^t l} \tag{1}$$

Realizando un cambio de base a la ecuación 1, se obtiene la ecuación 2.

$$\max_{||y||} \frac{y^t \Lambda y}{y^t y} \rightarrow \max_{||y||} \frac{\sum_i \mu_i y_i^2}{\sum_i y_i^2} \tag{2}$$

Tomando en cuenta que $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_i$, donde $y_1 = (1, 0, \ldots, 0)$. Entonces se propone que $y_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, esto con el proposito que y_1 y y_2 sean ortogonales. Usando y_2 en la ecuación 2, se obtiene que una solución es μ_2, el cual es el segundo eigenvalor de la matriz Cov(X). Devolviendo a la base original a y_2 se obtiene que:

$$
\begin{aligned}
y_2 &= U^t l_2 \\
U y_2 &= U U^t l_2 \\
U y_2 &= l_2 \\
u_2 &= l_2
\end{aligned}
$$

donde u_2 es el segundo eigenvector de la matriz Cov(X) el cual es ortogonal a u_1.