Revisión de las ecuaciones de cinemática mediante el formalismo lagrangiano

Lopez Padilla, Giovanni Gamaliel
Estudiante de Licenciatura en Física

Introducción:

Una ecuación de Lagrange o lagrangiano es un objeto matemático que contiene toda la dinámica de un sistema de partículas.

Un sistema de partículas es un modelo de sistema físico formado por las partículas o cuerpos cuyas dimensiones y estado interno pueden ser tomadas en cuenta para el estudio del mismo. El sistema de partículas que será usado es el de la partícula con una fuerza constante

Objetivo:

El objetivo es obtener las ecuaciones de la cinemática bajo las restricciones que contiene un sistema de partícula con una fuerza constante mediante el formalismo del lagrangianos en solo una dimensión

Metodología

La energía potencial del sistema podemos deducirla de la ecuación sobre la primera ley de la termodinámica

$$d(U)=d(W)+d(Q)$$

Donde d(Q) será equivalente a cero ya que el sistemas encuentra en un medio adiabático

$$d(U)=d(W)$$

Aplicando una integral de línea y sustituyendo el trabajo como el producto punto de la fuerza neta y su diferencial de desplazamiento

$$U=\oint -F \bullet d(x)$$

$$U=-Fx$$

Y la energía cinética de una partícula se puede deducir del trabajo neto del sistema de partículas

$$W=\oint -F \bullet d(x)$$

Donde la fuerza neta la podemos escribir como el producto de la masa y el cambio de la velocidad con respecto y el trabajo es equivalente al cambio de la energía cinética el tiempo lo cual es equivalente a lo siguiente :

$$\Delta K=-m\int v\,d(v)$$

Efectuando la integral con los limites de integración de v_o a v_f, donde $v_o=0$ y $v_f=v$ obtenemos lo siguiente:

$$K=\tfrac{1}{2} mv^2$$

Construyendo así el lagrangiano

$$L=\tfrac{1}{2} mv^2+Fx$$

Para lo cual este tiene que cumplir con el principio de mínima acción el cual provoca el que el diferencial de la acción sea igual a cero. Con esto podemos hacer uso de la ecuación de Euler-Lagrange, que es la siguiente:

$$\frac{\partial(L)}{\partial x}-\frac{d\left(\frac{\partial(L)}{\partial \dot{x}}\right)}{dt}=0$$

Sustituyendo el lagrangiano en la ecuación de Euler-Lagrange obtenemos lo obtenemos lo siguiente:

$$\frac{\partial(L)}{\partial x}=\frac{\partial\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2+Fx\right)}{\partial x}=F \qquad \frac{\partial(L)}{\partial \dot{x}}=\frac{\partial\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2+Fx\right)}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}$$

$$\frac{d\left(\frac{\partial(L)}{\partial \dot{x}}\right)}{dt}=\frac{d(m\dot{x})}{dt}=m\ddot{x}$$

Dando resultado como:

$$\frac{\partial(L)}{\partial x}-\frac{d\left(\frac{\partial(L)}{\partial \dot{x}}\right)}{dt}=F-m\ddot{x}=0$$

La cual podemos igualar a la ecuación de Newton

$$\ddot{X}=a$$

Al integrar la igualdad anterior obtenemos lo siguiente:

$$\int d\dot{x}=\int a\,dt$$

$$\dot{X}=at+c$$

Donde al dar valores iniciales donde t=0, obtenemos que $c=v_o$ y $\dot{x}=v(t)$, la cual llamaremos ecuación 1:

$$V(t)=v_o+at$$

Al volver a integral encontramos lo siguiente:

$$\int dx=\int (at+v_o)dt$$

$$x=\tfrac{1}{2} at^2+v_ot+c$$

Dando valores iniciales en t=0, la $c=x_o$, obteniendo lo siguiente la cual llamaremos ecuación 2:

$$X(t)=\tfrac{1}{2} at^2+v_ot+x_o$$

De la ecuación 1 despejamos el tiempo y lo sustituimos en la ecuación 2 resultando lo siguiente:

$$x=x_o+v_o\left(\frac{v-v_o}{a}\right)+\frac{1}{2}a\left(\frac{v-v_i}{a}\right)^2$$

Donde desarrollando y simplificando nos resultaría lo siguiente:

$$V^2=vo^2+2a\Delta x$$

Conclusión:

Es posible obtener las ecuaciones e la cinemática de un sistema con propiedades o cualidades especificas con el uso de las ecuaciones de Lagrange en cualquier número de dimensiones en el que se quieran obtener las ecuaciones y que las ecuaciones de la cinemática que conoce la mayoría de las personas describen la dinámica de un sistema que casi no se presenta en la realidad

Referencias:

E, V. (s.f.). *Mecánica Lagrangiana y Hamiltoniana.* Madrid: Universidad Autónoma de Madrid.
hamiltoniana, I. a. (s.f.).
M, N. (2005). *Dinámica de un sistema de partículas.* Almería: Universidad de Almería.
Roca, C. F. (2008). *Introducción a la formulación lagrangiana y hamiltoniana.* Valencia: Universidad de Valencia.
Terenzio, S. C. (2013). *Introducción a la mecánica de Lagrange y Hamilton.* Zulia: Universidad de Zulia.